ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

37

Κωνσταντίνος Π. Τάτσης

Σχέση Μαθηματικών και Γλωσσικών Ικανοτήτων κατά την Επίλυση Προβλημάτων

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2005

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Π. ΤΑΤΣΗΣ

ΣΧΕΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΓΛΩΣΣΙΚΩΝ ΙΚΑΝΟΤΗΤΩΝ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ
που υποβλήθηκε στο Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης
της Σχολής Επιστημών Αγωγής
του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Συμβουλευτική Επιτροπή

1. Ευγενία Κολέζα, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης-Σχολή Επιστημών Αγωγής-Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, επιβλέπουσα
2. Φωτεινή Κοσσυβάκη, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης-Σχολή Επιστημών Αγωγής-Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
3. Ανδρέας Μπρούζος, Αναπληρωτής Καθηγητής, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης-Σχολή Επιστημών Αγωγής-Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Εξεταστική Επιτροπή

1. Χαράλαμπος Κωνσταντίνου, Καθηγητής, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης-Σχολή Επιστημών Αγωγής-Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
2. Ανδρονίκη Μπούφη, Καθηγήτρια, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης-Σχολή Επιστημών Αγωγής-Πανεπιστήμιο Αθηνών
3. Φραγκίσκος Καλαβάσης, Καθηγητής, Τμήμα Επιστημών της Προσχολικής Αγωγής και του Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού-Σχολή Ανθρωπιστικών Επιστημών-Πανεπιστήμιο Αιγαίου
4. Χαράλαμπος Λεμονίδης, Καθηγητής, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης-Παιδαγωγική Σχολή Φλώρινας-Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

Η δημόσια υποστήριξη της διδακτορικής διατριβής πραγματοποιήθηκε στις 31 Ιανουαρίου 2005 στο Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Στους γονείς μου,

Παναγιώτη και Ξανθούλα

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

Κεφάλαιο 2°

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

Κεφάλαιο 2°

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Το μάθημα των Μαθηματικών παρουσιάζεται από πολλούς ως αποκομμένο από την καθημερινή γλώσσα· οι υποστηρικτές της άποψης αυτής ισχυρίζονται ότι τα Μαθηματικά εκφράζονται μέσω μιας ιδιαίτερης γλώσσας με ειδικούς γραμματικούς και συντακτικούς κανόνες και φυσικά ειδικό λεξιλόγιο. Πράγματι, οι τύποι που συναντούμε πολύ συχνά, η λογική σειρά των συνειρμών που οδηγούν στην απόδειξη ενός θεωρήματος και η εξειδικευμένη μαθηματική ορολογία δεν αποτελούν χαρακτηριστικά της καθημερινής γλώσσας. Υπάρχει λοιπόν ασυμβατότητα μεταξύ της μαθηματικής και της καθημερινής γλώσσας; Η προσωπική μου εμπειρία από τη διδασκαλία των Μαθηματικών απέδειξε το αντίθετο: η καθημερινή γλώσσα «αναμειγνύεται» με την αυστηρά μαθηματική γλώσσα όχι μόνο από τους μαθητές, αλλά και από τον ίδιο τον καθηγητή. Η διαπίστωση αυτή αποτέλεσε το έναυσμα για την εκπόνηση της παρούσας διδακτορικής διατριβής.

Η μελέτη εκπονήθηκε στο Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων. Νιώθω την ανάγκη από τη θέση αυτή να ευχαριστήσω θερμά όσους μου συμπαραστάθηκαν και με βοήθησαν στην προσπάθεια αυτή.

Κατ' αρχάς τους γονείς μου οι οποίοι δεν έπαψαν στιγμή να με στηρίζουν και να με παροτρύνουν παρέχοντάς μου ιδανικές συνθήκες για τη μελέτη μου. Η υπομονή τους και η εμπιστοσύνη τους σε μένα αποτέλεσαν τα ισχυρότερα εφόδια σε όλη την πορεία εκπόνησης της διατριβής μου.

Θερμές ευχαριστίες ανήκουν και στα μέλη της τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής που, αναλαμβάνοντας την εποπτεία της διατριβής, συνετέλεσαν αποφασιστικά στην εκπόνησή της. Ειδικότερα ευχαριστώ:

- Την Αναπλ. Καθηγήτρια κ. Ευγενία Κολέζα η οποία, έχοντας το ρόλο της επιβλέπουσας της διατριβής, αφιέρωσε πολύ χρόνο στην επιστημονική της στήριξη, αλλά και στην προσωπική μου κατάρτιση. Οι πάντα εύστοχες επισημάνσεις της αποτέλεσαν ισχυρά βοηθήματα στην όσο το δυνατόν αρτιότερη παρουσίαση της διατριβής.
- Την Αναπλ. Καθηγήτρια κ. Φωτεινή Κοσσυβάκη η οποία με τις επισημάνσεις της σε θέματα της Διδακτικής αλλά και σε γενικότερα θεωρητικά ζητήματα συνετέλεσε στην παρουσίαση ενός συμπαγούς θεωρητικού πλαισίου.

- Τον Αναπλ. Καθηγητή κ. Ανδρέα Μπρούζο ο οποίος με τις παρατηρήσεις του σε θέματα της μεθοδολογίας αλλά και της δομής της διατριβής συνετέλεσε στη βελτίωσή της στους συγκεκριμένους τομείς.

Ιδιαίτερα πρέπει να ευχαριστήσω τις φοιτήτριες και τους φοιτητές του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, οι οποίοι προσφέρθηκαν να συμμετάσχουν στην έρευνα. Χωρίς τη συμμετοχή τους η πραγματοποίηση της έρευνας θα ήταν αδύνατη.

Η πορεία εκπόνησης της διατριβής δεν ήταν μοναχική: δύο συνάδελφοι υποψήφιοι διδάκτορες του Π.Τ.Δ.Ε. συμπορεύτηκαν μαζί μου, μοιραζόμενοι τις χαρές και τις ανησυχίες τους. Ο κ. Ι. Παππάς, μεθοδικός, συγκροτημένος και πάνω απ' όλα καλός φίλος, και η κ. Μ. Ιατρίδου, πρόσχαρη, αυθόρμητη και πάντα πρόθυμη να βοηθήσει, με στήριξαν άμεσα και έμμεσα, παρέχοντας μου σιγουριά και αυτοπεποίθηση. Τους αξίζει ένα μεγάλο ευχαριστώ.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ αξίζει και σε όλους τους φίλους και τις φίλες μου, οι οποίοι έδειξαν κατανόηση και μου συμπαραστάθηκαν σε αυτή την προσπάθεια. Είναι ευχάριστο να γνωρίζεις ότι κάποιοι άνθρωποι είναι πάντα εκεί τη στιγμή που τους χρειάζεσαι.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τα μαθηματικά, όντας μία από τις αρχαιότερες επιστήμες, αντιμετωπίζονται ακόμη και σήμερα από κάποιους ως μία απρόσωπη, αυτόνομη και αυθύπαρκτη οντότητα, και οι γνώστες των μαθηματικών ως μία διανοητική ελίτ, η οποία «κατέχει» τη μαθηματική γνώση, την οποία ενίοτε προσπαθεί να «μεταδώσει» στους μη γνώστες:

> Έτσι πολύ συχνά υποστηρίζεται ότι η δραστηριότητα του μαθηματικού είναι ανεξάρτητη από την κοινωνία στην οποία ζει, παρ' όλο που τα μαθηματικά αυτά καθ' εαυτά, εξαιτίας της σπουδαιότητας στην τεχνολογία, έχουν μια επίδραση πάνω στην κοινωνική αλλαγή... Λέγεται όμως ότι οι ίδιοι [οι μαθηματικοί] με τη σειρά τους δημιουργούν αυθαίρετες οντότητες, κατασκευάζοντας αυθαίρετους ορισμούς σύμφωνα με ό,τι τους εξυπηρετεί καλύτερα, αρκεί το οικοδόμημα αυτό που κατασκευάζουν να πληροί τους αυστηρούς τυπικούς κανόνες της λογικής. (Τουμάσης, 1994, σ. 39).

Αυτές οι αντιλήψεις, οι οποίες μπορούν να συσχετιστούν με τη «μαθηματικοφοβία»[1] ενός ιδιαίτερα υψηλού ποσοστού του πληθυσμού, τείνουν να εγκαταλειφθούν και να δώσουν τη θέση τους σε μια εντελώς διαφορετική θεώρηση των μαθηματικών, αλλά και όλων των διαδικασιών που σχετίζονται με τη διδασκαλία και την κατανόησή τους. Σύμφωνα λοιπόν με αυτή τη θεώρηση, η μαθηματική γνώση δεν αποτελεί την απόλυτη αλήθεια αλλά είναι ανακατασκευάσιμη και διαρκώς ανοιχτή σε αναθεωρήσεις (Ernest, 1991, σ. 18). Επιπλέον, τα μαθηματικά αντιμετωπίζονται ως μια ανθρώπινη κοινωνική δραστηριότητα (Lakatos, 1976), στη μάθηση των οποίων εμπλέκονται γλωσσικοί και πολιτιστικοί παράγοντες καθώς και διαπροσωπικές αλληλεπιδράσεις (Ernest, 1994). Οι βασικές αρχές αυτής της τάσης, η οποία ονομάζεται κοινωνικός κονστρουκτιβισμός, είναι οι εξής:

1. Η βάση της μαθηματικής γνώσης είναι η γνώση της γλώσσας, των συμβάσεων και των κανόνων της, και η γλώσσα αποτελεί κοινωνική κατασκευή.
2. Απαιτούνται διαπροσωπικές κοινωνικές διαδικασίες για τη μετατροπή της υποκειμενικής μαθηματικής γνώσης του ατόμου, σε αποδεκτή αντικειμενική γνώση, μετά τη δημοσιοποίησή της.
3. Η ίδια η αντικειμενικότητα αντιμετωπίζεται ως κοινωνικό φαινόμενο. (Ernest, 1991, σ. 42).

Είναι σαφές ότι η αυτή η στροφή στην επιστημολογία των μαθηματικών προκαλεί δραστικές μεταβολές και στις αντιλήψεις που αφορούν τη διδασκαλία· πράγματι, αντί της δασκαλοκεντρικής διδασκαλίας που κυριάρχησε για αιώνες, προτείνεται η *ομαδοσυνεργατική διδασκαλία*[2] και η *επίλυση προβλημάτων*[3] ως πιο ανταγωνιστικές και πιο σχετικές με αυτή την σύγχρονη αντιμετώπιση των μαθηματικών.

Σύμφωνα με το ομαδοσυνεργατικό κίνημα η μάθηση δεν αφορά απλά την απόκτηση πληροφοριών, αλλά μια συνεχή διαδικασία επίλυσης γνωστικών συγκρούσεων οι οποίες προκύπτουν κατά την αλληλεπίδραση του ατόμου με το φυσικό και το κοινωνικό του περιβάλλον (Ματσαγγούρας, 2003). Ειδικότερα, στα πλαίσια της μαθηματικής εκπαίδευσης, η συνεργατική επίλυση προβλημάτων αποτελεί τη βασική πηγή τέτοιων συγκρούσεων αφού:

> ... για να αντιμετωπίσουν νέες προκλήσεις στη δουλειά, στο σχολείο και στη ζωή οι μαθητές θα πρέπει να προσαρμόσουν και να διευρύνουν τα μαθηματικά που γνωρίζουν. Η αποτελεσματική πραγματοποίηση αυτών των ενεργειών βρίσκεται στην καρδιά της επίλυσης προβλήματος. (National Council of Teachers of Mathematics, 1991, σ. 333).

Δύο λοιπόν βασικές ικανότητες που σχετίζονται με την επίλυση προβλημάτων είναι η *προσαρμογή* και η *διεύρυνση* της μαθηματικής γνώσης. Επιπλέον, υπάρχουν και κάποιες επιμέρους ικανότητες, οι οποίες αφορούν τις ευρετικές, δηλαδή τις

> ... στρατηγικές, μεθόδους ή συνήθειες, οι οποίες είναι ανεξάρτητες από κάθε ειδικό θέμα ή τη φύση ενός συγκεκριμένου προβλήματος και βοηθούν το μαθητή να βρει ένα σωστό τρόπο για να προσεγγίσει και να κατανοήσει ένα πρόβλημα και να συνδυάσει αποτελεσματικά τις προγενέστερες γνώσεις του μέχρι να φθάσει στη λύση του (Τουμάσης, 1994, σ. 207).

Πέρα από αυτές τις ικανότητες, οι οποίες αφορούν γενικά την επίλυση προβλήματος, η συνεργασία των μαθητών στα πλαίσια ενός ζεύγους ή μίας ομάδας εργασίας αναπτύσσει επιπλέον ικανότητες, αφού για να επέλθει συμφωνία στα μέλη της ομάδας απαιτείται από κάθε άτομο η αποσαφήνιση της προσέγγισής του, η σύγκρισή της με τις προσεγγίσεις των άλλων και η υποστήριξή της μέσω μαθηματικών ή λογικών ισχυρισμών (Laborde, 1994, σ. 152). Επιπλέον, για την ύπαρξη αποτελεσματικής συνεργασίας, απαιτούνται και άλλες ικανότητες, οι οποίες σχετίζονται με τη διαχείριση των σχέσεων ισχύος που ενυπάρχουν στα πλαίσια της ομάδας ή της τάξης γενικότερα. Δηλαδή, η συμπεριφορά του ατόμου πρέπει να είναι τέτοια ώστε από τη μια να επιτυγχάνεται η μέγιστη δυνατή συνεργασία και από την άλλη να αποφεύγονται οι εντάσεις. Συμπερασματικά, ο λύτης προβλήματος στην ομαδοσυνεργατική προσέγγιση πρέπει κατά τη διάρκεια της αλληλεπίδρασής του με τον ή τους συνεργάτες του να συνδυάζει κάποιες «μαθηματικές» και κάποιες «κοινωνικές» (ή «κοινωνικο-μαθηματικές») ικανότητες.

Το σύνολο των ικανοτήτων που αναφέραμε προηγουμένως περιγράφεται από κάποιους ερευνητές με την έκφραση «συμμετοχή στις διαλογικές πρακτικές (discursive practices) της τάξης» (π.χ. Lerman, 1994, Sfard, 2000). Η έκφραση αυτή αναδεικνύει όχι μόνο το ρόλο που παίζει η γλώσσα κατά την επίλυση προβλήματος,

αλλά και τη σχέση της με τις μαθηματικές και κοινωνικές ικανότητες που προαναφέραμε. Πράγματι, η εμφάνιση της γλώσσας κατά τη συνεργατική επίλυση προβλήματος πραγματοποιείται σε τρία στάδια. Καταρχήν, κάθε μαθηματικό πρόβλημα εκφράζεται μέσω της γλώσσας,[4] επομένως εξαρτάται άμεσα από αυτή. Το άτομο που πρέπει να επιλύσει το πρόβλημα, αρχικά διαβάζει την εκφώνηση, επεξεργάζεται το κείμενο που την εκφράζει και προχωρά συνήθως σε έναν «εσωτερικό διάλογο»[5] με σκοπό να οργανώσει και να αναδομήσει τη γνώση του, για να αντιμετωπίσει αποτελεσματικά το πρόβλημα. Στο επόμενο στάδιο, η συζήτηση χρησιμοποιείται για την αποσαφήνιση των προτεινόμενων μεθόδων, τη σύγκρισή τους και γενικά την αποτελεσματική τους θεμελίωση, η οποία οδηγεί με τη σιερά της στην αποδοχή ή στην απόρριψη. Ταυτόχρονα, μέσω της συζήτησης γίνεται η διαχείριση της δυναμικής της συνεργαζόμενης ομάδας, η οποία, όπως αναφέραμε, σκοπεύει στην ισότιμη και απρόσκοπτη συνεργασία όλων των μελών.[6] Τέλος, στην περίπτωση που η συνεργαζόμενη ομάδα διέλθει επιτυχώς από τα προηγούμενα στάδια, οδηγείται στη *συγκρότηση κοινής (ή από κοινού) γνώσης*, δηλαδή στην αμοιβαία αφομοίωση των δομών και των εννοιών που απαρτίζουν μια διαδικασία.[7] Η γλώσσα παίζει κυρίαρχο ρόλο και σε αυτή τη διαδικασία, αφού μέσω αυτής επιτυγχάνεται η κοινή διανοητική προσπάθεια των συμμετεχόντων οι οποίοι, ανάλογα με τις γλωσσικές τους ικανότητες συγκροτούν (ή όχι) κοινή γνώση.

Από τα προηγούμενα προκύπτει ο σημαντικός ρόλος της γλώσσας, άρα και της ανάλυσής της στις διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων. Στο ζήτημα αυτό υπάρχει συμφωνία μεταξύ των ερευνητών που ανήκουν στον κοινωνικό κονστρουκτιβισμό. Ο Lerman για παράδειγμα, υποστηρίζει ότι:

> Η ανάλυση των τρόπων λειτουργίας της γλώσσας μέσα σε διαλογικές πρακτικές καταδεικνύει τον τρόπο με τον οποίο η γνώση, η κατανόηση, οι έννοιες και εμείς οι ίδιοι ως υποκείμενα καθοριζόμαστε και περιοριζόμαστε από τη γλώσσα μας η οποία χαρακτηρίζει συγκεκριμένες συζητήσεις. (Lerman, 1994, σσ. 195-196).

Στο ίδιο μήκος κύματος, ο Mercer επισημαίνει ότι «μια ανάλυση της διαδικασίας της διδασκαλίας και της μάθησης, της συγκρότησης της γνώσης πρέπει να είναι μια ανάλυση της ίδιας της γλώσσας» (Mercer, 2000, σ. 8). Αρκεί όμως μια γλωσσολογική ανάλυση για να καλύψει όλο το εύρος των δραστηριοτήτων που περιλαμβάνει η συνεργατική επίλυση προβλημάτων; Η Sfard δηλώνει ότι «η έννοια της ομιλίας (discourse) έχει νόημα μόνο μέσα στο πλαίσιο της κοινωνικής αλληλεπίδρασης» (Sfard, 2000, σ. 161). Ο Gumperz θεωρεί ότι:

> ... για να κατανοήσουμε το ρόλο της γλώσσας στην εκπαίδευση και γενικά στις κοινωνικές διαδικασίες, πρέπει να ξεκινήσουμε με μια λεπτομερή μελέτη του τρόπου με τον οποίο τα γλωσσικά σύμβολα αλληλεπιδρούν με την κοινωνική γνώση μέσα στην ομιλία. (Gumperz, 1982, σ. 29).

Ο ίδιος προτείνει μια ερμηνευτική προσέγγιση, επικεντρωμένη στον ομιλητή, μέσω της οποίας θα αναλύονται οι στρατηγικές που αυτός εφαρμόζει κατά τη χρήση

> ... λεκτικής, γραμματικής, κοινωνικο-γλωσσικής και άλλης γνώσης στην παραγωγή και την ερμηνεία των μηνυμάτων εντός κάποιου πλαισίου... Αποστολή του αναλυτή είναι να πραγματοποιήσει μια σε βάθος μελέτη επιλεγμένων αποσπασμάτων λεκτικής αλληλεπίδρασης, να εξετάσει αν οι ομιλητές κατανοούν ο ένας τον άλλο, να συμπεράνει τις ερμηνείες των συμμετεχόντων που αφορούν την περίσταση και στη συνέχεια (α) να καταλήξει στις κοινωνικές αντιλήψεις οι οποίες οδήγησαν τους ομιλητές να ενεργήσουν με το συγκεκριμένο τρόπο και (β) να καθορίσει εμπειρικά τον τρόπο με τον οποίο πραγματοποιείται η επικοινωνία των γλωσσικών συμβόλων κατά την ερμηνευτική διαδικασία. (Gumperz, 1982, σσ. 35-36).

Παρατηρούμε λοιπόν ότι το κοινωνικό στοιχείο είναι απαραίτητος παράγοντας που πρέπει να λαμβάνεται υπόψη σε οποιαδήποτε ανάλυση της αλληλεπίδρασης δύο ή περισσότερων ανθρώπων. Έχοντας υπόψη όλα τα παραπάνω, πραγματοποιούμε την έρευνά μας, επιδιώκοντας την αποσαφήνιση ενός μέρους της πολύπλοκης, αλλά και ενδιαφέρουσας διαδικασίας επίλυσης προβλημάτων, πάντα σε σχέση με τη συγκρότηση κοινής γνώσης. Στη διαδικασία αυτή αλληλεπιδρούν δύο παράγοντες: ο γλωσσικός (με την ευρύτητα που περιγράψαμε ώστε να περικλείει και κοινωνικές συνιστώσες) και ο μαθηματικός (σύμφωνα με την άποψη του κοινωνικού κονστρουκτιβισμού, ώστε να αλληλεξαρτάται από τη γλώσσα, αλλά και το κοινωνικό πλαίσιο).

ΣΧΟΛΙΑ ΠΡΟΛΟΓΟΥ

[1] «Μαθηματικοφοβία είναι ο φόβος, η ανασφάλεια και το δέος που αισθάνονται οι μαθητές για το μάθημα των μαθηματικών.» (Τουμάσης, 1994, σ. 374).

[2] Ο όρος ομαδοσυνεργατική «αποτελεί ασφαλώς νεολογισμό, του οποίου το δεύτερο συνθετικό (= συνεργατική), ενώ με μία πρώτη ματιά φαίνεται περιττό, έχει σκοπό να προσδιορίσει το είδος των εσωτερικών σχέσεων της ομάδας. Συγκεκριμένα τονίζει (α) ότι δεν υπάρχουν ιεραρχικές αλλά ισότιμες σχέσεις, (β) ότι δεν γίνεται επιμερισμός του κοινού έργου και στη συνέχεια ατομική εργασία και (γ) ότι είναι ομάδα ένωσης και όχι διαίρεσης.» (Ματσαγγούρας, 2003, σ. 11).

[3] Το πρόβλημα ορίζεται ως «μία περίσταση κατά την οποία ένα άτομο ή μια ομάδα ατόμων καλούνται να εκτελέσουν μία εργασία για την οποία δεν υπάρχει κάποιος άμεσα προσβάσιμος αλγόριθμος που να καθορίζει πλήρως τη μέθοδο επίλυσης... Ο ορισμός αυτός προϋποθέτει επιπλέον μια επιθυμία από μέρους του ατόμου ή της ομάδας για την εκτέλεση της εργασίας.» (Lester, 1980, σ. 287).

[4] Τα περισσότερα προβλήματα εκφράζονται μέσω ενός συνδυασμού καθημερινής και αυστηρά μαθηματικής γλώσσας, διαχωρισμός ο οποίος δεν μας απασχολεί στο συγκεκριμένο σημείο.

[5] Ο Ernest αναφερόμενος στην αντίληψη που επικρατεί για το ανθρώπινο μυαλό – σύμφωνα με τους υποστηρικτές ενός από τα ρεύματα του κοινωνικού κονστρουκτιβισμού – αναφέρει ότι η ατομική σκέψη κάθε πολυπλοκότητας προέρχεται και δομείται από τον εσωτερικό διάλογο (internalised conversation). (Ernest, 1994)

[6] Όπως θα φανεί στην ανάπτυξη του θεωρητικού μας πλαισίου, η γλώσσα χρησιμοποιείται για την επίτευξη και άλλων επιδιώξεων, που σχετίζονται με καθαρά ατομικά κίνητρα.

[7] Ο ορισμός της έννοιας της κοινής γνώσης, παρατίθεται στην παράγραφο 1.2.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η διατριβή αποτελείται από τέσσερα κεφάλαια, τα οποία ακολουθούνται από ένα παράρτημα. Η διάρθρωση των κεφαλαίων είναι η εξής:

Κεφάλαιο 1ο: Θεωρητικό Μέρος

Στο κεφάλαιο αυτό, το οποίο αποτελείται από έξι ενότητες, αναπτύσσουμε τις θεωρητικές παραδοχές οι οποίες καθοδηγούν την έρευνά μας. Τα περιεχόμενα κάθε ενότητας έχουν ως εξής:

1.1. Ο Κοινωνικός Χαρακτήρας της Γνώσης

Ο χαρακτήρας της γνώσης, και κυρίως το κατά πόσο αυτή είναι ατομικά ή κοινωνικά προσδιορισμένη αποτελεί ένα καίριο ερώτημα για πολλές επιστήμες, και οι δύο «αντιτιθέμενες» σχολές που έχουν δημιουργηθεί στηρίζονται σε σοβαρά επιχειρήματα. Η θέση μας είναι ότι η κάθε θεώρηση αποδεικνύεται κατάλληλη για συγκεκριμένες περιστάσεις· η συνεργατική επίλυση προβλημάτων οδηγεί σε μια κοινωνική θεώρηση της γνώσης και αντίστοιχα στην ανάλυση των αλληλεπιδράσεων που σχετίζονται με αυτή.

1.2. Ο Ρόλος της Γλώσσας στη Συγκρότηση Κοινής Γνώσης

Οι ανθρώπινες αλληλεπιδράσεις πραγματοποιούνται κυρίως μέσω της γλώσσας. Είναι σαφές όμως ότι η γλώσσα επιτελεί και γνωστικές λειτουργίες, αποτελώντας το βασικό μοχλό για τη συγκρότηση κοινής γνώσης. Η κοινή γνώση προκύπτει μέσα από διαπραγμάτευση και αμοιβαία αφομοίωση εννοιών ή διαδικασιών, είτε αναφερόμαστε σε καθημερινές είτε σε μαθηματικές έννοιες.

1.3. Σχέση Γλώσσας και Μαθηματικών

Η θεώρηση των μαθηματικών ως ένα είδος γλώσσας έχει τεθεί από τον Wittgenstein, ο οποίος αν και αρχικά θεωρούσε τα μαθηματικά ένα κλειστό, αφηρημένο σύστημα κανόνων, στη συνέχεια αναθεώρησε τις απόψεις του, εισάγοντας την έννοια του γλωσσικού παιχνιδιού και αντιμετωπίζοντας τα μαθηματικά ως μία δραστηριότητα. Αυτή η στροφή στη θεωρητική σκέψη επηρέασε και τον τρόπο γλωσσολογικής ανάλυσης του μαθηματικού λόγου, η οποία από καθαρά ποσοτικές μεθόδους στράφηκε σε ποιοτικές ή σε συνδυασμό ποιοτικών και ποσοτικών μεθόδων.

1.4. Η Ανάλυση Λόγου και η Εφαρμογή της στα Μαθηματικά

Οι δεσμοί μαθηματικών και γλώσσας επιτρέπουν την εφαρμογή της λεγόμενης ανάλυσης λόγου στα μαθηματικά. Τρεις βασικές σχολές υφίστανται στην ανάλυση λόγου: η δομική, η λειτουργική και η συνδυαστική· η τελευταία συνδυάζει τις παραδοχές και τις μεθόδους των δύο προηγουμένων. Υιοθετούμε το συνδυαστικό τύπο μελέτης, καθώς θεωρούμε ότι παρέχει μια πλήρη εικόνα της αλληλεπίδρασης, στο γλωσσικό πάντα επίπεδο.

1.5. Η Θεωρία της Συμβολικής Αλληλεπίδρασης

Αντιμετωπίζοντας τις αλληλεπιδράσεις ως ένα κοινωνικό γεγονός, προκύπτει αβίαστα η ανάγκη μιας κοινωνιολογικής ανάλυσης, η οποία θα είναι ικανή να ερμηνεύσει τις συμπεριφορές των μετεχόντων. Επιλέγουμε τη θεωρία της συμβολικής αλληλεπίδρασης ως την πιο κατάλληλη για τους σκοπούς της έρευνάς μας, αφού είναι η μοναδική θεωρία που επικεντρώνεται στην αλληλεπίδραση και στις ερμηνευτικές πρακτικές των μετεχόντων σε αυτή. Οι συμπεριφορές των μετεχόντων ερμηνεύονται βάσει των παραδοχών της θεωρίας ρόλου, η οποία χρησιμοποιεί δύο (αλληλο-συμπληρούμενα) μοντέλα: το δραματουργικό και το παιγνιώδες. Σημαντικό ρόλο παίζει επίσης και η ύπαρξη κοινωνικών και κοινωνικομαθηματικών νορμών, οι οποίες οριοθετούν κατά κάποιο τρόπο τις ενέργειες των μετεχόντων.

1.6. Συμπεράσματα

Στην παράγραφο αυτή συνοψίζουμε τις παραδοχές του θεωρητικού μας πλαισίου, οι οποίες μας οδηγούν σε τρεις βασικούς παράγοντες που επηρεάζουν τη συγκρότηση κοινής γνώσης: τη γλώσσα, τις νόρμες και τους ρόλους που ερμηνεύουν οι μετέχοντες.

Κεφάλαιο 2ο: Εμπειρικό μέρος

Στο κεφάλαιο αυτό, το οποίο αποτελείται από πέντε ενότητες, αναπτύσσουμε τα στάδια της έρευνάς μας. Τα περιεχόμενα κάθε ενότητας έχουν ως εξής:

2.1. Ερωτήματα και Κενά που Καλείται να Καλύψει η Έρευνά μας

Η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας που προηγήθηκε στο 1ο Κεφάλαιο μας οδηγεί στην επισήμανση κάποιων σημείων τα οποία χρήζουν μελέτης. Τα βασικότερα από αυτά είναι η συσχέτιση γλώσσας-κοινής γνώσης και η ανάλυση των ρόλων που ερμηνεύουν τα υποκείμενα.

2.2. Οριοθέτηση και Περιορισμοί της Έρευνάς μας

Οι βασικοί ερευνητικοί μας στόχοι συνοψίζονται στους εξής: α) η αποσαφήνιση της επίδρασης της μη μαθηματικής γλώσσας στη συγκρότηση κοινής γνώσης, β) η μελέτη της επίδρασης των κοινωνικών και κοινωνικομαθηματικών νορμών στη συγκρότηση κοινής γνώσης και γ) η σαφής οριοθέτηση των ρόλων που ερμηνεύουν οι φοιτητές καθώς αλληλεπιδρούν, και στη συνέχεια η συσχέτιση των συνδυασμών αυτών με τη συγκρότηση κοινής γνώσης. Ο βασικός περιορισμός έγκειται στο ότι η μελέτη περίπτωσης που διενεργούμε δεν επιτρέπει μεγάλου εύρους γενικεύσεις.

2.3. Μεθοδολογία της Έρευνας

Αφού παρουσιάσουμε τα ερευνητικά μας ερωτήματα, περιγράφουμε τα χαρακτηριστικά της έρευνάς μας, που αφορούν την επιλογή των υποκειμένων, των προβλημάτων, του χώρου διεξαγωγής, τις αρχικές οδηγίες, αλλά και το ρόλο του παρατηρητή. Η μέθοδος ανάλυσης στηρίζεται στην εμπειρικά θεμελιωμένη θεωρία, σύμφωνα με την οποία οι κατηγορίες δημιουργούνται από τα δεδομένα· η ανάλυση πραγματοποιείται σε επίπεδα, πάντα σε σχέση με τα ερευνητικά μας ερωτήματα.

2.4. Η Προέρευνα

Στην παράγραφο αυτή περιγράφουμε την προέρευνα, η οποία συνετέλεσε στη διαμόρφωση των ερευνητικών μας υποθέσεων, αλλά και στην επιλογή των προβλημάτων.

2.5. Η Έρευνα

Τα ευρήματα της κύρια έρευνας περιγράφονται σε συνάρτηση με τις ερευνητικές μας υποθέσεις, αλλά και σε σχέση με κάθε πρόβλημα χωριστά. Η επίδραση της γλώσσας αναλύεται όσον αφορά έννοιες αλλά και διαδικασίες· οι νόρμες και οι ρόλοι των φοιτητών κατηγοριοποιούνται και εξετάζεται η επίδρασή τους στη συγκρότηση κοινής γνώσης.

Κεφάλαιο 3ο: Τα Αποτελέσματα της Έρευνας σε Σχέση με τις Ερευνητικές Υποθέσεις

Στο κεφάλαιο αυτό σχολιάζουμε τα ευρήματα της έρευνας σε σχέση με τις ερευνητικές μας υποθέσεις. Στο σχολιασμό αυτό υπεισέρχονται και στοιχεία από το θεωρητικό μέρος· πρόκειται ουσιαστικά για το κεφάλαιο που συνδέει το θεωρητικό με το εμπειρικό μέρος της διατριβής.

Κεφάλαιο 4ο: Επίλογος: Προτάσεις για Περαιτέρω Έρευνα και για τη Διδασκαλία

Τα ευρήματα του εμπειρικού μέρους, σε συνδυασμό με την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας του θεωρητικού μέρους χρησιμοποιούνται για την εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικών με ερευνητικές κατευθύνσεις τις οποίες δεν έχει καλύψει η έρευνά μας. Επίσης μας οδηγεί σε κάποιες χρήσιμες προτάσεις σχετικά με τους τρόπους ενσωμάτωσης των ευρημάτων στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Παράρτημα

Στο παράρτημα περιέχονται έξι πίνακες οι οποίοι αφορούν στο πλήθος των μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών που εντοπίσαμε κατά τη διάρκεια της έρευνας, καθώς και στις κοινωνικές και κοινωνικομαθηματικές νόρμες σε σχέση με κάθε ζεύγος και κάθε πρόβλημα χωριστά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Βασικό φαινόμενο προς μελέτη αποτελεί η συγκρότηση από κοινού γνώσης κατά τη διάρκεια της συνεργατικής επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων. Στο θεωρητικό μέρος της διατριβής περιγράφουμε αρχικά την έννοια της γνώσης, με σκοπό να καταδείξουμε τη σημασία των κοινωνικών αλληλεπιδράσεων στη δημιουργία της. Κατά τη διάρκεια αυτών των αλληλεπιδράσεων συγκροτείται από κοινού γνώση, η οποία είναι ιδιαίτερα σημαντική για τους μετέχοντες, αλλά και για την επίλυση του προβλήματος. Οι διαδικασίες που οδηγούν στη συγκρότηση κοινής γνώσης πραγματοποιούνται μέσω κάποιων συμβόλων, από τα οποία η γλώσσα παίζει το σημαντικότερο ρόλο. Αφού περιγράψουμε τη σχέση γλώσσας και μαθηματικών, διακρίνουμε τις σχετικές γλωσσολογικές μελέτες από το χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης σε δομικές, λειτουργικές και συνδυαστικές. Τέλος, περιγράφουμε τη θεωρία της συμβολικής αλληλεπίδρασης και την προερχόμενη από αυτή θεωρία ρόλου τις οποίες χρησιμοποιούμε στην ανάλυση της συμπεριφοράς των μετεχόντων και στην επίδραση αυτής στη συγκρότηση κοινής γνώσης.

1.1. Ο ΚΟΙΝΩΝΙΚΟΣ ΧΑΡΑΚΤΗΡΑΣ ΤΗΣ ΓΝΩΣΗΣ

Η φύση της ανθρώπινης γνώσης, καθώς και η ανάλυση των διαδικασιών που σχετίζονται με αυτή αποτελούν αντικείμενο της φιλοσοφίας, της ψυχολογίας, αλλά και της κοινωνιολογίας. Υπάρχουν δύο βασικές σχολές, με εντελώς διαφορετικές αφετηρίες, οι οποίες ερμηνεύουν το φαινόμενο. Η πρώτη, την οποία ονομάζουμε «γνωστική», υποστηρίζει ότι η γνώση ορίζεται ως μία «δικαιολογημένη αληθινή πεποίθηση» (justified true belief) (Boer, Baalen and Kumar, 2002). Σύμφωνα με αυτή τη σχολή, η γνώση αποτελείται από ένα σύνολο πληροφοριών, τις οποίες το άτομο μπορεί να «κατέχει» και, σε κάποιες περιπτώσεις, να «μεταδώσει» σε άλλους. Υπάρχουν δύο είδη γνώσης, η άδηλη (tacit) και η έκδηλη (explicit). Ενώ η άδηλη γνώση δεν μπορεί να μεταδοθεί μέσω της γλώσσας,[1] η έκδηλη μπορεί όχι μόνο να μεταδοθεί, αλλά και να κωδικοποιηθεί. Η δεύτερη σχολή, την οποία ονομάζουμε «κοινωνική», υποστηρίζει ότι η γνώση δεν αποτελεί ένα αναγνωρίσιμο αντικείμενο, αλλά ένα σύνολο κοινωνικών πρακτικών, οι οποίες αποκτούν νόημα μόνο μέσα σε κάποιο κοινωνικο-πολιτιστικο-ιστορικό πλαίσιο (Wertsch, 1993, Wenger, 1998). Σύμφωνα με αυτή τη σχολή, δεν μπορεί κανείς να παρατηρήσει τι ακριβώς είναι η

γνώση, αλλά – σε κάποιο βαθμό – πώς εκφράζεται αυτή μέσα στην κοινωνική αλληλεπίδραση. Σε αυτή την περίπτωση η γνώση μπορεί να οριστεί[2] ως «μία κοινή αντίληψη και επιπλέον η ικανότητα μετατροπής αυτής σε πράξεις» (Boer, Baalen and Kumar, 2002). Η σχολή αυτή διαφωνεί με τη «γνωστική», με βασικό της επιχείρημα το γεγονός ότι:

> Αν θεωρήσουμε τη «γνώση» μόνο ως ατομική νοητική ιδιοκτησία, αδικούμε τις ικανότητες των ανθρώπων. Η ουσία της ανθρώπινης γνώσης και της αντίληψης έγκειται στο ότι είναι κοινή. Κάθε γενιά σε κάθε κοινωνία οικοδομεί πάνω στα πολιτιστικά θεμέλια των προηγούμενων και κάθε νέα ανακάλυψη γεννιέται μόνο όταν τίθεται στην υπηρεσία του συνόλου (Mercer, 2000, σσ. 86-87).

Για τους σκοπούς της έρευνάς μας θεωρούμε ότι η δεύτερη σχολή περιγράφει πιο αποτελεσματικά τη γνώση που συγκροτείται κατά τη διάρκεια της συνεργατικής επίλυσης προβλημάτων. Φυσικά, δεν μπορούμε να αγνοήσουμε ότι κάθε άτομο προσέρχεται στη διαδικασία «κατέχοντας» ήδη κάποια γνώση· το γεγονός παραμένει όμως ότι αυτή η γνώση έχει προέλθει από την *αλληλεπίδραση* του ατόμου με το φυσικό ή το κοινωνικό του περιβάλλον, άρα πρόκειται για κοινωνικά προσδιορισμένη-περιστασιακή γνώση (socially situated cognition) (Βλ. Κοσσυβάκη, 2003, σ. 46). Οι μετέχοντες λοιπόν της συνεργατικής επίλυσης προβλημάτων οφείλουν, μέσω της γλώσσας,[3] να *εξωτερικεύσουν* και να *αφομοιώσουν από κοινού* τη γνώση τους, για να υπάρξει αποδοτικότερη συνεργασία και επίλυση του προβλήματος. Αυτές οι δύο διαδικασίες είναι δυνατόν να οδηγήσουν και στη συγκρότηση κοινής γνώσης,[4] έννοια την οποία αναλύουμε στην παράγραφο που ακολουθεί.

1.2. Ο ΡΟΛΟΣ ΤΗΣ ΓΛΩΣΣΑΣ ΣΤΗ ΣΥΓΚΡΟΤΗΣΗ ΚΟΙΝΗΣ ΓΝΩΣΗΣ

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, αλλά και τη θεωρία του κοινωνικού κονστρουκτιβισμού που έχουμε ήδη αναφέρει, η γνώση μπορεί να εντοπιστεί μόνο σε κοινωνικές περιστάσεις που επιτρέπουν την εξωτερίκευση και την από κοινού αφομοίωσή της. Ο ρόλος της γλώσσας σε αυτές τις διαδικασίες είναι σημαντικότατος, αφού μέσω της γλώσσας το άτομο:

- Καθιστά δυνατή τη διεκπεραίωση της εξωτερικής του επικοινωνίας με τους συνανθρώπους του.
- Συμβάλλει στην εσωτερική αναδόμηση της εμπειρίας σε γνώση.
- Εκφράζει συγκεκριμένες ενέργειές του.

- Μορφοποιεί το πλαίσιο μέσα στο οποίο είναι δυνατή η ερμηνεία συγκεκριμένων ενεργειών. (Lemke, 1989, σ. 5, Mercer, 2000, σ. 87, Ανδρέου, 2002, σ. 71).

Κάποιοι σύγχρονοι ερευνητές μάλιστα, προτείνουν την αντικατάσταση του όρου «γνώση» με τον όρο «ομιλία»:

> Τοποθετώντας την ομιλία (discourse) στη θέση της αποστασιοποιημένης (disembodied) γνώσης καταρρίπτουμε τα εννοιολογικά σύνορα που διαχώριζαν το «ατομικό» από το «κοινωνικό» για αιώνες. Πράγματι, αυτή η ερμηνεία της γνώσης και της μάθησης δίνει έμφαση στο γεγονός ότι η απαίτηση για επικοινωνία αποτελεί το βασικό μοχλό κάθε ανθρώπινης διανοητικής δραστηριότητας· επιπλέον κάθε τέτοια δραστηριότητα είναι από τη φύση της κοινωνική, είτε πραγματοποιείται ατομικά είτε στα πλαίσια μιας ομάδας. Τέλος, η λέξη *ομιλία* φαίνεται περισσότερο κατανοητή από τη λέξη *γνώση*. (Sfard, 2000, σ. 161).

Πάντα στο πλαίσιο της διαπροσωπικής αλληλεπίδρασης με σκοπό την επίλυση κάποιου προβλήματος, δεν έχουμε μια απλή εξωτερίκευση των γνώσεων των μετεχόντων, οι οποίες στη συνέχεια αθροίζονται με σκοπό την επίλυση του προβλήματος· αυτό που συμβαίνει είναι μια αμοιβαία αφομοίωση, ένα «μοίρασμα» της γνώσης μεταξύ των μετεχόντων. Η διαδικασία αυτή, η οποία οδηγεί στη συγκρότηση κοινής γνώσης, περιγράφεται από τον Mercer και την Herbel-Eisenmann:[5]

> Η επίτευξη κοινής γνώσης και αντίληψης σπανίως αποτελεί ζήτημα απλής συγκέντρωσης όλων των πληροφοριών. Οι πληροφορίες είναι δυνατό να συσσωρευθούν, αλλά η γνώση και η αντίληψη δεν παράγονται παρά μόνο αφού οι πληροφορίες *υποστούν επεξεργασία*, επιλεγούν ορισμένες, οργανωθούν και υποστηριχθεί η σχετικότητά τους. Οι άνθρωποι χρησιμοποιούν την ομιλία για να *αιτιολογήσουν* τις απόψεις τους και τις πληροφορίες που δίνουν. (Mercer, 2000, σ. 87)
>
> Για την ανάπτυξη δι-υποκειμενικών εννοιών, απαιτείται μια διαδικασία διαπραγμάτευσης. Η διαπραγμάτευση περιγράφεται ως μία διαδικασία αμοιβαίας προσαρμογής κατά τη διάρκεια της οποίας οι μετέχοντες δημιουργούν από κοινού ευθύνες για τη δραστηριότητά τους. (Herbel-Eisenmann, 2003)

Πρέπει να τονίσουμε όμως ότι η κοινή γνώση δεν αποτελεί το βέβαιο «προϊόν» κάθε συνεργατικής επίλυσης προβλημάτων· όταν δύο ή περισσότεροι άνθρωποι αλληλεπιδρούν δεν είναι σίγουρο αν θα υπάρξει αμοιβαία αφομοίωση της γνώσης από καθέναν από αυτούς. Σε αυτή την περίπτωση, ο μόνος τρόπος ελέγχου του κατά πόσο συγκροτήθηκε κοινή γνώση σε μια αλληλεπίδραση είναι μέσω της γλώσσας, και ειδικότερα μέσω της γλωσσολογικής ανάλυσης της συζήτησης που έχει λάβει χώρα. Μεταφερόμενοι στο χώρο των μαθηματικών ανακύπτει το εξής ερώτημα: Οι

παραπάνω υποθέσεις ισχύουν και στη συνεργατική επίλυση *μαθηματικών* προβλημάτων, όπου η γλώσσα που χρησιμοποιείται περιέχει και αυστηρά μαθηματικούς όρους; Η απάντηση είναι καταφατική, και η δικαιολόγησή της προκύπτει από τη σύγκριση μαθηματικών-γλώσσας, στην οποία προχωρούμε στην παράγραφο που ακολουθεί.

1.3. ΣΧΕΣΗ ΓΛΩΣΣΑΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η σχέση γλώσσας και μαθηματικών[6] απασχόλησε μαθηματικούς αλλά και φιλοσόφους, με κορυφαίο από αυτούς τον Wittgenstein· ο Αυστρο-Βρετανός φιλόσοφος ασχολήθηκε εκτεταμένα με τη φύση των μαθηματικών, και μάλιστα οι αντιλήψεις του εξελίχθηκαν με την πάροδο του χρόνου ως εξής:[7] αρχικά θεωρούσε ότι οι μαθηματικές προτάσεις δεν αποτελούν δηλώσεις για αντικείμενα· «στην πραγματικότητα δεν αποτελούν δηλώσεις *για* τίποτα» (Gerrard, 1996, σ. 174). Αυτός ο ισχυρισμός στηριζόταν στην υπόθεση ότι οι μαθηματικές προτάσεις είναι εξισώσεις, άρα είναι ψευδο-προτάσεις. Στη συνέχεια, επικεντρώθηκε στη σημασία των κανόνων στην ερμηνεία των μαθηματικών προτάσεων: «Οι κανόνες (με την στενή έννοια) καθορίζουν αποκλειστικά την ερμηνεία, αποτελούν λοιπόν το τελικό και μοναδικό σημείο αναφοράς». (Gerrard, 1996, σ. 174). Αυτή η άποψη είχε σοβαρές επιπτώσεις και στον τρόπο που ο Wittgenstein αντιμετώπιζε τη γλώσσα: «Η γραμματική δεν είναι εξηγήσιμη πάνω σε καμιά πραγματικότητα. Οι γραμματικοί κανόνες είναι αυτοί που καθορίζουν την ερμηνεία (τη συνθέτουν), επομένως οι ίδιοι δεν είναι υπόλογοι σε καμιά ερμηνεία και σ' αυτό το βαθμό είναι αυθαίρετου» (Wittgenstein, 1974, 184, όπως αναφέρεται στον Gerrard, 1996, σ. 174). Σταδιακά όμως η παντοδυναμία των κανόνων έδωσε τη θέση της στη θεώρηση των μαθηματικών ως ένα σύνολο «γλωσσικών παιχνιδιών», όπου ο όρος γλωσσικό παιχνίδι «έχει προορισμό να τονίσει ότι το *να μιλάμε* μια γλώσσα είναι μέρος μιας δραστηριότητας, ή μιας μορφής ζωής. (Wittgenstein, 1977, σ. 35). Με άλλα λόγια: «τα Μαθηματικά είναι βέβαια μια θεωρία, – ωστόσο είναι και μια *δραστηριότητα*» (Wittgenstein, 1977, σ. 281). Η έμφαση στον κοινωνικό χαρακτήρα των μαθηματικών έχει ελάχιστη σχέση με την αυθαίρετη και άυλη μορφή των κανόνων που καθόριζαν εξ' ολοκλήρου τις μαθηματικές προτάσεις. Επίσης, αυτή η θέση έχει συνέπειες και στην αντιμετώπιση της γλώσσας: «Το να φανταζόμαστε μια γλώσσα σημαίνει να φανταζόμαστε μια μορφή ζωής.» (Wittgenstein, 1977, 19, σ. 32). Ας εξετάσουμε σε αυτό το σημείο τις ομοιότητες και τις διαφορές – πάντα σύμφωνα με τον Wittgenstein

– της μαθηματικής με την καθημερινή γλώσσα. Η βασική ομοιότητα προκύπτει από την εισαγωγή της έννοιας των γλωσσικών παιχνιδιών, η οποία προσδίδει ένα δυναμικό χαρακτήρα, αλλά και μία τυχαιότητα (contingency) και στις δύο γλώσσες, αφού «τα κριτήρια για την ταξινόμηση μίας πρότασης δεν εξαρτώνται από τη μορφή, αλλά από τη *χρήση*, το *πλαίσιο* και το *ρόλο* της» (Gerrard, 1996, σ. 178) ή πιο απλά: «η σημασία μιας λέξης είναι η χρήση της μέσα στη γλώσσα» (Wittgenstein, 1977, 43). Πέρα όμως από το σημαντικότατο ρόλο του πλαισίου, υπάρχουν κάποια χαρακτηριστικά της μαθηματικής γλώσσας που τη διαχωρίζουν από την καθημερινή· τα πιο βασικά είναι η σταθερότητα (inexorability) και η μη-αναθεωρησιμότητά της. Η σταθερότητα αναφέρεται σε μια ακαμψία που συναντάται στη μαθηματική γλώσσα με την έννοια ότι υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη σχέση ανάμεσα σε σημαίνον και σημαινόμενο, μια σχέση που δεν επηρεάζεται από το κοινωνικο-πολιτιστικό πλαίσιο.[8] Η μη-αναθεωρησιμότητα αναφέρεται στο ότι οι μαθηματικές έννοιες δεν υπόκεινται σε αναθεώρηση βάσει εμπειρικών δεδομένων, σε αντίθεση με τις έννοιες της καθημερινής γλώσσας· αυτό συμβαίνει γιατί «οι μαθηματικές προτάσεις δεν περιγράφουν εμπειρικά γεγονότα, αλλά παρέχουν ένα πλαίσιο ερμηνείας αυτών· επομένως τα εμπειρικά γεγονότα δεν μπορούν να αναθεωρήσουν τα μαθηματικά» (Gerrard, 1996, σ. 179). Συνοψίζοντας, μπορούμε να επισημάνουμε ότι, σύμφωνα με την άποψη του Wittgenstein,[9] η μαθηματική γλώσσα αν και βασίζεται στη συμφωνία πάνω σε ένα πλαίσιο ερμηνείας – το οποίο παρέχεται από τις κοινές πρακτικές ή αλλιώς τις κοινωνικομαθηματικές νόρμες στις οποίες θα αναφερθούμε σε επόμενη παράγραφο – έχει ένα δυναμικό χαρακτήρα, ο οποίος οφείλεται κυρίως στην εξάρτησή της από το κοινωνικο-πολιτιστικό πλαίσιο στο οποίο αναπτύσσεται. Επομένως, μια μαθηματική γλώσσα, όσο αυτάρκης και αν φαντάζει μέσα στην αυστηρή τυποποίησή της, δεν έχει καμία σημασία (ή αλλιώς καμία ερμηνευτική ισχύ) εάν τοποθετηθεί εκτός πλαισίου ή αλλιώς εάν απομονωθεί από τις πρακτικές που σχετίζονται με αυτή.

Οι απόψεις του Wittgenstein αν και επηρέασαν πολλούς μαθηματικούς,[10] δεν εμπόδισαν άλλους να συνεχίσουν τη συζήτηση πάνω στη σχέση καθημερινής και μαθηματικής γλώσσας μέχρι τις μέρες μας, με αποτέλεσμα να έχουν διαμορφωθεί δύο βασικές απόψεις: η πρώτη υποστηρίζει ότι τα μαθηματικά είναι μία αυτόνομη γλώσσα, όπως τα Ελληνικά ή τα Αγγλικά:

> Όπως οι περισσότερες σύγχρονες γλώσσες, τα μαθηματικά είναι προφορικά και γραπτά, και μπορούν να είναι τυποποιημένα ή άτυπα. Όπως και όλες οι γλώσσες, έχουν την επικοινωνία ως

ένα από τους βασικούς σκοπούς τους. Όπως και όλες οι γλώσσες, δεν περιγράφουν μόνο κάποιες έννοιες, αλλά συντελούν στο σχηματισμό τους στο μυαλό του χρήστη. (Usiskin, 1996, σ. 232).

Η δεύτερη άποψη, αποτελεί μία πιο μετριοπαθή εκδοχή της πρώτης, αφού υποστηρίζει ότι τα μαθηματικά αποτελούν *μεταφορικά* ένα είδος γλώσσας,[11] δηλαδή διαθέτουν κάποια χαρακτηριστικά, χωρίς όμως να ταυτίζονται απόλυτα με μία γλώσσα. (Pimm, 1987). Η αδυναμία των μαθηματικών να καλύψουν το ευρύτατο φάσμα των λειτουργιών της καθημερινής γλώσσας εκφράζεται με γλαφυρό τρόπο από τον Hersh (1997), ο οποίος υποστηρίζει ότι αν τα μαθηματικά ήταν μία γλώσσα, τότε θα μπορούσε κανείς να εκφράσει την πρόταση «Κρυώνω» σε αυτή τη γλώσσα. Η διαπίστωση πάντως ότι υπάρχουν τουλάχιστον κάποιες ομοιότητες μεταξύ της μαθηματικής και της καθημερινής γλώσσας μας οδηγεί σε δύο συμπεράσματα: το πρώτο είναι ότι κάποιες μέθοδοι διδασκαλίας που προέρχονται από τη διδασκαλία της γλώσσας (μητρικής ή ξένης) μπορούν να εφαρμοστούν στα μαθηματικά. Πράγματι, ο Usiskin (1996) και η Krussel (1998) αφού παραθέσουν αναλυτικά τις μεθόδους τους, καταλήγουν ως εξής:

... πρέπει να αναμένουμε από τους μαθητές να χρησιμοποιούν τη γλώσσα των μαθηματικών με διαφορετικούς τρόπους, τυποποιημένους και άτυπους και να μην προσπαθούμε να περιορίσουμε την έκφρασή τους (Usiskin, 1996, σ. 241).

Οι μαθητές και οι δάσκαλοί τους χρειάζονται καθοδήγηση στην προσέγγιση των μαθηματικών με τον ίδιο τρόπο που θα προσέγγιζε κανείς την εκμάθηση μίας γλώσσας. Οι δάσκαλοι πρέπει να ενθαρρύνουν μια ισορροπία ασκήσεων (drill) και εφαρμογών της γλώσσας από νεαρή ηλικία· μελέτη του λεξιλογίου και της δομής της· εξάσκηση στην ομιλία, στο διάβασμα και στη γραφή – δημιουργικά αλλά και πιο τυπικά. Πρέπει να ενθαρρύνουν την ανάπτυξη των μεταφορών – της κόλλας που συγκρατεί τη γλώσσα και που συνδέει τη νέα γνώση με τις υπάρχουσες γνωστικές δομές. (Krussel, 1998, σ. 440)

Το δεύτερο συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι η ανάλυση κάποιων τουλάχιστον πρακτικών των μαθηματικών μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας γλωσσολογικές μεθόδους. Πράγματι, οι Austin and Howson (1979) παραθέτουν τη σχετική βιβλιογραφία, παρατηρώντας τα εξής:

α) Η διδακτική των μαθηματικών έχει αρκετά κοινά στοιχεία με τη γλωσσολογία, αφού και οι δύο επιστήμες αρχικά «προσπάθησαν να υιοθετήσουν ποσοτικές επιστημονικές μεθόδους και, ειδικότερα, τεχνικές βασισμένες στη στατιστική» (Austin and Howson, 1979, σ. 162). Σταδιακά όμως οι διάφορες ταξινομίες που προέκυψαν αποδείχτηκαν ανεπαρκείς στην περιγραφή βαθύτερων δομών και αλληλεπιδράσεων, με αποτέλεσμα την αναζήτηση άλλων μεθόδων και πρακτικών.[12]

β) Η γλώσσα είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με το σχηματισμό ανωτέρου επιπέδου εννοιών.

γ) Η επίδραση κοινωνικο-πολιτιστικών παραγόντων δεν περιορίζεται στην καθημερινή γλώσσα, αλλά μορφοποιεί και τη μαθηματική γλώσσα.

δ) Η γλώσσα του δασκάλου επιδρά στη γλώσσα των μαθητών.

ε) Τα μαθηματικά δεν αποτελούν μία γλώσσα με την κοινά αποδεκτή έννοια· έχουν το δικό τους «συντακτικό», αλλά χαρακτηρίζονται από μία εγκυρότητα που δεν συναντάται στην καθημερινή γλώσσα.

Οι παραπάνω απόψεις, χωρίς να συγκλίνουν σε μία ενιαία θέση, εκφράζουν σαφέστατα μια τάση που έχει διαμορφωθεί τα τελευταία χρόνια και σύμφωνα με την οποία η γλωσσολογία μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην ανάλυση μαθηματικών πρακτικών. Στη συνέχεια κατηγοριοποιούμε τις γλωσσολογικές μελέτες που αφορούν τη μαθηματική εκπαίδευση, με σκοπό να αναδείξουμε τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα κάθε κατηγορίας.

1.4. Η ΑΝΑΛΥΣΗ ΛΟΓΟΥ ΚΑΙ Η ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Η ανάλυση λόγου[13] (discourse analysis) αποτελεί ένα ευρύτατο αλλά συγχρόνως μη σαφώς ορισμένο πεδίο της γλωσσολογίας· ένας βασικός λόγος είναι ότι στην ανάπτυξή της συνεισέφεραν πολλές επιστήμες (όπως η γλωσσολογία, η ανθρωπολογία, η κοινωνιολογία και η φιλοσοφία), αλλά και ότι οι μέθοδοι και τα αποτελέσματά της υιοθετήθηκαν από διαφορετικές επιστήμες ή επιστημονικά πεδία (όπως η κοινωνική ψυχολογία, η επιστήμη της επικοινωνίας και της τεχνητής νοημοσύνης) (Schiffrin, 1994). Ένας σαφής ορισμός της ανάλυσης λόγου προϋποθέτει ένα σαφή ορισμό της έννοιας του λόγου· επειδή όμως δεν υπάρχει ομοιομορφία και συμφωνία μεταξύ των διαφορετικών «σχολών» που έχουν δημιουργηθεί, κρίνουμε σκόπιμο να παρουσιάσουμε τις βασικές σχολές και μέσω αυτών, τους ορισμούς που οι ίδιες προωθούν.

1.4.1. Δομική Προσέγγιση

Σύμφωνα με τη δομική προσέγγιση, ο λόγος «είναι μία μονάδα της γλώσσας που τοποθετείται ένα επίπεδο πάνω από την πρόταση» (Sifianou, 2001, σ. 1). Η βασική μεθοδολογική υπόθεση των αντίστοιχων μελετών είναι ότι η γλώσσα γενικότερα – και ο λόγος ειδικότερα – αποτελούνται από γλωσσολογικές μονάδες, κατηγορίες, πρότυπα και σχέσεις μεταξύ αυτών, επομένως σκοπός της ανάλυσης είναι η

ταξινόμηση αυτών των στοιχείων. Οι δομικές μελέτες υιοθετούν και κάποιες βασικές παραδοχές σχετικά με τη φύση της γλώσσας γενικότερα (αλλά και της ανάλυσής της)· συνοπτικά οι υποθέσεις αυτές είναι οι ακόλουθες (Schiffrin, 1994):

- Η γλώσσα θεωρείται ένα αυτόνομο σύστημα, του οποίου η δομή παρέχεται από τους κανόνες γραμματικής και συντακτικού. Βεβαίως η γλώσσα επιτελεί και γνωστικές ή κοινωνικές λειτουργίες, οι οποίες όμως δεν έχουν καμία επίδραση στην εσωτερική της οργάνωση.
- Η γλώσσα αντιμετωπίζεται κυρίως ως ένα νοητικό φαινόμενο, το οποίο εξελίσσεται μέσω μιας έμφυτης ικανότητας που συναντάται σε όλους τους ανθρώπους. Όλες λοιπόν οι γλώσσες του κόσμου μοιράζονται κάποια κοινά χαρακτηριστικά.
- Η ανάλυση του γλωσσικού κώδικα προηγείται της ανάλυσης της χρήσης της γλώσσας. Όπως προαναφέραμε η ανάλυση γίνεται μέσω του τεμαχισμού σε μικρότερες γλωσσικές μονάδες και της ανάλυσης των δομών και των σχέσεων που παρουσιάζουν αυτές.
- Οι βασικές κατηγορίες ανάλυσης θεωρούνται δεδομένες ή τίθενται αυθαίρετα.

Η Schiffrin (1994) εντοπίζει τρεις βασικές αδυναμίες των δομικών προσεγγίσεων: η πρώτη προέρχεται από τη διαπίστωση ότι δεν είναι πάντα δυνατός ο τεμαχισμός της ανθρώπινης ομιλίας σε μικρότερες γλωσσικές μονάδες, όπως π.χ. τις προτάσεις· κάνοντας κάτι τέτοιο περιορίζουμε την ποικιλία και την αυθόρμητη φύση πολλών γλωσσικών ανταλλαγών.[14] Η δεύτερη αδυναμία προέρχεται από την προτεινόμενη αυτονομία της γλώσσας· πολλές σχετικές έρευνες[15] καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι η γραμματική και συντακτική δομή ενός κειμένου δεν αποτελούν κάτι στατικό, αλλά αντιθέτως, επηρεάζονται από τις αλληλεπιδράσεις των συμμετεχόντων. Η τρίτη αδυναμία σχετίζεται με τη διαπίστωση ότι πολλές από τις δομές που συναντούμε στον καθημερινό λόγο δεν προέρχονται από το συνδυασμό κατωτέρου επιπέδου δομών, αλλά από *ενέργειες* ή *προθέσεις* των ομιλητών.[16]

Στα πλαίσια των μαθηματικών η πλειοψηφία των ερευνών μπορούν να χαρακτηριστούν δομικές· ένας βασικός λόγος είναι ότι η έρευνα στη διδακτική των μαθηματικών ακολούθησε την πορεία που επισήμαναν οι Austin and Howson (1979) (και που αναφέραμε στην παράγραφο 1.3.), δηλαδή ξεκίνησε από αμιγώς ποσοτικές μεθόδους ανάλυσης, ώσπου διαπίστωσε τις αδυναμίες τους και στράφηκε και σε άλλου είδους μεθόδους. Γενικά, οι δομικές μελέτες στα μαθηματικά μπορούν να

διακριθούν σε δύο κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει μελέτες που επιχειρούν να συσχετίσουν συγκεκριμένες γλωσσικές δομές με γνωστικές διαδικασίες. Μια βασική δομή που συναντάται (κυρίως σε δασκαλοκεντρικού τύπου τάξεις) είναι η «Ερέθισμα – Απάντηση – Επανατροφοδότηση», η οποία, σύμφωνα με τον Pimm (1994a), αναγνωρίστηκε αρχικά από τους Sinclair and Coulthard (1975)· παράδειγμα τέτοιας μελέτης είναι αυτή των Inagaki, Morita and Hatano (1999), οι οποίοι συγκρίνουν τη χρήση αυτής της δομής σε τάξεις των Η.Π.Α. και της Ιαπωνίας. Οι Forrester and Pike (1998) ασχολούνται γενικότερα με τη δομή των γλωσσικών ανταλλαγών στην προσπάθειά τους να εξηγήσουν τον τρόπο συγκρότησης της έννοιας της εκτίμησης (estimation), ενώ στο ίδιο πλαίσιο (κατηγοριοποίησης αρχικά και σύνδεσης με γνωστικές κυρίως διεργασίες στη συνέχεια) κινούνται οι μελέτες των Dekker and Elshout-Mohr (1998), Stacey and Gooding (1998), Pirie and Schwarzenberger (1988) και Thom and Pirie (2002). Ο Schoenfeld (1983) τέλος, μελετά την επίδραση κάποιων δομών στην πορεία επίλυσης προβλημάτων.

Η δεύτερη κατηγορία δομικών μελετών ερευνά τη σχέση καθημερινής και μαθηματικής γλώσσας· χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν οι έρευνες της Pirie (1991, 1998), η οποία διαπιστώνει ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν μία γλώσσα που κινείται στα όρια της μαθηματικής και της καθημερινής. Η Mitchell (2001) εξετάζει το φαινόμενο αντικατάστασης (από τους μαθητές) εκφράσεων της μαθηματικής γλώσσας με εκφράσεις της καθημερινής γλώσσας. Στο ίδιο πλαίσιο, οι Ferrari (2000) και Ferrari and Giraudi (2001) διαπιστώνουν ότι οι μαθητές εφαρμόζουν τεχνικές προερχόμενες από την καθημερινή τους γλώσσα για την ερμηνεία μαθηματικών κειμένων, πρακτική που τους οδηγεί σε ελλιπή κατανόηση. Τέλος, η Zazkis (2000) αν και υποστηρίζει την υπεροχή της μαθηματικής γλώσσας (λόγω της σαφήνειάς της) διαπιστώνει ότι οι μαθητές προτιμούν την καθημερινή γλώσσα για τη μεταξύ τους επικοινωνία στην τάξη των μαθηματικών.

1.4.2. Λειτουργική Προσέγγιση

Σύμφωνα με τη λειτουργική προσέγγιση ο λόγος «είναι το σύνολο των επικοινωνιακών δραστηριοτήτων που ασκούνται από μια συγκεκριμένη κοινότητα» (Sfard, 2000, σ. 160). Η βασική μεθοδολογική υπόθεση των αντίστοιχων μελετών είναι ότι αντικείμενο της έρευνας δεν αποτελούν οι κανονικότητες στη χρήση της γλώσσας, αλλά ο τρόπος με τον οποίο χρησιμοποιούνται αυτές για την επίτευξη συγκεκριμένων στόχων και την ενεργοποίηση συγκεκριμένων (επικοινωνιακών)

στρατηγικών. Οι παραδοχές πάνω στις οποίες στηρίζονται οι λειτουργικές μελέτες μπορούν να συνοψιστούν στις παρακάτω (Schiffrin, 1994):

- Η γλώσσα μελετάται πάντα σε σχέση με τις λειτουργίες τις οποίες επιτελεί και σε σχέση με το κοινωνικό πλαίσιο στο οποίο περιέχεται. Με τον ίδιο τρόπο αναλύονται και οι δομές της γλώσσας.
- Η γλώσσα αντιμετωπίζεται κυρίως ως ένα κοινωνικό φαινόμενο, το οποίο σχετίζεται με την ανάπτυξη των επικοινωνιακών αναγκών και των ικανοτήτων για κοινωνικοποίηση του ανθρώπου. Κάθε ανθρώπινη γλώσσα είναι μοναδική, αφού πηγάζει από διαφορετικό κοινωνικο-πολιτιστικό πλαίσιο.
- Η ανάλυση της χρήσης της γλώσσας προηγείται της ανάλυσης του γλωσσικού κώδικα. Η χρήση της γλώσσας μπορεί να αναλυθεί κατηγοριοποιώντας τις γλωσσικές πράξεις (speech acts).
- Οι βασικές κατηγορίες ανάλυσης δεν θεωρούνται δεδομένες, αντιθέτως αποτελούν αντικείμενο προβληματικής.

Η Schiffrin (1994) επισημαίνει ότι το βασικό πρόβλημα των λειτουργικών προσεγγίσεων προέρχεται από τον κίνδυνο απορρόφησης της ανάλυσης λόγου από ευρύτερα πεδία ανάλυσης των γλωσσικών λειτουργιών, με αποτέλεσμα την αδυναμία καθορισμού ενός σαφούς πλαισίου αρχών για την ανάλυση των ίδιων των εκφράσεων. Με άλλα λόγια, η θεώρηση της γλώσσας σαν ένα καθαρά κοινωνικό φαινόμενο, ενέχει τον κίνδυνο απομάκρυνσης από τα δομικά της στοιχεία, δηλαδή τις ίδιες τις εκφράσεις.

Οι λειτουργικές μελέτες, αν και ακολούθησαν χρονικά τις δομικές, κερδίζουν συνεχώς έδαφος αποτελώντας μία από τις εναλλακτικές επιλογές στην αυστηρότητα και την τυποποίηση των δομικών μεθόδων ανάλυσης. Γενικά, οι λειτουργικές μελέτες στα μαθηματικά μπορούν να διακριθούν σε τρεις κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει μελέτες που επιχειρούν να συσχετίσουν στοιχεία των αλληλεπιδράσεων των μαθητών (μεταξύ τους ή με το δάσκαλο) με γνωστικές διαδικασίες· η γνώση όμως σε αυτές τις μελέτες αντιμετωπίζεται σαν μία κοινωνική κατασκευή και πιο συγκεκριμένα σαν προϊόν των αλληλεπιδράσεων μέσα στην τάξη των μαθηματικών. Χαρακτηριστικά παραδείγματα τέτοιων μελετών είναι αυτές των Cobb, Yackel and Wood (1992), Bartolini Bussi (1998), César (1998), Carvalho and César (2001), Dreyfus, Hershkowitz and Schwarz (2001), Mercier, Sensevy and Schubauer-Leoni (2000), Yackel, Cobb and Wood (1999), McNair (2000) και Williams and Clarke

(2003). Στη δεύτερη κατηγορία συναντούμε μελέτες που εστιάζουν στις νόρμες που διέπουν τις αλληλεπιδράσεις των μαθητών, και πιο συγκεκριμένα στη μορφή τους (Sfard, 2000, Yackel, Rasmussen and King, 2000) και στη σχέση τους με συγκεκριμένες γνωστικές διεργασίες (Yackel and Cobb, 1996, Yackel, 2001, Stylianou and Blanton, 2002). Η τρίτη κατηγορία περιλαμβάνει μελέτες που ενσωματώνουν λειτουργικές γλωσσολογικές θεωρίες στην ανάλυση μαθηματικών συζητήσεων· χαρακτηριστικό παράδειγμα η εργασία του Rowland (2002), ο οποίος χρησιμοποιεί τη «θεωρία γλωσσικών πράξεων»[17] (speech act theory) για την ανάδειξη των στρατηγικών που εφαρμόζουν οι μαθητές, στρατηγικές που σχετίζονται με κοινωνικές ή επικοινωνιακές επιδιώξεις.

1.4.3. Συνδυαστική Προσέγγιση

Από όσα έχουμε αναφέρει προκύπτει ότι οι δομικές και οι λειτουργικές μελέτες αναλύουν ουσιαστικά τις δύο όψεις του ίδιου νομίσματος· αυτή η διαπίστωση είχε ως αποτέλεσμα να εμφανιστούν πολλές μελέτες οι οποίες επιδιώκουν το *συνδυασμό* των δύο προσεγγίσεων. Επίσης, παρατηρείται το φαινόμενο, οι σύγχρονες αναλύσεις λόγου να «εκφράζουν μία αλληλεξάρτηση μεταξύ δομής και λειτουργίας» (Schiffrin, 1994, σ. 42), δηλαδή να ενσωματώνουν και τα δύο είδη μελέτης – δίνοντας συνήθως μεγαλύτερη έμφαση στο ένα από τα δύο είδη. Αυτή η τάση δεν μπορούσε να αφήσει ανεπηρέαστη και τη διδακτική των μαθηματικών, με αποτέλεσμα την εμφάνιση κάποιων *συνδυαστικών* μελετών και σε αυτό το πεδίο. Οι μελέτες αυτές, αν και στερούνται ομοιογένειας ως προς τις μεθόδους που ακολουθούν, παρουσιάζουν ωστόσο μία κοινή τάση συγκερασμού της δομικής και της λειτουργικής προσέγγισης της γλώσσας.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα συνδυαστικής έρευνας στα μαθηματικά είναι αυτή των Dekker, Wood and Elshout-Mohr's (2001)· το αξιοσημείωτο με τη συγκεκριμένη έρευνα είναι ότι αποτελείται από την προαναφερθείσα δομική έρευνα των Dekker and Elshout-Mohr (1998) με την προσθήκη μιας λειτουργικής ανάλυσης της Wood. Οι Gómez and Rico (1995) προτείνουν δύο διαφορετικές ομάδες μεταβλητών για την ανάλυση της μαθηματικής συζήτησης και της αλληλεπίδρασης.[18] Τέλος, οι Atweh, Bleicher and Cooper (1998) χρησιμοποιούν ένα δυναμικό ορισμό του πλαισίου της τάξης των μαθηματικών[19] για να αναλύσουν τόσο κοινωνικά όσο και καθαρά γλωσσικά χαρακτηριστικά των αλληλεπιδράσεών της.

Από την παράθεση των γλωσσολογικών προσεγγίσεων προκύπτει ότι η συνδυαστική προσέγγιση περικλείει τη δομική και τη λειτουργική· αυτό έχει ως αποτέλεσμα να παρέχει μία ολοκληρωμένη εικόνα της γλωσσικής αλληλεπίδρασης. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει όμως, η αποτελεσματική επίλυση προβλημάτων προϋποθέτει και άλλες ικανότητες, οι οποίες αφορούν τη διαχείριση της αλληλεπίδρασης αυτής καθ' αυτής. Προκύπτει έτσι η ανάγκη μιας κοινωνιολογικής ανάλυσης, η οποία θα εμβαθύνει στις συμπεριφορές των μετεχόντων και στον τρόπο με τον οποίο αυτές επηρεάζουν την πορεία επίλυσης του προβλήματος, άρα και τη συγκρότηση κοινής γνώσης.

1.5. Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΥΜΒΟΛΙΚΗΣ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ

Η θεωρία της συμβολικής αλληλεπίδρασης (symbolic interactionism[20]) αποτελεί τη μοναδική κοινωνιολογική προσέγγιση η οποία:

α) Θεωρεί την κοινωνική αλληλεπίδραση ως τη βασική μονάδα ανάλυσης.

β) Επικεντρώνεται στη δημιουργία κοινών εννοιών κατά τη διάρκεια της αλληλεπίδρασης.

γ) Επιχειρεί να αναλύσει τις ερμηνευτικές διαδικασίες που οδηγούν στη δημιουργία κοινών εννοιών.

Οι παραπάνω λόγοι μας οδήγησαν στην υιοθέτηση της συγκεκριμένης θεωρίας και στη χρήση των θεωρητικών της παραδοχών· πολλοί ερευνητές στη Διδακτική των Μαθηματικών έχουν υιοθετήσει τη συγκεκριμένη θεωρία, ανάμεσά τους οι Bauersfeld (1994), Voigt (1995), Yackel and Cobb (1996), Yackel, Cobb and Wood (1999), Yackel, Rasmussen and King (2000) και Steele (1997). Κεντρικός άξονας της θεωρίας – όπως καταδεικνύει και το όνομά της – είναι η κοινωνική αλληλεπίδραση, η οποία πραγματοποιείται με τη βοήθεια συμβόλων. Μέσω της χρήσης των συμβόλων – από τα οποία η γλώσσα είναι το σημαντικότερο – οι μετέχοντες:

- ορίζουν την περίσταση στην οποία βρίσκονται,
- ερμηνεύουν τις ενέργειες των άλλων και
- συγκροτούν τις μορφές δράσης τους.

Για να αποσαφηνίσουμε τη συμβολική αλληλεπίδραση πρέπει να περιγράψουμε τις διαδικασίες που εμπλέκονται σε αυτή, ξεκινώντας από «μέσα προς τα έξω», δηλαδή από το σχηματισμό του *εαυτού* του ατόμου. Ο εαυτός αρχίζει να υφίσταται από τη στιγμή που το άτομο οργανώνει τις ενέργειές του σε σχέση με τις τάσεις των άλλων να απαντήσουν σ' αυτές. (Mead, 1964). Υπάρχουν δύο πτυχές του εαυτού: το «εγώ» (I) και το «εμένα» (me):

> ... το «I» και το «Me» βρίσκονται σε μόνιμη αλληλεπίδραση, καθώς το πρώτο εκπροσωπεί τον αυθορμητισμό (πρωτοβουλία) του «Εαυτού», ενώ το δεύτερο τις προσδοκίες και τον έλεγχο της κοινωνίας (γενικευμένος άλλος). Η ταύτιση του «I» και του «Me» ή, με άλλα λόγια, η έννοια «Εαυτός», συντελείται, όταν το I συνειδητοποιήσει τα όρια, που του έχουν τεθεί από το Me και δρα πλέον με βάση τη συνειδητοποίηση αυτή. (Τσαρδάκης, 1992, σ. 65).

Το άτομο στη συνέχεια, προχωρά στον ορισμό της περίστασης στην οποία σκοπεύει να εμπλακεί· λαμβάνει υπόψη του δηλαδή τα χαρακτηριστικά των μετεχόντων, αλλά και το ευρύτερο πλαίσιο στο οποίο εντάσσεται η περίσταση. Ακολούθως, με τη βοήθεια των συμβόλων που έχει στη διάθεσή του, εμπλέκεται στην κοινωνική αλληλεπίδραση ερμηνεύοντας συνεχώς τις αντιδράσεις των άλλων, και διαμορφώνοντας με αυτό τον τρόπο το δικό του *ρόλο*. Τα σύμβολα επιτελούν μία διπλή λειτουργία: από τη μια χρησιμεύουν ως μέσο ερμηνείας των ενεργειών των μετεχόντων και από την άλλη χρησιμοποιούνται ως μέσο για την επίτευξη των επιδιώξεων των μετεχόντων (ή αλλιώς ως μέσο ερμηνείας των ρόλων τους). Είναι σαφές ότι αντικείμενο μελέτης αποτελεί κάθε γεγονός αλληλεπίδρασης *χωριστά*, και ειδικότερα η χρήση των συμβόλων, γλωσσικών (ή άλλων), που λαμβάνει χώρα στη συγκεκριμένη περίσταση.[21] Κάθε περίσταση όμως, όπως προαναφέραμε, δεν μπορεί να αποκοπεί από το ευρύτερο πλαίσιο στο οποίο ανήκει και, σύμφωνα με τη θεωρία της συμβολικής αλληλεπίδρασης, η περίσταση όχι μόνο περικλείεται από ένα πλαίσιο, αλλά *δημιουργεί και η ίδια ένα δικό της πλαίσιο*. (Vrasidas, 2001). Το πλαίσιο το παρέχει η ιστορία της αλληλεπίδρασης, οι παρελθούσες και μελλοντικές γλωσσικές (ή άλλου είδους) ανταλλαγές της, αλλά και ένα σύνολο κανόνων και οδηγιών που σχετίζονται με κοινωνικές αντιλήψεις, προσδοκίες, υποχρεώσεις και δικαιώματα. Αυτές οι οδηγίες μπορούν να διακριθούν σε *απαιτήσεις ή κανόνες* (που έχουν ρητή μορφή) και *νόρμες* (που έχουν άδηλη μορφή). Στην παράγραφο που ακολουθεί, αφού ορίσουμε τις νόρμες, θα περιγράψουμε τους λόγους που μας οδήγησαν στην επισταμένη μελέτη τους.

1.5.1. Κοινωνικές και Κοινωνικομαθηματικές Νόρμες

Η νόρμα αποτελεί υποκατηγορία των συμπεριφορών που χαρακτηρίζονται ως *οδηγίες* και ορίζεται ως «η περιγραφή ή η αντίληψη που επικρατεί για τη συμπεριφορά που θεωρείται αναμενόμενη από ένα άτομο ή μια ομάδα» (Thomas and Biddle, 1966a, σ. 11). Ο ορισμός αυτός, σε συνδυασμό με τα συμπεράσματα σχετικών ερευνών (π.χ. Yackel and Cobb, 1996, Yackel, Cobb and Wood, 1999, Yackel, Rasmussen and

King, 2000, Herbel-Eisenmann, 2003), επιτρέπει να εντοπίσουμε τα βασικά χαρακτηριστικά της νόρμας:

α) η νόρμα είναι μία οδηγία η οποία συνήθως δεν έχει αποκρυσταλλωμένη και απόλυτη μορφή,

β) η νόρμα αναφέρεται στην *αναμενόμενη* και όχι στην απαιτούμενη ή πρέπουσα συμπεριφορά του ατόμου,

γ) η νόρμα λόγω του άδηλου χαρακτήρα της είναι σχετικά δύσκολο να εντοπιστεί,[22]

δ) η νόρμα είναι προϊόν *κοινών αντιλήψεων* των μετεχόντων στην αλληλεπίδραση, και ο χαρακτήρας της είναι καταρχήν τοπικός.[23]

Μεταφερόμενοι στο χώρο της εκπαίδευσης, οι νόρμες δεν περιγράφουν απλά την προσδοκώμενη συμπεριφορά ενός «καλού» μαθητή, ο οποίος όντας κάτοχος αρκετών γνώσεων ανταποκρίνεται και μπορεί να αντιμετωπίσει κάθε ερώτημα του δασκάλου του· σαν *συλλογικές* έννοιες, οι νόρμες δημιουργούνται *από κοινού* μέσα σε μία τάξη ή σε μια ομάδα εργασίας, άρα σχετίζονται με *κοινωνικές* συμπεριφορές. Οι έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί στα πλαίσια της μαθηματικής εκπαίδευσης έχουν σκιαγραφήσει δύο είδη νορμών: τις κοινωνικές και τις κοινωνικομαθηματικές. Μερικά παραδείγματα κοινωνικών νορμών, προερχόμενα από τις έρευνες των Yackel and Cobb (1996), Yackel, Cobb and Wood (1999), Yackel, Rasmussen and King (2000) και Yackel (2001), είναι τα ακόλουθα:

- Η λύση ενός προβλήματος έχει νόημα μέσα στο (κοινωνικό) πλαίσιο στο οποίο έχει αυτό τεθεί.
- Η λύση ενός προβλήματος (ή και κάθε συλλογισμός) συνοδεύεται από επαρκή εξήγηση και δικαιολόγηση.
- Το άτομο ακούει και προσπαθεί να ερμηνεύσει τη λύση ή τον τρόπο σκέψης των άλλων.
- Το άτομο κάνει ερωτήσεις και προβάλλει τα επιχειρήματά του κατά τη διάρκεια των συζητήσεων που λαμβάνουν χώρα.

Παραδείγματα κοινωνικομαθηματικών νορμών (προερχόμενα από τις έρευνες που προαναφέραμε) είναι τα ακόλουθα:[24]

- Η λύση ενός προβλήματος αξιολογείται ως προς το αν είναι μαθηματικά τεκμηριωμένη.
- Η λύση ενός προβλήματος αξιολογείται ως προς την αποτελεσματικότητα, αλλά και την καταλληλότητά της.

- Αναγνωρίζεται η δυσκολία ενός προβλήματος.
- Αναγνωρίζονται και συγκρίνονται οι διαφορετικές λύσεις ενός προβλήματος.

Η σημασία της ύπαρξης κοινωνικών και κοινωνικομαθηματικών νορμών για τη μαθηματική γνώση είναι κοινώς αποδεκτή από τους ερευνητές που ασχολούνται με το συγκεκριμένο πεδίο. (Herbel-Eisenmann, 2003). Υπάρχουν όμως και διαφωνίες, αλλά και αναπάντητα ερωτήματα. Η βασική διαφωνία έγκειται στην ορολογία που χρησιμοποιείται: εκτός από την έννοια νόρμα (η οποία προέρχεται από την κοινωνιολογία), χρησιμοποιούνται επίσης οι όροι *μετα-κανόνας της συζήτησης* (meta-discursive rule) (Sfard, 2000) και *διδακτικό συμβόλαιο* (didactical contract) (Brousseau, 1997). Οι μετα-κανόνες της συζήτησης είναι «κανόνες που ρυθμίζουν τη ροή των [γλωσσικών] ανταλλαγών» (Sfard, 2000, σ. 161), ενώ σύμφωνα με το διδακτικό συμβόλαιο «ο δάσκαλος γνωρίζει το περιεχόμενο [της διδασκαλίας] και αναμένεται να βοηθήσει το μαθητή να το μάθει» (Herbel-Eisenmann, 2003) ενώ ο μαθητής κατανοεί ότι ο δάσκαλος γνωρίζει αυτό το περιεχόμενο και προσδοκά από αυτόν να το μάθει. Η έννοια του μετα-κανόνα αν και παρουσιάζεται ως μια πιο ευρεία έννοια σε σχέση με τη νόρμα (Sfard, 2000), περιγράφει το ίδιο φάσμα συμπεριφορών. Το διδακτικό συμβόλαιο από την άλλη, αποτελείται από δύο επίπεδα: το πρώτο σχετίζεται με το υφιστάμενο κοινωνικό και μαθηματικό πλαίσιο, ενώ το δεύτερο με τις πρακτικές της τάξης των μαθηματικών – όπως ακριβώς και οι νόρμες. Τα ερωτήματα που έχουν προκύψει από τις υπάρχουσες μελέτες σχετίζονται με την επίδραση των νορμών στη μάθηση και με τη δυνατότητα διδασκαλίας τους. Η Herbel-Eisenmann (2003) σε μια ανασκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας, επισημαίνει τη συμφωνία που συναντάται στις σχετικές έρευνες όσον αφορά την ύπαρξη των νορμών, αλλά και τις διαφωνίες ως προς τη μορφή τους και τον τρόπο επίδρασής τους.[25] Όσον αφορά τη διδασκαλία των νορμών, υπάρχει μια συναίνεση στη χρησιμότητά της, αλλά και μια σχετική επιφυλακτικότητα. Οι Yackel και Cobb αποδεχόμενοι τον κεντρικό ρόλο του δασκάλου γενικά στις διαδικασίες μάθησης, οδηγούνται στο συμπέρασμα ότι αυτός πρέπει να καθοδηγήσει τους μαθητές του ως «αντιπρόσωπος της μαθηματικής κοινότητας» (Yackel and Cobb, 1996, σ. 475). Παραδέχονται όμως ότι σημαντικό ρόλο παίζουν οι γνώσεις και οι αντιλήψεις του ίδιου του δασκάλου, αλλά και ο τρόπος οργάνωσης της διδασκαλίας,[26] προσδίδοντας έτσι περιορισμένη γενικευτική ισχύ στα συμπεράσματά τους. Η Sfard αφού

παρουσιάσει τις προϋποθέσεις για τη διδασκαλία των μετα-κανόνων της συζήτησης, καταλήγει στο ότι:

> ...δεν πρέπει κανείς να ξεχνά ότι οι μοναδικοί κανόνες της μαθηματικής συζήτησης δεν μπορούν ούτε να διδαχτούν με την απλή διατύπωσή τους, ούτε να ξανα-ανακαλυφθούν από τους μαθητές με την εμπλοκή τους στη συζήτηση μαθηματικών προβλημάτων. (Sfard, 2000, σ. 185).

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι ο εντοπισμός των νορμών αποτελεί ένα ακόμη στάδιο στην ανάλυση των αλληλεπιδράσεων που λαμβάνουν χώρα κατά την επίλυση προβλημάτων. Ο βασικός λόγος προέρχεται από το γεγονός ότι οι κοινωνικές και κοινωνικομαθηματικές νόρμες είναι οι «κανόνες» οι οποίοι, χωρίς να επιβάλλονται έξωθεν, μορφοποιούν και μορφοποιούνται από τις συμπεριφορές των εμπλεκομένων, με τρόπο ώστε να προωθούν και – σε σχετικά λίγες περιπτώσεις όπως θα διαπιστώσουμε – να εμποδίζουν τη συγκρότηση κοινής γνώσης.

1.5.2. Θεωρία Ρόλου

Οι κοινωνικές και κοινωνικομαθηματικές νόρμες που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο παρέχουν ένα πλαίσιο μέσα στο οποίο το άτομο μπορεί να οργανώσει τις δράσεις του. Η ανάλυση αυτών των δράσεων αποτελεί αντικείμενο της θεωρίας ρόλου. Η θεωρία ρόλου βασίζεται στις θεωρητικές παραδοχές της θεωρίας της συμβολικής αλληλεπίδρασης και ασχολείται με ένα από τα πιο σημαντικά στοιχεία της κοινωνικής ζωής: τους χαρακτηριστικούς τύπους συμπεριφοράς, ή αλλιώς τους *ρόλους*. Η ανάλυση των ρόλων γίνεται βάσει της υπόθεσης ότι οι άνθρωποι κατέχουν κάποιες *κοινωνικές θέσεις* και τρέφουν κάποιες *προσδοκίες* για τη συμπεριφορά των ίδιων, αλλά και των άλλων. (Biddle, 1986). Πριν προχωρήσουμε σε ένα πιο λεπτομερή ορισμό της έννοιας του ρόλου, θα περιγράψουμε συνοπτικά την πορεία που ακολούθησε το συγκεκριμένο επιστημονικό πεδίο. Θεμελιωτές της θεωρίας είναι, σύμφωνα με τους Thomas and Biddle (1966), οι Mead (1934), Moreno (1934) και Linton (1936). Ο Mead, ανάμεσα σε άλλα θέματα, ασχολήθηκε με το χαρακτήρα της ανθρώπινης συμπεριφοράς ισχυριζόμενος ότι αυτή

> ... υφίσταται και μπορεί να γίνει κατανοητή μόνο μέσα στην κοινωνική διεργασία και σε σχέση με τις κοινωνικές ενέργειες του ατόμου οι οποίες στοχεύουν σε κοινωνικά αντικείμενα και προκαλούν με τη σειρά τους τις ενέργειες άλλων ατόμων. (Reck, 1964, σ. xxv).

Με άλλα λόγια, η διαμόρφωση της συμπεριφοράς (αλλά και του ίδιου του εαυτού) του ατόμου εξαρτάται άμεσα από τη συμπεριφορά των άλλων· πολλές φορές μάλιστα το άτομο φτάνει στο σημείο να υιοθετήσει το ρόλο κάποιου άλλου όχι από μιμητισμό,

αλλά προσπαθώντας να κατανοήσει καλύτερα τις αντιλήψεις και τις προσδοκίες του άλλου. Ο Moreno διέκρινε τρεις κατηγορίες ρόλων:

α) ψυχοσωματικοί ρόλοι (π.χ. αυτός που περπατά, αυτός που τρώει, αυτός που κοιμάται),

β) ψυχοδραματικοί ρόλοι (π.χ. μητέρα, δάσκαλος, χριστιανός) και

γ) κοινωνικοί ρόλοι (*η* μητέρα, *ο* δάσκαλος, *ο* χριστιανός).

Επίσης, συγκρίνοντας την υιοθέτηση ρόλου (role taking) με την ερμηνεία ρόλου (role playing) υποστήριζε ότι:

> Σε αντίθεση με το ερμηνεία ρόλου, η υιοθέτηση ρόλου είναι μία στάση παγιωμένη στη συμπεριφορά του ατόμου. Η ερμηνεία ρόλου είναι μία ενέργεια, ένα αυθόρμητο παίξιμο· η υιοθέτηση ρόλου είναι ένα έτοιμο προϊόν, ένας συντηρημένος ρόλος (role conserve) (Moreno, 1960, σ. 84, όπως αναφέρεται στους Thomas and Biddle, 1966a, σ. 7).

Ο Linton τέλος, επεσήμανε τη στενή σχέση ρόλου και κοινωνικής θέσης (status):

> Στο άτομο ανατίθεται μια κοινωνική θέση, την οποία κατέχει σε σχέση με άλλες θέσεις. Όταν το άτομο εφαρμόζει τα δικαιώματα και τις υποχρεώσεις που απαρτίζουν τη θέση αυτή, τότε εκτελεί ένα ρόλο... Υπάρχει μια σειρά ρόλων οι οποίοι προέρχονται από τις διάφορες θέσεις στις οποίες το άτομο συμμετέχει, αλλά και την ίδια στιγμή, υπάρχει και *ένας ρόλος*, γενικός, ο οποίος αντιπροσωπεύει το άθροισμα αυτών των ρόλων (Linton, 1936, σσ. 113-114, όπως αναφέρεται στους Thomas and Biddle, 1966a, σ. 7).

Η σύγχρονη θεωρία ρόλου εμπεριέχει όλες τις παραπάνω θέσεις, έχοντας δημιουργήσει ένα συμπαγές θεωρητικό υπόβαθρο, το οποίο χωρίς να απαγορεύει κάποια παρέκκλιση, παρέχει στον ερευνητή μια σταθερή θεωρητική βάση. Αυτή η βάση στηρίζεται στις παρακάτω παραδοχές:

α) Κάθε ρόλος «έχει δύο όψεις: μία *κανονιστική* και μία *ερμηνευτική*. Η πρώτη όψη (κανονιστική) συνδέεται με το λεγόμενο *δομολειτουργικό μοντέλο* του συστήματος (Parsons[27]), σύμφωνα με το οποίο η δράση των υποκειμένων (φορέων ρόλων), που δρουν στο πλαίσιο ενός κοινωνικο-πολιτισμικού συστήματος ως φορείς κοινωνικών ρόλων, ρυθμίζεται από τις νόρμες που ισχύουν γενικά στο σύστημα.» (Τσαρδάκης, 1992, σ. 55). Η δεύτερη όψη (ερμηνευτική) συνδέεται με τη θεωρία της συμβολικής αλληλεπίδρασης, σύμφωνα με την οποία

> ... ο φορέας του ρόλου οργανώνει τη δράση του, ενώ αντιλαμβάνεται και ερμηνεύει τις κινήσεις του «απέναντι» (σημαντικοί άλλοι), που λειτουργεί ως δείκτης για τον αμοιβαίο προσδιορισμό του νοήματος της αλληλεπίδρασης» (Τσαρδάκης, 1992, σ. 56).

β) Υπάρχει σαφής διαφοροποίηση ανάμεσα στον ορισμό και στην ερμηνεία του ρόλου· το άτομο, όντας περιορισμένο από τις νόρμες συμπεριφοράς αλλά και το γενικότερο πλαίσιο κοινωνικών προσδοκιών και κανόνων,

... συμμετέχει στην κοινωνική αλληλεπίδραση όχι απλά «εκτελώντας» το ρόλο του με βάση ορισμένους προσδιορισμούς, αλλά ερμηνεύοντας και διαμορφώνοντας, ως ένα σημείο, το ρόλο του με βάση τους προσανατολισμούς που σχετίζονται με την περίσταση στην οποία εκδηλώνεται η αλληλεπίδραση. (Κωνσταντίνου, 1997, σ. 33).

Με άλλα λόγια, το άτομο οδηγείται σε μία *μοναδική* ερμηνεία του ρόλου του, εφαρμόζοντας διάφορες πρακτικές, όπως για παράδειγμα την απόσταση από το ρόλο, την οποία θα αναπτύξουμε σε επόμενη παράγραφο.

γ) Με την ερμηνεία του ρόλου του, το άτομο προσβλέπει κυρίως στη διατήρηση του *προσώπου* του και, κατά δεύτερο λόγο, στην πραγματοποίηση άλλων – επικοινωνιακών ή προσωπικών – επιδιώξεων. Η έννοια του προσώπου, αποτελεί μία εξέλιξη της έννοιας του (κοινωνικού) εαυτού και ορίζεται ως «η θετική κοινωνική αξία, την οποία το άτομο διεκδικεί αποτελεσματικά για τον εαυτό του, με τη γραμμή που οι άλλοι υποθέτουν ότι έχει ακολουθήσει» (Goffman, 1972, σ. 5). Κάθε ενέργεια μπορεί να ταξινομηθεί σε σχέση με την επίπτωση που έχει στο πρόσωπο του ενεργούντος ή αυτού που δέχεται την ενέργεια.

Οι παραπάνω επισημάνσεις μας οδηγούν σε ένα συνδυαστικό ορισμό του ρόλου, ο οποίος μπορεί να οριστεί ως *το σύνολο των συμπεριφορών ενός ατόμου, το οποίο όντας κάτοχος μιας κοινωνικής θέσης και λαμβάνοντας υπόψη τις σχετικές νόρμες, ερμηνεύει την περίσταση στην οποία συμμετέχει και ενεργεί με γνώμονα καταρχήν τη διατήρηση του προσώπου του και στη συνέχεια την ομαλή διεξαγωγή της αλληλεπίδρασης.*

Η έννοια του ρόλου είναι πολύ ευρεία, επομένως για την αποτελεσματική της ανάλυση είναι απαραίτητες και άλλες υπο-έννοιες. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τις βασικότερες από αυτές, οι οποίες θα μας οδηγήσουν σε μια πιο λειτουργική (από μεθοδολογικής άποψης) περιγραφή της έννοιας του ρόλου.

1.5.2.1. Βασικές Έννοιες

Αρχικά θα παρουσιάσουμε τις έννοιες που χρησιμοποιούνται για την ταξινόμηση των *ατόμων*, της *συμπεριφοράς* και της *συμπεριφοράς των ατόμων*· η ταξινόμηση αυτή θα μας οδηγήσει στις σημαντικότερες έννοιες της θεωρίας ρόλου.

Τα άτομα διακρίνονται καταρχήν στα υποκείμενα και τα μη-υποκείμενα, δηλαδή σε αυτούς που αποτελούν ή όχι αντικείμενο μελέτης. Τα υποκείμενα διακρίνονται σε δρώντες (behavers) και δέκτες (targets),[28] ενώ τα μη-υποκείμενα είναι οι εκάστοτε παρατηρητές ή οποιοσδήποτε άλλος δεν συμμετέχει στην αλληλεπίδραση. Τέλος,

μπορεί να υπάρξει διάκριση βάσει της συμπεριφοράς, της κοινωνικής θέσης ή του σχήματος ego-alter.[29] Οι παραπάνω διακρίσεις παρουσιάζονται συνοπτικά στο παρακάτω σχήμα και στο παράδειγμα που ακολουθεί:

Υποκείμενα → δρώντες, δέκτες

Μη υποκείμενα → παρατηρητές, άλλοι

Σχήμα 1.1. Πρώτη διάκριση ατόμων

Δεύτερη διάκριση ατόμων:

α. βάσει συμπεριφοράς (π.χ. ο λύτης προβλημάτων)

β. βάσει κοινωνικής θέσης (π.χ. ο φοιτητής)

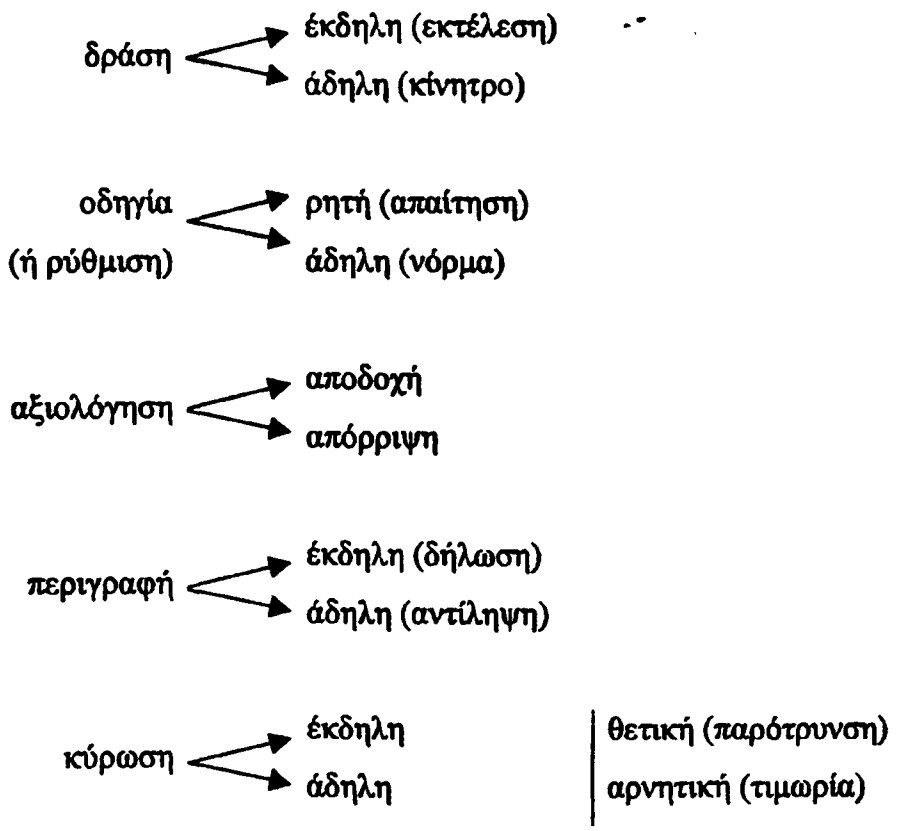
γ. βάσει προσώπου (εγώ – ο άλλος)

Η συμπεριφορά μπορεί να ταξινομηθεί σύμφωνα με τους Thomas and Biddle (1966b) σε: *δράση* (action), *οδηγία (ή ρύθμιση)* (prescription), *αξιολόγηση* (evaluation), *περιγραφή* (description) και *κύρωση ή επίπτωση* (sanction). Τα χαρακτηριστικά της δράσης είναι «το ότι έχει μαθευτεί από πριν, γίνεται για ένα σκοπό και είναι καθαρά εθελοντική.» (Thomas and Biddle, 1966b, σ. 26). Η δράση μπορεί να είναι έκδηλη (overt), οπότε χρησιμοποιείται και ο όρος *επιτέλεση (ερμηνεία)* (performance), ή άδηλη (covert), να αναφέρεται δηλαδή σε κίνητρα ή επιθυμίες για την πραγματοποίηση μιας δράσης, οπότε χρησιμοποιείται και ο όρος *κίνητρο*. Η οδηγία (ή ρύθμιση) αναφέρεται στη συμπεριφορά «που «πρέπει» ή «θα έπρεπε» να λάβει χώρα» (Thomas and Biddle, 1966b, σ. 26). Διακρίνεται σε ρητή, οπότε χρησιμοποιείται ο όρος *απαίτηση* (demand) και άδηλη, οπότε χρησιμοποιείται ο όρος *νόρμα*. Η συμπεριφορά που ανήκει στην κατηγορία της αξιολόγησης σχετίζεται κυρίως με αποδοχή ή απόρριψη. Η περιγραφή αφορά τη συμπεριφορά ατόμων που αναπαριστούν γεγονότα, χωρίς διάθεση αξιολόγησης ή οποιασδήποτε επίδρασης. Διακρίνεται σε έκδηλη, ή αλλιώς *δήλωση* και άδηλη, ή αλλιώς *αντίληψη*. Η κύρωση περιγράφει τη συμπεριφορά που επιδιώκει την αλλαγή μιας άλλης συμπεριφοράς, συνήθως προς την κατεύθυνση μεγαλύτερης συμμόρφωσης σε υπάρχουσες οδηγίες.

Διακρίνεται σε έκδηλη και άδηλη, αλλά επιπλέον σε θετική ή αρνητική: η θετική περιλαμβάνει παρότρυνση για την επιθυμητή συμπεριφορά και η αρνητική περιλαμβάνει τιμωρία για την αποτυχία έκφρασης της επιθυμητής συμπεριφοράς.[30] Η ανεξαρτησία των παραπάνω κατηγοριών δεν θεωρείται δεδομένη· οι Thomas and Biddle παρατηρούν ότι:

> ... οι κατηγορίες αυτές δεν είναι εντελώς ανεξάρτητες μεταξύ τους. Μόνο τρεις – η οδηγία (ή ρύθμιση), η αξιολόγηση και η περιγραφή – είναι αποκλειστικές (exclusive)· μία μη διφορούμενη συμπεριφορά που ανήκει σε κάποια από αυτές, δεν μπορεί να ταξινομηθεί συγχρόνως σε κάποια άλλη. Μία συμπεριφορά που ανήκει όμως σε οποιαδήποτε κατηγορία, μπορεί να ταξινομηθεί ως δράση, αλλά και μία δράση μπορεί να ταξινομηθεί ως οδηγία (ή ρύθμιση), περιγραφή ή αξιολόγηση. Οι κυρώσεις τέλος, μπορούν να αποτελούνται από οποιαδήποτε άλλη κατηγορία συμπεριφορών, δεδομένου ότι σκοπός του δρώντα είναι να επηρεάσει το δέκτη. (Thomas and Biddle, 1966b, σ. 28)

Η ταξινόμηση παρουσιάζεται συνοπτικά στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 1.2. Διάκριση συμπεριφορών

Τέλος, θα περιγράψουμε δύο έννοιες που χρησιμοποιούνται στην ταξινόμηση της συμπεριφοράς των ατόμων. Η πρώτη είναι η έννοια της *θέσης*, η οποία ορίζεται ως μια «συλλογικά αναγνωρισμένη κατηγορία ατόμων, των οποίων ο διαχωρισμός βασίζεται στα κοινά τους χαρακτηριστικά, στην κοινή τους συμπεριφορά ή στις

κοινές αντιδράσεις των άλλων απέναντι σε αυτά.» (Thomas and Biddle, 1966b, σ. 29). Και φτάνουμε στην κεντρική ίσως έννοια, αυτή του *ρόλου*, δηλαδή την «ενεργοποίηση των δικαιωμάτων και των υποχρεώσεων που σχετίζονται με μία δεδομένη θέση» (Goffman, 1971, σ. 27). Η ταύτιση ρόλου-θέσης[31] που ακολουθείται από πολλούς ερευνητές, περιορίζει το εύρος της έννοιας, αφού δεν σχετίζονται όλοι οι ρόλοι με συγκεκριμένες θέσεις. Γι' αυτό το λόγο, οι Thomas and Biddle (1966b) προτείνουν, για μεθοδολογικούς κυρίως λόγους, την ανάλυση της έννοιας του ρόλου ως εξής: κάθε ρόλος μπορεί να περιγραφεί επαρκώς συνδυάζοντας τις προαναφερθείσες κατηγορίες. Για παράδειγμα, ένας ρόλος μπορεί να αφορά στην έκδηλη δράση του ατόμου που ενεργεί, ενώ κάποιος άλλος μπορεί να σχετίζεται με την άδηλη περιγραφή.

Είναι σαφές ότι τα φαινόμενα που σχετίζονται με τους ρόλους είναι αρκετά πολύπλοκα ώστε να μπορούν να περιγραφούν μόνο με τη χρήση των παραπάνω εννοιών. Ειδικότερα, στα πλαίσια της θεωρίας της συμβολικής αλληλεπίδρασης, όπου υπάρχει μια συνεχής αλληλεξάρτηση των ενεργειών των ατόμων, προκύπτει η ανάγκη χρήσης εννοιών *συσχέτισης* των συμπεριφορών.[32] Δύο βασικά κριτήρια χρησιμοποιούνται στην ομαδοποίηση αυτών των εννοιών (Thomas and Biddle, 1966b, σ. 32): το κριτήριο της *ομοιότητας* (similarity) και το κριτήριο του *καθορισμού* (determination). Όσον αφορά το πρώτο κριτήριο, συναντούμε τις έννοιες της διαφοροποίησης (differentiation), της ομοφωνίας (consensus), της ομοιομορφίας (uniformity), της εξειδίκευσης (specialization) και της συνάφειας (consistency). Όσον αφορά το δεύτερο κριτήριο, συναντούμε την έννοια της αλληλεξάρτησης (interdependence). Τέλος, υπάρχουν και τρεις έννοιες που ανήκουν και στα δύο παραπάνω κριτήρια· πρόκειται για τις έννοιες της *συμμόρφωσης* (conformity), της *προσαρμογής* (adjustment) και της *ακρίβειας* (accuracy). Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τις παραπάνω έννοιες, των οποίων η χρησιμότητα θα γίνει εμφανής στο κεφάλαιο της ανάλυσης των δεδομένων.[33]

α) Δύο ή περισσότερα στοιχεία συμπεριφοράς θεωρούνται διαφοροποιημένα αν είναι διακριτά διαφορετικά. Ένα άτομο μπορεί να τηρεί διαφορετικές νόρμες για τον εαυτό του σε σχέση με αυτές που τηρεί για τους άλλους· οι διαφορές μπορεί να σχετίζονται με τις αντιλήψεις, τις αξιολογήσεις, τις τάσεις του για δράση ή τις άδηλες κυρώσεις. (Thomas and Biddle, 1966b, σ. 32)

β) Η ομοφωνία καθορίζεται από το βαθμό συμφωνίας πάνω σε ένα συγκεκριμένο θέμα· επομένως ομοφωνία μπορεί να υπάρξει μόνο όσον αφορά μια οδηγία (ή ρύθμιση), μια αξιολόγηση, μια περιγραφή ή μια κύρωση.

γ) Η ομοιομορφία αναφέρεται στο βαθμό ομοιότητας που υπάρχει ανάμεσα στις δράσεις δύο ή περισσοτέρων ατόμων, αποτελεί δηλαδή το αντίστοιχο της ομοφωνίας όσον αφορά τη δράση.

δ) Η εξειδίκευση αναφέρεται στο πλήθος των διαφοροποιημένων συμπεριφορών ενός ατόμου, που σχετίζονται με ένα συγκεκριμένο πεδίο συμπεριφοράς.[34]

ε) Δύο συμπεριφορές θεωρούνται συναφείς αν η ύπαρξη της μίας είναι συμβατή με την ύπαρξη της άλλης. Υπάρχουν δύο είδη μη-συμβατότητας: η λογική (η οποία περιλαμβάνει την πραγματοποίηση από το ίδιο άτομο δύο ανόμοιων ενεργειών) και η γνωστική (κατά την οποία η πραγματοποίηση της μίας ενέργειας προϋποθέτει ένα γεγονός το οποίο αρνείται η άλλη ενέργεια).[35]

στ) Όλες οι περιπτώσεις αλληλεξάρτησης περιλαμβάνουν μια αιτιολογική σχέση ανάμεσα σε συμπεριφορές· αυτή η σχέση μπορεί να πάρει δύο μορφές: αυτή της διευκόλυνσης-παρεμπόδισης (facilitation-hindrance) και αυτή της ανταμοιβής-κόστους (reward-cost).

ζ) Η συμμόρφωση εμφανίζεται πάντα σε σχέση με κάποια οδηγία (απαίτηση ή νόρμα) η οποία μπορεί να προέρχεται από το ίδιο το άτομο ή από κάποιον άλλο. Στην περίπτωση που υπάρχει διένεξη μεταξύ δύο ανταγωνιστικών οδηγιών, το άτομο έχει τη δυνατότητα: να επιλέξει μία εκ των δύο, να ενεργήσει με τρόπο που να ακολουθεί μερικώς και τις δύο ή να απορρίψει και τις δύο οδηγίες.

η) Η προσαρμογή αναφέρεται στη διαδικασία κατά την οποία μία ενέργεια είναι ικανή να διαμορφώσει έστω και σε ένα βαθμό μια οδηγία.

θ) Η ακρίβεια αναφέρεται στη διαδικασία σύγκρισης ενός πραγματικού γεγονότος και της περιγραφής του.

Οι ορισμοί που έχουμε παραθέσει αφορούν όχι μόνο την έννοια του ρόλου, αλλά και έννοιες που σχετίζονται με αυτήν. Η ανάλυση των ρόλων δεν πραγματοποιείται όμως απλά με τη χρήση των παραπάνω εννοιών· στην ανάλυση αυτή λαμβάνονται υπόψη και κάποια θεωρητικά μοντέλα, μέσω των οποίων αντιμετωπίζεται συνολικά το φαινόμενο της ερμηνείας του ρόλου. Τα σημαντικότερα από αυτά τα μοντέλα παρουσιάζονται στις παραγράφους που ακολουθούν.

1.5.2.2. Το Δραματουργικό Μοντέλο Ρόλου

Η θεωρία ρόλου γενικά οφείλει ένα μεγάλο μέρος της ορολογίας της στο χώρο του θεάτρου: η βασική της έννοια (ο ρόλος), αλλά και άλλες έννοιες[36] παραπέμπουν σε μια θεατρική σκηνή με τον τρόπο που περιγράφουν εύγλωττα οι Thomas and Biddle:

> Η εκτέλεση του ρόλου του ατόμου στην κοινωνία καθορίζεται από κοινωνικές νόρμες, απαιτήσεις και κανόνες· επίσης καθορίζεται από την εκτέλεση των ρόλων άλλων ατόμων, από εκείνους που παρατηρούν και αντιδρούν σε αυτή την εκτέλεση· και από τις ικανότητες και την προσωπικότητα του ατόμου. Το κοινωνικό «σενάριο» μπορεί να είναι τόσο περιοριστικό όσο αυτό ενός θεατρικού έργου, συνήθως όμως αφήνει περισσότερες επιλογές· ο «σκηνοθέτης» είναι παρών στη ζωή ως ο επιβλέπων, ο γονέας, ο δάσκαλος ή ο προπονητής· το «κοινό» αποτελείται από όλους όσους παρατηρούν τη συμπεριφορά του ατόμου· η εκτέλεση του ρόλου αποδίδεται στην εξοικείωσή του με το ρόλο, στην προσωπικότητα αλλά και στην προσωπική του ιστορία γενικότερα, και κυρίως στο «σενάριο» το οποίο καθορίζεται από άλλους με πολλούς τρόπους. (Thomas and Biddle, 1966a, σ. 4).

Ο Goffman στο έργο του *The Presentation of Self in Everyday Life* (1971) ασχολήθηκε συστηματικά με όλες τις πτυχές της συμπεριφοράς και της αλληλεπίδρασης του ατόμου με άλλα άτομα, και θεωρείται ο βασικός εκφραστής του λεγόμενου δραματουργικού μοντέλου (dramaturgical model). Σύμφωνα με τον Goffman λοιπόν, το άτομο όταν βρεθεί ενώπιον άλλων, πρέπει καταρχήν να προχωρήσει στον ορισμό της περίστασης· αυτός ο ορισμός είναι απαραίτητος στον καθορισμό της συμπεριφοράς του, και γίνεται σε δύο στάδια: στο πρώτο στάδιο (προ)υπάρχει μια πληροφόρηση που αφορά το άτομο, αλλά και τους άλλους. Αυτή η πληροφόρηση μπορεί να προέλθει από εξωτερικά γνωρίσματα όπως η εθνικότητα, το φύλο, η ενδυμασία και οι κινήσεις του ατόμου· επίσης μπορεί να προέλθει και από τη συμπεριφορά: σε αυτό το σημείο έγκειται η ικανότητα του ατόμου να επηρεάσει την εντύπωση που σχηματίζουν οι άλλοι γι' αυτόν.[37] Οδηγούμαστε έτσι στο δεύτερο στάδιο του ορισμού της περίστασης: το άτομο και το «κοινό» (ή αλλιώς όλοι όσοι συμμετέχουν στην αλληλεπίδραση) οικοδομούν ένα *από κοινού* ορισμό της περίστασης, δηλαδή μια συμφωνία ως προς τα θέματα που θεωρούνται σημαντικά, αλλά και ως προς αυτά που πρέπει να αποφευχθούν. Κατά τη διάρκεια αυτής της διαδικασίας οι συμμετέχοντες προσπαθούν – ο καθένας για τους δικούς του λόγους – να επηρεάσουν ο ένας τον άλλο:

> Κάποιες φορές το άτομο ενεργεί με εντελώς υπολογιστικό (ωφελιμιστικό) τρόπο, επιδιώκοντας με τη έκφρασή του να δώσει στους άλλους την εντύπωση που θα τους οδηγήσει στην απάντηση που ο ίδιος επιθυμεί. Κάποιες φορές το άτομο ενεργεί υπολογιστικά (ωφελιμιστικά), χωρίς να έχει πλήρη συνείδηση αυτού του γεγονότος. Κάποιες φορές εκφράζεται σκόπιμα και συνειδητά

με συγκεκριμένο τρόπο εξαιτίας κάποιας παράδοσης της ομάδας του ή της κοινωνικής του θέσης... Οι άλλοι, με τη σειρά τους, μπορεί να δημιουργήσουν τις εντυπώσεις που προσπάθησε το άτομο να μεταδώσει, ή μπορεί να παρανοήσουν την κατάσταση και να οδηγηθούν σε συμπεράσματα που δεν βασίζονται ούτε στις προθέσεις του ατόμου ούτε στα ίδια τα γεγονότα. (Goffman, 1971, σσ. 17-18).

Αυτή η «παράσταση»[38] που «στήνει» το άτομο αποτελείται λοιπόν από τρία βασικά στοιχεία: το σκηνικό (setting), την προσωπική έκφραση του ατόμου (η οποία με τη σειρά της αποτελείται από την εμφάνιση και τις ενέργειες του ατόμου) και το κοινό που παρακολουθεί την παράσταση. Συνήθως το σκηνικό αποτελεί σταθερό στοιχείο, το οποίο μπορεί να δεχτεί ελάχιστες μεταβολές. Η προσωπική έκφραση αφήνει κάποια περιθώρια επιλογής στο άτομο,[39] επιτρέποντάς του να επηρεάσει προς όφελός του τον ορισμό της περίστασης. Το κοινό τέλος, αποτελούμενο και αυτό από άτομα, δέχεται την επίδραση της παράστασης και προσπαθεί με τη σειρά του να συμβάλει στον ορισμό της περίστασης.

Ένα από τα προβλήματα που αντιμετωπίζει κανείς είναι το δίλημμα έκφρασης-δράσης: «Όσοι έχουν το χρόνο και την ικανότητα να πραγματοποιήσουν μια δραστηριότητα μπορεί, εξαιτίας αυτού, να μην έχουν το χρόνο ή την ικανότητα να το καταδείξουν» (Goffman, 1971, σ. 43).

Ένα άλλο πρόβλημα είναι αυτό της επιλογής: το άτομο πρέπει, κατά τη διάρκεια της ερμηνείας του, να επιλέξει εκείνα τα χαρακτηριστικά του θα τονίσει και εκείνα που θα αποσιωπήσει. Αυτή η επιλογή μπορεί να γίνει βάσει δύο κριτηρίων: της σημασίας που έχουν για τον ορισμό της περίστασης τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά και της δυνατότητας που θεωρεί ότι έχει να τα εκφράσει ή να τα αποκρύψει.

Άλλα προβλήματα που προκύπτουν σχετίζονται με περιστατικά που αναδεικνύουν στοιχεία ασύμβατα με τον ορισμό της περίστασης που προωθεί το άτομο· αυτά τα περιστατικά μπορεί να είναι τυχαία ή να είναι αποτέλεσμα ενεργειών του ατόμου ή κάποιου άλλου. Σε αυτή την περίπτωση, το άτομο προσπαθεί να επαναφέρει τον υπάρχοντα ορισμό της περίστασης με όσο το δυνατόν μικρότερο προσωπικό κόστος.

Από τα παραπάνω γίνεται σαφές ότι το δραματουργικό μοντέλο, αν και έχει ως αφετηρία το χώρο του θεάτρου, επεκτείνεται και πέρα από αυτό για να καλύψει επαρκώς όλες τις πτυχές της αλληλεπίδρασης δύο η περισσότερων ατόμων. Η ταύτιση της ζωής με το θέατρο αποτελεί επομένως μία ακραία πρακτική, με την οποία διαφοροποιήθηκε και ο ίδιος ο Goffman:

Ο χαρακτήρας που παρουσιάζεται στο θέατρο δεν είναι πραγματικός, ούτε έχει τις ίδιες συνέπειες με αυτόν που παρουσιάζεται με αριστοτεχνικό και επιμελή τρόπο από έναν άνθρωπο

με αυτοπεποίθηση· όμως η *επιτυχημένη* ερμηνεία καθενός από αυτούς τους τύπους ψευδών εικόνων περιλαμβάνει τη χρήση *πραγματικών* τεχνικών – τις ίδιες τεχνικές με τις οποίες οι καθημερινοί άνθρωποι συντηρούν τις πραγματικές κοινωνικές περιστάσεις τους. Όσοι εμπλέκονται σε μία επί σκηνής πρόσωπο με πρόσωπο αλληλεπίδραση πρέπει να τηρήσουν τη βασική προϋπόθεση των πραγματικών περιστάσεων: τη σαφή διατήρηση του ορισμού της περίστασης... (Goffman, 1971, σσ. 246-247).

1.5.2.3. Το Παιγνιώδες Μοντέλο Ρόλου

Το δραματουργικό μοντέλο αν και αποτελεί τη βάση κάθε μελέτης της θεωρίας ρόλου, δεν επαρκεί για να περιγράψει τις περιστάσεις κατά τις οποίες δύο ή περισσότερα άτομα συνευρίσκονται για την επιτέλεση κάποιου *παιχνιδιού*.[40] Ο Goffman (1996) πριν προχωρήσει στα χαρακτηριστικά των παιχνιδιών, κάνει ένα διαχωρισμό ανάμεσα στις ομάδες και την *εστιασμένη αλληλεπίδραση ή συνάθροιση*, ξεκινώντας από τη μοναδική τους ομοιότητα, η οποία έγκειται στην ύπαρξη κανόνων ένταξης και καταμερισμού εργασίας· η βασική διαφορά τους τοποθετείται στις ιδιότητες που ενδιαφέρεται να μελετήσει κανείς στην περίπτωση της εστιασμένης συνάθροισης:

Παραδείγματα τέτοιων ιδιοτήτων είναι η αμηχανία, η διατήρηση της αυτοκυριαρχίας, η ικανότητα για απερίσπαστη προφορική επικοινωνία, η τήρηση ενός κώδικα που αφορά την παραχώρηση και την ανάληψη του ρόλου του ομιλητή και η κατανομή θέσεων στο χώρο. Επιπλέον, ένα σημαντικό χαρακτηριστικό των εστιασμένων συναθροίσεων – διατήρηση της αδιάκοπης προσήλωσης του μετέχοντα στο αναγνωρισμένο επίκεντρο της δραστηριότητας – δεν αποτελεί ιδιότητα των κοινωνικών ομάδων γενικά, γιατί οι περισσότερες ομάδες, σε αντίθεση με τις συναντήσεις, εξακολουθούν να υφίστανται ανεξάρτητα από τις περιστάσεις στις οποίες τα μέλη είναι φυσικά παρόντα. Η συνεύρεση μπορεί να αποτελεί μόνο μια φάση στη ζωή της ομάδας· από την άλλη πλευρά, η αποχώρηση σημαίνει το τέλος μιας συγκεκριμένης συνάντησης, ακόμα και όταν το ίδιο πρότυπο αλληλεπίδρασης και οι ίδιοι μετέχοντες εμφανίζονται σε μια μελλοντική συνάντηση. (Goffman, 1996, σ. 67)

Θεωρώντας τις παιγνιώδεις συναντήσεις[41] ένα είδος εστιασμένης αλληλεπίδρασης, μπορούμε να επισημάνουμε τα βασικά χαρακτηριστικά τους, αλλά και τις προεκτάσεις τους στην καθημερινή ζωή. Για το σύνολο των γεγονότων που λαμβάνουν χώρα στα πλαίσια ενός παιχνιδιού, υπάρχει ένα συγκεκριμένο φάσμα συμβάντων και ρόλων (οι λεγόμενοι *πραγματοποιημένοι πόροι*[42]), στο οποίο κινούνται οι μετέχοντες, όπως συμβαίνει άλλωστε και στις καθημερινές συναντήσεις. Επίσης, υπάρχει και ένα σύνολο *κανόνων μετασχηματισμού*, οι οποίοι περικλείουν τη συνάντηση με ένα είδος μεμβράνης, καθορίζοντας ποια περιστατικά επιτρέπεται να

παρεισφρήσουν στη συνάντηση (κανόνες συνάφειας) και ποια όχι (κανόνες ασυνάφειας[43]). Η *κίνηση* που θα πραγματοποιήσει ένας παίκτης – η οποία επιλέγεται από το σύνολο των πραγματοποιημένων πόρων εξαρτάται από τις κινήσεις που έχουν προηγηθεί και επηρεάζει με τη σειρά της τις κινήσεις που θα ακολουθήσουν.

> Έτσι η έννοια της αλληλεπίδρασης μετασχηματίζεται: αντί να αναφέρεται σε μια αμοιβαία επιρροή που ενδέχεται να είναι δευτερεύουσα και ασήμαντη, αναφέρεται τώρα σε μια εξαιρετικά δομημένη μορφή αλληλένδετης μοιραίας έκβασης. (Goffman, 1996, σσ. 103-104).

Όταν ένα άτομο *εμπλέκεται αυθόρμητα* σε ένα παιχνίδι σε τέτοιο βαθμό ώστε να απορροφηθεί από αυτό επιτυγχάνει τρεις σκοπούς:

- πληροφορεί τους υπόλοιπους ποιος είναι και ποιες είναι οι προθέσεις του, αυξάνοντας την ασφάλεια των άλλων παρευρισκομένων,
- οδηγεί τους μετέχοντες σ' ένα είδος αποκλειστικής αλληλεγγύης και
- επιβεβαιώνει την πραγματικότητα του κόσμου που προδιαγράφεται από τους κανόνες μετασχηματισμού και το εξωπραγματικό άλλων ενδεχόμενων κόσμων (Goffman, 1996, σ. 110).

Φυσικά, σε κάποιες περιπτώσεις προκύπτει ασυμφωνία ανάμεσα στην πραγματικότητα του παιχνιδιού και στην πραγματικότητα του κόσμου που ζει ο παίκτης· αυτή η ασυμφωνία οδηγεί σε *ένταση* ή *δυσφορία*.[44] Η μη αποτελεσματική διαχείριση της έντασης οδηγεί σε κλιμάκωσή της, η οποία μπορεί να κορυφωθεί με τη μορφή ενός ξεσπάσματος κάποιου από τους μετέχοντες: «Ένα συνηθισμένο παράδειγμα «ξεσπάσματος» προκύπτει όταν καταλαβαίνει κανείς πως δεν μπορεί πια να μείνει σοβαρός και σκάει στα γέλια.» (Goffman, 1996, σ. 133). Μία ακόμη περίπτωση μη-προσήλωσης στην κυρίαρχη δραστηριότητα συνιστά η εμπλοκή μερικών (ή και όλων των μετεχόντων) σε μία άλλη, παράλληλη δραστηριότητα.

Τα δύο μοντέλα που έχουμε αναφέρει χρησιμοποιούμενα *συμπληρωματικά* είναι ικανά να ερμηνεύσουν το μεγαλύτερο μέρος των συμπεριφορών των μετεχόντων σε μια αλληλεπίδραση. Παρ' όλα αυτά, σε κάποιες περιπτώσεις, παρατηρούνται συμπεριφορές που δεν μπορούν να ερμηνευθούν βάσει αυτών των μοντέλων· η επόμενη παράγραφος περιγράφει το πλαίσιο εντός του οποίου μπορούν να ερμηνευθούν τέτοιες περιπτώσεις *αποστασιοποίησης* από το ρόλο.

1.5.2.4. Εντοπισμένος Ρόλος και η Απόσταση από το Ρόλο

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, υπάρχει διαχωρισμός ανάμεσα στο ρόλο και στην ερμηνεία του:

> Ο *ρόλος* συνίσταται στη δραστηριότητα που θα ανελάμβανε ο κάτοχος της θέσης,[45] αν επρόκειτο να δράσει αποκλειστικά και μόνο σύμφωνα με τις κανονιστικές απαιτήσεις που εγείρονται απέναντι σε όποιον κατέχει αυτή τη θέση. Ο ρόλος με αυτή την κανονιστική έννοια πρέπει να διακρίνεται από την *ερμηνεία του ρόλου* ή την επιτέλεσή του, που είναι η πραγματική συμπεριφορά ενός συγκεκριμένου ατόμου ενόσω πληροί αυτή τη θέση. (Goffman, 1996, σ. 171).

Κατά την ερμηνεία του ρόλου του το άτομο πρέπει να αναδείξει τα προσωπικά του χαρακτηριστικά που συνδέονται με τη θέση του, επιδιώκοντας συγχρόνως στη διατήρηση του προσώπου του. Όμως η σχέση ρόλου και ερμηνείας του δεν είναι μονοδιάστατη: το άτομο εμπλέκεται σε περισσότερους του ενός ρόλους, τίθεται επομένως το πρόβλημα της επιλογής ή του συνδυασμού αυτών.[46] Ένας φοιτητής για παράδειγμα είναι συγχρόνως και αγόρι, γιος, αδερφός και πολλά ακόμη. Μια άλλη παράμετρος είναι η αλληλεπίδραση του ατόμου με άλλα άτομα κατά τη διάρκεια μιας συλλογικής δραστηριότητας· αντί λοιπόν να μελετούμε το ρόλο ή την ερμηνεία ενός ρόλου στα πλαίσια της θέσης ενός ατόμου, είναι πιο χρήσιμο (όσον αφορά τη δική μας έρευνα) να μελετήσουμε τον *εντοπισμένο ρόλο* κάθε ατόμου, δηλαδή τη «δεσμίδα δραστηριοτήτων που εκτελούνται φανερά, μπροστά σε μια ομάδα άλλων και διαπλέκεται φανερά με τη δραστηριότητα που αυτοί οι άλλοι εκτελούν.» (Goffman, 1996, σ. 188). Σε σχέση με τον εντοπισμένο ρόλο μπορεί να κάνει κανείς τις εξής γενικές παρατηρήσεις:

- «το άτομο δεν μπορεί να ελέγχει απολύτως τη ροή των συμβάντων σε μια κοινωνική περίσταση, και ως εκ τούτου, δεν μπορεί να ελέγχει απολύτως τις πληροφορίες για τον εαυτό του που διαρρέουν σ' αυτή» (Goffman, 1996, σ. 198);
- το άτομο δεν παραμένει παθητικό μπροστά στις ενδεχόμενες σημασίες που προκύπτουν σε σχέση με αυτό, αλλά υποστηρίζει τον ορισμό της περίστασης που είναι σύμφωνος με την εικόνα που έχει ο ίδιος για τον εαυτό του,[47]
- το άτομο μπορεί να απομακρυνθεί (για ένα μικρό συνήθως χρονικό διάστημα) από τον επιβεβλημένο από την περίσταση ρόλο, οδηγούμενος στη λεγόμενη *απόσταση από το ρόλο*.[48]

Η απόσταση από το ρόλο εκφράζει με τον πιο εύγλωττο τρόπο την πολλαπλότητα των ρόλων με την οποία έρχεται αντιμέτωπο το άτομο σε κάθε κοινωνική περίσταση, αλλά και τους τρόπους διαχείρισής της.

1.6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η παράθεση του θεωρητικού πλαισίου μας οδηγεί σε κάποια συμπεράσματα που αφορούν τις θεωρητικές παραδοχές στις οποίες μπορεί να στηριχθεί η ανάλυση κάθε εστιασμένης αλληλεπίδρασης και ειδικότερα της αλληλεπίδρασης που αφορά τη συνεργατική επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Συνοπτικά, μπορούμε να αναφέρουμε τα εξής:

- Η συμβολική αλληλεπίδραση (η οποία πραγματοποιείται μέσω της γλώσσας αλλά και άλλων μη γλωσσικών συμβόλων) αποτελεί τη βασική μονάδα ανάλυσης, με επίκεντρο τις γλωσσικές ανταλλαγές.
- Η ανάλυση των γλωσσικών ανταλλαγών γίνεται βάσει δύο αλληλο-συμπληρούμενων παραδοχών: ότι η γλώσσα είναι ένας κώδικας συμβόλων (δομική προσέγγιση), που αντανακλά το κοινωνικο-πολιτιστικο-ιστορικό πλαίσιο και συγχρόνως είναι φορέας των πράξεων και των προθέσεων των ομιλητών (λειτουργική προσέγγιση). Οδηγούμαστε έτσι σε μία συνδυαστική προσέγγιση, η οποία περιέχει δύο είδη αναλύσεων: μία δομική, κατά την οποία αντιμετωπίζουμε τις εκφράσεις ως φορείς περιεχομένου και μία λειτουργική, κατά την οποία οι εκφράσεις αντιμετωπίζονται ως φορείς ενεργειών.
- Οι συμμετέχοντες στην αλληλεπίδραση εμπλέκονται σε μία διαρκή διαδικασία δράσης – ερμηνείας – επαναπροσδιορισμού της δράσης· αυτή η διαδικασία οδηγεί σε κάποιες περιπτώσεις στη δημιουργία κοινής γνώσης. Η κοινή γνώση δεν αποτελεί μετρήσιμη ποσότητα, αλλά μπορεί να εντοπιστεί σε συγκεκριμένες γλωσσικές ανταλλαγές.
- Η προηγούμενη διαδικασία καθορίζεται από το κοινωνικό πλαίσιο της περίστασης – το οποίο αποτελείται από στατικά αλλά και δυναμικά στοιχεία – και από τις ερμηνείες των ρόλων των μετεχόντων. Βασικό στοιχείο του πλαισίου αποτελούν οι νόρμες οι οποίες οριοθετούν τις συμπεριφορές των μετεχόντων, προσδίδοντάς τους μια συνεργατική (κοινωνικές νόρμες), αλλά και μια μαθηματική (κοινωνικομαθηματικές νόρμες) φύση.

- Βασική επιδίωξη των μετεχόντων μιας αλληλεπίδρασης είναι η διατήρηση του προσώπου τους και πάνω σε αυτό στηρίζεται η ερμηνεία των ρόλων τους. Σε αρκετές περιπτώσεις παρατηρείται αποστασιοποίηση από τους ρόλους, η οποία λειτουργεί κυρίως ως μέσο εκτόνωσης της έντασης.

Είναι σαφές από τα παραπάνω ότι, έχοντας ως επίκεντρο τη συγκρότηση κοινής γνώσης, τρεις είναι οι βασικοί παράγοντες που την επηρεάζουν: *η γλώσσα που χρησιμοποιείται στην αλληλεπίδραση, οι νόρμες που οριοθετούν το πλαίσιο της περίστασης* και *η ερμηνεία των ρόλων των μετεχόντων.*

ΣΧΟΛΙΑ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

[1] Ένα γνωστό παράδειγμα άδηλης γνώσης αποτελεί η γνώση του πώς κάνει κάποιος ποδήλατο· ο μόνος τρόπος να μεταδώσει κανείς αυτή τη γνώση είναι μέσω επίδειξης (Polanyi, 1967). Το παράδειγμα αυτό καταδεικνύει ότι και στο γνωστικό μοντέλο περιέχεται η κοινωνική αλληλεπίδραση ως παράγοντας «μετάδοσης» της γνώσης.

[2] Πολλοί ερευνητές διαφωνούν με την προσπάθεια ορισμού της γνώσης. Οι Heaton et al. δηλώνουν: «Αντί να προσπαθούμε να ορίσουμε και να αναγνωρίσουμε τα χαρακτηριστικά της γνώσης, προτιμούμε να ρωτάμε *τι κάνει η γνώση* και *τι κάνουν οι άνθρωποι μέσω της γνώσης*.» (Heaton et al., 2004).

[3] Η γλώσσα αποτελεί το κύριο μέσο επικοινωνίας στην τάξη των μαθηματικών. Το σύνολο των μέσων επικοινωνίας περιγράφεται στην παράγραφο 2.3.10.2.

[4] Για το υπόλοιπο τμήμα της διατριβής το επίθετο «κοινή» θα αναφέρεται στη γνώση που συγκροτείται από κοινού.

[5] Ένας πιο γενικός ορισμός δίνεται από τους Boer, Baalen and Kumar, σύμφωνα με τους οποίους η αμοιβαία αφομοίωση περιγράφεται ως μια «κοινωνική διαδικασία μέσω της οποίας τα άτομα επιδιώκουν να εγκαθιδρύσουν μια κοινή αντίληψη για την πραγματικότητα, χρησιμοποιώντας διάφορους συνδυασμούς σημείων (π.χ. γλώσσα, χειρονομίες, εικόνες) και εργαλείων (π.χ. φυσικά αντικείμενα, τεχνολογίες επικοινωνίας, νοητικά μοντέλα)» (Boer, Baalen and Kumar, 2002)

[6] Ο όρος «γλώσσα» αναφέρεται στην καθημερινή γλώσσα, ενώ ο όρος «μαθηματικά» μπορεί να αντικατασταθεί με τον όρο «γλώσσα των μαθηματικών». (Βλ. παράγραφο 2.4.7.2. για μια λεπτομερή κατηγοριοποίηση των μέσων επικοινωνίας στην τάξη των μαθηματικών).

[7] Υιοθετούμε την άποψη του Gerrard (1996), σύμφωνα με την οποία το έργο του Wittgenstein μπορεί να ομαδοποιηθεί σε τρεις περιόδους: την πρώιμη (που εκφράζεται στα έργα *Notebooks, 1914-1916* και *Tractatus Logico-Philosophicus*), τη μέση (που εκφράζεται στο έργο *Φιλοσοφική Γραμματική*) και την ύστερη (που εκφράζεται στο έργο *Φιλοσοφικές Έρευνες*).

[8] Για παράδειγμα, υπάρχει ένας και μόνο τρόπος για να εκφράσει κανείς την έννοια του παραλληλογράμμου στην Ευκλείδεια Γεωμετρία.

[9] Για την ακρίβεια, αναφερόμαστε στις απόψεις που διατυπώθηκαν στην ύστερη περίοδο του φιλοσόφου (Βλ. σχόλιο 6).

[10] Αναφερόμαστε στους ερευνητές που εξετάζουν τις μαθηματικές πρακτικές πάντα μέσα στο κοινωνικο-πολιτιστικό πλαίσιο στο οποίο αυτές ασκούνται. Παραδείγματα τέτοιων ερευνών αποτελούν οι λειτουργικές μελέτες, τις οποίες περιγράφουμε στην παράγραφο 1.4.2.

[11] Ας θεωρήσουμε την έκφραση: «Ο Γιάννης είναι σπίρτο», η οποία χρησιμοποιείται για να αποδώσει κάποια χαρακτηριστικά στο Γιάννη. Με τον ίδιο τρόπο, οι υποστηρικτές της συγκεκριμένης άποψης δέχονται την έκφραση «Τα μαθηματικά είναι μία γλώσσα».

[12] Οι Austin and Howson (1979) δεν διευκρινίζουν σε ποιες νέες μεθόδους αναφέρονται, σίγουρα όμως η μεγάλη ανάπτυξη ποιοτικών μεθόδων ανάλυσης στη διδακτική των μαθηματικών και τη γλωσσολογία τους επιβεβαιώνει.

[13] Η Sifianou (2001) χρησιμοποιεί τον όρο «Γλωσσολογική Ανάλυση Συνεχούς Λόγου» (Sifianou, 2001, σ. 256).

[14] Η Schiffrin υποστηρίζει ότι αυτή η αντίληψη προέρχεται από την ταύτιση του προφορικού με το γραπτό λόγο. Επικεντρώνοντας στον προφορικό λόγο συναντούμε τονικές μονάδες (intonation units), «οι οποίες αντανακλούν όχι μόνο υποκείμενες γραμματικές δομές, αλλά και υποκείμενες εστίες της συνείδησης, πάνω στις οποίες οργανώνονται οι πληροφορίες» (Schiffrin, 1994, σ. 25).

[15] Η Schiffrin αναφέρει τις μελέτες των Fox and Thompson (1990) και Givón (1979) ως παραδείγματα μελετών που ενώ αρχικός τους σκοπός ήταν η μελέτη της επίδρασης μεταξύ ανωτέρου και κατωτέρου επιπέδου συντακτικών δομών, καταλήγουν στο ότι «αυτές που στην αρχή φαινόταν ως σχετικά στατικές και σταθερές ιδιότητες της γραμματικής της πρότασης, είναι στην πραγματικότητα δυναμικά παρα-προϊόντα των διαδικασιών οργάνωσης και μετάδοσης των πληροφοριών από τους ανθρώπους» (Schiffrin, 1994, σ. 26).

[16] Για παράδειγμα, ακόμη και αν μία ακολουθία ερωταποκρίσεων μπορεί να οριστεί ως μία σημειολογική ακολουθία κατά την οποία μια ελλιπής πρόταση που παρουσιάστηκε από τον ένα ομιλητή, συμπληρώνεται από τον άλλο, ένας τέτοιος ορισμός αφορά ελάχιστα κάποιους ερευνητές για τους οποίους οι ερωτήσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αναπαραγωγή (ή τη διαπραγμάτευση) κοινωνικών σχέσεων και θέσεων» (Schiffrin, 1994, σ. 27).

[17] Σύμφωνα με τη θεωρία γλωσσικών πράξεων κάθε έκφραση είναι φορέας μιας ενέργειας ή μιας πρόθεσης του ομιλητή. Η ανάλυση επικεντρώνεται στον εντοπισμό των στιχομυθιών που αποκαλύπτουν τις προθέσεις του ομιλητή. Η θεωρία γλωσσικών πράξεων πρόκειται για μια

προσέγγιση η οποία «ξεκινά με τη λειτουργία και καταλήγει ενσωματώνοντας τη δομή στις αναλύσεις της» (Schiffrin, 1994, σ. 346).

[18] Μια τέτοιου είδους ανάλυση στηρίζεται στην αυστηρότητα της δομικής κωδικοποίησης για την ανάλυση ενεργειών που εμπίπτουν σε μία λειτουργική προσέγγιση.

[19] Οι συγγραφείς θεωρούν ότι το πλαίσιο αποτελείται από δύο μέρη: αυτό που σχετίζεται με τη συγκεκριμένη περίσταση και αυτό που σχετίζεται με την κοινή πολιτιστική γνώση των μετεχόντων. (Atweh, Bleicher and Cooper, 1998).

[20] Οι βάσεις της θεωρίας της συμβολικής αλληλεπίδρασης τέθηκαν από τον Mead (1934) στις αρχές του 20ου αιώνα, ενώ βασικός συνεχιστής της θεωρείται ο Blumer (1969), στον οποίο οφείλεται και το όνομα της θεωρίας. Επίσης, πολλές επιρροές από τη θεωρία δέχτηκε και ο Goffman (1971, 1972, 1996).

[21] «Η συμβολική αλληλεπίδραση εστιάζεται μάλλον στην αμοιβαία επικοινωνία μεταξύ των ατόμων παρά στο άτομο και στην κοινωνική δομή. Η σταθερότητα και η αλλαγή τόσο σε κοινωνικό όσο και σε ατομικό επίπεδο γίνονται κατανοητές μέσω της μελέτης και ανάλυσης της αλληλεπίδρασης». (Μακρυνιώτη, 1996, σ. 13)

[22] Ο εντοπισμός των νορμών γίνεται με την «αναγνώριση κανονικοτήτων στις δομές της κοινωνικής αλληλεπίδρασης» (Yackel and Cobb, 1996, σ. 460)

[23] Η από κοινού δημιουργία των νορμών μιας αλληλεπίδρασης υποστηρίζεται από τους ερευνητές που υιοθετούν τη θεωρία της συμβολικής αλληλεπίδρασης (Yackel and Cobb, 1996, Yackel, Cobb and Wood, 1999, Yackel, Rasmussen and King, 2000). Δεν πρέπει όμως κανείς να παραβλέπει ότι «οι μαθητές είναι μέλη και άλλων κοινοτήτων, γεγονός που επηρεάζει τη συμμετοχή τους στο σύστημα του σχολείου» (Herbel-Eisenmann, 2003).

[24] Οι κοινωνικομαθηματικές νόρμες σχετίζονται με μαθηματικές ικανότητες. Η διαφορά τους έγκειται στο συλλογικό τους χαρακτήρα, δηλαδή στο γεγονός ότι περιγράφουν κάποιες αναμενόμενες συμπεριφορές *στα πλαίσια μιας αλληλεπίδρασης*. Όταν π.χ. αναφέρουμε τη νόρμα της αναγνώρισης της δυσκολίας ενός προβλήματος, δηλώνουμε ότι η συμπεριφορά κάποιων αλληλεπιδρώντων ατόμων μαρτυρεί την ύπαρξη της συγκεκριμένης νόρμας και όχι ότι κάποιο άτομο «κατέχει» τη συγκεκριμένη ικανότητα.

[25] Η Herbel-Eisenmann (2003) σημειώνει ότι κάποιοι ερευνητές αντιμετωπίζουν τις νόρμες απλά ως στοιχεία ευρύτερων δομών, με αποτέλεσμα να προσδίδουν σε αυτές ένα στατικό χαρακτήρα, ιδιότητα που αντιβαίνει στο δυναμικό και συνεχώς διαπραγματεύσιμο χαρακτήρα της νόρμας.

[26] Οι Yackel and Cobb (1996) πραγματοποίησαν την έρευνά τους σε τάξεις «που ακολουθούν μια τακτική αναζήτησης πληροφοριών» (Yackel and Cobb, 1996, σ. 462), δεχόμενοι συγχρόνως ότι κάποιες νόρμες συναντώνται σε κάθε τάξη, ανεξάρτητα από τον τρόπο διδασκαλίας που ακολουθείται.

[27] «Ο Parsons διατυπώνει ένα μοντέλο κοινωνικού συστήματος, στο οποίο τα μεμονωμένα διαπραγματευόμενα άτομα συμπεριφέρονται αρμονικά με τις δικές τους ατομικές ανάγκες και με τις προσδοκίες των συμμετόχων αλληλεπίδρασης. Στο σύστημα αυτό προσδοκίες και ανάγκες κατευθύνονται από μία διαδικασία *εσωτερίκευσης* κοινών αξιών και προσανατολισμών συμπεριφοράς» (Τσαρδάκης, 1992, σ. 55).

[28] Ο Biddle σημειώνει: «Αυτή η διάκριση είναι ιδιαίτερα σημαντική σε περιπτώσεις ταχείας αλληλεπίδρασης, όπου οι συμμετέχοντες μπορεί να είναι δρώντες, στη συνέχεια δέκτες και μετά δρώντες ξανά.» (Biddle, 1966, σ. 24).

[29] Η διάκριση αυτή παρουσιάζει ομοιότητες με αυτή του Moreno (1934) που αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο.

[30] Από αυτό το διαχωρισμό γίνεται σαφές ότι ο όρος κύρωση όπως θα τον χρησιμοποιήσουμε, διαφέρει από τον αντίστοιχο όρο της καθημερινής γλώσσας που εκφράζει την τιμωρία που ακολουθεί τη μη συμμόρφωση με κάποιες οδηγίες.

[31] Αυτή η ταύτιση βασίζεται στις απόψεις του Linton (1936) που αναφέραμε στην παράγραφο 1.5.2.

[32] Επίσης, όλες οι έννοιες που συσχετίζουν τις συμπεριφορές μπορούν να διαβαθμιστούν. Για παράδειγμα, η διαφοροποίηση μπορεί να είναι μικρή ή μεγάλη· το ίδιο μπορεί να συμβεί και με τις υπόλοιπες έννοιες. Αυτή η διαβάθμιση παρέχει στον ερευνητή κάποια επιπλέον μέτρα σύγκρισης των συμπεριφορών, άρα και των ρόλων.

[33] Από τις έννοιες που παραθέτουμε χρησιμοποιούμε τελικά αυτές της διαφοροποίησης, της ομοφωνίας, της ομοιομορφίας, της αλληλεξάρτησης, της συμμόρφωσης και της προσαρμογής.

[34] Οι Thomas and Biddle (1966b) επισημαίνουν ότι η ομοφωνία, η ομοιομορφία και η εξειδίκευση είναι παρόμοιες έννοιες, αφού και οι τρεις αναφέρονται σε ομοιότητες συμπεριφορών. Η διαφορά τους έγκειται στο ότι η ομοφωνία και η ομοιομορφία αναφέρονται συνήθως σε ένα μικρό φάσμα συμπεριφορών βάσει του οποίου συγκρίνεται ένας μεγάλος αριθμός ατόμων, ενώ η εξειδίκευση αναφέρεται συνήθως σε ένα ευρύ φάσμα συμπεριφορών βάσει του οποίου συγκρίνεται ένας (μικρός ή

μεγάλος) αριθμός ατόμων. Τέλος, η διαφορά μεταξύ ομοφωνίας και ομοιομορφίας έγκειται στο είδος των συμπεριφορών που χαρακτηρίζουν.

[35] Δύο χαρακτηριστικά παραδείγματα λογικής και γνωστικής ασυμβατότητας είναι: η εντολή «ου φονεύσεις» και οι εντολές για εξόντωση των εχθρών κατά τη διάρκεια πολέμου (λογική) και το γεγονός κάποιος να είναι συγχρόνως γιατρός και εργολάβος κηδειών (γνωστική). (Thomas and Biddle, 1966b, σσ. 35-36).

[36] Μερικές από τις έννοιες που προέρχονται από το δραματουργικό μοντέλο: εκτέλεση ρόλου, ικανότητα εκτέλεσης ρόλου, υιοθέτηση ρόλου, ηθοποιός, παρουσίαση του εαυτού, ταυτότητα. (Thomas and Biddle, 1966a).

[37] Ο Goffman (1971) χρησιμοποιεί τον όρο «διαχείριση της εντύπωσης» (impression management) αναφερόμενος στις επιμέρους τεχνικές που μπορούν να εφαρμοστούν προς αυτή την κατεύθυνση.

[38] Ο όρος «παράσταση» (ή «ερμηνεία») (performance) αναφέρεται «στη συνολική δραστηριότητα ενός ατόμου κατά τη διάρκεια μιας περιόδου συνεχούς παρουσίας του ενώπιον ενός καθορισμένου συνόλου παρατηρητών, και η οποία έχει επίδραση στους παρατηρητές αυτούς.» (Goffman, 1971, σ. 32)

[39] Το κατά πόσο το άτομο είναι ελεύθερο να εκφραστεί όπως επιθυμεί αποτελεί σημαντικό ζήτημα για τους κοινωνιολόγους. Ο Goffman (1971) θεωρεί ότι υπάρχουν προκαθορισμένα στοιχεία για τις ερμηνείες ενός ατόμου, άρα το μόνο που έχει να κάνει κανείς είναι να επιλέξει. Αυτή η επιλογή βέβαια, δεν είναι εύκολη, αφού το άτομο πρέπει και να συμμορφωθεί με τις κοινωνικές οδηγίες που σχετίζονται με την κοινωνική του θέση, αλλά και να συνθέσει μια επιτυχημένη για τον εαυτό του ερμηνεία.

[40] «Στη βιβλιογραφία γίνεται διάκριση ανάμεσα στο *παιχνίδι* ή το *παίγνιο* [game], που ορίζεται ως σύνολο κανόνων συνυφασμένων με μια παραδεδομένη γνώση αποτελεσματικών στρατηγικών, και στον *αγώνα* [play], που ορίζεται ως οποιαδήποτε συγκεκριμένη εκδήλωση ενός δεδομένου παιχνιδιού το οποίο παίζεται από την αρχή έως το τέλος... Θα ονομάσω *παιγνία* [gaming] τις ποικίλες μορφές αλληλεπίδρασης μεταξύ ανθρώπων που βρίσκονται πρόσωπο με πρόσωπο με δηλωμένο σκοπό να διεξαγάγουν ένα παιχνίδι, περιλαμβάνοντας σ' αυτό τον όρο, εκτός από το παίξιμο, μια δραστηριότητα που δεν είναι απολύτως σχετική με την έκβαση του αγώνα και δεν μπορεί να οριστεί με βάση το παιχνίδι. Θα ονομάσω *παιγνιώδη συνάντηση* [gaming encounter] μια εστιασμένη συνάθροιση που εμφανώς τουλάχιστον προβλέπει τη διεξαγωγή αγώνων ενός παιχνιδιού» (Goffman, 1996, σ. 104). Είναι σαφές ότι μεγαλύτερο ενδιαφέρον (και πολυπλοκότητα) παρουσιάζει ο τελευταίος τύπος συνάντησης, μέσω του οποίου επιδιώκουμε να αναλύσουμε τα χαρακτηριστικά των συναντήσεων στη δική μας έρευνα.

[41] Βλ. σχόλιο 40.

[42] Βλ. Goffman (1996), σσ. 89-94. Κάθε παιχνίδι, από το σκάκι έως το πόκερ, αποτελείται από ένα σύνολο δυνατών κινήσεων, οι οποίες μπορούν να ερμηνευτούν μόνο στα πλαίσια του συγκεκριμένου παιχνιδιού. Η μετακίνηση ενός πιονιού ή το τράβηγμα ενός φύλλου αποκτούν ιδιαίτερη σημασία όταν λάβουν χώρα σε ένα παιχνίδι σκάκι ή πόκερ και αντιμετωπίζονται ανάλογα. Μια άμεση αντιστοιχία προκύπτει με τις μαθηματικές αναπαραστάσεις: μια σχεδιασμένη σε χαρτί ευθεία αποτελεί αναπαράσταση – και αντιμετωπίζεται ανάλογα – μιας ιδεατής ευθείας που εκτείνεται απεριόριστα και προς τις δύο κατευθύνσεις και δεν αντιμετωπίζεται ως μια γραμμή μαύρου χρώματος.

[43] «Τηρώντας κανείς αυτούς τους κανόνες παίζει τίμια. Δεν δίνει προσοχή σε ασυναφή ορατά συμβάντα, δεν φέρνει στο νου του άσχετες προσωπικές έγνοιες. Παρουσιάζει μια αβίαστη αμεριμνησία, κι αν αυτό δεν είναι δυνατόν, επιδίδεται σε μια ενεργητική αποστροφή ή απώθηση» (Goffman, 1996, σ. 89).

[44] Σύμφωνα με τον Goffman (1996) η ικανότητα της αυθόρμητης εμπλοκής (η οποία επηρεάζεται άμεσα από την εμφάνιση έντασης) «φαίνεται να υπόκειται ελάχιστα σε συνειδητό έλεγχο» (Goffman, 1996, σ. 116), άρα είναι δύσκολο για τους μετέχοντες μιας συνάντησης να τη διατηρήσουν όταν αυτή διαταραχθεί. Επομένως το μόνο που μπορεί να γίνει είναι μια εκ των προτέρων εκτίμηση της σχέσης μετεχόντων-δραστηριοτήτων και ανάλογη επέμβαση στη σύνθεση της ομάδας.

[45] «Το *στάτους* είναι μια θέση σ' ένα σύστημα ή πλέγμα θέσεων και συνδέεται με τις άλλες θέσεις μιας μονάδας κοινωνικής οργάνωσης με αμοιβαίους δεσμούς, με δικαιώματα και καθήκοντα που δεσμεύουν τους κατόχους τους» (Goffman, 1996, σ. 171).

[46] Αυτή η πολλαπλότητα διαθέσιμων ρόλων οδηγεί μερικές φορές σε *σύγκρουση ρόλων* (role conflict), η οποία ορίζεται ως «η ταυτόχρονη εμφάνιση δύο ή περισσοτέρων ασύμβατων προσδοκιών για τη συμπεριφορά ενός ατόμου» (Biddle, 1986, σ. 82).

[47] Μερικοί τρόποι υποστήριξης είναι η εξήγηση, η απολογία και η «δικαιολογημένη αγανάκτηση».

[48] «Η έννοια της απόστασης από το ρόλο προσφέρει ένα κοινωνιολογικό μέσο με το οποίο μπορεί να διερευνηθεί ένας τύπος απόκλισης ανάμεσα στην υποχρέωση και την πραγματική ερμηνεία» (Goffman, 1996, σ. 215).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

ΕΜΠΕΙΡΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

2. ΕΜΠΕΙΡΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Η περιγραφή του θεωρητικού πλαισίου της έρευνας μας οδηγεί στην ανάγκη εφαρμογής ενός συνδυαστικού τύπου ανάλυσης που να λαμβάνει υπόψη τη διττή λειτουργία της γλώσσας: ως φορέα περιεχομένου, αλλά και ως φορέα των πράξεων και των προθέσεων των ομιλητών. Έχοντας υπόψη αυτή την παραδοχή, αρχικά εντοπίζουμε τα ανοιχτά ερωτήματα καθώς και τα κενά που έχουν προκύψει στις σχετικές έρευνες στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Σκοπός μας είναι η όσο το δυνατόν σαφέστερη οριοθέτηση της έρευνάς μας, αλλά και η χρήση της πιο αποτελεσματικής – για τους σκοπούς μας – μεθοδολογίας.

2.1. ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΚΕΝΑ ΠΟΥ ΚΑΛΕΙΤΑΙ ΝΑ ΚΑΛΥΨΕΙ Η ΕΡΕΥΝΑ ΜΑΣ

Τα συμπεράσματα από την περιγραφή του θεωρητικού πλαισίου που χρησιμοποιείται στην ανάλυση των αλληλεπιδράσεων μας οδήγησε στον εντοπισμό τριών βασικών παραγόντων οι οποίοι επιδρούν στη συγκρότηση κοινής γνώσης: τη γλώσσα, τις νόρμες και τους ρόλους. Η μελέτη της σχετικής βιβλιογραφίας μας οδηγεί στις παρακάτω επισημάνσεις σε σχέση με τους παράγοντες αυτούς:

- Ενώ παρατηρείται ομοφωνία όσον αφορά στην προτίμηση που δείχνουν οι μαθητές στη χρήση μη μαθηματικής γλώσσας, οι ερευνητές δεν συμφωνούν στην επίδραση αυτής της χρήσης: η Pirie (1998) για παράδειγμα, θεωρεί ότι η λεγόμενη «ψευδο-μαθηματική γλώσσα»[1] (quasi-mathematical language) επιδρά θετικά στην κατανόηση των μαθητών, ενώ η Mitchell (2001) θεωρεί ότι η καθημερινή γλώσσα, λόγω της εγγενούς της ασάφειας δημιουργεί προβλήματα στους μαθητές.[2] Επίσης, δεν εξετάζεται η επίδραση άλλων παραγόντων, όπως για παράδειγμα ο τύπος του προβλήματος ή πιο συγκεκριμένα το είδος των εννοιών που συζητούνται.
- Δεν υπάρχει καμία μελέτη που να συσχετίζει τη χρήση μη μαθηματικής γλώσσας με τη συγκρότηση κοινής γνώσης· οι σχετικές δομικές μελέτες ασχολούνται κυρίως με τα χαρακτηριστικά της γλώσσας που χρησιμοποιείται στην τάξη (Pirie and Schwarzenberger, 1988, Ferrari, 2000, Ferrari and Giraudi, 2001, Zazkis, 2000) και με τις παρεξηγήσεις που πιθανόν προκαλεί η χρήση μη μαθηματικής γλώσσας (Pirie, 1991, 1998, Mitchell, 2001). Η μοναδική λειτουργική μελέτη που ασχολείται με το

φαινόμενο (Williams and Clarke, 2003) επιχειρεί να το συσχετίσει με δομές στην αλληλεπίδραση και όχι με το είδος της γλώσσας που χρησιμοποιείται.

• Οι κοινωνικές και κοινωνικομαθηματικές νόρμες – οι οποίες όπως αναφέραμε αποτελούν σημαντικό παράγοντα που επηρεάζει τη συμπεριφορά – συνδέονται με συγκεκριμένες μαθηματικές ικανότητες, με κυρίαρχες αυτές της δικαιολόγησης και της επεξήγησης (Yackel and Cobb, 1996, Yackel, 2001, Stylianou and Blanton, 2002) αλλά όχι με τις διαδικασίες συγκρότησης κοινής γνώσης, ή πιο συγκεκριμένα κοινών εννοιών ή διαδικασιών.

• Οι έρευνες που σχετίζονται με την επίδραση των διαφόρων νορμών στη μαθησιακή διαδικασία, πραγματοποιήθηκαν σε ελεγχόμενα περιβάλλοντα, με την έννοια της συνεχούς παρουσίας αλλά και ουσιαστικής συμμετοχής του δασκάλου στις αλληλεπιδράσεις των μαθητών.

• Οι ρόλοι των μαθητών, μία τόσο σημαντική κοινωνιολογικά έννοια, αποτελούν αντικείμενο μελέτης για ελάχιστες λειτουργικές ή συνδυαστικές μελέτες και, όταν συμβαίνει αυτό (César, 1998, Carvalho and César, 2001, Mercier, Sensevy and Schubauer-Leoni, 2000), δεν γίνεται κάποια προσπάθεια κατηγοριοποίησής τους ή σύνδεσής τους με τις προσδοκίες, τις επιδιώξεις, αλλά και τις νόρμες που επηρεάζουν τη συμπεριφορά. Εξαίρεση αποτελούν οι εργασίες των Atweh, Bleicher and Cooper (1998) και Rowland (2002)· οι μεν επιδιώκουν τη σύνδεση των ρόλων με την κοινωνική θέση και το φύλο, ο δε με την έννοια του προσώπου. Πρέπει τέλος να επισημάνουμε ότι η χρήση του όρου «ρόλος» αποφεύγεται στις προαναφερθείσες μελέτες.[3]

• Λίγες σχετικά μελέτες έχουν αφορούν το επίπεδο της ανώτατης εκπαίδευσης· συγκεκριμένα, πρόκειται για τις δομικές μελέτες των Schoenfeld (1983), Ferrari (2000), Zazkis (2000), τις λειτουργικές μελέτες των Yackel, Rasmussen and King (2000), Yackel (2001), Stylianou and Blanton (2002) και τη συνδυαστική μελέτη των Gómez and Rico (1995).

2.2. ΟΡΙΟΘΕΤΗΣΗ ΚΑΙ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ ΜΑΣ

Λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω επισημάνσεις, οριοθετούμε τους ερευνητικούς μας στόχους ως εξής:

α) Σαν πρώτο στόχο της έρευνάς μας θεωρούμε την αποσαφήνιση της επίδρασης της μη μαθηματικής γλώσσας στη συγκρότηση κοινής γνώσης· χρησιμοποιώντας σαν

αφετηρία τις μελέτες που έχουν αναγνωρίσει δομές που σχετίζονται με τη δημιουργία κοινής γνώσης, θέτουμε ως στόχο τον εντοπισμό και την εξέταση της επίδρασης των εκφράσεων μη μαθηματικής γλώσσας σε αυτή τη διαδικασία.

β) Επόμενος στόχος μας είναι η μελέτη της επίδρασης των κοινωνικών και κοινωνικομαθηματικών νορμών στη συγκρότηση κοινής γνώσης· οι νόρμες αυτές αντικατοπτρίζουν το κοινωνικό και πολιτιστικό πλαίσιο που σχετίζεται με την κοινωνική αλληλεπίδραση και με τα μαθηματικά ειδικότερα. Επιδίωξή μας είναι ο συσχετισμός των διαφόρων νορμών και με τη χρήση της γλώσσας, αλλά και με τους ρόλους που ερμηνεύουν τα υποκείμενα της έρευνάς μας.

γ) Τρίτος στόχος της έρευνάς μας είναι η σαφής οριοθέτηση των ρόλων που ερμηνεύουν οι φοιτητές καθώς αλληλεπιδρούν, και στη συνέχεια η συσχέτιση αυτών των ρόλων – για τη ακρίβεια των συνδυασμών τους – με τη συγκρότηση κοινής γνώσης.

Η φύση των παραπάνω στόχων – σε συνδυασμό πάντα με παράγοντες κοινωνικο-πολιτιστικής φύσης – καθορίζει σε μεγάλο βαθμό και τους περιορισμούς της έρευνάς μας. Συγκεκριμένα, η ιδιαιτερότητα του φαινομένου που εξετάζουμε[4] μας οδηγεί στην υιοθέτηση μιας ποιοτικής-ερμηνευτικής μεθόδου ανάλυσης των δεδομένων μιας συγκεκριμένης ομάδας ατόμων. Η επέκταση της έρευνας σε ευρύτερες ομάδες (π.χ. φοιτητές και άλλων σχολών) θα οδηγούσε σε μεγάλο όγκο δεδομένων που θα καθιστούσε αδύνατη μια εις βάθος ανάλυση. Η μέθοδος που ακολουθούμε, αν και επιτρέπει τη λεπτομερή μελέτη του φαινομένου, περιορίζει τη γενικευτική ισχύ των συμπερασμάτων.

2.3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

2.3.1. Ερευνητικά Ερωτήματα

Όπως αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο, πρώτος στόχος της έρευνάς μας είναι η μελέτη της επίδρασης της μη μαθηματικής γλώσσας στη συγκρότηση κοινής γνώσης. Η επίδραση αυτή μπορεί να είναι θετική, αρνητική ή μη προσδιορίσιμη· προκύπτει λοιπόν το ακόλουθο ερευνητικό ερώτημα:

Ερώτημα Α:

Σε ποιες περιπτώσεις, κατά τη συνεργατική επίλυση προβλημάτων, η επίδραση της μη μαθηματικής γλώσσας[5] είναι θετική και σε ποιες αρνητική στη συγκρότηση κοινής γνώσης;

Περνώντας από το επίπεδο του γλωσσικού κώδικα στο επίπεδο των κοινωνικών και κοινωνικομαθηματικών νορμών οι οποίες δρουν και επηρεάζουν τις αλληλεπιδράσεις των υποκειμένων της έρευνας, ένα πρώτο ζητούμενο αφορά τη φύση αυτών των νορμών, αφού όπως έχουμε αναφέρει οι νόρμες έχουν τοπικό χαρακτήρα και συγκροτούνται από κοινού από τους μετέχοντες στην αλληλεπίδραση. Προκύπτει λοιπόν το ακόλουθο ερώτημα:

Ερώτημα Β:
Ποιες κοινωνικές και κοινωνικομαθηματικές νόρμες είναι σε ισχύ κατά τη διάρκεια των αλληλεπιδράσεων;

Έχοντας εντοπίσει τις νόρμες που είναι σε ισχύ κατά τη διάρκεια των αλληλεπιδράσεων, επόμενος στόχος μας είναι η μελέτη της επίδρασής τους στη συγκρότηση κοινής γνώσης. Ο στόχος αυτός εκφράζεται στο παρακάτω ερώτημα:

Ερώτημα Γ:
Ποια η επίδραση των παραπάνω νορμών στη συγκρότήση κοινής γνώσης;

Περνώντας από το επίπεδο του γλωσσικού κώδικα και των νορμών – τα οποία αποτελούν στοιχεία του πλαισίου που περιβάλλει την περίσταση – στο επίπεδο της συμπεριφοράς των υποκειμένων, δηλαδή της ερμηνείας των ρόλων τους, ένα πρώτο ζητούμενο αποτελεί η αναγνώριση των χαρακτηριστικών κάθε ρόλου, καθώς και των στοιχείων που τους διαφοροποιούν. Το ερευνητικό ερώτημα που ακολουθεί εκφράζει αυτό ακριβώς το ζητούμενο:

Ερώτημα Δ:
Ποιοι ρόλοι υιοθετούνται από τους φοιτητές κατά τη συνεργατική επίλυση προβλημάτων;

Τέλος, έχοντας υπόψη το βασικό φαινόμενο που μελετούμε, δηλαδή τη συγκρότηση κοινής γνώσης, μας ενδιαφέρει η επίδραση των ρόλων των φοιτητών σε αυτό. Συγκεκριμένα, επειδή ο ρόλος ενός ατόμου υφίσταται πάντα σε συνάρτηση με το ρόλο κάποιου άλλου,[6] διαμορφώνουμε το ακόλουθο ερευνητικό ερώτημα:

Ερώτημα Ε:
Ποιοι συνδυασμοί των παραπάνω ρόλων επιδρούν θετικά και ποιοι αρνητικά στη συγκρότηση κοινής γνώσης;

2.3.2. Επιλογή και Τεκμηρίωση της Ποιοτικής Έρευνας

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει στην παράγραφο 1.3. υπάρχει μία γενικότερη τάση μετατόπισης προς ποιοτικές-ερμηνευτικές μεθόδους έρευνας στη διδακτική των μαθηματικών και ένας από τους λόγους είναι η αδυναμία των ταξινομιών που προέκυψαν από τις ποσοτικές-θετικιστικές μεθόδους να περιγράψουν επαρκώς τις βαθύτερες δομές των αλληλεπιδράσεων που σχετίζονται με τη συγκρότηση κοινής γνώσης ή άλλων γνωστικών διαδικασιών. Αυτό που μας παρέχει μια ποσοτική έρευνα στην πραγματικότητα είναι μία εικόνα ή ένα μοντέλο του «ιδανικού μαθητή» ή «μιας τυπικής αλληλεπίδρασης στην τάξη» (Pimm, 1994b, σ. 134). Μια άλλη αδυναμία της ποσοτικής προσέγγισης έγκειται στο ότι «δεν λαμβάνει υπόψη της τη μοναδική ικανότητα που διαθέτουμε οι άνθρωποι να ερμηνεύουμε τις εμπειρίες μας και να τις αναπαριστούμε στον εαυτό μας» (Cohen and Manion, 1994, σσ. 45-46). Αντίθετα,

> Με την ποιοτική προσέγγιση επιτυγχάνεται η διείσδυση στην κοινωνική πραγματικότητα ή στο υπό εξέταση φαινόμενο, κάτι που δεν είναι εφικτό με την ποσοτική. Αντί της εξήγησης και πρόβλεψης μέσα από προκατασκευασμένες θεωρητικές κατασκευές και μεθοδολογικά εργαλεία, χρησιμοποιείται η ερμηνεία, δηλαδή καταβάλλεται προσπάθεια να κατανοηθεί η φύση, η λειτουργία και η σημασία ενός κοινωνικού φαινομένου. (Μακράκης, 1998, σ. 21).

Όσον αφορά την έρευνά μας, η μορφή των ερευνητικών υποθέσεων απαιτεί μία σε βάθος ανάλυση φαινομένων, των οποίων η ποσοτικοποίηση θα αλλοίωνε το χαρακτήρα. Για παράδειγμα, δεν μας ενδιαφέρει απλά και μόνο το πλήθος των εκφράσεων μη μαθηματικής γλώσσας, αλλά κυρίως η επίδρασή τους στη διαμόρφωση κοινών εννοιών και διαδικασιών. Η επίδραση που μπορεί να έχει η χρήση μιας μη μαθηματικής έκφρασης στην από κοινού διαμόρφωση μιας έννοιας δεν μπορεί να ποσοτικοποιηθεί, παρά μόνο να *ερμηνευθεί* λαμβάνοντας υπόψη το πλαίσιο της έκφρασης (δηλαδή τις προτάσεις που προηγήθηκαν και που ακολούθησαν, τις νόρμες που επενεργούν και τους ρόλους που ερμηνεύουν οι συνεργαζόμενοι φοιτητές). Παρόμοιες παρατηρήσεις μπορούν να γίνουν σε σχέση και με τα άλλα δύο βασικά φαινόμενα, δηλαδή τις κοινωνικές και κοινωνικομαθηματικές νόρμες και τους ρόλους των φοιτητών.[7] Τα φαινόμενα αυτά διακρίνονται από ένα *τοπικό* χαρακτήρα,[8] που οδηγεί στη χρήση μιας ποιοτικής-ερμηνευτικής μεθόδου και μάλιστα στη μελέτη περίπτωσης, στην οποία θα αναφερθούμε στην επόμενη παράγραφο.

2.3.3. Η Στρατηγική της Έρευνας: Μελέτη Περίπτωσης σε Ζεύγη Φοιτητών

Στη μελέτη περίπτωσης οδηγούμαστε λόγω της φύσης των ερευνητικών μας υποθέσεων, αλλά και λόγω πρακτικών περιορισμών. Οι ερευνητικές μας υποθέσεις σαφώς απαιτούν επισταμένη ανάλυση γλωσσικών κοινωνικών και μαθηματικών παραμέτρων (και κάποιων συνδυασμών τους[9]), γεγονός που οδηγεί σε μία συνδυαστικού τύπου ανάλυση (δομική και λειτουργική), η οποία πραγματοποιείται σε τρία επίπεδα (γλωσσικού κώδικα, κοινωνικών και κοινωνικομαθηματικών νορμών και ερμηνευμένων ρόλων). Επειδή σε όλες τις ερευνητικές υποθέσεις (και κυρίως στην Υπόθεση Γ) υπεισέρχεται και η παράμετρος του χρόνου, θεωρούμε ότι ένα μεγάλο δείγμα θα εμπόδιζε την εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων, με την έννοια ότι θα μας οδηγούσε σε αναγκαστικές γενικεύσεις και ομαδοποιήσεις, χάνοντας τον τοπικό χαρακτήρα των συναντήσεων. Επίσης υπάρχουν και πρακτικά εμπόδια στη διεξαγωγή έρευνας μεγαλύτερης κλίμακας, με κυριότερο από αυτά την απροθυμία των φοιτητών να συμμετάσχουν σε μια έρευνα χωρίς κάποιας μορφής επιβράβευση.[10]

Οι Cohen and Manion (1994) διακρίνουν δύο τύπους παρατήρησης στις μελέτες περίπτωσης: τη συμμετοχική και τη μη συμμετοχική παρατήρηση.

> Στην πρώτη, οι παρατηρητές εμπλέκονται στις ίδιες τις δραστηριότητες που επιχειρούν να παρατηρήσουν... Οι μη συμμετοχικοί παρατηρητές, από την άλλη πλευρά, δεν αναμειγνύονται στις δραστηριότητες της ομάδας που ερευνούν και αποφεύγουν την ιδιότητα του μέλους της... (Cohen and Manion, 1994, σσ. 153, 155).

Η παρατήρηση που πραγματοποιούμε χαρακτηρίζεται ως συμμετοχική μεν (αφού ο παρατηρητής κάθεται στο ίδιο γραφείο με τους παρατηρούμενους και ενίοτε συνομιλεί μαζί τους), με την ελάχιστη συμμετοχή δε (αφού ο παρατηρητής δεν συμμετέχει στη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος[11]). Θεωρούμε ότι η παρουσία του παρατηρητή είναι απαραίτητη για διαδικαστικούς λόγους (όπως την παροχή πληροφοριών σχετικών με το διαθέσιμο χρόνο), αλλά μία μεγαλύτερη εμπλοκή του στην αλληλεπίδραση θα αλλοίωνε τη μορφή των γλωσσικών ανταλλαγών (με την έννοια ότι η παροχή κάποιου βοηθητικού στοιχείου μπορεί να οδηγήσει τους φοιτητές στη συγκρότηση κάποιων κοινών εννοιών, στόχος όμως της έρευνας είναι η μελέτη της πορείας συγκρότησης εννοιών που έχουν εισαχθεί από τα ίδια τα υποκείμενα[12]). Σε αυτό το πλαίσιο, αλλά όσον αφορά αλληλεπιδράσεις στη σχολική τάξη ο Mercer σημειώνει ότι σύμφωνα με έρευνες «οι μαθητές είναι πιθανότερο να εμπλακούν στην ανοιχτή, μακροσκελή συζήτηση και ανάπτυξη επιχειρηματολογίας όταν συνομιλούν με τους συνομηλίκους τους» (Mercer, 2000, σ. 122).

2.3.3.1. Λόγοι Επιλογής Ζευγών

Έχοντας επιλέξει τη μελέτη περίπτωσης ως μεθοδολογική προσέγγιση, σε συνδυασμό με μια ερμηνευτική πρακτική προερχόμενη από το θεωρητικό μας πλαίσιο, η επόμενη επιλογή αφορά τον αριθμό των ατόμων που θα συνιστούν τη μονάδα παρατήρησης. Έχοντας υπόψη το είδος των ερευνητικών υποθέσεων, αλλά και τα χαρακτηριστικά του προς εξέταση δείγματος, οδηγούμαστε στη συγκρότηση δυάδων. Οι O' Donnell and Dansereau (1992, σ. 123), Slavin, (1995, σ. 166) και Ματσαγγούρας (2003, σσ. 86-89) περιγράφουν τα βασικά πλεονεκτήματα της χρήσης δυάδων έναντι της χρήσεως ομάδων με τρία ή περισσότερα μέλη:

α) Η δυάδα αποτελεί την ελάχιστη κοινωνική μονάδα και περιλαμβάνει πιο απλές κοινωνικές αλληλεπιδράσεις σε σχέση με μια μονάδα μεγαλύτερου μεγέθους, στην οποία οι πολύπλοκες δομές αλληλεπίδρασης που δημιουργούνται δυσχεραίνουν το έργο και των μελών της αλλά και του αναλυτή

β) Μία μονάδα μεγαλύτερου μεγέθους ενέχει την πιθανότητα σχηματισμού συμμαχιών, ενισχύοντας με αυτό τον τρόπο τον ανταγωνισμό και όχι τη συνεργασία.

γ) Μία μονάδα μεγαλύτερου μεγέθους επιβαρύνει τα μέλη της, τα οποία πρέπει να επεξεργάζονται πληροφορίες από πολλές πηγές· μια τέτοια κατάσταση αποδεικνύεται προβληματική ιδιαίτερα για τα λιγότερο ικανά άτομα.

δ) Σε ομάδες τριών ή περισσότερων ατόμων εμφανίζεται συχνότερα το φαινόμενο της μικρής συμμετοχής κάποιου ατόμου, με αποτέλεσμα την περιθωριοποίησή του.

ε) Η χρήση δυάδων ενδείκνυται σε άτομα που δεν έχουν προηγούμενη εμπειρία σε συνεργατική μάθηση.

στ) Ο χρόνος πραγματικής συμμετοχής κάθε μέλους μιας δυάδας είναι πολλαπλάσιος του αντίστοιχου χρόνου σε ομάδες τριών ή περισσότερων ατόμων, αυξάνοντας με αυτό τον τρόπο τις περιστάσεις κοινής διαπραγμάτευσης εννοιών, οι οποίες αποτελούν το αντικείμενο της μελέτης μας.

Όπως προαναφέραμε, ένας από τους λόγους επιλογής του ζεύγους ως μονάδας ανάλυσης είναι η έλλειψη προηγούμενης εμπειρίας των υποκειμένων σε συνεργατική επίλυση προβλημάτων· όλα τα στοιχεία των υποκειμένων που συμμετείχαν περιγράφονται στην παράγραφο που ακολουθεί.

2.3.4. Υποκείμενα

Επιλέγουμε ως υποκείμενα της έρευνας φοιτητές του 3ου και του 4ου έτους σπουδών του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων. Από τους φοιτητές των συγκεκριμένων ετών ζητείται η συμμετοχή στη συγκεκριμένη έρευνα, τονίζοντας ότι η έρευνα δεν έχει σκοπό αξιολόγησης, αλλά γίνεται για την εξέταση της αποτελεσματικότητας της συνεργατικής επίλυσης προβλημάτων. Οι λόγοι που επιλέγουμε το συγκεκριμένο δείγμα συνοψίζονται στους εξής:

α) Οι φοιτητές των συγκεκριμένων ετών του Π.Τ.Δ.Ε. έχουν ήδη έρθει σε επαφή – σε θεωρητικό επίπεδο – με θεωρίες που ενσωματώνουν την ομαδοσυνεργατική πρακτική.

β) Οι συγκεκριμένοι φοιτητές ενδέχεται σύντομα να εφαρμόσουν οι ίδιοι πρακτικές συνεργατικής μάθησης, επομένως η συγκεκριμένη έρευνα τους ενδιέφερε για τη μελέτη «εκ των έσω» τέτοιων περιστάσεων.

γ) Η μη πρακτική εμπειρία τους στη συνεργασία σε ζεύγη, σε συνδυασμό με το μη αξιολογητικό χαρακτήρα των συναντήσεων θα αποτελούσε ένα επιπλέον ερέθισμα για συμμετοχή στην έρευνα.

δ) Η πλειοψηφία των φοιτητών του Π.Τ.Δ.Ε. (και του δείγματός μας) προέρχονται από τη θεωρητική κατεύθυνση του Ενιαίου Λυκείου (ή αντίστοιχα την 3η Δέσμη του Γενικού Λυκείου)[13] και οι περισσότεροι εξέφραζαν μία φοβία για τα Μαθηματικά.[14] Αποφασίζουμε λοιπόν να αντιμετωπίσουμε αυτά τα χαρακτηριστικά του δείγματος ως μία πρόκληση, ελπίζοντας βέβαια ότι η έρευνά μας θα συντελέσει τουλάχιστον σε μια διαφορετική θεώρηση των Μαθηματικών από τους φοιτητές.

ε) Οι φοιτητές των συγκεκριμένων ετών έχουν ήδη δημιουργήσει ένα κύκλο γνωριμιών, μέσα από τον οποίο μπορούσαν να επιλέξουν ευκολότερα το άτομο με το οποίο θα συνεργαστούν. Ο Mercer αναφέρει σχετικές μελέτες,[15] οι οποίες διαπίστωσαν ότι «όταν τα παιδιά δημιουργούσαν ζεύγη με φίλους κι όχι με απλούς γνωστούς, η σκέψη τους μέσω της γλώσσας ήταν πιο σαφής, «επιστημονική» κι έτσι έλυναν τα προβλήματα με μεγαλύτερη επιτυχία» (Mercer, 2000, σ. 126). Γι' αυτό το λόγο ζητούμε από τους ίδιους τους φοιτητές να επιλέξουν το συνεργάτη τους.

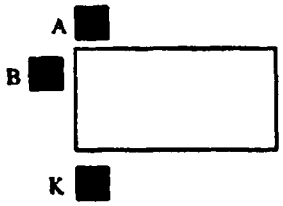
Ο πίνακας που ακολουθεί παρουσιάζει τα στοιχεία των 40 φοιτητών που συμμετέχουν στην κύρια έρευνα. Επειδή κρίνουμε ότι δεν είναι απαραίτητη η χρήση ψεύτικων ονομάτων, τα δύο μέλη κάθε ζεύγους ονομάζονται Α και Β, και, όπου χρειάζεται, αναφέρονται σε σχέση με τον αύξοντα αριθμό του ζεύγους.

Πίνακας 2.1. Στοιχεία των υποκειμένων της έρευνας

Ζεύγος	Φύλο	Χώρα	Κατεύθυνση – Δέσμη - Κλάδος
1	Κ	Ελλάδα	3η δέσμη
	Κ	Ελλάδα	3η δέσμη
2	Κ	Ελλάδα	3η δέσμη
	Κ	Κύπρος	Οικονομικός
3	Α	Κύπρος	Πρακτικός
	Α	Κύπρος	Πρακτικός
4	Κ	Ελλάδα	4η δέσμη
	Κ	Ελλάδα	3η δέσμη
5	Κ	Κύπρος	Κλασικός
	Κ	Ελλάδα	3η δέσμη
6	Α	Ελλάδα	2η δέσμη
	Κ	Ελλάδα	Θετική
7	Κ	Κύπρος	Οικονομικός
	Κ	Κύπρος	Κλασικός
8	Α	Ελλάδα	3η δέσμη
	Κ	Ελλάδα	3η δέσμη
9	Κ	Ελλάδα	4η δέσμη
	Κ	Ελλάδα	4η δέσμη
10	Κ	Ελλάδα	4η δέσμη
	Κ	Ελλάδα	3η δέσμη
11	Κ	Ελλάδα	4η δέσμη
	Κ	Ελλάδα	3η δέσμη
12	Α	Ελλάδα	4η δέσμη
	Κ	Ελλάδα	3η δέσμη
13	Κ	Ελλάδα	3η δέσμη
	Α	Ελλάδα	3η δέσμη
14	Κ	Ελλάδα	3η δέσμη
	Κ	Ελλάδα	3η δέσμη
15	Κ	Ελλάδα	2η δέσμη
	Α	Κύπρος	Οικονομικός
16	Κ	Ελλάδα	3η δέσμη
	Κ	Ελλάδα	3η δέσμη
17	Κ	Κύπρος	Πρακτικός
	Α	Ελλάδα	2η δέσμη
18	Κ	Ελλάδα	3η δέσμη
	Κ	Ελλάδα	3η δέσμη
19	Κ	Ελλάδα	3η δέσμη
	Κ	Ελλάδα	3η δέσμη
20	Κ	Ελλάδα	4η δέσμη
	Κ	Ελλάδα	4η δέσμη

2.3.5. Χώρος Διεξαγωγής των Συναντήσεων

Οι συναντήσεις πραγματοποιούνται στο χώρο του Εργαστηρίου Διδασκαλίας των Μαθηματικών του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων. Όλοι οι φοιτητές γνωρίζουν το συγκεκριμένο χώρο, και κατά τη διάρκεια των συναντήσεων υπάρχει συγκεκριμένη διάταξη με την οποία κάθονται οι μετέχοντες στο τραπέζι. Η διάταξη παρουσιάζεται στο σχήμα που ακολουθεί (Υπενθυμίζουμε ότι με Α, Β ονομάζονται οι φοιτητές και με Κ ο παρατηρητής):



Σχήμα 2.1. Τοποθέτηση των τριών μετεχόντων στο χώρο

Ο χώρος διεξαγωγής της έρευνας χαρακτηρίζεται εργαστηριακός· ο λόγος που επιλέγουμε ένα τέτοιο χώρο είναι για την αποφυγή θορύβων και διακοπών, οι οποίες θα προκαλούσαν προβλήματα συγκέντρωσης στα υποκείμενα. Επίσης, η απουσία θορύβου συντελεί στην απρόσκοπτη απομαγνητοφώνηση, με την έννοια ότι έχουμε τις ελάχιστες δυνατές απώλειες δεδομένων.

2.3.6. Επιλογή των Προβλημάτων

Έχοντας υπόψη το βασικό φαινόμενο προς μελέτη, δηλαδή τη συγκρότηση κοινών εννοιών, το βασικό μέσο ανάλυσης, δηλαδή τη γλώσσα, τις υπάρχουσες μελέτες και το πλαίσιο της έρευνάς μας (υποκείμενα, χώρος διεξαγωγής, τεχνικοί περιορισμοί), αποφασίζουμε να επιλέξουμε τρία προβλήματα,[16] τα οποία να πληρούν τις εξής προϋποθέσεις:

α) η χρήση του λόγου να είναι βασικό συστατικό της επίλυσής τους

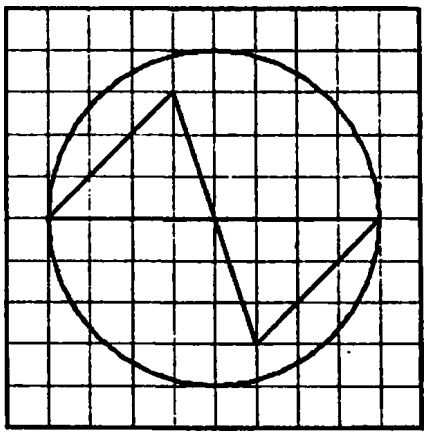
β) να μην απαιτούν ιδιαίτερα υψηλό επίπεδο μαθηματικών γνώσεων

γ) να επιδέχονται περισσότερες από μία μεθόδους επίλυσης.

Επιλέγουμε λοιπόν τα ακόλουθα προβλήματα:

Πρόβλημα 1

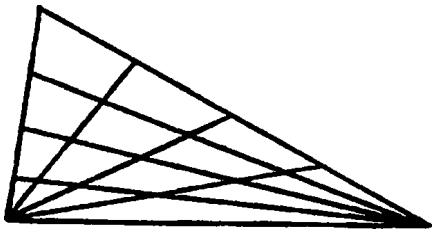
Το παρακάτω σχέδιο πρόκειται να τοποθετηθεί σε μία μπλούζα. Έχετε το πρωτότυπο, και ο βιοτέχνης που θα σχεδιάσει τη μπλούζα το χρειάζεται άμεσα, δυστυχώς όμως δεν έχει φαξ ή σύνδεση στο διαδίκτυο. Έχει όμως ένα τετραγωνισμένο χαρτί ίδιων διαστάσεων με αυτό του σχεδίου και μπορείτε να επικοινωνήσετε τηλεφωνικά μαζί του. Γράψτε τις ακριβείς οδηγίες που πρέπει να του δώσετε για την κατασκευή του σχεδίου.



Σχήμα 2.2. Πρόβλημα 1

Πρόβλημα 2

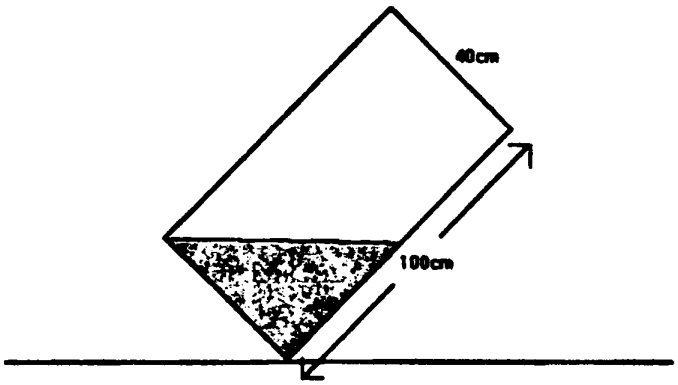
Στο τρίγωνο του σχήματος έχουμε φέρει τρία ευθύγραμμα τμήματα από καθεμιά από τις δύο κορυφές. Έτσι το τρίγωνο χωρίζεται σε 16 μη επικαλυπτόμενες «περιοχές». Πόσες τέτοιες «περιοχές» θα δημιουργηθούν αν φέρουμε 14 ευθύγραμμα τμήματα από καθεμία από τις δύο κορυφές;



Σχήμα 2.3. Πρόβλημα 2

Πρόβλημα 3

Στο παρακάτω σχέδιο απεικονίζεται η μπροστινή όψη ενός ενυδρείου, το οποίο έχει 100 cm μήκος, 60 cm πλάτος και 40 cm ύψος. Το ενυδρείο έχει ανασηκωθεί έτσι ώστε το νερό να φτάνει ως το μέσο της βάσης του. Όταν το ενυδρείο επανέλθει στην οριζόντια θέση του, ποιο θα είναι το βάθος του νερού σε cm;



Σχήμα 2.4. Πρόβλημα 3

Η Civil περιγράφει τρεις τύπους ασκήσεων, «οι οποίοι είναι πιθανόν να προκαλέσουν διαφορές στις συζητήσεις»[17] (Civil, 1998, σ. 208):

α) Ασκήσεις που βασίζονται σε καταστάσεις επίλυσης προβλήματος.

β) Ασκήσεις που βασίζονται σε «γνωστά στους μαθητές πράγματα».

γ) Ασκήσεις που στοχεύουν στη δημιουργία γνωστικής σύγκρουσης.

Θα περιγράψουμε λοιπόν σύντομα τα χαρακτηριστικά του κάθε προβλήματος, και στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε μία ακόμη παράμετρο: τη σειρά με την οποία δόθηκαν τα προβλήματα στους φοιτητές.

Πρόβλημα 1: Αναπαραγωγή σχήματος – υιοθέτηση ρόλου

Το πρώτο πρόβλημα απαιτεί την καταγραφή σαφών οδηγιών, μέσω των οποίων κάποιο άτομο (ο βιοτέχνης) θα μπορούσε να αναπαράγει πιστά το δεδομένο σχέδιο. Το πρώτο ζητούμενο είναι η εύρεση μιας μεθόδου μέσω της οποίας μπορεί να γίνει μια πιστή αναπαραγωγή του σχεδίου· το τετραγωνισμένο πλαίσιο μέσα στο οποίο βρισκόταν το σχέδιο παραπέμπει στη χρήση κάποιου συστήματος συντεταγμένων. Στη συνέχεια, με την προϋπόθεση ότι οι φοιτητές θέλουν να κάνουν μια επαλήθευση της μεθόδου, ο ένας μπορεί να υιοθετήσει το ρόλο του βιοτέχνη, ο οποίος ακούγοντας τις οδηγίες προσπαθεί να κατασκευάσει το σχέδιο.

Πρόβλημα 2: Αναγνώριση προτύπου – γνωστική σύγκρουση

Το δεύτερο πρόβλημα απαιτεί την αναγνώριση της σχέσης που υπάρχει ανάμεσα στον αριθμό των ευθυγράμμων τμημάτων που φέρνουμε από καθεμιά από τις δύο κορυφές του τριγώνου και στο πλήθος των μη επικαλυπτόμενων περιοχών που δημιουργούνται. Η αναγνώριση αυτή μπορεί να γίνει με δοκιμές για διάφορους αριθμούς ευθυγράμμων τμημάτων. Το ζητούμενο του προβλήματος αφορά το πλήθος των περιοχών που δημιουργούνται από 14 ευθύγραμμα τμήματα από καθεμιά από τις δύο κορυφές· ο αριθμός αυτός επιλέχθηκε έτσι ώστε να είναι δυνατή και η γεωμετρική κατασκευή (και επίλυση) του προβλήματος. Το γεγονός αυτό θα μπορούσε να οδηγήσει τα μέλη του ζεύγους σε γνωστική σύγκρουση.[18]

Πρόβλημα 3: Νοερή αναπαράσταση – χρήση τύπων

Το τρίτο πρόβλημα απαιτεί καταρχήν τη νοερή αναπαράσταση από μέρους των φοιτητών δύο διαφορετικών σχημάτων: του τρισδιάστατου ενυδρείου όταν αυτό είναι ανασηκωμένο και όταν αυτό επανέλθει στην οριζόντια θέση του. Οι φοιτητές πρέπει να αναπαραστήσουν το γεωμετρικό στερεό που σχηματίζει η ποσότητα του νερού και στις δύο θέσεις και να χρησιμοποιήσουν τους κατάλληλους τύπους όγκου ή εμβαδού, αφού το πρόβλημα λύνεται και χωρίς τη χρήση του πλάτους (το οποίο παραμένει σταθερό και στις δύο περιπτώσεις).

Σύμφωνα λοιπόν με την κατηγοριοποίηση της Civil, το πρώτο πρόβλημα βασίζεται σε μεγαλύτερο βαθμό σε μια προβληματική κατάσταση, το δεύτερο πρόβλημα ενδέχεται να δημιουργήσει γνωστική σύγκρουση, ενώ το τρίτο βασίζεται σε τύπους που γνωρίζουν οι φοιτητές.[19] Μια άλλη παράμετρος που θεωρούμε ότι θα μπορούσε να επηρεάσει τη μορφή των συζητήσεων που θα προκύψουν είναι η σειρά με την οποία θα δοθούν τα προβλήματα στους φοιτητές. Η ανύπαρκτη εμπειρία τους σε συνεργατική επίλυση προβλημάτων και η χρήση του μαγνητοφώνου έπρεπε να ληφθούν σοβαρά υπόψη. Σχετικά με το ζήτημα της μαγνητοφώνησης ο Cicourel διαπίστωσε ότι «οι συσκευές ηχογράφησης επηρεάζουν τα αρχικά επεισόδια, και ίσως την αρχή μεταγενέστερων επεισοδίων» (Cicourel, 1981, σ. 93). Με άλλα λόγια, οι συμμετέχοντες, όντας μη εξοικειωμένοι στην παρουσία μαγνητοφώνου, τροποποιούν τη συμπεριφορά τους, είτε προσπαθώντας να εκφραστούν με τον τρόπο που θεωρούν ότι αρμόζει στην περίσταση, είτε εκφράζοντας αμηχανία. Γι' αυτό το λόγο, το πρώτο πρόβλημα που θέτουμε στους φοιτητές, με την υιοθέτηση του ρόλου του βιοτέχνη

που περιέχει, λογικά θα οδηγήσει σε μια ουσιαστική συμμετοχή και των δύο μελών του ζεύγους. Επίσης η καταγραφή των οδηγιών σχετίζεται με τη σημασία που θέλουμε να δώσουν οι φοιτητές στην έκφρασή τους. Με το πρώτο πρόβλημα λοιπόν επιδιώκουμε ουσιαστικά την ενεργοποίηση κοινωνικών νορμών σχετικών με την αποδοτική συνεργασία, την αμοιβαία κατανόηση, τη σαφήνεια της έκφρασης και την αμοιβαία κατανόηση. Με το δεύτερο πρόβλημα, επιδιώκουμε να παρατηρήσουμε τα αποτελέσματα της γνωστικής σύγκρουσης που αναμένουμε να συμβεί μεταξύ δύο «αντικρουόμενων»[20] μεθόδων, μιας καθαρά πρακτικής (γεωμετρική κατασκευή και στη συνέχεια καταμέτρηση των περιοχών) και μιας αλγεβρικής (αναγνώριση του μαθηματικού τύπου που συνδέει τον αριθμό των ευθυγράμμων τμημάτων με το πλήθος των περιοχών). Με άλλα λόγια, το δεύτερο πρόβλημα «θέτει σε κίνδυνο» το κλίμα συνεργασίας του ζεύγους· ένα άλλο ενδιαφέρον γλωσσικό χαρακτηριστικό του προβλήματος είναι ότι η επίλυσή του περιλαμβάνει κάποιους συλλογισμούς που απέχουν από την αυστηρή μαθηματική γλώσσα[21] (ένας από αυτούς είναι ότι φέρνοντας π.χ. 3 ευθύγραμμα τμήματα από μια κορυφή του τριγώνου, δημιουργούνται 3+1 περιοχές). Το τρίτο πρόβλημα, όντας πιο «κοντινό» σε θέματα που πιθανόν έχουν αντιμετωπίσει οι φοιτητές στα λυκειακά τους χρόνια, είναι αυτό με το οποίο επιδιώκουμε να ελέγξουμε την επίδραση της ομιλίας στη συγκρότηση εννοιών και διαδικασιών που σχετίζονται με τη νοερή αναπαράσταση γεωμετρικών σχημάτων.

2.3.7. Αρχικές Οδηγίες

Κατά την πρώτη συνάντηση ο ερευνητής ενημερώνει τους φοιτητές σχετικά με τα εξής ζητήματα:

- Δεν πρόκειται να αξιολογηθούν σε σχέση με την επιτυχή ή όχι επίλυση των προβλημάτων.
- Οι συναντήσεις θα μαγνητοσκοπηθούν.
- Δεν πρόκειται να δημοσιοποιηθεί το όνομά τους.
- Ο ρόλος του ερευνητή περιορίζεται στην παρατήρηση της αλληλεπίδρασης και δεν πρόκειται να απαντά σε ερωτήσεις σχετικές με την επίλυση των προβλημάτων.

- Επιτρέπεται η χρήση και μολυβιού, στυλό και γεωμετρικών οργάνων (όλα είναι στη διάθεσή τους), αλλά αποθαρρύνεται η χρήση υπολογιστή τσέπης, κινητού τηλεφώνου[22] και γόμας ή διορθωτικού υγρού.
- Η διάρκεια κάθε συνάντησης είναι μία ώρα, αλλά αν κριθεί αναγκαίο μπορεί να δοθεί παράταση χρόνου.

Η Cohen υποστηρίζει ότι

> ... σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, ο τρόπος με τον οποίο οι οδηγίες που δίνονται καθορίζουν το πρόβλημα, προτείνουν διαδικασίες επίλυσης και καθορίζουν τους ρόλους των μαθητών, μπορεί να οδηγήσει σε μια αλληλεπίδραση αξιοσημείωτα ανώτερη από αυτή που θα οδηγούσε κάποιος ζητώντας από την ομάδα απλά να καταλήξει σε συμφωνία. (Cohen, 1994, σ. 21).

Οι οδηγίες που αποφασίζουμε να δώσουμε στους φοιτητές έχουν βασικό σκοπό την παρότρυνσή τους να συνεργαστούν ουσιαστικά χρησιμοποιώντας την ομιλία. Οι οδηγίες που δίνονται είναι οι ακόλουθες:

1. Να μιλάτε δυνατά και καθαρά.

2. Να εκφράζετε κάθε σκέψη σας μέσω της ομιλίας.

3. Να προσπαθήσετε να συνεργαστείτε στην επίλυση του προβλήματος.

Στους φοιτητές εκτός από τη σελίδα που περιέχει την εκφώνηση του προβλήματος και χώρο για την καταγραφή της απάντησης (την οποία θα ονομάζουμε από εδώ και στο εξής αρχική σελίδα), δίνονται και άλλες 4 αριθμημένες σελίδες για να χρησιμοποιηθούν ως πρόχειρο. Στο πρώτο πρόβλημα οι σελίδες περιέχουν και ένα τετραγωνισμένο πλέγμα όμοιο με αυτό της εκφώνησης χωρίς το σχέδιο.

Στο τρίτο πρόβλημα χρειάζεται να δοθεί μια επιπλέον βοήθεια σε κάποια ζεύγη: επειδή το τρισδιάστατο σχήμα του ενυδρείου προκαλεί κάποια προβλήματα, δίνουμε στους φοιτητές μία θήκη μουσικής κασέτας με σκοπό να εξοικειωθούν με τη μορφή του σχήματος αυτού.

2.3.8. Ο Ρόλος του Παρατηρητή

Έχουμε ήδη περιγράψει τα πρώτα χαρακτηριστικά του ρόλου του παρατηρητή: είναι το άτομο που πρέπει να εξηγήσει με σαφήνεια όλα τα διαδικαστικά θέματα των συναντήσεων και να «μεταδώσει» ένα πνεύμα συνεργασίας στα μέλη των ζευγών. Σε αρκετές περιπτώσεις επιδιώκει να καθησυχάσει τους φοιτητές, υπενθυμίζοντας τον ερευνητικό χαρακτήρα των συναντήσεων. Γενικά όμως, ο παρατηρητής υιοθετεί το ρόλο του «κοινού» (audience) σύμφωνα με τη δραματουργική προσέγγιση, δίνοντας έτσι την ευκαιρία στα υποκείμενα να αλληλεπιδράσουν χωρίς εξωτερικές επεμβάσεις

και να ερμηνεύσουν απρόσκοπτα τους ρόλους τους. Τα βασικά χαρακτηριστικά της συμπεριφοράς του κοινού είναι η αυξημένη προσοχή και ενδιαφέρον και η επιθυμία για κάποιο έλεγχο προς αποφυγή διακοπών και οποιασδήποτε *σκηνής*.[23] (Goffman, 1971, σ. 224). Η συμμετοχή του παρατηρητή μπορεί να χαρακτηριστεί δηλαδή ως «παθητική», αφού «είναι παρών στη σκηνή της δράσης, αλλά δεν συμμετέχει ούτε αλληλεπιδρά με άλλους σε μεγάλο βαθμό» (Spradley, 1980, σ. 59, όπως αναφέρεται στη Steele, 1997). Σύμφωνα με τα παραπάνω, ο παρατηρητής (ο οποίος θα αναφέρεται και ως ερευνητής στο εξής), μετά την παροχή των αρχικών οδηγιών, αποφεύγει με οποιοδήποτε τρόπο την άμεση εμπλοκή του στην αλληλεπίδραση. Απαντά βεβαίως σε ερωτήσεις διαδικαστικού χαρακτήρα (που αφορούν το διαθέσιμο χρόνο ή τη χρήση των γεωμετρικών οργάνων), αλλά αποφεύγει να απαντήσει σε ερωτήσεις σχετικές με την πορεία επίλυσης του προβλήματος. Σε αυτές τις περιπτώσεις (δηλαδή σε ερωτήσεις του τύπου «είναι σωστό αυτό που κάνουμε;») απαντά συνήθως με ένα χαμόγελο ή στρέφει το βλέμμα του σε άλλη κατεύθυνση.[24] Σε λίγες περιπτώσεις, και μόνο όταν τα χρονικά περιθώρια είναι στενά και το συνεργαζόμενο ζεύγος έχει καταλήξει στην ορθή μέθοδο επίλυσης, απαντά σε σχετική ερώτηση επιβεβαίωσης. (Η παραπάνω συμπεριφορά δεν εφαρμόστηκε σε τέτοιο βαθμό κατά τη διάρκεια της προέρευνας, για λόγους που θα αναλύσουμε στη σχετική παράγραφο). Με αυτό τον τρόπο θεωρούμε ότι ελαχιστοποιούμε τον κίνδυνο επίδρασης στις πρακτικές επίλυσης των υποκειμένων (Schoenfeld, 1985, σ. 282).

2.3.9. Συλλογή Δεδομένων

Η μαγνητοφώνηση των συζητήσεων πραγματοποιείται με τη βοήθεια ενός δημοσιογραφικού κασετοφώνου, το οποίο είναι τοποθετημένο σε κοινή θέα των συμμετεχόντων. Η μαγνητοφώνηση ξεκινά τη στιγμή που δίνεται το πρόβλημα στους φοιτητές και ολοκληρώνεται με την παράδοση της καταγεγραμμένης λύσης. Ένα πρώτο ζήτημα που πρέπει να αντιμετωπίσουμε είναι το είδος των δεδομένων που θα συλλέξουμε· αποφασίζουμε να επικεντρωθούμε στην ομιλία των φοιτητών και να μη περιλάβουμε στοιχεία όπως κινήσεις του σώματος, χειρονομίες ή μορφασμούς. Εξαίρεση αποτελούν οι κινήσεις που αφορούν το χειρισμό των γεωμετρικών οργάνων που είναι διαθέσιμα ή τη σχεδίαση κάποιου σχήματος. Πάντως, ακόμη και αν κάποιοι υποστηρίζουν ότι όλα τα στοιχεία πρέπει να μεταφέρονται στο χαρτί ως δεδομένα, έτσι ώστε να δίνεται η δυνατότητα σε κάποιον άλλο ερευνητή να τα χρησιμοποιήσει,

... είναι αδύνατο να περιλάβει κανείς *όλα* τα στοιχεία μιας αλληλεπίδρασης και έτσι, πρακτικά το απομαγνητοφωνημένο κείμενο προκύπτει ως ένα επαναλαμβανόμενα τροποποιημένο κείμενο, το οποίο αντανακλά σε όλο και μεγαλύτερο βαθμό τις κατηγορίες που είναι σχετικές με την ανάλυση. (Jordan and Henderson, 1995, σ. 48)

2.3.10. Ανάλυση

2.3.10.1. Συνδυαστική Ανάλυση σε Επίπεδα

Θεωρώντας ως βασικό φαινόμενο προς μελέτη τη συγκρότηση κοινής γνώσης στηριζόμαστε καταρχήν στη μεθοδολογία των Strauss and Corbin (1990) για την κωδικοποίηση των διαλόγων που προκύπτουν· η κωδικοποίηση αυτή βασίζεται στην αρχή ότι οι κατηγορίες που προέρχονται από τη σχετική βιβλιογραφία (δηλαδή οι μεταβλητές που έχουν αναγνωριστεί σε προηγούμενες μελέτες), είναι εξαρτημένες από το πλαίσιό τους, δηλαδή το γεγονός ότι:

... ταιριάζουν στη μελέτη από την οποία προέρχονται... δεν σημαίνει απαραίτητα ότι μπορούν να εφαρμοστούν στην περίπτωση που μελετάται, ή ότι συνοδεύουν άλλες έννοιες με τον ίδιο τρόπο όπως σε προηγούμενες θεωρίες. (Strauss and Corbin, 1990, σ. 45).

Αντιμετωπίζονται επομένως ως προσωρινές μέχρι να στηριχθούν στα πραγματικά δεδομένα. Κατά τη διάρκεια της ανάλυσης λοιπόν, λαμβάνει χώρα μια συνεχής εξέταση της συμβατότητάς τους με τα φαινόμενα που περιγράφουν. Η παραπάνω μεθοδολογία είναι γνωστή ως *εμπειρικά θεμελιωμένη θεωρία* (grounded theory).

Γενικά, σύμφωνα πάντα με τους Strauss and Corbin (1990), η κωδικοποίηση πραγματοποιείται σε τρία στάδια: την ανοιχτή, την αξονική και την επιλεκτική κωδικοποίηση.[25] Κατά την ανοιχτή κωδικοποίηση λαμβάνει χώρα η ονοματολογία και μία πρώτη κατηγοριοποίηση των δεδομένων: «τα δεδομένα τεμαχίζονται σε διακριτά τμήματα, εξετάζονται προσεκτικά, συγκρίνονται για ομοιότητες και διαφορές και γίνονται ερωτήσεις για το πώς τα φαινόμενα αντικατοπτρίζονται στα δεδομένα» (Strauss and Corbin, 1990, σ. 62). Ακολουθεί η αναγνώριση και η παραμετροποίηση των ιδιοτήτων των κατηγοριών:

... κάθε κατηγορία έχει διάφορες γενικές ιδιότητες, και κάθε ιδιότητα διαφέρει σε ένα διπολικό συνεχές (dimensional continuum). Αυτό δίνει σε κάθε εμφάνιση μιας κατηγορίας ένα ξεχωριστό διπολικό *προφίλ*. Ορισμένα από αυτά τα προφίλ μπορούν να ομαδοποιηθούν και να δώσουν ένα *πρότυπο*. Το διπολικό προφίλ αναπαριστά τις *συγκεκριμένες ιδιότητες* ενός φαινομένου σε ένα ορισμένο σύνολο συνθηκών. (Strauss and Corbin, 1990, σ. 70).

Στην αξονική κωδικοποίηση λαμβάνει χώρα ένας επανακαθορισμός κάθε κατηγορίας βάσει:

> ... των συνθηκών που την προκαλούν· του *πλαισίου* (το συγκεκριμένο σύνολο ιδιοτήτων της) που την περιέχει· των *στρατηγικών* δράσης / αλληλεπίδρασης μέσω των οποίων αυτή διαχειρίζεται· και των *επιπτώσεων* αυτών των στρατηγικών. Αυτά τα χαρακτηριστικά παρέχουν σε κάθε κατηγορία μια σαφήνεια, γι' αυτό και αναφερόμαστε σ' αυτά ως *υποκατηγορίες*. Ουσιαστικά, είναι και αυτά κατηγορίες, αλλά επειδή συνδέονται με μια κατηγορία μέσω μιας μορφής σχέσης, προσθέτουμε το πρόθεμα «υπο». (Strauss and Corbin, 1990, σ. 97).

Η αξονική κωδικοποίηση γίνεται σε τέσσερα στάδια, τα οποία εκτελούνται σχεδόν ταυτόχρονα και περιλαμβάνουν:

α) την υποθετική συσχέτιση των υποκατηγοριών με μια κατηγορία μέσω των εκφράσεων που δηλώνουν τη σχέση μεταξύ αυτών και του φαινομένου προς μελέτη,

β) την επαλήθευση αυτών των υποθέσεων στα πραγματικά δεδομένα,

γ) τη συνεχή αναζήτηση ιδιοτήτων των κατηγοριών και των υποκατηγοριών των δεδομένων που σχετίζονται με αυτές,

δ) μια αρχική έρευνα για τη διαφοροποίηση των φαινομένων, μέσω της σύγκρισης όλων των κατηγοριών και των υποκατηγοριών τους για την εύρεση προτύπων και δομών.

Η επιλεκτική κωδικοποίηση περιλαμβάνει την τελική συσχέτιση μεταξύ των κατηγοριών (και των υποκατηγοριών τους) και του βασικού φαινομένου προς μελέτη. Υπάρχει δηλαδή, όπως και στην αξονική κωδικοποίηση, μια συσχέτιση κατηγοριών, μόνο που λαμβάνει χώρα σε ανώτερο και πιο αφηρημένο επίπεδο ανάλυσης. Τα στάδια που περιλαμβάνει η επιλεκτική κωδικοποίηση είναι τα εξής:

α) ανάπτυξη του βασικού άξονα της ανάλυσης, δηλαδή μια περιγραφή του κεντρικού φαινομένου που αποτελεί το επίκεντρο της έρευνας,

β) σύνδεση των βοηθητικών κατηγοριών με τη βασική κατηγορία με τη χρήση των συνθηκών, του πλαισίου, των στρατηγικών δράσης / αλληλεπίδρασης και των επιπτώσεων αυτών των στρατηγικών, στοιχεία που χρησιμοποιήσαμε και κατά την αρχική, ανοιχτή κωδικοποίηση,

γ) σύνδεση των κατηγοριών σε σχέση με τις ιδιότητές τους,

δ) επαλήθευση των παραπάνω συνδέσεων στα πραγματικά δεδομένα,

ε) πρόσθεση καινούριων κατηγοριών, όπου αυτό κριθεί απαραίτητο ή ανάπτυξη των ήδη υπαρχόντων κατηγοριών.

Φυσικά, πρέπει να τονίσουμε ότι «αυτά τα βήματα δεν ακολουθούνται με γραμμικό τρόπο, ούτε είναι διακριτά στην πραγματικότητα» (Strauss and Corbin, 1990, σ. 118). Οι παραπάνω αρχές της ανάλυσης αφορούν ένα μεγάλο εύρος ερευνών ποιοτικού χαρακτήρα· έχοντας λοιπόν υπόψη και τη σχετική με το πεδίο που μας ενδιαφέρει

βιβλιογραφία, ακολουθούμε μία συνδυαστικού τύπου μελέτη, η οποία ενσωματώνει τη βασική αρχή των συνδυαστικών μελετών, δηλαδή την ανάλυση σε επίπεδα. Εκτός από τις συνδυαστικές μελέτες που προαναφέραμε, την ίδια τεχνική (στα πλαίσια της διδακτικής των φυσικών επιστημών) προτείνει και ο Lemke, ο οποίος υποστηρίζει ότι:

> Κάθε έκφραση – η οποία μπορεί να είναι μια λέξη ή φράση οι οποίες συνεισφέρουν με ευδιάκριτο τρόπο στις έννοιες που αποτελούν αντικείμενο της επικοινωνίας – αναλύεται σαν να συνεισφέρει *και* στην υλοποίηση συγκεκριμένων δομών της δραστηριότητας (activity structures) και στην ανάπτυξη κάποιου από τα θεματικά συστήματα του μαθήματος. (Lemke, 1989, σ. 17).

Η ανάλυση αυτή καταδεικνύει ότι οι δύο αυτές λειτουργίες της γλώσσας αλληλεξαρτώνται και μάλιστα, σε κάποιες περιπτώσεις η μία επιδρά αρνητικά στην άλλη.[26] Επίσης, ο Mercer (2000) κάνει λόγο για ανάλυση σε τρία επίπεδα: το γλωσσικό, στο οποίο ταξινομούνται οι γλωσσικές πράξεις, αλλά και τα θέματα που συζητούνται· το ψυχολογικό, στο οποίο τυποποιείται η επικοινωνιακή σχέση των ομιλητών και οι κανόνες που εφαρμόζονται· το πολιτισμικό, στο οποίο επιδιώκεται μία σύνδεση ανάμεσα στο είδος της ομιλίας που έχει χρησιμοποιηθεί και στις κοινωνικές και πολιτιστικές αξίες που αυτή αντανακλά. Όλα τα παραπάνω στοιχεία λαμβάνονται υπόψη για τη συγκρότηση της συνδυαστικής μας ανάλυσης, η οποία πραγματοποιείται σε τρία επίπεδα, τα οποία παρουσιάζουμε στις επόμενες παραγράφους.

2.3.10.2. Πρώτο Επίπεδο: Ανάλυση του Γλωσσικού Κώδικα και Συσχετισμός με τη Συγκρότηση Κοινής Γνώσης

Οι Steffe and Thompson υποστηρίζουν ότι:

> Όταν δύο άτομα συμμετέχουν σε κοινωνική αλληλεπίδραση, διυποκειμενική γνώση συγκροτείται όταν
>
> (1) κάθε άτομο αμοιβαία αφομοιώνει τη γλώσσα και τις ενέργειες του άλλου,
>
> (2) η αμοιβαία διαδικασία της αφομοίωσης συνεχίζεται μέχρι να μην είναι απαραίτητες περαιτέρω προσαρμογές των διανοητικών δομών που εμπλέκονται στη διαδικασία αυτή, και
>
> (3) τα δύο άτομα καταλήγουν σε συμφωνία[27] για τη σημασία των αποτελεσμάτων των αλληλεπιδράσεών τους. (Steffe and Thompson, 2000, σ. 193).

Το πρώτο μέλημα της ανάλυσής μας είναι ο εντοπισμός των στιχομυθιών που οδηγούν στην ανάπτυξη κοινών εννοιών ή διαδικασιών, αλλά και των περιπτώσεων στις οποίες μια νέα έννοια (ή διαδικασία) δεν γίνεται κοινή· βασιζόμαστε λοιπόν στον

παραπάνω ορισμό, καθώς και σε ευρήματα σχετικών ερευνών.[28] Οδηγούμαστε έτσι στην εξής ακολουθία που περιγράφει τη διαδικασία σχηματισμού μιας κοινής έννοιας/διαδικασίας:

1. Εισαγωγή της έννοιας/διαδικασίας.
2. Διαπραγμάτευση της έννοιας/διαδικασίας.
3. Αποδοχή της έννοιας/διαδικασίας.
4. Εφαρμογή της – κοινής πια – έννοιας/διαδικασίας.

Πρέπει να επισημάνουμε ότι τα παραπάνω στάδια, δεν ακολουθούνται αυστηρά· σε κάποιες περιπτώσεις μία καινούρια έννοια/διαδικασία η οποία εισάγεται από τον ένα φοιτητή, μπορεί να γίνει άμεσα αποδεκτή από τον άλλο χωρίς να είναι σαφής η *οικειοποίησή* της από αυτόν.[29] Σε αυτές τις περιπτώσεις, η ανάλυσή μας επεκτείνεται και στο πλαίσιο που περιβάλλει το παραπάνω σχήμα, δηλαδή σε όλες τις εκφράσεις που θα μπορούσαν να μας δώσουν κάποια ένδειξη για το κατά πόσο οικειοποιήθηκε η έννοια (ή η διαδικασία) από κάποιο φοιτητή.

Στη συνέχεια, γίνεται μια κατηγοριοποίηση βάσει της μεθοδολογίας των Strauss and Corbin (1990) που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο: κεντρικό φαινόμενο προς μελέτη είναι η συγκρότηση κοινής γνώσης. Δημιουργούμε λοιπόν τρεις κατηγορίες, τις οποίες ονομάζουμε «Βοηθά στη συγκρότηση κοινής γνώσης», «Δεν επηρεάζει τη συγκρότηση κοινής γνώσης» και «Εμποδίζει τη συγκρότηση κοινής γνώσης». Σε αυτό το επίπεδο της ανάλυσης, στο οποίο μας ενδιαφέρει η επίδραση της μη μαθηματικής γλώσσας, πρέπει να δημιουργήσουμε κάποιες υποκατηγορίες και για το είδος της γλώσσας· χρησιμοποιούμε λοιπόν ένα τμήμα της κατηγοριοποίησης της Pirie (1998), η οποία έχει ταξινομήσει τα μέσα της μαθηματικής επικοινωνίας ως εξής:

- *Καθημερινή γλώσσα*. Ο όρος *καθημερινή* δηλώνει τη γλώσσα που είναι συνήθης στο καθημερινό λεξιλόγιο κάθε παιδιού, η οποία φυσικά, ποικίλει για μαθητές διαφορετικών ηλικιών και επιπέδων κατανόησης.
- *Μαθηματική λεκτική γλώσσα*. *Λεκτική* σημαίνει «χρησιμοποιώντας λέξεις», σε γραπτό ή προφορικό λόγο.
- *Συμβολική γλώσσα*. Αυτός ο τύπος επικοινωνίας πραγματοποιείται με τη χρήση γραπτών, μαθηματικών συμβόλων.

- *Οπτική αναπαράσταση*. Περιλαμβάνει τα σχήματα, τα σχεδιαγράμματα και τους διάφορους πίνακες. Αν και δεν είναι αυστηρά μια «γλώσσα», αποτελεί ένα ισχυρό μέσο μαθηματικής επικοινωνίας.
- *Άδηλες κοινές υποθέσεις*. Και αυτές δεν περιλαμβάνονται στον ορισμό της «γλώσσας», αποτελούν όμως ένα μέσο για τη μετάδοση και την δημιουργία μαθηματικής γνώσης.[30]
- *Ψευδο-μαθηματική γλώσσα*. Αυτή η γλώσσα – η οποία χρησιμοποιείται κυρίως από τους μαθητές – έχει μαθηματικό νόημα, το οποίο δεν είναι πάντα προφανές για τους άλλους (όπως για παράδειγμα το δάσκαλο). Για τους σκοπούς της έρευνάς μας, σε αυτή την κατηγορία εντάσσουμε και όλες τις λαθεμένες μαθηματικές εκφράσεις.

Από την παραπάνω κατηγοριοποίηση επιλέγουμε τις υποκατηγορίες που μας ενδιαφέρουν: την καθημερινή και την ψευδο-μαθηματική γλώσσα. Στη συνέχεια προσθέτουμε δύο ακόμη υποκατηγορίες: η πρώτη αφορά το αντικείμενο στο οποίο αναφέρεται η συγκεκριμένη έκφραση, το οποίο μπορεί να είναι μια μαθηματική έννοια ή μια μαθηματική διαδικασία·[31] η δεύτερη αφορά τη συχνότητα κατά την οποία το συγκεκριμένο είδος γλώσσας σχετίζεται με την από κοινού αποδοχή της προτεινόμενης έννοιας ή διαδικασίας. Στόχος μας είναι η δημιουργία ενός πλέγματος, το οποίο θα συνδέει τις κατηγορίες συγκρότησης κοινής γνώσης με τις υποκατηγορίες της γλώσσας και της συχνότητας. Μια ενδεικτική μορφή αυτού του πλέγματος παρατίθεται στον Πίνακα 2.2.· σε αυτό το πλέγμα, για λόγους απλούστευσης συγχωνεύουμε τις δύο κατηγορίες του είδους της γλώσσας σε μία ενιαία κατηγορία «Μη μαθηματική γλώσσα»:[32]

Πίνακας 2.2. Συσχετισμός του είδους της γλώσσας με τη συγκρότηση κοινής γνώσης

Κατηγορία	Υποκατηγορία Α	Υποκατηγορία Β	Υποκατηγορία Γ
Βοηθά στη συγκρότηση κοινής γνώσης	Μη μαθηματική γλώσσα	Έννοια	Συνεχώς ... Περιστασιακά
		Διαδικασία	Συνεχώς ... Περιστασιακά
Δεν επηρεάζει τη συγκρότηση κοινής γνώσης	Μη μαθηματική γλώσσα	Έννοια	Συνεχώς ... Περιστασιακά
		Διαδικασία	Συνεχώς ... Περιστασιακά
Εμποδίζει τη συγκρότηση κοινής γνώσης	Μη μαθηματική γλώσσα	Έννοια	Συνεχώς ... Περιστασιακά
		Διαδικασία	Συνεχώς ... Περιστασιακά

2.3.10.3. Δεύτερο Επίπεδο: Αναγνώριση των Νορμών που Διέπουν τη Συζήτηση και Συσχετισμός τους με τη Συγκρότηση Κοινής Γνώσης

Έχοντας αναγνωρίσει τις διαδικασίες που «παράγουν» κοινή γνώση, αλλά και την επίδραση του είδους της γλώσσας σε αυτές τις διαδικασίες, το επόμενο βήμα είναι η μελέτη της επίδρασης των κοινωνικών και κοινωνικομαθηματικών νορμών. Η διαδικασία που ακολουθούμε είναι η εξής: αρχικά αναγνωρίζουμε τις κοινωνικές και κοινωνικομαθηματικές νόρμες, μέσω συγκεκριμένων εκφράσεων των φοιτητών, και στη συνέχεια, εντάσσουμε τις νόρμες αυτές στις βασικές κατηγορίες του πρώτου επιπέδου, ως εξής:

Πίνακας 2.3. Συσχετισμός του είδους των νορμών με τη συγκρότηση κοινής γνώσης

Κατηγορία	Υποκατηγορία Α	Υποκατηγορία Β
Βοηθά στη συγκρότηση κοινής γνώσης	Κοινωνική νόρμα Α	Συνεχώς ... Περιστασιακά
	Κοινωνική νόρμα Β	
	Κοινωνικομαθηματική νόρμα Α	Συνεχώς ... Περιστασιακά
	Κοινωνικομαθηματική νόρμα Β	
Δεν επηρεάζει τη συγκρότηση κοινής γνώσης	Κοινωνική νόρμα Α	Συνεχώς ... Περιστασιακά
	Κοινωνική νόρμα Β	
	Κοινωνικομαθηματική νόρμα Α	Συνεχώς ... Περιστασιακά
	Κοινωνικομαθηματική νόρμα Β	
Εμποδίζει τη συγκρότηση κοινής γνώσης	Κοινωνική νόρμα Α	Συνεχώς ... Περιστασιακά
	Κοινωνική νόρμα Β	
	Κοινωνικομαθηματική νόρμα Α	Συνεχώς ... Περιστασιακά
	Κοινωνικομαθηματική νόρμα Β	

2.3.10.4. Τρίτο Επίπεδο: Ανάλυση των Ρόλων που Υιοθετούν τα Υποκείμενα και Συσχετισμός με τη Συγκρότηση Κοινής Γνώσης

Σύμφωνα με το δραματουργικό μοντέλο της θεωρίας ρόλου, τρία στοιχεία απαρτίζουν μία «παράσταση»: το σκηνικό, η προσωπική έκφραση του ατόμου (δηλαδή η εμφάνιση και οι ενέργειές του) και το κοινό. Έχοντας ως επίκεντρο της μελέτης μας τους ρόλους που ερμηνεύουν οι φοιτητές καθώς αλληλεπιδρούν, θεωρούμε τα υπόλοιπα στοιχεία σταθερά.[33] επιπλέον, επικεντρώνουμε τη μελέτη μας στις γλωσσικές ενέργειες των μετεχόντων.[34] Στο αρχικό στάδιο της ανάλυσης, ταξινομούμε τις γλωσσικές ενέργειες στις εξής κατηγορίες:[35]

Έκφραση βεβαιότητας	Έκφραση αβεβαιότητας
Έκφραση συμφωνίας	Έκφραση διαφωνίας
Υποβολή πρότασης	Αναζήτηση πρότασης
Κατάθεση γνώμης	Αναζήτηση γνώμης
Παροχή πληροφορίας	Αναζήτηση πληροφορίας
Έκφραση αυτοσαρκασμού	Έκφραση ειρωνείας
Έκφραση επιβράβευσης	Έκφραση επίπληξης
Ένδειξη εκτόνωσης της έντασης	Ένδειξη έντασης

Στη συνέχεια, εισάγουμε και άλλες υποκατηγορίες, με σκοπό την πληρέστερη ανάλυση των παραπάνω ενεργειών: το είδος της γλώσσας που χρησιμοποιείται και τις κατηγορίες συσχέτισης συμπεριφορών που αναφέραμε στην παράγραφο 1.5.2.1. (διαφοροποίηση, ομοφωνία, ομοιομορφία, εξειδίκευση, συνάφεια, αλληλεξάρτηση, συμμόρφωση, και προσαρμογή). Η προσθήκη των επιπλέον κατηγοριών γίνεται και με βάση το σκεπτικό ότι ένας ρόλος δεν αποτελείται από το άθροισμα κάποιων ενεργειών, αλλά και από τους συσχετισμούς αυτών των ενεργειών με κάποιες άλλες. Τέλος, ταξινομούμε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο και τις αντιδράσεις του συνομιλητή, ο οποίος είναι ο δέκτης των ενεργειών του ομιλητή. Σε πολλές περιπτώσεις αυτή η διαδικασία επεκτείνεται σε μεγάλες ατιχομυθίες, πάντα έχοντας ως βάση το αρχικό σχήμα δρων-δέκτης. Καταλήγουμε έτσι σε κάποιες ακολουθίες ενεργειών, οι οποίες μας παρέχουν μία πρώτη εικόνα της ερμηνείας των ρόλων των φοιτητών.

Λαμβάνοντας τέλος υπόψη το γενικότερο θεωρητικό μας πλαίσιο, αλλά και τα δύο βασικά μοντέλα της θεωρίας ρόλου (το δραματουργικό και το παιγνιώδες) οδηγούμαστε στην τελική διαμόρφωση των βασικών ρόλων που συναντήσαμε στις συναντήσεις. Τα δύο πρώτα στάδια της παραπάνω διαδικασίας (δηλαδή η αρχική κατηγοριοποίηση και η χρήση των εννοιών συσχέτισης) παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.4.[36] στον οποίο, για λόγους απλούστευσης:

α) δεν εμφανίζεται η υποκατηγορία «Είδος γλώσσας»,

β) κάθε ρόλος εκφράζεται με δύο μόνο γλωσσικές ενέργειες,

γ) υφίστανται μόνο δύο μορφές συσχέτισης, η αλληλεξάρτηση και η συμμόρφωση σε κάποια νόρμα.

Πίνακας 2.4. Κατηγοριοποίηση των ρόλων

Κατηγορία	Υποκατηγορία Α Γλωσσικές Ενέργειες	Υποκατηγορία Β (Αλληλεξάρτηση)	Υποκατηγορία Γ (Συμμόρφωση)
Ρόλος υποκειμένου Α	Ενέργεια Α1	Ενέργεια Α2	Νόρμα 1 Νόρμα 2
		Ενέργεια Β1	
		Ενέργεια Β2	
	Ενέργεια Α2	Ενέργεια Α1	Νόρμα 1 Νόρμα 2
		Ενέργεια Β1	
		Ενέργεια Β2	
Ρόλος υποκειμένου Β	Ενέργεια Β1	Ενέργεια Β2	Νόρμα 1 Νόρμα 2
		Ενέργεια Α1	
		Ενέργεια Α2	
	Ενέργεια Β2	Ενέργεια Β1	Νόρμα 1 Νόρμα 2
		Ενέργεια Α1	
		Ενέργεια Α2	

Ο Πίνακας 2.4. καταδεικνύει την αλληλεξάρτηση όχι μόνο των ενεργειών αλλά και των ίδιων των ρόλων, παραδοχή που συνάδει με τις αρχές της θεωρίας της συμβολικής αλληλεπίδρασης, αλλά και της θεωρίας ρόλου.

Στο τελικό στάδιο της ανάλυσης των ρόλων λαμβάνει χώρα η εξέταση πιθανών σχέσεων μεταξύ των ρόλων που έχουν υιοθετηθεί και της κοινής γνώσης που έχει συγκροτηθεί. Η εξέταση αυτή οδηγεί σε ένα συσχετισμό παρόμοιο με αυτούς που αναφέραμε στα προηγούμενα επίπεδα της ανάλυσης και ο οποίος παριστάνεται στον Πίνακα 2.5. στον οποίο, για λόγους απλούστευσης, υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο μόνο δυνατοί ρόλοι για κάθε υποκείμενο, ο ρόλος 1 και ο ρόλος 2:

Πίνακας 2.5. Συσχετισμός των συνδυασμών των ρόλων με τη συγκρότηση κοινής γνώσης

Κατηγορία	Υποκατηγορία Α (Συνδυασμός Ρόλων)	Υποκατηγορία Β (Συχνότητα)
Βοηθά στη συγκρότηση κοινής γνώσης	Ρόλος 1 υποκειμένου Α + Ρόλος 1 υποκειμένου Β	Συνεχώς ... Περιστασιακά
	Ρόλος 1 υποκειμένου Α + Ρόλος 2 υποκειμένου Β	Συνεχώς ... Περιστασιακά
	Ρόλος 2 υποκειμένου Α + Ρόλος 1 υποκειμένου Β	Συνεχώς ... Περιστασιακά
	Ρόλος 2 υποκειμένου Α + Ρόλος 2 υποκειμένου Β	Συνεχώς ... Περιστασιακά
Δεν επηρεάζει τη συγκρότηση κοινής γνώσης	Ρόλος 1 υποκειμένου Α + Ρόλος 1 υποκειμένου Β	Συνεχώς ... Περιστασιακά
	Ρόλος 1 υποκειμένου Α + Ρόλος 2 υποκειμένου Β	Συνεχώς ... Περιστασιακά
	Ρόλος 2 υποκειμένου Α + Ρόλος 1 υποκειμένου Β	Συνεχώς ... Περιστασιακά
	Ρόλος 2 υποκειμένου Α + Ρόλος 2 υποκειμένου Β	Συνεχώς ... Περιστασιακά

Πίνακας 2.5. (συνέχεια)

Συσχετισμός των συνδυασμών των ρόλων με τη συγκρότηση κοινής γνώσης

Εμποδίζει τη συγκρότηση κοινής γνώσης	Ρόλος 1 υποκειμένου Α + Ρόλος 1 υποκειμένου Β	Συνεχώς ... Περιστασιακά
	Ρόλος 1 υποκειμένου Α + Ρόλος 2 υποκειμένου Β	Συνεχώς ... Περιστασιακά
	Ρόλος 2 υποκειμένου Α + Ρόλος 1 υποκειμένου Β	Συνεχώς ... Περιστασιακά
	Ρόλος 2 υποκειμένου Α + Ρόλος 2 υποκειμένου Β	Συνεχώς ... Περιστασιακά

2.4. Η ΠΡΟΕΡΕΥΝΑ

Η προέρευνα διενεργείται κατά τη διάρκεια του εαρινού εξαμήνου του 2000 στο Εργαστήριο Διδασκαλίας των Μαθηματικών του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης. Υποκείμενα της έρευνας είναι 20 φοιτήτριες και φοιτητές του τμήματος, από τους οποίους ζητείται να επιλέξουν το άτομο με το οποίο θα συνεργαστούν.[37] Τα υποκείμενα προσφέρονται εθελοντικά να συμμετάσχουν στην έρευνα και είναι φοιτητές στο 3° και στο 4° έτος σπουδών του Π.Τ.Δ.Ε.

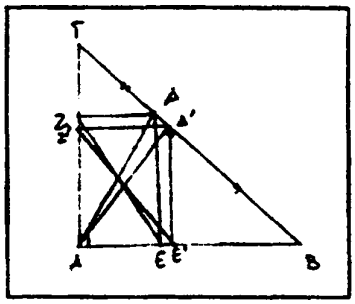
Οι συναντήσεις πραγματοποιούνται στο Εργαστήριο Διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Π.Τ.Δ.Ε. Παρόντες κατά τη διάρκεια της συνάντησης είναι οι δύο φοιτητές και ο ερευνητής.

Το είδος του προβλήματος που θα δοθεί για επίλυση μας απασχόλησε αρκετά· αποφασισμένοι να κινηθούμε στα πλαίσια της γεωμετρίας, επιλέγουμε ένα πρόβλημα το οποίο θα απαιτεί μια συνδυαστική αντιμετώπιση απλών εννοιών, που οι φοιτητές έχουν διδαχθεί στο Λύκειο. Θέλοντας από την άλλη να μεγιστοποιήσουμε την ομοιομορφία των αλληλεπιδράσεων (για τη διευκόλυνση της ανάλυσης και της εξαγωγής συμπερασμάτων) επιλέγουμε ένα πρόβλημα, το οποίο στα πλαίσια των γεωμετρικών γνώσεων των φοιτητών επιδέχεται μία μέθοδο επίλυσης.[38] Πρόκειται για το εξής πρόβλημα:

Δίνεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$). Στην πλευρά ΒΓ ορίζουμε ένα τυχαίο σημείο Δ και φέρνουμε τις ΔΕ και ΔΖ κάθετες στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να φέρετε το ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ και να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου Δ ώστε το μήκος του ΕΖ να είναι το ελάχιστο δυνατόν.

Πρόκειται για ένα πρόβλημα Ευκλείδειας γεωμετρίας, το οποίο απαιτεί για την επίλυσή του τη γνώση των ιδιοτήτων δύο βασικών εννοιών: του ύψους τριγώνου και του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Η κατασκευή του σχήματος και η σύγκριση των

μηκών του ΑΔ (το οποίο ισούται με το ΕΖ, ως διαγώνιες ορθογωνίου παραλληλογράμμου) για τυχαίες θέσεις του Δ ήταν μία πρώτη μέθοδος που θεωρητικά θα παρείχε στους φοιτητές μία ένδειξη για τη θέση του σημείου πάνω στην υποτείνουσα. Ακολουθεί ένα ενδεικτικό σχήμα ενός ζεύγους φοιτητών:



Εικόνα 2.1. Ενδεικτικό σχήμα για το πρόβλημα της προέρευνας

Από τις πρώτες συναντήσεις έγινε σαφές ότι οι φοιτητές συναντούν μεγάλη δυσκολία στην επίλυση του προβλήματος για τους εξής λόγους:

α) υπήρχε μια επιμονή στην έννοια του μέσου της υποτείνουσας ως το ζητούμενο σημείο (το οποίο ισχύει μόνο στην περίπτωση που το δεδομένο τρίγωνο είναι ισοσκελές),

β) οι διαφορές στα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων που προέκυπταν από πιθανές θέσεις του σημείου Δ ήταν πολύ μικρές, γεγονός που αποπροσανατόλιζε τους φοιτητές και τους οδηγούσε σε λαθεμένες εκτιμήσεις,

γ) δεν διέκριναν το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που σχηματίζεται (αλλά και στις περιπτώσεις που το διέκριναν δεν γνώριζαν ή δεν μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν την ισότητα των διαγωνίων του).

Οι παραπάνω διαπιστώσεις οδηγούν τον ερευνητή στο να αποστασιοποιηθεί – σε κάποιες περιπτώσεις – από το ρόλο του παθητικού ακροατή και να εμπλακεί ενεργά στην αλληλεπίδραση, προσφέροντας μία καθοδήγηση στους φοιτητές. Σε κάποια ζεύγη αυτό λειτουργεί θετικά (με την έννοια ότι οι φοιτητές οδηγούνται στη σωστή λύση)· η εμπλοκή όμως του ερευνητή στερεί τις συγκεκριμένες συναντήσεις από την αυθεντικότητα και τον αυθορμητισμό που θα οδηγούσαν στη διαπραγμάτευση εννοιών και διαδικασιών προερχομένων από τους ίδιους τους φοιτητές. Παρόλα αυτά, η ανάλυση των συζητήσεων που προκύπτει μας οδήγησε σε χρήσιμα συμπεράσματα όσον αφορά τα ερευνητικά μας ερωτήματα και τη μετατροπή τους σε ερευνητικές υποθέσεις. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τα συμπεράσματα για κάθε ερευνητικό ερώτημα.

Ερώτημα Α:

Σε ποιες περιπτώσεις, κατά τη συνεργατική επίλυση προβλημάτων, η επίδραση της μη μαθηματικής γλώσσας είναι θετική και σε ποιες αρνητική στη συγκρότηση κοινής γνώσης;

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης συνηγορούν υπέρ μίας θετικής επίδρασης της μη μαθηματικής γλώσσας σε κάθε περίπτωση, δηλαδή είτε χρησιμοποιείται στην περιγραφή εννοιών είτε στην περιγραφή διαδικασιών. Σε αρκετές περιπτώσεις – ιδιαίτερα όσον αφορά κάποιες έννοιες – τα υποκείμενα φθάνουν σε υψηλό βαθμό αμοιβαίας κατανόησης χρησιμοποιώντας ένα ψευδο-μαθηματικό κώδικα επικοινωνίας. Από την άλλη, η φύση του προβλήματος είναι τέτοια που δεν απαιτεί την περιγραφή πολύπλοκων διαδικασιών. Συχνή είναι η χρήση τοπικών επιρρημάτων (πάνω, κάτω, ψηλά, χαμηλά) στην περιγραφή της τοποθέτησης του σημείου Δ στην υποτείνουσα ΒΓ. Τα επιρρήματα αυτά συντελούν στην αμοιβαία κατανόηση των υποκειμένων, άρα και στη διαπραγμάτευση αυτής της εμπειρικής διαδικασίας. Το γεγονός παραμένει ότι δεν συναντούμε αρκετές μαθηματικές διαδικασίες στις αλληλεπιδράσεις των φοιτητών, επομένως δεν διαθέτουμε επαρκή στοιχεία για αυτή την περίπτωση. Η διαπίστωση αυτή προφανώς επέδρασε στον τύπο των προβλημάτων που επιλέξαμε στην κύρια έρευνα.

Ερώτημα Β:

Ποιες κοινωνικές και κοινωνικομαθηματικές νόρμες είναι σε ισχύ κατά τη διάρκεια των αλληλεπιδράσεων;

Ερώτημα Γ:

Ποια η επίδραση των παραπάνω νορμών στη συγκρότηση κοινής γνώσης;

Η νόρμα που κυριαρχεί σε όλα τα ζεύγη είναι η κοινωνική νόρμα της συνεργασίας η οποία εκφράζεται με τη χρήση του πρώτου πληθυντικού προσώπου σε κάποια ρήματα, με προτάσεις που έχουν τη μορφή ερωτήσεων ή με προτροπές για συμμετοχή. Η επιρροή της συγκεκριμένης νόρμας είναι σαφώς θετική στη διαμόρφωση του κατάλληλου κλίματος για μια αποδοτική συνεργασία. Παρόμοια είναι και η επίδραση της συγγενούς νόρμας που σχετίζεται με την αμοιβαία κατανόηση που πρέπει να διακρίνει ένα ζεύγος συνεργαζόμενων ατόμων: ερωτήσεις για την κατανόηση του συνομιλητή χρησιμοποιούνται συχνά από τα υποκείμενα της έρευνας, με αποτέλεσμα να αποσαφηνίζονται οι προτεινόμενες έννοιες, άρα να διευκολύνεται η οικειοποίησή τους και από τους δύο συνεργαζόμενους φοιτητές. Η

πρώτη κοινωνικομαθηματική νόρμα που εμφανίζεται και προβληματίζει αρκετούς φοιτητές είναι αυτή που σχετίζεται με τη μαθηματική δικαιολόγηση που πρέπει να συνοδεύει ένα ισχυρισμό. Η επίδραση αυτής της νόρμας είναι ασαφής: αν και η συντριπτική πλειοψηφία των υποκειμένων γνωρίζει την ύπαρξή της, ο βαθμός συμμόρφωσής τους σε αυτή παρουσιάζει μεγάλες αποκλίσεις ακόμη και μέσα στο ίδιο ζεύγος. Για παράδειγμα, μπορεί να υπάρχει συμφωνία στο ότι πρέπει να αποδειχτεί γιατί το ζητούμενο σημείο είναι το μέσο της υποτείνουσας,[39] αλλά στη συνέχεια να προκύπτει διαφωνία ως προς τη μέθοδο απόδειξης που πρέπει να ακολουθηθεί. Υπαίτια για αυτές τις αποκλίσεις μπορεί να θεωρηθεί μία νόρμα που αφορά την «οριοθέτηση» των μαθηματικών, δηλαδή το κατά πόσο μια μέθοδος που χρησιμοποιείται σε μία άλλη επιστήμη (ή σε ένα άλλο κλάδο των μαθηματικών) μπορεί να χρησιμοποιηθεί επιτυχώς και στα μαθηματικά (ή στην Ευκλείδεια γεωμετρία η οποία μας αφορά στο συγκεκριμένο πρόβλημα). Αυτή η νόρμα οδηγεί κάποιους φοιτητές στο να θεωρήσουν ότι η παρατήρηση ότι το μήκος του ΑΔ αυξάνεται καθώς το Δ μετακινείται προς τα Β, Γ οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το ελάχιστο μήκος προκύπτει όταν το Δ είναι το μέσο της ΒΓ. Πρόκειται για μία ημι-εμπειρική μέθοδο που προσομοιάζει μεθόδους της φυσικής και που δημιουργεί προβλήματα όχι στη συγκρότηση κοινής γνώσης, αλλά στην ενεργοποίηση της νόρμας της μαθηματικής δικαιολόγησης.

Ερώτημα Δ:

Ποιοι ρόλοι υιοθετούνται από τους φοιτητές κατά τη συνεργατική επίλυση προβλημάτων;

Ερώτημα Ε:

Ποιοι συνδυασμοί των παραπάνω ρόλων επιδρούν θετικά και ποιοι αρνητικά στη συγκρότηση κοινής γνώσης;

Μία πρώτη κατηγοριοποίηση των ρόλων που συναντούμε τους κατατάσσει σε δύο είδη: το ρόλο του καθοδηγητή και το ρόλο του αξιολογητή (Tatsis and Koleza, 2002). Ο καθοδηγητής είναι το άτομο που κάνει τις περισσότερες προτάσεις, εκφράζεται με μεγαλύτερη βεβαιότητα και γενικά αναλαμβάνει τις περισσότερες πρωτοβουλίες μέσα στο ζεύγος. Προφανώς αυτή η συμπεριφορά τον κάνει πιο ευάλωτο σε ενδεχόμενες απειλητικές για το πρόσωπό του περιστάσεις, όπως π.χ. μια ενδεχόμενη λανθασμένη εκτίμηση ή κάποια ερώτηση στην οποία αδυνατεί να απαντήσει. Σπάνια πάντως συναντούμε περιπτώσεις στις οποίες το πρόσωπο ενός καθοδηγητή κινδυνεύει

ουσιαστικά· αυτό οφείλεται στο ρόλο που αναλαμβάνει το άλλο άτομο του ζεύγους, δηλαδή το ρόλο του αξιολογητή. Ο αξιολογητής συμμορφούμενος – όπως και ο καθοδηγητής – στη νόρμα της συνεργασίας παρακολουθεί προσεκτικά το συνομιλητή του και αξιολογεί τις προτάσεις του. Η αξιολόγηση αυτή δεν γίνεται με διάθεση αντιπαράθεσης (η οποία θα συνιστούσε απειλή στο πρόσωπο), αφού κάτι τέτοιο θα μπορούσε να οδηγήσει σε ένταση με ανεπιθύμητες επιπτώσεις και για τους δύο. Γενικά λοιπόν ο συνδυασμός καθοδηγητή-αξιολογητή λειτουργεί θετικά στη διαδικασία διαπραγμάτευσης των εννοιών ή των διαδικασιών που τέθηκαν. Το ίδιο παρατηρείται και στο συνδυασμό αξιολογητή-αξιολογητή (τον οποίο συναντήσαμε σε 4 ζεύγη). Πρέπει τέλος να επισημάνουμε ότι συγκρίνοντας τους «καθοδηγητές» κάποιων ζευγών παρατηρούμε κάποιες διαφορές, οι οποίες αφορούν τη συμμόρφωσή τους σε κάποιες από τις κοινωνικομαθηματικές νόρμες που αναφέραμε, αλλά και τις στρατηγικές διατήρησης του προσώπου τους που εφάρμοζαν. Οι παρατηρήσεις αυτές αποτέλεσαν μία πρώτη ένδειξη για την ανάγκη μιας περαιτέρω κατηγοριοποίησης των δύο αυτών ρόλων, η οποία θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί μόνο σε ένα μεγαλύτερο δείγμα συζητήσεων.

Πέρα από τα παραπάνω συμπεράσματα που σχετίζονται με τα ερευνητικά μας ερωτήματα, η διεξαγωγή και η ανάλυση των αποτελεσμάτων της προέρευνας, μας οδηγεί και σε κάποιες διαπιστώσεις που αφορούν τη μεθοδολογική μας προσέγγιση. Καταρχήν η άγνοια από μέρους των φοιτητών των εννοιών της Ευκλείδειας γεωμετρίας στις οποίες στηριζόταν το πρόβλημα, μας οδηγεί να χρησιμοποιήσουμε στην κύρια έρευνα προβλήματα των οποίων η επίλυση δεν στηρίζεται αποκλειστικά στη γνώση γεωμετρικών εννοιών (με εξαίρεση το τρίτο πρόβλημα το οποίο απαιτεί τη χρήση του τύπου του όγκου κάποιων γεωμετρικών στερεών). Επίσης, η επίλυση του προβλήματος που δόθηκε στην προέρευνα, δεν περιείχε ποικιλία πιθανών διαδικασιών· αρκετές φορές τα υποκείμενα είχαν την αίσθηση ότι οι επιλογές τους είναι ελάχιστες και οδηγούνταν έτσι στην αναζήτηση βοήθειας από τον ερευνητή. Η επέμβαση του ερευνητή με τη σειρά της, δημιούργησε το εξής φαινόμενο: οι φοιτητές αντί να αναζητούν τις κατάλληλες για το πρόβλημα έννοιες και διαδικασίες, να προσπαθούν να κατανοήσουν και να συνδυάσουν τα στοιχεία που δινόταν από τον ερευνητή. Το φαινόμενο αυτό, αν και συναντάται και σε σχολικές τάξεις[40] θεωρούμε ότι δεν αφορούσε την έρευνά μας, βασική επιδίωξη της οποίας είναι η ανάλυση των διαδικασιών με τις οποίες τα υποκείμενα διαπραγματεύονται και συγκροτούν κοινές έννοιες ή διαδικασίες που εισάγονται από τους ίδιους[41] και όχι από κάποιον «ειδικό».

Τα παραπάνω εμπόδια θεωρούμε ότι αντιμετωπίζονται με τα προβλήματα που θέτουμε στην κύρια έρευνα και με την προσκόλληση του ερευνητή στο ρόλο του παθητικού ακροατή.

2.5. Η ΕΡΕΥΝΑ

2.5.1. Υποθέσεις Εργασίας

Ο έλεγχος των ερωτημάτων κατά τη διάρκεια της προέρευνας, μας οδηγεί στη διαμόρφωση των παρακάτω ερευνητικών υποθέσεων εργασίας:

Υπόθεση Α1:
Η αντικατάσταση μαθηματικών όρων με εκφράσεις μη μαθηματικής γλώσσας επιδρά θετικά στη συγκρότηση κοινής γνώσης όταν οι όροι σχετίζονται με μαθηματικές έννοιες.

Υπόθεση Α2:
Η αντικατάσταση μαθηματικών όρων με εκφράσεις μη μαθηματικής γλώσσας επιδρά αρνητικά στη συγκρότηση κοινής γνώσης όταν οι όροι σχετίζονται με μαθηματικές διαδικασίες.

Υπόθεση Β:
Η επίδραση όλων των κοινωνικών και κοινωνικομαθηματικών νορμών στη συγκρότηση κοινής γνώσης είναι θετική.

Υπόθεση Γ:
Τα υποκείμενα ερμηνεύουν διακριτούς ρόλους, οι οποίοι δεν μεταβάλλονται κατά τη διάρκεια των συναντήσεων.

Υπόθεση Δ:
Η συγκρότηση κοινής γνώσης επηρεάζεται σαφώς από τη συσχέτιση των ρόλων που ερμηνεύουν τα υποκείμενα.

2.5.2. Η Επίδραση της μη Μαθηματικής Γλώσσας στη Δημιουργία Κοινής Γνώσης

Σύμφωνα με το σχήμα που περιγράψαμε στην παράγραφο 2.3.10.2., πρώτο μέλημα της ανάλυσής μας είναι ο εντοπισμός των στιχομυθιών που σχετίζονται με τη επιτυχημένη ή όχι δημιουργία κοινής γνώσης, και στη συνέχεια συσχετισμός αυτών με το είδος της γλώσσας που χρησιμοποιήθηκε. Πριν παρουσιάσουμε τα ευρήματά μας σε σχέση με τα τρία προβλήματα που τέθηκαν, θα περιγράψουμε τις πέντε διαφορετικές δομές στην αλληλεπίδραση που προκύπτουν μετά την εισαγωγή μιας νέας έννοιας ή διαδικασίας. Μόνο οι δύο πρώτες από αυτές οδηγούν στη συγκρότηση κοινής γνώσης.

1η Περίπτωση: Άμεση αποδοχή της έννοιας ή της διαδικασίας

Σε αυτή την περίπτωση ο πρώτος φοιτητής εισάγει μια έννοια ή διαδικασία και ο δεύτερος την αποδέχεται άμεσα, χωρίς να ζητήσει κάποια επεξήγηση και χωρίς να φέρει αντίρρηση. Στη συνέχεια βέβαια, μπορεί να υπάρξει κάποια συζήτηση, η οποία παρέχει στη μεν έννοια επιπλέον ιδιότητες, στο δε παρατηρητή στοιχεία για την οικειοποίησή της.

2η Περίπτωση: Διαπραγμάτευση και στη συνέχεια αποδοχή της έννοιας ή της διαδικασίας

Σε αυτή την περίπτωση μετά την εισαγωγή της έννοιας (ή της διαδικασίας), ακολουθεί διαπραγμάτευσή της μέσω συζήτησης, η οποία τελικά οδηγεί στην αποδοχή της έννοιας. Η διαφορά αυτής της περίπτωσης από την 1η είναι ότι η διαπραγμάτευση γίνεται στη βάση της συνεργασίας μεταξύ των φοιτητών, και όχι – όπως στην 1η περίπτωση – στη βάση της συμφωνίας τους ως προς τη χρησιμότητα ή την αποτελεσματικότητα της έννοιας. Γι' αυτό το λόγο δίνουμε ιδιαίτερη σημασία στη μελέτη αυτής της περίπτωσης.

3η Περίπτωση: Διαπραγμάτευση και στη συνέχεια απόρριψη της έννοιας ή της διαδικασίας

Σε αυτή την περίπτωση μετά την εισαγωγή της έννοιας (ή της διαδικασίας), ακολουθεί διαπραγμάτευσή της μέσω συζήτησης, η οποία τελικά οδηγεί στην απόρριψη της έννοιας. Πρόκειται για το αντίστοιχο της 2ης περίπτωσης, μόνο που στη συγκεκριμένη περίπτωση η έννοια (ή η διαδικασία) δεν γίνεται κοινά αποδεκτή,

συνήθως επειδή δεν πληροί κάποια κριτήρια – τα οποία μπορεί να είναι μαθηματικής ή υποκειμενικής φύσεως, δηλαδή να σχετίζονται με κάποιες κοινωνικές ή κοινωνικομαθηματικές νόρμες ή ακόμη και με κάποιους ρόλους. Και αυτή η περίπτωση θεωρείται σημαντική καθώς μας επιτρέπει να εξετάσουμε την επίδραση και των νορμών, αλλά και της γλώσσας.

4η Περίπτωση: Άμεση απόρριψη της έννοιας ή της διαδικασίας

Σε αυτή την περίπτωση ο ένας φοιτητής εισάγει μια έννοια (ή μια διαδικασία) και ο συνεργάτης του την απορρίπτει χωρίς να δώσει κάποια εξήγηση.

5η Περίπτωση: Μη διαπραγμάτευση της έννοιας ή της διαδικασίας

Σε αυτή την περίπτωση εισάγεται μία έννοια (ή μια διαδικασία), η οποία δεν προκαλεί καμία αντίδραση· δεν υπάρχει κάποιο είδος διαπραγμάτευσης και η αλληλεπίδραση συνεχίζεται μη λαμβάνοντάς την υπόψη.

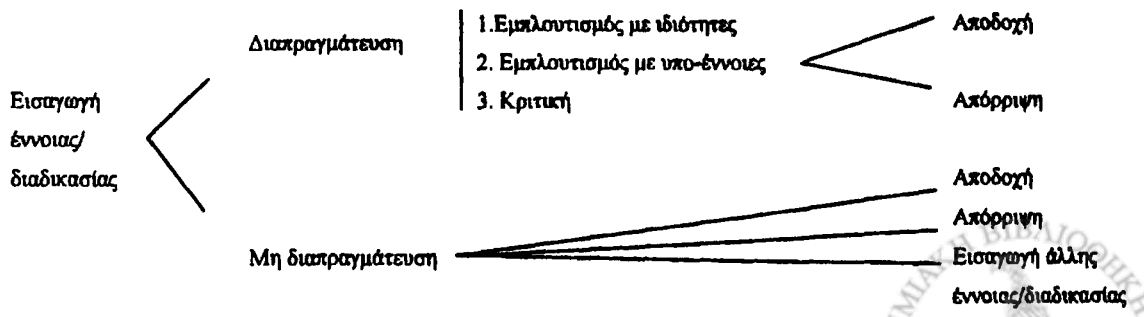
Η διαπραγμάτευση μιας έννοιας (ή μιας διαδικασίας) μπορεί να αποτελείται από:

α) Εμπλουτισμό της με ιδιότητες που τη χαρακτηρίζουν.

β) Εμπλουτισμό της με σχετικές υπο-έννοιες.

γ) Κριτική του συνεργάτη πάνω στην αποτελεσματικότητά της.

Φυσικά, κατά τη διάρκεια της συζήτησης μπορεί να υπάρξει και εισαγωγή άλλων εννοιών (ή διαδικασιών) που δεν σχετίζονται με την υπό διαπραγμάτευση έννοια/διαδικασία· η εισαγωγή αυτή δημιουργεί με τη σειρά της ένα νέο κύκλο εισαγωγής-διαπραγμάτευσης. Οι παραπάνω διαδικασίες παριστάνονται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 2.5. Διαδικασίες εισαγωγής και διαπραγμάτευσης νέων εννοιών

Η ανάλυση που πραγματοποιούμε συνίσταται στον εντοπισμό των παραπάνω δρομών και στη συνέχεια στη μελέτη του είδους της γλώσσας που τις συνοδεύει, σε κάθε πρόβλημα χωριστά.

2.5.2.1. Πρώτο Πρόβλημα

Η επίλυση του πρώτου προβλήματος συνίστατο στην καταγραφή μιας σειράς οδηγιών που θα οδηγούσαν στην κατασκευή του επιθυμητού σχήματος. Ο χαρακτήρας του προβλήματος οδηγεί τους φοιτητές στην εισαγωγή πολλών εννοιών που σχετίζονται με αντίστοιχες διαδικασίες· παρουσιάζουμε στη συνέχεια αποσπάσματα των συζητήσεων σε τρία ζεύγη φοιτητών[42] στα οποία οι λέξεις και οι εκφράσεις που δεν ανήκουν στη μαθηματική γλώσσα έχουν γραφεί με έντονους χαρακτήρες. Ο συμβολισμός που υπάρχει πριν από κάθε απόσπασμα αναφέρεται στον αριθμό του προβλήματος (1 έως 3), στον αύξοντα αριθμό του ζεύγους (Ζ1 έως Ζ20) και στο φύλο των μελών του (Α: αγόρι, Κ: κορίτσι). Επίσης, με Α, Β συμβολίζονται οι δύο συνεργαζόμενοι φοιτητές / φοιτήτριες και με Κ ο παρατηρητής. Τα ονόματα των συνεργαζόμενων φοιτητών εμφανίζονται παραλλαγμένα. Σε παρένθεση βρίσκονται σημειώσεις του παρατηρητή που συμπληρώθηκαν κατά τη διάρκεια της συνάντησης. Όταν μία λέξη είναι σε παρένθεση σημαίνει ότι δεν είμαστε σίγουροι για το αν πρόκειται για τη λέξη που πράγματι ειπώθηκε. Με (...) συμβολίζουμε τα τμήματα των οποίων η απομαγνητοφώνηση ήταν αδύνατη και οι προτάσεις μέσα σε αγκύλες περιγράφουν στιχομυθίες που έχουν παραλειφθεί. Οι τρεις τελείες στο τέλος μίας φράσης δείχνουν ότι ο τόνος της ομιλίας καταδεικνύει ότι ομιλητής δεν έχει ολοκληρώσει τη συγκεκριμένη φράση. Όταν οι τρεις τελείες τοποθετούνται στην αρχή μιας φράσης, αυτό σημαίνει ότι η φράση αυτή αποτελεί συνέχεια μιας προηγούμενης, η οποία είχε διακοπεί – πιθανώς από μια παρεμβολή του συνομιλητή. Οι παύσεις διακρίνονται σε μικρές (διάρκειας 5΄΄-10΄΄) και μεγάλες (διάρκειας 11΄΄ και πάνω). Τέλος, κάποια αποσπάσματα συνοδεύονται από εικόνες που προέρχονται από ψηφιακή σάρωση των φύλλων εργασίας (η εκφώνηση του προβλήματος περιέχεται στην αρχική σελίδα, στην οποία ζητείται να γραφεί η τελική απάντηση, ενώ τα υπόλοιπα φύλλα, που χρησιμοποιούνται σαν πρόχειρο, αριθμούνται ως «σελίδα 2», «σελίδα 3», κ.ο.κ.).

1° Παράδειγμα (1-Ζ1-ΚΚ)

1. Α. Τι να κάνουμε; Να αριθμήσουμε τις σειρές;

2. Β. Ποιες; Αυτά εδώ τα τετράγωνα;

3. Α. Ναι. Και να κάνω κουκίδες και μετά να τα ενώνουμε;

4. Β. Λοιπόν εγώ νομίζω...

5. Α. Τι νομίζεις εσύ;

6. Β. Πρώτα να του πούμε πώς να κατασκευάσει τον κύκλο. Έτσι, με τι διαστάσεις. Να κάνουμε με ακτίνα τέσσερα...

7. Α. Λοιπόν, πού θα γίνει; Εε θα δει το κέντρο, άρα από αυτή τη..

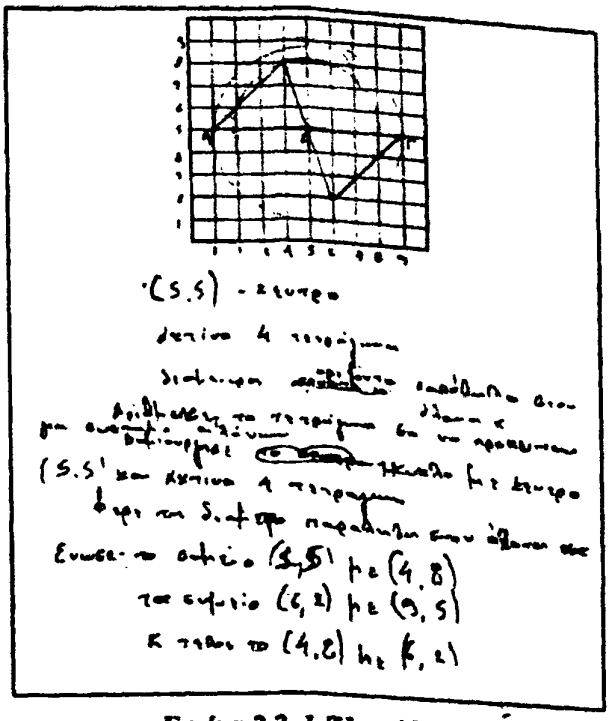
8. Β. Το κέντρο του σχεδίου...

9. Α. Ναι.

10. Β. Και με ακτίνα τέσσερα τετραγωνάκια να κατασκευάσει ένα κύκλο.

11. Α. Ναι. Πέντε πέντε πέντε.

(Η Α σημειώνει τρία σημεία στην Εικόνα 2.2.)



Εικόνα 2.2. 1-Ζ1, σελίδα 2

12. Β. Ναι. Πέντε από εδώ... και πέντε από εδώ έρχεται στο κέντρο.

13. Α. Το σχεδιάζουμε ή απλώς γράφουμε σημεία;

14. Β. Το σχεδιάζουμε. Με ακτίνα τέσσερα.

(Μικρή παύση)

15. Β. Τώρα...

16. Α. Ας κάνουμε αυτά που λέμε.

17. Β. Ναι.

(Η Α σχεδιάζει τον εξωτερικό κύκλο της Εικόνας 2.2.)

18.Β. Ναι, εντάξει, δεν πειράζει. Να φέρει τη διάμετρο; Διάμε... σος;

19. Α. Διάμεσο; Έτσι το λένε;

(Οι Α, Β γελούν)

20. Β. Απ' το κέντρο του κύκλου... Καλά.

21. Α. Ποια είναι, πώς θα το γράψουμε αυτό;

22. Β. Από το κέντρο του κύκλου.

23. Α. Πού;

24. Β. Μπορεί να το θεωρήσει έτσι ε;

25. Α. Ναι.

26. Β. Εε, κατακόρυφα.

27. Α. Θα μπορούσε να 'ταν κι έτσι όμως.

28. Β. Οριζόντια ναι, καλά εντάξει, οριζόντια.

(Η Α γράφει στη σελίδα 2 (Εικόνα 2.2.): «Διάμετρος οριζόντια παράλληλα»)

29. Β. Αν το θεωρήσουμε σαν ένα σύστημα συντεταγμένων.

30. Α. Στον άξονα x.

(Η Α συμπληρώνει την παραπάνω έκφραση στο χαρακτηρισμό της διαμέτρου)

31. Β. Ναι ναι... **Από το κέντρο του κύκλου...**

32. Α. Ας κάνει ένα νοητό κύκλο.

33. Β. Τι εννοείς **νοητό κύκλο**;

34. Α. Να (...) αριθμήσει τα τετράγωνα.

35. Β. Όχι, κοίτα, άμα, άμα, άμα φέρει μία, μία **ευθεία γραμμή**...

36. Α. Προς τα πού;

37. Β. Που να ενώνει τα, κάτσε λίγο, που να **ενώνει τρία τετράγωνα μαζί**... Ε;

38. Α. Ένα δύο τρία... **πού θα πάει** όμως;

39. Β. Σε ποια διεύθυνση;

40. Α. Ναι.

41. Β. Μπορούμε να το αριθμήσουμε;

(Η Β απευθύνεται στον Κ, ο οποίος γνέφει καταφατικά)

42. Α. Μπορούμε.

43. Β. Κοίτα, από το **σημείο που εφάπτεται ο κύκλος από το... η ακτίνα με τον κύκλο** να φέρει ένα **τόξο, να δημιουργήσει ένα τόξο προς τα κάτω** γιατί... αλλά να είναι **ημιτελή** δηλαδή **να μην φτάνει** μέχρι το τέλος, **να φτάνει ένα τετραγωνάκι πριν**.

44. Α. Ναι, αλλά προς τα πού; Θα μπορούσε να 'ναι εδώ, θα μπορούσε να 'ναι εδώ, θα μπορούσε...

45. Β. Στο **σημείο που εφάπτεται**... Α, εννοείς να **δημιουργήσουμε** έναν τέτοιο κύκλο;

46. Α. Ένα κύκλο από εδώ με **ακτίνα τρία τετραγωνάκια**, ας πούμε. Ναι, μετά όμως...

47. Β. Για κάντο εδώ. (...) Δεν θα **δημιουργηθεί** τίποτα. **Θα δημιουργηθεί**;

(Η Β κάνει τον εσωτερικό κύκλο της Εικόνας 2.2.)

48. Α. Δε μ' αρέσει αυτός ο διαβήτης.

49. Β. Πάρε το δικό μου.

50. Α. Καλά.

51. Β. Όχι, εγώ λέω να μη **δημιουργήσουμε** άλλο κύκλο. Απλώς, από το **σημείο που εφάπτεται**...

52. Α. Μετά θα το σβήσει.

53. Β. Ναι, αλλά τι, σε τι θα βοηθήσει αυτό;

54. Α. Και μετά θα πούμε: από **το σημείο αυτό που εφάπτεται**, το ενώνουμε με **το σημείο τάδε τάδε** που **αγγίζει τον κύκλο**.

55. Β. Ναι, αλλά ποιο σημείο;

56. Α. Και **βγαίνει** αυτό.

57. Β. Ποιο σημείο όμως; Πώς θα το πεις;

58. Α. Αυτό.

59. Β. Πώς θα του δώσεις **να καταλάβει** ότι **είναι αυτό το σημείο** και δεν είναι αυτό;

60. Α. Εε, 1 2 3 4, 4, 1 2 3... 4 8.

61. Β. Θέλω να σου πω, αυτό που λέω δε, δε, δεν βγαίνει; Ότι από **το σημείο που ενώνεται η ακτίνα με τον κύκλο**, θα φέρουμε ένα **τόξο**...

62. Α. Κάν' το... Μήπως **να μετρήσουμε κατευθείαν τετραγωνάκια** και να τελειώνει η υπόθεση;

63. Β. Αλλά ένα τόξο θα πω να μη τελειώνει. Να φτάνει μέχρι 3 τετραγωνάκια. Να μην είναι μέχρι τέλος, μέχρι το τέταρτο. Έπειτα ενώνουμε απ' το σημείο...

64. Α. Δεν κατάλαβα (...)

65. Β. Αυτό, αυτό μέχρι εδώ είναι τόξο, δεν είναι; Ένα τόξο του κύκλου.

66. Α. Ναι.

67. Β. Ωραία. Δεν θα το φ, πάει μέχρι τέλος, θα πάει μέχρι 3 τετραγωνάκια, δεν θα το ολοκληρώσει δηλαδή το τόξο. Κι από κει θα φέρει μία άλλη, μία...

68. Α. Ναι.

69. Β. ... θα ενώσει το κέντρο με κείνο το σημείο, με τα 3 τετραγωνάκια. Μέχρι της τελευταίας γραμμής τα τετραγωνάκια. Μετά θα προχωρήσει μαζί με το χάρακα, θα έρθει άλλα 3 τετραγωνάκια πάνω. Έτσι. Θα συνεχίσει δηλαδή προς τα πάνω. Ε; Αυτά τα τρίγωνα, αυτές οι γωνίες μήπως είναι ίσες.

70. Α. Να πούμε το εξής...

71. Β. Και έπειτα θα ενώσει το σημείο πάλι αυτό με 3 τετραγωνάκια.

(Η Α αριθμεί τους άξονες στην Εικόνα 2.2.)

72. Α. Κι αν του πούμε να ενώσει το σημείο... Να βρει το σημείο... 1 5 για παράδειγμα. Να βρει το σημείο 4 8. Να βρει το σημείο...

73. Β. Ναι, κι αυτό...

74. Α. Ποιο είναι αυτό, 6 2. Και να βρει το σημείο...

75. Β. Να του δώσουμε δηλαδή σημεία...

76. Α. 9 5.

77. Β. Ναι.

Ανάλυση – Σχόλια:

• Η πρώτη διαδικασία που εισάγεται από την Α (στο 1), η «αρίθμηση των σειρών», δηλαδή η χρήση κάποιου συστήματος συντεταγμένων, αρχικά δεν διαπραγματεύεται καθόλου, αφού η Β αντιπροτείνει (στο 6) να ξεκινήσουν με την κατασκευή του κύκλου. Η πρόταση επανατίθεται στο 34, η Β την απορρίπτει χωρίς καμιά δικαιολόγηση, αλλά λίγο αργότερα ρωτάει «Μπορούμε να το αριθμήσουμε;» (41). Πρόκειται για το πρώτο βήμα αποδοχής της συγκεκριμένης διαδικασίας, η οποία επανέρχεται πολύ αργότερα, γίνεται αποδεκτή (73) και διαμορφώνεται ως μία κοινή πια έννοια. (Στο 29 γίνεται αναφορά σε ένα σύστημα συντεταγμένων, από τα συμφραζόμενα όμως συμπεραίνουμε ότι η Β αναφέρεται μόνο στη χρήση δύο αξόνων για την ευκολότερη κατασκευή της διαμέτρου). Γενικά, μπορούμε να πούμε ότι το ενδιαφέρον αυτής της περίπτωσης έγκειται στο γεγονός ότι μέχρι την οικειοποίηση της συγκεκριμένης διαδικασίας δεν υπήρξε ουσιαστική διαπραγμάτευσή της.

• Στο 6 η Β εισάγει τη διαδικασία σχεδίασης του κύκλου, η οποία γίνεται άμεσα αποδεκτή από την Α, και ακολουθεί η διαπραγμάτευσή της (7-14). Στο 18 εμφανίζεται και η έννοια της διαμέτρου του κύκλου, η οποία επεξεργάζεται στα 19-31.

• Στο 32 η Α εισάγει την έννοια του «νοητού κύκλου»· η Β αν και αρχικά ζητάει διευκρινίσεις (33), την απορρίπτει αμέσως μετά (35), αντιπροτείνοντας μία διαφορετική διαδικασία σχεδίασης της πλευράς του ενός τριγώνου του σχήματος. Η διαπραγμάτευση της διαδικασίας αυτής συνεχίζεται μέχρι το 45· στο σημείο αυτό η Β αναγνωρίζοντας ίσως τις αδυναμίες της πρότασής της, αποδέχεται την έννοια του νοητού κύκλου, εκφράζοντας τις επιφυλάξεις της (47). Στα 51-71 η Β προσπαθεί να αναπτύξει τη διαδικασία που προτείνει, αν και η πιο σημαντική στιχομυθία είναι η 55-60 η οποία οδηγεί στην τελική διαμόρφωση και αποδοχή της διαδικασίας που είχε προταθεί αρχικά από την Α, δηλαδή της χρήσης συστήματος συντεταγμένων.

• Η ψευδο-μαθηματική γλώσσα κυριαρχεί και μπορούμε να επισημάνουμε δύο περιπτώσεις στις οποίες η χρήση της φαίνεται ότι δημιουργεί προβλήματα. Η πρώτη περίπτωση είναι ο όρος «διάμεσος» στο 18: επειδή οι φοιτήτριες δεν είναι σίγουρες για την ορθότητα του όρου, η Β προτείνει την έκφραση «Από το κέντρο του κύκλου» (20, 22) της οποίας την ασάφεια επισημαίνει η Α· η επισήμανση αυτή οδηγεί με τη σειρά της στην προσθήκη μιας επιπλέον ιδιότητας της διαμέτρου: της οριζόντιας θέσης της (28). Η δεύτερη περίπτωση σχετίζεται με την ασάφεια που χαρακτηρίζει όλη την πρόταση της Β (35, 37, 43, 45, 54, 61, 63, 65, 67, 69, 71) η οποία βρίθει εκφράσεων ψευδο-μαθηματικής, αλλά και καθημερινής γλώσσας. Οι εκφράσεις αυτές αδυνατούν να περιγράψουν επαρκώς τη γεωμετρική κατασκευή που προτείνει η Β, και είναι προφανές ότι βασικός λόγος αυτής της ασάφειας είναι το είδος της γλώσσας. Η ασάφεια αυτή – την οποία επισημαίνει με εύστοχες παρατηρήσεις η Α – οδηγεί και την ίδια τη Β στην εγκατάλειψη της πρότασής της.

2° Παράδειγμα (1-Z8-AK)

8. Β. Λοιπόν, να ξεκινήσουμε από τον κύκλο;

9. Α. Ναι. Ξέρεις τι λέω εγώ; Παρατήρησα ότι (...) **ξεκινάει από τη δεύτερη γραμμή του τετραγώνου, απ' το πέμπτο κουτάκι, απ' τη γωνία.**

10. Β. Δεν θα ήταν πιο εύκολο αν πρώτα σχηματίσει τον κύκλο **πηγαίνοντας** στο κέντρο του κύκλου, **χρησιμοποιώντας για ακτίνα τα 4 τετράγωνα;**

11. Α. Εγώ το πήρα...

12. Β. Για να σχηματίσει τον κύκλο;

13. Α. ... το πήρα εντελώς μπακαλίστικα.

(Η Β γελάει)

14. Β. Γιατί από δω πώς θα ξεκινήσει τον κύκλο; Απ' το κέντρο πρέπει να ξεκινήσει τον κύκλο.

15. Α. Θα σου πω. Λέγοντας ας πούμε ότι, εε, το πάνω μέρος του, του κύκλου, είναι ρε παιδί μου στο οριζόντιο μέρος, ξεκινάει από τη δεύτερη γραμμή στο πέμπτο κουτάκι. 3 4 5. Είναι στο τέλος απ' το πέμπτο κουτάκι πάνω πάνω. Οπότε αυτή είναι η, είναι η μία, τέλος πάντων του κύκλου. Θα περνάει από κει πέρα, δηλαδή θα τέμνεται με τη γραμμή. Τώρα στο κάθετο είναι στην έκτη γραμμή.

16. Β. Αυτό όλο αυτό το πράγμα μπορείς να το πεις πιο απλά αν το τοποθετήσεις στο κέντρο του τετραγώνου και του κύκλου, και ταυτόχρονα του κύκλου, και του πεις να σχηματίσει ένα κύκλο με ακτίνα 4 τετράγωνα.

17. Α. Α, καλά.

18. Β. Και γίνεται κατευθείαν ο κύκλος.

19. Α. Ναι, σωστό κι αυτό.

[Η στιχομυθία 20-164 περιλαμβάνει προτάσεις που σχετίζονται με την κατασκευή της διαμέτρου του κύκλου, αλλά και των δύο τριγώνων του σχεδίου με τη χρήση των μέτρων των γωνιών τους.]

165. Β. Και, από το κέντρο του κύκλου. Τώρα πώς μπορούμε να του το πούμε; Με το κέντρο του κύκλου να σχηματίσει αυτή τη γωνία, μετά να πάει εδώ να σχηματίσει κι αυτή τη γωνία, κι εκεί που τέμνονται θα 'ναι το ένα τετράγωνο, το ένα τρίγωνο.

166. Α. Δεν μπορούμε να πούμε... Εγώ το πάω εντελώς μπακαλίστικα τώρα, δεν το πάω...

167. Β. Ναι, πες.

168. Α. Ότι αυτή εδώ πέρα, από το, ή στη διάμετρο, έτσι όπως το κοιτάει, από τ' αριστερά του...

169. Β. Ναι;

170. Α. Κι εκεί που τέμνονται, είναι 1 2 3. Θα τραβήξει ακριβώς στο μέσον, θα χωρίσει δηλαδή τα τρία τετραγωνάκια στη μέση, και στο τέλος του τρίτου θα είναι, εε, η πλευρά. Και αυτό, τώρα, από δω ως εδώ, να του πούμε ότι θα ξεκινάει ρε παιδί μου, και να το, να το πάει έτσι, ευθεία κάτω. Εντελώς μπακαλίστικα πάλι. Ε...

171. Β. Κι αυτό γίνεται.

172. Α. ... να φτάσει από τη, απ' το κέντρο του κύκλου, όπως θα το κοιτάξει, να πάει αριστερά, εφόσον τα ξέρει τα τετραγωνάκια.

173. Β. Δεν μπορείς να πεις όμως, εε, σ' έναν φαντάσου που έχει μονάχα αυτό μπροστά του...

174. Α. Ναι.

175. Β. ... να του πεις χώρισε τα τρία προς τα δεξιά σου...

176. Α. Τα τρία...

177. Β. ... τετράγωνα στη μέση;

178. Α. Ναι. Γιατί δύσκολο είναι;

179. Β. Που κάλλιστα μπορεί να είναι έτσι...

180. Α. Μισό, συγνώμη.

181. Β. ... ένα σχέδιο.

182. Α. Αφού έχει τη διάμετρο... διάμετρος, πού είναι η διάμετρος;

183. Β. Πάρε το...

184. Α. Μισό λεπτό. Να δω τι πού 'ναι...

(Ο Α παίρνει τη σελίδα 3)

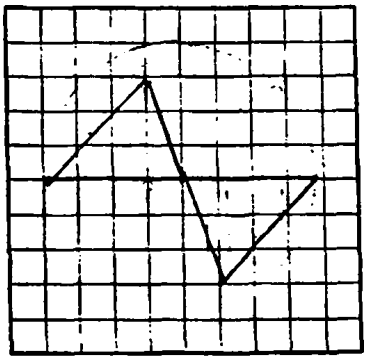
185. Α. 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10, 1 2 3 4 5. Εδώ. Εδώ δεν είναι;

186. Β. Μ, 4 τετραγωνάκια είναι η ακτίνα.**187. Α.** Ναι. Και το πέτυχα και τζιτζί.

(Ο Α σχεδιάζει τον κύκλο στην Εικόνα 2.3.)

188. Α. Τζιτζί δεν το πέτυχα.

189. Β. Ωραία. Του λέμε ότι στην **αρχή του κύκλου** σχηματίζεις τον κύκλο.



Εικόνα 2.3. 1-Z8

190. Α. Σχηματίζεται.

191. Β. Του λέμε στην **αρχή**, διάμετρο σχηματίζει...

192. Α. Λοιπόν, του λέμε: στο κέντρο του τετραγώνου και μ' ακτίνα 4 τετραγωνάκια σχηματίζεται ο κύκλος. Ωραία, μετά: σχηματίζουμε **στο οριζόντιο** τη διάμετρο του κύκλου κι από το κέντρο

- του κύκλου. Λοιπόν, το κέντρο του κύκλου είναι εδώ πέρα. Οπότε, θα πάρει αυτός, έτσι όπως μας ακούει, και θα κάνει τη γραμμή έτσι.

193. Β. Ωραία. Τώρα, αν του πεις...

194. Α. Λοιπόν, θα του πούμε. Περίμενε.

195. Β. Ναι.

196. Α. Να σου πω το σκεπτικό.

197. Β. Ναι ναι.

198. Α. Πόσο είναι; Λοιπόν, ότι έτσι όπως κοιτάς τον κύκλο, θα πας στο τελευταίο, θα πας στο, στη διάμετρο, από τα αριστερά, εκεί που τέμνεται με την **γραμμή του κύκλου**. Θα πάει αυτός εδώ πέρα. Και θα του πεις: είναι τρία **τετραγωνάκια**, 1, 1 2 3. **Αυτά** τα τρία, λοιπόν τα τρία **τετραγωνάκια** προς τα δεξιά...

199. Β. Αυτά τα τρία μπορεί να μετρήσει κι έτσι, δεν...

200. Α. Γιατί; Συγνώμη. Άμα του πεις αυτά τα τρία **τετραγωνάκια** όπως τα κοιτάς από δεξιά, θα το πάρεις και θα **τα κόψεις ακριβώς στη μέση**, και στο τέλος, στο **τέλος του τρίτου**...

201. Β. Το να δώσεις σε κάποιον που κρατάει ένα τέτοιο σχήμα και να του πεις ότι, κοίτα προς τα δεξιά τα τρία **τετραγωνάκια**...

202. Α. Καταρχήν, να σου πω κάτι;

203. Β. ... δε νομίζω ότι είναι τόσο εύκολο να το καταλάβει.

Ανάλυση – Σχόλια:

• Στη στιχομυθία 8-19 συζητείται η διαδικασία σχεδίασης του κύκλου, σχετικά με την οποία τίθενται δύο προτάσεις: ο Α προτείνει να κατασκευαστεί ο κύκλος με βάση τη θέση του στο τετραγωνισμένο χαρτί (9, 15), ενώ η Β προτείνει τη χρήση του κέντρου και της ακτίνας του (10, 16). Μετά από σύντομη διαπραγμάτευση, η διαδικασία που

προτείνει η Β γίνεται αποδεκτή από τον Α, συνιστά λοιπόν την πρώτη κοινή έννοια του συγκεκριμένου ζεύγους. (Αντίστοιχα, η διαδικασία που προτείνει ο Α απορρίπτεται μέσα από την ίδια διαπραγμάτευση).

• Στη στιχομυθία 165-203 συζητείται η διαδικασία σχεδίασης των δύο τριγώνων του σχεδίου. Έχει προηγηθεί η προσπάθεια των φοιτητών να μετρήσουν τις γωνίες του ενός τριγώνου, χωρίς να καταλήξουν στο επιθυμητό αποτέλεσμα (δηλαδή σε δύο ίσες γωνίες που θα τους οδηγούσαν στο συμπέρασμα ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές). Η διαδικασία αυτή συνοψίζεται στο 165. Ακολουθεί η προσπάθεια του Α να διαμορφώσει κατάλληλα την πρότασή του, έτσι ώστε να γίνει κατανοητή – άρα και αποδεκτή – από τη Β, η οποία στέκεται κριτικά σε όλο το συγκεκριμένο απόσπασμα. Γενικά, μπορούμε να πούμε ότι πρόκειται για την περίπτωση κατά την οποία μία νέα έννοια απορρίπτεται μέσα από διαπραγμάτευση).

• Η πρόταση του Α εκφράζεται αποκλειστικά μέσω ψευδο-μαθηματικής και καθημερινής γλώσσας, κάτι που αναγνωρίζει και ο ίδιος (166). Το γεγονός αυτό κάνει την πρότασή του ασαφή (Βλ. για παράδειγμα τα 170, 200) με αποτέλεσμα να απορριφθεί στην παρούσα φάση. (Τελικά η επιμονή του Α αναγκάζει τη Β στην υιοθέτηση της δικής του πρότασης, η οποία σε καμιά περίπτωση δεν μπορεί να χαρακτηριστεί κοινή).

3° Παράδειγμα (1-Z9-KK)

1. Α. Αρχικά, να φτιάξει έναν κύκλο... Αρχικά φτιάχνει έναν κύκλο, τον χωρίζει στη μέση.

2. Β. Φτιάχνει κύκλο με δι...

3. Α. Με διάμετρο.

4. Β. ... με ακτίνα 4 κουτάκια.

5. Α. Ναι. 4 κουτάκια πόσο είναι;

6. Β. Με κουτάκια θα το μετρήσει.

7. Α. Άντε, γράψε, άντε, πρώτο. Θες να το γράψω εγώ;

8. Β. Γράψε εσύ.

(Η Α αρχίζει να γράφει)

9. Β. Απ' το κέντρο και ακτίνα 4 κουτάκια.

10. Α. Η ακτίνα απ' το κέντρο δεν είναι;

11. Β. Ναι.

12. Α. Εε...

13. Β. Αυτός είναι ο σχηματισμός του κύκλου. Εε...

14. Α. Φέρνουμε... το χωρίζουμε στη μέση.

15. Β. Φέρνουμε τη διάμετρο, ναι, αλλά στο οριζόντιο, όχι στο κάθετο... Αυτό εδώ πώς να το

περιγράψουμε... **Σημείο 0**, το **σημείο 0**.

16. Α. Με μοιρογνωμόνιο;

17. Β. Περίμενε.

18. Α. Σωστά είναι, 80 μοίρες. 80 δεν είναι;

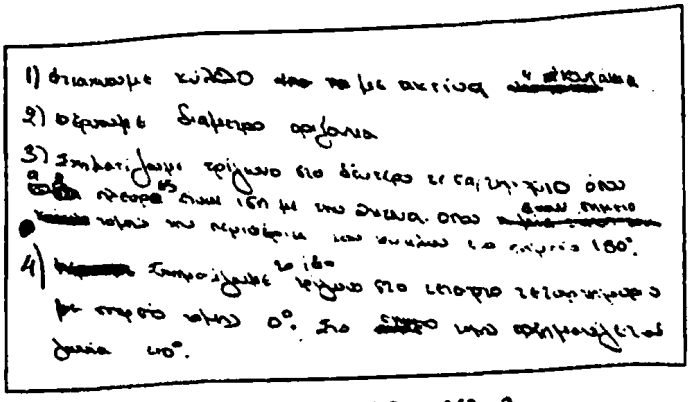
19. Β. Περίμενε... 70.

20. Α. Πρέπει να φέρουμε την κάθετη αυτήν εδώ;

21. Β. Μήπως είναι καλύτερα (...) την κάθετο; Αυτό είναι πιο...

22. Α. Με μοιρογνωμόνιο. 70...

23. Β. Καλά, δεν είναι 70 ακριβώς μοίρες.



Εικόνα 2.4. 1-Ζ9, σελίδα 2

24. Α. Ε, 70 και κάτι. Από το κέντρο φέρουμε... Πόσες μοίρες είναι;

25. Β. 72...

26. Α. Το μήκος;

27. Β. Δε φαίνεται. Με κουτάκια, 1 2 3.

28. Α. ΟΚ, να το κάνουμε έτσι.

29. Β. Αλλά διαγώνιο, πρέπει να πεις ότι η διαγώνιος είναι έτσι. Για να του δώσεις να καταλάβει απ' το τηλέφωνο πώς είναι.

30. Α. (...) στο κέντρο. Ότι είναι 90 μοίρες το ίδιο είναι. 90 λέω, 70, πόσο είπαμε.

31. Β. Ναι ρε παιδί μου, δεν είναι αυτό το πράγμα. Μπορείς να φτιάξεις κι έτσι διαγώνιο, 70 μοίρες.

32. Α. Ναι.

33. Β. Κατάλαβες;

34. Α. Την αριστερή...

35. Β. Τι θα του πεις; Φέρνουμε διαγώνιο απ' την αριστερή την πλευρά 70 μοίρες; Δεν το θεωρώ και πολύ (...)

36. Α. Ε, τι θα κάνουμε;

37. Β. Εκτός αν του πω: φέρνουμε διαγ, φέρνουμε... τραβάμε ευθεία, εκατόν... Δεν ξέρω, εμένα βασικά πιο απλό μου φαίνεται, να φέρουμε, περίμενε. Ναα πούμε ότι το σημείο 0, τραβάμε ευθεία, η οποία... δηλαδή να το περιγράψουμε όχι με μοίρες, όλα αυτά, δεν ξέρω...

38. Α. (...);

39. Β. Ναι... Αυτό είναι 40 μοίρες.

40. Α. Με μοίρες πάλι... Εκτός αν πούμε φτιάχνουμε τρίγωνο.

41. Β. Είναι κι αυτό μια καλή λύση. Αυτή είναι 40.

42. Α. Κάνει το τρίγωνο, και μετά παίρνει το άλλο εδώ κάτω κι είναι πιο εύκολο.

43. Β. Ναι.

44. Α. Ε; Αυτό θα κάνουμε.

45. Β. Αυτό είναι... Κάτσε να δούμε πόσο είναι... 73...

46. Α. Να κάνει πρώτα το τρίγωνο...

47. Β. Ναι.

48. Α. ... και μετά θα του πούμε από κάτω, αυτό εδώ. Μ;

49. Β. Στο δεύτερο τεταρτημόριο, σχηματίζουμε ένα τρίγωνο...

(Η Α γράφει την τρίτη οδηγία στη σελίδα 2)

50. Β. Στο δεύτερο τεταρτημόριο...

51. Α. Εεε, η υποτείνουσα πόσο είναι; Αυτή είναι η υποτείνουσα;

52. Β. 3 3.

53. Α. Δεν είναι αυτή η υποτείνουσα.

54. Β. Το τρίγωνο είναι ισοσκελές. 3 3.

55. Α. Άρα φέρνουμε...

56. Β. Περίμενε.

57. Α. Σχηματίζουμε τρίγωνο...

58. Α, Β. Στο δεύτερο τεταρτημόριο.

59. Β. Ωραία. Εε...

60. Α. Όπου η μία πλευρά είναι ίση με το μισό του, της διαμέτρου.

61. Β. Ναι. Η μία πλευρά είναι η ακτίνα, αφού αυτή εδώ είναι η ακτίνα... Ισοσκελές. Ισοσκελές δε λέγεται αυτό;

(Η Β απευθύνεται στον Κ, ο οποίος αποφεύγει να απαντήσει)

62. Α. Με την...

63. Β. Την ακτίνα.

64. Α. Το $\frac{1}{2}$ της ακτίνας. Όχι, την ακτίνα.

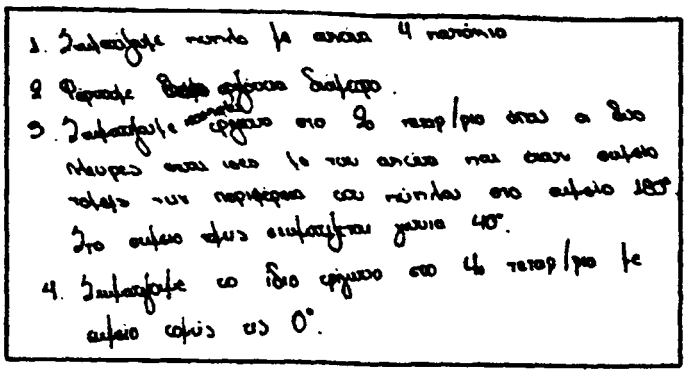
65. Β. Την ακτίνα.

66. Α. Ναι.

67. Β. Αυτό, μπορούμε να πούμε ότι κι αυτό εδώ πέρα είναι...

68. Α. Ε το φτιάξαμε.

(Οι Α, Β γελούν)



Εικόνα 2.5. 1-Z9, αρχική σελίδα

Ανάλυση – Σχόλια:

• Η πρώτη διαδικασία που εισάγεται από την Α, αλλά διαπραγματεύεται από κοινού στα 1-13 είναι η σχεδίαση του κύκλου. Η γλώσσα που χρησιμοποιείται είναι ένα μείγμα μαθηματικής, ψευδο-μαθηματικής και καθημερινής γλώσσας, μέσω του οποίου εμπλουτίζεται η συγκεκριμένη διαδικασία.

• Η σχεδίαση της διαμέτρου απασχολεί ελάχιστα τις δύο φοιτήτριες: στο 14 η Α χρησιμοποιεί καθημερινή γλώσσα για να περιγράψει τη διάμετρο του κύκλου, η Β αντιπροτείνει το σωστό μαθηματικά όρο, εμπλουτισμένο με μια ιδιότητα εκφρασμένη σε ψευδο-μαθηματική γλώσσα («στο οριζόντιο, όχι στο κάθετο»).

• Η κατασκευή των τριγώνων του σχεδίου περιέχει πολλές διαδικασίες, οι οποίες σε όλες τις περιπτώσεις διαπραγματεύονται και επεξεργάζονται από κοινού. Εξαίρεση αποτελεί η διαδικασία που προτείνει η Β στο 15 («Σημείο 0, το σημείο 0») – και που επαναφέρει στο 37 – η οποία αγνοείται από την Α, πιθανώς λόγω της ασάφειάς της, αλλά χρησιμοποιείται παραλλαγμένη στην τελική λύση (Βλ. Εικόνα 2.6.). Η έννοια της διαγωνίου (29), με την οποία η Β προσπαθεί να περιγράψει τη θέση της μίας πλευράς του τριγώνου, εγκαταλείπεται από την ίδια, αφού στο 37 χρησιμοποιεί τον όρο ευθεία. Η μέτρηση των γωνιών των τριγώνων επίσης φαίνεται ανεπαρκής, αν και ένα τμήμα της χρησιμοποιείται στην τελική λύση.

• Ο ψευδο-μαθηματικός όρος «υποτείνουσα» εγκαταλείπεται πολύ γρήγορα (51, 53) ενώ η Β εισάγει την έννοια του ισοσκελούς τριγώνου, η οποία δεν διαπραγματεύεται αυτή καθ' αυτή, αν και υπάρχει συμφωνία όσον αφορά την ισότητα των δύο πλευρών τριγώνου. Δηλαδή η έννοια του ισοσκελούς τριγώνου είναι κοινή (εμφανίζεται και στην τελική λύση), απλά υπάρχει διστακτικότητα στη χρήση του ακριβούς όρου (Βλ. και την ερώτηση της Β στο 61).

• Οι εκφράσεις ψευδο-μαθηματικής και καθημερινής γλώσσας δεν δημιουργούν ιδιαίτερα προβλήματα στην αμοιβαία κατανόηση των φοιτητριών και μάλιστα, όποτε υπάρχει η αίσθηση μη σαφούς έκφρασης (όπως για παράδειγμα στα 14, 29) υπάρχει προσπάθεια διόρθωσης της γλώσσας. Αποτέλεσμα αυτής της προσπάθειας είναι να συγκροτηθούν αρκετές κοινές έννοιες/διαδικασίες, οι οποίες σχετίζονται με: τη σχεδίαση του κύκλου (1-13), της διαμέσου (14-15) και ενός ισοσκελούς τριγώνου του οποίου οι ίσες πλευρές ισούνται με την ακτίνα του κύκλου (15-68).

2.5.2.2. Δεύτερο Πρόβλημα

Η επίλυση του δεύτερου προβλήματος συνίστατο στην εύρεση του πλήθους των μη επικαλυπτόμενων περιοχών που δημιουργούνται όταν φέρει κανείς 14 ευθύγραμμα τμήματα από καθεμία από τις δύο κορυφές του τριγώνου. Η επίλυσή του μπορεί να γίνει μέσω κάποιου τύπου, αλλά και μέσω πειραματισμού. Ο χαρακτήρας του προβλήματος δεν προσφέρεται για την εισαγωγή πολλών και πολύπλοκων διαδικασιών, σε αντίθεση με το πρώτο πρόβλημα. Στα παραδείγματα που ακολουθούν καταδεικνύεται ο τρόπος με τον οποίο οι φοιτητές χειρίζονται τη γλώσσα σε ένα πρόβλημα που δεν έχει ιδιαίτερες απαιτήσεις ως προς τη χρήση της, με εξαίρεση ίσως την τελική καταγραφή της λύσης.

1° Παράδειγμα (2-Z2-KK)

[Στη συζήτηση που έχει προηγηθεί η Β έχει ανακαλύψει ότι το πλήθος των μη επικαλυπτόμενων περιοχών αυξάνεται με τρόπο ώστε οι διαφορές τους να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Η Α αν και παρακολουθεί το συλλογισμό της Β, διατηρεί κάποιες επιφυλάξεις]

171. Β. Γιατί να μη το γράψουμε;

172. Α. Ε γράψ' το. Άμα κατάλαβες, γράψ' το. Τι είναι ακριβώς μη με ρωτάς.

173. Β. Θα σκάσω τι λέγεται...

174. Α. Ποια πώς λέγεται; Γεωμετρική δε θα 'ναι γιατί... ναι... Να γράψουμε ρε παιδάκι μου ότι, από το ένα, ξεκινώντας απ' το ένα ευθύγραμμο τμήμα, εε, καθώς εε, αυξάνουμε τα ευθύγραμμα τμήματα η πρόοδος αυξάνεται κατά δύο κάθε φορά.

175. Β. Ε, να γράψω όταν το σκέφτηκα, έτσι όπως το σκέφτηκα... Να γράψω, όταν φέρουμε το ένα ευθύγραμμο τμήμα...

176. Α. Το ν ρε παιδάκι μου...

177. Β. ... έχουμε 4. Όταν φέρουμε δύο ευθύγραμμα τμήματα έχουμε 9. Όταν φέρουμε τέσσερα έχουμε 25, εεε, αυξάνεται κατά 5, κατάα 5+2;

178. Α. Κάτσε κάτσε κάτσε. Εδώ είν' το 5 ε; 5 7 9... Περίμενε, 5 7 9...

179. Β. Οι μονοί αριθμοί...

180. Α. 11...

181. Β. ... με τη σειρά απ' το 5 και πάνω.

182. Α. 15... Γιατί; Περίμενε.

183. Β. Έτσι είναι οι μονοί.

184. Α. Αυτό το 5 πού πάει; Εδώ πάνω; Όχι στο δεύτερο.

185. Β. Εεεε, ναι 4 συν 5 9. 5 συν 7 16.

186. Α. Το 5 δηλαδή πάει εδώ.

187. Β. 5 συν 4 9. 5 συν 7 16.

188. Α. Ναι βρε παιδάκι μου. Εμείς τα βάζουμε έτσι σε σειρά. Αυτό το 5 πού είναι; Πάνω ή κάτω;

189. Β. Εδώ, το προσθέτεις εδώ για να βρεις αυτό.

190. Α. Άρα είναι εδώ το 5.

191. Β. Ναι.

192. Α. Το 9.

193. Β. Το 7 είναι στο 9.

194. Α. Εδώ. Εδώ είναι 9, εδώ είναι 11, εδώ είναι 13, 15...

195. Β. Ναι.

196. Α. 17.

197. Β. Τους μονούς αριθμούς μέχρι...

198. Α. 19.

199. Β. 21 23.

200. Α. 21... 25, 27...

201. Β. 29.

202. Α. 29.

203. Β. Αυτό... Όταν φέρουμε, πώς να το γράψω; Όταν φέρουμε μία έχουμε τέσσερα ευθύγραμμα τμήματα...

204. Α. Φέρ' το.

(Η Α παίρνει την αρχική σελίδα για να γράψει την απάντηση)

205.Β. Στα δύο έχουμε 9, πήγαινε μέχρι το 5. Μετά έχουμε, αυξάνεται κατά...

206. Α. Λοιπόν, σ' αυτό το τρίγωνο... αρχικά φέρουμε ένα... ένα ευθύγραμμο τμήμα, αν φέρουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα πόσα έχουμε;

207. Β. Τέσσερα.

208. Α. Ένα από δω κι ένα από δω.

209. Β. Από δύο, από δύο.

210. Α. Από κάθε.

211. Β. Από δύο!

212. Α. Από δύο κορυφές (...) από δύο κορυφές.

213. Β. Έχουμε τέσσερα.

214. Α. Έχουμε τέσσερις περιοχές θα γράψω.

215. Β. Αφού τμήματα τα λέει.

216. Α. Περιοχές.

217. Β. Αν φέρουμε δύο.

218. Α. Περίμενε. Όχι. Αυξάνοντας, αυξάνοντας τα ευθύγραμμα τμήματα... Αυξάνοντας τα ευθύγραμμα τμήματα, αυξάνονται...

219. Β. Κι οι περιοχές.

220. Α. ... οι περιοχές.

221. Β. Ανά;

222. Α. Περιοχές... Αυξάνονται οι περιοχές προοδευτικά ανά, με διαφορά μάλλον, με διαφ, με διαφορά, δύο... δύο τι; Δύο περιοχές. Ας πούμε η τέταρτη απ' την πέμπτη, τα 4 ευθύγραμμα, 5 ευθύγραμμα τμήματα, η διαφορά ανάμεσα σ' αυτά εδώ είναι δύο περιοχές παραπάνω η πέμπτη, κατάλαβες τι εννοώ;

223. Β. Όχι.

224. Α. Λοιπόν, θα σου εξηγή... Όταν έχουμε τέσσερα ευθύγραμμα τμήματα, έχουμε ας πούμε 9, πόσα μου 'πες, 9 δε μου πες;

225. Β. 25.

226. Α. 25.

227. Β. Περιοχές.

228. Α. Ηηη... Όταν έχουμε πέντε ευθύγραμμα τμήματα, η η πρόοδος που έχουμε εδώ πέρα είναι ανά δύο, αυτό δεν μου 'πες πριν; Ότι εδώ πέρα...

229. Β. ν+2. Όχι ανά δύο. Το ν είναι...

230. Α. Όχι, γράφω ότι αυξάνονται οι περιοχές προοδευτικά, με διαφορά δύο περιοχές, ηηη, ας πούμε η τέταρτη απ' την πέμπτη. Η πέμπτη απ' την τέταρτη.

231. Β. Όχι δεν είναι... δύο περιοχές εννοείς ότι...

232. Α. Δύο περιοχές περισσότερο έχει η μία απ' την άλλη. Αυτό δε μου 'πες;

233. Β. ν+2. Βρίσκουμε, κοίτα να δεις. Εδώ βρήκαμε το 5. Τι ν+2; Περίμενε ένα λεπτό. Βρήκαμε 5. Εδώ είναι 9. 7... Δεν είναι ν+2, το ν πού κολλάει, αφού δεν έχει, δεν είναι σταθερό.

234. Α. Το ν είναι το πριν απ' αυτό.

235. Β. Όχι, ν σημαίνει ένας αριθμός που αν προσθέσεις δύο αυξάνει...

236. Α. Άρα αυτό δεν είναι πρόοδος.

237. Β. Όχι είναι ν συν...

238. Α. Άρα σβήσ' το.

239. Β. Περίμενε ένα λεπτό.

240. Α. Λες να γράψουμε τη μπακαλο... τη συνταγή τη δικιά μου να τελειώνουμε;

Ανάλυση – Σχόλια:

• Η μοναδική κοινή έννοια προς διαπραγμάτευση είναι η αριθμητική πρόοδος που ακολουθούν οι διαφορές του πλήθους των μη επικαλυπτόμενων περιοχών. Η έννοια – που έχει προταθεί από τη Β – είναι κοινά αποδεκτή, όμως οι φοιτήτριες συναντούν σοβαρά προβλήματα στην έκφρασή της μέσω ψευδο-μαθηματικής γλώσσας. Αυτά τα προβλήματα έκφρασης προκαλούν με τη σειρά τους και προβλήματα κατανόησης που εκφράζονται στη στιχομυθία 228-237.

• Πρόκειται για περίπτωση στην οποία η αμοιβαία κατανόηση – άρα και η εφαρμογή – μιας κοινής διαδικασίας απειλείται από τις ασάφειες στην έκφραση που δημιουργεί η ψευδο-μαθηματική γλώσσα. Ο κίνδυνος αυτός εκφράζεται εύγλωττα από τη φράση της Α στο 240. Πρόκειται λοιπόν για περίπτωση κατά την οποία η διαπραγμάτευση σε μη μαθηματική γλώσσα παρεμποδίζει την εφαρμογή μιας διαδικασίας.

2° Παράδειγμα (2-Ζ11-ΚΚ)

24. Α. Λοιπόν, έχουμε και λέμε. Λοιπόν, από κάθε τέτοιο έχουμε φέρει 3. Δηλαδή, 3 απ' τη μία κορυφή...

25. Β. Και 3 από την άλλη.

(Η Α γράφει)

26. Α. ... και 3 απ' την άλλη. Λοιπόν, έτσι, μμ... λοιπόν, έτσι το τρίγωνο χωρίστηκε από 3 και 3, 6, χωρίστηκε σε 16 περιοχές.

27. Β. Ναι.

28. Α. Άμα φέρουμε από 14 και 14, πόσο θα τέτοιο;

29. Β. Τα 6 τι είναι που έγραψες;

30. Α. 6, 3 και 3 6.

31. Β. Α, 6 το σύνολο.

32. Α. 6 στο σύνολο...

33. Β. Και 28...

34. Α. ... οι γραμμές, και μας βγαίνουν 16...

35. Β. Ναι.

36. Α. ... τέτοια. 14 και 14 28.

37. Β. Ναι.

38. Α. Μπορούμε, να κάνουμε στα 6 16...

39. Β. Εγώ πάντως αυτό σκέφτηκα.

40. Α. ... στα 28 πόσο; Αυτό; Να κάνουμε ένα πολλαπλασιασμό και τελείωσε.

41. Β. Ε, να σου πω κάτι; Γιατί, δεν είναι λογικό;

42. Α. Ναι.

(Η Α κάνει τον πολλαπλασιασμό 28·16 και βρίσκει αποτέλεσμα 568)

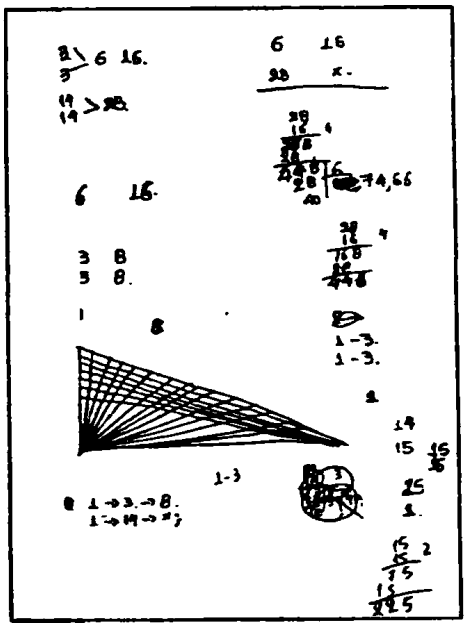
43. Α. 568 δια 6. 6 στο 56...

44. Β. Περίμενε ρε. Να πάρω κινητό;

45. Κ. Τόσο δύσκολο είναι;

46. Β. Όχι όχι, πλάκα κάνω.

47. Α. Εεε...



Εικόνα 2.6. 2-Ζ11

48. Β. 24, τέσσερις.

49. Α. Ναι, τι θα βγάλουμε όμως; 96,4;

50. Β. Ξέρεις τι; Κάνε λίγο πάλι τον πολλαπλασιασμό μήπως κάναμε κανένα λάθος.

(Η Α με τη βοήθεια της Β κάνει ξανά τον πολλαπλασιασμό 28·16 και βρίσκουν το σωστό αποτέλεσμα, δηλαδή το 448. Στη συνέχεια κάνει τη διαίρεση 448:6)

51. Α. Γιατί ρε γαμώτο βγαίνει έτσι;

[Ακολουθούν και άλλες προσπάθειες εφαρμογής της απλής μεθόδου των τριών, οι οποίες οδηγούν σε δεκαδικό αριθμό περιοχών]

106. Α. Ναι, 28. Εεεμμ... πρέπει να βγουν ακριβώς. Άμα κάτσουμε να το κάνουμε **ακριβώς**, καλά, χαιρέτα μας τον πλάτανο. Θα κάτσουμε ένα μήνα εδώ. Μμμ...

107. Β. Να καθίσουμε να το κάνουμε **ακριβώς**;

108. Α. Εγώ πάντως δεν...

109. Β. Όχι.

110. Α. 14, πού να σχηματίσεις εδώ 14 τέτοια;

111. Β. Κανονικά. Θες να στο κάνω εγώ; Πολύ εύκολο.

112. Α. Βρε, κι εγώ το κάνω. Κάτσε μέτρα εσύ μέχρι το 80 όμως, που θα είναι περίπου τόσο... Χωρίζει σε 15 μη επικαλυπτόμενες περιοχές.

113. Β. 16.

114. Α. Πόσες τέτοιες περιοχές θα δημιουργηθούν αν φέρουμε 14 ευθύγραμμα τμήματα από καθεμία από τις 2 κορυφές; Από κάθε κορυφή να φέρουμε 14.

115. Β. Σύνολο 28.

116. Α. Κάτι παίζεται εδώ μέσα, αλλά αυτή τη στιγμή δεν είμαι σε θέση να σκεφτώ. Κάτι άλλο είναι.

117. Β. Δηλαδή;

118. Α. Μπορούμε να πούμε: απ' τα 3, βγάλαμε 8 τρίγωνα, κι απ' τ' άλλα 3, βγάλαμε 8 τρίγωνα.

119. Β. Ναι, σύνολο 16.

120. Α. Ναι, λοιπόν: απ' τα δεκα... πάλι το... το 3 με το 14 δεν τέτοιο.

121. Β. Α μπράβο.

122. Α. Δε συμπίπτουν. Τρεις τέσσερις 12, τρεις 5 15. Λοιπόν, κάτσε να δούμε... Πάλι το 6 δε συμπίπτει με το 28... Μμ, το ίδιο πάλι, δεν μπορώ να σκεφτώ τίποτα άλλο. 6...

123. Β. Δεν τραβάμε τις ευθείες λέω 'γώ να τα μετρήσουμε;

124. Α. Θα είναι πολύ δύσκολο αυτό το πράγμα. Φαντάσου 14... τέλος πάντων, κάτσε να...

125. Β. Κάν' το πολύ μεγάλο, για να τα ξεχωρίζουμε.

Ανάλυση – Σχόλια:

• Η πρώτη διαδικασία που εισάγεται από την Α είναι η χρήση αναλογιών· η διαδικασία αυτή γίνεται αποδεκτή από τη Β η οποία τη θεωρεί «λογική» (41) και, αφού έχει προηγηθεί η διαπραγμάτευσή της, εφαρμόζεται στη συνέχεια.

• Η αδυναμία της προηγούμενης διαδικασίας να οδηγήσει σε αποδεκτό αποτέλεσμα (το πλήθος των περιοχών πρέπει να είναι φυσικός αριθμός), οδηγεί την Α στην εισαγωγή της γεωμετρικής κατασκευής 14 ευθυγράμμων τμημάτων από καθεμιά από τις δύο κορυφές του τριγώνου. Η διαδικασία αυτή, αν και φαίνεται χρονοβόρα, γίνεται αποδεκτή από τη Β (111) αν και η Α εξακολουθεί να έχει αμφιβολίες.

• Δύο είναι οι βασικές κοινές έννοιες του αποσπάσματος: η χρήση αναλογιών και η γεωμετρική κατασκευή του ζητούμενου σχήματος. Η πολυπλοκότητα και των δύο είναι μικρή, και οι γλωσσικές απαιτήσεις ελάχιστες· με άλλα λόγια οι φοιτήτριες δεν χρειάζεται να επιστρατεύσουν κάποια εξειδικευμένη ορολογία για να τις περιγράψουν. Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα την περιορισμένη και αποσπασματική εμφάνιση εκφράσεων μη μαθηματικής γλώσσας, οι οποίες δεν φαίνεται να επιδρούν στη συγκρότηση των προαναφερθέντων κοινών διαδικασιών. Μερικά παραδείγματα είναι: το «τέτοιο» στο 24, που αναφέρεται στις κορυφές και χρησιμοποιείται μάλλον για λόγους συντομίας (όπως και στο 110), το «να το κάνουμε ακριβώς» (106, 107) που αναφέρεται στη γεωμετρική κατασκευή και το «συμπίπτουν» στο 122 που αναφέρεται στο γεγονός ότι το 14 δεν είναι πολλαπλάσιο του 3.

3° Παράδειγμα (2-Ζ13-ΚΑ)

[Στη συζήτηση που έχει προηγηθεί ο Β έχει προτείνει ότι το πλήθος των μη επικαλυπτόμενων περιοχών που προκύπτουν είναι 225, και έχει εξηγήσει στην Α το συλλογισμό του. Στη συνέχεια

αποφασίζουν να γράψουν την απάντησή τους]

78. Β. Λέγε. Λέμε ότι σταα, στα 3 ευθύγραμμα τμήματα που φέρνουμε απ' τις δύο...

79. Α. Από κάθε.

80. Β. Από τις δύο κορυφές, τοο τρίγωνο χωρίζεται σε 14, εε, **επικαλυπτόμενες περιοχές**.

81. Α. Δεκάξι.

82. Β. Δεκαέξι ναι

83. Α. Γιατί έχουμε 4 επί 4. Μ;

84. Β. Γιατί... Γιατί καθεμία, κάθε ένα ευθύγραμμο τμήμα χωρίζει το, τα 3 ευθύγραμμα τμήματα της μίας κορυφής χωρίζουν το... τρίγωνο σε 4...

85. Α. Σε 4.

86. Β. Και της άλλης...

87. Α. Και της άλλης σε άλλα 4.

88. Β. 4.

89. Α. Οπότε 4 επί 4, δεν ξέρω.

90. Β. Ναι... Όχι, θα πούμε ότι το κάθε ευθύγραμμο τμήμα της, της μίας κορυφής, χωρίζει το τρίγωνο, το αρχικό τρίγωνο σε 4 τρίγωνα και της **υπόλοιπης**, της άλλης κορυφής τα, ε, τα ευθύγραμμα τμήματα χωρίζουν τα **μικρότερα τρίγωνα** σε άλλα 4 **τρίγωνα. Τμήματα**. Για να είναι πιο σωστό. Να δούμε πώς προκύπτει το 4 επί 4. Αυτό εδώ χωρίζει τοο...

91. Α. Ναι και...

92. Β. ... το μεγάλο τρίγωνο σεε, σε 4 **μικρότερα τμήματα**, τρίγωνα, και της **υπόλοιπης κορυφής** οι ευθείες χωρίζουν τα μικρότερα **τμήματα** πρυ δημιουργήθηκαν σε άλλα 4 το καθένα ξεχωριστά. Οπότε 4 επί 4...

93. Α. 4 τρίγωνα επί άλλα 4 τρίγωνα, 16.

94. Β. 16.

95. Α. Ναι, αλλά δεν έχουμε 16 τρίγωνα.

96. Β. Ε, πε... ε, **τμήματα**, περιοχές. Αυτά εδώ χωρίζουν το τρίγωνο σε δε, σε 4 περιοχές, και απ' τη, η ευθ, τα ευθύγραμμα τμήματα της μιας κορυφής και της άλλης, τα 3 ευθύγραμμα τμήματα χωρίζουν τα 4 **τμήματα** που δημιουργήθηκαν σε τέσσερις ξεχωριστά, ξεχωριστά, ξεχωριστές **επικαλυπτόμενες περιοχές** το καθένα. Εντάξει;

97. Α. Ναι, εντάξει.

(Ο Β γράφει στην αρχική σελίδα)

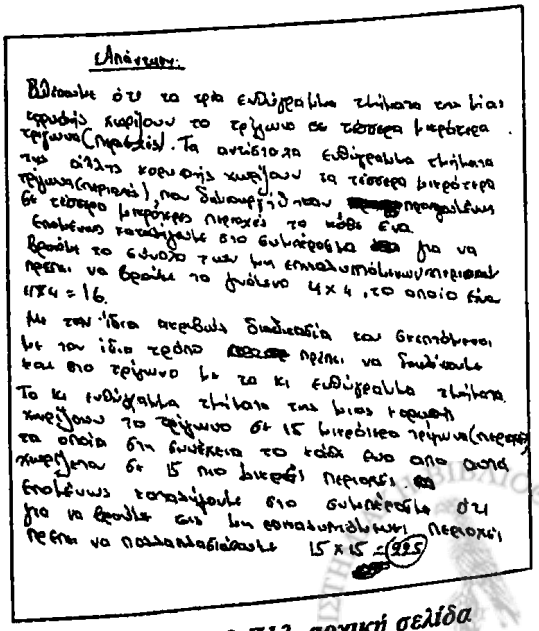
98. Β. Τα ευθύγραμμα τμήματα της μίας κορυφής...

99. Α. Χωρίζουν το τρίγωνο σε 4 τρίγωνα.

100. Β. Τρίγωνα; Τρίγωνα ή περιοχές; Τρίγωνα θα τα γράψουμε. Σε 4 μικρότερα... Δε σε βλέπω να συμμετέχεις;

101. Α. Μ;

102. Β. Δεν σε βλέπω να συμμετέχεις.



Εικόνα 2.7. 2-Ζ13, αρχική σελίδα

103. Α. Όχι, απλά συμφωνώ μ' αυτά που λες.

104. Β. Τα αντίστοιχα ευθύγραμμα τμήματα της άλλης κορυφής, χωρίζουν τα τμήματα, τα τρίγωνα που δημιουργήθηκαν, τα μικρότερα, σεε... το κάθε ένα από τα τρίγωνα, σε 4 μικρότερα, σε 4 μικρότερες περιοχές. Οπότε έχουμε, 4 επί δεκ, επί... τέσσερις οι μικρότερες περιοχές επί δεκα... επί 4 που είναι τα, τα μεγαλύτερα τμήματα, 16... Λες να βάλουμε αριθμούς και γράμματα;

105. Α. Μ;

106. Β. Να συμβολίσουμε με γράμματα εδώ, το τρίγωνό μας. Δε χρειάζεται... (...) τρίγωνα;

107. Α. Μ;

108. Β. Να τα γράψω τα μικρότερα τρίγωνα; Οι μικρότερες περιοχές που δημιουργήθηκαν... σε 4 μικρότερες περιοχές... Τα 4 τρίγωνα που δημιουργήθηκαν προηγουμένως σε; Σε 4 μικρότερα...

109. Α. Φέρνοντας 3 ευθύγραμμα τμήματα.

110. Β. ... σε τέσσερις μικρότερες, το κάθε ένα, σε 4 μικρότερες περιοχές το κάθε ένα.

Ανάλυση – Σχόλια:

• Η διαδικασία με την οποία υπολογίζεται το πλήθος των μη επικαλυπτόμενων περιοχών θεωρείται ήδη μία κοινή έννοια και αντικείμενο της συζήτησης είναι η περαιτέρω διαμόρφωσή της, έτσι ώστε να μπορεί να παρουσιαστεί και να καταγραφεί. Απαιτείται λοιπόν μια λεπτομερής και σαφής περιγραφή των επιμέρους ενεργειών που απαρτίζουν την κυρίως διαδικασία.

• Η γλώσσα που χρησιμοποιεί ο Β – γιατί αυτός φαίνεται ότι έχει επιφορτιστεί με την καταγραφή της λύσης – είναι σε αρκετά σημεία ψευδο-μαθηματική και προκαλεί μια αβεβαιότητα και στον ίδιο για τη σαφήνειά της, αφού πολλές φορές ζητά τη γνώμη ή την επιβεβαίωση της Α.[43] Το σημείο στα οποία εντοπίζεται το βασικό πρόβλημα είναι η περιγραφή του συλλογισμού σύμφωνα με τον οποίο ν ευθύγραμμα τμήματα από καθεμιά από τις δύο κορυφές του τριγώνου δημιουργούν $(\nu + 1)^2$ μη επικαλυπτόμενες περιοχές. Ψευδο-μαθηματική γλώσσα χρησιμοποιείται – αλλά χωρίς σοβαρή επίπτωση – και στην περιγραφή των μη επικαλυπτόμενων περιοχών οι οποίες χαρακτηρίζονται ως «επικαλυπτόμενες περιοχές» (80), «μικρότερα τρίγωνα» και «τρίγωνα» (90), «τμήματα» (90, 96, 104) , «μικρότερα τμήματα» (92), «ξεχωριστές επικαλυπτόμενες περιοχές» (96), «μικρότερες περιοχές» (108, 110).

• Συμπερασματικά, στο παραπάνω απόσπασμα, η εκτεταμένη χρήση ψευδο-μαθηματικής γλώσσας επιδρά θετικά στην τελική διαμόρφωση μιας ήδη κοινά αποδεκτής διαδικασίας.

2.5.2.3. Τρίτο Πρόβλημα

Το τρίτο πρόβλημα αναφέρεται σε ένα τρισδιάστατο σχήμα, η επίλυσή του όμως μπορεί να γίνει αγνοώντας τη μία διάσταση (το πλάτος) η οποία παραμένει σταθερή. Δόθηκαν αρκετές διαφορετικές λύσεις, κάποιες από τις οποίες περιείχαν ενδιαφέρουσες μαθηματικές διαδικασίες εκφρασμένες σε μη μαθηματική γλώσσα. Στα παραδείγματα που ακολουθούν καταδεικνύεται η επίδραση της γλώσσας στην πορεία συγκρότησης κοινής γνώσης από τους φοιτητές.

1° Παράδειγμα (3-Z4-KK)

[Στη συζήτηση που έχει προηγηθεί η Β έχει προτείνει να σχεδιάσουν και το πλάτος του ενυδρείου που δεν φαίνεται στο δοσμένο σχήμα, πρόταση που απέρριψε άμεσα η Α. Η Β επίσης εισάγει την έννοια της αναλογίας, υποθέτοντας ότι αφού το νερό φθάνει ως το μέσο της βάσης του ενυδρείου, όταν αυτό επανέλθει στην οριζόντια θέση, το βάθος του νερού θα είναι 20 cm. Και αυτή η πρόταση απορρίφθηκε από την Α, και ακολουθεί η παρακάτω στιχομυθία]

32. Α. Πρέπει να βρούμε τι σχέση έχει το τρίγωνο με **το όλο**, κατάλαβες; **Τέσσερα τριγωνάκια χωράν εδώ**. Αφού αυτό, αν ας πούμε πεις ότι είν' το $\frac{1}{4}$ **του όλου**, όταν θα **απλωθεί** θα φτάσει στο $\frac{1}{4}$ εδώ. Κατάλαβες;

33. Β. Ρε (Φωτεινή), να σχεδιάσουμε και το **άλλο τρίγωνο, σ' αυτό το σχήμα όμως;**

34. Α. Α, όχι.

35. Β. Να κάνουμε ένα **άλλο σχηματάκι;**

(Η Α παίρνει τη σελίδα 2)

36. Α. Κατάλαβες τι λέω; Δε μας ζητάει **πόσο νερό έχει, αλλά πού θα φτάσει το νερό αυτό.**

(Η Α κάνει το σχήμα στη σελίδα 2)

37. Α. Τέλος πάντων τώρα... Δεν μπορούμε να το σχεδιάσουμε και καλά. Θα το κάνουμε πρόχειρα. Στο μέσον. Αυτό λοιπόν, θέλουμε το μέσον εδώ, 50 40 50. Η διαγώνιος είναι αυτή εδώ... Τώρα, το νερό είναι κάπως έτσι, κοίτα. Και φτάνει στο μέσον...

38. Β. Ναι.

39. Α. ... αυτής της πλευράς. Δηλαδή, το ίδιο είναι κι από δω... Η **ποσότητα** αυτή είναι το $\frac{1}{4}$, της χωρητικότητας του... Αν το είχαμε γεμάτο το ενυδρείο, **θα χωρούσε άλλες τρεις φορές**, δηλαδή τέσσερις φορές αυτό δω.

40. Β. Ναι.

41. Α. Άρα αν το ρίξουμε κάτω...

42. Β. Θα 'ναι 10 εκατοστά.

43. Α. Έτσι λέω κι εγώ αλλά... Αφού εδώ **πιάνει το 40**, θα είναι όμως 10; Πρέπει να το, κάπως να μετριέται αφού μας τα δίνει όλα τα στοιχεία. Μας δίνει όλες τις διαστάσεις.

44. Β. Μήπως το πλάτος παίζει κανένα ρόλο ή μας το δίνει...

(Η Β γελάει)

45. Α. Μμ... Να το βρούμε με εμβαδό. Πόσο εμβαδό έχει αυτό τώρα; Και πόσο έχει το όλο το ορθογώνιο.

46. Β. Εγώ να σου πω τι σκέφτηκα; Τώρα θα μου πεις ότι είναι εμπειρικό. Λοιπόν, αν αυτό το πάμε στο μέσον, είναι 20 εκατοστά, έτσι; Οπότε εδώ πέρα θα είναι το μισό απ' το μισό, άρα θα φτάσει εδώ πέρα 75 εκατοστά.

47. Α. Κάτσε να δεις. Αυτό είναι ένα τριγωνάκι τώρα εδώ. Για να βρούμε εμβαδό τριγώνου βάση επί ύψος δια 2 δε θέλει;

48. Β. Δεν ξέρω.

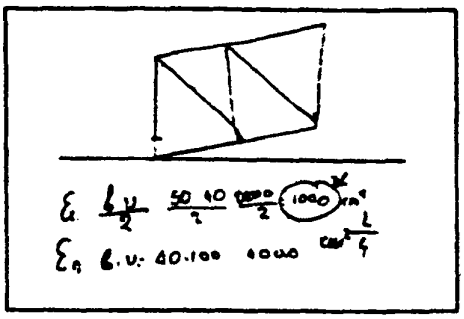
49. Α. Ναι.

(Η Α γράφει στη σελίδα 2)

50. Α. Ύψος δια 2, δηλαδή: η βάση του είναι 50...

51. Β. Το εμβαδόν γιατί να το βρούμε; Δεν καταλαβαίνω.

52. Α. Α, αυτό, αυτό είν' το $\frac{1}{4}$ απ' το όλο.



Εικόνα 2.8. 3-Ζ4, σελίδα 2

53. Β. Ναι.

54. Α. Ε, άμα βρούμε αυτό, αυτό θα απλωθεί σ' αυτό. Θα μετρήσουμε και το μεγάλο και θα δούμε τη σχέση που έχει αυτό με το μεγάλο. Πόσο είναι; 50 επί 40;... Δεν μ' αρέσει αυτό που κάνουμε τώρα. Γιατί το νερό θέλουμε και σε, είναι όγκος, δεν είναι... τέλος πάντων. Εμβαδόν παραλληλογράμμου; Θυμάσαι; Βάση επί ύψος. 40 επί 100. Ε, αυτό που λέμε: τέσσερις φορές περισσότερο. Το έν... ναι, το $\frac{1}{4}$, αυτό που είπαμε και πριν. Το αποδείξαμε.

55. Β. Ωραία.... Ναι, κατεβαίνοντας, φτάνοντας στη βάση θα είναι 10 εκατοστά.

56. Α. Ναι, την ίδια ποσότητα θα 'χει το νερό. Είτε είναι έτσι, είτε είναι...

57. Β. Ναι, λέει αν φτάσει σε οριζόντια θέση ποιο θα είναι το βάθος του.

58. Α. Ναι, ναι. Τώρα αντί να χωρίσουμε αυτό, θα το χωρίσουμε έτσι.

59. Β. Σε εκατοστά.

60. Α. Εε, 10 επί 100 πάλι 1000 θα κάνει. Το ίδιο το εμβαδό. Άρα 10 βγαίνει. Κι αυτό το, το παραλληλόγραμμο, τώρα θα είναι σε παραλληλόγραμμο. Θα έχει βάση 100 cm και ύψος 10, και θα είναι πάλι 1000.

61. Β. Ναι.

62. Α. Αυτό (ήτανε). Καταλήξαμε. Εδώ θα είναι.

Ανάλυση – Σχόλια:

• Η πρώτη διαδικασία που εισάγεται από την Α είναι η κατάτμηση της συνολικής εμπρόσθιας επιφάνειας του ενυδρείου σε τέσσερα ίσα τρίγωνα, εκ των οποίων το ένα αντιστοιχεί στην επιφάνεια που καλύπτει το νερό. Η Α χρησιμοποιεί κυρίως ψευδομαθηματική και καθημερινή γλώσσα για να εκφράσει την πρότασή της: «να βρούμε τι σχέση έχει το τρίγωνο με το όλο», «Τέσσερα τριγωνάκια χωράν εδώ», «Η ποσότητα

αυτή είναι το $\frac{1}{4}$, της χωρητικότητας του», «θα χωρούσε άλλες τρεις φορές, δηλαδή τέσσερις φορές αυτό δω», κ.ο.κ. Φαίνεται πως η Β παρακολουθεί την πρόταση αυτή – η οποία μπορεί να θεωρηθεί μια κοινή έννοια – και αυτό αποδεικνύεται από το γεγονός ότι αυτή δίνει την απάντηση για το ζητούμενο βάθος του νερού στο 42.

• Στο 44 η Β εισάγει την έννοια του πλάτους του ενυδρείου (έννοια που έχει προσπαθήσει να εισάγει και πριν τη στιχομυθία του συγκεκριμένου αποσπάσματος), αλλά η Α την απορρίπτει χωρίς μάλιστα να υπάρξει καμία διαπραγμάτευση.

• Αμέσως μετά, η Α συνεχίζει τον εμπλουτισμό της διαδικασίας που πρότεινε αρχικά, αντιπαραθέτοντάς την με τη χρήση του πλάτους· πιθανώς τη δεδομένη χρονική στιγμή η Α θεωρεί ότι δεν είναι απαραίτητη η χρήση του πλάτους – άρα και η εύρεση όγκων – αλλά ότι αρκεί η εύρεση κάποιων εμβαδών. Λίγο αργότερα όμως – στο 54 – εκφράζει μία αβεβαιότητα για τη μη χρησιμοποίηση της τρίτης διάστασης. Ο εμπλουτισμός της πρότασής της γίνεται μέσω μαθηματικής, αλλά και μη μαθηματικής γλώσσας και το αποτέλεσμα είναι η αποδοχή της από τη Β.

• Μεσολαβεί μία ακόμη προσπάθεια εισαγωγής μιας διαδικασίας από τη Β στο 46, η οποία υποστηρίζει ότι υπάρχει μια σχέση αναλογίας ανάμεσα στις αποστάσεις των κορυφών του τριγώνου που σχηματίζεται, από τα άκρα των αντίστοιχων πλευρών του ενυδρείου. Χρησιμοποιεί ψευδο-μαθηματική γλώσσα, παραδέχεται ότι ο τρόπος που προτείνει είναι «εμπειρικός» και η Α την αγνοεί προχωρώντας στην ανάπτυξη της δικής της πρότασης.

• Πρόκειται για περίπτωση στην οποία η μη μαθηματική γλώσσα συντελεί θετικά στη γόνιμη διαπραγμάτευση και τελική αποδοχή μιας διαδικασίας (του συσχετισμού του εμβαδού του τριγώνου με το συνολικό εμβαδό της εμπρόσθιας όψης του ενυδρείου), ενώ δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για την άμεση απόρριψη μιας άλλης διαδικασίας (της χρήσης και της τρίτης διάστασης).

2^{ο} Παράδειγμα (3-Z7-ΚΚ)

[Στη συζήτηση που έχει προηγηθεί οι δύο φοιτήτριες έχουν καταλήξει στο ότι το ζητούμενο βάθος του νερού θα είναι 10 cm. Ο συλλογισμός τους βασίστηκε στη διαπίστωση ότι το νερό θα καταλαμβάνει τον ίδιο όγκο και στις δύο θέσεις του ενυδρείου· παραβλέποντας το πλάτος του ενυδρείου υπολόγισαν το εμβαδόν το τριγώνου που φαίνεται στο σχήμα και θεωρώντας ότι το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που θα σχηματιστεί στην οριζόντια θέση έχει το ίδιο εμβαδόν με αυτό το τρίγωνο, κατέληξαν στο συμπέρασμα, το οποίο αποφασίζουν να μεταφέρουν στο χαρτί]

74. Α. Ναι, πρώτα θα βρούμε...

75. Β. Πρώτα εδώ.

76. Α. Πρώτα θα βρούμε το εμβαδόν...

77. Β. Του ορθογωνίου τριγώνου.

(Η Β γράφει στη σελίδα 3)

78. Α. Λοιπόν...

79. Β. Που είναι βάση, βάση επί ύψος δια 2. Η βάση είναι 50;

80. Α. Λοιπόν. Οπότε, βάση 50... Ναι.

81. Β. Βάσει των δεδομένων της άσκησης.

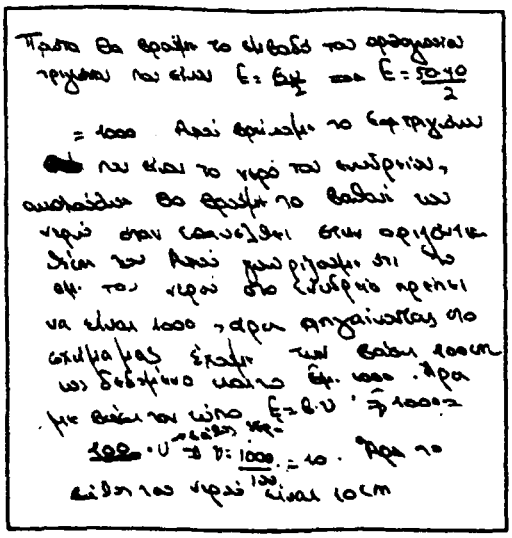
82. Α. Ναι.

83. Β. 50, 40 το ύψος που έχουμε αντίστοιχα δεδομένο.

84. Α. Λοιπόν, οπότε έχουμε 50...

85. Β. Και 40.

86. Α. Ναι. 50 επί 40 δια 2. Ισούται με 1000. Ναι. Λοιπόν, αφού βρήκαμε...



Εικόνα 2.9. 3-Ζ7, σελίδα 3

87. Β. Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου;

88. Α. Του ορθογωνίου τριγώνου.

89. Β. Που είναι ουσιαστικά το... το νερό; Ο όγκος του νερού;

90. Α. Ναι. Περίμενε, το ενυδρείο έχει ανασηκωθεί ώστε το νερό να φτάνει ως το μέσο της βάσης του. Όταν το ενυδρείο επανέλθει στην αρχική θέση του ποιο θα είναι το βάθος του νερού. Βρήκαμε το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου...

91. Β. Για ποιο λόγο βρήκαμε το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου;

92. Α. Για να δούμε πόσοο...

93. Β. Πόσο είναι το νερό βασικά.

94. Α. Ναι, πόσο είναι το νερό... Λοιπόν, αφού βρήκαμε το ε, δηλαδή...

95. Β. Ή που αντιστοιχεί με το...

96. Α. Με τον... αφού βρήκαμε το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου, στο οποίο αντιστοιχεί...

97. Β. Το οποίο αντιστοιχεί με το νερό; Με τη χωρητικότητα του νερού.

98. Α. Αφού βρήκαμε το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου, εε, το οποίο... Αφού βρήκαμε το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου.

99. Β. Άλλη μια φορά!

(Οι Α, Β γελούν)

100. Α. Πρώτα θα βρούμε το εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου που είναι βάση επί ύψος δια 2. Το εμβαδόν είναι 50 επί 40 δια 2. Είναι βάσει των δεδομένων των οποίων μας δίνεται στην άσκηση. Και βρίσκουμε ότι είναι 1000.

101. Β. Και βρίσκουμε το ορθογώνιο τετράγωνο διότι αντιστοιχεί...

102. Α. Ορθογώνιο τρίγωνο.

103. Β. Το ορθογώνιο τρίγωνο το οποίο αντιστοιχεί με τη χωρητικότητα του νερού ουσιαστικά.

104. Α. Λοιπόν, αφού βρήκαμε το του τριγώνου δηλαδή, μη βάλω δηλαδή εδώ. Βρήκαμε το εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου, εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου στο οποίο βρίσκεται μέσα το νερό.

105. Β. Είναι η χωρητικότητα του νερού, ξέρω 'γώ, κάπως έτσι. Είναι το νερό σκέτο.

106. Α. Που είναι το νερό του ενυδρείου, ακολούθως, ακολούθως θα βρούμε;

107. Β. Σκεφτόμαστε εικονικά ή ξέρω 'γώ; Το σκεφτήκαμε μετά από (...)

108. Α. Ακολούθως θα βρούμε, θα βρούμε το βάθος του νερού...

109. Β. Σ' ένα...

110. Α. Όταν επανέλθει στην οριζόντια θέση του, θέση του. Αφού γνωρίζουμε, αφού γνωρίζουμε ότι πρέπει το νερό να έχει...

111. Β. Εμβαδόν 1000, και ότι η βάση του ενυδρείου είναι 100.

112. Α. Ότι το εμβαδόν;

113. Β. Του νερού στο ορθογώνιο;

114. Α. Του νερού στο ενυδρείο, πρέπει να είναι 1000, άρα, αφού το μήκος του...

115. Β. (...) το εμβαδόν του ορθογωνίου, ξέρουμε ότι η μια πλευρά του είναι 100, την άλλη x.

116. Α. Ναι. Λοιπόν, αφού γνωρίζουμε ότι το νερό μες στο ενυδρείο πρέπει να είναι 1000, άρα, αφού το πλάτος, το μήκος, λοιπόν...

117. Β. Πηγαίνοντας στο σχήμα μας.

118. Α. Ναι. Στο σχήμα μας.

119. Β. Έχουμε την βάση 100.

120. Α. Έχουμε την βάση 100 cm.

121. Β. Ως δεδομένο, και το εμβαδόν 100 πρέπει να έχουμε. Και με εμβαδόν 1000.

122. Α. 1000.

123. Β. Άρα, αν πάμε στον τύπο.

124. Α. Άρα με βάση τον τύπο. Λοιπόν...

125. Β. Εμβαδόν ίσον βάση επί ύψος. Εε, β = ...

126. Α. Α ναι. Βάση.

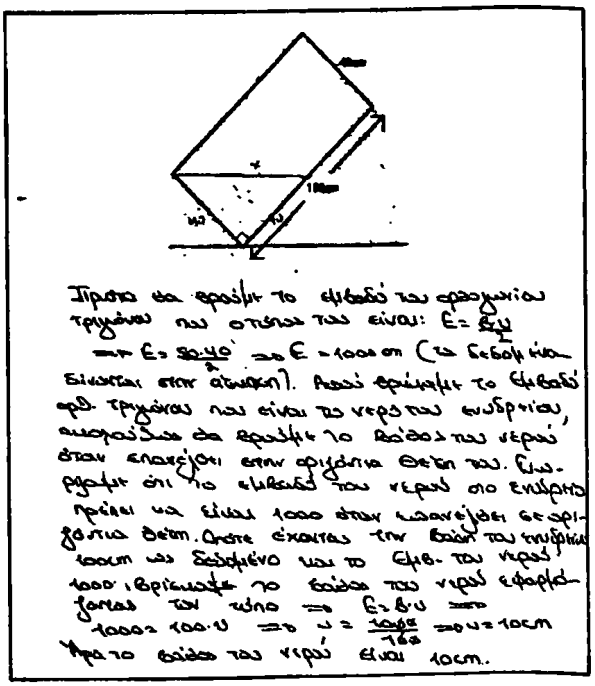
127. Β. 100 επί... επί ύψος.

128. Α. Να βρούμε ένα άλλον τώρα.

129. Β. Αφού αυτό θέλουμε. Το βάθος. 1000 = 100·υ, άρα ύψος ίσον 1000 δια 100 ίσον 10. Άρα το βάθος του νερού είναι 10. Εντωμεταξύ ύψος είναι βάθος νερού δαμέ.[44]

130. Α. Ναι. Πώς να το γράψω; Άρα το ύψος του νερού είναι 10 cm.

131. Β. Τελειώσαμε. Να τα γράψουμε ε;



Εικόνα 2.10. 3-Ζ7, αρχική σελίδα

Ανάλυση – Σχόλια:

• Η διαδικασία επίλυσης θεωρείται ήδη κοινή και έχει διαπραγματευτεί στη συζήτηση που προηγήθηκε. Αντικείμενο της συζήτησης που παραθέτουμε αποτελούν μία

διαδικασία και μία έννοια που περιέχονται σ' αυτή: η πρώτη είναι η συσχέτιση εμβαδού με όγκο και η δεύτερη είναι ο όγκος αυτός καθ' αυτός.

• Η συσχέτιση του εμβαδού του τριγώνου (στην κεκλιμένη θέση) και του ορθογωνίου παραλληλογράμμου (στην οριζόντια θέση) με τον αντίστοιχο όγκο που καταλαμβάνει το νερό, και που είναι ίδιος στις δύο θέσεις είναι μία διαδικασία που δεν έχει απασχολήσει καθόλου τις δύο φοιτήτριες μέχρι αυτό το σημείο. Πρόκειται για μία διαδικασία, η οποία αν και κοινή, δεν έχει διαπραγματευτεί επαρκώς, κάτι που πρέπει να γίνει στη δεδομένη χρονική στιγμή, αφού πάνω σε αυτή στηρίζεται όλος ο συλλογισμός τους. Η γλώσσα που επιλέγεται είναι ψευδο-μαθηματική, προβληματίζει τις φοιτήτριες, οι οποίες δε φαίνεται να καταλήγουν σε μια κοινά αποδεκτή έκφραση. Στην τελική απάντηση (βλ. Εικόνα 2.11.) συναντούμε τις εκφράσεις: «Αφού βρούμε το εμβαδό ορθ. τριγώνου που είναι το νερό του ενυδρείου» και «Γνωρίζουμε ότι το εμβαδό του νερού στο ενυδρείο». Η χρήση δηλαδή μη μαθηματικής γλώσσας οδήγησε στην ταύτιση εμβαδού κάποιων σχημάτων με τον όγκο που καταλαμβάνει το νερό, δηλαδή σε μία μετάλλαξη της αρχικής κοινής έννοιας.

• Ο όγκος που καταλαμβάνει το νερό εκφράζεται μέσω της ψευδο-μαθηματικής και της καθημερινής γλώσσας με τους εξής τρόπους: «πόσο είναι το νερό» (93, 94), «χωρητικότητα του νερού» (97, 103, 105), «το νερό σκέτο» (105), «το νερό του ενυδρείου» (106) και «το νερό μες στο ενυδρείο» (116). Είναι σαφές ότι οι εκφράσεις αυτές δεν επηρεάζουν τη συγκρότηση της κοινής έννοιας του όγκου που καταλαμβάνει το νερό, μέχρι το σημείο που υπεισέρχεται η διαδικασία της συσχέτισης του όγκου αυτού με κάποια εμβαδά που προαναφέραμε.

3ο Παράδειγμα (3-Z15-KA)

[Στη συζήτηση που έχει προηγηθεί οι Α, Β έχουν συγκροτήσει από κοινού τη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος ακολουθώντας τον εξής συλλογισμό: εύρεση του όγκου που καταλαμβάνει το νερό στην κεκλιμένη θέση του ενυδρείου, εξίσωσή του με τον αντίστοιχο όγκο στην οριζόντια θέση και εύρεση του αγνώστου μέσω της εξίσωσης αυτής. Έχουν καταλήξει στη σωστή απάντηση για την τιμή του βάθους του νερού (10 cm) και αποφασίζουν να γράψουν την απάντηση]

128. Α. Εεε... Α, να από... εε, θα πρέπει να βρούμε τον όγκο του νερού που βρίσκεται μες στο ενυδρείο;

129. Β. Ναι, αυτό ναι, πρέπει να βρούμε.

130. Α. Απαιτείται...

(Η Α γελάει)

131. Β. Όχι ρε, εντάξει.

(Η Α γελάει)

132. Α. (...) χρησιμοποιούμε ωραία... Πρέπει να βρεθεί ο όγκος, να βάλουμε κι ένα V έτσι...

133. Β. Του νερού.

134. Α. Του νερού, που υπάρχει στο ενυδρείο; Που βρίσκεται μες στο ενυδρείο.

135. Β. Ε, που βρίσκεται μες στο ενυδρείο.

(Η Α γράφει)

136. Α. Στο ενυδρείο. Ωραία, εεε... Νναι...

137. Β. Επειδή έχει ανασηκωθεί, να πούμε ότι έχει τριγωνική... τώρα, πώς να πούμε; Τριγωνική μορφή τώρα; Ο ο όγκος, δεν...

138. Α. Δεν είναι καλό.

139. Β. Αυτό δεν είναι καλό έτσι;

140. Α. Πυραμίδα είναι δεν; Ούτε πυραμίδα είναι. Κάτσε, να...

141. Β. Να πούμε ότι: άρα πρέπει να βρούμε τον όγκο του τριγώνου, που έχει κορυφές...

142. Α. Μμ;

143. Β. Κ, το μέσο του...

144. Α. Ε τώρα γιατί το μπερδεύεις εσύ;

(Η Α γελάει)

145. Β. Ε τώρα αυτό, ε, ξέρω 'γώ, πώς να το πω αυτό;

146. Α. Εεεμμ, εγώ λέω ν' αφήσουμε το (...)

(Η Α γελάει)

147. Α. Μ' αρέσει που 'λεγα και πριν να μην το πούμε... Εε, ωραία. Ο όγκος... Α! Ο όγκος του νερού θα είναι μισός από...

148. Β. Ναι;

149. Α. Τον όγκο του μισού ενυδρείου.

(Η Α γελάει και μετά γελάει και ο Β)

150. Β. Τι λες τώρα; Ε, ο ο...

151. Α. Ναι, πάντα μισός απ' τον, απ' τον όγκο του μισού ενυδρείου.

152. Β. Ή μόνο με το τρίγωνο... με το τρίγωνο. Ε, το νερό βρίσκεται (...) του νερού τρίγωνο.

153. Α. Ωραία, όχι, ν' αρχίσουμε πρώτα να λέμε τις διαστάσεις καλύτερα.

154. Β. Ναι.

155. Α. Ωραία. Εεεμμ... ναι.

156. Β. Όχι ρε, πρέπει να πούμε για το...

157. Α. Οι διαστάσεις, ναι.

158. Β. ... το τρίγωνο, ότι εδώ...

159. Α. Το μέσον που καταλαμβάνει το νερό όταν είναι ανασηκωμένο.

160. Β. Ναι, το ενυδρείο.

161. Α. Ναι.

162. Β. Έχει τη...

163. Α. Το μέρος το...

164. Β. Ο χώρος.

165. Α. Ο χώρος.

166. Β. Ο όγκος, ο όγκος.

167. Α. Ο χώρος, ο χώρος.

168. Β. Ο χώρος.

169. Α. Καταλαμβάνει το νερό όταν το ενυδρείο είναι αναστηκωμένο, το ενυδρείο είναι αναστηκωμένο... εε...

170. Β. Έχει τριγωνική μορφή. Ναι.

171. Α. Δεν είναι όμως τριγωνι... Είναι τρίγωνο που...

172. Β. Τρίγωνο είναι.

173. Α. Ε, όπως το βλέπεις εσύ. Έχει και βάθος όμως. Ρε πουλάκι μου είναι έτσι, πώς είναι το χέρι μου;

174. Β. Ο όγκος που καταλαμβάνει το νερό, αναστηκωμένο...

175. Α. Εεμ, έχει διαστάσεις: αυτή, αυτή κι αυτή. Έχει μήκος τάδε, πλάτος τάδε, ύψος τάδε.

176. Β. Α, ναι, έτσι.

177. Α. Ναι.

178. Β. Έχει...

179. Α. Εε. Μήκος ίσο με το μισό της βάσης του ενυδρείου...

180. Β. Ναι.

181. Α. ... δηλαδή... ένα λεπτό...

182. Β. Ναι, αλλά δεν είναι μήκος πλάτος ύψος, αφού είναι τρίγωνο.

(Η Α συνεχίζει να γράφει)

183. Α. Με της βάσης του ενυδρείου, δηλαδή πόσα είπαμε; 50. 50 cm. Ναι.

184. Β. Ύψος αυτό; Ναι.

185. Α. Ε ύψος, ύψος 40 cm.

186. Β. Ναι.

187. Α. Και πλάτος, βάθος πλάτος πλάτος, ξέρω 'γώ; Το...

188. Β. Πλάτος 60.

189. Α. Πλάτος 60 cm. Ωραία.

190. Β. Ε, και έχει, ναι, αλλά αυτό το τρίγωνο πρέπει να το πούμε όμως κάπως. Δεν μπορεί να τ' αφήσεις έτσι.

191. Α. Ναι. Πώς να το πούμε;

192. Β. Έχει τριγωνική μορφή;

193. Α. Επειδή έχει τριγωνική μορφή...

194. Β. Α, ναι, αυτό.

195. Α. Ναι, ο όγκος, εε, του νερού θα είναι ο μισός...

196. Β. Του τετραγώνου μ' αυτές τις διαστ, με τις πιο πάνω διαστάσεις.

197. Α. Κύβος είναι όμως εκείνο δεν είναι...

198. Β. Ε, του κύβου, ναι είναι ο όγκος του κύβου...

199. Α. ...αλλά το τρίγωνο είναι πώς το λένε. Δεν είναι τρίγωνο, είναι, ξέρω 'γώ.

(Η Α γελάει)

200. Β. Πώς είναι, πώς το λεν αυτό τώρα;

201. Α. Δεν ξέρω.

202. Β. Δεν είναι τρίγωνο, ναι.

203. Α. Η βοήθεια του κοινού... Επειδή, επειδή, εε, ο **χώρος αυτός... είναι σαν την Toblerone.**

(Οι Α, Β γελούν)

204. Α. Τι να πω; Δεν είναι...

205. Β. Ούτε **πυραμίδα** είναι.

206. Α. Όχι. Είναι: **τρίγωνο τρίγωνο και... τρίγωνο.**

207. Β. Πώς το λεν αυτό τώρα;

208. Α. Τρίγωνο με βάθος.

209. Β. Τρεις... αυτό που έχει **παραλληλ...**

210. Α. Τι ψάχνεις;

211. Β. Αυτό που έχει παραλληλόγραμμα και το τρίγωνο πώς το λένε;

212. Α. Δεν ξέρω. Εμάς δεν μας μαθαίναν τέτοια πράγματα στο σχολείο.

213. Β. Πώς το λεν αυτό, πώς το λεν αυτό το σχήμα.

214. Α. Κεκλιμένο επίπεδο. Δεν ξέρω. Έχει, **όπως το βλέπεις από μπροστά τριγωνική μορφή.**

215. Β. (...) παραλληλόγραμμο.

216. Α. Α! Επειδή ο χώρος **αυτός είναι ο μισός του κύβου...**

217. Β. Α, επειδή ο χώρος, ναι, αυτό θα πούμε.

218. Α. Ναι.

219. Β. Μισός του κύβου με τις πιο πάνω διαστάσεις.

220. Α. Του κύβου, ναι.

(Η Α γράφει στην αρχική σελίδα)

221. Α. Διαστάσεις, ο όγκος του νερού, του νερού θα είναι: **άνω και κάτω τελίτσα. V νερού είναι:** $\frac{1}{2}$...

222. Β. Επί μήκος επί πλάτος επί ύψος.

223. Α. Ναι... Επί ύψος, είναι $\frac{1}{2}$, να βάλουμε όμως με τη σειρά τ' αυτά...

224. Β. 50...

225. Α. 50 επί 60 επί 40.

226. Β. Μ.

227. Α. 50 επί 60 επί 40, είναι 6000. Εεε, ναι. Όταν, εε...

228. Β. Εε, πώς το...

229. Α. Όταν επανέλθει...

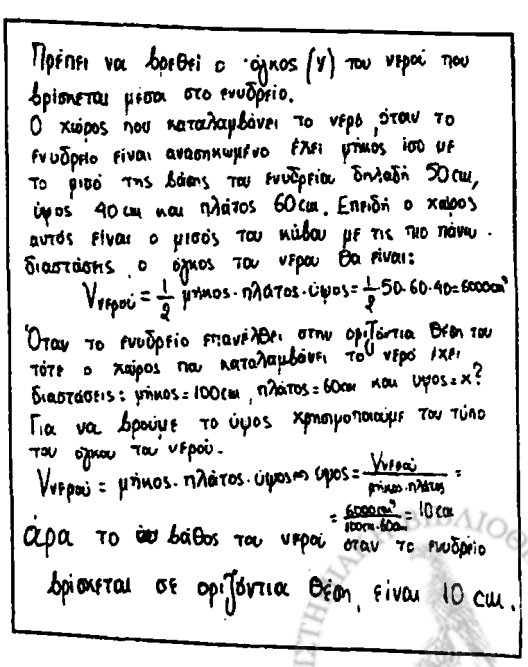
230. Α, Β. ... στην οριζόντια θέση του.

231. Β. Τότε το ενυδρείο θά...

232. Α. Τότε το ενυδρείο... στην οριζόντια θέση του, τότε το νερό παίρνει άλλο σχήμα.

233. Β. Τότε το, τότε...

234. Α. Το νερό παίρνει σχήμα...


Πρέπει να βρεθεί ο όγκος (V) του νερού που βρίσκεται μέσα στο ενυδρείο.
Ο χώρος που καταλαμβάνει το νερό, όταν το ενυδρείο είναι ανασηκωμένο έχει μήκος ίσο με το φιδό της βάσης του ενυδρείου δηλαδή 50 cm, ύψος 40 cm και πλάτος 60 cm. Επειδή ο χώρος αυτός είναι ο μισός του κύβου με τις πιο πάνω διαστάσεις, ο όγκος του νερού θα είναι:
$V_{νερού} = \frac{1}{2}$ μήκος · πλάτος · ύψος $= \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 60 \cdot 40 = 6000 cm^3$
Όταν το ενυδρείο επανέλθει στην οριζόντια θέση του τότε ο χώρος που καταλαμβάνει το νερό έχει διαστάσεις: μήκος = 100 cm, πλάτος = 60 cm και ύψος = x?
Για να βρούμε το ύψος χρησιμοποιούμε τον τύπο του όγκου του νερού.
$V_{νερού}$ = μήκος · πλάτος · ύψος ⇒ ύψος $= \frac{V_{νερού}}{μήκος \cdot πλάτος} = \frac{6000 cm^3}{100 cm \cdot 60 cm} = 10$ cm
Άρα το βάθος του νερού όταν το ενυδρείο βρίσκεται σε οριζόντια θέση, είναι 10 cm.

Εικόνα 2.11. 3-Z15, αρχική σελίδα

235. Β. ... ο όγκος του...

236. Α. Όχι, ο χώρος που καταλαμβάνει το νερό έχει άλλες διαστάσεις.

237. Β. Έχει διαστάσεις...

238. Α. Ναι, ο χώρος... έχει διαστάσεις, πες μου.

239. Β. Μήκος 100.

240. Α. Ναι, αφού είναι έτσι... 100 cm.

241. Β. Πλάτος 60.

242. Α. Πλάτος το 60.

243. Β. Ναι. Και ύψος άγνωστο. Ύψος όχι...

244. Α. Δε χρειάζεται να το βάλω... Πλάτος... αυτό.

245. Β. Ναι.

246. Α. Για να βρούμε το...

247. Β. Για να βρούμε το, το βάθος του νερού, που είναι το ύψος ουσιαστικά. Το βάθος του νερού...

248. Α. Το ύψος του νερού.

249. Β. Καλά.

250. Α. Ναι; Πλάτος, και μήκος δεν ξέρουμε, και ύψος δεν ξέρουμε.

251. Β. Ύψος x ή ένα ερωτηματικό.

252. Α. Ναι. Να το βάλω, ναι. Ωραία. Μμμ...

253. Β. Για να βρούμε το ύψος εφαρμόζουμε τον τύπο.

Ανάλυση – Σχόλια:

• Η κοινή διαδικασία επίλυσης του προβλήματος περιλαμβάνει κάποιες υπο-διαδικασίες, οι οποίες διαπραγματεύονται στο παραπάνω απόσπασμα. Η πρώτη από αυτές είναι η εύρεση του όγκου που καταλαμβάνει το νερό στην κεκλιμένη θέση του ενυδρείου. Η διαδικασία αυτή περιλαμβάνει με τη σειρά της δύο βασικές έννοιες: το τρισδιάστατο σχήμα που σχηματίζει το νερό σε αυτή τη θέση και τον όγκο αυτού του σχήματος.

• Το σχήμα που δημιουργεί το νερό στην κεκλιμένη θέση του ενυδρείου είναι ένα τριγωνικό πρίσμα και είναι προφανές ότι ο συγκεκριμένος μαθηματικός όρος δεν είναι γνωστός στα δύο μέλη του ζεύγους. Για το λόγο αυτό επιστρατεύουν διάφορες εκφράσεις ψευδο-μαθηματικής γλώσσας, οι οποίες κρίνονται ανεπαρκείς από τους ίδιους (π.χ. «τριγωνική μορφή», «το τρίγωνο είναι πώς το λένε», «ο χώρος αυτός... είναι σαν την Toblerone[45]», «πυραμίδα», «τρίγωνο», «τρίγωνο τρίγωνο και τρίγωνο», «τρίγωνο με βάθος», «αυτό που έχει παραλληλόγραμμα και το τρίγωνο», «κεκλιμένο επίπεδο»). Ο όγκος αυτού του σχήματος περιγράφεται μέσω ψευδο-μαθηματικής

γλώσσας ως «χώρος» (164, 165, 167, 168, 203, 216, 217, 238) και ως «χώρος που καταλαμβάνει το νερό» (236).

• Το ζητούμενο για την επίλυση του προβλήματος δεν είναι η ονομασία του σχήματος ή του όγκου του, αλλά η εύρεση αυτού του όγκου μέσω κάποιου μαθηματικού τύπου. Τα δύο μέλη του συγκεκριμένου ζεύγους έχουν ήδη καταλήξει στον τύπο αυτό, τον οποίο επιδιώκουν να συνδέσουν με κάποιο από τους γνωστούς σε αυτούς μαθηματικό τύπο. Έτσι λοιπόν, οι αρχικές προσπάθειες σύνδεσης με το τρίγωνο που φαίνεται στη μπροστινή όψη, δίνουν τη θέση τους στη συσχέτιση του συγκεκριμένου όγκου με το μισό του όγκου ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου (στην ψευδο-μαθηματική γλώσσα του συγκεκριμένου ζεύγους περιγράφεται ως κύβος) με διαστάσεις 50, 60, 40. Πρόκειται λοιπόν για μια περίπτωση στην οποία ούτε η άγνοια του μαθηματικού όρου, ούτε η χρήση ψευδο-μαθηματικής γλώσσας επιδρούν αρνητικά στη συγκρότηση των απαραίτητων κοινών εννοιών. Αντίθετα, οδηγούν τους φοιτητές στην αντιμετώπιση των συγκεκριμένων εννοιών από άλλη οπτική γωνία, η οποία τους οδηγεί στην επιτυχημένη επίλυση του προβλήματος.

2.5.3. Η Επίδραση των Νορμών στη Δημιουργία Κοινής Γνώσης

Οι μοναδικές οδηγίες που δίνονται αρχικά στους φοιτητές είναι οι εξής:

1. Να μιλάτε δυνατά και καθαρά.

2. Να εκφράζετε κάθε σκέψη σας μέσω της ομιλίας.

3. Να προσπαθήσετε να συνεργαστείτε στην επίλυση του προβλήματος.

Οι δύο τελευταίες οδηγίες έχουν σκοπό την ευαισθητοποίηση των φοιτητών σε δύο σημεία: τη χρήση της γλώσσας και τη σημασία της συνεργασίας. Αυτά τα δύο σημεία σχετίζονται με τη σειρά τους με αντίστοιχες νόρμες ως προς τις οποίες θέλουμε να ευαισθητοποιήσουμε τους φοιτητές. Ένας πρώτος στόχος της ανάλυσής μας σε αυτό το επίπεδο είναι η αναγνώριση όλων των νορμών που εκφράζονται στις συζητήσεις και στη συνέχεια η εξέταση της επίδρασής τους στη συγκρότηση κοινής γνώσης. Η ανάλυσή μας συνίσταται λοιπόν στα εξής βήματα:

α) εντοπισμός των εκφράσεων που φανερώνουν την ύπαρξη της νόρμας

β) ομαδοποίηση αυτών των εκφράσεων μέσω σύγκρισής τους σε όλα τα ζεύγη φοιτητών και σε όλα τα προβλήματα

γ) σύνδεση της ύπαρξης της νόρμας με κάποια ή κάποιες από τις διαδικασίες συγκρότησης κοινής γνώσης που εντοπίσαμε στο προηγούμενο επίπεδο ανάλυσης.

Κάθε νόρμα που παρουσιάζουμε στη συνέχεια – η οποία θα χαρακτηρίζεται ως κοινωνική ή κοινωνικομαθηματική – θα συνοδεύεται από όλα τα είδη των εκφράσεων που μπορούν να συνδεθούν με αυτή. Στα αποσπάσματα που θα παραθέσουμε, οι αντίστοιχες εκφράσεις θα είναι υπογραμμισμένες. Μετά την περιγραφή κάθε νόρμας θα ακολουθεί συσχετισμός της με τη συγκρότηση ή όχι κοινής γνώσης.

1η Κοινωνική νόρμα (Νόρμα συνεργασίας)

Η πιο συνηθισμένη νόρμα που συναντούμε στη συντριπτική πλειοψηφία των συζητήσεων είναι αυτή που σχετίζεται με τη συνεργατική φύση της επίλυσης των προβλημάτων, και βέβαια πρόκειται για μία από τις νόρμες που συνδέονται με τις αρχικές μας οδηγίες. Σύμφωνα με αυτή τη νόρμα, η συμπεριφορά των φοιτητών είναι τέτοια ώστε να λαμβάνεται συνεχώς υπόψη όχι απλά η ύπαρξη, αλλά και η γνώμη του συνεργαζόμενου συμφοιτητή ή συμφοιτήτριας σε κάθε φάση της επίλυσης του προβλήματος. Πρόκειται για μία γενική νόρμα, η οποία εκφράζεται με διάφορους τρόπους, τους οποίους περιγράφουμε στη συνέχεια.

♦ Ο πιο συνηθισμένος τρόπος έκφρασης της νόρμας συνεργασίας είναι μέσω του προσώπου των ρημάτων: η συνεργατική διάθεση/φύση του ομιλητή εκφράζεται από το πρώτο πληθυντικό πρόσωπο του ρήματος που περιγράφει μια συγκεκριμένη διαδικασία:

1° Παράδειγμα (1-Z17-KA)

1. A. Να φτιάξει πρώτα τον κύκλο με ακτίνα...

2. B. R, πόσο είναι;

3. A. 4.

4. B. 1, 1 2 3 4. Και, αφού κάνει τον κύκλο, θα φέρει τη διάμετρο...

5. A. Ναι.

6. B. Εε, και αφού φέρει τη διάμετρο...

7. A. Πρέπει...

8. B. Μμ;

9. A. ... να του <u>πούμε</u> να φέρει αυτό εδώ, εντάξει. Από το κέντρο, ε, μια διαγώνιος ενός ορθογωνίου που έχει διαστάσεις (1) επί 3;

10. B. Μμ... Αυτή αν την <u>προεκτείνουμε</u>; Όχι. Διαγώνιος είναι αυτή; Μ;

11. A. Όχι, αυτό λέω ότι είναι διαγώνιος...

12. B. Ναι, αυτό το κατάλαβα.

13. A. ... (του ορθογωνίου).

14. B. Διαγώνιος ποιανού ορθογωνίου;

15. Α. Αυτού εδώ. Βλέπεις; 1 και 3. Αυτού.

16. Β. Να το κάνουμε τώρα στο πρόχειρο να το δούμε;

17. Α. Κάνε τον κύκλο πρώτα.

18. Β. Ναι ναι.

(Ο Β παίρνει το διαβήτη)

19. Β. Εδώ, 4, (εκεί) 4, έτσι δεν είναι;

20. Α. 1 2 3 4, ναι.

(Ο Β κάνει τον κύκλο στην Εικόνα 2.12.)

21. Β. Λοιπόν, να φέρουμε τη διαγώνιο...

22. Α. Να φέρουμε τη διάμ, τη διάμετρο τώρα.

23. Β. Διάμετρο.

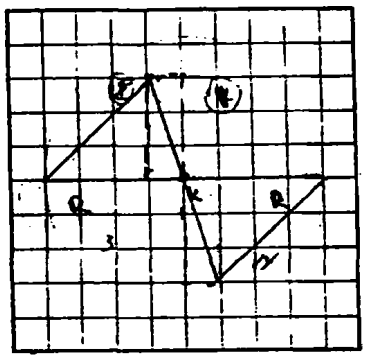
(Η Α σημειώνει το κέντρο του κύκλου)

24. Β. Να βάλουμε Κ ξέρω 'γώ. Κέντρο. R, R.

25. Α. Αν πάρουμε αυτό εδώ, και φέρουμε τη διαγώνιό του.

26. Β. Μμ.

27. Α. Και το επεκτείνουμε...



Εικόνα 2.12. 1-Ζ17

28. Β. Λοιπόν, κάτσε, να το κάνουμε διακεκομμένο. Τρίγωνο με πλευρά 1 2 3 ε; Αυτήν εδώ λες;

29. Α. Κάτσε να δω.

30. Β. Κάν' το με διακεκομμένες.

31. Α. Θέλω αυτό εδώ.

32. Β. Αα, ε, το, ορθογώνιο δηλαδή.

33. Α. Ναι, ορθογώνιο.

34. Β. Όχι το τρίγωνο. Ορθογώνιο με ύψος...

35. Α. Με διαστάσεις 1 και 3.

36. Β. 1 και 3. Διαγώνιος. Και... Από κάτω αντιστοίχως ακριβώς το ίδιο;

Ανάλυση – Σχόλια:

• Η πρώτη διαδικασία που προτείνεται από την Α και γίνεται άμεσα αποδεκτή για διαπραγμάτευση από το Β είναι η σχεδίαση του κύκλου. Ο τρόπος που εισάγεται δεν συνάδει με τη νόρμα της συνεργασίας, αφού η Α την εκφράζει χωρίς τη χρήση ρήματος στο πρώτο πληθυντικό πρόσωπο (ή κάποιον άλλο από τους τρόπους που αναφέρουμε παρακάτω). Αυτό δεν εμποδίζει την άμεση αποδοχή και τη θεώρησή της ως κοινή έννοια.

• Ο ίδιος τρόπος έκφρασης ακολουθείται αμέσως μετά (4) και από το Β για την εισαγωγή της διαδικασίας κατασκευής της διαμέτρου, η οποία πρέπει να σημειώσουμε δεν περιέχει κάποια δυσκολία για το συγκεκριμένο ζεύγος, γι' αυτό ίσως και εκφράζεται με αυτό τον τρόπο. Και αυτή η διαδικασία γίνεται άμεσα αποδεκτή και θεωρείται μία κοινή έννοια.

• Η τρίτη προτεινόμενη διαδικασία είναι η σχεδίαση της πλευράς του ενός τριγώνου του σχεδίου ταυτίζοντάς την με τη διαγώνιο ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Σε αυτή τη διαδικασία χρησιμοποιείται το πρώτο πληθυντικό πρόσωπο, και τελικά (36) μπορεί να θεωρηθεί και αυτή μια κοινή έννοια.

• Στη στιχομυθία 16-28 τα δύο μέλη του ζεύγους ασχολούνται με την εφαρμογή των διαδικασιών που έχουν προηγηθεί, δηλαδή με τη γεωμετρική κατασκευή κάποιων σχημάτων. Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι τα ρήματα είναι σχεδόν αποκλειστικά σε πρώτο πληθυντικό πρόσωπο, γεγονός που ενισχύει τη συνεργατική φύση της εργασίας τους.

• Στο συγκεκριμένο ζεύγος μπορούμε να διακρίνουμε το κλίμα που δημιουργείται εξαιτίας της νόρμας της συνεργασίας, αλλά επίσης μπορούμε να εντοπίσουμε και περιπτώσεις (όπως οι δύο πρώτες διαδικασίες) στις οποίες ο φαινομενικά μη «συνεργατικός» τρόπος έκφρασης δεν εμποδίζει τη συγκρότηση κοινής γνώσης.

2° Παράδειγμα (2-Z10-KK)

9. Α. Θα κάνουμε ένα εδώ ρε παιδί μου. Κάνουμε ένα μεγάλο για να βρούμε χώρο για 14. Κάν' το πολύ μεγάλο.

10. Β. Μη στενοχωριέσαι.

11. Α. Αλλά να σου πω κάτι; Πώς θα φέρουμε 14, αφού (...) δε βγαίνει το 14. Έχει σημασία μήπως;

12. Β. 14 ευθύγραμμα τμήματα, άρα από κάθε μία απ' τις δύο κορυφές, άρα θα είναι 14 και 14 28 ευθύγραμμα τμήματα. Αφού λέει από κάθε μία.

13. Α. Εντάξει, ναι, ωραία.

14. Β. Έτσι;

15. Α. Φέρνουμε 14 και 14. Κάνε ένα μεγάλο.

16. Β. Γιατί εδώ ήδη έχουμε 3...

17. Α. Ναι ναι...

18. Β. ... από κάθε μία...

19. Α. Ναι ναι, από τις δύο, ναι.

20. Β. Κάτσε λίγο να το σκεφτούμε, βγαίνει αλλιώς Περίμενε λίγο. Να δούμε. Πρόσεξε: αν το χωρίσουμε σε 3 να το πάρουμε, έστω ότι δεν έχουμε τη δεύτερη γωνία, έτσι;

21. Α. Ναι.

22. Β. Έχουμε μόνο την πρώτη. Θα έχουμε 1 2...

23. Α. 4.

24. Β. ... 3 4.

25. Α. Ναι.

26. Β. Πολύ ωραία. Κι από δω αν το χωρίσουμε σε 3 έχουμε άλλα 4. Ε; 8, έτσι δεν είναι;

27. Α. Επί 2 16.

28. Β. 8·2 16, ωραία. Λοιπόν...

29. Α. Αν φέρουμε 14 θα 'χουμε 15.

30. Β. 15 και 15 30, επί 2 60.

(Οι Α, Β γελούν)

31. Β. Δε μένει παρά να το δούμε εμπειρικά.

Ανάλυση – Σχόλια:

• Η πρώτη διαδικασία που εισάγεται από την Α είναι η επίλυση του προβλήματος μέσω γεωμετρικής κατασκευής. Πρόκειται για μια κοινή έννοια για την οποία χρησιμοποιείται το πρώτο πληθυντικό πρόσωπο στην περιγραφή ενεργειών που σχετίζονται με αυτή. Στο απόσπασμα που παραθέτουμε αρχίζει και η εφαρμογή της.

• Στο 20 και πάλι στο ίδιο πρόσωπο, η Β εισάγει μια νέα διαδικασία: τον υπολογισμό των μη επικαλυπτόμενων περιοχών που δημιουργούνται μέσω ενός αλγεβρικού τύπου. Φαίνεται πως και αυτή η διαδικασία είναι κοινά αποδεκτή, παρόλα αυτά δεν εγκαταλείπεται η αρχική πρόταση την οποία θα χρησιμοποιήσουν για επαλήθευση.

• Στο συγκεκριμένο ζεύγος μπορεί να διακρίνει κανείς το κλίμα που δημιουργείται εξαιτίας της νόρμας της συνεργασίας, αλλά και την επίδραση που αυτή ασκεί στη δημιουργία κοινών εννοιών, με την έννοια ότι δεν υπάρχουν διαφωνίες ή διενέξεις κανενός είδους που θα παρεμπόδιζαν τη δημιουργία αυτή.

3° Παράδειγμα (3-Ζ16-ΚΚ)

10. Β. Μμ... ναι. Εγώ σκεφτόμουνα κάτι με εμβαδό; Αλλά, με προβληματίζει το γεγονός ότι είναι τρισδιάστατο. Ένα αυτό...

11. Α. Μμ, κι εγώ το σκέφτηκα αυτό.

(Μεγάλη παύση)

12. Β. Κι όμως, περίμενε. Αν, υποθέσουμε ότι αυτό είναι ένα τρίγωνο...

13. Α. Ναι.

14. Β. Και προσπαθούμε να βρούμε το εμβαδόν.

15. Α. Ναι.

16. Β. Πες ότι το βρίσκουμε.

17. Α. Και το κάνουμε...

18. Β. Μετά, ε, θα έχουμε δεδομένο το εμβαδό, και τη μια πλευρά αυτή. Επομένως, θα μας λεί, αυτό είναι ένας, δηλαδή βάση του είναι τα, τα 100 έτσι;

19. Α. Ναι.

20. Β. Όταν θα έρθει κάτω, θα καλύπτεται όλο το 100 και θα ψάχνουμε να βρούμε στην πλευρά των 40 πόσο καλύπτει. Επομένως, θα υποθέσουμε ότι είναι ένα ορθογώνιο, με, βάση 100, η αποπάνω εφόσον είναι ορθογώνιο θα είναι κι αυτή 100, και θα ψάχνουμε τοο...

21. Α. Το ύψος.

22. Β. Το ύψος του. Κι αφού θα 'χουμε το εμβαδόν θα το βρούμε, δεν θα το βρούμε;

23. Α. Ναι.

Ανάλυση – Σχόλια:

• Η διαδικασία που εισάγεται αρχικά από τη Β (ο υπολογισμός κάποιων εμβαδών) εκφράζεται με τρόπο που δε συνάδει με τη νόρμα της συνεργασίας: «*Εγώ* σκεφτόμουνα». Η Α δηλώνει ότι έχει κάνει και αυτή την ίδια σκέψη και σταδιακά, εγκαθιδρύοντας ένα κλίμα συνεργασίας (το οποίο εκφράζεται και από το πρόσωπο των ρημάτων που χρησιμοποιούν), αρχίζουν τη διαπραγμάτευση αυτής της διαδικασίας, η οποία εξελίσσεται σε μια κοινή έννοια.

• Στο συγκεκριμένο ζεύγος ένας αρχικός μη «συνεργατικός» τρόπος έκφρασης μεταλλάσσεται επιτρέποντας την αποτελεσματικότερη διαπραγμάτευση και την τελική συγκρότηση κοινής γνώσης. Πρόκειται για χαρακτηριστικό παράδειγμα της θετικής επίδρασης της νόρμας της συνεργασίας.

♦ Ο δεύτερος τρόπος έκφρασης της νόρμας της συνεργασίας είναι ζητώντας τη γνώμη του συμφοιτητή σχετικά με μια προτεινόμενη διαδικασία:

1° Παράδειγμα (1-Ζ5-ΚΚ):

39. Β. Μήπως μπορούμε να τ' αριθμήσουμε; Και να του πούμε ότι, πού, πού να πάει, ξέρω 'γώ...

40. Α. Ναι, αλλά αυτός...

41. Β. ... το διαβήτη;

42. Α. Αυτός θα μας ακούει απ' το τηλέφωνο όμως.

43. Β. Ε;

44. Α. Αυτός...

45. Β. Ναι, θα του πούμε στην αρχή ότι στη (...) θα βάλουμε αριθμούς και στην άλλη γράμματα.

46. Α. Ναι.

47. Β. Ε, καλό δεν είναι;

48. Α. Ναι. Να βάλουμε δηλαδή 1 2 έτσι;

49. Β. Ναι ναι.

50. Α. Ναι;

51. Β. 10 είναι;

52. Α. Ναι.

53. Β. Κι εδώ Α Β Γ.

54. Α. Ναι.

Ανάλυση – Σχόλια:

• Στην αρχή του αποσπάσματος η Β προτείνει τη χρήση κάποιου συστήματος συντεταγμένων· η ερωτηματική φύση της πρότασης, αλλά και το «μήπως» με το οποίο την εισάγει εκφράζει τη μη καταναγκαστική φύση της πρότασής της: δεν επιθυμεί να την επιβάλλει, αλλά να τη θέσει προς διαπραγμάτευση, πράγμα το οποίο συμβαίνει στη στιχομυθία που ακολουθεί.

• Η Α εκφράζει την επιφύλαξή της στο 42, η Β όμως επανέρχεται εμπλουτίζοντας την πρότασής, αλλά ζητώντας ξανά τη γνώμη της Α: «Ε, καλό δεν είναι;» (47).

• Στο συγκεκριμένο ζεύγος, ο τρόπος έκφρασης της νόρμας της συνεργασίας επιτρέπει τη γόνιμη διαπραγμάτευση των εννοιών, αφού κάθε ομιλητής ζητώντας τη γνώμη του συνομιλητή του τον παροτρύνει ουσιαστικά σε κριτική και σε αντιπαράθεση επιχειρημάτων. Πρόκειται για την πιο αυθεντική διαδικασία συγκρότησης κοινής γνώσης.

2° Παράδειγμα (2-Ζ1-ΚΚ)

4. Β. Απ' τις δύο κορυφές... Να πω μία ιδέα;

5. Α. Πες μία ιδέα.

6. Β. Λοιπόν, απ' τη μία γωνία, αν φέρουμε τα τρία ευθύγραμμα τμήματα, δημιουργούνται πόσες επικαλυπτόμενες περιοχές; Απ' τις δύο γωνίες δημιουργούνται 16. Η μία πόσο; Ε;

(Η Β γράφει το συλλογισμό της, βλ. Εικόνα 2.13.)

7. Β. Άμα φέρουμε δηλαδή μόνο από μία γωνία...

8. Α. (...)

9. Β. ... θα δημιουργηθούν 8.

10. Α. Γιατί 8;

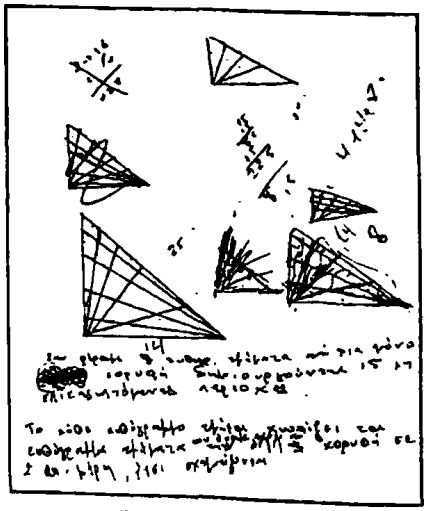
11. Β. Να σκέψου, περίμενε... 1 2 3, 1 2 3 4. Ααχ, λοιπόν... Πόσες περιοχές θα δημιουργηθούν με 14... Πώς σχηματίζεται κιόλας αυτό;

12. Α. 14, τα 14 το χωρίζουνε σε 15.

13. Β. Ε;

14. Α. Μου 'ρθε μία, έτσι δεν είναι;

15. Β. Τα 14 το χωρίζουν σε...



Εικόνα 2.13. 2-Ζ1

16. Α. Από μία κορυφή φέρνουμε 14 ευθύγραμμα τμήματα δημιουργούνται 15 περιοχές. Αφού φέρνουμε τρία ευθύγραμμα τμήματα εδώ και δημιουργούνται τέσσερις περιοχές.

17. Β. Ναι.

18. Α. Αν φέρουμε 14 ευθύγραμμα τμήματα, θα δημιουργηθούν 15;

19. Β. Ναι. Ναι.

Ανάλυση – Σχόλια:

• Η Β αρχικά εισάγει τη διαδικασία χρήσης αναλογίας, ζητάει τη γνώμη της Α, η οποία δεν απαντάει, αποφασίζει λοιπόν να την εφαρμόσει. Η Α δείχνει ότι παρακολουθεί τη συμφοιτήτριά της (10) και ίσως ο λόγος που δε δίνει τη γνώμη της είναι γιατί δεν είναι σίγουρη για την ορθότητα της χρήσης αναλογίας.

• Στο 12 η Α καταθέτει τη δική της πρόταση, καταφατικά στην αρχή, αλλά ζητώντας και τη γνώμη της Β (14, 18). Το γεγονός ότι η Β συμφωνεί θα τις οδηγήσει στη σταδιακή διαμόρφωση της τελικής λύσης.

• Η συγκεκριμένη στιχομυθία καταδεικνύει ότι η μη έκφραση της γνώμης κάποιου ακόμη και αν του ζητηθεί, δεν συνδέεται απαραίτητα με μη συνεργατικό πνεύμα και σε κάποιες περιπτώσεις μπορεί να βοηθήσει στη συγκρότηση κοινής γνώσης. Βεβαίως αυτό δεν αναιρεί τη συμβολή της θετικής γνώμης στην παραπάνω διαδικασία, αρκεί αυτή να προέρχεται από την ενεργό συμμετοχή στην αλληλεπίδραση.

3° Παράδειγμα (3-Ζ7-ΚΚ)

42. Β. Να βρούμε το εμβαδόν μήπως θέλει;

43. Α. Ναι, το εμβαδόν του νερού.

44. Β. Δαμέ; Κι αυτό σε σχέση με το ορθογώνιο ύστερα;

45. Α. Ναι.

46. Β. Ο τύπος του εμβαδού;

47. Α. Βάση επί ύψος...

48. Β. Δια 2;

49. Α. Ναι. Βάση...

50. Β. Το εμβαδόν του νερού πρέπει να 'ρθει; Να 'ναι 100 δαμέ. Άρα 1; Τι λέω; Βάση επί ύψος του ορθογωνίου.

51. Α. Ε να το πούμε το εμβαδόν του...

52. Β. Να βρούμε του ορθογωνίου τώρα;

53. Α. Ναι, ηύραμε του τριγώνου, του νερού που 'ναι μέσα.

54. Β. Είναι 100.

55. Α. Ναι. Μετά να το βρούμε...

56. Β. Λάθος; Ου, 1000.

57. Α. Α. Λοιπόν...

58. Β. Ε, άρα, αν το φέρουμε κάθετα... σε ένα ορθογώνιο, ο τύπος είναι, βάση...

59. Α. α επί β.

60. Β. Ναι. Αν το β είναι 100, τότε το α, είναι 1000... είναι 10, έτσι είναι;

61. Α. Ναι.

Ανάλυση – Σχόλια:

• Η Β εισάγει τη διαδικασία «εύρεση εμβαδού τριγώνου» στο 42, την οποία εμπλουτίζει στο 44 με τη διαδικασία «εξίσωση του εμβαδού τριγώνου με το εμβαδόν ορθογωνίου παραλληλογράμμου», ζητώντας και στις δύο περιπτώσεις τη γνώμη της Α. Η θετική απάντηση της Α τις οδηγεί στην εφαρμογή των παραπάνω διαδικασιών, στην οποία συμμετέχουν από κοινού.

• Το παραπάνω απόσπασμα είναι παρόμοιο με αυτό το 1ου Παραδείγματος, αφού και στα δύο αποσπάσματα καταδεικνύεται η συνεργατική φύση των αλληλεπιδράσεων και η θετική της επίδραση στη συγκρότηση κοινής γνώσης.

♦ Ο τρίτος τρόπος έκφρασης της νόρμας της συνεργασίας είναι ζητώντας από το συμφοιτητή κάποια πληροφορία πάνω σε μια υπό διαπραγμάτευση έννοια ή ακόμη και ζητώντας του να εισάγει ή να εφαρμόσει μια νέα έννοια ή διαδικασία:[46]

1° Παράδειγμα (1-Z10-KK)

38. Β. Ε, άρα τον έφτιαξε τον κύκλο.

39. Α. Τον έφτιαξε. (…) μέσα, θα τραβήξει, πώς είν' αυτό;

40. Β. Εντάξει. Αφού έχει φτιάξει τον κύκλο, μετά θα τραβήξει την…

41. Α. Κάπως το λέμε αυτό.

42. Β. … τη διάμετρο. Διάμετρο.

43. Α. Διάμετρος;

44. Β. Ναι. Τη διάμετρο.

45. Α. Ναι. Οριζόντια διάμετρο.

46. Β. Ναι. Μία οριζόντια διάμετρο, και αφού έχει τραβήξει την οριζόντια διάμετρο, μετά τι θα κάνει;

47. Α. Μετά…

48. Β. Δηλαδή μέχρι στιγμής αυτός έχει φτιάξει τον κύκλο…

49. Α. Ναι.

50. Β. … και την οριζόντια διάμετρο.

51. Α. Ναι.

52. Β. Πάρα πολύ ωραία.

53. Α. Φτιάχνουμε αυτά τα δύο τα τρίγωνα.

54. Β. Πολύ ωραία. Άρα, μετά θα του πούμε το εξής φοβερό.

(Η Β παίρνει το μοιρογνωμόνιο)

55. Β. Λοιπόν, αυτή πρέπει να 'ναι 30 μοίρες εδώ, έτσι το κόβω. Ωραία.

56. Α. Εγώ το κόβω παραπάνω.

57. Β. Α, περίμενε, μισό λεπτό.

58. Α. Απ' τη διάμετρο θα μετρήσουμε.

59. Β. Λοιπόν, φέρνουμε εδώ. Από δω δεν ξεκινάμε;

60. Α. Ναι.

Ανάλυση – Σχόλια:

• Στην αρχή της στιχομυθίας η Α φαίνεται πως δε γνωρίζει τον όρο «διάμετρος» και δεν διστάζει να ζητήσει από τη Β αυτή την πληροφορία. Το γεγονός ότι η Β γνωρίζει τον όρο, συντελεί όχι απλά στη συγκρότηση της συγκεκριμένης κοινής έννοιας, αλλά και στην περαιτέρω διαμόρφωσή της (Οριζόντια διάμετρος).

• Στη συνέχεια, τίθεται το ζήτημα της επόμενης διαδικασίας που θα εφαρμοσθεί, ή πιο απλά της επόμενης γεωμετρικής κατασκευής. Μπορεί κανείς να υποθέσει ότι η Β όταν ρωτάει «μετά τι θα κάνει;» έχει πιθανόν κάποια διαδικασία υπόψη της, αλλά περιμένει την απόκριση της συμφοιτήτριάς της· κάνει λοιπόν αυτή την ερώτηση είτε για να δώσει την ευκαιρία στην Α να εκφράσει την άποψή της (κοινωνική νόρμα συνεργασίας) είτε για να προστατεύσει το «πρόσωπό» της από μια ενδεχόμενη εσφαλμένη πρόταση. Σε κάθε περίπτωση, η ερώτηση συντελεί θετικά στη συνεργατική επίλυση του προβλήματος.

• Τέλος, η Β στο 59 μάλλον ζητάει επιβεβαίωση από την Α ως προς το σημείο που πρέπει να τοποθετήσει το μοιρογνωμόνιο. Πρόκειται για μια μάλλον «διαδικαστικής» φύσεως ερώτηση, από τις ερωτήσεις που κάνει κανείς όταν ήδη γνωρίζει την απάντηση.[47] Κι αυτού του είδους οι ερωτήσεις όμως συνάδουν με τη νόρμα της συνεργασίας, αφού δίνουν την ευκαιρία και στο άλλο άτομο να συμμετάσχει στην εφαρμογή μιας κοινής διαδικασίας.

2° Παράδειγμα (2-Ζ17-ΚΑ):

9. Α. Κάνε με 5...

10. Β. Να το κάνω με, αφού λέει 14...

11. Α. Κάνε 4 4.

12. Β. 4 4 να δούμε πώς θα βγει. Μήπως υπάρχει καμιά αναλογία.

(Ο Β κάνει το σχήμα στη σελίδα 2)

13. Α. Κάνε εσύ τα 4, να κάνω εγώ με 5, να δούμε.

14. Β. Μμ.

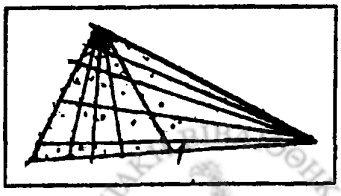
(Η Α παίρνει τη σελίδα 3)

15. Β. Λέει από δύο πόσα είναι; 16... 1 2 3 4, να κάνω 4 εγώ;

16. Α. Κάνε εσύ τα 4, να κάνω εγώ τα 5.

(Η Α κάνει το σχήμα στη σελίδα 3)

17. Β. Ναι.



Εικόνα 2.14., 2-Ζ17, σελίδα 2

(Οι Α, Β μετρούν τις μη επικαλυπτόμενες περιοχές που έχουν δημιουργηθεί στα σχήματά τους)

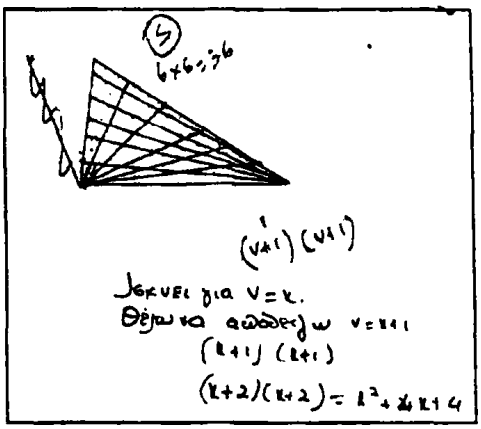
18. Α. Ναι.

19. Β. 25 είναι. Είναι αυτό που (βγήκε)...

20. Α. Δηλαδή αυξάνεται 1...

21. Β. ... πόσο σου βγήκε, ναι, κατά 1.

22. Α. ν + 1 είναι.



Εικόνα 2.15. 2-Ζ17, σελίδα 3

Ανάλυση – Σχόλια:

• Η Α ζητάει από το Β σε όλη τη διάρκεια της συγκεκριμένης στιχομυθίας να εφαρμόσει τη διαδικασία γεωμετρικής κατασκευής ενός συγκεκριμένου σχήματος, με σκοπό να δικαιολογήσουν τον ισχυρισμό τους που έχει προηγηθεί (ότι το πλήθος των μη επικαλυπτόμενων περιοχών που δημιουργούνται ισούται με τον αριθμό των ευθυγράμμων τμημάτων της μίας κορυφής αυξημένο κατά ένα στο τετράγωνο). Το ενδιαφέρον της συγκεκριμένης περίπτωσης έγκειται στην έγκλιση του ρήματος που χρησιμοποιείται, δηλαδή την προστακτική, η οποία δεν δημιουργεί κάποια ανισορροπία στο ζεύγος, αφού και ο ομιλητής αναλαμβάνει να εφαρμόσει μια παρόμοια διαδικασία.

• Το συγκεκριμένο παράδειγμα καταδεικνύει ότι το ύφος με το οποίο κάποιος ζητάει από το συνεργάτη του να εφαρμόσει μια διαδικασία δεν είναι αυτό που καθορίζει πάντα το κατά πόσο ακολουθείται η νόρμα της συνεργασίας, άρα και το κατά πόσο επηρεάζεται η συγκρότηση κοινής γνώσης.

3° Παράδειγμα (3-Ζ11-ΚΚ):

34. Α. Αυτό θεωρείται ένας κύβος. Ε, κύβος. Ναι, κάπως έτσι.

35. Β. Ναι.

36. Α. Εδώ είναι το ορθογώνιο.

37. Β. Και τι θες να πεις μ' αυτό;

38. Α. Ότι μπορούμε, δηλαδή δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τύπους του ορθογωνίου ή του τριγώνου.

39. Β. Και τι να βρούμε;

40. Α. Να βρούμε πόσο καλύπτει, πόσο είναι το τρίγωνο, το νερό που είναι, βρίσκεται μέσα στο τρίγωνο. Το οποίο δεν είναι τρίγωνο, είναι...

41. Β. Αυτό δεν είναι τρίγωνο;

42. Α. Είναι μεν τρίγωνο, αλλά ουσιαστικά δεν είναι τρίγωνο γιατί, αν αυ, αυτό δεν είναι ορθογώνιο,

είναι... όχι κύβος, πώς λέγεται; Έχει και από πίσω μεριά. Κατάλαβες; Δεν είναι μόνο η επιφάνεια που φαίνεται.

43. Β. Μμ.

44. Α. Είναι κι από πίσω. Πώς είναι ο κύβος, εμείς βλέπουμε το μπροστά του κύβου...

45. Β. Ναι.

46. Α. ... έχει όμως κι από πίσω. Τα οποία δεν το θυμάμαι καθόλου... Βάθος του νερού σε εσ... Λοιπόν... Δε σου 'ρχεται τίποτα; Το νερό καλύπτει το ύψος και το πλάτος.

47. Β. Δεν ξέρω.

48. Α. Να μετρήσουμε εδώ τις κάθετες... Είναι 6,5...

49. Β. Κι αυτό, κι αυτό που καλύπτει η επιφάνεια ούτε καν στα 3,5.

Ανάλυση – Σχόλια:

• Η Α εισάγει την έννοια του κύβου, αναφερόμενη πιθανότατα στο σχήμα του ενυδρείου. Στη συνέχεια εισάγει και τις έννοιες του ορθογωνίου παραλληλογράμμου και του τριγώνου. Η Β απαντά σε αυτές τις νέες έννοιες ζητώντας επιπλέον πληροφορίες για αυτές. Ικανοποιεί έτσι δύο ζητούμενα: από τη μια τη δική της ανάγκη για κατανόηση (και στη συνέχεια οικειοποίησή) των εννοιών και από την άλλη βοηθά την Α στην αποσαφήνισή τους, έτσι ώστε η κοινή χρήση τους να είναι ευκολότερη, αλλά και πιο αποτελεσματική.

• Παρόλο που οι ερωτήσεις της Β οδηγούν την Α στην παροχή πληροφοριών για τις έννοιες που έχει εισαγάγει, φαίνεται ότι δεν είναι αρκετές – τουλάχιστον στο συγκεκριμένο χρονικό σημείο – να οδηγήσουν στην πλήρη αποσαφήνισή τους, άρα και στην αποδοχή τους από αυτή. Η ίδια η Α φτάνει στο σημείο να ζητήσει από τη συμφοιτήτριά της να προτείνει κάποια διαδικασία.

• Το συγκεκριμένο απόσπασμα καταδεικνύει ότι η νόρμα της συνεργασίας δεν είναι πάντα αρκετή να οδηγήσει στην αποσαφήνιση και στην αποδοχή μιας κοινής έννοιας. Αυτό όμως δεν αφαιρεί τίποτα από την ισχύ της συγκεκριμένης νόρμας στην ομαλή διαπραγμάτευση των εννοιών, αλλά και γενικότερα στην ομαλή εξέλιξη της αλληλεπίδρασης.

♦ Τέλος, σε σπάνιες περιπτώσεις, η νόρμα της συνεργασίας γίνεται η ίδια αντικείμενο συζήτησης[48] από κάποιο από τα δύο μέλη, όταν διαπιστώνει πως η συμπεριφορά του συναδέλφου του είναι ασύμβατη με τη συνεργατική φύση που πρέπει να έχει η αλληλεπίδραση.

1° Παράδειγμα (2-Z8-AK)

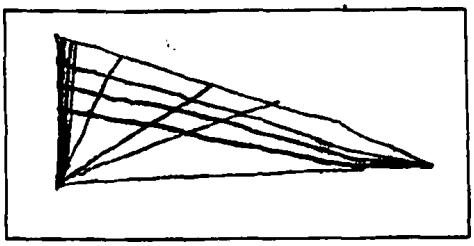
9. A. Να το κάνω λίγο εγώ πριν ξεκινήσουμε κάτι;

10. B. Παρ' το πρόχειρο.

(Ο Α παίρνει τη σελίδα 2 και απευθύνεται στη Β)

11. A. Τίποτα, εσύ μη δίνεις σημασία.

(Ο Α ξεκινάει τη σχεδίαση του σχήματος της διπλανής εικόνας)



Εικόνα 2.16. 2-Z8, σελίδα 2

12. B. Καλά, δε δίνω σημασία. Πέρα από το να κάνουμε και να μετρήσουμε, τι άλλος τρόπος θα υπήρχε;

(Η Β απευθύνεται στον Α)

13. B. Προσπαθείς να κάνεις 14 και 14;

14. A. Ναι. Καλό ε;

15. B. Καλό, αλλά νομίζω ότι υπήρχε κι άλλος τρόπος να βρεις τη λύση.

(Οι Α, Β γελούν)

16. A. Βαριέμαι να κάθομαι να...

17. B. Λοιπόν, καλά, για να σκεφτώ εγώ το άλλο.

[Η στιχομυθία 18-75 περιλαμβάνει την προσπάθεια του Α να σχεδιάσει το τρίγωνο με τα 14 ευθύγραμμα τμήματα από καθεμιά από τις δύο κορυφές του και την προσπάθεια της Β να βρει κάποιο αλγεβρικό τύπο που να συσχετίζει τον αριθμό των ευθυγράμμων τμημάτων με το πλήθος των μη επικαλυπτόμενων περιοχών που δημιουργούνται]

76. B. Κάτσε λίγο ρε, περίμενε, κάθε μία γραμμή από 'δώ... Έλα λίγο να δεις.

77. A. Τι; Πες μου εσύ να σχεδιάζω κι εγώ; Γιατί έχουμε δουλειά μπροστά μας. Πες.

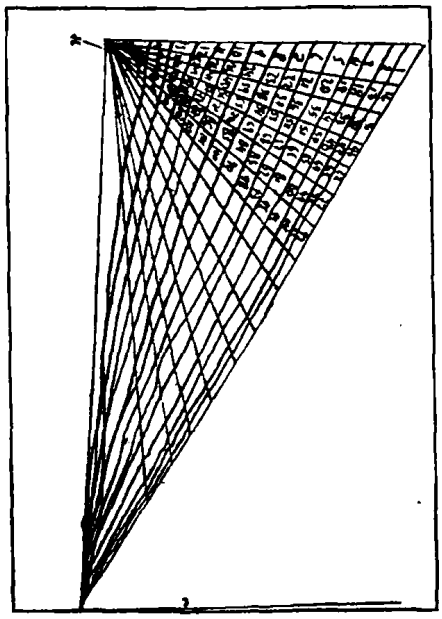
78. B. Δεν θα με παρακολουθήσεις.

79. A. Σε παρακολουθώ. Έλα.

80. B. Να μου φέρεις ένα πρόχειρο να τα γράψω κι εγώ γιατί δεν πρόκειται να μ' ακούσεις; Εντάξει.

(Η Β παίρνει τη σελίδα 4, ενώ ο Α σχεδιάζει στη σελίδα 3 (βλ. διπλανή εικόνα)

81. B. Λοιπόν... Έτσι δεν εργαζόμαστε μαζί. Τέλος πάντων. Κάθε μία ευθεία γραμμή χωρίζει την άλλη σε τέσσερα τμήματα. ΟΚ. Τρεις οι ευθείες. Λοιπόν.



Εικόνα 2.17. 2-Z8, σελίδα 3

82. A. 14. Θα χαθώ μετά.

83. B. Θα χαθείς τελείως. Πώς θα τα μετρήσεις αυτά εδώ πέρα;

84. A. Τι;

85. B. Πώς θα τα μετρήσεις αυτά εδώ πέρα;

86. A. Τι σε νοιάζει εσένα;

87. B. Καλά.

2η Κοινωνική νόρμα (Νόρμα αμοιβαίας κατανόησης)

Σύμφωνα με αυτή τη νόρμα υπάρχει κατά τη διάρκεια της αλληλεπίδρασης αμοιβαία κατανόηση όσον αφορά τις έννοιες που τίθενται προς διαπραγμάτευση. Η συγκεκριμένη νόρμα σχετίζεται με αυτή της συνεργασίας, και θα μπορούσε κανείς να θεωρήσει ότι περιέχεται σε αυτή· στην ανάλυσή μας αποφασίσαμε να τη διαχωρίσουμε κυρίως λόγω του χαρακτηριστικού τρόπου έκφρασής της: μέσω ερώτησης σχετικής με την κατανόηση του συνομιλητή, πριν την εφαρμογή μιας προτεινόμενης διαδικασίας.

1° Παράδειγμα (1-Z2-KK)

1. Α. Θα κάνουμε ένα τέτοιο. Ένα σύστημα συντεταγμένων. Και θα μετρήσουμε και θ' αριθμήσουμε.

2. Β. Ναι. Ένα διαγώνιο. Με βάση τη, διαγώνιο εδώ.

3. Α. Και θα δώσουμε μοίρες;

4. Β. Και μοίρες...

5. Α. Κατάλαβες τι είπα; Κατάλαβες πού το πάω;

6. Β. Ναι.

7. Α. Λοιπόν.

8. Β. Α, κοίτα να δεις. Εδώ είναι η διαγώνιος των τετραγώνων, των...

9. Α. Στα μικρά κουτάκια λες;

10. Β. Ναι... Κι εδώ είναι η διαγώνιος. Άρα, αυτή που (...) δεν είναι διαγώνιος σε κανένα τετραγωνάκι. Κατάλαβες τι θέλω να πω;

11. Α. Εννοείς ότι είναι... θα δώσουμε απόσταση ανάμεσα σ' αυτά τα δύο...

12. Β. Όχι. Πιο εύκολο είναι έτσι, κοίτα. Αυτή είναι η διαγώνιος του κύκλου και του τετραγώνου.

13. Α. Ωραία.

Ανάλυση – Σχόλια:

• Η Α εισάγει τη διαδικασία χρήσης συστήματος συντεταγμένων, το σχόλιο της Β στο 2 δε φαίνεται σχετικό και η Α συνεχίζει εμπλουτίζοντας τη διαδικασία με τη μέτρηση κάποιων γωνιών. Σύντομα διαπιστώνει ότι η συμφοιτήτριά της δεν παρακολουθεί το συλλογισμό της και γι' αυτό το λόγο κάνει την ερώτηση στο 5.

• Αν και η θετική απάντηση της Β στην ερώτηση περί κατανόησης θα έπρεπε να οδηγήσει στην περαιτέρω διαμόρφωση και διαπραγμάτευση της παραπάνω διαδικασίας, δε συμβαίνει κάτι τέτοιο. Αντιθέτως, η Β αρχίζει να διαμορφώνει τη δική της πρόταση, σύμφωνα με την οποία η μία πλευρά του ενός τριγώνου του σχεδίου είναι συγχρόνως και διαγώνιος. Ακολουθεί ερώτηση κατανόησης προς την Α αυτή τη φορά, της οποίας η απάντηση καταδεικνύει τη μη κατανόηση της

συγκεκριμένης διαδικασίας. Αυτό δίνει την ευκαιρία στη Β να εμπλουτίσει τη διαδικασία της, έτσι ώστε να γίνει κατανοητή και να έχει τις προϋποθέσεις για να γίνει μία κοινή έννοια.

• Στο παραπάνω απόσπασμα η τήρηση της νόρμας της αμοιβαίας κατανόησης φαίνεται ότι δεν αρκεί από μόνη της στην πλήρη αποσαφήνιση των εννοιών που τίθενται προς διαπραγμάτευση. Μια πιθανή εξήγηση είναι ότι βρισκόμαστε στην αρχή της συνάντησης, οπότε οι διαδικασίες διαπραγμάτευσης είναι πιο επιφανειακές (με την έννοια ότι προτείνονται πολλές διαδικασίες των οποίων η διαμόρφωση είναι σε αρχικό στάδιο, επομένως δεν είναι εύκολο σε κάποιον να εξηγήσει μία διαδικασία την οποία δεν έχει διαμορφώσει σε ικανοποιητικό βαθμό).

2° Παράδειγμα (2-Z13-KA)

20. Β. Έχει τρεις, τρία ευθύγραμμα τμήματα, κι εδώ χωρίζεται σε 1 2 3 4, 1 2 3 4, οπότε (...) κατάλαβες;

21. Α. Όχι.

22. Β. Δεν κατάλαβες. Εδώ έχει 3 ευθύγραμμα τμήματα, και το τρίγωνο χωρίζεται σε, 1 2 3 4, 4 τμήματα αυτά.

23. Α. 4 4 16.

24. Β. 16. Οπότε εδώ θα 'χει ένα παραπάνω απ' τα ευθύγραμμα τμήματα.

25. Α. Με καθένα απ' τα ευθύγραμμα...

26. Β. Ένα παραπάνω.

27. Α. ... ένα παραπάνω. Ναι, καλό.

28. Β. Οπότε θα 'ναι 15. 15 15 15 15. 15 επί 15.

29. Α. 5 επί 5.

30. Β. 15 επί 15. 4 4 16.

31. Α. Ναι.

32. Β. Εδώ θα 'ναι 15 επί 15.

33. Α. Ναι, αλλά άμα φέρουμε ευθύγραμμο, εδώ θα 'ναι 1 2 3 4 5.

34. Β. Δε θα 'ναι 5. Θα 'ναι 15. Γιατί φέρνουμε 14 από κάθε (...) δε θα, δεν είναι ίδιο.

35. Α. Δεν ξέρω, δεν καταλαβαίνω.

36. Β. Δεν το κατάλαβες; Φέρνουμε δέκα, 14 από δω 'ντάξει; 14 γραμμές από δω.

37. Α. Ναι.

38. Β. 1 2 3 4, 14. Χωρίζει το τρίγωνο σε 15. Και 14 από δω; Πάλι 15.

39. Α. Δεν καταλαβαίνω. Δεν μπορώ. Γιατί το χωρίζει σε 15;

40. Β. Γιατί εδώ είναι 3 γραμμές και χωρίζεται σε 4. (...) Σε 4 περιοχές, επί 4 16. Κι εκεί θα είναι 15 επί 15.

41. Α. Επανάλαβέ το.

42. Β. Ναι.

43. Α. Γιατί δεν...

44. Β. Να το κάνουμε...

45. Α. Όχι, σ' αυτό που έλεγες.

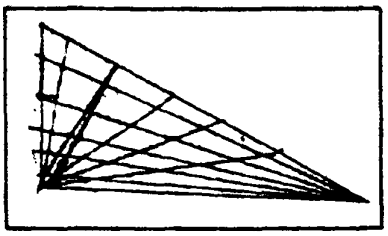
46. Β. Να το κάνουμε με λιγότερες, να δεις πώς γίνεται. Να το κάνουμε με 5.

(Ο Β φέρνει στο τρίγωνο που έχει σχεδιάσει 5 ευθύγραμμα τμήματα από τις 2 κορυφές, όπως δείχνει η Εικόνα 2.18)

47. Β. Βλέπεις; Χωρίστηκε σε 6. 1 2 3 4 5 6. Κατάλαβες τι εννοώ;

48. Α. Σε 6;

49. Β. Θέλω να μου απαντήσεις, αν τραβή, αν φέρουμε 5 γραμμές, πόσα απ' το 5 θα βγουν, πόσες περιοχές.



Εικόνα 2.18. 2-Z13

50. Α. 36.

51. Β. 1 2 3 4. Είναι τρεις οι γραμμές. Εδώ είναι 5, βγαίνουν 6. Κατάλαβες;

52. Α. Ναι συγνώμη, αλλά τα μαθηματικά δεν είναι (...)

53. Β. Εδώ μπορείς να μου πεις που είναι 5 πόσο θα βγει;

54. Α. Αν είναι τριαντα...

55. Β. Περίμενε. 1 2 3 4 5. Μέτρα αυτά εδώ πόσα είναι; 5 6.

56. Α. 36.

57. Β. 36. Σωστά. Βγαίνει ένα πάνω... Φέρνουμε 5 ευθύγραμμα τμήματα και... εδώ που φέρνουμε 3 ευθύγραμμα τμήματα, χωρίζεται σε 4...

58. Α. Άρα μετά 36 και 36.

59. Β. Όχι 36. 6 επί 6, 36. Σωστά;

60. Α. Ναι.

61. Β. Μετά, από τα 15 θα γίνει, απ' τα 14 ευθύγραμμα τμήματα, θα γίνει 15 επί 15. Το 5 γίνεται 6 επί 6, το 6 γίνεται 7 επί 7, το 7 γίνεται 8 επί 8. Φτάνουμε στο 14 και γίνεται 15 επί 15.

62. Α. Ναι.

63. Β. Σωστά; Το κατάλαβες;

64. Α. Προσπαθώ. Ε, άρα 15 επί 15.

65. Β. Πρέπει και να το σχεδιάσουμε;

66. Α. Όχι.

67. Β. Κατάλαβες; Το κατάλαβες;

68. Α. Στα 3 δηλαδή ευθύγραμμα έτσι; Είναι 4. Τα 4 5, τα 5 6, ναι εντάξει.

Ανάλυση – Σχόλια:

• Ο Β έχει ήδη εισάγει τη διαδικασία εύρεσης του πλήθους των μη επικαλυπτόμενων περιοχών, την οποία προσπαθεί να εξηγήσει στην Α. Η Α από τη μεριά της παραδέχεται την άγνοιά της και ζητά από το Β να αποσαφηνίσει τη διαδικασία που προτείνει. Η κατάσταση αυτή κάνει το Β αρκετά ευαίσθητο στην κατανόηση της συμφοιτήτριάς του, γεγονός που αποδεικνύουν οι σχετικές ερωτήσεις που

επαναλαμβάνονται (20, 47, 51, 59, 63, 67), αλλά και άλλες ερωτήσεις τις οποίες θα μπορούσαμε να συσχετίσουμε με τη νόρμα συνεργασίας, με τις οποίες ζητά κάποιες πληροφορίες από την Α (49, 53, 55).

• Το συγκεκριμένο ζεύγος αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα της επίδρασης που μπορεί να έχει η νόρμα της αμοιβαίας κατανόησης – αλλά και της συνεργασίας – όχι μόνο στη συγκρότηση κοινής γνώσης, αλλά και στη διαμόρφωση της συμπεριφοράς των φοιτητών.

3° Παράδειγμα (2-Z8-AK)

66. Β. Εγώ σου λέω, το μόνο που σκέφτηκα είναι αυτό, προσπάθησα να βρω πώς βγαίνει αυτό το 16, αλλά δεν μπορώ να στο δικαιολογήσω, απλά μόνο έβαλα αριθμούς στην τύχη, δεν ξέρω αν είναι καν σωστό. Με τις τρεις περιοχές δημιουργούνται τέσσερα τμήματα και με τις άλλες τρεις, με τις τρεις γραμμές... Κατάλαβες;

67. Α. Όχι. Είμαι απορροφημένος τώρα.

68. Β. Καλά.

69. Α. Θα το κάνω πιο μεγάλο (...) για να 'χουμε (...)

70. Β. Έχω την εντύπωση ότι θα βγουν 225 τετραγωνάκια.

71. Α. Ε; Ε, άμα έ... μη κάθομαι και τα μετράω τσάμπα.

72. Β. Αλλά, δεν μπορώ να το καταλάβω γιατί.

73. Α. Άμα καταλάβαινα εγώ τα μαθηματικά δεν θα 'μουνα εδώ πέρα τώρα. Θα το κάνω πιο μεγάλο.

74. Β. Αχ θεούλη μου.

Ανάλυση – Σχόλια:

• Η Β προσπαθεί να διαμορφώσει τη διαδικασία που δικαιολογεί το πλήθος των μη επικαλυπτόμενων περιοχών και στην προσπάθειά της αυτή ζητάει τη συνεργασία του Α. Η ερώτηση «Κατάλαβες;» στο 66 από τη μια αναφέρεται στην κατανόηση του συμφοιτητή της, αλλά από την άλλη αποτελεί και ένα αίτημα για συνεργασία στη διαμόρφωση της διαδικασίας.

• Ο Α όντας απορροφημένος στη «δική του» διαδικασία, αγνοεί την Β μέχρι που εκείνη του λέει το πλήθος των περιοχών σύμφωνα με το δικό της συλλογισμό· τότε δίνει προσοχή στη Β, αλλά μόλις εκείνη παραδεχτεί ότι δεν μπορεί να δικαιολογήσει τη διαδικασία της (τηρώντας τη νόρμα μαθηματικής δικαιολόγησης που θα εξετάσουμε στη συνέχεια) επανέρχεται στη γεωμετρική κατασκευή που ακολουθούσε μέχρι εκείνο το σημείο.

• Ο διάλογος του συγκεκριμένου αποσπάσματος καταδεικνύει ότι, σε κάποιες περιπτώσεις, η συνειδητοποίηση της νόρμας αμοιβαίας κατανόησης δεν αρκεί για να επιτευχθεί αυτή η κατανόηση· πρέπει να συνυπάρχει με τη νόρμα της μαθηματικής δικαιολόγησης, για να μπορεί το ένα άτομο όχι απλά να εξηγήσει αλλά και να δικαιολογήσει μαθηματικά τη διαδικασία που προτείνει, έτσι ώστε να εξελιχθεί αυτή ως κοινή έννοια. Το παράδειγμα αυτό αποτελεί μια πρώτη ένδειξη της αλληλεπίδρασης που υφίσταται μεταξύ κάποιων νορμών, αλλά και του ρόλου της γλώσσας σε αυτή την αλληλεπίδραση (με την έννοια ότι αν η Β χρησιμοποιούσε αυστηρά μαθηματική γλώσσα πιθανόν να μπορούσε να δικαιολογήσει με σαφήνεια το συλλογισμό της, άρα και να τον κάνει κατανοητό από το συμφοιτητή της).

4° Παράδειγμα (3-Z8-AK)

75. Α. Αν τραβήξουμε άλλη μία γραμμή εδώ πέρα και το κάνουμε εκεί, έχουμε αυτομάτως δύο τρίγωνα τα οποία έχουν την ίδια χωρητικότητα, ναι; Οπότε αυτό κι αυτό το τρίγωνο θα 'χει ακριβώς την ίδια χωρητικότητα. Το θέμα είναι να βρούμε πόσο έχει το τρίγωνο που μένει πόση χωρητικότητα, γιατί αλλιώς θα 'ταν 240 δια 3 θα το βρίσκαμε άνετα, ενώ τώρα εδώ πέρα... Δεν με καταλαβαίνεις ε;

76. Β. Ναι, όχι...

77. Α. Κοίταξε.

78. Β. Απλά...

79. Α. Κάτσε, θα το πάω κι άλλο έτσι, με γύφτικο τρόπο. Εφόσον, αυτό κι αυτό έχουν την ίδια...

80. Β. Ε πώς, αυτό με τι σχετίζεται; Δεν...

81. Α. Τι με τι σχετίζεται;

82. Β. Δεν έχω καταλάβει αυτό σε τι μας βοηθάει...

83. Α. Δεν έχουμε βρει τη χωρητικότητα του ενυδρείου ότι είναι 240000 αυτό εδώ πέρα;

84. Β. Κυβικά εκατοστά.

85. Α. Κυβικά εκατοστά. Λοιπόν, από τη στιγμή, έχουμε ένα, υποτίθεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο από δω εντάξει;

86. Β. Δεν ξέρουμε πόσο νερό έχουμε μέσα και το νερό που έχουμε...

87. Α. Δεν ξέρουμε.

88. Β. ...είναι αυτό εδώ πέρα.

89. Α. Αυτό σου λέω κι εγώ. Μισό λεπτό να τελειώσω.

90. Β. Ναι. Συγνώμη.

91. Α. Τραβώντας ένα τρίγωνο από δω ως εκεί, που τραβήξαμε εδώ πέρα, από δω ως εδώ, είναι ακριβώς αυτομάτως αυτά τα δυο είναι ίδια, οπότε όσο χωράει αυτό θα χωράει και αυτό.

92. Β. Ναι.

93. Α. Τι δεν κατάλαβες;

94. Β. Ναι. Και;

95. Α. Και, λοιπόν, το θέμα όμως είναι ότι, το πόσο χωράει αυτό εδώ πέρα, έτσι ώστε να μπορούσα,

αλλά αυτό έτσι όπως το κόβω εγώ τώρα, πρέπει να 'ναι γύρω, να 'ναι διπλάσιο. Δηλαδή να 'ναι, όσο χωράει αυτό κι αυτό, να χωράει όλο αυτό μαζί.

96. Β. Ναι, εντάξει, πες ότι συμβαίνει έτσι. Όλα αυτά....

97. Α. Ναι, σε τι θα μας βοηθήσουν.

98. Β. Δεν μας βοηθάνε σε τίποτα στο να βρούμε τη χωρητικότητα αυτού εδώ, του, εε, γιατί δεν είναι τρίγωνο, να σου...

99. Α. Κάτσε βρε Πηνελόπη, θα το πω δέκατη έκτη φορά τώρα...

100. Β. Σε αριθμούς σε τι μας βοηθάει;

101. Α. Σε αριθμούς σε τι μας βοηθάει;

102. Β. Ε, στην πράξη, σε...

103. Α. Αν ξέ, μπορούσαμε ας πούμε, πες ότι και αυτό το τρίγωνο ήτανε ίσιο, εντάξει; Το ίδιο, ακριβώς, ίδιας χωρητικότητας.

104. Β. Ναι.

105. Α. Θα κάναμε 240000 δια 3 και θα βρίσκαμε πόσο χωράει το κάθε τέτοιο. Και σου λέω, αυτό και αυτό έχουν την ίδια χωρητικότητα, ΟΚ;

106. Β. ΟΚ.

107. Α. ΟΚ. Το θέμα είναι πόσο είναι εδώ πέρα το μεγάλο. Αν υποθέσουμε ότι αυτό το μεγάλο εδώ πέρα είναι...

108. Β. Α, και θα τα κάναμε δια 4 και θα βρίσκαμε το ένα.

Ανάλυση – Σχόλια:

• Η διαδικασία που προτείνει ο Α σχετίζεται με τον υπολογισμό του όγκου του τριγωνικού πρίσματος που σχηματίζει το νερό στην κεκλιμένη θέση του ενυδρείου. Η γλώσσα του είναι ψευδο-μαθηματική και αυτός είναι ένας λόγος ίσως που η Β δυσκολεύεται να κατανοήσει τη χρηστικότητα της συγκεκριμένης διαδικασίας. Ο Α όμως, ακολουθώντας τη νόρμα της αμοιβαίας κατανόησης, αναλαμβάνει να αποσαφηνίσει τη διαδικασία που προτείνει. Το αποτέλεσμα είναι κάτι παραπάνω από το προσδοκώμενο: η διαδικασία όχι απλά γίνεται κοινή, αλλά η Β τη διαμορφώνει κατάλληλα, διορθώνοντας το «δια 3» του συμφοιτητή της (75, 105) με το «δια 4» (108) που περιγράφει τη σωστή αναλογία ανάμεσα στον όγκο του ενυδρείου και στον όγκο του τριγωνικού πρίσματος.

• Ο διάλογος του αποσπάσματος καταδεικνύει με τον καλύτερο τρόπο τη θετική επίδραση της νόρμας της αμοιβαίας κατανόησης στη συγκρότηση κοινής γνώσης: μέσω της νόρμας αυτής ο συνομιλητής οικειοποιείται σε τέτοιο βαθμό την προτεινόμενη διαδικασία, ώστε είναι ικανός να τη διαμορφώσει κατάλληλα για να ανταποκρίνεται στα δεδομένα του προβλήματος.

3η Κοινωνική νόρμα (Νόρμα κατανόησης από τρίτο)

Πρόκειται για νόρμα παρεμφερή με αυτή της αμοιβαίας κατανόησης, με τη διαφορά ότι αντικείμενό της δεν είναι η κατανόηση του συμφοιτητή, αλλά ενός τρίτου ατόμου, το οποίο πρόκειται να διαβάσει το πρόβλημα και την προτεινόμενη λύση. Στο πρώτο πρόβλημα, το τρίτο άτομο είναι ο βιοτέχνης, ο οποίος πρόκειται να αναπαράγει το σχέδιο, ενώ στο δεύτερο και στο τρίτο πρόβλημα, ως «τρίτος» μπορεί να θεωρηθεί οποιοδήποτε άτομο, το οποίο έχοντας τις ίδιες γνώσεις μαθηματικών με τους φοιτητές, θα μπορούσε μελετώντας τη γραπτή απάντησή τους να κατανοήσει πλήρως τις έννοιες και τις διαδικασίες που αυτή περιέχει. Το γεγονός ότι δεν υπάρχει καμία ένδειξη για το επίπεδο γνώσεων του βιοτέχνη, οδηγεί στην εμφάνιση της συγκεκριμένης νόρμας μόνο στο πρώτο πρόβλημα,[49] ενώ στα άλλα δύο η νόρμα αυτή ταυτίζεται με τη νόρμα της μαθηματικής δικαιολόγησης που θα αναφέρουμε παρακάτω.

1ο Παράδειγμα (1-Z4-KK)

96. Α. Άρα κάνει τον κύκλο.

97. Β. Ναι. Τώρα ξέρεις τι; Για το άλλο μπορούμε να του δώσουμε συντεταγμένες.

98. Α. Ναι ναι.

99. Β. Έτσι;

100. Α. Ναι. Πρέπει να του προσδιορίσουμε αυτό το σημείο, αλλά αυτό το έχει.

101. Β. Λοιπόν, αυτό το έχει, που σημαίνει είναι 1 2 3 4.

102. Α. Αφού το έχει, η αρχή της γραμμής, η αρχή της γραμμής.

103. Β. Ναι. 1 2 3 4 οπότε πάει πάνω 1 2 3...

104. Α. Αυτό το σημείο πρέπει να προσδιορίσουμε.

105. Β. Ναι.

106. Α. Να το καταλάβει όμως. Είναι... αν ξεκινήσει από πάνω, δεύτερη σειρά...

107. Β. Τώρα πρέπει να του προσδιορίσουμε...

108. Α. Είναι λίγο δύσκολο να προσδιορίσεις τώρα, αυτός είναι βιοτέχνης, δεν ξέρει να του πεις αυτό. Απ' ό,τι θυμάμαι εγώ στα μαθηματικά, αυτός είναι ο κεντρικός άξονας, αυτός εδώ.

109. Β. Αυτός, ε βέβαια.

110. Α. Ναι.

111. Β. Ναι.

112. Α. Αυτά εδώ όμως τώρα είναι συν πλην, δεν μπορεί να τα ξέρει. Αυτά είναι τα μείον κάτω, αυτά είναι τα συν πάνω.

113. Β. Αυτό θα προσδιορίσουμε, θα πούμε ότι αριστερά...

114. Α. Ναι, αριστερά.

115. Β. Αριστερά και κάτω είναι τα πλην.

116. Α. (...) θα δυσκολευτεί. Πρέπει να αριθμήσεις αυτά. Αυτά σε βοηθάνε όταν είναι αριθμημένα, εδώ δηλαδή, ξέρεις 1 2. Εμείς τα κάναμε με χαρτί...

117. Β. Ναι, αλλά...

118. Α. 2 3 (...) στο τηλέφωνο.

119. Β. Ναι, αλλά αν του πούμε ότι...

120. Α. Ότι ξεκινώντας από...

121. Β. Ότι η διάμετρος αποτελείται από οχτώ τετραγωνάκια. Τα τέσσερα αριστερά θα τα αριθμίζουμε με μείον, και τα τέσσερα που βρίσκονται δεξιά...

122. Α. Εδώ τα δεξιά δεν μας πειράζει, αφού δεν έχουμε εδώ.

123. Β. Έχουμε, να.

124. Α. Τα κάτω. Κάτω δεξιά.

125. Β. Τα κάτω. Ναι.

Ανάλυση – Σχόλια:

• Η βασική διαδικασία που απασχολεί τα δύο μέλη του ζεύγους είναι η χρήση κάποιου είδους συστήματος συντεταγμένων το οποίο πρέπει να ικανοποιεί δύο προϋποθέσεις: πρώτα, να είναι αρκετά σαφές ώστε να περιγράφει ικανοποιητικά τη θέση των διαφόρων ευθυγράμμων τμημάτων στο τετραγωνισμένο πλέγμα και, δεύτερο, να είναι αρκετά απλό ώστε να είναι κατανοητό από το βιοτέχνη. Η γλώσσα που χρησιμοποιείται είναι ψευδο-μαθηματική, με αποτέλεσμα η σαφήνεια των περιγραφών να μην είναι ικανοποιητική. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η σημασία που δίνουν οι φοιτήτριες στην ύπαρξη του βιοτέχνη, για τις ικανότητες του οποίου κάνουν διάφορες υποθέσεις (108, 112, 116). Το γεγονός αυτό τις οδηγεί σε περαιτέρω διαμόρφωση της κοινής τους διαδικασίας.

• Στο συγκεκριμένο απόσπασμα, αν και το είδος της γλώσσας που χρησιμοποιείται δεν επιτρέπει τη μέγιστη δυνατή σαφήνεια, εντούτοις η νόρμα της κατανόησης από τρίτο οδηγεί τα δύο μέλη του ζεύγους σε συνεχή αναδιαμόρφωση της διαδικασίας που προτείνουν. Δηλαδή, η ύπαρξη της συγκεκριμένης νόρμας αποτελεί αρωγό στη διαπραγμάτευση αλλά κυρίως στην αποσαφήνιση μιας κοινής έννοιας.

2° Παράδειγμα (1-Ζ13-ΚΑ)

91. Α. Μετά φέρνουμε τη διάμετρο. Διάμετρος δε λέγεται;

92. Β. Διάμεσος. Διάμεσος;

93. Α. Την οριζόντια δε θα πούμε;

94. Β. Ναι.

95. Α. Ύστερα παίρνουμε ένα σημείο που, που απέχει, εντάξει, 4 κουτάκια...

96. Β. Από την αριστερή πλευρά του τετραγώνου προς τα δεξιά.

(Ο Β διαγράφει το «4 κουτάκια» στην 3η και 4η γραμμή της αρχικής σελίδας)

97. Β. Να το γράψουμε ένα σημείο που απέχει 4 κουτάκια.

98. Α. Τι;

99. Β. Ένα σημείο που απέχει 4 κουτάκια.

100. Α. Απ' την αριστερή. Από την επάνω πλευρά προς τα κάτω;

101. Β. Απ' την πάνω πλευρά του τετραγώνου, και 3 κουτάκια από τη διάμετρο του κύκλου.

102. Α. Και φέρνουμε μία...

103. Β. Όχι. να πούμε και προς τα πάνω πόσο είναι.

104. Α. Κι από κει φέρνουμε μια ευθεία προς το κέντρο του κύκλου.

(Μικρή παύση)

105. Α. Ποιο σημείο;... Κι αν αυτός... Πώς θα το καταλάβει; Θα νομίζει από το κέντρο του κύκλου, που κατέληξε η ευθεία.

106. Β. Από αυτό το σημείο που κατέληξε στην αρχή.

107. Α. Να το βάλουμε Α. Ε;... Κι αυτό ΕΖ, ΕΖ κάν' το.

108. Β. Μία ευθεία ΑΟ...

109. Α. Ένα σημείο εδώ, Α. Μέχρι το κέντρο του κύκλου, βάλε εδώ πέρα σε παρένθεση...

110. Β. Σημείο Α... Όχι.

111. Α. Απ' το σημείο...

112. Β. Φέρνουμε μία ευθεία...

113. Α. Από το Α στο Ε.

114. Β. Την ονομάζουμε ΑΟ. Αυτή εδώ.

115. Α. ΑΟ;

116. Β. Αυτό είναι το σημείο Α, Στη συνέχεια...

117. Α. Φέρνουμε μια ευθεία μέχρι το σημείο Ε...

118. Β. Μέχρι το σημείο...

119. Α. Ε.

120. Β. Ναι, αλλά δεν ξέρει αυτός ποιο είναι το Ε.

121. Α. Αφού το έχουμε δώσει. Η διάμετρος λέμε είναι ΕΖ.

122. Β. Ναι, αλλά δεν θα ξέρει. Μέσω τηλεφώνου. Δεν θα ξέρει ο άλλος ποιο είναι το Ζ. Από ποια πλευρά είναι το...

123. Α. Τότε θα του το πούμε όταν φέρνουμε τη διάμετρο.

124. Β. Από ποια πλευρά είναι το Ζ και από ποια το...

125. Α. Ε, από την αριστερή πλευρά το Ε... Μα, όταν του λες ΕΖ, έτσι, και το βλέπει έτσι μπροστά του, το Ε πού θα το βάλει; Εδώ; Και το Ζ εδώ; Μ; Δεν θα καταλάβει;

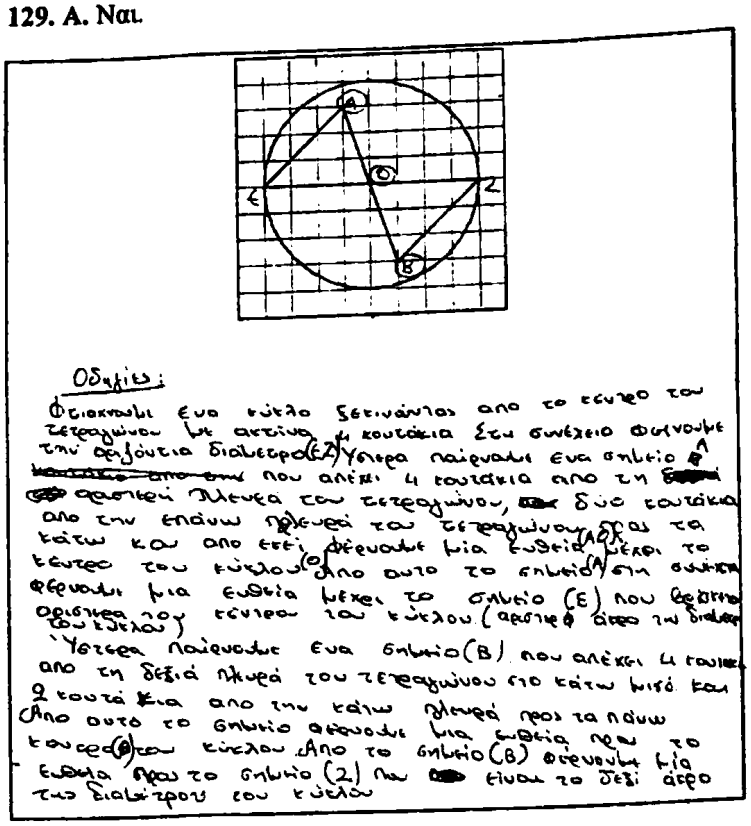
126. Β. Το σημείο Ε, το σημείο Ε... Να πούμε... Να γράψουμε η αριστερή πλευρά, το αριστερό σημείο;

127. Α. Που βρίσκεται αριστερά απ' το κέντρο του κύκλου; Μ;

(Ο Β γράφει «που βρίσκεται αριστερά του κέντρου του κύκλου» στην αρχική σελίδα)

128. Β. Μετά παίρνουμε ένα σημείο Β.

129. Α. Ναι.



Εικόνα 2.19. 1-Ζ13, αρχική σελίδα

Ανάλυση – Σχόλια:

• Η βασική διαδικασία που απασχολεί τα δύο μέλη του ζεύγους είναι ο τρόπος με τον οποίο θα δώσουν τις συντεταγμένες των άκρων κάποιων ευθυγράμμων τμημάτων, χωρίς όμως τη χρήση συστήματος συντεταγμένων. Όπως και στο 1° Παράδειγμα, το ζητούμενο είναι μία σαφής διαδικασία, που να είναι κατανοητή στο άτομο στο οποίο απευθύνεται. Η γλώσσα που χρησιμοποιείται είναι κυρίως ψευδο-μαθηματική, γεγονός που επηρεάζει τη σαφήνεια και την ακρίβεια των περιγραφών. Παρόλα αυτά, παρατηρούμε μία συνεχή προσπάθεια αποσαφήνισης της προτεινόμενης διαδικασίας, με σκοπό να γίνει κατανοητή από το βιοτέχνη του προβλήματος.

• Η νόρμα της κατανόησης από τρίτο συνεισφέρει σημαντικά στο συγκεκριμένο παράδειγμα στην αποσαφήνιση της προτεινόμενης μεθόδου και, κατά κάποιο τρόπο ενισχύει την από κοινού συμμετοχή στη διαδικασία αυτή.

4η Κοινωνική νόρμα (Νόρμα σαφούς έκφρασης)

Σύμφωνα με αυτή τη νόρμα, οι φοιτητές δίνουν ιδιαίτερη βαρύτητα στον τρόπο έκφρασής τους, με σκοπό η απάντησή τους να είναι σαφής και εύκολα κατανοητή. Η νόρμα αυτή περιέχεται στη νόρμα κατανόησης από τρίτο, αλλά την εξετάζουμε

ξεχωριστά για να γίνει πιο εύκολα διακριτή. Ενδείξεις για την ύπαρξή της συναντούμε σε όλες τις συζητήσεις, κυρίως στο σημείο που οι φοιτητές πρέπει να καθαρογράψουν την απάντησή τους. Στο πρώτο πρόβλημα, λόγω της ιδιαίτερης φύσης του, η νόρμα αυτή ταυτίζεται μερικές φορές με τη νόρμα της κατανόησης από τρίτο, ενώ στα άλλα δύο εμφανίζεται αυτόνομη.

1° Παράδειγμα (1-Z14-KK)

[Στη συζήτηση που έχει προηγηθεί οι δύο φοιτήτριες έχουν καταλήξει στη διαδικασία που θα ακολουθήσουν και έχουν αρχίσει να καθαρογράφουν την απάντησή τους]

244. Β. Κάτσε. (...) Αυτό εδώ είναι ίδιο μ' αυτό, βλέπεις;

245. Α. Ε και τι σχέση έχει αυτό;

246. Β. Μήπως μπορούσαμε να το περιγράψουμε κάπως.

247. Α. Δε χρειάζεται να το περιγράψουμε, αφού φτιάξαμε...

248. Β. Κάπως διαφορετικά.

249. Α. Ο κύκλος δεν είναι, αυτή δεν είναι η ακτίνα του;

250. Β. Ναι.

251. Α. Οπότε, κύκλος θα βγει, τι να βγει; Γιατί να το παιδεύουμε, να το παιδεύουμε το πράγμα, άστο.

252. Β. (...) τις προσθαφαιρέσεις.

253. Α. Καλά, μπερδεύτηκα και τώρα έχω χάσει το μπούσουλα εδώ πέρα. Στο F8.

(Μικρή παύση)

254. Α. Το διαβήτη. Πώς λέγεται αυτό; Κέντρο του κύκλου;

255. Β. Μμ, ναι.

256. Α. Ε;

257. Β. Ναι.

258. Α. Έλα.

259. Β. Όχι, περίμενε... Ξέρεις; Όχι, γράψ' το αλλιώς. Λαμβάνοντας, ξέρω 'γώ την τάδε τάδε ως ακτίνα...

260. Α. Ναι. Ναι ναι.

261. Β. Με ακτίνα το τάδε, κάνε τον κύκλο.

262. Α. Μπράβο.

263. Β. Ακτίνα έχουμε την, εεε, Α5 με Ε5. Δεν είναι; Μ;

264. Α. Β.

265. Β. Όχι όχι. Αυτό εδώ, το ορίσαμε ως Α αυτό. Έπρεπε τελικά Β να τ' ονομάσουμε. Δεν πειράζει τώρα ό,τι κάναμε κάναμε. Καλά είπες εσύ Β στην αρχή, κατάλαβες; Εγώ το πήρα, το πήρα ως γωνία εδώ κάτω.

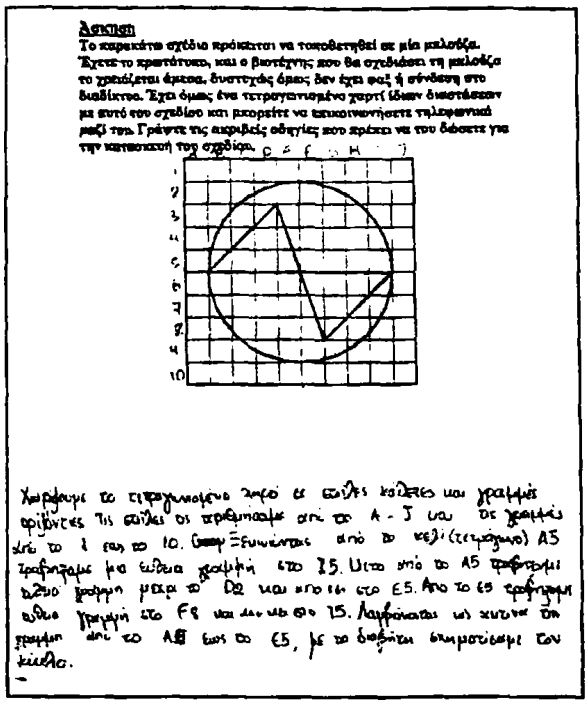
266. Α. Πάντως είναι Β.

267. Β. Ναι.

268. Α. Θα τ' αλλάξω. Θα το κάνω Β.

269. Β. Κάτσε τώρα, άστο. Άστο, ναι ναι.

270. Α. Όπως είναι να το δούμε εκ νέου. Για να δούμε πώς θα το φτιάξουμε μετά... Σχηματίσαμε τον κύκλο. Τελειώσαμε. (...)



Εικόνα 2.20. 1-Ζ14, αρχική σελίδα

Ανάλυση – Σχόλια:

• Η διαδικασία που απασχολεί τις δύο φοιτήτριες στο συγκεκριμένο απόσπασμα είναι η σχεδίαση του κύκλου. Η Β φαίνεται να μη συμφωνεί με την υπάρχουσα διατύπωση, ενώ η Α θεωρεί ότι η περιγραφή που έχει γίνει είναι σαφής. Τελικά η επιμονή της Β φαίνεται να επηρεάζει τον τρόπο έκφρασης.

• Η επίδραση της νόρμας της σαφούς έκφρασης φαίνεται ισχυρή στο συγκεκριμένο απόσπασμα· αυτό που μπορούμε να παρατηρήσουμε όμως είναι ότι η επίδραση αυτή περιορίζεται στην έκφραση και ως ένα μόνο σημείο στην αποσαφήνιση της ήδη κοινής διαδικασίας, χωρίς να συνεισφέρει ουσιαστικά στη διαπραγμάτευσή της.

2° Παράδειγμα (2-Ζ1-ΚΚ)

[Στη συζήτηση που έχει προηγηθεί οι δύο φοιτήτριες έχουν καταλήξει στο ότι το πλήθος των μη επικαλυπτόμενων περιοχών που ζητείται προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό 15·15 και τώρα πρέπει να γράψουν την απάντηση].

79. Β. Ε μπορούμε ν' αρχίσουμε από κει που το 'παμε πρώτα, ότι τα 3 ευθύγραμμα τμήματα δημιουργούνε 4 μη επικαλυπτόμενες περιοχές, και 4 που δημιουργεί το άλλο, αλλά αυτά αναμεταξύ τους...

80. Α. Πώς θα το γράψουμε;

81. Β. Μμ... τεχνικές δυσκολίες. Δεν μπορώ να το αποδώσω με λόγια.

82. Α. Το κάθε ευθύγραμμο τμήμα χωρίζει το κάθε, σε 15 περιοχές.

83. Β. Ξαναπές το. Το κάθε ευθύγραμμο τμήμα... πάρε τα 3 ρε συ, μην πιάνεις τα πολλά και χανόμαστε. Πάρε τα 3 εδώ.

84. Α. Ναι.

85. Β. Το κάθε ευθύγραμμο τμήμα χωρίζει... θα το πεις;

(Οι Α, Β γελούν)

86. Α. Σε 4 περιοχές έτσι;

87. Β. 8.

88. Α. Το καθένα. (...) Αχ, δεν μπορώ να το πω.

89. Β. Το χωρίζει σε 3 4 5 6 7 8. Κατάλαβες τι εννοούσα εγώ; 1 2 3 4 5 6 7 8.

90. Α. Και μετά;

91. Β. Δε βγαίνει. Αυτό είναι, να 'χεις τη λύση και να μη μπορείς να τη δικαιολογήσεις. 1 2 3 4... Να γράψουμε ότι τα 3 ευθύγραμμα τμήματα, εε, δημιουργούν, 4 μη επικαλυπτόμενες περιοχές. Εντάξει; Αντίστοιχα, τα άλλα ευθύγραμμα τμήματα το ίδιο, δημιουργούν τέσσερις, αυτά αναμεταξύ τους... εε, τέμνονται ρε παιδί μου σε σημεία και δημιουργούν 16 περιοχές. Άρα τόσα. Γράψ' το εσύ.

(Οι Α, Β γελούν)

92. Α. Τι να γράψω; Είναι τώρα αυτό απάντηση;

93. Β. Ε δεν ξέρω τι δικαιολόγηση πάει αλλιώς. (...)

Ανάλυση – Σχόλια:

• Το βασικό ζήτημα που απασχολεί τα δύο μέλη του συγκεκριμένου ζεύγους είναι ο τρόπος καταγραφής της απάντησής τους. Έχουν και οι δύο κατανοήσει τη διαδικασία που οδηγεί στο πλήθος των μη επικαλυπτόμενων περιοχών (κοινή έννοια), και το μόνο που απομένει είναι να εκφράσουν αυτή τη διαδικασία με τρόπο σαφή και κατανοητό. Στα 91, 93 η Β διαπιστώνει ότι δεν μπορούν να δικαιολογήσουν τη λύση, διαπίστωση που δε συνάδει με την εικόνα της συζήτησης που έχει προηγηθεί· η λύση – για την ακρίβεια η διαδικασία που οδηγεί στη λύση – έχει δικαιολογηθεί στη συζήτηση που έχει προηγηθεί. Το ζητούμενο είναι ο τρόπος έκφρασής της, «η απόδοση με λόγια» (81).

• Στο συγκεκριμένο απόσπασμα φαίνεται ότι η επίδραση της νόρμας της σαφούς έκφρασης στη συγκρότηση κοινής γνώσης είναι περιορισμένη, αφού ήδη η κοινή διαδικασία που αποτελεί αντικείμενο συζήτησης, έχει ήδη διαπραγματευτεί και το μόνο που απομένει είναι μια τελική διαμόρφωση σε επίπεδο έκφρασης και όχι σε επίπεδο ουσίας (δεν πρόκειται δηλαδή να προστεθούν κάποιες νέες έννοιες ή διαδικασίες σε αυτή).

3° Παράδειγμα (3-Z10-ΚΚ)

[Στη συζήτηση που έχει προηγηθεί οι δύο φοιτήτριες έχουν καταλήξει στη διαδικασία που θα ακολουθήσουν και έχουν αρχίσει να καθαρογράφουν την απάντησή τους]

368. Α. Δε γράψαμε ότι τα τρίγωνα είναι ίδια. Δεν πειράζει.

369. Β. Ποια είναι ίδια;

370. Α. Αυτά. Αυτό αυτό αυτό κι αυτό.

371. Β. Ε τώρα θα το γράψω μέσα σε παρένθεση.

372. Α. Εντάξει. Εκεί που γράφεις το διαχωρίζουμε...

373. Β. Μισό λεπτό. Αυτό γίνεται διότι, κάτσε να το εξηγήσουμε. Αυτό γίνεται διότι, περίμενε Βικάκι μισό λεπτό.

374. Α. Τα τέσσερα τρίγωνα είναι ίσα.

375. Β. Μμ...

376. Α. Είναι ορθογώνια με δύο ίδιες πλευρές.

377. Β. Εννοείται βρε Βίκη.

378. Α. Εντάξει, μη το γράφεις, άντε. 'ντάξει, άσ' το.

379. Β. Είναι όμοια. Εντάξει. Και τώρα;

380. Α. Βρίσκουμε τον όγκο του ενός τετάρτου κι απ' αυτόν βρίσκουμε το ύψος.

381. Β. Από τη σχέση που ορίζει τον όγκο, που ορίζει τον όγκο του ενός τετάρτου του ενυδρείου, λύνουμε ως προς το ύψος. Οπότε έχουμε...

100...

382. Α. Επί 60 επί x.

383. Β. Επί 60 επί x, α, κάτσε, περίμενε τώρα το κάναμε έτσι, να βάλουμε τελίτσες. Επί x ίσον...

384. Α. 60000.

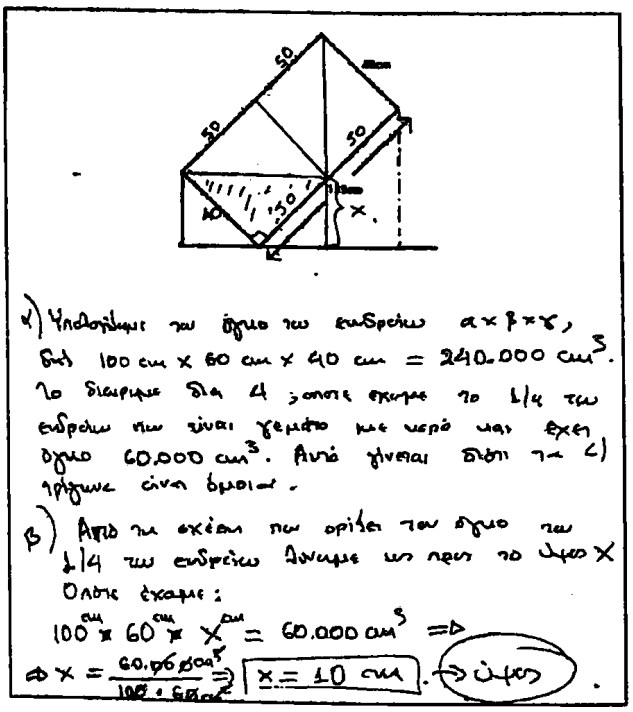
385. Β. Α κάτσε εδώ είναι cm, ας τα γράψουμε καλύτερα. 60000 cm^3, οπότε λύνουμε ως προς x...

386. Α. Μη τα γράφεις αναλυτικά, δεν θα γυρίσουμε πίσω, γράψε x ίσον.

387. Β. x ίσον;

388. Α. 10 cm.

389. Β. Κάτσε ρε να το γράψουμε δίπλα. Βίκη έτσι κάνεις και δεν βρίσκουμε τις λύσεις.



Εικόνα 2.21. 3-Z10, αρχική σελίδα

Ανάλυση – Σχόλια:

• Δύο επιμέρους διαδικασίες απασχολούν τις φοιτήτριες – πάντα όσον αφορά στην έκφραση: η ισότητα τεσσάρων τριγώνων και η γραφή των μονάδων στην εξίσωση 100·60·x = 60000, η οποία οδηγεί στην εύρεση του βάθους του νερού. Όσον αφορά στην ισότητα των τριγώνων, η Β παραδέχεται ότι είναι απαραίτητη η καταγραφή της

και η μόνη της διαφωνία με την Α έγκειται στον αν πρέπει ή όχι να τη δικαιολογήσουν (η διαφωνία αυτή σχετίζεται με τη νόρμα της μαθηματικής δικαιολόγησης που αναφέρουμε αμέσως μετά).

• Η γραφή των μονάδων στην εξίσωση αποτελεί πρόταση της Β, στην οποία αντιδρά η Α. Δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η Α δεν ακολουθεί τη νόρμα σαφούς έκφρασης· αυτό που συμβαίνει είναι ότι οι δύο φοιτήτριες στο συγκεκριμένο ζήτημα έχουν διαφορετική αντίληψη ως προς το τι συνιστά η σαφής έκφραση.[50]

• Το συγκεκριμένο απόσπασμα καταδεικνύει ότι η νόρμα της σαφούς έκφρασης συνεισφέρει σε ένα βαθμό στην τελική διαμόρφωση και αποσαφήνιση κάποιων κοινών εννοιών και διαδικασιών. Η παρατήρηση της Β προς τη συμφοιτήτριά της ότι «έτσι κάνει και δεν βρίσκουν τις λύσεις» (389) συνηγορεί υπέρ της άποψης αυτής.

5η Κοινωνικομαθηματική νόρμα (Νόρμα μαθηματικής δικαιολόγησης)

Σύμφωνα με αυτή τη νόρμα, μία μέθοδος επίλυσης είναι αποδεκτή αν τεκμηριώνεται και δικαιολογείται βάσει λογικών συλλογισμών που περιέχουν μαθηματικές έννοιες ή διαδικασίες. Η νόρμα εμφανίζεται στο δεύτερο και στο τρίτο πρόβλημα, αφού το πρώτο απαιτούσε βασικά την περιγραφή μιας γεωμετρικής κατασκευής.

1° Παράδειγμα (2-Z12-AK)

[Στη συζήτηση που έχει προηγηθεί τα δύο μέλη του ζεύγους έχουν καταλήξει στη διαδικασία που οδηγεί στην εύρεση του πλήθους των μη επικαλυπτόμενων περιοχών και η Β έχει ξεκινήσει να καθαρογράφει την απάντησή τους]

189. Α. Δε μ' αρέσει αυτό με τα τρίγωνα (...) Και νευριάζω γιατί πρέπει να 'χει μια πάρα πολύ απλή λύση...Μάλλον δεν θα το δικαιολογήσουμε με τρίγωνα. Λοιπόν, αυτή είναι η μια εκδοχή: φέρνοντας 3, χωρίζουμε το τρίγωνο σε 4, μέρη, όχι τρίγωνα. Ωραία; Λογικό, 1 2 3 4. Αν θα φέρουμε, αν φέρουμε 15, το χωρίζουμε σε 15. Ωραία, τώρα, αν φέρουμε 3 κι απ' την άλλη κορυφή, και τέμνονται, βλέπουμε ότι γίνονται άλλα τόσα, δηλαδή 8. Έτσι δεν είναι; Όχι 8...

190. Β. Δεκάξι.

191. Α. Δεκάξι. Είναι 4 από δω, άρα το συνολικό πολλαπλασιάζεται, γιατί είναι 4 4 4 4... 4^2. Άμα φέρουμε άλλα 14 από δω, και θα βγει το 15^2. Δεν είναι και πολύ επιστημονικά τεκμηριωμένο. Έως καθόλου θα έλεγα... 3 4 κομμάτια. Κι αυτά τα 4 κομμάτια, 1 2 3 4, αφού ξεκινάν (...) τέσσερις γραμμές, τα χωρίζουν όλα από 4, άρα θα 'χουμε 4 και 4 και 4, όντως είναι 4^2.

192. Β. Εντάξει, αφού το λύσαμε τώρα.

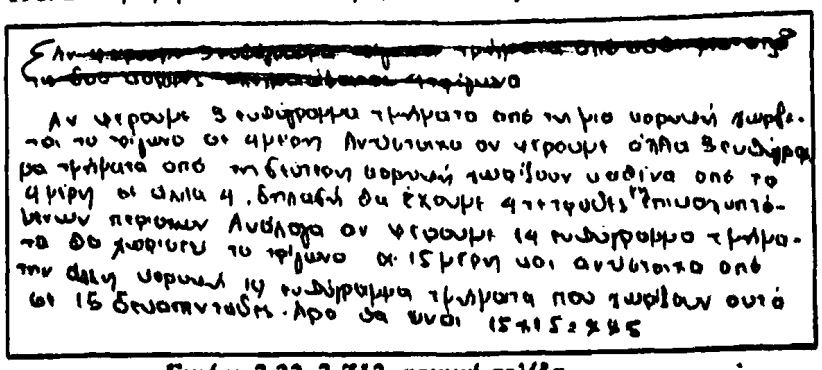
193. Α. Πώς θα τ' αποδείξουμε, έτσι θα το αποδείξουμε. Είναι ήδη 4 κομμάτια: 1 2 3 4, και χωρίζονται, μία φορά, δύο φορές, τρεις τέσσερις φορές, άρα 4^2. Λοιπόν, αν φέρουμε 3 ευθύγραμμα τμήματα από καθεμία... από τη μία κορυφή, ξέρω 'γώ να πούμε στην αρχή, χωρίζεται το τρίγωνο σε 4

μέρη.

194. Β. Μ.

195. Α. Για αρχή. Σε 4 μέρη. Αν φέρουμε, ε, τρεις τώρα κι από, 3 ευθύγραμμα τμήματα κι απ' τη δεύτερη κορυφή, χωρίζει σε 4 μέρη, το κάθε ένα απ' τα προηγούμενα 4 μέρη. Οπότε θα πάει 4^2. Άρα, με 14 θα χωριστεί σε 15 μέρη, και το καθένα απ' αυτά σε 15 κομμάτια, το καθένα. Άρα θα 'χουμε 15 μέρη, 1 2 3 4 15 και 15 κομμάτια το καθένα, άρα θα πάει 15 επί 15. Αυτό, δε, δε σκέφτομαι άλλο.

196. Β. Σιγά μην είναι αυτό τώρα, αλλά τέλος πάντων...



Εικόνα 2.22. 2-Ζ12, αρχική σελίδα

Ανάλυση – Σχόλια:

• Η βασική διαδικασία που συζητείται στο απόσπασμα είναι αυτή που σχετίζεται με τον τρόπο δικαιολόγησης του πολλαπλασιασμού 15·15 που παρέχει το πλήθος των μη επικαλυπτόμενων περιοχών όταν φέρουμε 14 ευθύγραμμα τμήματα από καθεμιά από τις δύο κορυφές του τριγώνου. Υιοθετείται ένα είδος επαγωγικού συλλογισμού, το οποίο εκφράζεται σε ψευδο-μαθηματική γλώσσα, με αποτέλεσμα να μην ικανοποιεί πλήρως τα δύο μέλη του ζεύγους.

• Πρόκειται για περίπτωση στην οποία η αποδοχή της νόρμας της μαθηματικής δικαιολόγησης φαίνεται ότι δεν επαρκεί για να δοθεί μια μαθηματικά τεκμηριωμένη απάντηση· αυτό εκφράζει το σχόλιο της Β «Σιγά μην είναι αυτό τώρα». Στην πραγματικότητα όμως, αυτό που δημιουργεί ανασφάλεια στη Β δεν είναι ο συλλογισμός αυτός καθ' αυτός, αλλά το είδος της γλώσσας που χρησιμοποιείται. Ο συλλογισμός, αν και όχι καθαρά «μαθηματικός», αρκεί για να δικαιολογήσει την απάντηση. Επομένως, η νόρμα της μαθηματικής δικαιολόγησης στο συγκεκριμένο παράδειγμα συνετέλεσε θετικά στην από κοινού διαμόρφωση της προτεινόμενης διαδικασίας (παρά τις αμφιβολίες που εκφράζονται).

2° Παράδειγμα (3-Ζ8-ΚΑ)

12. Β. 40 το ύψος, και το πλάτος είναι το 60 που δε φαίνεται... Το ενυδρείο έχει ανασηκωθεί έτσι ώστε το νερό να φτάνει ως το μέσο της βάσης του...

13. Α. Δύο εκατοστά λέω εγώ.

(Η Β γελάει)

14. Β. Πώς;

15. Α. Ε;

16. Β. Πώς; Έτσι, σου κάνει για δύο εκατοστά.

17. Α. Μου κάνει για δύο εκατοστά γιατί... Ότι θα 'ναι λίγο πιο πάνω απ' τον πυθμένα, θα 'ναι λίγο πιο πάνω απ' τον πυθμένα.

18. Β. Λοιπόν, αυτή τη στιγμή...

19. Α. Γιατί άμα αυτό... Πες το, πες ότι είναι αυτό έτσι; Και πάει στγά στγά στγά στγά κάτω. Φαντάσου το όταν χύνεται. Θα πάει, άντε να φτάσει μέχρι εδώ πέρα. Παραπάνω δε θα φτάσει. Γι' αυτό είναι γύρω στα δύο με τρία εκατοστά.

20. Β. Λοιπόν, εε, πρέπει να αξιοποιήσουμε με κάποιο τρόπο τους αριθμούς που μας δίνουν.

21. Α. Ε ναι.

22. Β. Να μπορέσουμε να μπούμε στη λογική του όλου θέματος.

Ανάλυση – Σχόλια:

• Ο Α προτείνει μία λύση, η οποία ούτε βασίζεται σε κάποιο μαθηματικό συλλογισμό ούτε είναι λογικά τεκμηριωμένη. Η Β επισημαίνει το γεγονός αυτό στο 16 και, αφού ακούσει τον αστήρικτο συλλογισμό του Α στο 19, εισάγει όχι κάποια συγκεκριμένη διαδικασία, αλλά τη νόρμα της μαθηματικής δικαιολόγησης («Να μπορέσουμε να μπούμε στη λογική του όλου θέματος»), μέρος της οποία αποτελεί και η χρήση των δεδομένων του προβλήματος (20).

• Πρόκειται για περίπτωση στην οποία η νόρμα της μαθηματικής δικαιολόγησης αποτελεί η ίδια αντικείμενο επισήμανσης από ένα ομιλητή, ο οποίος εκφράζει μάλιστα και δύο χαρακτηριστικά της, τη χρήση των δεδομένων και τη λογική συνάφεια που τη χαρακτηρίζει.

3° Παράδειγμα (3-Ζ11-ΚΚ)

[Στη συζήτηση που έχει προηγηθεί οι δύο φοιτήτριες έχουν από κοινού διαμορφώσει τη μέθοδο επίλυσής τους, σύμφωνα με την οποία υπάρχει αναλογία ανάμεσα στο μήκος της βάσης που καλύπτεται από το νερό στην κεκλιμένη θέση και στο βάθος του νερού· συγκεκριμένα, ισχυρίζονται ότι τα δύο ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα, επομένως όταν το ενυδρείο επανέλθει στην οριζόντια θέση, το βάθος του νερού θα είναι 20 cm]

103. Α. Εντάξει. Εφόσον τώρα το νερό καλύπτει...

104. Β. Στη θέση που βρίσκεται τώρα, αυτό εδώ πέρα δε χρειάζεται, και, και το νερό φτάνει ως το μέσο της βάσης του.

105. Α. Ναι. Της βάσης ή του μήκους του γράψε...

106. Β. Όταν…

107. Α. Το μέσο της βάσης του μήκους;

108. Β. Το μέσο της βάσης.

109. Α. Του μήκους.

110. Β. Ποιου μήκους; (…)

111. Α. Ναι, χωρίς της βάσης. Γιατί το 100 cm είναι το μήκος.

112. Β. Τι απ' τα δύο να γράψω;

113. Α. Του μήκους καλύτερα γιατί λέει, συγκεκριμένα, 100 cm είναι το μήκος.

114. Β. Ως το μέσο του μήκους, όταν έρθει στην, όταν επανέλθει στην οριζόντια…

115. Α. Στην οριζόντια θέση του.

116. Β. Το βάθος του νερού…

117. Α. Λοιπόν, όταν θα φτάσει στην οριζόντια θέση του, θα καλύψει τα 100 cm μήκους…

118. Β. Το βάθος θέλει. Ποιο είναι το βάθος του νερού. Αυτή είναι η ερώτηση.

119. Α. Ναι, θα καλύψει το 100, αυτό, το μήκος, καλύπτει το 100.

120. Β. Όταν επανέλθει στην οριζόντια θέση, το βάθος του νερού θα είναι 20. Τα μισά απ' ό,τι καλύπτει τώρα.

121. Α. Γράψ' το έτσι.

122. Β. Εγώ αυτό θα γράψω. <u>Τώρα, δεν ξέρω</u>.

123. Α. Γράψε.

124. Α, Β. Όταν επανέλθει στην οριζόντια θέση του…

125. Α. Θα καλύψει…

126. Β. Το βάθος θα είναι…

127. Α. Α, το βάθος.

128. Β. Δηλαδή, τα μισά απ' ό,τι όταν είναι ανασηκωμένο.

129. Α. Δηλαδή…

130. Β. Δηλαδή…

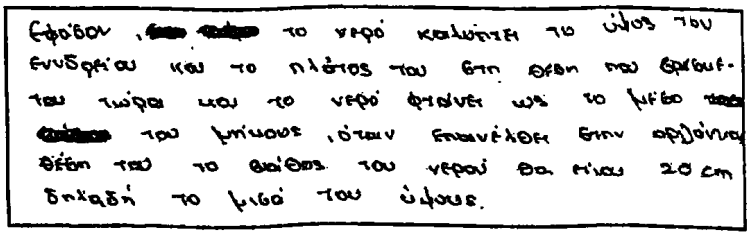
131. Α. Γράψε, 20 cm. Θα καλύψει το βάθος, το βάθος, θα καλύψει…

132. Β. Ναι.

133. Α. … το μισό ύψος.

134. Β. Το βάθος του νερού θα είναι.

135. Α. 20 cm, δηλαδή, δηλαδή τοο…


Εφόσον, [redacted] το νερό καλύπτει το ύψος του ενυδρείου και το πλάτος του στη θέση που βρίσκεται τώρα και το νερό φτάνει ως το μέσο [redacted] του μήκους, όταν επανέλθει στην οριζόντια θέση του το βάθος του νερού θα είναι 20 cm δηλαδή το μισό του ύψους.

Εικόνα 2.23. 3-Ζ11, αρχική σελίδα

136. Β. Το μισό…

137. Α. Του ύψους. <u>Τώρα πώς θα είναι αυτό</u>…

138. Κ. Εντάξει;

139. Α. Εε, πιστεύουμε… <u>Τώρα δεν το αποδείξαμε βέβαια</u>.

Ανάλυση – Σχόλια:

• Η κοινή διαδικασία που εισηγούνται οι δύο φοιτήτριες του συγκεκριμένου ζεύγους δεν έχει καμία μαθηματική βάση, γεγονός που εκφράζουν και οι ίδιες μέσω της αβεβαιότητάς τους (122, 137, 139). Το γεγονός αυτό δεν τους εμποδίζει όμως στην υιοθέτηση της συγκεκριμένης διαδικασίας.

• Η αναγνώριση της μη μαθηματικής βάσης του συλλογισμού των φοιτητριών συνάδει με τη νόρμα της μαθηματικής δικαιολόγησης· η νόρμα αυτή όμως δεν φαίνεται ικανή να τις αποτρέψει από την καταγραφή της λύσης. Φαίνεται ότι στην περίπτωση αυτή υπερισχύει η απειλή κατά των προσώπων τους που θα προκαλούσε μια ενδεχόμενη αποτυχία εξεύρεσης λύσης. Επομένως, η νόρμα της μαθηματικής δικαιολόγησης αν και παρέχει στις διαδικασίες ένα μαθηματικό (ή κάποιες φορές ψευδο-μαθηματικό[51]) χαρακτήρα, δεν επαρκεί για την αναγνώριση της καταλληλότητάς τους, στα πλαίσια του προβλήματος που έχει τεθεί. Αυτό το τελευταίο χαρακτηριστικό αποτελεί αντικείμενο της νόρμας της σχετικότητας της λύσης, την οποία περιγράφουμε αμέσως μετά.

6η Κοινωνικομαθηματική νόρμα (Νόρμα σχετικότητας της λύσης)

Σύμφωνα με αυτή τη νόρμα, μία προτεινόμενη λύση ή διαδικασία είναι αποδεκτή αν ικανοποιεί κάποιες συνθήκες· οι συνθήκες αυτές τίθενται από τα δεδομένα του προβλήματος ή γενικότερα από το κοινωνικο-μαθηματικό πλαίσιο που περιβάλλει το πρόβλημα. Η νόρμα εμφανίζεται σε δύο μορφές: η πρώτη μορφή αφορά το κατά πόσο ένα αριθμητικό αποτέλεσμα είναι αποδεκτό και η δεύτερη το κατά πόσο μία μέθοδος επίλυσης είναι σχετική με το δεδομένο πρόβλημα. Λόγω της φύσης των προβλημάτων που δόθηκαν, η νόρμα εμφανίζεται αποκλειστικά στο δεύτερο και στο τρίτο από αυτά.

1° Παράδειγμα (2-Z14-KK)

75. Β. Το κάνουμε με απλή μέθοδο των τριών.

(Οι Α, Β γελούν)

76. Α. Έτσι πήγα να το κάνω πριν. Απλά πράγματα.

77. Β. Να το κάνουμε έτσι, να δούμε πόσα θα βγουν και πώς αλλιώς μπορούμε να το βγάλουμε...

78. Α. Ναι, και μετά το βλέπουμε, και μετά το βλέπουμε. Ας το κάνουμε έτσι. Λοιπόν... να το κάνουμε με πάτημα στη μονάδα; Ναι, ας το κάνουμε με πάτημα στη μονάδα.

79. Β. Σε τι θα σ' εξυπηρετήσει αυτό;

80. Α. Έλα μωρέ να τελειώνουμε τώρα!

81. Β. Όχι, να μην κάνουμε βλακείες; Με ποιο σκεπτικό θα σ' εξυπηρετήσει αυτό; Δηλαδή...

82. Α. Για να βγάλουμε ένα αποτέλεσμα (...)

83. Β. Το ένα τμήμα, το ένα ευθύγραμμο, απ' το ένα ευθύγραμμο, πόσα, πόσες μη επικαλυπτόμενες περιοχές, μη επικαλυπτόμενες περιοχές προκύπτουν; Τι θες να κάνεις;

84. Α. Κάτσε εδώ εσύ.

85. Β. Ε;

86. Α. Κάτσε θα σου πω εγώ τώρα.

87. Β. Άντε, κάν' το για να καταλάβω τι θες να κάνεις.

88. Α. Τόσες περιοχές.

89. Β. Είναι δυνατόν αυτό; Είναι λογικό αυτό το πράγμα;

90. Α. Τόσες βγαίνουν!

91. Β. Το βλέπω.

92. Α. Τι θες να σου βγάζει (...)

93. Β. Δεν είναι λογικό. Είναι αυτό που μας έλεγε, δεν έχει έννοια αυτό 74,6. Ή θα 'ναι περιοχή ή δε θα 'ναι.

94. Α. Ε τι να σου κάνω εγώ; Τόσο βγαίνει.

95. Β. Άρα κάτι άλλο πρέπει να κάνουμε. Δεν είναι λογικό αυτό το πράγμα.

Ανάλυση – Σχόλια:

• Η Β εισάγει τη διαδικασία χρήσης αναλογίας, διαδικασία την οποία την οποία έχει προτείνει και η Α σε προηγούμενο σημείο. Πρόκειται λοιπόν για μια κοινή έννοια της οποίας απομένει η εφαρμογή. Στο 79 όμως η Β αμφισβητεί τη χρησιμότητα της διαδικασίας αυτής, η οποία δεν της φαίνεται να σχετίζεται με τα ζητούμενα του προβλήματος. Πρόκειται λοιπόν για έκφραση της νόρμας της σχετικότητας της λύσης.

• Η επιμονή της Α να εφαρμόσουν την παραπάνω διαδικασία στηρίζεται σε ένα σαθρό επιχείρημα («Για να βγάλουμε ένα αποτέλεσμα»), είναι αρκετή όμως για να γίνει η εφαρμογή. Στη συγκεκριμένη περίπτωση λοιπόν, η συμπεριφορά ενός ατόμου είναι ικανή να αναιρέσει την επίδραση της νόρμας της σχετικότητας της λύσης.[52]

• Στο παραπάνω απόσπασμα εμφανίζεται και η άλλη μορφή της νόρμας: το αποτέλεσμα της απλής μεθόδου των τριών που εφαρμόστηκε οδήγησε σε δεκαδικό πλήθος περιοχών, γεγονός που αντιβαίνει στη λογική του προβλήματος («Ή θα 'ναι περιοχή ή δε θα 'ναι»). Έτσι, εξαιτίας της νόρμας της σχετικότητας της λύσης, οι δύο φοιτήτριες αναγκαστικά οδηγούνται σε διαφορετικό τρόπο προσέγγισης.

2° Παράδειγμα (3-Z10-KK)

75. Α. Κοίτα ρε παιδί μου τώρα, αφού έχουμε τέσσερα ίδια τρίγωνα, ίδια, κι έχουμε μόνο το ένα τρίγωνο, το $\frac{1}{4}$, θα βρούμε το συνολικό όγκο και θα διαιρέσουμε δια τέσσερα. Πώς σου φαίνεται;

76. Β. Καλό ακούγεται.

77. Α. Μπορεί να 'ναι και βλακεία, αλλά...

78. Β. Λοιπόν, για κάτσε να το δούμε λίγο.

79. Α. Για σκέψου το λίγο.

80. Β. Καταρχήν έχουμε δύο τετράγωνα αυτή τη στιγμή.

81. Α. Ναι.

82. Β. Εντάξει; Ωραία. Ηη... αφού έχουμε δύο τετράγωνα, πώς είναι ρε παιδί μου, τι σχέση έχει η διάμετρος στο τετράγωνο.

83. Α. Αυτή την πλευρά θες να βρεις;

84. Β. Ναι.

85. Α. Ε, θα το κάνουμε με το Πυθαγόρειο θεώρημα. 50 και 40. $50^2 + 40^2 = x^2$.

86. Β. Ναι, x^2.

87. Α. Αλλά γιατί να τη βρούμε αυτή;

88. Β. Ε; Δεν θα μας βοηθήσει;

89. Α. Πού; Δεν ξέρω. Ή μπορούμε να γράψουμε ότι έχουμε τέσσερα ίδια, τρίγωνα, αφού έχουν 50 τη μία πλευρά και 40 την άλλη είναι ίδια, έχουν δυο πλευρές ίσες και μια γωνία ορθή, είναι ίδια τα τρίγωνα όλα έτσι;

90. Β. Και μετά;

91. Α. Είναι ίδια τα τρίγωνα, κι εμείς έχουμε γεμάτο με νερό μόνο το ένα.

92. Β. Πολύ ωραία.

93. Α. Απ' τα τέσσερα.

94. Β. Ωραία.

95. Α. Οπότε μετά θα βρούμε, θα βρούμε τον όγκο του ενυδρείου, πόσο νερό χωράει και θα διαιρέσουμε δια 4.

Ανάλυση – Σχόλια:

• Η Α εισάγει αρχικά μία διαδικασία σύμφωνα με την οποία η εύρεση του όγκου του ορθογωνίου πρίσματος που σχηματίζει το νερό στην κεκλιμένη θέση του ενυδρείου γίνεται μέσω της εύρεσης του συνολικού όγκου του ενυδρείου και της διαίρεσής του δια 4. Πρόκειται για μια έννοια η οποία τίθεται προς διαπραγμάτευση, στην πορεία της οποίας εμφανίζεται μια υπο-διαδικασία: αυτή της εύρεσης της τρίτης πλευράς του ορθογωνίου τριγώνου που αποτελεί τη βάση του ορθογωνίου πρίσματος που προαναφέραμε. Η Α αμφισβητεί τη χρησιμότητα της υπο-διαδικασίας αυτής, η Β δεν

μπορεί να την υποστηρίξει με κάποιο επιχείρημα, και η Α προχωρά στη διαμόρφωση της αρχικής διαδικασίας χωρίς τη χρήση του Πυθαγορείου θεωρήματος.

• Πρόκειται για περίπτωση στην οποία εμφανίζεται αλληλεξάρτηση μεταξύ της νόρμας της σχετικότητας της λύσης και της νόρμας της μαθηματικής δικαιολόγησης· οι φοιτητές αποφασίζουν για τη χρήση ή όχι μίας μεθόδου εφόσον αυτή είναι μαθηματικά δικαιολογημένη. Είναι ίσως η ιδανική περίπτωση εφαρμογής – και θετικής επίδρασης – των δύο νορμών.

7η Κοινωνικομαθηματική νόρμα (Νόρμα οριοθέτησης των μαθηματικών)

Σύμφωνα με αυτή τη νόρμα υπάρχει σαφής διαχωρισμός ανάμεσα σε ένα «μαθηματικό» και σε ένα «πρακτικό» τρόπο επίλυσης ενός προβλήματος. Σε κάποιες περιπτώσεις η νόρμα αυτή περιγράφει και τα όρια που – σύμφωνα με τους φοιτητές – υπάρχουν ανάμεσα σε κλάδους των μαθηματικών, και ειδικότερα ανάμεσα στην άλγεβρα και τη γεωμετρία.

1° Παράδειγμα (1-Z16-KK)

[Στη συζήτηση που έχει προηγηθεί έχει διαπραγματευτεί η διαδικασία σχεδίασης του κύκλου και της οριζόντιας διαμέτρου του]

33. Β. ... δεν ξέρω. Καλά, τέλος πάντων, πες ότι το βρήκαμε κι αυτό, έτσι; Θα φέρει μία διάμετρο.

34. Α. Ναι.

35. Β. Αυτά κι αυτά είν' το θέμα.

(Η Β αναφέρεται στα δύο τρίγωνα του σχεδίου)

36. Β. Να φέρει πάλι μία ευθεία...

37. Α. Από πού;

38. Β. Εεε, απ' το σημείο που εφάπτεται η διάμετρος με τον κύκλο...

39. Α. Μμ; Ναι, αλλά πώς θα ξέρει πού, σε ποιο σημείο; Κοίτα, άμα του πούμε από δω...

40. Β. Ναι;

41. Α. Και, να του πούμε στο τετράγωνο, (...) καθαρά πρακτικά, δηλαδή να του πούμε να του περιγράψουμε τα τετράγωνα, να μετρήσουμε μάλλον τα τετράγωνα, και να του πούμε στο τάδε τετράγωνο, να φέρεις μία ευθεία...

42. Β. Δηλαδή να βάλουμε αριθμούς στα τετραγωνάκια;

43. Α. Ναι, αυτό είναι τελείως πρακτικό όμως, δεν είναι μαθηματικό, είναι τελείως (...)

Ανάλυση – Σχόλια:

• Η διαδικασία που απασχολεί τις δύο φοιτήτριες του ζεύγους είναι η σχεδίαση των πλευρών των τριγώνων που περιέχονται στο σχέδιο. Η Α προτείνει τη χρήση κάποιου

συστήματος συντεταγμένων και περιγράφει την πρότασή της στο 41. Η Β φαίνεται πως ακολουθεί το συλλογισμό της, η ίδια η Α όμως επανέρχεται στο 43 περιγράφοντας τη μέθοδό της ως «πρακτική» και όχι «μαθηματική». Ο τρόπος έκφρασής της καταδεικνύει ότι η «μαθηματική» μέθοδος υπερισχύει της «πρακτικής», και το αποτέλεσμα είναι να εγκαταλειφθεί, προσωρινά τουλάχιστον, η συγκεκριμένη διαδικασία.

• Το παραπάνω απόσπασμα καταδεικνύει ότι η νόρμα οριοθέτησης των μαθηματικών στη συγκεκριμένη μορφή (δηλαδή του διαχωρισμού μεταξύ «μαθηματικού» και «πρακτικού» τρόπου επίλυσης ενός προβλήματος) εμποδίζει την ανάπτυξη – άρα και τη συγκρότηση – κοινών εννοιών που θεωρούνται «πρακτικές».

2° Παράδειγμα (2-Z12-AK)

134. Α. Εντάξει, άμα φέρουμε 3 ευθύγραμμα τμήματα, έχουμε 4 τρίγωνα. Πάλι κι αυτό μπακαλίστικο είναι. Να πεις ότι στις τρεις, άμα φέρεις 3 ευθύγραμμα τμήματα απ' τη μία πλευρά, κι απ' την άλλη, σχηματίζει 4 ευθύγραμμα τμήματα, 4 τρίγωνα, με τέσσερις περιοχές το καθένα. Ωραία; Άρα συνολικά οι επικαλυπτόμενες θα 'ναι 4 επί 4 16. Αν φέρεις 14 ευθύγραμμα τμήματα θα σχηματίσεις 15 τρίγωνα, με 15 επικαλυπτόμενες περιοχές. Άρα, εντάξει, αυτό έχει 100% απόδειξη; Κι άμα σου πει ο άλλος: εγώ με 60; Θα (...) 61 τρίγωνα που θα σχηματιστούν, με 61 μη επικαλυπτόμενες περιοχές. Άρα όντως 16 θα βγει εδώ, άρα όντως 225 θα βγει εδώ, άρα όντως 3600 και πάει λέγοντας.

135. Β. Ε ωραία, άμα δικαιολογήσουμε εμείς για τα 15, άσε τον άλλον που θα το κάνει με το 60 να ψάχνεται.

136. Α. Έχουμε καμιά γόμα τίποτα;

137. Β. Γιατί, πρέπει να βγει οπωσδήποτε, τέτοιο;

138. Α. Τι;

139. Β. Κάποιος τύπος;

140. Α. Δεν μιλάμε μαθηματικά αυτό, εντάξει. Κι αυτό που σου λέω εγώ σωστό είναι, να πούμε: αφού με 3 είναι το αμέσως μεγαλύτερο στο 16...

141. Β. Ωραία, ας το εξηγήσουμε έτσι, ξεκινάμε... γράψε αυτό το πράγμα.

142. Α. Να στο πω και λίγο μπακαλίστικα: με 3 ευθύγραμμα τμήματα, είναι το αμέσως επόμενο στο τετράγωνο, 16. Άρα με 14, το αμέσως επόμενο στο τετράγωνο, 15^2, το 'πα στην αρχή, 225.

143. Β. Ε ωραία ρε παιδί μου. Πες ότι, σύμφωνα με το σχήμα, με τρεις επικ, μας βγαίνει, το δικαιολογείς έτσι, άρα με 14, χωρίζονται σε 15...

144. Α. Σε 15.

145. Β. ... άρα κατ' αναλογία θα πάνε και τα υπόλοιπα έτσι.

146. Α. Αυτή είναι η μόνη λογική εξήγηση που έχουμε μέχρι τώρα.

147. Β. Να γράψουμε στο... Κι άμα σου 'ρθει κάτι άλλο.

148. Α. Γράψ' το εσύ.

(Ο Α απευθύνεται στον Κ)

149. Α. Δεν μπορεί, κάτι άλλο θα συμβαίνει εδώ. Γράψ' το εσύ, γράψ' το εσύ.

150. Β. Το θεώρημα του Θαλή τι έλεγε; Δεν κολλάει.

151. Α. Για παράλληλα, γωνίες... άστο. Δεν μπορεί να 'χει θεωρήματα, εδώ πρακτικό είν' το θέμα.

152. Β. Αν είναι πρακτικό, κι ο τρόπος που βρήκε, που βρέθηκε σωστός είναι.

Ανάλυση – Σχόλια:

• Τα δύο μέλη του ζεύγους έχουν συγκροτήσει την κοινή διαδικασία που οδηγεί στο πλήθος των μη επικαλυπτόμενων περιοχών που δημιουργούνται από οποιοδήποτε αριθμό ευθυγράμμων τμημάτων (134). Χαρακτηρίζουν τον τρόπο τους «μπακαλίστικο», δηλαδή πρακτικό (151), και επίσης θεωρούν ότι η μέθοδος επίλυσής τους δεν είναι μαθηματική (140). Τέλος, όταν τίθεται μια πρόταση που σχετίζεται με ένα θεώρημα, απορρίπτεται άμεσα, με το αιτιολογικό ότι το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι πρακτικό, άρα «Δεν μπορεί να 'χει θεωρήματα».

• Στο συγκεκριμένο απόσπασμα φαίνεται ότι η νόρμα οριοθέτησης των μαθηματικών δεν εμποδίζει τη συγκρότηση κοινής γνώσης· αυτό συμβαίνει γιατί το πρόβλημα προς επίλυση κατατάσσεται στα «πρακτικά προβλήματα» από τους φοιτητές, άρα είναι λογικό να επιδέχεται ανάλογη λύση.

3° Παράδειγμα (2-Z18-KK)

16. Α. Μία κορυφή, τρεις. 14 γραμμές, πόσες κορυφές; Δεν πάει, δεν πάει. Αν βάλουμε x και y; Μία κορυφή, τρεις γραμμές, δύο κορυφές έξι, ή άμα πάμε... ναι, πόσες τέτοιες περι...; Περίμενε ρε, δεκα... 16 βγάλαμε. Δύο κορυφές πάλι, 14 σημεία, πόσα τέτοια θα κάνουμε;

17. Β. Λες να είναι τίποτα...

18. Α. Σε τέτοιο στυλ πρέπει να 'ναι.

19. Β. Μεε... πώς το 'λεγε, με οριζόντιο... κάτσε κάτσε να... με... οριζόντιο ρε παιδί μου, τέτοιο, πώς το 'λεγε.

20. Α. Μη μου πεις συντελεστή.

21. Β. Κάτσε.

22. Α. Αυτό ψάχνεις; Αφού έχουμε, απ' τη μία τόσο, απ' την άλλη τόσο...

23. Β. Δε νομίζω να 'ναι τέτοια ρε συ. Δεν ξέρω, να... Α ρε, μπερδεύεσαι έτσι.

24. Α. Κοίτα, κάνουμε ένα μεγάλο σχήμα, και θα χωρίσουμε έτσι.

25. Β. Καταρχήν να ονομάσουμε τις κορυφές; Α Β Γ;

26. Α. Ναι. Α Β Γ.

27. Β. Έτσι; Α, Β...

28. Α. Ε, όπως θες εσύ κάν' το.

29. Β. Γ. Και από τις δύο κορυφές, απ' τη μία θα φέρουμε 14 ευθύγραμμα τμήματα, κι απ' την άλλη άλλα 14. Και πόσες περιοχές θα δημιουργηθούν.

30. Α. Ναι.

31. Β. Όχι, δεν είναι καμία σχέση με αυτό που λέω εγώ. Κατακόρυφο και τέτοια συντελεστή. Τώρα είναι με γεωμετρία θέμα.

Ανάλυση – Σχόλια:

• Το συγκεκριμένο ζεύγος βρίσκεται στην αρχή της προσπάθειάς του για εύρεση της λύσης, και η πρώτη διαδικασία που προτάσσεται είναι η χρήση αναλογίας. Η πρόταση αντιμετωπίζεται με επιφύλαξη και από τις δύο φοιτήτριες, με αποκορύφωμα τη δήλωση της Β ότι το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι γεωμετρικό, επομένως μία αλγεβρική μέθοδος δεν έχει θέση σε αυτό (31). Στη συνέχεια βέβαια, και αφού διαπιστώσουν ότι η γεωμετρική κατασκευή 14 ευθυγράμμων τμημάτων από καθεμιά από τις δύο κορυφές του τριγώνου είναι επίπονη, εφαρμόζουν την απλή μέθοδο των τριών, η οποία τις οδηγεί σε δεκαδικό πλήθος περιοχών και εγκαταλείπεται.

• Ο διαχωρισμός μεταξύ άλγεβρας και γεωμετρίας δεν φαίνεται να επιδρά σημαντικά στη συγκρότηση κοινής γνώσης, κρίνοντας πάντα από την τελική έκβαση της συγκεκριμένης συζήτησης. Αυτό όμως δεν αναιρεί την ύπαρξή του, η οποία μπορεί να συσχετιστεί με το διαχωρισμό μαθηματικών και πρακτικής.

4° Παράδειγμα (3-Z4-KK)

24. Α. Πρέπει να το σκεφτούμε σωστά τώρα.

25. Β. Κοίτα, εδώ είναι 40 έτσι;

26. Α. Ναι.

27. Β. Κι εδώ είναι 50.

28. Α. Ναι. Αφού είναι στο μέσον.

29. Β. Αφού είναι στο μέσον. Αν το κατεβάσουμε και πάει εδώ 20...

30. Α. Μμ, δεν μπορούμε να το πάμε εμπειρικά. Να το βρούμε κανονικά. Έτσι κάναμε και με το τρίγωνο, θυμάσαι;

(Η Α αναφέρεται στο δεύτερο πρόβλημα που είχαν λύσει στην προηγούμενη συνάντηση)

(Η Β απαντάει γελώντας και η Α γελάει επίσης)

31. Β. Ναι, αλλά εδώ πέρα δε μιλάμε για όλα τα ενυδρεία του κόσμου, όπως μιλάγαμε για όλα τα τρίγωνα εκεί. Μόνο για το συγκεκριμένο ενυδρείο.

Ανάλυση – Σχόλια:

• Πρόκειται για την αρχή της συνάντησης, και αυτό που απασχολεί τις δύο φοιτήτριες είναι η μορφή της διαδικασίας που θα ακολουθήσουν: «εμπειρική» ή «κανονική» (δηλαδή αλγεβρική). Η Α υποστηρίζει τον αλγεβρικό τρόπο με το επιχείρημα ότι

αποδείχτηκε αποτελεσματικός στο προηγούμενο πρόβλημα· η Β αντικρούει τον ισχυρισμό αυτό, με το επιχείρημα ότι εκείνο το πρόβλημα χαρακτηριζόταν από μια γενικότητα, σε αντίθεση με αυτό, που αναφέρεται μόνο στο «συγκεκριμένο ενυδρείο». Το γεγονός παραμένει ότι υπάρχει σαφής διαχωρισμός ανάμεσα στις δύο μεθόδους.

• Στο συγκεκριμένο ζεύγος η νόρμα της οριοθέτησης των μαθηματικών λειτουργεί μάλλον θετικά στη συγκρότηση κοινής γνώσης που μπορεί να οδηγήσει στην επίλυση του προβλήματος· κάποιος μπορεί να ισχυριστεί βέβαια ότι εξαιτίας αυτής της νόρμας δεν εξετάζεται καν η «εμπειρική» μέθοδος, η οποία δεν έχει έτσι την ευκαιρία να συγκροτηθεί ως κοινή έννοια. Είναι πιο ασφαλές λοιπόν να συμπεράνουμε ότι στο συγκεκριμένο απόσπασμα η νόρμα οριοθέτησης των μαθηματικών λειτουργεί ως «φίλτρο», το οποίο στην προκειμένη περίπτωση επιτρέπει την αποδοχή ενός τρόπου επίλυσης και την απόρριψη ενός άλλου. Το γεγονός ότι ο τρόπος που επιλέγεται οδηγεί στην επίλυση του προβλήματος δεν σχετίζεται με την ύπαρξη της νόρμας.

8η Κοινωνικομαθηματική νόρμα (Νόρμα επαλήθευσης)

Σύμφωνα με αυτή τη νόρμα για κάθε διαδικασία επίλυσης υπάρχει και μία αντίστοιχη διαδικασία επαλήθευσης. Η αντίληψη αυτή εμφανίζεται στα δύο πρώτα προβλήματα: στο πρώτο εκφράζεται κυρίως με τη διαδικασία ανάληψης του ρόλου του βιοτέχνη από τον ένα φοιτητή ώστε να επαληθεύσει αν μπορεί να κάνει το σχέδιο βάσει των οδηγιών· στο δεύτερο πρόβλημα εκφράζεται με τη γεωμετρική κατασκευή κάποιου αριθμού ευθυγράμμων τμημάτων από καθεμιά από τις δύο κορυφές του τριγώνου για την επαλήθευση του αριθμητικού αποτελέσματος.

1° Παράδειγμα (1-Z7-KK)

[Στη συζήτηση που έχει προηγηθεί οι Α, Β έχουν καταλήξει στις οδηγίες που πρέπει να δώσουν, τις οποίες έχουν προχειρογράψει. Ξεκινούν λοιπόν την επαλήθευση κατά την οποία η Α δίνει τις οδηγίες και η Β αναλαμβάνει το ρόλο του βιοτέχνη. Στο συγκεκριμένο σημείο έχει ήδη δοθεί η οδηγία σχεδίασης του κύκλου του σχεδίου.]

194. Α. Λοιπόν, άνοιξε τον διαβήτη, κάνε τον κύκλο, χώρισε τον κύκλο στη μέση.

195. Β. Ποια μέση;

196. Α. Οριζόντια. Χώρισε τον κύκλο στη μέση με μια ευθεία. Περίμενε να βάλουμε την ευθεία.

197. Β. Χώρισε με μία ευθεία που να περνάει οριζόντια από την μέσην του κύκλου;

198. Α. Ναι. Οριζόντια. Γραμμή οριζόντια ναι. Του μιλάμε στο τηλέφωνο, θα καταλάβει αυτά; Λοιπόν, χώρισε στη μέση τον κύκλο, ναι, πήγαινε στο κέντρο του κύκλου, ναι. Λοιπόν, εδώ είναι τα δύσκολα.

Πήγαινε στο κέντρο του κύκλου, και προχώρα ένα κουτί αριστερά. Μέτρησε τρία κουτιά προς τα πάνω...

199. Β. Ναι, αν προχωρήσει έτσι; Οριζόντια.

200. Α. Λοιπόν, μέτρησε, λοιπόν, πήγαινε στο κέντρο του κύκλου και προχώρα ένα κουτί αριστερά, πήγαινε στο κέντρο. Οριζόντια.

201. Β. Αν πάει πάνω;

202. Α. Νάτο.

Ανάλυση – Σχόλια:

• Η διαδικασία που απασχολεί τις δύο φοιτήτριες στο παραπάνω απόσπασμα είναι η σχεδίαση της οριζόντιας διαμέτρου του κύκλου που περιλαμβάνει το σχέδιο. Η αρχική έκφραση «χώρισε τον κύκλο στη μέση» εμπλουτίζεται διαδοχικά και από τις δύο φοιτήτριες με το βασικό επίρρημα «οριζόντια». Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι στη στιχομυθία επιδρούν δύο νόρμες: η νόρμα της κατανόησης από τρίτο (που εκφράζεται σαφώς στα 199, 201) και η νόρμα της επαλήθευσης η οποία οδήγησε στην όλη στιχομυθία.

• Στο συγκεκριμένο απόσπασμα φαίνεται ότι η νόρμα της επαλήθευσης δημιουργεί το υπόβαθρο στο οποίο, με την επίδραση και άλλων νορμών, διαμορφώνεται η κοινή γνώση. Πρόκειται δηλαδή για μία βασική νόρμα, η οποία όμως δεν είναι από μόνη της ικανή για τη συγκρότηση κοινής γνώσης εκφρασμένης με σαφή τρόπο που να είναι μαθηματικά τεκμηριωμένη.

2° Παράδειγμα (2-Ζ2-ΚΚ)

[Στη συζήτηση που έχει προηγηθεί οι Α, Β έχουν εφαρμόσει ένα τμήμα της απλής μεθόδου των τριών που τις έχει οδηγήσει στο αποτέλεσμα 224. Η Β στη συνέχεια αποφασίζει να εφαρμόσει αυτό που είχε προτείνει από την αρχή: τη γεωμετρική κατασκευή 14 ευθυγράμμων τμημάτων από καθεμιά από τις δύο κορυφές του τριγώνου και στη συνέχεια καταμέτρηση των μη επικαλυπτόμενων περιοχών που δημιουργούνται]

56. Α. Αφού στο ένα έχουμε τέσσερα, στα 14 πόσα θα έχουμε; Αφού στα τρία έχουμε δεκάξι, στα 14 πόσα θα έχουμε; Αυτό που κάναμε πριν είναι. Ποιος ο λόγος να μετράς;

57. Β. Για επαλήθευση.

58. Α. Αυτό είναι επαλήθευση τώρα; Ε δεν πειράζει, θα κάνω άλλο σχήμα.

59. Β. Άντε, το βρήκαμε.

(Η Β απευθύνεται στον Κ)

60. Β. Τελειώσαμε;

(Ο Κ τους λέει ότι πρέπει να γράψουν την απάντησή τους στην αρχική σελίδα)

61. Β. Γράψε.

62. Α. Λοιπόν...

63. Β. Εγώ πιστεύω ότι θα 'πρεπε να μετρήσουμε.

64. Α. Καλά, κάνε ό,τι θες.

Ανάλυση – Σχόλια:

• Αν και ήδη έχει εφαρμοστεί μια άλλη διαδικασία εύρεσης του πλήθους των περιοχών (η οποία οδηγεί σε λανθασμένο αποτέλεσμα), η νόρμα της επαλήθευσης οδηγεί τη Β στο να επιμείνει να εφαρμόσει και τη δική της διαδικασία. Μάλιστα η συγκεκριμένη αντίληψη εκφράζεται και άμεσα στο 57. Το γεγονός αυτό επιδρά σημαντικά στην επίλυση του προβλήματος, καθώς – όπως αποδεικνύεται εκ των υστέρων – οδηγεί τις φοιτήτριες στην ανακάλυψη του λάθους τους (όχι βέβαια του λάθους στο συλλογισμό, αλλά στο αριθμητικό αποτέλεσμα).

• Στο συγκεκριμένο ζεύγος η νόρμα της επαλήθευσης επιδρά στη συγκρότηση κοινής γνώσης, αλλά με έμμεσο τρόπο: εμποδίζει την αποδοχή μιας λανθασμένης διαδικασίας και οδηγεί στη συγκρότηση μιας διαφορετικής προσέγγισης, η οποία οδηγεί στο σωστό αποτέλεσμα.

2.5.4. Οι Ρόλοι που Υιοθέτησαν τα Υποκείμενα και η Επίδρασή τους στη Συγκρότηση Κοινής Γνώσης

Η ανάλυση των ρόλων που υιοθετούν οι φοιτητές αποτελεί το πιο πολύπλοκο, αλλά και το πιο ενδιαφέρον τμήμα της έρευνάς μας· αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η έννοια του ρόλου περικλείει εκτός από τις έννοιες που περιγράψαμε στην παράγραφο 1.5.2.1., τη γλώσσα που χρησιμοποιείται αλλά και τις νόρμες που ακολουθούνται. Στην ανάλυσή μας επιδιώκουμε να συμβιβάσουμε δύο φαινομενικά αντίθετες αρχές: τη λεπτομέρεια της περιγραφής κάθε ρόλου (η οποία βασίζεται στην προσεκτική σύνθεση των διαφόρων υποκατηγοριών που περιέχει η έννοια του ρόλου) και την αμεσότητα της περιγραφής αυτής (η οποία βασίζεται στη συσχέτιση κάθε ρόλου με συγκεκριμένες και ευδιάκριτες συμπεριφορές). Αρχικά θα παρουσιάσουμε την ανάλυση ενός αποσπάσματος βάσει των κατηγοριών που αναφέραμε στη σχετική παράγραφο της μεθοδολογίας, σε συνδυασμό με δύο ακόμη κατηγορίες: την κατηγορία «συμμόρφωση σε νόρμες» και την κατηγορία «επίδραση στο πρόσωπο του δρώντα ή του δέκτη». Η στιχομυθία που ακολουθεί προέρχεται από την πρώτη συνάντηση του Ζ8· ο πίνακας περιγράφει συνοπτικά το πρώτο στάδιο της ανάλυσης, την ανοιχτή κωδικοποίηση. Με έντονους χαρακτήρες σημειώνονται οι εκφράσεις μη

μαθηματικής γλώσσας, οι υπογραμμισμένες εκφράσεις σχετίζονται με τη συμμόρφωση σε κάποια νόρμα και με πλάγιους χαρακτήρες σημειώνονται οι εκφράσεις που συνδέονται *άμεσα* με μια ενέργεια που επιδρά στο πρόσωπο του ομιλητή ή του συνομιλητή.[53]

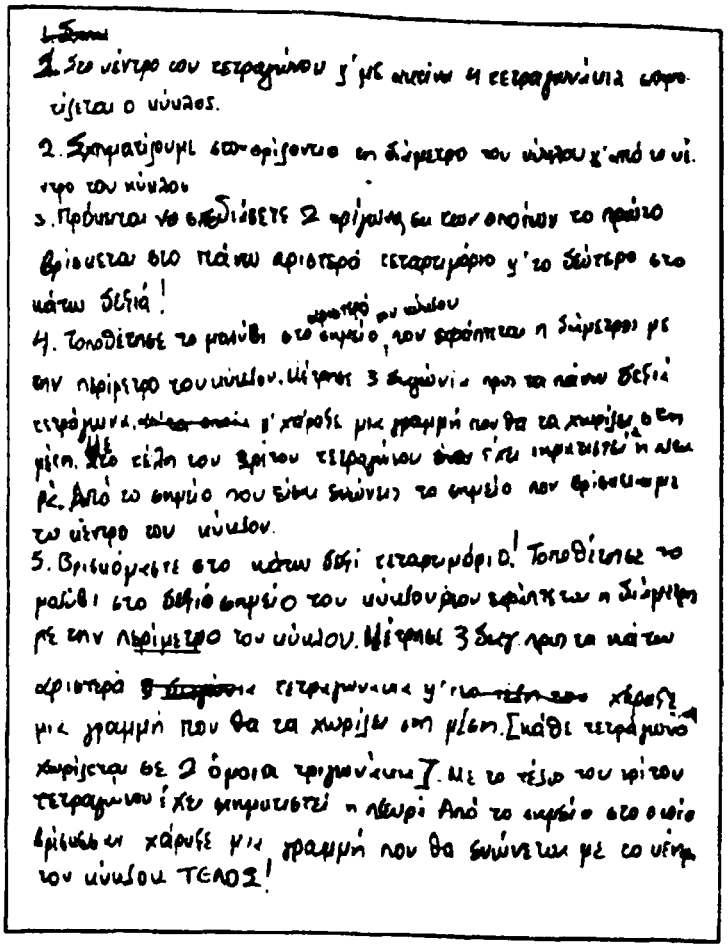
1-Z8-AK	Γλωσσικές ενέργειες	Συμμόρφωση σε νόρμες	Επίδραση στο πρόσωπο
8. **Β.** Λοιπόν, <u>να ξεκινήσουμε από τον κύκλο;</u>	Υποβολή πρότασης 1 + Αναζήτηση γνώμης	Νόρμα συνεργασίας	
9. **Α.** Ναι. *Ξέρεις τι λέω εγώ;* Παρατήρησα ότι (…) **ξεκινάει από τη δεύτερη γραμμή του τετραγώνου, απ' το πέμπτο κουτάκι, απ' τη γωνία.**	Έκφραση συμφωνίας + Υποβολή πρότασης 2		Ενίσχυση προσώπου Α
10. **Β.** <u>*Δεν θα ήταν πιο εύκολο αν*</u> πρώτα σχηματίσει τον κύκλο πηγαίνοντας στο κέντρο του κύκλου, **χρησιμοποιώντας για ακτίνα τα 4 τετράγωνα;**	Έκφραση διαφωνίας + Υποβολή πρότασης 3 + Αναζήτηση γνώμης	Νόρμα συνεργασίας + Νόρμα κατανόησης από τρίτο	Απειλή κατά προσώπου Α Ενίσχυση προσώπου Β
11. **Α.** *Εγώ το πήρα…*	Παροχή πληροφορίας		Διατήρηση προσώπου Α
12. **Β.** Για να σχηματίσει τον κύκλο;	Υποβολή πρότασης 3 (συνέχεια) + Αναζήτηση γνώμης		
13. **Α.** … *το πήρα εντελώς μπακαλίστικα.*	Παροχή πληροφορίας (συνέχεια)		Διατήρηση προσώπου Α
• Η Β γελάει.			
14. **Β.** <u>Γιατί από δω **πώς θα ξεκινήσει τον κύκλο; Απ' το κέντρο πρέπει να ξεκινήσει τον κύκλο**.</u>	Παροχή πληροφορίας	Νόρμα κατανόησης από τρίτο	
15. **Α.** <u>*Θα σου πω*</u>. Λέγοντας ας πούμε ότι, εε, **το πάνω μέρος του, του κύκλου,** είναι ρε παιδί μου στο **οριζόντιο μέρος, ξεκινάει από τη δεύτερη γραμμή στο πέμπτο κουτάκι.** 3 4 5. Είναι **στο τέλος απ' το πέμπτο κουτάκι πάνω πάνω.** Οπότε αυτή είναι η, είναι η μία, τέλος πάντων **του κύκλου. Θα περνάει από κει πέρα, δηλαδή θα τέμνεται με τη γραμμή.** Τώρα στο **κάθετο** είναι στην έκτη γραμμή.	Παροχή πληροφορίας	Νόρμα αμοιβαίας κατανόησης	Διατήρηση προσώπου Α
16. **Β.** <u>*Αυτό όλο αυτό το πράγμα μπορείς να το πεις πιο απλά αν*</u> το τοποθετήσεις στο κέντρο του τετραγώνου και του κύκλου, και ταυτόχρονα του κύκλου, και του πεις να σχηματίσει ένα κύκλο με **ακτίνα 4 τετράγωνα.**	Έκφραση διαφωνίας + Παροχή πληροφορίας	Νόρμα σαφούς έκφρασης	Απειλή κατά προσώπου Α
17. **Α.** *Α, καλά.*	Έκφραση συμφωνίας		Αποδυνάμωση προσώπο

18. Β. Και γίνεται κατευθείαν ο κύκλος.	Παροχή πληροφορίας		
19. Α. *Ναι, σωστό κι αυτό.*	Έκφραση συμφωνίας		Αποδυνάμωση προσώπου Α – Ενίσχυση προσώπου Β
20. Β. Οπότε να γράψουμε στο πρόχειρο κάτι…;	Υποβολή πρότασης 4 + Αναζήτηση γνώμης	Νόρμα συνεργασίας	
21. Α. Ναι.	Έκφραση συμφωνίας		
22. Β. Εε, μπορούμε για αρχή, για να βρεις το κέντρο του τετραγώνου…	Υποβολή πρότασης 5	Νόρμα συνεργασίας	
23. Α. Είναι το 1 2 3 4…	Παροχή πληροφορίας		
24. Β. Το πέμπτο κουτάκι δεν είναι;	Παροχή πληροφορίας + Αναζήτηση γνώμης		
25. Α. Όχι, είναι στην πέμπτη σειρά…	Έκφραση διαφωνίας + Παροχή πληροφορίας		
26. Β. Στο κέντρο του τετραγώνου…	Παροχή πληροφορίας		
27. Α. Εδώ είναι, ναι.	Έκφραση συμφωνίας		
28. Β. … είναι ακριβώς. Άμα το γράψουμε έτσι δεν θα το καταλάβαινε;	Παροχή πληροφορίας + Αναζήτηση γνώμης	Νόρμα κατανόησης από τρίτο + Νόρμα συνεργασίας	Διατήρηση προσώπου Β
29. Α. Ε, κι άμα ο βιοτέχνης δεν ξέρει;	Έκφραση διαφωνίας	Νόρμα κατανόησης από τρίτο	Απειλή κατά προσώπου Β + Διατήρηση προσώπου Α
30. Β. Ε *δεν θα καταλάβαινε το κέντρο του τετραγώνου;*	Έκφραση γνώμης	Νόρμα κατανόησης από τρίτο	Διατήρηση προσώπου Β + Απειλή κατά προσώπου Α
31. Α. *Άμα έχουμε να κάνουμε με χαζό βιοτέχνη;*	Έκφραση διαφωνίας	Νόρμα κατανόησης από τρίτο	Διατήρηση προσώπου Α
• Η Β γελάει.			
32. Α. *Εγώ φταίω; Ε πες το έτσι.*	Έκφραση γνώμης + Έκφραση συμφωνίας		Αποδυνάμωση προσώπου Α
33. Β. Πες το 1 2 3 4 5 κουτάκια, στο κέντρο.	Παροχή πληροφορίας		
34. Α. Να το γράψω;	Έκφραση αβεβαιότητας		
35. Β. Γράψε κέντρο του τετραγώνου, θα βρούμε μετά πώς θα το κάνουμε.	Υποβολή πρότασης 5 (επανάληψη)		
• Ο Α ξεκινάει να γράφει στη σελίδα 2.			
36. Α. Στο κέντρο του τετραγώνου.	Παροχή πληροφορίας		
37. Β. Ναι. Τοποθετήστε ένα διαβήτη.	Παροχή πληροφορίας		
38. Α. Ναι.	Έκφραση συμφωνίας		
39. Β. Και με ακτίνα 4 τετραγωνάκια…	Παροχή πληροφορίας		
40. Α. Ναι.	Έκφραση συμφωνίας		
41. Β. … σχηματίστε ένα κύκλο.	Παροχή πληροφορίας		
42. Α. Τετραγώνου.	Παροχή πληροφορίας		
43. Β. Συμφωνούμε μέχρι εδώ.	Κατάθεση γνώμης		
44. Α. *Μπορώ να διαφωνήσω;*	Έκφραση ειρωνείας + Ένδειξη έντασης		Απειλή κατά προσώπου Β
45. Β. *Όχι, άμα θες…*	Αναζήτηση πρότασης		Διατήρηση προσώπου Β
46. Α. Ναι. Στο κέντρο του τετραγώνου και με ακτίνα 4 τετραγωνάκια σχηματίζεται ο κύκλος.	Έκφραση συμφωνίας + Παροχή πληροφορίας		

47. **Β.** Ναι. Πάμε παρακάτω τώρα.	Έκφραση συμφωνίας + Υποβολή πρότασης 6	Νόρμα συνεργασίας	
48. **Α.** Τώρα.	Αναζήτηση πρότασης		
49. **Β.** Τώρα.	Αναζήτηση πρότασης		
50. **Α.** Όχι πες.	Αναζήτηση πρότασης		
51. **Β.** *Όχι να πω;*	Ένδειξη ένταση		Απειλή κατά προσώπου Α
52. **Α.** *Πες.*	Αναζήτηση πρότασης		Διατήρηση προσώπου Α
53. **Β.** Έχουμε, εεε, έχουμε τη διάμεσο του κύκλου, τη γραμμή αυτή...	Υποβολή πρότασης 7	Νόρμα συνεργασίας	
54. **Α.** Ναι.	Έκφραση συμφωνίας		
55. **Β.** Και μετά έχουμε ένα τρίγωνο πάνω κι ένα τρίγωνο κάτω.	Υποβολή πρότασης 7 (συνέχεια)	Νόρμα συνεργασίας	
56. **Α.** Από κάτω. Τα οποία τρίγωνα έχουν... ότι είναι, είναι και ισοσκελή, είναι και ισοσκελή.	Παροχή πληροφορίας		
57. **Β.** *Όχι.*	Έκφραση διαφωνίας		Απειλή κατά προσώπου
58. **Α.** Όχι, πώς λέγονται;	Αναζήτηση πληροφορίας		
59. **Β.** Όχι, δεν είναι.	Έκφραση γνώμης		
60. **Α.** Όχι, ναι ούτε...	Έκφραση αβεβαιότητας		
61. **Β.** Δεν είναι.	Έκφραση γνώμης		
62. **Α.** *Κάτσε ρε!* Ισοσκελή είναι.	Ένδειξη ένταση + Έκφραση βεβαιότητας		Διατήρηση προσώπου Α Απειλή κατά προσώπου
63. **Β.** Ισοσκελή;	Έκφραση αβεβαιότητας		
64. **Α.** Ναι.	Έκφραση γνώμης + Έκφραση βεβαιότητας		
65. **Β.** Ναι.	Έκφραση συμφωνίας		
66. **Α.** *Είπαμε, μπάζο είμαι στα μαθηματικά, αλλά τα ισοσκελή τα βλέπουμε.* Στο έτσι δηλαδή, άμα το πάρεις στο έτσι, όπως το κοιτάμε τώρα, βλέπεις;	Έκφραση αυτοσαρκασμού + Έκφραση βεβαιότητας + Παροχή πληροφορίας	Νόρμα συνεργασίας	Ενίσχυση προσώπου Α
• Ο Α αναποδογυρίζει την αρχική σελίδα.			
67. **Α.** Αυτά τα σκέλη είναι είναι...	Παροχή πληροφορίας		
68. **Β.** Καλά, έχουμε χάρακα τόση ώρα.	Υποβολή πρότασης 8		
69. **Α.** Έλα ντε!	Έκφραση συμφωνίας		
• Οι Α, Β μετρούν τα μήκη των πλευρών των τριγώνων.			
70. **Α.** Ισοσκελή είναι.	Παροχή πληροφορίας		
71. **Β.** Φέρε και το μοιρογνωμόνιο να το επαληθεύσουμε.	Υποβολή πρότασης 9	Νόρμα επαλήθευσης	
72. **Α.** 3 και 2. Ναι ισοσκελή είναι... Οπότε θα του δώσουμε, θα του πούμε ρε παιδί μου, ότι, όπως ξεκινάει το χαρτί...	Έκφραση γνώμης + Υποβολή πρότασης 10	Νόρμα συνεργασίας	
73. **Β.** Κάτσε, έχουμε τώρα στη διάμεσο εμείς, να του πούμε σχεδίασε αυτή τη γραμμή. Δε θα πρέπει πρώτα;	Έκφραση διαφωνίας + Υποβολή πρότασης 11 + Αναζήτηση γνώμης	Νόρμα συνεργασίας	

74. **Α.** Μισό λεπτό.	Έκφραση αβεβαιότητας		
75. **Β.** Ή κατευθείαν τα τρίγωνα;	Αναζήτηση γνώμης	Νόρμα συνεργασίας	
76. **Α.** Το ένα ισοσκελές, το ένα είναι **κανονικό** και τ' άλλο είναι **ανάποδο**.	Παροχή πληροφορίας		
77. **Β.** *Τι **κανονικό** και **ανάποδο**;*	Αναζήτηση πληροφορίας		Απειλή κατά προσώπου Α
78. **Α.** Δηλαδή, ρε παιδί μου, έτσι όπως το κοιτάμε, έτσι όπως το κοιτάς τώρα, αυτό είναι το ισοσκελές. Αυτό όμως δε φαίνεται για **ισοσκελές**...	Παροχή πληροφορίας	Νόρμα συνεργασίας	
79. **Β.** Ε, κι αυτό από, αυτ, αυτές οι δυο πλευρές είναι ίσες.	Έκφραση συμφωνίας		
80. **Α.** Όπως επίσης και αυτουνού εδώ πέρα.	Παροχή πληροφορίας		
81. **Β.** Ναι.	Έκφραση συμφωνίας		
82. **Α.** *Γι' αυτό σου λέω* είν' ανάποδο.	Παροχή πληροφορίας		Διατήρηση προσώπου Α
83. **Β.** Μμ.	Έκφραση αβεβαιότητας		
84. **Α.** *Θα μου πεις τι κάθεσαι και λες; Ν' ακούγομαι κι εγώ λίγο στο...*	Έκφραση αυτοσαρκασμού		Αποδυνάμωση προσώπου Α
• Η Β γελάει.			
85. **Β.** Λοιπόν... δεν θα μπορούσαμε κανονικά να, να του πούμε να σχηματίσει τη διάμεσο καταργήν, πράγμα εύκολο, θα το καταλάβει...	Υποβολή πρότασης 11 (επανάληψη)	Νόρμα συνεργασίας + Νόρμα κατανόησης από τρίτο	
86. **Α.** Ναι.	Έκφραση συμφωνίας		
87. **Β.** ... έπειτα να του πούμε να **πάει στο κέντρο** πάλι του κύκλου, και να του πούμε...	Υποβολή πρότασης 11 (συνέχεια)	Νόρμα συνεργασίας	
88. **Α.** Να **τραβήξει**...	Παροχή πληροφορίας		
89. **Β.** ... **κανονικά** με **μοίρες**...	Υποβολή πρότασης 11 (συνέχεια)		
90. **Α.** Να τραβ...	Παροχή πληροφορίας		
91. **Β.** Κάνε ένα τρίγωνο που η **δεξιά** γωνία να 'ναι τόσες μοίρες, η **αριστερή** τόσες...	Υποβολή πρότασης 11 (συνέχεια)		
92. **Α.** Ναι. Ναι. Δηλαδή, από το, από το κέντρο...	Έκφραση συμφωνίας + Παροχή πληροφορίας		
93. **Β.** Είναι έτσι το μοιρογνωμόνιο, τέτοιο...	Παροχή πληροφορίας		
94. **Α.** *Δηλαδή τι αγχώνεσαι;* Αφού δείχνει εδώ πέρα.	Έκφραση γνώμης + Παροχή πληροφορίας		Απειλή κατά προσώπου Β
95. **Β.** Δεν μπορώ.	Παροχή πληροφορίας		
96. **Α.** Δε δείχνει;	Αναζήτηση πληροφορίας		
97. **Β.** Δεν έχει... *δεν το έχεις βάλει στο κέντρο.* Της γωνίας.	Παροχή πληροφορίας		Απειλή κατά προσώπου Α
98. **Α.** *Πού το 'χω βάλει; Στο **απόκεντρο**;*	Ένδειξη έντασης + Έκφραση ειρωνείας		Απειλή κατά προσώπου Β
99. **Β.** Εδώ εδώ.	Παροχή πληροφορίας		

100.A. *Εδώ ορίστε.*	Ένδειξη ένταση		Απειλή κατά προσώπου
101.B. Ναι... Είναι 70...	Παροχή πληροφορίας		
102.A. Ναι, 70, 70 μισό.	Έκφραση συμφωνίας + Παροχή πληροφορίας		
103.B. Ε, 70.	Έκφραση συμφωνίας		
104.A. *Νά 'μαστε ακριβείς.* Ναι. Λοιπόν, είναι 70 μισό.	Παροχή πληροφορίας	Νόρμα σαφούς έκφρασης	Απειλή κατά προσώπου



1. Στο κέντρο του τετραγώνου γ' μία κορώνα η τετραγωνάνια κοφτο-ύμενται ο κύκλος.
2. Σχηματίζουμε ένα ορίζοντιο τη διάμετρο του κύκλου χ' από το κέ-ντρο του κύκλου
3. Πρέπει να σχεδιάσετε 2 κάθετες γραμμές και τον οποίων το πρώτο βρίσκεται στο πάνω αριστερό τετραγωνάκι γ' το δεύτερο στο κάτω δεξιά!
4. Τοποθέτησε το μολύβι στο σημείο, κοντά στο κέντρο του κύκλου που εφάπτεται η διάμετρος με την περίμετρο του κύκλου. Μέσα 3 δεξιόστροφα τα πάνω δεξιά τετράγωνα. γ' κάθε μια γραμμή που θα τα χωρίζει στη μέση. Με το τέλος του τρίτου τετραγώνου έχει σημειωθεί η λύση. Από το σημείο που είναι συνάντησε το σημείο που βρίσκεται με το κέντρο του κύκλου.
5. Βρισκόμαστε στο κάτω δεξί τετραγωνάκι! Τοποθέτησε το μολύβι στο δεξιό σημείο του κύκλου που εφάπτεται η διάμετρος με την περίμετρο του κύκλου. Μέσα 3 δεξιόστροφα τα κάτω αριστερά τετραγωνάκια γ' κάθε μια χάραξε μια γραμμή που θα τα χωρίζει στη μέση. [κάθε τετράγωνο χωρίζεται σε 2 όμοια τριγωνάκια]. Με το τέλος του τρίτου τετραγώνου έχει σημειωθεί η λύση. Από το σημείο στο οποίο βρίσκεσαι χάραξε μια γραμμή που θα συνάντησε με το κέντρο του κύκλου. ΤΕΛΟΣ!

Εικόνα 2.24. 1-Z8, σελίδα 2

Η παραπάνω κωδικοποίηση είναι προφανές ότι παρέχει μία πρώτη εικόνα της συμπεριφοράς των υποκειμένων. Για να μπορέσουμε να περιγράψουμε αναλυτικά το ρόλο του κάθε υποκειμένου απαιτείται μια ερμηνευτική διαδικασία, η οποία θα λάβει υπόψη το γενικότερο θεωρητικό μας πλαίσιο, αλλά και τις επιμέρους έννοιες και κατηγορίες που απαρτίζουν τη θεωρία ρόλου. Με άλλα λόγια πρέπει να εφαρμόσουμε την αξονική κωδικοποίηση. Τέλος, πρέπει να ληφθούν υπόψη οι διαδικασίες σχηματισμού κοινών εννοιών ή διαδικασιών και να επιχειρηθεί η συσχέτιση αυτών με το συνδυασμό των ρόλων που έχουν αναγνωριστεί (επιλεκτική κωδικοποίηση). Ξεκινούμε με μια περιγραφή της συμπεριφοράς κάθε υποκειμένου χωριστά, έχοντας πάντα υπόψη το στοιχείο της αλληλεπίδρασης το οποίο καθορίζει σε μεγάλο βαθμό τις υπό μελέτη συμπεριφορές.

Φοιτητής Α

Στην αρχή της συνάντησης ο Α καταθέτει την πρότασή του, που αφορά τη σχεδίαση του κύκλου, πρόταση την οποία αναπτύσσει στα 9, 15. Χρησιμοποιεί και στις δύο περιπτώσεις το πρώτο ενικό πρόσωπο στην εισαγωγή («Ξέρεις τι λέω εγώ;», «Θα σου πω») με σκοπό να ενισχύσει το πρόσωπό του· βρισκόμαστε στην αρχή της συνάντησης οπότε μια τέτοια επιδίωξη μπορεί να θεωρηθεί θεμιτή. Η γλώσσα που χρησιμοποιεί είναι ψευδο-μαθηματική και καθημερινή, γεγονός που φανερώνει μη συμμόρφωση στη νόρμα της σαφούς έκφρασης. Όταν η Β απορρίπτει την πρότασή του (πράξη που συνιστά απειλή στο πρόσωπό του) δεν αντιδρά, άμεσα τουλάχιστον, και μάλιστα με την παραδοχή της ορθότητας της πρότασης της Β στο 19 ενισχύει το πρόσωπό της. Σύντομα όμως, όταν αποφασίζουν να καταγράψουν τις οδηγίες προς το βιοτέχνη, προκαλείται η πρώτη σοβαρή διαφωνία, κατά την οποία ο Α επαναλαμβάνει – και εμμένει – στην αρχική του πρόταση (παράβαλε τα 23, 25 με το 15), και, χρησιμοποιώντας τη νόρμα της κατανόησης από τρίτο, επιδιώκει να ενισχύσει την πρότασή του αλλά ουσιαστικά να διατηρήσει το πρόσωπό του, το οποίο έχει πληγεί από τη συμφωνία του στην πρόταση της Β. Για δεύτερη φορά οδηγείται σε αποδοχή της ανταγωνιστικής πρότασης (32), δεν παραβλέπει όμως να εκφράσει την αβεβαιότητά του ως προς την ορθότητά της (34). Δεν αργεί όμως να προσπαθήσει ξανά να περισώσει κατά κάποιο τρόπο το πρόσωπο του, αυτή τη φορά όμως στρεφόμενος ενάντια στο πρόσωπο της Β· με την πρόταση «Μπορώ να διαφωνήσω;» στο 44 κατηγορεί – έστω και μέσω αστεϊσμού – τη Β ως μη συνεργατικό άτομο, η οποία με τη στάση της αποκρούει την κατηγορία και διατηρεί έτσι το πρόσωπό της. Η στιχομυθία 55-66 αποκαλύπτει για μία ακόμη φορά τη σημασία που δίνει ο Α στη διατήρηση του προσώπου του: η Β διαφωνεί με την έννοια που προσπαθεί να εισάγει (ισοσκελή τρίγωνα), δημιουργείται ένταση από την επιμονή και των δύο (57-62) κατά την οποία ο Α βρίσκεται πάλι στη θέση του υπερασπιζόμενου. Η κατάσταση αυτή τον οδηγεί σε μια ύστατη ενέργεια ενίσχυσης του προσώπου: τον αυτοσαρκασμό (66), ενέργεια η οποία συμπληρώνεται από μια προσπάθεια δικαιολόγησης της έννοιας που προτείνει (σύμφωνα με τις νόρμες της συνεργασίας και της αμοιβαίας κατανόησης). Η αποδοχή της έννοιας από τη Β τον οδηγεί στον εμπλουτισμό της στο 76 («Το ένα ισοσκελές, το ένα είναι κανονικό και τ' άλλο είναι ανάποδο») με χρήση καθημερινής γλώσσας. Η αντίδραση της Β (77), η οποία εκλαμβάνεται ως μία ακόμη απειλή για το πρόσωπο του Α, τον οδηγεί σε μία σύντομη προσπάθεια αποσαφήνισης, την οποία εγκαταλείπει με μια ακόμη έκφραση αυτοσαρκασμού στο 84. Αυτή τη φορά όμως δεν

μπορούμε να θεωρήσουμε το αποτέλεσμα αυτής της έκφρασης θετικό· το γεγονός της παραδοχής ότι η ομιλία του έχει σκοπό την αυτοπροβολή του, οδηγεί σαφώς σε αποδυνάμωση του προσώπου του. Ακολουθεί μία από κοινού προσπάθεια σχεδίασης του ενός τριγώνου βάσει του μέτρου των γωνιών του. Και σε αυτή την προσπάθεια δεν λείπουν οι εντάσεις (98, 100) και οι απειλητικές για το πρόσωπο της Β εκφράσεις (94). Συνοψίζοντας, ο ρόλος του Α στο συγκεκριμένο απόσπασμα διακρίνεται από μια συνεχή προσπάθεια διατήρησης του προσώπου του, η οποία σε κάποιες περιπτώσεις τον οδηγεί σε γλωσσικές ενέργειες που στρέφονται κατά του προσώπου της Β. Σε κάποιες περιπτώσεις εκφράζει απόσταση από το ρόλο του, με την έννοια ότι αντί να ασχολείται με την επίλυση του προβλήματος, ασχολείται με τον αντίκτυπο των ενεργειών του στο πρόσωπό του (χαρακτηριστικό παράδειγμα η αυτοσαρκαστική του διάθεση στο 84). Η βαθμός συμμόρφωσής του στις νόρμες της συνεργασίας και της αμοιβαίας κατανόησης είναι σχετικά υψηλός, και δείχνει ότι σέβεται και υπολογίζει τη γνώμη της συμφοιτήτριάς του. Η γλώσσα που χρησιμοποιεί είναι ως επί το πλείστον μη μαθηματική, γεγονός που δημιουργεί προβλήματα στην αποδοχή των διαδικασιών που προτείνει (εξαιτίας της νόρμας σαφούς έκφρασης). Όσον αφορά την αλληλεξάρτηση ενεργειών του με αντίστοιχες της Β, μπορούμε να πούμε ότι δεν υφίσταται κάποια ευδιάκριτη σχέση διευκόλυνσης ή παρεμπόδισης.

Φοιτήτρια Β

Στην αρχή της συνάντησης η Β καταθέτει μία πρόταση για τη σχεδίαση του κύκλου η οποία είναι ανταγωνιστική της αντίστοιχης του Α. Ο τρόπος έκφρασής της είναι ήπιος και στα πλαίσια της νόρμας της συνεργασίας και της κατανόησης από τρίτο («Δεν θα ήταν πιο εύκολο αν...»). Η διαφωνία της αυτή – όπως και κάθε διαφωνία – στρέφεται έμμεσα κατά του προσώπου του Α, χωρίς όμως να μπορούμε να αποδώσουμε στη Β εγωιστικά κίνητρα: απλά εκφράζει τη διαφωνία της μέσω μιας ανταγωνιστικής πρότασης. Όπως προαναφέραμε βέβαια, ο Α εκλαμβάνει τη διαφωνία αυτή ως απειλή για το πρόσωπό του και προσπαθεί να διαμορφώσει κατάλληλα την πρότασή του· η Β όμως αντιπαρέρχεται, αυτή τη φορά χρησιμοποιώντας τη νόρμα της σαφούς έκφρασης «Αυτό όλο το πράγμα μπορείς να το πεις πιο απλά...». Στην προηγούμενη φράση, η έκφραση «αυτό όλο το πράγμα» μπορεί να θεωρηθεί σαφώς ως απειλή για το πρόσωπο του Α, αφού η πρότασή του χαρακτηρίζεται μακρόσυρτη και ασαφής. Γενικά πάντως η Β ακολουθεί τη νόρμα της συνεργασίας, γεγονός που καταδεικνύεται από τη χρήση του πρώτου πληθυντικού προσώπου στην πλειοψηφία

των ρημάτων που χρησιμοποιεί. Στη διαφωνία της στιχομυθίας 28-31 εκφράζεται μία αμοιβαία προσπάθεια διατήρησης του προσώπου από τους δύο μετέχοντες, η οποία δημιουργεί ίσως κάποια ένταση, η οποία εκτονώνεται από τα γέλια της Β μετά το 31. Γεγονός είναι ότι η Β δεν επιμένει στην εφαρμογή της δικής της πρότασης («Γράψε κέντρο του τετραγώνου, θα βρούμε μετά πώς θα το κάνουμε») και η διαπίστωσή της στο 43 («Συμφωνούμε μέχρι εδώ») εκφράζει την ικανοποίησή της για τη συμφωνία (Το γεγονός ότι ο Α εκλαμβάνει τη συγκεκριμένη έκφραση ως αφορμή για να υπερασπιστεί το πρόσωπό του δε σχετίζεται με τη συμπεριφορά της Β). Η μοναδική στιγμή έντασης που οφείλεται στη Β εμφανίζεται στη σύντομη στιχομυθία 48-52: πρόκειται για μια μικρής σημασίας γλωσσική ανταλλαγή με θέμα τη σειρά με την οποία θα μιλήσουν, και ανάλογα μικρή είναι και η ένταση που προκαλείται. Στη συνέχεια, όταν ο Α εισάγει την έννοια των ισοσκελών τριγώνων, η αντίδραση της Β συνιστά απειλή προς το πρόσωπό του – η οποία οδηγεί σε ένταση – χωρίς όμως να μπορούμε να αποδώσουμε στη Β εγωιστικά κίνητρα. Το γεγονός αυτό αποδεικνύεται και από τις προτάσεις που καταθέτει στα 68, 71, οι οποίες είναι βοηθητικές στην κοινή πια έννοια των ισοσκελών τριγώνων. Στα 73, 75 η Β καταθέτει μια νέα πρόταση, πάντα όμως με τρόπο που συνάδει με τη νόρμα της συνεργασίας, αφού όχι μόνο ζητάει τη γνώμη του Α, αλλά παραθέτει και εναλλακτική πρόταση στο 75. Στην ίδια πρόταση επανέρχεται στο 85, την οποία αναπτύσσει σταδιακά. Στην απειλή κατά του προσώπου της («Δηλαδή τι αγχώνεσαι;») απαντά με απειλητική για το πρόσωπο του Α έκφραση στο 97. Συνοψίζοντας, ο ρόλος της Β διακρίνεται από τον υψηλό βαθμό συμμόρφωσης στις νόρμες της συνεργασίας, της κατανόησης από τρίτο, αλλά και της σαφούς έκφρασης. Αυτό καταδεικνύεται από την αποφυγή εκφράσεων μη μαθηματικής γλώσσας (με ελάχιστες εξαιρέσεις). Η διατήρηση του προσώπου της την απασχολεί, αλλά όχι σε τόσο έντονο βαθμό όσο το συμφοιτητή της. Τέλος, οι προτάσεις της εκφράζονται με τέτοιο τρόπο ώστε να διευκολύνεται η ουσιαστική συζήτηση, πάνω στη βάση των κοινωνικών και κοινωνικομαθηματικών νορμών που έχουμε αναφέρει.

Επίδραση των δύο ρόλων στη συγκρότηση κοινής γνώσης

Όπως επισημαίνουμε στη στήλη με τις γλωσσικές ενέργειες, συνολικά κατατίθενται 11 προτάσεις από τους δύο μετέχοντες, οι οποίες περιέχουν κάποιες έννοιες ή διαδικασίες. Από αυτές, κάποιες μπορούν να θεωρηθούν διαδικαστικού χαρακτήρα (είναι οι προτάσεις 1, 4, 6, 8, 9), ενώ οι υπόλοιπες μπορούν να χαρακτηριστούν

μαθηματικές (είναι οι προτάσεις 2, 3, 5, 7, 10, 11). Αναλύοντας την πορεία καθεμιάς από αυτές τις προτάσεις, σε σχέση πάντα με τους ρόλους των υποκειμένων, μπορούμε να παρατηρήσουμε τα εξής:

• Η πρώτη (διαδικαστικού τύπου) πρόταση που εισάγεται από τη Β γίνεται άμεσα αποδεκτή από τον Α, και ακολουθείται σε όλο το απόσπασμα που παραθέτουμε. Πρόκειται για την πρώτη κοινή διαδικασία που συναντούμε.

• Η πρόταση 2 που υποβάλλει ο Α, αφορά στη σχεδίαση του κύκλου του σχεδίου και αποτελεί το μαθηματικό συμπλήρωμα της πρότασης 1 (με την έννοια ότι η πρόταση 1 αναφέρεται στη σειρά με την οποία θα πραγματοποιηθεί η σχεδίαση ενώ η πρόταση 2 στον τρόπο με τον οποίο θα πραγματοποιηθεί). Η αρνητική αντίδραση της Β δεν τον πτοεί: εμπλουτίζει και προσπαθεί να αποσαφηνίσει τη διαδικασία στο 15, αλλά χωρίς αποτέλεσμα· η αντιπρόταση της Β (πρόταση 3), η οποία χρησιμοποιεί και τρεις βασικές νόρμες για να τη στηρίξει (10, 14, 16), τον οδηγεί στην αποδοχή της (πράξη που συνάδει με τη νόρμα της συνεργασίας). Πρόκειται για μια ακόμη κοινή διαδικασία, η οποία εφαρμόζεται στη στιχομυθία 36-42.

• Η πρόταση 4, καθαρά διαδικαστικού χαρακτήρα γίνεται και αυτή άμεσα αποδεκτή.

• Η πρόταση 5 αποτελεί μια υπο-πρόταση της πρότασης 2 και αφορά τον εντοπισμό του κέντρου του κύκλου. Το γεγονός αυτό δίνει την ευκαιρία στον Α να επανέλθει στη διαδικασία που είχε προτείνει αρχικά, διαδικασία με την οποία διαφωνεί η Β. Οι δύο συνομιλητές δεν καταφέρνουν να ξεπεράσουν σε αυτό το χρονικό σημείο τη διαφωνία τους, με αποτέλεσμα τη «συναινετική» πρόταση της Β στο 35 (η οποία αποτελείται από τη δική της προτεινόμενη έννοια «κέντρο του τετραγώνου» μαζί με μια άγνωστη συνοδευτική διαδικασία «θα βρούμε μετά πώς θα το κάνουμε»). Η κοινή αποδοχή της συγκεκριμένης διαδικασίας μετατίθεται σε ύστερη χρονική στιγμή.

• Η πρόταση 6, διαδικαστικού χαρακτήρα γίνεται άμεσα αποδεκτή και οδηγεί στην πρόταση 7 της Β, την οποία ο Α (ακολουθώντας τη νόρμα της συνεργασίας) εμπλουτίζει με την έννοια των ισοσκελών τριγώνων. Παρόλη την ένταση που δημιουργείται αρχικά, η έννοια γίνεται αποδεκτή από τη Β, η οποία προσθέτει δύο ακόμη «βοηθητικές» προτάσεις (τις προτάσεις 8 και 9), αποδεικνύοντας έμπρακτα την αποδοχή της κοινής πια έννοιας των ισοσκελών τριγώνων.

• Γενικά, οι ρόλοι και των δύο συνομιλητών επιδρούν θετικά στη συγκρότηση κοινής γνώσης, αφού και οι δύο ακολουθούν τη νόρμα της συνεργασίας, αλλά και τις άλλες νόρμες που σχετίζονται με το συγκεκριμένο πρόβλημα. Αυτό που διαφοροποιεί τους

δύο ρόλους είναι η σημασία που δίνει ο κάθε συνομιλητής στη διατήρηση του προσώπου του και η επίδραση που έχει αυτό στη διαπραγμάτευση των προτεινόμενων εννοιών. Ο Α δίνει μεγάλη σημασία σε αυτό, με αποτέλεσμα να αναλώνεται στην υποστήριξη προτάσεων που δεν πληρούν κάποια κριτήρια που σχετίζονται με αντίστοιχες νόρμες (όπως π.χ. στα 15, 76), γεγονός που συνειδητοποιεί και ο ίδιος (84). Η Β αντίθετα, παρουσιάζοντας υψηλό βαθμό συμμόρφωσης στις σχετικές νόρμες, εκφράζει τις προτάσεις και τις αντιρρήσεις της πάντα με τέτοιο τρόπο ώστε να μην επηρεάζεται αρνητικά η διαδικασία διαπραγμάτευσης κάθε έννοιας.

2.5.4.1. Συνοπτική Περιγραφή και Παραδείγματα Όλων των Ρόλων

Η διαδικασία που περιγράψαμε παραπάνω ακολουθήθηκε στην ανάλυση όλων των απομαγνητοφωνημένων συζητήσεων. Οδηγούμαστε με αυτό τον τρόπο σε τέσσερις διακριτούς ρόλους, οι οποίοι καλύπτουν επαρκώς όλο το φάσμα των συμπεριφορών που αναλύσαμε. Πρέπει σε αυτό το σημείο να τονίσουμε τα εξής:

- Κάθε ρόλος περιγράφεται πάντα σε συνάρτηση με κάποιο άλλο ρόλο.
- Σε κάποιες περιπτώσεις το ίδιο άτομο ερμηνεύει περισσότερους του ενός ρόλους κατά τη διάρκεια μιας συνάντησης· σε αυτές τις περιπτώσεις επιλέγουμε το ρόλο που θεωρούμε ότι υπερτερεί.[54]

1ος Ρόλος: Ο συνεργατικός αξιολογητής

Ο συνεργατικός αξιολογητής είναι το άτομο που συνδυάζει τις εξής συμπεριφορές:

- Σπάνια εκφράζει με απόλυτο τρόπο τις προτάσεις του.
- Συμφωνεί με πρόταση του συνομιλητή του, μόνο εφόσον αυτή είναι επαρκώς τεκμηριωμένη και σχετική με το πρόβλημα (ακολουθεί δηλαδή τις αντίστοιχες κοινωνικές και κοινωνικομαθηματικές νόρμες).
- Υποβάλει προτάσεις μόνο εφόσον αυτές συνάδουν με τις αντίστοιχες κοινωνικές και κοινωνικομαθηματικές νόρμες.
- Αναζητά συνεχώς προτάσεις από το συνομιλητή του.
- Καταθέτει τη γνώμη του κυρίως εάν του ζητηθεί.
- Ζητά πάντα τη γνώμη του συνομιλητή του.
- Δίνει πάντα πληροφορίες για την πρότασή του είτε του ζητηθεί είτε όχι.
- Γενικά, συμμορφώνεται σε όλες τις νόρμες που προαναφέραμε, στο βαθμό που είναι αυτό δυνατό.

• Διαχειρίζεται την όποια ένταση με τρόπο τέτοιο ώστε αρχικά να διατηρήσει ομαλή την πορεία επίλυσης και στη συνέχεια να μη χάσει το πρόσωπό του.

2ος Ρόλος: Ο συνεργατικός καθοδηγητής

Ο συνεργατικός καθοδηγητής είναι το άτομο που συνδυάζει τις εξής συμπεριφορές:

• Εκφράζει βεβαιότητα για τις περισσότερες προτάσεις του.

• Συμφωνεί με πρόταση του συνομιλητή του, μόνο εφόσον αυτή είναι επαρκώς τεκμηριωμένη και σχετική με το πρόβλημα (ακολουθεί δηλαδή τις αντίστοιχες κοινωνικές και κοινωνικομαθηματικές νόρμες).

• Υποβάλει περισσότερες προτάσεις από το συνομιλητή του, οι περισσότερες των οποίων συνάδουν με τις αντίστοιχες κοινωνικές και κοινωνικομαθηματικές νόρμες.

• Αναζητά προτάσεις μόνο εφόσον δεν έχει να υποβάλει ο ίδιος.

• Καταθέτει τη γνώμη του είτε του ζητηθεί είτε όχι.

• Ζητά σχεδόν πάντα τη γνώμη του συνομιλητή του.

• Δίνει πληροφορίες για την πρότασή του όποτε του ζητηθεί.

• Γενικά, συμμορφώνεται σε όλες τις νόρμες που προαναφέραμε, στο βαθμό που είναι αυτό δυνατό.

• Διαχειρίζεται την όποια ένταση με τρόπο τέτοιο ώστε αρχικά να μη χάσει το πρόσωπό του και στη συνέχεια να διατηρήσει ομαλή την πορεία επίλυσης.

3ος Ρόλος: Ο εγωκεντρικός καθοδηγητής

Ο εγωκεντρικός καθοδηγητής είναι το άτομο που συνδυάζει τις εξής συμπεριφορές:

• Συνήθως εκφράζει με απόλυτο τρόπο τις προτάσεις του.

• Συμφωνεί με πρόταση του συνομιλητή του μόνο εφόσον αυτή είναι επαρκώς τεκμηριωμένη και σχετική με το πρόβλημα (ακολουθεί δηλαδή τις αντίστοιχες κοινωνικές και κοινωνικομαθηματικές νόρμες). Η συμφωνία του συνήθως συνοδεύεται από εκφράσεις αμφιβολίας.

• Υποβάλει περισσότερες προτάσεις από το συνομιλητή του, χωρίς να εξετάζει πάντα αν αυτές συνάδουν με τις αντίστοιχες κοινωνικές και κοινωνικομαθηματικές νόρμες.

• Αναζητά προτάσεις μόνο εφόσον νοιώθει ανασφάλεια στο να υποβάλει ο ίδιος ή επιδιώκοντας να επιδείξει ένα συνεργατικό πρόσωπο.

• Καταθέτει τη γνώμη του είτε του ζητηθεί είτε όχι.

• Σπάνια ζητά τη γνώμη του συνομιλητή του.

• Δίνει πληροφορίες για την πρότασή του, αλλά όχι πάντα.

• Διαχειρίζεται την όποια ένταση με τρόπο τέτοιο ώστε να μη χάσει το πρόσωπό του και μερικές φορές ενάντια στο πρόσωπο του συνομιλητή του.

• Αν χρειαστεί, προσαρμόζει κάποιες νόρμες με τρόπο ώστε να μην απειληθεί το πρόσωπό του.

4ος Ρόλος: Ο παθητικός συνεργάτης

Ο παθητικός συνεργάτης είναι το άτομο που συνδυάζει τις εξής συμπεριφορές:

• Σπάνια εκφράζει βεβαιότητα για τις προτάσεις που καταθέτει.

• Σχεδόν πάντα συμφωνεί με τις προτάσεις του συνομιλητή του.

• Υποβάλει πολύ λιγότερες προτάσεις από το συνομιλητή του.

• Σπάνια αναζητά προτάσεις.

• Καταθέτει τη γνώμη του μόνο εάν του ζητηθεί.

• Πάντα ζητά τη γνώμη του συνομιλητή του.

• Δίνει πάντα πληροφορίες για την πρότασή του.

• Γενικά, συμμορφώνεται σε όλες τις νόρμες που προαναφέραμε, στο βαθμό που είναι αυτό δυνατό.

• Διαχειρίζεται την όποια ένταση με τρόπο τέτοιο ώστε αρχικά να διατηρήσει ομαλή την πορεία επίλυσης και στη συνέχεια να διατηρήσει το πρόσωπό του.

Στη συνέχεια, αναφέρουμε παραδείγματα συνδυασμών των παραπάνω ρόλων.

1ο Παράδειγμα: Συνεργατικός αξιολογητής – Συνεργατικός αξιολογητής

Πρόκειται για την πιο συνηθισμένη περίπτωση συνδυασμού ρόλων. Χαρακτηριστικά της είναι η σχεδόν ισότιμη συμμετοχή των μελών του ζεύγους στη διαμόρφωση κοινών εννοιών και οι ελάχιστες εντάσεις μεταξύ τους. Η αλληλεπίδραση εξελίσσεται ομαλά, και η μέθοδος επίλυσης που τελικά υιοθετείται είναι προϊόν από κοινού διαπραγμάτευσης. Περιγράφουμε στη συνέχεια τη χρονική εξέλιξη των ερμηνειών των δύο όμοιων ρόλων στο Z18.

Φοιτήτρια Α: Συνεργατικός αξιολογητής

Στην αρχή της πρώτης συνάντησης, όπως φαίνεται στο απόσπασμα που ακολουθεί, η Α σε πλήρη συνεργασία με τη Β αποφασίζουν για τη σχεδίαση του κύκλου του σχεδίου. Το επόμενο βήμα είναι η σχεδίαση των δύο τριγώνων του σχεδίου. Στο 14 η

Α καταθέτει την πρότασή της η οποία, λόγω και της ψευδο-μαθηματικής γλώσσας που χρησιμοποιείται, δεν γίνεται αποδεκτή και μάλιστα η έκφραση στο 15 στρέφεται κατά του προσώπου της. Παρατηρούμε όμως ότι η αντίδρασή της δεν είναι να προστατέψει το πρόσωπό της· αντίθετα, παραδέχεται το λάθος της, αποφεύγοντας έτσι τη δημιουργία έντασης.

1. Α. Το πρώτο βήμα είναι, εντάξει, είναι να γίνει πρώτα ένας κύκλος.

2. Β. Ναι, οι διαστάσεις;

3. Α. Να το μετρήσουμε με διαβήτη...

(Η Α παίρνει το διαβήτη)

4. Α. Λοιπόν, το κέντρο...

5. Β. Να μετρήσουμε την ακτίνα;

6. Α. Τρία.

7. Β. Η ακτίνα είναι τρία εκατοστά.

(Η Α γράφει στη σελίδα 2)

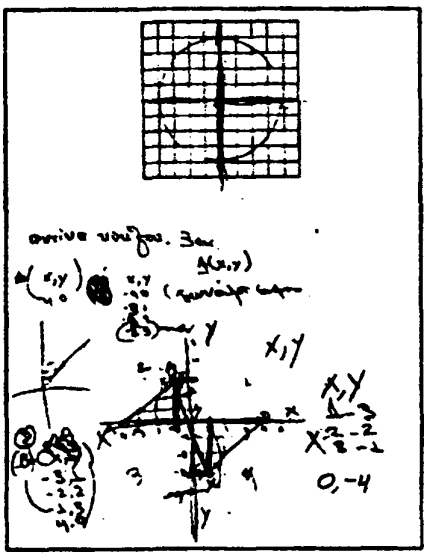
8. Α. Ναι, λοιπόν, ακτίνα κύκλου τρία εκατο...

9. Β. Εκατοστά.

10. Α. Ωραία.

11. Β. Η διάμετρος βασικά θα είναι έξι.

12. Α. Να μετρήσουμε κι από 'δώ. Ένα λεπτό...



Εικόνα 2.25. 1-Z18, σελίδα 2

13. Β. Εντάξει, ναι, λοιπόν άλλο, κάναμε τον κύκλο. Μετά τι κάνουμε;

14. Α. Λοιπόν. Αυτά είναι τεταρτημόρια, 360 όλο. 1 2, 3 4. Άρα, υποτίθεται ότι του λέμε ότι από το δεύτερο τεταρτημόριο, φέρνουμε, τώρα στη μέση; Αλλά δε θυμάμαι τώρα τι είναι αυτό, διαγώνιος; Τι στο καλό είναι; Διαγώνιος θα μου πεις είναι στα τρίγωνα.

15. Β. Όχι δεν είναι, καμία σχέση.

16. Α. Καμία σχέση το ξέρω... Περίμενε ρε συ, περίμενε. Αν υποτίθεται...

17. Β. Μήπως πρέπει έτσι να πάμε;

18. Α. Με τα κουτάκια;

19. Β. Μμ.

20. Α. Τι, δεύτερο από αριστερά, ξέρεις...

21. Β. Κοίτα, βασικά, είναι ρε παιδί μου οι συντεταγμένες ας πούμε.

22. Α. x και y ναι.

Ο συνεργατικός χαρακτήρας του ρόλου της Α καταδεικνύεται και από τον άμεσο τρόπο με τον οποίο κατανοεί (17) και συν-διαμορφώνει (20, 22) την πρόταση της Β πριν καν εκφραστεί αυτή λεκτικά (πιθανόν η Β απλά έδειξε στην Α το τετραγωνισμένο πλαίσιο). Η διαπραγμάτευση αυτής της διαδικασίας δεν γίνεται χωρίς να υπάρχουν διαφωνίες: η ειδοποιός διαφορά μεταξύ του συνεργατικού αξιολογητή και του εγωκεντρικού καθοδηγητή (που μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τοποθετείται στο άλλο άκρο της κλίμακας των ρόλων με κριτήριο το βαθμό

συμμόρφωσης στη νόρμα της συνεργασίας) έγκειται στο τρόπο χειρισμού αυτών των διαφωνιών: χωρίς απόλυτες και αμετακίνητες θέσεις και πάντα με γνώμονα την ομαλή και αποτελεσματική συνεργασία:

47. Β. Πρώτο δεύτερο τρίτο τέταρτο τεταρτημόριο, έτσι δεν είναι;

48. Α. Ναι.

49. Β. Στο πρώτο τεταρτημόριο.

50. Α. Πρώτο δεύτερο τρίτο τέταρτο.

51. Β. Γιατί, έτσι πάει; Έτσι νομίζω πάει.

52. Α. Νομίζ... η φορά του κύκλου έτσι δεν πηγαίνει;

53. Β. Δεν δεν...

54. Α. 1 2 3 4. Απ' ότι θυμάμαι. Επομένως, αν πούμε το σημείο x, y –4. Εε, συντεταγμένη και τετμημένη, πώς πάνε αυτά;

55. Β. Τ... τετμημένη και τεταγμένη.

56. Α. Απ' όσο θυμάμαι έτσι πάνε.

57. Β. Κι αυτές είναι οι συντεταγμένες.

Ο ρόλος της Α δε μεταβάλλεται στο υπόλοιπο της συνάντησης· αφού μεσολαβήσει μια διαδικασία αμοιβαίας συγκρότησης των οδηγιών, οι δύο φοιτήτριες καθαρογράφουν τις οδηγίες, μια διαδικασία που εξελίσσεται ομαλά, παρά τις όποιες διαφωνίες προκύπτουν.

Στη δεύτερη συνάντηση ο συσχετισμός των ρόλων δεν αλλάζει. Επισημαίνουμε για μία ακόμη φορά τον τρόπο εισαγωγής νέων προτάσεων με τρόπο ώστε κάθε κριτική να είναι ευπρόσδεκτη. Αυτή τη λειτουργία εξυπηρετεί η τελευταία πρόταση στο 11 του αποσπάσματος που ακολουθεί. Ίσως ο τρόπος έκφρασης φαίνεται υπερβολικός στη Β, γι' αυτό το λόγο κάνει τις ερωτήσεις στα 12, 14. Η Α πάντως, στο συγκεκριμένο απόσπασμα, όχι απλά προκαλεί τη Β να αξιολογήσει την πρότασή της, αλλά γρήγορα η ίδια διαπιστώνοντας τις αδυναμίες της πρότασης, την εγκαταλείπει για κάποια άλλη (16):

11. Α. Ναι, τρία, κι απ' αυτήν τρία, σύνολο έξι, υποτίθεται, γραμμές. Αν φέρουμε... πόσες περιοχές (...) 14 από κάθε μία, δηλαδή 14 απ' αυτήν... από κάθε μία, ναι, όχι κι απ' τις δύο μαζί. 14 από 'δώ και 14 από κει. Μάαλιστα. Φαντάσου να το κάνουμε και να τις μετρήσουμε;

12. Β. Ναι, πρέπει... γιατί;

13. Α. Μωρέ...

14. Β. Δεν είναι έτσι λες;

15. Α. Περίμενε... μωρέ, κοίτα.

(Η Α γράφει στη σελίδα 2)

16. Α. Μία κορυφή, τρεις. 14 γραμμές, πόσες κορυφές; Δεν πάει, δεν πάει. Αν βάλουμε x και y; Μία

κορυφή, τρεις γραμμές, δύο κορυφές έξι, ή άμα πάμε... ναι, πόσες τέτοιες περι...; Περίμενε ρε, δεκα... 16 βγάλαμε. Δύο κορυφές πάλι, 14 σημεία, πόσα τέτοια θα κάνουμε;

17. Β. Λες να είναι τίποτα...

18. Α. Σε τέτοιο στυλ πρέπει να 'ναι.

Η εφαρμογή της απλής μεθόδου των τριών τις οδηγεί σε αδιέξοδο και η Α αποφασίζει να εφαρμόσει τελικά την αρχική της πρόταση. Η καταμέτρηση των περιοχών που δημιουργούνται αποδεικνύεται επίπονη διαδικασία: η Α αναγκάζεται να σχεδιάσει δύο φορές το τρίγωνο για να μπορεί να διακρίνει ευκολότερα τις περιοχές που δημιουργούνται. Στη συνέχεια αρχίζει την καταμέτρηση, ενώ η Β προσπαθεί να εφαρμόζει αλγεβρικές μεθόδους που στηρίζονται στην ύπαρξη κάποιας αναλογίας, χωρίς αποτέλεσμα όμως:

94. Α. Έλα Μαρία, ώρα για καταμέτρηση. 1 2 3 4 5...

(Η Α μετράει τις περιοχές χαμηλόφωνα)

95. Α. Τόσο πρέπει να βγαίνει.

(Η Α συνεχίζει την καταμέτρηση)

96. Α. 224 βγαίνουν.

97. Β. Είσαι σίγουρη;

98. Α. Νομίζω.

99. Β. Γιατί μ' αυτόν τον τρόπο δεν μπορούμε να τα βρούμε;

Η απορία της Β στο 99 – ή μάλλον η επιμονή της στη χρήση κάποιας αλγεβρικής μεθόδου – και η συνεργατική φύση των ρόλων των δύο φοιτητριών, τις απομακρύνει τελικά από το σωστό αποτέλεσμα και τις εμπλέκει ξανά σε μια διαδικασία η οποία τις οδηγεί σε αδιέξοδο (το γεγονός ότι η καταμέτρηση των περιοχών τις οδήγησε σε λαθεμένο πλήθος περιοχών δεν μπορεί να θεωρηθεί σημαντικό, αφού οι φοιτήτριες δεν γνωρίζουν την απάντηση). Για αυτή την κατάσταση ευθύνεται εν μέρει η συμπεριφορά των δύο φοιτητριών, οι οποίες τηρώντας τη νόρμα της συνεργασίας, και επιδιώκοντας την ελαχιστοποίηση των διενέξεων, αδυνατούν να αξιολογήσουν ουσιαστικά τις μεθόδους που διαπραγματεύονται.

Σκιαγραφώντας το ρόλο της Α στο συγκεκριμένο ζεύγος (πέρα από τα γενικά χαρακτηριστικά του συνεργατικού αξιολογητή) και την επίδρασή του στη συγκρότηση κοινής γνώσης, μπορούμε να επισημάνουμε τα εξής:

- Το βασικό χαρακτηριστικό του συγκεκριμένου ρόλου είναι ο μεγάλος βαθμός συμμόρφωσης στη νόρμα της συνεργασίας· κάθε ενέργεια πραγματοποιείται με γνώμονα την καλύτερη δυνατή συνεργασία και την αποφυγή εντάσεων.

• Ένα δεύτερο χαρακτηριστικό του ρόλου είναι η δευτερεύουσα σημασία που δίνεται στην έννοια του προσώπου· πάντα με βασικό μέλημα την αποφυγή εντάσεων ο ερμηνευτής αυτού του ρόλου αποφεύγει να εμπλέκεται σε συζητήσεις οι οποίες δεν αποσκοπούν στην επίλυση του προβλήματος, αλλά στην υπεράσπιση του προσώπου του.

• Όλες οι ενέργειες εκφράζονται με τέτοιο τρόπο ώστε να διευκολύνουν ενέργειες σχετικές με τη συνεργασία και τη διαπραγμάτευση των προτεινόμενων διαδικασιών. (Δηλαδή η έννοια της αλληλεξάρτησης εμφανίζεται με τη μορφή της διευκόλυνσης). Εξαίρεση αποτελεί ο τρόπος έκφρασης των προτάσεων ο οποίος αν και ενθαρρύνει την αξιολόγηση, παρεμποδίζει την όποια απειλητική για το πρόσωπο ενέργεια (Όταν μία πρόταση γίνεται με ερωτηματικό τόνο και ακολουθείται σχεδόν πάντα από ερώτηση σχετική με τη γνώμη του συνομιλητή, ελαχιστοποιούνται οι πιθανότητες ο συνομιλητής να στραφεί ενάντια στο πρόσωπο του ομιλητή).

• Με εξαίρεση τη νόρμα της συνεργασίας, η συμμόρφωση στις υπόλοιπες νόρμες κινείται σε υψηλά επίπεδα, με εξαίρεση ίσως τις νόρμες της σαφούς έκφρασης και της μαθηματικής δικαιολόγησης: προκειμένου να επιτευχθεί ομοφωνία στη μέθοδο που θα ακολουθηθεί, «θυσιάζονται» οι παραπάνω νόρμες.

• Η συγκρότηση κοινής γνώσης υποστηρίζεται από το συγκεκριμένο ρόλο, αφού καμιά διαδικασία δεν μπορεί να εφαρμοσθεί αν δεν έχει περάσει το στάδιο της διαπραγμάτευσης και από κοινού διαμόρφωσης. Προβλήματα ανακύπτουν στην περίπτωση που η κοινή γνώση που έχει προκύψει δεν είναι κατάλληλη για το προς επίλυση πρόβλημα· ο συνεργατικός αξιολογητής σπάνια αναλαμβάνει την πρωτοβουλία υπέρβασης ενός τέτοιου αδιεξόδου.

Φοιτήτρια Β: Συνεργατικός αξιολογητής

Ο ρόλος της Β είναι όμοιος με αυτόν της Α και παραμένει και αυτός σταθερός κατά τη διάρκεια των τριών συναντήσεων. Όσον αφορά την πρώτη συνάντηση, μετά τη στιχομυθία 1-22, την οποία αναφέραμε στην περιγραφή του ρόλου της Α, οι δύο φοιτήτριες διαμορφώνουν από κοινού τη διαδικασία χρήσης ενός συστήματος συντεταγμένων για τον εντοπισμό των άκρων των ευθυγράμμων τμημάτων που βρίσκονται στο σχέδιο. Το απόσπασμα που ακολουθεί καταδεικνύει το μεγάλο βαθμό συμμόρφωσης στη νόρμα της συνεργασίας· ενώ αρχικά η πρόταση που γίνεται στο 37 ήδη ακολουθεί τη συγκεκριμένη νόρμα (λόγω του πρώτου πληθυντικού προσώπου), η

Β την ενισχύει με την ερώτηση στο 39 με την οποία ζητά τη γνώμη της Α. Η Α από τη μεριά της μάλλον κρίνει υπερβολική την ερώτηση, γι' αυτό το λόγο, ενώ δίνει τη γνώμη της στο 40, κάνει με τη σειρά της την ερώτηση «Γιατί;». Κατά πάσα πιθανότητα η πλήρης ερώτηση θα ήταν: «Γιατί με ρωτάς;». Πρόκειται για στιχομυθία παρόμοια με την 11-15 της δεύτερης συνάντησης που αναφέραμε στην περιγραφή του ρόλου της Α.

37. Β. Κοίτα, αν φτιάξουμε τα σημεία και μετά θα πούμε ότι θα τα ενώσουμε ρε παιδί μου.

38. Α. Ναι.

39. Β. Δεν είναι;

40. Α. Ναι. Ναι είναι γιατί;

41. Β. Οπότε...

42. Α. –4.

43. Β. Να γράψουμε κι αυτή την τελεία πρέπει.

44. Α. Ναι, –4 είναι.

45. Β. –4 και 1.

Περιγράφουμε στη συνέχεια μια περίπτωση εκδήλωσης έντασης, η οποία καταδεικνύει ότι στιγμές έντασης είναι αναπόφευκτο να συμβούν, αλλά αυτό που διαχωρίζει τους συγκεκριμένους ρόλους από τους καθοδηγητικούς είναι ο τρόπος διαχείρισής της:

65. Β. –4 και 1, γράφε.

66. Α. –4 πρώτα και 0 ρε χαζό για να βγει η τελίτσα.

67. Β. Α ναι ναι, μηδέν... Εσύ όμως το 1 το έβαλες εδώ.

68. Α. Πού;

69. Β. Α, ή εδώ το 'χες. Εδώ, ναι ναι.

Στο 66 η Α διορθώνει τη Β με ένα απειλητικό για το πρόσωπό της τρόπο, η Β απαντά βιαστικά με ένα λαθεμένο ισχυρισμό, αλλά μόλις διαπιστώσει το λάθος της, το παραδέχεται άμεσα και το περιστατικό λήγει. Η μεγάλη σημασία που δίνει η Β στην ουσιαστική συνεργασία καταδεικνύεται και από το απόσπασμα που ακολουθεί:

200.Α. Ναι. Να το, 5 από δεξιά, 5 από αριστερά, στη μέση. Έλα μωρέ, αφού φαίνεται που είναι το κέντρο του, σιγά. 1 2 3 4 5.

201. Β. Πώς θα το πούμε ρε; Στο κέντρο του σχ... σημείου. Το σχέδιο χωρίζεται σε τέσσερα τεταρτημόρια, στο κέντρο αυτού του τετραγώνου βρίσκεται το σημείο 0.

202. Α. Τεταρτημόρια είναι στον κύκλο.

203. Β. Α, του κύκλου.

204. Α. Εκτός αν κάνει, x και y τους άξονες, ε, και ας δώσει, την αρχή των αξόνων.

205. Β. Το σχέδιο χωρίζεται σε τέσσερα τετράγωνα; Ίσα ίσα τετράγωνα;

206. Α. 1 2 3 4 5...

(Η Α μετράει τα τετραγωνάκια που υπάρχουν στο σχέδιο)

207. Β. Έλα ρε συ τώρα, δεν πειράζει. Το σχέδιο χωρίζεται σε τέσσερα τετράγωνα. Ίσα.

208. Α. (...)

209. Β. Τι να πούμε ρε συ; Κοίτα ρε πού κολλάμε.

210. Α. Κάτσε να το δω καλά... Ε τι να πω; Σχηματίζοντας δύο άξονες, έναν οριζόντιο κι έναν κάθετο, η έναρξη των οποίων αποτελεί...

211. Β. Ναι, τον κάθετο θα μπορούσες να τον βάλεις κι εδώ ρε συ. Ξέρω 'γώ, κάπου.

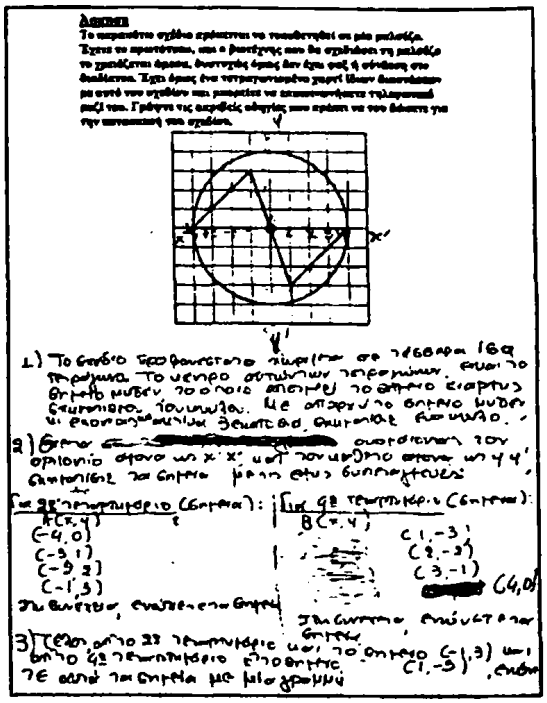
212. Α. Ε, στη μέση.

213. Β. Ναι στη μέση. Δε γίνεται. Ε αυτό θα πούμε, ε, τελείωνε. Λοιπόν...

(Η Β ξεκινάει να γράφει στην αρχική σελίδα)

214. Α. Προφανέστατα! Τι λέει ρε...

215. Β. Χωρίζεται, σε τέσσερα, ίσα.



Εικόνα 2.26. 1-Ζ18, αρχική σελίδα

Σημείο τριβής στον παραπάνω διάλογο αποτελεί ο τρόπος έκφρασης της διαδικασίας σχηματισμού ενός ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων. Η Α δείχνει αρχικά να μη συμμερίζεται την ανησυχία της Β, η οποία ακολουθώντας τη νόρμα κατανόησης από τρίτο επιδιώκει τη μέγιστη δυνατή σαφήνεια στην έκφραση. Οδηγεί έτσι την Α σε ουσιαστική συμμετοχή, η οποία είτε εμπλουτίζει υπάρχουσες προτάσεις (202, 212) είτε καταθέτει δικές της (204, 210). Η Β τελικά και ίσως αισθανόμενη ότι δεν μπορεί να αξιολογήσει επαρκώς όλα τα στοιχεία που κατατίθενται, υιοθετεί τη δική της πρόταση που έχει εκφράσει στο 205. Η όλη πορεία μέχρι την υιοθέτηση αυτής της πρότασης δεν μας επιτρέπει να αποδώσουμε στη Β εγωκεντρικά κίνητρα· είναι προφανές ότι έχει προηγηθεί μια – μικρής έκτασης στην προκειμένη περίπτωση – διαπραγμάτευση. Δεν πρέπει να παραβλέψουμε και τη χρονική στιγμή του συγκεκριμένου συμβάντος, αφού έχει προηγηθεί μια εκτενής συζήτηση σχετικά με τη χρήση του συστήματος συντεταγμένων, η οποία πιθανόν έχει καταπονήσει τις δύο φοιτήτριες.

Στη δεύτερη συνάντηση η Β – όπως και η Α – παραμένει σταθερή στην ερμηνεία του ρόλου της. Για την επίλυση του δεύτερου προβλήματος κατατίθενται δύο προτάσεις οι οποίες είναι ανταγωνιστικές σύμφωνα με η Β· η γεωμετρική κατασκευή 14

ευθυγράμμων τμημάτων από καθεμία από τις δύο κορυφές του τριγώνου και ο αλγεβρικός υπολογισμός του πλήθους των περιοχών:

31. Β. Όχι, δεν είναι καμία σχέση με αυτό που λέω εγώ. Κατακόρυφο και τέτοια συντελεστή. Τώρα είναι με γεωμετρία θέμα.

Αν και η ίδια μέχρι αυτό το χρονικό σημείο προσπάθησε να εφαρμόσει τη «γεωμετρική» μέθοδο, κρίνει ότι ο αλγεβρικός τρόπος είναι πιο ασφαλής (ή συνάδει με τη νόρμα της μαθηματικής δικαιολόγησης). Το απόσπασμα που ακολουθεί καταδεικνύει ότι ακόμη και ένας συνεργατικός αξιολογητής κάποιες φορές προσπαθεί να πείσει το συνομιλητή του για την ορθότητα ή όχι μιας πρότασης:

43. Β. Θα μετρήσεις τα τετραγωνάκια αυτά; Πού να τα μετρήσουμε ρε συ;

44. Α. Ναι, περίμενε.

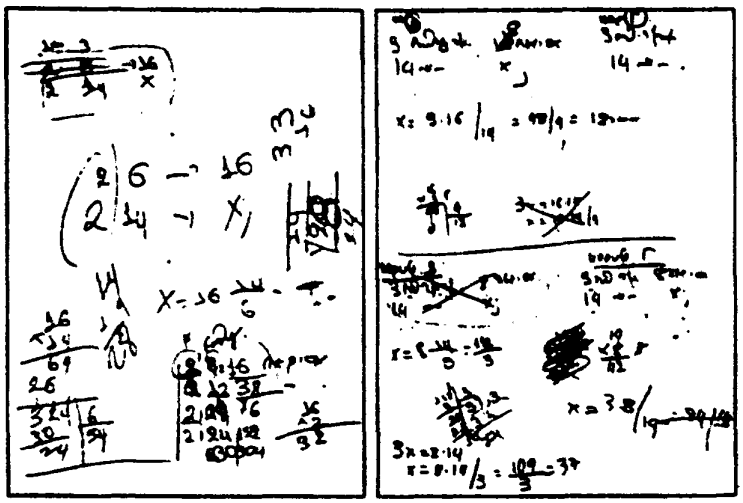
45. Β. Θα τρελαθούμε!

46. Α. 1 2 3 4 5 6 7 8... Αυτά είναι καμιά 150 ρε. Τόσα περίπου.

47. Β. Ε τι θα κάνουμε; Τώρα εντάξει, δε βγαίνει έτσι.

48. Α. Περίμενε. Λοιπόν... Άρα λογικά... περίμενε. Στις τρεις, εε, στις δύο κορυφές, πάλι 12. Μου φαίνεται...

(Η Α γράφει στη σελίδα 2)



Εικόνα 2.27. 2-Z18, σελίδες 2,4

49. Β. Συγνώμη ρε συ!

50. Α. Περίμενε, περίμενε, βρήκα. Στις δύο 18, αα.... Σαν πολλές θα 'ναι. 14... Αν σου πω ότι είναι γύρω στις 300;

51. Β. Κάτσε ρε Ντίνα.

52. Α. Περίμενε.

(Η Β γράφει στη σελίδα 4 και η Α στη σελίδα 5 σχεδιάζει το τρίγωνο, αλλά στη συνέχεια σχεδιάζει το τρίγωνο στο πίσω μέρος της σελίδας)

53. Β. Ντίνα, με μαθηματικό τρόπο βγαίνει.

Το ενδιαφέρον του παραπάνω διαλόγου έγκειται στον τρόπο με τον οποίο η Β επιδιώκει να πείσει την Α για τη μη καταλληλότητα του «γεωμετρικού» τρόπου επίλυσης του προβλήματος. Τα βασικά της επιχειρήματα είναι ότι η μέθοδος αυτή είναι χρονοβόρα και επισφαλής· ο τρόπος έκφρασής της όμως δε συνάδει ούτε με τη νόρμα της συνεργασίας (αφού είναι απότομος: 43, 45, 49, 51) ούτε με τη νόρμα σαφούς έκφρασης (αφού δεν εκφράζει άμεσα τα επιχειρήματά της, τα οποία μπορούν

να εξαχθούν μόνο έμμεσα: 43, 47, 53). Στη συνέχεια βέβαια, αφού η Β εφαρμόσει την απλή μέθοδο των τριών και οδηγηθεί σε δεκαδικό πλήθος περιοχών, η Α εφαρμόζει τη «γεωμετρική» μέθοδο· η νόρμα όμως της μαθηματικής δικαιολόγησης σε συνδυασμό με τη νόρμα της συνεργασίας τις οδηγεί σε αδιέξοδο. Η νόρμα της μαθηματικής δικαιολόγησης επιδρά στην αντίληψη που εκφράζει η Β στο 99: «Γιατί μ' αυτόν τον τρόπο δεν μπορούμε να τα βρούμε;», η οποία τις οδηγεί στην αναζήτηση μιας αλγεβρικής μεθόδου εύρεσης του πλήθους των περιοχών. Η νόρμα της συνεργασίας επιδρά στο γεγονός ότι καμία από τις δύο φοιτήτριες δεν επιμένει σε κάποια μέθοδο (αν π.χ. επέμεναν στη γεωμετρική κατασκευή και καταμέτρηση θα είχαν οδηγηθεί στο σωστό αποτέλεσμα, το οποίο πιθανόν να τις οδηγούσε και σε αλλαγή του συλλογισμού τους, κάτι που συνέβη σε άλλα ζεύγη).

Σκιαγραφώντας το ρόλο της Β στο συγκεκριμένο ζεύγος (πέρα από τα γενικά χαρακτηριστικά του συνεργατικού αξιολογητή, αλλά και όσα αναφέραμε για το ρόλο της Α) και την επίδρασή του στη συγκρότηση κοινής γνώσης, μπορούμε να επισημάνουμε τα εξής:

- Επιδεικνύει, όπως και η Α, μεγάλο βαθμό συμμόρφωσης στη νόρμα της συνεργασίας με μόνη εξαίρεση τη στιχομυθία 43-53 της δεύτερης συνάντησης. Όσες φορές εφαρμόζει δική της πρόταση έχει προηγηθεί διαπραγμάτευση με τη συμφοιτήτριά της.
- Δεν εκφράζει καμιά ενέργεια κατά του προσώπου της συνομιλήτριάς της, ούτε επιδιώκει την προώθηση του δικού της προσώπου με κάποιο τρόπο.
- Στη δεύτερη συνάντηση εκφράζει υψηλό βαθμό συμμόρφωσης στη νόρμα της μαθηματικής δικαιολόγησης, γεγονός που αποβαίνει εις βάρος της επιτυχούς έκβασης της συνάντησης.
- Όπως προαναφέραμε, η συγκρότηση κοινής γνώσης υποστηρίζεται από το συγκεκριμένο ρόλο και κάθε πρόταση που κατατίθεται δεν μπορεί να εφαρμοσθεί αν δεν περάσει το στάδιο της από κοινού διαπραγμάτευσης.

2ο Παράδειγμα: Παθητικός συνεργάτης – Συνεργατικός καθοδηγητής

Ο συγκεκριμένος συνδυασμός παρατηρείται στη δεύτερη συνάντηση του Ζ13, ενώ στις άλλες δύο συναντήσεις του ζεύγους παρατηρείται ο συνδυασμός Συνεργατικός αξιολογητής – Συνεργατικός καθοδηγητής. Το ρόλο του παθητικού συνεργάτη τον συναντούμε μόνο σε αυτό το ζεύγος σε τόσο έκδηλη μορφή, αν και σε άλλες

περιπτώσεις κάποιοι φοιτητές εκδηλώνουν σχετικές συμπεριφορές, αλλά για μικρά διαστήματα (χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η Α στο Ζ10, η οποία σε αρκετές περιπτώσεις εκφράζει μια ανασφάλεια στις ενέργειές της). Περιγράφουμε στη συνέχεια τη χρονική εξέλιξη των ερμηνειών των δύο ρόλων.

Φοιτήτρια Α: Παθητικός συνεργάτης

Στην αρχή της συνάντησης τίθεται από το Β η πρόταση για γεωμετρική κατασκευή του ζητούμενου αριθμού των ευθυγράμμων τμημάτων, πρόταση στην οποία η Α αντιδρά με το αιτιολογικό ότι πρόκειται για χρονοβόρα διαδικασία:

10. Α. Να κάνουμε το σχήμα ή καμιά πράξη καλύτερα;

11. Β. Και με πράξη γίνεται, αλλά...

12. Α. Το 16 δεν είναι πολλαπλάσιο του 3 έτσι; Σε καμία περίπτωση.

13. Β. Γίνεται και με πράξη.

14. Α. Γιατί τώρα να φέρουμε δεκατέσσερις ας πούμε...

15. Β. Ναι... Κάνε εσύ την πράξη κι εγώ το σχήμα.

(Οι Α, Β γελούν)

16. Α. Ποια πράξη; Μήπως ανά τρεις ας πούμε...

17. Β. Όχι όχι.

18. Α. Είναι 16.

19. Β. Εδώ, έχει 3, και το κάθε μέρος χωρίζεται σε 4.

Στη στιχομυθία που ακολουθεί ο Β ανακαλύπτει το συσχετισμό που υπάρχει μεταξύ αριθμού ευθυγράμμων τμημάτων και πλήθους περιοχών που δημιουργούνται. Η Α όμως δυσκολεύεται να παρακολουθήσει το συλλογισμό του και δεν διστάζει να το παραδεχτεί και να ζητήσει τη βοήθεια του συμφοιτητή της:

35. Α. Δεν ξέρω, δεν καταλαβαίνω.

39. Α. Δεν καταλαβαίνω. Δεν μπορώ. Γιατί το χωρίζει σε 15;

41. Α. Επανάλαβέ το.

Στη συζήτηση που ακολουθεί ο ρόλος της Α είναι καθαρά παθητικός, αφού το μόνο που κάνει είναι να παρακολουθεί το Β και να προσπαθεί να κατανοήσει το συλλογισμό του. Αυτό επιτυγχάνεται στο σημείο που ακολουθεί:

63. Β. Σωστά; Το κατάλαβες;

64. Α. Προσπαθώ. Ε, άρα 15 επί 15.

65. Β. Πρέπει και να το σχεδιάσουμε;

66. Α. Όχι.

67. Β. Κατάλαβες; Το κατάλαβες;

68. Α. Στα 3 δηλαδή ευθύγραμμα έτσι; Είναι 4. Τα 4 5, τα 5 6, ναι εντάξει.

Απομένει τώρα η καταγραφή της μεθόδου στην αρχική σελίδα. Η Α, αν και έχει οικειοποιηθεί την – κοινή πια – διαδικασία επίλυσης, εξακολουθεί να έχει παθητικό ρόλο, με αποτέλεσμα ο Β να επωμίζεται όλο το βάρος της καταγραφής. Η συμμετοχή της Α είναι ελάχιστη σε αυτή τη διαδικασία, γεγονός που επισημαίνεται:

100. Β. Τρίγωνα; Τρίγωνα ή περιοχές; Τρίγωνα θα τα γράψουμε. Σε 4 μικρότερα... Δε σε βλέπω να συμμετέχεις;

101. Α. Μ;

102. Β. Δεν σε βλέπω να συμμετέχεις.

103. Α. Όχι, απλά συμφωνώ μ' αυτά που λες.

Σκιαγραφώντας το ρόλο της Α στο συγκεκριμένο ζεύγος (πέρα από τα γενικά χαρακτηριστικά του παθητικού συνεργάτη) και την επίδρασή του στη συγκρότηση κοινής γνώσης, μπορούμε να επισημάνουμε τα εξής:

• Η πιο ενδιαφέρουσα παρατήρηση σχετίζεται με το γεγονός ότι η φοιτήτρια του συγκεκριμένου ζεύγους *οδηγείται* στην ερμηνεία του παθητικού συνεργάτη εξαιτίας της αδυναμίας της να κατανοήσει εξαρχής την πρόταση του συμφοιτητή της. Στη συνέχεια βέβαια, αν και δείχνει ότι έχει οικειοποιηθεί την πρόταση, εξακολουθεί να μη συμμετέχει ενεργά, γεγονός που μπορεί να οφείλεται είτε στη μη πλήρη οικειοποίηση είτε σε μια αδυναμία απεμπλοκής από το ρόλο που έχει ήδη ερμηνεύσει.[55]

• Ο συγκεκριμένος ρόλος χαρακτηρίζεται από μειωμένη – αλλά όχι ανύπαρκτη – συμμετοχή. Η φοιτήτρια Α ακολουθεί όλες τις κοινωνικές και κοινωνικομαθηματικές νόρμες που έχουμε αναφέρει, και η μειωμένη συμμετοχή της δεν αντίκειται σε καμία από αυτές. Αντιθέτως, οι ενέργειές της διευκολύνουν τη διαδικασία διαπραγμάτευσης και διαμόρφωσης της προτεινόμενης μεθόδου.

• Η συγκρότηση κοινής γνώσης δεν επηρεάζεται άμεσα από το συγκεκριμένο ρόλο, γιατί το άτομο που τον ερμηνεύει αν και παθητικό, δεν αρνείται τη συνεργασία. Το αν και κατά πόσο θα συγκροτηθεί κοινή γνώση εξαρτάται από το ρόλο που θα υιοθετήσει ο συνομιλητής· στο συγκεκριμένο ζεύγος, ο συνδυασμός των δύο ρόλων επέδρασε θετικά στη διαδικασία αυτή.

Φοιτητής Β: Συνεργατικός καθοδηγητής

Η αρχική πρόταση που καταθέτει ο Β είναι η γεωμετρική κατασκευή του ζητούμενου αριθμού των ευθυγράμμων τμημάτων:

3. Β. Ας το σχεδιάσουμε καλύτερα.

Η Α διαφωνεί, γεγονός που τον αναγκάζει στιγμιαία να ενεργήσει μη λαμβάνοντας υπόψη τη νόρμα της συνεργασίας, επιδιώκοντας ίσως να διατηρήσει το πρόσωπό του:

15. Β. Ναι... Κάνε εσύ την πράξη κι εγώ το σχήμα.

Η αδυναμία της Α να συγκροτήσει κάποια μέθοδο βασισμένη στον αλγεβρικό υπολογισμό του πλήθους των περιοχών, τον οδηγούν στην εγκατάλειψη της γεωμετρικής κατασκευής και στην ενασχόληση με την αλγεβρική μέθοδο. Γρήγορα οδηγείται στην εύρεση της διαδικασίας υπολογισμού των περιοχών, την οποία η Α δυσκολεύεται να κατανοήσει. Αναλαμβάνει λοιπόν ένα εμφανώς καθοδηγητικό ρόλο για το υπόλοιπο της συνάντησης και η προσπάθειά του είναι συνεχής: αρχικά αναλύει το συλλογισμό του (τα 14 ευθύγραμμα τμήματα δημιουργούν 15 περιοχές) και αφού η Α εξακολουθεί να δυσκολεύεται

38. Β. 1 2 3 4, 14. Χωρίζει το τρίγωνο σε 15. Και 14 από δω; Πάλι 15.

39. Α. Δεν καταλαβαίνω. Δεν μπορώ. Γιατί το χωρίζει σε 15;

χρησιμοποιεί ένα είδος επαγωγικής μεθόδου, σχεδιάζοντας 5 ευθύγραμμα τμήματα και ζητώντας της να μετρήσει τις περιοχές που δημιουργούνται. Η Α τελικά δείχνει να οικειοποιείται τη μέθοδο:

72. Α. Στα 3 ευθύγραμμα τμήματα έχουμε 4 4 κουτάκια, άρα 16. Στα 4, 5 επί 5 (...) και στα 14 είναι 15 επί 15. Μ;

και αποφασίζουν να καθαρογράψουν την απάντηση. Ο Β, είτε γιατί δυσκολεύεται είτε για να εκφράσει το συνεργατικό του πρόσωπο, ενώ αρχικά ζητά τη συμμετοχή της Α:

78. Β. Λέγε. Λέμε ότι σταα, στα 3 ευθύγραμμα τμήματα που φέρνουμε απ' τις δύο...

στη συνέχεια μονοπωλεί τη διαδικασία, με την Α να δείχνει ελάχιστη συμμετοχή. Σε κάποιο σημείο βέβαια (πρόκειται για τη στιχομυθία 100-103 που αναφέραμε στην περιγραφή του ρόλου της Α) της ζητά άμεσα να συμμετάσχει, χωρίς αποτέλεσμα όμως.

Σκιαγραφώντας το ρόλο του Β στο συγκεκριμένο ζεύγος (πέρα από τα γενικά χαρακτηριστικά του συνεργατικού καθοδηγητή) και την επίδρασή του στη συγκρότηση κοινής γνώσης, μπορούμε να επισημάνουμε τα εξής:

- Σε αντίθεση με την περίπτωση της Α, η οποία οδηγήθηκε στην ερμηνεία ενός ρόλου από την περίσταση, ο ρόλος του Β παρέμεινε σταθερός κατά τη διάρκεια και των τριών συναντήσεων. Το βασικό χαρακτηριστικό του ρόλου του είναι η διαρκής προσπάθεια όχι μόνο καθοδήγησης αλλά και επεξήγησης στη συμφοιτήτριά του. Αν και σε μερικά σημεία μπορέσαμε να διακρίνουμε μια ανασφάλεια στις εκφράσεις του,

γενικά – και ίσως λόγω του παθητικού ρόλου της Β – δεν παρέκκλινε από τον καθοδηγητικό του ρόλο.

• Όλες οι νόρμες συμπεριφοράς ακολουθούνται και, στις περιπτώσεις που κριθεί απαραίτητο, γίνεται και σαφής αναφορά σε αυτές. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στη νόρμα της αμοιβαίας κατανόησης.

• Η συγκρότηση κοινής γνώσης υποστηρίζεται από το συγκεκριμένο ρόλο λόγω της έμφασης που δίνει στην αμοιβαία κατανόηση. Για τον ερμηνευτή αυτού του ρόλου, μια προτεινόμενη έννοια δεν μπορεί να εφαρμοστεί αν δεν έχει γίνει κατανοητή από το συνομιλητή του. Στο συγκεκριμένο ζεύγος αυτό λειτούργησε θετικά έχοντας ως συνομιλητή ένα παθητικό συνεργάτη, ο οποίος χρειαζόταν καθοδήγηση στην πορεία οικειοποίησης της προτεινόμενης μεθόδου.

3ο Παράδειγμα: Συνεργατικός αξιολογητής– Συνεργατικός καθοδηγητής

Ο συγκεκριμένος συνδυασμός παρατηρείται στο Ζ8, στις δύο τελευταίες συναντήσεις των Ζ4 και Ζ10 και στην πρώτη συνάντηση του Ζ14. Στα Ζ4 και Ζ10 ο αρχικός συνδυασμός είναι Συνεργατικός αξιολογητής – Συνεργατικός αξιολογητής και στις επόμενες συναντήσεις ο ρόλος τοῦ ενός από τους δύο μετέχοντες γίνεται καθοδηγητικός· αντίθετα, στο Ζ14 ο αρχικός συνδυασμός είναι Συνεργατικός καθοδηγητής – Συνεργατικός αξιολογητής και στη δεύτερη συνάντηση μετατρέπεται σε Συνεργατικός αξιολογητής – Συνεργατικός αξιολογητής. Περιγράφουμε στη συνέχεια τη χρονική εξέλιξη των ερμηνειών των δύο ρόλων στο Ζ10, και συγκεκριμένα στις συναντήσεις που αφορούν το δεύτερο και το τρίτο πρόβλημα.

Φοιτήτρια Α: Συνεργατικός αξιολογητής

Στην αρχή της δεύτερης συνάντησης η Α εισάγει τη διαδικασία γεωμετρικής κατασκευής 14 ευθυγράμμων τμημάτων από καθεμιά από τις δύο κορυφές του τριγώνου:

9. Α. Θα κάνουμε ένα εδώ ρε παιδί μου. Κάνουμε ένα μεγάλο για να βρούμε χώρο για 14. Κάν' το πολύ μεγάλο.

Όταν στη συνέχεια τίθεται από τη Β μια διαφορετική πρόταση (ο αλγεβρικός υπολογισμός του πλήθους των περιοχών), συμμετέχει ενεργά στη διαπραγμάτευσή της:

20. Β. Κάτσε λίγο να το σκεφτούμε, βγαίνει αλλιώς Περίμενε λίγο. Να δούμε. Πρόσεξε: αν το χωρίσουμε σε 3 να το πάρουμε, έστω ότι δεν έχουμε τη δεύτερη γωνία, έτσι;

21. Α. Ναι.

22. Β. Έχουμε μόνο την πρώτη. Θα έχουμε 1 2...

23. Α. 4.

24. Β. ... 3 4.

25. Α. Ναι.

26. Β. Πολύ ωραία. Κι από δω αν το χωρίσουμε σε 3 έχουμε άλλα 4. Ε; 8, έτσι δεν είναι;

27. Α. Επί 2 16.

28. Β. 8·2 16, ωραία. Λοιπόν...

29. Α. Αν φέρουμε 14 θα 'χουμε 15.

30. Β. 15 και 15 30, επί 2 60.

Στη συνέχεια αποφασίζουν από κοινού να χρησιμοποιήσουν και τη μέθοδο της κατασκευής (και στη συνέχεια καταμέτρησης) για επαλήθευση του αποτελέσματος στο οποίο τους οδήγησε η αλγεβρική μέθοδος. Η Β όμως δυσανασχετεί, με αποτέλεσμα να αναλάβει η Α την καταμέτρηση των μη επικαλυπτόμενων περιοχών:

59. Α. Πάνω από 60 είναι σίγουρα. Λάθος το υπολογίσαμε.

60. Β. Γιατί;

61. Α. Έλα, στγά μην, αυτά είναι πάρα πολλά ρε.

(Η Α αρχίζει να μετράει)

62. Α. 1, 2, αυτό μετράει; Όχι (...) έτσι. 1 2 3, αυτό μετράει, 4, αυτό μετράει; Όχι.

63. Β. Δική σου ήταν αυτή η φαεινή ιδέα... Μέτρα μέτρα εσύ.

64. Α. Τι να μετρήσω;

(Η Α συνεχίζει να μετράει)

65. Β. Άλλη σχέση πρέπει να 'χουνε. Πρέπει να 'χουνε...

66. Α. Ναι.

67. Β. Καμία σχέση το 60. Έλα, δε γίνεται δουλειά, αφού περάσαμε το 60, άστο μη τα μετράς.

68. Α. Γιατί; Θα τα μετρήσω και θα βγάλουμε έτσι. Γιατί, θα πρέπει να βγάλουμε τη σχέση; Πόσα είναι μας ρωτάει. Εμείς θα τα μετρήσουμε... Δεν ξέρω...

Ενδιαφέρον είναι το γεγονός ότι στην απειλητική για το πρόσωπό της φράση στο 63, η Α δεν απαντά, άμεσα τουλάχιστον. Προσπαθεί να στηρίξει την πρότασή της στο 68 με κάπως απότομο (για το ρόλο της) τρόπο, γεγονός που την οδηγεί και στη φράση «Δεν ξέρω» στο τέλος του 68. Ακολουθεί μια κοινή προσπάθεια διαμόρφωσης της αλγεβρικής μεθόδου, στην οποία ο ρόλος της Α «επιτρέπει» στη Β να καθοδηγεί την όλη διαδικασία.

Η τρίτη συνάντηση ξεκινά με την Α να αναλαμβάνει πιο ενεργητικό ρόλο, πάντα όμως στα πλαίσια της συνεργατικότητας που τη χαρακτηρίζει:

42. Α. Ναι, αυτό πρέπει να βρούμε. Κοίτα να δεις, άμα κάνεις ότι αυτά τα τρίγωνα είναι ίδια και να χωρίσουμε κι αυτό...

43. Β. Ποιο καμάρι μου;

44. Α. Να τα χωρίσουμε σε... το ένα τρίγωνο 4 τρίγωνα. Δεν ξέρω μπορεί να 'ναι βλακεία, κάτσε κάτσε.

45. Β. Αυτό εδώ; Αυτό εννοείς;

46. Α. Ναι, κάτσε λίγο.

47. Β. Κάτι πρέπει να παίζει με τη διάμεσο εδώ πέρα. Δεν μου πάει, γιατί να μας πει στο μέσον, κατάλαβες;

48. Α. Ναι.

49. Β. Κάτι τρέχει με τη διάμεσο εδώ να μας βοηθήσει. Τι τρέχει όμως;

50. Α. Θα το βρούμε.

51. Β. Το ενυδρείο έχει ανασηκωθεί ώστε το νερό να φτάνει ως το μέσο της βάσης του. Πρέπει να το φανταστούμε λίγο τώρα.

52. Α. Εγώ νομίζω ότι πρέπει να βρούμε πόσο νερό χωράει όλο μαζί.

53. Β. Όταν το ενυδρείο επανέλθει στην οριζόντια θέση του, όταν κάτσει δηλαδή κάτω...

Στο 44 παρατηρούμε ότι προσπαθεί να σώσει το πρόσωπό της από ενδεχόμενη λανθασμένη διαδικασία, γεγονός που καταδεικνύει ότι η διατήρηση του προσώπου αποτελεί μέλημα ακόμη και του συνεργατικού αξιολογητή (Βλέπε και τα 71, 77 στο αμέσως επόμενο απόσπασμα). Στο 50 προσπαθεί να δημιουργήσει ένα κλίμα σιγουριάς και εμπιστοσύνης στις δυνάμεις τους, ενώ το 52 αποτελεί ένα από τους χαρακτηριστικούς τρόπους έκφρασης της πρότασης ενός συνεργατικού αξιολογητή: «Εγώ νομίζω ότι...», αφού αν και ξεκινά με την αντωνυμία εγώ, προσθέτει το ρήμα νομίζω για να δώσει στην πρόταση λιγότερο απόλυτη μορφή. Πάντως, στο συγκεκριμένο ζεύγος, ο συνεργατικός αξιολογητής διακρίνεται και από μία ανασφάλεια, την οποία δεν συναντήσαμε σε αντίστοιχους ρόλους σε άλλα ζεύγη:

63. Α. Λοιπόν, θα χωρίσουμε κι αυτό σε δύο ορθογώνια, θα 'ναι τέσσερα ορθογώνια, άρα, εμείς έχουμε το ένα με νερό. Το $\frac{1}{4}$.

64. Β. Μπράβο Βίκη. Το είπες.

65. Α. Ε;

66. Β. Το είπες το σωστό.

67. Α. Δεν ξέρω...

68. Β. Πρόσεξε, τι είναι αυτό; Αυτό είναι τετράγωνο.

69. Α. Τετράγωνο. Άρα είναι δύο ορθογώνια...

70. Β. 50... Δύο τετράγωνα έχουμε.

71. Α. Α! Είδες που το βρήκα; Εντάξει.

72. Β. Μπράβο Βίκη.

73. Α. Εντάξει... Έχουμε το $\frac{1}{4}$ δηλαδή με νερό.

74. Β. Μισό λεπτό. Τι σχέση έχει η διαγώνιος στο τετράγωνο;

75. Α. Κοίτα ρε παιδί μου τώρα, αφού έχουμε τέσσερα ίδια τρίγωνα, ίδια, κι έχουμε μόνο το ένα

τρίγωνο, το $\frac{1}{4}$, θα βρούμε το συνολικό όγκο και θα διαιρέσουμε δια τέσσερα. Πώς σου φαίνεται;

76. Β. Καλό ακούγεται.

77. Α. Μπορεί να 'ναι και βλακεία, αλλά...

Μπορούμε λοιπόν να ισχυριστούμε ότι στην προκειμένη περίπτωση η συμπεριφορά της Α κινείται στα όρια των ρόλων του συνεργατικού αξιολογητή και του παθητικού συνεργάτη· αυτό που μας οδηγεί στο να την ταξινομήσουμε στον πρώτο και όχι στο δεύτερο ρόλο είναι οι πρωτοβουλίες που αναλαμβάνει σε διάφορα χρονικά σημεία, αλλά και το γεγονός ότι υποστηρίζει τις προτάσεις που κάνει.

Μια επόμενη σημαντική παρατήρηση είναι ότι η Α ακολουθεί τη νόρμα της σχετικότητας της λύσης: όταν η Β προτείνει την εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος για την εύρεση της τρίτης πλευράς ενός τριγώνου, η Α αντιδρά ζητώντας από τη συμφοιτήτριά της να δικαιολογήσει την επιλογή της:

83. Α. Αυτή την πλευρά θες να βρεις;

84. Β. Ναι.

85. Α. Ε, θα το κάνουμε με το Πυθαγόρειο θεώρημα. 50 και 40. $50^2 + 40^2 = x^2$.

86. Β. Ναι, x^2.

87. Α. Αλλά γιατί να τη βρούμε αυτή;

88. Β. Ε; Δεν θα μας βοηθήσει;

89. Α. Πού; Δεν ξέρω. Ή μπορούμε να γράψουμε ότι έχουμε τέσσερα ίδια, τρίγωνα, αφού έχουν 50 τη μία πλευρά και 40 την άλλη είναι ίδια, έχουν δυο πλευρές ίσες και μια γωνία ορθή, είναι ίδια τα τρίγωνα όλα έτσι;

Τελικά βέβαια – κάτι που ίσως οφείλεται στο ρόλο της Β ή μάλλον στο συσχετισμό των δύο ρόλων – το Πυθαγόρειο θεώρημα εφαρμόζεται, παρά την επισήμανση της σχετικής νόρμας που επαναλαμβάνει η Α:

270. Α. Πριν ψάξουμε αυτό, για πες μου σε τι θα το χρησιμοποιήσουμε.

Στη συνέχεια τίθεται το ζήτημα της εύρεσης κάποιων όγκων, διαδικασία η οποία διαπραγματεύεται εκτενώς και, παρά το χρόνο που αφιερώνουν στη συζήτηση περί του Πυθαγορείου θεωρήματος, οδηγεί στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Ακολουθούν δύο πολύ ενδιαφέρουσες στιχομυθίες, στις οποίες η Α παρεκκλίνει από το συνεργατικό χαρακτήρα του ρόλου της, και φέρεται περισσότερο ως εγωκεντρικός καθοδηγητής, παρασύροντας και τη Β σε παρόμοια παρέκκλιση:

344. Α. 60 δια 6! 10! 10! 10!

345. Β. Αφού έχει κι εδώ 6 ρε βλαμένο!

346. Α. Να το!

347. Β. Αμάν! Καλά, τόσην ώρα τι βλέπαμε; Είδες για να μη γράφουμε καθαρά;

348. Α. Εγώ στα 'πα να τα γράψουμε... και στα 'πα κι απ' την αρχή τη λύση! Μμ, γράφε! Γράψ' το

τώρα να μάθεις.

349. Β. Ναι μωρέ 'σύ αφού 6 ήταν αυτό. 6.

350. Α. Ναι; Και πόση ώρα το 'χω εδώ και το σκέφτομαι, ξέρεις πόση ώρα;

351. Β. Τότε γιατί δεν το 'λεγες;

352. Α. Όχι, αυτό, γιατί δεν μου βγαίνει ο αριθμός (...) μεγαλύτερο απ' το 40.

389. Β. Κάτσε ρε να το γράψουμε δίπλα. Βίκη έτσι κάνεις και δεν βρίσκουμε τις λύσεις.

390. Α. Εγώ στη βρήκα απ' την αρχή Κατερίνα και (...)

391. Β. Καλά μη φωνάζεις, εντάξει.

392. Α. (...) Κόλλησα στο τέτοιο, στη βλακεία, άμα δεν το βρή... το 'χα δει απ' την αρχή...

Στα 348 και 390 εμφανίζονται οι πιο έντονα φορτισμένες εκφράσεις της Α· ίσως αυτές αποτελούν ένα είδος αντίδρασης στον καθοδηγητικό ρόλο της Β, ο οποίος θεωρεί ότι λειτούργησε αρνητικά σε κάποια σημεία. Πρόκειται πάντως για τις μόνες χρονικές στιγμές στις οποίες η Α επιδιώκει όχι μόνο τη διατήρηση, αλλά και την προώθηση του προσώπου της, μέσω αναφορών στις ενέργειές της.

Σκιαγραφώντας το ρόλο της Α στο συγκεκριμένο ζεύγος (πέρα από τα γενικά χαρακτηριστικά του συνεργατικού αξιολογητή) και την επίδρασή του στη συγκρότηση κοινής γνώσης, μπορούμε να επισημάνουμε τα εξής:

• Το βασικό χαρακτηριστικό του συγκεκριμένου ρόλου είναι η σημασία που δίνει στη συνεργασία και ειδικότερα στην από κοινού διαπραγμάτευση των προτεινόμενων εννοιών και διαδικασιών. Σε κάποιες περιπτώσεις αυτό αποβαίνει εις βάρος της διαπραγμάτευσης κάποιων εννοιών έναντι κάποιων άλλων· γενικά όμως η επίδραση του ρόλου είναι θετική.

• Το χαρακτηριστικό που διαφοροποιεί το ρόλο αυτό από αυτούς του εγωκεντρικού και του συνεργατικού καθοδηγητή είναι η σχετικά μειωμένη σημασία που δίνει στη διατήρηση του προσώπου. Αν και η συγκεκριμένη φοιτήτρια σε κάποιες στιγμές έντασης δεν απέφυγε εκφράσεις που αρμόζουν σε άλλους ρόλους, η συμπεριφορά της σε όλη την υπόλοιπη διάρκεια της αλληλεπίδρασης κατέδειξε το παραπάνω γεγονός. Οι μόνες εκφράσεις οι οποίες μπορούν να συνδεθούν άμεσα με τη διατήρηση του προσώπου είναι αυτές που συνοδεύουν τις προτάσεις, και που προσδίδουν μία αβεβαιότητα σε αυτές (π.χ. «δεν ξέρω», «μπορεί να 'ναι και βλακεία», κ.ο.κ.).

• Το χαρακτηριστικό που διαφοροποιεί το ρόλο αυτό από το ρόλο του παθητικού συνεργάτη είναι οι αυξημένη πρωτοβουλία που αναπτύσσει σε σχέση με αυτόν, αλλά και το γεγονός ότι υποστηρίζει τις προτάσεις που κάνει.

• Σχεδόν όλες οι ενέργειες εκφράζονται με τέτοιο τρόπο ώστε να διευκολύνουν ενέργειες σχετικές με τη συνεργασία και την ουσιαστική διαπραγμάτευση των προτεινόμενων διαδικασιών.

• Ακολουθούνται όλες οι νόρμες που έχουμε αναφέρει, με τη νόρμα της συνεργασίας να υπερτερεί και σε κάποιες περιπτώσεις αυτό να αποβαίνει εις βάρος της διαδικασίας (χαρακτηριστικό παράδειγμα η εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος, παρά τις ενστάσεις της Α, η οποία τελικά, για χάρη της ομαλής συνεργασίας, την αποδέχτηκε).

• Η συγκρότηση κοινής γνώσης υποστηρίζεται σημαντικά από το συγκεκριμένο ρόλο, αφού όλες οι ενέργειες που τον χαρακτηρίζουν συνάδουν με την ουσιαστική και στα πλαίσια των σχετικών νορμών διαπραγμάτευση κάθε προτεινόμενης έννοιας ή διαδικασίας. Η συνεργατικότητα που χαρακτηρίζει αυτό το ρόλο οδηγεί βέβαια στη διαπραγμάτευση και εννοιών που δεν σχετίζονται πάντα με το πρόβλημα· αυτό συμβαίνει γιατί ο ερμηνευτής αυτού του ρόλου επιλέγει τη συμμόρφωση πρωτίστως στη νόρμα της συνεργασίας και στη συνέχεια στις υπόλοιπες νόρμες.

Φοιτήτρια Β: Συνεργατικός καθοδηγητής

Από την αρχή της δεύτερης συνάντησης η Β δίνει τα πρώτα δείγματα του καθοδηγητικού της ρόλου:

20. Β. Κάτσε λίγο να το σκεφτούμε, βγαίνει αλλιώς Περίμενε λίγο. Να δούμε. Πρόσεξε: αν το χωρίσουμε σε 3 να το πάρουμε, έστω ότι δεν έχουμε τη δεύτερη γωνία, έτσι;

Η παραπάνω πρόταση τίθεται ενώ έχει προηγηθεί η πρόταση της Α για γεωμετρική κατασκευή του ζητούμενου αριθμού των ευθυγράμμων τμημάτων. Αποφασίζουν να χρησιμοποιήσουν τη γεωμετρική κατασκευή ως μέθοδο επαλήθευσης του αλγεβρικού υπολογισμού του πλήθους των μη επικαλυπτόμενων περιοχών. Η Β όμως, η οποία φαίνεται ότι διαφωνούσε γενικά με τη διαδικασία της γεωμετρικής κατασκευής, αρχικά δυσανασχετεί:

46. Β. Πάλι καλά που δεν ήταν 24.

52. Β. Δε μου φτάνει ο χάρακας τι να κάνω; Δε γίνεται δουλειά έτσι.

και στη συνέχεια στρέφεται καθαρά ενάντια στο πρόσωπο της Α:

63. Β. Δική σου ήταν αυτή η φαεινή ιδέα... Μέτρα μέτρα εσύ.

140. Β. Μη μου πεις να το κάνουμε εμπειρικά.

Γενικά, η συμπεριφορά της έχει κάποια έντονα καθοδηγητικά χαρακτηριστικά, όπως τη βεβαιότητα η οποία χαρακτηρίζει τις προτάσεις της:

54. Β. Μα δε μ' έφτανε ο χάρακας εκεί. Καταρχήν, ορίστε, δε χρειάζεται πολλή φιλοσοφία: αφού είναι 15, 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14...

ή τον τρόπο με τον οποίο προτείνει, δέχεται ή απορρίπτει μια διαδικασία:

67. Β. Καμία σχέση το 60. Έλα, δε γίνεται δουλειά, αφού περάσαμε το 60, άστο μη τα μετράς.

Σε λίγες περιπτώσεις, διακρίνουμε και εγωκεντρικά χαρακτηριστικά:

69. Β. Περίμενε. Λοιπόν, αυτό που είπα εγώ στην αρχή. Ξεκινάμε από δω. Αφού έχουμε 14 θα 'χουμε 15.

75. Β. Ε, μισό λεπτό να σκεφτώ. Ναι. Σωστό.

Ένα άλλο χαρακτηριστικό του ρόλου της Β είναι ότι σε αρκετές περιπτώσεις χρησιμοποιεί τις ερωτήσεις όχι ως μέσο πρόσκτησης πληροφοριών, αλλά ως μέσο εμπλοκής της Α σε κάποια διαδικασία. Η Β δηλαδή, ακολουθώντας τη νόρμα της συνεργασίας θέτει ερωτήσεις στην Α, με σκοπό να της επιστήσει την προσοχή και να επιτύχει τη συμμετοχή της στη διαδικασία που διαπραγματεύονται:

71. Β. Πολύ ωραία. 15. Τώρα, εάν φέρουμε ένα από την άλλη κορυφή, πόσα θα 'χουμε; Ένα αν φέρουμε.

85. Β. Με 14 γραμμές που θέλουμε εμείς πόσο;

Για τους ίδιους λόγους, σε κάποιες περιπτώσεις ζητά και άμεσα τη συμμετοχή της Α:

117. Β. Πώς θα το πούμε; Πώς θα το πούμε Βίκυ; Ότι τέμνει όλα, ότι τέμνει τα 14 πιο πάνω ευθύγραμμα τμήματα...

126. Β. 30 επικαλυπτόμενες, μη επικαλυπτόμενες περιοχές. Πες εσύ το άλλο βήμα τώρα.

Τα χαρακτηριστικά του ρόλου της Β παραμένουν αναλλοίωτα και στην τρίτη συνάντηση. Καταρχήν, πολλές γλωσσικές ενέργειες εκφράζουν άμεσα την καθοδηγητική της τάση:

10. Β. Το σημαντικό είναι από 'δώ και κάτω. Ως το μέσο της βάσης του. Δείξε μου λίγο ποιο είναι το μέσο της βάσης.

154. Β. Ωραία, κάν' το, γράψ' το. Γράψ' το μέχρι εκεί. Στο πρόχειρο.

225. Β. Κοίταξε, πρόσεξε να δεις... Όταν το νερό είναι αυτό εδώ...

280. Β. Λοιπόν, αφήνουμε αυτό το σενάριο... Δε βάλαμε πουθενά το 60. Άρα θα πάμε βάσει όγκου.

Η καθοδηγητική αυτή τάση ενισχύεται από ερωτήσεις για αύξηση του επιπέδου προσοχής της Α:

36. Β. Τι είναι αυτό; Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

68. Β. Πρόσεξε, τι είναι αυτό; Αυτό είναι τετράγωνο.

233. Β. Αυτό τι είναι; Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, το οποίο είναι αυτό εδώ πέρα.

Στις περιπτώσεις που η διαδικασία που προτείνει η Α της φαίνεται αποτελεσματική, δεν διστάζει να το παραδέχτεί ή ακόμη και να την επαινέσει:

63. Α. Λοιπόν, θα χωρίσουμε κι αυτό σε δύο ορθογώνια, θα 'ναι τέσσερα ορθογώνια, άρα, εμείς έχουμε το ένα με νερό. Το $\frac{1}{4}$.

64. Β. Μπράβο Βίκη. Το είπες.

65. Α. Ε;

66. Β. Το είπες το σωστό.

71. Α. Α! Είδες που το βρήκα; Εντάξει.

72. Β. Μπράβο Βίκη.

235. Β. Μπορεί και να 'ναι έτσι όπως τα λες. Όχι δεν είναι το ίδιο, κάτσε. Κάπως έτσι πρέπει να γίνεται όμως. Μισό λεπτό λίγο... Αν φέρουμε από 'δώ μία προέκταση;

236. Α. (...) δεν καταλαβαίνω.

237. Β. Λοιπόν, περίμενε λιγάκι, να δούμε λίγο μ' αυτό που λες. Κοίταξε, ηη... δεν μας ενδιαφέρει αυτό, το ύψος μας ενδιαφέρει, άρα το ύψος είναι αυτό. Μισό λεπτό να δω αν μπορούμε να το βρούμε το ύψος. Λοιπόν, ξέρουμε τη μία πλευρά του τριγώνου, 50.

Με κάποιες άλλες γλωσσικές ενέργειες επιδιώκει την προστασία ή την ενίσχυση του προσώπου της, είτε χωρίς να υπάρχει σοβαρός λόγος (142, 250, 282) είτε όταν νοιώθει ότι απειλείται (26, 191):

24. Β. Αα, το νερό είναι μες στο ενυδρείο.

25. Α. Εμ τι ρε Κατερίνα.

(Οι Α, Β γελούν)

26. Β. Λέω κι εγώ θα βάλουμε νόμοι της άνωσης. Τώρα αρχίζω να καταλαβαίνω. Είναι δύσκολη ώρα.

142. Β. Ναι, είπαμε προηγουμένως, ξέρεις τι είπα; Είπα για τις πλευρές του τετραγώνου, γι' αυτό είπαμε η πλευρά εις την τρίτη, ήταν τετράγωνο, ενώ είναι παραλληλόγραμμο, γι' αυτό είναι το γινόμενο...

190. Α. Ε; Είναι σωστό; Έτσι όπως το σκέφτηκα;

191. Β. Μη με ρωτάς εμένα.

250. Β. 50^2 κάνει 250; 50 επί 50; Λοιπόν, κάθησε να το κάνω λίγο εγώ, περίμενε.

282. Β. Εγώ δεν μπορώ να δεχθώ ότι δεν μπορούμε να βρούμε την υποτείνουσα.

Σε κάποιες περιπτώσεις εκφράζει ενέργειες απειλητικές για το πρόσωπο της Α:

34. Β. Αυτό είναι θέμα πειραματισμού, μη βιάζεσαι.

40. Β. Μη βιάζεσαι. Πόση ώρα έχουμε;

132. Β. Καλά, ναι, ναι. Μην αγχώνεσαι.

170. Β. Περίμενε, μη βιάζεσαι.

259. Β. Περίμενε. Εε, τι λέω τώρα; 7 7 49! Άσε με, μη με μπερδεύεις.

329. Β. Θα μας τρελάνεις Βίκη;

Τέλος, στις στιχομυθίες 344-352 και 389-392 προσπαθεί και αυτή – όπως και η συνομιλήτριά της – να υπερασπίσει το πρόσωπό της, ακόμη και με απειλητικές για το πρόσωπο της Α εκφράσεις.

Σκιαγραφώντας το ρόλο της Β στο συγκεκριμένο ζεύγος (πέρα από τα γενικά χαρακτηριστικά του συνεργατικού καθοδηγητή) και την επίδρασή του στη συγκρότηση κοινής γνώσης, μπορούμε να επισημάνουμε τα εξής:

• Ο ρόλος της Β χαρακτηρίζεται από καθοδηγητικές τάσεις, οι οποίες σε κάποιες περιπτώσεις (ιδιαίτερα μέσω κάποιων ερωτήσεων) προσιδιάζουν σε συμπεριφορά δασκάλου, ο οποίος προσπαθεί να εξηγήσει κάτι σε ένα μαθητή. Αυτές οι τάσεις είναι εμπλουτισμένες με εγωκεντρικά, αλλά και συνεργατικά στοιχεία, με αποτέλεσμα κάποιες συμπεριφορές να ανήκουν σε ένα εγωκεντρικό καθοδηγητή. Γενικά όμως, η Β επιδεικνύει ένα συνεργατικό πρόσωπο, γεγονός που επιδρά θετικά στη διαδικασία επίλυσης των προβλημάτων.

• Σε λίγες περιπτώσεις κάποιες ενέργειες της Β αποθαρρύνουν ή ακόμη και εμποδίζουν κάποιες ενέργειες της Α. Συνήθως αυτή η συμπεριφορά οφείλεται σε τεχνικές διατήρησης του προσώπου της· με άλλα λόγια, όταν ζητά από την συνομιλήτριά της να μη την ενοχλεί επειδή σκέφτεται κάτι, εμποδίζει κάποιες ενέργειες της Α, όχι επειδή δεν ακολουθεί τη νόρμα συνεργασίας, αλλά επειδή επιδιώκει τη μέγιστη δυνατή αυτοσυγκέντρωση για αποφυγή τυχόν λάθους (κατάσταση που θα έθετε σε κίνδυνο το πρόσωπό της).

• Η τήρηση όλων γενικά των νορμών φαίνεται ότι αποτελεί μέλημα του συγκεκριμένου ρόλου· εξαίρεση αποτελούν οι περιπτώσεις στις οποίες μια προτεινόμενη διαδικασία κινδυνεύει λόγω κάποιας νόρμας (αν π.χ. η προτεινόμενη διαδικασία δεν πληροί τη νόρμα σχετικότητας της λύσης). Σε αυτές τις – λίγες ομολογουμένως περιπτώσεις – υπερτερεί η διατήρηση του προσώπου, η οποία οδηγεί τον δρώντα (άρα και το δέκτη) στην εφαρμογή ανεδαφικών μεθόδων.

• Η συγκρότηση κοινής γνώσης ευνοείται από το συγκεκριμένο ρόλο, αφού ο ερμηνευτής του και καθοδηγεί τη διαπραγμάτευση των προτεινόμενων εννοιών και ακολουθεί τις σχετικές νόρμες συμπεριφοράς, επομένως – πλην ελαχίστων εξαιρέσεων – λαμβάνει χώρα μια ουσιαστική και αποτελεσματική συγκρότηση κοινής γνώσης.

4ο Παράδειγμα: Εγωκεντρικός καθοδηγητής – Συνεργατικός καθοδηγητής

Ο συγκεκριμένος συνδυασμός παρατηρήθηκε στο Ζ2· πρόκειται για το συνδυασμό που οδήγησε σε αρκετές εντάσεις και προβλήματα στη διαπραγμάτευση, αλλά και στην αποδοχή κοινών εννοιών. Περιγράφουμε στη συνέχεια τη χρονική εξέλιξη των ερμηνειών των δύο ρόλων στο συγκεκριμένο ζεύγος, καθώς και την επίδρασή τους στη συγκρότηση κοινής γνώσης.

Φοιτήτρια Α: Εγωκεντρικός καθοδηγητής

Από την αρχή της πρώτης συνάντησης η Α εκφράζει αρκετά σαφώς το ρόλο της:

1. Α. Θα κάνουμε ένα τέτοιο. Ένα σύστημα συντεταγμένων. Και θα μετρήσουμε και θ' αριθμήσουμε.

Το πρόσωπο των ρημάτων που χρησιμοποιεί μπορεί να είναι το πρώτο πληθυντικό (υπάρχει δηλαδή μια φαινομενική σύμπνοια με τη νόρμα της συνεργασίας), όμως ο τρόπος έκφρασης δεν αφήνει πολλά περιθώρια στη Β για να αντιπαραθέσει κάποια δική της πρόταση. Παρόλα αυτά, η Β, έχοντας και αυτή ηγετικές τάσεις, προωθεί τη δική της πρόταση, με την πρώτη ευκαιρία όμως η Α επανέρχεται:

24. Α. Γι' αυτό είπα εγώ, ένα σύστημα συντεταγμένων να κάνουμε και να μετρήσουμε.

77. Α. Γι' αυτό σου λέω, να γράψουμε αρίθμηση.

Ακολούθως, η Α υπαναχωρεί και συμμετέχει ενεργά στη διαμόρφωση της διαδικασίας που πρότεινε αρχικά η Β. Ακόμη και σ' αυτή την περίπτωση όμως, δεν περιορίζεται σε παθητικό ρόλο:

140. Α. Λοιπόν, αυτό που σου 'πα θα γράψουμε.

Η συν-διαμόρφωση της διαδικασίας αυτής δεν εξελίσσεται με ομαλό τρόπο· δημιουργούνται προβλήματα, κυρίως λόγω της χρήσης μη μαθηματικής γλώσσας στην περιγραφή κάποιων γεωμετρικών κατασκευών. Η Α μη θεωρώντας την έκφραση σημαντικό ζήτημα, αντιδρά στην προσπάθεια της Β για μεγαλύτερη σαφήνεια με ειρωνεία:

155. Β. Ένα λεπτό, να το σκεφτώ διαφορετικά. Προσπαθώ να βρω τα ονόματα.

156. Α. Εντάξει, δε χρειάζεται να τα βρεις τώρα, τα βρίσκουμε την επόμενη φορά. Έλα.

157. Β. Κάτσε.

158. Α. Και θα 'μαστε διαβασμένοι. Λοιπόν, να γράφουμε, αυτό που σου λέω θα κάνουμε: στην ακτίνα του κύκλου, μετράμε 45 μοίρες και τραβάμε μία γραμμή απόσταση τριών τετραγώνων.

159. Β. Μία ευθεία η οποία τέμνει την ακτίνα...

160. Α. Μία...

161. Β. ... του κύκλου.

162. Α. Δε θα αρχίσουμε με, δε θα βγάλουμε θεώρημα Νατάσα εδώ τώρα. Λοιπόν, στο Α... εε... Λοιπόν, όταν λέμε τραβάμε μια γραμμή, από πού όμως; Από δω ή από δω;

254. Α. Όχι, εκατοστό είναι.

255. Β. Εκατοστό είναι;

256. Α. Ναι.

257. Β. Δεν είναι 1 εκατοστό. Παρά 2.

(Η Β γελάει)

258. Α. Όχι Γιάννης, Γιαννάκης.

259. Β. Έναν κύκλο με ακτίνα 3 τετ, τετραγωνάκια. Ένα κύκλο από το μέσο...

260. Α. Αφού έχουμε αριθμήσει έχουμε απ' το 1 μέχρι το 4.

261. Β. Ναι, αφού δεν είναι το ίδιο;

262. Α. 4.

263. Β. Το ίδιο πράγμα λέ... ε. Σχημάτισε ένα κύκλο από το κέντρο...

264. Α. Ε, από πού να τον ξεκινήσουμε τον κύκλο; Ωραία, από το κέντρο, γράψ' το.

Η αλληλεπίδραση εξελίσσεται με τρόπο ώστε η Β σταδιακά αποδέχεται τη χρήση συστήματος συντεταγμένων, συγκροτείται επομένως μία κοινή διαδικασία, η οποία περιέχει στοιχεία και από τις δύο προτάσεις. Το γεγονός ότι η Α επιδιώκει να ενισχύσει το πρόσωπό της καταδεικνύεται εκτός από το πρώτο πρόσωπο των ρημάτων στα 24, 77 και από την επιβεβαίωση που ζητά σε κάποιες περιπτώσεις:

371. Α. Ωραία. Είδες τι εύκολο που ήταν έτσι;

Επίσης η Α εκφράζει και κάποιες ενέργειες απειλητικές για το πρόσωπο της Β, όπως είναι οι εκφράσεις ειρωνείας ή κάποιες πιο άμεσες εκφράσεις:

475. Α. Ωραία. Εσύ πού είσαι τώρα, γιατί, γιατί με μπέρδεψες.

520. Α. Γιατί σου σφηνώθηκε αυτό τώρα;

Στη δεύτερη συνάντηση, η κατάσταση παραμένει ίδια: στο μεγαλύτερο τμήμα της η Α προσπαθεί περισσότερο να πείσει τη Β για την ορθότητα της πρότασής της και λιγότερο να συνεργαστεί ουσιαστικά και αποτελεσματικά με αυτήν. Η συνάντηση ξεκινά με την Α να εκφράζει βεβαιότητα για την πρότασή της και να απορρίπτει με την ίδια βεβαιότητα την αντίστοιχη πρόταση της Β:

3. Α. Από καθεμιά απ' τις δύο κορυφές... 14 ευθύγραμμα τμήματα. Πολλαπλασιασμός είναι;

4. Β. Ε;

5. Α. Πολλαπλασιασμός.

13. Β. Το ξέρω, κοίταγα να δω κάτι άλλο. Ναι. Ε, να κάνουμε ένα και να φέρουμε τις 14. Να το κάνουμε πιο μεγάλο.

(Η Α παίρνει τη σελίδα 2)

14. Α. Δεν μπορούμε να κάνουμε τίποτα απ' όλα αυτά που λες.

18. Α. Τα 14 μας δίνουνε; Τα τρία μας δίνουν 16, οι 14 πόσες μας δίνουν;

19. Β. Τι λες ρε;

20. Α. Μια μια απλή πράξη θα κάνουμε. Κατάλαβες τι εννοώ;

Στο 20 βέβαια η Α ακολουθεί τη νόρμα της αμοιβαίας κατανόησης, αλλά δεν παύει να υποστηρίζει με ιδιαίτερη σιγουριά και αυτοπεποίθηση την πρότασή της. Όταν η Β αποφασίζει να επαληθεύσει γεωμετρικά το αποτέλεσμα στο οποίο οδηγεί η προτεινόμενη διαδικασία, η Α είτε δεν ακολουθεί τη νόρμα της συνεργασίας (64) είτε

εκφράζει απειλητικές για το πρόσωπο της Β ενέργειες, μέσω σαρκασμού (58) ή πιο άμεσων τρόπων (73):

56. Α. Αφού στο ένα έχουμε τέσσερα, στα 14 πόσα θα έχουμε; Αφού στα τρία έχουμε δεκάξι, στα 14 πόσα θα έχουμε; Αυτό που κάναμε πριν είναι. Ποιος ο λόγος να μετράς;

57. Β. Για επαλήθευση.

58. Α. Αυτό είναι επαλήθευση τώρα; Ε δεν πειράζει, θα κάνω άλλο σχήμα.

59. Β. Άντε, το βρήκαμε.

(Η Β απευθύνεται στον Κ)

60. Β. Τελειώσαμε;

(Ο Κ τους λέει ότι πρέπει να γράψουν την απάντησή τους στην αρχική σελίδα)

61. Β. Γράψε.

62. Α. Λοιπόν...

63. Β. Εγώ πιστεύω ότι θα 'πρεπε να μετρήσουμε.

64. Α. Καλά, κάνε ό,τι θες.

(Η Α παίρνει την αρχική σελίδα)

65. Α. Όχι, περίμενε.

66. Β. Ένα λεπτό.

67. Α. Να σου πω. Σταμάτα να μετράς.

68. Β. Γιατί;

69. Α. Γιατί έχουμε λάθος.

70. Β. Τι;

71. Α. Λοιπόν, στο τρίγωνο του σχήματος έχουμε φέρει... Λοιπόν, στην αρχή εμείς τι βρήκαμε; Περίμενε, αυτό εδώ...

72. Β. (...) μετρήσω.

73. Α. Άμα δεν βγάζεις 224 δεν ξέρω κι εγώ τι θα γίνει.

Στη συνέχεια, ενώ η Β αναπτύσσει μία άλλη μέθοδο επίλυσης εισάγοντας την έννοια της αριθμητικής προόδου, η Α αν και την παρακολουθεί, εκφράζει σε κάθε ευκαιρία τις αμφιβολίες της ενώ συγχρόνως επιχειρεί να στηρίξει τη δική της μέθοδο (χρήση αναλογιών) με ασταθή επιχειρήματα:

144. Α. Συγνώμη, αυτό, αυτό το πράγμα είναι το πρώτο πράγμα που κάνει ένας άνθρωπος για να βρει από τα πόσα πόσα. Και στο μανάβη να πας αυτό θα σου κάνει.

148. Α. Το ίδιο πράγμα είναι. Ε δεν μπορεί να βγαίνουνε, γι' αυτό, κι αυτό, αυτό είναι το πρώτο πράγμα που κάνουμε.

ή ακόμη και με απειλητικές για το πρόσωπο της Β εκφράσεις:

100. Α. Κι αν κάνεις λάθος;

110. Α. Ε ωραία, άμα εσύ μέτρησες ένα λάθος, εγώ θα κάθομαι να ψάχνω εγώ;

142. Α. Κάτσε να κάνω εγώ τον πολλαπλασιασμό γιατί εσύ τον έκανες... Λοιπόν, 24...

149. Β. Αφού έκανα επαλήθευση εδώ. Τα μέτρησα όλα. Είναι 15 κάθε...

150. Α. Ναι όμως το σχήμα σου δεν είναι, δεν είναι ακριβές.

151. Β. Είναι ακριβές γιατί, κοίτα, κάθε…

152. Α. Πού είναι ακριβές; Θα με τρελάνεις;

Ένα από αυτά τα επιχειρήματα αντιτίθεται στη νόρμα της σχετικότητας της λύσης, αφού σύμφωνα με αυτό, το αποτέλεσμα 224 είναι αποδεκτό αφού η διαφορά του από το 225 είναι μικρή (75, 77, 127).

75. Α. Εντάξει, είσαι 1 παραπάνω.

76. Β. Πώς γίνεται;

77. Α. Δεν πειράζει.

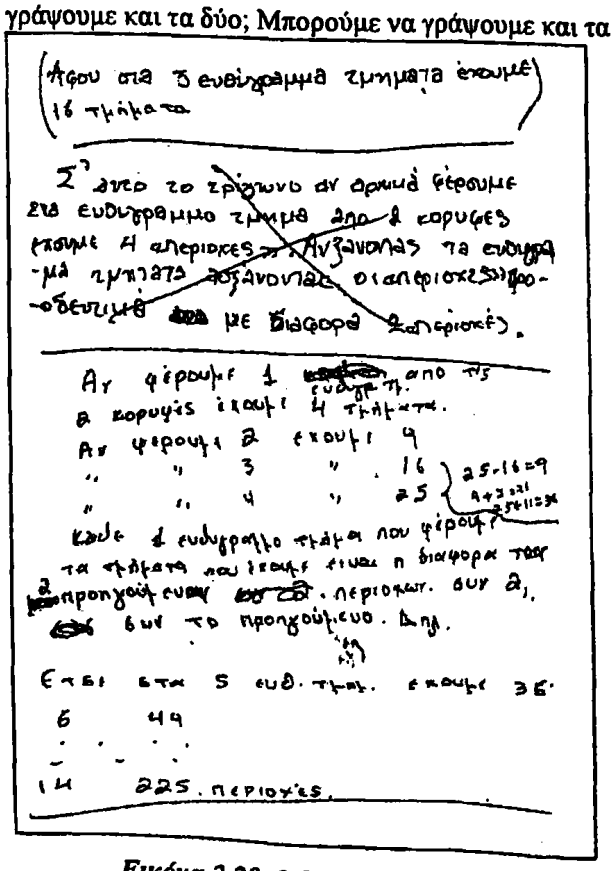
127. Α. Ωραία, εγώ έγραψα 224, έκανα λάθος στον πολλαπλασιασμό, δεν έγινε τίποτα. Το ίδιο πράγμα είναι.

146. Α. Δεν έχουν μεγάλη απόκλιση Νατάσα μου απ' το 224 στο 225. Να πω ότι βρήκα εγώ 180 κι εσύ βρήκες 225, να σου πω είναι λάθος. Δεν υπάρχει απόκλιση. Και στο κάτω κάτω επικαλυπτόμενες περιοχές μπορεί να (…) εδώ πέρα και να τα βγάζεις εσύ στην γεωμετρική πρόοδο ακριβώς. Κι εγώ να το βγάζω στα μπακαλίστικα ένα λιγότερο.

Παρόλα αυτά, όντας μη σίγουρη για την ορθότητα της διαδικασίας της, προτείνει την καταγραφή και των δύο μεθόδων, πρόταση που αντιτίθεται στη νόρμα της συνεργασίας:[56]

129. Α. Θες να τους γράψουμε και τους δύο τρόπους;

137. Α. Αυξάνεται σε κάθε… Καθώς ανεβαίνουμε αυξανόμαστε δύο. Είναι πρόοδος. Τώρα τι πρόοδο έχουμε δεν ξέρω. Πάντως αυτό εδώ πέρα το γράφαμε στο σχολείο. Είναι δεδομένο… Θες να τα γράψουμε και τα δύο; Μπορούμε να γράψουμε και τα δύο;



Εικόνα 2.28. 2-Ζ2, αρχική σελίδα

Τελικά, η Α πείθεται και συμμετέχει στη λεκτική διαμόρφωση της διαδικασίας που πρότεινε η Β, σύμφωνα με την οποία το πλήθος των μη επικαλυπτόμενων περιοχών αυξάνεται με τρόπο ώστε οι διαφορές τους να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Δηλαδή, ο εγωκεντρικός χαρακτήρας του ρόλου της δεν την εμποδίζει να συνεργαστεί δημιουργικά με τη συνομιλήτριά της, αφού όμως έχει εξαντλήσει κάθε προσπάθεια προώθησης της δικής της πρότασης.

Σκιαγραφώντας το ρόλο της Α στο συγκεκριμένο ζεύγος (πέρα από τα γενικά χαρακτηριστικά του εγωκεντρικού καθοδηγητή) και την επίδρασή του στη συγκρότηση κοινής γνώσης, μπορούμε να επισημάνουμε τα εξής:

- Το βασικό χαρακτηριστικό αυτού του ρόλου είναι η σημασία που δίνει στη διατήρηση του προσώπου. Πολλές ενέργειες γίνονται με γνώμονα αυτή τη διατήρηση και όχι την αποδοτική συνεργασία. Ακόμη και στις περιπτώσεις στις οποίες συμμετέχει από κοινού στη διαμόρφωση μιας πρότασης, η ερμηνεύτρια του συγκεκριμένου ρόλου επιδεικνύει στοιχεία προστασίας του προσώπου – και μερικές φορές απειλής στο πρόσωπο του συνομιλητή.
- Κάποιες ενέργειες εκφράζονται με τρόπο ώστε να παρεμποδίζουν κάποιες άλλες· συγκεκριμένα, η βεβαιότητα με την οποία εκφράζονται οι περισσότερες προτάσεις παρεμποδίζει την όποια κριτική. Επίσης, οι απειλητικές προς το πρόσωπο της συνομιλήτριας εκφράσεις αν και γίνονται για προστασία του προσώπου της, επιδρούν αρνητικά στην ομαλή εξέλιξη της αλληλεπίδρασης.
- Αρκετές φορές δεν ακολουθεί τη νόρμα της συνεργασίας, είτε προτείνοντας με απόλυτο τρόπο κάποιες διαδικασίες είτε δουλεύοντας ανεξάρτητα από τη συμφοιτήτριά της. Πάντως όταν αποδεχτεί μια διαδικασία συμμετέχει ενεργά στη διαμόρφωσή της.
- Ακολουθεί τη νόρμα της αμοιβαίας κατανόησης και της μαθηματικής δικαιολόγησης (η οποία θεωρείται υπεύθυνη για το γεγονός ότι στο δεύτερο πρόβλημα αποδέχεται τελικά την πρόταση της Β).
- Προσαρμόζει τη νόρμα της οριοθέτησης των μαθηματικών στο δεύτερο πρόβλημα όταν θεωρεί ότι το 224 έχει μικρή διαφορά από το 225, επομένως μπορεί να είναι αποδεκτή λύση.[57]
- Η συγκρότηση κοινής γνώσης παρεμποδίζεται από το συγκεκριμένο ρόλο γιατί η ερμηνεύτριά του ενεργεί καταρχήν με γνώμονα τη διατήρηση του προσώπου της και στη συνέχεια την αποτελεσματική συνεργασία. Το γεγονός αυτό δεν την εμποδίζει να

αποδεχτεί μια διαδικασία που προτάθηκε από τη συνομιλήτριά της, απλά τήν οδηγεί σε ενέργειες που καθυστερούν την ουσιαστική διαπραγμάτευση, άρα και την εφαρμογή της.

Φοιτήτρια Β – Συνεργατικός καθοδηγητής

Η Β από την αρχή της πρώτης συνάντησης δείχνει ότι παρά το ρόλο που επέλεξε η Α, η ίδια δεν πρόκειται να περιοριστεί σε παθητική συμπεριφορά. Αγνοεί λοιπόν την πρότασή της για χρήση συστήματος συντεταγμένων και προωθεί τη δική της πρόταση, την οποία δεν στηρίζει με λογική επιχειρηματολογία (12):

1. Α. Θα κάνουμε ένα τέτοιο. Ένα σύστημα συντεταγμένων. Και θα μετρήσουμε και θ' αριθμήσουμε.

2. Β. Ναι. Ένα διαγώνιο. Με βάση τη, διαγώνιο εδώ.

3. Α. Και θα δώσουμε μοίρες;

4. Β. Και μοίρες...

5. Α. Κατάλαβες τι είπα; Κατάλαβες πού το πάω;

6. Β. Ναι.

7. Α. Λοιπόν.

8. Β. Α, κοίτα να δεις. Εδώ είναι η διαγώνιος των τετραγώνων, των...

9. Α. Στα μικρά κουτάκια λες;

10. Β. Ναι... Κι εδώ είναι η διαγώνιος. Άρα, αυτή που (...) δεν είναι διαγώνιος σε κανένα τετραγωνάκι. Κατάλαβες τι θέλω να πω;

11. Α. Εννοείς ότι είναι... θα δώσουμε απόσταση ανάμεσα σ' αυτά τα δύο...

12. Β. Όχι. Πιο εύκολο είναι έτσι, κοίτα. Αυτή είναι η διαγώνιος του κύκλου και του τετραγώνου.

13. Α. Ωραία.

Αποτέλεσμα αυτής της συμπεριφοράς είναι να εγκαταλειφθεί προσωρινά η πρόταση της Α, η οποία επανέρχεται στο προσκήνιο όταν προκύπτει δυσκολία στην έκφραση κάποιων γεωμετρικών κατασκευών. Η Β γενικά δίνει ιδιαίτερη σημασία στην έκφραση:

42. Β. Πώς θα το πούμε; (...) Σκέφτομαι...

109. Β. Κάτσε ένα λεπτό, τι λέγεται... τι ονομασία έχει αυτό εδώ, ξέχασα τις ονομασίες.

116. Β. Πώς λέγεται ρε η... όχι αυτήνα που έχει τη γωνία...

155. Β. Ένα λεπτό, να το σκεφτώ διαφορετικά. Προσπαθώ να βρω τα ονόματα.

Η επιμονή της αυτή, συντελεί θετικά στη διαμόρφωση της διαδικασίας με την οποία ασχολούνται (και βέβαια σημαντικό ρόλο παίζει και η συμμετοχή της Α σε αυτή τη διαδικασία).

Σταδιακά, η αρχική πρόταση της Α για χρήση συστήματος συντεταγμένων επανέρχεται στο προσκήνιο. Η Β φαίνεται ότι αποδέχεται αυτή τη διαδικασία, ενσωματωμένη όμως στον κορμό της δικής της πρότασης. Δεν έχει πρόβλημα να

παραδεχτεί ότι οι συντεταγμένες διευκολύνουν τη γεωμετρική κατασκευή του σχεδίου:

371. Α. Ωραία. Είδες τι εύκολο που ήταν έτσι;

372. Β. Διαγώνιος των τετραγώνων, ναι. Στο σημείο (4 , 0).

Όταν όμως παρουσιάζονται κάποια μικροπροβλήματα, δεν παραβλέπει να σχολιάσει αρνητικά τη συγκεκριμένη πρόταση (δηλαδή να εκφραστεί ενάντια στο πρόσωπο της Α):

452. Β. Γι' αυτό σου λέω. Αφού αυτός είναι ο άξονας των x. Να, αφού μπλέξαμε με σύστημα συντεταγμένων.

458. Β. Κολλήσαμε με συντεταγμένες. Να σου πω; Για πες μου τι λέμε, ο άξονας των x περιλαμβάνει το πλην, το x –x;

Σε μία περίπτωση μάλιστα απειλεί καθαρά το πρόσωπο της Α:

417. Β. ... που μετράει με τη ρίγα. Πας στα δύσκολα, με συγχύζεις.

Στις εκφράσεις με τις οποίες η Α απειλεί το πρόσωπό της πάντα απαντά, αλλά συνήθως δίνοντας διευκρινίσεις, και σπάνια προσπαθώντας να υπερασπιστεί άμεσα το πρόσωπό της:

(Η Β σχεδιάζει τον κύκλο στη σελίδα 3 και η Α γελάει βλέποντας τη Β να δυσκολεύεται)

105. Β. Μη γελάς, ξέρεις πόσα χρόνια έχω να χρησιμοποιήσω;

162. Α. Δε θα αρχίσουμε με, δε θα βγάλουμε θεώρημα Νατάσα εδώ τώρα. Λοιπόν, στο Α... εε... Λοιπόν, όταν λέμε τραβάμε μια γραμμή, από πού όμως; Από δω ή από δω;

163. Β. Ε από δω. Αυ, αυτό είναι το σημείο...

164. Α. Ναι, αυτό πρέπει να το εξηγήσουμε.

165. Β. Ε, αυτό προσπαθώ να εξηγήσω τόση ώρα: πώς να του πούμε αυτό. Τέλο, τη, τέλος της ακτίνας με...

214. Α. Βάλε αριθμούς!

215. Β. Εντάξει βρε, τα βρίσκω. Δεν μπορώ, αν έχει πολλά πάνω συγχύζομαι... ΟΚ.

Στη αρχή της δεύτερης συνάντησης η Β προτείνει τη γεωμετρική κατασκευή, όταν όμως η Α εισάγει την ιδέα της αναλογίας την ακολουθεί και την εφαρμόζει. Αμέσως μετά όμως εφαρμόζει και τη δική της πρόταση σχεδιάζοντας 14 ευθύγραμμα τμήματα από καθεμιά από τις δύο κορυφές του τριγώνου. Δηλώνει ξεκάθαρα τη νόρμα στην οποία βασίζεται η ενέργειά της,

57. Β. Για επαλήθευση.

την οποία πραγματοποιεί, παρά τις απειλητικές για το πρόσωπό της εκφράσεις της Α. Αυτή η επιμονή καταδεικνύει τις καθοδηγητικές τάσεις της Β, και η άρνηση απάντησης στις απειλές κατά του προσώπου της καταδεικνύει τη συνεργατική φύση της προσπάθειάς της (με την έννοια ότι δεν την ενδιαφέρει η αποκατάσταση του

προσώπου της, αλλά ο έλεγχος της ορθότητας του αποτελέσματος στο οποίο οδηγήθηκε η συμφοιτήτριά της). Στη συνέχεια, ενώ η Α πείθεται ότι η σχέση που αναζητούν δεν είναι σχέση αναλογίας, η Β εισάγει μία νέα διαδικασία, σύμφωνα με την οποία το πλήθος των μη επικαλυπτόμενων περιοχών αυξάνεται με τρόπο ώστε οι διαφορές τους να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Οι αντιδράσεις της Α (με απειλητικές για το πρόσωπό της εκφράσεις) φαίνεται να μη την επηρεάζουν:

100. Α. Κι αν κάνεις λάθος;

101. Β. Ε, θα βρούμε άλλον τρόπο... 3 4... 36.

Στο σημείο που η Α προτείνει την καταγραφή και των δύο μεθόδων η Β αντιδρά, σύμφωνα με τη νόρμα της οριοθέτησης των μαθηματικών:

141. Β. Αφού δε βγαίνει 225.

145. Β. Αφού δεν βρίσκουμε 225, άρα δεν είναι σωστή η αναλογία. Δεν είναι σωστό τούτον. Τούτον θα ήταν σωστό αν ανεβ, αν ανεβαίναν 5 5 5 5 5 5. Να έχει συν δύο προηγούμενο που βρίσκουμε, εκεί θα τα κάναμε αναλογία, μέθοδο των τριών.

Επίσης, ακολουθεί τη νόρμα της μαθηματικής δικαιολόγησης για να εξηγήσει στην Α γιατί η μέθοδος που προτείνει δεν μπορεί να γίνει αποδεκτή. Δεν υποχωρεί παρά την επιμονή της Α και τελικά υιοθετείται η δική της πρόταση, την οποία διαμορφώνουν από κοινού μέχρι να γίνει η τελική της καταγραφή. Σκιαγραφώντας το ρόλο της Β στο συγκεκριμένο ζεύγος (πέρα από τα γενικά χαρακτηριστικά του συνεργατικού καθοδηγητή) και την επίδρασή του στη συγκρότηση κοινής γνώσης, μπορούμε να επισημάνουμε τα εξής:

- Το βασικό χαρακτηριστικό του συγκεκριμένου ρόλου – που τον διαφοροποιεί από το συνεργατικό αξιολογητή – είναι η επιμονή με την οποία στηρίζει μια πρόταση, στην περίπτωση βέβαια που η «ανταγωνιστική» πρόταση δεν πληροί κάποιες προϋποθέσεις (ή αλλιώς δεν συνάδει με κάποιες νόρμες). Η ερμηνεύτρια αυτού του ρόλου συνήθως πετυχαίνει το σκοπό της, ο οποίος δεν είναι η υιοθέτηση της πρότασής της, αλλά η διαμόρφωση μιας πρότασης σύμφωνης με τις απαιτήσεις του προβλήματος και τις διάφορες νόρμες που βρίσκονται σε ισχύ.
- Σαφέστατα ακολουθούνται όλες οι νόρμες που έχουμε αναφέρει, και αρκετές φορές η ύπαρξή τους χρησιμοποιείται ως επιχείρημα για την προώθηση μιας διαδικασίας.
- Το δεύτερο βασικό χαρακτηριστικό αυτού του ρόλου – που τον διαφοροποιεί από τον εγωκεντρικό καθοδηγητή – είναι ο τρόπος διαχείρισης των ενεργειών με τις οποίες απειλείται το πρόσωπο του ομιλητή και γενικά κάθε ενέργειας που οδηγεί σε

ένταση. Το άτομο που ερμηνεύει το συγκεκριμένο ρόλο σπάνια απαντά άμεσα στις απειλητικές για το πρόσωπό του εκφράσεις· συνήθως επιδιώκει μέσω των ενεργειών του να καταδείξει την καταλληλότητα της δικής του πρότασης ή την ακαταλληλότητα της πρότασης του συνομιλητή του.

• Η συγκρότηση κοινής γνώσης υποστηρίζεται από το συγκεκριμένο ρόλο γιατί – σε αντίθεση με το ρόλο του εγωκεντρικού καθοδηγητή – η ερμηνεύτρια αυτού του ρόλου ενεργεί καταρχήν με γνώμονα την αποτελεσματική συνεργασία και στη συνέχεια τη διατήρηση του προσώπου της. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την προώθηση θέσεων με επιχειρήματα και πάντα με βάση τις σχετικές κοινωνικές και κοινωνικομαθηματικές νόρμες.

2.5.4.2. Η Χρονική Εξέλιξη των Ρόλων και η Επίδραση των Συνδυασμών τους στη Συγκρότηση Κοινής Γνώσης

Η χρονική εξέλιξη των ρόλων που ερμηνεύουν οι φοιτητές και η επίδραση κάθε συνδυασμού στη συγκρότηση κοινής γνώσης παρουσιάζεται στον πίνακα της επόμενης σελίδας. Η επίδραση χαρακτηρίζεται ως θετική (Θ), αρνητική (Α), απροσδιόριστη / ουδέτερη (Ο). Η περίπτωση της απροσδιόριστης επίδρασης αφορά τα ζεύγη στα οποία ο συσχετισμός των ρόλων παρουσίασε κατά διαστήματα και θετική και αρνητική επίδραση στη συγκρότηση κοινής γνώσης, χωρίς να υπερτερεί κάποια από τις δύο επιδράσεις. Φυσικά και στις υπόλοιπες συναντήσεις υπήρχαν μικρές μεταβολές στη συσχέτιση των ρόλων, αλλά και στην επίδραση στη συγκρότηση κοινής γνώσης· σε αυτές τις περιπτώσεις επιλέξαμε τον πιο μακρύ σε διάρκεια συσχετισμό ρόλων και την επικρατούσα τιμή της επίδρασης.

Πίνακας 2.6. Χρονική εξέλιξη των ρόλων και επίδρασή τους στη συγκρότηση κοινής γνώσης

Ζεύγος	Πρόβλημα 1		Πρόβλημα 2		Πρόβλημα 3	
1	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ
2	Εγωκεντρικός καθοδηγητής Συνεργατικός καθοδηγητής	Ο	Εγωκεντρικός καθοδηγητής Συνεργατικός καθοδηγητής	Ο	Εγωκεντρικός καθοδηγητής Συνεργατικός καθοδηγητής	Ο
3	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ
4	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ	Συνεργατικός καθοδηγητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ	Συνεργατικός καθοδηγητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ
5	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ
6	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ
7	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ
8	Συνεργατικός καθοδηγητής Συνεργατικός αξιολογητής	Ο	Συνεργατικός καθοδηγητής Συνεργατικός αξιολογητής	Α	Συνεργατικός καθοδηγητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ
9	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ
10	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός καθοδηγητής	Θ	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός καθοδηγητής	Θ
11	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ
12	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ
13	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός καθοδηγητής	Θ	Παθητικός συνεργάτης Συνεργατικός καθοδηγητής	Θ	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός καθοδηγητής	Θ
14	Συνεργατικός καθοδηγητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ	–	
15	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ	–		Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ
16	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ
17	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ
18	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ	–	
19	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ	–	
20	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ	Συνεργατικός αξιολογητής Συνεργατικός αξιολογητής	Θ

ΣΧΟΛΙΑ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

[1] Η έννοια της ψευδο-μαθηματικής γλώσσας ορίζεται στην παράγραφο 2.3.10.2.

[2] Στην εργασία του, που αφορά τη διδασκαλία της φυσικής, ο Lemke (1989) παρατηρεί ότι «Πράγματι, οι μαθητές είναι τρεις η τέσσερις φορές πιο πιθανό να δείξουν σημάδια ενασχόλησης με το μάθημα όταν ο δάσκαλος παραβαίνει τους τυπικούς και απρόσωπους κανόνες της επιστημονικής ομιλίας στην τάξη, παρά όταν οι κανόνες αυτοί ακολουθούνται» (Lemke, 1989, σ. 16).

[3] Σχετικά πρόσφατα έχουν εμφανιστεί κάποιες μελέτες στη φυσική (Richmond and Striley,1996, Hogan, 1999), οι οποίες επιχειρούν να κατηγοριοποιήσουν τους ρόλους που υιοθετούν οι μαθητές κατά τη συνεργατική επίλυση προβλημάτων. Επίσης, οι Kynigos and Theodossopoulou (2001) μελετούν την εξέλιξη και την αλληλεπίδραση των ρόλων που αρχικά ανατίθενται από το δάσκαλο στους μαθητές, καθώς συνεργάζονται στη χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών.

[4] Οι Boer, Baalen and Kumar (2002) αναφέρουν τρεις λόγους που καθιστούν εξαιρετικά δύσκολη την ανάλυση του φαινομένου της συγκρότησης κοινής γνώσης: α) Δεν είναι ευδιάκριτα η αρχή και το τέλος της διαδικασίας, β) ένα σημαντικό μέρος της κοινής γνώσης που συγκροτείται είναι άδηλη (tacit) και γ) ένα σημαντικό μέρος της διανοητικής δραστηριότητας που σχετίζεται με τη συγκρότηση κοινής γνώσης αποτελεί μια εσωτερική διαδικασία δύσκολα προσβάσιμη μέσω της παρατήρησης.

[5] Για τους σκοπούς της έρευνάς μας τοποθετούμε την καθημερινή και την ψευδο-μαθηματική γλώσσα στην ίδια κατηγορία, αφού και τα δύο είδη απέχουν από την τυπική μαθηματική γλώσσα.

[6] Με την έννοια ότι ένα σημαντικό τμήμα κάθε ρόλου αποτελείται από την ερμηνεία των ενεργειών των άλλων, σύμφωνα με τη θεωρία της συμβολικής αλληλεπίδρασης.

[7] Οι σχετικοί πίνακες που παρατίθενται στο Παράρτημα, και αφορούν το πλήθος των εννοιών και διαδικασιών, έχουν κυρίως εποπτική λειτουργία. Όσον αφορά τους ρόλους, είναι αναπόφευκτη μία σύγκριση μέσω καταμέτρησης συγκεκριμένων ενεργειών. Για παράδειγμα, αν ο ένας φοιτητής καταθέτει περισσότερες προτάσεις από το συνομιλητή του, τότε έχει πολλές πιθανότητες να λάβει το ρόλο του καθοδηγητή (Βλέπε την παράγραφο της ανάλυσης των ρόλων). Ακόμη και σε αυτή την περίπτωση όμως, το πλήθος των συγκεκριμένων ενεργειών δεν αποτελεί μέσο ελέγχου κάποιας υπόθεσης, αλλά *μέσο σύγκρισης* για την εξαγωγή κάποιου συμπεράσματος.

[8] Ο τοπικός χαρακτήρας των φαινομένων δεν εμποδίζει την επανεμφάνισή τους σε άλλες περιστάσεις· απλά οποιαδήποτε σύγκριση ή προσπάθεια ομαδοποίησης δεν πρέπει να αγνοεί τη σημαντική επίδραση του πλαισίου.

[9] Για παράδειγμα, η έννοια της κοινωνικομαθηματικής νόρμας αποτελεί μία παράμετρο κοινωνικής φύσης που εμπεριέχει και μαθηματικά στοιχεία (σχετίζεται με μαθηματικές ενέργειες).

[10] Σε κάποιες περιπτώσεις τα υποκείμενα έκαναν ερωτήσεις σχετικές με την επίπτωση που θα είχε μια ενδεχόμενη λαθεμένη απάντηση σε κάποιο πρόβλημα.

[11] Οι λεπτομέρειες του ρόλου του παρατηρητή περιγράφονται στη σχετική παράγραφο.

[12] Ο λόγος που επιμένουμε σε έννοιες που έχουν εισαχθεί από μέλη του ζεύγους είναι γιατί μόνο αυτές οι έννοιες υπόκεινται σε ουσιαστική διαπραγμάτευση· αντίθετα, μια έννοια που έχει εισαχθεί από κάποιον ειδικό θα οδηγούσε σε συζήτηση που θα αφορούσε αποκλειστικά τον τρόπο εφαρμογής της, και όχι την καταλληλότητά της.

[13] Αναφερόμαστε στους Έλληνες φοιτητές. Οι Κύπριοι φοιτητές προέρχονται από διάφορους κλάδους. (Βλ. τον Πίνακα 2.1.).

[14] Η φοβία αυτή εκφραζόταν με ερωτήσεις του τύπου «Είναι δύσκολο το πρόβλημα που θα μας δώσετε;» ή από παρόμοιες δηλώσεις μετά από μια πρώτη ανάγνωση της εκφώνησης του προβλήματος.

[15] Ο Mercer (2000) αναφέρει τη μελέτη των Azmitia and Montgomery (1993). Επίσης η Civil διαπίστωσε ότι «οι πιο μαθηματικά παραγωγικές συζητήσεις παρατηρήθηκαν στην ομάδα στην οποία δύο από τα μέλη της ήταν συνηθισμένα στο να αμφισβητούν ο ένας τη γνώμη του άλλου γιατί ήταν φίλοι για μεγάλο χρονικό διάστημα» (Civil, 1998, σ. 220).

[16] Το πλήθος των προβλημάτων που θα δοθούν στους φοιτητές επιλέχθηκε με βάση τους χρονικούς περιορισμούς των υποκειμένων, αλλά και του χώρου διεξαγωγής της έρευνας: πολλές φορές τα δύο μέλη ενός ζεύγους παρακολουθούν διαφορετικά μαθήματα (περιορίζοντας έτσι τον κοινό τους ελεύθερο χρόνο) και ο χώρος του Εργαστηρίου Διδασκαλίας των Μαθηματικών μπορούσε να χρησιμοποιηθεί μόνο απογευματινές ώρες.

[17] Η έρευνα καταλήγει στο ότι «οι ασκήσεις επίλυσης προβλήματος συνετέλεσαν πιο πολύ σε μια κοινωνική κατασκευή των εννοιών, ενώ οι ασκήσεις πάνω σε «γνωστά πράγματα» κατέδειξαν περισσότερο τις πεποιθήσεις των μαθητών, κυρίως σχετικά με τη διδασκαλία» (Civil, 1998, σσ. 220-221).

[18] Η Civil (1998) αναφέρει δύο παραδείγματα γνωστικής σύγκρουσης: την παρουσίαση ενός εναλλακτικού αλγορίθμου για μία από τις τέσσερις βασικές αριθμητικές πράξεις, και τις περιπτώσεις κατά τις οποίες η σύγκρουση προέρχεται από διαφορετικές προσεγγίσεις των μαθητών.
[19] Αναφερόμαστε στους τύπους εύρεσης του εμβαδού ορθογωνίου τριγώνου και ορθογωνίου παραλληλογράμμου, καθώς και τον τύπο εύρεσης του όγκου ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Με την κατάλληλη χρήση αυτών των τύπων μπορεί να επιλυθεί το τρίτο πρόβλημα.
[20] Οι μέθοδοι δεν είναι αντικρουόμενες στην πραγματικότητα, αφού μπορούν να χρησιμοποιηθούν συμπληρωματικά (εύρεση του μαθηματικού τύπου μέσω γεωμετρικής κατασκευής 4 ή 5 ευθυγράμμων τμημάτων από καθεμιά από τις δύο κορυφές).
[21] Με την έννοια ότι δεν στηρίζονται σε κάποιο γνωστό θεώρημα της γεωμετρίας.
[22] Μία από τις χρήσεις κάποιων κινητών τηλεφώνων είναι και η πραγματοποίηση αριθμητικών πράξεων.
[23] Ο Goffman ορίζει ως σκηνή την περίσταση «κατά την οποία ένα άτομο ενεργεί με τέτοιο τρόπο ώστε καταστρέφει ή απειλεί σοβαρά την εμφάνιση μιας ευγενούς ομοφωνίας, και ενώ μπορεί να μην ενεργεί μόνο με σκοπό την πρόκληση τέτοιας παραφωνίας, γνωρίζει ότι είναι πιθανό κάτι τέτοιο να συμβεί.» (Goffman, 1971, σ. 205).
[24] Ο King αναφέρεται στη σημασία που έχει η αποστροφή του βλέμματος: «Το πιο σημαντικό, είναι ότι απέφευγα την επαφή με τα μάτια: εάν δεν κοιτάζεις, δεν σε βλέπουν.» (King, 1979, όπως αναφέρεται στους Cohen and Manion, 1994, σ. 156).
[25] «Πρέπει να τονίσουμε ότι οι διαχωριστικές γραμμές ανάμεσα στους τύπους κωδικοποίησης είναι τεχνητές. Οι διαφορετικοί αυτοί τύποι δεν πραγματοποιούνται σε διαφορετικά στάδια. Κατά τη διάρκεια της κωδικοποίησης μπορεί κανείς να μετακινηθεί εύκολα και ασυναίσθητα μεταξύ διαφορετικών μορφών κωδικοποίησης, κυρίως μεταξύ της ανοιχτής και της αξονικής. Παρόλο που αυτοί οι δύο τύποι κωδικοποίησης γίνονται συνήθως στα πρώιμα στάδια της εργασίας, μπορεί να γίνουν και κοντά στο τέλος της. Αυτό συμβαίνει γιατί κατά τη διάρκεια της επιλεκτικής κωδικοποίησης μπορεί κανείς να συναντήσει έννοιες που δεν έχουν αναπτυχθεί ή αξιολογηθεί επαρκώς. (Strauss and Corbin, 1990, σ. 58).
[26] Ο Lemke (1989) αναφέρει παραδείγματα διαλόγων που καταδεικνύουν ότι ο δάσκαλος προκειμένου να διατηρήσει την κυριαρχική του θέση στην τάξη, «θυσιάζει» την επαρκή ανάπτυξη κάποιων θεμάτων και, αντίστροφα, περιπτώσεις που ο δάσκαλος «θυσιάζει» την κυριαρχική του θέση προκειμένου να αναπτυχθεί επαρκώς κάποιο θέμα.
[27] Οι Steffe and Thompson (2000) διευκρινίζουν ότι ο όρος «συμφωνία» δεν παραπέμπει σε πανομοιότυπες εννοιολογικές δομές, αλλά σε εννοιολογικές δομές που είναι «επαρκώς συμβατές για επιτυχή αμοιβαία αφομοίωση» (Steffe and Thompson, 2000, σ. 193).
[28] Οι μελέτες των Dreyfus, Hershkowitz and Schwarz (2001) και Williams and Clarke (2003) ασχολούνται με τη μελέτη των δομών της αλληλεπίδρασης που οδηγούν στη δημιουργία κοινών εννοιών. Διαχωρίζουν τις γνωστικές από τις κοινωνικές ενέργειες, διακρίνοντας τις πρώτες σε: αναγνώριση (recognising), συναρμολόγηση (building-with), κατασκευή (constructing) και τις δεύτερες σε: έλεγχο (control), επεξεργασία (elaboration), εξήγηση (explanation), ερώτηση (query), συμφωνία (agreement), προσοχή (attention). Τα ευρήματά τους συνιστούν τη σύνδεση μεταξύ γνωστικών και κοινωνικών ενεργειών με τρόπους που σχετίζονται με το ρόλο που υιοθετούν τα υποκείμενα, αλλά και με τη συνοχή της ομιλίας· με άλλα λόγια ανάλογα με το ρόλο που υιοθετούσε κάθε μαθητής, «αναλάμβανε» να εισαγάγει, να επεξεργαστεί και να διαμορφώσει τις κοινές έννοιες.
[29] Η οικειοποίηση της νέας έννοιας είναι σημαντική, αφού σε κάποιες περιπτώσεις η άμεση αποδοχή της γίνεται για την επίσπευση της διαδικασίας, από εμπιστοσύνη στις ικανότητες του συνεργάτη ή από μη εμπιστοσύνη στις ικανότητες του ίδιου (Βλ. παράγραφο 2.3.10.4. όπου αναλύονται οι ρόλοι των φοιτητών). Σε αυτές τις περιπτώσεις δεν θεωρούμε τη συγκεκριμένη έννοια κοινή.
[30] Πρόκειται για τις κοινωνικομαθηματικές νόρμες που έχουμε αναφέρει στην παράγραφο 1.5.1.
[31] Η διαδικασία είναι πιο ευρύς όρος, αφού περιλαμβάνει κάποιες έννοιες και κάποιες ενέργειες σχετικές με αυτές. π.χ. η διαδικασία «σχεδιάζω ένα κύκλο» περιλαμβάνει την έννοια του κύκλου και την ενέργεια της σχεδίασης. Ο διαχωρισμός αυτός έγινε κυρίως για την ανάδειξη κάποιου πιθανού συσχετισμού ανάμεσα στο είδος της γλώσσας και στο αν το αντικείμενο αναφοράς πρόκειται για έννοια ή διαδικασία.
[32] Η συγχώνευση αυτή πραγματοποιήθηκε και κατά τη διάρκεια της ανάλυσης των δεδομένων, όταν διαπιστώσαμε ότι οι δύο κατηγορίες μη μαθηματικής γλώσσας χρησιμοποιούνται με τον ίδιο τρόπο και έχουν την ίδια ακριβώς επίδραση στη συγκρότηση κοινής γνώσης.
[33] Και στην πραγματικότητα το σκηνικό και η εμφάνιση των ατόμων (αν εξαιρέσουμε το ντύσιμο) παραμένουν σταθερά και στις τρεις συναντήσεις. Το κοινό, αποτελούμενο από τον παρατηρητή,

ακολουθεί μια σταθερή ερμηνεία ρόλου (όπως αναφέραμε στην παράγραφο 2.3.8.), αν και κάποιες παρεκκλίσεις είναι αναπόφευκτες.

[34] «Η γλώσσα συνδέεται με την ισχύ, και έχει ως αποτέλεσμα την τοποθέτηση των ηθοποιών στη συζήτηση» (Lerman, 1994, σ. 195).

[35] Η ταξινόμηση των συμπεριφορών που περιγράψαμε στην παράγραφο 1.5.2.1. αποδεικνύεται πολύ γενική για τους σκοπούς της έρευνάς μας· γι' αυτό το λόγο στηριζόμαστε στην κατηγοριοποίηση του Bales (1966), ο οποίος, αν και χρησιμοποίησε και ομάδες περισσοτέρων των δύο ατόμων, μελέτησε περιστάσεις επίλυσης προβλήματος. Οι κατηγορίες που χρησιμοποίησε ο Bales ήταν οι ακόλουθες: έκφραση αλληλεγγύης, ένδειξη εκτόνωσης της έντασης, έκφραση συμφωνίας, υποβολή πρότασης, κατάθεση γνώμης, παροχή πληροφορίας, αναζήτηση πληροφορίας, αναζήτηση γνώμης, αναζήτηση πρότασης, έκφραση διαφωνίας, ένδειξη έντασης, ένδειξη ανταγωνισμού (Bales, 1966, σ. 256).

[36] Για λόγους απλούστευσης ο Πίνακας 2.4. βασίζεται στην παραδοχή ότι η αλληλεξάρτηση λαμβάνει χώρα σε επίπεδο δράσης-αντίδρασης· στην πραγματικότητα συναντήσαμε πιο μακρές αλληλουχίες ενεργειών. Επίσης, από το συγκεκριμένο πίνακα απουσιάζουν οι υποκατηγορίες της διαφοροποίησης, της ομοιομορφίας, της εξειδίκευσης και της συνάφειας, οι οποίες χρησιμοποιούνται σε μια πιο συνολική ανάλυση και σύγκριση των ρόλων που ακολουθεί.

[37] Στους φοιτητές δηλώθηκε από την αρχή ότι θα εργαστούν σε ζεύγη.

[38] Μια γενίκευση του προβλήματος και οι αντίστοιχες λύσεις φοιτητών του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών περιέχεται στη μελέτη του Klaoudatos (2002).

[39] Η ύπαρξη συμφωνίας είναι απαραίτητη προϋπόθεση για να χαρακτηριστεί μία αντίληψη νόρμα, αφού έχουμε τονίσει ότι οι νόρμες δημιουργούνται από κοινού κατά τη διάρκεια μιας αλληλεπίδρασης.

[40] Ο Mercer (2000, σ. 44) περιγράφει κάποιες από τις τεχνικές καθοδήγησης που χρησιμοποιούνται από τους εκπαιδευτικούς.

[41] Θεωρούμε ότι η εισαγωγή των εννοιών από τους ίδιους τους φοιτητές είναι σημαντική γιατί έτσι μπορούμε να αναλύσουμε και τη συμπεριφορά που σχετίζεται με την αξιολόγηση και την ουσιαστική διαπραγμάτευση της γνώσης. Στην περίπτωση που η γνώση είχε εισαχθεί από κάποιον «ειδικό», οι φοιτητές δεν θα αξιολογούσαν τη χρησιμότητα της προτεινόμενης έννοιας, αλλά μόνο τον τρόπο εφαρμογής της.

[42] Τα συγκεκριμένα αποσπάσματα επιλέχθηκαν με βάση την ποικιλία στις περιπτώσεις εισαγωγής νέων εννοιών και την περιεκτικότητά τους σε αυτές.

[43] Το γεγονός ότι ζητείται η γνώμη του συνομιλητή μπορεί να αποδοθεί και στην υιοθέτηση κάποιας κοινωνικής νόρμας, όπως θα δείξουμε στη σχετική παράγραφο. Αυτό δεν αναιρεί την αβεβαιότητα που εκφράζει ο συγκεκριμένος φοιτητής.

[44] «Δαμέ» στην κυπριακή διάλεκτο σημαίνει «εδώ».

[45] Πρόκειται για μάρκα σοκολάτας που έχει σχήμα τριγωνικού πρίσματος.

[46] Θεωρούμε ότι η συγκεκριμένη συμπεριφορά συνάδει με την κοινωνική νόρμα της συνεργασίας γιατί στην πλειοψηφία των περιπτώσεων, το άτομο που ζητάει την πληροφορία είτε τη γνωρίζει ήδη είτε είναι πολύ εύκολο να τη βρει χωρίς βοήθεια. Στις περιπτώσεις που το άτομο δε γνωρίζει την πληροφορία για την οποία κάνει την ερώτηση, πάλι θεωρούμε ότι ακολουθεί τη νόρμα συνεργασίας, γιατί σε αντίθετη περίπτωση δεν θα έκανε καν την ερώτηση και θα χρησιμοποιούσε κάποια έκφραση ψευδο-μαθηματικής ή και καθημερινής γλώσσας.

[47] Γι' αυτό το λόγο, η συγκεκριμένη ερώτηση θα μπορούσε να ταξινομηθεί και στο προηγούμενο είδος σχετικής έκφρασης, δηλαδή αυτό κατά το οποίο ο ομιλητής ζητάει τη γνώμη του συνομιλητή του.

[48] Πρόκειται για το φαινόμενο που ονομάζεται μετα-συζήτηση (Sfard, 2000).

[49] Χρησιμοποιώντας την ορολογία της θεωρίας ρόλου, οι φοιτητές υιοθετούν το ρόλο του βιοτέχνη στην προσπάθειά τους να δώσουν στη λύση τους μεγαλύτερη σαφήνεια.

[50] Όπως έχουμε προαναφέρει, οι νόρμες είναι αντιλήψεις που εγκαθίστανται και διαμορφώνονται *από κοινού*. Το γεγονός μιας επιμέρους διαφωνίας δεν είναι ικανό να αναιρέσει την κοινή αντίληψη του συγκεκριμένου ζεύγους για τη σαφήνεια της έκφρασής τους.

[51]

[52] Πιο συγκεκριμένα, στο συγκεκριμένο απόσπασμα φαίνεται η αλληλεπίδραση που υπάρχει μεταξύ συγκεκριμένων ρόλων και νορμών, φαινόμενο το οποίο αναλύουμε στη σχετική παράγραφο.

[53] Γενικά, κάθε πρόταση μπορεί να θεωρηθεί ότι επιδρά με κάποιο τρόπο στο πρόσωπο του δρώντα ή του δέκτη. Για τους σκοπούς της ανάλυσής μας περιοριστήκαμε στις εκφράσεις που έχουν άμεση (άρα και μεγαλύτερη) επίδραση στο πρόσωπο κάποιου από τους μετέχοντες στην αλληλεπίδραση.

[54] Το βασικό μας κριτήριο σε αυτή τη θεώρηση είναι η χρονική διάρκεια της ερμηνείας του κάθε ρόλου.

[55] Σύμφωνα με τη θεωρία του Goffman για την απόσταση από το ρόλο, πιθανόν η φοιτήτρια να αισθάνεται ότι είναι αδύνατο τη δεδομένη χρονική στιγμή να απεμπλακεί από ένα ρόλο στον οποίο την

οδήγησε η περίσταση. Προκειμένου λοιπόν να αποφύγει μία ενδεχόμενη σύγκρουση ρόλων, αποφασίζει να παραμείνει στο ρόλο που έχει ερμηνεύσει μέχρι αυτή τη στιγμή.

[56] Θεωρούμε ότι στο συγκεκριμένο ζεύγος, η επιμονή της φοιτήτριας Α να καταγραφούν και οι δύο μέθοδοι επίλυσης αντιτίθεται στη νόρμα της συνεργασίας αφού δεν δέχεται ότι το αποτέλεσμα της δικής της μεθόδου είναι διαφορετικό από το αντίστοιχο της άλλης πρότασης. Η κοινωνικομαθηματική νόρμα της συνεργασίας δεν έχει θέση στη συγκεκριμένη συμπεριφορά, η οποία κατευθύνεται από ιδιοτελή κίνητρα.

[57] Θεωρούμε ότι η συγκεκριμένη συμπεριφορά σχετίζεται περισσότερο με τη νόρμα οριοθέτησης των μαθηματικών και όχι με τη νόρμα σχετικότητας της λύσης. Ο λόγος είναι ότι η συγκεκριμένη συμπεριφορά υποστηρίζει ότι προσεγγίσεις σε αριθμητικά αποτελέσματα μπορούν να γίνουν ακόμη και σε προβλήματα που εμπλέκουν αποκλειστικά και μόνο φυσικούς αριθμούς. Πρόκειται λοιπόν περισσότερο για πρόβλημα σαφούς οριοθέτησης των μαθηματικών και λιγότερο για πρόβλημα σχετικότητας της λύσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

ΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΕΣ ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ

3. ΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΕΣ ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ

Η ανάλυση των δεδομένων της έρευνας, την οποία παρουσιάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο πραγματοποιήθηκε με βάση τις αρχικές ερευνητικές μας υποθέσεις, οι οποίες αφορούσαν την επίδραση γλωσσικών και άλλων κοινωνικών παραγόντων στη συγκρότηση κοινής μαθηματικής γνώσης. Οδηγούμαστε έτσι σε κάποια συμπεράσματα που αφορούν καθεμιά από τις αρχικές υποθέσεις.

Υπόθεση Α1:

Η αντικατάσταση μαθηματικών όρων με εκφράσεις μη μαθηματικής γλώσσας επιδρά θετικά στη συγκρότηση κοινής γνώσης όταν οι όροι σχετίζονται με μαθηματικές έννοιες.

Η ανάλυση όλων των απομαγνητοφωνημένων συζητήσεων μας οδηγεί στην επιβεβαίωση της υπόθεσης αυτής. Στο πρώτο πρόβλημα, αρκετά συχνά παρατηρούμε την αντικατάσταση εννοιών όπως η διάμετρος του κύκλου, ή το μήκος της ακτίνας του με λαθεμένους μαθηματικά όρους: το ίδιο φαινόμενο παρατηρείται και στο τρίτο πρόβλημα με έννοιες σχετικές με τον όγκο κάποιων στερεών (το δεύτερο πρόβλημα λόγω της φύσης του δεν απαιτούσε τη διαπραγμάτευση πολλών εννοιών, άρα και οι περιπτώσεις χρήσης μη μαθηματικής γλώσσας ήταν σχετικά λίγες όσον αφορά έννοιες). Η αντικατάσταση αυτή γενικά επιδρά θετικά στη διαπραγμάτευση κοινών εννοιών· φαίνεται πως η χρήση ενός κοινού και κατανοητού «κώδικα» διευκολύνει τους φοιτητές, ακόμη και αν ο κώδικας αυτός δεν είναι αυστηρά μαθηματικός. Σε λίγες περιπτώσεις η ανάγκη αναζήτησης του «σωστού» όρου επηρεάζει τη διαπραγμάτευση της κοινής έννοιας, αλλά μόνο παροδικά: οι φοιτητές ή καταλήγουν εύκολα στο σωστό μαθηματικό όρο ή αναλώνονται σε μια – συνήθως όχι μακρά – συζήτηση, της οποία το κόστος είναι μόνο χρονικό. Πάντως, η ανάγκη χρήσης αυστηρής μαθηματικής ορολογίας εμφανίζεται ισχυρότατη στο σημείο που αποφασίζεται η καταγραφή της λύσης. Σε αυτό το σημείο, η ιδιαίτερη φύση του πρώτου προβλήματος, σε συνδυασμό με την έντονη επίδραση της νόρμας κατανόησης από τρίτο (στην προκειμένη περίπτωση το βιοτέχνη), οδηγεί τους φοιτητές στην αβίαστη υιοθέτηση μη μαθηματικής γλώσσας, την οποία χρησιμοποιούν καθ' όλη τη διάρκεια της συνάντησης. Αντίθετα, στο τρίτο πρόβλημα,

υπάρχει μια πιο έντονη προσπάθεια χρησιμοποίησης μαθηματικής γλώσσας, η οποία σε αρκετές περιπτώσεις βοηθά τους φοιτητές όχι μόνο στην αποσαφήνιση εννοιών, αλλά και στην εισαγωγή νέων, πιο χρήσιμων εννοιών και διαδικασιών.

Υπόθεση Α2:

Η αντικατάσταση μαθηματικών όρων με εκφράσεις μη μαθηματικής γλώσσας επιδρά αρνητικά στη συγκρότηση κοινής γνώσης όταν οι όροι σχετίζονται με μαθηματικές διαδικασίες.

Η ανάλυση των απομαγνητοφωνημένων συζητήσεων σε όλα τα προβλήματα μας οδηγεί σε αντικρουόμενα αποτελέσματα όσον αφορά την Υπόθεση Α2: σε κάποιες περιπτώσεις η χρήση μη μαθηματικής γλώσσας στην περιγραφή μιας διαδικασίας δημιουργεί σοβαρά προβλήματα κατανόησης (τα οποία επιδρούν με τη σειρά τους αρνητικά στην ουσιαστική διαπραγμάτευση), ενώ σε άλλες περιπτώσεις η ασάφεια στην έκφραση δεν αποτελεί εμπόδιο στην ουσιαστική διαπραγμάτευση. Προσπαθώντας να εντοπίσουμε τους παράγοντες που επιδρούν σε καθεμιά από τις δύο περιπτώσεις, επισημαίνουμε καταρχήν ότι οι περισσότερες δυσκολίες από τη χρήση μη μαθηματικής γλώσσας προκαλούνται στο πρώτο πρόβλημα.(Βλ. και τον σχετικό Πίνακα του Παραρτήματος). Το πρόβλημα αυτό απαιτεί την καταγραφή μιας σειράς οδηγιών για την κατασκευή ενός σχεδίου· αυτό σημαίνει ότι η επίλυσή του συνίσταται στην καταγραφή σαφών οδηγιών που να περιγράφουν κάποιες γεωμετρικές κατασκευές (ενός κύκλου, της διαμέτρου του, κ.τ.λ.). Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, η έντονη επίδραση της νόρμας της κατανόησης από τρίτο, για τις μαθηματικές γνώσεις του οποίου δεν γίνεται καμία νύξη, οδηγεί τους φοιτητές σε εκτεταμένη χρήση μη μαθηματικής γλώσσας. Η ανάλυσή μας αποδεικνύει ότι αυτό το είδος της γλώσσας, με την αναπόφευκτη ασάφεια που το συνοδεύει, κρίνεται ανεπαρκές για την έκφραση γεωμετρικών κατασκευών. Αυτή η ανεπάρκεια, η οποία πολλές φορές γίνεται αισθητή και από τους ίδιους τους φοιτητές, επιδρά αρνητικά στη διαπραγμάτευση, άρα και στην αμοιβαία αφομοίωση των σχετικών διαδικασιών.

Στο δεύτερο πρόβλημα συναντούμε δύο διαδικασίες οι οποίες απαιτούν περιγραφή μέσω ομιλίας: τη δικαιολόγηση του γεγονότος ότι π.χ. 3 ευθύγραμμα τμήματα από καθεμιά από τις δύο κορυφές του τριγώνου δημιουργούν 16 μη επικαλυπτόμενες περιοχές, και την προσπάθεια εύρεσης κάποιου μαθηματικού τύπου που να συνδέει το πλήθος των ευθυγράμμων τμημάτων με αυτό των μη επικαλυπτόμενων περιοχών που δημιουργούνται.[1] Σε αρκετές περιπτώσεις, οι δύο διαδικασίες συνδέονται, οδηγώντας

τους φοιτητές σε μια λύση η οποία συνδυάζει μία εμπειρική με μία μαθηματική μέθοδο επίλυσης. Μη μαθηματική γλώσσα χρησιμοποιείται στην πρώτη μέθοδο, και το αποτέλεσμά της ήταν δεν είναι σαφές· σε κάποιες περιπτώσεις υποβοηθά τη συγκρότηση κοινής γνώσης και σε κάποιες άλλες την εμποδίζει. Ο μόνος παράγοντας που μπορεί να επιδρά στις περιπτώσεις όπου υπάρχει αρνητική επίδραση είναι ο συσχετισμός των ρόλων, στον οποίο θα αναφερθούμε παρακάτω.

Το τρίτο πρόβλημα αποτελεί το πεδίο στο οποίο η μη μαθηματική γλώσσα επιδρά καθαρά θετικά. Η άγνοια των φοιτητών για τους τύπους του όγκου του τριγωνικού πρίσματος (και σε μερικές περιπτώσεις και του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου) τους οδηγεί στην «κατάτμηση» των σχημάτων που εμφανίζονται στο πρόβλημα σε άλλα, των οποίων η εύρεση του όγκου θεωρείται απλή. Φυσικά, η περιγραφή αυτών των διαδικασιών γίνεται σε μη μαθηματική γλώσσα, γεγονός που επιδρά θετικά στην αμοιβαία κατανόηση των φοιτητών.

Η υπόθεση Α2 επιβεβαιώνεται λοιπόν μερικά: η αντικατάσταση μαθηματικών όρων με εκφράσεις μη μαθηματικής γλώσσας επιδρά αρνητικά στη συγκρότηση κοινής γνώσης όταν οι όροι σχετίζονται με γεωμετρικές κατασκευές. Στις άλλες περιπτώσεις μαθηματικών διαδικασιών η επίδραση είναι γενικά θετική.

Υπόθεση Β:

Η επίδραση όλων των κοινωνικών και κοινωνικομαθηματικών νορμών στη συγκρότηση κοινής γνώσης είναι θετική.

Η πρώτη παρατήρηση που κάναμε αναλύοντας τις συζητήσεις (παρατήρηση την οποία αναφέραμε στην παράγραφο ανάλυσης των νορμών) είναι ότι κάποιες νόρμες εμφανίζονται σε πιο έκδηλη μορφή σε κάποιο ή κάποια από τα τρία προβλήματα (οι νόρμες που επενέργησαν σε κάθε πρόβλημα και για κάθε ζεύγος χωριστά παρουσιάζονται στον σχετικό Πίνακα του Παραρτήματος). Το γεγονός αυτό μας οδηγεί στην ανάλυση της επίδρασης κάθε νόρμας σε κάθε πρόβλημα χωριστά (όπου κρίθηκε αυτό αναγκαίο), πριν καταλήξουμε σε μια συνολική θεώρηση αυτής της επίδρασης.

1. Η νόρμα της συνεργασίας είναι αυτή που εμφανίζεται σε όλα τα προβλήματα, με σαφή και ευδιάκριτο τρόπο. Είναι η νόρμα στην οποία όλα τα υποκείμενα της έρευνας δείχνουν υψηλό βαθμό συμμόρφωσης, με αποτέλεσμα να εμφανιστούν λίγες περιπτώσεις μη συνεργασίας. Αρκετές από αυτές τις περιπτώσεις παρουσιάζονται στο δεύτερο πρόβλημα με την εξής μορφή: ο ένας φοιτητής υποστηρίζει μια «αλγεβρική»

μέθοδο (δηλαδή την εύρεση κάποιου τύπου που να συνδέει το πλήθος των ευθυγράμμων τμημάτων με αυτό των μη επικαλυπτόμενων περιοχών που δημιουργούνται και ο άλλος μια «πρακτική» μέθοδο (δηλαδή τη γεωμετρική κατασκευή 14 ευθυγράμμων τμημάτων από καθεμιά από τις δύο κορυφές ενός τριγώνου, και στη συνέχεια καταμέτρηση των περιοχών που έχουν δημιουργηθεί). Σε αυτά τα ζεύγη, απούσας της νόρμας της επαλήθευσης (αφού οι δύο μέθοδοι μπορούν κάλλιστα να χρησιμοποιηθούν συμπληρωματικά) και με τη νόρμα οριοθέτησης των μαθηματικών σε ισχύ (σύμφωνα με την οποία οι δύο μέθοδοι δε σχετίζονται μεταξύ τους) οι φοιτητές αποφασίζουν να εφαρμόσουν χωριστά τις δύο μεθόδους, με αποτέλεσμα να μην υφίσταται ουσιαστική συνεργασία μεταξύ τους. Αυτές οι περιπτώσεις αποτελούν την πρώτη ένδειξη *αλληλεξάρτησης* των νορμών, με την έννοια ότι η νόρμα οριοθέτησης των μαθηματικών παρεμποδίζει την εφαρμογή δύο άλλων νορμών, της συνεργασίας καταρχήν και της επαλήθευσης στη συνέχεια. Πρέπει να τονίσουμε όμως ότι στη συντριπτική πλειοψηφία των συναντήσεων που υπήρξε μια τέτοια παρεμπόδιση, είχε παροδικό χαρακτήρα. Η νόρμα της συνεργασίας παρεμποδίζεται επίσης και από μια κατηγορία ενεργειών που σχετίζονται με τη διατήρηση του προσώπου των μετεχόντων, γεγονός που θα σχολιάσουμε στην επόμενη παράγραφο.

Μία ακόμη περίπτωση αλληλεξάρτησης εμφανίζεται μεταξύ της νόρμας της συνεργασίας και της νόρμας της σχετικότητας της λύσης· η αλληλεξάρτηση έχει τη μορφή της διευκόλυνσης σε αυτή την περίπτωση, αφού η νόρμα της συνεργασίας διευκολύνει την από κοινού εξέταση του κατά πόσο μια προτεινόμενη μέθοδος επίλυσης είναι σχετική με το δεδομένο πρόβλημα. Αυτή η μορφή αλληλεξάρτησης εμφανίζεται και στα τρία προβλήματα και η επίδρασή της στη συγκρότηση κοινής γνώσης είναι σαφέστατα θετική. Προβλήματα δημιουργούνται όταν υπάρχει διαφορετικός βαθμός συμμόρφωσης στη νόρμα της σχετικότητας της λύσης μεταξύ των δύο μελών του ζεύγους ή όταν η συγκεκριμένη νόρμα είναι ανενεργή· σε αυτές τις περιπτώσεις, η ισχύς της νόρμας της συνεργασίας οδηγεί τους φοιτητές στη διαπραγμάτευση διαδικασιών χωρίς να υπάρχει ταυτόχρονη εξέταση της σχετικότητάς τους με το συγκεκριμένο πρόβλημα. Το γεγονός αυτό καταρχήν έχει επίπτωση μόνο στη χρονική διάρκεια της διαδικασίας επίλυσης· η μείωση όμως των χρονικών περιθωρίων σε κάποιες περιπτώσεις επιδρά αρνητικά στη διαπραγμάτευση των διαδικασιών που θα τεθούν στη συνέχεια. Έμμεσα λοιπόν, και σε λίγες ομολογουμένως περιπτώσεις, η νόρμα της συνεργασίας παρεμποδίζοντας κατά

κάποιο τρόπο τη νόρμα της σχετικότητας της λύσης, επιδρά αρνητικά στη συγκρότηση κοινής γνώσης.

Ένα από τα πιο ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά της νόρμας της συνεργασίας είναι ο πλουραλισμός των εκφράσεων που σχετίζονται με αυτή· όπως αναφέραμε στην παράγραφο της ανάλυσης, η συγκεκριμένη νόρμα μπορεί να εκφραστεί με τέσσερις διαφορετικούς τρόπους, αλλά ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι σε κάποιες περιπτώσεις η νόρμα αυτή είναι σε ισχύ και σε ζεύγη που δεν εκφράζονται με αυτούς τους τρόπους (π.χ. βλέπε στην παράγραφο 2.5.3. το απόσπασμα 1-Z17:1-8). Πρέπει να επισημάνουμε όμως ότι η συμμόρφωση στη συγκεκριμένη νόρμα δεν αποτελεί ικανή συνθήκη για τη συγκρότηση κοινής γνώσης· η επιθυμία των δύο φοιτητών να συνεργαστούν για την επίλυση ενός προβλήματος δεν αρκεί για να διαμορφώσουν από κοινού τις απαραίτητες έννοιες ή διαδικασίες (ειδικά στην περίπτωση που οι φοιτητές αδυνατούν να εκφράσουν με σαφήνεια το συλλογισμό τους). Εμφανίζεται λοιπόν η τρίτη περίπτωση αλληλεξάρτησης νορμών: όταν η νόρμα σαφούς έκφρασης ή η νόρμα μαθηματικής δικαιολόγησης είναι απούσες, η νόρμα της συνεργασίας δεν αρκεί για την ουσιαστική διαπραγμάτευση – και στη συνέχεια αποδοχή – μιας νέας έννοιας ή διαδικασίας. Στην αντίθετη περίπτωση, η συνύπαρξη των συγκεκριμένων νορμών οδηγεί σε αποδοτική διαπραγμάτευση και αποδοχή της προτεινόμενης έννοιας ή διαδικασίας.

Συνοψίζοντας, η επίδραση της νόρμας της συνεργασίας στη συγκρότηση κοινής γνώσης είναι γενικά θετική, εκτός από λίγες περιπτώσεις στις οποίες η αλληλεξάρτησή της με συγκεκριμένες νόρμες παρεμποδίζει τη λειτουργία της ή επιδρά αρνητικά στη μορφή της συζήτησης.

2. Η νόρμα αμοιβαίας κατανόησης εμφανίζεται και αυτή σε όλα τα προβλήματα και σε όλα τα ζεύγη που συνεργάστηκαν για την επίλυσή τους. Όπως αναφέραμε στη σχετική παράγραφο της ανάλυσης, η νόρμα αυτή σχετίζεται άμεσα με τη νόρμα της συνεργασίας και μπορεί να θεωρήσει κανείς ότι περιέχεται σε αυτή. Η επίδρασή της στη συγκρότηση κοινής γνώσης είναι γενικά θετική, αφού η συμμόρφωση των φοιτητών σε αυτή τους οδηγεί σε μια συνεχή προσπάθεια αποσαφήνισης των εννοιών ή των διαδικασιών που προτείνουν. Προβλήματα παρουσιάζονται – όπως και στην περίπτωση της νόρμας της συνεργασίας – όταν η συγκεκριμένη νόρμα δε συνυπάρχει με τις νόρμες τις μαθηματικής δικαιολόγησης (στο δεύτερο και στο τρίτο πρόβλημα) και της σαφούς έκφρασης (σε όλα τα προβλήματα). Σε αυτές τις περιπτώσεις παρατηρείται το εξής φαινόμενο: αν και ο ένας φοιτητής επιδιώκει την κατανόηση

του συμφοιτητή του πάνω σε μια έννοια ή διαδικασία που προτείνει, η μη συμμόρφωση από μέρους του στις νόρμες της μαθηματικής δικαιολόγησης ή της σαφούς έκφρασης, καθιστά την προτεινόμενη έννοια ή διαδικασία δυσνόητη και εμποδίζει την αποδοχή της. Η μη συμμόρφωση στις νόρμες αυτές μπορεί να οφείλεται σε αδυναμία του ομιλητή ή σε χρονικούς περιορισμούς. Το αποτέλεσμα είναι συνήθως η προτεινόμενη έννοια ή διαδικασία να απορρίπτεται και το σημαντικότερο, χωρίς ουσιαστική διαπραγμάτευση.

Συνοψίζοντας, η επίδραση της νόρμας της αμοιβαίας κατανόησης στη συγκρότηση κοινής γνώσης είναι θετική μόνο όταν υπάρχει ταυτόχρονη συμμόρφωση στις νόρμες της σαφούς έκφρασης και – κατά περίπτωση – της μαθηματικής δικαιολόγησης.

3. Η νόρμα της κατανόησης από τρίτο αποτελεί το πρώτο παράδειγμα νόρμας που συνδέεται με συγκεκριμένο πρόβλημα· το ύφος του πρώτου προβλήματος οδηγεί τους φοιτητές σε όλη τη διάρκεια της αλληλεπίδρασης, αλλά κυρίως στο σημείο όπου πρέπει να καθαρογράψουν τις οδηγίες, στην αναζήτηση του κατάλληλου τρόπου έκφρασης ώστε να είναι αυτές κατανοητές από το βιοτέχνη. Δύο σημαντικά στοιχεία που επηρεάζουν την επιλογή της γλώσσας είναι το γεγονός ότι η επικοινωνία με το βιοτέχνη θα είναι μέσω τηλεφώνου και ότι το επίπεδο των μαθηματικών γνώσεων αυτού είναι άγνωστο. Αυτά τα δύο στοιχεία οδηγούν τους φοιτητές στη χρήση μη μαθηματικής γλώσσας όπως αναφέραμε στα συμπεράσματα των υποθέσεων Α1 και Α2, γεγονός που προκαλεί κάποιες ασάφειες στην έκφραση. Η επίδραση της νόρμας της κατανόησης από τρίτο τους οδηγεί τις περισσότερες φορές στην αναδιάρθρωση των προτάσεών τους, άρα και στην ουσιαστικότερη διαπραγμάτευση και στη συνέχεια αποδοχή τους.

Συνοψίζοντας, η επίδραση της νόρμας της κατανόησης από τρίτο στη συγκρότηση κοινής γνώσης είναι γενικά θετική· οι λίγες εξαιρέσεις που παρουσιάζονται οφείλονται στη μη ταυτόχρονη συμμόρφωση στη νόρμα της σαφούς έκφρασης.

4. Η νόρμα σαφούς έκφρασης συναντάται σε όλα τα προβλήματα. Στο πρώτο πρόβλημα συγκεκριμένα, παρατηρούμε μια έντονη αλληλεξάρτησή της – σε κάποια ζεύγη – με τη νόρμα της κατανόησης από τρίτο: αυτά τα ζεύγη θεωρούν ότι το βασικό ζητούμενο του προβλήματος είναι η κατανόηση του βιοτέχνη· συμμορφούμενοι λοιπόν πρωτίστως στη νόρμα της κατανόησης από τρίτο και κατά δεύτερο λόγο στη νόρμα της σαφούς έκφρασης, οδηγούνται, όπως αναφέραμε και προηγουμένως, στην υιοθέτηση εκφράσεων μη μαθηματικής γλώσσας σε βάρος της σαφήνειας της έκφρασης. Υπάρχει λοιπόν παρεμπόδιση της μιας νόρμας από την άλλη. Στα

υπόλοιπα ζεύγη, η συμμόρφωση στη νόρμα αυτή δεν φαίνεται να έχει κάποιο ιδιαίτερο αποτέλεσμα στη συγκρότηση κοινής γνώσης· συνήθως η σαφήνεια στην έκφραση απασχολεί τους φοιτητές στο χρονικό σημείο που πρέπει να καθαρογράψουν τις οδηγίες. Σε αυτό το σημείο, οι όποιες κοινές διαδικασίες έχουν ήδη διαμορφωθεί και ελάχιστες ουσιαστικές αλλαγές μπορούν να προέλθουν λόγω της συμμόρφωσης στη συγκεκριμένη νόρμα.

Στο δεύτερο και στο τρίτο πρόβλημα, όπου η νόρμα εμφανίζεται αυτόνομη (χωρίς την επίδραση της νόρμας της κατανόησης από τρίτο), η επίδρασή της στη συγκρότηση κοινής γνώσης είναι θετική μεν, περιορισμένης ισχύος δε. Ιδιαίτερα όταν σχετίζεται με την καταγραφή της τελικής απάντησης, σπάνια συναντούμε περιπτώσεις ουσιαστικής και αποδοτικής διαπραγμάτευσης εξαιτίας αυτής της νόρμας. Όταν εμφανίζεται σε άλλα χρονικά σημεία, η επίδρασή της είναι θετική.

Συνοψίζοντας, η επίδραση της νόρμας της σαφούς έκφρασης στη συγκρότηση κοινής γνώσης είναι περιορισμένη στο πρώτο πρόβλημα λόγω της αλληλεξάρτησης με τη νόρμα της κατανόησης από τρίτο, και γενικά θετική στο δεύτερο και το τρίτο πρόβλημα.

5. Η νόρμα μαθηματικής δικαιολόγησης εμφανίζεται στο δεύτερο και στο τρίτο πρόβλημα με τη μορφή διαπιστώσεων ή ερωτήσεων σχετικών με την απόδειξη κάποιων ισχυρισμών. Σαφώς η νόρμα αυτή συνδέεται με νόρμες όπως αυτή της σαφούς έκφρασης, της αμοιβαίας κατανόησης (όπως έχουμε ήδη αναφέρει), αλλά και της επαλήθευσης όπως θα εξετάσουμε στη συνέχεια.

Στο δεύτερο πρόβλημα η ενεργοποίηση της νόρμας γίνεται συνήθως αφού οι φοιτητές έχουν καταλήξει στο αριθμητικό αποτέλεσμα (δηλαδή αφού έχουν βρει το πλήθος των περιοχών) μέσω γεωμετρικής κατασκευής ή μέσω απλών συλλογισμών επαγωγικής φύσης σε συνδυασμό με κάποια επαλήθευση. Σε ελάχιστες περιπτώσεις έχουν οδηγηθεί στο αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας μια καθαρά αλγεβρική μέθοδο (π.χ. το Z2, το οποίο εντοπίζει μια αριθμητική πρόοδο που δημιουργούν οι διαφορές του πλήθους των περιοχών), σε συνδυασμό πάντα με κάποιου είδους επαλήθευση. Αν εξαιρέσουμε αυτές τις περιπτώσεις στις οποίες η νόρμα μαθηματικής δικαιολόγησης είναι διαρκώς σε ισχύ και επηρεάζει θετικά τη συγκρότηση κοινής γνώσης, στις άλλες περιπτώσεις η νόρμα επηρεάζει μόνο την προσπάθεια παρουσίασης του αποτελέσματος με κάποιο αποδεκτό μαθηματικά τρόπο (πάντα σύμφωνα με τις αντιλήψεις των φοιτητών ως προς το τι συνιστά ένα τέτοιο τρόπο). Συνήθως όμως, οι φοιτητές διαπιστώνουν ότι δεν υπάρχει κάποιος καθαρά «μαθηματικός» (εδώ

εμπλέκεται και η νόρμα οριοθέτησης των μαθηματικών) συλλογισμός που να δικαιολογεί το γεγονός ότι ν ευθύγραμμα τμήματα δημιουργούν ν+1 περιοχές και ν ευθύγραμμα τμήματα από καθεμιά από τις δύο κορυφές δημιουργούν $(\nu+1)^2$ περιοχές. Αυτό όμως δεν έχει καμία επίδραση ούτε στην απόφαση για καταγραφή της «μη μαθηματικής» απάντησης, αλλά κυρίως ούτε στην κατανόηση των κοινών διαδικασιών που περιέχει η απάντηση αυτή.

Στο τρίτο πρόβλημα η νόρμα μαθηματικής δικαιολόγησης καθορίζει σε μεγάλο βαθμό όλη τη διαδικασία επίλυσης· πολλές μέθοδοι που δε στηρίζονται σε μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες απορρίπτονται, ευφάνταστες μέθοδοι επινοούνται για την εύρεση όγκων και γενικά, εκτός από ελάχιστες εξαιρέσεις (π.χ. το Ζ11, το οποίο εφαρμόζει μια ψευδο-μαθηματική μέθοδο και οδηγείται σε λανθασμένο αποτέλεσμα), η επίδραση της συγκεκριμένης νόρμας είναι σαφώς θετική στην ουσιαστική διαπραγμάτευση των προτεινόμενων διαδικασιών.

Συνοψίζοντας, η επίδραση της νόρμας μαθηματικής δικαιολόγησης στη συγκρότηση κοινής γνώσης είναι σχετικά περιορισμένη στο δεύτερο πρόβλημα και θετική στο τρίτο πρόβλημα.

6. Η νόρμα σχετικότητας της λύσης εμφανίζεται και αυτή στο δεύτερο και στο τρίτο πρόβλημα και, όπως έχουμε αναφέρει στη σχετική παράγραφο της ανάλυσης, αφορά αριθμητικά αποτελέσματα ή ολόκληρες μεθόδους επίλυσης. Όσον αφορά την αποδοχή ή όχι ενός αριθμητικού αποτελέσματος, η συμμόρφωση στη νόρμα είναι αρκετά υψηλή και στα δύο προβλήματα, με αποτέλεσμα να απορρίπτονται οι μη σχετικές λύσεις (όπως π.χ. δεκαδικό πλήθος περιοχών στο δεύτερο πρόβλημα). Όσον αφορά την αποδοχή μιας μεθόδου επίλυσης, η συμμόρφωση στη νόρμα είναι σε κάποιες περιπτώσεις χαμηλή, με αποτέλεσμα να εφαρμόζονται άκριτα διάφορες χρονοβόρες και άσχετες με τα ζητούμενα του προβλήματος μέθοδοι (όπως π.χ. μέθοδοι βασισμένες σε αναλογίες στο δεύτερο πρόβλημα). Αυτό οφείλεται στην αλληλεξάρτηση της νόρμας με τις νόρμες οριοθέτησης των μαθηματικών και συνεργασίας. Εξαιτίας της αντίληψης ότι υπάρχει διαχωρισμός μεταξύ «πρακτικού» και «μαθηματικού» τρόπου επίλυσης ενός προβλήματος, η αναζήτηση μιας «μαθηματικής» – δηλαδή αλγεβρικής – μεθόδου οδηγεί πολλούς φοιτητές στην εφαρμογή αναλογιών στο δεύτερο πρόβλημα, χωρίς να εξετάσουν τη σχετικότητα της συγκεκριμένης μεθόδου. Αυτές οι μέθοδοι αν και δεν γίνονται σε όλες τις περιπτώσεις κοινά αποδεκτές, αποτελούν αντικείμενο διαπραγμάτευσης, επιδρούν επομένως στη διαδικασία επίλυσης. Η επίδραση της νόρμας της συνεργασίας

φαίνεται από τις περιπτώσεις στις οποίες ο ένας φοιτητής δέχεται την εμπλοκή του σε μια μέθοδο, ακόμη και αν τη θεωρεί άσχετη με τα ζητούμενα του προβλήματος, μόνο και μόνο ακολουθώντας τη νόρμα της συνεργασίας.

Συνοψίζοντας, η επίδραση της νόρμας σχετικότητας της λύσης στη συγκρότηση κοινής γνώσης είναι ανύπαρκτη, αφού η ανάλυσή μας καταδεικνύει ότι η ουσιαστική διαπραγμάτευση μιας προτεινόμενης έννοιας ή διαδικασίας εξαρτάται από άλλες νόρμες και όχι από το κατά πόσο αυτή η έννοια ή η διαδικασία είναι σχετική με το πρόβλημα.

7. Η νόρμα οριοθέτησης των μαθηματικών εμφανίζεται και στα τρία προβλήματα και, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, συνδέεται με τις νόρμες της μαθηματικής δικαιολόγησης και της σχετικότητας της λύσης. Η νόρμα αυτή χρησιμοποιείται από τους φοιτητές για την αξιολόγηση κάθε προβλήματος: έτσι το πρώτο πρόβλημα αξιολογείται από τη συντριπτική πλειοψηφία ως «πρακτικό», το τρίτο ως «μαθηματικό», ενώ το δεύτερο τοποθετείται μάλλον κάπου στο μεταίχμιο. Αυτή η αξιολόγηση, σε συνδυασμό με προαναφερθείσες νόρμες, καθορίζει σε μεγάλο βαθμό το είδος της γλώσσας που χρησιμοποιείται και κατ' επέκταση τη μορφή των εννοιών που διαμορφώνονται. Στο πρώτο πρόβλημα συναντούμε ψευδο-μαθηματική γλώσσα και αντίστοιχες διαδικασίες, στο τρίτο πρόβλημα μαθηματική – αλλά και ψευδο-μαθηματική – γλώσσα και αντίστοιχες διαδικασίες, ενώ στο δεύτερο παρουσιάζεται ένας συνδυασμός «πρακτικών» και «αλγεβρικών» μεθόδων. Η επίδραση της συγκεκριμένης νόρμας είναι σαφής και στα τρία προβλήματα και γενικά μπορούμε να θεωρήσουμε ότι επιδρά θετικά στη διαπραγμάτευση των εννοιών και των διαδικασιών που προτάσσονται. Οι φοιτητές, έχοντας αξιολογήσει το κάθε πρόβλημα έχουν τη δυνατότητα να αποδεχτούν ή να απορρίψουν μία μέθοδο, πάντα σε συνδυασμό με τις νόρμες της μαθηματικής δικαιολόγησης και της σχετικότητας της λύσης. Προβλήματα δημιουργούνται όταν η νόρμα οριοθέτησης των μαθηματικών οδηγεί σε λανθασμένες αντιλήψεις, όπως για παράδειγμα στο δεύτερο πρόβλημα όπου εμφανίζονται δύο αντιλήψεις: σύμφωνα με την πρώτη, υπάρχει σαφής διαχωρισμός ανάμεσα σε μία «μαθηματική» και σε μία «πρακτική» μέθοδο επίλυσης, ενώ σύμφωνα με τη δεύτερη κάθε μαθηματικό πρόβλημα πρέπει να έχει ένα καθαρά αλγεβρικό τρόπο επίλυσης. Η πρώτη αντίληψη εμποδίζει μέχρι ενός σημείου τους φοιτητές να χρησιμοποιήσουν την «πρακτική» μέθοδο για επαλήθευση της «μαθηματικής», άρα τους εμποδίζει από τη συγκρότηση μίας ενιαίας αποτελεσματικής για το συγκεκριμένο πρόβλημα μεθόδου. Σε αυτή την περίπτωση η

νόρμα οριοθέτησης των μαθηματικών παρεμποδίζει τη νόρμα της επαλήθευσης. Η δεύτερη αντίληψη τους οδηγεί στην άσκοπη αναζήτηση κάποιου μαθηματικού τύπου που να συνδέει τα δεδομένα με τα ζητούμενα του προβλήματος. Σε κάποιες περιπτώσεις τέλος, η συγκεκριμένη νόρμα παρεμποδίζει και τη νόρμα της συνεργασίας· πράγματι, σε λίγα ζεύγη παρατηρείται το φαινόμενο τα δύο μέλη να δουλεύουν ανεξάρτητα, εφαρμόζοντας ο καθένας μεθόδους που θεωρούσαν ασύμβατες. Σε κάθε περίπτωση πάντως, η χρονική διάρκεια ισχύος αυτών των αντιλήψεων δεν καλύπτει ολόκληρη τη συνάντηση.

Συνοψίζοντας, η επίδραση της νόρμας οριοθέτησης των μαθηματικών στη συγκρότηση κοινής γνώσης είναι σαφώς θετική στο πρώτο και στο τρίτο πρόβλημα, ενώ στο δεύτερο επιδρά – σε κάποιες περιπτώσεις και για κάποιο χρονικό διάστημα – αρνητικά.

8. Η νόρμα της επαλήθευσης εμφανίζεται στα δύο πρώτα προβλήματα. Στο πρώτο πρόβλημα, αλληλεξαρτώμενη – με τη μορφή διευκόλυνσης – με τη νόρμα της κατανόησης από τρίτο οδηγεί το ένα μέλος των περισσότερων ζευγών στην υιοθέτηση του ρόλου του βιοτέχνη για να εξετάσει τη σαφήνεια των οδηγιών· υπάρχει λοιπόν αλληλεξάρτηση και με τη νόρμα σαφούς έκφρασης. Στο δεύτερο πρόβλημα η συμμόρφωση στη συγκεκριμένη νόρμα βοηθά τους φοιτητές στον έλεγχο των αλγεβρικών μεθόδων υπολογισμού του πλήθους των περιοχών. Με την εξαίρεση των περιπτώσεων στις οποίες η νόρμα της επαλήθευσης παρεμποδίζεται από τη νόρμα οριοθέτησης των μαθηματικών, συντελεί στη διαμόρφωση μιας συνδυαστικής μεθόδου επίλυσης.

Συνοψίζοντας, η επίδραση της νόρμας επαλήθευσης στη συγκρότηση κοινής γνώσης είναι σαφέστατα θετική και στα δύο προβλήματα που δρα.

Από τα παραπάνω είναι σαφές ότι η υπόθεση Β που αναφέρεται σε θετική επίδραση όλων ανεξαιρέτως των νορμών στη συγκρότηση κοινής γνώσης επιβεβαιώνεται μερικώς· φαίνεται ότι σημαντικό ρόλο παίζει η αλληλεξάρτηση που υφίσταται μεταξύ συγκεκριμένων νορμών και η οποία εμφανίζεται σε συγκεκριμένα προβλήματα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η νόρμα της συνεργασίας: αν και μπορεί να θεωρηθεί ως μια «καθολική» νόρμα με αναμφισβήτητα θετική επίδραση στην ουσιαστική συνεργασία άρα και στη συγκρότηση κοινής γνώσης, όταν δεν συνυπάρχει με συγκεκριμένες νόρμες, δεν έχει το αναμενόμενο αποτέλεσμα.

Υπόθεση Γ:

Τα υποκείμενα ερμηνεύουν διακριτούς ρόλους, οι οποίοι δεν μεταβάλλονται κατά τη διάρκεια των τριών συναντήσεων.

Η εξέταση της συγκεκριμένης υπόθεσης πραγματοποιείται σε δύο βήματα: αρχικά αναγνωρίζονται τα χαρακτηριστικά κάθε ρόλου και στη συνέχεια εξετάζεται η χρονική τους εξέλιξη κατά τη διάρκεια των τριών συναντήσεων. Το πρώτο σκέλος της ανάλυσης μας οδηγεί, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, σε τέσσερις διακριτούς ρόλους: το συνεργατικό αξιολογητή, το συνεργατικό καθοδηγητή, τον εγωκεντρικό καθοδηγητή και τον παθητικό συνεργάτη· η χρονική εξέλιξη αυτών των ρόλων παρουσιάστηκε στον πίνακα 2.6. Η ανάλυσή μας επιβεβαιώνει καταρχήν την υπόθεση ότι κάθε υποκείμενο ακολουθεί πιστά το ρόλο του, με ελάχιστες περιπτώσεις κατά τις οποίες ή εκφράζει μία απόσταση από αυτόν ή ερμηνεύει ένα διαφορετικό ρόλο (όχι κατά τη διάρκεια της ίδιας συνάντησης). Πριν σχολιάσουμε αυτές τις περιπτώσεις, θα σκιαγραφήσουμε τα τέσσερα είδη των ρόλων, ιδωμένα σε σχέση με τις συμπεριφορές που τα χαρακτηρίζουν, τις έννοιες συσχέτισης μεταξύ αυτών και τα μοντέλα της θεωρίας ρόλου.

1. Ο ρόλος του συνεργατικού αξιολογητή αποδεικνύεται ο πιο συχνός σε εμφάνιση και χαρακτηρίζεται από την πλήρη συμμόρφωση του ατόμου που τον ερμηνεύει στη νόρμα της συνεργασίας και στη σχετικές με αυτή νόρμα της αμοιβαίας κατανόησης. Η συμμόρφωση είναι υψηλή και στις υπόλοιπες νόρμες, όταν όμως τίθεται ζήτημα αλληλεξάρτησης μεταξύ νορμών (δηλαδή όταν το υποκείμενο καλείται να επιλέξει μεταξύ της νόρμας της συνεργασίας και μιας άλλης νόρμας), ενεργεί τις περισσότερες φορές βάσει της νόρμας της συνεργασίας. Το ίδιο συμβαίνει και όταν τίθεται ζήτημα διατήρησης του προσώπου του υποκειμένου: τις περισσότερες φορές αγνοεί την απειλητική ενέργεια, εκτός αν αυτή έχει εκφραστεί με πολύ έκδηλο τρόπο ή σε στιγμές έντασης. Σε αυτές τις λίγες περιπτώσεις η συμπεριφορά του συνεργατικού αξιολογητή προσομοιάζει αυτή του εγωκεντρικού καθοδηγητή, με την έννοια των σαφών αναφορών στο πρόσωπο του ίδιου και τις απειλητικές για το πρόσωπο του άλλου ενέργειες. Γενικά πάντως, ο ρόλος του συνεργατικού αξιολογητή προέρχεται από τον ορισμό που δίνουν τα άτομα που τον ερμηνεύουν στην περίσταση: πρόκειται για μια συνάντηση της οποίας σκοπός είναι η αποτελεσματική επίλυση ενός προβλήματος. Για να επιτευχθεί αυτός ο σκοπός ο συνεργατικός αξιολογητής θεωρεί ότι πρέπει να συμβάλλει στην απρόσκοπτη αλληλεπίδραση, με όσο το δυνατόν λιγότερες εντάσεις και προσωπικές αναφορές· εμπλέκεται λοιπόν στην

αλληλεπίδραση, απορροφάται από αυτή, και με τη συμπεριφορά του επιτρέπει να παρεισφρήσουν μόνο συμπεριφορές που συνάδουν με τους κανόνες συνάφειάς της.[2] Η συμπεριφορά του χαρακτηρίζεται επίσης από πολύ μικρή διαφοροποίηση όσον αφορά τις ενέργειες που αφορούν την υποβολή προτάσεων και την αξιολόγησή τους: σχεδόν πάντα οι προτάσεις του υποβάλλονται με τρόπο που να επιτρέπει (σχεδόν να προκαλεί) την αξιολόγηση του συνομιλητή και όταν γίνεται ο ίδιος αξιολογητής επιδιώκει συνήθως την ουσιαστική αξιολόγηση, αλλά με όσο το δυνατόν μικρότερο κίνδυνο δημιουργίας έντασης (αυτή η συμπεριφορά προσομοιάζει αυτή του παθητικού συνεργάτη κατά τις λίγες περιπτώσεις στις οποίες αναλαμβάνει να αξιολογήσει μία πρόταση). Με όλα τα παραπάνω συνάδει και η παρατήρηση ότι τα ζεύγη στα οποία παρουσιάζεται ο συνδυασμός «Συνεργατικός αξιολογητής – Συνεργατικός αξιολογητής» εμφανίζουν τις μικρότερες εντάσεις.

2. Ο ρόλος του συνεργατικού καθοδηγητή ερμηνεύεται από λίγα σχετικά υποκείμενα, στοιχεία της συμπεριφοράς του όμως συναντούμε σε άτομα που ερμηνεύουν τους ρόλους και του συνεργατικού αξιολογητή και του εγωκεντρικού καθοδηγητή. Ο συνεργατικός καθοδηγητής θα μπορούσε σύντομα να περιγραφεί ως ένας συνεργατικός αξιολογητής με αυξημένες πρωτοβουλίες. Πρόκειται για το άτομο που αν και συμμορφώνεται στο σύνολο των κοινωνικών και κοινωνικομαθηματικών νορμών, δεν υποτιμά τη διατήρηση του προσώπου του, είτε αυτό κριθεί αναγκαίο είτε όχι. Η διατήρηση του προσώπου θεωρείται αναγκαία όταν αυτό απειλείται: σε αυτή την περίπτωση, ο συνεργατικός καθοδηγητής θα επιδιώξει να προστατεύσει το πρόσωπό του με οποιοδήποτε τρόπο (ακόμη και ενεργώντας απειλητικά προς το πρόσωπο του άλλου), ακόμη και σε βάρος κάποιων νορμών. Και στις περιπτώσεις όμως που η διατήρηση του προσώπου δεν είναι αναγκαία, ο συνεργατικός καθοδηγητής επιδιώκει να ενισχύσει το πρόσωπό του, κάνοντας προτάσεις, λαμβάνοντας αποφάσεις και γενικά αναλαμβάνοντας πρωτοβουλίες. Όπως και στην περίπτωση του ρόλου του συνεργατικού αξιολογητή, και αυτός ο ρόλος προέρχεται από τον ορισμό που δίνουν τα άτομα που τον ερμηνεύουν στην περίσταση: πρόκειται για μία συνάντηση η οποία γίνεται για κάποιο συγκεκριμένο σκοπό (την επίλυση ενός προβλήματος), κάθε μετέχοντας πρέπει να αναλάβει από μέρους του να προσπαθήσει ώστε η συνάντηση να έχει επιτυχή έκβαση. Ο ορισμός αυτός προσομοιάζει αυτόν του συνεργατικού αξιολογητή, με μία διαφορά: ο συνεργατικός καθοδηγητής θεωρεί ότι του αναλογεί ένα μερίδιο ευθύνης για την επιτυχή ή όχι έκβαση της συνάντησης, ενώ ο συνεργατικός αξιολογητής θεωρεί ότι η επιτυχία ή η αποτυχία (πρέπει να) είναι

πλήρως μοιρασμένη, γι' αυτό και ενεργεί με γνώμονα τη μέγιστη συνεργασία. Ο συνεργατικός καθοδηγητής εμφανίζεται δηλαδή πιο αποφασιστικός και με συναίσθηση της ευθύνης που του αναλογεί στα πλαίσια πάντα μιας ουσιαστικής και γόνιμης συνεργασίας. Είναι ενδιαφέρον το γεγονός σε κάποια ζεύγη φαίνεται ότι το άτομο που ερμηνεύει το ρόλο του συνεργατικού καθοδηγητή, οδηγείται στην ερμηνεία του από το γεγονός ότι προτείνει πρώτος τη μέθοδο επίλυσης που ακολουθείται τελικά. Αυτό συμβαίνει στα Z4, Z13 και Z14, γεγονός που συνάδει με όσα αναφέραμε: το άτομο που προτείνει μία μέθοδο που κρίνεται – στα πλαίσια της συζήτησης που λαμβάνει χώρα – αποτελεσματική, αναλαμβάνει και την ευθύνη καθοδήγησης της περαιτέρω διαπραγμάτευσης και τελικά εφαρμογής της. Αυτή η ευθύνη συνεπάγεται και κάποιο κόστος για το πρόσωπο του καθοδηγητή: αυτό το κόστος προσπαθεί να ισοσταθμίσει με ενέργειες που προσβλέπουν στη διατήρηση ή και στην ενίσχυση του προσώπου του. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι ο συνεργατικός καθοδηγητής παρουσιάζει μεγαλύτερη διαφοροποίηση στις ενέργειές του σε σχέση με το συνεργατικό αξιολογητή· πράγματι, οι προτάσεις του δεν εισάγονται πάντα με τρόπο που συνάδει με τη νόρμα της συνεργασίας και ο τρόπος που αξιολογεί τις προτάσεις του συνομιλητή του είναι συνήθως πιο αυστηρός και ουσιαστικός. Στα ζεύγη όπου ο ένας μετέχων ερμηνεύει το ρόλο του συνεργατικού καθοδηγητή οι εντάσεις δεν αποφεύγονται· το γεγονός αυτό προσδίδει στις συγκεκριμένες συναντήσεις ένα πιο «ζωντανό» χαρακτήρα, προσομοιάζοντας ίσως τις συναντήσεις της καθημερινής ζωής.

3. Ο ρόλος του εγωκεντρικού καθοδηγητή ερμηνεύεται κυρίως από τη φοιτήτρια Α στο Z2, αν και στοιχεία του συναντούμε και στα δύο προηγούμενα είδη ρόλων. Ο εγωκεντρικός καθοδηγητής αποτελεί την ακραία μορφή του συνεργατικού καθοδηγητή: ενδιαφέρεται πρώτιστα για τη διατήρηση του προσώπου του και στη συνέχεια για την ομαλή εξέλιξη της αλληλεπίδρασης και την επιτυχή έκβασή της. Η συμμόρφωσή του στη νόρμα της συνεργασίας είναι η μικρότερη σε σχέση με τους υπόλοιπους ρόλους, αυτό όμως σε καμιά περίπτωση δε σημαίνει ότι ενεργεί με σκοπό να προκαλέσει προβλήματα ή εντάσεις. Αυτό που τον διαφοροποιεί από τους δύο προηγούμενους ρόλους (ιδιαίτερα με το συνεργατικό αξιολογητή) είναι η μεγάλη σημασία που δίνει στη διατήρηση του προσώπου του. Η πλειοψηφία των ενεργειών του γίνονται με γνώμονα τη διατήρηση ή την ενίσχυση του προσώπου και σε αρκετές περιπτώσεις την αποδυνάμωση του προσώπου του συνομιλητή του. Μερικές φορές φτάνει στο σημείο να προσαρμόσει κάποιες νόρμες (κυρίως κοινωνικομαθηματικές)

για να στηρίξει την πρότασή του. Ο ορισμός της περίστασης σύμφωνα με τον εγωκεντρικό καθοδηγητή είναι αρκετά διαφορετικός από αυτούς των προηγούμενων ρόλων: η συνάντηση στην οποία μετέχει, έχει ως κύριο σκοπό την αξιολόγηση των μετεχόντων σε αυτή· αυτό που προέχει λοιπόν είναι η όσο το δυνατόν πιο άρτια ερμηνεία από μέρους του ενός ρόλου που θα χαρακτηρίζεται από αποφασιστικότητα, αποτελεσματικότητα (όσον αφορά την εφαρμογή των προτεινόμενων μεθόδων) και κυρίως την αποφυγή λανθασμένων ενεργειών. Γι' αυτόν ακριβώς το λόγο η διαφοροποίηση των ενεργειών του είναι μικρή: οι προτάσεις εισάγονται συνήθως με χρήση του πρώτου ενικού προσώπου και η αξιολόγηση των προτάσεων του συνομιλητή γίνεται με αυστηρό τρόπο. Γενικά όμως, ο ερμηνευτής αυτού του ρόλου δεν στρέφεται ποτέ ενάντια στο συνομιλητή του χωρίς να υπάρχει λόγος· στην πραγματικότητα, συμμετέχει ενεργά στη διαπραγμάτευση εννοιών ακόμη και αν δεν τις έχει προτείνει ο ίδιος. Στην περίπτωση όμως που αισθανθεί απειλή για το πρόσωπό του μπορεί να στραφεί ευθέως ενάντια στο συνομιλητή του, με αποτέλεσμα να προκαλούνται συχνά εντάσεις. Οι εντάσεις αυτές παρατηρούνται σαφέστατα στο Ζ2 όπου ο συνδυασμός «Εγωκεντρικός καθοδηγητής – Συνεργατικός καθοδηγητής» αποδεικνύεται «εκρηκτικός», με αρκετές συγκρούσεις και λίγες προσπάθειες εκτόνωσης της έντασης. Είναι ενδιαφέρον τέλος να παρατηρήσουμε ότι η φοιτήτρια Α στο Ζ2 (η μοναδική ερμηνεύτρια αυτούσιου του ρόλου) δεν αλλάζει καθόλου τη συμπεριφορά της κατά τη διάρκεια των τριών συναντήσεων· φαίνεται ότι ο εγωκεντρικός καθοδηγητής «απορροφά» τον ερμηνευτή του περισσότερο από οποιονδήποτε άλλο ρόλο.

4. Ο ρόλος του παθητικού συνεργάτη ερμηνεύεται από τη Β στη δεύτερη συνάντηση Ζ13, αλλά κατά διαστήματα τον συναντούμε και σε συμπεριφορές ατόμων τα οποία χαρακτηρίζουμε τελικά συνεργατικούς αξιολογητές. Ο παθητικός συνεργάτης μπορεί να τοποθετηθεί στο αντίθετο άκρο του εγωκεντρικού καθοδηγητή: όχι μόνο αποφεύγει να λάβει πρωτοβουλίες, αλλά δείχνει ότι δεν τον ενδιαφέρει καν η διατήρηση του προσώπου του. Στην πραγματικότητα όμως, οι λόγοι που οδηγούν κάποιον σε αυτή την παθητική συμπεριφορά μπορεί να είναι και τυχαίοι, σίγουρα όμως ακόμη και ο παθητικός συνεργάτης ενδιαφέρεται για το πρόσωπό του, παρόλο που δεν το φανερώνει με έκδηλο και σαφή τρόπο. Ένας τυχαίος λόγος που οδηγεί κάποιον στην ερμηνεία του παθητικού συνεργάτη είναι το γεγονός ότι δεν κατανοεί τη μέθοδο επίλυσης που του προτείνεται (κάτι που συνέβη στο Ζ13, αλλά και κατά διαστήματα σε άλλα ζεύγη). Σε αυτή την περίπτωση δεν έχει άλλη επιλογή παρά να

αναλάβει το ρόλο του ακροατή, παρέχοντας στο συνομιλητή του τη δυνατότητα να αποσαφηνίσει την πρότασή του. Ο παθητικός συνεργάτης λοιπόν συμμορφώνεται με τη νόρμα της συνεργασίας, αλλά μόνο κατά το ήμισυ: συμμετέχει ενεργά μόνο αν του ζητηθεί· σε αντίθετη περίπτωση αρκείται στο να ακούει και ενίοτε να αξιολογεί τις προτάσεις του συνομιλητή του. Η συμπεριφορά αυτή ερμηνεύεται από τον ορισμό της περίστασης που υιοθετεί ο παθητικός συνεργάτης: βασικός σκοπός της συνάντησης είναι η επιτυχημένη διεκπεραίωσή της, δηλαδή η επιτυχημένη επίλυση του προβλήματος· για το σκοπό αυτό πρέπει να αποφευχθούν οι εντάσεις αλλά και οι ενέργειες που προσβλέπουν στην ενίσχυση ή τη διατήρηση του προσώπου. Ο παθητικός συνεργάτης θεωρεί ότι κάθε απειλή στο πρόσωπό του μπορεί να αντιμετωπιστεί με μια συγκρατημένη και ήρεμη αντίδραση, η οποία θα κινείται στα πλαίσια των κανόνων μετασχηματισμού που περικλείουν τη συνάντηση. Κάθε ενέργεια απόστασης από το ρόλο του (που θεωρεί ότι του έχει επιβληθεί) είναι ανεπιθύμητη, καθώς κάτι τέτοιο θα έθετε σε πραγματικό κίνδυνο το πρόσωπό του. Με αυτή την έννοια, η εμπλοκή του παθητικού συνεργάτη στη συνάντηση δεν είναι αυθόρμητη, σε αντίθεση με τον εγωκεντρικό καθοδηγητή – και λιγότερο τους άλλους δύο ρόλους – ο οποίος απορροφάται από τη συνάντηση. Ο παθητικός συνεργάτης αισθάνεται, όπως και ο εγωκεντρικός καθοδηγητής, ότι αξιολογείται, επιλέγει όμως μια τελείως διαφορετική οδό: μειώνοντας το βαθμό συμμετοχής του επιδιώκει την ελαχιστοποίηση του κινδύνου να εκτεθεί, δηλαδή να χάσει το πρόσωπό του. Πρέπει τέλος να παρατηρήσουμε ότι η εμφάνιση του συγκεκριμένου ρόλου είναι σύντομη: η φοιτήτρια Β τον ερμηνεύει σε μία μόνο συνάντηση, ενώ στις άλλες δύο συναντήσεις ερμηνεύει το ρόλο του συνεργατικού αξιολογητή· το γεγονός αυτό ενισχύει την άποψή μας περί αστάθμητων παραγόντων που οδηγούν στο συγκεκριμένο ρόλο.

Οι παραπάνω περιγραφές των ρόλων μας οδηγούν στην μερική επαλήθευση της ερευνητικής μας υπόθεσης· πράγματι, η συντριπτική πλειοψηφία των υποκειμένων ακολουθεί διακριτούς ρόλους, σε λίγες όμως περιπτώσεις υπάρχουν μεταβολές, κυρίως από το ρόλο του συνεργατικού αξιολογητή σε αυτόν του συνεργατικού καθοδηγητή και αντίστροφα. Οι μεταβολές αυτές οφείλονται βασικά στο δυναμικό ορισμό της περίστασης από τα συγκεκριμένα υποκείμενα: ο συνεργατικός αξιολογητής όταν θεωρήσει ότι απαιτείται η ανάληψη πρωτοβουλίας για την επιτυχή επίλυση του προβλήματος μετατρέπεται σε συνεργατικό καθοδηγητή. Αντίστροφα, ο συνεργατικός καθοδηγητής όταν θεωρήσει ότι δεν υφίσταται η ανάγκη πρωτοβουλίας

γιατί η συμμετοχή του συνομιλητή του είναι ουσιαστική, υπαναχωρεί από τον καθοδηγητικό του ρόλο. Δηλαδή στον ορισμό της περίστασης, ο οποίος οικοδομείται από κοινού, συνδράμουν όχι μόνο οι διάφορες νόρμες που είναι σε ισχύ, αλλά και η συμπεριφορές των συμμετεχόντων· έτσι εξηγούνται και οι διάφορες μεταπτώσεις που παρουσιάζονται στα πλαίσια της ερμηνείας ενός ρόλου. Το άτομο δεν είναι ένας ηθοποιός θεάτρου, ο οποίος απλά ερμηνεύει το ρόλο του σεναρίου· είναι ένας ερμηνευτής, ο οποίος καταθέτει μία μοναδική ερμηνεία ενός ρόλου. Ο ρόλος αυτός, αν και περιορίζεται από διάφορα κανονιστικά πλαίσια (κανόνες μετασχηματισμού και νόρμες) και βασίζεται στην αρχή της διατήρησης του προσώπου, δεν παύει να είναι ένα μοναδικό κατασκεύασμα που αντανακλά τη δεδομένη περίσταση στην οποία συμμετέχει ο ερμηνευτής του. Η διαπίστωση αυτή ενισχύει την αντίληψη που κερδίζει έδαφος στη μαθηματική εκπαίδευση, και σύμφωνα με την οποία οι διαδικασίες επίλυσης προβλήματος (και γενικότερα οι διαδικασίες μάθησης) πρέπει να αντιμετωπίζονται ως ένα κοινωνικό γεγονός, επομένως πρέπει να αναλύονται βάσει μεθόδων της κοινωνιολογίας.

Υπόθεση Δ:

Η συγκρότηση κοινής γνώσης επηρεάζεται σαφώς από τη συσχέτιση των ρόλων που ερμηνεύουν τα υποκείμενα.

Ο πίνακας 2.6. μας παρείχε μια πρώτη εικόνα της επίδρασης που είχαν οι διάφοροι συνδυασμοί των ρόλων στη συγκρότηση κοινής γνώσης. Φυσικά, η καταχώρηση μίας και μόνο τιμής (θετική, αρνητική, απροσδιόριστη / ουδέτερη) σε μία τέτοιου είδους μεταβλητή δεν επαρκεί να περιγράψει τη σχέση μεταξύ συγκεκριμένων συνδυασμών ρόλων και της επιτυχίας ή όχι στη συγκρότηση κοινής γνώσης. Είναι σαφές βέβαια ότι υφίσταται αλληλεξάρτηση, την οποία επιδιώκουμε να αποσαφηνίσουμε σε αυτό το σημείο, περιγράφοντας την εξέλιξη των διαδικασιών σχηματισμού κοινής γνώσης που παρουσιάστηκαν σε κάθε συνδυασμό.

1. Ο συνδυασμός Συνεργατικός αξιολογητής – Συνεργατικός αξιολογητής εμφανίζεται στη συντριπτική πλειοψηφία των ζευγών και σε όλες τις περιπτώσεις συνδέεται με θετική επίδραση στη συγκρότηση κοινής γνώσης. Το γεγονός αυτό σαφώς οφείλεται στις νόρμες της συνεργασίας και της αμοιβαίας κατανόησης, στις οποίες ο συνεργατικός αξιολογητής επιδεικνύει το μέγιστο βαθμό συμμόρφωσης. Σε ένα τέτοιο ζεύγος, η πιθανότητα να εφαρμοστεί μια διαδικασία χωρίς να έχει προηγουμένως οικειοποιηθεί και από τους δύο φοιτητές είναι ελάχιστη. Η

οικειοποίηση αυτή γίνεται συνήθως μέσω εκτενούς διαπραγμάτευσης, εκτός φυσικά από τις έννοιες (ή διαδικασίες) οι οποίες είναι ήδη γνωστές και στους δύο μετέχοντες. Το μοναδικό σημείο στο οποίο παρουσιάζονται προβλήματα σχετίζεται ακριβώς με τη διαπραγμάτευση που συνοδεύει κάθε προτεινόμενη έννοια ή διαδικασία: σε κάποιες περιπτώσεις ο συνεργατικός αξιολογητής καθοδηγούμενος από τη νόρμα της συνεργασίας και επιδιώκοντας την αποφυγή εντάσεων, εμπλέκεται στη διαπραγμάτευση εννοιών ακόμη και αν δεν τις θεωρεί σχετικές με το δεδομένο πρόβλημα. Το ζεύγος οδηγείται έτσι σε μία άγονη διαπραγμάτευση η οποία ακόμη και αν οδηγήσει στη συγκρότηση κοινής γνώσης, δεν οδηγεί στην επίλυση του προβλήματος. Βέβαια, ακόμη και αυτή η περίπτωση μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η συνύπαρξη δύο συνεργατικών αξιολογητών σε ένα ζεύγος επιδρά θετικά στη συγκρότηση κοινής γνώσης.

2. Ο συνδυασμός Συνεργατικός καθοδηγητής – Συνεργατικός αξιολογητής ακολουθεί τον προηγούμενο συνδυασμό σε συχνότητα εμφανίσεων και μάλιστα, όπως έχουμε αναφέρει, τον αντικαθιστά σε κάποιες περιπτώσεις ή αντικαθίσταται από αυτόν. Ένα πρώτο συμπέρασμα που προκύπτει λοιπόν, είναι ότι οι δύο συνδυασμοί σχετίζονται στενά. Πράγματι, συγκρίνοντας τους ρόλους του συνεργατικού καθοδηγητή και του συνεργατικού αξιολογητή, μπορεί κανείς να διακρίνει μία ομοιομορφία όσον αφορά την πλειοψηφία των δράσεών τους (π.χ. την κατάθεση ή την αξιολόγηση μιας πρότασης, παρόλο που ο συνεργατικός καθοδηγητής εμφανίζεται πιο απόλυτος και αυστηρός). Ο συνδυασμός πάντως των δύο ρόλων λειτουργεί θετικά στις διαδικασίες διαπραγμάτευσης – άρα και αμοιβαίας αφομοίωσης – των προτεινόμενων εννοιών και διαδικασιών. Αυτό δικαιολογείται από την αποφασιστικότητα που διακρίνει το συνεργατικό καθοδηγητή, η οποία τον οδηγεί στην ανάληψη πρωτοβουλιών με σκοπό την παροχή μιας κατεύθυνσης στην αλληλεπίδραση. Το ζεύγος συνεργατικού καθοδηγητή και συνεργατικού αξιολογητή αποφεύγει την εμπλοκή του σε διαδικασίες πριν τις αξιολογήσει θετικά· την αξιολόγηση αυτή αναλαμβάνει ο καθοδηγητής του ζεύγους, με όποιους κινδύνους ενέχει αυτό για το πρόσωπό του (π.χ. σε περίπτωση αποτυχίας εξεύρεσης κοινά αποδεκτού αποτελέσματος). Σε σχέση λοιπόν με τον προηγούμενο συνδυασμό, ο συνδυασμός συνεργατικού καθοδηγητή – συνεργατικού αξιολογητή έχει την ίδια θετική επίδραση στη συγκρότηση κοινής γνώσης και επιπλέον ελαχιστοποιεί τις πιθανότητες εμπλοκής σε χρονοβόρες και άγονες συζητήσεις. Εξαίρεση στις παραπάνω επισημάνσεις αποτελεί το Ζ8: στο συγκεκριμένο ζεύγος η συμπεριφορά του Α κινείται στο όριο μεταξύ του

συνεργατικού και του εγωκεντρικού καθοδηγητή, γεγονός που προκαλεί αρκετές εντάσεις και παρεμποδίζει την ομαλή διαπραγμάτευση των προτεινόμενων διαδικασιών. Στις περιπτώσεις λοιπόν που ο συνεργατικός καθοδηγητής δίνει τόση σημασία στη διατήρηση του προσώπου του ώστε να τείνει να χαρακτηριστεί εγωκεντρικός, παρουσιάζονται προβλήματα στη συγκρότηση κοινής γνώσης (η δεύτερη συνάντηση του Z8 αποτελεί τη μοναδική περίπτωση αρνητικής επίδρασης συνδυασμού ρόλων στη δημιουργία κοινής γνώσης, γεγονός που μπορεί να αποδοθεί σαφώς στις εγωκεντρικές τάσεις του συνεργατικού καθοδηγητή).

3. Ο συνδυασμός Εγωκεντρικός καθοδηγητής – Συνεργατικός καθοδηγητής εμφανίζεται στο Z2, στο οποίο παρατηρούνται οι περισσότερες εντάσεις, αλλά και μια ασταθής επίδραση στη συγκρότηση κοινής γνώσης. Οι εντάσεις προκαλούνται από τη συμπεριφορά που συνοδεύει και τους δύο ρόλους, η οποία χαρακτηρίζεται από τη σημασία στη διατήρηση του προσώπου και – στην περίπτωση του εγωκεντρικού καθοδηγητή – την απροθυμία εγκατάλειψης πρότασης που έχει τεθεί από τον ίδιο. Δεν ισχυριζόμαστε ότι στο συγκεκριμένο συνδυασμό δεν προκύπτουν κοινές έννοιες και διαδικασίες· απλά σε αρκετές περιπτώσεις δημιουργούνται προβλήματα στη διαπραγμάτευση κάποιων εννοιών τα οποία οφείλονται στο «δυναμικό» χαρακτήρα ιδίως του εγωκεντρικού καθοδηγητή. Η επίδραση στη συγκρότηση κοινής γνώσης κρίνεται απροσδιόριστη γιατί συναντούμε και περιπτώσεις από κοινού διαπραγμάτευσης και αποδοχής κάποιων εννοιών.

4. Ο συνδυασμός Παθητικός συνεργάτης – Συνεργατικός καθοδηγητής παρατηρείται στη δεύτερη – κυρίως – συνάντηση του Z13 και κατά διαστήματα σε άλλα ζεύγη που περιέχουν ένα καθοδηγητή. Στο συγκεκριμένο ζεύγος παρατηρούνται ελάχιστες εντάσεις και διαφωνίες για οποιοδήποτε ζήτημα, ακόμη και όταν απειλείται το πρόσωπο του παθητικού συνεργάτη. Το ενδιαφέρον στοιχείο αυτού του συνδυασμού είναι η συνειδητοποίηση που επιδεικνύουν και τα δύο μέλη του ζεύγους όσον αφορά την ερμηνεία των ρόλων τους: συμπεριφέρονται και οι δύο με τέτοιο τρόπο ώστε να υπάρχει η ελάχιστη δυνατή διαφοροποίηση μεταξύ των ενεργειών τους. Είναι χαρακτηριστική η συμπεριφορά της Α στη δεύτερη συνάντηση του Z13: παρακολουθεί προσεκτικά το συμφοιτητή της και επεμβαίνει ελάχιστα, ακόμη και αν της ζητηθεί. Ο Β από το μέρος του, παραμένει σταθερός στον καθοδηγητικό του ρόλο και συμμορφούμενος στις νόρμες της συνεργασίας και της αμοιβαίας κατανόησης επιδιώκει την κατανόηση της συμφοιτήτριάς του. Όταν ζητά με σαφή τρόπο τη συμμετοχή της, εκφράζει μία απειλητική για το πρόσωπό της ενέργεια, η οποία όμως

δεν δημιουργεί καμία ένταση. Γενικά λοιπόν, ο συγκεκριμένος συνδυασμός επιδρά θετικά στη συγκρότηση κοινής γνώσης, παρόλο που η συμμετοχή των δύο μετεχόντων στη διαδικασία αυτή είναι ασύμμετρη.

Οι παραπάνω επισημάνσεις μας οδηγούν στην επαλήθευση της ερευνητικής μας υπόθεσης περί σαφούς επιρροής των συνδυασμών των ρόλων στη συγκρότηση κοινής γνώσης. Επιπλέον παρέχουν και τις περιπτώσεις θετικής, αρνητικής ή απροσδιόριστης επίδρασης. Είναι σαφές ότι η ύπαρξη ενός τουλάχιστον συνεργατικού αξιολογητή σε ένα ζεύγος επιδρά θετικά στην πλειοψηφία των περιπτώσεων. Η ύπαρξη όμως ενός εγωκεντρικού καθοδηγητή (ή η σχετική συμπεριφορά) συνήθως παρεμποδίζει την ομαλή συγκρότηση κοινής γνώσης. Αντίθετα, ένας συνεργατικός καθοδηγητής, συντελεί θετικά στο ζεύγος που συμμετέχει, παρέχοντας την απαραίτητη καθοδήγηση στο συνομιλητή του, πάντα στα πλαίσια μιας αποδοτικής και ουσιαστικής συνεργασίας. Τέλος η παρουσία του παθητικού συνεργάτη κρίνεται γενικά αδιάφορη σε ένα ζεύγος, το άτομο που ερμηνεύει το συγκεκριμένο ρόλο μετατοπίζει την ευθύνη της ουσιαστικής – άρα και επιτυχημένης – διαπραγμάτευσης στον συνομιλητή του.

ΣΧΟΛΙΑ 3ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

[1] Συναντήσαμε και μια τρίτη διαδικασία, η οποία αφορούσε τη γεωμετρική κατασκευή 14 ευθυγράμμων τμημάτων από καθεμιά από τις δύο κορυφές ενός τριγώνου, και στη συνέχεια καταμέτρηση των περιοχών που έχουν δημιουργηθεί. Η διαδικασία αυτή συνδέθηκε και με τις δύο αναφερθείσες διαδικασίες.

[2] Οι κανόνες συνάφειας αποτελούνται από τις κοινωνικές και τις κοινωνικομαθηματικές νόρμες που είναι σε ισχύ στη συγκεκριμένη περίσταση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

ΕΠΙΛΟΓΟΣ:

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΕΡΕΥΝΑ ΚΑΙ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ

4. ΕΠΙΛΟΓΟΣ: ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΕΡΕΥΝΑ ΚΑΙ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ

Η φύση της έρευνάς μας, δηλαδή το ότι πρόκειται για μια ποιοτική μελέτη περίπτωσης, δεν μας επιτρέπει γενικεύσεις ούτε στο επίπεδο των συμπερασμάτων ούτε στο επίπεδο των εφαρμογών τους στην ανώτατη βαθμίδα εκπαίδευσης. Επιτρέπει πάντως την καταγραφή κάποιων επισημάνσεων σχετικών με περαιτέρω κατευθύνσεις της έρευνας στο πεδίο της αλληλεπίδρασης, αλλά και με προτάσεις σχετικές με το ρόλο του δασκάλου των μαθηματικών στις διαδικασίες συνεργατικής επίλυσης προβλημάτων.

Μία πρώτη πρόταση αφορά αυτή καθ' αυτή τη μορφή της έρευνάς μας: η γενικευτική ισχύς των συμπερασμάτων μπορεί να ενισχυθεί με τη διεξαγωγή μιας έρευνας μεγαλύτερης κλίμακας, η οποία θα επιτρέπει την εξέταση και άλλων παραμέτρων όπως η εθνικότητα των φοιτητών, το φύλο τους, οι επιδόσεις τους στο Λύκειο, κ.ο.κ. Θα μπορούσε επίσης να πραγματοποιηθεί μια αντίστοιχη έρευνα σε φοιτητές άλλων σχολών, για να διαπιστωθούν τυχόν ομοιότητες στη συμπεριφορά και στη γλώσσα ειδικότερα. Με αυτό τον τρόπο θα μπορούσε να δημιουργηθεί ένα σώμα δεδομένων το οποίο θα χρησιμεύσει στη συγκρότηση μιας πλήρους πρότασης για τη χρήση των μαθηματικών προβλημάτων στην ανώτατη εκπαίδευση.

Όσον αφορά τις προτάσεις που προκύπτουν άμεσα από την έρευνά μας, και που αφορούν το ρόλο του δασκάλου των μαθηματικών στη συνεργατική επίλυση προβλημάτων, μπορούμε να παρατηρήσουμε τα εξής:

• Η επαλήθευση της Υπόθεσης Α1 και η μερική επαλήθευση της Υπόθεσης Α2 μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι πρέπει να αναθεωρηθεί η εμμονή στη χρήση αυστηρά μαθηματικής γλώσσας. Ο εκπαιδευτικός πρέπει «όχι μόνο να ακούει αυτά που λένε οι μαθητές, αλλά να πρέπει να γνωρίζει το πώς θα ερμηνεύσει τη γλώσσα (και τις άλλες ενέργειες των μαθητών» (Mitchell, 2001, σ. 49). Η χρήση μη μαθηματικής γλώσσας δεν πρέπει να ενθαρρύνεται, αλλά δεν πρέπει και να ερμηνεύεται ως ένδειξη μη αποτελεσματικής συγκρότησης κοινής γνώσης. Τα υποκείμενα της έρευνάς μας πολλές φορές χρησιμοποιούσαν μη μαθηματική γλώσσα στη μεταξύ τους επικοινωνία, αλλά όταν έπρεπε να καταγράψουν τη λύση επιδίωκαν τη χρήση μαθηματικής γλώσσας. Η παρατήρηση αυτή, η οποία έχει γίνει και σε άλλες μελέτες,[1] επιτρέπει στον εκπαιδευτικό την *επιλεκτική παρέμβαση*, όσον αφορά την ορολογία:

μια τέτοια παρέμβαση θα μπορούσε να γίνει μόνο αν χρησιμοποιούνται λαθεμένοι όροι ή όταν δημιουργούνται προβλήματα λόγω της ασάφειας της μη μαθηματικής γλώσσας (όπως π.χ. στις περιπτώσεις στις οποίες επαληθεύεται η Υπόθεση Α2 και αφορούν γεωμετρικές κατασκευές).

• Στην έρευνά μας επιλέξαμε να μη καθοδηγήσουμε με κανένα τρόπο τους φοιτητές κατά τη διάρκεια των αλληλεπιδράσεων, και δώσαμε μόνο κάποιες αρχικές οδηγίες, μία εκ των οποίων σχετιζόταν με τη συνεργατική φύση που έπρεπε να χαρακτηρίζει την αλληλεπίδρασή τους. Αυτό σε καμιά περίπτωση δεν σημαίνει ότι είμαστε υπέρμαχοι της πρακτικής σύμφωνα με την οποία δεν πρέπει να υπάρχει η παραμικρή παρέμβαση στην αλληλεπίδραση δύο η περισσότερων μαθητών. Ο λόγος που ελαχιστοποιήσαμε τις παρεμβολές μας είναι για την αποφυγή στρεβλώσεων και την αποτελεσματικότερη σύγκριση των συζητήσεων. Παρόλα αυτά, θεωρούμε ότι η όποια καθοδήγηση πρέπει να γίνεται με μεγάλη προσοχή· πράγματι, οι Mason και Pimm επισημαίνουν – ο καθένας από το μέρος του – δύο διαφορετικούς κινδύνους:

> Όσο πιο αναλυτικός γίνομαι σχετικά με τη συμπεριφορά που θα επιθυμούσα από τους μαθητές μου, τόσο πιο πιθανό είναι ότι θα επιδείξουν αυτή τη συμπεριφορά άσχετα με την κατανόηση που πρέπει να τη συνοδεύει· δηλαδή, θα δώσουν έμφαση στη *μορφή* και όχι στην ουσία. Όσο λιγότερο αναλυτικός γίνομαι για τους σκοπούς και τις προσδοκίες μου για τη συμπεριφορά των μαθητών μου, τόσο λιγότερο πιθανό είναι να δουν την ουσία, να κατανοήσουν το σκοπό ή να αντιληφθούν το νόημα της διαδικασίας. (Mason, 1988, όπως αναφέρεται στον Pimm, 1994b, σσ. 143-144)
>
> ... αν η ομιλία του εκπαιδευτικού στηρίζεται αποκλειστικά σε μετα-δηλώσεις, ο μαθητής μπορεί να χάσει την εμπιστοσύνη του σε αυτόν ως πηγή πληροφορίας για το *περιεχόμενο* που τους απασχολεί. Μπορεί [οι μαθητές] αβίαστα να συμπεράνουν ότι ο εκπαιδευτικός δεν είναι ευθύς μαζί τους. Από την άλλη, αν ο εκπαιδευτικός ασχολείται αποκλειστικά με το περιεχόμενο, υπάρχει ο κίνδυνος του «πόθου του εκπαιδευτικού», της επιθυμίας του δηλαδή να πει πράγματα στο μαθητή, το οποίο εν μέρει αναιρεί την πιθανότητα διδασκαλίας. (Pimm, 1994b, σ. 144).

Λαμβάνοντας υπόψη τους παραπάνω κινδύνους, η καθοδήγηση των φοιτητών σχετικά με τη συμμόρφωση σε συγκεκριμένες νόρμες[2] είναι μια αποτελεσματική στρατηγική, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με πολλούς τρόπους:

> ... με επεξεργασία πληροφοριών, με ελεύθερη διανοητική εργασία, με ομαδοκεντρική ή ανοιχτή διδασκαλία, επειδή μόνο με ανάλογες μορφές διδασκαλίας μπορούν οι μαθητές να οικειοποιηθούν στρατηγικές, να βιώσουν εμπειρίες με τα προσωπικά τους δυνατά και αδύναμα σημεία και να εκτιμήσουν τη σημασία των προϋποθέσεων μάθησης και προσπάθειας. (Κοσσυβάκη, 2003, σ. 106).

• Τα χαρακτηριστικά των ρόλων που ερμηνεύουν οι φοιτητές στην έρευνά μας, αποδεικνύουν τη σημασία που πρέπει να δίνει ο δάσκαλος των μαθηματικών στην κοινωνική φύση κάθε αλληλεπίδρασης, αλλά και κάθε ατόμου. Οι ρόλοι των φοιτητών αναδεικνύουν μια πολύπλοκη διαδικασία ερμηνείας των ενεργειών του συνομιλητή με μια ταυτόχρονη προσπάθεια διατήρησης του προσώπου. Σε αυτή τη διαδικασία ο εκπαιδευτικός (τοποθετημένος στη θέση του παρατηρητή) πρέπει να αναγνωρίσει τις περιπτώσεις κατά τις οποίες παράγεται κοινή γνώση και αυτές κατά τις οποίες παρεμποδίζεται αυτή. Δεν υποστηρίζουμε ότι κάτι τέτοιο μπορεί να πραγματοποιηθεί σε ένα τμήμα το οποίο μπορεί να αποτελείται από περισσότερους από 100 φοιτητές· τα αποτελέσματα της έρευνάς μας καταδεικνύουν ότι στην πλειοψηφία των περιπτώσεων υπάρχει αποδοτική συνεργασία με την ελάχιστη παρεμβολή του ερευνητή. Επομένως, με την προϋπόθεση μιας καθοδήγησης σχετικής με τη δυναμική της αλληλεπίδρασης, τις κοινωνικές και τις κοινωνικομαθηματικές νόρμες, αλλά και συμπεριφορές που πρέπει να προτιμούνται ή να αποφεύγονται, μπορεί να υπάρξει μια αποτελεσματική εφαρμογή της συνεργασίας σε ζεύγη και, με την πάροδο του χρόνου σε ομάδες τριών ή τεσσάρων ατόμων.[3]

Συνοψίζοντας, αποστολή του δασκάλου των μαθηματικών είναι η *δημιουργία του κατάλληλου πλαισίου*, μέσα στο οποίο μπορεί να υπάρξει μια αποδοτική συνεργασία των μαθητών. Το πλαίσιο αυτό μπορεί να δημιουργηθεί με τη διδασκαλία κάποιων κοινωνικών και κοινωνικομαθηματικών νορμών που θα αφορούν στοιχεία και του γλωσσικού κώδικα, αλλά και της συμπεριφοράς γενικότερα. Η βαθμιαία οικειοποίηση αυτών των νορμών, μέσω συνεχούς εξάσκησης (π.χ. με τη δημιουργία δοκιμαστικών ζευγών ή ομάδων εργασίας) μπορεί να οδηγήσει στη συγκρότηση ενός πλαισίου το οποίο θα χαρακτηρίζεται από:

α) Σεβασμό σε όλες τις απόψεις που κατατίθενται, αρκεί να είναι μαθηματικά τεκμηριωμένες.

β) Παρότρυνση για έκφραση κάθε άποψης, ακόμη και αν αυτή αντιτίθεται στη γνώμη συναδέλφου ή του καθηγητή.

γ) Καλλιέργεια της αντίληψης σύμφωνα με την οποία κάθε πρόταση πρέπει να αξιολογείται βάσει προκαθορισμένων κριτηρίων (όπως η σαφήνεια στην έκφραση ή η χρήση μαθηματικής ορολογίας).

δ) Ισορροπία όσον αφορά το είδος της γλώσσας που χρησιμοποιείται, χωρίς να παραβιάζεται ούτε η ομαλή επικοινωνία ούτε η σε βάθος κατανόηση.

Η ύπαρξη ενός τέτοιου πλαισίου μπορεί να συντελέσει σε μια ομαλή και ουσιαστική συγκρότηση κοινής γνώσης και να προσδώσει στις μαθηματικές έννοιες μία νέα διάσταση, την οποία κάποιοι εξακολουθούν να αγνοούν: *την κοινωνική*.

ΣΧΟΛΙΑ 4ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

[1] Η Zazkis επισημαίνει ότι η χρήση μη μαθηματικής γλώσσας «τουλάχιστον στα αρχικά στάδια, έχει μεγαλύτερη ισχύ για τη μετάδοση των επιδιωκόμενων μηνυμάτων των μαθητών» (Zazkis, 2000, σ. 39).

[2] Υπενθυμίζουμε ότι κάποιες αντιλήψεις των φοιτητών που σχετίζονται με συγκεκριμένες νόρμες (όπως αυτή της οριοθέτησης των μαθηματικών) επηρεάζουν αρνητικά σε κάποιες περιπτώσεις την από κοινού συγκρότηση εννοιών.

[3] Ο Ματσαγγούρας (2003, σσ. 86-87) αναφερόμενος σε μαθητές Δημοτικού υποστηρίζει ότι η χρήση δυάδων μπορεί να αποτελέσει προπομπό της χρήσης ομάδων τριών ή περισσότερων ατόμων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ανδρέου, Γ. (2002). *Γλώσσα. Θεωρητική και Μεθοδολογική Προσέγγιση.* Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Atweh, B., Bleicher, R. E., Cooper, T. J. (1998). The Construction of the Social Context of Mathematics Classrooms: A Sociolinguistic Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education, 29 (1),* 63-82.

Austin, J. L., Howson, A. G. (1979). Language and Mathematical Education. *Educational Studies in Mathematics, 10 (3),* 161-197.

Azmitia, M., Montgomery, R. (1993). Friendship, transactive dialogues, and the development of scientific reasoning. *Social Development, 2 (3),* 202-221.

Bales, R. F. (1966). Task Roles and Social Roles in Problem-Solving Groups. In B. J. Biddle, E. J. Thomas (Eds.), *Role Theory: Concepts and Research.* New York: John Wiley & Sons, Inc., 254-262.

Bartolini Bussi, M. G. (1998). Verbal Interaction in the Mathematics Classroom: A Vygotskian Analysis. In H. Steinbring, M.G. Bartolini Bussi, A. Sierpinska (Eds.), *Language and Communication in the Mathematics Classroom.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 65-84.

Bauersfeld, H. (1994). Theoretical Perspectives on Interaction in the Mathematics Classroom. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Sträßer, B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline.* Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 133-146.

Berger, P. L., Luckmann, T. (1966). *The Social Construction of Reality.* Harmondsworth, Middlesex: Penguin Books Ltd.

Biddle, B. J. (1986). Recent Developments in Role Theory. *Annual Review of Sociology, 12,* 67-92.

Blumer, H. (1969). *Symbolic Interactionism: Perspective and Method.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Boer, N.-I., van Baalen, P. J., Kumar, K. (2002). An Activity Theory Approach for Studying the Situatedness of Knowledge Sharing. In *Proceedings of the 35th Hawaii International Conference on System Sciences,* http://csdl.computer.org/comp/proceedings/hicss/2002/1435/03/14350090.pdf

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique Des Mathematiques, 1970-1990.* Boston: Kluwer Academic Publishers.

Carvalho, C., César, M. (2001). Peer Interactions and Statistics Learning. In Marjia van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* The Netherlands: Freudenthal Institute, Faculty of Mathematics and Computer Science, Utrecht University, vol. 2, 217-224.

César, M. (1998). Social Interactions and Mathematics Learning. *MEAS 1 Proceedings.* Nottingham: Nottingham University, 110-119.

Cicourel, A. V. (1981). The Role of Cognitive-Linguistic Concepts in Understanding Everyday Social Interactions. *Annual Review of Sociology, 7,* 87-106.

Civil, M. (1998). Mathematical Communication through Small-Group Discussions. In H. Steinbring, M.G. Bartolini Bussi, A. Sierpinska (Eds.), *Language and Communication in the Mathematics Classroom.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 207-222.

Cobb, P., Yackel, E., Wood, T. (1992). Interaction and Learning in Mathematics Classroom Situations. *Educational Studies in Mathematics, 23 (1),* 99-122.

Cohen, E. G. (1994). Restructuring the Classroom: Conditions for Productive Small Groups. *Review of Educational Research, 64 (1),* 1-35.

Cohen, L., Manion, L. (1994). *Μεθοδολογία Εκπαιδευτικής Έρευνας.* (μτφρ. Χ. Μητσοπούλου, Μ. Φιλοπούλου). Αθήνα: Εκδόσεις Μεταίχμιο.

Δαφέρμος, Μ. (2002). *Η Πολιτισμική – Ιστορική Θεωρία του Vygotsky. Φιλοσοφικές – Ψυχολογικές – Παιδαγωγικές Διαστάσεις.* Αθήνα: Ατραπός.

Dekker, R., Elshout-Mohr, M. (1998). A Process Model for Interaction and Mathematical Level Raising. *Educational Studies in Mathematics, 36 (3),* 303-314.

Dekker, R., Wood, T., Elshout-Mohr, M. (2001). Interactive learning and mathematical level raising: A multiple analysis of learning events. In Marjia van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* The

Netherlands: Freudenthal Institute, Faculty of Mathematics and Computer Science, Utrecht University, vol. 2, 329-336.

Dreyfus, T., Hershkowitz, R., Schwarz, B. (2001). The construction of abstract knowledge in interaction. In Marjia van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* The Netherlands: Freudenthal Institute, Faculty of Mathematics and Computer Science, Utrecht University, vol. 2, 377-384.

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education.* London: The Falmer Press.

Ernest, P. (1994). What is social constructivism in the psychology of mathematics education?. In J. P. da Ponte, J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Lisbon, Portugal: University of Lisbon, Vol. 2, 304-311.

Ferrari, P. L. (2000). Cooperative Principles and Linguistic Obstacles in Advanced Mathematics Learning. In I. Schwank (Ed.), *Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education,* vol. 2, http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/cerme1-proceedings.html

Ferrari, P. L., Giraudi, C. (2001). Interpreting symbolic statements as texts: An exploratory study. In Marjia van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* The Netherlands: Freudenthal Institute, Faculty of Mathematics and Computer Science, Utrecht University, vol. 2, 409-416.

Forester, M. A., Pike, C. D. (1998). Learning to Estimate in the Mathematics Classroom: A Conversation-Analytic Approach. *Journal for Research in Mathematics Education, 29 (3),* 334-356.

Fox, B., Thompson S. (1990). A discourse explanation of the grammar of relative clauses in English conversation. *Language, 66 (2),* 297-316.

Gerrard, S. (1996). A philosophy of mathematics between two camps. In H. Sluga, D. G. Stern (Eds.), *The Cambridge Companion to Wittgenstein.* Cambridge: Cambridge University Press, 171-197.

Givón, T. (1979). *On Understanding Grammar.* New York: Academic Press.

Goffman, E. (1971). *The Presentation of Self in Everyday Life.* Harmondsworth, Middlesex: Penguin University Books.

Goffman, E. (1972). *Interaction Ritual: Essays on Face-To-Face Behaviour.* Harmondsworth, Middlesex: Penguin University Books.

Goffman, (1996). *Συναντήσεις. Δύο μελέτες στην κοινωνιολογία της αλληλεπίδρασης.* (μτφρ. Δ. Μακρυνιώτη). Αθήνα: Εκδόσεις Αλεξάνδρεια.

Gómez, P., Rico, L. (1995). Social interaction and mathematical discourse in the classroom. In Meira, L., Carraher, D. (Eds.), *Proceedings of the 19th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Recife: Universidade Federal de Pernambuco.

Gumperz, J. J. (1982). *Discourse Strategies.* Cambridge: Cambridge University Press.

Heaton, L., Bergeron, P., Bertrand-Gastaldy, S., Mercier D. (2004). Knowledge Moves: A Communication Perspective. In *The Fifth European Conference on Organizational Knowledge, Learning and Capabilities (OKLC 2004)*, http://www.ofenhandwerk.com/oklc/pdf_files/I-1_heaton.pdf

Herbel-Eisenmann, B. (2003). Examining "Norms" in Mathematics Education Literature: Refining the Lens. Paper presented at the NCTM Research Pre-Session Symposium: *The role of beliefs, values and norms in mathematics classrooms: A conceptualization of theoretical lenses,* San Antonio, U.S.A. http://www.msu.edu/%7Ejansenam/NCTM2003Norms.pdf

Hersh, R. (1997). Math Lingo vs. Plain English Double Entendre. *The American Mathematical Monthly, 104 (1),* 48-51.

Hogan, K. (1999). Sociocognitive roles in science group discourse. *International Journal of Science Education, 21 (8),* 855-882.

Inagaki, K., Morita, E., Hatano, G. (1999). Teaching-Learning of Evaluative Criteria for Mathematical Arguments Through Classroom Discourse: A Cross-National Study. *Mathematical Thinking and Learning, 1 (2),* 93-111.

Jordan, B., Henderson, A. (1995). Interaction Analysis: Foundations and Practice. *The Journal of the Learning Sciences, 4 (1),* 39-103.

King, R. (1979). *All Things Bright and Beautiful?.* Chichester: John Wiley.

Klaoudatos, N. (2002). A Project in Euclidean Geometry. In *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics,* http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/pap105.pdf

Κοσσυβάκη, Φ. (2003). *Εναλλακτική Διδακτική. Προτάσεις για μετάβαση από τη Διδακτική του Αντικειμένου στη Διδακτική του Ενεργού Υποκειμένου.* Αθήνα: Gutenberg.

Krussel, L. (1998). Teaching the Language of Mathematics. *Mathematics Teacher, 91 (5),* 436-441.

Kynigos, C., Theodossopoulou, V. (2001). Synthesizing Personal, Interactionist and Social Norms Perspectives to Analyze Collaborative Learning in the Classroom in the Context of a Computer-based Innovation Program. *Journal of Classroom Interaction, 36 (2),* 63-73.

Κωνσταντίνου, Χ. (1997). *Σχολική Πραγματικότητα και Κοινωνικοποίηση του Μαθητή.* Αθήνα: Gutenberg.

Laborde, C. (1994). Working in Small Groups: A Learning Situation? In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Sträßer, B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline.* Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 147-158.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations.* Cambridge: Cambridge University Press.

Lemke, J. L. (1989). *Using language in the classroom.* Oxford: Oxford University Press.

Lerman, S. (1994). Changing Focus in the Mathematics Classroom. In S. Lerman (Ed.), *Cultural Perspectives on the Mathematics Classroom.* Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 191-213.

Lerman, S. (1996). Intersubjectivity in Mathematics Learning: A Challenge to the Radical Constructivist Paradigm?. *Journal for Research in Mathematics Education, 27 (2),* 133-150.

Lester, F. K. (1980). Research on Mathematical Problem Solving. In R. J. Shumway (Ed.), *Research in Mathematics Education.* Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics, 286-323.

Linton, R. (1936). *The Study of Man.* New York: Appleton-Century.

Μακράκης, Β. (1998). Απομυθοποιώντας το Μεθοδολογικό Μονισμό. Στο Γ. Παπαγεωργίου (Επιμ.), *Μέθοδοι στην Κοινωνιολογική Έρευνα.* Αθήνα: Τυπωθήτω: Γιώργος Δαρδανός, 19-38.

Μακρυνιώτη, Δ. (1996). Εισαγωγή. Στο *Erving Goffman: Συναντήσεις. Δύο μελέτες στην κοινωνιολογία της αλληλεπίδρασης.* Αθήνα: Εκδόσεις Αλεξάνδρεια.

Mason, J. (1988). *What to Do When You are Stuck.* In *Using Mathematical Thinking,* ME234, Unit 3. Milton Keynes, The Open University.

Ματσαγγούρας, Η. Γ. (2003). *Ομαδοσυνεργατική Διδασκαλία και Μάθηση.* Αθήνα: Εκδόσεις Γρηγόρη.

McNair, R. E. (2000). Working in the Mathematics Frame: Maximizing the Potential to Learn from Students' Mathematics Classroom Discussions. *Educational Studies in Mathematics, 42 (2),* 197-209.

Mead, G. H. (1934). *Mind, Self and Society.* Chicago: University of Chicago Press.

Mead, G. H. (1964). The Genesis of the Self and Social Control. In A. J. Reck (Ed.), *Selected Writings: George Herbert Mead.* Chicago: University of Chicago Press, 267-293.

Mercer, N. (2000). Η Συγκρότηση της Γνώσης. Γλωσσική Αλληλεπίδραση μεταξύ Εκπαιδευτικών και Εκπαιδευομένων. (μτφρ. Μ. Παπαδοπούλου). Αθήνα: Μεταίχμιο.

Mercier, A., Sensevy, G., Schubauer-Leoni, M. L. (2000). How Social Interactions within a Class Depend on the Teachers' Assessment of the Pupils Various Mathematical Capabilities: A Case Study. In I. Schwank (Ed.), *Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education,* vol. 2, http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/cerme1-proceedings.html

Mitchell, J. (2001). Interactions Between Natural Language and Mathematical Structures: The case of "Wordwalking". *Mathematical Thinking and Learning, 3 (1),* 29-52.

Moreno, J. L. (1934). *Who Shall Survive?* Washington, D.C.: Nervous and Mental Disease Publication. (Rev. ed. New York: Beacon House, 1953).

Moreno, J. L. (Ed.) (1960). *The Sociometry Reader.* Glencoe, Ill: The Free Press.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1991). *Professional standards for teaching mathematics.* Reston, VA: Author.

O' Donnell, A. M., Dansereau, D. F. (1992). Scripted Cooperation in Student Dyads: A Method for Analyzing and Enhancing Academic Learning and Performance. In R. Hertz-Lazarowitz, N. Miller (Eds.), *Interaction in Cooperative*

Groups. The Theoretical Anatomy of Group Learning. Cambridge: Cambridge University Press, 120-141.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically.* London: Routledge and Kegan Paul.

Pimm, D. (1994a). Mathematics Classroom Language: Form, Function and Force. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Sträßer, B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline.* Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 159-169.

Pimm, D. (1994b). Spoken Mathematical Classroom Culture: Artifice and Artificiality. In S. Lerman (Ed.), *Cultural Perspectives on the Mathematics Classroom.* Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 133-147.

Pirie, S. (1991). Peer discussion in the context of mathematical problem solving. In K. Durkin, B. Shire (Eds.), *Language in Mathematical Education: Research and Practice.* Milton Keynes: Open University Press, 143-161.

Pirie, S. E. B. (1998). Crossing the Gulf between Thought and Symbol: Language as (Slippery) Stepping-Stones. In H. Steinbring, M. G. Bartolini Bussi, A. Sierpinska, (Eds.), *Language and Communication in the Mathematics Classroom.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 7-29.

Pirie, S. E. B., Scharzenberger, R. L. E. (1988). Mathematical discussion and mathematical understanding. *Educational Studies in Mathematics, 19 (4),* 459-470.

Polanyi, M. (1967). *The tacit dimension.* Garden City, NY: Anchor Books.

Reck, A. J. (1964). Introduction. In A. J. Reck (Ed.), *Selected Writings: George Herbert Mead.* Chicago: University of Chicago Press, xiii-lxii.

Resnick, L. B. (1991). Shared Cognition: Thinking as Social Practice. In L. B. Resnick, J. M. Levine, S. D. Teasley (Eds.), *Perspectives on socially shared cognition.* Washington, DC: American Psychological Association, 1-20.

Richmond, G., Striley, J. (1996). Making meaning in classrooms: Social processes in small group discourse and scientific knowledge building. *Journal of Research in Science Teaching, 33 (8),* 839-858.

Rogoff, B. (1990). *Apprenticeship in Thinking: Cognitive Development in Social Context.* New York: Oxford University Press.

Rowland, T. (2002). Pragmatic Perspectives on Mathematics Discourse. In J. Novotná (Ed.), *CERME2: European Research in Mathematics Education II.* Prague: Charles University, 408-419.

Schiffrin, D. (1994). *Approaches to Discourse.* Oxford: Blackwell.

Schoenfeld, A., H. (1983). Episodes and Executive Decisions on Mathematical Problem Solving. In R. Lesh, M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes.* Orlando, Florida: Academic Press, 345-395.

Schoenfeld, A., H. (1985). *Mathematical Problem Solving.* Orlando: Academic Press, Inc.

Sfard, A. (2000). On reform movement and the limits of mathematical discourse. *Mathematical Thinking and Learning, 2 (3),* 157-189.

Sifianou, M. (2001). *Discourse Analysis. An Introduction.* Αθήνα: Leader Books.

Sinclair, J., Coulthard, M. (1975). *Towards an analysis of discourse.* London: Oxford University Press.

Slavin, R. E. (1995). When and Why Does Cooperative Learning Increase Achievement? Theoretical and Empirical Perspectives. In R. Hertz-Lazarowitz, N. Miller (Eds.), *Interaction in Cooperative Groups. The Theoretical Anatomy of Group Learning.* Cambridge: Cambridge University Press, 145-173.

Spradley, J. P. (1980). *Participant Observation.* Chicago: Holt, Rinehart, and Winston.

Stacey K., Gooding, A. (1998). Communication and Learning in Small-Group Discussions. In H. Steinbring, M. G. Bartolini Bussi, A. Sierpinska, (Eds.), *Language and Communication in the Mathematics Classroom.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 191-205.

Steele, D. F. (1997). A fourth grade teacher uses a constructivist approach to mathematics and teaching and learning. Paper presented at the annual meeting of Research Council for Diagnostic and Prescriptive Mathematics, Oklahoma City, Oklahoma.

Steffe, L. P., Thompson, P. W. (2000). Interaction or Intersubjectivity? A Reply to Lerman. *Journal for Research in Mathematics Education, 31 (2),* 191-209.

Stylianou, D. A., Blanton, M. L. (2002). Sociocultural Factors in Undergraduate Mathematics: The Role of Explanation and Justification. In

Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics, http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/pap168.pdf

Strauss, A., Corbin, J. (1990). *Basics of Qualitative Research. Grounded Theory Procedures and Techniques.* Newbury Park, California: Sage Publications.

Tatsis, K., Koleza, E. (2002). Language as a Communicative and Interpretive Tool in Mathematical Problem Solving. In *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics,* http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/pap262.pdf

Τουμάσης, Μ. (1994). *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών.* Αθήνα: Gutenberg.

Τσαρδάκης, Δ. (1992). *Η κοινωνική θεωρία των ρόλων.* Αθήνα: Εκδόσεις Σκαραβαίος.

Thom, J. S., Pirie, S. E. B. (2002). Problems, Perseverance, and Mathematical Residue. *Educational Studies in Mathematics, 50 (1),* 1-28.

Thomas, E. J., Biddle, B. J. (1966a). The Nature and History of Role Theory. In B. J. Biddle, E. J. Thomas (Eds.), *Role Theory: Concepts and Research.* New York: John Wiley & Sons, Inc., 3-19.

Thomas, E. J., Biddle, B. J. (1966b). Basic Concepts for Classifying the Phenomena of Role. In B. J. Biddle, E. J. Thomas (Eds.), *Role Theory: Concepts and Research.* New York: John Wiley & Sons, Inc., 23-45.

Usiskin, Z. (1996). Mathematics as a Language. In P. C. Elliott (Ed.), *Communication in Mathematics, K–12 and Beyond (1996 Yearbook).* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 231-243.

Voigt, J. (1995). Thematic Patterns of Interaction and Sociomathematical Norms. In P. Cobb, H. Bauersfeld (Eds.), *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 163-201.

Vygotsky, L. (1978). *Mind in society.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Vrasidas, C. (2001). Making the Familiar Strange – and Interesting – Again: Interpretivism and Symbolic Interactionism in Educational Technology Research. In W. Heinecke, J. Willis (Eds.), *Research Methods in Educational Technology.* Greenwich, CT: Information Age Publishing, Inc., 81-99.

Wenger, E. (1998). *Communities of Practice: Learning, Meaning and Identity.* Cambridge: Cambridge University Press.

Wertsch, J. V., (1993): *Voices of the Mind. A Sociocultural Approach to Mediated Action.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Williams, G., Clarke, D. (2003). Dyadic Patterns of Participation and Collaborative Concept Creation: 'Looking In' as a Stimulus to Complex Mathematical Thinking. Paper presented as part of the symposium *"Patterns of Participation in the Classroom"* at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Chicago, April 21-25, 2003, http://extranet.edfac.unimelb.edu.au/DSME/lps/assets/_AERA2003Will-ClarkePofP.pdf

Wittgenstein, L. (1961). *Notebooks, 1914-1916.* G. H. von Wright, G. E. M. Anscombe (Eds.), G. E. M. Anscombe (trans.). Oxford: Blackwell.

Wittgenstein, L. (1961). *Tractatus Logico-Philosophicus.* D. F. Pears and B. McGuiness (trans.). London: Routledge.

Wittgenstein, L. (1977). *Φιλοσοφικές έρευνες.* (μτφρ.) Π. Χριστοδουλίδης. Αθήνα: Εκδόσεις Παπαζήση.

Wittgenstein, L. (1982). *Last Writings on the Philosophy of Psychology.* Vol. I: *Preliminary Studies for Part II of the "Philosophical Investigations."*, G. H. von Wright, H. Nyman, (Eds.), C. G. Luckhardt, M. A. E. Aue (trans.). Chicago: University of Chicago Press.

Wittgenstein, L. (1994). *Φιλοσοφική Γραμματική.* (μτφρ.) Κ. Μ. Κωβαίος. Αθήνα: Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τράπεζας.

Wood, T. (1994). Patterns of Interaction and the Culture of Mathematical Classrooms. In S. Lerman (Ed.), *Cultural Perspectives on the Mathematics Classroom.* Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 149-168.

Yackel, E., Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27(4),* 390-408.

Yackel, E., Cobb, P., Wood, T. (1999). The Interactive Constitution of Mathematical Meaning in One Second Grade Classroom: An Illustrative Example. *Journal of Mathematical Behavior, 17 (4),* 469-488.

Yackel, E., Rasmussen, C., King, K. (2000). Social and sociomathematical norms in an advanced undergraduate mathematics course. *Journal of Mathematical Behavior, 19 (3),* 275-287.

Yackel, E. (2001). Explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. In Marjia van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* The Netherlands: Freudenthal Institute, Faculty of Mathematics and Computer Science, Utrecht University, vol. 1, 9-24.

Zazkis, R. (2000). Using Code-Switching as a Tool for Learning Mathematical Language. *For the Learning of Mathematics, 20 (3),* 38-43.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Πρόβλημα 1: Πίνακας κοινών εννοιών και διαδικασιών

ΖΕΥΓΟΣ	Εισαχθείσες έννοιες σε μη μαθηματική γλώσσα	Κοινές έννοιες μη μαθηματικής γλώσσας	Εισαχθείσες έννοιες σε μαθηματική γλώσσα	Κοινές έννοιες μαθηματικής γλώσσας	Εισαχθείσες διαδικασίες σε μη μαθηματική γλώσσα	Κοινές διαδικασίες μη μαθηματικής γλώσσας	Εισαχθείσες διαδικασίες σε μαθηματική γλώσσα	Κοινές διαδικασίες μαθηματικής γλώσσας	Σύνολο εισαχθέντων εννοιών και διαδικασιών	Σύνολο κοινών εννοιών και διαδικασιών
Z1	11	8	7	3	8	1	3	1	29	13
Z2	14	6	5	2	9	3	2	1	30	12
Z3	6	4	5	3	7	3	5	4	23	14
Z4	10	7	2	2	8	5	4	3	24	17
Z5	4	4	5	4	12	6	6	5	27	19
Z6	6	3	4	3	8	5	3	3	21	14
Z7	6	1	5	3	8	3	1	1	20	8
Z8	11	7	5	3	9	4	2	2	27	16
Z9	5	2	5	3	5	2	3	1	18	8
Z10	4	4	5	4	6	2	2	2	17	12
Z11	11	7	2	2	15	7	3	3	31	19
Z12	6	2	1	1	3	1	0	0	10	4
Z13	4	1	3	3	6	2	1	0	14	6
Z14	4	4	3	3	4	3	2	2	13	12
Z15	5	5	5	5	4	3	2	1	16	14
Z16	6	5	5	5	6	3	2	2	19	15
Z17	0	0	6	4	3	1	6	6	15	11
Z18	5	3	4	3	3	2	3	3	15	11
Z19	3	1	3	0	7	2	3	1	16	4
Z20	5	4	4	3	3	3	4	3	16	13
Σύνολα	126	78	84	59	134	61	57	44	401	242

Πρόβλημα 2: Πίνακας κοινών εννοιών και διαδικασιών

ΖΕΥΓΟΣ	Εισαχθείσες έννοιες σε μη μαθηματική γλώσσα	Κοινές έννοιες μη μαθηματικής γλώσσας	Εισαχθείσες έννοιες σε μαθηματική γλώσσα	Κοινές έννοιες μαθηματικής γλώσσας	Εισαχθείσες διαδικασίες σε μη μαθηματική γλώσσα	Κοινές διαδικασίες μη μαθηματικής γλώσσας	Εισαχθείσες διαδικασίες σε μαθηματική γλώσσα	Κοινές διαδικασίες μαθηματικής γλώσσας	Σύνολο εισαχθέντων εννοιών και διαδικασιών	Σύνολο κοινών εννοιών και διαδικασιών
Ζ1	4	1	0	0	3	1	2	1	9	3
Ζ2	2	2	6	4	7	4	1	1	16	11
Ζ3	1	1	1	1	2	1	2	2	6	5
Ζ4	2	1	2	2	0	0	3	3	7	6
Ζ5	1	0	0	0	1	1	2	0	4	1
Ζ6	2	1	2	2	6	3	2	1	12	7
Ζ7	6	4	5	4	3	2	1	1	15	11
Ζ8	0	0	0	0	3	3	1	0	4	3
Ζ9	0	0	2	2	2	2	1	1	5	5
Ζ10	0	0	2	2	4	2	2	2	8	6
Ζ11	0	0	2	2	2	1	1	1	5	4
Ζ12	2	2	1	1	5	5	0	0	8	8
Ζ13	1	1	2	2	3	2	3	2	9	7
Ζ14	1	1	3	3	2	2	4	4	10	10
Ζ16	0	0	2	2	1	1	1	1	4	4
Ζ17	0	0	1	0	0	0	3	3	4	3
Ζ18	2	1	0	0	2	1	2	2	6	4
Ζ19	1	1	0	0	0	0	1	1	2	2
Ζ20	1	1	2	2	2	1	2	2	7	6
Σύνολα	26	17	33	29	48	32	34	28	141	106

Πρόβλημα 3: Πίνακας κοινών εννοιών και διαδικασιών

ΖΕΥΓΟΣ	Εισαχθείσες έννοιες σε μη μαθηματική γλώσσα	Κοινές έννοιες μη μαθηματικής γλώσσας	Εισαχθείσες έννοιες σε μαθηματική γλώσσα	Κοινές έννοιες μαθηματικής γλώσσας	Εισαχθείσες διαδικασίες σε μη μαθηματική γλώσσα	Κοινές διαδικασίες μη μαθηματικής γλώσσας	Εισαχθείσες διαδικασίες σε μαθηματική γλώσσα	Κοινές διαδικασίες μαθηματικής γλώσσας	Σύνολο εισαχθέντων εννοιών και διαδικασιών	Σύνολο κοινών εννοιών και διαδικασιών
Z1	4	3	3	3	2	1	4	4	13	11
Z2	4	3	4	4	3	2	3	3	14	12
Z3	4	3	4	4	2	1	3	3	13	11
Z4	5	5	5	3	4	3	2	2	16	13
Z5	4	3	5	4	6	2	4	4	19	13
Z6	5	4	5	4	4	2	2	2	16	12
Z7	2	1	2	2	5	3	4	4	13	10
Z8	6	3	3	2	9	4	1	1	19	10
Z9	1	0	0	0	3	1	3	2	7	3
Z10	4	1	8	4	7	3	3	2	22	10
Z11	2	0	1	1	2	1	2	1	7	3
Z12	4	1	4	3	8	4	1	1	17	9
Z13	0	0	0	0	3	2	1	1	4	3
Z15	6	1	4	4	2	2	2	2	14	9
Z16	0	0	1	1	0	0	2	2	3	3
Z17	0	0	2	2	0	0	0	0	2	2
Z20	1	0	4	4	3	2	2	2	10	8
Σύνολα	52	28	55	45	63	33	39	36	209	142

Συγκεντρωτικός πίνακας κοινών εννοιών και διαδικασιών

ΖΕΥΓΟΣ	ΠΡΟΒΛΗΜΑ	Εισαχθείσες έννοιες σε μη μαθηματική γλώσσα	Κοινές έννοιες μη μαθηματικής γλώσσας	Εισαχθείσες έννοιες σε μαθηματική γλώσσα	Κοινές έννοιες μαθηματικής γλώσσας	Εισαχθείσες διαδικασίες σε μη μαθηματική γλώσσα	Κοινές διαδικασίες μη μαθηματικής γλώσσας	Εισαχθείσες διαδικασίες σε μαθηματική γλώσσα	Κοινές διαδικασίες μαθηματικής γλώσσας	Σύνολο εισαχθέντων εννοιών και διαδικασιών	Σύνολο κοινών εννοιών και διαδικασιών
Ζ1	Π1	11	8	7	3	8	1	3	1	29	13
	Π2	4	1	0	0	3	1	2	1	9	3
	Π3	4	3	3	3	2	1	4	4	13	11
Ζ2	Π1	14	6	5	2	9	3	2	1	30	12
	Π2	2	2	6	4	7	4	1	1	16	11
	Π3	4	3	4	4	3	2	3	3	14	12
Ζ3	Π1	6	4	5	3	7	3	5	4	23	14
	Π2	1	1	1	1	2	1	2	2	6	5
	Π3	4	3	4	4	2	1	3	3	13	11
Ζ4	Π1	10	7	2	2	8	5	4	3	24	17
	Π2	2	1	2	2	0	0	3	3	7	6
	Π3	5	5	5	3	4	3	2	2	16	13
Ζ5	Π1	4	4	5	4	12	6	6	5	27	19
	Π2	1	0	0	0	1	1	2	0	4	1
	Π3	4	3	5	4	6	2	4	4	19	13
Ζ6	Π1	6	3	4	3	8	5	3	3	21	14
	Π2	2	1	2	2	6	3	2	1	12	7
	Π3	5	4	5	4	4	2	2	2	16	12
Ζ7	Π1	6	1	5	3	8	3	1	1	20	8
	Π2	6	4	5	4	3	2	1	1	15	11
	Π3	2	1	2	2	5	3	4	4	13	10

Συγκεντρωτικός πίνακας κοινών εννοιών και διαδικασιών (συνέχεια)

Z8	Π1	11	7	5	3	9	4	2	2	27	16
	Π2	0	0	0	0	3	3	1	0	4	3
	Π3	6	3	3	2	9	4	1	1	19	10
Z9	Π1	5	2	5	3	5	2	3	1	18	8
	Π2	0	0	2	2	2	2	1	1	5	5
	Π3	1	0	0	0	3	1	3	2	7	3
Z10	Π1	4	4	5	4	6	2	2	2	17	12
	Π2	0	0	2	2	4	2	2	2	8	6
	Π3	4	1	8	4	7	3	3	2	22	10
Z11	Π1	11	7	2	2	15	7	3	3	31	19
	Π2	0	0	2	2	2	1	1	1	5	4
	Π3	2	0	1	1	2	1	2	1	7	3
Z12	Π1	6	2	1	1	3	1	0	0	10	4
	Π2	2	2	1	1	5	5	0	0	8	8
	Π3	4	1	4	3	8	4	1	1	17	9
Z13	Π1	4	1	3	3	6	2	1	0	14	6
	Π2	1	1	2	2	3	2	3	2	9	7
	Π3	0	0	0	0	3	2	1	1	4	3
Z14	Π1	4	4	3	3	4	3	2	2	13	12
	Π2	1	1	3	3	2	2	4	4	10	10
Z15	Π1	5	5	5	5	4	3	2	1	16	14
	Π3	6	1	4	4	2	2	2	2	14	9
Z16	Π1	6	5	5	5	6	3	2	2	19	15
	Π2	0	0	2	2	1	1	1	1	4	4
	Π3	0	0	1	1	0	0	2	2	3	3

Συγκεντρωτικός πίνακας κοινών εννοιών και διαδικασιών (συνέχεια)

ΖΕΥΓΟΣ	ΠΡΟΒΛΗΜΑ	Εισαχθείσες έννοιες σε μη μαθηματική γλώσσα	Κοινές έννοιες μη μαθηματικής γλώσσας	Εισαχθείσες έννοιες σε μαθηματική γλώσσα	Κοινές έννοιες μαθηματικής γλώσσας	Εισαχθείσες διαδικασίες σε μη μαθηματική γλώσσα	Κοινές διαδικασίες μη μαθηματικής γλώσσας	Εισαχθείσες διαδικασίες σε μαθηματική γλώσσα	Κοινές διαδικασίες μαθηματικής γλώσσας	Σύνολο εισαχθέντων εννοιών και διαδικασιών	Σύνολο κοινών εννοιών και διαδικασιών
Ζ17	Π1	0	0	6	4	3	1	6	6	15	11
	Π2	0	0	1	0	0	0	3	3	4	3
	Π3	0	0	2	2	0	0	0	0	2	2
Ζ18	Π1	5	3	4	3	3	2	3	3	15	11
	Π2	2	1	0	0	2	1	2	2	6	4
Ζ19	Π1	3	1	3	0	7	2	3	1	16	4
	Π2	1	1	0	0	0	0	1	1	2	2
Ζ20	Π1	5	4	4	3	3	3	4	3	16	13
	Π2	1	1	2	2	2	1	2	2	7	6
	Π3	1	0	4	4	3	2	2	2	10	8
Σύνολα		204	123	172	133	245	126	130	108	751	490

Πίνακας γεωμετρικών κατασκευών και άλλων διαδικασιών

ΖΕΥΓΟΣ	ΠΡΟΒΛΗΜΑ	Εισαχθείσες γεωμετρικές κατασκευές σε μη μαθηματική γλώσσα	Κοινές γεωμετρικές κατασκευές μη μαθηματικής γλώσσας	Εισαχθείσες γεωμετρικές κατασκευές σε μαθηματική γλώσσα	Κοινές γεωμετρικές κατασκευές μαθηματικής γλώσσας	Εισαχθείσες άλλες διαδικασίες σε μη μαθηματική γλώσσα	Κοινές άλλες διαδικασίες μη μαθηματικής γλώσσας	Εισαχθείσες άλλες διαδικασίες σε μαθηματική γλώσσα	Κοινές άλλες διαδικασίες μαθηματικής γλώσσας
Z1	Π1	6	1	3	1	2	0	0	0
	Π2	1	0	1	1	2	1	1	0
	Π3	1	0	1	1	1	1	3	3
Z2	Π1	7	3	2	1	2	0	0	0
	Π2	1	1	1	1	6	3	0	0
	Π3	2	1	1	1	1	1	2	2
Z3	Π1	5	2	5	4	2	1	0	0
	Π2	0	0	1	1	2	1	1	1
	Π3	1	1	1	1	1	0	2	2
Z4	Π1	5	2	4	3	3	3	0	0
	Π2	0	0	1	1	0	0	2	2
	Π3	3	2	1	1	1	1	1	1
Z5	Π1	9	4	5	4	3	2	1	1
	Π2	0	0	1	0	1	1	1	0
	Π3	3	1	1	1	3	1	3	3
Z6	Π1	7	4	3	3	1	1	0	0
	Π2	1	1	1	1	5	2	1	0
	Π3	3	1	2	2	1	1	0	0
Z7	Π1	7	3	1	1	1	0	0	0
	Π2	1	1	0	0	2	1	1	1
	Π3	1	1	2	2	4	2	2	2

Πίνακας γεωμετρικών κατασκευών και άλλων διαδικασιών (συνέχεια)

ΖΕΥΓΟΣ	ΠΡΟΒΛΗΜΑ	Εισαχθείσες γεωμετρικές κατασκευές σε μη μαθηματική γλώσσα	Κοινές γεωμετρικές κατασκευές μη μαθηματικής γλώσσας	Εισαχθείσες γεωμετρικές κατασκευές σε μαθηματική γλώσσα	Κοινές γεωμετρικές κατασκευές μαθηματικής γλώσσας	Εισαχθείσες άλλες διαδικασίες σε μη μαθηματική γλώσσα	Κοινές άλλες διαδικασίες μη μαθηματικής γλώσσας	Εισαχθείσες άλλες διαδικασίες σε μαθηματική γλώσσα	Κοινές άλλες διαδικασίες μαθηματικής γλώσσας
Ζ8	Π1	8	4	2	2	1	0	0	0
	Π2	1	1	0	0	2	2	1	0
	Π3	2	1	0	0	7	3	1	1
Ζ9	Π1	4	1	3	1	1	1	0	0
	Π2	0	0	1	1	2	2	0	0
	Π3	0	0	1	1	3	1	2	1
Ζ10	Π1	5	2	2	2	1	0	0	0
	Π2	1	1	1	1	3	1	1	1
	Π3	2	1	1	1	5	2	2	1
Ζ11	Π1	12	6	3	3	3	1	0	0
	Π2	0	0	0	0	2	1	1	1
	Π3	0	0	1	1	2	1	1	0
Ζ12	Π1	3	1	0	0	0	0	0	0
	Π2	1	1	0	0	4	4	0	0
	Π3	1	1	0	0	7	3	1	1
Ζ13	Π1	5	2	1	0	1	0	0	0
	Π2	0	0	0	0	3	2	3	2
	Π3	0	0	0	0	3	2	1	1
Ζ14	Π1	3	2	2	2	1	1	0	0
	Π2	0	0	1	1	2	2	3	3
Ζ15	Π1	3	2	2	1	1	1	0	0
	Π3	0	0	0	0	2	2	2	2

Πίνακας γεωμετρικών κατασκευών και άλλων διαδικασιών (συνέχεια)

Z16	Π1	5	3	2	2	1	0	0	0
	Π2	0	0	1	1	1	1	0	0
	Π3	0	0	1	1	0	0	1	1
Z17	Π1	3	1	5	5	0	0	1	1
	Π2	0	0	1	1	0	0	2	2
	Π3	0	0	0	0	0	0	0	0
Z18	Π1	3	2	3	3	0	0	0	0
	Π2	0	0	1	1	2	1	1	1
Z19	Π1	6	2	3	1	1	0	0	0
	Π2	0	0	1	1	0	0	0	0
Z20	Π1	3	3	4	3	0	0	0	0
	Π2	0	0	1	1	2	1	1	1
	Π3	0	0	0	0	3	2	2	2
Σύνολα		135	66	82	68	110	60	48	40

Πίνακας εμφάνισης νορμών

Ζεύγος	Πρόβλημα	N1	N2	N3	N4	N5	N6	N7	N8
Z1	Π1	•	•	•	•			•	•
	Π2	•	•		•	•		•	•
	Π3	•	•		•	•			
Z2	Π1	•	•	•	•			•	•
	Π2	•	•		•	•	•	•	•
	Π3	•	•		•	•	•	•	
Z3	Π1	•	•	•				•	•
	Π2	•	•		•		•	•	
	Π3	•	•		•		•	•	
Z4	Π1	•	•	•					•
	Π2	•	•		•	•	•	•	
	Π3	•	•		•	•	•	•	
Z5	Π1	•	•	•				•	•
	Π2	•	•			•	•	•	
	Π3	•	•		•	•	•		
Z6	Π1	•	•	•					•
	Π2	•	•		•		•	•	
	Π3	•	•		•	•	•	•	
Z7	Π1	•	•	•	•			•	•
	Π2	•	•				•		
	Π3	•	•		•	•	•		
Z8	Π1	•	•	•	•				•
	Π2	•	•				•	•	
	Π3	•	•		•	•	•	•	
Z9	Π1	•	•	•	•			•	•
	Π2	•	•			•	•	•	
	Π3	•	•		•	•	•		
Z10	Π1	•	•	•				•	•
	Π2	•	•				•	•	
	Π3	•	•		•	•	•	•	
Z11	Π1	•	•	•					•
	Π2	•	•				•	•	
	Π3	•	•		•	•	•		
Z12	Π1	•	•	•	•			•	•
	Π2	•	•			•	•	•	
	Π3	•	•		•	•	•		
Z13	Π1	•	•	•	•				•
	Π2	•	•		•	•	•	•	
	Π3	•	•		•	•	•	•	
Z14	Π1	•	•	•	•			•	•
	Π2	•	•		•		•	•	
Z15	Π1	•	•	•	•				
	Π3	•	•		•		•		
Z16	Π1	•	•	•				•	•
	Π2	•	•		•	•	•	•	•
	Π3	•	•		•	•	•	•	
Z17	Π1	•	•	•					•
	Π2	•	•				•		•
	Π3	•	•		•	•	•		
Z18	Π1	•	•	•	•				•
	Π2	•	•				•	•	•
Z19	Π1	•	•	•	•				•
	Π2	•	•			•	•	•	•
Z20	Π1	•	•	•	•				•
	Π2	•	•		•	•	•	•	•
	Π3	•	•		•	•	•		