

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



025000200044



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

(69)

ΕΛΙΣΣΑΒΕΤ ΚΑΜΠΑΝΗ - ΠΟΤΟΥΡΙΔΟΥ

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ
ΣΤΗ ΛΥΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ, 2003



ΕΛΙΣΣΑΒΕΤ ΚΑΜΠΑΝΗ – ΠΟΤΟΥΡΙΔΟΥ

A

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ
ΣΤΗ ΛΥΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ
που υποβλήθηκε στο Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης
της Σχολής Επιστημών της Αγωγής
του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Συμβουλευτική επιτροπή

Ευγενία Κολέζα, αναπληρώτρια καθηγήτρια
Φωτεινή Κοσσυβάκη, αναπληρώτρια καθηγήτρια
Αναστάσιος Μικρόπουλος, αναπληρωτής καθηγητής

Εξεταστική επιτροπή

Γεώργιος Δήμου, καθηγητής
Γεώργιος Φιλίππου, καθηγητής
Φραγκίσκος Καλαβάσης, καθηγητής
Χαράλαμπος Λεμονίδης, αναπληρωτής καθηγητής



.....στο Θανάση,
το σύντροφο της ζωής μου



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ	4
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ	6
ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ	9
ΕΙΣΑΓΩΓΗ	11
Οι αναπαραστάσεις στη λύση γεωμετρικών προβλημάτων	13
• Η αναπαράσταση των γνώσεων	13
• Η οργάνωση των γνώσεων	16
Η δομή της διατριβής	18
 Κεφάλαιο 1^ο: ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ	21
1.1 ΟΙ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΣΚΕΨΗ	22
1.1.1. Τι είναι αναπαράσταση	22
1.1.2. Εσωτερικές – εξωτερικές αναπαραστάσεις	24
1.1.3. Συστήματα αναπαράστασης	25
1.1.4. «Μεταφράσεις» ανάμεσα σε αναπαραστάσεις	28
1.1.5. Οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται στη Γεωμετρία	31
1.1.6. Σχηματικές έννοιες	32
1.1.7. Τα γεωμετρικά σχήματα στη λύση προβλήματος	34
 1.2 ΤΑ ΓΝΩΣΤΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ	35
1.2.1. Η οργάνωση των γνώσεων	35
1.2.2. Η απλή οργάνωση των εννοιών	36
1.2.3. Η σύνθετη οργάνωση των εννοιών	37
1.2.4. Το γνωστικό «Σχήμα»	37
➤ Ορισμός του όρου scheme	39
➤ Ορισμός του όρου schema	40
1.2.5. Το Σχήμα στη διαδικασία μάθησης	41
1.2.6. Ερμηνείες του Σχήματος	41
1.2.7. Περιεχόμενο του Σχήματος	42
1.2.8. Επιφυλάξεις σχετικά με τα Σχήματα	43
1.2.9. Χαρακτηριστικά των Σχημάτων	44
➤ Η γενικότητα	44
➤ Η ιεραρχική οργάνωση	45
➤ Ο διττός χαρακτήρας	46
1.2.10. Οργάνωση γνωστικών Σχημάτων	46
➤ Τοπικό επίπεδο	48
➤ Συνολικό επίπεδο	52
1.2.11. Απόκτηση και εξέλιξη των γνωστικών Σχημάτων	54
 1.3 ΟΙ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΕΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ	56
1.3.1. η νοερή απεικόνιση	58
1.3.2. η κατασκευή	62
1.3.3. τα γεωμετρικά όργανα	64
1.3.4. οι οδηγίες κατασκευής	65
1.3.5. η αιτιολόγηση της κατασκευής	68



1.3.6	η γλώσσα της αιτιολόγησης	69
1.3.7	η βάση της αιτιολόγησης	70
1.3.8	σχέση της αιτιολόγησης με την κατανόηση	71
1.4	ΠΩΣ ΤΟΠΟΘΕΤΕΙΤΑΙ Η ΕΡΕΥΝΑ ΜΑΣ ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ	72
1.4.1	Σύνοψη των σχετικών με το θέμα της διατριβής ερευνών	72
1.4.2	Οριοθέτηση της παρούσης έρευνας	75
1.4.3	Το Σχήμα ως ερμηνευτικό πλαίσιο	78
1.4.4	Ο ορισμός του Σχήματος που χρησιμοποιούμε	80

Κεφάλαιο 2^ο: ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ 87

2.1	Ερευνητικά ερωτήματα	87
2.2	Υποθέσεις εργασίας	89
2.3	Έλεγχος των υποθέσεων εργασίας	92
2.4	Επιλογή της μεθοδολογίας	93
	• Οι λόγοι για τους οποίους επιλέγουμε την ποιοτική έρευνα	93
	• Η στρατηγική της έρευνας: μελέτη περίπτωσης	94
	• Πλεονεκτήματα – μειονεκτήματα της μελέτης περίπτωσης	95
	• Η πρωτοτυπία της παρούσης έρευνας	96
2.5	Ανάλυση της μεθοδολογίας	98
	• Η ηλικία των μαθητών	98
	• Η χρονική διάρκεια της έρευνας	98
	• Ο τρόπος επιλογής του δείγματος	99
	• Η συλλογή των στοιχείων	101
	• Η επιλογή των προβλημάτων που χρησιμοποιούνται	102
2.6	Τα προβλήματα που χρησιμοποιούνται	105
2.7	ΟΙ ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΚΑΙ Η ΣΥΝΔΕΣΗ ΤΟΥΣ ΜΕ ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ	108
2.7.1	Υποθέσεις που αφορούν στην εξέταση του ΣΙΤ σε τοπικό επίπεδο	109
	• Υπόθεση 1 ^α	109
	• Υπόθεση 1 ^β	113
	• Υπόθεση 1 ^γ	113
	• Υπόθεση 1 ^δ	120
	• Υπόθεση 1 ^ε	124
2.7.2	Υποθέσεις που αφορούν στην εξέταση του ΣΙΤ σε συνολικό επίπεδο	125
	• Υπόθεση 2	126
	• Υπόθεση 3	126

Κεφάλαιο 3^ο: Η ΠΡΟΕΡΕΥΝΑ 132

3.1	Οργάνωση της προ έρευνας	132
3.2	Τα προβλήματα της προ έρευνας	133
3.3	Ανάλυση των στοιχείων της προ έρευνας	135
	• ως προς τη μεθοδολογία	135
	• ως προς τις προσεγγίσεις των μαθητών στα προβλήματα	137
	• ως προς το γνωστικό Σχήμα του ισοσκελούς τριγώνου (ΣΙΤ)	139
3.4	Συμπεράσματα από την προ έρευνα	143

Κεφάλαιο 4^ο: Η ΕΡΕΥΝΑ 145

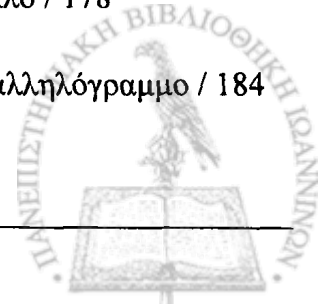
4.1	ΔΟΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΥΡΗΜΑΤΩΝ	145
4.1.1	Τοπικό επίπεδο	146
	• Υπόθεση 1 ^α	146
	• Υπόθεση 1 ^β	152
	• Υπόθεση 1 ^γ	153

	• Υπόθεση 1 ^δ	160
	• Υπόθεση 1 ^ε	164
	Συμπεράσματα	168
4.1.2	Συνολικό επίπεδο	169
	• Το γνωστικό Σχήμα του ρόμβου	170
	• Το γνωστικό Σχήμα του ισοσκελούς τραπεζίου	172
	• Το γνωστικό Σχήμα του κύκλου	178
	• Το γνωστικό Σχήμα του παραλληλογράμμου	184
	Συμπεράσματα	186
4.1.3	Ο χαρακτήρας των συνδέσεων ανάμεσα στα Σχήματα	188
	• Σύνδεση εκτός πλαισίου	189
	• Ανενεργή σύνδεση	190
	• Σύνδεση που ενεργοποιείται λανθασμένα	191
	• Ενεργή σύνδεση	192
4.2	ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΥΡΗΜΑΤΩΝ ΑΝΑ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ	194
4.2.1	Με αφετηρία τη νοερή απεικόνιση	196
	• Οι μετατροπές μεταξύ αναπαραστάσεων	196
	• Τρόποι δημιουργίας της νοερής εικόνας, που αντιστοιχεί στη λύση του προβλήματος	199
	• 1 ^{ος} τρόπος	200
	• 2 ^{ος} τρόπος	205
	• 3 ^{ος} τρόπος	208
4.2.2	Με αφορμή την κατασκευή	210
	• οδηγίες κατασκευής του ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχούν στον ορισμό	211
	• Οδηγίες κατασκευής που αντιστοιχούν στη βασική ιδιότητα	213
	• Παρατηρήσεις σε σχέση με τις οδηγίες κατασκευής	215
	• Συμπεράσματα	218
	• Στρατηγικές προσαρμογής των οδηγιών στα δεδομένα (περιορισμούς) του προβλήματος	220
4.2.3	Με αφορμή την αιτιολόγηση	228
	• Οπτική προσέγγιση	228
	• Ευρετική προσέγγιση	232
	> Η κατανόηση του σχήματος	233
	> Ο ατελής θεωρητικός λόγος	234
	> Η πληρότητα των πληροφοριών	235
	> Η οργάνωση των πληροφοριών	239
	• Θεωρητική προσέγγιση	245
4.2.4	Αλυσίδες ενεργειών	247
	• Η νέα αλυσίδα ξεκινά από αναδόμηση της εικόνας	248
	• Συνέπειες της αναδόμησης	251
	• Η νέα αλυσίδα ξεκινά από διαφορετικές οδηγίες κατασκευής	256
	• Η νέα αλυσίδα αποτελεί συνδυασμό δύο ή περισσότερων από τις αλυσίδες που προηγήθηκαν	259
	Κεφάλαιο 5^ο: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	261
5.1	Τα αποτελέσματα της έρευνας σε σχέση με τις υποθέσεις	262
5.2	Προτάσεις για την έρευνα και τη διδασκαλία	271
	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	273



ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας 1.1	Οι αναπαραστάσεις του ίδιου αντικειμένου στα διαφορετικά συστήματα αναπαράστασης / 32
Πίνακας 1.2	Παράδειγμα μεταβλητών και πιθανών τιμών του γνωστικού Σχήματος «σπίτι» / 44
Πίνακας 1.3	Άξονες (λειτουργίες) ως προς τους οποίους διερευνάται η αναγνώριση και η χρήση της έννοιας / 58
Πίνακας 1.4	Οδηγίες κατασκευής της διχοτόμου / 66
Πίνακας 2.1	Αρχές για τη διάκριση των πρωταρχικών δομών / 121
Πίνακας 2.2	Παρουσίαση και σύγκριση των προβλημάτων που χρησιμοποιήθηκαν στην 3 ^η φάση / 129
Πίνακας 2.3	Οι ερευνητικές υποθέσεις και τα προβλήματα που χρησιμοποιούνται για τον έλεγχο κάθε υπόθεσης / 130
Πίνακας 3.1	Σύγκριση των διαφορετικών προσεγγίσεων του ίδιου προβλήματος από δύο μαθητές / 138
Πίνακας 3.2	Σύγκριση δύο λύσεων του ίδιου προβλήματος ως προς τη δυνατότητα προσαρμογής τους σε αλλαγή συνθηκών / 139
Πίνακας 3.3	Το ύψος / άξονας συμμετρίας ως βασικό στοιχείο για την αναγνώριση και κατασκευή του ισοσκελούς τριγώνου / 140
Πίνακας 3.4	Διάφοροι τρόποι χρήσης της μεσοκαθέτου από μαθητές κατά την προ έρευνα / 141
Πίνακας 3.5	Παραδείγματα ανενεργών συνδέσεων / 142
Πίνακας 4.1	Κατηγοριοποίηση των μεταβολών της εικόνας – πρότυπο / 148
Πίνακας 4.2	Σύγκριση των ερωτημάτων 3 ^α και 3 ^β ως προς την απόδοση ρόλου / 161
Πίνακας 4.3	Σύγκριση των ρόλων στο ισοσκελές τρίγωνο και στο ρόμβο / 170
Πίνακας 4.4	Σύγκριση των ρόλων στο ισοσκελές τρίγωνο και το ισοσκελές τραπέζιο / 172
Πίνακας 4.5	Σύγκριση των ρόλων στο ισοσκελές τρίγωνο και τον κύκλο / 178
Πίνακας 4.6	Σύγκριση των ρόλων στο ισοσκελές τρίγωνο και το παραλληλόγραμμο / 184



- Πίνακας 4.7 Ανάλυση μιας λανθασμένης σύνδεσης δύο Σχημάτων / 191
- Πίνακας 4.8 Χαρακτήρας των συνδέσεων / 193
- Πίνακας 4.9 Κριτήρια με βάση τα οποία ελέγχονται οι υποθέσεις της έρευνας ανά λειτουργία / 195
- Πίνακας 4.10 Παράγοντες που καθορίζουν τις μετατροπές ανάμεσα σε αναπαραστάσεις στη Γεωμετρία / 197
- Πίνακας 4.11 Τρόποι δημιουργίας της νοερής εικόνας / 200
- Πίνακας 4.12 Πίνακας οδηγιών κατασκευής ισοσκελούς τριγώνου / 219
- Πίνακας 4.13 Στρατηγικές προσαρμογής των οδηγιών κατασκευής στα δεδομένα ενός προβλήματος / 221
- Πίνακας 4.14 Σύγκριση των τρόπων κατανόησης του σχήματος στις διαφορετικές προσεγγίσεις (διαδικασίες αιτιολόγησης) / 234
- Πίνακας 4.15 Επίπεδα οργάνωσης των πληροφοριών / 235
- Πίνακας 4.16 Οι τρεις προσεγγίσεις στην αιτιολόγηση / 246
- Πίνακας 4.17 Εσωτερικές ασυνέπειες στο γεωμετρικό σχήμα από λάθος απόδοση ρόλων στα στοιχεία του / 255



ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

- σχήμα 1.1 Παράδειγμα αντιληπτικής – λεκτικής κατανόησης του ίδιου γεωμετρικού σχήματος / 60

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

- σχήμα 2.1 Η εικόνα – πρότυπο του ισοσκελούς τριγώνου / 110
 σχήμα 2.2 Το πρόβλημα αναγνώρισης που χρησιμοποιεί ο Duval / 114
 σχήμα 2.3 Ανάλυση ενός σχήματος (2.2) σε υπό σχήματα / 115
 σχήμα 2.4 Βασικοί ρόλοι των στοιχείων του ισοσκελούς τριγώνου / 116
 σχήμα 2.5 Ανάλυση σχημάτων σε πρωταρχικές δομές / 121
 σχήμα 2.6 Ανάλυση σχημάτων σε δευτερεύουσες δομές / 122

4^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

- σχήμα 4.1 Το αναλλοίωτο κατά την κατασκευή του ισοσκελούς τριγώνου / 149
 σχήμα 4.2 Η λύση του 2^{ου} προβλήματος της 1^{ης} / 2^{ης} φάσης / 150
 σχήμα 4.3 Οι διαδοχικές προσπάθειες ενός μαθητή να απαντήσει στο ερώτημα 2^β (2ο πρόβλημα της 2ης φάσης) / 151
 σχήμα 4.4 Η θετική συνεισφορά των ρόλων στην επίλυση δύο προβλημάτων / 155
 σχήμα 4.5 Ο βαθμός ομοιότητας της λύσης με τη δοθείσα εικόνα – πρότυπο / 156
 σχήμα 4.6 Ο προσανατολισμός ενός σχήματος επηρεάζει την αναγνώρισή του / 157
 σχήμα 4.7 Το σχήμα που κατασκευάζεται έχει διαφορετικό άξονα συμμετρίας από το σχήμα αναφοράς / 158
 σχήμα 4.8 Ανάλυση μιας λύσης του 3^{ου} προβλήματος της 3^{ης} φάσης / 162
 σχήμα 4.9 Ανάλυση του τραπεζίου σε πρωταρχικές δομές επιφάνειας / 163
 σχήμα 4.10 Το σχήμα του 1^{ου} προβλήματος της 3^{ης} φάσης / 166
 σχήμα 4.11 Οι διαδοχικές προσπάθειες μιας μαθήτριας για τη λύση του 3^{ου} προβλήματος της 1^{ης} φάσης / 167
 σχήμα 4.12 Παραδείγματα κατασκευής ισοσκελών τριγώνων «εκτός πλαισίου» / 173
 σχήμα 4.13 Κοινό στοιχείο δύο γεωμετρικών σχημάτων με τον ίδιο ρόλο σε αυτά / 174
 σχήμα 4.14 Στοιχεία με τον ίδιο ρόλο σε δύο γεωμετρικά σχήματα / 175



σχήμα 4.15	Γεωμετρικά στοιχεία με κοινό άξονα συμμετρίας / 177
σχήμα 4.16	Οι τρεις περιπτώσεις κατασκευής ισοσκελούς τριγώνου στο 4 ^ο πρόβλημα της 3 ^{ης} φάσης / 179
σχήμα 4.17	Οι διαδοχικές προσπάθειες μιας μαθήτριας να λύσει το 4 ^ο πρόβλημα της 3 ^{ης} φάσης / 181
σχήμα 4.18	Μια άλλη λύση του 4 ^{ου} προβλήματος της 3 ^{ης} φάσης / 181
σχήμα 4.19	Ανάλυση του γεωμετρικού σχήματος 4.18 σε δύο διαφορετικά πλαίσια / 183
σχήμα 4.20	Τα παραλληλόγραμμα που διακρίνουν οι μαθητές στο σχήμα του 1 ^{ου} προβλήματος της 3 ^{ης} φάσης / 186
σχήμα 4.21	Κοινό στοιχείο με τον ίδιο ρόλο σε ισοσκελές και παραλληλόγραμμο / 186
σχήμα 4.22	Κατασκευές «εκτός πλαισίου» / 190
σχήμα 4.23	Το σχήμα του 1 ^{ου} προβλήματος της 3 ^{ης} φάσης / 191
σχήμα 4.24	Μια λύση του 3 ^{ου} προβλήματος της 3 ^{ης} φάσης / 192
σχήμα 4.25	Το πρόβλημα του Duval / 193
σχήμα 4.26	Μη τυχαίες ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου / 198
σχήμα 4.27	Οι δύο διαδοχικές προσπάθειες για λύση του προβλήματος, περιλαμβάνουν τις ίδιες ενέργειες με αντίστροφη σειρά / 201
σχήμα 4.28	Η αιτιολόγηση αναγκάζει τη μαθήτρια να κατασκευάσει διαφορετικά / 202
σχήμα 4.29	Το σχήμα πληροφορεί το μαθητή πως πρέπει να κατασκευάσει διαφορετικά / 203
σχήμα 4.30	Η νοερή εικόνα μπορεί να είναι σωστή αλλά όχι κατασκευάσιμη / 204
σχήμα 4.31	Οι νοερές εικόνες μιας μαθήτριας για το πρόβλημα 2 ^β της 2 ^{ης} φάσης / 205
σχήμα 4.32	Οι νοερές εικόνες ενός μαθητή για το πρόβλημα 3 ^γ της 1 ^{ης} φάσης / 207
σχήμα 4.33	Σύγκριση εικόνας και γεωμετρικού σχήματος / 211
σχήμα 4.34	Οδηγίες κατασκευής του ισοσκελούς που χρησιμοποιούν διαβήτη / 212



- σχήμα 4.35 Οδηγία κατασκευής του ισοσκελούς με δύο ίσα τρίγωνα / 213
- σχήμα 4.36 Οδηγίες κατασκευής του ισοσκελούς που αντιστοιχούν στη βασική ιδιότητα / 213
- σχήμα 4.37 Τρόποι επιλογής συγκεκριμένου σημείου πάνω στη μεσοκάθετο / 214
- σχήμα 4.38 Διαφορετικές επιλογές ρόλων για τα στοιχεία που δίνονται στο 2^ο πρόβλημα της 1^{ης} φάσης / 217
- σχήμα 4.39 Προσπάθεια προσαρμογής ακατάλληλης για το πρόβλημα οδηγίας / 222
- σχήμα 4.40 Αδυναμία προσαρμογής οδηγίας κατάλληλης για το πρόβλημα / 224
- σχήμα 4.41 Προσαρμογή σωστής οδηγίας στους περιορισμούς του προβλήματος / 226
- σχήμα 4.42 Μια λύση του 4^{ου} προβλήματος της 3^{ης} φάσης / 229
- σχήμα 4.43 Κατασκευή «περίπου σωστή» στο 2^ο πρόβλημα της 1^{ης} φάσης / 231
- σχήμα 4.44 Κατασκευή «περίπου σωστή» στο 3^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης / 231
- σχήμα 4.45 Μια άλλη λύση του 4^{ου} προβλήματος της 3^{ης} φάσης / 240
- σχήμα 4.46 Το σχήμα του 4^{ου} προβλήματος της 3^{ης} φάσης / 243
- σχήμα 4.47 Οι ρόλοι που δίνονται πρέπει να είναι συμβατοί μεταξύ τους / 247
- σχήμα 4.48 Παράδειγμα οπτικής αναδιοργάνωσης του σχήματος που δίνει το πρόβλημα / 249
- σχήμα 4.49 Παράδειγμα στοιχείου με διαφορετικούς ρόλους στα δύο υπό σχήματα / 250
- σχήμα 4.50 Συνδυασμός διαδοχικών αλυσίδων για τη λύση του προβλήματος / 259



ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Από τα γυμνασιακά μου χρόνια η Γεωμετρία υπήρξε η μεγάλη μου αγάπη. Η λύση μιας «δύσκολης» γεωμετρικής άσκησης ξεσήκωνε μέσα μου μια περίεργη συναισθηματική ταραχή, την οποία ήθελα να μοιραστώ με άλλους που είχαν το ίδιο πάθος με μένα (και ήταν πολλοί στα μαθητικά μου χρόνια). Κάτι αντίστοιχο παρακολουθώ σήμερα να συμβαίνει με τη γοητεία που ασκεί ο ΗΥ στους μαθητές μου.

Όταν διορίστηκα στη Μέση Εκπαίδευση με περίμενε μία δυσάρεστη έκπληξη. Διαπίστωσα γρήγορα πως οι σημερινοί μαθητές στέκονται αδιάφορα έως αρνητικά απέναντι στο μάθημα της Γεωμετρίας, κάτι που απέχει πολύ από τη δική μου στάση. Το γεγονός αυτό στάθηκε η αφετηρία της όλης μου προσπάθειας να παλέψω μέσα στη σχολική τάξη, ώστε να μεταστρέψω την άρνηση των παιδιών σε μια θετική προσέγγιση και αντιμετώπιση του μαθήματος. Παράλληλα ωρίμασε μέσα μου η ανάγκη για μια συστηματική και επιστημονική διερεύνηση της φυσιολογίας του μαθήματος και των γνωστικών του δυσκολιών. Καρπός της ανάγκης μου αυτής είναι η παρούσα διατριβή.

Η μελέτη εκπονήθηκε στο Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων. Νιώθω την ανάγκη, και από τη θέση αυτή, να ευχαριστήσω θερμά όλους όσους βοήθησαν να ολοκληρωθεί αυτή η προσπάθεια.

Κατ' αρχάς τα μέλη της τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής που, αναλαμβάνοντας την ευθύνη της εποπτείας, μου έδωσαν την ευκαιρία να πραγματοποιήσω ένα μεγάλο μου όνειρο.

Ειδικότερα ευχαριστώ:

- την αναπλ. καθηγήτρια κ. Ευγενία Κολέζα, η οποία είχε την εποπτεία αυτής της εργασίας και σταθερά, μεθοδικά και διακριτικά με καθοδήγησε με τις πολύτιμες συμβουλές της. Η ίδια συνέβαλε αποφασιστικά τόσο στην επιστημονική στήριξη της μελέτης, όσο και στην προσωπική επιστημονική μου ωρίμανση. Δεν ξεχνώ τις ατέλειωτες ώρες που αφιέρωσε, από τον ελάχιστο ελεύθερο χρόνο της, σε προσωπικές συζητήσεις που μετέτρεψαν μια κοπιώδη προσπάθεια σε ένα γοητευτικό «ταξίδι». Την ευχαριστώ επίσης θερμά για το αίσθημα ασφάλειας που εμπνέει, ασφάλειας που με στήριξε στη διάρκεια αυτού του μακροχρόνιου «ταξιδιού».
- τον αναπλ. καθηγητή κ. Αναστάσιο Μικρόπουλο για το ιδιαίτερο ενδιαφέρον με το οποίο παρακολούθησε την πορεία της έρευνας και για τις εύστοχες επισημάνσεις του που συνέβαλαν στη βελτίωσή της.



• την αναπλ. καθηγήτρια κ. Φωτεινή Κοσσυβάκη για την ηθική της συμπαράσταση και τις χρήσιμες υποδείξεις που ενίσχυσαν την Παιδαγωγική πλευρά της εργασίας μου.

Επίσης αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω ολόψυχα τις μαθήτριες και τους μαθητές που συνεργάστηκαν για τη διενέργεια της έρευνας. Χωρίς αυτούς και την προθυμία τους να μοιραστούν μαζί μου τις σκέψεις τους, θα ήταν ανέφικτη η υλοποίηση αυτής της έρευνας.

Καθοριστική για την επιλογή των παιδιών και τη δημιουργία κατάλληλων συνθηκών για τις συνεντεύξεις τους ήταν η συμβολή των τεσσάρων συναδέλφων μου μαθηματικών. Ευχαριστώ από καρδιάς την κ. Α. Ζοριού, τον κ. Σ. Ελευθερίου, τον κ. Δ. Κοντογεώργο, και τον κ. Α. Κωστόπουλο για την ευαισθησία και το ενδιαφέρον με το οποίο αγκάλιασαν την προσπάθειά μου. Θερμά «ευχαριστώ» ανήκουν και στους Διευθυντές των Λυκείων (2^ο και 4^ο Αλίμου, 1^ο Ελληνικού, 2^ο Αργυρούπολης) γιατί επέτρεψαν και διευκόλυναν τη διενέργεια της έρευνας στο χώρο του σχολείου τους.

Από τα πρώτα βήματα της ερευνητικής αυτής προσπάθειας πολύτιμος σύμβουλος και συμπαράστατης στάθηκε ο αναπλ. καθηγητής κ. Κ. Σκορδούλης. Το ιδιαίτερο ενδιαφέρον με το οποίο παρακολούθησε την πορεία αυτής της εργασίας και οι υποδείξεις του διεύρυναν την οπτική μου και εμπλούτισαν τους προβληματισμούς μου. Σε μεθοδολογικό επίπεδο καθοριστική ήταν η βοήθεια του επικ. καθηγητή κ. Τ. Εμβαλωτή, ο οποίος ανταποκρίθηκε πρόθυμα και με ενδιαφέρον στα προβλήματα που του έθεσα σχετικά με την ερευνητική μου μέθοδο. Τέλος, η φιλολογική επιμέλεια της εργασίας μου οφείλεται στην καλή φίλη και συνάδελφο κ. Σ. Ρεσβάνη. Τους ευχαριστώ όλους θερμά.

Από την αρχή της προσπάθειάς μου πολύτιμη στάθηκε η παρουσία της φίλης και συναδέλφου κ. Κ. Σκιά, η οποία εκπονούσε παράλληλα τη Διδακτορική της Διατριβή στη Γλώσσα. Η συνεχής επικοινωνία μαζί της και ο επιστημονικός διάλογος τροφοδοτούσαν τον αναστοχασμό. Παρότι κινούμασταν σε δύο ξένες μεταξύ τους γνωστικές περιοχές (Γεωμετρία – Γλώσσα), οι συζητήσεις μας οδήγησαν στην βαθύτερη κατανόηση των προβλημάτων που εμφανίζονται στην πορεία μιας έρευνας και στη συστηματική οργάνωσή της. Της οφείλω ιδιαίτερη ευγνωμοσύνη.

Κυρίως όμως θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου, το σύζυγό μου Θανάση και τις τρεις υπέροχες κόρες μου Αφροδίτη, Λουκία και Παναγιώτα. Χωρίς την αδιάλειπτη παρουσία και την αγάπη τους, πολύτιμο στήριγμα στις δύσκολες στιγμές, η εργασία αυτή δεν θα είχε ολοκληρωθεί. Στη μακρόχρονη προσπάθειά μου τους στέρησα πολλά, αυτοί όμως ήταν πάντα εκεί για μένα.



ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η Γεωμετρία είναι ένας χώρος γοητευτικός για τους μαθηματικούς, αλλά και για όσους αγαπούν τα Μαθηματικά. Ταυτόχρονα, όμως, αποτελεί πηγή δυσκολιών για πάρα πολύ κόσμο. Ένα μεγάλο ποσοστό των μαθητών δυσκολεύεται στο μάθημα της Γεωμετρίας, ή παρουσιάζει σοβαρές αδυναμίες να την κατανοήσουν και να τη μάθουν. Οι μαθητές αυτοί αδυνατούν να ενεργοποιήσουν τις υπάρχουσες γνώσεις και δεξιότητές τους, κατά τη χρονική στιγμή που τις χρειάζονται για να λύσουν ένα πρόβλημα. Το θέμα είναι σοβαρό και αποτελεί μια συνεχή πρόκληση για τους μαθηματικούς, γι αυτό και τίθεται στην ημερήσια διάταξη πολλών αναλυτικών προγραμμάτων (National Council of Teachers of Mathematics, 1989, Australian Education Council, 1990)

Ο στόχος της διδασκαλίας των Μαθηματικών στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση, δεν είναι ούτε η κατάρτιση μαθηματικών, αλλά ούτε και ο εφοδιασμός των μαθητών μας με εργαλεία που θα τους χρειαστούν στο απώτερο μέλλον. Με τα δεδομένα αυτά, είναι φυσικό να αναρωτηθούμε «γιατί να διδάσκεται η Γεωμετρία;» στο σχολείο, όταν η διδασκαλία της είναι πολύ πιο σύνθετη και λιγότερο επιτυχής από τη διδασκαλία άλλων κλάδων των Μαθηματικών, για παράδειγμα, της Αριθμητικής ή της Άλγεβρας;

Την απάντηση στο ερώτημα δίνουν οι νέοι στόχοι που τίθενται σήμερα για τη μαθηματική εκπαίδευση. Στις μέρες μας, η ανάπτυξη της τεχνολογίας έχει διευρύνει το πεδίο εφαρμογής των Μαθηματικών σε περιοχές όπως η Οικονομία, η Βιολογία, η Ιατρική, η Κοινωνιολογία κ.ά. Συνεπώς οι μαθητές πρέπει να έχουν την ευκαιρία να κατανοήσουν μαθηματικά μοντέλα, δομές και προσομοιώσεις που βρίσκουν εφαρμογή και σε έξω - μαθηματικές περιοχές (Ε.Π.Π.Σ. Μαθηματικών, 1999, 2002). Σύμφωνα με τον Freudenthal, «τα Μαθηματικά, προκειμένου να έχουν ανθρώπινη αξία, πρέπει να συνδέονται με την πραγματικότητα, να μένουν κοντά στα παιδιά και να είναι σχετικά με την κοινωνία. Αυτή η άποψη αντιμετωπίζει τα Μαθηματικά όχι σαν ένα αντικείμενο διδασκαλίας, αλλά σαν μία ανθρώπινη δραστηριότητα» (van den Heuvel – Panhuizen, 1996, σ.10). Έτσι, οι στόχοι της μαθηματικής εκπαίδευσης περιλαμβάνουν, μεταξύ άλλων, την ανάπτυξη χηενικότερων ικανοτήτων για συλλογισμό, ανάλυση και νοερή απεικόνιση.

Στα πλαίσια αυτά, το ενδιαφέρον στοιχείο της Γεωμετρίας είναι η γνωστική συνθετότητα που κρύβεται πίσω από τις λειτουργίες που κινητοποιεί. Για το μαθητή, που δεν σκοπεύει να γίνει

μαθηματικός ή μηχανικός. η σημασία της είναι πως, τον βοηθά να αναπτύξει ικανότητες για οπτική αναπαράσταση και λειτουργία, και να κερδίσει από τη συνεργασία αυτών των εντελώς διαφορετικών διαδικασιών (Duval, 1998, σ.51). Σύμφωνα με τη Γνωστική Ψυχολογία, η Γεωμετρία, περισσότερο από κάθε άλλη περιοχή των Μαθηματικών, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποκαλύψει και να αναπτύξει διαφορετικούς τρόπους σκέψης (Duval, 1998, σ.51). Η αποκάλυψη της πολυπλοκότητας της σκέψης των μαθητών και η υποστήριξή τους να την αναπτύξουν πρέπει να αποτελεί ένα ουσιώδη στόχο της διδασκαλίας της Γεωμετρίας.

Εφόσον υποστηρίζουμε τη γνωστική σημασία του συγκεκριμένου μαθήματος, το επόμενο βήμα είναι να διερευνήσουμε το πώς θα υποβοηθήσουμε τη μάθηση των «αδύνατων στη Γεωμετρία» μαθητών. Για να γίνει αυτό, χρειάζεται πρώτα να καταλάβουμε εμείς οι ίδιοι τους λόγους για τους οποίους οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες, οπότε χάνουν το ενδιαφέρον και μειώνουν τη συμμετοχή τους στο μάθημα. Η προσέγγιση στο πρόβλημα θα είναι γνωστική, δηλαδή θα προσπαθήσουμε να καθορίσουμε τις γνωστικές λειτουργίες που βρίσκονται πίσω από τις διάφορες μαθηματικές διαδικασίες.

Αναπόσπαστο στοιχείο της διδασκαλίας και μάθησης στο σχολείο αποτελούν δύο θεμελιώδεις λειτουργίες του ατόμου:

- η εσωτερική γνωστική διαδικασία και
- η επικοινωνία μεταξύ των ανθρώπων

Οι μαθητές που δυσκολεύονται στη μία, ή σε αμφότερες τις λειτουργίες, είναι οι λεγόμενοι «χαμηλής επίδοσης μαθητές». Αυτοί αντιμετωπίζουν προβλήματα κατά το σχηματισμό των απαιτούμενων αναπαραστάσεων, τα οποία μπορεί να οφείλονται τόσο στον υποκειμενισμό τους, όσο και στην δυνατότητα ή / και στην ποιότητα της επικοινωνίας τους με τους άλλους ανθρώπους (δασκάλους ή συμμαθητές).

Καθοριστικός παράγοντας για μια επιτυχημένη γεωμετρική λειτουργία είναι η ποιότητα της οργάνωσης των γεωμετρικών γνώσεων του μαθητή. Σύγχρονες έρευνες, που αφορούν στις γνωστικές λειτουργίες του ατόμου, αναδεικνύουν την άποψη πως η μνήμη είναι μια συσχετιστική δομή (Anderson, 2000). Ένα καλά οργανωμένο σύνολο γνώσεων δεν διευκολύνει μόνο την πρόσβαση στις υπάρχουσες πληροφορίες αλλά, επίσης, καθορίζει το βαθμό αξιοποίησης των πληροφοριών αυτών, κατά την προσπάθεια λύσης ενός προβλήματος. Τελικά, οι συνδέσεις που εγκαθιστά ο μαθητής ανάμεσα στις γνώσεις του έχουν ένα ρόλο – κλειδί για την αποτελεσματικότητά του κατά τη γεωμετρική λειτουργία.

Συνεπώς, η κατανόηση των λόγων για τους οποίους οι μαθητές δυσκολεύονται στη Γεωμετρία προϋποθέτει την κατανόηση των ικανοτήτων αναπαράστασης της γνώσης που απαιτούνται σε αυτήν. Ακόμα, προϋποθέτει την ανάλυση του τρόπου με τον οποίο αυτές οι αναπαραστάσεις

συνδέονται μεταξύ τους και αποκτούν νόημα, δηλαδή πώς δημιουργούνται από τους μαθητές οι γνωστικές δομές σαν συνέπεια της παρέμβασης του δασκάλου, του βιβλίου ή άλλων παραγόντων. Τέλος, ένας άλλος παράγοντας που ενισχύει την κατανόησή της αναποτελεσματικότητας των μαθητών, είναι η μελέτη των λειτουργιών που απαιτούνται για τη γεωμετρική σκέψη. Αυτή η γνώση θα φανεί πολύτιμη κατόπιν για να σχεδιαστούν αποτελεσματικότερες προσεγγίσεις.

ΟΙ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΣΤΗ ΛΥΣΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Η έρευνα αυτή, έχει στόχο να διερευνήσει τον τρόπο με τον οποίο αναπαρίστανται και οργανώνονται βαθμιαία, σε ένα σύνολο με νόημα, οι γεωμετρικές γνώσεις που υπάρχουν στο νου του μαθητή, καθώς και πώς χρησιμοποιούνται αυτές κατά τη λύση προβλήματος. Ακόμα, εξετάζει τις διάφορες γνωστικές λειτουργίες που βρίσκονται πίσω από τις γεωμετρικές διαδικασίες που χρησιμοποιεί ο μαθητής όταν λύνει προβλήματα. Εξαιτίας της ευρύτητας του θέματος, η διερεύνηση περιορίζεται στις γεωμετρικές γνώσεις που σχετίζονται με το ισοσκελές τρίγωνο.

Αναπαράσταση των γνώσεων

Το πρώτο θέμα που μας απασχολεί είναι η αναπαράσταση των πληροφοριών στο νου. Οι ερευνητές πιστεύουν ότι η δημιουργία και η ποιότητα των αναπαραστάσεων εξαρτώνται από τις γνωστικές δομές που ήδη έχει το άτομο (Chinnappan, 1998). Ο συντονισμός των διαφόρων συστημάτων αναπαράστασης μας επιτρέπει να αναγνωρίζουμε το ίδιο αντικείμενο μέσα από τις διάφορες αναπαραστάσεις του και να κάνουμε αντικειμενικές συνδέσεις ανάμεσα στα παραγωγικά και εμπειρικά μαθηματικά (Dunval, 2002). Οι αναπαραστάσεις καθορίζουν με τη σειρά τους, σε μεγάλο βαθμό, τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων που θα επακολουθήσει. Στη λύση προβλήματος διακρίνονται δύο στάδια: η κατανόηση του προβλήματος και η αναζήτηση της λύσης του (Newell & Simon, 1972). Σε πεδία σύνθετης οργάνωσης της γνώσης, όπως η Γεωμετρία, η κατανόηση και λύση των προβλημάτων δεν είναι πάντα μια εύκολη υπόθεση. Καθοριστικό ρόλο σε αυτές παίζει η κατάλληλη αναπαράσταση του προβλήματος, η οποία συνδέεται με την επιτυχία στη λύση του (Anderson, 2000, σ.266).

Οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται στη Γεωμετρία αποτελούν κρίσιμο παράγοντα για την εξέλιξή της. Σύμφωνα με την Mesquita, «για την αναπαράσταση των γεωμετρικών εννοιών μπορούν να χρησιμοποιηθούν τρία διαφορετικά συστήματα αναπαράστασης: η φυσική γλώσσα, η

συμβολική γλώσσα και τα γεωμετρικά σχήματα. Το τελευταίο σύστημα (τα γεωμετρικά σχήματα) συνδέεται με το οπτικό σύστημα αντίληψης, το οποίο έχει τους δικούς του νόμους οργάνωσης» (Mesquita, 1998).

Τα γεωμετρικά σχήματα παίζουν καθοριστικό ρόλο στη γεωμετρική λειτουργία γιατί αποτελούν τη συγχώνευση δύο διαφορετικών μορφών νοητικών αναπαραστάσεων, συμβολικών και σχηματικών (figural). Πράγματι, ο Fischbein ισχυρίζεται πως τα γεωμετρικά σχήματα δεν είναι υλικά αντικείμενα που παρουσιάζουν ατέλειες, ούτε αντίγραφα πραγματικών αντικειμένων, αλλά «νοητικές εικόνες των οποίων οι ιδιότητες καθορίζονται από τον ορισμό τους» και γι αυτό τις ονομάζει σχηματικές έννοιες (figural concepts) (Fischbein, 1993, σ. 149). Η θέση αυτή ενισχύεται από κύρια χαρακτηριστικά των γεωμετρικών σχημάτων όπως η ιδανικότητα, η αφαίρεση, ή η απόλυτη τελειότητα, τα οποία είναι ιδιότητες που συνήθως αποδίδονται σε έννοιες και όχι σε εικόνες.

Τα γεωμετρικά σχήματα, λοιπόν, έχουν διπλή φύση, έτσι κατά την επεξεργασία ενός γεωμετρικού προβλήματος βλέπουμε μεν ένα σχήμα στο χαρτί, αλλά στην πραγματικότητα χειριζόμαστε κάτι πολύ πιο σύνθετο, τη σχηματική έννοια. Η αδυναμία να αντιμετωπιστεί το γεωμετρικό σχήμα ως ομογενής νοητική οντότητα και η αντιμετώπισή του ως συνδυασμού δύο ετερογενών νοητικών κατασκευών αποτελεί πηγή δυσκολιών, ιδιαίτερα για τους αρχάριους. Η πορεία προς το συντονισμό και, κατόπιν, την ολοκλήρωση των δύο φύσεων του γεωμετρικού σχήματος είναι επίπονη, όμως ταυτόχρονα, εντελώς απαραίτητη για τον αποτελεσματικό χειρισμό της Γεωμετρίας. Κριτήριο και παράγοντας για την επιτυχία στη λύση γεωμετρικού προβλήματος είναι η ικανότητα του ατόμου να διατηρεί τη διπλή φύση των γεωμετρικών σχημάτων.

Η διερεύνηση των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούνται στη Γεωμετρία εστιάζει, εκτός από τα γεωμετρικά σχήματα, και στις νοητικές εικόνες. «Οι νοητικές εικόνες βοηθούν να γίνει συγκεκριμένη η δομή των αντικειμένων στο χώρο» (Kosslyn, 1995, σ.133). Η ικανότητα να κατασκευάζουμε εικόνες περικλείει δύο διαφορετικές ικανότητες. Σύμφωνα με την πρώτη, ενεργοποιούνται αποθηκευμένες πληροφορίες με αποτέλεσμα την ανακατασκευή ενός αντικειμένου και των επιμέρους στοιχείων του στο χώρο. Σύμφωνα με τη δεύτερη ικανότητα, ενεργοποιούνται πολλές αντιληπτικές μονάδες ταυτόχρονα και ακολούθως συντίθενται σε μία μοναδική εικόνα (Kosslyn, ο.π., σ.139). Εκτός από την δημιουργία και την σύνθεση εικόνων, η ικανότητα αναπαράστασης περιλαμβάνει ακόμα και δυνατότητες μετασχηματισμού των νοητικών εικόνων με τη βοήθεια της φαντασίας. Από τα προηγούμενα προκύπτει πως η οπτική φαντασία αποτελεί κρίσιμο παράγοντα για την εγκατάσταση του νοήματος σε ένα γεωμετρικό

πρόβλημα, για την προσέγγιση που ακολουθείται για τη λύση του και για τις γνωστικές κατασκευές των μαθητών.

Η έρευνα, όσον αφορά στα γεωμετρικά σχήματα, ασχολείται με τις διαδικασίες κατασκευής ή τροποποίησής τους, κατά τη διάρκεια της λύσης προβλήματος (Cifarelli, 1998), με το ρόλο και τη φύση τους (Mesquita, 1998), αλλά και ειδικότερα, με τη γέννηση και ανάπτυξη των σχηματικών εννοιών (Fischbein, 1993). Οι αναπαραστάσεις που κατασκευάζουν οι μαθητές όταν προσπαθούν να λύσουν ένα πρόβλημα είναι κρίσιμες αφού, σύμφωνα με τον Cifarelli, λειτουργούν ως έλεγχος της βιωσιμότητας των μαθηματικών τους γνώσεων. Εξάλλου, ο ρόλος των αναπαραστάσεων μπορεί είτε να είναι περιγραφικός, όπως όταν μεταφράζονται οι λέξεις του γεωμετρικού προβλήματος σε σχήματα, είτε ευρετικός, όπως συμβαίνει όταν το σχήμα υποστηρίζει τη διαίσθηση και προτείνει μετασχηματισμούς που οδηγούν στη λύση (Mesquita, 1998).

Ένα μέρος των παρανοήσεων που συμβαίνουν στην Γεωμετρία αποδίδεται από την Mesquita, στη διπλή φύση των γεωμετρικών σχημάτων που, ενώ αντανακλούν ιδιότητες του χώρου (όπως σχήμα, μέγεθος, θέση), ταυτόχρονα έχουν και ιδιότητες έννοιας (γενικότητα, ιδανικότητα, αφαίρεση). Συχνά, οι μαθητές έχουν στο μυαλό τους μια ζούγκλα από εικόνες και ορισμούς, οι οποίοι δεν βρίσκονται υπό τον πλήρη έλεγχό τους, ούτε συντονίζονται μεταξύ τους. Αντιμετωπίζουν δυσκολίες στο να δημιουργήσουν εικόνες για τις γεωμετρικές έννοιες, που να είναι συμβατές με μαθηματικά αποδεκτούς ορισμούς τους. Επίσης, οι μαθητές δεν βρίσκουν πάντα τα μέσα να κάνουν αυτές τις εικόνες συγκεκριμένες και συνεπείς, τόσο στον εαυτό τους, όσο και στους άλλους (Furinghetti, 1999).

Όσον αφορά στις νοητικές εικόνες, οι Owens και Clements συνδέουν τη λύση προβλήματος με την ανάπτυξη της οπτικής φαντασίας και την κατανόηση των εννοιών του χώρου (Owens & Clements, 1998). Η έρευνα υποδεικνύει, πως το σχολείο επιδρά στις νοητικές εικόνες που κατασκευάζουν οι μαθητές. Όποιος μαθητής δεν είναι ικανός να υιοθετήσει το μοντέλο που δίνεται εκεί θεωρείται προβληματικός και, σε κάποιες περιπτώσεις, αισθάνεται να «μένει έξω». Οι σχολικοί κανόνες θεωρούνται σημαντικότεροι από την πραγματικότητα (Cruz et al, 2001). Είναι λοιπόν επιβεβλημένο οι καθηγητές των μαθηματικών να συνειδητοποιούν ότι οι πεποιθήσεις και οι πρακτικές τους επηρεάζουν την μάθηση των μαθητών, και ιδιαίτερα αυτών που είναι περισσότερο διαίσθητικοί και λιγότερο θεωρητικοί (Presmeg, 1986).



Οργάνωση των γνώσεων

Το ζήτημα των αναπαραστάσεων συνδέεται στενά με αυτό της οργάνωσης των γνώσεων. Καθώς το άτομο δέχεται πληροφορίες ή ερεθίσματα από το περιβάλλον του, σχετικά με μία οντότητα, έχει την τάση να τις οργανώνει σε εσωτερικά συνεπείς δομές. Η «συνέπεια» καθορίζεται αφενός σε σχέση με τον εξωτερικό κόσμο και αφετέρου εσωτερικά, δηλαδή, οι πληροφορίες που καταχωρούνται στη μνήμη πρέπει να είναι μεταξύ τους συμβατές.

Οι γνωστικές δομές του ατόμου καθορίζουν την ποιότητα των αναπαραστάσεων του μαθητή, αφού η αναπαράσταση ενός προβλήματος είναι στην ουσία μία επεξεργασία του ερεθίσματος, και όχι μια απευθείας απεικόνισή του. Αν το άτομο διαθέτει προηγούμενες σχετικές εμπειρίες, τότε μπορεί να βοηθηθεί στην ερμηνεία των δεδομένων του προβλήματος και στην αναζήτηση της λύσης από πληροφορίες ή διαδικασίες που ανακαλεί από τη μνήμη του.

Οι αναπαραστάσεις στη μνήμη οργανώνονται ανάλογα με την έννοια που αναπαριστούν. Οι απλές έννοιες οργανώνονται σε κατηγορίες έτσι, ώστε το άτομο να αποθηκεύει τις πληροφορίες του με τη μεγαλύτερη δυνατή οικονομία σε αναπαραστάσεις (Anderson, 2000, σ.151). Οι σύνθετες γνώσεις δομούνται υπό μορφή γνωστικών σχημάτων (Bartlett, 1932, Rumelhart & Ortony, 1977). Τα γνωστικά σχήματα είναι σταθερές νοητικές δομές που οργανώνουν ένα σύνολο σχετικών εννοιών, προτάσεων και διαδικασιών (Rumelhart & Ortony, 1977).

Η οργάνωση των γνώσεων συνδέεται με την αποτελεσματικότητα στη λύση προβλήματος. Όταν οι μαθητές αναζητούν τη λύση ενός γεωμετρικού προβλήματος, αναγκάζονται να ενεργοποιήσουν τα γνωστικά τους σχήματα, να ανακαλέσουν σχετικές γνώσεις και να εγκαταστήσουν συνδέσεις ανάμεσα σε αυτές και στις πληροφορίες που δίνει το πρόβλημα. Η έρευνα της μαθηματικής εκπαίδευσης διερευνά τη σχέση ανάμεσα στην επιτυχία στη λύση προβλήματος και την ποιότητα της οργάνωσης των γνώσεων από τους μαθητές. Η διερεύνηση βασίζεται στη σύγκριση της λειτουργίας μαθητών με χαμηλές και υψηλές επιδόσεις.

Οι ψυχολόγοι υποστηρίζουν πως η εμπειρογνωμοσύνη σε ένα τομέα συνδέεται με μια καλύτερη ικανότητα αποθήκευσης των πληροφοριών στη μακροπρόθεσμη μνήμη και ανάκλησής τους από αυτήν (Anderson, 2000, σ.303). Ειδικότερα, η αποτελεσματική γεωμετρική λειτουργία συνδέεται με την ύπαρξη καλύτερης ποιότητας συνδέσεων και τη συνολικότερη (σε αντιδιαστολή με την αποσπασματική) σκέψη (Lawson & Chinnappan, 2000, Chinnappan, 1998). Διαπιστώνεται ότι, οι μαθητές που έχουν υψηλές επιδόσεις εμπλέκουν μεγαλύτερη ποικιλία γνωστικών σχημάτων, ενεργοποιούν συχνότερα τα διαθέσιμα σχήματα, και γνωρίζουν πότε και πώς να αναπτύξουν αυτή τη γνώση παραγωγικά κατά τη διάρκεια της λύσης προβλήματος.

Η καλύτερη ποιότητα οργάνωσης των γνώσεων επηρεάζει, με τη σειρά της, τις αντιδράσεις των μαθητών. Έρευνες αποκαλύπτουν πως, η ανάπτυξη δομών που περιέχουν όλα τα απαιτούμενα στοιχεία / πληροφορίες και συνδέσεις μεταξύ τους διευκολύνει την κατανόηση των προβλημάτων, ενώ ως δείκτης της οργάνωσης των γνώσεων χρησιμοποιείται συχνά ο χρόνος αντίδρασης ή απάντησης των μαθητών (Lawson & Chinnappan, 2000). Οι συσχετιστικές δομές μειώνουν το χρόνο που απαιτείται για την αναζήτηση των απαραίτητων πληροφοριών και επιτρέπουν στο άτομο να θεωρεί και να επεξεργάζεται ταυτόχρονα περισσότερες πληροφορίες. Ειδικότερα στην περίπτωση της γεωμετρικής σκέψης αναδεικνύεται η σημασία των συνδέσεων μέσα από ιδιότητες, συνδέσεων που υπερέχουν έναντι των απλών συσχετισμών (Shriki & Bar On, 1997).

Στην κατεύθυνση αυτή, ένας παράγοντας που διευκολύνει την ανάκληση των πληροφοριών είναι η ιεραρχική οργάνωση των γνώσεων (Anderson, 2000, σ.223), όπως, για παράδειγμα, οι συνδέσεις που καθορίζουν τη συμπερίληψη διαφορετικών σχημάτων στην ίδια κατηγορία (Currie, 1998).

Συμπεράσματα

Η γεωμετρική λειτουργία έχει δύο όψεις. Η μία είναι φανερή και περιλαμβάνει τα γεωμετρικά σχήματα και έγκυρες διαδικασίες τροποποίησής τους με βάση τις οποίες λύνονται τα γεωμετρικά προβλήματα, π.χ. η εύρεση του συμμετρικού ενός σημείου, η κατασκευή της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος κλπ. Υπάρχει, όμως και μία άλλη όψη της γεωμετρικής λειτουργίας που παραμένει κρυμμένη. Είναι αυτή των γνωστικών λειτουργιών που οδηγούν στις σχηματικές έννοιες και υποστηρίζουν τις παραπάνω έγκυρες διαδικασίες τροποποίησης των γεωμετρικών σχημάτων. Οι γνωστικές λειτουργίες, που κρύβονται πίσω από τη γεωμετρική λειτουργία, εκτελούνται στο πλαίσιο των συστημάτων αναπαράστασης και των μεταφράσεων μεταξύ τους. Η διδακτική ενδιαφέρεται και για τις δύο όψεις της γεωμετρικής λειτουργίας (Duval, 2002), παρ' ότι το κύριο βάρος της έρευνας πέφτει στην πρώτη, τη μαθηματική όψη.



Η δομή της διατριβής

Η παρούσα έρευνα κυριαρχείται από δύο αντιλήψεις που αλληλοσυμπληρώνονται, αλλά ταυτόχρονα η μία ελέγχει τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την άλλη. Η πρώτη αντίληψη αφορά στον τρόπο δόμησης των γνώσεων (μορφή του γνωστικού σχήματος του ισοσκελούς τριγώνου και σχέση του με άλλα γνωστικά σχήματα), είναι δηλαδή στατική. Η δεύτερη αφορά στο πώς αυτή η δομή μεταβάλλει σταδιακά το χαρακτήρα της, μέσα από τις λειτουργίες που εμπλέκονται στην κατασκευή και εξέλιξη του γνωστικού σχήματος του ισοσκελούς τριγώνου, και είναι δυναμική. Οι δύο αντιλήψεις – που οριοθετούν μία γνωστική προσέγγιση του θέματος – εμφανίζονται τόσο στο θεωρητικό μέρος όσο και στην ανάλυση των ευρημάτων. Η διατριβή αποτελείται από πέντε Κεφάλαια:

Κεφάλαιο 1^ο: ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Με αφετηρία τη γνωστική επιστήμη, τα τελευταία χρόνια έχουν αρχίσει να αναπτύσσονται, και να εφαρμόζονται ακολούθως στο χώρο της έρευνας της μαθηματικής εκπαίδευσης, θεωρίες που προσπαθούν να καθορίσουν ποιες γνωστικές λειτουργίες βρίσκονται πίσω από την ποικιλία των (μαθηματικών) διαδικασιών. Το πρώτο κεφάλαιο της διατριβής, που αποτελεί τη θεωρητική της στήριξη, συστηματοποιεί διάφορες απόψεις από τους δύο χώρους (γνωστική επιστήμη – μαθηματική εκπαίδευση) και μας εισάγει στις συγκεκριμένες θεωρίες που συγκροτούν το θεωρητικό πλαίσιο αυτής της έρευνας.

Το θεωρητικό μέρος αποτελείται από τέσσερις ενότητες:

- 1.1 Η πρώτη ενότητα ασχολείται με τα συστήματα αναπαράστασης που απαιτούνται και κινητοποιούνται κατά τη διάρκεια της γεωμετρικής λειτουργίας. Σχολιάζει, επίσης, τις «μεταφράσεις» από ένα σύστημα αναπαράστασης σε άλλο και τα πλεονεκτήματα ή προβλήματα που προκύπτουν από αυτές. Τέλος, συσχετίζει το θέμα των αναπαραστάσεων με τη λύση γεωμετρικού προβλήματος.
- 1.2 Στη δεύτερη ενότητα αναλύεται η έννοια του γνωστικού σχήματος, η συχνότερα χρησιμοποιούμενη έννοια για την περιγραφή του τρόπου οργάνωσης μιας σύνθετης γνώσης (όπως της γεωμετρικής). Παρουσιάζονται οι τελευταίες θεωρίες σχετικά με την οργάνωση των γνώσεων στο νου, υπό μορφή γνωστικών σχημάτων, τόσο σε τοπικό επίπεδο (οργάνωση ενός μεμονωμένου γνωστικού σχήματος, όπως για παράδειγμα, το γνωστικό σχήμα του ισοσκελούς τριγώνου), όσο και σε συνολικό επίπεδο (οργάνωση των γνωστικών σχημάτων μεταξύ τους).



- 1.3 Στην τρίτη ενότητα εξετάζονται διαδοχικά οι τρεις γνωστικές λειτουργίες που διέπουν τη γεωμετρική σκέψη: η νοερή απεικόνιση, η κατασκευή και η αιτιολόγηση. Η εξέταση βασίζεται, κυρίως, στις απόψεις του ψυχολόγου Duval, ο οποίος προσεγγίζει γνωστικά την κατανόηση και τη μάθηση της Γεωμετρίας.
- 1.4 Το θεωρητικό μέρος ολοκληρώνεται με την οριοθέτηση της θέσης που κατέχει η παρούσα έρευνα στο πλαίσιο που περιγράψαμε.

Κεφάλαιο 2^ο: Η ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Στο δεύτερο κεφάλαιο της διατριβής, δίνεται το στίγμα της έρευνας. Παρουσιάζονται αρχικά τα ερευνητικά ερωτήματα και διατυπώνονται οι ερευνητικές υποθέσεις. Ακολουθώντας στοιχειοθετείται το πώς η φύση των ερευνητικών ερωτημάτων, που απαιτούν μια ανάλυση σε βάθος της σκέψης των μαθητών, οδηγεί σε ποιοτική μέθοδο έρευνας (μελέτη περίπτωσης). Εξηγείται η επιλογή του «γνωστικού σχήματος του ισοσκελούς τριγώνου», ως κατάλληλης περίπτωσης, για την μελέτη της αναπαράστασης και της οργάνωσης των γεωμετρικών γνώσεων από μαθητές 15 ετών. Τέλος, αιτιολογούνται οι μεθοδολογικές επιλογές μας.

Βασικό μέρος του 2^{ου} κεφαλαίου αποτελεί η τελευταία του ενότητα, στην οποία αναλύονται οι υποθέσεις εργασίας και αναδεικνύεται η σχέση τους με τα προβλήματα που χρησιμοποιούνται στην έρευνα. Συγκεκριμένα, στοιχειοθετείται το γιατί και το πώς κάθε συγκεκριμένο πρόβλημα κατασκευάστηκε για να φέρει σε πέρας τη διερεύνηση που σχεδιάστηκε.

Κεφάλαιο 3^ο: Η ΠΡΟΕΡΕΥΝΑ

Το τρίτο κεφάλαιο της διατριβής αφιερώνεται στην προ έρευνα και πραγματεύεται το ρόλο της στον έλεγχο και τη διαμόρφωση των τελικών αποφάσεων, σχετικά με τη μεθοδολογία και τα προβλήματα που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα. Η ανάλυση των στοιχείων που προκύπτουν από την προ έρευνα οδηγεί στη διατύπωση των πρώτων συμπερασμάτων.

Κεφάλαιο 4^ο: Η ΕΡΕΥΝΑ: ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΥΡΗΜΑΤΩΝ

Στο 4^ο κεφάλαιο γίνεται η οργάνωση και η ανάλυση των στοιχείων που προκύπτουν από την έρευνα. Η παρουσίαση ακολουθεί τις δύο αντιλήψεις που αναφέραμε, δηλαδή γίνεται δομική και λειτουργική ανάλυση. Κατά τη δομική ανάλυση των ευρημάτων ελέγχεται η αλήθεια των υποθέσεων που αφορούν στο γνωστικό σχήμα του ισοσκελούς τριγώνου και στις συνδέσεις του με άλλα γνωστικά σχήματα. Ακολουθεί η λειτουργική ανάλυση, κατά την οποία τα ευρήματα αναλύονται με άξονες τις τρεις λειτουργίες που συναντάμε στη γεωμετρική σκέψη (νοερή

απεικόνιση, κατασκευή και αιτιολόγηση) καθώς και την αλληλεπίδρασή τους. Οι δύο αναλύσεις εξασφαλίζουν μια σφαιρικότερη μελέτη του θέματος και ελέγχουν τη συνέπεια των συμπερασμάτων της κάθε μίας ξεχωριστά.

Το 4^ο κεφάλαιο αποτελείται από δύο ενότητες:

- 4.1 Στην πρώτη ενότητα, που αποτελεί τη δομική ανάλυση των ευρημάτων, αναλύονται οι σχέσεις που υπάρχουν ανάμεσα σε τρεις πόλους: τις υποθέσεις, τα προβλήματα και τα γνωστικά σχήματα. Συγκεκριμένα, οι υποθέσεις της έρευνας συνδέονται με το ερμηνευτικό πλαίσιο των γνωστικών σχημάτων και λειτουργιών και καθένα από αυτά τα δύο συνδέεται με τα προβλήματα που χρησιμοποιούνται στην έρευνα.
- 4.2 Στη δεύτερη ενότητα, που αποτελεί την λειτουργική ανάλυση, τα ευρήματα αναλύονται αρχικά με άξονα κάθε μία από τις τρεις λειτουργίες. Η αλήθεια των υποθέσεων της έρευνας, ανά λειτουργία, ελέγχεται με συγκεκριμένα κριτήρια. Αυτά αντανakλούν ικανότητες των μαθητών, ενώ δείκτες ωρίμανσης εξειδικεύουν τα κριτήρια και μας επιτρέπουν να κωδικοποιούμε την παρατηρούμενη συμπεριφορά.

Κεφάλαιο 5^ο: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Το τελευταίο, 5ο κεφάλαιο, εκθέτει τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την έρευνα. Αυτά σχολιάζονται ξεχωριστά για την κάθε υπόθεση εργασίας, ενώ ακολούθως διατυπώνονται προτάσεις για περαιτέρω έρευνα. Σημαντική θέση στο 5^ο Κεφάλαιο κατέχει η «απόδοση ρόλου» η οποία αναδεικνύεται στο βασικότερο εύρημα που βοηθά στην υποστήριξη και στην εμβάθυνση των υποθέσεων της παρούσης έρευνας.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ



1 ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Στο 1^ο κεφάλαιο γίνεται η σκιαγράφηση του θεωρητικού πλαισίου στο οποίο εντάσσεται η παρούσα έρευνα. Συγκεκριμένα, παρουσιάζονται οι σημαντικότερες θεωρίες σχετικά με την αναπαράσταση και την οργάνωση των μαθηματικών γνώσεων, καθώς και θεωρίες που αφορούν στις γνωστικές λειτουργίες που συνιστούν τη μαθηματική σκέψη. Σκοπός του 1^{ου} κεφαλαίου είναι να οριοθετήσει την παρούσα έρευνα ως προς το θεωρητικό της πλαίσιο και να αναδείξει τα κενά που έρχεται να καλύψει.

Η Γνωστική Ψυχολογία εξετάζει τις εσωτερικές λειτουργίες του ατόμου, οι οποίες κινητοποιούνται κατά την διαδικασία απόκτησης των γνώσεων. Συγκεκριμένα, στους σκοπούς της ψυχολογικής έρευνας περιλαμβάνεται «ο καθορισμός του τρόπου οργάνωσης και αναπαράστασης των εννοιών και η περιγραφή των διαδικασιών μέσα από τις οποίες οι νοητικές αναπαραστάσεις χρησιμοποιούνται κατά τη διάρκεια της σκέψης και της μάθησης» (Βοσνιάδου, 1998, σ. 11). Η παρούσα έρευνα εστιάζει στον τρόπο οργάνωσης και αναπαράστασης στο νου των γνώσεων που συνδέονται με μια συγκεκριμένη γεωμετρική έννοια (αυτή του ισοσκελούς τριγώνου), στις εσωτερικές λειτουργίες που διέπουν την οργάνωση και την αναπαράστασή της, καθώς και στις διαδικασίες που υποβοηθούν τη χρήση αυτών των αναπαραστάσεων κατά τη λύση προβλήματος. Έτσι, είναι φυσικό να αναζητούμε θεωρητική στήριξη, τόσο στην έρευνα τη σχετική με τη Μαθηματική Εκπαίδευση, όσο και στη Γνωστική Ψυχολογία.

Σύμφωνα με τους Eysenck και Keane, λέγοντας «γνώση» αναφερόμαστε σε πληροφορίες οι οποίες αναπαρίστανται νοητικά με συγκεκριμένη μορφή και οργανώνονται με κάποιο τρόπο. Έτσι, το ερώτημα «τι είναι γνώση;» εξειδικεύεται στα ερωτήματα «τι μορφή παίρνουν οι νοητικές αναπαραστάσεις;» και «πώς οργανώνονται οι νοητικές αναπαραστάσεις;» (Eysenck & Keane, 1990, σ.248). Το ζήτημα της αναπαράστασης και οργάνωσης των πληροφοριών στην μνήμη βρίσκεται στα θεμέλια της Διδακτικής, καθώς η προϋπάρχουσα γνώση θεωρείται καθοριστικός παράγοντας για την πορεία της διδασκαλίας και της μάθησης (Lawson & Chinnappan, 2000, Chinnappan, 1998).

Στα Μαθηματικά, «χαρακτηριστικό γνώρισμα της γνωστικής προσέγγισης είναι κατ' αρχήν ο καθορισμός των γνωστικών λειτουργιών που υπόκεινται της ποικιλίας των μαθηματικών διαδικασιών» (Duval, 2001, σ.1). Ο Duval πιστεύει ότι «η διαφορά ανάμεσα στην γνωστική δραστηριότητα που απαιτείται για τα Μαθηματικά και εκείνη που απαιτείται για άλλα πεδία γνώσης δεν βρίσκεται στις έννοιες – γιατί δεν υπάρχει πεδίο γνώσης που να μην αναπτύσσει ένα σύνολο λίγο πολύ σύνθετων εννοιών – αλλά στα δύο επόμενα χαρακτηριστικά:

1. στη σπουδαιότητα των σημειωτικών αναπαραστάσεων, η οποία απέτελεσε ουσιώδη συνθήκη για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης¹. Κι αυτό γιατί τα Μαθηματικά αντικείμενα, ξεκινώντας από τους αριθμούς, δεν είναι αντικείμενα που μπορεί να τα αντιληφθούμε ή να τα παρατηρήσουμε με όργανα. Η πρόσβαση σε αυτά είναι δεμένη με τη χρήση κάποιου συστήματος αναπαράστασης που μας επιτρέπει να τα προσδιορίσουμε.
2. στη μεγάλη ποικιλία σημειωτικών αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούνται στα Μαθηματικά² (Duval, 2001, σ.1).

Στα επόμενα θα επιχειρήσουμε να εκθέσουμε τις θέσεις των ερευνητών στη βιβλιογραφία, σχετικά με τα δύο βασικά ερωτήματα τα οποία μας απασχολούν κατά τη διαδικασία μάθησης, δηλαδή, «τι» αναπαρίσταται και «πώς», ώστε να σκιαγραφήσουμε το πλαίσιο στο οποίο εντάσσεται η συγκεκριμένη έρευνα. Τα θέματα που αφορούν στις απόψεις σχετικά με το πώς οι μαθηματικές οντότητες αναπαρίστανται νοητικά και με ποιους συμβολικούς κώδικες, θα τα διαχειριστούμε στην ενότητα 1.1 που έχει τίτλο «οι αναπαραστάσεις στη γεωμετρική σκέψη». Τα θέματα που αφορούν στις απόψεις για τον τρόπο οργάνωσης της γνώσης στο μυαλό του ανθρώπου θα τα αναπτύξουμε στην ενότητα 1.2 των «γνωστικών σχημάτων». Τέλος, τα θέματα που αφορούν στις γνωστικές λειτουργίες που συμβάλουν στην κατασκευή και εξέλιξη των γνωστικών σχημάτων που δημιουργούνται γύρω από μία συγκεκριμένη γεωμετρική έννοια, όπως για παράδειγμα το ισοσκελές τρίγωνο, αναπτύσσονται στην ενότητα 1.3, με τίτλο «Οι λειτουργίες του γνωστικού σχήματος».

1.1. ΟΙ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΣΚΕΨΗ

1.1.1. Τι είναι αναπαράσταση

Η έννοια της αναπαράστασης είναι θεμελιώδης για τη θεωρητική υποστήριξη της έρευνάς μας. Ο λόγος είναι πως η επεξεργασία και η αποθήκευση των γνώσεων στο νου συνδέεται με την αναπαράστασή τους. Συγκεκριμένα «ο τρόπος με τον οποίο επεξεργαζόμαστε τις πληροφορίες, αφού τις παρατηρήσουμε και τις εισάγουμε στο γνωστικό μας σύστημα, εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο οι πληροφορίες αυτές αναπαρίστανται στο σύστημα» (Anderson, 2000, σ.105). Με άλλα λόγια, η αναπαράσταση αποτελεί το απαραίτητο εργαλείο, με τη βοήθεια του οποίου προσπαθούμε να προσεγγίσουμε δύσκολα ερωτήματα που αφορούν στη δόμηση των γνώσεων, όπως «πώς αναπαριστάνουμε τον κόσμο στο μυαλό μας;» ή ειδικότερα

«πώς αναπαριστάνουμε τις γνώσεις που αφορούν σε μία συγκεκριμένη έννοια (ισοσκελές τρίγωνο) στο νου;». Έτσι, στην επόμενη ενότητα 1.2 με τίτλο «τα γνωστικά σχήματα», η οποία διερευνά την οργάνωση των γνώσεων που αφορούν στο ισοσκελές τρίγωνο, ουσιαστικά ενδιαφερόμαστε για τους τρόπους με τους οποίους οι σχετικές νοητικές αναπαραστάσεις δομούνται ή οργανώνονται στη μνήμη. Στην ενότητα 1.3, που επιγράφεται «οι λειτουργίες του γνωστικού σχήματος» και συμπληρώνει το θεωρητικό μέρος, εστιάζουμε στη χρήση των αναπαραστάσεων στη γνωστική διαδικασία.

Μία αναπαράσταση είναι ένα ανθρώπινο κατασκευάσμα – συνειδητό ή ασυνειδητό – μία ρεαλιστική ή συμβολική ανακατασκευή μιας άλλης οντότητας. Ο Palmer (1977) την ορίζει ως εξής «η αναπαράσταση είναι ένας σχηματισμός που, ολόκληρος ή κατά μέρη, αντιστοιχεί, παραπέμπει, υποκαθιστά, συμβολίζει, αλληλεπιδρά με έναν ειδικό τρόπο, ή άλλως, αναπαριστά κάτι άλλο» (Goldin & Karut, 1996, σ.398). Για να γίνει μία αναπαράσταση επιλέγονται από το αντικείμενο που πρόκειται να αναπαρασταθεί στοιχεία, διαδικασίες ή ιδιότητες και αντιστοιχίζονται με αυτές του αντικειμένου που θα αποτελέσει την αναπαράστασή του, και οι οποίες, τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή και για το συγκεκριμένο άνθρωπο, θεωρούνται σχετικές.

Συνεπώς, για να υπάρξει οποιασδήποτε μορφής αναπαράσταση πρέπει να εμπλακούν δύο συσχετιζόμενες αλλά διαφορετικές οντότητες, δύο «κόσμοι», και να εγκατασταθεί συνειδητά ένας ισομορφισμός ανάμεσά τους. Η λέξη «ισομορφισμός» χρησιμοποιείται εδώ με την έννοια που έχει στα Μαθηματικά, και σημαίνει έναν μετασχηματισμό ο οποίος διατηρεί τις πληροφορίες και τη δομή των δύο «κόσμων». Με άλλα λόγια, «δύο σύνθετες δομές απεικονίζονται η μία στην άλλη, με τρόπο ώστε, για κάθε μέρος της μίας να υπάρχει ένα αντίστοιχο μέρος στην άλλη δομή, όπου αντίστοιχο σημαίνει, ότι τα δύο μέρη παίζουν όμοιους ρόλους στις αντίστοιχες δομές» (Hofstadter, 1980, σ. 49).

Άρα, για να γίνει μια αναπαράσταση «πρέπει να δηλώνεται ρητά:

- ποιος κόσμος είναι ο αναπαριστώμενος και ποιος κόσμος θα κάνει την αναπαράσταση
- ποια στοιχεία του πρώτου θα αναπαρασταθούν και ποια στοιχεία του δεύτερου κόσμου θα κάνουν την αναπαράστασή τους και, τέλος,
- ποια θα είναι η αντιστοίχιση των δύο κόσμων» (Karut, 1987, σ.23).

Οι αναπαραστάσεις συνδέονται στενότερα με την ανθρώπινη σκέψη, και ιδιαίτερα με τη μάθηση των Μαθηματικών. Ο Karut μιλά για τον «αναπαραστασιακό χαρακτήρα» των Μαθηματικών και λέει πως «τα θεμελιώδη φαινόμενα της μάθησης και της εφαρμογής των Μαθηματικών ασχολούνται με αναπαράσταση και συμβολισμό γιατί αυτά βρίσκονται ταυτόχρονα στην καρδιά του περιεχομένου των Μαθηματικών και στην καρδιά των γνωστικών

λειτουργιών που σχετίζονται με τη μαθηματική δραστηριότητα» (Karut, 1987, σ.22). Ο Duval, εξετάζοντας ιστορικά τη σχέση αναπαραστάσεων – Μαθηματικών, υποστηρίζει πως «η ανάπτυξη των σημειωτικών αναπαραστάσεων ήταν ουσιώδης συνθήκη για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης³» (Duval, 2001). Στα Μαθηματικά χρησιμοποιείται μία πολύ μεγάλη ποικιλία σημειωτικών αναπαραστάσεων, όπως αριθμητικά συστήματα, γεωμετρικά σχήματα, αλγεβρικά σύμβολα, γραφήματα, τυπική ή φυσική γλώσσα κλπ.

1.1.2 Εσωτερικές - εξωτερικές αναπαραστάσεις

Σχετικά με την ποικιλία και τους τρόπους με τους οποίους δημιουργούνται οι αναπαραστάσεις, σε πρώτο επίπεδο γίνεται διάκριση σε δύο διαφορετικές κατηγορίες, τις εσωτερικές ή νοητικές αναπαραστάσεις και τις εξωτερικές αναπαραστάσεις (Goldin & Karut, 1996, σ.399). Κριτήρια διαφοροποίησης είναι η φύση των αναπαραστάσεων και η δυνατότητα κοινοποίησής τους. Όσες ανήκουν στην πρώτη κατηγορία καταγράφονται στον ανθρώπινο νου και, ως εκ τούτου, είναι άυλες και αυστηρά προσωπικές, ενώ όσες ανήκουν στη δεύτερη κατηγορία είναι υλικές, μπορούν να κοινοποιηθούν από άτομο σε άτομο και διευκολύνουν την επικοινωνία μεταξύ των ανθρώπων και την απόκτηση της γνώσης.

Οι εσωτερικές ή νοητικές αναπαραστάσεις αναφέρονται σε νοητικές διαμορφώσεις, γι αυτό δεν μπορούμε να τις παρατηρήσουμε απευθείας, αλλά τις συμπεραίνουμε από την εξωτερική συμπεριφορά των ατόμων. Στη βιβλιογραφία αναφέρονται τρία κύρια είδη νοητικών αναπαραστάσεων: τα νοητικά μοντέλα, οι προτασιακές αναπαραστάσεις και οι εικόνες (Johnson-Laird, 1983, σ.146):

- τα νοητικά μοντέλα είναι δομικές αναλογίες του κόσμου και κατασκευάζονται στη βάση της προσομοίωσης προς την οντότητα που αναπαριστούν. Τα νοητικά μοντέλα διατηρούν την ίδια δομή με τις καταστάσεις που αναπαριστούν και έχουν ιδιαίτερη βαρύτητα για την κατανόηση και την επικοινωνία μας με το περιβάλλον.
- οι προτασιακές αναπαραστάσεις είναι σειρές συμβόλων που αντιστοιχούν στη φυσική γλώσσα, δηλαδή, νοητικές αναπαραστάσεις προτάσεων που εκφράζονται λεκτικά. Οι προτασιακές αναπαραστάσεις δε διατηρούν τη δομή της οντότητας που αναπαριστούν, απλά, δηλώνουν κάτι γι' αυτήν.
- τέλος, οι νοητικές εικόνες σχηματίζονται με μηχανισμούς ανάλογους των εικόνων που καταγράφει η όραση, είναι απόψεις των νοητικών μοντέλων και έχουν παρόμοια δομή με τις οντότητες που αναπαριστούν.

Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις είναι διαμορφώσεις που υλοποιούνται με φυσικά μέσα όπως, λέξεις, γραφήματα, εικόνες, μικρόκοσμους ΗΥ, υλικά αντικείμενα κ.ά. (Goldin & Karut, σ. 400). Παρόλο που οι εξωτερικές αναπαραστάσεις είναι ορατές από όλους, το ακριβές νόημά τους γίνεται αντιληπτό μόνο από όσους έχουν τα κατάλληλα γνωστικά εφόδια⁴. Συνακόλουθα, η ερμηνεία τους καθώς και η ερμηνεία των αναπαριστώμενων σχέσεων δεν είναι «αντικειμενική» ή «απόλυτη», αλλά συναρτάται από τις εσωτερικές αναπαραστάσεις αυτού που κάνει την ερμηνεία (Goldin-Karut, 1996, σ.400).

Σε αντίθεση με τις εσωτερικές αναπαραστάσεις που είναι προσωπικές κατασκευές, οι εξωτερικές αναπαραστάσεις των διαφόρων ατόμων πρέπει να είναι συμβατές μεταξύ τους, ώστε να επιτυγχάνεται ικανοποιητική επικοινωνία. Δηλαδή, οι αναπαραστάσεις του ενός δεν πρέπει να συγκρούονται φανερά με το πλαίσιο αναφοράς ή τις προσδοκίες του άλλου.

Ο άνθρωπος, στην προσπάθειά του να επικοινωνήσει, τροποποιεί την αναπαράστασή του για μια έννοια μόνο στην περίπτωση που κάποιο πλαίσιο τον αναγκάσει να το κάνει. Η προσαρμογή αποτελεί κοινό παρονομαστή της κατανόησης, είτε αυτή γίνεται στο πλαίσιο της επικοινωνίας είτε στο πλαίσιο της μάθησης μέσα από τις εμπειρίες του ατόμου. Και στις δύο περιπτώσεις έχουμε το κτίσιμο, με τη βοήθεια των υπάρχοντων στοιχείων, εννοιολογικών δομών που ταιριάζουν στο χώρο που αφήνουν ελεύθερο οι περιορισμοί (von Glasersfeld, 1987, σ. 10).

1.1.3. Συστήματα αναπαράστασης

Οι διάφορες αναπαραστάσεις δε βρίσκονται απομονωμένες, αλλά, συνήθως, ανήκουν σε καλά δομημένα συστήματα «είτε προσωπικά και χαρακτηριστικά του κάθε ατόμου είτε καθιερωμένα στοιχεία του πολιτιστικού του περιβάλλοντος. Αυτά τα συστήματα ονομάζονται "συμβολικά σχήματα" ή "συστήματα αναπαράστασης"» (Goldin & Karut, 1987, σ.398). Αναφερόμενος στα διάφορα είδη σημειωτικών αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούνται στα Μαθηματικά, ο Duval (Duval, 2001) χρησιμοποιεί τον όρο «μητρώα» αναπαραστάσεων (registers).

Μία αναπαράσταση, συνήθως, δεν αναπαριστά από μόνη της αλλά, συχνά, χρειάζεται μια «ερμηνεία». Έτσι, προκειμένου να κατασκευαστεί ή ερμηνευτεί σωστά μία αναπαράσταση, είναι απαραίτητο το άτομο να κατανοεί και να μπορεί να χειρίζεται το αντίστοιχο σύστημα αναπαράστασης στο οποίο αυτή ανήκει, δηλαδή τους συγκεκριμένους κανόνες και τις συμβάσεις του οι οποίοι είναι και οι φορείς του νοήματος. «Η δύναμη και η χρησιμότητα της αναπαράστασης εξαρτώνται καθαρά, τόσο από το γεγονός ότι αυτή είναι μέρος ενός δομημένου

συστήματος, όσο και από το βαθμό ευλυγισίας ή ευστροφίας στο τι αναπαριστά» (Goldin-Karut, 1996, σ.400). Συνεπώς, θα μπορούσαμε να χαρακτηρίσουμε τα συστήματα αναπαράστασης ως «οργανωτές της εμπειρίας» (Goldin-Karut, ο.π. σ. 409).

Ένα σύστημα αναπαράστασης αποτελείται από μία συλλογή στοιχείων που ονομάζονται χαρακτήρες ή σύμβολα. Αυτά είναι πρωταρχικά, με την έννοια πως δε συμβολίζουν τίποτα άλλο σε αυτή τη φάση. Τα συστήματα συμβόλων είναι η πρώτη ύλη με τη βοήθεια της οποίας δομείται μία νοητική αναπαράσταση. Σύμφωνα με τον Duval, δεν υπάρχει σύμβολο έξω από ένα σύστημα συμβόλων (Duval, 2001) έτσι, προκειμένου να λειτουργήσει αποτελεσματικά η σκέψη, «αναγκαίο στήριγμα είναι συμβολικά συστήματα, διαφορετικά από τη γλώσσα, περισσότερο ευέλικτα και λιγότερο τυποποιημένα που προσφέρουν βαθμούς ελευθερίας, ιδιαίτερα στην περίπτωση της δημιουργικής σκέψης» (Hadamard, 1995, σ.99).

Η γνωστική δραστηριότητα που απαιτείται στα Μαθηματικά, σύμφωνα με τον Duval, διαφέρει από αυτήν που απαιτείται σε άλλα γνωστικά πεδία στα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

1. στην πολύ μεγάλη σημασία των σημειωτικών αναπαραστάσεων για τη μαθηματική σκέψη και
2. στη μεγάλη ποικιλία των συστημάτων αναπαράστασης που χρησιμοποιούνται σε αυτήν (Duval, 2001).

Ο ίδιος συνδέει την κατανόηση στα Μαθηματικά με το συντονισμό των συστημάτων αναπαράστασης. Συγκεκριμένα λέει πως «το χαρακτηριστικό στοιχείο της μαθηματικής δραστηριότητας είναι η ταυτόχρονη κινητοποίηση δύο τουλάχιστον συστημάτων (registers) αναπαράστασης ή η πιθανότητα αλλαγής, σε κάθε στιγμή, από ένα σύστημα σε άλλο» (Duval, 2001).

➤ Ο Goldin διερευνώντας τη μαθηματική ικανότητα στη λύση προβλήματος και αναφερόμενος στα (εσωτερικά) γνωστικά συστήματα αναπαράστασης, τα κατατάσσει σε πέντε τύπους. Όλοι θεωρούνται ψυχολογικά «θεμελιώδεις», όχι μόνο για τη λύση μαθηματικών προβλημάτων, αλλά για τον κάθε άνθρωπο. Οι τύποι είναι:

1. λεκτικά / συντακτικά συστήματα
2. εικονικά συστήματα
3. τυπικά συμβολικά συστήματα
4. ένα σύστημα σχεδιασμού, καταγραφής και άσκησης ελέγχου, του οποίου οι διαμορφώσεις οργανώνονται σε ευρετικές διαδικασίες
5. ένα σύστημα συναισθηματικής αναπαράστασης, το οποίο μοντελοποιεί αποτελεσματικά τη μάθηση και τη λύση προβλήματος και οδηγεί σε προβληματισμό για τις συναισθηματικές

ικανότητες που μπορούν να επηρεάσουν τους εκπαιδευτικούς στόχους (Goldin –Karut, 1996, σ. 417).

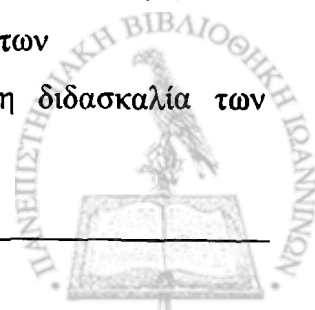
Είναι φανερό πως το τέταρτο σύστημα σχετίζεται μεταγνωστικά με τα υπόλοιπα, καθώς οι ευρετικές διαδικασίες εφαρμόζονται σε διαμορφώσεις των άλλων συστημάτων, όπως π.χ., στην παρακολούθηση κάποιας διαδικασίας, στο σχεδιασμό των επόμενων βημάτων στη λύση προβλήματος, στην τροποποίηση / βελτίωση του συμβολισμού κ.ά.. «Οι ευρετικές δε δίνουν, σύμφωνα με τον Goldin, μόνο το κίνητρο για βήματα μέσα σε άλλα συστήματα αναπαράστασης, αλλά μπορούν, επίσης, να τροποποιήσουν τους κανόνες μέσα σε αυτά» (Goldin, 1987, σ.142).

Το τέταρτο σύστημα εν μέρει καλλιεργείται ατομικά, και εν μέρει είναι προϊόν του πολιτιστικού περιβάλλοντος. Για παράδειγμα, σχέδια δράσης όπως η «δοκιμή σωστό – λάθος» ή η «αποσύνθεση σε υπό - στόχους» στη λύση προβλήματος χρησιμοποιούνται από όλους τους ανθρώπους, ενώ άλλα σχέδια, όπως η απαγωγή σε άτοπο, μόνο από όσους έχουν συγκεκριμένη παιδεία. Ακόμα, εξηγείται ο ρόλος του πλαισίου στη λύση του προβλήματος, και η μεγαλύτερη ευκολία / δυσκολία χειρισμού της ίδιας αναπαράστασης ανάλογα με το ζητούμενο (Vergnaud, 1996, σ. 236). Είναι ευκολότερο, για παράδειγμα, να διακρίνεις τη μονοτονία μιας συνάρτησης από ένα γράφημα, παρά να βρεις, μέσα από το ίδιο γράφημα τη λύση ενός συστήματος εξισώσεων ή ανισώσεων. Η γνώση μας για τις ευρετικές διαδικασίες είναι ακόμη πολύ φτωχή. Μία εξήγηση που δίνεται (Goldin, 1987) είναι η ανεπάρκειά μας να επεξηγήσουμε πάντα επακριβώς το πώς σχεδιάζουμε και εκτελούμε τις διαδικασίες κατά τη (μαθηματική) λύση προβλήματος, πιθανά γιατί δεν υπάρχει αντίστοιχο κατάλληλο, εξωτερικό σύστημα αναπαράστασης που να περιγράφει τις ευρετικές αποτελεσματικά.

Το πέμπτο σύστημα δέχεται ότι η αλληλεπίδραση μεταξύ συναισθήματος και φαντασίας και μεταξύ συναισθήματος και ευρετικών είναι δύσκολα αναγνωρίσιμη, αλλά σημαντική στη διαδικασία μάθησης⁵. Πρόκειται για ένα δυναμικό σύστημα που αναφέρεται στα ταχύτατα μεταβαλλόμενα συναισθήματα των ατόμων κατά τη στιγμή που λύνουν προβλήματα όπως περιέργεια, προβληματισμός, σύγχυση, άγχος, φόβος, απόγνωση, ενθάρρυνση, ευχαρίστηση, ικανοποίηση κ.ά.

➤ Σχετικά με τις εξωτερικές αναπαραστάσεις, υπάρχει μία τυπολογία (Lesh, Post, Behr) (Lesh et all, 1987, σ.33) που κατατάσσει τα συστήματα αναπαράστασης που συναντάμε στη μάθηση των Μαθηματικών και στη Λύση Προβλήματος στους ακόλουθους πέντε τύπους:

1. «σενάρια» βασισμένα στην εμπειρία, στα οποία η γνώση οργανώνεται γύρω από γεγονότα του πραγματικού κόσμου που λειτουργούν ως πλαίσιο για λύση προβλημάτων
2. μοντέλα που μπορούμε να τα χειριστούμε, όπως ράβδοι για τη διδασκαλία των κλασμάτων, η ευθεία των αριθμών, ξύλινα γεωμετρικά στερεά κ.ά



3. εικόνες ή διαγράμματα – στατικά μοντέλα που μπορούν να εσωτερικευθούν σαν αναπαραστάσεις
4. ομιλούμενες γλώσσες, που περιλαμβάνουν ακόμα και περιπτώσεις που σχετίζονται με ειδικότερα πεδία, όπως η λογική κλπ
5. γραπτά σύμβολα τα οποία μπορεί να περιέχουν, παράλληλα με τις προτάσεις και τις φράσεις της Ελληνικής γλώσσας, και άλλες εξειδικευμένες προτάσεις ή φράσεις (για παράδειγμα, $X+3=7$, $A \cap B' = (A \cup B)'$)

Αν επιχειρήσουμε μία σύγκριση των δύο τυπολογιών που προηγήθηκαν, δηλαδή σύγκριση των τύπων εσωτερικών – εξωτερικών συστημάτων αναπαράστασης που χρησιμοποιούνται στα Μαθηματικά και στη λύση μαθηματικού προβλήματος, παρατηρούμε ότι:

- τα σενάρια και οι ομιλούμενες γλώσσες από τα εξωτερικά συστήματα αντιστοιχούν με το λεκτικό σύστημα του Goldin
- τα μοντέλα, οι εικόνες και τα διαγράμματα, αντιστοιχούν με τα εικονικά συστήματα, ενώ
- τα γραπτά σύμβολα παραπέμπουν ευθέως στα τυπικά συμβολικά συστήματα.

Όπως σχολιάστηκε, δεν υπάρχουν ακόμα αντίστοιχα των ευρετικών και συναισθηματικών συστημάτων στα εξωτερικά συστήματα αναπαράστασης.

1.1.4 «Μεταφράσεις» ανάμεσα σε αναπαραστάσεις

Οι ερευνητές της Διδακτικής υποστηρίζουν τη θέση πως, η κατανόηση μιας έννοιας γίνεται αποτελεσματικότερη, όταν επιστρατεύονται αναπαραστάσεις της που ανήκουν σε περισσότερα του ενός συστήματα αναπαράστασης όπως γραφήματα, μαθηματικοί τύποι, πίνακες ή λεκτικές περιγραφές. Με αυτό το πνεύμα ο Janvier υιοθετεί μία ολιστική προσέγγιση και θεωρεί την αναπαράσταση «ένα είδος παγόβουνου σε σχήμα αστερία το οποίο δείχνει κάθε φορά ένα άκρο του» (Janvier, 1987, σ.69). Δηλαδή, αντιστοιχίζει κάθε μία από τις δυνατές αναπαραστάσεις μιας έννοιας στα διάφορα συστήματα με ένα άκρο του αστερία, ο οποίος αποτελεί τη συνολική αναπαράσταση της έννοιας. Μία τέτοια θεώρηση πλεονεκτεί, αφού αναδεικνύει και δίνει έμφαση στο συνολικό και αδιαίρετο χαρακτήρα του συνόλου των σχηματοποιήσεων της ίδιας έννοιας.

Η χρήση διαφορετικών συστημάτων αναπαράστασης έχει ως προϋπόθεση τη λειτουργία που χαρακτηρίζεται ως «μετάφραση» (translation) της μιας αναπαράστασης σε άλλη. Σύμφωνα με τον Janvier, ο όρος «μετάφραση» υποδηλώνει την ψυχολογική διαδικασία κατά την οποία μεταβαίνουμε από ένα τύπο αναπαράστασης σε ένα άλλο (Janvier, 1987, σ.27). Όπως, για

παράδειγμα, όταν δίνουμε στο μαθητή ένα λεκτικό πρόβλημα και αυτός το μετατρέπει σε αλγεβρική σχέση ή σε γεωμετρικό σχήμα.

Η βασική ιδέα είναι ότι η έννοια θα πρέπει να κατανοείται ως συνολικό και αδιαίρετο όλο, του οποίου τις διάφορες όψεις συλλαμβάνουν και αναδεικνύουν οι επιμέρους αναπαραστάσεις. Η έννοια υπάρχει μέσα σε όλες τις αναπαραστάσεις, μία όμως από αυτές δεν αρκεί για να δώσει τον πλούτο των ιδιοτήτων της έννοιας. Η ικανότητα μετάφρασης μιας αναπαράστασης σε άλλη αποκαλύπτει αυτή τη συνολική κατανόηση, αφού *«δεν είναι δυνατόν να μεταβληθεί ο τρόπος έκφρασης, δίχως πρώτα να ερμηνευτεί το συνολικό νόημά της, ώστε να μπορεί μετά να εκφραστεί πάλι με ένα νέο τρόπο»* (Mason, 1987, σ.214). Αυτό που αναμένουμε, μέσα από τις πολλαπλές αναπαραστάσεις της ίδιας οντότητας, είναι *«ο μαθητής να μπορεί να εντοπίσει τις κοινές ιδιότητες των διαφορετικών αναπαραστάσεών της και να κατορθώσει να κατασκευάσει την έννοια»* (Dufour-Janvier, 1987, σ.111).

Η μετάφραση αποκαλύπτει το βαθμό σύνδεσης των αναπαραστάσεων. Σε πρώτο επίπεδο η σύνδεση υλοποιείται σε περιπτώσεις που δίνεται μία αναπαράσταση και ζητείται να προβλέψουμε, ή να παράγουμε την αντίστοιχή της σε άλλα συστήματα. Σε δεύτερο επίπεδο, όπου η κατανόηση είναι βαθύτερη, η σύνδεση αφορά στην ικανότητα να προβλέψουμε ή να παράγουμε τις συνέπειες που θα έχει κάθε μεταβολή σε μία αναπαράσταση, σε άλλες, αντίστοιχες αναπαραστάσεις⁶. Είναι φανερό ότι, στην περίπτωση αυτή, η σύνδεση είναι ισχυρότερη.

Οι μεταφράσεις κατηγοριοποιούνται με δύο διαφορετικούς τρόπους, ανάλογα με το κριτήριο που θεωρείται κάθε φορά. Αν δούμε τις εσωτερικές αναπαραστάσεις ως ένα επίπεδο και τις εξωτερικές ως ένα άλλο, τότε οι μεταφράσεις μεταξύ αναπαραστάσεων χαρακτηρίζονται είτε ως οριζόντιες, όταν γίνονται στο ίδιο επίπεδο, είτε ως κάθετες, όταν γίνονται από επίπεδο σε επίπεδο (Goldin-Kaput, 1996, σ.401).

Ο Duval διακρίνει *«δύο τύπους μετασχηματισμών ανάμεσα σε σημειωτικές αναπαραστάσεις, οι οποίοι είναι ριζικά διαφορετικοί: τις επεξεργασίες και τις μετατροπές»* (Duval, 2001). Στην περίπτωση που παραμένουμε στο ίδιο σύστημα και μεταφράζουμε από μία αναπαράσταση σε άλλη, του ίδιου συστήματος, η μετάφραση χαρακτηρίζεται επεξεργασία. Στην περίπτωση που αλλάζουμε σύστημα αναπαράστασης, η μετάφραση χαρακτηρίζεται μετατροπή. Όταν, για παράδειγμα, συμπληρώνουμε ένα γεωμετρικό σχήμα, χρησιμοποιώντας το κριτήριο της συμμετρίας, πρόκειται για επεξεργασία, αφού οι μετασχηματισμοί γίνονται συνεχώς μέσα στο σύστημα των γεωμετρικών σχημάτων. Αντίθετα, έχουμε μετατροπή, όταν από την εκφώνηση ενός προβλήματος φτιάχνουμε το γεωμετρικό σχήμα. Εδώ, το αντικείμενο στο οποίο λεκτικά

αναφέρεται το πρόβλημα διατηρείται το ίδιο, όμως αναπαρίσταται σε ένα διαφορετικό σύστημα από αυτό της φυσικής γλώσσας.

Οι μεταφράσεις δεν παίζουν ρόλο στις μαθηματικές διαδικασίες της αιτιολόγησης. Τότε, γιατί έχουν τόσο καθοριστική σημασία στην μαθηματική σκέψη; Η άποψη του Duval είναι πως «εμφανίζονται αποκλειστικά για να μπορούμε να επιλέγουμε το σύστημα αναπαράστασης στο οποίο μπορούν να γίνουν πιο οικονομικά ή πιο αποτελεσματικά οι χειρισμοί που απαιτούνται, ή για να έχουμε ένα δεύτερο σύστημα που να λειτουργεί υποστηρικτικά ή καθοδηγητικά στους χειρισμούς που εκτελούνται στο πρώτο σύστημα» (Duval, 2001).

Η αναγνώριση και αποδοχή της σημασίας των συνδέσεων ανάμεσα στις αναπαραστάσεις της ίδιας έννοιας οδηγεί στην επαναδιατύπωση των κριτηρίων μάθησης⁷. Η επιτυχία των νέων κριτηρίων θα μπορεί να ελέγχεται με τη βοήθεια των αναπαραστάσεων του μαθητή και των μεταξύ τους συνδέσεων. Έτσι θα είμαστε σε θέση να πούμε ότι ένας μαθητής «κατανοεί» μία έννοια, αν:

- την αναγνωρίζει, όταν βρίσκεται ενσωματωμένη σε μία ποικιλία ποιοτικά διαφορετικών αναπαραστάσεων.
- έχει τη δυνατότητα να την χειριστεί μέσα στο σύστημα αναπαράστασης που θα την συναντήσει κάθε φορά.
- μπορεί να την «μεταφράσει» με ακρίβεια από ένα σύστημα αναπαράστασης σε άλλο (Lesh et al, 1987, σ.36).

Οι μεταφράσεις ανάμεσα στις αναπαραστάσεις διακρίνονται από δύο χαρακτηριστικά:

i. Το πρώτο έχει να κάνει με την ταυτότητα δύο διαφορετικών αναπαραστάσεων του ίδιου αντικειμένου. Καθώς «το περιεχόμενο μιας αναπαράστασης εξαρτάται περισσότερο από το σύστημα στο οποίο ανήκει, παρά από το αναπαριστώμενο αντικείμενο» (Duval, 2001), είναι δυνατόν οι αναπαραστάσεις της ίδιας έννοιας σε διαφορετικά συστήματα να διαφέρουν. Κατά το πέρασμα από το ένα σύστημα στο άλλο μπορεί να αναδεικνύονται και να προβάλλονται διαφορετικές ιδιότητες ή όψεις της έννοιας, που όμως δεν σχετίζονται με το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε. Έτσι, καταλήγουμε σε αναπαραστάσεις που δεν είναι ταυτόσημες.

ii. Το δεύτερο χαρακτηριστικό είναι πως η μετάφραση δεν είναι πάντα αντιστρέψιμη λειτουργία. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί η μετάφραση από την αναπαράσταση Α στην αναπαράσταση Β να γίνεται με ακρίβεια, αλλά να μην μπορεί να συμβεί το ίδιο κατά τη μετάφραση της Β σε Α (για παράδειγμα, όταν από μια λεκτική περιγραφή σχεδιάζεται ένα γράφημα, η διαδικασία μετάφρασης είναι αντίστροφη από την ερμηνεία του γραφήματος με λόγια).

Συνεπώς, η μετάφραση από ένα σύστημα σε άλλο αποτελεί ταυτόχρονα ισχυρότατο όπλο αλλά και πηγή προβλημάτων. Αφ' ενός η μετάφραση μας επιτρέπει να επιλέγουμε, κάθε φορά, το σύστημα στο οποίο μπορούμε να εργαστούμε αποτελεσματικότερα. Η δραστηριότητα αυτή, που λόγω της σπουδαιότητάς της χαρακτηρίζεται ως «ο θεμελιώδης μετασχηματισμός των αναπαραστάσεων» (Duval, 2001, σ.4), είναι απαραίτητη προϋπόθεση για την κατανόηση μιας έννοιας ή για τη λύση ενός προβλήματος. Αφ' ετέρου, η μετάφραση μπορεί να αποτελέσει πηγή λαθών και παρανοήσεων, καθώς συχνά δεν ταυτίζονται απόλυτα οι αναπαραστάσεις του ίδιου αντικειμένου σε διαφορετικά συστήματα αναπαράστασης. Εξ αιτίας των προβλημάτων στις μεταφράσεις περιορίζεται, επίσης, η ικανότητα χρήσης των γνώσεων που κατέχουμε ή η απόκτηση νέων, αφού δεν έχουμε την ικανότητα να τις «μεταφράζουμε» αυτούσιες από σύστημα σε σύστημα. Συνεπώς, συμφωνούμε με τον Duval (2001) πως «η κατανόηση στα μαθηματικά περιλαμβάνει την ικανότητα του ατόμου να αλλάζει συστήματα αναπαράστασης».

1.1.5 Οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται στη Γεωμετρία

Ο Duval κατηγοριοποιεί τα συστήματα αναπαράστασης που χρησιμοποιούνται στα Μαθηματικά με κριτήριο το αν οι διαδικασίες τους μπορούν να γίνουν αλγόριθμοι (μόνο - λειτουργικά συστήματα) ή όχι (πολύ - λειτουργικά συστήματα). Για παράδειγμα, τα αριθμητικά / αλγεβρικά συστήματα ή τα καρτεσιανά γραφήματα είναι μόνο - λειτουργικά, ενώ η φυσική γλώσσα ή τα γεωμετρικά σχήματα είναι πολύ - λειτουργικά. Στη δεύτερη περίπτωση (πολύ - λειτουργικά συστήματα), όπου δεν είναι δυνατόν να ορίσουμε επαναλαμβανόμενες διαδικασίες για τις μαθηματικές λειτουργίες, είναι δυσκολότερο να χειριστούμε τα αντίστοιχα συστήματα αναπαράστασης.

Οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται στη Γεωμετρία ανήκουν σε τρία διαφορετικά συστήματα, τα οποία, όπως αναφέρει η Mesquita, είναι «η φυσική γλώσσα, η συμβολική γλώσσα⁸ και τα γεωμετρικά σχήματα. Το τελευταίο σύστημα συνδέεται με το οπτικό σύστημα αντίληψης, το οποίο έχει τους δικούς του νόμους οργάνωσης» (Mesquita, 1998). Όπως φαίνεται στον επόμενο πίνακα 1.1 για το ίδιο γεωμετρικό αντικείμενο μπορούμε να έχουμε τόσες διαφορετικές πιθανές αναπαραστάσεις, όσα και τα συστήματα αναπαράστασης.



Πίνακας 1.1 Οι αναπαραστάσεις του ίδιου αντικειμένου στα διαφορετικά συστήματα αναπαράστασης

σύστημα αναπαράστασης	φυσική γλώσσα	συμβολική γλώσσα	γεωμετρικό σχήμα
αναπαράσταση	Το μέσο M ενός τμήματος AB	$AM = MB$	

Η φυσική γλώσσα αποτελεί πλήρες σύστημα που μπορεί να περιγράψει οποιαδήποτε γεωμετρική πρόταση, σε αντίθεση με τη συμβολική γλώσσα που έχει μερική περιγραφική δυνατότητα⁹ συνδυάζοντας σύμβολα της άλγεβρας με άλλα, αναλογικά των γεωμετρικών σχημάτων (όπως τα σύμβολα παραλληλίας, καθετότητας, τριγώνου, γωνίας, τόξου κ.ά.). Τα γεωμετρικά σχήματα (ΓΣ) απεικονίζουν τις γεωμετρικές οντότητες, αλλά και τις αφηρημένες σχέσεις που ορίζονται μεταξύ τους (ανήκει, ισότητα, μεταξύ, συνέχεια). Η ιδιαιτερότητα των γεωμετρικών σχημάτων, ως αναπαραστάσεων που συνδυάζουν σχηματικές και εννοιολογικές όψεις, και οι δυσκολίες που συνδέονται με το χειρισμό τους αναλύονται εκτενώς στα επόμενα.

Η αναπαράσταση των γεωμετρικών εννοιών αποτελεί κρίσιμο παράγοντα για την εξέλιξη της Γεωμετρίας, γιατί, σύμφωνα με την κατηγοριοποίηση του Duval που αναφέραμε, όλα τα συστήματα αναπαράστασης που χρησιμοποιούνται στη Γεωμετρία είναι πολύ - λειτουργικά. Η πολύ - λειτουργικότητα εξηγεί, σε μεγάλο βαθμό, την ύπαρξη ενός πλήθους δυσκολιών στην εκτέλεση των γεωμετρικών λειτουργιών, όπως η νοερή απεικόνιση, η κατασκευή και η αιτιολόγηση (αναλυτικά στην ενότητα 1.3). Για παράδειγμα, πώς μπορεί ο δάσκαλος να μάθει στο μαθητή του τι να «βλέπει» σε ένα γεωμετρικό σχήμα, ώστε να λύσει το πρόβλημα ή πόσο εύκολο είναι να τον διδάξει πώς «να καταλήγει σε σωστούς παραγωγικούς συλλογισμούς», ξεκινώντας από ορισμούς και θεωρήματα; Η προσέγγιση, δηλαδή, της Γεωμετρίας δεν μπορεί να διευκολυνθεί από επαναλαμβανόμενες διαδικασίες και απαιτεί συνεχώς πρωτότυπη σκέψη.

1.1.6 Σχηματικές έννοιες ή η ιδιαιτερότητα των γεωμετρικών σχημάτων

Στις ψυχολογικές θεωρίες, οι έννοιες¹⁰ και οι νοητικές εικόνες συνήθως θεωρούνται ως δύο διαφορετικές κατηγορίες νοητικών οντοτήτων (Fischbein, 1993, σ.139). Παρά τη γενική αυτή αρχή, υπάρχει μία περιοχή όπου τα δύο προηγούμενα, διαφορετικά είδη, νοητικών αναπαραστάσεων ολοκληρώνονται λειτουργικά. Συγκεκριμένα, αυτό συμβαίνει στη Γεωμετρία όπου οι οντότητες στις οποίες αναφέρεται - σημεία, γωνίες, ευθείες και πράξεις σε

αυτά – ενώ έχουν μόνο μία ιδανική ύπαρξη, φαίνεται ότι παρουσιάζουν διπλή φύση: εννοιολογική και σχηματική¹¹ (Fischbein, 1993).

Στην περίπτωση του γεωμετρικού σχήματος, δεν έχουμε απλά μία νοητική εικόνα (βασισμένη σε αντιληπτική – αισθητηριακή εμπειρία, όπως μια εικόνα ή ζωγραφιά), ή τον ορισμό ή τους ορισμούς των εμπλεκόμενων εννοιών, αλλά κάτι περισσότερο. Έχουμε τη λειτουργική ολοκλήρωσή τους. Όπως ισχυρίζεται ο Fischbein, «στο γεωμετρικό συλλογισμό έχουμε να κάνουμε με ένα τρίτο τύπο νοητικών αντικειμένων που κατέχουν ταυτόχρονα εννοιολογικές και σχηματικές ιδιότητες» (Fischbein, 1993, σ.144).

Ο ίδιος υποστηρίζει πως τα γεωμετρικά σχήματα δεν είναι υλικά αντικείμενα που παρουσιάζουν ατέλειες, ούτε αντίγραφα πραγματικών αντικειμένων, αλλά νοητικές οντότητες οι οποίες καθορίζονται από τον ορισμό τους¹². Είναι, μ' άλλα λόγια, σχηματικές κατασκευές που ελέγχονται και χειρίζονται από λογικούς κανόνες και διαδικασίες στο βασίλειο ενός συγκεκριμένου αξιωματικού συστήματος¹³. Όπως το τοποθετεί ο Fischbein «το γεωμετρικό σχήμα είναι από την αρχή όχι μία συνηθισμένη εικόνα, αλλά μία ήδη λογικά ελεγχόμενη δομή»¹⁴. Ο ισχυρισμός ενισχύεται από κύρια χαρακτηριστικά των γεωμετρικών σχημάτων όπως η ιδανικότητα, η αφαίρεση ή η απόλυτη τελειότητα, τα οποία είναι ιδιότητες που συνήθως αποδίδονται σε έννοιες και όχι σε εικόνες (Fischbein, 1993, σ.141).

Η διπλή φύση των γεωμετρικών σχημάτων που αντανακλά ιδιότητες του χώρου (όπως σχήμα, μέγεθος, θέση) και ταυτόχρονα έχει ιδιότητες έννοιας (γενικότητα, ιδανικότητα, αφαίρεση) οδήγησε τον Fischbein να τα χαρακτηρίσει ως «σχηματικές έννοιες» (figural concepts). Ο συνδυασμός δύο διαφορετικών μορφών νοητικών αναπαραστάσεων (συμβολικών και σχηματικών), στην περίπτωση των σχηματικών εννοιών, οφείλεται στο πλαίσιο στο οποίο αναπτύσσονται αυτές, δηλαδή στο αξιωματικό σύστημα. Το τελευταίο υποβάλλει οι συλλογισμοί να κινούνται στα πλαίσια της τυπικής, μαθηματικής εγκυρότητας, σε αντιδιαστολή με την εμπειρική εγκυρότητα.

Κατά το γεωμετρικό συλλογισμό ή την απόδειξη μιας γεωμετρικής πρότασης βλέπουμε μεν ένα σχήμα κατασκευασμένο στο χαρτί, αλλά στην πραγματικότητα (πρέπει να) χειριζόμαστε τη σχηματική έννοια. Οι ιδιότητές της καθορίζονται από το αξιωματικό σύστημα και οι συλλογισμοί (πρέπει να) κινούνται στα πλαίσια της τυπικής, μαθηματικής εγκυρότητας.

Οι υλικές αναπαραστάσεις της σχηματικής έννοιας (υλικά σώματα, ζωγραφιές, σχήματα σε χαρτί ή στην οθόνη ΗΥ) είναι, απλά, τα μοντέλα των νοητικών οντοτήτων με τις οποίες δουλεύουμε. Συχνά δημιουργούνται δυσκολίες στο χειρισμό της σχηματικής έννοιας από την τάση να παραμελούμε τους ορισμούς / ιδιότητες, κάτω από την πίεση των περιορισμών του σχήματος (που συνήθως ακολουθούν τους νόμους της Gestalt). Αυτό αποτελεί εμπόδιο στη

γεωμετρική σκέψη. Για τον αποτελεσματικό χειρισμό της Γεωμετρίας θεωρείται απαραίτητος ο συντονισμός και κατόπιν η ολοκλήρωση των δύο φύσεων των γεωμετρικών σχημάτων.

1.1.7 Τα γεωμετρικά σχήματα στη λύση προβλήματος

Κατά την κατασκευή της (υλικής) αναπαράστασης ενός γεωμετρικού σχήματος από έμπειρα άτομα (π.χ. μαθηματικούς), λειτουργεί αυτόματα μια εσωτερική διαδικασία εξιδανίκευσης ώστε το σχήμα, ανεξάρτητα από ατέλειες, να είναι συνεπές με τις ιδιότητες που το καθορίζουν, αλλά και με το συνολικό γεωμετρικό πλαίσιο. Έτσι, για παράδειγμα, σε οποιασδήποτε ποιότητας (ευκλείδειο) σχήμα ο λύτης «βλέπει» στον κύκλο τη βασική ιδιότητα των σημείων του να ισαπέχουν από το κέντρο, ή σε οποιοδήποτε τρίγωνο τις γωνίες να αθροίζουν σε δύο ορθές, και τα διαχειρίζεται ανάλογα. Το υλικό μοντέλο, συνεπώς, αποτελεί μόνο το ερέθισμα για την ενεργοποίηση στο μυαλό της σχηματικής έννοιας. βάσει της οποίας αναπτύσσονται οι συλλογισμοί και γίνονται οι αποδείξεις. «Οι σχηματικές έννοιες αποτελούν μόνο το ιδανικό όριο μιας διαδικασίας συγχώνευσής και ολοκλήρωσης μεταξύ λογικών και σχηματικών όψεων» (Fischbein, 1993, σ.150).

Οι ισχυρισμοί αυτοί επιβεβαιώνονται με τον καλύτερο τρόπο όταν έχουμε να κάνουμε με σχήματα της Υπερβολικής Γεωμετρίας (π.χ. στο μοντέλο του Poincaré), όπου τα «ίσα» γεωμετρικά αντικείμενα (ευθύγραμμα τμήματα, τρίγωνα κ.ά.), σύμφωνα με την αντίστοιχη μετρική, δεν ταιριάζουν απαραίτητα με την αισθητηριακή μας αντίληψη (οπτικά φαίνονται άνισα). Και σε αυτή την περίπτωση η όλη επεξεργασία - παρόλο που βρίσκεται σε αντίθεση με την συγκεκριμένη εικόνα - είναι απλή για τους ειδικούς, αφού στηρίζεται στους ορισμούς και στις ιδιότητες των σχημάτων.

Μία τέτοια ιδανική κατάσταση παρατηρείται σε ειδικούς. Αντίθετα στους αρχάριους η διπλή φύση των γεωμετρικών σχημάτων αποτελεί πηγή προβλημάτων. Τα εννοιολογικά και τα σχηματικά χαρακτηριστικά των σχημάτων συχνά παραμένουν διαχωρισμένα, εξαρτημένο το καθένα στο αντίστοιχο σύστημα αναπαράστασης (συμβολικό – σχηματικό), με τους συγκεκριμένους περιορισμούς. Στην περίπτωση αυτή τα γεωμετρικά σχήματα, δίχως τον εννοιολογικό έλεγχο, αυτονομούνται και επιβάλλουν ερμηνείες και συμπεράσματα, τα οποία μπορεί να είναι συνεπή προς το συγκεκριμένο σχήμα, αλλά δεν υπόκεινται στους περιορισμούς του αξιωματικού συστήματος. «Αυτό το γεγονός οδηγεί πολύ συχνά σε αντιπαραθέσεις, συγκρούσεις, εσωτερικές εντάσεις, ως τη συνολική διάλυση της σχηματικής έννοιας στα δύο της βασικά συστατικά» (Fischbein, 1993, σ.150). Στους αρχάριους οι αποφάσεις, συχνά, βασίζονται μόνο στο υλικό σχήμα, γεγονός που αποτελεί αιτία λαθών. Οι

ορισμοί δε χρησιμοποιούνται, παρόλο που ο ρόλος τους είναι κρίσιμος. Έτσι η σχηματική έννοια απογυμνώνεται και χρησιμοποιείται δίχως τα «αναλλοίωτα» που επιβάλλονται στο γεωμετρικό σχήμα από τον ορισμό ή τις ιδιότητές του. Η Mesquita περιγράφει τις διαφορές στην αντίληψη των γεωμετρικών σχημάτων, ανάμεσα σε αρχάριους και ειδικούς, ως εξής «οι μαθητές έχουν την τάση να βλέπουν μία εξωτερική αναπαράσταση ως κάτι το πεπερασμένο, ενώ οι ειδικοί την βλέπουν ως μία ιδανική αντικειμενικότητα» (Mesquita, 1998).

Συνεπώς, κατά τη λύση ενός γεωμετρικού προβλήματος τα γεωμετρικά σχήματα πρέπει να αντιμετωπίζονται ως ομογενείς νοητικές οντότητες και όχι ως συνδυασμοί δύο κατηγοριών ετερογενών νοητικών κατασκευών. Σύμφωνα με την οπτική των Furinghetti και Domingo (1999):

Μια προς απόδειξη πρόταση έχει τη δομή υπερκειμένου: περιέχει λέξεις τις οποίες οι μαθητές πρέπει να ξεχωρίσουν και να «ενεργοποιήσουν» για να βρουν ένα σύνδεσμο μεταξύ τους, και μεταξύ των εικόνων της έννοιας (concept images) και των ορισμών (concept definitions) που βρίσκονται πίσω τους, ώστε να αντλήσουν τις απαραίτητες πληροφορίες που θα τους επιτρέψουν να συνεχίσουν την απόδειξη. Αν κάποια από τις διαδικασίες αυτές (αναγνώριση των σημαντικών λέξεων, ενεργοποίησή τους, άντληση πληροφοριών) δεν ενεργοποιηθεί, η πρόταση παραμένει ασαφής και είναι δύσκολο να αποδειχθεί.

Τελικά, κριτήριο και παράγοντας αποτελεσματικής γεωμετρικής λειτουργίας είναι η ικανότητα του ατόμου να διατηρεί τη διπλή φύση των γεωμετρικών σχημάτων κατά την επεξεργασία τους.

1.2 ΤΑ ΓΝΩΣΤΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

1.2.1 Η οργάνωση των γνώσεων

Οι ερευνητές της Γνωστικής Ψυχολογίας προσπαθούν να απαντήσουν στο ερώτημα «πώς οργανώνονται οι γνώσεις στο μυαλό του ανθρώπου;» μέσα από δύο διαφορετικές προσεγγίσεις. Η μία προσέγγιση εστιάζει το ενδιαφέρον της στην απλή οργάνωση των εννοιών, δηλαδή, στο πώς διάφορες οντότητες ομαδοποιούνται κάτω από μία κοινή έννοια / κατηγορία¹⁵ (για παράδειγμα, μια ηλεκτρική και μια κλασική κιθάρα κατηγοριοποιούνται μαζί στην κατηγορία «κιθάρα») και πώς οι έννοιες σχετίζονται μεταξύ τους ιεραρχικά (οι κατηγορίες κιθάρα και πιάνο είναι υποκατηγορίες της γενικότερης έννοιας μουσικό όργανο). Η άλλη προσέγγιση ασχολείται με τη σύνθετη οργάνωση των εννοιών, δηλαδή, το πώς ομάδες εννοιών δομούνται και χρησιμοποιούνται σε διάφορες σύνθετες γνωστικές δραστηριότητες (όπως η κατανόηση μιας ιστορίας).

1.2.2 Η απλή οργάνωση των εννοιών

Η απλή οργάνωση αφορά κυρίως σε έννοιες που αναφέρονται σε αντικείμενα (όπως σπίτι, μαθητής, αυτοκίνητο κλπ) και λιγότερο σε έννοιες που αποδίδουν σχέσεις (ακούω, ανήκω, δίνω, μαθαίνω κλπ.). Η παραδοσιακή άποψη, σχετικά με την (απλή) οργάνωση των εννοιών, προέρχεται από τη Φιλοσοφία και τη Λογική και βασίζεται κατά κύριο λόγο στο έργο του Gottlob Frege (1952), ο οποίος υποστηρίζει πως μια έννοια μπορεί να χαρακτηριστεί από ένα σύνολο ιδιοτήτων που την ορίζουν (defining attributes) (Eysenk & Keane, 1990, σ.252). Σύμφωνα με αυτή την άποψη μπορούμε να βρούμε αναγκαίες και ικανές ιδιότητες που να ορίζουν την έννοια. Έτσι έχουμε κριτήρια που οριοθετούν την κάθε κατηγορία και καθορίζουν σαφή όρια ανάμεσα στις κατηγορίες. Οι απόψεις αυτές επιδέχονται αμφισβήτηση, αφού δεν είναι δυνατόν να βρεθούν ιδιότητες που να ορίζουν κάθε έννοια και ιδιαίτερα αυτές που αποτελούν «φυσικά είδη» (όπως για παράδειγμα, τις ιδιότητες που ορίζουν την κατηγορία φυτό). Ακόμα, οι παραπάνω απόψεις υστερούν σε περιπτώσεις που οι έννοιες δεν είναι τυπικές (π.χ. η στρουθοκάμηλος είναι πουλί;) ή δεν είναι ξεκάθαρες (π.χ. το χαλί ανήκει στην κατηγορία έπιπλο;). Οι Eysenk και Keane (1990) συνοψίζουν τα αδύνατα σημεία της άποψης ότι μια έννοια ορίζεται με βάση κάποιες ιδιότητες, λέγοντας πως «α) δεν είναι όλες οι ιδιότητες της έννοιας εξίσου σημαντικές και β) συγκεκριμένα μέλη των φυσικών κατηγοριών θεωρούνται πιο τυπικά ή καλύτερα παραδείγματα της έννοιας» (σ.257).

Ως απάντηση στα μειονεκτήματα της προηγούμενης θεωρίας δημιουργήθηκε η θεωρία της σύγκρισης των χαρακτηριστικών, σύμφωνα με την οποία μια έννοια αναπαρίσταται από δύο ειδών ιδιότητες: τις ιδιότητες που την ορίζουν¹⁶ και τις χαρακτηριστικές ιδιότητες¹⁷. Η επαλήθευση ότι μια οντότητα ανήκει σε μια κατηγορία γίνεται σε δύο φάσεις: στην πρώτη συγκρίνονται όλες οι ιδιότητες της οντότητας με αυτές της έννοιας και στην περίπτωση που δεν προκύψει ένα θετικό συμπέρασμα, συγκρίνονται μόνο οι ιδιότητες που τις ορίζουν. Μια οντότητα αναγνωρίζεται ότι ανήκει σε μια κατηγορία γρηγορότερα, όταν χαρακτηρίζεται ως «καλύτερο παράδειγμα» της έννοιας (Eysenk & Keane, 1990, σ.259).

Η τρίτη θεωρία που εστιάζει στις έννοιες αντικείμενα, και προσπαθεί να καλύψει μειονεκτήματα των δύο προηγούμενων, είναι αυτή που υποστηρίζει πως οι έννοιες οργανώνονται γύρω από πρότυπα. Οι οντότητες κατατάσσονται σε κατηγορίες ανάλογα με τις ομοιότητές τους προς το αντίστοιχο πρότυπο, ενώ δεν υπάρχουν αναγκαίες και ικανές συνθήκες που να καθορίζουν τα μέλη της κατηγορίας. Έτσι δημιουργούνται κατηγορίες με ασαφή όρια (Eysenk & Keane, 1990, σ.263).

Το γνωστικό σύστημα ωφελείται από την κατηγοριοποίηση των εννοιών. Η κατηγοριοποίηση επιτρέπει στο άτομο να αποθηκεύει τις πληροφορίες με μεγαλύτερη οικονομία σε αναπαραστάσεις και να βελτιώνει την προβλεπτική του ικανότητα, με αποτέλεσμα να έχει προσδοκίες σχετικά με τις καταστάσεις που αντιμετωπίζει¹⁸. Τέλος, η κατηγοριοποίηση διευκολύνει την επικοινωνία μεταξύ των ανθρώπων (Anderson, 2000, σ.151).

1.2.3 Η σύνθετη οργάνωση των εννοιών

Οι γνώσεις του ατόμου δε δομούνται αποκλειστικά με βάση τις έννοιες και τις ιδιότητές τους. Υπάρχουν και γνώσεις που αναφέρονται σε σύνθετα γεγονότα, όπως περιπτώσεις όπου το άτομο πρέπει να αναπτύξει ικανότητες ανάλυσης προβληματικών καταστάσεων, διατύπωσης προβλέψεων και εξαγωγής πολύπλοκων συμπερασμάτων. Μια εναλλακτική προσέγγιση, λοιπόν, αυτής που εξετάζει τις απλές έννοιες ασχολείται με την σύνθετη οργάνωση των εννοιών, οργάνωση που οι ερευνητές υποθέτουν πως είναι πιο πολύπλοκη από τις ιεραρχικές ομαδοποιήσεις των εννοιών (Eysenk & Keane, 1990, σ:275). Για την ερμηνεία της οργάνωσης της σύνθετης γνώσης προτείνεται η έννοια του Σχήματος, την οποία εξετάζουμε αναλυτικά στα επόμενα. Εξαιτίας της διπλής χρήσης της λέξης «σχήμα» στην Ελληνική γλώσσα, στα επόμενα κάνουμε την ακόλουθη διάκριση: όταν μιλάμε για γνωστικά σχήματα θα γράφουμε Σχήμα (με σίγμα κεφαλαίο), ενώ όταν μιλάμε για γεωμετρικά σχήματα θα γράφουμε σχήμα (με σίγμα μικρό).

1.2.4 Το γνωστικό «Σχήμα»

Η συχνότερα χρησιμοποιούμενη έννοια για την περιγραφή του σύνθετου τρόπου δόμησης των γνώσεων, είναι το «Σχήμα» (schema¹⁹). Πρόκειται για μια νοητική δομή απαραίτητη στον άνθρωπο, προκειμένου να αποκτήσει γνώσεις σχετικές με μια συγκεκριμένη κατάσταση, και ταυτόχρονα, να τις τακτοποιήσει και να τις αποθηκεύσει στο νου του. Ο όρος σχήμα εισάγεται στην Ψυχολογία από τον Bartlett (1932) και εμφανίζεται στη σύγχρονη βιβλιογραφία με διάφορους ορισμούς και ερμηνείες. Προκειμένου να γίνει πιο σαφής η έννοια θεωρούμε απαραίτητο να παραθέσουμε κάποιους από αυτούς τους ορισμούς, τόσο από το χώρο έρευνας της Ψυχολογίας όσο και από αυτόν της Μαθηματικής Εκπαίδευσης.

Η Γνωστική Ψυχολογία ορίζει γενικά το «Σχήμα» ως «μια δομημένη ομάδα εννοιών, που περιέχει συνήθως γενικές γνώσεις και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αναπαραστήσει γεγονότα, διαδοχή γεγονότων, εντολές, καταστάσεις, σχέσεις ακόμα και αντικείμενα» (Eysenck

& Keane, 1990, σ. 275). Ο ορισμός είναι αρκετά ευρύς ώστε να περιλαμβάνει, παράλληλα με τη γνώση σχετικά με φυσικά αντικείμενα ή γεγονότα, και πιο αφηρημένα γνωστικά αντικείμενα όπως, μαθηματικές έννοιες, φιλοσοφικές απόψεις ή ψυχολογικές καταστάσεις.

Τα Σχήματα, σύμφωνα με τον Anderson, «είναι τρόποι με τους οποίους κωδικοποιούμε κανονικότητες σε κατηγορίες, είτε αυτές οι κανονικότητες είναι αντιληπτικές είτε είναι προτασιακές» (Anderson, 2000, σ.155). Με άλλα λόγια, με τη βοήθεια των Σχημάτων μπορούμε να αναπαραστήσουμε αυτό που τα συγκεκριμένα πράγματα έχουν συνήθως κοινό. Ο όρος «Σχήμα» χρησιμοποιείται στην Ψυχολογία για να περιγράψει την αναπαράσταση μιας οργανωτικά δομημένης και σύνθετης γνώσης (Eysenk & Keane, 1990, σ.275). Λέγοντας σύνθετη γνώση αναφερόμαστε τόσο στο είδος της, όσο και στη δομή της. Η Φιλοσοφία και η Γνωστική Ψυχολογία προτείνουν τη διάκριση της γνώσης σε «δηλωτική (declarative)», δηλαδή, γνώση γεγονότων, πραγμάτων καταστάσεων κλπ και σε «διαδικαστική (procedural)», δηλαδή γνώση σχετικά με το πώς εκτελούμε διάφορες γνωστικές δραστηριότητες (Eysenck & Keane, 1990, σ. 251). Η γνώση που χαρακτηρίζεται σύνθετη και δομείται στο Σχήμα περιλαμβάνει και τα δύο είδη (δηλωτική και διαδικαστική).

Τα γνωστικά Σχήματα χρησιμοποιούνται ευρύτατα όχι μόνο στην Ψυχολογία, αλλά και στην έρευνα τη σχετική με τη Μαθηματική Εκπαίδευση. Ο Skemp (1971) στο πρωτοποριακό έργο του, θεωρεί το Σχήμα ως τον ψυχολογικό όρο για τις εννοιολογικές δομές (σ. 16) που περιλαμβάνει «όχι μόνο τις σύνθετες εννοιολογικές δομές των μαθηματικών, αλλά και σχετικά απλές δομές οι οποίες συντονίζουν την αισθητο – κινητική δραστηριότητα» (σ. 39). Εδώ ο Skemp μας δίνει τους δύο βασικούς άξονες, στους οποίους κινούνται μετέπειτα οι ερευνητές της Μαθηματικής Εκπαίδευσης και τους οποίους περιγράφουν οι Barnard και Tall ως εξής:

Η μαθηματική σκέψη περιλαμβάνει δύο διαφορετικά είδη νοητικής δραστηριότητας που αναφέρονται και τα δύο ως Σχήματα (schemes ή schemata). Το πρώτο είναι ένα Σχήμα (scheme¹) διαδοχικών ενεργειών που συμβαίνουν στο χρόνο και σταθεροποιείται στη διάρκεια του χρόνου με ενδυνάμωση και συντονισμό των γνωστικών συνδέσεων, όπως το σχήμα «δες, άρπαξε, θήλασε» στο μικρό παιδί. Το άλλο αναφέρεται πιο συγκεκριμένα στη φυσική δομή του εγκεφάλου η οποία προσφέρει ένα πολλαπλά συνδεδεμένο Σχήμα (schema²) στο οποίο είναι διαθέσιμοι πολλοί πιθανοί σύνδεσμοι σε κάθε δεδομένη στιγμή» (σ. 91).

Η λειτουργική διαφορά των δύο όρων είναι η εξής: ο όρος *scheme* αναφέρεται σε δόμηση ενεργειών, ενώ ο όρος *schema* σε δομές αναπαράστασης (αναπαραστάσεις γνώσεων που

¹ χρησιμοποιεί τον όρο *scheme*

² χρησιμοποιεί τον όρο *schema*



έχουν τη μορφή δικτύων συνδεδεμένων εννοιών). Κατ' αναλογία με τους δύο άξονες εμφανίζονται και δύο απόψεις για τον ορισμό του Σχήματος²⁰.

I. Ορισμός του όρου *scheme*:

Οι ερευνητές που χρησιμοποιούν για το Σχήμα τον όρο *scheme* έχουν το κοινό χαρακτηριστικό πως συσχετίζουν το Σχήμα με ένα σταθερό τρόπο συμπεριφοράς ή ενέργειας του ατόμου απέναντι σε μία κατάσταση. Ο Vergnaud, σε μια εμβριθή ανάλυση της έννοιας του Σχήματος, το ορίζει ως «την αναλλοίωτη οργάνωση της συμπεριφοράς (ενέργειας) για ένα συγκεκριμένο είδος καταστάσεων²¹» (Vergnaud, 1996, σ. 222), ενώ οι Olive και Steffe το θεωρούν ως «μια δραστηριότητα που κατευθύνεται από κάποιο στόχο» (Olive & Steffe, 2002, σ.97).

Οι Davis και Tall συσχετίζουν το σχηματισμό των Σχημάτων με την ικανότητα του ατόμου για κατηγοριοποίηση των ενεργειών του. Για παράδειγμα, όταν το παιδί μοιράζει κάποια αντικείμενα σε ίσα μέρη τότε, σύμφωνα με τους Davis και Tall, πρόκειται για ένα Σχήμα δράσης (0 τάξης Σχήμα). Όταν αργότερα το παιδί είναι ικανό να αναφερθεί σε μια τέτοια διανομή (μοιρασιά), λέγοντας πως «είναι σα να παίζουμε χαρτιά», τότε είναι φανερό πως το παιδί έχει νοητικά κατηγοριοποιήσει διάφορα Σχήματα δράσης που σχετίζονται με τη διανομή ίσων μεριδίων, δημιουργώντας ένα 1^{ης} τάξης Σχήμα για αυτήν.

Συγκεκριμένα, οι Davis και Tall λένε πως «στη δημιουργία των Σχημάτων εμπλέκεται η κατηγοριοποίηση, δηλαδή η λειτουργία με την οποία το μυαλό κατηγοριοποιεί τις ενέργειές του» και ορίζουν:

- το Σχήμα δράσης (ή 0 – τάξης Σχήμα) σαν μία διαδοχή ενεργειών που γίνονται για να πραγματοποιηθεί ένας στόχος
- το Σχήμα n – τάξης σαν μία μορφή κατηγοριοποίησης Σχημάτων χαμηλότερης τάξης (Davis & Tall, 2002, σ.2, 3).

Τέλος, οι Nesher και HersHKovitz παίρνουν μια συγκεκριμένη περίπτωση προβλήματος (πρόσθεσης – αφαίρεσης) και ορίζουν το «Σχήμα του προβλήματος» ως το σύνολο των ενεργειών που απαιτούνται για τη λύση του. Συγκεκριμένα, αντιμετωπίζουν ένα απλό λεκτικό πρόβλημα²² σαν μία σχέση $R(a,b,c)$ με τρεις θέσεις, όπου τα a , b , c είναι τα τρία συστατικά (προτάσεις) του προβλήματος²³. Αυτή την αφηρημένη σχέση μαζί με την ερμηνεία της ως προσθετική σχέση τη θεωρούν ως το «Σχήμα του προβλήματος» (Nesher & HersHKovitz, 1994, σ. 2).

Κατά συνέπεια, ο όρος *scheme* χρησιμοποιείται όταν κωδικοποιούμε την επικρατούσα διαδοχή γεγονότων που συμβαίνουν σε μια συγκεκριμένη κατάσταση.



II. Ορισμός του όρου *schema*:

Οι απόψεις των ερευνητών της μαθηματικής εκπαίδευσης που χρησιμοποιούν τον όρο *schema* δίνουν έμφαση στη περιγραφή της δομής του και στη δυναμικότητα του χαρακτήρα του. Συγκεκριμένα ο Cottrell (1996) ορίζει το Σχήμα με επαναληπτικό τρόπο, ως «*μια συνεκτική συλλογή από ενέργειες, διαδικασίες, αντικείμενα, και άλλα Σχήματα, που συνδέονται με κάποιο τρόπο και εμφανίζονται σε μία κατάσταση προβλήματος*» (σ.172), ενώ ο Dubinsky (1992) βλέπει το Σχήμα ως «*μια λίγο ως πολύ συνεπή συλλογή από αντικείμενα και διαδικασίες*» (σ.102). Σύμφωνα με τον ορισμό που δίνει ο Chinnappan (1998), το «*Σχήμα είναι ένα σύμπλεγμα γνώσης που περιέχει πληροφορίες για έννοιες – πυρήνες, τις σχέσεις ανάμεσα σε αυτές τις έννοιες και γνώση για το πώς και πότε τις χρησιμοποιούμε*».

Ο Piaget λέει πως το Σχήμα μιας ενέργειας «*συνίσταται σε εκείνες τις όψεις της οι οποίες επαναλαμβάνονται, μεταφέρονται ή γενικεύονται, δηλαδή η δομή ή η μορφή, σε διάκριση με τα αντικείμενα, που αναπαριστά το μεταβλητό του περιεχόμενο*» (Fischbein, 1999, σ. 39).

Ο Fischbein (1999), προσπαθώντας να συνδυάσει τα περισσότερα από τα χαρακτηριστικά που εμφανίζονται στους διάφορους ορισμούς (που αφορούν στο *schema*), δίνει έναν «ορισμό εργασίας». Λέει, «*ένα σχήμα είναι ένα πρόγραμμα το οποίο επιτρέπει στο άτομο α) να καταγράφει, να επεξεργάζεται, να ελέγχει και να ολοκληρώνει νοητικά πληροφορίες και β) να αντιδρά με νόημα και αποτελεσματικά στα ερεθίσματα του περιβάλλοντος*» (σ.39). Ο όρος πρόγραμμα, που ο Fischbein συμπεριλαμβάνει στον ορισμό του, αποδίδει στο σχήμα μία διαδοχή από βήματα που οδηγούν σε ένα συγκεκριμένο σκοπό.

Υπάρχουν άρθρα στα οποία εμφανίζονται ταυτόχρονα και οι δύο όροι (*scheme*, *schema*), χωρίς να επισημαίνονται οι ενδεχόμενες διαφορές τους (Tall 1999, 2002²⁴, Fischbein, 1997). Για παράδειγμα, ο Fischbein (1997), (που χρησιμοποιεί τον όρο *schema*), σε άρθρο του για τα Σχήματα, παραθέτει τις απόψεις του Vergnaud (που χρησιμοποιεί τον όρο *scheme*), μη διαφοροποιώντας ουσιαστικά στην πράξη τους όρους *scheme* και *schema* (σ.29).



1.2.5 Το Σχήμα στη διαδικασία μάθησης

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο ρόλος του γνωστικού Σχήματος στη διαδικασία μάθησης. Σύμφωνα με τον Skemp (1971), «όταν μαθαίνουμε με τη βοήθεια Σχημάτων..... προετοιμάζουμε ένα νοητικό εργαλείο ώστε να εφαρμόσουμε την ίδια προσέγγιση σε μελλοντικά θέματα που μαθαίνουμε στο ίδιο πεδίο» (σ. 42). Ο ίδιος υπογραμμίζει τις δύο βασικές λειτουργίες του Σχήματος:

- ως συνδετικού ιστού της υπάρχουσας γνώσης και
- ως εργαλείου για την απόκτηση νέας γνώσης

Συγκεκριμένα αναφέρει πως «ένα Σχήμα ολοκληρώνει την υπάρχουσα γνώση και αποτελεί νοητικό εργαλείο για την απόκτηση νέας γνώσης» (Skemp, 1971, σ. 39) και για το λόγο αυτό ονομάζει το Σχήμα «εργαλείο για μελλοντική μάθηση» (ό.π., σ.44). Το γεγονός είναι σημαντικό, αφού η μάθηση μπορεί να θεωρηθεί ως συνεχής προσάρτηση νέων πληροφοριών στις ήδη υπάρχουσες γνωστικές δομές. Ανάλογα με τη συγκεκριμένη κάθε φορά περίπτωση και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της, το Σχήμα μπορεί να ενεργοποιήσει διαφορετικές ακολουθίες πράξεων του ατόμου, συλλογής πληροφοριών, ή ελέγχου, ώστε να είναι αποτελεσματικό²⁵.

Παράγοντες που επιδρούν στην αποτελεσματικότητα ενός Σχήματος μπορεί να είναι:

- Ο τύπος των εννοιών που αποτελούν το Σχήμα (όσο πιο αφηρημένη η έννοια, τόσο πιο ευρύ το πεδίο εφαρμογής της)
- Το πλήθος των συνδέσεων ανάμεσα στις έννοιες (όσο πληρέστερο είναι το δίκτυο, τόσο μεγαλύτερη η ποικιλία των σχεδίων που μπορούν να εφαρμοστούν)
- Η ποιότητα των συνδέσεων
- Η συνάφεια του περιεχομένου του Σχήματος με το πρόβλημα που αντιμετωπίζει το άτομο
- Η ακρίβεια με την οποία το Σχήμα αναπαριστά την πραγματικότητα, κ.ά. (Olive & Steffe, 2002, σ.101).

1.2.6 Ερμηνείες του Σχήματος

Εκτός από τους διάφορους ορισμούς, στη βιβλιογραφία τη σχετική με τα Σχήματα, αναγνωρίζουμε και δύο κύριες κατευθύνσεις – ερμηνείες τους (Barnard & Tall, 2001, Fischbein, 1999), αντίστοιχα με το είδος της νοητικής δραστηριότητας που περιλαμβάνει ο κάθε όρος.

1. Στην πρώτη ερμηνεία, σύμφωνα με τον Fischbein (1999), το Σχήμα (scheme) είναι συγκεκριμένο εργαλείο εκτέλεσης, με περιορισμένες δυνατότητες (σ. 37) ή, σύμφωνα με άλλους, μία διαδοχή ενεργειών (Barnard & Tall, 2001, σ.91). Με άλλα λόγια πρόκειται για ένα είδος συγκεντρωμένης και απλοποιημένης αναπαράστασης μιας κατηγορίας αντικειμένων ή γεγονότων²⁶, όπως η διαδοχή των ενεργειών που πρέπει να γίνουν για να λυθεί μια συγκεκριμένη ομάδα προβλημάτων (για παράδειγμα, λεκτικά προβλήματα αριθμητικής με δύο βήματα). Αυτή αποτελεί το σχήμα της λύσης τους (Nesher & HersHKovitz, 1994).

Σύμφωνα με αυτή την ερμηνεία, μπορούμε να αναγνωρίσουμε τα Σχήματα (schemes) παρατηρώντας τα παιδιά να χρησιμοποιούν επανειλημμένα μια δραστηριότητα που κατευθύνεται από κάποιο στόχο, σε διαφορετικές περιπτώσεις που μας φαίνονται ως σχετικές.

2. Στη δεύτερη ερμηνεία το Σχήμα (schema) έχει μια γενική προσαρμοστική λειτουργία στις γνωστικές – συμπεριφορικές μας προσπάθειες (Fischbein, 1999, σ. 37). Η ερμηνεία αυτή για το Σχήμα συμφωνεί με τις απόψεις των Piaget και Skemp, σε σχέση με την συμπεριφορά προσαρμογής του ατόμου. Σύμφωνα με τον Skemp (1971) *«πέρα από ένα σταθερό, αναπτυσσόμενο Σχήμα με τη βοήθεια του οποίου το άτομο οργανώνει τις προηγούμενες εμπειρίες του και αφομοιώνει νέα στοιχεία, το Σχήμα πρέπει να προσαρμόζεται και στις νέες καταστάσεις»* (σ.44). Έτσι, το Σχήμα αναδεικνύεται σε δομικό στοιχείο της νόησης με τη βοήθεια του οποίου γίνεται η επεξεργασία των πληροφοριών που το άτομο παίρνει από το περιβάλλον, η αφομοίωση και ολοκλήρωσή τους στη νοητική του οργάνωση. Με την ερμηνεία αυτή αναδεικνύεται επίσης και η αντίστροφη λειτουργία των Σχημάτων, δηλαδή η προσαρμογή τους στις συγκεκριμένες ιδιότητες των πληροφοριών που προσλαμβάνονται.

1.2.7 Περιεχόμενο του Σχήματος

Σχετικά με το περιεχόμενο ο Skemp θεωρεί ότι αποτελείται από έννοιες που συνδέονται με ιδιότητες και διαδικασίες, άποψη που βρίσκει και άλλους υποστηρικτές (Dubinsky 1992, Chinnappan 1998). Ο Vergnaud διαφοροποιείται, καθώς θεωρεί πως τα Σχήματα αναφέρονται σε καταστάσεις. Λέει *«είναι σημαντικό να δούμε τον κόσμο της εμπειρίας μας σαν ένα σύνολο από καταστάσεις και όχι απλά σαν ένα σύνολο από αντικείμενα, ιδιότητες και σχέσεις»* (Vergnaud, 1996, σ.224). Παρά τη διαφορετική προσέγγιση που εκφράζει, σε σχέση με τους προηγούμενους ερευνητές, ο ίδιος ο Vergnaud μας εξηγεί την αναγκαιότητα των δύο προσεγγίσεων και τη συμπληρωματικότητά τους, λέγοντας πως *«μια κατάσταση περιλαμβάνει μια ποικιλία αντικειμένων και ιδιοτήτων..... και αντίστροφα, μια έννοια δεν παίρνει το νόημα*

και την έκτασή της από μία μόνο κατάσταση. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο πρέπει να μελετάμε τη μάθηση σε μια ποικιλία καταστάσεων και επίσης να χρησιμοποιούμε μια ποικιλία συνδεδεμένων εννοιών για να αναλύσουμε αυτές τις καταστάσεις και να κάνουμε μια αξιόπιστη περιγραφή των Σχημάτων» (Vergnaud, 1996, σ.225).

Ένα παράδειγμα Σχήματος, το περιεχόμενο του οποίου σχετίζεται με μία συγκεκριμένη κατάσταση, είναι το ακόλουθο Σχήμα της έννοιας σχολείο:

«η γνώση που έχουμε για την έννοια «σχολείο» δεν συνίσταται απλώς στο ότι ορισμένα πρόσωπα εργάζονται εκεί και ότι διάφορα γεγονότα συμβαίνουν εκεί (όπως π.χ. μάθηση, παιχνίδι, κοινωνικοποίηση) αλλά ότι όλα αυτά συμβαίνουν μαζί κατά μια ορισμένη διαδικασία και χρονική διαδοχή. Έτσι, το Σχήμα «σχολείο» αναπαριστά τη γνώση που έχουμε αναφορικά με το πώς τα διάφορα χαρακτηριστικά και τα γεγονότα του σχολείου συνδέονται.» (Πόρποδας, 1996, σ.250).

Ο Skemp (1971) ταυτίζει το Σχήμα με τις εννοιολογικές δομές που χρησιμοποιούμε και μεταδίδουμε με τη βοήθεια συμβόλων (σ.16), οπότε μπορούμε να πούμε πως το περιεχόμενο του Σχήματος αναπαρίσταται στο νου με τη βοήθεια των διαφόρων συμβολικών συστημάτων. Η έρευνα δείχνει πως «τα σύμβολα βρίσκονται στην καρδιά της γνωστικής ανάπτυξης» (Tall, 1999).

Η απόκτηση και η εξέλιξη των Σχημάτων συνδέεται με τη δημιουργία προσωπικών και κοινά αποδεκτών συμβόλων που σχετίζονται με την αναπαράσταση της γνώσης (Kellogg, 1994, σ. 19). Αυτό σημαίνει πως το άτομο χρησιμοποιεί διάφορα σύμβολα προκειμένου να συνειδητοποιήσει ή να κάνει ρητή τη γνώση που περιέχεται στα Σχήματά του. Ο διαχωρισμός των συμβόλων (σε προσωπικά και κοινά αποδεκτά) γίνεται, γιατί στο μεν επίπεδο της νοητικής δραστηριότητας του ατόμου (όπως η αντίληψη, η μνήμη, η φαντασία κλπ) τα σύμβολα μπορεί να είναι δύο ειδών, προσωπικά και κοινά με των άλλων ανθρώπων, ενώ στο επίπεδο της επικοινωνίας του το άτομο χρησιμοποιεί αποκλειστικά σύμβολα τα οποία είναι κοινά αποδεκτά, όπως η γραφή ή η ομιλία.

1.2.8 Επιφυλάξεις σχετικά με τα Σχήματα

Η θεωρία των Σχημάτων έχει χρησιμοποιηθεί από την Ψυχολογία για να ερμηνευθούν ικανότητες όπως η εξαγωγή πολύπλοκων συμπερασμάτων και η διατύπωση προβλέψεων για το μέλλον (Βοσνιάδου, 1998, σ.15). Παρά την αξία των Σχημάτων για την ερμηνεία της δομής και οργάνωσης των γνώσεων στη μακροπρόθεσμη μνήμη, διατυπώνονται παράλληλα και κάποιες επιφυλάξεις που αφορούν ακριβώς στα πλεονεκτήματά τους, δηλαδή την

προβλεπτικότητα και τη δυνατότητα προσαρμογής σε σύνθετες καταστάσεις. Η πρώτη επιφύλαξη σχετίζεται με το ότι «οι θεωρίες των Σχημάτων είναι καλές για μια ερμηνεία των αποτελεσμάτων που βασίζεται στα στοιχεία, αλλά τα Σχήματα δεν είναι τόσο προβλεπτικά όσο θα τα θέλαμε». Η δεύτερη αφορά στο ότι «η αντίληψη μας για τα Σχήματα δεν είναι αρκετά ευέλικτη για να επιδείξει την συμπεριφορά που περιμένουμε» (Eysenck & Keane, 1990, σ.283-286). Παρόλα αυτά, το μεγαλύτερο μέρος της γνωστικής δραστηριότητας του ανθρώπου μπορεί να ερμηνευτεί με τη βοήθεια των Σχημάτων. Ειδικές περιπτώσεις Σχημάτων είναι οι αλγόριθμοι²⁷, οι χειρονομίες²⁸, λεκτικά ή κοινωνικά σχήματα²⁹ ή τα σενάρια³⁰.

1.2.9 Χαρακτηριστικά των Σχημάτων

Οι μορφές που παίρνουν τα Σχήματα, κατά την οργάνωση της γνώσης, μπορεί να είναι πολύ διαφορετικές. Παρ' όλα αυτά τα Σχήματα διατηρούν σταθερά κάποια χαρακτηριστικά, τα οποία, όμως είναι αρκετά δύσκολο να αναγνωριστούν με ακρίβεια. (Eysenck & Keane, 1990, σ.327). Τα χαρακτηριστικά αυτά είναι:

α) η γενικότητα:

Αναφερόμενοι στα Σχήματα οι Eysenck και Keane (1990) μιλάνε για «γενικές γνώσεις» (σ.327), ενώ ο Kellogg (1994) λέει πως «το Σχήμα περιγράφει μόνο τα γενικά χαρακτηριστικά». Οι λεπτομέρειες, σχετικά με το αντικείμενο ή γεγονός που εξετάζουμε, δεν έχουν ιδιαίτερη σημασία (σ.18).

Προκειμένου να αποδώσουν το χαρακτηριστικό της γενικότητας, αρκετοί ερευνητές θεωρούν πως η δομή των Σχημάτων περιλαμβάνει θέσεις με διάφορες μεταβλητές (slot structure) (Anderson, 2000, σ. 155, Kellogg, 1994, σ.18). Κάθε μέλος της κατηγορίας και οι ιδιότητές του προσδιορίζεται από τις συγκεκριμένες τιμές που παίρνουν οι μεταβλητές του Σχήματος. Συγκεκριμένα, κάθε ζευγάρι μιας μεταβλητής και της τιμής της καθορίζει ένα τυπικό χαρακτηριστικό (Anderson, 2000, σ. 155) όπως φαίνεται στον πίνακα 1.2.

Πίνακας 1.2 Παράδειγμα μεταβλητών και πιθανών τιμών του γνωστικού Σχήματος «σπίτι»

μεταβλητή	πιθανές τιμές
Μέρη	δωμάτια
Υλικά	ξύλο, τσιμέντο, τούβλα,...
Λειτουργία	τόπος διαμονής ανθρώπων
Μορφή	ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο

Σύμφωνα με τους ίδιους, τα Σχήματα περιέχουν διάφορες σχέσεις, μεταβλητές και τιμές για τις μεταβλητές. Οι σχέσεις μπορούν να πάρουν μια ποικιλία μορφών από πολύ απλές έως πιο σύνθετες, οι μεταβλητές περιέχουν έννοιες ή άλλα Σχήματα, ενώ λέγοντας τιμή μιας μεταβλητής εννοούμε τις διάφορες συγκεκριμένες έννοιες που μπορούν να πάρουν τη θέση της μεταβλητής. Μια τέτοια αντίληψη για τα Σχήματα τα κάνει ικανά να περιέχουν γενικές γνώσεις που μπορούν να εφαρμοστούν σε διάφορες συγκεκριμένες περιπτώσεις (Eysenck & Keane, 1990, σ. 277). Για παράδειγμα, μια απλή σχέση όπως το «κτυπώ» μπορεί να χαρακτηρίζει ένα οικογενειακό καυγά (ο πατέρας χτυπά το παιδί) ή ένα αυτοκινητιστικό ατύχημα (το λεωφορείο χτυπά το ποδήλατο).

β) η ιεραρχική οργάνωση:

Σύμφωνα με τους Rumelhart και Norman, τα Σχήματα οργανώνονται συχνά με ιεραρχικό τρόπο, ώστε να περιέχουν άλλα Σχήματα (Eysenck & Keane, 1990, σ. 324). Το ίδιο υπογραμμίζουν ο Kellogg (1994, σ.20) και ο Cottrill στον ορισμό του Σχήματος (Cottrill et al, 1996, σ. 172). Μια τέτοια γνωστική δομή δημιουργεί προσδοκίες και επηρεάζει τον τρόπο επίλογής και πρόσληψης νέων πληροφοριών καθώς και τις διαισθήσεις μας (Fischbein, 1999). Η δυνατότητα «ενσωμάτωσης» μεταξύ τους, που παρουσιάζουν τα Σχήματα, οδηγεί τους ερευνητές (Rumelhart και Ortony, 1977, Fischbein & Grossman, 1997, σ.30) να διακρίνουν γενικότερα και ειδικότερα ή συγκεκριμένα Σχήματα. Τα πρώτα έχουν ένα βασικό δομικό ρόλο ενώ τα δεύτερα είναι ειδικά, δεμένα με συγκεκριμένο περιεχόμενο, Σχήματα με πιο περιορισμένη ισχύ.

Παραδείγματα γενικών Σχημάτων είναι αυτά της ταξινόμησης ή της επαγωγής, τα Σχήματα του μέτρου, του αριθμού, της έννοιας της αναλογίας, της πιθανότητας κλπ. Αντίθετα, τα συγκεκριμένα Σχήματα μπορεί να δημιουργηθούν με αφορμή μια έννοια με συγκεκριμένο νόημα (τρίγωνο, καρέκλα, μολύβι κλπ), ένα μαθηματικό ή επιστημονικό τύπο κλπ. Στην κάθε μία από αυτές τις περιπτώσεις το συγκεκριμένο Σχήμα παρέχει τις προϋποθέσεις για να αναγνωριστεί ένα αντικείμενο ή για να εκτελεστεί μια συγκεκριμένη λειτουργία (Fischbein & Grossman, 1997, σ. 30). Τη σχέση ανάμεσα στα διάφορα είδη Σχημάτων περιγράφουν οι Fischbein και Grossman (1997) ως εξής, «τα Σχήματα οργανώνονται σε ιεραρχίες από τα πολύ γενικά, στα συγκεκριμένα, δεμένα με το περιεχόμενο Σχήματα» (σ. 30).

Η ιεραρχική οργάνωση δεν πρέπει σε καμία περίπτωση να μας οδηγεί στη σκέψη πως το Σχήμα είναι μία στατική δομή στο μυαλό. Αυτή η σκέψη έρχεται σε αντίθεση με την αρχική σύλληψη του Σχήματος από τον Bartlett σαν μια ευμετάβλητη, ενεργή και λειτουργική μορφή νοητικής αναπαράστασης (Kellogg, 1994, σ.20).



γ) ο διττός χαρακτήρας:

Γενικά, υπάρχει συναίνεση ανάμεσα στους ερευνητές σχετικά με το διττό χαρακτήρα του γνωστικού Σχήματος: πληροφοριακό και ενεργητικό³¹. Ο πληροφοριακός χαρακτήρας αντανακλά την στατική όψη του Σχήματος, ενώ ο ενεργητικός τη δυναμική του όψη. Για παράδειγμα στον ορισμό του Σχήματος που δίνει ο Chinnappan (1.2.4), σαν πληροφοριακό χαρακτήρα μπορούμε να θεωρήσουμε «τις έννοιες και τις σχέσεις ανάμεσα στις έννοιες», ενώ σαν ενεργητικό χαρακτήρα «τη γνώση για το πώς και πότε τις χρησιμοποιούμε». Σύμφωνα με τον πληροφοριακό - ενεργητικό χαρακτήρα του γνωστικού Σχήματος ο Davis ισχυρίζεται πως, στην περίπτωση της Γεωμετρίας, οι νοητικές αναπαραστάσεις των γεωμετρικών σχημάτων (τα γνωστικά δομικά στοιχεία) δεν επαρκούν για τη λύση γεωμετρικών προβλημάτων. Τα άτομα χρειάζονται επιπλέον νοητικές αναπαραστάσεις μετασχηματισμών, όπως στροφής, παράλληλης μετατόπισης κλπ για να μετασχηματίζουν τα σχήματα ή για να δημιουργούν με αφορμή αυτά κάποια άλλα.

1.2.10 Οργάνωση των γνωστικών Σχημάτων

Ο τρόπος με τον οποίο οργανώνεται η γνώση υπό μορφή Σχημάτων, συσχετίζεται από πολλούς ερευνητές με την αποτελεσματικότητα του ατόμου (Lawson & Chinnappan, 2000, Chinnappan, 1998, Shriki & Bar – Οπ.σ. 154). Συγκεκριμένα η οργάνωση θεωρείται ως καθοριστικός παράγοντας για τη μνημονική λειτουργία, δηλαδή τη συγκράτηση και την ανάκτηση πληροφοριών. Ακόμα συνδέεται με ένα βασικό στοιχείο της επεξεργασίας πληροφοριών, αυτό της «οικονομίας». Η καλύτερη οργάνωση της γνώσης δίνει το πλεονέκτημα της συγκράτησης πληροφοριών στη μνήμη με το ελάχιστο μνημονικό «βάρος». Η διερεύνηση του τρόπου οργάνωσης των γνωστικών δομών γίνεται με σύγκριση της λειτουργίας ειδικών και αρχαρίων (π.χ. καθηγητές - μαθητές). Από αυτήν προκύπτουν ενδιαφέροντα συμπεράσματα, όπως ότι οι αρχάριοι φέρονται να οργανώνουν την κατανόηση μιας έννοιας σε ξεχωριστά Σχήματα, αντίστοιχα σε διαφορετικούς ορισμούς της έννοιας, να χρησιμοποιούν διαφορετικές νοητικές εικόνες της κλπ. Στον αντίποδα, οι ειδικοί έχουν όλες αυτές τις γνώσεις οργανωμένες σε ένα Σχήμα, με αποτέλεσμα να κινούνται εύκολα μεταξύ των διαφόρων μερών του και να διευκολύνονται, μειώνοντας παράλληλα το γνωστικό φορτίο (Moore, 1994, σ. 262). Συνεπώς η δομή των γνωστικών Σχημάτων των αρχαρίων διακρίνεται από αποσπασματικότητα, σε αντίθεση με την συνέπεια των αντίστοιχων Σχημάτων των ειδικών. Αυτό έχει ευνοϊκά αποτελέσματα στη λύση προβλήματος, όπου οι τελευταίοι έχουν τη δυνατότητα να απλοποιούν τα προβλήματα χρησιμοποιώντας καθολικές ιδιότητες, όπως

π.χ. συμμετρίες, ενώ οι αρχάριοι περιορίζονται μόνο σε τοπικές ιδιότητες. Μια ακόμα διαφορά που εντοπίζεται είναι πως οι αρχάριοι δομούν τις αναπαραστάσεις τους σαν δένδρο, με αποτέλεσμα να έχουν μοναδικές πηγές για συμπεράσματα, σε αντίθεση με τους ειδικούς οι οποίοι τις δομούν σαν γραφήματα και έχουν πολλαπλές και υπεράριθμες πηγές συμπερασμού (Savelsbergh, 1998).

Η οργάνωση της γνώσης συνδέεται από τους ερευνητές με την ανάκληση και την αποτελεσματική χρήση της (Lawson & Chinnappan 1994, Chinnappan, 1998). Σχετικά με την ποιότητα της βάσης γνώσεων (knowledge base) που έχει το άτομο, ο Chinnappan (1998) υποστηρίζει πως «ένα καλά οργανωμένο ή ολοκληρωμένο πεδίο βάσης γνώσης όχι μόνο διευκολύνει την πρόσβαση σε σχετικές πληροφορίες αλλά, επίσης, καθορίζει πώς αυτές οι πληροφορίες αναπτύσσονται στην έρευνα για λύση του προβλήματος» (σ.202). Αντίθετα, η αποσπασματική δόμηση της γνώσης συνδέεται με δυσκολίες στη συσχέτιση ιδεών και με ανεπιτυχή μάθηση (Gray et all, 1999, σ.119).

Έτσι η αποτελεσματικότητα στην οποία αναφερόμαστε σχετίζεται με την αποδοτική μάθηση, με λιγότερη σπατάλη νοητικής ενέργειας, με ευχέρεια στη χρήση συνολικών θεωρήσεων (σε αντιδιαστολή με τις τοπικές – αποσπασματικές θεωρήσεις) και με βελτίωση της ικανότητας των μαθητών στη λύση προβλήματος. Είδαμε πως η αποτελεσματικότητα των Σχημάτων εξαρτάται από την οργάνωσή τους. Ποια, όμως, είναι τα στοιχεία εκείνα που χαρακτηρίζουν την καλή οργάνωση των γνωστικών Σχημάτων;

Ένας παράγοντας που καθορίζει την ποιότητα της οργάνωσης των γνωστικών Σχημάτων είναι οι συνδέσεις που εγκαθίστανται μεταξύ των διαφορετικών Σχημάτων. Η έρευνα δείχνει πως η διαφοροποίηση αρχαρίων – ειδικών, αναφορικά με την επιτυχία τους στη λύση προβλήματος, οφείλεται κυρίως στον τρόπο σύνδεσης των γνώσεων (οργάνωση) και δευτερευόντως στο περιεχόμενό τους (Lawson & Chinnappan, 2000, σ. 26). Οι καλύτερης ποιότητας συνδέσεις επιτρέπουν στο άτομο να σκέφτεται σε συνολικότερο επίπεδο, να ανακτά αυθόρμητα περισσότερες γνώσεις και να ενεργοποιεί ή να εγκαθιδρύει περισσότερες συνδέσεις ανάμεσα σε δοσμένα γνωστικά Σχήματα και σχετικές πληροφορίες (Lawson & Chinnappan, 2000).

Κατά συνέπεια οι συνδέσεις ανάμεσα στα Σχήματα και συγκεκριμένα η έκταση και η ποιότητα αυτών των συνδέσεων, παίζουν αποφασιστικό ρόλο για την οργάνωση της γνώσης και την αποτελεσματική μαθησιακή λειτουργία. Στον αντίποδα, δύο στοιχεία φαίνεται να παρεμποδίζουν τη σωστή οργάνωση: η αποσπασματικότητα και οι λίγες συνδέσεις. Δηλαδή, τα διάφορα κομμάτια πληροφοριών που συγκρατούνται στη μακροπρόθεσμη μνήμη και γίνονται «γνώσεις» να είναι μικρά και να μη συνδέονται αρκετά.



Παρά τη χρησιμότητα των Σχημάτων ως ερμηνευτικού πλαισίου για την κατανόηση της οργάνωσης των γεωμετρικών γνώσεων και των συνδέσμων που αναπτύσσονται μεταξύ τους, υπάρχουν δυσκολίες στη διερεύνηση της δομής των Σχημάτων. Στα επόμενα θα παρουσιάσουμε τις απόψεις που υπάρχουν στη βιβλιογραφία, σχετικά με αυτό. Πρώτα όμως πρέπει να κάνουμε ένα διαχωρισμό. Θα θεωρήσουμε ως πρώτο επίπεδο: τοπικό τη διερεύνηση ενός μεμονωμένου γνωστικού Σχήματος, για παράδειγμα του Σχήματος του ισοσκελούς τριγώνου (ΣΙΤ) το οποίο αποτελεί αντικείμενο της παρούσης έρευνας, ενώ ως δεύτερο επίπεδο: συνολικό, τη διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο οργανώνονται τα Σχήματα μεταξύ τους.

Τοπικό επίπεδο

Στα Μαθηματικά, και σε τοπικό επίπεδο, παρουσιάζονται δύο διαφορετικές αντιλήψεις - προτάσεις που αφορούν στο Σχήμα και οι οποίες είναι σήμερα σε χρήση στην έρευνα:

- Η μία πρόταση, την οποία εισηγείται ο Moore (1994), αφορά στο Σχήμα που δημιουργείται με αφορμή μια έννοια, και που ο Moore το ονομάζει «Σχήμα κατανόησης μιας έννοιας» (σ. 253). Σύμφωνα με αυτή την πρόταση, το Σχήμα περιλαμβάνει ως συστατικά του τον ορισμό, την εικόνα και τη χρήση της έννοιας.
- Η άλλη πρόταση γίνεται από τον Dubinsky και τους συνεργάτες του (1992) και είναι η θεωρία που ονομάζεται με το ακρωνύμιο APOS³². Σύμφωνα με αυτήν το Σχήμα είναι μια συλλογή από ενέργειες, διαδικασίες και αντικείμενα, ενώ η δομή του δε διαχωρίζεται από τη συνεχή ανακατασκευή του.

Στα επόμενα, θα επιχειρήσουμε μία συνοπτική περιγραφή και σύγκριση των δύο προτάσεων.

Α) Ερέθισμα και οδηγός του Moore είναι το ενδιαφέρον του για τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές, όταν προσπαθούν να αποδείξουν μία μαθηματική πρόταση. Για να χρησιμοποιηθούν όμως οι έννοιες στις αποδείξεις προϋποτίθεται η κατανόησή τους, έτσι ο Moore³³ (1994) προτείνει ένα Σχήμα κατανόησης της έννοιας (concept understanding scheme) το οποίο αναλύει σε τρία συστατικά μέρη: στον ορισμό της έννοιας (concept definition), στην εικόνα της έννοιας (concept image) και στη χρήση της έννοιας (concept usage) (σ. 253).

Τα δύο πρώτα μέρη (ορισμός της έννοιας και εικόνα της έννοιας) υποδεικνύονται αρχικά από τον Vinner και τους συνεργάτες του ως παράγοντες που συνεισφέρουν στην κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας (Vinner & Hershkowitz, 1980, 1983 Vinner & Tall, 1981, σ. 151).

Ο ορισμός αναφέρεται σε ένα τυπικό λεκτικό ορισμό που εξηγεί με ακρίβεια την έννοια με μη κυκλικό τρόπο όπως μπορεί να βρεθεί σε ένα βιβλίο μαθηματικών. Η εικόνα της έννοιας αναφέρεται στο σύνολο όλων των νοητικών εικόνων που συσχετίζει κάποιος με την έννοια,

μαζί με όλες τις ιδιότητες που την χαρακτηρίζουν³⁴. Δηλαδή, πρόκειται για «τη συνολική γνωστική δομή που συνδέει κάποιος με την έννοια και περιλαμβάνει όλες τις νοητικές εικόνες, τις ιδιότητες και τις διαδικασίες που σχετίζονται με αυτήν. Κτίζεται μέσα στα χρόνια από τις εμπειρίες κάθε είδους, και αλλάζει καθώς το άτομο συναντά νέα ερεθίσματα και ωριμάζει» (Fischbein, 1993, σ.150).

Ο Fischbein (1993) εξειδικεύει τους δύο αυτούς όρους στην περίπτωση της Γεωμετρίας και διευκρινίζει τη σχέση τους με την ορολογία που εισάγει ο ίδιος για τα γεωμετρικά σχήματα, δηλαδή τις σχηματικές έννοιες. Λέει «στη Γεωμετρία η ιδανική σχηματική έννοια³⁵ αντιστοιχεί με τον ορισμό της έννοιας, ενώ η νοητική της αντανάκλαση, με όλες τις συνεκδοχές και τις ασάφειές της, αντιστοιχεί σε αυτό που οι Vinner και Tall ονομάζουν "εικόνα της έννοιας"» (σ.150). Η διευκρίνιση αυτή είναι πολύτιμη για τη μελέτη των Σχημάτων στη Γεωμετρία γενικά και για τη συγκεκριμένη έρευνα ειδικότερα.

Αν ξαναγυρίσουμε στον Moore (1994), αυτός εισάγει επιπλέον του ορισμού και της εικόνας της έννοιας και ένα τρίτο μέρος, τη χρήση της έννοιας, που περιλαμβάνει τους τρόπους με τους οποίους δουλεύει κάποιος με αυτήν (π.χ. φτιάχνοντας ή χρησιμοποιώντας παραδείγματα, κάνοντας αποδείξεις κλπ.) (σ.252).

Για να είναι λειτουργικό, δηλαδή αποτελεσματικό, το «Σχήμα κατανόησης της έννοιας» πρέπει να αναπτύσσεται ισόρροπα και προς τους τρεις αυτούς άξονες: ορισμό, εικόνα και χρήση. Κάθε άξονας εξυπηρετεί συγκεκριμένες λειτουργίες μέσα στο γνωστικό Σχήμα μιας έννοιας, ώστε συνολικά να αλληλοσυμπληρώνονται. Ο Moore, ο οποίος ενδιαφέρεται για τις γνωστικές δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές του στις τυπικές μαθηματικές αποδείξεις, θεωρεί πως οι ορισμοί είναι εκείνοι που καθορίζουν την ορολογία, αποκαλύπτουν τη λογική δομή³⁶ και δίνουν τα απαιτούμενα βήματα ώστε να γίνει η απόδειξη. Η εικόνα της έννοιας εμφανίζεται σε δεύτερο επίπεδο ελλιπής. Αντίθετα οι Vinner και Hershkowitz προκρίνουν τη χρησιμότητα της εικόνας, ισχυριζόμενοι πως σχεδόν πάντα την ανακαλούμε και δουλεύουμε με αυτήν. Συγκεκριμένα λένε πως «προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε τις έννοιες χρειαζόμαστε την εικόνα της έννοιας και όχι τον ορισμό της, και ακόμα πως ο ορισμός (στην περίπτωση που η έννοια ορίστηκε με αυτόν) θα μείνει αδρανής ή ακόμα και θα ξεχαστεί» (Vinner & Hershkowitz, 1983).

Β) Η δεύτερη πρόταση που αφορά στη δημιουργία ενός Σχήματος γίνεται από τον Dubinsky. Αυτός εξετάζει την οργάνωση των Σχημάτων σε τοπικό επίπεδο βασιζόμενος στην άποψη πως «το Σχήμα δεν είναι μια συλλογή (λίστα) από στοιχεία αλλά μάλλον ένα σύστημα που ανατροφοδοτείται κυκλικά» (Dubinsky, 1992, σ.106). Η άποψη αυτή έχει μια δυναμική

αντίληψη για το Σχήμα και συνδέει την ύπαρξή του με τη συνεχή κατασκευή και ανακατασκευή του.

Η θεωρία APOS (από τα αρχικά των λέξεων Action – Process – Object – Schema), που προτείνει ο Dubinsky, περιγράφει τον τρόπο κατασκευής των μαθηματικών εννοιών, ως εξής:

- Στην αρχή υπάρχουν διάφορες ενέργειες (actions) του ατόμου.
- Όταν το άτομο συνειδητοποιεί μια συγκεκριμένη ενέργεια, αρχίζει να τη σκέφτεται και να τη συνδυάζει με άλλες ενέργειες, τότε την εσωτερικεύει. Στην περίπτωση αυτή λέμε πως αποκτά συνειδητό έλεγχο πάνω στην ενέργεια, δηλαδή μπορεί να περιγράψει όλα τα βήματα δίχως να χρειάζεται να τα κάνει, οπότε η ενέργεια μετατρέπεται σε διαδικασία (process).
- Η συνειδητοποίηση της συνολικής διαδικασίας από το άτομο και η επίγνωση του ότι διάφοροι μετασχηματισμοί μπορούν να δράσουν πάνω της ή η ικανότητα του ατόμου να κατασκευάσει τέτοιους μετασχηματισμούς οδηγούν στην κατασκευή ενός αντικειμένου (object).
- Τέλος, οι τρεις γενικοί τύποι μαθηματικής γνώσης, δηλαδή οι ενέργειες, οι διαδικασίες και τα αντικείμενα, οργανώνονται σε δομές που ονομάζονται Σχήματα.

Συνεπώς το Σχήμα, σύμφωνα με την θεωρία APOS, είναι το τελικό αποτέλεσμα μιας αφαιρετικής πορείας που ξεκινά από συγκεκριμένες ενέργειες οι οποίες μέσα από αναστοχασμό εξελίσσονται σε γενικευμένες διαδικασίες και καταλήγουν να γίνουν νοητικά αντικείμενα. Το Σχήμα, λοιπόν, είναι ένα σύνολο από ενέργειες, διαδικασίες, αντικείμενα και άλλα Σχήματα που συνδέονται με διάφορους τρόπους και εμφανίζονται σε μία κατάσταση προβλήματος (Dubinsky, 1992, σ. 106, Cottrill et al, 1996, σ. 171, Tall, 1999).

Για παράδειγμα ο Cottrill και οι συνεργάτες του, βασιζόμενοι στη θεωρία APOS, περιγράφουν τον τρόπο με τον οποίο - κατά την άποψή τους - οι μαθητές κατασκευάζουν το γνωστικό Σχήμα της έννοιας του ορίου:

Στον υπολογισμό του ορίου της συνάρτησης $\varphi(x)$ όταν το $x \rightarrow a$, υπάρχουν οι επόμενες φάσεις:

- αρχικά υπάρχει η ενέργεια σύμφωνα με την οποία εκτιμάται η τιμή της συνάρτησης φ σε μερικά σημεία, τέτοια που, κάθε διαδοχικό σημείο να βρίσκεται πλησιέστερα στο a από το προηγούμενο
- η εσωτερίκευση της προηγούμενης ενέργειας σε μια διαδικασία στην οποία $\varphi(x) \rightarrow l$, καθώς $x \rightarrow a$



- η ενσωμάτωση της διαδικασίας έτσι, ώστε, για παράδειγμα, όταν μιλάμε για συνδυασμό ιδιοτήτων του ορίου, η διαδικασία όριο γίνεται αντικείμενο στο οποίο μπορούμε να εφαρμόσουμε διάφορες ενέργειες. (Cottrill et al, 1996, σ.170, 174).

Γ) Συγκρίνοντας τις δύο προτάσεις, σχετικά με την οργάνωση του Σχήματος, διαπιστώνουμε ότι και οι δύο συνδέουν την κατασκευή γνωστικών δομών (Σχημάτων) με τη δράση, αλλά από διαφορετική κατεύθυνση η κάθε μία. Στην πρώτη (Α) η δράση έρχεται σαν αποτέλεσμα της γνώσης της έννοιας, ενώ στη δεύτερη (Β) η δράση είναι που οδηγεί στη δημιουργία της έννοιας.

Συγκεκριμένα στον Moore η αντίληψη της έννοιας ξεκινά από τον ορισμό και την εικόνα, ενώ η δράση αναφέρεται στη χρήση της έννοιας, που έρχεται να υποβοηθήσει και να βαθύνει την κατανόησή της. Στη θεωρία APOS, αντίθετα, η δράση (ενέργειες και διαδικασίες) προηγείται της έννοιας (: του αντικειμένου). Οι Barnard και Tall (2001) συσχετίζουν την πρώτη προσέγγιση με τον όρο *schema* «που προσφέρει ένα πιο επιδέξιο τρόπο για τη δόμηση των νοητικών εννοιών που μπορούν να λειτουργούν ενέλικτα σαν γνωστικές μονάδες», ενώ συσχετίζουν τη δεύτερη με τον όρο *scheme* που παραπέμπει στο ότι «τα Σχήματα διαδοχικών ενεργειών ενσωματώνονται (*encapsulated or reified*) ή γίνονται νοητικά αντικείμενα» (σ.91). Συνεπώς διαπιστώνεται διαφορά εστίασης στις δύο προσεγγίσεις, αφού η πρώτη ξεκινά από την έννοια, ενώ η άλλη από τη δράση.

Μία δεύτερη διαφορά αφορά στη σχέση που έχει η κάθε προσέγγιση με το γνωστικό αντικείμενο. Σύμφωνα με τον Tall, η αλληλουχία APOS (ενέργεια – διαδικασία – αντικείμενο – Σχήμα) βρίσκεται πιο κοντά στην ανάπτυξη της γνώσης στην Αριθμητική³⁷ και στην Άλγεβρα, ενώ αντίθετα, η Γεωμετρία ξεκινά σαν μια θεωρία που βασίζεται στα αντικείμενα. Με αυτό δεν υποστηρίζει πως η τελευταία δεν περιλαμβάνει διαδικασίες (φυσικά υπάρχουν διαδικασίες, όπως ο σχεδιασμός γεωμετρικών σχημάτων, η μέτρηση, η κατασκευή με γεωμετρικά όργανα κλπ), αλλά ότι οι διαδικασίες στοχεύουν στην απόκτηση γνώσης για τα ίδια τα αντικείμενα (Tall, 1999, σ. 3). Παρόλο που στην έρευνα του Moore δεν εξετάστηκαν γεωμετρικά θέματα³⁸, φαίνεται πως η πρότασή του η οποία ξεκινά από το αντικείμενο, αποτελεί καλύτερο ερμηνευτικό πλαίσιο από τη θεωρία APOS στην περίπτωση των γεωμετρικών εννοιών.

Η θέση που μόλις διατυπώθηκε και συσχετίζει το γνωστικό αντικείμενο με τις αντιλήψεις για την οργάνωση των αντίστοιχων γνωστικών Σχημάτων, ενισχύεται και από τις απόψεις για την ανακλαστική αφαίρεση³⁹. Η έρευνα δείχνει την ύπαρξη δύο μορφών ανακλαστικής αφαίρεσης, «η μία εστιάζει στα αντικείμενα και εμφανίζεται για παράδειγμα στην Ευκλείδεια

Γεωμετρία, η άλλη εστιάζει στις ενέργειες πάνω στα αντικείμενα (που συνήθως αναπαρίστανται με σύμβολα), για παράδειγμα, στην Αριθμητική, στην Άλγεβρα και στην Ανάλυση» (Gray et al, 1999, σ. 115).

✱ **Συνολικό επίπεδο:**

Σχετικά με την οργάνωση του δεύτερου επιπέδου, δηλαδή την οργάνωση των γνωστικών δομών μεταξύ τους, θα αναφέρουμε δύο διαφορετικές προσεγγίσεις. Η μία αντιμετωπίζει τις δομές ως ιεραρχίες και δίκτυα, ενώ η άλλη αντιμετωπίζει τις δομές με περιβαλλοντικούς όρους.

Α) Σχετικά με τον τρόπο οργάνωσης των γνωστικών δομών οι Hiebert και Carpenter (1992) προτείνουν δύο εναλλακτικές (απλοποιημένες) μεταφορές τις κατακόρυφες ιεραρχίες και τα δίκτυα.

Όταν η δόμηση γίνεται ιεραρχικά, κάποιες αναπαραστάσεις εντάσσουν άλλες αναπαραστάσεις, αναπαραστάσεις ταιριάζουν σαν λεπτομέρειες κάτω από ή μέσα σε πιο γενικές αναπαραστάσεις. Οι γενικεύσεις είναι παραδείγματα αναπαραστάσεων που σχηματίζουν ομπρέλα, ενώ οι ειδικές περιπτώσεις είναι παραδείγματα λεπτομερειών. Στη δεύτερη μεταφορά η δόμηση γίνεται σαν ιστός αράχνης. Οι ενώσεις ή κόμβοι μπορούν να θεωρηθούν σαν κομμάτια ή αναπαριστώμενες πληροφορίες, και τα νήματα μεταξύ τους σαν οι συνδέσεις ή οι σχέσεις (σ.67).

Τη δεύτερη μεταφορά, με τους κόμβους (= έννοιες) και τα βέλη που τους συνδέουν, χρησιμοποιούν στην έρευνά τους οι Shriki & Bar On (1997) για να διερευνήσουν τις γνωστικές δυσκολίες των μαθητών στη Γεωμετρία και να διατυπώσουν τη «θεωρία της συνολικής και τοπικής κατανόησης». Την υλική αναπαράσταση αυτής της μεταφοράς (2^{ης}) συναντάμε στον «εννοιολογικό χάρτη», δηλαδή στη γραφική αναπαράσταση ενός πεδίου, που δημιουργεί το άτομο, και στο οποίο οι κόμβοι χρησιμοποιούνται για να αναπαραστήσουν έννοιες κλειδιά του πεδίου και οι σύνδεσμοι μεταξύ τους συμβολίζουν τη σχέση ανάμεσα σε αυτές τις έννοιες⁴⁰ (Furinghetti & Paola, 1999, σ.351).

Στην προέκταση αυτών των ιδεών, οι Barnard & Tall (2001) προτείνουν τη δυνατότητα ταυτόχρονης χρήσης των δύο μεταφορών. Οι δύο ερευνητές επισημαίνουν πως «μια έννοια μπορεί να θεωρηθεί ως δίκτυο συνδεδεμένων γνώσεων επιτρέποντας δομές τόσο ιεραρχικές όσο και υπό μορφή δικτύου να συνυπάρχουν στην ίδια δομή» (σ.91).

Ένα τέτοιο ιεραρχικό μοντέλο για τη δόμηση των γνώσεων παρουσιάζει πλεονεκτήματα γιατί μειώνει το βάρος στη μνήμη. Συγκεκριμένα τα χαρακτηριστικά των εννοιών που βρίσκονται σε υψηλότερο ιεραρχικά επίπεδο δε χρειάζεται να επαναληφθούν στις έννοιες που βρίσκονται χαμηλότερα στην ιεραρχία, αφού είναι αυτονόητο ότι τα χαρακτηριστικά διατηρούνται και σε

αυτές⁴¹. Η συνειδητοποίηση πως μια κατηγορία αντικειμένων εντάσσεται σε μια άλλη είναι μία μορφή γνωστικής συμπίεσης⁴² (cognitive compression) (Burnard & Tall, 2001, σ.93). Η ιεραρχημένη δομή συντελεί στην αποτελεσματικότητα της οργάνωσης, καθώς διευκολύνει τις γνωστικές λειτουργίες σε σύνθετες περιπτώσεις.

Β) Ο Battista (1994), προσπαθώντας να ερμηνεύσει τον τρόπο οργάνωσης των γνωστικών δομών, παρομοιάζει το εννοιολογικό πεδίο με ένα περιβάλλον που έχει ιδιότητες του χώρου και τον τρόπο γνωριμίας με το εννοιολογικό πεδίο, με τη γνωριμία μας με το συγκεκριμένο χώρο⁴³.

Τι συμβαίνει, όταν κάποιος προσπαθεί να γνωρίσει ένα νέο περιβάλλον του χώρου, για παράδειγμα μια άλλη πόλη την οποία επισκέπτεται για πρώτη φορά; Αρχικά κινείται στο νέο περιβάλλον και παρατηρεί χαρακτηριστικά σημεία του (π.χ. το ξενοδοχείο που μένει, τον καθεδρικό ναό, μια τράπεζα, το σταθμό των τρένων κλπ), δηλαδή θέτει ορόσημα. Κατόπιν συνειδητοποιεί τους δρόμους που συνδέουν το ένα σημείο με το άλλο (π.χ. το ξενοδοχείο του με τον σταθμό των τρένων), και τέλος οι δρόμοι ολοκληρώνονται σε ένα συνολικό δίκτυο, σαν σχηματισμοί ή τοπογραφικοί χάρτες.

Κάτι παρόμοιο συμβαίνει και με τη μάθηση. Πρώτα το άτομο αποκτά συγκεκριμένες πληροφορίες που είναι όμως εννοιολογικά απομονωμένες (π.χ. συγκεκριμένες περιπτώσεις εννοιών ή αναπαραστάσεις πρότυπων παραδειγμάτων), αυτά είναι τα ορόσημα. Μετά αρχίζει να διαπιστώνει σχέσεις ανάμεσα στις απομονωμένες πληροφορίες, δηλαδή δημιουργούνται δρόμοι. Τέλος, οι γνωστικές δομές που αποκτήθηκαν ολοκληρώνονται καλύτερα με εγκαθίδρυση όλο και συνθετότερων σχέσεων, δηλαδή οι τοπογραφικοί χάρτες αντιστοιχούν σε συνολικές οργανωτικές δομές (Battista, 1994, σ.87).

Η αναλογία του Battista υπογραμμίζει την ουσιώδη σύνδεση που υπάρχει ανάμεσα στη μαθηματική σκέψη και στη σκέψη που συνδέεται με το χώρο. Η σύνδεση βρίσκει το καταλληλότερο περιβάλλον για να αναπτυχθεί στην περίπτωση της Γεωμετρίας. Ο λόγος είναι πως για τη μάθησή της Γεωμετρίας επικρατούν δύο απόψεις από τις οποίες η μία βλέπει τη Γεωμετρία σαν την επιστήμη του χώρου και η άλλη τη βλέπει σαν λογική δομή. Οι ερευνητές συμφωνούν πως οι δύο απόψεις συνδέονται αφού *«κάποια επίπεδα της Γεωμετρίας, ως επιστήμης του χώρου, είναι απαραίτητα για τη μάθηση της Γεωμετρίας, σαν λογικής δομής»* (Hershkowitz, σ. 70).

Στην ουσία της η πρόταση του Battista δε διαφέρει πολύ από την προσέγγιση των Hiebert και Carpenter για τα δίκτυα, πέρα από το γεγονός ότι δίνει επιπλέον μια σκοπιμότητα στο «κτίσιμο» του δικτύου.

1.2.11 Απόκτηση και εξέλιξη των γνωστικών Σχημάτων

Το θέμα της απόκτησης των γνωστικών Σχημάτων δε φαίνεται να απασχολεί ιδιαίτερα τους ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης, αφού ελάχιστες αναφορές υπάρχουν στη βιβλιογραφία, εκτός από τη θεωρία APOS (στην οποία αναφερθήκαμε στην τοπική οργάνωση των Σχημάτων, 1.2.9). Τα ερωτήματα, σχετικά με την απόκτηση των Σχημάτων, πολλαπλασιάζονται καθώς το κύριο ερευνητικό παράδειγμα (paradigm) στη μαθηματική εκπαίδευση, ο κονστρουκτιβισμός, αποκλείει τη μετάδοση των εννοιολογικών Σχημάτων από το ένα άτομο στο άλλο με τη γλώσσα. Αρχή του κονστρουκτιβισμού στα μαθηματικά, σύμφωνα με τον von Glasersfeld, είναι πως *«η γνώση δεν λαμβάνεται παθητικά, αλλά κτίζεται ενεργητικά από το άτομο που μαθαίνει»* (Ernest, 1996, σ. 336). Σε μία τέτοια επαναληπτική διαδικασία η μάθηση κτίζεται κάθε φορά χρησιμοποιώντας ως υλικό αντικείμενα που έχουν κατασκευαστεί προηγουμένως. Το γεγονός αυτό δημιουργεί την εύλογη απορία τότε, *«πώς αποκτούν οι άνθρωποι τα εννοιολογικά Σχήματα;»* (von Glasersfeld, 1990, σ. 35).

Μια απάντηση που φαίνεται πως έχει βάση, καθώς τη χρησιμοποιούν ψυχολόγοι αλλά και ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης, είναι πως δημιουργούμε τα Σχήματα από τις συγκεκριμένες εμπειρίες μας, είτε με αφαιρετικές διαδικασίες είτε με κάποια μορφή ασθενούς επαγωγής (Eysenck & Keane, 1990, σ.280, von Glasersfeld, 1990, σ. 35). Ο von Glasersfeld (1981) εξηγεί τον τρόπο με τον οποίο καταγράφουμε τις εμπειρίες, στρέφοντας την προσοχή μας στα στοιχεία που δεχόμαστε με την αντίληψη, σαν αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης με τον κόσμο γύρω μας.

Ο Tall (2002) συμφωνεί με αυτό τον τρόπο δημιουργίας των Σχημάτων και συμπληρώνει την εικόνα υποστηρίζοντας πως στο σχηματισμό τους εμπλέκεται και η ικανότητα του ατόμου να κατηγοριοποιεί τόσο τα αντικείμενα του κόσμου γύρω του, όσο και τις δικές του ενέργειες (σ.132). Ο ίδιος ισχυρίζεται πως *«το μυαλό μας παίρνει σαν βασικά δεδομένα για συλλογισμό τις καταχωρήσεις της προηγούμενης εμπειρίας μας,..... και έτσι κατηγοριοποιούμε μορφές ενεργειών»* (ό.π., σ.134).

Σε αντίθεση με την αμηχανία που επικρατεί στην έρευνα σχετικά με την απόκτηση των Σχημάτων, οι ερευνητές συμφωνούν στο γεγονός ότι τα γνωστικά Σχήματα εξελίσσονται (Eysenck & Keane, 1990, σ.280, Fischbein, 1999, σ.41). Η εξέλιξή τους απασχολεί την έρευνα που την εξετάζει στο πλαίσιο της διδασκαλίας και της μάθησης. Σύμφωνα με τον Vygotsky (1988), *«η μάθηση είναι σωστή μόνο όταν προετοιμάζει την εξέλιξη»* (σ.297), κατά συνέπεια η μάθηση συνδέεται με την εξέλιξη των Σχημάτων.

Η ανάπτυξη του Σχήματος συσχετίζεται επίσης με τις δύο βασικές λειτουργίες του (α. με την αφομοίωση νέων στοιχείων και β. με την προσαρμογή των στοιχείων αυτών σε καινούριες καταστάσεις). Πράγματι, ένα Σχήμα που έχει αφομοιώσει νέα στοιχεία δεν είναι πια το ίδιο όπως ήταν πριν, ενώ ο όρος «προσαρμογή» χρησιμοποιείται για δομικές αλλαγές που συμβαίνουν στο ίδιο το Σχήμα (Skemp, 1971, σ.44). Την ίδια αντίληψη, σχετικά με την εξέλιξη των γνωστικών Σχημάτων και της γνώσης γενικότερα ως μιας διαδικασίας συνεχούς εμπλουτισμού και αναδόμησης των γνωστικών δομών, έχουν και άλλοι ερευνητές (Hatano, 1996, σ.201). Οι Rumelhart & Norman μάλιστα, αναφέρουν τους τρεις τρόπους με τους οποίους μπορεί να συμβεί η εξέλιξη: με προσαύξηση των Σχημάτων με νέα στοιχεία, με συντονισμό, δηλαδή επεξεργασία και ραφινάρισμα / εξευγενισμό των εννοιών μέσα από την εμπειρία και τέλος, με αναδόμηση, η οποία εμπεριέχει τη δημιουργία νέων Σχημάτων είτε με αναλογία είτε με επαγωγή⁴⁴ (Eysenck & Keane, 1990, σ.280).

Ο Dubinsky (1992) συνδέει την εξέλιξη των Σχημάτων με την ύπαρξή τους. Καθώς αντιλαμβάνεται το Σχήμα σαν μια δυναμική δραστηριότητα, υποστηρίζει πως «η ύπαρξή του δεν μπορεί να διαχωριστεί από τη συνεχή κατασκευή και ανακατασκευή του» (σ.106). Ο Fischbein (1999), εξετάζοντας την αλληλεξάρτηση των Σχημάτων με τις διαισθήσεις, αναφέρεται στην εξέλιξη και σχολιάζει «ένας αριθμός πειραματικών ευρημάτων μας οδηγεί στην υπόθεση πως οι διαισθήσεις σχετίζονται έντονα με τα δομικά Σχήματα⁴⁵ και ότι και τα δύο δείχνουν μια συγκεκριμένη εξέλιξη σαν αποτέλεσμα της ηλικίας» (σ.41).

Ένα παράδειγμα εξέλιξης Σχήματος μπορούμε να παρακολουθήσουμε στο Σχήμα της πρόσθεσης (των στοιχείων δύο συνόλων). Το αρχικό Σχήμα που χρησιμοποιούν οι μαθητές θα μπορούσε να ονομαστεί «μέτρα τα όλα», δηλαδή μετρούν διαδοχικά όλα τα αντικείμενα και των δύο συνόλων. Αργότερα οι μαθητές παραλείπουν τη μέτρηση των στοιχείων του πρώτου συνόλου και χρησιμοποιούν το Σχήμα «μέτρα τα υπόλοιπα», δηλαδή ξεκινούν τη μέτρηση από τον πληθάρημο του πρώτου συνόλου. Όταν κατανοήσουν καλά το Σχήμα «μέτρα τα υπόλοιπα» και δημιουργήσουν μια σύνδεση δεδομένων – αποτελέσματος, τότε μπορούν να δώσουν απευθείας το γνωστό αποτέλεσμα (Tall, 2002, σ.133).



1.3 ΟΙ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΕΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ

Στην ενότητα αυτή, θα μας απασχολήσουν οι διαδικασίες μέσα από τις οποίες χρησιμοποιούνται οι νοητικές αναπαραστάσεις κατά τη διάρκεια της σκέψης και της μάθησης στη Γεωμετρία. Η προσέγγιση είναι γνωστική, δηλαδή, στο επίκεντρο του ενδιαφέροντος θέτουμε τις ενέργειες των μαθητών τη στιγμή που λύνουν ένα γεωμετρικό πρόβλημα. Η ανάλυση έχει ως κύρια θεωρητική βάση το έργο του Ψυχολόγου Duval, ο οποίος εξειδικεύει τη Γνωστική Ψυχολογία στην περίπτωση της Γεωμετρίας και γι αυτό συνδυάζει με εγκυρότητα τους δύο γνωστικούς τομείς στους οποίους κινείται η παρούσα έρευνα.

Χαρακτηριστικό της γνωστικής προσέγγισης, σύμφωνα με τον Duval (2001), δεν είναι να καταλήξουν οι ερευνητές σε προτάσεις διδασκαλίας που θα οδηγούν στην κατανόηση, αφού εξετάσουν προσεκτικά τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές. Αυτό που χαρακτηρίζει τη γνωστική προσέγγιση είναι η διερεύνηση των γνωστικών λειτουργιών που βρίσκονται πίσω από τις διάφορες μαθηματικές διαδικασίες (σ.1). Στην παρούσα έρευνα επιλέγουμε ως πλαίσιο ερμηνείας του τρόπου αναπαράστασης και οργάνωσης των γνώσεων (που αφορούν στο ισοσκελές τρίγωνο) την έννοια του Σχήματος. Επομένως μας ενδιαφέρει η διερεύνηση των λειτουργιών που εμπλέκονται στην κατασκευή και στην εξέλιξη του γνωστικού Σχήματος του Ισοσκελούς Τριγώνου (ΣΙΤ).

Η διερεύνηση συνδέει την ύπαρξη του ΣΙΤ με τη λειτουργία του. Είναι προφανές ότι το γνωστικό Σχήμα υπάρχει, μόνο εφόσον λειτουργεί, δηλαδή επιτρέπει στο άτομο να εκτελεί τις γνωστικές λειτουργίες οι οποίες είναι απαραίτητες για την γεωμετρική σκέψη, έστω και αν η λειτουργία του Σχήματος είναι στοιχειώδης. Έτσι αντιλαμβανόμαστε τη μορφή που παίρνει το ΣΙΤ σε ένα μαθητή από συγκεκριμένες ικανότητες του παιδιού, οι οποίες μπορούν να μελετηθούν. Οι ικανότητες αυτές είναι:

- η αναγνώριση και
- η χρήση της έννοιας του ισοσκελούς τριγώνου.

Η αναγνώριση της έννοιας περιλαμβάνει δύο συνιστώσες, τον ορισμό της έννοιας και την εικόνα της (concept definition - concept image) (1.2.10). Η αναγνώριση της έννοιας, παρότι αποτελεί προαπαιτούμενο, δεν επαρκεί πάντα για τη λύση ενός γεωμετρικού προβλήματος. Η αποτελεσματικότητα στην αντιμετώπιση γεωμετρικών προβλημάτων απαιτεί επίσης τη δυνατότητα χρήσης της αντίστοιχης γεωμετρικής έννοιας. Λέγοντας χρήση αναφερόμαστε σε γνώσεις σχετικά με το πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί η συγκεκριμένη έννοια, προκειμένου να επιλύσουμε προβλήματα, και πώς αυτή συνδέεται με άλλες έννοιες. Η διάκριση μεταξύ

αναγνώρισης και χρήσης της έννοιας (concept recognition – concept usage) που υιοθετούμε συναντάται, όπως είδαμε (1.2.10), και στο *σχήμα κατανόησης μιας έννοιας*, που προτείνει ο Moore (1994).

Η αναγνώριση και η χρήση μιας γεωμετρικής έννοιας μπορούν να διερευνηθούν με άξονα την κάθε μία από τις γνωστικές λειτουργίες που διέπουν τη γεωμετρική σκέψη: τη νοερή απεικόνιση, την κατασκευή και την αιτιολόγηση. Σύμφωνα με τον Duval (1998):

Η Γεωμετρία περιλαμβάνει τρία είδη γνωστικών διαδικασιών, καθένα από τα οποία επιτελεί συγκεκριμένες επιστημολογικές λειτουργίες:

- Λειτουργίες νοερής απεικόνισης⁴⁶ (visualization) που σχετίζονται με την αναπαράσταση του χώρου και έχουν σκοπό την απόδοση του νοήματος μιας πρότασης με πιο συγκεκριμένο τρόπο (με παράδειγμα, εικόνα κ.ά), την ευρετική διερεύνηση ή συνοπτική θεώρηση μιας σύνθετης κατάστασης ή την υποκειμενική επαλήθευση
- Λειτουργίες κατασκευής με γεωμετρικά όργανα (construction): η κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων μπορεί να λειτουργήσει ως μοντέλο με την έννοια ότι οι ενέργειες του υποκειμένου στην εξωτερική αναπαράσταση και τα αποτελέσματα που προκύπτουν συσχετίζονται με τα μαθηματικά αντικείμενα που αναπαριστώνται
- Λειτουργίες συλλογισμού (reasoning), σε σχέση με διαλεκτικές διαδικασίες, με στόχο την επέκταση της γνώσης, την απόδειξη, την επεξήγηση (αποκαλούνται στα επόμενα λειτουργίες αιτιολόγησης).

Αυτές οι διαφορετικές λειτουργίες μπορούν να εκτελούνται ανεξάρτητα, αλλά συνδέονται στενά και η συνεργασία τους είναι γνωστικά απαραίτητη για την απόκτηση επαρκών γνώσεων στη Γεωμετρία (σ.38).

Στα επόμενα αναλύονται ξεχωριστά οι τρεις λειτουργίες που περιλαμβάνονται στη γεωμετρική σκέψη, οι παράγοντες που επηρεάζουν την εξέλιξη και αποτελεσματικότητά τους καθώς και οι μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις. Ο ρόλος των τριών λειτουργιών εντάσσεται στο πλαίσιο της λύσης προβλήματος. Καθώς οι λειτουργίες εμφανίζονται μέσα από τους συνεχείς μετασχηματισμούς των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούνται στη Γεωμετρία, σημαντικό ρόλο στην ανάλυση παίζει η μελέτη των μετασχηματισμών ανάμεσα σε αναπαραστάσεις διαφορετικών συστημάτων και τα προβλήματα που δημιουργούνται, όταν δεν υπάρχει πλήρης αντιστοιχία μεταξύ τους.



Πίνακας 1.3**Άξονες (λειτουργίες) ως προς τους οποίους διερευνάται η αναγνώριση και η χρήση της έννοιας**

νοερή απεικόνιση	κατασκευή	αιτιολόγηση
Η νοερή απεικόνιση αφορά στην αναπαράσταση και στην αναγνώριση των γεωμετρικών (σχηματικών) εννοιών, και σε επεξεργασίες που βασίζονται σε αυτές	Η κατασκευή των γεωμετρικών σχημάτων μπορεί να γίνει είτε με το χέρι, είτε με τη χρήση των γεωμετρικών οργάνων με ή χωρίς οδηγίες	Η αιτιολόγηση περιλαμβάνει κάθε διαδικασία που μας επιτρέπει να αντιλήσουμε νέες πληροφορίες από άλλες, που μας έχουν δοθεί. Η νοερή απεικόνιση και η κατασκευή μπορεί να λειτουργήσουν σαν βάση για αιτιολόγηση

1.3.1 Η νοερή απεικόνιση

Ο ρόλος της φαντασίας⁴⁷ κατά τη διάρκεια του γεωμετρικού συλλογισμού είναι θεμελιώδης. Η ικανότητά του ατόμου για νοερή απεικόνιση δηλαδή, η ικανότητα να δημιουργεί ή να αναγνωρίζει και να μετασχηματίζει νοητικές εικόνες του δίνει τη δυνατότητα να εξετάζει καταστάσεις ή να καταλήγει σε συμπεράσματα, προβλέποντας τις συνέπειες μιας πράξης ή διαδικασίας⁴⁸ με τη βοήθεια της φαντασίας. Η λειτουργία αυτή είναι εξαιρετικά σημαντική, καθώς εξοικονομεί χρόνο και περιορίζει τις δοκιμές με αληθινά αντικείμενα ή με χαρτί - μολύβι. Η έρευνα επισημαίνει τη σημασία της νοερής απεικόνισης, του συλλογισμού με βάση νοητικές εικόνες καθώς και του ρόλου που διαδραματίζει η φαντασία σε αυτές κατά τη μάθηση των Μαθηματικών (Bishop, 1989, Presmeg, 1986b, Dorfler, 1991, Tall, 1991, De Windt- King & Goldin, 2001).

Είναι λάθος να συγχέεται η νοερή απεικόνιση με τη διαδικασία της όρασης, αφού διαφέρει ο τρόπος με τον οποίο «βλέπουμε» στην κάθε μία. Τη διαφορά εξηγεί ο Duval (2002):

..... (η νοερή απεικόνιση) αναφέρεται σε μια γνωστική δραστηριότητα που είναι εγγενώς σημειωτική..... Αντίθετα με την όραση που μας δίνει απευθείας πρόσβαση στο αντικείμενο, η νοερή απεικόνιση βασίζεται στην παραγωγή μιας σημειωτικής αναπαράστασης.....(η οποία) δείχνει σχέσεις ή καλύτερα, οργάνωση των σχέσεων ανάμεσα στις μονάδες αναπαράστασης (που μπορεί να είναι 1D ή 2D)⁴⁹.

Η νοερή απεικόνιση συνίσταται στην απευθείας αντίληψη της συνολικής οργάνωσης των σχέσεων του γεωμετρικού σχήματος και επιπλέον στη διάκριση του τι είναι σημαντικό σε αυτήν. Εδώ εντοπίζονται και οι δυσκολίες σχετικά με τη νοερή απεικόνιση, επειδή πρέπει, ως

λειτουργία, να επιλέξει τα στοιχεία του γεωμετρικού σχήματος που είναι σημαντικά για τη συγκεκριμένη περίπτωση (Duval, 2002).

Μια εξήγηση που θα μπορούσε να δοθεί για τον «υποβιβασμό» της νοερής απεικόνισης στη λειτουργία της απλής όρασης είναι πως η νοερή απεικόνιση είναι συλλογισμός που στηρίζεται σε «νοητικές εικόνες». Παρόλο που οι νοητικές εικόνες είναι εικόνες ανάλογες εκείνων που καταγράφονται με την αίσθηση της όρασης (πραγματικές εικόνες), η διαδικασία δημιουργίας τους είναι ακριβώς η αντίστροφη. Βλέποντας μία εικόνα αντλούμε από αυτήν ένα σύνολο πληροφοριών, ενώ στην κατασκευή νοητικών εικόνων συμβαίνει το αντίστροφο: μία ή περισσότερες πληροφορίες προκαλούν την παραγωγή μιας εικόνας στο νου με τη συμβολή της φαντασίας. Οι Kosslyn και Koenig (1995) εξηγούν τη διαφορά ανάμεσα σε πραγματικές και νοερές εικόνες με μία ωραία αναλογία:

Ας θεωρήσουμε το οπτικό πεδίο σαν μία οθόνη που συνδέεται με μία μηχανή λήψης και με ένα video. Μία εικόνα μπορεί να προβάλλεται στην οθόνη είτε από την μηχανή λήψης (τα μάτια κατά τη διάρκεια της αντίληψης) είτε από το video (πληροφορίες που έχουν καταγραφεί παλαιότερα, ως αναπαραστάσεις) (σ. 133).

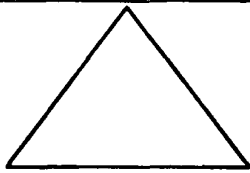
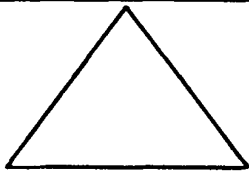
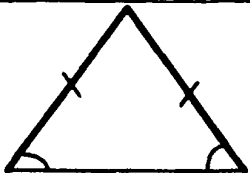
Την πολυπλοκότητα των λειτουργιών που συνιστούν τη νοερή απεικόνιση επισημαίνει ο Duval (1998), λέγοντας ότι «η νοερή απεικόνιση στη Γεωμετρία περιλαμβάνει ταυτόχρονα την αντιληπτική, λεκτική και λειτουργική κατανόηση ενός γεωμετρικού σχήματος σαν μια αναπαράσταση του χώρου» (σ.48).

➤ Η αντιληπτική κατανόηση αναφέρεται σε αυτό που βλέπουμε με την πρώτη ματιά στο γεωμετρικό σχήμα και το οποίο μας δημιουργεί μια σταθερή άποψη γι' αυτό.

➤ Η λεκτική κατανόηση του σχήματος αφορά στη συσχέτισή του με λεκτικούς ή συμβολικούς προσδιορισμούς, που καθορίζουν πλήρως το αντικείμενο που αναπαρίσταται. Για να κατανοηθεί λεκτικά ένα γεωμετρικό σχήμα, πρέπει να προηγηθεί μία αλλαγή στην αντιληπτική κατανόηση. Συγκεκριμένα, πρέπει να μεταβληθεί ο τρόπος με τον οποίο βλέπουμε το σχήμα, και από ολόκληρη τη μορφή (στις δύο διαστάσεις: 2D) να μπορέσουμε να δούμε τα στοιχεία της (στη μία διάσταση: 1D) και τις μεταξύ τους σχέσεις. Με τη λεκτική κατανόηση αυξάνει η αποτελεσματικότητα μιας γεωμετρικής απεικόνισης, στο βαθμό που τα επιμέρους στοιχεία του σχήματος συνδέονται με προτάσεις, οι οποίες καθορίζουν κάποιες ιδιότητές τους.

Για παράδειγμα, στο σχήμα 1.1, το πρώτο τρίγωνο (α) είναι μια τριγωνική μορφή, μπορεί να είναι ένα χάρτινο καπέλο, η σκεπή από ένα σπίτι, το γράμμα Δ, ή ένα τρίγωνο ισοσκελές, ισόπλευρο ή οτιδήποτε. Στην τελευταία περίπτωση δεν μπορούμε να αποφασίσουμε για το είδος του τριγώνου, ακόμα κι αν κάνουμε τις μετρήσεις (διότι πάντα θα βρισκόμαστε στο

στάδιο του «περίπου»). Πρόκειται για αντιληπτική κατανόηση του σχήματος. Το τρίγωνο (α) δεν είναι μια γεωμετρική εικόνα, γιατί δεν υπάρχουν κάποιες υποθέσεις που να ορίζουν τις ιδιότητές του, είτε υπό μορφή λεκτικών δεδομένων (περίπτωση β) ή από την μετάφρασή τους μέσα σε ένα κώδικα (περίπτωση γ). Στις περιπτώσεις (β) και (γ) έχουμε λεκτική κατανόηση, δηλαδή, καθαρά γεωμετρικές αναπαραστάσεις (ένα ισοσκελές τρίγωνο), οι οποίες υποδηλώνονται, είτε με μία πρόταση, είτε από το συμβολισμό των σχέσεων, ανάμεσα στα στοιχεία του τριγώνου.

αντιληπτική κατανόηση	λεκτική κατανόηση	
	 «ένα ισοσκελές τρίγωνο»	
(α) εικόνα	(β) γεωμετρικό σχήμα	(γ) γεωμετρικό σχήμα

σχήμα 1.1 παράδειγμα αντιληπτικής – λεκτικής κατανόησης του ίδιου γεωμετρικού σχήματος

➤ Η λειτουργική κατανόηση του σχήματος αφορά στη νοητική ή υλική του επεξεργασία με τρόπο που οι φόρμες να αναλύονται και να οργανώνονται από την αρχή, έτσι, ώστε να διακρίνουμε και άλλες (φόρμες) που δεν ήταν ορατές με την πρώτη ματιά. Στα πλαίσια ενός συγκεκριμένου προβλήματος κάποιες από αυτές τις νέες φόρμες, που δημιουργούνται με τη λειτουργική κατανόηση είναι σχετικές και μπορούν να μας οδηγήσουν στη σύλληψη της λύσης του προβλήματος. Αυτό το πλεόνασμα μορφών και σχημάτων που προκύπτει από τη λειτουργική κατανόηση αποτελεί, κατά τον Duval (1998, 2002), την ευρετική δύναμη των γεωμετρικών σχημάτων.

Η λειτουργική κατανόηση είναι «οπτική τροποποίηση» του γεωμετρικού σχήματος, με τρόπο ώστε να διατηρούνται οι ιδιότητές του και διακρίνεται από τον Duval (2002) σε τρία είδη:

- i. την τροποποίηση των μερών του (mereologic modification), κατά την οποία το αρχικό σχήμα διαιρείται σε μέρη, τα οποία, ακολούθως συνδυάζονται ώστε να δημιουργήσουν κάποιο άλλο σχήμα ή προκαλούν την εμφάνιση νέων υπό – σχημάτων⁵⁰. Έτσι μετασχηματίζονται τα γεωμετρικά σχήματα που εμφανίστηκαν με την πρώτη ματιά.
- ii. την οπτική τροποποίηση (optical modification), κατά την οποία ένας μετασχηματισμός (μεγέθυνση, σμίκρυνση) επιδρά στο σχήμα και του αλλάζει το μέγεθος ή το διαστρεβλώνει και έτσι, δίχως στην πραγματικότητα να αλλάξει τίποτα, το σχήμα φαίνεται διαφορετικό.

iii. την τροποποίηση της θέσης (positional modification), κατά την οποία αλλάζει ο προσανατολισμός του σχήματος.

Η λειτουργική κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος είναι ανεξάρτητη από τη λεκτική του κατανόηση. Ο τρόπος που βλέπουμε δεν ξεκινά από υποθέσεις, ούτε προκύπτει από μαθηματικούς παραγωγικούς συλλογισμούς. Αν δεν υπήρχε η ανεξαρτησία της λειτουργικής από τη λεκτική κατανόηση, τα γεωμετρικά σχήματα θα είχαν εικονογραφική και όχι ευρετική λειτουργία (Duval, 2002).

Από τα προηγούμενα είναι φανερό ότι η λειτουργία της νοερής απεικόνισης είναι θεμελιώδης για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων, καθώς αποτελεί προϋπόθεση για να κατανοούμε γεωμετρικά σχήματα και, κατά συνέπεια, να αναγνωρίζουμε και να χρησιμοποιούμε τις γεωμετρικές έννοιες. Η αξία της νοερής απεικόνισης συναρτάται με την ικανότητά της να ενεργοποιεί τις οπτικές διαδικασίες του μαθητή και με το βαθμό στον οποίο μπορεί να το πετύχει αυτό. Οι Clements & Owens (1998) αναφέρουν ως οπτικές διαδικασίες «... εκείνες τις νοητικές λειτουργίες που χρησιμοποιούν ή χαρακτηρίζονται από οπτική φαντασία, οπτική μνήμη, οπτική επεξεργασία, οπτικές σχέσεις, οπτική προσοχή και οπτικές αναπαραστάσεις» (σ. 204). Οι ίδιοι επισημαίνουν την επίδραση των οπτικών αναπαραστάσεων στις πράξεις των παιδιών και το γενικότερο ρόλο τους στο συλλογισμό.

Με τη βοήθεια των νοητικών εικόνων το άτομο μπορεί είτε να αναπαραστήσει νέες πληροφορίες είτε να ανακαλέσει άλλες πληροφορίες, ήδη καταχωρημένες στη μνήμη, και ακολούθως να τις ελέγξει, να τις επεξεργαστεί ή να τις γενικεύσει στα πλαίσια του συλλογισμού⁵¹. Στη βιβλιογραφία αναδεικνύεται ιδιαίτερα ο θεμελιώδης ρόλος της νοερής απεικόνισης, ενώ αναφέρονται πλεονεκτήματα και επισημαίνονται εμπόδια από το συλλογισμό, με βάση νοητικές εικόνες⁵² (Bishop, 1989).

Συνεπώς η νοερή απεικόνιση αποτελεί τη λειτουργία εκείνη που είναι υπεύθυνη για τη διαχείριση των πληροφοριών στο νου και διευκολύνει την κατανόηση και τη χρήση των γεωμετρικών εννοιών σε αντιληπτικό, λεκτικό και λειτουργικό επίπεδο. Με τη βοήθεια της νοερής απεικόνισης κατανοούμε την οργάνωση των σχέσεων και γι' αυτό, ως λειτουργία, είναι θεμελιώδης για τη δημιουργία και την εξέλιξη των γνωστικών Σχημάτων και ιδιαίτερα αυτών που δημιουργούνται με πυρήνα μια γεωμετρική σχηματική έννοια.



1.3.2 Η κατασκευή

Η κατασκευή αποτελεί μια σημαντική λειτουργία η οποία οδηγεί στην αποτύπωση στο χαρτί των εσωτερικών αναπαραστάσεων του ατόμου. Η κατασκευή γίνεται με μετατροπή (οπτικών / λεκτικών) πληροφοριών της νοερής απεικόνισης ή λεκτικών δεδομένων (π.χ. της εκφώνησης ενός προβλήματος) σε γεωμετρικό σχήμα.

Στην κατασκευή εμπλέκονται και οι δύο τύποι μετασχηματισμών των σημειωτικών συστημάτων αναπαράστασης που χρησιμοποιούνται στη Γεωμετρία, δηλαδή, τόσο *επεξεργασίες* όσο και *μετατροπές*. Αναφέρθηκε ήδη, ότι οι μετασχηματισμοί ανάμεσα σε διαφορετικά συστήματα αναπαράστασης αποτελούν πηγή προβλημάτων, επειδή οι αναπαραστάσεις του ίδιου αντικειμένου, στα διαφορετικά συστήματα, δεν έχουν ακριβώς το ίδιο περιεχόμενο. Οπότε καταλαβαίνουμε την κομβική σημασία της κατασκευής, ως της λειτουργίας εκείνης που θα εγγυηθεί την, κατά το δυνατό, ταυτότητα μεταξύ των διαφορετικών αναπαραστάσεων της ίδιας γεωμετρικής έννοιας και, κατά συνέπεια, θα ελαχιστοποιήσει τα προβλήματα και θα αυξήσει το ποσοστό χρήσης των γνώσεων του ατόμου.

Η κατασκευή διαφέρει από τη νοερή απεικόνιση ως προς το χαρακτήρα. Η διαφορά είναι αυτή της τοπικής κατανόησης, σε αντιδιαστολή με την καθολική κατανόηση. Συγκεκριμένα η κατασκευή στρέφει την προσοχή μας διαδοχικά σε κάποια στοιχεία και ιδιότητες του γεωμετρικού σχήματος, σε αντίθεση με τη νοερή απεικόνιση που συνίσταται στην απευθείας αντίληψη του συνολικού σχήματος των σχέσεων (Duval, 2002).

Χαρακτηριστικό της κατασκευής, σε αντίθεση με την αντίληψη, είναι η συνειδητότητα. Πράγματι η αντίληψη είναι ένας μηχανισμός που δεν ελέγχεται απόλυτα, δηλαδή όταν βλέπουμε ένα σχήμα ή μία εικόνα δεν ξέρουμε ακριβώς τι παρατηρούμε ή σε ποιο επίπεδο αναγνωρίζουμε τα στοιχεία του (σε ποια διάσταση, 0D, 1D ή 2D). Αντίθετα η κατασκευή περιλαμβάνει συγκεκριμένα, συνήθως συνειδητά, βήματα και εστιάζει σε συγκεκριμένα στοιχεία του γεωμετρικού σχήματος τα οποία είναι δύσκολο να διαχωριστούν σε επίπεδο αντιληπτικό. Αυτός ο τρόπος θέασης του γεωμετρικού σχήματος, που επιβάλλεται από την κατασκευή, ονομάζεται από τον Duval «*εργαλειακή αφαίρεση*» (*l' abstraction instrumentale*) (1998, Construire, voir et raisonner en Geometrie).

Η κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων διαφέρει ριζικά από τον απλό σχεδιασμό εικόνων. Η διάκριση οφείλεται στο ρυθμιστικό ρόλο που οφείλει να παίξει η κατασκευή κατά την ακριβή μετάφραση των αναπαραστάσεων. Η διαφορά της σχεδίασης από την κατασκευή ενός γεωμετρικού σχήματος είναι αυτή του φαίνεσθαι από το είναι. Η σχεδίαση διατηρεί τους

περιορισμούς της εικόνας, δηλαδή δημιουργεί μια φόρμα με μόνη δέσμευση να αποδίδει τη γενική μορφή του σχήματος (π.χ., «να φαίνεται σαν παραλληλόγραμμο»). Η γεωμετρική κατασκευή έχει τον περιορισμό να διατηρεί πιστά τις σχέσεις ανάμεσα στα διάφορα στοιχεία που αναπαρίστανται (π.χ. παραλληλία, καθετότητα, ισότητα). Προκειμένου να αποδοθούν με ακρίβεια οι σχέσεις, χρειάζεται να ενισχυθεί η κατασκευή με κατάλληλα εργαλεία (:γεωμετρικά όργανα) και κατασκευαστικές οδηγίες⁵³.

Παρά τη σημασία της η κατασκευή είναι υποτιμημένη τόσο ερευνητικά όσο και διδακτικά. Σε σύγκριση με τις άλλες δύο λειτουργίες, τη νοερή απεικόνιση και την αιτιολόγηση, η κατασκευή είναι αυτή που έχει διερευνηθεί λιγότερο, ενώ παράλληλα παίζει μικρό ρόλο στη διδασκαλία του μαθήματος της Γεωμετρίας στα σχολεία, όπου η έμφαση δίνεται στην αιτιολόγηση. Μια αιτία αυτών των διακρίσεων είναι πως η κατασκευή θεωρείται καθαρά τεχνική διαδικασία και, ως εκ τούτου, δεν της αναγνωρίζεται το ίδιο μερίδιο στο γεωμετρικό συλλογισμό με τη νοερή απεικόνιση ή την αιτιολόγηση. Ο Schoenfeld (1986) περιγράφει την κατάσταση στο σχολείο ως εξής:

Ο στόχος της ενότητας των κατασκευών είναι να μάθουν οι μαθητές να εκτελούν γρήγορα και με ακρίβεια τη σωστή αλληλουχία χειρισμών με τον κανόνα και το διαβήτη.Με την εισαγωγή κάθε κατασκευής δίνονται και τα γνωστά θεωρήματα που την αιτιολογούν. Αυτές οι λογικές εξηγήσεις γρήγορα υποχωρούν στην αφάνεια, καθώς η πρακτική στο σχολείο και στο σπίτι εστιάζει στην ίδια τη λειτουργία (κατασκευή) (σ. 258).

Παρά ταύτα, η άποψη του Schoenfeld είναι πως οι κατασκευές έχουν αξία για την απόκτηση της γνώσης, και μάλιστα, πως η ικανοποιητική λειτουργία με κανόνα και διαβήτη σε προβλήματα κατασκευών της Γεωμετρίας παρέχει στο άτομο μία «γνωστική ενισχυτική δομή» (cognitive support structure). Συγκεκριμένα, λέει πως:

οι κατασκευές είναι ενδιαφέρουσες, εν μέρει, γιατί γίνονται σε ένα πεδίο στο οποίο μπορούν να εφαρμοστούν τα αποτελέσματα των καθαρών μαθηματικών, (και αντίστροφα) η αξιοποίηση των παραλληλισμών βοηθά τους μαθητές να διαμορφώσουν τις αντιλήψεις τους σχετικά με τη μαθηματική δομή και τις απεικονίσεις αυτής της δομής σε νέα πεδία. Αν οι μαθητές δεν μπορούν να δουν τέτοιες προφανείς συνδέσεις, χάνουν όλα όσα βρίσκονται στην καρδιά των μαθηματικών (Schoenfeld, 1986, σ. 260).

Η συνεισφορά της παρούσης έρευνας είναι η ανάδειξη του κρίσιμου ρόλου της κατασκευής στην τελική διαμόρφωση τόσο της νοερής απεικόνισης όσο και της αιτιολόγησης. Όπως θα σχολιαστεί αναλυτικά στα ευρήματα, υπάρχει αλληλεξάρτηση ανάμεσα σε μια τεχνική κατασκευή, με τη βοήθεια γεωμετρικών οργάνων και στον τρόπο αντίληψης του γεωμετρικού σχήματος. Ακόμα καθοριστικός στη λειτουργία της κατασκευής, όπως θα δούμε ακολούθως,

είναι ο ρόλος που παίζουν δύο παράγοντες και συγκεκριμένα τα χρησιμοποιούμενα γεωμετρικά όργανα και οι οδηγίες κατασκευής.

1.3.3 Τα γεωμετρικά όργανα

Τα γεωμετρικά όργανα είναι υλικά αντικείμενα / εργαλεία που διαθέτουν, ενσωματωμένες από την κατασκευή τους, συγκεκριμένες δυνατότητες. Για παράδειγμα, ο διαβήτης έχει τη δυνατότητα να κατασκευάζει κύκλους ή να μετράει / κατασκευάζει ίσα τμήματα, το μοιρογνωμόνιο να μετράει / κατασκευάζει γωνίες κλπ. Ο χειρισμός τους απαιτεί μια εξοικείωση και ένα βαθμό επιδεξιότητας, αφού όμως αυτά υπάρχουν, οι δυνατότητες των γεωμετρικών οργάνων μεταφέρονται έμμεσα στο μαθητή⁵⁴. Έτσι, σχεδιάζονται / μετρώνται σχήματα, όχι σύμφωνα με την επιδεξιότητα του μαθητή, αλλά σύμφωνα με τη φύση του γεωμετρικού οργάνου και με τον τρόπο χρήσης του. Οι δυνατότητες των οργάνων αξιοποιούνται πλήρως όταν υπάρχει αποτελεσματική χρήση του δυναμικού χαρακτήρα τους. Για παράδειγμα, όταν αναπροσαρμόζοντας το άνοιγμα του διαβήτη, ο μαθητής κατορθώνει να κατασκευάζει σχήματα που να υπόκεινται στους περιορισμούς του προβλήματος.

Η γνώση του ακριβούς τρόπου χρήσης ενός οργάνου, διευκολύνει την εκτέλεση μιας ποικιλίας εργασιών⁵⁵. Αντίθετα, η αδυναμία στη χρήση των γεωμετρικών οργάνων παρεμποδίζει τη λύση προβλήματος, στο βαθμό που ο μαθητής αδυνατεί να μεταφράσει σε γεωμετρικό σχήμα τις νοητικές του εικόνες ή τα δεδομένα / ζητούμενα του προβλήματος.

Συχνά, για την κατασκευή του ίδιου σχήματος μπορούν να χρησιμοποιηθούν διαφορετικά γεωμετρικά όργανα. Στην περίπτωση αυτή η λύση προβλήματος εμποδίζεται, αν ο μαθητής δεν έχει την ευελιξία να επιλέξει το καταλληλότερο. Ως επακόλουθο, αυξάνεται το άγχος του. Αντίθετα η καλή χρήση των γεωμετρικών οργάνων επιτρέπει στο μαθητή να κατασκευάζει «σωστά» σχήματα, δηλαδή να μεταφράζει τις γεωμετρικές έννοιες από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο, με τρόπο ώστε να διατηρούν το ίδιο περιεχόμενο.

Σχετικά με την αξία των γεωμετρικών οργάνων, ο Duval λέει:

Ένα γεωμετρικό σχήμα δεν σχεδιάζεται όπως σχεδιάζουμε ένα δένδρο ή ένα άνθρωπο, κατασκευάζεται. Ένα γεωμετρικό σχήμα προκύπτει από μία κίνηση τεχνική και όχι από μία κίνηση γραφική. Αυτό σημαίνει ότι, η παραγωγή του γεωμετρικού σχήματος απαιτεί τη χρήση οργάνων: χάρακα, διαβήτη κλπ η ενός λογισμικού. Η μορφή της γραμμής που παράγεται δεν εξαρτάται από την κίνηση του χεριού, αλλά από την ιδιότητα του οργάνου. Αυτή η διάκριση που εισάγουμε μπορεί να μας εκπλήξει. Απλά μεταφράζει το εξής γεγονός: η κατασκευή των γεωμετρικών σχημάτων επιβάλει το σεβασμό, υπονοούμενο ή σαφώς εκπεφρασμένο, των

περιορισμών μεγέθους και ευθυγράμμισης. Μόνο η χρήση οργάνων επιτρέπει τὸ σεβασμό αυτῶν των συνθηκῶν.Αλλά, ακόμα πιο βασικό, όταν πρόκειται για ακόμα πιο σύνθετες κατασκευές, είναι πῶς μόνο εάν σεβαστούμε τέτοιες συνθήκες μπορούμε να πάρουμε το σχήμα που θέλουμε.....επομένως η παραγωγή ενός γεωμετρικού σχήματος εξαρτάται από τα ὄργανα που χρησιμοποιούμε.» (Duval, Construire, Voir et Reasonner en Geometrie, σ.4).

Παραγωγή⁵⁶ γεωμετρικού σχήματος, χωρίς τη χρήση γεωμετρικῶν οργάνων, παρατηρείται σε δύο διαμετρικά αντίθετες περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση ο μαθητής δεν μπορεί να χρησιμοποιήσει κανένα ὄργανο και αυτό τον οδηγεί σε μια κίνηση γραφική, σαν να ζωγραφίζει το αντικείμενο. Την περίπτωση αυτή δεν μπορούμε να την ονομάσουμε γεωμετρική κατασκευή. Στη δεύτερη, παρ' ὅλο που ο μαθητής γνωρίζει το χειρισμό των οργάνων, η κατασκευή γίνεται ελεύθερα. «με το χέρι». Ταυτόχρονα, λειτουργεί στο μυαλό του μια διαδικασία εξιδανίκευσης ὥστε το σχήμα, ανεξάρτητα από ατέλειες, να είναι συνεπές με τις ιδιότητες που το καθορίζουν αλλά και με το συνολικό γεωμετρικό πλαίσιο⁵⁷.

1.3.4 Οι οδηγίες κατασκευής

Οι οδηγίες κατασκευής είναι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να κατασκευάσουμε τα γεωμετρικά σχήματα. Κάθε σχήμα μπορεί να διαθέτει μια ποικιλία από διαδικασίες κατασκευής, που δεν είναι ὅλες ίδιες, αλλά εξαρτώνται από τα γεωμετρικά ὄργανα που χρησιμοποιούνται.

Κατά τη συστηματική θεμελίωση της Γεωμετρίας στην Α Λυκείου, για κάθε έννοια που ορίζεται, δίνεται ο τυπικός ορισμός και η γεωμετρική εικόνα της. Άλλοτε ταυτόχρονα, άλλοτε με χρονική καθυστέρηση, ακολουθούν οδηγίες για την κατασκευή της. Έτσι, για παράδειγμα, η διάμεσος ενός τριγώνου είναι δυνατόν να κατασκευαστεί εύκολα, όταν κανείς γνωρίζει τον ορισμό της. Ουσιαστικά, ο ορισμός δίνει τις απαραίτητες οδηγίες «*πάρε το μέσο της πλευράς και ἔνωσέ το με την απέναντι κορυφή*». Στην περίπτωση της διχοτόμου, επίσης, μπορεί κάποιος, που γνωρίζει τον ορισμό, να την κατασκευάσει χρησιμοποιώντας μοιρογνῶμόνιο. Υπάρχει, ὁμως, και η δυνατότητα κατασκευής της με κανόνα και διαβήτη. Αυτή διδάσκεται ανεξάρτητα, υπό μορφή αλγορίθμου, βάσει συγκεκριμένων οδηγιῶν τις οποίες ο μαθητής χρειάζεται να αποστηθίσει για να μπορεί να επαναλαμβάνει (Πίνακας 1.4).



Πίνακας 1.4
Οδηγίες κατασκευής της διχοτόμου

Οδηγία κατασκευής	λεκτική περιγραφή	θεωρητική βάση της κατασκευής	γεωμετρικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται
1 ^η	Μέτρησε πόσες μοίρες είναι η γωνία Χώρισέ τη στη μέση. σημειώνοντας ένα σημείο Φέρε ημιευθεία με αρχή την κορυφή. που να περνά από το σημείο στη μέση	Ο μαθητής γνωρίζει τον ορισμό	Μοιρογνωμόνιο Κανόνας
2 ^η	Με κέντρο την κορυφή της γωνίας και ακτίνα τυχαία φτιάξε ένα τόξο Σημείωσε τα σημεία τομής του τόξου με τις πλευρές της γωνίας Με κέντρα τα σημεία αυτά και ακτίνα την ίδια, φτιάξε δύο τόξα Σημείωσε το σημείο τομής τους Ένωσε την κορυφή της γωνίας με το σημείο αυτό	Ο μαθητής γνωρίζει έναν «αλγόριθμο» και είναι ικανός να τον επαναλαμβάνει δίχως απαραίτητα να γνωρίζει το θεωρητικό του περιεχόμενο.	Κανόνας Διαβήτη

Τις οδηγίες γεωμετρικής κατασκευής μπορούμε να τις διακρίνουμε σε δύο είδη: οδηγίες για ελεύθερη και οδηγίες για καθοδηγούμενη κατασκευή. Το στοιχείο που τις διαφοροποιεί είναι το αν η επιλογή γίνεται ελεύθερα από το μαθητή, με εκτίμηση των δεδομένων του προβλήματος ή γίνεται αυτοματοποιημένα για όλες τις παρόμοιες περιπτώσεις. Επίσης ο διαχωρισμός συνδέεται και με την κατανόηση ή μη, από το μαθητή, του θεωρητικού υπόβαθρου της κατασκευής. Συγκεκριμένα απαραίτητη προϋπόθεση για την ελεύθερη κατασκευή είναι η επιλογή και η χρήση ορισμών ή κριτηρίων (οδηγιών) που, στη δεδομένη περίπτωση, θεωρούνται από το μαθητή κατάλληλα για την κατασκευή του σχήματος⁵⁸. Αντίθετα στην καθοδηγούμενη κατασκευή ο μαθητής μπορεί να ακολουθεί πιστά ένα δοσμένο κατασκευαστικό αλγόριθμο δίχως να έχει κατανοήσει τη θεωρία που βρίσκεται πίσω του⁵⁹.

Απαραίτητη προϋπόθεση για την υλοποίηση των οδηγιών κατασκευής, και στις δύο περιπτώσεις, είναι η χρήση των γεωμετρικών οργάνων, όπως του κανόνα, του διαβήτη, του μοιρογνωμόνιου ή του τριγώνου. Τα όργανα θα εξασφαλίσουν την κατασκευή ενός «γεωμετρικού σχήματος» με την έννοια που δόθηκε στο σχήμα 1.1, δηλαδή θα δώσουν στο μαθητή τη βεβαιότητα πως κατασκεύασε με ακρίβεια τις σχέσεις ανάμεσα στις αναπαριστώμενες σχηματικές μονάδες, ώστε να δημιουργήσει ένα δομημένο σύνολο σχέσεων (γεωμετρικό σχήμα).

Οι οδηγίες είναι ιδιαίτερα σημαντικές για τη λειτουργία της κατασκευής. Κάθε οδηγία είναι ένα «πακέτο πληροφοριών» που περιέχει ενσωματωμένες ιδιότητες του συγκεκριμένου γεωμετρικού σχήματος. Η κατανόηση των ιδιοτήτων από το μαθητή και ο βαθμός

κατανόησης είναι ένα ζητούμενο. Σε κάθε περίπτωση όμως, η χρήση του πακέτου αυξάνει τις ικανότητες του μαθητή. Για παράδειγμα στην καθοδηγούμενη κατασκευή ο μαθητής μπορεί, απλά, να έχει μάθει να επαναλαμβάνει μηχανικά κάποιες κινήσεις που θα του δώσουν το επιθυμητό αποτέλεσμα (γεωμετρικό σχήμα) ή μπορεί, στην ελεύθερη κατασκευή, να είναι ικανός να χρησιμοποιήσει και το θεωρητικό υπόβαθρο της οδηγίας, δηλαδή τις ιδιότητες στις οποίες στηρίζεται. Και στις δύο περιπτώσεις, ένα μέρος (μικρό ή μεγάλο) από τις πληροφορίες του πακέτου μεταφέρεται έμμεσα στη λειτουργία του μαθητή, εμπλουτίζοντάς την.

Επίσης οι οδηγίες κατασκευής συνεισφέρουν στην εργαλειακή αφαίρεση που αναφέρθηκε προηγούμενα (1.3.2), δηλαδή βοηθούν το μαθητή να διακρίνει τις στοιχειώδεις μορφές του γεωμετρικού σχήματος. Καθώς οι οδηγίες αναφέρονται σε στοιχεία του σχήματος (σημεία, ευθύγραμμα τμήματα, τόξα κλπ), στο μέγεθός τους (το μέσο τμήματος ή τόξου κλπ) και σε σχέσεις που τα συνδέουν (ισότητα, καθετότητα, τομή, μέσο κλπ), είναι φανερό, πως δίνουν έμφαση σε στοιχεία 1D ή 0D.

Στην πλειοψηφία των περιπτώσεων, η κατασκευή βασίζεται σε απλές συνθήκες που συνδέονται με τις ιδιότητες των εννοιών (για παράδειγμα, προκειμένου να κατασκευασθεί η εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του Α, αρκεί να φέρουμε την ακτίνα στο Α και μία ευθεία, κάθετη στην ακτίνα, που να περνά από το Α). Οι ιδιότητες αυτές, λόγω του ότι μας προσανατολίζουν προς τη συγκεκριμένη έννοια, ονομάζονται σήματα.

Σύμφωνα με τον van Hiele (1986), τα γεωμετρικά σχήματα έχουν διπλό χαρακτήρα, ένα «συμβολικό χαρακτήρα» και ένα «χαρακτήρα σήματος». Αρχικά οι μαθητές αναπτύσσουν το συμβολικό χαρακτήρα, δηλαδή όταν δουν ένα σχήμα, μπορούν να πουν ποιες είναι οι ιδιότητές του. Σύμφωνα με τον ίδιο ερευνητή «η κατανόηση ενός σχήματος σημαίνει τη γνώση όλων των ιδιοτήτων του σαν μία ενότητα». Αργότερα αναπτύσσεται ο χαρακτήρας σήματος, δηλαδή οι ιδιότητες που μας οδηγούν στο σχήμα, «αυτό σημαίνει ότι τα σύμβολα μπορούν να προβλεφθούν» (van Hiele, 1986, σ.168-170).

Παραδείγματος χάριν, όταν γνωρίζουμε ότι ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές (σύμβολο), τότε μπορούμε να πούμε ότι μία από τις διαμέσους του θα είναι, επίσης, διχοτόμος και ύψος του. Αντίστροφα, όταν γνωρίζουμε ότι σε ένα τρίγωνο μία διάμεσος είναι επίσης και ύψος του τριγώνου (σήμα), τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι αυτό το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Ο χαρακτήρας σήματος ενός γεωμετρικού σχήματος ή, με άλλα λόγια, οι ιδιότητες που οδηγούν σε ένα γεωμετρικό σχήμα, αναφέρονται στα σχολικά βιβλία ως «κριτήρια» και είναι ακριβώς αυτές που μας εφοδιάζουν με τρόπους αναγνώρισης και, παράλληλα, με τρόπους κατασκευής των γεωμετρικών σχημάτων⁶⁰.

Συμπεράσματα

Κρίσιμος παράγοντας για την κατασκευή ενός γεωμετρικού σχήματος είναι η χρήση γεωμετρικών οργάνων, είτε για την υλοποίηση ενός κατασκευαστικού αλγόριθμου που ήδη έχει διδαχθεί (καθοδηγούμενη κατασκευή), είτε για την μετατροπή, από τον ίδιο το μαθητή, ορισμών, ιδιοτήτων κλπ σε κατασκευαστικά βήματα (ελεύθερη κατασκευή).

Η επιτυχία στη λύση προβλήματος συνδέεται με την ικανότητα του μαθητή να χρησιμοποιεί κάθε φορά το κατάλληλο εργαλείο, ικανότητα που βασίζεται στην καλή γνώση των δυνατοτήτων γεωμετρικών οργάνων και οδηγιών.

Συγκεκριμένα, η επιτυχημένη κατασκευή συνδέεται με

1. την κατάλληλη επιλογή, οργάνων ή / και οδηγιών, ανάλογα με τη συγκεκριμένη κατάσταση προβλήματος και
2. τη δυνατότητα προσαρμογής, οργάνων ή / και οδηγιών στους περιορισμούς που θέτει το πρόβλημα

Η ισχύς των δύο αυτών θέσεων προκύπτει από το γεγονός ότι τα γεωμετρικά όργανα δεν είναι ισοδύναμα, σε σχέση με την αποτελεσματικότητά τους στη λύση προβλήματος (Duval, προσωπική επικοινωνία). Το ίδιο συμβαίνει και με τις οδηγίες κατασκευής. Η αποτελεσματικότητα αποδεικνύεται από τη δυνατότητά τους να δίνουν σωστά αποτελέσματα σε διαφορετικές συνθήκες, δηλαδή σε περιπτώσεις που υπάρχουν επιπλέον περιορισμοί για την κατασκευή του σχήματος.

1.3.5 Η αιτιολόγηση της κατασκευής

Για τη λύση ενός προβλήματος κατασκευής, είναι απαραίτητες και οι τρεις λειτουργίες που στηρίζουν τη γεωμετρική σκέψη. Η κάθε μία, με τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της, εκπληρώνει διαφορετική αποστολή. Η νοερή απεικόνιση παρέχει μια συνολική αντίληψη της κατάστασης, πέρα από όσα συλλαμβάνει η όραση, σαν οργάνωση σχέσεων. Δημιουργείται η ζητούμενη στο πρόβλημα εικόνα, αναγνωρίζονται (οπτικά και λεκτικά) τα στοιχεία της και οι μεταξύ τους σχέσεις, επιλέγονται δε εκείνα που θεωρούνται σημαντικά στο δεδομένο πλαίσιο του προβλήματος. Η κατασκευή εστιάζει τοπικά σε επιμέρους στοιχεία, κατασκευάζει και, με διαδοχικές ενέργειες, υλοποιεί σενάρια. Αποτέλεσμα της λειτουργίας της κατασκευής είναι το γεωμετρικό σχήμα, ενώ την «τεχνική υποστήριξη» αναλαμβάνουν τα γεωμετρικά όργανα και οι οδηγίες κατασκευής. Σε αυτό το πλαίσιο, η αιτιολόγηση αποτελεί τη λειτουργία που επιχειρεί να τεκμηριώσει τη συνέπεια ανάμεσα στις υποθέσεις του προβλήματος (λεκτικές ή σχηματικές), στη νοερή του απεικόνιση και στο γεωμετρικό σχήμα που κατασκευάστηκε.

1.3.6 Η γλώσσα της αιτιολόγησης

Στην καθημερινή γλώσσα θα λέγαμε πως η αιτιολόγηση είναι «μια λογική εξήγηση για κάτι που πιστεύουμε πως είναι αληθινό». Στα Μαθηματικά η έννοια της αιτιολόγησης περιλαμβάνει ένα πλήθος «όρους αξιολόγησης», όπως απόδειξη, επαλήθευση, επεξήγηση, διευκρίνιση κλπ. που διαφέρουν ως προς το βαθμό αυστηρότητας. τη γλώσσα που χρησιμοποιούν και τον τρόπο παρουσίασης των στοιχείων. Ο Rodd (2000), βασιζόμενος σε παλαιότερες και σύγχρονες έρευνες (όπως των Bell, 1976, De Villiers', 1996), αναφέρει ως διαφορετικές όψεις της αιτιολόγησης την

- επαλήθευση και ανακάλυψη (ότι)
- επεξήγηση (γιατί) και
- συστηματοποίηση και επικοινωνία (πως).

Σε οποιαδήποτε δραστηριότητα, για το γνωστικό έλεγχο και την κατανόηση είναι ουσιώδης ο ρόλος της φυσικής καθημερινής γλώσσας. Στη Γεωμετρία χρησιμοποιείται επιπλέον μια τεχνητή, θεωρητική γλώσσα, διαφορετική από τη φυσική, η οποία χρησιμοποιεί μόνο συγκεκριμένες προτάσεις και τις συνδέει μεταξύ τους με ειδικό τρόπο. Ο Duval (1998) διευκρινίζει, σχετικά με τη συγκρότηση της θεωρητικής γλώσσας:

Η γεωμετρική αιτιολόγηση με σκοπό την απόδειξη απαιτεί δύο αποφασιστικές προϋποθέσεις:

1. τη χρήση προτάσεων, που η κάθε μία έχει εκ των προτέρων μία συγκεκριμένη θεωρητική θέση (status): αξίωμα, ορισμός, θεώρημα, υπόθεση κλπ
2. την αποκλειστική χρήση θεωρημάτων, αξιωμάτων ή ορισμών στην πορεία προς το συμπέρασμα. (σ.47).

Εκτός από τη φύση των προτάσεων που χρησιμοποιούν η φυσική και η θεωρητική γλώσσα διαφέρουν ουσιαστικά και στον τρόπο σύνδεσης των προτάσεων για τη δημιουργία μιας απόδειξης. Στη φυσική γλώσσα οι προτάσεις συνδέονται με συσχέτιση ή αντίθεση, όπως στην καθημερινή ομιλία, ενώ στη θεωρητική γλώσσα οι προτάσεις συνδέονται σύμφωνα με τη θεωρητική τους θέση (status), στο αξιωματικό οικοδόμημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και σύμφωνα με τους κανόνες της Λογικής. Σχετικά με την οργάνωση των προτάσεων της θεωρητικής γλώσσας ο Duval (1998) λει:

.....έχουμε τρία επίπεδα οργάνωσης (από το συνολικό στο επίπεδο της μιας πρότασης):

- ένα συνολικό επίπεδο, όπου τα βήματα συνδέονται σύμφωνα με το συμπέρασμά τους
- ένα τοπικό επίπεδο, στο οποίο τουλάχιστον τρεις προτάσεις οργανώνονται σύμφωνα με τη θέση τους (status): υπόθεση, ορισμός ή θεώρημα και τοπικό συμπέρασμα



➤ ένα μικροεπίπεδο, εσωτερικό στις χρησιμοποιούμενες προτάσεις, στο οποίο πρέπει να διακρίνεις δύο μέρη, το μέρος των συνθηκών που πρέπει να επαληθευτούν και το μέρος του συμπεράσματος που θα προκύψει» (σ.47).

Τελικά η διαφορά φυσικής και θεωρητικής γλώσσας είναι αυτή ανάμεσα στον αυθόρμητο συλλογισμό της καθημερινότητας και στον τεχνητό, αυστηρό συλλογισμό που ονομάζεται τυπική απόδειξη. Η θεωρητική γλώσσα, παρότι αναγκαία για τις μαθηματικές αποδείξεις, αποτελεί πηγή προβλημάτων για τους μαθητές που αργούν πολύ να την κατακτήσουν (αρκετοί δεν την κατακτούν ποτέ) αφού, όπως δηλώνει ρητά ο Fischbein (1982), «η έννοια της τυπικής απόδειξης είναι εντελώς έξω από την επικρατούσα συμπεριφορά» (σ.17).

1.3.7 Η βάση της αιτιολόγησης

Ξεκινώντας από τη χρησιμοποίηση των δύο γλωσσών στη Γεωμετρία, θα μπορούσαμε να πούμε σχηματικά ότι η αιτιολόγηση κινείται ανάμεσα σε δύο ακραίες συμπεριφορές. Την προ - μαθηματική και τη μαθηματική συμπεριφορά. Αυτές διαφέρουν, πέρα από τη γλώσσα που χρησιμοποιούν, σε βασικά σημεία, ως προς τη χρήση των σχημάτων και το συλλογισμό και περιγράφονται συνοπτικά ως εξής:

➤ Στην προ - μαθηματική συμπεριφορά ο συλλογισμός στηρίζεται σε οπτικές σχέσεις ανάμεσα στα στοιχεία του γεωμετρικού σχήματος και διατυπώνεται με όρους της καθημερινής γλώσσας δίχως ιδιαίτερες μαθηματικές εκφράσεις (ο Duval την χαρακτηρίζει ανώριμη). Εδώ, «η νοερή απεικόνιση και ο αυθόρμητος λόγος βρίσκονται πολύ κοντά» (Duval, 1998, σ.47). Ο ρόλος του γεωμετρικού σχήματος είναι καθοριστικός, καθώς μέσα από αυτό γίνεται η αναγνώριση των στοιχείων που είναι σχετικά με το πρόβλημα (ο μαθητής το συγκρίνει με τη νοερή του απεικόνιση και αντιδρά στις ενδεχόμενες ασυμβατότητες μεταξύ των δύο).

➤ Στη μαθηματική συμπεριφορά, αντίθετα, ο συλλογισμός βασίζεται στην όλη δομή του αξιωματικού συστήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και σε κανόνες της Λογικής. Ο ρόλος του γεωμετρικού σχήματος είναι καθαρά ενδεικτικός και χρησιμοποιείται ευρετικά στο πλαίσιο της λειτουργικής κατανόησης, η οποία «δε δίνει τα βήματα και την οργάνωση του παραγωγικού συλλογισμού για την απόδειξη, αλλά αναδεικνύει σημεία - κλειδιά ή δίνει μια ιδέα που θα επιτρέψει στο μαθητή να επιλέξει τις απαιτούμενες προτάσεις που θα χρησιμοποιηθούν» (Duval, 1998, σ.48).



Η προ - μαθηματική, η μαθηματική όσο και οι ενδιάμεσες αποχρώσεις στη συμπεριφορά διερευνώνται από την παρούσα έρευνα και συσχετίζονται με τις διάφορες φάσεις εξέλιξης του γνωστικού Σχήματος του ισοσκελούς τριγώνου (ΣΙΤ), εξέλιξης που δεν είναι γραμμική. Διάφορες καταστάσεις λειτουργούν παράλληλα στο μυαλό του μαθητή, σε μια αργή και κοπιώδη προσπάθεια συντονισμού της οπτικής και της θεωρητικής συλλογιστικής. Η επιτυχημένη συσχέτιση των δύο είναι παράγοντας που οδηγεί στη μαθηματική κατανόηση.

1.3.8 Σχέση της αιτιολόγησης με την κατανόηση

Η αιτιολόγηση συνδέεται στενά με την κατανόηση. Γι' αυτό, στα πλαίσια του σχολείου, ο τρόπος αιτιολόγησης λειτουργεί, συνήθως, ως ένδειξη του βαθμού κατανόησης. Η κοινή αυτή αντίληψη δεν είναι όμως ασφαλής. Συχνά, βλέπουμε ένα μαθητή να αιτιολογεί μια πρόταση, αναπαράγοντας την απόδειξή της, δίχως στην πραγματικότητα να την κατανοεί. Απλά επαναλαμβάνει τους συλλογισμούς κάποιου άλλου (του βιβλίου ή του δασκάλου) μηχανικά. Από την άλλη, ο μαθητής μπορεί να γνωρίζει κάτι, δίχως να είναι ικανός να το αιτιολογήσει με επιχειρήματα. Τον προβληματισμό συνοψίζει ο Rodd (2000) με το ακόλουθο επιστημολογικό ερώτημα⁶¹ «ποια είναι η σχέση ανάμεσα στον τρόπο που χρησιμοποιεί ο μαθητής για να αιτιολογήσει μια μαθηματική πρόταση και στον ισχυρισμό του πως γνωρίζει την αλήθεια της πρότασης;». Η απάντησή που δίνει ο ίδιος είναι, πως «το να γνωρίζει ο μαθητής απαιτεί ένα μαθηματικό τρόπο σκέψης. Για παράδειγμα, ο παραγωγικός συλλογισμός μπορεί να είναι ένας τρόπος με τον οποίο ένας μαθηματικά σκεπτόμενος μαθητής μπορεί να πειστεί..... δεν είναι όμως ο μόνος τρόπος». Η ουσία της σκέψης του Rodd είναι πως «η απόδειξη μπορεί να μην εγγυάται τη γνώση στο μαθητή, και η εγγύηση της γνώσης να είναι άλλη από την απόδειξη (για παράδειγμα, η νοερή απεικόνιση)» (ό.π. σ. 242).



1.4 ΠΩΣ ΤΟΠΟΘΕΤΕΙΤΑΙ Η ΕΡΕΥΝΑ ΜΑΣ ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

1.4.1 Σύνοψη των σχετικών με το θέμα της διατριβής ερευνών

✱

Το ζήτημα της αναπαράστασης των γεωμετρικών γνώσεων συναντάται στην έρευνα συνδεδεμένο με έννοιες όπως, η νοερή απεικόνιση (visualization), η φαντασία (imagery), η ικανότητα αντίληψης του χώρου ή η διαίσθηση (intuition). Η σημασία της νοερής απεικόνισης στη μαθηματική λειτουργία γενικά αναδεικνύεται ήδη από τον Hadamard (1945).

Ειδικότερα για την περίπτωση της Γεωμετρίας ο ρόλος των αναπαραστάσεων στη νοερή απεικόνιση εξετάζεται διεξοδικά από τον Duval (2002) που ισχυρίζεται πως «η νοερή απεικόνιση είναι ουσιαστικά μια σημειωτική γνωστική δραστηριότητακαι βασίζεται στην παραγωγή μιας σημειωτικής αναπαράστασης». Ο ίδιος περιγράφει τρόπους με τους οποίους μπορεί να τροποποιηθεί νοερά ένα γεωμετρικό σχήμα, διατηρώντας τις αρχικές του ιδιότητες. Αυτή είναι μια διαδικασία που δίνει στα γεωμετρικά σχήματα ευρετική δύναμη (Duval, 2002).

Το ρόλο και τη φύση των γεωμετρικών αναπαραστάσεων ερευνά επίσης και η Mesquita (1998), ενώ η οπτική φαντασία (visual imagery) βρίσκεται στο κέντρο του ενδιαφέροντος ερευνητών, όπως η Presmeg (1986β) και οι Owens και Clements (1998), που καταγράφουν τα είδη της φαντασίας. Τέλος άλλες ειδικότερες έρευνες μελετούν τις εικόνες που έχουν οι μαθητές για μεμονωμένες γεωμετρικές έννοιες, όπως το εμβαδόν (Furinghetti & Paola, 1999) ή η γωνία (Gal, 1997).

Στη γνωστική προσέγγιση που υιοθετούμε δίνεται έμφαση στην ικανότητα μετάφρασης από μια αναπαράσταση σε άλλη. Ο λόγος είναι πως η κατανόηση στα Μαθηματικά προϋποθέτει το συντονισμό δύο τουλάχιστον συστημάτων αναπαράστασης (Duval, 2001).

Εκτός από την αναπαράσταση των γεωμετρικών γνώσεων ένα άλλο ζήτημα που ενδιαφέρει, στα πλαίσια της παρούσης μελέτης, είναι η οργάνωση των γεωμετρικών γνώσεων. Τα θέματα της οργάνωσης των γνώσεων και των γνωστικών λειτουργιών αποτελούν αντικείμενο της Γνωστικής Ψυχολογίας. Στο χώρο των Μαθηματικών, προνομιακό πεδίο έρευνας τέτοιων θεμάτων αποτελεί η Γεωμετρία, λόγω της «γνωστικής συνθετότητάς της» (Duval, 1998, σ. 51). Δηλαδή το ενδιαφέρον στρέφεται στη Γεωμετρία, επειδή είναι γνωστικά σύνθετη, με άλλα λόγια, «αυτή, περισσότερο από άλλες περιοχές των Μαθηματικών, μπορεί να χρησιμοποιηθεί

για να ανακαλύψουμε και να αναπτύξουμε διαφορετικούς τρόπους σκέψης» (Duval, 1998, σ. 51).

Η προσέγγιση της Γεωμετρίας από γνωστική άποψη επιβάλλει να αναδειχθούν εκείνες οι γνωστικές λειτουργίες που καθορίζουν και υποστηρίζουν τις ποικίλες μαθηματικές διαδικασίες (Duval, 2001). Στο επίκεντρο της έρευνας της μαθηματικής εκπαίδευσης βρίσκονται ερωτήματα, όπως πόσες πληροφορίες μπορεί ένας μαθητής να χρησιμοποιεί ταυτόχρονα, ποιους τύπους συνδέσεων εγκαθιστά ανάμεσα στα στοιχεία αυτά και ποια είναι η συνέπεια των δομών που τα περιλαμβάνουν. Για την απάντηση τέτοιων ερωτημάτων συχνά χρησιμοποιείται από τους ερευνητές η δραστηριότητα της ομαδοποίησης γεωμετρικών σχημάτων (π.χ. διαφόρων τετραγώνων ή τριγώνων) (Shriki & Bar On, 1997, Currie, 1998).

Άλλες έρευνες συνδέουν τον προηγούμενο προβληματισμό με τη λύση προβλήματος. Συγκεκριμένα ο Cifarelli μελετά τις διαδικασίες με τις οποίες οι φοιτητές κατασκευάζουν ή τροποποιούν τις νοητικές τους αναπαραστάσεις σε καταστάσεις λύσης προβλήματος (Cifarelli, 1998). Οι Lawson και Chinnappan (2000, σ. 27) διερευνούν «τη σχέση που έχει η επιτυχία στη λύση προβλήματος με την ποιότητα των συνδέσεων ανάμεσα στις γνώσεις που αναπτύσσουν οι μαθητές, όταν προσπαθούν να καταλάβουν τα μαθηματικά». Καθώς οι στόχοι των συγκεκριμένων ερευνητών παρουσιάζουν ομοιότητες με αυτούς της παρούσης έρευνας, θα αναφερθούμε αναλυτικότερα στη μελέτη τους.

Με αφορμή ένα γεωμετρικό σχήμα ή πρόβλημα οι Lawson και Chinnappan επιδιώκουν την καταγραφή των γεωμετρικών στοιχείων που αναγνωρίζει ο μαθητής, των σχετικών γνώσεων που ανακαλεί και της ικανότητάς του να μεταφράζει αναπαραστάσεις ενός συστήματος σε άλλο. Για την εκτίμηση και αξιολόγηση των ευρημάτων χρησιμοποιούνται δύο ειδών δείκτες: οι δείκτες για το περιεχόμενο των γνώσεων και οι δείκτες για το πόσο συνδεδεμένες είναι οι γνώσεις των μαθητών. Τα αποτελέσματα δείχνουν πως οι δεύτεροι δείκτες είναι αυτοί που διαφοροποιούν περισσότερο τους μαθητές με υψηλές και χαμηλές επιδόσεις, στη βάση της επιτυχίας τους στη λύση προβλήματος. Δηλαδή η ποιότητα των συνδέσεων έχει καθοριστικότερη επίδραση από το περιεχόμενο των γνώσεων.

Σε άλλη σχετική έρευνα, ο Chinnappan (1998) διερευνά τα γεωμετρικά γνωστικά Σχήματα που χρησιμοποιούν οι μαθητές στη λύση ενός συγκεκριμένου προβλήματος και τη συχνότητα με την οποία τα ενεργοποιούν. Καταγράφει επίσης τη σειρά ενεργοποίησής τους. Ακόμα ασχολείται με τη φύση των νοητικών μοντέλων που κατασκευάζουν και χρησιμοποιούν οι μαθητές όσο λύνουν το πρόβλημα. Τα αποτελέσματα δείχνουν πως η ποιότητα των γεωμετρικών γνώσεων των μαθητών έχει σημαντική επίδραση στα νοητικά τους μοντέλα και, επακόλουθα, στη χρήση αυτών των γνώσεων.

Η οργάνωση των γνώσεων έχει δυναμικό χαρακτήρα ο οποίος συνδέεται με την εξέλιξη των αντίστοιχων εννοιών. Σύμφωνα με τον Vygotsky (1988), «οι επιστημονικές έννοιες αναπτύσσονται και δεν αποκτώνται σε έτοιμη μορφή» (σ.210). Η ουσία της εξέλιξης συνίσταται στη μετάβαση από τη μία δομή γενίκευσης στην άλλη. Ο ίδιος συνδέει την εξέλιξη των εννοιών με την ταυτόχρονη ανάπτυξη λειτουργιών, όπως η αφαίρεση, η λογική, η εκούσια προσοχή, η σύγκριση και η διαφοροποίηση (ό.π., σ.214). Ο van Hiele (1986) περιγράφει την εξέλιξη μιλώντας για «επίπεδα σκέψης» και δίνοντας τα χαρακτηριστικά και τη γλώσσα που χρησιμοποιεί το καθένα. Η μετάβαση του μαθητή από το ένα επίπεδο σκέψης στο άλλο συνδέεται με την εκμάθηση μίας «νέας γλώσσας» (σ.50).

Για τον Duval (1998), η εξέλιξη της σκέψης συμβαδίζει με τη διαφοροποίηση και το συντονισμό των σημειωτικών συστημάτων αναπαράστασης που χρησιμοποιούνται. Δέχεται ιεραρχήσεις και πιστεύει πως «η ανάπτυξη της σκέψης γίνεται με πολλούς τρόπους και όχι με έναν (*multimodal and not unimodal*)» (σ.49). Αμφισβητεί την ιεράρχηση του van Hiele και ισχυρίζεται πως δεν υπάρχει σημαντική αντιστοιχία ανάμεσα σε ένα επίπεδο σκέψης και ένα επίπεδο γνώσης. Ο λόγος είναι πως, όπως πιστεύει ο Duval, δεν υπάρχει ιεραρχική ανάπτυξη στις γνωστικές δραστηριότητες (νοερή απεικόνιση, αιτιολόγηση με φυσικό λόγο, θεωρητική αιτιολόγηση, τυπική αξιωματική απόδειξη, αναλυτικές και συνθετικές διαδικασίες) (ό.π., σ.49).

Κατά συνέπεια από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση των σχετικών ερευνών αναδεικνύονται σημαντικά πεδία για περαιτέρω έρευνα.

Αφενός υπάρχει το θέμα της δόμησης των γεωμετρικών γνώσεων στο ερμηνευτικό πλαίσιο των γνωστικών Σχημάτων, καθώς και της σύνδεσης των Σχημάτων μεταξύ τους. Παρόλο που ο όρος Σχήμα χρησιμοποιείται ευρύτατα στην έρευνα της μαθηματικής εκπαίδευσης, «δεν έχουν γίνει πολλές προσπάθειες να οριστεί ακριβέστερα το τι θα μπορούσε να αποτελεί ένα Σχήμα» (Davis & Tall, 2002). Επίσης, εφόσον η καλή οργάνωση των γνώσεων συνδέεται με την αποτελεσματική γεωμετρική λειτουργία, η έρευνα πρέπει να εστιάσει και στις παραμέτρους που επηρεάζουν την εγκατάσταση συνδέσεων ανάμεσα σε διάσπαρτες γνώσεις ή Σχήματα και στους παράγοντες που καθορίζουν την ποιότητα αυτών των συνδέσεων. Τέτοια ζητήματα δεν έχουν απαντηθεί επαρκώς στο πλαίσιο της Γεωμετρίας και γίνεται μια προσπάθεια να διερευνηθούν, για μια ειδική περίπτωση (αυτή των γνώσεων που αφορούν στο ισοσκελές τρίγωνο), από την παρούσα έρευνα.

Αφετέρου, η δόμηση και εξέλιξη των γνωστικών Σχημάτων φαίνεται πως εξαρτώνται από τα γνωστικά συστήματα που κινητοποιούνται για να αποκτήσουμε πρόσβαση στα γεωμετρικά αντικείμενα, αλλά και από την ικανότητα να μεταφράζουμε αναπαραστάσεις του ενός

συστήματος σε άλλο. Ο Duval (2002) υποστηρίζει πως η μελέτη των παραμέτρων που επηρεάζουν αυτές τις μεταφράσεις, από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο, αποτελεί σημαντικό πεδίο έρευνας.

1.4.2 Οριοθέτηση της παρούσης έρευνας

Στην παρούσα έρευνα επιλέγουμε να τεθούν στο πλαίσιο της Γεωμετρίας τα ερωτήματα που απομονώθηκαν και χρήζουν περαιτέρω διερεύνησης, μετά τη μελέτη της βιβλιογραφίας. Το ενδιαφέρον μας για τη συγκεκριμένη περιοχή των Μαθηματικών τροφοδοτείται από την υποκείμενη «γνωστική της συνθετότητα» (Duval, 1998). Πράγματι στη Γεωμετρία μπορεί κάποιος, ακόμα και αν δεν σκοπεύει να ασχοληθεί με τα Μαθηματικά, να αναπτύξει ικανότητες νοερής απεικόνισης, κατασκευής ή αιτιολόγησης σε διάφορα επίπεδα συνθετότητας και, στη συνέχεια, να επωφεληθεί από τη συνεργασία αυτών των εντελώς διαφορετικών λειτουργιών. Συνεπώς η Γεωμετρία αποτελεί προνομιακό χώρο μελέτης των λειτουργιών αυτών. Ο Schoenfeld (1986) μας δίνει ένα επιπλέον επιχείρημα, λέγοντας πως «όταν η Γεωμετρία διδάσκεται σωστά, οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να κάνουν πραγματικά μαθηματικά με τον ίδιο ακριβώς τρόπο με τους ερευνητές των μαθηματικών» (σ. 262).

Σχετικά με την οργάνωση των γεωμετρικών γνώσεων υπό μορφή Σχημάτων εστιάζουμε σε συγκεκριμένα Σχήματα που δημιουργούνται γύρω από βασικές σχηματικές έννοιες που διδάσκονται οι μαθητές στην Α Λυκείου, όπως το ισοσκελές τρίγωνο, το παραλληλόγραμμο, το τραπέζιο και ο κύκλος. Από αυτά τα Σχήματα το ένα, αυτό που έχει ως πυρήνα το ισοσκελές τρίγωνο (ΣΙΤ), χρησιμεύει για να εξετάσουμε σε βάθος το τι μπορεί να αποτελέσει ένα Σχήμα. Τα υπόλοιπα χρησιμοποιούνται για να εξετάσουμε πώς δημιουργούνται οι συνδέσεις ανάμεσα σε Σχήματα και ποιοι παράγοντες τις επηρεάζουν.

Το ισοσκελές τρίγωνο επιλέγεται ως κατάλληλο για τους σκοπούς της παρούσας μελέτης, διότι είναι μια έννοια που διατρέχει το αναλυτικό πρόγραμμα της Α Λυκείου και όχι μία έννοια μεμονωμένη. Συγκεκριμένα το ισοσκελές διδάσκεται στο ξεκίνημα του σχολικού έτους και, στη συνέχεια, εμφανίζεται ως δομικό στοιχείο στις περισσότερες από τις υπόλοιπες σχηματικές έννοιες που οι μαθητές διδάσκονται σταδιακά, στη διάρκεια της χρονιάς. Αυτή η σύνδεση του ισοσκελούς με το παραλληλόγραμμο, το τραπέζιο ή τον κύκλο, που είναι άλλοτε στενότερη (όπως π.χ. με το ρόμβο, ο οποίος αποτελείται από δύο ισοσκελή τρίγωνα) και άλλοτε χαλαρή (όπως π.χ. με τον κύκλο) προσφέρει μια ευνοϊκή περίπτωση μελέτης διαφόρων τύπων συνδέσεων ανάμεσα σε γνωστικά Σχήματα.



Η παρούσα έρευνα αναφέρεται στο γνωστικό Σχήμα που δημιουργείται με πυρήνα το ισοσκελές τρίγωνο, κατ' αναλογία με το γνωστικό Σχήμα του ορθογωνίου τριγώνου που επικαλείται ο Chinnappan. Οι δύο έρευνες παρουσιάζουν αποκλίσεις.

Μεθοδολογικά ο Chinnappan χρησιμοποιεί σαν ερέθισμα ένα μόνο πρόβλημα. Έτσι, όπως επισημαίνει και ο ίδιος, δε διαθέτει το καλύτερο πλαίσιο στο οποίο να μπορούν όλοι οι μαθητές να επιδείξουν τις ικανότητές τους. Στη δική μας έρευνα χρησιμοποιούνται συνολικά επτά προβλήματα που έχουν διαφορετικό βαθμό δυσκολίας, έτσι κάθε μαθητής / μαθήτρια έχει την ευκαιρία να δώσει κάποιου είδους απάντηση.

Η ουσιώδης διαφορά των δύο ερευνών όμως αφορά στους στόχους. Ο Chinnappan ενδιαφέρεται να διακρίνει και να καταγράψει ποια άλλα γεωμετρικά γνωστικά Σχήματα ενεργοποιούν ή χρησιμοποιούν οι μαθητές κατά τη λύση του προβλήματος που τους δίνει. Εμείς εστιάζουμε σε ένα γνωστικό Σχήμα, αυτό που δημιουργείται γύρω από το ισοσκελές τρίγωνο (ΣΙΤ), και το εξετάζουμε ως προς τρεις άξονες: (α) το περιεχόμενο και τη χρήση του, (β) τη σύνδεσή του με άλλα γνωστικά Σχήματα και (γ) την εξέλιξή του. Ειδικότερα, ανά άξονα διερευνούμε τα ακόλουθα:

(α) περιεχόμενο και τη χρήση

Το γνωστικό Σχήμα του ισοσκελούς τριγώνου ανιχνεύεται μέσα από τις ικανότητες του ατόμου να αναγνωρίζει και να χρησιμοποιεί την σχηματική έννοια του ισοσκελούς τριγώνου. Καθοριστικοί παράγοντες για την αναγνώριση και τη χρήση αναδεικνύονται από την έρευνα η εικόνα – πρότυπο του ισοσκελούς, οι πρωταρχικές και δευτερεύουσες δομές των γεωμετρικών σχημάτων και η διάσταση στην οποία τα γεωμετρικά σχήματα γίνονται αντιληπτά από το μαθητή.

(β) σύνδεση με άλλα γνωστικά Σχήματα

Οι συνδέσεις ανάμεσα σε γνωστικά Σχήματα διερευνώνται με αφορμή τις συνδέσεις ανάμεσα στα γνωστικά Σχήματα των μαθητών αφενός, και στις πληροφορίες που περιέχονται στα δοθέντα προβλήματα αφετέρου. Έμφαση δίνεται στους παράγοντες που επηρεάζουν και διευκολύνουν ή αποτρέπουν τις συνδέσεις. Ανιχνεύονται ενδείξεις στη γεωμετρική λειτουργία των μαθητών που δίνουν πληροφορίες για την αποτελεσματικότητα μιας σύνδεσης. Η διερεύνηση της σύνδεσης του γνωστικού Σχήματος του ισοσκελούς τριγώνου με άλλα γνωστικά Σχήματα αποκαλύπτει δύο παράγοντες που διευκολύνουν τις συνδέσεις μεταξύ γνωστικών σχημάτων: την ύπαρξη κοινών στοιχείων και τη συμμετρία.

(γ) εξέλιξη

Ένα ακόμα θέμα που μας απασχολεί σε σχέση με το γνωστικό Σχήμα του ισοσκελούς τριγώνου είναι η εξέλιξή του. Στην παρούσα έρευνα, από τις θεωρίες που αναλύθηκαν,

κρατάμε την εξέλιξη των εννοιών με ταυτόχρονη ανάπτυξη κάποιων λειτουργιών (Vygotsky). Επίσης ως προς τη μορφή της εξέλιξης, δεχόμαστε ότι γίνεται με πολλούς τρόπους και όχι ιεραρχικά (Dunal). Με αυτά τα δεδομένα η αρχική μας υπόθεση εργασίας διαμορφώνεται ως εξής: «το γνωστικό Σχήμα που δημιουργείται με αφορμή το ισοσκελές τρίγωνο εξελίσσεται μη γραμμικά».

Από τον προβληματισμό μας προκύπτουν δύο ερωτήματα που σχετίζονται άμεσα με την εξέλιξη και με τη μη γραμμικότητα του γνωστικού Σχήματος του ισοσκελούς τριγώνου. Τα ερωτήματα είναι:

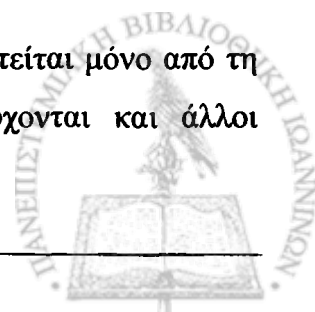
→ με ποιο τρόπο εκδηλώνεται η εξέλιξη του γνωστικού Σχήματος του ισοσκελούς τριγώνου; Πώς θα τη διακρίνουμε; Με άλλα λόγια, τι στοιχεία και λειτουργίες του Σχήματος συσχετίζουμε με την εξέλιξη και ως προς ποιους άξονες θα την ανιχνεύσουμε και θα την παρακολουθήσουμε;

Διαισθητικά θα μπορούσε κάποιος να απαντήσει πως η εξέλιξη συνδέεται με πιο επεξεργασμένα και ακριβή γνωστικά Σχήματα, όμως η έρευνα δείχνει πως η μεταβολή του αρχάριου σε έμπειρο δεν συμβαίνει μόνο με μια εκλέπτυνση της προοπτικής του, αλλά μπορεί να εμπλέκει εννοιολογική αλλαγή (Rouse & Morris, 1986, σ.356). Υποθέτουμε, λοιπόν, πως η εξέλιξη συνδέεται με τον εμπλουτισμό του γνωστικού Σχήματος του ισοσκελούς τριγώνου και τη δημιουργία νέων συνδέσεων, δεχόμενοι παράλληλα ότι η ποιότητα των συνδέσεων είναι σημαντικότερη από τον αριθμό τους.

→ ποιοι παράγοντες συντελούν στη μη γραμμικότητα της εξέλιξης;

Στην έρευνα συχνά επισημαίνεται πως η μετακίνηση από τον αρχάριο στον ειδικό δεν προϋποθέτει ότι όλες οι αφελείς έννοιες έχουν απαραίτητα εγκαταλειφθεί (McCloskey, 1983, DiSessa, 1982). Ο μαθητής μπορεί να διατηρεί για αρκετό διάστημα τέτοιες έννοιες, δίχως να τις αμφισβητεί ή να τις απορρίπτει, ακόμα και αν του δημιουργούν δυσκολίες σε νέες καταστάσεις, με αποτέλεσμα κάποιες από τις λειτουργίες του να εμφανίζουν πισωγυρίσματα. Η μη γραμμικότητα στην εξέλιξη φαίνεται από το ότι ο μαθητής δεν έχει τον τρόπο να χρησιμοποιήσει συνειδητά τις πληροφορίες που γνωρίζει σε κάθε κατάσταση που του παρουσιάζεται. Η αδυναμία του παιδιού να προσαρμόσει γνωστές δεξιότητες σε νέα προβλήματα που αντιμετωπίζει, το γεγονός πως δεν αναζητά εναλλακτικές προσεγγίσεις ή ότι επιστρέφει σε προγενέστερες μεθόδους, όταν συναντά κάποια δυσκολία, είναι σημάδια οπισθοχώρησης.

Συνεπώς, καταλαβαίνουμε πως η εξέλιξη δεν είναι δυνατόν να σηματοδοτείται μόνο από τη βαθμιαία ενσωμάτωση νέων πληροφοριών, αλλά πρέπει να υπεισέρχονται και άλλοι



παράγοντες. Τέτοιους παράγοντες ακριβώς επιχειρούμε να ανιχνεύσουμε κατά την παρούσα έρευνα.

Σημαντικό ρόλο, στην κατασκευή και εξέλιξη του γνωστικού Σχήματος του ισοσκελούς τριγώνου διαδραματίζουν τα συστήματα αναπαράστασης που χρησιμοποιούνται και οι γνωστικές λειτουργίες που εμπλέκονται στη Γεωμετρία. Η παρούσα έρευνα αναλύει τις τρεις λειτουργίες (νοερή απεικόνιση, κατασκευή και αιτιολόγηση) που περιλαμβάνονται στη γεωμετρική σκέψη και την αλληλεξάρτησή τους στο πλαίσιο μιας καθορισμένης δραστηριότητας, της αποκαλούμενης «γεωμετρικής κατασκευής»⁶². Η εξέλιξη των ίδιων των λειτουργιών και ο συντονισμός τους αποτελούν ενδείξεις ωρίμανσης του γνωστικού Σχήματος.

Συνοψίζοντας θα λέγαμε πως οι υποθέσεις με τις οποίες αρχίζει η παρούσα έρευνα σχετίζονται:

- με τη μορφή που έχει το γνωστικό Σχήμα του ισοσκελούς τριγώνου (ΣΙΤ) σε μαθητές αυτής της ηλικίας. Η μορφή υποθέτουμε πως ανιχνεύεται μέσα από την ικανότητά των μαθητών να αναγνωρίζουν και να χρησιμοποιούν την έννοια του ισοσκελούς τριγώνου
- με τον τρόπο σύνδεσης του γνωστικού Σχήματος του ισοσκελούς τριγώνου (ΣΙΤ) με άλλα γνωστικά Σχήματα. Οι συνδέσεις υποθέτουμε πως γίνονται μέσα από κοινά στοιχεία των δύο σχημάτων, ενώ εξετάζεται ο ρόλος της συμμετρίας
- με τις τρεις λειτουργίες που εμπλέκονται στη γεωμετρική σκέψη. Η εξέλιξη του γνωστικού Σχήματος του ισοσκελούς τριγώνου συσχετίζεται με το συντονισμό των τριών λειτουργιών και την ικανότητα προσαρμογής τους στα προβλήματα που αντιμετωπίζει ο μαθητής.

1.4.3 Το Σχήμα ως ερμηνευτικό πλαίσιο

Προκειμένου να διερευνήσουμε, στην παρούσα εργασία, τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αναπαριστούν και οργανώνουν στο νου τους τις γνώσεις που αφορούν στο ισοσκελές τρίγωνο, επιλέγουμε ως καταλληλότερο ερμηνευτικό πλαίσιο την έννοια του «Σχήματος: schema». Οι λόγοι που οδηγούν στη συγκεκριμένη επιλογή είναι οι ακόλουθοι:

- η γεωμετρική γνώση είναι οργανωτικά δομημένη σε ένα αξιωματικό σύστημα
- η γεωμετρική γνώση είναι σύνθετη, γιατί περιλαμβάνει γνώση γεγονότων, πραγμάτων καταστάσεων κλπ και γνώση σχετικά με το πώς εκτελούμε διάφορες γνωστικές δραστηριότητες

- η Γνωστική Ψυχολογία υποστηρίζει πως «η συχνότερα χρησιμοποιούμενη κατασκευή για να ερμηνευτεί η οργάνωση της σύνθετης γνώσης είναι το Σχήμα» (Eysenck & Keane, 1990, σ. 275)

συνεπώς τα «γνωστικά Σχήματα» φαίνεται πως είναι κατάλληλος τρόπος για να περιγραφεί η οργάνωση των γεωμετρικών γνώσεων.

Η επιλογή του Σχήματος που υιοθετούμε, ως πλαισίου ερμηνείας της οργάνωσης και αναπαράστασης των μαθηματικών εννοιών στη μνήμη, βρίσκει σύμφωνους και άλλους ερευνητές. Ο Vergnaud (1998) λέει πως «η έννοια του Σχήματος φαίνεται αποδοτική όχι μόνο για την περιγραφή γνώριμων συμπεριφορών, αλλά επίσης για την περιγραφή και κατανόηση των διαδικασιών λύσης προβλήματος» (σ.173). Οι Nesher & Herschkovitz (1994) χρησιμοποιούν το «Σχήμα» για να αναλύσουν τη λειτουργία των μαθητών με λεκτικά προβλήματα. Τέλος η άποψη του Chinnappan (1998) είναι πως ένα γνωστικό Σχήμα εξελίσσεται γύρω από ένα συγκεκριμένο γεωμετρικό σχήμα και αναφέρει ως παράδειγμα το «Σχήμα του ορθογωνίου τριγώνου»⁶³.

Εναλλακτικές προτάσεις, σχετικά με την οργάνωση σύνθετων εννοιολογικών δομών, όπως οι θεωρίες ή τα σημασιολογικά δίκτυα (Βοσνιάδου, 1995), δεν προκρίνονται στην παρούσα έρευνα, γιατί πιστεύουμε πως παρουσιάζουν συγκεκριμένες αδυναμίες, στην περίπτωση της Γεωμετρίας.

Οι «θεωρίες» προτείνονται για την ερμηνεία φαινομένων του φυσικού ή κοινωνικού περίγυρου του ατόμου (χρησιμοποιούνται π.χ. στη Φυσική). Οι θεωρίες πιστεύουμε πως είναι ακατάλληλες στην περίπτωση των γεωμετρικών γνώσεων, όπου τα αντικείμενα στα οποία αναφερόμαστε, οι σχηματικές έννοιες (όπως σημεία, γωνίες, ευθείες και πράξεις σε αυτά) έχουν μόνο μία ιδανική ύπαρξη (1.1.6) με αποτέλεσμα να μην μπορούν να γίνουν εύκολα αντιληπτά στο περιβάλλον μας.

Από την άλλη, τα «σημασιολογικά δίκτυα» απαιτούν για τη δημιουργία τους ιεραρχικές δομές και θεωρούνται πρόωρα για την ηλικία των μαθητών στην οποία απευθύνεται η έρευνά μας. Οι ιεραρχικές δομές, σύμφωνα με τον van Hiele, δημιουργούνται στο 3^ο επίπεδο: διάταξης / ταξινόμησης, δηλαδή αφού πρώτα το άτομο έχει αποκτήσει αρκετές γνώσεις σχετικά με το αντικείμενο. Οι μαθητές ξεκινούν τη γνωριμία τους με την Γεωμετρία (ως μάθημα) ουσιαστικά στην Α' Λυκείου, αφού στο Γυμνάσιο παίρνουν ελάχιστες και σποραδικά δοσμένες γνώσεις εμβόλιμες στην Άλγεβρα. Αντικειμενικά, λοιπόν, θεωρείται πρόωρο από την αρχή της επαφής τους με τις γεωμετρικές έννοιες να χρησιμοποιήσουν «σημασιολογικά δίκτυα» για να αναπαραστήσουν και να οργανώσουν συστηματικά τις γνώσεις τους σχετικά με αυτές.

1.4.4 Ο ορισμός του Σχήματος που χρησιμοποιούμε

Στην παρούσα έρευνα χρησιμοποιούμε τον όρο Σχήμα (schema) αναφερόμενοι στη δόμηση των πληροφοριών στο νου (Barnard & Tall, 2001). Αντιλαμβανόμαστε το Σχήμα ως ένα σύμπλεγμα από έννοιες που συνδέονται με ιδιότητες και διαδικασίες (Skemp, 1971), αλλά και άλλα Σχήματα.

Υιοθετώντας το διαχωρισμό των Σχημάτων σε γενικά και συγκεκριμένα των Fischbein και Grossman (1997, σ.30) θεωρούμε πως το Σχήμα που δημιουργείται με πυρήνα το ισοσκελές τρίγωνο (ΣΙΤ) ανήκει στην κατηγορία των συγκεκριμένων Σχημάτων. Πρόκειται για ένα ειδικό γνωστικό Σχήμα που αναπτύσσεται σε σχέση με το συγκεκριμένο μαθηματικό περιεχόμενο και περιλαμβάνει επίσης τρόπους συμπεριφοράς (:χρήση του ισοσκελούς).

Σχετικά με τον ορισμό του Σχήματος που χρησιμοποιούμε, βρισκόμαστε πλησιέστερα στον επαναληπτικό ορισμό του Cottrill και των συνεργατών του (1996, σ. 172) καθώς και στον ορισμό του Chinnappan (1998, σ.202) (ενότητα 1.2.4). Ο τελευταίος ορίζει το Σχήμα με τρόπο που φαίνεται καταλληλότερος για την περίπτωση ενός συγκεκριμένου Σχήματος που αναπτύσσεται γύρω από μία γεωμετρική έννοια, όπως το ΣΙΤ. Πράγματι ο ίδιος εφαρμόζει τον ορισμό του στο «Σχήμα του ορθογωνίου τριγώνου». Λέει πως «Σχήμα είναι ένα σύμπλεγμα γνώσης που περιέχει πληροφορίες για έννοιες – πυρήνες, τις σχέσεις ανάμεσα σε αυτές τις έννοιες και γνώση για το πώς και πότε τις χρησιμοποιούμε». Τις, κατά τη γνώμη μας, ελλείψεις αυτού του ορισμού, δηλαδή, (α) το ότι δεν υπογραμμίζει τη δυνατότητα του Σχήματος να περιλαμβάνει άλλα Σχήματα και (β) το ότι δεν συνδέει ένα τέτοιο γνωστικό Σχήμα με τη λύση προβλήματος, τις καλύπτει ο ορισμός του Cottrill, παρότι είναι γενικότερος.

Τα δύο αυτά σημεία (α και β) τα θεωρούμε ιδιαίτερα σημαντικά και πιστεύουμε πως πρέπει να συμπεριληφθούν σε έναν ορισμό του γνωστικού Σχήματος που θα οδηγεί στην κατανόησή του. Ενώ η σημασία του (α) είναι προφανής και αφορά στη συνολική δόμηση των γνώσεων με δομική μονάδα το Σχήμα, η σημασία του (β) προκύπτει από την αντίληψη που έχουμε, στη συγκεκριμένη έρευνα, για το γνωστικό Σχήμα, και η οποία συνδέει την ύπαρξη με τη λειτουργία του. Συγκεκριμένα δεχόμαστε πως υπάρχει ένα γνωστικό Σχήμα, από τη στιγμή που μπορούμε να διαπιστώσουμε, με κάποιο τρόπο, τη λειτουργία του. Το Σχήμα εμφανίζεται να λειτουργεί – και συνεπώς μας δίνει την ευκαιρία να το διερευνήσουμε – σε μία κατάσταση προβλήματος συνεπώς συνδέεται αναπόσπαστα με αυτήν.

Με βάση τα σχόλια που προηγήθηκαν, διατυπώνουμε και χρησιμοποιούμε στην παρούσα έρευνα τον ακόλουθο ορισμό:

«Το γνωστικό Σχήμα που δημιουργείται με πυρήνα μια γεωμετρική έννοια είναι ένα σύμπλεγμα από γνώσεις σχετικά με γεωμετρικά αντικείμενα, σχέσεις μεταξύ τους, οδηγίες για την κατασκευή ή τη χρήση τους και άλλα Σχήματα, το οποίο (Σχήμα) εμφανίζεται σε μία κατάσταση προβλήματος».

Ο ορισμός αυτός παρουσιάζει το πλεονέκτημα πως αντιμετωπίζει το γεωμετρικό σχήμα συνολικά, καθώς επιτρέπει τη σύνδεση διαφορετικών εννοιών και διαδικασιών στα πλαίσια της κατασκευής του αντίστοιχου γνωστικού Σχήματος. Στην περίπτωση του ισοσκελούς τριγώνου, ο ορισμός του αντίστοιχου Σχήματος (ΣΙΤ) θα μπορούσε να διατυπωθεί ως εξής:

Το ΣΙΤ είναι ένα σύμπλεγμα από γνώσεις σχετικά με το ισοσκελές τρίγωνο, που προκύπτουν από τον ορισμό, την εικόνα – πρότυπο, από σχέσεις ανάμεσα στα στοιχεία του (πλευρές, γωνίες, ύψη, διαμέσους κλπ), από τους ρόλους των επιμέρους στοιχείων⁶⁴ (πλευρών, υψών), από οδηγίες για την κατασκευή του, πληροφορίες για τη συμμετρία του, κλπ. Το ΣΙΤ εμφανίζεται, όταν ο μαθητής αντιμετωπίζει μία κατάσταση προβλήματος.

Σχετικά με την οργάνωση του Σχήματος του ισοσκελούς τριγώνου υιοθετούμε την άποψη του Moore (1.2.10) και διερευνούμε το ΣΙΤ με άξονες τον ορισμό, την εικόνα και τη χρήση της έννοιας του ισοσκελούς, ενώ διατηρούμε επιφυλάξεις σε σχέση με την προτεραιότητα που δίνει ο Moore στον ορισμό έναντι της εικόνας της έννοιας.

Σχετικά με την οργάνωση των Σχημάτων μεταξύ τους, κατ' αρχήν δεχόμαστε τη δυνατότητα ταυτόχρονης χρήσης (μιας αρχικής μορφής) κατακόρυφων ιεραρχιών και δικτύων⁶⁵. Εκείνο που απασχολεί ιδιαίτερα είναι οι συνδέσεις ανάμεσα στα Σχήματα και οι παράγοντες που τις διευκολύνουν ή τις δυσκολεύουν.

Θέλοντας να κάνουμε συγκεκριμένο το περιεχόμενο ενός τέτοιου γνωστικού Σχήματος, που δημιουργείται με πυρήνα μια σχηματική έννοια, αντιμετωπίζουμε το Σχήμα ως δομή⁶⁶ και το εξετάζουμε με μια άλλη, μαθηματική, οπτική, οπότε:

- i. το «σύμπαν» του περιλαμβάνει γεωμετρικές έννοιες (απλές⁶⁷ ή / και σύνθετες⁶⁸)
- ii. οι σχέσεις ανάμεσα στις έννοιες υποδηλώνονται με λεκτικές ή συμβολικές προτάσεις που, κατά περίπτωση, ονομάζονται αξιώματα, ιδιότητες, ή θεωρήματα⁶⁹. Ορίζονται, επίσης, σχέσεις μέρους – όλου μεταξύ των εννοιών που δημιουργούν ιεραρχίες και κατηγορίες αντικειμένων⁷⁰ (από όπου προκύπτει η δυνατότητα ενσωμάτωσης ενός Σχήματος σε άλλο).



iii. ως συναρτήσεις του γνωστικού Σχήματος μπορούν να θεωρηθούν οι πάσης φύσεως μετασχηματισμοί, τους οποίους μπορούμε να εφαρμόσουμε στις έννοιες (ομοιότητες, στροφές, μετατοπίσεις, συμμετρίες κλπ).

Από τα στοιχεία της δομής του Σχήματος, τα i και ii (σύμπαν και σχέσεις) αντιπροσωπεύουν τον πληροφοριακό του χαρακτήρα, ενώ το iii (συναρτήσεις) τον ενεργητικό χαρακτήρα. Τέλος το περιεχόμενο του Σχήματος μπορεί να αναπαρίσταται σε διάφορα συστήματα αναπαράστασης (λεκτικό, συμβολικό, γεωμετρικών σχημάτων).

Φυσικά το κάθε γνωστικό Σχήμα δεν περιλαμβάνει όλο αυτόν τον πλούτο, και μάλιστα όχι από την αρχή. Καθώς οι μαθητές αντανakλούν και πειραματίζονται με όσα έχουν μάθει, τροποποιούν τα γνωστικά τους Σχήματα, μέσα από μια διαδικασία κατασκευής και ανακατασκευής. Έτσι αυτά εμφανίζουν ένα δυναμισμό, αναπτύσσονται και εμπλουτίζονται συνεχώς. Στην πορεία οι μαθητές γίνονται ικανοί να αναγνωρίζουν σε ένα γεωμετρικό σχήμα περισσότερα στοιχεία⁷¹, να προσθέτουν νέες σχέσεις ανάμεσα στα στοιχεία του γεωμετρικού σχήματος ή να επαναλαμβάνουν εκείνους τους συσχετισμούς που αποδεικνύονται αποτελεσματικοί. Πρόκειται δηλαδή για μια σκόπιμη και ελεγχόμενη διαδικασία δόμησης γεωμετρικών γνωστικών Σχημάτων.

ΣΧΟΛΙΑ 1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

¹ Παραδείγματος χάριν, ο υπολογισμός εξαρτάται από το σύστημα αναπαράστασης των αριθμών. Έτσι, στο δεκαδικό σύστημα μπορούν να γίνουν περισσότερες πράξεις και με μεγαλύτερη ευκολία, από το Ρωμαϊκό σύστημα αρίθμησης.

² Συστήματα αρίθμησης, γεωμετρικά σχήματα, αλγεβρικά σύμβολα, γραφικές αναπαραστάσεις, φυσική γλώσσα κλπ.

³ Αν θεωρήσουμε ως παράδειγμα τους αριθμητικούς υπολογισμούς, το δεκαδικό σύστημα δίνει πολύ περισσότερες δυνατότητες από το Ελληνορωμαϊκό σύστημα αρίθμησης.

⁴ Ο γραπτός ή προφορικός λόγος ενός ατόμου γίνεται κατανοητός από όσους ομιλούν την ίδια γλώσσα με αυτόν (και πιθανά όχι από όλους), για την ανάγνωση γραφημάτων χρειάζονται κάποιες εξειδικευμένες γνώσεις κλπ.

⁵ Πχ μπορούμε να βελτιώσουμε την επίδοσή μας μεγιστοποιώντας την ευχαρίστηση από το επιτελούμενο έργο και τη θετική αυτοεικόνα που αποκομίζουμε από αυτό

⁶ Όπως, όταν θέτουμε όπου x το $x+a$, και ενδιαφερόμαστε να μάθουμε τι θα συμβεί στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\psi = f(x)$

⁷ Σχετικές αναφορές και υποδείξεις για χρήση αναπαραστάσεων ως βοηθημάτων για την κατανόηση εννοιών βλέπουμε στα «Προγράμματα σπουδών Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης» για τα Μαθηματικά, του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου (1999). Επίσης, οι Ολλανδοί στο πρόγραμμα «Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση» συλλέγουν στοιχεία, για το μαθησιακό επίπεδο των μαθητών και για τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν, με τη βοήθεια των σχημάτων - αναπαραστάσεων που κάνουν τα παιδιά στο πρόχειρο, στην προσπάθειά τους να λύσουν κάποιο πρόβλημα [van den Heuvel-Panhuizen].

⁸ Εδώ εννοούνται τα τυπικά μαθηματικά σύμβολα

⁹ Ενώ μπορούμε να γράψουμε συμβολικά φράσεις όπως «η ευθεία ϵ_1 είναι κάθετη στην ευθεία ϵ_2 », δεν μπορούμε να κάνουμε το ίδιο με φράσεις όπως «η ευθεία ϵ είναι εφαπτομένη του κύκλου (K, ρ) », ή «η ημιευθεία $O\alpha$ είναι διχοτόμος της γωνίας AOB ».

¹⁰ Οι έννοιες ορίζονται ως «συμβολικές αναπαραστάσεις, κυρίως λεκτικές, που χρησιμοποιούνται στη διαδικασία της αφηρημένης σκέψης και έχουν μια γενική σημασία που αντιστοιχεί στα κοινά χαρακτηριστικά ενός συνόλου συγκεκριμένων αναπαραστάσεων» [Piéron, Vocabulaire de la Psychologie].

¹¹ Μόνο όταν διαχειριζόμαστε μία έννοια που αναφέρεται επίσης και σε εικόνα μπορούμε να κάνουμε ενέργειες συνήθεις στη Γεωμετρία όπως, π.χ., αποκόλληση, αναστροφή και τοποθέτηση ενός σχήματος πάνω σε ένα άλλο.

¹² Για παράδειγμα ένας κύβος δεν είναι μία εικόνα ζωγραφισμένη στο χαρτί, αλλά ένα σχήμα «ελεγχόμενο από τον ορισμό του», δηλαδή καθοριζόμενο από αυτόν, άσχετα με το γεγονός ότι μπορεί να παραπέμπει σε κάποιο αληθινό αντικείμενο. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο όταν αντιμετωπίζουμε κάποιο πρόβλημα σχετικό με τον κύβο, π.χ. αναζητούμε την τομή του με κάποιο επίπεδο, καθοδηγούμαστε στη λύση από τις ιδιότητες του στερεού – ίσες ακμές και διαγώνιοι, παράλληλες έδρες κλπ - και όχι από τη ζωγραφισμένη εικόνα του.

¹³ Το αληθινό νόημα της σχηματικής έννοιας «κύκλος» στη γεωμετρία, όπως το χειρίζεται η διαδικασία του συλλογισμού μας, δεν περιορίζεται σε ένα καθαρά τυπικό ορισμό. Είναι μία εικόνα που ελέγχεται τελειώς από έναν ορισμό.

¹⁴ Όταν λύνουμε ένα πρόβλημα σχετικό με τη ρόδα ενός ποδηλάτου, χρησιμοποιούμε ένα αφηρημένο μοντέλο της ρόδας που δεν είναι ούτε μία καθαρή εικόνα, ούτε μία καθαρή έννοια, αλλά συνδυασμός των δύο. Θεωρούμε δηλαδή, μια νοητική κατασκευή η οποία έχει ταυτόχρονα ιδιότητες εννοιολογικές και σχηματικές.

¹⁵ Ένα σύνολο αντικειμένων ή γεγονότων που ομαδοποιούμε, γιατί πιστεύουμε πως σχετίζονται με κάποιο τρόπο

¹⁶ Πρόκειται για τις ιδιότητες που μοιράζονται όλες οι οντότητες που ανήκουν σε μια έννοια, π.χ. όλα τα τρίγωνα έχουν «τρεις γωνίες» και, επίσης, έχουν την ιδιότητα «το άθροισμα των γωνιών τους είναι 180°».

¹⁷ Πρόκειται για εκείνες τις ιδιότητες που καθορίζουν πόσο τυπικό ή αντιπροσωπευτικό είναι το κάθε μέλος της κατηγορίας. Για παράδειγμα το χελιδόνι είναι πιο τυπικό μέλος της κατηγορίας «πουλί» από την κότα, γι' αυτό απαντάμε γρηγορότερα στην ερώτηση «το χελιδόνι είναι πουλί;» από την ερώτηση «η κότα είναι πουλί;». Τα τυπικά μέλη μιας κατηγορίας μοιράζονται περισσότερες ιδιότητες με τα άλλα μέλη της κατηγορίας από εκείνες που μοιράζονται τα μη τυπικά.

¹⁸ Αν, για παράδειγμα, εντάξει ένα αντικείμενο στην κατηγορία «ξενοδοχείο» έχει προσδοκίες για τον τρόπο που μπορεί να περάσει μια νύκτα εκεί, για τις υπηρεσίες που μπορεί να του προσφερθούν, κλπ.

¹⁹ Η αγγλική λέξη «schema» προέρχεται, όπως είναι φανερό, από την αντίστοιχη ελληνική.

²⁰ Άλλοι ερευνητές, όπως οι Vergnaud, Davis, Moore, Nesher & HersHKovitz χρησιμοποιούν τον όρο scheme ενώ άλλοι, όπως οι Skemp, Fischbein, Dorfner, Chinnappan, Lawson, χρησιμοποιούν τον όρο schema (πληθυντικός schemata).

²¹ Για παράδειγμα, για την εκτέλεση της αφαίρεσης, τη λύση συστήματος δύο εξισώσεων πρώτου βαθμού κλπ.

²² Το πρόβλημα είναι: υπάρχουν 13 αγόρια και 16 κορίτσια σε μια ομάδα, πόσα παιδιά υπάρχουν;

²³ α: 13 αγόρια στην ομάδα, β: 16 κορίτσια στην ομάδα, γ: πόσα παιδιά υπάρχουν στην ομάδα;

²⁴ Ο Tall εμφανίζεται να χρησιμοποιεί και τους δύο όρους σε δύο διαφορετικά του κείμενα, στο Gray, Pinto, Pitta and Tall (1999) χρησιμοποιεί το schema, ενώ στο κεφάλαιο What is a scheme? του βιβλίου Intelligence, Learning and Action των D. Tall & M. Thomas (eds) χρησιμοποιεί και τους δύο όρους.

²⁵ Για παράδειγμα, για να κατανοήσουμε ένα κείμενο γραμμένο σε μια ξένη γλώσσα πρέπει να κινητοποιήσουμε το λεξιλόγιο, τη γραμματική της, όσα γνωρίζουμε για τις έννοιες που αναφέρονται στο κείμενο κλπ.

²⁶ Όπως π.χ. η διαδοχή των ενεργειών που πρέπει να γίνουν για να λυθεί μια συγκεκριμένη ομάδα προβλημάτων. Αυτή αποτελεί το σχήμα της λύσης τους. Στα πλαίσια αυτά, οι Nesher & HersHKovitz διερευνούν τις επιδράσεις των Σχημάτων που υποτίθεται πως αποτελούν τη βάση για λεκτικά προβλήματα αριθμητικής με δύο βήματα.

²⁷ Ο αλγόριθμος είναι ένας αποτελεσματικός κανόνας ή ένα αποτελεσματικό σύνολο κανόνων που λύνει μια συγκεκριμένη ομάδα προβλημάτων, σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων, εφόσον μια τέτοια λύση υπάρχει, ή που αποδεικνύει πως δεν υπάρχει λύση.

Γενικότερα τα Σχήματα δεν είναι τόσο αποτελεσματικά όσο οι αλγόριθμοι, αλλά μόνο ικανά. Δεν είναι ποτέ σίγουρο ότι θα φτάσεις στο στόχο, ούτε πως κάποιος θα τον φτάσει σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων.

²⁸ Όπως το να κάθεται, να τρέχεις, να περπατάς, να πιάνεις ένα αντικείμενο από το τραπέζι ή το πάτωμα, να χορεύεις ένα συγκεκριμένο χορό, να κάνεις άλμα εις μήκος ή εις ύψος κ.ά.

²⁹ Όπως το να λες μια ιστορία, να βγάζεις πολιτικό λόγο, να μιλάς μια ξένη γλώσσα, να συνεργάζεσαι και να αντιμετωπίζεις συγκρούσεις κ.ά.

³⁰ Για παράδειγμα, το σενάριο του εστιατορίου το οποίο περιλαμβάνει γνώσεις του τι συμβαίνει όταν κάποιος πηγαίνει στο εστιατόριο (μπαίνει, ψάχνει για τραπέζι, κάθεται, παίρνει τον κατάλογο, διαλέγει φαγητό κλπ). [Βοσνιάδου, σ. 16].

³¹ Σε αντιστοιχία με τη διάκριση της γνώσης σε «δηλωτική» και «διαδικαστική»

³² A= action, P= process, O= object, S= schema

³³ Εφόσον ο τελικός στόχος της αποτελεσματικής οργάνωσης και διασύνδεσης των γνωστικών Σχημάτων είναι η επιτυχία στη λύση προβλήματος, οι δυσκολίες σε αυτό το έργο μπορούν να δώσουν πληροφορίες για τα στοιχεία τα απαραίτητα σε ένα γνωστικό Σχήμα. Ο Moore κατέληξε στο Σχήμα κατανόησης της έννοιας

ευαισθητοποιημένος από τα προβλήματα των φοιτητών, όταν προσπαθούσαν να ασκηθούν στις τυπικές μαθηματικές αποδείξεις, σε θέματα Ανάλυσης.

³⁴ Πέρα από τη νοητική εικόνα μιας έννοιας μπορεί να υπάρχει στο νου του ατόμου ένα σύνολο από ιδιότητες που σχετίζονται με την έννοια. Για παράδειγμα, κάποιος μπορεί να σκέφτεται (λανθασμένα) πως το ύψος του τριγώνου πέφτει πάντα μέσα σε αυτό ή πως (σωστά) το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου είναι 180° . Το σύνολο αυτών των ιδιοτήτων μαζί με τη νοητική εικόνα ο Vinner τα ονομάζει εικόνα της έννοιας (concept image).

³⁵ Ενότητα 1.1.6

³⁶ Αυτό συμβαίνει κυρίως στη περίπτωση της Ανάλυσης, που ερευνά ο Moore, και λιγότερο στη περίπτωση της Γεωμετρίας, που θα σχολιαστεί ακολούθως στην παρούσα έρευνα.

³⁷ Για παράδειγμα στη μέτρηση, επαναλαμβάνονται οι αριθμοί (λέξεις) και ταυτόχρονα το δάχτυλο μπορεί να δείχνει τα αντικείμενα ένα – ένα (ενέργεια). Αργότερα, η ενέργεια γίνεται ρουτίνα και αντιμετωπίζεται σα διαδικασία. Τέλος, όταν το άτομο συνειδητοποιήσει ότι με όποιο τρόπο και να μετρήσει τα ίδια αντικείμενα καταλήγει στον ίδιο αριθμό, τότε ενσωματώνει τη διαδικασία στην έννοια του αριθμού (αντικείμενο). Με άλλα λόγια, στην αρχή το άτομο μετράει «ένα», «δύο», «τρία»... μετά μετράει σιωπηλά μέσα του και λει τον αριθμό, και τέλος, λει τον τελευταίο αριθμό χωρίς να μετρήσει καθόλου (παράδειγμα του Tall, PME 23).

³⁸ Τα θέματα που εξετάστηκαν περιλαμβάνουν μαθηματική λογική και μεθόδους απόδειξης, την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, στοιχειώδη θεωρία συνόλων, σχέσεις και συναρτήσεις, και το σύστημα των πραγματικών αριθμών.

³⁹ Σύμφωνα με τον Piaget, η κατασκευή της γνώσης περνά από τρεις μορφές αφαίρεσης: την εμπειρική αφαίρεση, την ψευδο – εμπειρική αφαίρεση και την ανακλαστική αφαίρεση. Η τελευταία αναφέρεται στην κατασκευή νέων δομών, με αφαιρετικές διαδικασίες, μέσα από την παρατήρηση δομών που ήδη υπάρχουν [Piaget, 1972, The principles of Genetic Epistemology, Routledge & Kegan Paul, London, σ.703].

⁴⁰ Παρά την αρχική υπόθεση πως οι εννοιολογικοί χάρτες ενισχύουν και σταθεροποιούν τα νοητικά γνώστικά δίκτυα των μαθητών στις Πολιτικές Επιστήμες, ο J. Parkes αναφέρει πως δεν υπήρξε ισχυρή επίδραση.

⁴¹ Για παράδειγμα στην έννοια παραλληλόγραμμο προσδίδονται τα χαρακτηριστικά - ιδιότητες: ίσες απέναντι πλευρές, ίσες απέναντι γωνίες, διαγώνιοι που διχοτομούνται. Είναι φανερό ότι όλα αυτά ισχύουν και για κάθε έννοια που ιεραρχικά βρίσκεται κάτω από το παραλληλόγραμμο, όπως για το ορθογώνιο, το τετράγωνο ή το ρόμβο. Αυτό που πρέπει, επιπλέον, να καταγραφεί σε κάθε μια από τις παρακάτω ιεραρχικά έννοιες είναι τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της: οι γωνίες ορθές (ορθογώνιο), όλες οι πλευρές ίσες (τετράγωνο) κλπ.

⁴² Η «γνωστική συμπίεση» γίνεται για να μειώσει τη γνωστική προσπάθεια της σκέψης, σε περιπτώσεις που έχει να κάνει με σύνθετες έννοιες. Οι Barnard και Tall ορίζουν τη γνωστική συμπίεση ως «το κτίσιμο των γνωστικών συνδέσμων με τρόπο που κάθε αντικείμενο που βρίσκεται στο κέντρο της προσοχής να μπορεί να αναφερθεί κατά βούληση σε μια ποικιλία στενά συνδεδεμένων στοιχείων γνώσης»

⁴³ μεταφορά του περιβαλλοντικού μοντέλου του Greeno, το οποίο ο Battista εξειδίκευσε για την περίπτωση της Γεωμετρίας.

⁴⁴ Σύμφωνα με τους Eysenck & Keane, υπάρχουν ελάχιστες προσπάθειες να ελεγχθούν αυτές οι προτάσεις απευθείας [Eysenck & Keane, σ.280].

⁴⁵ Ο Fischbein διαχωρίζει τα σχήματα σε συγκεκριμένα και δομικά. Τα πρώτα (συγκεκριμένα ή σχήματα ενέργειας) έχουν μία φύση διαδοχής ενεργειών και είναι δεμένα με το περιεχόμενό τους, για παράδειγμα, τα βήματα που χρειάζονται για να λυθεί ένας συγκεκριμένος τύπος προβλημάτων. Τα δεύτερα, συνδυάζουν μία αρχή και ένα πρόγραμμα δράσης. Τέτοια σχήματα είναι αυτά της κατηγοριοποίησης, του αριθμού, της ισοδυναμίας, της αναλογίας κλπ.

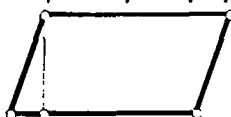
⁴⁶ Στα επόμενα χρησιμοποιούμε τον όρο «νοερή απεικόνιση» αντί του «οπτικοποίηση» άλλων ερευνητών. Ο λόγος είναι πως αποδίδουμε σε αυτόν ένα ευρύτερο νόημα, σύμφωνα και με την αντίληψη του Duval, που γίνεται φανερό από το κείμενο.

⁴⁷ Αναφερόμαστε στον Αγγλικό όρο imagery ο οποίος στη διεθνή βιβλιογραφία σχετίζεται άμεσα με την έννοια της νοερής απεικόνισης (visualization: δημιουργία και μετασχηματισμός νοητικών εικόνων), με την ικανότητα αντίληψης του χώρου και με τη διαίσθηση. Σημαντικές έρευνες γύρω από αυτό το θέμα αναφέρονται στο άρθρο του Alan Bishop (1989). Κατηγοριοποίηση των ειδών της οπτικής φαντασίας έχει γίνει από τους Owens και Clements (1998) και την Presmeg (1986). Η τελευταία, μάλιστα, διερεύνησε τη σχέση της φαντασίας με τη σχολική επίδοση.

⁴⁸ Για παράδειγμα, στην περίπτωση που ο μαθητής βλέπει στην οθόνη του ΗΥ ή σε ένα χαρτί, ένα ζεύγος αντικειμένων και του ζητείται να αποφασίσει αν περιστρέφοντας το ένα αντικείμενο είναι δυνατόν να ταυτιστεί με το άλλο. Επίσης, στην περίπτωση που μας ζητείται ν' απαντήσουμε στο ερώτημα «πόσες κουκίδες έχει ένα ζάρι;».

⁴⁹ με το σύμβολο 1D ο Duval συμβολίζει τη μία διάσταση, όπως, για παράδειγμα, αυτήν ενός ευθυγράμμου τμήματος, ενώ με το σύμβολο 2D τις δύο διαστάσεις, όπως αυτήν ενός επιπέδου σχήματος (κύκλου, τετραγώνου κλπ).

⁵⁰ χαρακτηριστικό παράδειγμα τροποποίησης των μερών είναι ο τρόπος εύρεσης του τύπου του εμβαδού ενός πλάγιου παραλληλόγραμμου, από τον τύπο του εμβαδού του ορθογωνίου:



⁵¹ Η Presmeg χαρακτηρίζει την συμπερασματική λειτουργία με τη βοήθεια νοητικών εικόνων «οπτική μέθοδο λύσης», διευκρινίζοντας πως «μία οπτική μέθοδος λύσης είναι αυτή που εμπλέκει οπτική φαντασία, με ή χωρίς διάγραμμα, ως ουσιαστικό μέρος της μεθόδου λύσης, ακόμα και στην περίπτωση που λογικοί συλλογισμοί ή αλγεβρικές μέθοδοι χρησιμοποιούνται επίσης» (1986)

⁵² Οι Clements & Owens δηλώνουν πως η οπτική φαντασία διαδραματίζει κεντρικό ρόλο στις πράξεις των παιδιών, σε αντίθεση με τον Hoz που μιλά για «γεωμετρική ακαμψία» δηλαδή, το να είναι κάποιος ανίκανος να «δει» ένα διάγραμμα με διαφορετικό τρόπο. [Bishop, 1989]. Η Presmeg, αναφέρεται σε ανεξέλεγκτες εικόνες που μπορεί να επιμένουν, εμποδίζοντας το άνοιγμα σε πιο αποδοτικούς τρόπους σκέψης. (1986)

⁵³ Στην παρούσα έρευνα είχαμε την ευκαιρία να παρατηρήσουμε τόσο σχεδίαση όσο και κατασκευή ισοσκελών τριγώνων από τους μαθητές. Δηλαδή σχήματα που καθοδηγούνται από μια αντιληπτική – εικονική κατανόηση, όπως επίσης και γεωμετρικές κατασκευές καθοδηγούμενες από τη νοερή απεικόνιση, που πραγματοποιούνται με τη χρήση γεωμετρικών εργαλείων και οδηγιών.

⁵⁴ Για παράδειγμα, όταν κάποιος γνωρίζει να σχεδιάζει με τη βοήθεια του τριγώνου ορθές γωνίες, έχει περισσότερες πιθανότητες να κατανοήσει τον ορισμό του ύψους, να το κατασκευάσει ή να ελέγξει στο σχήμα του αν ένα ευθύγραμμο τμήμα είναι ύψος.

⁵⁵ Για παράδειγμα στην απλούστερη χρήση του το τρίγωνο χρησιμεύει για την κατασκευή ορθών γωνιών. Τοποθετώντας το τρίγωνο σε τυχαία θέση πάνω στο χαρτί μας, μπορούμε να ζωγραφίσουμε μια γωνία 90° , σύροντας το μολύβι μας κατά μήκος των πλευρών της ορθής του γωνίας. Επίσης, με το τρίγωνο, μπορούμε να φέρουμε κάθετη από σημείο προς ευθεία. Αυτή η κατασκευή είναι συνθετότερη, γιατί συνδυάζει δύο στοιχεία: το σημείο και την ευθεία. Τώρα το τρίγωνο δεν τοποθετείται σε τυχαία θέση πάνω στο χαρτί, αλλά σε μια πολύ συγκεκριμένη, η οποία απαιτεί από το μαθητή και κάποιου είδους επιδεξιότητα στο χειρισμό. Συγκεκριμένα, ο μαθητής πρέπει να ακουμπήσει την μία πλευρά της ορθής στην ευθεία, να σύρει προσεκτικά πάνω της το τρίγωνο, προσέχοντας ώστε να μη διαταραχτεί η επαφή, μέχρις ότου η άλλη κάθετη του τριγώνου φτάσει στο σημείο, από όπου θα σύρει την κάθετη. Η κατασκευή αυτή δεν είναι τετριμμένη για όλους τους μαθητές ηλικίας 15 ετών.

⁵⁶ Η λέξη «κατασκευή» θα χρησιμοποιείται, μόνο όταν το γεωμετρικό σχήμα σχεδιάζεται με γεωμετρικά όργανα.

⁵⁷ Έτσι για παράδειγμα σε οποιαδήποτε ποιότητας (ευκλείδειο) σχήμα ο λύτης «βλέπει» στον κύκλο τη βασική ιδιότητα των σημείων του να ισαπέχουν από το κέντρο, ή σε οποιοδήποτε τρίγωνο τις γωνίες να αθροίζουν σε δύο ορθές, και τα διαχειρίζεται ανάλογα.

⁵⁸ όπως π.χ., για την κατασκευή ενός ρόμβου, η επιλογή του κριτηρίου «οι διαγώνιές του είναι κάθετες και διχοτομούνται»

⁵⁹ όπως π.χ. στην περίπτωση της κατασκευής μεσοκαθέτου με κανόνα και διαβήτη

⁶⁰ μπορούμε να εικονογραφήσουμε τη σύνδεση «κριτηρίων» και «οδηγιών κατασκευής», με τα ακόλουθα παραδείγματα:

α) για να είναι ένα τετράπλευρο παραλληλόγραμμο, αρκεί δύο απέναντι πλευρές να είναι ίσες και παράλληλες (κριτήριο) / για να φτιάξω ένα παραλληλόγραμμο φτιάχνω δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες (τρόπος κατασκευής)

β) για να είναι ισοσκελές ένα τρίγωνο, αρκεί να έχει δύο πλευρές του ίσες (κριτήριο) / για να κατασκευάσω ένα ισοσκελές τρίγωνο, αρκεί να κατασκευάσω δύο ίσα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα (τρόπος κατασκευής).

Έτσι, οι οδηγίες για την κατασκευή του ισοσκελούς, προκύπτουν από τα κριτήρια που έχουν σχηματιστεί είτε από τον ορισμό (concept definition) είτε από την εικόνα (concept image) του σχήματος.

⁶¹ Ένα ερώτημα που για να απαντηθεί χρειάζεται μια θεωρία για τη γνώση.

⁶² Σε αυτήν δίνεται ένα ημιτελές γεωμετρικό σχήμα και ζητείται η ολοκλήρωσή του με γεωμετρικά όργανα και χρήση των ιδιοτήτων του.

⁶³ Κεντρικό χαρακτηριστικό σε αυτό το Σχήμα είναι ένα ορθογώνιο τρίγωνο γύρω από το οποίο κτίζονται σχέσεις, έννοιες, και διαδικαστικές ή υπό προϋποθέσεις γνώσεις.

⁶⁴ Το θέμα των ρόλων θα εξεταστεί αναλυτικά στα επόμενα

⁶⁵ Σε μια τέτοια ιεραρχική δόμηση, όπου Σχήματα περιέχουν άλλα Σχήματα, το Σχήμα του ισοσκελούς τριγώνου (ΣΙΤ), στα πλαίσια της παρούσης εργασίας, θεωρείται πως βρίσκεται στη βάση της ιεραρχίας. Η άποψη στοιχειοθετείται από το ότι το ισοσκελές τρίγωνο είναι από τις πρώτες σχηματικές έννοιες που μαθαίνουν οι μαθητές και αναφέρεται σε μια σχετικά απλή έννοια. Πράγματι, το ισοσκελές ορίζεται από μία μόνο σχέση (δύο

πλευρές ίσες), σε αντίθεση με τα άλλα γεωμετρικά σχήματα που διδάσκονται στην Α Λυκείου, όπως το παραλληλόγραμμο ή το τραπέζιο, που ορίζονται από δύο ή περισσότερες προτάσεις σε σύζευξη (π.χ. το παραλληλόγραμμο ορίζεται από τις προτάσεις: δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες).

⁶⁶ Για τους μαθηματικούς η δομή υποδηλώνεται από ένα μη κενό σύνολο, το σύμπαν της δομής, και αντίστοιχα σύνολα σχέσεων, συναρτήσεων και σταθερών, που ορίζονται πάνω στο σύμπαν αυτό. Η δομή είναι ένας "κόσμος" γεμάτος μεταβλητές, δυνητικά ορισμένος και συχνά οντολογικά αόριστος. Μόνο αν καθορίσουμε τιμές για τις μεταβλητές, ή αν θεωρήσουμε ένα συγκεκριμένο, οντολογικά προσδιορισμένο μοντέλο του "κόσμου" αυτού, οι μεταβλητές αντιπροσωπεύουν συγκεκριμένα αντικείμενα του κόσμου και σχέσεις μεταξύ τους, ενώ σε συγκεκριμένες περιπτώσεις, το μοντέλο μας βοηθά να κατανοήσουμε καλύτερα το γύρω μας κόσμο (και όχι μόνο). Εδώ θεωρούμε ένα μοντέλο του γνωστικού σχήματος.

⁶⁷ Όπως ευθύγραμμο τμήμα, γωνία, κύκλος κλπ

⁶⁸ που συσχετίζουν απλές έννοιες, όπως για παράδειγμα, χορδή / διάμετρος κύκλου (συσχετίζουν τον κύκλο με το ευθύγραμμο τμήμα), παραλληλόγραμμο (συσχετίζει τα ευθύγραμμα τμήματα με την παραλληλία) κλπ

⁶⁹ όπως σχέση των γωνιών ενός τριγώνου: $A+B+\Gamma=180^\circ$, σχέση των πλευρών σε ένα τρίγωνο: τριγωνική ανισότητα, σχέση του ευθυγράμμου τμήματος που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου προς την απέναντι πλευρά: παράλληλη και ίση με το μισό της, σχέση διαμέσου προς την υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου: το μισό της κλπ

⁷⁰ Όπως για παράδειγμα η ιεραρχία: τρίγωνο – ορθογώνιο τρίγωνο – ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο, ή η ιεραρχία: παραλληλόγραμμο – ορθογώνιο παραλληλόγραμμο – τετράγωνο κλπ

⁷¹ Όπως π.χ. να αναγνωρίζουν στο ισοσκελές τρίγωνο ότι το ύψος από την κορυφή, που επίσης είναι διάμεσος και διχοτόμος, είναι και μεσοκάθετος της βάσης του.



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Ο σκοπός της παρούσας μελέτης είναι να διερευνήσει τις απόψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με την εφαρμογή της μεθοδολογίας της έρευνας στην εκπαιδευτική πράξη. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε με τη μορφή ερωτηματολογίου, το οποίο απεστάλη σε 100 εκπαιδευτικούς, οι οποίοι απάντησαν σε 85 ερωτήσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Η μεθοδολογία της έρευνας αποτελεί τον τρόπο με τον οποίο ο ερευνητής οργανώνει και εκτελεί την έρευνά του. Η μεθοδολογία της έρευνας είναι η επιστήμη που ασχολείται με τον τρόπο με τον οποίο ο ερευνητής οργανώνει και εκτελεί την έρευνά του. Η μεθοδολογία της έρευνας είναι η επιστήμη που ασχολείται με τον τρόπο με τον οποίο ο ερευνητής οργανώνει και εκτελεί την έρευνά του. Η μεθοδολογία της έρευνας είναι η επιστήμη που ασχολείται με τον τρόπο με τον οποίο ο ερευνητής οργανώνει και εκτελεί την έρευνά του.



2 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Στο 2^ο Κεφάλαιο τίθενται τα ερευνητικά ερωτήματα και ακολούθως διατυπώνονται οι υποθέσεις εργασίας και η μεθοδολογία που ακολουθείται στην παρούσα έρευνα. Αιτιολογείται η επιλογή της ποιοτικής έρευνας και παρατίθενται τα προβλήματα που χρησιμοποιούνται. Στόχος του 2^{ου} Κεφαλαίου είναι η ανάλυση των υποθέσεων της έρευνας και η σύνδεσή τους με τα προβλήματα, με τρόπο ώστε να αναδεικνύεται το πώς και γιατί τα τελευταία δημιουργήθηκαν για να φέρουν σε πέρας τη μελέτη που σχεδιάστηκε.

2.1 ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

Το πρόβλημα με το οποίο ασχολείται η παρούσα έρευνα είναι η διερεύνηση του τρόπου δόμησης των γεωμετρικών γνώσεων στο μυαλό του μαθητή. Εξαιτίας της μεγάλης ευρύτητας του θέματος, περιορίζουμε τη διερεύνηση σε μία ειδική περίπτωση και συγκεκριμένα στις γεωμετρικές γνώσεις που αφορούν στο ισοσκελές τρίγωνο. Οριοθετώντας την έρευνά μας, ως προς άλλες σχετικές έρευνες που υπάρχουν στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης (1.4), θα λέγαμε πως μας απασχολούν, κυρίως, δύο ζητήματα:

- ο τρόπος με τον οποίο οι γνώσεις που αφορούν στο ισοσκελές τρίγωνο οργανώνονται βαθμιαία στο νου σε μια ενιαία δομή και
- το πώς αυτή η δομή σταδιακά μεταβάλλει το χαρακτήρα της στην πορεία προς την ωρίμανση.

Το ερμηνευτικό πλαίσιο που υιοθετεί η έρευνα σε σχέση με τη δόμηση των γνώσεων είναι αυτό των γνωστικών Σχημάτων. Και τα δύο ζητήματα που αναφέραμε προσανατολίζουν προς δύο διαφορετικές οπτικές, που η μία συμπληρώνει την άλλη. Η πρώτη έχει να κάνει με δομικά θέματα, δηλαδή εξετάζει τον τρόπο οργάνωσης του γνωστικού Σχήματος του Ισοσκελούς Τριγώνου (ΣΙΤ) και τη σχέση του προς άλλα γνωστικά Σχήματα (όπως του ρόμβου, του ισοσκελούς τραπεζίου κλπ). Η δεύτερη εστιάζει σε λειτουργικά θέματα, δηλαδή προσπαθεί να εντοπίσει και να μελετήσει τις γνωστικές λειτουργίες που κινητοποιούνται στο άτομο κατά τη διάρκεια της ενασχόλησής του με τις διάφορες γεωμετρικές διαδικασίες.

Η συγκεκριμένη ανάλυση είναι σύμφωνη με το διττό χαρακτήρα του γνωστικού Σχήματος: πληροφοριακό και ενεργητικό (δες: 1.2.9). Στο πλαίσιο αυτό εντάσσονται οι δύο βασικοί στόχοι της έρευνας που είναι:

1^{ος} Στόχος: να εξεταστεί το «γνωστικό Σχήμα του Ισοσκελούς Τριγώνου (ΣΙΤ)» τόσο τοπικά, δηλαδή ως προς το περιεχόμενο και τη λειτουργία του, όσο και συνολικά, δηλαδή ως προς τη σύνδεσή του με άλλα γνωστικά Σχήματα (δομική εξέταση του ΣΙΤ).

2^{ος} Στόχος: να διερευνηθούν οι γνωστικές λειτουργίες που κινητοποιεί το άτομο κατά την κατασκευή και την εξέλιξη του «γνωστικού Σχήματος του ισοσκελούς τριγώνου (ΣΙΤ)», όπως περιγράφεται στον 1^ο στόχο (λειτουργική εξέταση του ΣΙΤ).

Αντίστοιχα με τους στόχους διαρθρώνονται και τα ερευνητικά ερωτήματα.

Σχετικά με τη δομική εξέταση / 1^{ος} στόχος, μας απασχολούν τα ακόλουθα ερωτήματα:

1. Πώς αντιλαμβανόμαστε την ύπαρξη του γνωστικού Σχήματος του ισοσκελούς τριγώνου (ΣΙΤ) σε ένα μαθητή;

Το ερώτημα μπορεί να αναλυθεί σε δύο υποερωτήματα

1^α. ποιες ικανότητες του μαθητή μας οδηγούν να ανιχνεύσουμε τόσο τη μορφή που έχει το ΣΙΤ του όσο και το βαθμό εξέλιξής του;

1^β. ποια γεωμετρικά στοιχεία αποτελούν τον πυρήνα, γύρω από τον οποίο σχηματίζεται βαθμιαία το ΣΙΤ;

2. Πώς συνδέεται το ΣΙΤ με άλλα γνωστικά Σχήματα;

Τα υποερωτήματα σχετίζονται με τους παράγοντες που υπεισέρχονται στις συνδέσεις

2^α. ποιες είναι οι ενδείξεις στη γεωμετρική λειτουργία του μαθητή που μας πληροφορούν για το βαθμό αποτελεσματικότητας μιας σύνδεσης;

2^β. ποια στοιχεία του γεωμετρικού σχήματος βοηθούν ώστε να γίνει η σύνδεση;

2^γ. ποιες ιδιότητες του γεωμετρικού σχήματος βοηθούν ώστε να γίνει η σύνδεση;

Σχετικά με τη λειτουργική εξέταση / 2^{ος} στόχος, μας απασχολούν τα ακόλουθα ερωτήματα:

3. Πώς εξελίσσεται το ΣΙΤ;

3^α. ποιο είναι το μοντέλο εξέλιξης του ΣΙΤ;

3^β. ποιοι παράγοντες στις τρεις λειτουργίες, που υπεισέρχονται στη γεωμετρική σκέψη, σηματοδοτούν την εξέλιξη;



2.2 ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Οι δυσκολίες που υπάρχουν στη διερεύνηση των στόχων που τέθηκαν στην παρούσα έρευνα, οφείλονται, κυρίως, σε ένα παράγοντα: στη φύση του αντικειμένου που μελετάμε. Το γνωστικό Σχήμα, ως δομικό στοιχείο της σκέψης, είναι νοητικό αντικείμενο και ως εκ τούτου δεν μπορεί να εξεταστεί απευθείας. Ο μόνος τρόπος για να γίνει αντιληπτό είναι μέσα από τις σκέψεις και τις ενέργειες του ατόμου. Συνεπώς πιστεύουμε πως ο εντοπισμός και η διερεύνηση σε βάθος συγκεκριμένων δεξιοτήτων, ικανοτήτων και συμπεριφορών του μαθητή, που παρατηρούνται κατά τη λύση προβλημάτων σχετικών με το ισοσκελές τρίγωνο, θα αποκαλύψουν στοιχεία για το γνωστικό του Σχήμα (ΣΙΤ).

Οι έννοιες, οι σχέσεις μεταξύ τους, καθώς και οι μορφές με τις οποίες αναπαριστώνται στο νου δίνουν κάποια στοιχεία για τον πληροφοριακό χαρακτήρα του ΣΙΤ. Όμως, η απλή αναφορά από το μαθητή σε πληροφορίες που «γνωρίζει» δεν έχει ιδιαίτερη αξία, αν δεν μπορεί ταυτόχρονα να τις χρησιμοποιήσει στη λύση προβλήματος, γιατί τότε πρόκειται για καταγεγραμμένες πληροφορίες και όχι για γνώσεις. Επιπλέον οι νοητικές αναπαραστάσεις των βασικών γεωμετρικών σχημάτων (τα γνωστικά δομικά στοιχεία) ή κάποιων σχέσεων μεταξύ τους δεν επαρκούν πάντα για τη λύση γεωμετρικών προβλημάτων. Σε κάθε περίπτωση προβλήματος τα γνωστικά Σχήματα του μαθητή πρέπει να είναι ικανά να προσαρμοστούν στις συγκεκριμένες πληροφορίες που προσλαμβάνονται. Αυτό έχει ως συνέπεια για την επιτυχία στη λύση προβλήματος, να απαιτούνται επιπλέον των αναπαραστάσεων που αναφέραμε και άλλες, που να μετασχηματίζουν τα γεωμετρικά σχήματα (όπως για παράδειγμα οι τρεις τρόποι μεταβολής ενός σχήματος που αναφέρει ο Duval (2002)).

Προκειμένου λοιπόν να κατανοήσουμε το επίπεδο εξέλιξης του ΣΙΤ ενός μαθητή, τον προκαλούμε να χρησιμοποιήσει τις γνώσεις - πληροφορίες του σε μία κατάσταση προβλήματος. Έτσι αντιλαμβανόμαστε ταυτόχρονα τον πληροφοριακό (τις έννοιες και τις σχέσεις ανάμεσα στις έννοιες) και τον ενεργητικό (τη γνώση για το πώς και πότε τις χρησιμοποιεί) χαρακτήρα του γνωστικού του Σχήματος.

Στην περίπτωση των συγκεκριμένων γνωστικών Σχημάτων που δημιουργούνται γύρω από συγκεκριμένες έννοιες - όπως το ΣΙΤ - σύμφωνα με τους Fischbein και Grossman (1997) ο χαρακτήρας και η φύση του Σχήματος είναι κάθε φορά στενά δεμένα με το περιεχόμενο της έννοιας (σ.30). Προκειμένου να ερμηνεύσουμε τα στοιχεία που βρίσκουμε και να τα συνδέσουμε με το ΣΙΤ στην παρούσα έρευνα, προσπαθούμε:



- (α) να κάνουμε συγκεκριμένο το περιεχόμενο των δομών που χρησιμοποιούνται από τους μαθητές, τουλάχιστον για ένα σύνολο καταστάσεων που μπορεί να προσδιοριστεί και
- (β) να διευκρινίσουμε, κατά το δυνατόν, τον τρόπο δημιουργίας αυτών των δομών (Eysenck & Keane, 1990, σ. 284).

Σε αυτό το πνεύμα, εξετάζοντας το γνωστικό Σχήμα του ισοσκελούς τριγώνου (ΣΙΤ), μας ενδιαφέρει ο προσδιορισμός των γεωμετρικών στοιχείων (ορισμός, ιδιότητες, οδηγίες κατασκευής, εικόνες κ.ά.) που εμφανίζονται από τα πρώτα στάδια σχηματισμού του γνωστικού Σχήματος στην αρχή της Α' Λυκείου. Αυτά θεωρούμε πως αποτελούν τον βασικό πυρήνα για την ανάπτυξη του ΣΙΤ.

Παράλληλα, η ύπαρξη του γνωστικού Σχήματος συνδέεται αναπόσπαστα με τη λειτουργία του. Επειδή το γνωστικό Σχήμα του ισοσκελούς τριγώνου (ΣΙΤ) περιλαμβάνει και γεωμετρικά σχήματα¹, δηλαδή εικόνες, στη λειτουργία του ΣΙΤ παρεμβαίνουν παράγοντες που σχετίζονται με την οπτική οργάνωση των σχημάτων. Είναι σημαντικό συνεπώς να διακρίνουμε και να αναλύσουμε τους παράγοντες αυτούς, καθώς και τους λόγους για τους οποίους μπορεί να διευκολύνουν ή να εμποδίζουν την ανάπτυξη του συγκεκριμένου Σχήματος.

Οπότε, σε σχέση με το 1^ο ερευνητικό ερώτημα, διατυπώνουμε γενικά την ακόλουθη υπόθεση. Η μορφή του ΣΙΤ σε ένα μαθητή συνδέεται αναπόσπαστα με συγκεκριμένες ικανότητες του ατόμου και συγκεκριμένα με τις ικανότητες για

- αναγνώριση της έννοιας του ισοσκελούς τριγώνου και των στοιχείων του, και
- χρήση της έννοιας.

Ειδικότερα οι υποθέσεις μας είναι οι ακόλουθες:

1^η υπόθεση: σχετικά με την αναγνώριση και τη χρήση του ισοσκελούς τριγώνου

1^α) η αναγνώριση και η χρήση γίνονται με βάση την εικόνα – πρότυπο.

1^β) το σημαντικότερο στοιχείο της εικόνας – πρότυπο του ισοσκελούς είναι το ύψος – άξονας συμμετρίας.

1^γ) η εικόνα – πρότυπο του ισοσκελούς τριγώνου αποτελεί τον καθοριστικό παράγοντα για την αναγνώριση των επιμέρους στοιχείων του γεωμετρικού σχήματος.

1^δ) η αναγνώριση και χρήση του ισοσκελούς τριγώνου σχετίζονται με τις πρωταρχικές και δευτερεύουσες δομές του γεωμετρικού σχήματος

1^ε) η αναγνώριση και χρήση του ισοσκελούς τριγώνου σχετίζονται με την αλλαγή διάστασης²

Παράλληλα με την τοπική μας ενδιαφέρει και η συνολική εξέταση της οργάνωσης των γεωμετρικών γνώσεων σε μια ενιαία δομή, δηλαδή εν προκειμένω η σύνδεση του ΣΙΤ με άλλα γνωστικά Σχήματα. Σκοπός των συνδέσεων που δημιουργούνται ανάμεσα στα γνωστικά Σχήματα είναι η μεταφορά και αξιοποίηση των γνώσεων από ένα πλαίσιο σε άλλο και η

μεταφορά γνωστών λειτουργιών σε νέα αντικείμενα. Συνεπώς, ένα κριτήριο, με βάση το οποίο μπορεί να θεωρηθεί μία σύνδεση επιτυχημένη, είναι η αποτελεσματικότητα στη λύση προβλήματος.

Η αντίληψη για τις συνδέσεις στην παρούσα έρευνα είναι ποιοτική, γι' αυτό δεν μας απασχολεί τόσο το πλήθος, όσο η φύση των συνδέσεων. Σχετικά με τη φύση των συνδέσεων την έρευνα ενδιαφέρουν οι παράγοντες που καθορίζουν το χαρακτήρα τους, δηλαδή, οδηγούν σε ενεργές συνδέσεις, με κριτήρια όπως τα προηγούμενα. Τέλος, μέσα από τις συνδέσεις μπορούμε να παρακολουθήσουμε να μεταβάλλεται σταδιακά ο χαρακτήρας των χρησιμοποιούμενων γεωμετρικών στοιχείων και λειτουργιών, με αποτέλεσμα τη συνολική εξέλιξη της δομής.

Σε σχέση με το 2^ο ερευνητικό ερώτημα, διατυπώνουμε τις εξής υποθέσεις:

2^η υπόθεση: η σύνδεση του ΣΙΤ με άλλα γνωστικά Σχήματα γίνεται μέσα από κοινά στοιχεία των αντίστοιχων γεωμετρικών σχημάτων

3^η υπόθεση: η συμμετρία παίζει αποφασιστικό ρόλο στη σύνδεση του ισοσκελούς τριγώνου με άλλα γεωμετρικά σχήματα και κατ' επέκταση, στη σύνδεση του ΣΙΤ με τα αντίστοιχα γνωστικά Σχήματα.

Η γνώση η σχετική με το πώς και πότε χρησιμοποιούνται οι πληροφορίες που βρίσκονται «αποθηκευμένες» στο γνωστικό Σχήμα, και η οποία καθορίζει το επίπεδο ή το βαθμό εξέλιξης του ΣΙΤ, αφορά και στις τρεις λειτουργίες που υπεισέρχονται στη γεωμετρική σκέψη: την νοερή απεικόνιση, την κατασκευή και την αιτιολόγηση.

Εξετάζοντας τα γνωστικά Σχήματα που δημιουργούνται γύρω από το ίδιο γεωμετρικό σχήμα (ισοσκελές τρίγωνο) σε διαφορετικά παιδιά, παρατηρούμε διάφορες φάσεις ωρίμανσης. Η εξέλιξη σηματοδοτείται και από την ποσότητα των γνώσεων που ενσωματώνονται στο ΣΙΤ, αλλά κυρίως από την ευελιξία και προσαρμοστικότητά του σε νέες καταστάσεις. Συχνά παρατηρείται ένας μαθητής να μην έχει την ίδια αποτελεσματικότητα σε κάθε πρόβλημα. Στην περίπτωση αυτή πρέπει να διερευνηθούν οι παράγοντες που δυσχεραίνουν τη λειτουργία του. Συνεπώς, σχετικά με την εξέλιξη του ΣΙΤ διατυπώνουμε τις ακόλουθες υποθέσεις:

4^η υπόθεση: η ανίχνευση της εξέλιξης του ΣΙΤ γίνεται μέσα από τις τρεις λειτουργίες του: την νοερή απεικόνιση, την κατασκευή και την αιτιολόγηση.

4^α. η εξέλιξη του ΣΙΤ είναι μη γραμμική

4^β. η εξέλιξη του ΣΙΤ συσχετίζεται με το συντονισμό των τριών λειτουργιών.

4^γ. η ικανότητα του μαθητή να αναγνωρίζει τα επιμέρους στοιχεία του γεωμετρικού σχήματος παίζει αποφασιστικό ρόλο στην εξέλιξη και των τριών λειτουργιών



2.3 ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΩΝ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Για να ελέγξουμε τις υποθέσεις που διατυπώθηκαν σχεδιάζουμε και υλοποιούμε τις ακόλουθες ενέργειες:

➤ Διαμορφώνουμε τα προβλήματα στα οποία εργάζονται οι μαθητές, στις τρεις φάσεις της έρευνας, έτσι ώστε να υλοποιούν τη μελέτη που σχεδιάσαμε. Δηλαδή στις δύο πρώτες φάσεις να διερευνούν τοπικά το ΣΙΤ, ενώ στην τρίτη φάση να το διερευνούν συνολικά. Με αυτόν τον τρόπο, εξετάζουμε τη μορφή που έχει το ΣΙΤ αμέσως μόλις ολοκληρωθεί στο σχολείο η διδασκαλία του ισοσκελούς (1^η φάση) και την εξέλιξή του μετά τρεις περίπου μήνες (2^η φάση). Ακολούθως, και όταν πλέον οι μαθητές έχουν διδαχτεί και άλλα γεωμετρικά σχήματα, διερευνούμε τη σύνδεση του ΣΙΤ με κάποια από τα γνωστικά Σχήματα που δημιουργούνται γύρω από αυτά (3^η φάση).

Η διαμόρφωση / δημιουργία των προβλημάτων γίνεται έτσι, ώστε αυτά να απαιτούν από το μαθητή μια συνεχή αλλαγή των συνθηκών υπό τις οποίες κάνει μία κατασκευή. Με αυτό τον τρόπο δίνεται στην ερευνήτρια η ευκαιρία να παρακολουθήσει τις αντιδράσεις του παιδιού. Αν στις νέες συνθήκες ο μαθητής αντιδρά εξίσου αποτελεσματικά, αυτό ερμηνεύεται ως κριτήριο ωριμότητας της αντίστοιχης λειτουργίας. Η δυνατότητα προσαρμογής μιας λειτουργίας σε διαφορετικές συνθήκες ή η δυνατότητα εύρεσης εναλλακτικών επιλογών, θεωρούμε ότι σηματοδοτούν εξέλιξη του ΣΙΤ.

➤ Σε κάθε φάση καταγράφουμε και αναλύουμε τα στοιχεία που προκύπτουν από κάθε παιδί ανά λειτουργία. Δημιουργούμε έτσι από την αρχή ένα προφίλ του μαθητή που συμπληρώνεται βαθμιαία και βοηθά την ερευνήτρια, στην επόμενη φάση, να παρατηρεί πιο συνειδητά και κριτικά τις λειτουργίες του παιδιού και την αλληλεπίδρασή τους. Με αυτό τον τρόπο παρακολουθούμε διαχρονικά την εξέλιξη των λειτουργιών κάθε μαθητή ή μαθήτριας.

➤ Τα στοιχεία αναλύονται με δύο διαφορετικούς αλλά συμπληρωματικούς τρόπους, αντίστοιχους με τους στόχους της έρευνας. Κατά τη Δομική ανάλυση των ευρημάτων (4.1) εξετάζονται τα στοιχεία και οι λειτουργίες του ΣΙΤ ενώ κατά την ανάλυση των ευρημάτων ανά λειτουργία (4.2) εξετάζονται τρεις γνωστικές λειτουργίες του μαθητή, που ενεργοποιούνται όταν αυτός εργάζεται σε γεωμετρικά προβλήματα (νοερή απεικόνιση, κατασκευή και αιτιολόγηση) σε σχέση με το ΣΙΤ. Η διασταύρωση των δύο διαφορετικών αναλύσεων των ευρημάτων οδηγεί όχι μόνο στον έλεγχο των υποθέσεων αλλά και στη διεύρυνση και εμπλουτισμό τους με νέα στοιχεία.

2.4 ΕΠΙΛΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ

(α) οι λόγοι για τους οποίους επιλέγουμε την ποιοτική έρευνα

Κάθε έρευνα έχει τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της, γι' αυτό και η μεθοδολογία που επιλέγεται (διαδικασίες και τεχνικές) πρέπει να είναι ανάλογη. Σύμφωνα με τους Cruz, Presmeg, MaGuemes (2001) «οι ερευνητικές μέθοδοι πρέπει να επιλέγονται σε σχέση με τους ερευνητικούς στόχους και όχι αντίστροφα» (σ.2)

Ο στόχος αυτής της έρευνας είναι η διερεύνηση ενός γνωστικού Σχήματος (του ισοσκελούς τριγώνου), της σύνδεσής του με άλλα γνωστικά Σχήματα και των γνωστικών λειτουργιών που κινητοποιούνται από αυτά. Προκειμένου λοιπόν να κατανοήσουμε και να μελετήσουμε τέτοια θέματα που αφορούν στη δόμηση των γεωμετρικών γνώσεων στο νου του μαθητή πρέπει να εξετάσουμε τα διάφορα φαινόμενα και λειτουργίες της σκέψης που εμφανίζονται όταν ο μαθητής λύνει γεωμετρικά προβλήματα που αφορούν στο ισοσκελές τρίγωνο, καθώς και τις αλληλεπιδράσεις τους, οπότε χρειαζόμαστε λεπτομερείς και σε βάθος πληροφορίες.

Μία πρώτη απαίτηση συνεπώς είναι η έρευνα να αφιερώσει ικανό χρόνο σε κάθε παιδί ιδιαιτέρως, ώστε να δοθεί η ευκαιρία να καταγράψει και να κατανοήσει τη συνολική λειτουργία του, καθώς εργάζεται για τη λύση διαφόρων προβλημάτων και να μην περιοριστεί σε κρίσεις εκ του αποτελέσματος. Επιθυμία μας είναι να δοθεί η ευκαιρία στο μαθητή να μιλήσει για τον τρόπο που σκέπτεται – ενώ σκέπτεται – ή να τον εκφράσει με όποιον άλλο τρόπο, όπως κινήσεις των χεριών στον αέρα, σκίτσα κλπ.

Οι εξατομικευμένες επιδόσεις των μαθητών στη Γεωμετρία μας ενδιαφέρουν γιατί θεωρούμε πως η κάθε περίπτωση αντιστοιχεί και σε μία διαφορετική στιγμή εξέλιξης του ΣΙΤ. Πρόθεσή μας είναι να κατανοήσουμε ποιες ενέργειες των μαθητών οδηγούν στα επιθυμητά αποτελέσματα ανά φάση εξέλιξης. Δηλαδή, στόχος είναι να αναδείξουμε την ποικιλία και να αναζητήσουμε τη σχέση ανάμεσα στις μοναδικές ικανότητες κάθε παιδιού και την επιτυχία στη λύση προβλήματος.

Θεωρούμε σημαντικό να μην περιορίζεται η συλλογή των στοιχείων στο τελικό αποτέλεσμα της λύσης προβλήματος που καταγράφεται στο χαρτί, αλλά επίσης, να αποτυπώνονται και να μελετώνται στοιχεία όπως: οι ενδιάμεσες αποτυχημένες προσπάθειες, τα συναισθήματα που τις συνοδεύουν, ο χρόνος που μεσολαβεί πριν γίνει νέα προσπάθεια, η διαδοχή των λειτουργιών της νοερής απεικόνισης –κατασκευής – αιτιολόγησης και ποιοι παράγοντες την επηρεάζουν κ.ά.

Προκειμένου να υλοποιηθούν όλα όσα αναφέρουμε, επιβάλλεται η συλλογή των στοιχείων να γίνει με απευθείας παρατήρηση. Καταγράφουμε και αναλύουμε τη λεκτική και μη λεκτική

συμπεριφορά ενός αριθμού μαθητών και δεν είναι στις προθέσεις μας η γενίκευση. Έτσι έχουμε τη δυνατότητα στην έρευνά μας να χρησιμοποιούμε ως στοιχεία αποσπάσματα από τη σκέψη των παιδιών, όπως την εκφράζουν τα ίδια, αντί για αριθμούς και στατιστικά στοιχεία. Συνεπώς η φύση των ερευνητικών ερωτημάτων, που απαιτούν μία ανάλυση σε βάθος της σκέψης των μαθητών, μας οδηγεί σε ποιοτικές μεθόδους έρευνας.

Εξάλλου, δεν υπάρχει κανένα αξιόπιστο ποσοτικό μέτρο εκτίμησης των στόχων μας. Η βαθμολογία, για παράδειγμα, που χρησιμοποιείται στο σχολείο είναι γνωστό πως δεν κατορθώνει να περιγράψει την ποικιλία στον τρόπο σκέψης που υπάρχει ανάμεσα σε μαθητές με διαφορές στη βαθμολογία, ή, πολύ περισσότερο, ανάμεσα σε μαθητές με τις ίδιες επιδόσεις. Τέλος οι δάσκαλοι των Μαθηματικών, που είναι οι φυσικοί αποδέκτες και μελλοντικοί χρήστες της έρευνας, εκτιμούμε ότι θα μπορούν να αξιοποιήσουν καλύτερα, στην καθημερινή πρακτική τους, στοιχεία που προβάλλουν από μια ποιοτική έρευνα, παρά στατιστικές και διαγράμματα.

(β) η στρατηγική της έρευνας: μελέτη περίπτωσης

Ο τύπος ποιοτικής έρευνας που επιλέγουμε είναι η «μελέτη περίπτωσης», η οποία ως μεθοδολογία αποτελεί σημαντικό εργαλείο σε εκπαιδευτικές και ψυχολογικές έρευνες. Πρόκειται για εντατική και λεπτομερή μελέτη ενός ατόμου ή μιας ομάδας ως ολότητα, μέσα από παρατήρηση, ατομικές αναφορές και άλλα μέσα. *«Σκοπός της παρατήρησης είναι να εξερευνήσει βαθιά και να αναλύσει συστηματικά τα πολυσχιδή φαινόμενα που συνθέτουν τον κύκλο ζωής της μονάδας, προκειμένου να κάνει γενικεύσεις σχετικά με τον ευρύτερο πληθυσμό στον οποίο ανήκει αυτή η μονάδα»* (Cohen & Manion, 1997, σ. 153). Η μελέτη περίπτωσης εστιάζει σε δύο σημεία: το ενδιαφέρον για μία συγκεκριμένη περίπτωση και τη μελέτη της μέσα σε ένα σύνθετο πλαίσιο (Blaxter et al, 1996, σ.66).

Θεωρούμε τη μελέτη περίπτωσης ως την καταλληλότερη μέθοδο μελέτης στην παρούσα έρευνα, διότι σκοπός μας είναι να εξερευνήσουμε σε βάθος και να αναλύσουμε συστηματικά την περίπτωση δημιουργίας και εξέλιξης ενός γνωστικού Σχήματος (του ΣΙΤ), στο πλαίσιο της συνολικής δόμησης των γεωμετρικών γνώσεων. Ακολουθώντας την τυπολογία του Yin³ (Blaxter et al, 1996, σ.68), ο τύπος της μελέτης που εφαρμόζουμε είναι η πολλαπλή διερευνητική μελέτη περίπτωσης (γίνεται διερεύνηση ενός περιορισμένου αριθμού περιπτώσεων).

Η μελέτη βασίζεται σε δομημένη παρατήρηση μίας ομάδας είκοσι μαθητών και μαθητριών κατά τη διάρκεια ενός σχολικού έτους. Η ερευνήτρια συναντά το κάθε παιδί ιδιαιτέρως, μία φορά σε κάθε φάση (συνολικά τρεις φορές σε ένα χρόνο). Σχεδιάζεται ένα κατάλληλο εργαλείο (επτά προβλήματα) για να διερευνήσει τη γεωμετρική σκέψη των παιδιών, σε σχέση με τα

ερευνητικά ερωτήματα. Κάθε μαθητής / μαθήτρια λύνει τα προβλήματα, ενώ προσπαθεί να περιγράψει τη σκέψη του. Η όλη διαδικασία ηχογραφείται.

Η ίδια μεθοδολογία έχει χρησιμοποιηθεί και σε άλλες έρευνες στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης, που μελετούν θέματα σχετικά με την ανάπτυξη της σκέψης και την κατασκευή νοερών εικόνων. Συγκεκριμένα την επιλέγουν, οι Cruz και Presmeg (2001), για να μελετήσουν τις κατασκευές νοερών εικόνων των μαθητών και το πώς τις επηρεάζει το σχολείο, οι Doerr και Tüpp (1999), για να διερευνήσουν το πώς αναπτύσσεται η σκέψη του μαθητή καθώς αυτός εμπλέκεται σε δραστηριότητες μοντελοποίησης, ο Cifarelli (1998) για να κατανοήσει τις διαδικασίες με τις οποίες οι μαθητές κατασκευάζουν ή τροποποιούν τις νοητικές τους αναπαραστάσεις σε καταστάσεις λύσης προβλήματος, ο Chinnappan (1999), για να εξετάσει την ποιότητα των γεωμετρικών γνωστικών δομών που οι μαθητές φέρνουν σε μία κατάσταση προβλήματος, και, τέλος, οι Lawson και Chinnappan (2000), για να διερευνήσουν τη σχέση ανάμεσα στην επιτυχία στη λύση προβλήματος και την ποιότητα των συνδέσεων της γνώσης που έχουν αναπτυχθεί από τους μαθητές.

(γ) πλεονεκτήματα – μειονεκτήματα της μελέτης περίπτωσης

Η δύναμη της μελέτης περίπτωσης είναι «η προσοχή που δίνει στη λεπτομέρεια και στην πολυπλοκότητα της ίδιας της περίπτωσης» (Cohen & Manion, σ.1997, 178). Στα πλεονεκτήματα της μεθοδολογίας μπορούμε να θεωρήσουμε τη συλλογή δεδομένων που αναφέρονται στη μη λεκτική συμπεριφορά των μαθητών, όπως κινήσεις με τα χέρια στον αέρα, συναισθήματα που συνοδεύουν την κάθε προσπάθεια, αλλαγές στις εκφράσεις του προσώπου, αλλαγές στη χροιά της φωνής, κενά ανάμεσα σε δύο φράσεις, ταχύτητα διατύπωσης των επιχειρημάτων, σιγουριά ή τόνος αμφιβολίας κ.ά. Τέτοιας μορφής στοιχεία μπορούν να συγκεντρωθούν μόνο με παρατήρηση σε βάθος περιορισμένου αριθμού παιδιών και για αρκετό χρονικό διάστημα. Η διάρκεια της έρευνας μας δίνει τη δυνατότητα επανειλημμένης επαφής με τους μαθητές, με αποτέλεσμα την καλύτερη γνωριμία, η οποία μας επιτρέπει να ερμηνεύουμε εγκυρότερα τα λεκτικά και μη λεκτικά τους σήματα.

Η μεθοδολογία που επιλέγουμε επιτρέπει την παρακολούθηση ολόκληρης της μαθηματικής λειτουργίας και δεν περιορίζεται στην εξέταση των απαντήσεων των μαθητών. Συγκεκριμένα, παρατηρώντας τις προσπάθειες ενός μαθητή να λύσει γεωμετρικά προβλήματα, μπορούμε να διακρίνουμε διάφορες όψεις της λειτουργίας του όπως, τι γνώσεις έχει σχετικές με το πρόβλημα που αντιμετωπίζει, πότε και υπό ποιες συνθήκες τις ενεργοποιεί, ποιες διαδικασίες λύσης χρησιμοποιεί, ποιες ικανότητες έχει που τον βοηθούν να αντιμετωπίζει προβληματικές καταστάσεις, ποιες αιτίες οδηγούν σε πιασινισματα, κ.ά

Στα μειονεκτήματα της μεθόδου συγκαταλέγεται η δυσκολία οργάνωσης των στοιχείων που συγκεντρώνονται, ώστε να προκύψουν τα συμπεράσματα. Παρόλο που τα δεδομένα καταγράφουν επακριβώς την πραγματικότητα, κυρίως μέσα από τους απομαγνητοφωνημένους διάλογους, το εύρος τους και η μεγάλη ποικιλία δυσχεραίνουν την οργάνωση. Στην παρούσα έρευνα, το γεγονός ότι είχαμε εξαρχής πλήρως διατυπωμένους στόχους μας διευκόλυνε να αντιμετωπίσουμε αυτή τη δυσκολία. Συγκεκριμένα, η επιλογή να εξετάσουμε το ΣΙΤ τοπικά (ως προς το περιεχόμενο και τη λειτουργία του) και συνολικά (σε σχέση με τις συνδέσεις του με άλλα γνωστικά Σχήματα), μας οδηγεί, αρχικά, στην οργάνωση και σχολιασμό των ευρημάτων με άξονα τη δομή και τις συνδέσεις του ΣΙΤ. Ο δεύτερος στόχος, δηλαδή η διερεύνηση των λειτουργιών που εμπλέκονται στην κατασκευή και εξέλιξη του ΣΙΤ, μας οδηγεί στην ανάλυση και οργάνωση των ευρημάτων σύμφωνα με κάθε λειτουργία.

Ένα ακόμα μειονέκτημα αφορά στις σημειώσεις πεδίου. Η ερευνήτρια πρέπει να σημειώνει την ίδια στιγμή που συμβαίνει κάτι, ενώ μετά το πέρας της συνάντησης καταγράφει μόνο γενικές παρατηρήσεις. Η ταυτόχρονη αποτύπωση γεγονότων αποσπάζει, στιγμιαία, την προσοχή της ερευνήτριας από το συμβάν ή από τη γλώσσα του σώματος του μαθητή. Αλλά και αντίστροφα, όταν ο μαθητής βλέπει την ερευνήτρια να κρατά σημειώσεις, παίρνει το μήνυμα ότι κάτι ιδιαίτερο συμβαίνει, γεγονός ανεπιθύμητο στην έρευνα, όπου θέλουμε ο μαθητής να ενεργεί απερίσπαστος από εξωτερικούς παράγοντες. Στόχος είναι η ερευνήτρια να παρευρίσκεται, κατά το δυνατόν, απύσχα. Προκειμένου να αντιμετωπιστούν αποτελεσματικά τα προβλήματα που σχετίζονται με τις σημειώσεις πεδίου, η τακτική που ακολουθούμε σε αυτή την έρευνα είναι να καταγράφονται επιλεκτικά τα σημαντικά θέματα, με σύντομο τρόπο, καθώς και τα ενδιάμεσα γεωμετρικά σχήματα, που δοκιμάζει και μετά σβήνει ο μαθητής, στην πορεία για τη λύση.

(δ) η πρωτοτυπία της παρούσης έρευνας

Οι Blaxter, Hughes και Tight (1996) υποστηρίζουν πως, μια έρευνα μπορεί να είναι πρωτότυπη ως προς το θέμα, την προσέγγιση ή την παρουσίαση και απαριθμούν δεκαπέντε ορισμούς της πρωτοτυπίας (σ.12). Με αφετηρία αυτούς, η παρούσα έρευνα τοποθετείται επιγραμματικά ως προς το στοιχείο της πρωτοτυπίας, στο ακόλουθο πλαίσιο: προσπαθεί να προσδιορίσει το περιεχόμενο των γνωστικών δομών που ονομάζουμε Σχήματα για ένα συγκεκριμένο σύνολο καταστάσεων και να κάνει πιο καθαρό τον τρόπο δημιουργίας και ανάπτυξής τους (1.4.2).

Συγκεκριμένα ενώ ο Bartlett εισήγαγε τον όρο «Σχήμα» στην Ψυχολογία ήδη από το 1932, και ο όρος χρησιμοποιείται ευρέως στην έρευνα γύρω από τη μαθηματική εκπαίδευση, δεν έχουν γίνει ως τα τώρα πολλές προσπάθειες να οριστεί ακριβέστερα τι ακριβώς αποτελεί ένα Σχήμα (Tall, 2001) και να προσδιοριστεί ο τρόπος δημιουργίας και το περιεχόμενό του (Eysenck &

Keane, 1990, σ.284). Ο Chinnappan (1998), ο οποίος έκανε την πλησιέστερη έρευνα στη δική μας, ορίζει και χρησιμοποιεί τα Σχήματα, σε συνδυασμό με τα νοητικά μοντέλα, για να εξετάσει το πώς οι μαθητές ανακαλούν και χρησιμοποιούν τις γνώσεις τους, καθώς προσπαθούν να λύσουν ένα πρόβλημα Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Συγκεκριμένα, τον ενδιαφέρει να διακρίνει τα γνωστικά Σχήματα που χρησιμοποιούν οι μαθητές στη λύση ενός συγκεκριμένου προβλήματος.

Στην παρούσα έρευνα η πρωτοτυπία έγκειται στην εξέταση μιας ειδικής περίπτωσης «γνωστικού Σχήματος», αυτής του ισοσκελούς τριγώνου (ΣΙΤ). Εξετάζονται το περιεχόμενο του συγκεκριμένου Σχήματος και οι παράμετροι που σχετίζονται με την δημιουργία και εξέλιξή του.

Ακόμα, όσον αφορά στις συνδέσεις που δημιουργούνται ανάμεσα στα γνωστικά Σχήματα, ενώ ο Chinnappan ενδιαφέρεται μόνο για το ποια Σχήματα ενεργοποιούνται και με τι συχνότητα στη λύση ενός συγκεκριμένου προβλήματος, η παρούσα έρευνα εστιάζει στον τρόπο με τον οποίο συνδέεται το ΣΙΤ με άλλα γνωστικά Σχήματα και στους παράγοντες που επηρεάζουν αυτές τις συνδέσεις.

Η προσέγγιση των γνωστικών Σχημάτων και της χρήσης τους γίνεται μέσα από τα διάφορα συστήματα αναπαράστασης που χρησιμοποιούνται σε αυτά και επηρεάζουν, όπως πιστεύουμε, την εξέλιξή των Σχημάτων. Η συγκεκριμένη κωδικοποίηση των γνωστικών Σχημάτων μέσα από τα αναπαραστασιακά συστήματα εμπλέκει μία σειρά παραμέτρους που δημιουργούν συνθήκες, άλλοτε κατάλληλες και άλλοτε όχι για τις μετατροπές (μετάφραση αναπαραστάσεων από ένα σύστημα σε άλλο) και τις επεξεργασίες (μετάφραση αναπαραστάσεων μέσα στο ίδιο σύστημα αναπαράστασης). Η μελέτη των παραμέτρων που επηρεάζουν τις μετατροπές, τις επεξεργασίες και τις αλληλεπιδράσεις τους, που κατά τον Duval (2002) αποτελεί σημαντικό πεδίο έρευνας για τη μάθηση των Μαθηματικών αποτελεί κύριο άξονα ανάλυσης των ευρημάτων μας.

Τέλος, ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της παρούσης έρευνας αποτελεί το γεγονός πως αναλύονται οι τρεις λειτουργίες της γεωμετρικής σκέψης, ισότιμα, στα πλαίσια μιας καθορισμένης δραστηριότητας και συγκεκριμένα, της γεωμετρικής κατασκευής. Η επισήμανση αυτή σχετίζεται με το ακόλουθο γεγονός. Ενώ ο Duval (1998) παρουσιάζει τρεις γνωστικές λειτουργίες (νοερή απεικόνιση, κατασκευή και αιτιολόγηση) υποκείμενες στη γεωμετρική δραστηριότητα και διατυπώνει τη θέση πως αυτές είναι «στενά συνδεδεμένες και η συνεργασία τους είναι γνωστικά απαραίτητη για την εξέλιξη στη Γεωμετρία» (σ.38), σχολιάζοντας τη Γεωμετρία από γνωστική άποψη, μελετά δύο μόνο βασικά θέματα, τη νοερή απεικόνιση και την αιτιολόγηση.

2.5 ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ

Οι στόχοι της έρευνας, και συγκεκριμένα η επιθυμία να διερευνήσουμε «τη διαδικασία σχηματισμού και εξέλιξης του γνωστικού Σχήματος του ισοσκελούς τριγώνου (ΣΙΤ)», καθορίζουν μία σειρά από ενέργειες / αποφάσεις που αναλύονται ακολούθως.

α. η ηλικία των μαθητών

Εφόσον μας απασχολεί η δημιουργία του ΣΙΤ, πρέπει να εστιάσουμε σε μαθητές που διδάσκονται για πρώτη φορά τον τρόπο θεμελίωσης και ανάπτυξης της Γεωμετρίας σε θεωρητικό επίπεδο. Συνεπώς ο καταλληλότερος πληθυσμός είναι οι μαθητές / μαθήτριες 15 ετών, οι οποίοι φοιτούν στην Α' τάξη του Λυκείου. Στη συγκεκριμένη τάξη οι Έλληνες μαθητές για πρώτη φορά διδάσκονται τη Γεωμετρία ως αυτοτελές μάθημα και μνούνται στην έννοια της μαθηματικής απόδειξης. Συνεπώς, κρίνουμε ότι αποτελεί τη χρονική στιγμή που οι μαθητές χρειάζεται να αναπαραστήσουν και να οργανώσουν συστηματικά τις γνώσεις τους τις σχετικές με τις γεωμετρικές έννοιες, προκειμένου να γίνουν ικανοί για μια τυπική γεωμετρική απόδειξη.

β. η χρονική διάρκεια της έρευνας

Η διερεύνηση διαρκεί συνολικά δύο έτη. Την πρώτη χρονιά γίνεται η επιλογή της μεθοδολογίας, διαμορφώνονται τα προβλήματα που θα χρησιμοποιηθούν και ελέγχονται αμφότερα μέσα από την προ έρευνα, ενώ τη δεύτερη χρονιά γίνεται η έρευνα.

Η παρατήρηση των μαθητών και η συλλογή των στοιχείων της έρευνας διαρκεί ολόκληρη τη σχολική χρονιά 2001 -2002. Ο χρόνος θεωρείται απαραίτητος για να διερευνηθούν τυχόν αλλαγές ή ανάπτυξη στο ΣΙΤ των μαθητών, κάτω από την επίδραση της διδασκαλίας και την προσωπική ωρίμανση. Καθώς, κατά τη διάρκεια του έτους, ο μαθητής διδάσκεται νέες έννοιες και δημιουργεί αντίστοιχα γνωστικά Σχήματα, μας δίνεται επίσης η ευκαιρία να διαπιστώσουμε – στα πλαίσια του στόχου «να εξετάσουμε τη σύνδεση του ΣΙΤ με άλλα γνωστικά Σχήματα» - πώς τα συνδέει μεταξύ τους.

Η έρευνα ξεκινά με μία διαγνωστική φάση, η οποία γίνεται το Σεπτέμβριο του 2001, στην αρχή της Α' Λυκείου, προτού οι μαθητές διδαχθούν το ισοσκελές τρίγωνο με τις ιδιότητές του. Σκοπός της διαγνωστικής φάσης είναι να επιλεγούν οι μαθητές που θα συμμετάσχουν στην έρευνα (δες επιλογή του δείγματος). Ακολουθούν τρεις φάσεις, κατά τη διάρκεια του σχολικού έτους, καταναμεμημένες ως εξής:

1. η 1^η φάση γίνεται αμέσως μετά τη διδασκαλία του ισοσκελούς, από 29 Οκτωβρίου έως 8 Νοεμβρίου
2. η 2^η φάση γίνεται περίπου δύο μήνες αργότερα, για να διαπιστωθεί ο βαθμός εξοικείωσης των μαθητών με το ισοσκελές και διαρκεί από 13 Δεκεμβρίου έως 7 Φεβρουαρίου και
3. η 3^η φάση γίνεται, αφού οι μαθητές έχουν διδαχθεί όλα τα σχετικά με τα παραλληλόγραμμα, από 3 Απριλίου έως 17 Μαΐου.

Η εκτεταμένη παρατήρηση των μαθητών και η παράλληλη ανάλυση των στοιχείων, μετά από κάθε φάση της έρευνας, μας επιτρέπει τη διαμορφωτική αξιολόγηση των αρχικών συμπερασμάτων στην κάθε φάση.

γ. ο τρόπος επιλογής του δείγματος

Η έρευνα αφορά σε μαθητές / μαθήτριες της Α' Λυκείου. Από αυτόν τον πληθυσμό γίνεται η δειγματοληψία, που μπορεί να χαρακτηριστεί «ποσοστιαία και κατά διαστάσεις». Ας αποσαφηνίσουμε αρχικά την ορολογία που χρησιμοποιούμε. Σύμφωνα με τους Cohen & Manion η «ποσοστιαία δειγματοληψία⁴ επιχειρεί να καταρτίσει ένα δείγμα που να είναι αντιπροσωπευτικό ως προς τα διάφορα στοιχεία του συνολικού πληθυσμού, με τις αναλογίες που τα στοιχεία παρουσιάζουν μέσα στον πληθυσμό⁵» (Cohen & Manion, 1997, σ. 130). Επιπλέον, (η ποσοστιαία δειγματοληψία) εξειδικεύεται περισσότερο και χαρακτηρίζεται «κατά διαστάσεις», όταν κριτήριο για την επιλογή του αντιπροσωπευτικού δείγματος είναι κάποια χαρακτηριστικά του πληθυσμού⁶. Συνήθως τα χαρακτηριστικά αυτά παρουσιάζουν ενδιαφέρον για την έρευνα και το δείγμα επιλέγεται έτσι, ώστε να υπάρχει ένα τουλάχιστον άτομο για κάθε συνδυασμό αυτών των χαρακτηριστικών. Ο τρόπος επιλογής του δείγματος, στην παρούσα έρευνα, περιγράφεται ακολούθως.

Αποφασίζεται αρχικά ότι το μέγεθος του δείγματος θα είναι 20 μαθητές⁷, από τέσσερα διαφορετικά σχολεία. Η ανάπτυξη του δείγματος σε διαφορετικά σχολεία γίνεται για να αδρανοποιηθούν παράγοντες, που σχετίζονται με την προσωρινή δυσλειτουργία κάποιου σχολείου, η οποία θα μπορούσε να δημιουργήσει προβλήματα στην έρευνα⁸. Τα σχολεία επιλέγονται τυχαία, από τρία γειτονικά προάστια της Αθήνας, με την ίδια περίπου (μέση) κοινωνικοοικονομική σύνθεση πληθυσμού, συγκεκριμένα από τον Άλιμο, την Αργυρούπολη και το Ελληνικό⁹.

Σε κάθε σχολείο επιλέγεται, πάλι τυχαία, ένα τμήμα της Α' Λυκείου. Οι καθηγητές των μαθηματικών στα τέσσερα τμήματα (σχολεία) δέχονται με προθυμία να συνεργαστούν. Χορηγούν ένα προκαταρκτικό ερωτηματολόγιο (pre test) που κατασκεύασε η ερευνήτρια και με

βάση το οποίο γίνεται η τελική επιλογή του δείγματος, πέντε, κατά μέσο όρο, μαθητών / μαθητριών από κάθε τμήμα, ανά σχολείο.

Ο στόχος του προκαταρκτικού ερωτηματολογίου είναι μία, κατ' αρχήν, διερεύνηση του περιεχομένου του «Σχήματος του ισοσκελούς τριγώνου» το οποίο έχουν οι μαθητές, ερχόμενοι στο Λύκειο. Για την έρευνά μας παρουσιάζουν ενδιαφέρον τα εξής χαρακτηριστικά του ΣΙΤ¹⁰: η γνώση του ορισμού και της βασικής ιδιότητας του ισοσκελούς τριγώνου, οι οδηγίες κατασκευής του ισοσκελούς, η ικανότητα για νοερή απεικόνιση και συλλογισμό. Αφού κωδικοποιούνται οι απαντήσεις των μαθητών κάθε τμήματος, ως προς τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά, γίνεται η επιλογή του δείγματος με κριτήριο την αντιπροσωπευτικότητα. Συγκεκριμένα, επιλέγονται 7-8 άτομα ανά τμήμα με τα ακόλουθα κριτήρια:

(α) να υπάρχει ένας τουλάχιστον μαθητής για κάθε συνδυασμό αυτών των χαρακτηριστικών του ΣΙΤ που παρατηρήθηκε

(β) η αναλογία στο δείγμα, μαθητών που δίνουν μία συγκεκριμένη απάντηση, ως προς κάποιο χαρακτηριστικό, να είναι ίδια με την αναλογία τους στο συνολικό πληθυσμό του τμήματος¹¹ και

(γ) να υπάρχει ισορροπία σε αγόρια - κορίτσια

Ακολουθεί συζήτηση γνωριμίας και ενημέρωσης με τους μαθητές που έχουν επιλεγεί στο κάθε σχολείο χωριστά. Η ερευνήτρια παρουσιάζει στα παιδιά τους στόχους της έρευνας, τη μεθοδολογία, και κυρίως τα κριτήρια επιλογής τους, και τους ζητά να αποφασίσουν αν θέλουν να συμμετάσχουν ή όχι. Ο τρόπος επιλογής του δείγματος επηρεάζει αποφασιστικά την απόφαση των αδύνατων μαθητών να βοηθήσουν στην έρευνα. Οι αρχικοί φόβοι, ότι οι αδυναμίες τους στο μάθημα της Γεωμετρίας τους καθιστά «άχρηστους» στην έρευνα, ανατρέπονται εύκολα, όταν η συζήτηση εστιάζει στο ενδιαφέρον μας να αποκαλύψουμε την ποικιλία στον τρόπο σκέψης.

Η μεθοδολογία επιλογής του δείγματος που περιγράφουμε, μας εξασφαλίζει – κατά το δυνατόν – μαθητές που εμφανίζουν διαφορετικό περιεχόμενο στο ΣΙΤ και διαφορετικές προσεγγίσεις στις βασικές λειτουργίες που χρησιμοποιούν, όταν λύνουν γεωμετρικά προβλήματα (βλέπω – (ανα)παράγω τα σχήματα – αιτιολογώ). Η επιλογή με βάση ποιοτικά κριτήρια θεωρείται περισσότερο αποδοτική, στην περίπτωσή μας, για την απόδοση της υπάρχουσας ποικιλίας προσεγγίσεων (σε σύγκριση με την κλασσική επιλογή, βάσει της σχολικής βαθμολογίας), αφού κατευθύνεται από τους σκοπούς της παρούσης έρευνας.



δ. η συλλογή των στοιχείων

Το περιβάλλον στο οποίο γίνεται η έρευνα, είναι ένα τεχνητό, εργαστηριακό περιβάλλον. Συγκεκριμένα, η ερευνήτρια συναντά κάθε μαθητή / μαθήτρια σε μια αίθουσα του σχολείου, δίχως την παρουσία άλλων προσώπων. Το περιβάλλον χαρακτηρίζεται τεχνητό, γιατί θέλει να αναπαράγει την ατομική συγκέντρωση του παιδιού, όταν εργάζεται μόνο του στο δωμάτιό του. Η επιλογή παρουσιάζει δύο πλεονεκτήματα, την απομόνωση του μαθητή και τη δυνατότητα συνεχούς παρατήρησής του από την ερευνήτρια. Συγκεκριμένα ο μαθητής έχει τη δυνατότητα, αλλά και την υποχρέωση, να εργαστεί μόνος του, δίχως αλληλεπιδράσεις με άλλους συμμαθητές του και με την ελάχιστη δυνατή αλληλεπίδραση με την ερευνήτρια.

Ο τύπος παρατήρησης που χρησιμοποιείται θα μπορούσε να χαρακτηριστεί συμμετοχική, με την ελάχιστη δυνατή συμμετοχή της ερευνήτριας. Παρόλο που η πρόθεσή μας είναι η μη συμμετοχική παρατήρηση, το αντικειμενικό γεγονός της απομόνωσης της ερευνήτριας με το μαθητή / μαθήτρια στον ίδιο χώρο οδηγεί φυσιολογικά το παιδί κάθε φορά που έχει κάποιο ερώτημα / απορία να απευθύνεται στην ερευνήτρια. Εκείνη περιορίζει την παρέμβασή της στο ελάχιστο, με διευκρινιστικές, κυρίως, ερωτήσεις. Παράλληλα, ελέγχεται η «γλώσσα του σώματος» από τη μεριά της ερευνήτριας, ώστε να μη μεταδίδονται μηνύματα στο μαθητή, σχετικά με το τι είναι ενδιαφέρον και τι όχι από όσα λει ή να μη δίνονται ενδείξεις σχετικά με την αξιολόγησή τους.

Η συνάντηση / συνεδρία είναι δομημένη, καθώς δίνεται στους μαθητές, κάθε φορά (σε κάθε φάση), ένα φύλο με προβλήματα τα οποία καλούνται να λύσουν. Οι μαθητές έχουν στη διάθεσή τους όσο χρόνο χρειάζονται για να ολοκληρώσουν τις δραστηριότητες που τους δίνονται, κατά μέσο όρο μιάμιση ώρα κάθε φορά. Παρόλα αυτά, η δομή του χρόνου στο περιβάλλον του σχολείου¹² είναι παράγοντες που έμμεσα μπορεί να επηρεάζουν και να δομούν επιπλέον τις συνεδρίες (ανεπιθύμητες επιδράσεις).

Κατά τις συνεδρίες ζητείται από τους μαθητές να σκέφτονται δυνατά και να κάνουν προσπάθειες να εξηγούν τι κάνουν. Στο τέλος η ερευνήτρια τους καλεί να ξανασκεφτούν τον τρόπο εργασίας τους και, πιθανά, να αναθεωρήσουν σημεία, βλέποντας ολοκληρωμένη τη λύση. Το περιβάλλον εξασφαλίζει την απαιτούμενη ησυχία ώστε να μαγνητοφωνείται η «φωναχτή σκέψη» των μαθητών. Παράλληλα η ερευνήτρια κρατά κάποιες σύντομες σημειώσεις πεδίου, τις οποίες συμπληρώνει αμέσως μετά το τέλος της συνάντησης, με εκτενέστερες περιγραφές, όπου το κρίνει απαραίτητο. Συνεπώς οι τρόποι συλλογής των στοιχείων είναι τρεις: τα γραπτά των μαθητών, οι μαγνητοφωνήσεις των διαλόγων και οι σημειώσεις πεδίου. Σε κάθε στοιχείο καταγράφεται το όνομα του παιδιού, η ημερομηνία και η φάση.

Η συνέπεια των στοιχείων, που συλλέγουμε με τις τρεις μεθόδους, μέσα από τις διάφορες πηγές δεδομένων, ελέγχεται κατά την ανάλυση των απομαγνητοφωνημένων διαλόγων, σε συνδυασμό με τις γραπτές απαντήσεις των μαθητών και τις σημειώσεις πεδίου. Στη μελέτη περίπτωσης, σύμφωνα με τον Yin, δεν τίθεται θέμα τριγωνοποίησης, αφού δεν είναι σημαντική η εσωτερική εγκυρότητα, δηλαδή, η αποφυγή λανθασμένων συμπερασμάτων σχετικά με αιτιώδεις σχέσεις (Mertens, σ.183).

ε. Η επιλογή των προβλημάτων που χρησιμοποιούνται στην έρευνα

Σχετικά με τα γεωμετρικά προβλήματα που δίνονται, προηγούνται οι ακόλουθες σκέψεις. Σύμφωνα με τον ψυχολόγο της μορφής (Gestalt psychologist) Duncker (1945), «ένα πρόβλημα υπάρχει όταν ένας ζωντανός οργανισμός έχει ένα στόχο, αλλά δεν γνωρίζει πώς αυτός ο στόχος μπορεί να επιτευχθεί» (σ.2). Ο τρόπος με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε τα προβλήματα συμφωνεί με την παραπάνω θέση.

Σε γνωστικές περιοχές σύνθετης γνώσης, όπως τα Μαθηματικά, εμφανίζονται συχνά τέτοια προβλήματα, των οποίων η κατανόηση δεν είναι τετριμμένη. Ειδικά όταν πρόκειται για προβλήματα που, είτε είναι σύνθετα, είτε δεν ορίζονται με ακρίβεια (ill defined), τότε απαιτείται αρχικά μία κατάλληλη αναπαράσταση της κατάστασης που περιγράφουν, προκειμένου να επιλεγεί ο τρόπος λύσης και να ερμηνευτεί το αποτέλεσμα. Τέτοια προβλήματα θεωρούνται, από την παρούσα έρευνα, ως «πλούσια», με την έννοια ότι είναι κατάλληλα για την παρακολούθηση του τρόπου σκέψης των μαθητών και κατά συνέπεια τα προβλήματα που χρησιμοποιούνται διαμορφώνονται σε αυτό το πνεύμα.

Μια άλλη απαίτηση, κατά την διαμόρφωση των προβλημάτων, είναι η ικανότητά τους να προκαλούν τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν κριτικά τις γνώσεις τους και να ενεργοποιήσουν και τις τρεις γνωστικές λειτουργίες που θέλουμε να εξετάσουμε (νοερή απεικόνιση, κατασκευή και αιτιολόγηση). Ο Schoenfeld (1986) ισχυρίζεται πως, κάτι τέτοιο μπορεί να συμβεί σε ένα πλαίσιο λύσης προβλήματος το οποίο ενθαρρύνει τη συνύπαρξη εμπειρισμού και παραγωγικού συλλογισμού και την ενίσχυση του ενός από τον άλλο, όπως οι γεωμετρικές κατασκευές.

Στην έρευνα του Chinnappan (1998) (με στόχους παρόμοιους με τους δικούς μας), που διερεύνησε ποια γνωστικά σχήματα ενεργοποιούν οι μαθητές κατά τη λύση ενός προβλήματος, χρησιμοποιήθηκε μία άσκηση παρόμοια με αυτές που περιέχονται και στο ελληνικό σχολικό εγχειρίδιο της Γεωμετρίας της Α' Λυκείου. Εμείς δεν επιλέγουμε να δώσουμε στους μαθητές τέτοιας μορφής θέματα. Στην παρούσα έρευνα, για τη διερεύνηση της ποιότητας των γνωστικών δομών που φέρνουν οι μαθητές σε μία κατάσταση προβλήματος, χρησιμοποιούμε προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών, με συγκεκριμένα επιχειρήματα:

Η κυρίαρχη λειτουργία στα προβλήματα / ασκήσεις που προτείνονται στο σχολικό βιβλίο είναι η αιτιολόγηση, ενώ οι άλλες δύο λειτουργίες (νοερή απεικόνιση και κατασκευή) έχουν περιορισμένη συμμετοχή. Όμως οι μαθητές της Α' Λυκείου εισάγονται για πρώτη φορά στην έννοια της μαθηματικής απόδειξης, οπότε είναι δυσκολότερο να αιτιολογήσουν συνειδητά τις πράξεις τους με ένα τυπικό τρόπο, από το να φανταστούν και να κατασκευάσουν συνειδητά αυτό που τους ζητάμε¹³. Καθώς η συνειδητότητα συμβαδίζει με την εξέλιξη μιας λειτουργίας, από τον προηγούμενο συλλογισμό συμπεραίνουμε πως με τα συνήθη προβλήματα του σχολείου δεν μπορούμε πάντα να παρακολουθήσουμε όλες τις λειτουργίες που εμπλέκονται στη γεωμετρική σκέψη, ούτε την εξέλιξή τους, με αποτέλεσμα να μην έχουμε καθαρή εικόνα για τα γνωστικά Σχήματα των μαθητών. Ο ίδιος ο Chinnappan (1998) θεωρεί ως μεθοδολογικό περιορισμό τη χρήση του συγκεκριμένου προβλήματος, το οποίο «*δε δίνει στους μαθητές με χαμηλές επιδόσεις την ευκαιρία να δείξουν τα γνωστικά τους Σχήματα*» (σ. 215).

Αντίθετα, τα πλεονεκτήματα ενός προβλήματος κατασκευής είναι ότι ενεργοποιεί ταυτόχρονα και τις τρεις γεωμετρικές λειτουργίες (νοερή απεικόνιση, κατασκευή, αιτιολόγηση) του μαθητή, επιτρέπει την παρακολούθηση της εξέλιξής τους, αποκαλύπτει τα γεωμετρικά στερεότυπα με βάση τα οποία σκέφτεται, προκαλεί ενεργητική στάση, ελέγχει τις δεξιότητές του, σε σχέση με τα γεωμετρικά όργανα, αποκαλύπτει τη συμβολή της φαντασίας, κ.ά. Ακόμα τα προβλήματα κατασκευών παρέχουν τη δυνατότητα σε κάθε μαθητή να δώσει μία απάντηση, ανεξάρτητα από το επίπεδό του. Συνεπώς έχουμε την ευκαιρία να δούμε σε λειτουργία τη σκέψη όλων των μαθητών που συμμετέχουν στην έρευνα και, κατά συνέπεια, να διακρίνουμε διαφορετικούς τρόπους σκέψης.

Στην παρούσα έρευνα προτείνουμε συνολικά επτά προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών. Βασικό θέμα όλων των προβλημάτων είναι το ισοσκελές τρίγωνο και οι σχέσεις του με άλλα γνωστά γεωμετρικά σχήματα. Η επικράτηση του ισοσκελούς τριγώνου οφείλεται στην επιλογή μας να εξετάσουμε τη δημιουργία και εξέλιξη ενός γνωστικού Σχήματος, μέσα από την περίπτωση του ΣΙΤ (γνωστικό Σχήμα που δημιουργείται γύρω από το ισοσκελές). Οι λόγοι γι' αυτή την επιλογή είναι:

- το ισοσκελές αποτελεί βασική δομική μονάδα, στην ύλη της Γεωμετρίας της Α' Λυκείου.
- διδάσκεται αρκετά νωρίς (τέλη Οκτώβρη), γεγονός που δίνει το περιθώριο για εκτενή παρατήρηση στη διάρκεια του σχολικού έτους.
- εμφανίζεται και χρησιμοποιείται συχνά, σε διάφορες περιπτώσεις, αφού συνδέεται με όλες τις υπόλοιπες βασικές δομικές μονάδες που μαθαίνουν οι μαθητές, όπως το παραλληλόγραμμο, το ρόμβο, το ισοσκελές τραπέζιο, και τον κύκλο.

Τα προβλήματα δημιουργούνται και κατανέμονται στις τρεις φάσεις της έρευνας, έτσι ώστε να πληρούνται οι εξής προϋποθέσεις: (α) κάθε ερευνητική υπόθεση να εξετάζεται με περισσότερα του ενός προβλήματα, (β) κάθε στόχος της έρευνας να ελέγχεται στην κατάλληλη χρονική στιγμή (φάση), (γ) να εμπλέκεται μια ποικιλία προσεγγίσεων και (δ) να ενεργοποιείται μια ποικιλία συστημάτων αναπαράστασης.

Τα επτά προβλήματα είναι κατανεμημένα σε δύο ομάδες. Τρία προβλήματα είναι κοινά στην 1^η και στη 2^η φάση (μετά δύο – τρεις μήνες), με ελαφρά αλλαγμένη εκφώνηση στη 2^η φάση, ενώ τα υπόλοιπα τέσσερα προβλήματα δίνονται στην 3^η φάση.

Ο σκοπός της επανάληψης των ίδιων προβλημάτων στην 1^η και 2^η φάση είναι να διαπιστώσουμε με αφορμή την ίδια δραστηριότητα, την εξέλιξη των γεωμετρικών λειτουργιών των μαθητών. Έρευνες δείχνουν πως *«η εκπαίδευση προπορεύεται πάντα της εξέλιξης (των ψυχολογικών λειτουργιών). Το παιδί μαθαίνει να κατέχει ορισμένες ικανότητες πριν μάθει να τις χειρίζεται συνειδητά και εκούσια..... Η εξέλιξη δεν υποτάσσεται στο σχολικό διδακτικό πρόγραμμα, αλλά έχει τη δική της εσωτερική λογική»* (Βυγκότσκι, 1988, σ.287).

Συνεπώς κατά τη χρονική στιγμή που γίνεται η 1^η φάση της έρευνας, στην αρχή του σχολικού έτους, μόλις έχει ολοκληρωθεί η διδασκαλία του ισοσκελούς (εκπαίδευση) και οι λειτουργίες είναι ακόμα ανώριμες. Οι ερευνητές της εκπαίδευσης συμφωνούν πως η ανωριμότητα των λειτουργιών είναι γενικός κανόνας κατά το χρονικό διάστημα που αρχίζει η διδασκαλία (Βυγκότσκι, 1988, σ.282). Η εξέλιξη έρχεται με την πάροδο του χρόνου και συμβαδίζει με τη συνειδητότητα των ενεργειών και τη σκόπιμη λειτουργία. Αυτό ακριβώς επιδιώκουμε να δούμε με τη 2^η φάση, που δίνονται τα ίδια τρία προβλήματα με διαφοροποιημένους στόχους. Για παράδειγμα, ενώ στην 1^η φάση στο 1^ο πρόβλημα ζητάμε να κατασκευάσουν οι μαθητές πέντε διαφορετικά ισοσκελή τρίγωνα, στη 2^η φάση, με αφορμή το ίδιο πρόβλημα, συζητάμε με τους μαθητές για τρόπους κατασκευής ισοσκελών τριγώνων. Δηλαδή, ενώ στην 1^η φάση αναζητούμε την εικόνα του αντικειμένου (ισοσκελούς τριγώνου) και τους δυνατούς μετασχηματισμούς της, στη 2^η (με αφορμή το ίδιο πρόβλημα) ζητάμε από το μαθητή να μιλήσει για τη νοητική πράξη, με τη βοήθεια της οποίας φαντάζεται και μετασχηματίζει το ισοσκελές. Έτσι η εξέλιξη ανιχνεύεται από το είδος των σκέψεων (συνειδητές ή όχι) που κάνει ο μαθητής για την έννοια ισοσκελές τρίγωνο και τη συνειδητή χρήση της (Βυγκότσκι, 1988, σ.308).



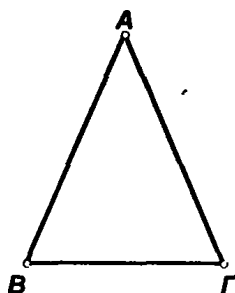
2.6 ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΥ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΝΤΑΙ

Στη συνέχεια παρατίθενται τα προβλήματα που σχεδιάζονται για την παρούσα έρευνα, και χρησιμοποιούνται στην κάθε φάση της.

→ 1^η Φάση

1^η ΦΑΣΗ1^ο πρόβλημα

Παρακάτω βλέπεις ένα ισοσκελές τρίγωνο. Φτιάξε πέντε διαφορετικά ισοσκελή τρίγωνα και γράψε δίπλα από το καθένα σε τι διαφέρει από το ΑΒΓ.

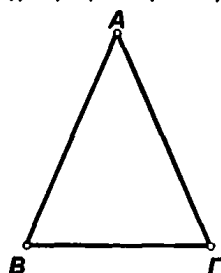
2^ο Πρόβλημα

Στο παρακάτω σχήμα ξεκινήσαμε την κατασκευή του ισοσκελούς τριγώνου ΚΕΛ, μπορείς να τη συμπληρώσεις; Μπορείς να περιγράψεις με λόγια την κατασκευή του τριγώνου;

3^ο Πρόβλημα

Στο επόμενο σχήμα δίνεται ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$).

α) Μπορείς να βρεις ένα σημείο Κ εσωτερικό του τριγώνου τέτοιο, ώστε το τρίγωνο ΚΒΓ που θα σχηματιστεί να είναι επίσης ισοσκελές; Περιγράψε με λίγα λόγια τι σκέφτηκες για να βρεις το σημείο Κ.



β) Μπορείς να βρεις ένα σημείο Α εσωτερικό του τριγώνου τέτοιο, ώστε το τρίγωνο ΛΑΒ να είναι ισοσκελές; Περιγράψε με λίγα λόγια τι σκέφτηκες για να βρεις το σημείο Λ.

γ) Μπορείς τώρα να βρεις ένα μόνο σημείο Σ τέτοιο, ώστε τα τρίγωνα ΣΒΓ και ΣΑΒ να είναι και τα δύο ισοσκελή; Περιγράψε με λίγα λόγια τι σκέφτηκες.

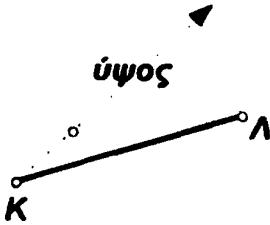
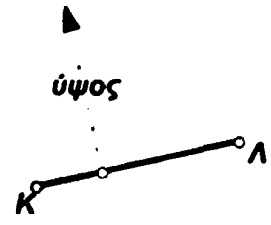
→ 2^η Φάση

Στην 2^η Φάση χρησιμοποιούνται τα τρία προηγούμενα προβλήματα, με τη διαφορά πως, το 2^ο πρόβλημα εμπλουτίζεται με ένα ακόμα γεωμετρικό σχήμα, όπως φαίνεται παρακάτω:

2^η ΦΑΣΗ

2^ο Πρόβλημα

Στο παρακάτω σχήμα ξεκινήσαμε την κατασκευή του ισοσκελούς τριγώνου ΚΕΛ, μπορείς να τη συμπληρώσεις; Μπορείς να περιγράψεις με λόγια την κατασκευή του τριγώνου;

→ 3^η Φάση

3^η ΦΑΣΗ

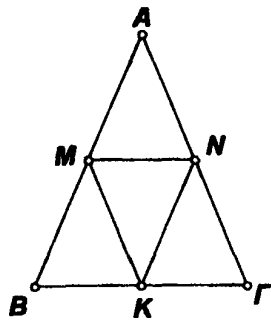
1^ο Πρόβλημα

Στο επόμενο σχήμα δίνεται ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$) και Μ, Ν, Κ τα μέσα των πλευρών του.

α) πόσα παραλληλόγραμμα βλέπεις; Ονόμασέ τα.

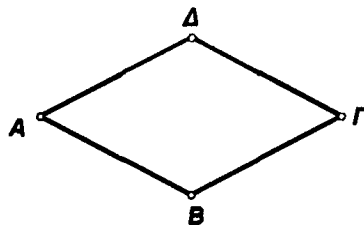
β) υπάρχουν ρόμβοι στο σχήμα; Ποιοι;

β) μπορείς να συγκρίνεις τα εμβαδά των τριγώνων: ΑΜΝ και ΑΒΓ (δίχως να τα υπολογίσεις). Δικαιολόγησε την απάντησή σου.



2^ο Πρόβλημα

Παρακάτω δίνεται ένας ρόμβος. Ο ρόμβος είναι ένα παραλληλόγραμμο με όλες τις πλευρές του ίσες. Γράψε τρία διαφορετικά κατασκευαστικά σενάρια ενός ρόμβου.

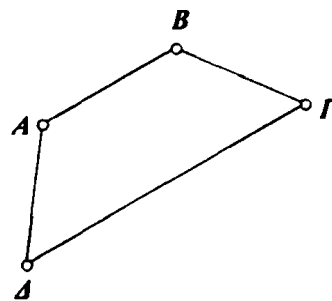
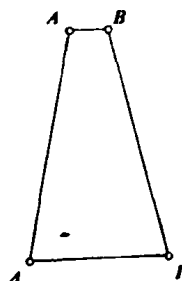
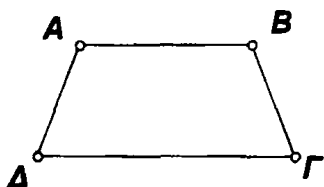


Ποια, από τις κατασκευές που περιγράφεις στα σενάριά σου, θεωρείς καλύτερη και γιατί;

3^ο Πρόβλημα

Ξεκινώντας από το ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$, φτιάξε όσα ισοσκελή τρίγωνα μπορείς.

Σε κάθε περίπτωση, γράψε το κατασκευαστικό σενάριο που ακολούθησες και εξήγησε γιατί το τρίγωνο που έφτιαξες είναι ισοσκελές.

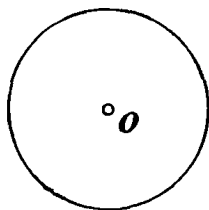


Ποια, από τις κατασκευές που περιγράφεις στα σενάριά σου, θεωρείς καλύτερη και γιατί;

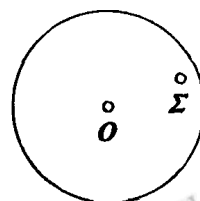
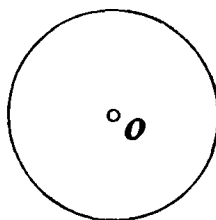
4^ο Πρόβλημα

Δίνεται κύκλος κέντρου O και σημείο Σ . Στην κάθε περίπτωση, φτιάξε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΣAB , όπου τα A και B είναι σημεία του κύκλου. Φρόντισε τα τρίγωνα που φτιάχνεις να είναι διαφορετικά. Γράψε αναλυτικά τον τρόπο κατασκευής και δικαιολόγησε γιατί τα τρίγωνα είναι ισοσκελή.

Σ ○



Σ ○



2.7 ΟΙ ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΚΑΙ Η ΣΥΝΔΕΣΗ ΤΟΥΣ ΜΕ ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Όπως αναφέραμε (2.1), τα ερωτήματα στα οποία προσπαθεί να απαντήσει η παρούσα έρευνα είναι:

1. Πώς αντιλαμβανόμαστε το γνωστικό Σχήμα του Ισοσκελούς Τριγώνου (ΣΙΤ);
2. Τι εννοούμε όταν λέμε πως το ΣΙΤ συνδέεται με ένα άλλο γνωστικό Σχήμα και με ποιο τρόπο μπορεί να συμβεί αυτό;
3. Πώς εξελίσσεται το ΣΙΤ;

Την προσπάθεια για απάντηση του πρώτου ερωτήματος θα την ονομάζουμε **τοπική εξέταση** του ΣΙΤ, ενώ εκείνη για την απάντηση του δεύτερου **συνολική εξέταση** του ΣΙΤ. Λέγοντας δηλαδή τοπική εξέταση του ΣΙΤ εννοούμε τη διερεύνηση του ίδιου του γνωστικού Σχήματος, ως προς το περιεχόμενο και τη χρήση του, ενώ η συνολική εξέταση αφορά στη σύνδεση του ΣΙΤ με άλλα γνωστικά Σχήματα.

Η δομική εξέταση του ΣΙΤ γίνεται σε δύο επίπεδα. Η τοπική διερεύνηση ελέγχει την 1^η υπόθεση και γίνεται, κυρίως, μέσα από τα προβλήματα της 1^{ης} – 2^{ης} φάσης. Η συνολική διερεύνηση ελέγχει τη 2^η και 3^η υπόθεση και γίνεται μέσα από τα προβλήματα της 3^{ης} φάσης. Τα τελευταία επιχειρούν να διακρίνουν συνδέσεις του ΣΙΤ με άλλα γνωστικά Σχήματα, όπως του παραλληλογράμμου, του ρόμβου, του ισοσκελούς τραπεζίου και του κύκλου.

Η διερεύνηση των ερωτημάτων δεν έχει αποκλειστικά ποσοτικό χαρακτήρα, δηλαδή δεν περιοριζόμαστε στην καταγραφή των νέων πληροφοριών που βαθμιαία εμπλουτίζουν το ΣΙΤ ή στον εντοπισμό των νέων συνδέσεων που δημιουργούνται ανάμεσα στα υπάρχοντα Σχήματα. Ο λόγος είναι πως η πειραματική έρευνα για το σχηματισμό και εξέλιξη των εννοιών δεν επιβεβαιώνει την εξάρτηση νοητικών δραστηριοτήτων, όπως η αφαίρεση, η γενίκευση ή ο συλλογισμός από την αύξηση του αριθμού των συνδέσεων (Βυγκότσκι, 1988, σ. 151). Μια τέτοια μονόπλευρη – ποσοτική προσέγγιση δεν εξυπηρετεί τίποτα άλλο, πέρα από το να σχολιάζει και να κάνει πιο συγκεκριμένο το προφανές¹⁴. Σύμφωνα με τον Vygotsky (1988), η εξέλιξη των εννοιών συνδέεται με την απόκτηση ποιοτικά νέων συνδέσεων και όχι με την απλή αύξηση των συνδέσεων ανάμεσα στις γνώσεις (σ. 151). Στην παρούσα έρευνα το θέμα των συνδέσεων εξετάζεται ως πρόβλημα ποιοτικό, κατά την έννοια που το θέτει ο προηγούμενος ερευνητής. Συγκεκριμένα διερευνάται η βαθμιαία οργάνωση των γεωμετρικών γνώσεων που αφορούν στο ισοσκελές τρίγωνο σε μια ενιαία δομή που σταδιακά μεταβάλλει το χαρακτήρα της.

Η αλήθεια των υποθέσεων της έρευνας ελέγχεται επίσης και κατά την ανάλυση των ευρημάτων ανά λειτουργία. Για το σκοπό αυτό διαμορφώνονται κριτήρια τα οποία αντανακλούν τις συγκεκριμένες ικανότητες των μαθητών ανά λειτουργία. Παρατηρώντας τις ικανότητες κάθε παιδιού αντιλαμβανόμαστε το βαθμό στον οποίο το ΣΙΤ του είναι ικανό να προσαρμόζεται στα δεδομένα του κάθε προβλήματος, είναι ευέλικτο σε αλλαγές και αξιόπιστο στις αποφάσεις που λαμβάνει. Με αυτό τον τρόπο σκιαγραφείται η αποτελεσματικότητα του ΣΙΤ στη λύση προβλήματος

Στην ανάλυση που ακολουθεί (2.7.1) εστιάζουμε διαδοχικά σε κάθε μία από τις ερευνητικές υποθέσεις, την αναλύουμε και επεξηγούμε τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η μελέτη της. Ακολούθως σχολιάζουμε τα προβλήματα που χρησιμοποιούνται για το σκοπό αυτό. Σκοπός μας είναι να αναδείξουμε τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στις υποθέσεις και τα προβλήματα και πώς αυτά λειτουργούν ώστε να ελέγξουν τις υποθέσεις.

2.7.1 Υποθέσεις που αφορούν στην εξέταση του ΣΙΤ σε τοπικό επίπεδο

Υπόθεση 1^α: η αναγνώριση και η χρήση του ισοσκελούς βασίζονται στην εικόνα πρότυπο

Έχουμε συνδέσει την μορφή που έχει το ΣΙΤ ενός μαθητή με δύο βασικές ικανότητες του παιδιού, την ικανότητα να αναγνωρίζει και την ικανότητα να χρησιμοποιεί το ισοσκελές. Η γενική αυτή θέση εξειδικεύεται, άρα μπορεί να μελετηθεί, με τη βοήθεια της 1^{ης} υπόθεσης. Στο σκέλος της 1^α της 1^{ης} υπόθεσης, η αναγνώριση και χρήση του ισοσκελούς συνδέονται με την εικόνα πρότυπο.

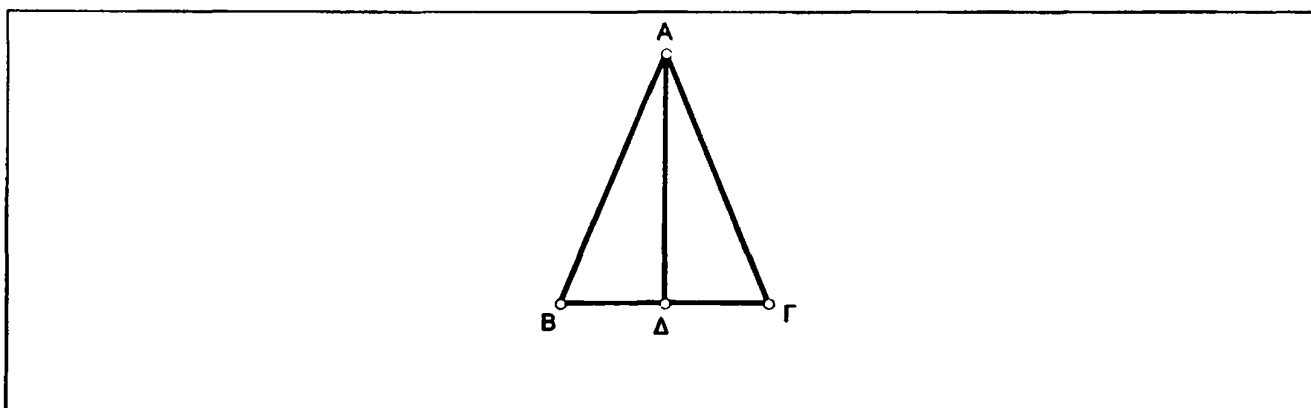
Οι Vinner και Hershkowitz (1983) (1983) διακρίνουν στην αναγνώριση των παραδειγμάτων μιας έννοιας τρία στοιχεία: την εικόνα της έννοιας (concept image), τον ορισμό (concept definition) και ένα σύνολο (φυσικών ή νοητικών) λειτουργιών. Οι ίδιοι θεωρούν πως η επιτυχημένη αναγνώριση ή κατασκευή της έννοιας εξαρτάται από την κατάλληλη χρήση των λειτουργιών στην εικόνα και τον ορισμό της. Στην περίπτωση της συγκεκριμένης έρευνας οι λειτουργίες αντιστοιχούν σε κάθε είδους μετασχηματισμό που μπορεί κάποιος να κάνει στο ισοσκελές είτε έχοντας κατά νου τον ορισμό είτε την εικόνα του.

Στη βιβλιογραφία τη σχετική με τη διαμόρφωση των εννοιών και την εννοιολογική ανάπτυξη εμφανίζεται η άποψη πως οι έννοιες οργανώνονται γύρω από συγκεκριμένα πρότυπα (prototypes) (Βοσνιάδου, 1995, σ.11). Τα πρότυπα είναι είτε μια συλλογή χαρακτηριστικών ιδιοτήτων είτε το καλύτερο παράδειγμα της έννοιας, και χρησιμοποιούνται ως μοντέλα για να συλλογιστόμαστε σε ανάλογες περιπτώσεις¹⁵.

Για να σχηματιστεί ένα πρότυπο, δε χρειάζεται να αναλογιστούμε τι κοινό υπάρχει σε μια σειρά παραδειγμάτων. Ο τρόπος οργάνωσης της μνήμης φαίνεται πως γεννά αυτόματα αυτές τις διαδικασίες αφαίρεσης (Kosslyn, 1995), δηλαδή δημιουργεί τα πρότυπα, τις αφηρημένες μορφές που αναπαριστούν τα βασικά ή πιο κρίσιμα στοιχεία ενός συνόλου ερεθισμάτων. Στο πρότυπο συσσωρεύεται η προηγούμενη εμπειρία του κάθε ατόμου και φαίνεται πως οι χαρακτηριστικές ιδιότητες ενσωματώνονται σε αυτό, τόσο με ποιοτικό όσο και με ποσοτικό τρόπο.

Τα πρότυπα συνδέονται στενά με την αναγνώριση των κανονικοτήτων (pattern recognition), η οποία περιλαμβάνει τη σύγκριση ερεθίσματος – προτύπου. Έρευνες δείχνουν πως η βεβαιότητα με την οποία αναγνωρίζουμε ένα σχήμα / ερέθισμα είναι ανάλογη με το βαθμό ομοιότητας του ερεθίσματος με το πρότυπό του (Eysenck, 1990, σ.46). Στην ίδια θέση συμφωνεί και ο Hasegawa (1997), που υποστηρίζει πως «όταν σχηματίζονται τα πρότυπα ως νοητικές εικόνες, επηρεάζουν αποφασιστικά την αναγνώριση των σχημάτων και τη λύση προβλήματος, σχεδόν ανεξάρτητα και χωριστά από τις έννοιες».

Ο σημαντικός ρόλος των προτύπων για την ανάπτυξη και την αναγνώριση των σχηματικών εννοιών στη Γεωμετρία μας οδηγεί στην υπόθεση 1^α. Ανάλογες απόψεις διατυπώνουν οι Koedinger και Anderson, που ισχυρίζονται ότι οι ειδικοί στη λύση γεωμετρικών προβλημάτων οργανώνουν τις γνώσεις σε ομάδες γεγονότων τα οποία σχετίζονται με μια πρότυπη γεωμετρική εικόνα (από Lawson- Chinnappan, 2000, σ. 40) και ο Chinnappan (1998), ο οποίος αναφέρεται στο Σχήμα του ορθογωνίου τριγώνου (σ. 203).



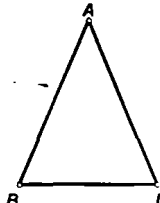
σχήμα 2.1 Η εικόνα – πρότυπο του ισοσκελούς τριγώνου

Στην ηλικία των 15 χρόνων που έρχονται οι μαθητές / μαθήτριες στο Λύκειο, δεν έχει ουσιαστικά ξεκινήσει η εξέλιξη της έννοιας του ισοσκελούς, αφού σύμφωνα με τον Vygotsky (1988) «η εξέλιξη μιας επιστημονικής έννοιας αρχίζει ακριβώς με την εργασία πάνω στην έννοια ως τέτοια, με τον προφορικό ορισμό της έννοιας, με πράξεις που προϋποθέτουν τη μη αυθόρμητη εφαρμογή αυτής της έννοιας» (σ.308)¹⁶. Συνεπώς, για να διερευνήσουμε τη μορφή του

ισοσκελούς που έχουν οι μαθητές σε αυτή την ηλικία (15 ετών), συνδέουμε την κατανόηση του ισοσκελούς με την ικανότητα μεταβολής της εικόνας - πρότυπο. Οι Miyazaki και Ueno υποστηρίζουν ότι μπορούμε να αντιληφθούμε και να κατανοήσουμε κάτι, όταν «μετακινώντας τα αντικείμενα ή τον τρόπο που τα βλέπουμε, διακρίνουμε κάτι αναλλοίωτο σε αυτή την κίνηση» (Hasegawa, 1997, σ. 161).

Για να μελετήσουμε την αναγνώριση και τη χρήση του ισοσκελούς, και κατ' επέκταση, για να διερευνήσουμε το βαθμό συνειδητότητας των μαθητών σε σχέση με την έννοια του ισοσκελούς και τη σύνδεσή της με την εικόνα πρότυπο, σχεδιάσαμε τα ακόλουθα προβλήματα. Σύμφωνα με το σχεδιασμό τα προβλήματα απαιτούν ταυτόχρονη κινητοποίηση του ορισμού, σε συνδυασμό με τη συνειδητή και ελεγχόμενη αναπαραγωγή της μορφής του ισοσκελούς:

1. το 1^ο πρόβλημα της 1^{ης} Φάσης, έχει στόχο να διερευνήσει το αναλλοίωτο της έννοιας του ισοσκελούς (κατά την άποψη των μαθητών).



1^ο Πρόβλημα, 1^{ης} Φάσης

«Βλέπεις ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ. Φτιάξε πέντε διαφορετικά ισοσκελή τρίγωνα και γράψε δίπλα από το καθένα σε τι διαφέρει από το ΑΒΓ»

Ο στόχος του προβλήματος είναι διπλός: (α) να ανιχνεύσει τα διαφορετικά γεωμετρικά σχήματα που αντιπροσωπεύουν το ισοσκελές στο μυαλό του μαθητή και κατ' επέκταση τη δυνατότητα απομάκρυνσης από την πρότυπη εικόνα, και (β) να διερευνήσει τα κριτήρια, με βάση τα οποία ο μαθητής αποφαινεται πως δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι ίδια ή διαφορετικά και συνεπώς του δίνουν τη δυνατότητα να μεταβάλλει τη μορφή. Παράλληλα, η λύση του 1^{ου} προβλήματος αποκαλύπτει τη σχέση ανάμεσα στον ορισμό και την εικόνα του ισοσκελούς που έχουν οι μαθητές.

Όλα τα τρίγωνα που ονομάζουμε ισοσκελή έχουν κοινά μια σειρά από χαρακτηριστικά, εκ των οποίων μόνο ένα είναι πρωτεύον (:μένει αναλλοίωτο σε οποιαδήποτε εμφάνιση ή μετασχηματισμό ισοσκελούς τριγώνου). Πρόκειται για τις δύο ίσες πλευρές. Τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά όπως: μήκη πλευρών, μέτρα γωνιών, ονομασία, προσανατολισμός κ.ά., είναι δευτερεύοντα. Ζητώντας από τους μαθητές να κατασκευάσουν πέντε διαφορετικά ισοσκελή τρίγωνα, τους προβληματίζουμε σχετικά με το ποια χαρακτηριστικά μπορούν να μεταβάλλουν και ποια όχι. Καθώς η ταυτότητα ανάμεσα σε δύο αντικείμενα συνδέεται πάντα με τη διατήρηση των αναλλοίωτων χαρακτηριστικών, παρά την ύπαρξη συγκεκριμένων διαφορών, ο στόχος του προβλήματος θα μπορούσε να διατυπωθεί ως εξής: «Τι θεωρούν οι μαθητές ως αναλλοίωτο, στην περίπτωση του ισοσκελούς;»

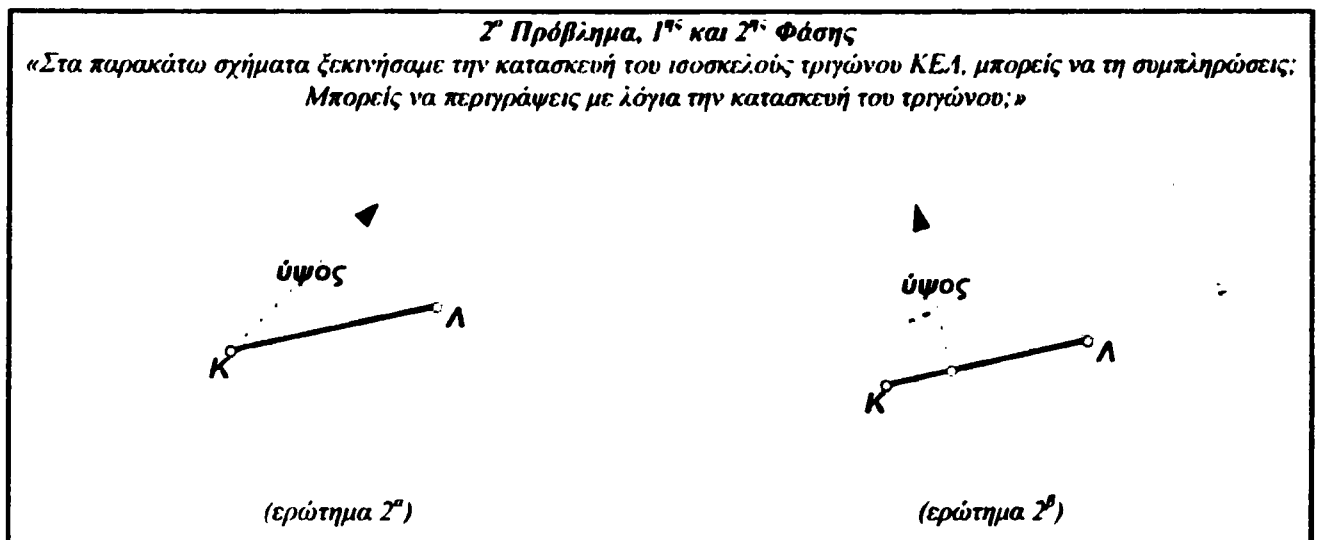
2. το 2^ο πρόβλημα της 1^{ης}/ 2^{ης} Φάσης, έχει ως στόχους:

α) να διερευνήσει το πώς επεμβαίνει το πρότυπο στην αναγνώριση και κατασκευή του ισοσκελούς, όταν δίνεται μόνο ένα μέρος του, σε διαφορετικό προσανατολισμό από το συνήθη,

και

β) πόσο μπορούν οι μαθητές να απομακρυνθούν / αποδεσμευτούν από την εικόνα – πρότυπο, προκειμένου να λύσουν ένα πρόβλημα.

Συγκεκριμένα, στο 2^ο πρόβλημα ζητείται η κατασκευή ισοσκελούς τριγώνου από δύο στοιχεία του, μία πλευρά και ένα ύψος, όπως φαίνεται παρακάτω:



Στην 1^η φάση δόθηκε μόνο το ένα ερώτημα (2^α) του προβλήματος, ενώ στη 2^η φάση δόθηκαν και τα δύο (2^α), (2^β). Τα δύο ερωτήματα διαφέρουν ως προς το γεωμετρικό σχήμα που τα συνοδεύει (οπτικό ερέθισμα). Στο (2^α) δίνεται μια πλευρά ΚΛ - η οποία μπορεί να θεωρηθεί είτε ως βάση του ισοσκελούς είτε ως ίση πλευρά του - και ένα ύψος, ενώ στο (2^β) η πλευρά μπορεί να θεωρηθεί μόνο ως ίση πλευρά του ισοσκελούς, ενώ το ύψος αποκλείεται να είναι ο άξονας συμμετρίας. Παρά το γεγονός ότι στο (2^α) ερώτημα δίνονται δύο δυνατότητες, όλοι σχεδόν οι μαθητές θεωρούν την πλευρά ΚΛ ως ίση πλευρά και το ύψος ως το ύψος - άξονα συμμετρίας, δίχως να μπορεί να διευκρινιστεί ποιο στοιχείο ταυτοποιείται πρώτο, καθώς η διεργασία είναι απόλυτα εσωτερική και σχεδόν ταυτόχρονη για τα δύο στοιχεία (πλευρά και ύψος).

Επιφανειακά, οι παράμετροι που μεταβάλλονται στο ερώτημα 2^β είναι δύο: η σχέση των δύο κατευθύνσεων που δίνονται (στο (α) έχουν τυχαία θέση, ενώ στο (β) είναι κάθετες) και η σχετική θέση του δοθέντος ύψους ως προς την πλευρά. Στην ουσία όμως αυτό που μεταβάλλεται είναι ο ρόλος του ύψους. Ενώ στο 2^α οι μαθητές το αντιμετωπίζουν ως: ύψος - άξονα συμμετρίας, δηλαδή το δοθέν ύψος είναι στοιχείο της εικόνας - πρότυπο, στο 2^β δεν

μπορούν να το κάνουν. Η φύση των δεδομένων (το γεγονός ότι το ύψος δεν διέρχεται από το μέσο της αντίστοιχης πλευράς) δεν επιτρέπει στο ύψος αυτό να είναι άξονας συμμετρίας, συνεπώς δεν ανήκει στο πρότυπο.

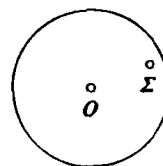
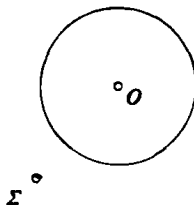
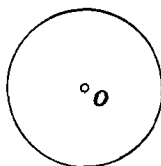
Στο ερώτημα 2^β, επιλέγουμε να δώσουμε ένα ύψος, που έχει περίπου τη «σωστή από άποψη προσανατολισμού θέση : κατακόρυφη». Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή, σε αντίθεση με το 2^α, δεν αναπαράγεται αυτόματα το πρότυπο με βάση τα δεδομένα του προβλήματος, εξ αιτίας του ότι, το ύψος που δίνεται είναι διαφορετικό από το ύψος της κορυφής. Το ερώτημα που μας απασχολεί είναι το πώς θα λειτουργήσουν οι μαθητές: «Η πρότυπη – εικόνα θα υπερισχύσει πάλι του προσανατολισμού ή παρεμβαίνει και άλλος παράγοντας;»

3. το 4^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης: έχει ως στόχο να διερευνήσει την αναγνώριση και χρήση του ισοσκελούς σε ένα διαφορετικό πλαίσιο (τον κύκλο).

4^ο Πρόβλημα, 3^{ης} Φάσης

«Δίνεται κύκλος κέντρου O και σημείο Σ . Στην κάθε περίπτωση, φτιάξε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΣAB , όπου τα A και B είναι σημεία του κύκλου. Φρόντισε τα τρίγωνα που φτιάχνεις να είναι διαφορετικά. Γράψε αναλυτικά τον τρόπο κατασκευής και δικαιολόγησε γιατί τα τρίγωνα είναι ισοσκελή»

Σ $\circ$



Ουσιαστικά, ο μαθητής καλείται να κατασκευάσει το ισοσκελές από ελάχιστα στοιχεία και μας ενδιαφέρει να δούμε αν η εικόνα – πρότυπο παίζει κάποιο ρόλο, ώστε να διευκολύνει το μαθητή.

Υπόθεση 1^β: το σημαντικότερο στοιχείο της εικόνας – πρότυπο του ισοσκελούς είναι το ύψος – άξονας συμμετρίας

Η διερεύνηση που απαιτείται για τον έλεγχο της υπόθεσης 1^β γίνεται μέσα από το 2^ο πρόβλημα της 1^{ης}, 2^{ης} φάσης και το 4^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης που περιγράψαμε στην προηγούμενη υπόθεση (υπόθεση 1^α).

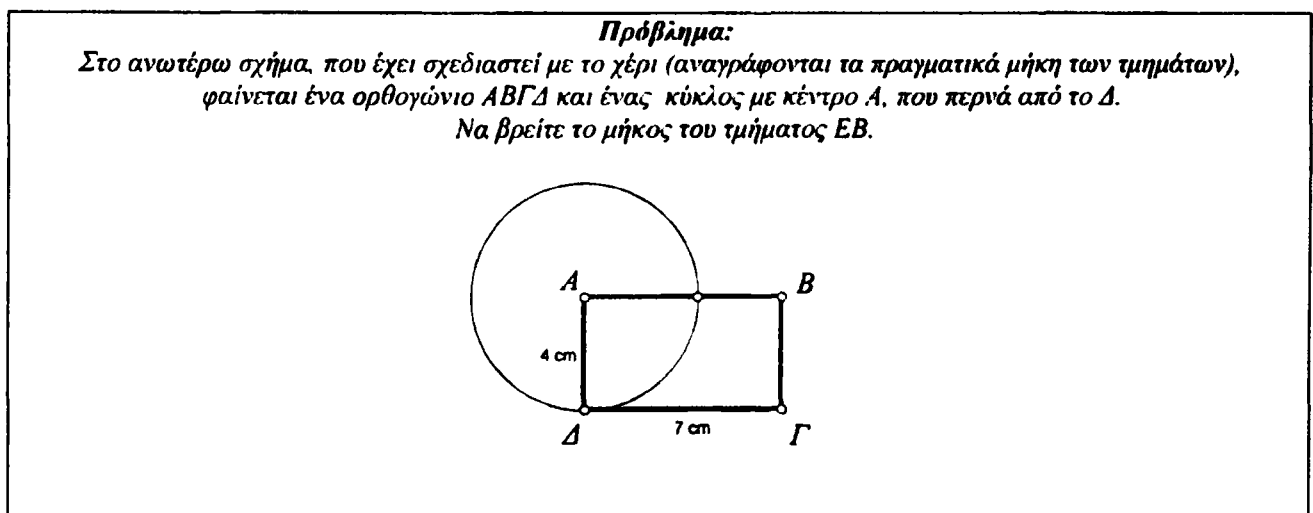
Υπόθεση 1^γ: η εικόνα – πρότυπο του ισοσκελούς αποτελεί τον καθοριστικό παράγοντα για την αναγνώριση των επιμέρους στοιχείων του σχήματος.

Στην παρούσα έρευνα, προκειμένου να εξετάσουμε τη μορφή που έχει το ΣΙΤ σε ένα μαθητή, μελετάμε συγκεκριμένες ικανότητές του, μία από τις οποίες είναι η ικανότητα για αναγνώριση της έννοιας του ισοσκελούς. Στην αναγνώριση της έννοιας διακρίνουμε δύο συνιστώσες, τον ορισμό της έννοιας και την εικόνα της (concept definition - concept image).

Η αναγνώριση είναι μια ικανότητα που μας επιτρέπει, όταν δίνεται ένα γεωμετρικό σχήμα, να μπορούμε να διακρίνουμε σε αυτό:

- τις σχηματικές μονάδες που υπάρχουν, ή
- τις σχηματικές μονάδες που υπάρχουν και άλλες, νέες μονάδες, που θα κατασκευάσουμε εμείς.

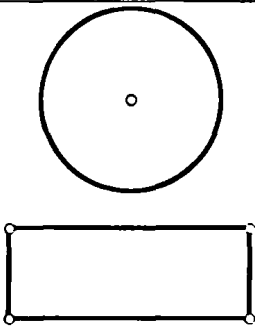
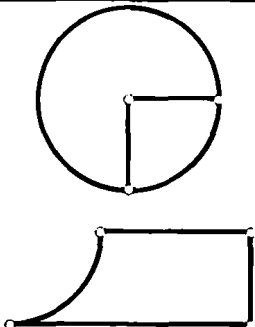
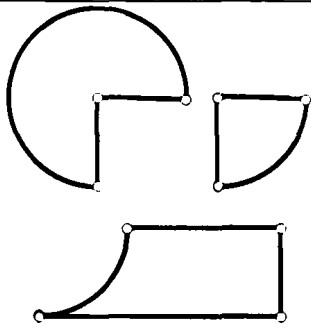
Καταλαβαίνουμε πως πρόκειται για δύο διαφορετικά είδη αναγνώρισης, που το πρώτο σχετίζεται με την αντιληπτική κατανόηση, ενώ το δεύτερο με τη λειτουργική κατανόηση (1.3). Όμως τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά, γιατί πρέπει να απαντήσουμε, ακόμα, στο βασικό ερώτημα: «πού βρίσκεται η λεκτική κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος;». Χρειάζεται, λοιπόν, μία λεπτομερέστερη ανάλυση του τι διακρίνουμε σε ένα γεωμετρικό σχήμα και διερεύνηση του γιατί οι περισσότεροι μαθητές δεν μπορούν να δουν αυτό που αναμένουμε να δουν στο σχήμα.



σχήμα 2.2 Το πρόβλημα αναγνώρισης που χρησιμοποιεί ο Duval

Προκειμένου να δώσουμε ένα παράδειγμα, με τη βοήθεια του οποίου θα αναλύσουμε εκτενέστερα τα διάφορα είδη αναγνώρισης, χρησιμοποιούμε ένα γνωστό πρόβλημα που δόθηκε σε μία γαλλική έρευνα¹⁷ (σχήμα 2.2), την οποία αναφέρει ο Duval (2001). Για να λυθεί, πρέπει να διακρίνει κάποιος τις σχηματικές μονάδες που αποτελούν το γεωμετρικό σχήμα που συνοδεύει το πρόβλημα, δηλαδή πρέπει να υπάρξει αναγνώριση. Με ποιους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

Υπάρχουν τρεις διαφορετικοί τρόποι, με τους οποίους μπορεί κανείς να διασπάσει το σχήμα του προηγούμενου προβλήματος σε υποσχήματα:

υποσχήματα Α	υποσχήματα Β	υποσχήματα Γ
		

σχήμα 2.3 Ανάλυση ενός σχήματος (2.2) σε υποσχήματα

Σύμφωνα με τον Duval, η περίπτωση Α δεν είναι μαθηματικά ενδιαφέρουσα. Ο λόγος είναι πως ο μαθητής διακρίνει μόνο αντιληπτικά τα στοιχεία του γεωμετρικού σχήματος. Με άλλα λόγια, στο Α υπάρχει μόνο αντιληπτική κατανόηση. Συνεπώς η αναγνώριση βασίζεται αποκλειστικά σε στοιχεία τα οποία είναι σχηματικές μονάδες διάστασης 2D, δηλαδή σε επίπεδα σχήματα, και ποτέ 1D, δηλαδή στοιχεία μίας διάστασης, όπως ευθύγραμμο τμήματα (Duval, προσωπική επικοινωνία).

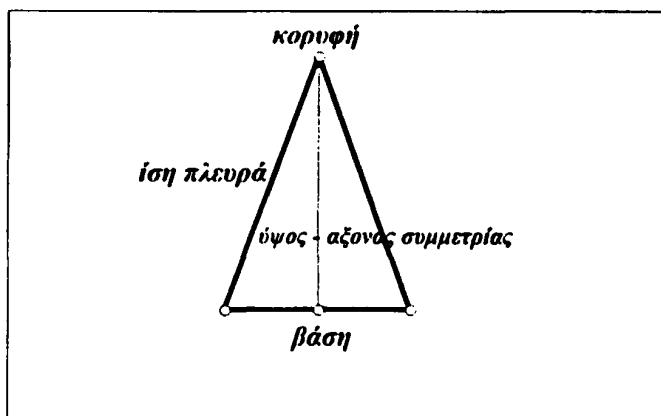
Η λύση του συγκεκριμένου προβλήματος όμως προϋποθέτει την αναγνώριση των στοιχείων 1D και συγκεκριμένα του ρόλου των δύο ακτίνων. Απαιτείται δηλαδή μια ανάλυση σε υπό σχήματα όπως η Β ή η Γ, γιατί «μόνο σε αυτά μπορεί κάποιος να δει τις δύο ακτίνες, τη μία ως πλευρά και την άλλη ως μέρος της δεύτερης πλευράς το ορθογωνίου» (Duval, 2001). Πιο συγκεκριμένα, στο γεωμετρικό σχήμα που συνοδεύει το πρόβλημα υπάρχουν δύο εννοιολογικά δίκτυα, δύο διαφορετικά πλαίσια: ο κύκλος και το ορθογώνιο. Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ (σχήμα 2.2) είναι ακτίνα του κύκλου στο ένα πλαίσιο και πλευρά του ορθογωνίου στο άλλο. Αντίστοιχα, το τμήμα ΑΕ είναι ακτίνα του κύκλου στο ένα πλαίσιο και μέρος της πλευράς του ορθογωνίου στο άλλο.

Η συνειδητοποίηση αυτών των καταστάσεων προϋποθέτει τη λεκτική και εννοιολογική κατανόηση του σχήματος, αναφέρεται δηλαδή σε μία διαφορετικού είδους αναγνώριση. Σε αυτήν και μόνο αποκαλούνται οι διαφορετικοί ρόλοι που έχουν τα στοιχεία 1D του σχήματος, ώστε να οδηγηθούμε στη λύση του προβλήματος.

Βλέπουμε λοιπόν πως σε ένα πρόβλημα δίνεται ένα γεωμετρικό σχήμα συνοδευόμενο από κάποιες λεκτικές εκφράσεις ιδιοτήτων του. Στο ίδιο γεωμετρικό σχήμα όμως μπορεί να

αντιστοιχούν διάφορες πιθανές μαθηματικές εκφράσεις που να το περιγράφουν, άρα περισσότεροι / διαφορετικοί ρόλοι για κάποια από τα στοιχεία του. Το πρόβλημα δίνει μία από τις πιθανές εκφράσεις και ο δάσκαλος ελπίζει πως ο μαθητής θα μπορέσει να σκεφτεί τις υπόλοιπες. Με άλλα λόγια, θα διακρίνει σε ποια πλαίσια βρίσκεται το κάθε στοιχείο και τι ρόλο έχει σε καθένα από αυτά. Η διαδικασία αυτή, που σχετίζεται άμεσα με την αναγνώριση και στη συνέχεια θα την ονομάζουμε «απόδοση ρόλου», αναφέρεται στη λεκτική κατανόηση του σχήματος.

Ας επανέλθουμε τώρα στο ισοσκελές τρίγωνο. Σύμφωνα με τα επιχειρήματα που δόθηκαν στην υποστήριξη της υπόθεσης 1^α, η αναγνώριση και χρήση του ισοσκελούς τριγώνου βασίζονται στην εικόνα – πρότυπο. Όταν δηλαδή βλέπουμε ένα σύνθετο γεωμετρικό σχήμα που περιλαμβάνει και το ισοσκελές, αυτό αναγνωρίζεται με βάση το πρότυπό του. Η εικόνα - πρότυπο δεν είναι απλά η φωτογραφία ενός γεωμετρικού σχήματος. Τα επιμέρους στοιχεία του προτύπου έχουν καθορισμένους διακριτούς ρόλους, οι οποίοι καθορίζονται από τις μεταξύ τους σχέσεις. Οι βασικοί ρόλοι, προκειμένου για στοιχεία διάστασης ένα (1D) είναι, *ίση πλευρά*, *βάση* και *ύψος* (υπονοείται το ύψος – άξονας συμμετρίας), ενώ προκειμένου για σημεία (0D), *κορυφή* (σχήμα 2.4). Η παρούσα έρευνα αναδεικνύει την εικόνα – πρότυπο του ισοσκελούς, ως τον καθοριστικό παράγοντα για την αναγνώριση και απόδοση ρόλων στα στοιχεία του.



σχήμα 2.4 Βασικοί ρόλοι των στοιχείων του ισοσκελούς τριγώνου

Σε κάθε στάδιο της ανάλυσης των ευρημάτων που ακολουθεί αναδύεται σταθερά, ως σημαντικός παράγοντας που διαπερνά τη γεωμετρική σκέψη¹⁸, η «απόδοση ρόλου» στα στοιχεία του γεωμετρικού σχήματος. Οι ρόλοι αποδίδονται με οδηγό την εικόνα πρότυπο του αντίστοιχου γεωμετρικού σχήματος, ενώ τις περισσότερες φορές το άτομο δε συνειδητοποιεί τη συνεισφορά

τους στην επιτυχημένη γεωμετρική λειτουργία του. Μ' άλλα λόγια η απόδοση ρόλων γίνεται ασυνείδητα.

Οι ρόλοι αποτελούν αναπόσπαστο στοιχείο του προτύπου και, όπως θα επιχειρήσουμε να αποδείξουμε στα επόμενα, καθορίζουν σε μεγάλο βαθμό την αναγνώριση και τη χρήση των γεωμετρικών σχημάτων (στην περίπτωση μας του ισοσκελούς τριγώνου). Η απόδοση ρόλων συσχετίζεται με ένα πλέγμα από προσδοκίες, που συνδέονται και αποκτούν νόημα μέσα από την εικόνα – πρότυπο. Οι προσδοκίες αφορούν στις σχέσεις ανάμεσα στα εμφανιζόμενα στοιχεία και στη συμβατότητα των ρόλων που θα τους αποδοθούν. Για παράδειγμα σε ένα

γεωμετρικό σχήμα δεν μπορεί να αποδοθούν σε δύο ευθύγραμμα τμήματα, αντίστοιχα, οι ρόλοι «ύψος - άξονας συμμετρίας» και «βάση», αν αυτά δεν είναι κάθετα. Διατυπώνουμε την υπόθεση πως η απόδοση ρόλου είναι θεμελιώδης για την γεωμετρική λειτουργία, καθώς σχετίζεται με τις προσδοκίες του ατόμου.

Ο λόγος για τον οποίο αναδεικνύεται η απόδοση ρόλου ως ιδιαίτερα σημαντικός παράγοντας στα πλαίσια της παρούσης έρευνας είναι πως οι προσδοκίες συνδέονται στενά με τα γνωστικά Σχήματα. Ο Bartlett, που εισάγει την έννοια του Σχήματος (1932), εντυπωσιάζεται από την έκταση στην οποία η κατανόηση και η μνήμη των ανθρώπων μορφοποιούνται από τις προσδοκίες τους (Eysenck & Keane, 1990, σ.275). Για τον Kellogg (1994), το Σχήμα είναι «ένα σύνολο συσκευασμένων από την αρχή (*pre packaged*) προσδοκιών και τρόπων ερμηνείας» (σ.19).

Προκειμένου να κατανοήσουμε την τριπλή σχέση: ρόλων – προσδοκιών – Σχήματος πρέπει να λάβουμε υπ' όψη τη γενικότητα των Σχημάτων. Είδαμε πως ένα Σχήμα περιγράφει μόνο γενικά χαρακτηριστικά, ενώ οι λεπτομέρειες θεωρούνται ως συγκεκριμένες τιμές των μεταβλητών του Σχήματος (Kellogg, 1994, σ.18). Ο τρόπος με τον οποίο μια έννοια μπορεί να δοθεί ως τιμή μιας μεταβλητής δεν είναι φυσικά αυθαίρετος. Οι Rumelhart και Ortony (1977) τον περιγράφουν θέτοντας τους εξής περιορισμούς:

- α) θα πρέπει να γίνεται έλεγχος αν ένα συγκεκριμένο αντικείμενο είναι κατάλληλο, ώστε να δοθεί ως τιμή σε μια μεταβλητή
- β) θα πρέπει να υπάρχουν αλληλεξαρτήσεις μεταξύ των αντικειμένων που δίνονται ως τιμές στις διάφορες μεταβλητές του ίδιου Σχήματος (Eysenck & Keane, 1990, σ.284).

Για παράδειγμα, το γνωστικό Σχήμα που έχουμε για ένα δωμάτιο περιλαμβάνει γενικά τον εξοπλισμό, το μέγεθός του, τα αντικείμενα που συναντάμε μέσα κλπ. Αυτές οι μεταβλητές, για την περίπτωση της «κουζίνας», παίρνουν τιμές όπως:

εξοπλισμός: ψυγείο, φούρνος, τραπέζι...

αντικείμενα: πιάτα, κατσαρόλες, καφετιέρα....

Οι μεταβλητές θα παίρνουν άλλες τιμές σε διαφορετικά δωμάτια. Αυτό που λένε οι Rumelhart και Ortony είναι πως, αν στη μεταβλητή αντικείμενα μπορεί να δοθεί η τιμή «καφετιέρα», τότε αυτόματα, η τιμή «τραπέζι» που είχε δοθεί στον εξοπλισμό θα γίνει «τραπέζι κουζίνας».

Τέτοιου είδους περιορισμοί είναι που δημιουργούν τις προσδοκίες του ατόμου. Στην συγκεκριμένη περίπτωση των ΣΙΤ που εξετάζουμε, αν μία γωνία ενός ισοσκελούς είναι ορθή, τότε αποκλείεται να είναι μία από τις ίσες γωνίες, ή αν ένα ύψος του καταλήγει σε μία από τις ίσες πλευρές, αναμένουμε να μην περνά από το μέσο της. Οι προσδοκίες αποδίδονται, σε μεγάλο μέρος, από την εικόνα – πρότυπο και συνδέονται με τους ρόλους των στοιχείων της.

Στα επόμενα θα επιχειρήσουμε να διερευνήσουμε αυτή την τριπλή σχέση: ρόλων – προσδοκιών – ΣΙΤ. Συγκεκριμένα, θα διερευνήσουμε τον τρόπο με τον οποίο αποδίδονται οι ρόλοι στα στοιχεία ενός γεωμετρικού σχήματος. Ακόμα θα εξετάσουμε πώς η απόδοση ρόλων συνδέεται με τις προσδοκίες του ατόμου οι οποίες μπορεί να διευκολύνουν ή και να εμποδίζουν τη γεωμετρική λειτουργία του. Η μελέτη γίνεται σε δύο άξονες. Στον πρώτο μελετάται η θετική επίδραση των ρόλων, ενώ στο δεύτερο οι παράγοντες που δημιουργούν εμπόδια, σε σχέση με την αναγνώριση των στοιχείων του γεωμετρικού σχήματος και την απόδοση ρόλων.

Η διερεύνηση γίνεται με τη βοήθεια των ακόλουθων προβλημάτων:

1. Η ευεργετική επίδραση των ρόλων για την αναγνώριση και κατασκευή του ισοσκελούς μελετάται μέσα από το 2^ο πρόβλημα της 1^{ης} φάσης (2^α ερώτημα), και το 4^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης (δες υπόθεση 1^α). Συγκεκριμένα, με τα προβλήματα αυτά διερευνούμε το αν οι μαθητές αποδίδουν ρόλους στα στοιχεία του σχήματος που συνοδεύει το πρόβλημα (πλευρά και ύψος στο 2^ο πρόβλημα της 1^{ης} φάσης, και σημείο και κύκλος στο 4^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης). Επίσης διαπιστώνουμε κατά πόσον η απόδοση ρόλων τους βοηθά να κατανοήσουν το πρόβλημα, να ανασυνθέσουν όλη την εικόνα – πρότυπο, με τελικό αποτέλεσμα την κατασκευή του ζητούμενου ισοσκελούς τριγώνου.

Η επιλογή των δύο προβλημάτων γίνεται για να εξεταστεί η ίδια λειτουργία (:απόδοση ρόλου) σε δύο τελείως διαφορετικές περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση δίνονται δύο στοιχεία της εικόνας – πρότυπο (πλευρά, ύψος) στα οποία μπορεί να αποδοθεί απευθείας ρόλος, ενώ στη δεύτερη περίπτωση τα στοιχεία που δίνονται (σημείο, κύκλος) δεν παραπέμπουν σε κάποιους από τους ρόλους του ισοσκελούς. Η σύγκριση της λειτουργίας των μαθητών στα δύο προβλήματα αναμένουμε να δώσει πληροφορίες για τη σημασία του προτύπου και των ρόλων που υποβάλλει στην αναγνώριση των στοιχείων ενός δοθέντος γεωμετρικού σχήματος.

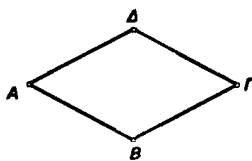
2. Στο 2^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης ζητείται από τους μαθητές να γράψουν τρία διαφορετικά κατασκευαστικά σενάρια για το ρόμβο. Εδώ η αναφορά στο ισοσκελές είναι έμμεση. Η επιλογή του ρόμβου εξυπηρετεί το στόχο 1^ο (διερευνά δηλαδή τη σημασία του προτύπου του ισοσκελούς για την αναγνώριση των στοιχείων ενός γεωμετρικού σχήματος), γιατί ο ρόμβος αποτελείται από δύο ίσα ισοσκελή τρίγωνα.



2^ο Πρόβλημα, 3^η φάση

Δίνεται ένας ρόμβος. Ο ρόμβος είναι ένα παραλληλόγραμμο με όλες τις πλευρές του ίσες. Γράψε τρία διαφορετικά κατασκευαστικά σενάρια ενός ρόμβου.

Ποια, από τις κατασκευές που περιγράφεις στα σενάριά σου, θεωρείς καλύτερη και γιατί;



Αρχικά μας ενδιαφέρει το αν ένας μαθητής μπορεί να αναγνωρίσει το ισοσκελές, ως δομικό στοιχείο του ρόμβου, και ακολούθως, το αν η αναγνώριση επεκτείνεται στα επιμέρους στοιχεία των δύο γεωμετρικών σχημάτων (π.χ. στις πλευρές). Με το συγκεκριμένο πρόβλημα θέλουμε να διερευνήσουμε το αν οι μαθητές μπορούν να ταυτίσουν τους αντίστοιχους ρόλους των δύο γεωμετρικών σχημάτων (ίσες πλευρές, ύψος – άξονας συμμετρίας) ώστε να δώσουν απλές οδηγίες κατασκευής του ρόμβου, αξιοποιώντας τις γνώσεις τους για το ισοσκελές.

Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις, ενδιαφέρει να δούμε αν η απόδοση ρόλων δημιουργεί ένα πλέγμα από προσδοκίες, σχετικά με τις σχέσεις ανάμεσα στα εμφανιζόμενα στοιχεία που συνδέονται με την εικόνα – πρότυπο και οδηγεί στην επίλυση του προβλήματος.

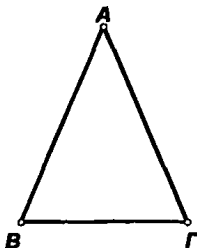
3. Στόχος του 3^{ου} προβλήματος της 1^{ης} φάσης είναι να μελετηθούν σε βάθος οι δυσκολίες που εμφανίζονται κατά την απόδοση ρόλων και οι λόγοι που τις προκαλούν.

3^ο Πρόβλημα, 1^η Φάση

«Στο επόμενο σχήμα δίνεται ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$).

3^α) Μπορείς να βρεις ένα σημείο K εσωτερικό του τριγώνου τέτοιο, ώστε το τρίγωνο $KB\Gamma$ που θα σχηματιστεί να είναι επίσης ισοσκελές;

3^β) Μπορείς να βρεις ένα σημείο Λ εσωτερικό του τριγώνου τέτοιο, ώστε το τρίγωνο ΛAB να είναι ισοσκελές;»



Συγκεκριμένα, δίνεται ως πλαίσιο ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και ζητείται, σε δύο διαφορετικές συνθήκες, η κατασκευή ενός άλλου ισοσκελούς μέσα σε αυτό. Σε κάθε περίπτωση δίνεται μία πλευρά του ζητουμένου ισοσκελούς, στο 3^α η πλευρά είναι οριζόντια, ενώ στο 3^β είναι πλάγια. Το πρόβλημα σχεδιάστηκε έτσι, ώστε να εξετάζει την κατασκευή του ισοσκελούς τριγώνου σε δύο διαφορετικές περιπτώσεις. Στην πρώτη (ερώτημα 3^α) το

ζητούμενο ισοσκελές έχει μεγάλη ομοιότητα με το δοθέν – πρότυπο ισοσκελές, ενώ στη δεύτερη (ερώτημα 3^β), δε συμβαίνει το ίδιο. Διερευνάται έτσι το τι ακριβώς σημαίνει ο «βαθμός ομοιότητας ενός ισοσκελούς με την εικόνα πρότυπο» και οι λόγοι για τους οποίους η μικρή ομοιότητα ενός σχήματος με την εικόνα – πρότυπο εμποδίζει την αναγνώριση των στοιχείων του και την απόδοση ρόλων σε αυτά, γεγονός που με τη σειρά του έχει αρνητική επίδραση στη λύση προβλήματος.

Υπόθεση 1^δ: η αναγνώριση και η χρήση του ισοσκελούς σχετίζονται με τις πρωταρχικές και δευτερεύουσες δομές του γεωμετρικού σχήματος

Η απόδοση ρόλου συνδέεται στενά με την κατανόηση της δομής του γεωμετρικού σχήματος¹⁹, δηλαδή με την ικανότητα διάκρισης των υπό σχημάτων, που είναι ενσωματωμένα σε ένα γεωμετρικό σχήμα, καθώς «η τεχνική της διαφοροποίησης των ενσωματωμένων σχημάτων αποτελεί καλό τρόπο για τη μελέτη της αντιληπτικής οργάνωσης» (Vurpillot, 1972, σ. 32).

Η διάκριση των υπό σχημάτων ως λειτουργία μπορεί να παρομοιασθεί με την ανακάλυψη μιας μορφής μέσα σε μία εικόνα – αίνιγμα, δραστηριότητα που ελέγχει τις ικανότητες του ατόμου για αναγνώριση. Στην εικόνα - αίνιγμα ζητείται να εντοπιστεί μία μορφή, που σχηματίζεται από τις γραμμές μιας σύνθετης εικόνας. Με μια πρώτη ματιά η ζητούμενη μορφή δε φαίνεται να υπάρχει ανάμεσα στις μονάδες που συγκροτούν την εικόνα, και αυτή είναι η δυσκολία. Για να βρεθεί πρέπει κανείς να αγνοήσει τα αντικείμενα που βλέπει αυθόρμητα και να θεωρήσει όλη την εικόνα σαν ένα σύνολο γραμμών. Η ανάλυση και ανασύνθεση αυτού του συνόλου θα τον βοηθήσει να αντιληφθεί το ζητούμενο.

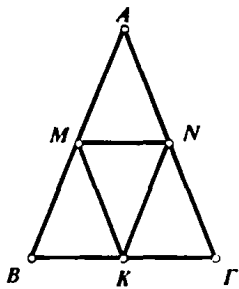
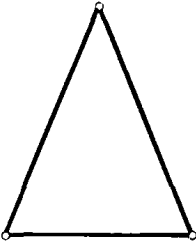
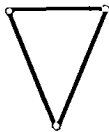
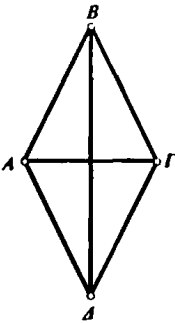
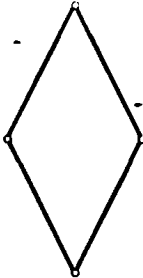
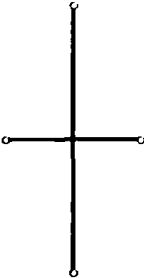
Κάτι ανάλογο συμβαίνει και στη Γεωμετρία. Με μία πρώτη ματιά, ένα γεωμετρικό σχήμα οργανώνεται σε ένα περιορισμένο αριθμό αντιληπτικών δομών που ονομάζονται «πρωταρχικές δομές» (Vurpillot, 1972, σ. 34). Οι πρωταρχικές δομές, σύμφωνα με τους Ψυχολόγους της Μορφής (gestalt theorists), καθορίζονται από τους νόμους της «καλής συνέχειας» (principle of good continuation)²⁰ και της «καλής μορφής» (principle of good form)²¹. Για πρακτικούς λόγους οι νόμοι μεταφράζονται σε συγκεκριμένες αρχές, με βάση τις οποίες μπορούμε να διακρίνουμε τις πρωταρχικές δομές στις οποίες οργανώνεται το κάθε γεωμετρικό σχήμα. Οι αρχές είναι πέντε²² (πίνακας 2.1).



Πίνακας 2.1
Αρχές για τη διάκριση των πρωταρχικών δομών

1. όλες οι γραμμές του γεωμετρικού σχήματος εμπλέκονται στην κατασκευή του περιγράμματος των πρωταρχικών δομών
2. καμία γραμμή ή μέρος γραμμής δεν μπορεί να ανήκει σε περισσότερες πρωταρχικές δομές από μία
3. κάθε γραμμή ανήκει ολόκληρη στο περίγραμμα μιας μόνο πρωταρχικής δομής
4. οι πρωταρχικές δομές είναι κατά προτίμηση συμμετρικές ή τουλάχιστον κανονικές, όσο το δυνατόν
5. ο αριθμός των πρωταρχικών δομών πρέπει να είναι ο ελάχιστος δυνατός
(Vurpillot, 1972, σ. 34 – 35).

Είναι προφανές ότι ο δάσκαλος των μαθηματικών δε μένει στις πρωταρχικές δομές, όμως του είναι πολύ χρήσιμο να μπορεί να τις αναγνωρίζει, ώστε να κατανοεί τι ακριβώς «βλέπουν» όσοι μαθητές του δεν μπορούν να κάνουν αναδόμηση του σχήματος και να λύσουν το πρόβλημα.

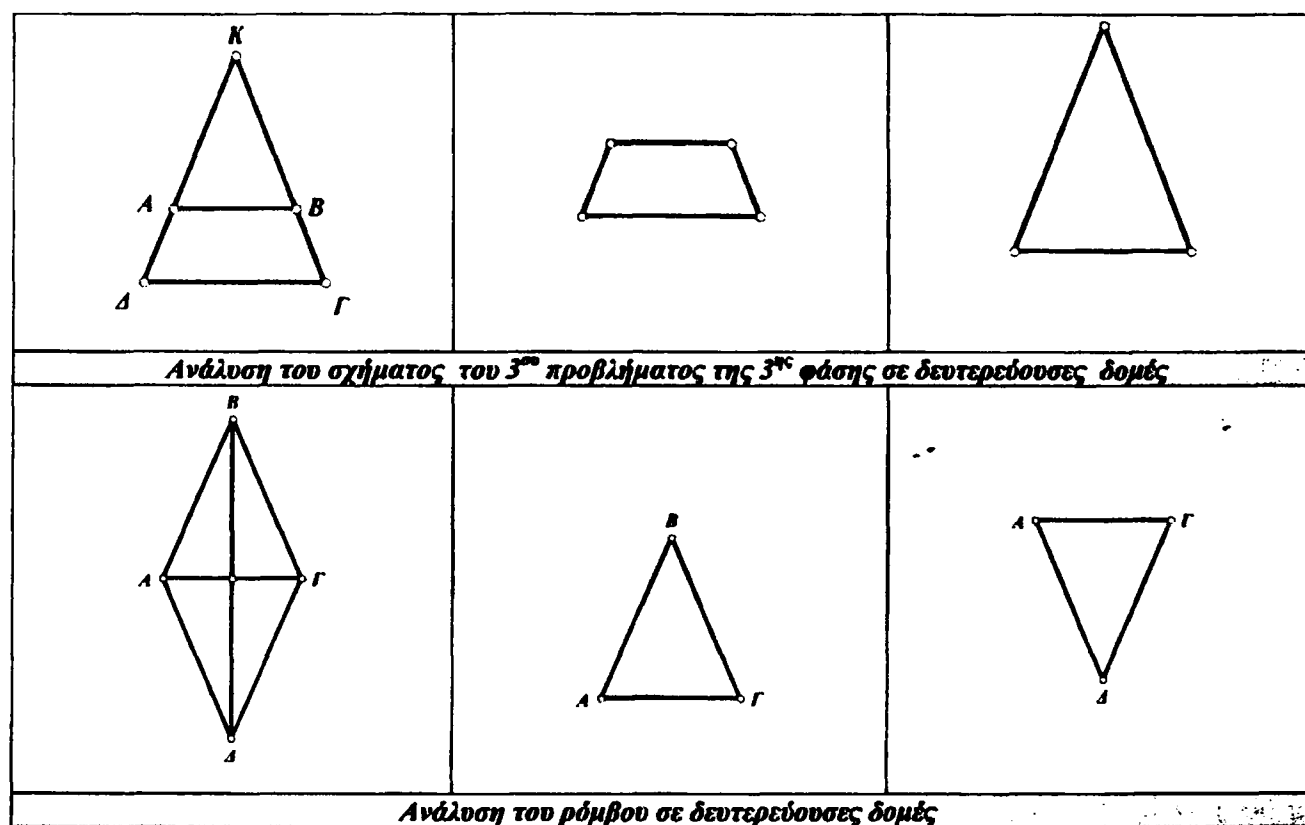
		
<i>Ανάλυση του σχήματος που συνοδεύει το 1^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης σε πρωταρχικές δομές</i>		
		
<i>Ανάλυση του ρόμβου σε πρωταρχικές δομές</i>		

Σχήμα 2.5 Ανάλυση σχημάτων σε πρωταρχικές δομές

Όπως ακριβώς συμβαίνει στην εικόνα – αίνιγμα, έτσι και για τη λύση ενός γεωμετρικού προβλήματος απαιτείται η υπέρβαση των πρωταρχικών δομών. Έρευνες σχετικά με την ικανότητα διάκρισης υπό σχημάτων μέσα σε σύνθετα γραμμικά σχήματα δείχνουν ότι «το παιδί²³ αυξάνει το ποσοστό των σωστών απαντήσεων σε προβλήματα σχετικά με ενσωματωμένα σχήματα, καθώς απελευθερώνεται προοδευτικά από την επιρροή των πρωταρχικών δομών» (Vurpillot, 1972, σ. 37).

Η διάκριση όλων των υπό σχημάτων τα οποία βρίσκονται ενσωματωμένα σε ένα γεωμετρικό σχήμα, συνεπάγεται την ενεργοποίηση κάποιων επιπλέον αντιληπτικών δομών, οι οποίες

ονομάζονται «δευτερεύουσες δομές». Η διαφορά τους από τις πρωταρχικές δομές είναι πως οι δεύτερες παραβιάζουν μία ή περισσότερες από τις πέντε αρχές που προαναφέρθηκαν (πίνακας 2.1), και κυρίως, τον περιορισμό μία γραμμή να ανήκει σε μία μόνο δομή, ολόκληρη. Συγκεκριμένα, μια δευτερεύουσα δομή αποτελείται από γραμμές ή τμήματα γραμμών που ανήκουν σε πρωταρχικές δομές. Το ίδιο τμήμα ή γραμμή μπορεί να ανήκει ταυτόχρονα σε μία πρωταρχική και μία ή περισσότερες δευτερεύουσες δομές (Vurpillot, 1972, σ. 35).



Σχήμα 2.6 Ανάλυση σχημάτων σε δευτερεύουσες δομές

Η αντιληπτική οργάνωση των σχημάτων σε πρωταρχικές και δευτερεύουσες δομές μας απασχολεί στην παρούσα έρευνα στο βαθμό που επηρεάζει την αναγνώριση, δηλαδή την απόδοση ρόλου στα στοιχεία του γεωμετρικού σχήματος. Είναι φανερό πως οι αρχές της αντιληπτικής οργάνωσης επηρεάζουν την αναγνώριση. Ισχυριζόμαστε δηλαδή πως οι αρχές που διέπουν την οργάνωση του γεωμετρικού σχήματος σε πρωταρχικές δομές επιδρούν με τη σειρά τους στην απόδοση ρόλου στα στοιχεία του.

Εφόσον αυτό που βλέπουμε, με μια πρώτη ματιά, είναι οι πρωταρχικές δομές, τότε η αυθόρμητη αντίδραση είναι:

- οι αρχικοί ρόλοι που δίνουμε μόλις βλέπουμε ένα σχήμα, αντιστοιχούν στα στοιχεία του που ανήκουν στις πρωταρχικές δομές

- επίσης σύμφωνα με τις αρχές των πρωταρχικών δομών, ρόλος αποδίδεται σε ολόκληρο το στοιχείο και όχι σε μέρος του, ενώ κάθε στοιχείο έχει μόνο ένα ρόλο.

Η μελέτη της σχέσης που υπάρχει ανάμεσα στις πρωταρχικές και δευτερεύουσες δομές και στην απόδοση ρόλου στα στοιχεία του γεωμετρικού σχήματος γίνεται με τη βοήθεια των εξής προβλημάτων:

1. με το 3ο πρόβλημα της 1ης φάσης (υπόθεση 1')

Στην υπόθεση 1' το πρόβλημα χρησιμοποιήθηκε για να αναλυθούν οι δυσκολίες που προκύπτουν σχετικά με την αναγνώριση και την απόδοση ρόλων στα στοιχεία του γεωμετρικού σχήματος, ανάλογα με το βαθμό ομοιότητάς του με την εικόνα - πρότυπο. Εδώ, χρησιμοποιείται για να εξεταστεί το θεμελιώδες ζήτημα που τίθεται για την αναγνώριση, αυτό των στοιχείων με διπλό ρόλο. Συγκεκριμένα το πρόβλημα σχεδιάστηκε έτσι ώστε στο ερώτημα 3^ο να εμφανίζονται στοιχεία που διατηρούν τον ίδιο ρόλο στις δύο δευτερεύουσες δομές (υπό σχήματα) στις οποίες ανήκουν, ενώ στο ερώτημα 3^ο να εμφανίζονται στοιχεία που έχουν διαφορετικό ρόλο στην κάθε δευτερεύουσα δομή. Το ζητούμενο είναι να διαπιστωθούν οι δυσκολίες που παρουσιάζει κάθε περίπτωση και πού οφείλονται.

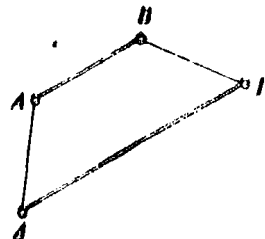
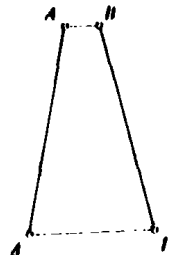
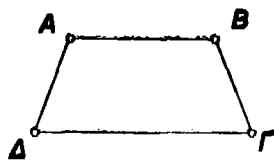
2. Το 3^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης σχεδιάστηκε για να ερευνηθούν οι δυσκολίες που παρουσιάζονται στην περίπτωση στοιχείων που έχουν διαφορετικό ρόλο από το ρόλο ενός μέρους τους.

3^ο Πρόβλημα, 3^η φάση

Ξεκινώντας από το ισοσκελές τραπέζιο $ABΓΔ$, φτιάξε όσα ισοσκελή τρίγωνα μπορείς.

Σε κάθε περίπτωση γράψε το κατασκευαστικό σενάριο που ακολούθησες και εξήγησε γιατί το τρίγωνο που εφάρταξες είναι ισοσκελές.

Ποια από τις κατασκευές που περιγράφεις στα σενάριά σου θεωρείς καλύτερη και γιατί;



Συγκεκριμένα με αφετηρία ένα ισοσκελές τραπέζιο ζητείται να κατασκευαστούν διάφορα ισοσκελή τρίγωνα. Το ισοσκελές τραπέζιο παρουσιάζει το πλεονέκτημα να έχει κοινούς ρόλους με το ισοσκελές τρίγωνο. Δηλαδή δύο ίσες πλευρές / γωνίες, ή βάση και τα ερωτήματα που μας απασχολούν είναι αν οι μαθητές θα διακρίνουν και θα αξιοποιήσουν τους κοινούς ρόλους για

την κατασκευή του ισοσκελούς τριγώνου και κατά πόσον αυτό θα τους βοηθήσει ή θα θέσει εμπόδια.

Υπόθεση 1^η: η αναγνώριση και η χρήση του ισοσκελούς σχετίζονται με την αλλαγή διάστασης (των σχηματικών μονάδων)

Λέγοντας αλλαγή διάστασης εννοούμε μια αλλαγή στον τρόπο που βλέπουμε ένα γεωμετρικό σχήμα. Αυτή είναι προφανής στην περίπτωση της γεωμετρίας του χώρου, όπου από την αισθητο – κινητική αντίληψη ενός τρισδιάστατου αντικειμένου (3D) περνάμε στην επίπεδη τομή του (2D). Πρόκειται δηλαδή για ένα διαφορετικό τρόπο με τον οποίο μπορούμε να κοιτάξουμε το σχήμα και πώς αυτό είναι οργανωμένο. Αυτός ο τρόπος θέασης, στην περίπτωση της Γεωμετρίας του επιπέδου, γίνεται με μια εσωτερική κίνηση από την επικρατούσα επίπεδη μορφή (2D) στα στοιχεία που την αποτελούν γραμμές ή σημεία (1D ή 0D).

Σχετικά με την αλλαγή διάστασης μπορούμε να πούμε ότι χαρακτηρίζει το μαθηματικό τρόπο με τον οποίο μπορούμε να παρατηρήσουμε μια μορφή ή ένα πιο σύνθετο γεωμετρικό σχήμα (Duval, 1998, σ.40) και αποτελεί βασική προϋπόθεση για να διαδραματίσει η νοερή απεικόνιση τον ευρετικό της ρόλο (Duval, 1998, σ.44). Ο λόγος είναι πως η αλλαγή διάστασης συνδέεται με τη λεκτική κατανόηση του σχήματος (βλέπε 1.3.1), με τη διάκριση των υπό σχημάτων του (Duval, 1998, σ.41) και, κατά συνέπεια, με την απόδοση ρόλου στα στοιχεία τους.

Η διερεύνηση της διάστασης στην οποία οι μαθητές αναγνωρίζουν ή χρησιμοποιούν το ισοσκελές, στην παρούσα έρευνα, γίνεται με παρατήρηση συγκεκριμένων λειτουργιών των μαθητών, και ειδικότερα του τρόπου με τον οποίο κατασκευάζουν ή στρέφουν το ισοσκελές τρίγωνο και του τρόπου με τον οποίο συγκρίνουν δύο ισοσκελή. Έτσι η διερεύνηση της σχέσης που υπάρχει ανάμεσα στην αλλαγή διάστασης και στην αναγνώριση / χρήση του ισοσκελούς γίνεται ουσιαστικά μέσα από όλα τα προβλήματα. Ιδιαίτερη αναφορά θα γίνει στα ακόλουθα προβλήματα:

1. Με το 1^ο πρόβλημα της 1^{ης} φάσης (υπόθεση 1^η) και ειδικότερα με το ζητούμενο να κατασκευαστούν διαφορετικά ισοσκελή τρίγωνα και να αιτιολογηθεί η διαφορά τους από το ΑΒΓ, θέτουμε ως στόχο όχι μόνο να διαπιστώσουμε τη δυνατότητα απομάκρυνσης του μαθητή από την πρότυπη εικόνα του ισοσκελούς, αλλά επίσης να διερευνήσουμε τον τρόπο με τον οποίο το παιδί λειτουργεί γι αυτό το σκοπό. Οι δυνατότητες του μαθητή και οι τεχνικές που χρησιμοποιεί για να μεταβάλει τη μορφή του ισοσκελούς αντανακλούν τον τρόπο που συνήθως την αντιμετωπίζει, δηλαδή, σε 1D ή 2D.

2. Με το 1^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης, το οποίο αναλύεται στην ενότητα 2.7.2

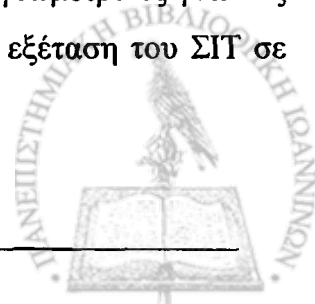
2.7.2 Υποθέσεις που αφορούν στην εξέταση του ΣΙΤ σε συνολικό επίπεδο

Η ολοκλήρωση των γνώσεων σε μια ενιαία δομή περιλαμβάνει αφενός τη σύνδεση των απομονωμένων πληροφοριών σε σύνολα με νόημα, τα γνωστικά Σχήματα, και αφετέρου τη σύνδεση των Σχημάτων μεταξύ τους. Κατά τη διαδικασία αυτή τα Σχήματα εξελίσσονται, διασυνδέονται και παράλληλα, εμφανίζουν μια τάση ενσωμάτωσης μεταξύ τους που οδηγεί σε γενικότερα και ειδικότερα Σχήματα (Fischbein & Grossman, 1997, σ.30) με τελικό στόχο τη συνολική οργάνωση των γνώσεων. Η οργάνωση των γνώσεων μπορεί να διαφέρει από άτομο σε άτομο και πάντως φαίνεται πως παρουσιάζει μία εξέλιξη από τον αρχάριο στον ειδικό (Savelsbergh, 1998).

Μετά την ανάλυση των υποθέσεων που εξετάζουν το ΣΙΤ σε τοπικό επίπεδο (2.7.1), στην ενότητα αυτή στρεφόμαστε προς τις υποθέσεις που αφορούν στο συνολικό επίπεδο οργάνωσης των Σχημάτων. Συγκεκριμένα λόγω της ευρύτητας του θέματος, περιοριζόμαστε στην εξέταση των συνδέσεων που αναπτύσσονται ανάμεσα στο ΣΙΤ και σε άλλα γνωστικά Σχήματα. Η διερεύνηση μελετά τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να συνδεθούν δύο γνωστικά Σχήματα, τους διάφορους τύπους συνδέσεων και το αν αυτοί συσχετίζονται / αντιστοιχούν με διαφορετικά επίπεδα εξέλιξης του ΣΙΤ. Για να προσεγγίσουμε το σχηματισμό μιας συνολικότερης δομής Σχημάτων (ανάμεσα στο ΣΙΤ και σε άλλα Σχήματα που συνδέονται με αυτό), μελετάμε παράγοντες όπως:

- τον τρόπο με τον οποίο βαθμιαία συνενώνονται αποσπασματικές αναπαραστάσεις, στις οποίες διάφορα μικρά κομμάτια πληροφοριών συνδέονται χαλαρά, σε μία συνεπή δομή, που περιλαμβάνει εκτός από έννοιες - αντικείμενα, και τις σχέσεις ανάμεσά τους (ιδιότητες).
- την ικανότητα του μαθητή να μετασχηματίζει τις αναπαραστάσεις του από ένα σημειωτικό σύστημα αναπαράστασης σε άλλο
- την ικανότητά του να εστιάζει στα δομικά και όχι στα επιφανειακά χαρακτηριστικά των πληροφοριών ή
- την ικανότητά του να αντιμετωπίζει συνολικά τις πληροφορίες, με χρήση καθολικών ιδιοτήτων, όπως συμμετρίες ή διατήρηση αρχών, σε αντίθεση με τοπικές ιδιότητες (Savelsbergh, 1998).

Στα πλαίσια αυτά επιχειρούμε να εντοπίσουμε τους τρόπους με τους οποίους οι μαθητές συνδέουν τις πληροφορίες που δίνει το πρόβλημα με το ΣΙΤ²⁴ και με τις γεωμετρικές γνώσεις που χρειάζεται να ανακαλέσουν για τη λύση ενός προβλήματος. Με την εξέταση του ΣΙΤ σε συνολικό επίπεδο ελέγχουμε τις δύο ακόλουθες ερευνητικές υποθέσεις:



2^η υπόθεση: η σύνδεση του ΣΙΤ με άλλα γνωστικά Σχήματα γίνεται μέσα από κοινά στοιχεία των αντίστοιχων γεωμετρικών σχημάτων

3^η υπόθεση: η συμμετρία παίζει αποφασιστικό ρόλο στη σύνδεση του ισοσκελούς τριγώνου με άλλα γεωμετρικά σχήματα και κατ' επέκταση, στη σύνδεση του ΣΙΤ με τα αντίστοιχα γνωστικά Σχήματα.

Η γενική κατεύθυνση την οποία ακολουθούμε για να μελετήσουμε τις συνδέσεις είναι η ακόλουθη. Επιλέγουμε και δίνουμε στους μαθητές ως πλαίσιο το γνωστικό Σχήμα που δημιουργείται με αφορμή μια συγκεκριμένη σχηματική έννοια (ρόμβος, ισοσκελές τραπέζιο κλπ) και ανιχνεύουμε τη δυνατότητα ενεργοποίησης του γνωστικού Σχήματος του ισοσκελούς τριγώνου (ΣΙΤ) σε αυτό το πλαίσιο. Έτσι εξετάζουμε το αν οι μαθητές εγκαθιστούν συνδέσεις ανάμεσα στο δοθέν γνωστικό Σχήμα και στο ΣΙΤ, με ποιο τρόπο το κάνουν, και τι είδους είναι οι συνδέσεις.

Οι συνδέσεις μελετώνται κατά την 3^η φάση της έρευνας, με τη βοήθεια τεσσάρων προβλημάτων. Κάθε πρόβλημα δίνει ως πλαίσιο ένα γεωμετρικό σχήμα (παραλληλόγραμμο, ρόμβος, ισοσκελές τραπέζιο και κύκλος αντίστοιχα) και ζητά την αναγνώριση ή κατασκευή ενός ισοσκελούς τριγώνου μέσα σε αυτό το πλαίσιο. Έτσι διερευνάται η δυνατότητα και ο βαθμός σύνδεσης των αντίστοιχων γνωστικών Σχημάτων.

Ένας δείκτης του βαθμού σύνδεσης των δύο Σχημάτων είναι η δυνατότητα του μαθητή να αξιοποιεί τα στοιχεία και τις ιδιότητες του πλαισίου, που δίνει το πρόβλημα, και αποτελούν στοιχεία του δοθέντος Σχήματος (ενώ το άλλο είναι το ΣΙΤ). Ακόμα ο τρόπος με τον οποίο ο μαθητής συσχετίζει στοιχεία που βρίσκονται αντίστοιχα στα δύο γεωμετρικά σχήματα μας οδηγεί στην ανίχνευση του μηχανισμού δημιουργίας των συνδέσεων. Η εγκυρότητα και αξιοπιστία της έρευνας υποστηρίζονται από το γεγονός ότι κάθε υπόθεση ελέγχεται από περισσότερα του ενός προβλήματα.

Στόχος μας είναι να οδηγηθούν οι μαθητές σε συνδέσεις γνωστικών Σχημάτων, μέσα από διαφορετικές δραστηριότητες και ποικίλα ερεθίσματα, ώστε να αποκαλυφθούν περισσότερες όψεις της υπό εξέταση λειτουργίας (πίνακας 2.2). Συγκεκριμένα,

- στο 1^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης δίνεται ένα γεωμετρικό σχήμα που περιλαμβάνει, ταυτόχρονα ισοσκελή τρίγωνα και παραλληλόγραμμο. Δεν απαιτείται κανενός είδους παρέμβαση στο σχήμα. Απλά παρακολουθούμε τις ικανότητες του μαθητή για οπτική οργάνωση και αναδιοργάνωση του σχήματος, με στόχο την αποκάλυψη των σχέσεων ανάμεσα

στο ισοσκελές και στο παραλληλόγραμμο (παραλληλόγραμμο ως μέρος του ισοσκελούς και ισοσκελές ως μέρος του παραλληλογράμμου).

- στο 2^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης, ζητείται από το μαθητή να γράψει τρία σενάρια²⁵ κατασκευής ενός ρόμβου. Το ισοσκελές τρίγωνο δεν αναφέρεται στην εκφώνηση του προβλήματος, αλλά αναμένουμε να εμφανιστεί ως δομικό στοιχείο κατά την κατασκευή του ρόμβου (γεωμετρικό σχήμα) ή / και κατά την περιγραφή των οδηγιών (λεκτικό σύστημα αναπαράστασης).
- στο 3^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης δίνεται ως πλαίσιο το ισοσκελές τραπέζιο και ζητείται, ξεκινώντας από αυτό, να δημιουργηθούν ισοσκελή τρίγωνα. Σύμφωνα με την αρχική μας εκτίμηση, εφόσον το ισοσκελές τραπέζιο παρουσιάζει πολλές ομοιότητες με το ισοσκελές τρίγωνο το γνωστικό Σχήμα που δημιουργείται γύρω από το ισοσκελές τραπέζιο θα είναι ευκολότερο να συνδεθεί με το ΣΙΤ.
- στο 4^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης δίνεται ως πλαίσιο ο κύκλος και ζητάμε να δημιουργηθεί ένα ισοσκελές τρίγωνο με αφορμή αυτόν. Τώρα οι συνθήκες είναι εντελώς αντίθετες, σε σχέση με το 3^ο πρόβλημα, γιατί ο κύκλος δεν παρουσιάζει ομοιότητες με το ισοσκελές τρίγωνο. Θεωρούμε ότι το γνωστικό Σχήμα του κύκλου είναι πολύ απομακρυσμένο από το ΣΙΤ, οπότε αναμένουμε δυσκολίες στη σύνδεση.

Προκειμένου να καταλήξουμε σε ερμηνείες για τις ενέργειες των μαθητών οι οποίες μπορούν να ελεγχθούν, υιοθετούμε (όπως γίνεται και στην 1^η / 2^η φάση) την ακόλουθη τακτική. Σε κάθε πρόβλημα μεταβάλλουμε τις συνθήκες στις οποίες πραγματοποιείται μία ενέργεια και διαπιστώνουμε αν μεταβάλλονται αντίστοιχα ή όχι οι απαντήσεις. Αυτό επιτυγχάνεται με την απαίτηση των προβλημάτων είτε να γραφούν διαφορετικά σενάρια ή να κατασκευαστούν διαφορετικά ισοσκελή ξεκινώντας από το δοθέν γεωμετρικό σχήμα. Τα προβλήματα της 3^{ης} φάσης είναι σχεδιασμένα έτσι, ώστε να δίνουν τη δυνατότητα να ανιχνεύεται ο τρόπος σύνδεσης των αντίστοιχων γνωστικών Σχημάτων, σε διαφορετικές συνθήκες (για την κάθε περίπτωση).

Η διαφορά των δύο πρώτων προβλημάτων είναι πως, ενώ στο 1^ο γίνεται ευθεία αναφορά σε λεκτική και σχηματική μορφή και στα δύο γεωμετρικά σχήματα που θέλουμε να συσχετιστούν (ισοσκελές τρίγωνο – παραλληλόγραμμο), στο 2^ο γίνεται αναφορά μόνο στο ένα (ρόμβο), ενώ δίνεται επιπλέον και ο ορισμός του. Επίσης το κάθε πρόβλημα κινητοποιεί διαφορετικά συστήματα αναπαράστασης. Συγκεκριμένα στο 1^ο απευθυνόμαστε μόνο σε αντιληπτικές διαδικασίες (εικονικό και επεξεργασίες του), ενώ στο 2^ο μελετάμε πώς συνδέονται τα δύο γνωστικά Σχήματα, είτε μέσα από τη διαδικασία κατασκευής των γεωμετρικών σχημάτων, είτε

μέσα από την ανάλυση των οδηγιών κατασκευής του ρόμβου που δίνουν οι μαθητές (εικονικό σύστημα αναπαράστασης, φυσική γλώσσα και μετατροπές ανάμεσά τους).

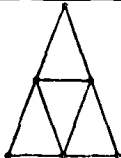
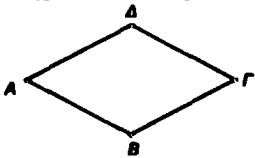
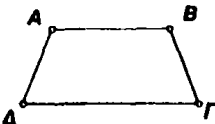
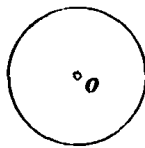
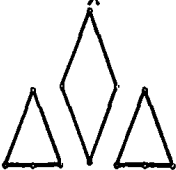
Σχετικά με το 3^ο και 4^ο πρόβλημα, αυτά έχουν διαμορφωθεί με μία κοινή λογική και στόχο να διερευνήσουν τη σύνδεση των γνωστικών Σχημάτων (που δίνονται) σε δύο οριακά αντίθετες περιπτώσεις. Οι αρχικές μας αντιλήψεις, σχετικά με την ευκολία / δυσκολία συσχετισμού των αντίστοιχων γνωστικών Σχημάτων ελέγχονται επίσης κατά την έρευνα, ως προς την εγκυρότητά τους.

Τέλος μέσα από όλα τα προβλήματα ερευνάται ο τρόπος σύνδεσης, δηλαδή ποιοι είναι οι παράγοντες που οδηγούν στο συσχετισμό δύο διαφορετικών γνωστικών Σχημάτων προς όφελος του γεωμετρικού συλλογισμού. Στον πίνακα 2.2, που ακολουθεί παρουσιάζονται και συγκρίνονται τα προβλήματα της 3^{ης} φάσης.



Πίνακας 2.2

Παρουσίαση και σύγκριση των προβλημάτων που χρησιμοποιήθηκαν στην 3^η φάση

1 ^ο πρόβλημα	2 ^ο πρόβλημα	3 ^ο πρόβλημα	4 ^ο πρόβλημα
			
Δίνεται ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και M, N, K τα μέσα των πλευρών του. α) πόσα παραλληλόγραμμα βλέπεις; Ονόμασέ τα. β) υπάρχουν ρόμβοι στο σχήμα; Ποιοι; β) μπορείς να συγκρίνεις τα εμβαδά των τριγώνων: AMN και $AB\Gamma$ (δίδως να τα υπολογίσεις). Δικαιολόγησε την απάντησή σου.	Δίνεται ένας ρόμβος. Ο ρόμβος είναι ένα παραλληλόγραμμο με όλες τις πλευρές του ίσες. Γράψε τρία διαφορετικά κατασκευαστικά σενάρια ενός ρόμβου. Ποια από τις κατασκευές που περιγράφεις στα σενάριά σου θεωρείς καλύτερη και γιατί;	Ξεκινώντας από το ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$, φτιάξε ένα ισοσκελές τρίγωνο	Δίνεται κύκλος κέντρου O και σημείο Σ. Φτιάξε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΣAB, όπου τα A και B είναι σημεία του κύκλου.
Συγκρίσεις			
Δίνονται και τα δύο γεωμετρικά σχήματα: ισοσκελές και παραλληλόγραμμο Απαιτείται οπτική αναδιοργάνωση του δοθέντος σχήματος, όπως π.χ. 	Δίνεται ο ρόμβος και δεν αναφέρεται το ισοσκελές Απαιτείται γεωμετρική κατασκευή, μετατροπή των ενεργειών σε φυσική και γραπτή γλώσσα (σενάρια) και σύγκριση των σεναρίων σύνδεση με το ΣΙΤ προαιρετική	Δίνονται και τα δύο γεωμετρικά σχήματα: ισοσκελές τραπέζιο και ισοσκελές τρίγωνο Ξεκινώντας από ένα «κοντινό» πλαίσιο απαιτείται συμπλήρωση του δοθέντος σχήματος (:επεξεργασία), μετατροπή των ενεργειών σε φυσική και γραπτή γλώσσα (σενάρια), και σύγκριση των σεναρίων.	Δίνονται και τα δύο γεωμετρικά σχήματα: κύκλος και ισοσκελές τρίγωνο Ξεκινώντας από ένα «απομακρυσμένο» πλαίσιο απαιτείται, συμπλήρωση του δοθέντος σχήματος (:επεξεργασία), και μετατροπή των ενεργειών σε φυσική γλώσσα



Πίνακας 2.3
Οι υποθέσεις και τα προβλήματα που χρησιμοποιούνται
για τον έλεγχο κάθε υπόθεσης της έρευνας

Φάση	πρόβλημα	Δομική εξέταση του ΣΙΤ					
		Τοπική					Συνολική
		Υπόθεση					
		1 ^α	1 ^β	1 ^γ	1 ^δ	1 ^ε	2 και 3
1 ^η / 2 ^η	1	✓				✓	
1 ^η / 2 ^η	2	✓	✓	✓			
1 ^η / 2 ^η	3			✓	✓		
3 ^η	1					✓	✓
3 ^η	2			✓			✓
3 ^η	3						✓
3 ^η	4	✓	✓	✓	✓		✓

ΣΧΟΛΙΑ 2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

¹ Ως συγκεκριμένο γνωστικό Σχήμα που δημιουργείται γύρω από μία σχηματική έννοια είναι στενά δεμένο με το περιεχόμενο της έννοιας

² Λέγοντας αλλαγή διάστασης εννοούμε μια αλλαγή στον τρόπο που βλέπουμε ένα γεωμετρικό σχήμα και τη δομή του (η ανάλυση γίνεται στην 2.7.1).

³ ο Υίν διακρίνει, συνολικά έξι τύπους «μελέτης περίπτωσης» που ορίζονται ως προς δύο άξονες:

- τον αριθμό των περιπτώσεων (μία ή περισσότερες) και
- το σκοπό της έρευνας (διερευνητική, περιγραφική ή επεξηγηματική)

⁴ που χαρακτηρίζεται ως ισοδύναμη της δειγματοληψίας κατά στρώματα

⁵ Αν, για παράδειγμα, οι ερευνητές ενδιαφέρονται για τη φοίτηση στα ελληνικά σχολεία αλλοδαπών μαθητών θα πρέπει, σύμφωνα με την ποσοστιαία δειγματοληψία, τα άτομα που θα συμπεριλάβουν στο δείγμα τους, από κάθε εθνική ομάδα, να είναι ανάλογα με το συνολικό πληθυσμό της που βρίσκεται στην Ελλάδα.

⁶ Σε μια κατά διαστάσεις δειγματοληψία για την έρευνα της σημείωσης 4, μπορεί οι ερευνητές να θελήσουν να διακρίνουν μέσα σε κάθε εθνική ομάδα παράγοντες όπως το: αν οι γονείς των αλλοδαπών μαθητών έχουν μόνιμη εργασία ή όχι, πόσα χρόνια ζουν στην Ελλάδα, αν οι γονείς των μαθητών μιλούν / γράφουν την ελληνική γλώσσα κλπ.

⁷ Ο αριθμός είναι αρκετά μεγάλος, προκειμένου για ποιοτική έρευνα, όμως αποφασίστηκε να ξεκινήσει η έρευνα με ικανό αριθμό μαθητών, ώστε να διασφαλιστεί ικανοποιητικό δείγμα μέχρι τέλους. Δηλαδή, να μη δημιουργηθεί πρόβλημα στην πορεία, σε περίπτωση που, κάποιος μαθητής δεν επιθυμούσε να συνεχίσει τη συμμετοχή του στην έρευνα ή άλλαζε σχολείο. Σε αντίθετη περίπτωση (επιλογή αρχικά μικρού αριθμού μαθητών), θα έπρεπε να μεταφερθεί η εξέταση των υπολοίπων μαθητών στην επόμενη χρονιά. Παρά τις αρχικές ανησυχίες, όλοι οι μαθητές που ξεκίνησαν, ολοκλήρωσαν την έρευνα μέχρι τέλους.

⁸ Για παράδειγμα, κατάληψη του σχολείου και απώλεια μαθημάτων. Οι ανησυχίες μας επιβεβαιώθηκαν εν μέρει, χωρίς όμως να προκαλέσουν τελικά πρόβλημα στην έρευνα. Σε ένα από τα σχολεία της έρευνας παρουσιάστηκε πρόβλημα στον καθηγητή των Μαθηματικών, ο οποίος αναγκάστηκε να απουσιάσει για μεγάλο χρονικό διάστημα, με αποτέλεσμα να ολοκληρώσει πολύ αργά την ύλη. Σαν συνέπεια, οι συνεδρίες με τους μαθητές του ολοκληρώθηκαν με δυσκολίες μετά το Πάσχα, λίγο πριν κλείσει το σχολείο.

⁹ Πρόκειται για το 2^ο και το 4^ο Ενιαίο Λύκειο Αλίμου, το 1^ο Ε. Λύκειο Ελληνικού και το 2^ο Ε. Λύκειο Αργυρούπολης

¹⁰ Τα χαρακτηριστικά αναδείχθηκαν κατά τη φάση της προέρευνας και χρησιμοποιούνται για την επιλογή αντιπροσωπευτικού δείγματος

¹¹ Για παράδειγμα, αν στους τριάντα μαθητές ενός τμήματος οι έξι χρησιμοποιούσαν τη μεσοκάθετο για την κατασκευή του ισοσκελούς τριγώνου, στο δείγμα (5 άτομα) θα πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον ένας μαθητής από αυτούς.

¹² Τα διαλείμματα με το κτύπημα του κουδουνιού και η εναλλαγή των μαθημάτων.

¹³ Αν χρησιμοποιούσαμε στην έρευνα προβλήματα που ζητούν απόδειξη, όπως αυτά που περιέχονται στο εγχειρίδιο της Γεωμετρίας, θα επαναλαμβανόταν η εικόνα που αντιμετωπίζουν οι μαθηματικοί καθημερινά στην

τάξη τους, δηλαδή, κάποιοι μαθητές δεν θα έδιναν απάντηση σε μερικά προβλήματα και οι αδύνατοι, ίσως, σε κανένα.

¹⁴ Είναι προφανές ότι, κατά τη διάρκεια της φοίτησής τους στην Α' Λυκείου, οι μαθητές εμπλουτίζουν τις γνώσεις τους – σε μικρότερο ή μεγαλύτερο βαθμό - με νέες, περισσότερες πληροφορίες για το ισοσκελές τρίγωνο και τα άλλα σχήματα που προαναφέραμε.

¹⁵ Τα πρότυπα διευκολύνουν τη μηχανική μάθηση, όπως για παράδειγμα, στην περίπτωση των ιδιοτήτων των πράξεων των συνόλων, οδηγώντας συχνά σε λανθασμένες γενικεύσεις. Μια τέτοια λανθασμένη γενίκευση που συναντάται συχνά είναι η περίπτωση της πρότυπης ιδιότητας $(\alpha\beta)^\gamma = \alpha^\gamma \cdot \beta^\gamma$ ή $(\alpha\beta)^\gamma = \alpha^\gamma : \beta^\gamma$ που μεταφέρεται εσφαλμένα και στην πρόσθεση.

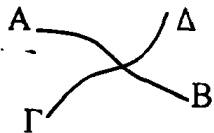
¹⁶ Εξαιτίας του ότι έχει συναντήσει δύο φορές αποσπασματικά την έννοια, ανάμεσα σε κεφάλαια Άλγεβρας, και δεν πληρούνται οι προϋποθέσεις που θέτει ο Vygotsky.

¹⁷ Σε έρευνα που έγινε στο σύνολο των Γάλλων μαθητών που τελείωναν το Δημοτικό, σε ένα δείγμα 2604 μαθητών το Σεπτέμβριο του 1997, μόνο το 9% έδωσε τη σωστή, μαθηματικά, απάντηση, ενώ σε ένα δείγμα 2590 μαθητών το Σεπτέμβριο του 1998, οι μαθηματικά σωστές απαντήσεις ήταν το 22,2%.

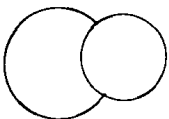
¹⁸ Σε όλες τις λειτουργίες της, όπως θα δούμε αναλυτικά στη λειτουργική ανάλυση των ευρημάτων.

¹⁹ Η σημασία της για τη λειτουργική κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος, αναλύεται στη λειτουργία της νοερής απεικόνισης

²⁰ το ακόλουθο σχήμα εικονογραφεί την αρχή της καλής συνέχειας (Anderson, 2000, σ.47). Βλέποντάς το διακρίνουμε δύο γραμμές, μία από το Α ως το Β και μία από το Γ ως το Δ. Εντούτοις, δεν υπάρχει λόγος ώστε αυτό το ίδιο σχήμα να μην αναπαριστά ένα άλλο ζευγάρι γραμμών, για παράδειγμα μία από το Α ως το Δ και μία από το Γ ως το Β. Αυτό συμβαίνει γιατί η γραμμή από το Α ως το Β παρουσιάζει στα μάτια μας καλύτερη συνέχεια από τη γραμμή από το Α ως το Δ, η οποία έχει μία απότομη στροφή.



²¹ Το ακόλουθο σχήμα εικονογραφεί τις αρχές της κλειστότητας (: τάση να οργανώνονται σε ένα πλήρες και δομημένο σύνολο στοιχεία λίγο ή πολύ απομονωμένα) και της καλής μορφής. Βλέποντάς το, αντιλαμβανόμαστε ένα κύκλο που καλύπτεται μερικώς από έναν άλλο, παρόλο που το αντικείμενο που κρύβεται θα μπορούσε να έχει πολλά άλλα πιθανά σχήματα.



²² τις έθεσε ο Wertheimer (1923)

²³ ερευνήθηκαν παιδιά προσχολικής και πρώτης σχολικής ηλικίας

²⁴ Όπως έχουμε αναφέρει, όλα τα προβλήματα έχουν ως βασικό θέμα τους το ισοσκελές τρίγωνο, κατά συνέπεια οι μαθητές πρέπει να αντλήσουν τις σχετικές γνώσεις από το γνωστικό Σχήμα που δημιουργείται γύρω από αυτό (ΣΙΤ).

²⁵ Δηλαδή, να δώσει γραπτές οδηγίες, με βάση τις οποίες και μόνο κάποιος άλλος θα μπορεί να κατασκευάσει ένα ρόμβο.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Η ΠΡΟΕΡΕΥΝΑ



3 Η ΠΡΟΕΡΕΥΝΑ

Το 3^ο Κεφάλαιο αφιερώνεται στην προ έρευνα και παρουσιάζει τον τρόπο που έγινε, το σκοπό της και τα συμπεράσματα στα οποία κατέληξε. Ο σχολιασμός αναδεικνύει το ρόλο της προ έρευνα, στην τελική διαμόρφωση και επιβεβαίωση της καταλληλότητας, τόσο της μεθοδολογίας που επιλέγεται όσο και των προβλημάτων που σχεδιάζονται για να χρησιμοποιηθούν στην έρευνα.

3.1 Η ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΤΗΣ ΠΡΟΕΡΕΥΝΑΣ

Η έρευνα διαρκεί συνολικά δύο χρόνια. Τον πρώτο χρόνο γίνεται η προέρευνα, ενώ τον επόμενο διενεργείται η έρευνα. Η προέρευνα θεωρείται απαραίτητη προκειμένου να ελεγχθούν τόσο η μεθοδολογία όσο και τα προβλήματα που θα χρησιμοποιηθούν, ακολούθως στην έρευνα. Κατά την προέρευνα επιλέγονται έξι μαθητές από διαφορετικά σχολεία (τέσσερα αγόρια και δύο κορίτσια) με κριτήριο τη βαθμολογία τους στο μάθημα της Γεωμετρίας. Έτσι υπάρχει όλο το φάσμα, σύμφωνα με τα κριτήρια του σχολείου, από τον πολύ αδύνατο έως τον άριστο.

Κάθε μαθητής συναντάται με την ερευνήτρια δύο φορές (2 φάσεις) σε διάστημα ενός μηνός η μία από την άλλη. Ο μαθητής / μαθήτρια εργάζεται ατομικά, παρουσία της ερευνήτριας, σε επιλεγμένα προβλήματα, τα οποία είναι:

- i. Στην πρώτη φάση (Απρίλιος 2001), τέσσερα προβλήματα που έχουν ως στόχο να εξετάσουν το πρωταρχικό γνωστικό Σχήμα του ισοσκελούς τριγώνου (ΣΙΤ) που κατασκευάζει ο μαθητής. Η εξέταση γίνεται ως προς δύο άξονες, ως προς την ίδια την έννοια (πώς βλέπει ο μαθητής το ισοσκελές σαν ολότητα) και ως προς τις ιδιότητές της (αναφορά στα επιμέρους στοιχεία του Σχήματος). Αυτά τα στοιχεία θεωρούμε, στη φάση της προέρευνας, ως τα κατάλληλα για να αποκαλύψουν τον ορισμό και την εικόνα της έννοιας (concept image) που έχει ο μαθητής για το ισοσκελές.
- ii. Στη δεύτερη φάση (Μάιος 2001), χρησιμοποιούμε πέντε προβλήματα που στοχεύουν στην αποκάλυψη των συνδέσεων που εγκαθιστούν οι μαθητές ανάμεσα στα γνωστικά Σχήματα που δημιουργούνται γύρω από το ισοσκελές τρίγωνο από τη μια, και το παραλληλόγραμμο, το ρόμβο, το ισοσκελές τραπέζιο ή τον κύκλο από την άλλη. Η εξέταση εστιάζει στο αν χρησιμοποιούνται και πώς οι ιδιότητες των αντίστοιχων γεωμετρικών σχημάτων.

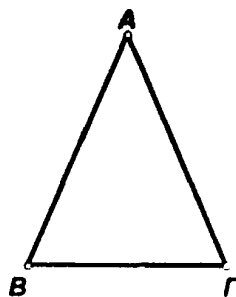
Και κατά τις δύο φάσεις της προέρευνας καταγράφονται και αναλύονται – πέρα από όσα καταγράφονται και αναλύονται στην κυρίως έρευνα (2.7) – και τα είδη της φαντασίας που χρησιμοποιούν οι μαθητές.

3.2 ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΠΡΟΕΡΕΥΝΑΣ

1^η ΦΑΣΗ

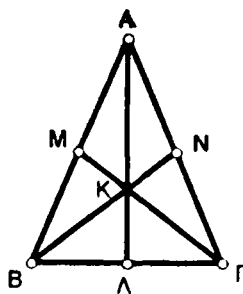
1^ο Πρόβλημα

Παρακάτω βλέπεις ένα ισοσκελές τρίγωνο. Φτιάξε πέντε διαφορετικά ισοσκελή τρίγωνα και γράψε δίπλα από το καθένα σε τι διαφέρει από το $AB\Gamma$.



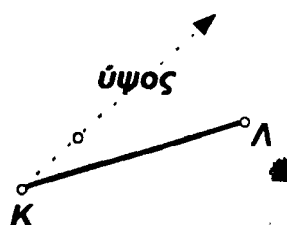
2^ο Πρόβλημα

Δίνεται ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ ισοσκελές ($AB = A\Gamma$) και Λ , M , N τα μέσα των πλευρών του. Μπορείς να συγκρίνεις τα τρίγωνα BMK και ΓNK χωρίς να χρησιμοποιήσεις τα κριτήρια ισότητας τριγώνων;



3^ο Πρόβλημα

Στο παρακάτω σχήμα ξεκινήσαμε την κατασκευή του ισοσκελούς τριγώνου $KE\Lambda$, μπορείς να τη συμπληρώσεις; Μπορείς να περιγράψεις με λόγια την κατασκευή του τριγώνου;



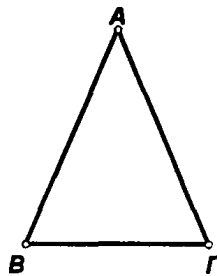
4^ο Πρόβλημα

Στο επόμενο σχήμα δίνεται ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$).

α) Μπορείς να βρεις ένα σημείο K εσωτερικό του τριγώνου τέτοιο, ώστε το τρίγωνο $KB\Gamma$ που θα σχηματιστεί να είναι επίσης ισοσκελές; Περίγραψε με λίγα λόγια τι σκέφτηκες για να βρεις το σημείο K .

β) Μπορείς να βρεις ένα σημείο Λ εσωτερικό του τριγώνου τέτοιο, ώστε το τρίγωνο ΛAB να είναι ισοσκελές; Περίγραψε με λίγα λόγια τι σκέφτηκες για να βρεις το σημείο Λ .

γ) Μπορείς τώρα να βρεις ένα μόνο σημείο Σ τέτοιο, ώστε τα τρίγωνα $\Sigma B\Gamma$ και ΣAB να είναι και τα δύο ισοσκελή; Περίγραψε με λίγα λόγια τι σκέφτηκες.

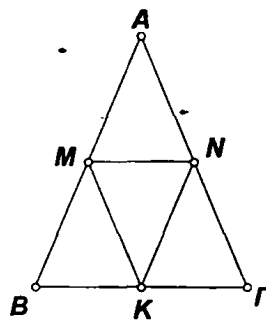
2^η ΦΑΣΗ1^ο Πρόβλημα

Στο επόμενο σχήμα δίνεται ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και M, N, K τα μέσα των πλευρών του.

α) πόσα τρίγωνα βλέπεις; Ονόμασέ τα

β) πόσα παραλληλόγραμμα βλέπεις; Ονόμασέ τα.

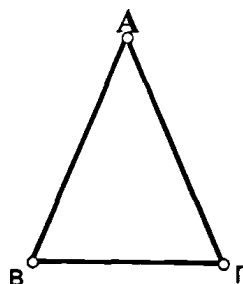
β) μπορείς να συγκρίνεις τα εμβαδά των τριγώνων: AMN , BMK , MNK , $NK\Gamma$ χωρίς να χρησιμοποιήσεις τα κριτήρια ισότητας τριγώνων; Δικαιολόγησε την απάντησή σου.

2^ο Πρόβλημα

Ξεκινώντας από το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) φτιάξε παραλληλόγραμμα που να έχουν με το τρίγωνο:

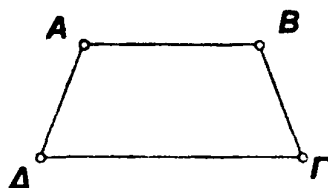
- δύο κοινές πλευρές
- μία πλευρά κοινή

Φτιάξε μόνο παραλληλόγραμμα για τα οποία να μπορείς να βρεις τη σχέση του εμβαδού τους με το εμβαδόν του ισοσκελούς τριγώνου και γράψε αυτή τη σχέση, π.χ. εμβαδόν παρ/μου = 3. εμβαδόν

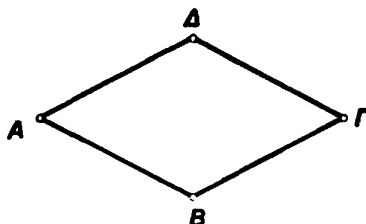


3^ο Πρόβλημα

Ξεκινώντας από το ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$, φτιάξε όσα ισοσκελή τρίγωνα μπορείς. Για κάθε τρίγωνο που φτιάχνεις, εξήγησε γιατί είναι ισοσκελές.

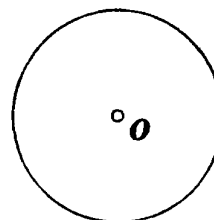
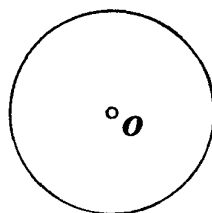
4^ο Πρόβλημα

Δίνεται ο ρόμβος $AB\Gamma\Delta$, χάραξε τις διαγώνιες και γράψε όσες ιδιότητες ξέρεις σχετικές με αυτές. Διάλεξε και απόδειξε μία από αυτές τις ιδιότητες.

5^ο Πρόβλημα

Δίνεται κύκλος κέντρου O και σημείο Σ εκτός του κύκλου. Φτιάξε δύο διαφορετικά ισοσκελή τρίγωνα ΣAB και $\Sigma\Gamma\Delta$ όπου τα A, B, Γ, Δ είναι σημεία του κύκλου. Γράψε αναλυτικά τον τρόπο κατασκευής και δικαιολόγησε γιατί τα τρίγωνα είναι ισοσκελή.

Σ °



Σ °

3.3 ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΗΣ ΠΡΟΕΡΕΥΝΑΣ

- ως προς τη μεθοδολογία

Η ανάλυση των στοιχείων που έρχονται στο φως από την προέρευνα αποκαλύπτει κάποια μεθοδολογικά προβλήματα, τα οποία αντιμετωπίζονται και λύνονται στην κυρίως έρευνα. Κατ' αρχήν, το θέμα της χρονικής διάρκειας της συνάντησης με κάθε παιδί. Ο αριθμός των προβλημάτων στην κάθε φάση της προέρευνας είναι τέτοιος, ώστε αναγκάζει το μαθητή να

εργάζεται, δίχως διάλειμμα, γύρω στις δύο ώρες. Αποτέλεσμα της μεγάλης διάρκειας είναι, ιδιαίτερα στους αδύνατους μαθητές, η κούραση, και συνακόλουθα η έλλειψη ιδιαίτερης προσοχής στα τελευταία προβλήματα ή η εύκολη εγκατάλειψη της προσπάθειας για τη λύση τους.

Επίσης η προέρευνα αποκαλύπτει αδυναμίες κάποιων προβλημάτων να φέρουν σε πέρας τη διερεύνηση που σχεδιάστηκε. Δηλαδή δεν ανταποκρίνονται όλα ακριβώς στους στόχους που θέσαμε κατά το σχεδιασμό τους.

Ένα παράδειγμα είναι το 2^ο πρόβλημα της 1^{ης} φάσης (3.2), το οποίο σχεδιάστηκε για να αποκαλύψει τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές βλέπουν το γεωμετρικό σχήμα και συγκεκριμένα αν έχουν την ικανότητα να το χωρίσουν σε μέρη και μετά να τα ανασυνθέσουν (τροποποίηση των μερών του ή mereologic modification, σύμφωνα με τον Duval (2002)). Παρόλο που στην εκφώνηση ρητά αναφέρεται ότι δεν πρέπει να χρησιμοποιηθούν τα κριτήρια ισότητας, οι περισσότεροι μαθητές το παραβλέπουν και χάνονται σε διαδοχικές συγκρίσεις τριγώνων. Έτσι, από τη μία χάνεται πολύτιμος χρόνος και από την άλλη δεν επιτυγχάνεται ο στόχος για τον οποίο τέθηκε το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Κάτι ανάλογο συμβαίνει με το 4^ο πρόβλημα της 2^{ης} φάσης (3.2), στο οποίο ο στόχος είναι να διακρίνουμε αν συνδέονται τα δύο σχήματα με κοινές ιδιότητες, αν δηλαδή το ισοσκελές τρίγωνο με τις ιδιότητές του εμφανίζεται κατά το σχολιασμό και την απόδειξη των ιδιοτήτων του ρόμβου. Εξ αιτίας της εκφώνησης, ο στόχος δεν επιτυγχάνεται όπως σχεδιάστηκε και καταγράφονται μόνο κανόνες που οι μαθητές έχουν αποστηθίσει.

Για την επίλυση των μεθοδολογικών προβλημάτων που περιγράφονται, αποφασίζουμε να αφαιρέσουμε, κατά την κυρίως έρευνα, δύο προβλήματα, ένα από κάθε φάση. Με τα κριτήρια που θέτουμε για την αφαίρεση ξεπερνάμε και τις δύο δυσκολίες που αναφέρονται. Συγκεκριμένα αφαιρούμε το 2^ο πρόβλημα από την 1^η φάση και το 2^ο πρόβλημα από τη 2^η φάση, με το αιτιολογικό ότι δε μας δίνουν πληροφορίες σχετικές με τα ερωτήματα της έρευνας, ενώ μεταβάλλουμε λίγο την εκφώνηση του 4^{ου} προβλήματος της 2^{ης} φάσης, ώστε να ανταποκρίνεται καλύτερα στο στόχο (ο οποίος παραμένει αμετάβλητος).

Μία επιπλέον αλλαγή σε σχέση με την προέρευνα στα προβλήματα που χρησιμοποιούνται κατά την έρευνα, είναι η ενίσχυση του παράγοντα «γραπτή γλώσσα» (που χρησιμοποιούν οι μαθητές). Σε δύο περιπτώσεις ζητάμε από τα παιδιά να γράψουν τα «σενάρια» της κατασκευής τους, δηλαδή γραπτές οδηγίες με βάση τις οποίες και μόνο κάποιος συμμαθητής τους θα μπορεί να κατασκευάσει ακριβώς το ίδιο γεωμετρικό σχήμα με αυτούς και με τον ίδιο τρόπο. Καθώς η γραπτή γλώσσα προϋποθέτει ένα μεγάλο βαθμό αφαίρεσης (Βυγκότσκι, 1988, σ. 276) σε σχέση με τον προφορικό λόγο, τα σενάρια μας βοηθούν να ανακαλύψουμε

πόσο μικρά ή μεγάλα κομμάτια πληροφοριών χρησιμοποιούν οι μαθητές και πόσο συνειδητές είναι οι ενέργειες τους.

Για παράδειγμα, στο 2^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης της έρευνας ζητάμε από τους μαθητές την καταγραφή του σεναρίου κατασκευής του ρόμβου (2.6). Αν κατόπιν συγκρίνουμε τα σενάρια δύο μαθητών που κατασκευάζουν με τον ίδιο τρόπο το ρόμβο (σαν ένωση δύο ισοσκελών τριγώνων), αντιλαμβανόμαστε τη διαφορά μεγέθους στα κομμάτια πληροφοριών που χρησιμοποιούν. Ο πρώτος γράφει «φτιάξε ένα ισοσκελές και το συμμετρικό του ως προς την ΒΓ (βάση)», ενώ ο δεύτερος, «φτιάξε ένα ισοσκελές, φέρε το ύψος του ΑΜ, προέκτεινέ το, μέτρα με το διαβήτη πλευρές ίσες με τις ΑΒ, ΑΓ και πάρε τις από κάτω μέχρι το σημείο Δ του ύψους, ένωσε το Δ με τα Β, Γ».

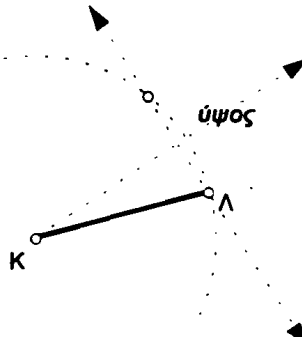
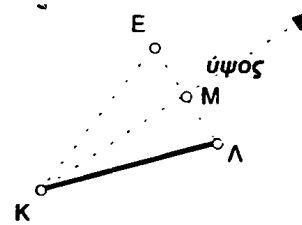
• ως προς τις προσεγγίσεις των μαθητών στα προβλήματα

Μια βασική παρατήρηση κατά την προέρευνα είναι ότι οι προσεγγίσεις των μαθητών / μαθητριών κατά την επεξεργασία των προβλημάτων διαφέρουν ουσιαστικά, παρά το γεγονός ότι βρίσκονται στην ίδια ηλικία και κάποιοι από αυτούς έχουν αξιολογηθεί στο σχολείο με τον ίδιο βαθμό από τους καθηγητές τους. Βλέπουμε μαθητές με διαφορετικά επίπεδα σκέψης να κατασκευάζουν σωστά αυτό που ζητάει το πρόβλημα, αλλά να το αιτιολογούν καθένας και με διαφορετικό τρόπο. Παρατηρείται δηλαδή κάτι ανάλογο με αυτό που συμβαίνει στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού στην πρόσθεση, όπου διαφορετικοί μαθητές βρίσκουν το ίδιο αποτέλεσμα με άλλους τρόπους.

Για παράδειγμα στο 3^ο πρόβλημα της 1^{ης} φάσης της προέρευνας (3.2) συναντάμε, μεταξύ άλλων, και τις ακόλουθες δύο προσεγγίσεις (Πίνακας 3.1). Ο ένας μαθητής κατασκευάζει το ζητούμενο σημείο Ε ως τομή δύο γεωμετρικών τόπων, ενώ ο άλλος έχει μία καθαρά οπτική προσέγγιση του προβλήματος και κατασκευάζει το ισοσκελές ως ένωση δύο ίσων ορθογωνίων τριγώνων. Είναι χαρακτηριστικό πως οι διαφορές στις προσεγγίσεις αντικατοπτρίζουν και διαφορετικές μορφές αιτιολόγησης. Ο πρώτος μαθητής κάνει μία τυπική μαθηματική απόδειξη (σύγκριση τριγώνων) ενώ ο δεύτερος επαληθεύει μετρώντας το γεωμετρικό σχήμα.

Πίνακας 3.1

Σύγκριση των διαφορετικών προσεγγίσεων του ίδιου προβλήματος από δύο μαθητές

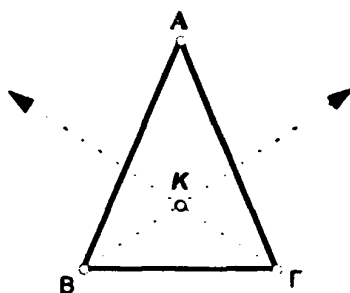
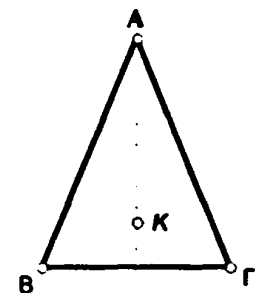
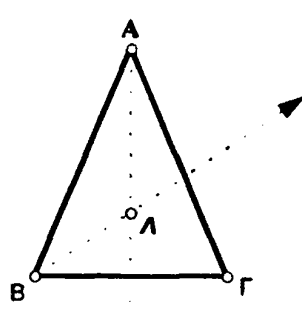
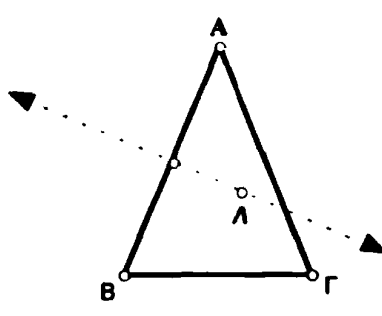
λειτουργία	1 ^{ος} μαθητής (Φώντας)	2 ^{ος} μαθητής (Στέφανος)
κατασκευή	Μαθητής: Θα πάρω με το διαβήτη όσο είναι η πλευρά ΚΑ κάνουμε πάλι ένα κύκλο (Κ, ΚΑ) και φέρνουμε την κάθετη από..... το σημείο Α φέρνουμε κάθετη στη Κ τη γραμμή (στο δοθέν ύψος) και την προεκτείνουμε και στο σημείο που τέμνει το ημικύκλιο ενώνουμε με το Κ και το τρίγωνο που σχηματίζεται είναι ισοσκελές (τομή δύο γεωμετρικών τόπων)	Μαθητής:.....σκέφτομαι ότι έτσι και φέρω, από το Α μια κάθετη προς το ύψος, θα υπάρχει ένα τρίγωνο και μετά έτσι και πάρω το αντίστοιχο τρίγωνο και το βάλω από την άλλη πλευρά, θα γίνει ισοσκελές τρίγωνο (το ισοσκελές ως ένωση δύο ορθογωνίων τριγώνων)
αιτιολόγηση	Ερευνήτρια: Είναι ισοσκελές; Μαθητής: Να το δω με το χάρακα.....όχι (μόνος του απορρίπτει αυτή την απλοϊκή μέθοδο αιτιολόγησης). Να δούμε αν είναι ίσα τα τρίγωνα ΚΒΕ, ΚΒΑ (συγκρίνει τρίγωνα). 	Μαθητής: Να μετρήσουμε (μετράει και τις τρεις πλευρές) Γιατί το Κ... αν υποθέσουμε ότι στο ύψος έχουμε ένα σημείο Μ (ονομάζει το σημείο τομής Μ) το τρίγωνο ΚΑΜ που θα σχηματιζότανε, επειδή στο ισοσκελές έτσι και φέρω τη μεσοκάθετο σχηματίζονται δύο ίσα τρίγωνα, έτσι και το αποτύπωμα από την ανάποδη αυτό το τρίγωνο, θα είχα το αποτέλεσμα ένα ισοσκελές τρίγωνο. 

Παρακολουθώντας τις αιτιολογήσεις των μαθητών / μαθητριών που συμμετέχουν στην προέρευνα διαπιστώνουμε πως αυτές μπορεί να διαφέρουν ως προς την προσέγγιση (οπτική ή συμβολική), το βαθμό αυστηρότητας, τη δυνατότητα γενίκευσης και σε άλλες παρόμοιες περιπτώσεις κλπ. Το γεγονός αυτό σε συνδυασμό με τα υπόλοιπα ευρήματα επιβεβαιώνει την εξέλιξη του γνωστικού Σχήματος και μας οδηγεί στο συμπέρασμα πως κάθε μία από τις προσεγγίσεις αντικατοπτρίζει μια διαφορετική στιγμή στην εξέλιξη του ΣΙΤ.

Φαίνεται πως τα ωριμότερα γνωστικά Σχήματα δίνουν λύσεις με ικανότητα προσαρμογής σε μια ποικιλία παρόμοιων καταστάσεων. Η διαπίστωση αυτή στηρίζεται κυρίως στην ανάλυση των λύσεων που έδωσαν οι μαθητές στο 4^ο πρόβλημα της 1^{ης} φάσης (3.2) της προέρευνας και των δυσκολιών που προέκυψαν (Πίνακας 3.2). Το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι αποκαλυπτικό, γιατί εμπεριέχει την αλλαγή συνθηκών στα ερωτήματά του. Έτσι ο μαθητής υποχρεώνεται να υποβάλει τη λύση του στη δοκιμασία της γενίκευσης.

Πίνακας 3.2

Σύγκριση δύο λύσεων ως προς τη δυνατότητα προσαρμογής τους σε αλλαγή συνθηκών

1 ^η προσέγγιση (Αλέξης)	2 ^η προσέγγιση (Φώντας)
α) ερώτημα	
Το σημείο Κ είναι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών Β και Γ 	Το σημείο Κ είναι ένα τυχαίο σημείο πάνω στη μεσοκάθετο της πλευράς ΒΓ 
β) ερώτημα	
Η προσέγγιση δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί στο (β) ερώτημα, γιατί το σημείο τομής των διχοτόμων δίνει τρίγωνο ΛΑΒ που δεν είναι ισοσκελές 	Η προσέγγιση χρησιμοποιείται αποτελεσματικά και στο (β) ερώτημα. Το σημείο Λ είναι ένα σημείο πάνω στη μεσοκάθετο της ΑΒ. 

• ως προς το γνωστικό Σχήμα του ισοσκελούς τριγώνου

Η εξέταση των πρωτοκόλλων της προέρευνας μας προσανατολίζει στο ότι βασικός πυρήνας του γνωστικού Σχήματος του ισοσκελούς τριγώνου (ΣΙΤ) πρέπει να είναι οι σχέσεις που καθορίζονται:

- από τον ορισμό (δύο πλευρές ίσες / δύο γωνίες ίσες) και
- από τη βασική ιδιότητα του ισοσκελούς (αν ΑΒΓ ισοσκελές, τότε $ΑΔ = \text{ύψος} / \text{διάμεσος} / \text{διχοτόμος}$).

Στο συμπέρασμα αυτό μας οδηγεί η παρατήρηση της εικόνας της έννοιας (concept image) που έχουν όλοι οι μαθητές της προέρευνας για το ισοσκελές τρίγωνο - από την αρχή της Α' Λυκείου - και περιλαμβάνει τον ορισμό (με τη μία ή και τις δύο σχέσεις) και το ύψος ΑΔ (με κάποια μορφή της βασικής ιδιότητας). Δηλαδή η βασική ιδιότητα (Β.Ι.) ενσωματώνεται από

την αρχή στην εικόνα της έννοιας, ενώ το ύψος $ΑΔ$, ως στοιχείο ισορροπίας του τριγώνου, φαίνεται να παίζει καθοριστικό ρόλο στην αναγνώριση και κατασκευή του ισοσκελούς.

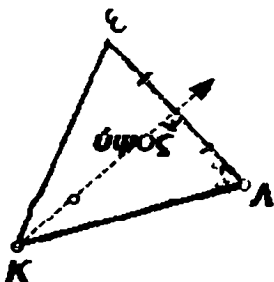
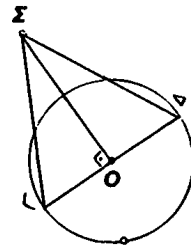
Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα μιας πολύ αδύνατης, με βάση την αξιολόγηση του σχολείου, μαθήτριας (Ειρήνη) με μια ισχυρή εικόνα για το ισοσκελές. Η εικόνα έχει τη μορφή φωτογραφίας ενός αντικειμένου, από την οποία η μαθήτρια δε διακρίνει εύκολα επιμέρους στοιχεία και δε χρησιμοποιεί άλλες ιδιότητες, εκτός από το ότι το ύψος $ΑΔ$ είναι και διάμεσος του τριγώνου. Όπως φαίνεται από τον τρόπο που λύνει τα προβλήματα, η εικόνα της είναι τόσο ισχυρή, ώστε τη βοηθά να λύνει προβλήματα και να ξεπερνά ακόμα και τους φραγμούς που θέτει ο προσανατολισμός.

Με οδηγό την εικόνα της η μαθήτρια συλλαμβάνει νοερά και περιγράφει τη θέση στην οποία θα τοποθετηθεί το τρίγωνο και κατόπιν αρχίζει τη σχεδίαση (Πίνακας 3.3). Στην κάθε περίπτωση ξεκινά από το ύψος του ισοσκελούς. Εκπλήσσει η ταχύτητα με την οποία αντιμετωπίζει την κατασκευή, σε σύγκριση με το χρόνο αντίδρασης άλλων μαθητών, με πολύ μεγαλύτερους βαθμούς στο σχολείο που συμμετείχαν στην προ έρευνα.

Πίνακας 3.3

Το ύψος / άξονας συμμετρίας

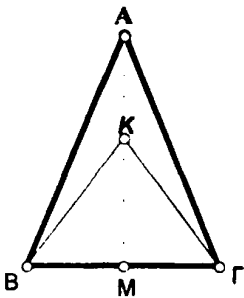
ως βασικό στοιχείο για την αναγνώριση και κατασκευή του ισοσκελούς τριγώνου

3 ^ο πρόβλημα της 1 ^{ης} φάσης της προ έρευνας	5 ^ο πρόβλημα της 2 ^{ης} φάσης της προ έρευνας
Ειρήνη: η $ΛΕ$ πρέπει να είναι βάση, για να είναι ύψος αυτή (εννοεί τη διακεκομμένη γραμμή που της δόθηκε) η πλευρά $ΚΛ$ πρέπει να είναι ίση με αυτή την πλευρά (την $ΚΕ$ που θα φέρει), ξέρουμε πως η διάμεσος είναι και ύψος και χωρίζει τη βάση σε δύο ίσα μέρη, οπότε αυτή εδώ πέρα, διάμεσος δεν είναι; θα χωρίζει αυτή την πλευρά ($ΛΕ$) σε δύο ίσα μέρη. (στη συνέχεια κατασκευάζει σωστά το τρίγωνο $ΚΕΛ$, όπως φαίνεται στο σχήμα) 	Ειρήνη: Αν ενώσω αυτήν ($ΣΟ$) ως ύψος γιατί έτσι θα σχηματιστούν δύο πλευρές ίσες φέρνω και αυτήν ($ΓΔ$) έτσι Ερευνήτρια: πώς έτσι; Ειρήνη: κάθετο, θα είναι η βάση του τριγώνου και διάμεσος (εννοεί διάμετρος) 

Ο δυναμικός χαρακτήρας του ΣΙΤ προκύπτει σύμφωνα με τα στοιχεία της προ έρευνας, και από την εξέλιξη του περιεχομένου του. Η σταδιακή εξέλιξη στο χαρακτήρα ενός γεωμετρικού στοιχείου, που στα επόμενα υποθέτουμε πως συνδέεται με την εξέλιξη του γνωστικού Σχήματος, αποδίδεται χαρακτηριστικά από το παράδειγμα της μεσοκαθέτου. Σύμφωνα με τα στοιχεία της προέρευνας διαπιστώνεται μια ποικιλία τρόπων χρήσης της μεσοκαθέτου, που περιλαμβάνουν διαισθητική, αντιληπτική ή λειτουργική χρήση της. Στα πρώιμα στάδια του ΣΙΤ η μεσοκάθετος αποτελεί απλά έναν αντιληπτικό άξονα συμμετρίας για το ισοσκελές τρίγωνο. Αργότερα γίνεται φορέας της βασικής του ιδιότητας (ύψος = διάμεσος = διχοτόμος), ενώ στην τελική της μορφή αποτελεί μια γενίκευση, ένα ισχυρό εργαλείο κατασκευής ισοσκελών τριγώνων (κάθε σημείο της έχει την ιδιότητα να ισαπέχει από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος).

Τα προηγούμενα αποκαλύπτονται – μεταξύ άλλων - από τον τρόπο με τον οποίο λειτουργούν οι μαθητές στο 4^ο πρόβλημα της 1^{ης} φάσης της προ έρευνας (3.2) (Πίνακας 3.4). Θεωρούμε πως η λειτουργική χρήση της μεσοκαθέτου, η αξιοποίηση δηλαδή της ιδιότητας των σημείων της «να ισαπέχουν από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος», αποτελεί δείκτη ωρίμανσης του ΣΙΤ.

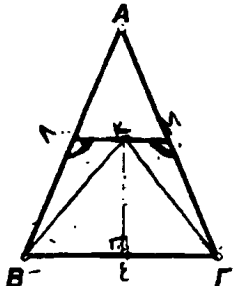
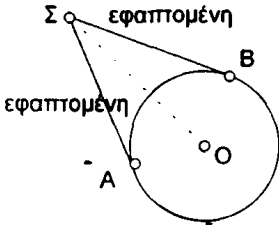
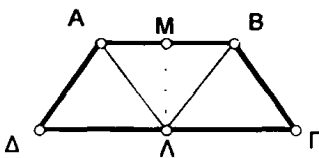
Πίνακας 3.4
Διάφοροι τρόποι χρήσης της μεσοκαθέτου από μαθητές κατά την προ έρευνα

		
A) περίπτωση	B) περίπτωση	Γ) περίπτωση
Ο μαθητής παίρνει το σημείο K πάνω στην <u>κάθετη στο μέσο της BΓ</u> αλλά δεν μπορεί να αιτιολογήσει ότι το KΒΓ είναι ισοσκελές. Συνήθως το επιβεβαιώνει <u>μετρώντας τις πλευρές ΚΒ, ΚΓ</u>.	Ο μαθητής παίρνει το σημείο K πάνω στην <u>κάθετη στο μέσο της ΒΓ</u> και για να αιτιολογήσει ότι το ΚΒΓ είναι ισοσκελές <u>συγκρίνει τρίγωνα</u>	Ο μαθητής παίρνει τυχαίο σημείο K πάνω στην <u>μεσοκάθετη της ΒΓ</u> και αιτιολογεί ότι ΚΒΓ ισοσκελές με βάση την <u>ιδιότητα των σημείων της μεσοκαθέτου</u>

Εξέλιξη διαπιστώνεται επίσης και στις συνδέσεις που εγκαθίστανται ανάμεσα στο ΣΙΤ και άλλα γνωστικά Σχήματα. Μία σύνδεση μπορεί να είναι απλά η αναφορά μιας άλλης έννοιας ή, στην ώριμη μορφή της, να περιλαμβάνει τη δημιουργική χρήση της έννοιας αυτής. Τα

ευρήματα δείχνουν πως ανάμεσα στην ικανότητα αναγνώρισης και την ικανότητα χρήσης μιας έννοιας παρεμβάλλεται ένα στάδιο όπου ο μαθητής διακρίνει τα γνωστικά Σχήματα, τα σχετικά με το ΣΙΤ, τα αναφέρει, δεν μπορεί όμως ακόμα, να τα χρησιμοποιήσει (Πίνακας 3.5). Δηλαδή, αν υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποια σύνδεση, τότε αυτή είναι αναποτελεσματική.

Πίνακας 3.5
Παραδείγματα ανενεργών συνδέσεων

4 ^η πρόβλημα της 1 ^{ης} φάσης της προ έρευνας	5 ^η πρόβλημα της 2 ^{ης} φάσης της προ έρευνας	3 ^η πρόβλημα της 2 ^{ης} φάσης της προ έρευνας
Μια μαθήτρια φέρνει το τμήμα AM που ενώνει τα μέσα των δύο ίσων πλευρών του $ABΓ$. Κατόπιν, χρησιμοποιεί το μέσο K του AM για να φτιάξει το ζητούμενο ισοσκελές $KBΓ$. Δεν μπορεί να εξηγήσει γιατί κατ'ασκέυασε το AM και τι το χρειάζεται.	Ένας μαθητής φέρνει τις εφαπτόμενες του κύκλου $ΣΑ$, $ΣΒ$, όμως τις χρησιμοποιεί σαν δύο απλές ημι ευθείες	Ένας μαθητής φέρνει τη μεσοκάθετο της πλευράς AB , που κόβει την $ΓΔ$ στο $Λ$. Για να δείξει πως το τρίγωνο $ΛΑΒ$ είναι ισοσκελές συγκρίνει ανεπιτυχώς τα τρίγωνα $ΑΔΛ$, $ΒΛΓ$.
		

Η προέρευνα αναδεικνύει τη σημασία που έχουν οι ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων για τη σύνδεση των αντίστοιχων γνωστικών Σχημάτων. Θεωρούμε ως κριτήριο για την αποτελεσματικότητα μιας σύνδεσης την ύπαρξη λειτουργικού μέρους (ιδιοτήτων) και στα δύο άκρα της (στο ΣΙΤ και στο άλλο γνωστικό Σχήμα). Με βάση τα ανωτέρω, στο σχολιασμό των ευρημάτων της έρευνας που θα ακολουθήσει, θα χαρακτηρίζουμε μια σύνδεση ενεργή (αποτελεσματική), όταν συνδέει γνωστικά Σχήματα, έστω και ανώριμα και ανενεργή (αναποτελεσματική), όταν συνδέει το γνωστικό Σχήμα με μια απλή έννοια, χωρίς τις ιδιότητές της.

Ενώ η ανάλυση των στοιχείων της προέρευνας είναι, όπως είπαμε, αρχικά προσανατολισμένη στη δομή του γνωστικού Σχήματος (ΣΙΤ), η διερεύνηση της χρήσης του ισοσκελούς αποκαλύπτει και προβάλλει τον καθοριστικό ρόλο των λειτουργιών που εμπλέκονται στη γεωμετρική σκέψη. Έτσι εκτός από το περιεχόμενο του ΣΙΤ η εξέλιξή του

προβάλλεται και στις λειτουργίες του μαθητή (νοερή απεικόνιση, κατασκευή και αιτιολόγηση).

- i. Νοερή απεικόνιση: το βασικό συμπέρασμα που προκύπτει σε σχέση με τη νοερή απεικόνιση είναι πως η ανάπτυξη του ΣΙΤ συνδέεται με την αναγνώριση της έννοιας του ισοσκελούς. Η αναγνώριση γίνεται με βάση την εικόνα – πρότυπο του ισοσκελούς που ενσωματώνει επίσης και το ύψος – άξονα συμμετρίας του. Ιδιαίτερη σημασία έχει η αναγνώριση των επιμέρους στοιχείων του γεωμετρικού σχήματος (η ιδιαίτερη σημασία του συμπεράσματος αυτού θα αναδειχθεί στα ευρήματα της έρευνας).
- ii. Κατασκευή: σε σχέση με την κατασκευή, προκύπτουν τα ακόλουθα. Οι τρόποι με τους οποίους οι μαθητές κατασκευάζουν το ισοσκελές τρίγωνο παρουσιάζουν μία σταδιακή ωρίμανση, στην οποία διακρίνονται τέσσερα βήματα¹: η κατασκευή δύο ίσων πλευρών, η κατασκευή της βάσης και δύο τόξων με ίδια ακτίνα από τα άκρα της, η κατασκευή της βάσης και ενός τμήματος κάθετου στο μέσο της και τέλος η κατασκευή της μεσοκαθέτου της βάσης². Διαπιστώνεται ότι η επιλογή του τρόπου κατασκευής είναι καθοριστική για την αποτελεσματικότητα του μαθητή στη λύση του προβλήματος. Το πέρασμα από αντιληπτικούς τρόπους κατασκευής στη μαθηματική αφαίρεση συνδέεται άμεσα με την εξέλιξη του ΣΙΤ. Έτσι ο τρόπος που διαλέγει ο μαθητής για να κατασκευάσει το ισοσκελές αντανακλά σε ένα βαθμό το επίπεδο εξέλιξης του ΣΙΤ του.
- iii. Αιτιολόγηση: κατά την προέρευνα δε γίνεται ιδιαίτερη ανάλυση στους τρόπους αιτιολόγησης που χρησιμοποιούν οι μαθητές.

3.4 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΠΡΟΕΡΕΥΝΑ

Συνοψίζοντας όσα αναφέραμε θα μπορούσαμε να πούμε πως η προ έρευνα μας οδηγεί στα εξής συμπεράσματα:

- Η εξέλιξη του ΣΙΤ διαπιστώνεται τόσο στο περιεχόμενο όσο και στη λειτουργία του.
- Η εξέλιξη του περιεχομένου – πέρα από τον εμπλουτισμό του με νέα στοιχεία – εκδηλώνεται με τη βαθμιαία εξέλιξη του χαρακτήρα αυτών των γεωμετρικών στοιχείων. Πράγματι η ύπαρξη ενός στοιχείου ή πληροφορίας στο ΣΙΤ δεν αρκεί από μόνη της για να καθορίσει το βαθμό εξέλιξης του Σχήματος. Κι αυτό επειδή η απλή παρουσία στοιχείων δεν προδιαγράφει πάντα την ίδια συγκεκριμένη συμπεριφορά του μαθητή. Είναι δυνατό μια

πληροφορία να υπάρχει στο ΣΙΤ ανενεργή (δηλαδή ο μαθητής να γνωρίζει την πληροφορία, αλλά να μην ξέρει πώς να την χρησιμοποιήσει), ή η πληροφορία να μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο σε συγκεκριμένες περιπτώσεις, ή τέλος, ο μαθητής να διαθέτει την ευελιξία προσαρμογής και να μπορεί να χρησιμοποιεί την πληροφορία σε κάθε περίπτωση προβλήματος που αντιμετωπίζει.

Η σύνδεση της εξέλιξης με τη σταδιακή μεταβολή του χαρακτήρα των χρησιμοποιούμενων στοιχείων, συναντάται και στις απόψεις του van Hiele. Στην παρούσα μελέτη η εξέλιξη αναφέρεται και διερευνάται ειδικότερα σε ένα συγκεκριμένο γνωστικό Σχήμα (το ΣΙΤ), ενώ στον van Hiele η εξέλιξη αφορά γενικά στη σκέψη. Ο τελευταίος εκφράζει μια ποιοτική αντίληψη ως προς τις συνδέσεις, υποστηρίζοντας την άποψη πως, «δεν ισχύει αυτό που συνήθως πιστεύεται, ότι σημασία έχει ο αριθμός των συνδέσεων, αλλά (σημασία έχει) η φύση τους» (van Hiele, 1986, σ. 41).

Ο van Hiele υποστηρίζει επιπλέον πως ο μαθητής αποκτά ένα ανώτερο επίπεδο σκέψης όταν «αυτή του επιτρέπει, σε σχέση με συγκεκριμένες λειτουργίες, να εφαρμόζει αυτές τις λειτουργίες σε νέα αντικείμενα» (van Hiele, 1986, σ. 39). Συνδέει δηλαδή την εξέλιξη με τις λειτουργίες και την ωρίμανσή τους. Στα επόμενα, στα πλαίσια της έρευνας, θα εξεταστούν ειδικότερα οι τρεις λειτουργίες που εμπλέκονται στη γεωμετρική σκέψη και οι παράγοντες που συνδέονται με αυτές και πιθανά οδηγούν στη μη γραμμική εξέλιξη του ΣΙΤ. Τέτοιοι παράγοντες μπορεί να είναι αδυναμία στην κατασκευή της νοερής εικόνας ή στην αναγνώριση όλων των στοιχείων της, αδυναμίες στην προσαρμογή του τρόπου κατασκευής του ισοσκελούς τριγώνου που επιλέγει ο μαθητής στους περιορισμούς του συγκεκριμένου προβλήματος, αδυναμία αλλαγής μιας αναποτελεσματικής οδηγίας κατασκευής και τέλος, αδυναμίες στην αιτιολόγηση.

ΣΧΟΛΙΑ 3^{ου} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

¹ Δεν πρόκειται για τέσσερα συνεχόμενα στάδια σε μία διαδικασία μάθησης, αλλά για μια διαδικασία που λειτουργεί παράλληλα και που ο συντονισμός της είναι μεν αργός, αλλά οδηγεί στη μαθηματική κατανόηση.

² Η διαφορά ανάμεσα στους δύο τελευταίους τρόπους κατασκευής αναλύεται και γίνεται σαφής στο κεφάλαιο περί οδηγιών κατασκευής του ισοσκελούς.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΡΗΜΑΤΩΝ



4 ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΡΗΜΑΤΩΝ

Στο 4^ο Κεφάλαιο παρουσιάζονται τα ευρήματα της έρευνας. Τα στοιχεία αναλύονται δύο φορές. Την πρώτη φορά γίνεται η δομική ανάλυση των ευρημάτων με άξονες ανάλυσης τις υποθέσεις της έρευνας. Δηλαδή ελέγχεται η αλήθεια των υποθέσεων που αφορούν στο ΣΙΤ και στις συνδέσεις του με άλλα γνωστικά σχήματα. Τη δεύτερη γίνεται η λειτουργική ανάλυσή τους, δηλαδή, τα ευρήματα αναλύονται με άξονες τις τρεις λειτουργίες και την αλληλεπίδρασή τους. Οι δύο αναλύσεις εξασφαλίζουν μια σφαιρικότερη μελέτη του θέματος και ελέγχουν τη συνέπεια των συμπερασμάτων της κάθε μίας ξεχωριστά.

4. ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΥΡΗΜΑΤΩΝ					
4.1 ΔΟΜΙΚΗ		4.2 ΑΝΑ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ			
4.1.1 Σε τοπικό επίπεδο	4.1.2 Σε συνολικό επίπεδο	4.2.1 Με αφετηρία τη νοερή απεικόνιση	4.2.2 Με αφορμή την κατασκευή	4.2.3 Με αφορμή την αιτιολόγηση	4.2.4 Αλυσίδες ενεργειών

4.1 ΔΟΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΥΡΗΜΑΤΩΝ

Στόχος της δομικής ανάλυσης είναι η οργάνωση και ο σχολιασμός των ευρημάτων σύμφωνα με τον πρώτο στόχο της έρευνας και συγκεκριμένα την «εξέταση του γνωστικού Σχήματος του Ισοσκελούς Τριγώνου (ΣΙΤ) τοπικά και συνολικά» (2.7.1 και 2.7.2). Άξονες ανάλυσης είναι οι αντίστοιχες υποθέσεις εργασίας.

Το πλαίσιο της δομικής ανάλυσης των στοιχείων και διατύπωσης ερμηνειών στηρίζεται σε δύο παραδοχές:

α.) ότι υπάρχουν πάντα δύο ανεξάρτητες «γνωστικές είσοδοι» σε ένα γεωμετρικό σχήμα, η μία αφορά στην αναγνώριση των οπτικών μονάδων και της οργάνωσής τους και η άλλη σχετίζεται με τη λεκτική περιγραφή των αντικειμένων που αναγνωρίζονται και την επεξήγηση των ιδιοτήτων τους (Duval, προσωπική επικοινωνία). Η δημιουργία αντιστοιχίας ανάμεσα στα δύο είναι επίπονη και, συχνά, αδύνατη για κάποιους μαθητές.

β.) ότι για να ελεγχθεί η αξιοπιστία των παρατηρήσεων, που γίνονται με βάση τις απαντήσεις των μαθητών, χρειάζεται κάθε φορά να μεταβάλλουμε τις συνθήκες που θέτει το πρόβλημα ώστε να διαπιστώνουμε αν υπάρχουν, αντίστοιχα, αλλαγές στις απαντήσεις των μαθητών. Να διερευνήσουμε, δηλαδή, αν οι γνώσεις των μαθητών έχουν ευελιξία και προσαρμοστικότητα.

4.1.1 Τοπικό επίπεδο

Υπόθεση 1^α: η αναγνώριση και η χρήση του ισοσκελούς βασίζονται στην εικόνα πρότυπο

Η μελέτη της μορφής του ισοσκελούς που διαθέτουν οι μαθητές ηλικίας 15 ετών, στην παρούσα έρευνα, συνδέεται με την αναγνώριση της εικόνας πρότυπο και την ικανότητα μεταβολής της. Σύμφωνα με τα ευρήματα¹, η κατάσταση που παρουσιάζεται στους μαθητές του δείγματος, σε σχέση με τα στοιχεία που οδηγούν στην αναγνώριση της εικόνας – πρότυπο, έχει ως εξής:

Σχετικά με την αναγνώριση που βασίζεται στον ορισμό του ισοσκελούς, σύμφωνα με τα ευρήματα, ο ορισμός (ΑΒΓ ισοσκελές αν $AB=AG$) είναι κτήμα περίπου των μισών από τους μαθητές των 15 ετών που έρχονται στο Λύκειο (47% της παρούσης έρευνας). Πρόκειται για μαθητές του 3^{ου} επιπέδου κατά van Hiele, οι οποίοι «μπορούν να δίνουν τον ορισμό εννοιών άνετα και συνειδητά» (Κολέζα, σ.288).

Λιγότεροι μαθητές (40% των παιδιών του δείγματος) διατυπώνουν έναν «επαυξημένο ορισμό», δηλαδή επισυνάπτουν στην ισότητα των πλευρών και άλλες ιδιότητες, όπως την ισότητα των γωνιών ($B=G$) ή τη βασική ιδιότητα (το ύψος ΑΔ είναι επίσης διάμεσος και διχοτόμος της Α). Όπως φαίνεται από τον τρόπο που αντιμετωπίζουν τα προβλήματα στη συνέχεια της έρευνας, ο επαυξημένος ορισμός δημιουργεί στους μαθητές αυτούς μεγαλύτερη ασφάλεια. Εντούτοις μια τέτοια αντίληψη μπορεί να προκαλέσει προβλήματα, τόσο στην αναγνώριση όσο και στη χρήση των ισοσκελών τριγώνων.

Οι συγκεκριμένοι μαθητές, οι οποίοι βρίσκονται στο 2^ο επίπεδο van Hiele, μπορούν να χρησιμοποιήσουν έναν ορισμό, όταν (α) τους δοθεί και (β) γνωρίζουν κάθε σχέση που περιλαμβάνει (εδώ δύο πλευρές ίσες). Σε περίπτωση όμως που δεν έχουν μάθει απέξω μηχανικά τον ορισμό, όταν ερωτώνται, δίνουν μια μεγάλη λίστα ιδιοτήτων της έννοιας, δίχως να αντιλαμβάνονται τους πλεονασμούς. Τέτοιοι μαθητές μπορεί να μην αναφέρουν καθόλου την ισότητα των πλευρών, αλλά ακολουθώντας να τη χρησιμοποιούν σιωπηρά. Για παράδειγμα, όταν ζητήθηκε από μια μαθήτρια ο ορισμός του ισοσκελούς τριγώνου, αυτή έγραψε «ισοσκελές

¹ Στο σχολιασμό που ακολουθεί, παρατίθενται χαρακτηριστικά αποσπάσματα από πρωτόκολλα μαθητών. Κάθε παράδειγμα συνοδεύεται από ένα χαρακτηρισμό, μέσα σε παρένθεση. Ο χαρακτηρισμός περιλαμβάνει τρεις ενδείξεις, που κατά σειρά είναι:

- i. το μικρό όνομα του μαθητή / μαθήτριας
- ii. τη φάση της έρευνας, στην οποία ανήκει το πρωτόκολλο και
- iii. τον αύξοντα αριθμό του προβλήματος

Για παράδειγμα, ο χαρακτηρισμός (Γιάννης, Φ2, 2^α) μας παραπέμπει στο 2^ο πρόβλημα της 2^{ης} φάσης του συγκεκριμένου μαθητή.

είναι το τρίγωνο στο οποίο οι παρά τη βάση γωνίες είναι ίσες και η κορυφή του βρίσκεται απέναντι από το μέσο της βάσης».

Τέλος, ελάχιστοι είναι οι μαθητές που ορίζουν το ισοσκελές λανθασμένα, συγχέοντάς το ή με την ειδική περίπτωση του ισοπλεύρου ή με το ορθογώνιο τρίγωνο.

Σχετικά με την εικόνα – πρότυπο του ισοσκελούς τριγώνου, με βάση τις κατασκευές των μαθητών, επιβεβαιώνεται πως οι βασικές συνιστώσες της είναι οι δύο ίσες πλευρές, και το ύψος – άξονας συμμετρίας (σχήμα 2.1). Το πρότυπο ενσωματώνεται και αποτελεί βασικό στοιχείο της εικόνας της έννοιας. Είναι αξιοσημείωτο πως όλοι οι μαθητές, στην αρχή της Α' Λυκείου, διαθέτουν την εικόνα - πρότυπο που περιγράφουμε στο γνωστικό τους Σχήμα, γεγονός που μας οδηγεί να το χαρακτηρίσουμε ως «βασικό πυρήνα του ΣΙΤ».

Η βασικότερη παρατήρηση σε σχέση με την αναγνώριση και χρήση του ισοσκελούς τριγώνου είναι πως οι μαθητές μπορούν να κατασκευάσουν το ισοσκελές και έχουν συνείδηση του αντικειμένου που απεικονίζει η έννοια (ισοσκελές). Αυτό που τους λείπει ακόμα, σε αυτή την ηλικία, είναι η συνειδητοποίηση της δικής τους νοητικής πράξης με τη βοήθεια της οποίας φαντάζονται το αντίστοιχο αντικείμενο.

Τα στοιχεία και τι υποδεικνύουν

1. Εξετάζοντας τις απαντήσεις (γεωμετρικά σχήματα) των μαθητών στο 1^ο πρόβλημα της 1^{ης} φάσης, μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε τις αλλαγές που κάνουν στο ισοσκελές τρίγωνο με κριτήρια (α) τον τρόπο έκφρασης, δηλαδή το αν χρησιμοποιούν μαθηματικές εκφράσεις ή όχι για να περιγράψουν τα «διαφορετικά ισοσκελή τρίγωνα» και (β) το είδος των αλλαγών, δηλαδή το αν οι αλλαγές που κάνουν στο δοθέν ισοσκελές είναι ποιοτικές ή ποσοτικές (Πίνακας 4.1).

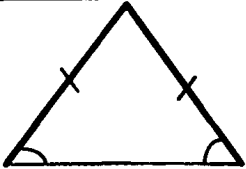
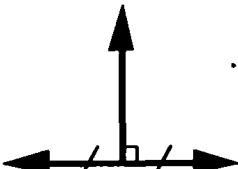


Πίνακας 4.1
Κατηγοριοποίηση των μεταβολών της εικόνας - πρότυπο

κριτήρια	ποιοτικές αλλαγές	ποσοτικές αλλαγές
μη μαθηματική έκφραση	ξαπλωτό, ανάποδο, πλαγιαστό, διαγώνιο, κατασκευάστηκε διαφορετικά, η βάση του βρίσκεται σε διαφορετικό προσανατολισμό, η κορυφή βρίσκεται στη θέση της βάσης, πιο λεπτό / ψηλό, διαφορετική ονομασία	μικρούλι, πιο μεγάλο
μαθηματική έκφραση	αποτελείται από δύο τρίγωνα, έχει δύο ίσα ορθογώνια, έχει ζωγραφισμένη και τη διάμεσο ΑΜ, το ισοσκελές βρίσκεται σε κύκλο: (η βάση του είναι χορδή, η κορυφή του στο κέντρο, οι ίσες πλευρές ακτίνες), η μία πλευρά του είναι διάμεσος ενός άλλου τριγώνου	ισόπλευρο γωνίες / πλευρές διαφορετικές, ορθογώνιο, αμβλυγώνιο, αυξομειώνει τη σχέση βάσης – ύψους, διαφορετικό ύψος

Η ικανότητα μεταβολής του ισοσκελούς συνδέεται στενά με το ερώτημα «τι θεωρούν οι μαθητές ως αναλλοίωτο, στην περίπτωση του ισοσκελούς;». Προσπαθώντας να το απαντήσουμε, κάνουμε τις ακόλουθες παρατηρήσεις. Οι μαθητές διατηρούν τις σχέσεις ανάμεσα στα στοιχεία του ισοσκελούς, δηλαδή διατηρούν τη μορφή του, η οποία καθορίζεται αποκλειστικά με όρους εσωτερικών σχέσεων. Επιπλέον είναι ικανοί να μεταβάλουν τον προσανατολισμό ή το μέγεθός του ισοσκελούς (μη μαθηματικές εκφράσεις του πίνακα 4.1). Στις απαντήσεις των παιδιών δεν αναφέρονται μετασχηματισμοί όπως συμμετρία ή ομοιότητα, με μόνη εξαίρεση τη στροφή (ερμηνεύεται και ως αλλαγή προσανατολισμού) που εμφανίζεται στους μισούς μαθητές. Αξιοσημείωτο είναι επίσης πως κάποιοι μαθητές κατασκευάζουν ισοσκελή σε άλλο πλαίσιο (του κύκλου, τετραγώνου ή άλλου τριγώνου).

Οι ποσοτικές αλλαγές φαίνεται ότι διευκολύνουν τους μαθητές, αφού όλοι τις επικαλούνται, ιδιαίτερα όσον αφορά στα μήκη των πλευρών (γεγονός που παραπέμπει σε χρήση του ορισμού), τα οποία είναι και ευκολότερο να κατασκευαστούν. Ακόμα κάποιοι μαθητές αυξομειώνουν τις διαστάσεις βάσης – ύψους. Και στις δύο αυτές περιπτώσεις είναι φανερό το αναλλοίωτο μέσα από τα σχήματα των μαθητών (σχήμα 4.1). Ποσοτικές αλλαγές γίνονται και στις γωνίες του ισοσκελούς, όπως «αυτό είναι ορθογώνιο/ αμβλυγώνιο ισοσκελές, σε αντίθεση με το δοθέν που είναι οξυγώνιο». Αντίθετα, λιγότεροι μαθητές κατασκευάζουν ή επικαλούνται ποιοτικές διαφορές, όπως για παράδειγμα «αυτό είναι η μεγέθυνση του $AB\Gamma$ » ή «είναι το συμμετρικό αυτού που δόθηκε».

	
Αναλλοίωτο: «οι δύο ίσες πλευρές» που αντιστοιχούν στον ορισμό	Αναλλοίωτο: «η καθετότητα και το κοινό σημείο των δύο τμημάτων στο μέσο της βάσης»

σχήμα 4.1 Το αναλλοίωτο κατά την κατασκευή του ισοσκελούς τριγώνου

Τα ευρήματα υποστηρίζουν τον ισχυρισμό πως η μορφή του ισοσκελούς είναι παγιωμένη σε μαθητές αυτής της ηλικίας, αλλά υπάρχουν ακόμα δυσκολίες σε σχέση με τους μετασχηματισμούς της.

2. Ο τρόπος λειτουργίας των μαθητών στο 2^ο πρόβλημα της 1^{ης} / 2^{ης} Φάσης δείχνει πως η αναγνώριση και κατασκευή του ισοσκελούς βασίζεται στην εικόνα – πρότυπο.

Συγκεκριμένα στο 2^ο όλοι οι μαθητές με ευκολία αναγνωρίζουν το ισοσκελές μέσα από το δοθέν (ελλειπές) σχήμα και «βλέπουν» τον τρόπο με τον οποίο πρέπει να το τοποθετήσουν. Το γεγονός ότι έχει αλλάξει ο προσανατολισμός, σε σχέση με τον συνήθη (όπου η βάση είναι οριζόντια και το ύψος κατακόρυφο), δε φαίνεται να επηρεάζει καθόλου τα παιδιά, τα οποία, όπως διαπιστώνουμε, αναγνωρίζουν την εικόνα πρότυπο από ένα μέρος της.

Μια αδύνατη με βάση τη σχολική αξιολόγηση μαθήτρια (Ειρήνη) λει αμέσως μόλις βλέπει το πρόβλημα 2^ο, «για να είναι ύψος αυτή (η δοθείσα διακεκομμένη ημι ευθεία) η ΛΕ πρέπει να είναι βάση». Η παρατήρηση αυτή την βοηθά να σχεδιάσει τη ΛΕ και ακολούθως το ισοσκελές ΚΛΕ (σχήμα 4.2α). Το ίδιο συμβαίνει με την πλειοψηφία των μαθητών. Πολλά παιδιά γυρίζουν το χαρτί τους ούτως ώστε ο φορέας του ύψους να γίνει κατακόρυφος και λένε «το τρίγωνο θα είναι έτσι».

Ένας άλλος μαθητής (Γιώργος) ξεκινώντας από το ύψος διακρίνει τις δύο βασικές κατευθύνσεις (ύψος – βάση) και λει:

«Είναι ένα τρίγωνο και είναι γυρισμένο από το πλάι, ανάποδα και θα μετρήσουμε

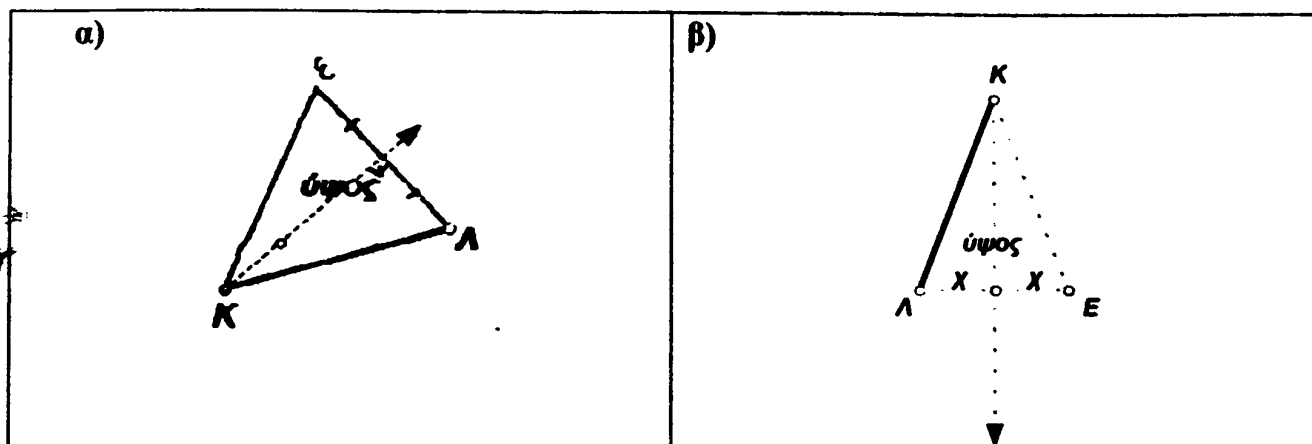
(Γυρίζει το χαρτί, ώστε ο φορέας του ύψους να γίνει κατακόρυφος)

Θα μετρήσουμεΠρέπει να βρούμε καταρχήν τη βάση, η βάση θα είναιθα ισαπέχει από το ύψος.

Αν το σημείο Λ από το ύψος αν είναι χ, τότε το αντίστοιχο, το άλλο μισό θα πρέπει να είναι κι αυτό χ. Γιατί το ύψος στα ισοσκελή τρίγωνα χωρίζει ένα ισοσκελές σε δύο ορθογώνια τρίγωνα. Δεν είμαι σίγουρος ακόμα, θέλω να δω αν θα μπορέσω...

Παίρνω μια κάθετη ευθεία στο ύψος από το σημείο Λ, το μετρώ και είναι 2 εκατοστά και θα φτιάξω άλλο ένα αντίστοιχο τμήμα 2 εκ.» (σχήμα 4.2β).





σχήμα 4.2 Η λύση του 2^{ου} προβλήματος, της 1^{ης} / 2^{ης} φάσης

Οι αντιδράσεις των μαθητών μας οδηγούν στις εξής σκέψεις:

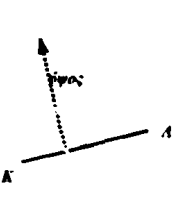
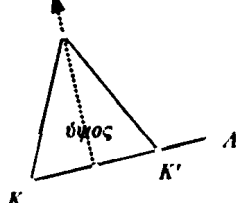
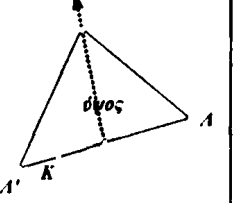
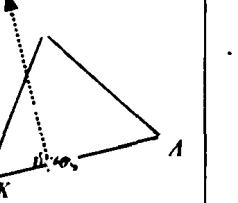
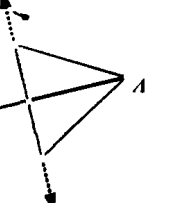
(α) υπάρχουν δύο καθοριστικές κατευθύνσεις, αυτές που ορίζονται από τη βάση και το ύψος – άξονα συμμετρίας του ισοσκελούς, με βάση την εικόνα πρότυπο και

(β) το ύψος έχει ένα ουσιαστικό ρόλο

Τα δύο αυτά στοιχεία διευκολύνουν την κατασκευή του ισοσκελούς ανεξάρτητα από προσανατολισμό. Το συμπέρασμα αυτό ελέγχεται μέσα από το ερώτημα 2^β.

Χαρακτηριστικό του ερωτήματος 2^β της 2^{ης} φάσης είναι πως οι συλλογισμοί των μαθητών ξεκινούν από μία προσπάθεια προσαρμογής με κάθε τρόπο της εικόνας - πρότυπο του ισοσκελούς τριγώνου στο δοθέν σχήμα. Οδηγός στην προσπάθειά τους είναι το ύψος. Όλοι οι μαθητές περνούν από αυτό το στάδιο – άλλοι νοερά, συζητώντας τις δυσκολίες, και άλλοι φτιάχνοντας τα γεωμετρικά σχήματα, όπως στο παράδειγμα που ακολουθεί (σχήμα 4.3) – για να καταλήξουν πως «το πρόβλημα δε λύνεται». Μόνο μετά από αρκετή σκέψη ή μετά από ρητή διαβεβαίωση των ερευνητών ότι το πρόβλημα λύνεται, οι μαθητές επαναλαμβάνουν τις προσπάθειες αναζήτησης μιας διαφορετικής λύσης.

Στο σχήμα 4.3 βλέπουμε ότι ο μαθητής δε διστάζει να αλλοιώσει, με κάθε τρόπο, τα δεδομένα του προβλήματος, προκειμένου να βρει μια λύση. Μάλιστα δοκιμάζει συστηματικά κάθε περίπτωση, ώστε να «ταιριάξει» το πρότυπο με τις δύο κάθετες διευθύνσεις που ορίζουν η πλευρά και το ύψος. Οι ενέργειές του καθορίζονται κατά κύριο λόγο από το πρότυπο και δευτερευόντως από τα δεδομένα του προβλήματος.

				
Πρόβλημα 2^β: Στο παραπάνω σχήμα ξεκινήσαμε την κατασκευή του ισοσκελούς τριγώνου ΚΕΛ, μπορείς να τη συμπληρώσεις;	Λύση: Ο μαθητής διαπιστώνει πως το ύψος δεν πέφτει στο μέσο του ΚΛ, οπότε			
	μικραίνει το μεγαλύτερο κομμάτι ή	μεγαλώνει το μικρότερο κομμάτι ή	φτιάχνει ισοσκελές με ύψος παράλληλο αυτού που του δόθηκε ή	αλλάζει ρόλους στην πλευρά και το ύψος, ώστε να πετύχει μεσοκάθετο, εδώ εγκαταλείπει τον προσανατολισμό

σχήμα 4.3 Οι διαδοχικές προσπάθειες ενός μαθητή να απαντήσει στο ερώτημα 2^β

Συγκρίνοντας τα δύο ερωτήματα 2^α και 2^β παρατηρούμε πως:

- στο πρώτο ερώτημα που δίνεται μέρος του προτύπου (η ίση πλευρά και το ύψος – άξονας συμμετρίας) δεν υπάρχει πρόβλημα για την αναγνώριση και ακολούθως την κατασκευή του ισοσκελούς, ενώ ο προσανατολισμός δεν αποτελεί παράγοντα δυσκολίας. Η ευκολία του ερωτήματος 2^α οφείλεται στο ότι υπάρχει η δυνατότητα να αποδοθούν στα στοιχεία του δοθέντος ημιτελούς γεωμετρικού σχήματος ρόλοι τέτοιои (ύψος, ίση πλευρά) ώστε να αναπαράγεται αυτομάτως η εικόνα- πρότυπο. Σε αυτή τη περίπτωση λέμε ότι υπάρχει ταύτιση του υπό κατασκευή σχήματος με την εικόνα πρότυπο, η οποία λειτουργεί ως σχήμα αναφοράς.
- στο δεύτερο ερώτημα, όπου οι μαθητές πρέπει να κατασκευάσουν το ισοσκελές δίχως να έχουν το ύψος – άξονα συμμετρίας, τα πράγματα περιπλέκονται. Οι μαθητές δυσκολεύονται να αποδεχθούν πως το δοθέν ύψος δεν ανήκει στο πρότυπο (οι δύο κάθετες κατευθύνσεις τους παραπέμπουν ευθέως σε βάση – ύψος). Όταν το πρόβλημα δε δίνει τον άξονα συμμετρίας (ερώτημα 2^β), οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσχέρειες στο να τοποθετήσουν την εικόνα πρότυπο. Σε μια τέτοια περίπτωση, η αλλαγή προσανατολισμού αποδεικνύεται παράγοντας που αυξάνει τη δυσκολία του προβλήματος. Η κατασκευή του ζητούμενου ισοσκελούς γίνεται μόνο από όσους μαθητές έχουν την ικανότητα να αναδομήσουν την αρχική νοερή τους εικόνα.

Το συμπέρασμα στο οποίο καταλήγουμε, με βάση τις λύσεις των μαθητών στο 2^ο πρόβλημα της 1^{ης} / 2^{ης} φάσης, είναι πως οδηγός των μαθητών στην αναγνώριση και κατασκευή του ισοσκελούς είναι η εικόνα πρότυπο, ενώ σημαντικό ρόλο παίζει το ύψος από την κορυφή του προτύπου που κυριαρχεί σαν αντιληπτικός άξονας συμμετρίας.

3. Το προηγούμενο συμπέρασμα προκύπτει επίσης και από την ανάλυση των λύσεων που δίνουν οι μαθητές στο 4^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης. Εδώ δε δίνεται ρητά το ύψος του ισοσκελούς αλλά υπονοείται. Καθώς τα μοναδικά σημεία που υπάρχουν στο δοθέν σχήμα είναι τα Σ, Ο η πρώτη ενέργεια των μαθητών είναι να τα συνδέσουν με ένα ευθύγραμμο τμήμα. Το ΣΟ στη συνέχεια παίζει το ρόλο του ύψους – άξονα συμμετρίας, στο οποίο βασίζεται η δημιουργία του ισοσκελούς, με βάση τη διάμετρο ΑΒ, την κάθετη στη ΣΟ. Το γεγονός ότι η θέση και ο προσανατολισμός του ΣΟ διαφέρουν στα τρία σχήματα που δίνονται ως προς την κατακόρυφο, δεν φαίνεται να επηρεάζει καθόλου τους μαθητές. Σε κάθε περίπτωση γυρίζουν το φύλλο έτσι, ώστε το σημείο Σ να έρθει στην κατακόρυφη θέση πάνω από το Ο και το πρόβλημα του προσανατολισμού αντιμετωπίζεται.

Στο 4^ο πρόβλημα μπορούν να δοθούν συνολικά τρεις διαφορετικές σωστές απαντήσεις, τρεις διαφορετικές περιπτώσεις κατασκευής ισοσκελούς με κορυφή το Σ¹, οι οποίες, στην ουσία είναι ο δυναμικός μετασχηματισμός της λύσης που αναφέραμε. Σε όλες η ΣΟ είναι ύψος – άξονας συμμετρίας, ενώ η βάση ολισθαίνει πάνω στον κύκλο κάθετα σε αυτήν, αναπαράγοντας το πρότυπο. Στη δεύτερη περίπτωση τα Α, Β είναι τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων από το Σ προς τον κύκλο, ενώ στην τρίτη η ΑΒ είναι μια τυχαία χορδή, κάθετη στη ΣΟ (σχήμα 4.16 στην ενότητα 4.1.2).

Υπόθεση 1^η: το σημαντικότερο στοιχείο της εικόνας – πρότυπο του ισοσκελούς είναι το ύψος – άξονας συμμετρίας

Η σύγκριση των δύο ερωτημάτων του 2^{ου} προβλήματος της 1^{ης} / 2^{ης} φάσης, που προηγήθηκε, αναδεικνύει τη σημασία του ύψους – άξονα συμμετρίας. Στο 2^α, όπου στο δοθέν ύψος δίνεται ο ρόλος του «ύψους – άξονα συμμετρίας», η εικόνα - πρότυπο σχεδιάζεται με βάση αυτό και ο προσανατολισμός δεν παίζει καθοριστικό ρόλο. Αντίθετα, στο 2^β όπου το ισοσκελές πρέπει να δημιουργηθεί δίχως τον άξονά του, η προσπάθεια τοποθέτησης της εικόνας – πρότυπο συχνά αποβαίνει άκαρπη. Η επιμονή των μαθητών να «τοποθετήσουν», στο συγκεκριμένο ερώτημα, την εικόνα πρότυπο με αφετηρία το ύψος υποδεικνύει πως το σημαντικό στοιχείο του προτύπου είναι το ύψος – άξονας συμμετρίας του.

Επίσης ο προσανατολισμός παίζει κάποιο ρόλο στη λειτουργία των μαθητών, όπως προκύπτει από το γεγονός ότι πολλοί μαθητές αισθάνονται την ανάγκη να γυρίσουν το χαρτί τους στις περιπτώσεις που το πρόβλημα² τους υποβάλλει το ισοσκελές σε θέση διαφορετική από την όρθια (άξονας συμμετρίας κατακόρυφος). Δηλαδή, ενώ είναι σε θέση να το αναγνωρίσουν και στην πλάγια θέση, προτιμούν να εργάζονται έχοντας το ισοσκελές όρθιο (ερώτημα 2^α). Παρ’

όλα αυτά, όταν το πρόβλημα δε δίνει τον άξονα συμμετρίας (ερώτημα 2^β), οι μαθητές δυσκολεύονται πολύ να οριοθετήσουν στο χαρτί την εικόνα πρότυπο. Σε μια τέτοια περίπτωση η αλλαγή προσανατολισμού αποδεικνύεται εξαιρετικά δύσκολη υπόθεση και γίνεται μόνο από τους μαθητές που αναδομούν την αρχική νοητική τους εικόνα.

Τη σύγκριση των δύο ερωτημάτων του 2^{ου} προβλήματος (2^α, 2^β) έκανε, μετά από ερώτησή μας, μια μαθήτρια:

Ερ. Ήταν πιο δύσκολο αυτό (2^β) από το προηγούμενο (2^α);

Μ. Όχι

Ερ. Ποιο σου φάνηκε πιο εύκολο;

Μ. Το πρώτο (2^α), γιατί είχα στο μυαλό μου τους άξονες συμμετρίας και με βοήθησε πιο πολύ,

Το συμπέρασμα είναι πως το ύψος – άξονας συμμετρίας του ισοσκελούς είναι το ισχυρό στοιχείο που οδηγεί στην αντίληψη και κατασκευή της εικόνας - πρότυπο και βοηθά να ξεπεραστούν τα όποια εμπόδια θέτει ο προσανατολισμός:

Υπόθεση 1⁷: η εικόνα – πρότυπο του ισοσκελούς αποτελεί των καθοριστικό παράγοντα για την αναγνώριση των επιμέρους στοιχείων του σχήματος.

Κατά την ανάλυση των στοιχείων το θέμα της αναγνώρισης του ισοσκελούς αναδεικνύεται ως κομβικό ζήτημα για την κατανόηση και τη λύση γεωμετρικών προβλημάτων στην κάθε φάση. Τα ευρήματα επιβεβαιώνουν την ύπαρξη περισσοτέρων του ενός ειδών αναγνώρισης (αντιληπτική, λεκτική, λειτουργική). Οι διαφορές που παρουσιάζονται είναι ποιοτικής φύσης και αφορούν στο βαθμό κατανόησης της κατάστασης που προσφέρει κάθε είδος αναγνώρισης, και κατά συνέπεια στις δυνατότητες επίλυσης του προβλήματος που δίνει στο μαθητή. Με την αναγνώριση και τη χρήση των γεωμετρικών σχημάτων, στην παρούσα μελέτη, συνδέεται το θέμα των ρόλων που αποδίδονται στα στοιχεία των σχημάτων.



Τα στοιχεία και τι υποδεικνύουν

Προκειμένου να γίνει φανερό από την αρχή της ανάλυσης τι ακριβώς εννοούμε λέγοντας «απόδοση ρόλων» παραθέτουμε δύο αποσπάσματα από τα πρωτόκολλα των μαθητών. Το πρώτο αναφέρεται στο 2^ο πρόβλημα της 1^{ης} φάσης, ενώ το δεύτερο στο 4^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης (σχήμα 4.4). Ανθολογούμε τα αποσπάσματα από τα πρωτόκολλα της ίδιας μαθήτριας (Ειρήνη), μιας μαθήτριας που με την αξιολόγηση του σχολείου θεωρείται πολύ χαμηλών επιδόσεων, για να φανεί πώς η απόδοση ρόλων τη βοηθά να αντιμετωπίσει προβλήματα που άλλοι, καλύτεροι μαθητές, που δε χρησιμοποιούν τους ρόλους, αδυνατούν να λύσουν.

Και στις δύο περιπτώσεις η μαθήτρια περιγράφει τη νοερή της εικόνα για το πρότυπο, προτού ζωγραφίσει οτιδήποτε στο χαρτί. Αναφέρεται προφορικά στα επιμέρους στοιχεία του γεωμετρικού σχήματος που πρόκειται να κατασκευάσει, δίνοντάς τους αντίστοιχους ρόλους. Αυτό συμβαίνει τόσο στην περίπτωση που δίνεται ένα μέρος του προτύπου (2^ο πρόβλημα, 1^η φάσης), όσο και στην εντελώς δυσμενή περίπτωση του κύκλου, που δεν δίνεται τίποτα που να θυμίζει το πρότυπο ισοσκελές (4^ο πρόβλημα, 3^η φάσης). Αξίζει να σημειωθεί πώς – με τη βοήθεια του προτύπου – η μαθήτρια κατορθώνει να αποδίδει ρόλους που είναι συμβατοί μεταξύ τους.

Στο πρώτο παράδειγμα το δοθέν ύψος³ θεωρείται από τη μαθήτρια ως το «ύψος – άξονας συμμετρίας», οπότε υποβάλλεται ο ρόλος της ΛΕ ως «βάση» και η δοθείσα ΚΛ αναγκαστικά γίνεται «ίση πλευρά» (σχήμα 4.4). Παρατηρούμε τη δημιουργία ενός συνεπούς συνόλου που φαίνεται πως βασίζεται σε μια νοερή εικόνα (πρότυπο).

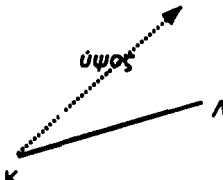
- 1 Μαθήτρια: η ΛΕ πρέπει να είναι βάση, για να είναι ύψος αυτή (η δοθείσα διακεκομμένη ημιευθεία) η πλευρά ΚΛ πρέπει να είναι ίση με αυτή την πλευρά (ΚΕ).
(μέχρις εδώ η μαθήτρια απέδωσε σε κάθε στοιχείο της νοερής της εικόνας το ρόλο που θα έχει)
(δική μας υπογράμμιση στην απομαγνητοφώνηση)

Στο δεύτερο παράδειγμα η απόδοση στην ΣΟ του ρόλου του «ύψους – άξονα συμμετρίας» προδικάζει τους ρόλους για όλα τα υπόλοιπα στοιχεία, όπως πχ. για την ΑΒ το ρόλο της «βάσης», ώστε η συνολική εικόνα να είναι συνεπής. Ο διάλογος που ακολουθεί γίνεται πριν η μαθήτρια κατασκευάσει οτιδήποτε στο χαρτί.

- 2 Μαθήτρια: Αν ενώσω αυτήν ως ύψος (ΣΟ)
Ερευνήτρια: πώς το φαντάστηκες και είπες «ως ύψος»;
Μ: γιατί έτσι θα σχηματιστούν δύο πλευρές ίσες, και θα φέρω και αυτήν έτσι (την διάμετρο)
Ερ: τι είναι το έτσι;
Μ: κάθετο
Ερ: τι είναι αυτή;
Μ: η βάση του τριγώνου και διάμεσος (εννοεί διάμετρος του κύκλου).



Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός πως στο συγκεκριμένο πρόβλημα, όπου το δοθέν σχήμα δεν παραπέμπει ούτε κατ' ελάχιστο στην εικόνα – πρότυπο του ισοσκελούς, η απόδοση ρόλου στη ΣΟ και η σταδιακή απόδοση ρόλων στα υπόλοιπα στοιχεία (βάση, πλευρές), βάσει των προσδοκιών που αναπτύσσονται, επιτρέπει ακόμα και σε αδύνατους μαθητές να κατασκευάσουν το ζητούμενο ισοσκελές.

 2^ο Πρόβλημα, 1^η Φάση: Στο σχήμα ξεκινήσαμε την κατασκευή του ισοσκελούς τριγώνου ΚΕΛ, μπορείς να τη συμπληρώσεις;	Σ O 4^ο Πρόβλημα, 3^η Φάση: Δίνεται κύκλος κέντρου O και σημείο Σ. Φτιάξε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΣAB, όπου τα A και B είναι σημεία του κύκλου.
δίνεται το ύψος – άξονας συμμετρίας Στο πρόβλημα αυτό, οι μαθητές δίνουν στο δοθέν ύψος το ρόλο του ύψους – άξονα συμμετρίας, οπότε η δοθείσα πλευρά ΚΛ παίρνει το ρόλο της ίσης πλευράς.	δεν δίνεται το ύψος – άξονας συμμετρίας Στο πρόβλημα αυτό, οι μαθητές ενώνουν αρχικά την ΣΟ και της δίνουν το ρόλο του ύψους – άξονα συμμετρίας, ο οποίος, με τη σειρά του, υπαγορεύει τη διάμετρο στο ρόλο της βάσης.

σχήμα 4.4 Η θετική συνεισφορά των ρόλων στην επίλυση των δύο προβλημάτων.

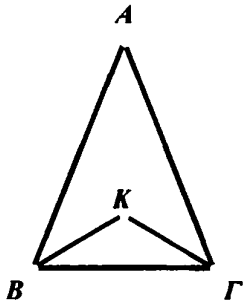
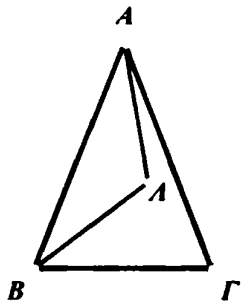
Η προφορική σκέψη των μαθητών δείχνει πως η αναγνώριση ενός στοιχείου αρχικά προκαλεί αλυσιδωτά την αναγνώριση μιας σειράς άλλων στοιχείων, που είτε υπάρχουν ήδη στο σχήμα είτε πρόκειται για στοιχεία που ο μαθητής σκοπεύει να του προσθέσει (όπως φαίνεται από τους διάλογους της προηγούμενης μαθήτριας, αλλά και πολλών άλλων). Συνήθως στα στοιχεία που αναγνωρίζονται αποδίδονται συγκεκριμένοι ρόλοι. Από τα λόγια των μαθητών φαίνεται καθαρά πως η αρχική τους επιλογή τους οδηγεί σε συγκεκριμένη κατανομή ρόλων, σε σχέση πάντα με την εικόνα – πρότυπο. Οι προσδοκίες που δημιουργεί ο πρώτος ρόλος που αποδίδεται δεν είναι εύκολο να αλλάξουν.

Στο παράδειγμα του σχήματος 4.3 φαίνεται καθαρά η εμμονή στις αρχικές επιλογές ρόλων. Από τις διαδοχικές προσπάθειες του μαθητή είναι φανερό πως αυτός απέδωσε εσφαλμένα στα δοθέντα στοιχεία τους ρόλους: «βάση» και «ύψος – άξονας συμμετρίας» και εμμένει σε αυτούς. Η επιλογή του αναπτύσσει συγκεκριμένες προσδοκίες (το ύψος να περνά από το μέσο της βάσης) που είναι φανερό πως προσπαθεί να τις ικανοποιήσει, δίχως θετικό αποτέλεσμα. Εφόσον οι αρχικοί ρόλοι αποδόθηκαν λάθος, είναι αδύνατον να ολοκληρώσει την εικόνα.

Προκειμένου να κάνει την κατασκευή ο μαθητής πρέπει να αποδεχθεί πως οι ρόλοι μπορεί να μην είναι οι σωστοί και να αποδώσει εκ νέου ρόλους, γεγονός που συχνά αποδεικνύεται εξαιρετικά δύσκολο.

Συνεπώς η απόδοση των ρόλων είναι ένα ισχυρό εργαλείο που επηρεάζει τη λύση προβλήματος θετικά ή αρνητικά, στο βαθμό που είναι σωστή ή όχι. Στα επόμενα θα προσπαθήσουμε να διερευνήσουμε τους παράγοντες εκείνους που μπορεί να οδηγήσουν σε λανθασμένη απόδοση ρόλων.

1. Στο 3^ο πρόβλημα της 1^{ης} φάσης (2.6), δίνεται ως πλαίσιο ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και ζητείται, σε δύο διαφορετικές συνθήκες, η κατασκευή ενός άλλου ισοσκελούς μέσα σε αυτό. Στο ερώτημα 3^α τα δύο τρίγωνα (δοθέν και ζητούμενο) έχουν την ίδια βάση ΒΓ και ίδιο άξονα συμμετρίας (σχήμα 4.5α). Η σύμπτωση αυτή έχει ως συνέπεια τη μεγάλη ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΚΒΓ, άρα την εύκολη αναγνώριση και κατασκευή του ζητούμενου ΚΒΓ. Στο ερώτημα 3^β η «ίση πλευρά» ΑΒ του δοθέντος ισοσκελούς ΑΒΓ πρέπει να γίνει «βάση» για το ζητούμενο ΛΑΒ ⁴ (σχήμα 4.5β). Η αλλαγή αυτή έχει ως αποτέλεσμα τα δύο ισοσκελή να έχουν διαφορετικούς άξονες συμμετρίας. Η μεσοκάθετος της ΑΒ θα είναι άξονας συμμετρίας στο ζητούμενο ΛΑΒ, ενώ είναι μεσοκάθετος της ίσης πλευράς ΑΒ στο δοθέν ΑΒΓ. Το ερώτημα 3^β συνεπώς χαρακτηρίζεται από το ότι υπάρχουν γεωμετρικά στοιχεία με δύο διαφορετικούς ρόλους, άλλον στο δοθέν τρίγωνο και άλλον στο ζητούμενο.

Λύση του προβλήματος 3 ^α της 1 ^{ης} / 2 ^{ης} φάσης	Λύση του προβλήματος 3 ^β της 1 ^{ης} / 2 ^{ης} φάσης
	

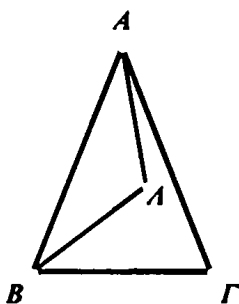
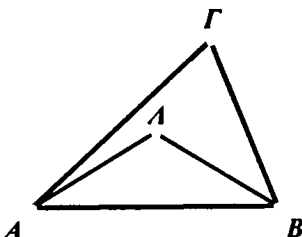
σχήμα 4.5 Ο βαθμός ομοιότητας της λύσης με τη δοθείσα εικόνα - πρότυπο

Η ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών έδειξε ότι

➤ στο ερώτημα 3^α οι μαθητές κατασκευάζουν χωρίς προβλήματα το ζητούμενο ισοσκελές ΚΒΓ. Η ευκολία οφείλεται στο γεγονός ότι τα στοιχεία του υπό κατασκευή σχήματος μπορούν να διατηρήσουν το ρόλο που είχαν στο αρχικό σχήμα. Σε αυτή τη περίπτωση θα μπορούσαμε να πούμε πως υπάρχει σύμπτωση του υπό κατασκευή σχήματος με το σχήμα αναφοράς (ΑΒΓ).

Το πρόβλημα είναι ακόμα πιο εύκολο, στο μέτρο που το σχήμα αναφοράς συμπίπτει με την εικόνα - πρότυπο του ισοσκελούς.

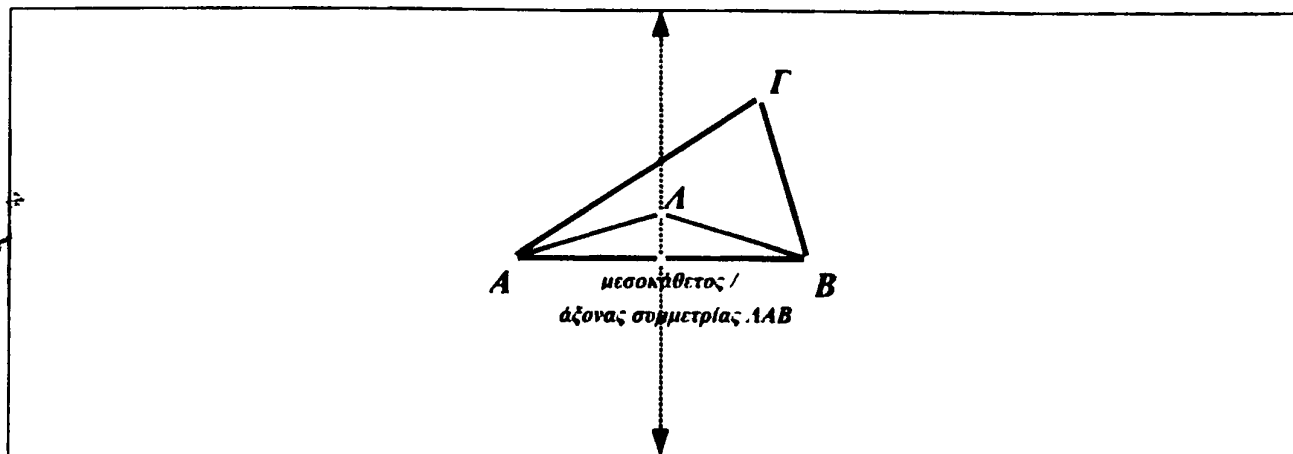
➤ στο ερώτημα 3^β οι μαθητές αντιμετωπίζουν πολλές δυσκολίες που οφείλονται κυρίως στο γεγονός ότι τα στοιχεία του υπό κατασκευή σχήματος δε διατηρούν το ρόλο που είχαν στο αρχικό σχήμα. Σε αυτή τη περίπτωση λέμε ότι δεν υπάρχει σύμπτωση ανάμεσα στο υπό κατασκευή σχήμα και το σχήμα αναφοράς (ΑΒΓ) (σχήμα 4.6).

	
στην περίπτωση που ο μαθητής βλέπει την ΒΓ οριζόντια, αναγνωρίζει εύκολα το ΑΒΓ ως ισοσκελές αλλά δε συμβαίνει το ίδιο με το ΛΑΒ	στην περίπτωση που ο μαθητής γυρνά το χαρτί και βλέπει την ΑΒ οριζόντια, συμβαίνει το αντίστροφο.

σχήμα 4.6 Ο προσανατολισμός ενός σχήματος, ως προς το μαθητή επηρεάζει την αναγνώρισή του

Ειδικότερα οι δυσκολίες που σχετίζονται με το ερώτημα 3^β μπορούν να αποδοθούν στους ακόλουθους λόγους:

- Στο ότι στα πλαίσια του ίδιου προβλήματος και προκειμένου να δοθεί λύση, στην πλευρά ΑΒ πρέπει να αποδοθούν δύο διαφορετικοί ρόλοι (: «ίση πλευρά» στο ΑΒΓ και «βάση» στο ΛΑΒ).
- Στο ότι τα δύο τρίγωνα (δοθέν και ζητούμενο) έχουν διαφορετικούς άξονες συμμετρίας (σχήμα 4.7). Συγκεκριμένα ο προσανατολισμός της εικόνας - πρότυπο που σηματοδοτείται από το ύψος - άξονα συμμετρίας και είναι κατακόρυφος στο δοθέν τρίγωνο ΑΒΓ, μεταβάλλεται στο ζητούμενο τρίγωνο ΛΑΒ.



σχήμα 4.7

Το σχήμα που κατασκευάζεται (ΛΑΒ) έχει διαφορετικό άξονα συμμετρίας από το σχήμα αναφοράς (ΑΒΓ)

Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στο ερώτημα 3^β μπορεί να είναι δυσκολίες αναγνώρισης, κατασκευής, ή αιτιολόγησης. Συγκεκριμένα οι περισσότεροι μαθητές, δεν αντιλαμβάνονται εύκολα ότι για να κατασκευάσουν το ισοσκελές ΛΑΒ χρειάζεται να φέρουν τη μεσοκάθετο του ΑΒ. Στην πλειοψηφία των περιπτώσεων οι μαθητές δε συνδέουν το ζητούμενο με τη μεσοκάθετο, παρά μόνο όταν γυρίσουν το χάρτι τους και δουν το πλάγιο τμήμα ΑΒ οριζόντιο (σχήμα 4.7). Η αλλαγή προσανατολισμού που επιχειρούν δείχνει την προσπάθειά τους να δημιουργήσουν σύμπτωση ανάμεσα στο σχήμα που θα κατασκευάσουν (ΛΑΒ) και στην εικόνα –πρότυπο. Ακόμα και τότε όμως δυσπιστούν.

Καθώς οι περισσότεροι μαθητές δίνουν το ρόλο: «μεσοκάθετος» αποκλειστικά στη μεσοκάθετο της βάσης του προτύπου, έχουν αναπτύξει την προσδοκία «η αντίστοιχη ευθεία να περνά από την κορυφή του ισοσκελούς». Μένοντας προσκολλημένοι στη εικόνα- πρότυπο⁵ περιμένουν πως «η μεσοκάθετος της ΑΒ θα περάσει από την απέναντι κορυφή Γ του τριγώνου». Το γεγονός ότι η προσδοκία τους δεν επαληθεύεται, τους δημιουργεί γνωστική σύγκρουση. Όπως λέει ένας μαθητής, «άμα φέρω κάθετη στο μέσο της ΑΒ..... αυτή δεν είναι μεσοκάθετος.....».

Για να αντεπεξέλθουν στη δυσκολία επιχειρούν διάφορες συμβιβαστικές λύσεις.

Μια τέτοια προσπάθεια συμβιβασμού παρακολουθούμε στο απόσπασμα που ακολουθεί. Πρόκειται για μια μαθήτρια με υψηλές ικανότητες η οποία προσπαθεί δίχως επιτυχία να κατασκευάσει τη μεσοκάθετο της ΑΒ, έτσι ώστε να περνά από την απέναντι κορυφή Γ. Θέλει να συνδυάσει τρεις περιορισμούς:

1. μια ευθεία που να περνά από το μέσο της ΑΒ,
2. να είναι κάθετη σε αυτήν και
3. να περνά από το σημείο Γ

αυτό όμως είναι αδύνατο. Έτσι κατασκευάζει διαδοχικά το τμήμα που συνδέει τα μέσα των πλευρών AB , AG (1^η προσπάθεια), το ύψος $ΓΔ$ (2^η προσπάθεια) και τη διάμεσο $ΓΝ$ (3^η προσπάθεια). Στην κάθε περίπτωση διαπιστώνει πως της λείπει κάποιος από τους τρεις περιορισμούς. Η κατάσταση είναι αδιέξοδη, αφού επιχειρεί να ταυτίσει στη μεσοκάθετο της AB δύο διαφορετικούς ρόλους, που υποβάλλουν τα δύο διαφορετικά πλαίσια ($ABΛ$, $ABΓ$) «μεσοκάθετος βάσης» στο $ABΛ$ και «μεσοκάθετος ίσης πλευράς» στο $ABΓ$.

M: να πάρω τα μέσα M, N των ίσων πλευρών, MN ενώνει τα μέσα, προσπαθούσα να βρω ένα σημείο,

δεν γίνεται... να πάρω ένα σημείο που να ισαπέχει από αυτά τα δύο (A και B) γιατί δεν μπορεί να θεωρηθεί σαν ύψος

(φτιάχνει το τμήμα MN , το οποίο περνά από το μέσο της AB , αλλά δεν είναι κάθετο σε αυτήν)

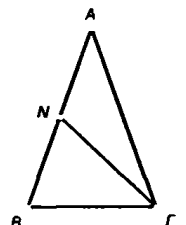
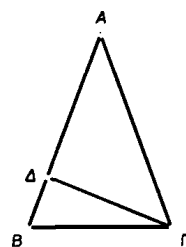
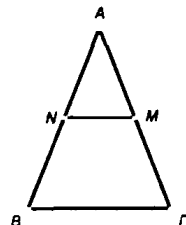
M: αν έφερνα το ύψος,

όχι, δεν βγαίνει μεσοκάθετος γιατί δεν είναι από την κορυφή του (τριγώνου $ABΓ$), δηλαδή σκέφτηκα να φέρω το ύψος ώστε να δημιουργηθεί μεσοκάθετος, αλλά δεν δημιουργείται.

(φτιάχνει την $ΓΔ$ κάθετη στην AB , αλλά το $Δ$ δεν είναι το μέσο της)

M: αν έφερνα τη διάμεσο για να υπολογίσω το μέσο N

(φτιάχνει τη διάμεσο $ΓΝ$ η οποία περνά από το μέσο της AB , αλλά δεν είναι κάθετη σε αυτήν)



Τέλος υπάρχουν μαθητές, που ενώ απεικονίζουν και κατασκευάζουν σωστά τη μεσοκάθετο της AB , εντούτοις αμφιβάλλουν για την ιδιότητα των σημείων της⁶ (μεσοκαθέτου), παρόλο που τη γνωρίζουν. Προκειμένου να επιβεβαιώσουν ότι τα τμήματα είναι ίσα ($ΛΑ = ΛΒ$) φτάνουν στο σημείο να μετρούν τις πλευρές $ΛΑ$, $ΛΒ$ ή να συγκρίνουν τρίγωνα. Άλλοι πάλι δεν μπορούν να πάρουν τυχαίο σημείο πάνω στη μεσοκάθετο⁷ και περιορίζονται στην αναζήτηση κάποιου συγκεκριμένου σημείου (όπως πχ του σημείου τομής των δύο μεσοκαθέτων της AB και της $ΒΓ$). Είναι αξιοσημείωτο πως οι ίδιοι μαθητές χρησιμοποιούν την ιδιότητα της μεσοκαθέτου στο α ερώτημα. Από τα παραπάνω γίνεται φανερό πως για τα παιδιά αυτά η ευθεία που κατασκευάζουν (κάθετη στο μέσο της AB) δεν μπορεί να «νομιμοποιηθεί» ως «μεσοκάθετος». Τελικά η ύπαρξη μιας κοινής⁸ πλευράς (AB) στα δύο τρίγωνα με διαφορετικό ρόλο στο καθένα δημιουργεί δυσκολίες στην απόδοση ρόλων και δυσχεραίνει τη λύση του προβλήματος.

Η ανάλυση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στο πρόβλημα 3^β μας οδηγεί στην ανίχνευση ενός παράγοντα που δυσχεραίνει τη λύση προβλήματος. Ήδη αναδείξαμε τη

σημασία του ύψους – άξονα συμμετρίας για την αντίληψη και κατασκευή του ισοσκελούς, ανεξάρτητα από προσανατολισμό (υπόθεση 1^β). Τώρα η προσοχή μας εστιάζει σε ένα θεμελιώδη μετασχηματισμό, τη συμμετρία. Ο άξονας σηματοδοτεί τη συμμετρία του ισοσκελούς και εξ αυτού αποκτά επαυξημένο ρόλο, σε σχέση με τα υπόλοιπα στοιχεία. Τα ευρήματα δείχνουν ότι ο βαθμός ομοιότητας ενός ισοσκελούς με την εικόνα πρότυπο είναι μεγάλος, όταν μπορούμε αντιληπτικά να ταυτίσουμε τους άξονες συμμετρίας τους. Συνέπεια αυτού είναι πως η γεωμετρική λειτουργία είναι ευκολότερη, όταν οι άξονες συμμετρίας των δύο υποσχημάτων ταυτίζονται. Η θέση μας επιβεβαιώνεται από την επιτυχία των μαθητών, τόσο στο πρόβλημα 3^α στο οποίο αναφερόμαστε, όσο και σε προβλήματα της 3^{ης} φάσης, στα οποία επαναλαμβάνονται ανάλογες ταυτίσεις συμμετρίας.

Για παράδειγμα στο 2^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης, όπου ζητούνται τρία διαφορετικά κατασκευαστικά σενάρια του ρόμβου, οι περισσότεροι μαθητές δημιουργούν το ρόμβο, εύκολα ξεκινώντας από το ισοσκελές τρίγωνο και ταυτίζοντας τις συμμετρίες των δύο γεωμετρικών σχημάτων. Η διαδικασία αυτή τους οδηγεί επίσης σε εύκολη (λεκτική) καταγραφή του σεναρίου (σχετικά με το 2^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης, λεπτομερής ανάλυση γίνεται στο κεφάλαιο 4.2).

Υπόθεση 1^δ: η αναγνώριση και η χρήση του ισοσκελούς σχετίζονται με τις πρωταρχικές και δευτερεύουσες δομές του γεωμετρικού σχήματος

Η αντιληπτική οργάνωση των γεωμετρικών σχημάτων είδαμε πως (2.7.1), επηρεάζει την αναγνώρισή τους και την απόδοση ρόλων στα επιμέρους στοιχεία τους. Αναλύοντας τα στοιχεία της έρευνας αναζητούμε ενδείξεις για τη σχέση ανάμεσα στην οργάνωση των σχημάτων σε πρωταρχικές και δευτερεύουσες δομές από τη μια, και την απόδοση ρόλου στα στοιχεία τους από την άλλη. Ακόμα διερευνούμε τους παράγοντες που δημιουργούν δυσκολίες στην ανάλυση των σχημάτων σε δευτερεύουσες δομές, καθώς και εκείνους που προκαλούν φαινόμενα αρνητικής επίδρασης των ρόλων.

Ειδικότερα κατά την ανάλυση των ευρημάτων εστιάζουμε στους εξής παράγοντες:

α) στοιχεία με διπλό ρόλο: στα γεωμετρικά σχήματα που περιέχουν δευτερεύουσες δομές είναι πιθανό κάποιο στοιχείο (ευθύγραμμο τμήμα ή γωνία) τους να ανήκει ταυτόχρονα σε δύο υποσχήματα και να έχει διαφορετικό ρόλο στο καθένα. Όπως θα φανεί στα επόμενα μια τέτοια κατάσταση είναι πηγή δυσκολιών.

β) στοιχεία που έχουν διαφορετικό ρόλο, από το ρόλο ενός μέρους τους: στις δευτερεύουσες δομές επιτρέπεται το μέρος ενός τμήματος να ανήκει σε διαφορετική δευτερεύουσα δομή από

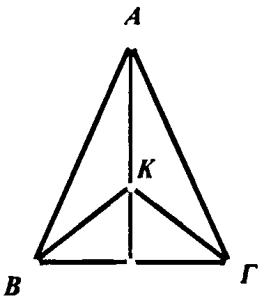
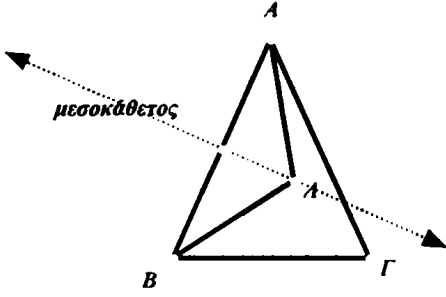
ολόκληρο το τμήμα. Έτσι εμφανίζονται στοιχεία τα οποία έχουν διαφορετικό ρόλο από το ρόλο ενός μέρους τους. Από ψυχολογική άποψη καταστάσεις όπως οι διπλοί ρόλοι δεν είναι εύκολες στο χειρισμό τους, καθώς απαιτούν εννοιολογική κατανόηση.

Στα επόμενα θα παρουσιάσουμε τα στοιχεία που σχετίζονται με τους παράγοντες αυτούς και ελέγχουν την αλήθεια της υπόθεσης 1^δ.

Τα στοιχεία και τι υποδεικνύουν

1. Συγκρίνοντας τα δύο ερωτήματα του 3^{ου} προβλήματος της 1^{ης} φάσης, ως προς το θέμα της απόδοσης ρόλων, οδηγούμαστε στις σκέψεις που συμπυκνώνονται στον επόμενο πίνακα 4.2. Οι παρατηρήσεις αντικατοπτρίζουν τις απαντήσεις της συντριπτικής πλειοψηφίας των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα.

Πίνακας 4.2
Σύγκριση των ερωτημάτων 3^α και 3^β ως προς την απόδοση ρόλου

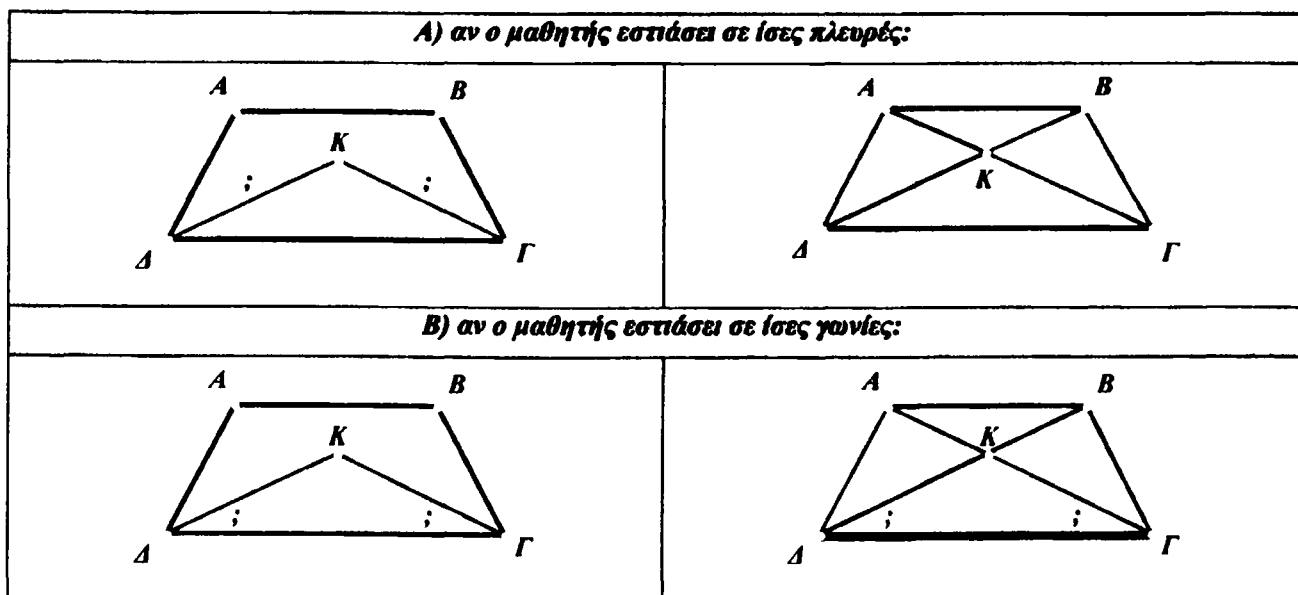
 (ερώτημα 3^α)	 (ερώτημα 3^β)
Παρατηρήσεις	
Στην περίπτωση 3^α τα γεωμετρικά στοιχεία : βάση BΓ και μεσοκάθετος της BΓ έχουν τον ίδιο ρόλο στα δύο υπό σχήματα	Στην περίπτωση 3^β, • η πλευρά AB έχει το ρόλο της « ίσης πλευράς » στο ABΓ και το ρόλο της « βάσης » στο LAB • η μεσοκάθετος της AB είναι μεσοκάθετος της ίσης πλευράς στο ABΓ και μεσοκάθετος της βάσης στο LAB δηλαδή, τα γεωμετρικά στοιχεία που αναφέραμε έχουν διαφορετικό ρόλο στα δύο υπό σχήματα

Βλέπουμε πως η ύπαρξη στοιχείων που έχουν τον ίδιο ρόλο στα δύο τρίγωνα (δοθέν και ζητούμενο), όπως στο 3^α, δε δημιουργεί δυσκολίες και το πρόβλημα λύνεται εύκολα από τους μαθητές. Σε αντίθεση, όταν κάποιο στοιχείο έχει διαφορετικό ρόλο σε δύο υπό σχήματα του ίδιου σχήματος, όπως στο 3^β, τότε εμφανίζονται εμπόδια. Φαίνεται πως όταν το ίδιο

γεωμετρικό στοιχείο έχει δύο τελείως διαφορετικές μαθηματικές εκφράσεις σε διαφορετικά πλαίσια (σημειωτικά δίκτυα), είναι δύσκολο για κάποιους μαθητές να εστιάζουν διαδοχικά στο κάθε πλαίσιο και να δίνουν το ρόλο του στοιχείου αυτόνομα. Συνεπώς ένας παράγοντας που δυσχεραίνει τη λύση προβλήματος είναι η ύπαρξη κάποιου στοιχείου με ρόλο διαφορετικό στο κάθε υπό σχήμα.

2. Τα στοιχεία που έχουν διαφορετικό ρόλο από το ρόλο ενός μέρους τους είναι μία κατάσταση δύσκολη, που φαίνεται πως οι μαθητές την αποφεύγουν. Λίγοι είναι αυτοί που συνειδητά θα κατασκευάσουν μία τέτοια περίπτωση. Την αντιμετωπίζουν αναγκαστικά μόνο όταν προκύψει, όπως στο 3^ο πρόβλημα, της 1^{ης} φάσης. Στα πλαίσια αυτά μας προβληματίζει μία λύση που δόθηκε στο 3^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης. Συγκεκριμένα όσοι μαθητές επιχειρούν να σχηματίσουν ισοσκελή τρίγωνα φέρνοντας τις διαγώνιους του τραpezίου, συναντούν εμπόδια, συνήθως ανυπέρβλητα, στην απόδειξη. Το γεγονός αποκαλύπτει την ύπαρξη μίας πηγής δυσκολιών, την οποία προσπαθούμε να εντοπίσουμε αναλύοντας τα βήματα της απόδειξης.

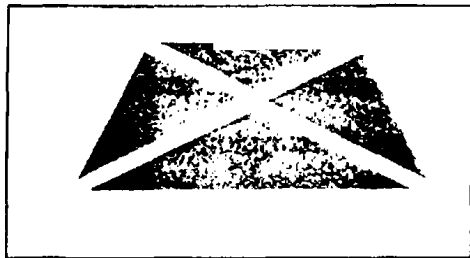
Οι διαγώνιες του τραpezίου σχηματίζουν το τρίγωνο $K\Delta\Gamma$ ⁸. Όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα 4.8, για να αποδειχθεί ότι το $K\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές, υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις :



σχήμα 4.8 Ανάλυση μιας λύσης του 3^{ου} προβλήματος της 3^{ης} φάσης

Στην Α) περίπτωση, για να δείξει ο μαθητής ότι το τρίγωνο $K\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές, πρέπει να δείξει ότι $K\Delta = K\Gamma$. Τα τμήματα $K\Delta$, $K\Gamma$ ανήκουν αντίστοιχα στα τρίγωνα $K\Delta\Delta$, $K\Gamma\Gamma$ τα οποία προσπαθεί να συγκρίνει. Σύμφωνα με τα κριτήρια των πρωταρχικών δομών η αυθόρμητη επιλογή του μαθητή είναι σωστή (παρ' όλες τις δυσκολίες που συναντά στην απόδειξη, λόγω του ότι απαιτούνται δύο συγκρίσεις).

Πρώτον ο μαθητής χωρίζει το τραπέζιο σε πρωταρχικές δομές επιφάνειας και δεύτερον οι πλευρές ΚΔ, ΚΓ που θέλει να αποδείξει ίσες, είναι ταυτόχρονα πλευρές (αντίστοιχα) των τριγώνων που συγκρίνει, πράγμα φυσιολογικό γι' αυτόν.



σχήμα 4.9 Ανάλυση του τραπεζίου σε πρωταρχικές δομές επιφάνειας απλή για τον ειδικό).

Προτίμησαν να εγκαταλείψουν την προσπάθεια. Ποιος είναι ο λόγος; Ποιες είναι οι δυσκολίες που η συγκεκριμένη θεώρηση του σχήματος παρουσιάζει για το μαθητή;

Στην περίπτωση Β) συμβαίνουν κάποιες καταστάσεις, τις οποίες οι μαθητές φαίνεται πως αποφεύγουν, δηλαδή:

- το τραπέζιο χωρίζεται σε δευτερεύουσες δομές επιφάνειας, οι οποίες έχουν αλληλο - επικαλυπτόμενα μέρη και
- οι πλευρές ΚΔ, ΚΓ του τριγώνου ΚΔΓ είναι μέρη των πλευρών των τριγώνων που συγκρίνει (αντίστοιχα συμβαίνουν και για τις γωνίες. Συγκεκριμένα, η γωνία ΚΓΔ ανήκει εξολοκλήρου στο τρίγωνο ΑΔΓ, ενώ είναι μέρος της γωνίας του τριγώνου ΒΓΔ).

Με άλλα λόγια οι μαθητές πρέπει να αναγνωρίσουν κάποιο γεωμετρικό στοιχείο που έχει ένα ρόλο σε ένα πλαίσιο (σημειωτικό δίκτυο), ενώ ένα μέρος του έχει άλλο ρόλο σε ένα διαφορετικό πλαίσιο. Προκειμένου να λυθεί το πρόβλημα οι μαθητές πρέπει όχι μόνο να αναγνωρίσουν την παραπάνω ιδιομορφία, αλλά και να μεταφέρουν ιδιότητες από το ένα πλαίσιο στο άλλο με τη βοήθεια του κοινού τους στοιχείου.

Το παράδειγμα αναδεικνύει την επικράτηση των ρόλων των πρωτευουσών δομών εις βάρος άλλων, αποδοτικότερων ίσως, ρόλων, με αποτέλεσμα την αδυναμία απόδειξης ότι το ΚΔΓ είναι ισοσκελές. Σύμφωνα με τα στοιχεία της έρευνας η επικράτηση φαίνεται στις προτιμήσεις των μαθητών οι οποίοι εμμένουν στην περίπτωση που κάποιο στοιχείο ανήκει σε δύο υπό σχήματα:

- να ανήκει ολόκληρο και στα δύο, ώστε να μπορούν να αποδώσουν ρόλο σε όλο το στοιχείο και όχι σε μέρος του
- να έχει τον ίδιο ρόλο και στα δύο υπό σχήματα, δηλαδή κάθε στοιχείο να έχει ένα μόνο ρόλο.



Τα παραπάνω επιβεβαιώνουν την υπόθεση πως η αναγνώριση των στοιχείων ενός γεωμετρικού σχήματος επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό από τις πρωταρχικές και δευτερεύουσες δομές και τους ρόλους που υποβάλλουν. Τα ευρήματα δείχνουν πως οι μαθητές εμμένουν στους αρχικούς ρόλους, δηλαδή δείχνουν μία προτίμηση ή / και εργάζονται ευκολότερα, με στοιχεία που μεταφέρονται ολόκληρα από ένα υπό σχήμα σε άλλο, διατηρώντας τον ίδιο ρόλο. Αντίθετα φαίνεται πως ο διπλός ρόλος ενός γεωμετρικού στοιχείου ή στοιχείου και μέρους του επηρεάζει αρνητικά ή ακυρώνει την αναγνώριση και τη χρήση του.

Υπόθεση 1^ε: η αναγνώριση και η χρήση του ισοσκελούς σχετίζονται με την αλλαγή διάστασης (των σχηματικών μονάδων)

Τα στοιχεία και τι υποδεικνύουν

1. Η ανάλυση των ευρημάτων από το 1^ο πρόβλημα της 1^{ης} φάσης δείχνει πως οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται ούτε χρησιμοποιούν όλοι το ισοσκελές στις ίδιες διαστάσεις (1D ή 2D). Ο ισχυρισμός στοιχειοθετείται από την ανάλυση του τρόπου⁹ με τον οποίο οι μαθητές κατασκευάζουν, στρέφουν ή συγκρίνουν τα ισοσκελή.

Συγκεκριμένα ο τρόπος κατασκευής του ισοσκελούς αποκαλύπτει αν οι μαθητές βλέπουν το τρίγωνο συνολικά ως εικόνα (2D) και μένουν στο περίγραμμα ή αν βλέπουν και τα στοιχεία που το αποτελούν (1D). Η συνολική αντιμετώπιση προβάλλει συνήθως με την κατασκευή δύο ίσων πλευρών (με χάρακα ή διαβήτη) και αντιστοιχεί στον ορισμό του ισοσκελούς. Το αποτέλεσμα είναι μία σχηματική ενότητα 2D, αφού περιλαμβάνει μόνο το κλειστό περίγραμμα. Αντίθετα η κατασκευή με τη βοήθεια της μεσοκαθέτου γίνεται αντιληπτή ως αναπαράσταση σχηματικών μονάδων 1D. Αποκαλύπτει συνεπώς την ικανότητα των μαθητών για αλλαγή διάστασης (οδηγίες κατασκευής 1.3.4).

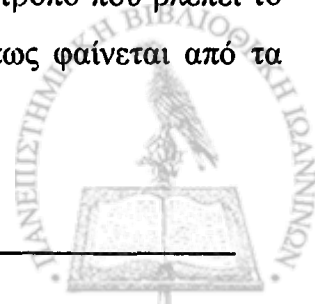
Το γεγονός ότι οι μαθητές διατηρούν συνήθως τον ίδιο σταθερό τρόπο για την κατασκευή του ισοσκελούς, μαζί με τη συνήθειά τους να γυρίζουν το χαρτί, τους επιτρέπει να στρέφουν το τρίγωνο δίχως ιδιαίτερες δυσκολίες. Αποκαλυπτικός είναι ο τρόπος που λειτουργούν, δηλαδή πώς οι μαθητές ξεπερνούν τα εμπόδια που βάζει ο προσανατολισμός, ανάλογα με τη διάσταση στην οποία αναγνωρίζουν το ισοσκελές. Εκείνοι που βλέπουν το ισοσκελές συνολικά, ως εικόνα (2D), το στρέφουν με τον τρόπο που στρέφουμε ένα υλικό αντικείμενο⁹. Αυτοί που βλέπουν και τα επιμέρους στοιχεία (1D) που αποτελούν το ισοσκελές, για να το στρέψουν στηρίζονται αποκλειστικά στο από την κορυφή ύψος ΑΔ, που λειτουργεί ως ασυνείδητος άξονας συμμετρίας¹⁰.

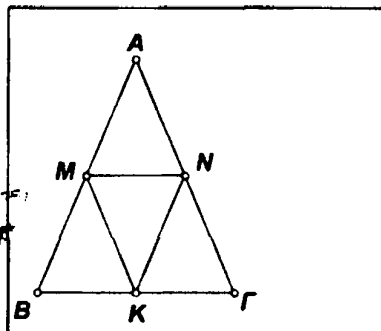
Τέλος ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές συγκρίνουν τα τρίγωνα αποκαλύπτει επίσης τη διάσταση στην οποία βλέπουν το ισοσκελές. Η σύγκριση, δηλαδή το να βρεθεί αφαιρετικά το κοινό χαρακτηριστικό διαφόρων αντικειμένων, αποτελεί δραστηριότητα που αποκαλύπτει τον τρόπο σκέψης των μαθητών. Ο λόγος είναι πως απαιτεί ένα υψηλότερο επίπεδο διανοητικής δραστηριότητας, σε σχέση με την απλή υπόδειξη αντιληπτικών διαφορών, γι' αυτό και ο εντοπισμός του κατάλληλου χαρακτηριστικού, ως προς το οποίο θα γίνει η σύγκριση, δεν είναι πάντα εύκολος για το μαθητή. Για παράδειγμα μία μαθήτρια που ισχυρίζεται πως «αυτό το τρίγωνο είναι μεγαλύτερο, ενώ αυτό είναι μικρότερο από το δοθέν», όταν της ζητείται να διευκρινίσει ως προς τι είναι πιο μεγάλα / μικρά τα τρίγωνα που φτιάχνει, απαντά «....ως προς το εμβαδόν», δηλαδή, συνολική αντίληψη 2D.

Οι ευκολότερες συγκρίσεις γίνονται στην περίπτωση των ποσοτικών διαφορών και είναι της μορφής «αυτό έχει μεγαλύτερη βάση από το δοθέν» ή «αυτό έχει ίσες πλευρές 5 εκατοστά, ενώ αυτό που δόθηκε έχει...», ή «αυτό έχει μικρότερη βάση και μεγαλύτερο ύψος», ή «έχουμε κάνει και τα 3 είδη τριγώνων, στα οποία μπορεί η τρίτη πλευρά να είναι μικρότερη, ίση ή μεγαλύτερη και οι άλλες δύο ίσες», δηλαδή αντίληψη 1D.

Καθώς η απαιτούμενη νοητική λειτουργία για τη σύγκριση είναι σύνθετη, υπάρχει μεγάλη δυσκολία, η οποία εμφανίζεται τόσο σε μαθητές που κάνουν λάθος τον ορισμό όσο και σε άλλους που τον γνωρίζουν. Οι πρώτοι, ενώ δε γνωρίζουν με ακρίβεια τον ορισμό, έχουν εικόνα για το ισοσκελές τρίγωνο και το κατασκευάζουν, αλλά βλέπουν όλα τα ισοσκελή ως «τα ίδια». Πιστεύουν πως «αν κάνω 5 ίδια τρίγωνα, δε θα διαφέρουν σε τίποτα από το ΑΒΓ.....Είναι όλα ισοσκελή, οπότε δεν έχουν διαφορές» και επιμένουν στην άποψή τους, παρά το γεγονός ότι κατασκευάζουν διαφορετικά ισοσκελή. Οι ομοιότητες / διαφορές που αναγνωρίζουν οι συγκεκριμένοι μαθητές αναφέρονται στη μορφή, δηλαδή αντίληψη 2D. Με τον ίδιο τρόπο μπορεί να αντιλαμβάνονται το ισοσκελές και μαθητές οι οποίοι ενώ γνωρίζουν τον ορισμό, το βλέπουν σαν ολότητα και έτσι δεν είναι ικανοί να εντοπίσουν διαφορές, δεδομένου ότι όλα τα ισοσκελή απορρέουν από τον ίδιο ορισμό. Μαθητές που ανήκουν σε αυτή την περίπτωση ισχυρίζονται πως «όλα τα ισοσκελή είναι ίδια, απλώς θέλουμε να τα βρούμε με διαφορετικούς τρόπους το καθένα....». Έτσι η αδυναμία συγκρότησης κριτηρίου, σύγκρισης των ισοσκελών τους οδηγεί στο να θεωρούν ως κριτήριο διαφοράς τον τρόπο κατασκευής τους.

2. Σύμφωνα με τα στοιχεία, ο κάθε μαθητής έχει το δικό του τρόπο να αναγνωρίζει και να χρησιμοποιεί το ισοσκελές, σε 1D ή 2D. Όμως το να κρατά σταθερό τον τρόπο που βλέπει το σχήμα και την οργάνωσή του σε κάθε πρόβλημα είναι μειονέκτημα, όπως φαίνεται από τα επόμενα δύο παραδείγματα.





σχήμα 4.10 Το σχήμα του 1^{ου} προβλήματος, της 3^{ης} φάσης

1. Το 1^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης δίνει επίσης την ευκαιρία να αντιληφθούμε τη διάσταση στην οποία οι μαθητές αντιλαμβάνονται το ισοσκελές. Στο σχήμα που το συνοδεύει (σχήμα 4.10), το ισοσκελές τρίγωνο ABΓ είναι χωρισμένο σε τέσσερα μικρότερα ισοσκελή και ζητείται η σχέση που συνδέει το ABΓ με ένα από τα μικρά, το AMN. Οι μαθητές που κατανοούν το σχήμα σε επίπεδο 1D, αναγνωρίζονται από τον τρόπο με τον οποίο κάνουν τη σύγκριση των τριγώνων ABΓ και AMN.

Εστιάζουν στις πλευρές και συνήθως ισχυρίζονται πως «αφού έχουμε τα μέσα των πλευρών, προφανώς το τρίγωνο ABΓ χωρίζεται στη μέση. Άρα το AMN είναι το μισό του ABΓ». Παρασύρονται δηλαδή από τη σχέση των πλευρών (1D) και την επεκτείνουν στα τρίγωνα (2D). Αντίθετα οι μαθητές που κατανοούν το σχήμα σε επίπεδο 2D, αντιμετωπίζουν το ισοσκελές ως δομικό στοιχείο του παραλληλογράμμου και διακρίνουν εύκολα τη σχέση 1:4 ανάμεσα στα ζητούμενα τρίγωνα. Στην περίπτωση αυτή η αντιμετώπιση του προβλήματος σε επίπεδο 2D πλεονεκτεί, δίχως να συμβαίνει το ίδιο πάντα. (πέραιτέρω ανάλυση του θέματος γίνεται στα Ευρήματα 3).

2. Η επίδραση που έχει η διάσταση στην αναγνώριση και τη χρήση του ισοσκελούς και το γεγονός ότι το κάθε πρόβλημα θέλει τη δική του αντιμετώπιση (ως προς τη διάσταση) για να λυθεί φαίνεται από το επόμενο χαρακτηριστικό παράδειγμα. Αυτό αφορά στον τρόπο με τον οποίο μια μαθήτρια αντιμετωπίζει το ερώτημα 3^β, του 3^{ου} προβλήματος της 1^{ης} φάσης. Πρόκειται για μία πολύ αδύνατη μαθήτρια, σύμφωνα με την αξιολόγηση του σχολείου, η οποία όμως παρουσιάζει μια αξιοσημείωτη ικανότητα να μετασχηματίζει τις νοερές της εικόνες στο μυαλό, να εξετάζει τα αποτελέσματα των ενεργειών της πάνω στις νοερές εικόνες και να προβλέπει τις συνέπειες. Το σχήμα το κατασκευάζει στο τέλος, αφού έχει δοκιμάσει διάφορες επιλογές νοερά. Οι ικανότητες αυτές της μαθήτριας, η ευκολία με την οποία συζητά τις σκέψεις της σε κάθε στάδιο, καθώς και η μη λεκτική της συμπεριφορά (κινήσεις των χεριών) μας επιτρέπουν να έχουμε λεπτομερείς και σε βάθος πληροφορίες για τη σκέψη της.

Προκειμένου να βρει ένα σημείο Λ, εσωτερικό του ισοσκελούς τριγώνου ABΓ, τέτοιο ώστε το ΛAB να είναι ισοσκελές, η μαθήτρια κάνει διαδοχικά τις σκέψεις, που φαίνονται στο ακόλουθο απόσπασμα και εικονογραφούνται στο σχήμα 4.11 (Ειρήνη, Φ1, 3):

M: δεν γίνεται να πάρουμε άλλο τρίγωνο πάνω σ' αυτό ε; (απέξω);

Ερ: ναι, αλλά σου ζητάει εσωτερικό, θα κάνεις την αντίστοιχη δουλειά από μέσα....

M: ναι, αλλά δεν βγαίνει....

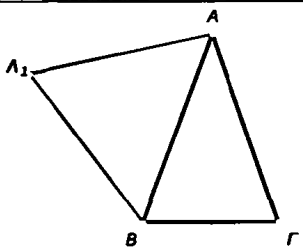
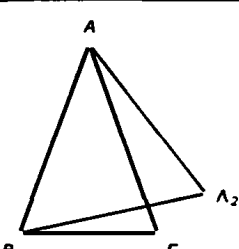
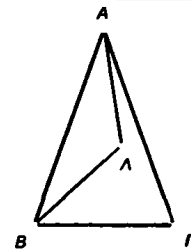
Ερ: γιατί;

M: θα βγει και πάλι έξω, από δω (δείχνει προς τη μεριά του ΑΓ)



Ερ: δεν μπορείς να το περιορίσεις ώστε να είναι μέσα;

Μ: αν,δεν μπορώ να καταλάβω πώς να μπορέσω να φτιάξω μέσα στο τρίγωνο αυτό, ώστε να είναι ισοσκελές, να πάρω το μέσον... (μετά φέρνει την κάθετη)

1 ^η προσπάθεια	2 ^η προσπάθεια	3 ^η προσπάθεια
		
Στην αρχή φαντάζεται και περιγράφει κουνώντας τα χέρια της, ότι το ζητούμενο ισοσκελές θα βρίσκεται έξω από το ABΓ, στα αριστερά του AB, όπως στο σχήμα το Λ₁AB.	Κατόπιν, φαντάζεται το τρίγωνο να γυρίζει από την άλλη πλευρά και η κορυφή του να βρίσκεται πάλι έξω από το ABΓ, όπως το Λ₂BΓ. (προφανώς το τρίγωνο στρέφεται γύρω από την AB και μένει αμετάβλητο ως προς το μέγεθός του: αντίληψη 2D).	Στην τρίτη της προσπάθεια, φαίνεται πως ασυνείδητα αποδεσμεύεται από ολόκληρη τη μορφή του ισοσκελούς και θυμάται τον τρόπο με τον οποίο το κατασκευάζει (μεσοκάθετος), οπότε περνάει σε αντίληψη 1D και οδηγείται στη λύση.

σχήμα 4.11 Οι διαδοχικές προσπάθειες μιας μαθήτριας για τη λύση του 3^{ου} προβλήματος της 1^{ης} φάσης

Οι διαδοχικές σκέψεις της μαθήτριας μας πληροφορούν για την αντίληψή της σχετικά με το ισοσκελές. Στις δύο πρώτες προσπάθειες επιχειρεί να αντιμετωπίσει την κατασκευή σε επίπεδο 2D δίχως αποτέλεσμα, γιατί βλέποντας το τρίγωνο συνολικά, δεν μπορεί να το προσαρμόσει στους περιορισμούς του προβλήματος (εδώ πρέπει η κορυφή Λ να βρίσκεται στο εσωτερικό του ABΓ). Στην τρίτη προσπάθεια αρχικά φαίνεται ότι η μαθήτρια βρίσκεται σε αδιέξοδο λέγοντας «δεν μπορώ να καταλάβω πώς να μπορέσω να φτιάξω μέσα στο τρίγωνο αυτό, ώστε να είναι ισοσκελές». Η αναφορά στο «να φτιάξω» στρέφει ασυνείδητα την προσοχή της στις κατασκευαστικές οδηγίες που χρησιμοποιεί σταθερά και είναι «η κάθετη στο μέσο», οπότε συνεχίζει «να πάρω το μέσον...» και κάνει την κατασκευή σε επίπεδο 1D.

Το συγκεκριμένο παράδειγμα μας δείχνει πως το πρόβλημα δεν είναι δυνατόν να λυθεί σε επίπεδο 2D και η αλλαγή διάστασης είναι επιβεβλημένη. Ακόμα πως στην περίπτωση που δεν υπάρχει η ευελιξία στη νοερή απεικόνιση για να δει το σχήμα και την οργάνωσή του με ένα διαφορετικό τρόπο, η εσωτερική κίνηση από την επικρατούσα εικόνα 2D στα στοιχεία της 1D μπορεί να γίνει και από μια άλλη λειτουργία, την κατασκευή¹¹. Σε κάθε περίπτωση, η λύση του προβλήματος προκύπτει από την αλλαγή της διάστασης.



Τελικά η αποτελεσματικότητα στη λύση προβλήματος συνδέεται με την ευελιξία του μαθητή να αντιμετωπίζει το σχήμα, στην κάθε περίπτωση, στη διάσταση που τον οδηγεί στην απλούστερη λύση

Συμπεράσματα

Η δομική ανάλυση των στοιχείων σε τοπικό επίπεδο έχει στο επίκεντρό της το γνωστικό Σχήμα του ισοσκελούς τριγώνου (ΣΙΤ). Αυτό, σύμφωνα με τη θεωρία, δημιουργείται γύρω από την αντίστοιχη σχηματική έννοια και περιλαμβάνει τον ορισμό και την εικόνα του ισοσκελούς. Τα στοιχεία δείχνουν πως αυτά τα δύο συστατικά δεν συνδέονται λειτουργικά σε κάθε μαθητή, παρόλο που επεμβαίνουν ασυνείδητα σε όλες τις ενέργειές του.

Για το σχηματισμό της εικόνας της σχηματικής έννοιας σημαντικό ρόλο παίζουν οι εμπειρίες των μαθητών και τα παραδείγματα που συναντούν στο σχολείο ή αλλού. Τα παραδείγματα μιας γεωμετρικής έννοιας, που δίνονται στους μαθητές παρουσιάζουν συνήθως μία συγκεκριμένη μορφή. Έτσι οι μαθητές οδηγούνται στη δημιουργία της εικόνας – πρότυπο της έννοιας, ως βασικού στοιχείου της εικόνας της. Για παράδειγμα στο σχολικό βιβλίο της Γεωμετρίας όλα τα ισοσκελή τρίγωνα που εμφανίζονται στη θεωρία ή στις ασκήσεις έχουν τη μορφή του προτύπου. Δεν υπάρχει ούτε ένα διαφορετικό ισοσκελές τρίγωνο.

Ο κομβικός ρόλος της εικόνας πρότυπο για τη δημιουργία της εικόνας του ισοσκελούς και κατ' επέκταση του ΣΙΤ προκύπτει και από την παρούσα έρευνα. Δύο παράγοντες επιδρούν στη δυναμικότητα του προτύπου και βελτιώνουν τις ικανότητες του μαθητή σχετικά με την αναγνώριση και την κατασκευή του ισοσκελούς. Ο πρώτος αφορά στο ύψος – άξονα συμμετρίας του ισοσκελούς, το οποίο ενσωματώνεται στο πρότυπο, ενώ ο δεύτερος αφορά στην απόδοση ρόλων στα στοιχεία του προτύπου.

Το ύψος – άξονας συμμετρίας είναι το ισχυρό στοιχείο του προτύπου, με βάση το οποίο ο μαθητής φέρνει νοητά στον ίδιο προσανατολισμό το πρότυπο με το ερέθισμα, ταυτίζοντας τους άξονες συμμετρίας τους, ώστε να τα συγκρίνει. Με τη βοήθειά του αναγνωρίζεται ή κατασκευάζεται το πρότυπο σε οποιαδήποτε θέση. Ο ρόλος του στο ΣΙΤ είναι επαυξημένος, καθώς στρέφει την προσοχή μας σε ένα θεμελιώδη μετασχηματισμό, τη συμμετρία. Δηλαδή βοηθά στο πέρασμα από τοπικές σε συνολικές θεωρήσεις.

Ιδιαίτερη σημασία στη γεωμετρική λειτουργία έχουν οι ρόλοι που αποδίδονται στα στοιχεία του προτύπου. Η λειτουργία επηρεάζεται από τους νόμους της αντίληψης και κατά την αναγνώριση δίνει προτεραιότητα στις πρωταρχικές δομές, στις οποίες αντιστοιχούν οι αρχικοί ρόλοι. Τα στοιχεία της παρούσης έρευνας δείχνουν πως η αναγνώριση και χρήση του ισοσκελούς είναι ευκολότερη στην περίπτωση που σε κάθε γεωμετρικό στοιχείο αποδίδεται

ένας μόνο ρόλος. Στην περίπτωση που υπάρχουν στοιχεία με διπλούς ρόλους παρδυσιάζονται δυσκολίες οι οποίες προκαλούν πιασωγυρίσματα στις λειτουργίες που εμπλέκονται στη γεωμετρική σκέψη.

Εκτός από το πρότυπο, η εικόνα της έννοιας μπορεί να περιλαμβάνει και ιδιότητες που δεν είναι απαραίτητα όλες μαθηματικές. Για παράδειγμα, κάποιοι μαθητές μπορεί να συμπεριλαμβάνουν στο ΣΙΤ τους άσχετες φυσικές ιδιότητες, όπως την απαίτηση «το ύψος ενός τριγώνου να πέφτει πάντα στο εσωτερικό του» ή «η βάση του ισοσκελούς πρέπει να είναι πάντα οριζόντια» ή τέλος, «η μεσοκάθετος της πλευράς να περνά από την απέναντι κορυφή».

Η πληρότητα της εικόνας της έννοιας αντανακλά στο επίπεδο εξέλιξης του ΣΙΤ και αποκαλύπτεται από την ικανότητα των μαθητών για λύση προβλήματος.

4.1.2 Συνολικό επίπεδο

Η δομική ανάλυση των στοιχείων, που προκύπτουν από την έρευνα, σε συνολικό επίπεδο αφορά στις επόμενες δύο υποθέσεις:

2^η υπόθεση: η σύνδεση του ΣΙΤ με άλλα γνωστικά Σχήματα γίνεται μέσα από κοινά στοιχεία των αντίστοιχων γεωμετρικών σχημάτων

3^η υπόθεση: η συμμετρία παίζει αποφασιστικό ρόλο στη σύνδεση του ισοσκελούς τριγώνου με άλλα γεωμετρικά σχήματα και κατ' επέκταση, στη σύνδεση του ΣΙΤ με τα αντίστοιχα γνωστικά Σχήματα

Προκειμένου να εξετάσουμε το πώς δημιουργούνται οι συνδέσεις ανάμεσα σε γνωστικά Σχήματα χρησιμοποιούμε γεωμετρικά σχήματα τα οποία να ανήκουν σε διαφορετικές «οικογένειες» από το ισοσκελές τρίγωνο. Θέλουμε με αυτό τον τρόπο να ξεκινήσουμε τη διερεύνηση με συνδέσεις που δεν είναι ιεραρχικές. Ο λόγος είναι πως η διδασκαλία των εννοιών στο Λύκειο συχνά ακολουθεί ένα ιεραρχικό μοντέλο, όπου αρχικά διδάσκεται μία έννοια και στη συνέχεια οι εξειδικεύσεις της. Συνεπώς για να μελετήσουμε τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αυθόρμητα συνδέουν έννοιες προσανατολιζόμαστε σε σχηματικές έννοιες που δεν συνδέονται ιεραρχικά.

Με το προηγούμενο σκεπτικό επιλέγουμε το παραλληλόγραμμο, το ρόμβο¹², το ισοσκελές τραπέζιο και τον κύκλο. Η επιλογή υπαγορεύεται από την αρχική μας υπόθεση πως κοινά στοιχεία των δύο γεωμετρικών σχημάτων μπορεί να οδηγούν στην εύκολη σύνδεση των αντίστοιχων γνωστικών Σχημάτων. Οι αντιλήψεις αυτές αναλύονται στα επόμενα, ενώ η

ορθότητά τους ελέγχεται μέσα από τα στοιχεία της έρευνας. Η ανάλυση των στοιχείων γίνεται με άξονες τα γνωστικά Σχήματα των παραπάνω γεωμετρικών σχημάτων. Με άλλα λόγια γίνεται με άξονες τα αντίστοιχα προβλήματα της 3^{ης} φάσης.

Το γνωστικό Σχήμα του ρόμβου

Ο ρόμβος είναι ευθύγραμμο σχήμα, όπως και το ισοσκελές τρίγωνο, με το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό ότι μπορεί να χωριστεί σε δύο ίσα ισοσκελή τρίγωνα.. Ο ρόμβος παρουσιάζει πολλές ομοιότητες με το ισοσκελές τρίγωνο. Γι αυτό επιλέγουμε να εξετάσουμε ως ευνοϊκή περίπτωση σύνδεσης γνωστικών Σχημάτων τη σύνδεση του γνωστικού Σχήματος που δημιουργείται με αφορμή το ρόμβο, με το ΣΙΤ (2^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης). Οι αντίστοιχοι ρόλοι των δύο γεωμετρικών Σχημάτων είναι:

Πίνακας 4.3
Σύγκριση των ρόλων στο ισοσκελές τρίγωνο και το ρόμβο

Διάσταση	Ρόλοι του ισοσκελούς τριγώνου	Ρόλοι του ρόμβου
0D	Κορυφή	
1D	Ίσες πλευρές	Ίσες πλευρές
1D	Ίσες γωνίες	Ίσες γωνίες
1D	Ύψος – άξονας συμμετρίας	Διαγώνιος – άξονας συμμετρίας
1D	Βάση	

Οι πληροφορίες που θεωρούνται σημαντικές, στην παρούσα έρευνα, σχετικά με το 2^ο πρόβλημα, προκύπτουν από:

- τους τρόπους με τους οποίους οι μαθητές επιλέγουν να κατασκευάσουν το ρόμβο και
- το σενάριο που επιλέγουν κατόπιν ως καλύτερο και το κριτήριο που χρησιμοποιούν για να επιλέξουν.

Τα στοιχεία δείχνουν πως το ισοσκελές κυριαρχεί ως δομικό στοιχείο του ρόμβου. Κάθε μαθητής γράφει τρία διαφορετικά σενάρια για την κατασκευή του ρόμβου. Ανάμεσα σε αυτά σε όλους τους μαθητές υπάρχει ένα τουλάχιστον στο οποίο δίνονται οδηγίες που βασίζονται στο ισοσκελές.

Πολλοί κατασκευάζουν το ρόμβο είτε φτιάχνοντας δύο ισοσκελή με κοινή βάση είτε φτιάχνοντας ένα και μετά το συμμετρικό του. Όταν, στη συνέχεια, κάνουν συγκρίσεις των σεναρίων¹³, επιλέγουν ως καλύτερο αυτό που βασίζεται στο ισοσκελές τρίγωνο και αναφέρουν μία σειρά από πλεονεκτήματα που εμφανίζει η χρήση του ισοσκελούς.

Είναι αξιοσημείωτο ότι τα παιδιά διαπιστώνουν τα πλεονεκτήματα της σύνδεσης ισοσκελούς – ρόμβου σε όλες τις γεωμετρικές λειτουργίες τους και σε κάθε σύστημα αναπαράστασης που χρησιμοποιούν. Συγκεκριμένα πολλοί μαθητές κάνουν συνειδητή αναφορά στη λειτουργία της

γεωμετρικής κατασκευής λέγοντας ότι η χρήση του ισοσκελούς «*διευκολύνει την κατασκευή*». Άλλοι αναδεικνύουν το γεγονός ότι οι οδηγίες που στηρίζονται στο ισοσκελές απλοποιούν την αιτιολόγηση (του ότι το γεωμετρικό σχήμα που θα κατασκευαστεί θα είναι πράγματι ρόμβος). Λένε πως ένα τέτοιο σενάριο «*δίνει περισσότερες πληροφορίες για το ρόμβο*», «*περιέχει και την ιδιότητα για δύο ίσες πλευρές*» και τέλος «*τον βοηθά (το μαθητή) να καταλάβει τι είναι ρόμβος, αφού έχει όλα του τα στοιχεία: πλευρές, διαγώνιους, διχοτόμους κάθετες,.... εξηγεί καλύτερα*».

Ακόμα απόψεις των μαθητών, όπως «*η χρήση του ισοσκελούς τριγώνου απλουστεύει τις οδηγίες που περιέχει το σενάριο*», αναφέρονται ευθέως στην ευκολία μετατροπής από γεωμετρικό σχήμα (ρόμβο) σε γραπτό λόγο (σενάριο). Η χρήση του ισοσκελούς αναδεικνύεται ως παράγοντας που διευκολύνει τη μετατροπή ανάμεσα σε διαφορετικά συστήματα αναπαράστασης και μάλιστα βοηθά ώστε να ταυτιστούν κατά το δυνατόν οι αναπαραστάσεις του ρόμβου σε αυτά. Έτσι ενισχύεται η ικανότητα των μαθητών να χρησιμοποιούν τις γνώσεις που κατέχουν, αφού μπορούν να τις «μεταφράζουν» αυτούσιες από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο. Συνεπώς στην περίπτωση του ρόμβου η χρήση του ισοσκελούς συνδέεται με την κατανόηση και αυξάνει την αποτελεσματικότητα του μαθητή.

Το ισοσκελές ως δομικό στοιχείο του ρόμβου, μεταφέρει σε αυτόν «πακέτο» όλες τις πληροφορίες του. Αυτό είναι προφανές, καθώς οι ιδιότητες και η συμμετρία των δύο γεωμετρικών σχημάτων εμφανίζουν πλήρη αντιστοιχία, γεγονός που, όπως φαίνεται από τη γνώμη των ίδιων των μαθητών, απλουστεύει την κατασκευή και την αιτιολόγηση. Όταν η συνειδητή γνώση μιας δομής μεταφέρεται ως προς τα κύρια χαρακτηριστικά της απ' ευθείας σε μια άλλη έννοια, απαλλάσσει τον μαθητή από τον κόπο να επαναλαμβάνει τις ίδιες εργασίες (Βυγκότσκι, 1988, σ.306). Έτσι ο συλλογισμός γίνεται σε επίπεδο «μεγαλύτερων κόκκων», μειώνοντας το γνωστικό φόρτο. Ένας μαθητής περιγράφει χαρακτηριστικά τα προηγούμενα λέγοντας πως ένα τέτοιο σενάριο (που αξιοποιεί το ισοσκελές) «*είναι πιο μικρό, πιο συνεπτυγμένο, άρα απλό*».

Οι μαθητές εξηγούν παραστατικά γιατί η συγκεκριμένη κατασκευή τους εμπνέει εμπιστοσύνη, λέγοντας «*είναι γρήγορο*», «*είναι σίγουρο*» ως επανάληψη ενός γνωστού σχήματος. Είναι φανερό πως αισθάνονται σιγουριά και ο λόγος είναι πως κατά τη χρονική στιγμή που διδάσκεται ο ρόμβος, έχουν ήδη αρκετή εμπειρία με τη χρήση του ΣΓΤ. Σύμφωνα με τα λόγια ενός μαθητή «*είναι δεδομένο ότι κάποιος ξέρει το ισοσκελές*».

Τα στοιχεία που αναφέραμε μας οδηγούν στις ακόλουθες σκέψεις. Το γνωστικό Σχήμα του ρόμβου μπορεί να δημιουργηθεί ως επέκταση του ΣΓΤ, όπως συμβαίνει στις ιεραρχικές συνδέσεις. Μόνο που στην περίπτωση αυτή πρόκειται για γεωμετρικά σχήματα διαφορετικών οικογενειών. Εδώ δεν αναφερόμαστε απλά στη σύνδεση των δύο γνωστικών Σχημάτων, αλλά

σε κάτι περισσότερο. Ολόκληρο το ΣΙΤ, με την εικόνα – πρότυπο, τις ιδιότητες και τις οδηγίες κατασκευής του ισοσκελούς, ενσωματώνεται στο γνωστικό Σχήμα του ρόμβου, άρα πρόκειται πράγματι για μια ευνοϊκή περίπτωση.

- Τι συμβαίνει όμως στην περίπτωση που τα δύο γεωμετρικά σχήματα έχουν ένα μόνο κοινό στοιχείο; Έχει αυτό τη δύναμη να συνδέσει, όπως υποθέτουμε, τα δύο γνωστικά Σχήματα, προς όφελος του γεωμετρικού συλλογισμού; Η απάντηση δίνεται στα επόμενα.

Το γνωστικό Σχήμα του ισοσκελούς τραπέζιου

Το ισοσκελές τραπέζιο (3^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης) είναι ένα ευθύγραμμο σχήμα το οποίο επίσης παρουσιάζει αρκετές ομοιότητες με το ισοσκελές τρίγωνο. Συγκεκριμένα και τα δύο έχουν δύο ίσες πλευρές, παρά τη βάση γωνίες ίσες και δευτερευόντως το ύψος (αν ως τέτοιο θεωρήσουμε, στην περίπτωση του τραπέζιου, το τμήμα που ενώνει τα μέσα των βάσεων) είναι άξονας συμμετρίας τους. Οι αντίστοιχοι ρόλοι των δύο σχημάτων καταγράφονται στον πίνακα 4.4

Πίνακας 4.4
Σύγκριση των ρόλων στο ισοσκελές τρίγωνο και το ισοσκελές τραπέζιο

διάσταση	Ρόλοι του ισοσκελούς τριγώνου	Ρόλοι του ισοσκελούς τραπέζιου
0D	Κορυφή	
1D	Ίσες πλευρές	Ίσες πλευρές
1D	Ίσες γωνίες	Ίσες γωνίες
1D	Ύψος – άξονας συμμετρίας	Ύψος – άξονας συμμετρίας
1D	Βάση	Βάση μικρή, βάση μεγάλη

Το ισοσκελές τραπέζιο θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως περιβάλλον πλούσιο σε κοινούς ρόλους με το ισοσκελές τρίγωνο, γι αυτό επιλέγουμε, στην παρούσα έρευνα, ως ευνοϊκή περίπτωση σύνδεσης γνωστικών Σχημάτων, τη σύνδεση του γνωστικού Σχήματος που δημιουργείται γύρω από το ισοσκελές τραπέζιο με το ΣΙΤ. Θέλουμε, εξειδικεύοντας περαιτέρω την 2^η υπόθεση (για το κοινό στοιχείο), να ελέγξουμε αν η ύπαρξη ίδιων ρόλων στα δύο γεωμετρικά σχήματα διευκολύνει τη σύνδεση των αντίστοιχων γνωστικών Σχημάτων.

Η εξέταση των απαντήσεων των μαθητών στο 3^ο πρόβλημα αποκαλύπτει ότι οι κατασκευές των μαθητών κυριαρχούνται από τρεις συνολικά αντιλήψεις, τρεις κυρίαρχες τάσεις:

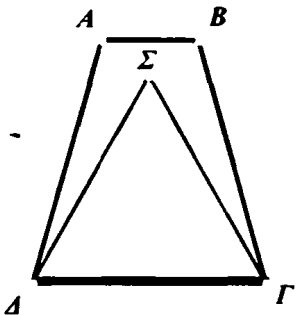
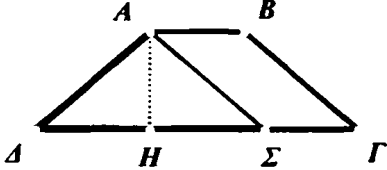
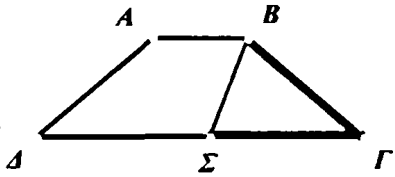
1. σύμφωνα με την πρώτη, δε γίνεται καμία προσπάθεια αξιοποίησης των στοιχείων και ιδιοτήτων του πλαισίου (ισοσκελές τραπέζιο)
2. σύμφωνα με τη δεύτερη, αξιοποιούνται οι κοινές ιδιότητες των δύο γεωμετρικών σχημάτων και χρησιμοποιούνται στοιχεία, των οποίων οι ρόλοι στα δύο σχήματα ταυτίζονται (ίσες πλευρές, ίσες γωνίες) και

3. σύμφωνα με την τρίτη, αξιοποιείται μία γενική αίσθηση συμμετρίας, κοινή στα δύο γεωμετρικά σχήματα

Ακολούθως αναλύουμε ξεχωριστά την κάθε αντίληψη, αναδεικνύουμε τον τρόπο με τον οποίο γίνονται οι συνδέσεις στην κάθε μία και τους παράγοντες που τις διευκολύνουν.

1. Στο γεωμετρικό συλλογισμό των μαθητών εμφανίζεται συχνά ένας τρόπος λειτουργίας που αγνοεί ή εργάζεται ανεξάρτητα από τις συγκεκριμένες πληροφορίες που δίνει το πρόβλημα (πλαίσιο). Στη παρούσα έρευνα η αντίληψη αυτή χαρακτηρίζεται ως «εκτός πλαισίου» και διακρίνεται στο 3^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης σε κατασκευές όπως οι επόμενες (σχήμα 4.12):

2.

Ξεκινώντας από μία πλευρά του ισοσκελούς τραπεζίου...		
 α. ο μαθητής κατασκευάζει ισόπλευρο με πλευρά την ΔΓ	 β. ο μαθητής κατασκευάζει το ύψος AH και, γύρω από αυτό, φτιάχνει το ισοσκελές ΑΔΣ	 γ. ο μαθητής μετρά και κατασκευάζει ίση πλευρά ΓΣ = ΓΒ

σχήμα 4.12 Παραδείγματα κατασκευής ισοσκελών «εκτός πλαισίου»

Προκειμένου να οριοθετήσουμε τις περιπτώσεις εκείνες που θα χαρακτηρίζουμε ως «εκτός πλαισίου», θέτουμε το εξής κριτήριο: αν ο μαθητής μπορεί να χρησιμοποιήσει τον ίδιο τρόπο κατασκευής σε ένα τυχαίο σχήμα και να κατασκευάσει ισοσκελές τρίγωνο με επιτυχία, τότε σημαίνει πως δε συνδέει την κατασκευή του με το συγκεκριμένο πλαίσιο, οπότε την χαρακτηρίζουμε εκτός πλαισίου.

Για παράδειγμα, στο σχήμα 4.12, ο μαθητής απλά χρησιμοποιεί μία τυχαία πλευρά του τραπεζίου, όπως θα μπορούσε να κάνει με οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα, και κατασκευάζει:

→ με το διαβήτη ένα ισόπλευρο τρίγωνο (στο α), ή

→ με τη μεσοκάθετο ένα ισοσκελές (στο β).

Η κατασκευή δε χρησιμοποιεί στο παραμικρό το ισοσκελές τραπέζιο, όπως και στο τρίτο παράδειγμα, όπου:

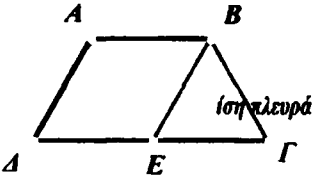
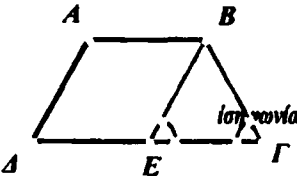
→ ο μαθητής μετρά την ίση πλευρά $B\Gamma$ και μετά παίρνει ίσο τμήμα $\Gamma\Sigma$ στη βάση (στο γ).

Το πρόβλημα εδώ είναι πως, αντί για τις ιδιότητες της σχηματικής έννοιας (που δίνεται: του τραπεζίου) χρησιμοποιούνται οι διαστάσεις ενός στοιχείου από το γεωμετρικό σχήμα (το μέτρο της πλευράς), δηλαδή η υλική του αναπαράσταση. Η χρήση της μέτρησης στερεί τη γενικότητα από την κατασκευή, αφού η απόλυτη εξάρτηση από το συγκεκριμένο υλικό σχήμα και τις διαστάσεις του σημαίνει ότι ο μαθητής παραιτείται από τη γενικότητα που εκφράζεται μέσα από τη σχηματική έννοια.

Την εκτός πλαισίου αντίληψη, που εμφανίζεται σε πολλούς μαθητές, χαρακτηρίζει η προσπάθεια επίλυσης του συγκεκριμένου προβλήματος (κατασκευή ενός ισοσκελούς) με ευκαιριακό τρόπο.

3. Σύμφωνα με τη δεύτερη αντίληψη, ο μαθητής αντιλαμβάνεται πως υπάρχουν κοινές ιδιότητες ή κοινοί ρόλοι ανάμεσα στο γεωμετρικό σχήμα που του δίνει το πρόβλημα (ισοσκελές τραπέζιο) και στο ισοσκελές τρίγωνο και προσπαθεί να τις αξιοποιήσει.

Μία κοινή ιδιότητα / κοινός ρόλος είναι οι ίσες πλευρές. Αρκετοί μαθητές λοιπόν φέρνουν από το B ευθεία παράλληλη στην AD (σχήμα 4.13α). Έτσι, όπως λει ένας μαθητής, «φέρνουν κοντά» τις ίσες πλευρές AD , $B\Gamma$ του ισοσκελούς τραπεζίου και σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο $B\Gamma\Delta$. Τον ίδιο τρόπο χρησιμοποιούν και άλλοι μαθητές που διακρίνουν την κοινή ιδιότητα των παρά τη βάση ίσων γωνιών (σχήμα 4.13β). Κατασκευάζουν από το B ευθεία παράλληλη στην AD , οπότε οι γωνίες $B\Gamma\Delta = \Gamma$, γιατί κάθε μία είναι ίση με τη Δ . Και στις δύο περιπτώσεις οι μαθητές συνδέουν τα δύο γεωμετρικά σχήματα (δοθέν και ζητούμενο) με ένα κοινό στοιχείο τους που έχει τον ίδιο ρόλο.

	
<i>Η πλευρά $B\Gamma$ έχει τον ίδιο ρόλο (ίση πλευρά) τόσο στο ισοσκελές $B\Gamma\Delta$, όσο και στο τραπέζιο</i>	<i>Η γωνία Γ έχει τον ίδιο ρόλο (ίση γωνία) τόσο στο ισοσκελές $B\Gamma\Delta$, όσο και στο τραπέζιο</i>

σχήμα 4.13 Κοινό στοιχείο δύο γεωμετρικών σχημάτων με τον ίδιο ρόλο σε αυτά

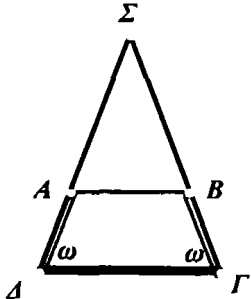
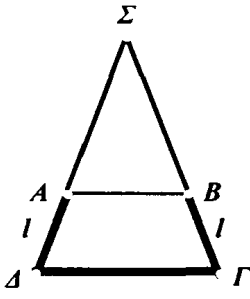
Στο επόμενο παράδειγμα παρουσιάζουμε μία διαφορετική λύση που δίνεται από τα παιδιά στο 3^ο πρόβλημα. Αρκετοί μαθητές σχηματίζουν το ισοσκελές τρίγωνο προεκτείνοντας τις ίσες πλευρές του τραπεζίου, μέχρις ότου συναντηθούν στο σημείο Σ . Το γεωμετρικό σχήμα που

προκύπτει αναλύεται σε δύο δευτερεύουσες δομές, στο τρίγωνο ΣΓΔ και στο τραπέζιο ΑΒΓΔ (σχήμα 4.14).

Για την απόδειξη του ότι το τρίγωνο ΣΓΔ είναι ισοσκελές παρουσιάζονται δύο διαφορετικές εκδοχές. Στη μία (σχήμα 4.14α), οι μαθητές εστιάζουν στις ίσες παρά τη βάση γωνίες, ενώ στην άλλη (σχήμα 4.14β) στις ίσες πλευρές. Θα προσπαθήσουμε να ανιχνεύσουμε τους λόγους που καθορίζουν τη σχετική δυσκολία της κάθε επιλογής.

→ Στην περίπτωση που οι μαθητές αξιοποιούν τις ίσες παρά τη βάση γωνίες Γ, Δ, παρατηρούμε ότι είναι εύκολη τόσο η αναγνώριση όσο και η απόδειξη ότι ΣΔΓ ισοσκελές. Ο λόγος είναι ο εξής. Οι δύο γωνίες ανήκουν (εξ ολοκλήρου) και στη μία και στην άλλη δευτερεύουσα δομή (ΣΓΔ και ΑΒΓΔ), άρα η ιδιότητά τους $\Gamma = \omega = \Delta$ μεταφέρεται με φυσικό τρόπο από τη μία στην άλλη (από το ισοσκελές τραπέζιο στο τρίγωνο).

→ Στην άλλη περίπτωση που οι μαθητές αξιοποιούν τις δύο ίσες πλευρές, παρατηρούμε πως η αναγνώριση του ισοσκελούς ΣΓΔ είναι εύκολη, αλλά η απόδειξη ότι $\Sigma\Delta = \Sigma\Gamma$ είναι δύσκολη. Αναλύοντας τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν τα παιδιά, διαπιστώνουμε πως οι ίσες πλευρές ΑΔ, ΒΓ του τραpezίου αποτελούν μέρος των πλευρών ΣΔ, ΣΓ του τριγώνου. Συνεπώς η ιδιότητά τους ($A\Delta = B\Gamma$) δεν μπορεί να μεταφερθεί στις πλευρές του τριγώνου. Δηλαδή, ενώ υπάρχει κοινός ρόλος, αυτός δεν αποδίδεται σε κοινό στοιχείο των δύο γεωμετρικών σχημάτων, αλλά σε δύο διαφορετικά στοιχεία. Συγκεκριμένα, στο τραπέζιο αποδίδεται στο τμήμα ΑΔ, ενώ στο τρίγωνο στο τμήμα ΣΔ του οποίου το ΑΔ αποτελεί μέρος.

Κοινό στοιχείο με ίδιο ρόλο	Στοιχείο, μέρος άλλου στοιχείου, με τον ίδιο ρόλο
	
Η γωνία ω έχει τον ίδιο ρόλο (ίση γωνία) τόσο στο ισοσκελές όσο και στο τραπέζιο	Η πλευρά ΑΔ του τραpezίου έχει τον ίδιο ρόλο (ίση πλευρά) με την πλευρά ΣΔ του τριγώνου

σχήμα 4.14 Στοιχεία με τον ίδιο ρόλο σε δύο γεωμετρικά σχήματα

Από τα παραδείγματα φαίνεται (σχήματα 4.13, 4.14) ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν κάποια κοινή ιδιότητα / κοινό ρόλο για να συνδέσουν αντιληπτικά το ισοσκελές τραπέζιο με το ισοσκελές τρίγωνο και να κάνουν την κατασκευή του. Σε περίπτωση που τα δύο γεωμετρικά σχήματα μοιράζονται αρκετούς ίδιους ρόλους (όπως εδώ), βλέπουμε ότι οι μαθητές μπορούν να

βασιστούν σε οιονδήποτε ρόλο για να κάνουν την κατασκευή. Αυτό δε σημαίνει πως όλες οι επιλογές τους είναι εξίσου εύκολες στην απόδειξη.

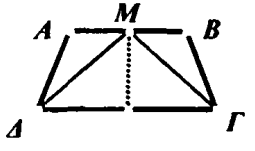
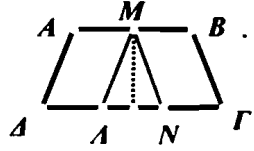
Για την αιτιολόγηση της κατασκευής έχει καθοριστική σημασία η επιλογή του στοιχείου στο οποίο θα αποδοθεί ρόλος και με βάση τον οποίο θα γίνει η σύνδεση των γνωστικών Σχημάτων, ώστε να δοθεί η δυνατότητα να μεταφερθούν κάποιες ιδιότητες από το ένα γνωστικό Σχήμα στο άλλο (:αποτελεσματική σύνδεση). Όπως είναι φυσικό, μας ενδιαφέρουν οι παράγοντες που επιδρούν και καθορίζουν ποια είναι η κατάλληλη επιλογή στοιχείου και γιατί.

Τα στοιχεία της έρευνας υποδεικνύουν πως δημιουργούνται δυσκολίες όταν υπάρχει μεν κοινός ρόλος (όπως, πχ ίσες πλευρές) στα δύο γεωμετρικά σχήματα, αλλά δεν υπάρχει αντίστοιχα κοινό στοιχείο για να αποδοθεί. Αυτό εμποδίζει τη μεταφορά γνωστών ιδιοτήτων από το ένα γνωστικό Σχήμα στο άλλο ή οδηγεί σε λάθη. Συνεπώς η υπόθεσή μας πως «η ύπαρξη ίδιων ρόλων στα δύο γεωμετρικά σχήματα διευκολύνει τη σύνδεση των αντίστοιχων γνωστικών Σχημάτων» επιβεβαιώνεται και εξειδικεύεται περαιτέρω ως εξής:

- δύο γνωστικά Σχήματα μπορούν να συνδεθούν με τη βοήθεια μιας κοινής ιδιότητας / ενός κοινού ρόλου
- η σύνδεση είναι αποτελεσματικότερη, όταν αυτή η κοινή ιδιότητα αποδίδεται ως ρόλος στο ίδιο γεωμετρικό στοιχείο που είναι κοινό στα δύο γεωμετρικά σχήματα
- η αποτελεσματικότητα του μαθητή συνδέεται με το γεγονός ότι το κοινό στοιχείο μεταφέρει την ιδιότητα του ρόλου από το ένα σχήμα στο άλλο, διευκολύνοντας την αιτιολόγηση.

4. Τέλος σύμφωνα με την τρίτη αντίληψη οι μαθητές οδηγούνται σε μία λύση του 3^{ου} προβλήματος αξιοποιώντας τη συμμετρία των δύο γεωμετρικών σχημάτων (ισοσκελούς τριγώνου, ισοσκελούς τραπεζίου). Το θέμα της συμμετρίας έχει εμφανιστεί ξανά και στην «ανάλυση των ευρημάτων σε τοπικό επίπεδο» (4.1.1). Εκεί συγκρίνοντας το ισοσκελές με την εικόνα πρότυπο, οδηγηθήκαμε στο συμπέρασμα πως ο βαθμός ομοιότητάς τους είναι μεγάλος, όταν μπορούμε αντιληπτικά να ταυτίσουμε τους άξονες συμμετρίας τους. Στο 3^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης δίνονται αφορμές για ανάλογες παρατηρήσεις.

Κάποιοι μαθητές κατασκευάζουν το ισοσκελές τρίγωνο μέσα στο τραπέζιο με τρόπο ώστε - σιωπηρά - οι άξονες συμμετρίας των δύο γεωμετρικών σχημάτων να ταυτίζονται. Είτε ενώνουν το μέσο Μ της βάσης ΑΒ με τις κορυφές Γ και Δ (σχήμα 4.15α) είτε φέρνουν από το μέσο Μ της ΑΒ παράλληλες προς τις πλευρές ΑΔ, ΒΓ (σχήμα 4.15β). Ο παράγοντας που φαίνεται πως διευκολύνει την κατασκευή και ακολούθως την απόδειξη ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές, είναι το γεγονός ότι τα δύο σχήματα έχουν τον ίδιο άξονα συμμετρίας (έστω και αν δεν τον σχηματίζουν όλοι οι μαθητές).

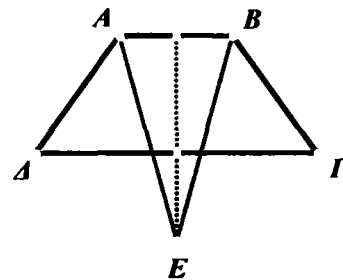
	
Το ισοσκελές τρίγωνο $M\Delta\Gamma$ και το τραπέζιο έχουν κοινό άξονα συμμετρίας.	Το τρίγωνο MAN είναι ισοσκελές και έχει κοινό άξονα συμμετρίας με το ισοσκελές τραπέζιο.

σχήμα 4.15 Γεωμετρικά σχήματα με κοινό άξονα συμμετρίας

Ο καθοριστικός ρόλος του άξονα συμμετρίας αποκαλύπτεται και μέσα από το επόμενο παράδειγμα. Πρόκειται για μία μαθήτρια, που προσπαθεί να λύσει το 3^ο πρόβλημα (Βάσια, Φ3, 3). Στην πρώτη της προσπάθεια φαίνεται να λειτουργεί εκτός πλαισίου, γεγονός που της επισημαίνεται. Στην πραγματικότητα όμως δεν είναι ακριβώς έτσι. Η μαθήτρια μπορεί να μην αξιοποιεί τις ιδιότητες του ισοσκελούς τραπέζιου (ίσες πλευρές ή γωνίες), όμως κατασκευάζει το τρίγωνο ταυτίζοντας τους άξονες συμμετρίας δοθέντος και νέου σχήματος. Όταν της ζητείται να αξιοποιήσει το πλαίσιο που δίνεται (ισοσκελές τραπέζιο), αναπροσαρμόζει τη λύση της με δυναμικό τρόπο, κρατώντας τον άξονα συμμετρίας σταθερό και μάλιστα, χρησιμοποιώντας τον για να συνδέσει τα δύο γεωμετρικά σχήματα. Είναι αποκαλυπτικός ο τρόπος με τον οποίο αιτιολογεί στο τέλος τη σύνδεση των δύο σχημάτων με τη βοήθεια της κοινής ιδιότητας.

M: Αν έφερνα μεσοκάθετη στην AB και την προέκτεινα και έπαιρνα ένα σημείο E (έξω από το τραπέζιο κάτω από την $\Delta\Gamma$) το οποίο να ισαπέχει από τα A, B γιατί είναι πάνω στη μεσοκάθετο.....

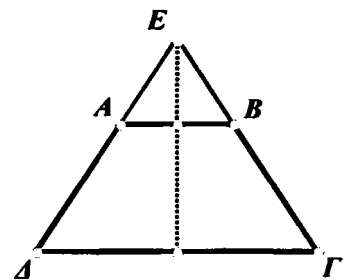
Ερ: Αυτό δεν έχει να κάνει πολύ με το ισοσκελές τραπέζιο, γιατί και μόνο την πλευρά AB να είχες, το έφτιαχνες.
Κοίταξε μήπως αξιοποιήσεις και κάποιο άλλο στοιχείο του τραπέζιου, γιατί με την κατασκευή σου, χρησιμοποιείς μόνο το ευθύγραμμο τμήμα AB .



M: Θα χρησιμοποιήσω κάποιο στοιχείο του τραπέζιου...
αν προεκτείνω τη μεσοκάθετο (της AB), λογικά αυτή θα περάσει και από το μέσο της $\Delta\Gamma$

Ερ: πού το ξέρεις;

M: θα σας πω μια δική μου θεωρία:
το τραπέζιο είναι ισοσκελές, αγ ήταν τρίγωνο και έφερνα το ύψος που είναι διάμεσος και διχοτόμος θα έπεφτε στο μέσο της $\Delta\Gamma$, έτσι το σκέφτομαι εγώ και το βρίσκω αμέσως.



Τελικά εκτός από την περίπτωση των κοινών ιδιοτήτων ή κοινών ρόλων που διευκολύνουν τη σύνδεση δύο γνωστικών Σχημάτων κάτι ανάλογο συμβαίνει και με τη συμμετρία. Η περίπτωση

αυτή βέβαια έχει μικρότερη ισχύ από την περίπτωση των κοινών ρόλων, καθώς εφαρμόζεται μόνο όταν και τα δύο γεωμετρικά σχήματα διαθέτουν ένα, τουλάχιστον, άξονα συμμετρίας. Αναφερόμενοι λοιπόν σε τέτοια γεωμετρικά σχήματα, συμπεραίνουμε πως η σύνδεση δύο γνωστικών Σχημάτων διευκολύνεται, αν μπορούν να ταυτιστούν οι άξονες συμμετρίας των αντίστοιχων γεωμετρικών σχημάτων.

Το γνωστικό Σχήμα του κύκλου

Ο κύκλος ως πλαίσιο θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως δυσχερές περιβάλλον για την κατασκευή ισοσκελούς τριγώνου (4^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης). Ο λόγος είναι πως τα δύο γεωμετρικά σχήματα δε μοιράζονται κοινούς ρόλους, οπότε σύμφωνα με την αρχική μας υπόθεση, η σύνδεση των αντίστοιχων γνωστικών Σχημάτων πρέπει να είναι πιο δύσκολη. Οι αντίστοιχοι ρόλοι φαίνονται στον επόμενο πίνακα, όπου οι στήλες, στην περίπτωση αυτή, έχουν διαχωριστεί εντελώς, καθώς δεν εμφανίζονται κοινά στοιχεία.

Πίνακας 4.5
Σύγκριση των ρόλων στο ισοσκελές τρίγωνο και τον κύκλο

διάσταση	Ρόλοι του ισοσκελούς τριγώνου		Ρόλοι του κύκλου
0D	Κορυφή		Κέντρο
1D	Ίσες πλευρές		Ακτίνα
1D	Ίσες γωνίες		Διάμετρος = άξονας συμμετρίας
1D	Ύψος – άξονας συμμετρίας		εφαπτομένη
1D	Βάση		χορδή

Ο κύκλος δίνεται ως πλαίσιο στο 4ο πρόβλημα της 3ης φάσης και το ενδιαφέρον εστιάζεται στο να διαπιστωθεί αν θα μπορέσουν οι μαθητές να συνδέσουν τα δύο γνωστικά Σχήματα (του κύκλου με το ΣΙΤ) και με ποιο τρόπο, αφού δεν υπάρχουν κοινές ιδιότητες ή ρόλοι. Πράγματι, στον κύκλο δεν υπάρχουν, με μια πρώτη ματιά, ευθύγραμμα τμήματα ή γωνίες ώστε να ταυτιστούν με αντίστοιχα στοιχεία του ισοσκελούς τριγώνου. Μπορεί όλες οι ακτίνες του να είναι ίσες, αλλά δημιουργείται προβληματισμός, σχετικά με την κατάλληλη επιλογή, μέσα από μια απειρία από πιθανές ακτίνες.

Η δυσκολία αντιμετωπίζεται από τους μαθητές, στο συγκεκριμένο πρόβλημα, με τον ακόλουθο τρόπο. Στο σχήμα που συνοδεύει το πρόβλημα (2.6) υπάρχουν δύο σημεία, το κέντρο του κύκλου Ο και ένα τυχαίο σημείο Σ. Οι πρώτες ενέργειες των μαθητών είναι:

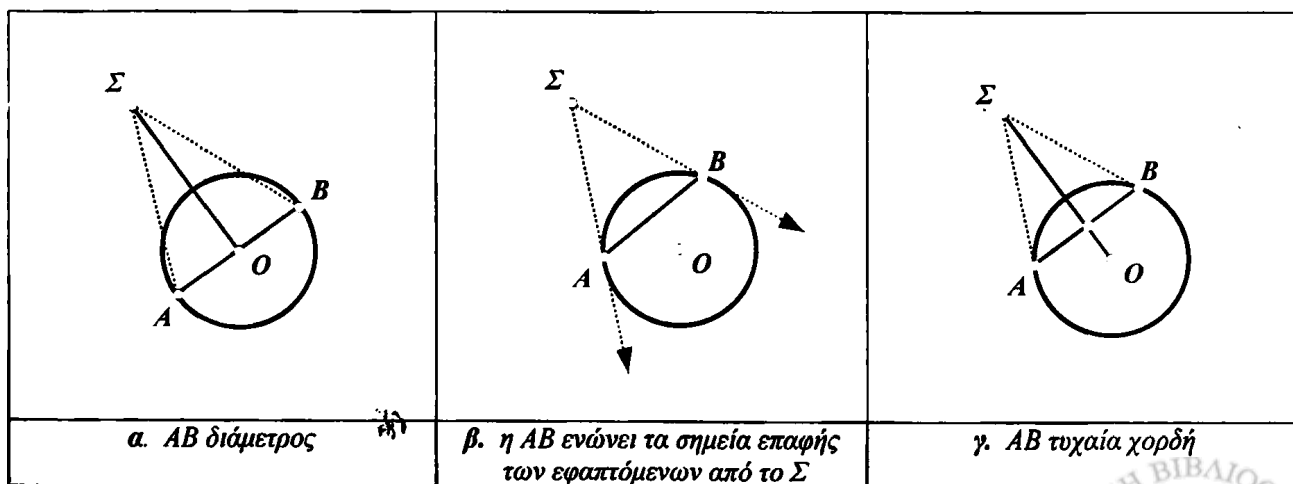
- να στρέψουν το χαρτί τους έτσι, ώστε η διεύθυνση που ορίζεται από τα σημεία Σ και Ο να γίνει κατακόρυφη,
- να σχηματίσουν το τμήμα ΣΟ και

- να του αποδώσουν το ρόλο του ύψους – άξονα συμμετρίας του ισοσκελούς που θα κατασκευάσουν, ενώ το Σ παίρνει σιωπηρά το ρόλο της κορυφής.

Το τμήμα ΣO αναδεικνύεται σε στοιχείο – κλειδί για τη λύση του προβλήματος. Το ισοσκελές «κτίζεται» με άξονα συμμετρίας την προνομιακή κατεύθυνση ΣO , κορυφή το Σ , ενώ οι περισσότεροι μαθητές προτιμούν ως βάση τη διάμετρο AB του κύκλου, την κάθετη στο ΣO (σχήμα 4.16α). Πρόκειται για την πιο φυσιολογική απάντηση στο δεδομένο πλαίσιο (του κύκλου), αφού αναπαράγει την κατασκευή του ισοσκελούς με τη βοήθεια της μεσοκαθέτου, και δε χρειάζεται γνώσεις των ιδιοτήτων του κύκλου, εκτός από την απλούστερη που τη διαθέτουν όλοι οι μαθητές, δηλαδή πως η διάμετρος ισούται με δύο ακτίνες.

Συνολικά στο 4^ο πρόβλημα μπορούν να δοθούν τρεις διαφορετικές σωστές απαντήσεις. Υπάρχουν τρεις διαφορετικές περιπτώσεις κατασκευής ισοσκελούς με κορυφή το Σ ¹⁴, οι οποίες στην ουσία είναι ο δυναμικός μετασχηματισμός της λύσης που αναφέραμε. Σε όλες η ΣO είναι μεσοκάθετος της βάσης AB , που τα άκρα της A, B ολισθαίνουν πάνω στον κύκλο. Στη δεύτερη περίπτωση τα A, B είναι τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων από το Σ προς τον κύκλο (σχήμα 4.16β), ενώ στην τρίτη η AB είναι μια τυχαία χορδή κάθετη στη ΣO (σχήμα 4.16γ). Σε κάθε περίπτωση τα σημεία A, B του κύκλου είναι συμμετρικά ως προς την ΣO . Τελικά η ευθεία ΣO είναι κοινός άξονας συμμετρίας του κύκλου και του ισοσκελούς τριγώνου.

Ενώ η ιδιότητα αυτή είναι συνειδητή, σε αντιληπτικό επίπεδο, στους μαθητές δεν υπάρχει η αντίστοιχη κατανόηση των μαθηματικών ιδιοτήτων που πρέπει να καθοδηγούν την ανάγνωση και εξερεύνηση του γεωμετρικού σχήματος ώστε να μπορεί να αιτιολογηθεί θεωρητικά η κατασκευή μιας λύσης του προβλήματος. Αυτός είναι και ο λόγος που, ενώ οι μαθητές κατασκευάζουν τα ισοσκελή τρίγωνα – διαδικασία καθαρά εμπειρική – δυσκολεύονται στις περιπτώσεις β και γ (σχήμα 4.16) να αποδείξουν ότι το τρίγωνο ΣAB είναι ισοσκελές.



σχήμα 4.16 Οι τρεις περιπτώσεις κατασκευής ισοσκελούς στο 4^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης

Στην περίπτωση του κύκλου φαίνεται αρχικά ότι μπορεί κανείς να συνδέσει τα δύο γνωστικά Σχήματα, δίχως να ικανοποιείται η προϋπόθεση που θέσαμε, δηλαδή δίχως να υπάρχουν κοινά στοιχεία που να έχουν τον ίδιο ρόλο στον κύκλο και το ισοσκελές τρίγωνο. Η σχετική ευκολία με την οποία οι μαθητές αντιμετωπίζουν την κατασκευή (α), όπου η AB είναι διάμετρος, αμφισβητεί την αρχική μας εκτίμηση πως τα δύο γνωστικά Σχήματα είναι τόσο απομακρυσμένα που δύσκολα βρίσκονται συνδέσεις μεταξύ τους. Τι πραγματικά συμβαίνει σε αυτή την περίπτωση;

Θα το κατανοήσουμε καλύτερα παρακολουθώντας τις διαδοχικές προσπάθειες μιας μαθήτριας στο ίδιο πρόβλημα [Αγνή, Φ3, 4] και τον τρόπο με τον οποίο, κατασκευάζοντας τις ιδέες της, ανακαλύπτει κοινές ιδιότητες και βαθμιαία συνδέει τα δύο γεωμετρικά σχήματα. Η μαθήτρια διαθέτει δυναμική φαντασία.

1. Ξεκινά με μία λύση εκτός πλαισίου, δηλαδή, φέρνει την ΣO η οποία κόβει τον κύκλο στο K και κατασκευάζει τμήμα AB κάθετο στη ΣO στο K τέτοιο, ώστε $AK = KB = 1$ εκ. (σχήμα 4.17). Είναι φανερό πως χρησιμοποιεί τη μεσοκάθετο ως οδηγία κατασκευής του ισοσκελούς. Αμέσως αντιλαμβάνεται πως το σχήμα που έφτιαξε δεν ικανοποιεί τον περιορισμό του προβλήματος, που θέλει τα σημεία A, B πάνω στον κύκλο, οπότε αναπροσαρμόζει τη λύση της, κρατώντας την καθετότητα ($O\Sigma \perp AB$) και τη σχέση $AK=KB$ (μεσοκάθετος).
2. στη δεύτερη προσπάθεια η AB «μετατοπίζεται παράλληλα» και γίνεται διάμετρος του κύκλου, ενώ
3. στην τρίτη της προσπάθεια η AB γίνεται χορδή.

Όταν η ερευνήτρια της ζητά να περιγράψει πώς σκέφτηκε, λέει:

«Όπως και να μετακινήσουμε, ας πούμε ότι μπορούμε να μετακινήσουμε την AB , αρκεί να παρέμενε κάθετη (στη ΣO), θα ήτανε το ίδιο, η απόσταση του A και του B με το Σ θα ήταν ίδια».

Ποιος είναι ο λόγος που «η απόσταση του A και του B με το Σ θα ήταν ίδια»; Φυσικά το ότι, ενώ το γεωμετρικό σχήμα μετασχηματίζεται δυναμικά, παραμένει αναλλοίωτο το γεγονός πως η ευθεία ΣO είναι άξονας συμμετρίας του. Στο επόμενο σχήμα 4.17 παρακολουθούμε τις διαδοχικές λύσεις που έδωσε η μαθήτρια και το συλλογισμό της. Είναι φανερός ο καθοριστικός ρόλος της ΣO , ως άξονα συμμετρίας του σχήματος. Οι ιδιότητες αναγνωρίζονται μόνο σε αντιληπτικό επίπεδο. Γι αυτό δεν υπάρχει μεταφορά ιδιοτήτων από τον κύκλο στο ισοσκελές τρίγωνο.

1 ^η προσπάθεια	2 ^η προσπάθεια	3 ^η προσπάθεια
<i>M:</i> Από το σημείο Σ θα φέρω ένα ευθύγραμμο τμήμα πάνω στον κύκλο (φέρει την ΣΟ) και το σημείο που θα ενώνονται θα είναι το σημείο Κ, το οποίο θα είναι το μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. <i>Λοιπόν φέρνουμε ένα... ευθύγραμμο τμήμα, εδώ είναι το Κ και ας πούμε ότι το ΑΒ είναι 2, το μισό... και το Κ είναι το μέσο του (το σβήνει)</i> <i>Ερ:</i> Γιατί το σβήνεις αυτό; <i>M:</i> Γιατί τα Α, Β πρέπει να είναι σημεία του κύκλου.	<i>M:</i> Θα φέρουμε τη διάμεσο (διάμετρο) του κύκλου από το Ο <i>Ερ:</i> Για να το δω, ποια διάμετρο θα φέρεις; Μια τυχαία; (αφού φέρνει τη διάμετρο, προβληματίζεται ως προς τη θέση της) <i>M:</i> Ναι, όχι, δεν πρέπει να είναι τυχαία, θα φέρω το ΣΟ έτσι, ώστε όταν φέρω τη διάμεσο (διάμετρο) να τέμνονται κάθετα.	<i>M:</i> μπορούμε να κάνουμε το ίδιο αλλά με μια μικρή διαφορά, η βάση του τριγώνου να μην είναι η διάμετρος, αλλά να είναι..... χορδή. <i>Αφού το ΣΟ περνάει από το κέντρο, και επομένως χωρίζει τη διάμετρο σε δύο ίσα τμήματα, το ίδιο κάνει και η προέκταση του ΣΟ σε οποιαδήποτε χορδή του κύκλου που τέμνεται κάθετα από τη ΣΟ (κάνει αναλογικές σκέψεις για να αιτιολογήσει την κατασκευή της).</i>

σχήμα 4.17 Οι διαδοχικές προσπάθειες μιας μαθήτριας να λύσει το 4ο πρόβλημα της 3ης φάσης

Κάποιοι άλλοι μαθητές προτείνουν μια διαφορετική λύση (σχήμα 4.18). Φέρνουν την $\Sigma()$, την προεκτείνουν μέχρι να συναντήσει ξανά τον κύκλο στο σημείο Δ και ακολούθως παίρνουν δύο σημεία A, B του κύκλου τα οποία, όπως λέει ένας μαθητής, «φρόντισα να ισαπέχουν από το A ». Η επιλογή αυτή, που η αναγκαιότητά της δεν αιτιολογείται λεκτικά από κανένα μαθητή που την κάνει, σηματοδοτεί την επικράτηση της συμμετρίας στη νοερή εικόνα. Στη συνέχεια οι μαθητές δεν είναι ικανοί να αιτιολογήσουν γιατί το τρίγωνο $\Sigma\Delta B$ που κατασκευάζουν είναι ισοσκελές, αφού δεν μπορούν να μεταφέρουν ιδιότητες του πλαισίου (κύκλου) σε αυτό.

Οι μαθητές σημειώνουν δύο σημεία A, B του κύκλου που να «ισαπέχουν» από το Δ	Κατασκευάζουν το ισοσκελές τρίγωνο ΣAB

σχήμα 4.18 Μια άλλη λύση του 4ου προβλήματος της 3ης φάσης



Ακολουθώντας παραθέτουμε τις προσπάθειες που κάνουν για την αιτιολόγηση της κατασκευής τρεις διαφορετικοί μαθητές, οι οποίοι έχουν κατασκευάσει σωστά το ζητούμενο τρίγωνο ΣAB με τον τρόπο που αναφέρθηκε προηγουμένως (σχήμα 4.18).

1^η μαθήτρια: Με τη μεσοκάθετο $ΟΔ$ που φέρνουμε παίρνουμε ίσα τόξα $ΔΑ, ΔΒ$. Αλλά δεν έχει καμία σχέση αυτό..... Είναι σωστό, αλλά δεν έχει σημασία με το τρίγωνο (ΣAB που ζητάμε), γιατί για να είναι ίσα θα πρέπει να φέρουμε αυτά ($\Sigma A, \Sigma B$) [Χρυσούλα, Φ3, 4].

Στην περίπτωση αυτή η μαθήτρια δεν μπορεί να κάνει κανένα συσχετισμό ανάμεσα στο ισοσκελές ΣAB και στην αιτία που την οδήγησε να πάρει ίσα τόξα $ΔΑ, ΔΒ$. Συνδέει την $\Sigma Δ$ μόνο με τον κύκλο.

2^{ος} μαθητής: Λοιπόν... εντάξει, ξέρουμε ότι $ΔΑ=ΔΒ$, τι να πω πάλι, «με το μάτι» (φαίνεται πως είναι ισοσκελές) δεν είναι αυτό λόγος (κατόπιν συγκρίνει τα τρίγωνα $\Sigma AΔ, \Sigma BΔ$) [Γιάννης, Φ3,4].

Εδώ ο μαθητής αιτιολογεί αντιληπτικά ή προχωράει σε σύγκριση, δίχως όμως να χρησιμοποιεί ιδιότητες του πλαισίου, αλλά μόνο τα στοιχεία που ο ίδιος κατασκεύασε ($ΔΑ=ΔΒ$). Έτσι είναι αναποτελεσματικός. Κατά τη σύγκριση που επιχειρεί η $\Sigma Δ$ συνδέεται και χρησιμοποιείται μόνο σε σχέση με το ισοσκελές τρίγωνο.

Ο τρίτος μαθητής δηλώνει αρχικά πως «θα πρέπει το $ΔΒ$ να ισούται με το αντίστοιχο ($ΔΑ$) να είναι σαν συμμετρικό», δηλαδή, μας δίνει ένα στοιχείο πως έχει τη συμμετρία κατά νου. Στη συνέχεια ο προβληματισμός του έχει ως εξής:

3^{ος} μαθητής: Θα πρέπει να είναι το $\Sigma Δ$ και μέσο και κάθετος στο AB Γιατί είπαμε ότι στο τόξο $AΔB$ η Σ είναι και μέση και κάθετος, όταν φέραμε τις χορδές που είναι ίσες μεταξύ τους, γιατί μετρήσαμε την απόσταση ($ΔΑ=ΔΒ$), άρα στο ευθύγραμμο τμήμα AB θα είναι μεσοκάθετος, άρα αν ενώσουμε ένα σημείο της μεσοκάθετου... [Κώστας, Φ3,4].

Είναι φανερό πως ο μαθητής θέλει να χρησιμοποιήσει μια ιδιότητα, θέλει να δείξει πως η $\Sigma Δ$ είναι μεσοκάθετος της χορδής AB , και συνδέει τη $\Sigma Δ$ τόσο με τον κύκλο όσο και με το ισοσκελές.

→ Στο πλαίσιο του κύκλου αναγνωρίζει τη $\Sigma Δ$ ως «μέση και κάθετος του τόξου $AΔB$ »

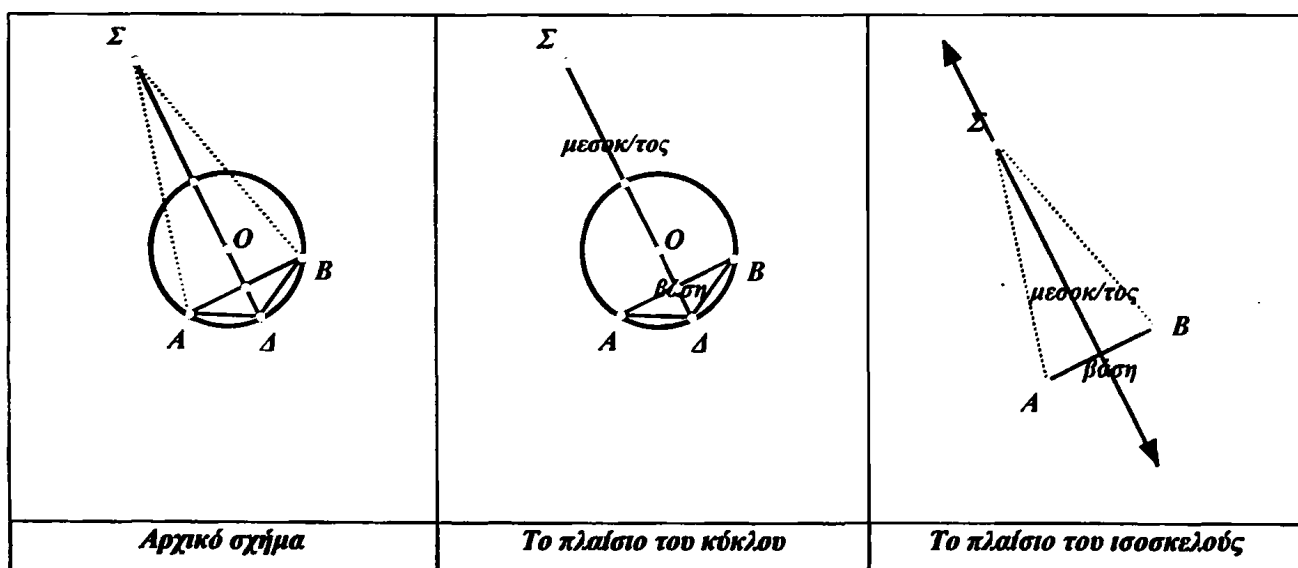
→ Στο πλαίσιο του ισοσκελούς αναφέρει πως «στο ευθύγραμμο τμήμα AB (η $\Sigma Δ$) θα είναι μεσοκάθετος».

Υπάρχει λοιπόν σε κάποιο βαθμό η λεκτική κατανόηση του σχήματος που, όμως, δεν ολοκληρώνεται, αφού ο μαθητής δεν βλέπει πώς να συσχετίσει τη «μεσοκάθετο» του τόξου $AΔB$ με τη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος AB . Δηλαδή δε χρησιμοποιεί τις ιδιότητες του κύκλου (πλαίσιο) γι αυτό και δεν επιτυγχάνει στην αιτιολόγησή του, παρόλο που αναγνωρίζει ένα κοινό στοιχείο του κύκλου και του ισοσκελούς. Η συμμετρία δεν εμφανίζεται ξανά, χρησιμοποιείται μόνο κατά το στάδιο της κατασκευής συνειδητά και μετά εγκαταλείπεται.

Συνεπώς η δυσκολία δε βρίσκεται μόνο στο ότι τα δύο Σχήματα δεν έχουν κοινούς ρόλους, αλλά στο ότι χωρίς κοινούς ρόλους οι μαθητές δεν μπορούν εύκολα να μεταφέρουν ιδιότητες από το ένα γεωμετρικό σχήμα στο άλλο, και οι γνώσεις τους μένουν αναξιοποίητες. Σε μία τέτοια περίπτωση παρατηρείται συχνά οι μαθητές να αναγνωρίζουν τα κοινά στοιχεία μόνο ως προς το ένα πλαίσιο, αγνοώντας το άλλο, με αποτέλεσμα να μην μπορούν να αιτιολογήσουν θεωρητικά την κατασκευή τους.

Σε όλες τις περιπτώσεις που αναφέραμε η κατανόηση είναι κυρίως αντιληπτική, ενώ για να αιτιολογήσει κανείς χρειάζεται και η λεκτική κατανόηση του σχήματος, η οποία θα εστιάσει και θα αποκαλύψει τους διαφορετικούς ρόλους που έχουν τα στοιχεία 1D. Στο σχήμα.4.19 αναλύονται τα δύο εννοιολογικά δίκτυα, τα δύο διαφορετικά πλαίσια, ο κύκλος και το τρίγωνο ΣΑΒ, που εμφανίζονται στη λύση του σχήματος 4.18.

Με τη συγκεκριμένη κατασκευή των μαθητών δημιουργείται μέσα στον κύκλο και ένα δεύτερο τρίγωνο το ΔΑΒ ενταγμένο στο πλαίσιο του κύκλου και γι αυτό προικισμένο με ιδιότητες που προκύπτουν από αυτόν (δεδομένα). Τα δύο τρίγωνα ΔΑΒ, ΣΑΒ έχουν κοινή βάση ΑΒ και κοινό ύψος – άξονα συμμετρίας ΣΔ. Συνεπώς υπάρχουν τα απαιτούμενα κοινά στοιχεία, με τις κοινές ιδιότητες, για να συνδεθούν τα δύο γνωστικά Σχήματα. Ποια είναι η δυσκολία; Η λεκτική κατανόηση του τριγώνου ΔΑΒ¹⁵ που θα κάνει ρητές τις ιδιότητές του, ώστε να μεταφερθούν μέσα από τα στοιχεία με τους κοινούς ρόλους στο ΣΑΒ.



σχήμα 4.19 Ανάλυση του γεωμετρικού σχήματος 4.18 σε δύο διαφορετικά πλαίσια

Τα στοιχεία που αναφέραμε οδηγούν στο συμπέρασμα πως στην περίπτωση απομακρυσμένων γεωμετρικών σχημάτων που δε διαθέτουν κοινούς ρόλους, ένα πρώτο βήμα για να συνδεθούν

τα γνωστικά Σχήματα (π.χ του κύκλου με το ΣΙΤ) μπορεί να γίνει μέσα από καθολικές ιδιότητες και συγκεκριμένα μέσα από τη συμμετρία των αντίστοιχων γεωμετρικών σχημάτων. Αυτό ίσως επαρκεί για την κατασκευή, δεν είναι όμως αρκετό για την αιτιολόγηση. Στη συνέχεια είναι απαραίτητο να αναζητηθούν κοινοί ρόλοι στις δευτερεύουσες δομές, ούτως ώστε «να περάσουν οι ιδιότητες» από το δοθέν Σχήμα στο ΣΙΤ.

Το γνωστικό Σχήμα του παραλληλογράμμου

Το παραλληλόγραμμο έχει κοινούς ρόλους με το ισοσκελές τρίγωνο (ίσες πλευρές / γωνίες). Επιπλέον το ισοσκελές τρίγωνο αποτελεί δομικό στοιχείο σε καθένα από τα παραλληλόγραμμο του σχήματος που συνοδεύει το 1^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης. Οπότε θεωρούμε πως το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι κατάλληλο για να επανεξετάσουμε, σε διαφορετικές συνθήκες, τα συμπεράσματα στα οποία έχουμε καταλήξει μέχρι στιγμής για τη σύνδεση δύο γνωστικών Σχημάτων.

Πίνακας 4.6
Σύγκριση των ρόλων στο ισοσκελές τρίγωνο και το παραλληλόγραμμο

διάσταση	Ρόλοι του ισοσκελούς τριγώνου	Ρόλοι του παραλληλογράμμου
0D	Κορυφή	Κορυφή
1 D	Ίσες πλευρές	Ίσες πλευρές
1 D	Ίσες γωνίες	Ίσες γωνίες
1 D	Ύψος – άξονας συμμετρίας	διαγώνιος
1 D	Βάση	Βάση

Σύμφωνα με την έως τώρα ανάλυση οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν εύκολα να συνδέσουν, σε αυτή την περίπτωση, το γνωστικό Σχήμα του παραλληλογράμμου με το ΣΙΤ. Υποθέτουμε πως η σύνδεση θα μπορεί να γίνει είτε με την ανάλυση του παραλληλογράμμου στα δομικά του στοιχεία (: ισοσκελή τρίγωνα), όπως στην περίπτωση του ρόμβου, είτε μέσα από τους κοινούς ρόλους, όπως στο ισοσκελές τραπέζιο. Η πρώτη περίπτωση υποδηλώνει αντιμετώπιση του γεωμετρικού σχήματος σε επίπεδο 2D, ενώ η δεύτερη σε 1D.

Τα στοιχεία δείχνουν πως η απάντηση του μαθητή καθορίζεται από τον τρόπο που αυτός βλέπει το γεωμετρικό σχήμα. Αυτό φαίνεται καθαρά στο επόμενο απόσπασμα [Μιχάλης, Φ3, 1]. Αρχικά ο μαθητής εστιάζει την προσοχή του στη σχέση που έχουν οι πλευρές των τριγώνων ($AM = \frac{1}{2} AB$), των οποίων συγκρίνει τα εμβαδά, και η απάντηση που δίνει στο (γ) ερώτημα του 1^{ου} προβλήματος είναι πως $(AMN) = \frac{1}{2} (AB\Gamma)$. Δηλαδή, η σχέση των πλευρών (1D) γίνεται και σχέση των εμβαδών. Κατόπιν, όταν το παιδί παρατηρεί πως το $AB\Gamma$ είναι χωρισμένο σε τέσσερα ίσα τρίγωνα (2D), η απάντηση αλλάζει και γίνεται $(AMN) = \frac{1}{4} (AB\Gamma)$. Γίνεται ο επόμενος διάλογος:

M: Σ αυτό το τριγωνάκι το μικρό (AMN) όλες οι πλευρές είναι οι μισές του μεγάλου (ABΓ), το μέγεθος των πλευρών αυτών, ας πούμε η AN είναι η AG/2, όχι η MN είναι το....., αυτό το τρίγωνο τέλος πάντων πρέπει να είναι το μισό αυτού λογικά. Εδώ πέρα αυτά εδώ (οι πλευρές του AMN) είναι τα μισά των μεγάλων

Ερ: Άρα το εμβαδόν είναι;

M: Ε, το μισό του αλλουνού είναι.

.....Η μήπως είναι 4 φορές πιο μικρό; Επειδή είναι χωρισμένο σε 1,2 ...4 τριγωνάκια, είναι ίσα μεταξύ τους, το μέγεθος αυτού είναι το ένα από τα τέσσερα. Άρα είναι το 1/4 του τριγώνου.

(υπογραμμίσεις δικές μας).

Όπως προκύπτει από τα ευρήματα οι μαθητές αντιμετωπίζουν εμπόδια στη σύνδεση ισοσκελούς τριγώνου – παραλληλογράμμου, σε όποια διάσταση (2D ή 1D) και αν βλέπουν το γεωμετρικό σχήμα. Και στις δύο οπτικές παρεμβαίνουν παράγοντες που δεν υπήρχαν στις προηγούμενες περιπτώσεις και δημιουργούν δυσκολίες. Συγκεκριμένα:

➤ Οι μαθητές που κατανοούν το σχήμα σε επίπεδο 2D αναμένουμε να αναγνωρίσουν το ισοσκελές ως δομικό στοιχείο του παραλληλογράμμου. Αυτό διαπιστώνεται από τις απαντήσεις τους στο 1^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης (γ ερώτημα). Πολλοί μαθητές με δυσκολία αναγνωρίζουν το χωρισμό του ABΓ σε τέσσερα ίσα μέρη και το χωρισμό κάθε παραλληλογράμμου σε δύο ισοσκελή τρίγωνα, παρόλο που φαίνεται ως «προφανές». Θεωρούμε πως ο λόγος για τον οποίο δυσκολεύονται να ενσωματώσουν το ισοσκελές τρίγωνο στο παραλληλόγραμμο, σε αντίθεση με την ευνοϊκή περίπτωση του ρόμβου, είναι πως το παραλληλόγραμμο δε διαθέτει συμμετρία. Μία μαθήτρια, μάλιστα, προσπαθεί να διορθώσει την έλλειψη. Δηλώνει πως στο σχήμα του 1^{ου} προβλήματος «δεν υπάρχει παραλληλόγραμμο», αλλά προσφέρεται να κατασκευάσει η ίδια ένα, παίρνοντας τα μέσα των τμημάτων BK και KΓ και ενώνοντας με τα M, N (σχήμα 4.20). Είναι φανερό πως οδηγείται σε ένα παραλληλόγραμμο που έχει ίδιο άξονα συμμετρίας με το ισοσκελές ABΓ [Ειρήνη, Φ3,1]. Λεει:

M: Δε βλέπω κανένα παραλληλόγραμμο!

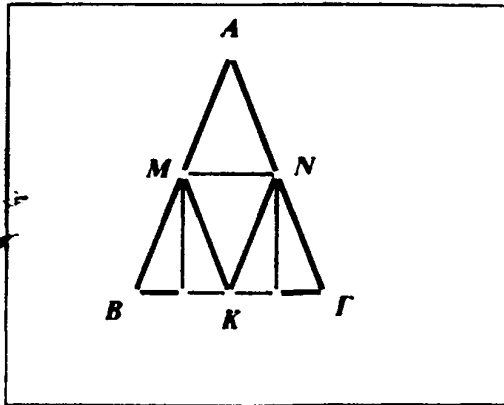
(Η ερευνήτρια ζητά από τη μαθήτρια να ζωγραφίσει ένα παραλληλόγραμμο στο πρόχειρό της και αυτή ζωγραφίζει ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο. Παρόλα αυτά, εξακολουθεί να μη βλέπει παραλληλόγραμμο στο σχήμα που δόθηκε στο 1^ο πρόβλημα)

M: Είναι μόνο MN // BΓ, αλλά δε βλέπω άλλες παράλληλες..... Το μέσο της BK και της KΓ πρέπει να είναι ίσο με τη MN (αν ενώσει τα δύο μέσα, το τμήμα αυτό ισούται με το MN και είναι παράλληλο σε αυτό).

Ερ: Το BK δεν είναι ίσο με το MN;

M: Ναι, α βλέπω να υπάρχουν δύο παραλληλόγραμμο το MNKB και το MNKΓ.

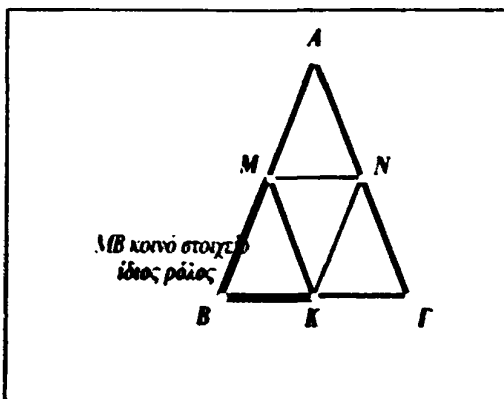




σχήμα 4.20 Τα παραλληλόγραμμα που διακρίνουν οι μαθητές στο σχήμα του 1^{ου} προβλήματος της 3^{ης} φάσης

► Οι μαθητές που κατανοούν το σχήμα σε επίπεδο 1D αντιμετωπίζουν επίσης δυσκολίες στη σύνδεση ισοσκελούς τριγώνου – παραλληλογράμμου. Το βασικό τους πρόβλημα είναι πως συγκρίνουν τα δύο ισοσκελή τρίγωνα (ABΓ, AMN) και μεταφέρουν τη σχέση των πλευρών τους στα εμβαδά. Οι συγκεκριμένοι μαθητές δεν εμπλέκουν καθόλου τα παραλληλόγραμμα στη σκέψη τους, παρόλο που στα δύο πρώτα ερωτήματα το πρόβλημα τους οδηγεί να τα αναγνωρίσουν στο σχήμα. Η

αρχική υπόθεση πως τα δύο γνωστικά Σχήματα (ΣΙΤ – παραλληλογράμμου) είναι εύκολο



σχήμα 4.21 Κοινό στοιχείο με ίδιο ρόλο σε ισοσκελές και παραλληλόγραμμο

να συνδεθούν, καθώς στα δύο γεωμετρικά σχήματα (ισοσκελές τρίγωνο και παραλληλόγραμμο) υπάρχουν κοινά στοιχεία με τον ίδιο ρόλο¹⁶ (σχήμα 4.21), δεν επιβεβαιώνεται εδώ.

Ο λόγος είναι πως το γ ερώτημα δεν είναι δυνατόν να απαντηθεί σε επίπεδο 1D, δηλαδή δίχως τη μεσολάβηση των παραλληλογράμμων.

Στο επόμενο απόσπασμα παρακολουθούμε το συλλογισμό ενός μαθητή [Στέφανος, Φ3, 1] που διακρίνει στοιχεία με

τον ίδιο ρόλο (ίση πλευρά) στα δύο ισοσκελή και αναφέρεται στη μεταξύ τους σχέση (1:2), την οποία ακολούθως μεταφέρει – μέσα από τον κοινό ρόλο – από το ένα τρίγωνο στο άλλο.

M: Αν δε με ακατά η σκέψη μου το $(ABΓ) = 2(AMN)$

Ερ: Πώς το κατάλαβες;

M: Αφού το M είναι το μέσο του AB και το N μέσο του AG, τότε ήδη έχομε τα μέσα των πλευρών, δηλαδή το μισό τρίγωνο, και προφανώς..... δηλαδή το τρίγωνο χωρίζεται στη μέση.

Συμπεράσματα

Τελικά, όπως προκύπτει από τη συγκριτική μελέτη όλων των προβλημάτων της 3^{ης} φάσης, οι συνδέσεις ανάμεσα σε γνωστικά Σχήματα μπορεί να γίνουν σε επίπεδο 2D, 1D ή χαλαρά μέσα από τη συμμετρία των αντίστοιχων γεωμετρικών σχημάτων. Το είδος της σύνδεσης καθορίζει και τη δυναμική της, δηλαδή το πλήθος των πληροφοριών που μπορούν να έχουν κοινά τα δύο γνωστικά Σχήματα. Στην περίπτωση που η σύνδεση γίνεται σε 2D, όπως στην περίπτωση του ρόμβου, οι κοινές πληροφορίες είναι πολλές. Ειδικότερα όλο το πακέτο των πληροφοριών μεταφέρεται από το ένα γνωστικό Σχήμα στο άλλο. Στην περίπτωση που η σύνδεση γίνεται σε

1D, μεταφέρονται μία – δύο πληροφορίες, ενώ όταν τα Σχήματα συνδέονται μέσα από μία γενική αίσθηση συμμετρίας, η κατάσταση είναι πιο ελεύθερη και η ενεργοποίηση στοιχείων του κάθε γεωμετρικού σχήματος εξαρτάται από τον κάθε μαθητή. Η αποτελεσματικότητα των μαθητών αυξάνει, όταν υπάρχει ο συνδυασμός ενός κοινού στοιχείου με τον ίδιο ρόλο στα δύο γεωμετρικά σχήματα, με τη συμμετρία.

Σχετικά τώρα με το μοναδικό είδος συνδέσεων που διδάσκεται στο σχολείο, τις ιεραρχικές συνδέσεις, αυτές αφορούν σε σχηματικές έννοιες της ίδιας οικογένειας και γίνονται σε επίπεδο 2D, ως εξής. Το αρχικό σχήμα διαθέτει ένα σύνολο ιδιοτήτων που μεταφέρονται στο επόμενο ιεραρχικά σχήμα, το οποίο διαθέτει κάποια επιπλέον ιδιότητα / ιδιότητες. Αυτό με τη σειρά του τις μεταφέρει στο επόμενο, το οποίο έχει και κάποια επιπλέον ιδιότητα κ.ο.κ. Για παράδειγμα, η οικογένεια που περιλαμβάνει το παραλληλόγραμμο, το ρόμβο και το τετράγωνο. Χαρακτηριστικό των ιεραρχικών συνδέσεων είναι πως οι ιδιότητες των εννοιών που βρίσκονται σε υψηλότερο ιεραρχικά επίπεδο δε χρειάζεται να επαναληφθούν σε έννοιες που βρίσκονται χαμηλότερα στην ιεραρχία, αφού διατηρούνται. Όλο το πακέτο των ιδιοτήτων της πρώτης έννοιας εντάσσεται αυτούσιο σε κάθε άλλη, χαμηλότερη ιεραρχικά. Τελικός στόχος των ιεραρχικών συνδέσεων είναι η ενσωμάτωση όλων των σχετικών σχηματικών εννοιών σε ένα γενικό – περιεκτικό Σχήμα.

Από όσα προηγήθηκαν φαίνεται να ευσταθεί η αντίληψη πως άλλα γνωστικά Σχήματα είναι ευκολότερο να συνδεθούν και άλλα όχι. Η ευκολία στη σύνδεση εξαρτάται από τη φύση των γεωμετρικών σχημάτων, γύρω από τα οποία δημιουργούνται τα αντίστοιχα συγκεκριμένα γνωστικά Σχήματα και ειδικότερα από δύο παράγοντες: τις συμμετρίες και τους ρόλους των στοιχείων τους.

Συνδέοντας δύο συμμετρικά σχήματα, μπορούμε να περάσουμε εύκολα πληροφορίες από το ένα στο άλλο, πράγμα αδύνατον στην περίπτωση σύνδεσης ενός συμμετρικού και ενός μη συμμετρικού σχήματος, όπως για παράδειγμα ενός ισοσκελούς τριγώνου και ενός παραλληλογράμμου στη γενική περίπτωση (όπως στην περίπτωση του 1^{ου} προβλήματος).

Από την άλλη, οι κοινοί ρόλοι δημιουργούν τις προϋποθέσεις για σύνδεση δύο γνωστικών Σχημάτων. Αφού ο ρόλος παραπέμπει στην εικόνα πρότυπο και στο πλέγμα σχέσεων που συμβολίζει μέσα από ένα κοινό στοιχείο, με τον ίδιο ρόλο στα δύο γεωμετρικά σχήματα, μία σχέση περνά φυσικά από το ένα στο άλλο. Δυσκολίες δημιουργούνται, όταν το κοινό στοιχείο έχει διαφορετικούς ρόλους σε κάθε σχήμα, γεγονός που ανακόπτει τη ροή πληροφοριών ανάμεσά τους και εμποδίζει τη σύνδεση. Κάτι ανάλογο συμβαίνει και στην περίπτωση που το στοιχείο ανήκει στο ένα σχήμα, ενώ στο άλλο σχήμα ανήκει μόνο ένα μέρος του.

4.1.3 Ο χαρακτήρας των συνδέσεων ανάμεσα στα Σχήματα

Επειδή διερευνούμε τα γνωστικά Σχήματα κατά τη λειτουργία τους, είναι προφανές ότι μας ενδιαφέρουν εκείνοι οι τρόποι σύνδεσης των γνωστικών Σχημάτων που οδηγούν σε αποτελεσματική λειτουργία. Η αποτελεσματικότητα διαπιστώνεται τόσο από την ικανότητα λύσης του προβλήματος, όσο και από το βαθμό εμπιστοσύνης που ο ίδιος ο μαθητής, δίνει στην κάθε σύνδεση.

Οι συγκρίσεις που κάνουν οι μαθητές στο 2^ο και 3^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης¹⁷ αποκαλύπτουν τι θεωρούν οι ίδιοι ως αποτελεσματικό και με ποια κριτήρια. Οι αντιλήψεις των μαθητών δεν συμπίπτουν πάντα με των δασκάλων τους, λόγω του ότι διαφέρει το κριτήριο αποτελεσματικότητας που στους πρώτους είναι τοπικό, ενώ στους δεύτερους γενικότερο.

Συγκεκριμένα για τον ειδικό η αποτελεσματικότητα μιας μεθόδου εξαρτάται από τη δυνατότητα χρήσης της σε μια ποικιλία περιπτώσεων. Ακόμα η αποτελεσματικότητα συνδέεται με την αξιοποίηση του πλαισίου που θέτει η συγκεκριμένη, κάθε φορά, κατάσταση προβλήματος. Αν κάποιος είναι ικανός να συνδέσει το ΣΙΤ^{*} με το γνωστικό Σχήμα του πλαισίου, τότε μέσα από κοινά στοιχεία των δύο γεωμετρικών σχημάτων, οι ιδιότητες του ενός μεταφέρονται στο άλλο. Αυξάνονται έτσι οι πηγές, από τις οποίες μπορεί να αντλήσει συμπεράσματα.

Αντίθετα, για τους μαθητές η αποτελεσματικότητα συνδέεται με την επιτυχία στο συγκεκριμένο, κάθε φορά, πρόβλημα. Αυτό εξηγεί, σε μεγάλο βαθμό, την προτίμησή τους σε λύσεις αποσπασματικές, βασισμένες μόνο σε λίγες προηγούμενες γνώσεις και αποκομμένες από το πλαίσιο που τους δίνεται. Οι μαθητές παρουσιάζουν ένα χρόνο αδράνειας στη δημιουργία νέων συνδέσεων, ανάμεσα στα γνωστά τους και σε νέα γνωστικά Σχήματα. Το χρόνο αυτό τον παρατείνουν όσο μπορούν να έχουν κάποια στοιχειώδη γεωμετρική λειτουργία με τα γνωστά.

Ιδανική περίπτωση σύνδεσης είναι η ενσωμάτωση ενός ολόκληρου γνωστικού Σχήματος σε ένα άλλο. Η αποτελεσματικότητά της είναι μεγάλη, καθώς όλες οι πληροφορίες από το γνωστό σχήμα μεταφέρονται αυτόματα στο νέο. Αυτό δίνει εμπιστοσύνη στο μαθητή σε σχέση με την κατασκευή και την αιτιολόγηση. Σύμφωνα με τα λόγια των παιδιών, στις συγκρίσεις του 2^{ου} προβλήματος της 3^{ης} φάσης, όταν χρησιμοποιούν το ισοσκελές σα δομικό λίθο του ρόμβου, αυτός «κατασκευάζεται ευκολότερα», «μπορούμε να το αποδείξουμε πιο εύκολα», «όλοι μπορούν να το κατασκευάσουν και περιέχει και την ιδιότητα ότι δύο διαδοχικές πλευρές είναι ίσες».

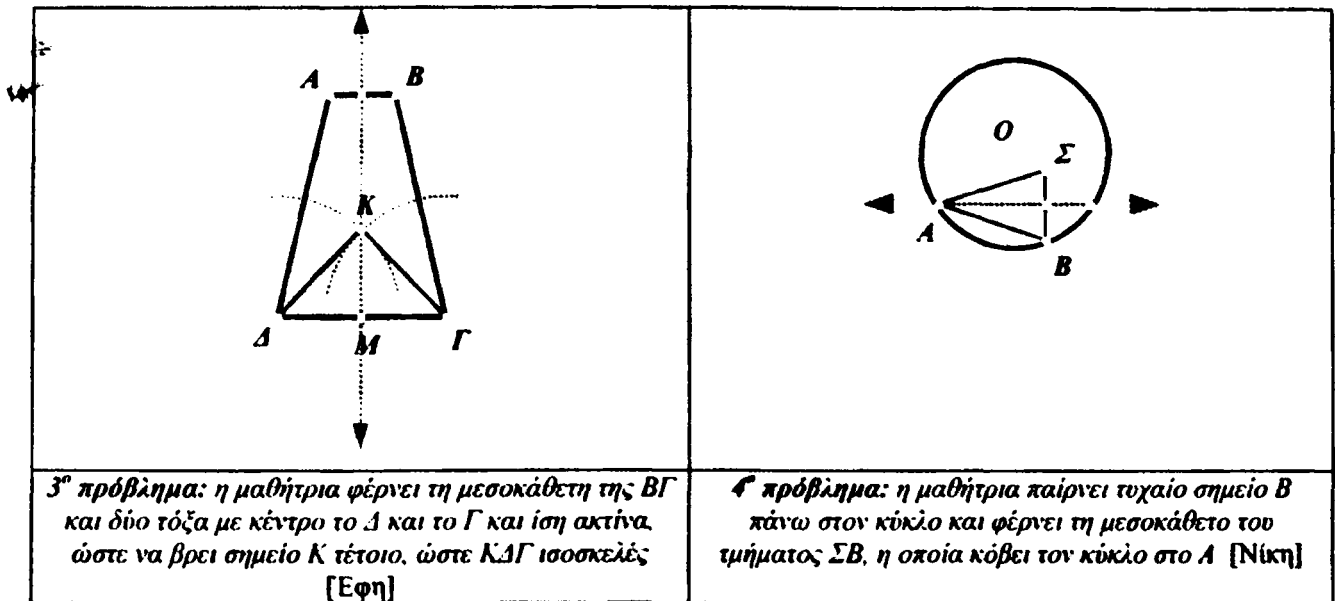
Με κριτήριο την αποτελεσματικότητα της γεωμετρικής λειτουργίας, τα ευρήματα δείχνουν πως υπάρχει μια διαβάθμιση στο χαρακτήρα των συνδέσεων. Στο ένα άκρο υπάρχει η «μη σύνδεση» ή σύνδεση «εκτός πλαισίου», ενώ στο άλλο άκρο βρίσκεται η πλήρης ή «ενεργή σύνδεση». Στα επόμενα εξετάζουμε τις διάφορες περιπτώσεις συνδέσεων που εμφανίζονται σε μαθητές οι οποίοι συμμετέχουν στην έρευνα. Αναλύονται, στην κάθε περίπτωση, οι αιτίες στις οποίες μπορεί να αποδοθεί η αναποτελεσματικότητα στη σύνδεση δύο γνωστικών Σχημάτων:

→ *Σύνδεση εκτός πλαισίου*: ο μαθητής δεν κάνει καμία προσπάθεια να χρησιμοποιήσει το πλαίσιο (στην περίπτωση αυτή, δεν έχει νόημα να μιλάμε για σύνδεση ανάμεσα στα γνωστικά Σχήματα). Ο μαθητής που αγνοεί το πλαίσιο, δηλαδή ένα άλλο γνωστικό Σχήμα, διατηρεί τις γνώσεις του απομονωμένες, δίχως να εγκαθιστά συνδέσεις μεταξύ των Σχημάτων. Έτσι μπορεί, μεν, ευκαιριακά, να έχει ένα αποτέλεσμα, αλλά είναι φανερό πως μια τέτοια αντίληψη δεν τον βοηθά γενικότερα στη συγκρότηση της γνώσης του και, κατ' επέκταση, στη λύση γεωμετρικού προβλήματος.

Χαρακτηριστικό της αντιμετώπισης «εκτός πλαισίου» είναι πως οι μαθητές ξεκινούν τη λύση προβλήματος, όχι με βάση τις υποθέσεις του, αλλά με ψευδές - υποθέσεις που προκύπτουν από μετρήσεις κάποιων τμημάτων του δοθέντος σχήματος, γεγονός που υποβιβάζει τη λειτουργία του γεωμετρικού σχήματος σε εικονογραφική. Για παράδειγμα, μετρούν τα στοιχεία του δοθέντος σχήματος (πλευρές, διαγώνιους) μήπως κάποια από αυτά είναι ίσα ή κατασκευάζουν δύο ίσες πλευρές μόνοι τους αγνοώντας τις ιδιότητες αυτού που δίνει το πρόβλημα. Η προσκόλληση στις συγκεκριμένες διαστάσεις του υλικού σχήματος στερεί τη σχηματική έννοια από τη γενικότητά της.

Οι εκτός πλαισίου κατασκευές εμφανίζονται κυρίως στο 3^ο και 4^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης. Οι μαθητές κατασκευάζουν το ισοσκελές με τη βοήθεια μιας οδηγίας (1.3.4), δίχως να ενδιαφέρονται για τις δυνατότητες που προσφέρει το δοθέν γεωμετρικό σχήμα (ισοσκελές τραπέζιο και κύκλος, αντίστοιχα). Για παράδειγμα, στο 3^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης (σχήμα 4.22α) η μαθήτρια χρησιμοποιεί δύο οδηγίες κατασκευής ταυτόχρονα (διαβήτη και μεσοκάθετο) για να κατασκευάσει ισοσκελές τρίγωνο. Κατόπιν δηλώνει πως αυτή η κατασκευή είναι η καλύτερη, γιατί «έχοντας φέρει τη μεσοκάθετο έχουμε αποδείξει ότι ένα σημείο της ισαπέχει από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος, και είναι πιο εύκολη». Δηλαδή έχει κατασκευάσει μόνη της ό,τι χρειάζεται και δεν έχει ανάγκη, άρα δε χρησιμοποιεί το δοθέν πλαίσιο του ισοσκελούς τραπεζίου. Μια άλλη μαθήτρια στο 4^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης, χρησιμοποιεί πάλι τη μεσοκάθετο για την κατασκευή του ισοσκελούς, αλλά αγνοεί επίσης το πλαίσιο (σχήμα 4.22β). Οι εκτός πλαισίου κατασκευές συγκεντρώνουν τις προτιμήσεις των

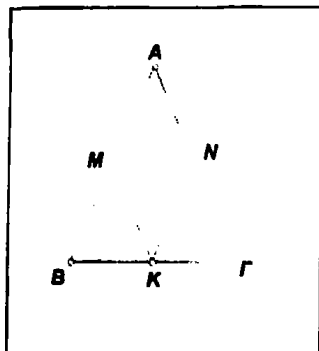
μαθητών, γιατί σε αυτές δεν απαιτούνται αποδείξεις. Το τρίγωνο είναι από την κατασκευή του ισοσκελές.



σχήμα 4.22 Κατασκευές «εκτός πλαισίου»

→ *Ανενεργή σύνδεση*: ο μαθητής μπορεί να αναγνωρίζει και να αναφέρει μια έννοια ως πιθανά χρήσιμη στο πλαίσιο του ΣΙΤ, χωρίς να μπορεί να την χρησιμοποιήσει. Για παράδειγμα, στο 1^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης (2.6), το τμήμα ΜΝ που συνδέει τα μέσα των ίσων πλευρών ΑΒ, ΑΓ, μπορεί να αναγνωρίζεται ως χρήσιμο από αρκετούς μαθητές προκειμένου να απαντήσουν στις ερωτήσεις του προβλήματος. Αν όμως δεν γνωρίζουν την ιδιότητά του¹⁸, παραμένει ένα απλό ευθύγραμμο τμήμα και δεν έχει τίποτα να προσφέρει, πέρα από το αντιληπτικό επίπεδο, στο συλλογισμό. Κάτι ανάλογο συμβαίνει στο 4^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης (2.6), όπου κάποιοι μαθητές φέρνουν από το Σ τις εφαπτόμενες του κύκλου, αλλά στη συνέχεια τις μεταχειρίζονται σαν δύο τυχαίες ημιευθείες. Έτσι δεν μπορούν να δείξουν ότι το τρίγωνο που κατασκευάζουν είναι ισοσκελές. [Βάσια, Φ3, 4]. Μια μαθήτρια, μάλιστα, φέρνει τη μία εφαπτομένη ΣΑ του κύκλου και κατόπιν μετράει και παίρνει σημείο Β πάνω στον κύκλο, έτσι ώστε ΣΑ=ΣΒ [Ειρήνη, Φ3, 4]. Είναι φανερό πως, ενώ επικαλείται και κατασκευάζει την εφαπτομένη, τη χρησιμοποιεί επίσης ως μια κοινή ευθεία.

Στις συγκεκριμένες περιπτώσεις γίνεται απόπειρα χρήσης του πλαισίου, χωρίς επιτυχία. Η δυσκολία είναι πως ο μαθητής επικαλείται κάποιο στοιχείο και το ρόλο του, δίχως να του αποδίδει, αντίστοιχα, μια ιδιότητα. Έτσι η επίκληση του στοιχείου είναι ανενεργή, αφού δεν υπάρχει ιδιότητα να μεταφέρει στο ΣΙΤ. Μια τέτοια σύνδεση ανάμεσα σε γνωστικά σχήματα τη χαρακτηρίζουμε ανενεργή.



σχήμα 4.23 το σχήμα του 1^{ου} προβλήματος της 3^{ης} φάσης

→ **σύνδεση που ενεργοποιείται λανθασμένα:** ο μαθητής μπορεί να αναγνωρίζει, να αναφέρει, αλλά να χρησιμοποιεί λανθασμένα μια σχηματική έννοια στα πλαίσια του ΣΙΤ. Για παράδειγμα, στο 1^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης (σχήμα 4.23), ένας μαθητής [Νεκτάριος] κάνει τον εξής συλλογισμό:

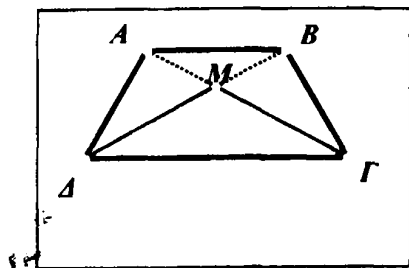
«αφού M, N είναι τα μέσα και άρα αυτή η γραμμή, το MN , χωρίζει στη μέση το σχήμα. Άρα άμα πούμε ότι το $MKN=MNA$ τότε μπορούμε να πούμε ότι είναι ίσα,έχουνε ίσα όλα εδώ $AN=NK, AM=MK$ άρα είναι ρόμβος».

Η ανάλυση της σκέψης του βρίσκεται στον επόμενο πίνακα 4.7.

Πίνακας 4.7
Ανάλυση μιας λανθασμένης σύνδεσης δύο Σχημάτων

λόγια του μαθητή	σχόλια της ερευνήτριας	γνωστικό Σχήμα στο οποίο αναφέρεται ο μαθητής
M: αφού M, N είναι τα μέσα (των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$) και <u>άρα αυτή η γραμμή, το MN χωρίζει στη μέση το σχήμα ($AMKN$)</u>. Άρα άμα πούμε ότι το $MKN=MNA$ τότε μπορούμε να πούμε ότι είναι ίσα,έχουνε ίσα όλα εδώ $AN=NK, AM=MK$ άρα είναι ρόμβος.	Εντοπίζει το κοινό στοιχείο του ισοσκελούς τριγώνου και με τον ρόμβο η MN χωρίζει το ρόμβο σε δύο ίσα τρίγωνα	Γνωστικό σχήμα του ισοσκελούς τριγώνου (ΣΙΤ) Γνωστικό σχήμα του ρόμβου

Το στοιχείο MN είναι κοινό στοιχείο του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ και του ρόμβου $AMKN$, με διαφορετικούς ρόλους στο καθένα. Στο τρίγωνο ο ρόλος του είναι να συνδέει τα μέσα των πλευρών, ενώ στο ρόμβο είναι διαγώνιος. Ο μαθητής, προσπαθώντας πάση θυσία να συνδέσει τα δύο Σχήματα, οδηγείται και εντοπίζει το κοινό στοιχείο, το οποίο όμως έχει διαφορετικούς ρόλους στα δύο γεωμετρικά σχήματα. Αφού δεν υπάρχουν κοινοί ρόλοι, μεταφέρει διαστρεβλωμένη την ιδιότητα από το ΣΙΤ στο γνωστικό Σχήμα του ρόμβου. Έτσι το «ενώνει τα μέσα» γίνεται, υποστηριζόμενο και από την οπτική αντίληψη, «χωρίζει το ρόμβο στη μέση».



σχήμα 4.24 Μια λύση του 3^{ου} προβλήματος της 3^{ης} φάσης

Ένα δεύτερο παράδειγμα σύνδεσης που ενεργοποιείται λανθασμένα, αφορά στο 3^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης. Η μαθήτρια [Παρασκευή] φτιάχνει τις διαγώνιους του ισοσκελούς τραπεζίου και λέει «άμα φτιάξω τις διαγώνιους, έφτιαξα δύο (ισοσκελή) τα AMB , $\Delta M\Gamma$ ». Όταν της ζητείται να αποδείξει ότι το τρίγωνο $M\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές, σκέφτεται ως εξής:

«..... δε το βρίσκω, γιατί το κέντρο του τραπεζίου είναι κορυφή των δύο (τριγώνων).... το $M\Gamma = M\Delta$ γιατί οι διαγώνιοι του ισοσκελούς τραπεζίου είναι ίσες».

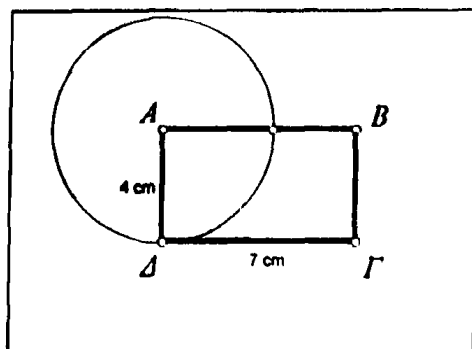
Αναλύοντας τις ενέργειες της μαθήτριας βλέπουμε πως:

- εντοπίζει αρχικά ένα κοινό στοιχείο (ID) του τραπεζίου και του τριγώνου και του αποδίδει ρόλους στα αντίστοιχα γεωμετρικά σχήματα (M = «κέντρο» του τραπεζίου = κορυφή του τριγώνου).
- στη συνέχεια μεταφέρει λανθασμένα την ιδιότητα από το τραπέζιο στο τρίγωνο (οι ίσες διαγώνιοι του τραπεζίου γίνονται ίσες πλευρές του τριγώνου).

Το τρίγωνο $M\Gamma\Delta$ και το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ μοιράζονται διαφορετικά στοιχεία, με διαφορετικούς ρόλους. Συγκεκριμένα τα τμήματα $M\Gamma$, $M\Delta$ είναι ίσες¹⁹ πλευρές του τριγώνου και ταυτόχρονα κάθε μία είναι αντίστοιχα μέρος μιας διαγωνίου (AG , BD) του τραπεζίου. Η μαθήτρια παραβλέπει ότι τα Σχήματα δεν συνδέονται με κοινό στοιχείο και μεταφέρει λανθασμένα την ιδιότητα (ίσα) από το όλον (διαγώνιοι) στο μέρος (πλευρές του τριγώνου).

Και σε αυτή την περίπτωση γίνεται προσπάθεια χρησιμοποίησης του πλαισίου δίχως ουσιαστική επιτυχία. Σε αντίθεση με την προηγούμενη περίπτωση (ανενεργή σύνδεση), όπου ο μαθητής δεν αποδίδει καμία ιδιότητα στο στοιχείο που επικαλείται, εδώ η δυσκολία οφείλεται στο ότι δε μεταφέρονται σωστά οι ιδιότητες του ενός γνωστικού Σχήματος στο άλλο. Αυτό μπορεί να οφείλεται στο ότι το κοινό στοιχείο έχει διαφορετικούς ρόλους στο κάθε γεωμετρικό σχήμα (1^ο παράδειγμα) ή στο ότι τα δύο γεωμετρικά σχήματα δεν έχουν κοινό στοιχείο, αλλά το ένα στοιχείο είναι μέρος του άλλου, συνεπώς η ιδιότητά του δε μεταφέρεται (2^ο παράδειγμα).

→ **Ενεργή σύνδεση:** Αυτή σηματοδοτείται από τη δημιουργική χρήση των αντίστοιχων γνωστικών Σχημάτων και την ανεμπόδιστη κυκλοφορία των πληροφοριών από το ένα γνωστικό Σχήμα στο άλλο. Οι ενεργές συνδέσεις εμφανίζονται και χαρακτηρίζουν όλες τις περιπτώσεις επιτυχούς λύσης προβλήματος.



σχήμα 4.25 Το πρόβλημα του Duval

Για παράδειγμα, στο πρόβλημα που αναφέρει ο Duval (2.7.1) και συνοδεύεται από το σχήμα 4.25 η λύση προϋποθέτει:

- i. Να αναγνωριστούν τα δύο γνωστικά Σχήματα, δηλαδή τα δύο διαφορετικά πλαίσια: ο κύκλος και το ορθογώνιο
- ii. Να εντοπιστεί το κοινό τους στοιχείο, δηλαδή το ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ και οι αντίστοιχοι ρόλοι του που είναι «ακτίνα» στον κύκλο και «μέρος της πλευράς» του ορθογωνίου
- iii. Να μεταφερθεί με τη βοήθεια του κοινού στοιχείου η ιδιότητα (μέτρο του ΑΕ) από τον κύκλο στο ορθογώνιο.

Συμπερασματικά σε σχέση με το χαρακτήρα των συνδέσεων που δημιουργούνται ανάμεσα σε δύο γνωστικά Σχήματα, θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο χαρακτήρας μίας σύνδεσης καθορίζεται από δύο παράγοντες: από την επιθυμία του μαθητή να συνδέσει το ΣΙΤ με το πλαίσιο που του δίνει το πρόβλημα και από τον τρόπο λειτουργίας της σύνδεσης. Στον πίνακα 4.8 που ακολουθεί, συνοψίζονται οι διάφοροι τύποι συνδέσεων σε σχέση με τις αντίστοιχες τιμές των δύο αυτών παραγόντων.

Πίνακας 4.8
Χαρακτήρας των συνδέσεων

	εκτός πλαισίου	ανενεργή σύνδεση	σύνδεση που ενεργοποιείται λανθασμένα	ενεργή σύνδεση
επιθυμία για σύνδεση	Όχι	Ναι	Ναι	Ναι
τρόπος λειτουργίας της σύνδεσης	(δεν υπάρχει σύνδεση)	δεν κυκλοφορούν πληροφορίες	κυκλοφορούν, κυρίως, παραμορφωμένες πληροφορίες	κυκλοφορούν οι πληροφορίες

4.2 ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΥΡΗΜΑΤΩΝ ΑΝΑ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ

Στην παρούσα ενότητα, επιχειρούμε να οργανώσουμε και να σχολιάσουμε τα ευρήματα της έρευνας σύμφωνα με το δεύτερο στόχο της, δηλαδή τη «διερεύνηση των γνωστικών συστημάτων αναπαράστασης που χρησιμοποιούνται και των λειτουργιών που εμπλέκονται στην κατασκευή και στην εξέλιξη του γνωστικού σχήματος του ισοσκελούς τριγώνου (ΣΙΤ)». Συγκεκριμένα τα στοιχεία αναλύονται με άξονες τις τρεις λειτουργίες, δίχως να παραγνωρίζονται οι δυσκολίες που δημιουργεί η στενή τους αλληλεξάρτηση, η οποία διερευνάται ιδιαίτερος στην ενότητα «αλυσίδες ενεργειών».

Τα κριτήρια με βάση τα οποία ελέγχεται η αλήθεια ή μη των υποθέσεων της έρευνας, διαμορφώνονται ανά λειτουργία και σχετίζονται άμεσα με τα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα:

- Πώς αντιλαμβανόμαστε την ύπαρξη του (γνωστικού) σχήματος του ισοσκελούς τριγώνου (ΣΙΤ);
- Πώς εξελίσσεται το σχήμα του ισοσκελούς τριγώνου (ΣΙΤ);

Τα κριτήρια αντανakλούν συγκεκριμένες ικανότητες των μαθητών. Με βάση τις ικανότητες σκιαγραφείται το κατά πόσον το γνωστικό τους Σχήμα για το ισοσκελές τρίγωνο (ΣΙΤ) μπορεί να προσαρμόζεται στα δεδομένα του προβλήματος, είναι ευέλικτο σε αλλαγές και αξιόπιστο στις αποφάσεις με τις οποίες λειτουργεί. Κατ' επέκταση σκιαγραφείται η αποτελεσματικότητα του ΣΙΤ στη λύση προβλήματος.

Σχετικά με τη λειτουργία της νοερής απεικόνισης, τα κριτήρια που θέτουμε είναι:

- η ικανότητα του μαθητή να δημιουργεί τη νοερή εικόνα του προβλήματος και της λύσης του
- η ικανότητα του μαθητή να αναγνωρίζει τα στοιχεία της νοερής εικόνας (της λύσης του προβλήματος), και να αποδίδει ρόλους σε αυτά.

Σχετικά με τη λειτουργία της κατασκευής, το κριτήριο είναι:

- η ικανότητα του μαθητή να επιλέγει την κατάλληλη οδηγία κατασκευής για το συγκεκριμένο πρόβλημα

Σχετικά με τη λειτουργία της αιτιολόγησης, το κριτήριο είναι:

- η ικανότητα του μαθητή να αιτιολογεί την κατασκευή του.

Είναι φανερό πως τα κριτήρια συνδέονται στενά με την αναγνώριση και τη χρήση της έννοιας του ισοσκελούς τριγώνου. Προκειμένου να ελέγξουμε τις υποθέσεις εργασίας μέσα από τα

κριτήρια που προαναφέρθηκαν θεωρούμε ως δείκτες ωρίμανσης σε σχέση με κάθε κριτήριο τους ακόλουθους (Πίνακας 4.9):

Πίνακας 4.9
Κριτήρια με βάση τα οποία ελέγχονται οι υποθέσεις της έρευνας ανά λειτουργία

λειτουργία	κριτήριο	δείκτες ωρίμανσης
νοερή απεικόνιση	η ικανότητα του μαθητή να δημιουργεί τη νοερή εικόνα της λύσης του προβλήματος	• Ο τρόπος με τον οποίο δημιουργείται η νοερή εικόνα στο νου (ή απαιτείται βοήθεια από το γεωμετρικό σχήμα) • Η πληρότητα της νοερής εικόνας (περιλαμβάνει όλους τους περιορισμούς του προβλήματος;)
	η ικανότητα του μαθητή να αποδίδει ρόλο στα στοιχεία της νοερής εικόνας.	• Ο τρόπος επιλογής του ρόλου (νοητικά ή με την βοήθεια του σχήματος) • Η δυνατότητα αλλαγής ρόλου • Η συνέπεια ανάμεσα στους ρόλους που αποδίδονται
κατασκευή	η ικανότητα του μαθητή να επιλέγει την κατάλληλη οδηγία κατασκευής για το συγκεκριμένο πρόβλημα	• Η δυνατότητα προσαρμογής της οδηγίας στα δεδομένα του προβλήματος • Η δυνατότητα αλλαγής της οδηγίας
αιτιολόγηση	η ικανότητα του μαθητή να αιτιολογεί την κατασκευή του.	• Το πού βασίζεται ο συλλογισμός (σε εικόνες, σε όσα ο ίδιος κατασκευάζει ή σε θεωρητικές προτάσεις) • Το είδος της γλώσσας που χρησιμοποιείται στα επιχειρήματα (φυσικός λόγος, ατελής θεωρητικός, ή θεωρητικός λόγος)

Όπως έχουμε ήδη σχολιάσει, τόσο στην προέρευνα όσο και στη δομική ανάλυση των ευρημάτων, η επιτυχία στη λύση ενός προβλήματος κατασκευής σε μαθητές αυτής της ηλικίας, συνδέεται με μια ποικιλία προσεγγίσεων. Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε με βάση τα στοιχεία που προκύπτουν από την έρευνά μας, το πώς διαφορετικά παιδιά μπορεί να αντιμετωπίζουν αποτελεσματικά το ίδιο πρόβλημα, παρότι διαφέρουν ως προς το βαθμό ανάπτυξης των τριών λειτουργιών τους (νοερής απεικόνισης, κατασκευής και αιτιολόγησης). Επίσης θα μελετήσουμε τους διάφορους τύπους μετατροπών και αλληλεπιδράσεων ανάμεσα στα συστήματα αναπαράστασης που χρησιμοποιούνται από τους μαθητές.

4.2.1 Με αφετηρία τη νοερή απεικόνιση

Η νοερή απεικόνιση, στην πλειοψηφία των περιπτώσεων των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα, φαίνεται να έχει μια προτεραιότητα σε σχέση με τις άλλες δύο λειτουργίες. Οι μαθητές εξετάζουν αρχικά στο νου τα δεδομένα του προβλήματος, σχηματίζουν και επεξεργάζονται (= μετασχηματισμοί μέσα στο ίδιο σύστημα) τη νοερή τους εικόνα και, αργότερα, επιχειρούν να την μετατρέψουν (= μετασχηματισμοί από ένα σύστημα σε διαφορετικό) σε γεωμετρικό σχήμα. Για τη δημιουργία της νοερής εικόνας, που αντιστοιχεί στη λύση του προβλήματος, καθώς και για τον καθορισμό της ποιότητάς της συμβάλλουν διάφοροι παράγοντες, που μπορούμε να τους κατατάξουμε σε δύο ομάδες:

- (α) στους παράγοντες που σχετίζονται με την αναγνώριση των στοιχείων του προβλήματος, σε σχέση με τις ήδη καταχωρημένες στη μνήμη πληροφορίες και
- (β) στους παράγοντες που σχετίζονται με τους μετασχηματισμούς ανάμεσα στα συστήματα αναπαράστασης

Η νοερή εικόνα δημιουργείται μέσα από συνεχή αλληλεπίδραση με την εκφώνηση του προβλήματος. Ο τρόπος που «διαβάζεται» το γεωμετρικό σχήμα, το οποίο συνοδεύει το πρόβλημα, σε συνδυασμό με την εκφώνηση, δημιουργεί μια νοερή εικόνα, αλλά και αντίστροφα η ήδη υπάρχουσα νοερή εικόνα – συχνά το πρότυπο – επηρεάζει τον τρόπο που διαβάζονται τα δεδομένα του προβλήματος. Στόχος της αλληλεπίδρασης είναι η μετατροπή των πληροφοριών από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο.

Οι μετατροπές μεταξύ αναπαραστάσεων

Οι μετατροπές ανάμεσα σε διαφορετικά συστήματα είναι συχνές και απόλυτα απαραίτητες στη γεωμετρική σκέψη, όμως δεν είναι εύκολες ούτε προφανείς. Ο Duval συνδέει τον προοδευτικό συντονισμό ανάμεσα στα συστήματα αναπαράστασης με τη μάθηση των Μαθηματικών και μάλιστα τον θέλει να προηγείται: «Ο συντονισμός των συστημάτων αναπαράστασης δεν είναι συνέπεια της μαθηματικής κατανόησης, αντίθετα είναι ουσιώδης συνθήκη της» (Duval, 2002). Δυσκολίες στις μετατροπές δημιουργούνται από την εμπλοκή σε αυτές πολλών, διαφορετικών, συστημάτων αναπαράστασης και από το γεγονός ότι δεν ταυτίζονται πάντα οι αναπαραστάσεις του ίδιου αντικειμένου στα διάφορα συστήματα (Duval, 2002).

Στα προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών, ο μαθητής καλείται να σχηματίσει τη νοερή απεικόνιση του προβλήματος αρχικά και της λύσης του κατόπιν βασιζόμενος στην εκφώνηση του προβλήματος (μετατροπή από φυσική γλώσσα και, ίσως, από γεωμετρικό σχήμα σε σημειωτική αναπαράσταση που δείχνει την οργάνωση των σχέσεων ανάμεσα στα στοιχεία που

αναπαρίστανται). Ο μαθητής θα κατασκευάσει στη συνέχεια τη νοερή του απεικόνιση για τη λύση στο χαρτί (μετατροπή από σημειωτική αναπαράσταση σε γεωμετρικό σχήμα ή / και φυσική γλώσσα).

Σε κάθε τέτοια μετατροπή γίνονται «εκπτώσεις» ή «αλλοιώσεις» στα χαρακτηριστικά του αντικειμένου που αναπαρίσταται. Η διάσταση μεταξύ αρχικής – τελικής αναπαράστασης γίνεται αντιληπτή συνήθως όταν ο μαθητής επανέλθει στο ίδιο σύστημα, στα πλαίσια του οποίου διατυπώθηκε η εκφώνηση του προβλήματος, όταν δηλαδή προσπαθήσει να αιτιολογήσει με φυσική γλώσσα το σχήμα που κατασκεύασε.

Ο βαθμός στον οποίο επιτυγχάνεται η ταύτιση ανάμεσα στις αναπαραστάσεις της ίδιας γεωμετρικής έννοιας, στα διάφορα συστήματα αναπαράστασης (λεκτικό, εικονικό, συμβολικό), καθορίζει την ποιότητα της νοερής απεικόνισης και συνακόλουθα του γεωμετρικού σχήματος.

Η ταυτότητα κατά τη μετατροπή καθορίζεται μεταξύ άλλων και από τους παράγοντες που αναφέρονται στον Πίνακα 4.10:

Πίνακας 4.10

Παράγοντες που καθορίζουν τις μετατροπές ανάμεσα σε αναπαραστάσεις στη Γεωμετρία

Αναγνώριση των στοιχείων του γεωμετρικού σχήματος και των μεταξύ τους σχέσεων	Λειτουργική κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος	Δυνατότητα κατασκευής του γεωμετρικού σχήματος
---	--	--

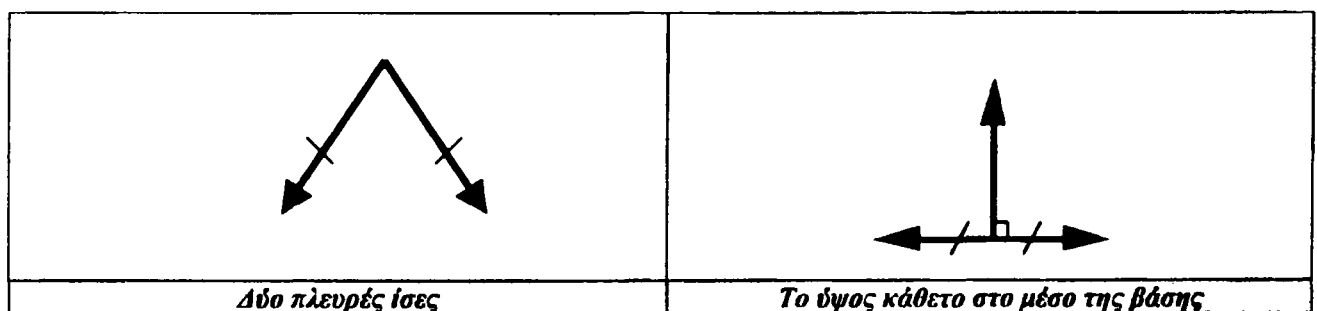
Α) αναγνώριση στοιχείων και σχέσεων

Ένας εσωτερικός παράγοντας που εμποδίζει το πέρασμα από ένα σύστημα αναπαράστασης σε άλλο είναι, οι δυσκολίες που σχετίζονται με τον προσδιορισμό της ταυτότητας των οπτικών μονάδων και της οργάνωσής τους. Προκειμένου οι μαθητές να αναγνωρίσουν τα διάφορα στοιχεία της εικόνας (ευθύγραμμα τμήματα, σημεία, γωνίες κλπ και σχέσεις μεταξύ τους) αναγκάζονται να προσδιορίσουν τις λεπτομέρειες που θα τα καθορίσουν επακριβώς. Για την κατασκευή δεν αρκεί η εικόνα ενός τμήματος που ξεκινά από την κορυφή και καταλήγει στην απέναντι πλευρά του τριγώνου. Πρέπει επιπλέον να διευκρινιστεί τι είναι αυτό το τμήμα. Είναι διάμεσος, διχοτόμος ή ύψος;

Η διαδικασία αυτή, που αποτελεί προϋπόθεση για τις μετατροπές, είναι για πολλούς μαθητές δύσκολη υπόθεση. Ο Duval λει πώς «δεν περνάμε εύκολα από την οπτική αναγνώριση της φόρμας, σαν εικονική μονάδα διάστασης 2, στην αναγνώρισή της σαν αναπαράσταση σχηματικών μονάδων διάστασης 1» (Duval, 1995). Ο προσδιορισμός της ταυτότητας των στοιχείων του γεωμετρικού σχήματος, δηλαδή η «απόδοση ρόλου» στα στοιχεία του, είναι στοιχείο της νοερής απεικόνισης και διαφέρει από την απλή αναγνώριση. Ο Kosslyn εξηγεί πως «τα

συστήματα του εγκεφάλου, που αποτελούν τη βάση για τον προσδιορισμό της ταυτότητας των αντικειμένων, μας επιτρέπουν να γνωρίζουμε περισσότερα για το ερέθισμα από τα προφανή κατά την είσοδο των πληροφοριών. Αυτό επιτυγχάνεται με την ενεργοποίηση πληροφοριών που έχουν αποθηκευτεί προηγούμενα στη μνήμη και έχουν σχέση με το αντικείμενο. Αντίθετα, όταν κάποιος αναγνωρίζει ένα ερέθισμα, αυτό ταιριάζει με κάποια πληροφορία αποθηκευμένη στη μνήμη και έτσι το άτομο ξέρει ότι είναι γνώριμο, δίχως να ξέρει την ταυτότητα του ή τις συσχετίσεις του» (Kosslyn, 1995, σ.53).

Έρευνες εξαρτούν τον προσδιορισμό της ταυτότητας ενός αντικειμένου από εκείνα τα χαρακτηριστικά ή ιδιότητές του που μένουν σχετικά σταθερά / αναλλοίωτα σε μετασχηματισμούς του, δηλαδή όταν βλέπουμε το αντικείμενο σε διαφορετικές αποστάσεις και από διαφορετικά σημεία θέασης. Οι ιδιότητες αυτές χαρακτηρίζονται «μη τυχαίες». Για παράδειγμα τα συμμετρικά σχήματα απεικονίζονται πάντα με μια συμμετρική εικόνα, ακόμα και αν εμφανίζουν άλλες παραμορφώσεις λόγω προοπτικής κλπ. Εκτός από τις μη τυχαίες ιδιότητες, ο προσδιορισμός της ταυτότητας βασίζεται επίσης στην προηγούμενη εμπειρία του ατόμου, σχετικά με το τι είναι χρήσιμο (Kosslyn, 1995, σ.74 –76). Και οι δύο αυτοί παράγοντες περιλαμβάνονται σε μεγάλο βαθμό στην εικόνα - πρότυπο. Συνεπώς η αλληλεπίδραση εικόνας - πρότυπο και προβλήματος επηρεάζει την πληρότητα της δημιουργούμενης νοερής εικόνας και την ορθή απόδοση ρόλων στα στοιχεία της.



σχήμα 4.26 Μη τυχαίες ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου

B) λειτουργική κατανόηση του σχήματος

Στην περίπτωση προβλημάτων κατασκευών, όπως αυτά που χρησιμοποιούνται στην παρούσα έρευνα, ο μαθητής προσπαθεί, από τη μία να αναπαραστήσει τις λεκτικές και υπό μορφή γεωμετρικού σχήματος πληροφορίες στη μνήμη του, και από την άλλη να ανακαλέσει άλλες, ήδη καταχωρημένες (περιεχόμενο του ΣΙΤ), ώστε να συμπληρώσει την εικόνα και να οδηγηθεί στη λύση. Χρειάζεται δηλαδή παράλληλα με τη δημιουργία και η συμπλήρωση της νοερής εικόνας με τα κατάλληλα στοιχεία που θα οδηγήσουν στη λύση του προβλήματος, δηλαδή μία λειτουργική κατανόηση (operative apprehension) του σχήματος.

Γ) δυνατότητα κατασκευής του γεωμετρικού σχήματος

Για μια επιτυχημένη μετατροπή χρειάζεται η νοερή εικόνα που έχει σχηματίσει ο μαθητής συνολικά να είναι γεωμετρικά κατασκευάσιμη, με βάση τα στοιχεία που δίνει το πρόβλημα ή με βάση τον τρόπο που επέλεξε ο μαθητής. Επίσης απαιτούνται οι αναγκαίες κατασκευαστικές οδηγίες που αφορούν σε κάθε εμφανιζόμενο τμήμα (διάμεσο, διχοτόμο, ύψος, μεσοκάθετο). Δεν είναι αρκετό για παράδειγμα να περιγράψει μια μαθήτρια την κατασκευή στο 2^ο πρόβλημα της 1^{ης} φάσης σωστά, λέγοντας «θα φέρω τις αποστάσεις», όταν δεν ξέρει πώς να τις κατασκευάσει. Συνεπώς η ταυτότητα των αναπαραστάσεων κατά τη μετατροπή μπορεί να εμποδιστεί από κατασκευαστικές αδυναμίες.

Τρόποι δημιουργίας της νοερής εικόνας, που αντιστοιχεί στη λύση του προβλήματος

Οι διάφορες δυνατότητες δημιουργίας της νοερής εικόνας που αντιστοιχεί στη λύση του προβλήματος, οι οποίες αναφέρονται στα επόμενα, διαφοροποιούνται με κριτήριο την ικανότητα του μαθητή ή της μαθήτριας να δημιουργεί τη νοερή εικόνα. Συγκεκριμένα δύο παράμετροι φαίνονται σημαντικές (Πίνακας 4.11). Η πρώτη είναι ο τρόπος με τον οποίο δημιουργείται η νοερή εικόνα της λύσης, δηλαδή το αν υπάρχει η πλήρης νοερή εικόνα, πριν ξεκινήσει η κατασκευή, ή αν ο μαθητής ξεκινά με μια ελλιπή εικόνα την οποία συμπληρώνει βαθμιαία σε αλληλεπίδραση με το γεωμετρικό σχήμα. Τέλος είναι δυνατόν ο μαθητής να αδυνατεί να δημιουργήσει κάποια νοερή εικόνα της λύσης, πριν περάσει στο στάδιο της υλοποίησης. Στην περίπτωση αυτή εργάζεται στο σχήμα που δίνει το πρόβλημα, πάνω στο χαρτί, χρησιμοποιώντας το ως μοντέλο. Η δεύτερη παράμετρος, που διαφοροποιεί τις περιπτώσεις, είναι το αν η νοερή εικόνα που δημιουργείται περιλαμβάνει όλους τους περιορισμούς που θέτει το πρόβλημα, δηλαδή η πληρότητα της νοερής εικόνας της λύσης. Στον πίνακα 4.11 παρουσιάζονται οι τρεις τρόποι δημιουργίας της νοερής εικόνας που διακρίνουμε στους μαθητές που συμμετέχουν στην έρευνα, με κριτήριο τις δύο παραμέτρους που αναφέρθηκαν. Στη συνέχεια σχολιάζονται αναλυτικά οι τρεις τρόποι.



Πίνακας 4.11
Τρόποι δημιουργίας της νοερής εικόνας

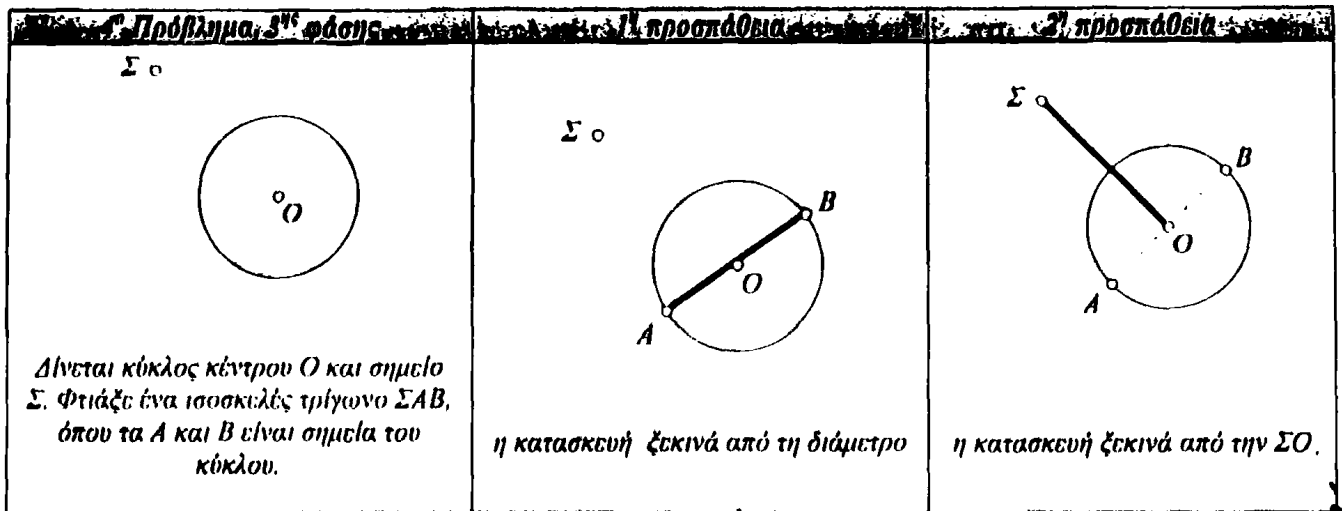
	1 ^{ος} (Υπάρχει πλήρης νοερή εικόνα της λύσης, πριν ξεκινήσει η κατασκευή)	2 ^{ος} (Υπάρχει ελλιπής νοερή εικόνα της λύσης, πριν ξεκινήσει η κατασκευή)	3 ^{ος} (Η νοερή εικόνα της λύσης, δημιουργείται σταδιακά, ταυτόχρονα με την κατασκευή του σχήματος πάνω στο χαρτί)
αναγνώριση στοιχείων / σχέσεων	Αναγνωρίζονται νοερά όλα τα στοιχεία / σχέσεις	Αναγνωρίζονται νοερά μερικά στοιχεία / σχέσεις	Αναγνωρίζονται στο χαρτί στοιχεία / σχέσεις με πειραματισμό και με τη βοήθεια των γεωμετρικών οργάνων
η πληρότητα της νοερής εικόνας	Η νοερή εικόνα περιλαμβάνει όλους τους περιορισμούς του προβλήματος	Η νοερή εικόνα περιλαμβάνει έναν περιορισμό, ενώ το πλέγμα σχέσεων συμπληρώνεται με διαδοχικές επεξεργασίες του γεωμετρικού σχήματος	

1^{ος} τρόπος δημιουργίας της νοερής εικόνας: Υπάρχουν μαθητές που καταλήγουν σε μία πλήρη νοερή εικόνα της λύσης, πριν περάσουν στο στάδιο της κατασκευής του γεωμετρικού σχήματος. Η πλήρης εικόνα περιλαμβάνει τα στοιχεία και τις μεταξύ τους σχέσεις. Σε αρκετές περιπτώσεις μπορούμε να το αντιληφθούμε, είτε επειδή οι μαθητές μας περιγράφουν τη νοητική τους εικόνα με λόγια είτε γιατί αυθόρμητα φτιάχνουν στο πρόχειρο κάποιο σκίτσο για να μας τη δείξουν, ή τέλος γιατί κάνουν κινήσεις με τα χέρια περιγράφοντάς την. Η ύπαρξη, συνεπώς μιας πλήρους νοερής εικόνας στο μαθητή προβάλλει, και γίνεται αντιληπτή στην ερευνήτρια, μέσα από τις μετατροπές της σε φυσική γλώσσα ή σε σχήμα.

Η ολοκληρωμένη εικόνα της λύσης δεν οδηγεί απαραίτητα και στη σωστή μετατροπή της σε γεωμετρικό σχήμα. Όπως είδαμε, με τη νοερή απεικόνιση συλλαμβάνονται συνολικά οι σχέσεις ανάμεσα στα αναπαριστώμενα στοιχεία, ενώ στην κατασκευή έχει σημασία η σειρά με την οποία κατασκευάζονται αυτά, ώστε να δημιουργηθούν οι σχέσεις. Η δυνατότητα κατασκευής των σχέσεων στο χαρτί και η συμβατότητα μεταξύ τους είναι θέματα που μπορούν να ελεγχθούν μόνο κατά την κατασκευή.

➤ Μια τέτοια περίπτωση, όπου η μαθήτρια έχει πλήρη νοερή εικόνα της λύσης και μεταβάλλει τη σειρά κατασκευής των στοιχείων του σχήματος, ώστε να μπορέσει να δημιουργήσει τις σχέσεις της, παρακολουθούμε στον επόμενο διάλογο (Μαριάννα, Φ3, 4). Στην 1^η της προσπάθεια (σχήμα 4.27), η μαθήτρια ξεκινά κατασκευάζοντας μία διάμετρο AB και ακολούθως θέλει να φέρει τη ΣΟ έτσι, ώστε να είναι ύψος και διάμεσος. Αυτό γενικά δε γίνεται. Συνειδητοποιεί τότε ότι πρέπει να αντιστρέψει τη σειρά των ενεργειών της, να

εκινήσει την κατασκευή από την ΣΟ και μετά να φέρει την διάμετρο ΑΒ κάθετη σε αυτήν (2^η προσπάθεια).



σχήμα 4.27 Οι δύο διαδοχικές προσπάθειες για λύση του προβλήματος, περιλαμβάνουν τις ίδιες ενέργειες με αντίστροφη σειρά

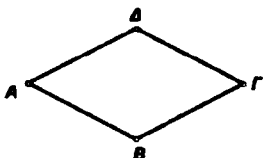
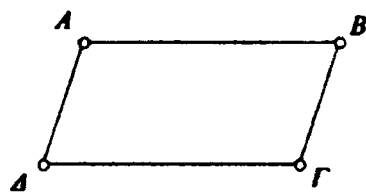
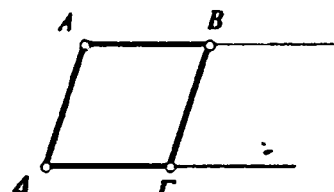
- 1^η προσπάθεια
- Μ Φέρνω τη διάμετρο του κύκλου η οποία τέμνει τον κύκλο στα Α και Β.
Γνωρίζω ότι $OA=OB$ ως ακτίνες του κύκλου, φέρνω ως,
είχα σκεφτεί να φέρω το ύψος στο Σ, άρα είναι ύψος και διάμεσος,.....
- Ερ ..οπότε θα βγει ισοσκελές, ναι
- Μ Να το γράψω;
- Ερ .. αν πάρεις μια τυχαία διάμετρο, μετά αυτή η ΣΟ δεν θα είναι κάθετη
- Μ Α ναι, άρα τη φέρνω έτσι (τη διάμετρο), ώστε να είναι το ύψος
- Ερ Αυτό λέω πως θα το κάνεις; Αν την είχες φέρει τη διάμετρο έτσι (λοζά)
- Μ Όχι δεν θα είχε βγει τίποτα
- Ερ Κάπως το κανόνισες με το μάτι και την έφερες έτσι όπως ήθελες
- 2^η προσπάθεια
- Μ Α, άρα φέρνω πρώτα την ΣΟ
- Ερ Έτσι, πρώτα την ΣΟ
- Μ Χωρίς ύψος και μετά φέρνω κάθετη (την ΑΒ)

Η δυνατότητα αλλαγής της σειράς των βημάτων στην κατασκευή, συνδέεται με την κατανόηση των αυτοπαθών σχέσεων. Έτσι στο παράδειγμα η μαθήτρια αντιλαμβάνεται ότι η σχέση $OS \perp AB$ μπορεί να γραφτεί και $AB \perp OS$ και γι αυτό μπορεί να μεταβάλει τη σειρά κατασκευής των στοιχείων.

➤ Μια άλλη μαθήτρια, που βλέπει συνειδητά τη συμμετρία στη νοερή της εικόνα, όταν την μετατρέπει σε γεωμετρικό σχήμα, διαπιστώνει ότι αυτό δεν παρουσιάζει συμμετρία. Διορθώνοντας τον τρόπο κατασκευής περιγράφει τη νοερή της εικόνα «Είναι με τους άξονες συμμετρίας. Δηλαδή, μου έδωσε το ΚΛ και το ύψος. Λοιπόν, αν θεωρούσα άξονα συμμετρίας το ύψος και έπαιρνα ένα σημείο του ΚΛ και την απόσταση του σημείου αυτού από το ύψος την έφερνα και από την άλλη, θα ήτανε....» (Αγνή, Φ2, 2^Α).

➤ Η νοερή εικόνα της λύσης, όταν υπάρχει, περιγράφεται εύκολα με λόγια. κατόπιν τα λόγια ελέγχονται ως προς τη σαφήνειά τους μέσα από την κατασκευή. Αυτό φαίνεται καθαρά στο 2^ο και 3^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης, όπου οι μαθητές που γράφουν το σενάριο πριν να κατασκευάσουν το σχήμα, αναγκάζονται πολύ συχνά να συμπληρώνουν το σενάριο ή να μεταβάλουν τη σειρά των βημάτων κατά την κατασκευή.

Στο επόμενο παράδειγμα η μαθήτρια κατασκευάζει ένα παραλληλόγραμμο (1^η προσπάθεια) και μετά μετρά να δει αν δύο διαδοχικές πλευρές είναι ίσες (σχήμα 4.28). Όταν διαπιστώνει ότι αυτό δε συμβαίνει, αλλάζει τη σειρά των ενεργειών της (2^η προσπάθεια) (Εφη, Φ3, 2).

2 ^ο Πρόβλημα, 3 ^η Φάση	1 ^η προσπάθεια	2 ^η προσπάθεια
Παρακάτω δίνεται ένας ρόμβος. Ο ρόμβος είναι ένα παραλληλόγραμμο με όλες τις πλευρές του ίσες. Γράψε τρία διαφορετικά κατασκευαστικά σενάρια ενός ρόμβου. 		

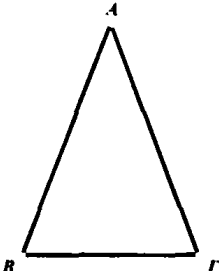
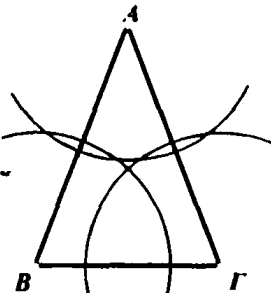
σχήμα 4.28 Η αιτιολόγηση αναγκάζει η μαθήτρια να κατασκευάσει διαφορετικά

- M** (περιγράφει) θα φέρουμε δύο παράλληλες μεταξύ τους και μετά θα φέρουμε άλλες δύο παράλληλες και θα κάνουμε έτσι ένα παραλληλόγραμμο, ένα τετράπλευρο μάλλον θα σχηματιστεί, και θα μετρήσουμε τις δύο μη παράλληλες πλευρές να είναι ίσες έτσι, ώστε να έχουμε δύο ζευγάρια μη παράλληλων πλευρών όπου θα είναι ίσα, επομένως θα σχηματιστεί ο ρόμβος
(γράφει το σενάριο)
- Ερ** Τώρα αν προσπαθήσεις να το φτιάξεις θα σου βγει ρόμβος; Για δοκίμασέ το.
-
- M** Τώρα φτιάξαμε ένα τετράπλευρο το ΑΒΓΔ, μετά θα μετρήσουμε τις δύο μη παράλληλες πλευρές να είναι ίσες και ...δεν το έχω βγάλει
(1^η περίπτωση, οι δύο διαδοχικές πλευρές δεν είναι ίσες)
- Ερ** Τι;
- M** Πρέπει να το βγάλω
- Ερ** Δεν το έχεις γράψει καλά στις οδηγίες;
- M** Όχι εγώ δεν έκανα καλά το σχήμα.
- Ερ** Τι είναι εκεί;
- M** Τώρα είναι το Β εδώ (μεταφέρει το Β πάνω στην ΑΒ έτσι, ώστε να είναι ΑΒ = ΑΔ), στο ρόμβο και οι 4 πλευρές δεν είναι ίσες;
- Ερ** Ναι
- M** Θα μετρήσουμε πάλι – πήραμε την ΑΔ – θα μετρήσουμε το άνοιγμα, θα φέρουμε και στην άλλη εδώ είναι το Γ (2^η περίπτωση)
- Ερ** Μάλιστα, άρα πρέπει να μετακινήσουμε το Β και το Γ έτσι;
- M** Ναι, θα το ενώσουμε εδώ πέρα, και αυτό εδώ τώρα θα είναι ο (ρόμβος)
Ξαναδιαβάζει τις οδηγίες



Αν ο μαθητής δεν μπορεί να προσαρμόσει την εικόνα του στις κατασκευαστικές απαιτήσεις, σημαίνει πως αντιμετωπίζει δυσκολίες στη μετατροπή, που σχετίζονται με τα άλλα δύο συστήματα (γεωμετρικών σχημάτων και λεκτικό), όπως φαίνεται στα παραδείγματα που ακολουθούν.

➤ Στο πρόβλημα 3^Γ της 1^{ης} φάσης ένας μαθητής φαντάζεται ότι μπορεί να βρει το ζητούμενο σημείο Σ με το διαβήτη παίρνοντας αντίστοιχα από τις κορυφές Α, Β, Γ τρία ίσα τόξα. Όταν όμως κατασκευάζει τη νοερή του εικόνα, διαπιστώνει ότι τα τρία αυτά τόξα δεν περνάνε όλα από το ίδιο σημείο (σχήμα 4.29). (Γιώργος, Φ1, 3^Γ). Σε αντίθεση με τις προηγούμενες περιπτώσεις, εδώ ο μαθητής δεν μπορεί να προσαρμόσει την κατασκευή του, δηλαδή να υπολογίσει την ακτίνα για την οποία τα τρία τόξα έχουν ένα κοινό σημείο.

Πρόβλημα 3 ^Γ , της 1ης φάσης	Νοερή εικόνα του μαθητή
 Δίνεται ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB=AG$). Μπορείς να βρεις ένα σημείο Σ, εσωτερικό του τριγώνου τέτοιο, ώστε τα τρίγωνα ΣΑΒ, ΣΒΓ που θα σχηματιστούν να είναι επίσης ισοσκελή;	 Η εικόνα του μαθητή είναι μια ειδική περίπτωση αυτής της κατασκευής. Για να κατασκευαστεί σωστά, χρειάζεται επιπλέον στοιχεία (συγκεκριμένη ακτίνα).

σχήμα 4.29 Το σχήμα πληροφορεί το μαθητή πως πρέπει να κατασκευάσει διαφορετικά

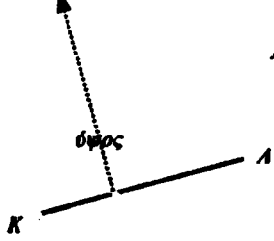
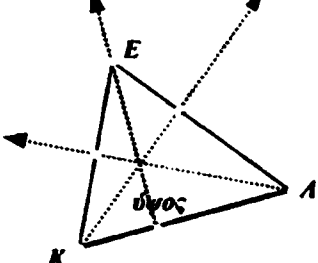
➤ Στο πρόβλημα 2^Β της 1^{ης} φάσης (σχήμα 4.30), ένας μαθητής έχει αποδώσει τους ορθούς ρόλους στη δοθείσα πλευρά ΚΛ και στο αντίστοιχο ύψος και έχει σχηματίσει σωστά τη νοερή εικόνα της λύσης. Συγκεκριμένα, έχει στο μυαλό του το ισοσκελές με τα τρία ύψη του και κατόπιν επιχειρεί να το κατασκευάσει, ξεκινώντας από τα δεδομένα του προβλήματος. Δηλώνει πως θα κάνει τις επόμενες ενέργειες:

(βήμα α:) Θα φτιάξω το συμμετρικό ύψος.

(βήμα β:) Θα βρω το σημείο τομής των δύο υψών, το οποίο θα βρίσκεται στη μεσοκάθετο της βάσης.

(βήμα γ:) Θα ενώσω το σημείο τομής των δύο υψών με την τρίτη κορυφή, ώστε να φτιάξω το τρίτο ύψος, κλπ.

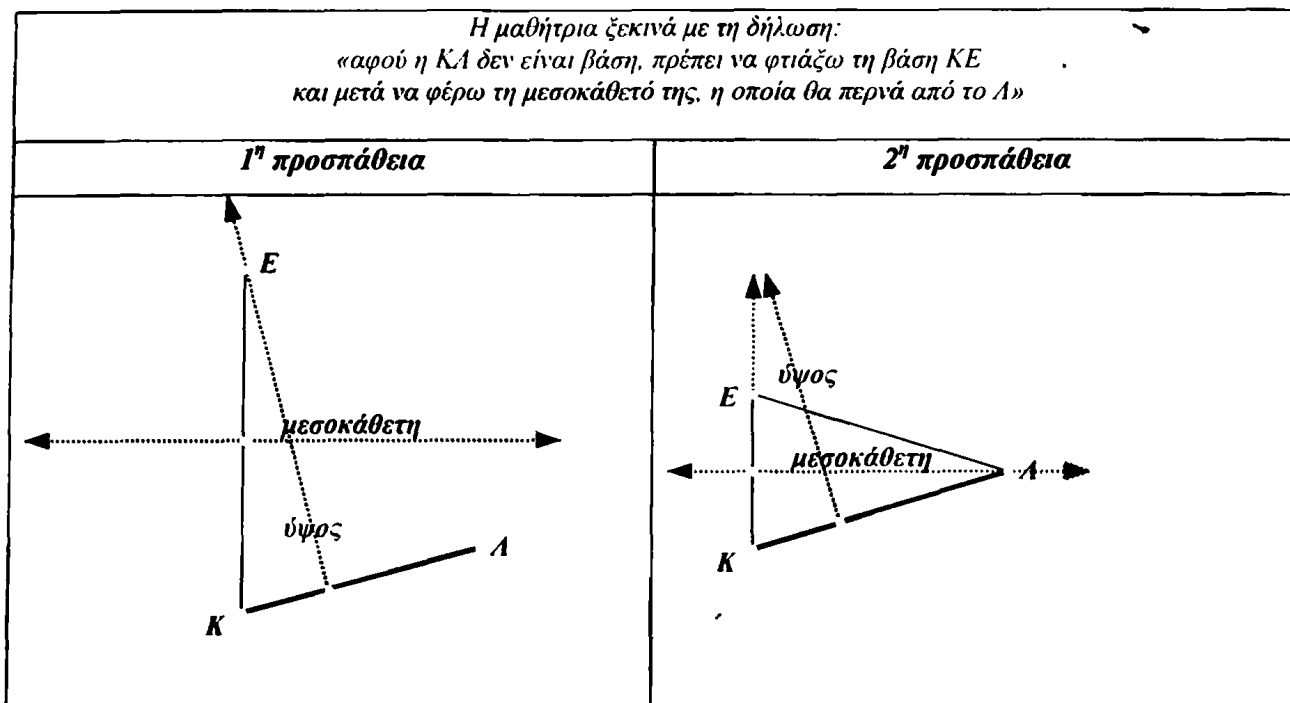
Η κατασκευή που περιγράφει ο μαθητής δεν υλοποιείται, γιατί δεν υπάρχουν τα απαιτούμενα στοιχεία που θα υποστηρίξουν τις παραπάνω ενέργειες. Συγκεκριμένα δεν υπάρχει ο άξονας συμμετρίας για να ξεκινήσει ο μαθητής την κατασκευή (βήμα α), (Βαγγέλης, Φ2, 2^Β).

Πρόβλημα 2 ^B , της 2 ^{ης} φάσης	Νοερή εικόνα του μαθητή
 Στο παραπάνω σχήμα ξεκινήσαμε την κατασκευή του ισοσκελούς τριγώνου ΚΕΛ, μπορείς να τη συμπληρώσεις; Μπορείς να περιγράψεις με λόγια την κατασκευή του τριγώνου;	 Η εικόνα της λύσης που φαίνεται πως έχει ο μαθητής. Παρότι ως εικόνα είναι σωστή, δεν κατασκευάζεται με τα δεδομένα του προβλήματος 2^A

σχήμα 4.30 Η νοερή εικόνα μπορεί να είναι σωστή αλλά όχι κατασκευάσιμη

➤ Στο ίδιο πρόβλημα 2^B της 2^{ης} φάσης (σχήμα 4.30, α), μια μαθήτρια, η οποία σταθερά κατασκευάζει τα ισοσκελή με τη βοήθεια της μεσοκάθετου, είναι αναποτελεσματική, γιατί δε διαθέτει ούτε τη βάση ούτε τη μεσοκάθετο. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα υπενθυμίζουμε πως η δοθείσα πλευρά ΚΛ αποκλείεται να είναι βάση, κατά συνέπεια και το δοθέν ύψος αποκλείεται να είναι μεσοκάθετος – άξονας συμμετρίας του ισοσκελούς.

Στην 1^η της προσπάθεια η μαθήτρια παίρνει ένα τυχαίο σημείο Ε πάνω στο ύψος, θεωρεί την ΚΕ ως βάση και φέρνει τη μεσοκάθετη της βάσης ΚΕ, η οποία όμως δεν περνά από το Λ..... (σχήμα 4.31, α). Στη 2^η προσπάθεια, η μαθήτρια φέρνει μια ημιευθεία Κχ, μετά φέρνει από το Λ την κάθετη στην Κχ και ως προς αυτήν παίρνει το συμμετρικό του σημείου Κ, που είναι το Ε. Με αυτό τον τρόπο η μαθήτρια κατασκευάζει τη μεσοκάθετη να περνά από το Λ, όμως η κορυφή Ε δεν βρίσκεται πάνω στο ύψος.... (σχήμα 4.31, β). Τελικά, ενώ η μαθήτρια έχει μία σωστή εικόνα του τελικού αποτελέσματος, ο τρόπος με τον οποίο πάει να κατασκευάσει τη λύση δεν την οδηγεί πουθενά. (Μαριάννα, Φ2, 2^B).



σχήμα 4.31 Οι νοερές εικόνες της μαθήτριας για το Πρόβλημα 2^β της 2^{ης} φάσης

Η ύπαρξη συνεπώς ολοκληρωμένης νοερής εικόνας της λύσης δεν οδηγεί πάντα σε επιτυχημένη κατασκευή. Για να μπορέσει ο μαθητής να μετατρέψει επιτυχώς τη νοερή εικόνα του σε γεωμετρικό σχήμα χρειάζεται να διαθέτει τις απαιτούμενες κατασκευαστικές δεξιότητες και κυρίως την ικανότητα προσαρμογής της εικόνας του στις κατασκευαστικές απαιτήσεις.

2^{ος} τρόπος δημιουργίας της νοερής εικόνας: Υπάρχουν μαθητές που φτιάχνουν μια μερική εικόνα της λύσης, ξεκινούν την κατασκευή του γεωμετρικού σχήματος και κατόπιν, με διαδοχικές επεξεργασίες του σε σύγκριση με τη νοητική τους εικόνα, καταλήγουν στο ζητούμενο. Στην περίπτωση αυτή οι μαθητές αδυνατούν να συνυπολογίσουν όλους τους περιορισμούς του προβλήματος στη νοερή τους εικόνα ή δεν μπορούν να αναγνωρίσουν όλα τα στοιχεία και το πλέγμα των σχέσεων της εικόνας τους. Έτσι αισθάνονται την ανάγκη να το κάνουν υποστηριζόμενοι από το υλικό σχήμα. Το σχήμα που κατασκευάζουν λειτουργεί ως μοντέλο στο οποίο γίνεται ο έλεγχος είτε αντιληπτικά είτε κατά τη λειτουργία της αιτιολόγησης.

Συγκεκριμένα μαθητές με ευχέρεια στη ζωγραφική κάνουν χαλαρά ένα πρόχειρο σκίτσο της λύσης, ώστε να έχουν μια πρώτη – υλική αναπαράσταση της νοερής τους εικόνας. Το σκίτσο αυτό δεν είναι το ζητούμενο γεωμετρικό σχήμα, αλλά μια πρόχειρη εικόνα της νοερής τους αναπαράστασης. Η διαφορά μεταξύ τους είναι αυτή του «ζωγραφίζω» σε αντίθεση με του «κατασκευάζω»²⁰. Σ' αυτή την εικόνα οι μαθητές αναγνωρίζουν τα υπόλοιπα στοιχεία και τις

μεταξύ τους σχέσεις προκειμένου, ακολούθως, να τα κατασκευάσουν. Υπάρχουν περιπτώσεις που το σκίτσο αυτό είναι τόσο ακριβές, που τελικά, όταν κάνουν την κατασκευή με τα όργανα, βρίσκουν πάλι το ίδιο. Ο λόγος για τον οποίο εντάσσουμε αυτούς τους μαθητές στην 2^η περίπτωση είναι πως αδυνατούν να συλλάβουν νοερά το συνολικό πλέγμα των σχέσεων και χρειάζονται τη βοήθεια υλικών μέσων για να το κάνουν.

Το ίδιο συμβαίνει με μαθητές που ξεκινούν απευθείας την κατασκευή του γεωμετρικού σχήματος, με την πρόθεση να αναπαραστήσουν τη νοερή τους εικόνα. Μόλις όμως το δουν καταλαβαίνουν ότι η μετατροπή (από νοερή εικόνα σε γεωμετρικό σχήμα) δεν κατόρθωσε να την αποδώσει. Το ελλειπές σχήμα τους βοηθά να συνειδητοποιήσουν τις υπάρχουσες σχέσεις και να τις κάνουν συγκεκριμένες. Έτσι εντοπίζοντας τα σημεία που δε συμφωνούν η νοερή εικόνα και το γεωμετρικό σχήμα, επαναλαμβάνουν την προσπάθεια, μέχρι να πετύχουν την ταυτότητα κατά τη μετατροπή.

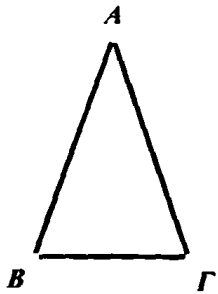
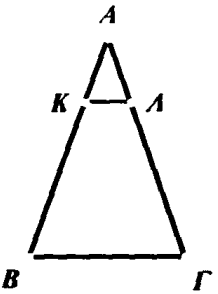
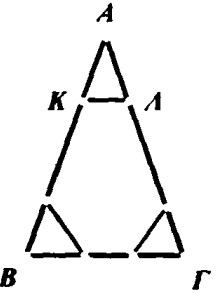
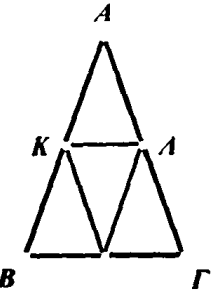
Άλλοι, τέλος, αντιλαμβάνονται τις ελλείψεις του σχήματος μόνο όταν τους ζητηθεί να αιτιολογήσουν πως είναι το σωστό. Αποκαλύπτεται τότε ότι δεν έχουν κατασκευάσει τα συγκεκριμένα στοιχεία ή ιδιότητες που ζητούσε το πρόβλημα. Η μέθοδος αιτιολόγησης που χρησιμοποιούν τους δίνει συνήθως και τους τρόπους επεξεργασίας - διόρθωσης του γεωμετρικού σχήματος. Αν, για παράδειγμα, μετρήσουν κάποια στοιχεία του και διαπιστώσουν ότι δεν έχουν τις ζητούμενες ιδιότητες (πλευρές ίσες, γωνίες ορθές, γωνίες ίσες κλπ) τα κατασκευάζουν ξανά, όχι στην τύχη, αλλά με τρόπο ώστε αυτή τη φορά να έχουν την ιδιότητα που ζητάει το πρόβλημα. Οι μαθητές αυτοί, όχι μόνο δεν μπορούν να συμπεριλάβουν από την αρχή όλους τους περιορισμούς στη νοερή τους εικόνα, αλλά επιπλέον δεν το αντιλαμβάνονται εύκολα.

Ακολουθούν παραδείγματα μέσα από τα οποία φαίνεται πως η ατελής νοερή απεικόνιση συμπληρώνεται αλληλεπιδρώντας με το γεωμετρικό σχήμα ή με ένα σκίτσο.

➤ Στο πρόβλημα 3¹ της 1^{ης} φάσης (σχήμα 4.32), ένας μαθητής αποφασίζει πως, αντί για δύο, θέλει να χωρίσει το ισοσκελές σε τέσσερα άλλα ισοσκελή. Ο μαθητής έχει αντιληπτική, αλλά όχι λειτουργική κατανόηση της λύσης, δηλαδή ενώ φαντάζεται πώς θα είναι η εικόνα του ισοσκελούς χωρισμένου σε τέσσερα τρίγωνα, δεν έχει την ευχέρεια να προχωρήσει πέρα από την εικόνα και να κατανοήσει τις σχέσεις ανάμεσα στα στοιχεία της. Δεν είναι ικανός να καταλάβει πως πρόκειται για τέσσερα, ίσα μεταξύ τους, ισοσκελή τρίγωνα.

Αρχίζει την κατασκευή, παίρνοντας με το διαβήτη ίσα τμήματα $AK = AL$ πάνω στις ίσες πλευρές AB, AG (σχήμα 4.32^α). Βλέποντας το σχήμα, φαντάζεται το αποτέλεσμα των επόμενων ενεργειών του, δηλαδή να επαναλάβει το ίδιο από τις άλλες δύο κορυφές και διαπιστώνει πως το τελικό αποτέλεσμα δε «θα κλείσει» (σχήμα 4.32^β) σχηματίζοντας τέσσερα

τρίγωνα. Αντισταθμίζεται τότε τον ακριβή τρόπο κατασκευής, δηλαδή ότι πρέπει να πάρει τα Κ και Λ στα μέσα των ίσων πλευρών (σχήμα 4.32'), (Βαγγέλης, Φ1 ,3^Γ).

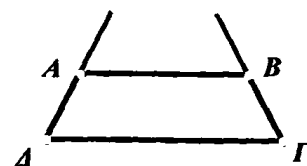
Πρόβλημα 3 ^Γ της 1 ^{ης} φάσης	1 ^η νοερή εικόνα	2 ^η νοερή εικόνα	3 ^η νοερή εικόνα
 Δίνεται ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Μπορείς να βρεις ένα σημείο Σ, εσωτερικό του τριγώνου τέτοιο, ώστε τα τρίγωνα ΣΑΒ, ΣΒΓ που θα σχηματιστούν να είναι επίσης ισοσκελή;	 σχήμα 4.32α	 σχήμα 4.32β	 σχήμα 4.32γ

σχήμα 4.32 Οι νοερές εικόνες του μαθητή για το πρόβλημα 3^Γ της 1^{ης} φάσης

➤ Το επόμενο παράδειγμα είναι χαρακτηριστικό του γεγονότος πως η νοερή απεικόνιση σαν πιο γενική λειτουργία, μας επιτρέπει να συμβιβάζουμε πράγματα που στην κατασκευή αποδεικνύονται ασυμβίβαστα. Ο μαθητής, στο 3^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης, θέλει να φτιάξει ένα ισοσκελές τρίγωνο ξεκινώντας από το ισοσκελές τραπέζιο (Κώστας, Φ3, 3).

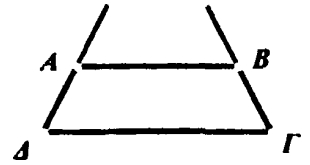
Αρχικά προεκτείνει τις ίσες πλευρές του ισοσκελούς τραpezίου παίρνοντας το διπλάσιό τους, όμως διαπιστώνει πως αυτές δεν κλείνουν ώστε να σχηματιστεί τρίγωνο. Στη συνέχεια προεκτείνει κατά το τριπλάσιο των ίσων πλευρών του τραpezίου δίχως θετικά αποτελέσματα. Στη νοερή του εικόνα σχηματίζεται τρίγωνο, τι συμβαίνει όμως στο χαρτί;

M (περιγράφει) Έχουμε μία μεγάλη βάση και δύο σκέλη ίσα, αν από το ΑΔ και από το ΒΓ φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα που να είναι ίσα, τότε το Α και Β θα είναι τα μισά των πλευρών που θα έχουμε κατασκευάσει, άρα αυτά τα δύο σκέλη θα είναι ίσα τα καινούρια, άρα θα έχουμε ένα ισοσκελές.....
Ερ Για να δούμε
M (μετράει την ΑΔ και προεκτείνει κατά ίσο) ΑΔ=ΑΕ= 1,7 cm (το ίδιο κάνει και από την άλλη μεριά) ΒΓ= ΓΖ cm



Ερ Τι έγινε;
M Δεν έχει(ενωθεί) αλλά, άμα πάλι προεκτείνουμε κατά κομμάτι ίσο με το ΑΔ.... και πούμε ότι αυτά είναι μέσα μιας καινούριας πλευράς και φέρουμε αντίστοιχο τμήμα, πιστεύω ότι θα ενωθεί και τότε θα είναι ισοσκελές τρίγωνο γιατί αυτά είναι...
Ερ Τα τρία τμήματα ίσα;
M Ναι (κατασκευάζει προσπαθώντας να ενωθούν)
Ερ Πρόσεξε μην κάνεις ζαβολιά

- M* *Ναι*
Ερ *Δεν κλείσανε νομίζω, έχουν μια τρυπούλα εκεί (τα τμήματα έχουν πλησιάσει αλλά δεν ενώνονται).*



- M* *(διορθώνει)*
Ερ *Κλείσανε:*
M *Ναι, δεν το χα...*
Ερ *Μήπως έκανες καμιά ζαβολιά;*
M *Δεν είχε γίνει αρκετά καλό, αλλά πρινπρέπει να είχα λίγο πιο κάτω το χάρακα*
Ερ *Μάλιστα*

Τελικά οι μαθητές που χρησιμοποιούν το 2^ο τρόπο για τη δημιουργία της νοερής εικόνας της λύσης κερδίζουν από την αλληλεπίδραση των δύο συστημάτων αναπαράστασης (εσωτερικού συμβολικού και γεωμετρικών σχημάτων). Οι μαθητές κατορθώνουν σταδιακά να διακρίνουν το πλέγμα των σχέσεων που θέτει το πρόβλημα αναγνωρίζοντας τις παράλληλες δομές στα δύο συστήματα αναπαράστασης²¹. Δεν εξοικειώνονται πρώτα με το υλικό γεωμετρικό σχήμα και τις διαδικασίες σε αυτό, ώστε να απεικονίσουν κατόπιν τις σχέσεις που αναγνωρίζουν στη νοερή τους εικόνα (κάτι που συμβαίνει στον 3^ο τρόπο), αλλά τα δύο συστήματα αλληλεπιδρούν μέχρις ότου επέλθει η κατανόηση της κατάστασης που θέτει το πρόβλημα.

3^{ος} τρόπος δημιουργίας της νοερής εικόνας: Κάποιοι μαθητές τέλος δεν κατορθώνουν να μορφοποιήσουν στο μυαλό τους κάποια εικόνα της λύσης, πριν περάσουν στο στάδιο της υλοποίησης. Είναι φανερό ότι δεν μπορούν να αντεπεξέλθουν στο νοητικό φόρτο που απαιτείται για να συντονίσουν τα δεδομένα του προβλήματος σε ένα συνολικό πλέγμα σχέσεων, που να το αποδίδει η νοερή εικόνα. Ακόμα δε διαθέτουν δυναμική φαντασία η οποία θα τους επιτρέψει να πειραματιστούν με την (όποιας ποιότητας) νοερή τους απεικόνιση. Έτσι πηγαίνουν στο σχήμα που δίνεται στο πρόβλημα το οποίο χρησιμοποιούν ως μοντέλο. Στη φάση αυτή δεν επιχειρούν να κατασκευάσουν το γεωμετρικό σχήμα. Απλά, κάνουν ένα σκίτσο που θα τους χρησιμεύσει για να δημιουργήσουν τη νοερή εικόνα και να κατανοήσουν τα στοιχεία και τις σχέσεις της.

Οι μαθητές που δημιουργούν τη νοερή τους εικόνα με τον 3^ο τρόπο δεν μπορούν να συμπληρώσουν το γεωμετρικό σχήμα του προβλήματος με κάποια επιπλέον στοιχεία. Αδυνατούν να επεξεργαστούν και να εμπλουτίσουν νοερά το σχήμα που τους δίνεται με τα απαραίτητα στοιχεία, δηλαδή δεν έχουν τη λειτουργική κατανόησή του. Η μοναδική περίπτωση

που υπάρχει για να προσθέσουν κάποιο στοιχείο είναι στο μοντέλο (υλικό σχήμα) και γίνεται με τη βοήθεια των γεωμετρικών οργάνων.

Συχνά βλέπουμε τα παιδιά να τοποθετούν κάποιο γεωμετρικό όργανο στη θέση του στοιχείου που επιθυμούν να φτιάξουν. Συγκεκριμένα, αν ο μαθητής πρόκειται να προσθέσει στο σχήμα ένα ευθύγραμμο τμήμα / ευθεία, χρησιμοποιεί το χάρακα ευρετικά για να εντοπίσει τη θέση του. Τοποθετεί, για παράδειγμα, τον κανόνα έτσι, ώστε να περνάει από την κορυφή του τριγώνου και να καταλήγει στην απέναντι πλευρά και τον μετακινεί, μέχρις ότου η θέση που παίρνει τον ικανοποιεί οπτικά. Τότε αρχίζει ο συλλογισμός σχετικά με τι είδους τμήμα είναι αυτό (: αναγνώριση). Μαθητής που χρησιμοποιεί με αυτό τον τρόπο το χάρακα δηλώνει «*κάνω δοκιμασίες με το χάρακα να δω πώς θα φέρω τη γραμμή*» (Γιάννης, Φ1, 3).

Αν η προσθήκη αφορά στην κατασκευή μιας ορθής γωνίας, τότε ο μαθητής χρησιμοποιεί το τρίγωνο, για να φανταστεί πώς θα γίνει. Τοποθετεί το τρίγωνο πάνω στο δοθέν γεωμετρικό σχήμα και το κουνάει προσπαθώντας να φανταστεί την κάθετη που χρειάζεται να φέρει προς κάποια ευθεία του (π.χ. στο 2^ο πρόβλημα της 1^{ης} φάσης, στο ύψος ΚΛ).

Εμφανίζεται ακόμα και η περίπτωση ο μαθητής να τοποθετεί τον κανόνα ή το τρίγωνο πάνω στον άξονα συμμετρίας, κάθετα ως προς το επίπεδο του ισοσκελούς τριγώνου και να κοιτάζει εκατέρωθεν τα (συμμετρικά) στοιχεία, προκειμένου να φανταστεί τη συνολική εικόνα (Ισμήνη, Φ1, 2).

Ένας δεύτερος παράγοντας, που βοηθά στη λειτουργική κατανόηση του (υλικού) σχήματος, είναι η λεκτική κατανόηση (*discursive apprehension* σύμφωνα με την ορολογία του Duval), δηλαδή η συσχέτιση των γεωμετρικών μορφών με σκέψεις και λόγια που καθορίζουν τα αναπαριστώμενα αντικείμενα και τις σχέσεις τους.

Κάποια παιδιά φαίνεται πως βοηθούνται ώστε να σχηματίσουν τη νοερή εικόνα της λύσης όταν, κοιτάζοντας το δοθέν γεωμετρικό σχήμα, σχολιάζουν τι βλέπουν και τι τους ζητάνε να φτιάξουν. Έτσι μία μαθήτριά στο πρόβλημα 2^Β της 2^{ης} φάσης (σχήμα 4.30) κοιτάζει το σχήμα που συνοδεύει το πρόβλημα, σημειώνει στην τύχη ένα σημείο Ε πάνω στο ύψος και σχολιάζει «*σκέφτομαι πώς να φτιάξω $AE = KA$* ». Άλλοι μαθητές κάνουν κινήσεις στον αέρα με το μολύβι περιγράφοντας τα ζητούμενα τρίγωνα.

Συχνά μαθητές που δημιουργούν τη νοερή τους εικόνα με τον 3^ο τρόπο χρησιμοποιούν φυσική γλώσσα για να περιγράψουν αυτό που σκέπτονται, όπως «*θα φτιάξω μια τρίλιζα*» (Νεκτάριος, Φ3, 2), προκειμένου για δύο ζεύγη παραλλήλων ή «*ξέρω τι είναι το ισοσκελές τραπέζιο, ένα ισοσκελές τρίγωνο που του κόψαμε το πάνω μέρος*» (Νεκτάριος, Φ3, 3).

Συνεπώς, οι μαθητές που λειτουργούν με τον 3^ο τρόπο αδυνατούν να δημιουργήσουν ή να επεξεργαστούν κάποια νοερή εικόνα της λύσης του προβλήματος. Κατωφεύγουν στα άλλα

συστήματα αναπαράστασης (γεωμετρικού σχήματος, λεκτικό) από την αλληλεπίδραση των οποίων και τον πειραματισμό με τα γεωμετρικά όργανα προσπαθούν να κατανοήσουν τις σχέσεις που θέτει το πρόβλημα.

4.2.2 Με αφορμή την κατασκευή

Παρότι η λειτουργία της κατασκευής είναι υποτιμημένη από τους περισσότερους ερευνητές, σε σύγκριση με τη νοερή απεικόνιση και την αιτιολόγηση, στην παρούσα έρευνα της αφιερώνεται η ίδια προσοχή.

Στις λύσεις που δίνουν οι μαθητές στα προβλήματα της παρούσης έρευνας διακρίνουμε συνολικά έξι διαφορετικές οδηγίες κατασκευής για το ισοσκελές. Αυτές κατατάσσονται σε δύο κατηγορίες: στις οδηγίες που αντιστοιχούν στον ορισμό και στις οδηγίες που αντιστοιχούν στη βασική ιδιότητα. Η διαφορά ανάμεσα στις δύο κατηγορίες είναι πως, οι οδηγίες κατασκευής που αντιστοιχούν στον ορισμό κατασκευάζουν το περίγραμμα του ισοσκελούς, ενώ οι οδηγίες που αντιστοιχούν στη βασική ιδιότητα κατασκευάζουν το ισοσκελές με τη βοήθεια της μεσοκαθέτου της βάσης του.

Από την ανάλυση των στοιχείων της έρευνας διαπιστώνεται πως οι οδηγίες κατασκευής του ισοσκελούς δεν είναι ισοδύναμες ως προς την αποτελεσματικότητά τους στη λύση προβλήματος. Οι διαφορές ανάμεσα στις οδηγίες οφείλονται στο δυναμικό χαρακτήρα της κάθε μίας, δηλαδή στη δυνατότητα που προσφέρει για κατασκευή άπειρων ισοσκελών τριγώνων. Ο δυναμικός χαρακτήρας είναι αυτός που επιτρέπει στην οδηγία να προσαρμόζεται στις συγκεκριμένες συνθήκες του κάθε προβλήματος. Ένας άλλος παράγοντας που διαφοροποιεί τις οδηγίες κατασκευής είναι πως μπορεί να μην είναι όλες εξίσου κατάλληλες για το συγκεκριμένο πρόβλημα που αντιμετωπίζει ο μαθητής.

Η ικανότητα του μαθητή να επιλέγει την κατάλληλη οδηγία κατασκευής, σε σχέση με το συγκεκριμένο πρόβλημα, συνδέεται με το πόσο καλά γνωρίζει το δυναμικό χαρακτήρα κάθε οδηγίας. Συνδέεται επίσης και με την ευελιξία που έχει να αλλάζει οδηγία, όταν διαπιστώνει ότι αυτή που χρησιμοποιεί δεν είναι τόσο πρόσφορη. Παρατηρούμε πολλές διαφορετικές συμπεριφορές στα παιδιά, ανάλογα με τον τρόπο που αντιμετωπίζουν τις οδηγίες. Η στρατηγική που ακολουθούν για την επιλογή της τελικής οδηγίας που θα χρησιμοποιήσουν στη λύση του προβλήματος θεωρούμε πως αποκαλύπτει το βαθμό ωρίμανσης του ΣΙΤ τους.

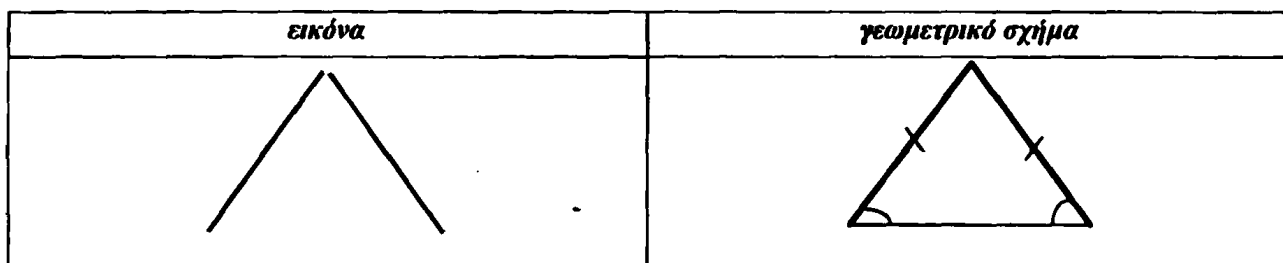


ΟΔΗΓΙΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΤΟΥ ΙΣΟΣΚΕΛΟΥΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Οδηγίες κατασκευής του ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχούν στον ορισμό

Από τις οδηγίες κατασκευής του ισοσκελούς τριγώνου, η κατασκευή «δύο ίσων πλευρών» (με χάρακα ή με διαβήτη) και η κατασκευή «δύο ίσων γωνιών», αντιστοιχούν στον ορισμό και δίνουν σαν αποτέλεσμα ένα σχήμα της παρακάτω μορφής (σχήμα 4.33). Σε αυτό το σχήμα, υπάρχει το κλειστό περίγραμμα του ισοσκελούς, το οποίο μπορεί, ανάλογα με το μαθητή, να γίνεται αντιληπτό είτε ως εικόνα είτε ως μαθηματική απεικόνιση.

Στην περίπτωση του σχήματος 4.33^α έχουμε μια εικόνα, γιατί δεν υπάρχουν υποθέσεις που να ορίζουν τις ιδιότητες της τριγωνικής μορφής, είτε με τη μορφή λεκτικών δεδομένων που να συνοδεύουν το τρίγωνο είτε με κάποιο κώδικα, όπως στην περίπτωση του σχήματος 4.33^β. Το μόνο κριτήριο για να διευκρινίσουμε τη λειτουργία εικόνων όπως η 4.33^α, είναι ο τρόπος με τον οποίο ο μαθητής χρησιμοποιεί τις ιδιότητες του ορισμού, όπως για παράδειγμα την ισότητα των πλευρών.



σχήμα 4.33 Σύγκριση εικόνας και γεωμετρικού σχήματος

Στις περιπτώσεις που το σχήμα γίνεται αντιληπτό ως εικόνα, όπως προκύπτει από την έρευνα και θα τεκμηριωθεί ακολούθως, υπάρχει αδυναμία να συνδυαστεί η κατασκευή αυτή με τους περιορισμούς του προβλήματος.

Στα επόμενα, θα αναφερθούμε ξεχωριστά σε κάθε μία από τις οδηγίες που αντιστοιχούν στον ορισμό και θα σχολιάσουμε τις δυνατότητές της σχετικά με τη λύση προβλήματος.

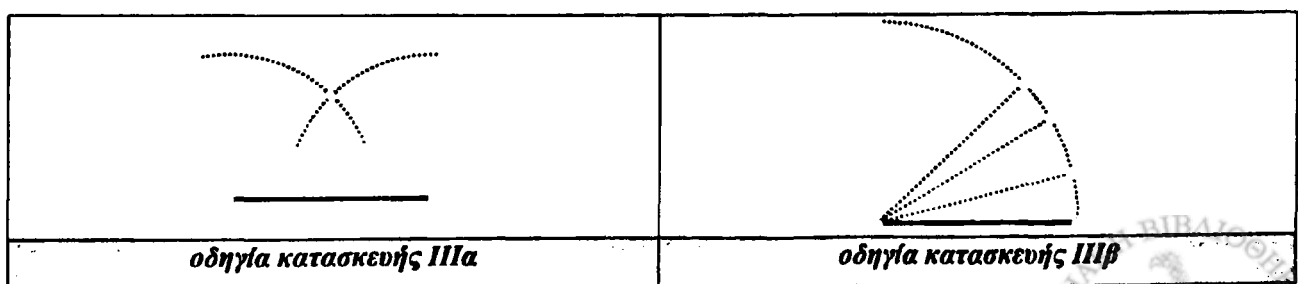
Ι. Δύο πλευρές ίσες: οι μαθητές είτε κατασκευάζουν με το χάρακα δύο διαδοχικά ίσα τμήματα, είτε παίρνουν μια γωνία και μετράνε πάνω στις πλευρές της τα ίσα τμήματα. Σε κάθε περίπτωση η κατασκευή ξεκινά από ένα ευθύγραμμο τμήμα που έχει το ρόλο της «ίσης πλευράς», ενώ η βάση του ισοσκελούς κατασκευάζεται τελευταία. Αποτέλεσμα αυτού είναι να μην μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι οδηγίες αποτελεσματικά, σε περιπτώσεις που δίνεται μια πλευρά στην οποία αποδίδεται ο ρόλος της βάσης του ισοσκελούς (πρόβλημα 2 και 3, Φάση 1^η). Οι οδηγίες είναι εντελώς πρωτόγονες, με αποτέλεσμα να υπακούουν, από τη φύση τους, σε

πολύ λίγους περιορισμούς (όπως δοσμένη γωνία κορυφής του ίσοσκελούς ή δεδομένο μήκος ίσων πλευρών). Το γεγονός αυτό οδηγεί τους μαθητές να προσπαθούν να συντονίσουν την οδηγία I με τους άλλους περιορισμούς του προβλήματος χρησιμοποιώντας οπτικές μεθόδους (δοκιμή – λάθος).

II. Δύο γωνίες ίσες: σε αυτή την περίπτωση, η κατασκευή πρέπει υποχρεωτικά να ξεκινά από ένα ευθύγραμμο τμήμα που έχει το ρόλο της «βάσης», ώστε να δημιουργηθούν οι δύο ίσες γωνίες. Όπως και στην οδηγία I, δεν είναι εύκολο να συντονιστούν αυτές οι οδηγίες με περιορισμούς (εκτός από το μήκος της βάσης ή το μέτρο των ίσων γωνιών).

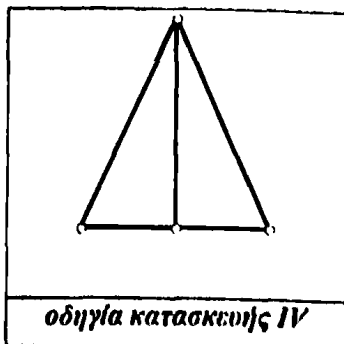
III. Με το διαβήτη: κατασκευάζονται πάλι ουσιαστικά οι ίσες πλευρές. Διακρίνονται δύο ποιοτικά διαφορετικές περιπτώσεις, ανάλογα με το ρόλο που αποδίδεται στο τμήμα από το οποίο ξεκινά η κατασκευή:

- **Στην IIIA)** δίνεται τμήμα που έχει το ρόλο της «βάσης» και με κέντρα τα άκρα και ακτίνα μεγαλύτερη από το μισό του, χαράσσονται δύο τόξα ίσης ακτίνας, ενώ το σημείο τομής τους δίνει την τρίτη κορυφή. Ο τρόπος αυτός κατασκευής του περιγράμματος του ισοσκελούς – παρότι δυνάμει περικλείει την κατασκευή άπειρων περιπτώσεων – στην πράξη δίνει μία συγκεκριμένη περίπτωση. Η απειρία περιπτώσεων δεν υπάρχει στο γεωμετρικό σχήμα, αλλά στο γεωμετρικό όργανο (στην επιλογή ακτίνας του διαβήτη). Έτσι η στατικότητα του ενός σχήματος που κατασκευάζεται μπορεί να εμποδίσει το συντονισμό της κατασκευής με κάποιο περιορισμό του προβλήματος, όπως ακριβώς και στις προηγούμενες οδηγίες κατασκευής (χαρακτηριστικό παράδειγμα βλέπε στο σχήμα 4.40).
- **Στην IIIB)** περίπτωση στο δοθέν τμήμα αποδίδεται ο ρόλος της «ίσης πλευράς». Έτσι με κέντρο το ένα άκρο του και ακτίνα το μέτρο του χαράσσεται τόξο, πάνω στο οποίο θα βρίσκεται η ζητούμενη τρίτη κορυφή. Η απειρία περιπτώσεων εμφανίζεται στο γεωμετρικό σχήμα με τη μορφή του τόξου, δηλαδή του γεωμετρικού τόπου της τρίτης κορυφής. Επειδή υπάρχει η δυνατότητα επιλογής της κορυφής μέσα από μια απειρία περιπτώσεων, η κατασκευή μπορεί να συνδυαστεί ευκολότερα με τους περιορισμούς του προβλήματος.



σχήμα 4.34 Οδηγίες κατασκευής του ισοσκελούς που χρησιμοποιούν διαβήτη

IV. δύο ίσα τρίγωνα: η κατασκευή δύο ίσων ορθογωνίων δίνει σαν αποτέλεσμα ένα



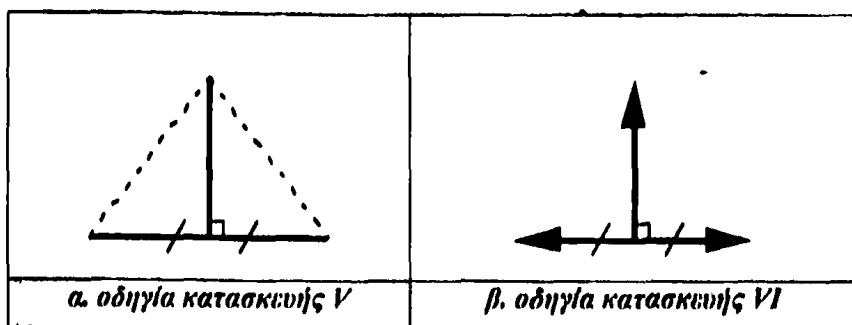
οδηγία κατασκευής IV

σχήμα 4.35 οδηγία κατασκευής του ισοσκελούς με δύο ίσα τρίγωνα

ισοσκελές της μορφής του σχήματος 4.35, το οποίο γίνεται συνήθως αντιληπτό από τους μαθητές που το χρησιμοποιούν σαν σχηματική ενότητα διάστασης 2D. Μια τέτοια κατασκευή, σε συνδυασμό με τους περιορισμούς που θέτει το πρόβλημα, είναι αρκετά προβληματική. Ιδιαίτερα στην περίπτωση που η αντίληψη των δύο ορθογωνίων είναι μόνο εικονική και όχι γεωμετρική, δηλαδή όταν δεν συνοδεύεται από συγκεκριμένες υποθέσεις για ισότητα πλευρών και / ή γωνιών.

Οδηγίες κατασκευής που αντιστοιχούν στη βασική ιδιότητα

Η κατασκευή μιας «κάθετης στο μέσον της δοσμένης πλευράς» (όχι μεσοκάθετος) και η κατασκευή της «μεσοκαθέτου» δίνουν σαν αποτέλεσμα σχήματα των μορφών που βλέπουμε στο σχήμα 4.36. Αυτά αποτελούν ισχυρότερα εργαλεία για την κατασκευή ισοσκελούς τριγώνου από τα I, II, III^Α και IV, γιατί επιτρέπουν στο χρήστη τους να αντιληφθεί και να χρησιμοποιήσει σχηματικές μονάδες διάστασης 1D. Η παρουσία ενός ευθυγράμμιου τμήματος στο εσωτερικό του ισοσκελούς τριγώνου έρχεται να σπάσει την αποκλειστική επικράτηση του περιγράμματος, σαν συνολική εικόνα 2D.



α. οδηγία κατασκευής V

β. οδηγία κατασκευής VI

σχήμα 4.36 Οδηγίες κατασκευής του ισοσκελούς που αντιστοιχούν στη βασική ιδιότητα

Και οι δύο οδηγίες ξεκινούν από ένα τμήμα, στο οποίο αποδίδεται ο ρόλος της βάσης. Το σχήμα 4.36α αντιστοιχεί με ακρίβεια στη βασική ιδιότητα. Ακριβώς αυτό, τονίζεται με τις διακεκομμένες γραμμές, που συμβολίζουν τις ίσες πλευρές

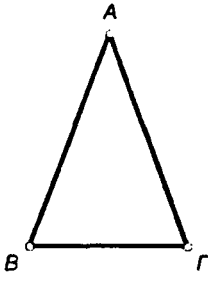
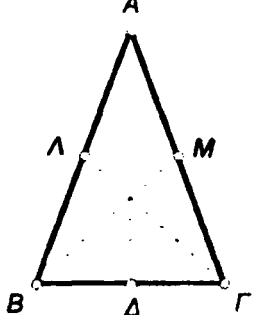
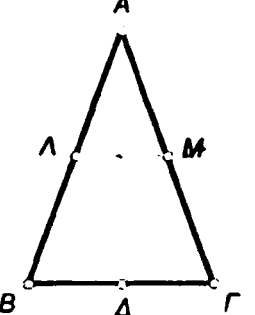
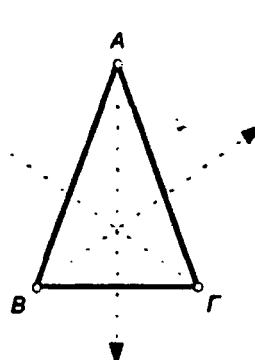
και υποχωρούν στο φόντο, σε αντίθεση με τη βάση και την κάθετη ευθεία στο μέσο της. Το σχήμα 4.36β αναπαριστά το μετασχηματισμό της βασικής ιδιότητας σε μια διαδικασία που γεννά ισοσκελή τρίγωνα. Τα βέλη δείχνουν τη μεταβλητότητα του μήκους των ευθυγράμμων τμημάτων που διατηρούν τις δύο κωδικοποιημένες ιδιότητες. Η δυναμική αυτή διαδικασία επιτρέπει την προσαρμογή της κατασκευής στους διάφορους περιορισμούς που θέτει το πρόβλημα.

Στα επόμενα θα εξηγήσουμε τη διαφορά ανάμεσα στις οδηγίες V και VI.

V. κάθετη στο μέσο: πρόκειται για μια πρώιμη φάση της μέσοκαθέτου, κατά την οποία κυριαρχεί η αντιληπτική μεταχείρισή της, ως στοιχείου ισορροπίας του ισοσκελούς τριγώνου. Οι λόγοι για τους οποίους αντιδιαστέλλουμε την «κάθετη στο μέσο» από τη «μεσοκάθετο» είναι πως ο μαθητής στη φάση αυτή δεν έχει μία τουλάχιστον από τις επόμενες ικανότητες:

α) δε μπορεί, ακόμα, να πάρει τυχαίο σημείο πάνω στην ευθεία, για την κατασκευή ισοσκελούς τριγώνου. Έτσι αισθάνεται την ανάγκη να «νομιμοποιήσει» την επιλογή του και διαλέγει ένα συγκεκριμένο σημείο για να το χρησιμοποιήσει ως κορυφή (σχήμα 4.37)

β) δε γνωρίζει την ιδιότητα των σημείων της μεσοκαθέτου, δηλαδή, η ιδιότητα είναι ανενεργή και γι' αυτό χρησιμοποιεί σύγκριση τριγώνων για να αποδείξει πως το τρίγωνο που κατασκεύασε είναι ισοσκελές.

3 ^ο πρόβλημα της 1 ^{ης} φάσης	Απαντήσεις διαφόρων μαθητών (που επέλεγον ένα συγκεκριμένο σημείο πάνω στην κάθετη στο μέσο της ΒΓ)		
 Στο επόμενο σχήμα δίνεται ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$). Μπορείς να βρεις ένα σημείο Κ εσωτερικό του τριγώνου τέτοιο, ώστε το τρίγωνο ΚΒΓ που θα σχηματιστεί να είναι επίσης ισοσκελές;			
	(α) το σημείο τομής των διαμέσων	(β) το σημείο τομής των ΑΜ και ΑΔ	(γ) το σημείο τομής των διχοτόμων.

σχήμα 4.37 Τρόποι επιλογής συγκεκριμένου σημείου πάνω στη μεσοκάθετο

VI. μεσοκάθετος: η μεσοκάθετος είναι ένα ισχυρότατο θεωρητικό εργαλείο το οποίο μας δίνει τη δυνατότητα κατασκευής άπειρου αριθμού ισοσκελών τριγώνων και συνεπώς είναι ιδιαίτερα αποτελεσματική σε μια σύνθετη δραστηριότητα, όπως είναι η λύση ή η διερεύνηση ενός προβλήματος. Το πέρασμα από την οδηγία V στην οδηγία VI, δηλαδή η κατασκευή ισοσκελούς με τη βοήθεια της μεσοκαθέτου, επιβεβαιώνεται όταν ο μαθητής επιδεικνύει και τις δύο ικανότητες που αναφέρθηκαν στο V. Στην περίπτωση αυτή είναι σε θέση να πάρει ένα τυχαίο σημείο πάνω στην μεσοκάθετο και γνωρίζει την ιδιότητα των σημείων της, με τη βοήθεια της οποίας αιτιολογεί τις ίσες αποστάσεις.

Παρατηρήσεις σε σχέση με τις οδηγίες κατασκευής

Οι οδηγίες κατασκευής ενός γεωμετρικού σχήματος μας εφοδιάζουν με τρόπους κατασκευής του. Είδαμε πως κάθε οδηγία βασίζεται σε ένα θεωρητικό υπόβαθρο, το οποίο νομιμοποιεί την ορθότητα της κατασκευής, καθώς περιέχει ενσωματωμένες ιδιότητες που οδηγούν στο συγκεκριμένο σχήμα (σήματα).

Οι οδηγίες δεν είναι όλες ισότιμες ως προς τις δυνατότητες ή τα εμπόδια που θέτουν κατά τη λύση προβλημάτων. Καθώς ο μαθητής γνωρίζει και αρχίζει να χρησιμοποιεί όλο και περισσότερες οδηγίες, αυτές εξελίσσονται παράλληλα μέσα του και ωριμάζουν, με τρόπο ώστε ο μαθητής να αποκτήσει κριτήρια σχετικά με το ποια οδηγία να χρησιμοποιήσει και πότε. Αυτό σημαίνει κατανόηση και, συνήθως, συνδέεται με ικανότητες μετάφρασης, από ένα σύστημα σε άλλο. Στην περίπτωση της γεωμετρικής κατασκευής, κατανόηση είναι να μπορεί ο μαθητής να δει κάθε στοιχείο 0D ή 1D, που δίνει το πρόβλημα από διαφορετικές οπτικές γωνίες και να το εντάξει στο κατάλληλο πακέτο οδηγιών, δηλαδή να το χρησιμοποιήσει ανάλογα με το ρόλο που παίζει στην οδηγία.

Με βάση την ανάλυση των οδηγιών και τα στοιχεία της έρευνας οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι οι οδηγίες κατασκευής του ισοσκελούς τριγώνου δεν είναι ισοδύναμες, αλλά διαφέρουν ως προς τις δυνατότητές τους και ως προς την καταλληλότητά τους για το συγκεκριμένο πρόβλημα. Η γνώση των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών κάθε μίας αποτελεί προϋπόθεση για την επιτυχημένη γεωμετρική λειτουργία, καθώς μας επιτρέπει να επιλέγουμε την καλύτερη για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

➤ Οι δυνατότητες κάθε οδηγίας καθορίζονται από το δυναμικό χαρακτήρα της. Με αυτόν εννοούμε την ικανότητα της οδηγίας, με τη μεταβολή μιας παραμέτρου, να δίνει μια απειρία ισοσκελών. Για παράδειγμα μεταβάλλοντας την ακτίνα του διαβήτη στην οδηγία III_A, ή παίρνοντας ένα οποιοδήποτε σημείο της μεσοκαθέτου στην οδηγία VI. Στην πρώτη περίπτωση, η δυνατότητα απειρίας βρίσκεται (και παραμένει) στο γεωμετρικό όργανο (άνοιγμα του διαβήτη), άρα η απόφαση για το πόση θα είναι η ακτίνα προηγείται της κατασκευής του ισοσκελούς. Στη δεύτερη περίπτωση η δυνατότητα απειρίας βρίσκεται στον κανόνα και μεταφέρεται πάνω σε μια ευθεία του σχήματος, «μπροστά στα μάτια» του μαθητή.

Με βάση τα σχόλια για τις οδηγίες κατασκευής του ισοσκελούς τριγώνου, αυτές μπορούν να διαιρεθούν σε δύο μεγάλες κατηγορίες.

- i. Στην πρώτη ανήκουν οι οδηγίες I, II, III_A, IV, που κατασκευάζουν μόνο πρωτεύοντα στοιχεία του ισοσκελούς (πλευρές και γωνίες) και οδηγούν στην κατασκευή ενός τριγώνου (:εγκλωβισμός σε μία περίπτωση), υπό την έννοια ότι συνδέονται άμεσα με τα κριτήρια

ισότητας τριγώνων ²². Από τη στιγμή που θα κατασκευαστούν τρία στοιχεία του περιγράμματος του τριγώνου, αντίστοιχα με τις περιπτώσεις ισότητας τριγώνων, έχει φτιαχτεί το ένα και μοναδικό τρίγωνο. Κάθε άλλο θα είναι ίσο με αυτό. Με τις οδηγίες της πρώτης κατηγορίας, «δυνητικά» μπορούν να κατασκευαστούν άπειρα τρίγωνα, αλλά όπως φαίνεται η απειρία των περιπτώσεων δεν υπάρχει ουσιαστικά για το μαθητή. Ο λόγος είναι πως η δυνατότητα απειρίας βρίσκεται στο γεωμετρικό όργανο και η έρευνα δείχνει πως γενικά δεν γίνεται χρήση της.

- ii. Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν οι οδηγίες IIIβ, V, VI που κατασκευάζουν το γεωμετρικό τόπο της τρίτης κορυφής (OD) και προσφέρουν αυξημένες δυνατότητες επιλογής της, ανάλογα με τις ειδικές συνθήκες ή τους περιορισμούς του προβλήματος. Με τις οδηγίες αυτές η απειρία «φαίνεται» στο γεωμετρικό σχήμα και έτσι είναι ευκολότερη η επιλογή.

Είναι φανερό ότι, η απειρία των ισοσκελών τριγώνων, που μπορούν να κατασκευαστούν με βάση μια συγκεκριμένη οδηγία, οφείλεται στο δυναμικό χαρακτήρα της οδηγίας. Οι οδηγίες που εμφανίζουν το δυναμικό χαρακτήρα στο γεωμετρικό σχήμα είναι συνήθως αποτελεσματικότερες από αυτές που τον εμφανίζουν στο γεωμετρικό όργανο.

Τα ευρήματα δείχνουν ότι δεν έχουν όλοι οι μαθητές δυναμική κατανόηση των οδηγιών κατασκευής που γνωρίζουν. Για παράδειγμα, ένας μαθητής που δεν έχει την ικανότητα να αυξομειώσει την ακτίνα στην οδηγία IIIα (με το διαβήτη), μένει αγκυλωμένος σε μία – δύο συγκεκριμένες περιπτώσεις, παρουσιάζει έτσι μια στατική κατανόηση. Πάρ' ότι η χρήση του διαβήτη δίνει την αίσθηση, δε δίνει σε όλους τη συνειδητή χρήση της απειρίας περιπτώσεων. Ανάλογα συμβαίνουν σε όλες τις οδηγίες. Έτσι οι μαθητές δεν μπορούν να εκμεταλλευτούν τις δυνατότητες που τους προσφέρουν.

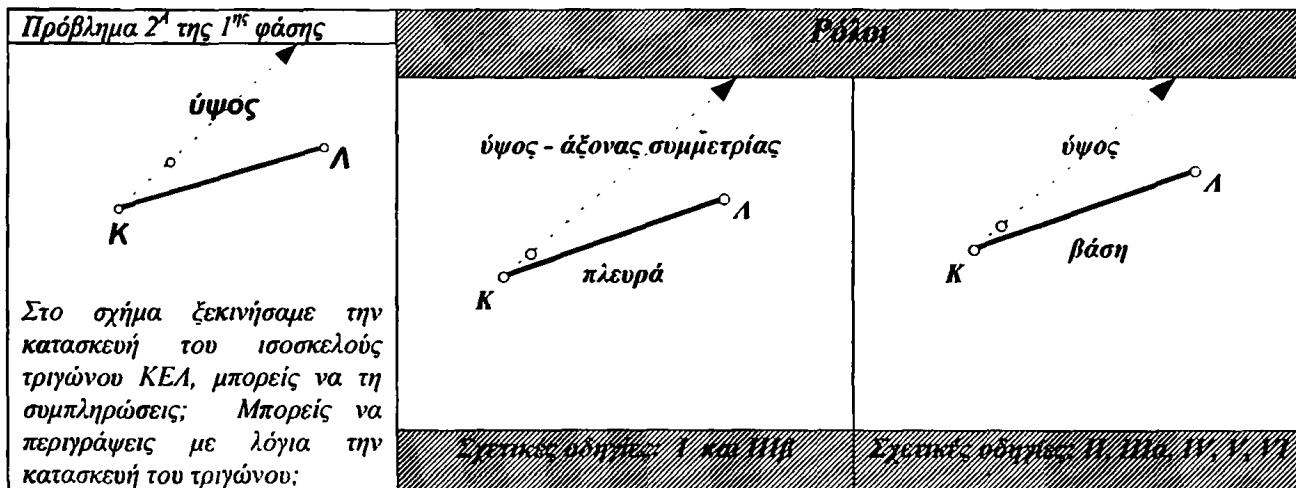
Ένας παράγοντας που φαίνεται πως βοηθά στη δυναμική κατανόηση των οδηγιών, είναι οι μαθητές να τις γνωρίζουν και λεκτικά, εκτός από αισθητοκινητικά, ώστε να μπορούν να τις επαναλάβουν. Για παράδειγμα επαναλαμβάνοντας την οδηγία για το διαβήτη, «..... με ακτίνα μεγαλύτερη από το μισό του τμήματος.....» συνειδητοποιούν σε κάποια στιγμή την ευχέρεια για επιλογή της ακτίνας. Ακόμα επαναλαμβάνοντας την οδηγία για τη μεσοκάθετο, υπενθυμίζουν στον εαυτό τους πως «.....οποιοδήποτε σημείο έχει την ιδιότητα να ισαπέχει.....». Προϋπόθεση βέβαια είναι να γνωρίζουν σωστά τη λεκτική απόδοση της οδηγίας.

➤ Η **καταλληλότητα** μιας οδηγίας συνδέεται με το συγκεκριμένο πρόβλημα που αντιμετωπίζει ο μαθητής. Είδαμε πως κάθε οδηγία ξεκινά την κατασκευή του ισοσκελούς από

κάποιο στοιχείο 1D στο οποίο δίνει το ρόλο της «πλευράς» ή της «βάσης». Ανάλογα με το στοιχείο που δίνει το πρόβλημα και το ρόλο που θα του αποδώσει ο μαθητής, μπορεί να επιλέξει μόνο συγκεκριμένες οδηγίες και μάλιστα:

- αν ξεκινά από ευθύγραμμο τμήμα με το ρόλο «πλευρά», έχει πρόσβαση μόνο στις οδηγίες I (δύο ίσες πλευρές) και IIIβ (β' περίπτωση διαβήτη)
- αν ξεκινά από ευθύγραμμο τμήμα με το ρόλο «βάση», τότε έχει πρόσβαση σε όλες τις υπόλοιπες οδηγίες.

Σε σχέση με τις απαιτήσεις του προβλήματος εμφανίζονται δύο είδη συμπεριφοράς: ή ο μαθητής μένει σε μία οδηγία και την προσαρμόζει στις απαιτήσεις του προβλήματος ή περνά σε άλλη, καταλληλότερη οδηγία. Εφόσον, για κάθε περίπτωση, δεν υπάρχει μοναδική επιλογή οδηγίας, θα πρέπει ο μαθητής να αποκτήσει κριτήρια που να τον καθοδηγούν προς τα κατάλληλο πακέτο οδηγιών. Αυτό γίνεται όταν το παιδί αξιολογεί τους ρόλους και των υπολοίπων στοιχείων 1D που δίνονται στο πρόβλημα (δεδομένα). Συνεπώς η μορφή του ερεθίσματος (πρόβλημα) είναι αυτή που θα πλοηγήσει το μαθητή ανάμεσα στις οδηγίες, προκειμένου να διαλέξει την προσφορότερη. Στο σχήμα 4.38 φαίνονται οι διάφοροι ρόλοι που μπορούν να δοθούν και οι οδηγίες που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στο πρόβλημα 2^Α.



σχήμα 4.38 Διαφορετικές επιλογές ρόλων για τα στοιχεία που δίνονται στο 2^ο πρόβλημα της 1^{ης} φάσης

Τα στοιχεία δείχνουν πως η εμμονή σε μια οδηγία μπορεί να δυσχεραίνει την γεωμετρική λειτουργία του παιδιού και αυτό γιατί ο κάθε τρόπος κατασκευής (όπως παρουσιάστηκε) έχει τις δυνατότητες αλλά και τους εγγενείς περιορισμούς του. Έτσι υπάρχουν προβλήματα στα οποία οι περιορισμοί που δίνονται συνδυάζονται δύσκολα ή ακόμα δεν είναι δυνατόν να συνδυαστούν με συγκεκριμένες οδηγίες και να οδηγήσουν στη λύση.

Παρατηρείται συχνά οι μαθητές να εργάζονται σταθερά με την ίδια οδηγία, ανεξάρτητα από το πρόβλημα που τους δίνεται. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, άλλα προβλήματα να τα αντιμετωπίζουν εύκολα και άλλα να μην μπορούν να τα λύσουν, λόγω του ότι η συγκεκριμένη οδηγία με τα δεδομένα της δε λειτουργεί εξίσου καλά σε όλες τις συνθήκες (μη ελαστικό πακέτο οδηγίας).

Συμπεράσματα

Κατά συνέπεια, οι οδηγίες κατασκευής του ισοσκελούς τριγώνου δεν είναι ισοδύναμες:

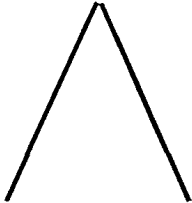
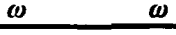
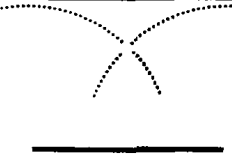
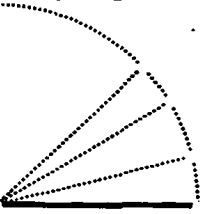
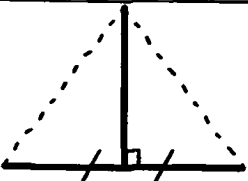
- ως προς τις δυνατότητες που δίνουν και
- ως προς την καταλληλότητα σε σχέση με τις απαιτήσεις του προβλήματος

Η επιτυχία στη λύση προβλήματος εξαρτάται από το είδος της οδηγίας που χρησιμοποιεί ο μαθητής, από τον τρόπο που την αντιμετωπίζει (στατικά ή δυναμικά), από το αν μπορεί να την αναπροσαρμόζει ανάλογα με το συγκεκριμένο πρόβλημα και από το πόσο εύκολα μπορεί να αλλάξει οδηγία.

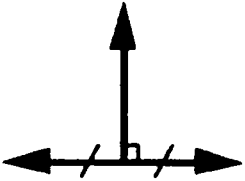
Στον επόμενο πίνακα 4.12 συγκρίνονται οι οδηγίες κατασκευής του ισοσκελούς τριγώνου ως προς τις πληροφορίες που απαιτούνται για την επιλογή του καταλληλότερου πακέτου, ανάλογα με τις συνθήκες που δίνει το πρόβλημα.



Πίνακας 4.12
Πίνακας οδηγιών κατασκευής ισοσκελούς τριγώνου

Οδηγία κατασκευής	Γεωμετρικό σχήμα	Ρόλος (που αποδίδεται στο τμήμα, από το οποίο ξεκινά η κατασκευή)	Κατασκευάζει	Ο δυναμικός χαρακτήρας βασίζεται
I. Δύο ίσες πλευρές		Ιση πλευρά του ισοσκελούς	3 στοιχεία του τριγώνου: δύο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία	Στο γεωμετρικό όργανο (κανόνας)
II. Δύο ίσες γωνίες		βάση του ισοσκελούς	3 στοιχεία του τριγώνου: μία πλευρά και οι προσκείμενες γωνίες	Στο γεωμετρικό όργανο (μοιρογνωμόνιο)
IIIα. Διαβήτη		βάση του ισοσκελούς	3 στοιχεία του τριγώνου: τρεις πλευρές	Στο γεωμετρικό όργανο (διαβήτη)
IIIβ. Διαβήτη		Ιση πλευρά του ισοσκελούς	1 στοιχείο και το γεωμετρικό τόπο της τρίτης κορυφής	Στο γεωμετρικό σχήμα Πρόκειται για <u>εξέλιξη της οδηγίας I.</u>
IV. Δύο ίσα τρίγωνα		Εδώ ο ρόλος αποδίδεται σε στοιχείο 2D (:στο ορθογώνιο τρίγωνο) και είναι το μισό	Το συμμετρικό ορθογώνιο	Στο γεωμετρικό όργανο (κανόνας)
V. Κάθετη στο μέσο		βάση του ισοσκελούς	2 στοιχεία (ένα πρωτεύον και το άλλο δευτερεύον): βάση και ύψος	Στο γεωμετρικό όργανο (κανόνας)



VI. Μεσοκάθετος		βάση του ισοσκελούς	1 στοιχείο και το γεωμετρικό τόπο της τρίτης κορυφής	Στο γεωμετρικό σχήμα Πρόκειται για <u>εξέλιξη</u> της οδηγίας V.
-----------------	---	------------------------	---	--

Στρατηγικές προσαρμογής των οδηγιών στα δεδομένα (περιορισμούς) του προβλήματος

Ένας παράγοντας που επηρεάζει την επιλογή οδηγιών κατασκευής, όπως είπαμε, είναι το ίδιο το πρόβλημα και συγκεκριμένα οι περιορισμοί που θέτει. Ακόμα και για την κατασκευή ενός απλού γεωμετρικού σχήματος χρειάζεται συχνά να συντονιστούν δύο ή περισσότεροι περιορισμοί που καθορίζουν τις ιδιότητές του. Ας θεωρήσουμε το απλό παράδειγμα του 2^{ου} προβλήματος της 1^{ης} φάσης (σχήμα 4.4), και την περίπτωση που οι μαθητές θέλουν «από το σημείο Α να φέρουν κάθετη στο ύψος». Στην κατασκευή αυτή ουσιαστικά υπάρχουν δύο περιορισμοί:

1. να φέρουν κάθετη σε μια ευθεία (=ύψος) και ταυτόχρονα,
2. η κάθετη να περνάει από το σημείο Α

Με βάση τα στοιχεία της έρευνας μπορούμε να διατυπώσουμε τον ισχυρισμό ότι, κατ' αναλογία με την κατεύθυνση που δίνει ο Polya για τη λύση προβλήματος στην κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων, οι μαθητές παίρνουν αρχικά αυθόρμητα μια απλούστερη κατάσταση (έναν περιορισμό), κατασκευάζουν το σχήμα, το μελετούν, διαπιστώνουν τις ελλείψεις του και ανάλογα αντιδρούν ή όχι. Οι τρόποι αντίδρασης περιλαμβάνουν αναπροσαρμογή ή αλλαγή των οδηγιών κατασκευής που χρησιμοποιήθηκαν, ώστε να συμπεριληφθεί και ο άλλος περιορισμός. Στα επόμενα δίνεται αρχικά ο πίνακας 4.13 που περιγράφει συνοπτικά τις διάφορες στρατηγικές που χρησιμοποιούνται από τους μαθητές που συμμετέχουν στην έρευνα. Ακολουθούν χαρακτηριστικά παραδείγματα που εικονογραφούν την κάθε περίπτωση.



Πίνακας 4.13
Στρατηγικές προσαρμογής των οδηγιών κατασκευής στα δεδομένα ενός προβλήματος

επιλογή οδηγίας	Ο μαθητής ξεκινά από λάθος οδηγία και...			Ο μαθητής ξεκινά από σωστή οδηγία και...	
στρατηγική	εμμένει σε αυτήν	προσπαθεί να την προσαρμόσει «με το μάτι» στα δεδομένα του προβλήματος	αλλάζει οδηγία	αδυνατεί να την προσαρμόσει στα δεδομένα του προβλήματος	προσαρμόζει στα δεδομένα του προβλήματος
Περίπτωση (αναλύεται ακολούθως):	A	B	Γ	Δ	E

A) η μαθήτριά ξεκινά από λάθος οδηγία και εμμένει σε αυτήν

Χαρακτηριστικός της A περίπτωσης είναι ο τρόπος που αντιδρά μια καλή μαθήτριά στο πρόβλημα 2^B (οι νοερές της εικόνες φαίνονται στο σχήμα 4.31). Για τη λύση του επιλέγει την οδηγία της μεσοκαθέτου. Η επιλογή είναι λανθασμένη, όσον αφορά στο συγκεκριμένο πρόβλημα, αφού η κατασκευή της μεσοκαθέτου ξεκινά από τη βάση του ισοσκελούς και στη συγκεκριμένη περίπτωση η βάση δε δίνεται (η πλευρά ΚΛ αποκλείεται να είναι βάση). Η μαθήτριά επιμένει στις οδηγίες, και παρόλο που σε δύο διαδοχικές προσπάθειες δεν καταλήγει πουθενά, δεν τις αλλάζει (Μαριάννα, Φ2, 2^B). Ας παρακολουθήσουμε τη σκέψη της:

M: άρα η βάση του τριγώνου θα είναι η ΚΕ, οπότε η μεσοκάθετος θα περνάει από το Α.
 Θα πάρω ένα σημείο Ε πάνω στο ύψος και μετά θα φέρω τη μεσοκάθετο (κατασκευάζει, Α' προσπάθεια, σχήμα 3)

Ερ: Πώς το πήρες το Ε;

M: Τυχαία, πήρα ένα σημείο πάνω στο ύψος γιατί η τρίτη κορυφή πρέπει να βρίσκεται πάνω στο ύψος.
 Όμως..... η μεσοκάθετος δεν περνά από το Α.
 Εντάξει, θα το κάνω αλλιώς.
 Φέρνω μια ημιευθεία από το Κ και μετά την κάθετη (ΑΜ) από το Α σε αυτή. Θα πάρω και ίσο κομμάτι (ΚΜ = ΜΕ), και εδώ είναι το Ε (Β' προσπάθεια, σχήμα 3).
 Αλλά πάλι..... δεν έχει το ύψος.
 Δεν ξέρω πώς μπορεί να γίνει.....

Η μαθήτριά δίνει στην ΚΕ το ρόλο της βάσης και μετασχηματίζει τους περιορισμούς που της δόθηκαν (ισοσκελές, ύψος) στους εξής:

1. η κορυφή Ε να βρίσκεται πάνω στο ύψος
2. η μεσοκάθετος της βάσης ΚΕ να περνά από το Α

μόνο που, με αφετηρία αυτούς τους περιορισμούς, το ισοσκελές ΚΕΛ δεν είναι κατασκευάσιμο. Έτσι το παιδί εμμένει στην ακατάλληλη οδηγία και κινείται,

αναποτελεσματικά, ανάμεσα στους δύο περιορισμούς, όπως τους οριοθέτησε η ίδια, προκειμένου να κατασκευάσει τη νοητική της εικόνα, καλύπτοντας κάθε φορά μόνο τον ένα.

Β) ο μαθητής ξεκινά από λάθος οδηγία και προσπαθεί να την προσαρμόσει «με το μάτι» στα δεδομένα του προβλήματος

Πολλοί μαθητές, παρόλο που διαπιστώνουν πως η οδηγία που επέλεξαν δεν λειτουργεί στο συγκεκριμένο πρόβλημα, δηλαδή δεν είναι δυνατό να συντονίσει τους περιορισμούς, δεν την εγκαταλείπουν. Προσπαθούν να την προσαρμόσουν εμπειρικά, φτιάχνοντας μια ψευδό - λύση. Τις περισσότερες φορές χρησιμοποιούν τη μέθοδο δοκιμή - λάθος, ώστε να βρουν μια θέση που να ικανοποιεί τον δεύτερο περιορισμό «με το μάτι». Έτσι όταν πλησιάσουν, περίπου το ζητούμενο από το πρόβλημα, μένουν ικανοποιημένοι και ισχυρίζονται ότι το έχουν λύσει.

Για παράδειγμα στο 2^Α πρόβλημα (σχήμα 4.39), ένας μαθητής επιλέγει την οδηγία IIIα με το διαβήτη. Η οδηγία είναι ακατάλληλη για το πρόβλημα, γιατί δεν μπορεί να συντονιστεί με το δεδομένο ύψος. Είναι φανερό πως ο μαθητής αρκείται στο «περίπου» και θεωρεί τη λύση του ολοκληρωμένη. (Στέφανος, Φ2, 2^Α)

Πρόβλημα 2 ^Α της 1 ^{ης} φάσης	Η λύση του μαθητή
Στο σχήμα ξεκινήσαμε την κατασκευή του ισοσκελούς τριγώνου ΚΕΛ, μπορείς να τη συμπληρώσεις; Μπορείς να περιγράψεις με λόγια την κατασκευή του τριγώνου;	Ο μαθητής, χρησιμοποιώντας το διαβήτη (οδηγία IIIα) φτιάχνει τις ίσες πλευρές και ακολούθως μετράει με το τρίγωνο αν το (δεδομένο) ύψος συναντά την πλευρά κάθετα. Αν όχι, ξαναδοκιμάζει με διαφορετική ακτίνα.

σχήμα 4.39 Προσπάθεια προσαρμογής ακατάλληλης για το πρόβλημα οδηγίας

Γ) Η μαθήτρια ξεκινά από λάθος οδηγία και την αλλάζει

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα μαθήτριας, η οποία ξεκινά από λανθασμένη οδηγία και στη συνέχεια την αλλάζει καταγράφεται στο διάλογο που ακολουθεί και αναφέρεται επίσης στο πρόβλημα 2^Α (σχήμα 4.39). Αρχικά η μαθήτρια επιλέγει την οδηγία IIIα, με το διαβήτη, η

οποία, όπως σχολιάσαμε προηγουμένως, είναι ακατάλληλη για το πρόβλημα. Κάνει την κατασκευή και διαπιστώνει ότι η κορυφή δεν πέφτει εκεί που θέλει, δεν καλύπτεται ο περιορισμός του ύψους. Η μαθήτρια διατηρεί την ίδια νοερή εικόνα, δηλαδή διατηρεί το ρόλο της ΚΛ ως βάσης και έχει την ευελιξία να αλλάξει οδηγία και να επιλέξει την V1 (μεσοκάθετο) ώστε να συντονίσει τους δύο περιορισμούς. (Παρασκευή, Φ1, 2^Α)

(Σημείωση: Στην προηγούμενη προσπάθεια να λύσει το πρόβλημα, η μαθήτρια είχε κατασκευάσει την κάθετη από το Λ στο ύψος και την είχε σβήσει. Παρόλα αυτά, η θέση της ευθείας φαίνεται αχνά στο χαρτί. Τώρα κάνει μια νέα προσπάθεια για λύση)

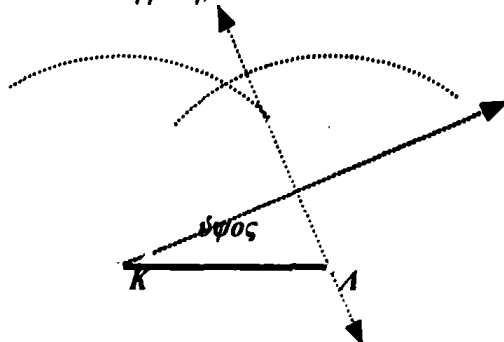
(α' προσπάθεια: λάθος οδηγία)

M: Πώς..... θα προσπαθήσω να φτιάξω με το διαβήτη ένα ισοσκελές τρίγωνο.....

Ερ: Τι κάνεις εκεί;

M: Έτσι κατασκευάζω το ισόπλευρο περίπου

αλλά πού είναι η μέση;



(με κέντρα τα Κ και Λ έφτιαξε δύο τόξα και το κοινό τους σημείο, βλέπει πως η κορυφή του δεν πέφτει εκεί που θέλει και το σβήνει.)
Ωχ μπερδεύτηκα

(β' προσπάθεια: σωστή οδηγία)

(μετράει) ισοσκελές, το μέσο (του ΚΛ) είναι αυτό, άρα ...

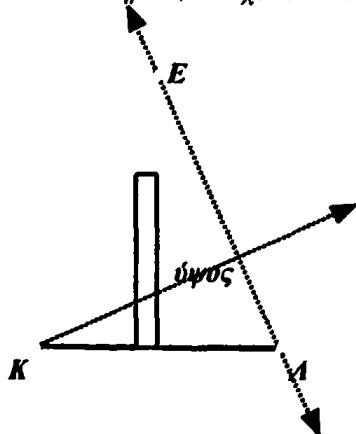
(θα δοκιμάσει ξανά με τη μεσοκάθετο του ΚΛ)

..... πάλι θα το σβήσω

(το σημείο που είχε βρει με το διαβήτη)

Ερ: Δεν πειράζει

M: Πού είναι το σημείο; Το έχασα..... δύο λεπτά.....



(βάζει το χάρακα κάθετα στο μέσο του ΚΛ και σημειώνει ένα σημείο που βρίσκεται πάνω στη -σβησμένη πια- κάθετη από το Λ στο ύψος)

Ερ: Εκεί που το πήρες είναι σε τυχαία θέση το σημείο Ε;

M: Όχι να είναι..... Να είναι πάνω σε αυτήν (τη νοητή μεσοκάθετη στην ΚΛ)

Ερ: Ναι. Γιατί δεν το πήρες εδώ;

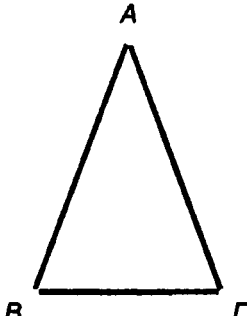
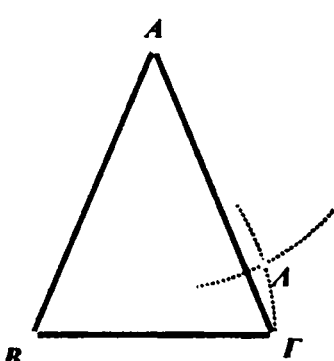
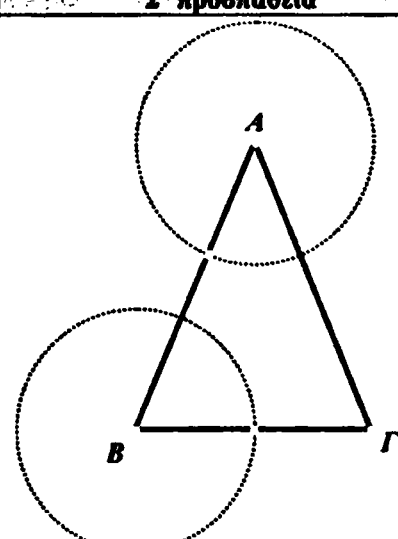
M: Πιο κοντά; Γιατί θέλω να είναι κάθετο το ύψος.



- Ερ: Τι πρόσεξες;
 Μ: Να είναι κάθετο το ύψος με την $ΕΛ$
 (είναι φανερό πως δεν έχει συνειδητοποιήσει ακόμα με ποιο τρόπο προσδιόρισε το σημείο της μεσοκαθέτου που σημείωσε ως $Ε$)
 Ερ: Δε σε κατάλαβα, μια στιγμή να καταλάβω.
 Βρίσκες το μέσο του $ΚΛ$, έβαλες αυτό το χαρακάκι εδώ
 Μ: Ωστε η γωνία $Κ=Λ$, το σημείο αυτό θα γίνει το $Ε$
 (οι εξηγήσεις που δίνει δεν αντιπροσωπεύουν το τι έκανε)
 Ερ: Γιατί δεν πήρες εδώ πάνω το $Ε$ και το πήρες εκεί, σε εκείνο το σημείο;
 Μ: Από αμηχανία, εντελώς μηχανικά
 Ερ: Μπορούμε να το πάρουμε και εδώ;
 Μ: Επειδή είχα τραβήξει και την άλλη φορά την κάθετη, πήρα περίπου το κοντινό σημείο, γιατί ήξερα περίπου πόση είναι
 (τώρα συνειδητοποιεί ποιον άλλο παράγοντα έλαβε υπ' όψη της)
 Ερ: Αυτό θέλω να μου πεις, την έχεις σβήσει (την κάθετη από το $Λ$ στο ύψος) αλλά φαίνεται κάπως, έτσι;
 Μ: Ναι, γι' αυτό
 Ερ: Άρα το πήρες να είναι περίπου πάνω σε αυτή τη γραμμή που είχες σβήσει.

Δ) Ο μαθητής ξεκινά από σωστή οδηγία, αλλά αδυνατεί να την προσαρμόσει στα δεδομένα του προβλήματος

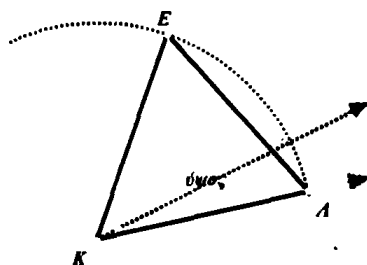
Χαρακτηριστικό της περίπτωσης Δ είναι το επόμενο παράδειγμα (πρόβλημα 3^Β, σχήμα 4.40). Ο μαθητής δίνει στην $ΑΒ$ το ρόλο της βάσης και διαλέγει κατάλληλη οδηγία κατασκευής (III^Α, με το διαβήτη), όμως έχει μία στατική εκδοχή της και δεν μπορεί να την προσαρμόσει. Άναζητά μια συγκεκριμένη ακτίνα. Συνεπώς δεν έχει το πλεονέκτημα της απειρίας περιπτώσεων που του παρέχει ο διαβήτης, οπότε καταλήγει σε αδιέξοδο. (Κώστας, Μ, Φ2, 3^Β)

Πρόβλημα 3 ^Β της 1 ^{ης} φάσης	1 ^η προσπάθεια	2 ^η προσπάθεια
 Στο επόμενο σχήμα δίνεται ένα ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($ΑΒ = ΑΓ$). Μπορείς να βρεις ένα σημείο $Λ$ εσωτερικό του τριγώνου τέτοιο, ώστε, το τρίγωνο $ΛΑΒ$ που θα σχηματιστεί να είναι επίσης ισοσκελές;	 Ο μαθητής, αρχικά, παίρνει ακτίνα με μέτρο, αυτό της $ΒΓ$, οπότε το σημείο τομής των τόξων πέφτει έξω από το $ΑΒΓ$	 ...μετά δοκιμάζει με ακτίνα $ΒΓ/2$, αλλά τα δύο τόξα δεν τέμνονται, οπότε φτάνει σε αδιέξοδο, δεν ξέρει ποια άλλη ακτίνα να χρησιμοποιήσει

σχήμα 4.40 Αδυναμία προσαρμογής οδηγίας κατάλληλης για το πρόβλημα

Το επόμενο παράδειγμα αναφέρεται στο πρόβλημα 2^A (σχήμα 4.39) και δείχνει πως, ακόμα και μία δυναμική οδηγία, είναι δυνατόν να μην μπορεί να προσαρμοστεί από το μαθητή στα δεδομένα του προβλήματος. (Εφη, Φ1, 2^A)

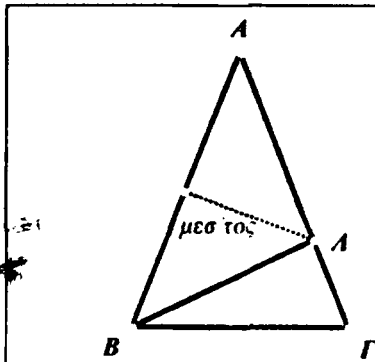
Μαθήτρια: Μπορούμε να μετρήσουμε την ΚΛ και να την κάνουμε ίση με την ΚΕ, ώστε να βγει ισοσκελές το τρίγωνο.
(δίνει στην ΚΛ το ρόλο ίσης πλευράς)
Μπορούμε να το κάνουμε με το διαβήτη;
Για να βγει καλύτερο.....
(φτιάχνει τόξο με κέντρο Κ και ακτίνα ΚΛ, οδηγίες III^B με διαβήτη)
Θα πάρουμε το σημείο Ε και θα ενώσουμε το ΚΕ, και τώρα θα ενώσουμε και την ΛΕ και έχουμε το ισοσκελές.



Ερ: Είναι αυτό που μας ζητάγε;
Μ: Μας ζητάγε ένα ισοσκελές ΚΕΛ
Είναι ισοσκελές γιατί.... έχουμε κάνει την ΚΛ=ΚΕ, επομένως και Λ=Ε
Ερ: Μας ζητάγε κάτι άλλο γι' αυτό το τρίγωνο;
Μ: Να το συνεχίσουμε να περιγράφουμε με λόγια την κατασκευή του.....
Ερ: Μας έδινε όμως και αυτό
Μ: Μας έδινε και το ύψος, να ενώσω το ύψος; Να το πατήσω από πάνω;
...που ταυτόχρονα το ύψος σε ένα ισοσκελές τρίγωνο θα είναι διάμεσος και διχοτόμος
Ερ: Αυτό είναι το ύψος;
Μ: Μισό λεπτάκι...
Αν το πάρουμε με το χάρακα (πάνω στη διακεκομμένη γραμμή) δε μας βγαίνει.
Αν το πάρουμε σε ορθή γωνία, δε μας βγαίνει, γιατί πρέπει να βγει κάθετη, τώρα αν το ενώσουμε έτσι απλά....
Δεν είναι ακριβώς, πρέπει να φέρουμε εμείς το σωστό ύψος για να είναι ταυτόχρονα διάμεσος και.....
Επομένως το σβήνουμε
(ενώ χρησιμοποιεί μια δυναμική οδηγία κατασκευής, σαν την III^B, δεν μπορεί να την προσαρμόσει στις απαιτήσεις του προβλήματος).

Ε) Ο μαθητής ξεκινά από σωστή οδηγία και την προσαρμόζει στα δεδομένα του προβλήματος

Τέλος, υπάρχουν μαθητές που ξεκινούν από σωστές οδηγίες κατασκευής, σε σχέση με το συγκεκριμένο πρόβλημα, όμως δε λαμβάνουν υπ' όψη τους όλους τους περιορισμούς. Μελετώντας / μετρώντας το γεωμετρικό σχήμα που κατασκεύασαν με τον ένα περιορισμό, αντιλαμβάνονται τις απαιτούμενες αλλαγές και προσαρμόζουν την οδηγία κατασκευής, έτσι ώστε να συμπεριλάβουν και τον άλλο. Το πλέον συχνό παράδειγμα αυτής της κατάστασης εμφανίζεται στο πρόβλημα 3^B (σχήμα 4.40).



Οι μαθητές κατασκευάζουν τη μεσοκάθετο της AB και θεωρούν, ως το ζητούμενο σημείο A , το σημείο τομής της μεσοκαθέτου με την πλευρά $ΑΓ$. Το σημείο αυτό, όμως, δεν είναι εσωτερικό του τριγώνου (δεύτερος περιορισμός). Από τη στιγμή που έχουν καταλάβει το μηχανισμό, κάποιοι μαθητές παίρνουν συνειδητά ένα άλλο σημείο της μεσοκαθέτου, που να βρίσκεται μέσα στο τρίγωνο.

σχήμα 4.41 Προσαρμογή σωστής οδηγίας στους περιορισμούς του προβλήματος

Επίσης στο πρόβλημα 2^A (σχήμα 4.39) μία μαθήτρια λει «θα φέρω από το A κάθετη στο ύψος και θα προεκτείνω κατά ίσο κομμάτι». Η μαθήτρια φέρνει κάθετη στο ύψος (ένας περιορισμός), η οποία δεν περνά από το A . Παρατηρεί προσεκτικά το σχήμα της, μετακινεί το γνώμονα, παράλληλα στη ευθεία που είχε φέρει, μέχρις ότου αυτός περάσει από το A και τότε φέρνει νέα κάθετη (δύο περιορισμοί).

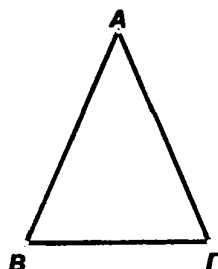
Στην περίπτωση αυτή βλέπουμε το παιδί να κρατά την οδηγία και να την προσαρμόζει στις απαιτήσεις του προβλήματος. Η εικόνα δηλαδή τη βοηθά να τοποθετήσει σωστά το γνώμονα, ώστε να λάβει υπ' όψη της και το δεύτερο περιορισμό. (Στεφανία, Φ2, 2^A, Παρασκευή, Φ1, 2^A)

Ο επόμενος διάλογος αποτελεί διπλό παράδειγμα:

1. σωστής οδηγίας, που ο μαθητής δεν συνειδητοποιεί το δυναμικό χαρακτήρα της για να την προσαρμόσει στις απαιτήσεις του προβλήματος αναγκαζόμενος ν' αλλάξει οδηγία, και επιπλέον
2. σωστής οδηγίας με δυναμικό χαρακτήρα που προσαρμόζεται.

Το απόσπασμα αναφέρεται στη λύση του 3^B προβλήματος (σχήμα 4.40) (Νεκτάριος, Φ1, 3^B).

Μαθητής: $ΛΑΒ$, το A θα είναι η κορυφή, λογικά..... (απόδοση ρόλου σε 0D)
Μπορούμε να το πάρουμε, να το γυρίσουμε έτσι για να το βλέπουμε καλύτερα (έτσι, ώστε η AB να είναι οριζόντια).



Για να είναι ισοσκελές φέρνουμε, τι να φέρουμε;

Φέρνουμε από το B και από το A , να φέρουμε από το B ;

Με διαβήτη.....εδώ, ναι, μπορούμε να το κάνουμε και με το διαβήτη λιγάκι.

Λίγο παράξενος τρόπος αλλά δεν πειράζει

(ανοίγει το διαβήτη όσο είναι το AB σκοπεύοντας να φτιάξει ισόπλευρο, σταματά όμως και προβληματίζεται, καθώς φαίνεται να προβλέπει το αποτέλεσμα της ενέργειάς του, πριν την κάνει).

Λεει εσωτερικό, άρα δε μας κάνει.

(προσαρμογή της εικόνας: από ισόπλευρο βλέπει ισοσκελές μέσα στο $AB\Gamma$)

Το BA πρέπει να είναι η γραμμή κάτω για να βγει ισοσκελές, σαν το $B\Gamma$ (σαν τη βάση του ισοσκελούς $KB\Gamma$, που κατασκεύασε στο προηγούμενο ερώτημα)
(απόδοση ρόλου σε στοιχείο ID , η BA θεωρείται βάση)

η μόνη τέτοια (πλευρά) που να μην είναι ίση, γιατί αλλιώς δεν έβγαине εσωτερικό.

Κάνω σκέψεις σε πράξεις, ταυτόχρονα.....

(Η οδηγία του είναι σωστή, έχει όμως στατικό χαρακτήρα και δεν μπορεί να την προσαρμόσει στη συγκεκριμένη περίπτωση, οπότε αλλάζει οδηγίες: από διαβήτη, σε κάθετη στο μέσο)

Θέλουμε AB

(πατάει με το μολύβι του την AB για να τη βλέπει καλά, σαν τη βάση του ΛAB)

.....για να μη μπερδεύομαι.....

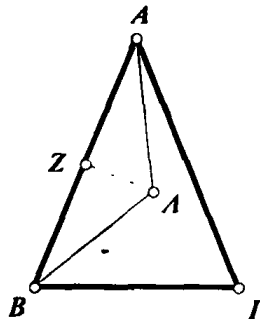
Από δω κάνουμε ένα ισοσκελές τρίγωνο, είναι γελοίο, τώρα μου ήρθε.

Με το γνωστό τρόπο, δεν πειράζει

(μετράει την AB , βρίσκει το μέσο Z)

εδώ, αυτό εδώ είναι το σημείο.

.....



M :

..... αυτό το ονομάζουμε Z .

Από το Z φέρνουμε μια κάθετη, ευθεία επάνω, μικρότερη από το να βγει έξω από το τρίγωνο, επειδή το θέλουμε εσωτερικό.

Σταματάμε σε κάποιο σημείο και το παίρνουμε Λ , ενώνουμε.

(για το μαθητή, η οδηγία αυτή έχει δυναμικό χαρακτήρα, οπότε την προσαρμόζει στο πρόβλημα)

Στο τελευταίο παράδειγμα αναδεικνύεται και η διαφορά στο δυναμικό χαρακτήρα των διαφόρων οδηγιών. Είδαμε πως στην οδηγία με το διαβήτη, όπου πρέπει να προβλέψει την ακτίνα που πρέπει να πάρει ώστε το σημείο τομής των τόξων Λ να βρίσκεται μέσα στο τρίγωνο, ο μαθητής αποτυγχάνει. Αντίθετα, στην οδηγία με την κάθετη στο μέσο, όπου η απειρία εμφανίζεται στο γεωμετρικό σχήμα, ο μαθητής έχει επιλογή.



4.2.3 Με αφορμή την αιτιολόγηση

Εξετάζοντας τα στοιχεία της έρευνας σχετικά με τη λειτουργία της αιτιολόγησης στην κατασκευή του γεωμετρικού σχήματος, έχουμε ως στόχο να κατανοήσουμε και ακολούθως να κατηγοριοποιήσουμε τη μεγάλη ποικιλία των διαδικασιών που εμφανίζονται. Αναλύουμε τη φύση των διαδικασιών και συγκεκριμένα τη μορφή παρουσίασης και τον τρόπο οργάνωσης των πληροφοριών (Duval, 1998, σ.45). Με βάση την ανάλυση, ομαδοποιούμε τις διάφορες διαδικασίες αιτιολόγησης σε τρεις διαφορετικές προσεγγίσεις: την οπτική, την ευρετική και τη θεωρητική.

Στα επόμενα αναφερόμαστε αναλυτικά στα είδη των προσεγγίσεων, περιγράφοντας τις διαδικασίες αιτιολόγησης που κατατάσσονται σε κάθε μία. Ιδιαίτερη έμφαση δίνουμε στην ανάλυση του ιδιαίτερου ρόλου κάθε λειτουργίας (:της νοερής απεικόνισης, της κατασκευής και της αιτιολόγησης) ανά προσέγγιση. Ως κύριους άξονες της σύγκρισης χρησιμοποιούμε τη μορφή κατανόησης του σχήματος και τον τρόπο αιτιολόγησης.

Οπτική προσέγγιση

Η οπτική προσέγγιση (visual approach) υιοθετείται από μαθητές με προ - μαθηματική συμπεριφορά, οι οποίοι δε γνωρίζουν και συνεπώς δε χρησιμοποιούν θεωρητικές προτάσεις. Ο συλλογισμός τους βασίζεται στις δύο λειτουργίες: τη νοερή απεικόνιση και την κατασκευή.

Κύριο μέλημα των μαθητών, που προσεγγίζουν τα προβλήματα οπτικά, είναι η μετατροπή σε σχήμα της νοερής εικόνας του ισοσκελούς. Η πιστή «μετάφραση» στο χαρτί της εσωτερικής τους αναπαράστασης συνιστά τη σωστή απάντηση στο πρόβλημα που αντιμετωπίζουν, ενώ καθοριστικός παράγοντας αναδεικνύεται η ακρίβεια της κατασκευής.

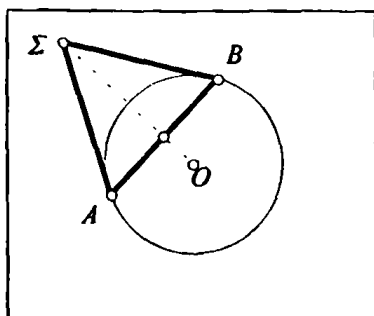
Η αιτιολόγηση γίνεται με έναν απλοϊκό τρόπο. Οι μαθητές δε βλέπουν το λόγο για τον οποίο θα πρέπει να αιτιολογήσουν κάτι με διαφορετικό τρόπο από αυτόν με τον οποίο οι ίδιοι το αντιλαμβάνονται, δηλαδή μέσα από το σχήμα. Έτσι οι συλλογισμοί τους δομούνται με κύριο άξονα τη σύγκριση νοερής εικόνας – γεωμετρικού σχήματος, ενώ η γλώσσα που χρησιμοποιούν είναι η καθημερινή γλώσσα, η οποία περιγράφει τα σχήματα και αντλεί τα επιχειρήματά της από αυτά. Έτσι συναντάμε χαρακτηρισμούς, όπως «φτιάξε μια τρίλιζα», προκειμένου για δύο ζεύγη τεμνόμενων ευθειών (Νεκτάριος, Φ3, 2)

Ο παραδοσιακός τρόπος διδασκαλίας αποθαρρύνει επιχειρήματα που στηρίζονται σε οπτικές προσεγγίσεις. Όμως κανείς δεν αρνείται πως ένα ευρύ πεδίο μαθηματικών προτάσεων μπορεί να γίνει κατανοητό και να αιτιολογηθεί οπτικά. Ο Davis (1993) υποστηρίζει πως «με φυσικό τρόπο» μερικές γεωμετρικές αλήθειες κατανοούνται οπτικά και χρησιμοποιεί γι' αυτές τις

προτάσεις τον όρο «οπτικό θεώρημα»²³. Καθώς οι οπτικοί συλλογισμοί μπορεί μερικές φορές να μας οδηγήσουν σε λάθος συμπεράσματα, το πρόβλημα είναι πως δεν έχουμε κριτήρια με βάση τα οποία, να διακρίνουμε τους δικαιολογημένους οπτικούς συλλογισμούς από τους αδικαιολόγητους (Vinner & Kopelman, 1998).

Στην παρούσα έρευνα διαπιστώνονται δύο μειονεκτήματα σχετικά με τις οπτικές προσεγγίσεις, που επηρεάζουν την ικανότητα των μαθητών για λύση προβλήματος:

1. Το πρώτο αφορά στο γεγονός ότι στο γεωμετρικό σχήμα όλες οι πληροφορίες εμφανίζονται με την ίδια βαρύτητα, δηλαδή δεν είναι φανερό (από το σχήμα) ποια είναι τα δεδομένα και ποια τα ζητούμενα του προβλήματος. Στο σχήμα φαίνεται πως όλες οι απεικονιζόμενες σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του ισχύουν. Ο μόνος τρόπος που μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει, για να ξεχωρίσει δεδομένα από ζητούμενα, είναι ο συμβολισμός (όπου υπάρχει) για ίσα στοιχεία, καθετότητα κλπ. Αυτό αποτελεί σοβαρό μειονέκτημα στην πορεία προς το θεωρητικό λόγο, όπου πρέπει σαφώς να καθορίζονται οι γνωστές από τις ζητούμενες πληροφορίες.
2. Το δεύτερο μειονέκτημα αφορά στο ότι, από το συγκεκριμένο σχήμα και μόνο, δεν είναι σαφές ποιες από τις σχέσεις έχουν γενική ισχύ. Δε φαίνεται δηλαδή αν η κάθε σχέση ισχύει γενικά, σε ολόκληρη την ομάδα καταστάσεων της οποίας το γεωμετρικό σχήμα είναι ένας αντιπρόσωπος, ή ειδικά στη συγκεκριμένη περίπτωση. Παραδείγματος χάριν, αν δύο τμήματα είναι ίσα γιατί προκύπτει από το πρόβλημα ή γιατί κατασκευάστηκαν έτσι τυχαία. Για να γίνει η διάκριση, πρέπει κανείς να έχει την ικανότητα να μετασχηματίζει δυναμικά το σχήμα στο μυαλό του, κρατώντας σταθερά τα στοιχεία που δίνει το πρόβλημα, ώστε να διαπιστώσει τα αναλλοίωτα. Η ικανότητα αυτή, όπως φαίνεται από την έρευνα, δεν είναι ανεπτυγμένη σε παιδιά 15 ετών. Έτσι παρουσιάζονται μαθητές που χρησιμοποιούν μια γενική πρόταση, χωρίς να το ξέρουν, περιορίζοντας έτσι τις επιλογές τους, αλλά και η αντίθετη περίπτωση, μαθητές που δίνουν γενική ισχύ σε μια ειδική κατασκευή.



σχήμα 4.42 Μια λύση του 4^{ου} προβλήματος της 3^{ης} φάσης

Για παράδειγμα, στο 4^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης, παρουσιάζεται επανειλημμένα το φαινόμενο τα παιδιά να λένε «θα φέρω μία χορδή που να έχει τη ΣΟ μεσοκάθετο», πιστεύοντας ότι οι ίδιοι την κατασκευάζουν με αυτή την ιδιότητα. Όταν ερωτώνται πώς φτιάχνουν τη χορδή δεν είναι ικανοί να απαντήσουν ή βασίζονται στις μετρήσεις, αφού δε γνωρίζουν ότι οποιαδήποτε χορδή κάθετη στην ΣΟ έχει αυτή την ιδιότητα.

Στο διάλογο που ακολουθεί φαίνεται μια ειδική περίπτωση. Μια

μαθήτρια έχει την ικανότητα να αντιλαμβάνεται ότι η κατασκευή της δεν έχει γενική ισχύ, κάτι το οποίο δε συμβαίνει γενικά σε μαθητές αυτής της ηλικίας (Παρασκευή, Φ3, 4^α).

(ο διάλογος αναφέρεται στο 4^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης)

Μ. Θα φτιάξω ένα τρίγωνο που τα Α, Β να βρίσκονται πάνω στη διάμετρο.

Ερ. Φέρνεις μία διάμετρο ΑΒ.... και τι κάνεις τώρα;

Μ. Τι κάνω τώρα; (ενώνει το Σ με τα Α, Β)

Ερ. Γιατί είναι ισοσκελές αυτό το τρίγωνο;

Μ. Είναι ισοσκελές.

Ερ. Γιατί είσαι σίγουρη; Τι σε κάνει και είσαι θετική;

Μ. δεν είμαι σίγουρη, μου πέρασε

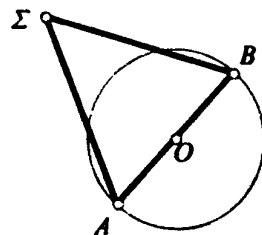
(το σβήνει)

Ερ. Γιατί;

Μ. Γιατί αν έφερνα αλλιώς τη διάμετρο θα έβγαине αλλιώς το τρίγωνο, δε θα έβγαине ισοσκελές.

Ερ. Μάλιστα

Μ. Το έφερα τυχαία.



Στην οπτική προσέγγιση, η κατανόηση του σχήματος έχει αντιληπτικό χαρακτήρα. Αυτό φαίνεται από τους συλλογισμούς που χρησιμοποιούν οι μαθητές για να αιτιολογήσουν τις κατασκευές τους, και οι οποίοι παίρνουν τις ακόλουθες μορφές:

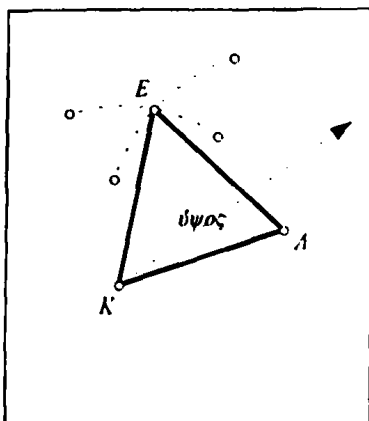
➤ οι μαθητές ισχυρίζονται ότι μια σχέση (καθετότητα, ισότητα κλπ) αληθεύει, επειδή «φαίνεται στο σχήμα»,

➤ οι μαθητές χρησιμοποιούν μετρήσεις για να επιβεβαιώσουν τους ισχυρισμούς τους. Οι μετρήσεις δεν αποτελούν απόδειξη, καθώς δεν ξεπερνούν ποτέ το στάδιο του «περίπου» που καθορίζουν οι κατασκευαστικές συνθήκες. Παρά το γεγονός αυτό, υπάρχουν μαθητές οι οποίοι τις χρησιμοποιούν ως αποδεικτικό στοιχείο, ακόμα και όταν οι μετρήσεις τους έχουν ατέλειες. Έτσι παρατηρείται το φαινόμενο μαθητές να υποδεικνύουν ως ίσα, τμήματα «περίπου ίσα».

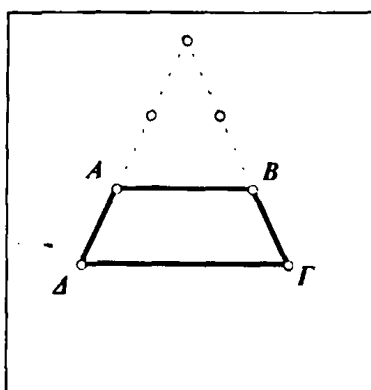
Η μέτρηση, ως μέθοδος αιτιολόγησης, είναι ιδιαίτερα ισχυρό εργαλείο για τα παιδιά, γεγονός που αποδεικνύεται από μια σειρά ενέργειές τους:

- οι μαθητές πολύ συχνά αισθάνονται την ανάγκη να χρησιμοποιήσουν τη μέτρηση για δική τους επιβεβαίωση, προτού επιχειρήσουν να διατυπώσουν κάποιο συλλογισμό,
- οι μαθητές επιμένουν στα αποτελέσματα της μέτρησης, ακόμα και αν βρεθούν υπό το φως αντίθετων στοιχείων. Συγκεκριμένα υπάρχουν μαθητές που, διαπιστώνοντας πως η λύση που έδωσαν είναι λάθος, μετράνε προσεκτικά τα στοιχεία του σχήματος (πχ ίσες πλευρές), βρίσκουν κάποια μικρή απόκλιση και αποδίδουν το λάθος στο γεγονός ότι δεν κατασκεύασαν με μεγάλη ακρίβεια το γεωμετρικό σχήμα, δηλαδή στη λανθασμένη απόδοση της νοητικής τους εικόνας και όχι στους ελλιπείς συλλογισμούς τους.





σχήμα 4.43 Κατασκευή
«περίπου» σωστή στο
2^ο πρόβλημα της 1^{ης} φάσης



σχήμα 4.44 Κατασκευή
«περίπου» σωστή στο
3^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης

Για παράδειγμα, στο 2^ο πρόβλημα της 1^{ης} φάσης, ένας μαθητής κατασκευάζει ισοσκελές με το διαβήτη χρησιμοποιώντας την ΚΛ ως βάση και μετά μετράει αν η διακεκομμένη γραμμή είναι πράγματι ύψος (σχήμα 4.43). Ενώ έχει πάρει μια τυχαία ακτίνα, αρκείται σε μετρήσεις «περίπου» και δηλώνει ότι είναι κάθετη, για να τελειώνει (Στέφανος Π, Φ2, 2^ο).

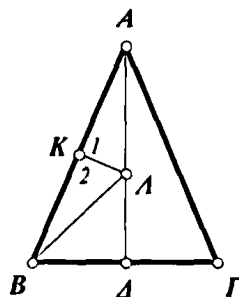
Επίσης, στο 3^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης, πολλοί μαθητές προεκτείνουν τις ίσες πλευρές του ισοσκελούς τραπεζίου κατά το διπλάσιό τους (σχήμα 4.44) και αν δεν σχηματιστεί τρίγωνο, όπως περιμένουν, το διορθώνουν λίγο και δίνουν δικαιολογίες όπως «δεν είχε γίνει αρκετά καλό πρινπρέπει να είχα λίγο πιο κάτω τῶ χάρακα» (Αγνή, Φ3, 3).

- τέλος, οι μαθητές εξακολουθούν να χρησιμοποιούν μετρήσεις, ακόμα και όταν περάσουν σε πιο θεωρητικούς συλλογισμούς. Μάλιστα, επανέρχονται στη μέτρηση, κάθε φορά που βρίσκουν δυσκολία με άλλες μεθόδους.

Για παράδειγμα, δύο μαθήτριες κάνοντας σύγκριση τριγώνων, χρησιμοποιούν ως στοιχείο δύο πλευρές, που τις μέτρησαν και διαπίστωσαν πως είναι ίσες (Στεφανία, Φ3, 3^ο), (Κλειώ, Φ3, 4^ο).

Στον επόμενο διάλογο παρακολουθούμε ένα μαθητή, ο οποίος έχει ευρετική προσέγγιση (έχει ξεπεράσει την οπτική), να χρησιμοποιεί μέτρηση για δική του επιβεβαίωση και κατόπιν να αποδεικνύει με σύγκριση (Κώστας Ρ, Φ2, 3^ο).

- Μ. Ένα σημείο ώστε αν φέρουμε τη διάμεσο στο ΑΒ να ισαπέχει από τα άκρα της, δηλαδή, αν φέρουμε εδώ τη διάμεσο, το σημείο που ενώνει την ... (καταλαβαίνει το λάθος στην ορολογία)
τη μεσοκάθετο..... έφερα τη μεσοκάθετο της ΑΒ
και αυτό (ΑΑ) είναι 2,1 και αν ενώσουμε θα πρέπει και αυτό (ΑΒ) να είναι....
(μετράει και διαπιστώνει πως είναι ίσα)
ναι είναι
- Ερ. Άρα φτιάξαμε ένα ισοσκελές;
Γιατί είναι ισοσκελές;
- Μ. Είναι μεσοκάθετος η ΚΛ κοινή, ΑΚ=ΚΒ αφού είναι μεσοκάθετος
και Κ1=Κ2.



➤ Άλλη, τέλος, διαδικασία, που χρησιμοποιούν οι μαθητές για αιτιολόγηση στην οπτική προσέγγιση, είναι η περιγραφή του τρόπου με τον οποίο κατασκεύασαν το γεωμετρικό σχήμα. Η περιγραφή γίνεται με φυσικό λόγο και περιλαμβάνει τα βήματα της κατασκευής, ώστε

κάποιος να μπορεί να την επαναλάβει. Συχνά μαθητές που αιτιολογούν με αυτό τον τρόπο χρησιμοποιούν επιχειρήματα όπως, «είναι ισοσκελές γιατί το κατασκεύασα να είναι» ή «τα 'φερα όλα εγώ» (Νεκτάριος, Φ3). Αρκετοί μαθητές προτιμούν να κατασκευάσουν μόνοι τους όλες τις σχέσεις ώστε να στηριχτούν στο επιχείρημα «ισχύει από κατασκευή» και να μη χρειαστεί να αποδείξουν κάτι μετά (Βαγγέλης, Φ1, 3), (Στεφανία, Φ2, 2).

Συμπεράσματα

Συνεπώς η αιτιολόγηση, στην περίπτωση της οπτικής προσέγγισης, χαρακτηρίζεται από την κυριαρχία της νοερής εικόνας και του σχήματος «σαν σύνολο», χωρίς τη χρήση ιδιοτήτων. Κάποιες παρανοήσεις οφείλονται στο ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να κάνουν τη διάκριση ανάμεσα στη νοερή απεικόνιση και τις υποθέσεις. Συγκεκριμένα όσες σχέσεις «διαβάζουν» στο γεωμετρικό σχήμα τους θεωρούν πως ισχύουν²⁴. Η βασική δυσκολία των μαθητών που υιοθετούν την οπτική προσέγγιση είναι ότι, ενώ χρησιμοποιούν δύο διαφορετικά, ετερογενή, συστήματα αναπαράστασης, υποτάσσουν το ένα στο άλλο, δηλαδή υποτάσσουν τη νοερή απεικόνιση σε διαδικασίες συμπερασμού ή υπολογισμών. Έτσι υποβαθμίζεται η νοερή απεικόνιση, αφού ένα γενικό σύμπλεγμα σχέσεων ταυτίζεται με κάποιο (πιθανά, λανθασμένο) στιγμιότυπο του, δηλαδή με μια συγκεκριμένη αναπαράστασή του. Επίσης ο συλλογισμός είναι άκυρος, αφού αντί να βασίζεται σε θεωρητικές προτάσεις, βασίζεται σε στοιχεία που προκύπτουν από το σχήμα. Τα ανωτέρω συμφωνούν με τις απόψεις του Duval (2002) πως «η αναγνώριση του γεωμετρικού σχήματος είναι ανεξάρτητη από το μέγεθος του σχήματος και από το μέτρο της περιμέτρου του.....όταν οι υποθέσεις περιλαμβάνουν αριθμούς ως μέτρα πλευρών ή τμημάτων, εξουδετερώνεται η λειτουργική κατανόηση (της νοερής απεικόνισης) και το σχήμα έχει μόνο εικονογραφική ή υποστηρικτική λειτουργία» (σελ. 12). Αυτό ακριβώς συμβαίνει και στην οπτική προσέγγιση, το γεωμετρικό σχήμα δεν είναι μια σχηματική έννοια, αλλά μια συγκεκριμένη εικόνα.

Ευρετική προσέγγιση

Ως εκ της θέσης της, να βρίσκεται ανάμεσα σε δύο ακραίες καταστάσεις την οπτική και την θεωρητική προσέγγιση, η ευρετική προσέγγιση περιγράφεται και οριοθετείται σε μεγάλο βαθμό μέσα από την επισήμανση των διαφορών της με αυτές. Οι άξονες που χρησιμοποιούνται για σύγκριση είναι η μορφή κατανόησης του σχήματος και ο τρόπος με τον οποίο γίνεται ο συλλογισμός. Δίνεται επίσης έμφαση στην αποτύπωση της εξέλιξης που εμφανίζεται φυσιολογικά σε μια μεταβατική κατάσταση, όπως αυτή.

Στην ευρετική προσέγγιση ο συλλογισμός συνεχίζει να βασίζεται στη νοερή απεικόνιση και στην κατασκευή. Αποκτά όμως, συνθετότερο χαρακτήρα, ενώ παράλληλα αρχίζει να αναπτύσσεται μια μορφή θεωρητικού λόγου.

Η κατανόηση του σχήματος

Η αιτιολόγηση, στην ευρετική προσέγγιση, εξακολουθεί να αντλεί επιχειρήματα από όσα βλέπει ή κατασκευάζει ο μαθητής, αλλά με μια διαφορετική ποιότητα. Συγκεκριμένα σχετικά με την κατανόηση του σχήματος, η ευρετική προσέγγιση υποδηλώνεται από τη δυνατότητα του μαθητή να αναδιοργανώνει οπτικά το σχήμα, έτσι ώστε να βλέπει άλλες φόρμες, τις οποίες δεν είχε δει με την πρώτη ματιά. Ο Duval (1998) ονομάζει τη δυνατότητα αυτή σχηματική αλλαγή (figural change) ή λειτουργική κατανόηση (σ.44) και είναι σύνθετη διαδικασία, η οποία συχνά συμβαίνει εντελώς ασυνείδητα. Ο μαθητής, κατά τον Duval (2002), «ξεκινώντας από το δοσμένο σχήμα, μπορεί να αναπτύξει αρκετές σειρές σχημάτων. Μία από αυτές τις σειρές θα οδηγήσει στη σύλληψη της λύσης. Εξωτερική μαρτυρία, από την οποία αντιλαμβανόμαστε την ύπαρξη λειτουργικής κατανόησης, είναι η ικανότητα του μαθητή να σκέφτεται να σχεδιάσει μερικά ακόμα στοιχεία στο δοθέν σχήμα» (σελ. 12).

Η κατανόηση του σχήματος γίνεται με διαφορετικό τρόπο στην κάθε προσέγγιση (οπτική, ευρετική, θεωρητική). Συγκρίνοντας διαπιστώνουμε ότι η λειτουργική κατανόηση (στην ευρετική προσέγγιση) διαφέρει από την αντιληπτική κατανόηση (στην οπτική προσέγγιση), παρότι αναφέρονται στο ίδιο εικονικό σύστημα αναπαράστασης. Επίσης, η λειτουργική κατανόηση (στην ευρετική προσέγγιση) διαφέρει από τη διαλεκτική κατανόηση (στη μαθηματική προσέγγιση), αφού ανήκουν σε διαφορετικά συστήματα αναπαράστασης, στο εικονικό η πρώτη και στη γλώσσα η δεύτερη.

Η διαφορά αντιληπτικής – λειτουργικής έγκειται στον τρόπο θέασης του σχήματος. Η αντιληπτική κατανόηση εξερευνά το σχήμα μέσα από κινήσεις των ματιών και περιορίζεται στα φυσικά χαρακτηριστικά του συγκεκριμένου σχήματος. Αντίθετα η λειτουργική κατανόηση περιλαμβάνει συγκεκριμένους νοητικούς χειρισμούς (όπως, πχ, το χωρισμό του σχήματος σε μέρη που κατόπιν ανασυντίθενται κλπ) που μετασχηματίζουν ή τροποποιούν το δοθέν σχήμα, διατηρώντας ταυτόχρονα τις ιδιότητές του. Η λειτουργική διαφέρει προφανώς και από τη διαλεκτική κατανόηση, δηλαδή από λεκτικές διαδικασίες που καθορίζουν επακριβώς κάποιες ιδιότητες του σχήματος (Πίνακας 4.13).



Πίνακας 4.14
Σύγκριση των τρόπων κατανόησης του σχήματος στις διαφορετικές προσεγγίσεις
(διαδικασίες αιτιολόγησης)

Προσέγγιση	οπτική	ευρετική	θεωρητική
κατανόηση του σχήματος	<i>Αντιληπτική κατανόηση (εξερευνά το σχήμα μέσα από κινήσεις των ματιών και περιορίζεται στα φυσικά χαρακτηριστικά του)</i>	<i>Λειτουργική κατανόηση (περιλαμβάνει συγκεκριμένους νοητικούς χειρισμούς που μετασχηματίζουν ή τροποποιούν το δοθέν σχήμα, διατηρώντας ταυτόχρονα τις ιδιότητές του)</i>	<i>Διαλεκτική κατανόηση (αφορά σε λεκτικές διαδικασίες που καθορίζουν επακριβώς κάποιες ιδιότητες του σχήματος)</i>

Η ευρετική προσέγγιση υποδηλώνεται και από τη χρήση οδηγίων κατασκευής. Αν για να φτιαχτεί ένα γεωμετρικό σχήμα χρησιμοποιούνται γεωμετρικά όργανα και κατασκευαστικές οδηγίες, η διαδικασία η ίδια φαίνεται πως εγγυάται στους μαθητές την ορθότητα της λύσης. Συνεπώς η επίκλησή της συνιστά αιτιολόγηση. Εδώ έχει γίνει ήδη ένα σοβαρό βήμα εξέλιξης, σε σχέση με τους τρόπους αιτιολόγησης της οπτικής προσέγγισης. Οι επεξηγήσεις δε βασίζονται σε όσα βλέπει ή σχεδιάζει ο ίδιος ο μαθητής, αλλά σε όσα περιέχονται ενσωματωμένα σε μια δοσμένη διαδικασία γεωμετρικής κατασκευής. Η υποκειμενική άποψη ως προς την εγκυρότητα της κατασκευής (της οπτικής προσέγγισης) αντικαθίσταται από την ισχύ και το ρόλο των γεωμετρικών εργαλείων και οδηγιών, τα οποία, ανάλογα με τις δυνατότητες ή τους περιορισμούς τους, συχνά επηρεάζουν τη διαδικασία και το αποτέλεσμα της κατασκευής²⁵. Με αυτό τον τρόπο, «νομιμοποιούνται» οι κατασκευές, με επακόλουθο να νομιμοποιούνται και οι λύσεις του μαθητή.

Ο ατελής θεωρητικός λόγος

Σε αντίθεση με την οπτική προσέγγιση, όπου η αιτιολόγηση βασίζεται αποκλειστικά στην εικόνα, οι μαθητές που υιοθετούν την ευρετική προσέγγιση προσπαθούν να ενισχύσουν το συλλογισμό τους και με κάποια επιχειρήματα θεωρητικής φύσης. Έτσι, ο συλλογισμός αποκτά σταδιακά ένα θεωρητικό χαρακτήρα και καθώς εμπεριέχει ακόμα ελλιπή ή λανθασμένα στοιχεία, χαρακτηρίζεται ατελής θεωρητικός λόγος. Στην ευρετική προσέγγιση θα λέγαμε ότι δημιουργείται μία γέφυρα ανάμεσα στη συγκεκριμένη αντιληπτική και στην αφηρημένη σκέψη. Χαρακτηριστικό της ευρετικής προσέγγισης είναι ότι ο μαθητής μπορεί να πείθεται ο ίδιος με διαφορετικά επιχειρήματα, από αυτά που χρησιμοποιεί για τους άλλους. Συγκεκριμένα, όταν διακρίνει κάποια σχέση ανάμεσα στα στοιχεία του γεωμετρικού σχήματος, ο ίδιος μπορεί να πείθεται για την ισχύ της με επιχειρήματα της οπτικής προσέγγισης (π.χ φαίνεται στο σχήμα ή μέτρηση), όμως αισθάνεται την ανάγκη να την αιτιολογήσει πιο θεωρητικά στους άλλους (στο

δάσκαλο). Έτσι κατασκευάζει κάποια αιτιολόγηση ή ψευδό – αιτιολόγηση, ώστε να την τεκμηριώσει.

Ο ατελής θεωρητικός λόγος του μαθητή εμφανίζει δύο ειδών αδυναμίες

(α) ως προς την πληρότητα και

(β) ως προς την οργάνωσή των πληροφοριών.

Μπορεί η απόκτηση και η οργάνωση των πληροφοριών να εξελίσσονται παράλληλα στο νου του ανθρώπου, όμως η οργάνωση καθυστερεί περισσότερο. Ιδιαίτερα στη Γεωμετρία παρουσιάζονται δυσκολίες στη δημιουργία συνδέσεων ανάμεσα στις πληροφορίες εξ αιτίας του ότι οι συνδέσεις πρέπει να έχουν συγκεκριμένη κατεύθυνση. Αυτό αποτελεί προϋπόθεση για τη γεωμετρική λειτουργία, επειδή τα βήματα ενός θεωρητικού συλλογισμού έχουν πάντα μία κατεύθυνση.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα μιας τέτοιας σύνδεσης είναι το θεώρημα, το οποίο ο Duval (1998) το χαρακτηρίζει μικροεπίπεδο. Στο θεώρημα διακρίνονται δύο μέρη: η συνθήκη που πρέπει να επαληθευτεί και το συμπέρασμα που θα οδηγηθούμε²⁶. Η κίνηση είναι πάντα από τη συνθήκη (γνωστό) προς το συμπέρασμα (ζητούμενο). Η σύνδεση των δύο, αλλά με αντίθετη κατεύθυνση, οδηγεί σε λάθη και είναι δείκτης ατελούς οργάνωσης.

Σε μία πιο σύνθετη μορφή οργάνωσης, τοπικό επίπεδο σύμφωνα με τον Duval, τρεις προτάσεις οργανώνονται σύμφωνα με το status τους: υπόθεση, ορισμός ή θεώρημα και τοπικό συμπέρασμα. Ο συνδυασμός των δύο πρώτων θα οδηγήσει στην τρίτη πρόταση. Τέλος, σε συνολικό επίπεδο, τα βήματα συνδέονται έτσι, ώστε το συμπέρασμα του ενός να γίνεται δεδομένο για το επόμενο (Duval, 1998, σ.47).

Στον πίνακα 4.15 που ακολουθεί αναπαριστούνται συμβολικά τα διάφορα επίπεδα οργάνωσης των πληροφοριών. Οι προτάσεις που υπάρχουν μπροστά από τα βέλη παριστάνουν τις υποθέσεις, ενώ αυτές που βρίσκονται πίσω παριστάνουν το συμπέρασμα.

Πίνακας 4.15
Επίπεδα οργάνωσης των πληροφοριών

επίπεδο οργάνωσης	μικροεπίπεδο	τοπικό επίπεδο	συνολικό επίπεδο
τρόπος σύνδεσης των προτάσεων	$A \longrightarrow B$	$A \text{ και } B \longrightarrow \Gamma$	$A_0 \text{ και } B_1 \longrightarrow A_1$ $A_1 \text{ και } B_2 \longrightarrow A_2$ κλπ

Η πληρότητα των πληροφοριών

Οι ελλείψεις που μπορεί να υπάρχουν στην πληρότητα των πληροφοριών που χρησιμοποιεί ο μαθητής τον οδηγούν σε ατελή θεωρητικό λόγο. Σύμφωνα με τα στοιχεία οι ελλείψεις οφείλονται συνήθως σε τρεις αιτίες: (α) στο ότι ο μαθητής δε χρησιμοποιεί τις υποθέσεις που

του δίνει το πρόβλημα. (β) στο ότι δε γνωρίζει ακόμα καλά την ορολογία και (γ) σε αυθαίρετες γενικεύσεις που κάνει. επειδή δε θυμάται καλά τις θεωρητικές προτάσεις. Στα επόμενα, εξετάζουμε την κάθε αιτία ξεχωριστά.

(α) λάθος υποθέσεις

Για τη σωστή οργάνωση των πληροφοριών είναι ουσιώδες να διακρίνει ο μαθητής τις υποθέσεις του προβλήματος και να ξεκινά το συλλογισμό του από αυτές. Στην ευρετική προσέγγιση παρατηρείται συχνά οι μαθητές να παίρνουν ως υπόθεση, όχι αυτή του προβλήματος, αλλά σχέσεις που «φαίνονται στο σχήμα». Ένα τέτοιο παράδειγμα εικονογραφεί ο επόμενος διάλογος (Στέφανος, Φ3, 1^α):

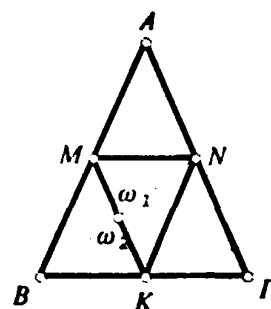
M. Το $BMNK$ είναι παραλληλόγραμμο

Ερ. Γιατί;

M. Να σας το αποδείξω θέλετε;

(να φέρω) τη διαγώνιο τη BN στο ένα παραλληλόγραμμο και ξέρουμε... από τις ιδιότητες του τετραπλεύρου, ότι οι διαγώνιες διχοτομούνται και έτσι μπορώ να δω ότι είναι παραλληλόγραμμο

(από άγνωστη, οπτικά αναγνωρίσιμη σχέση: διαγώνιες διχοτομούνται οδηγείται στο συμπέρασμα: παραλληλόγραμμο)



Ερ. Ναι, αλλά πού ξέρεις ότι αυτές διχοτομούνται; Το ξέρεις;

M. Ναι. Εφόσον είναι σαν κατακορυφήν οι γωνίες ($\omega_1 = \omega_2$) οπότε $BK = MN$ εφόσον είναι κατακορυφήν, και το ίδιο ισχύει για τις άλλες δύο πλευρές

(αφήνει μετέωρο τον πρώτο συλλογισμό και διατυπώνει άλλο, επίσης ατελή συλλογισμό που ξεκινά με υπόθεση τις κατακορυφήν γωνίες, τις οποίες βλέπει στο σχήμα).

Μπορούμε να διακρίνουμε την απουσία κατεύθυνσης στο συλλογισμό. Ο μαθητής δίνει επιχειρήματα που δε συνδέονται μεταξύ τους, χρησιμοποιώντας ως υπόθεση κάθε φορά μια σχέση που βλέπει στο σχήμα και όχι τα δεδομένα του προβλήματος (M,N μέσα των πλευρών του τριγώνου).

(β) ασάφεια γεωμετρικών όρων

Οι μαθητές, στην ευρετική προσέγγιση, δε γνωρίζουν το ακριβές περιεχόμενο όλων των όρων που περιέχονται στις προτάσεις που χρησιμοποιούν. Η ασάφεια στους όρους συνδέεται άμεσα με το θέμα της μετατροπής από ένα σύστημα αναπαράστασης σε άλλο, καθώς και με τα προβλήματα που δημιουργούνται λόγω της μη ταυτότητας των δύο διαφορετικών αναπαραστάσεων του ίδιου αντικειμένου.

Μια περίπτωση ανακριβούς μετατροπής από λεκτική σε σχηματική αναπαράσταση εικονογραφείται με το εξής παράδειγμα. Κάποιοι μαθητές αναφέρονται στην ιδιότητα των σημείων της μεσοκαθέτου, όμως στο μυαλό τους η μεσοκάθετος ταυτίζεται με τη διάμεσο,

γεγονός που αποκαλύπτεται μόνο όταν την κατασκευάζουν. Έτσι ο θεωρητικός τους λόγος δημιουργεί μία ψευδό – πρόταση, την ψευδό - p :

p :	κάθε σημείο της <u>μεσοκαθέτου</u> ισαπέχει από τα άκρα του τμήματος, γίνεται ασυνείδητα
ψευδό- p :	κάθε σημείο της <u>διαμέσου</u> ισαπέχει από τα άκρα του τμήματος

Η ασάφεια στους όρους δημιουργεί μεγάλα προβλήματα στην επικοινωνία ανάμεσα σε δάσκαλο και μαθητή, καθώς ο μαθητής μπορεί να χρησιμοποιεί λεκτικά τη σωστή ορολογία (γεγονός φανερό), δίχως να τη συνδέει με την, αντίστοιχα σωστή, εικόνα (γεγονός κρυφό, που συμβαίνει στο νου του) ή αντίστροφα. Ο μόνος τρόπος που επιτρέπει να καταλάβουμε την αναντιστοιχία στο μυαλό του μαθητή είναι να του ζητήσουμε να κατασκευάσει το σχήμα.

Μια τέτοια ασάφεια έχει ως αποτέλεσμα, στο επόμενο παράδειγμα, να δίνονται διαφορετικές ερμηνείες στο διάλογο, από το μαθητή και την ερευνήτρια, ανάλογα με τις γνώσεις τους. Συγκεκριμένα η πρόταση « p : το ύψος χωρίζει τη γωνία σε δύο ίσες γωνίες», ερμηνεύεται από την ερευνήτρια ως η βασική ιδιότητα, ενώ ο μαθητής, απλά, δε γνωρίζει τι σημαίνει ύψος (Στέφανος, Φ1, 2^α).

(απαντώντας στο ερώτημα 2^α, ο μαθητής έχει κατασκευάσει ένα ισοσκελές τρίγωνο $ΚΕΛ$, φέρνοντας μία πλευρά $ΚΕ=ΚΛ$)

Ερ. Είναι το τρίγωνο που μας ζηταγε;

Μ. Ναι

Ερ. Γιατί;

Μ. Γιατί έχει και το ύψος (ψιθυρίζει, όχι το ύψος, ναι), γιατί το ισοσκελές έχει δύο πλευρές ίσες

Ερ. Ωραία, έχει δύο πλευρές ίσες, σου ζητούσε και τίποτα άλλο;

Μ. Όχι (διαβάζει την εκφώνηση)

Ερ. Εκεί όχι, στο σχήμα που έγραφε ύψος, τι ήθελε να πει;

Μ. Είναι το ύψος που έρχεται από την κορυφή K και χωρίζει αυτές οι δύο γωνίες πρέπει να είναι ίσες ($K1 = K2$)

Ερ. Ωραία, είναι;

Μ. Μμμμ, όχι όπως φαίνονται (διορθώνει το σχήμα φτιάχνοντας εκατέρωθεν της διακεκομμένης γραμμής δύο ίσες γωνίες $K1 = K2$). Να γράψω τώρα ότι έχουμε και το ύψος;

Ερ. Αυτή η διακεκομμένη γραμμή είναι το ύψος;

Μ. Ναι, γιατί ξεκινάει από τη γωνία K και τη χωρίζει σε δύο ίσα μέρη

Ερ. Ναι

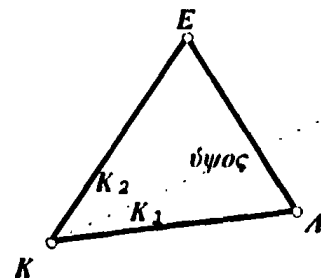
Μ. ... σε δύο ίσες γωνίες

Ερ. Τι σημαίνει ύψος, θυμάσαι;

Μ. Δε σημαίνει να χωρίζει τη γωνία σε δύο ίσες γωνίες;

Ερ. Αυτό νόμιζες;

Μ. Ναι



(γ) ψευδό - προτάσεις

Μία κατάσταση που συναντάμε συχνά στην έρευνα είναι οι μαθητές να διαστρεβλώνουν προτάσεις που έχουν διδαχτεί, γιατί τις γενικεύουν, οπότε η χρήση τους οδηγεί σε λανθασμένα συμπεράσματα. Συχνά, αντί μιας πρότασης p , αναφέρουν και χρησιμοποιούν την πρόταση ψευδο- p , που είναι γενίκευση της p . για παράδειγμα αν:

p :	βασική ιδιότητα (:η διάμεσος AD του ισοσκελούς τριγώνου $ABΓ$ είναι, επίσης, ύψος και διχοτόμος του)
ψευδό- p :	κάθε διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου $ABΓ$ είναι ύψος / διχοτόμος

Σε μία τέτοια περίπτωση, ένας μαθητής αντιλαμβάνεται την γενίκευση που κάνει, μόνο μέσα από τον διάλογο (Κώστας Ρ, Φ2, 3^B).

Έχει φέρει τις τρεις διαμέσους (BZ , $ΓΕ$, $ΑΔ$) του ισοσκελούς τριγώνου $ABΓ$ και ισχυρίζεται:

- M . αφού οι BZ , $ΓΕ$ είναι διάμεσοι, είναι και διχοτόμοι των γωνιών
 $Ερ$. Είναι διχοτόμοι;
 M . Στα ισοσκελή τρίγωνα..... η διάμεσος είναι και ύψος και διχοτόμος.
 $Ερ$. Και οι τρεις διάμεσοι;
 M . Όχι, αυτή που έρχεται στη βάση, ναι.

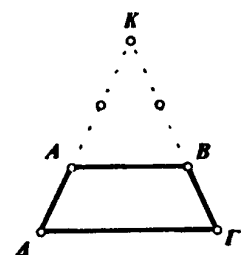
Ακόμα αν

q :	Στο ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$, η μεσοκάθετος της βάσης του $BΓ$ περνά από την απέναντι κορυφή A
ψευδό - q :	η μεσοκάθετος κάθε πλευράς περνά από την απέναντι κορυφή.

Ένα παράδειγμα ψευδό πρότασης χρησιμοποιεί και η επόμενη μαθήτρια, για να αιτιολογήσει πως το τρίγωνο που κατασκεύασε είναι ισοσκελές (Αγνή, Φ3, 3^A).

(η μαθήτρια έχει προεκτείνει τις ίσες πλευρές $ΑΔ$, $BΓ$ του ισοσκελούς τραπέζιου κατά το διπλάσιό τους και έχει σχηματίσει ένα τρίγωνο $KΓΔ$)

- M . Το $BΓ$ είναι το $1/3$ της $KΓ$, οπότε αν πάρουμε το θεώρημα που λέει ότι αν ένα σημείο στη μια πλευρά είναι στη μέση και το ενώσουμε με το αντίστοιχο σημείο της άλλης πλευράς, θα είναι $//$ στη βάση (θεώρημα)
 Οπότε αν πάρουμε αυτό το σημείο πιο πάνω ή πιο κάτω και πάρουμε ένα αντίστοιχο στην άλλη πλευρά θα είναι το ίδιο (ψευδοθεώρημα).



Η οργάνωση των πληροφοριών

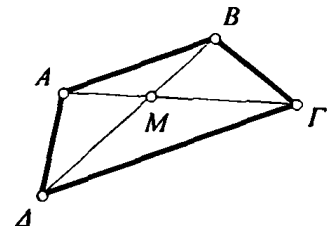
Σύμφωνα με τα στοιχεία της έρευνας, μια ελλιπής οργάνωση των πληροφοριών με τη σειρά της, δημιουργεί δυσλειτουργίες στο θεωρητικό συλλογισμό. Ο μαθητής θέλει και προσπαθεί να χρησιμοποιήσει τις λογικές δομές, που διδάσκεται ή βλέπει στο βιβλίο, αλλά δεν είναι ακόμα ικανός να εγκαταστήσει ο ίδιος κάποια λογική σχέση ανάμεσα στις προτάσεις που χρησιμοποιεί. Επομένως ο λόγος του «μοιάζει θεωρητικός», όμως είναι λανθασμένος. Από τα πρωτόκολλα των μαθητών αναδεικνύονται τρεις αιτίες που δημιουργούν προβλήματα στην οργάνωση: (α) η σύνδεση των προτάσεων, (β) η κατεύθυνση της σύνδεσης και (γ) οι μηχανικές συνδέσεις.

(α) η σύνδεση των πληροφοριών

Η συνηθέστερη λογική δομή που συναντάται στην αιτιολόγηση της ευρετικής προσέγγισης είναι η συνεπαγωγή, δηλαδή, η δομή: «αντότε», δίχως οι δύο προτάσεις να έχουν αναγκαστικά λογική σύνδεση. Η δομή χρησιμοποιείται και σε περιπτώσεις δύο άσχετων προτάσεων, όπου τις περισσότερες φορές η πρώτη πρόταση δηλώνει κάτι που ισχύει (από υπόθεση ή είναι προφανές), ώστε να δίνει μια επίφαση αλήθειας, ενώ η δεύτερη είναι το ζητούμενο συμπέρασμα.

Στο διάλογο που ακολουθεί ο μαθητής εργάζεται στο 3^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης, διορθώνει αρχικά μια ασάφεια στην ορολογία και κατόπιν καταλήγει σε μια «συνεπαγωγή» δίχως λογική (Νεκτάριος, Φ3, 3^B).

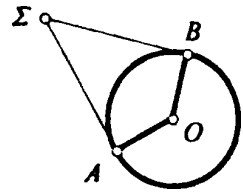
- Μ. Βγήκε ωραίο, είναι ισοσκελές (ΜΔΓ)*
Ερ. Σου φαίνεται ισοσκελές;
Μ. Ναι, έτσι φαίνεται, δεν είμαι σίγουρος, αφού είναι εδώ πέρα.
Ξέρουμε ότι σε ένα ισοσκελές τραπέζιο οι διαγώνιοι του διχοτομούνται.
Και είναι ίσες.
Ερ. Ναι
Μ. Τι, δεν είναι έτσι;
Ερ. Διχοτομούνται τι σημαίνει;
Μ. Ενώνονται (ασάφεια)
Ερ. Κόβει η μια την άλλη;
Μ. Ναι
Ερ. Αυτό δεν είναι διχοτομούνται, διχοτομούνται σημαίνει να περνά η μία από τη μέση της άλλης. Αυτές εδώ τέμνονται.
Μ. Ναι τέμνονται. Άρα αφού τέμνονται είναι ίσες.



Στο επόμενο παράδειγμα, ο ίδιος μαθητής εργάζεται στο 4^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης και θέλει να δείξει ότι το τρίγωνο ΣΑΒ είναι ισοσκελές, οπότε κάνει τη σκέψη «αφού $OA=OB$ άρα και $ΣΑ=ΣΒ$ » (Νεκτάριος, Φ3, 3^A).



- M.*δηλαδή το σημείο O δεν το θέλουμε;
Ένας τρόπος είναι να το κάνουμε –πολύ απλό– με εφαπτόμενα.
Το κάνουμε από το Σ εφαπτόμενες στον κύκλο και βγαίνει ισοσκελές ΣAB .

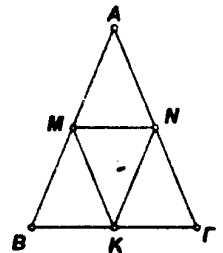


Ερ. Είναι ισοσκελές;

- M.* Ναι, γιατί ο κύκλος έχει.. όλα τα σημεία απέχουν ίσο από το O , αν από το Σ φέρουμε ένα σημείο προς τον κύκλο (A) και από την άλλη μεριά πάλι προς τον κύκλο (B), εφόσον το O ... όλο είναι κύκλος, όλα γύρω - γύρω είναι ίσα, από το O απέχουν ίδια, το O απέχει από το A και το B ίδιο.

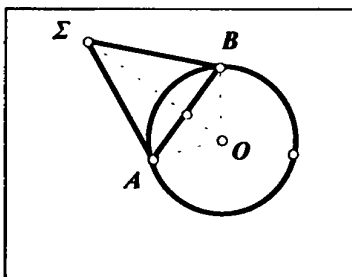
Χαρακτηριστικό του ατελούς θεωρητικού λόγου είναι επίσης να παραθέτει ο μαθητής ως υπόθεση μερικές σχέσεις, κάποιες από τις οποίες «φαίνονται» στο σχήμα ή τις δίνει το πρόβλημα, δίχως καμία σύνδεση μεταξύ τους και να καταλήγει στο αιτούμενο. Μια τέτοια περίπτωση φαίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί. (Νεκτάριος, Φ3, 1^Α)

- M.* Αφού είναι το M και το N μέσο και το K πάλι μέσο είναι απέναντι, μπορούμε να πούμε ότι είναι ίσα το MB με το NK είναι παράλληλες.
Άρα να ένα παραλληλόγραμμο $MNBK$
(συλλογισμός: M, N, K μέσα άρα $MNBK$ παραλληλόγραμμο)
Ερ. Τώρα, πώς ξέρουμε ότι είναι οι απέναντι πλευρές παράλληλες;
M. Ότι είναι παράλληλες;



- (1)* Από το σχήμα και ότι το M και το N είναι τα μέσα,
(2) εδώ έχουμε ένα άλλο σημείο το K το οποίο είναι πάλι μέσο,
(3) εδώ έχουμε μια άλλη γωνία που είναι B
(4) και επειδή είναι το τρίγωνο ισοσκελές
(5) και μπορούμε να πούμε ότι είναι και ισόπλευρο...
Άρα είναι παραλληλόγραμμο
(συλλογισμός: από 1,2,3,4,5 άρα παραλληλόγραμμο)
(* η αρίθμηση είναι δική μας)

Επίσης, (Γιάννης, Φ3, 2^Β).



σχήμα 4.45 Μια άλλη λύση του 4^{ου} προβλήματος της 3^{ης} φάσης

Ένας μαθητής, ο οποίος έχει την ικανότητα να διατυπώσει τις δυσκολίες που βρίσκει στην οργάνωση των πληροφοριών (που δίνονται από το 4^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης), λει «προσπαθώ τώρα να συνδυάσω πολλά στοιχεία. Ότι ΣO είναι κάθετη στην AB , ότι $AO=OB$, ότι είναι η OA ακτίνα του κύκλου. Προσπαθώ να σκεφτώ πώς να συνδυάσω (ώστε να δείξω) ότι το Σ ισαπέχει από το A και B » (Κώστας, Φ3, 4^Α).

Μέχρι στιγμής σχολιάσαμε αδυναμίες στην εγκατάσταση συνδέσεων ανάμεσα σε πληροφορίες που είτε προκύπτουν από το σχήμα είτε περιέχονται στο πρόβλημα. Η οργάνωση των πληροφοριών, όμως, μπορεί να υστερεί και στην περίπτωση που ο μαθητής θέλει να χρησιμοποιήσει κάποια (θεωρητική) πρόταση, αλλά δεν είναι ικανός να το κάνει. Συγκεκριμένα είναι δυνατόν ο μαθητής να διακρίνει π.χ. πως ένα θεώρημα του είναι χρήσιμο, όμως στα

πλαίσια της συγκεκριμένης αιτιολόγησης²⁷, δεν μπορεί να ενεργοποιήσει τη σύνδεση ανάμεσα σε υπόθεση και συμπέρασμα.. Μιλάμε τότε για **ανενεργές προτάσεις**.

Η συγκεκριμένη αδυναμία μπορεί να δημιουργήσει λανθασμένες εντυπώσεις στο δάσκαλο, σχετικά με τις γνώσεις του μαθητή του, στην περίπτωση, για παράδειγμα, που τον ακούει να αναφέρεται σε κάποιο θεώρημα. Η απλή αναφορά μιας πρότασης δε συνεπάγεται αυτόματα και τη δυνατότητα χρήσης της, ενώ η κατανόηση πιστοποιείται μόνο μετά από τη χρήση των προτάσεων.

Το ΣΙΤ, στην πλήρη εξέλιξή του, ενσωματώνει δύο θεμελιώδη θεωρητικά εργαλεία, τη «βασική ιδιότητα» και την «ιδιότητα των σημείων της μεσοκαθέτου». Σύμφωνα με τα στοιχεία, και οι δύο αυτές προτάσεις εμφανίζονται, συχνά, **ανενεργές** στους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα. Δηλαδή, ενώ οι μαθητές αναφέρονται σε κάποια από αυτές τις δύο προτάσεις και τη χρησιμοποιούν για την κατασκευή, δεν μπορούν να τη χρησιμοποιήσουν ως αποδεικτικό στοιχείο κατά την αιτιολόγηση (4.1.3).

Για παράδειγμα, ενώ οι μαθητές δηλώνουν πως θα κατασκευάσουν ισοσκελές με τη βοήθεια της μεσοκαθέτου, «γιατί έτσι θα πάρω δύο ίσα τμήματα», όταν πρέπει να αιτιολογήσουν ότι το τρίγωνο που έφτιαξαν είναι ισοσκελές, ξεχνούν εντελώς την ιδιότητα και συγκρίνουν τρίγωνα. Το ίδιο συμβαίνει συχνά και με τη βασική ιδιότητα. Οι μαθητές μπορεί, πχ, να διαπιστώνουν ότι σε κάποιο τρίγωνο ένα τμήμα είναι ύψος / διάμεσος / διχοτόμος, αλλά χρειάζεται να συγκρίνουν τρίγωνα για να δείξουν ότι πρόκειται για ισοσκελές. Δεν ενεργοποιούν δηλαδή την εσωτερική σύνδεση της βασικής ιδιότητας παρόλο που βλέπουν πως ισχύει η συνθήκη της.

Βέβαια υπάρχουν μαθητές που είναι ικανοί να ενεργοποιήσουν τις συνδέσεις ανάμεσα σε υποθέσεις και συμπεράσματα των προτάσεων που χρησιμοποιούν. Τα στοιχεία δείχνουν πως ιδιαίτερη σημασία στην ενεργοποίηση μιας πρότασης έχει η απόδοση ρόλων. Μέσα από τους ρόλους ταυτίζεται η συγκεκριμένη κατάσταση που αντιμετωπίζει ο μαθητής με τη συνθήκη κάποιου θεωρήματος και εξάγεται το συμπέρασμα.

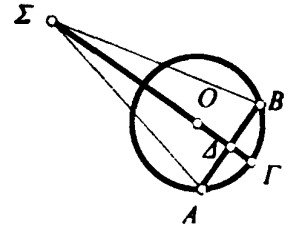
Ο επόμενος διάλογος είναι χαρακτηριστικός. Η μαθήτρια προσπαθεί, αποδίδοντας ρόλους, να ταιριάξει την κατασκευή της με τις συνθήκες του θεωρήματος «το απόστημα περνά από το μέσο της χορδής». Ενώ αναγνωρίζει τα στοιχεία του σχήματος και τις μεταξύ τους σχέσεις, φαίνεται ότι δε θυμάται ακριβώς τι λει το θεώρημα, οπότε δεν μπορεί να το ενεργοποιήσει. Αλλάζει τρόπο αιτιολόγησης και συγκρίνει τα τρίγωνα (Ζωή, Φ3, 4^B).

27



Μ. θα ενώσουμε το ΣΟ, και θα προεκτείνουμε όπου τέμνει τον κύκλο, μετά φέρνουμε μία κάθετη χορδή στη ΣΟ, μια οποιαδήποτε χορδή κάθετη, και προκύπτει η ΣΟ μεσοκάθετος της χορδής.

Ερ. Γιατί είναι μεσοκάθετος;



*Μ. Γιατί, η ΟΓ είναι χορδή, λάθος, η ΑΒ είναι χορδή, η ΟΔ είναι απόστημα της χορδής επειδή και η ΟΓ είναι ακτίνα, επειδή είναι κάθετη στη χορδή άρα
 μια στιγμή,
 (δεν κατόρθωσε να κάνει τη σύνδεση)
 Είναι μεσοκάθετος γιατί είναι κάθετες και επειδή $ΟΑ=ΟΒ$ ως ακτίνες άρα και $ΑΔ=ΒΔ$*

(β) η κατεύθυνση της σύνδεσης

Στα πρώιμα στάδια δημιουργίας του θεωρητικού λόγου παρουσιάζονται αδυναμίες στην κατανόηση της θέσης δεδομένων και ζητούμενων, ώστε να γίνει η σύνδεση στη σωστή κατεύθυνση. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα λανθασμένους συλλογισμούς που οφείλονται κυρίως σε αντιστροφή της κατεύθυνσης.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα αντιστροφής στην κατεύθυνση του συλλογισμού είναι οι περιπτώσεις που ο μαθητής χρησιμοποιεί αδιακρίτως τις ιδιότητες που έχουν χαρακτήρα συμβόλου και αυτές που έχουν χαρακτήρα σήματος. Οι ιδιότητες με χαρακτήρα σήματος οδηγούν προς το γεωμετρικό σχήμα. Για παράδειγμα, αν διαπιστώσουμε πως οι διαγώνιοι ενός τετραπλεύρου διχοτομούνται (σήμα), αυτό μας οδηγεί να καταλάβουμε ότι πρόκειται για παραλληλόγραμμο. Η ιδιότητα είναι δεδομένη και το σχήμα ζητούμενο. Αντίστροφα οι ιδιότητες με χαρακτήρα συμβόλου προκύπτουν από το γεωμετρικό σχήμα. Αν, πχ, γνωρίζουμε πως ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο (σύμβολο), τότε καταλαβαίνουμε ότι η διάμεσος προς την υποτείνουσα θα ισούται με το μισό της. Στην περίπτωση αυτή το σχήμα είναι δεδομένο και η ιδιότητα ζητούμενη.



Στο διάλογο που ακολουθεί μια μαθήτρια λύνει το 4^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης. Θέλει να δείξει ότι ένα τρίγωνο (ΣΑΒ) είναι ισοσκελές, άρα πρέπει να ξεκινήσει από μία ιδιότητα με χαρακτήρα σήματος. Αυτή, αντίθετα, υποθέτει ασυνείδητα ότι ΣΑΒ είναι ισοσκελές και οδηγείται σε ιδιότητα με χαρακτήρα συμβόλου. Αντιστρέφει δηλαδή την κατεύθυνση της σύνδεσης, οπότε ο συλλογισμός της είναι λανθασμένος (Στεφανία, Φ3, 4^Α).

(Κατασκευάζει το ισοσκελές τρίγωνο, φέρνοντας τις εφαπτόμενες ΣA , ΣB του κύκλου από το σημείο Σ).

Ερ. Ωραία, γιατί είναι ισοσκελές αυτό;

Μ. Επειδή $\Sigma A = \Sigma B$

Ερ. Πού το ξέρεις αυτό;

Μ.πάντως είναι, τώρα ακριβώς δεν ξέρω γιατί.

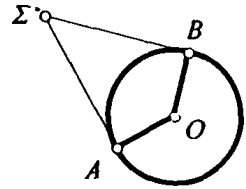
Άμα φέρω κάθετη από το Σ στο O ...

Ερ. Ναι, να ενώσεις εννοείς το Σ με το O ;

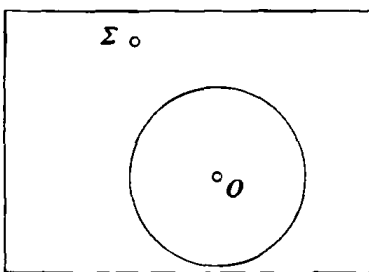
Μ. Να φέρω κάθετη στο AB , αυτό το σημείο θα περνάει και από το μέσο

(σύμβολο: προϋποθέτει ότι το ΣAB είναι ισοσκελές και χρησιμοποιεί τη βασική ιδιότητα)

και θα συγκρίνω τα τρίγωνα και θα βρω ότι έχουν δύο ίσες πλευρές
άρα θα έχουν και την τρίτη πλευρά άρα θα είναι ισοσκελές



Η μόνη περίπτωση στην οποία η σύνδεση δεν έχει μία μόνο κατεύθυνση, αλλά, αντίθετα, επιβάλλεται να κατανοηθεί αμφίδρομα, είναι οι ανακλαστικές σχέσεις (πχ ισότητα, παραλληλία, καθετότητα). Από τις ανακλαστικές σχέσεις που συναντώνται συχνά στην Α' Λυκείου πρόβλημα παρουσιάζει η καθετότητα, καθώς δεν μπορεί να «διαβαστεί» από όλους τούς μαθητές και αντίστροφα.



σχήμα 4.46 Το σχήμα του 4^{ου} προβλήματος της 3^{ης} φάσης

Μια τέτοια περίπτωση εμφανίζεται κατ' επανάληψη στο 4^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης (σχήμα 4.46). Οι μαθητές λένε «πρέπει η ΣO να είναι μεσοκάθετος της διαμέτρου AB ». Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, η ΣO υπάρχει έμμεσα στο σχήμα που συνοδεύει το πρόβλημα (δίνονται τα Σ , O), ενώ η διάμετρος AB μπορεί να κατασκευαστεί σε οποιαδήποτε θέση. Για να λύσουν το πρόβλημα οι μαθητές, πρέπει να αντιστρέψουν την ανακλαστική σχέση και να σκεφτούν ότι η AB είναι και αυτή κάθετη στη ΣO , ώστε να οδηγηθούν στο πώς να κατασκευάσουν τη διάμετρο.

(γ) οι μηχανικές συνδέσεις

Πολλοί μαθητές της Α' Λυκείου, κατά την εισαγωγή τους σε μία θεωρητική αντιμετώπιση της Γεωμετρίας, συνηθίζουν να αποστηθίζουν και να αναπαράγουν μηχανικά μία απόδειξη, δίχως να κατανοούν τη λογική αναγκαιότητα των ενεργειών τους. Στην περίπτωση αυτή, απλά, έχουν μάθει να επαναλαμβάνουν τα βήματα που απαιτούνται, δίχως να συνειδητοποιούν τη λειτουργία αυτών των βημάτων²⁸, γι' αυτό και ονομάζουμε τις συνδέσεις μηχανικές.

Η «τυφλή χρήση» διαδικασιών προκαλεί συχνά λάθη καθώς η άγνοια της σκοπιμότητας μιας ενέργειας οδηγεί στην παραγνώριση της σημασίας της. Ακόμα οι μηχανικές συνδέσεις δε συμβαδίζουν με την εμπιστοσύνη. Προκαλούν έτσι αμφιβολίες στο μαθητή, όταν επιχειρεί να

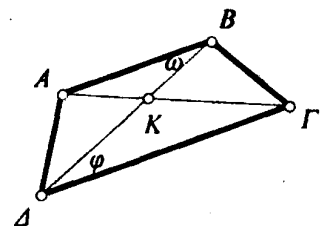
αιτιολογήσει το τι έκανε και τον αναγκάζουν να προστρέξει στη συνδρομή άλλων μορφών αιτιολόγησης. Ο Rodd (2000) περιγράφει αυτή την κατάσταση λέγοντας «μπορεί οι μαθητές να γνωρίζουν πως η απόδειξη είναι απαραίτητη για τη γνώση, αλλά η απόδειξη δεν ήταν το μέσο με το οποίο αυτοί οι ίδιοι διασφάλισαν τις πεποιθήσεις τους για την αλήθεια των μαθηματικών προτάσεων. (και ακόμα)..... άλλο ένα χάσμα μεταξύ απόδειξης και γνώσης υπάρχει, όταν ένας μαθητής μπορεί να κάνει μια υπόδειξη, αλλά δεν έχει επιστημονική σύνδεση (που να παράγει γνώση) με το αποτέλεσμα» (σ.225).

Χαρακτηριστικό παράδειγμα μηχανικής σύνδεσης είναι τα κριτήρια ισότητας τριγώνων. Σε αυτά υπάρχει μία διαδοχή βημάτων στο τέλος της οποίας αποδεικνύεται η ισότητα δύο τριγώνων. Συχνά, τα κριτήρια αναφέρονται και συμβολικά ως Π-Γ-Π, Γ-Π-Γ, Π-Π-Π, όπου το Π αντιστοιχεί σε πλευρά και το Γ σε γωνία του τριγώνου. Οι συμβολισμοί αυτοί, όπως και η λεκτική διατύπωση των κριτηρίων, πέρα από το ποσοτικό μέρος τους (δύο πλευρές και μία γωνία, δύο γωνίες και μία πλευρά, τρεις πλευρές) στις δύο πρώτες περιπτώσεις περιέχουν και ένα ποιοτικό μέρος, που καθορίζει τη σχέση των στοιχείων. Έτσι, για παράδειγμα, το Π-Γ-Π συμβολίζει «δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία».

Αντιμετωπίζοντας τις μηχανικές διαδικασίες ως πακέτο, δίχως συνείδηση της λειτουργίας ή αναγκαιότητας των βημάτων που περιλαμβάνουν, πολλοί μαθητές εύκολα ξεχνούν τις λεπτομέρειες, που όμως αποτελούν βασικά συστατικά της μαθηματικής απόδειξης. Έτσι, στην προηγούμενη περίπτωση, το ποιοτικό στοιχείο εκλείπει και οι μαθητές περιορίζονται στην αναζήτηση δύο πλευρών και μιας (οποιασδήποτε) γωνίας, με συνέπεια να οδηγούνται σε λάθος συμπεράσματα.

Στο διάλογο που ακολουθεί, ο θεωρητικός λόγος είναι ατελής, γιατί η μαθήτρια εφαρμόζει τυφλά τη σύγκριση τριγώνων, δίχως αντιληπτική επιβεβαίωση, οπότε οδηγείται σε λάθος. (Εφη, Φ3, 3^Α).

- Μ. ...λοιπόν θα συγκρίνω τα δύο τρίγωνα, το $ΑΒΔ$ με το $ΒΓΔ$ όπου έχει την πλευρά $ΑΔ=ΒΓ$ που είναι ισοσκελές το τραπέζιο, την πλευρά $ΒΔ$ κοινή, η γωνία $Α$ ίση με τη γωνία $Γ$
- Ερ. Ίσες είναι αυτές η $Α$ με τη $Γ$;
- Μ. Ίσες δεν είναι από το τραπέζιο;
- Ερ. Από το τραπέζιο η $Α$ είναι ίση με ποια;
- Μ. Με τη $Β$;
- Ερ. Άλλωστε δεν βλέπεις η $Α$ είναι αμβλεία και η $Γ$ είναι οξεία;
- Μ. Ναι ... Μάλλον η γωνία $Δ$ είναι ίση με τη γωνία $Β$ (είναι φανερό πως προσπαθεί να βρει στα δύο τρίγωνα, αντίστοιχα, μια ίση γωνία, άσχετα που θα είναι αυτή)
- Ερ. Δεν καταλαβαίνω ποια $Δ$ λες, γι' αυτό κοιτάω...
- Μ. Αυτή εδώ ...με αυτή ($ΑΔΒ = ΔΒΓ$)
- Ερ. Είναι ίσες αυτές;
- Μ. Όχι δεν πρέπει να είναι ίσες



- Ερ. Δεν φαίνονται ίσες
 Μ. Αυτή εδώ με αυτή;
 ...η γωνία Β μου φαίνεται ότι είναι ίση με αυτή (ωφ). Είναι ίσες;
 Ερ. Δεν μπορείς να καταλάβεις για κάποιο λόγο ότι είναι ίσες; Μόνο με το μάτι το βλέπεις;
 Μ. Έχουμε παράλληλες η ΑΒ με τη ΓΔ, η ΒΔ τέμνουνται άρα η $\angle 1 = \angle 2$ ως εντός εναλλάξ
 Ερ. Ωραία είναι ίσες έτσι; Τι το ήθελες τώρα αυτό;
 Μ. Για να πάρουμε ότι σε εκείνα τα δύο μεγάλα έτσι (να τα χρησιμοποιήσει στη σύγκριση);
 (τώρα καταλήγει σε συμπεράσματα)
 Καλά, εκτός ότι οι διαγώνιοι είναι ίσοι, άρα και ΑΓ θα είναι κι αυτή ίση με τη ΑΒ
 Ερ. $H \Delta \Gamma = AB$;
 Μ. Στο σχήμα δεν είναι, αλλά αφού συγκρίναμε τα τρίγωνα δεν θα είναι;
 Ερ. Αν τα συγκρίνεις σωστά. Είναι σωστά;
 Μ. Έχουμε πάρα μία πλευρά (κοινή), έχουμε πάρα την $\angle 1 = \angle 2$, πήραμε δύο γωνίες...τρία στοιχεία
 Ερ. Είναι ίσα λοιπόν αυτά τα δύο;
 Μ. Δεν φαίνονται να είναι ίσα.....

Παρόμοιες παρατηρήσεις γίνονται και σε σχέση με την κατασκευή της μεσοκαθέτου με κανόνα και διαβήτη, όταν αυτή κατανοείται ως αλγόριθμος (ως σειρά βημάτων που επαναλαμβάνονται μηχανικά, χωρίς ο μαθητής να γνωρίζει την αναγκαιότητα του καθενός).

Θεωρητική προσέγγιση

Κατά τη θεωρητική προσέγγιση, που θεωρούμε πως υιοθετείται από μαθητές με μαθηματική συμπεριφορά²⁹, έχει συντελεστεί σε μεγάλο βαθμό το πέρασμα από το υποκειμενικό στο αντικειμενικό. Οι αιτιολογήσεις δε βασίζονται σε ό,τι βλέπουν ή κατασκευάζουν οι μαθητές, αλλά σε μια αντικειμενική πραγματικότητα, έξω από αυτούς και συγκεκριμένα στο σώμα των προτάσεων που αποτελεί τη γεωμετρική θεωρία. Οι δύο άλλες λειτουργίες, η νοερή απεικόνιση και η κατασκευή, έχουν βοηθητικό ρόλο στην αιτιολόγηση. Αυτό γίνεται φανερό από το γεγονός ότι οι μαθητές κατασκευάζουν τις νοητικές τους εικόνες στο χαρτί και, στην περίπτωση ακόμα που οι κατασκευές δεν είναι απόλυτα ακριβείς, θεωρούν πως οι διάφορες ιδιότητες ισχύουν, καθώς υποστηρίζονται από μια γενικά παραδεκτή θεωρία. Έτσι η προσπάθεια μετατίθεται στον εντοπισμό του κατάλληλου θεωρητικού επιχειρήματος που θα αιτιολογήσει την αλήθεια.

Χαρακτηριστικό της μαθηματικής συμπεριφοράς είναι πως το άτομο για να κατανοήσει μια μαθηματική πρόταση αισθάνεται την ψυχολογική ανάγκη να πειστεί για την αλήθεια της με κάποια μαθηματική αιτιολόγηση. Στη συνέχεια χρησιμοποιεί την ίδια μαθηματική αιτιολόγησή για να πείσει και τους άλλους. Αυτή η «ανάγκη για απόδειξη», σύμφωνα με το Rodd, σχετίζεται με την αυξανόμενη ζήτηση για αυστηρότητα, καθώς ο μαθητής εξελίσσεται (Rodd, 2000, σ. 225).

Προϋποθέσεις, απαραίτητες για τη θεωρητική προσέγγιση, είναι η γνώση της ορολογίας, των απαιτούμενων θεωρητικών προτάσεων και η ικανότητα για παραγωγικούς, λογικούς,

συλλογισμούς. Οι μαθητές που έχουν θεωρητική προσέγγιση στην ουσία γνωρίζουν πώς να λειτουργούν μέσα στο αξιωματικό σύστημα. Επιπλέον έχουν αναπτύξει και άλλες, σύνθετες, ικανότητες που διευκολύνουν τη λύση προβλήματος, όπως η ικανότητα εντοπισμού μιας γενικής μορφής (pattern imagery), την οποία επαναλαμβάνουν σε κάθε δυνατή παραλλαγή ή η ικανότητα ανάκλησης σχετικών προβλημάτων που είχαν λύσει στο παρελθόν και τους διευκολύνουν να αντιμετωπίσουν τη δεδομένη κατάσταση.

Στον πίνακα 4.16 που ακολουθεί γίνεται μία συνοπτική σύγκριση των τριών προσεγγίσεων, που εμφανίζονται στη λειτουργία της αιτιολόγησης. Η διαφοροποίηση γίνεται ανάλογα με το πού βασίζεται ο συλλογισμός του μαθητή, σε ό,τι βλέπει / φαντάζεται, σε ότι κατασκευάζει ο ίδιος ή σε ό,τι λέει η θεωρία για τη Γεωμετρία. Αντίστοιχος με την προσέγγιση είναι και ο λόγος που ο μαθητής χρησιμοποιεί για τα επιχειρήματά του.

Πίνακας 4.16
Οι τρεις προσεγγίσεις στην αιτιολόγηση

προσέγγιση	οπτική	ευρετική	θεωρητική
ο συλλογισμός βασίζεται	✓ νοερή απεικόνιση ✓ κατασκευή	✓ νοερή απεικόνιση (σύνθετη) ✓ κατασκευή (σύνθετη) ✓ θεωρητικές προτάσεις	✓ θεωρητικές προτάσεις
διαδικασίες αιτιολόγησης	επιχειρηματολογία με φυσικό λόγο που βασίζεται ✓ στο σχήμα ✓ στη μέτρηση ✓ σε περιγραφή του τρόπου κατασκευής	επιχειρηματολογία με φυσικό ή ατελή θεωρητικό λόγο που βασίζεται σε ✓ οπτική αναδιοργάνωση του σχήματος (1D ή 2D) ✓ οδηγίες κατασκευής ✓ θεωρητικές προτάσεις (αληθείς / ανενεργές / ψευδοπροτάσεις)	επιχειρηματολογία με θεωρητικό λόγο που βασίζεται σε ✓ παραγωγικούς λογικούς συλλογισμούς
κατανόηση του σχήματος	αντιληπτική	λειτουργική	διαλεκτική



4.2.4 Αλυσίδες ενεργειών

Η διαδικασία λύσης ενός προβλήματος κατασκευής μπορεί, κατ' αναλογία, να παρομοιασθεί με μία αλυσίδα ενεργειών, κάθε κρίκος της οποίας υποστηρίζεται από μία λειτουργία (νοερή απεικόνιση, κατασκευή ή αιτιολόγηση). Οι κρίκοι – ενέργειες εναλλάσσονται ασυνείδητα και τις περισσότερες φορές με τέτοιες ταχύτητες, που δε μας επιτρέπουν να αντιληφθούμε όλους τους κρίκους μιας αλυσίδας. Αυτό συμβαίνει στις περιπτώσεις που ο μαθητής βρίσκει αμέσως τη λύση. Πολλές ενδιάμεσες ενέργειες έχουν αυτοματοποιηθεί και μας παρουσιάζεται μια απλοποιημένη αλυσίδα με τρεις μόνο κρίκους, ένα για κάθε λειτουργία: νοερή απεικόνιση, κατασκευή και αιτιολόγηση. Αντίθετα σε μαθητές που αντιμετωπίζουν δυσκολίες έχουμε την ευχέρεια να παρατηρήσουμε επαναλαμβανόμενες απόπειρες να φτιαχτεί η αλυσίδα.

➤ Οι κρίκοι της νοερής απεικόνισης αποκαλύπτονται εξωτερικά, όταν οι μαθητές «αποδίδουν ρόλο» σε ένα ή περισσότερα στοιχεία του σχήματος, δηλαδή, όταν προσδιορίζουν την ταυτότητα των στοιχείων. Σε ένα πρόβλημα κατασκευής, όπως αυτά που δόθηκαν στην παρούσα έρευνα, δίνονται κάποια από τα στοιχεία ενός σχήματος και ζητείται η κατασκευή κάποιων άλλων (συμπλήρωση του γεωμετρικού σχήματος). Η ίδια η εκφώνηση του προβλήματος μπορεί να δίνει, ήδη, ρόλους σε κάποια από τα στοιχεία του σχήματος. Απαραίτητη προϋπόθεση για τη λύση του προβλήματος είναι οι μαθητές να εστιάσουν και να αποφασίσουν τι ρόλο θα παίξουν στο τελικό σχήμα και άλλα είτε ήδη υπάρχοντα στοιχεία του γεωμετρικού σχήματος είτε στοιχεία που πρόκειται να κατασκευασθούν. Για παράδειγμα, αν πρόκειται για ένα ευθύγραμμο τμήμα, να αποφασίσουν αν θα είναι ύψος ή διάμεσος ή πλευρά, ή, στην περίπτωση που πρόκειται για δύο τμήματα, να καταλήξουν αν αυτά θα είναι πλευρά και ύψος ενός τριγώνου, βάση και διαγώνιος ενός παραλληλογράμμου κλπ. Σε περίπτωση που αποδίδονται, ταυτόχρονα, ρόλοι σε περισσότερα στοιχεία του σχήματος, όπως είναι προφανές, οι ρόλοι πρέπει να είναι συμβατοί μεταξύ τους (σχήμα 4.47).

Μπορεί τα δύο παρακάτω ευθύγραμμα τμήματα να είναι.....			
.....διαγώνιοι παραλληλογράμμου;		πλευρά – διαγώνιος τετραγώνου;	
Όχι, δεν μπορεί να είναι τα:	Ναι, μπορεί να είναι τα:	Όχι, δεν μπορεί να είναι τα:	Ναι, μπορεί να είναι τα:

σχήμα 4.47 Οι ρόλοι που δίνονται πρέπει να είναι συμβατοί μεταξύ τους

➤ Οι κρίκοι της κατασκευής εξαρτώνται άμεσα από αυτούς της νοερής απεικόνισης. Όπως δείχνουν τα ευρήματα, η απόδοση ρόλου στα στοιχεία του σχήματος καθορίζει με τη σειρά της, τις οδηγίες κατασκευής που θα χρησιμοποιηθούν. Παράλληλα οι κρίκοι της κατασκευής ασκούν έλεγχο στην νοερή απεικόνιση, με την έννοια ότι η δυνατότητα μετατροπής της νοερής εικόνας σε γεωμετρικό σχήμα επιβεβαιώνει τη συνέπειά της (δες 4.2.3 Οπτική Προσέγγιση). Σε αντίθετη περίπτωση, ξεκινά άλλη αλυσίδα με αναμορφωμένη τη νοερή εικόνα.

➤ Ο ρόλος των κρίκων της αιτιολόγησης είναι κρίσιμος στη δημιουργία μιας αλυσίδας ενεργειών, που οδηγούν στη λύση ενός προβλήματος. Ο λόγος είναι πως η αιτιολόγηση είναι η λειτουργία που ελέγχει την ορθότητα η μη των άλλων δύο λειτουργιών και δρα διορθωτικά ως προς αυτές. Συγκεκριμένα, μόλις η αιτιολόγηση διαπιστώσει πρόβλημα, η αλυσίδα σπάει και ξεκινά ένας νέος κύκλος προσπαθειών. Στις περισσότερες περιπτώσεις η πορεία προς τη λύση αποτελείται από αλληπάλληλες αλυσίδες λειτουργιών με κοινή αρχή (τα δεδομένα του προβλήματος), από τις οποίες μόνο η τελευταία περιλαμβάνει επιτυχημένο συνδυασμό και των τριών.

Οι λόγοι που μπορεί να οδηγήσουν σε σπάσιμο της αλυσίδας και σε επανεξέταση του προβλήματος είναι αρκετοί. Αν ο μαθητής διαπιστώσει, με αντιληπτικές ή θεωρητικές διαδικασίες, πως η λύση του είναι λάθος, αν δεν μπορεί να αιτιολογήσει τη λύση του (ανεξάρτητα από την ορθότητά της), αν συναντά εμπόδια στην κατασκευή της νοητικής του εικόνας, τότε εγκαταλείπει την προσπάθεια και αρχίζει νέα. Η καινούρια αλυσίδα μπορεί να αρχίσει, στο μυαλό του μαθητή, από οποιαδήποτε λειτουργία, όμως αυτό που φαίνεται στον ερευνητή και τεκμηριώνεται με βάση τα στοιχεία της έρευνας είναι πως κάθε νέα αλυσίδα ξεκινά είτε με μία διαφορετική νοερή απεικόνιση είτε με διαφορετικές οδηγίες κατασκευής. Στα επόμενα θα εξετάσουμε τους λόγους που οδηγούν, μετά το σπάσιμο της αλυσίδας, στη δημιουργία μιας νέας νοερής εικόνας ή στη χρήση μιας διαφορετικής οδηγίας κατασκευής, καθώς και τη μεταξύ τους αλληλεξάρτηση για το σχηματισμό της νέας αλυσίδας.

1. Η νέα αλυσίδα ξεκινά από αναδόμηση της εικόνας

Υπενθυμίζουμε πως με τον όρο αναδόμηση (ο Duval την ονομάζει *figural change* ή *operative apprehension*) εννοούμε την αναπροσαρμογή της αντίληψης του σχήματος, δηλαδή την ικανότητα του μαθητή να βλέπει το γεωμετρικό σχήμα με ένα διαφορετικό τρόπο οπτικής οργάνωσης των στοιχείων του. Η οπτική αναδιοργάνωση του σχήματος μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους, όπως το να προσέξει κάποιος μορφές στο σχήμα, που μέχρι τότε δεν τις είχε θεωρήσει ως αυτόνομα στοιχεία ή να προσθέσει / μετασχηματίσει μια μορφή στο σχήμα

που του δίνεται. Ένα παράδειγμα οπτικής αναδιοργάνωσης, που αναφέρει ο Duval, είναι αυτό του ακόλουθου προβλήματος (σχήμα 4.48) (Duval, 1998, σ.41).

Πρόβλημα: δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και τα μέσα των δύο απέναντι πλευρών του K και Λ . Να δείξετε ότι τα τμήματα ΔP , $P\Sigma$ και ΣB έχουν το ίδιο μήκος.			
Αρχικό σχήμα του προβλήματος	1 ^ο υπό - σχήμα	2 ^ο υπό - σχήμα	3 ^ο υπό - σχήμα

σχήμα 4.48 Παράδειγμα οπτικής αναδιοργάνωσης του σχήματος που δίνει το πρόβλημα

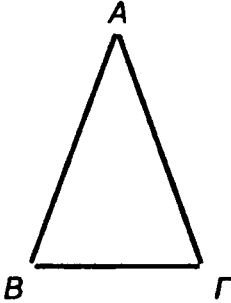
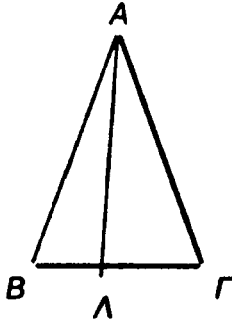
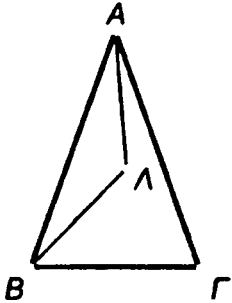
Η ικανότητα για αναδόμηση χαρακτηρίζει το μαθηματικό τρόπο αντίληψης μιας μορφής ή ενός σχήματος και λειτουργεί ευρετικά για τη λύση του προβλήματος. Σύμφωνα με τον Duval, «σε ένα γεωμετρικό σχήμα υπάρχουν περισσότερες συστατικές μορφές και περισσότερα πιθανά υπό - σχήματα από εκείνα που κινητοποιούνται ρητά για την κατασκευή του ή αυτά που αναφέρονται ρητά στις υποθέσεις. Αυτό το πλεόνασμα δημιουργεί την ευρετική δύναμη των γεωμετρικών σχημάτων: κάποια υπό - σχήματα ή συστατικές μορφές δίνουν τις ιδέες κλειδιά για τη λύση ή για μια αιτιολόγηση» (Duval, 1998, σ.41).

Ένας τρόπος αναδόμησης είναι ο μαθητής να κινηθεί από όλο το σχήμα (2D) στα στοιχεία του (1D ή 0D), κίνηση που ο Duval ονομάζει αλλαγή διάστασης (*dimensional change*). Χαρακτηριστικό παράδειγμα αλλαγής διάστασης είναι οι επανειλημμένες προσπάθειες ενός μαθητή να λύσει το πρόβλημα 3^B (σχήμα 4.40), οι οποίες καταλήγουν σε αδιέξοδο, αφού δεν μπορεί να φτιάξει τη μεσοκάθετο της AB . Ξαφνικά, λει «σκέφτηκα την AB αποκομμένη από το υπόλοιπο τρίγωνο και κατάλαβα πώς να τη φτιάξω (τη μεσοκάθετο)». Πράγματι αμέσως κάνει σωστά την κατασκευή. Ο παράγοντας που τον βοηθά να ξεπεράσει τις δυσκολίες είναι πως, αντί ολόκληρο το τρίγωνο $AB\Gamma$ (2D), εστιάζει την προσοχή του μόνο στην πλευρά AB (1D).

Άλλος τρόπος αναδόμησης είναι ο μαθητής να μεταβάλει το ρόλο ενός ή περισσότερων από τα στοιχεία του σχήματος. Οι δυσκολίες που εμφανίζονται σε μια τέτοια περίπτωση έχουν να κάνουν με τα εξής:

(α) το ίδιο στοιχείο να έχει διαφορετικούς ρόλους ταυτόχρονα σε διαφορετικά υπό - σχήματα του αρχικού σχήματος (4.1.2). Τότε «η αναδόμηση μπορεί να εμποδίζεται από την οπτική δυσκολία της διπλής χρήσης του στοιχείου» (Duval, 2002). Μια τέτοια περίπτωση, που εμφανίζεται επανειλημμένα στην έρευνα, είναι η εξής. Στο πρόβλημα 3^B (σχήμα 4.49) η πλευρά

AB έχει δύο διαφορετικούς ρόλους, άλλον στα δεδομένα και άλλον στα ζητούμενα. Συγκεκριμένα η AB είναι ίση πλευρά στο αρχικό τρίγωνο ABΓ, ενώ πρέπει να είναι βάση, στο ζητούμενο τρίγωνο ΛAB. Οι μαθητές που διατηρούν το ρόλο της ίσης πλευράς και επιχειρούν να κατασκευάσουν το ΛAB αποτυγχάνουν, γιατί δεν υπάρχει εσωτερικό σημείο Λ τέτοιο, ώστε $\Lambda A = \Lambda B$. Για να λυθεί το πρόβλημα πρέπει οπωσδήποτε η AB να αλλάξει ρόλο και από πλευρά να γίνει βάση.

Πρόβλημα 3 ^ο της 1 ^{ης} φάσης	Η AB διατηρεί τον ίδιο ρόλο	Η AB μεταβάλλει το ρόλο της
 Στο επόμενο σχήμα δίνεται ένα ισοσκελές τρίγωνο ABΓ ($AB = AG$). Μπορείς να βρεις ένα σημείο Λ εσωτερικό του τριγώνου τέτοιο, ώστε το τρίγωνο ΛAB που θα σχηματιστεί να είναι, επίσης, ισοσκελές;		
Δεδομένα: ABΓ ισοσκελές	Ζητούμενα: ΛAB ισοσκελές	Ζητούμενα: ΛAB ισοσκελές
Ρόλος της AB: ίση πλευρά	Ρόλος της AB: ίση πλευρά (το πρόβλημα δεν λύνεται)	Ρόλος της AB: βάση (το πρόβλημα λύνεται)

σχήμα 4.49 Παράδειγμα στοιχείου με διαφορετικούς ρόλους στα δύο υπό σχήματα

(β) να γίνονται αλλαγές ρόλων, δίχως εσωτερική συνέπεια. Αν έχουν αποδοθεί ρόλοι σε περισσότερα του ενός στοιχεία και κατά την αναδόμηση αλλάξει ο ρόλος του ενός μόνο από αυτά, η εικόνα που θα προκύψει θα είναι εσωτερικά ασυνεπής (δες πίνακα 4.17).

(γ) ο μαθητής πρέπει να επιλέξει, ανάμεσα σε διάφορους πιθανά ρόλους, τον κατάλληλο για κάθε στοιχείο και για τη συγκεκριμένη περίπτωση. Υπάρχουν περιπτώσεις, που ο μαθητής μπορεί να προχωρήσει στη λύση του προβλήματος αποδίδοντας είτε τον ένα είτε τον άλλο ρόλο, άλλες φορές όμως αυτό είναι αδύνατο. Μια τέτοια περίπτωση σχεδιάστηκε και υλοποιήθηκε με το 2^ο πρόβλημα (σχήμα 4.38 και Πίνακας 4.2). Στο 2^α είναι δυνατόν να αποδοθούν στη δοθείσα πλευρά ΚΛ δύο διαφορετικοί ρόλοι: είτε της βάσης, είτε της μίας από τις ίσες πλευρές του ισοσκελούς. Στην κάθε περίπτωση μπορεί να ακολουθηθεί μία εντελώς διαφορετική πορεία κατασκευής που να καταλήξει στη λύση του προβλήματος.

Αντίθετα, στο πρόβλημα 2^B, λόγω της φύσης των δεδομένων, η δοθείσα πλευρά ΚΛ αποκλείεται να είναι βάση. Όσο οι μαθητές της δίνουν αυτό το ρόλο (της βάσης), οδηγούνται σε αδιέξοδο. Μόνο αλλάζοντας το ρόλο, θα αντιληφθούν τη σωστή εικόνα.

Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα μίας μαθήτριας η οποία αρχικά συγκρίνει νοερά την πρότυπη εικόνα του ισοσκελούς με το δοθέν σχήμα και συμπεραίνει πως το πρόβλημα είναι αδύνατο (αυτή η αλυσίδα κόβεται). Η επόμενη αλυσίδα ξεκινά από την αναδομημένη εικόνα, με διαφορετικό ρόλο στην ΚΛ και καταλήγει στη λύση. Η ίδια εξηγεί τη σκέψη της: «είχα συνδέσει το ΚΛ με τη βάση (1^{ος} ρόλος), δε μου πέρασε από το μυαλό πως μπορεί να είναι η άλλη πλευρά (2^{ος} ρόλος)» (Ζωή, Φ2, 2^B).

Συνέπειες της αναδόμησης: Η νέα αλυσίδα, που ξεκινά από μια αναδομημένη εικόνα (εικόνα στην οποία βλέπουμε περισσότερα υπο - σχήματα ή που δίνουμε διαφορετικούς ρόλους στα στοιχεία της), περιλαμβάνει συχνά και ένα διαφορετικό τρόπο κατασκευής. Πρόκειται για φυσιολογική συνέπεια, αφού οι οδηγίες κατασκευής συνδέονται με το ρόλο που αποδίδουμε στα στοιχεία του σχήματος και αυτό πάντα σε σχέση με το πρότυπο που έχουμε στο νου μας. Είναι δυνατόν, όμως, στον ίδιο ρόλο (πχ βάση) να αντιστοιχούν περισσότερες οδηγίες (βλέπε πίνακα 4.12 «οδηγίες κατασκευής ισοσκελούς»). Στην περίπτωση αυτή, ποιοι λόγοι οδηγούν στην επιλογή μιας οδηγίας; Δύο παράγοντες φαίνεται πως έχουν καθοριστική σημασία. Ο πρώτος είναι τα δεδομένα του προβλήματος και ο δεύτερος είναι η ικανότητα του μαθητή, αφού επιλέξει κάποια οδηγία, να αξιοποιήσει ή όχι το δυναμικό της χαρακτήρα, ώστε να την προσαρμόσει στις απαιτήσεις του προβλήματος. Αυτά τα δύο θα καθορίσουν τις συγκεκριμένες οδηγίες ή γεωμετρικά εργαλεία που θα χρησιμοποιηθούν, για να οδηγήσουν σε επιτυχημένη κατασκευή.

Τελικά καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως μια αλλαγή στον τρόπο που βλέπουμε το σχήμα μπορεί να προκαλέσει, με τη σειρά της, αλλαγή στην οδηγία που χρησιμοποιείται. Αυτό συμβαίνει, αν η προηγούμενη οδηγία δεν είναι κατάλληλη για το συγκεκριμένο πρόβλημα ή αν η οδηγία δε διαθέτει δυναμικό χαρακτήρα ώστε να προσαρμοστεί στις νέες συνθήκες.

Στα παραδείγματα που ακολουθούν θα παρακολουθήσουμε αναδομήσεις της εικόνας, που σηματοδοτούνται από αλλαγές στο ρόλο κάποιων στοιχείων της και τις επαγόμενες αλλαγές στις οδηγίες. Ακόμα θα δούμε τις επιπτώσεις μιας λανθασμένης απόδοσης ρόλων στη συνολική συνέπεια του συστήματος σχέσεων του γεωμετρικού σχήματος.

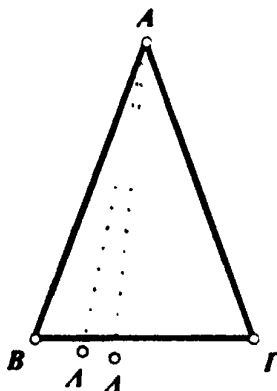
➤ Το πρώτο παράδειγμα αναφέρεται στο πρόβλημα 3^B και εικονογραφεί τις συνέπειες της αναδόμησης (σχήμα 4.49) (Νίκη, Φ1, 3β)



Μαθήτρια: $\triangle AB$ δεν ξέρουμε αν μπορούμε το τρίγωνο που θα φτιάξουμε να βγαίνει έξω από το τρίγωνο αυτό. Αλλά αν βγαίνει έξω, τότε το A δε θα είναι εσωτερικό του τριγώνου. Τι λέω;
 Μέσα στο τρίγωνο, αλλά όπου να 'ναι το A , δεν θα γίνει ισοσκελές γιατί αυτή η πλευρά (AB) είναι μεγάλη άρα και οι άλλες πλευρές πρέπει να είναι μεγάλες, οπότε θα υπερβαίνουν το τρίγωνο θα πρέπει να βγει έξω το A και έτσι δε θα είναι εσωτερικό του τριγώνου.....
 (φαντάζεται την κατασκευή ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς AB και βάσει της νοερής εικόνας καταλήγει σε συμπεράσματα).

(αναδόμηση και αλλαγή στις οδηγίες κατασκευής:
 από ισόπλευρο, σε ισοσκελές με την AB στο ρόλο της ίσης πλευράς και
 από κατασκευή ισοπλεύρου με διαβήτη, στην κατασκευή δύο ίσων πλευρών με χάρακα)

Εκτός αν πάρουμε το χάρακα, μετρήσουμε την $AB = 4$ εκατοστά, εδώ πέρα βγαίνει 1,2,3...εδώ δε βγαίνει 4 εκατοστά ώστε να τη φέρουμε κάτω.....



(θέλει να φτιάξει $AA' = AB$ και δοκιμάζει σε διάφορες θέσεις με το χάρακα)
 Εδώ αν την πάρουμε πάλι το A δε θα είναι εσωτερικό....δεν ξέρω αν υπάρχει λύση δεν μπορώ να σκεφτώ κάτι άλλο. Πιστεύω πως, ότι και να κάνω, το A δε θα είναι εσωτερικό του τριγώνου, γιατί οι πλευρές είναι μεγαλύτερες, οπότε δε μπορώ να βρω κάποια λύση. Δεν ξέρω.....

Ερ: Για ξαναθύμισέ μου, ποιο τρίγωνο λέγεται ισοσκελές;
Μ: Αυτό που έχει τουλάχιστον 2 πλευρές ίσες, και γωνίες.
 (ο ορισμός τη βοήθησε να δημιουργήσει τη σωστή εικόνα)

(αναδόμηση και αλλαγή στις οδηγίες κατασκευής:
 η AB αλλάζει ρόλο και από ίση πλευρά, γίνεται βάση του ισοσκελούς και
 από την κατασκευή δύο ίσων πλευρών με χάρακα, στο διαβήτη)

Και δω πέρα, για να έχει 2 πλευρές ίσες, πρέπει να έχουμε τουλάχιστον άλλη μια τέτοια πλευρά.....όχι λάθος, εδώ πέρα τότε, ας πούμε πως αυτή (AB) μπορεί να είναι η μεγαλύτερη
 (κάνει παραχώρηση σε σχέση με την ποσοτική αντίληψη, που δημιουργεί σε μερικούς μαθητές η εικόνα – πρότυπο, πως η βάση είναι μικρότερη από τις ίσες πλευρές)
 και να πάρουμε εμείς δύο μικρότερες μέσα, άλλωστε για να είναι ισοσκελές πρέπει να έχει δύο πλευρές ίσες όχι τρεις.

Τι μπορούμε να κάνουμε; Μετρώ την πλευρά και είναι 4 εκατοστά, κάθε πλευρά από τις πάνω – δεν ξέρω, λέω- ίσως να 'ναι 2

(η συγκεκριμένη ακτίνα που παίρνει είναι τέτοια που δεν σχηματίζεται τρίγωνο, αυτό της αυξάνει το άγχος. Είναι φανερό πως δεν μπορεί να ρυθμίσει το άνοιγμα του διαβήτη)
 δεν καταλαβαίνω, τι είναι αυτό;

Βρήκα το ένα (ερώτημα) και δεν μπορώ να βρω το άλλο.

Ερ: Σιγά – σιγά
 (αλλαγή στις οδηγίες κατασκευής: από το διαβήτη, στην κάθετη στο μέσο)

Μ: Στην ευθεία αυτή (AB) βρίσκω τη μέση ...

Ερ: Τι ακριβώς έκανες εκεί;

Μ: Σα να βρήκα το ύψος (έβαλε το χάρακα κάθετα στο μέσο της AB και πήρε ένα σημείο), οπότε να βρω και τις πλευρές, να δω αν είναι ίσες (ενώνει – μετράει τις πλευρές).
 Αυτή (η πλευρά) βγαίνει μεγαλύτερη πάλι (φαίνεται πως η κατασκευή της δεν είχε αρκετή

ακρίβεια).

Ίσως πρέπει να το πάω πιο ψηλά (να κινήσει το σημείο στη νοητή μεσοκάθετο).

1,2, 2.5 εκατοστά και από δω 2.5 εκατοστά (η κάθε πλευρά),

άρα βγαίνει εδώ το σημείο Α και βρήκα ένα ισοσκελές τρίγωνο.

➤ Το δεύτερο παράδειγμα (πρόβλημα 2^Α, σχήμα 4.39) αφορά σε μια μαθήτρια, η οποία γνωρίζει σχεδόν όλες τις οδηγίες κατασκευής του ισοσκελούς, παρ' όλα αυτά δεν έχει δυναμική αντίληψή τους, ώστε να τις προσαρμόζει στις απαιτήσεις του προβλήματος. Έτσι παλινδρομεί ανάμεσα στους δύο πιθανούς ρόλους της ΚΛ (βάση ή ίση πλευρά) χρησιμοποιώντας κάθε φορά αντίστοιχες οδηγίες, δίχως ουσιαστικό αποτέλεσμα. (Εφη, Φ1, 2^Α).

(μέρος του πρωτοκόλλου της μαθήτριας που ακολουθεί έχει παρατεθεί και στις «Στρατηγικές προσαρμογής των οδηγιών στα δεδομένα του προβλήματος» περίπτωση Δ, με διαφορετικό στόχο)

Μαθήτρια: Μπορούμε να μετρήσουμε την ΚΛ και να την κάνουμε ίση με την ΚΕ, ώστε να βγει ισοσκελές το τρίγωνο.

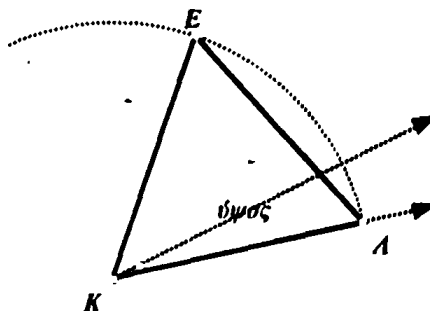
(δίνει στην ΚΛ το ρόλο ίσης πλευράς)

Μπορούμε να το κάνουμε με το διαβήτη;

Για να βγει καλύτερο.....

(φτιάχνει τόξο με κέντρο Κ και ακτίνα ΚΛ, οδηγίες ΙΙΙΒ με διαβήτη)

Θα πάρουμε το σημείο Ε και θα ενώσουμε το ΚΕ, και τώρα θα ενώσουμε και την ΑΕ και έχουμε το ισοσκελές.



Ερ: Είναι αυτό που μας ζητάγε;

Μ: Μας ζητάγε ένα ισοσκελές ΚΕΑ

Είναι ισοσκελές γιατί.... έχουμε κάνει την ΚΛ=ΚΕ, επομένως και Α=Ε

Ερ: Μας ζητάγε κάτι άλλο γι' αυτό το τρίγωνο;

Μ: Να το συνεχίσουμε να περιγράψουμε με λόγια την κατασκευή του.....

Ερ: Μας έδινε όμως και αυτό

Μ: Μας έδινε και το ύψος, να ενώσω το ύψος; Να το πατήσω από πάνω;

...που ταυτόχρονα το ύψος σε ένα ισοσκελές τρίγωνο θα είναι διάμεσος και διχοτόμος

Ερ: Αυτό είναι το ύψος;

Μ: Μισό λεπτάκι...

Αν το πάρουμε με το χάρακα (πάνω στη διακεκομμένη γραμμή) δεν μας βγαίνει.

Αν το πάρουμε σε ορθή γωνία, δε μας βγαίνει, γιατί πρέπει να βγει κάθετη, τώρα αν το ενώσουμε έτσι απλά....

Δεν είναι ακριβώς; Πρέπει να φέρουμε εμείς το σωστό ύψος για να είναι ταυτόχρονα διάμεσος και.....

Επομένως το σβήνουμε (ενώ χρησιμοποιεί μια δυναμική οδηγία κατασκευής, σαν την ΙΙΙΒ, δεν μπορεί να την προσαρμόσει στις απαιτήσεις του προβλήματος).

(υπονοούμενη αλλαγή ρόλου της ΚΛ και αλλαγή στις οδηγίες κατασκευής:
η ΚΛ από ίση πλευρά γίνεται βάση του ισοσκελούς και

από την κατασκευή δύο ίσων πλευρών με διαβήτη, στην κατασκευή δύο ίσων γωνιών)

Ερ: Τώρα με τις μοίρες δεν μπορούμε να το φέρουμε

Μ: Τι εννοείς με τις μοίρες;

Μ: Άμα μας είχε δώσει την γωνία ΚΛΕ, θα μπορούσαμε να δούμε τη γωνία ώστε να τη φέρουμε..... και δω πέρα, ενώ τώρα δε μας την έχει δώσει.

(υπονοούμενη αλλαγή ρόλου της ΚΛ και αλλαγή στις οδηγίες κατασκευής:
η ΚΛ από βάση γίνεται ίση πλευρά του ισοσκελούς και
από την κατασκευή δύο ίσων γωνιών, στην κάθετη στο μέσο)

Τσως άμα φέρουμε το ύψος, θα είναι διμέσος και διχοτόμος. Μπορούμε να μετρήσουμε με το διαβήτη το σημείο αυτό, ΛΔ και να μετρήσουμε και μετά το ΔΕ και όπου θα βγει ο διαβήτης να πάρουμε το σημείο, ώστε να μας βγει ίσιο (δεν επιχειρεί να κατασκευάσει, κάπου αντιλαμβάνεται εμπόδιο και αλλάζει τακτική)

(υπονοούμενη αλλαγή ρόλου της ΚΛ και αλλαγή στις οδηγίες κατασκευής:
η ΚΛ γίνεται, από ίση πλευρά, βάση του ισοσκελούς και
από την κάθετη στο μέσο, φτιάχνει δύο ίσα τόξα με το διαβήτη)

Η μπορούμε να φέρουμε..... να το κάνουμε με το διαβήτη να είναι λίγο μεγαλύτερος από το..... να φέρουμε από το ένα άκρο – τώρα το κατάλαβα- να φέρουμε από το ένα άκρο, να πάρουμε τη μύτη του διαβήτη, να είναι λίγο μεγαλύτερο από το μισό, να φέρουμε το ένα τόξο και από το άλλο άκρο να κάνουμε την ίδια δουλειά. Και στο σημείο που τέμνονται τα δύο τόξα, θα είναι το σημείο Ε. (τόξα με κέντρα τα Κ,Λ) θα ενώσουμε τα ΛΕ και ΚΕ και φτιάξαμε το ισοσκελές, Α, να φέρουμε και το ύψος να δούμε...

Δε βγαίνει.....

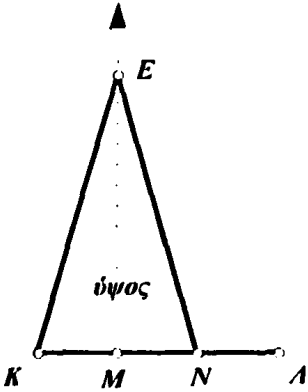
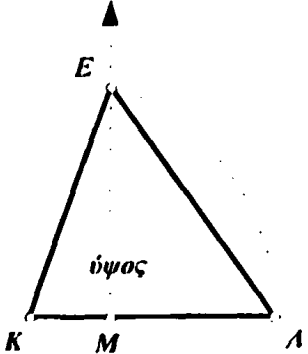
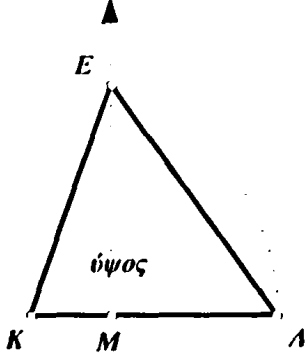
Από το σημείο αυτό, η μαθήτρια επανέρχεται διαδοχικά σε διάφορες απόπειρες που είχαν προηγηθεί, δίχως επιτυχία.

➤ Το τρίτο παράδειγμα, σχετικά με τις συνέπειες της αναδόμησης, είναι πολύ χαρακτηριστικό γιατί δείχνει πώς μπορεί να προκύψει εσωτερική ασυνέπεια, από λάθος απόδοση ρόλων. Συγκεκριμένα στο πρόβλημα 2^B (σχήμα 4.30), έχουμε ταυτόχρονη απόδοση δύο ρόλων. Αρχικά ο προσανατολισμός επικρατεί σε βάρος των δεδομένων του προβλήματος και ο μαθητής αποδίδει στην ΚΛ και στη δοθείσα ημιευθεία τους ρόλους: βάση και ύψος / άξονας συμμετρίας³⁰ (1^η αλυσίδα). Όταν διαπιστώσει το λάθος του (το τρίγωνο που κατασκεύασε έχει πλευρά ΚΝ και όχι ΚΛ), αλλάζει το ρόλο της ΚΛ και τη θεωρεί ως ίση πλευρά, δίχως αντίστοιχα να αλλάξει ρόλο στο ύψος, οπότε καταλήγει σε ασυνέπεια (2^η αλυσίδα). Μόνο όταν την αντιληφθεί και αλλάξει ρόλο και στο ύψος, θα οδηγηθεί στη λύση (3^η αλυσίδα). (Στέφανος, Λ, Φ2, 2β).



Πίνακας 4.17

Εσωτερικές ασυνέπειες στο σχήμα από λάθος απόδοση ρόλων στα στοιχεία του

		
1^η αλυσίδα (υπονοούμενοι ρόλοι: ΚΛ βάση, ΜΕ ύψος – άξονας συμμετρίας οδηγ. κατασκ.: κάθετη στο μέσο)	2^η αλυσίδα (υπονοούμενοι ρόλοι: ΚΛ ίση πλευρά, ΜΕ ύψος – άξονας συμμετρίας οδηγ. κατασκ.: διαβήτη ΙΙΙβ)	3^η αλυσίδα (υπονοούμενοι ρόλοι: ΚΛ ίση πλευρά, ΜΕ ύψος οδηγ. κατασκ.: διαβήτη ΙΙΙβ)
Μαθητής: Να πάρω ένα σημείο Ε πάνω στο ύψος, να ενώσω με το Κ και με το διαβήτη να πάρω ΚΜ (σαν ακτίνα και μετά μετράει ΚΜ=ΜΝ). Οπότε αν ενώσω (το Ν) με το Ε, θα προκύψει πάλι ένα ισοσκελές. (διαπιστώνει πως δεν είναι το ζητούμενο)	Μαθητής: να πάρουμε την ΚΕ, που είχα πάρει και πριν, και να τη φτιάξουμε ίση με την ΚΛ..... αλλά τότε το ύψος δεν θα ισχύει..... δε γίνεται Ερ: δεν κατάλαβα, τι δε γίνεται; Μαθητής: δεν γίνεται, γιατί το ύψος είναι αναγκαστικά και διχοτόμος στο ισοσκελές, άρα αυτό δεν θα ισχύει σε αυτή την περίπτωση....	Μαθητής: εκτός αν.... το ύψος ήτανε.....(κατασκευάζει δίπλα ένα πρόχειρο σκίτσο) φαίνεται πως το ύψος θα είναι εδώ πέρα, θα είναι αυτό εδώ. Άρα δε θα είναι το ύψος της κορυφής. Ερ: πώς το σκέφτηκες; Μαθητής: πήρα όλες τις εκδοχές και αναγκαστικά δεν έβγαине από την κορυφή (το ύψος). Το ΚΜ ήταν μικρότερο από το ΜΛ, άρα επειδή το ύψος είναι αναγκαστικά διάμεσος, δε θα μπορούσε να ισχύει αυτό. Άρα σκέφτηκα μήπως και το ύψος είναι κάποιας άλλης γωνίας.
Σχόλιο: η απόδοση των ρόλων επηρεάζεται από την εικόνα πρότυπο και τον προσανατολισμό της.	Σχόλιο: αλλάζει το ρόλο μόνο στο ένα στοιχείο (στην ΚΛ) και κρατάει το ρόλο του άλλου (ύψους), με αποτέλεσμα να μην είναι συμβατοί	Σχόλιο: Εξετάζοντας με συλλογισμούς όλες τις περιπτώσεις, καταλήγει στο σωστό ρόλο του ύψους
1^η αναδόμηση / αλλαγή ρόλου στην πλευρά: η δοθείσα ΚΛ γίνεται από βάση, ίση πλευρά.	2^η αναδόμηση / αλλαγή ρόλου στο ύψος: το δοθέν ύψος γίνεται από ύψος της βάσης, ύψος μιας ίσης πλευράς.	

II. Η νέα αλυσίδα ξεκινά από διαφορετικές οδηγίες κατασκευής

Στην περίπτωση αυτή ο μαθητής απεικονίζει νοερά, αλλά δεν μπορεί να κατασκευάσει την εικόνα του με τις οδηγίες που χρησιμοποίησε στην προηγούμενη αλυσίδα. Ξεκινά συνεπώς μια νέα αλυσίδα από την ίδια εικόνα, μεταβάλλοντας τους επόμενους κρίκους και, κατά πρώτον, την κατασκευή. Οι λόγοι που οδηγούν το μαθητή στην αλλαγή του κρίκου – κατασκευή μπορεί να είναι δυσκολίες που οφείλονται: (α) σε λάθος οδηγίες, σε σχέση με τα δεδομένα του προβλήματος, ή (β) σε σωστές οδηγίες που, όμως, αδυνατεί να τις προσαρμόσει ή, τέλος, (γ) στο ότι δεν μπορεί να γίνει η κατασκευή είτε για λόγους γεωμετρικής ασυνέπειας είτε από αδυναμία του μαθητή.

Παραδείγματα των δύο πρώτων περιπτώσεων έχουν δοθεί στην παράγραφο «στρατηγικές προσαρμογής των οδηγιών στα δεδομένα (περιορισμούς) του προβλήματος (4.22)». Εδώ θα σχολιαστεί μόνο η περίπτωση (γ).

(γ₁) Η εικόνα δεν είναι κατασκευάσιμη με τις οδηγίες που είχαν αρχικά επιλεγεί:

Όπως σχολιάσαμε και στην ενότητα 4.2.2 για την κατασκευή, σί' μαθητές δημιουργούν νοερά εικόνες και σχεδιάζουν πώς να τις κατασκευάσουν. Η νοερή εικόνα συλλαμβάνει γενικά το σύνολο των σχέσεων. Στο στάδιο της κατασκευής, που από το γενικό περνά στα επιμέρους στοιχεία και στις μεταξύ τους σχέσεις, οι μαθητές συχνά διαπιστώνουν πως τα σχέδιά τους είναι αδύνατο να υλοποιηθούν στο χαρτί, με τα δεδομένα του συγκεκριμένου προβλήματος. Στην πράξη αντιμετωπίζουν συγκεκριμένες δυσκολίες, όπως περιορισμοί, υπολογισμοί μεγεθών, αλλά και θέματα σχετικά με την κατασκευασιμότητα που δεν τα προβλέπει πάντα η νοερή απεικόνιση.

Μία τέτοια περίπτωση μπορούμε να παρακολουθήσουμε μέσα από τον επόμενο διάλογο, πάνω στο πρόβλημα 3^Γ. Ο μαθητής έχει καταλήξει σε μια εικόνα της λύσης και του τρόπου κατασκευής της, συνδυάζοντας τις απαντήσεις του στα δύο προηγούμενα ερωτήματα του προβλήματος (3^Α και 3^Β) (οδηγία II: παίρνοντας ίσες γωνίες). Στη νοερή του απεικόνιση υπάρχουν ημιευθείες, που ξεκινούν από τις κορυφές Α, Β, και Γ του τριγώνου και σχηματίζουν ίσες γωνίες με τις πλευρές ΑΒ και ΒΓ. Αυτές προφανώς συντρέχουν στο ίδιο σημείο, που είναι το ζητούμενο Σ. Δε συμβαίνει όμως το ίδιο, όταν κατασκευάζει το σχήμα στο χαρτί. Έτσι αναγκάζεται να αλλάξει οδηγίες κατασκευής. (Βαγγέλης, Φ1, 3Γ)

Μ: Άμα βρούμε ότι αυτό το τρίγωνο ΚΒΓ=ΛΑΒ, όχι.
(συγκρίνει τις απαντήσεις του στα ερωτήματα 3^Α και 3^Β)
.....άμα κάνουμε και τα δύο αυτά τρίγωνα θα βγει Κ, Λ στο ίδιο σημείο;
Δηλαδή να κάνω και τα δύο μαζί....



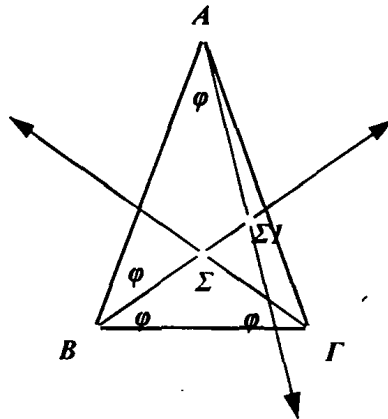
(αντλαμβάνεται σωστά πως, πρέπει να συνδυάσει τις κατασκευές των δύο προηγούμενων ερωτημάτων)

Να φτιάξω το $\Sigma\text{Β}\Gamma$ ισοσκελές και μετά (το άλλο) κάνουμε τον ίδιο τρόπο

Ερ: Τι είχες φέρει στα προηγούμενα;

Τη διχοτόμο, (φέρνει τις διχοτόμους των γωνιών B και Γ) στο σημείο που ενώνονται βάζουμε το Σ .

Μ: Υπολογίζω τη γωνία $B\Gamma$ να είναι ίση με την $A\Gamma$ ($=\varphi$), να φτιάξω μία. Δεν θα πάει εδώ... (το σημείο συνάντησης είναι το Σ)



Ερ: Η διχοτόμος της A δε θα συναντήσει τις άλλες δύο διχοτόμους στο Σ , έτσι;
Θα κόψει τη διχοτόμο της B σε άλλο σημείο.

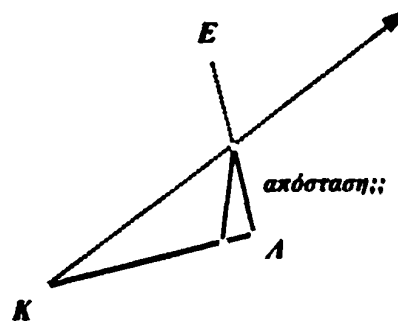
Στο ίδιο πρόβλημα, ένας άλλος μαθητής (Γιώργος, Φ1, 3^Γ) σκέφτεται αναλογικά. Όπως στο ερώτημα 3^B χρησιμοποίησε την οδηγία III^A με το διαβήτη, το ίδιο κάνει και εδώ. Κατασκευάζει με το διαβήτη τρία ίσα τόξα με κέντρα τις κορυφές. Αυτά όμως δεν περνάνε όλα από το ίδιο σημείο (σχήμα 4.29).

(γ₂) Υπάρχει η εικόνα, αλλά το παιδί δεν μπορεί να την κατασκευάσει: πρόκειται για μια συχνή περίπτωση, κατά την οποία ο μαθητής έχει μια εικόνα της λύσης, του λείπουν όμως οι απαραίτητες δεξιότητες ή γνώσεις για να την κατασκευάσει στο χαρτί. Σε κάθε προσπάθεια περιγράφει με ακρίβεια το σωστό τρόπο κατασκευής, αλλά δεν μπορεί να τον υλοποιήσει τεχνικά.

Στο παράδειγμα που παρατίθεται μια μαθήτρια επιχειρεί να λύσει το πρόβλημα 2^A, δυσκολεύεται όμως να κατασκευάσει την απόσταση από το Λ προς το ύψος και αλλάζει ελαφρά τον τρόπο κατασκευής. Παίρνει τυχαίο σημείο πάνω στο ύψος, φέρνει την απόστασή του από την $K\Lambda$ και πιστεύει πως φέρνει «την ίδια απόσταση από την άλλη μεριά». Παρότι η κατασκευή της παρουσιάζει πρωτοτυπία και προσπαθεί επιπλέον να χρησιμοποιήσει τη βασική ιδιότητα, το αποτέλεσμα δεν είναι σωστό. (Αγνή, Φ1, 2^A)

Μ: Αφού το τρίγωνο θα πρέπει να είναι ισοσκελές, και έχουμε τη μία πλευρά και το ύψος, θα μπορούσαμε να μετρήσουμε την απόσταση του σημείου Λ από το ύψος και την ίδια απόσταση να την προεκτείνουμε κατά ίσο και να ενώσουμε – αυτό θα είναι το σημείο E – και να ενώσουμε το E με το Λ και το K .

(βάζει το τριγωνάκι κάθετα στην ΚΛ, δηλαδή κατασκευάζει λάθος την απόσταση από το Λ στο ύψος)



για να βγει ισοσκελές θα βάλουμε το χάρακα στην πλευρά ΚΛ και θα μετρήσουμε την απόσταση του Λ από το ύψος, έτσι ώστε η απόσταση αυτή να είναι κάθετη στην πλευρά ΚΛ.

3 εκ και το σημείο Ε πρέπει να είναι κάπου εδώ.

(δε χάραξε την ΛΕ μόνο το σημείο σημείωσε)

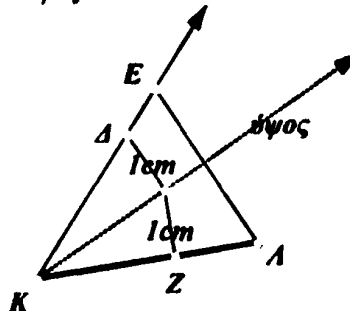
Λάθος, δε βγαίνει

Ερ: Γιατί;

Μ: Γιατί το σημείο ΛΕ δεν είναι το ύψος δεν πέφτει κάθετα στη βάση.
(αλλαγή στον τρόπο κατασκευής)

Θα προσπαθήσω τώρα να φέρω από κάποιο σημείο της πλευράς ΚΛ την απόσταση της πλευράς από το ύψος και την ίδια απόσταση μετά θα τη φέρω από την άλλη μεριά και το σημείο που θα προκύψει θα το ενώσω με το Κ και θα το προεκτείνω, και όταν έρθει στην ίδια απόσταση με το Λ θα το ενώσω.

Ερ: Άρα παίρνεις τυχαίο σημείο πάνω στο ύψος...



Μ: Ναι, (κατασκευάζει)

Έφερα τυχαίο ύψος στην πλευρά ΚΛ με το ύψος του τριγώνου

(από το τυχαίο σημείο του ύψους, πήρε την απόσταση προς την ΚΛ)

και μετά μέτρησα την απόσταση που έφερα και έφερα κάθετο ευθύγραμμο τμήμα στο ύψος από την άλλη μεριά. 1 εκ απόσταση, και το σημείο Δ που προέκυψε το ένωσα με το Κ, προέκτεινα την ΚΔ τόσο όσο χρειάζεται για να ενωθεί σε ευθεία με το σημείο Λ

Ερ: Γιατί είναι ισοσκελές;

Μ: Η απόσταση του ΚΛ από το ύψος είναι 1 εκ και αυτή η απόσταση είναι 1 εκ, οπότε το ύψος χωρίζει τη γωνία Κ σε δύο ίσα μέρη, οπότε είναι και μεσοκάθετος.

Είναι ύψος είναι και διχοτόμος, οπότε είναι μεσοκάθετος επειδή το ύψος με την πλευρά ΛΕ δημιουργεί ορθή γωνία.

(λάθος κατασκευή)

Ο τρόπος κατασκευής υποβάλλει με τη σειρά του και τα γεωμετρικά όργανα που θα χρησιμοποιηθούν. Αν το παιδί δεν είναι εξοικειωμένο με αυτά, δεν είναι αποτελεσματικό.

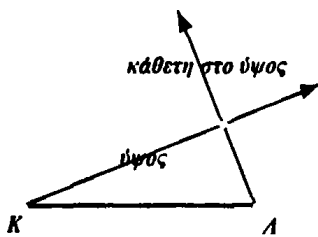
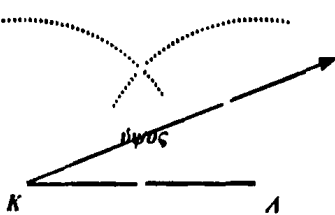
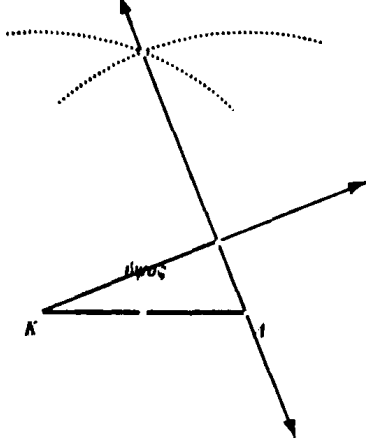
Αναγκάζεται τότε να αλλάξει τον τρόπο κατασκευής. Στην ουσία προτιμά να χρησιμοποιήσει ένα άλλο γεωμετρικό εργαλείο με το οποίο έχει μεγαλύτερη ευχέρεια.

Έτσι, παραδείγματος χάριν, στο πρόβλημα 2^α μία μαθήτρια δηλώνει πως θα φέρει από το Λ κάθετη στο ύψος, δοκιμάζει να χρησιμοποιήσει γι' αυτό το τρίγωνο, αλλά δεν τα κατορθώνει. Τότε αλλάζει γεωμετρικό όργανο και χρησιμοποιεί το μοιρογνωμόνιο με το οποίο μετρά δύο ίσες γωνίες $K1=K2$.

III. Η νέα αλυσίδα αποτελεί συνδυασμό δύο ή περισσότερων από τις αλυσίδες που προηγήθηκαν.

Είναι σύνθετες, σε περιπτώσεις μαθητών που έχουν φτιάξει επανειλημμένες αλυσίδες λειτουργιών χωρίς επιτυχία, στο τέλος να συνδυάζουν κάποιες από αυτές για να οδηγηθούν στη λύση. Πρόκειται ουσιαστικά για περιπτώσεις που, με μαθηματικούς όρους, θα τις χαρακτηρίζαμε ως σύνθεση εικόνων ή τομή δύο γεωμετρικών τόπων. Τις περισσότερες φορές οι συνδυαστικές αυτές ενέργειες γίνονται ασυνείδητα από τους μαθητές.

Στο παράδειγμα που παρατίθεται (σχήμα 4.50), ο μαθητής προσπαθεί να λύσει το πρόβλημα 2^α

1 ^η προσπάθεια	2 ^η προσπάθεια	3 ^η προσπάθεια
		
Αρχικά φέρνει την κάθετη από το Λ στο ύψος (δεν μπορεί να σκεφτεί, όμως, πού να πάρει το E)	Κατόπιν φέρνει δύο ίσα τόξα με κέντρα τα K και Λ (βρίσκει έτσι το E, αλλά δεν λαμβάνει υπόψη το ύψος)	Τέλος, ξανασκέφτεται τις δύο προηγούμενες κατασκευές και ασυνείδητα τις συντονίζει στο ίδιο σχήμα (με δοκιμές, προσπαθεί να πάρει ακτίνα τέτοια, που τα τόξα να τέμνονται πάνω στην κάθετη)

σχήμα 4.50 Συνδυασμός διαδοχικών αλυσίδων για τη λύση του προβλήματος



ΣΧΟΛΙΑ 4^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

¹ Στην περίπτωση που το Σ δεν είναι «κορυφή», δηλαδή, κοινό σημείο των δύο ίσων πλευρών, η λύση που μπορεί να δοθεί είναι «εκτός πλαισίου» κατά την έννοια που θα περιγραφεί παρακάτω.

² για παράδειγμα στο 2^ο της 1^{ης} φάσης ή στο 4^ο πρόβλημα της 3^{ης} φάσης

³ μπορεί το πρόβλημα να δίνει το χαρακτηρισμό «ύψος» στη διακεκομμένη ημιευθεία, όμως μένει στο μαθητή να αποφασίσει ποιο ύψος είναι, το ύψος – άξονας συμμετρίας ή ένα από τα άλλα δύο ίσα ύψη. Είναι φανερό ότι το ειδικό βάρος των δύο περιπτώσεων είναι διαφορετικό για την τοποθέτηση και κατασκευή του ισοσκελούς.

⁴ Δεν είναι δυνατόν να κατασκευαστεί ισοσκελές $\triangle AB$ με $AB=AA$, γιατί το σημείο A πέφτει έξω από το τρίγωνο. Συνεπώς, όσοι μαθητές δίνουν στο AB το ρόλο ίσης πλευράς, σύντομα αναθεωρούν και της δίνουν το ρόλο της βάσης.

⁵ Σύμφωνα με την Presmeg, πρόκειται για «μια εικόνα που επιμένει».

⁶ Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ισαπέχει από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος.

⁷ Δηλαδή, δεν αναγνωρίζουν πως κάθε σημείο της μεσοκαθέτου έχει την ιδιότητα που αναφέραμε.

⁸ το ίδιο ισχύει και για το ισοσκελές τρίγωνο $\triangle KAB$

⁹ Είτε τοποθετούσαν την κορυφή στο πλάι και κατασκεύαζαν με χάρακα τις πλευρές είτε τοποθετούσαν τη βάση λοξά και κατόπιν έφτιαχναν τις πλευρές με το διαβήτη.

¹⁰ Τοποθετούν πρώτα τον άξονα και ακολουθώντας δημιουργούν γύρω του το ισοσκελές.

¹¹ Σχετικά θέματα αναλύονται διεξοδικά στο κεφάλαιο «Αλυσίδες λειτουργιών» 4.2.4.

¹² ενώ ο ρόμβος ανήκει στην ίδια οικογένεια με το παραλληλόγραμμο, εντούτοις η σχέση τους με το ισοσκελές είναι εντελώς διαφορετική, όπως θα φανεί στην ανάλυση των ευρημάτων.

¹³ Στο τέλος, το 2^ο πρόβλημα τους θέτει την ερώτηση «Ποια, από τις κατασκευές που περιγράφεις στα σενάρια σου, θεωρείς καλύτερη και γιατί».

¹⁴ Στην περίπτωση που το Σ δεν είναι «κορυφή», δηλαδή, κοινό σημείο των δύο ίσων πλευρών, η λύση που μπορεί να δοθεί είναι «εκτός πλαισίου» κατά την έννοια που θα περιγραφεί παρακάτω.

¹⁵ Δηλαδή, να αναγνωριστεί πως το γεγονός ότι κατασκευάστηκε $\triangle A = \triangle B$ συνεπάγεται ίσα τόξα (1^η ιδιότητα του κύκλου), άρα η ακτίνα OA που διχοτομεί το τόξο $\triangle A \triangle B$ θα είναι μεσοκάθετος της χορδής AB (2^η ιδιότητα του κύκλου).

¹⁶ Για παράδειγμα τα $\triangle MNKB$, $\triangle MKB$ έχουν: MB ίση πλευρά ή BK βάση.

¹⁷ Στο 2^ο πρόβλημα, οι μαθητές συγκρίνουν τα σενάρια κατασκευής του ρόμβου που έγραψαν οι ίδιοι, ενώ στο 3^ο πρόβλημα συγκρίνουν τις κατασκευές που περιγράφουν στα σενάρια κατασκευής ισοσκελούς τριγώνου, ξεκινώντας από ένα ισοσκελές τραπέζιο.

¹⁸ να είναι παράλληλο και ίσο με το μισό της τρίτης πλευράς

¹⁹ πρόκειται γι αυτό που ζητάμε να αποδείξει η μαθήτρια

²⁰ Κάποιος μπορεί να «ζωγραφίσει» ένα λουλούδι ή ένα ζώο, αλλά πρέπει να «κατασκευάσει» ένα πεντάγωνο με γεωμετρικά εργαλεία και σύμφωνα με τις μαθηματικές του ιδιότητες.

²¹ Σύμφωνα με τον Schoenfeld στο «On having and using geometric knowledge».

²² Στην οδηγία I, πχ, κατασκευάζονται δύο ίσες πλευρές (άμεσα) και η μεταξύ τους γωνία (έμμεσα), οπότε το αποτέλεσμα είναι ένα μοναδικό ισοσκελές και οποιοδήποτε άλλο με τα ίδια στοιχεία θα είναι ίσο με αυτό, σύμφωνα με το κριτήριο (Π-Γ-Π). Στην οδηγία II, κατασκευάζεται η πλευρά (=βάση) και δύο ίσες γωνίες με κορυφές τα άκρα της (Γ-Π-Γ) κλπ.

²³ Ένα «οπτικό θεώρημα» σύμφωνα με τον Davis, είναι και το εξής:

Σε ένα κύκλο C , ακτίνας l , φτιάξε ένα μικρότερο κύκλο C_1 , που να περιέχεται στον C

Φτιάξε ένα κύκλο C_2 , μέσα στο C , που να μην έχει κοινά σημεία με τον C_1

Φτιάξε ένα κύκλο C_3 , μέσα στο C , που να μην έχει κοινά σημεία με τον C_1 και τον C_2

Μπορείς να συνεχίσεις αυτή τη διαδικασία επ' άπειρον;

²⁴ Είναι χαρακτηριστικό το παράδειγμα πολλών μαθητών που, προσπαθώντας να συγκρίνουν δύο τρίγωνα, δέχονται σαν αληθινή κάθε σχέση που «βλέπουν» στο σχήμα τους και όχι αυτές που δίνει η υπόθεση του προβλήματος. Αποτέλεσμα αυτού είναι να καταλήγουν σε λανθασμένα συμπεράσματα.

²⁵ Αναλυτικά αναφέρονται στο κεφάλαιο της κατασκευής

²⁶ Για παράδειγμα, αναγνωρίζουμε ότι ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο και εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

²⁷ Πρόκειται για μια μορφή διάστασης ανάμεσα στην αιτιολόγηση και την κατανόηση, με την έννοια που βάζει ο Rodd και αναφέρεται προηγουμένως.

²⁸ Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι τα βήματα για την κατασκευή της μεσοκαθέτου με κανόνα και διαβήτη.

²⁹ Μια συμπεριφορά χαρακτηρίζεται μαθηματική συμπεριφορά όταν ο συλλογισμός βασίζεται στην όλη δομή του αξιωματικού συστήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και σε κανόνες της Λογικής.

³⁰ μπορεί το πρόβλημα να χαρακτηρίζει την ημιευθεία ως ύψος, όμως ο ρόλος δεν καθορίζεται μόνο από αυτή την ονομασία αλλά και σε σχέση με τη θέση του συγκεκριμένου ύψους στην εικόνα – πρότυπο. Εδώ το ύψος μπορεί να είναι και άξονας συμμετρίας ή απλό ύψος προς μία από τις ίσες πλευρές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ



5 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο τελευταίο κεφάλαιο, αρχικά, υπενθυμίζεται ο προσανατολισμός της παρούσης έρευνας προς τη διδακτική της Γεωμετρίας. Στο πλαίσιο αυτό, εξάγονται τα συμπεράσματα ανά υπόθεση εργασίας και διατυπώνονται προτάσεις για περαιτέρω έρευνα. Τα συμπεράσματα αρθρώνονται, κυρίως, γύρω από τη λειτουργία της «απόδοσης ρόλου». Αυτή αποτελεί το βασικότερο εύρημα που βοηθά στην υποστήριξη και στην εμβάθυνση των υποθέσεων της παρούσης έρευνας.

Η Μαθηματική δραστηριότητα έχει δύο όψεις. Η μια είναι ορατή και περιλαμβάνει τα μαθηματικά αντικείμενα και τις έγκυρες διαδικασίες που χρησιμοποιούνται για τη λύση των προβλημάτων. Η άλλη είναι κρυφή, παρ' όλα αυτά αποφασιστική, και περιλαμβάνει τις γνωστικές λειτουργίες με τις οποίες κανείς εκτελεί τις έγκυρες διαδικασίες και αποκτά πρόσβαση στα μαθηματικά αντικείμενα (Duval, 2002). Από Μαθηματική άποψη ενδιαφέρει μόνο η πρώτη – ορατή – όψη, όμως από διδακτική άποψη και οι δύο όψεις είναι σημαντικές και ισοδύναμες.

Στην παρούσα έρευνα παρακολουθούμε και τις δύο όψεις. Στο πλαίσιο αυτό μελετώνται ταυτόχρονα οι επιστημολογικοί περιορισμοί της γεωμετρικής δραστηριότητας και οι γνωστικές λειτουργίες που αυτή περιλαμβάνει, δίχως να διαχωρίζονται όπως συμβαίνει συνήθως. Κάθε πρόβλημα που δίνεται προς λύση στους μαθητές κατά τη διεξαγωγή της έρευνας αναλύεται διπλά, τόσο μαθηματικά όσο και γνωστικά. Στόχος είναι η ευαισθητοποίηση των δασκάλων των μαθηματικών σχετικά με τις γνωστικές παραμέτρους που πρέπει να λαμβάνουν υπ' όψη τους κατά τη διδασκαλία.

Οι γνωστικές λειτουργίες που κινητοποιούνται κατά την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων γίνονται πάνω στα συστήματα αναπαράστασης που χρησιμοποιούνται στη Γεωμετρία. Άλλοτε έχουμε επεξεργασίες μέσα στο ίδιο σύστημα αναπαράστασης και άλλοτε μετατροπές από σύστημα σε σύστημα. Η γεωμετρική δραστηριότητα απαιτεί συνεχείς μεταβάσεις από το λεκτικό στο σχηματικό σύστημα αναπαράστασης (γεωμετρικά σχήματα) και αντίστροφα. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι παράγοντες που επηρεάζουν τις επεξεργασίες και τις μετατροπές ανάμεσα σε συστήματα αναπαράστασης και αποτελούν, σύμφωνα με τον Duval (2002), σημαντικό πεδίο έρευνας για τη διδακτική των Μαθηματικών. Επιπλέον ο Duval θεωρεί πως η έρευνα πρέπει να αναλύσει τις λειτουργίες στα πλαίσια μιας καθορισμένης δραστηριότητας.

Με αφορμή αυτά τα ερευνητικά κενά, στην παρούσα μελέτη αναλύουμε τις τρεις λειτουργίες που βρίσκονται πίσω από τη γεωμετρική σκέψη στο πλαίσιο μιας καθορισμένης

δραστηριότητας, της «γεωμετρικής κατασκευής». Ακόμα διερευνούμε τις παραμέτρους που επηρεάζουν τις μετατροπές / επεξεργασίες ανάμεσα στα συστήματα αναπαράστασης που χρησιμοποιούνται στη Γεωμετρία και το πώς αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Η διερεύνηση γίνεται με άξονες τα ερευνητικά ερωτήματα. Στα επόμενα παρουσιάζονται τα συμπεράσματα στα οποία κατέληξε η έρευνα και αφορούν στην κάθε υπόθεση εργασίας και τίθενται τα ερωτήματα που παραμένουν ανοιχτά για περαιτέρω έρευνα.

5.1 ΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ

1^α υπόθεση: σχετικά με την αναγνώριση και τη χρήση του ισοσκελούς τριγώνου

1^α) η αναγνώριση και η χρήση γίνονται με βάση την εικόνα – πρότυπο.

1^β) το σημαντικότερο στοιχείο της εικόνας – πρότυπο του ισοσκελούς είναι το ύψος – άξονας συμμετρίας.

1^γ) η εικόνα – πρότυπο του ισοσκελούς αποτελεί τον καθοριστικό παράγοντα για την αναγνώριση των επιμέρους στοιχείων του γεωμετρικού σχήματος.

1^δ) η αναγνώριση και χρήση του ισοσκελούς σχετίζονται με τις πρωταρχικές και δευτερεύουσες δομές του γεωμετρικού σχήματος

1^ε) η αναγνώριση και χρήση του ισοσκελούς σχετίζονται με την αλλαγή διάστασης

Υπόθεση 1^α) Σύμφωνα με τα στοιχεία φαίνεται πως μια γεωμετρική κατασκευή γίνεται ευκολότερα αν τα δεδομένα της αποτελούν στοιχεία της πρότυπης εικόνας. Συγκεκριμένα, οι μαθητές αναγνωρίζουν ευκολότερα ένα σχήμα από ένα μέρος του, αν το μέρος που δίνεται αποτελεί μέρος του προτύπου. Στην περίπτωση αυτή μπορούν να το συμπληρώσουν εύκολα κάνοντας μια γεωμετρική κατασκευή. Τότε λέμε πως υπάρχει σύμπτωση ανάμεσα στο υπό κατασκευή σχήμα και στην εικόνα πρότυπο η οποία λειτουργεί ως σχήμα αναφοράς. Αν τα δοθέντα στοιχεία του σχήματος δεν ανήκουν στην εικόνα πρότυπο, οι μαθητές δυσκολεύονται ιδιαίτερα τόσο στην αναγνώριση όσο και στην κατασκευή του.

Όταν δίνεται ένα μέρος του προτύπου ο προσανατολισμός του σχήματος δεν δημιουργεί εμπόδια. Οι μαθητές με φυσικό τρόπο γυρνούν το χαρτί τους ώστε να έρθει το δοθέν σχήμα στον επιθυμητό προσανατολισμό (ο άξονας συμμετρίας του ισοσκελούς κατακόρυφος). Το εντελώς αντίθετο παρατηρείται στην περίπτωση που τα δοθέντα στοιχεία δεν μπορούν να ενταχθούν στην εικόνα - πρότυπο. Τότε ο προσανατολισμός αποτελεί επιβαρυντικό παράγοντα για όλες τις λειτουργίες του μαθητή (νοερή απεικόνιση, κατασκευή, αιτιολόγηση).

Σύμφωνα με τα παραπάνω επιβεβαιώνεται η υπόθεσή μας πως, στην περίπτωση της γεωμετρικής κατασκευής, η αναγνώριση και χρήση του ισοσκελούς γίνονται με βάση την εικόνα πρότυπο.

Υπόθεση 1^β) Από τα γεωμετρικά σχήματα των μαθητών στα περισσότερα προβλήματα φαίνεται πως η εικόνα πρότυπο του ισοσκελούς τριγώνου ενσωματώνει και το ύψος – άξονα συμμετρίας του. Με τη βοήθεια του ύψους τα παιδιά μπορούν ευκολότερα να αναγνωρίσουν το ισοσκελές μέσα σε ένα πιο σύνθετο σχήμα, να το κατασκευάσουν ή να το μετασχηματίσουν και μάλιστα ανεξάρτητα από τον προσανατολισμό. Τα στοιχεία αυτά επιβεβαιώνουν τη σημασία του ύψους – άξονα συμμετρίας ως συστατικού της εικόνας πρότυπο.

Υπόθεση 1^γ) Ιδιαίτερη σημασία στην αναγνώριση και κατασκευή του ισοσκελούς τριγώνου έχει η λειτουργία που ονομάζουμε «απόδοση ρόλου» στα στοιχεία του γεωμετρικού σχήματος. Η παρούσα έρευνα αναδεικνύει τη σχέση ανάμεσα στην αποτελεσματικότητα στη λύση γεωμετρικού προβλήματος και στην ικανότητα απόδοσης ρόλων.

Η επιτυχημένη γεωμετρική λειτουργία συμβαδίζει με την ικανότητα του μαθητή να περιγράφει τις εικόνες (νοερές ή υλικές) αποδίδοντας στα διάφορα στοιχεία τους ρόλους. Η απόδοση ρόλων γίνεται με βάση την εικόνα - πρότυπο, ενώ οι προσδοκίες που αυτή γεννά δεν αλλάζουν εύκολα. Ρόλοι αποδίδονται τόσο σε στοιχεία που ήδη υπάρχουν στο σχήμα όσο και σε στοιχεία τα οποία ο μαθητής σκοπεύει να προσθέσει σε αυτό και απλά τα φαντάζεται.

Η απόδοση ρόλου σε ένα στοιχείο του γεωμετρικού σχήματος επηρεάζει τους ρόλους μιας σειράς άλλων στοιχείων στο σχήμα. Η σημασία του πρότυπου για την απόδοση ρόλων φαίνεται από το ότι, χάρη σε αυτό, το σύνολο των ρόλων που αποδίδονται σε διάφορα στοιχεία ενός ημιτελούς σχήματος είναι συνεπές. Παρατηρούμε πως μαθητές που δυσκολεύονται να καταλήξουν σε μια σωστή κατασκευή του ζητουμένου από το πρόβλημα δίνουν στα στοιχεία του σχήματος ρόλους δίχως εσωτερική συνέπεια. Τα λόγια των μαθητών αποκαλύπτουν πως αδυνατούν να φανταστούν το πρότυπο και να το συγκρίνουν νοερά με το ερέθισμα.

Ένας παράγοντας που επηρεάζει την απόδοση ρόλου είναι ο βαθμός ομοιότητας του ερεθίσματος με την εικόνα πρότυπο. Η απόδοση ρόλων είναι τόσο ευκολότερη, όσο περισσότερο μοιάζει το ερέθισμα με την εικόνα πρότυπο. Η ομοιότητα καθορίζεται από δύο παράγοντες, τον προσανατολισμό και τη συμμετρία. Συγκεκριμένα στην περίπτωση που το ερέθισμα έχει ίδιο προσανατολισμό με το πρότυπο αυξάνει ο βαθμός ομοιότητας και διευκολύνεται η αναγνώριση. Το ύψος – άξονας συμμετρίας αναδεικνύεται ως το ισχυρό στοιχείο του προτύπου. Ο μαθητής το χρειάζεται για να φέρει νοερά στον ίδιο προσανατολισμό το πρότυπο με το ερέθισμα, ταυτίζοντας τους άξονες συμμετρίας τους,

ώστε να τα συγκρίνει. Με τη βοήθεια του ύψους - άξονα συμμετρίας αναγνωρίζεται ή κατασκευάζεται το πρότυπο σε οποιαδήποτε θέση.

Με βάση την ανάλυση των ευρημάτων ανά λειτουργία (4.2), προκύπτουν επιπλέον τα εξής ευρήματα, που αφορούν στην «απόδοση ρόλων»:

Η ικανότητα του μαθητή να αποδίδει ρόλο στα στοιχεία της νοερής του εικόνας σηματοδοτεί το βαθμό εξέλιξης του γνωστικού Σχήματος που έχει για το ισοσκελές τρίγωνο (ΣΙΤ) (υπόθεση 4^α). Παράγοντες που αποκαλύπτουν το βαθμό ωρίμανσης του ΣΙΤ είναι:

- ο τρόπος με τον οποίο το παιδί επιλέγει τους ρόλους, δηλαδή αν το κάνει στηριζόμενο αποκλειστικά στη νοερή του εικόνα ή αν χρειάζεται και σε ποιο βαθμό η υποστήριξη από ένα υλικό σχήμα
- η συνέπεια ανάμεσα στους ρόλους που αποδίδονται και
- η δυνατότητα του μαθητή να μεταβάλει κάποιο ρόλο, αν αντιληφθεί ότι δεν αποδόθηκε ορθά.

Υπόθεση 1^β) Είδαμε πως η αναγνώριση συνδέεται στενά με την απόδοση ρόλων στα στοιχεία του σχήματος. Η αναγνώριση στη Γεωμετρία, όμως, δεν είναι εύκολη υπόθεση. Οι μαθητές αντιμετωπίζουν μεγάλες δυσκολίες με τα γεωμετρικά σχήματα γιατί το να «βλέπεις» στη Γεωμετρία έχει, για τα περισσότερα παιδιά, χαρακτήρα μη φυσικό. Αυτό δεν οφείλεται στα στοιχεία που περιέχονται στο γεωμετρικό σχήμα και είναι συνήθως λιγότερα από όσα υπάρχουν σε μια οποιαδήποτε άλλη εικόνα. Η αιτία είναι πως οι μαθητές πρέπει να επιλέξουν ποια στοιχεία από αυτά είναι σχετικά, στο πλαίσιο του δοθέντος προβλήματος. Τα σχετικά στοιχεία, όπως προκύπτει από τα πρωτόκολλα των μαθητών, δεν είναι πάντα αυτά που προσέχουν με την «πρώτη ματιά».

Η αναγνώριση και η απόδοση ρόλων στα στοιχεία ενός σχήματος επηρεάζονται σε μεγάλο βαθμό από τους νόμους της οπτικής αντίληψης. Γι' αυτό οι οπτικές μεταβλητές πρέπει να λαμβάνονται σοβαρά υπ' όψη στη διδασκαλία της Γεωμετρίας (Duval, 2002). Οι μαθητές αυθόρμητα μόλις δουν ένα σχήμα διακρίνουν τις πρωταρχικές του δομές (Vurpillot, 1972, σ.34) οπότε δίνουν ρόλους στα στοιχεία τους. Όπως προκύπτει από τα στοιχεία της παρούσης έρευνας, ρόλος αποδίδεται αρχικά σε ολόκληρο στοιχείο και όχι σε μέρος του ενώ κάθε στοιχείο έχει ένα μόνο ρόλο.

Η Vurpillot (1972) συνδέει την ικανότητα λύσης προβλήματος με την αποδέσμευση του μαθητή από τις πρωταρχικές δομές. Συγκεκριμένα οι σωστές απαντήσεις σε προβλήματα σχετικά με σύνθετα γεωμετρικά σχήματα αυξάνουν καθώς το παιδί απελευθερώνεται από τις πρωταρχικές και διακρίνει τις δευτερεύουσες δομές (σ.37). Η παρούσα έρευνα εξειδικεύει τη

θέση αυτή και συνδέει την αποδέσμευση από τις πρωταρχικές δομές με τη λειτουργία της απόδοσης ρόλου. Συγκεκριμένα μελετά τους ρόλους που αποδίδουν οι μαθητές σε στοιχεία που ανήκουν σε δευτερεύουσες δομές, καθώς και τις δυσκολίες που συναντούν.

Η ανάλυση των πρωτοκόλλων δείχνει πως, στις δευτερεύουσες δομές οι ρόλοι γίνονται συνθετότεροι γιατί:

A) εμφανίζονται στοιχεία με διπλό ρόλο, δηλαδή στοιχεία που ανήκουν σε δύο υπό σχήματα και έχουν διαφορετικό ρόλο στο καθένα

B) εμφανίζονται στοιχεία που έχουν διαφορετικό ρόλο από το ρόλο ενός μέρους τους.

Στις περιπτώσεις αυτές οι μαθητές αντιμετωπίζουν πολύ μεγάλες δυσκολίες στη διάκριση των διαφορετικών ρόλων.

Τα στοιχεία της έρευνάς μας δείχνουν πως τα παιδιά αναγνωρίζουν και προτιμούν να εργάζονται με γεωμετρικά στοιχεία που μεταφέρονται ολόκληρα από ένα υπό σχήμα σε άλλο, διατηρώντας τον ίδιο ρόλο, δηλαδή με στοιχεία των πρωταρχικών δομών.

Αδυναμίες αυτής της φύσης οδηγούν στην αναποτελεσματικότητα των μαθητών κατά τη λύση προβλήματος. Καθώς ο διπλός ρόλος αναφέρεται στη λεκτική κατανόηση του σχήματος, η αδυναμία αναγνώρισής του περιορίζει την κατανόηση στο αντιληπτικό επίπεδο. Τα παιδιά που δεν διακρίνουν το κοινό στοιχείο δύο διαφορετικών υπό σχημάτων ούτε μπορούν να αποδώσουν τους αντίστοιχους ρόλους δεν είναι δυνατόν να μεταφέρουν πληροφορίες από το ένα υπό σχήμα στο άλλο ώστε να λύσουν το πρόβλημα.

Υπόθεση 1^ε) Με τη διάκριση των υπό σχημάτων που υπάρχουν σε ένα γεωμετρικό σχήμα και με την απόδοση ρόλων στα στοιχεία του συνδέεται η αλλαγή στη διάσταση στην οποία βλέπουμε το σχήμα. Η τελευταία αποτελεί βασική προϋπόθεση για να διαδραματίσει η νοερή απεικόνιση τον ευρετικό της ρόλο (Duval, 1998, σ.44). Τα στοιχεία δείχνουν πως οι περισσότεροι μαθητές βλέπουν το ισοσκελές στην ίδια διάσταση, ανεξάρτητα με το πρόβλημα που αντιμετωπίζουν. Το ποια είναι αυτή η διάσταση (1D ή 2D) αποκαλύπτεται αν εστιάσουμε και αναλύσουμε τις ενέργειές τους, για παράδειγμα, τον τρόπο με τον οποίο ξεπερνούν τα εμπόδια που θέτει ο προσανατολισμός, το πώς μετασχηματίζουν ή συγκρίνουν τα τρίγωνα κλπ.

Η αλλαγή διάστασης επιτρέπει στους μαθητές να αναγνωρίζουν τα επιμέρους στοιχεία του σχήματος και να αποδίδουν ρόλους σε αυτά. Η σταθερότητα στη διάσταση (όποια και αν είναι αυτή) αποτελεί μειονέκτημα. Κατά την αλλαγή διάστασης δημιουργείται μια αμφίδρομη κίνηση από τη μία στις δύο διαστάσεις και αντίστροφα που οδηγεί στη κατανόηση του σχήματος. Τα στοιχεία της έρευνάς μας επιβεβαιώνουν πως η

αποτελεσματικότητα στη λύση προβλήματος συνδέεται με την ευελιξία του μαθητή να αναγνωρίζει και να χρησιμοποιεί το σχήμα. στην κάθε περίπτωση, σε εκείνη τη διάσταση που οδηγεί στην ευκολότερη λύση.

2^η υπόθεση: η σύνδεση του γνωστικού Σχήματος του ισοσκελούς τριγώνου (ΣΙΤ) με άλλα γνωστικά Σχήματα γίνεται μέσα από κοινά στοιχεία των αντίστοιχων γεωμετρικών σχημάτων

Προκειμένου να εξετάσουμε τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να συνδεθεί το ΣΙΤ με άλλα γνωστικά Σχήματα, επιλέγουμε και συγκρίνουμε το ισοσκελές τρίγωνο με γεωμετρικά σχήματα που έχουν διαφορετικό βαθμό ομοιότητας προς αυτό. Η ανάλυση των στοιχείων δείχνει πως:

- Όταν οι μαθητές αναγνωρίζουν πως δύο γεωμετρικά σχήματα έχουν αρκετά κοινά στοιχεία (όπως στην περίπτωση του ρόμβου με το ισοσκελές τρίγωνο) μπορούν να μεταφέρουν και να χρησιμοποιήσουν μεγάλα κομμάτια πληροφοριών από το ένα γνωστικό Σχήμα στο άλλο.
- Όταν οι μαθητές διακρίνουν ένα κοινό στοιχείο με τον ίδιο ρόλο στα δύο γεωμετρικά σχήματα τότε με τη βοήθειά του μπορούν να μεταφέρουν μια ιδιότητα από το από το ένα γνωστικό Σχήμα στο άλλο.
- Στην περίπτωση που υπάρχει κοινός ρόλος αλλά δεν υπάρχει κοινό στοιχείο των δύο γεωμετρικών σχημάτων για να μεταφερθεί, οι μαθητές είναι αναποτελεσματικοί στη μεταφορά πληροφοριών από το ένα γνωστικό Σχήμα στο άλλο.

Ερευνητές συνδέουν τη σκέψη σε «μεγάλα κομμάτια πληροφοριών» με την υψηλή επίδοση και με καλύτερες ποιοτικά συνδέσεις (Lawson & Chinnappan, 2000, Koedinger & Anderson, 1990). Συνεπώς με αυτή τη θέση και τα ευρήματα της παρούσης έρευνας εξειδικεύουν τον τρόπο με τον οποίο μπορούν να συνδεθούν δύο γνωστικά Σχήματα στην περίπτωση της Γεωμετρίας. Συγκεκριμένα οι συνδέσεις μεταξύ δύο γνωστικών Σχημάτων (που το καθένα δημιουργείται με πυρήνα μια γεωμετρική έννοια) γίνονται με τη βοήθεια κοινών στοιχείων με τον ίδιο ρόλο στα δύο γεωμετρικά σχήματα. Αυτά τα κοινά στοιχεία λειτουργούν ως κανάλια μεταφοράς των πληροφοριών από Σχήμα σε Σχήμα.

Η σκέψη σε «μεγάλα κομμάτια πληροφοριών», στην περίπτωση της έρευνάς μας, αναφέρεται σε δύο γεωμετρικά σχήματα που έχουν περισσότερα του ενός κοινά στοιχεία με ίδιους ρόλους. Τότε η συνειδητή γνώση της μιας δομής μεταφέρεται αυτούσια σε ένα άλλο Σχήμα απαλλάσσοντας το μαθητή από την ανάγκη να επαναλαμβάνει τις ίδιες εργασίες (Βυγκότσκι, 1988), ή να μαθαίνει νέες πληροφορίες. Επιπλέον ενισχύει την αυτοπεποίθησή

του καθώς χρησιμοποιεί γνωστές διαδικασίες. Η θέση αυτή μένει να διερευνηθεί περαιτέρω με επόμενες έρευνες.

3^η υπόθεση: η συμμετρία παίζει αποφασιστικό ρόλο στη σύνδεση του ισοσκελούς τριγώνου με άλλα γεωμετρικά σχήματα και κατ' επέκταση, στη σύνδεση του ΣΙΤ με τα αντίστοιχα γνωστικά σχήματα.

Είναι δυνατόν δύο γεωμετρικά σχήματα να μην πληρούν την προηγούμενη προϋπόθεση, δηλαδή να μην έχουν κοινά στοιχεία ή ρόλους (όπως στην περίπτωση του κύκλου με το ισοσκελές τρίγωνο). Τότε όπως φαίνεται από τα στοιχεία της έρευνας οι μαθητές συνδέουν αρχικά τα γεωμετρικά σχήματα σε αντιληπτικό επίπεδο μέσα από καθολικές ιδιότητες, όπως η συμμετρία. Τοποθετούν νοερά το ένα γεωμετρικό σχήμα πάνω στο άλλο ταυτίζοντας τους άξονες συμμετρίας τους (εφ' όσον διαθέτουν). Η ενέργεια αυτή αποτελεί το πρώτο βήμα. Στη συνέχεια πρέπει να εντοπίσουν κάποιο κοινό στοιχείο ώστε να περάσουν πληροφορίες από το ένα γνωστικό Σχήμα στο άλλο (όπως στην περίπτωση του ισοσκελούς τραπέζιου με το ισοσκελές τρίγωνο).

Η ύπαρξη συμμετρίας στα δύο γεωμετρικά σχήματα αποτελεί παράγοντα που μπορεί να οδηγήσει στη σύνδεση των αντίστοιχων γνωστικών Σχημάτων σε αντιληπτικό επίπεδο. Δεν αρκεί όμως από μόνη της για αποτελεσματική μαθηματική λειτουργία, η οποία προϋποθέτει επιπλέον τη λειτουργική και διαλεκτική κατανόηση του σχήματος.

4^η υπόθεση: η ανίχνευση της εξέλιξης του ΣΙΤ γίνεται μέσα από τις τρεις λειτουργίες του (την νοερή απεικόνιση, την κατασκευή και την αιτιολόγηση).

4^α. η εξέλιξη του ΣΙΤ είναι μη γραμμική

4^β. η εξέλιξη συσχετίζεται με το συντονισμό των τριών λειτουργιών.

4^γ. η ικανότητα του μαθητή να αναγνωρίζει τα επιμέρους στοιχεία του γεωμετρικού σχήματος παίζει αποφασιστικό ρόλο στην εξέλιξη και των τριών λειτουργιών.

Υπόθεση 4^α) Στην αφετηρία της παρούσης μελέτης υποθέτουμε πως το γνωστικό Σχήμα του ισοσκελούς τριγώνου (ΣΙΤ) εξελίσσεται, και μάλιστα μη γραμμικά, και για τον έλεγχο της υπόθεσης θέτουμε κριτήρια ως προς τις τρεις λειτουργίες, τη νοερή απεικόνιση, την κατασκευή και την αιτιολόγηση. Τα στοιχεία που προκύπτουν από την έρευνα επιβεβαιώνουν την εξέλιξη και μάλιστα μας υποδεικνύουν πώς αυτή διακρίνεται, ανά λειτουργία.

- Η εξέλιξη, σχετικά με τη νοερή απεικόνιση:



Ο τρόπος με τον οποίο ο μαθητής δημιουργεί τη νοερή εικόνα του προβλήματος μπορεί να μας δώσει πληροφορίες για την εξέλιξη του ΣΙΤ του. Το παιδί μπορεί να καταλήγει στη νοερή εικόνα του προβλήματος και της λύσης πριν περάσει στην κατασκευή της, ή να έχει μια μερική εικόνα της λύσης, την οποία να συμπληρώνει ακολούθως, σε αλληλεπίδραση με το υλικό σχήμα. Τέλος, ο μαθητής μπορεί να αδυνατεί να μορφοποιήσει στο νου κάποια εικόνα της λύσης και να εργάζεται αποκλειστικά στο χαρτί. Οι διαφορετικές αυτές περιπτώσεις, συναντώνται στους μαθητές που συμμετέχουν στην έρευνα. Η διαφορά τους εντοπίζεται στις ακόλουθες παραμέτρους:

- στο βαθμό αποτελεσματικότητας με τον οποίο κάθε μαθητής κατασκευάζει μια νοερή εικόνα που να αποδίδει τα δεδομένα του προβλήματος
- στην ικανότητά του να αντεπεξέλθει στο νοητικό φόρτο που απαιτείται
- στην ικανότητα του μαθητή να πειραματίζεται με την νοερή του εικόνα, ώστε να καταλήξει στη λύση του προβλήματος.

Ένας δεύτερος παράγοντας, που αποκαλύπτει την εξέλιξη του ΣΙΤ σε ένα μαθητή, είναι η πληρότητα της νοερής εικόνας που κατορθώνει να φτιάξει. Στην καλύτερη περίπτωση, το παιδί εντάσσει στη νοερή εικόνα της λύσης όλους τους περιορισμούς του προβλήματος. Συνήθως, όμως, ο μαθητής εντάσσει μόνο έναν περιορισμό και στη συνέχεια, σε αλληλεπίδραση με το σχήμα που κατασκευάζει, προσπαθεί να διακρίνει σταδιακά και τους υπόλοιπους.

- Η εξέλιξη σχετικά με την κατασκευή:

Κριτήριο για την εξέλιξη του ΣΙΤ είναι, στην παρούσα μελέτη, η ικανότητα του μαθητή να επιλέγει την κατάλληλη οδηγία κατασκευής του ισοσκελούς τριγώνου, για το συγκεκριμένο πρόβλημα. Με βάση τα στοιχεία που προκύπτουν από την έρευνα, η αποτελεσματικότητα στη λύση προβλήματος συνδέεται με την δυνατότητα του μαθητή να προσαρμόζει τις οδηγίες κατασκευής ισοσκελούς τριγώνου που χρησιμοποιεί, στα δεδομένα του προβλήματος. Συγκεκριμένα, η εξέλιξη σηματοδοτείται από την ύπαρξη των ακόλουθων περιπτώσεων: υπάρχουν μαθητές που ξεκινούν από λάθος οδηγία και εμμένουν σε αυτήν, άλλοι προσπαθούν να προσαρμόσουν εμπειρικά την οδηγία ώστε να οδηγηθούν σε κάποια λύση, ενώ άλλοι αντιλαμβάνονται πως είναι ακατάλληλη και την αλλάζουν. Στην περίπτωση που οι μαθητές ξεκινούν από σωστή οδηγία, μερικοί αδυνατούν να την προσαρμόσουν στα δεδομένα του προβλήματος ενώ άλλοι την προσαρμόζουν. Οι διαφορετικές αυτές περιπτώσεις υποδεικνύουν διάφορα στάδια εξέλιξης του ΣΙΤ στους αντίστοιχους μαθητές.

- Η εξέλιξη σχετικά με την αιτιολόγηση:

Στις διαδικασίες αιτιολόγησης, δείκτες της εξέλιξης του ΣΙΤ αποτελούν η μορφή παρουσίασης των πληροφοριών και ο τρόπος με τον οποίο οργανώνονται. Σε μορφή του ΣΙΤ που θα την χαρακτηρίζαμε ανώριμη, οι μαθητές υιοθετούν μια οπτική προσέγγιση και οι συλλογισμοί τους δομούνται με βάση ότι βλέπουν στο σχήμα και ότι κατασκευάζουν οι ίδιοι. Η επιχειρηματολογία τους γίνεται με φυσικό λόγο. Άλλοι μαθητές, των οποίων το ΣΙΤ είναι πιο αναπτυγμένο, υιοθετούν μια ευρετική προσέγγιση. Ο συλλογισμός τους συνεχίζει να βασίζεται στη νοερή απεικόνιση και στην κατασκευή, αποκτά όμως συνθετότερο χαρακτήρα και εμφανίζονται οι πρώτες θεωρητικές προτάσεις. Παράλληλα, αρχίζει η ανάπτυξη μιας μορφής ατελούς θεωρητικού λόγου. Τέλος, σε μια πιο ώριμη μορφή του ΣΙΤ, υιοθετείται η θεωρητική προσέγγιση που εστιάζει στον εντοπισμό του κατάλληλου θεωρητικού επιχειρήματος για την αιτιολόγηση της αλήθειας. Στην προσέγγιση αυτή η αιτιολόγηση κυριαρχεί στη σκέψη του μαθητή, τα επιχειρήματα δίνονται με θεωρητικό λόγο (παραγωγικοί λογικοί συλλογισμοί), ενώ οι άλλες δύο λειτουργίες, νοερή απεικόνιση και κατασκευή, έχουν δευτερεύοντα ρόλο.

Το γεγονός ότι ο μαθητής χρησιμοποιεί σε ένα πρόβλημα αποτελεσματικές διαδικασίες νοερής απεικόνισης, κατασκευής ή αιτιολόγησης δεν προδιαγράφει πως θα λειτουργεί το ίδιο σε κάθε άλλο πρόβλημα που συναντά. Τα στοιχεία δείχνουν πως, η εξέλιξη είναι μη γραμμική και, συχνά, εμφανίζονται οπισθοδρομήσεις στις λειτουργίες, οι οποίες αποκαλύπτουν ελλείψεις στο ΣΙΤ του παιδιού. Καθώς οι διαδικασίες που χρησιμοποιεί ο μαθητής συναρτώνται με το συγκεκριμένο πρόβλημα που αντιμετωπίζει, παράγοντες όπως η ομοιότητα του ερεθίσματος με την εικόνα πρότυπο ή ο προσανατολισμός του, συχνά, προκαλούν πιασουργίσματα στη νοερή απεικόνιση ή στον τρόπο με τον οποίο χειρίζεται μια οδηγία κατασκευής. Ακόμα, αν ο μαθητής έχει κάποια κενά στην ορολογία, ή κάνει αυθαίρετες γενικεύσεις επειδή δεν θυμάται με ακρίβεια τις θεωρητικές προτάσεις που χρειάζονται, τότε αποκαλύπτονται κενά του ΣΙΤ, σε σχέση με την πληρότητα των πληροφοριών. Αν ο μαθητής έχει τις πληροφορίες, αλλά παρουσιάζει προβλήματα στη σύνδεσή τους, τότε αποκαλύπτονται κενά του ΣΙΤ, σε σχέση με την οργάνωση των πληροφοριών.

Κατά συνέπεια, αντιληπτικοί παράγοντες ή δυσχέρειες στην οργάνωση και την πληρότητα των πληροφοριών μπορεί να προκαλούν σε ένα συγκεκριμένο μαθητή οπισθοχωρήσεις από την εξέλιξη των λειτουργιών του.

Υπόθεση 4^β) Η θέση του Duval (1998) είναι πως, οι τρεις λειτουργίες αναπτύσσονται ανεξάρτητα η μία από την άλλη και κατόπιν έρχεται ο συντονισμός τους. Ο ίδιος θεωρεί πως, αρχικά, πρέπει να εξασκηθούμε στη διάκριση των διαφόρων διαδικασιών νοερής απεικόνισης, κατασκευής, ή αιτιολόγησης, αφού υπάρχουν πολλοί τρόποι να «δούμε» ένα γεωμετρικό σχήμα, να το κατασκευάσουμε ή να αιτιολογήσουμε την κατασκευή μας. Ο συντονισμός των τριών λειτουργιών ακολουθεί αυτή τη διαφοροποίηση.

Η παρούσα μελέτη διερευνά τις τρεις λειτουργίες στα πλαίσια μιας συγκεκριμένης δραστηριότητας, της γεωμετρικής κατασκευής, και εξειδικεύει τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε το συντονισμό των τριών λειτουργιών. Τα στοιχεία μας δείχνουν τα εξής. Κατά τη νοερή απεικόνιση οι μαθητές αποδίδουν ρόλο σε κάποια από τα στοιχεία του σχήματος. Η απόδοση ρόλου καθορίζει, με τη σειρά της, τις οδηγίες κατασκευής του ισοσκελούς που θα χρησιμοποιηθούν. Τα στοιχεία δείχνουν πως οι κατασκευαστικές διαδικασίες που χρησιμοποιούνται ασκούν έλεγχο στη νοερή απεικόνιση, αφού η δυνατότητα μετατροπής της νοερής εικόνας σε γεωμετρικό σχήμα επιβεβαιώνει τη συνέπειά της. Ακολουθώς, η αιτιολόγηση ελέγχει την ορθότητα ή μη των προηγούμενων δύο λειτουργιών (νοερής απεικόνισης και κατασκευής) και δρα διορθωτικά ως προς αυτές. Σε περίπτωση που οι μαθητές διαπιστώσουν με τη βοήθεια κάποιας λειτουργίας (κατασκευής ή αιτιολόγησης) ότι υπάρχει λάθος στη σειρά των σκέψεών τους, ο συλλογισμός ξεκινά από την αρχή, είτε με μια διαφορετική νοερή απεικόνιση, είτε με διαφορετικές οδηγίες κατασκευής. Συνεπώς, μια ουσιαστική δράση των τριών λειτουργιών είναι πως, η μια επισημαίνει τα λάθη και τις παραλείψεις της άλλης. Έτσι, ο συντονισμός τους οδηγεί στην αποτελεσματικότητα στη λύση προβλήματος και σηματοδοτεί την ωρίμανση του ΣΙΤ.

Ένας βαθμός συντονισμού των λειτουργιών συναντάται σε όλες τις προσεγγίσεις / φάσεις ωρίμανσης του ΣΙΤ. Η διαφορά είναι πως, ανάλογα με την προσέγγιση, χρησιμοποιούνται άλλοι τρόποι για το σχηματισμό της εικόνας της λύσης, ακολουθώς, για την κατασκευή της και τέλος, για την αιτιολόγηση. Έτσι, ανάλογα με την εξέλιξη του ΣΙΤ, προκύπτει μια μεγάλη ποικιλία συνδυασμών των τριών λειτουργιών, μια ποικιλία λειτουργιών και δράσεων που κινητοποιούνται στα πλαίσια μιας γεωμετρικής κατασκευής.

Υπόθεση 4^γ) Τα στοιχεία της έρευνας αναδεικνύουν την οργανική σύνδεση που υπάρχει ανάμεσα στις λειτουργίες. Αυτό φαίνεται από το ότι, μια αλλαγή στον τρόπο που ο μαθητής βλέπει το γεωμετρικό σχήμα μπορεί να προκαλέσει, με τη σειρά της, αλλαγή στην οδηγία που χρησιμοποιεί. Ακολουθώς, ανάλογα με την αρχική αναγνώριση και τον τρόπο κατασκευής, ο μαθητής αιτιολογεί τη λύση του. Άξονας, γύρω από τον οποίο δομούνται αυτές οι αλυσιδωτές αλλαγές είναι η απόδοση ρόλου στα στοιχεία του σχήματος. Αυτή

γίνεται κατά την αναγνώριση, ακολούθως, καθορίζει τις οδηγίες κατασκευής που θα χρησιμοποιηθούν και μετά, κατά την αιτιολόγηση, η απόδοση ρόλου χρησιμεύει για να μεταφερθούν οι ιδιότητες από το ένα πλαίσιο (δεδομένα) στο άλλο (ζητούμενα), με τη βοήθεια των κοινών στοιχείων με τον ίδιο ρόλο. Συνεπώς, η παρούσα έρευνα αναδεικνύει και μελετά την απόδοση ρόλου ως σημαντικού παράγοντα για την οργανική σύνδεση και το συντονισμό των τριών λειτουργιών.

5.2 ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΡΕΥΝΑ ΚΑΙ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ

Οι περισσότερες μελέτες στο χώρο της διδακτικής παραμελούν τη γνωστική διάσταση και επικεντρώνουν στη μία όψη της μαθηματικής δραστηριότητας (την ορατή), ως αν οι μαθηματικές διαδικασίες να είναι φυσικές και γνωστικά διάφανες (Duval, 2002). Στην παρούσα μελέτη διερευνήσαμε το τι κάνουν οι μαθητές όταν λύνουν ένα γεωμετρικό πρόβλημα με τελικό στόχο να προσεγγίσουμε το πώς σκέφτονται. Τα ευρήματα της έρευνας μας οδηγούν να προτείνουμε την ευαισθητοποίηση των δασκάλων των Μαθηματικών στις γνωστικές λειτουργίες που εμπλέκονται στη γεωμετρική σκέψη. Ιδιαίτερη έμφαση πρέπει να δοθεί στην κατανόηση της «απόδοσης ρόλου», σαν μίας εσωτερικής αλλά κρίσιμης γνωστικής λειτουργίας, με τη βοήθεια της οποίας προσεγγίζονται τα γεωμετρικά αντικείμενα και διευκολύνονται οι έγκυρες διαδικασίες.

Τα ευρήματα αναδεικνύουν την «απόδοση ρόλου» ως τη λειτουργία που συνδέεται άμεσα και διευκολύνει την αναγνώριση και τη χρήση του ισοσκελούς τριγώνου και στοιχειοθετούν τη σημασία της. Η απόδοση ρόλου διατρέχει την 1^η υπόθεση, καθώς γίνεται με βάση την εικόνα – πρότυπο και σχετίζεται με την αντιληπτική οργάνωση των σχημάτων. Επίσης, εξειδικεύει τη 2^η και την 3^η υπόθεση δίνοντας συγκεκριμένο νόημα στις συνδέσεις μεταξύ γνωστικών Σχημάτων, μέσα από κοινά στοιχεία με τον ίδιο ρόλο. Αναδεικνύει τα πλεονεκτήματα τέτοιων συνδέσεων αλλά και τις δυσκολίες που προκύπτουν ως αποτέλεσμα στοιχείων με διπλό ρόλο. Στην ανάλυση της 4^{ης} υπόθεσης, η απόδοση ρόλου προβάλλεται ως παράγοντας που συμβάλει στην αποτελεσματική λειτουργία και στην εξέλιξη της νοερής απεικόνισης, της κατασκευής και της αιτιολόγησης. Συνεπώς, η απόδοση ρόλου πρέπει να συνυπολογίζεται ως διδακτική μεταβλητή κατά τη διδασκαλία.

Στην παρούσα διερεύνηση χρησιμοποιήθηκαν προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών και οι μαθητές δούλεψαν με μολύβι και χαρτί. Ενδιαφέρον παρουσιάζει ο έλεγχος της σημασίας της απόδοσης ρόλου σε περιπτώσεις που οι μαθητές εργάζονται σε διαφορετικά πλαίσια. Για παράδειγμα, όταν επιλύουν γεωμετρικά προβλήματα σε ένα περιβάλλον HY (όπως το Sketchpad) ή όταν επιλύουν πραγματικά προβλήματα. Οι προβληματισμοί αυτοί θέτουν ερωτήματα για περαιτέρω έρευνα.

Οι δάσκαλοι των μαθηματικών πρέπει οι ίδιοι πρώτα να αποκτήσουν, πέρα από τη μαθηματική, και την ικανότητα για μια γνωστική ανάλυση των ενεργειών των μαθητών τους. Έτσι, θα αντιλαμβάνονται την προσέγγιση με την οποία οι μαθητές χειρίζονται τις αναπαραστάσεις τους (π.χ. τα γεωμετρικά σχήματα) και θα προβλέπουν ή θα ερμηνεύουν έγκαιρα και έγκυρα τις δυσκολίες που οι τελευταίοι αντιμετωπίζουν. Στη συνέχεια οι δάσκαλοι θα ευαισθητοποιήσουν και τους μαθητές, ως προς τις λειτουργίες γενικά και την απόδοση ρόλων ειδικότερα, ώστε τα παιδιά να αρχίσουν να αντιλαμβάνονται, να παρακολουθούν και τελικά να ελέγχουν την ίδια τη νοητική τους λειτουργία.

¹ Λέγοντας αλλαγή διάστασης εννοούμε μια αλλαγή στον τρόπο που βλέπουμε ένα γεωμετρικό σχήμα και τη δομή του (η ανάλυση γίνεται στην 2.7.1).



ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΚΕΝΤΡΟ

Η παρούσα μελέτη αποτελεί μέρος της διπλωματικής εργασίας της κας. [Name], η οποία υποβλήθηκε στο [Institution] για την απόκτηση του πτυχίου στην [Field]. Η εργασία αυτή βασίζεται σε πρωτότυπα δεδομένα που συλλέχθηκαν κατά τη διάρκεια της έρευνας. Τα αποτελέσματα της έρευνας παρουσιάζονται στην παρούσα μελέτη, η οποία αποτελεί μέρος της διπλωματικής εργασίας της κας. [Name]. Η εργασία αυτή βασίζεται σε πρωτότυπα δεδομένα που συλλέχθηκαν κατά τη διάρκεια της έρευνας. Τα αποτελέσματα της έρευνας παρουσιάζονται στην παρούσα μελέτη, η οποία αποτελεί μέρος της διπλωματικής εργασίας της κας. [Name].

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. [Author], [Title], [Publisher], [Year].
2. [Author], [Title], [Publisher], [Year].
3. [Author], [Title], [Publisher], [Year].
4. [Author], [Title], [Publisher], [Year].
5. [Author], [Title], [Publisher], [Year].
6. [Author], [Title], [Publisher], [Year].
7. [Author], [Title], [Publisher], [Year].
8. [Author], [Title], [Publisher], [Year].
9. [Author], [Title], [Publisher], [Year].
10. [Author], [Title], [Publisher], [Year].
11. [Author], [Title], [Publisher], [Year].
12. [Author], [Title], [Publisher], [Year].
13. [Author], [Title], [Publisher], [Year].
14. [Author], [Title], [Publisher], [Year].
15. [Author], [Title], [Publisher], [Year].



ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Anderson, J. (2000), *Cognitive Psychology and its Implications*, Worth Publishers, USA.
2. Australian Education Council (1990), *National Statement on Mathematics for Australian Schools*, Carlton, V.: Curriculum Corporation.
3. Barnard, T. & Tall, D. (2001), Comparative Study of Cognitive Units of Mathematical Thinking, *Proceedings of the 25th International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Utrecht, The Netherlands, pp 2 -89.
4. Bartlett, F.C.(1932), *Remembering: A Study in Experimental and Social Psychology*, Cambridge: Cambridge University Press.
5. Battista, M.(1994), On Greeno's Environmental Model / View of Conceptual Domains: A Spatial / Geometric Perspective, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol.25, No.1, 86-99.
6. Bishop, A. (1989), A Review of Research on Visualization in Mathematics Education, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11, 7-16.
7. Blaxter, L., Hughes, C., and Tight, M. (1996), *How to Research*, Open University Press, Buckingham, Philadelphia.
8. Βοσνιάδου, Σ. (1995), *Η Ψυχολογία των Μαθηματικών*, Gutenberg, Αθήνα.
9. Βοσνιάδου, Σ. (1998), *Γνωσιακή Ψυχολογία: Ψυχολογικές Μελέτες και Δοκίμια*, Gutenberg, Αθήνα.
10. Βυγκότσκι, Λ. (1988), *Σκέψη και Γλώσσα*, εκδόσεις Γνώση, Αθήνα.
11. Chinnappan, M. (1998), Schemas and Mental Models in Geometry Problem Solving, in *Educational Studies in Mathematics* 36, 201-217.
12. Cifarelli, V. (1998), The Development of Mental Representations as a Problem Solving Activity, *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 239 – 264.
13. Cohen, L., Manion, L. (1997), *Μεθοδολογία Εκπαιδευτικής Έρευνας*, Έκφραση - Μεταίχμιο, Αθήνα.
14. Cottril, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D., (1996), Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Scheme, *Journal of Mathematical Behaviour*, 15, 167 – 192.
15. Cruz, I., Presmeg, N., MaGüemes, R. (2001), Reflections from Two Case Studies of Imagery and Meaning in Eighth Grade Mathematics, *Focus on learning Problems in Mathematics*, Vo 23, No1, 1-16.
16. Currie, P. & Pegg, J. (1998), Three Sides Equal Means it is not Isosceles, *Proceedings of the 22nd Conference of PME*, South Africa.

17. Davis, G. & Tall, D. (2002), What is a Scheme?, in D. Tall & M. Thomas (eds) *Intelligence, Learning and Understanding in Mathematics*, Post Pressed, Flaxton, Australia, σ. 131 - 150.
18. Davis, R. & Maher, C. (1997), How Students Think: The Role of Representations, in Lyn English (ed) *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors and Images*, (pp. 93 - 116), Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah New Jersey.
19. De Winndt - King, A. & Goldin, G. (2001), A Study of Children's Visual Imagery in Solving Problems with Fractions, *Proceedings of the 25th Conference of PME*, Utrecht, The Netherlands.
20. DiSessa, A.A. (1982), Unlearning Aristotelian Physics: A Study of Knowledge - Based Learning, *Cognitive Science*, 6, 37-75.
21. Dörfler, W., (1993), Fluency in a Discourse or Manipulation of Mental Objects? *Proceedings of the 17th Conference of PME*, Tsukuba, Japan, II, 145 -152.
22. Dubinsky, E. (1992), Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, in D. Tall (ed) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95 - 126), Kluwer: Dordrecht.
23. Duval, R. (1995), *Semiosis et Pensée Humaine*, Bern : Peter Lang.
24. Duval, R. *Construire, Voir et Reasonner en Geometrie : quels rapports ?*, άρθρο στο διαδύκτιο.
25. Duval, R. (1998), Geometry from a Cognitive Point of View, in C. Mammana and V. Villani (eds) *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, Kluwer Academic Press, the Netherlands.
26. Duval, R. (2001), *The Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in the Learning of Mathematics*, presentation in the Discussion Group: Semiotics in Mathematics Education, 25th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Utrecht, The Netherlands.
27. Duval, R. (2002), *Representation, Vision and Visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning*, άρθρο στο διαδύκτιο.
28. Ernest, P. (1996), Varieties of Constructivism: A Framework for Comparison, in L. Steffe & P. Nesher (eds) *Theories of Mathematical Learning*, Lawrence Erlbaum Associates, New Jersey.
29. Eysenck, M. & Keane, M. (1990), *Cognitive Psychology*, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, U.K.
30. Fischbein, E. (1982), Intuition and Proof, *For the Learning of Mathematics*, 3(2), 9-18, 24.
31. Fischbein, E. (1993), The Theory of Figural Concepts, *Educational Studies in Mathematics* 24, 139-162.
32. Fischbein, E. & Grossman, A. (1997), Schemata and Intuitions in Combinatorial Reasoning, *Educational Studies in Mathematics* 34, 27 - 47, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.

33. Fischbein, E. (1999), Intuitions and Schemata in Mathematical Reasoning, *Educational Studies in Mathematics* 38, 51-66.
34. Furinghetti, F. & Paola, D. (1999), Exploring Student's Images and Definitions of Area, *Proceedings of the 23rd Conference of PME*, Haifa, Israel, 2, 345-352.
35. Goldin, G. (1987), Cognitive Representational Systems for Mathematical Problem Solving, in C. Janvier's (ed) *Problems of Representation in the teaching and learning of Mathematics*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey.
36. Goldin, G. & Kaput, J. (1996), A Joint Perspective on the Idea of Representation in Learning and Doing Mathematics", in L. Steffe et al (eds) *Theories of Mathematical Learning*, Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, New Jersey.
37. Gray, E., Pinto, M., Pitta, D., & Tall, D. (1999), Knowledge Construction and Diverging Thinking in Elementary & Advanced Mathematics, *Educational Studies in Mathematics* 38, 111-133.
38. Greeno, J.G. (1991), Number Sense as Situated Knowing in a Conceptual Domain, *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 170-218.
39. Hadamard, J. (1995), *Η Ψυχολογία της Επινόησης στα Μαθηματικά*, Κάτοπτρο, Αθήνα.
40. Hasegawa, J., (1997), Concept Formation of Triangles and Quadrilaterals in the Second Grade, in *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 32, 157-179.
41. Hatano, G. (1996), A Conception of Knowledge Acquisition and its Implications for Mathematics Education, in L. Steffe & P. Nesher (eds) *Theories of Mathematical Learning*, Lawrence Erlbaum Associates, New Jersey.
42. Hershkowitz, R. (1988), Psychological Aspects of Learning Geometry, in P. Nesher & J. Kilpatrick (eds) *Mathematics and Cognition*, ICMI Study Series, Cambridge University Press.
43. Hiebert, J. & Carpenter, T.P. (1992), Learning and Teaching with Understanding, in D. Grouws (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 65- 97), New York, MacMillan.
44. Hofstadter, D. (1980), *Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid*, Penguin Books, London, England.
45. Janvier, C. (1987), Representation and Understanding: the Notion of Function as an Example, in C. Janvier (ed) *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey
46. Johnson - Laird, P.N. (1983), *Mental Models: towards a Cognitive Science of Language, Inference, and Consciousness*, Cambridge University Press, Cambridge.
47. Kaput, J. (1987), Representation Systems and Mathematics, in C. Janvier's (ed) *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey.

48. Kellogg, R. (1994), *The Psychology of Writing*, Oxford University Press, New York.
49. Koedinger, K.R. & Anderson, J.R. (1990), *Abstract Planning and Perceptual Chunks: Elements of Expertise in Geometry*, *Cognitive Science* 14, 511-550.
50. Κολέζα, Ε. (2000) *Ρεαλιστικά Μαθηματικά*, Leader Books, Αθήνα.
51. Kosslyn, S. & Koenig, O. (1995), *Wet Mind: the New Cognitive Neuroscience*, The Free Press, New York.
52. Lawson, M. & Chinnappan, M. (2000), Knowledge Connectedness in Geometry Problem Solving, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 31, No.1, 26-43.
53. Less, R., Post, T., & Behr, M. (1987), Representations and Translations among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving, in C. Janvier (ed) *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey
54. Mason, J (1987), Representing: notes following the Conference, in C Janvier's (ed) *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New York.
55. McCloskey, M. (1983), Naïve Theories of Motion, in D. Gentner & A.L. Stevens (eds), *Mental Models* (p. 299-324), Hillsdale, NJ: Erlbaum.
56. Mesquita, Ana Lobo. (1998), On Conceptual Obstacles Linked with External Representation in Geometry, *Journal of Mathematical Behaviour*, 17 (2), 183-195.
57. Moore, R. (1994), Making the Transition to Formal Proof, *Educational Studies in Mathematics* 27, 249 – 266.
58. National Council of Teachers of Mathematics, (1989), *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, Reston, Va. : The Council.
59. Nesher, P & Herschkovitz, S. (1994), The Role of Schemes in Two- Steps Problems: Analysis and Research Findings, *Educational Studies in Mathematics* 26, 1-23.
60. Newell, A. & Simon, H.A. (1972), *Problem Solving*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
61. Olive, J & Steffe, L. (2002), Schemes, Schemas and Director Systems, in D. Tall & M. Thomas (eds) *Intelligence, Learning and Understanding in Mathematics*, Post Pressed, Australia.
62. Owens, K. & Clenents, M.A. (1998), Representations in Spatial Problem Solving in the Classroom, *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 197 – 218.
63. Parkes, J T, *Structural Knowledge as a Pre – requisite to Valid Performance Assessment Scores, in the Internet*

64. Piaget, J. (1972), *The Principles of Genetic Epistemology*, Routledge & Kegan Paul, London.
65. Piaget, J. (1980), *Experiments in Contradiction*, University of Chicago Press, Chicago and London.
66. Πόρποδας, Κ. (1996), *Γνωστική Ψυχολογία*, τ.1, Αθήνα.
67. Presmeg, N. (1986a), Visualization in High School Mathematics, *For the learning of Mathematics* 6(3), 42-46.
68. Presmeg, N. (1986b), Visualization and Mathematics Giftedness, *Educational Studies in Mathematics* 17, 297-311.
69. Presmeg, N. (1997), Generalization Using Imagery in Mathematics, in L. English (ed.), *MATHEMATICAL REASONING: Analogies, Metaphors, and Images*, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Mahwah New Jersey, London.
70. Rodd, M.M. (2000), On Mathematical Warrants: Proof does not always Warrant, and Warrant may be other than Proof, *Mathematical Thinking and Learning*, 2(3), 221-244.
71. Rouse, W. & Morris, N. (1986), On Looking into the Black Box: Prospects and Limits in the Search for Mental Models, *Psychological Bulletin*, vol. 100, no 3, 349 – 363.
72. Rumelhart, D.E. & Ortony, A. (1977), The Representation of Knowledge in Memory, in R.C. Anderson., Spiro & W.E. Montague (eds) *Schooling and the Acquisition of Knowledge* (pp. 99-137). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
73. Savelsbergh, E. (1998), *Improving Mental Representations in Physics Problem Solving*, thesis in the web, The Netherlands.
74. Skemp, R. (1971), *The Psychology of Learning Mathematics*, Penguin Books Ltd., Great Britain.
75. Schoenfeld, A. (1986), On Having and Using Geometric Knowledge, in J. Hiebert (ed) *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Math*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ.
76. Shriki, A. & Ehud Bar – On (1997), Theory of Global and Local Coherence and Applications to Geometry, *Proceedings of the 21st Conference of PME*, Finland.
77. Tall, D. (1991), The Psychology of Advanced Mathematical Thinking, in D. Tall (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 4-21.
78. Tall, D. (1999), Reflections on APOS Theory in Elementary and Advanced Mathematical Thinking, *Proceedings of the 23rd Conference of PME*, Haifa, Israel, 1, 111 – 118.
79. Tall, D. & Vinner, S. (1981), Concept Images and Concept Definition in Mathematics with particular Reference to Limits and Continuity, *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151 – 169.

80. van den Heuvel – Penhuizen, M, (1996), *Assessment and Realistic Mathematics Education*, CD – β Press, Center for Acience and Mathematics Education, Utrecht.
81. van Hiele, P. (1986), *Structure and Insight*, Academic Press, Inc., Harcourt Brace Jovanovich Publishers
82. Vergnaud, G., (1996), The Theory of Conceptual Fields, in L. Steffe, et all (eds) *Theories of Mathematical Learning*, Lawrewnce Erlbaum Associates, Mahwah, New Jersey.
83. Vergnaud, G., (1998), A Comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education, *Journal of Mathematical Behaviour*, 17 (2), 167 – 181
84. Vinner, S. & Hershkowitz, R. (1980), Concept Images and Common Paths in the Development of Some Simple Geometrical Concepts, *Proceedings of the 4th Conference of PME*, Berkeley, CA.
85. Vinner, S. & Hershkowitz, R. (1983), The Role of Critical and Noncritical Attributes in the Concept Image of Geometrical Concepts, in R. Hershkowitz (ed.) *Proceedings of the 7th PME Conference*, pp. 223 – 228, Rehovot, Israel.
86. Vinner, S. & Tall, D. (1981), Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity, *Educational Studies in Mathematics* 12, 151 – 169.
87. von Glasersfeld, E. (1981), An Attentional Model for the Construction of Units and Number, *Journal for Research in Mathematics Education*, 12(2), 83 – 94.
88. von Glasersfeld, E. (1987), Learning as a Constructive Activity, in C. Janvier (ed) *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey, σ. 3 - 17.
89. von Glasersfeld, E. (1990), Environment and Communication, in L.P. Steffe & T. Wood (eds) *Transforming Children's Mathematics Education, International Perspectives*, New Jersey: Lawrence Erlbaum.
90. Vurpillot, E. (1972), *The Visual World of the Child*, London George Allen & Unwin Ltd, Ruskin House, Museum Street.

