DONALD T. GREENWOOD

CLASSICAL DYNAMICS
ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ

Μετάφραση: Α. Χ. ΜΟΥΚΑΡΙΚΑ - Χ. Β. ΜΑΣΣΑΛΑΣ

Εκδοση: ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ 1994

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
026000304545

Γεφύρι "Κυρ Νούτσου" ή "Κόκκορου" στο Κουκούλι Ζαγορίου Ιωαννίνων. Έτος κατασκευής 1752.

... ... Η συνύπαρξη και η τέλεια προσαρμογή του με το φυσικό του περίγυρο, η στατική και τεχνική του πληρότητα, όπως και το κομψό, λιτό του ύφος χαρακτηρίζουν αυτόδηλα τις υψηλές προδιαγραφές μιας εποχής. Μιας εποχής που το Ζαγόρι ανθούσε από πολιτιστική και οικονομική ευεξία.
(Κ. Λαζαρίδη, "ΤΟ ΧΩΡΙΟ ΜΟΥ Το Κουκούλι", Γιάννινα 1977).
Φωτ. Φωκίων Καψάλης.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

DONALD T. GREENWOOD

CLASSICAL DYNAMICS
ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ

Μετάφραση: Α. Χ. ΜΟΥΚΑΡΙΚΑ - Χ. Β. ΜΑΣΣΑΛΑΣ

Εκδοση: ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ 1994

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Τίτλος πρωτότυπου: Donald T. Greenwood,
(1977) Classical Dynamics,
Prentice - Hall, Inc.
Englewood Cliffs, N.J. 07632

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ · ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ · ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Αρ. Εισ.
332/1-7-2002

Copyright © (1993) για την Ελληνική γλώσσα.
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ xi

1. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ 1

1-1. Το Μηχανικό Σύστημα 1
Εξισώσεις κίνησης. Μονάδες.

1-2. Γενικευμένες Συντεταγμένες 5
Βαθμοί ελευθερίας. Γενικευμένες συντεταγμένες. Μορφικός χώρος. Παράδειγμα.

1-3. Δεσμοί 11
Ολόνομοι δεσμοί. Μη-ολόνομοι δεσμοί. Μονόπλευροι δεσμοί. Παράδειγμα.

1-4. Δυνατό Έργο 19
Δυνατή μετατόπιση. Δυνατό έργο. Αρχή των δυνατών έργων. Αρχή του D'Alembert. Γενικευμένη δύναμη. Παραδείγματα.

1-5. Ενέργεια και Ορμή 40
Δυναμική ενέργεια. Έργο και κινητική ενέργεια. Διατήρηση της ενέργειας. Ισορροπία και ευστάθεια. Κινητική ενέργεια συστήματος. Στροφορμή. Γενικευμένη ορμή. Παράδειγμα.

2. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ LAGRANGE 68

2-1. Παραγωγή των Εξισώσεων Lagrange 68
Κινητική ενέργεια. Εξισώσεις Lagrange. Μορφή των εξισώσεων κίνησης. Μη-ολόνομα συστήματα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

2-2. Παραδείγματα 81
Σφαιρικό εκκρεμές. Διπλό εκκρεμές. Πολλαπλασιαστές Lagrange και δεσμικές δυνάμεις. Σωμάτιο σε περιστρεφόμενο κύλινδρο. Σωμάτιο με κινούμενη στήριξη. Σύστημα με ρεόνομους δεσμούς.
2-3. Ολοκληρώματα Κίνησης 98
Αφανείς συντεταγμένες. Παραδείγματα -το πρόβλημα του Kepler. Συνάρτηση Routh. Συντηρητικά συστήματα. Φυσικά συστήματα. Σύστημα Liouville. Παραδείγματα.
2-4. Μικρές Ταλαντώσεις 126
Εξισώσεις κίνησης. Φυσικές μορφές ταλάντωσης. Κύριες συντεταγμένες. Ορθογωνικότητα των ιδιοδιανυσμάτων. Πολλαπλές ρίζες. Αρχικές συνθήκες. Παραδείγματα.

3. ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ LAGRANGE 154

3-1. Συνάρτηση Απωλειών του Rayleigh 154
3-2. Ωστική Κίνηση 158
Ώση και ορμή. Μέθοδος Lagrange. Συνήθεις δεσμοί. Ωστικοί δεσμοί . Ενεργειακές θεωρήσεις. Ημί-συντεταγμένες. Παραδείγματα.
3-3. Γυροσκοπικά Συστήματα 188
Γυροσκοπικές δυνάμεις. Μικρές κινήσεις. Γυροσκοπική ευστάθεια. Παραδείγματα.
3-4. Δυναμικά Εξαρτώμενα από την Ταχύτητα 211
Ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις. Γυροσκοπικές δυνάμεις. Παράδειγμα.

4. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ HAMILTON 226

4-1. Αρχή Hamilton 226
Στάσιμες τιμές συνάρτησης. Στάσιμες τιμές υπό συνθήκες. Στάσιμη τιμή ορισμένου

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ολοκληρώματος. Παραδείγματα - το πρόβλημα του βραχυστοχρόνου. Παραδείγματα - Γεωδαισιακή γραμμή. Η περίπτωση των n - εξαρτημένων μεταβλητών. Αρχή Hamilton. Μη-ολόνομα συστήματα. Κανόνας του πολλαπλασιαστή.

4-2. Εξισώσεις Hamilton 250
Παραγωγή των εξισώσεων Hamilton. Μορφή της συνάρτησης Hamilton. Μετασχηματισμός Legendre. Παραδείγματα.

4-3. Άλλες Παραλλακτικές Αρχές 267
Τροποποιημένη αρχή Hamilton. Αρχή της ελάχιστης δράσης. Παραδείγματα.

4-4. Φασικός Χώρος 278
Τροχιές. Επεκτεταμένος φασικός χώρος. Θεώρημα Liouville.

5. ΘΕΩΡΙΑ HAMILTON - JACOBI 290

5-1. Κύρια Συνάρτηση Hamilton 292
Κανονικό ολοκλήρωμα. Διαφορικές μορφές Pfaff.

5-2. Εξίσωση Hamilton - Jacobi. 299
Θεώρημα Jacobi. Συντηρητικά συστήματα και αφανείς συντεταγμένες. Παραδείγματα.

5-3. Διαχωρισιμότητα 317
Σύστημα Liouville. Θεώρημα Stäckel. Παραδείγματα.

6. ΚΑΝΟΝΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ 334

6-1. Διαφορικές Μορφές και Γεννήτριες Συναρτήσεις 334
Κανονικοί μετασχηματισμοί. Κύριες μορφές γεννητριών συναρτήσεων. Περαιτέρω σχόλια στη μεθόδου Hamilton - Jacobi. Παραδείγματα.

6-2. Ειδικοί Μετασχηματισμοί 356

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Μερικοί απλοί μετασχηματισμοί. Όμογενείς κανονικοί μετασχηματισμοί. Σημειακοί μετασχηματισμοί. Μετασχηματισμοί ορμής. Παραδείγματα.

6-3. Αγκύλες Lagrange και Poisson **378**
Αγκύλες Lagrange. Αγκύλες Poisson. Η διγραμμική συναλλοίωτος. Παράδειγμα.

6-4. Πιο Γενικοί Μετασχηματισμοί **391**
Αναγκαίες συνθήκες. Χρονικοί μετασχηματισμοί. Παραδείγματα.

6-5. Διατυπώσεις με μητρώα **402**
Εξισώσεις Hamilton. Συμπλεκτικά μητρώα. Παράδειγμα.

6-6. Ειδικά Θέματα **406**
Απειροστοί κανονικοί μετασχηματισμοί. Θεώρημα Liouville. Ολοκληρωτικές αναλλοίωτες.

7. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ **428**

7-1. Εισαγωγή **428**
Μετασχηματισμοί Galileo. Εξισώσεις Maxwell. Θεωρία του αιθέρα. Αρχή της σχετικότητας.

7-2. Σχετικιστική Κινηματική **435**
Εξισώσεις μετασχηματισμού Lorentz. Γεγονότα - ταυτόχρονο. Παράδειγμα - το τρένο του Einstein. Διαστολή χρόνου. Συστολή μήκους. Το ανναλοίωτο διάστημα. Ίδιος χρόνος και ίδια απόσταση. Κοσμική γραμμή. Παράδειγμα - το παράδοξο των διδύμων. Πρόσθεση ταχυτήτων. Σχετικιστικό φαινόμενο Doppler. Παραδείγματα.

7-3. Σχετικιστική Δυναμική **467**
Ορμή. Ενέργεια. Το τετραδιάνυσμα ορμής - ενέργειας. Δύναμη. Διατήρηση της ενέργειας. Μάζα και ενέργεια. Παραδείγματα. Ανελαστική σύγκρουση. Αρχή της ισοδυναμίας.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Διατύπωση κατά Lagrange και Hamilton.
7-4. Επιταχυνόμενα Συστήματα 492
Πύραυλος με σταθερή επιτάχυνση. Παράδειγμα.
Πύραυλος με σταθερή ώθηση.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ 509

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ 523

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΦΡΑΣΤΩΝ

Η κλασική δυναμική (κλασική μηχανική) έχει ως αντικείμενο την εύρεση και κατανόηση των νόμων της κίνησης των υλικών σωμάτων. Με τον όρο κλασική εννοούμε τον περιορισμό στις κινήσεις που ακολουθούν τους νόμους του Newton. Από την επέκτασή της για την περιγραφή φαινομένων στην περιοχή των μεγάλων ταχυτήτων προέκυψε η σχετικιστική μηχανική (Einstein), ενώ από την επέκτασή της για την περιγραφή φαινομένων σε πολύ μικρές αποστάσεις προέκυψε η κβαντική μηχανική. Η κλασική δυναμική αποτελεί την αφετηρία των διαφόρων κλάδων της Φυσικής και γι' αυτό είναι απαραίτητο στοιχείο της παιδείας των σπουδαστών των θετικών επιστημών. Δεν υπάρχει καμιά αμφιβολία, ότι ένα μάθημα με αντικείμενο αυτό της κλασικής δυναμικής, πρέπει να είναι στοιχείο του προγράμματος σπουδών ενός εφαρμοσμένου μαθηματικού, γιατί η γνώση του θα τον βοηθήσει στην κατασκευή, την ανάλυση και την ερμηνεία των μαθηματικών μοντέλων, που δίνουν πληροφορίες για φαινόμενα του φυσικού κόσμου. Η διεθνής εμπειρία οδηγεί στο συμπέρασμα, ότι και οι μαθηματικοί με θεωρητική κατεύθυνση πρέπει να έχουν γνώση του αντικειμένου της κλασικής δυναμικής, γιατί εκτός από τη βοήθεια που μπορεί να προσφέρει στη μελέτη των δυναμικών συστημάτων ("χάος") θα τους βοηθήσει ακόμη στη διδασκαλία των σπουδαστών εφαρμοσμένων επιστημών. Αν και το αντικείμενο είναι κλασικό και μάλιστα περιλαμβάνεται σ' όλα τα προγράμματα σπουδών των Θετικών Σχολών ως υποχρεωτικό μάθημα, η αντίστοιχη ελληνική βιβλιογραφία είναι μάλλον περιορισμένη. Με βάση αυτή τη διαπίστωση και το γεγονός ότι η διεθνής βιβλιογραφία διαθέτει πολλά αξιόλογα και διδακτικά δοκιμασμένα βιβλία κλασικής μηχανικής, επιχειρούμε με την προσπάθεια αυτή να εμπλουτίσουμε στον τομέα αυτόν της επιστήμης την ελληνική βιβλιογραφία. Τα κριτήρια στα οποία βασίστηκε η επιλογή μας, ήταν η φυσική σαφήνεια και η μαθηματική πληρότητα, στοιχεία που κατά τη γνώμη μας διαθέτει το βιβλίο του καθηγητή Donald T. Greenwood με τίτλο Classical Dynamics.

Από τη θέση αυτή θέλουμε να ευχαριστήσουμε το συνεργάτη μας

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

φυσικό Π. Βολταίρα για τη βοήθειά του, την κα Αναστασία Μπαλάφα-Παππά για τη γραμματειακή υποστήριξη και την παρουσιάση του βιβλίου και το Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, που ανέλαβε την έκδοσή του.

Α. Χ. Μουκαρίκα
Επ. Καθ. Τμήματος Φυσικής

Χρ. Β. Μασσαλάς
Καθ. Τμήματος Μαθηματικών

Ιωάννινα 1993

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Έχουν περάσει σχεδόν διακόσια χρόνια από τότε που ο Lagrange δημοσίευσε το βιβλίο του Mécanique Analytique (1788), το οποίο αποτέλεσε τη θεμελίωση της αναλυτικής δυναμικής. Οι μετέπειτα ανακαλύψεις, και κυρίως εκείνες του Hamilton και Jacobi είχαν ως αποτέλεσμα να καταλήξουν σε μια θεωρία δυναμικής, που είχε ασυνήθιστη κομψότητα και ομορφιά. Η επόμενη μεγάλη προώθηση ήλθε στις αρχές αυτού του αιώνα, όταν ο Einstein παρουσίασε μια καινούργια θεώρηση του φυσικού κόσμου με τη δημοσίευση της πρώτης εργασίας του πάνω στη σχετικότητα, το 1905. Τα χρόνια που μεσολάβησαν, αυτή η θεμελίωση μελετήθηκε και βελτιώθηκε κυρίως ως προς τη μαθηματική της δομή και το συμβολισμό, όπως επίσης ως προς τη λογική και πειραματική της βάση. Με την εξέλιξη της τεχνολογίας έγινε επιτακτική η ανάγκη χρησιμοποίησης των πιο προχωρημένων θεωριών της κλασικής δυναμικής πράγμα που σημαίνει, ότι οι απόφοιτοι των θετικών και εφαρμοσμένων σχολών πρέπει να έχουν μια καλή παιδεία στη βασική θεμελίωση της θεωρίας αυτής. Αυτό είναι το αντικείμενο του παρόντος βιβλίου.

Τα θέματα που παρουσιάζονται αντιπροσωπεύουν μια εκτενέστερη έκδοση της ύλης, που καλύπτεται στο μάθημα της προχωρημένης δυναμικής, που προσφέρεται από το Πανεπιστήμιο του Michigan. Προϋποτίθεται ότι οι φοιτητές έχουν βασικές γνώσεις από τη διανυσματική δυναμική και μπορούν να τις χρησιμοποιούν στη μελέτη της κίνησης συστημάτων σωματίων και στερεού σώματος. Επιπλέον, πρέπει να είναι εξοικειωμένοι με την εξίσωση Langrange και να έχουν κάποια εμπειρία στις εφαρμογές της σε σχετικά δύσκολα προβλήματα. Ένας φοιτητής, που παίρνει σήμερα στο Michigan αυτό το μάθημα, έχει ήδη εξοικειωθεί με το αντικείμενο της δυναμικής κατά τη διάρκεια του μαθήματος Φυσικής του πρώτου έτους, όπως επίσης και κατά τη διάρκεια των δύο εξαμηνιαίων μαθημάτων, το καθένα τεσσάρων ωρών, της Δυναμικής Ι και Δυναμικής ΙΙ.

Μια και οι φοιτητές θεωρούνται εξοικειωμένοι με τα πιο στοιχειώδη αντικείμενα της δυναμικής, σ' αυτό το βιβλίο τα αντικείμενα αυτά

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δεν αναπτύσσονται με λεπτομέρεια. Το πρώτο κεφάλαιο όμως, *Εισαγωγικές Έννοιες*, συμπεριλαμβάνεται στην ύλη του παρόντος, έτσι ώστε να θεμελιωθούν οι συμβολισμοί και οι πιο σπουδαίοι ορισμοί, που θα χρησιμοποιηθούν στα επόμενα. Για παράδειμα, στο κεφάλαιο αυτό εισάγονται οι έννοιες του δυνατού έργου και της αρχής d' Alembert . Αν όμως ο αναγνώστης είναι γνώστης αυτού του αντικειμένου θα χρειαστεί να δαπανήσει λιγότερο χρόνο για τη μελέτη αυτού του κεφαλαίου.

Στο κεφάλαιο 2, χρησιμοποιείται η αρχή d' Alembert ως σημείο εκκίνησης για την παραγωγή των εξισώσεων κίνησης Lagrange και συζητείται διεξοδικά η εκπεφρασμένη τους μορφή για ολόνομα και μήολόνομα συστήματα. Η συζήτηση επί των εφαρμογών των εξισώσεων Lagrange συνεχίζεται στο Κεφάλαιο 3, όπου εισάγεται η έννοια των ωστικών δεσμών. Η μελέτη της ωστικής κίνησης δίνει την ευκαιρία για μια σύντομη συζήτηση επί των ημι-συντεταγμένων. Άλλες παράγραφοι περιλαμβάνουν συζητήσεις και συγκρίσεις γυροσκοπικών συστημάτων και συστημάτων με απώλειες όπως επίσης και δυναμικών που εξαρτώνται από την ταχύτητα. Μερικές από τις εφαρμογές μπορεί και να παραληφθούν χωρίς να χαθεί η συνέχεια με τα επόμενα κεφάλαια.

Στο κεφάλαιο 4, εσάγεται ο λογισμός των μεταβολών για τη μελέτη της δυναμικής. Η μεγαλύτερη έμφαση δίνεται στην αρχή Hamilton, αλλά μελετώνται και άλλα αντικείμενα όπως αυτό της αρχής της ελάχιστης δράσης. Σε μια γενική αντιμετώπιση του κανονικού ολοκληρώματος εξετάζονται οι μη-σύγχρονες όπως επίσης και οι συνήθεις σύγχρονες μεταβολές. Μια προσεκτική θεώρηση της δυναμικής από τη σκοπιά της αρχής Hamilton γίνεται κατά τη συζήτηση των εξισώσεων κίνησης και του φασικού χώρου. Γίνεται εδώ η θεμελίωση της θεωρίας για τα επόμενα δύο κεφάλαια.

Τα κεφάλαια 5 και 6 αναφέρονται κυρίως στη θεωρία των κανονικών μετασχηματισμών. Έχει κριθεί σκόπιμη η μελέτη της θεωρίας Hamilton-Jacobi πριν από την πιο γενική συζήτηση των κανονικών μετασχηματισμών, και όχι η αντίστροφη πορεία. Μ' αυτό τον τρόπο οι φοιτητές εξοικειώνονται σε συγκεκριμένες μεθοδολογίες για την επίλυση προβλημάτων με την ελπίδα, ότι αυτό θα αποτελέσει ένα επιπλέον κίνητρο για τη μελέτη της πιο εκτενούς θεωρίας των κανονικών μετασχηματισμών, που θα ακολουθήσει.

Το τελευταίο κεφάλαιο είναι μια εισαγωγική παρουσίαση της ειδικής σχετικότητας, όπου συμπεριλαμβάνεται οι διατυπώσεις Lagrange και Hamilton. Παρουσιάζονται αρκετά παραδείγματα και προβλήματα με σκοπό την εξοικείωση με το αντικείμενο.αυτό στο συγκεκριμένο

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

επίπεδο.

Ο συγγραφέας, γενικά, κάνει σύσταση στους φοιτητές να δαπανούν, όσο τους επιτρέπεται, περισσότερο χρόνο στην επίλυση των προβλημάτων που παρατίθενται στο τέλος κάθε κεφαλαίου. Αυτά διαφοροποιούνται ως προς το βαθμό δυσκολίας και βοηθούν στην εμπέδωση των βασικών αρχών της κλασικής δυναμικής. Κατά περίπτωση θεωρητικά αποτελέσματα που δεν συμπεριλήφθηκαν στο κείμενο, λόγω οικονομίας χώρου, παρουσιάζονται εδώ ως προβλήματα.

Ένα σημαντικό τμήμα του βιβλίου γράφτηκε κατά τη διάρκεια της εκπαιδευτικής μου άδειας στο University of California του San Diego. Επιθυμώ να ευχαριστήσω τους Καθηγητές J.W. Miles και R.E. Roberson του Department of Aerospace and Mechanical Engineering Sciences που συνέβαλαν, ώστε η παραμονή μου εκεί να είναι ευχάριστη και αποδοτική. Είμαι ιδιαίτερα ευγνώμων στη σύζυγό μου, που ανέλαβε την επιμελημένη δακτυλογράφηση του κειμένου.

DONALD T. GREENWOOD

Ann Arbor, Michigan

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

1

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Η *δυναμική* μελετάει τις κινήσεις αλληλεπιδρώντων σωμάτων και τις περιγράφει σε όρους αξιωματικών νόμων. Η *κλασική* δυναμική περιορίζεται σ' εκείνα τα αλληλεπιδρώντα σώματα για τα οποία τα κβαντομηχανικά φαινόμενα είναι αμελητέα, δηλαδή, εφαρμόζεται κυρίως σε μακροσκοπικά φαινόμενα. Στη συνέχεια θα σχολιαστούν οι μη-σχετικιστικές θεωρίες και μέθοδοι όπως εκείνες των Newton, Euler, Lagrange και Hamilton, καθώς επίσης και η πιο πρόσφατη σχετικιστική δυναμική του Einstein.

Στο κεφάλαιο αυτό εισάγονται μερικές από τις βασικές έννοιες της μη-σχετικιστικής κλασικής δυναμικής και σχηματίζεται η σημειογραφική δομή που θα χρησιμοποιηθεί σ' ολόκληρο το βιβλίο. Το μέρος της ύλης που είναι ήδη γνωστό στον αναγνώστη δεν παρουσιάζεται λεπτομερώς ενώ εξηγούνται πιο προσεκτικά άλλα θέματα ώστε να γίνουν κατανοητοί σημαντικοί ορισμοί και παραδοχές.

1-1. ΤΟ ΜΗΧΑΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Ας θεωρήσουμε ένα μηχανικό σύστημα που αποτελείται από N σωμάτια, όπου *σωμάτιο* είναι ένα ιδανικό υλικό σώμα το οποίο έχει τη μάζα του συγκεντρωμένη σ' ένα σημείο. Η κίνηση ενός σωματίου είναι λοιπόν η κίνηση ενός σημείου στο χώρο. Αφού το σημείο δεν έχει γεωμετρικές διαστάσεις δεν μπορούμε να καθορίσουμε τον προσανατολισμό ενός σωματίου, ούτε μπορούμε να συσχετίσουμε κάποια συγκεκριμένη περιστροφική κίνηση μ' αυτό. Στη μη-σχετικιστική αντιμετώπιση, δηλαδή, παντού εκτός του τελευταίου κεφαλαίου θα θεωρούμε ότι η μάζα του κάθε σωματίου παραμένει σταθερή.

Εξισώσεις κίνησης. Οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης για ένα σύστημα N σωματίων μπορούν να παραχθούν από την εφαρμογή των νόμων κίνησης του Newton για κάθε σωμάτιο ξεχωριστά. Για ένα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

σωμάτιο μάζας m, στο οποίο εφαρμόζεται δύναμη $\mathbf{F}$, από το δεύτερο νόμο του Newton παίρνουμε τη διανυσματική εξίσωση

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a} \tag{1-1}$$

ή

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \dot{\mathbf{p}}\,, \tag{1-2}$$

όπου η *γραμμική ορμή* $\mathbf{p}$ δίνεται από την

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \tag{1-3}$$

και η επιτάχυνση $\mathbf{a}$ (ή $\dot{\mathbf{v}}$) μετριέται ως προς ένα *αδρανειακό σύστημα αναφοράς*.

Η ύπαρξη ενός *αδρανειακού* συστήματος αναφοράς είναι μια ουσιαστική παραδοχή της Νευτώνειας δυναμικής. Ως παράδειγμα αδρανειακού συστήματος αναφοράς, θεωρούμε ένα σύστημα με την αρχή του στον ήλιο και μη-περιστρεφόμενο σε σχέση με τους επονομαζόμενους "απλανείς" αστέρες. Μπορεί να αποδειχθεί ότι οποιοδήποτε άλλο σύστημα αναφοράς, το οποίο δεν περιστρέφεται, αλλά μεταφέρεται με ομοιόμορφη ταχύτητα, σχετικά μ' ένα αδρανειακό σύστημα, είναι επίσης ένα αδρανειακό σύστημα. Επομένως, η ύπαρξη ενός αδρανειακού συστήματος συνεπάγεται την ύπαρξη άπειρων άλλων αδρανειακών συστημάτων, τα οποία είναι εξ ίσου αποδεκτά (αλλά όχι κατ' ανάγκη το ίδιο κατάλληλα) για την περιγραφή της κίνησης ενός σωματίου, χρησιμοποιώντας τις αρχές της Νευτώνειας δυναμικής.

Ας υποθέσουμε, ότι βρήκαμε ένα κατάλληλο αδρανειακό σύστημα αναφοράς και ότι το διάνυσμα $\mathbf{r}_i$ καθορίζει τη θέση του i-σωματίου ως προς αυτό το σύστημα. Οι εξισώσεις κίνησης για το σύστημα των N σωματίων μπορούν να γραφούν με την βοήθεια της Εξ. (1-1), δηλαδή

$$m_i\,\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i\,, \quad (i = 1, 2, ..., N)\,, \tag{1-4}$$

όπου m_i είναι η μάζα του i-σωματίου και η συνολική δρώσα δύναμη σ' αυτό το σωμάτιο έχει αναλυθεί σε δυο συνιστώσες, $\mathbf{F}_i$ και $\mathbf{R}_i$. Η $\mathbf{F}_i$ είναι η *εφαρμοσμένη δύναμη* και η $\mathbf{R}_i$ είναι η *δεσμική δύναμη*. Η $\mathbf{R}_i$ είναι εκείνη η δύναμη, η οποία εξασφαλίζει την παρουσία των

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

γεωμετρικών περιορισμών, κατά την κίνηση του *i*-σωματίου. Η δύναμη $\mathbf{F}_i$ εκφράζει το άθροισμα όλων των άλλων δυνάμεων που δρουν στο *i*-σωμάτιο. Μια πιο λεπτομερής συζήτηση για τους δεσμούς και τις σχετιζόμενες μ' αυτούς δυνάμεις δίνεται στις παραγράφους 1-3 και 1-4.

Γενικά, οι δυνάμεις που δρουν πάνω σ' ένα σώμα μπορούν να ταξινομηθούν με βάση τον τρόπο εφαρμογής τους ως εξής: (1) δυνάμεις *επαφής* και (2) *μαζικές* δυνάμεις ή δυνάμεις *πεδίου*. Οι δυνάμεις επαφής μεταβιβάζονται στο σώμα με απ' ευθείας μηχανική ώθηση ή ελκυσμό. Οι μαζικές δυνάμεις σχετίζονται με δράση από απόσταση και εκφράζονται από βαρυτικά, ηλεκτρικά, ή άλλα πεδία. Συχνά συμβαίνει οι μαζικές δυνάμεις να εφαρμόζονται σ' ολόκληρο το σώμα, ενώ οι δυνάμεις επαφής εφαρμόζονται μόνο στη συνοριακή του επιφάνεια. Οι δυνάμεις $\mathbf{R}_i$ που σχετίζονται με γεωμετρικούς δεσμούς είναι πάντα δυνάμεις επαφής ενώ, οι δυνάμεις $\mathbf{F}_i$ μπορεί να είναι είτε του τύπου μαζικών δυνάμεων, είτε του τύπου δυνάμεων επαφής, ή και συνδυασμός των δύο.

Αντί να γράφουμε μια διανυσματική εξίσωση όπως η (1-4) για κάθε σωμάτιο, είναι μερικές φορές προτιμότερο να γράφουμε τρεις βαθμωτές εξισώσεις. Χρησιμοποιώντας τις Καρτεσιανές συντεταγμένες (x_i, y_i, z_i) για να περιγράψουμε την θέση του *i*-σωματίου παίρνουμε

$$\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= F_{ix} + R_{ix} \\ m_i \ddot{y}_i &= F_{iy} + R_{iy} \quad , \qquad (i = 1, 2, ..., N) \ , \\ m_i \ddot{z}_i &= F_{iz} + R_{iz} \end{aligned} \tag{1-5}$$

όπου F_{ix} και R_{ix} είναι οι x-συνιστώσες των $\mathbf{F}_i$ και $\mathbf{R}_i$, αντίστοιχα. Οι $F_{iy}, R_{iy}, F_{iz}, R_{iz}$ ορίζονται με ανάλογο τρόπο.

Ο συμβολισμός στις εξισώσεις (1-5) είναι κάπως άβολος. Για να απλοποιήσουμε τη γραφή των εξισώσεων, θα συμβολίσουμε τις Καρτεσιανές συντεταγμένες του πρώτου σωματίου με (x_1, x_2, x_3), του δευτέρου με (x_4, x_5, x_6), κ.ο.κ. Τότε, σημειώνοντας ότι η μάζα του *k*-σωματίου είναι

$$m_{3k-2} = m_{3k-1} = m_{3k} \ , \tag{1-6}$$

μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις κίνησης με τη μορφή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$m_i \ddot{x}_i = F_i + R_i , \qquad (i = 1, 2, ..., 3N) , \tag{1-7}$$

όπου F_i και R_i είναι οι x_i-συνιστώσες των εφαρμοσμένων και δεσμικών δυνάμεων, αντίστοιχα. Για παράδειγμα, στο συμβολισμό αυτό βλέπουμε ότι η F_5 συμβολιζει την y-συνιστώσα της εφαρμοσμένης δύναμης που δρα στο δεύτερο σωμάτιο και η R_{3N} είναι η z-συνιστώσα της δεσμικής δύναμης που δρα στο N-στό σωμάτιο.

Στην περίπτωση κατά την οποία δεν υπάρχουν δεσμοί, οι συνιστώσες F_i εκφράζονται ως συναρτήσεις της θέσης, της ταχύτητας και του χρόνου, ενώ οι δυνάμεις R_i είναι μηδέν. Επομένως, το σύστημα των N σωματίων περιγράφεται από $3N$ δευτέρας τάξεως διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες είναι, γενικά, μη-γραμμικές. Αν και οι εξισώσεις αυτές θεωρητικά μπορεί να επιλυθούν ως προς τη θέση του κάθε σωματίου ως συνάρτηση του χρόνου, στην πραγματικότητα πολύ σπάνια μπορεί να βρεθεί κλειστή λύση. Συνήθως, επιδιώκεται η αριθμητική τους επίλυση με την βοήθεια της αριθμητικής ανάλυσης και του ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Αν το σύστημα υπόκειται σε m δεσμούς, τότε οι δυνάμεις μπορεί να είναι συναρτήσεις, όχι μόνο της θέσης, της ταχύτητας και του χρόνου, αλλά επίσης και m επιπρόσθετων μεταβλητών, γνωστών ως πολλαπλασιαστών Lagrange. Σ' αυτή την περίπτωση υπάρχουν συνολικά $(3N+m)$ μεταβλητές που προσδιορίζονται ως συναρτήσεις του χρόνου, χρησιμοποιώντας τις $3N$ διαφορικές εξισώσεις της κίνησης και τις m εξισώσεις των δεσμών.

Έτσι, βλέπουμε ότι η διατύπωση των εξισώσεων κίνησης για ένα σύστημα N σωματίων, χρησιμοποιώντας Καρτεσιανές συντεταγμένες, μπορεί να οδηγήσει σ' ένα δύσκολο σύστημα μη-γραμμικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Σε κάποιες όμως περιπτώσεις η ανάλυση μπορεί να απλοποιηθεί σημαντικά με τη χρήση ενός διαφορετικού συστήματος συντεταγμένων, που περιέχει λιγότερους δεσμούς, ή που ίσως εξαλείφει τους δεσμούς εντελώς. Η κατάλληλη εκλογή συντεταγμένων και η χρήση περαιτέρω μετασχηματισμών των μεταβλητών, με σκοπό την απλούστευση της ανάλυσης, είναι θέματα που συζητούνται εκτενώς στα επόμενα κεφάλαια.

Μονάδες. Οι εξισώσεις κίνησης, είτε είναι γραμμένες σε δανυσματική μορφή, Εξ. (1-4), είτε σε βαθμωτή μορφή, Εξ. (1-7), απαιτούν οι μεταβλητές να είναι εκφρασμένες σ' ένα συμβιβαστό

σύστημα μονάδων. Ως συμβιβαστό, εννοούμε, ότι οι ποσότητες και στις δυο πλευρές της κάθε εξίσωσης εκφράζονται στις ίδιες, ή ισοδύναμες μονάδες. Άν θεωρήσουμε τις *διαστάσεις* των μονάδων, που χρησιμοποιούνται στις εξισώσεις κίνησης, διαπιστώνουμε ότι συνυπάρχουν η μάζα, το μήκος, ο χρόνος και η δύναμη. Επειδή όμως οι εξισώσεις κίνησης πρέπει να χαρακτηρίζονται από διαστατική ομοιογένεια, οι τέσσερεις αυτές διαστάσεις δεν είναι ανεξάρτητες, δηλαδή, κάθε διάσταση μπορεί να εκφραστεί σε όρους των άλλων τριών.

Κάποια συστήματα μονάδων, γνωστά ως *απόλυτα* συστήματα, χρησιμοποιούν, τη μάζα, το μήκος και το χρόνο ως βασικές διαστάσεις. Για παράδειγμα, το *mks* σύστημα χρησιμοποιεί το μέτρο ως βασική μονάδα μήκους, το χιλιόγραμμο ως βασική μονάδα μάζας και το δευτερόλεπτο ως βασική μονάδα χρόνου. Η μονάδα της δύναμης, το newton, είναι μια *παραγόμενη* μονάδα και ισοδυναμεί με 1kg m/sec^2. Γενικά, θα χρησιμοποιούμε αυτό το σύστημα οποτεδήποτε γίνεται λόγος για μονάδες.

Ένα άλλο γνωστό σύστημα μονάδων είναι το Αγγλικό βαρυτικό σύστημα, (*English gravitational system*) στο οποίο οι μονάδες που έχουν τις διαστάσεις της δύναμης, του μήκους και του χρόνου θεωρούνται βασικές. Εδώ το πόδι (foot) είναι η βασική μονάδα μήκους, το δευτερόλεπτο είναι η βασική μονάδα χρόνου και η λίμπρα (pound) είναι η βασική μονάδα δύναμης. Η βασική μονάδα της μάζας είναι το slug και είναι παραγόμενη μονάδα ($1\text{ lb sec}^2/\text{ft}$).

1-2. ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Βαθμοί ελευθερίας. Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό ενός μηχανικού συστήματος είναι ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας του. Ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας ισούται με τον αριθμό των συντεταγμένων μείον τον αριθμό των ανεξάρτητων εξισώσεων των δεσμών. Για παράδειγμα, αν η διάταξη ενός συστήματος N σωματίων περιγράφεται με τη χρήση $3N$ Καρτεσιανών συντεταγμένων και αν υπάρχουν l ανεξάρτητες δεσμικές εξισώσεις που συνδέουν αυτές τις συντεταγμένες, τότε υπάρχουν $(3N - l)$ βαθμοί ελευθερίας.

Για να διευκρινιστεί η ιδέα των βαθμών ελευθερίας, υποθέτουμε ότι τρία σωμάτια συνδέονται με στερεές ράβδους για να σχηματίσουν ένα τριγωνικό σώμα όπου τα σωμάτια είναι στις κορυφές του. Η διάταξη του συστήματος καθορίζεται δίνοντας τις θέσεις των τριών

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

σωματίων, δηλαδή τις 9 Καρτεσιανές συντεταγμένες. Αλλά, κάθε στερεά ράβδος περιγράφεται μαθηματικά με μια ανεξάρτητη δεσμική εξίσωση. Έχουμε, $3N - l = 9-3 = 6$ και έτσι το σύστημα έχει έξι βαθμούς ελευθερίας.

Το τριγωνικό σώμα είναι ένα παράδειγμα στερεού σώματος και έχει τον ίδιο αριθμό βαθμών ελευθερίας όπως ένα στερεό σώμα. Τούτο μπορεί να γίνει αντιληπτό σημειώνοντας ότι το τρίγωνο μπορεί να θεωρηθεί ενσωματωμένο σε οποιοδήποτε στερεό σώμα. Σ' αυτή την περίπτωση, κάθε πιθανή διάταξη του τριγώνου καθορίζει τη διάταξη του στερεού σώματος και αντίστροφα.

Είναι σημαντικό να συνειδητοποιήσουμε, ότι ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας είναι γνώρισμα του συστήματος και δεν εξαρτάται από το συγκεκριμένο σύνολο συντεταγμένων, που χρησιμοποιείται για την περιγραφή του. Για παράδειγμα, η διάταξη του προηγούμενου τριγωνικού σώματος θα μπορούσε να καθοριστεί δίνοντας τις τρεις Καρτεσιανές συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου εντός του σώματος και ένα σύνολο τριών γωνιών Euler, οι οποίες περιγράφουν τον προσανατολισμό του, δηλαδή 6- ανεξάρτητες ποσότητες-βαθμοί ελευθερίας.

Συχνά, είναι σκόπιμο να αναζητούμε ένα κατάλληλο σύνολο *ανεξάρτητων* συντεταγμένων, με το οποίο να περιγράφεται ένα σύστημα. Σ' αυτή την περίπτωση, έχουμε τόσες συντεταγμένες όσους και βαθμούς ελευθερίας και έτσι η ανάλυση περιέχει τον ελάχιστο αριθμό μεταβλητών.

Γενικευμένες συντεταγμένες. Έχουμε δει ότι ποικίλα σύνολα συντεταγμένων μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να περιγράψουν τη διάταξη ενός συστήματος. Τα σύνολα αυτά δεν έχουν κατ' ανάγκη τον ίδιο αριθμό συντεταγμένων ούτε τον ίδιο αριθμό δεσμών. Αλλά, ο αριθμός των συντεταγμένων μείον τον αριθμό των ανεξάρτητων εξισώσεων που περιγράφουν τους δεσμούς είναι πάντα ίσος με τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας.

Ας θεωρήσουμε τώρα δυο σύνολα συντεταγμένων τα οποία περιγράφουν το ίδιο σύστημα. Σε κάθε χρονική στιγμή, οι τιμές του κάθε συνόλου συντεταγμένων είναι μια ομάδα αριθμών. Η διαδικασία με την οποία προκύπτει ένα σύνολο αριθμών από το άλλο είναι γνωστή ως *μετασχηματισμός συντεταγμένων.*

Επειδή υπάρχει μία πληθώρα πιθανών μετασχηματισμών συντεταγμένων, οποιοδήποτε σύνολο παραμέτρων, το οποίο δίνει μια

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

σαφή έκφραση της διάταξης του συστήματος θα χρησιμεύει ως ένα σύστημα συντεταγμένων με την ευρεία έννοια. Αυτές οι παράμετροι είναι γνωστές ως *γενικευμένες συντεταγμένες*. Ως γενικευμένες συντεταγμένες μπορούν να χρησιμοποιηθούν όχι μόνο οι συνήθεις τύποι συντεταγμένων αλλά και πολλές άλλες παράμετροι. Για παράδειγμα, η κίνηση μιας συγκεκριμένης γενικευμένης συντεταγμένης μπορεί να εμπεριέχει μεταφορά ενός τμήματος του συστήματος και περιστροφή ενός άλλου τμήματος.

Οι γενικευμένες συντεταγμένες έχουν συνήθως μια εύκολα ορατή γεωμετρική σημασία και ως προς αυτή τη σημασία συνήθως επιλέγονται. Επιπλέον, είναι πλεονέκτημα, στις περισσότερες αναλύσεις να εκλέγεται ένα σύστημα *ανεξαρτήτων* γενικευμένων συντεταγμένων. Αν οι γενικευμένες συντεταγμένες καθορίζουν τη διάταξη του συστήματος και μπορούν να μεταβάλλονται ανεξάρτητα χωρίς να παραβιάζουν τους δεσμούς, τότε ο αριθμός των γενικευμένων συντεταγμένων είναι ίσος με τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας.

Άμεσες διαδικασίες, όπως η χρησιμοποίηση των εξισώσεων Lagrange, υπάρχουν για να πάρουμε τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης σε όρους των γενικευμένων συντεταγμένων. Όπως θα δούμε στο Κεφ. 2, η χρήση των ανεξάρτητων γενικευμένων συντεταγμένων επιτρέπει την ανάλυση της κίνησης των περισσότερων συστημάτων, χωρίς την επίλυση ως προς τις δεσμικές δυνάμεις.

Επιστρέφοντας τώρα σε μια εξέταση των εξισώσεων μετασχηματισμού που συνδέουν τις Καρτεσιανές συντεταγμένες $x_1, x_2, \ldots, x_{3N}$ με τις γενικευμένες συντεταγμένες $q_1, q_2, \ldots, q_n$, θα υποθέσουμε ότι αυτές οι εξισώσεις είναι της μορφής,

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \\ x_2 &= x_2(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \\ &\cdots \\ x_{3N} &= x_{3N}(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \ . \end{aligned} \tag{1-8}$$

Με το κάθε σύστημα συντεταγμένων είναι δυνατόν να συνδέονται εξισώσεις δεσμών. Αν το σύστημα των x_i έχει l εξισώσεις δεσμών και το σύστημα των q_i έχει m εξισώσεις δεσμών, τότε, εξισώνοντας τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας σε κάθε περίπτωση, έχουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$3N - l = n - m \ . \tag{1-9}$$

Είναι επιθυμητό, ένα και μόνο ένα σύνολο γενικευμένων συντεταγμένων να αντιστοιχεί στην κάθε δυνατή διάταξη του συστήματος. Μ' άλλα λόγια, πρέπει να υπάρχει ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των σημείων του επιτρεπτού τόπου των x_i και των σημείων του επιτρεπτού τόπου των q_i για κάθε χρονική στιγμή. Η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να εκφραστούν οι q_k ως συναρτήσεις των x_i και του χρόνου είναι η Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού να είναι μη-μηδενική.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε ότι οι $3N$-Καρτεσιανές συντεταγμένες έχουν l εξισώσεις δεσμών της μορφής

$$f_j\,(x_1\,,\,x_2\,,\,\ldots\,,\,x_{3N}\,,\,t) = \alpha_j\ ,\quad (j = 3N - l + 1\,,\,\ldots\,,\,3N)\ . \tag{1-10}$$

Έστω ότι οι n γενικευμένες συντεταγμένες έχουν εκλεγεί έτσι ώστε να είναι ανεξάρτητες, δηλαδή ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας είναι

$$n = 3N - l\ .$$

Ορίζουμε ένα επιπρόσθετο σύνολο από l γενικευμένες συντεταγμένες και τις ταυτίζουμε με τις l σταθερές α_j,

$$q_j = \alpha_j\ ,\quad (j = n+1,\,\ldots\,,\,3N)\ . \tag{1-11}$$

Τότε, οι εξισώσεις μετασχηματισμού (1-8) μπορούν να θεωρηθούν ότι είναι της μορφής

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(q_1,\ q_2,\ \ldots\,,\ q_{3N},\ t) \\ x_2 &= x_2(q_1,\ q_2,\ \ldots\,,\ q_{3N},\ t) \\ &\ \ \vdots \\ x_{3N} &= x_{3N}\,(q_1,\ q_2,\ \ldots\,,\ q_{3N}\,,\ t)\ . \end{aligned} \tag{1-12}$$

Αν η Ιακωβιανή ορίζουσα είναι μη-μηδενική, δηλαδή αν

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\frac{\partial (x_1 , x_2 , \ldots , x_{3N})}{\partial (q_1 , q_2 , \ldots , q_{3N})} \neq 0 \qquad (1\text{-}13)$$

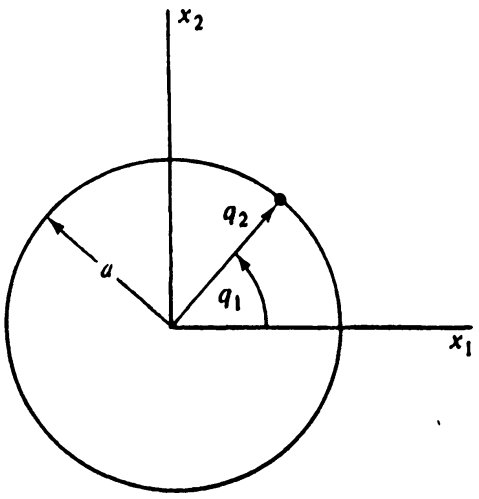
τότε οι Εξ. (1-8) ή οι Εξ. (1-12) μπορούν να επιλυθούν ως προς τις γενικευμένες συντεταγμένες σαν συναρτήσεις των Καρτεσιανών συντεταγμένων και του χρόνου,

$$q_j = f_j (x_1, x_2, \ldots , x_{3N} , t) , \qquad (j = 1, 2, \ldots , n) \ . \qquad (1\text{-}14)$$

Οι υπόλοιπες σταθερές q_j, $j = n+1$, ..., $3N$ δίνονται απ' τις Εξ. (1-10) και (1-11).

Παράδειγμα 1-1. Ως ένα απλό παράδειγμα μετασχηματισμού από Καρτεσιανές σε γενικευμένες συντεταγμένες, θα θεωρήσουμε ένα σωμάτιο που είναι εξαναγκασμένο να κινείται πάνω σε μια κυκλική τροχιά ακτίνας a, όπως φαίνεται στο Σχ. 1-1. Η δεσμική εξίσωση είναι

$$(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} = a \ .$$



Σχ. 1-1. Σωμάτιο σε σταθερή κυκλική τροχιά.

Έστω ότι μια μοναδική γενικευμένη συντεταγμένη q_1 εκφράζει τον ένα βαθμό ελευθερίας. Η πολική γωνία μπορεί να μεταβάλλεται ελεύθερα,

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

χωρίς να παραβιάζει το δεσμό. Σύμφωνα με την Εξ. (1-11), ας ορίσουμε μια δεύτερη γενικευμένη συντεταγμένη q_2 η οποία είναι σταθερή,

$$q_2 = \alpha \ .$$

Οι εξισώσεις μετασχηματισμού είναι

$$x_1 = q_2 \cos q_1$$
$$x_2 = q_2 \sin q_1 \ .$$

Η Ιακωβιανή ορίζουσα αυτού του μετασχηματισμού είναι

$$\frac{\partial(x_1 ,x_2)}{\partial(q_1 ,q_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_1}{\partial q_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} \end{vmatrix} = - q_2 \ .$$

Άρα, οι γενικευμένες συντεταγμένες μπορούν να εκφραστούν ως συναρτήσεις των Καρτεσιανών εκτός αν η Ιακωβιανή ορίζουσα είναι μηδέν στο q_2=0. Σ' αυτή την περίπτωση η ακτίνα του κύκλου είναι μηδέν και η γωνία q_1 είναι απροσδιόριστη. Οι εξισώσεις μετασχηματισμού είναι,

$$q_1 = \tan^{-1} \frac{x_2}{x_1}$$

$$q_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} ,$$

όπου παίρνουμε αυθαίρετα ότι $0 \leq q_1 < 2\pi$ και $0 < q_2 < \infty$ για να είναι οι γενικευμένες συντεταγμένες μονότιμες συναρτήσεις των Καρτεσιανών συντεταγμένων. Αυτές οι εξισώσεις μετασχηματισμού εφαρμόζονται για όλα τα σημεία του πεπερασμένου x_1x_2 - επίπεδου, εκτός απ' την αρχή του (x_1=x_2= 0).

Μορφικός χώρος. Έχουμε δει ότι η διάταξη ενός συστήματος N σωματίων καθορίζεται από τις τιμές των $3N$ Καρτεσιανών συντεταγμένων. Αν το σύστημα έχει l ανεξάρτητες εξισώσεις δεσμών της μορφής των Εξ. (1-10), τότε είναι δυνατόν να βρεθούν n

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

ανεξάρτητες γενικευμένες συντεταγμένες $q_1, q_2, ..., q_n$, όπου $n = 3N - 1$. Άρα, ένα σύνολο n αριθμών, δηλαδή οι τιμές των n γενικευμένων συντεταγμένων, καθορίζει πλήρως τη διάταξη του συστήματος. Είναι σκόπιμο να θεωρήσουμε τους n αυτούς αριθμούς ως τις συντεταγμένες ενός *μοναδικού σημείου* σ' ένα n-διάστατο χώρο γνωστό σαν *μορφικό χώρο*. Μ' άλλα λόγια, η διάταξη οποιουδήποτε μηχανικού συστήματος, το οποίο έχει έναν πεπερασμένο αριθμό βαθμών ελευθερίας, απεικονίζεται με ένα σημείο στον n-διάστατο q-χώρο. Ας θεωρήσουμε ένα διάνυσμα **q** από την αρχή μέχρι το δοσμένο μορφικό σημείο. Το διάνυσμα **q** έχει αντίστοιχα n γενικευμένες συντεταγμένες ως συνιστώσες του σ' έναν Ευκλείδειο (ορθογώνιο) χώρο n- διαστάσεων.

Όταν ένα μηχανικό σύστημα αλλάζει τη διάταξή του με το χρόνο, το αντίστοιχο μορφικό σημείο ιχνηλατεί μια καμπύλη στον q-χώρο. Για τη συνηθισμένη περίπτωση των ανεξάρτητων γενικευμένων συντεταγμένων, η καμπύλη θα είναι συνεχής αλλά χωρίς περιορισμούς. Αν όμως υπάρχουν δεσμοί οι οποίοι εκφράζονται ως συναρτήσεις των γενικευμένων συντεταγμένων, το μορφικό σημείο κινείται σε μια υπερεπιφάνεια, η οποία έχει λιγότερες από n διαστάσεις.

Η έννοια του μορφικού χώρου ή q-χώρου χρησιμοποιείται συχνά στην αναλυτική δυναμική.

1-3. ΔΕΣΜΟΙ

Έχουμε δει ότι ένα σύστημα N σωματίων μπορεί να έχει λιγότερους από $3N$ βαθμούς ελευθερίας εξ αιτίας της παρουσίας των δεσμών. Οι δεσμοί θέτουν γεωμετρικούς περιορισμούς πάνω στους δυνατούς τρόπους κίνησης του συστήματος κάι έχουν ως αποτέλεσμα τις αντίστοιχες δεσμικές δυνάμεις. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε με λεπτομέρεια την ταξινόμηση και τη μαθηματική περιγραφή των δεσμών.

Ολόνομοι δεσμοί. Υποθέτουμε ότι η διάταξη ενός συστήματος καθορίζεται από τις n γενικευμένες συντεταγμένες $q_1, q_2, ..., q_n$ και θεωρούμε ότι υπάρχουν k ανεξάρτητες εξισώσεις δεσμών της μορφής,

$$\varphi_j(q_1, q_2, ..., q_n, t) = 0 , \qquad (j = 1,2, ... ,k) . \qquad (1\text{-}15)$$

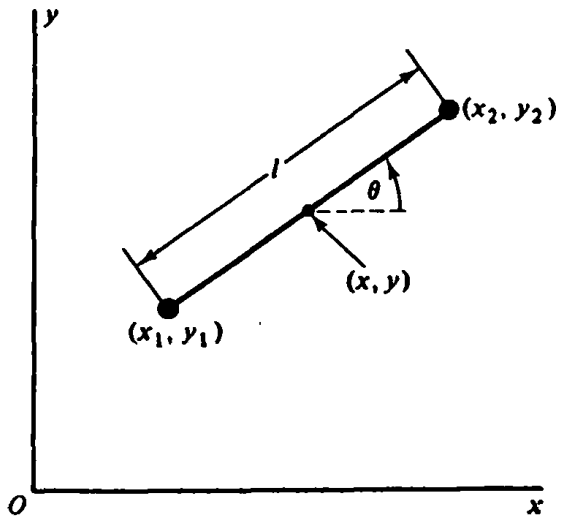
Ένας δεσμός, ο οποίος εκφράζεται μ' αυτό τον τρόπο, είναι γνωστός ως *ολόνομος δεσμός*.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ένα σύστημα του οποίου οι εξισώσεις δεσμού, αν υπάρχουν, είναι όλες ολόνομου τύπου και δίνονται απ' τις Εξ. (1-15) ονομάζεται *ολόνομο σύστημα*. Ως παράδειγμα ολόνομου συστήματος θεωρούμε την κίνηση στο xy - επίπεδο των δυο σωματίων που φαίνονται στο Σχ. 1-2. Αυτά τα σωμάτια συνδέονται με μια στερεά ράβδο μήκους l, συνεπώς η αντίστοιχη εξίσωση δεσμού είναι

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 = 0 \ .$$

Σ' αυτή την περίπτωση υπάρχουν τέσσερις συντεταγμένες και μια εξίσωση δεσμού, δηλαδή τρεις βαθμοί ελευθερίας. Η εξίσωση του δεσμού μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να απαλείφει μια από τις μεταβλητές από τις εξισώσεις κίνησης. Αυτή η διαδικασία συχνά συνεπάγεται αλγεβρικές δυσκολίες και σπάνια χρησιμοποιείται. Αντ' αυτού, είναι καλύτερο να αναζητήσουμε ένα σύνολο ανεξαρτήτων γενικευμένων συντεταγμένων, μιας και είναι γνωστό ότι αυτές οι συντεταγμένες υπάρχουν για όλα τα ολόνομα συστήματα. Για παράδειγμα, μπορούμε να επιλέξουμε ως γενικευμένες συντεταγμένες τις Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) του κέντρου της ράβδου και τη γωνία θ μεταξύ της ράβδου και του x -άξονα.



Σχ. 1-2. Δυο σωμάτια συνδεδεμένα με ράβδο μήκους l.

Έχουμε υποθέσει ότι το μήκος l της ράβδου είναι σταθερό και γι' αυτό οι ολόνομες εξισώσεις δεσμού δεν περιέχουν το χρόνο. Δεσμοί

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

αυτού του είδους στους οποίους ο χρόνος t δεν εμφανίζεται εκπεφρασμένα είναι γνωστοί ως *σκληρόνομοι* δεσμοί. Αν όμως το μήκος l έχει δοθεί ως μια συνάρτηση που περιέχει εκπεφρασμένα το χρόνο, ο δεσμός θα είχε ταξινομηθεί ως *ρεόνομος*. Στη συνήθη περίπτωση, ένας ρεόνομος δεσμός είναι ένας χρονοεξαρτημένος (κινούμενος) δεσμός.

Οι όροι σκληρόνομος και ρεόνομος μπορούν επίσης να εφαρμοσθούν και σ' ένα μηχανικό σύστημα. Ένα σύστημα είναι *σκληρόνομο* αν (1) καμιά από τις εξισώσεις δεσμού δεν περιέχει εκπεφρασμένα το t και (2) αν οι εξισώσεις μετασχηματισμού (1-8) δίνουν τις Καρτεσιανές συντεταγμένες ως συνάρτηση των γενικευμένων συντεταγμένων μόνο. Αν οποιαδήποτε από τις εξισώσεις δεσμού ή τις εξισώσεις μετασχηματισμού περιέχουν εκπεφρασμένα το χρόνο, το σύστημα είναι *ρεόνομο.*

Για να εξηγήσουμε αυτό το σημείο περισσότερο, σε κάποιες περιπτώσεις συμβαίνει οι γενικευμένες συντεταγμένες να μπορούν να εκλεγούν με τέτοιο τρόπο ώστε να μην υπάρχουν εξισώσεις δεσμού ή ίσως μόνο σκληρόνομοι δεσμοί και παρ' όλ' αυτά οι εξισώσεις μετασχηματισμού να περιέχουν το χρόνο εκπεφρασμένα. Ένα παράδειγμα αποτελεί ένα σωμάτιο που υποχρεώνεται να κινηθεί πάνω σ' ένα στερεό καλώδιο το οποίο περιστρέφεται ομοιόμορφα γύρω από ένα σταθερό άξονα· η μοναδική γενικευμένη συντεταγμένη είναι η θέση του σωματίου σχετικά με το καλώδιο. Εδώ δεν υπάρχουν εξισώσεις δεσμού, αλλά το σύστημα είναι ρεόνομο.

Ως εδώ έχουμε εξετάσει δυο μεθόδους, οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην ανάλυση των συστημάτων με ολόνομους δεσμούς, δηλαδή, την απαλοιφή των μεταβλητών, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις δεσμού και τη χρήση των ανεξάρτητων γενικευμένων συντεταγμένων. Μια τρίτη προσέγγιση, που μπορεί να εφαρμοστεί είτε σε ολόνομα είτε σε μη-ολόνομα συστήματα είναι *η μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange*. Η μέθοδος αυτή περιγράφει τους δεσμούς εισάγοντας τις αντίστοιχες δεσμικές δυνάμεις οι οποίες εκφράζονται σε όρους k μεταβλητών-παραμέτρων λ_j, γνωστών ως *πολλαπλασιαστών του Lagrange* και θα συζητηθεί στην παράγραφο 2-1.

Μη-ολόνομοι δεσμοί. Τώρα ας θεωρήσουμε ένα σύστημα με m δεσμούς οι οποίοι γράφονται ως *μη-ολοκληρώσιμες* διαφορικές εκφράσεις της μορφής

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}\, dq_i + \alpha_{jt}\, dt = 0\,, \quad (j = 1,2, \ldots, m)\,, \tag{1-16}$$

όπου οι συντελεστές α είναι γενικά συναρτήσεις των γενικευμένων συντεταγμένων και του t. Δεσμοί αυτού του είδους είναι γνωστοί ως *μη-ολόνομοι δεσμοί.*

Ως αποτέλεσμα της μη-ολοκληρώσιμης φύσης αυτών των διαφορικών εξισώσεων, είναι να μην μπορούν να ληφθούν συναρτήσεις της μορφής των Εξ. (1-15) ώστε να χρησιμοποιηθούν για την απάλειψη κάποιων από τις μεταβλητές και ούτε είναι δυνατόν να βρεθεί ένα σύνολο ανεξαρτήτων γενικευμένων συντεταγμένων. Άρα τα μη-ολόνομα συστήματα απαιτούν πάντα περισσότερες συντεταγμένες για την περιγραφή τους απ' όσοι είναι οι βαθμοί ελευθερίας τους.

Ως παράδειγμα μη-ολόνομου συστήματος, θεωρούμε ξανά τα δυο σωμάτια και τη ράβδο του Σχ. 1-2. Υποθέτουμε ότι τα σωμάτια μπορούν να ολισθαίνουν στο οριζόντιο xy-επίπεδο χωρίς τριβή. Το σύστημα άλλαξε με την προσθήκη ενός μη-ολόνομου δεσμού με τη μορφή στηριγμάτων, όπως στο Σχ. 2-6. Αυτά τα στηρίγματα κινούνται με το σύστημα και είναι προσανατολισμένα κάθετα προς τη διεύθυνση της ράβδου με τέτοιο τρόπο ώστε να μην επιτρέπουν συνιστώσα της ταχύτητας κατα μήκος της ράβδου σε κανένα από τα σωμάτια. Για το λόγο αυτό, η ταχύτητα του κέντρου της ράβδου πρέπει να είναι κάθετη στη ράβδο, πράγμα που οδηγεί στην ακόλουθη εξίσωση δεσμού,

$$\dot{x} = -\,\dot{y} \tan\theta$$

ή

$$\cos\theta\, dx + \sin\theta\, dy = 0\,. \tag{1.17}$$

Η έκφραση αυτή δεν είναι τέλειο διαφορικό, δηλαδή δεν υπάρχει συνάρτηση $\Phi(x, y, \theta)$ τέτοια ώστε η Εξ. (1-17) να είναι της μορφής

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\, dy + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\, d\theta\,. \tag{1-18}$$

Επιπλέον, η Εξ. (1-17) δεν μπορρεί να πολλαπλασιαστεί με κανένα ολοκληρωτικό παράγοντα ώστε να παράγει ένα τέλειο διαφορικό και άρα δεν είναι ολοκληρώσιμη.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Γενικά μπορεί να αποδειχθεί (*) ότι η ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ολοκληρωσιμότητα της διαφορικής εξίσωσης

$$\alpha_x\, dx + \alpha_y\, dy + \alpha_\theta\, d\theta = 0 \qquad (1\text{-}19)$$

είναι η

$$\alpha_x\left(\frac{\partial \alpha_y}{\partial \theta} - \frac{\partial \alpha_\theta}{\partial y}\right) + \alpha_y\left(\frac{\partial \alpha_\theta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_x}{\partial \theta}\right) + \alpha_\theta\left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial y} - \frac{\partial \alpha_y}{\partial x}\right) = 0 \quad , \qquad (1\text{-}20)$$

όπου οι α_i, $i=x,y,\theta$, είναι συναρτήσεις των x, y και θ. Εφαρμόζοντας αυτό το κριτήριο στην Εξ. (1-17), επιβεβαιώνουμε ότι η έκφραση αυτή δεν είναι ολοκληρώσιμη.

Το σύστημα το οποίο αποτελείται από δύο σωμάτια και μια στερεά ράβδο, απεικονίζει μια σημαντική κινηματική διαφορά ανάμεσα στους ολόνομους και μη-ολόνομους δεσμούς. Αυτή η διαφορά συμβαίνει σε σχέση με το *ευπρόσιτο*. Αν αρχικά θεωρήσουμε δυο αδέσμευτα σωμάτια που κινούνται στο xy-επίπεδο, παρατηρούμε ότι υπάρχει ένας τετραδιάστατος μορφικός χώρος, ο οποίος αντιστοιχεί στις τέσσερις ανεξάρτητες συντεταγμένες, που χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν τη διάταξη του συστήματος. Η πρόσθεση ενός ολόνομου δεσμού με τη μορφή στερεάς ράβδου, που συνδέει τα σωμάτια, έχει ως αποτέλεσμα την ελάττωση του αριθμού των βαθμών ελευθερίας από τέσσερις σε τρεις. Μιας και υπάρχουν τώρα τρεις ανεξάρτητες γενικευμένες συντεταγμένες, ο μορφικός χώρος περιορίζεται επίσης στις τρεις διαστάσεις. Αλλά κάθε σημείο του χώρου είναι προσιτό από οποιοδήποτε άλλο σημείο, δηλαδή, κάθε δυνατή διάταξη μπορεί να προσεγγιστεί από οποιαδήποτε άλλη διάταξη.

Τώρα θεωρούμε το αποτέλεσμα της προσθήκης ενός μη-ολόνομου δεσμού που περιορίζει τις ταχύτητες των σωματίων στη διεύθυνση της καθέτου στη ράβδο. Ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας περιορίζεται σε δύο, αλλά ο αριθμός των απαιτουμένων γενικευμένων συντεταγμένων παραμένει ο ίδιος δηλαδή τρεις. Επιπλέον, κάθε σημείο στον τρισδιάστατο χώρο είναι προσιτό από οποιοδήποτε άλλο σημείο. Γενικά, η κινηματική επίδραση ενός μη-ολόνομου δεσμού είναι να περιορίσει τη

(*) Βλ. E.. L . Ince, *Ordinary Differential Equations* (New York: Dover Publications, Inc. 1956), σελ. 54.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

διεύθυνση των επιτρεπτών κινήσεων σε οποιοδήποτε σημείο του q-χώρου. Αλλά αυτό δεν ελαττώνει τον αριθμό των διαστάσεων στο χώρο, ούτε περιορίζει την ποικιλία των διαθέσιμων διατάξεων στο σύστημα. Αυτό το τελευταίο αποτέλεσμα είναι άμεση συνέπεια της μη-ολοκληρωσιμότητας της διαφορικής μορφής, γιατί αν μπορούσε να βρεθεί μια συνάρτηση της μορφής

$$\Phi(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) = c \tag{1-21}$$

θα παρίστανε μια υπερεπιφάνεια, (εμβαπτισμένη στο q-χώρο), εντός της οποίας το μορφικό σημείο θα περιοριζόταν να κινείται και ως εκ τούτου θα περιόριζε την περιοχή του ευπρόσιτου.

Παράδειγμα 1-2. Ένα κλασικό παράδειγμα μη-ολόνομου δεσμού έχουμε όταν υπάρχει επαφή κύλισης χωρίς ολίσθηση, π.χ., θεωρούμε ένα κάθετο δίσκο ακτίνας r, ο οποίος κυλίεται, χωρίς ολίσθηση, στο οριζόντιο επίπεδο xy, όπως φαίνεται στο Σχ. 1-3. Ας εκλέξουμε ως γενικευμένες συντεταγμένες το σημείο επαφής (x, y), τη γωνία περιστροφής φ του δίσκου γύρω από έναν κατακόρυφο άξονα, που περνάει από το κέντρο του και τη γωνία α μεταξύ του επιπέδου του δίσκου και του yz-επιπέδου. Η απαίτηση για κύλιση χωρίς ολίσθηση συνεπάγεται ότι

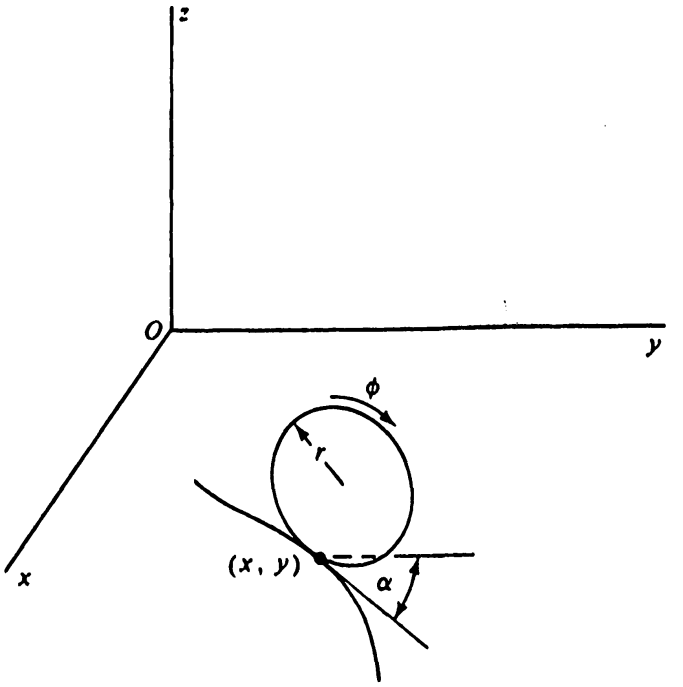
$$\begin{aligned} dx - r\sin\alpha\, d\varphi &= 0 \\ dy - r\cos\alpha\, d\varphi &= 0\ , \end{aligned} \tag{1-22}$$

αφού το $r\,d\varphi$ είναι ένα διαφορικό στοιχείο μετατόπισης κατά μήκος της τροχιάς η οποία ιχνηλατήθηκε από το σημείο επαφής και α είναι η γωνία μεταξύ της εφαπτομένης σ' αυτή την τροχιά και του y-άξονα.

Σ' αυτό το παράδειγμα υπάρχουν τέσσερις συντεταγμένες και δυο ανεξάρτητες εξισώσεις δεσμών, δηλαδή έχουμε δυο βαθμούς ελευθερίας. Πρέπει να σημειωθεί, ότι ο συνολικός τετραδιάστατος χώρος είναι προσιτός, δηλαδή, είναι δυνατόν να φτάσουμε σε μια τυχούσα διάταξη (x, y, φ, α) ξεκινώντας από οποιαδήποτε άλλη, εκλέγοντας κατάλληλα την τροχιά.

Όπως είναι γνωστό, η ολοκληρωσιμότητα μιας διαφορικής μορφής απαιτεί όπως αυτή είναι τέλειο διαφορικό ή να είναι δυνατόν να γίνει τέλειο διαφορικό μετά από πολλαπλασιασμό μ' έναν ολοκληρωτικό

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



Σχ. 1-3. Κάθετος δίσκος κυλιόμενος σε οριζόντιο επίπεδο.

παράγοντα, ο οποίος είναι κάποια συνάρτηση των μεταβλητών. Οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να είναι τέλειο διαφορικό η διαφορική μορφή της Εξ. (1-16) είναι

$$\frac{\partial \alpha_{ji}}{\partial q_k} = \frac{\partial \alpha_{jk}}{\partial q_i}$$

$$\frac{\partial \alpha_{ji}}{\partial t} = \frac{\partial \alpha_{jt}}{\partial q_i} \qquad , \quad (i, k = 1,2, \ldots, n) \ . \tag{1-23}$$

Αφού οι συντελεστές του $d\varphi$ στην Εξ. (1-22) είναι συναρτήσεις του α, ενώ οι συντελεστές του $d\alpha$ είναι μηδέν, είναι φανερό ότι δεν μπορεί να βρεθεί ολοκληρωτικός παράγοντας τέτοιος ώστε η προκύπτουσα έκφραση να ικανοποιεί τη συνθήκη που εκφράζεται από την Εξ. (1-23). Συνεπώς και οι δυο δεσμοί είναι μη-ολόνομοι.

Μονόπλευροι δεσμοί. Οι δεσμοί οι οποίοι έχουν συζητηθεί μέχρι τώρα ήταν όλοι αμφίπλευροι, δηλαδή αν φανταστούμε μια μικρή επιτρεπτή μετατόπιση από οποιαδήποτε διάταξη του συστήματος, το αρνητικό αυτής της μετατόπισης είναι επίσης επιτρεπτή μετατόπιση για

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

κάθε σταθερή τιμή του t . Τέτοιοι αμφίπλευροι δεσμοί εκφράζονται πάντα με μια ισότητα.

Τώρα ας θεωρήσουμε ένα δεσμό ο οποίος είναι διατυπωμένος με τη μορφή ανισότητας η οποία περιέχει μια συνάρτηση των γενικευμένων συντεταγμένων και πιθανώς του χρόνου, τέτοια όπως

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \leq 0 \ . \qquad (1\text{-}24)$$

Από την (1-24) συνεπάγεται ότι το μορφικό σημείο περιορίζεται σε κάποιο τόπό ενός n-διάστατου μορφικού χώρου, ο οποίος μπορεί να μεταβάλλεται με το χρόνο. Αν το μορφικό σημείο κείται στο σύνορο ενός επιτρεπτού τόπου, η μονόπλευρη φύση του δεσμού είναι προφανής γιατί το αρνητικό μιας επιτρεπτής μικρής μετατόπισης, γενικά, θα κείται έξω από τον τόπο και ως εκ τούτου δεν θα είναι επιτρεπτή.

Ως συγκεκριμένο παράδειγμα μονόπλευρου δεσμού, θεωρούμε ένα ελεύθερο σωμάτιο που εμπεριέχεται μέσα σε μια σταθερή κούφια σφαίρα ακτίνας r η οποία έχει κέντρο την αρχή ενός Καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων. Αν χρησιμοποιήσουμε τις (x, y, z), ως συντεταγμένες του σωματίου, ο μονόπλευρος δεσμός δίνεται από την

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 \leq 0 \ . \qquad (1\text{-}25)$$

Αν το σωμάτιο είναι μέσα στη σφαίρα και δεν αγγίζει την επιφάνειά της ισχύει η ανισότητα και το σωμάτιο κινείται ελεύθερα με τρεις βαθμούς ελευθερίας. Αν όμως το σωμάτιο κινείται στην επιφάνεια της σφαίρας για κάποιο διάστημα, ισχύει η ισότητα και το σωμάτιο κινείται ελεύθερα σε μια διδιάστατη επιφάνεια. Τέλος, αν το σωμάτιο χτυπά τη σφαίρα και αναπηδά με βάση κάποιο συντελεστή απόδοσης, η στιγμή της σύγκρουσης ορίζει το συνοριακό σημείο ανάμεσα σε δυο περιόδους ελεύθερης κίνησης. Οι αρχικές συνθήκες μιας περιόδου υπολογίζονται απ' τις τελικές συνθήκες της προηγούμενης περιόδου.

Σε οποιοδήποτε συμβάν, η κίνηση του σωματίου λαμβάνεται με τη θεώρηση μιας ακολουθίας *ολόνομων* συστημάτων, όπου αλλαγή διεύθυνσης λαμβάνει χώρα όταν το σωμάτιο· χτυπά τη σφαιρική επιφάνεια ή την αφήνει. Έτσι λοιπόν ο μονόπλευρος ή με τη μορφή ανισότητας δεσμός είναι στη φύση του ολόνομος.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

1-4. ΔΥΝΑΤΟ ΕΡΓΟ

Η έννοια του δυνατού έργου είναι βασική στην αναλυτική μηχανική και συνδέεται άμεσα με την εφαρμογή των ενεργειακών μεθόδων στην παραγωγή των εξισώσεων κίνησης όπως επίσης και τη μελέτη της ευστάθειας. Επειδή το δυνατό έργο συνδέεται με τη δυνατή μετατόπιση, ας εξετάσουμε πρώτα τη φύση της δυνατής μετατόπισης.

Δυνατή μετατόπιση. Θεωρούμε ότι μια διάταξη N σωματίων προσδιορίζεται από $3N$ Καρτεσιανές συντεταγμένες $x_1, x_2, \ldots, x_{3N}$ οι οποίες μετρούνται ως προς ένα αδρανειακό σύστημα και πιθανώς υπόκεινται σε δεσμούς. Σε μια χρονική στιγμή, ας υποθέσουμε ότι οι συντεταγμένες κινούνται κατά απειροστές μετατοπίσεις $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_{3N}$ οι οποίες είναι δυνατές ή υποθετικές με την έννοια ότι θεωρούνται ότι λαμβάνουν χώρα χωρίς το πέρασμα του χρόνου και δεν συμμορφώνονται κατ' ανάγκη με τους δεσμούς. Αυτή η μικρή αλλαγή $\delta\mathbf{x}$ στη γεωμετρία του συστήματος είναι γνωστή ως *δυνατή μετατόπιση.*

Συνήθως, μια δυνατή μετατόπιση συμμορφώνεται με τους *στιγμιαίους δεσμούς*, δηλαδή, κάθε κινούμενος δεσμός θεωρείται ότι σταματάει κατά τη διάρκεια της δυνατής μετατόπισης. Για παράδειγμα, υποθέτουμε ότι το σύστημα υπόκειται σε k ολόνομους δεσμούς

$$\varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_{3N}, t) = 0 \ , \quad (j = 1,2, \ldots, k) \ . \tag{1-26}$$

Το ολικό διαφορικό των φ_j είναι

$$d\varphi_j = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} dt \ . \tag{1-27}$$

Αν μια δυνατή μετατόπιση συμμορφώνεται με τους δεσμούς αυτούς, οι δx_i συνδέονται με τις k εξισώσεις

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \delta x_i = 0 \ , \quad (j = 1, 2, \ldots, k) \ . \tag{1-28}$$

Εδώ έχουμε αντικαταστήσει τα dx_i στην Εξ. (1-27) με δx_i και παραλείψαμε τον όρο dt γιατί ο χρόνος παραμένει σταθερός κατά τη

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

διάρκεια μιας δυνατής μετατόπισης.

Παρομοίως, ας υποθέσουμε τώρα ότι το σύστημα έχει m μη-ολόνομους δεσμούς της μορφής

$$\sum_{i=1}^{3N} \alpha_{ji}\, dx_i + \alpha_{jt}\, dt = 0 \ , \quad (j = 1, 2, \ldots , m) \ . \qquad (1\text{-}29)$$

Σε κάθε δυνατή μετατόπιση, η οποία συμμορφώνεται με τους δεσμούς αυτούς οι δx_i πρέπει να συνδέονται με τις m εξισώσεις

$$\sum_{i=1}^{3N} \alpha_{ji}\, \delta x_i = 0 \ , \qquad (j = 1, 2, \ldots , m) \ . \qquad (1\text{-}30)$$

Το ερώτημα είναι αν μια δυνατή μετατόπιση μπορεί να είναι επίσης μια πιθανή μετατόπιση, που να περιγράφεται από το σύνολο των dx_i και να θεωρείται ότι λαμβάνει χώρα κατά τη διάρκεια της χρονικής αύξησης dt. Μ' άλλα λόγια, κάτω από ποίες συνθήκες μπορούν οι δx_i να αντικατασταθούν από τις dx_i; Μια σύγκριση των Εξ. (1-27) και (1-28) δείχνει ότι οι ολόνομοι δεσμοί πρέπει επίσης να είναι και σκληρόνομοι, δηλαδή πρέπει να ισχύει η συνθήκη

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial t} = 0 \ , \qquad (j = 1, 2, \ldots , k) \ . \qquad (1\text{-}31)$$

Παρομοίως, οποιοσδήποτε μη-ολόνομος δεσμός πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\alpha_{jt} = 0 \ , \qquad (j = 1, 2, \ldots , m) \ . \qquad (1\text{-}32)$$

Αφού οι συνθήκες αυτές δεν ισχύουν γενικά, είναι προφανές, ότι μια δυνατή μετατόπιση δεν είναι, γενικά, μια πιθανή πραγματική μετατόπιση.

Μερικές φορές είναι σκόπιμο να υποθέτουμε ότι ένα σύνολο δx_i το οποίο συμμορφώνεται με τους στιγμιαίους δεσμούς συμβαίνει κατά το χρονικό διάστημα δt. Οι αντίστοιχοι λόγοι της μορφής $\delta x/\delta t$ έχουν τις διαστάσεις της ταχύτητας και είναι γνωστοί ως *δυνατές ταχύτητες*. Γενικά, οι δυνατές ταχύτητες δεν είναι πιθανές ταχύτητες για το

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

πραγματικό σύστημα παρά μόνο όταν οι Εξ. (1-31) και (1-32) επιτρέπουν μια δυνατή ταχύτητα συμβιβαστή με τους δεσμούς να είναι επίσης και πιθανή ταχύτητα.

Μεχρις εδώ, στη συζήτηση για τις δυνατές μετατοπίσεις χρησιμοποιήσαμε Καρτεσιανές συντεταγμένες. Τώρα ας θεωρήσουμε ένα σύστημα, του οποίου η διάταξη δίνεται από τον ελάχιστο αριθμό γενικευμένων συντεταγμένων. Έτσι, οποιοιδήποτε δεσμοί θα είναι μη-ολόνομοι και μπορούν να εκφραστούν με τη μορφή

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}\, dq_i + \alpha_{jt}\, dt = 0 \ , \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{1-33}$$

ή εναλλακτικά,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}\, \dot{q}_i + \alpha_{jt} = 0 \ , \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \ , \tag{1-34}$$

όπου οι συντελεστές α είναι συναρτήσεις των γενικευμένων συντεταγμένων και του *χρόνου.*

Κάθε δυνατή μετατόπιση συμβιβαστή με τους δεσμούς πρέπει να ικανοποιεί τις συνθήκες

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}\ \delta q_i = 0 \ , \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \ . \tag{1-35}$$

Η αντίστοιχη *γενικευμένη δυνατή ταχύτητα* **u** έχει συνιστώσες u_i οι οποίες ικανοποιούν την

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}\ u_i = 0 \ , \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \ . \tag{1-36}$$

Ας θεωρήσουμε μια φορά ακόμα τις αναγκαίες συνθήκες ώστε μια δυνατή ταχύτητα οποιουδήποτε σημείου του συστήματος να είναι και πιθανή ταχύτητά του. Συγκρίνοντας τις Εξ. (1-34) και (1-36) βλέπουμε ότι

$$\alpha_{jt} = 0 \ , \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \ . \tag{1-37}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Επιπρόσθετα, οι εξισώσεις μετασχηματισμού που συνδέουν τις Καρτεσιανές με τις γενικευμένες συντεταγμένες, δεν πρέπει να περιέχουν εκπεφρασμένα το t, δηλαδή δεν μπορούν να υπάρχουν κινούμενοι δεσμοί, μιας και κινητοί δεσμοί οδηγούν σε πραγματικές συνιστώσες ταχύτητας διαφορετικές από τις επιτρεπόμενες δυνατές ταχύτητες u_i.

Δυνατό έργο. Ας επιστρέψουμε τώρα στο σύστημα των N σωματίων των οποίων η διάταξη δίνεται από τις Καρτεσιανές συντεταγμένες $x_1, x_2, \ldots, x_{3N}$. Υποθέτουμε ότι οι συνιστώσες δυνάμεις $F_1, F_2, \ldots, F_{3N}$ εφαρμόζονται στις συγκεκριμένες συντεταγμένες κατά τη θετική έννοια. Το *δυνατό έργο* δW αυτών των δυνάμεων κατά τη δυνατή μετατόπιση $\delta\mathbf{x}$ δίνεται από την

$$\delta W = \sum_{j=1}^{3N} F_j \, \delta x_j \quad . \tag{1-38}$$

Μια εναλλακτική μορφή της έκφρασης για το δυνατό έργο είναι η

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \quad , \tag{1-39}$$

όπου $\mathbf{F}_i$ είναι η δύναμη που εφαρμόζεται στο i-σωμάτιο και $\mathbf{r}_i$ είναι το διάνυσμα θέσης αυτού του σωματίου. Από τη διανυσματική διατύπωση βλέπουμε ότι το δυνατό έργο δεν εξαρτάται από το χρησιμοποιούμενο σύστημα συντεταγμένων, με την προϋπόθεση βέβαια ότι η κίνηση αναφέρεται ως προς ένα αδρανειακό σύστημα.

Στην έκφραση για το δυνατό έργο, είναι σημαντικό να κατανοήσουμε ότι οι δυνάμεις θεωρούνται *σταθερές* κατά τη διάρκεια της δυνατής μετατόπισης. Αυτό είναι αληθές ακόμη κι' αν οι πραγματικές δυνάμεις αλλάζουν δραστικά ως αποτέλεσμα μιας απειροστής μετατόπισης. Μια απότομη αλλαγή της δύναμης με τη θέση μπορεί να συμβεί, για παράδειγμα, σε ορισμένα μη-γραμμικά συστήματα.

Μια άλλη παρατήρηση είναι ότι οι εκφράσεις για το δυνατό έργο έχουν οριστεί να είναι *γραμμικές* ως προς τις δυνατές μετατοπίσεις. Μ' άλλα λόγια, το δυνατό έργο είναι παρόμοιο με την πρώτη μεταβολή.

Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα το οποίο υπόκειται σε δεσμούς. Έστω

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ότι η συνολική δύναμη που δρα πάνω στο i-σωμάτιο χωρίζεται σε μια εφαρμοσμένη δύναμη $\mathbf{F}_i$ και σε μια δεσμική δύναμη $\mathbf{R}_i$. Το δυνατό έργο των δεσμικών δυνάμεων είναι

$$\delta W_C = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \ . \qquad (1\text{-}40)$$

Πολλοί απ' τους δεσμούς που συναντάμε ανήκουν στην γνωστή κλάση των *άεργων δεσμών* (δεν παράγουν έργο). Μπορούμε να ορίσουμε ένα δεσμό, που δεν παράγει έργο, με τον ακόλουθο τρόπο: *Άεργος δεσμός είναι κάθε αμφίπλευρος δεσμός στον οποίο το δυνατό έργο των αντίστοιχων δεσμικών δυνάμεων είναι μηδέν για κάθε δυνατή μετατόπιση η οποία είναι συμβιβαστή με τους δεσμούς.* Σ' ένα σύστημα το οποίο έχει μόνο άεργους δεσμούς το δυνατό έργο των δεσμικών δυνάμεων είναι

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \ , \qquad (1\text{-}41)$$

όπου οι δυνατές μετατοπίσεις $\delta \mathbf{r}_i$ είναι συμβιβαστές με τους στιγμιαίους δεσμούς.

Παραδείγματα δεσμών που δεν παράγουν έργο είναι (1) στερεές αλληλοσυνδέσεις μεταξύ σωματίων, (2) ολισθαίνουσα κίνηση πάνω σε επιφάνεια απουσία τριβών και (3) κυλιόμενη επαφή χώρις ολίσθηση. Ας εξετάσουμε τώρα αυτά τα παραδείγματα πιο προσεκτικά.

Πρώτα θεωρούμε ότι δυο σωμάτια συνδέονται με μια στερεά, χωρίς μάζα, ράβδο, όπως στο στο Σχ. 1-4(a). Από τον τρίτο νόμο του Newton, οι δύνάμεις που ασκούνται από τη ράβδο στα σωμάτια m_1 και m_2 είναι ίσες, αντίθετες και συγγραμικές, δηλαδή

$$\mathbf{R}_2 = R_2 \, \mathbf{e}_r = - \mathbf{R}_1 \ , \quad . \qquad (1\text{-}42)$$

όπου $\mathbf{e}_r$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση της ράβδου. Επειδή όμως η ράβδος είναι στερεά, οι συνιστώσες της μετατόπισης των σωματίων στη διεύθυνση της ράβδου πρέπει να είναι ίσες,

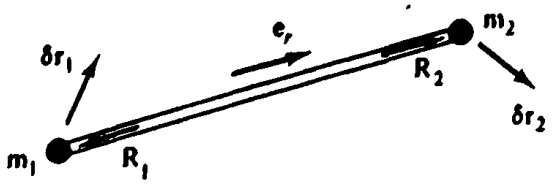
$$\mathbf{e}_r \cdot \delta \mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_r \cdot \delta \mathbf{r}_2 \qquad (1\text{-}43)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

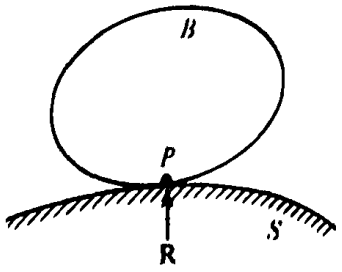
και άρα το δυνατό έργο των δεσμικών δυνάμεων είναι μηδέν,

$$\delta W_C = \mathbf{R}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_2 \cdot \delta \mathbf{r}_2 = 0 \ . \qquad (1\text{-}44)$$

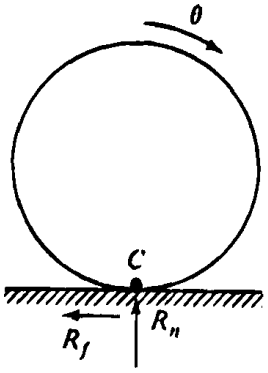
Ας θεωρήσουμε τώρα ένα σώμα B το οποίο ολισθαίνει χωρίς τριβή σε μια σταθερή επιφάνεια S, όπως φαίνεται στο Σχ. 1-4(b). Η δεσμική δύναμη $\mathbf{R}$ είναι κάθετη στην επιφάνεια στο σημείο επαφής P αλλά κάθε δυνατή μετατόπιση του P λαμβάνει χώρα στο εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο αυτό οπότε δεν παράγεται έργο από τη δεσμική δύναμη $\mathbf{R}$ κατά μια δυνατή μετατόπιση.



(a)



(b)



(c)

Σχ. 1-4. Παραδείγματα άεργων δεσμών.

Ως τρίτο παράδειγμα, θεωρούμε έναν κάθετο κυκλικό δίσκο, ο οποίος κυλίεται χωρίς ολίσθηση κατά μήκος μιας ευθύγραμμης οριζόντιας τροχιάς, Σχ. 1-4(c). Η συνολική δύναμη της επιφάνειας, που δρα στο δίσκο, μπορεί να αναλυθεί σε μια κάθετη συνιστώσα R_n και μια συνιστώσα τριβής R_f. Η τελευταία έχει τη διεύθυνση της εφαπτομένης στην επιφάνεια. Αυτές οι συνιστώσες δυνάμεις περνούν από το στιγμιαίο κέντρο C. Το στιγμιαίο κέντρο όμως δεν κινείται, ως

αποτέλεσμα της δυνατής μετατόπισης $\delta\theta$, αν κάνουμε τη συνήθη παραδοχή ότι απειροστά ανωτέρας τάξεως παραλείπονται. Μ' άλλα λόγια η δυνατή ταχύτητα του C είναι μηδέν. Άρα το δυνατό έργο των δεσμικών δυνάμεων είναι μηδέν .

Αν και αυτό το παράδειγμα αφορούσε την ειδική περίπτωση του δίσκου που κυλίεται στο επίπεδο, ένα παρόμοιο επιχείρημα θα μπορούσε να εφαρμοστεί για την κυλιόμενη επαφή κάθε σώματος επί μιας σταθερής επιφάνειας.

Τα παραπάνω παραδείγματα περιλαμβάνουν τους πιο κοινούς τύπους δεσμών που δεν παράγουν έργο, αλλά είναι πιθανόν να υπάρχουν και πολλοί άλλοι. Μια στερεά ράβδος, της οποίας το μήκος δίνεται ως εκπεφρασμένη συνάρτηση του χρόνου, είναι ένας δεσμός που δεν παράγει έργο, διότι ο χρόνος θεωρείται ότι παραμένει σταθερός σε μια δυνατή μετατόπιση. Παρομοίως, μια επιφάνεια στην οποία δεν υπάρχουν τριβές και κινείται ως συνάρτηση του χρόνου θα μπορούσε επίσης να αποτελεί έναν άεργο δεσμό. Σ' αυτές τις περιπτώσεις οι δεσμικές δυνάμεις παράγουν έργο στο σύστημα σε μια πραγματική μετατόπιση αλλά όχι στην υποτιθέμενη δυνατή μετατόπιση.

Πρέπει να τονιστεί ότι οι άεργοι δεσμοί δεν παράγουν έργο στο σύστημα *ως σύνολο* σε μια τυχαία δυνατή μετατόπιση. Πολύ πιθανόν όμως, οι άεργες δεσμικές δυνάμεις να παράγουν έργο σε επιμέρους σωμάτια του συστήματος. Για παράδειγμα, οι δεσμικές δυνάμεις είναι υπεύθυνες για τη μεταφορά ενέργειας απ' το ένα σωμάτιο του στερεού σώματος στο άλλο καθώς τα σωμάτια κινούνται με μεταβαλλόμενη ταχύτητα κατά τη διάρκεια μιας γενικής κίνησης του σώματος.

Εκτός αν ρητά αναφέρεται διαφορετικά, θα θεωρούμε στη συνέχεια ότι ο όρος *δεσμική δύναμη* θα υπονοεί δεσμική δύναμη *που δεν παράγει έργο*. Σε περιπτώσεις όπως οι ολισθαίνοντες δεσμοί με τριβή, η εφαπτομενική δύναμη τριβής συσσωματώνεται στην εφαρμοζόμενη δύναμη $\mathbf{F}_i$, ενώ η κάθετη συνιστώσα αντιμετωπίζεται ως δεσμική δύναμη, που δεν παράγει έργο κατά τον συνήθη τρόπο.

Οι μονόπλευροι δεσμοί δεν ταξινομούνται ως δεσμοί που δεν παράγουν έργο γιατί μπορούν να βρεθούν επιτρεπτές δυνατές μετατοπίσεις κατά τις οποίες το δυνατό έργο των δεσμικών δυνάμεων να είναι διάφορο του μηδενός. Στο αντικείμενο αυτό θα επανέλθουμε κατά τη συζήτηση της αρχής των δυνατών έργων.

Αρχή των δυνατών έργων. Μια από τις σημαντικές εφαρμογές της ιδέας των δυνατών έργων εμφανίζεται κατά τη μελέτη της στατικής

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ισορροπίας των μηχανικών συστημάτων. Έστω, ένα *σκληρόνομο* σύστημα N σωματίων. Αν το σύστημα αυτό είναι σε στατική ισορροπία, τότε για κάθε σωμάτιο έχουμε

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i = 0 \ . \tag{1-45}$$

Συνεπώς, το δυνατό έργο που επιτελείται από όλες τις δυνάμεις, κατά την κίνηση σε μια τυχαία δυνατή μετατόπιση που είναι συμβιβαστή με τους δεσμούς, είναι μηδέν,

$$\sum_{i=1}^{N} (\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i) \cdot \delta\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{R}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 \ . \tag{1-46}$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι όλοι οι δεσμοί είναι άεργοι και αν οι $\delta\mathbf{r}_i$ είναι αντιστρεπτές δυνατές μετατοπίσεις, συμβιβαστές με τους δεσμούς, τότε

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{R}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 \ . \tag{1-47}$$

Από τις Εξ. (1-46) και (1-47) συμπεραίνουμε ότι

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 \ . \tag{1-48}$$

Έχουμε αποδείξει ότι αν ένα σύστημα σωματίων με άεργους δεσμούς, βρίσκεται σε στατική ισορροπία τότε το δυνατό έργο των εφαρμοζόμενων δυνάμεων, για κάθε δυνατή μετατόπιση συμβιβαστή με τους δεσμούς είναι μηδέν .

Τώρα υποθέτουμε ότι το ίδιο σύστημα σωματίων είναι αρχικά ακίνητο, αλλά *δεν είναι σε ισορροπία.* Τότε σ' ένα ή και περισσότερα σωμάτια πρέπει να εφαρμόζεται μια μη-μηδενική δύναμη και με το νόμο κίνησης του Newton αυτό θα αρχίσει να κινείται κατά τη διεύθυνση αυτής της δύναμης. Επειδή κάθε κίνηση πρέπει να είναι συμβιβαστή με τους δεσμούς (οι οποίοι θεωρούνται σταθεροί), μπορούμε πάντα να διαλέξουμε μια δυνατή μετατόπιση στη διεύθυνση της πραγματικής κίνησης στο κάθε σημείο. Σ' αυτή την περίπτωση το δυνατό έργο είναι θετικό, δηλαδή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{R}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i > 0 \ . \qquad (1\text{-}49)$$

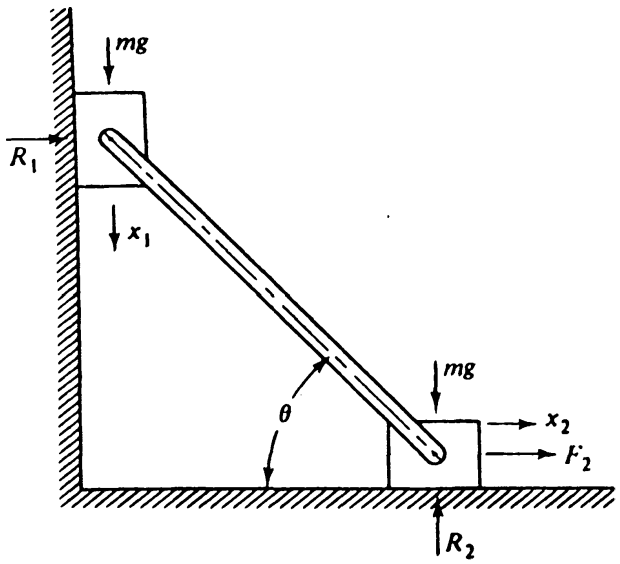
Αλλά οι δεσμοί δεν παράγουν έργο και άρα ισχύει η Εξ. (1-47), δηλαδή

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i > 0 \ . \qquad (1\text{-}50)$$

Μια αντιστροφή των $\delta\mathbf{r}_i$ θα παρήγαγε αρνητικό δυνατό έργο στο σύστημα. Αν το σύστημα δεν είναι σε ισορροπία, είναι πάντα δυνατό να βρούμε ένα σύνολο δυνατών μετατοπίσεων συμβιβαστών με τους δεσμούς το οποίο θα έχει ως αποτέλεσμα το δυνατό έργο των εφαρμοζόμενων δυνάμεων να είναι μη μηδενικό.

Αυτά τα αποτελέσματα μπορούν να συνοψιστούν στην *αρχή των δυνατών έργων: Η ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη στατική ισορροπία ενός αρχικά ακίνητου σκληρόνομου συστήματος, το οποίο υπακούει σε δεσμούς που δεν παράγουν έργο είναι, το δυνατό έργο των εφαρμοζόμενων δυνάμεων να ισούται με μηδέν κατά την κίνηση σε μια αυθαίρετη δυνατή μετατόπιση συμβιβαστή με τους δεσμούς.*

Ως παράδειγμα της εφαρμογής της αρχής των δυνατών έργων, θεωρούμε το σύστημα που φαίνεται στο Σχ. 1-5.



Σχ. 1-5. Σύστημα χωρίς δεσμούς του οποίου η κίνηση περιορίζεται σε κάθετο επίπεδο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Δυο κιβώτια, χωρίς τριβή, ίσων μαζών m συνδέονται με μια στερεά ράβδο χωρίς μάζα. Αν το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, χρησιμοποιώντας ως συντεταγμένες τις x_1 , x_2 θα λύσουμε ως προς τη δύναμη F_2 .

Αυτό το παράδειγμα δείχνει ένα σκληρόνομο σύστημα με δεσμούς που δεν παράγουν έργο. Οι εξωτερικές δεσμικές δυνάμεις είναι οι αντιδράσεις του τοίχου και του δαπέδου R_1 και R_2· οι εσωτερικές δεσμικές δυνάμεις είναι οι ίσες και αντίθετες θλιπτικές δυνάμεις στη ράβδο. Πρέπει να σημειωθεί ότι το συνολικό δυνατό έργο αυτών των δεσμικών δυνάμεων είναι μηδέν.

Οι *εφαρμοζόμενες* δυνάμεις είναι οι βαρυτικές δυνάμεις που δρουν στα κιβώτια και η εξωτερική δύναμη F_2. Αν χρησιμοποιήσουμε την αρχή των δυνατών έργων, παρατηρούμε πως η απαραίτητη συνθήκη για στατική ισορροπία είναι η

$$mg\,\delta x_1 + F_2\,\delta x_2 = 0 \ , \qquad (1\text{-}51)$$

όπου οι δx_1 και δx_2 συνδέονται με την εξίσωση του δεσμού. Επειδή οι συνιστώσες της μετατόπισης κατά μήκος της ράβδου πρέπει να είναι ίσες στα δυο άκρα, έχουμε

$$\sin\theta\,\delta x_1 - \cos\theta\,\delta x_2 = 0 \ . \qquad (1\text{-}52)$$

Λύνοντας τις Εξ. (1-51) και (1-52), παίρνουμε

$$F_2 = -\,mg\cot\theta \ .$$

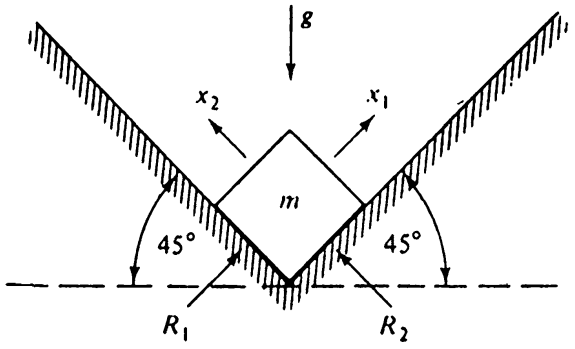
Αυτή είναι η απαιτούμενη δύναμη για να διατηρηθεί το αρχικά ακίνητο σύστημα σε στατική ισορροπία.

Η αρχή των δυνατών έργων έχει παραχθεί για συστήματα με αμφίπλευρους δεσμούς. Η ιδέα όμως των δυνατών μετατοπίσεων και του σχετιζόμενου μ' αυτές δυνατού έργου είναι πολύ γενική και μπορεί να εφαρμοστεί και σε μονόπλευρους δεσμούς. Ας θεωρήσουμε το σύστημα του Σχ. (1-6), που αποτελείται από ένα κιβώτιο μάζας m, το οποίο βρίσκεται σε στατική ισορροπία στη γωνία που σχηματίζεται από δυο κάθετα και χωρίς τριβή επίπεδα. Υποθέτουμε ότι κάθε κίνηση περιορίζεται στο κατακόρυφο επίπεδο.

Οι εξισώσεις του μονόπλευρου δεσμού είναι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$x_1 \geq 0\,, \qquad x_2 \geq 0\,, \tag{1-53}$$



Σχ. 1-6. Σύστημα με μονόπλευρους δεσμούς.

όπου υποθέτουμε ότι $x_1 = x_2 = 0$ όταν το κιβώτιο βρίσκεται στη θέση ισορροπίας. Σ' αυτή την περίπτωση, οι μόνες εφαρμοζόμενες δυνάμεις είναι αυτές που οφείλονται στη βαρύτητα και αποτελούνται από τις συνιστώσες στις διευθύνσεις x_1 και x_2, αντίστοιχα,

$$F_1 = F_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\, mg\,. \tag{1-54}$$

Άρα το δυνατό έργο των εφαρμοζόμενων δυνάμεων είναι

$$\delta W = F_1\, \delta x_1 + F_2 \delta x_2 = -\frac{mg}{\sqrt{2}} (\delta x_1 + \delta x_2)\,. \tag{1-55}$$

Έτσι, το δυνατό έργο είναι $\delta W \leq 0$ για κάθε δυνατή μετατόπιση συμβιβαστή με τους μονόπλευρους δεσμούς.

Γενικά, για ένα αρχικά ακίνητο σύστημα που περιέχει σταθερούς δεσμούς χωρίς τριβές, οι οποίοι μπορεί να είναι μονόπλευροι, η ικανή και αναγκαία συνθήκη για στατική ισορροπία είναι, το δυνατό έργο των εφαρμοζόμενων δυνάμεων να είναι μικρότερο ή ίσο από το μηδέν, δηλαδή

$$\delta W \leq 0 \tag{1-56}$$

για όλες τις δυνατές μετατοπίσεις που είναι συμβιβαστές με τους δεσμούς.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ας υπολογίσουμε τώρα το δυνατό έργο των δεσμικών δυνάμεων. Σημειώνοντας ότι

$$R_1 = R_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\, mg \tag{1-57}$$

παίρνουμε

$$\delta W_c = R_1\, \delta x_1 + R_2\, \delta x_2 \geq 0 \ . \tag{1-58}$$

Σ' αυτό το σημείο ανακαλούμε ότι οι R_1 και R_2 θεωρούνται ότι παραμένουν σταθερές κατά τη δυνατή μετατόπιση. Σ' αυτό το παράδειγμα του συστήματος με μονόπλευρους δεσμούς βλέπουμε ότι μπορεί να υπάρξει μη-μηδενικό δυνατό έργο απ' τις δεσμικές δυνάμεις σε μια επιτρεπτή δυνατή μετατόπιση. Άρα οι μονόπλευροι δεσμοί δεν μπορούν να ταξινομηθούν ως άεργοι δεσμοί ακόμη και αν αυτοί δεν εμφανίζουν τριβές.

Πρέπει να τονιστεί ότι οι δεσμικές δυνάμεις R_1 και R_2 μπορούν να βρεθούν χρησιμοποιώντας την αρχή των δυνατών έργων. Η διαδικασία που ακολουθείται είναι να θέτουμε το συνολικό δυνατό έργο όλων των δυνάμεων ίσο με μηδέν, δηλαδή

$$\left(R_1 - \frac{mg}{\sqrt{2}}\right)\delta x_1 + \left(R_2 - \frac{mg}{\sqrt{2}}\right)\delta x_2 = 0 \ . \tag{1-59}$$

Εδώ υποθέτουμε ότι οι δx_i *δεν περιορίζονται* και γι' αυτό είναι αντιστρέψιμες και ανεξάρτητες και άρα κάθε συντελεστής της Εξ. (1-59) πρέπει να είναι ίσος με το μηδέν, δηλαδή

$$R_1 = R_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\, mg \ .$$

Στη μελέτη των μονόπλευρων δεσμών διαπιστώνει κανείς ότι οι δεσμικές δυνάμεις μπορούν ν' αλλάζουν ξαφνικά, όταν η δεσμική συνάρτηση πλησιάζει ή απομακρύνεται απ' την οριακή της τιμή. Μια παρόμοια ξαφνική αλλαγή μπορεί να συμβεί στις δυνάμεις τριβής του Coulomb, αλλά σ' αυτή την περίπτωση η δύναμη θεωρείται ως μια ασυνεχής συνάρτηση της *ταχύτητας* ολίσθησης. Ας εξετάσουμε τώρα το

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δυνατό έργο ένος συστήματος που περιλαμβάνει στοιχεία που έχουν τριβή Coulomb.

Η προσέγγισή μας έγκειται στο να διαχωρίσουμε τη συνολική αντίδραση πάνω σε μια ολισθαίνουσα επιφάνεια, σε μια κάθετη συνιστώσα που δεν παράγει έργο και σε μια εφαπτομενική συνιστώσα τριβής, η οποία θεωρείται ως μια *εφαρμοζόμενη* δύναμη. Ας υποθέσουμε ότι κάθε δύναμη τριβής Coulomb αντιτίθεται στην κίνηση ολίσθησης και έχει μέτρο ίσο με το συντελεστή τριβής μ πολλαπλασιασμένο με την κάθετη δύναμη στη δοσμένη επιφάνεια. Μ' αυτές τις παραδοχές, ένα αρχικά ακίνητο σύστημα είναι σε στατική ισορροπία, αν και μόνο αν, το δυνατό έργο δW των εφαρμοζόμενων δυνάμεων ικανοποιεί την

$$\delta W \leq 0 \ , \tag{1-60}$$

για όλες τις δυνατές μετατοπίσεις που είναι συμβιβαστές με τους δεσμούς.

Πρέπει να σημειωθεί ότι οι πραγματικές δυνάμεις τριβής του συστήματος σε στατική ισορροπία *δεν είναι ίσες*, γενικά, με τις δυνάμεις που χρησιμοποιήθηκαν στην έκφραση του δυνατού έργου αλλά είναι μικρότερες σε μέτρο. Αυτό συνεπάγεται ότι απαιτείται μια πεπερασμένη επιπρόσθετη δύναμη, για να μπορέσει ένα σύστημα με τριβή Coulomb να απαλλαγεί απ' την κατάσταση ισορροπίας και να αρχίσει να κινείται. Αντίθετα, ένα σύστημα χωρίς τριβές με αμφίπλευρους δεσμούς απαιτεί μόνο μια απειροστή μεταβολή στην εφαρμοζόμενη δύναμη, προκειμένου ν' απομακρυνθεί από την κατάσταση της στατικής ισορροπίας.

Αρχή του D'Alembert. Ας θεωρήσουμε ξανά ένα σύστημα από N σωμάτια και ας γράψουμε την εξίσωση κίνησης του κάθε σωματίου με τη μορφή

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = 0 \ , \qquad (i = 1, 2, \ldots , N) \ , \tag{1-61}$$

όπου $\mathbf{F}_i$ είναι η εφαρμοζόμενη δύναμη και $\mathbf{R}_i$ είναι η δεσμική δύναμη που ενεργεί στο i-σωμάτιο. Ο όρος $-m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$ έχει τις διαστάσεις της δύναμης και είναι γνωστός ως η *αδρανειακή δύναμη* που ενεργεί στο i-σωμάτιο,

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

όπου m_i είναι η σταθερή μάζα του και $\ddot{\mathbf{r}}_i$ είναι η επιτάχυνσή του ως προς το αδρανειακό σύστημα.

Οι $\mathbf{F}_i$ και $\mathbf{R}_i$ αναφέρονται συνήθως ως *πραγματικές δυνάμεις*, σε αντίθεση προς τις αδρανειακές δυνάμεις. Η Εξ. (1-61) δηλώνει ότι το άθροισμα *όλων* των δυνάμεων, πραγματικών και αδρανειακών, που ενεργούν στο *κάθε* σωμάτιο του συστήματος είναι μηδέν. Το αποτέλεσμα αυτό είναι γνωστό και ως *αρχή του d'Alembert.* (*)

Η απαίτηση ότι το άθροισμα όλων των δυνάμεων σε κάθε σωμάτιο να είναι μηδέν είναι παρόμοια με την αναγκαία συνθήκη για στατική ισορροπία. Αφού η αρχή των δυνατών έργων εφαρμόζεται σε συστήματα, που βρίσκονται σε στατική ισορροπία, ας χρησιμοποιήσουμε την αρχή σ' αυτό το σύστημα των δυνάμεων, συμπεριλαμβάνοντας τις αδρανειακές δυνάμεις. Το συνολικό έργο που εκτελείται απ' όλες τις δυνάμεις σε μια τυχαία δυνατή μετατόπιση είναι

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i - m_i\ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta r_i = 0 \ . \qquad (1\text{-}62)$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι οι $\mathbf{R}_i$ είναι δεσμικές δυνάμεις που δεν παράγουν έργο και αν διαλέξουμε τις $\delta\mathbf{r}_i$ να είναι αντιστρέψιμες δυνατές μετατοπίσεις συμβιβαστές με τους δεσμούς, τότε λαμβάνουμε από τις Εξ. (1-47) και (1-62) ότι

$$\sum_{i=1}^{N} (\mathbf{F}_i - m_i\ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta r_i = 0 \ . \qquad (1\text{-}63)$$

Αυτή η εξίσωση είναι η *μορφή Lagrange της αρχής του d'Alembert* και είναι μια από τις πιό σημαντικές εξισώσεις της κλασικής δυναμικής.

(*) Μια κάπως διαφορετική πρόταση έγινε απ' τον d'Alembert στο Traite de Dynamique (1743). Αν και αυτός αναφερόταν μάλλον στις ταχύτητες παρά στις δυνάμεις, δήλωνε κατ' ουσίαν ότι οι δεσμικές δυνάμεις, εννοώντας τις δυνάμεις αλληλεπίδρασης, σχηματίζουν ένα σύστημα σε στατική ισορροπία. Ως συνέπεια αυτής της αρχής, οι εφαρμοζόμενες και οι αδρανειακές δυνάμεις σχηματίζουν μαζί ένα σύστημα το οποίο είναι σε ισορροπία υπό την έννοια της έκφρασης Εξ. (1-63) των δυνατών έργων. Βλέπε Lindsay and Margenau, *Foundations of Physics* (New York: Dover Publications, Inc., 1957), σελ. 102-112.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

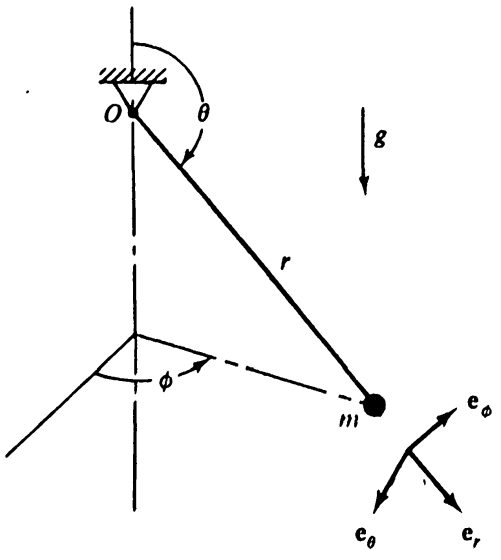
Αν συμπεριλάβουμε τις αδρανειακές δυνάμεις στην εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων έχουμε ως αποτέλεσμα την επέκταση της ισχύος της αρχής τόσο σε δυναμικά όσο και σε στατικά συστήματα. Πρέπει να σημειωθεί ότι η Εξ. (1-63) δεν περιλαμβάνει τις δεσμικές δυνάμεις, οι οποίες είναι συχνά άγνωστες, αλλά απαιτεί μόνο τις εφαρμοζόμενες δυνάμεις $\mathbf{F}_j$. Επίσης, η εξίσωση εφαρμόζεται τόσο σε ρεόνομα όσο και σε σκληρόνομα συστήματα, υπό την προϋπόθεση ότι οι $\delta\mathbf{r}_j$ είναι συμβιβαστές με τους δεσμούς.

Παράδειγμα 1-3. Ένα σωμάτιο μάζας m κρέμεται από αβαρές σχοινί μήκους

$$r = a + b\cos\omega t\ , \qquad (a > b > 0)\ , \tag{1-64}$$

ώστε να σχηματίζει ένα σφαιρικό εκκρεμές. Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης.

Θα χρησιμοποιήσουμε τις σφαιρικές συντεταγμένες θ και φ, όπως φαίνονται στο Σχ. 1-7. Η γωνία φ μετριέται μεταξύ ενός καθέτου επιπέδου αναφοράς που περνάει από το σημείο στήριξης O και του καθέτου επιπέδου που περιέχει το εκκρεμές.



Σχ. 1-7. Σφαιρικό εκκρεμές μεταβλητού μήκους.

Η γενική έκφραση για την επιτάχυνση ενός σωματίου σε σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, φ) είναι η ακόλουθη :

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta)\mathbf{e}_r$$
$$+ (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta)\mathbf{e}_\theta$$
$$+ (r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta)\mathbf{e}_\varphi \ , \qquad (1\text{-}65)$$

όπου $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ και $\mathbf{e}_\varphi$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα που σχηματίζουν μια ορθογώνια τριάδα.

Μια δυνατή μετατόπιση συμβιβαστή με τον στιγμιαίο δεσμό είναι

$$\delta\mathbf{r} = r\,\delta\theta\,\mathbf{e}_\theta + r\sin\theta\,\delta\varphi\,\mathbf{e}_\varphi \ . \qquad (1\text{-}66)$$

Η εφαρμοζόμενη δύναμη βαρύτητας είναι

$$\mathbf{F} = -mg\cos\theta\,\mathbf{e}_r + mg\sin\theta\,\mathbf{e}_\theta \ . \qquad (1\text{-}67)$$

Αντικαθιστώντας από τις Εξ. (1-65) , (1-66) και (1-67) στην Εξ. (1-63), παίρνουμε

$$mr[g\sin\theta - (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta)]\delta\theta$$
$$- mr\sin\theta[r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta]\,\delta\varphi = 0 \ . \qquad (1\text{-}68)$$

Αφού οι $\delta\theta$ και $\delta\varphi$ είναι ανεξάρτητες δυνατές μετατοπίσεις οι συντελεστές τους πρέπει να είναι μηδέν. Διαιρώντας με τους κοινούς μη-μηδενικούς παράγοντες και αντικαθιστώντας το r και τις παραγώγους του από την Εξ. (1-64), παίρνουμε τις

$$(\alpha + b\cos\omega t)\ddot{\theta} - 2b\omega\dot{\theta}\sin\omega t$$
$$- (\alpha + b\cos\omega t)\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta = g\sin\theta \ ,$$
$$(1\text{-}69)$$
$$(\alpha + b\cos\omega t)\ddot{\varphi}\sin\theta - 2b\omega\dot{\varphi}\sin\omega t\sin\theta$$
$$+ 2(\alpha + b\cos\omega t)\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta = 0 \ ,$$

που είναι οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης του συστήματος.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Γενικευμένη δύναμη. Στις προηγούμενες συζήτησεις μας για το δυνατό έργο, επικεντρώσαμε το ενδιαφέρον μας στο έργο των εφαρμοζόμενων δυνάμεων (ή των ισοδύναμων ορθογώνιων συνιστωσών τους) κατά την κίνηση σε δυνατή μετατόπιση. Για παράδειγμα, αν ένα σύνολο δυνάμεων $F_1, F_2, \ldots, F_{3N}$ εφαρμόζεται σ' ένα σύστημα N σωματίων, το δυνατό έργο αυτών των δυνάμεων είναι

$$\delta W = \sum_{j=1}^{3N} F_j \, \delta x_j \ . \tag{1-70}$$

Τώρα ας υποθέσουμε ότι οι $3N$ συνήθεις Καρτεσιανές συντεταγμένες $x_1, x_2, \ldots, x_{3N}$ συνδέονται με τις n γενικευμένες συντεταγμένες $q_1, q_2, \ldots, q_n$ με εξισώσεις μετασχηματισμού της μορφής των Εξ. (1-8). Αν παραγωγίσουμε αυτές τις εξισώσεις και θέσουμε $\delta t = 0$ (μιας και θεωρούμε δυνατή μετατόπιση) παίρνουμε ότι :

$$\delta x_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \delta q_i \ , \qquad (j = 1, 2, \ldots, 3N) \ , \tag{1-71}$$

όπου οι συντελεστές $\partial x_j / \partial q_i$ είναι, γενικά, συναρτήσεις των γενικευμένων συντεταγμένων και του t. Αντικαθιστώντας αυτή την έκφραση των δx_j στην Εξ. (1-70), παίρνουμε

$$\delta W = \sum_{j=1}^{3N} \sum_{i=1}^{n} F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \delta q_i \ . \tag{1-72}$$

Ας ορίσουμε τη *γενικευμένη δύναμη* Q_i από την εξίσωση

$$Q_i = \sum_{j=1}^{3N} F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \ , \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \ . \tag{1-73}$$

Εισάγοντας την Εξ. (1-73) στην Εξ. (1-72) και αλλάζοντας τη σειρά άθροισης, έχουμε

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} Q_i \, \delta q_i \ . \tag{1-74}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Συγκρίνοντας τις εκφράσεις για το δυνατό έργο, δηλαδή τις Εξ. (1-70) και (1-74), βλέπουμε ότι είναι της ίδιας μαθηματικής μορφής. Προηγουμένως ορίσαμε τις δυνάμεις F_j ως τις συνήθεις συνιστώσες που εφαρμόζονται στις αντίστοιχες διευθύνσεις κατά τη θετική έννοια. Από την Εξ. (1-70) μπορεί να αποδειχτεί ότι η F_j είναι επίσης ίση με το δυνατό έργο ανά μονάδα μετατόπισης δx_j στην περίπτωση κατά την οποία όλες οι άλλες δx_i, $i \neq j$, είναι μηδέν. Με παρόμοιο τρόπο, μπορούμε να θεωρήσουμε τη γενικευμένη δύναμη Q_j ως το δυνατό έργο που γίνεται απ' όλες τις δυνάμεις που δρουν στο σύστημα ανά μονάδα μετατόπισης δq_j, υποθέτοντας ότι οι άλλες γενικευμένες συντεταγμένες είναι μηδέν. Εδώ κάνουμε τις συνήθεις παραδοχές ότι η δυνατή μετατόπιση είναι τόσο μικρή ώστε να έχει μια αμελητέα επίδραση στη γεωμετρία του συστήματος και ότι οι δυνάμεις παραμένουν σταθερές κατά τη διάρκεια αυτής της δυνατής μετατόπισης.

Οι διαστάσεις της γενικευμένης δύναμης εξαρτώνται από τις διαστάσεις της αντίστοιχης γενικευμένης συντεταγμένης. Αλλά σ' όλες τις περιπτώσεις το $Q_j \delta q_j$ πρέπει να έχει τις διαστάσεις του έργου ή της ενέργειας. Έτσι αν η q_j εκφράζει μια γραμμική μετατόπιση, η αντίστοιχη Q_j είναι μια συνηθισμένη δύναμη. Αν όμως η q_j είναι μια γωνία, τότε η αντίστοιχη Q_j είναι μια ροπή. Σε μερικές περιπτώσεις, μια γενικευμένη συντεταγμένη μπορεί να εκφράζει μια μορφή μετατόπισης στην οποία συμβαίνουν μαζί μεταφορές και περιστροφές σε διάφορα τμήματα του συστήματος. Αν πάρουμε το q_j σ' αυτή την περίπτωση να είναι ένας αδιάστατος αριθμός, τότε η αντίστοιχη Q_j έχει τις διαστάσεις της ενέργειας.

Συνήθως, οι γενικευμένες συντεταγμένες εκλέγονται με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι ανεξάρτητες. Αν υπάρχουν όμως δεσμοί, αυτοί αγνοούνται δημιουργώντας την κατάλληλη δυνατή μετατόπιση ώστε μία μόνο από τις γενικευμένες συντεταγμένες να είναι μη-μηδενική. Αυτό δεν σημαίνει ότι οι *δεσμικές δυνάμεις* μπορούν να αγνοηθούν, επειδή οι R_j και οι F_j θα συνεισφέρουν στη γενικευμένη δύναμη Q_j κάτω απ' αυτές τις συνθήκες. Για παράδειγμα, γενικευμένες δεσμικές δυνάμεις υπάρχουν σε μη-ολόνομα συστήματα γιατί είναι αδύνατο να διαλέξουμε ανεξάρτητες γενικευμένες συντεταγμένες. Αυτές οι γενικευμένες δεσμικές δυνάμεις εκφράζονται συνήθως σε όρους των πολλαπλασιαστών Lagrange και θα συζητηθούν στην παράγραφο 2-1.

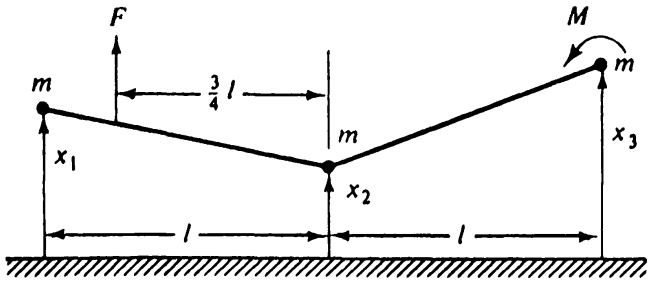
Η έννοια της γενικευμένης δύναμης είναι πολύ χρήσιμη στη διατύπωση της αρχής των δυνατών έργων. Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

αρχικά ακίνητο ολόνομο σύστημα το οποίο έχει σταθερούς δεσμούς που δεν παράγουν έργο. Αν η διάταξή του εκφράζεται σε όρους *ανεξαρτήτων* γενικευμένων συντεταγμένων, τότε *η αναγκαία και ικανή συνθήκη για στατική ισορροπία είναι όλες οι γενικευμένες δυνάμεις που οφείλονται στις εφαρμοζόμενες δυνάμεις να είναι μηδέν.*

Ένας μπαίνει στον πειρασμό σ' αυτό το σημείο να βρει εκφράσεις για τις γενικευμένες *αδρανειακές δυνάμεις* και να τις χρησιμοποιήσει μαζί με την αρχή των δυνατών έργων για να φτάσει στις γενικές δυναμικές εξισώσεις, δηλαδή, τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης σε όρους των γενικευμένων συντεταγμένων και δυνάμεων. Αυτή είναι μια καλή προσέγγιση που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παραχθούν οι εξισώσεις Lagrange, αλλά θα αναβάλλουμε αυτή την παραγωγή μέχρι το επόμενο κεφάλαιο.

Παράδειγμα 1-4. Τρία σωμάτια συνδέονται με δυο στερεές ράβδους έχοντας μια άρθρωση μεταξύ τους ώστε να σχηματίσουν το σύστημα που φαίνεται στο Σχ. 1-8.



Σχ. 1-8. Σύστημα με εφαρμοζόμενη δύναμη και ροπή.

Όπως φαίνεται από το σχήμα, μια δύναμη F και μια ροπή M εφαρμόζονται στο σύστημα. Η διάταξη του συστήματος δίνεται από τις συνήθεις συντεταγμένες x_1, x_2, x_3 ή από τις γενικευμένες συντεταγμένες q_1, q_2, q_3, όπου

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1 + q_2 + \frac{1}{2} q_3 \\ x_2 &= q_1 - q_3 \\ x_3 &= q_1 - q_2 + \frac{1}{2} q_3 \end{aligned} \tag{1-75}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Να βρεθούν οι γενικευμένες δυνάμεις Q_1, Q_2 και Q_3 (θεωρούμε μικρές κινήσεις).

Πρώτα, ας ελέγξουμε αν οι εξισώσεις μετασχηματισμού της Εξ. (1-75) παράγουν ανεξάρτητες γενικευμένες συντεταγμένες. Υπολογίζοντας την Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού παίρνουμε

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -3 .$$

Αφού η ορίζουσα είναι μη-μηδενική, οι γενικευμένες συντεταγμένες θα είναι ανεξάρτητες. Η Εξ. (1-75) μπορεί να λυθεί ως προς τις γενικευμένες συντεταγμένες ως συναρτήσεις των Καρτεσιανών συντεταγμένων, δίνοντας

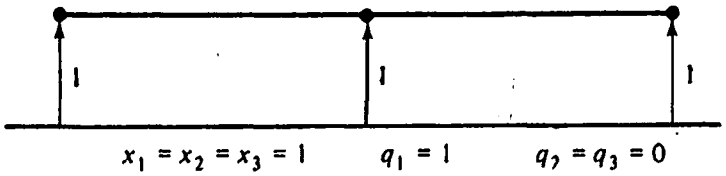
$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) \\ q_2 &= \frac{1}{2}(x_1 - x_3) \\ q_3 &= \frac{1}{3}(x_1 - 2x_2 + x_3) . \end{aligned} \qquad (1\text{-}76)$$

Έτσι, για κάθε σύνολο Καρτεσιανών συντεταγμένων παίρνουμε ένα αντίστοιχο μοναδικό σύνολο γενικευμένων συντεταγμένων.

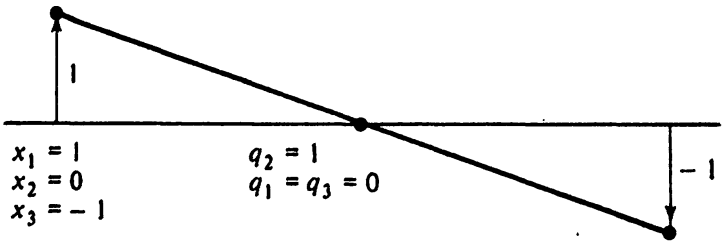
Οι γενικευμένες δυνάμεις λαμβάνονται, με τη θεώρηση μικρών δυνατών μετατοπίσεων για κάθε μια απ' τις γενικευμένες συντεταγμένες. Οι μορφές των μετατοπίσεων φαίνονται στο Σχ. 1-9. Πρέπει να σημειωθεί ότι μια αύξηση στην q_1 εκφράζει μια καθαρή μεταφορά, ενώ η q_2 συνδέεται με περιστροφή γύρω από το κέντρο και η q_3 δηλώνει μια παραμόρφωση ή κάμψη του συστήματος. Αν θεωρήσουμε τη μεταφορική μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της εφαρμοζόμενης δύναμης F και την περιστροφή της εφαρμοζόμενης ροπής M, λαμβάνουμε την ακόλουθη έκφραση για το δυνατό έργο :

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

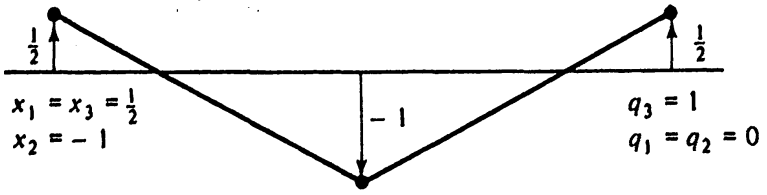
$$\delta W = F\,\delta q_1 + \left(\frac{3}{4}F - \frac{M}{l}\right)\delta q_2 + \left(\frac{1}{8}F + \frac{3M}{2l}\right)\delta q_3 \quad . \qquad (1\text{-}77)$$



(a)



(b)



(c)

Σχ. 1-9. Μορφές μετατοπίσεων που αντιστοιχούν στις γενικευμένες συντεταγμένες.

Συγκρίνοντας τις Εξ. (1-74) και (1-77) βρίσκουμε ότι οι γενικευμένες δυνάμεις είναι

$$\begin{aligned} Q_1 &= F \\ Q_2 &= \frac{3}{4}F - \frac{M}{l} \\ Q_3 &= \frac{1}{8}F + \frac{3M}{2l} \quad . \end{aligned} \qquad (1\text{-}78)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Μια άλλη προσέγγιση είναι να πάρουμε τις γενικευμένες δυνάμεις, χρησιμοποιώντας απ' ευθείας την Εξ. (1-73). Πρέπει να σημειωθεί ότι η δύναμη F μπορεί να αντικατασταθεί από μια δύναμη $3F/4$ στο x_1 και μια δύναμη $F/4$ στο x_2. Επίσης η ροπή M μπορεί να αντικατασταθεί από ίσες και αντίθετες δυνάμεις μέτρου M/l που ενεργούν στις διευθύνσεις $-x_2$ και x_3. Μ' αυτές τις αντικαταστάσεις από συστήματα δυνάμεων ισοδύναμα(*) βρίσκουμε ότι

$$F_1 = \frac{3}{4}F$$
$$F_2 = \frac{1}{4}F - \frac{M}{l} \qquad (1\text{-}79)$$
$$F_3 = \frac{M}{l} \ .$$

Από την Εξ. (1-73) έχοντας υπόψη ότι οι μερικές παράγωγοι έχουν υπολογιστεί προηγουμένως κατά τον υπολογισμό της Ιακωβιανής ορίζουσας, παίρνουμε εκφράσεις για τις γενικευμένες δυνάμεις οι οποίες είναι ταυτόσημες με εκείνες που δόθηκαν στην Εξ. (1-78).

Σ' αυτό το παράδειγμα διαλέξαμε ένα ειδικό σύνολο γενικευμένων συντεταγμένων το οποίο έχει τη δυνατότητα να εκφράσει γεωμετρικά τη μεταφορά, περιστροφή και παραμόρφωση του συστήματος. Αλλά αυτό δεν είναι απαραίτητο. Κάθε σύνολο ανεξάρτητων παραμέτρων το οποίο καθορίζει τη διάταξη του συστήματος μπορεί να χρησιμεύσει ως σύνολο γενικευμένων συντεταγμένων. Οι αντίστοιχες γενικευμένες δυνάμεις προσδιορίζονται από το δυνατό έργο των εφαμοζόμενων δυνάμεων ανά μονάδα δυνατής μετατόπισης δq_i.

1-5. ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΚΑΙ ΟΡΜΗ

Δυναμική ενέργεια. Ας θεωρήσουμε ένα σωμάτιο του οποίου η θέση προσδιορίζεται από τις Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z). Υποθέτουμε ότι η συνολική δύναμη **F** που ενεργεί στο σωμάτιο έχει συνιστώσες

(*) Δυο συστήματα δυνάμεων που ενεργούν σ' ένα στερεό σώμα είναι *ισοδύναμα*, αν έχουν την ίδια συνολική δύναμη και την ίδια συνολική ροπή ως προς ένα τυχαίο σημείο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$F_X = - \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$F_y = - \frac{\partial V}{\partial y} \qquad (1\text{-}80)$$

$$F_Z = - \frac{\partial V}{\partial z} \quad ,$$

όπου η *δυναμοσυνάρτηση* $V(x, y, z)$ είναι μια μονότιμη συνάρτηση μόνο της θέσης· δηλαδή, δεν είναι συνάρτηση της ταχύτητας ή του χρόνου. Μια δύναμη **F** που πληρεί αυτές τις συνθήκες είναι γνωστή ως *συντηρητική δύναμη.*

Τώρα, ας θεωρήσουμε το έργο dW που εκτελεί η δύναμη **F** σε μια απειροστή μετατόπισή της $d\mathbf{r}$. Έχουμε

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{r} = F_X\,dx + F_y\,dy + F_Z\,dz \ , \qquad (1\text{-}81)$$

και αντικαθιστώντας από την Εξ. (1-80), παίρνουμε

$$dW = - \frac{\partial V}{\partial x}\,dx - \frac{\partial V}{\partial y}\,dy - \frac{\partial V}{\partial z}\,dz = - dV(x, y, z) \ , \qquad (1.82)$$

δηλαδή το dW είναι ένα τέλειο διαφορικό. Αν θεωρήσουμε το έργο W που εκτελεί η δύναμη **F** καθώς το σωμάτιο κινείται επί μιας τροχιάς μεταξύ των σημείων A και B, βρίσκουμε ότι

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_A^B dV = V_A - V_B \ . \qquad (1\text{-}83)$$

Επειδή η δυναμική ενέργεια είναι συνάρτηση μόνο της θέσης, το έργο επί του σωματίου είναι *ανεξάρτητο από το είδος της τροχιάς* που συνδέει τα δυο σημεία και εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική του θέση επί της τροχιάς. Ένα επιπλέον συμπέρασμα προκύπτει αν τα A και B συμπίπτουν, δηλαδή ότι το έργο που εκτελείται κατά την κίνηση πάνω σ' ένα κλειστό δρόμο είναι μηδέν. Έτσι έχουμε

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \qquad (1\text{-}84)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

για κάθε συντηρητική δύναμη **F**.

Έργο και κινητική ενέργεια. Ορίζουμε την κινητική ενέργεια T ενός σωματίου μάζας m με την έκφραση

$$T = \frac{1}{2}\, mv^2 \ , \tag{1-85}$$

όπου v είναι η ταχύτητα του σωματίου ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Ας θεωρήσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της Εξ. (1-83) το οποίο δίνει το έργο που παράγεται από τη δύναμη **F**, καθώς το σωμάτιο κινείται επί μιας τροχιάς από το A στο B. Σύμφωνα με το νόμο κίνησης του Newton, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την **F** με $m\ddot{\mathbf{r}}$ και παίρνουμε

$$W = m \int_A^B \ddot{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2} m \int_A^B \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}})\, dt = \frac{1}{2} m \int_A^B d(v^2) \, ,$$

όπου τα ολοκληρώματα υπολογίζονται για την ίδια τροχιά. Με βάση τον ορισμό της κινητικής ενέργειας, έχουμε

$$W = \frac{1}{2} m (v_B^2 - v_A^2) = T_B - T_A \ . \tag{1-86}$$

Η Εξ. (1-86) αποτελεί τη διατύπωση μιας σημαντικής αρχής της δυναμικής, δηλαδή, της *αρχής του έργου και της κινητικής ενέργειας: Η αύξηση της κινητικής ενέργειας ενός σωματίου καθώς κινείται από ένα τυχαίο σημείο σ' ένα άλλο είναι ίση με το έργο των δυνάμεων που ενεργούν στο σωμάτιο κατά τη διάρκεια αυτής της κίνησης.*

Η δύναμη **F** μπορεί να προέρχεται από οποιαδήποτε πηγή· δεν χρειάζεται να είναι συντηρητική. Επιπλέον, συνιστώσες δυνάμεις οι οποίες παραμένουν κάθετες στην ταχύτητα του σωματίου **v** δεν παράγουν έργο και μπορούν να αμεληθούν κατά την εφαρμογή της παραπάνω αρχής.

Διατήρηση της ενέργειας. Αν οι δυνάμεις που ενεργούν επί ενός σωματίου είναι συντηρητικές, τότε ισχύει η Εξ. (1-83) και με τη βοήθεια της Εξ. (1-86) παίρνουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$V_A - V_B = T_B - T_A$$

ή

$$V_A + T_A = V_B + T_B = E \ . \qquad (1\text{-}87)$$

Αφού τα σημεία A και B είναι τυχαία, συμπεραίνουμε ότι η συνολική μηχανική ενέργεια E παραμένει σταθερή κατά την διάρκεια της κίνησης του σωματίου. Αυτή είναι η *αρχή διατήρησης της ενέργειας.*

Τώρα ας θεωρήσουμε την πιό γενική περίπτωση ενός *συστήματος* από N σωμάτια των οποίων η διάταξη καθορίζεται από τις Καρτεσιανές συντεταγμένες $x_1, x_2, \ldots, x_{3N}$. Αν οι μόνες δυνάμεις που παράγουν έργο στο σύστημα κατά τη διάρκεια της κίνησής του, δίνονται από τις

$$F_j = - \frac{\partial V}{\partial x_j} \ , \qquad (1\text{-}88)$$

όπου η δυναμική ενέργεια $V(x_1, x_2, \ldots, x_{3N})$ είναι μονότιμη συνάρτηση μόνο της θέσης , τότε η συνολική ενέργεια E πάλι διατηρείται.

Συχνά είναι κατάλληλο να καθορίσουμε τη διάταξη ενός συστήματος σωματίων χρησιμοποιώντας γενικευμένες συντεταγμένες. Υποθέτουμε, για παράδειγμα, ότι οι Καρτεσιανές και οι γενικευμένες συντεταγμένες συνδέονται με τις

$$x_j = x_j(q_1, q_2, \ldots, q_n) \ , \qquad (j = 1, 2, \ldots, 3N) \ . \qquad (1\text{-}89)$$

Τότε, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις Εξ. (1-73) και (1-88) για να πάρουμε μια έκφραση για την γενικευμένη δύναμη Q_i που συνδέεται με το πεδίο των συντηρητικών δυνάμεων,

$$Q_i = - \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial V}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} = - \frac{\partial V}{\partial q_i} \ , \qquad (1\text{-}90)$$

όπου η δυναμική ενέργεια V εκφράζεται τώρα ως συνάρτηση των γενικευμένων συντεταγμένων. Κάθε Q_i μπορεί να θεωρηθεί ως συνιστώσα ενός *διανύσματος γενικευμένης δύναμης* **Q** σ' έναν n - διάστατο μορφικό χώρο. Αν καμιά άλλη γενικευμένη δύναμη δεν

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

παράγει έργο στο σύστημα, τότε, όπως στην Εξ. (1-83), μπορούμε να γράψουμε

$$W = \int_A^B \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{q} = - \int_A^B dV = V_A - V_B ,$$

όπου τα σημεία A και B θεωρούνται τώρα ως ακραία σημεία της τροχιάς στον q-χώρο. Το W είναι πάλι ανεξάρτητο της τροχιάς μεταξύ των ακραίων σημείων και η συνολική ενέργεια διατηρείται.

Ας θεωρήσουμε τώρα, εν συντομία την περίπτωση κατά την οποία η Εξ. (1-89) ισχύει, αλλά η δυναμοσυνάρτηση V είναι μια εκπεφρασμένη συνάρτηση του *χρόνου* και των γενικευμένων συντεταγμένων. Χαρακτηριστικές περιπτώσεις για τις οποίες μπορούμε να υποθέσουμε ότι η V έχει αυτή τη μορφή είναι: (1) ένα σύστημα με κινούμενους δεσμούς, (2) ένα σύστημα στο οποίο μια παράμετρος, όπως για παράδειγμα μια ακαμψία, είναι εκπεφρασμένη συνάρτηση του χρόνου και (3) ένα σύστημα μ' ένα χρονομεταβαλλόμενο πεδίο όπως για παράδειγμα ένα ηλεκτρικό πεδίο. Στην περίπτωση αυτή το έργο που παράγεται από τη δύναμη $\mathbf{Q}$, σε μια απειροστή μετατόπιση $d\mathbf{q}$, δεν είναι πια τέλειο διαφορικό αλλά διαφέρει κατά έναν όρο $(\partial V/\partial t)\, dt$. Για το λόγο αυτό, το εκτελούμενο έργο στο σύστημα, πηγαίνοντας από το A στο B με μια πραγματική κίνηση, εξαρτάται τόσο από την τροχιά όσο και από το χρόνο και η δύναμη $\mathbf{Q}$ δεν είναι *συντηρητική*.

Ισορροπία και ευστάθεια. Θεωρούμε ένα σύστημα N σωματίων στο οποίο οι εφαρμοζόμενες δυνάμεις είναι συντηρητικές και παίρνονται από μια δυναμοσυνάρτηση της μορφής $V(x_1, x_2, \ldots, x_{3N})$. Από τις Εξ. (1-38) και (1-88) βλέπουμε ότι το δυνατό έργο αυτών των δυνάμεων είναι

$$\delta W = - \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial V}{\partial x_j} \delta x_j = - \delta V$$

δηλαδή είναι γραμμικό ως προς τις δυνατές μετατοπίσεις των Καρτεσιανών συντεταγμένων , άρα είναι η πρώτη μεταβολή της V. Αν χρησιμοποιήσουμε την αρχή των δυνατών έργων, βρίσκουμε ότι η αναγκαία και ικανή συνθήκη για στατική ισορροπία αυτού του

συστήματος είναι

$$\delta V = 0 \ , \tag{1-91}$$

για κάθε δυνατή μετατόπιση συμβιβαστή με τους δεσμούς.

Αν η V εκφραστεί σε όρους των γενικευμένων συντεταγμένων, q_1, q_2, ... , q_n τότε

$$\delta V = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i \ . \tag{1-92}$$

Για ένα *ολόνομο* σύστημα το οποίο έχει *ανεξάρτητες* γενικευμένες συντεταγμένες, η συνθήκη $\delta V = 0$, για μια τυχαία δυνατή μετατόπιση απαιτεί να είναι μηδέν οι συντελεστές στην κατάσταση ισορροπίας, δηλαδή

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \ , \quad (i = 1, 2, \ldots , n) \ . \tag{1-93}$$

Οι συνθήκες αυτές οδηγούν στο συμπέρασμα ότι η V έχει μια στάσιμη τιμή. Άρα, μια διάταξη ισορροπίας ενός συντηρητικού ολόνομου συστήματος με σταθερούς δεσμούς που δεν παράγουν έργο, συμβαίνει σε μια θέση όπου η V έχει στάσιμη τιμή.

Ας εξετάσουμε τώρα το ερώτημα της *ευστάθειας* αυτού του συστήματος σε μια θέση στατικής ισορροπίας. Αν αναπτύξουμε την V σε μια σειρά Taylor γύρω από μια τιμή αναφοράς V_0, παίρνουμε

$$V = V_0 + \left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)_0 \delta q_1 + \left(\frac{\partial V}{\partial q_2}\right)_0 \delta q_2 + \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\right)_0 (\delta q_1)^2 + \ldots$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \, \partial q_2}\right)_0 \delta q_1 \, \delta q_2 + \ldots \quad , \tag{1-94}$$

όπου ο δείκτης μηδέν σε μια συνάρτηση δηλώνει ότι αυτή πρέπει να υπολογιστεί για τιμές των q_i στην κατάσταση αναφοράς. Οι πρώτες μεταβολές των γενικευμένων συντεταγμένων εκφράζουν απειροστές μεταβολές από την κατάσταση αναφοράς.

Εκλέγουμε μια διάταξη ισορροπίας ως θέση αναφοράς. Από την Εξ. (1-93) παρατηρούμε ότι οι συντελεστές $(\partial V/\partial q_i)_0$ είναι μηδέν. Άρα η

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

έκφραση της V δεν περιέχει όρους πρώτης τάξης ως προς την πρώτη μεταβολή των γενικευμένων συντεταγμένων. Θεωρώντας μικρές πρώτες μεταβολές των γενικευμένων συντεταγμένων μπορούμε να γράψουμε

$$\Delta V = V - V_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\right)_0 (\delta q_1)^2 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1\, \partial q_2}\right)_0 \delta q_1\, \delta q_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}\right)_0 (\delta q_2)^2 + \ldots \quad , \qquad (1\text{-}95)$$

όπου ΔV είναι η μεταβολή της V από την τιμή της στην ισορροπία. Εδώ χρησιμοποιούμε ΔV αντί δV για να τονίσουμε ότι συμπεριλαμβάνονται όροι μεγαλύτερης τάξης από δq_i.

Αν $\Delta V>0$ για κάθε δυνατή μετατόπιση η οποία έχει τουλάχιστον μια από τις δq_i μη μηδενική, τότε η κατάσταση αναφοράς είναι μια κατάσταση ελάχιστης δυναμικής ενέργειας που αντιστοιχεί σε *ευσταθή* ισορροπία. Αν όμως μπορεί να βρεθεί μια δυνατή μετατόπιση τέτοια ώστε $\Delta V<0$, η αρχική κατάσταση είναι *ασταθής*. Μια τρίτη δυνατότητα είναι $\Delta V \geq 0$ για όλες τις πιθανές δυνατές μετατοπίσεις, αλλά $\Delta V=0$ για μερικές δυνατές μετατοπίσεις στις οποίες οι πρώτες μεταβολές των γενικευμένων συντεταγμένων δεν είναι όλες μηδέν. Αυτή είναι η περίπτωση της *ουδέτερης ευστάθειας*. (*)

Αν θεωρήσουμε μόνο τους *τετραγωνικούς όρους* ως προς τις δq_i τότε μπορεί σε μερικές περιπτώσεις να προσδιοριστεί η στατική ευστάθεια του συστήματος. Για παράδειγμα, αν η ΔV είναι θετικά ορισμένη τετραγωνική μορφή, (**) το σύστημα είναι ευσταθές. Αν ΔV είναι αρνητικά ορισμένη, αρνητικά ημιορισμένη ή απροσδιόριστη, τότε το σύστημα είναι ασταθές. Οι υπόλοιπες δυνατότητες, δηλαδή η τετραγωνική μορφή να είναι θετικά ημιορισμένη ή ταυτοτικά μηδέν, δεν προσδιορίζουν την ευστάθεια· σ' αυτή την περίπτωση πρέπει να ληφθούν υπόψη όροι ανώτερης τάξης.

Από μια πιο πρακτική σκοπιά, ας υποθέσουμε ότι το σύστημα είναι αρχικά σε ισορροπία αλλά υπόκειται σε μικρές τυχαίες διαταραχές. Σ'

(*) Μερικές φορές η ουδέτερη ευστάθεια θεωρείται ως μια μορφή αστάθειας. Βλέπε, για παράδειγμα, τη συζήτηση της γυροσκοπικής ευστάθειας στην παράγραφο 3-3.

(**) Βλέπε Εξ. (2-11) και τη συζήτηση που ακολουθεί την Εξ. (2-239).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

αυτή την περίπτωση, ένα ευσταθές σύστημα θα παραμείνει κοντά στην αρχική θέση· ένα σύστημα με ουδέτερη ευστάθεια θα κινηθεί σιγά με τέτοιο τρόπο ώστε η V να παραμένει ουσιαστικά μηδέν· και ένα ασταθές σύστημα θα κινηθεί μακριά απ' την αρχική θέση με αυξανόμενη ταχύτητα.

Κινητική ενέργεια συστήματος. Θεωρούμε ένα σύστημα N σωματίων και έστω $\mathbf{r}_i$ το διάνυσμα θέσης του i-σωματίου ως προς ένα σταθερό σημείο O ενός αδρανειακού σύστηματος (Σχ. 1-10). Σε σχέση μ' αυτό το αδρανειακό σύστημα, το οποίο θα θεωρούμε ακίνητο, η συνολική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι το άθροισμα των επιμέρους κινητικών ενεργειών των σωματίων, δηλαδή,

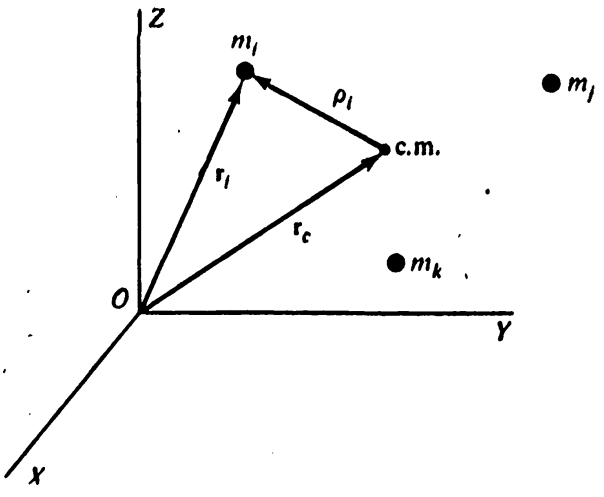
$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m \dot{\mathbf{r}}_i^2 \ , \tag{1-96}$$

όπου

$$\dot{\mathbf{r}}_i^2 = \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = v_i^2 \ .$$

Από το Σχ. 1-10, βλέπουμε ότι

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_c + \boldsymbol{\varrho}_i \tag{1-97}$$



Σχ. 1-10. Διανύσματα θέσης συστήματος σωματίων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

και άρα

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \, (\dot{\mathbf{r}}_c^2 + 2\,\dot{\mathbf{r}}_c \cdot \dot{\boldsymbol{\varrho}}_i + \dot{\boldsymbol{\varrho}}_i^2) \quad . \tag{1-98}$$

Αλλά

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{\varrho}_i = 0 \quad , \tag{1-99}$$

αφού το $\boldsymbol{\varrho}_i$ μετριέται από το κέντρο μάζας. Επειδή η $\dot{\mathbf{r}}_c$ δεν υπεισέρχεται στην άθροιση, αν χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο m για τη συνολική μάζα του συστήματος, η Εξ. (1-98) γράφεται με τη μορφή

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \, \dot{\boldsymbol{\varrho}}_i^2 \quad . \tag{1-100}$$

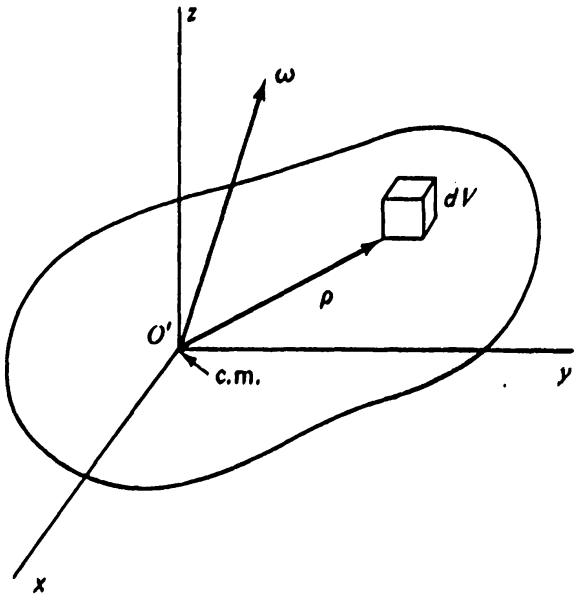
Ο τελευταίος όρος της Εξ. (1-100) μπορεί να θεωρηθεί ως η κινητική ενέργεια του συστήματος σχετικά προς το κέντρο μάζας του· δηλαδή, είναι η κινητική ενέργεια του συστήματος όπως τη βλέπει ένας παρατηρητής ο οποίος μεταφέρεται με το κέντρο μάζας αλλά δεν περιστρέφεται. Τώρα μπορούμε να διατυπώσουμε *το θεώρημα του König : Η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι ίση με το άθροισμα (1) της κινητικής ενέργειας ενός σωματίου που έχει μάζα ίση με την συνολική μάζα του συστήματος και κινείται με την ταχύτητα του κέντρου μάζας του και (2) της κινητικής ενέργειας, λόγω της σχετικής κίνησης του συστήματος ως προς με το κέντρο μάζας του.*

Η Εξ. (1-100) έχει παραχθεί για ένα σύστημα σωματίων, αλλά μπορεί να προσαρμοστεί και για την περίπτωση ενός στερεού σώματος σε γενική κίνηση. Θεωρούμε ένα μικρό στοιχείο όγκου dV που έχει πυκνότητα ρ (Σχ. 1-11). Κάθε στοιχείο του σώματος μπορεί, γενικά, να μεταφερθεί και να περιστραφεί. Η μόνη δυνατή εξαίρεση είναι ότι μπορεί να υπάρχει ένας στιγμιαίος άξονας περιστροφής τα στοιχεία κατά μήκος του οποίου μπορεί να μην έχουν καθόλου μεταφορική ταχύτητα στη συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Ωστόσο, οι διαστάσεις ένος τυπικού στοιχείου όγκου μπορούν να εκλεγούν τόσο μικρές ώστε η περιστροφική κινητική του ενέργεια να είναι αμελητέα σε σύγκριση με

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

την μεταφορική κινητική του ενέργεια. Άρα στο όριο, κάθε στοιχείο του στερεού σώματος μπορεί να θεωρηθεί ως ένα *σωμάτιο* απειροστής μάζας και η Εξ. (1-100) μπορεί να τροποποιηθεί ως ακολούθως:

$$T=\frac{1}{2}\, m\,\dot{\mathbf{r}}_c^{\,2}+\frac{1}{2}\int_{\nu}\varrho\,\dot{\boldsymbol{\varrho}}^2\,dV\ , \tag{1-101}$$



Σχ. 1-11. Τυπικό στοιχείο όγκου περιστρεφόμενου στερεού σώματος.

όπου $\boldsymbol{\varrho}$ είναι το διάνυσμα θέσης του στοιχείου του όγκου σχετικά προς το *κέντρο μάζας*. Ο πρώτος όρος στο δεξιό μέλος ονομάζεται, *μεταφορική* κινητική ενέργεια του στερεού σώματος· ο δεύτερος είναι η *περιστροφική* κινητική ενέργεια.

Ας εξετάσουμε την περιστροφική κινητική ενέργεια λεπτομερώς. Αν πάρουμε το σημείο αναφοράς O' στο κέντρο μάζας και υποθέσουμε ότι το σώμα περιστρέφεται με μια γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}$, βλέπουμε ότι

$$\dot{\boldsymbol{\varrho}} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\varrho} \tag{1-102}$$

και άρα

$$\dot{\boldsymbol{\varrho}}^2 = \dot{\boldsymbol{\varrho}}\cdot\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\varrho} = \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\varrho}\times\dot{\boldsymbol{\varrho}}\ . \tag{1-103}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Άρα η περιστροφική κινητική ενέργεια του στερεού σώματος μπορεί να γραφεί με τη μορφή,

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega} \cdot \int_V \varrho\, \boldsymbol{\varrho} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varrho})\, dV \ . \tag{1-104}$$

Αν αντικαταστήσουμε, το τριπλό εξωτερικό γινόμενο(*) με μια ισοδύναμη έκφραση παίρνουμε

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega} \cdot \int_V \varrho\, [\boldsymbol{\varrho}^2\, \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\varrho} \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\varrho}]\, dV \ . \tag{1-105}$$

Τώρα ας πάρουμε ένα Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με την αρχή του στο κέντρο μάζας και ας υποθέσουμε ότι αυτό περιστρέφεται με το σώμα. Τότε, σε όρους των μοναδιαίων διανυσμάτων **i**, **j**, **k**, έχουμε

$$\boldsymbol{\varrho} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} \tag{1-106}$$

και

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x\,\mathbf{i} + \omega_y\,\mathbf{j} + \omega_z\,\mathbf{k} \ . \tag{1-107}$$

Αντικαθιστώντας από τις (1-106) και (1-107) στην (1-105), παίρνουμε

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega} \cdot \int_V \varrho\{[(y^2 + z^2)\omega_x - (xy\omega_y + xz\omega_z)]\mathbf{i} + \ldots\}\, dV, \tag{1-108}$$

η οποία ανάγεται στην

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_{xx}\,\omega_x^2 + \frac{1}{2} I_{yy}\,\omega_y^2 + \frac{1}{2} I_{zz}\,\omega_z^2 \quad . \\ + I_{xy}\,\omega_x\,\omega_y + I_{xz}\,\omega_x\,\omega_z + I_{yz}\,\omega_y\,\omega_z \tag{1-109}$$

ή

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j I_{ij}\,\omega_i\,\omega_j \ , \tag{1-110}$$

(*) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\,\mathbf{C}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

όπου οι *ροπές* και τα *γινόμενα αδρανείας* είναι

$$I_{xx} = \int_V \varrho\,(y^2 + z^2)\,dV$$

$$I_{yy} = \int_V \varrho\,(x^2 + z^2)\,dV \qquad (1\text{-}111)$$

$$I_{zz} = \int_V \varrho\,(x^2 + y^2)\,dV$$

και

$$I_{xy} = I_{yx} = -\int_V \varrho xy\,dV$$

$$I_{xz} = I_{zx} = -\int_V \varrho xz\,dV \qquad (1\text{-}112)$$

$$I_{yz} = I_{zy} = -\int_V \varrho yz\,dV\ ,$$

αντίστοιχα.

Χρησιμοποιώντας συμβολισμούς μητρώων η περιστροφική κινητική ενέργεια μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega}^T\,\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \qquad (1\text{-}113)$$

ή

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{Bmatrix}^T\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz}\\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz}\\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{Bmatrix}\ . \qquad (1\text{-}114)$$

Μια άλλη χρήσιμη μορφή λαμβάνεται με τη θεώρηση ότι η $\boldsymbol{\omega}$ έχει την ίδια διεύθυνση με έναν από τους άξονες συντεταγμένων, οπότε η έκφραση για την T_{rot} ανάγεται στην ακόλουθη

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I\omega^2 \ , \tag{1-115}$$

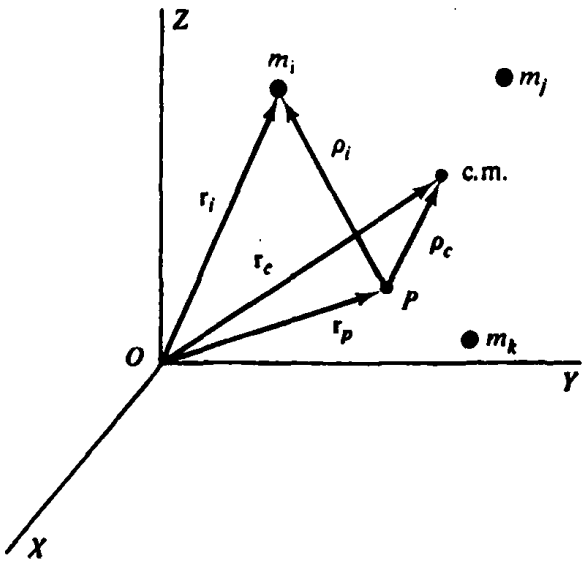
όπου I είναι η ροπή αδρανείας ως προς έναν άξονα που έχει τη διεύθυνση της $\boldsymbol{\omega}$ και περνάει από το κέντρο μάζας.

Έχουμε πάρει εκφράσεις για την κινητική ενέργεια του συστήματος σε όρους της κίνησής του σχετικά μ' ένα σταθερό σημείο και επίσης σε όρους της κίνησής του σχετικά με το κέντρο μάζας. Τώρα ας βρούμε μια έκφραση για την κινητική ενέργεια σε όρους της κίνησής σχετικά μ' ένα τυχαίο σημείο αναφοράς P (Σχ. 1-12). Σ' αυτή την περίπτωση, έχουμε

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_p + \boldsymbol{\varrho}_i \ . \tag{1-116}$$

Αντικαθιστώντας από την Εξ. (1-116) στη βασική έκφραση της κινητικής ενέργειας, όπως δίνεται από την Εξ. (1-96), παίρνουμε

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i (\dot{\mathbf{r}}_p + \dot{\boldsymbol{\varrho}}_i) \cdot (\dot{\mathbf{r}}_p + \dot{\boldsymbol{\varrho}}_i) \\ &= \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}_p^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{\varrho}}_i^2 + \dot{\mathbf{r}}_p \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{\varrho}}_i \ . \end{aligned} \tag{1-117}$$



Σχ. 1-12. Διανύσματα θέσης ενός συστήματος σωματίων, ως προς ένα τυχαίο σημείο αναφοράς.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Αλλά η θέση του κέντρου μάζας, ϱ_C, σχετικά με το P είναι

$$\varrho_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{N} m_i \, \varrho_i \, . \qquad (1\text{-}118)$$

Άρα

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}_p^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\varrho}_i^2 + \dot{\mathbf{r}}_p \cdot m \dot{\varrho}_C \, . \qquad (1\text{-}119)$$

Έτσι βρίσκουμε ότι η ολική κινητική ενέργεια είναι το άθροισμα τριών όρων: (1) *της κινητικής ενέργειας ενός σωματίου που έχει μάζα m και κινείται μαζί με το σημείο αναφοράς P,* (2) *της κινητικής ενέργειας τους συστήματος λόγω της κίνησής του σχετικά με το P και* (3) *του εσωτερικού γινομένου της ταχύτητας του σημείου αναφοράς και της γραμμικής ορμής του συστήματος σχετικά προς το σημείο αναφοράς.* Μπορεί να αποδειχθεί ότι η Εξ. (1-119) ανάγεται στην Εξ. (1-100) στην ειδική περίπτωση που το σημείο αναφοράς P λαμβάνεται στο κέντρο μάζας (ϱ_C=0).

Τώρα ας θεωρήσουμε την κινητική ενέργεια ενός στερεού σώματος σε όρους της κίνησής του σχετικά προς ένα τυχαίο σημείο αναφοράς P. Η κινητική ενέργεια λόγω της κίνησής του σχετικά με το P είναι

$$T_{\text{rel}} = \frac{1}{2} m_i \dot{\varrho}_c^2 + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j I_{ij} \, \omega_i \, \omega_j \, , \qquad (1\text{-}120)$$

όπου οι ροπές και τα γινόμενα αδρανείας λαμβάνονται ως προς το κέντρο μάζας. Η κινητική ενέργεια είναι

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}_p^2 + \frac{1}{2} m \dot{\varrho}_c^2 + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j I_{ij} \, \omega_i \, \omega_j + \dot{\mathbf{r}}_p \cdot m \dot{\varrho}_c \, . \qquad (1\text{-}121)$$

Αν η κίνηση του στερεού σώματος ως προς το P είναι καθαρά περιστροφή κίνηση γύρω από το P, δηλαδή το P είναι ακίνητο μέσα στο σώμα, τότε η κινητική ενέργεια της σχετικής κίνησης μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$T_{\text{rel}} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_i I_{ij} \, \omega_i \, \omega_j \, , \qquad (1\text{-}122)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

όπου οι ροπές και τα γινόμενα αδρανείας λαμβάνονται τώρα ως προς το *P*.

Στροφορμή. Ας θεωρήσουμε για άλλη μια φορά ένα σύστημα *N* σωματίων, όπως φαίνεται στο Σχ. 1-10. Η ολική στροφορμή **H** ως προς το σταθερό σημείο *O* είναι

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i \quad , \tag{1-123}$$

δηλαδή είναι το άθροισμα των ροπών ως προς το *O* των επιμέρους γραμμικών ορμών των σωματίων, υποθέτοντας ότι κάθε διάνυσμα $m_i \dot{\mathbf{r}}_i$ έχει μια γραμμή δράσης που περνά από το αντίστοιχο σωμάτιο.

Αν αντικαταστήσουμε την έκφραση για το $\mathbf{r}_i$ από την Εξ. (1-97) στην Εξ. (1-123), παίρνουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{r}_C + \boldsymbol{\varrho}_i) \times m_i (\dot{\mathbf{r}}_C \times \dot{\boldsymbol{\varrho}}_i) \\ &= \mathbf{r}_C \times m \dot{\mathbf{r}}_C + \mathbf{r}_C \times \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{\varrho}}_i + \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{\varrho}_i \times \dot{\mathbf{r}}_C + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\varrho}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{\varrho}}_i \quad . \end{aligned} \tag{1-124}$$

Χρησιμοποιώντας την Εξ. (1-99), οι δυο μεσαίοι όροι είναι μηδέν και το αποτέλεσμα απλουστεύεται στο ακόλουθο

$$\mathbf{H} = \mathbf{r}_C \times m \dot{\mathbf{r}}_C + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\varrho}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{\varrho}}_i \quad , \tag{1-125}$$

όπου ο τελευταίος όρος στο δεξιό μέλος είναι η στροφορμή $\mathbf{H}_C$ ως προς το κέντρο μάζας, δηλαδή,

$$\mathbf{H}_C = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\varrho}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{\varrho}}_i \quad . \tag{1-126}$$

Για να συνοψίσουμε, *η στροφορμή ενός συστήματος σωματίων συνολικής μάζας m ως προς ένα σταθερό σημείο O είναι ίση με την στροφορμή ως προς το O ενός σωματίου μάζας m που κινείται με το*

κέντρο μάζας συν τη στροφορμή του συστήματος ως προς το κέντρο μάζας.

Αν εφαρμόσουμε αυτό το αποτέλεσμα στην περίπτωση στερεού σώματος (Σχ. 1-11) σε τυχαία κίνηση, βρίσκουμε ότι η ολική στροφορμή ως προς το σταθερό σημείο O είναι

$$\mathbf{H} = \mathbf{r}_C \times m\,\dot{\mathbf{r}}_C + \mathbf{H}_C \ , \tag{1-127}$$

όπου

$$\mathbf{H}_C = \int_V \varrho\boldsymbol{\varrho} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varrho})\, dV \ . \tag{1-128}$$

Σε όρους των ροπών και των γινομένων αδρανείας ως προς το κέντρο μάζας μπορούμε να πάρουμε τις συνιστώσες της $\mathbf{H}_C$ από την εξίσωση

$$\mathbf{H}_C = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \ . \tag{1-129}$$

Επίσης, συγκρίνοντας τις Εξ. (1-104) και (1-128), βλέπουμε ότι η περιστροφική κινητική ενέργεια μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H}_C \ , \tag{1-130}$$

δηλαδή σε συμφωνία με την Εξ. (1-113) .

Έχουμε πάρει τις εκφράσεις της στροφορμής ενός συστήματος σωματίων ως προς ένα σταθερό σημείο και ως προς το κέντρο μάζας. Τώρα ας εξετάσουμε τη στροφορμή ως προς ένα τυχαίο σημείο P (Σχ. 1-12). Θα πάρουμε τη στροφορμή ως προς το σημείο P, όπως φαίνεται από έναν μη περιστρεφόμενο παρατηρητή που κινείται μαζί με το σημείο. Μπορούμε να ορίσουμε την $\mathbf{H}_P$ ως ακολούθως :

$$\mathbf{H}_P = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\varrho}_i \times m_i\, \dot{\boldsymbol{\varrho}}_i \ , \tag{1-131}$$

όπου $\boldsymbol{\varrho}_i$ είναι τώρα η θέση του i-σωματίου ως προς το σημείο αναφοράς P. Αν αντικαταστήσουμε την

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\boldsymbol{\varrho}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_c + \boldsymbol{\varrho}_c \qquad (1\text{-}132)$$

και σημειώσουμε ότι η θέση του κέντρου μάζας ορίζεται από την

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{\mathrm{m}} \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \ , \qquad (1\text{-}133)$$

παίρνουμε, μετά από μερικές αλγεβρικές απλουστεύσεις,

$$\mathbf{H}_p = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times m\dot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{r}_c \times m\dot{\mathbf{r}}_c + \boldsymbol{\varrho}_c \times m\dot{\boldsymbol{\varrho}}_c \ . \qquad (1\text{-}134)$$

ή, χρησιμοποιώντας την Εξ. (1-123),

$$\mathbf{H}_p = \mathbf{H} - \mathbf{r}_c \times m\dot{\mathbf{r}}_c + \boldsymbol{\varrho}_c \times m\dot{\boldsymbol{\varrho}}_c \ . \qquad (1\text{-}135)$$

Αυτό το αποτέλεσμα απεικονίζει τη γενική διαδικασία αλλαγής του σημείου αναφοράς στην έκφραση της στροφορμής, όπου κανένα σημείο δεν είναι στο κέντρο μάζας. Ξεκινώντας με την **H** ως προς το *O*, ο όρος $-\mathbf{r}_c \times m\,\dot{\mathbf{r}}_c$ μετατοπίζει το σημείο αναφοράς στο κέντρο μάζας. Κατόπιν η πρόσθεση του $\boldsymbol{\varrho}_c \times m\,\dot{\boldsymbol{\varrho}}_c$ μετατοπίζει το σημείο αναφοράς μακριά από το κέντρο μάζας στο σημείο *P*. Πρέπει να σημειωθεί ότι αν και το *P* δεν είναι σταθερό σε κάποιο αδρανειακό σύστημα, η γενική μορφή της εξίσωσης στροφορμής είναι η ίδια όπως αυτή θα προέκυπτε για σταθερό σημείο αναφοράς.

Γενικευμένη ορμή. Θεωρούμε ένα σύστημα του οποίου η διάταξη περιγράφεται από *n* γενικευμένες συντεταγμένες. Ας ορίσουμε την *συνάρτηση Lagrange* $L(q, \dot{q}, t)$ ως ακολούθως

$$L = T - V \ . \qquad (1\text{-}136)$$

Η γενικευμένη ορμή p_i που συνδέεται με τη γενικευμένη συντεταγμένη q_i ορίζεται από την εξίσωση

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ , \qquad (1\text{-}137)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

και είναι, γενικά, μια συνάρτηση των q_i, $\dot{q}_i$ και t. Πρέπει να σημειωθεί, ότι η συνάρτηση Lagrange είναι το πολύ τετραγωνική ως προς τις $\dot{q}_i$ και άρα η p_i είναι μια *γραμμική* συνάρτηση των $\dot{q}_i$.

Συνήθως η δυναμική ενέργεια V δεν εξαρτάται από την ταχύτητα και άρα η $\partial V/\partial \dot{q}_i$ είναι ίση με μηδέν και

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \quad , \tag{1-138}$$

αν η V είναι της μορφής $V(q_i, t)$.

Ως παράδειγμα, θεωρούμε ένα ελεύθερο σωμάτιο μάζας m του οποίου η θέση δίνεται από τις Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z). Η κινητική του ενέργεια είναι

$$T = \frac{m}{2}\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \ .$$

Χρησιμοποιώντας την Εξ. (1-138) παίρνουμε

$$p_x = m\,\dot{x} \quad ,$$

δηλαδή, η p_x είναι η x-συνιστώσα της γραμμικής ορμής.

Παρομοίως, αν η θέση του σωματίου δίνεται από τις σφαιρικές συντεταγμένες (r,θ, φ), όπως στο Σχ. 1-7, η κινητική ενέργεια είναι

$$T = \frac{m}{2}\,(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\,\sin^2\theta) \ .$$

Χρησιμοποιώντας την Εξ. (1-138), έχουμε

$$p_r = m\,\dot{r}$$

$$p_\theta = m\,r^2\,\dot{\theta}$$

$$p_\varphi = m\,r^2\,\dot{\varphi}\,\sin^2\theta \ .$$

Βλέπουμε ότι η p_r είναι η γραμμική συνιστώσα της ορμής στην ακτινική διεύθυνση, ενώ η p_θ είναι η οριζόντια συνιστώσα της στροφορμής,

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δηλαδή είναι η στροφορμή ως προς τον οριζόντιο άξονα που συνδέεται με τη γωνιακή ταχύτητα $\dot{\theta}$. Παρομοίως, επειδή η $\dot{\varphi}$ είναι κατακόρυφη, η p_φ είναι η κάθετη συνιστώσα της στροφορμής.

Γενικά, η p_i έχει τις διαστάσεις της ενέργειας διαιρούμενη με $\dot{q}_i$. Τα παραδείγματα επεξηγούν ότι όταν η q_i συμβολίζει μια απόσταση από κάποιο σημείο αναφοράς, η αντίστοιχη p_i είναι μια γραμμική ορμή. Αν η q_i είναι μια γωνία, τότε η p_i είναι μια στροφορμή. Για πιο γενικές q_i η φυσική σημασία είναι πιο δυσνόητη, αλλά γνωρίζουμε ότι η p_i είναι γραμμική ως προς τις $\dot{q}_i$ και γι' αυτό ανάλογη προς ένα άθροισμα βάρους των ταχυτήτων σε διάφορα σημεία του συστήματος.

Παράδειγμα 1-5. Θεωρούμε για άλλη μια φορά το σύστημα των σωματίων και των ράβδων που φαίνονται στο Σχ. 1-8. Να βρεθούν οι εκφράσεις για την κινητική ενέργεια και τις γενικευμένες ορμές.

Η ολική κινητική ενέργεια μπορεί να ληφθεί εύκολα σε όρους των $\dot{x}_i$, δηλαδή,

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) . \qquad (1\text{-}139)$$

Για να εκφράσουμε την T ως συνάρτηση των γενικευμένων ταχυτήτων, πρώτα παραγωγίζουμε την Εξ. (1-75) και παίρνουμε

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \frac{1}{2}\dot{q}_3 \\ \dot{x}_2 &= \dot{q}_1 - \dot{q}_3 \\ \dot{x}_3 &= \dot{q}_1 - \dot{q}_2 + \frac{1}{2}\dot{q}_3 . \end{aligned} \qquad (1\text{-}140)$$

Αντικαθιστώντας από την Εξ. (1-140) στην Εξ. (1-139) και απλοποιώντας, έχουμε

$$T = \frac{m}{2} (3\,\dot{q}_1^2 + 2\,\dot{q}_2^2 + \frac{3}{2}\,\dot{q}_3^2) . \qquad (1\text{-}141)$$

Οι γενικευμένες ορμές λαμβάνονται με την βοήθεια της Εξ. (1-138), το αποτέλεσμα είναι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = 3m\dot{q}_1$$

$$p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = 2m\dot{q}_2 \qquad (1\text{-}142)$$

$$p_3 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} = \frac{3}{2} m\dot{q}_3 \ .$$

Στο παράδειγμα αυτό, η κινητική ενέργεια είναι μια τετραγωνική συνάρτηση ιδιαίτερα απλής μορφής, δηλαδή ένα άθροισμα τετραγώνων των γενικευμένων ταχυτήτων. Αυτό έχει ως αποτελέσμα κάθε γενικευμένη ορμή p_j να είναι γραμμική συνάρτηση μόνο της αντίστοιχης γενικευμένης ταχύτητας $\dot{q}_j$. Η φυσική σημασία αυτής της μαθηματικής απλότητας είναι μια παντελής έλλειψη αδρανειακής σύζευξης ανάμεσα στις κινήσεις που αντιστοιχούν στην κάθε επιμέρους $\dot{q}_j$. Μ' άλλα λόγια, οι αδρανειακές δυνάμεις που εμφανίζονται από την κίνηση των q_j δεν τείνουν να οδηγήσουν το σύστημα σε μια διαφορετική συντεταγμένη q_j.

Οι συντελεστές των $\dot{q}_j$ στις εκφράσεις για τις γενικευμένες ορμές είναι γνωστές ως *αδρανειακοί συντελεστές*. Μελετώντας τις μορφές μετατόπισης που δίνονται στο Σχ. 1-9, μπορεί να αποδειχθεί ότι ο αδρανειακός συντελεστής που αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη γενικευμένη συντεταγμένη q_j είναι ίσος με το γινόμενο της μάζας του σωματίου επί το τετράγωνο της μετατόπισής του ανά μονάδα q_j, αθροισμένο για όλα τα σωμάτια του συστήματος. Για παράδειγμα, ο αδρανειακός συντελεστής που αντιστοιχεί στην q_3 είναι

$$m\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] = \frac{3}{2} m$$

Οι αδρανειακοί συντελεστές θα συζητηθούν περαιτέρω στο επόμενο κεφάλαιο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. LANCZOS, C., *The Variational Principles of Mechanics.* Toronto: University of Toronto Press, 1949. Είναι μια καλή παρουσίαση των βασικών εννοιών και θεμελιωδών απόψεων της αναλυτικής μηχανικής.

2. SYNGE, J. L. and B. A. GRIFFITH, *Principles of Mechanics,* 3rd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1959. Είναι μια άριστη εισαγωγή στις βασικές έννοιες της δυναμικής, καθώς και στα πιο προχωρημένα θέματα της αναλυτικής μηχανικής.

3. WHITTAKER, E. T. , *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies.* 4th ed. New York: Dover Publications, Inc., 1944. Αυτό το κλασσικό κείμενο πραγματεύεται άριστα τις έννοιες των δυνατών μετατοπίσεων, γενικευμένων συντεταγμένων και δεσμών.

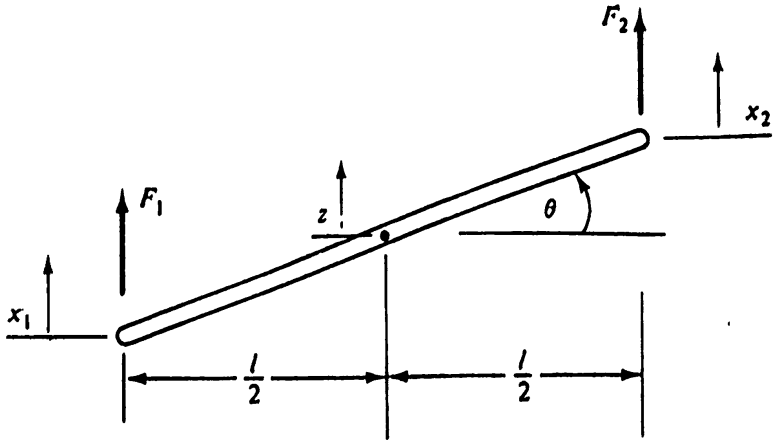
4. MEIROVITCH, L., *Methods of Analytical Dynamics.* New York: McGraw-Hill Book Company, 1970. Είναι μια καλή αντιμετώπιση των θεμάτων αυτού του κεφαλαίου. Βλέπε ιδιαίτερα, τις παραγράφους για το δυνατό έργο και την αρχή του d' Alembert.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

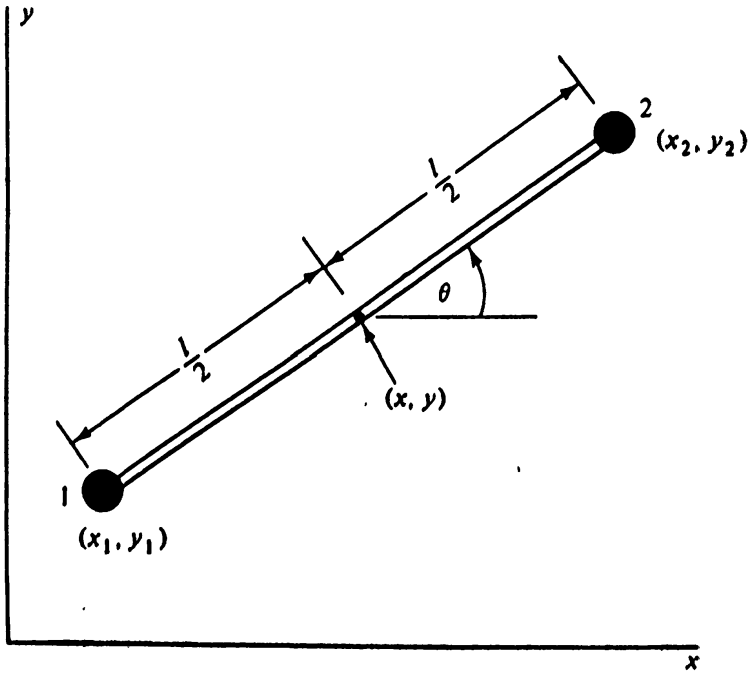
1-1. Ένα απλό εκκρεμές αποτελείται από ένα σωμάτιο μάζας m και μια χορδή χωρίς μάζα μήκους l που δένεται σ' ένα σημείο O το οποίο κινείται κατά μήκος του οριζόντιου άξονα με μετατόπιση $x_O = A \sin\omega t$. Υποθέτουμε ότι ο θετικός y ημι-άξονας δείχνει προς τα πάνω και οι συντεταγμένες (x, y) εκφράζουν την θέση του σωματίου. Αν θεωρήσουμε την γωνία θ του εκκρεμούς (μετρούμενη αντίθετα προς την φορά δεικτών του ρολογιού από την διεύθυνση του αρνητικού y ημ-άξονα) ως γενικευμένη συντεταγμένη, να γραφούν οι εξισώσεις μετασχηματισμού με τη μορφή των Εξ. (1-8). Ποία είναι η εξίσωση δεσμού που συνδέει τις (x, y, t);

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

1-2. Μια στερεά ράβδος μήκους l υπόκειται σε μικρή κίνηση κατά την οποία οι συντεταγμένες (x_1, x_2) εκφράζουν τις κατακόρυφες μετατοπίσεις των άκρων. Η διάταξη δίνεται επίσης με τις γενικευμένες συντεταγμένες (z,θ), όπου z είναι η κατακόρυφη μετατόπιση του κέντρου και θ είναι η γωνία περιστροφής. Ποιές είναι οι εξισώσεις μετασχηματισμού; Για τις δοσμένες εφαρμοζόμενες δυνάμεις στα άκρα, να υπολογιστούν οι γενικευμένες δυνάμεις Q_z και Q_θ.



Σχ. Π1-2

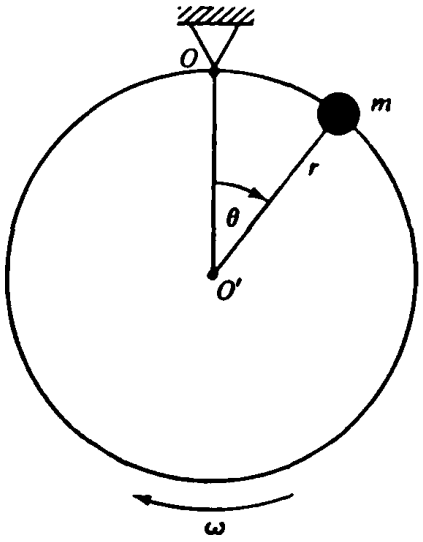


Σχ. Π1-3

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

1-3. Τα σωμάτια 1 και 2 συνδέονται με στερεά ράβδο μήκους l. Η διάταξη του συστήματος μπορεί να δοθεί από τις Καρτεσιανές συντεταγμένες (x_1, y_1, x_2, y_2) ή από τις γενικευμένες συντεταγμένες (x, y, θ). Να γραφούν οι εξισώσεις μετασχηματισμού που δίνουν τις Καρτεσιανές συντεταγμένες σε όρους των γενικευμένων συντεταγμένων. Να οριστεί μια τέταρτη γενικευμένη συντεταγμένη $q_4 \equiv l$ και να υπολογιστεί η Ιακωβιανή ορίζουσα $\partial(x_1, y_1, x_2, y_2)/\partial(x, y, \theta, q_4)$. Να ληφθούν οι γενικευμένες συντεταγμένες σε όρους των Καρτεσιανών συντεταγμένων.

1-4. Ένα σωμάτιο μπορεί να ολισθαίνει σε στερεό καλώδιο το οποίο έχει καμφθεί με τη μορφή ενός κύκλου ακτίνας r.

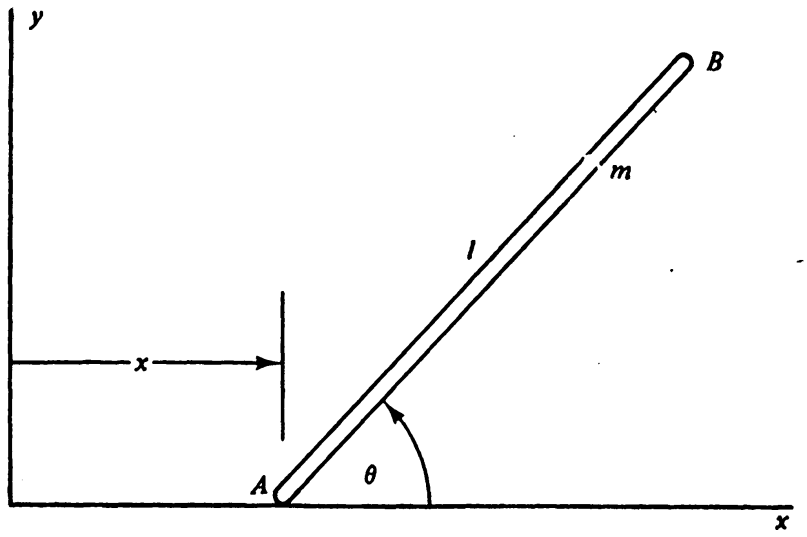


Σχ. Π1-4

Το καλώδιο περιστρέφεται γύρω από ένα σημείο O στην περιφέριά του με γωνιακή ταχύτητα ω. Υποθέτοντας ότι η θέση του σωματίου καθορίζεται από μια γωνία θ η οποία μετριέται από τον άξονα OO', να βρεθεί η κινητική ενέργεια και η γενικεμένενη ορμή p_θ.

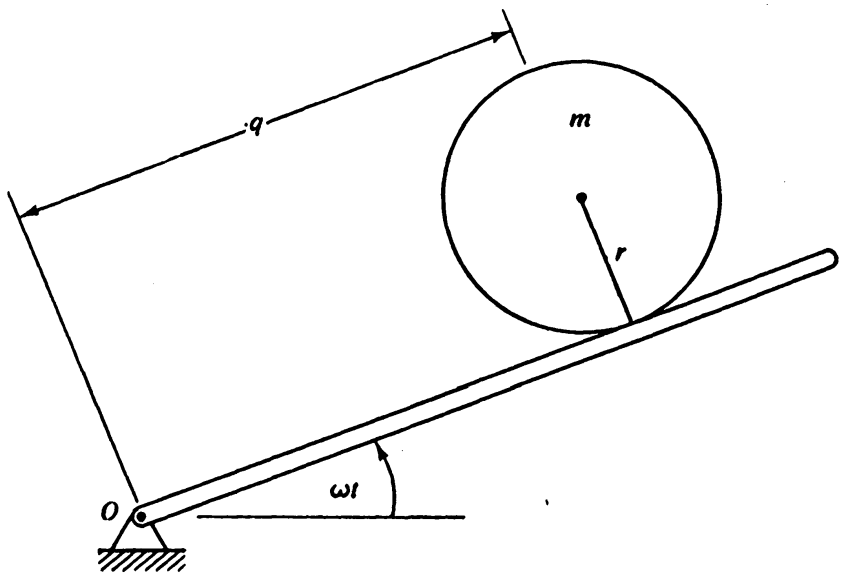
1-5. Μια λεπτή ομοιόμορφη ράβδος μάζας m και μήκους l υποχρεώνεται να κινείται στο xy επίπεδο με το άκρο A να παραμένει στον άξονα x. Χρησιμοποιώντας τις (x, θ) ως γενικευμένες συντεταγμένες, να βρεθούν οι εκφράσεις για την κινητική ενέργεια και τη γενικευμένη ορμή p_θ.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



Σχ. Π1-5

1-6. Ένας δίσκος ακτίνας r και μάζας m μπορεί να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω σε λεπτή ράβδο που περιστρέφεται γύρω από ένα ακίνητο σημείο O με σταθερό ρυθμό ω. Να βρεθεί μια έκφραση της μορφής $T(q, \dot{q})$ για την ολική κινητική ενέργεια του δίσκου.

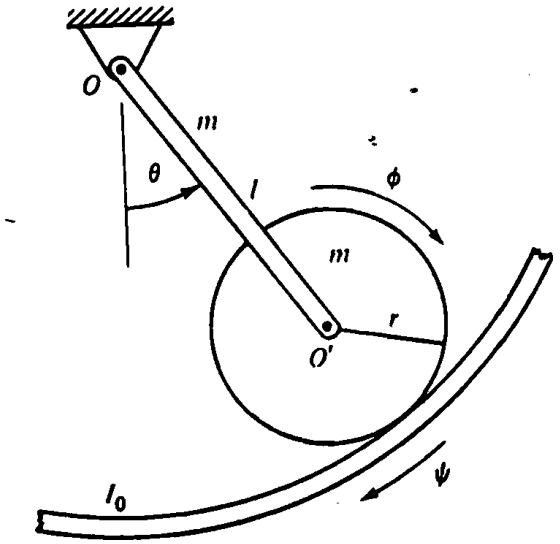


Σχ. Π1-6

1-7. Το σύστημα που φαίνεται στο Σχ. (II 1-7), έχει μια λεπτή ράβδο μήκους l και μάζας m που μπορεί να περιστρέφεται ως προς το O. Ένας ομοιόμορφος δίσκος ακτίνας r και μάζας m προσκολλάται

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

στη ράβδο με άξονα περιστροφής στο O' και κυλίεται χωρίς ολίσθηση στην εσωτερική επιφάνεια ενός περιστρεφόμενου κυλίνδρου που έχει ροπή αδρανείας I_0 ως προς τον κεντρικό του άξονα στο O. Να βρεθεί μια εξίσωση δεσμού που να εκφράζει το ϕ ως συνάρτηση των $\dot{\theta}$ και $\dot{\psi}$, όπου αυτοί οι γωνιακοί ρυθμοί είναι απόλυτοι. Να βρεθεί επίσης μια έκφραση για τη ολική κινητική ενέργεια σε όρους των $\dot{\theta}$ και $\dot{\psi}$ και να προσδιοριστούν οι γενικευμένες ορμές p_θ και p_ψ.



Σχ. Π1-7

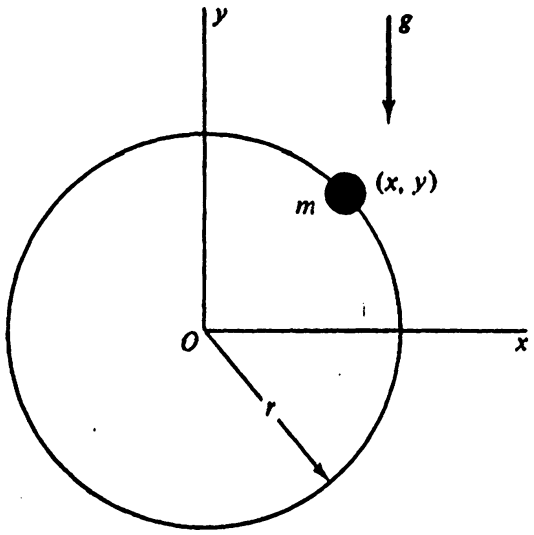
1-8. Να αποδειχθεί ότι αν η στροφορμή ενός συστήματος N σωματίων ορίζεται χρησιμοποιώντας την *απόλυτη* ταχύτητα $\dot{\mathbf{r}}_i$ του κάθε σωματίου, αντί της *σχετικής* ταχύτητας $\dot{\boldsymbol{\varrho}}_i$ από την Εξ. (1-126), δηλαδή, αν η στροφορμή γύρω από το κέντρο μάζας ορίζεται από την εξίσωση

$$\mathbf{H}_C = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\varrho}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i \ ,$$

ότι η τιμή της $\mathbf{H}_C$ δεν αλλάζει.

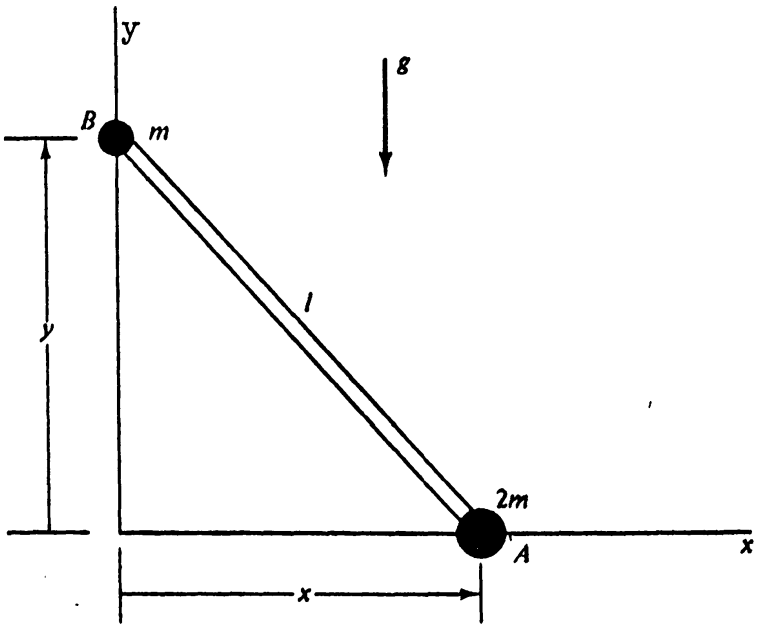
1-9. Ένα σωμάτιο μάζας m μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβή πάνω σ' ένα ακίνητο κυκλικό σύρμα ακτίνας r το οποίο βρίσκεται σ' ένα κατακόρυφο επίπεδο. Χρησιμοποιώντας την αρχή του d' Alembert και την εξίσωση δεσμού, να αποδειχθεί ότι $y\ddot{x} - x\ddot{y} - gx = 0$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



Σχ. Π1-9

1-10. Σωμάτιο A μάζας $2m$ και σωμάτιο B μάζας m συνδέονται με ράβδο, χωρίς μάζα μήκους l. Το σωμάτιο A υποχρεώνεται να κινείται



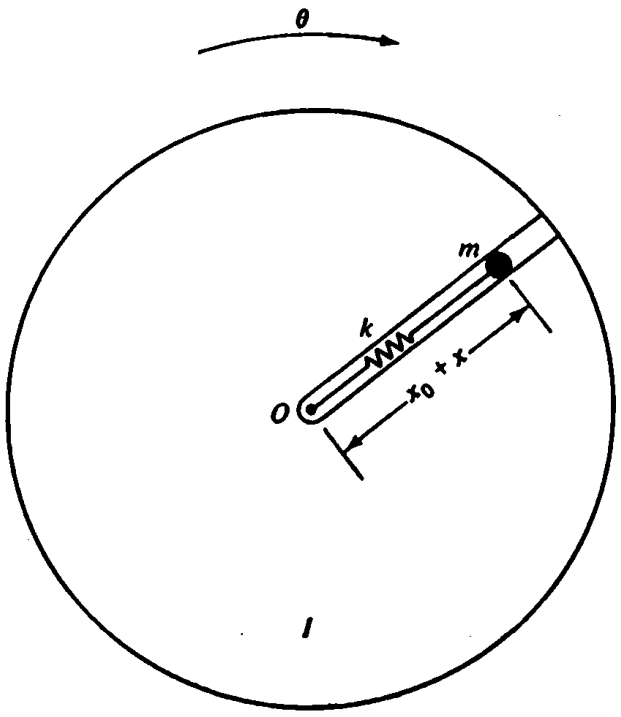
Σχ. Π1-10

κατά μήκος του οριζόντιου άξονα x ενώ το σωμάτιο B μπορεί να κινείται μόνο κατά μήκος του κατακόρυφου άξονα y. Ποιά είναι η

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

εξίσωση του δεσμού που συνδέει τις x και y; Να χρησιμοποιήσετε την αρχή του d' Alembert για τον προσδιορισμό της εξίσωσης κίνησης, $2y\ddot{x} - x\ddot{y} - gx = 0$.

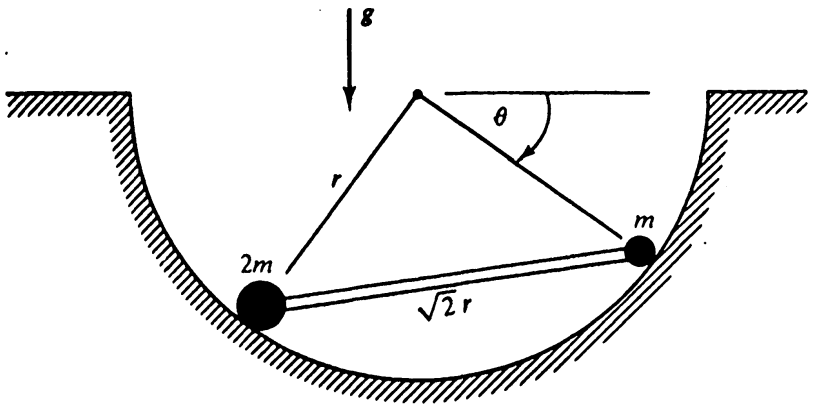
1-11. Ένας τροχός που έχει ροπή αδρανείας I μπορεί να περιστέφεται ελεύθερα σ' ένα οριζόντιο επίπεδο γύρω από ένα κατακόρυφο άξονα δια του O. Ένα σωμάτιο μάζας m προσκολλάται στο O με ένα ελατήριο σταθεράς k και αρχικού μήκους x_0. Το σωμάτιο ολισθαίνει χωρίς τριβή σε μια ακτινική αυλακιά του τροχού. Να χρησιμοποιηθεί η αρχή του d' Alembert για να προσδιοριστούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης σε όρους των συντεταγμένων (x, θ). Να αποδειχθεί ότι μια από τις εξισώσεις αυτές συνεπάγεται ότι η ολική στροφορμή του συστήματος διατηρείται.



Σχ. Π1-11

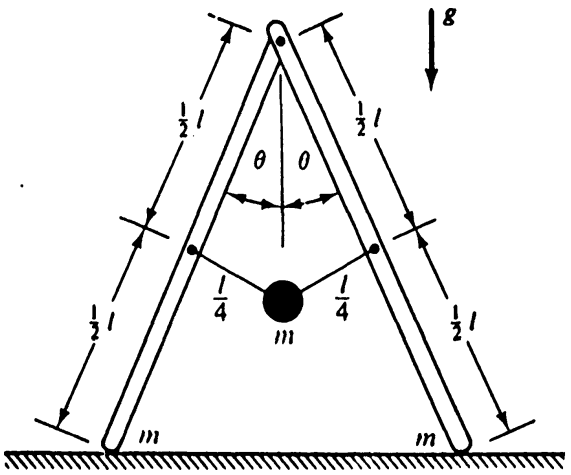
1-12. Δυο σωμάτια που έχουν μάζες m και $2m$ συνδέονται με μια ράβδο, χωρίς μάζα για να σχηματίσουν έναν αλτήρα, που μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβή σε μια κυκλική τροχιά ακτίνας r. Να θεωρηθεί μια δυνατή μετατόπιση $\delta\theta$ και να χρησιμοποιηθεί η αρχή των δυνατών έργων για να βρεθεί η τιμή της θ στη θέση της στατικής ισορροπίας.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



Σχ. Π1-12

1-13. Δυο λεπτές ράβδοι, κάθε μια μάζας m και μήκους l, στερεώνονται μεταξύ τους στα πάνω άκρα τους. Ένα σωμάτιο μάζας m αναρτάται από χορδές χωρίς μάζα, που συνδέονται με τα μέσα των ράβδων όπως φαίνεται στο σχήμα. Υποθέτοντας επίπεδη κίνηση και χρησιμοποιώντας την αρχή των δυνατών έργων να βρεθεί η θέση στατικής ισορροπίας στο διάστημα $0<\theta<\pi/6$. Είναι το σύστημα ευσταθές;



Σχ. Π1-13

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

2

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ LAGRANGE

Το πρόβλημα της Κλασικής Δυναμικής προσεγγίζεται κατά δύο τρόπους. Η μία προσέγγιση ονομάζεται *διανυσματική δυναμική* και η άλλη *αναλυτική δυναμική*. Η πρώτη βασίζεται σε μία άμεση εφαρμογή των Νόμων κίνησης του Newton και επικεντρώνεται στις δυνάμεις και κινήσεις των επιμέρους τμημάτων του συστήματος και στις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις. Αντίθετα, η Αναλυτική Δυναμική βλέπει το σύστημα ως ένα σύνολο, και χρησιμοποιεί περιγραφικές *βαθμωτές* συναρτήσεις όπως η κινητική και δυναμική ενέργεια. Εκτελώντας κάποιες τελεστικές πράξεις σ' αυτές τις συναρτήσεις, είναι συχνά δυνατό να πάρουμε ένα πλήρες σύνολο εξισώσεων κίνησης χωρίς να επιλύσουμε ως προς τις δεσμικές δυνάμεις που ενεργούν στα επιμέρους τμήματα του συστήματος. Επιπλέον, παίρνουμε νέες απόψεις για τις παραλλακτικές αρχές που είναι πολύ σημαντικές για την βαθύτερη κατανόηση του δυναμικού προβλήματος.

Στο κεφάλαιο αυτό, με την παραγωγή των εξισώσεων Lagrange και τις εφαρμογές επιχειρείται να δοθεί έμφαση στην αναλυτική προσέγγιση της δυναμικής. Αυτή η προσέγγιση θα αποδειχθεί πολύ χρήσιμη στην επίλυση, κατά ένα συστηματικό τρόπο, των πλέον πολύπλοκων και δύσκολων προβλημάτων της κλασικής δυναμικής.

2-1. ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ LAGRANGE

Κινητική ενέργεια. Έστω ένα σύστημα N σωματίων, των οποίων οι θέσεις ως προς ένα αδρανειακό σύστημα δίνονται από τις Καρτεσιανές συντεταγμένες $x_1, x_2, ..., x_{3N}$. Η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος βρίσκεται από την Εξ. (1-96) ή ισοδύναμα από την

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3N} m_k \dot{x}_k^2 \ , \tag{2-1}$$

όπου $m_1=m_2=m_3$ είναι η μάζα του πρώτου σωματίου, και το σύνολο (x_1, x_2, x_3) προσδιορίζει τη θέση του. Ομοίως, $m_4=m_5=m_6$ είναι η μάζα του δευτέρου σωματίου κ.ο.κ.

Τώρα ας εκφράσουμε την κινητική ενέργεια σε όρους των γενικευμένων συντεταγμένων $q_1, q_2, ..., q_n$. Χρησιμοποιώντας εξισώσεις μετασχηματισμού που δίνουν τις x_k ως συναρτήσεις των q_i και του χρόνου, έχουμε

$$x_k = x_k(q_i, t) \ , \quad (k = 1, ..., 3N, \ i = 1, 2, ..., n) \ , \tag{2-2}$$

όπου υποθέτουμε οτι αυτές οι συναρτήσεις είναι διπλά διαφορίσιμες ως προς q_i και t. Βρίσκουμε οτι

$$\dot{x}_k(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial x_k}{\partial t} \ . \tag{2-3}$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι η $\dot{x}_k$ είναι γραμμική ως προς $\dot{q}_i$ και ότι $\partial x_k/\partial q_i$ και $\partial x_k/\partial t$ είναι συναρτήσεις των q_i και t.

Αν αντικαταστήσουμε την Εξ. (2-3) στην Εξ. (2-1) παίρνουμε

$$T(q_i, \dot{q}_i, t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3N} m_k \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial x_k}{\partial t} \right)^2 \ . \tag{2-4}$$

Ας ομαδοποιήσουμε τώρα τους όρους της T χρησιμοποιώντας το συμβολισμό

$$T = T_2 + T_1 + T_0 \ , \tag{2-5}$$

όπου T_2 είναι μια ομογενής τετραγωνική συνάρτηση των $\dot{q}_i$, T_1 μια ομογενής γραμμική συνάρτηση των $\dot{q}_i$, και όπου η T_0 περιλαμβάνει τους υπόλοιπους όρους, που είναι συναρτήσεις των q_i και t.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Πιο αναλυτικά, βρίσκουμε ότι η T_2 είναι της μορφής

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\, \dot{q}_i\, \dot{q}_j \quad , \tag{2-6}$$

όπου

$$m_{ij} = m_{ji} = \sum_{k=1}^{3N} m_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \quad . \tag{2-7}$$

Επίσης,

$$T_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \dot{q}_i \quad , \tag{2-8}$$

όπου

$$\alpha_i = \sum_{k=1}^{3N} m_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \frac{\partial x_k}{\partial t} \quad , \tag{2-9}$$

και

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3N} m_k \left(\frac{\partial x_k}{\partial t} \right)^2 \quad . \tag{2-10}$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι οι συντελεστές m_{ij} και α_i όπως η T_0 είναι συναρτήσεις των q_i και t.

Υποθέτοντας ότι $m_k > 0$ για όλα τα k, βλέπουμε από την Εξ. (2-1) ότι η ολική κινητική ενέργεια T είναι μια θετική τετραγωνική συνάρτηση των $\dot{x}_i$. Μ' άλλα λόγια, η T είναι μηδέν μόνο αν όλες οι $\dot{x}_i$ είναι μηδέν· αν οποιοδήποτε $\dot{x}_i$ είναι μή μηδενική η κινητική ενέργεια είναι θετική.

Εκφράζουμε την T ως συνάρτηση των q_i, $\dot{q}_i$ και t για οποιοδήποτε πραγματικό σύστημα, η κινητική ενέργεια είναι μηδέν μόνον αν το σύστημα είναι ακίνητο, διαφορετικά είναι θετική. Επειδή οι q_i επιλέγονται συνήθως έτσι ώστε οι $\dot{q}_i$ να είναι όλες μηδέν αν και μόνον αν το σύστημα είναι ακίνητο, η T είναι συνήθως μια θετικά ορισμένη συνάρτηση των $\dot{q}_i$. Αλλά αυτό δεν είναι πάντα ο κανόνας, ιδιαίτερα όταν υπάρχουν κινούμενοι δεσμοί.

Ας μελετήσουμε την T_2 με μεγαλύτερη λεπτομέρεια. Βλέπουμε από τις Εξ. (2-4), (2-6) και (2-7) ότι η T_2 είναι η *ολική* κινητική ενέργεια για την περίπτωση που όλες οι μερικές παράγωγοι $\partial x_k/\partial t$ είναι μηδέν,

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

δηλαδή για ένα σύστημα στο οποίο όλοι οι κινούμενοι δεσμοί ή τα κινούμενα συστήματα αναφοράς παραμένουν σταθερά. Τότε, υποθέτοντας ότι ένα (ή περισσότερα) μη μηδενικό $\dot{q}_i$ έχει ως συνέπεια την κίνηση ενός (ή περισσοτέρων) σωματίου του συστήματος και αντίστροφα, συμπεραίνουμε ότι η T_2 πρέπει να είναι μία θετικά ορισμένη τετραγωνική συνάρτηση των $\dot{q}_i$.

Το θετικά ορισμένο της T_2 περιορίζει τις δυνατές τιμές των *συντελεστών αδράνειας* m_{ij}. Αν θεωρήσουμε το συμμετρικό $n\times n$ *γενικευμένο μητρώο αδράνειας* **m**, η αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε η T_2 να είναι θετικά ορισμένη είναι:

$$m_{11}>0,\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}>0\,,\ \ldots\,,\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \ldots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ m_{n1} & \cdot\ \cdot\ \cdot & & m_{nn} \end{bmatrix}>0. \quad (2\text{-}11)$$

Αυτό ισοδυναμεί με την απαίτηση η ορίζουσα του μητρώου και όλες οι κύριες υποορίζουσες να είναι θετικές. Μια από τις συνέπειες είναι, ότι όλοι οι συντελεστές αδράνειας m_{ii} που βρίσκονται επί της κύριας διαγωνίου πρέπει να είναι θετικοί όπως φαίνεται από την Εξ. (2-7).

Από τις Εξ. (2-9) και (2-10) παρατηρούμε ότι η T_1 και η T_0 είναι μή μηδενικές μόνο στην περίπτωση των *ρεόνομων* συστημάτων. Κατά συνέπεια, η κινητική ενέργεια T ενός σκληρόνομου συστήματος είναι ομογενής τετραγωνική συνάρτηση των $\dot{q}_i$. Σ' αυτή την περίπτωση, από την Εξ. (2-7) βλέπουμε ότι οι συντελεστές αδράνειας m_{ij} είναι συναρτήσεις των q_i αλλά όχι του χρόνου.

Επειδή η T_1 είναι γραμμική ως προς $\dot{q}_i$, είναι φανερό ότι μπορεί να είναι θετική ή αρνητική, ενώ η T_0 είναι θετική ή μηδέν.

Εξισώσεις Lagrange. Ως αφετερία για την παραγωγή των εξισώσεων Lagrange, ας θεωρήσουμε ένα σύστημα N σωματίων και ας γράψουμε την αρχή του d' Alembert, Εξ. (1-63), με τη μορφή

$$\sum_{k=1}^{3N} (F_k - m_k \ddot{x}_k)\,\delta x_k = 0 \quad , \qquad (2\text{-}12)$$

όπου F_k είναι η *εφαρμοζόμενη* συνιστώσα δύναμη που σχετίζεται με την x_k, δηλαδή περιλαμβάνει όλες τις πραγματικές δυνάμεις που δρούν στο σωμάτιο, εκτός από τις δεσμικές δυνάμεις που δεν παράγουν έργο.

Χρησιμοποιώντας την Εξ. (2-2), η δυνατή μετατόπιση δx_k εκφράζεται σε όρους των δq_i, δηλαδή

$$\delta x_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \delta q_i \quad . \tag{2-13}$$

Άρα, από τις Εξ. (2-12) και (2-13), παίρνουμε

$$\sum_{k=1}^{3N} \sum_{i=1}^{n} \left(F_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} - m_k \ddot{x}_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0 \quad . \tag{2-14}$$

Από την Εξ. (2-3) είναι φανερό ότι

$$\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \quad . \tag{2-15}$$

Επειδή η σειρά διαφόρισης μπορεί ν' αλλάξει, παίρνουμε

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_k}{\partial q_i}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 x_k}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 x_k}{\partial t \partial q_i} = \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial q_i} \quad . \tag{2-16}$$

Στη συνέχεια μπορούμε να γράψουμε τη γενικευμένη ορμή p_i με τη μορφή

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{k=1}^{3N} m_k \dot{x}_k \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{q}_i} \, , \tag{2-17}$$

και χρησιμοποιώντας τις Εξ. (2-15) και (2-16), παίρνουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = \sum_{k=1}^{3N} m_k \ddot{x}_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \sum_{k=1}^{3N} m_k \dot{x}_k \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial q_i} \quad . \tag{2-18}$$

Αλλά

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{3N} m_k \dot{x}_k \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial q_i} \quad , \tag{2-19}$$

και κατά συνέπεια, από τις Εξ. (2-18) και (2-19), έχουμε

$$\sum_{k=1}^{3N} m_k \ddot{x}_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \quad . \tag{2-20}$$

Στα προηγούμενα ορίσαμε τη γενικευμένη δύναμη Q_i, να είναι

$$Q_i = \sum_{k=1}^{3N} F_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \quad . \tag{2-21}$$

Χρησιμοποιώντας τις Εξ. (2-14), (2-20) και (2-21) παίρνουμε

$$\sum_{i=1}^{n}\left[Q_i - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_i}\right] \delta q_i = 0 \quad , \tag{2-22}$$

που στην πραγματικότητα είναι η αχή d' Alembert με τη μορφή Lagrange σε όρους των γενικευμένων συντεταγμένων.

Μέχρι τώρα δεν έχουμε επιβάλλει κανένα περιορισμό στις δq_i, εκτός από του ότι πρέπει να συμμορφώνονται με τους στιγμιαίους δεσμούς. Αυτός ο περιορισμός ήταν απαραίτητος, έτσι ώστε να απαλειφεί το δυνατό έργο των δεσμικών δυνάμεων. Τώρα ας κάνουμε την επιπρόσθετη παραδοχή ότι το σύστημα είναι *ολόνομο* και ότι η διάταξή του περιγράφεται από ένα σύνολο ανεξαρτήτων *γενικευμένων* συντεταγμένων. Αν οι δq_i είναι ανεξάρτητες, οι συντελεστές κάθε δq_i στην Εξ. (2-22) πρέπει να είναι μηδέν. Άρα

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad . \tag{2-23}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Αυτές οι n εξισώσεις είναι γνωστές ως *Εξισώσεις Lagrange* και γράφονται εδώ με μια από τις κύριες μορφές τους. Οι Εξ. (2-23) είναι n το πλήθος μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης.

Στην προσπάθειά μας να αποκτήσουμε μια φυσική αίσθηση ως προς το τι σημαίνουν οι εξισώσεις Lagrange, ας σημειώσουμε πρώτα, ότι επειδή οι δq_i είναι ανεξάρτητες, όλες οι γενικευμένες δεσμικές δυνάμεις είναι μηδέν. Έτσι βλέπουμε ότι η γενικευμένη εφαρμοζόμενη δύναμη Q_i είναι ίση και αντίθετη με τη *γενικευμένη δύναμη ανδράνειας*, που είναι

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) .$$

όπου $- d/dt\,(\partial T/\partial \dot{q}_i)$ εκφράζει τον αρνητικό ρυθμό μεταβολής της γενικευμένης ορμής.

Έχουμε θεωρήσει ένα ολόνομο σύστημα του οποίου η διάταξη δίνεται από ένα σύνολο γενικευμένων συντεταγμένων. Τώρα ας κάνουμε την επιπρόσθετη παραδοχή ότι όλες οι γενικευμένες δυνάμεις παράγονται από μία δυναμοσυνάρτηση $V(q_k, t)$, δηλαδή

$$Q_i = - \frac{\partial V}{\partial q_i} . \qquad (2\text{-}24)$$

Επομένως, η εξίσωση Lagrange μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 , \quad (i = 1, 2, \ldots, n) . \qquad (2\text{-}25)$$

Επειδή από την Εξ. (1-136) η συνάρτηση Lagrange $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ είναι

$$L = T - V \qquad (2\text{-}26)$$

και επειδή η V δεν είναι συνάρτηση των $\dot{q}_i$, βρίσκουμε από τις Εξ. (2-25) και (2-26), ότι

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 , \quad (i = 1, 2, \ldots, n) . \qquad (2\text{-}27)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Αυτή είναι η *τυπική μορφή* των εξισώσεων Lagrange για ένα *ολόνομο σύστημα.*

Εδώ έχουμε παράγει μια μέθοδο για να πάρουμε ένα πλήρες σύνολο διαφορικών εξισώσεων κίνησης για το σύστημα, ενεργώντας τελεστικά επί μιας μόνο βαθμωτής συνάρτησης $L(q_i, \dot{q}_i, t)$. Κατά συνέπεια η συνάρτηση Lagrange πρέπει να περιέχει όλες τις απαραίτητες πληροφορίες τις σχετικές με τις πιθανές κινήσεις του συστήματος. Επιπλέον, η μορφή της Εξ. (2-27) δεν εξαρτάται από το συγκεκριμένο σύνολο γενικευμένων συντεταγμένων που έχει επιλεγεί για την περιγραφή του συστήματος, αφού οι q_i είναι ανεξάρτητες.

Μία άλλη μορφή των εξισώσεων Lagrange μπορεί να γραφεί για τα συστήματα των οποίων οι γενικευμένες δυνάμεις δεν προκύπτουν αποκλειστικά από μια δυναμοσυνάρτηση. Έστω

$$Q_i = - \frac{\partial V}{\partial q_i} + Q'_i \quad . \tag{2-28}$$

Από τις Εξ. (2-23), (2-26) και (2-28) παίρνουμε ότι

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q'_i \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \ , \tag{2-29}$$

όπου Q'_i είναι εκείνες οι γενικευμένες δυνάμεις που δεν προκύπτουν από μια δυναμοσυνάρτηση. Παραδείγματα τυπικών δυνάμενων Q'_i είναι οι δυνάμεις τριβής και οι χρονικά μεταβαλλόμενες συναρτήσεις δύναμης.

Μορφή των εξισώσεων κίνησης. Τώρα ας μελετήσουμε πιο διεξοδικά τη μορφή των εξισώσεων κίνησης που προκύπτουν από την εφαρμογή των εξισώσεων Lagrange, με την τυπική τους μορφή που δίνεται από την Εξ. (2-27).

Πρέπει να σημειωθεί ότι η γενικευμένη ορμή είναι *γραμμική* ως προς $\dot{q}_i$. Αναφερόμενοι στις Εξ. (2-6) και (2-8) έχουμε

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \dot{q}_j + \alpha_i \ , \tag{2-30}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

όπου m_{ij} και α_i είναι συναρτήσεις των q_i και t. Άρα οι εξισώσεις κίνησης είναι γραμμικές ως προς τις $\ddot{q}_i$, αφού όλοι οι όροι που περιλαμβάνουν τις $\ddot{q}_i$ προκύπτουν από τη διαφόριση της Εξ. (2-30) ως προς το χρόνο. Εκτελώντας τη διαφόριση παίρνουμε

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\,\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n} \dot{m}_{ij}\,\dot{q}_j + \dot{\alpha}_i\,, \tag{2-31}$$

όπου

$$\dot{m}_{ij} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_l}\,\dot{q}_l + \frac{\partial m_{ij}}{\partial t} \tag{2-32}$$

και

$$\dot{\alpha}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_j}\,\dot{q}_j + \frac{\partial \alpha_i}{\partial t}\,. \tag{2-33}$$

Επίσης,

$$\sum_{j=1}^{n} \dot{m}_{ij}\,\dot{q}_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_l}\,\dot{q}_l\,\dot{q}_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial m_{ij}}{\partial t}\,\dot{q}_j$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_l} + \frac{\partial m_{il}}{\partial q_j}\right)\dot{q}_j\,\dot{q}_l + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial m_{ij}}{\partial t}\,\dot{q}_j\,, \tag{2-34}$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial q_i} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial m_{jl}}{\partial q_i}\,\dot{q}_j\,\dot{q}_l\,, \tag{2-35}$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \alpha_j}{\partial q_i}\,\dot{q}_j\,, \tag{2-36}$$

όπου σημειώνουμε ότι διάφοροι βωβοί (άεργοι) δείκτες έχουν αλλάξει.

Τελικά, αντικαθιστώντας τις εξισώσεις από (2-31) έως (2-36) στις εξισώσεις Lagrange παίρνουμε

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\,\ddot{q}_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_l} + \frac{\partial m_{il}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{jl}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_j\,\dot{q}_l$$

$$+ \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_j} - \frac{\partial \alpha_j}{\partial q_i}\right)\dot{q}_j + \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0\,,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)\,. \qquad (2\text{-}37)$$

Ο συμβολισμός μπορεί να συντομευθεί χρησιμοποιώντας ένα *σύμβολο Christoffel πρώτου είδους* που εφαρμόζεται εδώ στην τετραγωνική μορφή T_2. Έστω

$$[\,jl, i\,] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_l} + \frac{\partial m_{il}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{jl}}{\partial q_i}\right)\,, \qquad (2\text{-}38)$$

και άρα η Εξ. (2-37) μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\,\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}[\,jl\,,i\,]\,\dot{q}_j\,\dot{q}_l + \sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}\,\dot{q}_j$$

$$+ \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial m_{ij}}{\partial t}\,\dot{q}_j + \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0\,,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)\,, \qquad (2\text{-}39)$$

όπου γ_{ij} είναι ένα στοιχείο ενός *αντισυμμετρικού* μητρώου και δίνεται από τη σχέση

$$\gamma_{ij} = -\,\gamma_{ji} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_j} - \frac{\partial \alpha_j}{\partial q_i}\,. \qquad (2\text{-}40)$$

Οι n εξισώσεις (2-37) ή (2-39) είναι οι εξισώσεις κίνησης. Αν και γενικά αυτές οι εξισώσεις είναι μη γραμμικές, είναι γραμμικές ως προς τις $\ddot{q}_j$. Επιπλέον, μιας και η T_2 αποδείχτηκε ότι είναι θετικά ορισμένη τετραγωνική μορφή ως προς $\dot{q}_j$, ο πίνακας $\mathbf{m}$ είναι επίσης θετικά ορισμένος και έχει αντίστροφο πίνακα. Έτσι είναι πάντα δυνατή η

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

επίλυση των $\ddot{q}_i$ σε όρους των $q_i, \dot{q}_i$ και t. Αν γίνει αυτό, οι προκύπτουσες εξισώσεις κίνησης είναι της μορφής

$$\ddot{q}_i + f_i(q_k, \dot{q}_k, t) = 0 \ , \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \ . \tag{2-41}$$

Μη-ολόνομα συστήματα . Για την παραγωγή των εξισώσεων Lagrange ενός ολόνομου συστήματος είχε επιβληθεί η απαίτηση οι γενικευμένες συντεταγμένες να είναι ανεξάρτητες. Για ένα *μη-ολόνομο σύστημα* όμως, πρέπει να υπάρχουν περισσότερες γενικευμένες συντεταγμένες από τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας. Κατά συνέπεια, οι δq_i δεν είναι πλέον ανεξάρτητες αν υποθέσουμε μια δυνατή μετατόπιση συμβιβαστή με τους δεσμούς. Για παράδειγμα, αν υπάρχουν οι m μη-ολόνομες δεσμικές εξισώσεις της μορφής

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}\, dq_i + \alpha_{jt}\, dt = 0 \ , \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{2-42}$$

οι δq_i πρέπει να ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}\, \delta q_i = 0 \ , \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \ . \tag{2-43}$$

Τώρα, ας υποθέσουμε πάλι ότι κάθε γενικευμένη εφαρμοζόμενη δύναμη Q_i, προκύπτει από μία δυναμοσυνάρτηση, όπως στην Εξ. (2-24). Οι δεσμοί υποτίθεται ότι δεν παράγουν έργο, *έτσι οι γενικευμένες δεσμικές δυνάμεις* C_i πρέπει να ικανοποιούν τη συνθήκη

$$\sum_{i=1}^{n} C_i\, \delta q_i = 0 \tag{2-44}$$

για κάθε δυνατή μετατόπιση συμβιβαστή με τους δεσμούς.

Αν πολλαπλασιάσουμε την Εξ.(2-43) με ένα συντελεστή λ_j, γνωστό ως *πολλαπλασιαστή του Lagrange,* θα πάρουμε τις m εξισώσεις

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\lambda_j \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}\, \delta q_i = 0 \ , \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \ . \tag{2-45}$$

Αφαιρώντας τα αθροίσματα αυτών των m εξισώσεων από την Εξ.(2-44) και εναλλάσσοντας τη σειρά άθροισης, παίρνουμε

$$\sum_{i=1}^{n} \left(C_i - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_{ji} \right) \delta q_i = 0 \ . \tag{2-46}$$

Μέχρις εδώ, οι λ_j θεωρήθηκαν αυθαίρετοι, ενώ οι δq_i πρέπει να συμμορφώνονται με τους δεσμούς της Εξ. (2-43). Αν όμως διαλέξουμε τα λ_j έτσι ώστε

$$C_i = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \alpha_{ji} \ , \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \ , \tag{2-47}$$

τότε οι συντελεστές των δq_i είναι μηδέν, και η Εξ. (2-46) θα ισχύει για κάθε σύνολο δq_i . Με άλλα λόγια, οι δq_i μπορούν να επιλεγούν ανεξάρτητα.

Με αυτές τις παραδοχές, μπορούμε να εξισώσουμε τη γενικευμένη δύναμη C_i με την Q'_i και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2-29) και (2-47) να παρουμε

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_j \alpha_{ji} \ , \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \ . \tag{2-48}$$

Αυτή είναι η *τυπική μορφή* της εξίσωσης Lagrange για ένα *μή ολόνομο σύστημα.*

Μαζί με αυτές τις n εξισώσεις κίνησης, έχουμε και τις m μή ολόνομες δεσμικές εξισώσεις, που μπορεί να γραφούν με τη μορφή

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}\, \dot{q}_i + \alpha_{jt} = 0 \ , \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \ . \tag{2-49}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Έτσι έχουμε συνολικά $(n+m)$-εξισώσεις για να λύσουμε ως προς τις $(n+m)$-ανεξάρτητες μεταβλητές, δηλαδή τις q_i και λ_{ji}, $i=1, 2, ..., n$, $j=1, 2, ..., m$.

Αν μελετήσουμε το τι καταφέραμε με τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών του Lagrange, βλέπουμε από τις Εξ. (2-47) και (2-48) ότι οι δεσμοί υπεισέρχονται στις εξισώσεις κίνησης με τη μορφή δεσμικών δυνάμεων παρά ως γεωμετρικοί όροι. Επίσης, μπορούμε να κατανοήσουμε τη φυσική σημασία των λ_j, αν σημειώσουμε ότι συνδέονται γραμμικά με τις δεσμικές δυνάμεις.

Η τυπική μορφή της εξίσωσης Lagrange για ένα μη-ολόνομο σύστημα, Εξ. (2-48), μπορεί να εφαρμοστεί και σε ένα *ολόνομο σύστημα* αν υπάρχουν περισσότερες γενικευμένες συντεταγμένες από τους βαθμούς ελευθερίας. Για παράδειγμα, υποθέτουμε ότι υπάρχουν m ολόνομες δεσμικές εξισώσεις της μορφής

$$\varphi_j(q_1, q_2, ..., q_n, t) = 0 \quad , \quad (j = 1, 2, ..., m) \quad . \tag{2-50}$$

Λαμβάνοντας το ολικό διαφορικό της φ_j, παίρνουμε

$$d\varphi_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} dt = 0 \quad , \tag{2-51}$$

που έχει τη μορφή της Εξ. (2-42), όπου αντικαταστήσαμε

$$\alpha_{ji} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_i} , \qquad \alpha_{jt} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} \quad . \tag{2-52}$$

Αν η μέθοδος των πολλαπλασιαστών του Lagrange εφαρμοστεί σ' αυτό το σύστημα και οι προκύπτουσες διαφορικές εξισώσεις επιλυθούν πλήρως, θα δώσουν q_i και λ_i που είναι εκπεφρασμένες συναρτήσεις του χρόνου. Στη συνέχεια με τη βοήθεια της Εξ. (2-47), οι γενικευμένες δεσμικές δυνάμεις C_j μπορούν επίσης να ληφθούν ως εκπεφρασμένες συναρτήσεις του χρόνου.

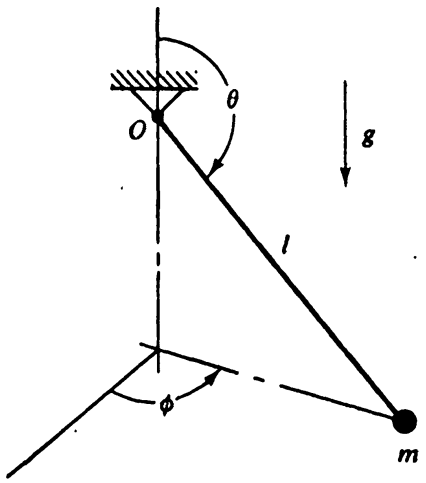
Γενικά όμως, τα ολόνομα συστήματα θα περιγράφονται σε όρους ανεξαρτήτων q_i, αποφεύγοντας έτσι οποιαδήποτε εξίσωση δεσμού. Η μέθοδος των πολλαπλασιαστών του Lagrange χρησιμοποιείται για τα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

ολόνομα συστήματα μόνο, αν αυτό που επιζητούμε είναι η επίλυση ως προς τις δεσμικές δυνάμεις.

2-2. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα 2-1. Να βρεθούν οι διαφορικές εξισώσεις ενός σφαιρικού εκκρεμούς μήκους l (Σχ. 2-1).



Σχ. 2-1. Το σφαιρικό εκκρεμές

Σε σφαιρικές συντεταγμένες η κινητική ενέργεια του σωματίου είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m\,(l^2\,\dot{\theta}^2 + l^2\,\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) \qquad (2\text{-}53)$$

και η δυναμική ενέργεια

$$V = mgl\cos\theta \quad , \qquad (2\text{-}54)$$

όπου το σημείο στήριξης O είναι στο επίπεδο αναφοράς, που αντιστοιχεί σε μηδενική δυναμική ενέργεια.

Η συνάρτηση Lagrange είναι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$L = T - V = \frac{1}{2} ml^2 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right) - mgl \cos \theta \qquad (2\text{-}55)$$

από την οποία για $q_j = \theta$ παίρνουμε

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2 \ddot{\theta}\,, \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta} = ml \dot{\varphi}^2 \sin\theta \cos\theta + mgl \sin\theta \,.$$

Άρα η Εξ. (2-27) παράγει την ακόλουθη εξίσωση κίνησης:

$$ml^2 \ddot{\theta} - ml^2 \dot{\varphi}^2 \sin\theta \cos\theta - mgl \sin\theta = 0 \,. \qquad (2\text{-}56)$$

Με παρόμοιο τρόπο

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = ml^2 \ddot{\varphi} \sin^2\theta + 2ml^2 \dot{\theta}\dot{\varphi} \sin\theta \cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

και η εξίσωση κίνησης για το φ είναι

$$ml^2 \ddot{\varphi} \sin^2\theta + 2ml^2 \dot{\theta}\dot{\varphi} \sin\theta \cos\theta = 0 \,. \qquad (2\text{-}57)$$

Οι Εξ. (2-56) και (2-57) είναι οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης. Πρέπει να σημειωθεί ότι αυτές οι εξισώσεις είναι μη-γραμμικές, παρά το γεγονός ότι $\ddot{\theta}$ και $\ddot{\varphi}$ εμφανίζονται γραμμικά και ακόμη ότι οι εξισώσεις κίνησης συμπίπτουν με τις εξισώσεις που παίρνουμε αν θέσουμε τους συντελεστές των δυνατών μετατοπίσεων $\delta\theta$ και $\delta\varphi$ ίσους με το μηδέν στην Εξ. (1-68), στην περίπτωση που $r = l$. Αυτό δείχνει ότι η μεθοδολογία Lagrange κατέληξε σε όρους ανάλογους προς τις συνιστώσες θ και φ των αδρανειακών και βαρυτικών δυνάμεων που δρούν σ' ένα σωμάτιο.

Η εξίσωση κίνησης για το φ είναι άμεσα ολοκληρώσιμη σ' αυτό το παράδειγμα, γιατί $\partial L/\partial \varphi = 0$ και κατά συνέπεια

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 0 \quad . \tag{2-58}$$

Άρα,

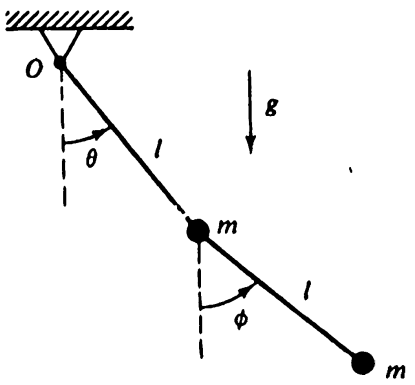
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\,\dot{\varphi}\sin^2\theta = p_\varphi \quad , \tag{2-59}$$

όπου p_φ είναι μια σταθερά ίση με τη συζυγή γενικευμένη ορμή του φ. Στην προκειμένη περίπτωση, p_φ είναι η στροφορμή περί κατακόρυφο άξονα διερχόμενο από το σημείο στήριξης O.

Παράδειγμα 2-2. Ένα διπλό εκκρεμές αποτελείται από δύο σωμάτια αναρτημένα σε ράβδους που δεν έχουν μάζα, όπως φαίνεται στο Σχ. 2-2. Αν υποθέσουμε ότι όλη η κίνηση γίνεται στο κατακόρυφο επίπεδο, να βρεθούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης και να γραμμικοποιηθούν, υποθέτοντας μικρές κινήσεις.

Πρώτα ας πάρουμε μια έκφραση της κινητικής ενέργειας. Η απόλυτη ταχύτητα του κατώτερου σωματίου ισούται με το διανυσματικό άθροισμα (1) της απόλυτης ταχύτητας του ανώτερου σωματίου και (2) της ταχύτητας του κατώτερου σωματίου σχετικά προς το ανώτερο σωμάτιο. Επειδή τα δύο διανύσματα της ταχύτητας διαφέρουν σε διεύθυνση κατά γωνία $(\varphi - \theta)$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το νόμο των συνημιτόνων για να πάρουμε το μέγεθος v του διανυσματικού αθροίσματος. Η ταχύτητα του κατώτερου σωματίου είναι

$$v = l\,[\,\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\varphi - \theta)\,]^{1/2}$$



Σχ. 2-2. Διπλό εκκρεμές

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

και άρα η ολική κινητική ενέργεια είναι

$$T=\frac{1}{2}ml^2[2\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2+2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\varphi-\theta)] \ . \qquad (2\text{-}60)$$

Εκλέγοντας το επίπεδο αναφοράς της δυναμικής ενέργειας στο O, παίρνουμε

$$V=-mgl(2\cos\theta+\cos\varphi) \ . \qquad (2\text{-}61)$$

Η συνάρτηση Lagrange είναι

$$L=\frac{1}{2}ml^2[2\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2+2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\varphi-\theta)]+mgl(2\cos\theta+\cos\varphi) \qquad (2\text{-}62)$$

Η εξίσωση ως προς θ λαμβάνεται από τις

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=ml^2[2\dot{\theta}+\dot{\varphi}\cos(\varphi-\theta)]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)=ml^2[2\ddot{\theta}+\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\theta)-\dot{\varphi}(\dot{\varphi}-\dot{\theta})\sin(\varphi-\theta)]$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta}=ml^2\,\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin(\varphi-\theta)-2mgl\sin\theta \ ,$$

οι οποίες αν αντικατασταθούν στην εξίσωση Lagrange παράγουν την

$$ml^2[2\ddot{\theta}+\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\theta)-\dot{\varphi}^2\sin(\varphi-\theta)]+2mgl\sin\theta=0 \ . \qquad (2\text{-}63)$$

Με παρόμοιο τρόπο η εξίσωση ως προς φ λαμβάνεται από τις

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=ml^2[\dot{\varphi}+\dot{\theta}\cos(\varphi-\theta)]$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = ml^2 [\, \ddot{\varphi} + \ddot{\theta} \cos(\varphi - \theta) - \dot{\theta}\,(\dot{\varphi} - \dot{\theta}) \sin(\varphi - \theta)]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = - ml^2 \dot{\theta}\dot{\varphi} \sin(\varphi - \theta) - mgl \sin\varphi \ ,$$

οι οποίες καταλήγουν στην

$$ml^2 [\ddot{\varphi} + \ddot{\theta} \cos(\varphi - \theta) + \dot{\theta}^2 \sin(\varphi - \theta)] + mgl \sin\varphi = 0 \ . \qquad (2\text{-}64)$$

Σ' αυτό το παράδειγμα, η κινητική ενέργεια είναι μία ομογενής τετραγωνική συνάρτηση των $\dot{q}_i$ οπότε οι T_1 και T_0 είναι μηδέν. Είναι δυνατόν να πάρουμε το μητρώο της γενικευμένης αδράνειας **m** από την έκφραση της κινητικής ενέργειας, Εξ. (2-60), δηλαδή

$$\mathbf{m} = ml^2 \begin{bmatrix} 2 & \cos(\varphi - \theta) \\ \cos(\varphi - \theta) & 1 \end{bmatrix} . \qquad (2\text{-}65)$$

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο της Εξ. (2-11) γίνεται φανερό ότι η T είναι θετικά ορισμένη. Έχοντας τον **m** μπορούμε να αντικαταστήσουμε στην εκπεφρασμένη μορφή της εξίσωσης κίνησης (2-37) για να ελέγξουμε τις πραγματικές εξισώσεις κίνησης (2-63) και (2-64).

Τώρα ας γραμμικοποιήσουμε τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης για την περίπτωση μικρών κινήσεων. Δηλαδή με άλλα λόγια ας υποθέσουμε ότι θ, φ και οι παραγωγές τους ως προς χρόνο είναι $<< 1$. Με τις παραδοχές αυτές μπορούμε να κάνουμε τις προσεγγίσεις

$$\cos(\varphi - \theta) \cong 1, \qquad \sin(\varphi - \theta) \cong \varphi - \theta$$

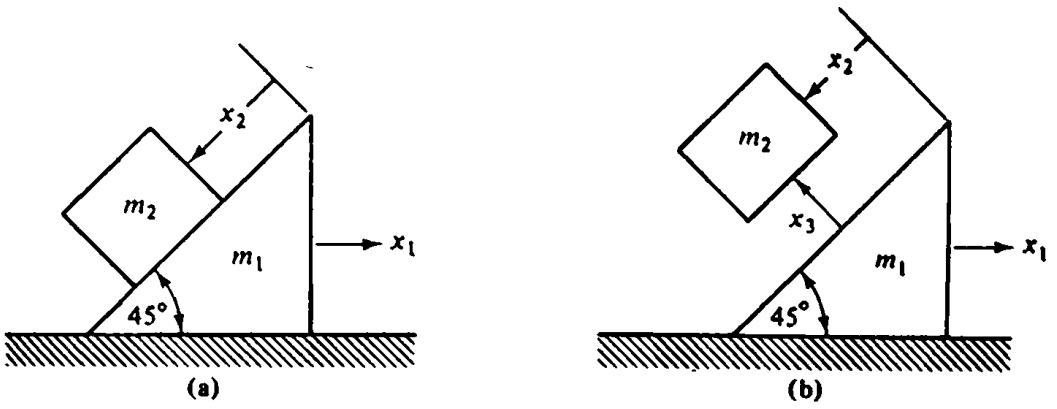
οπότε οι εξισώσεις κίνησης γίνονται

$$\begin{aligned} ml^2(2\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}) + 2mgl\theta &= 0 \\ ml^2(\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}) + mgl\varphi &= 0 \ , \end{aligned} \qquad (2\text{-}66)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

όπου έχουν παραληφθεί όροι ανώτερης τάξης ως προς τις μικρές ποσότητες.

Παράδειγμα 2-3. Ένα κιβώτιο μάζας m_2 ολισθαίνει πάνω σε άλλο κιβώτιο μάζας m_1, που με τη σειρά του ολισθαίνει σε οριζόντια επιφάνεια, όπως φαίνεται στο Σχ. 2-3(a). Χρησιμοποιώντας τα x_1 και x_2 ως συντεταγμένες, να βρεθούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης όπως επίσης οι επιταχύνσεις των δύο κιβωτίων καθώς κινούνται υπό την επίδραση της βαρύτητας, υποθέτοντας ότι όλες οι επιφάνειες δεν έχουν τριβή. Να βρεθούν οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης μεταξύ των κιβωτίων.



Σχ. 2-3. Σύστημα κιβωτίων που ολισθαίνουν.

Κατ' αρχήν βλέπουμε ότι x_1 είναι η απόλυτη μετατόπιση του m_1, και x_2 είναι η μετατόπιση του m_2 ως προς το m_1. Για να πάρουμε την απόλυτη ταχύτητα v_2 του m_2 μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το νόμο των συνημιτόνων για να προσθέσουμε την ταχύτητα του m_1 στην ταχύτητα του m_2 ως προς m_1. Βρίσκουμε ότι

$$v_2^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - 2\dot{x}_1\dot{x}_2 \cos 45^\circ$$

και άρα

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - \sqrt{2}\, \dot{x}_1\dot{x}_2) \quad . \qquad (2\text{-}67)$$

Κάθε αλλαγή στη δυναμική ενέργεια προέρχεται από αλλαγές στην x^2, και έτσι μπορούμε να θέσουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$V = -\frac{1}{\sqrt{2}} m_2 g x_2 \quad . \tag{2-68}$$

Άρα

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - \sqrt{2}\, \dot{x}_1 \dot{x}_2) + \frac{1}{\sqrt{2}} m_2 g x_2 \quad . \tag{2-69}$$

Η εξίσωση για το x_1 λαμβάνεται ως εξής :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \left(\ddot{x}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \ddot{x}_2 \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$$

και χρησιμοποιώντας την εξίσωση Lagrange παίρνουμε

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} m_2 \ddot{x}_2 = 0 \quad . \tag{2-70}$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι επειδή $\partial L/\partial x_1 = 0$ η γενικευμένη ορμή που αντιστοιχεί στο x_1 διατηρείται, δηλαδή η οριζόντια γραμμική ορμή είναι σταθερή. Στη συνέχεια βρίσκουμε ότι

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2 \ddot{x}_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} m_2 \ddot{x}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} m_2 g$$

και η εξίσωση ως προς x_2 είναι

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} m_2 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} m_2 g = 0 \quad . \tag{2-71}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Οι Εξ. (2-70) και (2-71) είναι οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης του συστήματος, οι οποίες επιλυόμενες ως προς τις επιταχύνσεις $\ddot{x}_1$ και $\ddot{x}_2$ δίνουν,

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_2 g}{2m_1 + m_2}$$
$$\ddot{x}_2 = \sqrt{2}\frac{(m_1 + m_2)g}{2m_1 + m_2} \quad . \tag{2-72}$$

Έστω τώρα ότι θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών του Lagrange για να λογαριάσουμε τη δύναμη αλληλεπίδρασης μεταξύ των κιβωτίων. Αυτή η δύναμη είναι κάθετη στην χωρίς τριβή σταθερή επιφάνεια και μπορεί να θεωρηθεί ως η γενικευμένη δεσμική δύναμη που αντιστοιχεί σε μια συντεταγμένη x_3, όπως φαίνεται στο Σχ. 2-3(b). Αν και χρησιμοποιούμε τρεις γενικευμένες συντεταγμένες, υπάρχουν μόνο δύο βαθμοί ελευθερίας στο πραγματικό σύστημα, γιατί υπάρχει μία εξίσωση του ολόνομου δεσμού, δηλαδή

$$x_3 = 0 \quad . \tag{2-73}$$

Αυτή η εξίσωση μπορεί να πάρει την έκφραση

$$\dot{x}_3 = 0 \quad , \tag{2-74}$$

η οποία είναι όμοια προς μία εξίσωση μη ολόνομου δεσμού. Συγκρίνοντας την Εξ. (2-74) με την Εξ. (2-49) βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= 0 \\ \alpha_{12} &= 0 \\ \alpha_{13} &= 1 \\ \alpha_{1t} &= 0 \quad , \end{aligned} \tag{2-75}$$

οπότε, χρησιμοποιώντας την Εξ. (2-47), βρίσκουμε ότι οι γενικευμένες δεσμικές δυνάμεις είναι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$C_1 = 0$$
$$C_2 = 0 \qquad (2\text{-}76)$$
$$C_3 = \lambda_1 \quad .$$

Είναι σημαντικό, γράφοντας τη συνάρτηση Lagrange, να υποθέσουμε ότι οι γενικευμένες συντεταγμένες είναι ανεξάρτητες. Έτσι, γράφοντας τις κατακόρυφες και οριζόντιες συνιστώσες της ταχύτητας χωριστά, παίρνουμε την έκφραση

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[\left(\dot{x}_1 - \frac{\dot{x}_2 + \dot{x}_3}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{\dot{x}_3 - \dot{x}_2}{\sqrt{2}} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [\dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 - \sqrt{2}\, \dot{x}_1 (\dot{x}_2 + \dot{x}_3)] \qquad (2\text{-}77)$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} m_2 g (x_3 - x_2) \quad , \qquad (2\text{-}78)$$

και άρα

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [\dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 - \sqrt{2}\, \dot{x}_1 (\dot{x}_2 + \dot{x}_3)]$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2}} m_2 g (x_3 - x_2) \quad . \qquad (2\text{-}79)$$

Αν αντικαταστήσουμε αυτή τη συνάρτηση Lagrange στην Εξ. (2-48) παίρνουμε την ακόλουθη εξίσωση κίνησης :

$$(m_1 + m_2) \ddot{x}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} m_2 \ddot{x}_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} m_2 \ddot{x}_3 = 0$$
$$- \frac{1}{\sqrt{2}} m_2 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} m_2 g = 0 \qquad (2\text{-}80)$$
$$- \frac{1}{\sqrt{2}} m_2 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_3 + \frac{1}{\sqrt{2}} m_2 g = \lambda_1 \quad .$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Σ΄ αυτό το σημείο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Εξ. (2-74) για να απαλείψουμε τους όρους που περιέχουν $\ddot{x}_3$, επειδή είναι μηδενικοί. Απομένουν τρείς εξισώσεις για να λύσουμε ως προς $\ddot{x}_1$, $\ddot{x}_2$ και λ_1. Έτσι παίρνουμε πάλι

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_2 g}{2m_1 + m_2}$$

$$\ddot{x}_2 = \sqrt{2}\frac{(m_1+m_2) g}{2m_1 + m_2}$$

Η δεσμική δύναμη είναι

$$C_3 = \lambda_1 = \frac{\sqrt{2}\, m_1 m_2 g}{2m_1 + m_2} \quad , \tag{2-81}$$

που έχει χαρακτήρα θλιπτικής δύναμης, πράγμα που σημαίνει ότι δεν υπάρχει τάση αποχωρισμού των κιβωτίων.

Παράδειγμα 2-4. Σωμάτιο μάζης m μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβή στο εσωτερικό ενός μικρού σωλήνα, ο οποίος έχει καμφθεί ώστε να σχηματίζει κύκλο ακτίνας r. Ο σωλήνας περιστρέφεται περί κατακόρυφη διάμετρο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω, όπως φαίνεται στο Σχ. 2-4. Να γραφεί η διαφορική εξίσωση κίνησης.

Η κινητική και δυναμική ενέργεια του σωματίου είναι

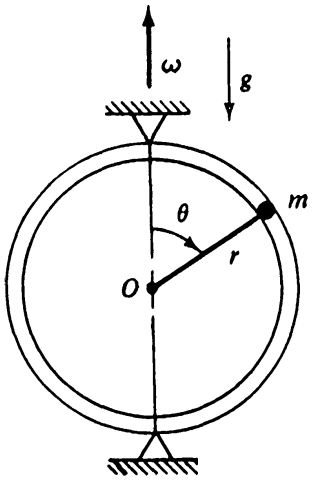
$$T = \frac{1}{2}\, mr^2(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2\theta) \tag{2-82}$$

$$V = mgr\cos\theta \tag{2-83}$$

και άρα

$$L = \frac{1}{2}\, mr^2(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2\theta) - mgr\cos\theta \quad . \tag{2-84}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



Σχ. 2.4. Σωμάτιο σε περιστρεφόμενο σωλήνα.

Αυτό είναι ένα *ρεόνομο* σύστημα γιατί κάθε σύνολο εξισώσεων που δίνει τις αδρανειακές Καρτεσιανές συντεταγμένες του σωματίου σε όρους της μοναδικής γενικευμένης συντεταγμένης θ πρέπει να συμπεριλαμβάνει εκπεφρασμένα το χρόνο. Να σημειωθεί, ότι σ' αυτή την περίπτωση η συνάρτηση Lagrange L δεν είναι εκπεφρασμένη συνάρτηση του χρόνου.

Ο σωλήνας είναι ένας κινούμενος δεσμός ο οποίος εκτελεί έργο στο σωμάτιο σε μια *πραγματική* μετατόπιση. Εξάλλου, δεν παράγεται έργο από τις δεσμικές δυνάμεις σε μια δυνατή μετατόπιση και ο δεσμός ταξινομείται ως δεσμός που δεν παράγει έργο.

Επειδή η μοναδική γενικευμένη δύναμη που ενεργεί στο σύστημα προέρχεται από τη δυναμοσυνάρτηση, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την τυπική μορφή της εξισώσης Lagrange που δίνεται από την Εξ. (2-27). Βρίσκουμε ότι

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = mr^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mr^2\omega^2 \sin\theta\cos\theta + mgr\sin\theta$$

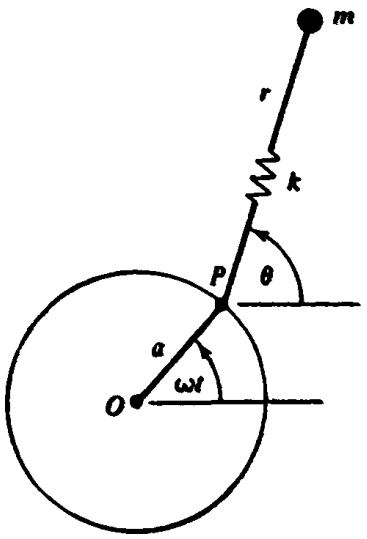
και επομένως η εξίσωση κίνησης είναι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$mr^2\ddot{\theta} - mr^2\omega^2 \sin\theta\cos\theta - mgr\sin\theta = 0 \quad . \qquad (2\text{-}85)$$

Αυτό το σύστημα θα συζητηθεί διεξοδικά στην παράγραφο 2-3.

Παράδειγμα 2-5. Σωμάτιο μάζας m συνδέεται με αβαρές ελατήριο, ακαμψίας k και αρχικό μήκος r_0, στο σημείο P, που κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας a με ομοιόμορφο γωνιακό ρυθμό ω (Σχ. 2-5). Θεωρώντας ότι το σωμάτιο κινείται χωρίς τριβές σ' ένα οριζόντιο επίπεδο, να βρεθούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης.



Σχ. 2-5. Σωμάτιο που συνδέεται με κινούμενο σημείο μέσω αβαρούς ελατηρίου.

Αυτό είναι ένα *ρεόνομο* σύστημα με δύο βαθμούς ελευθερίας οι οποίοι αντιστοιχούν στις ανεξάρτητες γενικευμένες συντεταγμένες r και θ. Ας γράψουμε την κινητική ενέργεια με τη βοήθεια της Εξ. (1-119) η οποία, για την περίπτωση ενός μοναδικού σωματίου, μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$T = \frac{1}{2} m\dot{\mathbf{r}}_p^2 + \frac{1}{2} m\dot{\boldsymbol{\varrho}}^2 + \dot{\mathbf{r}}_p \cdot m\dot{\boldsymbol{\varrho}} \quad , \qquad (2\text{-}86)$$

όπου $\dot{\mathbf{r}}_p$ είναι η απόλυτη ταχύτητα του σημείου P και $\dot{\boldsymbol{\varrho}}$ είναι η ταχύτητα του σωματίου σχετικά προς το P. Βλέπουμε ότι

$$\dot{\mathbf{r}}_p^2 = \alpha^2 \omega^2$$

$$\dot{\boldsymbol{\varrho}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \quad .$$

Άρα

$$T_2 = \frac{1}{2} m \dot{\boldsymbol{\varrho}}^2 = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \tag{2-87}$$

$$T_1 = \dot{\mathbf{r}}_p \cdot m\dot{\boldsymbol{\varrho}} = m\alpha\omega [\dot{r} \sin (\theta - \omega t) + r \dot{\theta} \cos (\theta - \omega t)] \tag{2-88}$$

$$T_0 = \frac{1}{2} m\dot{\mathbf{r}}_p^2 = \frac{1}{2} m\alpha^2 \omega^2 \quad . \tag{2-89}$$

Επίσης

$$V = \frac{1}{2} k(r - r_0)^2 \quad , \tag{2-90}$$

κατά συνέπεια η συνάρτηση Lagrange είναι

$$L = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + 2\alpha\omega \dot{r} \sin (\theta - \omega t) + 2\alpha\omega r \dot{\theta} \cos (\theta - \omega t) + \alpha^2 \omega^2] - \frac{1}{2} k (r - r_0)^2 \quad . \tag{2-91}$$

Η εξίσωση ως προς r λαμβάνεται από τις

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m \ddot{r} - m\alpha\omega^2 \cos (\theta - \omega t) + m\alpha\omega \dot{\theta} \cos (\theta - \omega t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 + m\alpha\omega \dot{\theta} \cos (\theta - \omega t) - k (r - r_0) \quad ,$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

οι οποίες αν αντικατασταθούν στην εξίσωση Lagrange παράγουν την

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - ma\omega^2 \cos(\theta - \omega t) + k(r - r_0) = 0 \quad . \qquad (2\text{-}92)$$

Επίσης παίρνουμε

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} + ma\dot{r}\omega\cos(\theta - \omega t)$$

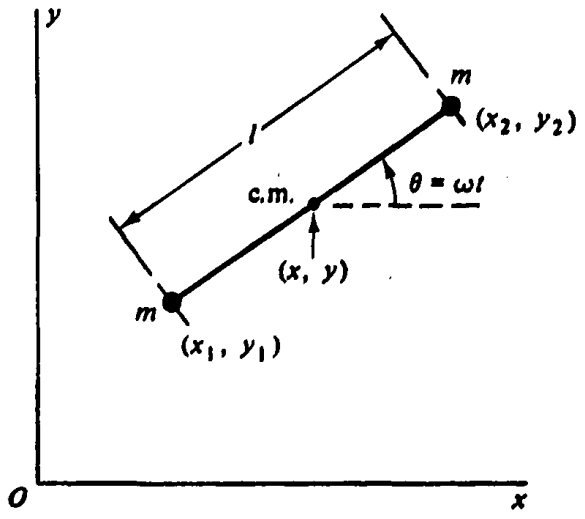
$$- ma r\omega\dot{\theta}\sin(\theta - \omega t) + ma r\omega^2 \sin(\theta - \omega t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = ma\dot{r}\omega\cos(\theta - \omega t) - ma r\omega\dot{\theta}\sin(\theta - \omega t)$$

και η εξίσωση ως προς θ είναι

$$mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} + ma r\omega^2 \sin(\theta - \omega t) = 0 \quad . \qquad (2\text{-}93)$$

Παράδειγμα 2-6. Δύο σωμάτια είναι συνδεδεμένα με στερεά αβαρή ράβδο μήκους l η οποία περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω (Σχ. 2-6).



Σχ. 2-6. Μή-ολόνομο, Ρεόνομο σύστημα .

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Τα στηρίγματα στις θέσεις των δύο σωματίων εμποδίζουν το καθένα σωμάτιο να έχει συνιστώσα ταχύτητας κατά μήκος της ράβδου, αλλά τα σωμάτια μπορούν να ολισθαίνουν χωρίς τριβή σε διεύθυνση κάθετη προς αυτήν. Να βρεθούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης και να επιλυθούν ως προς x, y και τη δεσμική δύναμη ως συναρτήσεις του χρόνου, αν το κέντρο μάζας είναι αρχικά στο μηδέν και έχει ταχύτητα v_0 κατά τη θετική y - διεύθυνση.

Αυτό είναι ένα *μή-ολόνομο ρεόνομο σύστημα.* Ας εκφράσουμε την απεικόνιση αρχικά σε όρους των Καρτεσιανών συντεταγμένων (x_1, y_1) και (x_2, y_2) των επιμέρους σωματίων. Υπάρχουν δύο ανεξάρτητες εξισώσεις για τους ολόνομους δεσμούς, που είναι

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l^2 \qquad (2\text{-}94)$$

και

$$y_2 - y_1 = (x_2 - x_1) \tan \omega t \quad , \qquad (2\text{-}95)$$

που εκφράζουν το συγκεκριμένο μήκος και τον προσανατολισμό της ράβδου. Επιπρόσθετα, υπάρχει η μη-ολόνομη δεσμική εξίσωση

$$(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) \cos \omega t + (\dot{y}_1 + \dot{y}_2) \sin \omega t = 0 \quad , \qquad (2\text{-}96)$$

η οποία αναγκάζει την ταχύτητα του κέντρου της ράβδου να είναι σε διεύθυνση κάθετη προς τη ράβδο, όπως έγινε φανερό από την προηγηθείσα της Εξ. (1-17) συζήτηση.

Χρησιμοποιήσαμε τέσσερις Καρτεσιανές συντεταγμένες και τρεις ανεξάρτητες δεσμικές εξισώσεις, που δείχνουν ότι το σύστημα έχει ένα βαθμό ελευθερίας. Είναι όμως πιο εύχρηστο, να επιλέξουμε γενικευμένες συντεταγμένες κατά τέτοιο τρόπο ώστε να μην υπάρχουν ολόνομοι δεσμοί, και μόνο ένας μη-ολόνομος δεσμός. Αυτό γίνεται κατορθωτό αν επιλεγούν οι Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) του κέντρου μάζας ως οι γενικευμένες συντεταγμένες. Οι εξισώσεις μετασχηματισμού είναι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x - \frac{1}{2} l \cos \omega t \\
y_1 &= y - \frac{1}{2} l \sin \omega t \\
x_2 &= x + \frac{1}{2} l \cos \omega t \\
y_2 &= y + \frac{1}{2} l \sin \omega t \quad .
\end{aligned}
\tag{2-97}
$$

Από τις Εξ. (2-96) και (2-97) βλέπουμε ότι η μη-ολόνομη δεσμική εξίσωση γίνεται

$$\dot{x} \cos \omega t + \dot{y} \sin \omega t = 0 \quad . \tag{2-98}$$

Η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \tag{2-99}$$

ή, αντικαθιστώντας από την Εξ. (2-97),

$$T = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{4} m l^2 \omega^2 \quad . \tag{2-100}$$

Αυτό το αποτέλεσμα λαμβάνεται κατ' ευθείαν αν προσθέσουμε τις κινητικές ενέργειες λόγω μετατόπισης και περιστροφής, προσέχοντας ότι η ολική μάζα είναι $2m$ και η ροπή αδράνειας ως προς κέντρο μάζας $ml^2/2$.

Η δυναμική ενέργεια V είναι μηδέν γι' αυτό το σύστημα, έτσι μπορούμε να γράψουμε την Εξ. (2-48) με τη μορφή

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \lambda_1 \alpha_{1i} \quad , \tag{2-101}$$

όπου, από τη μη-ολόνομη δεσμική Εξ. (2-98), βλέπουμε ότι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\alpha_{11} = \cos \omega t$$
$$\alpha_{12} = \sin \omega t \quad . \tag{2-102}$$

Οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης λαμβάνονται αν αντικαταστήσουμε τις Εξ. (2-100) και (2-102) στην Εξ. (2-101), οπότε το αποτέλεσμα είναι

$$2m\,\ddot{x} = \lambda_1 \cos \omega t$$
$$2m\,\ddot{y} = \lambda_1 \sin \omega t \quad . \tag{2-103}$$

Αυτές οι δύο εξισώσεις μαζί με την δεσμική εξίσωση (2-98) πρέπει να λυθούν ως προς x, y και λ_1. Από την Εξ. (2-103) παίρνουμε

$$\ddot{y} = \ddot{x} \tan \omega t \quad , \tag{2-104}$$

και αντικαθιστώντας την $\tan \omega t$ από την Εξ. (2-98), βρίσκουμε ότι

$$\frac{d}{dt} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 0 \quad . \tag{2-105}$$

Στη συνέχεια, ολοκληρώνοντας και χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες, βλέπουμε ότι

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v_0^2 \quad , \tag{2-106}$$

που δείχνει ότι το κέντρο μάζας κινείται με σταθερή ταχύτητα v_0. Επειδή τώρα η διεύθυνση της κίνησης είναι πάντα κάθετη στη ράβδο, έχουμε

$$\dot{x} = - v_0 \sin \omega t$$
$$\dot{y} = v_0 \cos \omega t \quad . \tag{2-107}$$

Ολοκληρώνοντας ξανά, παίρνουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$x = \frac{v_0}{\omega} (\cos \omega t - 1)$$
$$y = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \quad . \tag{2-108}$$

Από τις Εξ. (2-103) και (2-107), οι πολλαπλασιαστές του Lagrange βρίσκονται να είναι

$$\lambda_1 = - 2 m v_0 \omega \quad . \tag{2-109}$$

Βλέπει κανείς ότι το σύστημα κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας v_0/ω με σταθερή ταχύτητα v_0. Η κεντρόμολος δεσμική δύναμη που ασκείται στο σύστημα έχει μέτρο $2mv_0\omega$ και εκφράζεται από το $- \lambda_1$. Οι γενικευμένες δεσμικές δυνάμεις, που λαμβάνονται με τη βοήθεια της Εξ. (2-47), είναι

$$C_1 = - 2 m v_0 \omega \cos \omega t$$
$$C_2 = - 2 m v_0 \omega \sin \omega t \quad . \tag{2-110}$$

και κατευθύνονται αντίστοιχα στο θετικό x και y άξονα.

2-3. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΚΙΝΗΣΗΣ

Μέχρι τώρα σ' αυτό το κεφάλαιο η έμφαση δόθηκε στη διατύπωση των διαφορικών εξισώσεων κίνησης, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Lagrange. Έχουμε δείξει ότι αν η διάταξη ενός ολόνομου συστήματος περιγραφεί με n ανεξάρτητες γενικευμένες συντεταγμένες, οι εξισώσεις κίνησης εμφανίζονται γενικά με τη μορφή n μη-γραμμικών διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξης με το χρόνο ως ανεξάρτητη μεταβλητή.

Κάθε γενική αναλυτική επίλυση των διαφορικών εξισώσεων κίνησης περιλαμβάνει $2n$ σταθερές ολοκλήρωσης, των οποίων συνήθως οι τιμές βρίσκονται από τις $2n$ αρχικές συνθήκες. Μια μέθοδος έκφρασης της γενικής λύσης είναι να πάρουμε $2n$ ανεξάρτητες συναρτήσεις της μορφής,

$$f_j(q_k , \dot{q}_k , t) = \alpha_j \ , \quad (j = 1, 2, \ldots , 2n) \ , \tag{2-111}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

όπου α_j είναι αυθαίρετες σταθερές. Αυτές οι $2n$ συναρτήσεις ονομάζονται *ολοκληρώματα ή σταθερές της κίνησης.* Κάθε συνάρτηση f_j διατηρεί μια σταθερή τιμή α_j καθώς εξελίσσεται η κίνηση του συστήματος: η τιμή α_j εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες. Θεωρητικά αυτές οι $2n$ εξισώσεις μπορούν να επιλυθούν ως προς τις q_i και $\dot{q}_i$ ως συναρτήσεις των α_i και t, δηλαδή είναι δυνατόν να βρούμε

$$\begin{aligned} q_i &= g_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}, t) \\ \dot{q}_i &= \dot{g}_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}, t) \end{aligned}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) , \qquad (2\text{-}112)$$

έτσι ώστε η Εξ. (2-111) να ικανοποιείται για κάθε j.

Δεν είναι συνήθως δυνατόν να πάρουμε όλα τα f_i με οποιαδήποτε άμεση διαδικασία. Εξάλλου, ένα σημαντικό αντικείμενο είναι αυτό που θα συζητήσουμε στα επόμενα και που ασχολείται με τη διαδικασία ορισμού των μετασχηματισμών των συντεταγμένων, πράγμα που θα απλοποιήσει την εξεύρεση των ολοκληρωμάτων της κίνησης. Στην ουσία, θα επιζητήσουμε τέτοιους μετασχηματισμούς ώστε καθεμιά από τις νέες συντεταγμένες και ορμές να είναι σταθερή, οπότε να σχηματίζονται $2n$ ολοκληρώματα κίνησης.

Προς το παρόν όμως, ας θεωρήσουμε μερικά πιο στοιχειώδη χαρακτηριστικά των δυναμικών συστημάτων που έχουν ως αποτέλεσμα να παίρνουμε ολοκληρώματα της κίνησης κατευθείαν μέσω *τετραγωνισμών,* δηλαδή σε όρους γνωστών στοιχειωδών συναρτήσεων ή αορίστων ολοκληρωμάτων τέτοιων συναρτήσεων.

Αφανείς συντεταγμένες. Θεωρούμε ένα *ολόνομο* σύστημα που μπορεί να περιγραφεί από την τυπική μορφή των εξισώσεων Lagrange, δηλαδή

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 , \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad . \qquad (2\text{-}113)$$

Υποθέτουμε ότι η $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ περιέχει όλες τις $\dot{q}_i$, αλλά ότι μερικές από τις q_i, έστω οι $q_1, q_2, \ldots, q_k$, λείπουν από τη συνάρτηση Lagrange. Αυτές οι k συντεταγμένες ονομάζονται αφανείς συντεταγμένες. Επειδή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$\partial L/\partial q_i$ είναι μηδέν για οποιαδήποτε αφανή συντεταγμένη, προκύπτει ότι

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)=0 \quad , \quad (i=1,2,\ldots,k) \tag{2-114}$$

ή

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\beta_i \quad , \quad (i=1,2,\ldots,k) \quad , \tag{2-115}$$

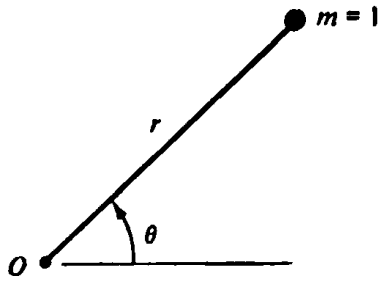
όπου β_i είναι σταθερές που υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Κατά συνέπεια, βρίσκουμε ότι η γενικευμένη ορμή που αντιστοιχεί σε κάθε αφανή συντεταγμένη είναι σταθερή, δηλαδή είναι ένα ολοκλήρωμα της κίνησης.

Παράδειγμα 2-7. Ας θεωρήσουμε το *πρόβλημα του Kepler*, δηλαδή το πρόβλημα της κίνησης ενός σωματίου με μάζα μονάδα που έλκεται προς ένα σταθερό σημείο O (Σχ. 2-7) από μία βαρυτική δύναμη αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης: Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες η κινητική και δυναμική ενέργεια είναι

$$T=\frac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2\,\dot{\theta}^2) \tag{2-116}$$

$$V=-\frac{\mu}{r} \quad , \tag{2-117}$$

όπου το μ είναι μια θετική σταθερά γνωστή ως *συντελεστής βαρύτητας*.



Σχ. 2-7. Το πρόβλημα Kepler σε όρους πολικών συντεταγμένων

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Η συνάρτηση Lagrange είναι

$$L = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2) + \frac{\mu}{r} \quad , \tag{2-118}$$

και χρησιμοποιώντας την Εξ. (2-113), βρίσκουμε ότι η εξίσωση κίνησης για το r είναι

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{\mu}{r^2} = 0 \quad . \tag{2-119}$$

Επειδή το θ δεν εμφανίζεται στη συνάρτηση Lagrange, είναι αφανής συντεταγμένη. Η εξίσωση κίνησης για το θ είναι

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \tag{2-120}$$

ή

$$r^2\dot{\theta} = \beta \quad , \tag{2-121}$$

όπου β είναι μία σταθερά ίση προς τη στροφορμή των σωματίου περί το κέντρο έλξης O.

Σ' αυτό το παράδειγμα έχουμε δυο εξισώσεις κίνησης, που αντιστοιχούν στους δυο βαθμούς ελευθερίας. Η κύρια συνέπεια του γεγονότος ότι το θ είναι αφανής συντεταγμένη είναι ότι το ολοκλήρωμα κίνησης, εν προκειμένω, η σταθερή στροφορμή, λαμβάνεται άμεσα. Από την άλλη πλευρά όμως, το θ δεν λείπει παντελώς από την ανάλυση, αφού το $\dot{\theta}$ παραμένει στη συνάρτηση Lagrange L.

Συνάρτηση Routh. Ας εισάγουμε εδώ μία διαδικασία απαλειφής των αφανών συντεταγμένων, αν τις θεωρήσουμε ως ξεχωριστούς βαθμούς ελευθερίας στη διατύπωση κατά Lagrange των εξισώσεων κίνησης.

Θεωρούμε ένα τυπικό ολόνομο σύστημα του οποίου η διάταξη δίνεται από τις ανεξάρτητες γενικευμένες συντεταγμένες, από τις οποίες οι πρώτες k είναι αφανείς. Μ' άλλα λόγια, η συνάρτηση Lagrange L είναι συνάρτηση των $q_{k+1}, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Τώρα ας ορίσουμε μία συνάρτηση Routh $R(q_{k+1}, ..., q_n, \dot{q}_{k+1}, ..., \dot{q}_n, \beta_1, ..., \beta_k, t)$ ως ακολούθως :

$$R = L - \sum_{i=1}^{k} \beta_i \dot{q}_i \quad , \tag{2-122}$$

όπου απαλείφουμε τις $\dot{q}_i$ που αντιστοιχούν στις αφανείς συντεταγμένες επιλύοντας τις k εξισώσεις

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \beta_i \quad , \quad (i = 1, 2, ..., k) \tag{2-123}$$

ως προς $\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_k$ ως συναρτήσεις των $q_{k+1}, ..., q_n, \dot{q}_{k+1}, ..., \dot{q}_n, \beta_1, ..., \beta_k, t$. Αυτές οι εκφράσεις για τις $\dot{q}_i$ είναι *γραμμικές* ως προς β_i.

Ακολούθως, ας κάνουμε μία αυθαίρετη μεταβολή όλων των μεταβλητών της συνάρτησης Routh. Παίρνουμε

$$\delta R = \sum_{i=k+1}^{n} \frac{\partial R}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial R}{\partial \beta_i} \delta \beta_i + \frac{\partial R}{\partial t} \delta t \quad , \tag{2-124}$$

όπου σημειώνουμε ότι οι β_i εκλαμβάνονται ως μεταβλητές. Μια παρόμοια μεταβολή στο δεξιό μέρος της Εξ. (2-122) δίνει

$$\delta L = \sum_{i=k+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t \quad , \tag{2-125}$$

και χρησιμοποιώντας την Εξ. (2-123) παίρνουμε

$$\delta \sum_{i=1}^{k} \beta_i \dot{q}_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{k} \dot{q}_i \, \delta \beta_i \quad , \tag{2-126}$$

η οποία οδηγεί στην

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\delta\left(L - \sum_{i=1}^{k} \beta_i \dot{q}_i\right) = \sum_{i=k+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{k} \dot{q}_i\ \delta\beta_i + \frac{\partial L}{\partial t}\delta t \quad . \qquad (2\text{-}127)$$

Υποθέτουμε ότι οι μεταβαλλόμενες ποσότητες στις Εξ. (2-124) και (2-127) είναι ανεξάρτητες· κατά συνέπεια οι αντίστοιχοι συντελεστές πρέπει να είναι ίσοι, δηλαδή

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_i} &= \frac{\partial R}{\partial q_i} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \end{aligned}\right\}, \quad (i = k+1, \ldots, n) \qquad (2\text{-}128)$$

και

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}_i &= -\frac{\partial R}{\partial \beta_i} \\ \frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial R}{\partial t} \end{aligned}\right\}, \quad (i = 1, 2, \ldots, k) \ . \qquad (2\text{-}129)$$

Αν αντικαταστήσουμε την Εξ. (2-128) στην εξίσωση Lagrange θα πάρουμε

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 \ , \quad (i = k+1, \ldots, n) \quad . \qquad (1\text{-}130)$$

Αυτές οι εξισώσεις έχουν τη μορφή των εξισώσεων Lagrange αλλά με τη συνάρτηση Routh στη θέση της συνάρτησης Lagrange. Πρέπει όμως να σημειωθεί ότι υπάρχουν μόνο $(n - k)$ δεύτερης τάξης εξισώσεις για τις μή αφανείς μεταβλητές. Έτσι η διαδικασία Routh κατάφερε να απαλείψει τις αφανείς συντεταγμένες από τις εξισώσεις κίνησης. Στην πραγματικότητα, ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας ελαττώθηκε σε $(n\text{-}k)$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Συχνά, δεν είναι ανάγκη να επιλύσουμε ως προς τις αφανείς συντεταγμένες. Αλλά, αν η Εξ. (2-130) έχει επιλυθεί για τις $(n - k)$ μή-αφανείς συντεταγμένες, τότε μπορούμε να ολοκληρώσουμε την Εξ. (2-124) και να επιτύχουμε εκφράσεις για τις αφανείς συντεταγμένες, δηλαδή

$$q_i = -\int \frac{\partial R}{\partial \beta_i}\, dt \ , \quad (i = 1, 2, \ldots , k) \quad . \tag{2-131}$$

Για να γίνει κατανοητή η μεθόδος Routh, ας θεωρήσουμε πάλι το πρόβλημα Kepler του παραδείγματος 2-7. Από την Εξ. (2-121) έχουμε

$$\dot{\theta} = \frac{\beta}{r^2} \quad . \tag{2-132}$$

Αντικαθιστώντας αυτή την έκφραση του $\dot{\theta}$ στη συνάρτηση Lagrange της Εξ. (2-118) παίρνουμε την ακόλουθη συνάρτηση Routh:

$$R = L - \beta\dot{\theta} = \frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{\beta^2}{2r^2} + \frac{\mu}{r} \quad . \tag{2-133}$$

Έτσι βλέπουμε ότι το σύστημα έχει τώρα ένα βαθμό ελευθερίας. Η αντίστοιχη εξίσωση κίνησης λαμβάνεται από την Εξ. (2-130), δηλαδή

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{r}}\right) = \ddot{r}$$

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\beta^2}{r^3} - \frac{\mu}{r^2}$$

και άρα

$$\ddot{r} - \frac{\beta^2}{r^3} + \frac{\mu}{r^2} = 0 \quad . \tag{2-134}$$

Αυτό το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με εκείνο που βρέθηκε αντικαθιστώντας την Εξ. (2-132) στην Εξ. (2-119), δηλαδή κατέληξε στην εξισώση ως προς r, που είχαμε πάρει με τη μέθοδο Lagrange.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Είδαμε ότι η συνάρτηση Routh αντικαθιστά τη συνάρτηση Lagrange αφού πρώτα ελαττωθεί ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας λόγω της αφάνειας των συντεταγμένων. Αν προσέξουμε τη συνάρτηση Routh της Εξ. (2-133) από την πλευρά ενός παρατηρητή που περιστρέφεται μαζί με τη γραμμή που ενώνει το σωμάτιο με το κέντρο *O*, βλέπουμε ότι

$$R = T' - V' \quad . \tag{2-135}$$

όπου

$$T' = \frac{1}{2}\dot{r}^2$$

$$V' = \frac{\beta^2}{2r^2} - \frac{\mu}{r} \quad . \tag{2-136}$$

Εδώ T' είναι η κινητική ενέργεια που συνδέεται με τον μοναδικό βαθμό ελευθερίας. V' είναι η δυναμική ενέργεια που προέρχεται από το πεδίο βαρύτητας ($\propto 1/r^2$) και από το πεδίο της κεντρομόλου δύναμης, λόγω της γωνιακής κίνησης του σωματίου στην τροχιά του.

Συντηρητικά συστήματα. Στην παράγραφο 1-5, βρήκαμε ότι ένα πεδίο συντηρητικής δύναμης έχει τις εξής ιδιότητες: (1) οι συνιστώσες της γενικευμένης δύναμης λαμβάνονται από τη συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας χρησιμοποιώντας την

$$Q_i = - \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad , \tag{2-137}$$

όπου η $V(q_i)$ είναι μια συνάρτηση μόνο της διάταξης του συστήματος και (2) το ολοκλήρωμα

$$W = \int_A^B \mathbf{Q} \cdot d\,\mathbf{q} = \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i}^{Bi} Q_i\, dq_i \tag{2-138}$$

είναι ανεξάρτητο του δρόμου μεταξύ των δύο ακραίων σημείων στον q-χώρο. Αν δεν επιδρούν άλλες δυνάμεις στο σύστημα, η ολική μηχανική

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ενέργεια διατηρείται και το σύστημα λέγεται *συντηρητικό σύστημα.* Σ' αυτή την περίπτωση η ολική ενέργεια $E(q_i, \dot{q}_i) = T + V$ είναι ένα ολοκλήρωμα της κίνησης.

Είναι δυνατόν όμως, να βρούμε ένα ολοκλήρωμα κίνησης με μορφή ενέργειας που να έχει μεγαλύτερη γενικότητα. Μ' αυτό τον τρόπο μπορούμε να καταλήξουμε σ' ένα πιο κατάλληλο ορισμό του συντηρητικού συστήματος. Ορίζουμε ότι ένα σύστημα είναι *συντηρητικό* αν ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

1. Ισχύει η τυπική μορφή (ολόνομη ή ρεόνομη) της εξίσωσης Lagrange.
2. Η συνάρτηση Lagrange L δεν είναι εκπεφρασμένη συνάρτηση του χρόνου
3. Όλες οι δεσμικές εξισώσεις εκφράζονται με τη διαφορική μορφή

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}\, dq_i = 0 \quad , \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \qquad (2\text{-}139)$$

δηλαδή όλοι οι συντελεστές είναι ίσοι με το μηδέν.(*)

Για ν' αποδείξουμε ότι οι τρεις αυτές συνθήκες είναι ικανές να εξασφαλίσουν ένα ολοκλήρωμα ενέργειας, ας θεωρήσουμε την περίπτωση που το σύστημα περιγράφεται από την τυπική μη-ολόνομη μορφή των εξισώσεων Lagrange, δηλαδή

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_j \alpha_{ji} \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad , \qquad (2\text{-}140)$$

όπου η $L(q_i, \dot{q}_i)$ δεν είναι εκπεφρασμένη συνάρτηση του χρόνου. Οι πραγματικοί δεσμοί μπορεί να είναι ολόνομοι η μη-ολόνομοι· αλλά σε κάθε περίπτωση ας γράψουμε τις m δεσμικές εξισώσεις με τη μορφή

(*) Αναφορικά με την Εξ. (1-37), η απαίτηση όπως οι α_{ji} είναι μηδενικοί για κάθε j ισοδυναμεί με την απαίτηση όπως μια δυνατή ταχύτητα σ' οποιοδήποτε σημείο του συστήματος είναι πιθανή ταχύτητα. Οι συνθήκες που διατυπώθηκαν για ένα συντηρητικό σύστημα, δεν απαιτούν να είναι το σύστημα σκληρόνομο.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}\, \dot{q}_i = 0 \ , \quad (j = 1, 2, \ldots , m) \ , \qquad (2\text{-}141)$$

όπου οι α_{ji} είναι συναρτήσεις των q_i και πιθανόν του χρόνου. Πρέπει να σημειωθεί όμως ότι κάθε ολόνομη δεσμική συνάρτηση $\varphi_j(q)$ δεν μπορεί να είναι εκπεφρασμένη συνάρτηση του χρόνου λόγω της παραδοχής,

$$\alpha_{jt} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} = 0 \ . \qquad (2\text{-}142)$$

Ας θεωρήσουμε τώρα το ολικό διαφορικό

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\, \ddot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i}\, \dot{q}_i \ . \qquad (2\text{-}143)$$

Αλλά από τις εξισώσεις Lagrange, όπως δίνονται στην Εξ. (2-140), έχουμε

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_j\, \alpha_{ji} \qquad (2\text{-}144)$$

και τώρα από τις Εξ. (2-143) και (2-144) παίρνουμε

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\, \ddot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\, \alpha_{ji} \dot{q}_i \ . \qquad (2\text{-}145)$$

Ο όρος με τη διπλή άθροιση στην Εξ.(2-145) είναι μηδέν, ως αποτέλεσμα της Εξ. (2-141), και κατά συνέπεια έχουμε

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\, \dot{q}_i\right) \ , \qquad (2\text{-}146)$$

που μετά από ολοκλήρωση οδηγεί στην

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = h \quad , \tag{2-147}$$

όπου h είναι μία σταθερά.

Έτσι παίρνουμε μία σταθερά της κίνησης που είναι γνωστή ως *ολοκλήρωμα Jacobi* ή *ολοκλήρωμα ενέργειας*. Αυτό το ολοκλήρωμα κίνησης υπάρχει για όλα τα συντηρητικά συστήματα.

Ας υπενθυμίσουμε ότι η συνάρτηση Lagrange μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$L = T_2 + T_1 + T_0 - V \quad , \tag{2-148}$$

όπου οι όροι της κινητικής ενέργειας είναι ξεχωρισμένοι ανάλογα με το βαθμό ως προς $\dot{q}_i$, όπως ορίζεται από τις Εξ. (2-6), (2-8) και (2-10). Υποθέτοντας ότι η V δεν είναι συνάρτηση των $\dot{q}_i$, βλέπουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T_2 + T_1 \quad , \tag{2-149}$$

και κατά συνέπεια η Εξ. (2-147) μπορεί να πάρει τη μορφή

$$T_2 - T_0 + V = h \quad . \tag{2-150}$$

Έτσι επιβεβαιώνουμε ότι το ολοκλήρωμα Jacobi έχει μονάδες ενέργειας. Πρέπει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση του συντηρητικού συστήματος, τόσο η T_0 όσο και η V είναι συναρτήσεις μόνο των q_i. Αν ομαδοποιήσουμε αυτές τις συναρτήσεις μπορούμε να γράψουμε

$$T' + V' = h \quad , \tag{2-151}$$

όπου

$$\begin{aligned} T' &= T_2 \\ V' &= V - T_0 \quad . \end{aligned} \tag{2-152}$$

Παρατηρούμε ότι εκτός από το αρχικό πεδίο δύναμης που εκφράζεται από την V, η δυναμική συνάρτηση V' περιλαμβάνει και

ένα πεδίο δύναμης λόγω της T_0. Αυτό το πεδίο είναι τεχνητό, από την άποψη ότι συνίσταται από αδρανειακές δυνάμεις που προκύπτουν επειδή μερικά από τα q_i μετρούνται σε σχέση με κινούμενο σύστημα αναφοράς. T' είναι η κινητική ενέργεια υπό την προϋπόθεση ότι κάθε κινούμενος δεσμός ή σύστημα αναφοράς κρατιέται σταθερός. Συμπερασματικά λοιπόν, η ενέργεια $T' + V'$ είναι σταθερή για οποιοδήποτε συντηρητικό σύστημα, αλλά αυτή η ενέργεια δεν είναι πάντα η ολική ενέργεια του συστήματος μετρούμενη σχετικά προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

Φυσικά συστήματα. Φυσικό σύστημα είναι ένα *συντηρητικό* σύστημα που έχει επιπλέον τις ιδιότητες (1) περιγράφεται από την τυπική ολόνομη μορφή των εξισώσεων Lagrange και (2) η κινητική ενέργεια είναι εκπεφρασμένη ως ομογενής τετραγωνική συνάρτηση των $\dot{q}_i$, δηλαδή

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\, \dot{q}_i\, \dot{q}_j \quad , \tag{2-153}$$

όπου οι συντελεστές αδράνειας m_{ij} μπορεί να είναι συναρτήσεις των q_i αλλά όχι του χρόνου.

Το ολοκλήρωμα Jacobi, ενός φυσικού συστήματος είναι ιδιαίτερα απλό. Ισούται με την *ολική ενέργεια*. Αυτό το βλέπουμε αν παρατηρήσουμε ότι $T_0 = T_1 = 0$, οπότε η Εξ. (2-150) γίνεται

$$T + V = h \quad , \tag{2-154}$$

που δείχνει ότι η ολική ενέργεια διατηρείται.

Αν και οι εξισώσεις μετασχηματισμού που συσχετίζουν τις x_i και τις q_i μπορεί να περιέχουν το t ρητά για κάποια συντηρητικά συστήματα, αυτό δεν είναι πλέον δυνατό για ένα φυσικό σύστημα. Επειδή T_0=0, βλέπουμε από την Εξ. (2-10) ότι $\partial x_k/\partial t$ πρέπει να είναι μηδέν για κάθε k.

Ας θεωρήσουμε τώρα τη μορφή των εξισώσεων κίνησης ενός φυσικού συστήματος. Επειδή T_1=0 και T_2 δεν είναι εκπεφρασμένη συνάρτηση του χρόνου, βρίσκουμε από τις Εξ. (2-6) και (2-8) ότι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\alpha_i = 0\,, \quad \frac{\partial m_{ij}}{\partial t} = 0\,, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)\,, \qquad (2\text{-}155)$$

και από την Εξ. (2-37) παίρνουμε

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\,\ddot{q}_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_l} + \frac{\partial m_{il}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{jl}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_j\,\dot{q}_l + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0,$$

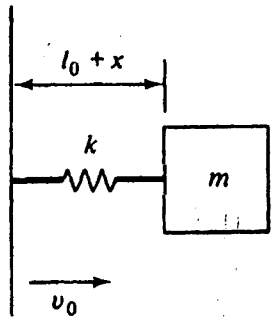
$$(i = 1, 2, \ldots, n)\,. \qquad (2\text{-}156)$$

Συγκρίνοντας τις Εξ. (2-37) και (2-156) παρατηρούμε ότι οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης ενός φυσικού συστήματος είναι αρκετά απλούστερες σε σχέση με εκείνες που αφορούν ένα πιο γενικό συντηρητικό σύστημα. Ιδιαίτερα, οι εξισώσεις που περιγράφουν ένα φυσικό σύστημα δεν περιέχουν γραμμικούς ως προς $\dot{q}_i$ όρους. Κατά συνέπεια, οι $\dot{q}_i$ εμφανίζονται μόνο ως τετραγωνικοί όροι.

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι ένα ολόνομο συντηρητικό σύστημα όπου $T_1 = 0$ και $T_0 \neq 0$ έχει εξισώσεις κίνησης που είναι πολύ όμοιες με την Εξ. (2-156), αν και δεν θεωρείται ως φυσικό σύστημα. Αυτή η ομοιότητα προκύπτει από το γεγονός ότι αν η T_0 θεωρηθεί ως μέρος μιας δυναμικής ενέργειας $V' = V - T_0$, τότε η απομένουσα κινητική ενέργεια T_2 είναι τετραγωνική ως προς $\dot{q}_i$, όπως σ' ένα φυσικό σύστημα. Γι' αυτό, οι εξισώσεις κίνησης είναι οι εξισώσεις ενός φυσικού συστήματος όπου V' είναι η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας και T_2 η κινητική του ενέργεια.

Ένα ολόνομο συντηρητικό σύστημα με $T_1 \neq 0$ είναι γενικά ένα *γυροσκοπικό* σύστημα. Η παρουσία της T_1 έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση όρων με τη μορφή $\gamma_{ij}\dot{q}_j$ στις εξισώσεις κίνησης, όπου οι συντελεστές γ_{ij} σχηματίζουν ένα αντισυμμετρικό μητρώο, όπως έγινε φανερό στην Εξ. (2-40). Γυροσκοπικά συστήματα θα συζητηθούν περισσότερο στην παράγραφο 3-3.

Παράδειγμα 2-8. Έστω σύστημα μάζας-ελατηρίου προσαρτημένο σε πλαίσιο που κινείται με ομοιόμορφη ταχύτητα v_0, όπως φαίνεται στο Σχ. 2-8. Έστω l_0 το αρχικό μήκος του ελατηρίου και η επιμήκυνση x η γενικευμένη συντεταγμένη. Να βρεθεί το ολοκλήρωμα Jacobi του συστήματος.



Σχ. 2-8 Σύστημα μάζας ελατηρίου που εκτελεί μεταφορική κίνηση

Η κινητική ενέργεια είναι

$$T = \frac{1}{2} m (v_0 + \dot{x})^2 \tag{2-157}$$

και άρα,

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \\ T_1 &= m v_0 \dot{x} \\ T_0 &= \frac{1}{2} m v_0^2 \end{aligned} \tag{2-158}$$

Η Δυναμική ενέργεια είναι

$$V = \frac{1}{2} k x^2 \tag{2-159}$$

Το σύστημα μάζας-ελατηρίου ικανοποιεί όλες τις συνθήκες ενός ολόνομου συντηρητικού συστήματος, αφού οι T και V δεν είναι εκπεφρασμένες συναρτήσεις του χρόνου και η μόνη γενικευμένη δύναμη Q_x παράγεται από την V. Αν και το κινούμενο πλαίσιο εκτελεί έργο στο σύστημα, που έχει ως αποτέλεσμα τη μεταβολή της ολικής ενέργειας $T+V$, το ολοκλήρωμα Jacobi υπάρχει και ισούται προς

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$T_2 - T_0 + V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} k x^2 = h \quad , \qquad (2\text{-}160)$$

όπου h είναι μία σταθερά. Η T_0 είναι σταθερά σ' αυτό το παράδειγμα, οπότε βλέπουμε πως και το T_2+V είναι επίσης σταθερό.

Μια άλλη προσέγγιση είναι να σημειώσουμε ότι το κινούμενο πλαίσιο είναι μία έγκυρη αδρανειακή αναφορά. Σχετικά προς αυτό το σύστημα, έχουμε

$$T' = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$
$$V' = \frac{1}{2} k x^2 \quad . \qquad (2\text{-}161)$$

Επειδή η T' είναι τετραγωνική ως προς $\dot{x}$, βλέπουμε ότι έχουμε ένα φυσικό σύστημα ως προς αυτό το σύστημα αναφοράς. Επομένως, $T' + V'$ είναι σταθερό, δηλαδή η ολική ενέργεια διατηρείται. Πρέπει να σημειωθεί ότι αυτή η ενέργεια είναι ίδια με την T_2+V μετρούμενη σχετικά προς το σταθερό πλαίσιο.

Παράδειγμα 2-9. Ας θεωρήσουμε πάλι το σύστημα που συζητήσαμε στο παράδειγμα 2-4. Ένας μικρός σωλήνας, με τη μορφή κύκλου ακτίνας r, περιστρέφεται περί κατακόρυφη διάμετρο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω, Σωμάτιο μάζης m ολισθαίνει χωρίς τριβή στο εσωτερικό του σωλήνα. Σε κάθε χρονική στιγμή, η διάταξη του συστήματος καθορίζεται από τη γωνία θ (βλέπε Σχ. 2-4). Να βρείτε το ολοκλήρωμα Jacobi.

Θεωρούμε ένα σταθερό Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς με την αρχή του στο O, και τον z άξονα κατακόρυφο. Το επίπεδο του σωλήνα συμπίπτει με το xz-επίπεδο για $t = 0$. Οι εξισώσεις μετασχηματισμού που συνδέουν τη γενικευμένη συντεταγμένη και τη θέση (x, y, z) του σωματίου είναι :

$$x = r \sin\theta \cos\omega t$$
$$y = r \sin\theta \sin\omega t \qquad (2\text{-}162)$$
$$z = r \cos\theta \quad .$$

Επειδή οι Εξ. (2-162) είναι εκπεφρασμένες συναρτήσεις του χρόνου, έχουμε ένα *ρεόνομο σύστημα*. Το σύστημα είναι επίσης ολόνομο και

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

έχει τον ίδιο αριθμό βαθμών ελευθερίας και γενικευμένων συντεταγμένων, δηλαδή ένα.

Οι συναρτήσεις κινητικής και δυναμικής ενέργειας είναι

$$T = \frac{1}{2} m (r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \omega^2 \sin^2 \theta) \qquad (2\text{-}163)$$

$$V = mgr \cos \theta \quad , \qquad (2\text{-}164)$$

και άρα

$$L = \frac{1}{2} mr^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} mr^2 \omega^2 \sin^2 \theta - mgr \cos \theta \quad . \qquad (2\text{-}165)$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση L δεν είναι εκπεφρασμένη συνάρτηση του χρόνου, αν και το σύστημα είναι ρεόνομο. Άρα το σύστημα είναι *συντηρητικό*. Το ολοκλήρωμα Jacobi είναι

$$T_2 - T_0 + V = \frac{1}{2} mr^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} mr^2 \omega^2 \sin^2 \theta + mgr \cos \theta = h \quad . \qquad (2\text{-}166)$$

Τώρα ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση Lagrange της Εξ. (2-165) να έχει τη μορφή

$$L = T' - V' \quad , \qquad (2\text{-}167)$$

όπου

$$T' = T_2 = \frac{1}{2} mr^2 \dot{\theta}^2 \qquad (2\text{-}168)$$

και

$$V' = V - T_0 = mgr \cos \theta - \frac{1}{2} mr^2 \omega^2 \sin^2 \theta \quad . \qquad (2\text{-}169)$$

Βλέπουμε ότι η T' είναι η κινητική ενέργεια του σωματίου ως προς σύστημα αναφοράς που περιστρέφεται μαζί με τον κυκλικό σωλήνα. Η δυναμική ενέργεια V' περιλαμβάνει την πραγματική βαρυτική ενέργεια συν ένα ακόμη όρο $- T_0$ που αντιπροσωπεύει τη φυγόκεντρο δύναμη λόγω της περιστροφής περί τον κατακόρυφο άξονα.

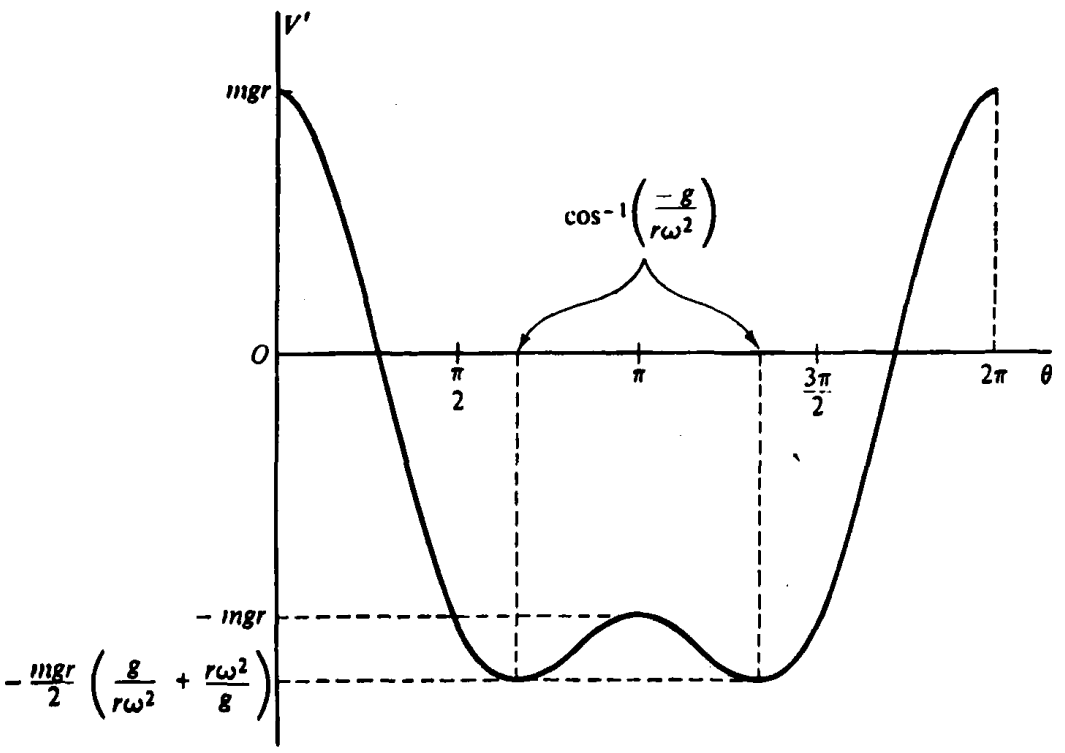
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Το αποτέλεσμα της θεώρησης του περιστρεφόμενου παρατηρητή είναι ότι η T' και η V' έχουν μορφές που σχετίζονται μ' ένα *φυσικό σύστημα*· δηλαδή ούτε η T' ούτε η V' είναι εκπεφρασμένες συναρτήσεις του χρόνου, η T' είναι τετραγωνική ως προς $\dot{\theta}$, και η V' είναι συνάρτηση μόνο της θέσης θ. Άρα η ολική ενέργεια ως προς αυτό το περιστρεφόμενο σύστημα διατηρείται, οπότε παίρνουμε

$$T' + V' = h \quad , \tag{2-170}$$

που βρίσκεται σε συμφωνία με το ολοκλήρωμα Jacobi της Εξ. (2-166).

Η V' είναι σχεδιασμένη στο Σχ. 2-9 ως συνάρτηση του θ για την περίπτωση όπου $\omega^2 > g/r$.



Σχ. 2-9. Δυναμική ενέργεια V' ως συνάρτηση του θ ($\omega^2 > g/r$).

Τα σημεία ισορροπίας ως προς το περιστρεφόμενο σύστημα συμβαίνουν για εκείνες τις τιμές των θ για τις οποίες $dV'/d\theta = 0$, δηλαδή όπου

$$\theta = 0,\ \pi,\ \cos^{-1}\left(\frac{-g}{r\omega^2}\right) \quad .$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Οι τιμές 0 και π αντιστοιχούν σε τοπικά μέγιστα της V' οπότε είναι σημεία ασταθούς ισορροπίας, ενώ οι τιμές $\cos^{-1}(-g/r\omega^2)$ αντιστοιχούν σε σημεία ευσταθούς ισορροπίας δηλαδή τοπικά ελάχιστα της V' .

Αν $0 \le \omega^2 \le g/r$, δεν υπάρχει πλέον καμπούρα στη καμπύλη κοντά στο $\theta=\pi$. Σ' αυτή την περίπτωση υπάρχει ένα μέγιστο της V' στο $\theta=0$ και ένα ελάχιστο στο $\theta=\pi$.

Είναι ενδιαφέρον να εξετασθεί το ίδιο σύστημα στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται οι σφαιρικές συντεταγμένες θ και φ ως γενικευμένες συντεταγμένες. Σ' αυτή την περίπτωση παίρνουμε

$$T = \frac{1}{2} m (r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) \qquad (2\text{-}171)$$

$$V = mgr\cos\theta \quad . \qquad (2\text{-}172)$$

Ο ολόνομος δεσμός μπορεί να εκφρασθεί με τη διαφορική μορφή

$$d\varphi - \omega\, dt = 0 \quad . \qquad (2\text{-}173)$$

Εδώ βλέπουμε πως ούτε η T, ούτε η V είναι εκπεφρασμένες συναρτήσεις του χρόνου και ότι βρίσκει εφαρμογή η τυπική μορφή της εξίσωσης Lagrange. Το σύστημα δεν είναι συντηρητικό με τη διατύπωση αυτή επειδή $\alpha_{jt} = -\omega \neq 0$. Επιπλέον η έκφαση Jacobi ($T+V$ σ' αυτή την περίπτωση) δεν είναι σταθερά γιατί οι κινούμενοι δεσμοί εκτελούν έργο στο σύστημα.

Τελικά, ας εξετάσουμε το ίδιο σύστημα σε όρους των Καρτεσιανών συντεταγμένων του σωματίου. Έχουμε

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \qquad (2\text{-}174)$$

$$V = mgz \quad . \qquad (2\text{-}175)$$

Υπάρχουν δύο ολόνομοι δεσμοί, δηλαδή

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \qquad (2\text{-}176)$$

$$y = x\tan\omega t \quad . \qquad (2\text{-}177)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Οι δεσμοί αυτοί σε διαφορετική μορφή, είναι

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0 \tag{2-178}$$

$$\tan \omega t\,dx - dy + \omega x \sec^2 \omega t\,dt = 0 \quad . \tag{2-179}$$

Παρατηρώντας την Εξ. (2-179) βλέπουμε ότι

$$\alpha_{jt} = \omega x \sec^2 \omega t \neq 0 \quad .$$

Επομένως, το σύστημα *δεν είναι συντηρητικό*. Πάλι, η έκφραση Jacobi είναι η ολική ενέργεια $T+V$, η οποία δεν διατηρείται.

Συμπερασματικά, βλέπει κανείς, ότι ο χαρακτηρισμός ενός συστήματος ως συντηρητικού ή μη μπορεί να εξαρτάται από τις συντεταγμένες που θα χρησιμοποιηθούν για την περιγραφή του.

Παράδειγμα 2-10. Ας εξετάσουμε ακόμη μια φορά το σύστημα του παραδείγματος 2-6. Δύο σωμάτια, που το καθένα έχει μάζα m, συνδέονται με στερεά αβαρή ράβδο μήκους l (Σχ. 2-6). Τα σωμάτια στηρίζονται με αιχμηρές γωνίες που είναι τοποθετημένες κάθετα προς τη ράβδο. Να βρεθεί το ολοκλήρωμα Jacobi στην περίπτωση που η κίνηση περιορίζεται στο xy-οριζόντιο επίπεδο.

Το σύστημα είναι ρεόνομο, μιας και το θ είναι εκπεφρασμένη συνάρτηση του χρόνου. Ας πάρουμε τις συντεταγμένες (x, y) του κέντρου μάζας ως γενικευμένες συντεταγμένες. Σημειώνουμε ότι η δυναμική ενέργεια είναι μηδέν, οπότε η συνάρτηση Lagrange είναι

$$L = T = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{4} m l^2 \omega^2 \quad . \tag{2-180}$$

Η μη-ολόνομη δεσμική εξίσωση είναι

$$\cos \omega t\,dx + \sin \omega t\,dy = 0 \quad , \tag{2-181}$$

η οποία καθορίζει το ότι η ταχύτητα του κέντρου βάρους πρέπει να είναι κάθετη στη ράβδο.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση Lagrange δεν είναι εκπεφρασμένη συνάρτηση του χρόνου, παρά το γεγονός ότι το σύστημα είναι ρεόνομο και οι συντελεστές στην εξίσωση δεσμού είναι εκπεφρασμένες

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

συναρτήσεις του χρόνου. Επιπλέον βλέπουμε ότι α_{jt} =0. Άρα το σύστημα είναι *συντηρητικό* . Το ολοκλήρωμα Jacobi γι' αυτό το σύστημα είναι

$$T_2 - T_0 + V = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{4} m l^2 \omega^2 = h \quad . \quad (2\text{-}182)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι η T_0 είναι μία σταθερά σ' αυτή την περίπτωση και μπορεί να παραληφθεί από τη συνάρτηση Lagrange και από το ολοκλήρωμα Jacobi. Άρα, βρίσκουμε ότι η μεταφορική κινητική ενέργεια είναι σταθερά, που σημαίνει ότι η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι σταθερή.

Μια άλλη προσέγγιση σ' αυτό το παράδειγμα είναι να περιγράψουμε τη διάταξη του συστήματος χρησιμοποιώντας Καρτεσιανές συντεταγμένες για τα δύο σωμάτια. Σ' αυτή την περίπτωση η συνάρτηση Lagrange είναι

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \quad . \quad (2\text{-}183)$$

Υπάρχουν δυο ολόνομες δεσμικές εξισώσεις, δηλαδή

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l^2 \quad (2\text{-}184)$$

$$(x_2 - x_1) \sin \omega t - (y_2 - y_1) \cos \omega t = 0 \quad , \quad (2\text{-}185)$$

που δίνουν το μήκος και τον προσανατολισμό της ράβδου. Υπάρχει ακόμη ένας μη-ολόνομος δεσμός που μπορεί να περιγραφεί με τη σχέση

$$\cos \omega t \, dx_1 + \sin \omega t \, dy_1 = 0 \quad , \quad (2\text{-}186)$$

η οποία εκφράζει το γεγονός ότι η ταχύτητα του δοθέντος σωματίου είναι κάθετη προς τη ράβδο. Μια παρόμοια εξίσωση θα μπορούσε να γραφεί για το δεύτερο σωμάτιο, αλλά δεν θα μπορούσε να είναι ανεξάρτητη από τις εξισώσεις δεσμού που έχουν ήδη δοθεί.

Οι Εξ. (2-184) και (2-185) συνδυαζόμενες με τη (2-186) δίνουν

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$(x_2 - x_1)\, dx_1 + (y_2 - y_1)\, dy_1 = 0 \qquad (2\text{-}187)$$

$$(x_2 - x_1)\, dx_2 + (y_2 - y_1)\, dy_2 = 0 \quad . \qquad (2\text{-}188)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι οι Εξ. (2-186) - (2-188) εκφράζουν ένα σύνολο τριών ανεξαρτήτων δεσμικών εξισώσεων που ικανοποιούν τη συνθήκη α_{jt}=0. Άρα, ικανοποιούνται οι ικανές συνθήκες για ένα *συντηρητικό σύστημα*. Η ύπαρξη του ολοκληρώματος Jacobi φανερώνει ότι η ολική κινητική ενέργεια είναι σταθερή.

Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι αν ο προσανατολισμός $\theta(t)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση του χρόνου, η συνάρτηση Lagrange L θα είναι γενικά εκπεφρασμένη συνάρτηση του χρόνου, που σημαίνει ότι το σύστημα δεν είναι συντηρητικό. Εξάλλου αν υποθέσουμε ότι ο προσανατολισμός επιβάλλεται με την εφαρμογή ενός ζεύγους

$$M = \frac{1}{2} m l^2 \ddot{\theta} \quad ,$$

τότε η μεταφορική κινητική ενέργεια διατηρείται επειδή δεν παράγεται έργο από τις δεσμικές δυνάμεις που κινούνται επί της τροχιάς του κέντρου μάζας. Η περιστροφική κινητική ενέργεια, βέβαια, αλλάζει καθώς το $\dot{\theta}$ μεταβάλλεται.

Σύστημα Liouville. Κατά τη μελέτη του προβλήματος της εύρεσης των ολοκληρωμάτων ή των σταθερών της κίνησης αναδύεται ένα ερώτημα που σχετίζεται με το ποιά είναι εκείνα τα χαρακτηριστικά του συστήματος που κάνουν δυνατή τη συνολική επίλυση της κίνησής του με τετραγωνισμούς, δηλαδή σε όρους αορίστων ολοκληρωμάτων, που το καθένα περιλαμβάνει μία μεταβλητή. Η γενική απάντηση σ' αυτή την ερώτηση δεν είναι γνωστή, αλλά μπορούμε να δώσουμε παραδείγματα μερικών συστημάτων που είναι *διαχωρίσιμα*, και επομένως επιδέχονται επίλυση με τετραγωνισμούς.

Κατ' αρχήν υπενθυμίζεται ότι αν ένα σύστημα έχει n βαθμούς ελευθερίας, απαιτεί $2n$ ολοκληρώματα κίνησης για την πλήρη επιλυσή του. Για ένα τυπικό ολόνομο σύστημα, η παρουσία αφανών συντεταγμένων επιτρέπει μια μείωση του ενεργού αριθμού των βαθμών ελευθερίας χρησιμοποιώντας τη διαδικασία Routh. Αν το σύστημα είναι συντηρητικό μια άμεση συνέπεια θα είναι η ύπαρξη του ενεργειακού

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

ολοκληρώματος h . Βλέπουμε λοιπόν ότι, οποιοδήποτε συντηρητικό ολόνομο σύστημα με n βαθμούς ελευθερίας και $(n\text{-}1)$ αφανείς συντεταγμένες μπορεί να ολοκληρωθεί πλήρως με τετραγωνισμούς. Από την αγνόηση των συντεταγμένων παίρνουμε $(2n\text{-}1)$-σταθερές και το ολοκλήρωμα ενέργειας παρέχει τότε μια εξίσωση της μορφής

$$\dot{q} = f(q) \quad ,$$

η οποία μπορεί να ολοκληρωθεί και να συμπληρώσει την επίλυση. Εδώ, q είναι η τελευταία απομένουσα συντεταγμένη, μετά που όλες πλην μιας, έχουν απαλειφεί με τη διαδικασία Routh.

Αν ένα συντηρητικό ολόνομο σύστημα δεν έχει ικανοποιητικό αριθμό αφανών συντεταγμένων ώστε να εξασφαλισθεί η διαχωρισιμότητα μπορεί ακόμη να επιτευχθεί αυτός (ο διαχωρισμός) αν το σύστημα είναι *ορθογώνιο*, δηλαδή ένα φυσικό σύστημα στο οποίο η T περιέχει μόνο όρους $\dot{q}_i^2$ και όχι $q_i\, q_k$, $i \neq k$.

Για παράδειγμα, υποθέτουμε ότι

$$T = \frac{1}{2} f \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i^2 \tag{2-189}$$

$$V = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^{n} v_i(q_i) \quad , \tag{2-190}$$

όπου ορίζουμε

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i(q_i) > 0 \quad . \tag{2-191}$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι αυτό το σύστημα είναι διαχωρίσιμο.

Αν χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση Lagrange με τη μορφή

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \quad , \tag{2-192}$$

παίρνουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\frac{d}{dt}(f\dot{q}_i) - \frac{1}{2}\frac{\partial f_i}{\partial q_i}\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j^2 + \frac{1}{f}\frac{\partial v_i}{\partial q_i} - \frac{V}{f}\frac{\partial f_i}{\partial q_i} = 0 \quad . \qquad (2\text{-}193)$$

Το σύστημα αυτό είναι ένα φυσικό σύστημα, και άρα θα έχει ένα ολοκλήρωμα ενέργειας που δίνεται από την

$$T + V = \frac{1}{2} f \sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j^2 + V = h \qquad (2\text{-}194)$$

και κατά συνέπεια

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j^2 = \frac{1}{f}(h - V) \quad . \qquad (2\text{-}195)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (2-195) στην (2-193) και απλοποιώντας έχουμε

$$\frac{d}{dt}(f\dot{q}_i) - \frac{h}{f}\frac{\partial f_i}{\partial q_i} + \frac{1}{f}\frac{\partial v_i}{\partial q_i} = 0 \quad . \qquad (2\text{-}196)$$

Στη συνέχεια, πολλαπλασιάζουμε την Εξ. (2-196) επί $2f\dot{q}_i$ και παίρνουμε

$$\frac{d}{dt}(f^2\dot{q}_i^2) - 2h\frac{\partial f_i}{\partial q_i}\dot{q}_i + 2\frac{\partial v_i}{\partial q_i}\dot{q}_i = 0$$

ή

$$\frac{d}{dt}(f^2\dot{q}_i^2) = 2\frac{d}{dt}(hf_i - v_i) \quad . \qquad (2\text{-}197)$$

Μετά από ολοκλήρωση οδηγούμαστε στην

$$f^2\dot{q}_i^2 = 2[hf_i(q_i) - v_i(q_i) + c_i], \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad , \qquad (2\text{-}198)$$

όπου c_i είναι οι σταθερές ολοκλήρωσης. Μπορεί να αποδειχθεί από τις Εξ. (2-190), (2-194) και (2-198) ότι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = 0 \quad . \tag{2-199}$$

Άρα οι c_i μαζί με το h αποτελούν n ανεξάρτητες σταθερές της κίνησης.

Τα απομένοντα n ολοκληρώματα της κίνησης λαμβάνονται αν γράψουμε την Εξ. (2-198) με τη μορφή

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\sqrt{2(hf_i - v_i + c_i)}}{f}$$

η οποία συνεπάγεται ότι

$$\frac{dq_1}{\sqrt{2(hf_1 - v_1 + c_1)}} = \frac{dq_2}{\sqrt{2(hf_2 - v_2 + c_2)}} = \ldots$$
$$= \frac{dq_n}{\sqrt{2(hf_n - v_n + c_n)}} = \frac{dt}{f} = d\tau \quad , \tag{2-200}$$

όπου τ είναι μία παράμετρος με χαρακτήρα χρόνου. Κάθε διαφορική έκφραση είναι συνάρτηση μιας q_i, και άρα το πρόβλημα ανάγεται σε τετραγωνισμούς. Ολοκληρώνοντας αυτές τις εκφράσεις παίρνουμε τις απαιτούμενες n επιπρόσθετες σταθερές της κίνησης.

Αυτό το σύστημα μπορεί να γενικευθεί μάλλον εύκολα και να γίνει ένα σύστημα Liouville. Αν αντικαταστήσουμε το dq_i με το $\sqrt{M_i(q_i)}dq_i$, παίρνουμε

$$T = \frac{1}{2} f \sum_{i=1}^{n} M_i(q_i)\, \dot{q}_i^2 \quad , \tag{2-201}$$

όπου έχουμε υποθέσει ότι $M_i(q_i)>0$. Όπως και προηγούμενα έχουμε

$$V = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^{n} v_i(q_i) \quad . \tag{2-202}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ένα φυσικό σύστημα όπου οι T και V έχουν τη μορφή των εξισώσεων (2-201) και (2-202) ονομάζεται *σύστημα Liouville.*

Σε αντιστοιχία με την Εξ. (2-200), τώρα έχουμε

$$\frac{dq_1}{\sqrt{\varphi_1(q_1)}} = \frac{dq_2}{\sqrt{\varphi_2(q_2)}} = \cdots = \frac{dq_n}{\sqrt{\varphi_n(q_n)}} = \frac{dt}{f} = d\tau \quad , \qquad (2\text{-}203)$$

όπου

$$\varphi_i(q_i) = \frac{2}{M_i}(hf_i - v_i + c_i) \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad . \qquad (2\text{-}204)$$

Χρησιμοποιώντας τις Εξ. (2-191) και (2-203), παίρνουμε

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{f_i\, dq_i}{\sqrt{\varphi_i(q_i)}} = dt \qquad (2\text{-}205)$$

ή

$$\sum_{i=1}^{n} \int \frac{f_i\, dq_i}{\sqrt{\varphi_i(q_i)}} = t + \beta_1 \quad . \qquad (2\text{-}206)$$

Παρομοίως, παίρνοντας τις διαφορές των αορίστων ολοκληρωμάτων των Εξ. (2-203) έχουμε

$$\int \frac{dq_1}{\sqrt{\varphi_1(q_1)}} - \int \frac{dq_j}{\sqrt{\varphi_j(q_j)}} = \beta_j \quad , \quad (j = 2, 3, \ldots, n) \quad , \qquad (2\text{-}207)$$

όπου το πρώτο ολοκλήρωμα επιλέγεται αυθαίρετα ως αναφορά. Έτσι οι Εξ. (2-206) και (2-207) παρέχουν n ανεξάρτητες σταθερές $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ οι οποίες μαζί με τις $(n\text{-}1)$ ανεξάρτητες c_i και τη σταθερά ενέργειας h, δίνουν τις απαραίτητες $2n$ σταθερές της κίνησης.

Κατά τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων των εξισώσεων (2-206) ή (2-207) δημιουργείται το ερώτημα ως προς το ποιό είναι το πρόσημο του $\sqrt{\varphi_j(q_j)}$ · ενθυμούμενοι ότι το f είναι θετικό, βρίσκουμε από την Εξ. (2-203) ότι το $\sqrt{\varphi_j(q_j)}$ έχει το ίδιο πρόσημο με το dq_j. Αυτό είναι ιδιαίτερης σημασίας στις περιπτώσεις *ταλαντωτικών* κινήσεων, δηλαδή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

κινήσεων όπου ένα ή περισσότερα q_i ταλαντώνονται μεταξύ σταθερών οριακών τιμών.

Μια συζήτηση για το σύστημα Liouville θα γίνει στην παράγραφο 5-3.

Παράδειγμα 2-11. Θεωρούμε πάλι το σφαιρικό εκκρεμές του παραδείγματος 2-1. Να αναχθεί το πρόβλημα σε τετραγωνισμούς και να βρεθούν τα ολοκληρώματα κίνησης.

Μέθοδος 1. Αγνόηση συντεταγμένων. Χρησιμοποιώντας τις σφαιρικές συντεταγμένες θ και φ, οι εκφράσεις της κινητικής και δυναμικής ενέργειας είναι

$$T = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) \tag{2-208}$$

$$V = mgl \cos\theta \quad , \tag{2-209}$$

όπου m είναι η μάζα ενός σωματίου που αναρτάται μέσω αβαρούς ελατηρίου μήκους *l*.

Εδώ έχουμε ένα συντηρητικό ολόνομο σύστημα με δύο βαθμούς ελευθερίας και μία αφανή συντεταγμένη. Κατά συνέπεια μπορεί να επιλυθεί πλήρως με τετραγωνισμούς.

Κατ' αρχήν βλέπουμε ότι η συνάρτηση Lagrange είναι

$$L = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) - mgl \cos\theta \quad . \tag{2-210}$$

Αφού η φ δεν εμφανίζεται, είναι αφανής συντεταγμένη, έχουμε

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \dot{\varphi} \sin^2\theta = \alpha_\varphi \quad , \tag{2-211}$$

όπου α_φ είναι η σταθερή γενικευμένη ορμή, συζυγής του φ. Μ' άλλα λόγια, η στροφορμή γύρω από κατακόρυφο άξονα που διαπερνά το υποστήριγμα, διατηρείται.

Η συνάρτηση Routh είναι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$R = L - \alpha_\varphi \dot{\varphi} = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 - \frac{\alpha_\varphi^2}{2ml^2 \sin^2 \theta} - mgl \cos \theta \qquad (2\text{-}212)$$

και σημειώνουμε ότι η $\dot{\varphi}$ έχει απαλειφεί χρησιμοποιώντας την Εξ. (2-211). Έτσι βλέπουμε ότι

$$R = T' - V' \qquad (2\text{-}213)$$

όπου

$$T' = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 \qquad (2\text{-}214)$$

$$V' = \frac{\alpha_\varphi^2}{2ml^2 \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta \quad . \qquad (2\text{-}215)$$

Οι μορφές των T' και V' είναι οι μορφές ενός φυσικού συστήματος που έχει ένα βαθμό ελευθερίας. Έτσι μπορούμε κατ' ευθείαν να γράψουμε το ολοκλήρωμα της ενέργειας

$$T' + V' = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{2ml^2 \sin^2 \theta} + mgl \cos\theta = h \quad . \qquad (2\text{-}216)$$

Επιλύοντας ως προς $\dot{\theta}$, παίρνουμε

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{ml^2}(h - mgl \cos \theta - \alpha_\varphi^2 / 2ml^2 \sin^2 \theta)}$$

ή

$$\frac{ml^2 \sin \theta \, d\theta}{\sqrt{2ml^2 \sin^2 \theta \, (h - mgl \cos \theta) - \alpha_\varphi^2}} = dt \quad . \qquad (2\text{-}217)$$

Ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{ml^2 \sin \theta \, d\theta}{\sqrt{2ml^2 \sin^2 \theta \, (h - mgl \cos \theta) - \alpha_\varphi^2}} = t - t_0 \quad , \qquad (2\text{-}218)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

όπου $\theta(t_0) = \theta_0$. Η κίνηση ως προς θ είναι συνήθως ταλαντωτική με $0<\theta<\pi$. Άρα το πρόσημο της τετραγωνικής ρίζας θα έπρεπε να είναι το ίδιο όπως και του $d\theta$, αφού κάθε αύξηση dt είναι θετική

Από την Εξ. (2-211) παίρνουμε

$$d\varphi = \frac{\alpha_\varphi \, dt}{ml^2 \sin^2 \theta} \qquad (2\text{-}219)$$

και χρησιμοποιώντας την Εξ. (2-217) βρίσκουμε ότι

$$\frac{\alpha_\varphi \, d\theta}{\sin\theta \sqrt{2ml^2 \sin^2\theta \,(h - mgl\cos\theta) - \alpha_\varphi^2}} = d\varphi \quad . \qquad (2\text{-}220)$$

Άρα

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\alpha_\varphi \, d\theta}{\sin\theta \sqrt{2ml^2 \sin^2\theta \,(h - mgl\cos\theta) - \alpha_\varphi^2}} = \varphi - \varphi_0 \quad , \qquad (2\text{-}221)$$

όπου $\varphi(t_0) = \varphi_0$. Και εδώ, το πρόσημο της τετραγωνικής ρίζας είναι το ίδιο με του $d\theta$. Πρέπει να σημειωθεί ότι το α_φ έχει το ίδιο πρόσημο με το $\dot{\varphi}(t_0)$.

Έτσι πήραμε τις απαιτούμενες τέσσερις σταθερές της κίνησης, δηλαδή τις εκφράσεις για α_φ, h, t_0 και φ_0 από τις Εξ. (2-211), (2-216), (2-218) και (2-221).

Μέθοδος 2. Τώρα θεωρούμε το σφαιρικό εκκρεμές ως ένα σύστημα Liouville. Συγκρίνοντας τις εκφράσεις των T και V που δίνονται στις Εξ. (2-208) και (2-209) με τις καθιερωμένες μορφές Liouville των Εξ. (2-201) και (2-202), βρίσκουμε ότι

$$f_\theta = ml^2 \sin^2\theta \,, \qquad M_\theta = \frac{1}{\sin^2\theta} \,, \qquad v_\theta = m^2 g l^3 \sin^2\theta \cos\theta \qquad (2\text{-}222)$$

και

$$f_\varphi = 0 \,, \qquad M_\varphi = 1 \,, \qquad v_\varphi = 0 \quad . \qquad (2\text{-}223)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Χρησιμοποιώντας την Εξ. (2-204), παίρνουμε

$$\varphi_\theta = 2\sin^2\theta\,[ml^2\sin^2\theta\,(h - mgl\cos\theta) + c_\theta]$$
$$\varphi_\varphi = 2c_\varphi \quad , \tag{2-224}$$

όπου, από τις Εξ. (2-198), (2-199) και (2-211), έχουμε

$$2c_\varphi = -2c_\theta = (ml^2\dot{\varphi}\sin^2\theta)^2 = \alpha_\varphi^2 \quad . \tag{2-225}$$

Τελικά, αντικαθιστώντας τις εκφράσεις αυτές στις Εξ. (2-206) και (2-207) και γράφοντας τα αποτελέσματα υπό τη μορφή ορισμένων ολοκληρωμάτων, παίρνουμε

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{ml^2\sin^2\theta\,d\theta}{\sqrt{\varphi_\theta(\theta)}} = t - t_0 \tag{2-226}$$

και

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\varphi_\theta(\theta)}} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{2c_\varphi}}$$

ή

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\alpha_\varphi\,d\theta}{\sqrt{\varphi_\theta(\theta)}} = \varphi - \varphi_0 \quad . \tag{2-227}$$

Βλέπουμε ότι οι Εξ. (2-226) και (2-227) συμφωνούν με τις Εξ. (2-218) και (2-221) στις οποίες καταλήξαμε προηγούμενα.

Στο κεφάλαιο 5, θα δούμε πώς μπορούμε να πάρουμε τα ολοκληρώματα κίνησης διαχωρίσιμων συστημάτων χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Hamilton-Jacobi.

2-4. ΜΙΚΡΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Μια από τις κύριες εφαρμογές των εξισώσεων Lagrange είναι η ανάλυση των μικρών κινήσεων ενός συντηρητικού μηχανικού

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

συστήματος γύρω από μια κατάσταση ισορροπίας. Παρόλο που συχνά μπορούμε να πάρουμε τις εξισώσεις κίνησης μ' άλλους τρόπους, όπως μ' απευθείας εφαρμογή των νόμων του Newton, η μέθοδος Lagrange καταλήγει σ' εξισώσεις κίνησης που έχουν μορφή τέτοια που να τονίζουν τις συμμετρίες του συστήματος. Ας θεωρήσουμε την αντιμετώπιση Lagrange στη θεωρία των μικρών ταλαντώσεων. Θα παρουσιάσουμε όμως μόνο μια εισαγωγή γιατί αυτό το αντικείμενο είναι αρκετά εκτεταμένο.

Εξισώσεις κίνησης. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα *φυσικό σύστημα* του οποίου η διάταξη καθορίζεται από n ανεξάρτητες γενικευμένες συντεταγμένες $q_1, q_2, ..., q_n$. Ας υποθέσουμε ότι οι q_i μετρούνται από μια θέση ισορροπίας και ας θεωρήσουμε *μικρές κινήσεις* γύρω από αυτή τη θέση ισορροπίας. Από την Εξ. (1-95) βρίσκουμε ότι, αν η τιμή αναφοράς V_0 είναι μηδέν, η δυναμική ενέργεια μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \, \partial q_j} \right)_0 q_i \, q_j + \ldots \quad . \tag{2-228}$$

Αγνοώντας όρους μεγαλύτερης από δευτέρας τάξης ως προς q_i, παίρνουμε

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} k_{ij} \, q_i \, q_j \quad , \tag{2-229}$$

όπου οι *συντελεστές ακαμψίας* είναι

$$k_{ij} = k_{ji} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \, \partial q_j} \right)_0 \quad . \tag{2-230}$$

Έτσι βλέπουμε ότι η δυναμική ενέργεια V είναι μία ομογενής τετραγωνική συνάρτηση των q_i για μικρές κινήσεις γύρω από τη θέση ισορροπίας.

Ας δεχτούμε ότι το σύστημα αποτελείται από N σωμάτια των οποίων οι θέσεις δίνονται από τις $3N$ Καρτεσιανές συντεταγμένες x_1,

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$x_2, ..., x_{3N}$. Από τις Εξ. (2-7) και (2-153) βρίσκουμε ότι η κινητική ενέργεια είναι της μορφής

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad , \tag{2-231}$$

όπου, για μικρές κινήσεις

$$m_{ij} = m_{ji} = \sum_{k=1}^{3N} m_k \left(\frac{\partial x_k}{\partial q_i}\right)_0 \left(\frac{\partial x_k}{\partial q_j}\right)_0 \quad . \tag{2-232}$$

Για το φυσικό σύστημα που μελετάμε εδώ, η κινητική ενέργεια είναι μία *θετικά ορισμένη τετραγωνική συνάρτηση* των $\dot{q}_i$.

Οι εξισώσεις κίνησης προκύπτουν από τις εξισώσεις Lagrange. Πρώτα, από την Εξ. (2-26) βρίσκουμε ότι η συνάρτηση Lagrange είναι

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} k_{ij} q_i q_j \tag{2-233}$$

μετά, χρησιμοποιώντας την Εξ. (2-27), παίρνουμε τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n} k_{ij} q_j = 0 \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{2-234}$$

ή με το συμβολισμό μητρώων

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{k}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad . \tag{2-235}$$

Οι εξισώσεις κίνησης είναι *γραμμικές* δεύτερης τάξης, συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και τα μητρώα **m** και **k** είναι *σταθερά* και *συμμετρικά*. Γενικά, αν οι νόμοι του Newton χρησιμοποιηθούν για να πάρουμε τις εξισώσεις κίνησης ενός συστήματος αυτού του είδους, τα μητρώα **m** και **k** δεν είναι συμμετρικά. Η απώλεια συμμετρίας στις εξισώσεις μπορεί να συμβεί απλά και μόνο από κάποιο πολλαπλασιασμό μιας εξίσωσης με μια σταθερά, ή από πρόσθεση των εξισώσεων. Αυτό, δεν αλλάζει τη φύση της λύσης, αλλά εν τούτοις αλλάζει την εμφάνιση των εξισώσεων κίνησης. Ένα πλεονέκτημα της

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

μεθόδου Lagrange είναι ότι η συστηματική προσέγγιση διατηρεί τη συμμετρία των μητρώων των συντελεστών για τα συστήματα που T και V εκφράζονται από τετραγωνικές συναρτήσεις των ταχυτήτων και μετατοπίσεων, αντίστοιχα.

Φυσικές μορφές. Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα του οποίου οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης δίνονται από την Εξ. (2-234). Υποθέτουμε λύσεις της μορφής

$$q_j = A_j C \cos(\omega t + \varphi) \ , \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \ , \qquad (2\text{-}236)$$

όπου το πλάτος ταλάντωσης της q_j είναι το γινόμενο των σταθερών A_j και C. Εδώ το C ενεργεί ως ένας συνολικός συντελεστής κλίμακας, ενώ τα A_j δείχνουν τα σχετικά μεγέθη τους.

Αν αντικαταστήσουμε τις λύσεις, Εξ. (2-236), στην Εξ. (2-234), παίρνουμε

$$\sum_{j=1}^{n} (-\omega^2 m_{ij} + k_{ij}) A_j C \cos(\omega t + \varphi) = 0 \ , \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \ . \qquad (2\text{-}237)$$

Ο συντελεστής $C\cos(\omega t + \varphi)$ δεν μπορεί να είναι συνεχώς μηδέν εκτός από την τετριμμένη περίπτωση που όλα τα q_j παραμένουν μηδέν. Ως εκ τούτου συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{n} (k_{ij} - \omega^2 m_{ij}) A_j = 0 \ , \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \ . \qquad (2\text{-}238)$$

Αν οι A_j δεν είναι όλοι μηδέν, τότε η ορίζουσα των συντελεστών τους πρέπει να μηδενίζεται, δηλαδή

$$\begin{vmatrix} (k_{11} - \omega^2 m_{11}) & (k_{12} - \omega^2 m_{12}) & \cdots & (k_{1n} - \omega^2 m_{1n}) \\ (k_{21} - \omega^2 m_{21}) & (k_{22} - \omega^2 m_{22}) & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ (k_{n1} - \omega^2 m_{n1}) & \cdots & \cdots & (k_{nn} - \omega^2 m_{nn}) \end{vmatrix} = 0 \ . \qquad (2\text{-}239)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ο υπολογισμός αυτής της ορίζουσας καταλήγει σε μια αλγεβρική εξίσωση n-βαθμού ως προς ω^2, που ονομάζεται *χαρακτηριστική εξίσωση*. Οι n ρίζες ω_k^2, όπου $k = 1, 2, ..., n$ είναι γνωστές ως *χαρακτηριστικές τιμές* ή *ιδιοτιμές*, όπου η κάθε μια είναι το τετράγωνο μιας φυσικής συχνότητας, που συνήθως εκφράζεται σε rad/sec. Είναι γνωστό από τη θεωρία των μητρώων ότι οι ρίζες ω_k^2 είναι όλες πραγματικές και πεπερασμένες εάν η T είναι θετικά ορισμένη και αν **m** και **k** είναι πραγματικά συμμετρικά μητρώα. Αν, επιπλέον, και η V είναι *θετικά ορισμένη*, τότε τα ω_k^2 είναι όλα θετικά και η κίνηση γίνεται γύρω από μια θέση ευσταθούς ισορροπίας. Αν V είναι *θετικά ημιορισμένο;* δηλαδή αν η ορίζουσα $|k|$ ή οποιαδήποτε από τις κύριες υποορίζουσες είναι μηδέν αλλά όχι αρνητική, τότε τουλάχιστον μία από τις ω_k^2 είναι μηδέν και το σύστημα βρίσκεται σε αδιάφορη ισορροπία στη διάταξη αναφοράς. Τελικά, αν $|k|$ ή οποιαδήποτε από τις κύριες υποορίζουσες είναι αρνητική, τότε τουλάχιστον μια από τις ω_k^2 είναι αρνητική και η θέση αναφοράς είναι θέση ασταθούς ισορροπίας.

Συμπερασματικά, το αποτέλεσμα μίας δοθείσης ρίζας ω_k^2 στην ευστάθεια του συστήματος περιγράφεται ως εξής:

Περίπτωση 1 : $\omega_k^2 > 0$. Η λύση για κάθε συντεταγμένη περιέχει ένα όρο της μορφής $C_k \cos(\omega_k t + \varphi_k)$, σύμφωνα με τη θεωρηθείσα λύση από την Εξ. (2-236). Αυτός ο όρος είναι ευσταθής, αλλά η συνολική ευστάθεια εξαρτάται επίσης και από τις άλλες ρίζες.

Περίπτωση 2 : $\omega_k^2 = 0$. Εδώ έχουμε μία επαναλαμβανόμενη μηδενική ρίζα ω_k, που αντιστοιχεί σ' έναν όρο στη λύση της μορφής $(C_k t + D_k)$. Αυτό συνεπάγεται την ύπαρξη μιας σταθερής μετακίνησης σε μια ή περισσότερες συντεταγμένες και είναι χαρακτηριστικό ενός συστήματος με αδιάφορη ευστάθεια.

Περίπτωση 3: $\omega_k^2 < 0$. Το αντίστοιχο ζεύγος ριζών $\omega_k = \pm i\gamma_k$ είναι φανταστικό και οι προκύπτοντες όροι της μορφής $(C_k \cosh\gamma_k t + D_k \sinh\gamma_k t)$ έχουν ως συνέπεια ασταθή λύση.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Επιστρέφοντας τώρα στην Εξ. (2-238) βρίσκουμε ότι για κάθε ω_k^2 μπορούμε να γράψουμε ένα σύνολο από n αλγεβρικές εξισώσεις που περιέχουν τους n συντελεστές πλάτους A_j. Επειδή όμως αυτές οι εξισώσεις είναι ομογενείς, δεν υπάρχει μοναδική λύση για τους συντελεστές A_j, αλλά μόνο για τους μεταξύ τους *λόγους*. Για ευκολία, ας επιλύσουμε για τους λόγους αυτούς ως προς A_1, δηλαδή ας θέσουμε $A_1 = 1$. Αν απαλείψουμε αυθαίρετα την πρώτη εξίσωση των (2-238) και χρησιμοποιήσουμε συμβολισμό μητρώων για την επίλυση των υπολοίπων $(n\text{-}1)$ εξισώσεων για τα $(n\text{-}1)$ άγνωστα πλάτη, παίρνουμε

$$[(k_{ij} - \omega_k^2 m_{ij})] \{A_j^{(k)}\} = \{(\omega_k^2 m_{i1} - k_{i1})\}, \ (i,j = 2, 3, \ldots, n) \ , \qquad (2\text{-}240)$$

όπου για καθεμιά περίπτωση δείχνουμε ένα τυπικό στοιχείο του μητρώου στις παρενθέσεις. Οι δείκτες αναφέρονται στις αρχικές γραμμές και στήλες. Επιλύοντας την Εξ.(2-240) για τα πλάτη $A_j^{(k)}$ που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή ω_k^2, παίρνουμε

$$\{A_j^{(k)}\} = [(k_{ij} - \omega_k^2 m_{ij})]^{-1} \{(\omega_k^2 m_{i1} - k_{i1})\} \ , \ (i,j = 2, 3, \ldots, n) \ , \ (2\text{-}241)$$

όπου υποθέτουμε ότι οι *ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες* και ότι $A_j^{(k)} \neq 0$, εξασφαλίζοντας με τον τρόπο αυτό την ύπαρξη του αντίστροφου μητρώου. Στην περίπτωση που $A_j^{(k)}=0$, πρέπει να επιλεγεί ως αναφορά μια άλλη συντεταγμένη. Γενικά, μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει οποιαδήποτε διαδικασία κανονικοποίησης, η οποία διατηρεί τα σχετικά μεγέθη των συντεταγμένων.

Ένα πλήρες σύνολο από n συντελεστές πλάτους, που συμπεριλαμβάνει το συντελεστή αναφοράς μονάδας, είναι γνωστό ως *ιδιοδιάνυσμα ή ιδιομορφή*. Υπάρχει ένα ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{A}^{(k)}$ που αντιστοιχεί σε κάθε ιδιωτιμή ω_k^2. Αυτό το σύνολο των συντελεστών πλάτους μπορεί να θεωρηθεί ότι ορίζει μία *ιδιομορφή* που συνδέεται με τη συχνότητα ω_k. Κάθε φυσική συχνότητα ω_k, με το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{A}^{(k)}$, ορίζει ένα *φυσικό τρόπο ταλάντωσης*, που πολλές φορές λέγεται *κύρια μορφή* ή *κανονική μορφή*.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Για τα φυσικά συστήματα που μελετάμε, οι ω_k^2 είναι πραγματικοί και οι αντίστοιχοι λόγοι πλατών είναι επίσης πραγματικοί. Εάν το σύστημα ταλαντώνεται με μια απλή μορφή και όχι κατά ένα γενικό τρόπο υπέρθεσης μορφών, τότε όλες οι συντεταγμένες εκτελούν ημιτονοειδή κίνηση με την ίδια συχνότητα. Η σχετική γωνία φάσης μεταξύ δύο συντεταγμένων είναι ή 0° ή 180°, ανάλογα με το αν ο λόγος των πλατών είναι θετικός ή αρνητικός.

Οι μορφές μηδενικής συχνότητας είναι κατά κάποιο τρόπο διαφορετικές στη φυσική τους σημασία επειδή δεν συμβαίνει ελαστική παραμόρφωση. Γι' αυτό το λόγο είναι γνωστές ως *κανονικές μορφές ταλάντωσης στερεού-σώματος* . Τόσο η δυναμική όσο και η κινητική ενέργεια είναι σταθερή με αποτέλεσμα να έχουμε μια ομοιόμορφη μεταφορική ή περιστροφική κίνηση. Οι λόγοι των πλατών υπολογίζονται κατά τον συνήθη τρόπο, αλλά είναι πιο εύκολο να θεωρηθούν ως *λόγοι ταχυτήτων.*

Κύριες συντεταγμένες. Ένα γραμμικό φυσικό σύστημα με n βαθμούς ελευθερίας έχει n ιδιοτιμές ή φυσικές συχνότητες. Είναι δυνατόν το σύστημα να ταλαντώνεται με μια απλή μορφή αν οι αρχικές συνθήκες είναι οι κατάλληλες· για παράδειγμα, αν όλες οι αρχικές ταχύτητες είναι μηδέν, και οι αρχικές μετατοπίσεις είναι ανάλογες προς τους συντελεστές πλάτους $A_j^{(k)}$ της δοθείσης μορφής. Στη γενική περίπτωση όμως, απαιτείται μια υπέρθεση μορφών. Έτσι χρησιμοποιώντας λύσεις της μορφής της Εξ. (2-236) έχουμε

$$q_j = \sum_{k=1}^{n} A_{jk}\, C_k \cos(\omega_k t + \varphi_k) \quad , \tag{2-242}$$

όπου $A_{jk} \equiv A_j^{(k)}$.

Τώρα ας ορίσουμε την *κύρια συντεταγμένη* U_k , που αντιστοιχεί στην k-μορφή, από την εξίσωση

$$U_k = C_k \cos(\omega_k t + \varphi_k), \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, n) \quad . \qquad (2\text{-}243)$$

Μετά από τις Εξ. (2-242) και (2-243), παίρνουμε

$$q_j = \sum_{k=1}^{n} A_{jk} U_k \qquad (2\text{-}244)$$

ή με τη μορφή μητρώων

$$\mathbf{q} = \mathbf{AU} \quad , \qquad (2\text{-}245)$$

όπου το μητρώο **A** είναι ένα $n \times n$ μητρώο του οποίου οι στήλες είναι τα ιδιοδιανύσματα των διαφόρων μορφών. Οι στήλες μπορεί να διευθετηθούν κατά οποιαδήποτε σειρά αλλά, κατά σύμβαση, τοποθετούνται συνήθως κατά αύξουσα συχνότητα των αντιστοίχων μορφών.

Λύνοντας την Εξ. (2-245) ως προς τις κύριες συντεταγμένες, παίρνουμε

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{q} \quad , \qquad (2\text{-}246)$$

όπου υποθέτουμε ότι οι στήλες στο **A** είναι γραμμικά ανεξάρτητες, μια συνθήκη που εξασφαλίζεται αν οι αντίστοιχες ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες.

Οι κύριες συντεταγμένες είναι γενικευμένες συντεταγμένες ενός ιδιαίτερου τύπου. Βλέπουμε από την Εξ. (2-244) ότι εάν μια μόνο U_k είναι μή μηδενική, οι q_j είναι ανάλογες των αντιστοίχων A_j αυτής της μορφής. Σ' αυτή την περίπτωση, η κύρια συντεταγμένη U_k ταλαντώνεται ημιτονικά με συχνότητα ω_k, με την προϋπόθεση ότι η δοθείσα μορφή είναι ευσταθής. Κατά συνέπεια, αν μια μόνο μορφή διεγείρεται, η συνολική κίνηση περιγράφεται χρησιμοποιώντας μόνο μια κύρια συντεταγμένη. Γενικά, μια περιγραφή της κίνησης απαιτεί όλες τις n κύριες συντεταγμένες. Εξάλλου, επειδή συχνά ενδιαφερόμαστε για την παροδική απόκριση εντός ενός συγκεκριμένου εύρους συχνότητας, η χρήση συντεταγμένων που συνδέονται ειδικά με τις δοθείσες συχνότητες, είναι δυνατόν να ελαττώσουν τον αριθμό συντεταγμένων που χρησιμοποιούνται στην ανάλυση.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ορθογωνικότητα των ιδιοδιανυσμάτων. Ας γράψουμε την Εξ. (2-238) για την k -φυσική μορφή με τον ακόλουθο τρόπο

$$\mathbf{k}\mathbf{A}^{(k)} = \omega_k^2 \mathbf{m}\mathbf{A}^{(k)} \quad . \tag{2-247}$$

Για την l - μορφή θα έχουμε

$$\mathbf{k}\mathbf{A}^{(l)} = \omega_l^2 \mathbf{m}\mathbf{A}^{(l)} \quad . \tag{2-248}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε τα δύο μέλη της Εξ. (2-247) με το μητρώο γραμμής $\mathbf{A}^{(l)T}$ και τα δύο μέλη της Εξ. (2-248) με $\mathbf{A}^{(k)T}$, οι εξισώσεις που παίρνουμε είναι

$$\mathbf{A}^{(l)T} \mathbf{k}\mathbf{A}^{(k)} = \omega_k^2 \, \mathbf{A}^{(l)T} \mathbf{m}\mathbf{A}^{(k)} \tag{2-249}$$

$$\mathbf{A}^{(k)T} \mathbf{k}\mathbf{A}^{(l)} = \omega_l^2 \, \mathbf{A}^{(k)T} \mathbf{m}\mathbf{A}^{(l)} \quad . \tag{2-250}$$

Επειδή τα **k** και **m** είναι συμμετρικά, τα μητρώα στήλες μπορούν να εναλλαγούν στα δύο μέλη των παραπάνω εξισώσεων. Με βάση την παραπάνω παρατήρηση και αφαίρεση των Εξ. (2-249) και (2-250) παίρνουμε

$$(\omega_k^2 - \omega_l^2) \, \mathbf{A}^{(k)T} \mathbf{m}\mathbf{A}^{(l)} = 0 \quad . \tag{2-251}$$

Αν οι δύο ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες , δηλαδή αν $\omega_k^2 \neq \omega_l^2$, τότε προκύπτει ότι

$$\mathbf{A}^{(k)T} \mathbf{m}\mathbf{A}^{(l)} = 0 \ , \quad (k \neq l) \quad . \tag{2-252}$$

Αυτή είναι η συνθήκη ορθογωνικότητας για τα ιδιοδιανύσματα k και l, ως προς το μητρώο αδράνειας **m**.

Μία εμβάθυνση στη φυσική σημασία της Εξ. (2-252) επιτυχνάνεται αν σημειώσουμε ότι μια στήλη των συντελεστών πλάτους δίνει τους

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

λόγους της ταχύτητας και της επιτάχυνσης καθώς επίσης τους λόγους της μετατόπισης για δοθείσα μορφή. Η συνθήκη ορθογωνικότητας μπορεί να ερμηνευτεί ότι εκφράζει το μηδενισμό του εσωτερικού γινομένου του ιδιοδιανύσματος μιας μορφής με το διάνυσμα της γενικευμένης αδρανειακής δύναμης μιας άλλης μορφής. Αυτό δείχνει ότι τα δύο διανύσματα είναι ορθογώνια στον n-χώρο, δηλαδή δεν υπάρχει αδρανειακή σύζευξη μεταξύ των αντίστοιχων κύριων συντεταγμένων.

Αν μία από τις στήλες της Εξ. (2-252) αντιστοιχεί σε μορφή μηδενικής συχνότητας, η συνθήκη ορθογωνικότητας συνεπάγεται ότι μια αντίστοιχη συνιστώσα ορμής είναι μηδέν για όλες τις εναπομένουσες ελαστικές μορφές. Αν για παράδειγμα, ένα σύστημα μπορεί ελεύθερα να μεταφέρεται κατά την x-διεύθυνση, μια μορφή μηδενικής συχνότητας, που θα αντιστοιχεί σ' αυτή την ομοιόμορφη μεταφορά, θα υπάρχει και θα περιλαμβάνει ολόκληρη την x-συνιστώσα της μεταφορικής ορμής. Όλες οι εναπομένουσες ελαστικές μορφές δεν θα έχουν μεταφορική ορμή στην x-διεύθυνση. Πιο γενικά, οι ελαστικές μορφές ενός σώματος στον ελεύθερο χώρο θα έχουν μηδενική ορμή και στροφορμή.

Τώρα ας δούμε το γινόμενο των μητρώων της Εξ. (2-252) για την περίπτωση που $k=l$. Το γινόμενο αυτό δεν μπορεί να είναι μηδέν, αφού είναι ανάλογο προς την κινητική ενέργεια της δοθείσης μορφής. Έστω

$$\mathbf{A}^{(k)T}\,\mathbf{m}\mathbf{A}^{(k)} = M_{kk} \quad , \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \quad , \tag{2-253}$$

όπου M_{kk} είναι μία θετική σταθερά . Θα αποδείξουμε ότι η M_{kk} είναι η *γενικευμένη μάζα* ή ο *συντελεστής αδράνειας* που αντιστοιχεί στην κύρια συντεταγμένη U_k.

Οι εξισώσεις (2-252) και (2-253) μπορούν να συνοψιστούν στην εξίσωση

$$\mathbf{A}^T\,\mathbf{m}\mathbf{A} = \mathbf{M} \quad , \tag{2-254}$$

όπου υπενθυμίζουμε ότι κάθε στήλη του **A** είναι στήλη ιδιομορφής. Λόγω της ορθογωνικότητας των ιδιοδιανυσμάτων, βλέπουμε ότι ο **M** είναι *διαγώνιος πίνακας* .

Ας θεωρήσουμε πάλι την έκφραση της κινητικής ενέργειας του συστήματος. Από τις Εξ. (2-231) και (2-245) έχουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{m}\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{m}\mathbf{A}\dot{\mathbf{U}} \qquad (2\text{-}255)$$

και χρησιμοποιώντας την Εξ. (2-254), παίρνουμε

$$T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M}\dot{\mathbf{U}} \qquad (2\text{-}256)$$

όπου διαπιστώνουμε ότι **M** είναι το μητρώο της γενικευμένης μάζας που συσχετίζεται με τις κύριες συντεταγμένες.

Μπορούμε να δείξουμε ότι ο μετασχηματισμός στις κύριες συντεταγμένες διαγωνοποιεί επίσης το μητρώο ακαμψίας **k** . Ας γράψουμε τις εξισώσεις (2-249) και (2-250) με τη μορφή

$$\frac{1}{\omega_k^2}\mathbf{A}^{(l)T}\mathbf{k}\mathbf{A}^{(k)} = \mathbf{A}^{(l)T}\mathbf{m}\mathbf{A}^{(k)} \qquad (2\text{-}257)$$

$$\frac{1}{\omega_l^2}\mathbf{A}^{(k)T}\mathbf{k}\mathbf{A}^{(l)} = \mathbf{A}^{(k)T}\mathbf{m}\mathbf{A}^{(l)} \quad , \qquad (2\text{-}258)$$

όπου υποθέτουμε ότι τα ω_k^2 και ω_l^2 δεν είναι μηδέν. Πάλι σημειώνουμε ότι τα **k** και **m** είναι συμμετρικά· και κατά συνέπεια οι στήλες για τις μορφές k και l μπορούν να εναλλαγούν. Κάνοντας αυτή την εναλλαγή στην Εξ. (2-257) και αφαιρώντας την (2-258), παίρνουμε

$$\left(\frac{1}{\omega_k^2} - \frac{1}{\omega_l^2}\right)\mathbf{A}^{(k)T}\mathbf{k}\mathbf{A}^{(l)} = 0 \quad . \qquad (2\text{-}259)$$

Αν οι μορφές είναι διακεκριμένες, έχουμε $\omega_k^2 \neq \omega_l^2$, όπότε

$$\mathbf{A}^{(k)T}\mathbf{k}\mathbf{A}^{(l)} = 0 \quad , \qquad (k \neq l) \quad . \qquad (2\text{-}260)$$

Για την περίπτωση που είτε ω_k^2 ή ω_l^2 είναι μηδέν, παίρνουμε το ίδιο αποτέλεσμα κατ' ευθείαν από τις εξισώσεις (2-249) και (2-250).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Η εξίσωση (2-260) εκφράζει τη συνθήκη ορθογωνικότητας ως προς το μητρώο ακαμψίας **k**. Δηλώνει ότι το βαθμωτό γινόμενο που περιέχει το ιδιοδιάνυσμα δοθείσης μορφής και το διάνυσμα της γενικευμένης ελαστικής δύναμης μιας άλλης μορφής είναι μηδέν. Μ' άλλα λόγια, οι κύριες μορφές δεν είναι ελαστικά συζευγμένες γιατί δεν εκτελείται έργο από τις ελαστικές δυνάμεις της μιας μορφής κατά την μετακίνηση μέσω των μετατοπίσεων μιας άλλης μορφής.

Για την περίπτωση που $k=l$, μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbf{A}^{(k)T}\,\mathbf{k}\mathbf{A}^{(k)} = K_{kk} \quad , \tag{2-261}$$

όπου K_{kk} είναι ο *συντελεστής της γενικευμένης ακαμψίας* για την k-στή μορφή. Το K_{kk} μπορεί να είναι θετικό, μηδέν, ή αρνητικό, ανάλογα με το αν η k-στή μορφή είναι ευσταθής, αδιάφορα ευσταθής ή ασταθής. Οι εξισώσεις (2-260) και (2-261) συγκεντρώνονται στην απλή εξίσωση

$$\mathbf{A}^T\,\mathbf{k}\mathbf{A} = \mathbf{K} \quad , \tag{2-262}$$

όπου **K** είναι ένα $n \times n$ *διαγώνιο* μητρώο.

Η δυναμική ενέργεια μπορεί να γραφεί, χρησιμοποιώντας τις Εξ. (2-229) και (2-245) με τη μορφή

$$V = \frac{1}{2}\,\mathbf{q}^T\,\mathbf{k}\mathbf{q} = \frac{1}{2}\,\mathbf{U}^T\,\mathbf{A}^T\,\mathbf{k}\mathbf{A}\mathbf{U} \quad , \tag{2-263}$$

η οποία συνδυαζόμενη με την Εξ. (2-262) οδηγεί στην

$$V = \frac{1}{2}\,\mathbf{U}^T\,\mathbf{K}\mathbf{U} \quad . \tag{2-264}$$

Άρα το **K** είναι το *μητρώο της γενικευμένης ακαμψίας* που συσχετίζεται με τις κύριες συντεταγμένες.

Συμπερασματικά, ο μετασχηματισμός στις κύριες συντεταγμένες κατέληξε στην διαγωνοποίηση και των δύο μητρώων **m** και **k**. Αυτό σημαίνει ότι οι φυσικές μορφές δεν έχουν ούτε αδρανειακή ούτε ελαστική σύζευξη και κατά συνέπεια είναι ανεξάρτητες σ' αυτή την περίπτωση της κίνησης που γίνεται χωρίς επενέργεια δύναμης.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Για να δώσουμε μεγαλύτερη έμφαση στην ανεξαρτησία των φυσικών μορφών ας γράψουμε τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης σε όρους των κυρίων συντεταγμένων. Από τις εξισώσεις (2-256) και (2-264) βρίσκουμε ότι η συνάρτηση Lagrange L μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$L = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} M_{kk} \dot{U}_k^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} K_{kk} U_k^2 \ . \qquad (2\text{-}265)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση Lagrange, παίρνουμε

$$M_{kk} \ddot{U}_k + K_{kk} U_k = 0 \ , \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \ . \qquad (2\text{-}266)$$

Αυτές οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης δείχνουν ότι οι ελεύθερες ταλαντώσεις ολόκληρου του συστήματος μπορούν να περιγραφούν σε όρους n ανεξάρτητων, χωρίς απόσβεση, συστημάτων δεύτερης τάξης, που το καθένα αντιπροσωπεύει μια απλή μορφή. Σημειώνουμε ότι η φυσική συχνότητα της κάθε μορφής δίνεται από την

$$\omega_k^2 = \frac{K_{kk}}{M_{kk}} \ , \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \ . \qquad (2\text{-}267)$$

Πολλαπλές ρίζες. Στην προηγούμενη συζήτηση δεχτήκαμε ότι οι ρίζες είναι διακριτές. Μ' αυτή την παραδοχή βρήκαμε ότι τα ιδιοδιανύσματα είναι μεταξύ τους ορθογώνια ως προς αμφότερα τα μητρώα **m** και **k** δηλαδή και τα δύο μητρώα διαγωνοποιούνται με μετασχηματισμό που οδηγεί στις κύριες συντεταγμένες.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα *εκφυλισμένο σύστημα*, στο οποίο οι ιδιοτιμές δεν είναι όλες διακεκριμένες. Για παράδειγμα, υποθέτουμε ότι υπάρχει μία διπλή ρίζα τέτοια ώστε $\omega_p^2 = \omega_{p+1}^2$. Αν χρησιμοποιήσουμε την Εξ. (2-241) για να λύσουμε ως προς τις στήλες που αντιστοιχούν στις διακεκριμένες μορφές, βρίσκουμε ότι αυτές οι μορφές είναι μεταξύ τους ορθογώνιες. Αν όμως θέσουμε $\omega_k^2 = \omega_{p_2}^2$ σ' αυτή την εξίσωση, βρίσκουμε ότι ο αντίστροφος πίνακας $[(k_{ij} - \omega_p^2 m_{ij}]^{-1}$ δεν υπάρχει, που

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δείχνει ότι αντίστοιχες (n-1) αλγεβρικές εξισώσεις δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Για να αποφύγουμε αυτό το πρόβλημα, μπορούμε να επιλέξουμε αυθαίρετα δύο συντελεστές πλάτους όταν $\omega_k^2 = \omega_p^2$, για παράδειγμα, μπορούμε να θέσουμε $A_1^{(p)} = 1$, $A_2^{(p)} = 0$. Μετά μπορούμε να λύσουμε για τους (n-2) απομένοντες συντελεστές πλάτους, τις (n-2) ανεξάρτητες εξισώσεις που περιέχονται στην Εξ. (2-240). Αυτό καταλήγει σε μια στήλη $\mathbf{A}^{(p)}$ που είναι ορθογώνια προς όλες τις στήλες που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες μορφές, επειδή οι παραδοχές για τη λήψη της (2-252) ισχύουν ακόμη.

Το πρόβλημα όμως, της εύρεσης μιας τελικής στήλης $\mathbf{A}^{(p+1)}$ που να είναι ορθογώνια ως προς την $\mathbf{A}^{(p)}$ και ως προς τις άλλες στήλες παραμένει. Αυτό το πρόβλημα βρίσκει τη λύση του αν θέσουμε $\mathbf{A}_1^{(p+1)} = 1$ και χρησιμοποιήσουμε τις (n-2) ανεξάρτητες εξισώσεις από την Εξ. (2-240) μαζί με τη συνθήκη ορθογωνικότητας

$$\mathbf{A}^{(p)T}\,\mathbf{m}\mathbf{A}^{(p+1)} = \mathbf{0} \quad . \tag{2-268}$$

Έτσι έχουμε να λύσουμε (n-1) εξισώσεις για τους (n-1) συντελεστές πλάτους του $\mathbf{A}^{(p+1)}$.

Για την πιο γενική περίπτωση των m επαναλαμβανόμενων ριζών, ακολουθείται μια παρόμοια διαδικασία. Το ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{A}^{(p)}$ έχει m αυθαίρετες συνιστώσες, και οι υπόλοιπες (n-m) συνιστώσες λαμβάνονται από τις (n-m) ανεξάρτητες εξισώσεις που περιέχονται στην Εξ. (2-240). Κάθε ιδιοδιάνυσμα που ακολουθεί έχει μια λιγότερη αυθαίρετη συνιστώσα αλλά μια επιπλέον συνθήκη ορθογωνικότητας. Έτσι υπάρχουν επαρκείς εξισώσεις για να πάρουμε τις απαιτούμενες συνιστώσες. Μ' αυτό τον τρόπο παίρνουμε ένα πλήρες σύνολο ορθογωνίων μεταξύ τους ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στις επαναλαμβανόμενες ρίζες.

Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας είναι ένα μητρώο **A**, που διαγωνιοποιεί τόσο το **m** όσο και το **k**. Πρέπει όμως να σημειωθεί, ότι οι λόγοι των πλατών δεν είναι πια μοναδικοί, όπως ήταν στην περίπτωση των διακεκριμένων ριζών, επειδή μερικοί από τους λόγους των πλατών επιλέγονται τώρα αυθαίρετα. Στην πραγματικότητα, κάθε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A, που αντιστοιχεί σε επαναλαμβανόμενη ρίζα αποτελεί μια άλλη πιθανή στήλη του A γι' αυτή τη ρίζα. Οι στήλες όμως που σχηματίζονται μ' αυτό τον τρόπο δεν είναι κατ' ανάγκη μεταξύ τους ορθογώνιες.

Αρχικές συνθήκες. Η μορφή της μεταβατικής λύσης για ένα φυσικό σύστημα με n βαθμούς ελευθερίας έχει δοθεί στην Εξ. (2-242), δηλαδή

$$q_j = \sum_{k=1}^{n} A_{jk}\, C_k \cos(\omega_k t + \varphi_k) \quad ,$$

όπου υποθέτουμε μικρές κινήσεις γύρω από μια θέση ευσταθούς ισορροπίας. Αν υποθέσουμε ότι οι ιδιοτιμές ω_k^2 και το μητρώο **A** έχουν βρεθεί, οι C_i και φ_i, $i=1, 2, ..., n$ θα προσδιοριστούν από τις $2n$ αρχικές συνθήκες. Οι ιδιότητες ορθογωνικότητας των φυσικών μορφών μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την απλούστευση της διαδικασίας.

Ας υποθέσουμε ότι οι αρχικές q_i και $\dot{q}_i$ είναι γνωστές . Από την Εξ. (2-242) βλέπουμε ότι

$$q_j(0) = \sum_{k=1}^{n} A_{jk}\, C_k \cos\varphi_k \quad , \quad (j = 1, 2, ..., n) \qquad (2\text{-}269)$$

και

$$\dot{q}_j(0) = -\sum_{k=1}^{n} A_{jk}\, C_k\, \omega_k \sin\varphi_k \quad , \quad (j = 1, 2, ..., n) \quad . \qquad (2\text{-}270)$$

Πολλαπλασιάζουμε κάθε μια από αυτές τις εξισώσεις επί $m_{ij}A_{jl}$ και αθροίζουμε ως προς i και j. Λόγω των συνθηκών ορθογωνικότητας των εξισώσεων (2-252) και (2-253), δηλαδή

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\, A_{jl}\, A_{jk} = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ M_{ll}, & k = l \end{cases} \quad , \qquad (2\text{-}271)$$

παίρνουμε από την Εξ. (2-269) ότι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_j(0)m_{ij}A_{jl} = M_{ll}C_l\cos\varphi_l$$

ή

$$C_l\cos\varphi_l = \frac{1}{M_{ll}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_j(0)m_{ij}A_{jl} \quad . \qquad (2\text{-}272)$$

Με τον ίδιο τρόπο, παίρνουμε από την Εξ. (2-270) ότι

$$C_l\sin\varphi_l = -\frac{1}{\omega_l M_{ll}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j(0)m_{ij}A_{jl} \quad . \qquad (2\text{-}273)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι οι Εξ. (2-272) και (2-273) διευκολύνουν στον απ' ευθείας προσδιορισμό των C_l και φ_l και άρα δεν απαιτείται η επίλυση του συστήματος των $2n$ εξισώσεων.

Τώρα υποθέτουμε ότι έχουμε ένα σύστημα που έχει μία ιδιοτιμή $\omega_m^2 = 0$, που αντιστοιχεί σε μια μορφή απόλυτα στερεού-σώματος. Υπενθυμίζουμε ότι η επίλυση ως προς q_j περιλαμβάνει σ' αυτή την περίπτωση τον όρο $A_{jm}(C_m t + D_m)$. Αν χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες ορθογωνικότητας για τις φυσικές μορφές, βρίσκουμε ότι

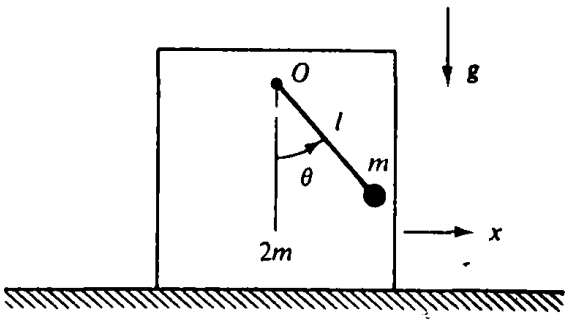
$$C_m = \frac{1}{M_{mm}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j(0)m_{ij}A_{im} \qquad (2\text{-}274)$$

$$D_m = \frac{1}{M_{mm}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n.} q_j(0)m_{ij}A_{im} \quad . \qquad (2\text{-}275)$$

Παράδειγμα 2-12. Για να φωτίσουμε κάπως τη θεωρία των μικρών ταλαντώσεων ας θεωρήσουμε ένα σύστημα που αποτελείται από ένα απλό εκκρεμές μήκους l και μάζας m που περιστρέφεται περί το O που βρίσκεται σ' ένα κιβώτιο μάζας $2m$ (βλέπε Σχ. 2-10). Το κιβώτιο μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβή σε οριζόντια επιφάνεια. Υποθέτοντας επίπεδη κίνηση, και χρησιμοποιώντας τις x και θ ως γενικεύμενες συντεταγμένες, να βρεθούν οι διαφορικές εξισώσεις

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

κίνησης και οι φυσικές μορφές. Ακόμη να βρεθούν οι λύσεις των x και θ ως συναρτήσεις του χρόνου, λαμβάνοντας υπόψη ως αρχικές συνθήκες τις : $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=1$, $\theta(0)=0.1$, $\dot{\theta}(0)=0$.



Σχ. 2-10. Απλό εκκρεμές προσδεμένο επί ολισθαίνοντος κιβωτίου.

Πρώτα ας βρούμε μια έκφραση για την ολική κινητική ενέργεια T. Η T είναι το άθροισμα των επιμέρους κινητικών ενεργειών του κιβωτίου και του εκκρεμούς,

$$T = m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x} + l\dot{\theta})^2 = \frac{3}{2}m\dot{x}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta} + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \quad , \qquad (2\text{-}276)$$

όπου υποθέτουμε ότι $|\theta| << 1$.

Η δυναμική ενέργεια είναι καθ' ολοκληρίαν βαρυτική, και υποθέτοντας μικρές κινήσεις μπορούμε να γράψουμε,

$$V = mgl(1 - \cos\theta) \cong \frac{1}{2}mgl\theta^2 \quad . \qquad (2\text{-}277)$$

Αν πάρουμε τη συνάρτηση Lagrange $L = T - V$ και την αντικαταστήσουμε στην εξίσωση Lagrange, παίρνουμε τις ακόλουθες εξισώσεις κίνησης,

$$\begin{aligned} 3m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} &= 0 \\ ml\ddot{x} + ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta &= 0 \quad . \end{aligned} \qquad (2\text{-}278)$$

Έστω $q_1 \equiv x$ και $q_2 \equiv \theta$. Συγκρίνοντας την Εξ. (2-278) με το τυπικό μητρώο της Εξ. (2-235), βλέπουμε ότι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\mathbf{m} = m\begin{bmatrix} 3 & l \\ l & l^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} = mgl\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

όπου τα δύο μητρώα είναι σταθερά και συμμετρικά.

Για να πάρουμε τις φυσικές μορφές, ας θεωρήσουμε πρώτα λύσεις της μορφής

$$q_j = A_j C \cos(\omega t + \varphi) \quad .$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ. (2-278) ή χρησιμοποιώντας κατ' ευθείαν την Εξ. (2-238) παίρνουμε,

$$\begin{aligned} -3m\omega^2 A_1 - ml\omega^2 A_2 &= 0 \\ -ml\omega^2 A_1 + (mgl - ml^2\omega^2) A_2 &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{2-279}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση προκύπτει από το μηδενισμό της ορίζουσας των συντελεστών, που δίνει

$$2l^2\omega^4 - 3gl\omega^2 = 0 \quad . \tag{2-280}$$

Οι ιδιοτιμές είναι

$$\omega_1^2 = 0, \qquad \omega_2^2 = \frac{3g}{2l} \quad .$$

Από τη δεύτερη εξίσωση των (2-279) έχουμε,

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\omega^2}{g - l\omega^2} \quad . \tag{2-281}$$

Έτσι παίρνουμε

$$\frac{A_{21}}{A_{11}} = 0, \qquad \frac{A_{22}}{A_{12}} = -\frac{3}{l}$$

και αν θέσουμε $A_{11} = A_{12} = 1$ βρίσκουμε ότι το μητρώο A, είναι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3/l \end{bmatrix} .$$

Βλέπουμε ότι κάθε στήλη του **A** είναι ένα ιδιοδιάνυσμα και ότι είναι συνδυασμένο με ένα συγκεκριμένο ω.

Οι συνθήκες ορθογωνικότητας ελέγχονται αν χρησιμοποιήσουμε τις Εξ. (2-254) και (2-262) για να πάρουμε τα **M** και **K**.
Βρίσκουμε ότι

$$\mathbf{M} = m \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = mgl \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9/l^2 \end{bmatrix} .$$

Επιπλέον σημειώνουμε ότι

$$\omega_1^2 = \frac{K_{11}}{M_{11}} = 0 , \qquad \omega_2^2 = \frac{K_{22}}{M_{22}} = \frac{3g}{2l} ,$$

που βρίσκεται σε συμφωνία με τα προηγούμενα αποτελέσματά μας.

Τώρα ας βρούμε τις λύσεις ως προς x και θ ως συναρτήσεις του χρόνου. Αυτές οι λύσεις είναι της μορφής

$$\begin{aligned} x &= A_{11}(C_1 t + D_1) + A_{12} C_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \theta &= A_{21}(C_1 t + D_1) + A_{22} C_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) . \end{aligned} \tag{2-282}$$

Οι σταθερές C_1, C_2, D_1, φ_2 θα προσδιοριστούν από τις αρχικές συνθήκες. Αντί όμως να βρούμε κατ' ευθείαν αυτές τις σταθερές ας χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις (2-274) και (2-275). Έτσι παίρνουμε

$$C_1 = \frac{1}{M_{11}} \dot{x}(0)\, m_{11} A_{11} = 1$$

$$D_1 = \frac{1}{M_{11}} \theta(0)\, m_{12} A_{11} = \frac{l}{30} .$$

Από τις Εξ. (2-272) και (2-273) βρίσκουμε, με τον ίδιο τρόπο, ότι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$C_2 \cos \varphi_2 = \frac{\theta(0)}{M_{22}} (m_{12} A_{12} + m_{22} A_{22}) = - \frac{l}{30}$$

$$C_2 \sin \varphi_2 = \frac{\dot{x}(0)}{\omega_2 M_{22}} (m_{11} A_{12} + m_{21} A_{22}) = 0 \quad ,$$

η οποία δίνει

$$C_2 = \frac{l}{30} \ , \quad \varphi_2 = \pi \ .$$

Τελικά, παίρνουμε τις λύσεις

$$x = t + \frac{l}{30} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{3g}{2l}}\ t \right)$$

$$\theta = \frac{1}{10} \cos \sqrt{\frac{3g}{2l}}\ t \quad .$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι η πρώτη μορφή είναι μορφή κίνησης απόλυτα στερεού-σώματος και συνίσταται σε μια ομοιόμορφη μεταφορά κατά τη θετική x διεύθυνση όπου το θ παραμένει στην τιμή μηδέν. Η δεύτερη μορφή συνίσταται σε μια ταλάντωση των θ και x με συχνότητα $\sqrt{3g/2l}$ με τέτοια πλάτη και φάση ώστε η γραμμική ορμή στη x-διεύθυνση να είναι πάντα μηδέν.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. GOLDSTEIN, H., *Classical Mechanics.* Reading, Mass.: Addison-Wesley Press, Inc., 1950. Οι εξισώσεις Lagrange παράγονται με την εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων. Η εξήγηση είναι σύντομη και σαφής.

2. PARS, L.A., *A Treatise on Analytical Dynamics.* London: William Heinemann, 1965. Η συζήτηση επί των εξισώσεων Lagrange είναι λεπτομερειακή. Σ' αυτή την εξονυχιστική αντιμετώπιση του

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

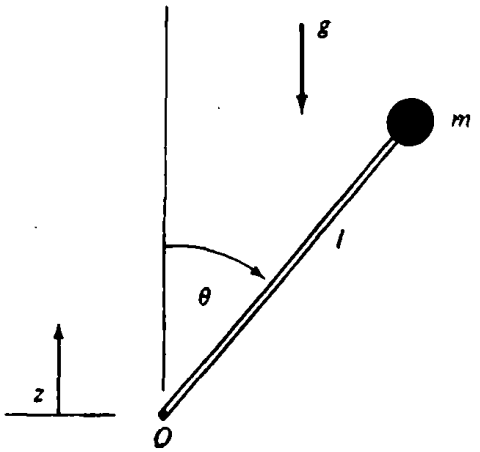
αντικειμένου αυτού του κεφαλαίου παρουσιάζονται εναλλακτικές διατυπώσεις των εξισώσεων Lagrange.

3. WHITTAKER, E. T., *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies,* 4th ed. New York: Dover Publications, Inc., 1944. Η παραγωγή των εξισώσεων Lagrange αρχίζει με τις εξισώσεις Newton. Ο συγγραφέας αναλύει τις διάφορες μορφές και εφαρμογές της θεωρίας. Είναι μια έξοχη αναφορά για το αντικείμενο αυτού του κεφαλαίου.

4. MARION, J. B., *Classical Dynamics of Particles and Systems,* 2nd ed. New York: Academic Press, 1970. Ο συγγραφέας παρουσιάζει μια σύγκριση των προσεγγίσεων της Μηχανικής κατά Newton και Lagrange και σχολιάζει τα κύρια χαρακτηριστικά της μεθόδου Lagrange.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

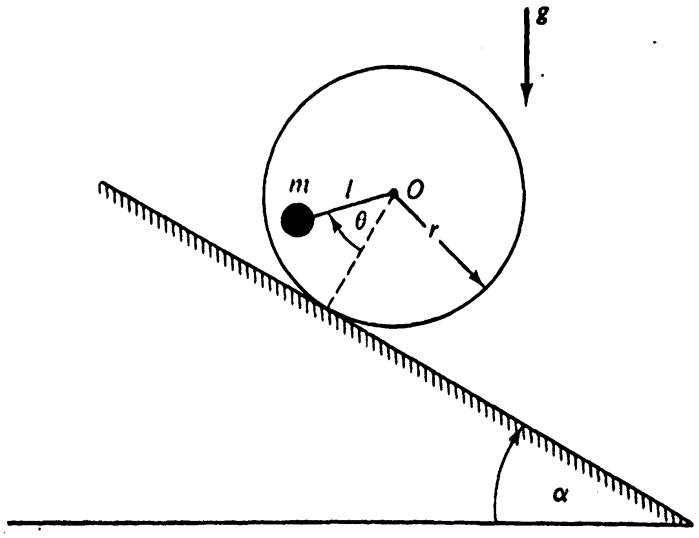
2-1. Ένα ανεστραμμένο εκκρεμές αποτελείται από σωμάτιο μάζας m, που στηρίζεται σε στερεά αβαρή ράβδο μήκους l. Το σημείο περιστροφής O έχει μια κατακόρυφη κίνηση, που δίνεται από τη σχέση $z = A\sin\omega t$. Να βρεθεί η συνάρτηση Lagrange και η διαφορική εξίσωση κίνησης.



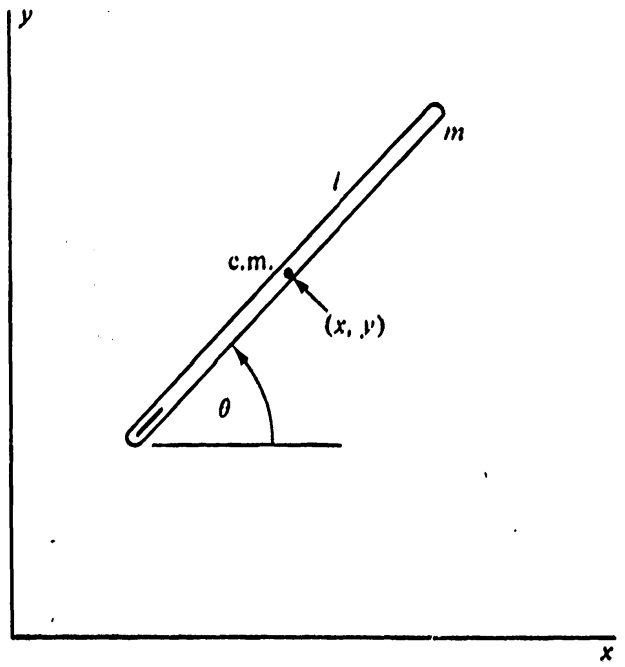
Σχ. Π2-1

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

2-2. Σωμάτιο μάζας m είναι εμφυτευμένο σε απόσταση l από το κέντρο αβαρούς κυκλικού δίσκου ακτίνας r. (Σχ. Π2-2) Ο δίσκος κυλίεται χωρίς να γλιστράει σ' ένα κεκλιμένο επίπεδο με γωνία α ως προς την οριζόντια. Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος Lagrange για να γραφεί η διαφορική εξίσωση κίνησης του συστήματος.



Σχ. Π2-2



Σχ. Π2-3

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

2-3. Μία ομοιογενής ράβδος μάζας m και μήκους l κινείται στο οριζόντιο xy-επίπεδο. Στο ένα άκρο έχει ένα αιχμηρό δεσμό, που δεν επιτρέπει συνιστώσα της ταχύτητας κάθετη προς τη ράβδο σ' αυτό το σημείο.

(α) Να βρεθεί η μη-ολόνομη εξίσωση δεσμού.

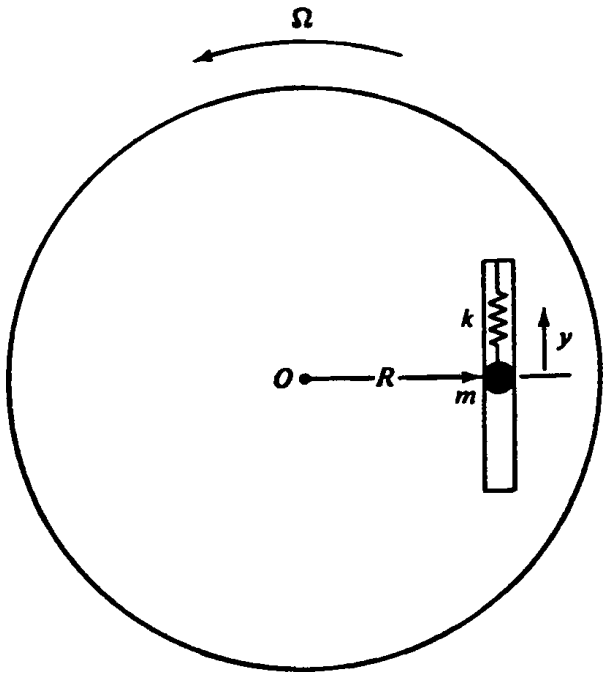
(β) Χρησιμοποιώντας (x, y, θ) ως συντεταγμένες, να βρεθούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης.

(γ) Να αποδειχτεί ότι ο πολλαπλασιαστής Lagrange λ εκφράζει την εγκάρσια δύναμη στη θέση του δεσμού.

2-4. Δίνεται ένα τυπικό ολόνομο σύστημα για το οποίο το T_1 τμήμα της κινητικής ενέργειας έχει τη μορφή

$$T_1 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j = \frac{df}{dt}$$

όπου $f = f(q_1, ..., q_n)$ είναι διπλά διαφορίσιμη. Να αποδειχτεί ότι κάθε T_1 αυτής της μορφής δεν έχει επίδραση στις εξισώσεις κίνησης.



Σχ. Π2-5

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

2-5. Σωμάτιο μάζας m μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβή σε μια ευθεία σχισμή επί μιας οριζόντιας περιστεφόμενης βάσης. Η βάση περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\Omega}$ περί κατακόρυφο άξονα που περνάει από το κέντρο της βάσης O. Η συντεταγμένη y εκφράζει τη θέση του σωματίου ως προς τη βάση και είναι μηδέν όταν το ελατήριο είναι μη εκτεταμένο και το σωμάτιο βρίσκεται στην ελάχιστη απόσταση R από το κέντρο O. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Lagrange να βρεθεί η διαφορική εξίσωση κίνησης. Να αναγνωριστούν οι όροι που δημιουργούνται από τις T_2, T_1, T_0 και V.

2-6. Έστω ένα φυσικό σύστημα με $T=\frac{1}{2}m(q)\dot{q}^2$ και $V=V(q)$. Να αποδειχτεί ότι η σωστή διαφορική εξίσωση κίνησης επιτυγχάνεται αν μηδενίσουμε την παράγωγο ως προς το χρόνο της ολικής ενέργειας $E=T+V$.

2-7. Δίνεται ένα συντηρητικό ολόνομο σύστημα με n βαθμούς ελευθερίας. Να αποδειχτεί ότι ο μηδενισμός της ολικής παραγώγου της ενέργειας ως προς το χρόνο δίνει την ίδια διαφορική εξίσωση όπως αν πολλαπλασιάσουμε την i-εξίσωση Lagrange με $\dot{q}_i$ και μετά αθροίσουμε για όλα τα i.

2-8. Ας θεωρήσουμε την κίνηση ενός σωματίου που ολισθαίνει επί ενός λείου σύρματος κεκαμένου με τη μορφή έλικα που έχει ακτίνα R και σταθερή κλίση γωνίας α ως προς την οριζόντια

(α) Υποθέτοντας ότι ο κεντρικός άξονας της έλικας είναι κατακόρυφος, να βρεθεί ο χρόνος που απαιτείται για να μετακινηθεί το σωμάτιο μια κατακόρυφη απόσταση Η από τη στιγμή που θα αφεθεί ελεύθερο.

(β) Να βρεθεί ο αντίστοιχος χρόνος, στην περίπτωση που η έλικα περιστρέφεται περί τον κατακόρυφο άξονα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\Omega}$ και το σωμάτιο πάλι απελευθερώνεται με μηδενική ταχύτητα ως προς την έλικα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

2-9. Σωμάτιο μάζας m μπορεί να ολισθαίνει πάνω σε λείο σταθερό σύρμα που έχει τη μορφή $y=3x^2$, όπου η βαρύτητα ενεργεί στην αρνητική διεύθυνση του y-άξονα.

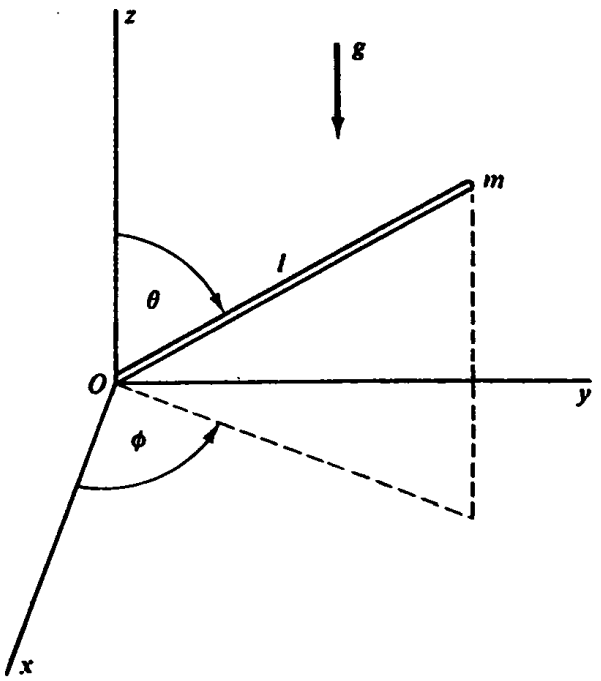
(α) Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος Lagrange για την εύρεση των εξισώσεων κίνησης.

(β) Αν οι αρχικές συνθήκες είναι $\dot{y}(0)=0$, $y(0)=y_0$ να βρεθεί η μέγιστη δεσμική δύναμη κατά τη διάρκεια της προκύπτουσας κίνησης.

2-10. Η θέση ενός σωματίου μάζας m δίνεται από τις Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z). Αν υποθέσουμε μία συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $V=\frac{1}{2}k(x^2+y^2+z^2)$ και ένα δεσμό που περιγράφεται από την εξίσωση $2\dot{x}+3\dot{y}+4\dot{z}+5=0$ να βρεθούν:

(α) οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης

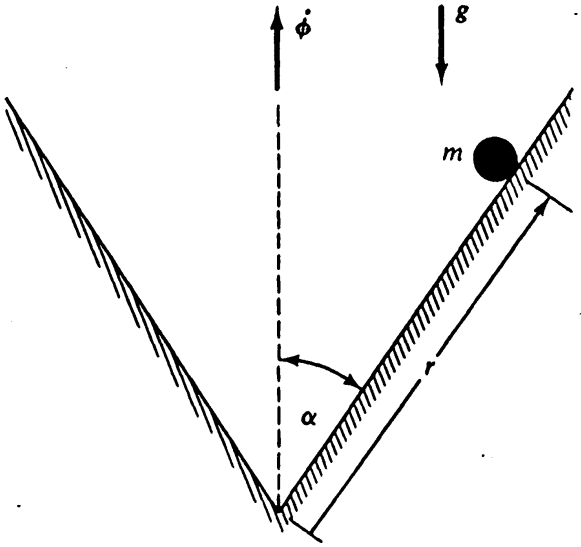
(β) η ταχύτητα του κινούμενου δεσμού.



Σχ. Π2-11

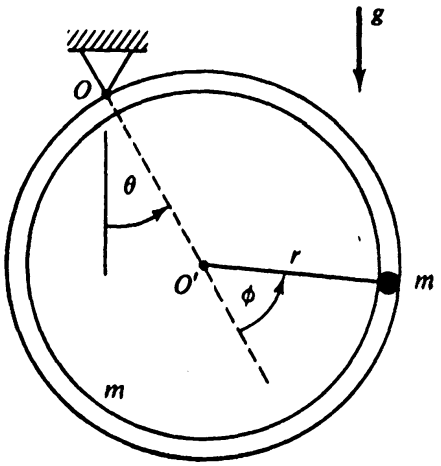
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

2-11. Μια ομοιογενής ράβδος μάζας m και μήκους l περιστρέφεται ελεύθερα περί σταθερό σημείο O. Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος Routh για να υπολογιστεί η συντεταγμένη φ και να βρεθεί η διαφορική εξίσωση κίνησης για το θ.



Σχ. Π2-12

2-12. Χρησιμοποιώντας τις (r, φ) ως συντεταγμένες και τη μέθοδο Lagrange να βρεθούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης. Να αποδειχτεί ότι αυτές οι εξισώσεις μπορούν να αναχθούν σε μια διαφορική εξίσωση για το r που είναι ταυτόσημη μ' εκείνη που προέκυψε με τη μέθοδο Routh.



Σχ. Π2-13

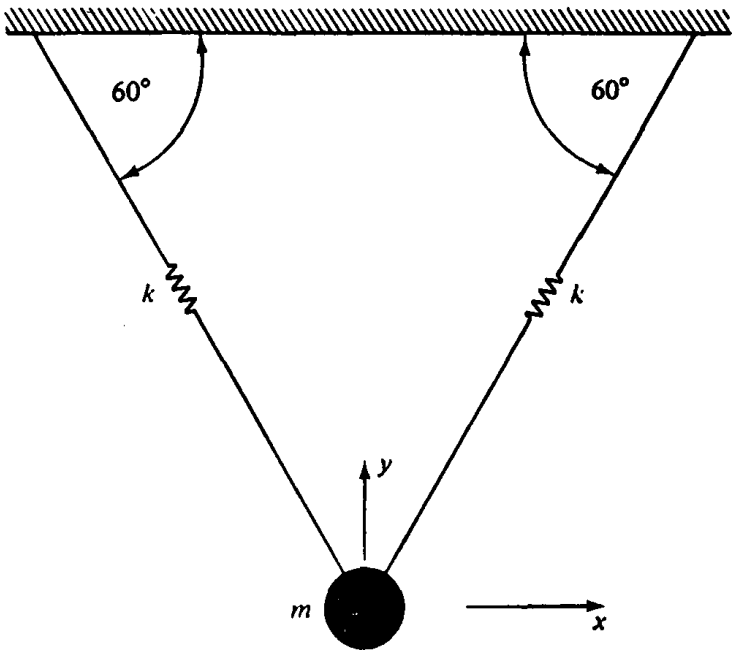
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

2-13. Ένας μικρός σωλήνας μάζας m είναι κεκαμένος και σχηματίζει κύκλο ακτίνας r, περιστρέφεται δε περί σταθερό σημείο O που είναι στην περιφερειά του. Σωμάτιο μάζας m μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβή μέσα στο σωλήνα.

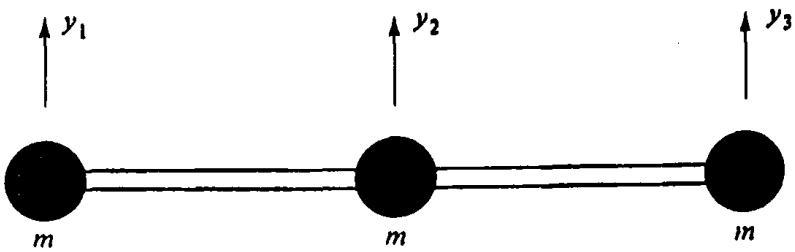
(α) Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος Lagrange για να βρεθούν οι διαφορικές εξισώσεις για την επίπεδη κίνηση.

(β) Αν υποθέσουμε μικρές κινήσεις να βρεθούν οι φυσικές μορφές και οι αντίστοιχοι λόγοι των πλατών.

2-14. Ας θεωρήσουμε μικρή κίνηση σε επίπεδο γύρω από τη θέση στατικής ισορροπίας του συστήματος. Να βρεθούν οι φυσικές μορφές και οι αντίστοιχοι λόγοι των πλατών.



Σχ. Π2-14



Σχ. Π2-15

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

2-15. Ας θεωρήσουμε τις μικρές επίπεδες εγκάρσιες ταλαντώσεις τριών σωματίων που συνδέονται με ελαστική ράβδο και ας υποθέσουμε, ότι η δυναμική ενέργεια είναι $V=\frac{1}{2}k\,(y_1-2y_2+y_3)^2$, όπου η σταθερά k είναι ανάλογη της σταθεράς ακαμψίας. Να βρεθούν οι φυσικές συχνότητες του συστήματος και οι αντίστοιχες ορθογώνιες ιδιομορφές.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

3

ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ LAGRANGE

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται κάποιες ειδικές εφαρμογές των εξισώσεων Lagrange με σκοπό να απεικονίσουν την ποικιλία των προβλημάτων που μπορούν να αναλυθούν με τη μέθοδο Lagrange. Ακόμη επιτρέπουν μια περαιτέρω συζήτηση κάποιων βασικών αντικειμένων που περιλαμβάνει η κλασική δυναμική π.χ. δυνατό έργο, έκφραση των δεσμών, αναπαράσταση των ενεργειακών μεθόδων.

3-1. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΑΠΩΛΕΙΩΝ ΤΟΥ RAYLEIGH

Οι εξισώσεις Lagrange με τη μορφή που δίνονται στην Εξ. (2-27) εφαρμόζονται σε ολόνομα συστήματα των οποίων οι γενικευμένες δυνάμεις ορίζονται από συνάρτηση δυναμικού $V(q_i, t)$, σύμφωνα με την Εξ. (2-24), δηλαδή

$$Q_i = - \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad .$$

Αν επιπροσθέτως, υπάρχουν εφαρμοζόμενες δυνάμεις που είναι συναρτήσεις των $\dot{q}_i$, αυτές οι δυνάμεις συχνά εκφράζονται από τις Q'_i και οι εξισώσεις κίνησης παίρνουν τη μορφή,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q'_i \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad , \qquad (3\text{-}1)$$

όπως έχει βρεθεί στην Εξ. (2-29).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Μια άλλη προσέγγιση, εντούτοις, μπορεί να εφαρμοστεί σε συστήματα στα οποία κάθε Q'_i είναι της μορφής

$$Q'_i = - \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(q_k, t)\dot{q}_j \quad , \tag{3-2}$$

όπου c_{ij} είναι γνωστοί ως *συντελεστές απόσβεσης* και σχηματίζουν ένα πραγματικό συμμετρικό μητρώο. Οι γενικευμένες αυτές δυνάμεις τριβής έχουν ως αποτέλεσμα *απώλεια ενέργειας* όταν κάποια από τις Q'_i είναι διάφορη του μηδενός.

Ας ορίσουμε τη *συνάρτηση απωλειών Rayleigh* $F = (q_i, \dot{q}_i, t)$ με τον ακόλουθο τρόπο:

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, \dot{q}_i\, \dot{q}_j \quad . \tag{3-3}$$

Από τις Εξ. (3-1) - (3-3) βλέπουμε ότι οι εξισώσεις κίνησης μπορούν να γραφούν με τη μορφή

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad . \tag{3-4}$$

Πρέπει να σημειωθεί, φυσικά, ότι οι δυνάμεις τριβής είναι οι μόνες γενικευμένες δυνάμεις, που δεν ορίζονται από τη συνάρτηση δυναμικού V .

Ο ρυθμός με τον οποίο οι δυνάμεις τριβής εκτελούν έργο επί του συστήματος είναι

$$\sum_{i=1}^{n} Q'_i\, \dot{q}_i = - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, \dot{q}_i\, \dot{q}_j = -2F \quad . \tag{3-5}$$

Άρα, η συνάρτηση απωλειών είναι ίση με το ήμισυ του στιγμιαίου ρυθμού απωλειών της ολικής μηχανικής ενέργειας. Αφού ο ρυθμός της απώλειας ενέργειας πρέπει να είναι θετικός ή μηδέν για κάθε χρονική

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

στιγμή, η συνάρτηση F είναι ή θετικά ορισμένη συνάρτηση ή ημιθετικά ορισμένη συνάρτηση των $\dot{q}_j$. Επιπλέον, η τιμή της F είναι αναλλοίωτος ως προς ένα μετασχηματισμό συντεταγμένων αφού ο ρυθμός της απώλειας ενέργειας είναι ανεξάρτητος των συντεταγμένων που χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν τη διάταξη του συστήματος.

Μια συνήθης εφαρμογή της συνάρτησης απωλειών του Rayleigh είναι εκείνη που σχετίζεται με την ανάλυση των μικρών ταλαντώσεων ενός *φυσικού συστήματος* στο οποίο έχει προστεθεί μηχανισμός απωλειών. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σύστημα με συνάρτηση Lagrange

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_j \;-\; \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k_{ij}\,q_i\,q_j \quad , \tag{3-6}$$

όπου m_{ij} και k_{ij} είναι σταθερές και τα αντίστοιχα μητρώα $\mathbf{m}$ και $\mathbf{k}$ είναι συμμετρικά.

Αν χρησιμοποιηθούν οι Εξ. (3-3), (3-4) και (3-6) τότε βρίσκουμε ότι οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης είναι

$$\sum_{i=1}^{n} (m_{ij}\,\ddot{q}_j + c_{ij}\,\dot{q}_j + k_{ij}\,q_j) = 0\,, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad , \tag{3-7}$$

ή με συμβολισμό μητρώων,

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{k}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad . \tag{3-8}$$

Ας θεωρήσουμε τώρα λύσεις της μορφής

$$q_j = A_j\,C\,e^{\lambda t} \quad , \tag{3-9}$$

και ας τις αντικαταστήσουμε στις εξισώσεις κίνησης. Μετά την απαλοιφή του κοινού παράγοντα $Ce^{\lambda t}$, παίρνουμε

$$(\lambda^2\mathbf{m} + \lambda\,\mathbf{c} + \mathbf{k})\mathbf{A} = 0 \quad , \tag{3-10}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

όπου **A** είναι ένα μητρώο στήλη. Αυτές οι n αλγεβρικές εξισώσεις έχουν μη τετριμμένη λύση αν και μόνον αν η ορίζουσα των συντελεστών είναι ίση μη μηδέν, δηλαδή

$$|(\lambda^2\mathbf{m} + \lambda\,\mathbf{c} + \mathbf{k})| = 0 \quad . \tag{3-11}$$

Αυτή είναι η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος και είναι βαθμού $2n$ ως προς λ . Αφού οι συντελεστές είναι πραγματικοί, οι $2n$ - ρίζες είναι πραγματικές ή μιγαδικές συζυγείς κατά ζεύγη. Αν κάνουμε τη συνήθη παραδοχή ότι $A_1^{(k)} = 1$ για κάθε ρίζα λ_k τότε μπορούμε να λύσουμε ως προς τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{A}^{(k)}$ χρησιμοποιώντας την Εξ. (3-10). Τα $A_j^{(k)}$ είναι πραγματικά για πραγματικές ρίζες και μιγαδικά, γενικά, για μιγαδικές ρίζες.

Η γενική λύση για τις ελεύθερες ταλαντώσεις λαμβάνεται με υπέρθεση των λύσεων που αντιστοιχούν στην κάθε μια από τις $2n$-ρίζες. Έτσι έχουμε

$$q_j = \sum_{i=1}^{n} A_{jk}\, C_k\, e^{\lambda_k t} \quad , \quad (j = 1, 2, \ldots, n)\,, \tag{3-12}$$

όπου $A_{jk} \equiv A_j^{(k)}$, με τη θεώρηση ότι όλες οι ρίζες είναι διακεκριμένες. Οι $2n$ συντελεστές C_k είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί, κατά ζεύγη συζυγείς, και μπορούν να προσδιοριστούν από τις $2n$ αρχικές συνθήκες.

Ας εξετάσουμε τώρα το αποτέλεσμα της απόσβεσης επί της ευστάθειας των λύσεων ενός φυσικού συστήματος. Ας θεωρήσουμε πρώτα ότι F και V είναι *θετικά ορισμένες*. Η συνολική ενέργεια $T+V$ μειώνεται συνεχώς λόγω των απωλειών εκτός αν $\dot{\mathbf{q}} = 0$ ή $T = 0$. Αφού η μόνη θέση ισορροπίας είναι για $\mathbf{q} = 0$, δηλαδή αυτή που αντιστοιχεί στην ελάχιστη δυναμική ενέργεια $V = 0$, το σύστημα θα πρέπει να προσεγγίζει την κατάσταση $T = V = 0$ όταν το t θα προσεγγίζει το άπειρο. Αυτός ο τύπος ευστάθειας είναι γνωστός ως *ασυμπτωτική ευστάθεια*. Για την περίπτωση ενός γραμμικού συστήματος αυτό συνεπάγεται ότι όλες οι ρίζες έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος ενώ στο αρχικό μη-αποσβεννύμενο σύστημα όλες οι ρίζες πρέπει να είναι φανταστικές.

Αν θεωρήσουμε ότι η F είναι θετικά ορισμένη αλλά όχι και η V τότε δεν έχουμε ασυμπτωτική ευστάθεια. Πράγματι, αν το μη-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

αποσβεννύμενο σύστημα είναι ασταθές αυτό θα παραμείνει ασταθές και μετά την πρόσθεση του μηχανισμού απωλειών. Μ' άλλα λόγια, κάθε θετική πραγματική ρίζα παραμένει θετική. Το γεγονός αυτό συμβαίνει στην περίπτωση αυτή, γιατί η V δεν έχει μια ελάχιστη τιμή για $\mathbf{q} = 0$.

Τελικά, αν η V είναι θετικά ορισμένη αλλά η $\mathbf{F}$ είναι θετικά ημιορισμένη, το σύστημα είναι δυνατόν να μην είναι ασυμπτωτικά ευσταθές γιατί έχει τη δυνατότητα να βρει μια συνεχή κίνηση για την οποία η ενέργεια απωλειών είναι μηδέν. Για παράδειγμα, είναι δυνατόν να υπάρχει ένα ζεύγος φανταστικών ριζών που να αντιστοιχεί σε μια μη-αποσβεννύμενη ημιτονοειδή ταλάντωση και αν ακόμη το σύστημα περιλαμβάνει στοιχεία απωλειών.

3-2. ΩΣΤΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Η μελέτη της ωστικής κίνησης περιλαμβάνει μια ανάλυση της απόκρισης των μηχανικών συστημάτων σε δυνάμεις πολύ μεγάλου μέτρου και μικρής διάρκειας δράσης. Αυτές οι *ωστικές δυνάμεις* εμφανίζονται συχνά ως αποτέλεσμα μιας κρούσης, μπορεί όμως κάποιος να φανταστεί και άλλες πηγές τους όπως για παράδειγμα μια έκρηξη ή μια ξαφνική εφαρμογή ενός δεσμού. Αν το συζητούμενο σύστημα περιλαμβάνει στερεά σώματα ή άλλους στερεούς δεσμούς, η εφαρμογή γνωστών εξωτερικών ωστικών δυνάμεων θα έχει συνήθως ως αποτέλεσμα άγνωστες ωστικές δεσμικές δυνάμεις . Όπως έχει παρατηρηθεί, η μέθοδος Lagrange επιτρέπει συχνά τον υπολογισμό της κίνησης ενός συστήματος χωρίς την επίλυση ως προς τις δεσμικές δυνάμεις. Άρα, η χρήση των εξισώσεων Lagrange είναι ιδιαίτερα κατάλληλη για την ανάλυση της ωστικής κίνησης των συστημάτων με στερεούς δεσμούς.

Ώση και ορμή. Στη συνέχεια θα εισάγουμε κάποια αναγκαία στοιχεία από μη δυναμική θεωρία όπως επίσης και κάποιους συμβολισμούς που θεωρούνται απαραίτητοι για τη συζήτηση της μεθόδου Lagrange. Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα N - σωματίων των οποίων οι θέσεις αναφορικά μ' ένα σταθερό σημείο O σ' ένα αδρανειακό σύστημα, δίδονται από τα διανύσματα θέσεις $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_N$. Η βασική εξίσωση κίνησης για το κέντρο μάζας είναι

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} \quad , \tag{3-13}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

όπου **F** είναι η *ολική εξωτερική δύναμη* που ενεργεί επί του συστήματος, και η *ολική γραμμική ορμή* είναι

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i = m\dot{\mathbf{r}}_c \quad . \tag{3-14}$$

Με m συμβολίζεται η ολική μάζα του συστήματος και με $\mathbf{r}_c$ το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας του.

Αν ολοκληρώσουμε την Εξ. (3-13) ως προς το χρόνο, από το t_1 στο t_2, θα πάρουμε

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{p}}\, dt = \mathbf{p}(t_2) - \mathbf{p}(t_1)$$

ή

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 \quad , \tag{3-15}$$

όπου η *ολική ώση* $\hat{\mathbf{F}}$ των εξωτερικών δυνάμεων είναι

$$\hat{\mathbf{F}} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt \quad . \tag{3-16}$$

Η αρχή της γραμμικής ώσης και ορμής είναι: Η μεταβολή της ολικής γραμμικής ορμής ενός συστήματος κατά τη διάρκεια ενός δοσμένου χρονικού διαστήματος είναι ίση με την ολική ώση των εξωτερικών δυνάμεων που ενεργούν στο ίδιο χρονικό διάστημα.

Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια τη βασική εξίσωση περιστροφής του συστήματος, δηλαδή

$$\mathbf{M} = \dot{\mathbf{H}} \quad , \tag{3-17}$$

όπου **M** είναι η ροπή των εξωτερικών δυνάμεων και **H** είναι η *ολική στροφορμή* που δίνεται από την Εξ. (1-123) ή την Εξ. (1-126). Το σημείο αναφοράς είναι το ίδιο τόσο για την **M** όσο και για την **H** και μάλιστα θεωρείται ότι ή (1) σταθερό ως προς ένα αδρανειακό σύστημα ή (2) ότι βρίσκεται στο κέντρο μάζας.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Πρέπει να σημειωθεί ότι η μορφή της Εξ. (3-17) είναι παρόμοια με εκείνη της Εξ. (3-13). Αν ολοκληρώσουμε την Εξ. (3-17) ως προς το χρόνο, από το t_1 στο t_2, θα πάρουμε

$$\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1 \quad , \tag{3-18}$$

όπου η *γωνιακή ώση* είναι

$$\hat{\mathbf{M}} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}\, dt \quad . \tag{3-19}$$

Η Εξ. (3-18) αποτελεί μια διατύπωση *της αρχής της γωνιακής ώσης και στροφορμής: Η μεταβολή της ολικής στροφορμής ενός συστήματος κατά τη διάρκεια ενός δοσμένου χρονικού διαστήματος είναι ίση με την ολική γωνιακή ώση των εξωτερικών δυνάμεων που ενεργούν στο ίδιο χρονικό διάστημα υπό τον όρο ότι το σημείο αναφοράς για τις* $\hat{\mathbf{M}}$ *και* $\mathbf{H}$ *είναι ένα σταθερό σημείο ως προς ένα αδρανειακό σύστημα ή το κέντρο μάζας του συστήματος.*

Είναι πολύ σημαντικό να τονιστεί ότι αρχές που εκφράζονται από τις Εξ. (3-15) και (3-18) ισχύουν για χρονικά διαστήματα που είναι αυθαίρετα μεγάλα και για δυνάμεις και ροπές που δεν είναι από τη φύση τους ωστικές. Οι αρχές αυτές ισχύουν επίσης και για την περίπτωση ωστικών δυνάμεων και ροπών που εφαρμόζονται για πολύ μικρά χρονικά διαστήματα,πράγμα για το οποίο κυρίως επικεντρώνεται το ενδιαφέρον μας. Ας θεωρήσουμε ότι οι ξαφνικές μεταβολές $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$ και $\Delta\mathbf{H} = \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1$ συμβαίνουν κατά τη διάρκεια $\Delta t = t_2 - t_1$. Τότε οι Εξ. (3-15) και (3-18) μπορούν να γραφούν με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\Delta\mathbf{p} = \hat{\mathbf{F}} \tag{3-20}$$

$$\Delta\mathbf{H} = \hat{\mathbf{M}} \quad . \tag{3-21}$$

Αν οι διανυσματικές αυτές εξισώσεις εκφραστούν σε όρους των αντιστοίχων βαθμωτών συνιστωσών θα πάρουμε ένα σύνολο

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

αλγεβρικών εξισώσεων που είναι γραμμικές ως προς τις μεταβολές της ταχύτητας στα διάφορα σημεία του συστήματος. Αυτές οι *μεταβολές της ταχύτητας* είναι πεπερασμένες και έτσι οι πραγματικές ταχύτητες παραμένουν πεπερασμένες πράγμα που έχει ως αποτέλεσμα, μια ασήμαντη μεταβολή στη διάταξη του συστήματος κατά το χρονικό διάστημα Δt. Ως συνέπεια, έχουμε ότι οι συντελεστές αδράνειας (μαζών και ροπών αδράνειας) μπορούν να θεωρηθούν ως *σταθερές* κατά τη διάρκεια του χρονικού αυτού διαστήματος. Επιπλέον, οποιεσδήποτε *πεπερασμένες δυνάμεις*, τέτοιες όπως οι βαρυτικές και ελαστικές δυνάμεις, είναι μικρές συγκρινόμενες με τις εφαρμοζόμενες ωστικές δυνάμεις και μπορούν να παραληφθούν κατά τον προσδιορισμό των $\hat{\mathbf{F}}$ και $\hat{\mathbf{M}}$. Πρέπει ακόμα να σημειωθεί ότι οι $\hat{\mathbf{F}}$ και $\hat{\mathbf{M}}$ είναι δυνατόν να περιλαμβάνουν και ωστικές δεσμικές δυνάμεις.

Μέθοδος Lagrange. Αφού έχουμε εξετάσει μερικά από τα αποτελέσματα που μπορούν να προκύψουν από απ' ευθείας εφαρμογή των νόμων κίνησης του Newton, ας επιστρέψουμε τώρα στην αντιμετώπιση της ωστικής κίνησης κατά Lagrange. Υποθέτουμε ότι η διάταξη ενός μηχανικού συστήματος προσδιορίζεται από τις *ανεξάρτητες* γενικευμένες συντεταγμένες $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Από την Εξ. (2-23) μπορούμε να γράψουμε,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \ , \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \ , \tag{3-22}$$

όπου Q_i οφείλονται στις *εφαρμοζόμενες δυνάμεις*.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι ωστικές δυνάμεις εφαρμόζονται στο σύστημα κατά το χρονικό διάστημα Δt. Από την Εξ. (1-138) έχουμε ότι η γενικευμένη ορμή δίνεται από την

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \ . \tag{3-23}$$

Άρα, αν ολοκληρώσουμε την Εξ. (3-22) στο χρονικό διάστημα Δt, παίρνουμε

$$\int_{t_1}^{t_1+\Delta t} \left[\dot{p}_i - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right] dt = \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} Q_i \, dt$$

ή

$$\Delta p_i = \hat{Q}_i \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad , \tag{3-24}$$

όπου Δp_i είναι η μεταβολή της p_i κατά το Δt και όπου η *γενικευμένη ώση* $\hat{Q}_i$ δίνεται από την

$$\hat{Q}_i = \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} Q_i \, dt \quad . \tag{3-25}$$

Ο όρος $-\partial T / \partial q_i$ στην υπό ολοκλήρωση έκφραση μπορεί να παραληφθεί γιατί είναι πεπερασμένος για $t = t_1$ και άρα

$$\lim_{\Delta t \to 0} \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} \frac{\partial T}{\partial q_i} \, dt = 0 \quad . \tag{3-26}$$

Αν ανακαλέσουμε το γεγονός ότι q_i και t δεν μεταβάλλονται κατά τη διάρκεια του Δt, από την Εξ. (2-30) παίρνουμε ότι

$$\Delta p_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \, \Delta \dot{q}_j \, , \tag{3-27}$$

όπου οι συναρτήσεις $m_{ij}(q, t)$ και $\alpha_i(q, t)$ θεωρούνται συνεχείς. Τότε, από τις Εξ. (3-24) και (3-27), βρίσκουμε ότι

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij} \, \Delta \dot{q}_j = \hat{Q}_i \, , \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad . \tag{3-28}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Εδώ έχουμε n αλγεβρικές εξισώσεις με n αγνώστους *τις* $\Delta\dot{q}_i$. Αν χρησιμοποιήσουμε μητρωϊκό συμβολισμό, μπορούμε να γράψουμε

$$\Delta\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{m}^{-1}\,\hat{\mathbf{Q}} \quad . \tag{3-29}$$

Το μητρώο ακαμψίας **m** είναι θετικά ορισμένο και άρα υπάρχει το αντίστροφό του. Πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι οι εξισώσεις είναι γραμμικές και άρα μπορεί να εφαρμοστεί η αρχή της υπέρθεσης· δηλαδή η μεταβολή $\Delta\dot{\mathbf{q}}$ που οφείλεται στο άθροισμα $\hat{\mathbf{Q}}_1 + \hat{\mathbf{Q}}_2$ είναι ίση με το άθροισμα των $\Delta\dot{\mathbf{q}}$ που οφείλονται στις $\hat{\mathbf{Q}}_1$ και $\hat{\mathbf{Q}}_2$ όταν αυτές εφαρμόζονται ξεχωριστά στο σύστημα.

Η γενικευμένη ώση $\hat{\mathbf{Q}}_i$ βρίσκεται με τρόπο παρόμοιο εκείνου που χρησιμοποιήθηκε για την Q_i. Για παράδειγμα, υποθέτουμε ότι ένα ολόνομο σύστημα N σωματιδίων περιγράφεται σε όρους των Καρτεσιανών συντεταγμένων $x_1, x_2, \ldots, x_{3N}$ και ότι οι αντίστοιχες ώσεις $\hat{F}_1, \hat{F}_2, \ldots, \hat{F}_{3N}$ εφαρμόζονται στο σύστημα κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος Δt. Τότε, χρησιμοποιώντας τις Εξ. (1-73), (3-16) και (3-25), παίρνουμε

$$\hat{Q}_i = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_k}{\partial q_i}\,\hat{F}_k \quad , \tag{3-30}$$

όπου οι εξισώσεις μετασχηματισμού που συνδέουν τις x_i με τις q_i είναι της μορφής

$$x_k = x_k(q_i, t)\,, \quad (k = 1, 2, \ldots, 3N) \quad . \tag{3-31}$$

Αν οι q_i είναι *ανεξάρτητες* και αν οι δεσμοί επί των x_i δεν παράγουν έργο, τότε οι δεσμικές ώσεις δεν θα συνεισφέρουν στις $\hat{Q}_i$.

Συνήθεις δεσμοί. Ας διευρύνουμε τώρα τη συζήτηση για την ωστική κίνηση ώστε να συμπεριλάβουμε συστήματα για τα οποία οι q_i *δεν είναι ανεξάρτητες.* Αν οι δεσμοί είναι ολόνομοι ή μη-ολόνομοι, θα εκφράσουμε τις m δεσμικές εξισώσεις με τη μορφή

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}\, \dot{q}_i + \alpha_{jt} = 0 \quad , \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \quad , \tag{3-32}$$

όπου οι α_{ji} και α_{jt} είναι συνεχείς συναρτήσεις των q_i και t. Οι εξισώσεις Lagrange για το σύστημα αυτό μπορούν να γραφούν με τη μορφή

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + C_i \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad , \tag{3-33}$$

όπου C_i είναι γενικευμένες δεσμικές δυνάμεις που δίνονται από τις

$$C_i = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \alpha_{ji} \quad , \tag{3-34}$$

και λ_j είναι πολλαπλασιαστές του Lagrange. Οι Q_i είναι γενικευμένες δυνάμεις που συνδέονται με τις *εφαρμοσμένες δυνάμεις* με την Εξ. (1-73).

Ας θεωρήσουμε την έκφραση του δυνατού έργου

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i - C_i\right] \delta q_i \quad . \tag{3-35}$$

Από την Εξ. (3-33) είναι φανερό ότι $\delta W = 0$ για κάθε σύνολο δq_i αφού όλοι οι συντελεστές είναι μηδέν. Αν όμως θεωρήσουμε ότι *οι δεσμοί δεν επιτελούν έργο* και οι δq_i συμμορφώνονται με τους *στιγμιαίους δεσμούς*, τότε

$$\sum_{i=1}^{n} C_i\, \delta q_i = 0 \tag{3-36}$$

και παίρνουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i\right]\delta q_i = 0 \quad . \tag{3-37}$$

Το σπουδαίο αυτό αποτέλεσμα είναι μια γενίκευση της υπό μορφήν Lagrange αρχής του d' Alembert που δίνεται από την Εξ. (1-63).

Στη διαδικασία διατύπωσης της Εξ. (3-37) δεν θεωρήσαμε ότι οι εφαρμοσμένες δυνάμεις ή οι δεσμικές δυνάμεις είναι ωστικής φύσης. Ας θεωρήσουμε όμως τώρα ότι εφαρμόζονται στο σύστημα ωστικές δυνάμεις κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος από t_1 στο $t_1+\Delta t$. Μετά από ολοκλήρωση ως προς το χρόνο στο διάστημα Δt της Εξ. (3-37), παίρνουμε

$$\sum_{i=1}^{n}(\Delta p_i - \hat{Q}_i)\delta q_i = 0 \quad , \tag{3-38}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την ίδια διαδικασία όπως αυτή για την εύρεση της Εξ. (3-24).

Στο σημείο αυτό είναι σκόπιμο να αναφερθούμε σε όρους *δυνατών ταχυτήτων* παρά σε όρους δυνατών μετατοπίσεων. Ας θεωρήσουμε ένα σύνολο δυνατών ταχυτήτων, όπου κάθε συνιστώσα u_i είναι ανάλογη της αντίστοιχης δq_i αλλά όχι κατ' ανάγκη μικρή. Με τη βοήθεια της Εξ. (3-27) μπορούμε να γράψουμε την Εξ. (3-38) με τη μορφή

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n} m_{ij}(\dot{q}_j - \dot{q}_{j0}) - \hat{Q}_i\right]u_i = 0 \quad , \tag{3-39}$$

όπου

$$\Delta\dot{q}_j = \dot{q}_j - \dot{q}_{j0} \tag{3-40}$$

και οι u_i ικανοποιούν τους *στιγμιαίους* δεσμούς, δηλαδή

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\,u_i = 0 \quad , \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \quad , \tag{3-41}$$

οι δε $\dot{q}_i$ συμμορφώνονται με τις πραγματικές δεσμικές συνθήκες, που δίνονται από την Εξ. (3-32).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Για να συνοψίσουμε τη μέθοδο, ας θεωρήσουμε ότι η διάταξη και οι ταχύτητες $\dot{q}_{j0}$ δίνονται τη χρονική στιγμή t_1 όπως επίσης και οι γενικευμένες ωστικές συνιστώσες $\hat{Q}_i$. Μπορούμε να εκλέξουμε $(n-m)$-*ανεξάρτητα* σύνολα συνιστωσών u_i, δυνατών ταχυτήτων, που να ικανοποιούν τις στιγμιαίες δεσμικές συνθήκες που δίνονται από την Εξ. (3-41). Άρα, παίρνουμε $(n-m)$ εξισώσεις της μορφής της Εξ. (3-39) και τις m δεσμικές εξισώσεις που δίνονται από τις Εξ. (3-32). Οι n αυτές εξισώσεις μπορούν να λυθούν ως προς τις $\dot{q}_i$ $i = 1, 2, \ldots, n$, δηλαδή τις συνιστώσες της ταχυτήτας αμέσως μετά τήν εφαρμογή των ώσεων. Πρέπει να σημειωθεί ότι οι q_i θεωρούνται ότι παραμένουν αμετάβλητες κατά τη διάρκεια του μικρού χρονικού διαστήματος Δt.

Μια εναλλακτική αντιμετώπιση των συστημάτων με δεσμούς επί των οποίων ενεργούν ώσεις είναι η μέθοδος *των πολλαπλασιαστών του Lagrange*. Ολοκληρώνοντας την Εξ. (3-33) ως προς το χρόνο και για το διάστημα Δt παίρνουμε

$$\Delta p_i = \hat{Q}_i + \hat{C}_i \quad , (i = 1, 2, \ldots, n) \quad , \tag{3-42}$$

όπου $\hat{C}_i$ είναι *γενικευμένες δεσμικές* ώσεις που δίνονται από την εξίσωση

$$\hat{C}_i = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \alpha_{ki} \tag{3-43}$$

και λ_k είναι πολλαπλασιαστές του Lagrange που στην περίπτωση αυτή είναι *ωστικοί*. Αν χρησιμοποιήσουμε τις Εξ. (3-27), (3-42) και (3-43), βρίσκουμε ότι

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij} (\dot{q}_j - \dot{q}_{j0}) = \hat{Q}_i + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \alpha_{ki} \quad , (i = 1, 2, \ldots, n) \quad . \tag{3-44}$$

Αν θεωρήσουμε τις πραγματικές δεσμικές σχέσεις που δίνονται από την Εξ. (3-32) και τις σχέσεις για τις γενικευμένες ώσεις και ορμές, Εξ. (3-44), θα έχουμε ένα σύνολο $(n+m)$-αλγεβρικών εξισώσεων από

τις οποίες μπορούν μετά από επίλυση να προκύψουν οι $\dot{q}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ και λ_k , $k = 1, 2, \ldots, m$. Αν γνωρίζουμε τους λ_k τότε οι δεσμικές ώσεις προκύπτουν από την Εξ. (3-43).

Ωστικοί δεσμοί. Ως εδώ έχουμε θεωρήσει ότι οι συντελεστές α_{ji} και α_{jt} είναι συνεχείς συναρτήσεις των q_i και t. Τώρα ας θεωρήσουμε την περίπτωση των *ωστικών δεσμών*, όπου ένας ή περισσότεροι από τους συντελεστές αυτούς μπορεί να είναι *ασυνεχείς* σε μια δοσμένη χρονική στιγμή t_1. Το γεγονός αυτό επιτρέπει την ξαφνική εμφάνιση ενός δεσμού ή μια ξαφνική αλλαγή στην κίνησή του. Για παράδειγμα, η ξαφνική εφαρμογή ενός σταθερού δεσμού θα μπορούσε να εκφραστεί με μια αλλαγή των συντελεστών α_{ji} από μηδενικές σε μη μηδενικές τιμές, ενώ μια ασυνέχεια στους συντελεστές α_{jt} θα μπορούσε να εκφράσει μια αλλαγή στην ταχύτητα ενός κινούμενου δεσμού. *Μονόπλευροι* ή *ανισοτικοί* δεσμοί μπορούν επίσης να εκφραστούν μ' αυτό τον τρόπο υπό τον όρο ότι ο χρόνος ξαφνικής μεταβολής είναι γνωστός.

Στο σημείο αυτό θα δώσουμε έμφαση στη διαφορά μεταξύ των *ωστικών δεσμών* και των *ώσεων των δεσμών*. Ένας ωστικός δεσμός είναι ένας ξαφνικά εφαρμοζόμενος δεσμός που εκφράζεται από μια εξίσωση ασυνεχούς δεσμού ενώ ώσεις δεσμού είναι δυνάμεις δεσμών ωστικής φύσης που μπορεί να εμφανίζονται ως αποτέλεσμα ωστικών δεσμών ή εφαρμοζόμενων ώσεων $\hat{Q}_i$.

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι κάθε *ωστικός δεσμός δεν παράγει έργο* δηλαδή δεν εκτελείται έργο από τις δεσμικές δυνάμεις κατά τη μετακίνησή τους σε μια αυθαίρετη δυνατή μετατόπιση που είναι συμβιβαστή με τους στιγμιαίους δεσμούς είτε πριν είτε μετά την ασυνέχεια. Με την παραδοχή αυτή η προηγούμενη θεωρία μπορεί να γενικευτεί εύκολα ώστε να περιλαμβάνει ωστικούς δεσμούς.

Θα υποθέσουμε ότι στους συντελεστές α_{ji} και α_{jt} έχουμε τη χρονική στιγμή t_1 οποιεσδήποτε ασυνέχειες και ότι οποιεσδήποτε ώσεις $\hat{Q}_j$ εφαρμόζονται κατά τη διάρκεια του μικρού διαστήματος Δt αμέσως μετά τη χρονική στιγμή t_1 . Οι Εξ. (3-32), (3-39), (3-41) και (3-44) ισχύουν ακόμη αλλά τίθεται το ερώτημα ποιά από τις τιμές των ασυνεχών συντελεστών θα έπρεπε να επιλεγεί. Όπως μπορούμε να δούμε, οι αρχικές ταχύτητες $\dot{q}_{j0}$ πρέπει να είναι συμβιβαστές με την Εξ. (3-32), όπου οι συντελεστές α_{ji} και α_{jt} υπολογίζονται για $t = t_1 -$,

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δηλαδή, ακριβώς πριν την εφαρμογή των ωστικών δεσμών. Εξάλλου, οι συντελεστές a_{ji} και a_{jt} υπολογίζονται για $t = t_1 +$ στις εκφράσεις που περιλαμβάνουν τις $\dot{q}_i$, u_i και λ_k στις Εξ. (3-32), (3-41) και (3-44), αντίστοιχα.

Ενεργειακές θεωρήσεις. Η ξαφνική εφαρμογή ενός δεσμού ή μιας ώσης μεταβάλλει πάντα την κινητική ενέργεια ενός συστήματος γιατί, γενικά, οι $\dot{x}$ μεταβάλλονται απότομα.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε ένα σύστημα του οποίου η συνάρτηση της κινητικής ενέργειας είναι *τετραγωνική* ως προς $\dot{q}_i$. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας στο χρόνο Δt είναι

$$T - T_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\, \dot{q}_i\, \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\, \dot{q}_{i0}\, \dot{q}_{j0} \quad . \tag{3-45}$$

Από την Εξ. (3-23), βλέπουμε ότι

$$p_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\, \dot{q}_j \tag{3-46}$$

και άρα

$$T - T_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} p_i\, \dot{q}_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} p_{i0}\, \dot{q}_{i0} \quad . \tag{3-47}$$

Αν σημειωθεί ότι $m_{ij} = m_{ji}$, από την Εξ. (3-46) παίρνουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\, \dot{q}_{i0} = \sum_{i=1}^{n} p_{i0}\, \dot{q}_i \tag{3-48}$$

και από τις Εξ. (3-47) και (3-48) προκύπτει ότι

$$T - T_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (p_i - p_{i0})\,(\dot{q}_i + \dot{q}_{i0}) \quad . \tag{3-49}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Αν $\hat{Q}_i$ είναι η συνιστώσα της γενικευμένης ώσης που οφείλεται στις *εφαρμοζόμενες δυνάμεις* και $\hat{C}_i$ είναι η αντίστοιχη συνιστώσα της *γενικευμένης ώσης που οφείλεται στις δεσμικές δυνάμεις*, τότε από την Εξ. (3-42) βλέπουμε ότι,

$$p_i - p_{io} = \hat{Q}_i + \hat{C}_i \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad , \tag{3-50}$$

και άρα

$$T - T_o = \sum_{i=1}^{n} (\hat{Q}_i + \hat{C}_i) \left(\frac{\dot{q}_i + \dot{q}_{io}}{2} \right) \quad . \tag{3-51}$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι κάθε ώση πολλαπλασιάζεται με *τη μέση τιμή* της αντίστοιχης $\dot{q}_i$, (πριν και μετά την ώση).

Οι ώσεις $\hat{C}_i$ μπορούν να απαλειφούν από την ανάλυση στην ειδική περίπτωση όπου οι συντελεστές α_{ji} είναι *συνεχείς* για $t = t_1$ και $\alpha_{jt} = 0$ για κάθε j. Τότε

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} \dot{q}_i = 0 \quad , \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \quad , \tag{3-52}$$

πριν και μετά την ώση και χρησιμοποιώντας την Εξ. (3-34) παίρνουμε

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{C}_i \dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_{ji} \dot{q}_i = 0 \quad . \tag{3-53}$$

Με παρόμοιο τρόπο, έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{C}_i \dot{q}_{io} = 0 \tag{3-54}$$

και η Εξ. (3-51) ανάγεται στην

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$T - T_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \hat{Q}_i \, (\dot{q}_i + \dot{q}_{i0}) \quad . \tag{3-55}$$

Ας ορίσουμε τώρα την *κινητική ενέργεια της σχετικής κίνησης* με τον ακόλουθο τρόπο:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \, (\dot{q}_i - \dot{q}_{i0}) \, (\dot{q}_j - \dot{q}_{j0}) \quad . \tag{3-56}$$

Εδώ στην έκφραση της κινητικής ενέργειας T, που θεωρείται πάλι τετραγωνική ως προς $\dot{q}_i$, αντικαθιστούμε τις πραγματικές ταχύτητες με τις *σχετικές* ταχύτητες.

Για να διευκρινίσουμε τη σημασία της κινητικής ενέργειας της σχετικής κίνησης θεωρούμε ένα σύστημα που έχει ωστικούς δεσμούς και υποθέτουμε ότι $\hat{Q}_i = 0$. Έστω ότι οι δεσμοί δίνονται από τις σχέσεις

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} \, \dot{q}_i = 0 \, , \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \quad , \tag{3-57}$$

όπου οι συντελεστές α_{ji} είναι *ασυνεχείς* στο $t = t_1$.(*) Τη βασική εξίσωση (3-39) μπορούμε να τη γράψουμε με τη μορφή

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} (\dot{q}_j - \dot{q}_{j0}) \, \dot{q}_i = 0 \quad , \tag{3-58}$$

όπου αφήνουμε $u_i = \dot{q}_i$, αφού οι πραγματικές $\dot{q}_i$ ικανοποιούν τις συνθήκες για τις δυνατές ταχύτητες που δίδονται από την Εξ. (3-41). Οι συντελεστές α_{ji} στην Εξ. (3-57) υπολογίζονται στο χρόνο $t_1 +$.

(*) Πιο συγκεκριμένα, η Εξ. (3-57) δίνει τον προσανατολισμό του απειροστού στοιχείου μιας επιφάνειας δεσμού στο q-χώρο. Το στοιχείο αυτό είναι δυνατόν να εμφανιστεί ξαφνικά ή να μεταβάλλει ξαφνικά τον προσανατολισμό του αλλά δεν μπορεί να έχει κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας αφού αυτό θα απαιτήσει $\alpha_{jt} \neq 0$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Αν χρησιμοποιήσουμε την Εξ. (3-58) και λάβουμε υπόψη μας ότι $m_{ij} = m_{ji}$, παίρνουμε

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_{jo} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\,\dot{q}_{io}\,\dot{q}_j \ . \qquad (3\text{-}59)$$

Από τις Εξ. (3-56) και (3-59) έχουμε

$$K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\,\dot{q}_{io}\,\dot{q}_{jo} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_j = T_o - T \ , \qquad (3\text{-}60)$$

όπου πάλι σημειώνουμε ότι T_o είναι η αρχική κινητική ενέργεια και T είναι η τιμή της μετά την εφαρμογή του ωστικού δεσμού. Έτσι, η απώλεια ενέργειας λόγω της ξαφνικής εμφάνισης ενός *στερεού δεσμού* είναι ίση με την κινητική ενέργεια της σχετικής κίνησης.

Ως μια δεύτερη διευκρίνηση, ας θεωρήσουμε ένα σύστημα στο οποίο οι συντελεστές α_{jj} είναι συνεχείς ενώ οι α_{jt} μεταβάλλονται από μηδενικές σε μη-μηδενικές τιμές στη χρονική στιγμή t_1 και αντιστοιχούν στην ξαφνική έναρξη του κινούμενου δεσμού. Στην περίπτωση αυτή οι τελικές $\dot{q}_j$ δεν είναι πιθανές δυνατές ταχύτητες αφού δεν είναι συμβιβαστές με την Εξ. (3-41). Οι αρχικές ταχύτητες όμως ικανοποιούν αυτές τις συνθήκες για $t = t_1$. Έτσι, αν θέσουμε $u_j = \dot{q}_{jo}$ και θεωρήσουμε πάλι $\hat{Q}_j = 0$, από την Εξ. (3-39), έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\,(\dot{q}_j - \dot{q}_{jo})\,\dot{q}_{io} = 0 \qquad (3\text{-}61)$$

ή

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\,\dot{q}_{io}\,\dot{q}_{jo} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\,\dot{q}_{io}\,\dot{q}_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_{jo} \ . \qquad (3\text{-}62)$$

Άρα, από τις Εξ. (3-65) και (3-62), παίρνουμε

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\, \dot{q}_i\, \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\, \dot{q}_{io}\, \dot{q}_{jo} = T - T_o \quad , \qquad (3\text{-}63)$$

πράγμα που σημαίνει ότι η *αύξηση* κινητικής ενέργειας του συστήματος που οφείλεται στην ξαφνική λειτουργία του *κινούμενου δεσμού* είναι ίση με την κινητική ενέργεια της σχετικής κίνησης.

Ημί-συντεταγμένες. Οι τυπικές μορφές των εξισώσεων Lagrange εφαρμόζονται για περιπτώσεις όπου οι q_i είναι οι *πραγματικές συντεταγμένες*, δηλαδή οι q_i προσδιορίζουν τη διάταξη του συστήματος και κάθε q_i μπορεί να ληφθεί μετά από ολοκλήρωση της αντίστοιχης $\dot{q}_i$ ως προς το χρόνο. Επιπλέον, οι εξισώσεις μετασχηματισμού (1-8) δίνουν τις x_i ως εκπεφρασμένες συναρτήσεις των q_i και t. Έτσι, λαμβάνουμε εκφράσεις για τις $\dot{x}_i$ ως συναρτήσεις των $(q_k,\ \dot{q}_k,\ t)$ και με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε ότι η κινητική ενέργεια είναι της μορφής $T = T(q_i,\ \dot{q}_i,\ t)$.

Σε κάποιες συνήθεις καταστάσεις είναι δυνατόν να πάρουμε ακριβή έκφραση για την κινητική ενέργεια T, που δεν είναι αυτής της μορφής. Για παράδειγμα, η περιστροφική κινητική ενέργεια ενός στερεού σώματος, εκφραζόμενη σε όρους των συνιστωσών της γωνιακής ταχύτητας **ω** ως προς τους Καρτεσιανούς άξονες του σώματος, είναι

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} I_{ij}\, \omega_i\, \omega_j \quad , \qquad (3\text{-}64)$$

όπου οι ω_i δεν είναι οι χρονικές παράγωγοι των πραγματικών συντεταγμένων. Μ' άλλα λόγια, το ολοκλήρωμα της ω_j ως προς το χρόνο δεν δίνει ως αποτέλεσμα μια παράμετρο που να βοηθάει στον προσδιορισμό της διάταξης του σώματος.

Αν και οι ω_i δεν θεωρούνται ως $\dot{q}_i$, μπορούν όμως να εκφραστούν ως γραμμικές συναρτήσεις των $\dot{q}_i$ χρησιμοποιώντας εξισώσεις της μορφής,

$$\omega_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ji}\, \dot{q}_i + A_{jt} \quad , \qquad (3\text{-}65)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

όπου A_{ji} , και A_{jt} είναι συναρτήσεις των q_i και t . Αν συνδέσουμε με κάθε ω_j μια *ημί-συντεταγμένη* θ_j τέτοια ώστε

$$d\theta_j = \omega_j \, dt \quad , \tag{3-66}$$

παίρνουμε

$$d\theta_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ji} \, dq_i + A_{jt} \, dt \quad . \tag{3-67}$$

Το χαρακτηριστικό που διακρίνει τις θ_j από τις πραγματικές συντεταγμένες είναι ότι οι εκφράσεις που έχουν τη μορφή της Εξ. (3-67) *δεν είναι ολοκληρώσιμες* και άρα οι θ_j δεν μπορούν να εκφραστούν ως *εκπεφρασμένες* συναρτήσεις των q_i και t .

Επιστρέφοντας στο παράδειγμα της περιστροφής στερεού σώματος, από το (Σχ. 3-1) μπορούμε να δούμε ότι οι συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας ως προς τους άξονες του σώματος (x, y, z) μπορούν να εκφραστούν σε όρους των χρονικών παραγώγων των γωνιών του Euler (ψ, θ, φ) με τον ακόλουθο τρόπο:

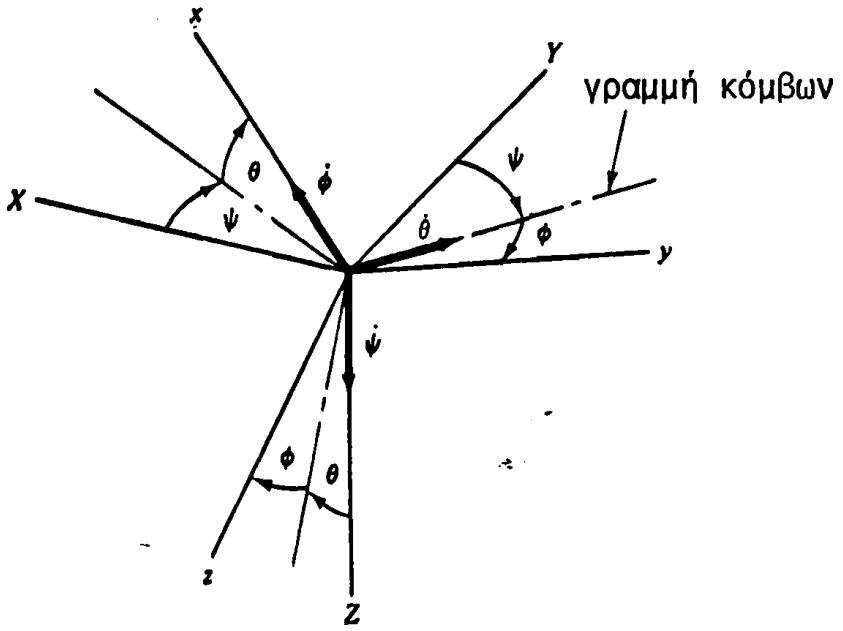
$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\varphi} - \dot{\psi} \sin\theta \\ \omega_y &= \dot{\theta} \cos\varphi + \dot{\psi} \cos\theta \sin\varphi \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos\theta \cos\varphi - \dot{\theta} \sin\varphi \quad . \end{aligned} \tag{3-68}$$

Οι εξισώσεις αυτές έχουν τη μορφή της Εξ. (3-65) όπου $A_{jt} = 0$. Σε όρους των ημί-συντεταγμένων έχουμε,

$$\begin{aligned} d\theta_x &= -\sin\theta \, d\psi + d\varphi \\ d\theta_y &= \cos\theta \sin\varphi \, d\psi + \cos\varphi \, d\theta \\ d\theta_z &= \cos\theta \cos\varphi \, d\psi - \sin\varphi \, d\theta \quad . \end{aligned} \tag{3-69}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τα κριτήρια που δίδονται στην Εξ. (1-20) ή την Εξ. (1-23), τότε βλέπουμε ότι καμιά από αυτές τις εξισώσεις δεν είναι ολοκληρώσιμη . Ειδικά σημειώνουμε ότι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



Σχ. 3-1. Γωνίες του Euler και συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας

$$\frac{\partial A_{ji}}{\partial q_k} \neq \frac{\partial A_{jk}}{\partial q_i} \quad , \tag{3-70}$$

για ένα τουλάχιστον ζεύγος συντελεστών σε κάθε εξίσωση.

Ακόμα και αν οι ημι-συντεταγμένες δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν με τις συνήθεις μορφές των εξισώσεων Lagrange, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις αντίστοιχες ω_j στην ανάλυση της ωστικής κίνησης. Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι η κινητική ενέργεια ενός συστήματος περιστρεφόμενων σωμάτων δίνεται από την

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} I_{ij}\, \omega_i\, \omega_j \quad . \tag{3-71}$$

Τις ω_i μπορούμε να τις χειριστούμε όπως τις $\dot{q}_i$ με την έννοια ότι ορίζουμε την i-συνιστώσα της γενικευμένης ορμής σύμφωνα με την εξίσωση

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \omega_i} = \sum_{j=1}^{n} I_{ij}\, \omega_j \quad . \tag{3-72}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Η γενικευμένη ώση $\hat{Q}_i$ που συνδέεται με την ημί-συντεταγμένη θ ορίζεται με τον ίδιο τρόπο όπως και στα προηγούμενα. Πρέπει όμως να σημειωθεί ότι η Εξ. (3-30) δεν εφαρμόζεται διότι οι x_i δεν μπορούν να εκφραστούν ως συναρτήσεις των θ_j. Έτσι ας κάνουμε χρήση της ιδέας του δυνατού έργου για να πάρουμε την κάθε συνιστώσα $\hat{Q}_i$ που οφείλεται στις *εφαρμοζόμενες δυνάμεις*. Βλέπουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{Q}_i \, \delta\theta_i = \sum_{k=1}^{3N} \hat{F}_k \, \delta x_k \quad , \tag{3-73}$$

όπου οι $\delta\theta_i$ και δx_i αντιστοιχούν στην ίδια δυνατή μετατόπιση. Λαμβάνοντας όλες τις $\delta\theta_j$ εκτός της $\delta\theta_i$, $i \neq j$, ίσες με το μηδέν, μπορούμε στη συνέχεια να λύσουμε για κάθε $\hat{Q}_i$.

Ας γράψουμε τώρα την Εξ. (3-39) με τη μορφή

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} I_{ij} \, (\omega_j - \omega_{jo}) - \hat{Q}_i \right] u_i = 0 \quad , \tag{3-74}$$

όπου όπως προηγουμένως, οι u_i είναι κάθε σύνολο δυνατών ταχυτήτων που ικανοποιεί τους στιγμιαίους δεσμούς της Εξ. (3-41). Οι ω_j είναι συμβιβαστές με τους πραγματικούς δεσμούς, δηλαδή

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} \, \omega_i + \alpha_{jt} = 0 \quad , \quad (j = 1, 2, \ldots , m) \quad , \tag{3-75}$$

όπου οι α_{ji} και α_{jt} υπολογίζονται για $t = t_1+$. Μια παρόμοια εξίσωση δεσμού εφαρμόζεται για τις ω_{jo} , όπου οι συντελεστές α_{ji} και α_{jt} υπολογίζονται στην περίπτωση αυτή για $t = t_1-$.

Η Εξ. (3-44) μπορεί επίσης να γραφεί με τη μορφή

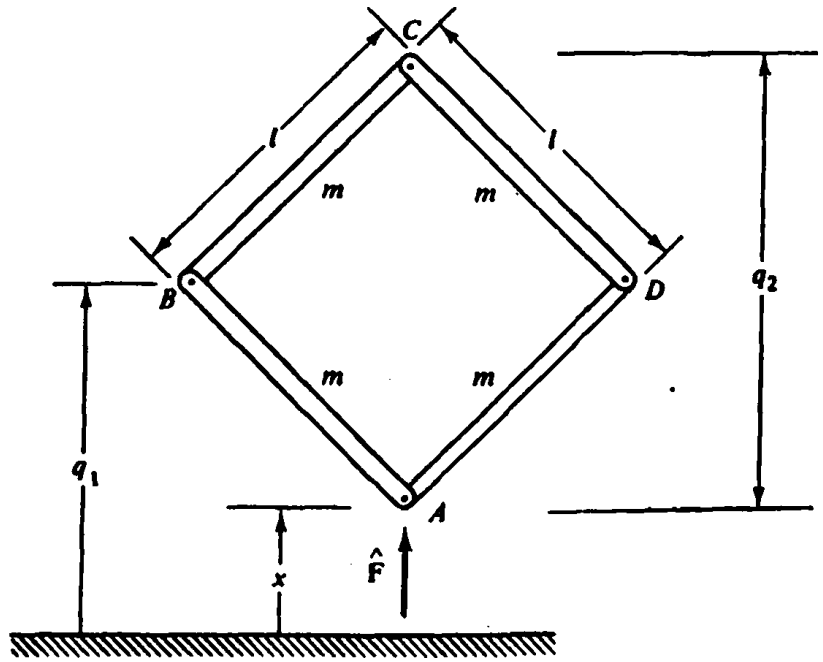
$$\sum_{j=1}^{n} I_{ij} \, (\omega_j - \omega_{jo}) = \hat{Q}_i + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \, \alpha_{ki} \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots , n) \quad , \tag{3-76}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

όπου οι συντελεστές a_{ki} υπολογίζονται για $t = t_1 +$.

Τα κύρια αποτελέσματα για την ωστική κίνηση με δεσμούς που δίνονται από τις Εξ. (3-39), (3-44), (3-74) και (3-76) εφαρμόζονται σε συστήματα των οποίων η κινητική ενέργεια εκφράζεται ως συνάρτηση των $\dot{q}_i$ ή των ω_j . Η ίδια αντιμετώπιση ισχύει ακόμη και για συστήματα στα οποία η T περιέχει μεικτούς όρους των $\dot{q}_i$ και ω_j.

Παράδειγμα 3-1. Τέσσερις στερεές και ομοιόμορφες ράβδοι η κάθε μια μάζας m και μήκους l συνδέονται με σημειακές αρθρώσεις στα άκρα τους ώστε να σχηματίσουν ένα ρόμβο (Σχ. 3-2). Αρχικά το σύστημα είναι ακίνητο σε μια διάταξη τετραγώνου με το σημείο C στην κατακόρυφο από το A . (a) Αν στο σημείο A δίνεται μια κατακόρυφη ώθη $\hat{\mathbf{F}}$, να βρεθεί η ταχύτητά του αμέσως μετά την ώση. (b) Ας υποθέσουμε ότι το σύστημα πίπτει με ταχύτητα v_0 και το σημείο A χτυπάει ανελαστικά στο πάτωμα. Να λυθεί το πρόβλημα ως προς $\dot{q}_1$ και $\dot{q}_2$ αμέσως μετά την κρούση.



Σχ. 3-2. Τετράγωνο πλαίσιο από ομοιόμορφες ράβδους.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ας πάρουμε πρώτα την έκφραση για την ολική κινητική ενέργεια. Αυτή είναι ίση με το άθροισμα της μεταφορικής κινητική ενέργειας που οφείλεται στην κίνηση του κέντρου μάζας συν την κινητική ενέργεια που εμφανίζεται από την κίνηση των ράβδων σχετικά με το κέντρο μάζας. Αν επικεντρωθούμε πρώτα στο τελευταίο κομμάτι της ενέργειας, βρίσκουμε ότι κάθε ράβδος έχει μια γωνιακή ταχύτητα

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2}\, l}\, \dot{q}_2$$

και μια μεταφορική ταχύτητα

$$v = \frac{1}{2\sqrt{2}}\, \dot{q}_2 \quad .$$

Άρα, προσθέτοντας τα δυο κομμάτια βρίσκουμε ότι η συνολική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = 2m\, \dot{q}_1^2 + 4\left(\frac{1}{2}\, m\, v^2 + \frac{m l^2}{24}\, \omega^2\right) = 2\, m\, \dot{q}_1^2 + \frac{1}{3}\, m\, \dot{q}_2^2 \quad , \quad (3\text{-}77)$$

όπου η ροή αδράνειας της κάθε ράβδου ως προς το κέντρο μάζας είναι $ml^2/12$. Οι γενικευμένες ορμές είναι

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = 4m\dot{q}_1$$

$$p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = \frac{2}{3} m \dot{q}_2 \quad (3\text{-}78)$$

και το μητρώο ακαμψίας είναι

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 4m & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}m \end{bmatrix} . \quad (3\text{-}79)$$

Η μετατόπιση του σημείου εφαρμογής A της ώσης $\hat{\mathbf{F}}$ είναι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$x = q_1 - \frac{1}{2} q_2 \ . \tag{3-80}$$

Άρα, από την Εξ. (3-30), παίρνουμε

$$\hat{Q}_1 = \hat{F} \ , \quad \hat{Q}_2 = - \frac{1}{2} \hat{F} \ . \tag{3-81}$$

Οι γενικευμένες συντεταγμένες είναι ανεξάρτητες και έτσι από την Εξ. (3-28) έχουμε

$$\begin{aligned} 4m \, \Delta \dot{q}_1 &= \hat{F} \ , \qquad \Delta \dot{q}_1 = \frac{1}{4m} \hat{F} \\ \frac{2}{3} m \, \Delta \dot{q}_2 &= - \frac{1}{2} \hat{F} \ , \quad \Delta \dot{q}_2 = - \frac{3}{4m} \hat{F} \ . \end{aligned} \tag{3-82}$$

Για την περίπτωση που το σύστημα αρχικά είναι ακίνητο βρίσκουμε ότι η ταχύτητα του σημείου A αμέσως μετά την ώση είναι

$$\dot{x} = \dot{q}_1 - \frac{1}{2} \dot{q}_2 = \frac{5}{8m} \hat{F} \ . \tag{3-83}$$

Ας συζητήσουμε τώρα το ερώτημα (b). Οι αρχικές γενικευμένες ταχύτητες είναι

$$\dot{q}_{10} = - v_0 \ , \quad \dot{q}_{20} = 0 \ ,$$

και η τελική ταχύτητα του σημείου A είναι

$$\dot{x} = \dot{q}_1 - \frac{1}{2} \dot{q}_2 = 0 \ . \tag{3-84}$$

Από την Εξ. (3-82) παίρνουμε

$$\Delta \dot{q}_2 = - 3 \, \Delta \dot{q}_1$$

ή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$3(\dot{q}_1 + v_0) + \dot{q}_2 = 0 \ . \qquad (3\text{-}85)$$

Λύνοντας τις Εξ. (3-84) και (3-85) βρίσκουμε ότι οι τελικές ταχύτητες είναι

$$\dot{q}_1 = -\frac{3}{5} v_0, \quad \dot{q}_2 = -\frac{6}{5} v_0 \ .$$

Χρησιμοποιώντας την Εξ. (3-82) μπορούμε να λύσουμε ως προς την ώση $\hat{F}$ που εφαρμόζεται στο σημείο A κατά το χρόνο της πρόσκρουσης και έχουμε

$$\hat{F} = 4m\,\Delta\dot{q}_1 = \frac{8}{5} m v_0 \ .$$

Μια άλλη μέθοδος ανάλυσης του ερωτήματος (b) είναι να θεωρήσουμε την ανελαστική κρούση ως μια ξαφνική εφαρμογή ενός ωστικού δεσμού που δίνεται από την Εξ. (3-84). Χρησιμοποιώντας αυτή την ανάλυση έχουμε

$$\hat{Q}_1 = \hat{Q}_2 = 0 \ ,$$

αφού η ώση του δεσμού είναι *εσωτερική*. Έτσι, η Εξ. (3-39) παίρνει τη μορφή

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} m_{ij} (\dot{q}_j - \dot{q}_{j0}) u_i = 0 \ , \qquad (3\text{-}86)$$

όπου οι δυνατές ταχύτητες στην περίπτωση αυτή ικανοποιούν την ίδια δεσμική συνθήκη όπως και οι πραγματικές ταχύτητες, δηλαδή

$$u_1 - \frac{1}{2} u_2 = 0 \ . \qquad (3\text{-}87)$$

Ας εκλέξουμε $u_1 = 1$, $u_2 = 2$. Τότε η Εξ. (3-86) γίνεται

$$4m\,(\dot{q}_1 + v_0) + \frac{4}{3}\,m\,\dot{q}_2 = 0 \quad , \tag{3-88}$$

και είναι ισοδύναμη με την Εξ. (3-85). Άρα, από τις Εξ. (3-84) και (3-88) παίρνουμε τα ίδια, όπως και πριν, αποτελέσματα.

Τελικά, ας θεωρήσουμε την κινητική ενέργεια που χάθηκε στην πρόσκρουση. Αν χρησιμοποιήσουμε την έκφραση της κινητικής ενέργειας που δίνεται από την Εξ. (3-77) παίρνουμε

$$T_0 - T = 2mv_0^2 - \left(\frac{1}{2}\,\frac{8}{5}\,m\,v_0^2 + \frac{1}{2}\,\frac{2}{5}\,m\,v_0^2\right) = \frac{4}{5}\,m\,v_0^2 \quad .$$

Το ίδιο αποτέλεσμα βρίσκουμε αν ανακαλέσουμε ότι η απώλεια ενέργειας που οφείλεται σε μια ξαφνική εμφάνιση ενός σταθερού δεσμού είναι ίση με την κινητική ενέργεια της σχετικής κίνησης. Χρησιμοποιώντας την Εξ. (3-56) βρίσκουμε ότι

$$K = 2m\left(\frac{2}{5}\,v_0\right)^2 + \frac{1}{3}\,m\left(-\,\frac{6}{5}\,v_0\right)^2 = \frac{4}{5}\,mv_0^2 \quad .$$

Ένας επιπλέον έλεγχος μπορεί να γίνει αν πολλαπλασιάσουμε την ώση του δεσμού με τη μέση τιμή της ταχύτητας στο σημείο A. Προσαρμόζοντας την Εξ. (3-51) στη συζητούμενη περίπτωση με μια μόνο συντεταγμένη x, παίρνουμε

$$T - T_0 = \frac{1}{2}\,\hat{F}\,(\dot{x} + \dot{x}_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{5}\,mv_0\right)(-v_0) = -\,\frac{4}{5}\,mv_0^2 \quad ,$$

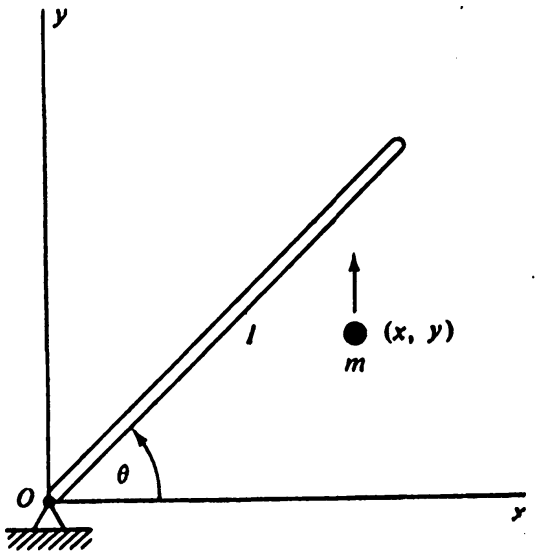
όπου το αρνητικό σημείο δηλώνει απώλεια ενέργειας.

Παράδειγμα 3-2. Μια στερεά ράβδος μπορεί να περιστραφεί ελεύθερα περί ένα σταθερό σημείο O (Σχ. 3-3) και έχει ροπή αδράνειας I περί το σημείο αυτό. Ένα σημείο μάζας m χτυπάει τη ράβδο ανελαστικά τη χρονική στιγμή $t = t_1$ και ολισθαίνει κατά μήκος της ράβδου μετά την πρόσκρουση. Να λυθεί το πρόβλημα ως προς τις ταχύτητες $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{\theta}$ μετά την πρόσκρουση αν οι αρχικές συνθήκες είναι

$$x(t_1) = 1\ \text{m}, \qquad y(t_1) = 1\ \text{m}, \qquad \theta(t_1) = \pi/4$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\dot{x}(t_1 -) = 0\,, \qquad \dot{y}(t_1 -) = 1 \text{ m/sec}\,, \quad \dot{\theta}(t_1 -) = -1 \text{ rad/sec}\ .$$



Σχ. 3-3. Κρούση σωματίου και περιστρεφόμενης ράβδου..

Έστω $m = 1$ kg και $I = 10$ kg m^2 .

Πρώτη μέθοδος: Η κινητική ενέργεια του συστήματος και το μητρώο ακαμψίας είναι,

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + 5\, \dot{\theta}^2 \qquad (3\text{-}89)$$

και

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}\,, \qquad (3\text{-}90)$$

αντίστοιχα.
Οι *εφαρμοζόμενες* ώσεις είναι ίσες με το μηδέν, έτσι η Εξ. (3-39) παίρνει τη μορφή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} m_{ij}\,(\dot{q}_j - \dot{q}_{jo})\,u_i = 0 \qquad (3\text{-}91)$$

ή

$$\dot{x}\,u_1 + (\dot{y} - 1)u_2 + 10(\dot{\theta} + 1)u_3 = 0 \quad . \qquad (3\text{-}92)$$

Η εξίσωση του δεσμού μετά την πρόσκρουση βρίσκεται από την παρατήρηση ότι

$$x \tan\theta = y$$

ή

$$\tan\theta\,\dot{x} - \dot{y} + x\sec^2\theta\,\dot{\theta} = 0 \quad . \qquad (3\text{-}93)$$

Για τη διάταξη στη χρονική στιγμή $t = t_1$ η εξίσωση αυτή γίνεται

$$\dot{x} - \dot{y} + 2\dot{\theta} = 0 \quad . \qquad (3\text{-}94)$$

Με παρόμοιο τρόπο, οι δυνατές ταχύτητες πρέπει να ικανοποιούν το στιγμιαίο δεσμό τη χρονική στιγμή $t = t_1+$, δηλαδή

$$u_1 - u_2 + 2u_3 = 0 \quad . \qquad (3\text{-}95)$$

Ας πάρουμε τώρα δυο ανεξάρτητα σύνολα δυνατών ταχυτήτων που είναι λύσεις της Εξ. (3-95), για παράδειγμα

$$\begin{array}{lll} u_1 = 1 & & u_1 = 0 \\ u_2 = 0 & \text{και} & u_2 = 1 \\ u_3 = -\dfrac{1}{2} & & u_3 = \dfrac{1}{2} \quad . \end{array}$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις δυνατές μετατοπίσεις στην Εξ. (3-92), παίρνουμε

$$\dot{x} - 5\dot{\theta} = 5\,, \qquad \dot{y} + 5\dot{\theta} = -4 \quad . \qquad (3\text{-}96)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Οι ταχύτητες αμέσως μετά την πρόσκρουση βρίσκονται λύνοντας τις Εξ. (3-94) και (3-96) και είναι

$$\dot{x} = \frac{5}{4}\,\text{m/sec}\ , \qquad \dot{y} = -\,\frac{1}{4}\,\text{m/sec}\ , \qquad \dot{\theta} = -\,\frac{3}{4}\ \text{rad/sec}\ .$$

Δεύτερη μέθοδος: Μια άλλη αντιμετώπιση είναι εκείνη που βασίζεται στην Εξ (3-44). Στο παράδειγμα αυτό οι $\hat{Q}_i$ είναι μηδέν και έχουμε

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\,(\dot{q}_j - \dot{q}_{j0}) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k\,\alpha_{ki}\ , \tag{3-97}$$

όπου οι $\dot{q}_i$ ικανοποιούν τις πραγματικές δεσμικές εξισώσεις τη χρονική στιγμή $t = t_1 +$, δηλαδή

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki}\,\dot{q}_i + \alpha_{kt} = 0\ , \quad (k = 1, 2, \ldots, m)\ . \tag{3-98}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των συντελεστών από την Εξ. (3-97) έχουμε

$$\dot{x} = \lambda$$

$$\dot{y} - 1 = -\,\lambda$$

$$10\dot{\theta} + 10 = 2\lambda\ .$$

Η εξίσωση του δεσμού είναι όπως πριν,

$$\dot{x} - \dot{y} + 2\dot{\theta} = 0\ .$$

Λύνοντας τις τέσσερις αυτές εξισώσεις παίρνουμε,

$$\dot{x} = \frac{5}{4}\,\text{m/sec}\,, \quad \dot{y} = -\,\frac{1}{4}\,\text{m/sec}\,, \quad \dot{\theta} = -\,\frac{3}{4}\,\text{rad/sec}\,, \quad \lambda = \frac{5}{4}\,\text{N sec}$$

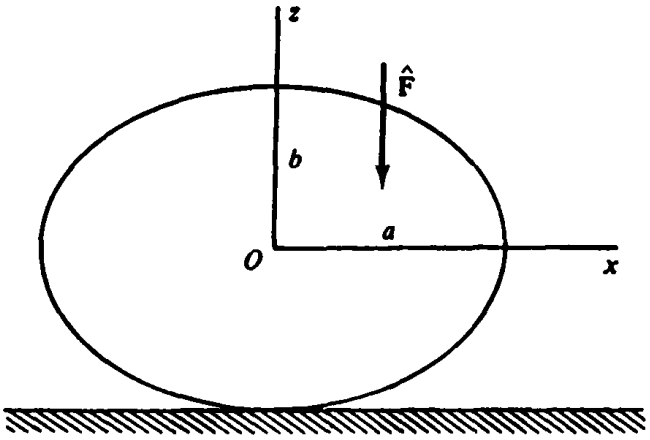
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δηλαδή αποτελέσματα που είναι ταυτόσημα μ' αυτά που προέκυψαν με βάση την πρώτη μέθοδο.

Η ώση του δεσμού που ενεργεί επί του σωματίου σε διεύθυνση κάθετη της ράβδου είναι

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{C}_1 - \hat{C}_2) = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}(\alpha_{11} - \alpha_{12}) = \frac{5}{2\sqrt{2}}\ \text{N sec}\ .$$

Παράδειγμα 3-3. Ένα ελλειψοειδές εκ περιστροφής (Σχ. 3-4) που έχει μάζα m και ημιάξονες a και b, $(a > b)$, εδράζεται επί μιας οριζόντιας επιφάνειας. Το σύστημα χτυπιέται από μια κατακόρυφη ώση $\hat{\mathbf{F}}$ σε τέτοια θέση ώστε να εφαρμόζεται μια μοναδιαία γωνιακή ώση περί τους άξονες x και y, όπου x είναι ο άξονας συμμετρίας. Θεωρώντας ότι το ελλειψοειδές κυλάει χωρίς ολίσθηση να λυθεί το πρόβλημα ως προς τη μεταφορική και περιστροφική ταχύτητα αμέσως μετά την επιβολή της ώσης.



Σχ. 3-4. Ελλειψοειδές επί οριζόντιας επιφάνειας.

Πρώτη μέθοδος : Ας γράψουμε την έκφραση της κινητικής ενέργειας χρησιμοποιώντας ως άξονες συντεταγμένων τους άξονες του σώματος με αρχή O το κέντρο μάζας του. Για το δοθέντα προσανατολισμό έχουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I_\alpha \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_t (\omega_y^2 + \omega_z^2) \quad , \qquad (3\text{-}99)$$

όπου I_α είναι η ροπή αδράνειας περί τον άξονα συμμετρίας (x - άξονα) και I_t είναι η ροπή αδράνειας περί τον εγκάρσιο άξονα στο yz - επίπεδο. Εδώ οι ταχύτητες περιστροφική και μεταφορική είναι απόλυτες, αλλά οι συνιστώσες λαμβάνονται στις διευθύνσεις των αξόνων του σώματος τη στιγμή της επιβολής της ώσης. Επιπλέον, οι γενικευμένες ταχύτητες συνδέονται με ημί-συντεταγμένες.

Αν υιοθετήσουμε την ακολουθία ταχυτήτων $\dot{x}$, $\dot{y}$, ω_x , ω_y , ω_z παίρνουμε τις ακόλουθες συνιστώσες της γενικευμένης ορμής και εφαρμοσμένης ώσης:

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad \hat{Q}_1 = 0$$

$$p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \qquad \hat{Q}_2 = 0$$

$$p_3 = \frac{\partial T}{\partial \omega_x} = I_\alpha \omega_x \qquad \hat{Q}_3 = 1$$

$$p_4 = \frac{\partial T}{\partial \omega_y} = I_t \omega_y \qquad \hat{Q}_4 = 1$$

$$p_5 = \frac{\partial T}{\partial \omega_z} = I_t \omega_z \qquad \hat{Q}_5 = 0 \quad .$$

Ο κυλιόμενος δεσμός μπορεί να εκφραστεί σε όρους δυο μη-ολόνομων δεσμικών εξισώσεων, δηλαδή

$$\dot{x} - b\omega_y = 0, \qquad \dot{y} + b\omega_x = 0 \qquad (3\text{-}100)$$

και οι αντίστοιχοι μη-μηδενικοί συντελεστές α_{jl} είναι,

$$\alpha_{11} = 1, \qquad \alpha_{14} = -b$$

$$\alpha_{22} = 1, \qquad \alpha_{23} = b \quad .$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Επειδή υπάρχουν πέντε γενικευμένες ταχύτητες και δυο δεσμικές εξισώσεις μπορούμε να βρούμε τρια ανεξάρτητα σύνολα δυνατών ταχυτήτων. Ας εκλέξουμε τα ακόλουθα

$$\begin{array}{lll} u_1 = 1 & u_1 = 0 & u_1 = 1 \\ u_2 = 0 & u_2 = 1 & u_2 = 0 \\ u_3 = 0 & u_3 = -1/b & u_3 = 0 \\ u_4 = 1/b & u_4 = 0 & u_4 = 1/b \\ u_5 = 0 & u_5 = 0 & u_5 = 1 \end{array} .$$

Αν σημειωθεί ότι το μητρώο ακαμψίας είναι διαγώνιο και αν χρησιμοποιηθεί κάθε στήλη των u_i από την Εξ. (3-39) ή την (3-37) παίρνουμε ότι,

$$\begin{aligned} m\dot{x} + \frac{I_t \omega_y - 1}{b} &= 0 \\ m\dot{y} + \frac{I_\alpha \omega_x - 1}{b} &= 0 \\ m\dot{x} + \frac{I_t \omega_y - 1}{b} + I_t \omega_z &= 0 \end{aligned} \quad . \tag{3-101}$$

Λύνοντας τις Εξ. (3-101) παίρνουμε αμέσως τις ταχύτητες μετά την ώση, δηλαδή

$$\dot{x} = \frac{b}{I_t + mb^2}, \quad \omega_x = \frac{1}{I_\alpha + mb^2}, \quad \omega_z = 0$$

$$\dot{y} = \frac{-b}{I_\alpha + mb^2}, \quad \omega_y = \frac{1}{I_t + mb^2} .$$

Δεύτερη μέθοδος: Αν χρησιμοποιήσουμε τώρα τους πολλαπλασιαστές του Lagrange όπως δίδονται από την Εξ. (3-44) ή (3-76), παίρνουμε τις ακόλουθες πέντε εξισώσεις ώσης και ορμής:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$
\begin{aligned}
m\dot{x} &= \lambda_1 \\
m\dot{y} &= \lambda_2 \\
I_\alpha\, \omega_x - 1 &= b\, \lambda_2 \\
I_t\, \omega_y - 1 &= -\, b\, \lambda_1 \\
I_t\, \omega_z &= 0 \quad .
\end{aligned}
\tag{3-102}
$$

Οι εξισώσεις αυτές μαζί με τις δεσμικές εξισώσεις (3-100) μπορούν να λυθούν ως προς τις πέντε ταχύτητες και τους δυο πολλαπλασιαστές του Lagrange. Τα αποτελέσματα που λαμβάνονται συμφωνούν με τα ήδη γνωστά ενώ οι λ_i είναι,

$$
\lambda_1 = \frac{mb}{I_t + mb^2}, \qquad \lambda_2 = \frac{-\,mb}{I_\alpha + mb^2} \quad .
$$

Οι ώσεις των δεσμών που λαμβάνονται από την Εξ. (3-43) είναι

$$
\begin{aligned}
\hat{C}_1 &= \lambda_1\, \alpha_{11} = \frac{mb}{I_t + mb^2} \\
\hat{C}_2 &= \lambda_2\, \alpha_{22} = \frac{-\,mb}{I_\alpha + mb^2} \\
\hat{C}_3 &= \lambda_2\, \alpha_{23} = \frac{-\,mb^2}{I_\alpha + mb^2} \\
\hat{C}_4 &= \lambda_1\, \alpha_{14} = \frac{-\,mb^2}{I_t + mb^2} \\
\hat{C}_5 &= 0 \quad .
\end{aligned}
$$

Τρίτη μέθοδος: Ο πιο άμεσος τρόπος για τη μελέτη της κίνησης του ελλειψοειδούς αμέσως μετά την ώση ίσως είναι εκείνος που βασίζεται στην εφαρμογή της Εξ. (3-21) που μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$
\Delta H_i = \hat{M}_i \quad . \tag{3-103}
$$

Το σημείο επαφής του ελλειψοειδούς με την οριζόντια επιφάνεια είναι στιγμιαία ακίνητο αφού δεν υπάρχει ολίσθηση. Λαμβάνοντας αυτό το σημείο ως αρχή ενός σταθερού Καρτεσιανού συστήματος αναφοράς που

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

έχει τους άξονες του x, y, z παράλληλους προς τους άξονες του σώματος τη στιγμή της επιβολής της ώσης, έχουμε τις ακόλουθες κύριες ροπές αδράνειας:

$$I_{xx} = I_\alpha + mb^2 , \qquad I_{yy} = I_t + mb^2 , \qquad I_{zz} = I_t \quad ,$$

όπου πρέπει να σημειωθεί ότι οι άξονες x και y έχουν μεταφερθεί κατά μια απόσταση b. Η ώση του δεσμού δεν έχει ροπή ως προς την αρχή και άρα οι συνιστώσες της εφαρμοσμένης γωνιακής ώσης είναι

$$\hat{M}_x = 1, \qquad \hat{M}_y = 1, \qquad \hat{M}_z = 0 \quad .$$

Από την Εξ. (3-103) παίρνουμε

$$\begin{aligned} I_{xx}\,\omega_x &= (I_\alpha + mb^2)\omega_x = 1 \\ I_{yy}\,\omega_y &= (I_t + mb^2)\omega_y = 1 \\ I_{zz}\,\omega_z &= I_t\,\omega_z = 0 \quad , \end{aligned}$$

απ' όπου παίρνουμε τις ίδιες τιμές των ω_x, ω_y και ω_z που έχουν προκύψει με τις προηγούμενες μεθόδους. Οι τιμές των $\dot{x}$ και $\dot{y}$ λαμβάνονται από την Εξ. (3-100).

3-3. ΓΥΡΟΣΚΟΠΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Γυροσκοπικές δυνάμεις. Ας θεωρήσουμε και πάλι την εκπεφρασμένη μορφή των εξισώσεων κίνησης που εμφανίζονται με την εφαρμογή των εξισώσεων Lagrange σ' ένα ολόνομο σύστημα. Από την Εξ. (2-39) παίρνουμε

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\,\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} [jl, i]\,\dot{q}_j\,\dot{q}_i + \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}\,\dot{q}_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial m_{ij}}{\partial t}\,\dot{q}_j + \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad . \qquad (3\text{-}104)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Οι όροι $\gamma_{ij}\,\dot{q}_j$ είναι γνωστοί ως γυροσκοπικοί όροι και το σύστημα του οποίου οι εξισώσεις περιέχουν γυροσκοπικούς όρους είναι γνωστό ως *γυροσκοπικό σύστημα*. Οι *γυροσκοπικοί συντελεστές* γ_{ij} είναι *αντισυμμετρικοί* και δίδονται από τις

$$\gamma_{ij} = -\ \gamma_{ji} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_j} - \frac{\partial \alpha_j}{\partial q_i} \quad , \tag{3-105}$$

όπου οι α_i είναι οι συντελεστές των $\dot{q}_j$ στην T_1. Αν οι εξισώσεις κίνησης λαμβάνονται από τη συνάρτηση Routh R , τότε οι α_i είναι οι συντελεστές στην R_1 , δηλαδή το τμήμα της R το οποίο είναι γραμμικό ως προς $\dot{q}_j$.

Ας εξετάσουμε τώρα πως εμφανίζονται οι γυροσκοπικοί όροι. Αν θεωρήσουμε ένα σύνηθες σύστημα Lagrange, από την Εξ. (2-9) έχουμε ότι

$$\alpha_i = \sum_{k=1}^{3N} m_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \frac{\partial x_k}{\partial t} \quad ,$$

όπου x_k δίνουν τις αδρανειακές θέσεις των σωματίων που αποτελούν το σύστημα. Είναι προφανές ότι η αναγκαία συνθήκη για να είναι οι $\alpha_i \neq 0$ είναι μια ή περισσότερες από τις εξισώσεις μετασχηματισμού.

$$x_k = x_k (q_i, t) \tag{3-106}$$

να είναι *εκπεφρασμένη* συνάρτηση των q_i και t όπως θα ήταν δυνατόν να συμβεί μ' ένα κινούμενο δεσμό. Επιπλέον, από την Εξ. (3-105) βλέπουμε ότι κάποιοι από τους α_i πρέπει να είναι εκπεφρασμένες συναρτήσεις των q_i και t αν θέλουμε να έχουμε γυροσκοπικούς όρους στις εξισώσεις κίνησης.

Από φυσική θεώρηση, γυροσκοπικές δυνάμεις κατά πάσα πιθανότητα θα συμβούν αν (1) το σύστημα περιλαμβάνει ένα περιστρεφόμενο σώμα (ή σύστημα αναφοράς) και η διάταξη περιγράφεται ως προς αυτό το σώμα ή αν (2) το σύστημα έχει αφανείς συντεταγμένες και χρησιμοποιείται η διαδιακασία Routh.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό των γυροσκοπικών όρων είναι ότι υπάρχει πάντα *σύζευξη* των κινήσεων δυο ή περισσοτέρων συντεταγμένων. Από την Εξ. (3-104) βλέπουμε ότι η συζυγής της q_i γυροσκοπική δύναμη είναι η

$$Q_i = -\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}\, \dot{q}_i \quad . \tag{3-107}$$

Επειδή $\gamma_{ii} = 0$, οι Q_i θα οφείλονται σ' όλες τις $\dot{q}_j$ εκτός των $\dot{q}_i$, $(i \neq j)$ και έτσι θα υπάρχει αποτέλεσμα σύζευξης.

Ο ρυθμός με τον οποίο οι γυροσκοπικές δυνάμεις εκτελούν έργο είναι

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i\, \dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}\, \dot{q}_i\, \dot{q}_j = 0 \quad , \tag{3-108}$$

όπου $\gamma_{ij} = -\gamma_{ji}$. Μ' άλλα λόγια, η τετραγωνική μορφή $\dot{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\gamma} \dot{\mathbf{q}}$ είναι *εκ ταυτότητος ίση με το μηδέν* πράγμα που σημαίνει ότι οι γυροσκοπικές δυνάμεις, άσχετα με την κίνηση, δεν εκτελούν έργο. Η έμφαση στην αντίθεση μεταξύ των γυροσκοπικών και των δυνάμεων απωλειών, γίνεται αντιληπτή αν ανακαλέσουμε το γεγονός ότι η συνάρτηση απωλειών του Rayleigh, $F = {}^1/_2\, \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{c} \dot{\mathbf{q}}$ είναι *θετικά ορισμένη* (ή ημιορισμένη) τετραγωνική μορφή και κατά συνέπεια κάθε κίνηση στοιχείου απωλειών έχει ως αποτέλεσμα απώλεια ενέργειας. Επίσης, το μητρώο των συντελεστών απωλειών $\mathbf{c}_{ij}$ είναι *συμμετρικό* και όχι αντισυμμετρικό όπως το γ_{ij}.

Για να επεξηγήσουμε πως η διαδικασία Routh οδηγεί σε γυροσκοπικούς όρους στις εξισώσεις κίνησης ας θεωρήσουμε ένα σύστημα στο οποίο η q_1 είναι *αφανής*. Υποθέτουμε ότι η αρχική συνάρτηση Lagrange είναι της μορφής

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\, \dot{q}_i\, \dot{q}_j + \sum_{j=1}^{n} a_i\, \dot{q}_i + T_0 - V \quad . \tag{3-109}$$

Η γενικευμένη ορμή p_1 είναι μια σταθερά της κίνησης, δηλαδή

$$p_1 = \sum_{j=1}^{n} m_{1j}\,\dot{q}_j + \alpha_1 = \beta_1 \qquad (3\text{-}110)$$

και παίρνουμε

$$\dot{q}_1 = \frac{1}{m_{11}}\left(\beta_1 - \alpha_1 - \sum_{j=2}^{n} m_{1j}\,\dot{q}_j\right) . \qquad (3\text{-}111)$$

Η συνάρτηση Routh στην περίπτωση αυτή είναι

$$R = L - \beta_1\dot{q}_1 = \frac{1}{2}m_{11}\dot{q}_1^2 + \sum_{j=2}^{n} m_{1j}\dot{q}_1\dot{q}_j + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} m_{ij}\dot{q}_i\,\dot{q}_j$$

$$+ \alpha_1\dot{q}_1 + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j\,\dot{q}_j - \beta_1\,\dot{q}_1 + T_0 - V \; . \qquad (3\text{-}112)$$

Αν αντικαταστήσουμε την $\dot{q}_1$ από την την Εξ. (3-111) και θεωρήσουμε μόνο εκείνο το τμήμα R_1 που είναι γραμμικό ως προς $\dot{q}_i$ (αφού ενδιαφερόμαστε για γυροσκοπικές δυνάμεις), παίρνουμε

$$R_1 = \left(\frac{\beta_1 - \alpha_1}{m_{11}}\right)\sum_{j=2}^{n} m_{1j}\,\dot{q}_j + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j\,\dot{q}_j \quad . \qquad (3\text{-}113)$$

Από την εξίσωση αυτή γίνεται φανερό ότι γραμμικοί όροι ως προς $\dot{q}_j$ εμφανίζονται, γενικά, στη συνάρτηση Routh ακόμα και αν οι όροι αυτοί λείπουν εντελώς από την αρχική συνάρτηση Lagrange. Αν περισσότερες από μια συντεταγμένες .αγνοηθούν, μια επαναλαμβανόμενη εφαρμογή αυτής της διαδικασίας δείχνει ότι εμφανίζονται επιπρόσθετοι γυροσκοπικοί όροι. Πρέπει όμως να σημειωθεί ότι αν παραμένει μόνο μια μη-αφανής συντεταγμένη, τότε δεν υπάρχουν γυροσκοπικοί όροι στις εξισώσεις κίνησης γιατί όπως αποδείχτηκε προηγουμένως οι γυροσκοπικές δυνάμεις περικλείουν πάντα σύζευξη των κινήσεων δύο ή περισσοτέρων συντεταγμένων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Μικρές κινήσεις. Ας θεωρήσουμε τώρα τις μικρές ταλαντώσεις ενός συντηρητικού γυροσκοπικού συστήματος γύρω από μια θέση αναφοράς *σταθερής κίνησης*, που οφείλεται σε κινούμενους δεσμούς ή αφανείς συντεταγμένες. Έστω ότι εκλέγουμε τις q_i τέτοιες ώστε στη θέση αναφοράς όλες οι μη-αφανείς q_i και $\dot{q}_i$ να είναι μηδέν και οι αφανείς $\dot{q}_i$ να είναι σταθερές. Η θέση αναφοράς ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες ισορροπίας:

$$\left(\frac{\partial(V - T_0)}{\partial q_i}\right)_0 = \left(\frac{\partial V'}{\partial q_i}\right)_0 = 0 \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad , \qquad (3\text{-}114)$$

όπου σύμφωνα με την Εξ. (2-152), η V' εκφράζει τις αδρανειακές δυνάμεις όπως επίσης και τις εφαρμοσμένες δυνάμεις στην κίνηση αναφοράς. Αν αναπτύξουμε την V' σε σειρά Taylor γύρω από την αρχή με τρόπο ανάλογο της Εξ. (2-228), παίρνουμε

$$V' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} k_{ij}\, q_i\, q_j \quad , \qquad (3\text{-}115)$$

όπου

$$k_{ij} = k_{ji} = \left(\frac{\partial^2 V'}{\partial q_i\, \partial q_j}\right)_0 \qquad (3\text{-}116)$$

και οι όροι ανώτερης τάξης ως προς q_i παραλείπονται. Αν χρησιμοποιηθεί η διαδικασία Routh, η R_0 (το τμήμα της R που δεν περιέχει $\dot{q}_i$) αντικαθιστά την $-V'$.

Ας υπολογίσουμε τώρα τους συντελεστές m_{ij} και α_i στη διάταξη αναφοράς και ας θεωρήσουμε ότι κανένας απ' αυτούς δεν είναι εκπεφρασμένη συνάρτηση του χρόνου. Τότε, από την Εξ. (3-104), βλέπουμε ότι *γραμμικοποιημένες* εξισώσεις κίνησης είναι της μορφής

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\, \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}\, \dot{q}_j + \sum_{j=1}^{n} k_{ij}\, q_j = 0 \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad , \qquad (3\text{-}117)$$

όπου οι συντελεστές είναι σταθεροί. Η αντιστοιχούσα συνάρτηση Lagrange είναι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\dot{q}_i\,\dot{q}_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\dot{q}_i\,q_j - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k_{ij}q_i\,q_j \quad , \qquad (3\text{-}118)$$

όπου

$$g_{ij} = \frac{\partial \alpha_j}{\partial q_j} \qquad (3\text{-}119)$$

και, από την Εξ. (3-105) ,

$$\gamma_{ij} = g_{ij} - g_{ji} \quad . \qquad (3\text{-}120)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι τα μητρώα **m** και **k** είναι συμμετρικά αλλά όχι και το **g** .

Στη συνέχεια ας υποθέσουμε λύσεις της μορφής

$$q_j = A_j\,Ce^{\lambda t} \qquad (3\text{-}121)$$

και ας τις αντικαταστήσουμε στην Εξ. (3-117). Μετά τη διαγραφή του κοινού παράγοντα $Ce^{\lambda t}$, έχουμε

$$\lambda^2 \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\,A_j + \lambda \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}\,A_j + \sum_{j=1}^{n} k_{ij}\,A_j = 0 \qquad (3\text{-}122)$$

ή σε μητρωϊκή γραφή

$$(\lambda^2\,\mathbf{m} + \lambda\,\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{k})\mathbf{A} = 0 \quad . \qquad (3\text{-}123)$$

Η *χαρακτηριστική εξίσωση* του συστήματος λαμβάνεται αν θέσουμε την ορίζουσα των συντελεστών των A_j ίση με το μηδέν, δηλαδή

$$|(\lambda^2\,\mathbf{m} + \lambda\,\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{k})| = 0 \quad . \qquad (3\text{-}124)$$

Η εξίσωση αυτή παράγει ένα πολυώνυμο βαθμού $2n$ ως προς λ . Επειδή $\gamma_{ij} = -\gamma_{ji}$ και $m_{ij} = m_{ji}$, $k_{ij} = k_{ji}$ μπορεί να αποδειχθεί ότι από τη χαρακτηριστική εξίσωση απουσιάζουν οι *περιττές* δυνάμεις του λ .

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Άρα στην πραγματικότητα παίρνουμε ένα πολυώνυμο n - βαθμού ως προς λ^2 όπως θα ήταν και στην περίπτωση χωρίς γυροσκοπικούς όρους.

Οι συντελεστές στη χαρακτηριστική εξίσωση είναι πραγματικοί πράγμα που σημαίνει ότι οι n ιδιοτιμές λ_k^2 είναι ή πραγματικές ή ζεύγη μιγαδικών συζυγών. Για κάθε ρίζα λ_k μπορούμε να λύσουμε ως προς το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{A}^{(k)}$ χρησιμοποιώντας την Εξ. (3-123). Ως αποτέλεσμα όμως των γυροσκοπικών όρων οι λόγοι των πλατών *δεν είναι γενικά πραγματικοί.* Έτσι, για ένα ευσταθές σύστημα, η κίνηση που αντιστοιχεί σε μια αρνητική ιδιοτιμή λ_k^2 συνίσταται σε ταλαντωτικές κινήσεις των διαφόρων q_j που έχουν την ίδια συχνότητα αλλά κινούνται με *διαφορά φάσης.*

Η γενική λύση για την ελεύθερη κίνηση λαμβάνεται με υπέρθεση. Θεωρώντας διακεκριμένες λ_k βρίσκουμε ότι

$$q_j = \sum_{k=1}^{2n} A_{jk}\, C_k\, e^{\lambda_k t} \quad , \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \quad , \qquad (3\text{-}125)$$

όπως στην Εξ. (3-12). Οι $2n$ συντελεστές C_k προσδιορίζονται από τις $2n$ αρχικές συνθήκες και είναι είτε πραγματικοί είτε ζεύγη μιγαδικών συζυγών. Επειδή $\mathbf{m}$, γ και $\mathbf{k}$ είναι πραγματικά μητρώα από την Εξ. (3-123) μπορούμε να δούμε ότι το ιδιοδιάνυσμα στήλη που αντιστοιχεί στη λ_k^*, τη μιγαδική συζυγή της λ_k, είναι $\mathbf{A}^{(k)*}$.

Γυροσκοπική ευστάθεια. Στη συζήτηση για τις μικρές ταλαντώσεις ενός συντηρητικού συστήματος στην παράγραφο 2-4 βρήκαμε ότι η κίνηση είναι ευσταθής αν V είναι θετικά ορισμένο, αδιάφορα ευσταθής αν V είναι θετικά ημί-ορισμένο και ασταθής αν V είναι αόριστο, αρνητικά ορισμένο ή αρνητικά ημί-ορισμένο.

Ας θεωρήσουμε τώρα τον ορισμό της ευστάθειας που βασίζεται στην απόκριση των *μη-αφανών συντεταγμένων* σε μια *απειροστή διατάραξη* από μια θέση, ισορροπίας, αναφοράς στην αρχή του μορφικού χώρου. Αν η απόκριση του συστήματος παραμένει απειροστή, δηλαδή αν $|q_i| < \varepsilon << 1$ για όλες τις μη-αφανείς q_i και για όλες τις μελλοντικές τιμές του t, τότε το σύστημα είναι *ευσταθές.* Διαφορετικά το σύστημα είναι ασταθές.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ο ορισμός αυτός της ευστάθειας διαφέρει από τους προηγούμενους ορισμούς στο ότι ένα αδιάφορα ευσταθές σύστημα θεωρείται τώρα ως *ασταθές* γιατί κάθε όρος που είναι γραμμικός ως προς t θα γίνει τελικά μεγαλύτερος από το ε . Πρέπει επίσης να σημειώσουμε ότι θεωρούμε μόνο *ευστάθεια μικρών κινήσεων* δηλαδή θεωρούμε κινήσεις στην άμεση περιοχή της διάταξης αναφοράς στην αρχή του q-χώρου. Για γραμμικά συστήματα, φυσικά, η ανάλυση ευστάθειας των μικρών κινήσεων εφαρμόζεται επίσης και για μεγάλες κινήσεις.

Ας εξετάσουμε τώρα το αποτέλεσμα της πρόσθεσης γυροσκοπικών όρων, όπως στην Εξ. (3-117), στην ευστάθεια ενός γραμμικού συστήματος. Θεωρούμε πρώτα ότι η κατάσταση αναφοράς είναι *ευσταθής* χωρίς τους γυροσκοπικούς όρους, δηλαδή V' είναι *θετικά ορισμένη*. Εξάλλου, το σύστημα είναι συντηρητικό και υπάρχει ένα ολοκλήρωμα Jacobi,

$$T_0 + V' = h \quad . \tag{3-126}$$

Θεωρώντας μια απειροστή διατάραξη από την κατάσταση αναφοράς, τόσο η T_2 όσο και η V' είναι αρχικά μικρές και θετικές και άρα το h είναι επίσης μικρό και θετικό. Αφού οι T_2 και V' είναι θετικά ορισμένες αυτό σημαίνει ότι και οι δυο πρέπει να παραμένουν μικρές στην κίνηση που ακολουθεί επιβεβαιώνοντας έτσι τη θεωρηθείσα ευστάθεια του γυροσκοπικού συστήματος. Σημειώνουμε επιπλέον ότι η πρόσθεση γυροσκοπικών όρων δεν μεταβάλλει το ολοκλήρωμα Jacobi αφού οι γυροσκοπικές δυνάμεις δεν εκτελούν έργο. Άρα, ένα αρχικά ευσταθές σύστημα με την προσθήκη γυροσκοπικών όρων παραμένει ευσταθές.

Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια ότι V' είναι *αρνητικά ορισμένη* πράγμα που αντιστοιχεί σ' ένα ασταθές σύστημα χωρίς γυροσκοπικούς όρους. Στην περίπτωση αυτή οι ενεργειακές θεωρήσεις πρέπει να αναγνωρίζουν την αστάθεια αλλά δεν το απαιτούν. Ως εκ τούτου, είναι αναγκαία μια λεπτομερής ανάλυση των εξισώσεων κίνησης για να προσδιορίσουμε την ευστάθεια. Από τη χαρακτηριστική εξίσωση μπορεί όμως να δειχτεί ότι αν το σύστημα έχει έναν άρτιο αριθμό βαθμών ελευθερίας μετά από αγνόηση συντεταγμένων, τότε η γυροσκοπική σταθεροποίηση του συστήματος είναι πάντα δυνατή. Μια γνωστή περίπτωση αυτού του τύπου είναι η γυροσκοπική σταθεροποίηση του κατακόρυφου στρόβου.

Αν V' είναι *αόριστη* δηλαδή, αν έχει αρνητικές και θετικές περιοχές σε κοντινή γειτονιά της αρχής τότε είναι δυνατή, κάποιες

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

φορές, γυροσκοπική σταθεροποίηση. Στην περίπτωση αυτή το σύστημα είναι αναγκαίο να έχει έναν άρτιο αριθμό ασταθών μορφών .

Οι υπόλοιπες δυνατές περιπτώσεις για τη V' , δηλαδή *θετικά ημί-ορισμένη* και *αρνητικά ημί-ορισμένη* αντιστοιχούν σε συστήματα που δεν μπορούν γυροσκοπικά να σταθεροποιηθούν. Μια τέτοια ειδική περίπτωση συμβαίνει όταν η V' είναι εκ ταυτότητος ίση με το μηδέν.

Ας εξετάσουμε τώρα το αποτέλεσμα της *απόσβεσης* επί ενός γυροσκοπικού συστήματος. Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι η συνάρτηση απωλειών Rayleigh που σχετίζεται με το σύστημα είναι *θετικά ορισμένη* ως προς τις μη-αφανείς $\dot{q}_i$, πράγμα που σημαίνει ότι δεν είναι δυνατή κίνηση αυτών των συντεταγμένων χωρίς απώλεια ενέργειας. Οι αφανείς όμως συντεταγμένες θεωρούνται ότι παραμένουν μη-αποσβεννύμενες. Αν V' είναι *θετικά ορισμένη* η πρόσθεση απόσβεσης μετατρέπει ένα ευσταθές σύστημα σ' ένα *ασυμπτωτικά ευσταθές* σύστημα. Το γεγονός αυτό συμβαίνει γιατί η μόνη θέση στην οποία το σύστημα μπορεί να παραμένει χωρίς απώλεια ενέργειας είναι εκείνη της ελάχιστης V' στην αρχή του συστήματος αναφοράς.

Αν όμως η V' είναι *αρνητικά ορισμένη, αρνητικά ημί-ορισμένη* ή *αόριστη*, η παρουσία απόσβεσης θα έχει ως αποτέλεσμα ένα ασταθές σύστημα ανεξάρτητα από οποιεσδήποτε γυροσκοπικές επιρροές. Στην περίπτωση αυτή η απόσβεση σχετίζεται με μια συνεχιζόμενη απώλεια ενέργειας και μια αυξανόμενη αρνητική συνολική ενέργεια που έχει ως αποτέλεσμα τελικά μια ή περισσότερες q_i να μη παραμένουν πλέον απειροστές.

Τελικά, αν η V' είναι *μηδέν ή θετικά ημί-ορισμένη* το σύστημα με απόσβεση παραμένει *ασταθές*. Πρέπει όμως να σημειωθεί ότι η ανάλυση εφαρμόζεται στο γραμμικοποιημένο σύστημα δηλαδή η V' θεωρείται ότι είναι τετραγωνικής μορφής ως προς τις μη-αφανείς q_i . Οι ανώτερης τάξης όροι της V' είναι δυνατόν να έχουν επιρροή στην ευστάθεια του συστήματος.

Παράδειγμα 3-4. Θεωρούμε ένα γυροσκοπικό σύστημα που έχει δυο βαθμούς ελευθερίας και του οποίου οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$m_{11}\ddot{q}_1 + m_{12}\ddot{q}_2 + \gamma_{12}\dot{q}_2 + k_{11}q_1 + k_{12}q_2 = 0$$
$$m_{12}\ddot{q}_1 + m_{22}\ddot{q}_2 - \gamma_{12}\dot{q}_1 + k_{12}q_1 + k_{22}q_2 = 0 \quad , \qquad (3\text{-}127)$$

όπου οι συντελεστές m_{ij} και k_{ij} είναι συμμετρικοί και οι γ_{ij} αντισυμμετρικοί. Ας πάρουμε τις συνθήκες επί των συντελεστών αυτών οι οποίες εξασφαλίζουν ευστάθεια του συστήματος.

Αν θεωρήσουμε εκθετικές λύσεις που έχουν τη μορφή της Εξ. (3-121), η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\begin{vmatrix} (m_{11}\lambda^2 + k_{11}) & (m_{12}\lambda^2 + \gamma_{12}\lambda + k_{12}) \\ (m_{12}\lambda^2 - \gamma_{12}\lambda + k_{12}) & (m_{22}\lambda^2 + k_{22}) \end{vmatrix} = 0$$

ή

$$(m_{11}m_{22} - m_{12}^2)\lambda^4 + (m_{11}k_{22} + m_{22}k_{11} - 2m_{12}k_{12} + \gamma_{12}^2)\lambda^2 + (k_{11}k_{22} - k_{12}^2) = 0 \quad . \qquad (3\text{-}128)$$

Το σύστημα είναι ευσταθές αν οι ιδιοτιμές λ_k^2 είναι πραγματικές αρνητικές και διακεκριμένες, πράγμα που έχει ως αποτέλεσμα μη-επαναλαμβανόμενες φανταστικές ρίζες λ_k . Θυμίζουμε ότι ο συντελεστής $(m_{11}m_{22} - m_{12}^2)$ πρέπει να είναι θετικός γιατί η κινητική ενέργεια είναι θετικά ορισμένη για κάθε πραγματικό σύστημα. Άρα το σύστημα είναι ευσταθές αν

$$k_{11}k_{22} - k_{12}^2 > 0$$
$$(m_{11}k_{22} + m_{22}k_{11} - 2m_{12}k_{12} + \gamma_{12}^2) > 2\sqrt{(m_{11}m_{22} - m_{12}^2)(k_{11}k_{22} - k_{12}^2)} \qquad (3\text{-}129)$$

Τα αποτελέσματα αυτά προέρχονται κατ' ευθείαν από τη λύση, για τις ρίζες, της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Θεωρώντας ότι το σύστημα είναι *γυροσκοπικό* ($\gamma_{12}\neq 0$), μπορεί να δειχτεί ότι επαναλαμβανόμενες φανταστικές ρίζες λ_k συμβαίνουν μόνο αν το V είναι αρνητικά ορισμένο, στην όποια περίπτωση το σύστημα είναι ασταθές. Επίσης, επαναλαμβανόμενες μηδενικές ρίζες έχουν ως αποτέλεσμα μια ασταθή λύση. Εξάλλου, αν λ_k^2 είναι μιγαδική ή πραγματική θετική, η λύση είναι προφανώς ασταθής. Άρα, οι συνθήκες (3-129) είναι, *οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες για την ευστάθεια* ενός γυροσκοπικού συστήματος με δυο βαθμούς ελευθερίας.

Ας διευκρινίσουμε τη φύση της κίνησης του γραμμικού γυροσκοπικού συστήματος με τη βοήθεια αριθμητικών παραδειγμάτων.

Περίπτωση 1 :. Θετικά ορισμένη V. Έστω ότι οι συντελεστές αδράνειας και ακαμψίας είναι οι ακόλουθοι:

$$\begin{aligned} m_{11} &= 2 & k_{11} &= 1 \\ m_{22} &= 4 & k_{22} &= 8 \\ m_{12} &= 1 & k_{12} &= -1 \quad , \end{aligned}$$

όπου θεωρούμε ένα συμβιβαστό σύνολο μονάδων. Στην περίπτωση αυτή η Εξ. (3-123) γίνεται

$$\begin{aligned} (2\lambda^2 + 1)A_1 + (\lambda^2 + \gamma_{12}\lambda - 1)A_2 &= 0 \\ (\lambda^2 - \gamma_{12}\lambda - 1)A_1 + (4\lambda^2 + 8)A_2 &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{3-130}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$7\lambda^4 + (22 + \gamma_{12}^2)\lambda^2 + 7 = 0 \tag{3-131}$$

και έχει ρίζες

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{14}\left[-(22 + \gamma_{12}^2) \pm \sqrt{(22 + \gamma_{12}^2)^2 - 196} \right] .$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Επειδή και οι δυο ιδιοτιμές λ^2 είναι πραγματικές αρνητικές, το σύστημα είναι *ευσταθές* για όλες τις τιμές του γυροσκοπικού συντελεστή γ_{12} , δηλαδή για όλες τις ταχύτητες περιστροφής του γυροσκοπικού στοιχείου σύζευξης.

Ας εκλέξουμε τώρα $\gamma_{12} = 1$. Αντικαθιστώνας στην έκφραση για τις ιδιοτιμές, παίρνουμε

$$\lambda_1^2 = -\ 0.339\ , \qquad \lambda_1 = i\ 0.583$$

$$\lambda_2^2 = -\ 2.95\ , \qquad \lambda_2 = i\ 1.716$$

Οι σχετικοί λόγοι των πλατών μπορούν να βρεθούν από την Εξ. (1-130). Γενικά

$$\frac{A_2}{A_1} = -\ \frac{\lambda^2 - \lambda - 1}{4\lambda^2 + 8}\ ,$$

η οποία παράγει

$$\frac{A_{21}}{A_{11}} = 0.202 + i\ 0.0877$$

$$\frac{A_{22}}{A_{12}} = -\ 1.043 - i\ 0.453\ .$$

Ο πρώτος μιγαδικός λόγος δείχνει ότι στην πρώτη μορφή της ταλάντωσης η q_2 προηγείται της q_1 κατά $\tan^{-1}(0.0877/0.202) = 23.5^o$ και ο λόγος των πλατών είναι:

$$\frac{|q_2|}{|q_1|} = \sqrt{0.202^2 + 0.0877^2} = 0.220\ .$$

Στη δεύτερη μορφή η q_2 ακολουθεί την q_1 κατά 156.5^o και ο λόγος των πλατών είναι 1.137. Η κίνηση στις δυο μορφές είναι ημιτονοειδής, η συχνότητα της πρώτης είναι 0.583 rad/sec και της δεύτερης 1.716 rad/sec.

Περίπτωση 2 : Αρνητικά ορισμένη V . Ας υποθέσουμε ότι οι συντελεστές αδράνειας και ακαμψίας είναι οι ακόλουθοι:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$m_{11} = 2 \qquad k_{11} = -1$$
$$m_{22} = 4 \qquad k_{22} = -8$$
$$m_{12} = 1 \qquad k_{12} = 1 \quad .$$

Οι εξισώσεις για τους συντελεστές A_j είναι

$$\begin{aligned}(2\lambda^2 - 1)A_1 + (\lambda^2 + \gamma_{12}\lambda + 1)A_2 = 0 \\ (\lambda^2 - \gamma_{12}\lambda + 1)A_1 + (4\lambda^2 - 8)A_2 = 0\end{aligned} \qquad (3\text{-}132)$$

και η χαρακτηριστική εξίσωση έχει τη μορφή,

$$7\lambda^4 + (\gamma_{12}^2 - 22)\lambda^2 + 7 = 0 \quad . \qquad (3\text{-}133)$$

Έτσι παίρνουμε

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{14}\left[-(\gamma_{12}^2 - 22) \pm \sqrt{(\gamma_{12}^2 - 22)^2 - 196}\right] \quad .$$

Από την Εξ. (3-129) βλέπουμε ότι για ευστάθεια πρέπει να έχουμε $\gamma_{12}^2 > 36$.

Ας υποθέσουμε ότι $\gamma_{12} = 7$. Τότε παίρνουμε

$$\lambda_1^2 = -0.280 \ , \qquad \lambda_1 = i\,0.529$$
$$\lambda_2^2 = -3.58 \ , \qquad \lambda_2 = i1.891 \quad .$$

Οι λόγοι των πλατών είναι

$$\frac{A_2}{A_1} = -\frac{\lambda^2 - 7\lambda + 1}{4\lambda^2 - 8}$$

και παράγουν

$$\frac{A_{21}}{A_{11}} = 0.0790 - i\,0.406$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\frac{A_{22}}{A_{12}} = -0.1155 - i\,0.594 \quad .$$

Εδώ έχουμε ένα παράδειγμα συστήματος που έχει δυο ασταθείς μορφές όταν ο γυροσκοπικός συντελεστής είναι ίσος με μηδέν. Το σύστημα όμως σταθεροποιείται γυροσκοπικά για $|\gamma_{12}| > 6$ και η ελεύθερη κίνησή του συνίσταται από ημιτονοειδείς ταλαντώσεις.

Περίπτωση 3: Αόριστη V. Έστω τώρα ότι οι συντελεστές αδράνειας και ακαμψίας είναι οι ακόλουθοι:

$$\begin{aligned} m_{11} &= 2 & k_{11} &= -1 \\ m_{22} &= 4 & k_{22} &= 8 \\ m_{12} &= 1 & k_{12} &= 1 \quad . \end{aligned}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\begin{vmatrix} (2\lambda^2 - 1) & (\lambda^2 + \gamma_{12}\lambda + 1) \\ (\lambda^2 - \gamma_{12}\lambda + 1) & (4\lambda^2 + 8) \end{vmatrix} = 0$$

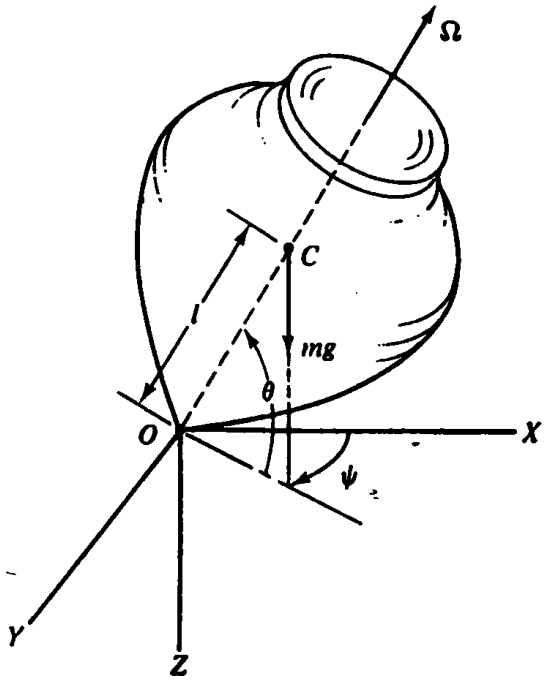
ή

$$7\lambda^4 + (10 + \gamma_{12}^2)\lambda^2 - 9 = 0 \quad . \qquad (3\text{-}134)$$

Από την πρώτη συνθήκη της (3-129) βλέπουμε ότι το σύστημα είναι *ασταθές*, ανεξάρτητα από την τιμή της γυροσκοπικής σταθεράς γ_{12}. Ειδικά, βρίσκουμε ότι οι ιδιοτιμές λ_1^2 και λ_2^2 είναι πραγματικές με αντίθετα πρόσημα πράγμα που έχει ως αποτέλεσμα έναν ασταθή όρο της μορφής $e^{\lambda t}$ στη λύση, όπου λ είναι πραγματικός θετικός.

Παράδειγμα 3-5. Θεωρούμε την κίνηση του στρόβου (Σχ. 3-5) του οποίου η θέση εκφράζεται σε όρους των γωνιών του Euler. Να παραχθούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης, με χρησιμοποίηση της διαδικασίας Routh, και να σχολιαστεί η φύση των μικρών κινήσεων κοντά στην κατάσταση αναφοράς της σταθερής μετάπτωσης.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



Σχ. 3-5. Στρόβος με σταθερό σημείο O.

Έστω I_α η ροπή αδράνειας περί τον άξονα συμμετρίας και έστω I_t η εγκάρσια ροπή αδράνειας περί το σταθερό σημείο O. Η αξονική συνιστώσα της γωνιακής ταχύτητας $\boldsymbol{\omega}$ λέγεται ολικό spin (*) $\boldsymbol{\Omega}$ και δίνεται από την

$$\Omega = \dot{\varphi} - \dot{\psi} \sin\theta \quad . \tag{3-135}$$

Η εγκάρσια συνιστώσα της γωνιακής ταχύτητας είναι το διανυσματικό άθροισμα των ορθογωνίων συνιστωσών $\dot{\theta}$ και $\dot{\psi}\cos\theta$. Άρα η ολική κινητική ενέργεια είναι

$$T = \frac{1}{2} I_\alpha \, (\dot{\varphi} - \dot{\psi} \sin\theta)^2 + \frac{1}{2} I_t \, (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \cos^2\theta) \quad . \tag{3-136}$$

Η δυναμική ενέργεια είναι εντελώς βαρυτική και δίνεται από την

(*) spin (= ιδιοστροφορμή).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$V = mgl \sin\theta \quad . \tag{3-137}$$

Έτσι η συνάρτηση Lagrange είναι

$$L = \frac{1}{2} I_\alpha (\dot{\varphi} - \dot{\psi} \sin\theta)^2 + \frac{1}{2} I_t (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \cos^2\theta) - mgl \sin\theta \ . \tag{3-138}$$

Επειδή η L δεν είναι εκπεφρασμένη συνάρτηση των φ και ψ οι συντεταγμένες αυτές είναι *αφανείς*. Η διαδικασία Routh ωστόσο δεν μας υποχρεώνει να χειριστούμε και τις δυο συντεταγμένες ως αφανείς. Έτσι ας εξετάσουμε πρώτα τις συνέπειες από την αγνόηση μιας ακριβώς από αυτές τις συντεταγμένες.

Περίπτωση 1 : Αγνοούμε μόνο τη φ . Σημειώνουμε ότι η αξονική συνιστώσα της στροφορμής είναι σταθερή, δηλαδή

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_\alpha (\dot{\varphi} - \dot{\psi} \sin\theta) = \beta_\varphi \tag{3-139}$$

ή

$$\dot{\varphi} = \dot{\psi} \sin\theta + \frac{\beta_\varphi}{I_\alpha} \quad . \tag{3-140}$$

Χρησιμοποιώντας την Εξ. (2-122), βρίσκουμε ότι η συνάρτηση Routh είναι

$$R = L - \beta_\varphi \dot{\varphi}$$

$$= \frac{\beta_\varphi^2}{2I_\alpha} + \frac{1}{2} I_t (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \cos^2\theta) - mgl \sin\theta - \beta_\varphi \left(\dot{\psi} \sin\theta + \frac{\beta_\varphi}{I_\alpha} \right)$$

ή

$$R = \frac{1}{2} I_t (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \cos^2\theta) - \beta_\varphi \dot{\psi} \sin\theta - mgl \sin\theta \ , \tag{3-141}$$

όπου έχουμε παραλείψει τη σταθερή $-\beta_\varphi^2 / 2I_\alpha$ αφού αυτή δεν επηρεάζει την κίνηση.

Οι εξισώσεις κίνησης λαμβάνονται με τη χρησιμοποίηση της R ως συνάρτησης Lagrange στη συνήθη μορφή των εξισώσεων Lagrange. Βρίσκουμε ότι

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{\psi}} = I_t \dot{\psi} \cos^2 \theta - \beta_\varphi \sin \theta, \quad \frac{\partial R}{\partial \psi} = 0$$

πράγμα που έχει ως αποτέλεσμα την ακόλουθη εξίσωση κίνησης:

$$I_t \ddot{\psi} \cos^2 \theta - 2 I_t \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta - \beta_\varphi \dot{\theta} \cos \theta = 0 \quad . \quad (3\text{-}142)$$

Με παρόμοιο τρόπο, παίρνουμε

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = I_t \dot{\theta}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \theta} = - I_t \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta - \beta_\varphi \dot{\psi} \cos \theta - mgl \cos \theta$$

και η ως προς θ εξίσωση είναι

$$I_t \ddot{\theta} + I_t \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + \beta_\varphi \dot{\psi} \cos \theta + mgl \cos \theta = 0 \quad . \quad (3\text{-}143)$$

Οι γυροσκοπικοί όροι είναι $-\beta_\varphi \dot{\theta} \cos\theta$ στην εξίσωση ως προς ψ και $\beta_\varphi \dot{\psi} \cos\theta$ στην εξίσωση ως προς θ. Πρέπει να σημειωθεί ότι οι όροι αυτοί είναι γραμμικοί ως προς $\dot{q}_i$ και έχουν ίσους και αντίθετους συντελεστές.

Για να προσδιορίσουμε το σταθερό ρυθμό μετάπτωσης, ας θέσουμε $\ddot{\theta} = 0$ στην Εξ. (3-143) και ας λύσουμε ως προς $\dot{\psi}$. Παίρνουμε

$$\dot{\psi} = \frac{-\beta_\varphi}{2 I_t \sin \theta} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4 I_t mgl \sin \theta}{\beta_\varphi^2}} \right) . \quad (3\text{-}144)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Σημειώνουμε ότι υπάρχουν δυο δυνατοί σταθεροί ρυθμοί μετάπτωσης, υπό τον όρο η τετραγωνική ρίζα είναι πραγματική, δηλαδή για

$$\beta_\varphi^2 > 4 I_t\, mgl\, \sin\theta$$

ή

$$\Omega^2 > \frac{4 I_t\, mgl}{I_\alpha^2}\, \sin\theta \quad . \tag{3-145}$$

Μ' άλλα λόγια, το μέτρο του συνολικού spin πρέπει να είναι αρκετά μεγάλο για να εξασφαλίσει γυροσκοπική σταθεροποίηση. Για την κοινή περίπτωση του αρκετά μεγάλου μέτρου spin όπου $I_\alpha^2\, \Omega^2 >> 4 I_t\, mgl \sin\theta$, ο χαμηλότερος ρυθμός μετάπτωσης είναι εκείνος που συνήθως παρατηρήθηκε και κατά προσέγγιση είναι

$$\dot{\psi} = -\frac{mgl}{\beta_\varphi} = -\frac{mgl}{I_\alpha\, \Omega} \quad . \tag{3-146}$$

Για να πάρουμε τις γραμμικοποιημένες εξισώσεις για μικρές κινήσεις κοντά στην κατάσταση αναφοράς της σταθερής μετάπτωσης είναι σκόπιμο να χρησιμοποιήσουμε *στοιχειώδη θεωρία διαταραχών* στις μη- γραμμικές εξισώσεις που δίνονται από τις (3-142) και (3-143). Γενικά, αν θεωρήσουμε το ανάπτυγμα Taylor μιας συνάρτησης $F(\alpha,\beta,\gamma, \ldots)$ γύρω από την τιμή αναφοράς $F_0(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \ldots)$, μπορούμε να γράψουμε

$$F = F_0 + \delta F = F_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha}\right)_0 \delta\alpha + \left(\frac{\partial F}{\partial \beta}\right)_0 \delta\beta + \left(\frac{\partial F}{\partial \gamma}\right)_0 \delta\gamma + \ldots$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}\right)_0 (\delta\alpha)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha\, \partial \beta}\right)_0 \delta\alpha\, \delta\beta + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2}\right)_0 (\delta\beta)^2 + \ldots\right] + \ldots , \tag{3-147}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

όπου $\alpha = \alpha_0 + \delta\alpha$, $\beta = \beta_0 + \delta\beta$, κ.τ.λ. . Αν υποθέσουμε μικρές διαταράξεις και παραλείψουμε όλους τους όρους που περιέχουν γινόμενα αυτών των μικρών ποσοτήτων, παίρνουμε τη *γραμμική προσέγγιση*

$$\delta F = \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha}\right)_0 \delta\alpha + \left(\frac{\partial F}{\partial \beta}\right)_0 \delta\beta + \left(\frac{\partial F}{\partial \gamma}\right)_0 \delta\gamma + \ldots \quad . \qquad (3\text{-}148)$$

Έστω $F=0$ εκφράζει τη διαφορική εξίσωση που πρέπει να γραμμικοποιηθεί και θεωρούμε κάθε συντεταγμένη q και τις παραγώγους της ως ξεχωριστές μεταβλητές στο ανάπτυγμα. Σημειώνοντας ότι $F_0 = 0$, η Εξ. (3-142) γίνεται

$$I_t \cos^2\theta_0 \, \delta\ddot{\psi} - (I_t \dot{\psi}_0 \sin 2\theta_0 + \beta_\varphi \cos\theta_0)\, \delta\dot{\theta} = 0 \quad . \qquad (3\text{-}149)$$

Με παρόμοιο τρόπο η Εξ. (3-143) έχει ως αποτέλεσμα την

$$I_t \delta\ddot{\theta} + (I_t \dot{\psi}_0 \sin 2\theta_0 + \beta_\varphi \cos\theta_0)\, \delta\dot{\psi} + (I_t \dot{\psi}_0^2 \cos 2\theta_0 - \beta_\varphi \dot{\psi}_0 \sin\theta_0 - mgl \sin\theta_0)\delta\theta = 0 \quad . \qquad (3\text{-}150)$$

Αλλά από την Εξ. (3-143) βλέπουμε ότι, αφού $\ddot{\theta} = 0$,

$$I_t \dot{\psi}_0^2 \sin\theta_0 + \beta_\varphi \dot{\psi}_0 + mgl = 0 \quad , \qquad (3\text{-}151)$$

όπου θεωρούμε ότι $\cos\theta_0 \neq 0$. Άρα, από τις Εξ. (3-150) και (3-151) παίρνουμε

$$I_t \delta\ddot{\theta} + (I_t \dot{\psi}_0 \sin 2\theta_0 + \beta_\varphi \cos\theta_0)\, \delta\dot{\psi} + I_t \dot{\psi}_0^2 \cos^2\theta_0 \, \delta\theta = 0 \quad . \qquad (3\text{-}152)$$

Οι εξισώσεις (3-149) και (3-152) συνιστούν τις γραμμικοποιημένες εξισώσεις για μικρές διαταράξεις από τη σταθερή κίνηση αναφοράς του συστήματος. Ο δεύτερος όρος σε κάθε εξίσωση εκφράζει τη γυροσκοπική σύζευξη.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Στη συνέχεια ας κάνουμε την επί πλέον παραδοχή ότι $\theta_o = 0$. Τότε οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$I_t \, \delta\ddot{\psi} - \beta_\varphi \delta\dot{\theta} = 0$$

$$I_t \, \delta\ddot{\theta} + I_t \, \dot{\psi}_o^2 \, \delta\theta + \beta_\varphi \delta\dot{\psi} = 0 \quad , \tag{3-153}$$

όπου ο μεταπτωτικός ρυθμός αναφοράς είναι

$$\dot{\psi}_o = - \frac{mgl}{\beta_\varphi} \quad . \tag{3-154}$$

Μια άλλη μέθοδος για να πάρουμε αυτές τις εξισώσεις είναι να αντικαταστήσουμε $\dot{\psi} = \dot{\psi}_o + \delta\dot{\psi}$, $\theta = \delta\theta$, $\dot{\theta} = \delta\,\dot{\theta}$ στη συνάρτηση Routh, Εξ. (3-141), κρατώντας μόνο τετραγωνικούς όρους ως προς τις μικρές ποσότητες αφού οι γραμμικοί ή σταθεροί όροι δεν θα συνεισφέρουν στις εξισώσεις κίνησης αν η κίνηση αναφοράς είναι σταθερή. Χρησιμοποιώντας αυτή τη διαδικασία, παίρνουμε

$$R = \frac{1}{2} \, I_t \, [(\delta\dot{\psi})^2 + (\delta\dot{\theta})^2] - \beta_\varphi \, \delta\dot{\psi} \, \delta\theta - \frac{1}{2} \, I_t \, \dot{\psi}_o^2 \, (\delta\theta)^2 \, , \tag{3-155}$$

η οποία είναι της μορφής της συνάρτησης Lagrange που δίνεται από την Εξ. (3-118). Τότε, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Lagrange και σημειώνοντας ότι οι τελεστές διαφόρισης και μεταβολής μπορούν να ενναλλαγούν, δηλαδή $d/dt\,(\delta q) = \delta\dot{q}$ παίρνουμε πάλι την Εξ. (3-153).

Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι λύσεις των εξισώσεων κίνησης είναι της μορφής

$$\delta\psi = A_1 \, e^{\lambda t} \, , \qquad \delta\theta = A_2 \, e^{\lambda t} \quad . \tag{3-156}$$

Αντικαθιστώνας στην Εξ. (3-153), έχουμε

$$I_t \, \lambda^2 \, A_1 - \beta_\varphi \, \lambda \, A_2 = 0$$

$$\beta_\varphi \, \lambda \, A_1 + I_t \, (\lambda^2 + \dot{\psi}_o^2) A_2 = 0 \quad . \tag{3-157}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Η χαρακτηριστική εξίσωση, που λαμβάνεται αν θέσουμε την ορίζουσα των συντελεστών ίση με το μηδέν, είναι

$$I_t^2 \lambda^4 + (I_t^2 \dot{\psi}_o^2 + \beta_\varphi^2)\lambda^2 = 0 \quad , \tag{3-158}$$

που παράγει τις ιδιοτιμές

$$\lambda_{1,2}^2 = 0 \, , \qquad -(\dot{\psi}_o^2 + \beta_\varphi^2 / I_t^2) \, .$$

Από τη δεύτερη των Εξ. (3-157) βλέπουμε ότι

$$\frac{A_2}{A_1} = - \frac{\beta_\varphi \lambda}{I_t \, (\lambda^2 + \dot{\psi}_o^2)} \, . \tag{3-159}$$

Άρα, παίρνουμε

$$\frac{A_{21}}{A_{11}} = 0 \, , \qquad \frac{A_{22}}{A_{12}} = i \sqrt{1 + \left(\frac{I_t \dot{\psi}_o}{\beta_\varphi} \right)^2} \, .$$

Ο πρώτος λόγος δείχνει ότι η λύση για το $\delta\theta$ δεν περιέχει *secular* όρο δηλαδή μη γραμμικό όρο ως προς t σχετιζόμενο με επαναλαμβανόμενη μηδενική ρίζα αλλά μπορεί να περιέχει, όπως θα δούμε, ένα σταθερό όρο . Ο παράγων i στο δεύτερο λόγο δείχνει ότι το $\delta\theta$ οδηγεί το $\delta\psi$ κατά 90^0 στην ημιτονοειδή κίνηση.

Αν χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό

$$\omega_o = \sqrt{\dot{\psi}_o^2 + (\beta_\varphi / I_t)^2} = \sqrt{\dot{\psi}_o^2 + (I_\alpha \Omega / I_t)^2} \quad , \tag{3-160}$$

μπορούμε να γράψουμε τις λύσεις για $\delta\psi$ και $\delta\theta$ με τον ακόλουθο τρόπο

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\delta\psi = C_1 + C_2 t + A_1 \sin(\omega_0 t + \alpha)$$

$$\delta\theta = -\frac{I_\alpha \Omega}{I_t \dot{\psi}_0^2} C_2 + A_1 \sqrt{1 + \left(\frac{I_t \dot{\psi}_0}{I_\alpha \Omega}\right)^2} \cos(\omega_0 t + \alpha) , \tag{3-161}$$

όπου οι σταθερές C_1, C_2, A_1, α προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Σύμφωνα με την παραδοχή της μικρής κίνησης οι A_1 και C_2 πρέπει να είναι μικρές πράγμα που έχει ως αποτέλεσμα $\delta\theta << 1$ και $\delta\dot{\psi} << 1$. Η $\delta\psi$ δεν είναι ανάγκη να παραμένει μικρή γιατί αυτή δεν εμφανίζεται εκπεφρασμένα στις διαφορικές εξισώσεις κίνησης.

Περίπτωση 2: Αγνοούμε τις φ και ψ . Η συζυγής της ψ γενικευμένη ορμή είναι

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = -I_\alpha (\dot{\varphi} - \dot{\psi} \sin\theta) \sin\theta + I_t \dot{\psi} \cos^2\theta = \beta_\psi , \tag{3-162}$$

και χρησιμοποιώντας την Εξ. (3-139), παίρνουμε

$$\dot{\psi} = \frac{\beta_\psi + \beta_\varphi \sin\theta}{I_t \cos^2\theta} . \tag{3-163}$$

Από τις Εξ. (3-140) και (3-163) βρίσκουμε ότι

$$\dot{\varphi} = \left(\frac{\beta_\psi + \beta_\varphi \sin\theta}{I_t \cos^2\theta}\right) \sin\theta + \frac{\beta_\varphi}{I_\alpha} . \tag{3-164}$$

Η συνάρτηση Routh λαμβάνεται αντικαθιστώνας τις εκφράσεις αυτές για τις $\dot{\psi}$ και $\dot{\varphi}$ στην Εξ. (2-122) . Έτσι,

$$R = L - \beta_\varphi \dot{\varphi} - \beta_\psi \dot{\psi} = \frac{1}{2} I_t \dot{\theta}^2 - \frac{(\beta_\psi + \beta_\varphi \sin\theta)^2}{2 I_t \cos^2\theta} - mgl \sin\theta , \tag{3-165}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

όπου πάλι παραλείπουμε τους σταθερούς όρους. Η εξίσωση κίνησης που προκύπτει από τη χρησιμοποίηση αυτής της συνάρτησης Routh στην εξίσωση Lagrange είναι

$$I_t \ddot{\theta} + \frac{(\beta_\psi + \beta_\varphi \sin\theta)^2}{I_t \cos^3\theta} \sin\theta + \frac{\beta_\varphi (\beta_\psi + \beta_\varphi \sin\theta)}{I_t \cos\theta} + mgl\cos\theta = 0 \,. \quad (3\text{-}166)$$

Η ίδια εξίσωση θα μπορούσε να είχε προκύψει αν είχαμε αντικαταστήσει την έκφραση για την $\dot{\psi}$ που δίνεται από την Εξ. (3-163) στην εξίσωση για την θ που δίνεται από την (3-143). Πρέπει να σημειωθεί ότι η Εξ. (3-166) δεν περιέχει γυροσκοπικούς όρους αφού υπάρχει μόνο ένας παραμένων βαθμός ελευθερίας.

Η μορφή της συνάρτησης Routh της Εξ. (3-165) είναι εκείνη του *φυσικού συστήματος* με

$$T' = \frac{1}{2} I_t \dot{\theta}^2$$
$$V' = \frac{(\beta_\psi + \beta_\varphi \sin\theta)^2}{2 I_t \cos^2\theta} + mgl \sin\theta \,. \quad (3\text{-}167)$$

Έτσι, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη διατήρηση της ενέργειας για να πάρουμε το ολοκλήρωμα Jacobi,

$$T' + V' = \frac{1}{2} I_t \dot{\theta}^2 + \frac{(\beta_\psi + \beta_\varphi \sin\theta)^2}{2 I_t \cos^2\theta} + mgl \sin\theta = h \,. \quad (3\text{-}168)$$

Άρα

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2h}{I_t} - \left(\frac{\beta_\psi + \beta_\varphi \sin\theta}{I_t \cos\theta}\right)^2 - \frac{2mgl}{I_t} \sin\theta \,. \quad (3\text{-}169)$$

Η εξίσωση αυτή που δίνει την $\dot{\theta}^2$ ως μια εκπεφρασμένη συνάρτηση της θ θα μπορούσε να είχε ληφθεί κατ' ευθείαν ολοκληρώνοντας την Εξ. (3-166). Αν θέσουμε την $\dot{\theta}$ ίση με το μηδέν λαμβάνουμε μια εξίσωση της οποίας οι ρίζες είναι *σημεία αναστροφής* που ορίζουν τα όρια της κίνησης κλονισμού (επίκλησης γυροσκοπίου) ως προς θ.

Ας επιστρέψουμε τώρα στην Εξ. (3-166) και να βρούμε τη γραμμική προσέγγιση για μικρές κινήσεις γύρω από την τιμή αναφοράς $\theta_0 = 0$. Στην περίπτωση αυτή η γραμμική προσέγγιση λαμβάνεται θεωρώντας ότι $\sin\theta \cong \theta$ και $\cos\theta \cong 1$. Τότε η εξίσωση που προκύπτει είναι

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{\beta_\psi^2 + \beta_\varphi^2}{I_t^2} \right) \theta = 0 \quad , \tag{3-170}$$

η οποία παράγει τη συχνότητα επίκλισης γυροσκοπίου (κλονισμού)

$$\omega_0 = \frac{1}{I_t} \sqrt{\beta_\psi^2 + \beta_\varphi^2} = \sqrt{\dot{\psi}_0^2 + (I_\alpha \, \Omega / I_t)^2} \quad , \tag{3-171}$$

που βρίσκεται σε συμφωνία με το αποτέλεσμα που δόθηκε προηγούμενα στην Εξ. (3-160).

Όταν θεωρούμε συστήματα όπως αυτό που σχολιάζουμε είναι δυνατόν να τεθεί ένα ερώτημα που αφορά τις κατάλληλες αρχικές συνθήκες που έπρεπε να αποδοθούν στις αγνοούμενες $\dot{q}_l$. Το ερώτημα αυτό μπορεί εύκολα να απαντηθεί αν ανακαλέσουμε το γεγονός ότι οι αγνοούμενες $\dot{q}_l$ μπορούν να εκφραστούν σε όρους των β_l και των παραμενουσών q_l από εξισώσεις παρόμοιες των Εξ. (3-163) και (3-164). Επιπλέον, για την περίπτωση των μικρών διαταράξεων περί την κατάσταση αναφοράς της σταθερής κίνησης, η μεταβολή των εξισώσεων αυτών παρέχει εκφράσεις για τις αγνοούμενες $\delta \dot{q}_l$ σε όρους των παραμενουσών δq_l, $\delta \dot{q}_l$ και τις σταθερές β_l.

3-4. ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΕΞΑΡΤΩΜΕΝΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΤΑΧΥΤΗΤΑ

Στη συζήτηση των εφαρμογών των εξισώσεων Lagrange, συνήθους μορφής, Εξ. (2-27) υποθέσαμε ότι όλες οι εφαρμοζόμενες δυνάμεις μπορούν να ληφθούν από τη δυναμική ενέργεια V που είναι μια συνάρτηση των q_l και πιθανώς του t αλλά όχι συνάρτηση των $\dot{q}_l$. Ο

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

περιορισμός όμως αυτός δεν είναι αναγκαίος. Ας ανακαλέσουμε τη βασική μορφή των εξισώσεων Lagrange από την Εξ. (2-23), δηλαδή

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad . \tag{3-172}$$

Αν τώρα θεωρήσουμε ότι η Q_i λαμβάνεται από μια *συνάρτηση δυναμικού που εξαρτάται από την ταχύτητα* $U(q_i, \dot{q}_i, t)$ σύμφωνα με την εξίσωση

$$Q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial U}{\partial q_i} \tag{3-173}$$

βλέπουμε ότι

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad , \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad , \tag{3-174}$$

όπου

$$L = T - U \quad . \tag{3-175}$$

Ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις. Ως ένα παράδειγμα δυναμικού εξαρτημένου από την ταχύτητα, θεωρούμε την *ηλεκτρομαγνητική δύναμη* που ενεργεί επί ενός φορτισμένου σωματίου. Χρησιμοποιώντας mks μονάδες η δύναμη επί ενός σωματίου που έχει φορτίο e και ταχύτητα $\mathbf{v}$ είναι

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad , \tag{3-176}$$

όπου $\mathbf{E}$ είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου και $\mathbf{B}$ είναι το διάνυσμα της μαγνητικής επαγωγής. Τα πεδία $\mathbf{E}$ και $\mathbf{B}$ λαμβάνονται από ένα *βαθμωτό δυναμικό* φ και ένα *διανυσματικό δυναμικό* $\mathbf{A}$ σύμφωνα με τις εξισώσεις

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{3-177}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad , \tag{3-178}$$

όπου φ και $\mathbf{A}$ είναι, γενικά, συναρτήσεις της θέσης και του χρόνου. Τότε, χρησιμοποιώντας τις Εξ. (3-176) - (3-178), παίρνουμε

$$\mathbf{F} = e\left(-\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A} \right) \quad . \tag{3-179}$$

Για να δείξουμε το πως η δύναμη αυτή μπορεί να ληφθεί από μια συνάρτηση U, ας θεωρήσουμε ότι η θέση του σωματίου δίνεται από τις Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z). Ο όρος $-e\nabla\varphi$ εξηγείται εύκολα αφού $e\varphi$ είναι ανάλογο της συνήθους συνάρτησης V της δυναμικής ενέργειας.

Στη συνέχεια ας εξετάσουμε τη x συνιστώσα του όρου $\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A}$. Αν ορίσουμε τις Καρτεσιανές συντεταγμένες του $\mathbf{A}$ με A_x, A_y, A_z βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}\times\nabla\times\mathbf{A})_x &= v_y\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - v_z\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \\ &= v_y\frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z\frac{\partial A_z}{\partial x} + v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} - v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} - v_y\frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z\frac{\partial A_x}{\partial z} \quad , \end{aligned} \tag{3-180}$$

όπου ο όρος $v_x(\partial A_x / \partial x)$ έχει προστεθεί και αφαιρεθεί στο δεξιό μέρος της εξίσωσης. Αλλά $\mathbf{A}$ είναι μια συνάρτηση της θέσης και του χρόνου, έτσι

$$\begin{aligned}\frac{dA_x}{dt} &= \frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial A_x}{\partial t} \\ &= v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial A_x}{\partial z} + \frac{\partial A_x}{\partial t} \quad . \end{aligned} \tag{3-181}$$

Άρα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$(\mathbf{v}\times\nabla\times\mathbf{A})_x = \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}) - \frac{dA_x}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial t} . \qquad (3\text{-}182)$$

Τότε, από τις Εξ. (3-179) και (3-182) βρίσκουμε ότι η x συνιστώσα της ηλεκτρομαγνητικής δύναμης είναι

$$F_x = e\left[- \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}) - \frac{dA_x}{dt}\right] . \qquad (3\text{-}183)$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{x}}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A})\right] \qquad (3\text{-}184)$$

και βρίσκουμε ότι αν θέσουμε

$$U = e(\varphi - \mathbf{v}\cdot\mathbf{A}) \qquad (3\text{-}185)$$

παίρνουμε

$$F_x = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial\dot{x}}\right) - \frac{\partial U}{\partial x} ,$$

δηλαδή σε συμφωνία με την Εξ. (3-173). Παρόμοιες εκφράσεις έχουμε για τις F_y και F_z.

Έτσι βλέπουμε ότι οι ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις επί ενός σωματίου εκφράζονται από τη συνάρτηση δυναμικού, Εξ. (3-185), που εξαρτάται από την ταχύτητα. Η συνάρτηση Lagrange είναι

$$\begin{aligned} L = T - U &= \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - e\varphi + e(A_x\dot{x} + A_y\dot{y} + A_z\dot{z}) \\ &= \frac{1}{2} m v^2 - e(\varphi - \mathbf{v}\cdot\mathbf{A}) , \end{aligned} \qquad (3\text{-}186)$$

όπου m είναι η μάζα του σωματίου.

Ας εξετάσουμε τώρα τις συνιστώσες της γενικευμένης ορμής που σχετίζεται μ' ένα φορτισμένο σωμάτιο που κινείται εντός ενός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Από τις Εξ. (1-137) και (3-186) παίρνουμε

$$p_X = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + eA_X \tag{3-187}$$

ή πιο γενικά

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + e\mathbf{A} \quad . \tag{3-188}$$

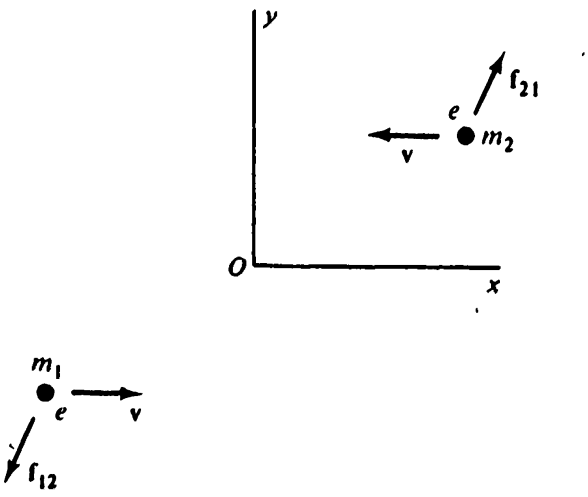
Αυτό το μάλλον αποτέλεσμα έκπληξη δείχνει ότι ένα τμήμα της *ορμής* συνδέεται με το *ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.* Αν L δεν είναι μια εκπεφρασμένη συνάρτηση της x δηλαδή αν x είναι αφανής τότε είναι η ορμή p_X , Εξ. (3-187), (παρά η μηχανική ορμή που διατηρείται).

Η *ολική ενέργεια* του σωματίου είναι

$$T + e\varphi = \frac{1}{2} mv^2 + e\varphi \quad , \tag{3-189}$$

όπου $e\varphi$ είναι η δυναμική ενέργεια που συνδέεται με το ηλεκτρικό πεδίο. Η μαγνητική δύναμη $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ δεν εκτελεί έργο επί του συστήματος γιατί είναι κάθετη στην ταχύτητα και άρα $\mathbf{A}$ δεν υπεισέρχεται στην έκφραση της ενέργειας. Αν φ και $\mathbf{A}$ δεν είναι εκπεφρασμένες συναρτήσεις του χρόνου, το σύστημα είναι *συντηρητικό* και η ολική ενέργεια είναι σταθερή.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα απομονωμένο σύστημα δυο σωματίων το κάθε ένα μάζας m και φορτίου e (Σχ. 3-6).



Σχ. 3-6. Δύο αλληλεπιδρώντα φορτισμένα σωμάτια.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Εκλέγουμε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς που εκτελεί μεταφορική κίνηση με κέντρο μάζας το O. Επιθυμούμε να βρούμε τις δυνάμεις αλληλεπίδρασης μεταξύ των δυο σωματίων όταν το καθένα κινείται εντός του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου του άλλου.

Πρώτα σημειώνουμε ότι οι ταχύτητες των των δυο σωματίων είναι ίσες και αντίθετες σχετικά με το κέντρο μάζας. Τότε, από την Εξ. (3-176) ή (3-179), είναι προφανές ότι οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης είναι ίσες και αντίθετες, ή

$$\mathbf{f}_{12} = -\mathbf{f}_{21} \quad , \tag{3-190}$$

αποτέλεσμα που προκύπτει επίσης και από τις θεωρήσεις συμμετρίας. Η συμμετρία όμως δεν απαιτεί οι δυο δυνάμεις να διευθύνονται κατά μήκος της γραμμής που συνδέει τα σωμάτια. Γενικά οι δυνάμεις αυτές δεν είναι συγγραμμικές.

Μια συνέπεια του γεγονότος ότι οι δυνάμεις ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης δεν είναι συγγραμμικές είναι ότι η ολική στροφορμή, όπως ορίστηκε στην Εξ. (1-126), δε διατηρείται ακόμη και για ένα απομονωμένο σύστημα επί του οποίου δεν ενεργούν εξωτερικές δυνάμεις. Το γεγονός αυτό συμβαίνει γιατί οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης έχουν μη-μηδενική ροπή ως προς το O, όπως μπορεί να φανεί από το Σχ. 3-6.

Γυροσκοπικές δυνάμεις. Στις μαθηματικές εκφράσεις των γυροσκοπικών και ηλεκτρομαγνητικών δυνάμεων υπάρχουν ομοιότητες. Για παράδειγμα, θεωρούμε ένα γυροσκοπικό σύστημα του οποίου η συνάρτηση Lagrange έχει τη μορφή

$$L = T_2 + T_1 - V' \quad , \tag{3-191}$$

όπου

$$V'(x, y, z, t) = V - T_0 \quad . \tag{3-192}$$

Οι γυροσκοπικές δυνάμεις πηγάζουν από την T_1 που γενικά έχει τη μορφή

$$T_1 = P\dot{x} + Q\dot{y} + R\dot{z} \quad , \tag{3-193}$$

όπου P, Q και R είναι συναρτήσεις των (x, y, z, t). Αν ορίσουμε το διάνυσμα $\mathbf{G}$ που δίνεται από την

$$\mathbf{G} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k} \tag{3-194}$$

και έστω

$$\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} \quad , \tag{3-195}$$

παίρνουμε

$$T_1 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{G} \quad . \tag{3-196}$$

Τοποθετούμε τώρα του όρους που προέρχονται από την T_1 στο δεξιό μέρος της εξίσωσης και τους θεωρούμε ως επιπρόσθετους όρους. Βρίσκουμε ότι η x συνιστώσα των δυνάμεων αυτών είναι

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial \dot{x}}\right) &= \mathbf{v} \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathbf{j} + \frac{\partial R}{\partial x}\,\mathbf{k}\right) - \dot{P} \\ &= (\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{G})_x - \frac{\partial P}{\partial t} \quad , \end{aligned} \tag{3-197}$$

όπου $\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{G}$ είναι η *γυροσκοπική δύναμη*. Αυτή είναι ανάλογη με την $e\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A}$ στο ηλεκτρομαγνητικό παράδειγμα.

Η x εξίσωση κίνησης είναι

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_2}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T_2}{\partial x} = -\frac{\partial V'}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} + (\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{G})_x \quad . \tag{3-198}$$

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα για τα γυροσκοπικά και ηλεκτρομαγνητικά συστήματα βλέπουμε από τις Εξ. (3-179) και (3-198) ότι η V' αντιστοιχεί στο $e\varphi$ και το $\mathbf{G}$ αντιστοιχεί στο $e\mathbf{A}$. Εξάλλου η συνάρτηση Lagrange για το γυροσκοπικό σύστημα είναι

$$L = T_2 - U' \quad , \tag{3-199}$$

όπου το δυναμικό που εξαρτάται από την ταχύτητα είναι

$$U' = V' - T_1 = V' - \mathbf{v} \cdot \mathbf{G} \quad , \tag{3-200}$$

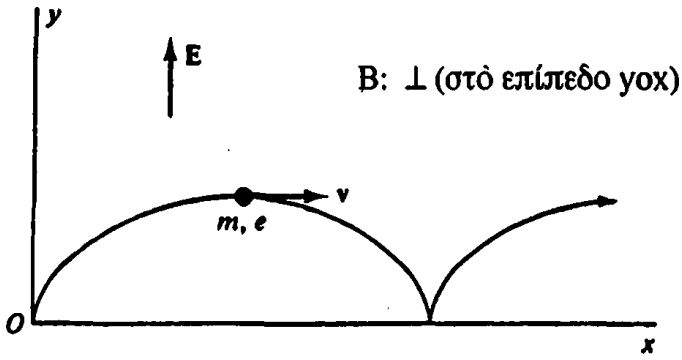
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

έχει την ίδια μορφή όπως εκείνο της Εξ. (3-185).

Τελικά, σημειώνουμε ότι αν η L δεν είναι εκπεφρασμένη συνάρτηση του χρόνου το σύστημα είναι συντηρητικό και το ολοκλήρωμα Jacobi του συστήματος είναι

$$T_2 + V' = T_2 - T_0 + V = h \quad . \tag{3-201}$$

Παράδειγμα 3-6. Ένα σωμάτιο μάζας m και φορτίου e κινείται υπό την επίδραση ομοιομόρφων πεδίων, ηλεκτρικού και μαγνητικού, που είναι κάθετα μεταξύ τους. Σχετικά προς ένα σταθερό Καρτεσιανό σύστημα τα πεδία αυτά είναι $\mathbf{E} = E\mathbf{J}$ και $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$. Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης και η τροχιά του σωματίου αν αυτό είναι αρχικά σε ηρεμία στην αρχή O (Σχ. 3-7).



Σχ. 3-7. Τροχιά φορτισμένου σωματίου.

Τα δυναμικά, βαθμωτό και διανυσματικό, που παράγουν τα πραγματικά πεδία με τη βοήθεια των Εξ. (3-177) και (3-178) είναι

$$\varphi = - E y \tag{3-202}$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} B (- y\mathbf{i} + x\mathbf{j}) \quad . \tag{3-203}$$

Η συνάρτηση Lagrange λαμβάνεται χρησιμοποιώντας την Εξ. (3-186) και είναι

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + eEy + \frac{1}{2} eB (x\dot{y} - y\dot{x}) \quad . \tag{3-204}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Εφαρμόζοντας τη συνήθη μορφή της εξίσωσης Lagrange, παίρνουμε τις ακόλουθες εξισώσεις κίνησης:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} \; - \; eB\dot{y} &= 0 \\ m\ddot{y} \; + eB\dot{x} &= eE \\ m\ddot{z} \; &= 0 \quad . \end{aligned} \qquad \text{'(3-205)}$$

Από την τρίτη εξίσωση και τις αρχικές συνθήκες $z(0) = 0$, $\dot{z}\,(0) = 0$, είναι προφανές ότι όλη η κίνηση περιορίζεται στο xy-επίπεδο. Θεωρώντας λύσεις για τα x και y της μορφής $e^{\lambda t}$, παίρνουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση

$$m^2 \lambda^4 + e^2 B^2 \lambda^2 = 0 \qquad (3\text{-}206)$$

που παράγει τις ιδιοτιμές

$$\lambda_{1,2}^2 = 0\,, \qquad - \frac{e^2 B^2}{m^2} \quad .$$

Η λύση για την τροχιά του σωματίου είναι

$$\begin{aligned} x &= \frac{E}{B} t \; - \; \frac{mE}{eB^2} \sin \frac{eB}{m} t \\ y &= \frac{mE}{eB^2} \left(1 - \cos \frac{eB}{m} t \right) \quad . \end{aligned} \qquad (3\text{-}207)$$

Αυτή εκφράζει μια κυκλοειδή που έχει σημεία ανάκαμψης που κείνται στον άξονα x σε απόσταση μεταξύ τους $2\pi mE / eB^2$. Η απόσταση αυτή είναι ακριβώς η μέση ταχύτητα E/B πολλαπλασιασμένη με την περίοδο $2\pi m/ eB$ των ημιτονοειδών όρων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. PARS, L. A., *Treatise on Analytical Dynamics.* London: Heinemann, 1965. Υπάρχει μια άριστη παρουσίαση της εφαρμογής των μεθόδων του Lagrange στην ωστική κίνηση.

2. WHITTAKER, E. T., *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies,* 4th ed. New York: Dover Publications, Inc., 1944. Το βιβλίο αυτό είναι ιδιαίτερα βοηθητικό για την κατανόηση των ημι-συντεταγμένων.

3. CORBEN, H. C., and P. STEHLE, *Classical Mechanics,* 2nd ed. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1960. Υπάρχει μια καλή παρουσίαση της εφαρμογής των εξισώσεων Lagrange σε συστήματα με ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις.

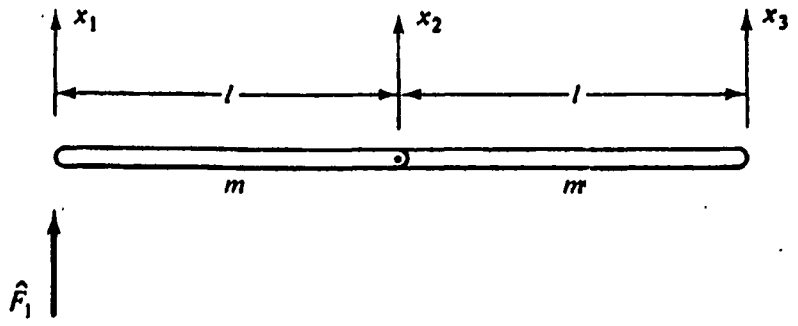
4. GOLDSTEIN, H., *Classical Mechanics.* Reading, Mass.: Addison-Wesley Press, Inc., 1950. Το βιβλίο αυτό είναι πολύ βοηθητικό ιδιαίτερα για την κατανόηση της συνάρτησης απωλειών και του δυναμικού που εξαρτάται από την ταχύτητα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

3-1. Δύο ράβδοι μάζας m η κάθε μια και μήκους l, συνδέονται με ένα καρφί στα άκρα τους όπως φαίνεται στο Σχ. Π3-1. Το σύστημα είναι ακίνητο έως ότου μια εγκάρσια ώση $\hat{F}_1$ εφαρμοσθεί στο σημείο με τη συντεταγμένη x_1. Να βρεθούν οι αρχικές τιμές των $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, $\dot{x}_3$. Να δειχτεί ότι η κινητική ενέργεια ακριβώς μετά την ώση είναι ίση με $\frac{1}{2}\hat{F}_1\dot{x}_1$.

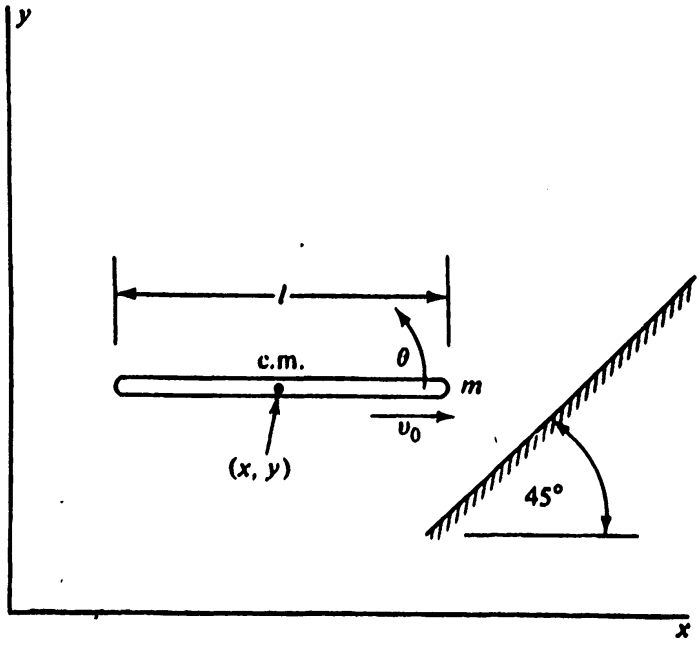
3-2. Να λυθεί το παράδειγμα 3-2 για την περίπτωση κατά την οποία το σωμάτιο κολλάει στη ράβδο μετά την κρούση, θεωρώντας τις ίδιες αρχικές συνθήκες. Να βρεθεί επίσης η απώλεια ενέργειας κατά την πρόσκρουση.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



Σχ. Π3-1.

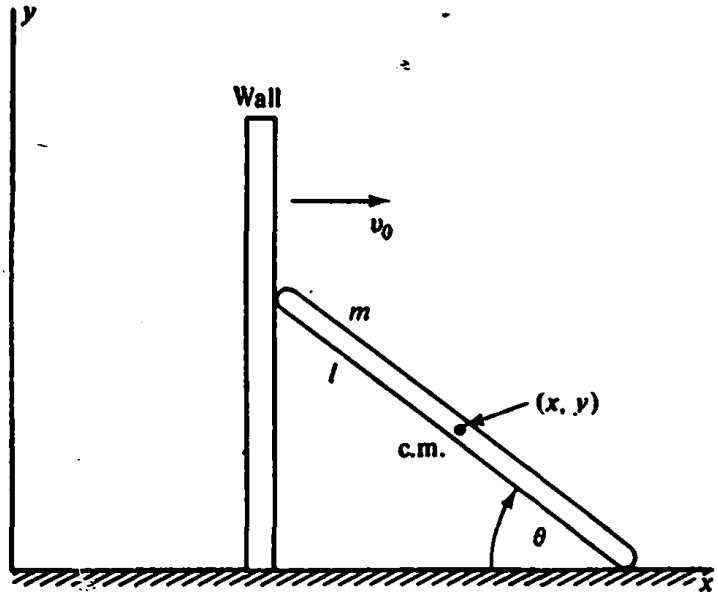
3-3. Μια στερεά ράβδος μάζας m και μήκους l μεταφέρεται με ταχύτητα v_0 παράλληλα προς τον άξονα x . Μετά χτυπάει ανελαστικά ένα λείο τοίχο, δηλαδή μετά την πρόσκρουση το άκρο γλιστράει χωρίς τριβή επί της επιφάνειας του τοίχου. Θεωρώντας ότι θ και $\dot{\theta}$ είναι μηδέν πριν από την πρόσκρουση, να βρεθούν οι τιμές των $\dot{x}$, $\dot{y}$ και $\dot{\theta}$ αμέσως μετά την πρόσκρουση. Να υπολογιστεί η ώση που εφαρμόζεται από τον τοίχο στη ράβδο.



Σχ. Π3-3.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

3-4. Μια ράβδος μάζας m και μήκους l είναι ακίνητη με $\theta = 45^{\circ}$ όταν στη χρονική στιγμή $t = 0$ ο κατακόρυφος τοίχος αρχίζει να κινείται στη θετική x - διεύθυνση με σταθερή ταχύτητα v_0. Θεωρώντας τις επιφάνειες χωρίς τριβή, να βρεθούν οι αρχικές τιμές των $\dot{x}$ $\dot{y}$ και $\dot{\theta}$. Να βρεθεί η ώση που εξασκείται από τον τοίχο επί της ράβδου τη χρονική στιγμή $t = 0$.



Σχ. Π3-4.

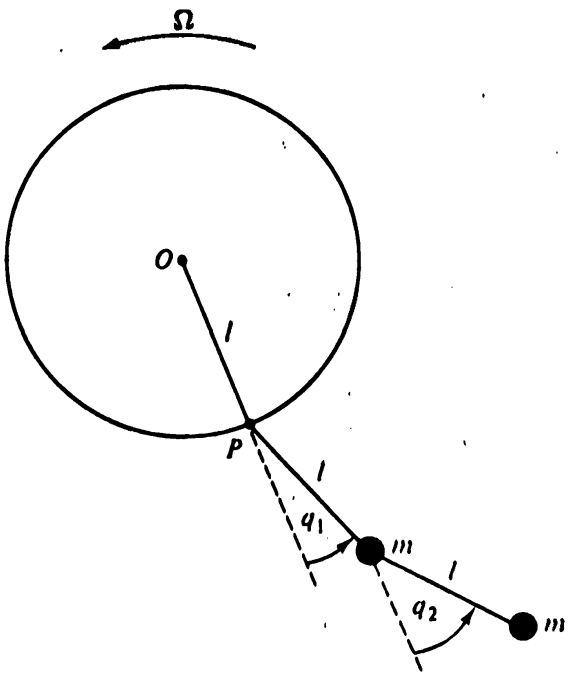
3-5. Για το προηγούμενο παράδειγμα της ράβδου και του κινούμενου τοίχου να χρησιμοποιηθεί στην ανάλυση μόνο μια γενικευμένη συντεταγμένη, θ. Να ληφθεί μια έκφραση για την p_θ και να βρεθεί η αρχική τιμή της $\dot{\theta}$.

3-6. Έστω xyz το κύριο σύστημα αξόνων με αρχή το κέντρο μάζας ενός στερεού σώματος που έχει μάζα m και κύριες ροπές αδράνειας I_{xx}, I_{yy} και I_{zz}. Υποθέτουμε ότι αυτό το σώμα έχει ταχύτητα $\mathbf{v} = v_0\,\mathbf{i}$ αλλά δεν περιστρέφεται έως ότου στερεώνεται ξαφνικά το σημείο $(x_0, y_0, 0)$. Θεωρούμε ότι το σώμα μπορεί να περιστραφεί ελεύθερα γύρω απ' αυτό το σημείο. Έστω (v_x, v_y, v_z)

και $(\omega_X, \omega_Y, \omega_Z)$ οι μεταφορικές και περιστροφικές συνιστώσες της ταχύτητας του σώματος αμέσως μετά την εφαρμογή του δεσμού. Να γραφούν οι εξισώσεις του δεσμού και να χρησιμοποιηθούν είτε η μέθοδος πολλαπλασιαστών του Lagrange είτε η μέθοδος της δυνατής ταχύτητας για την επίλυση ως προς $(v_X, v_Y, v_Z, \omega_X, \omega_Y, \omega_Z)$.

3-7. Δίνεται ένα σύστημα με μη μηδενική T_1 και περισσότερους του ενός βαθμούς ελευθερίας. Για ποιές συνθήκες στα a_i η μέθοδος Lagrange παράγει γυροσκοπικούς όρους στις εξισώσεις κίνησης; Να δοθεί ένα παράδειγμα τέτοιου συστήματος.

3-8. Δυο αβαρείς ράβδοι μήκους l και δυο σωμάτια είναι συνδεδεμένα με αρθρώσεις μεταξύ τους και σ' ένα σημείο P στην περίμετρο ενός δίσκου ακτίνος l, ο οποίος περιστρέφεται με ρυθμό σταθερό Ω. Θεωρούμε ότι η κίνηση λαμβάνει χώρα επί οριζοντίου επιπέδου και έστω q_1 και q_2 γωνίες που μετρούνται σχετικά με τη διεύθυνση της ευθείας OP. Να βρεθούν η T_1 και ο γυροσκοπικός συντελεστής γ_{12}. Να δειχτεί ότι οι γυροσκοπικοί όροι στις εξισώσεις κίνησης εκφράζουν ροπές αδράνειας λόγω των επιταχύνσεων Coriolis.



Σχ. Π3-8.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

3-9. Θεωρούμε την κίνηση ενός στρόβου (Σχ. 3-5) σχετικά προς ένα σύστημα αναφοράς XYZ που περιστρέφεται με σταθερό ρυθμό ω_0 περί τον άξονα του Z. Να χρησιμοποιηθούν οι γωνίες του Euler (ψ, θ, φ) ως συντεταγμένες (οριζόμενες σχετικά προς το σύστημα XYZ) και να βρεθούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης. Να υποδειχτούν οι γυροσκοπικοί όροι.

3-10. Ένα μη-αποσβεννύμενο γυροσκοπικό σύστημα έχει τα ακόλουθα **m**, **k** και **γ** μητρώα,

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 2k & -\frac{1}{2}k & 0 \\ -\frac{1}{2}k & -k & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & -\gamma & 0 \end{bmatrix}$$

όπου m και k είναι πραγματικές θετικές σταθερές και $\gamma^2 = 5mk$. Να βρεθεί η χαρακτηριστική εξίσωση και να βρεθούν οι ρίζες της. Είναι το σύστημα ευσταθές;

3-11. Για το γυροσκοπικό σύστημα του προηγουμένου προβλήματος να βρεθεί η περιοχή των τιμών της γ^2 για ευστάθεια. Να σημειωθεί ότι η οριακή περίπτωση συμβαίνει για επαναλαμβανόμενη αρνητική ιδιοτιμή λ_k^2.

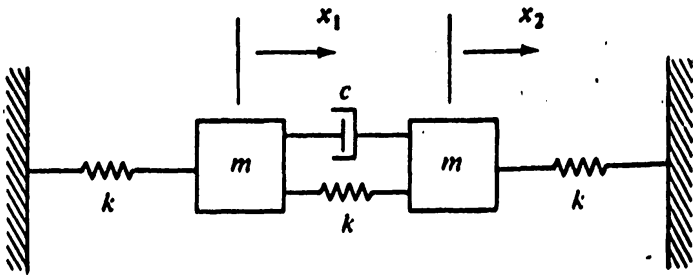
3-12. Το σύστημα (Σχ. Π3-12) συνίσταται από μάζες, ελατήρια και γραμμικό αποσβεστήρα που έχει θετικό συντελεστή c.

(a) Να ληφθεί η συνάρτηση απωλειών Rayleigh και οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης.

(b) Να βρεθεί η χαρακτηριστική εξίσωση για το σύστημα και να προσδιοριστεί αν το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

(c) Να προστεθούν γυροσκοπικοί συζευγμένοι όροι στις διαφορικές εξισώσεις. Θεωρώντας τιμές μονάδα στις m, c, k και γ να προσδιοριστεί η ευστάθεια βρίσκοντας τις ρίζες.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



Σχ. Π3-12.

3-13. Θεωρούμε ένα σωμάτιο μάζας m και φορτίου e του οποίου η θέση δίνεται από τις κυλινδρικές συντεταγμένες (r, θ, z). Υποθέτουμε ότι αυτό κινείται εντός ενός αξονοσυμμετρικού ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}=(E_0/r)\mathbf{e}_r$ και ενός ομοιόμορφου μαγνητικού πεδίου $\mathbf{B} = B_0\mathbf{k}$. Να βρεθούν, το δυναμικό U που εξαρτάται από την ταχύτητα και οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

4

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ HAMILTON

Στα προηγούμενα κεφάλαια είχαμε εξοικειωθεί με τις εξισώσεις κίνησης εκφρασμένες σε διαφορική μορφή. Η παρούσα διαδικασία δίνει έμφαση στην *εξέλιξη* του συστήματος από στιγμή σε στιγμή. Εξάλλου, είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί μια *παραλλακτική (Variational)* αρχή ως βάση για την περιγραφή ενός δυναμικού συστήματος. Η αντιμετώπιση αυτή έχει σκοπό να δει την κίνηση ως σύνολο και περιλαμβάνει μια αναζήτηση για την τροχιά στο μορφικό χώρο που παράγει μια στάσιμη τιμή (συνήθως ένα ελάχιστο) σε κάποιο ολοκλήρωμα. Η πιο σπουδαία παραλλακτική αρχή στη δυναμική είναι η αρχή του Hamilton που πρωτοανακοινώθηκε το 1834. Αν και άλλες παραλλακτικές αρχές όπως η αρχή της ελάχιστης δράσης προηγήθηκαν αυτής του Hamilton καμιά δεν κράτησε το ίδιο με αυτή θεωρητικό ενδιαφέρον.

4-1. ΑΡΧΗ HAMILTON

Η μαθηματική γνώση που απαιτείται για τη μελέτη των προβλημάτων με ακρότατα περιλαμβάνεται στο συνήθη λογισμό και εν μέρει στο λογισμό των μεταβολών. Πριν αρχίσουμε τη συζήτηση για την αρχή του Hamilton θα κάνουμε μια σύντομη ανασκόπηση των μαθηματικών εννοιών που συνδέονται με τα συζητούμενα προβλήματα.

Στάσιμες τιμές συνάρτησης. Θεωρούμε μια συνάρτηση $f(q_1, q_2, ..., q_n)$ η οποία υποθέτουμε ότι είναι συνεχής και έχει συνεχείς μερικές παραγώγους μέχρι και δεύτερης τάξης. *Η πρώτη μεταβολή* της f στο σημείο αναφοράς $\mathbf{q}_0$ είναι

$$\delta f = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \right)_0 \delta q_i \quad , \tag{4-1}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

όπου δq_i είναι οι μεταβολές των q_i που η κάθε μία θεωρείται ως δυνατή μετατόπιση. Η *αναγκαία* και *ικανή* συνθήκη ώστε η f να έχει *στάσιμη τιμή* στο $\mathbf{q}_0$ είναι $\delta f = 0$ για όλες τις γεωμετρικά δυνατές δq_i, όπου

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \delta\mathbf{q} \quad . \tag{4-2}$$

Για την περίπτωση κατά την οποία οι δq_i είναι *ανεξάρτητες* και *αντιστρεπτές* η συνθήκη αυτή συνεπάγεται

$$\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\right)_0 = 0 \ , \qquad (i = 1, 2, ..., n) \ . \tag{4-3}$$

Το αποτέλεσμα αυτό θυμίζει την απαίτηση που εκφράζεται από την Εξ. (1-93) για τη στατική ισορροπία ενός μηχανικού συστήματος, όπου η συνάρτηση εκεί είναι η δυναμική ενέργεια V.

Ας θεωρήσουμε τώρα *τη δεύτερη μεταβολή* της συνάρτησης f στο σημείο $\mathbf{q}_0$. Έχουμε

$$\delta^2 f = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 \delta q_i \, \delta q_j \quad . \tag{4-4}$$

Ας χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό

$$k_{ij} \equiv \left(\frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 \quad , \tag{4-5}$$

όπου οι συντελεστές k_{ij} αποτελούν τα στοιχεία ενός n×n συμμετρικού μητρώου $\mathbf{k}$. Αν δq_i είναι πάλι ανεξάρτητες και αντιστρεπτές η ικανή συνθήκη ώστε το $\mathbf{q}_0$ να είναι ένα τοπικό ελάχιστο είναι το μητρώο $\mathbf{k}$ να είναι θετικά ορισμένο. Αντίστροφα, αν $\mathbf{k}$ είναι αρνητικά ορισμένο το σημείο $\mathbf{q}_0$ είναι ένα τοπικό μέγιστο. Αν $\mathbf{k}$ είναι αόριστο το $\mathbf{q}_0$ είναι ένα σημείο σέλας.

Ο λόγος για τον οποίο θεωρούμε ότι δq_i είναι αντιστρεπτές είναι ότι θέλουμε να αποκλείσουμε τη δυνατότητα η διάταξη αναφοράς $\mathbf{q}_0$ να βρίσκεται επί του συνόρου του επιτρεπόμενου γι' αυτήν τόπου. Το γεγονός αυτό θα μπορούσε, για παράδειγμα, να συμβεί σ' ένα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

μονόπλευρο δεσμό. Μπορεί κανείς να φανταστεί ότι η συνάρτηση f θα μπορούσε να πάρει μια ακραία τιμή σ' ένα σημείο του συνόρου χωρίς αυτή να είναι στάσιμη, δηλαδή, όπου $\delta f \neq 0$ για κάποιες γεωμετρικά αποδεκτές δq_i . Αν όμως $\mathbf{q}_0$ είναι ένα εσωτρικό σημείο η f λαμβάνει ελάχιστη ή μέγιστη τιμή μόνο αν αυτή είναι και στάσιμη.

Στάσιμες τιμές υπό συνθήκες. Ας θεωρήσουμε τώρα τις αναγκαίες συνθήκες για μια στάσιμη τιμή της συνάρτησης $f(q_1,q_2,..., q_n)$ που υπόκειται στις m ανεξάρτητες εξισώσεις δεσμού

$$\varphi_j(q_1, q_2, ..., q_n) = 0\,, \quad (j = 1, 2, ..., m)\ , \tag{4-6}$$

όπου υποθέτουμε ότι οι φ_j είναι συνεχείς με συνεχείς μερικές παραγώγους μέχρι και δεύτερης τάξης. Θα έχουμε πάλι $\delta f = 0$, ή

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\right)_0 \delta q_i = 0\ , \tag{4-7}$$

όπου η διάταξη αναφοράς $\mathbf{q}_0$ ικανοποιεί την Εξ. (4-6). Οι δq_i δεν είναι πλέον ανεξάρτητες αλλά ικανοποιούν τις m εξισώσεις

$$\delta\varphi_j = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial q_i}\right)_0 \delta q_i = 0\ , \quad (j = 1, 2, ..., m)\ . \tag{4-8}$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι η Εξ. (4-3), γενικά, δεν μπορεί πλέον να εφαρμοστεί επειδή οι δq_i δεν είναι ανεξάρτητες.

Θεωρητικά, είναι δυνατόν να χρησιμοποιήσουμε την Εξ. (4-6) για να απαλείψουμε τις q_i (m τον αριθμό) και με τις κατά προτίμηση (n- m) από τις q_i να βρούμε τη στάσιμη τιμή της χωρίς δεσμούς προκύπτουσας συνάρτησης. Συνήθως όμως είναι προτιμητέο σε προβλήματα που περιλαμβάνουν μέγιστα ή ελάχιστα υπό δεσμούς να εφαρμόζουμε τη μέθοδο *των πολλαπλασιαστών του Lagrange.*

Ας συνεχίσουμε τώρα με τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών του Lagrange. Πρώτα πολλαπλασιάζουμε κάθε $\delta\varphi_j$ μ' ένα πολλαπλασιαστή Lagrange λ_j. Αν αθροίσουμε ως προς j και προσθέσουμε στην Εξ. (4-7), παίρνουμε

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\right)_o+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial q_i}\right)_o\right]\delta q_i=0 \quad . \tag{4-9}$$

Ως εδώ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι λ_j είναι αυθαίρετοι και οι δq_i ικανοποιούν την Εξ. (4-8). Εξάλλου, αν μπορούμε να βρούμε ένα σύνολο m πολλαπλασιαστών λ_j τέτοιο ώστε ο συντελεστής της κάθε δq_i να είναι ίσος με μηδέν, δηλαδή, αν

$$\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\right)_o+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial q_i}\right)_o=0 \quad , \quad (i=1,2,...,n) \quad , \tag{4-10}$$

τότε μπορούμε να εκλέξουμε τις δq_i αυθαίρετα. Μ' άλλα λόγια αυτές μπορούν να θεωρηθούν *ανεξάρτητες*. Θα δείξουμε τώρα ότι το απαιτούμενο σύνολο των λ_j (m τον αριθμό) μπορεί πράγματι να βρεθεί με τη θεώρηση ότι οι n εξισώσεις είναι συμβιβαστές.

Ας θεωρήσουμε το $m \times n$ μητρώο **c** όπου

$$c_{ji}=\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial q_i}\right)_o \quad . \tag{4-11}$$

Αν **c** είναι τάξης m δηλαδή αν υπάρχει τουλάχιστο μια μη μηδενική ελλάσσων ορίζουσα τάξης m τότε οι λ_j λαμβάνονται από την επίλυση των m αντίστοιχων εξισώσεων που δίνονται από την Εξ. (4-10). Αλλά η απαίτηση αυτή ικανοποιείται αν οι m δεσμοί είναι ανεξάρτητοι στη διάταξη αναφοράς, πράγμα που έχουμε υποθέσει προηγουμένως. Άρα, μπορούμε πάντα να βρούμε ένα σύνολο m πολλαπλασιαστών λ_j και n μετατοπίσεις q_i από τις από τις $(n+m)$ - εξισώσεις που δίνονται από τις Εξ. (4-6) και (4-10).

Ένας άλλος τρόπος να δούμε τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών του Lagrange είναι να θεωρήσουμε τις *ελεύθερες μεταβολές* μιας *επαυξημένης συνάρτησης* $F(q_1, q_2, \ldots, q_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$,

$$F=f+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\varphi_j \quad , \tag{4-12}$$

όπου οι n τον αριθμό q_i και οι m τον αριθμό λ_j θεωρούνται ως ανεξάρτητες μεταβλητές. Οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες για να έχει η F στάσιμη τιμή είναι

$$\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\right)_o = 0 \ , \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{4-13}$$

και

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda_j}\right)_o = 0 \ , \quad (j = 1, 2, ..., m) \ . \tag{4-14}$$

Όπως είναι εύκολο να διαπιστώσουμε οι Εξ. (4-12) και (4-13) οδηγούν στην Εξ. (4-10) ενώ οι Εξ. (4-12) και (4-14) έχουν ως αποτέλεσμα την Εξ. (4-6). Από την παραπάνω ανάλυση οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι μια χωρίς συνθήκες στάσιμη τιμή της κατασκευασμένης συνάρτησης F συμβαίνει στην ίδια διάταξη $\mathbf{q}_o$ που συμβαίνει και η αντιστοιχούσα υπό συνθήκες στάσιμη τιμή της αρχικής συνάρτησης f.

Παράδειγμα 4-1. Να βρεθούν οι στάσιμες τιμές της συνάρτησης $f = z$ που υπόκειται στους δεσμούς.

$$\varphi_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \tag{4-15}$$

$$\varphi_2 = xy - 1 = 0 \ . \tag{4-16}$$

Το πρόβλημα αυτό συνίσταται στην εύρεση του υψηλοτέρου και χαμηλοτέρου σημείου της καμπύλης που προκύπτει από την αλληλοτομία μιας σφαίρας και ενός υπερβολικού κυλίνδρου.

Πρώτα κατασκευάζουμε τη συνάρτηση F με τη βοήθεια της Εξ. (4-12).

$$F = z + \lambda_1 (x^2 + y^2 + z^2 - 4) + \lambda_2 (xy - 1) \ . \tag{4-17}$$

Χρησιμοποιώντας την Εξ. (4-13) παίρνουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x\lambda_1 + y\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y\lambda_1 + x\lambda_2 = 0 \qquad (4\text{-}18)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 1 + 2z\lambda_1 = 0 \quad .$$

Αυτές οι τρεις εξισώσεις μαζί με τις Εξ. (4-15) και (4-16) μπορούν να λυθούν ως προς $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$. Το αποτέλεσμα είναι ότι υπάρχουν τέσσερα σημεία στάσης, δηλαδή, $(1, 1, \sqrt{2})$, $(-1, -1, \sqrt{2})$, $(1, 1, -\sqrt{2})$, και $(-1, -1, -\sqrt{2})$. Όπως μπορεί να διακρίνουμε τα δυο πρώτα σημεία είναι σημεία μεγίστου ενώ τα δυο υπόλοιπα είναι σημεία ελαχίστου. Οι πολλαπλασιαστές του Lagrange είναι

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2z} = \mp\frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \quad .$$

Στάσιμη τιμή ορισμένου ολοκληρώματος. Μέχρις εδώ έχουμε ασχοληθεί με το σύνηθες πρόβλημα μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης; δηλαδή, έχουμε *αναζητήσει σημεία στο μορφικό χώρο* στα οποία μια συνάρτηση $f(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ παίρνει στάσιμη τιμή. Ας θεωρήσουμε τώρα το πρόβλημα εύρεσης των στάσιμων τιμών ενός ορισμένου ολοκληρώματος. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε τις αναγκαίες συνθήκες για μια στάσιμη τιμή του

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f[y(x), y'(y), x]dx \quad , \qquad (4\text{-}19)$$

όπου $y'(x) \equiv dy/dx$ και τα όρια x_0 και x_1 είναι *σταθερά*. Επιπλέον, ας υποθέσουμε ότι η $f(y, y', x)$ έχει δυο συνεχείς παραγώγους ως προς κάθε όρισμά της.

Εδώ έχουμε να αντιμετωπίσουμε ένα πρόβλημα του λογισμού των μεταβολών που περιλαμβάνει την εύρεση μιας συνάρτησης $y^*(x)$, από

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

μια αποδεκτή κλάση συναρτήσεων, που παράγει μια στάσιμη τιμή για το ολοκλήρωμα I σε σύγκριση με την τιμή του για άλλες γειτονικές συναρτήσεις. Έτσι έχουμε

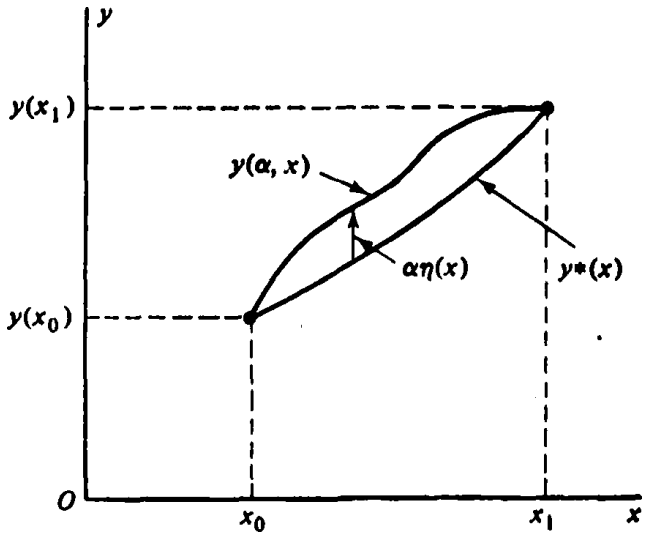
$$y(x) = y^*(x) + \delta y(x) \quad , \tag{4-20}$$

όπου $\delta y(x)$ είναι μια μικρή μεταβολή του y. Η ποσότητα I λέγεται *συναρτησιακή* γιατί η τιμή της εξαρτάται από τη μορφή της συνάρτησης $y(x)$· δηλαδή αυτή είναι μια συνάρτηση της συνάρτησης $y(x)$. Πρέπει να σημειωθεί ότι η $f(y, y', x)$ είναι γνωστή.

Ας εκλέξουμε ως την αποδεκτή κλάση για την $y(x)$ τις συναρτήσεις που έχουν δυο συνεχείς παραγώγους. Είναι σκόπιμο να εκφράσουμε τη μεταβολή δy με τη μορφή

$$\delta y = \alpha\eta(x) \quad , \tag{4-21}$$

όπου $\eta(x)$ είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση που είναι όσο επιθυμούμε λεία και α είναι μια μικρή παράμετρος που δεν εξαρτάται από την x (Σχ. 4-1). Άρα, για κάθε γνωστή



Σχ. 4-1. Μεταβολή καμπύλης μεταξύ δυο σταθερών σημείων.

$\eta(x)$, μπορούμε να θεωρήσουμε τη μεταβλητή καμπύλη y να είναι συνάρτηση του α και x, δηλαδή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$y(\alpha, x) = y^*(x) + \alpha\eta(x) \quad . \tag{4-22}$$

Ας κάνουμε τώρα την επιπρόσθετη παραδοχή ότι η μεταβολή δ_y είναι μηδέν στα ακραία σημεία, δηλαδή

$$\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0 \quad , \tag{4-23}$$

που συνεπάγεται ότι $y(x_0)$ και $y(x_1)$ είναι σταθερά.

Όπως είναι εύκολο να δούμε, το ολοκλήρωμα I είναι μια συνάρτηση μόνο του α για κάθε γνωστή $\eta(x)$. Έτσι, η αναγκαία συνθήκη ώστε η $y^*(x)$ να δίνει μια στάσιμη τιμή στο ολοκλήρωμα I είναι η πρώτη μεταβολή να είναι μηδέν, ή

$$\delta I = \left(\frac{dI}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} \alpha = 0 \quad , \tag{4-24}$$

για αυθαίρετη $\eta(x)$ και μη μηδενικό α. Αφού τα όρια x_0 και x_1 δεν εξαρτώνται από το α, μπορούμε να διαφορίσουμε υπό το σύμβολο του ολοκληρώματος και άρα παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\alpha} &= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\right) dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'}\eta'(x)\right] dx = 0 \quad . \end{aligned} \tag{4-25}$$

Αν ολοκληρώσουμε το δεύτερο όρο κατά παράγοντες έχουμε

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial y'}\eta'(x)\,dx = \left[\frac{\partial f}{\partial y'}\eta(x)\right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) dx \quad . \tag{4-26}$$

Αλλά έχουμε εκλέξει $\eta(x)$ να μηδενίζεται για $x = x_0$ και $x = x_1$ και κατά συνέπεια ο πρώτος όρος στο δεξιό μέρος της (4-26) είναι μηδέν και από τις Εξ. (4-25) και (4-26) βρίσκουμε ότι,

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \eta(x)\, dx = 0 \quad . \tag{4-27}$$

Επειδή $\eta(x)$ είναι αυθαίρετη, εκτός από τους περιορισμούς για τη συνέχεια και τις συνθήκες για $x = x_0$ και $x = x_1$, οδηγούμαστε στο ότι η αναγκαία συνθήκη για να είναι το ολοκλήρωμα ίσο με μηδέν είναι

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 , \tag{4-28}$$

για κάθε καμπύλη $y = y^*(x)$ που οδηγεί σε στάσιμη τιμή του I. Αυτή είναι η *εξίσωση Euler - Lagrange*. Με τις παραπάνω παραδοχές η Εξ. (4-28) είναι η *ικανή και αναγκαία συνθήκη* για να λαμβάνει στάσιμη τιμή το ολοκλήρωμα I. Το ικανό της συνθήκης είναι προφανές από το γεγονός ότι η Εξ. (4-28) συνεπάγεται ότι το ολοκλήρωμα της Εξ. (4-27) μηδενίζεται που έχει ως συνέπεια το μηδενισμό της μεταβολής δI.

Η εξίσωση Euler - Lagrange ορίστηκε το πρώτο από τον Euler το 1744 και αργότερα εφαρμόστηκε από το Lagrange σε μηχανικά συστήματα. Στα περισσότερα προβλήματα της δυναμικής η λύση της εξίσωσης αυτής εκφράζει *μια καμπύλη ελαχιστοποίησης* για τη συναρτησιακή I.

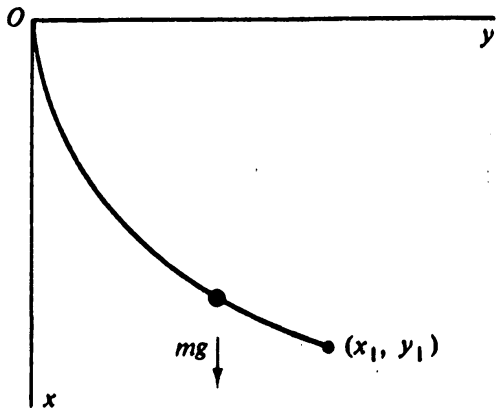
Παράδειγμα 4-2. Το *πρόβλημα του βραχυστοχρόνου* είναι ένα από τα κλασικά προβλήματα του λογισμού των μεταβολών. Το πρόβλημα συνίσταται στην εύρεση μιας καμπύλης μεταξύ της αρχής O και του σημείου (x_1, y_1) τέτοιας ώστε ένα σωμάτιο που ξεκινάει από την κατάσταση της ηρεμίας στο O και ολισθαίνει χωρίς τριβή κατά μήκος της καμπύλης υπό την επίδραση ενός ομοιόμορφου βαρυτικού πεδίου να φθάνει στο τέλος της καμπύλης στον ελάχιστο χρόνο.

Ας θεωρήσουμε ότι η δύναμη της βαρύτητας κατευθύνεται κατά τον θετικό x-άξονα, όπως φαίνεται στο Σχ. 4-2. Μπορούμε να πάρουμε μια έκφραση για την ταχύτητα v ως συνάρτηση της θέσης αν χρησιμοποιήσουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας, δηλαδή

$$\frac{1}{2} m v^2 = mgx$$

ή

$$v = \sqrt{2gx} \quad . \tag{4-29}$$



Σχ. 4-2. Το πρόβλημα του βραχυστοχρόνου.

Ο χρόνος t που απαιτείται να φθάσει το σωμάτιο στο σημείο (x_1, y_1) βρίσκεται με τη βοήθεια της έκφρασης για το στοιχείο του απειροστού δρόμου ds, δηλαδή

$$ds = \pm \sqrt{1 + y'^2}\, dx \quad , \tag{4-30}$$

όπου $y' \equiv dy/dx$ και η εκλογή του σημείου της τετραγωνικής ρίζας είναι τέτοιο ώστε $ds>0$. Τότε

$$t = \int_0^{s_1} \frac{ds}{v} = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gx}}\, dx \quad . \tag{4-31}$$

Τώρα μπορούμε να αναγνωρίσουμε το ολοκλήρωμα της Εξ. (4-31) με την τυπική μορφή της Εξ. (4-19), όπου

$$f(y, y', x) = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gx}} \quad . \tag{4-32}$$

Αφού η f δεν είναι μια εκπεφρασμένη συνάρτηση του y η εξίσωση Euler - Lagrange (4-28) παίρνει τη μορφή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0$$

ή

$$\frac{\partial f}{\partial y'}=\frac{y'}{\sqrt{2gx(1+y'^2)}}=c \quad , \tag{4-33}$$

όπου c είναι μια σταθερά. Η εξίσωση αυτή είναι δυνατόν να γραφεί με τη μορφή

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{2gc^2x}{1-2gc^2x}} \quad . \tag{4-34}$$

Ας εισάγουμε τώρα την παράμετρο θ με την αντικατάσταση

$$x=\alpha(1-\cos\theta) \tag{4-35}$$

όπου $\alpha=1/4gc^2$. Τότε παίρνουμε

$$y=\int \alpha(1-\cos\theta)\,d\theta \quad ,$$

που οδηγεί στην

$$y=\alpha(\theta-\sin\theta) \quad . \tag{4-36}$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι αφού ο δρόμος αρχίζει από την αρχή O η σταθερά ολοκλήρωσης είναι ίση με το μηδέν.

Οι εξισώσεις (4-35) και (4-36) είναι οι παραμετρικές εξισώσεις που εκφράζουν την κυκλοειδή. Η παράμετρος θ αυξάνει συνεχώς όπως το σωμάτιο συνεχίζει κατά μήκος του δρόμου του αν και το x είναι δυνατόν στην πραγματικότητα να ελαττώνεται κατά τη διάρκεια του τελευταίου τμήματος κάποιων τροχιών. Η σταθερά α μπορεί πάντα να εκλέγεται έτσι ώστε ο δρόμος να περνάει από το τελικό σημείο (x_1, y_1) για κάθε $x_1 \geq 0$. Αν και έχουμε αποδείξει ότι μόνο ο κυκλοειδής δρόμος οδηγεί σε στάσιμη τιμή του t, μια σύγκριση με άλλους γειτονικούς δρόμους θα δείξει ότι αυτός είναι στην πραγματικότητα ο δρόμος του ελάχιστου χρόνου.

Παράδειγμα 4-3. Ένα άλλο κλασικό παράδειγμα του λογισμού των μεταβολών είναι το γεωδαισιακό πρόβλημα, δηλαδή, το πρόβλημα εύρεσης του συντομότερου δρόμου μεταξύ δυο σημείων ενός δοσμένου χώρου. Ως παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το πρόβλημα εύρεσης του δρόμου ελαχίστου μήκους μεταξύ δυο δοσμένων σημείων επί μιας επιφάνειας σφαίρας ακτίνος r.

Ας χρησιμοποιήσουμε ως μεταβλητές τις σφαιρικές συντεταγμένες (θ, φ). Το διαφορικό στοιχείο μήκους ds είναι

$$ds^2 = r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$$

ή

$$ds = \pm r\sqrt{1 + \sin^2\theta\,(d\varphi/d\theta)^2}\; d\theta \quad , \tag{4-37}$$

όπου εκλέγουμε το σημείο της τετραγωνικής ρίζας έτσι ώστε κάθε αύξηση ds να είναι θετική και άρα παίρνουμε

$$s = r \int_{\theta_o}^{\theta_1} \sqrt{1 + \varphi'^2 \sin^2\theta}\; d\theta \quad , \tag{4-38}$$

όπου $\varphi' \equiv d\varphi/d\theta$. Το ολοκλήρωμα αυτό έχει την τυπική μορφή της Εξ. (4-19) με

$$f = \sqrt{1 + \varphi'^2 \sin^2\theta} \tag{4-39}$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι η f δεν είναι εκπεφρασμένη συνάρτηση της φ, και άρα η εξίσωση Euler - Lagrange έχει τη μορφή

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi'} = \frac{\varphi' \sin^2\theta}{\sqrt{1 + \varphi'^2 \sin^2\theta}} = c \quad . \tag{4-40}$$

Αν λύσουμε ως προς φ', παίρνουμε

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{c}{\sin\theta\sqrt{\sin^2\theta - c^2}}$$

που οδηγεί στην

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\varphi = \int \frac{c\, d\theta}{\sin\theta \sqrt{\sin^2\theta - c^2}} \ . \qquad (4\text{-}41)$$

Ολοκληρώνοντας, παίρνουμε

$$\varphi = \cos^{-1} \frac{c \cot\theta}{\sqrt{1 - c^2}} + \varphi_0$$

ή

$$\cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}} \cot\theta \quad , \qquad (4\text{-}42)$$

όπου φ_0 είναι η σταθερά ολοκλήρωσης.

Για να κατανοήσουμε καλύτερα αυτό το αποτέλεσμα ας μετασχηματίσουμε την Εξ. (4-42) σε Καρτεσιανές συντεταγμένες. Αν χρησιμοποιήσουμε την τριγωνομετρική ταυτότητα για τη συνάρτηση $\cos(\varphi-\varphi_0)$ και τις εξισώσεις.

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned} \qquad (4\text{-}43)$$

παίρνουμε την

$$x\cos\varphi_0 - y\sin\varphi_0 - \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}}\, z = 0 \quad , \qquad (4\text{-}44)$$

η οποία αναγνωρίζεται ως η εξίσωση ενός επιπέδου που περνάει από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Το επίπεδο αυτό τέμνει τη σφαίρα κατά ένα *μέγα κύκλο* που είναι η γεωδαισιακή του προβλήματος. Οι σταθερές c και φ_0 εκλέγονται έτσι ώστε ο μέγας κύκλος να διέρχεται από τα δυο σημεία που επιθυμούμε.

Το ίδιο αποτέλεσμα μπορεί να ληφθεί πιο εύκολα αν εκλέξουμε ένα σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων που οι άξονές του είναι έτσι προσανατολισμένοι ώστε τα δυο ακραία σημεία να αντιστοιχούν στην ίδια γωνία φ και η θ να εκλέγεται στο διάστημα $0<\theta<\pi$. Τότε είναι αμέσως προφανές από την Εξ. (4-38) ότι το μήκος του δρόμου

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ελαχιστοποιείται αν λάβουμε $d\varphi/d\theta = 0$ για όλα τα σημεία. Για μια ακόμη φορά προκύπτει ότι η γεωδαισιακή είναι ένας μέγας κύκλος.

Είναι ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι ο δρόμος που κάνει στάσιμη την τιμή του ολοκληρώματος, Εξ. (4-38), είναι πάντα ένας μέγας κύκλος αλλά όχι κατ' ανάγκη ελαχίστου μήκους. Ως παράδειγμα, αν το μήκος του μέγα κύκλου είναι περισσότερο από π ακτίνια τότε υπάρχουν συντομότεροι γειτονικοί δρόμοι που δεν είναι μέγιστοι κύκλοι. Μ' άλλα λόγια, αν ο μέγας κύκλος έχει μήκος μικρότερο από π ακτίνια και δεν περιέχει κατά συνέπεια δυο διαμετρικά αντίθετα ή συζυγή σημεία τότε ο δρόμος είναι ο συντομότερος που συνδέει τα δυο δοσμένα σημεία.

Η περίπτωση των n εξαρτημένων μεταβλητών. Ας επεκτείνουμε τώρα τα προηγούμενα αποτελέσματα στο πρόβλημα εύρεσης των συναρτήσεων $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ που κάνουν στάσιμη την τιμή του ολοκληρώματος

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n, x)\,dx \quad , \tag{4-45}$$

όπου οι τιμές της κάθε συνάρτησης $y_i(x)$ είναι προσδιορισμένες στα σημεία x_0 και x_1. Θα θεωρήσουμε πάλι ότι οι συναρτήσεις $y_i(x)$ και οι μεταβολές $\delta y_i(x)$ έχουν δυο συνεχείς παραγώγους. Έστω μεταβολές της μορφής

$$\delta y_i = \alpha \eta_i(x) \quad , \tag{4-46}$$

όπου $\eta_i(x_0) = \eta_i(x_1) = 0$.

Το ολοκλήρωμα I είναι μια συνάρτηση της παραμέτρου α για κάθε δοσμένο σύνολο η_i και ισχύει η Εξ. (4-24). Άρα, κατ' αναλογία με την Εξ. (4-25), παίρνουμε

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} \eta_i(x) + \frac{\partial f}{\partial y'_i} \eta'_i(x) \right] dx = 0 \quad . \tag{4-47}$$

Αν ολοκληρώσουμε κατά παράγοντες και λάβουμε υπόψη ότι οι η_i μηδενίζονται στα σημεία x_0 και x_1, παίρνουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'_i}\right)\right] \eta_i(x)\, dx = 0 \quad , \tag{4-48}$$

που είναι παρόμοια με την Εξ. (4-27).

Οι δy_i και κατά συνέπεια οι η_i έχουν εκλεγεί να είναι ανεξάρτητες, άρα κάθε έκφραση υπό τις αγκύλες πρέπει να είναι ίση με το μηδέν πράγμα που οδηγεί, γι' αυτή τη γενική περίπτωση, στις εξισώσεις Euler - Lagrange, δηλαδή

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'_i}\right) = 0 \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \quad . \tag{4-49}$$

Οι n - εξισώσεις (4-49) εκφράζουν τις *ικανές και αναγκαίες* συνθήκες ώστε η δI να είναι ίση με μηδέν.

Αρχή Hamilton. Ας συζητήσουμε τώρα τη σπουδαία παραλλακτική αρχή της δυναμικής γνωστή ως αρχή του Hamilton. Ως σημείο έναρξης θεωρούμε ένα σύστημα N - σωματίων των οποίων η διάταξη ως προς ένα αδρανειακό σύστημα δίνεται από τα διανύσματα r_1 , r_2 , ... , r_N . Με τη χρησιμοποίηση της αρχής του d' Alembert με τη μορφή Lagrange, βλέπουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{N} (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad , \tag{4-50}$$

όπου $\mathbf{F}_i$ είναι η *εφαρμοζόμενη δύναμη* που ενεργεί στο i - σωμάτιο. Θεωρούμε ότι οι δυνατές μετατοπίσεις $\delta \mathbf{r}_i$ είναι αντιστρεπτές και συμβιβαστές με τους στιγμιαίους δεσμούς που θεωρούνται ότι είναι άεργοι.

Στη συνέχεια ας πάρουμε μια έκφραση για τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας, δηλαδή

$$\delta T = \delta\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2\right) = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_i \quad . \tag{4-51}$$

Αλλά

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i\right) = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_i \ , \quad (4\text{-}52)$$

όπου πρέπει να σημειώσουμε ότι οι τελεστές της μεταβολής και της διαφόρισης ως προς το χρόνο μπορούν να εναλλαχθούν. Μ' άλλα λόγια βρίσκουμε ότι

$$\frac{d}{dt}(\delta \mathbf{r}_i) = \delta \dot{\mathbf{r}}_i \ , \quad (4\text{-}53)$$

επειδή κάθε δυνατή μετατόπιση θεωρείται ότι λαμβάνει χώρα χωρίς πέρασμα του χρόνου. Από τις Εξ. (4-50), (4-51) και (4-52) παίρνουμε ότι

$$\delta T + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i\right) \ . \quad (4\text{-}54)$$

Αν ολοκληρώσουμε την εξίσωση αυτή ως προς το χρόνο μεταξύ των ορίων t_0 και t_1 και χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό δW για το δυνατό έργο των *εφαρμοσμένων δυνάμεων*, όπως δίνονται από την Εξ. (1-39), παίρνουμε

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta W)\, dt = \left[\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i\right]_{t_0}^{t_1} \ . \quad (4\text{-}55)$$

Στη συνέχεια θεωρούμε ότι η διάταξη του συστήματος είναι προσδιορισμένη στις χρονικές στιγμές t_0 και t_1 , δηλαδή οι μεταβολές δr_i είναι μηδέν στις χρονικές αυτές στιγμές. Έτσι συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta W)\, dt = 0 \ . \quad (4\text{-}56)$$

Ως το σημείο αυτό η διάταξη του συστήματος έχει δοθεί σε όρους των διανυσμάτων θέσεις $\mathbf{r}_i$ των σωματίων. Είναι εξάλλου προφανές ότι για δοσμένη δυνατή μετατόπιση και χρόνο οι τιμές των δT και δW

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

είναι ανεξάρτητες από το σύστημα των συντεταγμένων. Ας κάνουμε το μετασχηματισμό των γενικευμένων συντεταγμένων $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Τότε, η κινητική ενέργεια T είναι μια συνάρτηση των q_i, $\dot{q}_i$ και t ενώ το δυνατό έργο είναι

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} Q_i \, \delta q_i \quad , \tag{4-57}$$

όπου Q_i είναι οι *γενικευμένες εφαρμοσμένες δυνάμεις*. Άρα, η Εξ. (4-56) μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \sum_{i=1}^{n} Q_i \, \delta q_i) \, dt = 0 \quad , \tag{4-58}$$

όπου οι δq_i είναι ίσες με το μηδέν στις χρονικές στιγμές t_0 και t_1. Για συστήματα που υπόκεινται σε δεσμούς οι δq_i πρέπει επίσης να είναι συμβιβαστές με τους στιγμιαίους δεσμούς.

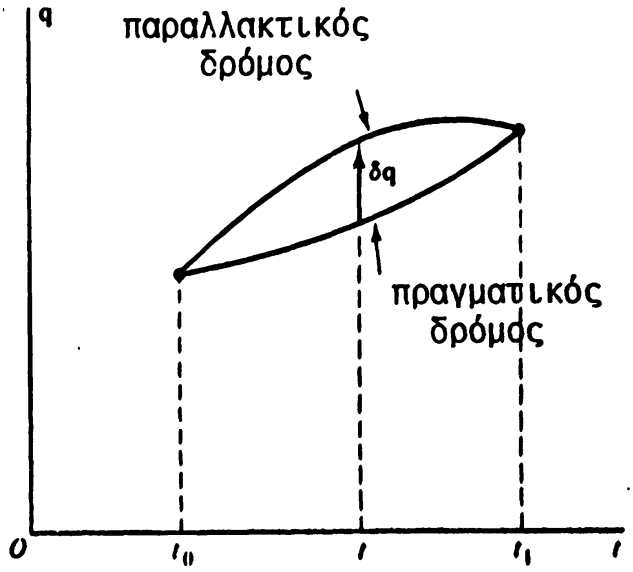
Είναι πολύ βοηθητικό να σκεφτούμε πραγματικούς και μεταβαλλόμενους δρόμους σ' ένα (n+1)-διαστάσεων χώρο που συνίσταται από τις n γενικευμένες συντεταγμένες q_i και το χρόνο t, όπως φαίνεται στο Σχ. 4-3. Ο χώρος αυτός είναι γνωστός ως *επεκτεταμένος μορφικός χώρος*. Πρέπει να σημειωθεί ότι τα δυο σημεία των πραγματικών και μεταβαλλόμενων δρόμων στο χώρο αυτό είναι σταθερά και ότι κάθε $\delta\mathbf{q}$ - διάνυσμα είναι κάθετο στον t - άξονα.

Το αποτέλεσμα που δίνεται από την Εξ. (4-56) ή (4-58) θεωρείται συχνά ως μια γενικευμένη διατύπωση της αρχής του Hamilton και είναι ουσιαστικά μια ολοκληρωτική μορφή της αρχής του d' Alembert, όπως δίνεται από την Εξ. (4-50), και εφαρμόζεται στην ίδια ευρεία ποικιλία μηχανικών συστημάτων. Η συνήθης όμως μορφή της αρχής του Hamilton εφαρμόζεται σε μια πιο περιορισμένη κλάση προβλημάτων.

Στη συνέχεια θα παράγουμε την αρχή του Hamilton με τη θεώρηση ότι *όλες οι εφαρμοσμένες δυνάμεις προέρχονται από μια δυναμοσυνάρτηση* $V(q_i,t)$. Αν ανακαλέσουμε από την Εξ. (1-91) ότι $\delta W = - \delta V$, η Εξ. (4-56) γίνεται,

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta (T - V)\, dt = 0 \quad , \tag{4-59}$$



Σχ. 4-3. Πραγματικοί και παραλλακτικοί δρόμοι στον επεκτεταμένο μορφικό χώρο.

όπου θεωρούμε πάλι σταθερά τα ακραία σημεία. Ας θεωρήσουμε τώρα ένα *ολόνομο σύστημα*. Για τα συστήματα αυτά οι τελεστές,ολοκλήρωσης και μεταβολής μπορούν να εναλλαχθούν. Τότε, κάνοντας την αντικατάσταση $L = T - V$, παίρνουμε

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L\, dt = 0 \quad , \tag{4-60}$$

όπου οι πραγματικοί και οι παραλλακτικοί δρόμοι ικανοποιούν τις επιβαλόμενες συνθήκες από κάθε ολόνομο δεσμό. *Η αρχή του Hamilton έχει τη διατύπωση:*

Ο πραγματικός δρόμος στο μορφικό χώρο, που ακολουθείται από ένα ολόνομο δυναμικό σύστημα κατά το

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

σταθερό χρονικό διάστημα από το t_0 στο t_1 είναι τέτοιος ώστε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{t_0}^{t_1} L\,dt \tag{4-61}$$

να έχει στάσιμη τιμή ως προς τις μεταβολές του δρόμου που μηδενίζονται στα ακραία σημεία.

Αν συγκρίνουμε το ολοκλήρωμα I της Εξ. (4-61) με εκείνο της Εξ. (4-45), παρατηρούμε μια ομοιότητα στη μορφή· δηλαδή, η ανεξάρτητη μεταβλητή t αντιστοιχεί στη x, οι q_i αντιστοιχούν στις y_i και η $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ αντιστοιχεί στην $f(y_i, y'_i, t)$. Άρα, αν θεωρήσουμε τις δq_i ανεξάρτητες μεταξύ τους οι εξισώσεις Euler-Lagrange (4-49) παίρνουν την ακόλουθη μορφή:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \quad . \tag{4-62}$$

Οι Εξ. (4-62) αποτελούν την τυπική μορφή των εξισώσεων Lagrange οι οποίες είναι οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε $\delta I = 0$ υπό τον όρο ότι οι $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ και $q(t)$ έχουν την απαιτούμενη ομαλότητα.

Αν και η αρχή του Hamilton είναι ισοδύναμη με τις εξισώσεις Lagrange, για τα θεωρούμενα συστήματα, η αρχή του Hamilton έχει μεγαλύτερη ευρύτητα με την έννοια ότι εφαρμόζεται σε κατανεμημένα συστήματα με άπειρο αριθμό βαθμών ελευθερίας.

Μη-ολόνομα συστήματα. Στην ανάπτυξη της αρχής του Hamilton θεωρήσαμε ένα *ολόνομο σύστημα*. Για τέτοια συστήματα που έχουν k βαθμούς ελευθερίας είναι πάντα δυνατόν να εκφράσουμε τη διάταξη σε όρους k ανεξαρτήτων q_i. Κάθε δυνατός δρόμος στον $(k+1)$-επεκτεταμένο μορφικό χώρο είναι ένας γεωμετρικά δυνατός δρόμος και αντιστοιχεί σε γεωμετρικά αποδεκτές δq_i.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι περιγράφουμε το *ίδιο σύστημα* σε όρους των $n = k + m$ γενικευμένων συντεταγμένων, όπου m είναι ο αριθμός των ανεξαρτήτων εξισώσεων του *ολόνομου* δεσμού. Οι ίδιοι

παραλλακτικοί δρόμοι είναι πιθανοί, αλλά τώρα οι διατάξεις εκφράζονται από n γενικευμένες συντεταγμένες q_i που δεν μεταβάλλονται ελεύθερα. Εξάλλου, είναι ακόμη αληθές ότι κάθε γεωμετρικά αποδεκτό σύνολο δq_i αντιστοιχεί σ' ένα γεωμετρικά πιθανό μεταβαλλόμενο δρόμο, και αντίστροφα. Το γεγονός αυτό συνεπάγεται ότι οι τελεστές της μεταβολής και ολοκλήρωσης ως προς το χρόνο μπορούν να εναλλάσσονται για όλα τα ολόνομα συστήματα. Μ' άλλα λόγια, η μεταβολή του ολοκληρώματος είναι ίση με το ολοκλήρωμα της μεταβολής. Επιπλέον, επειδή η τιμή της συνάρτησης Lagrange L είναι αναλλοίωτη ως προς ένα μετασχηματισμό συντεταγμένων, η αρχή του Hamilton εφαρμόζεται για ένα δοσμένο ολόνομο σύστημα ανεξάρτητα από το χρησιμοποιούμενο σύνολο γενικευμένων συντεταγμένων.

Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια ένα *μη-ολόνομο σύστημα.* Υποθέτουμε ότι υπάρχουν n γενικευμένες συντεταγμένες και m εξισώσεις μη-ολόνομου δεσμού της μορφής

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}(q_k, t)\dot{q}_i + \alpha_{jt}(q_k, t) = 0 \ , \quad (j = 1, 2, ..., m) \ . \quad (4\text{-}63)$$

Έστω $\mathbf{q}^*(t)$ ο πραγματικός δρόμος του συστήματος και $\mathbf{q}(t)$ ένας παραλλακτικός δρόμος. Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$q_i = q_i^* + \delta q_i \quad (4\text{-}64)$$

και

$$\dot{q}_i^* = \dot{q}_i + \delta\dot{q}_i \ . \quad (4\text{-}65)$$

Θεωρούμε ότι τόσο ο παραλλακτικός δρόμος όσο και ο πραγματικός είναι συμβιβαστοί με τους δεσμούς που δίνονται από την Εξ. (4-63). Τους συντελεστές α_{ji} και α_{jt} μπορούμε να τους εκφράσουμε με αναπτύγματα Taylor γύρω από την τιμή αναφοράς για κάθε στιγμή του χρόνου. Αν παραλείψουμε όρους ανώτερης της πρώτης τάξης ως προς δq_i παίρνουμε

$$\alpha_{ji}(q_k, t) = \alpha_{ji}(q_k^*, t) + \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial \alpha_{ji}}{\partial q_l}\right)_0 \delta q_l \quad (4\text{-}66)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\alpha_{jt}(q_k, t) = \alpha_{jt}(q_k^*, t) + \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial \alpha_{jt}}{\partial q_l}\right)_0 \delta q_l \ , \qquad (4\text{-}67)$$

όπου ο δείκτης μηδέν δείχνει ότι η ποσότητα υπολογίζεται στον πραγματικό δρόμο. Αντικαθιστώντας τις Εξ. (4-65) - (4-67) στην Εξ. (4-63) και λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}(q_k^*, t)\dot{q}_i^* + \alpha_{jt}(q_k^*, t) = 0 \ , \quad (j = 1, 2, ..., m) \qquad (4\text{-}68)$$

έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}(q_k^*, t)\delta\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial \alpha_{ji}}{\partial q_l}\right)_0 \dot{q}_i^* \delta q_l + \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial \alpha_{jt}}{\partial q_l}\right)_0 \delta q_l = 0 \ , \qquad (4\text{-}69)$$

όπου όροι που περιλαμβάνουν γινόμενα μικρών ποσοτήτων έχουν παραληφθεί. Ας υποθέσουμε τώρα ότι κάνουμε την επιπρόσθετη παραδοχή: *οι δq_i ικανοποιούν τις συνθήκες του στιγμιαίου δεσμού,* δηλαδή

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}(q_k^*, t)\delta q_i = 0 \ , \quad (j = 1, 2, ..., m) \ . \qquad (4\text{-}70)$$

Διαφορίζοντας την (4-70) ως προς το χρόνο και αλλάζοντας δείκτες, παίρνουμε

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{\alpha}_{jk}(q_l^*, t)\delta q_k + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}(q_l^*, t)\delta \dot{q}_i = 0 \qquad (4\text{-}71)$$

όπου

$$\dot{\alpha}_{jk}(q_l^*, t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \alpha_{jk}}{\partial q_i}\right)_0 \dot{q}_i^* + \left(\frac{\partial \alpha_{jk}}{\partial t}\right)_0 \ . \qquad (4\text{-}72)$$

Άρα, από τις Εξ. (4-71) και (4-72), έχουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}(q_l^*, t)\delta\dot{q}_l + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\alpha_{jk}}{\partial q_i}\right)_o \dot{q}_i^* \delta q_k + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\alpha_{jk}}{\partial t}\right)_o \delta q_k \quad . \quad (4\text{-}73)$$

Αν αφαιρέσουμε την Εξ. (4-73) από την Εξ. (4-69) προκύπτει ότι

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\alpha_{ji}}{\partial q_k} - \frac{\partial\alpha_{jk}}{\partial q_i}\right)_o \dot{q}_i^* \delta q_k + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\alpha_{jt}}{\partial q_k} - \frac{\partial\alpha_{jk}}{\partial t}\right)_o \delta q_k = 0 \quad . \quad (4\text{-}74)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι γενικά $\dot{q}_i^* \neq 0$. Άρα, αν η Εξ. (4-74) ισχύει συνεχώς για κάθε σύνολο δq_i που ικανοποιεί τους δεσμούς της Εξ. (4-70), πρέπει να έχουμε

$$\left(\frac{\partial\alpha_{ji}}{\partial q_k} - \frac{\partial\alpha_{jk}}{\partial q_l}\right)_o = 0 \; , \qquad \begin{matrix}(i,k = 1, 2, ..., n)\\ (j = 1, 2, ..., m)\end{matrix} \qquad (4\text{-}75)$$

$$\left(\frac{\partial\alpha_{jt}}{\partial q_k} - \frac{\partial\alpha_{jk}}{\partial t}\right)_o = 0 \; , \qquad \begin{matrix}(k = 1, 2, ..., n)\\ (j = 1, 2, ..., m)\end{matrix} \quad . \qquad (4\text{-}76)$$

Οι Εξ. (4-75) και (4-76) εκφράζουν τις *ακριβείς συνθήκες* για την ολοκληρησιμότητα της Εξ. (4-63), όπως δόθηκαν προηγουμένως με την Εξ. (1-23). Μ' άλλα λόγια αν ισχύουν οι συνθήκες αυτές οι δεσμοί είναι *ολόνομοι.*

Για να συνοψίσουμε, έχουμε αποδείξει ότι αν οι παραλλακτικοί δρόμοι είναι συμβιβαστοί με τους πραγματικούς δεσμούς και αν οι δq_i είναι συμβιβαστοί με τους στιγμιαίους δεσμούς τότε το σύστημα πρέπει να είναι ολόνομο. Για ένα μη-ολόνομο σύστημα, ένας παραλλακτικός δρόμος στον οποίο οι δq_i υπόκεινται στους δεσμούς που δίνονται από την Εξ. (4-70) δεν θα είναι γεωμετρικά πιθανός δρόμος επειδή αυτός δεν θα είναι συμβιβαστός με την Εξ. (4-63). Άρα, συμπεραίνουμε για μια ακόμη φορά ότι οι τελεστές της μεταβολής και ολοκλήρωσης μπορούν να εναλλαγούν για την περίπτωση ολόνομων συστημάτων πράγμα που δεν είναι δυνατόν για μη- ολόνομα συστήματα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Η αρχή του Hamilton, όπως δίνεται από την Εξ. (4-60) *ισχύει μόνον για ολόνομα συστήματα.* Οι Εξ. (4-58) και (4-59) εφαρμόζονται για μη-ολόνομα συστήματα αλλά δεν είναι παραλλακτικές αρχές (variational principles) με τη συνήθη έννοια επειδή οι δυνατοί δρόμοι δεν είναι γεωμετρικά πιθανοί δρόμοι.

Κανόνας του πολλαπλασιαστή. Ας θεωρήσουμε τώρα το πρόβλημα της εύρεσης μιας στάσιμης τιμής του ολοκληρώματος I της Εξ. (4-61), υποκειμένου σε m ανεξάρτητους διαφορικούς δεσμούς (ολονόμους και μη) της πιο γενικής μορφής

$$g_j(q_i, \dot{q}_i, t) = 0 \quad , \quad (j = 1, 2, ..., m) \quad , \tag{4-77}$$

όπου πάλι θεωρούμε τα ακραία σημεία να είναι σταθερά στον επεκτεταμένο μορφικό χώρο. Χρησιμοποιώντας την ορολογία του λογισμού των μεταβολών, αυτό είναι ένα παράδειγμα του προβλήματος του Lagrange. Μια συνήθης μέθοδος για την ανάλυση αυτών των προβλημάτων είναι ο *κανόνας του πολλαπλασιαστή.* Ο κανόνας αυτός λέει ότι οι υπό συνθήκες στάσιμες τιμές του ολοκληρώματος της Εξ. (4-61) βρίσκονται με τη θεώρηση των *ελεύθερων μεταβολών* της

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \Lambda \, dt \quad , \tag{4-78}$$

όπου $\Lambda(q_i, \dot{q}_i, \mu_i, t)$ είναι η επαυξημένη συνάρτηση Lagrange που δίνεται από την

$$\Lambda(q_i, \dot{q}_i, \mu_i, t) = L(q_i, \dot{q}_i, t) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \dot{q}_j(q_i, \dot{q}_i, t) \quad . \tag{4-79}$$

Οι πολλαπλασιαστές του Lagrange $\mu_j(t)$ αντιμετωπίζονται ως επιπρόσθετες, υπό προσδιορισμό, μεταβλητές.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Αν συνεχίσουμε με την ελεύθερη μεταβολή του ολοκληρώματος I της Εξ. (4-78), παίρνουμε τις ακόλουθες εξισώσεις Euler - Lagrange: (*)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial q_i} = 0 \ , \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{4-80}$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \mu_j} = q_j(q_i, \dot{q}_i, t) = 0 \ , \quad (j = 1, 2, ..., m) \ . \tag{4-81}$$

Εδώ έχουμε να επιλύσουμε $(n+m)$-εξισώσεις ως προς τις n συντεταγμένες q_i και τους m πολλαπλασιαστές μ_j ως συναρτήσεις του χρόνου. Πρέπει να σημειωθεί ότι η Εξ. (4-81) είναι απλά μια επανάληψη της απαίτησης ότι ο δρόμος-λύση είναι συμβιβαστός με τους δεσμούς.

Ας εφαρμόσουμε τώρα την Εξ. (4-80) σ' ένα σύστημα στο οποίο οι δεσμικές συναρτήσεις είναι γραμμικές ως προς $\dot{q}_i$. Χρησιμοποιώντας τον οικείο συμβολισμό για τους διαφορικούς δεσμούς, έχουμε

$$q_j(q_k, \dot{q}_k, t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}(q_k, t)\dot{q}_i + \alpha_{jt}(q_k, t) = 0 \ , \quad (j = 1, 2, ..., m) \ . \tag{4-82}$$

Τότε, από τις Εξ. (4-79) και (4-80), παίρνουμε

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = - \sum_{j=1}^{m} \frac{d}{dt}(\mu_j \alpha_{ji}) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \mu_j \frac{\partial \alpha_{jk}}{\partial q_i} \dot{q}_k + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \frac{\partial \alpha_{jt}}{\partial q_i}$$

ή

(*) Οι δq_i είναι μηδέν, ως συνήθως, στα ακραία σημεία. Όπως μπορεί να γίνει φανερό, οι $\delta \mu_i$ δεν περιορίζονται μ' αυτόν τον τρόπο επειδή η Λ δεν είναι εκπεφρασμένη συνάρτηση των $\dot{\mu}_i$· άρα, η παραδοχή αυτή δεν είναι αναγκαία για να προκύψει η Εξ. (4-81).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = - \sum_{j=1}^{m} \dot{\mu}_j \alpha_{ji} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \mu_j \left(\frac{\partial \alpha_{jk}}{\partial q_i} - \frac{\partial \alpha_{ji}}{\partial q_k}\right) \dot{q}_k$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \mu_j \left(\frac{\partial \alpha_{jt}}{\partial q_i} - \frac{\partial \alpha_{ji}}{\partial q_t}\right), \quad (i = 1, 2, ..., n) \ . \qquad (4\text{-}83)$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι οι εξισώσεις Euler-Lagrange για την εύρεση στάσιμων τιμών του ολοκληρώματος της Εξ. (4-61), όπου τόσο ο πραγματικός όσο και ο παραλλακτικός δρόμος απαιτείται να ικανοποιούν τις δεσμικές συνθήκες της Εξ. (4-82). Συγκρίνοντας το αποτέλεσμα αυτό με το γνωστό από τις εξισώσεις Lagrange γι' αυτό το σύστημα, δηλαδή,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \alpha_{ji} \ , \quad (i = 1, 2, ..., n) \ , \quad (4\text{-}84)$$

βλέπουμε ότι γενικά οι εξισώσεις είναι διαφορετικές. Άρα, σημειώνουμε ότι η χρήση του κανόνα του πολλαπλασιαστή οδηγεί σε *μη-σωστές δυναμικές εξισώσεις* για τη γενική περίπτωση των *μη-ολόνομων συστημάτων*. Αντίστροφα, ο πραγματικός δρόμος-λύση ενός μη-ολόνομου συστήματος δεν έχει γενικά ως αποτέλεσμα μια στάσιμη τιμή του ολοκληρώματος της Εξ. (4-61).

Αν όμως οι δεσμοί της Εξ. (4-82) είναι πραγματικά *ολόνομοι* τότε βρίσκουμε ότι η Εξ. (4-83) ανάγεται στη σωστή μορφή που δίνεται από την Εξ. (4-84). Στην περίπτωση αυτή ισχύουν οι συνθήκες ολοκληρωσιμότητας που δίνονται από τις Εξ. (4-75) και (4-76) και τα δυο τελευταία αθροίσματα στο δεξιό μέρος της Εξ. (4-83) μηδενίζονται. Τότε, αν θέσουμε $\lambda_j = - \dot{\mu}_j$ παίρνουμε τις κατάλληλες εξισώσεις κίνησης.

4-2. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ HAMILTON

Οι εξισώσεις Lagrange όπως έχουμε δει συνίστανται από n-διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης ως προς τις n γενικευμένες συντεταγμένες q_i και το χρόνο t. Όταν η συνάρτηση Lagrange $L(q_i, \dot{q}_i,$

t) για ένα σύστημα είναι γνωστή, οι εξισώσεις κίνησης λαμβάνονται με μια στερεότυπη διαδικασία. Οι n αυτές εξισώσεις έχουν τη μορφή που πολλές φορές επιτρέπει την πλήρη ολοκλήρωσή τους που έχει ως αποτέλεσμα αναλυτικές λύσεις για τις $q_i = q_i(t)$.

Από θεωρητική σκοπιά όμως είναι προτιμητέο να περιγράφουμε το σύστημα σε όρους $2n$-διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Για το σκοπό αυτό υπάρχουν πολλοί τρόποι αλλά όλοι δεν είναι το ίδιο κατάλληλοι για τις ανάγκες μας. Για παράδειγμα, μπορούμε να ορίσουμε n νέες μεταβλητές v_i, όπου $v_i = \dot{q}_i$ και έτσι οι εξισώσεις μετατρέπονται στις επιθυμητές $2n$-πρώτης τάξης εξισώσεις, πράγμα που όμως δεν είναι ιδιαίτερα χρήσιμο. Αντί όμως αυτού θα ορίσουμε μια νέα συνάρτηση $H(p_i, q_i, t)$ γνωστή ως συνάρτηση του Hamilton και θα την χρησιμοποιήσουμε να παράγουμε ένα σύνολο πρώτης τάξης εξισώσεων που έχουν συμμετρική μορφή. Οι εξισώσεις αυτές είναι οι κανονικές εξισώσεις του Hamilton.

Παραγωγή των εξισώσεων Hamilton. Ας θεωρήσουμε ένα *ολόνομο* σύστημα που μπορεί να περιγραφεί από τις εξισώσεις Lagrange, δηλαδή

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \ , \quad (i = 1, 2, ..., n) \ . \tag{4-85}$$

Αν θυμηθούμε ότι η γενικευμένη ορμή, συζυγής του q_i, δίνεται από την

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ , \tag{4-86}$$

τότε μπορούμε να γράψουμε την Εξ. (4-85) με τη μορφή,

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \ , \quad (i = 1, 2, ..., n) \ . \tag{4-87}$$

Ας ορίσουμε τώρα τη συνάρτηση Hamilton $H(q_i, p_i, t)$ του συστήματος με τον ακόλουθο τρόπο:

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_{k=1}^{n} p_k \dot{q}_k - L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad . \tag{4-88}$$

Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι, στη γενική περίπτωση, H είναι μια εκπεφρασμένη συνάρτηση των q_i, p_i και t. Αφού το δεξιό μέρος της Εξ. (4-88) περιλαμβάνει τις $\dot{q}_i$, πρέπει να απαλείψουμε αυτές τις ποσότητες με το να τις εκφράσουμε σε όρους των p_i. Αυτό μπορεί να γίνει αν ανακαλέσουμε από την Εξ. (2-30) ότι

$$p_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}(q_k, t)\, \dot{q}_j + \alpha_i(q_k, t) \quad . \tag{4-89}$$

Αν λύσουμε ως προς q_i παίρνουμε

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(p_j - \alpha_j) \quad , \tag{4-90}$$

όπου $b_{ij}(q_k, t)$ είναι ένα στοιχείο του μητρώου $\mathbf{b} = \mathbf{m}^{-1}$. Το μητρώο αδράνειας $\mathbf{m}$ μπορεί να αντιστραφεί αφού αυτό είναι θετικά ορισμένο.

Αν θεωρήσουμε τώρα μια αυθαίρετη μεταβολή της συνάρτησης Hamilton $H(p_i, q_i, t)$, έχουμε

$$\delta H = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i + \frac{\partial H}{\partial t} \delta t \quad . \tag{4-91}$$

Με παρόμοιο τρόπο, από την Εξ. (4-88) παίρνουμε ότι

$$\delta H = \sum_{i=1}^{n} p_i \delta \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \delta p_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} \delta t$$

και χρησιμοποιώντας την έκφραση για τις p_i που δίνεται από την Εξ. (4-86) για να διαγράψουμε τον πρώτο και τέταρτο όρο στο δεξιό μέρος, βρίσκουμε ότι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\delta H = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \, \delta p_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial L}{\partial t} \delta t \quad . \tag{4-92}$$

Οι ως εδώ εκφράσεις που δίνονται από τις Εξ. (4-91) και (4-92) είναι συνέπειες των ορισμών των H και p_i, αλλά δεν περιέχουν κανένα δυναμικό όρο. Ας εισχωρήσουμε τώρα δυναμικά στην ανάλυση χρησιμοποιώντας την εξίσωση Lagrange με τη μορφή που δίνεται από την Εξ. (4-87). Αντικαθιστώντας την έκφραση αυτή στην Εξ. (4-92), παίρνουμε

$$\delta H = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \, \delta p_i - \sum_{i=1}^{n} \dot{p}_i \, \delta q_i - \frac{\partial L}{\partial t} \delta t \quad . \tag{4-93}$$

Οι μεταβολές δq_i, δp_i και δt είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες και έτσι οι συντελεστές τους στις Εξ. (4-91) και (4-93) πρέπει να είναι ίσοι. Άρα

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{4-94}$$

και

$$\frac{\partial L}{\partial t} = - \frac{\partial H}{\partial t} \quad . \tag{4-95}$$

Οι $2n$ - πρώτης τάξης εξισώσεις που δίνονται από την Εξ. (4-94) είναι γνωστές ως *κανονικές εξισώσεις κίνησης του Hamilton*. Οι πρώτες n εξισώσεις εκφράζουν τις $\dot{q}_i$ ως γραμμικές συναρτήσεις των p_i και είναι ισοδύναμες μ' εκείνες που δίνονται από την Εξ. (4-90). Από την άλλη μεριά οι τελευταίες n εξισώσεις εκφράζουν μια εφαρμογή των νόμων κίνησης στο σύστημα και δίνουν τους ρυθμούς μεταβολής των γενικευμένων ορμών. Λόγω όμως της συμμετρίας των εξισώσεων Hamilton μπορεί κανείς να δώσει στις εξισώσεις αυτές μια ισοδυναμία. Αν θεωρήσουμε ότι οι n συντεταγμένες q_i και οι n ορμές p_i συνιστούν μαζί ένα $2n$-διάστατο διάνυσμα $\mathbf{x}$, τότε οι εξισώσεις Hamilton μπορούν

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΠΑΤΡΩΝ

να γραφούν ως μια πρώτης τάξης μη-γραμμική διανυσματική εξίσωση της μορφής

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \quad , \tag{4-96}$$

όπου πρέπει να σημειώσουμε ότι όλες οι $\dot{q}_i$ και $\dot{p}_i$ εμφανίζονται γραμμικά στο αριστερό μέρος της εξίσωσης .

Ένας λόγος που συνηγορεί στη σπουδαιότητα της μορφής Hamilton των εξισώσεων κίνησης είναι ότι εξυπηρετεί στη χρήση μετασχηματισμών για την εύρεση λύσεων. Σ' επόμενα κεφάλαια θα συζητηθεί η εφαρμογή των *κανονικών μετασχηματισμών*, που περιλαμβάνουν τα ζεύγη (q_i, p_i) , στη λύση των εξισώσεων Hamilton .

Συγκρίνοντας τις διατυπώσεις Lagrange και Hamilton των εξισώσεων κίνησης βλέπουμε ότι τόσο η συνάρτηση Lagrange $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ όσο και η συνάρτηση Hamilton $H(q_i, p_i, t)$ μπορούν να θεωρηθούν ως συναρτήσεις που περιγράφουν το σύστημα και από τις οποίες μπορεί να παραχθεί πλήρες σύνολο εξισώσεων κίνησης. Οι τυπικές ολόνομες μορφές των εξισώσεων Lagrange και Hamilton είναι ισοδύναμες και εφαρμόζονται στα ίδια συστήματα. Πρέπει να σημειωθεί ότι σε κάθε περίπτωση οι q_i, πρέπει να είναι ανεξάρτητες.

Ας θεωρήσουμε τώρα τις αναγκαίες τροποποιήσεις των εξισώσεων Hamilton ώστε αυτές να μπορούν να εφαρμοστούν για συστήματα στα οποία οι γενικευμένες δυνάμεις δεν προέρχονται όλες από μια δυναμοσυνάρτηση. Υποθέτουμε, για παράδειγμα, ότι έχουμε ένα *ολόνομο σύστημα* που υπακούει στις εξισώσεις Lagrange με τη μορφή της Εξ. (2-29) ή

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} + Q'_i \quad , (i = 1, 2, ..., n) \quad , \tag{4-97}$$

όπου Q'_i είναι το μέρος της γενικευμένης εφαρμοσμένης δύναμης που δεν παράγεται από μια δυναμοσυνάρτηση. Οι εξισώσεις Hamilton για το σύστημα αυτό είναι

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q'_i \quad , (i = 1, 2, ..., n) \quad . \tag{4-98}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Αν κάθε Q'_i μπορεί να εκφραστεί ως μια συνάρτηση των q_i, p_i και t τότε είναι προφανές ότι η Εξ. (4-98) είναι της μορφής $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ που δίνεται από την Εξ. (4-96).

Ένα *μη ολονομικό σύστημα* που περιγράφεται από εξισώσεις Lagrange της μορφής

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \alpha_{ji} + Q'_i \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \quad , \tag{4-99}$$

έχει το ακόλουθο σύνολο εξισώσεων Hamilton:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \alpha_{ji} + Q'_i \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \, , \tag{4-100}$$

όπου οι m δεσμικές εξισώσεις είναι

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} \dot{q}_i + \alpha_{jt} = 0 \quad , \quad (j = 1, 2, ..., m) \quad . \tag{4-101}$$

Εδώ έχουμε στις Εξ. (4-100) και (4-101) ένα σύνολο $(2n+m)$ - πρώτης τάξης συνήθεις διαφορικές εξισώσεις τις οποίες πρέπει να λύσουμε ως προς τις n συντεταγμένες q_i τις n ορμές p_i και τους m πολλαπλιασιαστές λ_j ως συναρτήσεις του χρόνου.

Μορφή της συνάρτησης Hamilton. Για να θεωρήσουμε την εκπεφρασμένη μορφή της συνάρτησης Hamilton $H(q_i, p_i, t)$ με μεγαλύτερη λεπτομέρεια, ας χρησιμοποιήσουμε πρώτα την Εξ. (4-89) να πάρουμε

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \dot{q}_i = 2T_2 + T_1 \, . \tag{4-102}$$

Τότε βρίσκουμε ότι η τιμή της συνάρτησης Hamilton είναι η ίδια με εκείνη της έκφρασης του ολοκληρώματος Jacobi, δηλαδή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - T + V = T_2 - T_0 + V \ . \qquad (4\text{-}103)$$

Αν χρησιμοποιήσουμε συμβολισμό μητρώων, από τις Εξ. (2-6) και (4-90) έχουμε

$$T_2 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{m}\dot{\mathbf{q}} \qquad (4\text{-}104)$$

και

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{b}\,(\mathbf{p} - \mathbf{a}) , \qquad (4\text{-}105)$$

αντίστοιχα.
Με τη σημείωση ότι $\mathbf{b} = \mathbf{m}^{-1}$ και $\mathbf{b}, \mathbf{m}$ είναι συμμετρικά μητρώα, παίρνουμε

$$T_2 = \frac{1}{2} (\mathbf{p} - \mathbf{a})^T \mathbf{b} (\mathbf{p} - \mathbf{a}) \ , \qquad (4\text{-}106)$$

που μπορεί να ανπτυχθεί έτσι ώστε

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} p_i p_j - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \alpha_i p_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \alpha_i \alpha_j \ . \qquad (4\text{-}107)$$

Επειδή T_0 και V είναι συναρτήσεις των q_i και t, παίρνουμε

$$H(q_k, p_k, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} p_i p_j - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \alpha_i p_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \alpha_i \alpha_j - T_0 + V \ . \qquad (4\text{-}108)$$

Αν ομαδοποιήσουμε τους όρους στη συνάρτηση του Hamilton σύμφωνα με το βαθμό τους ως προς p_i, μπορούμε να γράψουμε

$$H = H_2 + H_1 + H_0 \ , \qquad (4\text{-}109)$$

όπου

$$H_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, p_i\, p_j \qquad (4\text{-}110)$$

$$H_1 = - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, \alpha_i\, p_j \qquad (4\text{-}111)$$

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, \alpha_i\, \alpha_j - T_0 + V \quad . \qquad (4\text{-}112)$$

Άρα η συνάρτηση του Hamilton είναι γενικά τετραγωνική ως προς p_i.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα *σκληρόνομο σύστημα*. Αφού οι εξισώσεις μετασχηματισμού των συντεταγμένων από Καρτεσιανές σε γενικευμένες δεν περιέχουν εκπεφρασμένα το χρόνο t οι συντελεστές α_i είναι ίσοι με μηδέν και $T = T_2$. Κατά συνέπεια η συνάρτηση Hamilton έχει τη μορφή

$$H(q_k, p_k, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, p_i\, p_j + V(q_i, t) \quad , \qquad (4\text{-}113)$$

όπου b_i είναι συναρτήσεις μόνο των q_i. Όπως μπορεί να διαπιστωθεί $H_2 = T_2$, $H_1 = 0$ και $H_0 = V$. Για ένα λοιπόν σκληρόνομο σύστημα η συνάρτηση Hamilton είναι ίση με την ολική ενέργεια δηλαδή

$$H = T + V \quad . \qquad (4\text{-}114)$$

Είναι πολύ ενδιαφέρον να εξετάσουμε το πως η συνάρτηση Hamilton μεταβάλλεται με το χρόνο. Η ολική της χρονική παράγωγος είναι

$$\dot{H} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\, \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\, \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \quad . \qquad (4\text{-}115)$$

Από την τυπική περίπτωση ενός ολονόμου συστήματος, όπου εφαρμόζονται οι κανονικές εξισώσεις (4-94), βλέπουμε ότι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\dot{H} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad , \tag{4-116}$$

δηλαδή η μερική παράγωγος της H ως προς το χρόνο είναι ίση με την ολική της παράγωγο. Από την Εξ. (4-95) είναι προφανές ότι αν η L δεν περιέχει εκπεφρασμένα το χρόνο t δεν θα τον περιέχει και η H. Άρα για ένα *συντηρητικό ολόνομο σύστημα* η συνάρτηση Hamilton $H(p_i, q_i)$ έχει μια σταθερή τιμή.

Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί εύκολα να επεκταθεί σε *μή-ολόνομα συντηρητικά συστήματα*. Οι εξισώσεις Hamilton στην περίπτωση αυτή είναι

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \qquad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \alpha_{ji} \quad . \tag{4-117}$$

Από την Εξ. (2-141) ξέρουμε ότι οι δεσμοί για ένα συντηρητικό σύστημα μπορούν να εκφραστούν με τη μορφή

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} \dot{q}_i = 0 \quad , \quad (j = 1, 2, ..., m) \quad .$$

Άρα βρίσμουμε για μια ακόμη φορά ότι η συνάρτηση Hamilton είναι σταθερή, δηλαδή

$$\dot{H} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_{ji} \dot{q}_i = 0 \quad . \tag{4-118}$$

Το συμπέρασμα είναι ότι κάθε συντηρητικό σύστημα, ολόνομο ή μή-ολόνομο έχει σταθερή συνάρτηση Hamilton. Εξάλλου, από την Εξ. (4-103) βλέπουμε ότι αυτή είναι ίση με το ολοκλήρωμα Jacobi, δηλαδή

$$H = T_2 - T_0 + V = h \quad . \tag{4-119}$$

Τελευταία, ας θεωρήσουμε ένα *φυσικό σύστημα*. Στην περίπτωση αυτή $T_0 = 0$ και η Εξ. (4-119) ανάγεται στην

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$H = T + V = h \quad , \tag{4-120}$$

δηλαδή η H έχει σταθερή τιμή και μάλιστα ίση με την ολική ενέργεια.

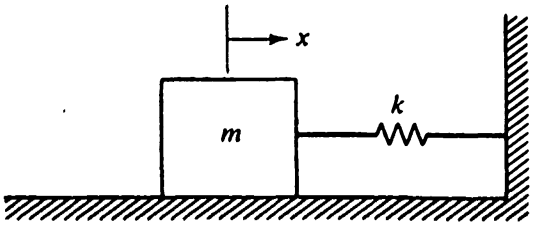
Παράδειγμα 4-4. Δίνεται ένα σύστημα που αποτελείται από μια μάζα m και ένα γραμμικό ελατήριο ακαμψίας k, όπως φαίνεται στο Σχ. 4-4. Με βάση τη συνάρτηση του Hamilton να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος. Να θεωρηθεί ότι η μετατόπιση x μετράται από την απαραμόρφωτη κατάσταση του ελατηρίου.

Ας βρούμε πρώτα την κινητική και δυναμική ενέργεια με τις συνήθεις μορφές. Έχουμε

$$T = \frac{1}{2}\, m\dot{x}^2 \quad , \qquad V = \frac{1}{2}\, kx^2$$

που οδηγούν στην

$$L = T - V = \frac{1}{2}\, m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\, kx^2 \quad . \tag{4-121}$$



Σχ. 4-4. Σύστημα μάζας- ελατηρίου.

Η γραμμική ορμή είναι

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad . \tag{4-122}$$

Άρα η κινητική ενέργεια μπορεί να γραφεί με τη μορφή $T = p^2 / 2m$ και η συνάρτηση Hamilton είναι

$$H(x, p) = p\dot{x} - L = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\, kx^2 \quad . \tag{4-123}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Αφού το σύστημα είναι φυσικό η H είναι ίση με την ολική ενέργεια $T+V=$ σταθ.

Για να πάρουμε τις εξισώσεις κίνησης εφαρμόζουμε την Εξ. (4-94) και έχουμε

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} , \qquad \dot{p} = - \frac{\partial H}{\partial x} = - kx \quad . \tag{4-124}$$

Οι δυο αυτές εξισώσεις πρώτης τάξης είναι ισοδύναμες με την

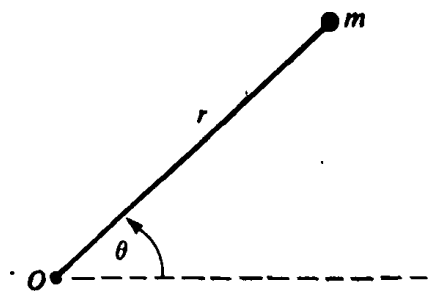
$$m\ddot{x} + kx = 0 , \tag{4-125}$$

που είναι η γνωστή εξίσωση κίνησης που προκύπτει χρησιμοποιώντας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα ή την εξίσωση Lagrange.

Παράδειγμα 4-5. Ένα σωμάτιο μάζας m έλκεται προς το σημείο O σύμφωνα με το νόμο,

$$F_r = - \frac{\mu m}{r^2} , \tag{4-126}$$

όπου μ είναι ο συντελεστής βαρύτητας. Αν χρησιμοποιήσουμε επίπεδες πολικές συντεταγμένες (r,θ) για να περιγράψουμε τη θέση του σωματίου (Σχ. 4-5) να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης (βλέπε παράδειγμα 2-7).



Σχ. 4-5. Το πρόβλημα του Kepler, σε πολικές συντεταγμένες

Με βάση τη συνάρτηση Lagrange του συστήματος

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{r} + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{\mu m}{r} \qquad (4\text{-}127)$$

βρίσκουμε τις γενικευμένες ορμές

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} , \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta} \quad . \qquad (4\text{-}128)$$

Η συνάρτηση Hamilton μπορεί πιο εύκολα να βρεθεί με την παρατήρηση ότι μελετάμε ένα φυσικό σύστημα στο οποίο η H είναι ίση με την ολική ενέργεια. Άρα γνωρίζουμε αμέσως ότι

$$H = T + V = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{\mu m}{r} \quad . \qquad (4\text{-}129)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Hamilton παίρνουμε

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} , \qquad \dot{p}_r = - \frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{\mu m}{r^2} \qquad (4\text{-}130)$$

και

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} , \qquad \dot{p}_\theta = - \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \quad . \qquad (4\text{-}131)$$

δηλαδή τις εξισώσεις κίνησης. Από την τελευταία εξίσωση βλέπουμε ότι

$$p_\theta = \beta \quad , \qquad (4\text{-}132)$$

όπου β είναι μια σταθερά και η Εξ. (4-130) ανάγεται στην

$$m\ddot{r} - \frac{\beta^2}{mr^3} + \frac{\mu m}{r^2} = 0 \quad . \qquad (4\text{-}133)$$

Από το παράδειγμα αυτό φαίνεται το πλεονέκτημα της διατύπωσης Hamilton. Εδώ η θ είναι μια *αφανής συντεταγμένη* και έτσι η συζυγής

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΠΑΤΡΩΝ

της ορμή p_θ μπορεί αμέσως να θεωρηθεί ως σταθερά β στην έκφραση για τη συνάρτηση Hamilton. Έτσι έχουμε

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{\beta^2}{2mr^2} - \frac{\mu m}{r} \quad , \tag{4-134}$$

που είναι μια συνάρτηση των r και p_r μόνο, πράγμα που σημαίνει ότι έχουμε μόνο ένα βαθμό ελευθερίας. Σ' αντίθεση, η μέθοδος Lagrange στο ίδιο πρόβλημα δεν οδηγεί σε μείωση των βαθμών ελευθερίας αφού η $\dot{\theta}$ δεν εξαλείφεται από μεταβλητή της L.

Αν όμως κάνουμε την αντικατάσταση $\dot{\theta} = \beta/mr^2$ στη συνάρτηση Lagrange σε μια προσπάθεια απαλειφής της $\dot{\theta}$ θα προκύψουν λανθασμένες εξισώσεις κίνησης. Το γεγονός αυτό είναι δυνατόν να διαπιστωθεί από σύγκριση της λανθασμένης συνάρτησης Lagrange που θα προκύψει με τη σωστή συνάρτηση που λαμβάνεται με τη γνωστή μέθοδο Routh (βλέπε παράγραφο 2-3).

Παράδειγμα 4-6. Μια άλλη εφαρμογή των εξισώσεων του Hamilton είναι η περιγραφή ενός συστήματος με δυναμικό εξαρτημένο από την ταχύτητα, $U(q_i, \dot{q}_i, t)$. Για παράδειγμα, θα βρούμε τις εξισώσεις κίνησης ενός φορτισμένου σωματίου εντός ενός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

Η συνάρτηση Lagrange, Εξ. (3-186), είναι

$$L = T - U = \frac{1}{2} mv^2 - e(\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \tag{4-135}$$

και άρα η ορμή δίνεται από την έκφραση

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + e\mathbf{A} \quad , \tag{4-136}$$

όπου e είναι το φορτίο του σωματίου, $\mathbf{v}$ είναι η ταχύτητά του, φ είναι το βαθμωτό δυναμικό του και $\mathbf{A}$ είναι το διανυσματικό δυναμικό.

Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση Hamilton H είναι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$H = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = \frac{1}{2} mv^2 + e\varphi \quad , \tag{4-137}$$

που πρέπει να σημειωθεί ότι είναι ίση με την ολική ενέργεια. Εκφράζοντας την H ως συνάρτηση των q_i και p_i έχουμε

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + e\varphi \quad , \tag{4-138}$$

όπου φ και $\mathbf{A}$ είναι συναρτήσεις της θέσης και του χρόνου. Από την πρώτη των εξισώσεων Hamilton, σε όρους Καρτεσιανών συντεταγμένων, βρίσκουμε ότι

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{1}{m} (p_x - eA_x)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{1}{m} (p_y - eA_y) \tag{4-139}$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{1}{m} (p_z - eA_z)$$

ή

$$\mathbf{v} = \frac{1}{m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \quad . \tag{4-140}$$

Με παρόμοιο τρόπο από τη δεύτερη των κανονικών εξισώσεων έχουμε

$$\dot{p}_x = - e \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{e}{m} \left[(p_x - eA_x) \frac{\partial A_x}{\partial x} + (p_y - eA_y) \frac{\partial A_y}{\partial x} + (p_z - eA_z) \frac{\partial A_z}{\partial x} \right]$$

$$\dot{p}_y = - e \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{e}{m} \left[(p_x - eA_x) \frac{\partial A_x}{\partial y} + (p_y - eA_y) \frac{\partial A_y}{\partial y} + (p_z - eA_z) \frac{\partial A_z}{\partial y} \right]$$

$$\dot{p}_z = - e \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{e}{m} \left[(p_x - eA_x) \frac{\partial A_x}{\partial z} + (p_y - eA_y) \frac{\partial A_y}{\partial z} + (p_z - eA_z) \frac{\partial A_z}{\partial z} \right]$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

που με τη βοήθεια της Εξ. (4-140) μπορεί να γραφεί με τη συνοπτική γραφή,

$$\dot{\mathbf{p}} = -e\nabla\varphi + e\nabla(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}) \ . \qquad (4\text{-}142)$$

Συνοπτικά, οι Εξ. (4-139) και (4-141) είναι οι βαθμωτές εξισώσεις κίνησης του φορτισμένου σωματίου εντός ενός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου και οι Εξ. (4-140) και (4-142) είναι οι αντίστοιχες διανυσματικές εξισώσεις.

Μετασχηματισμός Legendre. Μια άλλη μέθοδος για να πάρουμε τις εξισώσεις Hamilton από τις εξισώσεις Lagrange είναι εκείνη που βασίζεται στο *μετασχηματισμό Legendre.* Ας θεωρήσουμε πρώτα γενικά το μετασχηματισμό αυτό και στη συνέχεια ας τον εφαρμόσουμε στις εξισώσεις κίνησης.

Έστω ότι η συνάρτηση $F(u_1, ..., u_n, w_1, ..., w_m, t)$ συνδέεται με κάποιο δοσμένο σύστημα και ας ονομάσουμε τις u_j *ενεργές μεταβλητές* ενώ οι w_j και t είναι *παθητικές μεταβλητές.* Θέλουμε να περιγράψουμε το σύστημα σε όρους ενός νέου συνόλου ενεργών μεταβλητών που ορίζονται με τον ακόλουθο τρόπο,

$$v_j = \frac{\partial F}{\partial u_j} \quad , \quad (j = 1, 2, ..., n) \ . \qquad (4\text{-}143)$$

Ας θεωρήσουμε ότι η $n \times n$ ορίζουσα Hessian για το μετασχηματισμό είναι διάφορη του μηδενός, δηλαδή,

$$\left|\frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j}\right| = \left|\frac{\partial v_i}{\partial u_j}\right| \neq 0 \ . \qquad (4\text{-}144)$$

Το γεγονός αυτό εξασφαλίζει το ότι οι n εξισώσεις που έχουν τη μορφή της Εξ. (4-143) μπορούν να λυθούν ως προς u_j ως συναρτήσεις των v_j.

Ας ορίσουμε τώρα μια νέα συνάρτηση $G(v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_m, t)$ με τον ακόλουθο τρόπο,

$$G = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j - F \ . \qquad (4\text{-}145)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι οι u_j εκφράζονται σε όρους των v_j, w_j και t οποτεδήποτε αυτές εμφανίζονται στην Εξ. (4-145).

Θεωρούμε μια μεταβολή δG που συνδέεται με αυθαίρετες μεταβολές των ενεργών μεταβλητών και βλέπουμε ότι

$$\delta G = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial v_j} \delta v_j = \sum_{i=1}^{n} \left(u_j \delta v_j + v_j \delta u_j - \frac{\partial F}{\partial u_j} \delta u_j \right)$$

ή

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial v_j} \delta v_j = \sum_{i=1}^{n} \left[u_j \delta v_j + \left(v_j - \frac{\partial F}{\partial u_j} \right) \delta u_j \right] . \qquad (4\text{-}146)$$

Επειδή οι δu_j και δv_j θεωρούνται αυθαίρετες οι αντίστοιχοι συντελεστές πρέπει να είναι ίσοι σε κάθε πλευρά της εξίσωσης. Άρα οι συντελεστές των δu_j είναι μηδέν πράγμα που βρίσκεται σε συμφωνία με την Εξ. (4-143). Συγκρίνοντας τους συντελεστές των δv_j, παίρνουμε

$$u_j = \frac{\partial G}{\partial v_j} . \qquad (4\text{-}147)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι οι Εξ. (4-143) και (4-147) είναι παρόμοιες στη μορφή και μάλιστα υπάρχει ένας δυισμός με την έννοια εναλλάσσοντας τα u_j και v_j όπως επίσης και τα F και G παίρνουμε ως αποτέλεσμα το μετασχηματισμό κάθε εξίσωσης στην αντίστοιχη άλλη εξίσωση. Για το λόγο αυτό, αν εκτελέσουμε στη σειρά δυο μετασχηματισμούς Legendre χρησιμοποιώντας τις u_j και v_j ως ενεργές μεταβλητές το αποτέλεσμα θα είναι επιστροφή στην αρχική συνάρτηση με το αρχικό σύνολο μεταβλητών.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα *ολόνομο σύστημα* που περιγράφεται από την τυπική μορφή της εξίσωσης Lagrange που μπορεί να γραφεί όπως,

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j} , \quad (j = 1, 2, ..., n) , \qquad (4\text{-}148)$$

όπου

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} . \qquad (4\text{-}149)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε ένα μετασχηματισμό Legendre για να αντικαταστήσουμε τις $\dot{q}_i$ με τις p_i ως ενεργές μεταβλητές. Έστω ότι οι $\dot{q}_i$ αντιστοιχούν στις u_i, οι q_i στις w_i και η συνάρτηση Lagrange $L(\dot{q}_i, q_i, t)$ αντιστοιχεί στην $F(u_i, w_i, t)$. Επιπλέον η ορίζουσα Hessian είναι μη μηδενική, δηλαδή

$$\left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right| = |m_{ij}| \neq 0 \quad , \tag{4-150}$$

αφού το μητρώο αδράνειας είναι θετικά ορισμένο. Ως αντιστοιχούσα στη νέα συνάρτηση $G(v_i, w_i, t)$ ορίζουμε τη *συνάρτηση Hamilton*

$$H(p_k, q_k, t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L \quad , \tag{4-151}$$

σύμφωνα με την Εξ. (4-145). Τότε, αντίστοιχη της Εξ. (4-147), παίρνουμε την

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad . \tag{4-152}$$

Αν μεταβάλλουμε τις q_i (παθητικές μεταβλητές) στην Εξ. (4-151) και εξισώσουμε τους αντίστοιχους συντελεστές, παίρνουμε

$$\frac{\partial H(p_i, q_i, t)}{\partial q_k} = - \frac{\partial L(p_i, \dot{q}_i, t)}{\partial q_k} \quad , \tag{4-153}$$

πράγμα που βρίσκεται σε συμφωνία με την παρόμοια σύγκριση των Εξ. (4-91) και (4-92). Πρέπει να σημειωθεί ότι οι μερικές παράγωγοι συνεπάγονται ότι διαφορετικές ποσότητες κρατούνται σταθερές στα δυο μέλη της εξίσωσης. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνει πως αν κάποια συντεταγμένη απουσιάζει από την L θα απουσιάζει επίσης και από την H, δηλαδή η συντεταγμένη είναι αφανής χρησιμοποιώντας είτε τη συνάρτηση Lagrange είτε τη μέθοδο Hamilton. Τελικά, από τις Εξ. (4-148) και (4-153) παίρνουμε ότι

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad . \tag{4-154}$$

Έτσι η χρήση του μετασχηματισμού Legendre και των εξισώσεων Lagrange παράγει τις κανονικές εξισώσεις Hamilton όπως αυτές δίνονται από τις Εξ. (4-152) και (4-154). Με παρόμοιο τρόπο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το μετασχηματισμό Legendre για να πάρουμε τις εξισώσεις Lagrange από τις εξισώσεις Hamilton.

4-3. ΑΛΛΕΣ ΠΑΡΑΛΛΑΚΤΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ

Τροποποιημένη αρχή Hamilton. Ας ανακαλέσουμε πρώτα ότι η συνήθης μορφή της αρχής Hamilton, όπως δίνεται από την Εξ. (4-60), εφαρμόζεται σε ολόνομα συστήματα που μπορούν να περιγραφούν από την τυπική μορφή των εξισώσεων Lagrange. Οι παραλλακτικοί δρόμοι λαμβάνονται στο n-διάστατο μορφικό χώρο και περιορίζονται από τις συνθήκες ώστε οι δq_i να είναι συμβιβαστές με τους στιγμιαίους δεσμούς, αν υπάρχουν κάποιοι, που να μηδενίζονται στα ακραία σημεία. Εξάλλου, οι $\delta \dot{q}_i$ σχετίζονται με τις δq_i από τις εξισώσεις

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}\,\delta q_i \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \quad . \tag{4-155}$$

Οι $\delta \dot{q}_i$ δεν είναι γενικά ίσες με μηδέν στα ακραία σημεία.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα *ολόνομο σύστημα* που έχει n *ανεξάρτητες* q_i . Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε την Εξ. (4-151) για να γράψουμε την αρχή του Hamilton με την ακόλουθη *τροποποιημένη μορφή*:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H \right) dt = 0 \quad , \tag{4-156}$$

όπου θεωρούμε την H ως συνάρτηση των q_i, p_i, και t . Στη συνέχεια εκτελούμε την υποδεικνυόμενη μεταβολή και παίρνουμε

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(p_i \, \delta\dot{q}_i + \dot{q}_i \, \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) dt = 0 \quad . \qquad (4\text{-}157)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι ο χρόνος πρέπει να θεωρείται σταθερός κατά τη διάρκεια κάθε μεταβολής, δηλαδή $\delta t = 0$. Αν ολοκληρώσουμε τον όρο $p_i \delta\dot{q}_i$ κατά παράγοντα χρησιμοποιώντας την Εξ. (4-155) και τις συνθήκες των άκρων για τις δq_i , βρίσκουμε ότι

$$\int_{t_0}^{t_1} p_i \, \delta\dot{q}_i \, dt = - \int_{t_0}^{t_1} \dot{p}_i \, \delta q_i \, dt \quad . \qquad (4\text{-}158)$$

Άρα από τις Εξ. (4-157) και (4-158) παίρνουμε

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right] dt = 0 \quad . \qquad (4\text{-}159)$$

Στο σημείο αυτό ας θυμηθούμε ότι η αρχή του Hamilton θεωρεί παραλλακτικούς δρόμους στον q-χώρο (μορφικό χώρο). Άρα οι $\delta\dot{q}_i$ ή οι δp_i σχετίζονται απευθείας με τις δq_i από την Εξ. (4-155) και τις $p_i = \partial L/\partial q_i$ (ή την αντίστροφή της, $\dot{q}_i = \partial H/\partial p_i$). Το γεγονός αυτό είναι προφανές ότι συνεπάγεται οι δp_i και δq_i να μην μπορούν να εκλεγούν στην Εξ. (4-159) ανεξάρτητα μεταξύ τους . Πρέπει να σημειωθεί όμως ότι οι συντελεστές των δp_i είναι *εκ ταυτότητος μηδέν*, από τις κανονικές εξισώσεις για τις $\dot{q}_i$, και ως εκ τούτου η τιμή του ολοκληρώματος παραμένει στάσιμη ακόμα και αν οι δp_i θεωρηθούν ότι είναι αυθαίρετες. Ας διευρύνουμε τώρα τους ορίζοντές μας και ας θεωρήσουμε μεταβολές του δρόμου στο *χώρο των φάσεων* $2n$-διάστασεων δηλαδή n γενικευμένες συντεταγμένες q_i και n γενικευμένες ορμές p_i. Η *τροποποιημένη αρχή του Hamilton* λέει ότι ο πραγματικός δρόμος είναι τέτοιος ώστε το ολοκλήρωμα της Εξ. (4-156)

έχει στάσιμη τιμή για αυθαίρετες μεταβολές του δρόμου στο χώρο των φάσεων, με τον περιορισμό ότι οι δq_i μηδενίζονται στους χρόνους t_0 και t_1 . Οι p_i δεν είναι αναγκαίο να μηδενίζονται στα ακραία αυτά σημεία.

Από την ανεξαρτησία των δq_i στην Εξ. (4-159) παίρνουμε το συμπέρασμα ότι οι επί μέρους συντελεστές πρέπει να είναι ίσοι με μηδέν. Άρα παίρνουμε ως συνέπεια n κανονικές εξισώσεις $\dot{p}_i = -\partial H/\partial q_i$. Εναλλακτικά, αν στην αρχή θεωρήσουμε ότι ισχύει η τροποποιημένη μορφή της αρχής του Hamilton τότε η Εξ. (4-159) οδηγεί σε $2n$ κανονικές εξισώσεις αφού τόσο οι δq_i όσο και οι δp_i είναι αυθαίρετες.

Αρχή της ελάχιστης δράσης. Η ανάπτυξη της αρχής του Hamilton προχωρεί στην παραδοχή ότι οι μεταβολές δq_i των γενικευμένων συντεταγμένων είναι *σύγχρονες*, δηλαδή ένα σημείο $(\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}, t)$ επί του παραλλακτικού δρόμου αντιστοιχεί στο σημείο $(\mathbf{q}, t)$ επί του πραγματικού δρόμου. Άρα οι μεταβολές θεωρούνται ότι συμβαίνουν χωρίς το πέρασμα του χρόνου ($\delta t = 0$), όπως δηλαδή στη δυνατή μετατόπιση.

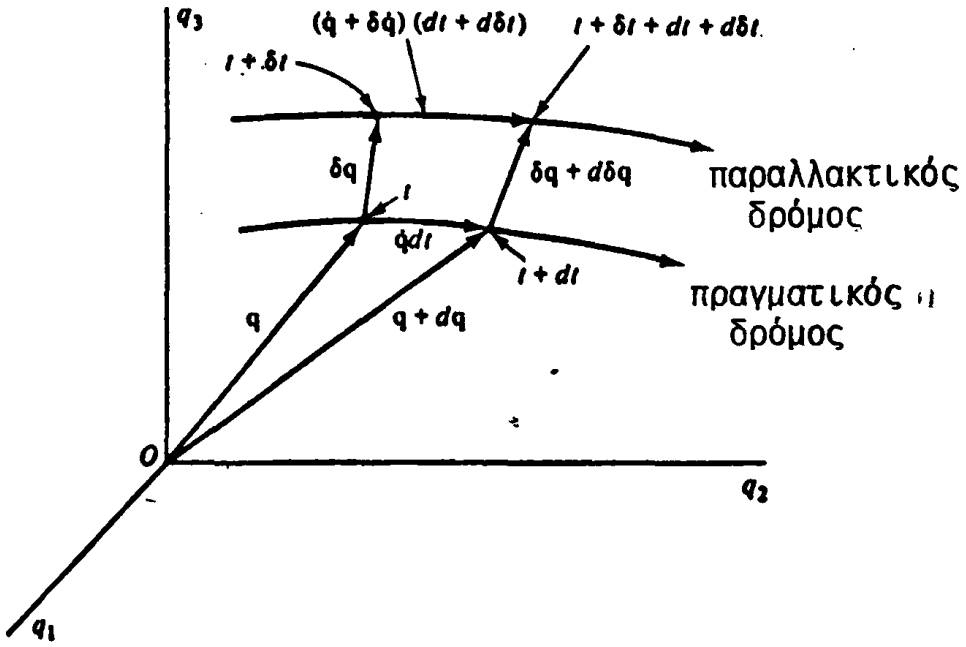
Είναι όμως ενδιαφέρον να θεωρήσουμε ένα πιο γενικό τρόπο μεταβολής κατά τον οποίο το σημείο $(\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}_i, t + \delta t)$ αντιστοιχεί στο $(\mathbf{q}_i, t)$ όπως φαίνεται στο Σχ. 4-6. Στην περίπτωση αυτή τα σημεία στον παραλλακτικό δρόμο αντιστοιχούν σε διαφορετικό χρόνο από τα αντίστοιχα στον πραγματικό δρόμο. Πρέπει να σημειωθεί ότι το σύμβολο d χρησιμοποιείται για να συμβολίσει τις διαφορικές μεταβολές διαφόρων ποσοτήτων κατά μήκος κάποιου δρόμου, ενώ το σύμβολο δ αναφέρεται στις μεταβολές που συμβαίνουν όταν πηγαίνουμε από ένα σημείο του πραγματικού δρόμου στο αντίστοιχο σημείο επί ενός παραλλακτικού δρόμου.

Ας θεωρήσουμε το μικρό τετράπλευρο του Σχ. 4-6, βλέπουμε ότι

$$\dot{\mathbf{q}}\, dt + \delta\mathbf{q} + d\delta\mathbf{q} = \delta\mathbf{q} + (\dot{\mathbf{q}} + \delta\dot{\mathbf{q}})\,(dt + d\delta t)$$

ή σε όρους των συνιστωσών

$$\delta\dot{q}_i = \frac{d}{dt}\,\delta q_i - \dot{q}_i \frac{d}{dt}\,\delta t \quad , \qquad (4\text{-}160)$$



Σχ. 4-6. Γενική μεταβολή στο μορφικό χώρο.

όπου παραλείπουμε τον όρο $\delta\dot{\mathbf{q}}\ (d/dt)\delta t$. Συγκρίνοντας το αποτέλεσμα αυτό με την Εξ. (4-155), βλέπουμε ότι η ακολουθία των τελεστών και της διαφόρισης ως προς το χρόνο δεν μπορεί να εναλλαγεί.

Ας ορίσουμε τώρα, όπως προηγουμένως, ένα ολοκλήρωμα I, δηλαδή

$$I=\int_{t_0}^{t_1} L(q_i,\ \dot{q}_i,\ t)\,dt \quad . \tag{4-161}$$

Μπορούμε να εφαρμόσουμε μια γενική μη-σύγχρονη μεταβολή στο ολοκλήρωμα αυτό και να πάρουμε αποτελέσματα που ανάγονται στην αρχή του Hamilton ή στην αρχή της ελάχιστης δράσης, ως ειδικές περιπτώσεις. Χρησιμοποιώντας μια πορεία ανάλογη εκείνης της Εξ. (4-160), παίρνουμε

$$\delta I=\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta L+L\frac{d}{dt}\delta t\right)dt \quad , \tag{4-162}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

όπου σημειώνουμε ότι το διάστημα από το t_0 στο t_1 εφαρμόζεται στον πραγματικό δρόμο και άρα είναι προσδιορισμένο. Ο παραλλακτικός δρόμος όμως μπορεί να έχει ελαφρώς διαφορετικό χρόνο έναρξης και πέρατος γιατί δt δεν είναι κατ' ανάγκη ίσο με μηδέν ακόμα και στα ακραία σημεία. Έτσι θεωρούμε το χρόνο t του πραγματικού δρόμου ως τη μεταβλητή ολοκλήρωσης.

Αν αναπτύξουμε την δL και χρησιμοποιήσουμε την Εξ. (4-160), παίρνουμε

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \frac{d}{dt} \delta t \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + L \frac{d}{dt} \delta t \right] dt \ . \tag{4-163}$$

Με τη σημείωση ότι

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i \ , \tag{4-164}$$

παίρνουμε

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) dt + \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial t} \delta t - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) \frac{d}{dt} \delta t \right] dt$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right] \delta q_i \, dt \ . \tag{4-165}$$

Το παραπάνω συμπέρασμα είναι γενικό και θα το εφαρμόσουμε τώρα σε κάποια *ειδικά συστήματα*. Ας περιορίσουμε τη συζήτηση στα *ολόνομα συστήματα* ώστε οι δq_i που αντιστοιχούν σε κάθε δυνατή μετατόπιση να εκφράζουν επίσης ένα γεωμετρικά αποδεκτό παραλλακτικό δρόμο.

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να δούμε πώς η Εξ. (4-165) ανάγεται στην αρχή του Hamilton. Πρώτα υποθέτουμε ότι οι μεταβολές είναι *σύγχρονες*, δηλαδή, $\delta t \equiv 0$ πράγμα που έχει ως συνέπεια το μηδενισμό του δευτέρου ολοκληρώματος. Επιπλέον ας υποθέσουμε ότι όλες οι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

εφαρμοζόμενες δυνάμεις προσδιορίζονται από μια δυναμοσυνάρτηση $V(q_i, t)$ και οι δq_i αποτελούν μια δυνατή μετατόπιση συμβιβαστή με τους στιγμιαίους δεσμούς. Τότε

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}\, \delta q_i = 0 \quad , \qquad (j = 1, 2, ..., m) \quad , \tag{4-166}$$

και σύμφωνα με την αρχή του d' Alembert, όπως δίνεται από την Εξ. (2-22), βλέπουμε ότι το τρίτο ολοκλήρωμα μηδενίζεται. Τελευταία ας υποθέσουμε ότι τα ακραία σημεία είναι ακλόνητα στο μορφικό χώρο. Τότε η Εξ. (4-165) ανάγεται στην

$$\delta I = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\, \delta q_i \right]_{t_0}^{t_1} = 0 \quad , \tag{4-167}$$

αφού οι δq_i είναι μηδέν για $t = t_0$ και $t = t_1$. Άρα παίρνουμε την *αρχή του Hamilton*, ή $\delta I = 0$. Πρέπει να σημειωθεί για μια ακόμη φορά ότι δεν απαιτείται το σύστημα να είναι συντηρητικό.

Ας παράγουμε τώρα με τη βοήθεια της Εξ. (4-165) την αρχή της ελάχιστης δράσης. Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ένα *συντηρητικό ολόνομο σύστημα* και υποθέτουμε ότι οι δq_i είναι συμβιβαστές με τους δεσμούς. Αν όλες οι εφαρμοζόμενες δυνάμεις μπορούν να ληφθούν από μια δυναμοσυνάρτηση $V(q_i)$ βρίσκουμε, όπως πριν, ότι το τρίτο ολοκλήρωμα μηδενίζεται. Επιπλέον ας υποθέσουμε ότι όλοι οι παραλλακτικοί δρόμοι έχουν ακλόνητα ακραία σημεία στον q - χώρο με αποτέλεσμα το πρώτο ολοκλήρωμα να μηδενίζεται σύμφωνα με την τελευταία ισότητα που δίνεται από την Εξ. (4-167).

Οι παραλλακτικοί δρόμοι που επιτρέπονται από την αρχή της ελάχιστης δράσης περιορίζονται σ' εκείνους που έχουν ένα ολοκλήρωμα ενέργειας

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\, \dot{q}_i - L = h \quad , \tag{4-168}$$

όπου h είναι μια σταθερά για κάθε παραλλακτικό δρόμο που είναι ίση με την ολική ενέργεια στην περίπτωση ενός φυσικού συστήματος.

Γενικά, ο απαιτούμενος χρόνος για να διασχίσουμε ένα παραλλακτικό δρόμο δεν είναι ίδιος με τον αντίστοιχο για τον πραγματικό δρόμο αφού οι $\delta\dot{q}_i$ προσδιορίζονται από ενεργειακές θεωρήσεις· άρα θεωρούμε μια *μη-σύγχρονη* μεταβολή για την οποία $\delta t \neq 0$. Με τη σημείωση ότι για ένα συντηρητικό σύστημα $\partial L/\partial t = 0$, βλέπουμε ότι

$$\delta I = -\int_{t_0}^{t_1} h \frac{d}{dt}(\delta t)\, dt = -h(\delta t_1 - \delta t_0) \quad . \tag{4-169}$$

Ας ορίσουμε τη *δράση* ως το ολοκλήρωμα

$$A = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i\, dt \quad . \tag{4-170}$$

Τότε, για τις θεωρούμενες μεταβολές του δρόμου, παίρνουμε

$$\delta A = \delta \int_{t_0}^{t_1} (L + h)\, dt = \delta I + \delta h\,(t_1 - t_0) + h(\delta t_1 - \delta t_0) \quad . \tag{4-171}$$

Συνδυάζοντας τις Εξ. (4-169) και (4-171), έχουμε

$$\delta A = \delta h\,(t_1 - t_0) \quad . \tag{4-172}$$

Τελευταία, ας περιορίσουμε τους παραλλακτικούς δρόμους σ' εκείνους για τους οποίους h έχει την ίδια τιμή όπως και στον πραγματικό δρόμο. Τότε $\delta h = 0$ και άρα

$$\delta A = \delta \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i\, dt = 0 \quad . \tag{4-173}$$

Η (4-173) *αποτελεί τη μαθηματική διατύπωση της αρχής της ελάχιστης δράσης: ο πραγματικός δρόμος ενός συντηρητικού ολόνομου συστήματος είναι τέτοιος ώστε η δράση είναι στάσιμη ως προς παραλλακτικούς*

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δρόμους που έχουν το ίδιο ολοκλήρωμα ενέργειας h και τα ίδια ακραία σημεία στον q - χώρο.

Για να γίνει καλύτερα κατανοητή η σημασία του ολοκληρώματος της δράσης πρέπει να σημειωθεί ότι

$$\sum_{i=1}^{n} p\,\dot{q}_i = 2T_2 + T_1 \quad . \tag{4-174}$$

Για ένα *φυσικό σύστημα* βλέπουμε ότι $T_o = 0$ και η αρχή της ελάχιστης δράσης γίνεται

$$\delta \int_{t_o}^{t_1} 2T\,dt = 0 \quad . \tag{4-175}$$

Στην περίπτωση αυτή οι παραλλακτικοί δρόμοι έχουν την ίδια ολική ενέργεια $T + V = h$. Αν κάνουμε την επιπρόσθετη παραδοχή ότι η κινητική ενέργεια είναι σταθερή, τότε ο πραγματικός δρόμος είναι εκείνος ο δρόμος που απαιτεί τον ελάχιστο χρόνο.

Μια άλλη μορφή της αρχής της ελάχιστης δράσης είναι εκείνη του Jacobi. Θεωρούμε ένα *φυσικό σύστημα* και γράφουμε την Εξ. (4-175) με τη μορφή

$$\delta \int_{t_o}^{t_1} 2\sqrt{T(h - V)}\,dt = 0 \quad . \tag{4-176}$$

Τώρα ορίζουμε ένα διαφορικό ds σύμφωνα με την εξίσωση

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_j\,dt^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\,dq_i\,dq_j \quad . \tag{4-177}$$

Βλέπουμε ότι

$$ds = \sqrt{2T}\,dt \quad . \tag{4-178}$$

και άρα παίρνουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\delta A = \delta \int \sqrt{2\,(h - V)}\; ds = 0\,, \qquad (4\text{-}179)$$

που είναι *η μορφή Jacobi της αρχής της ελάχιστης δράσης.*

Αν θεωρήσουμε το ds ως ένα στοιχείο μήκους τόξου τότε πρέπει να σημειώσουμε ότι οι παραλλακτικοί δρόμοι, γενικά, δεν έχουν το ίδιο ολικό μήκος και αν ακόμα τα ακραία σημεία είναι ακλόνητα στον q-χώρο. Άρα για να πάρουμε σταθερά όρια στο ολοκλήρωμα ας εκφράσουμε το ds σε όρους μιας άλλης παραμέτρου τέτοιας όπως μιας των q_i. Αφού V και m_{ij} είναι συναρτήσεις μόνο των q_i παίρνουμε ένα σύνηθες πρόβλημα του λογισμού των μεταβολών για το οποίο εφαρμόζονται οι εξισώσεις Euler-Lagrange. Η λύση αυτών των εξισώσεων παράγει το δρόμο του συστήματος στο μορφικό χώρο χωρίς την έκφραση της κίνησής του ως συνάρτηση του χρόνου.

Το συμπέρασμα που περιγράφεται από την Εξ. (4-179) είναι παρόμοιο εκείνου της αρχής του Fermat για την οπτική που έχει τη διατύπωση ότι ο οπτικός δρόμος μεταξύ δυο σημείων είναι τέτοιος ώστε ο απαιτούμενος χρόνος για να ταξιδέψει το φως μεταξύ των δυο σημείων ελαχιστοποιείται, θεωρώντας ότι η ταχύτητα του φωτός είναι αντιστρόφως ανάλογη του δείκτη διάθλασης μ. Ετσι, γνωρίζοντας ότι ο απαιτούμενος χρόνος dt για να ταξιδέψει το φως μια απόσταση ds είναι $dt = \mu ds$, βλέπουμε ότι $\sqrt{2(h-V)}$ αντιστοιχεί στο μ, και η δράση A αντιστοιχεί στο συνολικό απαιτούμενο χρόνο για να διασχίσει το φως το συγκεκριμένο δρόμο.

Παράδειγμα 4-7. Θα χρησιμοποιήσουμε τη μορφή Jacobi της αρχής της ελάχιστης δράσης για να πάρουμε την τροχιά του προβλήματος του Kepler που συζητήθηκε στο παράδειγμα 4-5.

Πρώτα πρέπει να σημειωθεί ότι το σύστημα αυτό είναι ένα φυσικό σύστημα που έχει σταθερή ολική ενέργεια

$$\frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r\dot{\theta}^2) - \frac{\mu m}{r} = h \qquad (4\text{-}180)$$

Εφαρμόζοντας τη μορφή Jacobi της αρχής της ελάχιστης δράσης, παίρνουμε

$$\delta \int \sqrt{2\left(h + \frac{\mu m}{r}\right)}\; ds = 0 \qquad (4\text{-}181)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

όπου, σύμφωνα με την Εξ. (4-177),

$$ds^2 = m\,(dr^2 + r^2\,d\theta^2) \quad . \tag{4-182}$$

Τώρα ας εκλέξουμε την θ ως ανεξάρτητη μεταβλητή και ας χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό $r' \equiv dr/d\theta$. Τότε η Εξ. (4-181) γίνεται

$$\delta \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{2m\left(h + \frac{\mu m}{r}\right)(r^2 + r'^2)}\; d\theta = 0 \quad , \tag{4-183}$$

όπου τα ακραία σημεία ως προς r και θ είναι ακλόνητα. Το ολοκλήρωμα αυτό είναι της μορφής

$$\delta \int_{\theta_0}^{\theta_1} f(r, r')d\theta = 0 \quad , \tag{4-184}$$

όπου

$$f(r, r') = \sqrt{2m\left(h + \frac{\mu m}{r}\right)(r^2 + r'^2)} \quad . \tag{4-185}$$

Άρα το ολοκλήρωμα στην Εξ. (4-183) είναι της τυπικής μορφής που δίνεται από την Εξ. (4-19) και κατά συνέπεια εφαρμόζεται η εξίσωση Euler-Lagrange, δηλαδή

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial r'}\right) - \frac{\partial f}{\partial r} = 0 \quad . \tag{4-186}$$

Αντί να γράψουμε με λεπτομέρεια την εξίσωση αυτή ας κοιτάξουμε αμέσως για ένα ολοκλήρωμα της κίνησης. Πρέπει να σημειωθεί ότι η f δεν είναι εκπεφρασμένη συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής θ. Άρα, αντίστοιχα με το ολοκλήρωμα της ενέργειας που δίνεται από την Εξ. (2-147), παίρνουμε

$$\frac{\partial f}{\partial r'} r' - f = C \quad . \tag{4-187}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Από την Εξ. (4-185) βλέπουμε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial r'} = \sqrt{\frac{2m\,(h + \mu m/r)}{r^2 + r'^2}}\; r' \qquad (4\text{-}188)$$

που οδηγεί στην

$$- \sqrt{\frac{2m\,(h + \mu m/r)}{r^2 + r'^2}}\; r^2 = C \quad . \qquad (4\text{-}189)$$

Αν χρησιμοποιήσουμε την αντικατάσταση $\dot{r} = r'\,\dot{\theta}$, μπορούμε να δείξουμε ότι η σταθερά της κίνησης είναι ίση με την αρνητική στροφορμή, δηλαδή

$$- mr^2\,\dot{\theta} = C \quad . \qquad (4\text{-}190)$$

Για να πάρουμε την εξίσωση της τροχιάς αναδιατάσουμε την Εξ. (4-189) στη μορφή

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{2mr^2}{C^2}\left(hr^2 + \mu mr - \frac{C^2}{2m}\right) \quad . \qquad (4\text{-}191)$$

Εκλέγουμε ως διεύθυνση αναφοράς για μέτρηση της θ τη θέση της ελάχιστης r δηλαδή, έστω $r = r_0 = r_{min}$ όταν $\theta = \theta_0 = 0$. Τότε από την Εξ. (4-191), παίρνουμε

$$\theta = \frac{C}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^{r} \frac{r}{r\sqrt{hr^2 + \mu mr - C^2/2m}} \quad , \qquad (4\text{-}192)$$

και μετά από υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{\mu mr - C^2/m}{r\sqrt{\mu^2 m^2 + 2hC^2/m}}\right) - \frac{\pi}{2} \quad . \qquad (4\text{-}193)$$

Για να πάρουμε την τιμή $\pi/2$ στο κάτω όριο r_0, έγινε χρήση του

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$h = \frac{1}{2} m r_o^2 \dot{\theta}_o^2 - \frac{\mu m}{r_o} \tag{4-194}$$

και της τιμής του C από την Εξ. (4-190) για να δείξουμε ότι το όρισμα του αντιστρόφου του ημιτόνου είναι ίσο με τη μονάδα.

Στη συνέχεια λύνουμε ως προς $r = r(\theta)$ και παίρνουμε

$$r = \frac{C^2/\mu m^2}{1 + \sqrt{1 + 2hC^2/\mu^2 m^3} \cos\theta} \quad . \tag{4-195}$$

Η εξίσωση αυτή είναι εξίσωση ενός κωνικού τμήματος και εκφράζει μια τροχιά που έχει ολική ενέργεια h, στροφορμή - C και εκκεντρότητα

$$e = \sqrt{1 + 2hC^2/\mu^2 m^3} \quad . \tag{4-196}$$

4-4. ΦΑΣΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ

Τροχιές. Στην προηγούμενη συζήτηση για τη μέθοδο Lagrange στη δυναμική είδαμε ότι ένα *ολόνομο σύστημα* μπορεί να περιγραφεί από n δεύτερης τάξης συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, όπου n είναι ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας. Για γνωστές q_i και $\dot{q}_i$ κάποια αρχική χρονική στιγμή t_o η λύση των διαφορικών εξισώσεων συνίσταται από n συναρτήσεις $q_i(t)$. Είναι σκόπιμο να σκεφτούμε αυτή τη λύση ως ένα δρόμο η *τροχιά* που διαγράφεται από ένα κινούμενο σημείο στο n-διάστατο *μορφικό χώρο*. Παρατηρούμε ότι γενικά για ένα σημείο στο μορφικό χώρο ενός μηχανικού συστήματος υπάρχουν πολλές δυνατές τροχιές που περνούν απ' αυτό, γιατί η διεύθυνση της ταχύτητας $\dot{\mathbf{q}}$ είναι σε κάθε σημείο αυθαίρετη.

Στη διατύπωση Hamilton οι κανονικές εξισώσεις κίνησης συνίστανται από $2n$ πρώτης τάξης διαφορικές εξισώσεις που δίνουν τις $\dot{q}_i$ και $\dot{p}_i$ ως συναρτήσεις των p_i, q_i και t. Αν και κάθε συντεταγμένη q_i είναι στην πραγματικότητα ζευγαρωμένη με την αντίστοιχη ορμή p_i, οι q_i και p_i θεωρούνται συχνά, λόγω της συμμετρίας των εξισώσεων, ως συνιστώσες ενός μόνο διανύσματος $\mathbf{x}$. Έτσι οι εξισώσεις κίνησης για

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ένα τυπικό ολόνομο σύστημα μπορούν να εκφραστούν με τη μορφή που δόθηκαν προηγουμένως από την Εξ. (4-96), δηλαδή

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \quad , \tag{4-197}$$

όπου $\mathbf{x}$ είναι ένα $2n$ - διάστατο διάνυσμα που συνίσταται από n γενικευμένες συντεταγμένες q_i και n γενικευμένες ορμές p_i. Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι οι q_i εκφράζονται από τις $x_1, x_2, ..., x_n$ και τις p_i από τις $x_{n+1}, ..., x_{2n}$. Ο $2n$ - διάστατος αυτός χώρος λέγεται *φασικός χώρος.*

Ένα σημείο στο χώρο των φάσεων δεν προσδιορίζει μόνο τη διάταξη του συστήματος αλλά και την κινητική του κατάσταση όπως αυτή εκφράζεται από τις p_i . Αν οι q_i και p_i $(i = 1,2, ..., n)$ είναι γνωστές σε κάποια χρονική στιγμή t_0 αυτές οι $2n$ παράμετροι συνιστούν τις $2n$ απαιτούμενες αρχικές συνθήκες για τον προσδιορισμό της περαιτέρω κίνησης του συστήματος και κατά συνέπεια της τροχιάς στο φασικό χώρο.

Ο φασικός χώρος είναι ιδιαίτερα κατάλληλος για την έκφραση των δυνατών κινήσεων ενός *συντηρητικού συστήματος* . Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση Hamilton δεν είναι εκπεφρασμένη συνάρτηση του χρόνου και οι εξισώσεις κίνησης έχουν τη μορφή

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}) \quad . \tag{4-198}$$

Ένα ολόνομο σύστημα που περιγράφεται από εξισώσεις αυτής της μορφής λέγεται *αυτόνομο* σύστημα σε αντίθεση με το *μη-αυτόνομο* που περιγράφεται από την Εξ. (4-197).

Από την Εξ. (4-98) είναι σαφές ότι η διεύθυνση της εφαπτομένης σε μια τροχιά στο χώρο των φάσεων που αντιστοιχεί σ' ένα συντηρητικό σύστημα είναι μια συνάρτηση μόνο της θέσης $\mathbf{x}$. Άρα υπάρχει μόνο μια τροχιά από κάθε σημείο και κάθε τροχιά είναι σταθερή. Εξάλλου το σύνολο του φασικού χώρου με τις τροχιές του, εκφράζει το σύνολο όλων των δυνατών κινήσεων του συστήματος. Ας θυμηθούμε ότι η συνάρτηση Hamilton ενός συντηρητικού συστήματος είναι σταθερή, δηλαδή,

$$H(p_k\, q_k) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L = h \quad , \tag{4-199}$$

όπου η σταθερά h υπολογίζεται συνήθως από τις αρχικές συνθήκες. Η εξίσωση αυτή εκφράζει μια επιφάνεια στο φασικό χώρο και φυσικά η αντίστοιχη τροχιά πρέπει να κείται εξ ολοκλήρου επ' αυτής της επιφάνειας. Άλλες τροχιές επί της ίδιας επιφάνειας είναι εκείνες που έχουν το ίδιο ολοκλήρωμα Jacobi και, συχνά, την ίδια ολική ενέργεια.

Ένα σημείο στο φασικό χώρο στο οποίο όλες οι $\dot{q}_i$ και $\dot{p}_i$ μηδενίζονται είναι γνωστό ως ένα *σημείο ισορροπίας* ή *ανώμαλο σημείο*. Επειδή $\dot{\mathbf{x}}$ παραμένει μηδέν στο σημείο αυτό η αντίστοιχη τροχιά συνίσταται μόνο από το ανώμαλο σημείο. Επιπλέον αν κάνουμε τη συνήθη παραδοχή ότι η συνάρτηση του Hamilton έχει τουλάχιστο δυο συνεχείς μερικές παραγώγους ως προς q_i και p_i τότε μπορεί να αποδειχτεί ότι δεν υπάρχουν άλλες τροχιές που να περικλείουν το δοσμένο ανώμαλο σημείο. Το γεγονός αυτό είναι συνέπεια του ότι με βάση τις εξισώσεις Hamilton το μέγεθος του $\|\dot{\mathbf{x}}\|$ πρέπει να είναι τάξης του ε ή μικρότερο στην απειροστή περιοχή ακτίνας $\varepsilon = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o\|$ κοντά στο ανώμαλο σημείο $\mathbf{x}_o$. Ως συνέπεια, απαιτείται ένας άπειρος χρόνος για ένα αυτόνομο σύστημα να αποκτήσει μια θέση ισορροπίας από μια κατάσταση μη-ισορροπίας ή αντίστροφα. Μ' άλλα λόγια, μια τροχιά που ξεκινάει από ένα ανώμαλο σημείο δεν θα το εγκαταλείψει αυτό ποτέ σε πεπερασμένο χρόνο όπως επίσης μια τροχιά που ξεκινάει από ένα ομαλό σημείο δεν φτάνει ποτέ σ' ένα ανώμαλο σημείο σε πεπερασμένο χρόνο.

Μια εναλλακτική μορφή για την Εξ. (4-197) ή (4-198) είναι

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_{2n}}{X_{2n}} = dt \quad . \tag{4-200}$$

Γι' αυτόνομα συστήματα οι X_i δεν είναι εκπεφρασμένες συναρτήσεις του χρόνου. Άρα οι τροχιές στο χώρο των φάσεων μπορούν να ληφθούν με παράλειψη της τελευταίας ισότητας στην Εξ. (4-200). Με την περιγραφή αυτή θα πάρουμε, τη μορφή τους στο χώρο των φάσεων χωρίς τη θεώρηση της χρονοεξάρτησης. Κάτω απ' αυτές τις συνθήκες από

κάθε ομαλό σημείο στο χώρο των φάσεων θα περνάει μόνο μια τροχιά, αλλά περισσότερες από μια τροχιές είναι προφανές, σε κάποιες περιπτώσεις, ότι μπορούν να περνούν από ένα ανώμαλο σημείο.

Όπως έχουμε συζητήσει μια τροχιά μπορεί να προσεγγίσει αυθαίρετα κοντά ένα ανώμαλο σημείο μόνο για $t \to \infty$. Άρα με τις δοσμένες συνθήκες ομαλότητας επί των X_i ξέρουμε ότι η τροχιά δεν μπορεί πραγματικά να περάσει από, ή να φθάσει, ένα ανώμαλο σημείο σε πεπερασμένο χρόνο αν και περισσότερες από μια τροχιές μπορούν να προσεγγίσουν το δοσμένο ανώμαλο σημείο.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα *μη-συντηρητικό* ολόνομο σύστημα που εκφράζεται από την Εξ. (4-197). Οι τροχιές του φασικού χώρου είναι δυνατόν στο μη-αυτόνομο αυτό σύστημα να *τμηθούν* γιατί η διεύθυνση του $\dot{\mathbf{x}}$ στο δοθέν σημείο $\mathbf{x}$, γενικά, μεταβάλλεται με το χρόνο . Αν όμως θεωρήσουμε τις τροχιές στο $(2n+1)$- διάστατο χώρο αποτελούμενο από τις q_i, p_i και t τότε αυτές δεν τέμνοντα. Για μια ακόμη φορά αυτές μπορούν να ληφθούν από την Εξ. (4-200) για κάθε σύνολο αρχικών συνθηκών.

Επεκτεταμένος φασικός χώρος. Μια άλλη αντιμετώπιση που εφαρμόζεται ιδιαίτερα σε μη-συντηρητικά συστήματα είναι εκείνη στην οποία ο χρόνος t θεωρείται ως μια επιπρόσθετη εξαρτημένη μεταβλητή, δηλαδή

$$q_{n+1} = t \quad . \tag{4-201}$$

Εκλέγουμε τώρα μια παράμετρο τ ως νέα ανεξάρτητη μεταβλητή. Η λύση των αντιστοίχων διαφορικών εξισώσεων για το σύστημα αυτό παράγει τροχιές σ' ένα (q, p) - χώρο $(2n+2)$ διαστάσεων, που αποτελείται από $(n+1)$- γενικευμένες συντεταγμένες q_i και $(n+1)$- γενικευμένες ορμές p_i . Ο Lanczos το χώρο αυτόν τον ονομάζει *επεκτεταμένο φασικό χώρο.* (*)

Ένα πλεονέκτημα από την πρόσθεση ενός επιπλέον βαθμού ελευθερίας στην ανάλυση είναι ότι το σύστημα τώρα μοιάζει ένα συντηρητικό σύστημα επειδή η συνάρτηση Hamilton δεν είναι μια

(*) C. Lanczos, The Variational Principles of Mechanics, (Toronto: University of Toronto Press, 1949), σελ. 185-92.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

εκπεφρασμένη συνάρτηση του τ . Συνεπώς, οι τροχιές είναι σταθερές στον επεκτεταμένο φασικό χώρο και δεν τέμνονται.

Ας θεωρήσουμε τώρα τη φύση της γενικευμένης ορμής που αντιστοιχεί στο t, δηλαδή την p_{n+1} . Για να πάρουμε τη συνιστώσα αυτή της ορμής στον επεκτεταμένο χώρο των φάσεων χρειαζόμαστε μια νέα συνάρτηση Lagrange $L_1(q_1, ..., q_{n+1}, q'_1, ..., q'_{n+1})$, όπου $q'_i \equiv dq_i/d\tau$. Επειδή είτε η παλιά είτε η καινούργια συνάρτηση Lagrange μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκφράσει το συγκεκριμένο σύστημα και επειδή η αρχή Hamilton εφαρμόζεται και στις δυο περιπτώσεις μπορούμε να εκλέξουμε

$$L\,dt = L_1\,d\tau \quad . \tag{4-202}$$

Τότε, χρησιμοποιώντας την Εξ. (4-151) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $dt = t'\,d\tau$, βρίσκουμε ότι

$$L_1\,d\tau = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i q'_i}{t'} - H \right) t'\,d\tau$$

ή

$$L_1 = \sum_{i=1}^{n} p_i q'_i - Ht' \quad , \tag{4-203}$$

όπου H είναι η αρχική συνάρτηση Hamilton. Αν είμαστε προσεκτικοί ώστε να εκφράσουμε την L_1 ως μια συνάρτηση των νέων μεταβλητών, μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$\frac{\partial}{\partial t'} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i q'_i \right) - \frac{\partial H}{\partial t'} t' = 0 \tag{4-204}$$

οπότε παίρνουμε

$$p_{n+1} = \frac{\partial L_1}{\partial t'} = -H \quad . \tag{4-205}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Από την Εξ. (4-205) συμπεραίνουμε ότι η $-H$, που έχει μονάδες ενέργειας, είναι η γενικευμένη ορμή η συζυγής του χρόνου t . Για την ειδική περίπτωση ενός συντηρητικού συστήματος βλέπουμε ότι ο t είναι μια αφανής συντεταγμένη, αφού η συνάρτηση Lagrange δεν περιέχει εκπεφρασμένα το χρόνο t . Ως συνέπεια, έχουμε ότι η p_{n+1} (ή H) είναι μια σταθερά, πράγμα που βρίσκεται σε συμφωνία με προηγούμενα συμπεράσματα για την ύπαρξη ενός ολοκληρώματος ενέργειας για συντηρητικά συστήματα.

Θεώρημα Liouville. Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα ολόνομο που περιγράφεται από n ανεξάρτητες γενικευμένες συντεταγμένες q_i . Υποθέτουμε ότι ακολουθούμε ένα σύνολο φασικών σημείων όπως αυτά περιγράφουν τροχιές στον (q, p)-χώρο. Μπορούμε να σκεφτούμε τα σημεία εντός ενός μικρού στοιχείου όγκου $dV = dq_1 \ ... \ dq_n \, dp_1 \ ... \ dp_n$ ως τα κινούμενα σημεία ενός ρευστού γνωστού ως *φασικού ρευστού.* Η *φασική ταχύτητα* $\mathbf{v}$ ενός σωματίου του ρευστού δίνεται σε όρους των $(2n)$- συνιστωσών του $(\dot{q}_i \, , \, \dot{p}_i)$ που μπορούν να εκφραστούν ως συναρτήσεις των $q_i \, , \, p_i$ και t από τις κανονικές εξισώσεις

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \, , \qquad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \, . \tag{4-206}$$

Καθώς ένα συγκεκριμένο στοιχείο όγκου του φασικού ρευστού κινείται, θ' αλλάζει γενικά το σχήμα του, αλλά γειτονικά σωμάτια θα παραμένουν και πάλι γειτονικά. Επιπλέον μπορεί να αποδειχτεί ότι ο όγκος του στοιχείου κάθε ρευστού είναι σταθερός κατά τη διάρκεια της κίνησης. Για το σκοπό αυτό ας υπολογίσουμε την απόκλιση της φασικής ταχύτητας $\mathbf{v}$ στον (p, q) - χώρο,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) \, , \tag{4-207}$$

που με βάση την Εξ. (4-206) ανάγεται στην

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΠΑΤΡΩΝ

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \right) = 0 \quad . \qquad (4\text{-}208)$$

Μια γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος αυτού είναι ότι το φασικό ρευστό είναι *ασυμπίεστο* (*θεώρημα του Liouville*).

Μια άλλη διατύπωση του θεωρήματος του Liouville μπορεί να ληφθεί με τη θεώρηση των εξισώσεων

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(q_{10}, \ldots, q_{no}, p_{10}, \ldots, p_{no}, t) \\ p_i &= p_i(q_{10}, \ldots, q_{no}, p_{10}, \ldots, p_{no}, t) \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad , \qquad (4\text{-}209)$$

που εκφράζουν μια τροχιά στο φασικό χώρο για αυθαίρετες αρχικές συνθήκες. Τις εξισώσεις αυτές μπορούμε να τις δούμε ως ένα μετασχηματισμό συντεταγμένων στο (q, p)- χώρο για κάθε δοσμένο t. Αν η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού είναι διάφορη του μηδενός τότε ο μετασχηματισμός είναι ένα - προς - ένα πράγμα που συνεπάγεται μοναδικότητα των λύσεων. Για την περίπτωση ενός ασυμπίεστου ρευστού όμως η Ιακωβιανή έχει την τιμή +1, δηλαδή

$$\frac{\partial(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)}{\partial(q_{10}, \ldots, q_{no}, p_{10}, \ldots, p_{no})} = 1 \quad . \qquad (4\text{-}210)$$

Αυτή η εναλλακτική διατύπωση του θεωρήματος του Liouville προφανώς ικανοποιεί την οριακή συνθήκη ότι όπως το t προσεγγίζει τον αρχικό χρόνο οι εξισώσεις μετασχηματισμού πρέπει να προσεγγίζουν τον ταυτοτικό μετασχηματισμό. Η διατύπωση αυτή συνεπάγεται επίσης ότι ο όγκος ενός απειροστού στοιχείου του φασικού χώρου διατηρείται από τον μετασχηματισμό.

Η ιδέα της θεώρησης της εξέλιξης ενός δυναμικού συστήματος σε όρους των μετασχηματισμών στο φασικό χώρο είναι χρήσιμη, ιδιαίτερα όταν κανείς θεωρεί απειροστούς μετασχηματισμούς για τους οποίους οι αλλαγές των q_i, p_i και t είναι απειροστές. Την αντιμετώπιση αυτή θα τη συζητήσουμε εκτενέστερα στο κεφάλαιο 6.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. LANCZOS, C., *The Variational Principles of Mechanics.* Toronto: University of Toronto Press, 1949. Παρουσιάζεται μια ενθουσιώδης εισαγωγή της αντιμετώπισης της δυναμικής με βάση το Λογισμό των μεταβολών. Το βιβλίο αυτό αποτελεί μια πολυδιάβαστη πραγματεία στη θεωρία του Hamilton.

2. PARS, L. A., *A Treatise on Analytical Dynamics.* London: Heinemann, 1965. Μια θαυμάσια αναφορά. Η συζήτηση για την αρχή του Hamilton και τις άλλες παραλλακτικές αρχές είναι ιδιαίτερα καλογραμμένη.

3. MARION, J. B., *Classical Dynamics of Particles and Systems,* second edition. New York: Academic Press, 1970. Στο βιβλίο αυτό υπάρχει μια θαυμάσια συζήτηση για την αρχή Hamilton και τη σχέση του με τις εξισώσεις Lagrange και Hamilton.

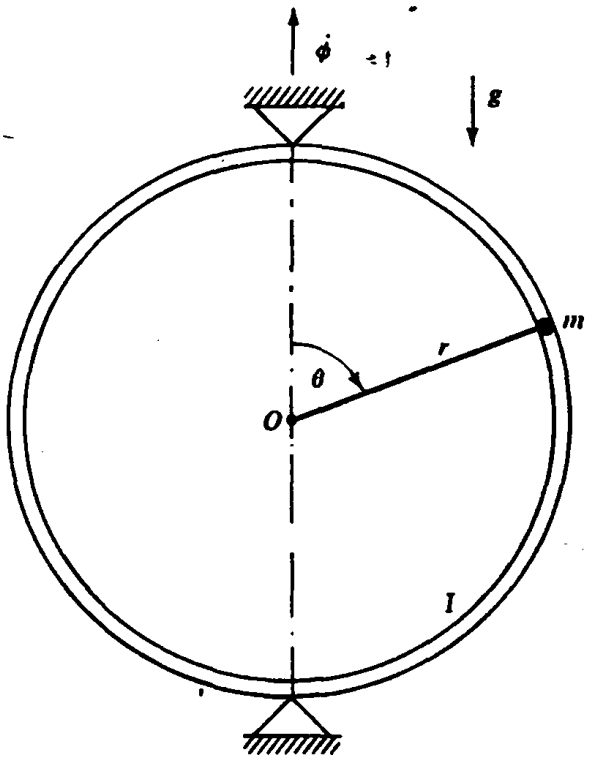
4. RUND, H., *The Hamilton - Jacobi Theory in the Calculus of Variations.* London: D. Van Nostrand Company, Ltd., 1966. Στο βιβλίο αυτό υπάρχει μια καλή συζήτηση από γεωμετρική σκοπιά για την αρχή του Hamilton και τα μη - ολόνομα συστήματα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

4-1. Θεωρούμε το πρόβλημα του στρόβου που συζητήθηκε στο παράδειγμα 3-5. Να χρησιμοποιηθούν ως γενικευμένες συντεταγμένες οι γωνίες του Euler και να βρεθεί η συνάρτηση του Hamilton. Για το σύστημα αυτό να βρεθούν οι κανονικές εξισώσεις του Hamilton.

4-2. Θεωρούμε την κατακόρυφη κίνηση ενός σωματίου μάζας m εντός ενός ομοιομόρφου βαρυτικού πεδίου. Θεωρώντας τη δύναμη απόσβεσης μεγέθους cv^2, όπου v η ταχύτητα και c μια σταθερά, να διατυπωθούν οι εξισώσεις Hamilton της κίνησης.

4-3. Ένα σωμάτιο μάζας m μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβή στο εσωτερικό ενός μικρού σωλήνα που έχει καμφθεί στη μορφή κύκλου ακτίνας r. Ο σωλήνας μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα περί ένα κατακόρυφο άξονα και έχει ροπή αδρανείας I ως προς τον άξονα αυτόν. Να διατυπωθούν οι εξισώσεις Hamilton της κίνησης του συστήματος. Αν υποθέσουμε τις αρχικές συνθήκες: $\theta(0) = \pi/2$, $\dot{\theta}(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 2\sqrt{g/r}$ και ότι $I = mr^2$ να προσδιοριστεί η μέγιστη τιμή της $\dot{\varphi}$ στην κίνηση που θα ακολουθήσει.



Σχ. Π4-3.

4-4. Ένα σωμάτιο μάζας m κινείται χωρίς τριβή επί ενός οριζοντίου επιπέδου και υπόκειται στο ρεόνομο δεσμό

$$\sin t^2\, dx - \cos t^2\, dy = 0 \ ,$$

όπου οι Καρτεσιανές συντεταγμένες (x,y) προσδιορίζουν τη θέση του. Να διατυπωθούν οι εξισώσεις κίνησης Hamilton. Αν υποθέσουμε τις αρχικές συνθήκες: $p_x(0) = mv_0$, $p_y(0) = 0$, να προσδιοριστούν οι p_x, p_y και ο πολλαπλασιαστής του Lagrange λ ως συνάρτηση του χρόνου.

4-5. Να παραχθούν οι κανονικές εξισώσεις του Hamilton αρχίζοντας με την τροποποιημένη αρχή του Hamilton και εφαρμόζοντας τις εξισώσεις Euler-Lagrange σ' ένα φασικό χώρο $2n$ - διαστάσεων.

4-6. Θεωρούμε το παραλλακτικό πρόβλημα

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} f(y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n, x)\, dx = 0 ,$$

με τις συνήθεις συνθήκες ομαλότητας για τις $y_i(x)$ και f. Να αποδειχτεί ότι αν κάποια από τις y'_i λείπει από την f τότε η αντίστοιχη δy_i δεν είναι ανάγκη να είναι μηδέν στα ακραία σημεία x_0 και x_1, για τον προσδιορισμό των εξισώσεων Euler-Lagrange.

4-7. Να υπολογιστεί το κανονικό ολοκλήρωμα για το διάστημα $0 \leq t \leq t_1$ στο πρόβλημα της ελεύθερης κατακόρυφης κίνησης ενός σωματίου υπό την επίδραση ομοιόμορφου βαρυτικού πεδίου και αυθαίρετες αρχικές συνθήκες. Να αποδειχτεί ότι το ολοκλήρωμα αυτό παράγει μεγαλύτερη τιμή αν χρησιμοποιείται μια σταθερή μέση ταχύτητα στη θέση της πραγματικής ταχύτητας.

4-8. Δίνεται ένα ολόνομο σύστημα με συνάρτηση Lagrange

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - mgx_3$$

και δεσμό

$$\dot{x}_1 - \dot{x}_2 + \dot{x}_3 = 0 .$$

Να χρησιμοποιηθεί μια επαυξημένη συνάρτηση Lagrange για τη διατύπωση των εξισώσεων κίνησης. Να προσδιοριστεί η $\ddot{x}_1$.

4-9. Να αποδειχτεί ότι η Εξ. (4-165) μπορεί να εκφραστεί με τη Χαμιλτωνιανή μορφή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\delta I = \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \, \delta q_i - H \, \delta t \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \, dt + \int_{t_0}^{t_1} \left(\dot{H} - \frac{\partial H}{\partial t} \right) \delta t \, dt \quad .$$

4-10. Από μαθηματική σκοπιά στο σχεδιασμό ενός πυραύλου σε δυο στάδια, θέλουμε να εκλέξουμε τους λόγους των μαζών μ_1 και μ_2 ώστε να ελαχιστοποιείται η έκφραση

$$f = ln \, \frac{\mu_1(1 - \beta_1)}{1 - \beta_1 \mu_1} + ln \, \frac{\mu_2(1 - \beta_2)}{1 - \beta_2 \mu_2}$$

που υπόκειται στη συνθήκη.

$$ln \, \mu_1 + ln \, \mu_2 = C$$

όπου β_1 , β_2 και C είναι γνωστές σταθερές ($1/\beta_1 > \mu_1 \geq 1$) και ($1/\beta_2 > \mu_2 \geq 1$). Να γίνει επίλυση ως προς μ_1 και μ_2 ως συναρτήσεις των δοσμένων σταθερών. Να υπολογιστεί η f_{min} για την περίπτωση, $\beta_1 = 0.10$, $\beta_2 = 0.12$, $C = 2.5$. Η συνάρτηση f εκφράζει το λογάριθμο του λόγου του συνολικού βάρους δια του ωφέλιμου φορτίου.

4-11. Δίνεται ένα τυπικό μη-ολόνομο σύστημα που έχει συνάρτηση Lagrange

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \quad ,$$

όπου m και I είναι σταθερές. Η εξίσωση δεσμού είναι

$$\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta = 0 \quad .$$

Θεωρώντας αρχικές συνθήκες : $x(0) = y(0) = \theta(0) = 0$, $\dot{x}\,(0) = 0$, $\dot{y}\,(0) = v_0$, $\dot{\theta}\,(0) = \omega_0$, να ληφθούν οι εξισώσεις κίνησης και να λυθούν ως προς x y και θ ως συναρτήσεις του χρόνου. Να δειχτεί ότι η αρχή του Hamilton δεν εφαρμόζεται στο σύστημα αυτό υπολογίζοντας την πρώτη μεταβολή του κανονικού ολοκληρώματος και δείχνοντας ότι αυτό

μπορεί να έχει οποιοδήποτε πρόσημο για ένα θεωρούμενο παραλλακτικό δρόμο με

$$y = \left[\frac{v_0}{\omega_0} + \eta(t) \right] \sin \omega_0 t \ ,$$

όπου $\eta(t)$ είναι μηδέν στα ακραία σημεία και μικρό οπουδήποτε αλλού. Να υποτεθεί ότι η θ δεν παραλλάσσει και οι μεταβολές στο x είναι συμβιβαστές με το δοθέντα δεσμό.

4-12. Θεωρούμε ένα τυπικό ολόνομο σύστημα με n βαθμούς ελευθερίας . Έστω $q_{n+1} = t$ και $\tau = \tau(t)$ η νέα ανεξάρτητη μεταβλητή. Να αποδειχτεί ότι το κανονικό ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$I = \int_{\tau_1}^{\tau_0} \sum_{i=1}^{n+1} p_i \, q'_i \, d\tau \ ,$$

όπου οι τόνοι δηλώνουν διαφορίσεις ως προς τ . Έστω επίσης $p_{n+1} = -H$. Στη συνέχεια θεωρούμε το παραλλακτικό πρόβλημα με τη βοηθητική συνθήκη $p_{n+1} + H(q_i, p_i, t) = 0$. Να ληφθεί μια επαυξημένη συνάρτηση Hamilton και να αποδειχθεί ότι αυτή οδηγεί στις συνήθεις κανονικές εξισώσεις.

4-13. Απαιτεί η αρχή της ελάχιστης δράσης οι q_i να είναι ανεξάρτητες; Να εξηγηθεί.

4-14. Να χρησιμοποιηθεί η μορφή Jacobi της αρχής της ελάχιστης δράσης για να αποδειχτεί ότι ο δρόμος ενός σωματίου εντός ενός ομοιόμορφου βαρυτικού πεδίου δίνεται από την

$$y = x \tan \theta_0 - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta_0} \ .$$

Να θεωρηθεί ότι το σωμάτιο εγκαταλείπει την αρχή με μια ταχύτητα v_0 και μία γωνία θ_0 ως προς την οριζόντια διεύθυνση.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

5

ΘΕΩΡΙΑ HAMILTON - JACOBI

Το κεφάλαιο αυτό και εκείνο που ακολουθεί αναφέρονται κυρίως σε διάφορα θέματα της θεωρίας μετασχηματισμών της δυναμικής. Θα θεωρήσουμε, γενικά, μετασχηματισμούς στο χώρο των φάσεων, στο πνεύμα της δυναμικής Hamilton. Θα υποθέσουμε δηλαδή ότι εκτός των γενικευμένων συντεταγμένων και οι γενικευμένες ορμές συμμετέχουν στο μετασχηματισμό. Επιπλέον θα περιοριστούμε στους *κανονικούς μετασχηματισμούς* που διατηρούν τη Χαμιλτωνιανή μορφή των εξισώσεων κίνησης στις νέες μεταβλητές.

Για να αντιληφθούμε πώς η θεωρία των μετασχηματισμών μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση δυναμικών προβλημάτων, ας ανακαλέσουμε από το κεφάλαιο 2 ότι η πλήρης λύση ενός ολόνομου συστήματος n - βαθμών ελευθερίας επιτυγχάνεται με την εύρεση $2n$ ανεξαρτήτων συναρτήσεων γνωστών ως *ολοκληρωμάτων της κίνησης*. Τα ολοκληρώματα αυτά της κίνησης μπορούν να γραφούν με τη μορφή,

$$f_i(q_j, \dot{q}_j, t) = \gamma_i \ , \quad (i = 1, 2, ..., 2n) \ , \tag{5-1}$$

όπου γ_i είναι σταθερές που υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Ένας άλλος τρόπος γραφής επιτυγχάνεται αν απαλειφούν οι γενικευμένες ταχύτητες $\dot{q}_i$ και αντ' αυτών χρησιμοποιηθούν οι γενικευμένες ορμές p_i με τη βοήθεια της Εξ. (4-90), οπότε οι σταθερές της κίνησης είναι συναρτήσεις των q_i, p_i και t,

$$g_i(q_j, p_j, t) = \gamma_i \ , \quad (i = 1, 2, ..., 2n) \ . \tag{5-2}$$

Υποθέτοντας ότι οι παραπάνω συναρτήσεις είναι διακριτές, δηλαδή ότι καμιά τους δεν προκύπτει από τις υπόλοιπες, η αντίστοιχη Ιακωβιανή ορίζουσα είναι μη μηδενική,

$$\frac{\partial(g_1, ..., g_{2n})}{\partial(q_1, ..., p_n)} \neq 0 \quad . \tag{5-3}$$

Άρα το σύστημα μπορεί να επιλυθεί ως προς τις n μεταβλητές q_i και τις n μεταβλητές p_i ως συναρτήσεις των $2n$ σταθερών γ_i (δηλαδή των αρχικών συνθηκών) και του χρόνου t,

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n}, t) \\ p_i &= p_i(\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n}, t) \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{5-4}$$

Αυτή είναι η πλήρης λύση των κανονικών εξισώσεων του Hamilton γνωστή ως η λύση του *προβλήματος Hamilton.*

Εναλλακτικά, θα μπορούσε κανείς να θεωρήσει τις Εξ. (5-2) ή (5-4) ως αναπαράσταση ενός $2n$- διάστατου μετασχηματισμού, μεταξύ ενός σταθερού σημείου, καθοριζομένου από τις $2n$ σταθερές γ_i, και του κινούμενου σημείου (q, p). Επειδή μας ενδιαφέρουν οι κανονικοί μετασχηματισμοί, απαιτούμε οι γ_i, οι q_i και οι p_i να υπακούουν τις εξισώσεις Hamilton. Οι κανονικές αυτές εξισώσεις είναι ιδιαίτερα απλές στην περίπτωση των γ_i, δηλαδή

$$\dot{\gamma}_i = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n) \quad , \tag{5-5}$$

αφού έχουμε υποθέσει ότι οι γ_i είναι σταθερές. Οι n σταθερές γ_i θεωρούνται ως συντεταγμένες και οι υπόλοιπες n ως ορμές. Μια συνάρτηση Hamilton $K(\gamma_i, t)$ από την οποία παράγονται οι πιο πάνω κανονικές εξισώσεις είναι επίσης πολύ απλή, δηλαδή

$$K(\gamma_i, t) \equiv 0 \quad . \tag{5-6}$$

Αν και έχουμε αποδείξει ότι η λύση για την κίνηση ενός ολόνομου συστήματος ισοδυναμεί με την εύρεση ενός κανονικού μετασχηματισμού με την εφαρμογή του οποίου οι νέες μεταβλητές θα είναι ουσιαστικά σταθερές, το ερώτημα που παραμένει είναι πώς μπορεί να βρεθεί ένας τέτοιος μετασχηματισμός. Αυτό είναι το θεμελιώδες πρόβλημα. Στο παρόν κεφάλαιο θα το προσεγγίσουμε μελετώντας την *γεννήτρια συνάρτηση* που συνδέεται με τον απαιτούμενο κανονικό

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

μετασχηματισμό. Η γεννήτρια συνάρτηση είναι λύση μιας μερικής διαφορικής εξίσωσης γνωστής ως *εξίσωσης Hamilton-Jacobi*. Οι εξισώσεις μετασχηματισμού και άρα η λύση του προβλήματος λαμβάνονται από την γεννήτρια συνάρτηση με μια διαδικασία παραγωγίσεων και αλγεβρικής επεξεργασίας.

5-1. ΚΥΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ HAMILTON

Κανονικό ολοκλήρωμα. Ας θεωρήσουμε πάλι το *κανονικό ολοκλήρωμα*

$$I = \int_{t_0}^{t_1} L\, dt \quad , \tag{5-7}$$

που συνδέεται με την αρχή του Hamilton. Ας υποθέσουμε ότι υπολογίζουμε αυτό το ολοκλήρωμα στον πραγματικό δυναμικό δρόμο ενός *ολόνομου* συστήματος που ικανοποιεί την τυπική μορφή των εξισώσεων Lagrange ή Hamilton. Αν οι $2n$ ανεξάρτητες αρχικές συνθήκες καθοριστούν στη χρονική στιγμή t_0, για παράδειγμα, αν γνωρίζουμε τις q_0 και τα $\dot{q}_0$, τότε η περαιτέρω κίνηση του συστήματος είναι προσδιορισμένη. Οι q_i και p_i μπορούν να βρεθούν για κάθε τελική χρονική στιγμή t_1. Αποδεικνύεται ότι η τροχιά καθορίζεται εξίσου καλά από τα άκρα της στον q-χώρο τις χρονικές στιγμές t_0 και t_1. Για την απόδειξη ας θεωρήσουμε τις εξισώσεις της λύσης,

$$q_{i1} = q_{i1}(q_0, \dot{q}_0, t_0, t_1) \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \quad , \tag{5-8}$$

και ας λύσουμε για τις αρχικές συνιστώσες των ταχυτήτων, $\dot{q}_{i0}$. Εδώ υποθέτουμε ότι η Ιακωβιανή ορίζουσα $\partial(q_{11}, ..., q_{n1})/\partial(\dot{q}_{10}, ..., \dot{q}_{n0})$ είναι μη μηδενική. Μ' άλλα λόγια υποθέτουμε ότι η τροχιά που συνδέει τα δεδομένα ακραία σημεία $\mathbf{q}_0$ και $\mathbf{q}_1$ στις δεδομένες αρχικές και τελικές χρονικές στιγμές t_0 και t_1, πρέπει να έχει ένα μοναδικό αρχικό διάνυσμα ταχύτητας $\dot{\mathbf{q}}_0$. Έτσι έχουμε,

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\dot{q}_{io} = \eta_i (q_o, q_1, t_o, t_1) , \quad (i = 1, 2, ..., n) \quad . \tag{5-9}$$

Έστω t_1 ο τρέχων χρόνος στην Εξ. (5-8) και ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της Εξ. (5-7) ως συνάρτηση των $(q_o, \dot{q}_o, t_o, t_1)$. Στη συνέχεια αντικαθιστώντας τις $\dot{q}_{io}$ από την Εξ. (5-9) παίρνουμε το κανονικό ολοκλήρωμα στην απαιτούμενη μορφή

$$S(q_o, q_1, t_o, t_1) = \int_{t_o}^{t_1} L \, dt \quad . \tag{5-10}$$

Η συνάρτηση $S(q_o, q_1, t_o, t_1)$ υποθέτουμε ότι είναι δυο φορές διαφορίσιμη ως προς όλα τα ορίσματά της και είναι γνωστή ως η *πρωτεύουσα συνάρτηση του Hamilton*. Θα αποδειχθεί ότι είναι επίσης η γεννήτρια συνάρτηση του επιθυμητού κανονικού μετασχηματισμού. Για να μπορέσουμε να συσχετίσουμε μεταβολές στην πρωτεύουσα συνάρτηση με την κίνηση ενός δυναμικού συστήματος, ας θεωρήσουμε μια γενική μή-σύγχρονη μεταβολή του κανονικού ολοκληρώματος με τροχιά αναφοράς μια πραγματική λύση. Αναφερόμενοι στο γενικό αποτέλεσμα της Εξ. (4-165), παρατηρούμε ότι το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι μηδενικό διότι η τροχιά αναφοράς είναι λύση της τυπικής μορφής των εξισώσεων Lagrange για ολόνομα συστήματα. Ας θυμηθούμε ότι η ολική παράγωγος ως προς το χρόνο είναι

$$\dot{H} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \tag{5-11}$$

η οποία, με τη βοήθεια των κανονικών εξισώσεων (4-94) και (4-95), ανάγεται στην

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t} \quad . \tag{5-12}$$

Αν αντικαταστήσουμε $\partial L/\partial t = - \dot{H}$ στο δεύτερο ολοκλήρωμα της Εξ. (4-165) και χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις ορισμού για τις p_i και την H, παίρνουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\delta I = \int_{t_o}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt} (p_i \delta q_i) dt - \int_{t_o}^{t_1} \frac{d}{dt} (H \delta t) dt \quad . \tag{5-13}$$

Η πρωτεύουσα συνάρτηση S είναι το κανονικό ολοκλήρωμα I εκπεφρασμένο ως συνάρτηση των άκρων στον επεκτεταμένο μορφικό χώρο, και ως εκ τούτου ταυτίζουμε το δI με το δS στην Εξ. (5-13), οπότε ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\delta S = \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H \delta t \right]_{t_o}^{t_1} \quad . \tag{5-14}$$

Αν τώρα γράψουμε την εξίσωση αυτή με διαφορική μορφή, παίρνουμε

$$dS = \sum_{i=1}^{n} p_{i1} \, dq_{i1} - \sum_{i=1}^{n} p_{io} \, dq_{io} - H_1 \, dt_1 + H_o \, dt_o \quad . \tag{5-15}$$

Εξάλλου, απευθείας διαφόριση της $S(q_o, q_1, t_o, t_1)$ δίνει

$$dS = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial q_{i1}} \, dq_{i1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial q_{io}} \, dq_{io} - \frac{\partial S}{\partial t_1} \, dt_1 + \frac{\partial S}{\partial t_o} \, dt_o \; . \tag{5-16}$$

Αφού έχουμε υποθέσει ότι τα $(2n+2)$-ορίσματα της πρωτεύουσας συνάρτησης μπορούν να μεταβληθούν ανεξάρτητα, οι αντίστοιχοι συντελεστές στις Εξ. (5-15) και (5-16) πρέπει να είναι ίσοι. Άρα έχουμε

$$p_{i1} = \frac{\partial S}{\partial q_{i1}} \; , \qquad p_{io} = - \frac{\partial S}{\partial q_{io}} \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \quad , \tag{5-17}$$

και

$$H_1 = - \frac{\partial S}{\partial t_1} \; , \qquad H_o = \frac{\partial S}{\partial t_o} \quad . \tag{5-18}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ας θεωρήσουμε τη δεύτερη των Εξ. (5-17) που δίνει τις p_{io} ως συνάρτησεις των $(q_{io}, q_{i1}, t_o, t_1)$. Υποθέτοντας ότι η παρακάτω ορίζουσα είναι διάφορος του μηδενός, δηλαδή

$$\left| \frac{\partial^2 S}{\partial q_{io}\, \partial q_{j1}} \right| \neq 0 \quad , \tag{5-19}$$

μπορούμε να λύσουμε για κάθε q_{j1} ως συνάρτηση των αρχικών συνθηκών και του χρόνου. Έτσι έχουμε

$$q_{i1} = q_{i1}(q_o, p_o, t_o, t_1) \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \quad , \tag{5-20}$$

που είναι η λύση του *προβλήματος Lagrange* και δίνει την κίνηση στο *μορφικό χώρο* ως συνάρτηση του χρόνου. Αν αντικαταστήσουμε αυτό το αποτέλεσμα στην πρώτη των Εξ. (5-17) παίρνουμε

$$p_{i1} = p_{i1}(q_o, p_o, t_o, t_1) \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \quad , \tag{5-21}$$

η οποία μαζί με την Εξ. (5-20) συμπληρώνει τη λύση του *προβλήματος Hamilton* δίνοντας την κίνηση *στο χώρο των φάσεων* ως συνάρτηση του χρόνου. Έτσι βλέπουμε ότι αν γνωρίζουμε την πρωτεύουσα συνάρτηση, η πλήρης λύση για την κίνηση του συστήματος μπορεί να προκύψει με μια διαδικασία διαφορίσεων και αλγεβρικών χειρισμών. Αυτό που χρειάζεται βέβαια είναι ένας τρόπος εύρεσης της πρωτεύουσας συνάρτησης χωρίς να είναι ήδη γνωστή η λύση του προβλήματος. Ο τρόπος συτός παρέχεται από την εξίσωση Hamilton - Jacobi.

Διαφορικές μορφές Pfaff. Κατά τη μελέτη της δυναμικής και ιδιαίτερα στη θεωρία των κανονικών μετασχηματισμών, οι διαφορικές μορφές παίζουν σημαντικό ρόλο. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι *διαφορικές μορφές Pfaff*. Γενικά μια μορφή Pfaff $\boldsymbol{\Omega}$ για m μεταβλητές $x_1, x_2, ..., x_m$ μπορεί να γραφεί ως

$$\boldsymbol{\Omega} = X_1(x)\, dx_1 + ... + X_m(x)\, dx_m \quad . \tag{5-22}$$

Εδώ σημειώνουμε την ομοιότητα με την έκφραση για το δυνατό έργο όπου οι δυνάμεις (X_l) είναι συναρτήσεις της θέσης. Αυτή η μορφή Pfaff

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

καταλήγει φυσικά σ' ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα σε μια τροχιά στο x-χώρο.

Ας ορίσουμε τώρα

$$c_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \quad . \tag{5-23}$$

Αν η μορφή Pfaff είναι τέλειο διαφορικό τότε όλοι οι c_{ij} είναι μηδέν. Συνήθως όμως η διαφορική μορφή δεν είναι τέλειο διαφορικό. Ας θεωρήσουμε τη σημαντική διαφορική μορφή της Εξ. (5-15). Εδώ βλέπουμε ότι το δεξιό μέλος αποτελείται από τη διαφορά δυο εκφράσεων Pfaff, η κάθε μία των οποίων έχει τη μορφή

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \, dq_i - H \, dt \quad ,$$

όπου οι $(2n+1)$ μεταβλητές είναι οι q_i, p_i και ο χρόνος t . Άρα $m=2n+1$ και κάθε έκφραση Pfaff μπορεί να γραφεί αναλυτικότερα ως

$$p_1 \, dq_1 + \ldots + p_n \, dq_n + 0 \cdot dp_1 + \ldots + 0 \cdot dp_n - H(q_i, p_i, t)dt \ .$$

Ένα άλλο χαρακτηριστικό της διαφορικής μορφής Pfaff είναι ότι, αν το m είναι περιττός αριθμός, υπάρχει ένα σχετιζόμενο σύστημα m-διαφορικών εξισώσεων γνωστό ως *το πρώτο σύστημα Pfaff*. Οι εξισώσεις αυτές έχουν τη μορφή

$$\sum_{i=1}^{m} c_{ij} \, dx_i = 0 \ , \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \ , \tag{5-24}$$

και λαμβάνονται μηδενίζοντας τους συντελεστές των δx_i στη διγραμμική συναλλοίωτη έκφραση για τη δεδομένη μορφή Pfaff (βλέπε παράγραφο 6-3). Εφαρμόζοντας την Εξ. (5-24) στη διαφορική μορφή, παίρνουμε

$$\begin{aligned} dq_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} dt &= 0 \\ - dq_j - \frac{\partial H}{\partial q_i} dt &= 0 \end{aligned} \tag{5-25}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

και

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_j}\,dq_j+\frac{\partial H}{\partial p_j}\,dp_j\right)=0 \quad . \tag{5-26}$$

Οι Εξ. (5-25) μπορούν να γραφούν με την οικεία μορφή

$$\left.\begin{aligned}\dot{q}_j &= \frac{\partial H}{\partial p_j}\\ \dot{p}_j &= -\frac{\partial H}{\partial q_j}\end{aligned}\right\}, \quad (j=1,2,...,n) \tag{5-27}$$

και αναγνωρίζονται ως οι κανονικές εξισώσεις Hamilton. Αν πάρουμε την ολική παράγωγο ως προς τον χρόνο της $H(q_i,\ p_i,\ t)$, παρατηρούμε ότι η Εξ. (5-26) ανάγεται στην

$$\dot{H}=\frac{\partial H}{\partial t} \quad . \tag{5-28}$$

Μπορεί κανείς να δει, με τη βοήθεια των Εξ. (5-11) και (5-12), ότι η Εξ. (5-28) δεν αποτελεί ένα ανεξάρτητο αποτέλεσμα, αφού μπορεί να παραχθεί από την Εξ. (5-27).

Ανακεφαλαιώνοντας, βρίσκουμε ότι το dS είναι η διαφορά δυο διαφορικών μορφών Pfaff , εκ των οποίων η μία είναι συνάρτηση των αρχικών και η άλλη των τελικών τιμών των p_i, q_i, t . Κάθε μορφή Pfaff είναι συνδεδεμένη μ' ένα σύνολο κανονικών εξισώσεων ως προς τις δοσμένες μεταβλητές. Η πρωτεύουσα συνάρτηση S παίζει το ρόλο του συνδετικού κρίκου μεταξύ δυο διαφορετικών συνόλων κανονικών μεταβλητών. Είναι μάλιστα η *γεννήτρια συνάρτηση* του μεταξύ τους κανονικού μετασχηματισμού.

Ας γενικεύσουμε τώρα τη διαφορική μορφή της Εξ. (5-15) χρησιμοποιώντας τις $2n$ παραμέτρους γ_1 , ..., γ_{2n} για τον καθορισμό των αρχικών συνθηκών αντί των q_o και p_o . Μ' άλλα λόγια θεωρούμε ένα μετασχηματισμό

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\left.\begin{aligned} q_{io} &= q_{io}(\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n}) \\ p_{io} &= p_{io}(\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n}) \end{aligned}\right\}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad , \tag{5-29}$$

όπου η Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού είναι,

$$\frac{\partial(q_{10}, \ldots, p_{no})}{\partial(\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n})} \neq 0 \quad . \tag{5-30}$$

Με απευθείας αντικατάσταση από την Εξ. (5-29), παίρνουμε

$$\sum_{i=1}^{n} p_{io}\, dq_{io} = \sum_{j=1}^{2n} \Gamma_j(\gamma_k) d\gamma_j \quad , \tag{5-31}$$

όπου

$$\Gamma_j(\gamma_k) = \sum_{i=1}^{n} p_{io} \frac{\partial q_{io}}{\partial \gamma_j} \quad . \tag{5-32}$$

Από το Θεώρημα Phaff(*) είναι φανερό ότι οι $2n$ παράμετροι γ_j μπορούν πάντα να αντικατασταθούν από n παραμέτρους α_i και n παραμέτρους β_i, όπου οι συναρτήσεις

$$\left.\begin{aligned} \alpha_i &= \alpha_i(\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n}) \\ \beta_i &= \beta_i(\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n}) \end{aligned}\right\}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{5-33}$$

εκλέγονται έτσι ώστε

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i\, d\alpha_i = \sum_{j=1}^{2n} \Gamma_j(\gamma_k) d\gamma_j \quad . \tag{5-34}$$

Με τον ίδιο τρόπο όπως και με την Εξ. (5-32), παίρνουμε

(*) A.R. Forsyth, Theory of Differential Equations, Part I (New York: Dover Publications, Inc., 1959), σελ. 112-14.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\Gamma_j(\gamma_k) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial \gamma_j} \ . \qquad (5\text{-}35)$$

Όπως μπορεί να αποδειχτεί οι α_i και β_i δεν είναι μοναδικές.

Από σύγκριση των Εξ. (5-31) και (5-34) έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} p_{io}\, dq_{io} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, d\alpha_i \ , \qquad (5\text{-}36)$$

όπου οι α_i και β_i είναι μια άλλη αναπάρασταση των αρχικών συνθηκών. Η Εξ. (5-36) υποδηλώνει ότι τα (q_o, p_o) και τα (α, β) συνδέονται μ' έναν *ομογενή κανονικό μετασχηματισμό* στη δεδομένη αρχική στιγμή t_o . Αυτό το είδος μετασχηματισμών θα συζητηθεί εκτενέστερα στο επόμενο κεφάλαιο.

5-2. ΕΞΙΣΩΣΗ HAMILTON-JACOBI

Ας θεωρήσουμε πάλι τη διαφορική μορφή

$$dS = \sum_{i=1}^{n} p_{i1}\, dq_{i1} - \sum_{i=1}^{n} p_{io}\, dq_{io} - H_1\, dt_1 + H_o\, dt_o \ , \qquad (5\text{-}37)$$

που σχετίζεται μ' έναν κανονικό μετασχηματισμό που συνδέει τα αρχικά και τελικά σημεία του δρόμου στο χώρο των φάσεων. Ας υποθέσουμε ότι οι αρχικές συνθήκες καθορίζονται από n παραμέτρους α_i και από n παραμέτρους β_i, όπου

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \alpha_i(q_{1o}, ..., q_{no}, p_{1o}, ..., p_{no}) \\ \beta_i &= \beta_i(q_{1o}, ..., q_{no}, p_{1o}, ..., p_{no}) \end{aligned} \quad , \ (i = 1, 2, ..., n) \qquad (5\text{-}38)$$

και με επί πλέον υπόθεση ότι ισχύει η Εξ. (5-36). Πρέπει να σημειωθεί ότι οι συναρτήσεις στην Εξ. (5-38) δεν είναι αυθαίρετες, αλλά εκφράζουν έναν ομογενή κανονικό μετασχηματισμό. Από τις Εξ. (5-36) και (5-37) παίρνουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$dS = \sum_{i=1}^{n} p_{i1}\, dq_{i1} - \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, d\alpha_i - H_1\, dt_1 + H_0\, dt_0 \quad , \qquad (5\text{-}39)$$

όπου τώρα θεωρούμε ότι η S είναι συνάρτηση των $(q_{i1}, \alpha_i, t_1, t_0)$. Άρα μπορούμε να γράψουμε

$$dS = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial q_{i1}}\, dq_{i1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}\, d\alpha_i + \frac{\partial S}{\partial t_1}\, dt_1 + \frac{\partial S}{\partial t_0}\, dt_0 \quad . \qquad (5\text{-}40)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η ορίζουσα

$$\left| \frac{\partial^2 S}{\partial q_{i1}\, \partial \alpha_j} \right| \neq 0 \qquad (5\text{-}41)$$

και άρα είναι δυνατόν να εκφράσουμε τις α_i σε όρους των $\partial S/\partial q_{i1}$, $(i = 1, 2, ..., n)$ που στη συνέχεια, σύμφωνα με την Εξ. (5-43), θα ταυτοποιηθούν με τις p_{i1}. Έτσι η ορίζουσα στην Εξ. (5-41) είναι στην πραγματικότητα η Ιακωβιανή $\partial(p_{11}, ..., p_{n1})/\partial(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ όπου οι p_{i1} θεωρούνται συναρτήσεις των (q_1, α, t_1, t_0). Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχουν *ταυτόσημες σχέσεις* της μορφής $\varphi(q_1, \alpha, t_1, t_0) = 0$, δηλαδή δεν υπάρχουν σχέσεις που να περιέχουν τις q_{i1} και τις α_i και να μη περιέχουν τις p_{i1}. Άρα οι q_{i1} και οι α_i είναι ανεξάρτητες μεταβλητές και έτσι μπορούμε να εξισώσουμε τους αντίστοιχους συντελεστές στις Εξ. (5-39) και (5-40) και να πάρουμε

$$-\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \qquad (5\text{-}42)$$

$$p_{i1} = \frac{\partial S}{\partial q_{i1}} \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \quad . \qquad (5\text{-}43)$$

Όπως και πριν, έχουμε

$$H_1 = -\frac{\partial S}{\partial t_i} \quad , \quad H_0 = \frac{\partial S}{\partial t_0} \quad . \qquad (5\text{-}44)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Η Εξ. (5-39) μπορεί να απλοποιηθεί θέτοντας αυθαίρετα την αρχή του χρόνου t_0 στο μηδέν με αποτέλεσμα και το $dt_0 = 0$. Μετράμε λοιπόν το χρόνο από αυτή τη χρονική στιγμή και δεν χρησιμοποιούμε πλέον το δείκτη 1 για να απλοποιήσουμε το συμβολισμό. Έτσι έχουμε

$$dS = \sum_{i=1}^{n} p_i \, dq_i - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \, d\alpha_i - H \, dt \quad . \tag{5-45}$$

Μια άλλη πιο γενική αντιμετώπιση είναι να θεωρήσουμε τις αντίστοιχες τροχιές στους (α, β) και (q, p) χώρους των φάσεων ως συναρτήσεις ενός κοινού χρόνου t. Οι μεταβλητές αυτές συνδέονται μ' ένα κανονικό μετασχηματισμό που μπορεί να καθοριστεί αν εξισώσουμε το ολικό διαφορικό dS με τη διαφορά δυο μορφών Pfaff, δηλαδή

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \, dq_i - H \, dt$$

και

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \, d\alpha_i - K \, dt \quad ,$$

όπου $K(\alpha,\beta,t)$ είναι η συνάρτηση Hamilton που προκύπτει αν θεωρήσουμε ως μεταβλητές τις α_i και β_i. Άρα παίρνουμε

$$dS = \sum_{i=1}^{n} p_i \, dq_i - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \, d\alpha_i - H \, dt + K \, dt \; . \tag{5-46}$$

Αν και θεωρούμε τις α_i και β_i ως μεταβλητές στη διατύπωση Hamilton, θα επιθυμούσαμε στο τέλος να είναι οι απαιτούμενες $2n$ σταθερές της κίνησης. Μ' άλλα λόγια, θα επιθυμούσαμε ολόκληρη η τροχιά στον (α,β) χώρο των φάσεων να αποτελείται από ένα μόνο σταθερό σημείο. Ένας τρόπος για να εξασφαλίσουμε αυτό το αποτέλεσμα είναι να θεωρήσουμε ότι το K είναι εκ ταυτότητος μηδέν. Τότε, σύμφωνα με τις κανονικές εξισώσεις, βρίσκουμε ότι κάθε $\dot{\alpha}_i$ και $\dot{\beta}_i$ είναι μηδέν οπότε πετυχαίνουμε σταθερές τιμές για τις α_i και β_i.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Αν λοιπόν θέσουμε το K ίσο με το μηδέν παίρνουμε για μια ακόμη φορά τη διαφορική μορφή της Εξ. (5-45).

Από την Εξ. (5-45) βλέπουμε ότι η πρωτεύουσα συνάρτηση είναι της μορφής $S(q_i, \alpha_i, t)$. Άρα το ολικό διαφορικό της μπορεί να γραφεί ως

$$dS = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial q_i}\, dq_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}\, d\alpha_i + \frac{\partial S}{\partial t}\, dt \quad . \tag{5-47}$$

Για μια ακόμη φορά υποθέτουμε μη μηδενική ορίζουσα, δηλαδή,

$$\left| \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \, \partial \alpha_j} \right| \neq 0 \tag{5-48}$$

και εξισώνοντας τους συντελεστές στις Εξ. (5-45) και (5-47), παίρνουμε τα ακόλουθα σημαντικά αποτέλεσματα:

$$-\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{5-49}$$

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{5-50}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H \quad . \tag{5-51}$$

Η Εξ. (5-49) μπορεί να λυθεί για τις q_i ως συναρτήσεις των (α_i, β_i, t) και αυτή είναι η λύση του προβλήματος Lagrange. Αυτό το γνωρίζουμε ότι είναι δυνατόν γιατί η Εξ. (5-48) στην ουσία εξασφαλίζει ότι η Ιακωβιανή $\partial(\beta_1, ..., \beta_n)/\partial(q_1, ..., q_n) \neq 0$. Αντικαθιστώντας τις λύσεις αυτές για τις q_i στην Εξ. (5-50) εκφράζουμε τις p_i ως συναρτήσεις των (α_i, β_i, t) ολοκληρώνοντας έτσι την επίλυση του προβλήματος Hamilton.

Η Χαμιλτωνιανή H θεωρείται συνήθως συνάρτηση των (q_i, p_i, t). Αν όμως αντικαταστήσουμε τις p_i από την Εξ. (5-50) μπορούμε να γράψουμε την Εξ. (5-51) με τη μορφή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) = 0 \quad . \tag{5-52}$$

Η παραπάνω πρώτης τάξης μερική διαφορική εξίσωση είναι γνωστή ως η *εξίσωση Hamilton - Jacobi* και έχει μια εξαρτημένη μεταβλητή την S και $(n+1)$ ανεξάρτητες μεταβλητές (q_i, t). Άρα μια πλήρης λύση της εξίσωσης αυτής περιέχει $(n+1)$ αυθαίρετες σταθερές. Οι σταθερές αυτές είναι τέτοιες ώστε η S και οι πρώτες της μερικές παράγωγοι ως προς τις q_i, να μπορούν να έχουν αυθαίρετες αρχικές τιμές, ώστε η αρχική τιμή της $\partial S/\partial t$ να προσδιορίζεται από την Εξ. (5-52).

Παρατηρούμε ότι η S δεν εμφανίζεται εκπεφρασμένα στην Εξ. (5-52), παρά μόνον οι μερικές της παράγωγοι. Άρα μια από τις α_i, έστω η α_{n+1}, είναι προσθετική σταθερά και μπορεί να αγνοηθεί αφού εξαφανίζεται μετά από διαφόριση. Οι υπόλοιπες μη προσθετικές σταθερές υπολογίζονται αντικαθιστώντας τις αρχικές συνθήκες (q_0, p_0) στην Εξ. (5-50) και λύνοντας ως προς τις $\alpha_1, \alpha_1, ..., \alpha_n$. Η λύση αυτή είναι δυνατή αν η Ιακωβιανή $\partial(p_1, ..., p_n)/\partial(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ είναι μη μηδενική, πράγμα που υποθέσαμε προηγουμένως στην Εξ. (5-48).

Συνοψίζοντας, μια πλήρης λύση της εξίσωσης Hamilton- Jacobi παράγει την πρωτεύουσα συνάρτηση $S(q_i, \alpha_i, t)$, από την οποία παίρνουμε το δρόμο του συστήματος στο χώρο των φάσεων με διαφορίσεις και αλγεβρικούς χειρισμούς. Αυτή η λύση του προβλήματος Hamilton προκύπτει χρησιμοποιώντας τις Εξ. (5-49) και (5-50) και είναι ισοδύναμη με την πλήρη ολοκλήρωση των κανονικών εξισώσεων.

Θεώρημα Jacobi. Κατά τη θεώρηση των λύσεων της μερικής διαφορικής εξίσωσης των Hamilton - Jacobi, υποθέσαμε ότι η πρωτεύουσα συνάρτηση S μπορεί να εκφρασθεί σε όρους των n συντεταγμένων q_{i0} ή των n παραμέτρων α_i, όπου από την Εξ. (5-38) βλέπουμε ότι ότι οι α_i μπορεί να είναι οποιεσδήποτε συναρτήσεις από μια μεγάλη ποικιλία συναρτήσεων των q_{i0} και p_{i0}. Το ερώτημα που προκύπτει είναι αν απαιτείται για την S κάποια λύση για να πάρουμε την πλήρη ολοκλήρωση των κανονικών εξισώσεων ή αν είναι ικανή κάθε πλήρης λύση της εξίσωσης Hamilton - Jacobi. Η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι καταφατική και δίνεται από το θεώρημα του Jacobi.

Αν $S(q_i, \alpha_i, t)$ είναι μια οποιαδήποτε πλήρης λύση της εξίσωσης Hamilton - Jacobi

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) = 0 \qquad (5\text{-}53)$$

και αν οι εξισώσεις

$$-\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \qquad (5\text{-}54)$$

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \quad , \qquad (5\text{-}55)$$

όπου οι β_i *είναι αυθαίρετες σταθερές, χρησιμοποιούνται για την εύρεση των* $q_i(\alpha_k, \beta_k, t)$ *και* $p_i(\alpha_k, \beta_k, t)$, *τότε οι εκφράσεις αυτές παρέχουν τη γενική λύση των κανονικών εξισώσεων των σχετιζομένων με τη Χαμιλτωνιανή* $H(q_i, p_i, t)$.

Για την απόδειξη παίρνουμε την πρώτη μερική παράγωγο της εξίσωσης Hamilton - Jacobi ως προς α_i και έχουμε:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial \alpha_i} = 0 \quad , \qquad (5\text{-}56)$$

όπου p_j θεωρείται συνάρτηση των (q_i, α_i, t), όπως και στην Εξ. (5-55).

Παίρνουμε τώρα την ολική παράγωγο ως προς το χρόνο της Εξ. (5-54) για την περίπτωση που ακολουθούμε ένα πραγματικό δρόμο-λύση στο χώρο των φάσεων. Σημειώνουμε ότι $\partial S / \partial \alpha_i$ είναι συνάρτηση των (q_i, α_i, t) και ότι οι α_i, β_i είναι σταθερές. Άρα έχουμε

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial \alpha_i} \dot{q}_j = 0 \quad . \qquad (5\text{-}57)$$

Η τάξη των μερικών διαφορίσεων είναι άνευ σημασίας από τη στιγμή που υποθέσαμε την ομαλότητα της συνάρτησης S. Χρησιμοποιώντας λοιπόν τις Εξ. (5-55), (5-56) και (5-57), βρίσκουμε ότι

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j}\right) \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial \alpha_i} = 0 \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \quad . \qquad (5\text{-}58)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Οι συντελεστές $\partial^2 S/\partial q_j \partial \alpha_j$ είναι τα στοιχεία μιας ορίζουσας που υποθέσαμε ότι είναι μη μηδενική στην Εξ. (5-48). Βλέπουμε λοιπόν ότι

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad , \quad (j = 1, 2, ..., n) \ , \tag{5-59}$$

που είναι η πρώτη των εξισώσεων Hamilton.

Ξεκινώντας πάλι από την εξίσωση Hamilton-Jacobi, διαφορίζοντας μερικώς ως προς q_j και θεωρώνας τις p_i ως συναρτήσεις των (q_i, α_i, t), σύμφωνα με την Εξ. (5-55), έχουμε

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_i}{\partial q_j} + \frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 \ . \tag{5-60}$$

Στη συνέχεια παίρνουμε την ολική παράγωγο ως προς το χρόνο της Εξ. (5-55) και σημειώνοντας ότι κάθε α_i είναι σταθερή κατά μήκος ενός δρόμου- λύσης, παίρνουμε

$$\dot{p}_j - \frac{\partial^2 S}{\partial t \, \partial q_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_i = 0 \ . \tag{5-61}$$

Προσθέτοντας τις Εξ. (5-60) και (5-61), και χρησιμοποιώντας τις Εξ. (5-55) και (5-59), βρίσκουμε

$$\dot{p}_j = - \frac{\partial H}{\partial q_j} \quad , \quad (j = 1, 2, ..., n) \quad , \tag{5-62}$$

που είναι η δεύτερη κανονική εξίσωση. Έτσι βλέπουμε ότι *κάθε πλήρης λύση*, της εξίσωσης Hamilton-Jacobi οδηγεί σε μια λύση του προβλήματος του Hamilton. Αυτή η λύση έχει το σωστό αριθμό αυθαιρέτων σταθερών και βέβαια υπακούει στις κανονικές εξισώσεις.

Συντηρητικά συστήματα και αφανείς συντεταγμένες. Ας θεωρήσουμε τώρα ένα *συντηρητικό ολόνομο σύστημα* του οποίου η διάταξη περιγράφεται σε όρους n ανεξάρτητων q_i . Η συνάρτηση Hamilton του συστήματος δεν είναι εκπεφρασμένη συνάρτηση του

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΠΑΤΡΩΝ

χρόνου και στην πραγματικότητα είναι μια σταθερά της κίνησης. Έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$H(q_i, p_i) = \alpha_n = h \quad , \tag{5-63}$$

όπου h είναι η τιμή του γνωστού ολοκληρώματος Jacobi ή του ολοκληρώματος της ενέργειας που αυθαίρετα ταυτίζουμε με α_n.

Μια κατάλληλη μορφή για την πρωτεύουσα συνάρτηση αυτού του συστήματος βρίσκεται χρησιμοποιώντας τις Εξ. (5-53), (5-63) καί έχουμε

$$\frac{\partial S}{\partial t} = - H = - \alpha_n \quad . \tag{5-64}$$

Η σχέση αυτή υποδεικνύει ότι η S μπορεί να ληφθεί ως γραμμική συνάρτηση του χρόνου, δηλαδή,

$$S(q_i, \alpha_j, t) = - \alpha_n t + W(q_i, \alpha_j) \quad , \tag{5-65}$$

όπου έχουμε παραλείψει μια αυθαίρετη προσθετική σταθερά. Η συνάρτηση $W(q_1, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ δεν περιέχει εκπεφρασμένα το χρόνο και είναι γνωστή ως η *χαρακτηρηστική συνάρτηση*. Πρέπει να σημειωθεί ότι

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{5-66}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_n} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_n} - t \tag{5-67}$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i} \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad . \tag{5-68}$$

Από τις Εξ. (5-64) και (5-68) βλέπουμε ότι η εξίσωση Hamilton - Jacobi ανάγεται στην

$$H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = \alpha_n \tag{5-69}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Η Εξ. (5-69) είναι η *τροποποιημένη εξίσωση Hamilton - Jacobi*. Μια πλήρης λύση της περιέχει (n-1) μη προσθετικές α_i, ($\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$), συν την ενεργειακή σταθερά α_n. Οι α_i είναι αυθαίρετες με την έννοια ότι οι τιμές τους καθορίζονται από τις αυθαίρετες αρχικές τιμές των $\partial W/\partial q_i$, δηλαδή, των γενικευμένων ορμών της δεδομένης αρχικής διάταξης.

Συγκρίνοντας τις Εξ. (5-66) - (5-68) με τις Εξ. (5-54) και (5-55) βλέπουμε ότι η λύση του προβλήματος Hamilton μπορεί να ληφθεί από

$$-\beta_i = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{5-70}$$

$$t - \beta_n = \frac{\partial W}{\partial \alpha_n} \tag{5-71}$$

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad , \tag{5-72}$$

όπου β_n είναι η αρχική χρονική στιγμή t_o. Επειδή η W δεν είναι εκπεφρασμένη συνάρτηση του χρόνου, βλέπουμε ότι η Εξ. (5-70) δίνει το δρόμο του συστήματος στο μορφικό χώρο χωρίς αναφορά στο χρόνο. Η Εξ. (5-71) στη συνέχεια δίνει τη σχέση της θέσης κατά μήκος του δρόμου με το χρόνο.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα σύστημα που να έχει *αφανείς συντεταγμένες* $q_1, q_2, \ldots, q_k$. Αρχικά θα υποθέσουμε ότι το σύστημα είναι *μη-συντηρητικό*. Γνωρίζουμε ότι οι p_i που αντιστοιχούν στις αφανείς q_i είναι σταθερές και άρα έχουμε:

$$p_i = \alpha_i \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, k) \quad . \tag{5-73}$$

Από την Εξ. (5-55) βλέπουμε ότι μπορούμε να θεωρήσουμε πρωτεύουσα συνάρτηση της μορφής

$$S(q_i, \alpha_j, t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i + S'(q_{k+1}, \ldots, q_n, \alpha_1, \ , \alpha_n, t) \quad . \tag{5-74}$$

Σ' αυτή την περίπτωση η εξίσωση Hamilton-Jacobi οδηγεί στην

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\frac{\partial S'}{\partial t} + H\left(q_{k+1}, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \frac{\partial S'}{\partial q_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial S'}{\partial q_n}, t\right) = 0 \quad . \quad (5\text{-}75)$$

Η πλήρης λύση αυτής της μερικής διαφορικής εξίσωσης περιέχει $(n\text{-}k)$ μη προσθετικές σταθερές, επιπλέον των σταθερών ορμών $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Εφόσον η S' είναι γνωστή, η λύση για την κίνηση του συστήματος λαμβάνεται από

$$-\beta_i = q_i + \frac{\partial S'}{\partial \alpha_i} \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, k) \quad (5\text{-}76)$$

$$-\beta_i = \frac{\partial S'}{\partial \alpha_i} \quad , \quad (i = k+1,, \ldots, n) \quad (5\text{-}77)$$

$$p_i = \alpha_i \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, k) \quad (5\text{-}78)$$

$$p_i = \frac{\partial S'}{\partial q_i} \quad , \quad (i = k+1,, \ldots, n) \quad , \quad (5\text{-}79)$$

όπου πρέπει να σημειωθεί

$$\beta_i = -q_{io} \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (5\text{-}80)$$

δηλαδή, κάθε β_i που αντιστοιχεί σε μια αφανή συντεταγμένη είναι ίση με την αρχική τιμή της συντεταγμένης αυτής αλλά με αλλαγμένο πρόσημο.

Τέλος, ας θεωρήσουμε ένα σύστημα που έχει *αφανείς συντεταγμένες* $q_1, q_2, \ldots, q_n$ και είναι *συντηρητικό*. Συνδυάζοντας τα προηγούμενα αποτελέσματα, βλέπουμε ότι η πρωτεύουσα συνάρτηση έχει τη μορφή

$$S(q_i, \alpha_j, t) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i q_i - \alpha_n t + W'(q_{k+1}, \ldots, q_n, \alpha_1, \ , \alpha_n) \quad (5\text{-}81)$$

και η τροποποιημένη εξίσωση Hamilton-Jacobi γίνεται

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$H\left(q_{k+1}, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \frac{\partial W'}{\partial q_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial W'}{\partial q_n}, t\right) = \alpha_n \quad . \tag{5-82}$$

Η πλήρης λύση για W' σ' αυτή την περίπτωση περιέχει $(n\text{-}k\text{-}1)$ μη προσθετικές σταθερές $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_{n-1}$ συν βέβαια, την ενεργειακή σταθερά α_n και τις σταθερές ορμές $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Η κίνηση του συστήματος δίνεται από

$$-\beta_i = q_i + \frac{\partial W'}{\partial \alpha_i} \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, k) \tag{5-83}$$

$$-\beta_i = \frac{\partial W'}{\partial \alpha_i} \quad , \quad (i = k+1,, \ldots, n-1) \tag{5-84}$$

$$t - \beta_n = \frac{\partial W'}{\partial \alpha_n} \tag{5-85}$$

$$p_i = \alpha_i \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, k) \tag{5-86}$$

$$p_i = \frac{\partial W'}{\partial q_i} \quad , \quad (i = k+1,, \ldots, n) \quad . \tag{5-87}$$

Παράδειγμα 5-1. Ως μια πρώτη επίδειξη της μεθόδου Hamilton-Jacobi, ας την εφαρμόσουμε σ' ένα απλό σύστημα μάζας - ελατηρίου (Σχ. 5-1). Το σύστημα αυτό είναι ένα φυσικό σύστημα που έχει κινητική και δυναμική ενέργεια που δίνονται από τις

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 , \qquad V = \frac{1}{2} k x^2 \quad . \tag{5-88}$$

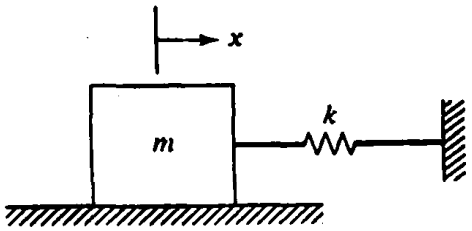
Η ορμή είναι

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \tag{5-89}$$

καί βρίσκουμε ότι η συνάρτηση Hamilton είναι ίση με την ολική ενέργεια, δηλαδή,

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 \quad . \tag{5-90}$$



Σχ. 5-1. Σύστημα μάζας-ελατηρίου.

Αφού το σύστημα είναι συντηρητικό, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κατευθείαν την τροποποιημένη εξίσωση Hamilton-Jacobi (5-69) που σ' αυτή την περίπτωση είναι

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \alpha \quad , \tag{5-91}$$

όπου α είναι η ενεργειακή σταθερά . Άρα έχουμε

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \sqrt{2m(\alpha - \frac{1}{2}kx^2)} \tag{5-92}$$

ή

$$W(x, \alpha) = m\omega \int_{x_0}^{x} \sqrt{a^2 - \xi^2}\, d\xi \quad , \tag{5-93}$$

όπου

$$a = \sqrt{2\alpha/m\omega^2} \quad , \qquad \omega = \sqrt{k/m} \quad . \tag{5-94}$$

Γενικά, το κάτω όριο της ολοκλήρωσης x_0 , εκλέγεται να είναι είτε (1) μια κατάλληλη σταθερά (όχι συνάρτηση των α_i) είτε (2) μια απλή ρίζα της $f(\xi)$, όπου $\sqrt{f(\xi)}$ είναι η υπο ολοκλήρωση έκφραση. Η επιλογή αυτή γίνεται για να απλοποιηθεί η παραγώγιση του ολοκληρώματος και φυσικά αντικατοπτρίζεται στη φυσική σημασία που αποδίδεται στις διάφορες β_i .

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ας συνεχίσουμε τώρα εφαρμόζοντας την Εξ. (5-71) στη χαρακτηριστική συνάρτηση που δίνεται από την Εξ. (5-93). Διαφορίζοντας ως προς α, έχουμε

$$t - \beta = \frac{1}{\omega} \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} = \frac{1}{\omega} \left[\cos^{-1} \frac{x_0}{a} - \cos^{-1} \frac{x}{a} \right], \qquad (5\text{-}95)$$

που δίνει

$$x = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}} \cos \left[\omega (t - t_0) - \varphi \right] \quad , \qquad (5\text{-}96)$$

όπου

$$\cos \varphi = \frac{x_0}{a} = \sqrt{\frac{m\omega^2}{2\alpha}}\, x_0 \qquad (5\text{-}97)$$

και $\beta = t_0$. Αν γράψουμε την ολική ενέργεια α συναρτήσει των αρχικών συνθηκών, $x(t_0) = x_0$ και $\dot{x}(t_0) = v_0$, έχουμε

$$\alpha = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{m\omega^2}{2} \left(x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} \right) \quad . \qquad (5\text{-}98)$$

Επίσης

$$\sin \varphi = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - x_0^2} = \frac{v_0}{a\omega} \qquad (5\text{-}99)$$

και μπορούμε να γράψουμε την Εξ. (5-96) με τη μορφή

$$x = x_0 \cos \omega (t - t_0) + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega (t - t_0) \quad , \qquad (5\text{-}100)$$

που είναι ταυτόσημη μ' αυτήν που λαμβάνεται απο την απευθείας επίλυση της διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει το σύστημα μάζας-ελατηρίου. Το πλάτος της ταλάντωσης του x είναι

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad . \qquad (5\text{-}101)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Κατά τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων που περιέχουν $\sqrt{f(\xi)}$, όπως στην Εξ. (5-95), προκύπτει το ερώτημα του προσήμου της τετραγωνικής ρίζας. Συχνά συμβαίνει η μεταβλητή ολοκλήρωσης ξ, να ταλαντώνεται μεταξύ δυο ριζών της $f(\xi)$, υποδηλώνοντας μια επαναληπτική κίνηση. Από την Εξ. (5-95) βλέπουμε για παράδειγμα, ότι το πρόσημο της $\sqrt{f(\xi)}$ πρέπει ν' αλλάζει σε κάθε σημείο αναστροφής της επανάληψης, δηλαδή σε κάθε σημείο όπου η κίνηση στο ξ αντιστρέφεται. Στο παρόν παράδειγμα η $\sqrt{f(\xi)}$ είναι θετική για θετικά $d\xi$ και αρνητική για αρνητικά $d\xi$. Πρέπει να σημειωθεί ότι τα σημεία αναστροφής συμπίπτουν με τις ρίζες της $f(\xi)$ και συνεπώς η υπο ολοκλήρωση ποσότητα απειρίζεται στα σημεία αυτά και έτσι προκύπτουν γενικευμένα ολοκληρώματα. Για τη συνήθη περίπτωση των απλών ριζών το ολοκλήρωμα αυτό συγκλίνει πράγμα που σημαίνει ότι η περίοδος της επαναληπτικής κίνησης είναι πεπερασμένη.

Σ' αυτό το παράδειγμα έχει βρεθεί η λύση για την κίνηση του συστήματος μάζας-ελατηρίου χωρίς να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα της Εξ. (5-93) που θα έδινε μια ρητή έκφραση για την $W(x, \alpha)$. Υπολογίζοντας τώρα αυτό το ολοκλήρωμα και αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα στην Εξ. (5-65), παίρνουμε την πρωτεύουσα συνάρτηση. Βρίσκουμε ότι

$$S = -\alpha t + \frac{m\omega}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} - a^2 \cos^{-1}\frac{x}{a} - x_0\sqrt{a^2 - x_0^2} + a^2\cos^{-1}\frac{x_0}{a}\right). \quad (5\text{-}102)$$

Εδώ, για απλότητα έχουμε εκφράσει την W ως συνάρτηση του a, που ισούται με $\sqrt{2\alpha/m\omega^2}$.

Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι αυτή η έκφραση για την πρωτεύουσα συνάρτηση ικανοποιεί την εξίσωση Hamilton-Jacobi. Εξάλλου αυτή οδηγεί στη σωστή λύση για την κίνηση του συστήματος με εφαρμογή της Εξ. (5-54). Έτσι έχουμε

$$-\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = -t + \frac{\partial W}{\partial a}\frac{da}{d\alpha} = -t + \frac{1}{\omega}\left(\cos^{-1}\frac{x_0}{a} - \cos^{-1}\frac{x}{a}\right) \quad (5\text{-}103)$$

ή

$$x = a\cos[\omega(t - t_0) - \varphi] \ , \qquad (5\text{-}104)$$

όπου έχουμε αντικαταστήσει το t_0 για το β. Το αποτέλεσμα αυτό είναι το ίδιο μ' αυτό που βρήκαμε προηγουμένως στην Εξ. (5-96).

Τέλος, ας υπολογίσουμε την πρωτεύουσα συνάρτηση $S(x, x_0, t, t_0)$ υπολογίζοντας το κανονικό ολοκλήρωμα με τη βοήθεια της γνωστής λύσης που δίνεται στην Εξ. (5-100). Έχουμε

$$S = \int_{t_0}^{t} (T - V)\, dt = \frac{m}{2} \int_{t_0}^{t} (\dot{x}^2 - \omega^2 x^2)\, dt \ . \qquad (5\text{-}105)$$

Ολοκληρώνοντας και απλοποιώντας, παίρνουμε

$$S = -\frac{m\omega}{2} \sin\omega(t - t_0)\left[\left(x_0^2 - \frac{v_0^2}{\omega^2}\right)\cos\omega(t - t_0) + \frac{2x_0 v_0}{\omega}\sin\omega(t - t_0)\right] . \qquad (5\text{-}106)$$

Για να εκφράσουμε την S σε όρους των επιθυμητών ποσοτήτων, λαμβάνουμε υπόψη από την Εξ. (5-100) ότι

$$\frac{v_0}{\omega} = \frac{x - x_0\cos\omega(t - t_0)}{\sin\omega(t - t_0)} \ . \qquad (5\text{-}107)$$

Στη συνέχεια αντικαθιστώντας την Εξ. (5-107) στην Εξ. (5-106), παίρνουμε

$$S(x, x_0, t, t_0) = \frac{1}{2} m\omega (x^2 + x_0^2)\cot\omega(t - t_0) - m\omega x x_0 \csc\omega(t - t_0). \qquad (5\text{-}108)$$

Συγκρίνοντας αυτό το αποτέλεσμα με την πρωτεύουσα συνάρτηση της Εξ. (5-102), βλέπουμε ότι υπάρχει μια σημαντική μορφολογική διαφορά. Ειδικότερα, η συνάρτηση S δεν περιέχει γραμμικούς όρους του t αν και το υπό μελέτη σύστημα είναι συντηρητικό. Εξάλλου αυτό εκφράζει μια άλλη πλήρη λύση της εξίσωσης Hamilton-Jacobi και σύμφωνα με το θεώρημα του Jacobi επιτρέπει την εύρεση της κίνησης του συστήματος με μια διαδικασία παραγωγίσεων και αλγεβρικών χειρισμών.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Για να διασαφηνίσουμε αυτό το σημείο, ας θεωρήσουμε ότι το x_0 παίζει το ρόλο του α, δηλαδή ότι το x_0 είναι μια αυθαίρετη σταθερά που σ' αυτή την περίπτωση περιγράφει τη θέση του συστήματος σε μια προκαθορισμένη χρονική στιγμή t_0. Χρησιμοποιώντας την Εξ. (5-54), παίρνουμε

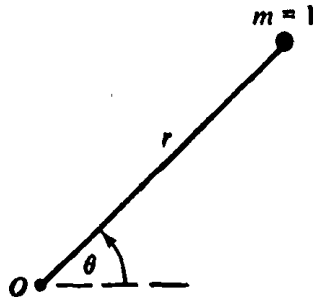
$$-\beta = \frac{\partial S}{\partial x_0} = m\omega x_0 \cot \omega (t - t_0) - m\omega x \csc \omega (t - t_0) \quad . \qquad (5\text{-}109)$$

Λύνοντας ως προς x, βρίσκουμε ότι

$$x = x_0 \cos \omega (t - t_0) + \frac{\beta}{m\omega} \sin \omega (t - t_0) \quad . \qquad (5\text{-}110)$$

Σύμφωνα με τη θεωρία, η β είναι ίση με την αρχική ορμή mv_0. Άρα η Εξ. (5-110) είναι ταυτόσημη με το προηγούμενο αποτέλεσμα που δίνεται από την Εξ. (5-100).

Παράδειγμα 5-2. Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο Hamilton-Jacobi για την ανάλυση του προβλήματος του Kepler (βλέπε παραδείγματα 2-7, 4-5 και 4-7). Υποθέτουμε ότι ένα σωμάτιο μοναδιαίας μάζας έλκεται από μια βαρυτική δύναμη ανάλογα με το αντίστροφο του τετραγώνου της απόστασης από ένα σταθερό σημείο O (Σχ. 5-2). Η θέση του σωματίου καθορίζεται σε όρους των πολικών συντεταγμένων (r, θ) του επιπέδου της τροχιάς.



Σχ. 5-2. Το πρόβλημα Kepler.

Η κινητική και η δυναμική ενέργεια είναι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$T=\frac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2), \qquad V=-\frac{\mu}{r}\ , \tag{5-111}$$

όπου μ είναι ο συντελεστής βαρύτητας. Η συνάρτηση Lagrange είναι

$$L=\frac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\frac{\mu}{r} \tag{5-112}$$

και βρίσκουμε ότι οι γενικευμένες ορμές δίδονται από τις

$$p_r=\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}=\dot{r}\ , \qquad p_\theta=\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}=r^2\dot{\theta}\ . \tag{5-113}$$

Θεωρούμε ένα φυσικό σύστημα, οπότε η συνάρτηση Hamilton είναι ίση με την ολική ενέργεια, δηλαδή

$$H=\frac{1}{2}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}\right)-\frac{\mu}{r}=\alpha_t\ . \tag{5-114}$$

Όπου α_t εκφράζει τη σταθερή τιμή της ολικής ενέργειας.

Η συντεταγμένη θ δεν εμφανίζεται στην H και ως εκ τούτου είναι αφανής, υποδεικνύοντας έτσι ότι η συζυγής ορμή p_θ έχει σταθερή τιμή που θα την συμβολίσουμε με α_θ. Σύμφωνα με την Εξ. (5-81), βλέπουμε ότι η πρωτεύουσα συνάρτηση μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$S=-\alpha_t t+\alpha_\theta\theta+W'(r,\alpha_t,\alpha_\theta)\ . \tag{5-115}$$

Η τροποποιημένη εξίσωση Hamilton-Jacobi είναι

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W'}{\partial r}\right)^2+\frac{\alpha_\theta^2}{2r^2}-\frac{\mu}{r}=\alpha_t \tag{5-116}$$

και παίρνουμε

$$\frac{\partial W'}{\partial r} = \sqrt{2\alpha_t + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}} \quad , \tag{5-117}$$

που οδηγεί στην

$$W' = \int_{r_0}^{r} \sqrt{2\alpha_t + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}}\, dr \tag{5-118}$$

όπου r_0 είναι η τιμή της ακτινικής απόστασης r την αρχική χρονική στιγμή t_0.

Διαφορίζοντας υπό το ολοκλήρωμα ως προς α_t, σύμφωνα με την Εξ. (5-85), παίρνουμε

$$t - t_0 = \frac{\partial W'}{\partial \alpha_t} = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{2\alpha_t + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}}} \quad . \tag{5-119}$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι η τετραγωνική ρίζα είναι ίση με $\dot{r}$, όπως φαίνεται από την εξίσωση ενέργειας (5-114).

Με παρόμοιο τρόπο, χρησιμοποιούμε την Εξ. (5-83) και παίρνουμε

$$\theta - \theta_0 = - \frac{\partial W'}{\partial \alpha_\theta} = \int_{r_0}^{r} \frac{\alpha_\theta\, dr}{r\sqrt{2\alpha_t r^2 + 2\mu r - \alpha_\theta^2}} \quad . \tag{5-120}$$

Συγκρίνοντας τα δυο τελευταία ολοκληρώματα, βλέπουμε ότι το πρώτο δίνει το t ως συνάρτηση του r, και το δεύτερο δίνει το θ ως συνάρτηση του r, δηλαδή δίνει το *σχήμα* της τροχιάς. Είναι βολικό να μετράμε το θ από τη θέση του ελαχίστου r. Τότε $\theta_0 = 0$ για την περίπτωση όπου εκλέγουμε $r_0 = r_{min}$, και το ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογισθεί με τον ίδιο τρόπο όπως και στο παράδειγμα 4-7, δίνοντας

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\alpha_\theta^2 - \mu r}{r\sqrt{\mu^2 + 2\alpha_t \alpha_\theta^2}}\right) . \qquad (5\text{-}121)$$

Τελικά, λύνοντας ως προς r, παίρνουμε

$$r = \frac{\alpha_\theta^2 / \mu}{1 + \sqrt{1 + 2\alpha_t \alpha_\theta^2 / \mu^2} \cos\theta} \qquad (5\text{-}122)$$

η οποία αναγνωρίζεται ως η εξίσωση ενός κωνικού τμήματος με εκκεντρότητα

$$e = \sqrt{1 + 2\alpha_t \alpha_\theta^2 / \mu^2} . \qquad (5\text{-}123)$$

5-3. ΔΙΑΧΩΡΙΣΙΜΟΤΗΤΑ

Η ιδέα της διαχωρισιμότητας είναι συνδεδεμένη με την επίλυση των μερικών διαφορικών εξισώσεων με τη μέθοδο της αναγωγής σε τετραγωνισμούς, δηλαδή, εκφράζοντας τη λύση σε όρους ολοκληρωμάτων που περιλαμβάνουν το καθένα μια μόνο μεταβλητή. Στα πλαίσια της μερικής διαφορικής εξίσωσης των Hamilton-Jacobi, η δυνατότητα να έχουμε χωριζόμενες μεταβλητές, εξαρτάται εν μέρει από τη φύση του φυσικού συστήματος και εν μέρει από τις χρησιμοποιούμενες συντεταγμένες για τη μαθηματική του περιγραφή. Είναι φυσικό να θέλουμε να γνωρίζουμε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες αυτός ο χωρισμός είναι δυνατός. Δυστυχώς, η απάντηση στο βασικό ερώτημα ποιό είναι το πλέον διαχωρίσιμο σύστημα δεν είναι γνωστή. Παρόλα αυτά κάποια πρόοδος μπορεί να γίνει, αν περιορίσουμε την αναζήτηση σε κάποια συγκεκριμένη κλάση συστημάτων. Ειδικότερα, θα θεωρήσουμε, στη συζήτηση που ακολουθεί μόνο *ορθογώνια συστήματα*, δηλαδή συντηρητικά ολόνομα συστήματα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

των οποίων η συνάρτηση της κινητικής ενέργειας περιέχει μόνο τετραγωνικούς όρους ως προς $\dot{q}_i$ (ή p_i) και όχι γινόμενα αυτών των μεταβλητών. Μ' άλλα λόγια δεν υπάρχουν συζευγμένοι αδρανειακοί όροι.

Θεωρούμε ότι ο όρος *διαχωρισιμότητα*, έχει ως συνέπεια την ύπαρξη μιας χαρακτηριστικής συνάρτησης για το σύστημα που έχει τη μορφή

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i(q_i) \ ; \tag{5-124}$$

δηλαδή αποτελείται από το άθροισμα n συναρτήσεων όπου η κάθε συνάρτηση W_i περιέχει μόνο μια q_i. Επιπλέον υποθέτουμε ότι η W είναι ένα πλήρες ολοκλήρωμα της τροποποιημένης εξίσωσης των Hamilton-Jacobi και έτσι περιέχει n μη προσθετικές σταθερές (περιλαμβάνοντας και την ενεργειακή σταθερά), που συνήθως συμβολίζονται με α_i. Ένα ιδιαίτερα απλό παράδειγμα διαχωρίσιμου συστήματος συμβαίνει στην περίπτωση όπου όλες οι συντεταγμένες, πλην μιας, είναι αφανείς.

Σύστημα Liouville. Σύμφωνα με την προηγούμενη συζήτηση της παραγράφου 2-3, ας ορίσουμε ένα *σύστημα Liouville* που να είναι ορθογώνιο και να έχει κινητική και δυναμική ενέργεια της μορφής,

$$T = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(q_i)\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\dot{q}_i^2}{R_i(q_i)}\right) = \frac{R_1 p_1^2 + \ldots + R_n p_n^2}{2(f_1 + \ldots + f_n)} \tag{5-125}$$

$$V = \frac{v_1(q_1) + \ldots + v_n(q_n)}{f_1(q_1) + \ldots + f_n(q_n)} \ , \tag{5-126}$$

όπου f_i, R_i, και v_i είναι συναρτήσεις των q_i. Σημειώνουμε ότι R_i είναι ταυτόσημα με M_i^{-1} της Εξ. (2-201). Ακόμη δεχόμαστε ότι $\sum_i f_i(q_i) > 0$ και $R_i(q_i) > 0$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Αυτές οι συνθήκες Liouville είναι ικανές να εξασφαλίσουν διαχωρισιμότητα του συγκεκριμένου συστήματος και κατά συνέπεια είναι δυνατή η αναγωγή σε τετραγωνισμούς. Ως απόδειξη μπορούμε να δείξουμε ότι υπάρχει η πλήρης λύση $W(q)$ της τροποποιημένης εξίσωσης Hamilton-Jacobi και η λύση αυτή έχει τη διαχωρίσιμη μορφή που δίνεται από την Εξ. (5-124).

Η τροποποιημένη εξίσωση Hamilton-Jacobi για το σύστημα αυτό μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2}R_i\left(\frac{\partial W}{\partial q_i}\right)^2+v_i\right]=h\sum_{i=1}^{n}f_i \quad . \tag{5-127}$$

Τώρα ας αντικαταστήσουμε την W από την Εξ. (5-124). Θα βρούμε ότι κάθε συνάρτηση $W_i(q_i)$ μπορεί να ληφθεί με ολοκληρωτική μορφή που οδηγεί σε πλήρη λύση. Πρώτα ας ταξινομήσουμε τους όρους ως προς κάθε συντεταγμένη q_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ και ας χρησιμοποιήσουμε τις α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ως σταθερές διαχωρισμού. Θέτοντας το κάθε σύνολο όρων ίσο με τον αντίστοιχο α_{ij} έχουμε

$$\frac{1}{2}R_i\left(\frac{\partial W_i}{\partial q_i}\right)^2+v_i-hf_i=\alpha_i \quad , \quad (i=1, 2, \ldots, n) \quad , \tag{5-128}$$

όπου

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=0 \quad . \tag{5-129}$$

Η Εξ. (5-128) μπορεί να ολοκληρωθεί και οι W_i που θα προκύψουν, σύμφωνα με την Εξ. (5-124), δίνουν

$$W=\sum_{i=1}^{n}\int\frac{1}{R_i}\sqrt{\varphi_i(q_i)}\,dq_i \quad , \tag{5-130}$$

όπου

$$\varphi_i(q_i)=2R_i[hf_i(q_i)-v_i(q_i)+\alpha_i] \quad , \quad (i=1, 2, \ldots, n) \quad . \tag{5-131}$$

Η λύση αυτή περιέχει στην πραγματικότητα $(n+1)$ σταθερές, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, h$ αλλά η Εξ. (5-129) εκφράζει μια σχέση μεταξύ των α_i. Ως εκ τούτου μια α_i μπορεί να απαλειφεί οπότε έχουμε τις απαιτούμενες n

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ανεξάρτητες σταθερές. Άρα βλέπουμε ότι η έκφραση για την W που δίνεται από την Εξ. (5-130) είναι μια πλήρης λύση της τροποποιημένης εξίσωσης Hamilton-Jacobi, πράγμα που επιβεβαιώνει ότι οι συνθήκες Liouville είναι ικανές για τη διαχωρισιμότητα ενός ορθογωνίου συστήματος.

Πηγαίνουμε τώρα στη λύση της κίνησης του συστήματος, θεωρώντας ότι έχουμε βρει τη χαρακτηριστική συνάρτηση $W(q)$. Πρώτα ας απαλείψουμε αυθαίρετα την α_n θεωρώντας την ως συνάρτηση των υπολοίπων α_i, δηλαδή

$$\alpha_n = -\ (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{n-1}) \quad . \tag{5-132}$$

Τότε έχουμε

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial W_i}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial W_n}{\partial \alpha_n}\frac{\partial \alpha_n}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial W_i}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial W_n}{\partial \alpha_n} \quad , \ (i = 1, 2, ..., n-1) \tag{5-133}$$

και με τη βοήθεια της Εξ. (5-70), παίρνουμε

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = \int \frac{dq_i}{\sqrt{\varphi_i(q_i)}} - \int \frac{dq_n}{\sqrt{\varphi_n(q_n)}} = -\beta_i \ , \ (i = 1, 2, ..., n-1) \ . \tag{5-134}$$

Επίσης, από την Εξ. (5-71) βρίσκουμε ότι

$$\frac{\partial W}{\partial h} = \sum_{i=1}^{n} \int \frac{f_i\, dq_i}{\sqrt{\varphi_i(q_i)}} = t - \beta_n \ . \tag{5-135}$$

Η λύση για το πρόβλημα Lagrange δίνεται από τις Εξ. (5-134) και (5-135) και αντιπροσωπεύει την τροχιά του συστήματος στον επεκτεταμένο μορφικό χώρο. Η τροχιά στο χώρο των φάσεων βρίσκεται χρησιμοποιώντας τις επιπρόσθετες εξισώσεις

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} = \frac{1}{R_i}\sqrt{\varphi_i(q_i)} \ , \ (i = 1, 2, ..., n) \ . \tag{5-136}$$

Επειδή η β_i στην Εξ. (5-134) είναι μια σταθερά κατά μήκος κάθε πραγματικού δρόμου του συστήματος, βλέπουμε ότι οι αυξήσεις στις

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τιμές κάθε δυο εκ των δοθέντων ολοκληρωμάτων πρέπει να είναι ίσες για κάθε χρονικό διάστημα. Άρα παίρνουμε

$$\frac{dq_1}{\sqrt{\varphi_1(q_1)}} = \frac{dq_2}{\sqrt{\varphi_2(q_2)}} = \ldots = \frac{dq_n}{\sqrt{\varphi_n(q_n)}} = d\tau \quad , \qquad (5\text{-}137)$$

που συμφωνεί με την Εξ. (2-203).

Θεώρημα Stäckel. Έχουμε αποδείξει ότι οι συνθήκες Liouville είναι ικανές για διαχωρισιμότητα ενός ορθογωνίου συστήματος και άρα για την αναγωγή του σε τετραγωνισμούς. Το ερώτημα που τίθεται είναι αν οι συνθήκες αυτές είναι και αναγκαίες. Το συμπέρασμα είναι πως όχι, εκτός από την ειδική περίπτωση που $n = 2$. Έτσι ας παρουσιάσουμε τώρα ένα πιο γενικό σύνολο συνθηκών.

Ας θεωρήσουμε πάλι ένα ορθογώνιο σύστημα και ας υποθέσουμε ότι η κινητική του ενέργεια δίνεται από την

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{q}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i p_i^2 \quad , \qquad (5\text{-}138)$$

όπου $c_i(q_1, q_2, \ldots, q_n) > 0$.

Το θεώρημα Stäckel βεβαιώνει ότι το σύστημα αυτό είναι διαχωρίσιμο αν και μόνον αν ικανοποιούνται οι ακόλουθες δυο συνθήκες του Stäckel , δηλαδή ότι το ομαλό $n \times n$ μητρώου $[\mathbf{\Phi}_{ij}(q_i)]$ και το μητρώου στήλη $\{\psi_i(q_i)\}$ υπάρχουν, τέτοια που

$$\mathbf{c}^T \mathbf{\Phi} = (1, 0, \ldots, 0) \qquad (5\text{-}139)$$

και

$$\mathbf{c}^T \boldsymbol{\psi} = V \quad , \qquad (5\text{-}140)$$

όπου $V(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ είναι η δυναμική ενέργεια και $\mathbf{c}$ είναι μητρώο στήλη των c_i , $i = 1, 2, \ldots, n$.

Για να αποδείξουμε την *αναγκαιότητα* αυτών των συνθηκών θεωρούμε ότι το δοθέν ορθογώνιο σύστημα είναι διαχωρίσιμο, και ως εκ τούτου έχει μια χαρακτηριστική συνάρτηση W που συνίσταται από ένα άθροισμα όρων της μορφής $W_i(q_i, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ όπως στην Εξ.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

(5-124). Αυτή η χαρακτηριστική συνάρτηση είναι ένα πλήρες ολοκλήρωμα της τροποποιημένης εξίσωσης Hamilton-Jacobi,

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i \left(\frac{\partial W_i}{\partial q_i}\right)^2 + V = \alpha_1 \qquad (5\text{-}141)$$

όπου α_1 εκλέγεται ως η ολική ενέργεια. Λόγω της υποτεθείσης διαχωρισιμότητας, γνωρίζουμε ότι $(\partial W_i / \partial q_i)^2$ είναι συνάρτηση των $(q_i, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ και επιπλέον μπορούμε να εκλέξουμε τις σταθερές διαχωρισμού έτσι ώστε οι α_i να εμφανίζονται γραμμικά. Άρα βλέπουμε ότι η πιο γενική μορφή που περιλαμβάνει τη μόνη συντεταγμένη q_i είναι η

$$\left(\frac{\partial W_i}{\partial q_i}\right)^2 = -2\psi_i(q_i) + 2\sum_{j=1}^{n} \Phi_{ij}(q_i)\,\alpha_j \quad , \qquad (5\text{-}142)$$

όπου οι αριθμητικοί συντελεστές έχουν επιλεγεί για ευκολία. Μετά, αντικαθιστώντας την έκφραση αυτή στην Εξ. (5-141) και χρησιμοποιώντας συμβολισμό μητρώων, παίρνουμε

$$-\mathbf{c}^T\boldsymbol{\psi} + \mathbf{c}^T\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\alpha} + V = \alpha_1 \quad . \qquad (5\text{-}143)$$

Συγκρίνοντας τους όρους που περιέχουν α_i, βρίσκουμε ότι

$$\mathbf{c}^T\boldsymbol{\Phi} = (1, 0, ..., 0) \quad , \qquad (5\text{-}144)$$

που την αναγνωρίζουμε ως την πρώτη συνθήκη του Stäckel. Παρόμοια, οι όροι στην Εξ. (5-143) που δεν περιλαμβάνουν α_i, οδηγούν στην

$$\mathbf{c}^T\boldsymbol{\psi} = V \quad , \qquad (5\text{-}145)$$

που είναι η δεύτερη συνθήκη του Stäckel. Έτσι οι δυο αυτές συνθήκες είναι αναγκαίες για τη διαχωρισιμότητα.

Στη συνέχεια ας αποδείξουμε το *ικανό* των συνθηκών Stäckel. Για να απλουστεύσουμε το συμβολισμό, ορίζουμε το μητρώο στήλη **a** που δίνεται από

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$a_i = \left(\frac{\partial W}{\partial q_i}\right)^2 \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \quad . \tag{5-146}$$

Μετά, αν γράψουμε την τροποποιημένη εξίσωση Hamilton-Jacobi με τη μορφή

$$\frac{1}{2}\, \mathbf{c}^T \mathbf{a} + V = \alpha_1 \tag{5-147}$$

και χρησιμοποιήσουμε τη δεύτερη συνθήκη του Stäckel παίρνουμε

$$\frac{1}{2}\, \mathbf{c}^T \mathbf{a} + \mathbf{c}^T \boldsymbol{\psi} = (1, 0, ..., 0)\boldsymbol{\alpha} \quad . \tag{5-148}$$

Αλλά από την πρώτη συνθήκη του Stäckel, Εξ. (5-139), βλέπουμε ότι

$$\mathbf{c}^T = (1, 0, ..., 0)\boldsymbol{\Phi}^{-1} \quad . \tag{5-149}$$

Άρα, από τις Εξ. (5-148) και (5-149), έχουμε

$$(1, 0, ..., 0)\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\Phi}^{-1}\mathbf{a} + \boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{\psi}\right) = (1, 0, ..., 0)\,\boldsymbol{\alpha} \quad , \tag{5-150}$$

που έχει λύση

$$\mathbf{a} = -2\boldsymbol{\psi} + 2\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\alpha} \quad . \tag{5-151}$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι ταυτόσημο με την Εξ. (5-142) και δείχνει ότι το σύστημα είναι διαχωρίσιμο, και άρα επιβεβαιώνεται το *ικανό* των συνθηκών του Stäckel .

Η πρακτική χρησιμότητα του θεωρήματος Stäckel περιορίζεται από το γεγονός ότι δεν παρουσιάζει άμεση μέθοδο για τον προσδιορισμό της διαχωρισιμότητας ή μη ενός συστήματος, από απλή εξέταση της κινητικής και δυναμικής του ενέργειας. Αλλά ακόμη κι αν τα $\boldsymbol{\Phi}$ και $\boldsymbol{\psi}$ δεν μπορούν να ληφθούν κατευθείαν από τα T και V, τα μητρώα αυτά

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

μπορούν να κατασκευαστούν με τη βοήθεια της χαρακτηριστικής συνάρτησης, αν η λύση είναι γνωστή.(*)

Ως παράδειγμα, παίρνουμε

$$\Phi_{ij} = \frac{\partial W_k}{\partial q_k} \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial \alpha_j} \tag{5-152}$$

και για την περίπτωση *γραμμικών* εκφράσεων ως προς α_i, όπως στην Εξ. (5-142), παίρνουμε

$$\psi_i = \sum_{j=1}^{n} \Phi_{ij} \alpha_j - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W_i}{\partial q_i} \right)^2 . \tag{5-153}$$

Το μητρώο Φ είναι ομαλό επειδή η ορίζουσα $|\Phi| \neq 0$, δηλαδή

$$|\Phi| = \frac{\partial W_1}{\partial q_1} \frac{\partial W_2}{\partial q_2} \cdots \frac{\partial W_n}{\partial q_n} \left| \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial \alpha_j} \right| \neq 0 . \tag{5-154}$$

Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι η W είναι πλήρες ολοκλήρωμα της τροποποιημένης εξίσωσης Hamilton-Jacobi και ως εκ τούτου σύμφωνα με την Εξ. (5-48) έχουμε

$$\left| \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial \alpha_j} \right| \neq 0 . \tag{5-155}$$

Επιπλέον κανένας από τους παράγοντες $\partial W_i / \partial q_i$ δεν είναι μηδέν, γενικά, αφού αυτοί εκφράζουν τις γενικευμένες ορμές.

Τέλος, ας θεωρήσουμε τη μοναδικότητα των συναρτήσεων που συνδέονται με τις συνθήκες Liouville και Stäckel. Γενικά, αυτές οι συναρτήσεις δεν είναι μοναδικές. Ειναι προφανές, για παράδειγμα, ότι οι $R_i(q_i)$, $f_i(q_i)$ και $v_i(q_i)$ μπορούν να πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο συντελεστή χωρίς να επηρεάζονται οι συνθήκες Liouville. Επιπλέον, επειδή η δυναμική ενέργεια προσδιορίζεται σχετικά ως προς μια

(*) Βλέπε L. A. Pars, A Treatise on Analytical Dynamics (London: Heinemann, Ltd., 1965), σελ.. 322-23.

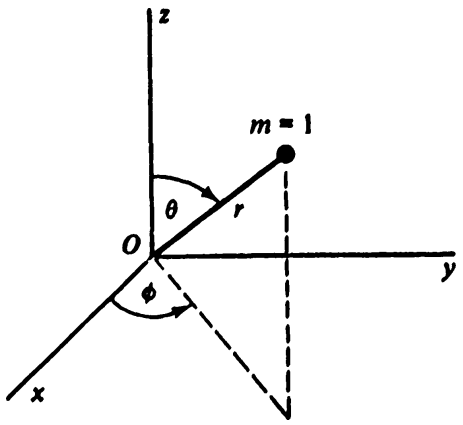
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

προσθετική σταθερά, κάθε $v_i(q_i)$ μπορεί να αντικατασταθεί με $v_i(q_i) + kf_i(q_i)$ όπου k είναι η ίδια σταθερά για όλα τα i.

Αν ένας εξετάσει τη θεωρία του Stäckel είναι φανερό ότι οι συναρτήσεις $c_i(q_i)$ προσδιορίζονται κατά μοναδικό τρόπο για μια δοσμένη συνάρτηση κινητικής ενέργειας. Εξάλλου, η πρώτη συνθήκη του Stäckel δε μεταβάλλεται αν κάθε στήλη του $\mathbf{\Phi}$, εκτός της πρώτης, πολλαπλασιαστεί με μια αυθαίρετη, μη μηδενική, σταθερά. Επίσης, από τις Εξ. (5-139) και (5-140) βλέπουμε ότι κάθε συνάρτηση $\psi_i(q_i)$ μπορεί να έχει όρους προστιθέμενους της μορφής $\sum_{j=1} \mathbf{\Phi}_{ij} k_j$, όπου κάθε k_j ($j = 2, 3, ..., n$) είναι μια σταθερά και συνδέεται με τη j-στήλη του $\mathbf{\Phi}$.

Παράδειγμα 5-3.

Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα Kepler ακόμη μια φορά, όπου τώρα ρωτάμε για τη διαχωρισιμότητά του. Χρησιμοποιούμε σφαιρικές συντεταγμένες για να προσδιορίσουμε τη θέση σωματίου μάζας ίσης προς τη μονάδα (Σχ. 5-3), που έλκεται προς το σταθερό σημείο O από μια βαρυτική δύναμη που είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της r.



Σχ. 5-3. Το πρόβλημα Kepler, σε σφαιρικές συντεταγμένες.

Η κινητική και δυναμική ενέργεια είναι

$$T = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) = \frac{1}{2}p_r^2 + \frac{1}{2r^2}p_\theta^2 + \frac{1}{2r^2\sin^2\theta}p_\varphi^2 \quad (5\text{-}156)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

και

$$V = -\frac{\mu}{r} \quad , \tag{5-157}$$

όπου p_r, p_θ, p_φ είναι οι γενικευμένες ορμές. Επειδή το σύστημα είναι ένα ορθογώνιο σύστημα, γνωρίζουμε ότι η Χαμιλτωνιανή $H = T + V$ είναι σταθερά και η τροποποιημένη εξίσωση Hamilton-Jacobi είναι

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2r^2}\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{2r^2 \sin^2\theta}\left(\frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi}\right)^2 - \frac{\mu}{r} = \alpha_t \quad , \tag{5-158}$$

όπου

$$W = W_r(r) + W_\theta(\theta) + W_\varphi(\varphi) \quad . \tag{5-159}$$

Μ' άλλα λόγια, ψάχνουμε να βρούμε μια χαρακτηριστική συνάρτηση που είναι πλήρης λύση της τροποποιημένης εξίσωσης Hamilton-Jacobi και που έχει τη διαχωρίσιμη μορφή της Εξ. (5-159).

Σ' αυτό το σημείο σημειώνουμε ότι η φ δεν περιέχεται στις T και V, και επομένως είναι μια αφανής συντεταγμένη. Κατά συνέπεια

$$p_\varphi = \frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi} \alpha_\varphi \tag{5-160}$$

και άρα

$$W_\varphi(\varphi) = \alpha_\varphi \varphi \quad . \tag{5-161}$$

Μέχρι τώρα πήραμε τις δυο από τις απαιτούμενες τρεις α_i. Η τρίτη βρίσκεται αν καταφέρουμε ένα διαχωρισμό των μεταβλητών μέσω της πρώτης, πολλαπλασιάζοντας την Εξ. (5-158) με $2r^2$, που δίνει

$$r^2\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 - 2r^2\left(\frac{\mu}{r} + \alpha_t\right) + \left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta} = 0 \quad . \tag{5-162}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Εδώ οι δυο πρώτοι όροι είναι συναρτήσεις μόνο του r, και οι δυο τελευταίοι όροι συναρτήσεις μόνο του θ. Κατά συνέπεια, είναι ίσοι ο καθένας προς μια διαχωρίσιμη σταθερά, δηλαδή μπορούμε να πάρουμε

$$\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta} = \alpha_\theta^2 \qquad (5\text{-}163)$$

και

$$r^2\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 - 2r^2\left(\frac{\mu}{r} + \alpha_t\right) = -\alpha_\theta^2 \quad . \qquad (5\text{-}164)$$

Η σταθερά διαχωρισμού εκλέγεται να είναι α_θ^2 (παρά α_θ), για λόγους ευκολίας. Η εκλογή αυτή επιτρέπει ώστε η α_θ να έχει διαστάσεις στροφορμής χωρίς να επηρεάζει την ισχύ των συνθηκών του Stäckel.

Εξασφαλίζουμε έτσι τη διαχωρισιμότητα του συστήματος επειδή έχουμε

$$\frac{\partial W_r}{\partial r} = \sqrt{2\left(\frac{\mu}{r} + \alpha_t\right) - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}} \qquad (5\text{-}165)$$

και

$$\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} = \sqrt{\alpha_\theta^2 - \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta}} \qquad (5\text{-}166)$$

που είναι απευθείας ολοκληρώσιμες. Η W_θ έχει βρεθεί προηγουμένως.

Ας κάνουμε τώρα τον έλεγχο ικανοποίησης των συνθηκών του Sräckel. Από τις Εξ. (5-138) και (5-156) βλέπουμε ότι

$$\mathbf{c} = \left\{1\,,\ \frac{1}{r^2}\,,\ \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\right\} \quad . \qquad (5\text{-}167)$$

Χρησιμοποιώντας την Εξ. (5-152), παίρνουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\alpha_\theta}{r^2} & 0 \\ 0 & \alpha_\theta & -\frac{\alpha_\varphi}{\sin^2\theta} \\ 0 & 0 & \alpha_\varphi \end{bmatrix} \tag{5-168}$$

που επιβεβαιώνει την ικανοποίηση της πρώτης συνθήκης, Εξ. (5-139). Αν εκλέξουμε

$$\psi = \left\{ -\frac{\mu}{r},\ 0,\ 0 \right\} \tag{5-169}$$

βλέπουμε ότι η δεύτερη συνθήκη, Εξ. (5-140), επίσης ικανοποιείται.

Είναι πολύ ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι αυτό το διαχωρίσιμο σύστημα δεν ικανοποιεί τα κριτήρια ενός συστήματος Liouville για n=3, πράγμα που απεικονίζει το ότι οι συνθήκες Liouville δεν είναι αναγκαίες συνθήκες. Συγκρίνοντας την Εξ. (5-125) με την έκφραση της κινητικής ενέργειας, Εξ. (5-156), βλέπουμε ότι οι συνθήκες Liouville απαιτούν όπως

$$\frac{R_\varphi(\varphi)}{R_r(r)} = \frac{1}{r^2 \sin^2\theta},$$

πράγμα που είναι αδύνατο.

Μια άλλη προσέγγιση του προβλήματος είναι εκείνη που εκμεταλλεύεται το πλεονέκτημα ότι η φ είναι μια αφανής συντεταγμένη και κατά συνέπεια ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας μειώνεται από τρεις σε δυο. Μπορούμε να γράψουμε

$$H = \frac{1}{2} p_r^2 + \frac{1}{2r^2} p_\theta^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{2r^2 \sin^2\theta} - \frac{\mu}{r} = \alpha_t \tag{5-170}$$

και μετά να θεωρήσουμε το σύστημα αυτό ως ορθογώνιο με κινητική και δυναμική ενέργεια

$$T' = \frac{1}{2} p_r^2 + \frac{1}{2r^2} p_\theta^2 \tag{5-171}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

και

$$V' = \frac{\alpha_\varphi^2}{2r^2 \sin^2\theta} - \frac{\mu}{r} \quad , \tag{5-172}$$

αντίστοιχα.

Η χαρακτηριστική συνάρτηση είναι της μορφής

$$W = W_r(r) + W_\theta(\theta) \tag{5-173}$$

και η τροποποιημένη εξίσωση Hamilton-Jacobi είναι

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2r^2}\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{2r^2 \sin^2\theta} - \frac{\mu}{r} = \alpha_t \quad . \tag{5-174}$$

Έτσι για μια ακόμη φορά αποδεικνύεται ότι το σύστημα είναι διαχωρίσιμο και εφαρμόζονται οι Εξ. (5-163) - (5-166).

Ένας έλεγχος των συνθηκών Stäckel δείχνει ότι

$$\mathbf{c} = \left\{1, \frac{1}{r^2}\right\} \tag{5-175}$$

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\alpha_\theta}{r^2} \\ 0 & \alpha_\theta \end{bmatrix} \tag{5-176}$$

και

$$\mathbf{\psi} = \left\{ -\frac{\mu}{r} \; , \; \frac{\alpha_\varphi^2}{2 \sin^2\theta} \right\} \tag{5-177}$$

που ικανοποιούν τις Εξ. (5-139) και (5-140).

Για την περίπτωση όπου n=2 γνωρίζουμε ότι τα κριτήρια του Liouville και Stäckel δίνουν ταυτόσημα αποτελέσματα. Μια σύγκριση των εκφράσεων για T' και V' με τις Εξ. (5-125) και (5-126) αποκαλύπτει ότι

$$f_r(r) = r^2 , \qquad f_\theta(\theta) = 0 \tag{5-178}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$R_r(r) = r^2, \qquad R_\theta(\theta) = 1 \tag{5-179}$$

$$v_r(r) = -\mu r, \qquad v_\theta(\theta) = \frac{\alpha_\varphi^2}{2\sin^2\theta} \tag{5-180}$$

πράγμα που επιβεβαιώνει την ισχύ των συνθηκών Liouville. Πρέπει να σημειωθεί ότι ισοδύναμες εκφράσεις για T' και V' θα μπορούσαμε να πάρουμε αν κάναμε χρήση της πορείας Routh ως προς την αφανή συντεταγμένη φ και όχι της πορείας Hamilton που ακολουθήσαμε στην παράγραφο αυτή.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. PARS, L. A., *A Treatise on Analytical Dynamics.* London Heinemann, 1965. Μια έξοχη και λεπτομερής αντιμετώπιση της ύλης αυτού του κεφαλαίου.

2. RUND, H., *The Hamilton - Jacobi Theory in the Calculus of Variations.* London: D. Van Nostrand Company, Ltd., 1966. Μια εκτενής και κάπως δύσκολη αντιμετώπιση της θεωρίας Hamilton-Jacobi κυρίως από γεωμετρική σκοπιά.

3. CARATHÉODORY, C., *Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order, Part I.* (English translation by R. B. Dean and J. J. Brandstatter). San Francisco: Holden-Day, Inc., 1965. Δίνεται μια καλή συζήτηση επί των διαφορικών μορφών Pfaff όπως επίσης και για τη σχέση της μερικής διαφορικής εξίσωσης Hamilton-Jacobi με τις κανονικές εξισώσεις.

4. GOLDSTEIN, H., *Classical Mechanics.* Reading Mass: Addison-Wesley Press, Inc., 1950. Τα κύρια χαρακτηριστικά της θεωρίας διαβάζονται ευχάριστα και δίνονται παραδείγματα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

5-1. Θεωρούμε ένα συνήθες σύστημα Hamilton με $H = q + p$. Υποθέτοντας διαχωρισιμότητα, να λυθεί η εξίσωση Hamilton-Jacobi και να αποδειχτεί ότι η $S = - \alpha t + \alpha q - {}^1/_2\, q^2$ είναι μια λύση. Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση S οδηγεί στη σωστή λύση των κανονικών εξισώσεων.

5-2. Να αναλυθεί το πρόβλημα του στρόβου (παραδείγματα 3-5) χρησιμοποιώντας τη μεθόδου Hamilton-Jacobi. Να εκλεγούν ως συντεταγμένες οι γωνίες του Euler και να ληφθούν t και ψ ως ολοκληρώματα συναρτήσεων του θ.

5-3. Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος Hamilton-Jacobi για την εύρεση λύσης για την κίνηση ομοιόμορφου δίσκου μάζας m και ακτίνας r που κυλίεται χωρίς τριβή σ' ένα επίπεδο κεκλιμένο κατά γωνία γ ως προς την οριζόντια. Αν θεωρήσουμε αρχικές συνθήκες: $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}\,(0) = \dot{\theta}_0$, όπου θ είναι η γωνία περιστροφής του δίσκου, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα και να λυθεί ως προς θ, όπου $\theta = \theta\,(t)$.

5-4. Ένα σωμάτιο μάζας m κινείται υπό την επίδραση της βαρύτητας στο κατακόρυφο επίπεδο xy, όπου ο θετικός ημι-άξονας y έχει διεύθυνση προς τα άνω. Θεωρώντας ότι το σωμάτιο αρχίζει από την αρχή του συστήματος με αρχικές συνιστώσες ταχύτητας $(\dot{x}_0, \dot{y}_0)$, να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος Hamilton-Jacobi για την εύρεση της λύσης $x = x\,(t)$, $y = y\,(t)$.

5-5. Ένα σωμάτιο μάζας m κινείται επί επιπέδου τροχιάς και έλκεται ως προς ένα σταθερό σημείο με ακτινική δύναμη $F_r = - kr$, όπου k είναι μια σταθερά. Να χρησιμοποιηθούν πολικές συντεταγμένες (r,θ) και η θεωρία Hamilton-Jacobi για να πάρουμε λύσεις σε ολοκληρωτική μορφή, $t = t\,(r)$, $\theta = \theta\,(r)$. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα και να λυθούν ως προς $r = r\,(t)$ και $r = r\,(\theta)$. Να θεωρηθεί ότι $\theta\,(0) = 0$, $\dot{\theta}\,(0) = \dot{\theta}_0$, $\dot{r}\,(0) = 0$ και $r\,(0) = r_{max}$.

5-6. Δίνεται ένα συντηρητικό σύστημα που έχει

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

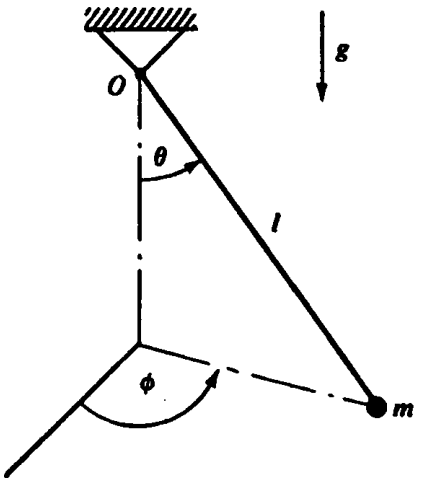
$$T = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2), \qquad V = \frac{K}{q_1^2 + q_2^2}$$

όπου $K > 0$. Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος Hamilton-Jacobi για την εύρεση του δρόμου στο μορφικό χώρο. Να αποδειχτεί ότι

$$\int \frac{dq_1}{\sqrt{q_1^2 + a^2}} - \int \frac{dq_2}{\sqrt{q_2^2 + b^2}} = \text{σταθερά}$$

όπου $a^2 = (2\alpha_1 - K) / 2\alpha_t \geq 0$ και $b^2 = (2\alpha_1 + K) / 2\alpha_t > 0$.

5-7. Να αποδειχτεί ότι το πρόβλημα της κίνησης ενός σφαιρικού εκκρεμούς που περιγράφεται από τις συντεταγμένες (θ, φ) είναι διαχωρίσιμο σύμφωνα με τα κριτήρια Stäckel και Liouville. Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος Hamilton-Jacobi για τη λύση ως προς την κίνηση με ολοκληρωτική μορφή.



Σχ. Π5-7

5-8. Θεωρούμε ένα σωμάτιο μάζας m του οποίου η θέση δίνεται από τις σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, φ). Υποθέτουμε ότι η δυναμοσυνάρτηση είναι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$V = \frac{v_1(r)}{m} + \frac{v_2(\theta)}{mr^2} + \frac{v_3(\varphi)}{mr^2 \sin^2\theta} \quad .$$

Έστω α_1 η ολική ενέργεια και α_θ, α_φ οι σταθερές διαχωρισμού. Να προσδιοριστούν ολοκληρωτικές εκφράσεις για τις $W_1(r)$, $W_2(\theta)$, $W_3(\varphi)$ και να αποδειχτεί ότι το σύστημα ικανοποιεί τις συνθήκες Stäckel .

5-9. Να αποδειχτεί ότι ένα γενικό σύστημα Liouville ικανοποιεί τις δυο συνθήκες για διαχωρισιμότητα του Stäckel . Εκλέγουμε n ανεξάρτητες α_i και έστω α_1 είναι η ολική ενέργεια οι δε υπόλοιπες $(n-1)$ είναι σταθερές διαχωρισμού. Προς αποφυγή σύγχυσης απαλείφουμε την α_1 με τη βοήθεια της Εξ. (5-129). Εκλέγουμε $\psi_i = v_i(q_i) / R_i(q_i)$ και έστω $\Phi_{ij} = p_i(\partial p_i / \partial \alpha_j)$, όπου $p_i \equiv \partial W_i / \partial q_i$.

5-10. Πολλές φορές είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούμε αυθαίρετες διαφορίσιμες συναρτήσεις $g_i(\alpha_i)$, $(i = 2,3, ..., n)$, στη θέση των αντιστοίχων α_i, ως ανεξάρτητες σταθερές διαχωρισμού. Θεωρούμε το σύστημα Liouville του προηγουμένου προβλήματος · να αποδειχτεί ότι εφαρμόζοντας τις συνθήκες του Sräckel μπορούμε να θέσουμε

$$\psi_i = \sum_{j=1}^{n} \Phi_{ij} \frac{g_i}{g'_j} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_i}{\partial q_i}\right)^2 \quad ,$$

όπου $\Phi_{ij} = p_i(\partial p_i / \partial \alpha_j)$ και $p_i \equiv \partial W_i / \partial q_i$. Έστω $g_1(\alpha_1) \equiv \alpha_1$.

5-11. Να αποδειχτεί το αναγκαίο των συνθηκών Liouville για διαχωρισιμότητα ενός ορθογωνίου συστήματος με $n = 2$. Αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί ακολουθώντας τη μέθοδο για την απόδειξη των συνθηκών Stäckel και τις αντιστοιχίες: $R_1 = 1/\Phi_{12}$, $R_2 = -1/\Phi_{22}$, $f_1 = \Phi_{11}/\Phi_{12}$, $f_2 = -\Phi_{21}/\Phi_{22}$, $v_1 = \psi_1/\Phi_{12}$, $v_2 = -\psi_2/\Phi_{22}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

6

ΚΑΝΟΝΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Το προηγούμενο κεφάλαιο διαπραγματεύονταν κυρίως τη χρήση της μεθόδου Hamilton-Jacobi για την εύρεση της κύριας συνάρτησης $S(q_i, \alpha, t)$ και, για συντηρητικά συστήματα, της χαρακτηριστικής συνάρτησης $W(q_i, \alpha)$. Στην κάθε περίπτωση βρέθηκε ότι η λύση του προβλήματος Hamilton (δηλαδή, η λύση των κανονικών εξισώσεων) προκύπτει με μια διαδικασία παραγωγίσεων και αλγεβρικών χειρισμών.

Μια άλλη νέα όψη του προβλήματος Hamilton, εξάλλου, είναι ότι η λύση του εκφράζει έναν κανονικό μετασχηματισμό μεταξύ δυο σημείων στο χώρο των φάσεων, δηλαδή, ενός κινητού σημείου (q_i, p_i) και ενός σταθερού σημείου (α, β). Η κύρια συνάρτηση είναι η γεννήτρια συνάρτηση αυτού του μετασχηματισμού.

Με βάση τα παραπάνω, θα στραφούμε τώρα σε μια λεπτομερή εξέταση της θεωρίας των κανονικών μετασχηματισμών και θα μελετήσουμε την εφαρμογή τους στη δυναμική θεωρία.

6-1. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΚΑΙ ΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Κανονικοί μετασχηματισμοί. Στη συζήτηση των κανονικών μετασχηματισμών, ας θεωρήσουμε μόνο *ολόνομα συστήματα* τα οποία μπορούν να περιγραφούν από την τυπική μορφή των εξισώσεων Hamilton ή των εξισώσεων Lagrange. Από την παράγραφο 4-1 ανακαλούμε ότι η αρχή του Hamilton εφαρμόζεται σ' αυτά τα συστήματα. Άρα αν η διάταξη καθορίζεται από τις γενικευμένες συντεταγμένες $q_1, q_2, \ldots, q_n$, γνωρίζουμε ότι

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(q_i, \dot{q}_i, t)\, dt = 0 \quad , \tag{6-1}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

όπου τα ακραία σημεία των μεταβλητών τροχιών είναι σταθερά τόσο στο μορφικό χώρο όσο και στο χρόνο.

Τώρα, για ένα δοθέν αδρανειακό σύστημα αναφοράς, η τιμή της συνάρτησης Lagrange είναι ίση με T-V, ανεξάρτητα από το συγκεκριμένο σύνολο των γενικευμένων συντεταγμένων που χρησιμοποιείται για τον καθορισμό της διάταξης του συστήματος. Άρα, αν ένα νέο σύνολο συντεταγμένων $Q_1, Q_2, ..., Q_n$, συνδέεται με το προηγούμενο μ' ένα *σημειακό μετασχηματισμό*

$$q_i = q_i(Q, t), \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{6-2}$$

η προκύπτουσα συνάρτηση Lagrange $L^*(Q_i, \dot{Q}_i, t)$ δίνεται από την

$$L^*(Q_i, \dot{Q}_i, t) = L(q_i, \dot{q}_i, t) = T - V \ , \tag{6-3}$$

δηλαδή, οι L και L^* είναι ίσες σε *τιμή* αν και είναι, γενικά, διαφορετικές σε μορφή. Επιπλέον, η αρχή του Hamilton εφαρμόζεται στη νέα συνάρτηση Lagrange. Έτσι,

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L^*(Q_i, \dot{Q}_i, t)\, dt = 0 \ . \tag{6-4}$$

Μέχρι τώρα διαλέξαμε τις Q_i να είναι κάθε σύνολο μεταβλητών το οποίο καθορίζει τη διάταξη του συστήματος. Ανακύπτει όμως το ερώτημα κατά πόσο δεν είναι δυνατόν να εφαρμοστεί η αρχή του Hamilton ακολουθώντας έναν πιο γενικό μετασχηματισμό που οδηγεί στην $L^*(Q_i, \dot{Q}_i, t)$ η οποία διαφέρει από την $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ τόσο *σε μορφή όσο και σε τιμή*. Για παράδειγμα, μπορεί να δοκιμάσουμε μια νέα συνάρτηση Lagrange που δίνεται από την

$$L^*(Q_i, \dot{Q}_i, t) = L(q_i, \dot{q}_i, t) - \frac{d}{dt}\varphi(q_i, Q_i, t) \ , \tag{6-5}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

όπου $\varphi(q_i, Q_i, t)$ είναι διπλά διαφορίσιμη, αλλά είναι κατά τ' άλλα τυχαία. Τότε

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L^*(Q_i, \dot{Q}_i, t)\, dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} L(q_i, \dot{q}_i, t)dt - \delta \left[\varphi(q_i, Q_i, t)\right]_{t_0}^{t_1} . \quad (6\text{-}6)$$

Ο τελευταίος όρος μηδενίζεται, γιατί τα ακραία σημεία είναι σταθερά στον επεκτεταμένο μορφικό χώρο, δηλαδή, δq_i και δQ_i είναι μηδέν στις σταθερές χρονικές στιγμές t_0 και t_1 . Το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέρος μηδενίζεται λόγω της αρχής του Hamilton, Εξ. (6-1) και άρα

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L^*(Q_i, \dot{Q}_i, t)\, dt = 0 \quad (6\text{-}7)$$

για την πιο γενική περίπτωση όπου εφαρμόζεται η Εξ. (6-5) . Αυτό σημαίνει ότι η $L^*(Q_i, \dot{Q}_i, t)$ περιγράφει το δοσμένο σύστημα τόσο αποτελεσματικά όσο και η $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ και επιπλέον ισχύει η συνήθης μορφή των εξισώσεων Lagrange για το νέο σύστημα συντεταγμένων. Επισημαίνουμε όμως, ότι η $L^*(Q_i, \dot{Q}_i, t)$ δεν είναι πλέον ίση σε τιμή με την $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ και γι' αυτό δεν είναι ίση με το T-V στο αρχικό αδρανειακό σύστημα.

Τώρα ας υποθέσουμε ότι θεωρούμε τις δυο αντίστοιχες Χαμιλτωνιανές περιγραφές που αντιστοιχούν στο δοθέν ολόνομο σύστημα. Αυτές οι συναρτήσεις Hamilton ορίζονται από τις εξισώσεις

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad (6\text{-}8)$$

$$K(Q_i, P_i, t) = \sum_{i=1}^{n} P_i \dot{Q}_i - L^*(Q_i, \dot{Q}_i, t)\,, \quad (6\text{-}9)$$

όπου οι γενικευμένες ορμές δίνονται από τις

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} , \qquad P_i = \frac{\partial L^*}{\partial \dot{Q}_i} \quad . \tag{6-10}$$

Αφού η αρχή του Hamilton εφαρμόζεται στις $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ και $L^*(Q_i, \dot{Q}_i, t)$, αυτό συνεπάγεται ότι οι κανονικές εξισώσεις ισχύουν και για τις δυο περιγραφές, δηλαδή

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} , \qquad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} , \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{6-11}$$

και

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} , \qquad P_i = - \frac{\partial K}{\partial Q_i} , \quad (i = 1, 2, ..., n) \quad . \tag{6-12}$$

Ένας μετασχηματισμός από το (q, p) στο (Q, P) ο οποίος διατηρεί την κανονική μορφή των εξισώσεων της κίνησης είναι γνωστός ως *κανονικός μετασχηματισμός*, υπό τον όρο ότι οι συνθήκες εφαρμόζονται σ' όλα τα Χαμιλτωνιανά συστήματα και όχι μόνο σε ειδικά επιλεγμένα συστήματα. Το συμπέρασμα αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να ελέγξουμε κατά πόσο ένας δοσμένος μετασχηματισμός είναι κανονικός χωρίς την ειδική γνώση του συστήματος στο οποίο εφαρμόζεται.

Θα συζητήσουμε αυτό το σημείο με κάποια λεπτομέρεια αργότερα, αλλά πρώτα ας θεωρήσουμε ένα σύστημα το οποίο έχει μια συγκεκριμένη συνάρτηση Hamilton $H(q, p, t)$. Ας υποθέσουμε ότι μας δίνονται εξισώσεις μετασχηματισμού της μορφής

$$Q_i = Q_i(q_k, p_k, t) , \qquad P_i = P_i(q_k, p_k, t) , \quad (i = 1, 2, ..., n) , \tag{6-13}$$

όπου κάθε συνάρτηση είναι τουλάχιστον διπλά διαφορίσιμη. Αν λύσουμε ως προς L και L^* τις Εξ. (6-8) και (6-9) και αντικαταστήσουμε στην Εξ. (6-5), παίρνουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \, dq_i - H \, dt - \sum_{i=1}^{n} P_i \, dQ_i + K \, dt = d\varphi \quad . \tag{6-14}$$

Αυτή η σημαντική εξίσωση δηλώνει ότι η διαφορά δυο Pfaff διαφορικών μορφών (παράγραφος 5-1) είναι ίση με ένα *τέλειο*

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

διαφορικό $d\varphi$. Μια ανασκόπιση του θέματος θα δείξει ότι η (6-14) εκφράζει *μια ικανή συνθήκη* για έναν κανονικό μετασχηματισμό από τις παλιές μεταβλητές (q_i, p_i) και την αντίστοιχη Χαμιλτωνιανή $H(q_i, p_i, t)$ στις νέες μεταβλητές (Q_i, P_i) και τη Χαμιλτωνιανή $K(Q_i, P_i, t)$. Η συνάρτηση $\varphi(q_i, Q_i, t)$ λέγεται *γεννήτρια συνάρτηση* του μετασχηματισμού.

Στην εξέταση της διαφορικής μορφής της Εξ. (6-14) για ακρίβεια, πρέπει πρώτα να λάβουμε υπόψη μας το πλήρες σύνολο των υπό μελέτη μεταβλητών. Επειδή η γεννήτρια συνάρτηση είναι συνάρτηση $(2n+1)$ μεταβλητών, δηλαδή των q_i, Q_i και t , είναι φυσικό να εκφραστεί η διαφορική μορφή σε όρους αυτών των μεταβλητών. Αλλά υπάρχουν και άλλες δυνατότητες. Ας θυμηθούμε τις προηγούμενες συζητήσεις για ακρίβεια και ολοκληρωσιμότητα οι οποίες έλαβαν χώρα στην περίπτωση ύπαρξης δεσμών. Εκεί μάθαμε ότι αυτές οι ιδιότητες είναι βασικά γεωμετρικές στη φύση τους και σχετίζονται με τη διάσταση του χώρου. Η συνέπεια εδώ είναι ότι ένα άλλο σύνολο $(2n+1)$ μεταβλητών όπως το (q_i, p_i, t) ή (Q_i, P_i, t) μπορεί να χρησιμοποιηθεί εξίσου καλά στον έλεγχο για ακρίβεια. Είναι συχνά βολικό να ορίζουμε μια συνάρτηση $\psi(q_i, p_i, t)$ η οποία είναι ίση σε τιμή με τη γεννήτρια συνάρτηση, δηλαδή,

$$\psi(q_i, p_i, t) = \varphi(q_i, Q_i, t) \quad . \tag{6-15}$$

Τότε η Εξ. (6-14) γίνεται,

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\, dq_i - H dt - \sum_{i=1}^{n} P_i\, dQ_i + K dt = d\psi \quad . \tag{6-16}$$

Εδώ η διαφορική μορφή εκφράζεται σε όρους των μεταβλητών (q_i, p_i, t), χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις μετασχηματισμού. Εξάλλου, υποθέτουμε ότι καθένα από τα σύνολα των $(2n+1)$ μεταβλητών, δηλαδή το (q_i, p_i, t) ή (Q_i, P_i, t) είναι ανεξάρτητα. Είναι σημαντικό όμως να σημειώσουμε, ότι η συνάρτηση $\psi(q_i, p_i, t)$ δεν δικαιούται γενικά να χαρακτηρίζεται ως γεννήτρια συνάρτηση μιας και δεν περιέχει καμία από τις νέες μεταβλητές.

Ας επιστρέψουμε τώρα στη συζήτηση για τη γεννήτρια συνάρτηση $\varphi(q_i, Q_i, t)$ την οποία θεωρούμε ότι είναι *αυθαίρετη*. Μ' αυτό ως αρχικό

σημείο, επιθυμούμε να πάρουμε τις αντίστοιχες εξισώσεις μετασχηματισμού. Βλέπουμε ότι το ολικό της διαφορικό είναι

$$d\varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}\, dq_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial Q_i}\, dQ_i + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\, dt \quad . \tag{6-17}$$

Υποθέτοντας ότι οι q_i, Q_i και t μπορούν να μεταβάλλονται ανεξάρτητα, μπορούμε να εξισώσουμε τους συντελεστές των ίδιων διαφορικών στις Εξ. (6-14) και (6-17) και παίρνουμε

$$p_i = \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{6-18}$$

$$P_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial Q_i} \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{6-19}$$

$$K = H + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad . \tag{6-20}$$

Η ανεξαρτησία των q_i και Q_i εξασφαλίζεται αν η ορίζουσα είναι μη μηδενική, δηλαδή,

$$\left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_i \partial Q_j} \right| \neq 0 \quad . \tag{6-21}$$

Οι πραγματικές εξισώσεις μετασχηματισμού λαμβάνονται λύνοντας τις Εξ. (6-18) και (6-19) ως προς $q_i(Q_k, P_k, t)$ και $p_i(Q_k, P_k, t)$ ή αντίστροφα ως προς $Q_i(q_k, p_k, t)$ και $P_i(q_k, p_k, t)$. Η νέα συνάρτηση Hamilton $K(Q_i, P_i, t)$ βρίσκεται χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις μετασχηματισμού και την Εξ. (6-20).

Συνοψίζοντας, αν δοθεί ένας μετασχηματισμός στο χώρο των φάσεων, οποιαδήποτε από τις διαφορικές μορφές που δίνονται από τις Εξ. (6-14) και (6-16) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδειχτεί αν αυτός είναι κανονικός. Απ' την άλλη μεριά, αν δοθεί μια τυχαία γεννήτρια συνάρτηση $\varphi(q_i, Q_i, t)$, τότε οι Εξ. (6-18) και (6-19) παράγουν τις εξισώσεις μετασχηματισμού.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια μερικές πιθανές απλουστεύσεις στην εξέταση για ένα κανονικό μετασχηματισμό. Πρώτα ανακαλούμε το γεγονός ότι ένας συγκεκριμένος κανονικός μετασχηματισμός πρέπει να εφαρμόζεται σ' όλα τα συστήματα που έχουν n βαθμούς ελευθερίας· άρα, θα έπρεπε να είναι δυνατό να θέτουμε τα κριτήρια για ένα κανονικό μετασχηματισμό χωρίς την αναφορά στη συνάρτηση Hamilton. Επιπλέον σημειώνουμε από την Εξ. (6-14) ότι ο χρόνος t παραμένει αμετάβλητος από το μετασχηματισμό και μπορεί να θεωρηθεί ως μια ανεξάρτητη παράμετρος. Αφού ο t δεν εμπλέκεται άμεσα, μπορούμε να θεωρήσουμε μια ταυτόχρονη μεταβολή όπου το dt είναι ίσο με μηδέν. Τότε οι Εξ. (6-14) και (6-16) ανάγονται στις

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - \sum_{i=1}^{n} P_i \delta Q_i = \delta\varphi \qquad (6\text{-}22)$$

και

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - \sum_{i=1}^{n} P_i \delta Q_i = \delta\psi \quad . \qquad (6\text{-}23)$$

Είναι πιο βολικό να χρησιμοποιούμε την τελευταία εξίσωση (6-23) για να εξετάζουμε αν ένας μετασχηματισμός είναι ή δεν είναι κανονικός. Οι συναρτήσεις $Q_i(q_k, p_k, t)$ και $P_i(q_k, p_k, t)$ από τις Εξ. (6-13) χρησιμοποιούνται για να εκφράσουν κάθε $P_i\delta Q_i$, σε όρους των παλιών μεταβλητών. Αν η διαφορική μορφή στο δεξιό μέρος της Εξ. (6-23) είναι ακριβής και οι συναρτήσεις $Q_i(q_k, p_k, t)$ και $P_i(q_k, p_k, t)$ είναι τουλάχιστον διπλά διαφορίσιμες, τότε ένας μετασχηματισμός είναι κανονικός και υπάρχει μια συνάρτηση $\psi(q_i, p_i, t)$ τέτοια ώστε

$$p_i - \sum_{j=1}^{n} P_j \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} = \frac{\partial \psi}{\delta q_i} \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \qquad (6\text{-}24)$$

$$- \sum_{j=1}^{n} P_j \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} = \frac{\partial \psi}{\partial p_i} \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \quad . \qquad (6\text{-}25)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Αυτές οι εξισώσεις είναι ισοδύναμες με την Εξ. (6-23) που μπορεί να επαληθευθεί γράφοντας το $\delta\psi$ αναλυτικά και συγκρίνοντας τους συντελεστές των όρων σε κάθε δq_i και δp_i. Κατά την ολοκλήρωση για να πάρουμε την $\psi(q_i, p_i, t)$ η νέα συνάρτηση Hamilton $K(Q_i, P_i, t)$ βρίσκεται εξισώνοντας τους συντελεστές των dt στην Εξ. (6-16). Αυτό οδηγεί στην

$$K = H + \frac{\partial \psi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial Q_i}{\partial t} \quad . \tag{6-26}$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι οι Εξ. (6-20) και (6-26) είναι κάπως διαφορετικές στη μορφή και η εξήγηση είναι ότι διαφορετικές μεταβλητές διατηρούνται σταθερές στις δυο περιπτώσεις όταν παίρνουμε τις μερικές παραγώγους ως προς το χρόνο.

Στη θεώρηση των συναρτήσεων Hamilton $H(q_i, p_i, t)$ και $K(Q_i, P_i, t)$, σημειώνουμε ότι αυτές προσδιορίζονται για συντηρητικά συστήματα μόνο κατά προσέγγιση μιας προσθετικής σταθεράς. Για μη συντηρητικά συστήματα, οι κανονικές εξισώσεις κίνησης παραμένουν αμετάβλητες ακόμη και μετά την πρόσθεση στη Χαμιλτωνιανή ενός όρου της μορφής $h(t)$. Από τις Εξ. (6-20) και (6-26) βλέπουμε ότι ένα παρόμοιο σχόλιο εφαρμόζεται και στις $\varphi(q_i, Q_i, t)$ και $\psi(q_i, p_i, t)$. Είναι όμως σύνηθες στην πράξη να παραλείπονται όροι αυτού του είδους.

Θεωρήσαμε ότι η Εξ. (6-14) συνδέεται μ' έναν κανονικό μετασχηματισμό από τις παλιές μεταβλητές (q_i, p_i) στις νέες μεταβλητές (Q_i, P_i). Αλλά η συμμετρία αυτής της εξίσωσης, καθώς και των Εξ. (6-18)-(6-20), δείχνει ότι και ο αντίστροφος ενός κανονικού μετασχηματισμού είναι και αυτός κανονικός και παράγεται από το αρνητικό της $\varphi(q_i, Q_i, t)$. Πρέπει να σημειωθεί ότι το άθροισμα δυο τέλειων διαφορικών, που εκφράζονται σε όρους των (q_i, p_i, t), είναι επίσης τέλειο διαφορικό. Άρα δυο κανονικοί μετασχηματισμοί, που εκτελούνται στη σειρά είναι ισοδύναμοι μ' έναν κανονικό μετασχηματισμό. Ο ταυτοτικός μετασχηματισμός είναι κανονικός. Αυτές οι ιδιότητες των κανονικών μετασχηματισμών δηλώνουν ότι, για μια δοσμένη τιμή του n σχηματίζουν μια *ομάδα.*

Τελικά, είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί από μια σύγκριση των Εξ. (5-54) και (6-14) ότι η κύρια συνάρτηση Hamilton $S(q_i, \alpha, t)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση για ένα πολύ ειδικό κανονικό μετασχηματισμό, δηλαδή ένα μετασχηματισμό τέτοιον ώστε η νέα Χαμιλτωνιανή συνάρτηση K για ένα δοσμένο σύστημα να είναι ταυτοτικά μηδέν. Σ'

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

αυτή την περίπτωση, οι νέες μεταβλητές (α_i και β_i) δεν είναι καθόλου μεταβλητές, αλλά είναι σταθερές της κίνησης και μπορούν να θεωρηθούν ως μια αναπαράσταση των αρχικών συνθηκών. Περαιτέρω, οι κανονικές εξισώσεις μετασχηματισμού και η κίνηση του συστήματος είναι τέτοια ώστε μια τροχιά στον (q_i, p_i)-χώρο μετασχηματίζεται σ' ένα σταθερό σημείο στον (α_i, β_i)-χώρο. Οι εξισώσεις μετασχηματισμού είναι, ουσιαστικά, η λύση των κανονικών εξισώσεων κίνησης. Άρα βλέπουμε ότι μια δοσμένη κύρια συνάρτηση συνδέεται μ' ένα συγκεκριμένο δυναμικό σύστημα. Απ' την άλλη μεριά, η εξέταση ενός γενικού κανονικού μετασχηματισμού μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας την Εξ. (6-23), χωρίς αναφορά στο υπό μελέτη σύστημα.

Παράδειγμα 6-1. Ας θεωρήσουμε το μετασχηματισμό

$$Q = \frac{1}{2}(q^2 + p^2), \qquad P = -\tan^{-1}\frac{q}{p} \quad . \tag{6-27}$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι αυτός ο μετασχηματισμός είναι κανονικός. Επιπλέον, ζητείται η νέα Χαμιλτωνιανή συνάρτηση για την περίπτωση όπου η παλιά Χαμιλτωνιανή είναι

$$H = \frac{1}{2}(q^2 + p^2) \quad . \tag{6-28}$$

Για να αποδείξουμε ότι ο μετασχηματισμός είναι κανονικός, θεωρούμε τη διαφορική μορφή της Εξ. (6-23) και την εκφράζουμε σε όρους των παλιών μεταβλητών. Έχουμε ότι

$$p\,\delta q - P\,\delta Q = \left(p + q\tan^{-1}\frac{q}{p}\right)\delta q + p\tan^{-1}\frac{q}{p}\,\delta p \quad . \tag{6-29}$$

Αυτή η έκφραση είναι τέλειο διαφορικό όπως μπορεί να αποδειχθεί σημειώνοντας ότι

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(p + q\tan^{-1}\frac{q}{p}\right) = \frac{p^2}{q^2 + p^2} = \frac{\partial}{\partial q}\left(p\,\tan^{-1}\frac{q}{p}\right) . \tag{6-30}$$

Άρα ο μετασχηματισμός είναι κανονικός

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Κατόπιν παρατηρούμε ότι το δεξιό μέρος της Εξ. (6-29) είναι ίσο με $\delta\psi$ και ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$\psi = \frac{1}{2}(q^2 + p^2)\tan^{-1}\frac{q}{p} + \frac{1}{2}qp \quad . \tag{6-31}$$

Η γεννήτρια συνάρτηση $\varphi(q, Q, t)$ λαμβάνεται χρησιμοποιώντας τις Εξ. (6-15), (6-31) και τις εξισώσεις μετασχηματισμού, και είναι

$$\varphi = Q\sin^{-1}\frac{q}{\sqrt{2Q}} + \frac{1}{2}q\sqrt{2Q - q^2} \quad . \tag{6-32}$$

Από την Εξ. (6-20) ή την (6-26) βλέπουμε ότι $K = H$. Άρα, χρησιμοποιώντας τις Εξ. (6-27) και (6-28), βρίσκουμε ότι η νέα Χαμιλτωνιανή συνάρτηση είναι

$$K = Q \quad . \tag{6-33}$$

Οι κανονικές εξισώσεις κίνησης, εκπεφρασμένες σε όρους των νέων μεταβλητών, είναι

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = 0\,, \qquad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = -1 \quad . \tag{6-34}$$

Βλέπουμε ότι η Q είναι σταθερά και η P ελαττώνεται γραμμικά με το χρόνο. Πρέπει να σημειωθεί ότι η νέα Χαμιλτωνιανή K είναι σταθερή.

Παράδειγμα 6-2. Ως παράδειγμα ενός ρεόνομου μετασχηματισμού, θεωρούμε την

$$\begin{aligned} Q &= \sqrt{2q}\; e^t \cos p \\ P &= \sqrt{2q}\; e^{-t} \sin p \quad . \end{aligned} \tag{6-35}$$

Γι' άλλη μια φορά, θέλουμε να δείξουμε ότι ο μετασχηματισμός είναι κανονικός.

Πρώτα παίρνουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$p\,\delta q - P\,\delta Q = (p - \sin p \cos p)\,\delta q + 2q \sin^2 p\,\delta p \qquad (6\text{-}36)$$

και ο έλεγχος τέλειου διαφορικού δίνει

$$\frac{\partial}{\partial p}(p - \sin p \cos p) = 2\sin^2 p = \frac{\partial}{\partial q}(2q \sin^2 p) \quad , \qquad (6\text{-}37)$$

πράγμα που σημαίνει ότι ο μετασχηματισμός είναι κανονικός. Για να βρούμε το ψ, πρώτα σημειώνουμε από την Εξ. (6-36) ότι

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial q} &= p - \sin p \cos p \\ \frac{\partial \psi}{\partial p} &= 2q \sin^2 p = q(1 - \cos^2 p + \sin^2 p) \quad . \end{aligned} \qquad (6\text{-}38)$$

Ολοκληρώνοντας, παίρνουμε

$$\psi = qp - q \sin p \cos p \quad . \qquad (6\text{-}39)$$

Για να πάρουμε τη γεννήτρια συνάρτηση $\varphi(q, Q, t)$, αρχίζουμε με τη συνάρτηση $\psi(q,p)$ και χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις μετασχηματισμού για να απαλείψουμε την p. Το αποτέλεσμα είναι

$$\varphi = q \cos^{-1} \frac{Qe^{-t}}{\sqrt{2q}} - \frac{1}{2} Qe^{-t} \sqrt{2q - Q^2 e^{-2t}} \quad . \qquad (6\text{-}40)$$

Σημειώνουμε ότι, αν και η $\varphi(q, Q, t)$ περιέχει το t εκπεφρασμένα, η ψ δεν είναι μια εκπεφρασμένη συνάρτηση του χρόνου γι' αυτό το ρεόνομο παράδειγμα.

Κύριες μορφές γεννητριών συναρτήσεων Στις προηγούμενες συζητήσεις επί των κανονικών μετασχηματισμών από τις $2n$ παλιές μεταβλητές (q_i, p_i) στις $2n$ νέες μεταβλητές (Q_i, P_i) θεωρήθηκαν γεννήτριες συναρτήσεις της μορφής $\varphi(q_i, Q_i, t)$. Αυτή η γεννήτρια συνάρτηση περιέχει μισές από τις παλιές μεταβλητές και μισές από τις νέες μεταβλητές, δηλαδή τις q_i και Q_i, $i = 1, 2, ..., n$. Επιπλέον, σημειώνουμε ότι εμπεριέχεται μόνο μια μεταβλητή από κάθε ζεύγος συζυγών μεταβλητών· δηλαδή τα p_i και P_i απουσιάζουν από τη

γεννήτρια συνάρτηση. Αυτές όμως εμφανίζονται στις Εξ. (6-18) και (6-19) οι οποίες χρησιμοποιούνται για να πάρουμε τις πραγματικές εξισώσεις μετασχηματισμού.

Για την παραγωγή των Εξ. (6-18) και (6-19) απαιτήθηκε η ανεξαρτησία των q_i και Q_i. Όταν αυτή η συνθήκη δεν ικανοποιείται, όπως στην περίπτωση όπου μια ή και περισσότερες από τις εξισώσεις μετασχηματισμού έχει τη μορφή των Εξ. (6-2), τότε είναι βολικότερο να χρησιμοποιηθεί μια γεννήτρια συνάρτηση, η οποία εμπεριέχει διαφορετικές μεταβλητές. Μπορούμε να δοκιμάσουμε, για παράδειγμα, μια γεννήτρια συνάρτηση των q_i, P_i και t. Αυτό προϋποθέτει ότι οι q_i και P_i μπορούν να μεταβάλλονται ανεξάρτητα και είναι σε συμφωνία με τη Χαμιλτωνιανή άποψη ότι δεν υπάρχει εκ των προτέρων λόγος για την εκλογή των Q_i αντί των P_i ως μεταβλητών.

Για να ξεχωρίσουμε τα διάφορα είδη γεννητριών συναρτήσεων, ας σημειώσουμε την $\varphi(q, Q, t)$ ως την πρώτου είδους $F_1(q, Q, t)$, δηλαδή,

$$F_1(q_i, Q_i, t) \equiv \varphi(q_i, Q_i, t) \quad . \tag{6-41}$$

Τρεις άλλοι τύποι γεννητριών συναρτήσεων έρχονται στου νου μας, δηλαδή $F_2(q_i, P_i, t)$, $F_3(p_i, Q_i, t)$ και $F_4(p_i, P_i, t)$. Γεννήτριες συναρτήσεις που εμπεριέχουν άλλους συνδυασμούς συντεταγμένων και ορμών μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν, υπό την προϋπόθεση ότι δεν μπορεί μια συντεταγμένη και η συζυγής της ορμή να εμφανίζονται στην ίδια γεννήτρια συνάρτηση.

Για να δείξουμε τη σχέση των $F_2(q_i, P_i, t)$ και $F_1(q_i, Q_i, t)$, ας αρχίσουμε με τη βασική διαφορική μορφή

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\, dq_i - \sum_{i=1}^{n} P_i\, dQ_i - H\, dt + K\, dt = dF_1(q_i, Q_i, t) \quad . \tag{6-42}$$

Επιθυμούμε να αντικαταστήσουμε τις Q_i με P_i ως μεταβλητές στη γεννήτρια συνάρτηση και στην αντίστοιχη διαφορική μορφή. Ως ένα πρώτο βήμα, ας προσθέσουμε την εξίσωση

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i\, dP_i + \sum_{i=1}^{n} P_i\, dQ_i = d\left(\sum_{i=1}^{n} Q_i P_i\right) \tag{6-43}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

στην Εξ. (6-42). Παίρνουμε

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\, dq_i + \sum_{i=1}^{n} Q_i\, dP_i - H\, dt + K\, dt = dF_2\,(q_i, P_i, t)\ , \quad (6\text{-}44)$$

όπου

$$F_2\,(q_i, P_i, t) = F_1\,(q_i, Q_i, t) + \sum_{i=1}^{n} Q_i\, P_i\ . \quad (6\text{-}45)$$

Μπορούμε να γράψουμε το ολικό διαφορικό της $F_2(q_i,P_i, t)$ με τη μορφή

$$dF_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial q_i}\, dq_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial P_i}\, dP_i + \frac{\partial F_2}{\partial t}\, dt\ . \quad (6\text{-}46)$$

Τότε, υποθέτοντας ότι οι μεταβλητές (q_i, P_i, t) είναι ανεξάρτητες, μπορούμε να εξισώσουμε τους συντελεστές στις Εξ. (6-44) και (6-46) και να πάρουμε

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}\ , \quad (i = 1, 2, ..., n)\ , \quad (6\text{-}47)$$

από τους όρους dq_i . Από τους όρους dP_i έχουμε

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}\ , \quad (i = 1, 2, ..., n)\ . \quad (6\text{-}48)$$

Μια σύγκριση των συντελεστών των dt δίνει

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}\ . \quad (6\text{-}49)$$

Εδώ έχουμε πάρει τη γεννήτρια συνάρτηση $F_2(q_i,P_i,t)$ και την αντίστοιχη διαφορική μορφή που δίνεται στην Εξ. (6-44). Οι κανονικές εξισώσεις μετασχηματισμού βρίσκονται από τις Εξ. (6-47) και (6-48) και η έκφραση για τη Χαμιλτωνιανή συνάρτηση έχει τη συνήθη μορφή της Εξ. (6-49).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Χρησιμοποιώντας παρόμοια διαδικασία, μπορούμε να παράγουμε τις ακόλουθες εξισώσεις που σχετίζονται με την $F_3(q_i, Q_i, t)$:

$$-\sum_{i=1}^{n} q_i\, dp_i - \sum_{i=1}^{n} P_i\, dQ_i - H\, dt + K\, dt = dF_3\,(p_i, Q_i, t) \qquad (6\text{-}50)$$

$$F_3\,(p_i, Q_i, t) = F_1\,(q_i, Q_i, t) - \sum_{i=1}^{n} q_i\, p_i \qquad (6\text{-}51)$$

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i} \quad , \; (i = 1, 2, ..., n) \qquad (6\text{-}52)$$

$$P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \quad , \; (i = 1, 2, ..., n) \qquad (6\text{-}53)$$

$$K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t} \; . \qquad (6\text{-}54)$$

Με παρόμοιο τρόπο, οι εξισώσεις που σχετίζονται με την $F_4(p_i, P_i, t)$ είναι:

$$-\sum_{i=1}^{n} q_i\, dp_i + \sum_{i=1}^{n} Q_i\, dP_i - H\, dt + K\, dt = dF_4\,(p_i, P_i, t) \qquad (6\text{-}55)$$

$$F_4\,(p_i, P_i, t) = F_2\,(q_i, P_i, t) - \sum_{i=1}^{n} q_i\, p_i \qquad (6\text{-}56)$$

$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i} \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \qquad (6\text{-}57)$$

$$Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i} \quad , \; (i = 1, 2, ..., n) \qquad (6\text{-}58)$$

$$K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t} \; . \qquad (6\text{-}59)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Μια άλλη προσέγγιση στο πρόβλημα της εύρεσης άλλων γεννητριών συναρτήσεων είναι εκείνη που βασίζεται στην εφαρμογή του μετασχηματισμού Legendre ο οποίος μελετήθηκε στο κεφάλαιο 4. Αν δούμε τις Εξ. (6-45), (6-51) και (6-56), οι οποίες δίνουν τις σχέσεις μεταξύ των γεννητριών συναρτήσεων, παρατηρούμε ότι έχουν τη μορφή της Εξ. (4-145) που σχετίζεται με το μετασχηματισμό Legendre. Επιπλέον, οι ενεργές μεταβλητές σε κάθε περίπτωση συνδέονται με εξισώσεις που έχουν τις συνήθεις μορφές των Εξ. (4-143) και (4-147).

Ως ένα συγκεκριμένο παράδειγμα, θεωρούμε την Εξ. (6-45) η οποία συνδέει τις γεννήτριες συναρτήσεις $F_1(q_i, Q_i, t)$ και $F_2(q_i, P_i, t)$. Εδώ οι ενεργές μεταβλητές στο μετασχηματισμό Legendre είναι οι Q_i , (u_i) και P_i , (v_i). Για να είναι τα πρόσημα σωστά, επιτρέπουμε η $-F_1(Q)$ ν' αντιστοιχεί στη $F(u_i)$ και η $-F_2(P)$ ν' αντιστοιχεί στο $G(v_i)$. Βλέπουμε ότι η Εξ. (4-147) οδηγεί στην Εξ. (6-48) και η Εξ. (4-143) αντιστοιχεί στην Εξ. (6-19), ή αντικαθιστώντας τη $\varphi(q_i, Q_i, t)$ με $F_1(q_i, Q_i, t)$,

$$P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \quad . \tag{6-60}$$

Αν θεωρήσουμε τις μερικές παραγώγους ως προς τις παθητικές συντεταγμένες (q_i), βλέπουμε από τις Εξ. (6-18) και (6-47) ότι η μορφή της εξίσωσης είναι η ίδια για οποιαδήποτε γεννήτρια συνάρτηση, δηλαδή,

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \quad . \tag{6-61}$$

Παράδειγμα 6-3. Θεωρούμε το μετασχηματισμό

$$\begin{aligned} Q &= \log \frac{\sin p}{q} \\ P &= q \cot p \quad . \end{aligned} \tag{6-62}$$

Ας πάρουμε τους τέσσερις βασικούς τύπους γεννητριών συναρτήσεων που σχετίζονται μ' αυτό το μετασχηματισμό.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Πρώτα ας ελέγξουμε ότι ο μετασχηματισμός είναι κανονικός. Έχουμε

$$p\,\delta q - P\,\delta Q = (p + \cot p)\delta q - q\cot^2 p\,\delta p \quad . \tag{6-63}$$

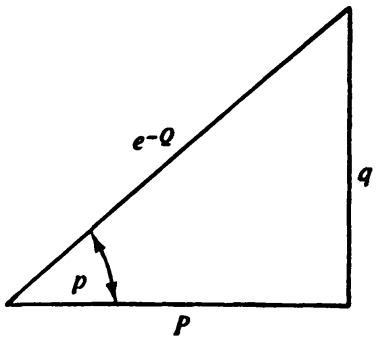
Ένας έλεγχος τέλειου διαφορικού δείχνει ότι

$$\frac{\partial}{\partial p}(p + \cot p) = \frac{\partial}{\partial q}(-\,q\cot^2 p) \quad . \tag{6-64}$$

Άρα ο μετασχηματισμός είναι κανονικός. Μια ολοκλήρωση του δεξιού μέρους της Εξ. (6-63) δίνει

$$\psi(q, p) = qp + q\cot p \quad . \tag{6-65}$$

Από τις Εξ. (6-15) και (6-41) ξέρουμε ότι η $F_1(q, Q)$ είναι ίση με $\psi(q, p)$ αλλά εκφράζεται σε όρους διαφορετικών μεταβλητών. Με τη βοήθεια του Σχ. 6-1, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Εξ. (5-65) και να πάρουμε



Σχ. 6-1. Μια γεωμετρική αναπαράσταση του μετασχηματισμού.

$$F_1(q, Q) = q\cos^{-1}\sqrt{1 - q^2 e^{2Q}} + \sqrt{e^{-2Q} - q^2} \quad . \tag{6-66}$$

Η αντικατάσταση της $F_1(q, Q)$ στις Εξ. (6-18) και (6-19) δίνει

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\frac{\partial F_1}{\partial q} = \cos^{-1}\sqrt{1 - q^2 e^{2Q}} = p$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial Q} = -\sqrt{e^{-2Q} - q^2} = -P \quad . \tag{6-67}$$

Στη συνέχεια, ας βρούμε την $F_2(q, P)$. Σημειώνοντας ξανά ότι οι ψ και F_1 είναι ίσες, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις Εξ. (6-45) και (6-65) για να πάρουμε

$$F_2 = qp + QP + q\cot p \quad . \tag{6-68}$$

Υπολογίζοντας καθ' έναν απ' αυτούς τους όρους, χρησιμοποιώντας τις (q, P) ως μεταβλητές, βλέπουμε ότι

$$qp = q\tan^{-1}\frac{q}{P}$$

$$QP = -P\log\sqrt{q^2 + P^2}$$

$$q\cot p = P \quad ,$$

που οδηγεί στο

$$F_2(q, P) = q\tan^{-1}\frac{q}{P} + P(1 - \log\sqrt{q^2 + P^2}) \quad . \tag{6-69}$$

Ως έλεγχο, βλέπουμε από τις Εξ. (6-47) και (6-48) ότι

$$\frac{\partial F_2}{\partial q} = \tan^{-1}\frac{q}{P} = p$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial P} = -\log\sqrt{q^2 + P^2} = Q \quad . \tag{6-70}$$

Μια παρόμοια ανάλυση, χρησιμοποιώντας την Εξ. (6-51), δίνει την τρίτη γεννήτρια συνάρτηση, δηλαδή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΠΑΤΡΩΝ

$$F_3(p, Q) = F_1 - qp = e^{-Q} \cos p \quad . \tag{6-71}$$

Σε συμφωνία με τις Εξ. (6-52) και (6-53) βρίσκουμε ότι,

$$\frac{\partial F_3}{\partial p} = - e^{-Q} \sin p = - q$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial Q} = - e^{-Q} \cos p = - P \quad . \tag{6-72}$$

Τελικά, από τις Εξ. (6-57) και (6-68), παίρνουμε

$$F_4 (p, P) = F_2 - qp = QP + q \cot p = P + P \log\left(\frac{\cos p}{P}\right) \quad . \tag{6-73}$$

Ένας έλεγχος των Εξ. (6-57) και (6-58) δείχνει ότι

$$\frac{\partial F_4}{\partial p} = - P \tan p = - q$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial P} = \log\left(\frac{\cos p}{P}\right) = Q \quad . \tag{6-74}$$

Σ' όλες τις περιπτώσεις, η γεννήτρια συνάρτηση δεν είναι μια εκπεφρασμένη συνάρτηση του χρόνου. Άρα από την Εξ. (6-49), βλέπουμε για παράδειγμα, ότι

$$K(Q, P, t) = H(q, p, t) \tag{6-75}$$

ανεξάρτητα από το υπό εξέταση δυναμικό σύστημα .

Περαιτέρω σχόλια στη μέθοδο Hamilton-Jacobi. Με αυξανόμενη γνώση επί της θεωρίας των κανονικών μετασχηματισμών, ας θεωρήσουμε ξανά τη μερική διαφορική εξίσωση των Hamilton-Jacobi. Ανακαλούμε το ότι η κύρια συνάρτηση $S(q_i, \alpha_i, t)$ είναι μια γεννήτρια συνάρτηση για ένα κανονικό μετασχηματισμό που οδηγεί σε μια νέα Χαμιλτωνιανή K η οποία είναι ταυτοτικά μηδέν. Άρα από τις

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

κανονικές εξισώσεις έχουμε, ότι κάθε μια από τις Q_i και P_i είναι σταθερή. Αν ταυτίσουμε τις Q_i με α_i και τις P_i με β_i , βλέπουμε ότι η κύρια συνάρτηση είναι της μορφής $F_1(q_i, \alpha_i, t)$. Επιπλέον, εφαρμόζεται η εξίσωση Hamilton-Jacobi που δίνεται από την Εξ. (5-53) και μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + H\left(q_i, \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, t\right) = 0 \quad , \tag{6-76}$$

όπου σημειώνουμε ότι

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \quad . \tag{6-77}$$

Επίσης, αντίστοιχα με την Εξ. (6-19), έχουμε

$$-\beta_i = \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_i} \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \quad . \tag{6-78}$$

Εδώ θεωρούμε ότι $F_1(q_i, \alpha_i, t)$ είναι τουλάχιστον διπλά διαφορίσιμη και οι q_i και α_i είναι ανεξάρτητες μεταβλητές όπως υποδηλώνεται από την ορίζουσα

$$\left| \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_i \partial \alpha_j} \right| \neq 0 \quad . \tag{6-79}$$

Αν τώρα δούμε την Εξ. (6-49), φαίνεται δυνατόν να θέσουμε K ίσο με μηδέν και για άλλη μια φορά να λάβουμε την εξίσωση Hamilton-Jacobi, αυτή τη φορά χρησιμοποιώντας τη γεννήτρια συνάρτηση $F_2(q_i, \alpha_i, t)$. Πράγματι είναι δυνατόν και παίρνουμε

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} + H\left(q_i, \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, t\right) = 0 \quad , \tag{6-80}$$

η οποία είναι ταυτόσημη στη μορφή με την Εξ. (6-76). Σ' αυτή την περίπτωση, όμως, ταυτίζουμε τις P_i με α_i και τις Q_i με β_i. Από τις Εξ. (6-47) και (6-48) έχουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{6-81}$$

και

$$\beta_i = \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_i} \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \quad . \tag{6-82}$$

Από την Εξ. (6-45) ξέρουμε ότι οι F_1 και F_2 διαφέρουν κατά όρους της μορφής Q_iP_i που στην παρούσα περίπτωση είναι οι σταθεροί όροι $\beta_i\alpha_i$. Αυτό είναι συμβιβαστό με το γεγονός ότι οι F_1 και F_2 είναι λύσεις της ίδιας μερικής διαφορικής εξίσωσης των Hamilton-Jacobi στην οποία η F δεν εμφανίζεται εκπεφρασμένα, αλλά μόνο σε όρους των μερικών παραγώγων της.

Ένα άλλο σημείο για επισήμανση είναι ότι οι Εξ. (6-78) και (6-82) διαφέρουν στο πρόσημο, που συνεπάγεται ότι κάθε όρος β_i που λαμβάνεται χρησιμοποιώντας την F_2 είναι ίσος με το αντίστοιχο $-\beta_i$ που λαμβάνεται από την F_1. Η σύμβαση για το θετικό πρόσημο χρησιμοποιείται ευρύτατα στην ουράνια μηχανική, αλλά, γενικά, θα συνεχίσουμε με το αρνητικό πρόσημο το οποίο χρησιμοποιήσαμε προηγούμενα.

Με παρόμοιο τρόπο, μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση Hamilton-Jacobi σε όρους των F_3 και F_4. Εδώ παίρνουμε

$$\frac{\partial F_3}{\partial t} + H\left(-\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, p_i, t\right) = 0 \tag{6-83}$$

ή

$$\frac{\partial F_4}{\partial t} + H\left(-\frac{\partial F_4}{\partial p_i}, p_i, t\right) = 0 \tag{6-84}$$

και οι γεννήτριες συναρτήσεις είναι της μορφής $F_3(p_i, \alpha_i, t)$ και $F_4(p_i, \alpha_i, t)$. Στην προηγούμενη περίπτωση, η α_i αντιστοιχεί στην Q_i, ενώ στην επόμενη περίπτωση η α_i αντιστοιχεί στην P_i. Οι γεννήτριες συναρτήσεις F_3 και F_4 δεν χρησιμοποιούνται ευρέως στην εξίσωση των Hamilton-Jacobi γιατί κάθε q_i στη Χαμιλτωνιανή αντικαθίσταται από $-\partial F/\partial p_i$ και η $H(q_i, p_i, t)$ είναι συνήθως πιο πολύπλοκη συνάρτηση των q_i από ό,τι των p_i.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ως τελικό σχόλιο στη μέθοδο των Hamilton-Jacobi ας θεωρήσουμε τη χρήση της χαρακτηριστικής συνάρτησης $W(q_i, \alpha_i)$ ως μιας γεννήτριας συνάρτησης. Εδώ ασχολούμαστε με *συντηρητικά συστήματα* μόνο και ανακαλούμε ότι η $W(q_i, \alpha_i)$ είναι μια πλήρης λύση της τροποποιημένης εξίσωσης των Hamilton-Jacobi :

$$H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = \alpha_n \quad . \tag{6-85}$$

Μ' άλλα λόγια, η πλήρης λύση περιέχει n ανεξάρτητες μη προσθετικές σταθερές $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$. Για να έχουμε μεγαλύτερη γενικότητα, ας ορίσουμε n τον αριθμό P_i οι οποίες συνδέονται με τις α_i με n ανεξάρτητες συναρτήσεις,

$$P_i = P_i(\alpha_j) \quad , \qquad (i = 1, 2, ..., n) \quad , \tag{6-86}$$

όπου κάθε P_i είναι σταθερά. Αντίστροφα, αν λύσουμε ως προς τις α_i ως συναρτήσεις των P_i, έχουμε

$$\alpha_i = \alpha_i(P_j) \quad , \qquad (i = 1, 2, ..., n) \quad . \tag{6-87}$$

Τώρα ας απαλείψουμε τις α_i υπέρ των P_i όπως οι απαιτούμενες n ανεξάρτητες σταθερές στη χαρακτηριστική συνάρτηση. Το αποτέλεσμα είναι μια συνάρτηση $W(q_i, P_i)$ την οποία θα χρησιμοποιήσουμε ως γεννήτρια συνάρτηση του τύπου F_2 . Από τις Εξ. (6-47) και (6-48) παίρνουμε

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{6-88}$$

$$Q_i = \frac{\partial W}{\partial P_i} \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \quad , \tag{6-89}$$

οι οποίες μπορούν να λυθούν παράγοντας τις κανονικές εξισώσεις μετασχηματισμού που συνδέουν τις (Q_i, P_i) και (q_i, p_i). Η φύση όμως των Q_i , διαφαίνεται πιο εύκολα βρίσκοντας τη νέα Χαμιλτωνιανή και λαμβάνοντας τις κανονικές εξισώσεις κίνησης.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Χρησιμοποιούμε μια γεννήτρια συνάρτηση της μορφής $W(q_i, P_i)$ η οποία δεν είναι εκπεφρασμένη συνάρτηση του χρόνου και άρα βλέπουμε από την Εξ. (6-49) ότι οι K και H είναι ίσες. Άρα από τις Εξ. (6-85) και (6-87) παίρνουμε ότι

$$K(P_i) = \alpha_n(P_i) \quad , \tag{6-90}$$

όπου σημειώνουμε ότι οι Q_i είναι αφανείς και κάθε αντίστοιχη P_i είναι σταθερή. Οι πρώτες n κανονικές εξισώσεις είναι

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = \nu_i \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \quad , \tag{6-91}$$

όπου οι σταθερές ν_i είναι συναρτήσεις των P_i. Μετά από ολοκλήρωση, παίρνουμε

$$Q_i = \nu_i t + \beta_i \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \quad . \tag{6-92}$$

Οι υπόλοιπες κανονικές εξισώσεις είναι

$$\dot{P}_i = - \frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0 \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \quad , \tag{6-93}$$

που επιβεβαιώνει το γεγονός ότι όλες οι P_i είναι σταθερές. Επίσης βλέπουμε ότι η πλήρης λύση του προβλήματος του Hamilton περιέχει τις απαραίτητες $2n$ αυθαίρετες σταθερές, δηλαδή τις P_i και β_i, $i = 1, 2, ..., n$. Οι ν_i δεν είναι ανεξάρτητες σταθερές αφού είναι συναρτήσεις των P_i.

Συνοψίζοντας, βλέπουμε ότι η χρήση της $W(q_i, P_i)$ ως γεννήτριας συνάρτησης έχει οδηγήσει σ' ένα νέο σύνολο συντεταγμένων το οποίο, γενικά, μεταβάλλεται γραμμικά με το χρόνο. Σημειώνουμε όμως, ότι αν οποιαδήποτε από τις P_i απουσιάζει από τις $\alpha_n(P_i)$, η αντίστοιχη ν_i θα μηδενίζεται και η Q_i θα είναι σταθερή. Αυτή η θεωρία βρίσκει εφαρμογή στη μελέτη της περιοδικής κίνησης. Ειδικά παραδείγματα είναι η χρήση της δράσης και των γωνιακών μεταβλητών στη φυσική και των Delaunay μεταβλητών στην ουράνια μηχανική.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

6-2. ΕΙΔΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Μετά τη θεμελίωση γενικών κριτηρίων των κανονικών μετασχηματισμών, ας θεωρήσουμε τώρα μερικά παραδείγματα. Στη συνέχεια θα στραφούμε στη θεωρία των ομογενών κανονικών και των σημειακών μετασχηματισμών, πράγμα που θα εισάγει νέες όψεις της γενικής θεωρίας που εφαρμόζεται σε περιπτώσεις στις οποίες τα υπό εξέταση διαφορικά δεν είναι ανεξάρτητα.

Μερικοί απλοί μετασχηματισμοί. Πρώτα ας θεωρήσουμε τον *ταυτοτικό μετασχηματισμό*, ο οποίος είναι ένα εμφανέστατο παράδειγμα κανονικού μετασχηματισμού και παράγεται από μια συνάρτηση της μορφής

$$F_2 = \sum_{i=1}^{n} q_i P_i \quad , \tag{6-94}$$

όπως μπορεί να επιβεβαιωθεί σημειώνοντας ότι

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i \ , \qquad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i \ , \quad (i = 1, 2, ..., n) \ . \tag{6-95}$$

Επίσης μπορεί να δειχτεί με τη βοήθεια των Εξ. (6-52) και (6-53) ότι ο ταυτοτικός μετασχηματιμός παράγεται από την

$$F_3 = - \sum_{i=1}^{n} p_i Q_i \quad . \tag{6-96}$$

Ανακύπτει τώρα το ερώτημα κατά πόσο συναρτήσεις της μορφής $F_1(q_i, Q_i, t)$ ή $F_4(p_i, P_i, t)$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να παράγουν τον ταυτοτικό μετασχηματισμό. Η απάντηση είναι όχι, για το λόγο ότι οι μεταβλητές σ' αυτές τις γεννήτριες συναρτήσεις συνδέονται απ' ευθείας με τις εξισώσεις μετασχηματισμού αυτές καθ' αυτές και γι' αυτό δεν μπορούν να μεταβάλλονται ανεξάρτητα όπως απαιτείται από τη θεωρία. Αυτή είναι μια ειδική περίπτωση σημειακού μετασχηματισμού, ενός θέματος που θα συζητηθεί αργότερα σ' αυτό το κεφάλαιο.

Τώρα θεωρούμε ένα σχετιζόμενο μετασχηματισμό ο οποίος οδηγεί σε μια μεταφορά στο χώρο των φάσεων. Ας ξεκινήσουμε με τη

γεννήτρια συνάρτηση F_2 της Εξ. (6-94). Μετά θα αντικαταστήσουμε την q_i με $(q_i + c_i)$ και την P_i με $(P_i - d_i)$, παραλείποντας τον όρο $c_i d_i$ αφού αυτή η αντικατάσταση δεν θα επηρεάσει το μετασχηματισμό. Έπειτα έχουμε

$$F_2 = \sum_{i=1}^{n} (q_i P_i + c_i P_i - d_i q_i) \tag{6-97}$$

και παίρνουμε

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i - d_i , \qquad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i + c_i$$

ή

$$Q_i = q_i + c_i , \qquad P_i = p_i + d_i , \qquad (i = 1, 2, ..., n) , \tag{6-98}$$

το οποίο εκφράζει την απαιτούμενη μεταφορά. Εδώ συνήθως θεωρούμε ότι οι c_i και d_i είναι σταθερές, αν και μπορούσαν να είναι συναρτήσεις του χρόνου.

Ο επόμενος απλός μετασχηματισμός που θα συζητηθεί είναι ένας που αλλάζει τους ρόλους των συντεταγμένων και των ορμών. Υποθέτουμε ότι

$$F_1 = \sum_{i=1}^{n} q_i Q_i . \tag{6-99}$$

Χρησιμοποιώντας τις Εξ. (6-18) και (6-19), παίρνουμε

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} = Q_i , \quad P_i = - \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = - q_i , \quad (i = 1, 2, ..., n) . \tag{6-100}$$

Ο λόγος για τον οποίο το αρνητικό πρόσημο απαιτείται σε μια απ' αυτές τις εξισώσεις μετασχηματισμού είναι ότι οι κανονικές εξισώσεις από μόνες τους δεν είναι τελείως συμμετρικές ως προς την αλλαγή των συντεταγμένων και των ορμών. Ένα αρνητικό πρόσημο περιέχεται στην εξίσωση για τις $\dot{p}_i$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι αυτός ο μετασχηματισμός δίνει έμφαση πάλι στη Χαμιλτωνιανή άποψη ότι οι συντεταγμένες και οι ορμές είναι ποιοτικά δυσδιάκριτες αλλά είναι απαραίτητα ζευγαρωμένες ως συνιστώσες ενός διανύσματος στο χώρο των φάσεων. Μ' άλλα λόγια, δεν έχουν πάντα τα συνήθη γνωρίσματα της θέσης για συντεταγμένες και κίνησης για ορμές, αλλά βρίσκονται μαζί ως ζευγαρωμένες ποσότητες.

Ένας άλλος απλός κανονικός μετασχηματισμός είναι ο ορθογώνιος μετασχηματισμός των q_i και p_i που παράγεται από την

$$F_2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} P_i q_j \quad , \tag{6-101}$$

όπου a_{ij} είναι σταθερές που ικανοποιούν τη σχέση ορθογωνικότητας

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} \tag{6-102}$$

και δ_{jk} είναι το δέλτα του Kronecker.(*) Η σχέση ορθογωνικότητας μπορεί επίσης να γραφεί με τη βοήθεια πινάκων με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\mathbf{a}^T \mathbf{a} = \mathbf{a}\mathbf{a}^T = \mathbf{1} \ , \tag{6-103}$$

υποδηλώνοντας ότι ο ανάστροφος του $\mathbf{a}$ είναι ίσος με τον αντίστροφό του. Οι εξισώσεις μετασχηματισμού λαμβάνονται κατά τον συνήθη τρόπο, δηλαδή,

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} P_i \, , \qquad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \quad . \tag{6-104}$$

Η πρώτη εξίσωση μπορεί να λυθεί ως προς P_j σε όρους των p_i. Τότε οι εξισώσεις μετασχηματισμού είναι

(*) $\delta jk = \begin{cases} 1 & \text{για} \quad j = k \\ 0 & \text{για} \quad j \neq k \end{cases}$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\begin{aligned} Q_i &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, q_j \\ P_i &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, p_j \end{aligned} \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \ . \qquad (6\text{-}105)$$

Για τη συνήθη περίπτωση όπου η ορίζουσα |a| = 1, αυτές οι εξισώσεις μπορούν να θεωρηθούν ότι εκφράζουν ίσες περιστροφές στον q - χώρο και p - χώρο. Πρέπει να σημειωθεί ότι αυτοί ανάγονται στον ταυτοτικό μετασχηματισμό όταν $a_{ij} = \delta_{ij}$, που αντιστοιχεί σε μηδενική περιστροφή.

Παράδειγμα 6-4. Θεωρούμε ένα σύστημα που έχει n βαθμούς ελευθερίας. Ας βρούμε μια γεννήτρια συνάρτηση για ένα ζητούμενο μετασχηματισμό ισοδύναμο με τη διαδοχή δύο απλών μετασχηματισμών, δηλαδή μια μεταφορά που ακολουθείται από μια περιστροφή. Υποθέτουμε ότι ο πρώτος μετασχηματισμός συνεπάγεται την κίνηση από το (q_i, p_i) στο (Q_i, P_i) και ο δεύτερος από το (Q_i, P_i) στο (Q_i^*, P_i^*). Από την Εξ. (6-97), βλέπουμε ότι η γεννήτρια συνάρτηση για τη μεταφορά είναι

$$F_2\,(q_i, P_i) = \sum_{i=1}^{n} [(q_i + c_i)P_i - d_i\, q_i] \ , \qquad (6\text{-}106)$$

η οποία δίνει τις εξισώσεις μετασχηματισμού

$$Q_i = q_i + c_i \ , \quad P_i = p_i + d_i \ , \quad (i = 1, 2, ..., n) \ , \qquad (6\text{-}107)$$

Η γεννήτρια συνάρτηση για την περιστροφή είναι επίσης τύπου 2, και σε συμφωνία με την Εξ. (6-101) είναι της μορφής,

$$F'_2(Q_i, P_i^*) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, P_i^*\, Q_j \ . \qquad (6\text{-}108)$$

Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το δεύτερο μετασχηματισμό

$$\begin{aligned} Q_i^* &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} Q_j \\ P_i^* &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} P_j \end{aligned} \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \ . \qquad (6\text{-}109)$$

Από τις Εξ. (6-107) και (6-109) συνεπάγεται ότι ο τελικός μετασχηματισμός είναι

$$\begin{aligned} Q_i^* &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (q_j + c_j) \\ P_i^* &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (q_j + d_j) \end{aligned} \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \ . \qquad (6\text{-}110)$$

Το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε τώρα είναι να βρούμε τη γεννήτρια συνάρτηση γι' αυτόν τον τελικό μετασχηματισμό. Σ' αυτό το σημείο ας ανακαλέσουμε, Εξ. (6-44), ότι η παραλλακτική μορφή (για σταθερό χρόνο) που συνδέεται με την F_2 είναι

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \, \delta q_i + \sum_{i=1}^{n} Q_i \, \delta P_i = \delta F_2 \, (q_i, P_i) \ . \qquad (6\text{-}111)$$

Με παρόμοιο τρόπο, για το δεύτερο μετασχηματισμό έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \, \delta Q_i + \sum_{i=1}^{n} Q_i^* \, \delta P_i^* = \delta F'_2 \, (Q_i, P_i^*) \ . \qquad (6\text{-}112)$$

Προσθέτοντας τις Εξ. (6-111) και (6-112), παίρνουμε

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \, \delta q_i + \sum_{i=1}^{n} Q_i^* \, \delta P_i^* = \delta F_2 + \delta F'_2 - \sum_{i=1}^{n} P_i \, \delta Q_i - \sum_{i=1}^{n} Q_i \, \delta P_i \ . \qquad (6\text{-}113)$$

Για να έχουμε ένα μοναδικό κανονικό μετασχηματισμό, που συνδέει τα (q_i, p_i) και (Q_i^*, P_i^*), το δεξιό μέρος της Εξ. (6-113) πρέπει να είναι ίσο με ένα τέλειο διαφορικό, το οποίο θα καλέσουμε δF_2^*. Άρα

$$\delta F_2^* = \delta F_2 + \delta F'_2 - \delta\left(\sum_{i=1}^{n} Q_i P_i\right) \quad . \tag{6-114}$$

Στη γραφή των εκφράσεων για τα δF_2 και $\delta F'_2$ ας χρησιμοποιήσουμε τις (q_i, p_i) μεταβλητές ώστε να διευκολύνουμε τη συλλογή των όρων και τους ελέγχους τέλειου διαφορικού. Από τις Εξ. (6-106) και (6-107), έχουμε

$$\delta F_2 = \sum_{j=1}^{n} [p_j \delta q_j + (q_j + c_j)\, \delta p_j] \quad . \tag{6-115}$$

Με παρόμοιο τρόπο, από τις Εξ. (6-108) και (6-110) παίρνουμε ότι

$$\delta F'_2 = \sum_{j=1}^{n} [(p_j + d_j)\, \delta q_j + (q_j + c_j)\delta p_j] \quad , \tag{6-116}$$

όπου για την απλούστευση της μορφής χρησιμοποιήθηκε η Εξ. (6-102). Τελικά, έχουμε

$$\delta\left(\sum_{i=1}^{n} Q_i P_i\right) = \sum_{j=1}^{n} [(p_j + d_j)\, \delta q_j + (q_j + c_j)\delta p_j] \quad . \tag{6-117}$$

Άρα από τις Εξ. (6-114)- (6-117) βλέπουμε ότι

$$\delta F_2^* = \delta F_2 \tag{6-118}$$

γι' αυτή τη συγκεκριμένη ακολουθία μετασχηματισμών, δηλαδή μπορούμε να εξισώσουμε την F_2^* με την F_2. Ό,τι απομένει είναι να γράψουμε την F_2 σε όρους των μεταβλητών (p_i, P_i^*). Από την Εξ. (6-109) παίρνουμε

$$P_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} P_i^* \quad , \quad (j = 1,2, ..., n) \tag{6-119}$$

και άρα, χρησιμοποιώντας την Εξ. (6-106), βρίσκουμε ότι

$$F_2^*(q_i, P_i^*) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [a_{ij}(q_j + c_j) P_i^* - d_j q_j] \ . \qquad (6\text{-}120)$$

Αυτό το αποτέλεσμα μπορεί εύκολα να ελεγχθεί για να δειχθεί ότι παράγει το μετασχηματισμό που δίνεται από την Εξ. (6-110). Φυσικά, η αντιστροφή της σειράς των μετασχηματισμών οδηγεί σε διαφορετικό F_2^*.

Ομογενείς κανονικοί μετασχηματισμοί. Προηγούμενα δείξαμε ότι αν η διαφορική μορφή

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - \sum_{i=1}^{n} P_i \delta Q_i = \delta\psi \qquad (6\text{-}121)$$

είναι ένα *τέλειο διαφορικό* όταν εκφράζεται σε όρους των μεταβλητών (q_i, p_i), τότε ο μετασχηματισμός που δίνεται από τις $2n$ συναρτήσεις $Q_i(q_k, p_k, t)$, $P_i(q_k, p_k, t)$ είναι *κανονικός*. Σ' αυτή την παραγωγή παρατηρούμε ότι ο χρόνος t παραμένει αμετάβλητος από το μετασχηματισμό και γι' αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως παράμετρος. Επίσης, ανακαλούμε ότι η ψ είναι ίση σε τιμή με τη γεννήτρια συνάρτηση $\varphi(q_i, Q_i, t)$ αλλά εκφράζεται σε όρους των (q_i, p_i, t).

Τώρα ας θεωρήσουμε την περίπτωση κατά την οποία οι φ και ψ είναι *ταυτοτικά μηδέν*. Τότε η Εξ. (6-121) γίνεται

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - \sum_{i=1}^{n} P_i \delta Q_i = 0 \qquad (6\text{-}122)$$

και ο αντίστοιχος μετασχηματισμός ονομάζεται, *ομογενής κανονικός μετασχηματισμός*. Αυτός ο μετασχηματισμός είναι επίσης γνωστός ως *μετασχηματισμός Mathieu ή μετασχηματισμός επαφής*. (*) Θυμίζουμε ότι έχουμε προηγουμένως συναντήσει ένα μετασχηματισμό αυτού του

(*) Πολλοί συγγραφείς, ωστόσο, χρησιμοποιούν τον όρο *μετασχηματισμός επαφής* με την ίδια έννοια όπως αυτή του *κανονικού μετασχηματισμού*.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τύπου στην πορεία εισαγωγής των (α_i, β_i) παραμέτρων στην ανάπτυξη της θεωρίας των Hamilton-Jacobi .

Ποιά είναι μερικά από τα πιο σημαντικά χαρακτηριστικά των ομογενών μετασχηματισμών; Πρώτα, σημειώνουμε από την Εξ. (6-5) ότι

$$L^*(Q_i, \dot{Q}_i, t) = L(q_i, \dot{q}_i, t) \tag{6-123}$$

δηλαδή, οι παλιές και νέες συναρτήσεις Lagrange είναι ίσες. Φαίνεται εύλογο ότι οι νέες και παλιές συναρτήσεις Hamilton πρέπει επίσης να είναι ίσες. Αλλά από την Εξ. (6-26) βλέπουμε ότι αυτό είναι δυνατό μόνο όταν οι εξισώσεις μετασχηματισμού είναι σκληρόνομες και ως εκ τούτου δεν περιέχουν εκπεφρασμένα το χρόνο. Γενικά, έχουμε

$$K = H + \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial Q_i}{\partial t} \tag{6-124}$$

για ένα ομογενή κανονικό μετασχηματισμό.

Συνεχίζοντας με την περίπτωση κατά την οποία $\psi \equiv 0$, οι Εξ. (6-24) και (6-25) ανάγονται στις

$$p_i = \sum_{j=1}^{n} P_j \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{6-125}$$

$$\sum_{j=1}^{n} P_j \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} = 0 \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \quad . \tag{6-126}$$

Υποθέτουμε ότι οι P_j δεν είναι ταυτοτικά ίσες με μηδέν και ως εκ τούτου η ορίζουσα των συντελεστών στην Εξ. (6-126) πρέπει να είναι μηδέν. Έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$\left| \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} \right| = 0 \quad . \tag{6-127}$$

Αυτό αναγνωρίζεται ως η Ιακωβιανή ορίζουσα των Q_j ως συναρτήσεις των p_i, και συνεπάγεται ότι οι n εξισώσεις

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$Q_j = Q_j(q_i, p_i, t)\,, \quad (j = 1, 2, ..., n) \tag{6-128}$$

δεν μπορούν να λυθούν και να δώσουν τις p_i ως συναρτήσεις των (q_k, Q_k, t). Γι' αυτό το λόγο, το μητρώο $(\partial Q_i/\partial p_i)$ έχει τάξη μικρότερη από n, δηλαδή $(n\text{-}m)$ όπου $1<m\leq n$. Ως συνέπεια, υπάρχουν m ανεξάρτητες σχέσεις της μορφής

$$\boldsymbol{\Omega}_j(q_i, Q_i, t) = 0\,, \quad (j = 1, 2, ..., m) \tag{6-129}$$

δηλαδή, οι $\boldsymbol{\Omega}_j$ είναι συναρτήσεις που περιέχουν τις q_i και Q_i αλλά όχι τις p_i.

Στρεφόμενοι τώρα στη μελέτη των γεννητριών συναρτήσεων που συνδέονται με ομογενείς κανονικούς μετασχηματισμούς, σημειώνουμε πρώτα ότι η $\varphi(q_i, Q_i, t)$, την οποία εξισώσαμε με $F_1(q_i, Q_i, t)$, είναι ταυτοτικά μηδέν. Αναφερόμενοι στις Εξ. (6-18) και (6-19) αυτό φαίνεται να συνεπάγεται ότι οι p_i και P_i είναι μηδέν. Ωστόσο, κάτω από πιο προσεκτική εξέταση, διαπιστώνουμε ότι οι Εξ. (6-18) και (6-19) δεν ισχύουν σ' αυτή την περίπτωση αφού οι q_i και Q_i δεν μπορούν να μεταβάλλονται ανεξάρτητα. Στην πραγματικότητα, βλέπουμε από την Εξ. (6-129) ότι τα δq_i και δQ_i περιορίζονται από την

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}_j}{\partial q_i}\,\delta q_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}_j}{\partial Q_i}\,\delta Q_i = 0\,, \quad (j = 1, 2, ..., m)\ . \tag{6-130}$$

Τώρα ανακύπτει το ερώτημα, που αφορά στο τι πρέπει να γίνει για να αποφευχθούν οι δυσκολίες που προέρχονται από τη μη ανεξαρτησία των q_i και Q_i. Μια δυνατότητα είναι να χρησιμοποιηθεί ενός άλλου είδους γεννήτρια συνάρτηση η οποία έχει ανεξάρτητες μεταβλητές. Στη συνήθη περίπτωση, οι $F_2(q_i, P_i, t)$, $F_3(p_i, Q_i, t)$ και $F_4(p_i, P_i, t)$ είναι όλες κατάλληλες. Μια άλλη προσέγγιση είναι να ενσωματώσουμε τους δεσμούς που εκφράζονται από την Εξ. (6-129) χρησιμοποιώντας m πολλαπλασιαστές Lagrange και την επαυξημένη γεννήτρια συνάρτηση

$$F_1^*(\lambda_k, q_i, Q_i, t) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \boldsymbol{\Omega}_j(q_i, Q_i, t)\,, \tag{6-131}$$

όπου τώρα θεωρούμε τις q_i και Q_i να είναι ανεξάρτητες μεταβλητές. Τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις Εξ. (6-18) και (6-19) με τις

$$p_i = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial \Omega_j}{\partial q_i} \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{6-132}$$

$$P_i = - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial \Omega_j}{\partial Q_i} \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \quad . \tag{6-133}$$

Αυτές οι $2n$ εξισώσεις συν τις m εξισώσεις από την (6-129) μπορούν να λυθούν για τις λ_k, Q_i και P_i ως συναρτήσεις των (q_i, p_i, t), καθορίζοντας τον κανονικό μετασχηματισμό. Σε αντιστοιχία με την Εξ. (6-20) παίρνουμε

$$K = H + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial \Omega_j}{\partial t} \quad . \tag{6-134}$$

Ένα άλλο σημαντικό χαρακτηριστικό των ομογενών κανονικών μετασχηματισμών λαμβάνεται από τις Εξ. (6-125) και (6-126) και αναφέρεται σε συγκεκριμένες ομογενείς ιδιότητες των συναρτήσεων $Q_i(q_k, p_k, t)$ και $P_i(q_k, p_k, t)$. Αν πάρουμε την Εξ. (6-125), πολλαπλασιάζοντας τα δυο μέλη επί $\partial Q_k / \partial p_i$ και αθροίζοντας ως προς i, έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} P_j \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \quad . \tag{6-135}$$

Παρομοίως, πολλαπλασιάζοντας την Εξ. (6-126) επί $\partial Q_k / \partial q_i$ και αθροίζοντας ως προς i, παίρνουμε

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} P_j \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} = 0 \quad . \tag{6-136}$$

Αν αφαιρέσουμε την Εξ. (6-136) από την Εξ. (6-135), βρίσκουμε ότι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} P_j \left(\frac{\partial Q_k}{\partial p_i} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} - \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} \right) . \quad (6\text{-}137)$$

Στη συνέχεια προτρέχουμε σ' ένα αποτέλεσμα της συζήτησης στην παράγραφο 6-3 για τις αγκύλες του Poisson όπου αποδεικνύεται ότι

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial Q_k}{\partial p_i} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} - \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} \right) = 0 , \quad (6\text{-}138)$$

για κάθε j,k, αν ο μετασχηματισμός είναι κανονικός. Άρα συμπεραίνουμε, από τις Εξ. (6-137) και (6-138), ότι

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} = 0 , \quad (k = 1, 2, ..., n) . \quad (6\text{-}139)$$

Χρησιμοποιώντας παρόμοια διαδικασία, όπου η Εξ. (6-125) πολλαπλασιάζεται επί $\partial P_k / \partial p_i$ και η Εξ. (6-126) επί $\partial P_k / \partial q_i$, λαμβάνουμε

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial P_k}{\partial p_i} = \sum_{j=1}^{n} P_j \delta_{jk}$$

ή

$$P_k = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial P_k}{\partial p_i} , \quad (k = 1, 2, ..., n) . \quad (6\text{-}140)$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων του Euler που αφορούν ομογενείς συναρτήσεις, συμπεραίνουμε από την Εξ. (6-139) ότι η $Q_k(q_i, p_i, t)$ είναι *ομογενής μηδενικού βαθμού* ως προς p_i. Από την Εξ. (6-140) βλέπουμε ότι η $P_k(q_i, p_i, t)$ είναι *ομογενής* και *πρώτου βαθμού* ως προς p_i. Αυτά τα αποτελέσματα εφαρμόζονται σε όλους τους ομογενείς κανονικούς μετασχηματισμούς.

Σημειακοί μετασχηματισμοί. Στη συνέχεια θεωρούμε την κλάση των *ομογενών κανονικών μετασχηματισμών* για τους οποίους υπάρχει ένα πλήρες σύνολο από n ανεξάρτητες συναρτήσεις $\Omega_i(q_i, Q_i, t)$ και είναι ίσες με μηδέν. Αυτό συνεπάγεται ότι τα δυο $n \times n$ μητρώα των

συντελεστών της Εξ. (6-130) είναι ομαλά και οι αντίστοιχες ορίζουσες είναι μη μηδενικές, δηλαδή,

$$\left|\frac{\partial \Omega_j}{\partial p_i}\right| \neq 0 , \qquad \left|\frac{\partial \Omega_j}{\partial Q_i}\right| \neq 0 \quad . \tag{6-141}$$

Άρα μπορούμε να λύσουμε ως προς Q_i σε όρους των (q_i, t), ή ως προς q_i ως συναρτήσεις των (Q_i, t). Υποθέτουμε ότι αυτό έχει επιτευχθεί και έχουμε τις n εξισώσεις

$$Q_i = f_i(q_k, t) \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \quad , \tag{6-142}$$

όπου οι f_i είναι διπλά παραγωγίσιμες. Αυτές οι εξισώσεις εκφράζουν ένα *σημειακό μετασχηματισμό*, δηλαδή εκφράζουν μια απεικόνιση των σημείων στο μορφικό χώρο. Αν κάποιος συμπεριλάβει και τις εξισώσεις για τις P_i, ολόκληρο το σύνολο εκφράζει ένα μετασχηματισμό στο χώρο των φάσεων και είναι γνωστός ως *επεκτεταμένος σημειακός μετασχηματισμός.*

Οι εξισώσεις μετασχηματισμού της ορμής λαμβάνονται εύκολα από την Εξ. (6-125) που στην περίπτωση αυτή είναι

$$p_i = \sum_{j=1}^{n} P_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \quad . \tag{6-143}$$

Έτσι οι p_i είναι ομογενείς γραμμικές συναρτήσεις των P_i και αντίστροφα. Αν ορίσουμε n τον αριθμό Ω_j της μορφής

$$\Omega_j = Q_j - f_j(q_i, t) \quad , \quad (j = 1, 2, ..., n) , \tag{6-144}$$

τότε η Εξ. (6-133) ανάγεται στην

$$P_i = -\lambda_i \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{6-145}$$

και η Εξ. (6-132) οδηγεί κατ' ευθείαν στην Εξ. (6-134). Σ' αντιστοιχία με τις Εξ. (6-124) και (6-134) έχουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$K = H + \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial f_i}{\partial t} \quad , \tag{6-146}$$

που δηλώνει για άλλη μια φορά ότι οι K και H είναι ίσες μόνο στη σκληρόνομη περίπτωση.

Ανακύπτει τότε το ερώτημα κατά πόσον όλοι οι σημειακοί μετασχηματισμοί είναι απαραίτητα ομογενείς κανονικοί μετασχηματισμοί. Αν είναι έτσι, βλέπουμε από την Εξ. (6-123), ότι αυτό θα είχε ως συνέπεια οι $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ και $L^*(Q_i, \dot{Q}_i, t)$ να είναι ίσοι. Αλλά είναι πολύ πιθανό για τις L και L^* να είναι άνισες και αυτή είναι η περίπτωση όταν χρησιμοποιούνται δυο διαφορετικά αδρανειακά συστήματα, το ένα μεταφερόμενο με σταθερή ταχύτητα σε σχέση με το άλλο (βλέπε παράδειγμα 6-5). Σ' αυτή τη στιγμή η συνάρτηση $\varphi(q, Q, t) \equiv F_1(q, Q, t)$ δεν μηδενίζεται και μπορούμε να εκλέξουμε μια επαυξημένη γεννήτρια συνάρτηση της μορφής

$$F_1^*(\lambda_j, q_i, Q_i, t) = F_1(q_i, Q_i, t) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \Omega_j(q_i, Q_i, t) \quad , \tag{6-147}$$

όπου σημειώνουμε ότι $m = n$ για σημειακό μετασχηματισμό. Τότε, σ' αντιστοιχία με τις Εξ. (6-132) και (6-133), παίρνουμε

$$p_i = \frac{\partial F_1^*}{\partial q_i} = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial \Omega_j}{\partial q_i} \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{6-148}$$

$$P_i = -\frac{\partial F_1^*}{\partial Q_i} = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial \Omega_j}{\partial Q_i} \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \; . \tag{6-149}$$

Οι συναρτήσεις Hamilton συνδέονται με τον ακόλουθο τρόπο

$$K = H + \frac{\partial F_1^*}{\partial t} = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial \Omega_j}{\partial t} \; . \tag{6-150}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Σημειώνουμε ότι οι Εξ. (6-147) και (6-150) ισχύουν επίσης για $m<n$.

Τώρα ας εφαρμόσουμε τη βασική διαφορική μορφή της Εξ. (6-23) σ' αυτή την περίπτωση του *μη ομογενούς σημειακού μετασχηματισμού.* Χρησιμοποιώντας την Εξ. (6-142) παίρνουμε

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - \sum_{i=1}^{n} P_i \delta Q_i = \delta\psi = \sum_{i=1}^{n} \left[p_i - \sum_{j=1}^{n} P_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \right] \delta q_i \quad , \qquad (6\text{-}151)$$

όπου γενικά,

$$\delta\psi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\psi}{\partial q_i} \partial q_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\psi}{\partial p_i} \partial p_i \quad . \qquad (6\text{-}152)$$

Θεωρώντας ότι οι δq_i και δp_i είναι ανεξάρτητες, μπορούμε να εξισώσουμε τους αντίστοιχους συντελεστές και να πάρουμε

$$p_i = \sum_{j=1}^{n} P_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i} + \frac{\partial\psi}{\partial q_i} \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \qquad (6\text{-}153)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial p_i} = 0 \qquad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \quad . \qquad (6\text{-}154)$$

Από την Εξ. (6-154) βλέπουμε ότι η $\psi(q_i, t)$ δεν είναι εκπεφρασμένη συνάρτηση των p_i . Επιπρόσθετα, έχει την κατάλληλη μορφή για γεννήτρια συνάρτηση του τύπου F_1 . Άρα μπορούμε να εκλέξουμε την F_1 να είναι *ταυτοτικά ίση με την* ψ για ένα σημειακό μετασχηματισμό. Η Εξ. (6-153) δείχνει, για άλλη μια φορά, ότι οι p_i και P_i συσχετίζονται γραμμικά, αλλά εδώ οι εξισώσεις δεν είναι ομογενείς όπως ήταν στην Εξ. (6-143). Βλέπουμε, επίσης, από την Εξ. (6-149) ότι οι P_i και $-\lambda_i$ είναι ίσες, όπως στην ομογενή περίπτωση. Σημειώνουμε ότι αυτά τα αποτελέσματα ισχύουν για *αυθαίρετη* $f_j(q_i, t)$ και $\psi(q_i, t)$, υπό τον όρον ότι εφαρμόζονται οι υποθέσεις της ανεξαρτησίας και παραγωγισιμότητας.

Παράδειγμα 6-5. Για να επεξηγήσουμε τη θεωρία για τη μη ομογενή περίπτωση, υποθέτουμε ότι δίνεται ο σκληρόνομος επεκτεταμένος σημειακός μετασχηματισμός

$$Q = \tan q\,, \qquad P = (p - mv_0)\cos^2 q \quad , \tag{6-155}$$

όπου m και u_0 είναι σταθερές. Θα δείξουμε πρώτα ότι ο μετασχηματισμός είναι κανονικός και στη συνέχεια θα τον εφαρμόσουμε σ' ένα σύστημα ελατηρίου-μάζας.

Αντικαθιστώνας τις εκφράσεις των Εξ. (6-155) στη βασική διαφορική μορφή της Εξ. (6-121), παίρνουμε

$$p\,\delta q - P\,\delta q = \delta\psi = mv_0\,\delta q \quad , \tag{6-156}$$

η οποία είναι τέλειο διαφορικό. Ολοκληρώνοντας, βρίσκουμε ότι

$$\psi = mv_0 q \quad . \tag{6-157}$$

Άρα αυτός είναι ένας μη ομογενής κανονικός μετασχηματισμός.

Ένας περαιτέρω έλεγχος των μέχρι τώρα αποτελεσμάτων λαμβάνεται με την αντικατάσταση

$$f(q) = \tan q \tag{6-158}$$

στην Εξ. (6-153) η οποία παράγει την εξίσωση μετασχηματισμού της ορμής, Εξ. (6-155). Επίσης, βλέπουμε ότι η ψ δεν είναι μια εκπεφρασμένη συνάρτηση της p_i, σε συμφωνία με την Εξ. (6-154).

Γι' αυτό το παράδειγμα, έχουμε

$$F_1 \equiv \psi = mv_0\, q \tag{6-159}$$

$$\Omega = Q - \tan q \tag{6-160}$$

και άρα η Εξ. (6-150) παράγει

$$K = H \quad . \tag{6-161}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Έτσι οι δυο Χαμιλτωνιανές συναρτήσεις είναι ίσες, αν και οι L και L^* είναι άνισες λόγω του γεγονότος ότι ο μετασχηματισμός δεν είναι ομογενής.

Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια γεννήτρια συνάρτηση της μορφής

$$F_2(q, P) = F_1 + QP = mv_0 q + P \tan q \tag{6-162}$$

από την οποία παίρνουμε

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial F_2}{\partial q} = mv_0 + P \sec^2 q \\ Q &= \frac{\partial F_2}{\partial P} = \tan q \quad , \end{aligned} \tag{6-163}$$

σε συμφωνία με τα προηγούμενα αποτελέσματά μας. Παρόμοια, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις $F_3(q, Q)$ ή $F_4(p, P)$ ως γεννήτριες συναρτήσεις.

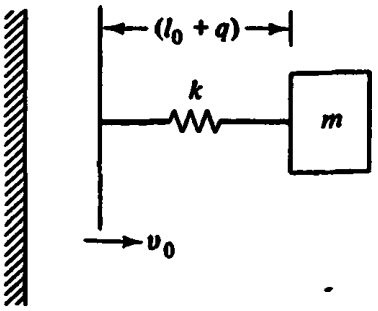
Τώρα ας εφαρμόσουμε αυτόν τον μετασχηματισμό σ' ένα συγκεκριμένο φυσικό παράδειγμα. Θεωρούμε ένα σύστημα ελατηρίου-μάζας το οποίο προσκολλάται πάνω σ' ένα σύστημα που κινείται με σταθερή ταχύτητα v_0, όπως φαίνεται στο Σχ. 6-2. Το αρχικό μήκος του ελατηρίου είναι l_0. Εδώ έχουμε ένα συντηρητικό ολόνομο σύστημα (βλέπε παράδειγμα 2-8). Γι' αυτό το λόγο, εφαρμόζεται η συνήθης μορφή των εξισώσεων Lagrange ή Hamilton, υπό τον όρο ότι χρησιμοποιούμε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Σ' αυτό το παράδειγμα υπάρχουν δυο αδρανειακά συστήματα, δηλαδή το σταθερό σύστημα και το σύστημα που κινείται με σταθερή ταχύτητα v_0. Συνδέοντας τη συνάρτηση Lagrange L με το σταθερό σύστημα και την L^* με το κινούμενο σύστημα, προκύπτει ότι η φ (ή ψ) δίνεται από την Εξ. (6-159).

Για να δούμε πως αυτό συμβαίνει ας λάβουμε τις συναρτήσεις Lagrange και Hamilton σε όρους των παλιών μεταβλητών. Έχουμε

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{q} + v_0)^2 - \frac{1}{2} k q^2 \tag{6-164}$$

και άρα

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m(\dot{q} + v_0) \quad . \tag{6-165}$$



Σχ. 6-2. Ένα μεταφερόμενο σύστημα ελατηρίου-μάζας.

Η συνάρτηση Hamilton είναι

$$H = T_2 - T_0 + V = \frac{p^2}{2m} - v_0 p + \frac{1}{2} kq^2 \quad . \tag{6-166}$$

Έτσι οι κανονικές εξισώσεις κίνησης για τις (q, p) μεταβλητές είναι

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} - v_0 \ , \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq \quad . \tag{6-167}$$

Τώρα ας πάρουμε την $L^*(Q, \dot{Q})$ σε σχέση με το κινούμενο σύστημα. Σε όρους των παλιών συντεταγμένων έχουμε

$$T = \frac{1}{2} m\dot{q}^2 \ , \qquad V = \frac{1}{2} kq^2 \quad . \tag{6-168}$$

Αλλά από την Εξ. (6-163) βρίσκουμε ότι

$$q = \tan^{-1} Q \ , \qquad \dot{q} = \frac{\dot{Q}}{1 + Q^2} \quad . \tag{6-169}$$

Άρα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$L^* = T - V = \frac{m\dot{Q}^2}{2(1+Q^2)^2} - \frac{1}{2}k(\tan^{-1}Q)^2 \qquad (6\text{-}170)$$

και

$$P = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} = \frac{m\dot{Q}}{(1+Q^2)^2} \quad . \qquad (6\text{-}171)$$

Τώρα από την πρώτη εξίσωση των (6-169) βλέπουμε ότι

$$\cos q = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2}} \quad . \qquad (6\text{-}172)$$

Έτσι, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις Εξ. (6-167), (6-169) και (6-171) για να πιστοποιήσουμε ότι η εξίσωση μετασχηματισμού της ορμής δίνεται από την Εξ. (6-155).

Σ' αυτή την περίπτωση η κινητική ενέργεια αποτελείται μόνο από τον όρο T_2 , έτσι έχουμε ένα φυσικό σύστημα και γι' αυτό το λόγο η συνάρτηση Hamilton είναι

$$K = T + V = \frac{P^2}{2m}(1+Q^2)^2 + \frac{1}{2}k(\tan^{-1}Q)^2 \quad . \qquad (6\text{-}173)$$

Οι κανονικές εξισώσεις είναι

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \frac{P}{m}(1+Q^2)^2$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = -\frac{2P^2Q}{m}(1+Q^2) - \frac{k\tan^{-1}Q}{1+Q^2} \quad . \qquad (6\text{-}174)$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τώρα τις εξισώσεις μετασχηματισμού για να μετασχηματίσουμε αυτές τις εξισώσεις κίνησης πίσω στις παλιές, βρίσκουμε ότι πράγματι είναι ταυτόσημες μ' εκείνες της Εξ. (6-167).

Τί έχει διευκρινιστεί μ' αυτό το παράδειγμα; Πρώτα, βλέπουμε ότι ένας δοσμένος σημειακός μετασχηματισμός που εκφράζεται από την $Q(q)$ μπορεί να μην καταλήξει σ' ένα ομογενή κανονικό μετασχηματισμό. Το αν η ψ θα μηδενιστεί εξαρτάται επίσης και από το μετα-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

σχηματισμό ορμής $P(q, p)$. Αυτός, με τη σειρά του, εξαρτάται από την εκλογή των συστημάτων αναφοράς. Σ' αυτό το παράδειγμα, οι L και L^* βρέθηκαν ως προς διαφορετικά αδρανειακά συστήματα. Αλλά αν είχαμε εκλέξει το ίδιο αδρανειακό σύστημα και για τις δυο L και L^*, τότε θα είχαμε λάβει $L = L^*$, $H = K$ και $\psi \equiv 0$. Ο κανονικός μετασχηματισμός θα ήταν ομογενής και ο μετασχηματισμός ορμής θα ήταν της μορφής

$$P = p \cos^2 q \quad , \tag{6-175}$$

σε συμφωνία με την Εξ. (6-143).

Μετασχηματισμοί ορμής. Στη συζήτηση για τους σημειακούς μετασχηματισμούς, θεωρήσαμε ότι οι συναρτήσεις $f_j(q_i, t)$ δίνονται για $j = 1, 2, ..., n$. Αυτές οι συναρτήσεις αναπαριστούν ένα σημειακό μετασχηματισμό στο μορφικό χώρο. Για να καθορίσουμε τον πλήρη μετασχηματισμό, χρειαζόμαστε επίσης να γράψουμε τις εξισώσεις μετασχηματισμού ορμής. Αυτό απαιτεί περαιτέρω πληροφορίες οι οποίες συχνά δίνονται με τη μορφή της συνάρτησης $\psi(q_i, t)$. Τότε οι εξισώσεις μετασχηματισμού ορμής βρίσκονται με τη βοήθεια της Εξ. (6-153).

Τώρα υποθέτουμε ότι ξεκινούμε με εξισώσεις μετασχηματισμού ορμής οι οποίες έχουν τη μορφή

$$P_i = h_i(p_j, t) \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \quad . \tag{6-176}$$

Ο μετασχηματισμός αυτός εκφράζει ένα σημειακό μετασχηματισμό στο χώρο των ορμών και θα τον ονομάζουμε *μετασχηματισμό ορμής*. Από τη Χαμιλτωνιανή σκοπιά, είναι ανάλογος με το σημειακό μετασχηματισμό στο μορφικό χώρο που συζητήθηκε προηγούμενα. Έτσι, αν υπάρξει προσοχή ως προς τα πρόσημα, μπορούμε να εναλλάξουμε τις q_i και p_i στα προηγούμενα αποτελέσματα. Πιο συγκεκριμένα, ας αντικαταστήσουμε με q_i τις p_i και με $-p_i$ τις q_i. Επίσης αντικαθιστούμε την $F_1(q_i, Q_i, t)$ με $F_4(p_i, P_i, t)$ και ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$\omega_j(p_i, P_i, t) = 0 \quad , \quad (j = 1, 2, ..., m) \quad . \tag{6-177}$$

Τότε, στη θέση των Εξ. (6-148) - (6-150), έχουμε

$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial \omega_j}{\partial p_i} \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \qquad (6\text{-}178)$$

$$Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial \omega_j}{\partial P_i} \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \qquad (6\text{-}179)$$

$$K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial \omega_j}{\partial t} \quad , \qquad (6\text{-}180)$$

όπου $m \leq n$.

Για την περίπτωση του μετασχηματισμού ορμής στην οποία έχουμε ένα πλήρες σύνολο από n τον αριθμό ω_j, είναι προτιμότερο να πάρουμε

$$\omega_j = P_j - h_j(p_i, t) = 0 \quad , \quad (j = 1, 2, ..., n) \qquad (6\text{-}181)$$

οπότε τότε παίρνουμε

$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i} + \sum_{j=1}^{n} Q_j \frac{\partial h_j}{\partial p_i} \qquad (6\text{-}182)$$

$$K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} Q_j \frac{\partial h_j}{\partial t} \quad , \qquad (6\text{-}183)$$

όπου σημειώνουμε ότι η F_4 είναι συνάρτηση μόνο των (p_i, t) και οι πολλαπλασιαστές λ_j είναι ίσοι με Q_j.

Παράδειγμα 6-6. Θεωρούμε το μετασχηματισμό

$$Q = q - tp + \frac{1}{2} gt^2$$
$$P = p - gt \quad . \qquad (6\text{-}184)$$

Να βρεθούν η K-H και οι γεννήτριες συναρτήσεις.

Αυτές οι εξισώσεις εκφράζουν τη λύση για τη μοναδιάστατη κίνηση ενός σωματίου μοναδιαίας μάζας σε ομοιόμορφο βαρυτικό πεδίο, όπου

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$Q = q(0)$ και $P = p(0)$. Πρέπει να σημειωθεί ότι αυτή είναι η λύση που έπρεπε να πάρουμε από τη μέθοδο των Hamilton-Jacobi και αντιστοιχεί σ' ένα κανονικό μετασχηματισμό στον οποίο η νέα Χαμιλτωνιανή είναι ταυτοτικά μηδέν.

Ένας έλεγχος της κανονικής διαφορικής μορφής δίνει

$$p\,\delta q - P\,\delta Q = gt\,\delta q + (tp - gt^2)\,\delta p = \delta\psi \quad . \tag{6-185}$$

Μετά από ολοκλήρωση, παίρνουμε

$$\psi = gtq + \frac{1}{2}tp^2 - gt^2 p \quad , \tag{6-186}$$

η οποία επιβεβαιώνει το γεγονός ότι ο μετασχηματισμός είναι κανονικός. Πρέπει να σημειωθεί όμως, ότι αυτός δεν είναι ομογενής.

Τώρα ας θεωρήσουμε τις Χαμιλτωνιανές συναρτήσεις για το συγκεκριμένο φυσικό σύστημα. Αφού αυτό είναι ένα φυσικό σύστημα, έχουμε

$$H(q, p) = T + V = \frac{1}{2}p^2 - gq \quad . \tag{6-187}$$

Ανακαλούμε από την Εξ. (6-26) ότι

$$K - H = \frac{\partial\psi}{\partial t} + P\frac{\partial Q}{\partial t} \quad , \tag{6-188}$$

όπου, σ' αυτή την περίπτωση,

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = gq + \frac{1}{2}p^2 - 2gtp$$

$$P\frac{\partial Q}{\partial t} = -\,p^2 + 2gtp - g^2t^2 \quad .$$

Άρα έχουμε

$$K - H = gq - \frac{1}{2}p^2 - g^2t^2 \quad . \tag{6-189}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Από τις Εξ. (6-187) και (6-189) θα φαινόταν ότι η K είναι ίση με $-g^2 t^2$. Αλλά μιας και αυτή είναι μια συνάρτηση του t μόνο, δεν θα συνεισφέρει στις εξισώσεις κίνησης και μπορεί να παραληφθεί. (*) Άρα μπορούμε να πάρουμε

$$K \equiv 0 \quad , \tag{6-190}$$

σε συμφωνία με τις σταθερές τιμές των Q και P.

Η F_1 βρίσκεται εκφράζοντας την ψ σε όρους των (q, Q, t), χρησιμοποιώντας μια αντικατάσταση για το p που λαμβάνεται από την πρώτη εξίσωση μετασχηματισμού. Αυτό το αποτέλεσμα είναι

$$F_1 = \frac{1}{2t}(q - Q)^2 + \frac{1}{2} gt\,(q + Q) \quad , \tag{6-191}$$

όπου ξανά παραλείψαμε κάθε όρο ως προς το t μόνο. Ως έλεγχο αυτής της γεννήτριας συνάρτησης, παίρνουμε

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial F_1}{\partial q} = \frac{1}{t}(q - Q) + \frac{1}{2} gt \\ P &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{1}{t}(q - Q) - \frac{1}{2} gt \quad , \end{aligned} \tag{6-192}$$

η οποία είναι σε συμφωνία με την Εξ. (6-184). Με παρόμοιο τρόπο, μπορούμε να λάβουμε εκφράσεις για τις $F_2(q, P, t)$ και $F_3(p, Q, t)$. Αυτές είναι

$$F_2 = (q - \frac{1}{2} tP)\,(P + gt) \tag{6-193}$$

και

$$F_3 = (Q + \frac{1}{2} tp)\,(gt - p) \quad . \tag{6-194}$$

(*) Όροι αυτού του είδους μπορούν επίσης να ληφθούν υπόψη, και να αποτελέσουν έναν επιπλέον έλεγχο των γεννητριών συναρτήσεων μέσω των εκφράσεων για την $\partial F / \partial t$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Τελικά, η έκφραση για την $F_4(p, P, t)$ είναι

$$F_4 = F_2 - qp = (q - \frac{1}{2} tP)p - qp = \frac{1}{2} gt^2 p - \frac{1}{2} tp^2 \quad . \tag{6-195}$$

Αναφερόμενοι ξανά στην Εξ. (6-184) βλέπουμε ότι έχουμε ένα μετασχηματισμό ορμής με τη μορφή της Εξ. (6-176). Μ' άλλα λόγια, οι μεταβλητές p και P δεν είναι ανεξάρτητες. Σ' αυτές τις περιπτώσεις, μπορούμε πάντα να χρησιμοποιούμε μια γεννήτρια συνάρτηση της μορφής $F_4(p_i, t)$ αφού κάθε P_i μπορεί να εκφραστεί σε όρους του p_i. Αν θέσουμε

$$\omega = P - p + gt = \dot{0} \ , \tag{6-196}$$

μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις Εξ. (6-178) και (6-179) για να πάρουμε

$$\begin{aligned} q &= - \frac{\partial F_4}{\partial p} - \lambda \frac{\partial \omega}{\partial p} = \lambda - \frac{1}{2} gt^2 + tp \\ Q &= \frac{\partial F_4}{\partial P} + \lambda \frac{\partial \omega}{\partial P} = \lambda \quad . \end{aligned} \tag{6-197}$$

Αυτές οι εξισώσεις είναι ισοδύναμες με τη δοσμένη εξίσωση μετασχηματισμού συντεταγμένης και ως εκ τούτου ελέγχουν το αποτέλεσμα για την F_4. Ένας περαιτέρω έλεγχος για την K λαμβάνεται με αντικατάσταση στην Εξ. (6-180).

6-3. ΑΓΚΥΛΕΣ LAGRANGE ΚΑΙ POISSON.

Τώρα ας θεωρήσουμε ορισμένες επιπλέον μεθόδους που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να ελέγξουμε κατά πόσο ένας μετασχηματισμός είναι κανονικός. Αυτές οι μέθοδοι χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι είναι ανεξάρτητες από το δοσμένο φυσικό σύστημα.

Αγκύλες Lagrange. Υποθέτουμε ότι δίνονται οι εξισώσεις μετασχηματισμού.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$Q_i = Q_i(q_k,\ p_k,\ t), \quad P_i = P_i(q_k,\ p_k,\ t)\ , \quad (i = 1, 2, ..., n)\ . \tag{6-198}$$

Για άλλη μια φορά ας θεωρήσουμε την κανονική διαφορική μορφή και ας την ελέγξουμε ως προς το τέλειο διαφορικό. Έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i - \sum_{i=1}^{n} P_i\,\delta Q_i = \sum_{j=1}^{n}\left(p_j - \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P_i \frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\,\delta p_j\ . \tag{6-199}$$

Με τη βοήθεια των Εξ. (6-24) και (6-25), ή απ' ευθείας, μπορεί να διαπιστωθεί ότι το δεξιό μέλος αυτής της εξίσωσης είναι ίσο προς $\delta\psi$ αν όλες οι ακόλουθες συνθήκες ικανοποιούνται, δηλαδή,

$$\frac{\partial}{\partial q_k}\left(p_j - \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(p_k - \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\right) \tag{6-200}$$

$$\frac{\partial}{\partial p_k}\left(\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\right) = \frac{\partial}{\partial p_j}\left(\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\right) \tag{6-201}$$

$$\frac{\partial}{\partial p_k}\left(p_j - \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(-\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\right), \tag{6-202}$$

όπου $j, k = 1, 2, ..., n$. Εκτελώντας αυτές τις παραγωγίσεις, βλέπουμε ότι αυτές οι εξισώσεις μπορούν να γραφούν με την ακόλουθη μορφή:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\frac{\partial P_i}{\partial q_k} - \frac{\partial P_i}{\partial q_j}\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\right) = 0 \tag{6-203}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\frac{\partial P_i}{\partial p_k} - \frac{\partial P_i}{\partial p_j}\frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\right) = 0 \tag{6-204}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\frac{\partial P_i}{\partial p_k} - \frac{\partial P_i}{\partial q_j}\frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\right) = \delta_{jk} \quad , \tag{6-205}$$

όπου δ_{jk} είναι το δέλτα του Kronecker.

Τώρα ας εισάγουμε την έκφραση για την *αγκύλη Lagrange* για τις δυο μεταβλητές (u, v) χρησιμοποιώντας το συμβολισμό

$$[u, v] \equiv \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial u}\frac{\partial P_i}{\partial v} - \frac{\partial P_i}{\partial u}\frac{\partial Q_i}{\partial v}\right) , \tag{6-206}$$

όπου u και v είναι κάθε δυο από τις μεταβλητές $q_1, q_2, ..., q_n, p_1, p_2, ..., p_n$. Μ' αυτόν το συμβολισμό, μπορούμε να εκφράσουμε τις ικανές συνθήκες για ένα κανονικό μετασχηματισμό, όπως δίνονται από τις Εξ. (6-203)- (6-205), με τη μορφή

$$[q_j, q_k] = 0 , \qquad [p_j, p_k] = 0, \qquad [q_j, p_k] = \delta_{jk} \tag{6-207}$$

για κάθε (j, k). Εδώ υποθέτουμε ότι οι q_i και p_i είναι ανεξάρτητες μεταβλητές.

Μια εναλλακτική μέθοδος για τον ορισμό της αγκύλης Lagrange εμπεριέχει το άθροισμα n Ιακωβιανών οριζουσών, δηλαδή,

$$[u, v] \equiv \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(Q_i, P_i)}{\partial(u, v)} \quad , \tag{6-208}$$

η οποία είναι άμεση συνέπεια της Εξ. (6-206).

Ως συνέπεια της αντισυμμετρικότητας των αγκυλών Lagrange, είναι εμφανές ότι

$$[u, v] = -[v, u] \tag{6-209}$$

και

$$[u, u] = [v, v] = 0 \quad . \tag{6-210}$$

Ένα γενικό χαρακτηριστικό της αγκύλης Lagrange είναι ότι η τιμή της είναι αναλλοίωτη σε κανονικούς μετασχηματισμούς. Για παράδειγμα, αν οι $2n$ μεταβλητές (q_i, p_i) και οι $2n$ μεταβλητές (Q_i, P_i)

συνδέονται μ' ένα κανονικό μετασχηματισμό, τότε *οποιοδήποτε* σύνολο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό μιας δοσμένης έκφρασης αγκύλης Lagrange. Έτσι έχουμε

$$[u, v] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial u} \frac{\partial P_i}{\partial v} - \frac{\partial P_i}{\partial u} \frac{\partial Q_i}{\partial v} \right), \quad (6\text{-}211)$$

όπου κάθε σύνολο δυναμικών μεταβλητών θεωρείται ότι είναι συνάρτηση των (u, v), όπως επίσης και άλλων μεταβλητών.

Ως μια επεξήγηση, αν οι συναρτήσεις $Q_i(q_k, p_k, t)$ και $P_i(q_k, p_k, t)$ είναι τέτοιες ώστε η έκφραση της αγκύλης Lagrange ικανοποιείται για $u = q_j$ και $v = p_k$, τότε ικανοποιείται επίσης προφανώς η πρώτη έκφραση της αγκύλης Lagrange, Εξ. (6-211). Παρόμοια αιτιολόγηση εφαρμόζεται και σ' άλλες συναρτήσεις που λαμβάνονται από ακολουθίες κανονικών μετασχηματισμών και ως εκ τούτου συνδέονται κανονικά. Άρα κάθε σύνολο $2n$ δυναμικών μεταβλητών μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην αγκύλη Lagrange αν αυτές συνδέονται με ένα κανονικό μετασχηματισμό. Οι μεταβλητές, γι' αυτό το λόγο, δεν βρίσκονται εκπεφρασμένες, στο σύμβολο της αγκύλης.

Αγκύλες Poisson. Υποθέτουμε ότι έχουμε δυο συναρτήσεις των δυναμικών μεταβλητών και του χρόνου, δηλαδή τις $u(q_i, p_i, t)$ και $v(q_i, p_i, t)$. Η έκφραση της *αγκύλης Poisson* για τις δυο αυτές συναρτήσεις είναι

$$(u, v) \equiv \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \right) . \quad (6\text{-}212)$$

Παρατηρούμε ότι, όπως και στην περίπτωση των αγκυλών Lagrange, έχουμε

$$(u, v) = -(v, u) \quad (6\text{-}213)$$

$$(u, u) = (v, v) = 0 \quad . \quad (6\text{-}214)$$

Η αγκύλη Poisson είναι χρήσιμη για να ελεχθεί αν ένας μετασχηματισμός είναι κανονικός και πράγματι, οι ικανές συνθήκες για ένα κανονικό μετασχηματισμό είναι οι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$(Q_j, Q_k) = 0\,, \qquad (P_j, P_k) = 0\,, \qquad (Q_j, P_k) = \delta_{jk} \tag{6-215}$$

για κάθε (j, k).

Για να δείξουμε με ποιό τρόπο αυτές οι εξισώσεις προκύπτουν από παρόμοιες εκφράσεις αγκυλών Lagrange, ας θεωρήσουμε τις $2n$ ανεξάρτητες συναρτήσεις $Q_i(q_k, p_k, t)$ και $P_i(q_k, p_k, t)$ και αντίστροφα, τις $2n$ ανεξάρτητες συναρτήσεις $q_i(Q_k, P_k, t)$ και $p_i(Q_k, P_k, t)$. Γενικά, ξέρουμε ότι, για κάθε τιμή του t,

$$\delta q_j = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \delta Q_i + \frac{\partial q_j}{\partial P_i} \delta P_i \right) \tag{6-216}$$

$$\delta p_j = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial p_j}{\partial Q_i} \delta Q_i + \frac{\partial p_j}{\partial P_i} \delta P_i \right)\,, \tag{6-217}$$

όπου

$$\delta Q_i = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \delta p_k \right) \tag{6-218}$$

$$\delta P_i = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial P_i}{\partial p_k} \delta p_k \right)\,. \tag{6-219}$$

Μετά από αντικατάσταση από τις Εξ. (6-218) και (6-219) στις Εξ. (6-216) και (6-217) και σύγκριση των συντελεστών των δq_i και δp_i, παίρνουμε

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} + \frac{\partial q_j}{\partial P_i} \frac{\partial P_i}{\partial p_k} \right) = 0 \tag{6-220}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial p_j}{\partial Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} + \frac{\partial p_j}{\partial P_i} \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \right) = 0 \tag{6-221}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}+\frac{\partial q_j}{\partial P_i}\frac{\partial P_i}{\partial q_k}\right)=\delta_{jk} \qquad (6\text{-}222)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial p_j}{\partial Q_i}\frac{\partial Q_i}{\partial p_k}+\frac{\partial p_j}{\partial P_i}\frac{\partial P_i}{\partial p_k}\right)=\delta_{jk} \quad , \qquad (6\text{-}223)$$

για $j, k = 1, 2, ..., n$.

Οι εξισώσεις (6-220) - (6-223) γενικά ισχύουν. Σ' αυτό το σημείο, ωστόσο, εισάγουμε την επιπλέον παραδοχή ότι οι εξισώσεις μετασχηματισμού είναι τέτοιες ώστε να ισχύουν οι εκφράσεις των αγκυλών Lagrange, Εξ. (6-207). Τώρα θεωρούμε ότι συγκρίνουμε την έκφραση $[q_j, p_k]$ που δίνεται από την Εξ. (6-205) με την Εξ. (6-223). Για να ισχύουν αυτές οι εξισώσεις για όλες τις πιθανές Q_i και P_i, οι συντελεστές των $\partial P_i/\partial p_k$ πρέπει να είναι ίσοι· ένα παρόμοιο σχόλιο ισχύει και για $\partial Q_i/\partial p_k$. Έτσι βλέπουμε ότι

$$\frac{\partial p_j}{\partial P_i}=\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}, \qquad \frac{\partial p_j}{\partial Q_i}=-\frac{\partial P_i}{\partial q_j} \quad . \qquad (6\text{-}224)$$

Επίσης, συγκρίνοντας την $[q_k, p_j]$ και την Εξ. (6-222), παίρνουμε

$$\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}=\frac{\partial P_i}{\partial p_j}, \qquad \frac{\partial q_j}{\partial P_i}=-\frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \quad . \qquad (6\text{-}225)$$

Περαιτέρω συγκρίσεις μεταξύ των $[q_j, q_k]$ και της Εξ. (6-221) καθώς επίσης μεταξύ των $[p_k, p_j]$ και της Εξ. (6-220) επιβεβαιώνουν αυτά τα αποτελέσματα. Τελικά, αν αντικαταστήσουμε από τις Εξ. (6-224) και (6-225) στις εκφράσεις των αγκυλών Lagrange που δίνονται από τις Εξ. (6-203) - (6-205), λαμβάνουμε τις αντίστοιχες εκφράσεις των αγκυλών Poisson, δηλαδή,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial p_j}{\partial Q_i}\frac{\partial p_k}{\partial P_i}-\frac{\partial p_j}{\partial P_i}\frac{\partial p_k}{\partial Q_i}\right)=0 \qquad (6\text{-}226)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}\frac{\partial q_k}{\partial P_i}-\frac{\partial q_j}{\partial P_i}\frac{\partial q_k}{\partial Q_i}\right)=0 \qquad (6\text{-}227)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}\frac{\partial p_k}{\partial P_i} - \frac{\partial q_j}{\partial P_i}\frac{\partial p_k}{\partial Q_i}\right) = \delta_{jk} \quad , \tag{6-228}$$

οι οποίες μπορούν να γραφούν με τη μορφή

$$(q_j, q_k) = 0 , \qquad (p_j, p_k) = 0 , \qquad (q_j, p_k) = \delta_{jk} \quad . \tag{6-229}$$

Αυτές οι εκφράσεις των αγκυλών Poisson, ή αυτές που δίνονται από την Εξ. (6-215), μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να επιβεβαιώσουν ότι ένας μετασχηματισμός είναι κανονικός.

Η αγκύλη Poisson, κατά ένα τρόπο παρόμοιο μ' αυτόν που χρησιμοποιήθηκε νωρίτερα για την αγκύλη Lagrange, είναι αναλλοίωτη σε κανονικούς μετασχηματισμούς. Μ' άλλα λόγια, η τιμή του (u, v) είναι ανεξάρτητη από το ποιό σύνολο κανονικών μεταβλητών χρησιμοποιείται για να εκφράσει τις συναρτήσεις u και v, υπό τον όρο ότι όλα τα (q_i, p_i) σύνολα συνδέονται με κανονικούς μετασχηματισμούς.

Μια άλλη βασική ιδιότητα των αγκυλών Poisson είναι η *ταυτότητα του Jacobi*, δηλαδή,

$$(u, (v, w)) + (v, (w, u)) + (w, (u, v)) = 0 \quad , \tag{6-230}$$

όπου οι u, v και w είναι συναρτήσεις κάποιου συνόλου των q_i και p_i.

Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι οι κανονικές εξισώσεις του Hamilton μπορούν να γραφούν χρησιμοποιώντας το συμβολισμό των αγκυλών Poisson. Έχουμε

$$(q_i, H) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{6-231}$$

$$(p_i, H) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right) = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{6-232}$$

και άρα οι κανονικές εξισώσεις μπορούν να γραφούν με τη μορφή

$$\dot{q}_i = (q_i, H), \qquad \dot{p}_i = (p_i, H) \quad . \tag{6-233}$$

Πιο γενικά, αν κάποια συνάρτηση $f(q_i, p_i, t)$ εμφανίζεται σε σχέση μ' ένα δυναμικό σύστημα που περιγράφεται από τις εξισώσεις του Hamilton, τότε

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{6-234}$$

και αντικαθιστώντας τις $\dot{q}_i$ και $\dot{p}_i$ από τις κανονικές εξισώσεις, έχουμε

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = (f, H) + \frac{\partial f}{\partial t} \quad . \tag{6-235}$$

Άρα, για την περίπτωση κατά την οποία η f δεν είναι εκπεφρασμένη συνάρτηση του χρόνου, βλέπουμε ότι η $f(q_i, p_i)$ είναι μια σταθερά της κίνησης αν

$$(f, H) = 0 \quad . \tag{6-236}$$

Έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις αγκύλες Poisson για να αναγνωρίσουμε σταθερές της κίνησης.

Τώρα ας διατυπώσουμε το *θεώρημα του Poisson*: Αν τα $u(q_i, p_i)$ και $v(q_i, p_i)$ είναι ολοκληρώματα ενός Χαμιλτωνιανού συστήματος, τότε και η αγκύλη Poisson (u, v) είναι επίσης ένα ολοκλήρωμα, δηλαδή (u, v) είναι μια σταθερά της κίνησης.

Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος ξεκινά με τη σημείωση ότι αφού u και v είναι ολοκληρώματα της κίνησης, η Εξ. (6-235) συνεπάγεται ότι

$$(u, H) + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{6-237}$$

$$(v, H) + \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad . \tag{6-238}$$

Επίσης,

$$\frac{d}{dt}(u, v) = ((u,v),H) + \frac{\partial}{\partial t}(u,v) = ((u, v),H) + \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v \right) + \left(u, \frac{\partial v}{\partial t} \right), \tag{6-239}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

η οποία, με τη βοήθεια των Εξ. (6-237) και (6-238), γίνεται

$$\frac{d}{dt}(u, v) = ((u, v), H) - ((u, H), v) - ((u, (v, H))$$
$$= ((u, v), H) + ((H, u), v) + ((v, H), u) = 0 \ . \qquad (6\text{-}240)$$

Η τελευταία έκφραση είναι μηδέν, λόγω της ταυτότητας του Jacobi, και άρα (u, v) είναι μια σταθερά.

Τελικά, μια παρατήρηση πρέπει να γίνει που αφορά τη σχέση μεταξύ των αγκυλών Lagrange και Poisson. Θεωρούμε $2n$ ανεξάρτητες συναρτήσεις $u_1 (q_i, p_i), ..., u_{2n} (q_i, p_i)$ και αντίστροφα, οι q_i και p_i θεωρούνται ότι είναι συναρτήσεις των u_k. Τότε, από τις Εξ. (6-206) και (6-212), έχουμε

$$\sum_{k=1}^{2n} [u_i, u_k] (u_j, u_k)$$
$$= \sum_{k=1}^{2n} \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial q_r}{\partial u_i} \frac{\partial p_r}{\partial u_k} - \frac{\partial p_r}{\partial u_i} \frac{\partial q_r}{\partial u_k} \right) \left(\frac{\partial u_j}{\partial q_s} \frac{\partial u_k}{\partial p_s} - \frac{\partial u_j}{\partial p_s} \frac{\partial u_k}{\partial q_s} \right). \qquad (6\text{-}241)$$

Αν σημειώσουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial q_r}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial q_s} = \delta_{rs}, \qquad \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial p_r}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial p_s} = \delta_{rs} \qquad (6\text{-}242)$$

και

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial q_r}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial p_s} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial p_r}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial q_s} = 0 \qquad (6\text{-}243)$$

παίρνουμε

$$\sum_{k=1}^{2n} [u_i, u_k] (u_j, u_k) = \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial u_j}{\partial q_r} \frac{\partial q_r}{\partial u_i} + \frac{\partial u_j}{\partial p_r} \frac{\partial p_r}{\partial u_i} \right) = \frac{\partial u_j}{\partial u_i} = \delta_{ij} \ . \qquad (6\text{-}244)$$

Αυτό το αποτέλεσμα δηλώνει ότι οι αγκύλες Lagrange και Poisson είναι, κατα κάποιον τρόπο, αντίστροφες ποσότητες. Για να διαλευκάνουμε αυτό το σημείο, ορίζουμε τα στοιχεία πινάκων

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$L_{ik} = [u_i, u_k], \qquad P_{kj} = (u_j, u_k) \quad . \tag{6-245}$$

Τότε, οι Εξ. (6-244) μπορούν να γραφούν με τη μορφή

$$\mathbf{LP} = \mathbf{I} \quad , \tag{6-246}$$

όπου οι **L** και **P** είναι και οι δυο $2n \times 2n$ πίνακες. Έτσι βρίσκουμε ότι $\mathbf{L} = \mathbf{P}^{-1}$.

Παράδειγμα 6-7. Θεωρούμε το μετασχηματισμό

$$Q = \sqrt{e^{-2q} - p^2} \ , \qquad P = \cos^{-1}(pe^q) \quad . \tag{6-247}$$

Να χρησιμοποιηθεί η αγκύλη Poisson για να αποδειχτεί ότι αυτός είναι κανονικός.

Αυτό είναι ένα απλό παράδειγμα για το οποίο $n = 1$. Αν κάνουμε τις αντικαταστάσεις $u \equiv Q$ και $v \equiv P$ στην Εξ. (6-212), παίρνουμε

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{-e^{-2q}}{\sqrt{e^{-2q} - p^2}}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{-p}{\sqrt{e^{-2q} - p^2}}$$

$$\frac{\partial P}{\partial q} = \frac{-p}{\sqrt{e^{-2q} - p^2}}, \qquad \frac{\partial P}{\partial p} = \frac{-1}{\sqrt{e^{-2q} - p^2}} \quad .$$

Άρα

$$(Q, P) = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = 1 \quad . \tag{6-248}$$

Εξάλλου, από την Εξ. (6-214) έχουμε

$$(Q, Q) = 0, \qquad (P, P) = 0 \quad . \tag{6-249}$$

Άρα ο μετασχηματισμός είναι κανονικός.

Γι' αυτή την περίπτωση όπου n=1, βλέπουμε ότι η αγκύλη Lagrange $[q, p]$ είναι ταυτόσημη με (Q, P). Βέβαια, οι $[q, q]$, $[p, p]$ είναι και οι δυο μηδέν. Άρα, ικανοποιούνται επίσης τα κριτήρια των αγκυλών Lagrange για ένα κανονικό μετασχηματισμό.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Η διγραμμική συναλλοίωτος. Μια άλλη μέθοδος που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ελεγχθεί αν ένας μετασχηματισμός είναι κανονικός περικλείει τη διγραμμική συναλλοίωτο. Θεωρούμε τη διαφορική μορφή Pfaff,

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} X_i(x)\, dx_i \quad , \tag{6-250}$$

όπου dx_i εκφράζουν μια απειροστή μετατόπιση από μια αρχική θέση σ' ένα n - χώρο. Παρόμοια, έστω ότι

$$\theta = \sum_{j=1}^{n} X_j(x)\, \delta x_j \quad , \tag{6-251}$$

όπου δx_j είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο απειροστών μετατοπίσεων από το ίδιο σημείο αναφοράς. Τώρα μπορούμε να γράψουμε

$$\delta\Omega = \sum_{i=1}^{n} (\delta X_i\, dx_i + X_i\, \delta dx_i) \tag{6-252}$$

$$d\theta = \sum_{j=1}^{n} (\delta X_j\, \delta x_j + X_j\, d\delta x_j) \quad , \tag{6-253}$$

όπου

$$\delta X_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\, \delta x_i \tag{6-254}$$

$$\delta X_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\, dx_i \quad . \tag{6-255}$$

Τότε παίρνουμε

$$\delta\Omega - d\theta = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right) dx_i\, \delta x_j \quad , \tag{6-256}$$

όπου σημειώνουμε ότι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\delta dx_i = d\delta x_i \quad , \tag{6-257}$$

αφού τώρα θεωρούμε σύγχρονες μεταβολές. Αν ανακαλέσουμε στη συνέχεια το συμβολισμό της Εξ. (5-23) και ορίσουμε

$$c_{ij} = \frac{\partial X_j}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \tag{6-258}$$

βρίσκουμε ότι

$$\delta\Omega - d\theta = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, dx_i\, \delta x_j \quad . \tag{6-259}$$

Αυτή είναι η *διγραμμική συναλλοίωτος* που συνδέεται με τη διαφορική μορφή της Εξ. (6-250).

Μέχρις εδώ ασχοληθήκαμε με μια γενική διαφορική μορφή Pfaff. Τώρα ας υποθέσουμε ότι οι μεταβλητές (q_i, p_i) και (Q_i, P_i) συνδέονται μ' ένα κανονικό μετασχηματισμό και θεωρούμε τη διαφορική μορφή

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\, dq_i - \sum_{i=1}^{n} P_i\, dQ_i = d\psi\,(q_i, p_i) \quad , \tag{6-260}$$

όπου $d\psi$ είναι ένα τέλειο διαφορικό και ο χρόνος θεωρείται ως παράμετρος. Τότε έχουμε

$$\delta\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\, dq_i - \sum_{i=1}^{n} P_i\, dQ_i \right) = \delta d\psi \quad . \tag{6-261}$$

Με παρόμοιο τρόπο, μπορούμε να γράψουμε

$$d\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\, \delta q_i - \sum_{i=1}^{n} P_i\, \delta Q_i \right) = d\delta\psi \quad . \tag{6-262}$$

Αν αφαιρέσουμε την Εξ. (6-262) από την Εξ. (2-61), με τη βοήθεια της Εξ. (6-257), παίρνουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\sum_{i=1}^{n} (\delta p_i \, dq_i - dp_i \, \delta q_i) = \sum_{i=1}^{n} (\delta P_i \, dQ_i - dP_i \, \delta Q_i) \quad . \qquad (6\text{-}263)$$

Έτσι βρίσκουμε ότι η διγραμμική συναλλοίωτος της

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \, dq_i$$

είναι αναλλοίωτος ως προς κανονικούς μετασχηματισμούς. Απ' την άλλη μεριά, αν η διαφορική μορφή στο αριστερό μέρος της Εξ. (6-260) δεν είναι τέλειο διαφορικό, όταν εκφράζεται σε όρους των μεταβλητών $(q_i, \, p_i)$, τότε η διγραμμική συναλλοίωτος δεν είναι μηδέν και άρα δεν ισχύει η Εξ. (6-263). Άρα, μπορούμε να χρησιμοποήσουμε την Εξ. (6-263) ως ένα κριτήριο για τους κανονικούς μετασχηματισμούς κατά τον ίδιο τρόπο όπως τις αγκύλες Lagrange ή Poisson.

Για να επεξηγήσουμε τη μέθοδο, έστω ότι έχουμε το μετασχηματισμό του παραδείγματος 6-7, δηλαδή,

$$Q = \sqrt{e^{-2q} - p^2} \quad , \qquad P = \cos^{-1}(pe^q) \quad . \qquad (6\text{-}264)$$

Σ' αυτό το παράδειγμα έχουμε

$$\delta P \, dQ = \frac{(\delta p + p \, \delta q)(e^{-2q} \, dq + p \, dp)}{e^{-2q} - p^2}$$

$$dP \, \delta Q = \frac{(dp + p \, dq)(e^{-2q} \, \delta q + p \, \delta p)}{e^{-2q} - p^2}$$

και άρα η διγραμμική συναλλοίωτος είναι

$$\delta P \, dQ - dP \, \delta Q = \frac{(e^{-2q} - p^2) \, \delta p \, dq + (p^2 - e^{-2q}) \, dp \, \delta q}{e^{-2q} - p^2}$$

$$= \delta p \, dq - dp \, \delta q \quad . \qquad (6\text{-}265)$$

Άρα ισχύει η Εξ. (6-263), επιβεβαιώνοντας το γεγονός ότι ο μετασχηματισμός είναι κανονικός.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

6-4. ΠΙΟ ΓΕΝΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Αναγκαίες συνθήκες. Στο κεφάλαιο αυτό θεωρούμε ολόνομα συστήματα που μπορούν να περιγραφούν από τη συνήθη μορφή των κανονικών εξισώσεων Hamilton. Ορίσαμε ένα μετασχηματισμό μεταξύ των (q_i, p_i) και των (Q_i, P_i) να είναι *κανονικός μετασχηματισμός* αν διατηρεί την κανονική μορφή των εξισώσεων κίνησης, ανεξάρτητα από το συγκεκριμένο σύστημα στο οποίο εφαρμόζεται. Η προηγούμενη ανάπτυξη όμως, κατέληξε σε κριτήρια όπως ο έλεγχος τέλειου διαφορικού και οι εκφράσεις των αγκυλών Lagrange και Poisson οι οποίες αντιπροσωπεύουν *ικανές* συνθήκες για ένα κανονικό μετασχηματισμό. Ανακύπτει τότε το ερώτημα, για το αν αυτές οι συνθήκες είναι επίσης και αναγκαίες. Προκύπτει ότι δεν είναι. Στη συνέχεια θα πάρουμε πιο γενικά κριτήρια.

Ας υποθέσουμε ότι ξεκινάμε πάλι με το γεγονός ότι η αρχή του Hamilton εφαρμόζεται σ' ένα σύστημα αν και μόνο αν αυτό μπορεί να περιγραφεί από τις συνήθεις ολόνομες μορφές των εξισώσεων Lagrange και Hamilton. Θα εξετάσουμε αν η αρχή του Hamilton εφαρμόζεται σε μια συνάρτηση Lagrange $L^*(Q, \dot{Q}, t)$ η οποία είναι πιο γενική από αυτή που δίνεται από την Εξ. (6-5). Πρέπει να σημειωθεί ότι οι εξισώσεις κίνησης Lagrange παραμένουν αμετάβλητες αν η συνάρτηση Lagrange πολλαπλασιαστεί με μια μη μηδενική σταθερά. Έτσι ας θεωρήσουμε τη νέα συνάρτηση Lagrange

$$L^*(Q_i, \dot{Q}_i, t) = \mu L(q_i, \dot{q}_i, t) - \frac{d}{dt}\varphi(q_i, Q_i, t) \quad , \qquad (6\text{-}266)$$

όπου μ είναι μια μη μηδενική σταθερά. Εφαρμόζοντας την ίδια αιτιολόγηση μ' αυτή που χρησιμοποιήσαμε για να πάρουμε την Εξ. (6-7) από την Εξ. (6-5) συμπεραίνουμε ότι αν η αρχή του Hamilton εφαρμόζεται στην $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ θα εφαρμόζεται επίσης και στην $L^*(Q_i, \dot{Q}_i, t)$ αφού όλοι οι μεταβλητοί δρόμοι έχουν σταθερά τα ακραία σημεία στο μορφικό χώρο και το χρόνο. Άρα, με την εφαρμογή της εξίσωσης Lagrange, βλέπουμε ότι η L^* περιγράφει το σύστημα τόσο αποτελεσματικά όσο και η L.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Αν ανακαλέσουμε ότι

$$L = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H \tag{6-267}$$

$$L^* = \sum_{i=1}^{n} P_i \dot{Q}_i - H \tag{6-268}$$

και αντικαταστήσουμε αυτές τις εκφράσεις για τις L και L^* στην Εξ. (6-266), παίρνουμε

$$\mu \sum_{i=1}^{n} p_i \, dq_i - \sum_{i=1}^{n} P_i \, dQ_i + (K - \mu H)\, dt = d\varphi \quad . \tag{6-269}$$

Αυτό το αποτέλεσμα είναι μια γενίκευση της Εξ. (6-14). Για σταθερό χρόνο, μπορούμε να γράψουμε την παραλλακτική εξίσωση

$$\mu \sum_{i=1}^{n} p_i \, \delta q_i - \sum_{i=1}^{n} P_i \, \delta Q_i = \delta\psi \quad , \tag{6-270}$$

όπου η $\psi(q_i, p_i, t)$ είναι ίση με την $\varphi(q_i, Q_i, t)$, όπως στην Εξ. (6-15).

Η αναγκαία και ικανή συνθήκη για ένα κανονικό μετασχηματισμό μπορεί να διατυπωθεί, από το γεγονός ότι μπορεί να βρεθεί μια μη μηδενική μ σταθερά τέτοια ώστε η διαφορική μορφή της Εξ. (6-270) να είναι τέλειο διαφορικό όταν εκφράζεται σε όρους ενός συνόλου κανονικών μεταβλητών. Αυτή η συνθήκη τέλειου διαφορικού είναι ισοδύναμη με την πρόταση ότι υπάρχουν μια συνάρτηση $\psi(q_i, p_i, t)$ και μια μη μηδενική σταθερά μ τέτοιες ώστε

$$\mu p_i - \sum_{j=1}^{n} P_j \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} = \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \tag{6-271}$$

$$- \sum_{j=1}^{n} P_j \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} = \frac{\partial \psi}{\partial p_i} \quad . \tag{6-272}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Πρέπει να σημειωθεί ότι αυτές οι εξισώσεις είναι ταυτόσημες με τις Εξ. (6-24) και (6-25) εκτός του ότι η p_j έχει αντικατασταθεί με την μp_j.

Μια εξίσωση για τη νέα Χαμιλτωνιανή συνάρτηση μπορεί να βρεθεί εξισώνοντας τους συντελεστές του dt στα δυο μέρη της Εξ. (6-269) αφού αναπτύξουμε το $d\varphi$, δηλαδή

$$K = \mu H + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{6-273}$$

ή, σε όρους της $\psi(q_j, p_j, t)$,

$$K = \mu H + \frac{\partial \psi}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} P_j \frac{\partial Q_j}{\partial t} \quad . \tag{6-274}$$

Με παρόμοιο τρόπο, μπορούν να γενικευθούν τα κριτήρια των αγκυλών και των διγραμμικών συναλλοίωτων για κανονικούς μετασχηματισμούς. Για παράδειγμα, οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες σε όρους των αγκυλών Poisson είναι

$$(Q_j, Q_k) = 0, \qquad (P_j, P_k) = 0, \qquad (Q_j, P_k) = \mu\delta_{jk} \tag{6-275}$$

για κάθε j, k. Οι αντίστοιχες συνθήκες σε όρους αγκυλών Lagrange είναι

$$[q_j, q_k] = 0, \qquad [p_j, p_k] = 0, \qquad [q_j, p_k] = \mu\delta_{jk} \quad . \tag{6-276}$$

Η διγραμμική συναλλοίωτη συνθήκη γίνεται,

$$\mu \sum_{j=1}^{n} (\delta p_j \, dq_j - dp_j \, \delta q_j) = \sum_{j=1}^{n} (\delta P_j \, dQ_j - dP_j \, \delta Q_j) \quad . \tag{6-277}$$

Σχόλια: Πρώτα σημειώνουμε ότι οι τιμές των αγκυλών Lagrange και Poisson δεν είναι πλέον αναλλοίωτες κάτω από κανονικούς μετασχηματισμούς, αλλά μπορούν να διαφέρουν κατά ένα σταθερό παράγοντα. Παρόμοια, η διγραμμική συναλλοίωτη δεν είναι αναλλοίωτη κάτω από κανονικό μετασχηματισμό. Επιπλέον, χρειάζεται προσοχή στην εφαρμογή της ταυτότητας του Jacobi επειδή απαιτείται η

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

χρησιμοποίηση ενός συμβιβαστού συνόλου κανονικών μεταβλητών. Απ' την άλλη μεριά, αν πρέπει να περιορίσουμε τον ορισμό των κανονικών μετασχηματισμών στην περίπτωση μ=1, τότε οι ικανές συνθήκες της προηγούμενης ανάπτυξης γίνονται επίσης και αναγκαίες. Οι περισσότεροι συγγραφείς ακολουθούν αυτή την προσέγγιση, της αποδοχής κάποιου περιοριστικού ορισμού ενός κανονικού μετασχηματισμού που οδηγεί σε μια πιο μεστή θεωρία. Θα υποθέσουμε επίσης ότι το μ περιορίζεται στην τιμή μονάδα εκτός αν εμείς το καθορίσουμε διαφορετικά.

Παράδειγμα 6-8. Θεωρούμε το μετασχηματισμό

$$Q = \sqrt{q}\cos p, \qquad P = \sqrt{q}\sin p \quad . \tag{6-278}$$

Να αποδειχτεί ότι εκφράζει ένα κανονικό μετασχηματισμό με $\mu \neq 1$. Να λυθεί ως προς τη νέα Χαμιλτωνιανή συνάρτηση το σύστημα που έχει

$$T = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 , \qquad V = \frac{1}{2} k q^2 \quad . \tag{6-279}$$

Για το παράδειγμα αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τον έλεγχο του τέλειου διαφορικού στη διαφορική μορφή της Εξ. (6-270). Πρώτα βλέπουμε ότι

$$P\,\delta Q = \frac{1}{2}\sin p \cos p\,\delta q - q\sin^2 p\,\delta p$$

και άρα

$$\mu p\,\delta q - P\,\delta Q = (\mu p - \frac{1}{2}\sin p\cos p)\,\delta q + q\sin^2 p\,\delta p \quad . \tag{6-280}$$

Στη συνέχεια θα αναζητήσουμε την ύπαρξη μη μηδενικής τιμής της μ τέτοιας ώστε

$$\frac{\partial}{\partial p}(\mu p - \frac{1}{2}\sin p\cos p) = \frac{\partial}{\partial q}(q\sin^2 p) \tag{6-281}$$

ή

$$\mu - \frac{1}{2}\cos^2 p + \frac{1}{2}\sin^2 p = \sin^2 p \quad .$$

Είναι προφανές ότι $\mu = \frac{1}{2}$ και άρα ο μετασχηματισμός είναι κανονικός.

Για να βρούμε τη νέα Χαμιλτωνιανή συνάρτηση K πρώτα παίρνουμε την παλιά Χαμιλτωνιανή. Αφού αυτό είναι ένα φυσικό σύστημα, έχουμε

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}k p^2 \quad . \tag{6-282}$$

Μπορεί να δειχθεί ότι οι αντίστροφες εξισώσεις μετασχηματισμού είναι

$$q = Q^2 + P^2 , \qquad p = \tan^{-1}\frac{P}{Q} \tag{6-283}$$

και άρα

$$K = \mu H = \frac{1}{4m}\left(\tan^{-1}\frac{P}{Q}\right)^2 + \frac{1}{4}k\,(Q^2 + P^2)^2 \quad . \tag{6-284}$$

Ως έλεγχο του κατά πόσο η $K(Q_i, P_j)$ εκφράζει σωστά το σύστημα, ας πάρουμε τις εξισώσεις κίνησης. Βρίσκουμε ότι

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \frac{Q\tan^{-1}\frac{P}{Q}}{2m\,(Q^2 + P^2)} + kP\,(Q^2 + P^2) \tag{6-285}$$

$$\dot{P} = \frac{\partial K}{\partial Q} = \frac{P\tan^{-1}\frac{P}{Q}}{2m\,(Q^2 + P^2)} - kQ\,(Q^2 + P^2) \quad . \tag{6-286}$$

Απ' την άλλη μεριά, μια παραγώγιση της Εξ. (6-283) δίνει

$$\dot{q} = 2(Q\dot{Q} + P\dot{P}), \qquad \dot{p} = \frac{Q\dot{P} - \dot{Q}}{Q^2 + P^2} \quad . \tag{6-287}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Με αντικατάσταση από τις Εξ. (6-285) και (6-286) στην Εξ. (6-287), παίρνουμε

$$\dot{q} = \frac{p}{m} \quad , \qquad \dot{p} = - kq \quad . \tag{6-288}$$

Αυτές είναι οι σωστές εξισώσεις κίνησης ως προς τις αρχικές μεταβλητές (q_i, p_i).

Χρονικοί μετασχηματισμοί. Στις προηγούμενες συζητήσεις επί των κανονικών εξισώσεων θεωρήσαμε το χρόνο ως παράμετρο που δεν εισέρχεται ευθέως στους μετασχηματισμούς. Μ' άλλα λόγια, θεωρήσαμε ότι η χρονική παράμετρος t είναι η ίδια πριν και μετά το μετασχηματισμό.

Τώρα ας διευρύνουμε τη συζήτηση ώστε να συμπεριλάβουμε και κανονικούς μετασχηματισμούς που απεικονίζουν ένα σημείο (q_i, p_i, t) στο (Q_i, P_i, T), όπου T είναι ο νέος χρόνος. Επιπλέον, ας εισάγουμε το τ ως τη νέα ανεξάρτητη μεταβλητή. Γενικά, η σχέση του με το t ή το T είναι ακαθόριστη, αλλά θα θεωρήσουμε ότι αυξάνεται συνεχώς καθώς η τροχιά διαγράφεται στο μορφικό χώρο. Μπορούμε για παραδείγμα να πάρουμε το τ ως την απόσταση κατά μήκος της τροχιάς από ένα δοσμένο αρχικό σημείο.

Θεωρούμε ένα ολόνομο σύστημα που περιγράφεται από τις κανονικές εξισώσεις. Μπορούμε να γράψουμε τη διορθωμένη αρχή του Hamilton γι' αυτό το σύστημα με τη μορφή

$$\delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i q'_i - H' \right) d\tau = 0 \quad , \tag{6-289}$$

όπου οι τόνοι δηλώνουν παραγώγιση ως προς τ. Εδώ τα ακραία σημεία των μεταβαλλόμενων τροχιών είναι σταθερά ως προς q_i και t, υποδηλώνοντας σταθερά ακραία-σημεία επίσης και ως προς το τ. Τώρα θεωρούμε το t ως μια επιπρόσθετη συντεταγμένη και λαμβάνουμε την $-H$ ως τη συζυγή της ορμή. Τότε μπορούμε να γράψουμε την παραλλακτική εξίσωση με τη μορφή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sum_{i=1}^{n+1} p_i q'_i \, d\tau = 0 \quad . \tag{6-290}$$

Μ' άλλα λόγια, τώρα έχουμε έναν επεκτεταμένο χώρο φάσεων διάστασης $(2n + 2)$ στον οποίο παίρνουμε

$$q_{n+1} = t \,, \qquad p_{n+1} = - H \quad . \tag{6-291}$$

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι τα δq_i και δt που συνδέονται με τη μεταβαλλόμενη τροχιά της Εξ. (6-290) δεν είναι εντελώς ανεξάρτητα, αλλά περιορίζονται από τη βοηθητική συνθήκη

$$p_{n+1} + H(q_i, p_i, t) = 0 \quad . \tag{6-292}$$

Με παρόμοιο τρόπο, μπορούμε να περιγράψουμε το ίδιο σύστημα σε όρους νέων κανονικών μεταβλητών και παίρνουμε

$$\delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left(\sum_{i=1}^{n} P_i Q'_i - KT' \right) d\tau = 0 \tag{6-293}$$

ή

$$\delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sum_{i=1}^{n+1} P_i Q'_i \, d\tau = 0 \,, \tag{6-294}$$

όπου

$$Q_{n+1} = T, \qquad P_{n+1} = - K \tag{6-295}$$

και η $K(Q_i, P_i, t)$ είναι η νέα συνάρτηση Hamilton.

Μια σύγκριση των Εξ. (6-289) και (6-293) δείχνει ότι η διαφορική μορφή που συνδέεται με τον κανονικό μετασχηματισμό είναι

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \, dq_i - H \, dt - \sum_{i=1}^{n} P_i \, dQ_i + K \, dT = d\varphi \,, \tag{6-296}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

όπου η $\varphi(q_i, Q_i, t, T)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση του μετασχηματισμού. Σημειώνουμε ότι το dt απουσιάζει από τη διαφορική μορφή και γι' αυτό το λόγο η φ δεν είναι συνάρτηση του τ. Επιπλέον, αυτό δείχνει ότι οι Χαμιλτωνιανές συναρτήσεις που περιγράφουν το σύστημα στον επεκτεταμένο χώρο των φάσεων είναι και οι δυο *ταυτοτικά μηδέν*. (*) Από μια πρώτη ματιά, αυτό φαίνεται να υποδηλώνει (εξ αιτίας των κανονικών εξισώσεων) ότι οι κανονικές μεταβλητές είναι όλες σταθερές, αλλά θα δειχθεί πως δεν είναι αυτή η περίπτωση.

Η Εξ. (6-296) σε συμπυκνωμένη παραλλακτική μορφή είναι

$$\sum_{i=1}^{n+1} p_i \, \delta q_i - \sum_{i=1}^{n+1} P_i \, \delta Q_i = \delta\varphi \quad , \tag{6-297}$$

δηλαδή παρόμοια με την Εξ. (6-22). Θεωρώντας μη μηδενική ορίζουσα

$$\left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_i \partial Q_i} \right| \neq 0 \quad , \qquad (i, j = 1, 2, ..., n+1) \tag{6-298}$$

εξασφαλίζουμε την ανεξαρτησία των q_i και Q_i. Αν αναπτύξουμε το $\delta\varphi$ και εξισώσουμε τους συντελεστές σε κάθε πλευρά της Εξ. (6-297), παίρνουμε

$$p_i = \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \quad , \qquad (i = 1, 2, ..., n+1) \tag{6-299}$$

$$P_i = - \frac{\partial \varphi}{\partial Q_i} \quad , \qquad (i = 1, 2, ..., n+1) \; . \tag{6-300}$$

Αυτές οι εξισώσεις μπορούν να λυθούν ως προς τις συναρτήσεις $Q_k(q_i, p_i, t)$, $P_k(q_i, p_i, t)$, $T(q_i, p_i, t)$, που καθορίζουν το μετασχηματισμό.

Ας επιστρέψουμε τώρα σε μια θεώρηση των κανονικών εξισώσεων της κίνησης. Αν και η Χαμιλτωνιανή συνάρτηση στον επεκτεταμένο χώρο των φάσεων είναι ταυτοτικά μηδέν, πρέπει να λάβουμε υπόψη τον περιορισμό που εκφράστηκε στην Εξ. (6-292). Αυτό πραγματοποιείται

(*) Σημειώνουμε ότι αυτές οι συναρτήσεις είναι διαφορετικές από τις $H(q_i, p_i, t)$ και $K(Q_i, P_i, T)$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών του Lagrange, που οδηγεί στην επαυξημένη Χαμιλτωνιανή

$$H = \lambda \, [p_t + H(q_i, p_i, t)] \quad , \tag{6-301}$$

όπου η p_t είναι ταυτόσημη με την p_{n+1}. Οι αντίστοιχες κανονικές εξισώσεις είναι

$$q'_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \lambda \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \qquad (i = 1, 2, ..., n) \tag{6-302}$$

$$t' = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \lambda \tag{6-303}$$

$$p'_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} = - \lambda \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad , \qquad (i = 1, 2, ..., n) \tag{6-304}$$

$$p'_t = - \frac{\partial H}{\partial t} = - \lambda \frac{\partial H}{\partial t} \quad . \tag{6-305}$$

Χρησιμοποιώντας την Εξ. (6-303), βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{\lambda} q'_i = \dot{q}_i \tag{6-306}$$

και άρα η Εξ. (6-302) γίνεται

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \quad . \tag{6-307}$$

Παρόμοια, από την Εξ. (6-304) έχουμε

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \quad , \tag{6-308}$$

δηλαδή, τις συνήθεις κανονικές εξισώσεις για το σύστημα. Επιπρόσθετα, σημειώνουμε ότι $p_t = - H$ και άρα η Εξ. (6-305) ανάγεται στη γνωστή εξίσωση

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad , \tag{6-309}$$

που είναι ταυτόσημη με την Εξ. (4-116).

Ένα παρόμοιο σύνολο κανονικών εξισώσεων μπορεί να ληφθεί από τη νέα επαυξημένη Χαμιλτωνιανή K , όπου σημειώνουμε ότι

$$\mathsf{K} = \mathsf{H} \quad . \tag{6-310}$$

Αυτή η ισότητα ισχύει, γιατί η γεννήτρια συνάρτηση φ δεν είναι εκπεφρασμένη συνάρτηση του τ . Οπωσδήποτε, η νέα Χαμιλτωνιανή εκφράζεται σε όρους των νέων μεταβλητών.

Τώρα ας συνοψίσουμε τα παραπάνω. Θεωρήσαμε το χρόνο ως μια επιπλέον διάσταση στο μορφικό χώρο και αυξήσαμε τη διάσταση του χώρου των φάσεων σε $(2n+2)$. Αφού οι Χαμιλτωνιανές συναρτήσεις και η γεννήτρια συνάρτηση δεν περιέχουν το τ εκπεφρασμένα, η τυπική ανάλυση μοιάζει μ' εκείνη για ένα συντηρητικό σκληρόνομο σύστημα· δηλαδή, οι επαυξημένες Χαμιλτωνιανές συναρτήσεις παραμένουν σταθερές σε τιμή και στην πραγματικότητα είναι ίσες με μηδέν.

Παράδειγμα 6-9. Θεωρούμε τον κανονικό μετασχηματισμό που παράγεται από την

$$\varphi = qQ + tT \quad . \tag{6-311}$$

Να βρεθούν οι εξισώσεις μετασχηματισμού, η νέα επαυξημένη Χαμιλτωνιανή και οι κανονικές εξισώσεις για την περίπτωση στην οποία

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}k(t-q)^2 \quad . \tag{6-312}$$

Πρώτα ας πάρουμε τις εξισώσεις μετασχηματισμού. Από τις Εξ. (6-299) και (6-300) έχουμε

$$p = \frac{\partial \varphi}{\partial q} = Q, \qquad p_t = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = T \tag{6-313}$$

και

$$P = -\frac{\partial \varphi}{\partial Q} = -q\,, \qquad P_T = -\frac{\partial \varphi}{\partial T} = -t \quad . \tag{6-314}$$

Οι κανονικές εξισώσεις λαμβάνονται χρησιμοποιώντας τις Εξ. (6-302) και (6-304) που δίνουν

$$q' = \frac{\lambda p}{m}\,, \qquad p' = \lambda k\,(t - q) \quad . \tag{6-315}$$

Αλλά ο πολλαπλασιαστής λ είναι ίσος με $dt/d\tau$, έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$\dot{q} = \frac{p}{m}\,, \qquad \dot{p} = k(t - q) \quad , \tag{6-316}$$

που είναι οι συνήθεις εξισώσεις κίνησης σε όρους των αρχικών συντεταγμένων.

Με τη βοήθεια των Εξ. (6-301) και (6-310), βλέπουμε ότι η νέα επαυξημένη Χαμιλτωνιανή είναι

$$K = \lambda\,(p_t + H) = \lambda\left[T + \frac{Q^2}{2m} + \frac{1}{2}\,k\,(P - P_T)^2\right] \quad . \tag{6-317}$$

Οι κανονικές εξισώσεις σε όρους των νέων μεταβλητών είναι

$$Q' = \frac{\partial K}{\partial P} = \lambda k\,(P - P_T) \tag{6-318}$$

$$T' = \frac{\partial K}{\partial P_T} = -\lambda k\,(P - P_T) \tag{6-319}$$

$$P' = -\frac{\partial K}{\partial Q} = -\frac{\lambda Q}{m} \tag{6-320}$$

$$P'_T = -\frac{\partial K}{\partial T} = -\lambda \quad . \tag{6-321}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Οι εξισώσεις (6-318) και (6-320) αντιστοιχούν στις κανονικές εξισώσεις των Εξ. (6-316). Η Εξ. (6-321) είναι ισοδύναμη με την $\lambda = dt/d\tau$, και η Εξ. (6-319) είναι ουσιαστικά η πρόταση ότι $\dot{H} = \partial H/\partial t$.

Ένας έλεγχος των εξισώσεων μετασχηματισμού (6-313) και (6-314) χρησιμοποιώντας το κτιρήριο των αγκυλών Poisson επιβεβαιώνει ότι ο μετασχηματισμός είναι κανονικός.

6-5. ΔΙΑΤΥΠΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΗΤΡΩΑ

Εξισώσεις Hamilton. Ασχοληθήκαμε με ολόνομα συστήματα για τα οποία εφαρμόζεται η συνήθης μορφή των κανονικών εξισώσεων, δηλαδή,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) \quad , \tag{6-322}$$

όπου η Χαμιλτωνιανή συνάρτηση έχει τη μορφή $H(q_i, p_i, t)$. Εδώ έχουμε $2n$ πρώτης τάξης συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Είναι βολικό να θεωρήσουμε ένα διάνυσμα $\mathbf{x}$ στο χώρο των φάσεων και να χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό

$$\{x_j\} \equiv \{q_1, q_2, ..., q_n, p_1, p_2, ..., p_n\} \quad , \tag{6-323}$$

όπου $j = 1, 2, ..., 2n$. Τότε οι κανονικές εξισώσεις μπορούν να γραφούν με μορφή μητρώων,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Z}\mathbf{H}_X \tag{6-324}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \mathrm{M} \\ \dot{q}_n \\ \dot{p}_1 \\ \mathrm{M} \\ \dot{p}_n \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \hline -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial q_1} \\ \mathrm{M} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_n} \end{Bmatrix}, \tag{6-325}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

όπου το αντισυμμετρικό μητρώο $\mathbf{Z}$ διαμερίζεται σε τέσσερις $n \times n$ υποπίνακες. Τα σύμβολα $\mathbf{0}$ και $\mathbf{1}$ εκφράζουν το μηδενικό και το μοναδικό μητρώο, αντίστοιχα.

Σημειώνουμε ότι

$$\mathbf{Z}^T = \mathbf{Z}^{-1} = -\mathbf{Z} \quad . \tag{6-326}$$

Επίσης, βλέπουμε ότι ο $\mathbf{H}_x$ μπορεί να θεωρηθεί ως η κλίση της Χαμιλτωνιανής συνάρτησης στο χώρο των φάσεων διάστασης $2n$, αφού οι συνιστώσες του αποτελούνται από τις πρώτες μερικές παραγώγους της H ως προς τα q_i και p_i.

Συμπλεκτικά Μητρώα. Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια τη διατύπωση με μητρώα των ικανών και αναγκαίων συνθηκών για ένα κανονικό μετασχηματισμό. Υποθέτουμε ότι δίνονται εξισώσεις μετασχηματισμού της μορφής

$$X_i = X_i(x_k, t) \ , \quad (i = 1, 2, ..., 2n) \ , \tag{6-327}$$

όπου

$$\{X_i\} \equiv \{Q_1, Q_2, ..., Q_n, P_1, P_2, ..., P_n\} \quad . \tag{6-328}$$

Το Ιακωβιανό μητρώο αυτού του μετασχηματισμού είναι το $2n \times 2n$ μητρώο που έχει ως τυπικό στοιχείο το

$$M_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \quad . \tag{6-329}$$

Πιο συγκεκριμένα, μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbf{M} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array}\right], \tag{6-630}$$

όπου $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ και $\mathbf{D}$ είναι $n \times n$ υποπίνακες που έχουν τυπικά στοιχεία τα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$A_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} , \quad B_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} , \quad C_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial q_j} , \quad D_{ij} = \frac{\partial P_j}{\partial p_j} , \qquad (6\text{-}331)$$

Η διατύπωση με τις αγκύλες Poisson των αναγκαίων και ικανών συνθηκών για ένα κανονικό μετασχηματισμό δόθηκε στην Εξ. (6-275). Αυτές μπορούν να γραφούν με τη μορφή

$$(Q_j, Q_k) = 0 , \quad (P_j, P_k) = 0 , \quad (Q_j, P_k) = -(P_k, Q_j) = \mu\delta_{jk} , \qquad (6\text{-}332)$$

όπου μ είναι μια μη μηδενική σταθερά η οποία είναι ίση με +1 στον πιο συνήθη πιο περιοριστικό ορισμό του κανονικού μετασχηματισμού. Χρησιμοποιώντας τα **A, B, C, D** μητρώα, μπορούμε να εκφράσουμε αυτές τις συνθήκες όπως παρακάτω:

$$\mathbf{AB}^T - \mathbf{BA}^T = \mathbf{0} , \qquad \mathbf{CD}^T - \mathbf{DC}^T = \mathbf{0} \qquad (6\text{-}333)$$

$$\mathbf{AD}^T - \mathbf{BC}^T = \mu\mathbf{1} , \qquad \mathbf{CB}^T - \mathbf{DA}^T = -\mu\mathbf{1} .$$

Οι πρώτες δυο εξισώσεις υποδηλώνουν ότι τα $\mathbf{AB}^T$ και $\mathbf{CD}^T$ είναι συμμετρικά μητρώα, ενώ οι τελευταίες δυο εξισώσεις είναι κατ' ουσίαν ταυτόσημες διατυπώσεις μιας μόνης συνθήκης στα μητρώα. Και οι τέσσερις εξισώσεις συνδυάζονται στη μόνη έκφραση

$$\mathbf{MZM}^T = \mu\mathbf{Z} , \qquad (6\text{-}334)$$

όπου μ είναι μια μη μηδενική βαθμωτή σταθερά. Αν αυτή η εξίσωση πολλαπλασιαστεί επί $\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{M}^{-1}$ και μετά επί **ZM**, λαμβάνουμε την εναλλακτική μορφή

$$\mathbf{M}^T\mathbf{ZM} = \mu\mathbf{Z} . \qquad (6\text{-}335)$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε την Εξ. (6-326) και το γεγονός ότι

$$\mathbf{ZZ} = -\mathbf{1} . \qquad (6\text{-}336)$$

Το μητρώο $2n \times 2n$ μητρώο που ικανοποιεί την Εξ. (6-335), ή την Εξ. (6-334), είναι γνωστό ως *συμπλεκτικό μητρώο*. Έτσι μπορούμε να δηλώσουμε κατηγορηματικά ότι η αναγκαία και ικανή συνθήκη για ένα

κανονικό μετασχηματισμό είναι το Ιακωβιανό μητρώο να είναι συμπλεκτικό.

Θεωρούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό στην Εξ. (6-327), δηλαδή,

$$x_i = x_i(X_k, t) \ , \quad (i = 1, 2, ..., 2n) \ . \tag{6-337}$$

Έστω το Ιακωβιανό του μητρώου **m**, όπου

$$m_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \ . \tag{6-338}$$

Τα μητρώα **M** και **m** είναι αντίστροφα το ένα του άλλου, δηλαδή,

$$\mathbf{M} = \mathbf{m}^{-1} \ . \tag{6-339}$$

Αν ο αρχικός μετασχηματισμός είναι κανονικός, ξέρουμε ότι και ο αντίστροφος μετασχηματισμός πρέπει να είναι κανονικός. Άρα αν το **M** είναι συμπλεκτικό, τότε και το **m** είναι επίσης συμπλεκτικό. Για να το δείξουμε αυτό, μπορούμε να προπολλαπλασιάσουμε από αριστερά κάθε πλευρά της Εξ. (6-335) με $\mathbf{m}^T$ και από δεξιά κάθε πλευρά με **m** . Κατόπιν, χρησιμοποιώντας την Εξ. (6-339), παίρνουμε

$$\mathbf{m}^T \mathbf{Z} \mathbf{m} = \frac{1}{\mu} \mathbf{Z} \ , \tag{6-340}$$

όπου $1/\mu$ είναι μια μη μηδενική βαθμωτή σταθερά. Μια εναλλακτική μορφή είναι η

$$\mathbf{m} \mathbf{Z} \mathbf{m}^T = \frac{1}{\mu} \mathbf{Z} \ . \tag{6-341}$$

Οι Εξ. (6-334), (6-335), (6-340) και (6-341) απὸτελούν τέσσερις ισοδύναμες διατυπώσεις των αναγκαίων και ικανών συνθηκών για ένα κανονικό μετασχηματισμό. Κάθε μια συνεπάγεται τις άλλες τρεις.

Παράδειγμα 6-10. Υποθέτουμε ότι δίνεται ο μετασχηματισμός

$$Q = aq, \qquad P = bp \ . \tag{6-342}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο μητρώων για να βρούμε τις συνθήκες για τις σταθερές a και b που απαιτούνται για ένα κανονικό μετασχηματισμό.

Σ' αυτή την περίπτωση το Ιακωβιανό μητρώο είναι

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} . \tag{6-343}$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ. (6-335), παίρνουμε

$$\mathbf{M}^T \mathbf{Z} \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & ab \\ -ab & 0 \end{bmatrix} = \mu \mathbf{Z} \quad , \tag{6-344}$$

όπου $\mu = ab$. Έτσι ο δοσμένος μετασχηματισμός είναι κανονικός για όλες τις μη μηδενικές τιμές του ab, αλλά είναι κανονικός κατά τον πιο συνηθισμένο περιοριστικό τρόπο μόνο για $ab = 1$.

6-6. ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

Απειροστοί κανονικοί μετασχηματισμοί. Θεωρούμε ένα κανονικό μετασχηματισμό στον οποίο οι νέες q_i και p_i διαφέρουν ελάχιστα από τις παλιές τιμές. Ας επιλέξουμε μια γεννήτρια συνάρτηση $F_2(q_i, P_i, t)$ η οποία διαφέρει κατά απειροστή ποσότητα από τη γεννήτρια συνάρτηση ενός ταυτοτικού μετασχηματισμού. Αναφερόμενοι στην Εξ. (6-94), για παράδειγμα, μπορούμε να θέσουμε

$$F_2 (q_i, P_i, t) = \sum_{i=1}^{n} q_i P_i + \varepsilon G(q_i, P_i, t) \quad , \tag{6-345}$$

όπου ε είναι μια μικρή παράμετρος και $G(q_i, P_i, t)$ θεωρείται ότι είναι διπλά διαφορίσιμη. Τότε, με τη βοήθεια των Εξ. (6-47) και (6-48), παίρνουμε

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_i}$$

ή

$$Q_i - q_i = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_i}$$

$$P_i - p_i = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \quad . \tag{6-346}$$

Αυτές οι εξισώσεις εκφράζουν ένα *απειροστό κανονικό μετασχηματισμό*. Πρέπει να σημειωθεί ότι οι μικρές αλλαγές στις συντεταγμένες και ορμές είναι πρώτης τάξης ως προς το ε. Έτσι αν παραλείψουμε όρους τάξης ε^2 ή ανώτερης, μπορούμε να αντικαταστήσουμε κάθε P_i με p_i στην G. Η προκύπτουσα συνάρτηση $G(q_i, p_i, t)$ μπορεί να θεωρηθεί ως η *γεννήτρια* του απειροστού κανονικού μετασχηματισμού.

Συμβολίζουμε την $Q_i - q_i$ με δq_i και την $P_i - p_i$ με δp_i και στη συνέχεια, από την Εξ. (6-346), βλέπουμε ότι οι απειροστές αλλαγές στις q_i και p_i που παράγονται από την $G(q_i, p_i, t)$ δίνονται από την

$$\delta q_i = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_i}$$

$$\delta p_i = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \quad . \tag{6-347}$$

Αυτές οι αλλαγές μπορεί να θεωρηθούν ότι λαμβάνουν ή όχι χώρα με την πάροδο του χρόνου. Για την ειδική περίπτωση που εκλέγουμε τη Χαμιλτωνιανή $H(q_i, p_i, t)$ ως γεννήτρια ενός απειροστού κανονικού μετασχηματισμού, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο μετασχηματισμός λαμβάνει χώρα με χρονική αύξηση dt. Κατόπιν, θέτοντας $\varepsilon = dt$, οι Εξ. (6-347) γίνονται

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad , \tag{6-348}$$

που τις αναγνωρίζουμε ως τις κανονικές εξισώσεις Hamilton. Άρα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η συνάρτηση του Hamilton μπορεί να θεωρηθεί ότι παράγει ένα απειροστό κανονικό μετασχηματισμό σε κάθε χρονική στιγμή. Αυτή η ακολουθία μετασχηματισμών έχει ως αποτέλεσμα την εξέλιξη του δυναμικού συστήματος, με το χρόνο. Αφού μια ακολουθία κανονικών μετασχηματισμών είναι ισοδύναμη μ' ένα μόνο κανονικό μετασχηματισμό, βλέπουμε ότι κάθε δυο σημεία επί μιας δοσμένης τροχιάς στο χώρο των φάσεων συνδέονται μ' ένα κανονικό μετασχηματισμό.

Στη συνέχεια ας θεωρήσουμε τη μεταβολή στην τιμή της συνάρτησης $f(q_i, p_i, t)$ λόγω των αλλαγών των q_i και p_i που προκύπτουν από ένα απειροστό κανονικό μετασχηματισμό. Θεωρώντας σταθερό χρόνο, έχουμε

$$\delta f = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \delta p_i \right) ,$$

η οποία, με τη βοήθεια της Εξ. (6-347), γίνεται

$$\delta f = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) = \varepsilon (f, G) \quad . \tag{6-349}$$

Πιο γενικά, αν επιτρέψουμε στο χρόνο να μεταβάλλεται και θέσουμε $\varepsilon = dt$, παίρνουμε

$$df = \left[(f, G) + \frac{\partial f}{\partial t} \right] dt \quad . \tag{6-350}$$

Για την περίπτωση κατά την οποία η γεννήτρια συνάρτηση G είναι η Χαμιλτωνιανή βλέπουμε ότι

$$\dot{f} = (f, H) + \frac{\partial f}{\partial t} \quad , \tag{6-351}$$

δηλαδή σε συμφωνία με την Εξ. (6-235).

Γενικά, ένας απειροστός κανονικός μετασχηματισμός αλλάζει τη Χαμιλτωνιανή συνάρτηση τόσο στη μορφή όσο και στην τιμή. Από την Εξ. (6-49) έχουμε

$$K(Q_i, P_i, t) = H(q_i, p_i, t) + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial t} \quad . \tag{6-352}$$

Αλλά, για δοσμένο χρόνο t, βλέπουμε από την Εξ. (6-349) ότι

$$H(Q_i, P_i, t) = H(q_i, p_i, t) + \delta H = H(q_i, p_i, t) + \varepsilon (H, G) , \tag{6-353}$$

όπου η $H(Q_i, P_i, t)$ είναι η αρχική συνάρτηση Hamilton με Q_i, P_i αντί των q_i, p_i. Άρα

$$K(Q_i, P_i, t) = H(Q_i, P_i, t) + \varepsilon \left[(G, H) + \frac{\partial G}{\partial t} \right] \quad . \tag{6-354}$$

Για να λάβουμε αυτό το αποτέλεσμα σημειώνουμε ότι η αγκύλη Poisson $(G, H) = - (H, G)$.

Τώρα θεωρούμε ότι η γεννήτρια συνάρτηση είναι σταθερά της κίνησης και άρα σύμφωνα με την Εξ. (6-351),

$$(G, H) + \frac{\partial G}{\partial t} = 0 \ , \tag{6-355}$$

Η νέα Χαμιλτωνιανή είναι απλά η παλιά συνάρτηση με τις νέες Q_i και P_i στη θέση των παλιών.

Ως επεξήγηση αυτού του σημείου, υποθέτουμε ότι περιγράφουμε ένα σύστημα N σωματίων σε όρους ενός Καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων και λαμβάνουμε τη συνολική στροφορμή περί τον x άξονα ως τη γεννήτρια ενός απειροστού κανονικού μετασχηματισμού. Έτσι μπορούμε να γράψουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$G = \sum_{i=1}^{N} m_i \, (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i) = \sum_{i=1}^{N} (y_i \, p_{zi} - z_i p_{yi}) \ , \qquad (6\text{-}356)$$

και χρησιμοποιώντας την Εξ. (6-347), βρίσκουμε ότι

$$\delta x_i = 0 \, , \qquad \delta y_i = - \varepsilon z_i \, , \qquad \delta z_i = \varepsilon \, y_i \qquad (6\text{-}357)$$

και

$$\delta p_{xi} = 0 \, , \qquad \delta p_{yi} = - \varepsilon \, p_{zi} \, , \qquad \delta p_{zi} = \varepsilon \, p_{yi} \ . \qquad (6\text{-}358)$$

Αυτός ο μετασχηματισμός αντιστοιχεί σε μια απειροστή περιστροφή $d\theta=\varepsilon$ του συστήματος των σωματίων γύρω από τον x άξονα . Μια παρόμοια περιστροφή λαμβάνει χώρα και στις συντεταγμένες της ορμής. Πιο γενικά, η χρήση της ορμής p_i ως γεννήτριας συνάρτησης θα οδηγήσει σε μια απειροστή αλλαγή δq_i στη συζυγή συντεταγμένη. Αυτό εφαρμόζεται, όπως στη δοθείσα επεξήγηση, ακόμη και όταν η p_i εκφράζεται σε όρους άλλων μεταβλητών.

Για να δείξουμε την επίδραση του μετασχηματισμού στη Χαμιλτωνιανή, ας θεωρήσουμε την ειδική περίπτωση στην οποία κάθε σωμάτιο έλκεται με κατεύθυνση την αρχή με μια δύναμη ανάλογη της απόστασής του. Τότε η γεννήτρια συνάρτηση είναι μια σταθερά της κίνησης και επιπλέον, έχουμε ένα φυσικό σύστημα με τη συνάρτηση Hamilton ίση με τη σταθερή ολική ενέργεια.

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{p_{xi}^2}{m_i} + \frac{p_{yi}^2}{m_i} + \frac{p_{zi}^2}{m_i} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} k_i \, (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \ . \qquad (6\text{-}359)$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις μετασχηματισμού

$$x_i = X_i \, , \qquad y_i = Y_i + \varepsilon \, Z_i \, , \qquad z_i = Z_i - \varepsilon \, Y_i \qquad (6\text{-}360)$$

$$p_{xi} = P_{xi} \, , \qquad p_{yi} = P_{yi} + \varepsilon \, P_{zi} \, , \qquad p_{zi} = P_{zi} - \varepsilon \, P_{yi} \qquad (6\text{-}361)$$

εφαρμόζοντας την Εξ. (6-352) και παραλείποντας όρους τάξης ε^2 , παίρνουμε

$$K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{P_{xi}^2}{m_i}+\frac{P_{yi}^2}{m_i}+\frac{P_{zi}^2}{m_i}\right)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(X_i^2+Y_i^2+Z_i^2)\ . \qquad (6\text{-}362)$$

Από αυτό το παράδειγμα συμπεραίνουμε ότι η απειροστή περιστροφή που παράγεται από τη συνάρτηση της στροφορμής αφήνει τη Χαμιλτωνιανή αμετάβλητη τόσο σε μορφή όσο και σε τιμή, υποδηλώνοντας μια συμμετρία σ' αυτή τη συνάρτηση. Αυτό μπορεί να φανεί από το γεγονός ότι τα αθροίσματα των τετραγώνων των συνιστωσών της ορμής ή της θέσης είναι αναλλοίωτα σε περιστροφή γύρω από την αρχή. Αντίστροφα, η Χαμιλτωνιανή συνάρτηση παράγει μια κίνηση του συστήματος στο χρόνο που αφήνει τη στροφορμή αναλλοίωτη.

Θεώρημα Liouville. Για άλλη μια φορά ας θεωρήσουμε ένα ολόνομο σύστημα που περιγράφεται από τη συνήθη μορφή των εξισώσεων του Hamilton. Με το πέρασμα του χρόνου το σύστημα διαγράφει μια τροχιά στο χώρο των φάσεων. Κάθε δυο σημεία επί μιας δοσμένης τροχιάς συνδέονται μ' ένα κανονικό μετασχηματισμό και στην πραγματικότητα, κάθε δυο γειτονικά σημεία συνδέονται μ' ένα απειροστό κανονικό μετασχηματισμό. Αυτοί οι μετασχηματισμοί πρέπει να προσεγγίζουν τον ταυτοτικό μετασχηματισμό καθώς το χρονικό διάστημα τείνει στο μηδέν και ως εκ τούτου θεωρούμε μόνο την πιο περιοριστική περίπτωση κανονικών μετασχηματισμών στην οποία μ=1.

Το θεώρημα του Liouville συζητήθηκε στην παράγραφο 4-4 και βρήκαμε ότι η Ιακωβιανή ορίζουσα είναι ίση με τη μονάδα για ένα κανονικό μετασχηματισμό που συνδέει ένα αρχικό σημείο επί μιας τροχιάς στο χώρο των φάσεων με κάθε επόμενο σημείο επί της τροχιάς. Χρησιμοποιώντας την ορολογία αυτού του κεφαλαίου, βλέπουμε ότι

$$|\mathbf{M}| = \frac{\partial(Q_1, ..., P_n)}{\partial(q_1, ..., p_n)} = 1 \quad , \qquad (6\text{-}363)$$

όπου οι M_{ij} δίνονται από την Εξ. (6-329).

Μια άλλη άποψη του θεωρήματος του Liouville, που είναι ιδιαίτερα εφαρμόσιμη στη στατιστική μηχανική, είναι να θεωρήσουμε την κίνηση ενός *συνόλου* ταυτόσημων συστημάτων των οποίων τα φασικά σημεία βρίσκονται εντός στοιχείου όγκου του χώρου των φάσεων σε μια αρχική χρονική στιγμή. Καθώς αυτά τα σημεία συνεχίζουν κατά μήκος των τροχιών τους, το αντίστοιχο στοιχείο όγκου μπορεί να αλλάζει το σχήμα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

του, αλλά σε συμφωνία με το θεώρημα του Liouville, ό όγκος του δεν αλλάζει. Μ' άλλα λόγια, το *φασικό ρευστό είναι ασυμπίεστο.* Αν ορίσουμε μια πυκνότητα $\rho(q_i, p_i, t)$ γι' αυτά τα φασικά σημεία, το θεώρημα του Liouville τότε υποδηλώνει ότι η ρ είναι μια σταθερά, της κίνησης· δηλαδή, χρησιμοποιώντας το συμβολισμό των αγκυλών Poisson, έχουμε

$$\dot{\rho} = (\rho, H) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad . \tag{6-364}$$

Το θεώρημα του Liouville μπορεί επίσης νά διατυπωθεί σε όρους των ολοκληρωτικών αναλλοίωτων πράγμα πού θα συζητηθεί στην επόμενη παράγραφο.

Ολοκληρωτικές αναλλοίωτες. Θεωρούμε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων της μορφής

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, x_2, ..., x_m, t) \ , \quad (i = 1, 2, ..., m) \quad . \tag{6-365}$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε οι x_i να είναι οι συνιστώσες του m-διάστατου διανύσματος $\mathbf{x}$. Μια σημειακή λύση αυτού του συστήματος διαγράφει μια καμπύλη στον $(m+1)$-χώρο $(\mathbf{x}, t)$. Θα ενδιαφερθούμε, ωστόσο, όχι τόσο πολύ σε μια καμπύλη μοναδικής λύσης όσο στο σύνολο αυτών των καμπυλών. Περαιτέρω, θα θεωρήσουμε ότι αυτές πληρώνουν το χώρο με τέτοιο τρόπο, ώστε μόνο μια καμπύλη να περνάει από κάθε δοσμένο σημείο.

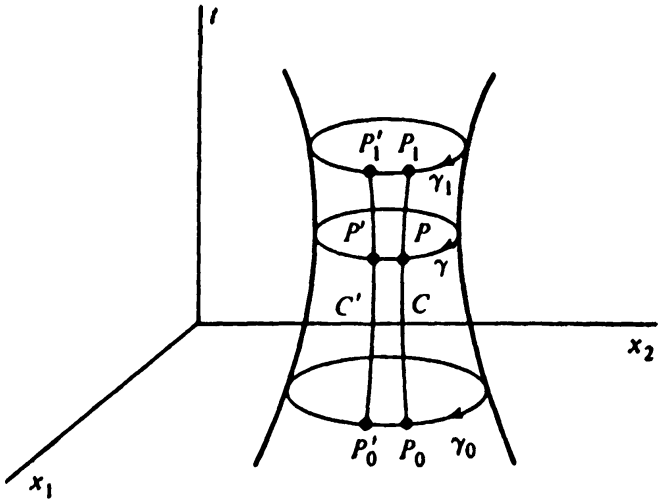
Ας υποθέσουμε την ύπαρξη ενός διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ σ' αυτόν το χώρο και ας θεωρήσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_\gamma \sum_{i=1}^{m} F_i \, dx_i \quad , \tag{6-366}$$

όπου η καμπύλη γ αποτελείται από σημεία της λύσης την ίδια χρονική στιγμή. Αφού κάθε σημείο της γ είναι επίσης σημείο της καμπύλης λύσης C βλέπουμε ότι, καθώς η λύση συνεχίζεται, αυτά τα σημεία κινούνται κατά μήκος των αντίστοιχων καμπυλών, εξαναγκάζοντας τη γ να αλλάζει σχήμα (Σχ. 6-3). Μπορεί να αποδειχθεί ότι η τιμή του

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

ολοκληρώματος I δεν μεταβάλλεται με το χρόνο και αν αυτό ισχύει, αυτή είναι γνωστή ως *ολοκληρωτική αναλλοίωτη*. Αφού η γ εκφράζει ένα μονοδιάστατο τόπο, η ολοκληρωτική αναλλοίωτη είναι *πρώτης τάξης*. Αν η συνθήκη ισχύει για όλες τις καμπύλες, ανοιχτές ή κλειστές, το ολοκλήρωμα ονομάζεται μια *απόλυτη* ολοκληρωτική αναλλοίωτη. Αν, απ' την άλλη μεριά, το ολοκλήρωμα είναι σταθερό για κλειστές καμπύλες, αυτή είναι μια *σχετική* ολοκληρωτική αναλλοίωτη.



Σχ. 6-3. Η καμπύλη ολοκλήρωσης γ σε διάφορες χρονικές στιγμές.

Τώρα ας θεωρήσουμε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες αυτό το αναλλοίωτο συμβαίνει. Εισάγουμε μια παράμετρο u που μεταβάλλεται από το 0 στο 1 καθώς η ολοκλήρωση συνεχίζεται κατά μήκος της γ.
Για μια σταθερή τιμή της u, το αντίστοιχο σημείο διαγράφει μια μοναδική καμπύλη λύσης C με την πάροδο του χρόνου. Γι' αυτό το λόγο εκείνες οι καμπύλες-λύσεις της Εξ. (6-365) που τέμνονται με την γ μπορούν να γραφούν ως συναρτήσεις των u και t, δηλαδή,

$$x_i = x_i(u, t) \ , \quad (i = 1, 2, ..., m) \quad . \tag{6-367}$$

όπου οι συναρτήσεις αυτές είναι διπλά παραγωγίσιμες. Άρα παίρνουμε

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = X_i(\mathbf{x}, t) \ , \quad (i = 1, 2, ..., m) \quad . \tag{6-368}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Με το συμβολισμό αυτό, μπορούμε να γράψουμε το ολοκλήρωμα της Εξ. (6-366) με την εναλλακτική μορφή

$$I = \int_{\gamma} \sum_{i=1}^{m} F_i \, dx_i = \int_0^1 \sum_{i=1}^{m} F_i \frac{\partial x_i}{\partial u} du \quad . \tag{6-369}$$

Το αναλλοίωτο του I απαιτεί το dI/dt να είναι μηδέν καθώς ακολουθούμε το σύνολο των σημείων-λύσεων που περιλαμβάνουν την γ. Είναι προτιμότερο να παραγωγίσουμε τη δεύτερη μορφή αφού αυτή έχει σταθερά όρια. Πρώτα σημειώνουμε ότι η u παραμένει σταθερά κατά την παραγώγιση εντός του ολοκληρώματος και παίρνουμε

$$\frac{dF_i}{dt} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial t} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial x_k} X_k + \frac{\partial F_i}{\partial t} \quad . \tag{6-370}$$

Επίσης,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial u} \quad . \tag{6-371}$$

Κατόπιν, αλλάζοντας τους δείκτες στον όρο $F_i(\partial X_i/\partial x_k)(\partial x_k/\partial u)$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \int_0^1 \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k} X_k + F_k \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial F_i}{\partial t} \right] \frac{\partial x_i}{\partial u} du \\ &= \int_{\gamma} \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k} X_k + F_k \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial F_i}{\partial t} \right] dx_i \quad . \end{aligned} \tag{6-372}$$

Για να είναι αυτό το ολοκλήρωμα μηδέν για μια αυθαίρετη γ, δηλαδή για ανεξάρτητα dx_i, κάθε συντελεστής πρέπει να είναι μηδέν. Άρα

$$\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k} X_k + F_k \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial F_i}{\partial t} = 0 \quad , \quad (i = 1, 2, ..., m) \tag{6-373}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

είναι η αναγκαία συνθήκη για μια *απόλυτη* ολοκληρωτική αναλλοίωτη. Είναι επίσης και ικανή.

Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί στο σημείο αυτό ότι υπάρχει μια απόλυτη ολοκληρωτική αναλλοίωτη που αντιστοιχεί σε κάθε ολοκλήρωμα του συνόλου των διαφορικών εξισώσεων (6-365). Για παράδειγμα, θεωρούμε ότι

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m, t) = \alpha \tag{6-374}$$

είναι ένα τέτοιο ολοκλήρωμα. Ας εκλέξουμε ένα διανυσματικό πεδίο **F** τέτοιο ώστε

$$F_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \quad . \tag{6-375}$$

Τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε την Εξ. (6-373) για να πάρουμε

$$\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \, \partial x_i} X_k + \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \, \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) = 0 \tag{6-376}$$

αφού $d\varphi/dt$ είναι ταυτοτικά μηδέν. Άρα βλέπουμε ότι

$$I = \int_{\gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx_i \tag{6-377}$$

είναι μια απόλυτη ολοκληρωτική αναλλοίωτη γι' αυτό το σύστημα.

Τώρα ας ασχοληθούμε με την Εξ. (6-372) που μπορεί να γραφεί με τη μορφή,

$$\frac{dI}{dt} = \int_{\gamma} \sum_{i=1}^{m} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (F_k X_k) + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k} - \frac{\partial F_k}{\partial x_i} \right) X_k \right] + \frac{\partial F_i}{\partial t} \right\} dx_i \quad . \tag{6-378}$$

Αλλά επειδή ο χρόνος διατηρείται σταθερός σ' αυτή την ολοκλήρωση, μπορούμε να γράψουμε

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}(F_k X_k)\, dx_i = d(F_k X_k) \quad . \tag{6-379}$$

Κατόπιν λαμβάνουμε μια άλλη μορφή της Εξ. (6-372), δηλαδή,

$$\frac{dI}{dt} = \sum_{k=1}^{m} \left[F_k \; X_k \right]_{u=o}^{1} + \int_{\gamma} \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k} - \frac{\partial F_k}{\partial x_i} \right) X_k + \frac{\partial F_i}{\partial t} \right] dx_i \; . \tag{6-380}$$

Ο πρώτος όρος στο αριστερό μέλος μηδενίζεται για όλες τις κλειστές καμπύλες, γιατί οι τιμές του **x** που αντιστοιχούν για u=0 και u=1, είναι ταυτόσιμες και το $F_k X_k$ είναι μια συνάρτηση του **x** μόνο για κάθε t. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα I της Εξ. (6-380) είναι μια *σχετική* ολοκληρωτική αναλλοίωτη αν η υπό ολοκλήρωση έκφραση της Εξ. (6-380) είναι ένα τέλειο *χωρικό διαφορικό* αφού θεωρούμε το χρόνο ως σταθερή παράμετρο κατά την ολοκλήρωση.

Μέχρις εδώ ασχοληθήκαμε με ολοκληρωτικές αναλλοίωτες πρώτης τάξης. Μπορεί να δειχθεί, ωστόσο, ότι κάθε σχετική ολοκληρωτική αναλλοίωτη πρώτης τάξης είναι ισοδύναμη με μια απόλυτη ολοκληρωτική αναλλοίωτη δεύτερης τάξης. Αυτό προκύπτει από την εφαρμογή του θεωρήματος του Stokes που δηλώνει πως το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της Εξ. (6-366) κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης είναι ισοδύναμο με το ολοκλήρωμα

$$I = \iint \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_j} - \frac{\partial F_j}{\partial x_j} \right) dx_i \, dx_j \quad , \tag{6-381}$$

επάνω σε μια επιφάνεια που φράσσεται από την καμπύλη γ. Μπορούμε για παράδειγμα, να ακολουθήσουμε την κίνηση κάθε επιφάνειας που φράσσεται από την γ στην αρχική χρονική στιγμή, υπό τον όρο να συσχετίζεται σωστά η θετική διεύθυνση της επιφάνειας και η διεύθυνση της ολοκλήρωσης γύρω από την γ. Αυτό το αποτέλεσμα είναι μια *απόλυτη* ολοκληρωτική αναλλοίωτη δεύτερης τάξης γιατί η επιφάνεια *δεν είναι κλειστή*.

Παρόμοια επιχειρηματολογία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δειχτεί ότι κάθε σχετική ολοκληρωτική αναλλοίωτη τάξης r είναι ισοδύναμη με μια απόλυτη ολοκληρωτική αναλλοίωτη τάξης $(r+1)$.

Συμπεραίνουμε ότι κάθε ολοκληρωτική αναλλοίωτη μέγιστης τάξης m πρέπει να είναι απόλυτη.

Τώρα ας θεωρήσουμε ολοκληρωτικές αναλλοίωτες τάξης m . Σ' αυτήν την περίπτωση έχουμε το πολλαπλό ολοκλήρωμα

$$I = \int \dots \int M(\mathbf{x}, t)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_m \qquad (6\text{-}382)$$

και ακολουθούμε ένα σύνολο σημείων του συστήματος μέσα σε μια συγκεκριμένη αρχική περιοχή καθώς κινούνται σε συμφωνία με την Εξ. (6-365). Ζητούμε τη συνθήκη για το M που πρέπει να ισχύει ώστε το I να είναι μια ολοκληρωτική αναλλοίωτη.

Έστω ότι θεωρούμε τα m ολοκληρώματα της κίνησης

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_m, t) = \alpha_i \quad , \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad . \qquad (6\text{-}383)$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε αυτές τις εξισώσεις ως ένα μετασχηματισμό από τις x_i στις α_i, όπου α_i είναι σταθερές κατά μήκος κάθε καμπύλης-λύσης. Τότε μπορούμε να γράψουμε το ολοκλήρωμα σε όρους της Ιακωβιανής του μετασχηματισμού δηλαδή,

$$I = \int \dots \int M \frac{\partial(x_1, \dots, x_m)}{\partial(\alpha_1, \dots, \alpha_m)}\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \dots d\alpha_m \quad . \qquad (6\text{-}384)$$

Τα όρια στις α_i δεν είναι συναρτήσεις του χρόνου και η περιοχή ολοκλήρωσης είναι αυθαίρετη, έτσι η απαιτούμενη συνθήκη είναι ότι

$$\frac{d}{dt}\left[M \frac{\partial(x_1, \dots, x_m)}{\partial(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} \right] = 0 \quad . \qquad (6\text{-}385)$$

Η παράγωγος ως προς το χρόνο ενός τυπικού στοιχείου της Ιακωβιανής είναι

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j}\right) = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \alpha_j} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_j} \qquad (6\text{-}386)$$

και η παράγωγος της ορίζουσας βρίσκεται ως το άθροισμα m οριζουσών, με τα στοιχεία των διαδοχικών γραμμών να έχουν παραγωγισθεί, μια

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

γραμμή σε κάθε ορίζουσα. Βρίσκουμε, τότε, ότι η χρονική παράγωγος της Ιακωβιανής είναι

$$\frac{d}{dt}\left[M \frac{\partial(x_1, x_2, ..., x_m)}{\partial(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)} \right] = \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + ... + \frac{\partial X_m}{\partial x_m} \right) \frac{\partial(x_1, x_2, ..., x_m)}{\partial(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_m)} \quad . \tag{6-387}$$

Η αναγκαία συνθήκη για τον M, που λαμβάνεται από τις Εξ. (6-385) και (6-387), μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{dM}{dt} + M \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0 \tag{6-388}$$

ή

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}(MX_i) + \frac{\partial M}{\partial t} = 0 \quad . \tag{6-389}$$

Έτσι, βλέπουμε ότι οι συναρτήσεις $M(x_1, x_2, ..., x_m, t)$, που είναι γνωστές ως πολλαπλασιαστές του Jacobi, πρέπει να ικανοποιούν μια γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους. Το αντίστοιχο ολοκλήρωμα I, που δίνεται από την Εξ. (6-382), είναι μια *απόλυτη* ολοκληρωτική αναλλοίωτη.

Τώρα ας πάρουμε μερικές ολοκληρωτικές αναλλοίωτες που συνδέονται με τα Χαμιλτωνιανά συστήματα. Πρώτα, από την Εξ. (5-15) έχουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{n} p_{i1}\, dq_{i1} - \sum_{i=1}^{n} p_{io}\, dq_{io} - H_1\, dt_1 + H_o\, dt_o = dS(q_1, q_o, t_1, t_o) \quad . \tag{6-390}$$

Θεωρούμε μια κλειστή καμπύλη γ_o στον επεκτεταμένο μορφικό χώρο διάστασης $(n+1)$. Αυτή αποτελείται από ένα σύνολο σημείων-λύσεων σ' αυτό το χώρο τη χρονική στιγμή t_o. Θεωρούμε ότι μια καμπύλη-λύση C περνάει από κάθε σημείο της γ_o, αλλά η γ_o δεν είναι πουθενά εφαπτόμενη σε κάποια καμπύλη-λύση. Όπως στο Σχ. 6-3, η καμπύλη γ δηλώνει τις θέσεις στο χρόνο t του αρχικού συνόλου των σημείων-λύσης.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Άρα κάποια τελική στιγμή t_1, ένα τυπικό σημείο P_1 επί της γ_1 αντιστοιχεί σ' ένα σημείο P_0 επί της γ_0.

Τώρα ας εξετάσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I = \oint_\gamma \sum_{i=1}^{n} p_i \, dq_i \quad , \tag{6-391}$$

όπου θεωρούμε ότι $p_i = p_i(q_i, t)$, αφού οι αρχικές συνθήκες δίνονται κατά μήκος της γ_0 και γι' αυτό το λόγο οι καμπύλες-λύσεις είναι προσδιορισμένες. Επιθυμούμε να συγκρίνουμε τις τιμές αυτού του ολοκληρώματος που λαμβάνονται κατά μήκος των καμπυλών γ_0 και γ_1. Καθώς η ολοκλήρωση συνεχίζεται κατά μήκος της γ_0 θεωρούμε ότι μια άλλη ολοκλήρωση λαμβάνει χώρα κατά μήκος των αντίστοιχων σημείων της καμπύλης γ_1. Αφού κάθε μια από αυτές τις ολοκληρώσεις λαμβάνει χώρα μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, μπορούμε να θέσουμε dt_0 και dt_1 ίσα με μηδέν στην Εξ. (6-390). Τότε, σημειώνοντας ότι τα ακραία σημεία των ολοκληρώσεων βρίσκονται στις ίδιες τιμές των μεταβλητών $(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, t_0, t_1)$, βλέπουμε ότι

$$\int dS = 0 \tag{6-392}$$

και παίρνουμε

$$\oint_{\gamma_0} \sum_{i=1}^{n} p_i \, dq_i = \oint_{\gamma_1} \sum_{i=1}^{n} p_i \, dq_i \quad . \tag{6-393}$$

Με άλλα λόγια, το ολοκλήρωμα I της Εξ. (6-391) είναι μια σχετική ολοκληρωτική αναλλοίωτη που η σταθερή της τιμή εξαρτάται από την οικογένεια των καμπυλών-λύσεων που τέμνονται με την γ.

Αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να γενικευθεί εύκολα ώστε να συμπεριλάβει μια συνεχή κλειστή καμπύλη ολοκλήρωσης γ στον επεκτεταμένο μορφικό χώρο, χωρίς τον περιορισμό ο χρόνος να είναι σταθερός κατά μήκος της καμπύλης. Αφού τα αρχικά και τελικά σημεία της ολοκλήρωσης είναι ταυτόσημα, η Εξ. (6-392) συνεχίζει να εφαρμόζεται και παίρνουμε από την Εξ. (6-390) ότι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\oint_{\gamma_0}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\, dq_i - H\, dt\right) = \oint_{\gamma_1}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\, dq_i - H\, dt\right) \quad . \tag{6-394}$$

Έτσι παίρνουμε το αποτέλεσμα ότι

$$I = \oint_{\gamma}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\, dq_i - H\, dt\right) \tag{6-395}$$

είναι μια σχετική ολοκληρωτική αναλλοίωτη πρώτης τάξης. Όπως και πριν, κάθε καμπύλη ολοκλήρωσης γ χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι τέμνεται με την ίδια οικογένεια των καμπυλών-λύσεων και αυτή η οικογένεια καθορίζει την τιμή του I. Αλλά μια απλή τιμή του χρόνου δεν συνδέεται πλέον με κάθε γ.

Ως τελικό παράδειγμα μιας ολοκληρωτικής αναλλοίωτης που συνδέεται μ' ένα Χαμιλτωνιανό σύστημα, θεωρούμε ένα ολοκλήρωμα στο *χώρο των φάσεων* της μορφής

$$I = \int \ldots \int dq_1 \ldots dq_n\, dp_1 \ldots dp_n \quad . \tag{6-396}$$

Αυτό είναι ένα παράδειγμα ενός ολοκληρώματος μέγιστης τάξης $2n$. Μια σύγκριση με την Εξ. (6-382) δείχνει ότι το διάνυσμα **x** έχει συνιστώσες $(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$ και ο πολλαπλασιαστής Jacobi M είναι σ' αυτήν την περίπτωση ίσος με τη μονάδα. Περαιτέρω, από μια σύγκριση των κανονικών εξισώσεων και της Εξ. (6-365), βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} X_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \qquad (i = 1, 2, ..., n) \\ X_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_{i-n}} \quad , \quad (i = n+1, ..., 2n) \quad . \end{aligned} \tag{6-397}$$

Μια αντικατάσταση αυτών των εκφράσεων για τις X_i στην Εξ. (6-389) οδηγεί στην

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i}\right) = 0 \ . \qquad (6\text{-}398)$$

Άρα η Εξ. (6-389) ικανοποιείται ταυτοτικά και συμπεραίνουμε ότι το I της Εξ. (6-396) είναι μια *απόλυτη* ολοκληρωτική αναλλοίωτη τάξης $2n$. Εδώ η ολοκλήρωση είναι σ' ένα πεπερασμένο όγκο που εμπεριέχει ένα συγκεκριμένο σύνολο φασικών σημείων των οποίων η κίνηση ακολουθείται με την πάροδο του χρόνου. Το αναλλοίωτο του ολοκληρώματός δηλώνει ότι ο όγκος ενός τυχαίου τμήματος του επονομαζόμενου φασικού ρευστού είναι σταθερός, καθώς κάθε σημείο διαγράφει την τροχιά του σε συμφωνία με τις κανονικές εξισώσεις. Αυτή είναι μια άλλη διατύπωση του *θεωρήματος του* Liouville.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. CARATHÉODORY, C., *Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order, Part I.* (English translation by R. B. Dean and J.J. Brandstatter). San Francisco: Holden-Day, Inc. 1965. Μια άριστη αναφορά στη θεωρία των κανονικών μετασχηματισμών. Είναι αναγκαία η προσεκτική μελέτη σχετικά με τις συμβάσεις προσήμων που χρησιμοποιεί ο συγγραφέας.

2. GOLDSTEIN, H., *Classical Mechanics Reading,* Mass.: Addison-Wesley Press, Inc., 1950. Επεξηγούνται σχολαστικά τα κύρια σημεία της θεωρίας.

3. RUND, H., *The Hamilton-Jacobi Theory in the Calculus of Variations.* London: D. Van Nostrand Company, Ltd., 1966. Μια ειδικά καλή αναφορά στη θεωρία των ολοκληρωτικών αναλλοίωτων.

4. LANCZOS, C., *The Variational Principles of Mechanics.* Toronto: University of Toronto Press, 1949. Μια καλή γενική αντιμετώπιση του θέματος. Οι χρονικοί μετασχηματισμοί είναι καλογραμμένοι.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

5. PARS, L. A., *Treatise on Analytic Dynamics.* London: Heinemann, 1965. Αυτή η αναφορά παρουσιάζει μια πλατιά και πλήρη αντιμετώπιση της ύλης αυτού του κεφαλαίου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

6-1. Για ένα κανονικό μετασχηματισμό είναι γνωστό ότι

$$Q = \sqrt{q^2 + p^2}$$

$$\psi = \frac{1}{2}(q^2 + p^2)\tan^{-1}\frac{q}{p} + \frac{1}{2}qp\ .$$

Να βρεθούν οι $P(q, p)$ και $\varphi(q, Q)$.

6-2. Δοσμένου του κανονικού μετασχηματισμού

$$Q = \sin q\,, \qquad P = \frac{p - mv_0}{\cos q}$$

να βρεθούν οι τα ψ, F_1, F_2, F_3 και F_4.

6-3. Ένα σωμάτιο μάζας m κινείται στο xy επίπεδο υπό την επίδραση του δυναμικού $V = ky$. Για ένα ομογενή σημειακό μετασχηματισμό

$$Q_1 = xy\,, \qquad Q = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

να βρεθούν οι εκφράσεις των P_1 και P_2 και η γεννήτρια συνάρτηση F_1 (q, P). Ποιά είναι η νέα συνάρτηση Hamilton $K(Q_i, P_i)$;

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

6-4. Δοσμένου του κανονικού μετασχηματισμού

$$Q_1 = q_1 - v_0 t \qquad P_1 = p_1 - v_0$$

$$Q_2 = \sqrt{2p_2}\, e^{-t} \sin q_2 \qquad P_2 = \sqrt{2p_2}\, e^{t} \cos q_2$$

και της συνάρτησης Hamilton $H = \frac{1}{2}(p_2^1 + p_2^2 + q_1^2)$, να βρεθούν η γεννήτρια συνάρτηση $F_2(q, P, t)$, η νέα $K(Q_i, P_i, t)$ και οι αντίστοιχες κανονικές εξισώσεις σε όρους των νέων μεταβλητών.

6-5. Δίνεται ένα τυπικό ολόνομο σύστημα με $H = \frac{1}{2}(p^2 + p^2)$ και θεωρούμε τον κανονικό μετασχηματισμό του παραδείγματος 6-2. Να βρεθούν η $K(Q, P, t)$ και οι αντίστοιχες κανονικές εξισώσεις.

6-6. Θεωρούμε ένα κανονικό μετασχηματισμό για τον οποίο $Q = q \cos^2 2p$ και $\psi = qp - \frac{1}{4} q \sin 4p$. Να βρεθούν οι εκφράσεις των $P(q, p)$, $F_1(q, Q)$ και $F_4(p, P)$.

6-7. Για την περίπτωση κατά την οποία η γεννήτρια συνάρτηση $F_4(p, P, t)$ είναι ταυτοτικά μηδέν, να δειχτεί ότι

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\partial P_j}{\partial q_i} = 0 \quad , \qquad (j = 1, 2, ..., n) .$$

6-8. Δίνεται ένα σύστημα με $H = \frac{1}{2}(p_2^1 + p_2^2)$. Να εφαρμοστεί η μέθοδος των Hamilton-Jacobi και να μελετηθεί η κίνηση, χρησιμοποιώντας πρώτα την $F_2(q, P, t)$ και στη συνέχεια την $F_4(p, P, t)$. Πρέπει να σημειωθεί ότι η P είναι ταυτόσημη με την α και η Q με την β, στην κάθε περίπτωση.

6-9. Θεωρούμε ένα ομογενή κανονικό μετασχηματισμό που έχει n=2 και μια βοηθητική συνθήκη

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\Omega(q, Q) = \sin(q_1 + Q_1) - \sqrt{q_2^2 + Q_2^2} = 0 \quad ,$$

όπου, $0 \le q_1 + Q_1 \le \pi/2$ και $0 \le q_2^2 + Q_2^2 \le 1$. Να βρεθούν οι εξισώσεις μετασχηματισμού και χρησιμοποιώντας τη διαφορική μορφή να επιβεβαιωθεί ότι αυτές είναι κανονικές. Να δειχτεί ότι ο πίνακας $(\partial Q_i/\partial p_j)$ έχει τάξη ένα.

6-10. Στη συνήθη περίπτωση απαιτούμε η ορίζουσα $|\partial^2\varphi/\partial q_i \partial Q_j|$ να είναι μη μηδενική. Ως ένα αντιπαράδειγμα, θεωρούμε ότι δίνεται η γεννήτρια συνάρτηση

$$F_1(q_i, Q_i, t) = v_0 q_1 + q_2 \cos^{-1}\frac{Q_2 e^{-t}}{\sqrt{2q_2}} - \frac{1}{2} Q_2 e^{-t}\sqrt{2q_2 - Q e^{-2t}}$$

και η βοηθητική συνθήκη $\Omega = Q_1 - q_1 + v_0 t = 0$. Να αποδειχτεί ότι μια επαυξημένη γεννήτρια συνάρτηση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ληφθούν οι πλήρεις κανονικές εξισώσεις μετασχηματισμού. Να λυθεί ως προς την $(K - H)$ σε όρους των παλιών μεταβλητών.

6-11. Δίνονται οι κανονικές εξισώσεις μετασχηματισμού

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \quad , \qquad P_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j \quad ,$$

όπου $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}$ και $a_{ij} = a_{ij}(t)$. Θεωρώντας ότι $H = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} p_k^2$ να βρεθούν η $K(Q_i, P_i, t)$ και οι κανονικές εξισώσεις σε όρους των νέων μεταβλητών.

6-12. Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό του παραδείγματος 6-4, να προσδιοριστεί η γεννήτρια συνάρτηση $F_2^*(q_i, P_i^*)$ για μια περιστροφή που ακολουθείται από μια μεταφορά.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

6-13. Ένα σύστημα μ' ένα βαθμό ελευθερίας περιγράφεται από την $T = \frac{1}{2} m (\dot{q} + t)^2$ και την $V = \frac{1}{2} kq^2$. Θεωρούμε ένα κανονικό μετασχηματισμό στον επεκτεταμένο χώρο των φάσεων που παράγεται από την $F_2 = qP_T + tP$. Να γραφούν οι εξισώσεις μετασχηματισμού και να χρησιμοποιηθούν οι εκφράσεις των αγκυλών Poisson για τον έλεγχο της κανονικότητάς των. Να βρεθεί η νέα επαυξημένη Χαμιλτωνιανή και να προσδιοριστούν οι εξισώσεις κίνησης στις νέες μεταβλητές. Να δειχτεί ότι αυτές οι εξισώσεις είναι ισοδύναμες με τις εξισώσεις κίνησης σε όρους των παλιών μεταβλητών.

6-14. Δίνονται οι εξισώσεις μετασχηματισμού

$$Q_1 = q_1 q_2 , \qquad Q_2 = \frac{1}{2}(q_1^2 - q_2^2)$$

$$P_1 = \frac{q_2 p_1 + q_1 p_2}{q_1^2 + q_2^2} , \quad P_2 = \frac{q_1 p_1 - q_2 p_2}{q_1^2 + q_2^2} .$$

Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος του συμπλεκτικού πίνακα για να δειχθεί ότι αυτές οι εξισώσεις εκφράζουν έναν κανονικό μετασχηματισμό.

6-15. Θεωρούμε ένα σύστημα που περιγράφεται από τις διαφορικές εξισώσεις

$$\dot{x}_i = X_i (x_1, x_2, x_3, t) , \qquad (i = 1, 2, 3)$$

με ανεξάρτητα ολοκληρώματα της κίνησης της μορφής

$$\varphi_i = (x_1, x_2, x_3, t) = \alpha_i , \qquad (i = 1, 2, 3) ,$$

όπου οι α_i είναι σταθερές. Να δοθεί μια λεπτομερής παραγωγή της χρονικής παραγώγου της Ιακωβιανής $\partial(x_1, x_2, x_3) / \partial(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ και να συγκριθούν τα αποτελέσματα μ' εκείνα που δίνονται στην Εξ. (6-387).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

6-16. Δίνεται ένας κανονικός μετασχηματισμός που συνδέει τις (q_i, p_i) με τις (Q_i, P_i) για $i = 1, 2, ..., n$. Να χρησιμοποιηθεί το διγραμμικό αναλλοίωτο κριτήριο της Εξ. (6-263) για να δειχτεί ότι

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} = \frac{\partial p_k}{\partial P_i}, \qquad \frac{\partial P_i}{\partial p_k} = \frac{\partial q_k}{\partial Q_i}$$

και

$$\frac{\partial Q_i}{\partial p_k} = -\frac{\partial q_k}{\partial P_i}, \qquad \frac{\partial P_i}{\partial p_k} = -\frac{\partial p_k}{\partial Q_i}$$

για κάθε (i, k). Αυτό μπορεί να επιτευχθεί αναπτύσσοντας σε όρους μικτών (παλιών και νέων) μεταβλητών, όπως οι $\delta q_k \; dP_i$, και θεωρώντας την περίπτωση κατά την οποία η δ-μεταβολή εμπεριέχει μόνο τις q_k από τις παλιές μεταβλητές και η d-μεταβολή εμπεριέχει μόνο τις P_i από τις νέες μεταβλητές.

6-17. Θεωρούμε ένα τυπικό Χαμιλτωνιανό σύστημα. Να χρησιμοποιηθεί η Εξ. (6-380) για να δειχτεί ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I = \int_\gamma \sum_{i=1}^{n} q_i \, dp_i$$

είναι σχετική ολοκληρωτική αναλλοίωτη.

6-18. Δίνεται ένα σύστημα με $T = \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$ και $V = \frac{1}{2} k q_2^2$. Να χρησιμοποιηθεί η Εξ. (6-380) και να δειχτεί ότι το ολοκλήρωμα

$$I = \int_\gamma (p_1 \, dq_1 + p_2 \, dq_2)$$

είναι σχετική ολοκληρωτική αναλλοίωτη και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$I = \int_{\gamma} \left[kq_2\, dq_2 + \left(1 + \frac{p_1}{m}\right) dp_1 + \frac{p_2}{m}\, dp_2 \right]$$

είναι μια απόλυτη ολοκληρωτική αναλλοίωτη.

6-19. Για το σύστημα του προηγουμένου προβλήματος, να δειχτεί ότι το

$$I = \int\int\int\int (mkq_2^2 + p_2^2)\, dq_1\, dq_2\, dp_1\, dp_2$$

είναι μια απόλυτη ολοκληρωτική αναλλοίωτη.

6-20. Οι πολικές συντεταγμένες (r, θ) καθορίζουν τη θέση ενός σωματίου μάζας m καθώς κινείται στο xy επίπεδο. Θεωρούμε ένα απειροστό κανονικό μετασχηματισμό που αντιστοιχεί σε μια μικρή μεταφορά ε παράλληλα στον x άξονα. Να βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση $G(q_i, p_i)$ αυτού του μετασχηματισμού και οι εκφράσεις των δr, $\delta\theta$, δp_r και δp_θ.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

7

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ

Η βασική ιδέα της αρχής της σχετικότητας στη Μηχανική αποδίδεται στους Galileo και Newton και όχι στον Einstein. Από τη διατήρηση του πρώτου νόμου κίνησης του Newton είναι γνωστό, ότι ένα σώμα, στο οποίο δεν ενεργούν δυνάμεις, παραμένει στην κατάσταση της ηρεμίας ή σε ομοιόμορφη ευθύγραμμη κίνηση. Ο νόμος προϋποθέτει ένα σύστημα αναφοράς, από το οποίο μετράται η τροχιά του σώματος· (η εφαρμογή του νόμου του Newton είναι δυνατή μόνο για κάποιες επιλογές του συστήματος αναφοράς). Ο Newton είχε την τάση να σκέπτεται στη βάση ενός απόλυτου ή πρωτογενούς αδρανειακού συστήματος, όπως εκείνο που είναι στερεωμένο σε απλανείς αστέρες, αλλά ήταν σ' εκείνον γνωστό, ότι υπάρχουν και άλλα αδρανειακά συστήματα ως προς τα οποία ένα σώμα, επί του οποίου δεν ενεργούν δυνάμεις, κινείται ομοιόμορφα επί ευθείας γραμμής. Επειδή κάθε ένα από αυτά τα συστήματα μπορεί ισοδύναμα να χρησιμοποιηθεί ως σύστημα αναφοράς για τη διατύπωση των εξισώσεων κίνησης σύμφωνα με τους νόμους του Newton, ακόμα και στη μηχανική του Newton έχουμε μια αρχή σχετικότητας.

Ο Einstein στην ειδική θεωρία της σχετικότητας έκανε μια επέκταση της αρχής της σχετικότητας από τα καθαρά μηχανικά συστήματα στα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα και μαζί σε όλα τα φυσικά φαινόμενα. Η αξιωματική του πρόταση είχε εκπληκτικές συνέπειες σχετικά προς τα κρατούντα για την απόσταση και το χρόνο και βαθιά επιρροή στην ανάπτυξη της φυσικής. Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν οι βασικές ιδέες της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας του Einstein.

7-1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μετασχηματισμοί Galileo. Ας ορίσουμε πρώτα ένα *αδρανειακό σύστημα* όπως κάθε σύστημα αναφοράς, στο οποίο ένα ελεύθερο

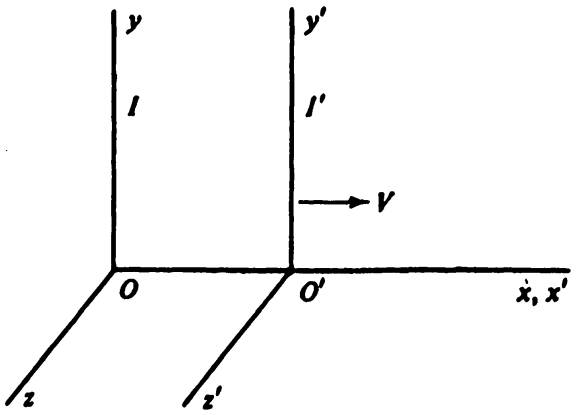
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

σωμάτιο παραμένει ακίνητο ή κινείται ομοιόμορφα σε μια ευθεία γραμμή. Αν δίνεται ένα αδρανειακό σύστημα τότε ένα δεύτερο σύστημα το οποίο μεταφέρεται με σταθερή ταχύτητα σε σχέση με το πρώτο είναι και αυτό αδρανειακό αφού το ίδιο ελεύθερο σωμάτιο κινείται επίσης ομοιόμορφα επί ευθείας γραμμής ως προς αυτό το σύστημα. Με παρόμοιο συλλογισμό μπορούμε να δείξουμε ότι υπάρχει ένας άπειρος αριθμός αδρανειακών συστημάτων όπου το καθένα μετατοπίζεται ομοιόμορφα σε σχέση με τ' άλλα.

Τώρα ας θεωρήσουμε δυο αδρανειακά συστήματα I και I'. Για ευκολία μπορούμε να διαλέξουμε τέτοιους προσανατολισμούς έτσι ώστε η διεύθυνση της σχετικής ταχύτητας να βρίσκεται κατά μήκος των κοινών αξόνων x. Υποθέτουμε λοιπόν, ότι το σύστημα I' μεταφέρεται με μια σταθερή ταχύτητα V σχετικά με το I, όπως φαίνεται στο Σχ. 7-1. Ας υποθέσουμε, ότι οι αρχές O και O' συμπίπτουν τη χρονική στιγμή $t=0$.

Αν υιοθετήσουμε την άποψη της Νευτώνειας μηχανικής οι εξισώσεις μετασχηματισμού που σχετίζουν θέση και χρόνο σε δυο αδρανειακά συστήματα είναι

$$\begin{aligned} x' &= x - Vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \qquad (7\text{-}1)$$



Σχ. 7-1. Δυο αδρανειακά συστήματα αναφοράς σε σχετική κίνηση.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Οι εξισώσεις αυτές περιγράφουν ένα *Galileo μετασχηματισμό*. Σημειώνουμε ότι ο χρόνος θεωρείται ως μια απόλυτη ποσότητα, η οποία είναι η ίδια και στα δυο συστήματα, και επιπλέον, οι έννοιες του χώρου και του χρόνου είναι εντελώς ξεχωριστές. Οι αντίστοιχες Καρτεσιανές συνιστώσες της ταχύτητας σχετίζονται με τις

$$\begin{aligned} v'_x &= v_x - V \\ v'_y &= v_y \\ v'_z &= v_z \end{aligned} \qquad (7\text{-}2)$$

και οι συνιστώσες της επιτάχυνσης στα δυο αδρανειακά συστήματα είναι ταυτόσημες,

$$\begin{aligned} a'_x &= a_x \\ a'_y &= a_y \\ a'_z &= a_z \end{aligned} \qquad (7\text{-}3)$$

Οι εξισώσεις που αναφέραμε μέχρι τώρα αφορούν την κινηματική ενός σημείου, δηλαδή δηλώνουν τις σχέσεις της θέσης, της ταχύτητας και επιτάχυνσης ενός σημείου ως προς τα δυο αδρανειακά συστήματα I και I' στο χρόνο t.

Αν θεωρήσουμε την κίνηση ενός σωματίου μάζας m επί του οποίου ενεργεί μια δύναμη $\mathbf{F}$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το δεύτερο νόμο της κίνησης του Newton και να πάρουμε

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad , \qquad (7\text{-}4)$$

όπου $\mathbf{a}$ είναι η στιγμιαία επιτάχυνση του σωματίου ως προς το αδρανειακό σύστημα I. Η εξίσωση της κίνησης ως προς το σύστημα I' είναι

$$\mathbf{F}' = m'\mathbf{a}' \quad . \qquad (7\text{-}5)$$

Τώρα, σύμφωνα με την άποψη της μηχανικής του Newton, δύναμη και μάζα είναι απόλυτες ποσότητες, έτσι $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$ και $m = m'$. Από την Εξ. (7-3) βλέπουμε ότι $\mathbf{a}=\mathbf{a}'$. Άρα συμπεραίνουμε ότι ένας μετασχηματισμός Γαλιλαίου αφήνει τη βασική εξίσωση της κίνησης αμετάβλητη, όχι μόνο

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

στη μαθηματική της μορφή, αλλά επίσης στις αριθμητικές τιμές της δύναμης, μάζας και επιτάχυνσης. Αφού όλοι οι νόμοι του Newton διατηρούν την ίδια μορφή, δηλαδή είναι συναλλοίωτοι κάτω από ένα μετασχηματισμό Galileo, μπορούμε να διατυπώσουμε τη *Νευτώνεια αρχή της σχετικότητας*: *Όλοι οι νόμοι της μηχανικής έχουν την ίδια μορφή σε κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς*. Δεν υπάρχουν προτιμητέα αδρανειακά συστήματα.

Εξισώσεις Maxwell . Αν και είδαμε ότι οι νόμοι της μηχανικής του Newton εφαρμόζονται εξίσου σε κάθε αδρανειακό σύστημα, ένας θα μπορούσε να αναρωτηθεί αν οι νόμοι που διέπουν άλλες περιοχές της φυσικής έχουν την ίδια μορφή σ' αυτά τα συστήματα. Ας θεωρήσουμε ως παράδειγμα, τις εξισώσεις Maxwell οι οποίες εφαρμόζονται στα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα. Αυτές είναι

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{7-6}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{7-7}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \tag{7-8}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad , \tag{7-9}$$

όπου

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \tag{7-10}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad . \tag{7-11}$$

Ενδιαφερόμαστε ιδιαίτερα για την περίπτωση διάδοσης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο *κενό* , όπου η πυκνότητα ρεύματος **i** και η πυκνότητα *φορτίου* ρ είναι μηδέν. Άρα μπορούμε να συνδυάσουμε αυτές τις εξισώσεις και να πάρουμε

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \tag{7-12}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad , \tag{7-13}$$

όπου **B** είναι η πυκνότητα της μαγνητικής ροής και **E** είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου. Οι Εξ. (7-12) και (7-13) έχουν τη μορφή των *εξισώσεων κύματος* με ταχύτητα διάδοσης

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \quad , \tag{7-14}$$

όπου μ_0 είναι η μαγνητική διαπερατότητα του κενού, και ε_0 είναι η αντίστοιχη διηλεκτρική σταθερά. Από μετρήσεις των σταθερών έχουμε $\mu_0 = 1.257 \times 10^{-6}$ henries ανά μέτρο και $\varepsilon_0 = 8.86 \times 10^{-12}$ farads ανά μέτρο, και άρα $c = 3.00 \times 10^8$ m/sec. Αυτή η ταχύτητα της διάδοσης ισχύει σ' όλα τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, περιλαμβάνοντας το σύνηθες ορατό φως, και από τη μορφή των εξισώσεων βλέπουμε πως είναι ανεξάρτητη από τη συχνότητα και την κίνηση της πηγής.

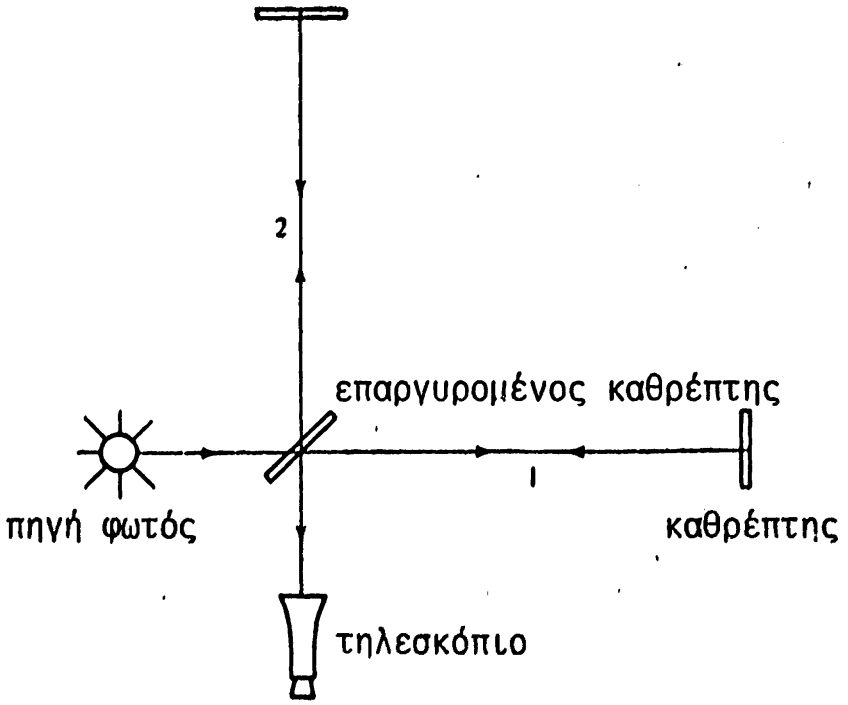
Αν ισχύει μια αρχή σχετικότητας στα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα και κατά συνέπεια οι εξισώσεις του Maxwell ισχύουν σε κάθε αδρανειακό σύστημα, τότε οι εξισώσεις του μετασχηματισμού Galileo δεν μπορούν να ισχύουν διότι αυτές θα μπορούσαν να προβλέψουν ότι διαφορετικοί αδρανειακοί παρατηρητές, θα μπορούσαν να μετρήσουν διαφορετικές ταχύτητες του φωτός. Για παράδειγμα, αν ένας παλμός φωτός στέλνεται με ταχύτητα c κατά μήκος του άξονα x του αδρανειακού συστήματος I στο Σχ. 7-1, η ταχύτητά του όπως φαίνεται από έναν παρατηρητή μεταφερόμενο με το αδρανειακό σύστημα I' θα ήταν $(c - V)$, σύμφωνα με την Εξ. (7-2). Επιπλέον αν υποθέσουμε ότι το φως ταξιδεύει με την ίδια ταχύτητα προς όλες τις διευθύνσεις σχετικά προς το I αυτό θα είχε διαφορετικές ταχύτητες σε διαφορετικές διευθύνσεις σχετικά προς το I'. Έτσι, αν ισχύουν οι εξισώσεις του Maxwell είναι φανερό ότι πρέπει να γίνει η επιλογή μεταξύ ενός προτιμητέου αδρανειακού συστήματος και άρα μη ύπαρξη αρχής της σχετικότητας δηλαδή πρέπει να απορριφθούν οι εξισώσεις μετασχηματισμού του Galileo.

Θεωρία του αιθέρα. Πριν εγκαταλειφθεί ο μετασχηματισμός Galileo, ο οποίος είχει τόση πολύ διαισθητική έλξη, οι επιστήμονες στα τέλη του 19ου αιώνα προσπάθησαν με πειραματικά μέσα να

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ανακαλύψουν έναν "αιθέρα" διαμέσου του οποίου το φως διαδίδεται σύμφωνα με τις εξισώσεις του Maxwell. Αυτός ο αιθέρας θεωρήθηκε ως ένα μέσο για τη διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών ταλαντώσεων μ' έναν τρόπο ανάλογο μ' αυτόν της διάδοσης των ηχητικών κυμάτων διαμέσου ενός ελαστικού μέσου. Ο αιθέρας θα μπορούσε να αντιπροσωπεύει ένα προτιμητέο αδρανειακό σύστημα και το φως θα διαδίδονταν ως προς όλες τις διευθύνσεις με μια σταθερή ταχύτητα c ως προς το σύστημα αυτό. Όμως ως προς τη γη, η ταχύτητα του φωτός θα ήταν διαφορετική σε διαφορετικές διευθύνσεις εξ' αιτίας της κίνησης της γης στην τροχιά της γύρω από την ήλιο. Αυτή η τροχιακή ταχύτητα είναι περίπου 3×10^4 m/sec ή 10^{-4} φορές η ταχύτητα του φωτός. Αυτή είναι ικανού μεγέθους ώστε η παρουσία ενός αιθέρα θα ήταν ανιχνεύσιμη από μετρήσεις της ταχύτητας του φωτός.

Το πιο σπουδαίο των πειραμάτων το οποίο τελικά χρησίμευε στο να απορριφθεί η ύπαρξη του αιθέρα οφείλεται στους Michelson και Morley (1887). Ένα συμβολόμετρο τοποθετήθηκε, όπως φαίνεται στο Σχ. 7-2, με μήκη διαδρομής για τις ορθογώνιες δέσμες 1 και 2 κατά



Σχ. 7-2. Το συμβολόμετρο των Michelson - Morley.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

προσέγγιση ίσα. Αν υποθέσουμε ότι η δέσμη 1 προσανατολίζεται στη διεύθυνση της τροχιακής ταχύτητας της γης γύρω από τον ήλιο και ο ήλιος είναι ακίνητος σε σχέση με τον αιθέρα, τότε σύμφωνα με τη θεωρία του αιθέρα ο χρόνος περιστροφής της γης για τη διαδρομή 2 είναι ολίγον μικρότερος από εκείνον της διαδρομής 1 . Από την άλλη μεριά, η κατάσταση αντιστρέφεται αν η διαδρομή 2 κείται κατά μήκος της διεύθυνσης της κίνησης της γης. Οι Michelson και Morley πρώτα παρατήρησαν τις θέσεις των κροσσών για έναν προσανατολισμό και έπειτα κοίταξαν για τυχόν μετατοπίσεις των κροσσών καθώς η όλη συσκευή περιστρέφονταν στο επίπεδό κατά 90 μοίρες. Αλλά παρά τις μετρήσεις που έγιναν σε διάφορους χρόνους κατά τη διάρκεια του έτους, εμπλέκοντας διαφορετικές διευθύνσεις της τροχιακής ταχύτητας της γης, δεν διαπιστώθηκαν μετατοπίσεις που δεν ήταν στα αποδεκτά όρια του πειραματικού σφάλματος. Τελικά, η ταχύτητα του φωτός σε δυο κάθετες διευθύνσεις έδειξε να είναι η ίδια με προσέγγιση 17 μέρη / εκατομμύριο, μια ακρίβεια αρκετά καλύτερη απ' ότι απαιτούνταν για να εντοπισθεί η αναμενόμενη διαφορά ταχύτητας (100 μέρη στο εκατομμύριο). Μ' άλλα λόγια, δεν μπορούσε να βρεθεί ταχύτητα της γης ως προς τον υποθετικό αιθέρα.

Η Αρχή της Σχετικότητας. Με το αρνητικό αποτέλεσμα του πειράματος των Michelson - Morley, η διατήρηση του απόλυτου αιθέρα, και οι εξισώσεις του μετασχηματισμού Galileo φαίνονταν να απαιτούν μια επιπρόσθετη υπόθεση η οποία εξασφαλίστηκε ξεχωριστά από τους Lorentz και FitzGerald. Ήταν η υπόθεση της συστολής δια της οποίας ένα κινούμενο στερεό σώμα με ταχύτητα v σχετικά ως προς τον αιθέρα συστέλλεται στη διεύθυνση της κίνησής του σύμφωνα με την εξίσωση

$$l = \sqrt{1 - \frac{v^2}{v^2}}\, l_0 \quad , \tag{7-15}$$

όπου l είναι το μήκος στη διεύθυνση της κίνησής του και l_0 είναι το αντίστοιχο μήκος του ίδιου σώματος, όταν αυτό είναι ακίνητο . Αυτός ο παράγοντας της συστολής ήταν τέτοιος σε μέγεθος, ώστε τα αποτελέσματα του σταθερού αιθέρα και της βράχυνσης της συσκευής στη διεύθυνση της κίνησης αντιστάθμιζαν ακριβώς το ένα το άλλο, με αποτέλεσμα να μην μπορεί να συμβεί καμιά μετατόπιση κροσσού.

Ο Einstein θεώρησε προτιμότερο να καταργήσει τη θεωρία του αιθέρα μια για πάντα και αντί αυτού να επεκτείνει τη Νευτώνεια αρχή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

της σχετικότητας από τη μηχανική πρώτα στα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα και έπειτα *σ' όλη τη φυσική*. Έτσι, το 1905, πρότεινε ότι οι νόμοι της φυσικής είναι οι ίδιοι για κάθε αδρανειακό σύστημα, δηλαδή δεν υπάρχουν προτιμητέα αδρανειακά συστήματα. Αυτό είναι γνωστό ως *αρχή της σχετικότητας του Einstein.*

Με την αποδοχή της θεωρίας της σχετικότητας, και επομένως με το συμπέρασμα ότι οι εξισώσεις του Maxwell ισχύουν σε κάθε αδρανειακό σύστημα, μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε τα δυο βασικά αξιώματα, στα οποία βασίζεται η θεωρία της σχετικότητα: δηλαδή, (1) οι νόμοι της φυσικής είναι οι ίδιοι σ' όλα τα αδρανειακά συστήματα και (2) η ταχύτητα του φωτός στο κενό, μετρούμενη ως προς κάθε αδρανειακό σύστημα, είναι μια παγκόσμια σταθερά, η οποία είναι ανεξάρτητη της κίνησης της πηγής.

7-2. ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΗ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

Εξισώσεις μετασχηματισμού Lorentz. Με την αποδοχή του δεύτερου βασικού αξιώματος της σχετικότητας, είναι φανερό ότι οι εξισώσεις του μετασχηματισμού Galileo πρέπει να αντικατασταθούν, διότι σύμφωνα μ' αυτές ένα δοσμένο μέτωπο κύματος φωτός διαδίδεται με διαφορετικές ταχύτητες σε διαφορετικά αδρανειακά συστήματα. Το ζητούμενο είναι ένα σύνολο εξισώσεων που θα δίνει το (x', y', z', t') σε όρους του (x, y, z, t) μ' εκείνες τις ιδιότητες ώστε οι βασικοί νόμοι του ηλεκτρομαγνητισμού και της μηχανικής να διατηρούν την ίδια *μορφή* σε κάθε αδρανειακό σύστημα.

Αντί να θεωρήσουμε την πιο γενική περίπτωση δυο συστημάτων Καρτεσιανών συντεταγμένων με ομοιόμορφη σχετική κίνηση, ας επιστρέψουμε στα αδρανειακά συστήματα I και I' του Σχ. 7-1. Έστω ότι το I' κινείται με ομοιόμορφη ταχύτητα V ως προς το I στη διεύθυνση του θετικού άξονα των x. Ας υποθέσουμε ότι οι αρχές O και O' συμπίπτουν τη στιγμή $t = t' = 0$. Ως πρώτη συνθήκη στις εξισώσεις μετασχηματισμού, ας απαιτήσουμε η ταχύτητα του φωτός να έχει την ίδια τιμή c σε όλες τις διευθύνσεις ως προς κάθε αδρανειακό σύστημα. Άρα αν στιγμιαίο φως εκπέμπεται στην κοινή αρχή τη χρονική στιγμή $t = t' = 0$, ένα σφαιρικό κύμα πρέπει να διαδίδεται ακτινικά προς τα έξω με σχετική ταχύτητα c ως προς τα δυο συστήματα I και I'. Άρα η θέση του μετώπου του κύματος ως προς το I, είναι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \tag{7-16}$$

και ως προς το I' ,

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \quad . \tag{7-17}$$

Έτσι οι εξισώσεις μετασχηματισμού πρέπει να είναι συμβιβαστές με τις Εξ. (7-16) και (7-17).

Μια δεύτερη συνθήκη στις εξισώσεις μετασχηματισμού λαμβάνεται από τον ορισμό του αδρανειακού συστήματος. Πρέπει να θυμηθούμε ότι ένα ελεύθερο σωμάτιο κινείται με σταθερά ταχύτητα επί μιας ευθείας γραμμής ως προς κάθε αδρανειακό σύστημα. Αυτό συνεπάγεται ότι οι τετραδιάστατες τροχιές στο (x, y, z, t) και στο (x', y', z', t') είναι ευθείες γραμμές. Άρα, οι εξισώσεις μετασχηματισμού πρέπει να είναι *γραμμικές*.

Ας υποθέσουμε ότι οι αποστάσεις υπολογίζονται στα συστήματα I και I' με μετρικές ράβδους που έχουν το ίδιο μήκος όταν ακινητούν σε δοθέν αδρανειακό σύστημα. Επίσης για τη μέτρηση των χρόνων στο I και I' χρησιμοποιούνται ταυτόσημα ρολόγια.

Έχουμε διαλέξει ένα σύνολο ορθογωνίων μεταξύ τους αξόνων σε κάθε σύστημα και όταν $t = 0$ στο I ή όταν $t' = 0$ στο I' οι αντίστοιχοι άξονες συμπίπτουν. Σημειώνουμε εξάλλου ότι η σχετική ταχύτητα μεταφοράς είναι τέτοια που οι x άξονες των δυο συστημάτων πάντα συμπίπτουν. Άρα αυτό συνεπάγεται ότι όλα τα σημεία σ' ένα επίπεδο που έχουν μια συγκεκριμένη σταθερή τιμή του y, πρέπει να έχουν μια σταθερή τιμή του y'. Επιπλέον, ένα επιχείρημα συμμετρίας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δείξει ότι οι δυο αυτές σταθερές τιμές πρέπει να είναι ίσες. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι y' είναι μικρότερη σε μέγεθος από την y, πιθανώς λόγω της κίνησης του I' ως προς το I. Τότε, αντιστρέφοντας τις θετικές διευθύνσεις των x και z αξόνων στο κάθε σύστημα, και παρατηρώντας την κίνηση του I σε σχέση με το I', έχουμε την ίδια κατάσταση όπως προηγουμένως εκτός από το ότι τα τονούμενα και μη τονούμενα συστήματα εναλλάσσονται μεταξύ τους. Άρα το ίδιο επιχείρημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδειχτεί ότι η y είναι μικρότερη από την y', δημιουργώντας μια αντίφαση. Η αντίφαση αίρεται μόνο αν

$$y' = y \quad . \tag{7-18}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ένα παρόμοιο επιχείρημα συμμετρίας δείχνει ότι

$$z' = z \quad . \tag{7-19}$$

Παραμένει όμως το πρόβλημα της συσχέτισης των x και t μεταβλητών στα δυο συστήματα. Ας θεωρήσουμε τις εξισώσεις μετασχηματισμού της μορφής

$$\begin{aligned} x' &= ax + bt \\ t' &= ex + ft \quad , \end{aligned} \tag{7-20}$$

όπου a b, e και f είναι σταθερές που πρέπει να προσδιοριστούν.(*)

Χρησιμοποιώντας τη συνθήκη ότι οι εξισώσεις μετασχηματισμού είναι συμβιβαστές με τις Εξ. (7-16) και (7-17) και με την βοήθεια των Εξ. (7-18) και (7-19) έχουμε

$$\begin{aligned} x^2 - c^2t^2 &= x'^2 - c^2 t'^2 \\ &= a^2x^2 + 2abxt + b^2t^2 - c^2 (e^2x^2 + 2efxt + f^2t^2) \quad . \end{aligned} \tag{7-21}$$

Αυτή η εξίσωση ισχύει για ανεξάρτητες τιμές των x και t, έτσι αν εξισώσουμε τους συντελεστές των όρων x^2 παίρνουμε

$$a^2 - c^2e^2 = 1 \quad . \tag{7-22}$$

Παρόμοια, εξισώνοντας τους συντελεστές των όρων t^2, βρίσκουμε ότι

$$b^2 - c^2f^2 = - c^2 \tag{7-23}$$

και για τους όρους xt έχουμε

$$ab - c^2ef = 0 \quad . \tag{7-24}$$

(*) Αυτές οι παράμετρες στην πραγματικότητα θα είναι συναρτήσεις του V, της ταχύτητας μεταφοράς του I' ως προς το I. Αλλά για κάθε δυο αδρανειακά συστήματα που έχουν μια σταθερή σχετική ταχύτητα, αυτές είναι σταθερές αφού γνωρίζουμε ότι οι εξισώσεις μετασχηματισμού πρέπει να είναι γραμμικές ως προς x και t.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Μέχρι στιγμής έχουμε να λύσουμε τρεις εξισώσεις για τον προσδιορισμό τεσσάρων συντελεστών. Μια τέταρτη εξίσωση, η οποία μας χρησιμεύει να εισάγουμε τη σχετική ταχύτητα V, επιτυγχάνεται παρατηρώντας ότι η θέση της αρχής O' δίνεται από την $x = Vt$ ή $x' = 0$. Άρα, από την πρώτη εξίσωση των (7-20) έχουμε

$$aVt + bt = 0 \tag{7-25}$$

ή

$$b = - Va \quad . \tag{7-26}$$

Παρόμοια, η θέση του O είναι στην $x = 0$, ή $x' = - Vt'$, και από την Εξ. (7-20) έχουμε

$$b = - Vf \quad . \tag{7-27}$$

Συγκρίνοντας τις Εξ. (7-26) και (7-27), βλέπουμε ότι

$$a = f \quad . \tag{7-28}$$

Χρησιμοποιώντας τις Εξ. (7-23) και (7-27), παίρνουμε

$$f^2 = \frac{c^2}{c^2 - V^2} \quad , \tag{7-29}$$

ή

$$a = f = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \quad . \tag{7-30}$$

Εδώ εκλέγουμε τη θετική ρίζα, διότι γνωρίζουμε ότι οι εξισώσεις μετασχηματισμού πρέπει να ανάγονται στον μετασχηματισμό Galileo για μικρή V· δηλαδή, a και f πρέπει να προσεγγίζουν τη μονάδα. Από τις Εξ. (7-26) και (7-30), έχουμε

$$b = \frac{- V}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \quad . \tag{7-31}$$

Τελικά, από τις Εξ. (7-24) και (7-30), παίρνουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$e = \frac{b}{c^2} = \frac{-V/c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}} \quad . \tag{7-32}$$

Έτσι οι τέσσερις συντελεστές βρίσκονται να είναι συναρτήσεις της V, όπως αναμενόταν και επιπλέον αυτός ο μετασχηματισμός έχει ως όριο το μετασχηματισμό Galileo για μικρή V. Είναι βολικό να χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό

$$\beta \equiv \frac{V}{c} \quad . \tag{7-33}$$

Τότε οι εξισώσεις μετασχηματισμού είναι

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - \frac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad . \end{aligned} \tag{7-34}$$

Αυτές είναι *οι εξισώσεις μετασχηματισμού Lorentz* και αποτελούν τη βάση της κινηματικής της ειδικής σχετικότητας. Ειδικότερα σημειώνουμε ότι ο χρόνος t' είναι συνάρτηση της χωρικής συντεταγμένης x, καθώς και του χρόνου t. Συνεπώς ο χρόνος δεν μπορεί να θεωρηθεί πλέον ως μια απόλυτη ποσότητα που έχει την ίδια τιμή για όλους τους παρατηρητές. Εξαρτάται από τη θέση και την ταχύτητα του παρατηρητή. Το μπλέξιμο των συντεταγμένων του χώρου και του χρόνου στο μετασχηματισμό Lorentz εισάγει την ιδέα του τετραδιάστατου *χωροχρόνου* όπου x, y, z και t έχουν συγκρίσιμους αλλά όχι ακριβώς ίδιους ρόλους.

Οι εξισώσεις μετασχηματισμού Lorentz μπορούν να εκφραστούν με εναλλακτική μορφή εναλλάσσοντας τις τονούμενες με τις μη τονούμενες ποσότητες και αλλάζοντας το πρόσημο της V. Αυτό είναι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ισοδύναμο με τη λύση των Εξ. (7-34) ως προς τις μη τονούμενες μεταβλητές και οδηγεί στις

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$y = y'$$

$$z = z' \qquad (7\text{-}35)$$

$$t = \frac{t' + \frac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \; .$$

Ίσως η πιο συμμετρική μορφή των εξισώσεων μετασχηματισμού Lorentz προκύπτει πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση χρόνου επί c, με αποτέλεσμα να θεωρούμε ως μεταβλητή χρόνου την ct ή ct'. Έτσι, ο χρόνος μετράται σε μονάδες *μήκους*, όπως ακριβώς τα x, y, z. Μ' άλλα λόγια, ένα συγκεκριμένο διάστημα χρόνου μπορεί να εκφραστεί με την *απόσταση* την οποία θα διένυε το φως κατά τη διάρκεια του δοσμένου χρόνου.

Τώρα ας ορίσουμε τη βαθμωτή παράμετρο γ από την

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \; . \qquad (7\text{-}36)$$

Τότε μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση

$$\begin{Bmatrix} x' \\ ct' \end{Bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ ct \end{Bmatrix} \qquad (7\text{-}37)$$

ή, αντίστροφα,

$$\begin{Bmatrix} x \\ ct \end{Bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x' \\ ct' \end{Bmatrix} \; . \qquad (7\text{-}38)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Μια γενικότερη μορφή των εξισώσεων μετασχηματισμού Lorentz επιτυγχάνεται όταν το I' μετατοπίζεται ως προς το I με σταθερή ταχύτητα $\mathbf{V}$ σε τυχαία διεύθυνση. Για να απλοποιήσουμε το συμβολισμό, έστω ότι συμβολίζουμε τα διανύσματα θέσης ως προς I και I' με $\mathbf{x}$ και $\mathbf{x}'$, αντίστοιχα, όπου

$$\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{7-39}$$

$$\mathbf{x}' = x'\,\mathbf{i}' + y'\,\mathbf{j}' + z'\,\mathbf{k}' \quad . \tag{7-40}$$

Υποθέτουμε πάλι ότι οι αρχές O και O' συμπίπτουν τη στιγμή $t = t' = 0$, και οι αντίστοιχοι άξονες είναι παράλληλοι στην οριακή περίπτωση όπου η $\mathbf{V}$ τείνει στο μηδέν. Με τις παραδοχές αυτές, μπορεί να δειχτεί ότι (*)

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \left[\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{V}}{V^2}(\gamma - 1) - \gamma t\right]\mathbf{V} \tag{7-41}$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{V}}{c^2}\right) \quad . \tag{7-42}$$

Ακόμη πιο γενικές εξισώσεις μετασχηματισμού Lorentz μπορούν να επιτευχθούν αν για παράδειγμα το τονούμενο σύστημα υπόκειται σε κάποια σταθερή στροφή τέτοια ώστε οι αντίστοιχοι άξονες να μην είναι παράλληλοι, ή ίσως οι αρχές O και O' να μην συμπίπτουν τη χρονική στιγμή μηδέν. Δεν θ' ασχοληθούμε όμως περισσότερο μ' αυτές τις περιπτώσεις.

Γεγονότα-Ταυτόχρονο. Η κινηματική της σχετικότητας ασχολείται με την κίνηση σημείου στο χώρο και χρόνο. Συνεπώς ένα κινούμενο σωμάτιο διαγράφει τροχιά στον τετραδιάστατο χώρο (x, y, z, t). Αν ένα γεγονός, όπως στιγμιαίο φως, λαμβάνει χώρα σε συγκεκριμένο χώρο και χρόνο, τότε αυτό μπορεί να προσδιοριστεί αν δοθούν οι τιμές των x, y, z και t ως προς κάποιο αδρανειακό σύστημα. Μ' άλλα λόγια, μπορούμε να πούμε ότι *ένα γεγονός είναι ένα σημείο στο*

(*) C. MØller, *The Theory of Relativity* (New York: Oxford University Press, 1952), σελ. 41.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

χωρόχρονο. Επιπλέον, βλέπουμε ότι οι εξισώσεις μετασχηματισμού Lorentz έχουν να κάνουν με *γεγονότα* · δηλαδή συσχετίζουν τιμές των x, y, z και t ως προς δυο διαφορετικά αδρανειακά συστήματα.

Αν υποθέσουμε ότι συμβαίνει ένα συγκεκριμένο γεγονός όπως το στιγμιαίο φως, τότε πώς λαμβάνονται οι αντίστοιχες τιμές των (x, y, z, t); Πρώτα επιλέγουμε ένα αδρανειακό σύστημα I ως σύστημα αναφοράς. Ας φανταστούμε ότι κατασκευάζουμε μια διάταξη σημείων και ότι αυτά τα σημεία είναι σταθερά σε κανονικές θέσεις στο σύστημα αναφοράς. Η *βαθμονόμηση* με σημεία (σημάδια) των χωρικών συντεταγμένων (x, y, z) είναι μια σαφής διαδικασία διότι τα σημεία αυτά δεν κινούνται και κάθε ράβδος μέτρησης είναι επίσης καθορισμένη κατά τη διαδικασία βαθμονόμησης. Η θέση ένός γεγονότος βρίσκεται με παρεμβολή από τα κοντινότερα σημεία του γεγονότος.

Στη συνέχεια, ας υποθέσουμε ότι ένα ρολόι τυπικής κατασκευής σχετίζεται με κάθε σημείο (σημάδι). Αμέσως προκύπτει το ερώτημα, πώς αυτή η σειρά των ρολογιών θα *συγχρονιστεί*. Μια πιθανότητα είναι να υποθέσουμε το ρολόι που βρίσκεται στην αρχή O εκλέγεται ως το "κύριο" ρολόι. Για να συγχρονίσουμε όλα τ' άλλα ρολόγια με το "κύριο" (πρωτεύον) ρολόι, υποθέτουμε ότι ένα στιγμιαίο φως εκπέμπεται τη χρονική στιγμή t_0 στην αρχή O. Η λάμψη αυτή διαδίδεται ως σφαιρικό μέτωπο κύματος που εκτείνεται με σταθερή ταχύτητα $c = (\mu_0\, \varepsilon_0)^{-1/2}$, όπου μ_0 και ε_0 όπως έχουμε δει είναι σταθερές που εκφράζουν τις ιδιότητες του κενού. Άρα αν ένα συγκεκριμένο ρολόι βρίσκεται σε απόσταση d από την αρχή θα έπρεπε να ρυθμιστεί ώστε να δείχνει χρόνο $t + d/c$ κατά τη στιγμή που η συγχρονισμένη λάμψη φωτός φθάνει σ' αυτό. Με τη διαδικασία αυτή μπορούν να συγχρονιστούν τα ρολόγια με βάση το πεπερασμένο της ταχύτητας του φωτός.

Τα ρολόγια μιας ομάδας που είναι τοποθετημένα στο I και συγχρονισμένα με τη χρήση μιας λάμψης φωτός από την αρχή O, μπορεί να δειχτεί ότι είναι συγχρονισμένα θεωρώντας οποιοδήποτε από τα ρολόγια της ομάδας ως πρωτεύον ρολόι. Μ' άλλα λόγια, ο συγχρονισμός που επιτυγχάνεται μ' αυτόν τον τρόπο είναι ανεξάρτητος από το ποιό ρολόι επιλέγεται ως κύριο - (πρωτεύον) ρολόι.

Υποθέτοντας ότι κάθε αδρανειακό σύστημα έχει μια διάταξη από σημεία (σημάδια) και συγχρονισμένα ρολόγια που είναι σταθερά τοποθετημένα σε δοσμένο σύστημα και κινούνται μ' αυτό, οι χωροχρονικές συντεταγμένες ενός γεγονότος μπορούν πλήρως να ορισθούν. Δυο γεγονότα ορίζονται ως *ταυτόχρονα* ως προς δοσμένο αδρανειακό σύστημα αν έχουν την ίδια τιμή του χρόνου σ' αυτό το σύστημα. Αλλά

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δυο γεγονότα που βρίσκονται να είναι ταυτόχρονα από έναν παρατηρητή σ' ένα αδρανειακό σύστημα δεν είναι κατ' ανάγκη ταυτόχρονα όταν θεωρούνται από έναν άλλο παρατηρητή σε κάποιο άλλο αδρανειακό σύστημα. Για παράδειγμα, ένα σύνολο ρολογιών που συγχρονίζεται στο σύστημα I δεν είναι συγχρονισμένα ως προς το I'. Γενικά, το ταυτόχρονο από δυο χωρικά διαχωρισμένα γεγονότα δεν είναι μια απόλυτη σχέση, αλλά εξαρτάται από το σύστημα αναφοράς.

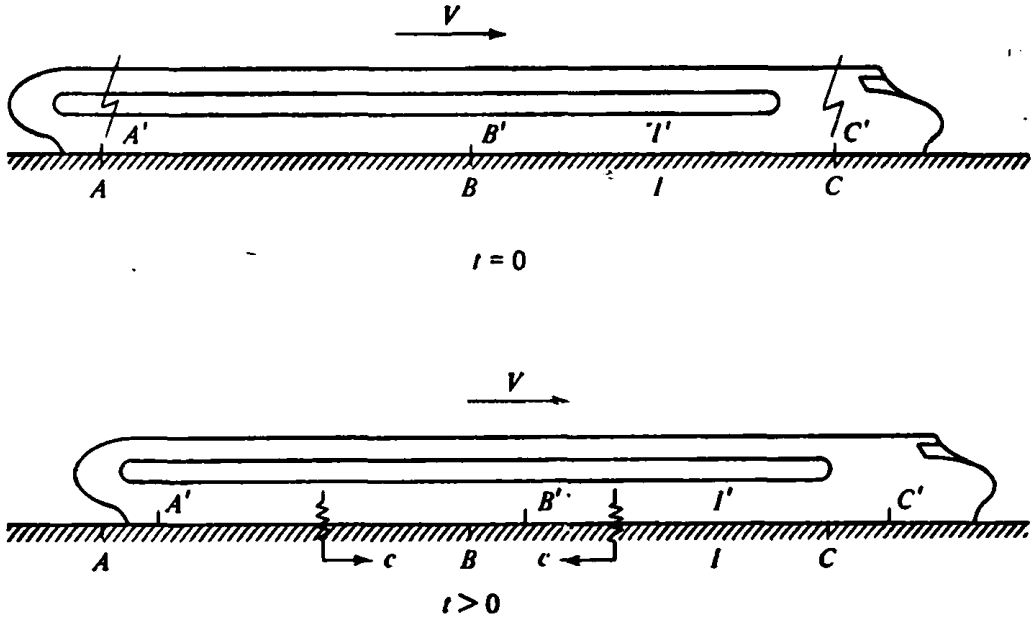
Σ' αυτό το σημείο, χρειάζεται να επεξηγηθεί λίγο περισσότερο η έννοια του παρατηρητή. Ένας *παρατηρητής* σχετίζεται πάντα με ένα *συγκεκριμένο αδρανειακό σύστημα* και δρα ως ένας *καταγραφέας γεγονότων* χρησιμοποιώντας τις χωροχρονικές συντεταγμένες αυτού του συστήματος. Ως εκ τούτου, ο παρατηρητής δεν θεωρείται ότι βρίσκεται τοποθετημένος σε συγκεκριμένο σημείο και παρατηρεί μια ακολουθία φυσικών γεγονότων από τη θέση αυτή, αλλά ένας παρατηρητής σύμφωνα με τον ορισμό μας είναι ένα κατανεμημένο σύνολο συσκευών που καταγράφουν τις τιμές (x, y, z, t) για όλα τα γεγονότα που ενδιαφέρουν, με τη χρήση των τοπικών σημείων (σημαδιών) και ρολογιών. Κάθε αδρανειακό σύστημα μπορεί να θωρηθεί ότι έχει έναν παρατηρητή που σχετίζεται μ' αυτό, αλλά είναι περιττό να θεωρήσει κανείς ότι κάθε αδρανειακό σύστημα έχει περισσότερους από έναν παρατηρητή.

Παράδειγμα 7-1. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα το γνωστό ως τρένο του Einstein που επεξηγεί τη σχετικότητα του ταυτόχρονου. Υποθέτουμε ότι ένα τρένο (Σχ. 7-3) κινείται με σταθερή σχετικιστική ταχύτητα V κατά μήκος ευθείας τροχιάς σταθερής σε δοσμένο αδρανειακό σύστημα I. Ένα δεύτερο αδρανειακό σύστημα I' θεωρείται προσδεδεμένο στο τρένο και μεταφέρεται μ' αυτό. Τώρα, ας υποθέσουμε ότι λάμψη φωτός (στιγμιαίο φως) χτυπάει κάθε άκρη του τρένου, σχηματίζοντας σημάδια στο τρένο και στο έδαφος. Ένας παρατηρητής βρίσκεται τοποθετημένος στο σημείο B, του συστήματος I που βρίσκεται στη μέση των σημαδιών A και C και διαπιστώνει ότι οι λάμψεις από τα σημεία A και C φτάνουν στο B την ίδια στιγμή. Αφού οι δυο λάμψεις ταξιδεύουν με την ίδια ταχύτητα c ως προς το I και αυτός είναι σε θέση να διαπιστώσει ότι οι αποστάσεις AB και CB είναι ίδιες, ο παρατηρητής συμπεραίνει ότι οι λάμψεις από τα σημεία A και C είναι *ταυτόχρονες*.

Απ' την άλλη μεριά, ένας παρατηρητής που επιβαίνει στο τρένο στο μέσο B' βρίσκει ότι η λάμψη από το C' του τρένου φτάνει στο B' πριν

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τη λάμψη του πίσω άκρου του τρένου A'. Άρα, αφού η ταχύτητα του φωτός έχει την ίδια τιμή c ως προς I' για τις δυο λάμψεις, ο παρατηρητής συμπεραίνει ότι η λάμψη στο C' συμβαίνει πριν από εκείνη στο A'. Επιπλέον, διαπιστώνει ότι τα δυο μέτωπα του κύματος συναντιούνται σε σημείο μεταξύ του B' και του πίσω μέρους του τρένου, το οποίο επίσης αποτελεί ένδειξη ότι η λάμψη εμπρός έχει συμβεί πρώτη.



Σχ. 7-3. Το τρένο του Einstein, που δείχνει τη λάμψη που χτυπάει τη χρονική στιγμή μηδέν, καθώς και τα μέτωπα κύματος που πλησιάζουν το ένα το άλλο.

Αν και υπάρχει μια φανερή διαφωνία μεταξύ των παρατηρητών στα B και B' ως προς το αν οι λάμψεις φωτός είναι ταυτόχρονες ή όχι, η αλήθεια είναι ότι και οι δυο είναι σωστοί. Οι δυο λάμψεις συμβαίνουν την ίδια χρονική στιγμή t στο σύστημα I, αλλά όχι την ίδια στιγμή t' στο σύστημα I'. Επιπλέον, αν θεωρούσαμε ένα δεύτερο τρένο, το οποίο κινείται στην αντίθετη κατεύθυνση, ένας επιβάτης του δεύτερου τρένου θα εύρισκε ότι η λάμψη στο A' συνέβει πριν τη λάμψη στο C'.

Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι δεν υπάρχει απόλυτο ταυτόχρονο για δυο χωρικά χωριστά γεγονότα. Αν τα γεγονότα είναι ταυτόχρονα σε κάποιο αδρανειακό σύστημα μπορεί να βρεθεί πάντα ένα άλλο αδρανειακό σύστημα στο οποίο το ένα από τα γεγονότα προπορεύεται του άλλου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Διαστολή χρόνου. Ας επιστρέψουμε τώρα στις εξισώσεις μετασχηματισμού Lorentz και ας θεωρήσουμε το χρονικό διάστημα μεταξύ δυο γεγονότων που συμβαίνουν στο ίδιο χωρικό σημείο στο I', δηλαδή στο σημείο που βρίσκεται ένα συγκεκριμένο ρολόι. Αυτό το χρονικό διάστημα καταγράφεται από ένα ρολόι σταθερό στο I' και μεταφερόμενο μ' αυτό. Άρα, για τα γεγονότα 1 και 2 έχουμε

$$x'_1 = x'_2 \quad . \tag{7-43}$$

Τότε, με τη χρήση του μετασχηματισμού Lorentz για τη χρονική συνιστώσα που δίνεται από την Εξ. (7-35), παίρνουμε

$$t'_2 - t'_1 = \sqrt{1 - \beta^2}\ (t_2 - t_1) \quad . \tag{7-44}$$

Συνεπώς βρίσκουμε ότι το χρονικό διάστημα $(t'_2 - t'_1)$ που καταγράφεται από ένα μόνο κινούμενο ρολόι είναι μικρότερο από το διάστημα $(t_2 - t_1)$ μεταξύ των δυο γεγονότων που καταγράφηκαν σε ξεχωριστά αλλά συγχρονισμένα ρολόγια στο I. Άρα ένας παρατηρητής στο I θα έλεγε ότι ο ρυθμός του κινούμενου ρολογιού στο I' είναι αργός. Αντίστροφα, αν ο παρατηρητής στο I' συγκρίνει την ανάγνωση του μοναδικού ρολογιού του με την ακολουθία των ρολογιών του I που αυτός διέρχεται, βρίσκει ότι αυτά τα ρολόγια έχουν ταχύτερο ρυθμό σε σχέση με το δικό του. Αυτό είναι το φαινόμενο της *διαστολής του χρόνου.*

Με την ίδια λογική, ένας παρατηρητής που βρίσκεται προσδεμένος στο σύστημα I' και παρακολουθεί ένα συγκεκριμένο ρολόι του συστήματος I που διέρχεται με σχετική ταχύτητα V, βρίσκει ότι αυτό το ρολόι είναι βραδύτερο απ' ότι τα συγχρονισμένα ρολόγια του συστήματός του. Συνοψίζουμε σημειώνοντας, ότι κάθε ρολόι φαίνεται να έχει γρηγορότερο ρυθμό όταν βρίσκεται σε σύστημα ηρεμίας σε σχέση με τον παρατηρητή. Αν κινείται με σχετική ταχύτητα V, ο ρυθμός του ως προς το σύστημα του παρατηρητή μετράται επιβραδυνόμενος μ' έναν παράγοντα $(1-\beta^2)^{1/2}$, όπου $\beta = V/c$.

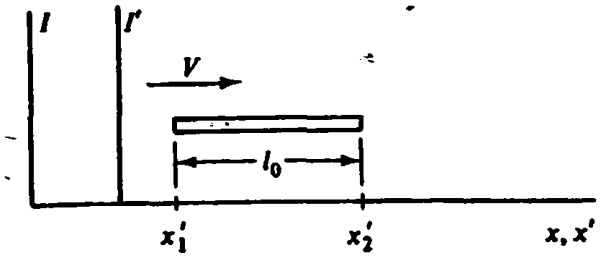
Συστολή μήκους. Στη θεωρία της ειδικής σχετικότητας, η απόσταση μεταξύ δυο σημείων σ' ένα στερεό σώμα βρίσκεται μετρώντας τη χωρική απόσταση των δυο σημείων *την ίδια χρονική στιγμή* σε δοθέν αδρανειακό σύστημα. Έχουμε δει ότι το ταυτόχρονο που συνεπάγεται με τη φράση "την ίδια στιγμή" δεν είναι απόλυτο, έτσι ένας θα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

μπορούσε να αναμένει ότι διαφορετικοί αδρανειακοί παρατηρητές μετρούν διαφορετικές διαστάσεις για το ίδιο στερεό σώμα. Πράγματι, αυτό ακριβώς συμβαίνει.

Ως ένα παράδειγμα, ας θεωρήσουμε μια στερεά ράβδο παράλληλη στον άξονα x του I, (Σχ. 7-4) που μετατοπίζεται με ταχύτητα V στη διεύθυνση x ως προς αυτό το σύστημα. Υποθέτουμε ότι παραμένει σε ηρεμία ως προς το I' και έχει *μήκος ηρεμίας* l_0, όπου

$$x'_2 - x'_1 = l_0 \quad . \tag{7-45}$$



Σχ. 7-4. Ράβδος μεταφερόμενη με το σύστημα I'.

Για να προσδιορίσουμε το μήκος της ως προς το I, χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις Lorentz (7-34) και υποθέτουμε ότι οι θέσεις των άκρων της ράβδου βρέθηκαν να είναι στα x_1 και x_2 την ίδια χρονική στιγμή t. Παίρνουμε

$$x'_1 = \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$x'_2 = \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

ή

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad , \tag{7-46}$$

όπου $\beta = V/c$. Αν l το μήκος της ράβδου στο σύστημα I, βλέπουμε από τις Εξ. (7-45) και (7-46) ότι

$$l = x_2 - x_1 = \sqrt{1 - \beta^2}\, l_0 \quad . \tag{7-47}$$

Αυτό το αποτέλεσμα δηλώνει ότι το μήκος κινούμενης ράβδου όπως παρατηρείται από το I είναι *μικρότερο* του μήκους ηρεμίας της στο I'.

Αντίστροφα, αν υποθέσουμε ότι ράβδος μήκους l_0 βρίσκεται στερεωμένη στο I και παρατηρείται από το I', τότε παρόμοια ανάλυση θα δείξει ότι το μήκος l' μετρούμενο στο I' είναι μικρότερο του l_0 κατά τον ίδιο παράγοντα $(1-\beta^2)^{1/2}$. Σ' αυτή την περίπτωση οι θέσεις των άκρων της ράβδου καθορίζονται την ίδια χρονική στιγμή t' στο σύστημα του παρατηρητή. Το φαινομενικό παράδοξο ότι η ράβδος ευρισκόμενη σ' άλλο σύστημα φαίνεται μικρότερη σε κάθε παρατηρητή εξηγείται σημειώνοντας ότι κάθε παρατηρητής μετράει την απόσταση ανάμεσα σε *ταυτόχρονες* θέσεις των άκρων της ράβδου, όπως προσδιορίζονται από τα ρολόγια του δικού του συστήματος.

Το φαινόμενο της διαμήκους συστολής μπορεί να συνοψιστεί σημειώνοντας ότι κάθε στερεό σώμα φαίνεται επιμηκυνμένο όταν είναι σε ηρεμία σε σχέση με τον παρατηρητή. Όταν δεν βρίσκεται σε ηρεμία φαίνεται ότι συστέλεται κατά μήκος της κίνησης κατά τον παράγοντα $(1-\beta^2)^{1/2}$. Οι διαστάσεις κάθετα στη διεύθυνση κίνησης δεν μεταβάλλονται διότι $y=y'$ και $z=z'$ σύμφωνα με τις εξισώσεις του μετασχηματισμού Lorentz.

Το αναλλοίωτο διάστημα. Στους μετασχηματισμούς Galileo οι οποίοι σχετίζονται με μη σχετικιστική κινηματική, ο χρόνος θεωρείται ως μια *απόλυτη* ποσότητα. Μ' άλλα λόγια, το χρονικό διάστημα ανάμεσα σε δοσμένο ζεύγος γεγονότων είναι ανεξάρτητο του συστήματος αναφοράς. Επιπλέον, σύμφωνα με τη μη σχετικιστική θεωρία, το χωρικό διάστημα, δηλαδή η *απόσταση* που χωρίζει δυο οποιαδήποτε *ταυτόχρονα* γεγονότα, δεν εξαρτάται από το σύστημα αναφοράς του παρατηρητή. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι αυτά τα διαστήματα είναι *αναλλοίωτα* ως προς τους μετασχηματισμούς του Galileo.

Στη σχετικιστική κινηματική όμως βρίσκουμε ότι οι εξισώσεις μετασχηματισμού Lorentz δεν είναι συμβιβαστές μ' αυτά τα αναλλοίωτα διαστήματα του χρόνου και του χώρου. Αντιθέτως, υπάρχει ένα μοναδικό διάστημα μεταξύ των αυθαίρετων γεγονότων 1 και 2 που συνδυάζει τις μετρήσεις του χώρου και χρόνου. Αυτό το αναλλοίωτο διάστημα s δίνεται από την εξίσωση

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$s^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \qquad (7\text{-}48)$$

για την περίπτωση όπου τα δυο γεγονότα καταγράφονται από έναν παρατηρητή στο αδρανειακό σύστημα I . Αν οι χωροχρονικές συντεταγμένες των δυο ίδιων γεγονότων δίνονται ως προς το αδρανειακό σύστημα I', τότε το αντίστοιχο τετράγωνο του διαστήματος είναι

$$s'^2 = c^2 (t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2 \ . \qquad (7\text{-}49)$$

Μια απ' ευθείας αντικατάσταση των τονούμενων ποσοτήτων από την Εξ. (7-34) δείχνει ότι το διάστημα αυτό είναι πράγματι αναλλοίωτο ως προς τους μετασχηματισμούς Lorentz, δηλαδή

$$s^2 = s'^2 \qquad (7\text{-}50)$$

για κάθε ζεύγος γεγονότων.

Το διάστημα s μπορεί να δοθεί εποπτικά για την περίπτωση των χωροχρονικών συντεταγμένων (x, y, t) με τη χρήση τριών αμοιβαία ορθογωνίων αξόνων, όπως δείχνεται στο Σχ. 7-5. Ας υποθέσουμε ότι η λάμψη φωτός συμβαίνει στην αρχή τη χρονική στιγμή $t = 0$. Στο συνήθη διδιάστατο χώρο σχηματίζεται ένα κυκλικό μέτωπο κύματος που η ακτίνα του αυξάνει με σταθερό ρυθμό c. Στο τρισδιάστατο χωροχρονικό διάγραμμα του Σχ. 7-5 το μέτωπο κύματος σχηματίζει μια κωνική επιφάνεια που η κορυφή της βρίσκεται στην αρχή. Αυτός είναι ο *κώνος φωτός* για θετικό t. Ο κώνος αυτός μπορεί επίσης να επεκταθεί πίσω στο χρόνο, ώστε να περικλείει εκείνα τα γεγονότα των οποίων οι λάμψεις φωτός φτάνουν στην αρχή τη στιγμή t=0. Οι δυο αυτοί κώνοι μπορούν εύκολα να γενικευτούν για την περίπτωση του τετραδιάστατου χωροχρόνου και περιγράφονται από την εξίσωση

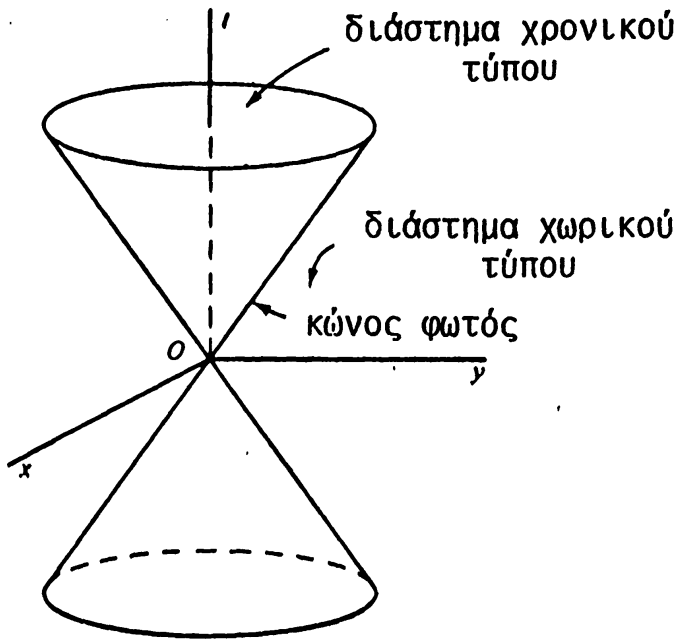
$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \ . \qquad (7\text{-}51)$$

Συγκρίνοντας αυτή την εξίσωση με την Εξ. (7-48) βλέπουμε ότι αυτή εκφράζει την επιφάνεια όλων των γεγονότων των οποίων το διάστημα s ως προς την αρχή είναι μηδέν.

Μέχρις εδώ έχουμε θεωρήσει κώνους φωτός ως προς την αρχή. Αλλά επιπρόσθετους κώνους φωτός μπορεί να φανταστεί κανείς να δημιουργούνται και σ' άλλα σημεία του χωρόχρονου. Για παράδειγμα,

οι κώνοι φωτός ως προς το σημείο αναφοράς (x_1, y_1, z_1, t_1) δίνονται από την

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = c^2 (t - t_1)^2 \quad . \qquad (7\text{-}52)$$



Σχ. 7-5. Κώνοι φωτός για ένα γεγονός στην αρχή.

Γενικά, το διάστημα μεταξύ δυο γεγονότων μπορεί να ταξινομηθεί σ' έναν από τους τρεις τύπους:

1. *Διάστημα χρονικού τύπου*, $s^2 > 0$. Ένα γεγονός κείται εντός του κώνου φωτός του άλλου. Τα δυο γεγονότα συνδέονται αιτιατά, αλλά δεν συσχετίζονται απαραίτητα έτσι. Μ' άλλα λόγια, είναι δυνατό ένα σήμα που ταξιδεύει με ταχύτητα μικρότερη του c να συνδέει τα δυο γεγονότα, και ως εκ τούτου το συμβάν που έγινε νωρίτερα να έχει προξενήσει αυτό που έγινε αργότερα.
2. *Διάστημα χωρικού τύπου*, $s^2 < 0$. Ένα γεγονός κείται εκτός του κώνου φωτός του άλλου. Τα δυο γεγονότα δεν μπορούν να συνδεθούν με σήμα φωτός· άρα δεν είναι συσχετισμένα αιτιατά. Επιπλέον, για γεγονότα που χωρίζονται με χωρικού τύπου διάστημα, είναι πάντα πιθανό να βρεθούν δυο

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

αδρανειακά συστήματα στα οποία τα δυο γεγονότα να συμβαίνουν σε αντίστροφη χρονική ακολουθία.

3. *Διάστημα τύπου φωτός*, $s^2 = 0$. Ένα γεγονός βρίσκεται στον κώνο φωτός του άλλου, δηλαδή είναι δυνατό ένα σήμα φωτός να συνδέσει τα δυο γεγονότα.

Ίδιος χρόνος και ίδια απόσταση. Ας θεωρήσουμε δυο γεγονότα που χωρίζονται από ένα *χρονικού τύπου* διάστημα που θα συμβολίσουμε με $\Delta\tau$. Από την Εξ. (7-48) μπορούμε να γράψουμε

$$\Delta\tau = \frac{1}{c}[c\,\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2]^{1/2} \quad , \tag{7-53}$$

όπου $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ και Δt είναι οι διαφορές στις αντίστοιχες χωροχρονικές συντεταγμένες σχετιζόμενες με το αδρανειακό σύστημα I. Ας θεωρήσουμε επίσης ένα δεύτερο αδρανειακό σύστημα I', στο οποίο οι διαφορές $\Delta x', \Delta y', \Delta z'$ είναι όλες μηδέν για τα δυο ίδια γεγονότα. Σ' αυτήν την περίπτωση έχουμε

$$\Delta\tau = \Delta t' \tag{7-54}$$

δηλαδή το αναλλοίωτο χρονικού τύπου διάστημα είναι ίσο με το πραγματικό χρονικό διάστημα που καταγράφεται από ένα και μόνο ρολόι στο I'. Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε το ρολόι συσχετιζόμενο με ένα σωμάτιο σταθερό στο I', αλλά κινούμενο ομοιόμορφα ως προς το I. Σ' αυτήν την περίπτωση, ο χρόνος τ καλείται *ίδιος χρόνος* του σωματίου.

Αν θεωρήσουμε απειροστά χρονικά και χωρικά διαστήματα, μπορούμε να γράψουμε την Εξ. (7-53) με τη μορφή

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt \quad , \tag{7-55}$$

όπου v είναι η ταχύτητα του σωματίου ως προς το αδρανειακό σύστημα I. Συχνά αυτό το αποτέλεσμα γενικεύεται για να περικλείσει τον *ίδιο χρόνο* τ σχετιζόμενο μ' ένα σωμάτιο που υπόκειται σε μια γενικότερη

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

κίνηση που περιέχει και επιταχύνσεις.(*) Τότε η Εξ. (7-55) ολοκληρώνεται και δίνει

$$\tau = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt \ , \qquad (7\text{-}56)$$

υποθέτοντας ότι τ και t είναι μηδέν την αρχική στιγμή.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι τα δυο γεγονότα χωρίζονται με *χωρικού τύπου διάστημα*, πράγμα που συνεπάγεται ότι $s^2 < 0$. Τότε μπορεί κανείς να ορίσει ένα διάστημα *ίδιας απόστασης*

$$\Delta\sigma = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2\,\Delta t^2} \quad , \qquad (7\text{-}57)$$

το οποίο βέβαια έχει την ίδια τιμή για δυο δοθέντα γεγονότα σ' όλα τα αδρανειακά συστήματα. Ειδικά, αν ένα αδρανειακό σύστημα επιλέγεται έτσι ώστε τα δυο γεγονότα να είναι ταυτόχρονα, τότε η *ίδια απόσταση* είναι η ίδια με τη σταθερή χωρική απόσταση.

Μια ενδιαφέρουσα προσέγγιση στην έννοια του αναλλοίωτου διαστήματος δόθηκε από τον Minkowski στα 1908 όταν πρότεινε τη χρήση των συντεταγμένων

$$x_1 = x, \qquad x_2 = y, \qquad x_3 = z, \qquad x_4 = ict \quad , \qquad (7\text{-}58)$$

όπου από την Εξ. (7-57) παίρνουμε

$$\Delta\sigma^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 + \Delta x_4^2 \ . \qquad (7\text{-}59)$$

Η τελευταία, έχει τη συμμετρική μορφή της απόστασης μεταξύ δυο σημείων στον τετραδιάστατο Ευκλείδειο χώρο και οδηγεί στην εισαγωγή της ιδέας ενός τετραδιάστατου χωρόχρονου στον οποίο χώρος και χρόνος ενοποιούνται. Αν και οι συνιστώσες που αντιστοιχούν στο χώρο και χρόνο διαφέρουν σε διάφορα αδρανειακά συστήματα το διάστημα s είναι το ίδιο σ' όλα τα συστήματα.

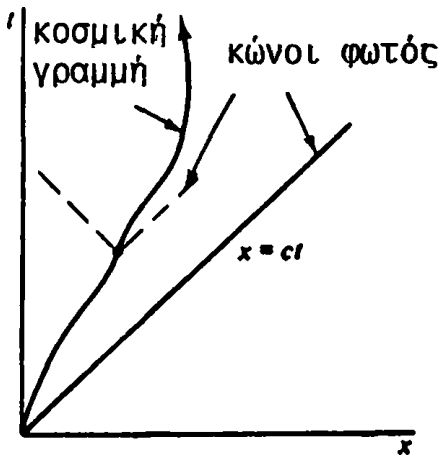
(*) Η υπόθεση ότι επιταχύνσεις δεν έχουν άμεση επίδραση στο ρυθμό του ρολογιού είναι κοινά αποδεκτή, αλλά δεν είναι απόλυτα αληθής. Στη συνέχεια θα αγνοήσουμε τέτοιου είδους θεωρητικές αναλύσεις στη συζήτησή μας.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Θα πρέπει να σημειωθεί εξάλλου ότι το αρνητικό σημείο που συνοδεύει την Δt^2 στην Εξ. (7-57), επιτρέπει το διάστημα s να είναι μηδέν σε συγκεκριμένες περιπτώσεις ακόμη κι αν καμιά από τις συνιστώσες δεν μηδενίζεται. Κι' αυτό, σ' αντιδιαστολή με την περίπτωση της Ευκλείδειας γεωμετρίας που απαιτεί όλες οι συνιστώσες να είναι μηδέν αν το μήκος του αντίστοιχου διανύσματος είναι μηδέν.

Κοσμική γραμμή. Ας θεωρήσουμε τη γενική κίνηση ενός σωματίου. Μπορούμε να θεωρήσουμε την κίνησή του ως μια ακολουθία γεγονότων. Μιας και κάθε γεγονός ορίζεται ως ένα σημείο στο χωρόχρονο, αυτή η αλληλουχία των γεγονότων σχηματίζει μια καμπύλη στον τετραδιάστατο χώρο (x, y, z, t). Η καμπύλη είναι γνωστή ως *κοσμική γραμμή* του σωματίου.

Ως ένα απλό παράδειγμα, ας θεωρήσουμε ένα σωμάτιο που βρίσκεται στην αρχή τη στιγμή t=0 και κινείται επί ευθείας γραμής με μεταβαλλόμενη ταχύτητα. Υποθέτοντας ότι κινείται κατά τη διεύθυνση του άξονα των x, μια τυπική κοσμική γραμμή θα μπορούσε να είναι αυτή του Σχ. 7-6.



Σχ. 7-6. Η κοσμική γραμμή ενός σωματίου.

Το αναλλοίωτο διάστημα μεταξύ δυο τυχαίων σημείων της κοσμικής γραμμής πρέπει να είναι χρονικού τύπου στη φύση διότι η ταχύτητα του σωματίου πρέπει να είναι μικρότερη της ταχύτητας του φωτός. Αυτό συνεπάγεται ότι κάθε σημείο κείται μέσα στον κώνο φωτός για όλα τα προηγούμενα σημεία, γεγονός που θέτει ένα άνω όριο στη

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

γωνία μεταξύ του άξονα των t και της εφαπτόμενης στην κοσμική γραμμή. Η οριακή αυτή καμπύλη αντιστοιχεί σε ταχύτητα c.

Αν θεωρήσουμε κάθε απειροστό αναλλοίωτο διάστημα στην κοσμική γραμμή του σωματίου, βλέπουμε πως και αυτό είναι χρονικού τύπου και στην πραγματικότητα αποτελεί μια απειροστή αύξηση $d\tau$ του *ίδιου χρόνου* του σωματίου. Η Εξ. (7-56) μπορεί τότε να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογιστό του *ίδιου χρόνου* τ, του σωματίου. Λόγω της αναλλοίωτης φύσης των απειροστών, όλοι οι αδρανειακοί παρατηρητές θα υπολογίσουν ακριβώς τον αυτό *ίδιο χρόνο* για το σωμάτιο. Συνεπώς ο υπολογισμός του *ίδιου χρόνου* δεν εξαρτάται από το συγκεκριμένο αδρανειακό σύστημα. Σημειώνουμε όμως από την Εξ. (7-56) ότι το διάστημα του *ίδιου χρόνου* είναι πάντα μικρότερο από (ή στην περίπτωση $v = 0$, ίσο με) το αντίστοιχο διάστημα στο χρόνο t του δοθέντος αδρανειακού συστήματος.

Μια ένδειξη για τη βραδύτητα του *ίδιου χρόνου* δίνεται από την παρατήρηση των μέσων χρόνων ζωής συγκεκριμένων ασταθών υποατομικών σωματίων που κινούνται με μεγάλες ταχύτητες. Βρίσκει κανείς ότι οι χρόνοι ζωής, όπως μετρούνται στο εργαστήριο, μπορούν να είναι πολλές φορές μεγαλύτεροι από τους αντίστοιχους *ίδιους χρόνους* ζωής μετρούμενοι με τους έμφυτους μηχανισμούς χρονομέτρησης των σωματίων. Το γεγονός αυτό επιτρέπει την παρατήρηση των τροχιών συγκεκριμένων σωματίων τα οποία διαφορετικά θα ήταν μη παρατηρήσιμα.

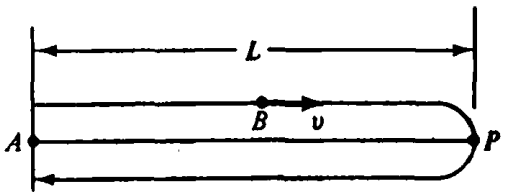
Παράδειγμα 7-2. Το παράδοξο των ρολογιών του Einstein, που μερικές φορές καλείται το παράδοξο των διδύμων, έχει συζητηθεί πολλές φορές στη βιβλιογραφία.

Ας υποθέσουμε ότι οι δίδυμοι A και B βρίσκονται αρχικά στη γη που υποτίθεται ότι είναι ένα αδρανειακό σύστημα. Ο A παραμένει στη γη ενώ ο B ταξιδεύει με σχετικιστική ταχύτητα v σ' ένα μακρυνό σημείο P και κατόπιν επιστρέφει στη γη με την ίδια σταθερή ταχύτητα (Σχ. 7-7). Υποθέτοντας ότι οι μετρήσεις του χρόνου και της απόστασης γίνονται ως προς το αδρανειακό σύστημα της γης, ο χρόνος που απαιτείται για όλο το ταξίδι είναι

$$T_A = \frac{2L}{v} \tag{7-60}$$

σύμφωνα με τον δίδυμο A.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



Σχ. 7-7. Η τροχιά του ταξιδεύοντος διδύμου.

Απ' την άλλη μεριά, το ρολόι που μεταφέρεται από τον B, καταγράφει το δικό του *ίδιο χρόνο*. Αν μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ανάγνωση του χρόνου στο ρολόι του δεν αλλάζει καθώς αυτός στρέφει στιγμιαία στο P, τότε ο ολικός χρόνος που παρήλθε κατά το ταξίδι, με τη χρήση της Εξ. (7-56) είναι

$$T_B = \sqrt{1 - \beta^2}\, T_A = \frac{2L}{\upsilon}\sqrt{1 - \beta^2} \quad , \tag{7-61}$$

όπου $\beta = \upsilon/c$.

Άρα κατά την επιστροφή του B στη γη, μια σύγκριση των μετρήσεων των δυο ρολογιών, αποκαλύπτει ότι ο απαιτούμενος χρόνος για το ταξίδι σύμφωνα με τον B είναι μικρότερος από αυτόν που εκτιμάει ο A, κατά ένα παράγοντα $(1-\beta^2)^{1/2}$. Επίσης, αφού ο βιολογικός χρόνος για κάθε δίδυμο είναι ταυτόσημος με τον *ίδιο χρόνο* του, βρίσκουμε ότι ο δίδυμος B έχει μικρότερη ηλικία από το δίδυμο A που παρέμεινε στη γη.

Αν τώρα μελετήσουμε το ταξίδι από τη μεριά του διδύμου B, βρίσκουμε ότι ο A απομακρύνεται με ταχύτητα υ και μετά επιστρέφει με την ίδια ταχύτητα. Άρα, με την ίδια λογική, γιατί ο B να μη βρίσκει ότι το ρολόι του A είναι βραδύτερο ;

Το πρώτο σημείο που πρέπει να σημειώσουμε είναι ότι τα δυναμικά γεγονότα της κίνησης των A και B δεν είναι *συμμετρικά*. Αν κάθε ένας από τους διδύμους μεταφέρει το επιταχυντόμετρο λόγου χάρη, το επιταχυντόμετρο του A θα δείχνει πάντα μηδέν. Απ' εναντίας το επιταχυντόμετρο του B θα δείξει μη-μηδενική ανάγνωση, όταν θα επιταχύνεται για να ξεκινήσει το ταξίδι, κατά τη μεταστροφή του στο σημείο P καθώς και κατά την επιβράδυνσή του όταν επιστρέφει στον A .

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ως ένα επιπλέον έλεγχο, σημειώνουμε ότι από την πλευρά του B η γραμμή AP διασχίζεται δυο φορές, πρώτα όταν ο A απομακρύνεται έως ότου ο P είναι απέναντι στον B και ύστερα καθώς ο A πλησιάζει. Σε κάθε περίπτωση η σχετική ταχύτητα είναι v, έτσι το μήκος AP είναι $(1-\beta^2)^{1/2} L$, λόγω της σχετικιστικής συστολής. Άρα ο απαιτούμενος χρόνος για το συνολικό ταξίδι σύμφωνα με τον B είναι δυο φορές ο χρόνος για μια διέλευση του AP, ή

$$T_B = \frac{2L}{v}\sqrt{1-\beta^2} \quad ,$$

όπως και πριν.

Ως μια εφαρμογή της διαφοράς στην ηλικία των διδύμων, ας υποθέσουμε ότι ο δίδυμος B ταξιδεύει με 80% της ταχύτητας του φωτός και η απόσταση L είναι 4 έτη φωτός, η κατά προσέγγιση απόσταση από το κοντινότερο άστρο. Τότε οι Εξ. (7-60) και (7-61) δίνουν $T_A = 10$ χρόνια και $T_B = 6$ χρόνια. Άρα ο δίδυμος B έχει σημαντικά μικρότερη ηλικία από τον A. Στην πραγματικότητα, ο δίδυμος B καλύπτει το συνολικό ταξίδι που έχει απόσταση 8 έτη φωτός σε μόνο 6 έτη. Αυτό φαίνεται ότι συνεπάγεται μια ταχύτητα μεγαλύτερη του c, σε αντίφαση με την αρχική υπόθεση. Όμως είναι ένα σωστό αποτέλεσμα διότι η απόσταση μετράται στο σύστημα αναφοράς της γης ενώ ο χρόνος μετράται σε διαφορετικό σύστημα, δηλαδή στο σύστημα που κινείται με το δίδυμο B.

Πρόσθεση ταχυτήτων. Μια από τις συνέπειες των εξισώσεων του μετασχηματισμού Lorentz είναι ο περιορισμός ότι η ταχύτητα ενός σωματίου ως προς οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα δεν μπορεί να υπερβεί την ταχύτητα του φωτός. Επιπλέον, η ταχύτητα του φωτονίου ως προς κάθε αδρανειακό σύστημα πρέπει να έχει την ίδια τιμή c. Είναι φανερό επομένως ότι οι συνήθεις νόμοι της άθροισης διανυσμάτων δεν ισχύουν στην περίπτωση της σχετικιστικής μηχανικής (Σχ. 7-8).

Για να διατυπώσουμε το σχετικιστικό νόμο της πρόσθεσης των ταχυτήτων, ξεκινάμε με το μετασχηματισμό Lorentz της Εξ. (7-35) γραμμένο με διαφορική μορφή. Έχουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$dx = \frac{dx' + Vdt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

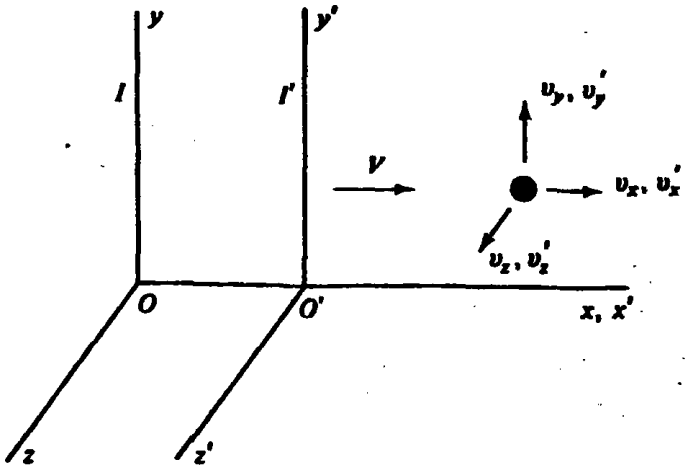
$$dy = dy'$$

$$dz = dz' \qquad (7\text{-}62)$$

$$dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2}dx'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

όπου $\beta = V/c$.

Στη συνέχεια παίρνουμε λόγους των παραπάνω διαφορικών για να βρούμε τις εξισώσεις για τις συνιστώσες ταχύτητας στο μη τονούμενο σύστημα ως συνάρτηση αυτών στο τονούμενο. Παίρνουμε τότε



Σχ. 7-8. Συνιστώσες της ταχύτητας ενός σωματίου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{v'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}} \qquad (7\text{-}63)$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{v'_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}} .$$

Αντίστροφα, οι συνιστώσες της ταχύτητας στο τονούμενο σύστημα ως συνάρτηση εκείνων του μη-τονούμενου είναι

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}$$

$$v'_y = \frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}} \qquad (7\text{-}64)$$

$$v'_z = \frac{v_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{Vv_z}{c^2}} .$$

Ας υποθέσουμε, ότι η ταχύτητα V κείται στο διάστημα $-c < V < c$. Γνωρίζουμε ότι τα φωτεινά σήματα (φωτόνια) ταξιδεύουν με ταχύτητα c ως προς όλα τα αδρανειακά συστήματα και κάθε υλικό σωμάτιο πρέπει να έχει ταχύτητα μικρότερη του c ως προς κάθε αδρανειακό σύστημα. Ένας έλεγχος των εξισώσεων πρόσθεσης ταχυτήτων δείχνει, ότι είναι συνεπείς με τους παραπάνω περιορισμούς.

Ως ένα απλό παράδειγμα, αν το I' κινείται με ταχύτητα $V = 0.9c$, ως προς το I και αν ένα σωμάτιο κινείται με ταχύτητα $v'_x = 0.9c$, τότε βρίσκουμε από τις Εξ. (7-63), ότι η ταχύτητα του σωματίου ως προς το I

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

είναι $v_x=0.994c$. Συνεπώς, είναι εμφανές ότι οι συνήθεις νόμοι της διανυσματικής πρόσθεσης ταχυτήτων δεν ισχύουν σ' αυτήν την περίπτωση, όπου εμπλέκονται τα δυο αδρανειακά συστήματα. Όμως ως προς ένα αδρανειακό σύστημα, οι συνιστώσες του διανύσματος της ταχύτητας μπορούν να προστίθενται με το συνήθη τρόπο για να επιτευχθεί η τελική ταχύτητα ως προς το σύστημα αυτό.

Έχοντας δει ότι οι σχετικιστικές ταχύτητες δεν προστίθενται με τον απλό τρόπο της Νευτώνειας μηχανικής προκύπτει το ερώτημα αν κάποια άλλη παράμετρος θα μπορούσε να είναι βολικότερη για να εκφράσει την ταχύτητα. Για παράδειγμα, μπορεί να βρεθεί μια παράμετρος που να εκφράζει με μοναδικό τρόπο την ταχύτητα και που να μπορεί να προστίθεται ώστε να εκφράζει τη σχετικιστική πρόσθεση των ταχυτήτων; Η *παράμετρος ταχύτητας* θ, ικανοποιεί αυτές τις συνθήκες και ορίζεται από την εξίσωση

$$\tanh\theta = \frac{v}{c} = \beta \quad . \tag{7-65}$$

Σημειώνουμε ότι η ταχύτητα είναι μηδέν όταν η θ είναι μηδέν και η v προσεγγίζει την c, όταν η θ απειρίζεται. Εξάλλου $\theta \cong \beta$ για $\theta << 1$, έτσι η θ είναι ανάλογη της ταχύτητας για μικρές ταχύτητες.

Από την εξίσωση ορισμού της θ και την Εξ. (7-36) βλέπουμε ότι

$$\cosh\theta = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma \tag{7-66}$$

$$\sinh\theta = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad . \tag{7-67}$$

Για να δώσουμε μια εφαρμογή της παραμέτρου ταχύτητας θ, στη σχετικιστική πρόσθεση ταχυτήτων, ας θεωρήσουμε την ευθύγραμμη κίνηση ενός σωματίου που έχει ταχύτητα v_2 ως προς το σύστημα I' το οποίο κινείται με ταχύτητα v_1 ως προς το σύστημα I. Από την Εξ. (7-63) βρίσκουμε ότι η ταχύτητα του σωματίου ως προς το I' είναι

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \quad . \tag{7-68}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ως προς την παράμετρο ταχύτητας θ, η εξίσωση γίνεται

$$\tanh\theta = \frac{\tanh\theta_1 + \tanh\theta_2}{1 + \tanh\theta_1 \tanh\theta_2} = \tanh(\theta_1 + \theta_2) \quad , \quad (7\text{-}69)$$

από την οποία παίρνουμε

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 \quad . \quad (7\text{-}70)$$

Άρα, επιτυγχάνεται μονοδιάστατη πρόσθεση σχετικιστικών ταχυτήτων με την πρόσθεση των παραμέτρων ταχύτητας θ.

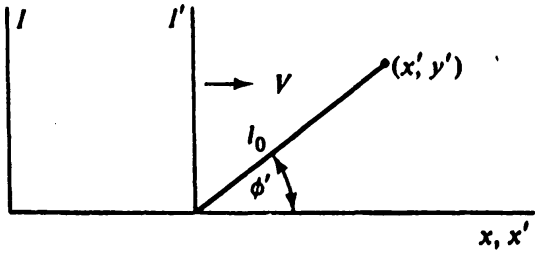
Οι εξισώσεις μετασχηματισμού Lorentz μπορούν να γραφούν εύκολα ως προς την παράμετρο ταχύτητας. Έτσι η Εξ. (7-37) γίνεται

$$\begin{Bmatrix} x' \\ ct' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta \\ -\sinh\theta & \cosh\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ ct \end{Bmatrix} \quad (7\text{-}71)$$

ή, αντίστροφα

$$\begin{Bmatrix} x \\ ct \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x' \\ ct' \end{Bmatrix} . \quad (7\text{-}72)$$

Παράδειγμα 7-3. Στερεά ράβδος μήκους ηρεμίας l_0 σχηματίζει γωνία φ' με τον άξονα x' του συστήματος I', το οποίο κινείται με σταθερά ταχύτητα V ως προς το I (Σχ. 7-9). Να βρεθεί το μήκος της ράβδου στο αδρανειακό σύστημα I.



Σχ. 7-9. Μεταφερόμενη ράβδος.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Πρώτα διαπιστώνουμε ότι οι x' και y' συνιστώσες του μήκους της ράβδου στο I', είναι :

$$\Delta x' = x' = l_0 \cos \varphi'$$
$$\Delta y' = y' = l_0 \sin \varphi' \quad . \tag{7-73}$$

Παρατηρήσαμε προηγούμενα ότι οι y διαστάσεις ενός στερεού σώματος παραμένουν αμετάβλητες καθώς πηγαίνουμε από το σύστημα I' στο I, αλλά η διάσταση κατά μήκος του x υπόκειται σε συστολή Lorentz κατά έναν παράγοντα $(1-\beta^2)^{1/2}$. Άρα βρίσκουμε ότι

$$\Delta x = \sqrt{1 - \beta^2}\, l_0 \cos \varphi'$$
$$\Delta y = l_0 \sin \varphi' \quad . \tag{7-74}$$

Έτσι το μήκος στο σύστημα I είναι

$$l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{1 - \beta^2 \cos^2 \varphi'}\; l_0 \quad . \tag{7-75}$$

Η γωνία φ μεταξύ της ράβδου και του άξονα x όπως φαίνεται από το σύστημα I, δίνεται από την

$$\tan \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\tan \varphi'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad . \tag{7-76}$$

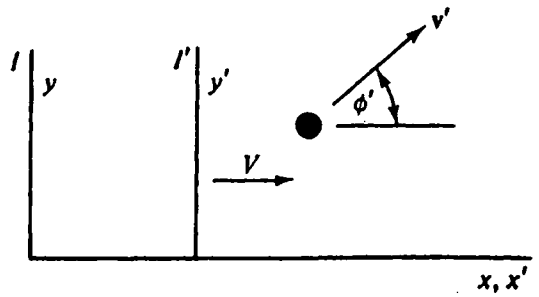
Σε μια τυπική περίπτωση λοιπόν η ράβδος φαίνεται μικρότερη στο σύστημα I, και η γωνία από τον άξονα x είναι πιο κοντά στην ορθή.

Παράδειγμα 7-4. Σωμάτιο κινείται ως προς το I' με ταχύτητα v' σε μια διεύθυνση που ορίζεται από γωνία φ' μετρούμενη από το θετικό άξονα x' (Σχ. 7-10). Να βρεθεί το πλάτος και η διεύθυνση της ταχύτητας του σωματίου ως προς το σύστημα I.

Οι συνιστώσες της ταχύτητας ως προς το σύστημα I' είναι

$$v'_x = v' \cos \varphi'$$
$$v'_y = v' \sin \varphi' \quad . \tag{7-77}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



Σχ. 7-10. Ο μετασχηματισμός των διευθύνσεων της ταχύτητας.

Απ' ευθείας αντικατάσταση στην Εξ. (7-63) δίνει

$$v_x = \frac{v' \cos \varphi' + V}{1 + \dfrac{Vv' \cos \varphi'}{c^2}}$$

$$v_y = \frac{v' \sin \varphi' \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \dfrac{Vv' \cos \varphi'}{c^2}} \quad , \tag{7-78}$$

όπου $\beta = V/c$. Αν $\beta' = v'/c$, τα αποτελέσματα αυτά μπορούν να γραφούν με τη μορφή

$$v_x = \left(\frac{\beta + \beta' \cos \varphi'}{1 + \beta\beta' \cos \varphi'} \right) c$$

$$v_y = \left(\frac{\beta' \sin \varphi' \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta\beta' \cos \varphi'} \right) c \quad . \tag{7-79}$$

Το μέγεθος της ταχύτητας του σωματίου ως προς το I είναι

$$v = \left(\frac{[\beta^2 + \beta'^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \varphi') + 2\beta\beta' \cos \varphi']^{1/2}}{1 + \beta\beta' \cos \varphi'} \right) c \quad . \tag{7-80}$$

Αυτό το διάνυσμα ταχύτητας σχηματίζει γωνία φ με τον άξονα x , όπου

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\tan\varphi = \frac{\beta' \sin\varphi' \sqrt{1-\beta^2}}{\beta + \beta' \cos\varphi'} \quad . \tag{7-81}$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι η γωνία φ είναι εντελώς διαφορετική από το αποτέλεσμα του παραδείγματος 7-3. Εδώ, για θετικά β και β', βρίσκουμε ότι $\varphi < \varphi'$ για $0 < \varphi' < \pi$.

Μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή προκύπτει στην περίπτωση φωτονίου που κινείται με $\beta' = 1$. Τότε, όπως αναμένεται η Εξ. (7-80) δίνει $v = c$ για κάθε τιμή της φ'. Κάτω από αυτές τις συνθήκες, η Εξ. (7-81) μπορεί να γραφεί με τη μορφή

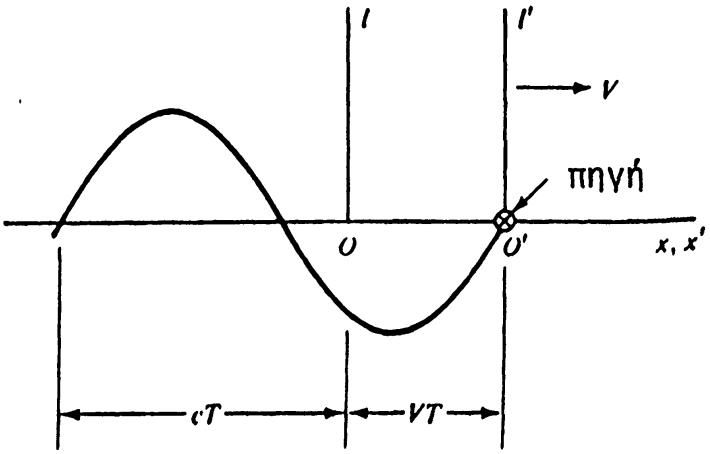
$$\cos\varphi = \frac{\beta + \cos\varphi'}{1 + \beta\cos\varphi'} \quad . \tag{7-82}$$

Υποθέτοντας $\beta > 0$ και $0 < \varphi' < \pi$, βρίσκουμε ξανά ότι $\varphi < \varphi'$. Αυτό συνεπάγεται ότι αν ένα ταχέως κινούμενο σωμάτιο εκπέμπει φως εξίσου προς όλες τις διευθύνσεις ως προς το I', ένας παρατηρητής του συστήματος I θα βρει ότι το περισσότερο φως ταξιδεύει σε κατευθύνσεις που ορίζονται από το εμπρόσθιο ημισφαίριο, το φαινόμενο γίνεται πιο έντονο καθώς το β αυξάνει. Αυτό είναι γνωστό ως *φαινόμενο του προβολέα.*

Σχετικιστικό φαινόμενο Doppler. Η συχνότητα λήψης φωτεινού σήματος μπορεί να είναι διαφορετική από την εκπεμπόμενη συχνότητα λόγω της σχετικής κίνησης του πομπού ως προς το δέκτη. Αυτό το *φαινόμενο Doppler* συμβαίνει ακόμη και στις μη-σχετικιστικές ταχύτητες και για άλλους τύπους μετάδοσης κυμάτων όπως ο ήχος, αλλά θα περιοριστούμε στη σχετικιστική ανάλυση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο κενό.

Πρώτα ας θεωρήσουμε την περίπτωση φωτεινής πηγής στην αρχή O' του αδρανειακού συστήματος I' που απομακρύνεται με ταχύτητα V από παρατηρητή στο O του αδρανειακού συστήματος I, Σχ. 7-11. Ας υποθέσουμε ότι η συχνότητα της πηγής είναι f' όπως μετράται από το I'. Φωτεινό σήμα διαδίδεται προς τ' αριστερά, δηλαδή στη διεύθυνση του αρνητικού άξονα x. Ας υποθέσουμε ότι η περίοδος του σήματος είναι T, όπως μετράται από το I. Σημειώνουμε ότι το μέτωπο κύματος διανύει απόσταση cT προς αριστερά και η πηγή διανύει VT προς τα δεξιά κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος T. Συνεπώς το μήκος κύματος μετρούμενο στο I είναι

$$\lambda = (c+V)T \tag{7-83}$$



Σχ. 7-11. Σχετικιστικό φαινόμενο Doppler.

για την περίπτωση όπου το μέτωπο κύματος και η πηγή κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις. Η συχνότητα που λαμβάνεται στο O είναι

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{1}{(1+\beta)T} \quad , \tag{7-84}$$

όπου $\beta = V/c$.

Τώρα ας θυμηθούμε ότι ένα ρολόι κινούμενο μαζί με την πηγή δείχνει να πηγαίνει αργά σ' έναν παρατηρητή στο I, δηλαδή

$$T = \frac{T'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \tag{7-85}$$

όπου T' είναι η περίοδος ταλάντωσης στο I'. Άρα για έναν παρατηρητή κινούμενο με το I', η συχνότητα της πηγής f' είναι

$$f' = \frac{1}{T'} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}\,T} \quad . \tag{7-86}$$

Από τις Εξ. (7-84) και (7-85) παίρνουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$f = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\, f' \quad . \tag{7-87}$$

Η εξίσωση αυτή εφαρμόζεται για *απομακρυνόμενη πηγή*.

Η ανάλυση του φαινομένου Doppler για μια *πηγή που προσεγγίζει*, ακολουθεί παρόμοια διαδικασία εκτός απο το ότι το πρόσημο του β αλλάζει. Άρα το αποτέλεσμα για την περίπτωση αυτή είναι

$$f = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\, f' \quad . \tag{7-88}$$

Μέχρι τώρα έχουμε υποθέσει ότι η πηγή κινείται σε ακτινική διεύθυνση, είτε προσεγγίζοντας είτε απομακρυνόμενη από τον παρατηρητή. Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια πηγή που κινείται με *ταχύτητα* V *κάθετα* ως προς τον παρατηρητή. Σ' αυτήν την περίπτωση δεν θα υπάρξει μεταβολή στη λαμβανόμενη συχνότητα λόγω κάποιας ακτινικής συνιστώσας της ταχύτητας. Το φαινόμενο της χρονικής διαστολής, όμως θα παραμείνει λόγω της κίνησης της πηγής. Άρα από την Εξ. (7-85) έχουμε ότι

$$f = \frac{1}{T} = \sqrt{1-\beta^2}\; f' \quad . \tag{7-89}$$

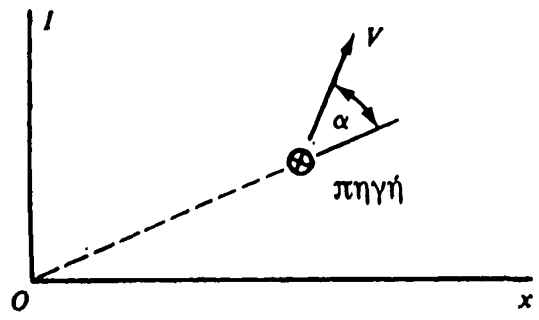
Η αλλαγή αυτή στη συχνότητα είναι γνωστή ως *εγκάρσιο φαινόμενο Doppler*.

Έχοντας διαχωρίσει τα φαινόμενα της ακτινικής ταχύτητας και χρονικής διαστολής, μπορούμε να γενικεύσουμε το φαινόμενο Doppler για τη γενικότερη περίπτωση ταχύτητας πηγής V κατά γωνία α μετρούμενη προς την εξωτερική ακτινική κατεύθυνση (σχ. 7-12). Βρίσκουμε τότε

$$f = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\cos\alpha}\, f' \quad , \tag{7-90}$$

όπου ο παράγοντας $\sqrt{1-\beta^2}$ αντιπροσωπεύει το φαινόμενο της χρονικής διαστολής και ο όρος $1+\beta\cos\alpha$ λαμβάνει υπόψη την αλλαγή του μήκους κύματος λόγω της ακτινικής κίνησης της πηγής.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



Σχ. 7-12. Φωτεινή πηγή σε γενική κίνηση.

Παράδειγμα 7-5. Ας θεωρήσουμε το παράδοξο των διδύμων του παραδείγματος 7-2. Υποθέτουμε ότι κάθε δίδυμος μεταφέρει ένα ραδιοπομπό σταθερής συχνότητας f_0 όταν βρίσκεται σε ηρεμία. Ο δίδυμος A συγκρίνει τη συχνότητα σε κύκλους, που λαμβάνει από το δίδυμο B που ταξιδεύει κατά τη διάρκεια του ταξιδιού με τον αριθμό των κύκλων που εκπέμπεται από το δικό του σταθερό μεταδότη. Ας συγκρίνουμε το ρυθμό γήρανσης των διδύμων, υποθέτοντας ότι κάθε δίδυμος γηράσκει σ' αναλογία με τον ολικό αριθμό κύκλων που εκπέμπονται από το δικό του πομπό.

Λόγω του σχετικιστικού φαινομένου Doppler, η συχνότητα που λαμβάνει ο A καθώς ο B απομακρύνεται με ταχύτητα v προς το P, είναι

$$f_1 = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\, f_0 \quad , \tag{7-91}$$

σε συμφωνία με την Εξ. (7-87), όπου $\beta = v/c$. Ο δίδυμος A λαμβάνει αυτή τη συχνότητα έως ότου το σήμα που εκπέμπεται στο σημείο στροφής P, φτάνει στον A. Αυτό το χρονικό διάστημα είναι

$$t_1 = \frac{L}{\beta c} + \frac{L}{c} = \frac{(1+\beta)L}{\beta c} \quad . \tag{7-92}$$

Απ' την άλλη μεριά, όλα τα σήματα που εκπέμπονται από τον B στο ταξίδι επιστροφής λαμβάνονται από τον A στη συχνότητα που δίνεται από την Εξ. (7-88), δηλαδή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$f_2 = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\, f_0 \quad . \tag{7-93}$$

Τώρα, το χρονικό διάστημα για το οποίο αυτή η ταχύτητα λαμβάνεται είναι

$$t_2 = \frac{L}{\beta c} - \frac{L}{c} = \frac{(1-\beta)L}{\beta c} \quad , \tag{7-94}$$

αφού γνωρίζουμε ότι ο ολικός χρόνος ταξιδιού σύμφωνα με τον A είναι

$$t_1 + t_2 = \frac{2L}{\beta c} = \frac{2L}{v} \quad . \tag{7-95}$$

Αυτή είναι ακριβώς η ολική απόσταση του ταξιδιού διαιρημένη με την ταχύτητα.

Ο συνολικός αριθμός των κύκλων που λαμβάνονται στον A από τον πομπό του B είναι

$$N_B = f_1 t_1 + f_2 t_2 = \frac{2f_0 L}{\beta c}\sqrt{1-\beta^2} \quad , \tag{7-96}$$

ο οποίος βέβαια είναι ίσος με τον αριθμό των κύκλων που εκπέμπονται από τον B. Ο αριθμός των κύκλων που εκπέμπονται από τον A, είναι ίσος με τη σταθερή του συχνότητα f_0 πολλαπλασιασμένη επί το συνολικό χρονικό διάστημα, που δίνετασι από την Εξ. (7-95)

$$N_A = \frac{2f_0 L}{\beta c} \quad . \tag{7-97}$$

Συγκρίνοντας τις Εξ. (7-96) και (7-97) έχουμε

$$N_B = \sqrt{1-\beta^2}\, N_A \quad . \tag{7-98}$$

Αυτό συνεπάγεται ξανά ότι ο δίδυμος B που ταξιδεύει έχει ηλικία μικρότερη του A που βρίσκεται στη γη κατά έναν παράγοντα $(1-\beta^2)^{1/2}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

7-3. ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ

Στη συζήτηση της σχετικιστικής κινηματικής βρήκαμε ότι οι μετασχηματισμοί μεταξύ αδρανειακών συστημάτων για σημεία του χωρόχρονου επιτυγχάνονται με τις εξισώσεις του μετασχηματισμού Lorentz . Στο όριο που η σχετική ταχύτητα V τείνει στο μηδέν, αυτές οι εξισώσεις γίνονται οι εξισώσεις μετασχηματισμού του Galileo της Νευτώνειας μηχανικής.

Αν θεωρήσουμε τώρα τους σχετικιστικούς ορισμούς εννοιών όπως ορμή, ενέργεια και δύναμη είναι βολικό να απαιτήσουμε όπως αυτοί προσεγγίζουν τους Νευτώνειους ορισμούς για μικρές ταχύτητες. Επιπλέον, οι ορισμοί θα πρέπει να είναι συνεπείς με τις εξισώσεις του μετασχηματισμού Lorentz στο χωρόχρονο και πρέπει να συμβάλλουν σε μια περιγραφή των δυναμικών γεγονότων που να είναι σύμφωνη με τα πειραματικά αποτελέσματα. Έτσι, ας προχωρήσουμε με την ανάπτυξη αυτών των ορισμών θεωρώντας τις κινήσεις και αλληλεπιδράσεις των σωματίων.

Ορμή. Ας θεωρήσουμε ένα σωμάτιο κινούμενο με ταχύτητα $\mathbf{v}$ ως προς ένα αδρανειακό σύστημα. Αν ορίσουμε την ορμή του σωματίου να είναι ίση με $m\mathbf{v}$, όπου η μάζα m θεωρείται σταθερή, όπως στη Νευτώνεια μηχανική, τότε βρίσκουμε πειραματικά ότι η ολική ορμή δεν διατηρείται σε μια σύγκρουση δυο ταχέως κινουμένων σωματίων. Είναι όμως δυνατό να ορίσουμε τη σχετικιστική ορμή, έτσι ώστε η ολική ορμή να διατηρείται σ' όλες τις κρούσεις. Αυτό θα ισχύει σ' όλα τα αδρανειακά συστήματα και μπορεί να δειχτεί ότι είναι σε συμφωνία με τα πειραματικά αποτελέσματα.

Στην προσπάθειά μας να βρούμε τη μορφή της σχετικιστικής έκφρασης της ορμής που οδηγεί στη διατήρησή της, ας μνημονεύσουμε κατ' αρχή, κάποια ουσιώδη χαρακτηριστικά. Σημειώνουμε πρώτα ότι η ορμή $\mathbf{p}$ πρέπει να έχει την ίδια διεύθυνση με την ταχύτητα $\mathbf{v}$ για λόγους συμμετρίας. Αλλιώς θα υπήρχε ένα προτιμητέο επίπεδο, δηλαδή το επίπεδο που ορίζεται από τα $\mathbf{p}$ και $\mathbf{v}$, το οποίο δεν έχει φυσική υπόσταση κάτω από την υπόθεση ότι ο χώρος είναι ισότροπος. Δεύτερον υποθέτουμε ότι για μια συγκεκριμένη ταχύτητα $\mathbf{v}$, η ορμή του σωματίου είναι απ' ευθείας ανάλογη της *μάζας ηρεμίας* m_0 , όπου m_0 (που επίσης λέγεται και *ίδια μάζα*) είναι η αδρανειακή μάζα μετρούμενη στο σύστημα στο οποίο η ταχύτητα του σωματίου είναι αμελητέα συγκρινόμενη με την c . Άρα η μάζα ηρεμίας ενός σωματίου

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

είναι η ίδια με τη Νευτώνεια μάζα. Τέλος, υποθέτουμε ότι η ορμή μεταβάλλεται με κάποιο μη-γραμμικό τρόπο ως προς την ταχύτητα και η *μορφή* της εξίσωσης ορισμού είναι η ίδια σε όλα τα αδρανειακά συστήματα και συμβιβαστή με το σχετικιστικό νόμο της πρόσθεσης των ταχυτήτων. Ας υποθέσουμε ότι η εξίσωση ορισμού της ορμής ενός σωματίου έχει τη μορφή

$$\mathbf{p} = m_0 f(v)\mathbf{v} \quad . \tag{7-99}$$

Η ακριβής μορφή της $f(v)$ μπορεί να βρεθεί αναλύοντας την ιδιαίτερη περίπτωση της ελαστικής κρούσης (*) δυο ταυτόσημων σφαιρών χωρίς τριβές (Σχ. 7-13). Πρώτα ας θεωρήσουμε την κρούση ως προς ένα αδρανειακό σύστημα I, το οποίο κινείται με το κέντρο μάζας. Ας διαλέξουμε τους x και y άξονες έτσι ώστε η κίνηση να λαβαίνει χώρα στο xy - επίπεδο και η ώση αλληλεπίδρασης μεταξύ των σφαιρών τη στιγμή της σύγκρουσης να είναι παράλληλη στον άξονα y. Στην περίπτωση αυτή της τέλειας ελαστικής κρούσης, οι συνιστώσες y της ταχύτητας αντιστρέφονται και οι x - συνιστώσες μένουν αμετάβλητες. Άρα, η ταχύτητα v κάθε σφαίρας μένει αμετάβλητη κατά την κρούση, και οι γωνίες πρόσκρουσης και αναπήδησης ως προς τον άξονα x είναι θ, όπως φαίνονται στο Σχ. 7-13. Λόγω συμμετρίας είναι φανερό ότι η ολική ορμή διατηρείται και είναι ίση με μηδέν, ανεξάρτητα από τη μορφή της $f(v)$.

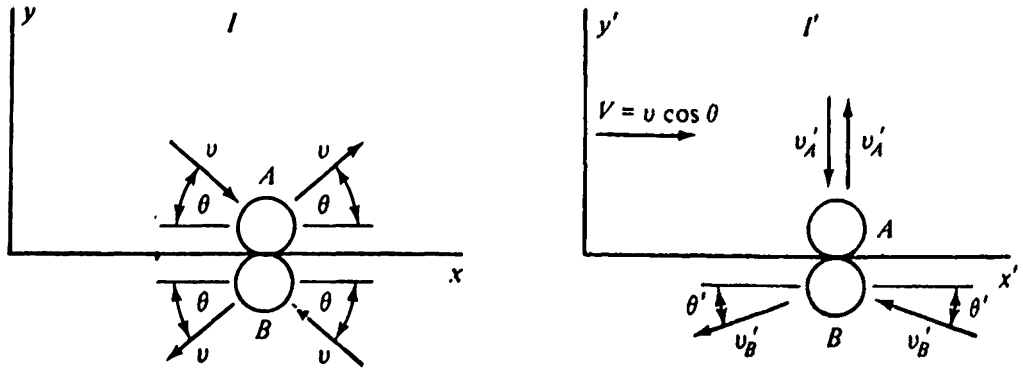
Τώρα ας θεωρήσουμε ένα αδρανειακό σύστημα I' [Σχ. 7-13 (b)] που κινείται με σταθερή ταχύτητα V ως προς το I, όπου

$$V = v\cos\theta \quad . \tag{7-100}$$

Έχουμε διαλέξει τη V έτσι ώστε η σφαίρα A να μην έχει κίνηση ως προς τη διεύθυνση x'. Όπως και πριν όμως, οι συνιστώσες y' της ταχύτητας υπόκεινται σε αντιστροφή κατά την κρούση, ενώ οι συνιστώσες x' δεν μεταβάλλονται οδηγώντας σε αμετάβλητη ταχύτητα για κάθε σφαίρα. Είναι προφανές τότε, ότι η συνολική x'- συνιστώσα της ορμής διατηρείται ανεξάρτητα από τη μορφή της $f(v)$.

(*) Ο όρος *ελαστική κρούση* συνεπάγεται διατήρηση της κινητικής ενέργειας και ορμής. Στο σύστημα κέντρου μάζας οι ταχύτητες των σωματίων αλλάζουν μόνο κατά διεύθυνση και όχι κατά μέγεθος.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ



Σχ. 7-13. Ελαστική κρούση ταυτόσημων σφαιρών.

Από τις συνιστώσες y' της ορμής μπορούμε να πάρουμε τη μορφή της $f(\upsilon)$. Πρώτα κάνουμε χρήση του νόμου άθροισης των ταχυτήτων Εξ. (7-64), για να πάρουμε την ταχύτητα της σφαίρας A ως προς το σύστημα I', δηλαδή

$$\upsilon'_A = \frac{\upsilon \sin\theta}{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\cos^2\theta}\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\cos^2\theta} = \frac{\upsilon \sin\theta}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\cos^2\theta}}. \tag{7-101}$$

Με παρόμοια διαδικασία, βρίσκουμε ότι οι συνιστώσες της ταχύτητας της σφαίρας B πριν την κρούση είναι

$$\dot{x}'_B = \frac{-2\upsilon\cos\theta}{1 + \frac{\upsilon^2}{c^2}\cos^2\theta}$$

$$\dot{y}'_B = \frac{\upsilon \sin\theta}{1 + \frac{\upsilon^2}{c^2}\cos^2\theta}\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\cos^2\theta}. \tag{7-102}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Για να απλοποιήσουμε την ανάλυση, ας υποθέσουμε την ειδική περίπτωση όπου $\theta << 1$. Τότε, αγνοώντας όρους τάξης από τις Εξ. (7-101) και (7-102) παίρνουμε θ^2 ή μεγαλύτερης

$$v'_A = \frac{v\theta}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{7-103}$$

$$v'_B = -\dot{x}'_B = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \tag{7-104}$$

$$\dot{y}'_B = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v^2}{c^2}} v\theta \quad . \tag{7-105}$$

Αφού $v'_A << c$, η ορμή της σφαίρας A είναι απλά η μάζα ηρεμίας πολλαπλασιασμένη επί την ταχύτητα, όπως στη Νευτώνεια μηχανική. Άρα βρίσκουμε ότι η μεταβολή στην y' - συνιστώσα της ορμής της A, ως αποτέλεσμα της κρούσης, είναι

$$\Delta p'_A = 2m_0 v'_A = \frac{2m_0 v\theta}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad . \tag{7-106}$$

Σημειώνουμε εδώ ότι $f(v'_A) = 1$.

Η αντίστοιχη μεταβολή στην ορμή της B είναι

$$\Delta p'_B = -2m_0 f(v'_B)\, \dot{y}'_B$$

$$= -2m_0 f(v'_B)\, v\theta \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \quad . \tag{7-107}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Σ' αυτήν την περίπτωση βλέπουμε ότι η v'_B δεν είναι απαραίτητα μικρή συγκρινόμενη με τη c, και συνεπώς $f(v'_B)$ μπορεί να είναι αρκετά μεγαλύτερη της μονάδας. Η διατήρηση της ολικής ορμής συνεπάγεται ότι

$$\Delta p'_A + \Delta p'_B = 0 \quad . \tag{7-108}$$

Τότε, από τις Εξ. (7-106) - (7-108), μπορούμε να λύσουμε ως προς $f(v'_B)$, παίρνοντας

$$f(v'_B) = \frac{1 + \dfrac{v^2}{c^2}}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} \quad . \tag{7-109}$$

Το δεξιό μέλος της Εξ. (7-109) εκφράζεται ως συνάρτηση της v, αλλά αναζητούμε μια συνάρτηση της v'_B που να έχει την ίδια τιμή. Με απ' ευθείας αντικατάσταση, κάνοντας χρήση της Εξ. (7-104), βρίσκουμε ότι

$$\sqrt{1 - \frac{v'^2_B}{c^2}} = \frac{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}{1 + \dfrac{v^2}{c^2}} \quad . \tag{7-110}$$

Άρα

$$f(v'_B) = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v'^2_B}{c^2}}} \quad . \tag{7-111}$$

Πιο γενικά, για ένα σωμάτιο που έχει ταχύτητα v ως προς ένα αδρανειακό σύστημα, βρίσκουμε ότι

$$f(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \quad . \tag{7-112}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ας επιστρέψουμε τώρα στην Εξ. (7-99) που δίνει την υποτιθέμενη μορφή για την **p** . Με αντικατάστση από την Εξ. (7-112) βρίσκουμε την ακόλουθη εξίσωση για τη σχετικιστική ορμή:

$$\mathbf{p} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad , \tag{7-113}$$

όπου $\beta = v/c$. Μερικές φορές είναι βολικό να γράφεται η ορμή με τη μορφή

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad , \tag{7-114}$$

όπου η *σχετικιστική μάζα* m δίνεται από την

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad . \tag{7-115}$$

Παρατηρούμε ότι η m τείνει στο άπειρο καθώς η ταχύτητα του σωματίου v πλησιάζει την ταχύτητα του φωτός, υπό τον όρο ότι η μάζα ηρεμίας m_0 δεν είναι μηδέν.

Οι Καρτεσιανές συντεταγμένες της σχετικιστικής ορμής είναι

$$\begin{aligned} p_x &= m\dot{x} = \frac{m_0\dot{x}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ p_y &= m\dot{y} = \frac{m_0\dot{y}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ p_z &= m\dot{z} = \frac{m_0\dot{z}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad . \end{aligned} \tag{7-116}$$

Σε όρους της παραμέτρου ταχύτητας θ, που δίνεται από την Εξ. (7-67) έχουμε

$$p = m_0\, c \sinh\theta \quad . \tag{7-117}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Μια άλλη χρήσιμη προσέγγιση είναι να επικαλεστούμε από την Εξ. (7-55) ότι

$$d\tau = \sqrt{1 - \beta^2}\ dt \quad .$$

Τότε οι συνιστώσες της ορμής Εξ. (7-116), παίρνουν τη μορφή

$$p_x = m_0 \frac{dx}{d\tau}$$

$$p_y = m_0 \frac{dy}{d\tau} \qquad (7\text{-}118)$$

$$p_z = m_0 \frac{dz}{d\tau} \quad ,$$

όπου τ είναι ο *ίδιος χρόνος* του σωματίου. Μ' άλλα λόγια, αν $\mathbf{r}$ είναι το διάνυσμα θέσης ενός σωματίου ως προς δοθέν σύστημα, η ορμή του είναι

$$\mathbf{p} = m_0 \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \quad . \qquad (7\text{-}119)$$

Ενέργεια. Ας προσεγγίσουμε τον ορισμό της ολικής σχετικιστικής ενέργειας E σωματίου προδιαγράφοντας ότι ο ρυθμός αύξησής της είναι

$$\dot{E} = \dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v} \quad , \qquad (7\text{-}120)$$

όπου $\mathbf{v}$ είναι η ταχύτητα του σωματίου. Για την περίπτωση μικρών ταχυτήτων, αυτό συμφωνεί με τη φιλοσοφία της Νευτώνειας μηχανικής, δηλαδή η ενέργεια αυξάνει με ρυθμό ίσο προς το ρυθμό με τον οποίο η ολική εξωτερική δύναμη ($\mathbf{F}$ ή $\dot{\mathbf{p}}$) παράγει έργο στο σύστημα. Κάνοντας χρήση του ορισμού της $\mathbf{p}$ από την Εξ. (7-113), μπορούμε να πάρουμε μια άλλη μορφή,

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\dot{E} = \frac{m_0 v \dot{v}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \quad , \tag{7-121}$$

που μετά από ολοκλήρωση οδηγεί στην

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + E_0 \quad . \tag{7-122}$$

Αν θέσουμε αυθαίρετα τη σταθερά ολοκλήρωσης E_0 ίση με μηδέν θα πάρουμε

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mc^2 \quad . \tag{7-123}$$

Σημειώνουμε ότι η μάζα του σωματίου είναι απ' ευθείας ανάλογη της ολικής του ενέργειας που εξαρτάται από την εκλογή του συστήματος αναφοράς. Επιπλέον, ακόμη και στην περίπτωση μηδενικής ταχύτητας, η ενέργεια E έχει μη μηδενική τιμή m_0c^2 γνωστή ως *ενέργεια ηρεμίας*.

Μια άλλη μορφή της έκφρασης για την ενέργεια επιτυγχάνεται με τη χρήση της παραμέτρου ταχύτητας θ που δίνεται από την Εξ. (7-66). Τότε η Εξ. (7-123) γίνεται

$$E = m_0 c^2 \cosh \theta \quad . \tag{7-124}$$

Η κινητική ενέργεια T ενός σωματίου ορίζεται ως η διαφορά μεταξύ της ολικής ενέργειας και της ενέργειας ηρεμίας m_0c^2,

$$T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = m_0 c^2 (\cosh \theta - 1) \quad . \tag{7-125}$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι για $v << c$ έχουμε την προσέγγιση

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$T = m_0 c^2 \left[\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \ldots \right) - 1 \right] \cong \frac{1}{2} m_0 v^2 \quad , \qquad (7\text{-}126)$$

σε συμφωνία με τη Νευτώνεια μηχανική.

Το τετραδιάνυσμα ορμής-ενέργειας. Από την Εξ. (7-118) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} p_x &= m_0 \frac{dx}{d\tau} \\ p_y &= m_0 \frac{dy}{d\tau} \\ p_z &= m_0 \frac{dz}{d\tau} \end{aligned} \qquad (7\text{-}127)$$

και με τη χρήση της Εξ. (7-55) η έκφραση της ενέργειας παίρνει τη μορφή

$$\frac{E}{c^2} = m_0 \frac{dt}{d\tau} \quad . \qquad (7\text{-}128)$$

Οι εξισώσεις (7-127) - (7-128) έχουν παρόμοια μορφή. Εξάλλου, η μάζα ηρεμίας m_0 και ο *ίδιος χρόνος* τ είναι *αναλλοίωτοι* ως προς το μετασχηματισμό Lorentz · δηλαδή, έχουν τις ίδιες τιμές σε όλα τα αδρανειακά συστήματα. Αυτό οδηγεί στο ότι οι p_x, p_y, p_z, και E/c^2 πρέπει να μετασχηματίζονται με τον ίδιο τρόπο όπως οι x, y, z κάι t, αντίστοιχα. Άρα, αν πάρουμε τα αδρανειακά συστήματα I και I' με το συνήθη τρόπο και γράψουμε εκφράσεις που αντιστοιχούν στις εξισώσεις μετασχηματισμού Lorentz, παίρνουμε

$$\begin{aligned} p'_x &= \frac{p_x - \dfrac{VE}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ p'_y &= p_y \\ p'_z &= p_z \\ E' &= \frac{E - Vp_x}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \end{aligned} \qquad (7\text{-}129)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

όπου $\beta = V/c$. Οι τρεις συνιστώσες της **p** και η ποσότητα E/c^2 συνιστούν το *τετραδιάνυσμα ορμής - ενέργειας*, ανάλογο του (t, x, y, z) .

Οι εξισώσεις (7-129) μπορούν να λυθούν ως προς τις τονούμενες ποσότητες οδηγώντας στις

$$p_x = \frac{p'_x + \frac{VE'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$p_y = p'_y \qquad (7\text{-}130)$$

$$p_z = p'_z$$

$$E = \frac{E' + Vp'_x}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad .$$

Αφού οι ιδιότητες μετασχηματισμού του τετραδιανύσματος ορμής - ενέργειας είναι ταυτόσημες με εκείνες του τετραδιανύσματος του χωρόχρονου, θα πρέπει επίσης να υπάρχει μια αναλλοίωτη έκφραση που να αντιστοιχεί στο s^2 . Έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$E^2 - (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)c^2 = E'^2 - (p'^2_x + p'^2_y + p'^2_z)c^2 \quad . \qquad (7\text{-}131)$$

Για δοθέν σωμάτιο αυτή η ισότητα ισχύει για οποιαδήποτε δυο αδρανειακά συστήματα, συμπεριλαμβανομένου και του *συστήματος ηρεμίας* στο οποίο η ταχύτητα του σωματίου είναι μηδέν. Αυτό μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τη σταθερά και να πάρουμε

$$E^2 - p^2c^2 = E'^2 - p'^2c^2 = m_0^2 c^4 \quad . \qquad (7\text{-}132)$$

Μια άλλη χρήσιμη έκφραση μεταξύ της ενέργειας και ορμής ενός σωματίου λαμβάνεται από τις εξισώσεις ορισμού, δηλαδή

$$p = \frac{E}{c}\beta \quad , \qquad (7\text{-}133)$$

όπου $\beta = v/c$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Δύναμη. Συνήθως συμπεραίνουμε ότι σ' ένα σωμάτιο δεν ενεργεί δύναμη είτε όταν βρίσκεται σε ηρεμία είτε όταν αυτό κινείται σε ευθεία γραμμή με σταθερή ταχύτητα. Μ' άλλα λόγια, ελεύθερο σωμάτιο διαγράφει ευθεία κοσμική γραμμή ως προς κάθε αδρανειακό σύστημα. Απ' την άλλη μεριά, μια καμπύλη κοσμική γραμμή υποδηλώνει την ύπαρξη δύναμης. Σε συμφωνία με την άποψη αυτή, ας ορίσουμε τη δύναμη **F** που ενεργεί επί ενός σωματίου να είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της ορμής, δηλαδή

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right) , \qquad (7\text{-}134)$$

όπου $\beta = v/c$. Για $\beta << 1$ βλέπουμε ότι η εξίσωση αυτή ανάγεται στο νόμο κίνησης του Newton.

Ας υποθέσουμε ότι οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης μεταξύ δυο σωματίων είναι αντίθετες, τότε η Εξ. (7-134) συνεπάγεται ότι οι αντίστοιχοι ρυθμοί μεταβολής των ορμών είναι αντίθετοι. Αυτό οδηγεί στο ότι η ολική ορμή διατηρείται, σε συμφωνία με τις υποθέσεις που έγιναν κατά τον ορισμό της εξίσωσης της ορμής.

Αν εκτελέσουμε τώρα τη διαφόριση στην Εξ. (7-134) παίρνουμε

$$\mathbf{F} = \frac{m_0 \dot{\mathbf{v}}}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{m_0 v \dot{v} \mathbf{v}}{c^2 (1 - \beta^2)^{3/2}} . \qquad (7\text{-}135)$$

Λόγω της ύπαρξης του δεύτερου όρου στο δεξιό μέλος είναι προφανές ότι η δύναμη **F** και η επιτάχυνση $\dot{\mathbf{v}}$, εν γένει δεν έχουν την ίδια διεύθυνση. Για δυο όμως συνήθεις περιπτώσεις η επιτάχυνση είναι παράλληλη με τη δύναμη.

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση στην οποία **F** και **v** έχουν την ίδια διεύθυνση. Λόγω συμμετρίας, κάθε επιτάχυνση πρέπει να είναι διαμήκης, δηλαδή κατά τη διεύθυνση της **v** . Τότε, συμβολίζοντας με F_l και a_l τη *διαμήκη* δύναμη και επιτάχυνση αντίστοιχα, μπορούμε να γράψουμε την Εξ. (7-135) με τη βαθμωτή μορφή,

$$F_l = \frac{m_0 a_l}{(1 - \beta^2)^{3/2}} . \qquad (7\text{-}136)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Μια δεύτερη περίπτωση είναι όταν **F** και **v** είναι κάθετες μεταξύ τους. Εδώ η ταχύτητα αλλάζει κατά διεύθυνση αλλά όχι σε μέτρο. Άρα, ο τελευταίος όρος της (7-135) μηδενίζεται και έχουμε

$$F_t = \frac{m_0 a_t}{\sqrt{1 - \beta^2}} , \qquad (7\text{-}137)$$

όπου F_t και a_t αναφέροντας στην *εγκάρσια* δύναμη και επιτάχυνση, δηλαδή, σε κατεύθυνση κάθετη ως προς τη **v** .

Οι εξισώσεις (7-136) και (7-137) μπορούν να γραφούν με τη μορφή

$$F_l = m_l a_l \qquad (7\text{-}138)$$

$$F_t = m_t a_t , \qquad (7\text{-}139)$$

όπου m_l και m_t λέγονται *διαμήκης μάζα* και *εγκάρσια μάζα*, αντίστοιχα, και δίνονται από τις

$$m_l = \frac{m_0}{(1 - \beta^2)^{3/2}} \qquad (7\text{-}140)$$

$$m_t = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} . \qquad (7\text{-}141)$$

Από το γεγονός ότι οι m_l και m_t είναι άνισες, εν γένει, σημειώνουμε ότι ο λόγος της επιτάχυνσης προς τη δύναμη έχει διαφορετικές τιμές για τις εγκάρσιες και διαμήκεις συνιστώσες. Το τελευταίο επιβεβαιώνει ξανά το ότι η δύναμη και η επιτάχυνση δεν έχουν, εν γένει, την ίδια κατεύθυνση. Πρέπει να σημειωθεί ότι η εγκάρσια μάζα είναι ταυτόσημη μ' αυτό που έχουμε ήδη αποκαλέσει σχετικιστική μάζα m . Αυτή είναι επίσης η αδρανειακή και βαρυτική μάζα και χρησιμοποιείται στους υπολογισμούς, όπως για παράδειγμα στην εύρεση της θέσης του κέντρου μάζας.

Ένα σημαντικό μειονέκτημα της έννοιας της δύναμης στη σχετικότητα είναι το γεγονός ότι δεν είναι ούτε μια απόλυτη ποσότητα όπως στη Νευτώνεια μηχανική, ούτε έχει τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Lorentz για το τετραδιάνυσμα θέσης ή ορμής. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τη δύναμη **F** που ενεργεί μια συγκεκριμένη

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

στιγμή σε σωμάτιο με μάζα ηρεμίας m_0 και ταχύτητα $v = V$ στη διεύθυνση του άξονα x, όπου V είναι επίσης η ταχύτητα του αδρανειακού συστήματος I'. Μ' άλλα λόγια, έστω I' *το στιγμιαίο σύστημα ηρεμίας* ορισμένο έτσι ώστε η ταχύτητα του σωματίου στο I' *να* είναι μηδέν τη δεδομένη στιγμή. Κάτω απ' αυτές τις συνθήκες μπορεί να δειχτεί ότι οι διαμήκεις και εγκάρσιες συνιστώσες της δύναμης μετασχηματίζονται με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\begin{aligned} F_l &= F'_l \\ F_t &= \sqrt{1-\beta^2}\, F'_t \quad . \end{aligned} \tag{7-142}$$

Σημειώνουμε ότι η $\mathbf{F}'$ είναι η συνήθης Νευτώνεια δύναμη που ενεργεί στο σωμάτιο αφού η μάζα του είναι m_0 στο σύστημα I'. F είναι η δύναμη στο σύστημα I.

Οι ιδιότητες μετασχηματισμού της δύναμης μπορούν να βελτιωθούν με την εισαγωγή της *δύναμης Minkowski* ή της *κοσμικής δύναμης* $\mathbf{F}_M$ που δίνεται από την

$$\mathbf{F}_M = \frac{\mathbf{F}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \tag{7-143}$$

όπου $\beta = v/c$ και v είναι η ταχύτητα του σωματίου. Τότε η εξίσωση κίνησης που αντιστοιχεί στην Εξ. (7-134) παίρνει τη μορφή

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \mathbf{F}_M \tag{7-144}$$

και η Εξ. (7-120) γίνεται

$$\frac{dE}{d\tau} = \mathbf{F}_M \cdot \mathbf{v} \quad . \tag{7-145}$$

Σημειώνουμε πάλι ότι ο *ίδιος χρόνος* τ είναι ταυτόσημος για όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές. Άρα, οι $\mathbf{p}$ και E πρέπει να μετασχηματίζονται με τον ίδιο τρόπο όπως οι $\mathbf{F}_M$ και $\mathbf{F}_M \cdot \mathbf{v}$. Μ' άλλα λόγια, το τετραδιάνυσμα $\{\mathbf{F}_M, \mathbf{F}_M \cdot \mathbf{v}/c^2\}$ υπακούει στις ίδιες εξισώσεις μετασχηματισμού Lorentz όπως το $\{\mathbf{p}, E/c^2\}$ ή το $\{\mathbf{x}, t\}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Διατήρηση της ενέργειας. Έχουμε ορίσει τη σχετικιστική ορμή με τέτοιο τρόπο ώστε η ολική ορμή να διατηρείται σε κάθε κρούση δυο σωματίων, για κάθε αδρανειακό παρατηρητή. Υποθέτοντας ότι μια ακολουθία όμοιων κρούσεων μπορεί να λάβει χώρα μεταξύ ζευγών σωματίων και σημειώνοντας ότι η τελική ορμή του συστήματος βρίσκεται αθροίζοντας για όλα τα σωμάτια, βρίσκουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}_{i1} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}_{i2} \quad , \tag{7-146}$$

όπου η άθροιση γίνεται για αυθαίρετο αρχικό χρόνο t_1 , και τελικό χρόνο t_2 στο αδρανειακό σύστημα I. Αν το ίδιο σύνολο σωματίων και αλληλεπιδράσεων παρατηρείται από το I', για αυθαίρετο χρονικό διάστημα $t'_2 - t'_1$, η ολική ορμή επίσης διατηρείται, δηλαδή

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}'_{i1} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}'_{i2} \quad . \tag{7-147}$$

Αν θεωρήσουμε την ολική ενέργεια ενός συστήματος *ελεύθερων* σωματίων βρίσκουμε ότι αυτή είναι ίση με το άθροισμα των επιμέρους ολικών ενεργειών των σωματίων. Αφού οι εξισώσεις μετασχηματισμού Lorentz για το τετραδιάνυσμα ορμής - ενέργειας είναι *γραμμικές* ως προς αυτές τις ποσότητες, έπεται ότι ισχύουν οι ίδιες εξισώσεις μετασχηματισμού για την ορμή και την ενέργεια του συστήματος, όπως ισχύουν για τα επιμέρους σωμάτια. Εξάλλου ισχύει για το σύστημα η αναλλοίωτη έκφραση της Εξ. (7-132). Άρα, το χρόνο t_1 ή t'_1 , δηλαδή πριν από κάθε αλληλεπίδραση

$$E_1^2 - p_1^2 c^2 = E'^2_1 - p'^2_1 c^2 = m_0^2 c^4 \quad . \tag{7-148}$$

Όμοια, το χρόνο t_2 ή t'_2 μετά απ' όλες τις αλληλεπιδράσεις

$$E_2^2 - p_2^2 c^2 = E'^2_2 - p'^2_2 c^2 = m_0^2 c^4 \quad , \tag{7-149}$$

όπου m_0 είναι η μάζα ηρεμίας του συστήματος. Εδώ χρησιμοποιούμε το συμβολισμό ότι p_1 είναι το μέγεθος της ορμής του συστήματος στο

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

χρόνο t_1 , μετρούμενο ως προς το σύστημα I, ενώ p'_2 αναφέρεται στο μέγεθος της ορμής του συστήματος στο χρόνο t'_2 μετρούμενο ως προς το σύστημα I', κ.ο.κ.

Αφαιρώντας τώρα την Εξ. (7-149) από την (7-148) και με τη βοήθεια του νόμου διατήρησης της ορμής παίρνουμε από τις Εξ. (7-146) και (7-147),

$$E_1^2 - E_2^2 = E'^2_1 - E'^2_2 = 0 \quad .$$

Αφού οι ενέργειες είναι ποσότητες θετικές αυτό είναι ισοδύναμο με

$$E_1 = E_2 \,, \qquad E'_1 = E'_2 \,, \tag{7-150}$$

που υποδηλώνει τη *διατήρηση της ενέργειας* σε κάθε αδρανειακό σύστημα. Σ' αντίθετη με τη Νευτώνεια μηχανική, η διατήρηση της ενέργειας που επιτυγχάνεται εδώ ισχύει για όλες τις περιπτώσεις που η ορμή διατηρείται συμπεριλαμβανομένης και της ανελαστικής κρούσης.

Μάζα και ενέργεια. Η εξίσωση Einstein $E = mc^2$ δείχνει την ισοδυναμία μάζας-ενέργειας με την έννοια ότι αυτές είναι ευθέως ανάλογες. Η γνώση της μιας συνεπάγεται την εύρεση της τιμής της άλλης. Εξάλλου, αφού η ολική ενέργεια διατηρείται σ' ένα απομονωμένο σύστημα και είναι ίση με την κινητική ενέργεια συν την ενέργεια ηρεμίας, βρίσκουμε ότι η ενέργεια ηρεμίας αυξάνει σε βάρος μιας ίσης μείωσης της κινητικής ενέργειας και αντίστροφα. Ως ένα παράδειγμα, ας υποθέσουμε δυο σωμάτια τα οποία υφίστανται μια ανελαστική κρούση. Το άθροισμα των μαζών ηρεμίας των σωματίων θα είναι μεγαλύτερο μετά την κρούση απ' ότι ήταν αρχικά. Αυτή η αυξημένη μάζα ηρεμίας αντανακλά την αύξηση της εσωτερικής ενέργειας, η οποία συχνά εμφανίζεται ως αύξηση της θερμοκρασίας.

Το ισοδύναμο μάζας-ενέργειας εφαρμόζεται επίσης σε σωμάτια όπως τα φωτόνια που έχουν *μηδενική μάζα ηρεμίας*. Η ολική ενέργεια του φωτονίου σχετιζόμενη με την ακτινοβολία συχνότητας ν (hertz) είναι

$$E = h\nu \quad , \tag{7-151}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

όπου $h = 6.626 \times 10^{-34}$ joule sec είναι η σταθερά του Planck. Αν εξισώσουμε αυτή την ενέργεια με το mc^2 βρίσκουμε ότι το φωτόνιο έχει αδρανειακή μάζα

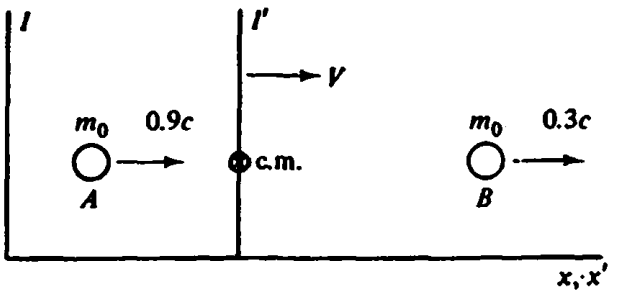
$$m = \frac{h\nu}{c^2} \quad . \tag{7-152}$$

Η ορμή του είναι

$$p = mv = \frac{h\nu}{c} \quad , \tag{7-153}$$

αφού το φωτόνιο ταξιδεύει με την ταχύτητα του φωτός c. Η γνωστή πίεση ακτινοβολίας, που λαβαίνει χώρα, όταν ακτινοβολία προσπίπτει επί μιας επιφάνειας εξηγείται από τις αλλαγές στην ορμή των αντίστοιχων φωτονίων.

Παράδειγμα 7-6. Ας θεωρήσουμε δυο σφαίρες A και B, όπου η κάθε μια έχει μάζα ηρεμίας m_0 και κινούνται παράλληλα προς τον άξονα x, όπως φαίνεται το Σχ. 7-14. Η σφαίρα A έχει αρχική ταχύτητα $0.9c$ και η B έχει ταχύτητα $0.3c$. Έστω ότι λαμβάνει χώρα ανελαστική κρούση μετά την οποία οι σφαίρες κολλούν μαζί και κινούνται ως ένα μοναδικό σωμάτιο. Να βρεθούν, η ορμή και η ενέργεια για κάθε σφαίρα και για το σύστημα, ως προς τα αδρανειακά συστήματα I και I', πριν και μετά την κρούση.



Σχ. 7-14. Ανελαστική κρούση ταυτόσημων σφαιρών.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Πρώτα θεωρούμε την κίνηση ως προς το I. Οι σχετικιστικές μάζες των A και B είναι

$$m_A = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (0.9)^2}} = 2.294\ m_0$$

$$m_B = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (0.3)^2}} = 1.048\ m_0 \quad .$$

Οι αντίστοιχες ορμές είναι

$$p_A = m_A v_A = 2.065\ m_0\ c$$

$$p_B = m_B v_B = 0.314\ m_0\ c \quad .$$

Κάνοντας χρήση κεφαλαίων γραμμάτων για τις παραμέτρους του συστήματος, παίρνουμε την ακόλουθη ολική μάζα και ορμή:

$$M = m_A + m_B = 3.342\ m_0$$

$$P = p_A + p_B = 2.379\ m_0\ c \quad .$$

Η ολική ενέργεια λαμβάνεται αθροίζοντας τις επιμέρους ενέργειες, χρησιμοποιώντας την Εξ. (7-123),

$$E = m_A\ c^2 + m_B\ c^2 = 3.342\ m_0\ c^2 \quad .$$

Οι κινητικές ενέργειες των A και B είναι ίσες με

$$T_A = m_A\ c^2 - m_0\ c^2 = 1.294\ m_0\ c^2$$

$$T_B = m_B\ c^2 - m_0\ c^2 = 0.048\ m_0\ c^2 \quad .$$

Η ολική κινητική ενέργεια είναι

$$T = T_A + T_B = 1.342\ m_0\ c^2 \quad ,$$

η οποία είναι επίσης ίση με $Mc^2 - 2m_0c^2$. Μ' άλλα λόγια, η ολική κινητική ενέργεια είναι ίση με c^2 πολλαπλασιαζόμενη επί τη διαφορά

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

μεταξύ της ολικής σχετικιστικής μάζας και της ολικής μάζας ηρεμίας των επί μέρους σφαιρών.

Θα προσδιορίσουμε τώρα τη θέση του κέντρου μάζας ως προς το I. Στον υπολογισμό αυτό κάνουμε χρήση των σχετικιστικών μαζών και παίρνουμε

$$Mx_C = m_A x_A + m_B x_B \quad ,$$

απ' όπου προκύπτει η θέση x_C του κέντρου μάζας, δηλαδή

$$x_C = 0.686 x_A + 0.314 x_B \quad .$$

Σημειώνουμε ότι το κέντρο μάζας δεν είναι στο μέσο της απόστασης των A και B, ακόμη κι αν οι σφαίρες έχουν ταυτόσημες μάζες ηρεμίας. Εξάλλου, θα δειχτεί ότι η σχετική θέση του κέντρου μάζας εξαρτάται από την εκλογή του συστήματος αναφοράς.

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι

$$V = 0.686\, v_A + 0.314\, v_B = 0.712c \quad .$$

Αυτή, βέβαια, είναι και η ταχύτητα του συνολικού σώματος μετά την κρούση. Ένας έλεγχος για την ολική ορμή λαμβάνεται από την

$$P = MV = 2.379\, m_0 c \quad .$$

Ας εκλέξουμε αυθαίρετα το αδρανειακό σύστημα I' έτσι ώστε να μεταφέρεται με το κέντρο μάζας με σταθερή ταχύτητα V. Επίσης, για ευκολία, υποθέτουμε ότι το κέντρο μάζας βρίσκεται στο $x' = 0$. Για να βρούμε τις ταχύτητες των σωματίων ως προς το I' χρειαζόμαστε το σχετικιστικό νόμο της πρόσθεσης των ταχυτήτων. Από την Εξ. (7-64) έχουμε

$$v'_A = \frac{v_A - V}{1 - Vv_A/c^2} = 0.524c$$

$$v'_B = \frac{v_B - V}{1 - Vv_B/c^2} = -\,0.524c \quad .$$

Επειδή οι δυο σφαίρες έχουν ίσες μάζες ηρεμίας και ίσες ταχύτητες ως προς I', οι σχετικιστικές τους μάζες είναι ίσες,

$$m'_A = m'_B = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (0.524)^2}} = 1.174 m_0 \quad .$$

Είναι φανερό, ότι στο σύστημα I' το κέντρο μάζας κείται στο μέσο της απόστασης των δυο σωματίων σε αντίθεση με τη θέση του στο I. Μετά την κρούση, το συνολικό σώμα βρίσκεται ακίνητο στο $x' = 0$. Η μάζα του ενιαίου σώματος είναι ίση με τη σταθερή ολική μάζα, δηλαδή

$$M' = m'_A + m'_B = 2.348 m_0 \quad .$$

Αφού η ταχύτητα είναι μηδέν, αυτή είναι επίσης και η τελική μάζα ηρεμίας M'_0. Η ολική ενέργεια ως προς το I' είναι

$$E' = M' c^2 = 2.348 m_0 c^2 \quad .$$

Ας υπολογίσουμε τώρα την ορμή κάθε σωματίου στο I'. Λόγω συμμετρίας των κινήσεών τους βρίσκουμε ότι

$$p'_A = - p'_B = (1.174 m_0)(0.524 c) = 0.615 \, m_0 c \quad .$$

Η ολική ορμή P', όπως αναμένεται, είναι μηδέν.

Οι κινητικές ενέργειες των A και B ως προς I' είναι

$$T'_A = T'_B = m' c^2 - m_0 c^2 = 0.174 m_0 c^2 \quad .$$

Η ολική κινητική ενέργεια είναι

$$T' = T'_A + T'_B = 0.348 m_0 c^2 \quad .$$

Στη Νευτώνεια μηχανική, η ολική κινητική ενέργεια ως προς ένα αδρανειακό σύστημα I είναι ίση με το άθροισμα των δυο μερών· δηλαδή (1) τη μεταφορική κινητική ενέργεια λόγω της ολικής μάζας κινούμενης ως σωμάτιο με την ταχύτητα του κέντρου μάζας και (2) την κινητική ενέργεια που οφείλεται στην κίνηση του συστήματος ως προς το κέντρο μάζας. Ας δούμε αν αυτός ο κανόνας ισχύει στη σχετικιστική περίπτωση.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Πρώτα ας θεωρήσουμε ένα σωμάτιο σχετικιστικής μάζας M κινούμενο με ταχύτητα V. Η κινητική του ενέργεια είναι

$$T_1 = (M - M_0)c^2 = (1 - \sqrt{1 - \beta^2})\, Mc^2 = 0.994 m_0 c^2 \cdot$$

Σημειώνουμε ότι $M_0 = M'_0 = M' = 2.348\ m_0$. Το δεύτερο μέρος της κινητικής ενέργειας έχει βρεθεί και είναι

$$T_2 = T' = 0.348 m_0 c^2 \cdot$$

Προσθέτοντας, έχουμε

$$T = T_1 + T_2 = 1.342 m_0 c^2$$

σε συμφωνία με την προηγούμενη τιμή. Άρα αυτές οι κινητικές ενέργειες μπορούν να προστεθούν όπως στη Νευτώνεια θεωρία.

Έχουμε βρει, ότι η ολική μάζα ηρεμίας των σωματίων αυξήθηκε από $2m_0$ σε $2.348m_0$ ως αποτέλεσμα της μη ανελαστικής κρούσης. Την αύξηση $0.348m_0c^2$ μπορούμε τώρα να την ταυτίσουμε με T', την εσωτερική κινητική ενέργεια λόγω της κίνησης ως προς το κέντρο μάζας.

Ας παραθέσουμε μερικές ακόμη παρατηρήσεις. Υπολογίσαμε την ορμή και ενέργεια του συστήματος ως προς τα αδρανειακά συστήματα I και I'. Αυτές οι ποσότητες πρέπει να μετασχηματίζονται σύμφωνα με τις Εξ. (7-130). Ένας έλεγχος δείχνει ότι

$$P = \frac{P' + \dfrac{VE'}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 2.379 m_0 c$$

$$E = \frac{E' + VP'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 3.342 m_0 c^2$$

σε συμφωνία με τα προηγούμενα αποτελέσματα.

Τέλος, ας θεωρήσουμε το μέγεθος της ώσης μεταξύ των δυο σφαιρών τη στιγμή της κρούσης. Αυτή η ώση είναι ίση με τη μεταβολή της ορμής της μιας των σφαιρών. Αν θεωρήσουμε την κίνηση της σφαίρας B ως προς το σύστημα I, έχουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\hat{F} = \frac{1}{2}P - p_B = 0.875 m_0 c \quad .$$

Ως προς το σύστημα I' έχουμε

$$\hat{F}'_B = \frac{1}{2}P' - p'_B = -p'_B = 0.615 m_0 c \quad .$$

Οι ώσεις αυτές έχουν διαμήκη φύση και έχουμε δει ότι η διαμήκης δύναμη είναι αναλλοίωτη ως προς την αλλαγή του συστήματος αναφοράς. Η διαφορά στο μέγεθος των ώσεων στα συστήματα I και I' μπορεί να ερμηνευτεί από τη διαφορά των χρόνων, που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της ώσης. Λόγω του φαινομένου της διαστολής του χρόνου, ένα ρολόι που βρίσκεται προσδεδομένο στο I' καθυστερεί ως προς τα συγχρονισμένα ρολόγια του I κατά τον παράγοντα $(1-\beta^2)^{1/2} = 0.702$. Αυτός είναι επίσης και ο λόγος της $\hat{F}'_B$ ως προς την $\hat{F}_B$.

Αρχή της ισοδυναμίας. Η αρχή της ισοδυναμίας δηλώνει, ότι η αδρανειακή και η βαρυτική μάζα ενός σώματος είναι ίσες. Η βαρυτική δύναμη που ενεργεί σ' ένα σωμάτιο, σε δοσμένο βαρυτικό πεδίο, είναι ανάλογη της *βαρυτικής του μάζας* m_g. Απ' την άλλη μεριά, η αδρανειακή δύναμη που μετράει την αντίσταση σωματίου ως προς την επιτάχυνση είναι ανάλογη της *αδρανειακής του μάζας* m_i. Για σωμάτιο που πίπτει ελεύθερα στο κενό, η βαρυτική και η αδρανειακή δύναμη είναι αντίθετες,

$$m_g \mathbf{f} = -\ (-m_i \mathbf{a}) \quad , \qquad (7\text{-}154)$$

όπου $\mathbf{f}$ είναι η ένταση του βαρυτικού πεδίου και $\mathbf{a}$ είναι η επιτάχυνση του σωματίου ως προς το αδρανειακό σύστημα. Αφού $m_g = m_i$ σύμφωνα με την αρχή της ισοδυναμίας, αυτό συνεπάγεται ότι όλα τα σώματα θα έχουν την ίδια επιτάχυνση σε δοσμένο βαρυτικό πεδίο, ανεξάρτητα από τις μάζες τους και τη σύνθεσή τους. Έχει δειχτεί πειραματικά ότι η βαρυτική και η αδρανειακή μάζα είναι ίσες σε μέρη ένα προς 10^{12}.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Μια άλλη συνέπεια της αρχής της ισοδυναμίας είναι το γεγονός, ότι ένα μη περιστρεφόμενο σύστημα προσδεδεμένο σε σώμα που πίπτει ελεύθερα σε ομοιόμορφο βαρυτικό πεδίο, είναι ισοδύναμο μ' ένα πρότυπο αδρανειακό σύστημα, που μετατοπίζεται ομοιόμορφα στον ελεύθερο χώρο. Μη τοπικά φυσικά πειράματα μπορούν να σχεδιαστούν, ώστε να διαπιστωθεί η όποια διαφορά μεταξύ των συστημάτων. Αυτή η εξισορρόπηση μεταξύ αδρανειακής και βαρυτικής μάζας απεικονίζεται με την έλλειψη βαρύτητας, που υπόκεινται οι αστροναύτες σε διαστημόπλοιο που τίθεται σε τροχιά. Αν το διαστημόπλοιο δεν περιστρέφεται, αυτό εκφράζει με καλή προσέγγιση ένα αδρανειακό σύστημα σε ελεύθερο χώρο. Για παράδειγμα, ένα ελεύθερο σωμάτιο θα κινείται με σταθερή ταχύτητα σε ευθεία γραμμή ως προς το διαστημόπλοιο, υπό τον όρο ότι ο δρόμος δεν είναι αρκετά μεγάλος.

Μια άλλη εφαρμογή της αρχής της ισοδυναμίας δίνεται από τον ανελκυστήρα του Einstein. Ας υποθέσουμε ότι φυσικά πειράματα εκτελούνται μέσα σε ανελκυστήρα που βρίσκεται σε ηρεμία σε ομοιόμορφο βαρυτικό πεδίο έντασης 1 g, δηλαδή, η βαρυτική επιτάχυνση είναι ίση μ' αυτή στην επιφάνεια της γης. Τα αποτελέσματα δεν θα διαφέρουν από ένα όμοιο σύνολο πειραμάτων που εκτελούνται όταν ο ανελκυστήρας βρίσκεται στον ελεύθερο χώρο, αλλά επιταχύνεται με σταθερή επιτάχυνση 9.81 μέτρα/sec^2 ως προς ένα αδρανειακό σύστημα. Βέβαια, η ιδέα του να αναπαρασταθεί η επίδραση ενός επιταχυνόμενου συστήματος μ' ένα ισοδύναμο βαρυτικό πεδίο ισχύει τόσο στη Νευτώνεια όσο και στη σχετικιστική μηχανική.

Πριν βρήκαμε ότι το φωτόνιο συχνότητας ν έχει αδρανειακή μάζα $h\nu/c^2$. Κατά συνέπεια λόγω της αρχής της ισοδυναμίας πρέπει να έχει μια ίση βαρυτική μάζα, αν και η μάζα ηρεμίας του είναι μηδέν. Η επίδραση του βαρυτικού πεδίου στην κίνηση των φωτονίων επιβεβαιώνεται από τη μικρή καμπύλωση (κύρτωση) των ακτίνων φωτός που διέρχονται πολύ κοντά από τον ήλιο ταξιδεύοντας από κάποιο αστέρι προς τη γη. Οι φαινομενικές θέσεις αυτών των αστέρων όπως φαίνονται κατά τη διάρκεια ολικής έκλειψης του ηλίου, είναι μετατοπισμένες (περίπου 1.75 δεύτερα τόξου) σε αντίθετη κατεύθυνση προς το κέντρο του ήλιο. Παρόμοια αποτελέσματα μπορούν να διαπιστωθούν με ραδιοτηλεσκόπια, χωρίς να είναι απαραίτητη η έκλειψη. Αν και η ποιοτική ανάλυση της καμπύλωσης της τροχιάς του φωτός μπορεί να επιτευχθεί κάνοντας χρήση μόνο της Νευτώνειας μηχανικής, μια ακριβής ανάλυση εμπλέκει τη θεωρία της γενικής σχετικότητας.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Διατύπωση κατά Lagrange και Hamilton. Μέχρι τώρα στη συζήτησή μας για τη σχετικιστική δυναμική δεν έχουμε χρησιμοποιήσει τις αναλυτικές μεθόδους των Lagrange και Hamilton. Ως αρχή σ' αυτή την κατεύθυνση ας θεωρήσουμε πρώτα ένα σωμάτιο με μάζα ηρεμίας m_0 . Η θέση του καθορίζεται από τις Καρτεσιανές συντεταγμένες (x_1, x_2, x_3) μετρούμενες ως προς ένα αδρανειακό σύστημα. Σύμφωνα με την Εξ. (7-116) οι συνιστώσες της ορμής είναι,

$$p_i = \frac{m_0 \dot{x}_i}{\sqrt{1 - \beta^2}} , \quad (i = 1, 2, ..., n) \quad , \tag{7-155}$$

όπου

$$\beta = \frac{1}{c} \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2} \quad . \tag{7-156}$$

Ο βασικός ορισμός της ορμής ως προς τη συνάρτηση Lagrange δόθηκε από την Εξ. (1.137). Σε όρους των Καρτεσιανών ταχυτήτων έχουμε

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \quad . \tag{7-157}$$

Αν υποθέσουμε ότι αυτή η εξίσωση ισχύει και στη σχετικιστική περίπτωση, από τις Εξ. (7-155) και (7-157) παίρνουμε ότι

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{m_0 \dot{x}_i}{\sqrt{1 - \beta^2}} . \tag{7-158}$$

Γενικά, η συνάρτηση Lagrange έχει τη μορφή $L(x, \dot{x}, t)$. Για να είναι όμως συμβιβαστή με την Εξ. (7-158) πρέπει να πάρει την πιο εκπεφρασμένη μορφή

$$L(x, \dot{x}, t) = - m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} - V(x, t)$$

$$= - m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)} - V(x, t) \quad , \tag{7-159}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

όπου το αρνητικό πρόσημο στον τελευταίο όρο, λαμβάνεται για ευκολία στα επόμενα.

Η βασική εξίσωση κίνησης για ένα σωμάτιο, όπως δίνεται από την Εξ. (7-134), μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$\dot{p}_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \dot{x}_j}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = F_j \quad . \tag{7-160}$$

Θα υποθέσουμε ότι όλες οι συνιστώσες F_j της δύναμης, λαμβάνονται από μια συνάρτηση δυναμικού $V(x, t)$, δηλαδή,

$$F = -\frac{\partial V}{\partial x_j} \quad . \tag{7-161}$$

Τότε είναι φανερό ότι η συνάρτηση Lagrange στην Εξ. (7-159) δίνει τις σωστές σχετικιστικές εξισώσεις κίνησης, όταν αντικατασταθεί στη συνήθη μορφή της εξίσωσης Lagrange, δηλαδή,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \quad . \tag{7-162}$$

Τονίζουμε ότι η συνάρτηση Lagrange στη σχετικιστική περίπτωση *δεν είναι ίση* με $T - V$.

Η συνάρτηση Hamilton σχετίζεται με τη συνάρτηση Lagrange με τον συνήθη τρόπο, δηλαδή,

$$H = \sum_{i=1} p_j \dot{x}_j - L \tag{7-163}$$

ή

$$H = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + V(x_i, t) \quad . \tag{7-164}$$

Μετά την αντικατάσταση του β σε όρους των p_j, παίρνουμε

$$H(x_j, p_j, t) = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} + V(x_j, t) \quad . \tag{7-165}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Σημειώνουμε ότι η συνάρτηση Hamilton είναι ίση με το άθροισμα της κινητικής ενέργειας, της δυναμικής ενέργειας και της ενέργειας ηρεμίας.

Ένα άλλο ενδιαφέρον πρόβλημα αφορά την κίνηση ενός φορτισμένου σωματίου εντός ενός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Η μη σχετικιστική περίπτωση συζητήθηκε στην παράγραφο 3-4. Με σκοπό να γενικεύσουμε αυτά τ' αποτελέσματα στην περίπτωση των σχετικιστικών σωματίων, σημειώνουμε πρώτα ότι ο νόμος της δύναμης παραμένει αμετάβλητος· δηλαδή λαμβάνεται από δυναμικό εξαρτώμενο από την ταχύτητα (σε μονάδες mks),

$$U(x_j, \dot{x}_j, t) = e(\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \quad , \tag{7-166}$$

όπου $\mathbf{v}$ είναι η ταχύτητα του σωματίου, e το φορτίο του, φ το βαθμωτό δυναμικό και $\mathbf{A}$ είναι το διανυσματικό δυναμικό. Αν υποθέσουμε ότι τυχόντα βαρυτικά πεδία είναι αμελητέα και παραλείψουμε την αντίστοιχη συνάρτηση δυναμικού, η συνάρτηση Lagrange της Εξ. (7-159) μετατρέπεται στην

$$L(x_j, \dot{x}_j, t) = - m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} - e\varphi + e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \quad . \tag{7-167}$$

Η τυπική μορφή της Εξίσωσης Lagrange, όπως δίνεται από την Εξ. (7-162) παράγει τότε τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης. Σημειώνουμε ότι οι συνιστώσες της ορμής είναι

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = \frac{m_0 \dot{x}_j}{\sqrt{1 - \beta^2}} + eA_j \quad , \tag{7-168}$$

που δείχνουν ότι το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο συνεισφέρει στην ορμή.

Με παρόμοιο τρόπο, οι Εξ. (7-163) και (7-167) χρησιμοποιούνται για να πάρουμε τη συνάρτηση Hamilton για φορτισμένο σωμάτιο σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, δηλαδή

$$H = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + e\varphi \quad . \tag{7-169}$$

Απαλείφοντας τη $\dot{x}_i$ προς χάριν των p_i και κάνοντας χρήση της Εξ. (7-168), παίρνουμε τη Χαμιλτωνιανή με την ακόλουθη μορφή

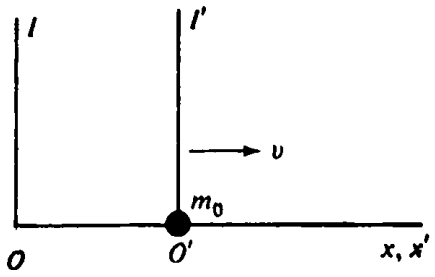
$$H = c\sqrt{m_0^2 c^2 + (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2} + e\varphi \quad . \tag{7-170}$$

Ο πρώτος όρος του παραπάνω αποτελέσματος είναι ταυτόσημος μ' αυτόν της Εξ. (7-165) εκτός του ότι κάθε p_i αντικαθίσταται με $(p_i - eA_i)$. Σημειώνουμε ότι $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x_i, t)$ και $\varphi = \varphi(x_i, t)$.

7-4. ΕΠΙΤΑΧΥΝΟΜΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Στη συζήτηση της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας, ασχοληθήκαμε με την κίνηση σωματίων ως προς τα αδρανειακά συστήματα, που έχουν σταθερές ταχύτητες το ένα ως προς το άλλο. Είναι γνωστό όμως, ότι η ειδική θεωρία της σχετικότητας μπορεί να εφαρμοστεί με καλά αποτελέσματα στην ανάλυση της κίνησης των σωματίων σε επιταχυντές υψηλής ενέργειας. Πώς όμως είναι δυνατό να μπορούμε να επεκτείνουμε την εφαρμογή της θεωρίας μ' αυτόν τον τρόπο;

Πρώτα απ' όλα, εισάγουμε την έννοια του *στιγμιαίου συστήματος ηρεμίας*, δηλαδή ενός αδρανειακού συστήματος που η ταχύτητά του σε δοσμένη στιγμή είναι ίση με την ταχύτητα του σωματίου. Ας συμβολίσουμε το στιγμιαίο σύστημα ηρεμίας με I' (Σχ. 7-15). Ως προς το σύστημα αυτό, η μάζα του σωματίου είναι η μάζα ηρεμίας m_0, και η επιτάχυνσή του είναι ίση με F'/m_0, όπου F' είναι η δύναμη που εφαρμόζεται στο σωμάτιο.



Σχ. 7-15. Το στιγμιαίο σύστημα ηρεμίας.

Κατά δεύτερο λόγο, κάνουμε τη σημαντική υπόθεση ότι ο ρυθμός

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ενός τυπικού ρολογιού που ταξιδεύει με το σωμάτιο, δεν επηρεάζεται άμεσα από την επιτάχυνση. Μ' άλλα λόγια, μια αύξηση $d\tau$ του *ίδιου χρόνου* $d\tau$ για το σωμάτιο είναι ταυτόσιμη με την αύξηση dt' όπως αυτή καταγράφεται από το ρολόι του στιγμιαίου συστήματος ηρεμίας I'. Άρα μπορούμε να γράφουμε

$$d\tau = dt' \quad . \tag{7-171}$$

Τέλος, αντί για ένα μόνο σύστημα I', ας υποθέσουμε μια *ακολουθία* τέτοιων στιγμιαίων συστημάτων ηρεμίας για διαδοχικές στιγμές του χρόνου. Εξάλλου, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το σωμάτιο βρίσκεται στην αρχή O' του συστήματος I' κάθε στιγμή. Άρα, η θέση x' και η ταχύτητα $\dot{x}'$ είναι μηδέν για κάθε στιγμή, αλλά η επιτάχυνση $\ddot{x}'$ δεν είναι εν γένει μηδέν.

Έχοντας υπόψη τα παραπάνω, ας υποθέσουμε την *ευθύγραμμη επιταχυνόμενη κίνηση* του σωματίου κατά μήκος του κοινού άξονα x των συστημάτων I και I'. Αφού τα I και I' είναι αδρανειακά, οι αντίστοιχες χωροχρονικές συνιστώσες συνδέονται με το μετασχηματισμο Lorentz. Έχουμε υποθέσει ότι το x' είναι μηδέν για όλες τις χρονικές στιγμές και άρα από την Εξ. (7-35) βρίσκουμε ότι

$$dt = \frac{dt'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{d\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \tag{7-172}$$

όπου $\beta = v/c$. Επίσης παίρνουμε

$$dx = v\,dt = \frac{v\,d\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad . \tag{7-173}$$

Σε όρους της παραμέτρου ταχύτητας θ, αυτές οι εξισώσεις μπορούν να γραφούν με τη μορφή

$$dx = c \sinh\theta\, d\tau \tag{7-174}$$

$$dt = \cosh\theta\, d\tau \quad . \tag{7-175}$$

Ολοκληρώνοντας, προκύπτουν οι εξισώσεις

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παραγωγίζοντας μια φορά ακόμη παίρνουμε την επιτάχυνση

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{g}{\left(1 + \frac{g^2 t^2}{c^2}\right)^{3/2}} \quad . \tag{7-187}$$

Αυτή η επιτάχυνση είναι ίση με g για $t = 0$ και μειώνεται καθώς ο t αυξάνει. Είναι φανερό τότε ότι η επιτάχυνση που φαίνεται σταθερή για τον ευρισκόμενο παρατηρητή μέσα στον πύραυλο, δεν είναι σταθερή, όπως φαίνεται από έναν εξωτερικό αδρανειακό παρατηρητή.

Για να έχουμε μια εκτίμηση των φυσικών επιπτώσεων των εξισώσεων αυτών στην κίνηση του πυραύλου, ας υιοθετήσουμε το έτος ως μονάδα του χρόνου και το έτος φωτός ως μονάδα απόστασης. Αυτές σχετίζονται με τις περισσότερο συμβατικές μονάδες ως εξής

$$\begin{aligned} 1 \text{ yr} &= 3.156 \times 10^7 \text{ sec} \\ 1 \text{ lt-yr} &= 9.46 \times 10^{15} \text{ m} \\ 1 \text{ lt-yr/yr} &= c = 2.998 \times 10^8 \text{ m/sec} \\ 1 \text{ lt-yr/yr}^2 &= 9.50 \text{ m/sec}^2 \\ &= 31.17 \text{ ft/sec}^2 \\ &= 0.969 \text{ earth g' s} \quad . \end{aligned}$$

Τώρα ας υποθέσουμε την ειδική περίπτωση όπου έχουμε $g = 1$ lt - yr/yr^2 που προσεγγιστικά είναι ίση με την επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της γης. Ας υποθέσουμε ότι ο πύραυλος ξεκινά από την ηρεμία και διατηρεί τη σταθερή επιτάχυνσή του για *ίδιο χρόνο* ίσο με ένα έτος, δηλαδή το χρονικό διάστημα που καταγράφεται από το ρολόι του πιλότου. Τότε g, τ και c έχουν μέτρο μονάδα και η Εξ. (7-182) οδηγεί στην τελική θέση

$$x = \cosh 1 - 1 = 0.543 \text{ lt-yr} \quad .$$

Από την Εξ. (7-184) η τελική ταχύτητα είναι

$$v = c \tanh 1 = 0.762\, c$$

μετρούμενη στο σύστημα I. Ο αντίστοιχος χρόνος μετρούμενος στο I είναι

$$t = \frac{c}{g} \sinh 1 = 1.175 \text{ yr} \quad .$$

Είναι ενδιάφερον να σημειώσουμε ότι για την περίπτωση της *κινηματικής του Galileo*, οι αντίστοιχες τιμές θα ήταν

$$x = 0.500 \text{ lt-yr}$$
$$v = c$$
$$t = 1 \text{ yr} \quad .$$

Άρα το αποτέλεσμα της σχετικιστικής θεωρίας είναι *η αύξηση* της απόστασης που διανύεται σε δοθέντα *ίδιο χρόνο*, αν και η ταχύτητα ως προς το I μειώνεται.

Παράδειγμα 7-7. Ας υποθέσουμε ότι πύραυλος εκτελεί ταξίδι με επιστροφή από τη γη σε κοντινό αστέρι, το Alpha Centauri, το οποίο είναι σε απόσταση περίπου 4 ετών φωτός. Ο πύραυλος μπορεί να κινηθεί με σταθερή επιτάχυνση $g = 9.50 \text{ m/sec}^2$ (1 lt-yr/yr^2) ως προς το στιγμιαίο σύστημα ηρεμίας του. Πόσος χρόνος απαιτείται για το συνολικό ταξίδι;

Για το συνολικό ταξίδι που απαιτεί τον ελάχιστο χρόνο, ο πύραυλος ωθείται συνεχώς. Πρώτα επιταχύνεται με τη δεδομένη σταθερή επιτάχυνση μέχρι το σημείο $x = 2$lt-yr που είναι το μέσο του ταξιδιού. Μετά η ώθηση αντιστρέφεται και ο πύραυλος επιβραδύνεται για το άλλο μισό του ταξιδιού, φτάνοντας στο Alpha Centauri με ταχύτητα μηδέν. Το ταξίδι επιστροφής εκτελείται με παρόμοια διαδικασία.

Ανατρέχοντας στην Εξ. (7-182) και επιλύοντας για τον *ίδιο χρόνο* τ για την πρώτη περίοδο ώθησης ($x = 2$ lt-yr), παίρνουμε

$$\tau = \frac{c}{g} \cosh^{-1} \left(\frac{gx}{c^2} + 1 \right) = 1.76 \text{ yr} \quad .$$

Από την Εξ. (7-183), ο αντίστοιχος χρόνος t που καταγράφεται από τα ρολόγια στερεωμένα στο I είναι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$t = \frac{c}{g} \sinh \frac{g\tau}{c} = 2.83 \text{ yr} \quad .$$

Άρα ο συνολικός *ίδιος χρόνος* που απαιτείται για όλο το ταξίδι είναι $4 \times 1.76 = 7.04$ έτη. Απ' την άλλη μεριά, ο ολικός χρόνος για το ταξίδι στο I είναι $4 \times 2.83 = 11.32$ έτη.

Ας θεωρήσουμε αυτά τα αποτελέσματα σε σχέση με το παράδοξο των διδύμων. Ας υποθέσουμε ότι ο δίδυμος A παραμένει στη γη και ο δίδυμος B ταξιδεύει στο Alpha Centauri. Τότε, ο B έχει μεγαλώσει κατά 7.04 έτη στο ταξίδι αν και έχει καλύψει απόσταση 8 ετών φωτός. Ο A έχει μεγαλώσει κατά 11.32 έτη κατά την απουσία του B.

Πύραυλος με σταθερή ώθηση. Ας θεωρήσουμε πύραυλο με σταθερή ώθηση F_0 και με ελαττούμενη μάζα ηρεμίας $m_0 (1 - \alpha\tau)$, όπου m_0 είναι η αρχική μάζα ηρεμίας και η θετική σταθερά α είναι ανάλογη του ρυθμού με τον οποίο η μάζα εκβάλλεται από τον πύραυλο. Θα μελετήσουμε την ευθύγραμμη κίνηση αυτού του πυραύλου ως προς το αδρανειακό σύστημα I, για το τ στο διάστημα $0 \le \tau < 1/\alpha$. Υποθέτουμε ότι ο πύραυλος ξεκινάει από την ηρεμία στην αρχή O για $t = \tau = 0$ (Σχ. 7-15) και έστω I' είναι το στιγμιαίο σύστημα ηρεμίας.

Πρώτα διαπιστώνουμε ότι η επιτάχυνση του πυραύλου ως προς το I' είναι

$$g(\tau) = \frac{F_0}{m(1 - \alpha\tau)} \quad . \tag{7-188}$$

Τότε, κάνοντας χρήση της Εξ. (7-180), παίρνουμε

$$\theta = \frac{1}{c} \int_0^\tau g(\tau) d\tau = \frac{F_0}{m_0 c\alpha} \ln\left(\frac{1}{1 - \alpha\tau}\right) \quad . \tag{7-189}$$

Από τις Εξ. (7-176) και (7-177) βλέπουμε ότι

$$\frac{dx}{d\tau} = c \sinh\theta = c \sinh\left[\frac{F_0}{m_0 c\alpha} \ln\left(\frac{1}{1 - \alpha\tau}\right)\right] \tag{7-190}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\frac{dt}{d\tau} = \cosh\theta = \cosh\left[\frac{F_0}{m_0 c\alpha}\ln\left(\frac{1}{1 - \alpha\tau}\right)\right] \quad . \tag{7-191}$$

Αυτές οι εξισώσεις μπορούν να ολοκληρωθούν για να πάρουμε τις x και t ως συναρτήσεις του τ . Για να απλοποιήσουμε όμως τα πράγματα, ας επιλέξουμε ξανά το έτος ως μονάδα χρόνου και το έτος φωτός ως μονάδα απόστασης. Τότε η ταχύτητα του φωτός θα έχει μέτρο μονάδα. Επίσης, έστω ότι η αρχική επιτάχυνση F_0/m_0 είναι 1 lt-yr/yr^2 , που έχουμε βρει ότι είναι κατά προσέγγιση ίση με τη βαρυτική επιτάχυνση στην επιφάνεια της γης. Τέλος, α=1 που συνεπάγεται ότι η μάζα μειώνεται με ρυθμό τέτοιο ώστε η εναπομένουσα θα ήταν ίση με μηδέν μετά από 1 έτος. Τότε με τη χρήση της εκθετικής μορφής των υπερβολικών συναρτήσεων, οι Εξ. (7-190) και (7-191) γράφονται με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\tau} - (1 - \tau)\right] \tag{7-192}$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\tau} + (1 - \tau)\right] \quad . \tag{7-193}$$

Μετά την ολοκλήρωση, εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες, παίρνουμε

$$x = -\frac{1}{2}\ln(1 - \tau) + \frac{1}{4}[(1 - \tau)^2 - 1] \tag{7-194}$$

$$t = -\frac{1}{2}\ln(1 - \tau) - \frac{1}{4}[(1 - \tau)^2 - 1] \quad . \tag{7-195}$$

Θεωρούμε την περίπτωση όπου έχουν παρέλθει 0.5 έτη στον πύραυλο από την εκτόξευσή του από τη γη (στην αρχή O του I). Πρώτα, σημειώνουμε ότι η μισή μάζα ηρεμίας έχει χαθεί, αλλά η ώθηση δεν έχει αλλάξει. Άρα, το επιταχυντόμετρο καταγράφει $2g$, όπως μπορεί να πιστοποιηθεί με την αντικατάσταση $\tau = 0.5$ στην Εξ. (7-188). Επίσης, από τις Εξ. (7-194) και (7-195), βρίσκουμε ότι

$$x = 0.159 \text{ lt-yr}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$t = 0.534 \text{ yr} \quad .$$

Η ταχύτητα του πυραύλου ως προς τη γη βρίσκεται διαιρώντας την Εξ. (7-192) με την Εξ. (7-193),

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{1 - (1 - \tau)^2}{1 + (1 - \tau)^2} \quad . \tag{7-196}$$

Για $\tau = 0.5$ βλέπουμε ότι η ταχύτητα του πυραύλου είναι $v = 0.600\, c$.

Ας συγκρίνουμε αυτά τα αποτελέσματα μ' αυτά για πύραυλο σταθερής επιτάχυνσης με την ίδια αρχική επιτάχυνση και *ίδιο χρόνο* τ. Από τις Εξ. (7-182) - (7-184) παίρνουμε

$$x = \cosh \frac{1}{2} - 1 = 0.128 \text{ lt-yr}$$

$$t = \sinh \frac{1}{2} = 0.521 \text{ yr}$$

$$v = c \tanh \frac{1}{2} = 0.462\, c \quad .$$

Όπως βλέπουμε, σ' αυτό το παράδειγμα ο πύραυλος σταθερής ώθησης ταξίδεψε 24% μακρύτερα με περίπου 30% μεγαλύτερη τελική ταχύτητα.

Για μεγαλύτερες τιμές του τ, ο λόγος των αποστάσεων που έχουν διανυθεί αυξάνει προς ώφελος του πυραύλου σταθερής ώθησης. Ο λόγος των τελικών ταχυτήτων όμως θ' αυξηθεί αρχικά, αλλά τελικά θα μειωθεί, καθώς η ταχύτητα του πυραύλου σταθερής ώθησης προσεγγίζει μια οριακή τιμή, την ταχύτητα φωτός.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. TAYLOR, E.F., and J. A. WHEELER, *Spacetime Physics*. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1966. Μια έξοχη εισαγωγή στη σχετικότητα, ειδικότερα σ' ότι αφορά στις εξηγήσεις των διαφορών μεταξύ συμβατικής γεωμετρίας και εκείνης του χωρόχρονου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

2. MØLLER, C., *The Theory of Relativity.* London: Oxford University Press, 1952. Μια καλή γενική αντιμετώπιση του αντικειμένου. Είναι βιβλίο γραμμένο με κλασικό στυλ, κατανοητό και πλήρες.

3. EINSTEIN, A., H.A. LORENTZ, H. MINKOWSKI, and H. WEYL, *The Principle of Relativity.* New York: Dover Publications, Inc., 1952. Αυτό αποτελεί μια συλλογή αγγλικών μεταφράσεων των πρωτότυπων εργασιών που έπαιξαν σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της ειδικής και γενικής θεωρίας της σχετικότητας.

4. BERGMANN, P.G., *Introduction to the Theory of Relativity.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1942. Είναι ένα πολυχρησιμοποιημένο βιβλίο με καλές συζητήσεις των βασικών στοιχείων της θεωρίας. Προχωράει όμως γρήγορα σε πιο προχωρημένα θέματα και έτσι το μισό βιβλίο αφιερώνεται στη γενική σχετικότητα και τις θεωρίες.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

7-1. Σωμάτιο A βρίσκεται αρχικά στην αρχή συστήματος συντεταγμένων I και κινείται με σταθερή ταχύτητα $v_x = 0.9\,c$, κατά μήκος του άξονα x. Σωμάτιο B ξεκινάει από το $x = 1$ και κινείται με ταχύτητα $v_x = -0.9c$, κατά μήκος του ίδιου άξονα. Ποιός είναι ο ρυθμός προσέγγισης των δυο σωματίων σύμφωνα με τον παρατηρητή στο I; δηλαδή με ποιό ρυθμό μειώνεται η μεταξύ τους απόσταση; Ποια είναι η ταχύτητα του B μετρούμενη από το σύστημα I' που είναι προσαρτημένο στο A;

7-2. Οι αρχές O και O' δυο αδρανειακών συστημάτων I και I' συμπίπτουν τη στιγμή $t = t' = 0$. Το I' κινείται με σταθερή ταχύτητα V ως προς το I στη θετική κατεύθυνση του x. Στο $t = 0$ φωτόνιο αφήνει την κοινή αρχή και κινείται με ταχύτητα c, χτυπώντας κάποιον τοίχο, στο $x = l$, στερεωμένο στο I.

α) Να βρεθούν οι τιμές x', t' τη στιγμή που το φωτόνιο χτυπάει τον τοίχο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

β) Ποιά είναι η θέση του τοίχου ως προς το O', ως συνάρτηση του t' ;

7-3. Σχετικιστικό τρένο κινείται με ταχύτητα $V\mathbf{i}$ κατά μήκος της ευθείας $y = k$ στο σύστημα I. Όταν το μπροστινό μέρος του τρένου διασταυρώνει τον άξονα y, μια σχετικιστική σφαίρα πυροδοτείται από την αρχή O με ταχύτητα $\mathbf{v} = v\mathbf{j}$.

α) Πόσο μακριά πίσω από το μπροστινό μέρος του τρένου χτυπάει η σφαίρα, σύμφωνα με τον παρατηρητή στο I;

β) Πόσο μακριά πίσω από το μπροστινό μέρος του τρένου θα χτυπήσει η σφαίρα σύμφωνα με τον παρατηρητή στο τρένο;

γ) Ποιές είναι οι συνιστώσες x' και y' της ταχύτητας της σφαίρας σχετικά με το τρένο;

7-4. Το αδρανειακό σύστημα I' κινείται, σχετικά προς το I με σχετική ταχύτητα V στη x - διεύθυνση. Να βρεθεί η ταχύτητα σχετικά προς το I ενός σωματίου που κινείται κατά μήκος του κοινού x- άξονα έτσι ώστε οι τιμές των t και t' για το σωμάτιο να είναι ίσες για όλους τους χρόνους. Να λυθεί για τον *ίδιο χρόνο* τ ως συνάρτηση του t.

7-5. Υποθέτουμε ότι το αδρανειακό σύστημα I_1 μεταφέρεται με ταχύτητα v_1 σχετικά προς το I_0 στη διεύθυνση του κοινού x-άξονα. Ομοίως, το I_2 μεταφέρεται με ταχύτητα v_2 σχετικά με το I_1 και η διαδικασία συνεχίζεται με τον ίδιο τρόπο για τα συστήματα I_3 και I_4. Τελικά, ένα σωμάτιο μεταφέρεται με ταχύτητα v_5 σχετικά με το I_4. Θεωρώντας ότι $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = v_5 = \frac{1}{2}c$, ποια είναι η ταχύτητα του σωματίου σχετικά προς το I_0;

7-6. Ένα σύστημα αναφοράς I' έχει ταχύτητα σταθερή V στην κοινή x-διεύθυνση σχετικά προς το σύστημα I. Υποθέτουμε ότι ένα σωμάτιο έχει ταχύτητα με συνιστώσες (v'_x, v'_y) σχετικά προς το I' και αντίστοιχες συνιστώσες της επιτάχυνσης (a'_x, a'_y). Να αποδειχτεί ότι οι συνιστώσες της επιτάχυνσης του σωματίου σχετικά προς το σύστημα I είναι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

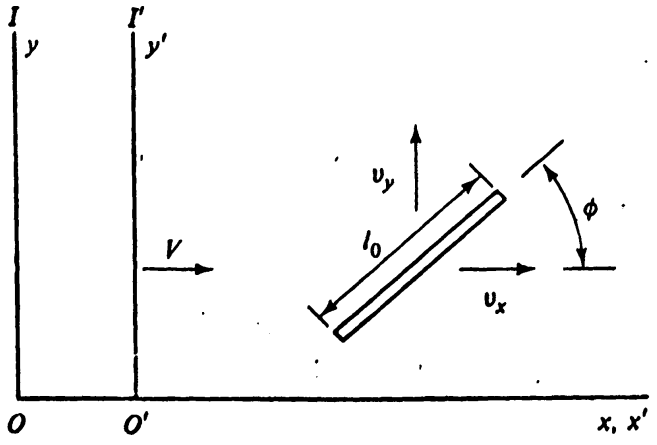
$$a_x = \frac{(1-\beta^2)^{3/2}}{(1+\beta v'_x/c)^3}\,, \qquad a_y = \frac{1-\beta^2}{(1+\beta v'_x/c)^2}\left(a'_y - \frac{\beta v'_y/c}{1+\beta v'_x/c}\,a'_x\right),$$

όπου $\beta = V/c$.

7-7. Μια ευθύγραμμη ράβδος μήκους l_0 σχηματίζει σταθερή γωνία φ με τον x-άξονα, όπως μετράται στο αδρανειακό σύστημα I, και μεταφέρεται με ταχύτητα, που έχει συνιστώσες v_x και v_y σχετικά με το I. Αν το σύστημα I' μεταφέρεται με ταχύτητα V σχετικά προς το I, όπως φαίνεται στο σχήμα, να βρεθεί η ταχύτητα της ράβδου σχετικά προς το I'. Να αποδειχτεί ότι η κλίση της ράβδου φ' σχετικά προς το x'-άξονα δίνεται από την

$$\tan\varphi' = \frac{1-\beta v_x/c}{\sqrt{1-\beta^2}}\tan\varphi + \frac{\beta v_y}{c\sqrt{1-\beta^2}}\,,$$

όπου $\beta = V/c$.



Σχ. Π7-7.

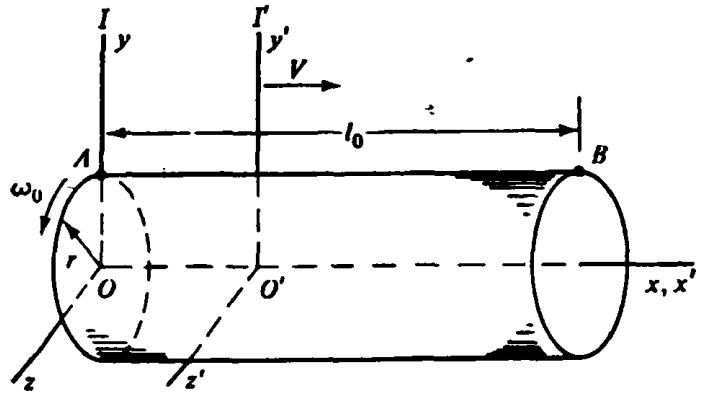
7-8. Ένας κύλινδρος ακτίνας r και μήκους l_0 περιστρέφεται περί τον άξονα συμμετρίας του (x-άξονα) με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_0 στο I, όπου $\omega_0 < c/r$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

α) Ποιά είναι η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου σχετικά προς το I' ;

β) Υποθέτουμε παράλληλες στο x-άξονα γραμμές επί της επιφάνειας του κυλίνδρου. Ποια είναι η ολική γωνία στροφής του κυλίνδρου, όπως αυτή φαίνεται από το σύστημα I' ;

γ) Ποια είναι η γωνία στο I' μεταξύ της εφαπτομένης μιας γραμμής AB επί της επιφάνειας του κυλίνδρου και της διεύθυνσης του x-άξονα;



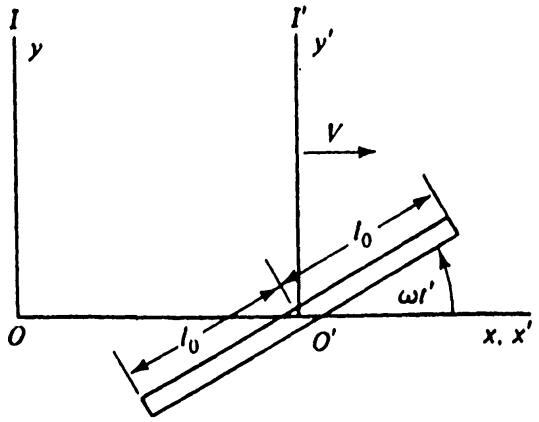
Σχ. Π7-8.

7-9. Θεωρούμε μια ευθύγραμμη ράβδο της οποίας το μήκος σε ηρεμία είναι $2l_0$ και η οποία περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω στο $x'y'$ - επίπεδο περί το κέντρο της O' στην αρχή του αδρανειακού συστήματος I'. Το σύστημα I' μεταφέρεται με σταθερή ταχύτητα V σχετικά προς το σύστημα I. Να αποδειχτεί ότι η ράβδος είναι καμπύλη, σύμφωνα με τον παρατηρητή στο I, επιλύοντας ως προς $y = y(x, t)$ για τα σημεία της ράβδου. Για την ειδική περίπτωση όπου $\omega l_0 = V = \frac{1}{2}c$ να βρεθούν οι θέσεις των άκρων της ράβδου για $t = 0$.

7-10. Υποθέτουμε ότι ένα σωμάτιο έχει ταχύτητα $v' = \beta' c$ κατά μια γωνία φ' , μετρούμενη από τον x' - άξονα στο σύστημα I'. Το σύστημα I' κινείται με ταχύτητα $V = \beta c$ σχετικά προς το I στην κοινή διεύθυνση των x-αξόνων. Να βρεθεί η γωνία φ την οποία σχηματίζει η τροχιά του σωματίου με τον x-άξονα με βάση τη *μη-σχετικιστική*

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

θεωρία. Ποιά είναι η σύγκριση σε μέγεθος της γωνίας αυτής με το σχετικιστικό αποτέλεσμα;



Σχ. Π7-9.

7-11. Ένα σωμάτιο κινείται κατά μήκος του *x*-άξονα με σταθερή ταχύτητα 0.8 *c*. Το σωμάτιο αυτό ακτινοβολεί φως με την ίδια ένταση προς όλες τις διευθύνσεις, όπως φαίνεται από έναν παρατηρητή που ταξιδεύει με το σωμάτιο. Για έναν ακίνητο παρατηρητή τί ποσοστό του φωτός διαδίδεται στη διεύθυνση, που έχει θετική *x*-συνιστώσα;

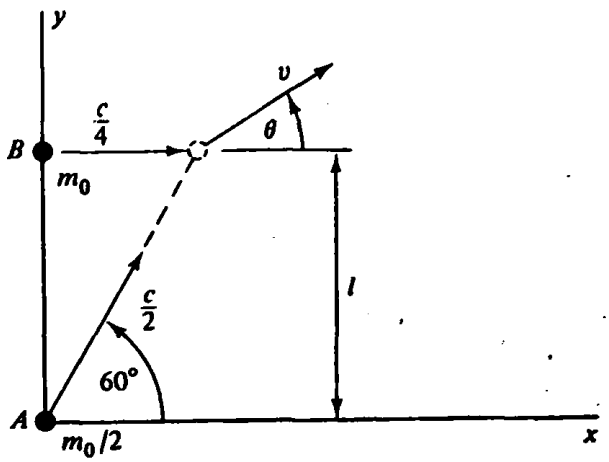
7-12. Ένας πύραυλος κινείται επ' ευθείας γραμμής με ταχύτητα ίση με *c/2* . Όταν αυτός βρίσκεται στο πιο κοντινό σημείο με απλανή αστέρα εκπέμπει προς αυτό ένα ραδιο-σήμα. Σε ποιά γωνία από τη διεύθυνση του πυράυλου πρέπει να σκοπεύει η ακτίνα διάδοσης, όπως αυτή μετράται επί του πυραύλου ; κατά ποιά γωνία η διεύθυνση αυτή διαφέρει από την προφανή διεύθυνση του αστέρα, όπως φαίνεται από τον πύραυλο, το χρόνο που στέλνεται το σήμα;

7-13. Τα σωμάτια *A* και *B* έχουν μάζα ηρεμίας $\frac{1}{2} m_0$ και m_0 , αντίστοιχα. Τα σωμάτια αυτά διασταυρώνονται με τον *y*-άξονα την ίδια χρονική στιγμή και έχουν τις ταχύτητες, που φαίνονται στο σχήμα. Θεωρώντας ότι τα σωμάτια συγκρούονται ανελαστικά και κολλούν μαζί, να βρεθούν η ταχύτητα v και η γωνία θ του προκύπτοντος σωματίου μετά τη σύγκρουση. Ποια είναι η τελική μάζα ηρεμίας;

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

7-14. Η ενέργεια ηρεμίας ενός πρωτονίου είναι 938 Mev (million electron volts) . Θεωρούμε, ότι συγκρούονται δυο πρωτόνια, το καθένα ολικής ενέργειας 2×10^5 Mev. Στο σύστημα με σταθερό κέντρο μάζας η διαθέσιμη ενέργεια από τη σύγκρουση είναι η ολική ενέργεια, δηλαδή 4×10^5 Mev .

Ας υποθέσουμε τώρα ότι, αντί των ίσων και αντίθετων ταχυτήτων των πρωτονίων, όλη η ενέργεια 4×10^5 Mev βρίκεται σ' ένα μόνο πρωτόνιο, που συγκρούεται μ' ένα δεύτερο, που βρίσκεται σε ηρεμία. Να αναλυθεί η σύγκρουση σε σύστημα κέντρου μάζας. Να αποδειχτεί ότι σχετικά μ' αυτό το σύστημα μόνο 2.7×10^5 Mev της ολικής ενέργειας είναι διαθέσιμη. Το γεγονός αυτό απεικονίζει το πλεονέκτημα της χρήσης της αρχής της συγκρουόμενης δέσμης για πολύ υψηλής ενέργειας επιταχυντές.



Σχ. Π7-13.

7-15. Θεωρούμε ένα σχετικιστικό σύστημα μάζας - ελατηρίου με μάζα ηρεμίας m_0 και σταθερά ελατηρίου k . Με x συμβολίζεται η μετατόπιση της μάζας. Να διατυπωθεί η συνάρτηση Lagrange και η διαφορική εξίσωση κίνησης. Να ολοκληρωθεί η εξίσωση αυτή και να αποδειχτεί ότι η ολική ενέργεια $E = mc^2 + \frac{1}{2} kx^2$ είναι σταθερή. Αν a είναι το εύρος της ταλάντωσης, να αποδειχτεί, ότι ο χρόνος και η μετατόπιση συνδέονται με τη σχέση

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$t = \sqrt{\frac{m_0}{k}} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{1 + 2\eta^2 \cos^2\varphi}{\sqrt{1 + \eta^2 \cos^2 \varphi}} d\varphi$$

όπου $\sin\varphi = x/a$ και $\eta^2 = ka^2/4m_0c^2$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1-1. $x = A \sin \omega t + l \sin \theta, \quad y = - l \cos \theta$

$(x - A \sin \omega t)^2 + y^2 = l^2$

1-2. $x_1 = z - \frac{1}{2} l \theta, \quad x_2 = z + \frac{1}{2} l \theta$

$Q_z = F_1 + F_2, \quad Q_\theta = \frac{1}{2} l (F_2 - F_1)$

1-3. $x_1 = x - \frac{1}{2} l \cos \theta, \quad y_1 = y - \frac{1}{2} l \sin \theta$

$x_2 = x - \frac{1}{2} l \cos \theta, \quad y_2 = y + \frac{1}{2} l \sin \theta$

$$\frac{\partial(x_1, y_1, x_2, y_2)}{\partial(x, y, \theta, q_4)} = - l$$

$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$

$\theta = \tan^{-1} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad q_4 = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{1/2}$

1-4. $T = mr^2 [\omega (\dot{\theta} + \omega)(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2]$

$p_\theta = mr^2 [\omega (1 - \cos \theta) + \dot{\theta}]$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

1-5. $T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{6} ml^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} ml\dot{x}\,\dot{\theta} \sin\theta$

$p_\theta = \frac{1}{3} ml^2\dot{\theta} - \frac{1}{2} ml\dot{x} \sin\theta$

1-6. $T = \frac{3}{4} m\dot{q}^2 - \frac{3}{2} mr\omega\dot{q} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 + \frac{3}{4} mr^2\omega^2$

1-7. $\dot{\varphi} = \frac{l}{r}\,\dot{\theta} + \left(\frac{l+r}{r}\right)\dot{\psi}$

$T = \frac{11}{12} ml^2\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} ml\,(l+r)\,\dot{\theta}\,\dot{\psi} + \frac{1}{2}[I_o + \frac{1}{2} m\,(l+r)^2]\dot{\psi}^2$

$p_\theta = \frac{11}{6}\, ml^2\dot{\theta} + \frac{1}{2} ml\,(l+r)\dot{\psi}$

$p_\psi = [I_o + \frac{1}{2} m\,(l+r)^2\,]\dot{\psi} + \frac{1}{2} ml\,(l+r)\dot{\theta}$

1-9. Δεσμική σχέση $x^2 + y^2 = r^2$ ή $x\delta x + y\delta y = 0$

1-10. Δεσμική σχέση $x^2 + y^2 = l^2$

1-11. $m\ddot{x} - m\,(x_o + x)\dot{\theta}^2 + kx = 0$

$I\ddot{\theta} + m_o(x_o + x)^2\ddot{\theta} + 2m\,(x_o + x)\,\dot{x}\dot{\theta} = 0$

1-12. $\theta = \tan^{-1}\frac{1}{2} = 26.57^o$

1-13. $\theta = \cos^{-1}\sqrt{\frac{27}{32}} = 23.28^o$. Ευσταθής

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2-1. $ml^2\ddot{\theta} + mlA\omega^2 \sin\omega t \sin\theta - mgl \sin\theta = 0$

2-2. $m(r^2 + l^2 - 2rl\cos\theta)\ddot{\theta} + mrl\dot{\theta}^2 \sin\theta - mgr\sin\alpha + mgl\sin(\theta+\alpha) = 0$

2-3. (a) $\sin\theta\, dx - \cos\theta\, dy + \frac{1}{2} l d\theta = 0$

(b) $m\ddot{x} = \lambda \sin\theta$, $m\ddot{y} = -\lambda\cos\theta$, $\frac{1}{12} ml^2\ddot{\theta} = \frac{1}{2}\lambda l$

2-5. $m\ddot{y} - m\Omega^2 y + ky = 0$

2-6. $m\ddot{q} + \frac{1}{2}\frac{dm}{dq}\dot{q}^2 + \frac{dV}{dq} = 0$

2-8. $t = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2H}{g}}$ και για τις δυο περιπτώσεις

2-9. (a) $m\ddot{x} = 6\chi\lambda$, $m\ddot{y} + mg = -\lambda$

(b) $\mathbf{C}_{max} = mg(1 + 12y_o)\mathbf{j}$

2-10. (a) $m\ddot{x} + kx = 2\lambda$, $m\ddot{y} + ky = 3\lambda$, $m\ddot{z} + kz = 4\lambda$

(b) $\mathbf{v} = \frac{1}{29}(-10\mathbf{i} - 15\mathbf{j} - 20\mathbf{k})$

2-11. $\frac{1}{3} ml^2\ddot{\theta} - \frac{3\beta_\varphi^2 \cos\theta}{ml^2 \sin^3\theta} - \frac{1}{2} mgl\sin\theta = 0$

2-12. $m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 \sin^2\alpha + mg\cos\alpha = 0$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$mr^2\,\dot{\varphi}\sin^2\alpha = \beta_\varphi$$

$$m\ddot{r} - \frac{\beta_\varphi^2}{mr^3\sin^2\alpha} + mg\cos\alpha = 0$$

2-13. (a) $mr^2\,[2\ddot{\theta}(2+\cos\varphi) + \ddot{\varphi}\,(1+\cos\varphi) - \dot{\varphi}\,(2\dot{\theta}+\dot{\varphi})\sin\varphi\,] + mgr\,[2\sin\theta + \sin(\theta+\varphi)] = 0$

$$mr^2\,[\ddot{\varphi} + \ddot{\theta}\,(1+\cos\varphi) + \dot{\theta}^2\sin\varphi\,] + mgr\sin(\theta+\varphi) = 0$$

(b) $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{2r}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{2g}{r}}$, $\frac{A_\varphi}{A_\theta} = 0,\ -3$

2-14. $\omega_1 = \sqrt{k/2m}$, $\omega_2 = \sqrt{3k/2m}$, $A_y/A_x = 0,\ \infty$

2-15. $\omega_1 = \omega_2 = 0$, $\omega_3 = \sqrt{6k/m}$

$\mathbf{A}^{(1)} = \{1 \quad 1 \quad 1\}$, $\mathbf{A}^{(2)} = \{1 \quad 0 \quad -1\}$, $\mathbf{A}^{(3)} = \{1 \quad -2 \quad 1\}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3-1. $\dot{x}_1 = \frac{7\hat{F}_1}{2m}$, $\dot{x}_2 = -\frac{\hat{F}_1}{m}$, $\dot{x}_3 = \frac{\hat{F}_1}{2m}$

3-2. $\dot{x} = 0.75$ m/sec, $\dot{y} = -\ 0.75$ m/sec, $\dot{\theta} = -\ 0.75$ rad/sec

3-3. $\dot{x} = \frac{4}{5}v_0$, $\dot{y} = \frac{1}{5}v_0$, $\dot{\theta} = \frac{6v_0}{5l}$, $\hat{C} = \frac{\sqrt{2}}{5}mv_0$

3-4. $\dot{x} = \frac{5}{8}v_0$, $\dot{y} = \frac{3}{8}v_0$, $\dot{\theta} = \frac{3v_0}{2\sqrt{2}l}$, $\hat{C} = \frac{5}{8}mv_0$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

3-5. $p_\theta = \frac{1}{3} m\ell^2 \dot{\theta} - \frac{1}{2} m v_0 l \sin\theta, \quad \dot{\theta} = \frac{3v_0}{2\sqrt{2}l}$

3-6. $v_X = \dfrac{m y_0^2 v_0}{I_{zz} + m(x_0^2 + y_0^2)}, \quad \omega_X = 0$

$v_Y = \dfrac{-m x_0 y_0 v_0}{I_{zz} + m(x_0^2 + y_0^2)}, \quad \omega_Y = 0$

$v_Z = 0, \quad \omega_Z = \dfrac{m y_0 v_0}{I_{zz} + m(x_0^2 + y_0^2)}$

3-7. $\dfrac{\partial a_i}{\partial q_j} = \dfrac{\partial a_j}{\partial q_i}$, για κάθε i, j .

3-8. $T_1 = m\ell^2 \Omega [2\dot{q}_1(1 + \cos q_1) + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\cos(q_2 - q_1)$
$+ \dot{q}_2 (1 + \cos q_2)]$

$\gamma_{12} = -2m\ell^2 \Omega \sin(q_2 - q_1)$

3-9. $(I_\alpha \sin^2\theta + I_t \cos^2\theta)\ddot{\psi} - I_\alpha \ddot{\varphi}\sin\theta$
$- 2(I_t - I_\alpha)(\dot{\psi} + \omega_0)\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta - I_\alpha \dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta = 0$

$I_t \ddot{\theta} + (I_t - I_\alpha)(\dot{\psi} + \omega_0)^2 \sin\theta\cos\theta + I_\alpha(\dot{\psi} + \omega_0)\dot{\varphi}\cos\theta$
$+ mgl\cos\theta = 0$

$I_\alpha \ddot{\varphi} - I_\alpha \ddot{\psi}\sin\theta - I_\alpha(\dot{\psi} + \omega_0)\dot{\theta}\cos\theta = 0$

3-10. $\lambda_1^2 = \dfrac{-k}{2m}, \quad \lambda_2^2 = \dfrac{-3k}{2m}, \quad \lambda_3^2 = \dfrac{-3k}{m}$, ευσταθής

3-11. Ευσταθής για $\gamma^2 > 4.490\, mk$

3-12. (a) $F = \frac{1}{2} c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$m\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + 2kx_1 - c\dot{x}_2 - kx_2 = 0$$

$$m\ddot{x}_2 + c\dot{x}_2 + 2kx_2 - c\dot{x}_1 - kx_1 = 0$$

(b) $m^2\lambda^4 + 4mc\lambda^3 + 4mk\lambda^2 + 2ck\lambda + 3k^2 = 0$, αδιάφορη ευστάθεια

(c) $\lambda_{1,2} = -0.07579 \pm i\,0.8668$

$\lambda_{3,4} = -0.9242 \pm i\,1.763$

3-13. $U = -E_0 e \ln r - \frac{1}{2} B_0 e r^2 \dot{\theta}$

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - \frac{E_0 e}{r} - B_0 e r\dot{\theta} = 0$$

$$mr^2\dot{\theta} + \frac{1}{2} B_0 e r^2 \dot{\theta} = \beta_\theta \,, \quad m\dot{z} = \beta_z$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

4-1. $$H = \frac{p_\theta^2}{2I_t} + \frac{p_\varphi^2}{2I_\alpha} + \frac{(p_\psi + p_\varphi \sin\theta)^2}{2I_t \cos^2\theta} + mgl \sin\theta$$

$$\dot{\psi} = \frac{p_\psi + p_\varphi \sin\theta}{2I_t \cos^2\theta} \,, \quad \dot{p}_\psi = 0 \,, \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{I_t}$$

$$\dot{p}_\theta = -p_\varphi \left(\frac{p_\psi + p_\varphi \sin\theta}{I_t \cos\theta} \right) - \frac{(p_\psi + p_\varphi \sin\theta)^2}{I_t \cos^3\theta} \sin\theta - mgl \cos\theta$$

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{I_\alpha} + \left(\frac{p_\psi + p_\varphi \sin\theta}{I_t \cos^2\theta} \right) \sin\theta \,, \quad \dot{p}_\varphi = 0$$

4-2. $\dot{y} = p/m$, $\dot{p} = -mg \mp cp^2/m^2$ για $p > 0$, $p < 0$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

4-3. $\dot{\varphi} = \dfrac{p_\varphi}{I + mr^2 \sin^2\theta}$, $\quad p_\varphi = (I + mr^2 \sin^2\theta)\dot{\varphi} = \beta_\varphi$

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} , \quad \dot{p}_\theta = \frac{p_\varphi^2 mr^2 \sin\theta\cos\theta}{(I + mr^2 \sin^2\theta)^2} + mgr\sin\theta$$

$$\dot{\varphi}_{max} = \frac{1}{\sqrt{6}-2}\sqrt{\frac{g}{r}}$$

4-4. $p_x = mv_0 \cos t^2$, $\quad p_y = mv_0 \sin t^2$, $\quad \lambda = -2mv_0 t$

4-7. $I = m\left[\left(\frac{1}{2}v_0^2 - gy_0\right)t_1 - v_0 g t_1^2 + \frac{1}{3}g^2 t_1^3\right]$

$$I(v_{const}) = m\left[\left(\frac{1}{2}v_0^2 - gy_0\right)t_1 - v_0 g t_1^2 + \frac{3}{8}g^2 t_1^3\right]$$

4-8. $m\ddot{x}_1 + \dot{\mu} = 0$, $\quad m\ddot{x}_2 - \dot{\mu} = 0$, $\quad m\ddot{x}_3 + \dot{\mu} + mg = 0$

$$\ddot{x}_1 = -\frac{1}{3}g$$

4-10. $\mu_1 = \sqrt{\dfrac{\beta_2}{\beta_1}}\, e^{c/2}$, $\quad \mu_2 = \sqrt{\dfrac{\beta_1}{\beta_2}}\, e^{c/2}$, $\quad f_{min} = 3.230$

4-11. $x = \dfrac{v_0}{\omega_0}(\cos\omega_0 t - 1)$, $\quad y = \dfrac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$, $\quad \theta = \omega_0 t$

$$\delta I = -m\omega_0 v_0 \int_0^{t_1} \eta(t)\tan^2\omega_0 t\, dt$$

4-13. ΟΧΙ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

5-2. $t - t_o = \int_{\theta_o}^{\theta} \frac{I_t\, d\theta}{\sqrt{f(\theta)}}$, $\quad \psi - \psi_o = \int_{\theta_o}^{\theta} \frac{(\alpha_\psi + \alpha_\varphi \sin\theta)\, d\theta}{\cos^2\theta \sqrt{f(\theta)}}$

όπου $f(\theta) = 2I_t \left[\alpha_t - \frac{\alpha_\varphi^2}{2I_\alpha} - \frac{(\alpha_\psi + \alpha_\varphi \sin\theta)^2}{2I_t \cos^2\theta} - mgl \sin\theta \right]$

5-3. $t = \frac{1}{g \sin\gamma} \sqrt{\frac{3}{m}} \left[\sqrt{\alpha + mgr\theta \sin\gamma} - \sqrt{\alpha} \right]$

$\theta = \dot{\theta}_o t + \frac{g \sin\gamma}{3r} t^2$

5-4. $x = \dot{x}_o t$, $\quad x = \dot{y}_o t - \frac{1}{2} g t^2$

5-5. $t = \int_{r=r_o}^{r} = \frac{\frac{1}{2} m d(r^2)}{\sqrt{-\alpha_\theta^2 + 2m\alpha_t r^2 - mkr^4}}$

$\theta = \int_{r=r_o}^{r} = \frac{\frac{1}{2} \alpha_\theta d(r^2)}{\sqrt{-\alpha_\theta^2 + 2m\alpha_t r^2 - mkr^4}}$

$r = \left[\frac{\alpha_t}{k} + \frac{1}{k} \sqrt{\alpha_t^2 - \frac{k}{m} \alpha_\theta^2} \cos 2\sqrt{\frac{k}{m}}\, t \right]^{1/2}$

$r = \frac{\alpha_\theta}{m} \left[\alpha_t - \sqrt{\alpha_t^2 - \frac{k}{m} \alpha_\theta^2} \cos 2\theta \right]^{-1/2}$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

5-6. $\dfrac{q_1 + \sqrt{q_1^2 + \alpha^2}}{q_2 + \sqrt{q_2^2 - b^2}} = A$ υπερβολή

5-7. $t - t_0 = \int_{\theta_0}^{\theta} \dfrac{ml^2\, d\theta}{\sqrt{f(\theta)}}$, $\varphi - \varphi_0 = \int_{\theta_0}^{\theta} \dfrac{\alpha_\varphi\, d\theta}{\sin^2\theta \sqrt{f(\theta)}}$

όπου $f(\theta) = 2\left[ml^2\,\alpha_t + m^2 g l \beta \cos\theta - \dfrac{\alpha_\varphi^2}{2\sin^2\theta}\right]$

5-8. $W_1(r) = \int \sqrt{2m\alpha_1 - \dfrac{2\alpha_\theta}{r^2} - 2v_1(r)}\, dr$

$W_2(\theta) = \int \sqrt{2\alpha_\theta - \dfrac{2\alpha_\varphi}{\sin^2\theta} - 2v_2(\theta)}\, d\theta$

$W_3(\varphi) = \int \sqrt{2\alpha_\varphi - 2v_3(\varphi)}\, d\varphi$

$\psi_1 = v_1(r)$, $\psi_2 = v_2(\theta)$, $\psi_3 = v_3(\varphi)$, $\Phi_{ij} = p_i \dfrac{\partial p_i}{\partial \alpha_j}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

6-1. $P = -\sqrt{q^2 + p^2}\tan^{-1}\dfrac{q}{p}$, $\varphi = \dfrac{1}{2}Q^2 \sin^{-1}\dfrac{q}{Q} + \dfrac{1}{2}\sqrt{Q^2 - q^2}$

6-2. $\psi = mv_0 q$, $F_1 = mv_0\, q$, $F_2 = mv_0 q + P\sin q$

$F_3 = (mv_0 - p)\sin^{-1} Q$

$F_4 = (mv_0 - p)\cos^{-1}\left(\dfrac{p - mv_0}{P}\right) + \sqrt{P^2 - (p - mv_0)^2}$

6-3. $P_1 = \dfrac{yp_x + yp_y}{x^2 + y^2}$, $P_2 = \dfrac{xp_x - yp_y}{x^2 + y^2}$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$F_2 = xyP_1 + \frac{1}{2}(x^2 - y^2)\,P_2$$

$$K = \frac{1}{m}\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2\,(P_1^2 + P_2^2)} + k\,[\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2} - Q_2\,]^{1/2}$$

6-4. $F_2 = (P_1 + v_0)\,(q_1 - v_0 t) + \frac{1}{2}P_2^2\,e^{-2t}\tan q_2$

$$K = \frac{1}{2}P_1^2 - \frac{1}{2}v_0^2 - Q_2 P_2 + \frac{1}{8}(Q_2^2\,e^{2t} + P_2^2\,e^{-2t})^2 + \frac{1}{2}(Q_1 + v_0 t)^2$$

$$\dot{Q}_1 = P_1, \qquad \dot{Q}_2 = -Q_2 + \frac{1}{2}P_2\,e^{-2t}(Q_2^2\,e^{2t} + P_2^2\,e^{-2t})$$

$$\dot{P}_1 = -(Q_1 + v_0 t), \qquad \dot{P}_2 = P_2 - \frac{1}{2}Q_2\,e^{2t}(Q_2^2\,e^{2t} + P_2^2\,e^{-2t})$$

6-5. $K = \frac{1}{8}(Q^2\,e^{-2t} + P^2\,e^{2t})^2 + \frac{1}{2}\left(\tan^{-1}\frac{Pe^{2t}}{Q}\right)^2 + QP$

6-6. $P = \frac{1}{2}\tan 2p\,, \qquad F_1 = \frac{1}{2}q\left(\cos^{-1}\sqrt{\frac{Q}{q}} - \frac{\sqrt{Q(q-Q)}}{q}\right), \qquad F_4 \equiv 0$

6-8. $q = \sqrt{2\alpha}\sin(t+\varphi)\,, \qquad p = \sqrt{2\alpha}\cos(t+\varphi)$

όπου $\varphi = \sin^{-1}(q_0/\sqrt{2\alpha})$

6-9. $Q_1 = \frac{1}{2}\alpha - q_1$ όπου $\alpha = \sin^{-1}\frac{-2q_2\,p_1}{p_2}$

$$Q_2 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos\alpha) - q_2^2}$$

$$P_1 = -p_1\,, \qquad P_2 = \mp\frac{p_2}{q_2}\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos\alpha) - q_2^2}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

6-10. $Q_1 = q_1 - v_0\, t\,, \qquad Q_2 = \sqrt{2q_2}\, e^t \cos p_2$

$P_1 = p_1 - v_0\,, \qquad P_2 = \sqrt{2q_2}\, e^{-t} \sin p_2$

$K - H = 2q_2 \sin p_2 \cos p_2 - v_0 (p_1 - v_0)$

6-11. $K = \frac{1}{2} \sum_i P_i^2 + \sum_i \sum_j \sum_k a_{kj}\, \dot{a}_{ij}\, Q_k\, P_l$

ή $K = \frac{1}{2} \sum_i P_i^2 - \sum_i \sum_j \sum_k a_{ij}\, \dot{a}_{kj}\, Q_k\, P_l$

6-12. $F_2^* = \sum_i \sum_j [\, a_{ij}\, (P_i^* - d_i) q_j + c_i P_j^* \,]$

6-13. $Q = t\,, \qquad T = q\,, \qquad P = p_t\,, \qquad P_T = p$

$K = \lambda \left[P + \frac{1}{2m} P_T^2 - Q\, P_T + \frac{1}{2} kT^2 \right]$

6-20. $G = p_r \cos\theta - \frac{1}{r} p_\theta \sin\theta\,, \qquad \delta r = \varepsilon \cos\theta\,, \qquad \delta\theta = -\frac{\varepsilon}{r} \sin\theta\,,$

$\delta p_r = -\frac{\varepsilon}{r^2} p_\theta \sin\theta\,, \qquad \delta p_\theta = \varepsilon \left(p_r \sin\theta + \frac{1}{r} p_\theta \cos\theta \right)$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

7-1. $1.8\, c\,, \qquad v'_B = -0.9945\, c$

7-2. (a) $x' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\, l\,, \qquad t' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\, \frac{l}{c}$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

(b) $x' = \sqrt{1 - \beta^2}\, l - Vt'$

7-3. (a) Vh/v

(b) $Vh/v\sqrt{1 - \beta^2}$

(c) $v'_x = -V$, $v'_y = v\sqrt{1 - \beta^2}$

7-4. $v = c \tanh \frac{1}{2}\theta$ όπου $\tanh \theta = \beta = \frac{V}{c}$, $\tau = [\cosh \frac{1}{2}\theta]^{-1} t$

7-5. $v = 0.9918\, c$

7-8. (a) $\omega' = \omega_0 \sqrt{1 - \beta^2}$

(b) $\frac{\omega_0 l \beta}{c}$

(c) $\tan^{-1}(\omega_0 \beta r/c\sqrt{1 - \beta^2})$

7-9. $y = \left(\frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right) \tan \omega \left(\frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right)$

$x = \pm 0.8406\, l_0$, $y = \mp 0.2403\, l_0$

7-10. Μη σχετικιστική $\varphi = \tan^{-1} \frac{\beta' \sin \varphi'}{\beta + \beta' \cos \varphi'}$

Σχετικιστική $\varphi = \tan^{-1} \frac{\beta' \sqrt{1 - \beta^2} \sin \varphi'}{\beta + \beta' \cos \varphi'}$

7-11. 90 %

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

7-12. 120^{o} , 60^{o}

7-13. $v = 0.2943\,c$, $\theta = 31.84^{o}$, $1.539\,m_o$

7-15. $m_o\left(1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \ddot{x} + kx = 0$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ

Α

Αγγλικό βαρυτικό σύστημα, 5
Αγκύλες Lagrange, 378 - 381, 386, 393
Αγκύλες Poisson, 366, 381 - 387, 393
Αδρανειακή μάζα, 487
Αδρανειακή σύζευξη, 59
Αδρανειακή δύναμη, 31, 74
Αδρανειακό σύστημα αναφοράς, 2, 428
Άεργος δεσμός, 23 - 28, 167
Αναλλοίωτο διάστημα, 447, 448, 451
Αναλυτική δυναμική, 68
Ανελαστική κρούση, 482 - 487
Ανελκυστήρας του Einstein, 488
Ανώμαλο σημείο, 280, 281
Απειροστός κανονικός μετασχηματισμός, 406 - 411
Απόλυτο σύστημα μονάδων, 5
Αρχή:
γραμμικής ώσης και ορμής, 159
γωνιακής ώσης και ορμής, 160, 187
διατήρησης της ενέργειας, 42, 215, 480, 481
d' Alembert, 32, 33, 71, 73, 165, 240
ελαχίστης δράσης, 273
έργου και κινητικής ενέργειας, 42
ισοδυναμίας, 487, 488
Fermat, 275
Hamilton, 240 - 244, 272, 334, 335
Hamilton, γενικευμένη, 242
Hamilton, μη-ολόνομου συστήματος, 244 - 248
Hamilton, τροποποιημένη, 267 - 269
μάζας και ενέργειας, 481

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Αρχή (συνέχεια):
της σχετικότητας, 431, 435
των δυνατών έργων, 27, 36
Αρχικές συνθήκες, γραμμικό σύστημα, 140, 141
Ασυμπτωτική ευστάθεια, 157, 196
Αυτόνομο σύστημα, 279
Αφανείς συντεταγμένες, 99 - 104, 118, 209, 261, 307, 308

Β

Βαθμοί ελευθερίας, 5
Βαρυτική μάζα, 487
Bergmann, P. G., 501,

Γ

Γαιωδεσιακό πρόβλημα, 237
Γεγονός, 441
Γενικευμένες συντεταγμένες, 6, 39
Γενικευμένη ακαμψία, 137
Γενικευμένη αρχή Hamilton, 242
Γενικευμένη δύναμη, 35 - 37, 43, 44, 73 - 75, 78, 79
Γενικευμένη μάζα, 135
Γενικευμένη ορμή, 56, 75, 174, 282
Γενικευμένη ώση, 162, 166, 175
Γεννήτρια συνάρτηση, 291, 338 - 340, 344 - 348, 406 - 410
επαυξημένη, 364, 368
Γινόμενο αδράνειας, 51
Goldstein, H., 145, 220, 330, 421
Griffith, B. A., 60
Γραμμική ορμή σωματίου, 2, 159
Γυροσκοπική δύναμη, 188 - 190
Γυροσκοπική ευστάθεια, 194 - 198
Γυροσκοπική σύζευξη, 190
Γυροσκοπικό σύστημα, 110, 188 - 198
Γυροσκοπικός συντελεστής, 77, 110, 189
Γωνιακή ταχύτητα, 49 - 52
Γωνιακή ώση, 160
Γωνίες Euler, 173, 174, 201

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Δ

D' Alembert, J., 32 (υποσημείωση)
Δέλτα του Kronecker, 358, 380
Δεσμική δύναμη, 2, 23, 79, 80, 164, 165
Δεσμός, 5-8
    άεργος, 23 - 28, 167
    αμφίπλευρος, 17, 23
    μη-ολόνομος, 13 - 16, 78, 94, 95, 116, 245, 247
    μονόπλευρος, 17, 18, 25, 29, 167
    ολόνομος, 11, 80
    ρεόνομος, 13
    σκληρόνομος, 13
    στιγμιαίος, 19, 164 - 166, 246
    ωστικός, 167, 168
Δεύτερη μεταβολή, 227
Διανυσματική δυναμική, 68
Διαστάσεις, 5
Διάστημα τύπου φωτός, 450
Διάστημα χρονικού τύπου, 449
Διάστημα χωρικού τύπου, 449
Διαστολή του χρόνου, 445
Διάταξη συστήματος, 5-9
Διατήρηση της ενέργειας, 43, 480, 481
Διαφορική μορφή:
    ολοκληρωσιμότητα, 15
    Pfafian, 295 - 299, 301, 337, 389
    τέλεια, 14, 17
Διαφορική μορφή Pfaff, 295 - 299, 301, 337, 389
Διαχωρισιμότητα, 118 - 123, 317 - 325, 327 - 329
Διγραμμική συναλλοίωτη, 296, 388, 390, 393
Διπλό εκκρεμές, 83 - 86
Δύναμη:
    αδρανειακή, 31, 74
    άεργη δεσμική, 23 - 25, 8, 79, 167
    γενικευμένη, 35 - 37, 43, 44, 73 - 75, 78, 79
    γυροσκοπική, 188 - 190
    δεσμική, 2, 23, 78 -.80, 164
    διαμήκης, 477

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Δύναμη (συνέχεια):
εγκάρσια, 478
εφαρμοσμένη, 2, 23, 72
ηλεκτρομαγνητική, 212, 216, 262, 263
ισοδύναμες δυνάμεις, 40
κεντρομόλος, 105
μαζική, 3
Minkowski, 479
πεδίου, 3
συνιστώσα δύναμης, 4
συντηρητική, 41, 42, 105, 106, 215
σχετικιστική, 477
ωστική, 158
Δύναμη επαφής, 3
Δύναμη πεδίου, 3
Δυναμικό:
Βαθμωτό, 212, 491
διανυσματικό, 212, 491
εξαρτώμενο από ταχύτητα, 212, 214, 217, 262, 491
Δυναμική ενέργεια, 40 - 44, 105, 111, 212 - 214
Δυνατή μετατόπιση, 19 - 20, 35, 72, 91
Δυνατή ταχύτητα, 20, 21, 166
Δυνατό έργο, 19 - 30, 32, 35, 36, 44, 241
αρχή, 27, 36

Ε

Εγκάρσιο φαινόμενο Doppler, 464
Einstein, A., 428, 434, 435, 501
Εκκεντρότητα, 278, 317
Εκκρεμές:
ανεστραμμένο, 146
απλό, 60, 141 - 145
διπλό, 83 - 86
σφαιρικό, 33, 34, 81 - 83, 123 - 126, 332
Εκφυλισμένο σύστημα, 138
Ελαστική κρούση, 468
Ελαστική μορφή, 135
Ενέργεια ηρεμίας, 474

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Ενέργεια:
διατήρηση, 42, 215, 480, 481
δυναμική, 40 - 44, 105, 111, 212 - 214
ηλεκτρικού πεδίου, 215
ηρεμίας, 474
κινητική, 42, 47 - 57, 68 - 71, 168 - 174
κινητική σχετικιστική, 473
ολική σχετικιστική, 473, 480, 481
φωτονίου, 481
Ενεργές μεταβλητές, 264
Εξισώσεις Hamilton:
με συμβολισμό αγκυλών Poisson, 384
μη-ολόνομη μορφή, 255
παραγωγή των εξισώσεων, 251, 253, 266, 267, 297
σε μορφή μητρώων, 402
Εξισώσεις Maxwell, 431
Εξισώσεις Lagrange:
εκπεφρασμένη μορφή των εξισώσεων, 75 - 78, 158
θεμελιώδης μορφή, 73
με απόσβεση, 155, 156
παραγωγή των εξισώσεων, 71 - 75
τυπική μη-ολόνομη μορφή, 79
τυπική ολόνομη μορφή, 74, 75
Εξίσωση Euler - Lagrange, 234, 240, 244
με δεσμούς, 249, 250
Εξίσωση Hamilton - Jacobi, 292, 295, 303, 351 - 355
τροποποιημένη, 307, 354
Επαυξημένη γεννήτρια συνάρτηση, 364, 368
Επαυξημένη συνάρτηση, 229
Επαυξημένη συνάρτηση Hamilton, 399, 400
Επαυξημένη συνάρτηση Lagrange, 248
Επεκτεταμένος μορφικός χώρος, 242
Επεκτεταμένος σημειακός μετασχηματισμός, 367
Επεκτεταμένος φασικός χώρος, 281, 282, 397
Έργο, 42, 44
γυροσκοπικών δυνάμεων, 190
δυνάμεων τριβής, 155
δυνατό, 19 - 30, 32, 35, 36, 44, 241
Ευπρόσιτο, στο μορφικό χώρο, 15

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ευστάθεια:
ασυμπτωτική, 157, 196
γυροσκοπική, 194 - 198
ουδέτερη (αδιάφορη), 46, 194
συστήματος σωματίων, 44 - 46
Εφαρμοσμένη δύναμη, 2, 23, 72

Η

Ηλεκτρομαγνητική δύναμη, 212, 216, 262
Ημι-συντεταγμένες, 172, 176

Θ

Θετικά ημιορισμένη τετραγωνική μορφή, 130, 156, 190
Θετικά ορισμένη τετραγωνική συνάρτηση, 71, 128, 156, 190
Θετικά ορισμένο μητρώο, 77
Θεώρημα Jacobi, 303 - 305
Θεώρημα Liouville, 283, 284, 411, 412, 421
Θεώρημα Pfaff, 298
Θεώρημα Poisson, 385
Θεώρημα Stäckel, 321 - 330
Θεώρημα του König, 48
Θεωρία του αιθέρα, 432 - 434

Ι

Ιακωβιανή ορίζουσα, 8 - 10, 38, 298, 300, 363
Ιακωβιανό μητρώο, 403, 406
Ίδια απόσταση, 450, 451
Ίδια μάζα (βλ. μάζα ηρεμίας)
Ιδιοδιάνυσμα, 133
Ίδιος χρόνος, 450, 453
Ιδιοτιμή, 129 - 132
πολλαπλή, 138
Ince, E. L., 15
Ισοδύναμα συστήματα μονάδων, 40 (υποσημείωση)
Ισορροπία, 27, 29, 31, 44, 45, 115

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Κ

Carathéodory, C., 330, 421
Καμπύλωση του φωτός, 488
Κανόνας του πολλαπλασιαστή, 248 - 250
Κανονικές εξισώσεις (βλ. εξισώσεις Hamilton)
Κανονική μορφή ταλάντωσης:
μηδενικής συχνότητας, 132, 135
στερεού σώματος, 132
Κανονικό ολοκλήρωμα, 292, 294
Κανονικός μετασχηματισμός, 290, 334 - 343, 391, 393
αναγκαίες συνθήκες, 393, 404
ιδιότητες ομάδας, 341
ικανές συνθήκες, 338 - 340, 380, 381, 390, 392, 404
ομογενής, 299, 362 - 366
Καρτεσιανές συντεταγμένες, 3, 7
Κέντρο μάζας, 48, 49, 55, 484, 485
Κίνηση πυραύλου:
σταθερή επιτάχυνση, 494 - 497
σταθερής ώθησης, 498 - 500
Κίνηση του στρόβου, 201 - 211, 285, 331
Κινητική ενέργεια:
μεταφορική, 49
περιστροφική, 49 - 52, 55, 174
στερεού σώματος, 49 - 53, 172, 174
συστήματος σωματίων, 47, 48, 52, 53, 68, 69
σωματίου, 42
της σχετικής κίνησης, 53, 170, 171
Corben, H. C., 220
Κοσμική γραμμή, 452
Κρούση:
ανελαστική, 482 - 487
ελαστική, 468
Κυκλικές συντεταγμένες (βλ. αφανείς συντεταγμένες)
Κύλιση δίσκου, 16, 63, 64, 331
Κυματική εξίσωση, 431, 432
Κύρια μορφή ταλάντωσης, 132, 135
Κύριες συντεταγμένες, 132, 133
Κωνικό τμήμα, 278, 317

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Κώνος φωτός, 448

Λ

Lanczos, C., 60, 281, 285, 421
Lindsay, R, B., 32
Lorentz, H. A., 501

Μ

Μάζα:
αδρανειακή, 487
βαρυτική, 487
γενικευμένη, 135
διαμήκης, 478
εγκάρσια, 478
ηρεμίας, 467
ίδια, 467
Νευτώνεια, 468
σχετικιστική, 472
Μάζα ηρεμίας, 467
Μαζικές δυνάμεις, 3
Marion, J. B., 146, 285
Margenau, H., 32
Μέθοδος Hamilton - Jacobi, 299 - 303, 309 - 317, 351 - 355
αφανείς συντεταγμένες, 307 - 309, 314 - 317
συντηρητικά συστήματα, 305 - 317, 354, 355
Μέθοδος των τετραγωνισμών, 99, 118
Meirovitch, L., 60
Μετασχηματισμός:
απειροστός κανονικός, 406 - 411
εναλλαγής συντεταγμένων σε ορμές, 357
επαφής (βλ. ομογενής κανονικός μετασχηματισμός)
επεκτεταμένος σημειακός, 367
κανονικός, 290, 334 - 343, 391, 393
κανονικός ομογενής, 299, 362 - 366
καρτεσιανών σε γενικευμένες συντεταγμένες, 7, 69
Mathieu (βλ. ομογενής κανονικός μετασχηματισμός)
μεταφοράς, 356 - 361

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Μετασχηματισμός (συνέχεια):
ορθογώνιος, 358
ορμής, 374, 375
σημειακός, 335, 366 - 369
στροφής, 359 - 362
ταυτοτικός, 356
χρονικός, 396 - 400
Μετασχηματισμός Galileo, 428 - 430
Μετασχηματισμός επαφής, (βλ. ομογενής κανονικός μετασχηματισμός)
Μετασχηματισμός Legendre, 264 - 267, 348
Μετασχηματισμός Lorentz, 439, 440
Μετασχηματισμός Mathieu (βλ. ομογενής κανονικός μετασχηματισμός)
Μετασχηματισμός ορμή, 374, 375
Μετατόπιση:
δυνατή, 19, 20, 35, 72, 91
πραγματική, 91
Μη-αυτόνομο σύστημα, 279
Μη-ολόνομος δεσμός, 13 - 16, 78, 94, 95, 116, 245, 247
Μη-σύγχρονη μεταβολή, 269 - 273
Μητρώο:
αδράνειας, 59, 70, 71, 128, 161
ακαμψίας, 84, 137
απόσβεσης (απωλειών), 156, 190
γυροσκοπικό, 77, 110, 188 - 190
Ιακωβιανό, 403, 406
συμπλεκτικό, 403 - 405
Μητρώο αδράνειας, 71, 128, 135, 252
Μητρώο μάζας, 71, 128, 135, 252
Minkowski, H., 451, 479, 501
Μονάδες, 4, 5
Αγγλικό βαρυτικό σύστημα, 5
απόλυτες, 5
θεμελιώδεις, 5
παραγόμενες, 5
MØller, C., 441, 501
Μορφή Jacobi, αρχή της ελαχίστης δράσης, 275 - 278
Μορφικός χώρος, 10, 11, 278
επεκτεταμένος, 242

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ν

Νευτώνεια αρχή της σχετικότητας, 431
Νευτώνειο σύστημα αναφοράς (βλ. αδρανειακό σύστημα αναφοράς)
Νόμοι κίνησης του Newton, 1, 2, 429, 430

Ο

Ολική ιδιοστροφορμή, 202
Ολοκλήρωμα δράσης, 273
Ολοκλήρωμα ενέργειας, 108, 255, 256, 272, 273, 274, 306
Ολοκλήρωμα Jacobi, 108, 255, 256, 272, 274, 306
Ολοκληρώματα κίνησης, 98, 99, 106, 108, 121, 385
Ολοκληρωσιμότητα, διαφορική της μορφής, 14 - 17
Ολοκληρωτική αναλλοίωτη, 412 - 421
    απόλυτη, 413, 415, 418
    σχετική, 413, 416
Ολόνομο σύστημα, 11, 247, 248
    εξίσωση Lagrange, 73, 74, 80
Ολόνομος δεσμός, 11, 80
Ομογενής κανονικός μετασχηματισμός, 299, 362 - 366
Ορθογωνικότητα ιδιοδιανυσμάτων, 134 - 137, 140
Ορθογώνιο σύστημα, 119, 317, 321
Ορθογώνιος μετασχηματισμός, 358
Ορίζουσα Hessian, 264, 266
Ορμή:
    γενικευμένη, 56, 75, 174, 282
    γραμμική, 2, 159
    γωνιακή (στροφορμή), 54 - 56, 64, 159, 160
    ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, 215, 491
    σχετικιστική, 467, 470, 472, 473, 491

Π

Παθητικές μεταβλητές, 264
Παράδοξο ρολογιού (βλ. παράδοξο διδύμων)
Παράδοξο των διδύμων, 453 - 455, 465, 466, 498
Παράμετρος ταχύτητας, 458, 459
Παρατηρητής, 443

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Pars, L.A., 145, 220, 285, 324, 330, 422
Πείραμα Michelson - Morley, 433, 434
Πίνακας απόσβεσης, 155, 156
Πολλαπλασιαστής Lagrange, 4, 13, 78, 164, 166, 364
Πολλαπλασιαστής του Jacobi, 418, 420
Πολλαπλή ιδιοτιμή, 138
Πρόβλημα Hamilton, 291, 295, 302, 305, 307, 355
Πρόβλημα Kepler, 100, 101, 104, 260, 275 - 278, 314 - 317, 325 - 330
Πρόβλημα Lagrange, 295, 320
Πρόβλήμα του βραχυστοχρόνου, 234 - 236
Πρόσθεση ταχυτήτων, 455 - 459
Πρωτεύουσα (κύρια) συνάρτηση Hamilton, 293, 299 - 309, 341, 351
Πρώτη μεταβολή, 226
Πρώτο σύστημα Pfaff, 296

Ρ

Ρεόνομο σύστημα, 13, 91, 92, 112
κινητική του ενέργεια, 71
Ροπή αδράνειας, 51
Round, H., 285, 330, 421

Σ

Secular όρος, 208
Stehle, P., 220
Σημεία αναστροφής, 210, 312
Σημειακός μετασχηματισμός, 335, 366 - 369
Σημείο ισορροπίας (βλ. ανώμαλο σημείο)
Σκληρόνομο σύστημα, 13, 26, 27, 257
κινητική ενέργεια, 71
Slug, 5
Σταθερά διαχωρισμού, 319, 322, 327, 332, 333
Σταθερά του Planck, 42
Σταθερές της κίνησης (βλ. ολοκληρώματα κίνησης)
Στάσιμη τιμή:
ορισμένου ολοκληρώματος, 231 - 234, 239
συνάρτησης, 226 - 230
υπό συνθήκη, 228 - 230

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Στιγμιαίο σύστημα ηρεμίας, 479, 493
Στοιχειώδης θεωρία διαταραχών, 205 - 207
Στροφορμή, 54 - 56, 64, 159, 160
Σύγχρονη μεταβολή, 269, 271, 389
Συγχρονισμός ρολογιών, 442
Συζυγή σημεία, 239
Σύμβολο Christoffel, 77
Συμπλεκτικό μητρώο, 403 - 405
Συνάρτηση απωλειών, 154 - 158
Συνάρτηση απωλειών Rayleigh, 154 - 158
Συνάρτηση Hamilton:
    επαυξημένη, 399 - 402
    ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, 263, 491
    μορφή της συνάρτησης Hamilton, 255 - 259
    νέες μεταβλητές, 335 - 341, 368, 393
    ορισμός, 251, 490
    σκληρόνομου συστήματος, 257
    συντηρητικών συστημάτων, 258
    φυσικών συστημάτων, 258
Συνάρτηση Lagrange:
    για ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, 214, 491
    επαυξημένη, 248
    νέες μεταβλητές, 335
    ορισμός, 56, 489 - 491
Συνάρτηση Routh, 101 - 105, 123, 189 - 191, 330
Συναρτησιακή, 232
Συντελεστής αδράνειας, 59, 70, 71, 128, 161
Συντελεστής ακαμψίας, 127
    γενικευμένοι, 137
Συντελεστής απόσβεσης, 155
Συντελεστής βαρύτητας, 100, 260, 315
Συντελεστής μάζας (βλ. συντελεστή αδράνειας)
Συντεταγμένες:
    αφανείς, 99 - 104, 118, 209, 261, 307, 308
    γενικευμένες, 6, 39
    Καρτεσιανές, 3, 7
    κύριες, 132, 133
    πραγματικές (αληθείς), 172
Συντηρητική δύναμη, 41, 42, 105, 214

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Συντηρητικό σύστημα, 105, 110 - 118, 215, 279, 305 -309
Σύστημα Liouville, 118 - 123, 125, 318 - 321, 324 - 329, 333
Σύστημα μάζας - ελατηρίου, 111, 259, 260, 309 - 314, 371 - 374
Σύστημα αναφοράς:
αδρανειακό ή Νευτώνειο, 2, 428
στιγμιαίο σύστημα ηρεμίας, 479, 493
Σύστημα σωματίων:
δυναμική ενέργεια, 43
εξισώσεις κίνησης, 2 - 4, 158
ευστάθεια, 44 - 46
κινητική ενέργεια, 47, 48, 52, 53, 68, 69
στροφορμή, 54 - 56, 64
Συστολή Lorentz (βλ. συστολή μήκους)
Συστολή, μήκους, 445, 447
Σφαιρικό εκκρεμές, 33, 34, 81 - 83, 123 - 126, 332
Σωμάτιο, 1
εξίσωση κίνησης, 2
Synge, J. L., 60

T

Taylor, E. F., 500
Ταλάντωση, 122, 312
Ταυτότητα του Jacobi, 384
Ταυτοτικός μετασχηματισμός, 356
Ταυτόχρονο, 441 - 445
Ταχύτητα:
γωνιακή, 49 - 52
δυνατή, 20, 21, 166
πιθανή, 20, 21
φωτός, 432
Τετραγωνική μορφή, 46, 190
Τετραδιάνυσμα ορμής - ενέργειας, 475, 476
Τρένο του Einstein, 443, 444
Τριβή, Coulomb, 30, 31
Τροποποιημένη αρχή Hamilton, 267 - 269
Τροποποιημένη εξίσωση Hamilton - Jacobi, 307

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Υ

Υπόθεση της συστολής, 434

Φ

Φαινόμενο Doppler, 462 - 465
Φαινόμενο του προβολέα, 462
Φασική ταχύτητα, 283
Φασικό ρευστό, 283, 412
Forsyth, A. R., 298
Φυσικές μορφές ταλάντωσης, 129 - 132
Φυσικό σύστημα, 109 - 114, 274
Φωτόνιο:
ενέργεια, 481
μάζα, 482
ορμή, 482
ταχύτητα, 432
Φως:
καμπύλωση, 488
ταχύτητα, 432

Χ

Χαρακτηριστική εξίσωση, 130, 157, 193
Χαρακτηριστική συνάρτηση, 306, 318, 354, 355
Χρονικός μετασχηματισμός, 396 - 400
Χώρος των φάσεων (φασικός χώρος), 268, 279 - 281, 295
επεκτεταμένος , 281, 282, 397
Χωρόχρονος, 439

Ω

Ώση:
γενικευμένη, 162, 166, 175
γραμμική, 159 - 161
γωνιακή, 160
δεσμική, 167, 168
εφαρμοσμένη, 162 - 169

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ωστική δύναμη, 158
Ωστικός δεσμός, 167

W

Weyl, H., 501
Wheeler, J.A., 500
Whitaker, E. T., 60, 146, 220

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ - ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ