

**ΘΩΜΑΣ Κ. ΧΑΣΑΝΗΣ**  
**ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ**  
**ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ , ΤΟΜΕΑΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΚΑΙ**  
**ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ**

**ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**

**ΙΩΑΝΝΙΝΑ , ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ 1992**

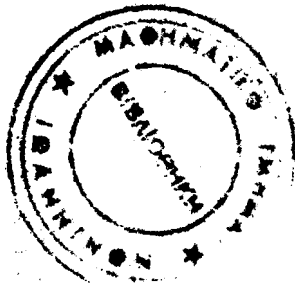


ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



026000023382

89/97



DDC

516.36

XAS

516.36  
XAS



**ΘΩΜΑΣ Κ. ΧΑΣΑΝΗΣ**

**ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ , ΤΟΜΕΑΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΚΑΙ  
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ**

**ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**

**ΙΩΑΝΝΙΝΑ , ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ 1992**



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι. ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΩΝ ΧΩΡΩΝ

Στο Κεφάλαιο αυτό θα παραθέσουμε μερικά στοιχεία, χρήσιμα για τη μελέτη των καμπυλών και των επιφανειών.

### 1.1. Ο ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΧΩΡΟΣ $\mathbb{R}^n$

Με  $\mathbb{R}^n$  συμβολίζουμε το σύνολο όλων των διατεταγμένων  $n$ -άδων  $x = (x_1, \dots, x_n)$  πραγματικών αριθμών. Για μια διατεταγμένη  $n$ -άδα  $x = (x_1, \dots, x_n)$  ο αριθμός  $x_j$  ( $j=1, \dots, n$ ) λέγεται η  $j$ -οστή συντεταγμένη της  $n$ -άδας  $x$ . Για  $n=2$  ή  $n=3$ , χρησιμοποιούμε συνήθως το συμβολισμό  $(u, v)$  ή  $(x, y, z)$  αντί των  $(x_1, x_2)$ ,  $(x_1, x_2, x_3)$ .

Αν  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$  είναι δυο στοιχεία του  $\mathbb{R}^n$  και  $\lambda$  ένας πραγματικός αριθμός, ορίζουμε το άθροισμα των διατεταγμένων  $n$ -άδων και τον αριθμητικό πολλαπλασιασμό μιας  $n$ -άδας με πραγματικό αριθμό από τις σχέσεις

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) \stackrel{\text{op.}}{=} (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{op.}}{=} (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$



Με τις παραπάνω πράξεις το σύνολο  $\mathbb{R}^n$  καθίσταται ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος και τα στοιχεία του  $\mathbb{R}^n$  λέγονται διανύσματα. Αυτές οι δυο πράξεις αντιστοιχούν στο άθροισμα διανυσμάτων και στον αριθμητικό πολλαπλασιασμό αριθμού με διάνυσμα της Αναλυτικής Γεωμετρίας που περιβάλλονται χώρου. Το μηδενικό διάνυσμα του διανυσματικού χώρου  $\mathbb{R}^n$  είναι η διατεταγμένη  $n$ -άδα  $O = (0, \dots, 0)$  και λέγεται αρχή του  $\mathbb{R}^n$ .

Τα διανύσματα  $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_j = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$   $\dots e_n = (0, \dots, 0, 1)$  του  $\mathbb{R}^n$ , όπου το  $e_j$  έχει  $j$ -οστή συντεταγμένη 1 και όλες οι άλλες συντεταγμένες που είναι 0 είναι μια βάση του πραγματικού διανυσματικού χώρου  $\mathbb{R}^n$ , γνωστή ως συνήθως βάση του  $\mathbb{R}^n$ . Κάθε διάνυσμα  $x = (x_1, \dots, x_n)$  του  $\mathbb{R}^n$  γράφεται κατά μονοσήμαντο τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της συνήθους βάσης, με τη μορφή

$$x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$$

όπου  $x_j$  ( $j=1, \dots, n$ ) είναι οι συντεταγμένες του  $x$ .

Το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$  του  $\mathbb{R}^n$ , συμβολίζεται με  $x \cdot y$  ή  $\langle x, y \rangle$  και ορίζεται με τη σχέση

$$x \cdot y \text{ ή } \langle x, y \rangle \stackrel{\text{οφ.}}{=} \sum_{i=1}^n x_i y_i$$



Αυτό το εσωτερικό γινόμενο θα λέγεται κανονικό εσωτερικό γινόμενο στον  $\mathbb{R}^n$  και ο πραγματικός διανυσματικός χώρος  $\mathbb{R}^n$  με αυτό το εσωτερικό γινόμενο είναι Ευκλείδειος χώρος, τον οποίο θα συμβολίζουμε με το ίδιο σύμβολο  $\mathbb{R}^n$ .

Θα γράψουμε  $x \cdot x$  ή  $\langle x, x \rangle = x^2$  και  $|x| = \sqrt{x^2}$ . Ο πραγματικός αριθμός  $|x|$  θα λέγεται μήκος (length) του  $x$ . Όπως είναι γνωστό ισχύουν

(1.1.1) Ανισότητα Schwarz:  $(x \cdot y)^2 \leq |x|^2 |y|^2$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^n$

(1.1.2) Τριγωνική ανισότητα (triangle inequality):

$$|x+y| \leq |x| + |y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

Άσκηση 1.1.1. Να αποδειχθούν οι (1.1.1) και (1.1.2) και να εξετασθεί για ποια διανύσματα ισχύουν οι ισότητες;

Από την ανισότητα του Schwarz προκύπτει ότι, για δυο μη μηδενικά διανύσματα  $x, y$  του  $\mathbb{R}^n$  υπάρχει μοναδικό  $\theta \in [0, \pi]$  τέτοιο ώστε

(1.1.3) 
$$\cos \theta = \frac{x \cdot y}{|x| |y|}.$$

Το μοναδικό  $\theta$  που καθορίζεται από τη παραπάνω σχέση λέγεται γωνία των  $x, y$  και συχνά συμβολίζεται ως  $\theta = \angle(x, y)$ .



Η απόσταση δυο διανυσμάτων  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$  του  $\mathbb{R}^n$  συμβολίζεται με  $d(x, y)$  και ορίζεται με τη σχέση

$$(1.1.4) \quad d(x, y) \stackrel{\text{op.}}{=} |x - y|,$$

όπου  $-y = (-1)y$ . Είναι φανερό ότι ισχύει η σχέση

$$d(x, y) = \left( \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}.$$

Για την απόσταση διανυσμάτων του Ευκλείδειου χώρου  $\mathbb{R}^n$  ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$(1.1.5) \quad d(x, y) \geq 0 \text{ και } d(x, y) = 0, \text{ αν και μόνο αν, } \\ x = y, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

$$(1.1.6) \quad d(x, y) = d(y, x), \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$(1.1.7) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \quad x, y, z \in \mathbb{R}^n.$$

Άσκηση 1.1.2. Να αποδειχθούν οι ιδιότητες της απόστασης.

Ο Ευκλείδειος χώρος  $\mathbb{R}^n$  εξοδιασμένος με την απόσταση που ορίστηκε παραπάνω καθίσταται μετρικός χώρος. Έτσι η ανοικτή μπάλα  $B_p(x_0)$  και η κλειστή μπάλα  $\overline{B}_p(x_0)$  με κέντρο το  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  και (θετική) ακτίνα  $p$  είναι, αντίστοιχα, τα παρακάτω υποσύνολα του  $\mathbb{R}^n$



$$B_p(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) < p\}$$

$$\bar{B}_p(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) \leq p\}.$$

Για  $n=1$ , η ανοικτή μπάλα  $B_p(x_0)$  είναι ένα ανοικτό διάστημα μήκους  $2p$  με κέντρο  $x_0$ . Αντίστοιχα η κλειστή μπάλα  $\bar{B}_p(x_0)$  είναι ένα κλειστό διάστημα με κέντρο  $x_0$  και μήκους  $2p$ .

Ένα υπούνολο  $U$  του  $\mathbb{R}^n$  λέγεται ανοικτό υπούνολο αν για κάθε  $x_0 \in U$  υπάρχει δετικός αριθμός  $p$  (που γενικά εξαρτάται από το  $x_0$ ) τέτοιος ώστε  $B_p(x_0) \subset U$ .

Ένα υπούνολο  $K$  του  $\mathbb{R}^n$  λέγεται κλειστό υπούνολο αν το συμπλήρωμα του στον  $\mathbb{R}^n$  είναι ανοικτό υπούνολο. Τέλος, κάθε ανοικτό υπούνολο  $U$  του  $\mathbb{R}^n$  που περιέχει ένα σημείο  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  θα λέγεται περιοχή του σημείου  $x_0$ .

Μια άλλη χρήσιμη έννοια είναι ο προανακαλιγμένος. Για τον ορισμό της προχωρούμε ως εξής: Έστωσαν  $(u_1, \dots, u_n)$ ,  $(w_1, \dots, w_n)$  δυο διατεταγμένες βάσεις του  $\mathbb{R}^n$ . Έστω επίσης  $\Gamma = (\gamma_{ij})$  ο πίνακας μετάβασης από τη μια βάση στην άλλη. Δηλαδή,  $w_i = \sum_{j=1}^n \gamma_{ji} u_j$ . Οι δυο βάσεις λέγονται ισοδύναμες αν  $\det \Gamma > 0$ .

Από τους κανόνες των ορίσμων προκύπτει ότι, πρόκειται για μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των βάσεων του  $\mathbb{R}^n$ ,





με ακριβώς δυο κλάσεις ισοδυναμίας. Κάθε κλάση ισοδυναμίας λέγεται προσανατολισμός (orientation) του  $\mathbb{R}^n$ . Έτσι ο  $\mathbb{R}^n$  έχει ακριβώς δυο προσανατολισμούς. Ο προσανατολισμός στον οποίο ανήκει η συνήθης βάση του  $\mathbb{R}^n$  λέγεται θετικός προσανατολισμός και ο άλλος λέγεται αρνητικός προσανατολισμός. Η επιλογή μιας βάσης στον  $\mathbb{R}^n$  καθορίζει ακριβώς και έναν προσανατολισμό. Στο επίπεδο, μια βάση που αποτελείται από τα διανύσματα  $a = (a_1, a_2)$ ,  $b = (b_1, b_2)$  ανήκει στο θετικό προσανατολισμό, αν και μόνο αν (γιατί;) ισχύει:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} > 0.$$

Όμοια στον  $\mathbb{R}^3$  η βάση  $(a, b, c)$  με  $a = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $b = (b_1, b_2, b_3)$  και  $c = (c_1, c_2, c_3)$  ανήκει στο θετικό προσανατολισμό αν και μόνο αν (γιατί;) ισχύει:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} > 0.$$

Άσκηση 1.1.3. Στο επίπεδο θεωρούμε ένα διάνυσμα  $a = (a_1, a_2)$  με μήκος 1. Να βρεθεί ένα μοναδιαίο διάνυσμα  $b = (b_1, b_2)$  κάθετο στο  $a$ , τέτοιο ώστε η βάση  $(a, b)$  να ανήκει στο θετικό προσανατολισμό του επιπέδου. Πως κατασκευάζεται το  $b$ ;



Ειδικά στον Ευκλείδειο χώρο  $R^3$  ορίζεται ένα ακόμη γινόμενο διανυσμάτων, που λέγεται εξωτερικό γινόμενο. Έστωσαν  $a = (a_1, a_2, a_3)$  και  $b = (b_1, b_2, b_3)$  δυο διανύσματα του  $R^3$ . Το διάνυσμα

$$\left( \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

συμβολίζεται με  $a \times b$  και ονομάζεται εξωτερικό γινόμενο των  $a, b$ . Από την Αναλυτική Γεωμετρία είναι γνωστές οι σχέσεις

$$(1.1.8) \quad |a \times b| = |a| |b| \sin \theta, \quad \text{όπου } \theta = \angle(a, b)$$

$$(1.1.9) \quad |a \times b|^2 = |a|^2 |b|^2 - (a \cdot b)^2, \text{ ταυτότητα του Lagrange.}$$

Από την άλλη πλευρά το μέτρο  $|a \times b|$  εκφράζει, ως γνωστό, το εμβαδό του παραλληλογράμμου με πλευρές τα διανύσματα  $a$  και  $b$ . Τέλος, είναι εύκολο να επαληθεύσει κάποιος (πώς;) ότι για δυο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα  $a, b$  του  $R^3$ , τα διανύσματα  $(a, b, a \times b)$  αποτελούν μια βάση του  $R^3$  που ανήκει στον θετικό προσανατολισμό.

Άσκηση 1.1.4. Έστωσαν  $a = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $b = (b_1, b_2, b_3)$ ,  $c = (c_1, c_2, c_3)$  και  $d = (d_1, d_2, d_3)$  διανύσματα του  $R^3$ . Ισχύουν οι σχέσεις

$$(i) \quad a \times b = -b \times a,$$

$$(ii) \quad \langle a, b \times c \rangle = \langle a \times b, c \rangle = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$



$$(iii) \quad a \times (b \times c) = \langle a, c \rangle b - \langle a, b \rangle c,$$

$$(iv) \quad (a \times b) \cdot (c \times d) = \begin{vmatrix} a \cdot c & a \cdot d \\ b \cdot c & b \cdot d \end{vmatrix}.$$

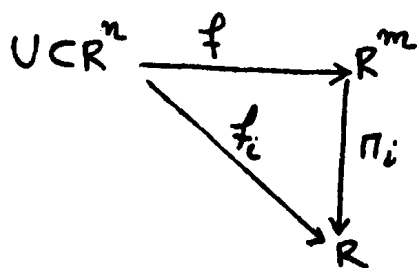
## 1.2. ΙΣΟΜΕΤΡΙΕΣ ΤΟΥ $\mathbb{R}^n$

Στη Στοιχειώδη Γεωμετρία ονομάζουμε, ως γνωστόν, δυο γεωμετρικά σχήματα "ίσα" (congruent), αν μπορούμε να μετατοπίσουμε το ένα έτσι ώστε να συμπίπτει με το άλλο. Η μετατόπιση αυτή σημαίνει εποικικά, ότι μετακινούμε το σχήμα χωρίς να το παραμορφώσουμε ή αλλιώς, χωρίς να μεταβάλλουμε τις αποστάσεις μεταξύ των κυρίων σημείων του. Στη παράγραφο αυτή σκοπεύουμε να περιγράψουμε αυτή τη κατάσταση.

Θεωρούμε μια απεικόνιση  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  με πεδίο ορισμού το υποσύνολο  $U$  του  $\mathbb{R}^n$ . Καθορίζονται τότε  $m$  συναρτήσεις  $n$  μεταβλητών ως εξής: Έστω  $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$  και  $f(x) = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ . Μπορούμε, τότε να γράψουμε  $y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m = f_m(x_1, \dots, x_n)$ . Οι συναρτήσεις  $f_i: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i=1, \dots, m$  λέγονται συνιστώσες της απεικόνισης  $f$ . Αν συμβολίσουμε με  $\pi_{x_i}$  ή  $\pi_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) τη συνάρτηση  $n$  μεταβλητών, που ορίζεται ως  $\pi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$ , είναι φανερό τότε ότι  $f_i = \pi_i \circ f$ . Οι συναρτήσεις  $\pi_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) λέγονται συναρτήσεις προβολής του  $\mathbb{R}^n$  στους άξονες. Η κατάσταση αυτή γρά-



νεται ως παρακάτω σχήμα



Παράδειγμα 1.2.1. Η απεικόνιση  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , που ορίζεται ως  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$ , έχει δύο συνιστώσες. Οι συνιστώσες αυτές είναι συναρτήσεις πρώην μεταβλητών και δίνονται ως:  $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1$ , και  $f_2(x_1, x_2, x_3) = x_2$ .

Μια απεικόνιση  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  λέγεται γραμμική απεικόνιση, αν ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$(1.2.1) \quad f(x+y) = f(x) + f(y), \text{ για όλα τα } x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$(1.2.2) \quad f(\lambda x) = \lambda f(x), \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R} \text{ και κάθε } x \in \mathbb{R}^n.$$

Θεωρούμε μια γραμμική απεικόνιση  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  και θέσουμε  $f(e_i) = (a_{1i}, \dots, a_{mi})$ , όπου  $e_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) είναι η συνήθης βάση του  $\mathbb{R}^n$ . Επειδή κάθε  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  και επειδή  $f$  είναι γραμμική απεικόνιση παίρνουμε

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i (a_{1i}, \dots, a_{mi}) =$$



$$= \left( \sum_{i=1}^n a_{i1} x_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{im} x_i \right).$$

Έτσι οι συνιστώσες μιας γραμμικής απεικόνισης είναι της μορφής  $f_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ ,  $i=1, \dots, m$ . Ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή, μια απεικόνιση της οποίας οι συνιστώσες έχουν την προηγούμενη μορφή είναι γραμμική. Είναι γενικό από την έκφραση των συνιστωσών μιας γραμμικής απεικόνισης ότι  $f(0) = 0$ , όπου το 0 στο πρώτο και δεύτερο μέλος είναι οι αρχές των  $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ , αντίστοιχα. Συνεπώς μια γραμμική απεικόνιση  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  σε μορφή πίνακα γράφεται ως

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Ax,$$

όπου ο  $(m \times n)$ -πίνακας  $A$  έχει ως  $k$ -στήλη ( $k=1, \dots, n$ ), την εικόνα του διανύσματος  $e_k$  μέσω της  $f$ . Να σημειώσουμε ότι αρκετές φορές παρακάτω το  $x=(x_1, \dots, x_n)$  καθώς και το  $f(x)$  θα τα θεωρούμε και ως διανύσματα στήλες, προκειμένου να γράψουμε μια σχέση σε μορφή πίνακα.

Ειδικά μια απεικόνιση  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  λέγεται μετασχηματισμός του  $\mathbb{R}^n$ . Επιπλέον, αν ο μετασχηματισμός  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$



είναι γραμμική απεικόνιση, τότε λέγεται γραμμικός μετασχηματισμός του  $\mathbb{R}^n$ .

Έστω  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ένας γραμμικός μετασχηματισμός του  $\mathbb{R}^n$ . Για  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  θα έχουμε  $f(x) = Ax$ , όπου ο  $(n \times n)$ -πίνακας  $A$  έχει ως  $j$ -στήλη ( $j=1, \dots, n$ ) τις εικασμένες του διανύσματος  $f(e_j)$ .

Ορισμός 1.2.2: Ένας γραμμικός μετασχηματισμός  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  του Ευκλείδειου χώρου  $\mathbb{R}^n$  λέγεται ορθογώνιος μετασχηματισμός (orthogonal transformation) αν διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο. Δηλαδή, αν ισχύει  $n$   
(1.2.3)  $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ , για όλα τα  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

Παρατήρηση 1.2.3. Είναι αμέσως φανερό ότι ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός διατηρεί τα μήκη των διανυσμάτων καθώς επίσης και τις γωνίες των διανυσμάτων.

Λέμμα 1.2.1. Ο μετασχηματισμός  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , που ορίζεται ως  $T(x_1, x_2) \stackrel{\text{op}}{=} (x_1 \cos \theta_0 - x_2 \sin \theta_0, x_1 \sin \theta_0 + x_2 \cos \theta_0)$ , όπου  $\theta_0$  μια σταθερή γωνία, είναι γραμμικός μετασχηματισμός και μάλιστα ορθογώνιος μετασχηματισμός του  $\mathbb{R}^2$ .

Θεωρούμε, τώρα, έναν ορθογώνιο μετασχηματισμό  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Όπως τονίσαμε προηγουμένως θα έχουμε  $T(x) = Ax$ , όπου εξηγήσαμε πως κατασκευάζεται ο  $(n \times n)$ -πίνακας



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} .$$

Επειδή ο μετασχηματισμός  $T$  είναι ορθογώνιος θα ισχύουν οι σχέσεις

$$\langle T(e_i), T(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{για } i=j \\ 0 & \text{για } i \neq j \end{cases} ,$$

όπου  $e_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) είναι η συνήθης βάση του  $\mathbb{R}^n$ .  
Όμως  $T(e_i) = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni})$  και συνεπώς θα έχουμε

$$\sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij} \quad \text{για } i, j=1, \dots, n$$

Οι παραπάνω σχέσεις υποδηλώνουν ότι ο πίνακας  $A$  είναι ορθογώνιος, όπως γνωρίζουμε από τη Γραμμική Άλγεβρα και ως εκ τούτου ισχύει ότι  $\det A = \pm 1$ . Ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή, από έναν ορθογώνιο  $(n \times n)$ -πίνακα, μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν ορθογώνιο μετασχηματισμό του  $\mathbb{R}^n$ . Να σημειώσουμε ότι για  $\det A = +1$  η βάση  $(T(e_1), \dots, T(e_n))$  ανήκει στο θετικό προσανατολισμό, δηλαδή ο  $T$  διατηρεί τον προσανατολισμό. Αντίθετα, για  $\det A = -1$  η βάση  $(T(e_1), \dots, T(e_n))$  ανήκει στον αρνητικό προσανατολισμό, δηλαδή ο  $T$  αντιστρέφει τον προσανατολισμό.



Άσκηση 1.2.2. Θεωρούμε τον μετασχηματισμό  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , που ορίζεται ως  $f(x) = -x$ . Να εξετασθεί αν πρόκειται για ορθογώνιο μετασχηματισμό. Αν ναι, διατηρεί τον προσανατολισμό;

Άσκηση 1.2.3 Το σύνολο των ορθογώνιων μετασχηματισμών του  $\mathbb{R}^n$  με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων είναι ομάδα. Το σύνολο των ορθογώνιων μετασχηματισμών που διατηρούν τον προσανατολισμό είναι ομάδα και μάλιστα υποομάδα της προηγούμενης ομάδας. Τι μπορούμε να πούμε για το σύνολο των ορθογώνιων μετασχηματισμών που αντιστρέφουν τον προσανατολισμό;

Ορισμός 1.2.4. Ένας μετασχηματισμός  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , λέγεται ισομετρία (isometry) ή στερεά κίνηση (rigid motion) του  $\mathbb{R}^n$ , αν διατηρεί τις αποστάσεις των σημείων. Δηλαδή, αν

$$(1.2.3) \quad d(fx, fy) = d(x, y), \text{ για όλα τα } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Παράδειγμα 1.2.5. Κάθε ορθογώνιος μετασχηματισμός  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  είναι ισομετρία. Πραγματικά, επειδή οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί και επειδή διατηρούν τα μήκη των διανυσμάτων, έχουμε

$$d(Tx, Ty) = |Tx - Ty| = |T(x-y)| = |x-y| = d(x, y).$$

Παράδειγμα 1.2.6. Έστω  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  ένα σταθερό





διάνυσμα του  $\mathbb{R}^n$ . Θεωρούμε τον μετασχηματισμό  $L_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , που ορίζεται ως  $L_a(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + a_1, \dots, x_n + a_n)$ .

Ο μετασχηματισμός αυτός δεν είναι εν γένει γραμμικός (πότε είναι γραμμικός;). Εύκολα επαληθεύεται ότι αυτός ο μετασχηματισμός είναι ισομετρία του  $\mathbb{R}^n$ . Πραγματικά, έχουμε

$$\begin{aligned} d(L_a(x), L_a(y)) &= |L_a(x) - L_a(y)| = \\ &= |(x_1 + a_1, \dots, x_n + a_n) - (y_1 + a_1, \dots, y_n + a_n)| = |x - y| = d(x, y). \end{aligned}$$

Αυτός ο μετασχηματισμός του  $\mathbb{R}^n$  λέγεται μεταφορά (translation) κατά διάνυσμα  $a$  του  $\mathbb{R}^n$ .

Άσκηση 1.2.4. Το σύνολο των μεταφορών του  $\mathbb{R}^n$  με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων είναι αβελιανή ομάδα. Ποιό είναι το στοιχείο αυτής της ομάδας, που είναι αντίστροφο των  $L_a$ ;

Άσκηση 1.2.5. Το σύνολο των ισομεριών του  $\mathbb{R}^n$  με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων είναι ομάδα, που λέγεται ομάδα ισομεριών του  $\mathbb{R}^n$ .

Θα δείξουμε τώρα ένα Θεώρημα, το οποίο απαντά στο ερώτημα: Ποιές είναι όλες οι ισομερίες του  $\mathbb{R}^n$ ;

Θεώρημα (Ταξινομήση ισομεριών του  $\mathbb{R}^n$ ). Έστω  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  μια ισομετρία. Η  $F$  έχει τη μορφή  
(1.2.4)  $F(x) = x_0 + T(x),$



όπου  $x_0$  είναι ένα σταθερό διάνυσμα του  $\mathbb{R}^n$  και  $T$  ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός του  $\mathbb{R}^n$

Παρατήρηση 1.2.7 Από το Θεώρημα προκύπτει ότι, μια ισομετρία του  $\mathbb{R}^n$  είναι σύνθεση ενός ορθογώνιου μετασχηματισμού ακολουθούμενου από μια μεταφορά. Έτσι, από την (1.2.4) έχουμε ότι:

$$(1.2.5) \quad F(x) = (L_{x_0} \circ T)(x)$$

Ο ορθογώνιος μετασχηματισμός  $T$  λέγεται ορθογώνιος συνιεύ-  
γα της ισομετρίας  $F$ , ενώ η  $L_{x_0}$  λέγεται συνιεύγα μεταφοράς.

Απόδειξη του Θεωρήματος. Θέτουμε  $F(x_0) = x_0$ . Από το γεγονός ότι η  $F$  είναι ισομετρία προκύπτει η σχέση

$$(*) \quad |F(x) - F(y)| = d(F(x), F(y)) = d(x, y) = |x - y|.$$

Ειδικά, για  $y = 0$  η σχέση (\*) δίνει την

$$(**) \quad |F(x) - x_0| = |x|.$$

Θεωρούμε τον μετασχηματισμό  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  που ορίζεται ως  $T(x) = F(x) - x_0$ . Αν δείξουμε ότι ο  $T$  είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός, τότε θα έχουμε τελειώσει και την απόδειξη (γιατί;). Από την παρουσίαση

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (|x|^2 + |y|^2 - |x - y|^2)$$

και τον ορισμό του μετασχηματισμού  $T$  παίρνουμε

$$\langle T(x), T(y) \rangle = \langle F(x) - x_0, F(y) - x_0 \rangle$$

$$= \frac{1}{2} \{ |F(x) - x_0|^2 + |F(y) - x_0|^2 - |(F(x) - x_0) - (F(y) - x_0)|^2 \}$$



$$\underline{\underline{(*)x)} \frac{1}{2} (|x|^2 + |y|^2 - |F(x) - F(y)|^2)}$$

$$\underline{\underline{(*)y)} \frac{1}{2} (|x|^2 + |y|^2 - |x - y|^2) \underline{\underline{\text{ταυτότητα}}} \langle x, y \rangle}$$

Μένει να δείξουμε ότι ο  $T$  είναι γραμμικός μετασχηματισμός έτσι ώστε να είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός. Με εύκολο υπολογισμό και χρησιμοποιώντας τη σχέση  $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$  βρίσκουμε ότι

$$|T(x+y) - T(x) - T(y)|^2 = \langle T(x+y) - T(x) - T(y), T(x+y) - T(x) - T(y) \rangle = 0$$

και

$$|T(\lambda x) - \lambda T(x)|^2 = \langle T(\lambda x) - \lambda T(x), T(\lambda x) - \lambda T(x) \rangle = 0,$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι ο μετασχηματισμός  $T$  είναι γραμμικός.

Επειδή στα επόμενα κεφάλαια μας χρειάζονται μόνο οι ισομετρίες του  $\mathbb{R}^2$  και του  $\mathbb{R}^3$  εις ποίμε και περὶ-  
γότερον για αυτές τις δύο περιπτώσεις.

Οι μόνοι ορθογώνιοι  $(2 \times 2)$ -πίνακες είναι οι

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}, \text{ όπου } \theta \in [0, 2\pi).$$

Έτσι κάθε ισομετρία  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  είναι της μορφής

$$(1.2.6) \quad F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} =$$



$$= (x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta + a_1, x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta + a_2)$$

η της μορφής

$$(1.2.7) \quad F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \\ = (x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta + a_1, x_1 \sin \theta - x_2 \cos \theta + a_2).$$

Κάθε ισομετρία του  $\mathbb{R}^3$  είναι της μορφής

$$(1.2.8) \quad F(x_1, x_2, x_3) = \left( \sum_{i=1}^3 a_{1i} x_i + a_1, \sum_{i=1}^3 a_{2i} x_i + a_2, \sum_{i=1}^3 a_{3i} x_i + a_3 \right),$$

όπου ο πίνακας  $A = (a_{ij})$  είναι ορθογώνιος πίνακας, δηλαδή τα διανύσματα στήλες (όμοια για τα διανύσματα γραμμών) του πίνακα είναι μοναδιαία και ανά δυο κάθετα.

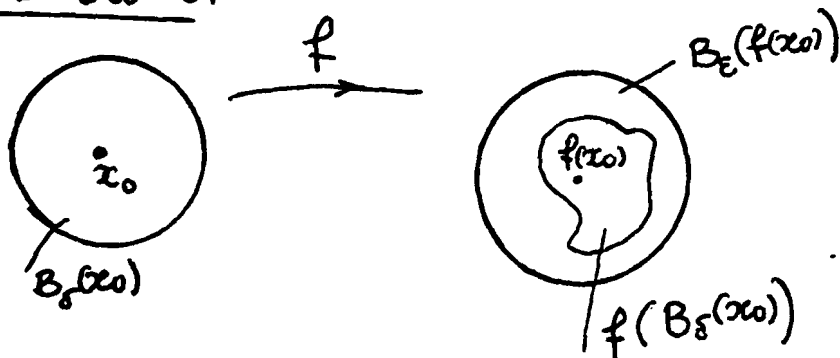
### 1.3. ΣΥΝΕΧΕΙΑ - ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΟΤΗΤΑ

Αν και χρειαζόμαστε μόνο τις περιπτώσεις  $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$  και  $\mathbb{R}^3$  θα ευχηθήσουμε απεικονίσεις του  $\mathbb{R}^n$  στον  $\mathbb{R}^m$ , όπως και στις προηγούμενες παραγράφους. Στα επόμενα το  $U \subset \mathbb{R}^n$  θα αναφέρεται για ένα ανοικτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$ . Έστω  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  μια απεικόνιση με συνιστώσες  $f_1, \dots, f_m$ . Δηλαδή, για  $x = (x_1, \dots, x_n)$  έχουμε  $f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$ .



Σημειώνουμε ότι μια απεικόνιση  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  λέγεται συνεχής (continuous) στο σημείο  $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in U$  αν δθέντος  $\varepsilon > 0$ , υπάρχει  $\delta > 0$  (που γενικά εξαρτάται από τα  $x_0$  και  $\varepsilon$ ) τέτοιο ώστε,  $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$ . Δηλαδή, αν  $(x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2 < \delta^2$  τότε  $|f(x_1, \dots, x_n) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)| < \varepsilon$ .

Διασώστικά αυτό σημαίνει ότι σημεία αρκούντως κοντά στο  $f(x_0)$  είναι εικόνες σημείων, αρκούντως κοντά στο  $x_0$ . Αν η  $f$  είναι συνεχής σε κάθε σημείο  $x \in U$ , τότε η  $f$  λέγεται συνεχής στο  $U$ .



Επειδή,

$$|f(x_1, \dots, x_n) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)|^2 = (f_1(x_1, \dots, x_n) - f_1(x_1^0, \dots, x_n^0))^2 + \dots + (f_m(x_1, \dots, x_n) - f_m(x_1^0, \dots, x_n^0))^2$$

η παρακάτω πρόταση είναι εύκολη συνέπεια του ορισμού της συνέχειας.

Πρόταση 1.3.1. Η  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  είναι συνεχής στο  $U$ , αν και μόνο αν, οι συνιστώσες  $f_i: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i=1, \dots, m$  είναι συνεχείς στο  $U$ .



Άσκηση 1.3.1: Έστωσαν  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  και  $g: V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  συνεχείς απεικονίσεις, όπου  $U$  και  $V$  είναι, αντίστοιχα, ανοικτά υποσύνολα του  $\mathbb{R}^n$  και  $\mathbb{R}^m$  με  $f(U) \subset V$ . Τότε η σύνθεση  $g \circ f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  είναι συνεχής απεικόνιση.

Αρκεί γορευ δα έχουμε απεικονίσεις οριζόμενες σε ευκλείδη σύνολα (όχι κατ'ανάγκη ανοικτά) του  $\mathbb{R}^n$ . Για τέτοιες απεικονίσεις η συνέχεια δίνεται στον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 1.3.2: Έστω  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  μια απεικόνιση, όπου  $A$  είναι περαίο υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$ . Η  $f$  θα λέγεται συνεχής στο  $A$ , αν υπάρχει ανοικτό υποσύνολο  $U$  του  $\mathbb{R}^n$  με  $A \subset U$  και συνεχής απεικόνιση  $\bar{f}: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , τέτοια ώστε  $\bar{f}|_A = f$ . Με άλλα λόγια, η  $f$  είναι συνεχής στο  $A$  αν είναι περιορισμός μιας συνεχούς απεικόνισης, η οποία είναι οριζόμενη σε ένα ανοικτό υποσύνολο που περιέχει το  $A$ .

Μια συνεχής απεικόνιση  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow f(A) \subset \mathbb{R}^m$  η οποία είναι αμφιμονοσήμαντη (1-1) και έχει συνεχή αντίστροφη  $f^{-1}: f(A) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow A \subset \mathbb{R}^n$  θα λέγεται ομοιομορφισμός (homeomorphism) του  $A$  επί του  $f(A)$ . Τα σύνολα  $A$  και  $f(A)$  λέγονται σε αυτή τη περίπτωση ομοιομορφικά σύνολα (homeomorphic sets).



Παράδειγμα 1.3.3. Η απεικόνιση  $\bar{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  που ορίζεται ως  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 2x_2, 3x_3)$  είναι συνεχής. Τα υποσύνολα,  $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = 1\}$  και  $E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1)^2 + \frac{(x_2)^2}{4} + \frac{(x_3)^2}{9} = 1\}$

δεν είναι ανοικτά υποσύνολα του  $\mathbb{R}^3$ . Η απεικόνιση  $f = \bar{f}|_{S^2} : S^2 \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  είναι ένας ομοιομορφισμός του  $S^2$  στη του  $E$  και συνεχώς τα υποσύνολα  $S^2, E$  είναι ομοιομορφικά.

Έστω τώρα  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  μια πραγματική συνάρτηση  $n$  μεταβλητών, η οποία είναι ορισμένη στο ανοικτό υποσύνολο  $U$  του  $\mathbb{R}^n$ . Θαρούμε πρώτες τις έννοιες: Μερική παραγωγός της  $f$ , μερικές παραγωγές ανώτερης τάξης της  $f$ ,  $f$  είναι διαφορίσιμη στο  $U$ .

Η  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  θα λέγεται διαφορίσιμη συνάρτηση  $C^k$ -τάξης (αντίστοιχα  $C^\infty$ -τάξης) αν έχει συνεχείς μερικές παραγωγούς μέχρι και  $k$ -τάξης (αντίστοιχα, έχει συνεχείς μερικές παραγωγούς κάθε τάξης). Αυτή η έννοια επεκτείνεται και για απεικονίσεις ως εξής: Έστω  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  μια απεικόνιση, που ορίζεται ως  $f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$ , όπου  $f_i: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i=1, \dots, m$  είναι οι συνιστώσες της  $f$ . Η  $f$  θα λέμε ότι είναι διαφορίσιμη απεικόνιση  $C^k$ -τάξης



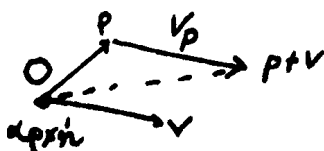
(αντίστοιχα  $C^\infty$ -τάξης), αν οι συνιστώσες  $f_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) της  $f$  είναι  $C^k$ -τάξης (αντίστοιχα,  $C^\infty$ -τάξης).

Παρατήρηση 1.3.4. Συνήθως, στη Διαφορική Γεωμετρία, μια συνάρτηση ή απεικόνιση  $C^\infty$ -τάξης λέγεται λεία (smooth) συνάρτηση ή απεικόνιση. Επίσης μια συνάρτηση ή απεικόνιση  $C^0$ -τάξης είναι μια συνεχής συνάρτηση ή απεικόνιση.

### 1.4. Παραγωγός Απεικόνιση

Μια έννοια πολύ χρήσιμη στη Διαφορική Γεωμετρία είναι αυτή της παραγωγού απεικόνισης μιας απεικόνισης  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Στη συνέχεια θα προχωρήσουμε στον ορισμό αυτής της έννοιας.

Έστω  $p \in \mathbb{R}^n$ . Θεωρούμε όλα τα διατεταγμένα ζεύγη της μορφής  $(p, v)$ , όπου  $v \in \mathbb{R}^n$ . Ένα τέτοιο διατεταγμένο ζεύγος θα λέγεται εφαπτόμενο διάνυσμα (tangent vector) του  $\mathbb{R}^n$  στο σημείο  $p$ . Το εφαπτόμενο διάνυσμα  $(p, v)$  συμβολίζεται συνήθως με  $v_p$ . Το εφαπτόμενο διάνυσμα  $v_p$  θα παριστάνεται με ένα διάνυσμα, που αρχίζει από το  $p$  και κλείνει στο  $p+v$ .



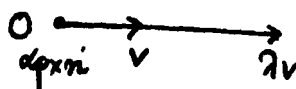
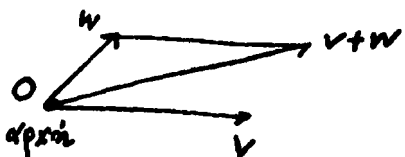
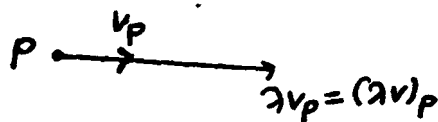
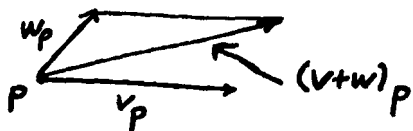


Παρατήρηση 1.4.1. Αν  $v$  είναι ένα διάνυσμα του  $\mathbb{R}^n$  τότε το εγαστόμενο διάνυσμα  $v_p$  είναι το διάνυσμα  $v$  αν μεταφερθεί παράλληλα στον εαυτό του, έτσι ώστε να αποκτήσει ως αρχή το  $p$ .

Το σύνολο όλων των εγαστομένων διανυσμάτων του  $\mathbb{R}^n$  στο σημείο  $p$  θα συμβολίζεται με  $T_p \mathbb{R}^n$ . Στο σύνολο  $T_p \mathbb{R}^n$  ορίζουμε άδρροισμα και αριθμητικό πολλαπλασιασμό με τις σχέσεις

$$(1.4.1) \quad v_p + w_p \stackrel{op}{=} (v+w)_p, \quad v_p, w_p \in T_p \mathbb{R}^n$$

$$(1.4.2) \quad \lambda v_p \stackrel{op}{=} (\lambda v)_p, \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } v_p \in T_p \mathbb{R}^n$$



Είναι εύκολο να διαπιστώσει κάποιος (πώς;) ότι το σύνολο  $T_p \mathbb{R}^n$  εφοδιασμένο με αυτές τις δυο πράξεις είναι πραγματικός διανυσματικός χώρος διάστασης  $n$ . Μια βάση αυτού του χώρου, που λέγεται συνήθως βάση του  $T_p \mathbb{R}^n$ , είναι τα διανύσματα  $(e_1)_p, \dots, (e_n)_p$ , όπου  $e_1, \dots, e_n$  είναι η συνήθης βάση του  $\mathbb{R}^n$ .





Παρατήρηση 1.4.2. Ο διανυσματικός χώρος  $T_p \mathbb{R}^n$  είναι ισόμορφος με τον  $\mathbb{R}^n$ . Πραγματικά, η απεικόνιση  $v_p \rightarrow v$  είναι γραμμική, 1-1 και επί. Δηλαδή, πρόκειται περί ενός ισομορφισμού.

Παρατήρηση 1.4.3. Στο διανυσματικό χώρο  $T_p \mathbb{R}^n$  μπορούμε να ορίσουμε εξωτερικό γινόμενο από αυτό του  $\mathbb{R}^n$ . Ορίζουμε  $\langle v_p, w_p \rangle \stackrel{\text{op}}{=} \langle v, w \rangle$ . Δηλαδή, για να βρούμε το εξωτερικό γινόμενο των  $v_p, w_p$ , βρίσκουμε το εξωτερικό γινόμενο των  $v, w$  ως διανύσματα του Ευκλείδειου χώρου  $\mathbb{R}^n$ . Αναλόγως ορίζεται και το εξωτερικό γινόμενο στο  $T_p \mathbb{R}^3$ . Δηλαδή,  $v_p \times w_p \stackrel{\text{op}}{=} (v \times w)_p$ .

Ο πραγματικός διανυσματικός χώρος  $T_p \mathbb{R}^n$  λέγεται εφαπτόμενος χώρος (tangent space) του  $\mathbb{R}^n$  στο  $p$ . Το σύνολο  $T\mathbb{R}^n = \bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} T_p \mathbb{R}^n$ , δηλαδή το σύνολο όλων των

εφαπτόμενων διανυσμάτων σε όλα τα σημεία του  $\mathbb{R}^n$  λέγεται εφαπτομένη δέσμη (tangent bundle) του  $\mathbb{R}^n$ . Ειδικά, αν  $U \subset \mathbb{R}^n$  είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$ , τότε το σύνολο  $TU = \bigcup_{p \in U} T_p \mathbb{R}^n$  λέγεται εφαπτομένη δέσμη του  $U$ .



Θεωρούμε μια διαφορίσιμη συνάρτηση  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .  
Έστωσαν  $p \in U$  και  $v_p \in T_p \mathbb{R}^n$ . Ο πραγματικός αριθμός

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t} = \left. \frac{d}{dt} f(p+tv) \right|_{t=0}$$

λέγεται παραίγωγος της  $f$  στο σημείο  $p$  κατά τη διεύθυνση  
του  $v_p$  και συμβολίζεται με  $D_{v_p} f(p)$  ή  $v_p[f]$ . Εδώ θα  
χρησιμοποιούμε τον δεύτερο συμβολισμό. Να σημειώσουμε  
ότι το διάνυσμα  $v_p$  δεν είναι κατ' ανάγκη μοναδιαίο,  
όπως στον Διαφορικό Λογισμό.

Παρατήρηση 1.4.4. Η συνάρτηση  $f(p+tv)$  είναι μιας  
μεταβλητής και συνδεμένη της διαφορίσιμης συνάρτησης  
 $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  με την λεία απεικόνιση  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , που  
ορίζεται ως  $\gamma(t) = p+tv$ . Το  $I$  είναι ένα κατάλληλο  
ανοικτό διάστημα της πραγματικής ευθείας, γύρω από το μηδέν,  
έτσι ώστε το σημείο  $p+tv$  να είναι στο  $U$ .

Παράδειγμα 1.4.5. Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , που ορι-  
ζεται ως  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3^2$ . Θεωρούμε το εφαπτό-  
μενο διάνυσμα  $(1, 1, 1)_p$ , όπου  $p = (-1, 0, 1)$ . Τότε έχουμε  
 $p+tv = (-1, 0, 1) + t(1, 1, 1) = (-1+t, t, 1+t)$

και

$$f(p+tv) = (-1+t)^2 + (1+t)^2 = 2t^2 + 2. \text{ Άρα}$$

$$v_p[f] = 4t \Big|_{t=0} = 0.$$



Ισχύει η παρακάτω Πρόταση

Πρόταση 1.4.6 Έστωσαν  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  μια διαφορίσιμη συνάρτηση και  $v_p \in T_p \mathbb{R}^n$ , όπου  $v = (v_1, \dots, v_n)$ . Τότε ισχύει η σχέση

$$(1.4.1) \quad v_p[f] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) v_i,$$

όπου  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$  ( $i=1, \dots, n$ ) είναι οι μερικοί παράγωγοι της  $f$  στο  $p$ .

Απόδειξη. Αν  $p = (p_1, \dots, p_n)$  θα έχουμε

$$p + tv = (p_1 + tv_1, \dots, p_i + tv_i, \dots, p_n + tv_n)$$

και

$$f(p + tv) = f(p_1 + tv_1, \dots, p_i + tv_i, \dots, p_n + tv_n).$$

Με τον κανόνα συνθέσης παραγωγίσιμης παίρνουμε

$$\frac{d}{dt} f(p + tv) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p + tv) v_i.$$

Επομένως

$$v_p[f] = \left. \frac{d}{dt} f(p + tv) \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) v_i.$$

Άσκηση 1.4.1. Έστωσαν  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

δύο διαφορίσιμες συναρτήσεις και  $\alpha, \beta$  πραγματικοί κριθ-μοί. Αν  $v_p, w_p$  είναι δύο εγανώματα διανύσματα του  $\mathbb{R}^n$  στο σημείο  $p$ , τότε ισχύουν οι σχέσεις

$$(1.4.2) \quad v_p[\alpha f + \beta g] = \alpha v_p[f] + \beta v_p[g]$$

$$(1.4.3) \quad (\alpha v_p + \beta w_p)[f] = \alpha v_p[f] + \beta w_p[f]$$

$$(1.4.4) \quad v_p[fg] = v_p[f] \cdot g(p) + f(p) v_p[g].$$



Από την Πρόταση 1.4.6 προκύπτει εύκολα η σχέση  
 (1.4.5)  $(e_i)_p [f] = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ ,  $i=1, \dots, n$   
 όπου  $(e_i)_p$  ( $i=1, \dots, n$ ) είναι η συνήθης βάση του  $T_p \mathbb{R}^n$ .

Ορισμός 1.4.7. Έστω  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  μια απεικόνιση  $C^k$ -  
 τάξης ( $k \geq 1$ ) με συνιστώσες  $f_1, \dots, f_m$ . Δηλαδή,  $f(x_1, \dots, x_n) =$   
 $= (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$ . Η απεικόνιση

$$df_p : T_p \mathbb{R}^n \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}^m, \quad p \in U$$

που ορίζεται ως

$$df_p(v_p) \stackrel{\text{op}}{=} (v_p[f_1], \dots, v_p[f_m])_{f(p)}$$

λέγεται παράγωγος απεικόνιση (derived map) της απεικόνισης  $f$  στο σημείο  $p \in U$ .

Παρατήρηση 1.4.8. Η παράγωγος απεικόνιση της  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$   
 στο σημείο  $p \in U$  συμβολίζεται συχνά και με  $f_{*p}$ . Η παρά-  
 γωγος απεικόνιση στέλνει διανύσματα του  $T_p \mathbb{R}^n$  σε διανύσμα-  
 ρα  $T_{f(p)} \mathbb{R}^m$ .

Από τον ορισμό της παραγωγού απεικόνισης και τη  
 σχέση (1.4.2) προκύπτει (πώς;) ότι η παράγωγος απεικόνιση  
 είναι μια γραμμική απεικόνιση. Ο πίνακας αυτής της  
 γραμμικής απεικόνισης ως προς τις συνήθεις βάσεις  $(e_i)_p, \dots,$   
 $(e_i)_p$  και  $(e_i)_{f(p)}, \dots, (e_m)_{f(p)}$  των  $T_p \mathbb{R}^n, T_{f(p)} \mathbb{R}^m$  συμβολίζεται  
 με  $J_f(p)$  και λέγεται Ιακωβιανός πίνακας (Jacobian matrix)



της  $f$  στο σημείο  $p$ .

Με βάση τον ορισμό της παραγωγού απεικόνισης και τη σχέση (1.4.5) βρίσκουμε

$$df_p((e_i)_p) \stackrel{\text{op}}{=} ((e_i)_p[f_1], \dots, (e_i)_p[f_m])_{f(p)}$$

$$= \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(p), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(p) \right)_{f(p)}$$

όπου  $f_1, \dots, f_m$  είναι οι συνιστώσες της  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

Έτσι ο Ιακωβιανός πίνακας της  $f$  στο σημείο  $p$  είναι ο  $(m \times n)$ -πίνακας

$$J_f(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}$$

Όταν  $m=n$ , η ορίζουσα  $\det J_f(p) = \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(p)$

λέγεται Ιακωβιανή ορίζουσα της  $f$  στο σημείο  $p \in U$ .

Με μορφή πίνακα η παραγωγός απεικόνιση γράφεται ως

$$df_p(v_p) = J_f(p) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \text{ με σημείο εφαρτησης το } f(p).$$

Η απεικόνιση  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  λέγεται κανονική (regular) στο  $p \in U$ , αν η τριζή του Ιακωβιανού πίνακα είναι  $n$ . Αυτό σημαίνει ότι η παραγωγός απεικόνιση  $df_p$ , ως γραμμική



απεικόνιση, είναι αμφιμονοσήμαντη (1-1) και ότι ο χώρος  $df_p(T_p\mathbb{R}^2)$  έχει διάσταση  $n$ .

Παράδειγμα 1.4.9. Έστω μια απεικόνιση  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που ορίζεται ως  $X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$  και η οποία είναι κυλιόκλιμακτον  $C^1$ -τάξης. Εδώ χρησιμοποιούμε ανα τον συμβολισμό  $(x_1, x_2)$  για διατεταγμένες δυάδες του  $\mathbb{R}^2$  τον συμβολισμό  $(u,v)$ . Οι συνιστώσες της απεικόνισης  $X$  είναι οι συναρτήσεις δυο μεταβλητών  $x(u,v)$ ,  $y(u,v)$  και  $z(u,v)$ . Αν  $q = (u_0, v_0) \in U$ , η παράγωγος απεικόνιση  $dX_q: T_q\mathbb{R}^2 \rightarrow T_{X(q)}\mathbb{R}^3$  έχει Ιακωβιανό πίνακα τον

$$J_X(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}.$$

Η παράγωγος απεικόνιση  $dX_q$  είναι αμφιμονοσήμαντη (1-1), δηλαδή η  $X$  είναι κανονική στο  $q$ , αν και μόνο αν ο  $J_X(u_0, v_0)$  είναι τάξης 2. Αυτό σημαίνει ότι μια κυλιόκλιμακτον από τις ορίζουσες

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_0, v_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix}, \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}(u_0, v_0), \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}(u_0, v_0)$$

δεν μηδενίζεται στο σημείο  $q = (u_0, v_0)$ . Στη περίπτωση αυτή ο χώρος  $dX_q(T_q\mathbb{R}^2)$  είναι διαστατος 2, δηλαδή



ένα επίπεδο του  $R^3$  που διέρχεται από το σημείο  $X(q)$ .

Άσκηση 14.2. Έστωσαν  $f: U \subset R^n \rightarrow R^n$  και  $g: V \subset R^m \rightarrow R^k$  δυο απεικονίσεις τάξης  $C^k$  ( $k \geq 1$ ), όπου  $U$  και  $V$  είναι ανοικτά υποσύνολα με  $f(U) \subset V$ . Τότε η απεικόνιση  $g \circ f: U \subset R^n \rightarrow R^k$  είναι τουλάχιστον  $C^k$ -τάξης και ισχύει (1.4.6)

$$d(g \circ f)_p(v_p) = dg_{f(p)}(df_p(v_p)).$$

Στο σημείο αυτό θα αναφέρουμε χωρίς απόδειξη ένα από τα σημαντικότερα θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού γνωστό ως Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης (Inverse function Theorem).

Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης. Έστωσαν  $f: U \subset R^n \rightarrow R^n$  μια απεικόνιση  $C^k$ -τάξης ( $k \geq 1$ ) και  $p \in U$ . Αν η παράγωγος απεικόνιση  $df_p: T_p R^n \rightarrow T_{f(p)} R^n$  είναι αμφιμονοσήμαντη, δηλαδή, ένας ισομορφισμός, τότε υπάρχει μια περιοχή  $V \subset U$  του  $p$  και μια περιοχή  $W$  του  $f(p) \in R^n$ , τέτοιες ώστε η  $f: V \rightarrow W$  έχει αντίστροφη  $f^{-1}: W \rightarrow V$ , που είναι  $C^k$ -τάξης ( $k \geq 1$ ).

Έστω η απεικόνιση  $f: V \subset R^n \rightarrow W \subset R^n$ , που είναι τουλάχιστον  $C^1$ -τάξης, και  $V, W = f(V)$  ανοικτά υποσύνολα του  $R^n$ . Υποθέτουμε ότι η  $f$  είναι αμφιμονοσήμαντη και έχει αντίστροφη τουλάχιστον  $C^1$ -τάξης. Τότε η  $f$  λέγεται





Διαφοροποιήσιμος (diffeomorphism) και τα σύνολα  $V, W$   
Λέγονται Διαφοροποιήσιμα.

Παράδειγμα 1.4.10. Έστω  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ένας γραμμικός μετασχηματισμός του  $\mathbb{R}^n$ . Η παράγωγος απεικόνιση του  $L$  σε ένα σημείο  $p \in \mathbb{R}^n$  βρίσκεται ως εξής: Έστω  $v_p \in T_p \mathbb{R}^n$  ένα εφαπτόμενο διάνυσμα. Οι συνιστώσες του  $L$  είναι οι συναρτήσεις  $L_1, \dots, L_n$ , που ορίζονται ως

$$L_j(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i, \quad j=1, \dots, n$$

Θυμίζουμε ότι,  $L e_k = (a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{nk})$ ,  $k=1, \dots, n$ .

Με τη βοήθεια της πρότασης 1.4.6 θα έχουμε

$$v_p[L_j] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L_j}{\partial x_i}(p) v_i = \sum_{i=1}^n a_{ji} v_i$$

Από τον ορισμό της παράγωγου απεικόνισης βρίσκουμε

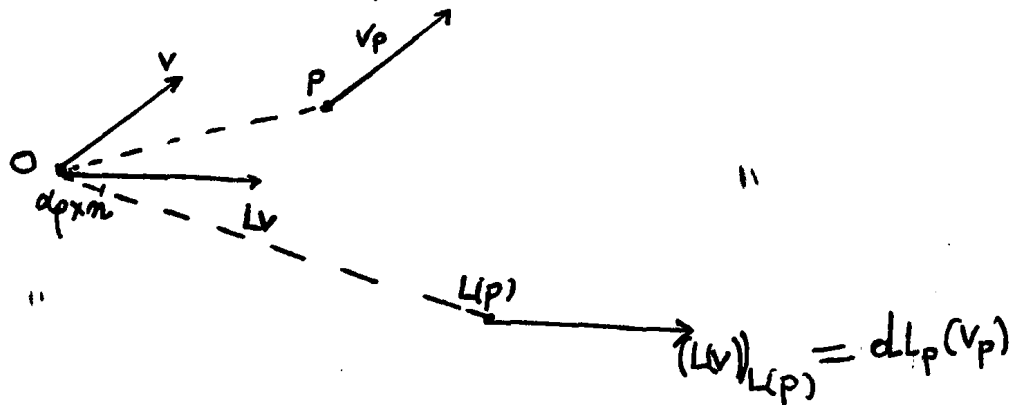
$$\begin{aligned} dL_p(v_p) &= (v_p[L_1], \dots, v_p[L_n])_{L(p)} = \\ &= \left( \sum_{i=1}^n a_{i1} v_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{in} v_i \right)_{L(p)} = (L(v))_{L(p)}. \end{aligned}$$

Συνεπώς η παράγωγος απεικόνιση  $dL_p: T_p \mathbb{R}^n \rightarrow T_{L(p)} \mathbb{R}^n$ , ενός γραμμικού μετασχηματισμού ικανοποιεί τη σχέση  
(1.4.7)  $dL_p(v_p) = (L(v))_{L(p)}$ .

Συμπερασματικά, για να βρούμε την εικόνα του  $v_p$ , βρίσκουμε



στην εικόνα του  $v$  με τον γραμμικό μετασχηματισμό  $L$  και το διάνυσμα  $L(v)$  το μεταφέρουμε παράλληλα στον εαυτό του ώστε να αποκτάει αρχή στο  $L(p)$



Πρόταση 1.4.11. Έστω  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  μια ισομετρία του  $\mathbb{R}^n$  με ορθογώνια συνιστώσα  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Τότε  
 (1.4.8)  $dF_p(v_p) = (T(v))_{F(p)}$ , για  $v_p \in T_p \mathbb{R}^n$ .

Απόδειξη. Σύμφωνα με το θεώρημα ταξινόμησης των ισομετριών έχουμε  $F(x) = T(x) + a$ , όπου  $a = (a_1, \dots, a_n)$  είναι ένα ακέραιο διάνυσμα. Έτσι η  $j$ -συνιστώσα της  $F$  είναι η  $F_j(x_1, \dots, x_n) = T_j(x_1, \dots, x_n) + a_j$ , όπου  $T_j$  είναι η  $j$ -συνιστώσα της ορθογώνιας συνιστώσας  $T$  της ισομετρίας.

Επειδή,  $v_p[F_j] = v_p[T_j]$  βρίσκουμε

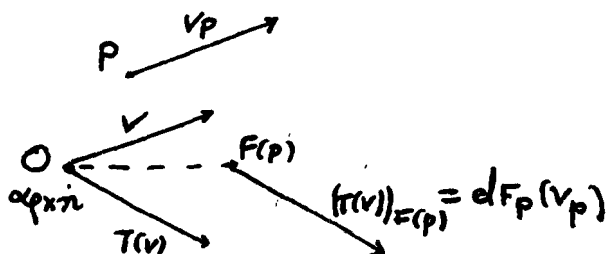
$$dF_p(v_p) \stackrel{\text{σφ.}}{=} (v_p[F_1], \dots, v_p[F_m])_{F(p)}$$

$$= (v_p[T_1], \dots, v_p[T_n])_{F(p)}$$

$$\stackrel{\text{γιατί}}{=} (T(v))_{F(p)}.$$



Παρατήρηση 1.4.12. Για να βρούμε το  $dF_p(v_p)$ , όταν η  $F$  είναι ισομετρία, παίρνουμε το  $v$  και βρίσκουμε το  $T(v)$  με την ορθογώνια συνιστώσα  $T$  της ισομετρίας. Μετά μεταφέρουμε το  $T(v)$  στο  $F(p)$ .



Πορίσμα 1.4.13. Η παράγωγος απεικόνιση  $dF_p$  μιας ισομετρίας διατηρεί τα εσωτερικά γινόμενα. Δηλαδή,  
(1.4.9)  $\langle dF_p(v_p), dF_p(w_p) \rangle = \langle v_p, w_p \rangle$ .

Απόδειξη. Έστω  $T$  η ορθογώνια συνιστώσα της ισομετρίας. Με την πρόταση 1.4.11 και το γεγονός ότι ο  $T$  είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός (ευνενώς διατηρεί τα εσωτερικά γινόμενα) έχουμε

$$\begin{aligned} \langle dF_p(v_p), dF_p(w_p) \rangle &= \langle (T(v))_{F(p)}, (T(w))_{F(p)} \rangle \stackrel{\text{διαλ.}}{=} \langle T(v), T(w) \rangle \\ &= \langle v, w \rangle \stackrel{\text{ισομ.}}{=} \langle v_p, w_p \rangle. \end{aligned}$$

Θα συνεχίσουμε με μερικά συμπράγματα για ισομετρίες του  $\mathbb{R}^3$ , αφού αυτές θα χρησιμοποιήσουμε στα δυο επόμενα κεφάλαια.



Μια βάση ενός Ευκλείδειου χώρου λέγεται ορθοκανονική βάση (orthonormal base), αν αποτελείται από μοναδιαία διανύσματα τα οποία είναι ανά δυο κάθετα.

Λήμμα 1.4.14 Έστωσαν  $v_1, v_2, v_3$  και  $w_1, w_2, w_3$  δυο ορθοκανονικές βάσεις του Ευκλείδειου χώρου  $\mathbb{R}^3$ . Υπάρχει ένας μοναδικός ορθογώνιος μετασχηματισμός  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , τέτοιος ώστε

$$T(v_i) = w_i, \quad i=1,2,3.$$

Απόδειξη. Γράφουμε τα διανύσματα των βάσεων ως προς τη συνήθη βάση  $e_1, e_2, e_3$  του  $\mathbb{R}^3$ . Έστωσαν

$$v_i = \sum_{j=1}^3 a_{ji} e_j \quad \text{και} \quad w_i = \sum_{j=1}^3 b_{ji} e_j, \quad i=1,2,3.$$

Οι πίνακες  $A=(a_{ij})$ ,  $B=(b_{ij})$ , που λέγονται και πίνακες μεταβάσεως από τη συνήθη βάση στις δοθείσες, είναι ορθογώνιοι πίνακες. Σε μορφή πινάκων θα έχουμε

$$Ae_i = v_i \quad \text{και} \quad Be_i = w_i, \quad i=1,2,3$$

και συνεπώς  $e_i = A^t v_i$ ,  $e_i = B^t w_i$ , όπου  $A^t, B^t$  είναι οι ανάστροφοι (transpose) πίνακες των  $A$  και  $B$ , αντίστοιχα. Έτσι έχουμε,  $B^t w_i = A^t v_i$ . Δηλαδή  $BA^t v_i = w_i$ ,  $i=1,2,3$ .

Ο ορθογώνιος μετασχηματισμός  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  με πίνακα των  $BA^t$  είναι ο ζητούμενος. Από τη Γραμμική Άλγεβρα γνωρίζουμε ότι είναι και μοναδικός.

Παρατήρηση. 1.4.15. Ο ορθογώνιος μετασχηματισμός  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$



του λήμματος, σε συνεταγμένες γράφεται ως

$$(1.4.10) \quad T(x_1, x_2, x_3) = BA^t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Θεώρημα 1.4.16. Έστωσαν  $p = (p_1, p_2, p_3)$ ,  $q = (q_1, q_2, q_3)$  δυο σημεία του  $\mathbb{R}^3$  και  $(u_1)_p, (u_2)_p, (u_3)_p$ ,  $(w_1)_q, (w_2)_q, (w_3)_q$  δυο ορθοκανονικές βάσεις των  $T_p\mathbb{R}^3$  και  $T_q\mathbb{R}^3$ , αντίστοιχα. Τότε, υπάρχει ακριβώς μια ισομετρία  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , τέτοια ώστε  $F(p) = q$  και  $dF_p(u_i)_p = (w_i)_q$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Απόδειξη. Έστω  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  μια ισομετρία του  $\mathbb{R}^3$  με τις υποθέσεις του θεωρήματος. Η ισομετρία γράφεται ως  $F(x_1, x_2, x_3) = T(x_1, x_2, x_3) + (a_1, a_2, a_3)$ , όπου  $T$  είναι η ορθογώνια συνιστώσα αυτής. Πρέπει,  $q = F(p) = T(p) + (a_1, a_2, a_3)$ . Δηλαδή,  $(a_1, a_2, a_3) = q - T(p)$ . Από την άλλη πλευρά, σύμφωνα με την πρόταση 1.4.11 θα έχουμε

$$(w_i)_q \stackrel{\text{πρ. 1.4.11}}{=} dF_p((u_i)_p) \stackrel{\text{πρ. 1.4.11}}{=} (T(u_i))_{F(p)=q}, \quad i = 1, 2, 3$$

Δηλαδή,  $Tu_i = w_i$ , όπου  $T$  είναι ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός. Έτσι έχουμε βρει την ορθογώνια συνιστώσα και τη συνιστώσα μεταφοράς αυτής της ισομετρίας, που ορίζεται κατά μονοσήμαντο τρόπο.

Τρόπος κατασκευής της ισομετρίας του Θεωρήματος 1.4.16.

Βρισκόμαστε τους πίνακες μεταβάσεων από τη συνήθη βάση στις



βάσεις που δόθηκαν. Θεωρούμε τον ορθογώνιο μετασχηματισμό  
 $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  με πίνακα (ως προς τη συνήθη βάση) τον  $BA^t$ .

Η ισομετρία με τις υποθέσεις του θεωρήματος περιγράφεται ως

$$F(x_1, x_2, x_3) = BA^t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + q - BA^t \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα 1.417. Έστωσαν η ορθοκανονική βάση

$$v_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), v_2 = (-1, 0, 0), v_3 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ στο σημείο } p = (1, 0, 0)$$

και

$$w_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), w_2 = (-1, 0, 0), w_3 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ στο σημείο } q = (1, 1, 0).$$

Η ισομετρία του  $\mathbb{R}^3$  που μεταφέρει την πρώτη ορθοκανονική βάση στη δεύτερη βάση και το σημείο  $p$  στο σημείο  $q$  βρίσκεται ως εξής: Οι πίνακες μετασχηματισμού από τη συνήθη βάση στις δοθείσες είναι οι

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Συνεπώς

$$BA^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

και η ζητούμενη ισομετρία  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , ορίζεται ως

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 + 1, -x_3).$$



Όπως έχουμε σημειώσει στη παράγραφο 1.2 οι πίνακες των ορθογώνιων μετασχηματισμών έχουν ορίζουσα  $\pm 1$ . Γνωρίζουμε, επιπλέον, ότι κάθε ισομετρία είναι ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός ακολουθούμενος από μια μεταφορά. Ονομάζουμε πρόσημο της ισομετρίας  $F$  και συμβολίζουμε με  $\text{sign} F$  το  $+1$  (αντίστοιχα το  $-1$ ) αν η ορθογώνια συνιστώσα της έχει ορίζουσα  $+1$  (αντίστοιχα  $-1$ ).

Πρόταση 1.4.18 Έστωσαν  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  μια ισομετρία και  $(u_1)_p, (u_2)_p, (u_3)_p$  μια βάση του  $T_p \mathbb{R}^3$ . Ισχύει η σχέση

$$(1.4.11) \quad \langle dF_p((u_1)_p), dF_p((u_2)_p) \times dF_p((u_3)_p) \rangle = \text{sign} F \langle (u_1)_p, (u_2)_p \times (u_3)_p \rangle.$$

Απόδειξη. Γράφουμε την ισομετρία  $F$  ως  $F(x_1, x_2, x_3) = T(x_1, x_2, x_3) + (a_1, a_2, a_3)$ , όπου  $T$  είναι η ορθογώνια συνιστώσα της. Έστω  $(\tau_{ij})$  ο πίνακας του  $T$ , ως προς τη συνήθη βάση, ο οποίος είναι ορθογώνιος πίνακας. Γράφουμε τα διανύσματα της δοθείσας βάσης ως προς τη συνήθη βάση του  $T_p \mathbb{R}^3$ . Έστω  $(u)_p = \sum_{j=1}^3 a_{ji} (e_j)_p$ . Τότε

$$\begin{aligned} dF_p((u)_p) &= \sum_{j=1}^3 a_{ji} dF_p((e_j)_p) \stackrel{\text{πρότ. 1.4.11}}{=} \sum_{j=1}^3 a_{ji} \left( dF_p(T(e_j)_p) \right)_{F(p)} = \\ &= \sum_{j=1}^3 a_{ji} \left( \sum_{k=1}^3 \tau_{kj} e_k \right)_{F(p)} = \sum_{j,k=1}^3 \tau_{kj} a_{ji} (e_k)_{F(p)} \\ &= \sum_{k=1}^3 \left( \sum_{j=1}^3 \tau_{kj} a_{ji} \right) (e_k)_{F(p)}. \end{aligned}$$



Άρα λοιπόν, οι συντεταγμένες του  $dF_p(v_i)_p$  ως προς τη συνήθη βάση του  $T_{F(p)}\mathbb{R}^3$  είναι οι

$$\sum_{j=1}^3 \tau_{1j} a_{j1}, \quad \sum_{j=1}^3 \tau_{2j} a_{j1}, \quad \sum_{j=1}^3 \tau_{3j} a_{j1}$$

Σύμφωνα με την άσκηση 1.1.4 (ii) έχουμε ότι το πρώτο μέλος της σχέσης (1.4.11) ισούται με

$$\det \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^3 \tau_{1j} a_{j1} & \sum_{j=1}^3 \tau_{2j} a_{j1} & \sum_{j=1}^3 \tau_{3j} a_{j1} \\ \sum_{j=1}^3 \tau_{1j} a_{j2} & \sum_{j=1}^3 \tau_{2j} a_{j2} & \sum_{j=1}^3 \tau_{3j} a_{j2} \\ \sum_{j=1}^3 \tau_{1j} a_{j3} & \sum_{j=1}^3 \tau_{2j} a_{j3} & \sum_{j=1}^3 \tau_{3j} a_{j3} \end{pmatrix} = \det(\tau_{ij}) \det(a_{ij})$$

Όμως  $\text{sign} F = \det(\tau_{ij})$  (εξ ορισμού) και  $\det(a_{ij}) = \langle (v_1)_p, (v_2)_p \times (v_3)_p \rangle$ .  
Συνεπώς η σχέση (1.4.11) αποδείχθηκε.

Παρατήρηση 1.4.19. Η σχέση (1.4.11) υποδηλώνει ότι η ισομετρία  $F$  διατηρεί τους προσανατολισμούς των βάσεων αν  $\text{sign} F = +1$  (orientation preserving isometry) και αντικατρέπει αυτούς αν  $\text{sign} F = -1$  (orientation reversing isometry).

Πρόταση 1.4.20. Έστωσαν  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  μια ισομετρία και  $v_p, w_p \in T_p\mathbb{R}^3$  δυο εφαπτόμενα διανύσματα. Τότε ισχύει η σχέση

$$(1.4.12) \quad dF_p(v_p \times w_p) = \text{sign} F \, dF_p(v_p) \times dF_p(w_p)$$





Απόδειξη Έστω  $T$  η ορθογώνια συνιστώσα της ισομετρίας  $F$ .  
 Θέτουμε  $Te_1 = \sigma_1$ ,  $Te_2 = \sigma_2$  και  $Te_3 = \sigma_3$ , όπου  $e_1, e_2, e_3$  είναι  
 η συνήθης βάση. Προφανώς ο αριθμός  $\langle Te_1, Te_2 \times Te_3 \rangle = \langle \sigma_1, \sigma_2 \times \sigma_3 \rangle$   
 είναι η ορίζουσα του πίνακα του ορθογώνιου μετασχηματισμού  $T$ ,  
 δηλαδή αυτός ο αριθμός ισούται με  $\text{sign} F$ . Επίσης, επειδή η  
 βάση  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  είναι ορθοκανονική (γιατί;) ισχύουν οι σχέσεις

$$(1.4.13) \quad \sigma_1 \times \sigma_2 = (\text{sign} F) \sigma_3, \quad \sigma_2 \times \sigma_3 = (\text{sign} F) \sigma_1, \quad \sigma_3 \times \sigma_1 = (\text{sign} F) \sigma_2.$$

Γράφουμε τα διανύσματα  $v_p, w_p$  ως προς τη συνήθη βάση.  
 Έστωσαν  $v_p = \sum_{i=1}^3 v_i(e_i)_p$  και  $w_p = \sum_{i=1}^3 w_i(e_i)_p$ . Τότε

$$v_p \times w_p = (v \times w)_p = c_1(e_1)_p + c_2(e_2)_p + c_3(e_3)_p, \quad \text{όπου}$$

$$c_1 = v_2 w_3 - v_3 w_2, \quad c_2 = v_3 w_1 - v_1 w_3 \quad \text{και} \quad c_3 = v_1 w_2 - v_2 w_1.$$

Επειδή η  $dF_p$  είναι γραμμική και λόγω της πρότασης 1.4.11  
 έχουμε

$$dF_p(v_p) = \sum_{i=1}^3 v_i (\sigma_i)_{F(p)}, \quad dF_p(w_p) = \sum_{i=1}^3 w_i (\sigma_i)_{F(p)}$$

και

$$dF_p(v_p \times w_p) = \sum_{i=1}^3 c_i (\sigma_i)_{F(p)}$$

Υπολογίζοντας το  $dF_p(v_p) \times dF_p(w_p)$  κάνοντας χρήση των  
 σχέσεων (1.4.13) φθάνουμε στην απόδειξη της πρότασης.

Άσκηση 1.4.3. Δίνεται το διάνυσμα  $e_3 = (0, 0, 1)$ . Ορι-  
 ζουμε τον μετασχηματισμό  $T(x, y, z) \stackrel{\text{of}}{=} e_3 \times (x, y, z) + \langle (x, y, z), e_3 \rangle e_3$   
 Να δείχθει ότι πρόκειται για ορθογώνιο μετασχηματισμό. Μπο-  
 ρει να περιγραφεί γεωμετρικά αυτός ο μετασχηματισμός;



Άσκηση 1.4.4. Στο σημείο  $p = (0, 1, 0)$  δίνονται η ορθοκανονική βάση  $(V_1)_p = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})_p$ ,  $(V_2)_p = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})_p$ ,  $(V_3)_p = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})_p$ .  
 Ομοίως στο σημείο  $q = (0, -1, 1)$  δίνονται η ορθοκανονική βάση  $(W_1)_q = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})_q$ ,  $(W_2)_q = (0, 1, 0)_q$ ,  $(W_3)_q = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})_q$ .  
 Να βρεθεί η ισομετρία που μεταφέρει το σημείο  $p$  στο  $q$  και τις αντίστοιχες ορθοκανονικές βάσεις.

Άσκηση 1.4.5. Κάθε ισομετρία είναι διαφορομορφισμός.

## 1.5 ΔΙΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΚΑΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

Στη παράγραφο αυτή θα παραδέσουμε γρήγορα κάποια στοιχεία από τις διγραμμικές και τετραγωνικές μορφές σε Ευκλείδειους χώρους. Έστω  $V$  ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο  $\langle, \rangle$ . Θεωρούμε, δηλαδή στο Ευκλείδειο χώρο  $(V, \langle, \rangle)$ .

Ορισμός 1.5.1. Μια απεικόνιση  $\Phi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται διγραμμική μορφή (bilinear form) στον  $V$  αν πληροί τις ιδιότητες

$$(1.5.1) \quad \Phi(x_1 + x_2, y) = \Phi(x_1, y) + \Phi(x_2, y), \quad \Phi(\lambda x, y) = \lambda \Phi(x, y)$$

$$(1.5.2) \quad \Phi(x, y_1 + y_2) = \Phi(x, y_1) + \Phi(x, y_2), \quad \Phi(x, \lambda y) = \lambda \Phi(x, y)$$

Δηλαδή, η  $\Phi$  είναι γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή.

Η διγραμμική μορφή λέγεται συμμετρική (symmetric)



αν πληροί και την ιδιότητα

$$(15.3) \quad \Phi(x, y) = \Phi(y, x), \text{ για όλα τα } x, y \in V.$$

Εστωσαν  $\{e_1, \dots, e_n\}$  μια βάση του διανυσματικού χώρου  $V$  και  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ ,  $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$  δυο διανύσματα του  $V$ . Αν

$\Phi$  είναι μια διγραμμική μορφή στον  $V$ , τότε

$$\Phi(x, y) = \sum_{i, j=1}^n x_i y_j \Phi(e_i, e_j).$$

Θέτοντας  $\Phi(e_i, e_j) = a_{ij}$ , έχουμε την έκφραση

$$(15.4) \quad \Phi(x, y) = \sum_{i, j=1}^n a_{ij} x_i y_j.$$

Ο  $n \times n$  πίνακας  $A = (a_{ij})$  λέγεται πίνακας της διγραμμικής μορφής  $\Phi$ , ως προς τη βάση  $\{e_1, \dots, e_n\}$ . Είναι φανερό

ότι ο πίνακας  $A$  είναι συμμετρικός, αν η διγραμμική μορφή  $\Phi$  είναι συμμετρική.

Εστω τώρα  $\{w_1, \dots, w_n\}$  μια άλλη βάση του  $V$ , που συνδέεται με την  $\{e_1, \dots, e_n\}$  με τις σχέσεις

$$w_i = \sum_{j=1}^n \gamma_{ji} e_j, \quad i = 1, \dots, n$$

Θαυρούμε τον πίνακα  $\Gamma = (\gamma_{ij})$  μετάβασης από τη μια βάση στην άλλη. Επειδή,

$$\Phi(w_k, w_\ell) = \sum_{i, j=1}^n \gamma_{ik} \gamma_{j\ell} \Phi(e_i, e_j) = \sum_{i, j=1}^n \gamma_{ik} \gamma_{j\ell} a_{ij},$$

συμπραίνουμε ότι ο πίνακας  $B = (b_{ij})$  της  $\Phi$  ως προς τη βάση  $\{w_1, \dots, w_n\}$  συνδέεται με τον πίνακα  $A$



με τη σχέση

$$(1.5.5) \quad B = \Gamma^t A \Gamma,$$

όπου  $\Gamma^t$  είναι ο αντίστροφος πίνακας του  $\Gamma$ .

Ορισμός 1.5.2. Έστω  $\Phi$  μια συμμετρική διγραφήσιμη μορφή επί του  $V$ . Η συνάρτηση  $\Phi(x,x)$ , η οποία είναι μια συνάρτηση  $V \rightarrow \mathbb{R}$ , λέγεται (επιμορφωμένη) τετραγωνική μορφή (quadratic form)

Από μια συμμετρική διγραφήσιμη μορφή  $\Phi(x,y)$  προκύπτει μια τετραγωνική μορφή  $\Phi(x,x)$ . Επειδή

$$(1.5.6) \quad \Phi(x,y) = \frac{1}{2} \left[ \Phi(x+y, x+y) - \Phi(x,x) - \Phi(y,y) \right]$$

συμπεραίνουμε ότι μια τετραγωνική μορφή  $\Phi(x,x)$  προέρχεται από μια και μόνο μια συμμετρική διγραφήσιμη μορφή, η οποία ονομάζεται και πολική της τετραγωνικής μορφής.

Ορισμός 1.5.3. Η τετραγωνική μορφή  $\Phi(x,x)$  λέγεται θετικά ορισμένη (αντίστοιχα αρνητικά ορισμένη), αν για κάθε  $x \neq 0$  ισχύει  $\Phi(x,x) > 0$  (αντίστοιχα  $\Phi(x,x) < 0$ ). Η  $\Phi(x,x)$  λέγεται θετικά ημιορισμένη (αντίστοιχα αρνητικά ημιορισμένη) αν για κάθε  $x \neq 0$  ισχύει  $\Phi(x,x) \geq 0$  (αντίστοιχα  $\Phi(x,x) \leq 0$ ). Τέλος λέγεται αίριστη, αν η  $\Phi(x,x)$  παίρνει θετικές και



αρνητικές τιμές ανάλογα με το  $x$ .

Θεωρούμε ένα γραμμικό μετασχηματισμό  $L: V \rightarrow V$  του Ευκλείδειου χώρου  $V$ . Ο μετασχηματισμός  $L$  θα λέγεται αυτοπροσηρημένος (self-adjoint) αν πληροί τη σχέση (1.5.7)

$$\langle Lv, w \rangle = \langle v, Lw \rangle, \text{ για όλα τα } v, w \in V.$$

Είναι αμέσως φανερό ότι ο πίνακας  $A = (a_{ij})$  ενός αυτοπροσηρημένου μετασχηματισμού, ως προς μια ορθοκανονική βάση  $\{e_1, \dots, e_n\}$  του  $V$  είναι συμμετρικός. Πραγματικά, αφού  $a_{ij} = \langle Ae_j, e_i \rangle = \langle e_j, Ae_i \rangle = \langle Ae_i, e_j \rangle = a_{ji}$ .

Στη συνέχεια θα διαπιστώσουμε ότι στον Ευκλείδειο χώρο  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των αυτοπροσηρημένων γραμμικών απεικονίσεων και των συμμετρικών διγραμμικών απεικονίσεων. Πραγματικά, η σχέση

$$(1.5.8) \quad \Phi(v, w) = \langle Lv, w \rangle$$

δείχνει (γιατί;) ότι από μια συμμετρική διγραμμική μορφή  $\Phi(v, w)$  βρίσκουμε ένα μοναδικό αυτοπροσηρημένο μετασχηματισμό και αντίστροφα.

Ορισμός 1.5.4: Έστω ο γραμμικός μετασχηματισμός  $L: V \rightarrow V$ . Ένα μη μηδενικό διάνυσμα  $v \in V$  λέγεται ιδιοδιάνυσμα (eigenvector) του  $L$ , με αντίστοιχη ιδιο-



τιμή (eigenvalue) του πραγματικού αριθμού  $\lambda$ , αν  $Lv = \lambda v$ .

Παρατήρηση 1.5.5. Προκειμένου για αυτοπροσηρμημένους γραμμικούς μετασχηματισμούς  $L: V \rightarrow V$  του Ευκλείδειου χώρου  $V$  ισχύει το εξής: Έστωσαν  $v, w \in V$  ιδιοδιανύσματα με αντίστοιχες ιδιοτιμές  $\lambda, \mu$ . Τότε  $\lambda = \mu$  ή  $\langle v, w \rangle = 0$  (δηλαδή τα  $v, w$  είναι κάθετα). Πραγματικά, από την  $\langle Lv, w \rangle = \langle v, Lw \rangle$  έχουμε  $(\lambda - \mu)\langle v, w \rangle = 0$ , από όπου προκύπτει ο ισχυρισμός.

Το επόμενο Θεώρημα αποδεικνύεται, μόνο για λόγους απλότητας, στην περίπτωση Ευκλείδειων χώρων  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  διάστασης 2.

Θεώρημα 1.5.6. Έστωσαν  $L: V \rightarrow V$  ένας αυτοπροσηρμημένος γραμμικός μετασχηματισμός και η πεπραγμένη μορφή  $\Phi(v) = \langle Lv, v \rangle$ . Αν  $k_1, k_2$  είναι η μέγιστη τιμή και η ελάχιστη τιμή της  $\Phi(v)$  επί του συνόλου  $S = \{v \in V : |v| = 1\}$ , τότε υπάρχει ορθοκανονική βάση  $\{e_1, e_2\}$  του  $V$ , τέτοια ώστε να ισχύουν οι σχέσεις

$$Le_1 = k_1 e_1, \quad Le_2 = k_2 e_2.$$

Απόδειξη. Έστωσαν  $k_1$  η μέγιστη τιμή της  $\Phi(v)$  επί του συνόλου  $S$  και  $e_1 \in S$  τέτοιο ώστε  $\Phi(e_1) = k_1$ . Θεωρούμε  $e_2 \in S$ , έτσι



ώστε η βάση  $\{e_1, e_2\}$  να είναι ορθοκανονική. Θα δείξουμε πως αυτή η βάση πληροί τις απαιτήσεις του θεωρήματος. Γράφοντας το  $v \in V$  με  $|v|=1$  ως  $v = xe_1 + ye_2$ , έχουμε

$$\Phi(x, y) = k_1 x^2 + 2\lambda xy + \mu y^2, \quad x^2 + y^2 = 1$$

όπου  $\lambda = \langle Le_1, e_2 \rangle = \langle e_1, Le_2 \rangle$  και  $\mu = \Phi(e_2)$ .

Η συνάρτηση  $\Phi(x, y)$  παίρνει εκ κατασκευής τη μέγιστη τιμή της στο σημείο  $(1, 0)$  (δηλαδή,  $x=1$  και  $y=0$ ). Με βάση αυτό και χρησιμοποιώντας πολλαπλασιασμό του Lagrange για την  $\Phi(x, y)$

με τη συνθήκη  $x^2 + y^2 = 1$  βρίσκουμε  $\lambda = 0$ . Έτσι η  $\Phi(x, y)$

γίνεται  $\Phi(x, y) = k_1 x^2 + \mu y^2$ , όπου βέβαια  $\mu = \Phi(e_2)$ . Όμως

$k_1 \geq \mu$  και συνεπώς  $\Phi(x, y) \geq \mu(x^2 + y^2) = \mu$ , δηλαδή το  $\mu$

είναι η ελάχιστη τιμή της  $\Phi(v)$  επί του  $S$ , άρα  $\mu = k_2$ .

Επιπρόσθετο  $\lambda = \langle Le_1, e_2 \rangle = \langle e_1, Le_2 \rangle = 0$ , συμπεραίνουμε ότι

$$Le_1 = ae_1 \quad \text{και} \quad Le_2 = be_2.$$

Όμως  $\Phi(e_1) = \langle Le_1, e_1 \rangle = k_1$ ,  $\Phi(e_2) = \langle Le_2, e_2 \rangle = k_2$ . Άρα,

$a = k_1$ ,  $b = k_2$  και το θεώρημα αποδείχθηκε.

Παρατήρηση 1.5.7. Όταν  $k_1 = k_2 = k$ , τότε από τη γραμμικότητα του  $L$  και την  $v = xe_1 + ye_2$  συνάγουμε ότι  $Lv = kv$  για κάθε  $v \in V$ . Δηλαδή, κάθε διάνυσμα  $v$  είναι ιδιοδιάνυσμα με αντίστοιχη ιδιοτιμή  $k$ .



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ. ΚΑΜΠΥΛΕΣ

### 2.1 Ορισμοί - Παραδείγματα

Θεωρούμε ένα ανοικτό διάστημα  $I = (a, b)$ , όπου μπορεί  $a = -\infty$  ή  $b = \infty$ . Ανάλογα με τους στόχους που θέλει κανείς να πετύχει δίνει και τον κατάλληλο ορισμό καμπύλης. Για μας ο παρακάτω ορισμός είναι ικανοποιητικός:

Ορισμός 2.1.1. Μια απεικόνιση  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$  λέγεται καμπύλη (συμνε)  $C^k$ -τάξης ( $k=0, 1, \dots, \infty$ ) αν οι συνιστώσες της  $\gamma$ , δηλαδή οι συναρτήσεις  $\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)$  έχουν ευ-νεχείς παραγώγους μέχρι και  $k$  τάξης. Η μεταβλητή  $t$  λέγεται παραμέτρος της καμπύλης  $\gamma$ .

Παρατήρηση 2.1.2. (i). Μια καμπύλη  $C^0$ -τάξης είναι μια συνεχής απεικόνιση  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Δηλαδή, οι συνιστώσες  $\gamma_1(t), \gamma_2(t)$  και  $\gamma_3(t)$  είναι συνεχείς συναρτήσεις.

(ii). Μια καμπύλη  $C^\infty$ -τάξης λέγεται λεια καμπύλη.

(iii). Πρέπει να διακρίνουμε το σύνολο  $\gamma(I)$  (είναι ένα σύνολο σημείων του  $\mathbb{R}^3$ ) από τη καμπύλη  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Το σύνολο  $\gamma(I)$  θα λέγεται εικόνα ή τροχιά της  $\gamma$ . Λίγες φορές θα λέμε καμπύλη και θα εννοούμε το  $\gamma(I)$ .

(iv). Για μια καμπύλη  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $t \rightarrow \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ ,



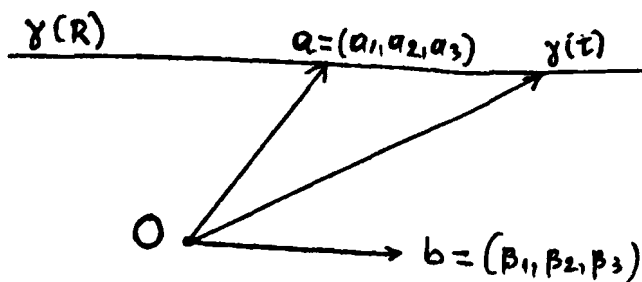


το  $\gamma(t)$  είναι το διάνυσμα θέσης ενός σημείου, που κινείται στη τροχιά  $\gamma(I)$  της  $\gamma$ .

(v). Ο περιορισμός μια καμπύλης  $C^k$ -τάξης,  $\gamma: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  σε ένα οποιοδήποτε κλειστό διάστημα  $[\delta, \epsilon] \subset I$ , δηλαδή η  $\beta: [\delta, \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , με  $\beta(t) = \gamma(t)$  για  $t \in [\delta, \epsilon]$ , θα λέγεται και αυτή καμπύλη  $C^k$ -τάξης. Δηλαδή, όταν θα λέμε, δίνεται η καμπύλη  $C^k$ -τάξης  $\beta: [\delta, \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}^3$  θα εννοούμε ότι υπάρχει μια καμπύλη  $C^k$ -τάξης  $\gamma: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  με  $[\delta, \epsilon] \subset (a,b)$  τέτοια ώστε  $\beta(t) = \gamma(t)$ , για κάθε  $t \in [\delta, \epsilon]$ . Το σημείο  $\beta(\delta)$  θα λέγεται τότε αρχικό σημείο της καμπύλης  $\beta$  και το  $\beta(\epsilon)$  θα λέγεται τελικό σημείο.

Στόχος μας είναι να μελετήσουμε μερικές ιδιότητες των καμπυλών. Θα δούμε πρώτα μερικά παραδείγματα.

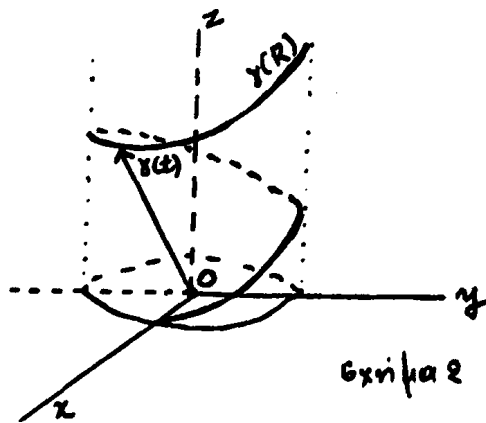
Παράδειγμα 2.13. Έστωσαν  $a = (a_1, a_2, a_3)$  και  $b = (b_1, b_2, b_3)$  δυο διανύσματα του  $\mathbb{R}^3$ . Θεωρούμε την απεικόνιση  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που ορίζεται με τη σχέση  $\gamma(t) = (a_1 + t b_1, a_2 + t b_2, a_3 + t b_3)$ . Η απεικόνιση αυτή είναι μια λεία καμπύλη. Η τροχιά της (σχήμα 1) είναι μια ευθεία που περνά από το σημείο  $a$  και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα  $b$ . Αν  $b = (0, 0, 0)$ , τότε  $\gamma(t) = (a_1, a_2, a_3) = a$ , δηλαδή μια σταθερή απεικόνιση (σταθερή καμπύλη).



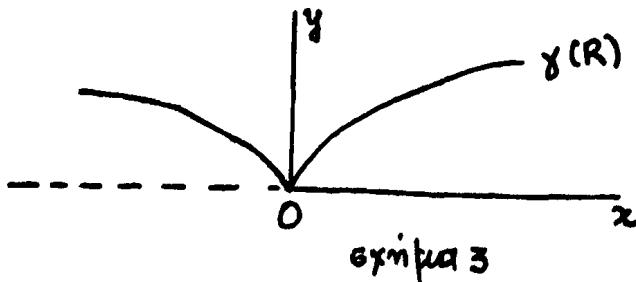
σχήμα 1.



Παράδειγμα 2.1.4. Η απεικόνιση  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που ορίζεται ως  $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$  είναι μια λεία καμπύλη, αφού οι συνιστώσες της  $a \cos t, a \sin t, bt$  έχουν συνεχείς παραγώγους κάθε τάξης. Μπορούμε να δούμε πως η εικόνα (προχιά)  $\gamma(\mathbb{R})$  είναι σε ένα κυκλικό κύλινδρο (ποια η εξίσωση του κυλίνδρου;). Η καμπύλη αυτή, λόγω του σχήματός της εικόνας (σχήμα 2), λέγεται κυκλική έλικα.



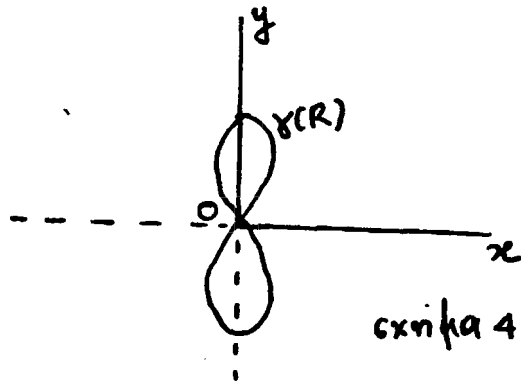
Παράδειγμα 2.1.5. Η  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  με  $\gamma(t) = (t^3, t^2, 0)$  είναι επίσης μια λεία καμπύλη με προχιά το σημειοσύνολο του σχήματος 3.



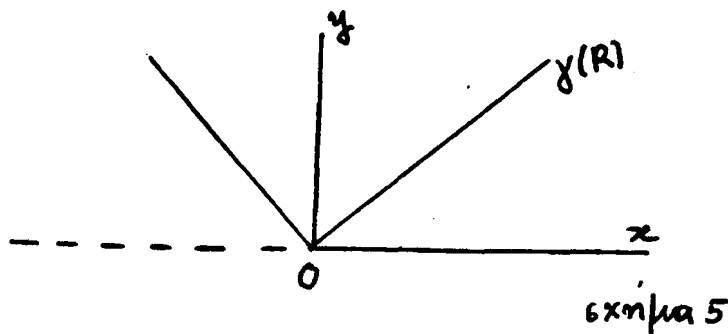
Παράδειγμα 2.1.6. Η απεικόνιση  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  με  $\gamma(t) = (\sin 2t, \sin t, 0)$  είναι επίσης μια λεία καμπύλη, της οποίας η εικόνα είναι στο επίπεδο  $Oxy$  και έχει το σχήμα του 8 (σχήμα 4). Παρατηρούμε ότι  $\gamma(0) = (0,0,0) = \gamma(\text{ακέραιο πολλαπλάσιο του } \pi)$ , δηλαδή η



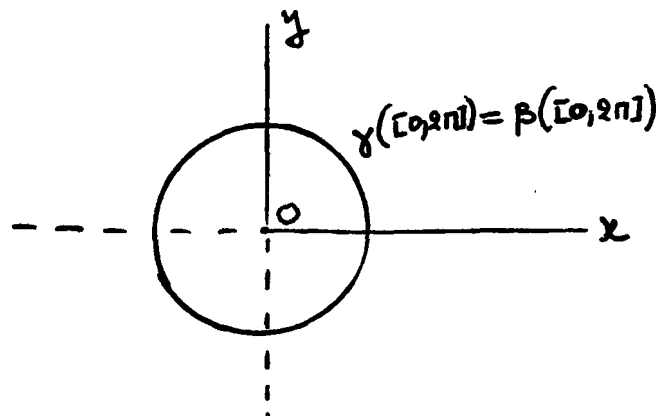
$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  δεν είναι αμφιμονοσήμαντη (1-1) πάνω στην εικόνα της.



Παράδειγμα 2.1.7. Η απεικόνιση  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που δίνεται με την  $\gamma(t) = (t, |t|, 0)$  δεν είναι λεία καμπύλη (γιατί;). Η  $\gamma$  είναι μια καμπύλη  $C^0$ -ταξής. Η εικόνα της είναι πάνω στο επίπεδο  $Oxy$  (εξήμα 5).



Παράδειγμα 2.1.8. Οι απεικονίσεις  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\beta: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  που ορίζονται ως  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ ,  $\beta(t) = (\cos 2t, \sin 2t, 0)$  είναι λείες καμπύλες (βλ. Παρατήρηση 2.1.2(v)), με εικόνες στο επίπεδο  $Oxy$  και μάλιστα έχουν την ίδια εικόνα τον κύκλο  $x^2 + y^2 = 1$  (εξήμα 6).



εξήμα 6



Είναι φανερό ότι η  $\gamma$  καλύπτει μια φορά τον κύκλο και η  $\beta$  καλύπτει τον κύκλο δυο φορές.

Ορισμός 2.1.9. Καμπύλες των οποίων η εικόνα είναι πάνω σε ένα επίπεδο (όχι κατ'ανάγκη επίπεδο συντεταγμένων) λέγονται επίπεδες καμπύλες (plane curves).

Οι καμπύλες στα παραδείγματα 2.1.3, 2.1.5, 2.1.6, 2.1.7 και 2.1.8 είναι επίπεδες. Επίσης η καμπύλη  $\gamma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που ορίζεται ως  $\gamma(t) = (t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t})$  είναι επίπεδη. Η τροχιά της βρίσκεται στο επίπεδο με εξίσωση  $x - y + z + 1 = 0$ , αφού κάθε σημείο  $\gamma(t)$  επαληθεύει την εξίσωση αυτού του επιπέδου.

Ορισμός 2.1.10. Μια καμπύλη  $C^k$ -τάξης  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , όπου  $I$  είναι ένα οποιοδήποτε διαστήμα, θα λέγεται απλή (simple) αν η απεικόνιση  $\gamma$  είναι αμφιμονοσήμαντη. Δηλαδή,  $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ , αν  $t_1 \neq t_2$ . Στην περίπτωση  $I = [a, b]$  με  $\gamma(a) = \gamma(b)$  η  $\gamma$  λέγεται απλή αν η  $\gamma|_{(a,b)}$  είναι αμφιμονοσήμαντη.

Η καμπύλη του παραδείγματος 2.1.7 είναι απλή, ενώ η καμπύλη του παραδείγματος 2.1.6 δεν είναι απλή.

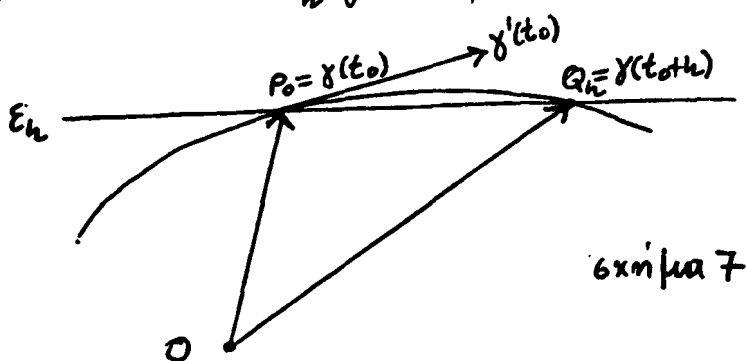
Ορισμός 2.1.11. Μια καμπύλη  $C^0$ -τάξης  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  λέγεται κλειστή (closed) αν  $\gamma(a) = \gamma(b)$ . Μια καμπύλη  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $t \rightarrow \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$   $C^k$ -τάξης ( $k \geq 1$ ) λέγεται κλειστή αν  $\gamma(a) = \gamma(b)$  και  $\frac{d^m \gamma_i}{dt^m}(a) = \frac{d^m \gamma_i}{dt^m}(b)$  ( $i=1,2,3$ ) για κάθε  $m$ , πέτοιο ώστε  $1 \leq m \leq k$ .



Οι καμπύλες του παραδείγματος 2.1.8 είναι κλειστές καμπύλες.

## 2.2. Κανονικές Καμπύλες, Αναπαραμετρήσεις

Έστωσαν  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  μια καμπύλη  $C^k$ -τάξης ( $k \geq 1$ ) και  $t_0 \in I$ . Θεωρούμε το σημείο  $\gamma(t_0) = P_0$  της εικόνας της  $\gamma$  (βλ. σχήμα 7). Επίσης θεωρούμε το σημείο  $Q_h = \gamma(t_0+h)$ , όπου  $h \in \mathbb{R}$  και τέτοιο ώστε  $(t_0+h) \in I$ .



Έστω  $\epsilon_h$  η ευθεία που ορίζεται από τα σημεία  $P_0$  και  $Q_h$ . Το διάνυσμα  $P_0 Q_h$  είναι  $P_0 Q_h = \gamma(t_0+h) - \gamma(t_0)$ . Έτσι η ευθεία  $\epsilon_h$  είναι παράλληλη με το διάνυσμα  $\frac{\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0)}{h}$ . Όταν το  $Q_h$  κινείται προς το  $P_0$ , δηλαδή όταν  $h \rightarrow 0$ , το διάνυσμα αυτό κείνεται προς το διάνυσμα

$$\gamma'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0)}{h} = \left( \frac{d\gamma_1}{dt}(t_0), \frac{d\gamma_2}{dt}(t_0), \frac{d\gamma_3}{dt}(t_0) \right) = (\gamma'_1(t_0), \gamma'_2(t_0), \gamma'_3(t_0)).$$

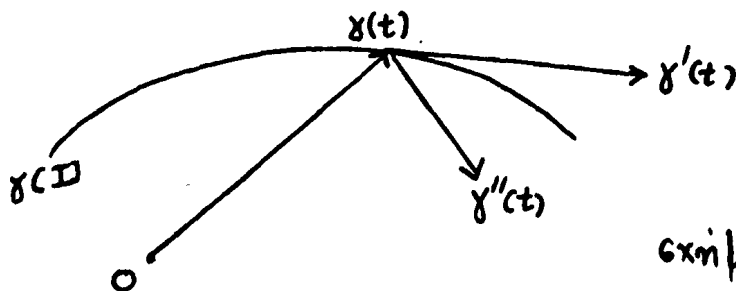
Το όριο υπάρχει, αφού η καμπύλη είναι  $C^1$ -τάξης κουλίσκετον. Το διάνυσμα  $\gamma'(t_0)$  λέγεται εφαπτόμενο διάνυσμα της  $\gamma$  στο σημείο  $t_0$ . Επειδή το  $\gamma(I)$  μπορεί να θεωρηθεί ως η τροχιά ενός υλικού σημείου, που βρίσκεται στο σημείο  $\gamma(t)$  τη χρονική στιγμή  $t$ , για αυτό το διάνυσμα  $\gamma'(t_0)$  λέγεται και διάνυσμα



ταχύτητας της  $\gamma$  στο  $t_0$ .

Ορισμός 2.2.1. Έστω  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$  μια καμπύλη  $C^1$ -τάξης κυλάκου. Για κάθε  $t \in I$ , το διάνυσμα  $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \gamma_3'(t))$  λέγεται εφαπτόμενο διάνυσμα ή διάνυσμα ταχύτητας της  $\gamma$  στο  $t$  ή στο σημείο  $\gamma(t)$ .

Το διάνυσμα ταχύτητας  $\gamma'(t)$  αρχίζει από το σημείο  $\gamma(t)$ . Το μέτρο  $v(t) = |\gamma'(t)|$  του διανύσματος ταχύτητας στο  $t$  λέγεται ταχύτητα της καμπύλης στο  $t \in I$ . Παρακινούμενοι από την κινηματική του υλικού σημείου ονομάζουμε το διάνυσμα  $\gamma''(t) = (\gamma_1''(t), \gamma_2''(t), \gamma_3''(t))$  διάνυσμα επιτάχυνσης της καμπύλης στο  $t \in I$ . Είναι και αυτό ένα διάνυσμα με αρχή το σημείο  $\gamma(t)$  (επίμα 8)



επίμα 8

Παρατήρηση 2.2.2. Συνήθως αποφεύγουμε να λέμε διάνυσμα ταχύτητας στο κάθε σημείο της εσοχιάς χωρίς να αναφέρουμε την παράμετρο, αφού όταν η εσοχιά μας έχει αυτοτομής (όπως η καμπύλη του παραδείγματος 2.1.6), τότε σε ένα σημείο αυτοτομής της εσοχιάς έχουμε δυο κυλάκουσα διανύσματα ταχύτητας. Αντίθετα μπορούμε άνετα να μιλάμε, χωρίς να δημιουργείται σύγχυση,



για διάνυσμα ταχύτητας στο  $t$  ή στο  $\gamma(t)$ .

Παράδειγμα 2.2.3. Το διάνυσμα ταχύτητας της κυκλικής έλλοις  $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, b)$  στο  $t \in \mathbb{R}$  είναι το διάνυσμα  $\gamma'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$ , που αρχίζει από το σημείο  $\gamma(t)$ .

Παράδειγμα 2.2.4. Το διάνυσμα ταχύτητας της καμπύλης του παραδείγματος 2.1.5 στο  $t \in \mathbb{R}$  είναι το διάνυσμα  $\gamma'(t) = (3t^2, 2t, 0)$ , που έχει αρχή το σημείο  $\gamma(t)$ . Το διάνυσμα ταχύτητας στο  $t=0$  είναι το  $\gamma'(0) = (0, 0, 0)$ , δηλαδή το μηδενικό διάνυσμα, και έχει αρχή το σημείο  $\gamma(0) = (0, 0, 0)$ .

Παράδειγμα 2.2.5. Τα διανύσματα ταχύτητας των καμπυλών  $\alpha$  και  $\beta$  του παραδείγματος 2.1.8 είναι τα:  $\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$ ,  $\beta'(t) = 2(-\sin 2t, \cos 2t, 0)$ . Τι σχέση έχουν τα διανύσματα  $\alpha'(t)$  και  $\beta'(t)$ ;

Ορισμός 2.2.6. Μια καμπύλη  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $C^k$ -ταξής ( $k \geq 1$ ) λέγεται κανονική (regular) στο  $t_0 \in I$ , αν  $\gamma'(t_0) \neq 0$ . Λέγεται κανονική στο  $I$  ή κανονική καμπύλη αν είναι κανονική για κάθε  $t \in I$ , δηλαδή αν το διάνυσμα ταχύτητας είναι παντού μη μηδενικό. Αν στο  $t_0 \in I$  ισχύει  $\gamma'(t_0) = 0$ , τότε λέμε ότι η καμπύλη δεν είναι κανονική στο  $t_0 \in I$  και το  $t_0 \in I$  λέγεται μη κανονικό σημείο της καμπύλης.

Η καμπύλη  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$  είναι κανονική παντού στο  $\mathbb{R}$ ,



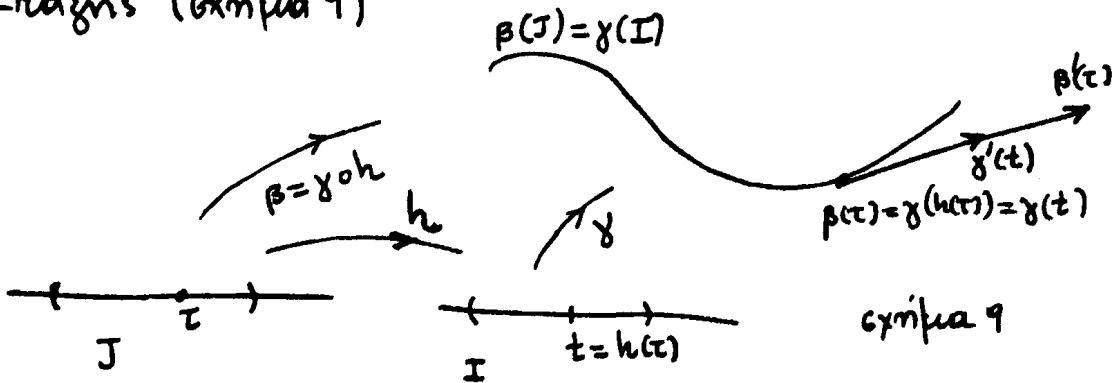
ενώ η καμπύλη  $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , με  $\beta(t) = (t^2, t^3, 0)$  δεν είναι κανονική στο  $t=0$ .

Παρακάτω θα ασχοληθούμε μόνο με κανονικές καμπύλες

Ορισμός 2.2.7. Έστωσαν η καμπύλη  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  και  $t_0 \in I$  ένα κανονικό σημείο της. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο  $\gamma(t_0)$  και είναι παράλληλη με το διάνυσμα ταχύτητας  $\gamma'(t_0)$  λέγεται εφαπτομένη ευθεία της καμπύλης στο  $t_0 \in I$ .

Η διανυσματική εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας στο κανονικό σημείο  $t_0 \in I$  είναι  $\pi: x = \gamma(t_0) + \tau \gamma'(t_0)$ .

Θεωρούμε μια καμπύλη  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$   $C^k$ -τάξης και έστω  $h: J \rightarrow I$  μια συνάρτηση  $C^m$ -τάξης με  $h(J) = I$ , όπου  $J$  είναι ένα κανονικό διάστημα της πραγματικής ευθείας. Από τον Διαφορικό Λογισμό ξέρουμε πως η σύνθεση  $\beta = \gamma \circ h: J \rightarrow \mathbb{R}^3$  είναι μια απεικόνιση  $C^p$ -τάξης με  $p = \min(k, m)$ , δηλαδή η  $\beta$  είναι μια καμπύλη  $C^p$ -τάξης (σχήμα 9)



Οι καμπύλες  $\gamma$  και  $\beta$  έχουν την ίδια εροχία. Η καμπύλη





$\beta$  με  $\beta(\tau) = \gamma(h(\tau))$  λέγεται αναπαραμέτρηση (reparametrization) της καμπύλης  $\gamma$  μέσω της  $h$ .

Παράδειγμα 2.2.8. Έστωσαν  $I = (1, 9)$  και  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  μια καμπύλη που ορίζεται ως  $\gamma(t) = (t-1, t\sqrt{t}, \sqrt{t})$ . Αν  $J = (1, 3)$  και  $h: J \rightarrow I$  με  $h(\tau) = \tau^2$ , τότε η αναπαραμέτρηση της  $\gamma$  μέσω της  $h$  είναι η καμπύλη  $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^3$  που ορίζεται ως  $\beta(\tau) = \gamma(h(\tau)) = \gamma(\tau^2) = (\tau^2 - 1, \tau^3, \tau)$ .

Παρατήρηση 2.2.9. Έστω  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  μια καμπύλη. Η  $\gamma$  μας δείχνει πως διαγράφουμε την εικόνα  $\gamma(I)$  (πως κινούμαστε πάνω στο  $\gamma(I)$ ). Η αναπαραμέτρηση  $\beta = \gamma \circ h$  της  $\gamma$  μέσω της  $h: J \rightarrow I$  καθορίζει ένα διαφορετικό τρόπο κίνησης πάνω στη τροχιά  $\gamma(I)$ . Με πιο απλά λόγια η  $\gamma$  δίνει στα σημεία της εικόνας κάποιες "ετικέτες" τα  $t$ , ενώ η  $\beta$  δίνει στα ίδια σημεία κάποιες "ετικέτες" τα  $\tau$ .

Η παρακάτω πρόταση μας εξηγεί πως συνδέονται, και διανύσματα ταχύτητας μιας καμπύλης  $\gamma$  και της αναπαραμέτρησης  $\beta$ .

Πρόταση 2.2.10. Έστωσαν  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  μια καμπύλη  $C^1$ -τάξης κυλιόμετων και  $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^3$  η αναπαραμέτρηση της  $\gamma$  μέσω της  $h: J \rightarrow I$ , η οποία είναι κυλιόμετων  $C^1$ -τάξης. Τότε ισχύει η σχέση (2.2.1)

$$\beta'(\tau) = \frac{dh}{d\tau}(\tau) \gamma'(h(\tau)).$$


Απόδειξη. Έχουμε,  $\beta(\tau) = \gamma(h(\tau))$ . Τότε, με τον κανόνα παραγωγής σύνθεσης συνάρτησης παίρνουμε τη σχέση (2.2.1) (βλ. σχήμα 9).

Παρατήρηση 2.2.11. Από τη σχέση (2.2.1) προκύπτει ότι, αν η καμπύλη  $\gamma$  είναι κανονική, τότε η αναπαραμέτρηση  $\beta$  είναι κανονική (δηλαδή  $\beta'(\tau) \neq 0$ , για κάθε  $\tau \in J$ ) αν  $\frac{dh}{d\tau}(\tau) \neq 0$  για κάθε  $\tau \in J$ . Τότε όμως η  $h$  είναι γνήσια μονότονη συνάρτηση και τα διαστήματα  $J, I$  είναι σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μέσω της  $h$ .

Ορισμός 2.2.12. Μια συνάρτηση  $h: J \rightarrow I, \tau \rightarrow h(\tau)$  τάξης  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) λέγεται επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρου τάξης  $C^k$ , αν  $h(J) = I$  και  $\frac{dh}{d\tau}(\tau) = h'(\tau) \neq 0$ , για κάθε  $\tau \in J$ .

Ορισμός 2.2.13. Μια αναπαραμέτρηση  $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^3$  της κανονικής καμπύλης  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  μέσω της  $h: J \rightarrow I, \tau \rightarrow h(\tau)$ , λέγεται κανονική αναπαραμέτρηση αν η  $h$  είναι επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρου ταυλάχιετον  $C^1$ -τάξης.

Κανονικές αναπαραμετρήσεις είναι αυτές, που μας ενδιαφέρουν.

Σε κάθε σημείο μιας κανονικής καμπύλης  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , το διάνυσμα καχύψιας καθορίζει ένα προσανατολισμό της καμπύλης (κατεύθυνση διαγραφής της προχιάς). Από τη σχέση (2.2.1) προκύπτει ότι κάθε κανονική αναπαραμέτρηση της καμπύλης  $\gamma$



καθορίζει τον ίδιο προσανατολισμό, αν  $\frac{dh}{dt}(t) > 0$  για κάθε  $t \in J$ .  
Ο προσανατολισμός αντιστρέφεται αν  $\frac{dh}{dt}(t) < 0$  για κάθε  $t \in J$ .  
Για τον λόγο αυτό, μια επιρρεπής αλλαγή παραμέτρου  
λέμε ότι διατηρεί τον προσανατολισμό, αν  $h'(t) > 0$  για κάθε  $t \in J$   
και ότι αντιστρέφει τον προσανατολισμό αν  $h'(t) < 0$  για κάθε  $t \in J$ .

Άσκηση 2.2.1. Να βρεθεί καμπύλη  $\gamma(t)$  με  $\gamma(0) = (2, 3, 0)$   
και  $\gamma'(t) = (e^t, -2t, t^2)$ .

### 2.3. Μήκος Καμπύλης - Παραμέτρος μήκος τόξου

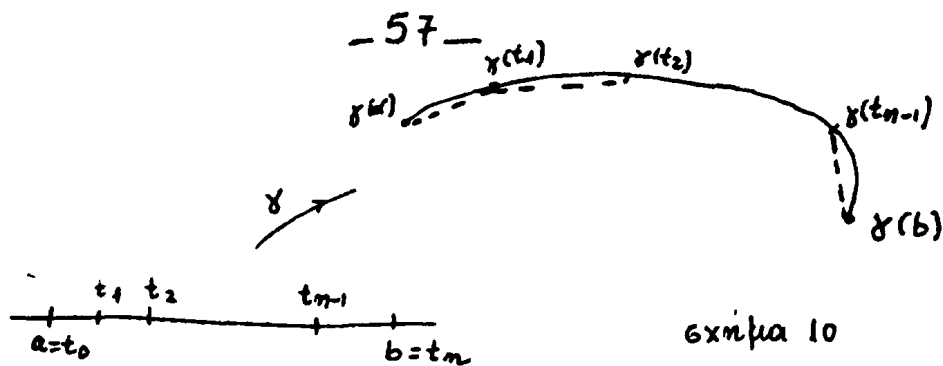
Θεωρούμε μια καμπύλη  $C^k$ -τάξης ( $k \geq 0$ ) (βλ. Παρατήρηση 2.1.2(v))  
 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , με  $-\infty < a < b < \infty$ . Θέλουμε να ορίσουμε το  
μήκος της καμπύλης από το  $a$  ως το  $b$  και να βρούμε  
τύπο, που δίνει το μήκος καμπύλης.

Για κάθε διαμέριση (partition)

$$\delta = \{ a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \}$$

που διασπείρατος  $[a, b]$  εξετάσουμε το άθροισμα  $l(\gamma, \delta) =$   
 $\sum_{i=1}^n |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|$ . Είναι φανερό ότι το  $l(\gamma, \delta)$  εκφράζει  
το μήκος μιας πολυγωνικής γραμμής εγγεγραμμένης στο  
 $\gamma([a, b])$ , με κορυφές τα σημεία  $\gamma(a) = \gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_n) = \gamma(b)$ .  
(βλ. σχήμα 10).





Ορίζουμε ως μήκος της διαμέρισης  $\delta$  το  $\|\delta\| = \max(t_i - t_{i-1}), i=1, \dots, n$ .

Θεωρώντας το σύνολο όλων των διαμερίσεων του  $[a, b]$  μπορούμε να κοιτάξουμε το σύνολο  $A(\delta) = \{L(\gamma, \delta), \text{ όπου } \delta \text{ διαμέριση του } [a, b]\}$ . Έστω

$$L(\gamma) = \sup A(\delta), \text{ δηλαδή ελάχιστο άνω φράγμα}$$

Αν αυτός ο αριθμός υπάρχει (δηλαδή είναι πεπερασμένος) τον ονομαζούμε  $L_a^b(\gamma)$  και τον λέμε μήκος της καμπύλης από το  $a$  ως το  $b$ . Η καμπύλη  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  λέγεται τότε εωδευγραφική (rectifiable).

Με μεθόδους του Διαφορικού Λογισμού αποδεικνύεται η παρακάτω πρόταση

Πρόταση 2.3.1. Έστω  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  μια καμπύλη  $C^k$ -ταξής ( $k \geq 1$ ). Τότε η  $\gamma$  είναι εωδευγραφική και ισχύει

$$(2.3.1) \quad L_a^b(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Παρατήρηση 2.3.2. Η απαίτηση στην Πρόταση 2.3.1, ότι η καμπύλη είναι τουλάχιστον  $C^1$ -ταξής είναι απαραίτητη όπως δείχνει το παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.3.3. Θεωρούμε τη καμπύλη  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που ορι-



δεται ως  $\gamma(t) = (t, t \sin \frac{\pi}{t}, 0)$  για  $t \neq 0$  και  $\gamma(0) = (0, 0, 0)$ . Αυτή η καμπύλη είναι  $C^0$ -ταίγης (δηλαδή συνεχής). Ο περιορισμός της στο διάστημα  $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$  είναι ευθυγραμμίσιμη καμπύλη με μήκος τουλάχιστον  $\frac{2}{n+1/2}$ . Έτσι το μήκος αυτής στο διάστημα  $[\frac{1}{N}, 1]$

είναι μεγαλύτερο που  $2 \sum_{i=1}^N \frac{1}{i+1}$ . Άρα το μήκος της  $\gamma$  είναι μη φραγμένο και συνεπώς η  $\gamma$  είναι μη ευθυγραμμίσιμη (nonrectifiable).

Πρόταση 2.3.4. Το μήκος μιας κανονικής καμπύλης  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  και το μήκος μιας κανονικής αναπαραμέτρησης της  $\gamma$  μέσω της  $h: [c, d] \rightarrow [a, b], \tau \rightarrow h(\tau)$  είναι ίσα.

Απόδειξη. Έστω  $\beta: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$  η κανονική αναπαραμετρήσιμη της  $\gamma$  μέσω της  $h: [c, d] \rightarrow [a, b], \tau \rightarrow h(\tau)$ . Έχουμε  $\beta(\tau) = \gamma(h(\tau))$  και  $h'(\tau) \neq 0$ , για κάθε  $\tau \in [c, d]$ . Τότε,

$$L_c^d(\beta) = \int_c^d |\beta'(\tau)| d\tau \stackrel{\text{σχίσμα (2.2.1)}}{=} \int_c^d |\gamma'(h(\tau))| |h'(\tau)| d\tau$$

$$\stackrel{\substack{\text{αν } h'(\tau) > 0 \\ \forall \tau \in [c, d]}}{=} \int_a^b |\gamma'(t)| dt = L_a^b(\gamma)$$

ή

$$\stackrel{\substack{\text{αν } h'(\tau) < 0 \\ \forall \tau \in [c, d]}}{=} - \int_b^a |\gamma'(t)| dt = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = L_a^b(\gamma).$$

Έστω τώρα  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  μια κανονική καμπύλη και  $t_0 \in [a, b]$ .

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $sct)$ , που ορίζεται ως

$$(2.3.2) \quad sct) = \int_{t_0}^t |\gamma'(u)| du.$$



Είναι φανερό ότι για  $t \geq t_0$  και  $t \leq t_0$  έχουμε,  $s(t) = L_{t_0}^t(\gamma)$  και  $s(t) = -L_{t_0}^t(\gamma)$ , αντίστοιχα. Για το λόγο αυτό η συνάρτηση  $s(t)$  λέγεται συναρτησιακή μήκος τόξου με αρχή το  $t_0$ . Αν πάρουμε σαν αρχή άλλο σημείο, έστω  $t_1 \in [a, b]$ , τότε σχηματίζουμε μια καινούργια συνάρτηση μήκος τόξου. Είναι φανερό ότι η συνάρτηση μήκος τόξου  $s_0(t)$  με αρχή το  $t_0$  και η συνάρτηση μήκος τόξου  $s_1(t)$  με αρχή το  $t_1$  ( $t_1 > t_0$ ) διαφέρουν κατά μια σταθερά. Πραγματικά,

$$s_0(t) - s_1(t) = \int_{t_0}^t |\gamma'(u)| du - \int_{t_1}^t |\gamma'(u)| du = \int_{t_0}^{t_1} |\gamma'(u)| du$$

Προτιμάμε να εισαγάγουμε ως παράμετρο της καμπύλης τη συνάρτηση μήκος τόξου. Από τη σχέση (2.3.2) παίρνουμε

$$\frac{ds}{dt}(t) = |\gamma'(t)| > 0, \text{ για όλα τα } t,$$

αφού η καμπύλη είναι κανονική. Η συνάρτηση  $s(t)$  είναι γνήσια αύξουσα. Σύμφωνα με το Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης του Διαφορικού Λογισμού υπάρχει η αντίστροφος  $t = t(s)$ , η οποία είναι μια επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρου και μάλιστα ισχύει

$$\frac{dt}{ds}(s) = \frac{1}{\frac{ds}{dt}(t(s))} = \frac{1}{|\gamma'(t(s))|} > 0.$$

Έτσι η  $\beta(s) = \gamma(t(s))$  είναι μια κανονική αναπαράμετρηση της  $\gamma$ . Από τη σχέση (2.2.1) έχουμε

$$\beta'(s) = \frac{dt}{ds}(s) \gamma'(t(s)) \text{ και συνεπώς } |\beta'(s)| = \frac{dt}{ds}(s) \cdot |\gamma'(t(s))| = 1.$$

Δηλαδή, το διάνυσμα ταχύτητας της  $\beta$  είναι παντού μοναδιαίο. Το πεδίο ορισμού της  $\beta$  είναι ένα καινούργιο διάστημα  $J$  με μεταβλητή το  $s$  και  $t: J \rightarrow I$ ,  $t(s) = t$ .



Έχουμε αποδείξει το παρακάτω θεώρημα

Θεώρημα 2.3.5. Για κάθε κανονική καμπύλη  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  υπάρχει κανονική αναπαραμέτρηση  $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^3$  με διάνυσμα ταχύτητας μοναδιαίο.

Παρατήρηση 2.3.6. Για να βρούμε την αναπαραμέτρηση που μας εξασφαλίζει το Θεώρημα 2.3.5 δουλεύουμε ως εξής: Παιρνουμε ένα τυχαίο  $t_0 \in I$ . Βρίσκουμε τη συνάρτηση μήκος τόξου με αρχή το  $t_0$ ,  $s(t) = \int_{t_0}^t |\gamma'(u)| du$ , την αντιστρέφουμε (δηλαδή, λύνουμε ως προς  $t$ !) και μετά βάζουμε στην  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$  το  $t =$  με τη λύση που βρήκαμε. Μερικές φορές διαλέγουμε κατάλληλο  $t_0$  ώστε να απλοποιηθούν οι λογαριασμοί μας.

Η παράμετρος  $s$  λέγεται παράμετρος μήκος τόξου ή φυσική παράμετρος της καμπύλης και όπως είδαμε είναι, το πολύ μέχρι μιας σταθεράς, μονοσήμαντα ορισμένη.

Παράδειγμα 2.3.7. Δίνεται η καμπύλη  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , με  $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ ,  $a^2 + b^2 \neq 0$ . Η καμπύλη είναι λεία, αραι κυκλικό  $C^1$ -κάξης, και κανονική. Το διάνυσμα ταχύτητας είναι το  $\gamma'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$  και συνεπώς  $|\gamma'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2}$ , για κάθε  $t \in \mathbb{R}$ . Θέλουμε να βρούμε αναπαραμέτρηση με διάνυσμα ταχύτητας μοναδιαίο. Βρίσκουμε τη συνάρτηση μήκος τόξου με αρχή το  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Έχουμε,



$$s(t) = \int_{t_0}^t |\gamma'(u)| du = \int_{t_0}^t \sqrt{a^2 + b^2} du = \sqrt{a^2 + b^2} (t - t_0),$$

δηλαδή,  $s = \sqrt{a^2 + b^2} (t - t_0)$  και συνεπώς  $t = t_0 + \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

Η αναπαραμέτρηση που ζητάμε είναι η

$$\beta(s) = \left( a \cos\left(t_0 + \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), a \sin\left(t_0 + \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), b\left(t_0 + \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \right).$$

Μπορούμε να ελέγχουμε ότι η  $\beta(s)$  έχει διάνυσμα ταχύτητας παντού μοναδιαίο. Επίσης, αν διαλέξουμε  $t_0 = 0$ , θα έχουμε

$$\beta(s) = \left( a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

Παρατήρηση 2.3.8. Αν μια καμπύλη  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  έχει παράμετρο μήκος τόξου τότε  $L_a^b(\gamma) = b - a$  (γιατί;). Επίσης η μοναρμενη μήκος τόξου με αρχή το  $t_0$  είναι  $s(t) = t - t_0$  (γιατί;).

Άσκηση 2.3.1. Δίνεται η καμπύλη  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που ορίζεται ως  $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$ . Να βρεθεί αναπαραμέτρηση με παράμετρο μήκος τόξου.

Άσκηση 2.3.2. Έστωσαν  $P, Q$  δυο σημεία του χώρου και  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  μια κανονική καμπύλη που τα ενώνει (δηλαδή,  $\gamma(a) = P$  και  $\gamma(b) = Q$ ). Να αποδειχθεί ότι από όλες τις κανονικές καμπύλες που ενώνουν τα  $P, Q$  η εὐθεία έχει το μικρότερο





μήκος.

Θα δούμε ότι συνεπεία ότι το μήκος μιας καμπύλης διατηρείται με τις ισομετρίες του  $\mathbb{R}^3$ . Για το σκοπό αυτό προχωράμε ως εξής.

Έστωσαν  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ένας μετασχηματισμός του  $\mathbb{R}^3$ , τουλάχιστον  $C^1$ -κάξης με συνιστώσες  $F_1, F_2, F_3$  και  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $t \rightarrow \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$  μια κανονική καμπύλη. Η σύνθεση  $\beta = F \circ \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που ορίζεται ως

$$\beta(t) = F(\gamma(t)) = (F_1(\gamma(t)), F_2(\gamma(t)), F_3(\gamma(t))),$$

είναι μια καμπύλη του  $\mathbb{R}^3$  τουλάχιστον  $C^1$ -κάξης, ως σύνθεση απεικονίσεων  $C^1$  κάξης  $C^1$  τουλάχιστον.

Πρόταση 2.39. Για τα διανύσματα ταχύτητας  $\gamma'(t)$  και  $\beta'(t)$  ισχύει η σχέση

$$(2.3.3) \quad \beta'(t) = dF_{\gamma(t)}(\gamma'(t)),$$

όπου  $dF_{\gamma(t)}$  είναι η παράγωγος απεικόνιση της  $F$  στο  $\gamma(t)$ .

Απόδειξη. Από τον ορισμό της παραγωγού απεικόνισης έχουμε

$$dF_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = \left( \gamma'(t)[F_1], \gamma'(t)[F_2], \gamma'(t)[F_3] \right)_{F(\gamma(t))}.$$

Όμως με την Πρόταση 1.4.6 και τον κανόνα σύνθεσης παραγωγίσιμης βρίσκουμε

$$\gamma'(t)[F_i] = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\gamma(t)) \cdot \gamma_j'(t) = \frac{d(F_i \circ \gamma)}{dt}(t).$$



Συνοψώς

$$dF_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = \left( \frac{d(F_1 \circ \gamma)}{dt}(t), \frac{d(F_2 \circ \gamma)}{dt}(t), \frac{d(F_3 \circ \gamma)}{dt}(t) \right)_{\beta(t)} = \beta'(t)$$

Ειδικά, για ισομετρικές  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , λόγω του Πορίσματος 1.4.13, θα έχουμε

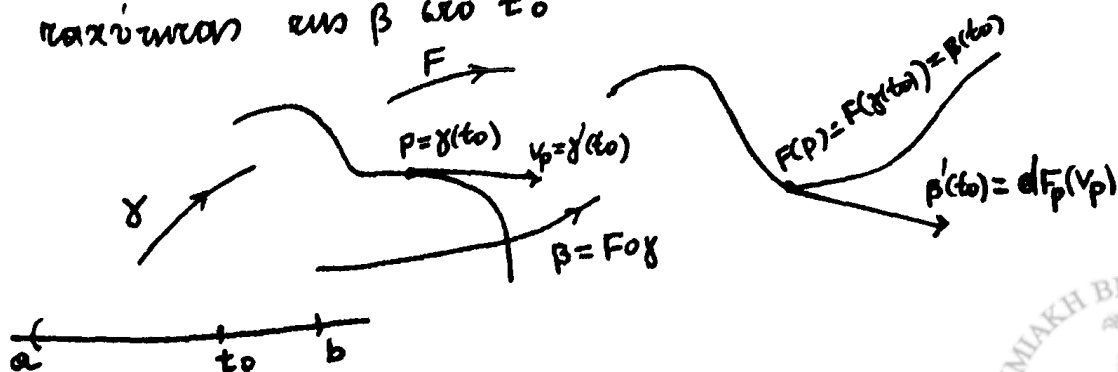
$$|\beta'(t)| = |dF_{\gamma(t)}(\gamma'(t))| = |\gamma'(t)|, \text{ για κάθε } t \in [a, b]$$

και ως εκ τούτου τα μήκη των καμπυλών  $\gamma$  και  $\beta$  είναι ίσα. Συνοψώς, οι συναρτήσεις μήκους τόξου των  $\gamma$  και  $\beta$  με αρχή το ίδιο σημείο  $t_0 \in [a, b]$  είναι ίσες, Δηλαδή,

$$(2.3.4) \quad s(t) = \bar{s}(t), \text{ για κάθε } t \in [a, b]$$

όπου  $s(t)$  είναι η συνάρτηση μήκους τόξου της  $\gamma$  και  $\bar{s}(t)$  είναι η συνάρτηση μήκους τόξου της  $\beta$  με αρχή το ίδιο  $t_0$ .

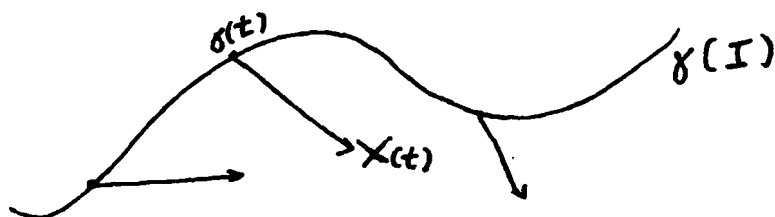
Παρατήρηση 2.3.10. Η σχέση (2.3.3) υποδηλώνει και ένα τρόπο εύρεσης του διανύσματος  $dF_p(v_p)$ , όπου  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  είναι ένας μετασχηματισμός του  $\mathbb{R}^3$  και  $p \in \mathbb{R}^3$ . Προς τούτο, θεωρούμε καμπύλη  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  με  $\gamma(t_0) = p$  και  $\gamma'(t_0) = v_p$  (υπάρχει τέτοια καμπύλη). Η καμπύλη  $\beta = F \circ \gamma$ , έχει ως διάνυσμα ταχύτητας στο  $t_0$  το  $\beta'(t_0) = dF_{\gamma(t_0)}(\gamma'(t_0)) = dF_p(v_p)$ . Δηλαδή, το  $dF_p(v_p)$  είναι το διάνυσμα ταχύτητας στο  $\beta$  στο  $t_0$



## 2.4. Διανυσματικά πεδία

Θεωρούμε μια καμπύλη  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $t \rightarrow \gamma(t)$ ,  $C^k$ -καίτης

Ορισμός 2.4.1 Ονομάζουμε διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της καμπύλης  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , μια απηκόνιση  $X$  που αντιστοιχεί σε κάθε  $t \in I$  ένα εφαπτόμενο διάνυσμα του  $\mathbb{R}^3$  στο σημείο  $\gamma(t)$ .

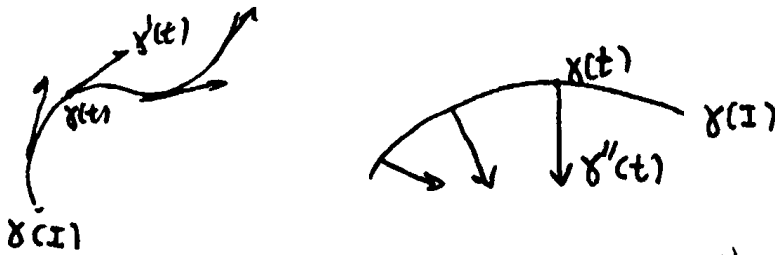


Σημειώνουμε ότι το  $X$ , διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της καμπύλης  $\gamma$ , έχει τιμές όχι κατ'ανάγκη εφαπτόμενα διανύσματα της καμπύλης.

Στη Παράγραφο 2.2 έχουμε συναντήσει δυο διανυσματικά πεδία κατά μήκος μιας καμπύλης  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , καίτης  $C^2$ . Το διανυσματικό πεδίο  $\gamma'$ , το οποίο στο  $t \in I$  έχει ως τιμή το διάνυσμα ταχύτητας  $\gamma'(t)$  με αρχή το  $\gamma(t)$ . Επίσης το διανυσματικό πεδίο  $\gamma''$ , το οποίο στο  $t \in I$  έχει ως τιμή το διάνυσμα επιτάχυνσης  $\gamma''(t)$  με αρχή το  $\gamma(t)$ . Από αυτά το  $\gamma'$ , που λέγεται διανυσματικό πεδίο ταχύτητας έχει τιμές εφαπτόμενα διανύσματα της καμπύλης, ενώ το  $\gamma''$



που λέγεται διανυσματικό πεδίο επιταχυνόμενης δεν έχει εν γένει τιμή εφαπτόμενα διανύσματα προς καμπύλης.



Για ένα διανυσματικό πεδίο  $X$  κατά μήκος της καμπύλης  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , καθορίζονται τρεις συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το  $I$ , ως εξής. Το διάνυσμα  $X(t)$  γράφεται, ως προς τη συνήθη βάση  $(e_1)_{\gamma(t)}, (e_2)_{\gamma(t)}, (e_3)_{\gamma(t)}$ , ως  $X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))_{\gamma(t)}$ .

Οι συναρτήσεις  $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$  λέγονται συνιστώσες του  $X$ .

Αν οι συνιστώσες του  $X$  είναι συναρτήσεις  $C^k$ -κλάσης, τότε το  $X$  λέμε ότι είναι διανυσματικό πεδίο  $C^k$ -κλάσης κατά μήκος της καμπύλης.

Παράδειγμα 2.4.2. Θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο  $X$  κατά μήκος της καμπύλης  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που ορίζεται ως  $X(t) = (t, t^2, t+1)_{\gamma(t)}$ . Οι συνιστώσες του  $t, t^2, t+1$  είναι  $C^\infty$ -κλάσης. Συνεπώς το διανυσματικό πεδίο  $X$  είναι  $C^\infty$ -κλάσης. Εξ άλλου για μια καμπύλη  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $C^k$ -κλάσης ( $k \geq 1$ ), το διανυσματικό πεδίο ταχύτητας  $\gamma'$  είναι ένα διανυσματικό πεδίο  $C^{k-1}$ -κλάσης. Πραγματικά, οι συνιστώσες του  $\gamma'$  είναι οι  $\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \gamma'_3(t)$  που είναι συναρτήσεις



$C^{k-1}$ -κλάσης.

Από διανυσματικά πεδία  $X, Y$  κατά μήκος μιας καμπύλης  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  και μια συνάρτηση  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , μπορούμε να κατασκευάσουμε και άλλα διανυσματικά πεδία  $fX, X+Y, X \times Y$  κατά μήκος της καμπύλης που ορίζονται ως

$$\begin{aligned}(fX)(t) &= f(t) X(t) \\ (X+Y)(t) &= X(t) + Y(t)\end{aligned}$$

και

$$(X \times Y)(t) = X(t) \times Y(t)$$

Τα διανύσματα  $(fX)(t), (X+Y)(t)$  και  $(X \times Y)(t)$  αρχίζουν από το σημείο  $\gamma(t)$ .

Επίσης, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια συνάρτηση  $X \cdot Y$  με πεδίο ορισμού το  $I$ , που ορίζεται ως

$$(X \cdot Y)(t) = X(t) \cdot Y(t)$$

Έστω  $X$  ένα διανυσματικό πεδίο  $C^k$ -κλάσης ( $k \geq 1$ ) κατά μήκος της καμπύλης  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , με συνιστώσες  $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ . Κατασκευάζουμε ένα νέο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της  $\gamma$ , που συμβολίζεται με  $X'$ . Το διανυσματικό πεδίο  $X'$  έχει συνιστώσες ως συναρτήσεις  $x'_1(t), x'_2(t), x'_3(t)$  και λέγεται παράγωγος του  $X$  κατά μήκος της καμπύλης. Έτσι, το διανυσματικό πεδίο επιπέδου είναι η παράγωγος του διανυσματικού πεδίου ταχύτητας, κατά μήκος της καμπύλης  $\gamma$ .



Άσκηση 2.4.1 Έστωσαν  $X, Y$  δυο διανυσματικά πεδία κοινού πεδίου  $C^k$ -κλάσης και  $\mu$  ένας συνεχής ως καμπύλη  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  και μια συνάρτηση  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  που είναι  $C^k$ -κλάσης ( $k \geq 1$ ). Ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} (fX)' &= \frac{df}{dt} X + fX' \\ (X+Y)' &= X' + Y' \\ (X \times Y)' &= X' \times Y + X \times Y' \\ \frac{d}{dt}(X \cdot Y) &= X' \cdot Y + X \cdot Y' \end{aligned}$$

Πρόταση 2.4.3. Θεωρούμε μια καμπύλη  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$   $C^2$ -κλάσης που λύνει τον. Τότε

(i) Η καμπύλη  $\gamma$  είναι μια σταθερή καμπύλη ( $\gamma(t) = \alpha$ , για κάθε  $t \in I$ ), αν και μόνο αν το διανυσματικό πεδίο εφαύτησης είναι παντού μηδενικό.

(ii) Η καμπύλη  $\gamma$  είναι μια ευθεία, αν και μόνο αν το διανυσματικό πεδίο εφαύτησης είναι παντού μηδενικό.

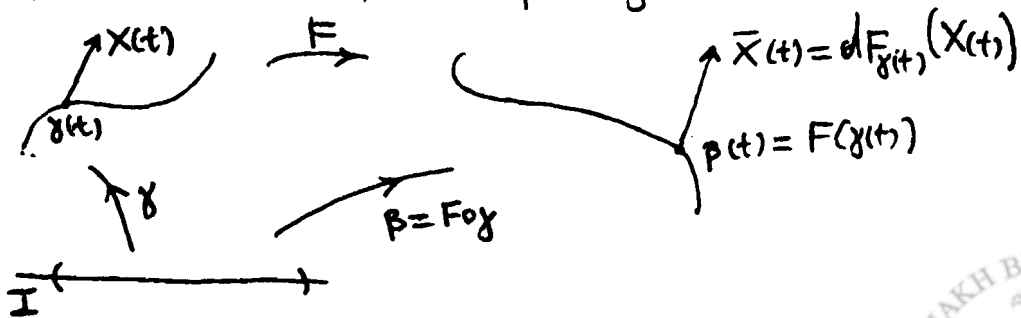
Απόδειξη. (i) Αν η  $\gamma$  είναι μια σταθερή καμπύλη, τότε προφανώς  $\gamma'(t) = (\frac{dx_1}{dt}(t), \frac{dx_2}{dt}(t), \frac{dx_3}{dt}(t)) = (0, 0, 0)$ . Αντίστροφα, από τις  $\frac{dx_i}{dt}(t) = 0$ ,  $i=1,2,3$  έχουμε  $x_i(t) = a_i$ . Συνεπώς,  $\gamma(t) = (a_1, a_2, a_3) = \alpha$ , για κάθε  $t \in I$ .  
(ii) Οι συνιστώσες του  $\gamma''$  είναι οι  $\frac{d^2 x_i}{dt^2}(t)$  ( $i=1,2,3$ ). Συνεπώς  $\frac{d^2 x_i}{dt^2}(t) = 0$ , αν και μόνο αν,  $x_i(t) = b_i + t a_i$ . Άρα, η καμπύλη  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , ορίζεται ως  $\gamma(t) = (b_1, b_2, b_3) + t(a_1, a_2, a_3)$ . Δηλαδή, είναι μια ευθεία.



Θεωρούμε μια καμπύλη  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$   $C^k$ -κάξης ( $k \geq 2$ ). Έστω  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ένας μετασχηματισμός του  $\mathbb{R}^3$  πουλάκιων  $C^1$ -κάξης. Τότε, η καμπύλη  $\beta = F \circ \gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  είναι πουλάκιων  $C^1$ -κάξης. Στη Πρόταση 2.3.9 διαπιστώσαμε ότι  $\beta'(t) = dF_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$ . Δηλαδή, η παράγωγος απεικόνιση  $dF_{\gamma(t)}$  στέλνει το διάνυσμα ταχύτητας της  $\gamma$  (πρ  $\gamma'(t)$ ) στο διάνυσμα ταχύτητας της  $\beta$  (πρ  $\beta'(t)$ ). Αυτό δεν ισχύει εν γένει για τα διανύσματα επιτάχυνσης. Δηλαδή, γενικά έχουμε  $dF_{\gamma(t)}(\gamma''(t)) \neq \beta''(t)$ . Πραγματικά, για  $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3^3)$  και  $\gamma(t) = (t, t, t)$  έχουμε  $\beta(t) = F \circ \gamma(t) = F(\gamma(t)) = (t, t, t^3)$ . Συνεπώς,  $\beta''(t) = (0, 0, 6t)$ . Επίσης,  $\gamma''(t) = (0, 0, 0)$  και συνεπώς  $dF_{\gamma(t)}(\gamma''(t)) = (0, 0, 0)$ , αφού η  $dF_{\gamma(t)}$  είναι γραμμική απεικόνιση. Έτσι  $dF_{\gamma(t)}(\gamma''(t)) \neq \beta''(t)$ .

Στη συνέχεια θα δούμε τι συμβαίνει, όταν χρησιμοποιήσουμε ισομετρίες του  $\mathbb{R}^3$  αντί ενός τυχαίου μετασχηματισμού.

Έστωσαν  $X$  ένα διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της καμπύλης  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  και  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ένας μετασχηματισμός του  $\mathbb{R}^3$ . Τότε το διανυσματικό πεδίο  $\bar{X}$ , που ορίζεται ως  $\bar{X}(t) = dF_{\gamma(t)}(X(t))$ , είναι ένα διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της καμπύλης  $\beta = F \circ \gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ .



Το διανυσματικό πεδίο  $\bar{X}$  θα συμβολίζεται με  $dF(X)$  και θα λέγεται εικόνα που  $X$  μέσω του  $F$ .

Πρόταση 2.4.4. Έστωσαν  $X$  ένα διανυσματικό πεδίο  $C^1$ -τάξης κατά μήκος της καμπύλης  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  και  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  μια ισομετρία του  $\mathbb{R}^3$ . Τότε, το διανυσματικό πεδίο  $\bar{X} = dF(X)$  είναι ένα διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της καμπύλης  $\beta = F \circ \gamma$  και ισχύει η σχέση

(2.4.1)  $\bar{X}' = dF(X')$ .

Παρατήρηση 2.4.5. Από τη Πρόταση προκύπτει ότι προ-κειμένου για ισομετρίες  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , για τα διανυσματικά πεδία επιτάχυνσης των καμπυλών  $\gamma$  και  $\beta = F \circ \gamma$  ισχύει η σχέση

(2.4.2)  $\beta'' = dF(\gamma'')$ .

Η σχέση (2.4.2), όπως είδαμε προηγουμένως, δεν ισχύει γενικά για μετασχηματισμούς του  $\mathbb{R}^3$ .

Απόδειξη της Πρότασης. Έστωσαν  $x_1(t), x_2(t)$  και  $x_3(t)$  οι συνιστώσες που  $X$ . Το  $X'$  έχει συνιστώσες τις  $x'_1(t), x'_2(t)$  και  $x'_3(t)$ . Έστω  $(\tau_{ij})$  ο πίνακας της ορθογωνίας συνιστώσας  $T$  της ισομετρίας  $F$ . Ο πίνακας  $(\tau_{ij})$  είναι ως γνωστόν ορθογώνιος και σταθερός πίνακας. Από την Πρόταση 1.4.11 έχουμε

(\*) 
$$dF_{\gamma(t)}(X'(t)) = \left( T(X'(t)) \right)_{F(\gamma(t))} = \left( \sum_{j=1}^3 \tau_{1j} x'_j(t), \sum_{j=1}^3 \tau_{2j} x'_j(t), \sum_{j=1}^3 \tau_{3j} x'_j(t) \right)$$





Τέλος, με την ίδια Πρόταση παίρνουμε

$$\bar{X}(t) = dF_{\gamma(t)}(X(t)) = \left( T(X(t)) \right)_{F(X(t))} = \left( \sum_{j=1}^3 \tau_{1j} x_j(t), \sum_{j=1}^3 \tau_{2j} x_j(t), \sum_{j=1}^3 \tau_{3j} x_j(t) \right)_{\beta(t)}$$

και συνεπώς

$$(*) (*) \quad \bar{X}'(t) = \left( \sum_{j=1}^3 \tau_{1j} x_j'(t), \sum_{j=1}^3 \tau_{2j} x_j'(t), \sum_{j=1}^3 \tau_{3j} x_j'(t) \right)_{\beta(t)}$$

Από τις σχέσεις (\*) και (\*\*) προκύπτει ότι  $\bar{X}'(t) = dF_{\gamma(t)}(X'(t))$ .  
Δηλαδή,  $\bar{X}' = dF(X')$ .

### 2.5. Καμπύλες με Παράμετρο μήκος τόξου - Πλαίσιο και τύποι των Serret - Frenet

Στη παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με καμπύλες  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που έχουν διάνυσμα καχύψης παντού μοναδιαίο (σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3.5 αυτό μπορεί να γίνει για κάθε κανονική καμπύλη). Δηλαδή, θα κοιτάξουμε καμπύλες με παράμετρο το μήκος τόξου (φυσική παράμετρο). Επίσης θα υποθέσουμε ότι οι καμπύλες είναι τουλάχιστον  $C^3$ -τάξης, εκτός αν αναφέρουμε κάτι διαφορετικό. Έστω  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , με  $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s))$  μια καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου, που είναι τουλάχιστον  $C^3$ -τάξης. Έτσι, το διάνυσμα  $\gamma'(s) = (\gamma_1'(s), \gamma_2'(s), \gamma_3'(s))$  έχει μήκος μονάδα παντού, έχει αρχή το σημείο  $\gamma(s)$  και είναι εφαπτόμενο ως προς  $\gamma([a, b])$  στο  $\gamma(s)$ . Συμβολίζω-



Ζούμε αυτό το διάνυσμα με  $T(s)$ . Δηλαδή,

$$(2.5.1) \quad T(s) = \dot{\gamma}(s) = (\dot{\gamma}_1(s), \dot{\gamma}_2(s), \dot{\gamma}_3(s)),$$

όπου έχουμε βάλει κεφαλαία (-) αντί (·) για να τονίσουμε ότι παραγωγίζουμε ως προς το φυσικό τόξο.

Ορισμός 2.5.1. Ο αριθμός  $k(s) = |\ddot{\gamma}(s)| = |\dot{T}(s)|$  λέγεται καμπυλότητα (curvature) της  $\gamma$  στο  $\gamma(s)$  (ή στο  $s$ ) και ο αντίστροφος (όταν  $k(s) \neq 0$ )  $\rho(s) = \frac{1}{k(s)}$  λέγεται ακτίνα καμπυλότητας της  $\gamma$  στο  $\gamma(s)$ . Ειδικά, όταν  $k(s) = 0$ , λέμε ότι η ακτίνα καμπυλότητας απηριζείται στο  $\gamma(s)$ .

Τα παρακάτω παραδείγματα δείχνουν πως ο ορισμός της καμπυλότητας ικανοποιεί τη διαίτησή μας.

Παράδειγμα 2.5.2. Έστω  $a, b$  δυο διανύσματα του  $\mathbb{R}^3$  με  $|a| = 1$ . Η λεία καμπύλη (επιφάνεια), που ορίζεται ως  $\gamma(s) = as + b$  έχει καμπυλότητα 0 παντού. Το διάνυσμα ταχύτητας είναι  $\dot{\gamma}(s) = a$ , δηλαδή είναι παντού μοναδιαίο. Η καμπύλη έχει παράμετρο το φυσικό τόξο με αρχή κάποιο σημείο της (ποιός). Επειδή το  $a$  είναι σταθερό διάνυσμα, δηλαδή δεν εξαρτάται από το  $s$ , έχουμε  $k(s) = |\ddot{\gamma}(s)| = |0| = 0$ . Αντίστροφα, αν μια καμπύλη με μοναδιαίο διάνυσμα καχύτητας έχει καμπυλότητα παντού μηδέν, τότε αυτή είναι ευθεία. Πραγματικά, από  $k(s) = |\ddot{\gamma}(s)| = 0$ , έχουμε  $\ddot{\gamma}(s) = 0$  και ολοκληρώνοντας δυο φορές παίρνουμε  $\gamma(s) = as + b$  με  $|a| = 1$ .



Παράδειγμα 2.5.3. Η καμπύλη  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που ορίζεται ως  $\gamma(s) = (R \cos \frac{s}{R}, R \sin \frac{s}{R}, 0)$  με  $R = \text{σταθερό} > 0$  έχει διάνυσμα καχύψευτας  $\gamma'(s) = (-\sin \frac{s}{R}, \cos \frac{s}{R}, 0)$  το οποίο είναι μοναδιαίο. Εκεί το  $s$  είναι παράμετρος μήκους τόξου με αρχή το  $0 \in [0, 2\pi]$ . Άρα  $T(s) = \gamma'(s) = (-\sin \frac{s}{R}, \cos \frac{s}{R}, 0)$  και συνεπώς  $\ddot{\gamma}(s) = (-\frac{1}{R} \cos \frac{s}{R}, -\frac{1}{R} \sin \frac{s}{R}, 0)$ . Έχουμε,  $k(s) = |\ddot{\gamma}(s)| = \frac{1}{R}$ . Δηλαδή, η καμπύλη  $\gamma$  έχει σταθερή καμπυλότητα  $\frac{1}{R}$ . Είναι φανερό ότι η τροχιά της  $\gamma$  είναι κύκλος ακτίνας  $R$ .

Παρατήρηση 2.5.4. Το σημείο  $\gamma(s)$  και το διάνυσμα  $T(s)$ , μας καθορίζουν πλήρως τη διανυσματική εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας της καμπύλης  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  στο σημείο  $\gamma(s)$ .

Αν σε ένα σημείο  $s$  (ή  $\gamma(s)$ ) της καμπύλης  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  η καμπυλότητα  $k(s)$  δεν είναι μηδέν (οπότε η καμπυλότητα δεν είναι μηδέν σε μια περιοχή του  $s$  λόγω συνέχειας), τότε μπορούμε να ορίσουμε εκεί (δηλαδή στο  $s$ ) δυο ακόμη διανύσματα με τις παρακάτω σχέσεις

$$(2.5.2) \quad N(s) = \frac{T'(s)}{k(s)} = \frac{\ddot{\gamma}(s)}{k(s)}$$

$$(2.5.3) \quad B(s) = T(s) \times N(s).$$

Θεωρούμε μια καμπύλη  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  με παράμετρο το μήκος τόξου και καμπυλότητα  $k(s)$  παντού θετική. Τότε ορίζονται σε κάθε σημείο  $\gamma(s)$  τα διανύσματα  $T(s), N(s), B(s)$ .

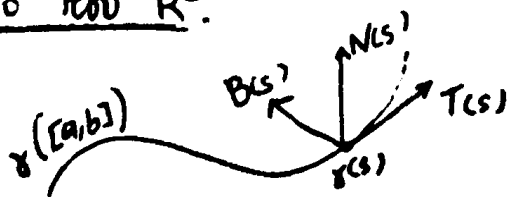


Πιο γενικά, ορίζονται τρία διανυσματικά πεδία  $T, N, B$  κατά μήκος της καμπύλης  $\gamma$  με ειδικά, αντίστοιχα, τα διανύσματα  $T(s), N(s), B(s)$ .

Πρόταση 2.5.5. Έστω  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  καμπύλη με παράμετρο ως φυσικός κόβος και καμπυλότητα  $\kappa(s) > 0$ , για κάθε  $s \in [a, b]$ . Τα διανύσματα  $T(s), N(s), B(s)$  είναι μοναδιαία και κάθετα ανά δύο σε κάθε σημείο  $\gamma(s)$ .

Απόδειξη. Από την υπόθεση έχουμε  $|T(s)| = |\dot{\gamma}(s)| = 1$ . Επίσης,  $|N(s)| = \frac{|\dot{T}(s)|}{\kappa(s)} = \frac{|\ddot{\gamma}(s)|}{\kappa(s)^2} = 1$ . Τώρα, από τη σχέση  $T(s) \cdot T(s) = 1$  και την άσκηση 2.4.1 παίρνουμε,  $2 T(s) \cdot \dot{T}(s) = 0$  ή λόγω της σχέσης (2.5.2)  $2 T(s) \cdot \kappa(s) N(s) = 0$ . Έτσι  $T(s) \perp N(s)$ , αφού  $\kappa(s) > 0$ . Τέλος, από τις ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου συνάγουμε πως  $B(s) \perp T(s), B(s) \perp N(s)$  και  $|B(s)| = 1$ .

Συμπέρασμα. Αν  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  είναι μια καμπύλη με μοναδιαίο διάνυσμα ταχύτητας, τότε σε κάθε σημείο  $\gamma(s)$  με  $\kappa(s) > 0$  ορίζονται τρία διανύσματα  $T(s), N(s), B(s)$  μοναδιαία και ανά δύο κάθετα. Αυτά τα τρία διανύσματα ορίζουν μια ορθοκανονική βάση (πλαίσιο) στο σημείο  $\gamma(s)$ , που λέγεται Πλαίσιο των Serret-Frenet. Αυτή η ορθοκανονική βάση ανήκει στον θετικό προανακαταβιβίο του  $\mathbb{R}^3$ .



Παρατήρηση 2.5.6. Σε ένα σημείο, όπου  $k(s) = 0$ , δεν μπορεί να γίνει κάτι ανάλογο. Έτσι τα σημεία μιας καμπύλης με  $k(s) = 0$  πρέπει να μελετηθούν με ιδιαίτερη προσοχή. Αν, όμως, ισχύει  $k(s) = 0$  σε ένα ανοικτό κομμάτι της  $\gamma$  τότε αυτό είναι ευθεία, όπως είδαμε στο Παράδειγμα 2.5.2.

Ορισμός 2.5.7. Το διάνυσμα  $T(s)$  λέγεται μονοδιαίο εφαπτόμενο της  $\gamma$ , το  $N(s)$  πρώτο κάθετο της  $\gamma$ , το  $B(s)$  δεύτερο κάθετο της  $\gamma$ , στο σημείο  $\gamma(s)$ . Οι ευθείες που περνούν από το  $\gamma(s)$  και είναι παράλληλες προς  $T(s)$ ,  $N(s)$ ,  $B(s)$  λέγονται εφαπτομένη ευθεία, πρώτη κάθετη ευθεία και δεύτερη κάθετη ευθεία, αντίστοιχα. Το επίπεδο που ορίζεται από το σημείο  $\gamma(s)$  και τα διανύσματα  $T(s)$ ,  $N(s)$  λέγεται εγγύτατο επίπεδο (osculating plane) της καμπύλης στο σημείο  $\gamma(s)$ . Ομοίως το επίπεδο που ορίζεται από το σημείο  $\gamma(s)$  και τα διανύσματα  $T(s)$ ,  $B(s)$  λέγεται ευθετοποιούν επίπεδο (rectifying plane) της καμπύλης στο σημείο  $\gamma(s)$ . Τέλος, το επίπεδο που ορίζεται από το σημείο  $\gamma(s)$  και τα διανύσματα  $N(s)$ ,  $B(s)$  λέγεται κάθετο επίπεδο (normal plane) της καμπύλης στο σημείο  $\gamma(s)$ .

Ορισμός 2.5.8. Ο αριθμός  $\tau(s) = -\dot{B}(s) \cdot N(s)$  λέγεται σπρέζση (torsion) της καμπύλης  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  στο σημείο  $s$  και ο αντίστροφός  $\theta(s) = \frac{1}{\tau(s)}$  (όταν  $\tau(s) \neq 0$ ) λέγεται ακτίνα σπρέζης στο  $s$ . Ειδικά, όταν  $\tau(s) = 0$ , λέμε ότι η ακτίνα σπρέζης απήρι-



ζεται στο σημείο  $\gamma(s)$ . Η σπρέιγ ορίζεται μόνο όταν  $k(s) > 0$ .

Παρατήρηση 2.5.9 Αντίθετα με την καμπυλότητα η σπρέιγ μιας καμπύλης μπορεί να παίρνει και αρνητικές τιμές. Το σημείο πλέον (-) στον ορισμό της σπρέιγ οφείλεται σε παραδοσιακούς λόγους.

Έστω  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  μια καμπύλη με μοναδιαίο διάνυσμα ταχύτητας. Ορίζεται μια συνάρτηση  $k: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, s \rightarrow k(s) = |\dot{\tau}(s)| = |\ddot{\gamma}(s)|$ , που λέγεται συνάρτηση καμπυλότητας της  $\gamma$  και η τιμή της είναι η καμπυλότητα της  $\gamma$  στο  $s$  (ή στο  $\gamma(s)$ ). Αν  $k(s) > 0$ , για κάθε  $s \in [a, b]$  τότε ορίζεται η συνάρτηση σπρέιγ  $\tau: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, s \rightarrow \tau(s) = -\dot{B}(s) \cdot N(s)$  με τιμές τη σπρέιγ της καμπύλης. Για  $k(s) > 0$  η συνάρτηση  $k$  είναι τουλάχιστον  $C^1$  και η  $\tau$  τουλάχιστον συνεχής, αφού υποθέσαμε ότι η καμπύλη είναι τουλάχιστον  $C^3$ -κάψης.

Θεώρημα 2.5.10. (Τύποι των Serret-Frenet). Έστω μια καμπύλη  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  με παράμετρο φυσικός κόβου,  $C^3$ -κάψης τουλάχιστον, καμπυλότητα  $k(s) > 0$  και σπρέιγ  $\tau(s)$ . Τότε ισχύουν οι σχέσεις

$$(2.5.4) \quad \dot{T}(s) = k(s)N(s)$$

$$(2.5.5) \quad \dot{N}(s) = -k(s)T(s) + \tau(s)B(s)$$

$$(2.5.6) \quad \dot{B}(s) = -\tau(s)N(s).$$

Οι σχέσεις είναι γνωστές ως τύποι (εξισώσεις) των Serret-Frenet.



Απόδειξη. Η (2.5.4) προκύπτει από τον ορισμό του  $N(s)$ .

Από τη σχέση  $B(s) \cdot B(s) = 1$  με παραγωγή παίρνουμε

$2 B(s) \cdot \dot{B}(s) = 0$ . Δηλαδή,  $\dot{B}(s) \perp B(s)$ . Επίσης από τη σχέση  $B(s) \cdot T(s) = 0$

με παραγωγή παίρνουμε  $\dot{B}(s) \cdot T(s) + B(s) \cdot \dot{T}(s) = 0$  ή λόγω της

(2.5.4),  $\dot{B}(s) \cdot T(s) + k(s) B(s) \cdot N(s) = 0$ . Επειδή,  $B(s) \cdot N(s) = 0$ , υπερ-

παίρνουμε ότι  $\dot{B}(s) \cdot T(s) = 0$ . Δηλαδή,  $\dot{B}(s) \perp T(s)$ . Αφού το  $\dot{B}(s)$

είναι κάθετο στο  $T(s)$  και το  $B(s)$ , θα είναι παράλληλο με

το  $N(s)$ . Έστω  $\dot{B}(s) = \lambda(s) N(s)$ . Άρα,  $\lambda(s) = \dot{B}(s) \cdot N(s) = -\tau(s)$

και συνεπώς  $\dot{B}(s) = -\tau(s) N(s)$ . Έτσι αποδείξαμε και την

σχέση (2.5.6). Για να αποδείξουμε τη σχέση (2.5.5) θα χρησι-

μοποιήσουμε μια άσκηση της Αναλυτικής Γεωμετρίας: Αν

$(x_0, y_0, z_0)$  είναι μια ορθοκανονική βάση και  $x$  ένα διάνυσμα

επί,  $x = (x \cdot x_0)x_0 + (x \cdot y_0)y_0 + (x \cdot z_0)z_0$  (γιατί;). Με τη βοήθεια

της άσκησης έχουμε

$$(*) \quad \dot{N}(s) = (\dot{N}(s) \cdot T(s))T(s) + (\dot{N}(s) \cdot N(s))N(s) + (\dot{N}(s) \cdot B(s))B(s)$$

Όμως ισχύει  $N(s) \cdot \dot{N}(s) = 0$  (γιατί;). Επίσης από την  $N(s) \cdot T(s) = 0$

έχουμε με παραγωγή

$$\dot{N}(s) \cdot T(s) + N(s) \cdot \dot{T}(s) = 0 \text{ ή λόγω της (2.5.2) } \dot{N}(s) \cdot T(s) + k(s) N(s) \cdot N(s) = 0.$$

Συνεπώς,  $\dot{N}(s) \cdot T(s) = -k(s)$ . Επιπλέον από  $N(s) \cdot B(s) = 0$  παίρνου-

με  $\dot{N}(s) \cdot B(s) + N(s) \cdot \dot{B}(s) = 0$ , ή λόγω της (2.5.6),  $\dot{N}(s) \cdot B(s) - \tau(s) = 0$ .

Άρα, η (\*) γίνεται  $\dot{N}(s) = -k(s)T(s) + \tau(s)B(s)$ . Δηλαδή, προκύ-  
πτει η σχέση (2.5.5).

Ορισμός 2.5.11. Έστω  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  μια καμπύλη με παράμετρο  
το μήκος τόξου, καμπυλότητα  $k(s) > 0$  για κάθε  $s \in [a, b]$ . Το  $c_0$  —



νολο  $\{k, \tau, T, N, B\}$  λέγεται στοιχεία Serret-Frenet για την καμπύλη  $\gamma$ .

Παράδειγμα 25.12. Δίνεται η λεία καμπύλη  $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , ως  $\beta(s) = \left( a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$  με  $a > 0$ .

Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η  $\beta$  έχει παραμέτρο εφ μήκος τόξου, δηλαδή διάνυσμα ταχύτητας μοναδιαίο. Για την  $\beta(s)$  με τους ορισμούς μας έχουμε:

$$T(s) = \dot{\beta}(s) = \left( -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

$$\dot{T}(s) = \ddot{\beta}(s) = \left( -\frac{a}{a^2+b^2} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{a^2+b^2} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0 \right)$$

Άρα  $k(s) = |\dot{T}(s)| = \frac{a}{a^2+b^2} > 0$

$$N(s) = \left( -\cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0 \right)$$

$$B(s) = T(s) \times N(s) = \left( \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right).$$

Άρα

$$\dot{B}(s) = \left( \frac{b}{a^2+b^2} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{a^2+b^2} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0 \right)$$

και συνεπώς  $\tau(s) = -\dot{B}(s) \cdot N(s) = \frac{b}{a^2+b^2}$ .





Παρατηρούμε ότι η γρέψη είναι θετική αν  $b > 0$  και αρνητική αν  $b < 0$ . Η γρέψη είναι παντοεικώς ίση με μηδέν αν  $b = 0$ .

Παρατήρηση 2.5.13. Αν στο προηγούμενο παράδειγμα  $b = 0$ , τότε η γρέψη της καμπύλης είναι μηδέν. Από την άλλη πλευρά όμως, αν  $b = 0$  τότε η καμπύλη είναι η  $\beta(s) = \left( a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0 \right)$ , δηλαδή όλα

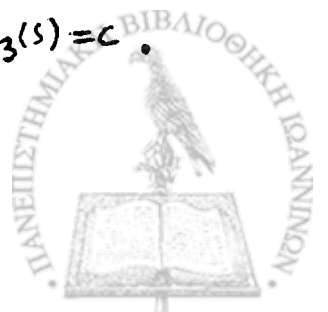
τα σημεία της εικόνας  $\beta(R)$  είναι στο επίπεδο  $Oxy$ . Πρόκειται για μια επίπεδη καμπύλη. Αυτό δεν είναι τυχαίο όπως φαίνεται στη παρακάτω Πρόταση.

Πρόταση 2.5.14. Έστω  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  μια καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου και καμπυλότητα  $k(s) > 0$ . Η καμπύλη είναι επίπεδη, αν και μόνο αν,  $\tau(s) = 0$ , για κάθε  $s \in I$ .

Απόδειξη. Έστω  $\tau(s) = 0$ , για κάθε  $s \in I$ . Τότε από τον κριτικό τύπο των Serret - Frenet, έχουμε  $\dot{B}(s) = 0$ , δηλαδή  $B(s) = a = (a_1, a_2, a_3) =$  σταθερό διάνυσμα. Αν  $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s))$  είναι το εκχαιό σημείο της εικόνας της καμπύλης, τότε

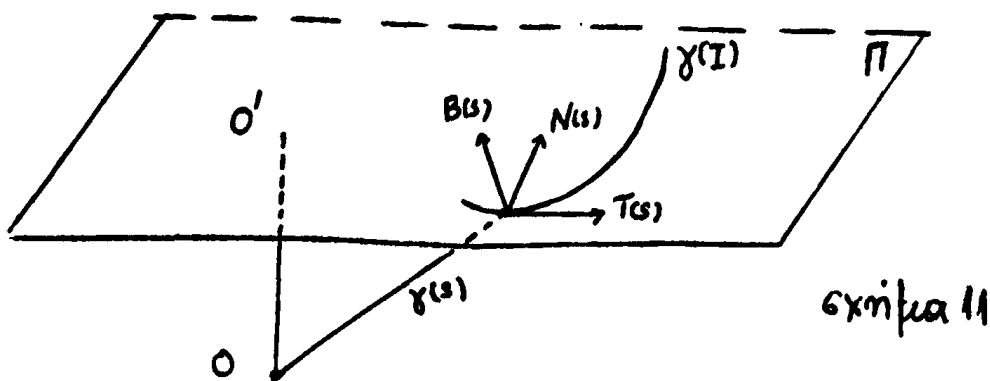
$$\frac{d}{ds} (\gamma(s) \cdot B(s)) = T(s) \cdot B(s) + \gamma(s) \cdot \dot{B}(s) = 0, \text{ αφού } T \perp B, \dot{B} = 0.$$

Άρα  $\gamma(s) \cdot B(s) = c = \text{const.}$  και συνεπώς  $a_1 \gamma_1(s) + a_2 \gamma_2(s) + a_3 \gamma_3(s) = c$



Έτσι το αρχικό σημείο  $\gamma(s)$  της τροχιάς της  $\gamma$  επαληθεύει την εξίσωση  $a_1x + a_2y + a_3z = c$ , που είναι η αναλυτική εξίσωση ενός επιπέδου. Άρα το  $\gamma(I)$  είναι πάντα σε αυτό το επίπεδο.

Αντίστροφα, έστω  $\Pi$  το επίπεδο πάνω στο οποίο βρίσκεται η  $\gamma(I)$  (βλ. σχήμα 11) και  $O$  η αρχή των συντεταγμένων. Έστω  $O'$  η προβολή του  $O$  πάνω στο  $\Pi$ . Ισχύει  $O'O \cdot (\gamma'(s) - O'O) = 0$ . Παραγωγίζοντας έχουμε  $O'O \cdot T(s) = 0$ , άρα το  $T(s)$  είναι διάνυσμα του επιπέδου  $\Pi$ . Παραγωγίζοντας πάλι παίρνουμε  $O'O \cdot k(s) N(s) = 0$  ή επειδή  $k(s) > 0$ ,  $O'O \cdot N(s) = 0$ . Δηλαδή και το  $N(s)$  είναι διάνυσμα του  $\Pi$ . Επειδή όμως  $B(s) = T(s) \times N(s)$  συμπεραίνουμε ότι το  $B(s)$  είναι μοναδιαίο κάθετο στο  $\Pi$  και συνεπώς  $B(s) = a = \text{σταθερό διάνυσμα}$ . Άρα  $\dot{B}(s) = 0$  και συνεπώς  $\tau(s) = 0$ , για κάθε  $s \in I$ .



Στο παράδειγμα 9.5.3 βρήκαμε ότι η καμπυλότητα ενός κύκλου ακτίνας  $R$  είναι σταθερή  $\frac{1}{R}$ . Η παρακάτω πρόταση δείχνει το αντίστροφο.



Πρόταση 2.5.15. Έστω  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  μια καμπύλη του  $\mathbb{R}^3$  με παράμετρο το μήκος τόξου, καμπυλότητα  $k$  σταθερή θετική και γρέγνη μηδέν. Τότε η τροχιά της  $\gamma$  είναι κύκλος ακτίνας  $\frac{1}{k}$ .

Απόδειξη. Θεωρούμε τη καμπύλη  $\beta: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  που ορίζεται ως  $\beta(s) = \gamma(s) + \frac{1}{k} N(s)$ , όπου  $N$  είναι το πρώτο κάθετο διανυσματικό πεδίο της  $\gamma$ . Το διάνυσμα καύσης της καμπύλης  $\beta$  είναι

$$\beta'(s) = \dot{\gamma}(s) + \frac{1}{k} \dot{N}(s) = T(s) + \frac{1}{k} (-kT(s) + \tau(s)B(s)) = 0.$$

Συνεπώς, σύμφωνα με τη Πρόταση 2.4.3 (i) η καμπύλη  $\beta$  είναι σταθερή καμπύλη. Έστω  $\beta(s) = \alpha$ , για κάθε  $s \in I$ . Τότε,  $\alpha = \gamma(s) + \frac{1}{k} N(s)$ . Άρα,  $|\gamma(s) - \alpha| = \frac{1}{k}$ , για κάθε  $s \in I$ . Επειδή η καμπύλη  $\gamma$  είναι ενήπιδη, αφού  $\tau = 0$ , συμπεραίνουμε ότι η τροχιά της  $\gamma$  είναι κύκλος ακτίνας  $\frac{1}{k}$ .

Στο Παράδειγμα 2.5.12 εξετάσαμε την κυκλική έδρα  $\beta(s) = \left( a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$  με  $a > 0$ . Βρήκαμε

την καμπυλότητά της  $k(s) = \frac{a}{a^2+b^2}$ , τη γρέγνη της  $\tau(s) = \frac{b}{a^2+b^2}$

καθώς επίσης και το πλαίσιο Serret-Frenet  $T(s), N(s), B(s)$  σε κάθε σημείο της  $\beta$ . Προχωρώντας με τον ίδιο τρόπο για την καμπύλη

$$\bar{\beta}(s) = \left( a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) \text{ με } a > 0$$



βρίσκουμε ότι,  $\bar{\kappa}(s) = \frac{a}{a^2+b^2} = \kappa(s)$ ,  $\bar{\tau}(s) = -\frac{b}{a^2+b^2} = \tau(s)$ ,

$\bar{T}(s) = T(s)$ ,  $\bar{N}(s) = N(s)$  και  $\bar{B}(s) = -B(s)$ ,  
όπου με "πενταγράμμη" έχουμε συμβολίσει τα στοιχεία  
Serret-Frenet για την καμπύλη  $\bar{\beta}$ . Αν θεωρήσουμε  
έν μετασχηματισμό  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που ορίζεται ως  
 $F(x, y, z) = (x, y, -z)$ , παρατηρούμε ότι  $\bar{\beta} = F \circ \beta$ ,  
δηλαδή η  $\bar{\beta}$  είναι εικόνα της  $\beta$  μέσω του  $F$ . Επι-  
πλέον ισχύουν οι σχέσεις

$$\bar{\kappa} = \kappa, \bar{\tau} = -\tau, \bar{T} = dF(T), \bar{N} = dF(N) \text{ και } \bar{B} = -dF(B)$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός  $F$  είναι ισομε-  
ρεια με πρόσημο ( $\text{sign} F$ ) το  $-1$ .

Ισχύει η παρακάτω πρόταση

Πρόταση 2.5.16. Έστω  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  μια καμπύλη του  $\mathbb{R}^3$  με  
παραμέτρο το μήκος τόξου και καμπυλότητα θετική. Θεωρούμε  
ένν εικόνα  $\bar{\gamma} = F \circ \gamma$  της  $\gamma$  με μια ισομερεια  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  έν  
 $\mathbb{R}^3$ , η οποία είναι επίσης μια καμπύλη με παραμέτρο το  
μήκος τόξου και πάντα ταλίστιετων  $C^3$ . Τότε ισχύουν οι σχέ-  
σεις

$$(2.5.7) \quad \bar{\kappa} = \kappa, \bar{\tau} = (\text{sign} F) \tau, \bar{T} = dF(T), \bar{N} = dF(N), \bar{B} = (\text{sign} F) dF(B),$$

όπου με "πενταγράμμη" συμβολίζουμε τα στοιχεία Serret-Frenet  
για την καμπύλη  $\bar{\gamma}$ .



Απόδειξη. Η καμπύλη  $\gamma$  έχει παράμετρο το μήκος τόξου, όπως προκύπτει από τη σχέση (2.3.3). Κάνοντας χρήση της Πρότασης 2.4.4 συνάγουμε ότι

$$\bar{T} = \dot{\gamma} = dF(\dot{\gamma}) = dF(T)$$

και

$$\bar{\kappa} = |\ddot{\gamma}| = |dF(\ddot{\gamma})| \stackrel{\text{F.ισοθ.}}{=} |\ddot{\gamma}| = \kappa$$

Επειδή  $\bar{\kappa} = \kappa$  και  $\kappa > 0$ , έχουμε  $\bar{\kappa} > 0$ . Συνεπώς για την καμπύλη  $\bar{\gamma}$  μπορούμε να κατασκευάσουμε τα  $\bar{N}$  και  $\bar{B}$ . Έτσι λοιπόν έχουμε

$$\bar{N} = \frac{\ddot{\gamma}}{\bar{\kappa}} = \frac{dF(\ddot{\gamma})}{\kappa} \stackrel{\text{γραμ.}}{=} \frac{dF}{\kappa} \left( \frac{\ddot{\gamma}}{\kappa} \right) = dF(N)$$

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.4.20 παίρνουμε

$$\bar{B} = \bar{T} \times \bar{N} = dF(T) \times dF(N) = (\text{sign} F) dF(T \times N) = (\text{sign} F) dF(B).$$

Με τη χρήση του Πορίσματος 1.4.13 και επειδή  $\tau = -\dot{B} \cdot N = B \cdot \dot{N}$  (γιατί;) συνάγουμε ότι

$$\bar{\tau} = \bar{B} \cdot \dot{\bar{N}} = (\text{sign} F) dF(B) \cdot dF(\dot{N}) = (\text{sign} F) B \cdot \dot{N} = (\text{sign} F) \tau.$$

Άσκηση 2.5.1. Έστω  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  μια καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου, καμπυλότητα  $\kappa$  παντού θετική και στροφή  $\tau$ . Θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο  $A = \tau T + \kappa B$ . Να αποδειχθεί ότι οι κύβοι Serret-Frenet γράφονται ως

$$\dot{T} = A \times T, \quad \dot{N} = A \times N, \quad \dot{B} = A \times B.$$

Το διάνυσμα  $A(s) = \tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s)$  λέγεται διάνυσμα του Darboux στο σημείο  $\gamma(s)$  της καμπύλης  $\gamma$ .



Άσκηση 2.5.2. Έστωσαν  $\gamma$  καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου, καμπυλότητα  $k$  θετική και  $\omega$  ένα καθήρο μοναδιαίο διάνυσμα του  $\mathbb{R}^3$ . Θέτουμε  $\theta(s) = \angle(\alpha, T(s))$  και  $\omega(s) = \angle(\alpha, B(s))$

Να αποδειχθεί η σχέση

$$\frac{\sin \theta}{\sin \omega} = -\frac{k}{\tau} \frac{d\omega}{ds}.$$

Άσκηση 2.5.3. Ένας κύκλος με μοναδιαία ακτίνα και ακτίνα  $R$  γράφεται ως

$$\beta(s) = \alpha + R \cos \frac{s}{R} \nu_1 + R \sin \frac{s}{R} \nu_2,$$

όπου  $\nu_i \cdot \nu_j = \delta_{ij}$  ( $\delta_{ij}$  είναι τα δέλτα του Κρονκερ)

Δίνεται μια καμπύλη  $\gamma(s)$  με παράμετρο μήκος τόξου και κ(ς) > 0.

i) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένας μοναδικός κύκλος που ικανοποιεί τις σχέσεις  $\beta(s_0) = \gamma(s_0)$ ,  $\dot{\beta}(s_0) = \dot{\gamma}(s_0)$  και  $\ddot{\beta}(s_0) = \ddot{\gamma}(s_0)$ .

ii) Να αποδειχθεί ότι αυτός ο μοναδικός κύκλος βρίσκεται στο εγγύτατο επίπεδο της καμπύλης  $\gamma$  στο  $\gamma(s_0)$ . Αυτός ο κύκλος λέγεται εγγύτατος κύκλος (osculating circle) της  $\gamma$  στο  $\gamma(s_0)$ .

iii) Να βρεθεί η ακτίνα και το κέντρο του εγγύτατου κύκλου. Το κέντρο αυτού του κύκλου λέγεται κέντρο καμπυλότητας (center of curvature) της καμπύλης  $\gamma$  στο σημείο  $\gamma(s_0)$ .

## 2.6. Στοιχεία Serret-Frenet για καμπύλες με αρχόδα Παράμετρο

Στη παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε καμπύλες  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$



με ευκαία παράμετρο. Θα υποθέσουμε, για να μην επαναλαμβανόμαστε, ότι οι καμπύλες είναι ευλόγιστον  $C^3$ -τάξης εκτός αν αναφέρουμε κάτι διαφορετικό.

Έστω  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $t \rightarrow \gamma(t)$  μια κανονική καμπύλη. Θεωρούμε την αναπαράμετρησή της  $\gamma$  με παράμετρο το μήκος τόξου, πάντα υπάρχει σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3.5. Έστω  $\bar{\gamma}(s) = \gamma(\tau(s))$ , όπου  $s \in J$ . Υποθέτουμε, ότι η καμπυλότητα  $\kappa(s)$  επί  $\bar{\gamma}$ , στην οποία μπορούμε να υπολογίσουμε σύμφωνα με τη παράγραφο 2.5, αφού η  $\bar{\gamma}$  έχει παράμετρο το μήκος τόξου, είναι θετική για κάθε  $s \in J$ .

Έστω  $\kappa(s)$ ,  $\bar{\tau}(s)$ ,  $\bar{T}(s)$ ,  $\bar{N}(s)$  και  $\bar{B}(s)$  τα στοιχεία Serret-Frenet για τη καμπύλη  $\bar{\gamma}$ . Δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 2.6.1. Έστω  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  κανονική καμπύλη. Ονομάζουμε στοιχεία Serret-Frenet της καμπύλης  $\gamma$  και συμβολίζουμε με  $\kappa, \tau, T, N, B$  τα εξής:

$$(2.6.1) \quad \begin{aligned} \kappa(t) &\stackrel{\text{op.}}{=} \kappa(s(t)), & \tau(t) &\stackrel{\text{op.}}{=} \bar{\tau}(s(t)) \\ T(t) &\stackrel{\text{op.}}{=} \bar{T}(s(t)), & N(t) &\stackrel{\text{op.}}{=} \bar{N}(s(t)) \text{ και } B(t) \stackrel{\text{op.}}{=} \bar{B}(s(t)) \end{aligned}$$

Τα  $\kappa(t)$ ,  $\tau(t)$ ,  $T(t)$ ,  $N(t)$  και  $B(t)$  λέγονται, συντίετοιχα, καμπυλότητα της  $\gamma$  στο  $t$ , στρέψη της  $\gamma$  στο  $t$ , μοναδιαίο εφαπτόμενο της  $\gamma$  στο  $t$ , πρώτο και δεύτερο κάθετο της  $\gamma$  στο  $t$ .

Η ορθοκανονική βάση  $T(t)$ ,  $N(t)$ ,  $B(t)$  λέγεται Πλάιλιό



Serret-Frenet της  $\gamma$  στο σημείο  $\gamma(t)$ . Αυτή η ορθοκανονική βάση ανήκει στον θετικό προανατολικό του  $\mathbb{R}^3$ . Οι συναρτήσεις  $\bar{k}$  και  $\bar{\tau}$  είναι διαφορετικές συναρτήσεις, αφού έχουν διαφορετικά πεδία ορισμού, με ίδιες τιμές. Τα ίδια ισχύουν για τα άλλα στοιχεία Serret-Frenet.

Θα εξηγήσουμε με ένα παράδειγμα

Παράδειγμα 2.6.2. Δίνεται η καμπύλη  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που ορίζεται ως  $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$  με  $a > 0$  και  $a^2 + b^2 \neq 1$ , η οποία μας είναι γνωστή ως κυκλική έλικα. Θέλουμε να βρούμε την καμπυλότητα, τη στρέψη της καθώς και τα διανύσματα  $T(t)$ ,  $N(t)$ ,  $B(t)$ .

Έχουμε  $\gamma'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$  και  $|\gamma'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Επειδή  $a^2 + b^2 \neq 1$  η καμπύλη μας δεν έχει παράμετρο το μήκος τόξου. Θα κάνουμε αναπαράμετρηση αυτής ώστε να έχουμε παράμετρο το μήκος τόξου.

Ακολουθώντας το Παράδειγμα 2.3.7 με αρχή  $t_0 = 0$  έχουμε

$$t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} = t(s). \text{ Έτσι η } \bar{\gamma}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \bar{\gamma}(s) = \gamma(t(s)) =$$

$$= \left( a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \text{ είναι κανονική αναπαρά-}$$

μέτρηση της  $\gamma$  με παράμετρο το μήκος τόξου. Για την  $\bar{\gamma}$  σύμφωνα με το Παράδειγμα 2.5.12 έχουμε

$$\bar{k}(s) = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \bar{\tau}(s) = \frac{b}{a^2 + b^2},$$

$$\bar{T}(s) = \left( -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$





$$\bar{N}(s) = \left( -\cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0 \right)$$

$$\bar{B}(s) = \left( \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.6.1 θα έχουμε

$$k(t) = \bar{k}(s(t)) = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad \tau(t) = \bar{\tau}(s(t)) = \frac{b}{a^2+b^2}$$

$$T(t) = \bar{T}(s(t)) = \left( -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin t, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos t, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

$$N(t) = \bar{N}(s(t)) = (-\cos t, -\sin t, 0)$$

$$B(t) = \bar{B}(s(t)) = \left( \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin t, -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos t, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right),$$

αφού  $t = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$ .

Η παραπάνω διαδικασία είναι πολλές φορές κουραστική. Ένα άλλο πρόβλημα που συναντάμε είναι η εύρεση της ανάρτησης  $t = t(s)$  με την οποία θα βρούμε την αναπαραμέτρηση  $\tilde{\gamma}$  ως  $\gamma$  (βλ. παρατήρηση 2.3.6). Μια από αυτά τα παρακάτω Θεώρημα είναι χρήσιμο.

Θεώρημα 2.6.3. Έστω  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  μια κανονική καμπύλη με παράμετρο  $t$ , όχι κατ'ανάγκη το φυσικό μήκος. Αν  $\gamma'(t) \times \gamma''(t) \neq 0$ , τότε ισχύουν οι σχέσεις



$$(2.6.2) \quad T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}, \quad N(t) = B(t) \times T(t), \quad B(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}$$

$$k(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3}, \quad \tau(t) = \frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)) \cdot \gamma'''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^2}.$$

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος θα αποδείξουμε ένα Λήμμα

Λήμμα 2.6.4. Έστωσαν  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  μια κανονική καμπύλη και  $k(t), \tau(t), T(t), N(t), B(t)$  τα στοιχεία Serret-Frenet, όπως δόθηκαν στις σχέσεις (2.6.1). Ισχύουν οι σχέσεις

$$T'(t) = k(t)v(t)N(t)$$

$$(2.6.3) \quad N'(t) = -k(t)v(t)T(t) + \tau(t)v(t)B(t)$$

$$B'(t) = -\tau(t)v(t)N(t)$$

όπου  $v(t) = |\gamma'(t)|$  είναι η ταχύτητα της καμπύλης και ο κό-  
νος (') δηλώνει παραγώγιση ως προς τη παράμετρο  $t$ .

Απόδειξη. Ισχύουν  $\frac{ds}{dt}(t) = |\gamma'(t)| = v(t)$  και  $\frac{dt}{ds}(s) = \frac{1}{|\gamma'(t(s))|} = \frac{1}{v(t(s))}$ .  
Από την σχέση  $T(t) = \bar{T}(s(t))$  με παραγώγιση ως προς  $t$  παίρνουμε,  
$$T'(t) = \dot{\bar{T}}(s(t)) \cdot \frac{ds}{dt}(t) = \bar{k}(s(t)) \bar{N}(s(t)) \cdot v(t) = k(t)v(t)N(t).$$
  
Όμοια, προκύπτουν και οι άλλες σχέσεις.

Απόδειξη του θεωρήματος. Σύμφωνα με τον ορισμό 2.6.1 για τα στοιχεία Serret-Frenet μιας καμπύλης  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  θα έχουμε τις σχέσεις (2.6.1) και την σχέση



(\*)

Από την σχέση (\*) με παραχώριση ως προς  $s$  παίρνουμε

$$\bar{T}(s) = \gamma'(t(s)) \cdot \frac{1}{v(t(s))}.$$

Άρα

$$T(t) = \bar{T}(s(t)) = \frac{\gamma'(t)}{v(t)} = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}, \text{ η πρώτη σχέση.}$$

Παραγωγίζοντας την  $\gamma'(t) = v(t)T(t)$  και λαμβάνοντας υπόψη το Λήμμα 2.6.4 βρίσκουμε

$$\gamma''(t) = \frac{dv}{dt}(t)T(t) + k(t)v^2(t)N(t).$$

Συνεπώς

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) = k(t)v^3(t)T(t) \times N(t) = k(t)v^3(t)B(t)$$

από όπου προκύπτει η τρίτη και τέταρτη σχέση.

Τέλος, βρίσκοντας με όμοιο τρόπο το  $\gamma'''(t)$  και κάνοντας υπολογισμούς βρίσκουμε

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) \cdot \gamma'''(t) = k^2(t)v^6(t)\tau(t),$$

από όπου προκύπτει η πεμπτή σχέση.

Παράδειγμα 2.6.5. Έστω η καμπύλη  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που ορίζεται

ως  $\gamma(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$ . Θα βρούμε τα στοιχεία Serret-

Frenet αυτής της καμπύλης. Βρίσκουμε το διάνυσμα ταχύτητας

$$\gamma'(t) = (3, 6t, 6t^2) \text{ και συνεπώς } |\gamma'(t)| = v(t) = 3(1+2t^2). \text{ Άρα η}$$

καμπύλη είναι κανονική, αφού  $\gamma'(t) \neq 0$ , για κάθε  $t \in \mathbb{R}$ . Επίσης

$$\gamma''(t) = (0, 6, 12t) \text{ και } \gamma'''(t) = (0, 0, 12). \text{ Άρα,}$$

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) = (36t^2, -36t, 18) \text{ και } |\gamma'(t) \times \gamma''(t)| = 18(1+2t^2) \neq 0.$$

Τέλος,  $\gamma'(t) \times \gamma''(t) \cdot \gamma'''(t) = 216$ . Συνεπώς τα στοιχεία



Serret-Frenet της καμπύλης  $\gamma$  δίνονται από τις σχέσεις

$$\kappa(t) = \frac{2}{3(1+2t^2)^2}, \quad \tau(t) = \frac{2}{3(1+2t^2)^2}$$

$$T(t) = \left( \frac{1}{1+2t^2}, \frac{2t}{1+2t^2}, \frac{2t^2}{1+2t^2} \right)$$

$$B(t) = \left( \frac{2t^2}{1+2t^2}, -\frac{2t}{1+2t^2}, \frac{1}{1+2t^2} \right)$$

$$N(t) = \left( -\frac{2t}{1+2t^2}, \frac{1-2t^2}{1+2t^2}, \frac{2t}{1+2t^2} \right).$$

Μετα από τα παραπάνω είναι αμέσως φανερό ότι η Πρόταση 2.5.14 ισχύει και για καμπύλες με παράμετρο όχι κατ'ανάγκη το φυσικό εύρος. Έτσι έχουμε

Πρόταση 2.6.6. Έστω  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  μια κανονική καμπύλη με  $\kappa(t) > 0$ , για κάθε  $t \in I$ . Η καμπύλη  $\gamma$  είναι επιήθη (η εφελκυστική είναι πάνω σε ένα επίπεδο) αν και μόνο αν  $\tau(t) = 0$ , για όλα τα  $t \in I$ .

Απόδειξη. Για την  $\bar{\gamma}: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που είναι κανονική ανα-παραμέτρηση της  $\gamma$  με παράμετρο το φυσικό εύρος, ισχύουν  $\bar{\kappa}(s) > 0$  και  $\bar{\tau}(s) = \tau(\gamma(s)) = 0$ . Επιπλέον οι εφελκυστικές  $\bar{\gamma}(J)$ ,  $\gamma(I)$  είναι ίδιες.

Παράδειγμα 2.6.7. Θεωρούμε τη καμπύλη  $\gamma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$  που ορίζεται ως  $\gamma(t) = \left( t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t} \right)$ . Έχουμε,



$$\gamma'(t) = \left(1, -\frac{1}{t^2}, -\frac{1+t^2}{t^2}\right), \gamma''(t) = \left(0, \frac{2}{t^3}, \frac{2}{t^3}\right) \text{ και}$$

$$\gamma'''(t) = \left(0, -\frac{6}{t^4}, -\frac{6}{t^4}\right). \text{ Συνεπώς η καμπύλη είναι κανονική}$$

και ισχύουν  $\gamma'(t) \times \gamma''(t) \neq 0$ ,  $\gamma'(t) \times \gamma''(t) \cdot \gamma'''(t) = 0$ . Σύμφωνα

με το Θεώρημα 2.6.3 θα έχουμε  $\tau(t) = 0$ , για κάθε  $t \in (0, \infty)$ .

Άρα η καμπύλη είναι επίπεδη. Ποιό όμως είναι το επίπεδο πάνω στο οποίο βρίσκεται η τροχιά της  $\gamma$ ; Από την απόδειξη της Πρότασης 2.5.14 παρατηρούμε ότι το μοναδιαίο κάθετο αυτού του επιπέδου είναι το  $B(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ .

Ένα σημείο της καμπύλης είναι το  $\gamma(1) = (1, 2, 0)$ . Άρα η εξίσωση του επιπέδου είναι η  $(x-1)\frac{1}{\sqrt{3}} - (y-2)\frac{1}{\sqrt{3}} + (z-0)\frac{1}{\sqrt{3}} = 0$  ή  $x - y + z + 1 = 0$ .

## Άσκησης

2.6.1. Έστω  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  κανονική καμπύλη με παράμετρο όχι κατ'ανόρθη το μήκος τόξου. Αν  $\gamma'(t) \times \gamma''(t) = 0$ , για κάθε  $t \in I$ , τότε η  $\gamma$  είναι ευθεία.

2.6.2. Αν όλες οι εφευρόμενες ευθείες μιας καμπύλης περνούν από το ίδιο σημείο, τότε η καμπύλη είναι ευθεία.

2.6.3. Δίνεται η καμπύλη  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  με  $\gamma(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$ . Να βρεθούν τα στοιχεία Serret-Frenet αυτής της καμπύλης.

2.6.4. Να προσδιοριστεί συνάρτηση  $f(t)$ , τέτοια ώστε η καμπύλη  $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, f(t))$  να είναι επίπεδη.



2.6.5. Να προσδιοριστεί η συνάρτηση  $\varphi(t)$  ώστε η καμπύλη  $\gamma(t) = (t, \sin t, \varphi(t))$  να έχει πρώτη κάθετη ευθεία παντού παράλληλη προς το  $Oyz$  επίπεδο.

2.6.6. Έστω  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  μια λεία καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου και  $k(s) > 0$ . Η καμπύλη  $\gamma_1: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που ορίζεται ως  $\gamma_1(s) = T(s)$  λέγεται πρώτη εφαπτική δεικτρια της  $\gamma$ . Η καμπύλη  $\gamma_2: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που ορίζεται ως  $\gamma_2(s) = N(s)$  λέγεται δευτέρα εφαπτική δεικτρια της  $\gamma$ . Τέλος, η καμπύλη  $\gamma_3: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που ορίζεται ως  $\gamma_3(s) = B(s)$  λέγεται τρίτη εφαπτική δεικτρια της  $\gamma$ .

i) Αν  $k_1, \tau_1$  είναι η καμπυλότητα και η στροφή της  $\gamma_1$ , τότε

$$k_1 = \frac{k^2 + \tau^2}{k^2}, \quad \tau_1 = \frac{k\tau - k'\tau}{k(k^2 + \tau^2)}$$

ii) Η εφαπτομένη της  $\gamma_1$  στο  $\gamma_1(s)$  είναι παράλληλη με τη πρώτη κάθετη της  $\gamma$  στο  $\gamma(s)$

iii) Έστω ότι η  $\gamma$  έχει στροφή  $\tau(s) \neq 0$ , για κάθε  $s \in I$ . Αν  $k_3, \tau_3$  είναι η καμπυλότητα και η στροφή της  $\gamma_3$ , τότε

$$k_3 = \frac{k^2 + \tau^2}{\tau^2}, \quad \tau_3 = \frac{\tau k - k'\tau}{\tau(k^2 + \tau^2)}$$

2.6.7. Δίνεται η καμπύλη  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \gamma(t) = (t, t^2, -t + 2t^2 + 1)$ . Αφού αποδειχθεί ότι η καμπύλη είναι επιπέδη, να βρεθεί το επίπεδό της.

2.6.8. Μια καμπύλη  $\gamma$  έχει εικόνα το σύνολο  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 = 3a^2y, 2xz = a^2, \text{ με } a = \text{const.} \neq 0\}$ . Να δείξετε ότι ισχύει παντού  $\tau + k = 0$ .

2.6.9. Θεωρούμε την επιπέδη καμπύλη  $\gamma: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,



που ορίζεται ως  $\gamma(\theta) = (3\cos\theta - \cos 3\theta, 3\sin\theta - \sin 3\theta, \theta)$ . Να αποδειχθεί η σχέση  $\frac{1}{9k^2} + \frac{s^2}{36} = 1$ , όπου  $s$  η συνάρτηση μήκος τόξου με αρχή το σημείο  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ .

## 2.7 Ειδικές καμπύλες του $\mathbb{R}^3$

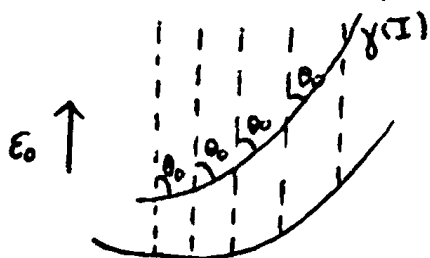
Στη Παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με δυο κλάσεις καμπυλών του  $\mathbb{R}^3$ . Οι καμπύλες κάθε κλάσης έχουν μια κοινή χαρακτηριστική ιδιότητα. Η μια κλάση είναι οι κυλινδρικές έλικες και η άλλη είναι οι εφαπτικές καμπύλες.

Θα εξετάσουμε πρώτα τις κυλινδρικές έλικες

Ορισμός 2.7.1 Μια κανονική καμπύλη της οποίας η τροχιά βρίσκεται σε μια κυλινδρική επιφάνεια και πέφτει τις γενέτειρες της κυλινδρικής επιφάνειας υπό σταθερή γωνία λέγεται κυλινδρική έλικα. Δηλαδή, μια κυλινδρική έλικα είναι μια καμπύλη της οποίας κάθε εφαπτομένη σχηματίζει σταθερή γωνία με ένα σταθερό μοναδιαίο διάνυσμα  $\epsilon_0$ . Το σταθερό διάνυσμα  $\epsilon_0$  λέγεται διεύθυνση του άξονα της κυλινδρικής έλικας. Ειδικά, αν η κυλινδρική επιφάνεια είναι ω-



ελκικός κύλινδρος και η διεύθυνση του άξονα επί κυλινδρικής έλικας συμπίπτει με τη διεύθυνση του άξονα αυτού του κυλινδρου, τότε η κυλινδρική έλικα λέγεται κυκλική έλικα.



Η καμπύλη του Παραδείγματος 2.3.7 που δίνεται ως  $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$  με  $a > 0$  και  $t \in \mathbb{R}$  έχει διάνυσμα ταχύτητας  $\gamma'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$ . Το  $\gamma'(t)$ , για κάθε  $t \in \mathbb{R}$ , σχηματίζει με το σταθερό διάνυσμα  $\epsilon_0 = (0, 0, 1)$  σταθερή γωνία  $\theta_0$ , που δίνεται από τη σχέση:  $\cos \theta_0 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

νεπώς αυτή η καμπύλη είναι κυλινδρική έλικα. Η εροχιά της βρίσκεται πάνω στην κυλινδρική επιφάνεια με αναλυτική εξίσωση  $x^2 + y^2 = a^2$ . Αυτή η κυλινδρική επιφάνεια είναι κυκλικός κύλινδρος με διεύθυνση άξονα το διάνυσμα  $(0, 0, 1)$ . Συνεπώς αυτή η καμπύλη είναι κυκλική έλικα.

Παράδειγμα 2.7.2. Η καμπύλη  $\gamma(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  του Παραδείγματος 2.6.5 έχει διάνυσμα ταχύτητας  $\gamma'(t) = (3, 6t, 6t^2)$ . Το διάνυσμα ταχύτητας, για κάθε  $t \in \mathbb{R}$ , σχηματίζει με το σταθερό μοναδιαίο διάνυσμα  $\epsilon_0 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$  σταθερή γωνία  $\theta_0$ , που δίνεται από τη σχέση:  $\cos \theta_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Άρα, αυτή





η καμπύλη είναι κυλινδρική έλικα με διεύθυνση του αξονα της το διάνυσμα  $e_0 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ . Όπως θα δούμε αργότερα αυτή η κυλινδρική έλικα δεν είναι κυκλική έλικα.

Μια επίπεδη καμπύλη με θετική καμπυλότητα είναι κυλινδρική έλικα. Οι εφαπτόμενες της καμπύλης σχηματίζουν σταθερή γωνία,  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ , με το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στο επίπεδό της.

Θεώρημα 2.7.3. Έστω  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  μια κανονική καμπύλη του  $\mathbb{R}^3$  με καμπυλότητα  $k > 0$  και γέφυμη  $\tau$ . Η καμπύλη  $\gamma$  είναι κυλινδρική έλικα, αν και μόνο αν, ο λόγος  $\frac{\tau}{k}$  είναι σταθερός.

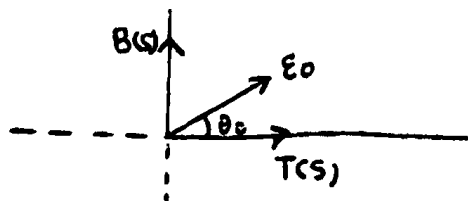
Απόδειξη. Επειδή ο ορισμός της κυλινδρικής έλικας αναφέρεται στη προχιά μας καμπύλης, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι η καμπύλη έχει παράμετρο το μήκος τόξου (φυσική παράμετρο).

Έστω ότι η καμπύλη είναι κυλινδρική έλικα. Τότε η εφαπτομένη σχηματίζει με σταθερό μοναδιαίο διάνυσμα  $e_0$  σταθερή γωνία, έστω  $\theta_0$  ( $0 \leq \theta_0 < \pi$ ). Έχουμε,  $T(s) \cdot e_0 = \cos \theta_0$  και με παραγώγιση  $\dot{T}(s) \cdot e_0 = 0$ . Από τη σχέση (2.5.4) παίρνουμε,  $k(s) N(s) \cdot e_0 = 0$  ή (αφού  $k > 0$ )  $N(s) \cdot e_0 = 0$ . Η τελευταία σχέση υποδηλοί ότι το διάνυσμα  $e_0$  είναι κάθετο στο  $N(s)$ , για κάθε  $s \in I$ . Δηλαδή, βρίσκεται στο ενοπιό των εδαιοποιούντων επιπέδων. Συνεπώς, το  $e_0$  θα είναι



γραμμικός συνδυασμός των  $T(s)$ ,  $B(s)$  για κάθε  $s \in I$ . Επειδή  $\angle(T(s), E_0) = \theta_0$ , θα έχουμε

$$(2.7.1) \quad E_0 = \cos \theta_0 T(s) + \sin \theta_0 B(s)$$



Παραγωγίζοντας την (2.7.1) ως προς  $s$  και λαμβάνοντας υπόψη τις εξισώσεις Serret-Frenet παίρνουμε

$$0 = \cos \theta_0 \kappa(s) N(s) - \sin \theta_0 \tau(s) N(s) = (\kappa(s) \cos \theta_0 - \tau(s) \sin \theta_0) N(s).$$

Συνεπώς,  $\kappa(s) \cos \theta_0 - \tau(s) \sin \theta_0 = 0$  ή

$$(2.7.2) \quad \frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0} = \cotan \theta_0 = \text{σταθ.}, \text{ για κάθε } s \in I.$$

Αντίστροφα, έστω ότι  $\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = \text{σταθ.} = \cotan \theta_0$ . Θεωρούμε το διάνυσμα  $u(s)$  που δίνεται ως

$$(2.7.3) \quad u(s) = \cos \theta_0 T(s) + \sin \theta_0 B(s).$$

Το διάνυσμα  $u(s)$  είναι μοναδιαίο, για κάθε  $s \in I$  και σχηματίζει με το  $T(s)$  σταθερή γωνία  $\theta_0$ , για κάθε  $s \in I$ . Είναι όμως σταθερό διάνυσμα; Παραγωγίζοντας την (2.7.3) και λαμβάνοντας υπόψη τις εξισώσεις Serret-Frenet έχουμε

$$\dot{u}(s) = (\kappa(s) \cos \theta_0 - \tau(s) \sin \theta_0) N(s) = 0 \text{ (γιατί);}$$

Άρα το  $u(s)$  είναι σταθερό μοναδιαίο διάνυσμα, έστω  $e_0$ . Επειδή,  $\angle(T(s), E_0) = \theta_0$ , για κάθε  $s \in I$  η καμπύλη είναι κυλινδρική έλκη.

Παρατήρηση 2.7.4. Η απόδειξη του θεωρήματος δείχνει



και πως βρίσκουμε τη διεύθυνση του άξονα της κυλινδρικής έλικας. Βρίσκουμε τη σταθερή γωνία  $\theta_0$  από τη σχέση  $\frac{\pi}{k} = \cot \theta_0$ . Τότε,  $\epsilon_0 = \cos \theta_0 T + \sin \theta_0 B$ . Έτσι για τη καμπύλη του Παραδείγματος 2.6.5 έχουμε  $\frac{\pi}{k} = 1 = \cot 45^\circ$ . Η διεύθυνση του άξονα της έλικας θα είναι το διάνυσμα  $\epsilon_0 = \cos 45^\circ T + \sin 45^\circ B = \frac{\sqrt{2}}{2}(T+B) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ .

Άσκηση 2.7.1. Αν οι πρώτες κάθετες ευθείες μιας καμπύλης είναι παράλληλες σε σταθερό επίπεδο, να αποδειχθεί ότι η καμπύλη είναι κυλινδρική έλικα.

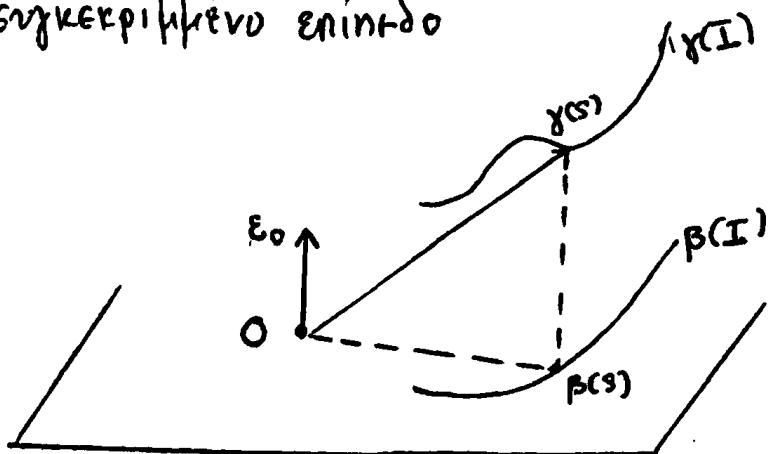
Άσκηση 2.7.2. Δίνεται η καμπύλη  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που ορίζεται ως  $\gamma(t) = (at, bt^2, ct^3)$ , όπου  $abc \neq 0$ . Να αποδειχθεί ότι η  $\gamma$  είναι κυλινδρική έλικα, αν και μόνο αν ισχύει η σχέση  $3ac = \pm 2b^2$ . Αν είναι κυλινδρική έλικα να βρεθεί η διεύθυνση του άξονα της έλικας.

Θεωρούμε μια κανονική καμπύλη  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  με καμπυλότητα  $k > 0$  και σπρέγμη  $\pi$ . Υποθέτουμε ότι η καμπύλη  $\gamma$  είναι κυλινδρική έλικα με διεύθυνση του άξονα της  $\epsilon_0$  διάνυσμα. Έστω  $\theta_0 = \angle(T(s), \epsilon_0)$ , για κάθε  $s \in I$ . Μπορούμε να θεωρήσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η καμπύλη  $\gamma$  έχει παράμετρο το μήκος τόξου. Θεωρούμε, τώρα, την καμπύλη  $\beta: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που ορίζεται ως

(\*)  $\beta(s) = \gamma(s) - \langle \gamma(s), \epsilon_0 \rangle \epsilon_0$ .



Η καμπύλη  $\beta$  έχει παράμετρο  $s$ , που δεν είναι κατ' ανάγκη η φυσική παράμετρος. Επιπλέον η τροχιά της καμπύλης  $\beta$  είναι σε ένα επίπεδο που περνά από την αρχή  $O$  και είναι κάθετο στο διάνυσμα  $\epsilon_0$  (γιατί;) Ειδικότερα, η τροχιά της  $\beta$  είναι η ορθογώνια προβολή της τροχιάς της  $\gamma$  στο συγκεκριμένο επίπεδο.



Η μέση διαφορισιμότητας της καμπύλης  $\beta$  είναι όση η μέση διαφορισιμότητας της καμπύλης  $\gamma$ . Η καμπύλη  $\beta$  ως επίπεδη καμπύλη έχει στρέψη μηδέν. Θα βρούμε την καμπυλότητα της. Έχουμε,

$$\beta'(s) = T(s) - \langle T(s), \epsilon_0 \rangle \epsilon_0 = T(s) - \cos \theta_0 \epsilon_0$$

Όμως,  $\epsilon_0 = \cos \theta_0 T(s) + \sin \theta_0 B(s)$ , όπως διαπιστώσαμε στην απόδειξη του θεωρήματος 2.7.3. Συνεπώς,

$$\beta'(s) = \sin^2 \theta_0 T(s) - \cos \theta_0 \sin \theta_0 B(s) \text{ και } |\beta'(s)| = \sin \theta_0.$$

Η καμπύλη  $\beta$  είναι κανονική αν  $\theta_0 \neq 0$ . Αν  $\theta_0 = 0$ , τότε η  $\beta$  είναι μια σταθερή καμπύλη, έλεω  $e$ . Από την (\*) παίρνουμε σε αυτή τη περίπτωση,  $\gamma(s) = a + \langle \gamma(s), \epsilon_0 \rangle \epsilon_0$ . Η τελευταία σχέση μαζί με την  $T(s) \cdot \epsilon_0 = \cos 0 = 1$ , δηλώνει ότι η καμπύλη  $\gamma$  είναι ευθεία. Αυτό είναι αντίφαση, αφού  $k(s) > 0$ . Άρα  $\theta_0 \neq 0$ .



Όμοια βρίσκουμε ότι  $\beta''(s) = k(s)N(s)$ . Συνεπώς η καμψυλότητα  $k_1$  της  $\beta$  δίνεται από τη σχέση

$$(2.7.4) \quad k_1(s) = \frac{|\beta'(s) \times \beta''(s)|}{|\beta'(s)|^3} = \frac{k(s)}{\sin^2 \theta_0}$$

Παρατήρηση 2.7.5. Η φυσική παράμετρος  $s_1$  της  $\beta$  συνδέεται με τη φυσική παράμετρο  $s$  της  $\gamma$  με τη σχέση (γιατί;

$$(2.7.5) \quad s_1 = s \sin \theta_0 + \text{σταθερά}$$

Πρόταση 2.7.6. Έστω  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  μια κανονική μη-επιπέδνη καμπύλη με καμψυλότητα  $k > 0$ . Η καμπύλη  $\gamma$  είναι κυκλική έλικά, αν και μόνο αν η καμψυλότητα και η στρέψη είναι μη μηδενικές σταθερές.

Απόδειξη. Αν η  $\gamma$  είναι κυκλική έλικά, τότε η προβολή  $\beta$  της  $\gamma$  έχει σταθερή καμψυλότητα  $k_1$ . Συνεπώς, από τη σχέση (2.7.4) και η καμψυλότητα  $k$  της  $\gamma$  είναι σταθερή. Άρα και η στρέψη  $\tau$  της  $\gamma$  είναι σταθερή, αφού πρέπει  $\frac{\tau}{k} = \text{σταθ.}$  Αντίστροφα, αν  $k$  και  $\tau$  είναι μη μηδενικές σταθερές, τότε η  $\gamma$  είναι κυλινδρική έλικά, αφού  $\frac{\tau}{k} = \text{σταθ.}$  Όμως και η προβολή  $\beta$  της  $\gamma$  έχει σταθερή καμψυλότητα  $k_1 > 0$ , συνεπώς η  $\beta$  είναι κύκλος. Άρα, η  $\gamma$  είναι κυκλική έλικά, αφού η τροχιά της είναι σε κυκλικό κύλινδρο με άξονα παράλληλο προς τη διεύθυνση του άξονα της



κυλινδρική έλικας.

Παρατήρηση 2.7.7. Η καμπύλη του Παραδείγματος 2.7.2 δεν είναι κυκλική έλικα, αφού δεν έχει σταθερή καμπυλότητα (βλ. Παράδειγμα 2.6.5).

Άσκηση 2.7.3. Έστω  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  μια καμπύλη με παράμετρο,  $\rho$  μήκος τόξου, καμπυλότητα θετική, και τάξης τουλάχιστον  $C^4$ . Η καμπύλη  $\gamma$  είναι κυλινδρική έλικα, αν και μόνο αν ισχύει η σχέση  $\ddot{\gamma}(s) \times \ddot{\gamma}(s) \cdot \ddot{\gamma}(s) = 0$ , για κάθε  $s \in I$ .

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τις σφαιρικές καμπύλες

Ορισμός 2.7.8. Μια καμπύλη της οποίας η τροχιά βρίσκεται σε μια σφαίρα λέγεται σφαιρική καμπύλη.

Παράδειγμα 2.7.9. Έστω η καμπύλη  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που ορίζεται ως  $\gamma(t) = (a \cos^2 t, a \sin t \cos t, a \sin t)$ . Είναι φανερό ότι το οποιοδήποτε σημείο της τροχιάς της καμπύλης βρίσκεται στη σφαίρα με εξίσωση  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ . Πραγματικά, αφού  $(a \cos^2 t)^2 + (a \sin t \cos t)^2 + (a \sin t)^2 = a^2$ .

Θεώρημα 2.7.10. Έστω  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  μια καμπύλη με παράμετρο  $s$  μήκος τόξου, καμπυλότητα  $k > 0$  και σπρέιγ.



που δεν μηδενίζεται πουθενά. Η καμπύλη  $\gamma$  είναι σφαιρική, αν και μόνο αν ισχύει η σχέση

$$(2.7.6) \quad \frac{\tau(s)}{\kappa(s)} + \left( \frac{1}{\tau(s)} \left( \frac{1}{\kappa(s)} \right)' \right)' = 0, \text{ για κάθε } s \in I.$$

• Η κελύα (\*) σημαίνει παραγωγή ως προς  $s$ .

Απόδειξη. Έστω ότι η τροχιά της καμπύλης  $\gamma$  κείται σε σφαίρα, ακτίνας  $R$  και κέντρου το σημείο  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ . Τότε, ισχύει η σχέση

$$(*) \quad \langle \gamma(s) - \alpha, \gamma(s) - \alpha \rangle = R^2, \text{ για κάθε } s \in I.$$

Με τρεις συνεχείς παραγωγίσεις του (\*) ως προς  $s$  και λαμβάνοντας υπόψη τις εξισώσεις Serret-Frenet παίρνουμε

$$(i) \quad \langle T(s), \gamma(s) - \alpha \rangle = 0$$

$$(ii) \quad \kappa(s) \langle N(s), \gamma(s) - \alpha \rangle + 1 = 0$$

$$(iii) \quad \dot{\kappa}(s) \langle N(s), \gamma(s) - \alpha \rangle + \kappa(s) \tau(s) \langle B(s), \gamma(s) - \alpha \rangle = 0.$$

Δηλαδή,

$$\langle \gamma(s) - \alpha, T(s) \rangle = 0$$

$$\langle \gamma(s) - \alpha, N(s) \rangle = -\frac{1}{\kappa(s)}$$

$$\langle \gamma(s) - \alpha, B(s) \rangle = \frac{\dot{\kappa}(s)}{\kappa^2(s) \tau(s)}$$

Επειδή, σε κάθε σημείο  $\gamma(s)$ , τα διανύσματα  $T(s), N(s)$  και  $B(s)$  αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του  $T_{\gamma(s)} \mathbb{R}^3$ , θα έχουμε

$$\begin{aligned} \gamma(s) - \alpha &= \langle \gamma(s) - \alpha, T(s) \rangle T(s) + \langle \gamma(s) - \alpha, N(s) \rangle N(s) + \langle \gamma(s) - \alpha, B(s) \rangle B(s) \\ &= -\frac{1}{\kappa(s)} N(s) + \frac{\dot{\kappa}(s)}{\kappa^2(s) \tau(s)} B(s) \quad \eta \end{aligned}$$



$$(iv) \quad \chi(s) - \alpha = -\frac{1}{k(s)} N(s) - \frac{1}{\tau(s)} \left( \frac{1}{k(s)} \right)' B(s).$$

Συνεπώς,  $|\chi(s) - \alpha|^2 = \frac{1}{k^2(s)} + \left( \frac{1}{\tau(s)} \left( \frac{1}{k(s)} \right)' \right)^2 = R^2 = \text{σταθ.}$

Παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση ως προς  $s$  παίρνουμε

$$-\frac{\dot{k}(s)}{k^3(s)} + \frac{1}{\tau(s)} \left( \frac{1}{k(s)} \right)' \left( \frac{1}{\tau(s)} \left( \frac{1}{k(s)} \right)' \right)' = 0$$

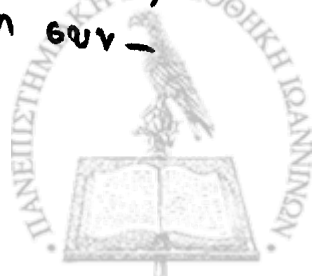
ή

$$-\frac{\dot{k}(s)}{k^2(s)\tau(s)} \left[ \frac{\tau(s)}{k(s)} + \left( \frac{1}{\tau(s)} \left( \frac{1}{k(s)} \right)' \right)' \right] = 0$$

Η τελευταία σχέση μας δίνει την (2.7.6) υπό τη προϋπόθεση βέβαια ότι η συνάρτηση  $\dot{k}(s)$  δεν μηδενίζεται πουθενά. Αν η  $\dot{k}(s)$  μηδενίζεται σε μεμονωμένα σημεία τότε η συνάρτηση  $\frac{\tau(s)}{k(s)} + \left( \frac{1}{\tau(s)} \left( \frac{1}{k(s)} \right)' \right)'$  θα μηδενίζεται σχεδόν

παντού στο  $I$  και με συνέχεια θα μηδενίζεται παντού. Αν η  $\dot{k}(s)$  μηδενίζεται σε ένα διάστημα  $J \subset I$ , τότε η  $k(s)$  θα είναι σταθερή στο  $J$  και μάλιστα, λόγω της (ii), θα είναι μια μη μηδενική σταθερή. Όμως στο διάστημα  $J$  θα ισχύει, λόγω της (ii), η σχέση  $\langle B(s), \chi(s) - \alpha \rangle = 0$ , αφού  $\tau(s) \neq 0$  εξ υποθέσεως στο  $I$ . Παραγωγίζοντας την  $\langle B(s), \chi(s) - \alpha \rangle = 0$  στο διάστημα  $J$  παίρνουμε  $\tau(s) \langle N(s), \chi(s) - \alpha \rangle = 0$ , που είναι αντίφαση (βλ. (ii)).

Αντικαθόρα, υποθέτουμε ότι ισχύει η σχέση (2.7.6). Τότε, όπως προκύπτει από το πρώτο μέρος της απόδειξης, η συν-





άρτηση

$$f(s) = \frac{1}{k^2(s)} + \left( \frac{1}{\tau(s)} \left( \frac{1}{k(s)} \right)' \right)^2 \text{ είναι σταθερή, έστω } f(s) = R^2,$$

αφού η παράγωγος της μηδενίζεται. Θεωρούμε την καμπύλη  $\beta: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που ορίζεται ως

$$\beta(s) = \gamma(s) + \frac{1}{k(s)} N(s) + \frac{1}{\tau(s)} \left( \frac{1}{k(s)} \right)' B(s)$$

Τότε έχουμε

$$|\gamma'(s) - \beta'(s)| = \frac{1}{k^2(s)} + \left( \frac{1}{\tau(s)} \left( \frac{1}{k(s)} \right)' \right)^2 = R^2 = \text{const.}$$

Αν δείξουμε ότι η καμπύλη  $\beta$  είναι μια σταθερή καμπύλη  $\beta(s) = (b_1, b_2, b_3) = b$ , τότε θα έχουμε αποδείξει ότι η τροχιά της  $\gamma$  είναι σε σφαίρα κέντρου  $b$  και ακτίνας  $R$ . Συνεπώς, η καμπύλη  $\gamma$  θα είναι σφαιρική.

Το διάνυσμα καχύψης της  $\beta$  είναι το

$$\beta'(s) = \tau(s) + \left( \frac{1}{k(s)} \right)' N(s) + \frac{1}{k(s)} (-k(s)\tau(s) + \tau'(s)) B(s)$$

$$+ \left( \frac{1}{\tau(s)} \left( \frac{1}{k(s)} \right)' \right)' B(s) - \left( \frac{1}{k(s)} \right)' N(s)$$

$$= \left[ \frac{\tau'(s)}{k(s)} + \left( \frac{1}{\tau(s)} \left( \frac{1}{k(s)} \right)' \right)' \right] B(s) = 0,$$

δηλαδή η  $\beta$  έχει προσιά ένα σταθερό σημείο.

Από την απόδειξη του θεωρήματος προκύπτει το παρακάτω πρόβλημα

Πρόβλημα 2.7.11. Αν μια καμπύλη είναι σφαιρική τότε



η καμπυλότητα της πληροί την σχέση  $k(s) \geq \frac{1}{R}$ , όπου  $R$  είναι η ακτίνα της εφάρμοσης στην οποία κείται η τροχιά.

Απόδειξη. Από τη σχέση (ii) στην απόδειξη του θεωρήματος έχουμε

$$k(s) \langle N(s), \gamma(s) - \alpha \rangle + 1 = 0 \quad "$$

η

$$" \quad \frac{1}{k(s)} = |\langle N(s), \gamma(s) - \alpha \rangle| \leq |N(s)| \cdot |\gamma(s) - \alpha|, \text{ με}$$

την ανισότητα Schwarz (σχέση (1.1.1)). Άρα,  $\frac{1}{k(s)} \leq R$  και συνεπώς  $k(s) \geq \frac{1}{R}$ .

Άσκηση 2.7.4. Να αποδειχθεί ότι οι μόνες σφαιρικές καμπύλες με σταθερή καμπυλότητα είναι οι κύκλοι.

Άσκηση 2.7.5. Αν τα κάδρα επιπέδου μιας καμπύλης διέρχονται από ένα σταθερό σημείο, να αποδειχθεί ότι η καμπύλη είναι σφαιρική.

Παρατήρηση 2.7.12. Το Θεώρημα 2.7.10 δίνει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε μια καμπύλη να είναι σφαιρική. Η συνθήκη αυτή προϋποθέτει κάποιες συνθήκες για την καμπυλότητα ( $k > 0$ ) και τη σφύξη ( $\tau \neq 0$ ). Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε μια καμπύλη να είναι σφαιρική μόνο με την προϋπόθεση ότι  $k > 0$ , δόθηκε



από τον Y. C. Wong: A global formulation of the condition for a curve to lie in a sphere. Monatsk. Math. 67(1963), 363-365. Αργότερα ο ίδιος έδωσε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε μια καμπύλη να είναι σφαιρική, χωρίς καμία προϋπόθεση για τη καμπυλότητα και τη γρέψη. Y. C. Wong: On an explicit characterization of spherical curves. Proc. Amer. Math. Soc. 34(1972), 239-242.

## 2.8. Κανονική Παράσταση Καμπύλης

Έστω  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  μια κανονική καμπύλη με παράμετρο εφ' όσον μήκος τόξου και εφ' όσον  $C^3$  κυλιόμειστον. Στη παράγραφο αυτή θα δούμε πως η καμπυλότητα και η γρέψη επιδρούν στο σχήμα της τροχιάς της καμπύλης στη περιοχή ενός σημείου. Για να εξετάσουμε το σχήμα της τροχιάς σε ένα σημείο της χρησιμοποιούμε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων για αυτή τη μελέτη. Το πιο κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων για τέτοιες μελέτες είναι το σύστημα που ορίζεται από το πλαίσιο Serret - Frenet.

Έστω  $\gamma(s_0)$  ένα σημείο της καμπύλης  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , στη περιοχή του οποίου θέλουμε να μελετήσουμε τη καμπύλη. Υποθέτουμε ότι  $\kappa(s_0) > 0$ , άρα η καμπυλότητα είναι θετική σε



μια περιοχή του σημείου  $s_0 \in I$ .

Επειδή η καμπύλη είναι  $C^3$ -αίχνης ευλαχίκετον, από τον τύπο του Taylor παίρνουμε

$$(2.8.1) \quad \gamma(s) = \gamma(s_0) + (s-s_0)\dot{\gamma}(s_0) + \frac{1}{2}(s-s_0)^2\ddot{\gamma}(s_0) + \frac{1}{6}(s-s_0)^3\ddot{\gamma}(s_0) + o((s-s_0)^3).$$

Όμως, από τους τύπους Serret-Frenet βρίσκουμε

$$\dot{\gamma}(s_0) = T(s_0), \quad \ddot{\gamma}(s_0) = k(s_0)N(s_0)$$

$$\ddot{\gamma}(s_0) = -k^2(s_0)T(s_0) + \dot{k}(s_0)N(s_0) + k(s_0)\tau(s_0)B(s_0).$$

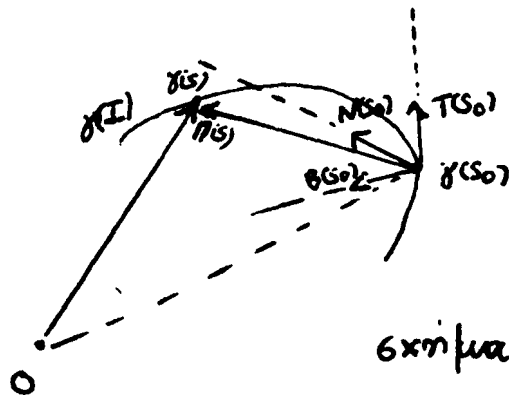
Θέτοντας αυτές τις σχέσεις στην (2.8.1) παίρνουμε

$$(2.8.2) \quad \gamma(s) = \gamma(s_0) + \left( (s-s_0) - \frac{(s-s_0)^3}{6} k^2(s_0) \right) T(s_0) + \left( \frac{(s-s_0)^2}{2} k(s_0) + \frac{(s-s_0)^3}{6} \dot{k}(s_0) \right) N(s_0) + \left( \frac{(s-s_0)^3}{6} k(s_0)\tau(s_0) \right) B(s_0) + o((s-s_0)^3)$$

Εκλέγουμε ως άξονες συντεταχμένων τις ημιευθείες από το  $\gamma(s_0)$ , που ορίζονται από τα  $T(s_0)$ ,  $N(s_0)$  και  $B(s_0)$  (αυτά ορίζονται αρκεί  $k(s_0) > 0$ ), αντίστοιχα. Σς προς από το σύστημα συντεταχμένων το σημείο  $\gamma(s)$  έχει διάνυσμα θέσης  $\pi(s) = \gamma(s) - \gamma(s_0)$  (βλ. σχήμα 12). Συνεπώς θα έχουμε

$$(2.8.3) \quad \pi(s) = \left( s-s_0 - \frac{(s-s_0)^3}{6} k^2(s_0) + o((s-s_0)^3), \right. \\ \left. \frac{(s-s_0)^2}{2} k(s_0) + \frac{(s-s_0)^3}{6} \dot{k}(s_0) + o((s-s_0)^3), \right. \\ \left. \frac{(s-s_0)^3}{6} k(s_0)\tau(s_0) + o((s-s_0)^3) \right).$$





Εικόνα 12

Η παράσταση (2.8.3) λέγεται κανονική παράσταση της καμπύλης  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  στο σημείο  $\gamma(s_0)$ .

Παράδειγμα 2.8.1. Θεωρούμε την καμπύλη  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που ορίζεται ως  $\gamma(s) = (\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}})$ . Είναι φανερό ότι πρόκειται για μια καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου. Επιπλέον η καμπύλη είναι κυκλική έλικα και έχει  $\kappa(s) = \tau(s) = \frac{1}{2}$  (βλ. Παράδειγμα 2.5.12 για  $\alpha = b = 1$ ). Η κανονική παράσταση της  $\gamma$  στο σημείο  $\gamma(s_0)$  με  $s_0 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$  είναι  $\pi$

$$\pi(s) = \left( s - \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \frac{1}{24} \left( s - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \right)^3 + o \left( \left( s - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \right)^3 \right), \frac{\left( s - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \right)^2}{4} + o \left( \left( s - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \right)^3 \right), \frac{\left( s - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \right)^3}{24} + o \left( \left( s - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \right)^3 \right) \right).$$

Από τη κανονική παράσταση (2.8.3) της καμπύλης  $\gamma$  στο σημείο  $\gamma(s_0)$  προκύπτει ότι η καμπύλη

$\beta(s) = \left( s - s_0, \frac{\kappa(s_0)}{2} (s - s_0)^2, \frac{\kappa(s_0)\tau(s_0)}{3} (s - s_0)^3 \right)$  είναι μια καλή προσέγγιση της  $\gamma$  στο σημείο  $\gamma(s_0)$ . Μάλιστα, οι καμπύλες  $\gamma$  και  $\beta$  έχουν στο σημείο  $s = s_0$  ίδια εσοχεία Serret-Frenet.

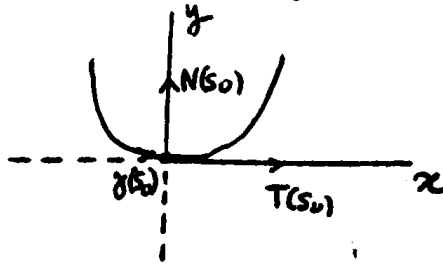
Θέλοντας, τώρα, να λάβουμε μια ιδέα για το σχήμα της εικόνας της  $\gamma$  στο σημείο  $\gamma(s_0)$ , αρκεί να βρούμε τις προβυ-



Λες της καμπύλης  $\beta$  στα επίπεδα συντεταγμένων.

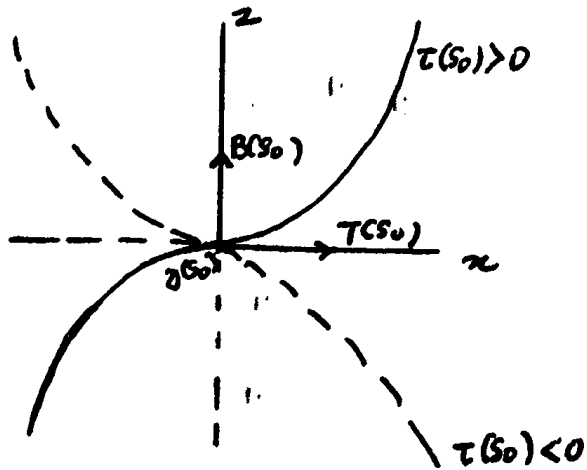
Προβολή στο  $x-y$  επίπεδο (δηλαδή, το εγγυσατο επίπεδο)

$2y = k(s_0)x^2$ , δηλαδή παραβολή



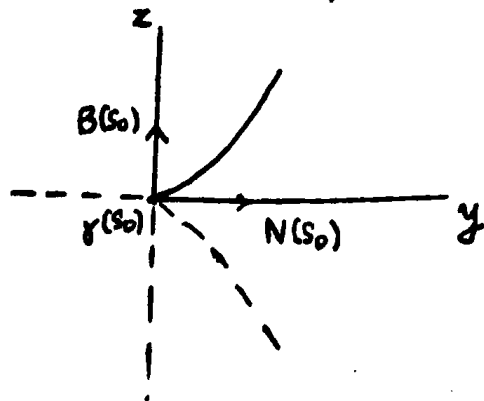
Προβολή στο  $x-z$  επίπεδο (δηλαδή, το ευθειοποιούν επίπεδο)

$6z = k(s_0)\tau(s_0)x^3$ , δηλαδή  
μια καμπύλη τρίτου βαθμού



Προβολή στο  $y-z$  επίπεδο (δηλαδή, το κάθετο επίπεδο)

$2\tau^2(s_0)y^3 = 9k(s_0)z^2$ , δηλαδή  
μια ημικυβική παραβολή  
(παραβολή του Neil)



## 2.9. Εφαρμόσιμες καμπύλες - Θεμελιώδες Θεώρημα Θεωρίας Καμπυλών

Στη παράγραφο αυτή έχουμε ως σκοπό να εξετάσουμε κατά πόσο η καμπυλότητα και η κρέμνη καθορίζει ή όχι το σχήμα της τροχιάς μιας καμπύλης. Για το σκοπό αυτό, θα υποθέσουμε ότι οι καμπύλες είναι τουλάχιστον  $C^3$ -καίξης, εκτός αν άλλως αναφερθεί.

Ορισμός 2.9.1. Δυο καμπύλες  $\gamma, \beta: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  λέγονται εφαρμόσιμες (congruent) αν υπάρχει ισομετρία  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , τέτοια ώστε  $\beta = F \circ \gamma$ . Δηλαδή,  $\beta(t) = F(\gamma(t))$ , για κάθε  $t \in I$ . Ειδικά, αν η  $F$  είναι μια μεταφορά  $L_a$ , τότε οι καμπύλες λέγονται παράλληλες. Δηλαδή, οι καμπύλες  $\gamma, \beta$  είναι παράλληλες, αν υπάρχει διάνυσμα  $a = (a_1, a_2, a_3)$  έτσι ώστε να ισχύει  $\beta_i(t) = \gamma_i(t) + a_i$  ( $i=1,2,3$ ), όπου  $\beta_i(t), \gamma_i(t)$  ( $i=1,2,3$ ) είναι οι συνιστώσες των καμπυλών  $\beta, \gamma$ , αντίστοιχα.

Παράδειγμα 2.9.2. Οι καμπύλες  $\gamma, \beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που ορίζονται ως  $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ ,  $\beta(t) = (a \cos t, a \sin t, -bt)$  είναι εφαρμόσιμες. Πραγματικά, η ισομετρία  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που ορίζεται ως  $F(x, y, z) = (x, y, -z)$ , μεταφέρει την  $\gamma$  στη  $\beta$ . Δηλαδή,  $\beta(t) = F(\gamma(t))$ , για κάθε  $t \in \mathbb{R}$ .



Η παρακάτω πρόταση δίνει ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε δυο καμπύλες να είναι παράλληλες.

Πρόταση 2.9.3. Δυο καμπύλες  $\gamma, \beta: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  είναι παράλληλες, αν και μόνο αν τα διανύσματα ταχύτητας  $\gamma'(t), \beta'(t)$  είναι ίσα για κάθε  $t \in I$ . Αν δυο καμπύλες είναι παράλληλες, και για  $t_0 \in I$  ισχύει  $\gamma(t_0) = \beta(t_0)$ , τότε  $\gamma(t) = \beta(t)$ , για κάθε  $t \in I$ .

Απόδειξη. Τα διανύσματα ταχύτητας είναι ίσα αν και μόνο αν ισχύουν οι σχέσεις  $\frac{d\beta_i}{dt}(t) = \frac{d\gamma_i}{dt}(t)$  ( $i=1,2,3$ ). Δηλαδή, αν και μόνο αν  $\beta_i(t) = \gamma_i(t) + \alpha_i$  ( $i=1,2,3$ ) για κάθε  $t \in I$ . Συνεπώς, τα διανύσματα ταχύτητας είναι ίσα αν και μόνο αν οι καμπύλες είναι παράλληλες. Αν, επιπλέον,  $\beta(t_0) = \gamma(t_0)$  τότε  $\alpha_i = 0$  ( $i=1,2,3$ ) και η πρόταση αποδείχθηκε.

Είναι πρακτικά δύσκολο, όταν δοθούν δυο καμπύλες, να εξετάσουμε όλες τις ισομετρίες του  $\mathbb{R}^3$  ώστε να αποφασίσουμε αν οι δοθείσες καμπύλες είναι εφαρμόσιμες ή όχι. Το παρακάτω θεώρημα δίνει ένα κριτήριο. Να συμβουλευτούμε την Πρόταση 2.5.16 που δίνει την ιδέα για το θεώρημα και την απόδειξη του.

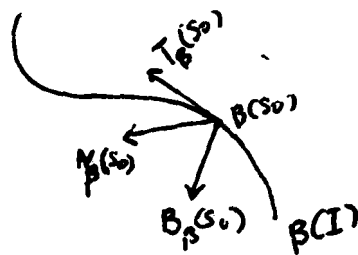
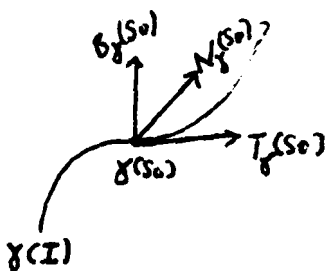
Θεώρημα 2.9.4. Έστωσαν  $\gamma, \beta: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  δυο καμπύλες του  $\mathbb{R}^3$  με παράμετρο το μήκος τόξου. Αν  $\kappa_\beta = \kappa_\gamma$  και  $\tau_\beta = \pm \tau_\gamma$ ,





τότε οι καμπύλες  $\gamma$  και  $\beta$  είναι εφαρμόσιμες.

Απόδειξη. Έστω  $s_0 \in I$ . Θεωρούμε τα σημεία  $\gamma(s_0)$  και  $\beta(s_0)$ . Έστωσαν, επίσης,  $\{T_\gamma(s_0), N_\gamma(s_0), B_\gamma(s_0)\}$  και  $\{T_\beta(s_0), N_\beta(s_0), B_\beta(s_0)\}$  τα πλαίσια Serret-Frenet των καμπυλών  $\gamma, \beta$  στα σημεία  $\gamma(s_0)$  και  $\beta(s_0)$ , αντίστοιχα. Τα πλαίσια αυτά εκ κατασκευής ανήκουν στον θετικό προσανατολισμό του  $\mathbb{R}^3$  (βλ. συμπέρασμα, σελ. 73).



Όπως γνωρίζουμε (Θεώρημα 14.16) υπάρχει ακριβώς μια ισομετρία  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που μεταφέρει το σημείο  $\gamma(s_0)$  στο σημείο  $\beta(s_0)$  και το πλαίσιο της  $\gamma$  (στο  $\gamma(s_0)$ ) στο πλαίσιο της  $\beta$  (στο  $\beta(s_0)$ ). Ειδικότερα, αν  $\tau_\beta = \tau_\gamma$ , θεωρούμε την ισομετρία  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  που μεταφέρει το  $\gamma(s_0)$  στο  $\beta(s_0)$  και το πλαίσιο της  $\gamma$  στο πλαίσιο της  $\beta$ . Για αυτήν την ισομετρία ισχύει  $\text{sign} F = +1$ . Αν  $\tau_\beta = -\tau_\gamma$ , χρησιμοποιούμε την ισομετρία  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που μεταφέρει το  $\gamma(s_0)$  στο  $\beta(s_0)$  και το πλαίσιο  $\{T_\gamma(s_0), N_\gamma(s_0), B_\gamma(s_0)\}$  στο πλαίσιο  $\{T_\beta(s_0), N_\beta(s_0), -B_\beta(s_0)\}$ . Για αυτήν την ισομετρία ισχύει  $\text{sign} F = -1$ . Σημειώνουμε με  $\bar{\gamma}$  την εικόνα της καμπύλης  $\gamma$  μέσω της ισομετρίας  $F$ , δηλαδή  $\bar{\gamma} = F \circ \gamma$ . Σε κάθε περίπτωση, λόγω της Πρότασης 2.5.16, για την καμπύλη  $\bar{\gamma}$  θα έχουμε

$$\bar{\gamma}(s_0) = F(\gamma(s_0)) = \beta(s_0), \quad k_{\bar{\gamma}} = k_\gamma = k_\beta, \quad \tau_{\bar{\gamma}} = (\text{sign} F)\tau_\gamma = \tau_\beta$$



$$T_{\bar{\gamma}}(s_0) = dF(T_{\gamma}(s_0)) = T_{\beta}(s_0) \quad , \quad N_{\bar{\gamma}}(s_0) = dF(N_{\gamma}(s_0)) = N_{\beta}(s_0)$$

$$B_{\bar{\gamma}}(s_0) = (\text{sign } F) dF(B_{\gamma}(s_0)) = B_{\beta}(s_0) .$$

Άρα οι καμπύλες  $\bar{\gamma}$ ,  $\beta$  διέρχονται από το ίδιο σημείο  $\bar{\gamma}(s_0) = \beta(s_0)$ , έχουν εκεί το ίδιο πλαίσιο Serret-Frenet. Επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις  $k_{\bar{\gamma}} = k_{\beta}$  και  $\tau_{\bar{\gamma}} = \tau_{\beta}$ . Θα δείξουμε ότι  $T_{\bar{\gamma}}(s) = T_{\beta}(s)$ , για κάθε  $s \in I$ . Θεωρούμε την συνάρτηση  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , που ορίζεται ως

$$f(s) = \frac{1}{2} \left\{ |T_{\bar{\gamma}}(s) - T_{\beta}(s)|^2 + |N_{\bar{\gamma}}(s) - N_{\beta}(s)|^2 + |B_{\bar{\gamma}}(s) - B_{\beta}(s)|^2 \right\} .$$

Είναι φανερό ότι  $f(s_0) = 0$ . Παραγωγίζοντας και λαμβάνοντας υπόψη τις εξισώσεις Serret-Frenet συνάγουμε ότι:

$$\begin{aligned} f'(s) &= \langle T_{\bar{\gamma}}(s) - T_{\beta}(s), \dot{T}_{\bar{\gamma}}(s) - \dot{T}_{\beta}(s) \rangle + \langle N_{\bar{\gamma}}(s) - N_{\beta}(s), \dot{N}_{\bar{\gamma}}(s) - \dot{N}_{\beta}(s) \rangle + \\ &\quad + \langle B_{\bar{\gamma}}(s) - B_{\beta}(s), \dot{B}_{\bar{\gamma}}(s) - \dot{B}_{\beta}(s) \rangle \\ &= k_{\beta}(s) \langle T_{\bar{\gamma}}(s) - T_{\beta}(s), N_{\bar{\gamma}}(s) - N_{\beta}(s) \rangle - k_{\beta}(s) \langle N_{\bar{\gamma}}(s) - N_{\beta}(s), T_{\bar{\gamma}}(s) - T_{\beta}(s) \rangle + \\ &\quad + \tau_{\beta}(s) \langle N_{\bar{\gamma}}(s) - N_{\beta}(s), B_{\bar{\gamma}}(s) - B_{\beta}(s) \rangle - \tau_{\beta}(s) \langle B_{\bar{\gamma}}(s) - B_{\beta}(s), N_{\bar{\gamma}}(s) - N_{\beta}(s) \rangle = \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση  $f$  είναι σταθερή. Συνεπώς,  $f(s) = 0$ , για κάθε  $s \in I$ . Έτσι έχουμε  $T_{\bar{\gamma}}(s) = T_{\beta}(s)$ ,  $N_{\bar{\gamma}}(s) = N_{\beta}(s)$  και  $B_{\bar{\gamma}}(s) = B_{\beta}(s)$ , για κάθε  $s \in I$ . Επειδή,  $T_{\bar{\gamma}}(s) = T_{\beta}(s)$  και  $\bar{\gamma}(s_0) = \beta(s_0)$  από τη Πρόταση 2.4.3, συμπεραίνουμε ότι  $\bar{\gamma}(s) = \beta(s)$  για κάθε  $s \in I$ . Δηλαδή,  $\beta(s) = \bar{\gamma}(s) = F(\gamma(s))$  για κάθε  $s \in I$ . Συνεπώς οι καμπύλες  $\gamma$  και  $\beta$  είναι εφαρμόσιμες.

Παρατήρηση 2.9.5 Η απόδειξη του θεωρήματος υποδηλώνει και τον τρόπο κατασκευής της ισομετρίας, όταν οι καμπύλες



$\beta$  και  $\gamma$  είναι εφαρμόσιμες.

Παράδειγμα 2.9.6. Θεωρούμε τις καμπύλες  $\gamma, \beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που ορίζονται ως  $\gamma(s) = (\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}})$ ,  $\beta(s) = (\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, 1 + \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{s}{\sqrt{2}})$ . Είναι φανερό ότι έχουν παράμετρο το μήκος τόξου. Με υπολογισμούς βρίσκουμε ότι  $\kappa_\gamma(s) = \tau_\gamma(s) = \frac{1}{2}$  και  $\kappa_\beta(s) = \frac{1}{2}$ ,  $\tau_\beta(s) = -\frac{1}{2}$ . Άρα οι καμπύλες είναι εφαρμόσιμες. Ποια είναι η ισομετρία που μεταφέρει τη μια καμπύλη στην άλλη; Το πλαίσιο Serret-Frenet της  $\gamma$  στο σημείο  $\gamma(0) = (1, 0, 0)$  είναι κο:  $T_\gamma(0) = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ,  $N_\gamma(0) = (-1, 0, 0)$ ,  $B_\gamma(0) = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ . Το πλαίσιο Serret-Frenet της  $\beta$  στο σημείο  $\beta(0) = (1, 1, 0)$  είναι κο:  $T_\beta(0) = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ ,  $N_\beta(0) = (-1, 0, 0)$  και  $B_\beta(0) = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ . Επειδή  $\tau_\gamma(s) = \frac{1}{2} = -\tau_\beta(s)$ , θεωρούμε την ισομετρία  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που μεταφέρει το σημείο  $\gamma(0)$  στο σημείο  $\beta(0)$  και το πλαίσιο  $T_\gamma(0), N_\gamma(0), B_\gamma(0)$  στο πλαίσιο  $T_\beta(0), N_\beta(0), B_\beta(0)$ . Αυτή η ισομετρία, σύμφωνα με το Παράδειγμα 1.4.17 είναι αυτή που ορίζεται ως  $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 1+x_2, -x_3)$ . Για αυτή την ισομετρία παρατηρούμε ότι  $F(\gamma(s)) = F(\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}) = (\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, 1 + \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{s}{\sqrt{2}}) = \beta(s)$ . Δηλαδή, οι καμπύλες  $\beta, \gamma$  είναι εφαρμόσιμες.

Λεμπτή 2.9.1. Έστωσαν οι καμπύλες  $\gamma, \beta: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  με κοινές παραμέτρους. Υποθέτουμε ότι  $\dot{\nu}_\gamma(t) = \dot{\nu}_\beta(t)$ ,  $\kappa_\gamma(t) = \kappa_\beta(t)$  και  $\tau_\gamma(t) = \pm \tau_\beta(t)$  για κάθε  $t \in I$ , όπου  $\dot{\nu}_\gamma(t), N_\beta(t)$  είναι οι εφαπτεστικές των  $\gamma$  και  $\beta$ , αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι οι καμπύλες  $\gamma$  και  $\beta$  είναι εφαρμόσιμες.



Το Θεώρημα 2.9.4 μας διαβεβαιώνει για το εξής: Δίνονται δυο συναρτήσεις  $k=k(s)$  και  $\tau=\tau(s)$ . Αν υπάρχει καμπύλη του  $\mathbb{R}^3$  που έχει το  $s$  ως παράμετρο μήκος τόξου, στην  $k(s)$  ως καμπυλότητα και στην  $\tau(s)$  ως σφύξη, τότε αυτή η καμπύλη είναι μοναδική. Η μοναδικότητα αναφέρεται με την έννοια ότι: Αν υπάρχουν δυο τέτοιες καμπύλες, τότε η μια προκύπτει από την άλλη με κάποια ισομορφία του  $\mathbb{R}^3$ . Τιθέται όμως, το ερώτημα: Υπάρχει καμπύλη με παράμετρο μήκος τόξου το  $s$ , στην  $k(s)$  ως καμπυλότητα και στην  $\tau(s)$  ως σφύξη; Απάντηση παίρνουμε από το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.9.7. (Θεμελιώδες Θεώρημα της θεωρίας καμπυλών). Έστωσαν  $k=k(s) > 0$ ,  $\tau=\tau(s)$  δυο συναρτήσεις ορισμένες στο διάστημα  $I$ , εκ των οποίων η  $\tau(s)$  είναι συνεχής και η  $k(s)$  είναι  $C^1$ -τάξης τουλάχιστον. Δίνονται επίσης  $s_0 \in I$ , ένα σημείο  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  και μια ορθοκανονική βάση  $\{u_1 = (a_{10}, a_{20}, a_{30}), u_2 = (b_{10}, b_{20}, b_{30}), u_3 = (\delta_{10}, \delta_{20}, \delta_{30})\}$  εν  $\mathbb{R}^3$  στο σημείο  $P_0$  που ανήκει στον θετικό προσανατολισμό του  $\mathbb{R}^3$ . Τότε υπάρχει μια μοναδική καμπύλη  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3, s \rightarrow \gamma(s)$   $C^3$ -τάξης τουλάχιστον με παράμετρο μήκος τόξου το  $s$ , στην  $k(s)$  ως καμπυλότητα, στην  $\tau(s)$  ως σφύξη,  $\gamma(s_0) = P_0$  και πλαίσιο Serret-Frenet στο σημείο  $\gamma(s_0)$  την δοθείσα ορθοκανονική βάση.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει καμπύλη με τα και -



χεια που δόθηκαν. Τότε, το πλαίσιο Serret-Frenet

$$T(s) = (a_1(s), a_2(s), a_3(s)), N(s) = (\beta_1(s), \beta_2(s), \beta_3(s)), B(s) = (\delta_1(s), \delta_2(s), \delta_3(s))$$

της καμπύλης ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\frac{dT}{ds}(s) = k(s)N(s)$$

$$\frac{dN}{ds}(s) = -k(s)T(s) + \tau(s)B(s)$$

$$\frac{dB}{ds}(s) = -\tau(s)N(s)$$

ή σε συνιστώσες

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{da_i}{ds}(s) = k(s)\beta_i(s) \\ \frac{d\beta_i}{ds}(s) = -k(s)a_i(s) + \tau(s)\delta_i(s) \\ \frac{d\delta_i}{ds}(s) = -\tau(s)\beta_i(s) \end{cases}, \quad i=1,2,3$$

όπου  $k(s), \tau(s)$  είναι συνεχείς συναρτήσεις. Συνεπώς για την επίλυση μιας καμπύλης θα πρέπει να ξεκινήσουμε από το σύστημα (\*), όπου  $k(s), \tau(s)$  είναι γνωστές συναρτήσεις.

Η θεωρία των διαφορικών εξισώσεων εγγυάται ότι το σύστημα (\*) έχει ακριβώς μια λύση  $(a_i(s), \beta_i(s), \delta_i(s)), i=1,2,3$  όταν δοθούν αρχικές συνθήκες. Επιπλέον αυτή η λύση είναι κομμάτι του  $C^1$ -κάμψης και ορίζεται στο διάστημα I.

Ακριβέστερα,

(i) Υπάρχει ακριβώς μια λύση  $(a_1(s), \beta_1(s), \delta_1(s))$  με αρχικές συνθήκες στο  $s_0$  τις  $(a_{10}, \beta_{10}, \delta_{10})$

(ii) Υπάρχει ακριβώς μια λύση  $(a_2(s), \beta_2(s), \delta_2(s))$  με αρχικές συνθήκες στο  $s_0$  τις  $(a_{20}, \beta_{20}, \delta_{20})$

(iii) Υπάρχει ακριβώς μια λύση  $(a_3(s), \beta_3(s), \delta_3(s))$  με αρχικές



συνθήκες στο  $s_0$  τις  $(a_{30}, b_{30}, \delta_{30})$ .

Όλες αυτές οι λύσεις είναι  $C^1$ -κάθης κυλιόμενες και ορίζονται στο διάστημα  $I$ .

Ο πίνακας αρχικών συνθηκών

$$A_{s_0} = \begin{pmatrix} a_{10} & b_{10} & \delta_{10} \\ a_{20} & b_{20} & \delta_{20} \\ a_{30} & b_{30} & \delta_{30} \end{pmatrix} \quad "$$

είναι ορθογώνιος πίνακας με ορίζουσα  $\neq 0$  (γιατί;).

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(s) = a_1^2(s) + b_1^2(s) + \delta_1^2(s)$ , για  $s \in I$ .

Τότε,

$$\begin{aligned} \frac{df}{ds}(s) &= 2a_1(s) \frac{da_1}{ds}(s) + 2b_1(s) \frac{db_1}{ds}(s) + 2\delta_1(s) \frac{d\delta_1}{ds}(s) \\ &\stackrel{α)}{=} 2a_1(s) k(s) b_1(s) + 2b_1(s) (-k(s) a_1(s) + \kappa(s) \delta_1(s)) + \\ &\quad + 2\delta_1(s) (-\tau(s) b_1(s)) = 0. \end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση  $f(s)$  είναι σταθερή. Επειδή,  $f(s_0) = 1$  συνάγουμε ότι

$$a_1^2(s) + b_1^2(s) + \delta_1^2(s) = 1, \quad \text{για κάθε } s \in I.$$

Όμοια βρίσκουμε

$$a_2^2(s) + b_2^2(s) + \delta_2^2(s) = 1$$

$$a_3^2(s) + b_3^2(s) + \delta_3^2(s) = 1.$$

Με παρόμοιο τρόπο δείχνουμε τις σχέσεις

$$a_1(s) a_2(s) + b_1(s) b_2(s) + \delta_1(s) \delta_2(s) = 0$$

$$a_1(s) a_3(s) + b_1(s) b_3(s) + \delta_1(s) \delta_3(s) = 0$$

$$a_2(s) a_3(s) + b_2(s) b_3(s) + \delta_2(s) \delta_3(s) = 0.$$

Οι παραπάνω σχέσεις δηλώνουν ότι ο πίνακας



$$A(s) = \begin{pmatrix} \alpha_1(s) & \beta_1(s) & \delta_1(s) \\ \alpha_2(s) & \beta_2(s) & \delta_2(s) \\ \alpha_3(s) & \beta_3(s) & \delta_3(s) \end{pmatrix}$$

είναι ορθογώνιος για κάθε  $s \in I$ . Συνεπώς ισχύουν και οι σχέσεις

$$\alpha_1^2(s) + \alpha_2^2(s) + \alpha_3^2(s) = 1$$

$$\beta_1^2(s) + \beta_2^2(s) + \beta_3^2(s) = 1$$

$$\delta_1^2(s) + \delta_2^2(s) + \delta_3^2(s) = 1$$

$$\alpha_1(s)\beta_1(s) + \alpha_2(s)\beta_2(s) + \alpha_3(s)\beta_3(s) = 0$$

$$\alpha_1(s)\delta_1(s) + \alpha_2(s)\delta_2(s) + \alpha_3(s)\delta_3(s) = 0$$

$$\beta_1(s)\delta_1(s) + \beta_2(s)\delta_2(s) + \beta_3(s)\delta_3(s) = 0, \text{ για κάθε } s \in I.$$

Οι τελευταίες σχέσεις υποδηλώνουν ότι τα διανύσματα

$$T(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s)), N(s) = (\beta_1(s), \beta_2(s), \beta_3(s)), B(s) = (\delta_1(s), \delta_2(s), \delta_3(s))$$

είναι μοναδιαία και κάθετα ανά δυο σε κάθε  $s \in I$ . Είναι προφανής η σχέση  $A(s_0) = A_{s_0}$ . Το πλαίσιο (ορθοκανονική βάση)

$\{T(s), N(s), B(s)\}$  ανήκει στον θετικό προσανατολισμό για κάθε  $s \in I$ .

Πραγματικά, η ορίζουσα του πίνακα  $A(s)$  έχει τιμή  $\pm 1$  και είναι συνεχής συνάρτηση, αφού τα στοιχεία του είναι συναρτήσεις κομμάτιων  $C^1$ -κάμψης. Επειδή, για  $s=s_0$  η ορίζουσα έχει τιμή  $+1$ , θα έχει τιμή  $+1$  παντού.

Θεωρούμε την καμπύλη  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που ορίζεται ως

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= (x_0, y_0, z_0) + \int_{s_0}^s T(s) ds \\ &= \left( x_0 + \int_{s_0}^s \alpha_1(s) ds, y_0 + \int_{s_0}^s \alpha_2(s) ds, z_0 + \int_{s_0}^s \alpha_3(s) ds \right). \end{aligned}$$

Η καμπύλη  $\gamma$  έχει το  $s$  ως παραμέτρο μήκους τόξου, αφού



$\left| \frac{d\gamma}{ds}(s) \right| = |T(s)| = \Delta$ . Επίσης, λόγω του συστήματος (\*), προκύπτει ότι η καμπύλη  $\gamma$  έχει ως στοιχεία Serret-Frenet τα  $k(s)$ ,  $\tau(s)$ ,  $T(s)$ ,  $N(s)$  και  $B(s)$ . Επιπλέον,  $\ddot{\gamma}(s) = k(s)N(s)$  και το δεύτερο μέλος είναι  $C^1$ -κάθης κυλάεικτον ή  $\gamma(s)$  είναι  $C^3$ -κάθης κυλάεικτον. Το πλαίσιο Serret-Frenet στο  $S_0$  είναι η δοθείσα ορθοκανονική βάση και  $\gamma(s_0) = P_0$ . Η μοναδικότητα της καμπύλης προκύπτει από το Θεώρημα 2.9.4. (πώς;).

Παρατήρηση 2.9.8. Η λύση του συστήματος (\*) δεν είναι πάντα εύκολη. Αν οι συναρτήσεις  $k(s)$ ,  $\tau(s)$  είναι  $C^3$ -κάθης κυλάεικτον τότε μπορούμε με παραγωγίσεις να απαλείψουμε τα  $\beta_i$  και  $\delta_i$  και να πάρουμε μια διαφορική εξίσωση τρίτου τάξης ως προς  $\alpha$ , η οποία είναι ισοδύναμη με μια εξίσωση Riccati.

Από τον συνδυασμό των θεωρημάτων 2.9.4 και 2.9.7 προκύπτει ότι οι εξισώσεις  $k = k(s)$  και  $\tau = \tau(s)$  καθορίζουν πλήρως, από άποψη σχήματος εικόνας, μια καμπύλη. Οι εξισώσεις αυτές δεν εξαρώνται από σύστημα συντελεσμένων. Για τον λόγο αυτό οι εξισώσεις  $k = k(s)$  και  $\tau = \tau(s)$  λέγονται φυσικές εξισώσεις (natural equations) της καμπύλης.

Επιπλέον, όταν δοθεί ένα σημείο και μια ορθοκανονική βάση στον θετικό προσανατολισμό, σε αυτό το σημείο, τότε η καμπύλη με φυσικές εξισώσεις  $k = k(s)$ ,  $\tau = \tau(s)$  καθορίζεται πλήρως.

Παράδειγμα 2.9.9. Θα βρούμε την καμπύλη που έχει





φυσικές εξισώσεις ως  $k(s) = \frac{1}{2}$ ,  $\tau(s) = \frac{1}{2}$  για κάθε  $s \in \mathbb{R}$ , διε-  
 ρχεται από το σημείο  $\gamma(0) = (1, 0, 0)$  και έχει πλαίσιο Serret-  
 Frenet σε αυτό το σημείο ως:  $T_\gamma(0) = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ,  $N_\gamma(0) = (-1, 0, 0)$   
 και  $B_\gamma(0) = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ . Το γραμμικό σύστημα διαφορικών  
 εξισώσεων (που χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη του θεωρήματος  
 2.9.7) γίνεται

(i)  $\frac{d\alpha_i}{ds}(s) = \frac{1}{2} \beta_i(s)$

(ii)  $\frac{d\beta_i}{ds}(s) = -\frac{1}{2} \alpha_i(s) + \frac{1}{2} \delta_i(s)$

(iii)  $\frac{d\delta_i}{ds}(s) = -\frac{1}{2} \beta_i(s)$ ,  $i=1, 2, 3$ .

Ο πίνακας αρχικών τιμών είναι ο

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Παραγωγίζοντας την (ii) και λαμβάνοντας υπόψη τις (i), (iii) παίρνουμε

$$\frac{d^2 \beta_i}{ds^2}(s) + \frac{1}{2} \beta_i(s) = 0,$$

επώς οποιαδήποτε γενική λύση είναι

(iv)  $\beta_i(s) = c_{i1} \cos \frac{s}{\sqrt{2}} + c_{i2} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}$ ,  $i=1, 2, 3$

όπου  $c_{i1}, c_{i2}$  είναι σταθερές εσκαμάρωτες.

Θέτοντας στις (i) και (iii) βρίσκουμε τις γενικές λύσεις αυ-  
 τών που είναι οι

(v)  $\alpha_i(s) = c_{i3} + \frac{c_{i1}}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{c_{i2}}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}$



$$(vi) \quad \delta_i(s) = C_{i4} - \frac{C_{i1}}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{C_{i2}}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \quad i=1,2,3.$$

Αντικαθιστώντας τις (iv), (v) και (vi) στην (ii) βρίσκουμε λόγω γραμμικής ανεξαρτησίας των  $\cos \frac{s}{\sqrt{2}}$ ,  $\sin \frac{s}{\sqrt{2}}$  ότι  $C_{13} = C_{24}$ .

Λαμβάνοντας υπόψη και τις αρχικές συνθήκες βρίσκουμε τις εξής προόδους λύσεων

$$a_1(s) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \quad \beta_1(s) = -\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \quad \delta_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}$$

$$a_2(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \quad \beta_2(s) = -\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \quad \delta_2(s) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}$$

$$a_3(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \beta_3(s) = 0, \quad \delta_3(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Συνεπώς η καμπύλη που αναζητούμε είναι η

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= (1, 0, 0) + \left( \int_0^s -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}} ds, \int_0^s \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}} ds, \int_0^s \frac{1}{\sqrt{2}} ds \right) \\ &= \left( \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right), \end{aligned}$$

η οποία ως γνωστόν είναι μια κυκλική έλικα.

Άσκηση 2.4.2. Αν μια καμπύλη  $\gamma$  έχει φυσικές εξισώσεις τις  $\kappa = \kappa(s)$ ,  $\tau = \tau(s)$ , να βρεθούν οι φυσικές εξισώσεις της ευθυμετρικής της ως προς τον άξονα  $Ox$ .



## 210. Επιπέδες Καμπύλες

Στη Πρόταση 2.6.6. διαπιστώσαμε ότι μια κανονική καμπύλη  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $C^3$ -κλάσης με  $k > 0$  είναι επίπεδη (η εικόνα  $\gamma([a, b])$  είναι πάνω σε ένα επίπεδο), αν και μόνο αν η στρέψη  $\tau(t) = 0$ , για κάθε  $t \in [a, b]$ .

Στη παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε επίπεδες καμπύλες.

Μπορούμε να πούμε ότι μια επίπεδη καμπύλη είναι μια επικόνιση  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ . Όσα αναφέρθηκαν

στις προηγούμενες παραγράφους εφαρμόζονται για επίπεδες καμπύλες, αρκεί να λαμβάνουμε υπόψη ότι  $\gamma_3(t) = 0$ , για κάθε

$t \in [a, b]$  και η στρέψη είναι αυτιστικά μηδέν. Έτσι ορίζεται

το διάνυσμα ταχύτητας, ταχύτητα, κανονική καμπύλη, εφαπτομένη ευθεία, μήκος τόξου, παράμετρος μήκος τόξου.

Θα θεωρήσουμε ως συνέχεια ότι μια επίπεδη καμπύλη έχει παράμετρο μήκος τόξου. Δηλαδή,  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $s \rightarrow \gamma(s) =$

$(\gamma_1(s), \gamma_2(s))$ . Η καμπυλότητα αυτής αν τη θεωρήσουμε σαν

καμπύλη του  $\mathbb{R}^3$  είναι σύμφωνα με τον ορισμό 2.5.1,

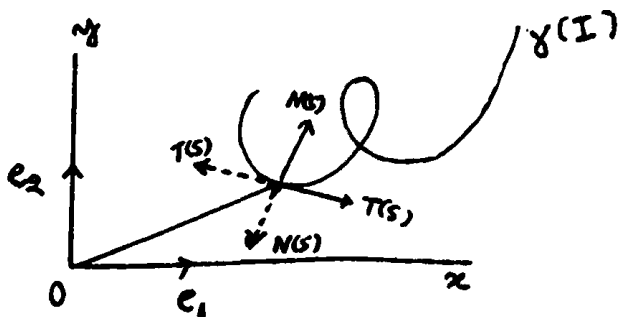
$k(s) = |\dot{\gamma}(s)|$ , δηλαδή είναι παντού μη αρνητική.

Για επίπεδες καμπύλες τις έννοιες, καμπυλότητα και μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα μπορούμε να τις ορίσουμε και διαφορικά εκμεταλλωμένοι το γεγονός ότι η καμπύλη είναι επίπεδη.

Ο ορισμός αυτός γίνεται ως εξής: Θεωρούμε στο επίπεδο



τη γεννήθη βάση  $(e_1, e_2)$ , που ανήκει ως γνωστόν στον θετικό προανατολισμό του  $\mathbb{R}^2$ . Μετά ορίζουμε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα  $N(s)$ , για κάθε  $s \in I$ , έτσι ώστε η βάση  $(T(s), N(s))$ , όπου  $T(s) = \dot{\gamma}(s) = (\dot{\gamma}_1(s), \dot{\gamma}_2(s))$  να ανήκει στον ίδιο προανατολισμό με την  $(e_1, e_2)$  (βλ. σχήμα 13)



Σχήμα 13

Δηλαδή, το  $N(s)$  είναι στρόφη του  $T(s)$ , στο επίπεδο, κατά γωνία  $+\frac{\pi}{2}$ . (βλ. Άσκηση 1.1.3). Έτσι σε κάθε σημείο  $\gamma(s)$  της καμπύλης  $\gamma$  έχουμε ορίσει μια ορθοκανονική βάση  $(T(s), N(s))$ , που ανήκει στον θετικό προανατολισμό του  $\mathbb{R}^2$ . Είναι φανερό ότι αν αλλάξουμε τον προανατολισμό της καμπύλης τότε αλλάζουν κατεύθυνση και  $T(s), N(s)$  (διακεκομμένα διανύσματα στο σχήμα 13).

Οι ευθείες του  $\mathbb{R}^2$ , που ορίζονται από το σημείο  $\gamma(s)$  και τα διανύσματα  $T(s), N(s)$  λέγονται εφαπτομένη και κάθετη ευθεία της  $\gamma$  στο σημείο  $\gamma(s)$ , αντίστοιχα.

Προσοχή! Το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα  $N(s)$  εδώ ορίστηκε διαφορετικά από ότι το πρώτο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα  $N(s)$  που ορίστηκε και χρησιμοποιήθηκε στις προηγούμενες παραγράφους. Για αυτό το σκοπό εκμεταλλευτήκαμε την υπόθεση ότι η καμπύ-



λη είναι επίπεδη.

Επειδή  $T(s) \cdot T(s) = 1$ , με παραγώγιση συμπεραίνουμε ότι  $T(s) \cdot \dot{T}(s) = 0$ , όπου με τελεαία (·) συμβολίζουμε και εδώ παραγώγιση ως προς το μήκος τόξου. Από την τελευταία σχέση συνάγουμε ότι το διάνυσμα  $\dot{T}(s)$  σε κάθε σημείο της καμπύλης είναι κάθετο στο διάνυσμα  $T(s)$ , και ως εκ τούτου είναι παράλληλο με το  $N(s)$ .

Ορισμός 2.10.1: Έστω  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2, s \rightarrow \gamma(s)$  μια καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου και κυλιαικτον  $C^2$  τμήμα. Ο αριθμός  $k(s) = \langle \dot{T}(s), N(s) \rangle$  λέγεται (προσημασμένη) καμπυλότητα της καμπύλης  $\gamma$  στο  $\gamma(s)$  (ή στο  $s$ ).

Παρατήρηση 2.10.2. Η (προσημασμένη) καμπυλότητα  $k(s)$  μιας επίπεδης καμπύλης μπορεί να παίρνει και αρνητικές τιμές σε αντίθεση με την καμπυλότητα, που ως κώρα ξίραφη. Πραγματικά, η συνάρτηση  $h: [a, b] \rightarrow [a, b]$ , που ορίζεται ως  $h(s) = a + b - s$ , είναι μια επίρρεσεί αλλαγή παραμέτρου της καμπύλης  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , η οποία αντιστρέφει τον προσανατολισμό της  $\gamma$ , αφού  $\frac{dh}{ds}(s) = -1 < 0$ . Όμως, το διάνυσμα  $\ddot{\gamma}(s) = \dot{T}(s)$  δεν εξαρτάται από τον προσανατολισμό της καμπύλης (γιατί;). Επειδή με την αλλαγή του προσανατολισμού αλλάζει κατεύθυνση το  $N(s)$ , συμπεραίνουμε ότι η  $k(s) = \langle \dot{T}(s), N(s) \rangle$  αλλάζει πρόσημο, όταν αλλάζει



ο προσανατολισμός της καμπύλης, αφού μόνο το  $N(s)$  αλλάζει κατεύθυνση. Είναι φανερό ότι ο αριθμός  $|k(s)|$  είναι η καμπυλότητα της  $\gamma$ , αν ακολουθούσαμε τον Ορισμό 2.5.1.

Πρόταση 2.10.3. Δίνεται η καμπύλη  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  με παράμετρο το μήκος τόξου και  $C^2$ -κάμπη πουλάικωτον. Τότε, σε κάθε σημείο  $s \in [a, b]$  ισχύουν οι σχέσεις

$$(2.10.1) \quad \dot{T}(s) = k(s)N(s)$$

$$(2.10.2) \quad \dot{N}(s) = -k(s)T(s),$$

όπου  $k(s)$  είναι η (προημεωμένη) καμπυλότητα.

Απόδειξη. Όπως έχουμε παρατηρήσει το διάνυσμα  $\dot{T}(s)$  είναι παράλληλο με το  $N(s)$ . Αυτή η παρατήρηση και ο Ορισμός 2.10.1 μας δίνουν την σχέση (2.10.1). Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι το  $\dot{N}(s)$  είναι παράλληλο με το  $T(s)$ , ως κάθετο με το  $N(s)$ . Επειδή όμως  $k(s) = \langle \dot{T}(s), N(s) \rangle$  (γιατί)  $-\langle T(s), \dot{N}(s) \rangle$ , η σχέση (2.10.2) είναι άμεση.

Παρατήρηση 2.10.4. Οι σχέσεις (2.10.1) και (2.10.2) είναι οι εξισώσεις Serret-Frenet για επίπεδες καμπύλες με παράμετρο το μήκος τόξου. Το πλαίσιο  $(T(s), N(s))$  είναι το πλαίσιο Serret-Frenet προκειμένου για επίπεδες καμπύλες.

Θα δώσουμε τώρα μια πρόταση, αρκετά χρήσιμη τόσο στη Διαφορική Γεωμετρία όσο και σε άλλους κλάδους



ων Μαθηματικών. Αφορά την παραίτηση μιας επίπεδης καμπύλης σε πολικές συντεταγμένες.

Πρόταση 2.10.5: Έστω  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \rightarrow \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  μια επίπεδη καμπύλη,  $C^1$ -κάξης με κάποια παράμετρο. Υποθέτουμε ότι  $\gamma(t) \neq (0,0)$ , για κάθε  $t \in I$ . Έστωδαν,  $t_0 \in I$ ,  $r_0 > 0$  και  $\theta_0 \in \mathbb{R}$ , έτσι ώστε  $\gamma_1(t_0) = r_0 \cos \theta_0$  και  $\gamma_2(t_0) = r_0 \sin \theta_0$ . Τότε υπάρχουν  $C^1$ -κάξης συναρτήσεις  $r, \theta: I \rightarrow \mathbb{R}$ , τέτοιες ώστε  $r(t_0) = r_0$ ,  $\theta(t_0) = \theta_0$ ,  $r(t) > 0$  και

$$(2.10.3) \quad \gamma_1(t) = r(t) \cos \theta(t), \quad \gamma_2(t) = r(t) \sin \theta(t), \quad \text{για κάθε } t \in I.$$

Παρατήρηση 2.10.6. Η συνθήκη  $\gamma(t) \neq (0,0)$  για κάθε  $t \in I$  υποδηλοί ότι η τροχιά της καμπύλης  $\gamma$  δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν συναρτήσεις  $r(t), \theta(t)$  που ικανοποιούν την Πρόταση. Τότε, από την (2.10.3), επειδή  $r(t) > 0$  παίρνουμε

$$(i) \quad r(t) = (\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t))^{1/2}, \quad \text{για κάθε } t \in I.$$

Αρκεί να ορίσουμε την  $r(t)$  από τη σχέση (i). Η  $r(t)$  είναι  $C^1$ -κάξης, θετική και  $r(t_0) = r_0$ . Θα προχωρήσουμε στην κατασκευή της  $\theta(t)$ . Θεωρούμε τις συναρτήσεις  $u(t) = \frac{\gamma_1(t)}{r(t)}$  και  $v(t) = \frac{\gamma_2(t)}{r(t)}$  για κάθε  $t \in I$ . Αυτές είναι  $C^1$ -κάξης και  $u(t_0) = \cos \theta_0$ ,  $v(t_0) = \sin \theta_0$ . Επιπλέον, ικανοποιούν την σχέση

$$(ii) \quad u^2(t) + v^2(t) = 1, \quad \text{για κάθε } t \in I.$$



Αρκεί να βρούμε μια συνάρτηση,  $C^1$ -κλάσης,  $\theta: I \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε να ικανοποιούν οι σχέσεις

$$(iii) \quad u(t) = \cos \theta(t), \quad v(t) = \sin \theta(t), \quad \text{για κάθε } t \in I \text{ και } \theta(t_0) = \theta_0.$$

Αν υπάρχει τέτοια συνάρτηση  $\theta(t)$ , παίρνουμε από τις (iii) τις σχέσεις

$$(iv) \quad u'(t) = -\theta'(t)v(t), \quad v'(t) = \theta'(t)u(t), \quad \text{για κάθε } t \in I.$$

Από τις σχέσεις (iv) έχουμε

$$(v) \quad \theta'(t) = -v(t)u'(t) + u(t)v'(t), \quad \text{για κάθε } t \in I.$$

Από τη σχέση (v) με ολοκλήρωση και επειδή θέλουμε  $\theta(t_0) = \theta_0$  παίρνουμε

$$(vi) \quad \theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^t \{ u(s)v'(s) - v(s)u'(s) \} ds, \quad \text{για κάθε } t \in I.$$

Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση  $\theta(t)$  που ορίζεται από τη σχέση (vi) ικανοποιεί την Πρόταση μας, δηλαδή τις (iii).

Πραγματικά, η  $\theta$  είναι  $C^1$ -κλάση και  $\theta(t_0) = \theta_0$ . Ισχύει η (v) με παραγωγή. Επίσης από την (ii) με παραγωγή παίρνουμε

$$(vii) \quad u(t)u'(t) + v(t)v'(t) = 0, \quad \text{για κάθε } t \in I.$$

Λύνοντας το σύστημα των (v), (vii) ως προς  $u'(t), v'(t)$

βρίσκουμε τις (iv). Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f$ , που ορίζεται ως  $f(t) = (u(t) - \cos \theta(t))^2 + (v(t) - \sin \theta(t))^2$ . Τότε,

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2(u(t) - \cos \theta(t))(u'(t) + \theta'(t)\sin \theta(t)) + 2(v(t) - \sin \theta(t))(v'(t) - \theta'(t)\cos \theta(t)) \\ &\stackrel{(iv)}{=} 2(u(t) - \cos \theta(t))(-\theta'(t)v(t) + \theta'(t)\sin \theta(t)) + \\ &\quad + 2(v(t) - \sin \theta(t))(\theta'(t)u(t) - \theta'(t)\cos \theta(t)) \\ &= 2\theta'(t) \{ (u(t) - \cos \theta(t))(-v(t) + \sin \theta(t)) + (v(t) - \sin \theta(t))(u(t) - \cos \theta(t)) \} \\ &= 0. \end{aligned}$$





Δηλαδή, η συνάρτηση  $f(t)$  είναι σταθερή. Επειδή όμως  $f(a) = 0$  θα είναι  $f(t) = 0$ , για κάθε  $t \in I$ . Συνεπώς ισχύουν οι σχέσεις (ii), που δίνονται στη Πρόταση.

Παρατήρηση 2.10.7. Η Πρόταση 2.10.5 είναι κατάλληλη για να διατυπώσει κανείς μια έννοια γεωμετρική στη θεωρία Μ.γαδικών Συναρτήσεων καθώς επίσης και σε άλλους κλάδους των Μαθηματικών. Ειδικότερα, αν  $\gamma$  καμπύλη  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  είναι κλειστή καμπύλη  $C^1$ -κλάσης και  $O = (0, 0) \notin \gamma([a, b])$ , τότε ο αριθμός  $\frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}$  είναι ένας ακέραιος αριθμός, συμβολίζεται με  $W(\gamma, O)$  και λέγεται αριθμός περιετροφής (Winding number) της καμπύλης  $\gamma$  γύρω από  $O = (0, 0)$ .

Θα δούμε τώρα μια έκφραση για την (προσημασμένη) καμπυλότητα των επιπέδων καμπυλών. Η σχέση αυτή χρησιμοποιείται αρκετά συχνά στις εφαρμογές.

Έστω η καμπύλη  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, s \rightarrow \gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s))$ ,  $C^2$ -κλάσης και με παράμετρο ως μήκος τόξου. Η καμπύλη  $T: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , που ορίζεται ως  $T(s) = (\tilde{\gamma}_1(s), \tilde{\gamma}_2(s))$  είναι  $C^1$ -κλάσης και πληροί τις υποθέσεις της Πρότασης 2.10.5.

Αρα υπάρχει συνάρτηση  $\theta(s)$ ,  $C^1$ -κλάσης, τέτοια ώστε  $T(s) = (r(s) \cos \theta(s), r(s) \sin \theta(s))$ . Η  $\theta(s)$  δίνει, κατά προέχηση ακέραια πολλαπλάσια του  $2\pi$ , τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα  $T(s)$



με τον άξονα  $Ox$ .

Τότε, το  $N(s) = (-\sin \theta(s), \cos \theta(s))$  (γιατί; βλ. Άσκηση 1.1.3)

Θα δείξουμε ότι ισχύει η σχέση

$$(2.10.4) \quad k(s) = \frac{d\theta}{ds}(s), \quad \text{για κάθε } s \in [a, b].$$

Πραγματικά, έχουμε

$$T(s) = \dot{\gamma}(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s)) \quad "$$

$$\dot{T}(s) = (-\sin \theta(s) \frac{d\theta}{ds}(s), \cos \theta(s) \frac{d\theta}{ds}(s)) = \frac{d\theta}{ds}(s) (-\sin \theta(s), \cos \theta(s))$$

$$" = \frac{d\theta}{ds}(s) N(s).$$

Συγκρίνοντας με την  $\dot{T}(s) = k(s) N(s)$ , συνάγουμε την (2.10.4).

Από την (2.10.4) προκύπτει ότι η (προσημασμένη) καμπυ-  
λότητα  $k(s)$  δείχνει ένα μέτρο μεταβολής της εφαπτομένης  
επίσης της καμπύλης  $\gamma$ .

Στη συνέχεια θα δώσουμε μια ακόμη έκφραση για  
την (προσημασμένη) καμπυλότητα μιας επίπεδης καμπύλης με  
παράμετρο το μήκος τόξου.

Έστω μια επίπεδη καμπύλη  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $C^2$ -κάβης  
και με παράμετρο το μήκος τόξου. Έχουμε,  $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s))$ ,  
 $T(s) = (\dot{\gamma}_1(s), \dot{\gamma}_2(s))$ ,  $\dot{T}(s) = \ddot{\gamma}(s) = (\ddot{\gamma}_1(s), \ddot{\gamma}_2(s))$ . Επίσης, επειδή  
η ορθοκανονική βάση  $(T(s), N(s))$  θέλουμε να ανήκει στον  
θετικό προανατολικό του  $\mathbb{R}^2$  θα έχουμε και  $N(s) = (-\dot{\gamma}_2(s), \dot{\gamma}_1(s))$ .  
Από τη σχέση  $\dot{T}(s) = k(s) N(s)$ , παίρνουμε  $k(s) = \dot{T}(s) \cdot N(s) =$   
 $\langle (\ddot{\gamma}_1(s), \ddot{\gamma}_2(s)), (-\dot{\gamma}_2(s), \dot{\gamma}_1(s)) \rangle = \dot{\gamma}_1(s) \ddot{\gamma}_2(s) - \ddot{\gamma}_2(s) \dot{\gamma}_2(s)$ . Δηλαδή -



Ση ,

$$(2.10.5) \quad k(s) = \ddot{\gamma}_1(s)\dot{\gamma}_2(s) - \ddot{\gamma}_2(s)\dot{\gamma}_1(s).$$

Έστωσαν  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \rightarrow \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  μια ενιπτή κανονική καμύλη και η αναπαραμέτρηση ως  $\bar{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$  με παράμετρο το μήκος τόξου. Για την  $\bar{\gamma}$  έχουμε ορίσει την (προσημασμένη) καμπυλότητα  $\bar{k}(s)$  και το πλαίσιο Serret-Frenet  $(\bar{T}(s), \bar{N}(s))$  στο σημείο  $\bar{\gamma}(s)$ . Δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 2.10.8. Δίνεται η κανονική καμύλη  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$   $C^2$ -κάξης. Ονομάζουμε (προσημασμένη) καμπυλότητα  $k(t)$  και πλαίσιο Serret-Frenet  $(T(t), N(t))$  ως  $\gamma$  τα εξής:

$$(2.10.6) \quad k(t) \stackrel{\text{op}}{=} \bar{k}(s(t)), \quad T(t) \stackrel{\text{op}}{=} \bar{T}(s(t)), \quad N(t) \stackrel{\text{op}}{=} \bar{N}(s(t)).$$

Στη συνέχεια θα βρούμε τη (προσημασμένη) καμπυλότητα μιας κανονικής καμύλης  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2, C^2$ -κάξης, με ευχάισα παράμετρο. Έχουμε,  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  και  $\frac{ds}{dt}(t) = |\gamma'(t)|$ . Για  $i=1,2$  προκύπτει ότι  $\bar{\gamma}_i(s) = \gamma_i(t(s)), \dot{\bar{\gamma}}_i(s) = \gamma'_i(t(s)) \frac{dt}{ds}(s)$  και  $\ddot{\bar{\gamma}}_i(s) = \gamma''_i(t(s)) \left(\frac{dt}{ds}(s)\right)^2 + \gamma'_i(t(s)) \frac{d^2t}{ds^2}(s)$ , όπου  $\bar{\gamma}_i (i=1,2)$  είναι οι συνιστώσες της αναπαραμέτρησης  $\bar{\gamma}$ . Αντικαθιστώντας στην (2.10.5) συνάγουμε ότι η (προσημασμένη) καμπυλότητα  $\bar{k}$  ως  $\bar{\gamma}$  δίνεται από τη σχέση 
$$\bar{k}(s) = \frac{\gamma'_1(t(s))\gamma''_2(t(s)) - \gamma''_1(t(s))\gamma'_2(t(s))}{|\gamma'(t(s))|^3}.$$

Συνεπώς, από τον Ορισμό 2.10.8 η (προσημασμένη) καμπυλότητα ως  $\gamma$  δίνεται από τη σχέση

$$(2.10.7) \quad k(t) = \frac{\gamma'_1(t)\gamma''_2(t) - \gamma''_1(t)\gamma'_2(t)}{|\gamma'(t)|^3}.$$



Άσκηση 2.10.1. Έστω  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση  $C^2$ -καίτης. Θεωρούμε την απεικόνιση  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , που ορίζεται ως  $\gamma(x) = (x, f(x))$ . Παρατηρούμε ότι η  $\gamma$  είναι μια επίπεδη κανονική καμψύλη  $C^2$ -καίτης. Να αποδειχθεί ότι η (προσημασμένη) καμψυλότητα της  $\gamma$  δίνεται από την σχέση

$$k(x) = \frac{f''(x)}{(1+(f'(x))^2)^{3/2}}.$$

Η εικόνα  $\gamma(I)$ , λέγεται γραφήμα της  $f$ . Άρα κυρτά γραφήματα έχουν θετική (προσημασμένη) καμψυλότητα, ενώ κοίλα γραφήματα έχουν αρνητική (προσημασμένη) καμψυλότητα.

Άσκηση 2.10.2. Έστω  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  μια επίπεδη κανονική καμψύλη  $C^3$ -καίτης με (προσημασμένη) καμψυλότητα  $k(t) \neq 0$ , για κάθε  $t \in I$ . Η καμψύλη  $\beta: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , που ορίζεται ως

$$\beta(t) = \gamma(t) + \frac{1}{k(t)} N(t), \quad t \in I$$

λέγεται ενειλιχμένη (evolute) της  $\gamma$ . Να αποδειχθεί ότι οι επακόλουθες ευθείες της καμψύλης  $\beta$  είναι οι κάθετες ευθείες της  $\gamma$  στο αντίστοιχο σημείο.

Άσκηση 2.10.3 Η επίπεδη καμψύλη  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , που ορίζεται ως  $\gamma(t) = (t, a \cosh(\frac{t}{a} + b))$ ,  $t \in \mathbb{R}$  και  $a, b$  σταθερές λέγεται σιλυσοειδής καμψύλη (catenary). Να αποδειχθεί ότι η (προσημασμένη) καμψυλότητα της σιλυσοειδούς καμψύλης δίνεται από τη σχέση

$$k(t) = \frac{1}{a \cosh^2(\frac{t}{a} + b)} \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$



Το θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας καμπυλίων (θεώρημα 2.97) μπορεί να εφαρμοστεί και για επίπεδες καμπύλες, αρκεί να πάρουμε  $\tau(s) = 0$  για κάθε  $s \in I$ . Επειδή όμως εδώ η απόδειξη είναι απλούστερη, δείχνουμε με διαφορετικό τρόπο το θεώρημα.

Θεώρημα 2.10.9. (θεμελιώδες θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας επίπεδης καμπύλης). Έστω  $k(s)$  μια συνεχής συνάρτηση που ορίζεται στο  $I = [a, b]$ . Υπάρχει μια μοναδική επίπεδη κανονική καμπύλη  $C^2$ -κάξης, με καμπυλότητα  $k(s)$  και με παράμετρο μήκους τόξου το  $s$ .

Απόδειξη. Έστω  $s_0 \in I$ . Από τη σχέση (2.10.4) παίρνουμε,

$$\theta(s) = \theta(s_0) + \int_{s_0}^s k(s) ds, \quad \text{για κάθε } s \in I.$$

Η συνάρτηση  $\theta$  είναι τουλάχιστον  $C^1$ -κάξης.

Θεωρούμε το μοναδιαίο διάνυσμα

$$\tau(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s)) = \gamma(s), \quad \text{για κάθε } s \in I$$

Η καμπύλη  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , που ορίζεται ως

$$(2.10.9) \quad \gamma(s) = \gamma(s_0) + \left( \int_{s_0}^s \cos \theta(s) ds, \int_{s_0}^s \sin \theta(s) ds \right)$$

είναι  $C^2$ -κάξης τουλάχιστον, είναι κανονική και έχει το  $s$  ως παράμετρο μήκους τόξου, αφού  $\dot{\gamma}(s) = (\omega \theta(s), \dot{\theta}(s))$  και

$|\dot{\gamma}(s)| = 1$ . Επίσης, για την καμπύλη  $\gamma$ , έχουμε

$$\dot{\gamma}_1(s) = \cos \theta(s) = \cos \left( \theta(s_0) + \int_{s_0}^s k(s) ds \right),$$

$$\dot{\gamma}_2(s) = \sin \theta(s) = \sin \left( \theta(s_0) + \int_{s_0}^s k(s) ds \right)$$



και

$$\ddot{\gamma}_1(s) = -k(s) \sin \theta(s), \quad \ddot{\gamma}_2(s) = k(s) \cos \theta(s).$$

Αρα, η (προσημασμένη) καμπυλότητα της  $\gamma$  στο  $s \in I$  είναι ίση

$$\text{με} \quad \dot{\gamma}_1(s) \ddot{\gamma}_2(s) - \ddot{\gamma}_1(s) \dot{\gamma}_2(s) = k(s) (\cos^2 \theta(s) + \sin^2 \theta(s)) = k(s).$$

Παρατήρηση 2.10.10. Η μοναδικότητα της καμπύλης εξασφαλίζεται και εδώ με το Θεώρημα 2.9.4. Η σχέση (2.10.8) σε μορφή πινάκων γράφεται ως

$$(2.10.4) \quad \gamma(s) = \begin{pmatrix} \gamma_1(s) \\ \gamma_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1(s_0) \\ \gamma_2(s_0) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta(s_0) & -\sin \theta(s_0) \\ \sin \theta(s_0) & \cos \theta(s_0) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \int_{s_0}^s \cos \left( \int_{s_0}^s k(s) ds \right) ds \\ \int_{s_0}^s \sin \left( \int_{s_0}^s k(s) ds \right) ds \end{pmatrix}$$

Όταν δοθεί  $s_0 \in I$ , τότε η καμπύλη  $\beta: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , που ορίζεται ως

$$\beta(s) = (\beta_1(s), \beta_2(s)) = \left( \int_{s_0}^s \cos \left( \int_{s_0}^s k(s) ds \right) ds, \int_{s_0}^s \sin \left( \int_{s_0}^s k(s) ds \right) ds \right)$$

είναι πλήρως καθορισμένη. Έχει παράμετρο πο  $s$  ως παράμετρο μήκος τόξου και την  $k(s)$  ως (προσημασμένη) καμπυλότητα. Επίσης η τροχιά της στο  $\mathbb{R}^2$  είναι πλήρως καθορισμένη. Παρατηρούμε από την (2.10.9) ότι κάθε άλλη καμπύλη  $\gamma$  με τα ίδια στοιχεία, βρίσκεται από την  $\beta$  μέσω μιας ισομετρίας του επιπέδου  $\mathbb{R}^2$ . Η ισομετρία αυτή έχει ορθογώνια συνιστώσα με πίνακα των

$$\begin{bmatrix} \cos \theta(s_0) & -\sin \theta(s_0) \\ \sin \theta(s_0) & \cos \theta(s_0) \end{bmatrix}$$



και ως συνιστώσα μεταφοράς το διάνυσμα  $(\chi_1(s_0), \chi_2(s_0))$ . Συνεπώς όταν δοθεί το  $\chi(s_0)$  και το  $\theta(s_0)$  η καμπύλη  $\chi$  είναι τελείως καθορισμένη. Δηλαδή, η  $k(s)$  καθορίζει ακριβώς μια καμπύλη του  $\mathbb{R}^2$ , κατά προσέγγιση μιας ισομετρίας. Για το λόγο αυτό η  $k = k(s)$  λέγεται φυσική εξίσωση (natural equation) μιας επίπεδης καμπύλης. Να σημειώσουμε ότι η φυσική εξίσωση μιας επίπεδης καμπύλης δεν εξαρτάται από σύστημα συντεταγμένων.

Παράδειγμα 2.10.11. Θέλουμε να βρούμε μια επίπεδη καμπύλη, με φυσική εξίσωση την  $k(s) = c = |c| \neq 0$  για κάθε  $s \in \mathbb{R}$ , η οποία διέρχεται από το σημείο  $\chi(0) = (0,0)$  και έχει διάνυσμα ταχύτητας  $\dot{\chi}(0) = (1,0)$  στο  $s=0$ . Από την (2.10.8), με  $s_0=0$ ,  $\chi(0) = (0,0)$  και  $\theta(0) = 0$ , παίρνουμε

$$\chi(s) = (0,0) + \left( \int_0^s \cos\left(\int_0^s c ds\right) ds, \int_0^s \sin\left(\int_0^s c ds\right) ds \right)$$

$$= \left( \int_0^s \cos(cs) ds, \int_0^s \sin(cs) ds \right) = \left( \frac{1}{c} \sin cs, \frac{1}{c} - \frac{1}{c} \cos cs \right), s \in \mathbb{R}.$$

Η καμπύλη αυτή είναι κύκλος, όπως ανεμάνετο, με κέντρο το σημείο  $(0, \frac{1}{c})$  και ακτίνα  $\frac{1}{|c|}$ , αφού οι συνιστώσες της ικανοποιούν την αναλυτική εξίσωση  $x^2 + (y - \frac{1}{c})^2 = \frac{1}{c^2}$ .

Άσκηση 2.10.4. Να βρεθεί επίπεδη καμπύλη με φυσική εξίσωση την  $k(s) = s$ ,  $s \in \mathbb{R}$ .

Θα κλείσουμε αυτό το κεφάλαιο με έναν ακόμη ορισμό.



Ορισμός 2.10.12. Δίνεται μια επιπέδη καμπύλη  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $C^3$ -ταξής τυλάσιων, με τυχαία παράμετρο. Ένα σημείο  $\gamma(t_0)$  λέγεται σημείο καμπής της καμπύλης, αν  $k(t_0) = 0$  και  $k'(t_0) \neq 0$ . Επιπλέον τα σημεία στα οποία μηδενίζεται η παράγωγος της (προσημαμένης) καμπυλότητας, λέγονται κορυφές της καμπύλης.

Άσκηση 2.10.5. Να βρεθούν οι κορυφές της καμπύλης  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , που ορίζεται ως  $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$ , όπου  $a, b$  σταθερές.





## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ. ΤΟΠΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

Στην Αναλυτική Γεωμετρία είδαμε ότι επιφάνεια, με τη στοιχειώδη έννοια, λέγεται ο γεωμετρικός εόπος (εύνυλο) των σημείων του χώρου  $\mathbb{R}^3$  των οποίων οι συντεταγμένες ικανοποιούν μια εξίσωση της μορφής  $f(x,y,z)=0$ , που λέγεται εξίσωση της επιφάνειας. Για την Διαφορική Γεωμετρία ο ορισμός αυτός δεν είναι κατάλληλος, αφού δεν μας επιτρέπει να μεταφέρουμε τον λογισμό του επιπέδου  $\mathbb{R}^2$  στην περιοχή κάθε σημείου της επιφάνειας. Σε αυτό το Κεφάλαιο θα δώσουμε τον κατάλληλο, για τους σκοπούς της Διαφορικής Γεωμετρίας, ορισμό της επιφάνειας και θα αναπτύξουμε τον τοπικό λογισμό της.

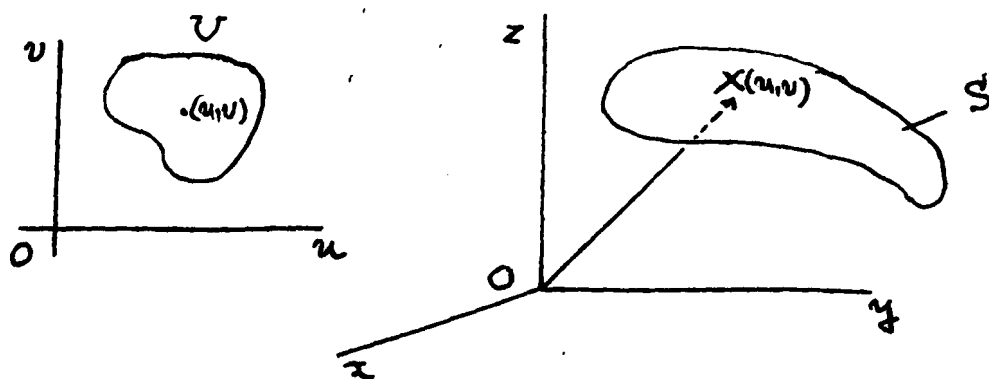
### 3.1. Ορισμοί - Παραδείγματα

Στο επίπεδο  $\mathbb{R}^2$  και στο χώρο  $\mathbb{R}^3$  θεωρούμε Καρτεσιανά συστήματα συντεταγμένων. Θα συμβολίζουμε, συχνά, με  $(u,v)$  και  $(x,y,z)$  τις συντεταγμένες των σημείων του επιπέδου και των σημείων του χώρου, αντίστοιχα. Το  $U$  θα συμβολίζει ένα ανοικτό και συνεκτικό (connected) υπούπονο του  $\mathbb{R}^2$ . Δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 3.1.1. Έστω  $S$  υπούνυλο του  $\mathbb{R}^3$ ,  $S \subset \mathbb{R}^3$ . Το  $S$



θα λέγεται Τμήμα Επιφάνειας (portion of a surface)  $C^k$ -τάξης ( $k \geq 1$ ) αν υπάρχει μια αφημονοσήμαντη,  $C^k$ -ταξης ( $k \geq 1$ ) και κανονική απεικόνιση  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που ορίζεται ως  $X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$  όπου  $(u,v) \in U$ , τέτοια ώστε  $X(U) = S$ . Η κανονική απεικόνιση  $X$  θα λέγεται τότε, σύστημα συντεταγμένων ή παραμετρική παράσταση του τμήματος επιφάνειας  $S$ .



Παράδειγμα 3.1.2. Έστω το σύνολο  $\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: z+y-z+1=0\}$ , το οποίο ως γνωστόν από την Αναλυτική Γεωμετρία είναι επίπεδο ενός επιπέδου. Το  $\pi$  είναι ένα τμήμα επιφάνειας  $C^\infty$ -τάξης. Πραγματικά, με  $U = \mathbb{R}^2$  η απεικόνιση  $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που ορίζεται ως  $X(u,v) = (u,v, u+v+1)$  είναι αφημονοσήμαντη (γιατί;),  $C^\infty$ -τάξης και κανονική, αφού οι συντεταγμένες της  $x(u,v) = u$ ,  $y(u,v) = v$  και  $z(u,v) = u+v+1$  είναι  $C^\infty$ -τάξης και ο Ιακωβιανός πίνακας της  $X$  στο οποιοδήποτε σημείο  $(u,v) \in \mathbb{R}^2$  είναι 0

$$J_X(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Επιπλέον  $X(\mathbb{R}^2) = \pi$  (γιατί;).



Παράδειγμα 3.1.3. Το σύνολο  $S_+^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z > 0\}$ , το οποίο ως γνωστόν από την Αναλυτική Γεωμετρία είναι τμήμα της επιφάνειας μιας σφαίρας με ακτίνα  $a$  και κέντρο την αρχή  $O = (0, 0, 0)$ , είναι ένα τμήμα επιφάνειας  $C^\infty$ -κάξης. Πραγματικά, με  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < a^2\}$  η απεικόνιση  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, X(u, v) = (u, v, \sqrt{a^2 - u^2 - v^2})$ , είναι αμφιμονοσήμαντη,  $C^\infty$ -κάξης και κανονική (γιατί;). Ο Ιακωβιανός πίνακας στο τυχαίο σημείο  $(u, v) \in U$  είναι ο

$$J_X(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{u}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}} & -\frac{v}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}} \end{pmatrix} .$$

Επιπλέον,  $X(U) = S_+^2$ .

Θεωρούμε μια συνάρτηση  $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία είναι  $C^k$ -κάξης ( $k \geq 1$ ). Το σύνολο  $\Gamma_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}$  είναι υποσύνολο του  $\mathbb{R}^3$  και λέγεται γραφήμα της  $f$

Παράδειγμα 3.1.4. Τα γραφήματα των  $C^k$ -κάξης ( $k \geq 1$ ) συναρτήσεων  $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  είναι τμήματα επιφάνειας  $C^k$ -κάξης. Πραγματικά, η απεικόνιση  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, X(u, v) = (u, v, f(u, v))$  είναι αμφιμονοσήμαντη,  $C^k$ -κάξης και κανονική απεικόνιση (γιατί;). Ο Ιακωβιανός πίνακας της  $X$  στο τυχαίο σημείο  $(u, v) \in U$  είναι ο

$$J_X(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} ,$$



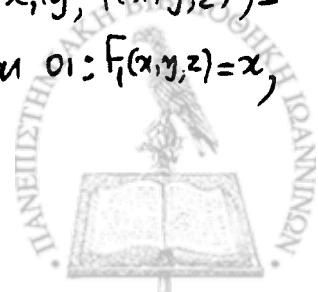
όπου  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$  είναι οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης  $f$ .

Προκειμένου να δούμε ένα ακόμη παραδειγμα λήψιασος εν-  
φάνειας δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 3.1.5. Έστωσαν  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x,y,z) \rightarrow f(x,y,z)$  μια εν-  
άρτηση  $C^k$ -τάξης ( $k \geq 1$ ) και  $a \in f(\mathbb{R}^3)$  μια τιμή της συνάρτησης  
 $f$ . Η τιμή  $a$  λέγεται κανονική τιμή (regular value) της εν-  
άρτησης  $f$ , αν οι μερικές παράγωγοι  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$  δεν μηδενί-  
ζονται συγχρόνως σε κάποιο σημείο του συνόλου  $f^{-1}(a) =$   
 $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = a\}$ . Διαφορετικά, αν δηλαδή υπάρχει  
σημείο  $(x_0, y_0, z_0)$  του  $f^{-1}(a)$  όπου  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) =$   
 $0$ , η τιμή  $a$  λέγεται κρίσιμη τιμή (critical value) της εν-  
άρτησης  $f$ .

Πρόταση 3.1.6. Έστωσαν συνάρτηση  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  τάξης  
 $C^k$  ( $k \geq 1$ ) και μια κανονική τιμή  $a$  αυτής. Για κάθε σημείο  
 $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in f^{-1}(a)$  υπάρχει ανοικτή περιοχή  $V$  του  $P_0$   
στον  $\mathbb{R}^3$  τέτοια ώστε το σύνολο  $S = f^{-1}(a) \cap V$  είναι  
επιφάνεια επιφανείας.

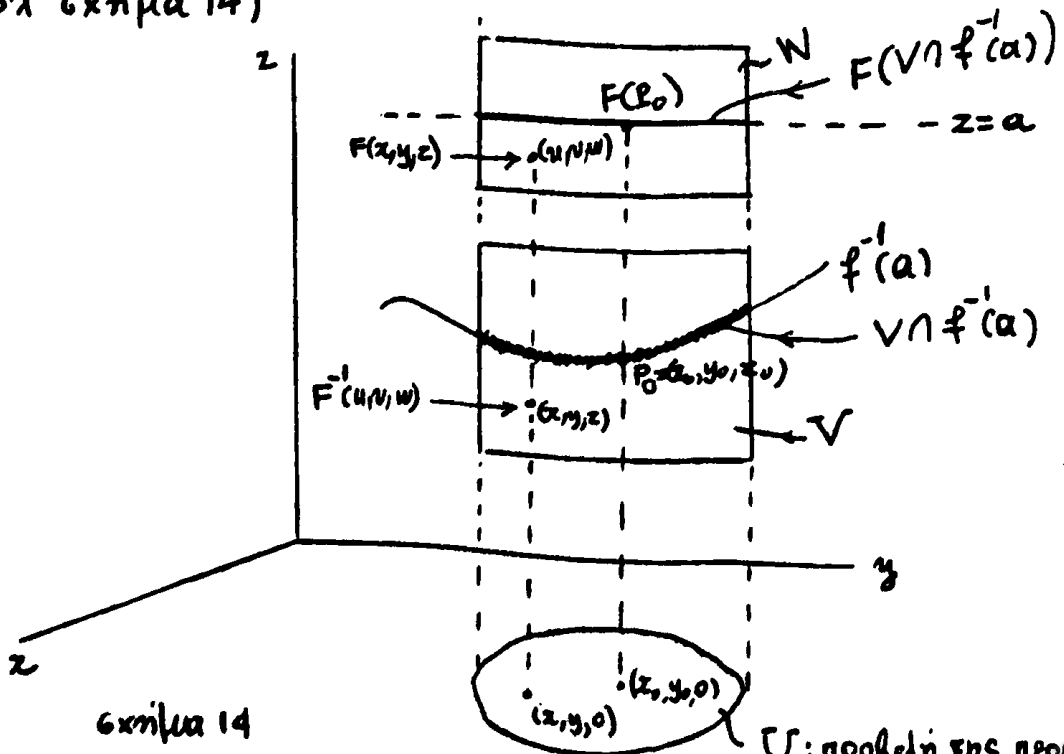
Απόδειξη. Επειδή η τιμή  $a$  είναι κανονική τιμή της  
συνάρτησης  $f$ , μια από τις μερικές παραγώγους  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0),$   
 $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$  δεν μηδενίζεται. Χωρίς βλάβη της γε-  
νικότητας υποθέσουμε ότι  $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ . Θεωρούμε τη συνάρ-  
τηση  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που ορίζεται ως  $F(x,y,z) = (x,y, f(x,y,z)) =$   
 $(F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$ . Οι συνιστώσες της  $F$  είναι οι:  $F_1(x,y,z) = x,$



$F_2(x,y,z) = y$  και  $F_3(x,y,z) = f(x,y,z)$ . Η παράγωγος απεικόνιση  $dF_{P_0}$  της  $F$  στο σημείο  $P_0$  έχει Ιακωβιανό πίνακα των

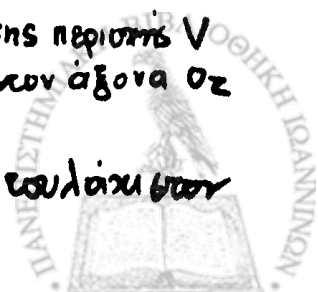
$$J_F(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \\ 0 & 0 & \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}$$

Άρα η  $F$  είναι κανονική στο σημείο  $P_0$ , αφού  $\det J_F(P_0) \neq 0$ . Σύμφωνα με το Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης υπάρχει περιοχή  $V$  του  $P_0$  στον  $\mathbb{R}^3$  και περιοχή  $W$  του  $F(P_0)$  στον  $\mathbb{R}^3$ , έτσι ώστε η  $F: V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow W \subset \mathbb{R}^3$  να είναι διαφορομορφισμός. Έστω  $F^{-1}: W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow V \subset \mathbb{R}^3$  η αντίστροφη της  $F$ , η οποία είναι διαφορομορφισμός και  $F^{-1}(u,v,w) = (g_1(u,v,w), g_2(u,v,w), g_3(u,v,w))$ , όπου  $g_1(u,v,w) = x$ ,  $g_2(u,v,w) = y$  και  $g_3(u,v,w) = z$  (βλ σχήμα 14)



U: προβολή της περιοχής V παράλληλα στον άξονα oz

Προφανώς η συνάρτηση  $g_3(x,y,a) = h(x,y)$  είναι εσφαλμένη



$C^1$ -τάξης και ορίζεται στο ανοικτό υποσύνολο  $U$  του  $\mathbb{R}^2$  που είναι προβολή της ημιοχής  $V$  στο  $Oxy$  επίπεδο. Το σύνολο  $S = V \cap f^{-1}(a)$  είναι τμήμα επιφάνειας, αφού είναι γραφίδια της συνάρτησης  $h: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Το σύνολο  $f^{-1}(a)$  λέγεται σύνολο στάθμης, που αντιστοιχεί στη τιμή  $a$ , της συνάρτησης  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Μόλις διαπιστώσαμε ότι τα σύνολα στάθμης, που αντιστοιχούν σε κανονικές τιμές, της συνάρτησης  $f$  είναι τοπικά τμήματα επιφάνειας.

Παρατήρηση 3.1.7. (i): Όταν  $S$  είναι ένα τμήμα επιφάνειας  $C^k$ -τάξης ( $k \geq 1$ ) και  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  είναι ένα σύστημα συντεταγμένων (παραμετρική παράσταση του τμήματος επιφάνειας  $S$ ), τότε το  $U$  λέγεται πεδίο ορισμού των παραμέτρων. Τα  $u, v$ , κάποια  $\omega$  με  $(u, v) \in U$  και  $X(u, v) = P \in S$  λέγονται συντεταγμένες ή καρτυλιογραφικές συντεταγμένες του σημείου  $P \in S$ , ως προς το σύστημα συντεταγμένων  $X$ . Επιπλέον τα σημεία του  $S$  λέγονται σημεία του τμήματος επιφάνειας  $S$  και το  $X(u, v)$  είναι το διάνυσμα θέσης του τυχαίου σημείου του  $S$ .

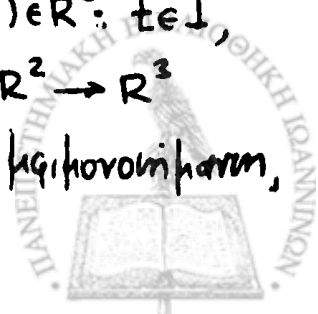
(ii). Στον ορισμό του τμήματος επιφάνειας χρησιμοποιήσαμε ανοικτό και συνεκτικό τόπο. Ο ορισμός αυτός μπορεί να επεκταθεί και για τυχαίους συνεκτικούς τόπους ως εξής: Έστω  $S$  ένα υποσύνολο του  $\mathbb{R}^3$ . Αν υπάρχει μια απεικόνιση  $X: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , όπου  $D$  τυχαίος συνεκτικός τόπος, η οποία είναι αμφιμονοσήμαντη,  $C^k$ -τάξης ( $k \geq 1$ ) και κανονική σε κάθε σημείο του  $D$  και κάποια  $\omega$  με  $X(D) = S$ , τότε το  $S$  λέγεται Τμήμα επιφάνειας  $C^k$ -τάξης. Η απεικόνιση  $X: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , όπου  $D$  τυχαίος τόπος,



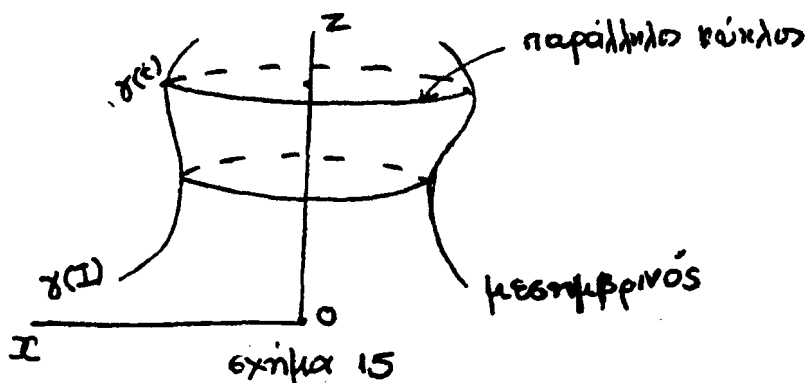
λέμε ότι είναι  $C^k$ -τάξης ( $k \geq 1$ ) στο  $D$ , αν υπάρχει απεικόνιση  $\gamma: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  τάξης  $C^k$  με  $D \subset U$  και  $U$  ανοικτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^2$  τέτοια ώστε  $\gamma|_D = X$  (βλ. Ορισμό 1.3.2). Με βάση αυτήν την επέκταση, όταν δοθούν ένα σύστημα συντεταγμένων  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ενός τμήματος επιφάνειας  $S$  και ένας ανοικτός τόπος  $D \subset U$ , τότε το υποσύνολο  $X(D) \subset S$  είναι τμήμα επιφάνειας και η απεικόνιση  $X|_D: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  είναι ένα σύστημα συντεταγμένων αυτού του τμήματος επιφάνειας.

(iii). Στη συνέχεια, σε ολόκληρο το Κεφάλαιο, όπου θα αναφερόμαστε στη λέξη επιφάνεια θα εννοούμε τμήμα επιφάνειας παρά το γεγονός ότι η έννοια επιφάνεια είναι γενικότερη όπως θα δούμε στο μεθεπόμενο Κεφάλαιο. Εξάλλου, στη εσική θεωρία των επιφανειών, η απαίτηση ότι η  $X$  είναι αμφιμονοσήμαντη είναι κατάλληλη για την ανάπτυξη της ολικής θεωρίας επιφανειών που θα γίνει στο πέμπτο Κεφάλαιο.

Παράδειγμα 3.1.8. (Επιφάνεια εκ περιστροφής): Έστω  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma(t) = (f(t), 0, g(t))$  με  $f(t) > 0$  για κάθε  $t \in I$ , μια  $C^k$ -τάξης ( $k \geq 1$ ) σπλή και κανονική καμπύλη. Οι συναρτήσεις  $f(t)$  και  $g(t)$  είναι οι συνιστώσες της  $\gamma$ . Η προοία  $\gamma(I)$  της καμπύλης  $\gamma$  βρίσκεται στο επίπεδο συντεταγμένων  $Oxz$ . Περιεφέροντας το σύνολο  $\gamma(I)$  περί τον άξονα  $Oz$  βρίσκουμε ένα υποσύνολο  $S$  (απόκ. 15) του  $\mathbb{R}^3$ , που είναι επιφάνεια  $C^k$ -τάξης. Πραγματικά, με  $D = \{(t, \varphi) \in \mathbb{R}^2: t \in I, 0 \leq \varphi < 2\pi\} = I \times [0, 2\pi)$ , η απεικόνιση  $X: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$   $X(t, \varphi) = (f(t) \cos \varphi, f(t) \sin \varphi, g(t))$  είναι αμφιμονοσήμαντη,

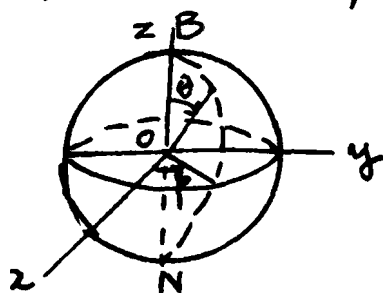


$C^\infty$ -κάξης και κανονική σε κάθε σημείο του  $D$  (γιατί;) Επιπλέον,  $X(D) = S$ .



Οι τομές της επιφάνειας  $S$  με επίπεδα που περιέχουν τον άξονα περιστροφής  $Oz$  λέγονται μεσημβρινοί της εκ περιστροφής επιφάνειας. Οι τομές με επίπεδα κάθετα στον άξονα περιστροφής λέγονται παράλληλοι κύκλοι της εκ περιστροφής επιφάνειας.

Παράδειγμα 3.19. Θεωρούμε το σύνολο  $S_R^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ , το οποίο ως γνωστόν από την Αναλυτική Γεωμετρία αποτελείται από τα σημεία μιας σφαίρας με ακτίνα  $R$  και κέντρο την αρχή  $O = (0,0,0)$ . Το σύνολο  $S = S_R^2 - \{B, N\}$ , που είναι ολόκληρη η σφαίρα εκτός από τον Βόρειο και Νότιο πόλο, είναι μια επιφάνεια  $C^\infty$ -κάξης. Πραγματικά, με  $D = \{(\varphi, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 < \theta < \pi\} = [0, 2\pi) \times (0, \pi)$ , η απεικόνιση  $X : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, X(\varphi, \theta) = (R \cos \varphi \sin \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \theta)$



είναι αμφιμονοσήμαντη,  $C^\infty$ -κάξης και κανονική (γιατί;). Επιπλέον  $X(D) = S$ .





Άσκηση 3.1.1. Ποια επιφάνεια περιγράφει κάθε μια από τις παρακάτω απεικονίσεις:  $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(u,v) = (uv, uv, u)$ ;  $Y: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $Y(u,v) = (u, u^2, v)$ .

Θεωρούμε μια επιφάνεια  $S$  και ένα σύστημα συντεταγμένων  $X: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  αυτής, που ορίζεται ως  $X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ . Έστω  $\{e_1, e_2\}$  η συνήθης βάση του  $\mathbb{R}^2$ . Για την παράγωγο απεικόνιση  $dX_{(u_0, v_0)}$  της  $X$  στο σημείο  $(u_0, v_0) \in D$ , ισχύουν οι σχέσεις

$$dX_{(u_0, v_0)}(e_1) = \left( \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right)_{X(u_0, v_0)}$$

$$dX_{(u_0, v_0)}(e_2) = \left( \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right)_{X(u_0, v_0)}$$

Τα διανύσματα  $dX_{(u_0, v_0)}(e_1)$  και  $dX_{(u_0, v_0)}(e_2)$  είναι διανύσματα του  $\mathbb{R}^3$ , που αρχίζουν από το σημείο  $X(u_0, v_0)$ . Δηλαδή, είναι διανύσματα του  $T_{X(u_0, v_0)} \mathbb{R}^3$ . Συμβολίζουμε αυτά τα διανύσματα με  $X_u(u_0, v_0)$ ,  $X_v(u_0, v_0)$ , αντίστοιχα. Δηλαδή, θέτουμε:

$$(3.1.1) \quad X_u(u, v) = \left( \frac{\partial x}{\partial u}(u, v), \frac{\partial y}{\partial u}(u, v), \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \right)_{X(u, v)}$$

$$(3.1.2) \quad X_v(u, v) = \left( \frac{\partial x}{\partial v}(u, v), \frac{\partial y}{\partial v}(u, v), \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \right)_{X(u, v)},$$

για κάθε  $(u, v) \in D$ . Το εξωτερικό γινόμενο αυτών των διανυσμάτων είναι

$$(3.1.3) \quad X_u(u, v) \times X_v(u, v) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) & \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}(u, v), \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}(u, v), \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(u, v) \right)_{X(u, v)}$$



που  $\{e_1, e_2, e_3\}$  είναι η συνήθης βάση του  $\mathbb{R}^3$ , χωρίς να γίνεται συγχύση με τη συνήθη βάση  $\{e_1, e_2\}$  του  $\mathbb{R}^2$ . Από την (3.1.3) προκύπτει αμέσως ότι οι γενιτώσεις του διανύσματος  $X_u(u,v) \times X_v(u,v)$  είναι οι τρεις ορίζουσες  $2^{\text{ης}}$  τάξης του Ιακωβιανού πίνακα ως  $X$  στο σημείο  $(u,v) \in D$ .

Πρόταση 3.110: Έστωσαν  $S$  μια επιφάνεια  $C^k$ -τάξης ( $k \geq 1$ ) και  $F: V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow W \subset \mathbb{R}^3$  ένας διαφορομορφισμός με  $S \subset V$ . Το υπούνολο  $F(S)$  του  $\mathbb{R}^3$  είναι επίσης επιφάνεια πουλάκιτων  $C^1$ -τάξης. Ειδικότερα, αν  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  είναι ένα σύστημα συντεταγμένων ως  $S$ , τότε η  $Y = F \circ X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  είναι σύστημα συντεταγμένων ως  $F(S)$ . Επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις

$$(3.1.4) \quad Y_u(u,v) = dF_{X(u,v)}(X_u(u,v)), \quad Y_v(u,v) = dF_{X(u,v)}(X_v(u,v)),$$

σε κάθε  $(u,v) \in U$ .

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι  $Y(U) = F(X(U)) = F(S)$ . Επιπλέον η  $Y$  είναι αμφιμονοσήμαντη, ως σύνθεση 1-1 απεικονίσεων, και πουλάκιτων  $C^1$ -τάξης. Η  $Y$  είναι κανονική, αφού η  $X$  είναι κανονική και η  $F$  κανονική, ως διαφορομορφισμός (βλ. Άσκηση 1.42). Επίσης, από την Άσκηση 1.42 έχουμε,

$$\begin{aligned} Y_u(u,v) &= dY_{(u,v)}(e_1) = d(F \circ X)_{(u,v)}(e_1) = dF_{X(u,v)}(dX_{(u,v)}(e_1)) \\ &= dF_{X(u,v)}(X_u(u,v)), \text{ σε κάθε σημείο } (u,v) \in U. \end{aligned}$$

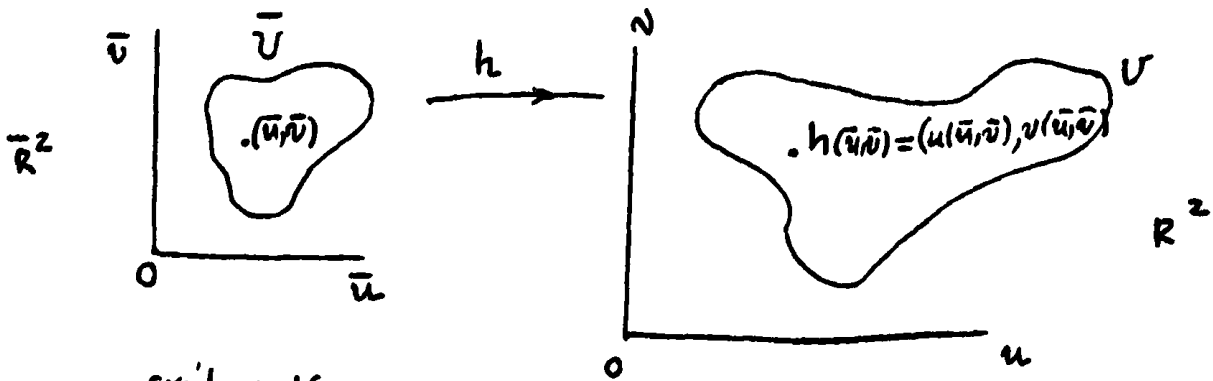
Συνεπώς,  $Y_u(u,v) = dF_{X(u,v)}(X_u(u,v))$ . Όμοια αποδεικνύεται και η άλλη σχέση.

Παρατήρηση 3.1.11. Η συνθήκη ότι η απεικόνιση  $X$  είναι κα-



· νονική στο σημείο  $(u_0, v_0) \in D$  είναι ισοδύναμη με το γεγονός ότι, το διάνυσμα  $X_u(u_0, v_0) \times X_v(u_0, v_0)$  δεν είναι μηδενικό. Δηλαδή, η  $X$  είναι κανονική σε κάθε σημείο του  $D$ , αν και μόνο αν τα διανύσματα  $X_u(u, v), X_v(u, v)$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα παντού.

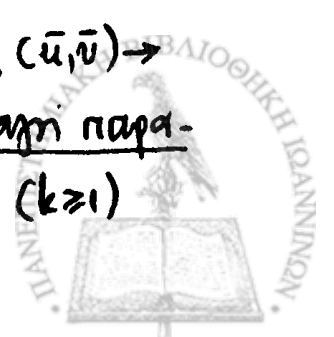
· Έστωσαν  $S$  μια επιφάνεια  $C^k$ -τάξης ( $k \geq 1$ ) και  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ένα σύστημα συντεταγμένων πάνω  $S$ , που ορίζεται ως  $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  με  $(u, v) \in U$ . Θεωρούμε και άλλο ένα αντίγραφο  $\bar{\mathbb{R}}^2$  του Ευκλείδειου χώρου διαστάσεως 2 με ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και συμβολίζουμε με  $(\bar{u}, \bar{v})$  τις συντεταγμένες των σημείων του. Έστω  $\bar{U}$  ένας συγκεκριμένος τόπος του  $\bar{\mathbb{R}}^2$  και  $h: \bar{U} \subset \bar{\mathbb{R}}^2 \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$  μια απεικόνιση, που ορίζεται ως  $h(\bar{u}, \bar{v}) = (u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))$ . Δηλαδή, η  $h$  έχει συνιστώσες τις  $u(\bar{u}, \bar{v})$  και  $v(\bar{u}, \bar{v})$  (εξήματα 16)



εξήματα 16

Δίνουμε τον παρακάτω ορισμό

Ορισμός 3.1.12. Η απεικόνιση  $h: \bar{U} \subset \bar{\mathbb{R}}^2 \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2, (\bar{u}, \bar{v}) \rightarrow h(\bar{u}, \bar{v}) = (u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))$  λέγεται επιτερετική αλλαγή παραμέτρων, αν ισχύουν: (ι) Η  $h$  είναι  $C^k$ -τάξης ( $k \geq 1$ )



(ii) Η  $h$  είναι αμφιμονοσήμαντη και επι (δηλαδή, 1-1 και  $h(\bar{U})=U$ ) και (iii) Η  $h$  είναι κανονική παντού. Δηλαδή, σε κάθε  $(\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{U}$  ισχύει

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}(\bar{u}, \bar{v}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}}(\bar{u}, \bar{v}) & \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}(\bar{u}, \bar{v}) \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{v}}(\bar{u}, \bar{v}) & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}(\bar{u}, \bar{v}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Έστωσαν  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$  ένα σύστημα συνεταγμένων μια επιφάνειας  $S$  τάξης  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) και  $h: \bar{U} \subset \bar{\mathbb{R}}^2 \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ ,  $h(\bar{u}, \bar{v}) = (u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))$  μια επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρων. Η απεικόνιση,  $Y = X \circ h: \bar{U} \subset \bar{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $Y(\bar{u}, \bar{v}) = X(h(\bar{u}, \bar{v}))$  είναι ένα νέο σύστημα συνεταγμένων της  $S$ . Πραγματικά, αφού η  $Y$  είναι αμφιμονοσήμαντη,  $C^k$ -τάξης και κανονική Επιπλέον,  $Y(\bar{U}) = X(h(\bar{U})) = X(U) = S$ . Οι συνιστώσες της απεικόνισης  $Y$  δίνονται από την ακόλουθη σχέση

$$Y(\bar{u}, \bar{v}) = X(h(\bar{u}, \bar{v})) = X(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})) = (x(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})), y(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})), z(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))).$$

δηλαδή την

$$(3.1.5) \quad Y(\bar{u}, \bar{v}) = (x(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})), y(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})), z(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))).$$

Πρόταση 3.13. Θεωρούμε μια επιφάνεια  $S$  τάξης  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) και ένα σύστημα συνεταγμένων  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$  αυτή. Έστω  $h: \bar{U} \subset \bar{\mathbb{R}}^2 \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ ,  $h(\bar{u}, \bar{v}) = (u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))$  μια επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρων. Τότε, για τα συστήματα συνεταγμένων  $X$  και  $Y = X \circ h$  ισχύουν οι σχέσεις

$$(3.1.6) \quad Y_{\bar{u}}(\bar{u}, \bar{v}) = X_u(h(\bar{u}, \bar{v})) \frac{\partial u}{\partial \bar{u}}(\bar{u}, \bar{v}) + X_v(h(\bar{u}, \bar{v})) \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}(\bar{u}, \bar{v})$$



$$Y_{\bar{v}}(\bar{u}, \bar{v}) = X_u(h(\bar{u}, \bar{v})) \frac{\partial u}{\partial \bar{v}}(\bar{u}, \bar{v}) + X_v(h(\bar{u}, \bar{v})) \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}(\bar{u}, \bar{v})$$

και

$$(3.1.7) \quad Y_{\bar{u}}(\bar{u}, \bar{v}) \times Y_{\bar{v}}(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}(\bar{u}, \bar{v}) X_u(h(\bar{u}, \bar{v})) \times X_v(h(\bar{u}, \bar{v})).$$

Απόδειξη. Οι σχέσεις (3.1.6) προκύπτουν από την σχέση (3.1.5) με τον κανόνα σύνθεσης παραγώγισης (Ακροτή 1.4.2). Η σχέση (3.1.7) προκύπτει από τις (3.1.6) πολλαπλασιασμού-ντας εξωτερικά.

### 3.2. Εφαπτόμενο επίπεδο - Καμπύλες σε Επιφάνεια - κάθετο διάνυσμα

Θεωρούμε μια επιφάνεια  $S$  τάξης  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) και ένα εύ-  
σταθια συντεταγμένων  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$   
αυτής. Έστω  $(u_0, v_0) \in U$  ένα σημείο στο πεδίο ορισμού παρα-  
μέτρων. Επειδή η απεικόνιση  $X$  είναι κανονική σε κάθε  
σημείο του  $U$  και συνεπώς και στο  $(u_0, v_0)$ , η παραίτητος  
απεικόνιση  $dX_{(u_0, v_0)}: T_{(u_0, v_0)}\mathbb{R}^2 \rightarrow T_{X(u_0, v_0)}\mathbb{R}^3$  είναι αμφιμο-  
νοσήμαντη. Έτσι ο χώρος  $dX_{(u_0, v_0)}(T_{(u_0, v_0)}\mathbb{R}^2)$  είναι ένα  
επίπεδο του  $\mathbb{R}^3$  (βλ. Παράδειγμα 1.4.9). Το επίπεδο αυτό  
διέρχεται από το σημείο  $X(u_0, v_0)$  και είναι παράλληλο  
προς τα διανύσματα

$$X_u(u_0, v_0) = \left( \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right) X(u_0, v_0)$$

$$X_v(u_0, v_0) = \left( \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right) X(u_0, v_0).$$



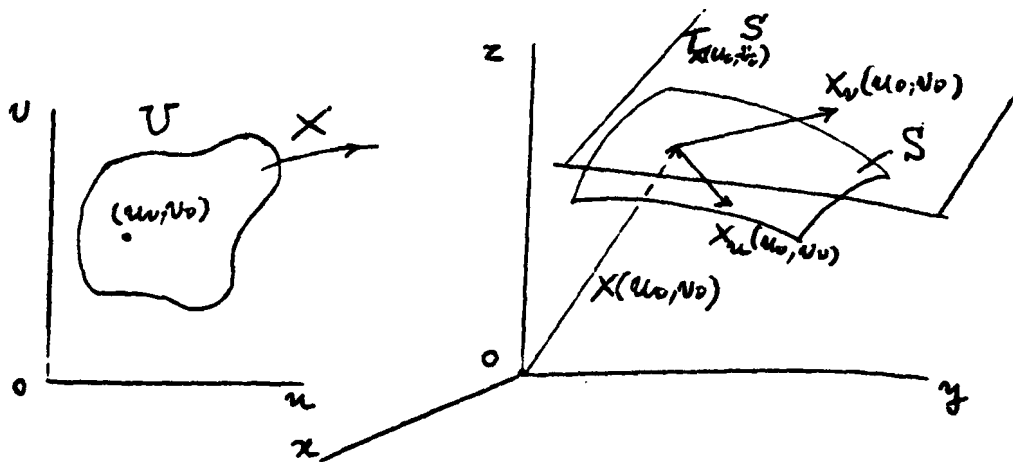
Ορισμός 3.2.1. Έστωσαν  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ένα εύστημα συντεταγμένων της επιφάνειας  $S$  τάξης  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) και  $(u_0, v_0) \in U$ . Το επίπεδο  $dX_{(u_0, v_0)}(T_{(u_0, v_0)}\mathbb{R}^2)$  συμβολίζεται με  $T_{X(u_0, v_0)} S$  και λέγεται εφαπτόμενο επίπεδο (tangent plane) της επιφάνειας  $S$  στο σημείο  $X(u_0, v_0)$ . Κάθε διάνυσμα που αρχίζει από το σημείο  $X(u_0, v_0)$ , αυτού του επιπέδου λέγεται εφαπτόμενο διάνυσμα της  $S$  στο σημείο  $X(u_0, v_0)$ .

Παρατήρηση 3.2.2. Η διανυσματική εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου  $T_{X(u_0, v_0)} S$  της επιφάνειας  $S$  στο σημείο  $X(u_0, v_0)$  είναι  $\pi$

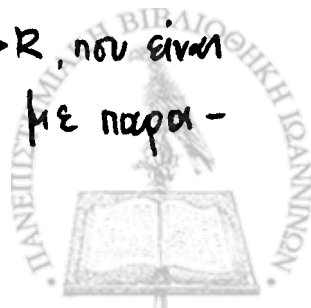
$$(3.2.1) \quad x = X(u_0, v_0) + \lambda X_u(u_0, v_0) + \mu X_v(u_0, v_0), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Η αναλυτική εξίσωση αυτού του επιπέδου είναι  $\pi$

$$(3.2.2) \quad \begin{vmatrix} x - x(u_0, v_0) & y - y(u_0, v_0) & z - z(u_0, v_0) \\ \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0.$$



Άσκηση 3.2.1. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , που είναι συνλίσκιετον  $C^1$ -τάξης. Θεωρούμε επιφάνεια  $S$  με παρα-



μετρική παράσταση

$$X(u, v) = (u, v, u f(\frac{v}{u}))$$

με  $(u, v) \in U = (0, \infty) \times \mathbb{R}$ . Να αποδειχθεί ότι όλα τα εφαπτόμενα επίπεδα διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Πρόταση 3.2.3. Το εφαπτόμενο επίπεδο μιας επιφάνειας  $S$  στο σημείο  $X(u_0, v_0)$  είναι ανεξάρτητο (είναι αναλλοίωτο) από επιτρεπτές αλλαγές παραμέτρων.

Απόδειξη. Έστω  $h: \bar{U} \subset \bar{\mathbb{R}}^2 \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ ,  $h(\bar{u}, \bar{v}) = (u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))$  μια επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρων με  $h(\bar{u}_0, \bar{v}_0) = (u_0, v_0)$ . Η απεικόνιση  $\gamma = \chi \circ h: \bar{U} \subset \bar{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  είναι σύστημα συντεταγμένων της  $S$  με  $\gamma(\bar{u}_0, \bar{v}_0) = X(h(\bar{u}_0, \bar{v}_0)) = X(u_0, v_0)$ . Το επίπεδο  $d\gamma_{(\bar{u}_0, \bar{v}_0)}(T_{(\bar{u}_0, \bar{v}_0)} \bar{\mathbb{R}}^2)$  διέρχεται από το σημείο  $\gamma(\bar{u}_0, \bar{v}_0) = X(u_0, v_0)$  και είναι παράλληλο με τα διανύσματα  $\gamma_{\bar{u}}(\bar{u}_0, \bar{v}_0)$ ,  $\gamma_{\bar{v}}(\bar{u}_0, \bar{v}_0)$ . Από τις σχέσεις (3.1.6) συνάγουμε ότι αυτά τα διανύσματα είναι γραμμικοί συνδυασμοί των διανυσμάτων  $X_u(u_0, v_0)$  και  $X_v(u_0, v_0)$ . Συνεπώς το επίπεδο  $d\gamma_{(\bar{u}_0, \bar{v}_0)}(T_{(\bar{u}_0, \bar{v}_0)} \bar{\mathbb{R}}^2)$  συμπίπτει με το επίπεδο  $dX_{(u_0, v_0)}(T_{(u_0, v_0)} \mathbb{R}^2)$ , δηλαδή το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας  $S$  στο σημείο  $X(u_0, v_0)$ .

Άσκηση 3.2.2. Να βρεθεί η αναλυτική εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της επιφάνειας  $S$ , με παραμετρική παράσταση την  $X(u, v) = (a \cos u, a \sin u, v)$ ,  $a = \text{σταθ.} > 0$  και  $(u, v) \in D = [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ .

Άσκηση 3.2.3. Αρκού αποδειχθεί ότι τα σύνολα  $S_b = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = b^2, b = \text{σταθ.} > 0 \text{ και } |z| < b\}$

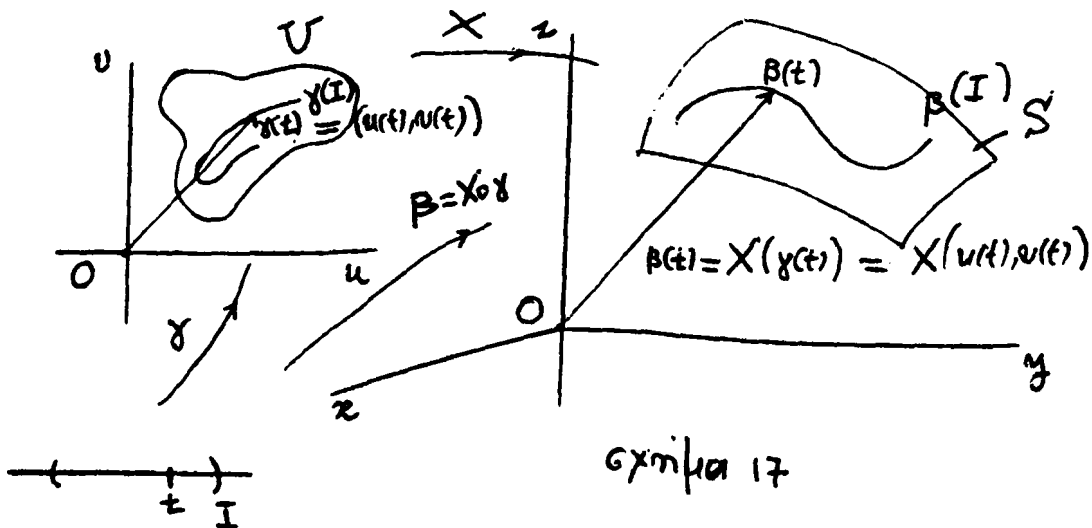


$$S_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a}, a = \text{const.} \neq 0 \right\}$$

είναι επιφάνειες, να βρεθεί η αναλυτική εξίσωσή του εφαπτόμενο επίπεδο της  $S_2$  σε ένα σημείο κοινό με την  $S_1$ . Στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι οι συνεσταθμένες επί την αρχή ενός του επιπέδου έχουν σταθερό άθροισμα.

Έστω  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  ένα σύστημα συνεσταθμένων της επιφάνειας  $S$  τάξης  $C^k$  ( $k \geq 1$ ). Θεωρούμε μια κανονική καμπύλη  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \rightarrow \gamma(t) = (u(t), v(t))$  του  $\mathbb{R}^2$ , τάξης  $C^k$  ( $k \geq 1$ ), με συντεταγμένες  $u(t), v(t)$  και της οποίας η εικόνα  $\gamma(I)$  βρίσκεται στο  $U$ , δηλαδή  $\gamma(I) \subset U$ . Τότε η απεικόνιση  $\beta = X \circ \gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που δίνεται ως

$\beta(t) = X(\gamma(t)) = X(u(t), v(t)) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)))$  είναι μια καμπύλη  $C^k$ -τάξης του  $\mathbb{R}^3$ , της οποίας η εικόνα  $\beta(I)$  είναι στην επιφάνεια  $S$ , δηλαδή  $\beta(I) \subset S$  (ακόμα  $I$ ).



σχήμα 17

Μια τέτοια καμπύλη λέγεται καμπύλη της επιφάνειας  $S$ . Με το κανόνα σύνθεσης παραγωγής βρίσκουμε ότι το διάνυσμα ταχύτητας της καμπύλης  $\beta$  στο  $t \in I$ , είναι το διάνυσμα





$$\begin{aligned}
 (3.23) \quad \beta'(t) &= X_u(u(t), v(t)) u'(t) + X_v(u(t), v(t)) v'(t) \\
 &= u'(t) \left( \frac{\partial X}{\partial u}(u(t), v(t)), \frac{\partial Y}{\partial u}(u(t), v(t)), \frac{\partial Z}{\partial u}(u(t), v(t)) \right) \\
 &\quad + v'(t) \left( \frac{\partial X}{\partial v}(u(t), v(t)), \frac{\partial Y}{\partial v}(u(t), v(t)), \frac{\partial Z}{\partial v}(u(t), v(t)) \right),
 \end{aligned}$$

το οποίο αρχίζει από το σημείο  $\beta(t) = X(\gamma(t))$ .

Από την (3.2.3) προκύπτει εύκολα (πώς;) ότι η καμπύλη  $\beta$  είναι κανονική σε κάθε  $t \in I$ . Επίσης το διάνυσμα ταχύτητας  $\beta'(t)$  της  $\beta$ , στο σημείο  $\beta(t)$ , κείται στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας  $S$ , στο σημείο  $\beta(t) = X(\gamma(t))$ , αφού είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων  $X_u(\gamma(t)), X_v(\gamma(t))$ .

Παρατηρούμε ότι οι συνιστώσες του διανύσματος ταχύτητας  $\beta'(t)$  στο σημείο  $\beta(t)$  ως προς τη βάση  $X_u(\gamma(t)), X_v(\gamma(t))$  είναι οι  $u'(t), v'(t)$ , που είναι και συνιστώσες του διανύσματος ταχύτητας  $\gamma'(t)$  της  $\gamma$  ως προς τη συνήθη βάση του  $\mathbb{R}^2$ . Αντίστροφα, κάθε μη μηδενικό διάνυσμα του εφαπτομένου επιπέδου της επιφάνειας  $S$  στο σημείο  $X(u_0, v_0)$  είναι διάνυσμα ταχύτητας μιας κανονικής καμπύλης της επιφάνειας. Για το λόγο αυτό τα διανύσματα αυτά έχουν ονομαστεί εφαπτόμενα διανύσματα της επιφάνειας στο σημείο  $X(u_0, v_0)$ . Πραγματικά, έστω  $w \in T_{X(u_0, v_0)} S$  και  $w = a X_u(u_0, v_0) + b X_v(u_0, v_0)$  με  $a^2 + b^2 \neq 0$ . Η καμπύλη  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , που ορίζεται ως  $\gamma(t) = (u_0 + ta, v_0 + tb)$  με  $I$  κατάλληλο διάστημα του  $\mathbb{R}$  ώστε  $\gamma(I) \subset U$ , είναι μια κανονική καμπύλη του  $\mathbb{R}^2$  τάξης  $C^\infty$ . Η καμπύλη  $\beta$  της επιφάνειας, που ορίζεται ως  $\beta(t) = X(\gamma(t)) = X(u_0 + ta, v_0 + tb)$  έχει διάνυσμα ταχύτητας στο  $t=0$  το διάνυσμα  $w$  (γιατί;).

Συνεπώς το εφαπτόμενο επίπεδο  $T_{X(u_0, v_0)} S$  στη επιφάνεια  $S$



στο σημείο  $X(u_0, v_0)$  αποτελείται από διανύσματα ταχύτητας των καμπυλών της επιφάνειας, που διέρχονται από το σημείο  $X(u_0, v_0)$ .

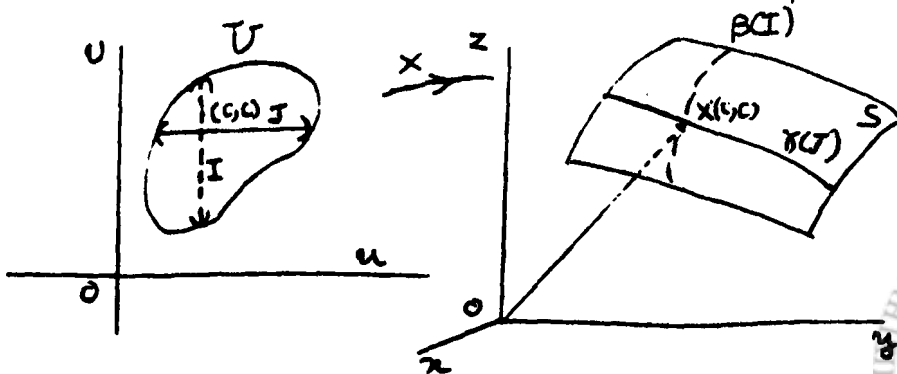
Από την παραπάνω διαδικασία γίνεται φανερό ότι μια καμπύλη της επιφάνειας καθορίζεται από τις συναρτήσεις  $u(t), v(t)$ . Έτσι στη συνέχεια θα λέμε: Δίνεται η καμπύλη  $\gamma$  της επιφάνειας  $S$ , που ορίζεται από τις συναρτήσεις  $u = u(t), v = v(t)$  και θα εννοούμε την καμπύλη που ορίζεται ως  $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$ .

Οι καμπύλες της επιφάνειας που ορίζονται από τις:  $\{u = u(t) = c = \text{σταθ.}, v = v(t) = t\}$  και  $\{u = u(t) = t, v = v(t) = c = \text{σταθ.}\}$  λέγονται παραμετρικές καμπύλες (γραμμές) της επιφάνειας  $S$ , ως προς το σύστημα συντεταγμένων  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Η πρώτη από αυτές λέγεται απλά η  $v$ -παραμετρική καμπύλη  $u=c$ , ενώ η δεύτερη λέγεται απλά η  $u$ -παραμετρική καμπύλη  $v=c$ . Δηλαδή,

$v$ -παραμετρική καμπύλη  $u=c$ :  $\beta(t) = X(c, t) = (x(c, t), y(c, t), z(c, t))$   
όπου  $t \in I$ , τέτοιο ώστε  $(c, t) \in U$ .

$u$ -παραμετρική καμπύλη  $v=c$ :  $\gamma(t) = X(t, c) = (x(t, c), y(t, c), z(t, c))$   
όπου  $t \in J$ , τέτοιο ώστε  $(t, c) \in J$ .

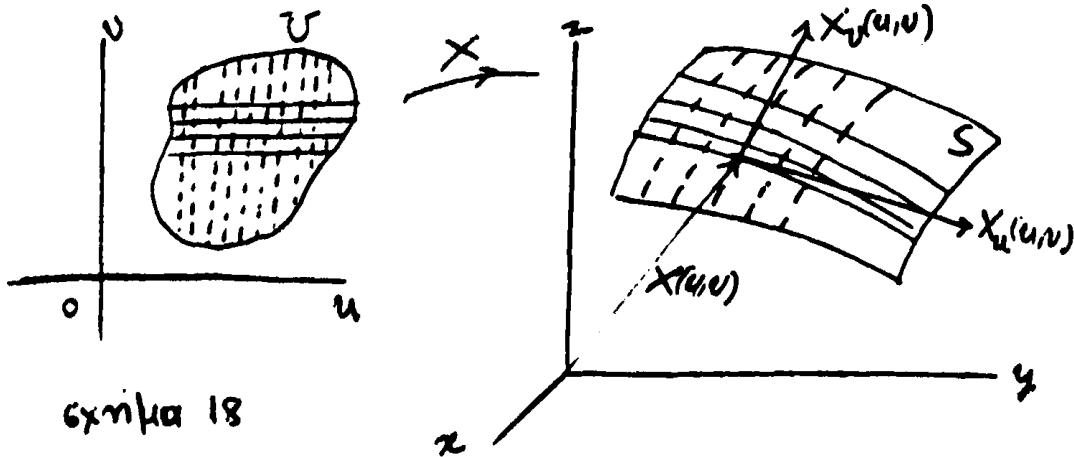
Οι τροχιές των παραμετρικών γραμμών της  $S$  είναι οι εικόνες των οριζόντιων και κατακόρυφων τμημάτων του  $U$  μέσω της  $X$ .



· Πρόταση 3.2.4. Από κάθε σημείο μιας επιφάνειας  $S$  διέρχεται μια ακριβώς παραμετρική γραμμή  $u=c$  (αντίστοιχα  $v=c$ ), ως προς το σύστημα  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Επιπλέον, το διάνυσμα ταχύτητας της  $u=u_0$  (αντίστοιχα  $v=v_0$ ) στο σημείο  $X(u_0, v_0)$  της  $S$  είναι το διάνυσμα  $X_u(u_0, v_0)$  (αντίστοιχα  $X_v(u_0, v_0)$ ).

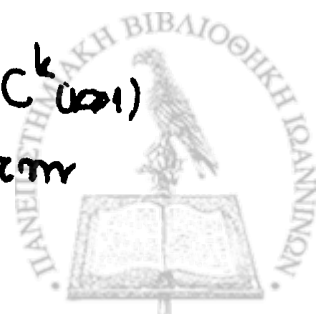
Απόδειξη. Το πρώτο μέρος προκύπτει από το γεγονός ότι η απεικόνιση  $X$  είναι αμφιμονοσήμαντη. Η παραμετρική γραμμή  $u=u_0$  ορίζεται ως  $\beta(t) = X(u_0, t)$ . Συνεπώς το διάνυσμα ταχύτητας στο  $t=v_0$  είναι, με βάση την σχέση (3.2.3), το διάνυσμα  $\beta'(v_0) = X_u(u_0, v_0) \cdot 0 + X_v(u_0, v_0) \cdot 1 = X_v(u_0, v_0)$ . Ομοίως προχωράμε για την παραμετρική γραμμή  $v=v_0$ .

Παρατήρηση 3.2.5. Οι τροχίες των παραμετρικών γραμμών της  $S$ , ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , σχηματίζουν ένα δίκτυο (βλ. σχήμα 18) πάνω στην επιφάνεια  $S$  που λέγεται δίκτυο των παραμετρικών γραμμών ή Παραμετρικό δίκτυο της  $S$  ως προς το σύστημα  $X$ .



σχήμα 18

Σε κάθε σημείο  $X(u, v)$  μιας επιφάνειας  $S$  τάξης  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) γνωρίζουμε μια βάση του εφαπτόμενου επιπέδου, την



$\{X_u(u,v), X_v(u,v)\}$ . Συνεπώς το διάνυσμα  $\frac{X_u(u,v) \times X_v(u,v)}{|X_u(u,v) \times X_v(u,v)|}$

είναι μοναδιαίο και κάθετο σε κάθε διάνυσμα που εφαρμόζεται στον επιπέδου, αφού είναι κάθετο στα  $X_u(u,v)$  και  $X_v(u,v)$ .

### Ορισμός 3.2.6. Το διάνυσμα

$$(3.2.4) \quad \eta(u,v) = \frac{X_u(u,v) \times X_v(u,v)}{|X_u(u,v) \times X_v(u,v)|},$$

με αρχή το σημείο  $X(u,v)$ , λέγεται μοναδιαίο και κάθετο της επιφάνειας  $S$  στο σημείο  $X(u,v)$ , που ορίζεται από το σύστημα συντεταγμένων  $x: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο  $X(u,v)$  και είναι παράλληλη με το  $\eta(u,v)$  λέγεται κάθετη ευθεία της  $S$  στο σημείο  $X(u,v)$ .

Παρατήρηση 3.2.7. (i) Η διανυσματική εξίσωση της κάθετης ευθείας της επιφάνειας  $S$  στο σημείο  $X(u_0, v_0)$  είναι  $\pi$

$$(3.2.5) \quad \alpha = X(u_0, v_0) + t \eta(u_0, v_0).$$

(ii) Το μοναδιαίο και κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας  $S$  στο σημείο  $X(u,v)$  γράφεται και ως

$$(3.2.6) \quad \eta(u,v) = \frac{1}{|X_u(u,v) \times X_v(u,v)|} \begin{pmatrix} \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}(u,v) \\ \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}(u,v) \\ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v) \end{pmatrix}$$

(iii) Τα διανύσματα  $X_u(u,v), X_v(u,v), \eta(u,v)$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα για κάθε  $(u,v) \in U$  και ανήκουν στον θραύο Τριγωνοποιημένο του  $\mathbb{R}^3$ .

Παράδειγμα 3.2.8. Θεωρούμε το σύστημα συντεταγμένων



·  $X(\varphi, \theta) = (R \cos \varphi \sin \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \theta)$  της επιφάνειας του παραδείγματος 3.1.9, με  $(\varphi, \theta) \in D = [0, 2\pi) \times (0, \pi)$ . Ως γνωστόν, το  $X(D)$  είναι η επιφάνεια σφαίρας με ακτίνα  $R$  και κέντρο στην αρχή  $O = (0, 0, 0)$  από την οποία έχουμε αφαιρέσει τα σημεία  $(0, 0, \pm R)$ . Βρίσκουμε,

$$X_\varphi(\varphi, \theta) = (-R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \varphi \sin \theta, 0)$$

$$X_\theta(\varphi, \theta) = (R \cos \varphi \cos \theta, R \sin \varphi \cos \theta, -R \sin \theta)$$

Άρα έχουμε

$$X_\varphi(\varphi, \theta) \times X_\theta(\varphi, \theta) = (-R^2 \cos \varphi \sin^2 \theta, -R^2 \sin \varphi \sin^2 \theta, -R^2 \cos \theta \sin \theta)$$

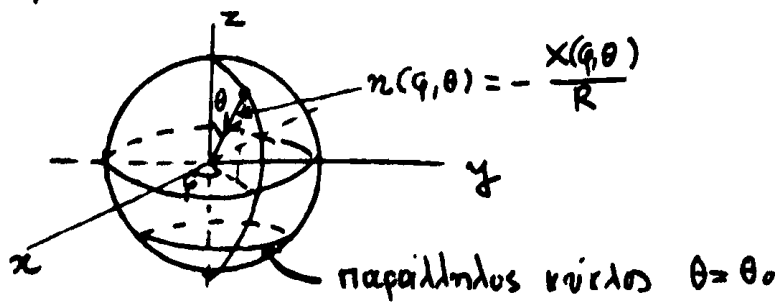
και συνεπώς

$$(3.2.7) \quad n(\varphi, \theta) = (-\cos \varphi \sin \theta, -\sin \varphi \sin \theta, -\cos \theta)$$

Δηλαδή, το μοναδιαίο και κάθετο της επιφάνειας της σφαίρας ακτίνας  $R$ , ως προς το συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων δίνεται από τη σχέση (3.2.7). Είναι αμέσθη η σχέση

$$(3.2.8) \quad n(\varphi, \theta) = -\frac{X(\varphi, \theta)}{R}.$$

Δηλαδή, το διάνυσμα θέσης της σφαίρας ως προς το κέντρο της, είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο στο αντίστοιχο σημείο. Εξάλλου οι παραμετρικές γραμμές  $\varphi = \text{σταθ.}$  είναι οι μεσημβρινοί της σφαίρας και οι παραμετρικές γραμμές  $\theta = \text{σταθ.}$  είναι οι παράλληλοι κύκλοι (εικόνα 19)



εικόνα 19

Παράδειγμα 3.2.9. Θεωρούμε την επιφάνεια με παραμετρική



παράσταση των  $X(u,v) = (a \cos u, a \sin u, v)$  με  $a = \text{σταθ.} > 0$  και  $(u,v) \in D = [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$  (βλ. Άσκηση 3.2.2). Είναι φανερό ότι το  $X(D)$  είναι το σύνολο των επιπέδων ενός ορθού κυκλικού κυλίνδρου ακτίνας  $a$ . Βρίσκουμε,

$$X_u(u,v) = (-a \sin u, a \cos u, 0)$$

$$X_v(u,v) = (0, 0, 1).$$

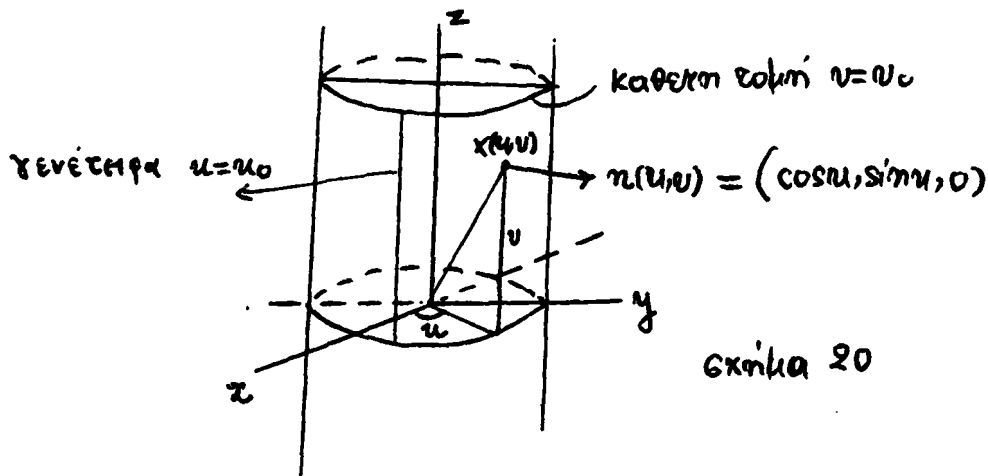
Άρα έχουμε

$$X_u(u,v) \times X_v(u,v) = (a \cos u, a \sin u, 0)$$

και συνεπώς

$$(3.2.9) \quad \eta(u,v) = (\cos u, \sin u, 0).$$

Όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε οι παραμετρικές γραμμές  $u = \text{σταθ.}$  είναι οι γενέτειρες του κυλίνδρου και οι παραμετρικές γραμμές  $v = \text{σταθ.}$  είναι οι κάθετες τομές του κυλίνδρου (βλ. σχήμα 20).

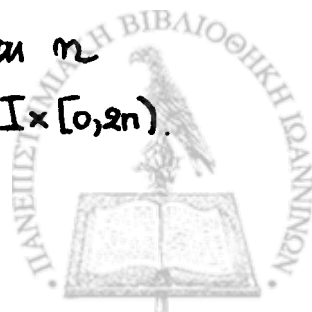


Παράδειγμα 3.2.10. Θεωρούμε την επιφάνεια εκ περιστροφής του Παραδείγματος 3.1.8. Επιπλέον θεωρούμε ότι η παραμέτρος της καμπύλης που περιτρέφεται είναι η παραμέτρος μήκους τόξου, δηλαδή  $t = s$ . Άρα

$$(3.2.10) \quad \dot{f}^2(s) + \dot{g}^2(s) = 1, \quad \text{για κάθε } s \in I.$$

Η παραμετρική παράσταση της επιφάνειας αυτής είναι η

$$X(s,\varphi) = (f(s) \cos \varphi, f(s) \sin \varphi, g(s)), \quad (s,\varphi) \in D = I \times [0, 2\pi).$$



Βρίσκουμε,

$$X_S(s, \varphi) = (\dot{f}(s) \cos \varphi, \dot{f}(s) \sin \varphi, \dot{g}(s))$$

$$X_\varphi(s, \varphi) = (-f(s) \sin \varphi, f(s) \cos \varphi, 0).$$

Άρα έχουμε

$$X_S(s, \varphi) \times X_\varphi(s, \varphi) = (-f(s)\dot{g}(s) \cos \varphi, -f(s)\dot{g}(s) \sin \varphi, f(s)\dot{f}(s))$$

και συνεπώς, επειδή  $|X_S(s, \varphi) \times X_\varphi(s, \varphi)|^2 = f^2(s)(\dot{f}^2(s) + \dot{g}^2(s)) \stackrel{(3.2.10)}{=} f^2(s)$ ,

$$(3.2.11) \quad n(s, \varphi) = (-\dot{g}(s) \cos \varphi, -\dot{g}(s) \sin \varphi, \dot{f}(s)).$$

Οι παραμετρικές γραμμές  $s = \text{σταθ.}$  και  $\varphi = \text{σταθ.}$  είναι οι παράλληλοι κύκλοι και οι μεσημβρινοί, αντίστοιχα.

Ορισμός 3.2.11. Έστω  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ένα σύστημα συντεταγμένων της επιφάνειας  $S$  τάξης  $C^k$  ( $k \geq 1$ ). Η απεικόνιση

$n: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που ορίζεται ως  $n(u, v) = \frac{X_u(u, v) \times X_v(u, v)}{|X_u(u, v) \times X_v(u, v)|}$  λέγεται

σφαιρική απεικόνιση ή απεικόνιση Gauss της  $S$ , ως προς το σύστημα  $X$ . Συχνά αυτή η απεικόνιση λέγεται και προβανολισμός της  $S$ .

Παρατήρηση 3.2.12. (i) Είναι φανερό ότι για κάθε  $(u, v) \in U$  το  $n(u, v)$  κείται στη μοναδιαία σφαίρα  $S^2$  με κέντρο την αρχή  $O = (0, 0, 0)$ .

(ii) Από την (3.2.6) γίνεται φανερό ότι η σφαιρική απεικόνιση  $n$  είναι τάξης  $C^{k-1}$ , όταν η  $S$  είναι τάξης  $C^k$ .

Συνεπώς, όπου χρειαζόμαστε την παράγωγο απεικόνιση της απεικόνισης  $n$  θα πρέπει να υποθέσουμε ότι η  $S$  είναι τάξης  $C^k$  με  $k \geq 2$ .



Θα εξετάσουμε στη συνέχεια τι συμβαίνει με τη γραφική απεικόνιση, όταν κάνουμε επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρου. Από τη σχέση (3.1.7) ευθυγραμμίζουμε ότι το μοναδιαίο και κάθετο διάνυσμα διατηρείται, αν η επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρου  $h: \bar{U} \subset \bar{R}^2 \rightarrow U \subset R^2$ ,  $h(\bar{u}, \bar{v}) = (u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))$  έχει Ιακωβιανή ορίζουσα  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}(\bar{u}, \bar{v})$  παντού θετική (αρκεί σε ένα σημείο να είναι θετική, αφού είναι συνεχής συνάρτηση των  $\bar{u}, \bar{v}$  και μη μηδενική). Ενώ αντιστρέφεται (αλλάζει κατεύθυνση) το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα όταν η Ιακωβιανή ορίζουσα είναι αρνητική. Ισχύει η σχέση

$$(3.2.12) \quad \bar{n} = \pm (n \circ h),$$

όπου  $\bar{n}$  είναι ο προσανατολισμός της  $S$  ως προς το σύνθετο συντεταγμένων  $Y = X \circ h: \bar{U} \subset \bar{R}^2 \rightarrow R^3$  και το πρόσημο  $\pm$  (αντίστοιχα  $-$ ) αναφέρεται σε επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρου με  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}(\bar{u}, \bar{v}) > 0$  (αντίστοιχα  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}(\bar{u}, \bar{v}) < 0$ ), σε κάθε  $(\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{U}$ .

Ορισμός 3.2.13. Μια επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρου  $h(\bar{u}, \bar{v}) = (u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))$  λέμε ότι διατηρεί τον προσανατολισμό της επιφάνειας  $S$  αν  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}(\bar{u}, \bar{v}) > 0$  και ότι αντιστρέφει τον προσανατολισμό αν  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}(\bar{u}, \bar{v}) < 0$ , για κάθε  $(\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{U}$ .

Άσκηση 3.2.4. Να βρεθεί η γραφική απεικόνιση του γράφηματος  $\Gamma_f$  μιας λείας συνάρτησης  $f: U \subset R^2 \rightarrow R$ .

Άσκηση 3.2.5. Έστω  $X: U \subset R^2 \rightarrow R^3$  ένα σύνθεμα συν-





τεταγμένων της επιφάνειας  $S$  τάξης  $C^k$  ( $k \geq 1$ ). Θεωρούμε την αλλαγή παραμέτρων που ορίζεται από τις  $u(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{u}$ ,  $v(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{v}$ . Αφού διαπιστωθεί ότι πρόκειται περί επηρεατικής αλλαγής παραμέτρων, να εξετασθεί η επίδραση αυτής της αλλαγής στις παραμετρικές γραμμές, στα διανύσματα καχύψης τους αυτών, καθώς και στον προσανατολισμό της επιφάνειας  $S$ .

### 3.3 Πρώτη Θεμελιώδης Μορφή - Μίκρος Καμπύλης Επιφάνειας - Εμβαδόν Επιφάνειας

Θεωρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων

$$X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

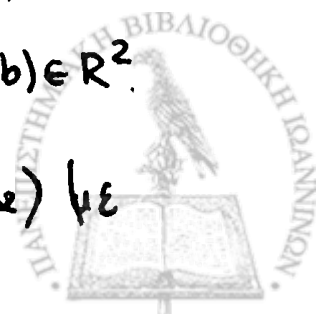
μιας επιφάνειας τάξης  $C^k$  ( $k \geq 1$ ). Εστωσαν  $(u, v) \in U$  ένα σημείο του πεδίου ορισμού των παραμέτρων και  $\{e_1, e_2\}$  η συνήθης βάση του  $\mathbb{R}^2$ . Για την παράγωγο απεικόνιση  $dX_{(u,v)}: T_{(u,v)}\mathbb{R}^2 \rightarrow T_{X(u,v)}\mathbb{R}^3$ , ισχύουν οι σχέσεις:

$$(3.3.1) \begin{cases} dX_{(u,v)}(e_1) = \left( \frac{\partial x}{\partial u}(u, v), \frac{\partial y}{\partial u}(u, v), \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \right)_{X(u,v)} = X_u(u, v) \\ dX_{(u,v)}(e_2) = \left( \frac{\partial x}{\partial v}(u, v), \frac{\partial y}{\partial v}(u, v), \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \right)_{X(u,v)} = X_v(u, v). \end{cases}$$

Επιπλέον, επειδή η  $dX_{(u,v)}$  είναι γραμμική απεικόνιση, θα έχουμε

$$(3.3.2) \quad dX_{(u,v)}(ae_1 + be_2) = aX_u(u, v) + bX_v(u, v), \quad \text{με } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Ξαναενοησουμε ότι τα διανύσματα  $dX_{(u,v)}(ae_1 + be_2)$  με



$(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , είναι εφαπτόμενα διανύσματα της επιφάνειας  $S$  στο σημείο  $P = X(u, v)$ , δηλαδή ανήκουν στο εφαπτόμενο επίπεδο  $T_P S$  της επιφάνειας.

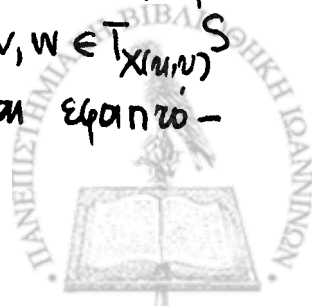
Σεο εφαπτόμενο επίπεδο  $T_P S$ , όπου  $P = X(u, v)$ , εισάγουμε ένα εσωτερικό γινόμενο ως εξής: Έστωσαν  $v, w \in T_P S$ . Ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο των  $v$  και  $w$  και συμβολίζουμε με  $\langle v, w \rangle_P$ , το εσωτερικό τους γινόμενο ως διανύσματα του Ευκλείδειου χώρου  $\mathbb{R}^3$ . Αυτό το εσωτερικό γινόμενο λέγεται και επαγόμενο από τον  $\mathbb{R}^3$ .

Ορισμός 3.3.1. Η τετραγωνική μορφή  $I_P: T_P S \rightarrow \mathbb{R}$ , όπου  $P = X(u, v)$ , που ορίζεται ως  $I_P(v) = \langle v, v \rangle_P$  λέγεται πρώτη θεμελιώδης μορφή (first fundamental form) της επιφάνειας  $S$  στο σημείο  $P = X(u, v)$ .

Παρατήρηση 3.3.2. (i) Στη συνέχεια αναί των  $I_P, \langle \cdot, \cdot \rangle_P$  θα γράφουμε  $I$  και  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , αφού κάθε φορά θα είναι φανερό σε ποιο σημείο της επιφάνειας αναφερόμαστε.

(ii) Η πρώτη θεμελιώδης μορφή της επιφάνειας δεν εξαρτάται από επιρροές αλλαγές παραμέτρου, αφού τα διανύσματα  $v \in T_P S$  δεν αλλάζουν με επιρροές αλλαγές παραμέτρου.

(iii) Έστω  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  είναι μια ισομετρία του  $\mathbb{R}^3$ . Συμβολίζουμε με  $I_S$  και  $I_{F(S)}$  τις πρώτες θεμελιώδεις μορφές των επιφανειών  $S$  και  $F(S)$ , αντίστοιχα. Για  $v, w \in T_{X(u, v)} S$  τα διανύσματα  $dF_{X(u, v)}(v)$ ,  $dF_{X(u, v)}(w)$  είναι εφαπτό-



μένα της  $F(S)$  στο σημείο  $\gamma(u,v) = F(X(u,v))$ , όπως προκύπτει από τις σχέσεις (3.1.4). Λόγω του Θεωρήματος 1.4.13, ισχύει η σχέση

$$\langle dF_{X(u,v)}(v), dF_{X(u,v)}(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

και συνεπώς

$$I_{F(S)}(dF_{X(u,v)}(v)) = I_S(v).$$

Ορισμός 3.3.3: Έστω  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$  σύστημα συντεταγμένων της επιφάνειας  $S$  τάξης  $C^k$  ( $k \geq 1$ ). Οι συναρτήσεις  $E, F, G: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , που ορίζονται ως

$$E(u,v) = \langle X_u(u,v), X_u(u,v) \rangle = |X_u(u,v)|^2$$

$$F(u,v) = \langle X_u(u,v), X_v(u,v) \rangle$$

$$G(u,v) = \langle X_v(u,v), X_v(u,v) \rangle = |X_v(u,v)|^2,$$

λέγονται θεμελιώδη μεγέθη (ποσά) πρώτης τάξης της επιφάνειας  $S$ , ως προς το σύστημα  $X$ .

Παρατήρηση 3.3.4. (i) Είναι φανερό ότι οι συναρτήσεις  $E, F, G$  είναι τάξης  $C^{k-1}$ , όταν η επιφάνεια  $S$  είναι τάξης  $C^k$  ( $k \geq 1$ ).

(ii) Ο πίνακας της πρώτης θεμελιώδους μορφής  $I$  στο σημείο  $X(u,v)$ , ως προς τη βάση  $\{X_u(u,v), X_v(u,v)\}$  είναι ο

$$\begin{pmatrix} E(u,v) & F(u,v) \\ F(u,v) & G(u,v) \end{pmatrix}.$$

Πρόταση 3.3.5. Ο πίνακας της πρώτης θεμελιώδους μορφής της επιφάνειας  $S$ , ως προς το σύστημα συντεταγμένων  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , είναι θετικά ορισμένος σε κάθε σημείο  $(u,v) \in U$ .



Απόδειξη. Επειδή  $E(u,v) > 0$ ,  $G(u,v) > 0$  αρκεί να δείξουμε ότι  $E(u,v)G(u,v) - F^2(u,v) > 0$  σε κάθε  $(u,v) \in U$ . Από την ταυτότητα (1.1.9) (ταυτότητα του Lagrange) παίρνουμε,  

$$|X_u(u,v) \times X_v(u,v)|^2 = |X_u(u,v)|^2 |X_v(u,v)|^2 - \langle X_u(u,v), X_v(u,v) \rangle^2$$

$$= E(u,v)G(u,v) - F^2(u,v).$$

Δηλαδή,

$$(3.3.3) \quad |X_u(u,v) \times X_v(u,v)|^2 = E(u,v)G(u,v) - F^2(u,v).$$

Η (3.3.3) δείχνει το ζητούμενο, αφού το διάνυσμα  $X_u(u,v) \times X_v(u,v)$  δεν μηδενίζεται ποτέ.

Πρόταση 3.3.6 (κανόνας αλλαγής των θεμελιωδών μεθεσών πρώτης τάξης). Έστωσαν  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ένα βέκτημα συν-συναρτημένων στο επιφανειακό  $S$  πρώτης τάξης  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) και  $h: \bar{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ ,  $h(\bar{u}, \bar{v}) = (u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))$  μια επιτελεστή αλλαγή παραμέτρων. Τότε, ισχύουν οι σχέσεις:

$$(3.3.4) \quad \begin{cases} \bar{E} = (E \circ h) \left( \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \right)^2 + 2(F \circ h) \left( \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right) + (G \circ h) \left( \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right)^2 \\ \bar{F} = (E \circ h) \left( \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \right) + (F \circ h) \left( \left( \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right) + \left( \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right) \right) + (G \circ h) \left( \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right) \\ \bar{G} = (E \circ h) \left( \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \right)^2 + 2(F \circ h) \left( \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right) + (G \circ h) \left( \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right)^2, \end{cases}$$

όπου  $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$  είναι τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης στο  $S$ , ως προς το βέκτημα συνσυναρτημένων  $Y = X \circ h: \bar{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Απόδειξη. Οι σχέσεις (3.3.4) προκύπτουν εύκολα από τις σχέσεις (3.1.6) και τον ορισμό 3.3.3.

Πόρισμα 3.3.7. Ισχύει η σχέση

$$(3.3.5) \quad \bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2 = \left( \frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \right)^2 \left( (E \circ h)(G \circ h) - (F \circ h)^2 \right).$$



Απόδειξη. Προκύπτει από τις (3.3.4) εκτελώντας πράξεις.

Παρατήρηση 3.3.8 (i) Από την Παρατήρηση 3.3.2 (iii) προκύπτει ότι οι επιφανείες  $S$  και  $F(S)$ , όπου  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  είναι μια ισομετρία, έχουν ίδια θεμελιώδη μεγέθη πρώτης τάξης, ως προς τα συστήματα  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  και  $Y = F \circ X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , αντίστοιχα.

(ii) Αν  $h(\bar{u}, \bar{v}) = (u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))$  είναι μια επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρων, τότε η αντιστροφή απεικόνιση  $h^{-1}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \bar{U} \subset \bar{\mathbb{R}}^2$ ,  $h^{-1}(u, v) = (\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v))$  είναι επίσης μια επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρων (γιατί;). Ισχύουν σχέσεις ανάλογες των (3.3.4) και (3.3.5) (Να βρεθούν αυτές οι σχέσεις ως άσκηση).

Θα δείξουμε στη συνέχεια μια πρόταση από τη Γραμμική Άλγεβρα.

Πρόταση 3.3.9. Έστωσαν  $V, W$  πραγματικοί διανυσματικοί χώροι διάστασης 2 και  $L: V \rightarrow W$  μια γραμμική απεικόνιση, η οποία είναι αμφιμονοσήμαντη (1-1). Υποθέτουμε, ότι ο διανυσματικός χώρος  $W$  είναι εξοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο  $\langle, \rangle$  (δηλαδή, ο  $W$  είναι Ευκλείδειος χώρος). Τότε η συνάρτηση  $\Phi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , που ορίζεται ως

$$\Phi(v, w) = \langle Lv, Lw \rangle,$$

ορίζει εσωτερικό γινόμενο στον διανυσματικό χώρο  $V$ , που λέγεται επαγόμενο από το  $\langle, \rangle$  με την  $L$ .



Απόδειξη. Η  $\Phi$  είναι μια συμμετρική διχρημική μορφή στον  $V$  (γιατί;). Επιπλέον  $\Phi(v,v) = \langle Lv, Lv \rangle = |Lv|^2 \geq 0$  και  $\Phi(v,v) = 0$ , αν και μόνο αν  $Lv = 0$ . Δηλαδή,  $\Phi(v,v) = 0$  αν και μόνο αν  $v = 0$ , αφού η  $L$  είναι γραμμική και αμφιμονοσήμαντη.

Η παράγωγος απεικόνιση  $dX_{(u,v)}: T_{(u,v)}\mathbb{R}^2 \rightarrow T_{X(u,v)}\mathbb{R}^3$  είναι, όπως γνωρίζουμε, γραμμική και αμφιμονοσήμαντη αφού η  $X$  είναι κανονική σε κάθε σημείο του  $U$ . Επίσης  $dX_{(u,v)}(T_{(u,v)}\mathbb{R}^2) = T_{X(u,v)}S$  είναι το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας  $S$  στο σημείο  $X(u,v)$  (είναι ένας χώρος διαστάσεως 2). Στο εφαπτόμενο επίπεδο  $T_{X(u,v)}S$  μόλις ορίσαμε ένα εσωτερικό γινόμενο, το επαγόμενο από τον  $\mathbb{R}^3$ . Έτσι, με την Πρόταση 3.3.9, στον χώρο  $T_{(u,v)}\mathbb{R}^2$  εκτός από το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο, μπορούμε να ορίσουμε ένα καινούργιο εσωτερικό γινόμενο ως εξής: Έστωσαν  $v = a_1 e_1 + b_1 e_2$ ,  $w = a_2 e_1 + b_2 e_2$  δυο διανύσματα του  $T_{(u,v)}\mathbb{R}^2$ . Τότε

$$\Phi(v,w) \stackrel{\text{ορ}}{=} \langle dX_{(u,v)}(a_1 e_1 + b_1 e_2), dX_{(u,v)}(a_2 e_1 + b_2 e_2) \rangle.$$

Λαμβάνοντας υπόψη την σχέση (3.3.2) βρίσκουμε,

$$(3.3.6) \quad \Phi(v,w) = E(u,v)a_1 a_2 + F(u,v)(a_1 b_2 + a_2 b_1) + G(u,v)b_1 b_2.$$

Το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο των  $v$  και  $w$  είναι

$$(3.3.7) \quad \langle v, w \rangle = a_1 a_2 + b_1 b_2$$

Μπορεί κάποιος να διαπιστώσει εύκολα τη διαφορά.

Ειδικά, για  $v = w = du e_1 + dv e_2$  η (3.3.6) δίνει

$$(3.3.8) \quad \Phi(v,v) \stackrel{\text{βέβαια}}{=} \Phi(du, dv) = E(u,v)du^2 + 2F(u,v)dudv + G(u,v)dv^2,$$

όπου  $(du, dv) \in \mathbb{R}^2$ . Τα  $du, dv$  παίρνουν οποιαδήποτε τιμή στο  $\mathbb{R}$  και δεν έχουν σχέση με τα διαφορικά των συναρτήσεων  $u$  και  $v$ . Η τετραγωνική μορφή που δίνεται από



η σχέση (3.3.8) συμβολίζεται με  $ds^2$  (du, dv) ή απλά  $ds^2$ . Δηλαδή,

$$(3.3.9) \quad ds^2 = E(u,v) du^2 + 2F(u,v) du dv + G(u,v) dv^2$$

και λέγεται μετρική (metric) της επιφάνειας  $S$ , ως προς το σύστημα συντεταγμένων  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Παρατήρηση 3.3.10. (i) Λόγω της Πρότασης 3.3.5 η μετρική  $ds^2 = E(u,v) du^2 + 2F(u,v) du dv + G(u,v) dv^2$  είναι θετικά ορισμένη, ως τετραγωνική μορφή.

(ii) Στη βιβλιογραφία, αρκετά συχνά, η μετρική  $ds^2$  αναφέρεται και ως πρώτη θεμελιώδης μορφή της επιφάνειας και συμβολίζεται ως  $I(du, dv) = E(u,v) du^2 + 2F(u,v) du dv + G(u,v) dv^2$ .

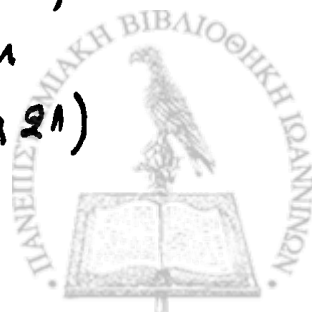
(iii) Είναι φανερό ότι για την μετρική  $ds^2$  της επιφάνειας  $S$ , ως προς το σύστημα  $X$ , ισχύει η σχέση

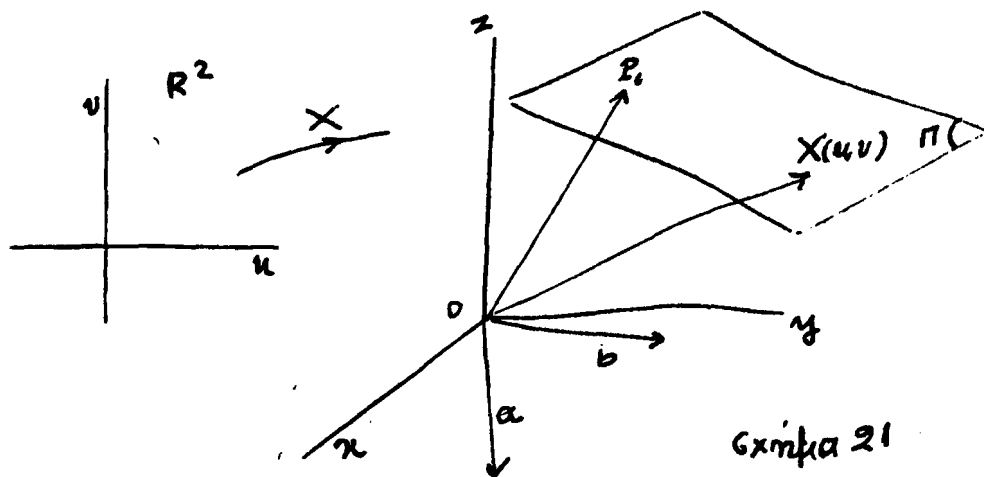
$$(3.3.10) \quad ds^2 = |X_u(u,v) du + X_v(u,v) dv|^2 = |dX_{(u,v)}(du e_1 + dv e_2)|^2,$$

όπου  $\{e_1, e_2\}$  είναι η συνήθης βάση του  $\mathbb{R}^2$  και  $(du, dv) \in \mathbb{R}^2$ .

(iv) Η γνώση της μετρικής μας επιτρέπει, όπως θα δούμε παρακάτω, να μετράμε μήκη καμπυλίων, γωνία διανυσμάτων και εμβαδά επιφανειών, χωρίς να λαμβάνουμε υπόψη τον περιβάλλοντα χώρο.

Παράδειγμα 3.3.11. Έστωσαν  $a = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $b = (b_1, b_2, b_3)$  δυο μοναδιαία και κάθετα μεταξύ τους διανύσματα του  $\mathbb{R}^3$  και  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  ένα σημείο του  $\mathbb{R}^3$ . Η απεικόνιση  $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(u,v) = (x_0 + ua_1 + vb_1, y_0 + ua_2 + vb_2, z_0 + ua_3 + vb_3)$  είναι ένα σύστημα συντεταγμένων ενός επιπέδου  $\pi$  (επίπεδα 21)





σχήμα 21

Βρίσκουμε,

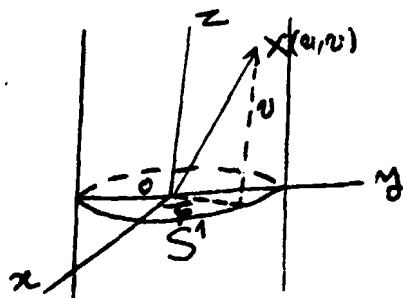
$$X_u(u,v) = (a_1, a_2, a_3) = a, \quad X_v(u,v) = (b_1, b_2, b_3) = b$$

Συνεπώς, τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης του  $\pi$ , ως προς το σύστημα  $X$ , είναι:  $E(u,v) = 1$ ,  $F(u,v) = 0$ ,  $G(u,v) = 1$  για κάθε  $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ . Άρα η μετρική του επιπέδου  $\pi$ , ως προς αυτό το σύστημα συντεταγμένων, είναι

$$(3.9.11) \quad ds^2 = du^2 + dv^2.$$

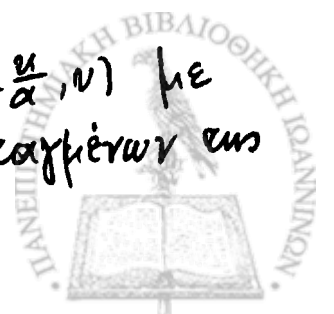
Η παραπάνω σχέση είναι το θεώρημα του Πυθαγόρα.

Παράδειγμα 3.9.12. Το σύνολο  $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = a^2, z \in \mathbb{R}\}$  είναι ο ορθός κυκλικός κώνος ακτίνας  $a$  (σχήμα 22)



σχήμα 22

Η ανικόνιση  $X: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(u,v) = (a \cos \frac{u}{a}, a \sin \frac{u}{a}, v)$  με  $(u,v) \in D = [0, 2\pi a) \times \mathbb{R}$  είναι σύστημα συντεταγμένων του





επιφάνειας  $C$ . Πρέπει να σφραγίσουμε ότι το  $u$  εκφράζει παράμετρο μήκος τόξου του κύκλου ακτίνας  $a$  (δηλαδή του κύκλου  $S'$  στο σχήμα). Συνεπώς  $u = a\varphi$  και  $\varphi \in [0, 2\pi)$ .

Έχουμε,

$$X_u(u, v) = \left(-\sin \frac{u}{a}, \cos \frac{u}{a}, 0\right), \quad X_v(u, v) = (0, 0, 1).$$

Συνεπώς τα θεμελιώδη μεγέθη πρώτης τάξης είναι:

$$E(u, v) = 1, \quad F(u, v) = 0, \quad G(u, v) = 1. \quad \parallel$$

Έτσι, η μετρική του κυλίνδρου, ως προς το συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων είναι  $\pi$

$$(3.3.12) \quad ds^2 = du^2 + dv^2$$

Παρατήρηση 3.3.13. Παρατηρούμε ότι οι μετρικές του επιπέδου και του κυλίνδρου, ως προς τα συγκεκριμένα συστήματα συντεταγμένων, είναι ίδιες. Αυτό δεν είναι τυχαίο, όπως θα δούμε αργότερα. Αυτό που μπορούμε να πούμε αυτή τη στιγμή είναι ότι αν κόψουμε τον κύλινδρο κατά μήκος μιας γενέτρας και τον απλώσουμε, χωρίς παραμόρφωση, στο επίπεδο επαρκώς πλατύς.

Παράδειγμα 3.3.14. Η απεικόνιση  $X: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(\varphi, \theta) = (R \cos \varphi \sin \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \theta)$  με  $D = [0, 2\pi) \times (0, \pi)$  είναι ένα σύστημα συντεταγμένων σφαιρας ακτίνας  $R$  (βλ. Παράδειγμα 3.1.9 για ητρισσότερες λεπτομέρειες). Άρα,

$$X_\varphi(\varphi, \theta) = (-R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \varphi \sin \theta, 0)$$

$$X_\theta(\varphi, \theta) = (R \cos \varphi \cos \theta, R \sin \varphi \cos \theta, -R \sin \theta).$$

Άρα τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης είναι:

$$E(\varphi, \theta) = R^2 \sin^2 \theta, \quad F(\varphi, \theta) = 0, \quad G(\varphi, \theta) = R^2$$



και συνεπώς η μετρική δίνεται από τη σχέση

$$(3.3.13) \quad ds^2 = R^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + R^2 d\theta^2.$$

Παράδειγμα 3.3.15. Ένα σύστημα συντεταγμένων της επιφάνειας χάρηται είναι (βλ. Παράδειγμα 3.1.4) η απεικόνιση,

$$X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, X(u, v) = (u, v, f(u, v)).$$

Άρα,

$$X_u(u, v) = (1, 0, f_u(u, v)), \quad X_v(u, v) = (0, 1, f_v(u, v)),$$

όπου  $f_u, f_v$  είναι οι μερικές παράγωγοι της  $f$  ως προς  $u$  και  $v$ , αντίστοιχα. Συνεπώς,

$$E(u, v) = 1 + f_u^2(u, v), \quad F(u, v) = f_u(u, v) \cdot f_v(u, v), \quad G(u, v) = 1 + f_v^2(u, v)$$

και

$$(3.3.14) \quad ds^2 = (1 + f_u^2(u, v)) du^2 + 2f_u(u, v)f_v(u, v) du dv + (1 + f_v^2(u, v)) dv^2.$$

Παράδειγμα 3.3.16. Σύμφωνα με το Παράδειγμα 3.1.8 ένα σύστημα συντεταγμένων επιφάνειας εκ περιπεροφής είναι η απεικόνιση,  $X: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, X(t, \varphi) = (f(t) \cos \varphi, f(t) \sin \varphi, g(t))$ , όπου  $D = I \times [0, 2\pi)$  και  $(f(t), 0, g(t)), t \in I$  είναι η περιπεροφόμενη καμπύλη. Άρα,

$$X_t(t, \varphi) = (f'(t) \cos \varphi, f'(t) \sin \varphi, g'(t))$$

$$X_\varphi(t, \varphi) = (-f(t) \sin \varphi, f(t) \cos \varphi, 0)$$

και συνεπώς

$$E(t, \varphi) = (f'(t))^2 + (g'(t))^2, \quad F(t, \varphi) = 0, \quad G(t, \varphi) = f^2(t)$$

$$(3.3.15) \quad ds^2 = ((f'(t))^2 + (g'(t))^2) dt^2 + f^2(t) d\varphi^2.$$

Ειδικά, αν το  $t$  είναι η παραμέτρος μήκους τόξου στη περιπεροφόμενη καμπύλη (δηλαδή,  $t=s$ ), τότε:  $E(s, \varphi) = 1$ ,  $F(s, \varphi) = 0$ ,  $G(s, \varphi) = f^2(s)$  και



$$(3.3.16) \quad ds^2 = ds^2 + f^2(s) dq^2.$$

Δεν θα πρέπει να γίνεται σύγχυση για την έννοια του  $ds$  στο πρώτο και δεύτερο μέλος της σχέσης (3.3.16).

Άσκηση 3.3.1. Έστω  $S$  επιφάνεια με παραμετρική παράσταση  $X(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)$ ,  $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ . Αφού διαπιστωθεί ότι η επιφάνεια είναι το υπερβολικό παραβολοειδές, να βρεθεί η μετρική της.

Άσκηση 3.3.2. Να βρεθεί επιφάνεια εκ περιστροφής με παραμετρική παράσταση  $X(t,q)$  και μετρική  $ds^2 = dt^2 + (c^2 - t^2) dq^2$ , όπου  $c = \text{const}$ .

Έστωσαν  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ένα σύστημα συντεταγμένων της επιφάνειας  $S$  με αντίστοιχη μετρική  $ds^2 = E(u,v) du^2 + 2F(u,v) du dv + G(u,v) dv^2$  και  $h: \bar{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ ,  $h(\bar{u}, \bar{v}) = (u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))$  μια επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρου. Όπως γνωρίζουμε, η απεικόνιση  $Y = X \circ h: \bar{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  είναι ένα νέο σύστημα συντεταγμένων της  $S$ . Έστω  $d\bar{s}^2$  η μετρική της επιφάνειας  $S$ , ως προς το σύστημα  $Y$ , δηλαδή

$$d\bar{s}^2 = \bar{E}(\bar{u}, \bar{v}) d\bar{u}^2 + 2\bar{F}(\bar{u}, \bar{v}) d\bar{u} d\bar{v} + \bar{G}(\bar{u}, \bar{v}) d\bar{v}^2.$$

Από την σχέση (3.3.10) έχουμε

$$(3.3.17) \quad ds^2 = |dX_{(u,v)}(du e_1 + dv e_2)|^2$$

και

$$(3.3.18) \quad d\bar{s}^2 = |dY_{(\bar{u}, \bar{v})}(d\bar{u} \bar{e}_1 + d\bar{v} \bar{e}_2)|^2,$$

όπου  $\{e_1, e_2\}$ ,  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$  είναι οι συνήθεις βάσεις των  $\mathbb{R}^2$  και  $\bar{\mathbb{R}}^2$ , αντίστοιχα. Θα αποδείξουμε την παρακάτω πρόταση.



Πρόταση 3.3.17. Αν  $(du, dv) = dh_{(u,v)}(d\bar{u}, d\bar{v})$ , τότε  $ds^2 = d\bar{s}^2$ . Δηλαδή, κάθε επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρων αφήνει την μετρική ανεξάρτητη (αναλλοίωτη).

Απόδειξη. Από την παραίτητο απεικόνιση παίρνουμε

$$du = \frac{\partial u}{\partial \bar{u}}(\bar{u}, \bar{v})d\bar{u} + \frac{\partial u}{\partial \bar{v}}(\bar{u}, \bar{v})d\bar{v}, \quad dv = \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}(\bar{u}, \bar{v})d\bar{u} + \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}(\bar{u}, \bar{v})d\bar{v}.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} dY_{(u,v)}(d\bar{u}\bar{e}_1 + d\bar{v}\bar{e}_2) &= d(X_{oh})_{(u,v)}(d\bar{u}\bar{e}_1 + d\bar{v}\bar{e}_2) = \\ &= dX_{h(u,v)} \left\{ dh_{(u,v)}(d\bar{u}\bar{e}_1 + d\bar{v}\bar{e}_2) \right\} = dX_{(u,v)} \left( d\bar{u} dh_{(u,v)}(\bar{e}_1) + d\bar{v} dh_{(u,v)}(\bar{e}_2) \right) \\ &= dX_{(u,v)} \left[ d\bar{u} \left( \frac{\partial u}{\partial \bar{u}}(\bar{u}, \bar{v})e_1 + \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}(\bar{u}, \bar{v})e_2 \right) + d\bar{v} \left( \frac{\partial u}{\partial \bar{v}}(\bar{u}, \bar{v})e_1 + \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}(\bar{u}, \bar{v})e_2 \right) \right] \\ &= dX_{(u,v)} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \bar{u}}(\bar{u}, \bar{v})d\bar{u} + \frac{\partial u}{\partial \bar{v}}(\bar{u}, \bar{v})d\bar{v} \right) e_1 + \left( \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}(\bar{u}, \bar{v})d\bar{u} + \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}(\bar{u}, \bar{v})d\bar{v} \right) e_2 \right] \\ &= dX_{(u,v)}(du e_1 + dv e_2). \end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (3.3.17) και (3.3.18) συνάγουμε ότι  $ds^2 = d\bar{s}^2$ .

Θεωρούμε μια καμπύλη  $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$ ,  $t \in I$ , της επιφάνειας  $S$ . Το διάνυσμα καμπύτητας της  $\gamma$  είναι το διάνυσμα

$$\gamma'(t) = X_u(u(t), v(t)) \frac{du}{dt}(t) + X_v(u(t), v(t)) \frac{dv}{dt}(t).$$

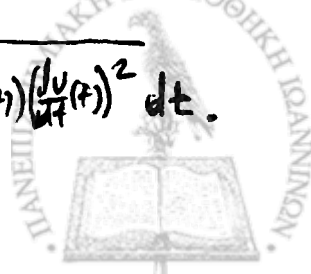
Να σημειώσουμε ότι τα  $\frac{du}{dt}(t)$ ,  $\frac{dv}{dt}(t)$  είναι οι παράγωγοι των συναρτήσεων  $u(t)$ ,  $v(t)$ , ενώ στη μετρική και  $du, dv$  συμβολίζουν τις συνιστώσες ενός διανύσματος που εληνέδου.

Το μήκος του διανύσματος καμπύτητας είναι

$$|\gamma'(t)| = E(u(t), v(t)) \left( \frac{du}{dt}(t) \right)^2 + 2F(u(t), v(t)) \frac{du}{dt}(t) \frac{dv}{dt}(t) + G(u(t), v(t)) \left( \frac{dv}{dt}(t) \right)^2$$

και συνεπώς η συνάρτηση μήκους τόξου  $s(t)$  με αρχή το  $t_0 \in I$  είναι

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{E(u(\tau), v(\tau)) \left( \frac{du}{d\tau}(\tau) \right)^2 + 2F(u(\tau), v(\tau)) \frac{du}{d\tau}(\tau) \frac{dv}{d\tau}(\tau) + G(u(\tau), v(\tau)) \left( \frac{dv}{d\tau}(\tau) \right)^2} d\tau.$$



Από τη συνάρτηση μήκος εύχρηστο γεννάμε ότι.

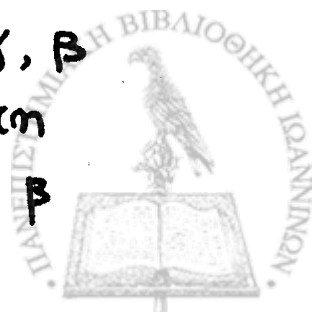
$$(3.3.19) \quad \frac{ds}{dt}(t) = \sqrt{E(u(t), v(t)) \left(\frac{du}{dt}(t)\right)^2 + 2F(u(t), v(t)) \frac{du}{dt}(t) \frac{dv}{dt}(t) + G(u(t), v(t)) \left(\frac{dv}{dt}(t)\right)^2}$$

Από την προηγούμενη διαδικασία προκύπτει ότι το μήκος μιας καμπύλης της επιφάνειας  $S$  μπορεί να υπολογιστεί αν γνωρίζουμε τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης, δηλαδή τη μετρική της επιφάνειας. Εξάλλου, η σχέση (3.3.19) δικαιολογεί την ονομασία της μετρικής καθώς και τον συμβολισμό της.

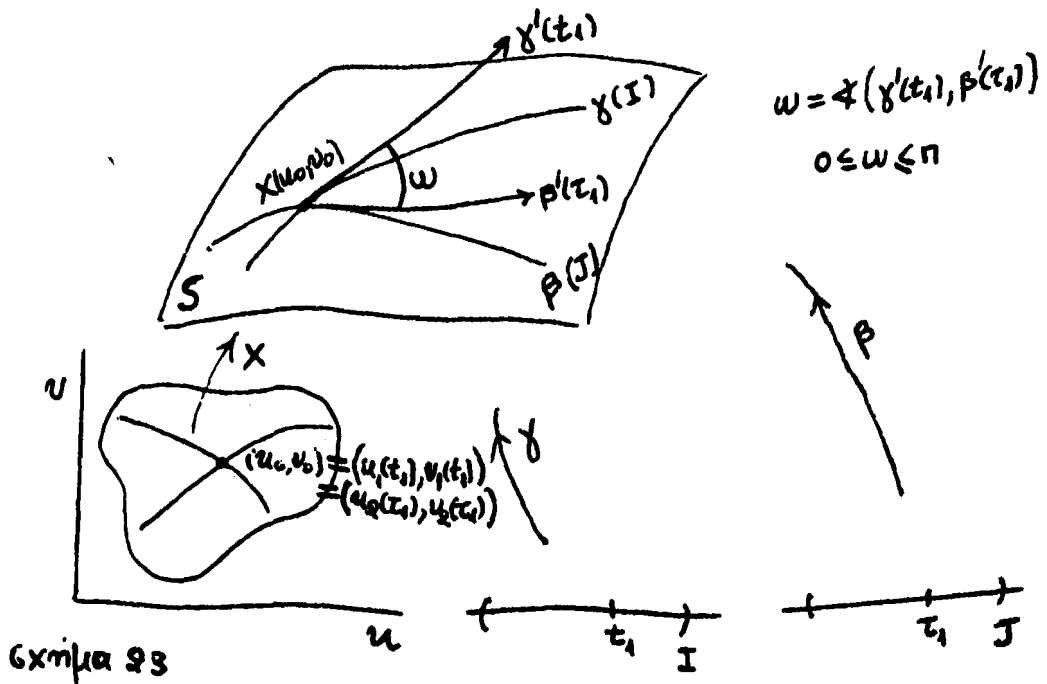
Άσκηση 3.3.3. Δίνεται η επιφάνεια  $S$  με παραμετρική παράσταση  $X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \log \cos u + v)$ , όπου  $(u, v) \in D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times [0, 2\pi)$ . Θεωρούμε τις δύο παραμετρικές γραμμές,  $\gamma_1: u = u_1$  και  $\gamma_2: u = u_2$ . Να αποδειχθεί ότι τα μήκη των παραμετρικών γραμμών  $v = \text{σταθ.}$  μεταξύ των  $\gamma_1, \gamma_2$  είναι ίσα.

Θεωρούμε, τώρα, δύο καμπύλες  $\gamma(t) = X(u_1(t), v_1(t))$ ,  $t \in I$ , και  $\beta(\tau) = X(u_2(\tau), v_2(\tau))$  με  $\tau \in J$ , της επιφάνειας  $S$ . Υποθέτουμε ότι για κάποιο  $t_1 \in I$  και κάποιο  $\tau_1 \in J$  ισχύουν,  $u_1(t_1) = u_2(\tau_1) = u_0$  και  $v_1(t_1) = v_2(\tau_1) = v_0$ . Τότε οι καμπύλες  $\gamma, \beta$  κέμνονται στο σημείο  $X(u_0, v_0)$ , αφού  $\gamma(t_1) = X(u_1(t_1), v_1(t_1)) = X(u_0, v_0) = X(u_2(\tau_1), v_2(\tau_1)) = \beta(\tau_1)$  (βλ. σχήμα 23).

Ορισμός 3.3.18. Ονομάζουμε γωνία των καμπυλών  $\gamma, \beta$  της επιφάνειας  $S$  σε ένα κοινό τους σημείο  $X(u_0, v_0)$ , τη γωνία των διανυσμάτων εφαπτόμενων των  $\gamma$  και  $\beta$



σε αυτό το κοινό σημείο.



σχήμα 93

Έχουμε,

$$\gamma'(t_1) = X_u(u_0, v_0) u_1'(t_1) + X_v(u_0, v_0) v_1'(t_1)$$

$$\beta'(\tau_1) = X_u(u_0, v_0) u_2'(\tau_1) + X_v(u_0, v_0) v_2'(\tau_1)$$

και συνεπώς, με τη σχέση (1.1.3), βρίσκουμε

$$(3.3.20) \quad \cos \omega = \frac{E(u_0, v_0) u_1'(t_1) u_2'(\tau_1) + F(u_0, v_0) (u_1'(t_1) v_2'(\tau_1) + v_1'(t_1) u_2'(\tau_1)) + G(u_0, v_0) v_1'(t_1) v_2'(\tau_1)}{|\gamma'(t_1)| \cdot |\beta'(\tau_1)|},$$

$$\text{όπου } |\gamma'(t_1)|^2 = E(u_0, v_0) (u_1'(t_1))^2 + 2F(u_0, v_0) u_1'(t_1) v_1'(t_1) + G(u_0, v_0) (v_1'(t_1))^2$$

$$|\beta'(\tau_1)|^2 = E(u_0, v_0) (u_2'(\tau_1))^2 + 2F(u_0, v_0) u_2'(\tau_1) v_2'(\tau_1) + G(u_0, v_0) (v_2'(\tau_1))^2.$$

Επίσης, ισχύει η σχέση

$$\gamma'(t_1) \times \beta'(\tau_1) = (u_1'(t_1) v_2'(\tau_1) - v_1'(t_1) u_2'(\tau_1)) X_u(u_0, v_0) \times X_v(u_0, v_0).$$

Άρα, με τη βοήθεια των σχέσεων (1.1.8) και (3.3.3), παίρνουμε

$$(3.3.21) \quad \sin \omega = \frac{\sqrt{E(u_0, v_0) G(u_0, v_0) - F^2(u_0, v_0)} |u_1'(t_1) v_2'(\tau_1) - v_1'(t_1) u_2'(\tau_1)|}{|\gamma'(t_1)| |\beta'(\tau_1)|}.$$



Όπως γνωρίζουμε από το σημείο  $X(u_0, v_0)$  της επιφάνειας  $S$  διέρχονται οι δύο παραμετρικές γραμμές,  $\Gamma_1: \{u(t)=t, v(t)=v_0\}$ ,  $\Gamma_2: \{u(t)=u_0, v(t)=t\}$ , με  $u(t_1)=t_1=u_0$  και  $v(t_1)=t_1=v_0$ . Άρα η γωνία  $\omega$  των παραμετρικών γραμμών στο σημείο  $X(u_0, v_0)$ , με βάση την (3.3.20), δίνεται από την σχέση

$$(3.3.22) \quad \cos \varphi = \frac{F(u_0, v_0)}{\sqrt{E(u_0, v_0)} \cdot \sqrt{G(u_0, v_0)}}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Λόγω της σχέσης (3.3.3) έχουμε ότι  $\cos \varphi > 0$ , άρα  $0 < \varphi < \pi$ .

Ορισμός 3.3.19. Ένα σύστημα συντεταγμένων,  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , της επιφάνειας  $S$  λέγεται ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων της επιφάνειας  $S$ , αν οι παραμετρικές γραμμές, σε κάθε σημείο  $X(u, v)$ , είναι κάθετες.

Από την σχέση (3.3.22) συμπεραίνουμε ότι ένα σύστημα συντεταγμένων  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  της επιφάνειας  $S$  είναι ορθογώνιο, αν και μόνο αν  $F(u, v) = 0$ , για κάθε  $(u, v) \in U$ .

Παράδειγμα 3.3.20. Στα Παραδείγματα 3.3.11, 3.3.12, 3.3.14 και 3.3.16 τα συστήματα συντεταγμένων είναι ορθογώνια. Αντίθετα, στο Παράδειγμα 3.3.15 το σύστημα συντεταγμένων δεν είναι, εν γένει, ορθογώνιο. Αυτό είναι ορθογώνιο, αν και μόνο αν  $f_u(u, v) \cdot f_v(u, v) = 0$ , για κάθε  $(u, v) \in U$ .

Άσκηση 3.3.4. Να βρεθεί η μορφή της συνάρτησης  $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , ώστε το σύστημα συντεταγμένων στο Παράδειγμα 3.3.15 να είναι ορθογώνιο.



Άσκηση 3.3.5. Να αποδειχθεί ότι η μετρική μιας επιφάνειας  $S$ , ως προς το σύστημα  $X: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , γράφεται με την μορφή

$$ds^2 = A^2 du^2 + 2AB \cos \omega du dv + B^2 dv^2,$$

όπου  $A, B: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , και  $\omega$  είναι η γωνία των παραμετρικών γραμμών.

Παράδειγμα 3.3.21. Η επιφάνεια  $S$  με παραμετρική παράσταση,  $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(u,v) = (u \cos av, u \sin av, bv)$ , όπου  $a, b$  είναι μη μηδενικές σταθερές και  $(u,v) \in \mathbb{R}^2$  λέγεται Ελικοειδί (Helicoid). Είναι φανερό ότι η παραμετρική γραμμή  $u = u_0$  είναι κυκλική έλικα. Η παραμετρική γραμμή  $v = v_0$  είναι ευθεία, αφού  $X(u, v_0) = (0, 0, bv_0) + u(\cos av_0, \sin av_0, 0)$ . Επειδή,

$$X_u(u,v) = (\cos av, \sin av, 0), \quad X_v(u,v) = (-a u \sin av, a u \cos av, b),$$

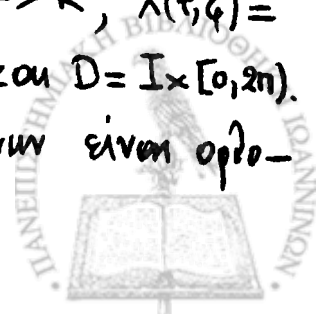
και θεμελιώδη νόδα πρώτης επίξεως και η μετρική της  $S$ , ως προς τη συγκεκριμένη παραμέτρηση, είναι:

$$E(u,v) = 1, \quad F(u,v) = 0, \quad G(u,v) = b^2 + a^2 u^2$$

$$ds^2 = du^2 + (b^2 + a^2 u^2) dv^2$$

Αφού  $F(u,v) = 0$ , για κάθε  $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ , το σύστημα συντεταγμένων είναι ορθογώνιο.

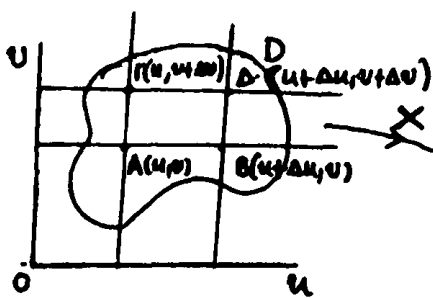
Άσκηση 3.3.6. Έστω  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma(t) = (f(t), 0, g(t))$ ,  $f(t) > 0$  μια απλή και κανονική καμπύλη. Θεωρούμε την επιφάνεια  $S$  με παραμετρική παράσταση  $X: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(t,\varphi) = (f(t) \cos \varphi, f(t) \sin \varphi, g(t) + c\varphi)$ , όπου  $c = \text{σταθ.}$  και  $D = I \times [0, 2\pi)$ . Να αποδειχθεί ότι το σύστημα συντεταγμένων είναι ορθο-



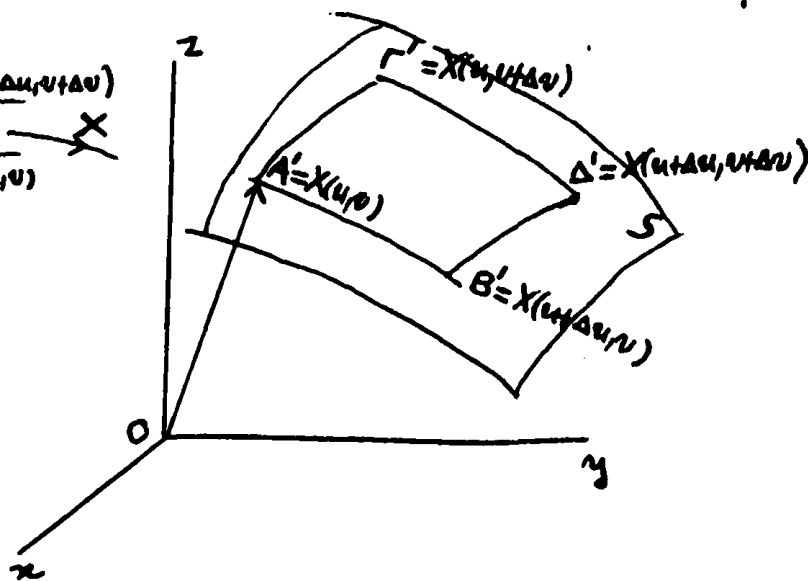


χάνιο, αν και μόνο αν η  $S$  είναι επιφάνεια εκ περιστροφής ή η  $S$  είναι ελικοειδές. Η επιφάνεια  $S$  λέγεται Γενικευμένο Ελικοειδές (Generalized Helicoid).

Θα δούμε στη συνέχεια, ότι και το εμβαδόν μιας επιφάνειας  $S$  μπορεί να οριστεί με τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης. Προσπαύμε διαδοχικά. Θεωρούμε την επιφάνεια  $S$  και έστω  $X: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ένα σύστημα συντεταγμένων αυτής. Στο  $D$  θεωρούμε το ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$ , όπως στο σχήμα 24.



Σχήμα 24

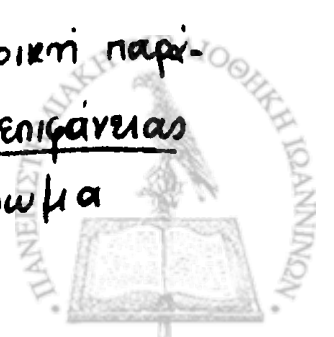


Όσο πιο μικρά είναι τα  $\Delta u, \Delta v$  τόσο περισσότερο το σχήμα  $A'B'\Gamma\Delta'$  προσεγγίζει ένα παραλληλόγραμμο με πλευρές τα διανύσματα  $X_u(u, v)\Delta u$  και  $X_v(u, v)\Delta v$ . Αυτού του παραλληλογράμμου το εμβαδόν είναι ίσο με

$$|X_u(u, v)\Delta u \times X_v(u, v)\Delta v| = |X_u(u, v) \times X_v(u, v)| \Delta u \Delta v = \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2} \Delta u \Delta v.$$

Με αφορμή αυτό δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 3.3.22: Έστω  $S$  επιφάνεια με παραμετρική παράσταση  $X: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Ονομάζουμε εμβαδόν της επιφάνειας  $S$  και συμβολίζουμε με  $E(S)$  το διπλό ολοκλήρωμα



$\iint_D \sqrt{EG-F^2} du dv$ . Δηλαδή,

$$(3.3.23) \quad E(S) = \iint_D \sqrt{EG-F^2} du dv.$$

Η υπό ολοκλήρωση ποσότητα  $dS = \sqrt{EG-F^2} du dv$  λέγεται στοιχείο εμβαδού (area element) της επιφάνειας  $S$ , ως προς το σύστημα συντεταγμένων  $X$ .

Πρόταση 3.3.23. Έστω  $S$  επιφάνεια με παραμετρική παράσταση  $X: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Το εμβαδόν  $E(S)$  αυτής είναι αναλλοίωτο από τις ισομετρίες  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  του  $\mathbb{R}^3$  και τις επιτρεπτές αλλαγές παραμέτρου  $h: \bar{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow D \subset \mathbb{R}^2$ ,  $h(\bar{u}, \bar{v}) = (u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))$  που διατηρούν τον προσανατολισμό της  $S$  (βλ. Ορισμό 3.2.13).

Απόδειξη. Σύμφωνα με τη Παρατήρηση 3.3.8 (i) θα έχουμε  $E(F(S)) = E(S)$ , αφού οι επιφάνειες  $S$  και  $F(S)$  έχουν ίδια θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης.

Εξάλλου, από το Πρόβλημα 3.3.7 και το Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών στα διπλά ολοκληρώματα, συνάγουμε ότι για μια επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρου, που διατηρεί τον προσανατολισμό της επιφάνειας  $S$ , ισχύει η σχέση

$$\iint_{\bar{D}} \sqrt{E\bar{G}-\bar{F}^2} d\bar{u} d\bar{v} = \iint_D \sqrt{EG-F^2} \frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})} d\bar{u} d\bar{v} = \iint_D \sqrt{EG-F^2} du dv.$$

Δηλαδή, το εμβαδόν  $E(S)$  παραμένει αναλλοίωτο από επιτρεπτές αλλαγές παραμέτρου, που διατηρούν το προσανατολισμό της επιφάνειας  $S$ .

Παράδειγμα 3.3.24. Θεωρούμε την επιφάνεια  $S$  με παρα-

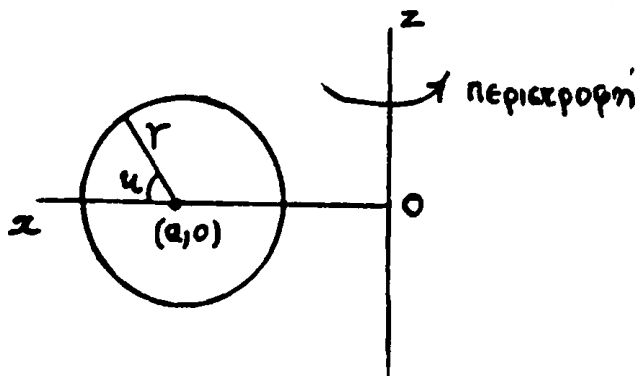


μετρική παράσταση  $X: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(u,v) = (u,v,0)$ , όπου  $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$ . Έχουμε,  $E(u,v) = 1$ ,  $F(u,v) = 0$ ,  $G(u,v) = 1$  και  $E(u,v)G(u,v) - F^2(u,v) = 1$ . Άρα  $E(S) = \iint_D du dv = 1$ . Η επιφάνεια  $S$  είναι ένα κλειστό τετράγωνο του επιπέδου  $z=0$ , πλευράς 1.

Παράδειγμα 3.3.25. Το εμβαδόν της επιφάνειας που περιγράφεται στο Παράδειγμα 3.3.14 (δηλαδή, το εμβαδόν σφαίρας ακτίνας  $R$ ) είναι

$$E(S_R^2) = \iint_D R^2 \sin \theta \, d\varphi \, d\theta = R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta = 4\pi R^2.$$

Άσκηση 3.3.7. Να βρεθεί το εμβαδόν του τόρου. Ένα εύκολο συντεταχμένων του τόρου είναι η απεικόνιση  $X: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(u,v) = ((a+r \cos u) \cos v, (a+r \cos u) \sin v, r \sin u)$ , όπου  $D = [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$  και  $a, r$  ( $a > r$ ) είναι θετικές σταθερές.



Παρατήρηση 3.3.26. Φθάσαμε στον ορισμό του εμβαδού επιφάνειας με την διαίδηση. Μπορεί να αποδειχθεί με τη χρήση του Απειροστικού και Διαφορικού Λογισμού το εξής: Υπάρχει ένα μοναδικό συναρτησοειδές

$$J(f) = \iint_D f(u, v, X(u,v), X_u(u,v), X_v(u,v)) \, du \, dv,$$



το οποίο έχει τις παρακάτω ιδιότητες: (α) Παραμένει αναλλοίωτο από τις ισομετρίες  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  του  $\mathbb{R}^3$ , (β) Διατηρείται με τις επιτρεπές αλλαγές παραμέτρου που διατηρούν τον προαναπολιτισμό, και (γ) Το συναρτησοειδές έχει την τιμή 1 για κάθε πετρώζωνο πλευράς μήκους 1.

Αυτό το μοναδικό συναρτησοειδές είναι αυτό που δίνεται από την σχέση (3.3.23) και ορίζεται να είναι το εμβαδόν εμφάνισης με παραμετρική παράσταση των απεικόνιση  $X: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Άσκηση 3.3.8. Δίνεται μια συνάρτηση  $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  τάξης πουλάκιετον  $C^1$ . Το γραφικό  $\Gamma_f$  έχει παραμετρική παράσταση  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(u,v) = (u, v, f(u,v))$ . Για ένα κλειστό σύνολο  $D \subset U$ , να αποδειχθεί ότι

$$E(X(D)) = \iint_D \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} \, du \, dv,$$

όπου  $f_u, f_v$  είναι οι μερικές παράγωγοι της  $f$ .

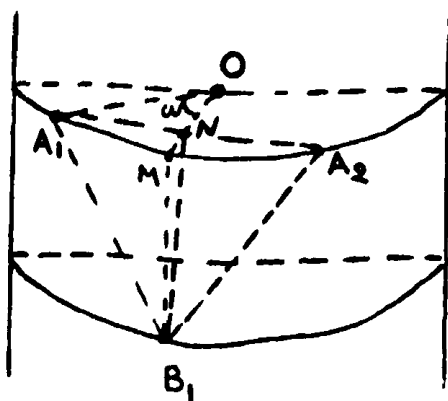
Άσκηση 3.3.9 (Θεώρημα του Πάππου). Έστωσαν,  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(s) = (f(s), g(s))$  μια επίπεδη, απλή καμπύλη με παράκετρο το μήκος τόξου, μήκους  $L$  και  $l$  μια ευθεία στο επίπεδο της καμπύλης, που δεν συναντά (εξίχνει) τη τροχιά της καμπύλης. Με  $S$  συμβολίζουμε την εμφάνιση, εκ περιστροφής της τροχιάς  $\gamma(I)$  περί τον άξονα  $l$ . Να αποδειχθεί ότι το εμβαδόν της  $S$  δίνεται από την σχέση

$$E(S) = 2\pi \int_0^L f(s) \, ds.$$



Παρατήρηση 3.3.27. Για τον ορισμό του μήκους καμπύλης ακολουθήσαμε τη μέθοδο της εγγεγραμμένης πολυγωνικής γραμμής. Αυτή η μέθοδος στηρίζεται στο γεγονός ότι, όταν δύο κορυφές της πολυγωνικής γραμμής τείνουν η μια στην άλλη, τότε η ευθεία που ορίζεται από αυτές τείνει στην εφαπτομένη της καμπύλης. Όμως για τον ορισμό του εμβαδού επιφάνειας δεν μπορεί να ακολουθηθεί ανάλογη μέθοδος με εγγεγραμμένα πολύεδρα. Θα το εξηγήσουμε με ένα κλασικό παράδειγμα, που οφείλεται στον H.A. Schwarz.

Έστω  $S$  το μέρος του ορθού κυκλικού κυλίνδρου  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z \in \mathbb{R}\}$ , που περιλαμβάνεται μεταξύ των επιπέδων  $z=0$  και  $z=1$ . Ως γνωστόν  $E(S) = 2\pi$ . Θα δείξουμε ότι υπάρχουν εγγεγραμμένα πολύεδρα με κορυφές στην  $S$ , των οποίων τα εμβαδά τείνουν και σε άλλα όρια ή δεν έχουν όριο. Χωρίζουμε την  $S$  σε  $k$  ( $k=1, 2, \dots$ ) κομμάτια με τα  $(k+1)$  επίπεδα  $z=0, \frac{1}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1$ . Διαιρούμε κάθε κύκλο σε  $n$  ίσα τόξα, έτσι ώστε τα άκρα των τόξων σε ένα κύκλο είναι στις γενέπειρες από τα μέσα των τόξων του προηγούμενου κύκλου (εικόνα 25).



$$\omega = \frac{\pi}{n}$$

εικόνα 25

Ενώνοντας όλα αυτά τα σημεία, όπως στο σχήμα, κατασκευάζουμε ένα πολύεδρο με  $2kn$  έδρες ίσες με το τρίγωνο  $A_1A_2B_1$ . Η πλευρά  $A_1A_2$  του τριγώνου έχει μήκος  $2 \sin \frac{\pi}{n}$  και  $\omega$  αντί-



στοιχο ύψος  $B_1N$  είναι ίσο με  $v = \sqrt{\left(\frac{1}{k^2} + 4\sin^4\frac{\pi}{2n}\right)}$ , όπως προκύπτει από το ορθογώνιο τρίγωνο  $B_1MN$ . Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $B_1MN$  έχουμε,  $B_1M = \frac{1}{k}$  και  $MN = 1 - \cos\frac{\pi}{n}$ .

Άρα, το εμβαδόν του εγγεγραμμένου πολυέδρου είναι

$$E(k,n) = 2n \sqrt{1 + 4k^2 \sin^4\frac{\pi}{2n}} \sin\frac{\pi}{n}.$$

Για  $k = n^\alpha$ , θα είναι

$$E(n^\alpha, n) = 2n \sqrt{1 + 4n^{2\alpha} \sin^4\frac{\pi}{2n}} \sin\frac{\pi}{n}$$

και συνεπώς

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(n^\alpha, n) = \begin{cases} 2\pi, & \text{για } \alpha = 1 \\ 2\pi \sqrt{1 + \frac{\pi^4}{4}}, & \text{για } \alpha = 2 \\ \infty, & \text{για } \alpha > 2 \end{cases}$$

Παρατήρηση 3.3.28. Η Γεωμετρία που αναπτύχθηκε, ως τώρα, στην επιφάνεια (μήκος διαστήματος, μήκος καμπύλης, γωνία καμπυλών και εμβαδόν επιφάνειας) εξαρτάται από τη μετρική της επιφάνειας. Έννοιες της επιφάνειας που απαιτούν μόνο τη μετρική της επιφάνειας για τον καθορισμό τους λέγονται εσωτερικές έννοιες (σημειώνουν στην Εσωτερική Γεωμετρία της επιφάνειας) της επιφάνειας. Οι εσωτερικές έννοιες μπορούν να μελετηθούν, αρκεί να δοθεί μια θετικά ορισμένη τετραγωνική μορφή  $Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2$  σε ένα τόπο  $D$  του  $R^2$ . Αυτή είναι η αρχή της Γεωμετρίας του Riemann, όπου αντί των  $E, F, G$  χρησιμοποιούνται οι συντελεστές  $g_{11} = E, g_{12} = g_{21} = F$  και  $g_{22} = G$ .



### 3.4. Απεικόνιση Weingarten - Δεύτερη Θεμελιώδης Μορφή - Εχχύτατο Παραβολοειδές

Σε αυτή τη παράγραφο θεωρούμε μια επιφάνεια  $S$  τάξης  $C^k$  ( $k \geq 2$ ) με παραμετρική παράσταση  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ . Στη Παράγραφο 3.3 βρήκαμε τη γφαιρική απεικόνιση της  $S$ , ως προς το σύστημα  $X$ . Η γφαιρική απεικόνιση ή απεικόνιση του Gauss είναι η απεικόνιση

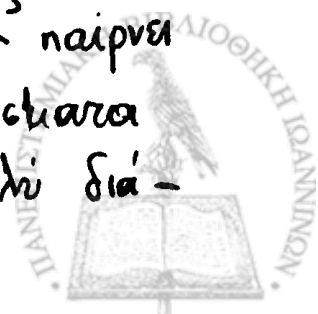
$$\eta: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \eta(u,v) = \frac{X_u(u,v) \times X_v(u,v)}{|X_u(u,v) \times X_v(u,v)|} = \frac{1}{\sqrt{E(u,v)G(u,v) - F(u,v)^2}} \left( \frac{\partial(yz)}{\partial(u,v)}(u,v), \right.$$

$$\left. \frac{\partial(zx)}{\partial(u,v)}(u,v), \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v) \right) = (\eta_1(u,v), \eta_2(u,v), \eta_3(u,v)),$$

όπου  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  είναι οι συνιστώσες της απεικόνισης  $\eta$ .

Η γφαιρική απεικόνιση  $\eta$  είναι τάξης  $C^{k-1}$ , συνεπώς τουλάχιστον  $C^1$ -τάξης αφού  $k \geq 2$ . Για κάθε  $(u,v) \in U$  το διάνυσμα  $\eta(u,v)$  είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια  $S$ , στο σημείο  $X(u,v)$ , αν μεταφερθεί ώστε να αποκτήσει ως αρχή, την αρχή των συντεταγμένων. Άρα το  $\eta(u,v)$  βρίσκεται στη μοναδιαία σφαίρα  $S^2$  με κέντρο την αρχή των συντεταγμένων.

Η παράγωγος απεικόνιση  $d\eta_{(u,v)}: T_{(u,v)}\mathbb{R}^2 \rightarrow T_{\eta(u,v)}\mathbb{R}^3$  παίρνει διανύσματα του  $T_{(u,v)}\mathbb{R}^2$  και τα στέλνει σε διανύσματα του  $T_{\eta(u,v)}\mathbb{R}^3$ . Ο χώρος  $d\eta_{(u,v)}(T_{(u,v)}\mathbb{R}^2)$  είναι το πολύ διά-



σταθής 2. Όταν η απεικόνιση  $\eta$  είναι κανονική στο  $(u, v) \in U$ , τότε η διάσταση αυτού του χώρου είναι ακριβώς 2.

Τα διανύσματα,  $d\eta_{(u,v)}(e_1) = \left( \frac{\partial \eta_1}{\partial u}(u,v), \frac{\partial \eta_2}{\partial u}(u,v), \frac{\partial \eta_3}{\partial u}(u,v) \right)_{\eta(u,v)}$

$d\eta_{(u,v)}(e_2) = \left( \frac{\partial \eta_1}{\partial v}(u,v), \frac{\partial \eta_2}{\partial v}(u,v), \frac{\partial \eta_3}{\partial v}(u,v) \right)_{\eta(u,v)}$ , όπου  $\{e_1, e_2\}$  είναι

η συνήθης βάση του  $T_{(u,v)}\mathbb{R}^2$ , είναι κάθετα στο  $\eta(u,v)$ . Πραγματικά, επειδή  $\eta_1^2(u,v) + \eta_2^2(u,v) + \eta_3^2(u,v) = 1$ , με παραχώριση ως προς  $u$  παίρνουμε

$$\eta_1(u,v) \frac{\partial \eta_1}{\partial u}(u,v) + \eta_2(u,v) \frac{\partial \eta_2}{\partial u}(u,v) + \eta_3(u,v) \frac{\partial \eta_3}{\partial u}(u,v) = 0.$$

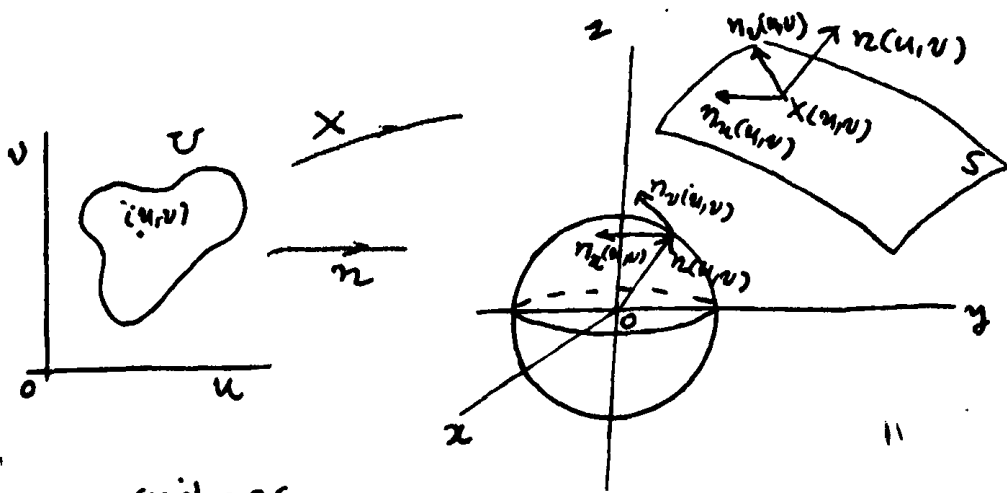
Άρα, το  $d\eta_{(u,v)}(e_1)$ , όμοια και το  $d\eta_{(u,v)}(e_2)$ , είναι κάθετο στο  $\eta(u,v)$ . Συμβολίζουμε αυτά τα διανύσματα με  $\eta_u(u,v)$  και  $\eta_v(u,v)$ , αντίστοιχα.

Επειδή το εφαπτόμενο επίπεδο της  $S^2$  στο σημείο  $\eta(u,v)$  είναι κάθετο στο  $\eta(u,v)$ , συμπεραίνουμε ότι τα διανύσματα  $\eta_u(u,v), \eta_v(u,v)$  ανήκουν στο εφαπτόμενο επίπεδο της  $S^2$  στο σημείο  $\eta(u,v)$ , δηλαδή ανήκουν στο  $T_{\eta(u,v)}S^2$ . Άρα, ο χώρος  $d\eta_{(u,v)}(T_{(u,v)}\mathbb{R}^2)$  είναι υπόχωρος του  $T_{\eta(u,v)}S^2$ .

Τα επίπεδα  $T_{\eta(u,v)}S^2, T_{\chi(u,v)}S$  είναι παράλληλα, αφού και τα δύο είναι κάθετα στο ίδιο διάνυσμα  $\eta(u,v)$ . Μπορούμε να κάνουμε μια κανονική καύση αυτών των δύο επιπέδων. Μεταφέρουμε το επίπεδο  $T_{\eta(u,v)}S^2$  παράλληλα στον εαυτό του, χωρίς στροφή, ώστε να περάσει από το σημείο  $\chi(u,v)$ . Με αυτή τη κανονική καύση, διανύσματα του  $T_{\eta(u,v)}S^2$  μπορούν να θεωρηθούν και ως διανύσματα του  $T_{\chi(u,v)}S$ , χωρίς σύγχυση (στηλέκιο 26).







Εικόνα 26

Όρισμός 3.4.1. Με τη παραπάνω κανονική ταύτιση, η απεικόνιση

$$L_{X(u,v)} : T_{X(u,v)} S \rightarrow T_{X(u,v)} S,$$

που ορίζεται ως

$$L_{X(u,v)}(w) = -dn_{(u,v)} \circ (dX_{(u,v)})^{-1}(w), \quad w \in T_{X(u,v)} S$$

Αέχεται απεικόνιση Weingarten της  $S$  στο σημείο  $X(u,v)$ , ως προς το σύστημα  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Παρατήρηση 3.4.2. Συχνά θα παραλείψουμε το  $X(u,v)$  από το σύμβολο  $L_{X(u,v)}$  και θα γράφουμε απλά  $L$ , κυρίως να γίνεται σύγκριση, αφού θα είναι ανεξάρτητο σε πιο σημείο της  $S$  αναφερόμαστε.

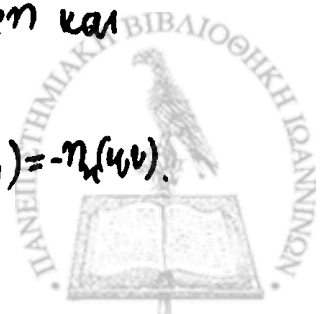
Πρόταση 3.4.3. Ισχύουν, για κάθε  $(u,v) \in U$ , οι σχέσεις

$$(3.4.1) \quad L(X_u(u,v)) = -n_u(u,v)$$

$$(3.4.2) \quad L(X_v(u,v)) = -n_v(u,v).$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό της απεικόνισης Weingarten και επειδή  $X_u(u,v) = dX_{(u,v)}(e_1)$ , έχουμε

$$L(X_u(u,v)) = -dn_{(u,v)} \circ (dX_{(u,v)})^{-1}(dX_{(u,v)}(e_1)) = -dn_{(u,v)}(e_1) = -n_u(u,v).$$



Όμοια, αποδεικνύεται και η σχέση (3.4.2).

Στη συνέχεια θα παραδέσουμε μερικές χρήσιμες, για τα επόμενα, σχέσεις.

Επειδή  $\langle X_u(u,v), \eta(u,v) \rangle = 0$ , για κάθε  $(u,v) \in U$ , παίρνουμε με παραγωγή ως προς  $u$  και  $v$  τις σχέσεις

$$(3.4.3) \quad \langle X_{uu}(u,v), \eta(u,v) \rangle + \langle X_{uv}(u,v), \eta_u(u,v) \rangle = 0 \\ \langle X_{uv}(u,v), \eta(u,v) \rangle + \langle X_{vv}(u,v), \eta_v(u,v) \rangle = 0.$$

Όμοια, από την σχέση  $\langle X_v(u,v), \eta(u,v) \rangle = 0$ , παίρνουμε

$$(3.4.4) \quad \langle X_{vu}(u,v), \eta(u,v) \rangle + \langle X_v(u,v), \eta_u(u,v) \rangle = 0 \\ \langle X_{vv}(u,v), \eta(u,v) \rangle + \langle X_v(u,v), \eta_v(u,v) \rangle = 0,$$

όπου  $X_{uu}(u,v) = \left( \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}(u,v), \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}(u,v), \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}(u,v) \right)$ ,  $X_{uv}(u,v)$ ,  $X_{vv}(u,v)$  είναι οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της  $X$ .

Πρόταση 3.4.4. Η απεικόνιση Weingarten είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός του εφαπτομένου επιπέδου  $T_{(u,v)}S$ , και μάλιστα αυτοπροσχηματισμένος γραμμικός μετασχηματισμός.

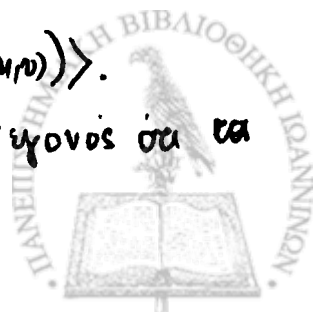
Απόδειξη. Η απεικόνιση  $L$  είναι γραμμικός μετασχηματισμός ως σύνθεση γραμμικών μετασχηματισμών. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.4.3), (3.4.4) και την Πρόταση 3.4.3 βεβαιώνουμε ότι

$$\langle L(X_u(u,v)), X_v(u,v) \rangle = -\langle \eta_u(u,v), X_v(u,v) \rangle = \langle X_{vu}(u,v), \eta(u,v) \rangle = \\ = \langle X_{uv}(u,v), \eta(u,v) \rangle = -\langle X_u(u,v), \eta_v(u,v) \rangle = \langle X_u(u,v), L(X_v(u,v)) \rangle.$$

Άρα,

$$(3.4.5) \quad \langle L(X_u(u,v)), X_v(u,v) \rangle = \langle X_u(u,v), L(X_v(u,v)) \rangle.$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας την (3.4.5) και το γεγονός ότι τα



εφαπτόμενα διανύσματα της  $S$  στο σημείο  $X(u,v)$  είναι γραμμικοί συνδυασμοί των  $X_u(u,v), X_v(u,v)$  συνδεδεμένοι στη σχέση

$$(3.4.6) \quad \langle L(v), w \rangle = \langle v, L(w) \rangle, \text{ για όλα τα } v, w \in T_{X(u,v)} S.$$

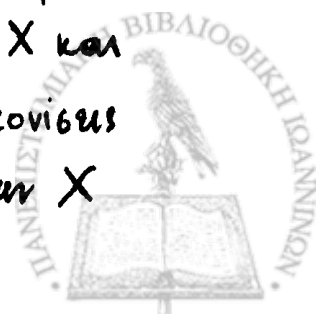
Δηλαδή, η  $L$  είναι αυτοπροσχηματισμένος γραμμικός μετασχηματισμός.

Άσκηση 3.4.1. Να αποδειχθεί η σχέση (3.4.6).

Παράδειγμα 3.4.5. Θεωρούμε τη σφαίρα  $S_R^2$ , με ακτίνα  $R$  και κέντρο την αρχή των συντεταγμένων. Ένα σύστημα συντεταγμένων αυτής είναι η απεικόνιση  $X: D = (0, 2\pi) \times (0, \pi) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(\varphi, \theta) = (R \cos \varphi \sin \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \theta)$ . Ο προαναπολιτικός της  $S_R^2$ , ως προς αυτό το σύστημα συντεταγμένων, είναι η απεικόνιση (βλ. Παράδειγμα 3.2.8)  $\eta: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\eta(\varphi, \theta) = -\frac{X(\varphi, \theta)}{R}$ . Συνεπώς,  $d\eta_{(\varphi, \theta)} = -\frac{1}{R} dX_{(\varphi, \theta)}$ . Άρα, η απεικόνιση Weingarten της  $S_R^2$  είναι  $L = -d\eta_{(\varphi, \theta)} \circ (dX_{(\varphi, \theta)})^{-1} = \frac{1}{R} dX_{(\varphi, \theta)} \circ (dX_{(\varphi, \theta)})^{-1} = \frac{1}{R} I$ , όπου  $I$  είναι η ταυτότητα στο εφαπτόμενο επίπεδο της  $S_R^2$ .

Η επόμενη πρόταση αφορά τη σφικτηριότητα της απεικόνισης Weingarten σε επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρου.

Πρόταση 3.4.6. Έστωσαν  $S$  μια επιφάνεια με παρακετρική παράσταση  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  και  $h: \bar{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ ,  $h(\bar{u}, \bar{v}) = (u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))$  μια επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρου. Έστωσαν,  $\eta$  και  $\bar{\eta}$  οι προαναπολιτικοί της  $S$ , ως προς τα συστήματα συντεταγμένων  $X$  και  $Y = X \circ h: \bar{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , αντίστοιχα. Αν  $L$  και  $\bar{L}$  είναι οι απεικονίσεις Weingarten της  $S$ , ως προς τα συστήματα συντεταγμένων  $X$



και  $\gamma$ , τότε

$$(3.4.7) \quad \bar{L}_{\gamma(\bar{u}, \bar{v})} = \pm L_{\chi \circ h(\bar{u}, \bar{v})},$$

όπου το πρόσημο + (αντίστοιχα, το -) αναφέρεται σε επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρου που διατηρεί (αντίστοιχα, αντιστρέφει) τον προσανατολισμό της επιφάνειας  $S$ .

Απόδειξη. Από τη σχέση (3.2.12) έχουμε,  $\bar{n} = \pm (n \circ h)$  και συνεπώς  $d\bar{n} = \pm (dn \circ dh)$ . Όμως,  $\gamma = \chi \circ h$ . Άρα,  $d\gamma = d\chi \circ dh$  και συνεπώς  $(d\gamma)^{-1} = (d\chi)^{-1} \circ (dh)^{-1}$ . Από τον ορισμό της απεικόνισης Weingarten συνάγουμε ότι

$$\begin{aligned} \bar{L}_{\gamma(\bar{u}, \bar{v})} &= -d\bar{n}_{(\bar{u}, \bar{v})} \circ (d\gamma_{(\bar{u}, \bar{v})})^{-1} = -\left[ \pm (dn_{h(\bar{u}, \bar{v})} \circ dh_{(\bar{u}, \bar{v})}) \circ \right. \\ &\quad \left. (dh_{(\bar{u}, \bar{v})})^{-1} \circ (d\chi_{h(\bar{u}, \bar{v})})^{-1} \right] = \mp dn_{h(\bar{u}, \bar{v})} \circ (d\chi_{h(\bar{u}, \bar{v})})^{-1} = \\ &= \pm L_{\chi \circ h(\bar{u}, \bar{v})}. \end{aligned}$$

Σε αυτό το σημείο θα αναφέρουμε δύο σχέσεις για μελλοντική χρήση. Από τη σχέση (3.2.12) έχουμε

$$\bar{n}(\bar{u}, \bar{v}) = \pm n(h(\bar{u}, \bar{v})) = \pm n(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})).$$

Με τον κανόνα σύνδεσης παραγωγής βρίσκουμε

$$(3.4.8) \quad \begin{aligned} \bar{n}_{\bar{u}}(\bar{u}, \bar{v}) &= \pm \left\{ n_u(h(\bar{u}, \bar{v})) \frac{\partial u}{\partial \bar{u}}(\bar{u}, \bar{v}) + n_v(h(\bar{u}, \bar{v})) \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}(\bar{u}, \bar{v}) \right\} \\ \bar{n}_{\bar{v}}(\bar{u}, \bar{v}) &= \pm \left\{ n_u(h(\bar{u}, \bar{v})) \frac{\partial u}{\partial \bar{v}}(\bar{u}, \bar{v}) + n_v(h(\bar{u}, \bar{v})) \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}(\bar{u}, \bar{v}) \right\}. \end{aligned}$$

Θα δούμε, τώρα, τη συμπεριφορά της απεικόνισης Weingarten σε ισομετρίες του  $\mathbb{R}^3$ . Έστωσαν μια επιφάνεια  $S$  με παραμετρική παράσταση  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  και μια ισομετρία  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  του  $\mathbb{R}^3$ . Μια παραμετρική παράσταση της επιφάνειας  $F(S)$  είναι η απεικόνιση  $Y = F \circ X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , για την οποία ισχύουν (βλ. σχέσεις (3.4.4)) οι σχέσεις

$$dF_{x(u,v)}(X_u(u,v)) = Y_u(u,v) \text{ και } dF_{x(u,v)}(X_v(u,v)) = Y_v(u,v).$$

Με τη βοήθεια της σχέσης (1.4.12) παίρνουμε

$$\begin{aligned} Y_u(u,v) \times Y_v(u,v) &= dF_{x(u,v)}(X_u(u,v)) \times dF_{x(u,v)}(X_v(u,v)) = \\ &= (\text{sign} F) dF_{x(u,v)}(X_u(u,v) \times X_v(u,v)). \end{aligned}$$

Άρα, αν  $\bar{\pi}(u,v) = \frac{Y_u(u,v) \times Y_v(u,v)}{|Y_u(u,v) \times Y_v(u,v)|}$ , είναι ο προσανατολιστικός

της επιφάνειας  $F(S)$ , ως προς το σύστημα συντεταγμένων  $\gamma$ , θα ισχύει η σχέση

$$(3.4.9) \quad \bar{\pi} = (\text{sign} F) dF(m),$$

αφού  $|X_u(u,v) \times X_v(u,v)| = |Y_u(u,v) \times Y_v(u,v)|$  (γιατί;)

Έτσι,  $\bar{\pi} = dF(m)$  (αντίστοιχα,  $\bar{\pi} = -dF(m)$ ) αν η ισομετρία  $F$  διατηρεί (αντίστοιχα, αντιστρέφει) τον προσανατολιστικό του  $\mathbb{R}^3$  (βλ. Παρατήρηση 1.4.14).

Επειδή,  $dF = T$ , όπου  $T$  είναι η ορθογώνια συνιστώσα της ισομετρίας  $F$ , θα ισχύει  $\bar{\pi} = (\text{sign} F) T(m)$  και συνεπώς

$$\bar{\pi}_u(u,v) = (\text{sign} F) T(m_u(u,v)) = (\text{sign} F) dF(m_u(u,v)).$$

Άρα,

$$(3.4.10) \quad \bar{\pi}_u(u,v) = (\text{sign} F) dF(m_u(u,v)).$$

Όμοια, έχουμε

$$(3.4.11) \quad \bar{\pi}_v(u,v) = (\text{sign} F) dF(m_v(u,v)).$$

Από τη σχέση (3.4.10), λόγω της Πρότασης 3.4.3, παίρνουμε

$$-\bar{L}_{\gamma(u,v)}(Y_u(u,v)) = (\text{sign} F) dF_{x(u,v)}(-L_{\chi(u,v)}(X_u(u,v))),$$

όπου  $\bar{L}$  είναι η απεικόνιση Weingarten της  $F(S)$ . Δηλαδή,

$$\bar{L}_{\gamma(u,v)}(dF_{x(u,v)}(X_u(u,v))) = (\text{sign} F) dF_{x(u,v)} \circ L_{\chi(u,v)}(X_u(u,v)).$$

Όμοια βρίσκουμε

$$\bar{L}_{\gamma(u,v)}(dF_{x(u,v)}(X_v(u,v))) = (\text{sign} F) dF_{x(u,v)} \circ L_{\chi(u,v)}(X_v(u,v)).$$

Από τις τελευταίες σχέσεις συνάγουμε (πώς;) ότι

$$(3.4.12) \quad \bar{L} \circ dF = (\text{sign} F) dF \circ L$$



ή

$$(3.4.12)' \quad \bar{L} = (\text{sign } F) dF \circ L \circ (dF)^{-1}.$$

Ορισμός 3.4.7. Έστω  $S$  μια επιφάνεια με παραμετρική παράσταση  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Οι συναρτήσεις  $L, M, N: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , που ορίζονται ως

$$L(u, v) = \langle L(X_u(u, v)), X_u(u, v) \rangle,$$

$$M(u, v) = \langle L(X_u(u, v)), X_v(u, v) \rangle = \langle X_u(u, v), L(X_v(u, v)) \rangle,$$

$$N(u, v) = \langle L(X_v(u, v)), X_v(u, v) \rangle,$$

λέγονται θεμελιώδη μεγέθη (ποσά) δεύτερης τάξης της επιφάνειας  $S$ , ως προς το σύστημα  $X$ .

Παρατήρηση 3.4.8. Δεν πρέπει να γίνεται σύγχυση του θεμελιώδους μεγέθους (ποσού) δεύτερης τάξης  $L$  με την ομοκλίση Weingarten.

Πρόταση 3.4.9. Έστω  $S$  επιφάνεια με παραμετρική παράσταση  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Ισχύουν, για κάθε  $(u, v) \in U$ , οι σχέσεις:

$$(3.4.13) \quad L(u, v) = -\langle X_u(u, v), \eta_u(u, v) \rangle = \langle X_{uu}(u, v), \eta(u, v) \rangle$$

$$M(u, v) = -\langle X_u(u, v), \eta_v(u, v) \rangle = \langle X_{uv}(u, v), \eta(u, v) \rangle$$

$$N(u, v) = -\langle X_v(u, v), \eta_u(u, v) \rangle = \langle X_{vu}(u, v), \eta(u, v) \rangle$$

$$N(u, v) = -\langle X_v(u, v), \eta_v(u, v) \rangle = \langle X_{vv}(u, v), \eta(u, v) \rangle.$$

Απόδειξη. Οι πρώτες ισότητες προκύπτουν απευθείας από τον ορισμό των θεμελιωδών μεγεθών δεύτερης τάξης και τη Πρόταση 3.4.3.

Οι δεύτερες ισότητες προκύπτουν από τις σχέσεις (3.4.3) και (3.4.4).



Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τη συμπεριφορά των θεμελιωδών μεγεθών δεύτερης τάξης, ως προς τις ισομετρίες του  $\mathbb{R}^3$  και τις επιτρεπείς αλλαγές παραμέτρων.

Πρόταση 3.4.10. Έστωσαν, επιφάνεια  $S$  με παραμετρική παράσταση  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  και  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ισομετρία του  $\mathbb{R}^3$ . Τα θεμελιώδη νυσά δεύτερης τάξης  $\bar{L}, \bar{M}, \bar{N}$  της επιφάνειας  $F(S)$ , ως προς το σύστημα συντεταγμένων  $Y = F \circ X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , δίνονται από τις σχέσεις:

(3.4.14)  $\bar{L} = (\text{sign} F)L$ ,  $\bar{M} = (\text{sign} F)M$  και  $\bar{N} = (\text{sign} F)N$ , όπου  $L, M, N$  είναι τα θεμελιώδη μεγέθη δεύτερης τάξης της  $S$ , ως προς το σύστημα  $X$ , και  $\text{sign} F$  είναι το πρόσημο της ισομετρίας  $F$ .

Απόδειξη. Εξ ορισμού έχουμε

$$\bar{L}(u, v) = \langle \bar{L}(Y_u(u, v)), Y_u(u, v) \rangle \stackrel{(3.14)}{=} \langle \bar{L} \circ dF(X_u(u, v)), dF(X_u(u, v)) \rangle$$

$$\stackrel{(3.4.12)}{=} (\text{sign} F) \langle dF(L(X_u(u, v))), dF(X_u(u, v)) \rangle$$

$$\stackrel{\text{Πόρισμα 1.4.13}}{=} (\text{sign} F) \langle L(X_u(u, v)), X_u(u, v) \rangle = (\text{sign} F) L(u, v).$$

Όμοια αποδεικνύονται και οι άλλες σχέσεις.

Πρόταση 3.4.11. (κανόνας αλλαγής των θεμελιωδών μεγεθών δεύτερης τάξης). Έστωσαν  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ένα σύστημα συντεταγμένων της επιφάνειας  $S$ , με θεμελιώδη μεγέθη δεύτερης τάξης  $L, M, N$  και  $h: \bar{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ ,  $h(\bar{u}, \bar{v}) = (u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))$  μια επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρων. Τότε ισχύουν οι σχέσεις:

$$(3.4.15) \quad \pm \bar{L} = (L \circ h) \left( \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \right)^2 + 2(M \circ h) \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} + (N \circ h) \left( \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right)^2$$



$$\pm \bar{M} = (Loh) \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + (Moh) \left( \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \right) + (Noh) \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}},$$

$$\pm \bar{N} = (Loh) \left( \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \right)^2 + 2(Moh) \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} + (Noh) \left( \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right)^2,$$

όπου  $\bar{L}, \bar{M}, \bar{N}$  είναι τα θεμελιώδη μεγέθη δεύτερης τάξης της  $S$ , ως προς το σύστημα  $Y = Xoh: \bar{U} \subset \bar{R}^2 \rightarrow R^3$ , και το πρόσημο (+ αντίστοιχα, το -) αναφέρεται σε επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρου που διατηρεί (αντίστοιχα, αντιστρέφει) τον προσανατολισμό της επιφάνειας  $S$ .

Απόδειξη. Κάνοντας χρήση των σχέσεων (3.4.6), (3.4.7) και της γραμμικότητας της απεικόνισης Weingarten, έχουμε

$$\begin{aligned} \bar{L}(\bar{u}, \bar{v}) &= \langle \bar{L}(Y_{\bar{u}}(\bar{u}, \bar{v})), Y_{\bar{u}}(\bar{u}, \bar{v}) \rangle = \pm \langle L(X_u(h(\bar{u}, \bar{v})) \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + X_v(h(\bar{u}, \bar{v})) \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}), \\ &X_u(h(\bar{u}, \bar{v})) \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + X_v(h(\bar{u}, \bar{v})) \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \rangle \\ &= \pm \left\{ L(h(\bar{u}, \bar{v})) \left( \frac{\partial u}{\partial \bar{u}}(\bar{u}, \bar{v}) \right)^2 + 2M(h(\bar{u}, \bar{v})) \frac{\partial u}{\partial \bar{u}}(\bar{u}, \bar{v}) \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}(\bar{u}, \bar{v}) + N(h(\bar{u}, \bar{v})) \left( \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}(\bar{u}, \bar{v}) \right)^2 \right\}, \end{aligned}$$

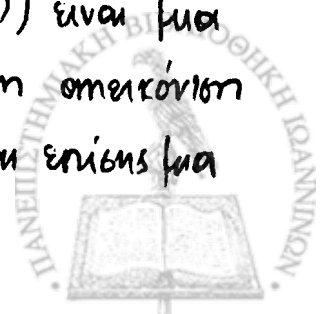
από όπου προκύπτει η πρώτη των σχέσεων (3.4.15). Όμοια αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες σχέσεις.

Από τη Πρόταση 3.4.11 με πράξεις προκύπτει το εξής Πρό-  
ρισμα.

Πόρισμα 3.4.12. Ισχύει η σχέση

$$(3.4.16) \quad \bar{L}\bar{N} - \bar{M}^2 = \left( \frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \right)^2 \left( (Loh)(Noh) - (Moh)^2 \right).$$

Παρατήρηση 3.4.13. Αν  $h(\bar{u}, \bar{v}) = (u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))$  είναι μια επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρου, τότε η αντίστροφη απεικόνιση  $h^{-1}: U \subset R^2 \rightarrow \bar{U} \subset \bar{R}^2$ ,  $h^{-1}(u,v) = (\bar{u}(u,v), \bar{v}(u,v))$  είναι επίσης μια





επιμετρική αλλαγή παραμέτρου. Ισχύουν, σε αυτή την περίπτωση, σχέσεις ανάλογες των σχέσεων (3.4.15) και (3.4.16) (Να βρεθούν αυτές οι σχέσεις, ως άσκηση).

Ορισμός 3.4.14. Η τετραγωνική μορφή  $\Pi_P: T_P S \rightarrow \mathbb{R}$ , όπου  $P = X(u, v)$ , που ορίζεται ως  $\Pi_P(v) = \langle Lv, v \rangle$  λέγεται δευτέρα θεμελιώδης μορφή (second fundamental form) της επιφάνειας  $S$  στο σημείο  $P = X(u, v)$ .

Παρατήρηση 3.4.15. Στην συνέχεια αυτή του  $\Pi_P$  θα γράφαμε  $\Pi$ , αφού κάθε φορά θα είναι φανερό σε ποιο σημείο της επιφάνειας θα αναφερόμαστε.

Παρατήρηση 3.4.16. (ii). Αν  $\bar{\Pi}$  είναι η δεύτερη θεμελιώδης μορφή της επιφάνειας  $S$  με μια επιμετρική αλλαγή παραμέτρου, τότε με τη βοήθεια της σχέσης (3.4.7) συμπεραίνουμε ότι

$$\bar{\Pi}(v) = \langle \bar{L}v, v \rangle = \pm \langle Lv, v \rangle = \pm \Pi(v),$$

δηλαδή

$$(3.4.17) \quad \bar{\Pi} = \pm \Pi.$$

(ii) Αν  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  είναι μια ισομετρία του  $\mathbb{R}^3$  και συμβολίσουμε με  $\Pi_{F(S)}$  τη δεύτερη θεμελιώδη μορφή της  $F(S)$  και με  $\Pi_S$  τη δεύτερη θεμελιώδη μορφή της  $S$ , τότε λόγω του Προτάματος 1.4.13, συμπεραίνουμε

$$\Pi_S(v) = \langle Lv, v \rangle = \langle dF(Lv), dF(v) \rangle$$

$$\stackrel{(3.4.12)}{=} (\text{sign } F) \langle \bar{L}(dF(v)), dF(v) \rangle = \Pi_{F(S)}(dF(v))$$

Δηλαδή,



$$(3.4.18) \quad \Pi_S = (\text{sign } F) \Pi_{F(S)} \circ dF.$$

Στο σημείο  $(u, v) \in U$ , θεωρούμε το διάνυσμα  $v = du e_1 + dv e_2$ , όπου  $\{e_1, e_2\}$  είναι η συνήθης βάση του  $T_{(u,v)} \mathbb{R}^2$ . Τότε,

$$\begin{aligned} & - \langle d\eta_{(u,v)}(du e_1 + dv e_2), d\chi_{(u,v)}(du e_1 + dv e_2) \rangle = \\ & = - \langle du \eta_u(u,v) + dv \eta_v(u,v), du \chi_u(u,v) + dv \chi_v(u,v) \rangle \\ & = - \langle \eta_u(u,v), \chi_u(u,v) \rangle du^2 - (\langle \eta_u(u,v), \chi_v(u,v) \rangle + \langle \eta_v(u,v), \chi_u(u,v) \rangle) du dv \\ & \quad - \langle \eta_v(u,v), \chi_v(u,v) \rangle dv^2 \end{aligned}$$

ή λόγω των σχέσεων (3.4.13)

$$= L(u,v) du^2 + 2M(u,v) du dv + N(u,v) dv^2.$$

Δηλαδή,

$$(3.4.19) \quad - \langle d\eta_{(u,v)}(du e_1 + dv e_2), d\chi_{(u,v)}(du e_1 + dv e_2) \rangle = L(u,v) du^2 + 2M(u,v) du dv + N(u,v) dv^2.$$

Η τετραγωνική μορφή  $L(u,v) du^2 + 2M(u,v) du dv + N(u,v) dv^2$  με  $(du, dv) \in \mathbb{R}^2$ , κατ'αναλογία με τη μετρική της επιφάνειας, λέγεται και αυτή δευτέρα θεμελιώδης μορφή της  $S'$ , ως προς το σύστημα συντεταγμένων  $X$  και συμβολίζεται επίσης με  $\Pi$ .

Δηλαδή,

$$\Pi(du, dv) = L(u,v) du^2 + 2M(u,v) du dv + N(u,v) dv^2,$$

όπου  $du, dv$  δεν συμβολίζουν τα διαφορικά των συναρτήσεων  $u, v$ .

Παρατήρηση 3.4.17. Συχνά, στη βιβλιογραφία, αντί των συμβόλων  $L, M, N$  χρησιμοποιείται ο συμβολισμός  $b_{11} = L, b_{12} = b_{21} = M, b_{22} = N$ .

Για μια ισομετρία  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , είναι αμέσως φανερό ότι, οι



Δεύτερες θεμελιώδεις μορφές  $\Pi_S(du, dv)$ ,  $\Pi_{F(S)}(du, dv)$  των επιφανειών  $S$  και  $F(S)$  συνηθίζουν, κατά προσέγγιση του προσήκου  $\text{sign} F$ .

Προκειμένου για επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρου έχουμε τη παρακάτω πρόταση, ανάλογη της Πρότασης 3.3.17.

Πρόταση 3.4.18: Έστωσαν,  $S$  επιφάνεια με παραμετρική παράσταση  $\chi: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  και  $h: \bar{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ ,  $h(\bar{u}, \bar{v}) = (u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))$  μια επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρου. Αν,  $\bar{\Pi}(d\bar{u}, d\bar{v}) = L(\bar{u}, \bar{v})d\bar{u}^2 + 2M(\bar{u}, \bar{v})d\bar{u}d\bar{v} + N(\bar{u}, \bar{v})d\bar{v}^2$  είναι η δεύτερη θεμελιώδης μορφή της  $S$ , ως προς τη παραμετρική παράσταση  $\gamma = \chi \circ h$ , τότε ισχύει η σχέση

$$\bar{\Pi}(d\bar{u}, d\bar{v}) = \pm \Pi(du, dv),$$

όπου  $(du, dv) = dh_{(\bar{u}, \bar{v})}(d\bar{u}, d\bar{v})$ . Δηλαδή, η δεύτερη θεμελιώδης μορφή, κατά προσέγγιση προσήκου, μένει αναλλοίωτη.

Απόδειξη. Στη Πρόταση 3.3.17 αποδείξαμε ότι

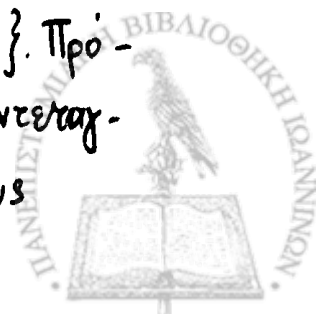
$$d\gamma_{(\alpha, \beta)}(d\bar{u} \bar{e}_1 + d\bar{v} \bar{e}_2) = d\chi_{h(\bar{u}, \bar{v})}(du e_1 + dv e_2)$$

Με παρόμοιο τρόπο δείχνουμε, χρησιμοποιώντας και τις σχέσεις (3.4.8), ότι

$$d\bar{\gamma}_{(\bar{u}, \bar{v})}(d\bar{u} \bar{e}_1 + d\bar{v} \bar{e}_2) = \pm d\eta_{h(\bar{u}, \bar{v})}(du e_1 + dv e_2).$$

Συνεπώς, κάνοντας χρήση της σχέσης (3.4.19), έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Παράδειγμα 3.4.19. Θεωρούμε την επιφάνεια  $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0, \text{ όπου } \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ σταθερά και } \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0\}$ . Πρόκειται για ένα επίπεδο. Έστω  $\gamma \neq 0$ . Ένα σύστημα συντεταγμένων είναι η απεικόνιση,  $\chi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που ορίζεται ως



$X(u,v) = (u, v, \frac{-\delta - \alpha u - \beta v}{\gamma})$ . Υπολογίστε,

$$X_u(u,v) = (1, 0, -\frac{\alpha}{\gamma}), \quad X_v(u,v) = (0, 1, -\frac{\beta}{\gamma})$$

$$X_u(u,v) \times X_v(u,v) = (\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}, 1).$$

Άρα, το μοναδιαίο και κάθετο διάνυσμα στο  $\pi$  είναι το διάνυσμα  $n(u,v) = (\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}, \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}, \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}})$ .

Συνεπώς η εσφαιρική απεικόνιση ή απεικόνιση Gauss για την επιφάνεια  $\pi$  είναι η σταθερή απεικόνιση,

$$n: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad n(u,v) = (\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}, \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}, \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}})$$

Ως εκ τούτου η παραίτητος απεικόνιση  $d\eta_{(u,v)}$  είναι η μηδενική απεικόνιση (στέλνει κάθε διάνυσμα του  $T_{(u,v)}\mathbb{R}^2$  στο μηδενικό διάνυσμα). Έτσι η απεικόνιση Weingarten είναι, σε κάθε σημείο, η μηδενική απεικόνιση. Δηλαδή,  $L_{X(u,v)} = 0: T_{X(u,v)}\pi \rightarrow T_{X(u,v)}\pi$ . Άρα, για τα θεμελιώδη ποσά δεύτερης καίξης και τη δεύτερη θεμελιώδη μορφή έχουμε,  $L=M=N=0$  και  $\Pi=0$ .

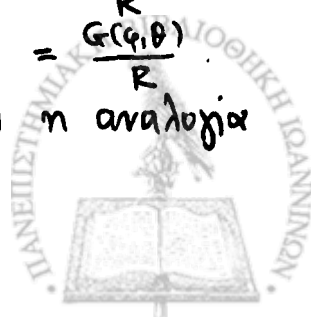
Παράδειγμα 3.4.20. Στο Παράδειγμα 3.4.5 διαπιστώσαμε ότι η απεικόνιση Weingarten στη σφαίρα ακτίνας  $R$ , ως προς συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων, είναι η  $L = \frac{1}{R}I$ , όπου  $I$  είναι η ταυτότητα του εφαπτομένου επιπέδου. Συνεπώς τα θεμελιώδη ποσά δεύτερης καίξης είναι:

$$L(\varphi, \theta) = \langle L(X_\varphi(\varphi, \theta)), X_\varphi(\varphi, \theta) \rangle = \frac{1}{R} \langle X_\varphi(\varphi, \theta), X_\varphi(\varphi, \theta) \rangle = \frac{E(\varphi, \theta)}{R}$$

$$M(\varphi, \theta) =$$

$$N(\varphi, \theta) =$$

Δηλαδή, προκειμένου για την σφαίρα, ισχύει η αναλογία

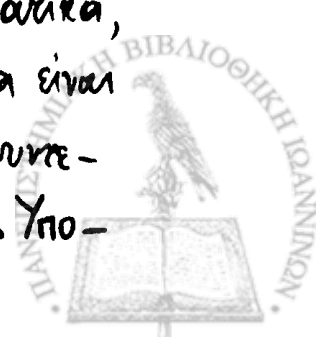


$$\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G}.$$

Παρατήρηση 3.4.21. Θεωρούμε μια απεικόνιση  $h: \bar{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ ,  $h(\bar{u}, \bar{v}) = (u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})) = (\bar{v}, \bar{u})$ . Η απεικόνιση αυτή είναι μια επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρων, που ορίζεται από τις σχέσεις  $u = u(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{v}$  και  $v = v(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{u}$ . Επειδή,  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}(\bar{u}, \bar{v}) = -1 < 0$ , πρόκειται για επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρων, που αντιστρέφει τον προσανατολισμό της επιφάνειας  $S$ . Να υπολογιστούν (ως άσκηση) τα θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης και η δεύτερη θεμελιώδης μορφή μιας επιφάνειας  $S$ , ως προς την παραμετρική παράσταση  $Y = X \circ h$ .

Παράδειγμα 3.4.22. Στο Παράδειγμα 3.2.9 βρήκαμε τον προσανατολισμό του ορθού κυκλικού κυλίνδρου ακτίνας  $a$ , με παραμετρική παράσταση των  $X: [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(u, v) = (a \cos u, a \sin u, v)$ . Ο προσανατολισμός του είναι η απεικόνιση  $\eta: [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\eta(u, v) = (\cos u, \sin u, 0)$ . Άρα,  $\eta_u(u, v) = (-\sin u, \cos u, 0)$  και  $\eta_v(u, v) = (0, 0, 1)$ . Από τις σχέσεις (3.4.13) βρίσκουμε τα θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης που είναι και  $L(u, v) = -\langle \eta_u(u, v), \eta_u(u, v) \rangle = a$ ,  $M(u, v) = 0$  και  $N(u, v) = 0$ . Συνεπώς, η δεύτερη θεμελιώδης μορφή είναι η  $II(du, dv) = a du^2$ .

Παράδειγμα 3.4.23. Θεωρούμε το σύνολο  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = y^2 - x^2\}$ . Είναι φανερό ότι πρόκειται για επιφάνεια γράφημα. Πραγματικά, θεωρούμε την συνάρτηση  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(u, v) = v^2 - u^2$ , η οποία είναι μια λεία συνάρτηση. Προφανώς,  $\Gamma_f = S$ . Ένα σύνθημα συνεπαγμένων είναι η απεικόνιση,  $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(u, v) = (u, v, v^2 - u^2)$ . Υπο-



λογίζουμε,

$$X_u(u,v) = (1, 0, -2u), X_v(u,v) = (0, 1, 2v), X_u(u,v) \times X_v(u,v) = (2u, -2v, 1).$$

Άρα, ο προσανατολισμός της  $S$ , ως προς το σύστημα συντεταγμένων  $X$ , είναι η απεικόνιση

$$\eta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \eta(u,v) = \left( \frac{2u}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}, \frac{-2v}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}} \right).$$

Βρίσκουμε, επίσης,  $X_{uu}(u,v) = (0, 0, -2)$ ,  $X_{uv}(u,v) = (0, 0, 0)$  και  $X_{vv}(u,v) = (0, 0, 2)$ .

Κάνοντας χρήση των σχέσεων (3.4.13) βρίσκουμε τα θεμελιώδη νόθα δεύτερης τάξης, που είναι:

$$L(u,v) = \langle X_{uu}(u,v), \eta(u,v) \rangle = -\frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}$$

$$M(u,v) = \langle X_{uv}(u,v), \eta(u,v) \rangle = 0$$

$$N(u,v) = \langle X_{vv}(u,v), \eta(u,v) \rangle = \frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}.$$

Άρα, η δεύτερη θεμελιώδης μορφή της επιφάνειας  $S$ , ως προς το σύστημα  $X$ , είναι η

$$II(du, dv) = -\frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}} (du^2 - dv^2).$$

Θα προσπαθήσουμε να βρούμε την απεικόνιση Weingarten  $L$  στο σημείο  $(u=0, v=0)$ , δηλαδή στο  $X(0,0) = (0,0,0)$ . Αρκεί να βρούμε τα  $L(X_u(0,0))$ ,  $L(X_v(0,0))$ , διότι τότε μπορούμε να βρούμε το  $L(v)$  για κάθε  $v \in T_{X(0,0)}S$ , αφού η  $L$  είναι γραμμική και τα διανύσματα  $X_u(0,0)$ ,  $X_v(0,0)$  συνιστούν μια βάση του χώρου  $T_{X(0,0)}S$ . Από την Πρόταση 3.4.3 βρίσκουμε

$$L(X_u(0,0)) = -\eta_u(0,0) = -2(1, 0, 0) = -2X_u(0,0),$$

$$L(X_v(0,0)) = -\eta_v(0,0) = 2(0, 1, 0) = 2X_v(0,0).$$

Παρατηρούμε ότι, τα διανύσματα  $X_u(0,0)$ ,  $X_v(0,0)$  είναι ιδιοδιανύσματα της απεικόνισης Weingarten στο σημείο  $X(0,0)$  με ιδιοτιμές  $-2$  και  $2$ , αντίστοιχα.



Παράδειγμα 3.4.24: Ένα εύγετμα συντεταγμένων του τόρου (βλ. Άσκηση 3.3.7) είναι η απεικόνιση

$$X: D = [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, X(u, v) = ((a+r \cos u) \cos v, (a+r \cos u) \sin v, r \sin u).$$

Υπολογίζοντας βρισκούμε,

$$X_u(u, v) = (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u)$$

$$X_v(u, v) = (-(a+r \cos u) \sin v, (a+r \cos u) \cos v, 0)$$

$$\eta(u, v) = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u) \quad "$$

$$\eta_u(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, -\cos u)$$

$$\eta_v(u, v) = (\cos u \sin v, -\cos u \cos v, 0).$$

Συνοψώς,

$$E(u, v) = r^2, F(u, v) = 0, G(u, v) = (a+r \cos u)^2,$$

$$L(u, v) = r, M(u, v) = 0, N(u, v) = (a+r \cos u) \cos u.$$

Τέλος, η μετρική  $ds^2$  και η δεύτερη θεμελιώδης μορφή  $II(du, dv)$  δίνονται από τις σχέσεις

$$ds^2 = r^2 du^2 + (a+r \cos u)^2 dv^2$$

$$II(du, dv) = r du^2 + (a+r \cos u) \cos u dv^2.$$

Η απεικόνιση Weingarten  $L$  του τόρου στο σημείο  $X(u, v)$  ικανοποιεί τις σχέσεις,

$$L(X_u(u, v)) = -\eta_u(u, v) = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u) = \frac{1}{r} X_u(u, v)$$

και

$$\begin{aligned} L(X_v(u, v)) &= -\eta_v(u, v) = (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0) = -\cos u (\sin v, -\cos v, 0) = \\ &= \frac{\cos u}{a+r \cos u} X_v(u, v). \end{aligned}$$

Δηλαδή, ισχύουν για το τόρο, ως προς το συγκεκριμένο εύγετμα συντεταγμένων οι σχέσεις

$$(3.4.20) \quad L(X_u(u, v)) = \frac{1}{r} X_u(u, v),$$

$$L(X_v(u, v)) = \frac{\cos u}{a+r \cos u} X_v(u, v).$$



Στο Παράδειγμα 3.4.14 διαπιστώσαμε ότι το επίπεδο έχει θεμελιώδη μεγέθη δεύτερης τάξης  $L=M=N=0$ , ως προς ένα συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων και συνεπώς ως προς κάθε σύστημα συντεταγμένων, λόγω των σχέσεων (3.4.15). Η παρακάτω πρόταση μας βεβαιώνει ότι είναι (το επίπεδο) η μόνη επιφάνεια με αυτήν την ιδιότητα.

Πρόταση 3.4.25. Έστω  $S$  επιφάνεια με παραμετρική παράσταση  $\chi: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\chi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$  και με θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης  $L(u,v) = M(u,v) = N(u,v) = 0$ , για κάθε  $(u,v) \in U$ . Τότε η  $S$  είναι επίπεδο (μέρος επιπέδου)

Απόδειξη. Από τις σχέσεις (3.4.13) συμπεραίνουμε ότι  $\langle \eta_u(u,v), \chi_u(u,v) \rangle = \langle \eta_u(u,v), \chi_v(u,v) \rangle = \langle \eta_v(u,v), \chi_u(u,v) \rangle = \langle \eta_v(u,v), \chi_v(u,v) \rangle = 0$ , όπου  $\eta$  είναι ο προανακατολισμός της  $S$ . Άρα τα διανύσματα  $\eta_u(u,v)$ ,  $\eta_v(u,v)$  είναι κάθετα στα  $\chi_u(u,v)$  και  $\chi_v(u,v)$  σε κάθε σημείο  $\chi(u,v)$ . Επειδή, όμως τα  $\eta_u(u,v)$ ,  $\eta_v(u,v)$  είναι κάθετα και στο  $\eta(u,v)$  και επειδή τα διανύσματα  $\chi_u(u,v)$ ,  $\chi_v(u,v)$ ,  $\eta(u,v)$  συνιστούν μια βάση των διανυσμάτων του  $T_{\chi(u,v)} \mathbb{R}^3$ , συνάγουμε ότι,  $\eta_u(u,v) = \eta_v(u,v) = 0$ . Συνεπώς  $\eta(u,v) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha$ , ένα καθόλου μοναδιαίο διάνυσμα. Θεωρούμε την συνάρτηση  $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(u,v) = \langle \eta(u,v), \chi(u,v) \rangle = \alpha_1 x(u,v) + \alpha_2 y(u,v) + \alpha_3 z(u,v)$ . Παιρνοντας τις μερικές παραγώγους της  $f$  ως προς  $u$  και  $v$ , βρίσκουμε

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = \langle \eta_u(u,v), \chi(u,v) \rangle + \langle \eta(u,v), \chi_u(u,v) \rangle = 0$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = \langle \eta_v(u,v), \chi(u,v) \rangle + \langle \eta(u,v), \chi_v(u,v) \rangle = 0.$$

Επειδή, το  $U$  είναι ανοικτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^2$  και η συν-





άρεστη  $f(u, v)$  έχει παντού μηδενική παραγώγους, συμπεραίνουμε ότι  $f(u, v) = c = \text{σταθ}$ . Συνεπώς,  $a_1 x(u, v) + a_2 y(u, v) + a_3 z(u, v) = c$ . Η τελευταία σχέση υποδηλώνει ότι το τυχαίο βυθίο  $X(u, v)$  της επιφάνειας ικανοποιεί την εξίσωση  $a_1 x + a_2 y + a_3 z = c$ , ενός επιπέδου. Συνεπώς η  $S$  είναι επίπεδο.

Για τη σφαίρα θα αποδείξουμε ότι έχει μία χαρακτηριστική ιδιότητα, παρακινούμενοι από το Παράδειγμα 3.4.20.

Πρόταση 3.4.26: Έστω επιφάνεια  $S$  τάξης  $C^k$  ( $k \geq 3$ ) με παραμετρική παράσταση  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  και η οποία δεν είναι μέρος επιπέδου. Η επιφάνεια  $S$  είναι σφαίρα (κομμάτι σφαίρας), αν και μόνο αν τα θεμελιώδη ποσά πρώτου και δεύτερου τάξης είναι ανάλογα, δηλαδή ισχύει η σχέση (3.4.21)

$$\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G}.$$

Απόδειξη. Αν η  $S$  είναι σφαίρα, τότε όπως γνωρίζουμε (βλ. Παράδειγμα 3.4.20) ισχύει η σχέση (3.4.21). Υποθέτουμε ότι ισχύει η σχέση (3.4.21) και θα δείξουμε ότι η  $S$  είναι σφαίρα. Εξισώνουμε τους ίδιους λόγους με  $f(u, v)$ . Επειδή η επιφάνεια  $S$  είναι πολυώνυμο  $C^3$ -τάξης, η συνάρτηση  $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , είναι πολυώνυμο  $C^1$ -τάξης. Από την  $L(u, v) = f(u, v) E(u, v)$  και τους ορισμούς των θεμελιωδών μεγεθών λαμβάνουμε:

$$\langle L(x_u(u, v)), x_u(u, v) \rangle = f(u, v) \langle x_u(u, v), x_u(u, v) \rangle$$

ή

$$\langle L(x_u(u, v)) - f(u, v) x_u(u, v), x_u(u, v) \rangle = 0.$$

Όμοια από τις άλλες σχέσεις βρίσκουμε,



$$\langle L(X_u(u,v)) - f(u,v)X_u(u,v), X_v(u,v) \rangle = 0$$

$$\langle L(X_v(u,v)) - f(u,v)X_v(u,v), X_u(u,v) \rangle = 0$$

και

$$\langle L(X_v(u,v)) - f(u,v)X_v(u,v), X_v(u,v) \rangle = 0,$$

όπου  $L$  είναι η απεικόνιση Weingarten. Από τις δύο πρώτες σχέσεις συνάγουμε ότι  $L(X_u(u,v)) - f(u,v)X_u(u,v) = 0$ , αφού το διάνυσμα  $L(X_u(u,v)) - f(u,v)X_u(u,v)$  είναι εφαπτόμενο προς επιφάνεια και κάθετο στα διανύσματα  $X_u(u,v)$  και  $X_v(u,v)$ .

Όμοια, από τις άλλες δύο εξισώσεις λαμβάνουμε

$$L(X_v(u,v)) - f(u,v)X_v(u,v) = 0. \text{ Συνεπώς, ισχύουν οι σχέσεις}$$

$$(*) \quad -\eta_u(u,v) - f(u,v)X_u(u,v) = 0$$

$$(**) \quad -\eta_v(u,v) - f(u,v)X_v(u,v) = 0.$$

Παραγωγίζοντας την (\*) ως προς  $v$ , την (\*\*) ως προς  $u$  και λαμβάνοντας υπόψη ότι  $\eta_{uv}(u,v) = \eta_{vu}(u,v)$ ,  $X_{uv}(u,v) = X_{vu}(u,v)$  παίρνουμε με αφαίρεση τη σχέση

$$-\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)X_u(u,v) + \frac{\partial f}{\partial u}(u,v)X_v(u,v) = 0,$$

από όπου προκύπτει ότι  $\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = 0$ , αφού τα διανύσματα  $X_u(u,v), X_v(u,v)$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Συνεπώς, η  $f$  είναι σταθερή συνάρτηση, έστω  $f(u,v) = c$ . Οι σχέσεις

(\*), (\*\*) γίνονται, αντίστοιχα,

$$(***) \quad \eta_u(u,v) = -cX_u(u,v), \quad \eta_v(u,v) = -cX_v(u,v),$$

όπου  $c \neq 0$ , αφού σε αντίθετη περίπτωση ( $c=0$ ) θα είχαμε  $\eta(u,v) =$  σταθερό διάνυσμα και η επιφάνεια  $S$  θα είναι επίπεδο, που συντρίβεται στην υπόθεση της πρότασης. Θεωρούμε, τώρα, στη απεικόνιση,  $\gamma: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma(u,v) = X(u,v) + \frac{1}{c}\eta(u,v)$ . Με παραγωγή και κάινοντας χρήση των (\*\*\*) συμπεραίνουμε (ηώς) ότι  $\gamma(u,v) = a =$  σταθερό διάνυσμα, για κάθε  $(u,v) \in U$ .



Άρα,  $a - x(u, v) = \frac{1}{c} \eta(u, v)$  και συνεπώς  $|a - x(u, v)| = \frac{1}{|c|}$ , που δείχνει το ζητούμενο (γιατί;)

### Άσκησης.

3.4.2. Δίνεται η επιφάνεια  $S$  με παραμετρική παράσταση  $X: \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2})$ . Να βρεθεί η εφαιρική απεικόνιση  $\pi$ , καθώς και η εικόνα της, δηλαδή το σύνολο  $\pi(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\})$ . Τι είναι γεωμετρικοί η εικόνα της  $\pi$ , καθώς και η επιφάνεια  $S$ ;

3.4.3. Έστωσαν επιφάνεια  $S$  με παραμετρική παράσταση  $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$  και η καμπύλη της  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma(t) = X(t^2, t)$ . Να βρεθεί η καμπυλότητα και η γέφυρα της  $\gamma$  σε κάθε  $t \in \mathbb{R}$ . Ποιες είναι οι συνιστώσες του διανύσματος καχύψης  $\gamma'(t)$ , ως προς τη βάση  $X_u(u, v), X_v(u, v)$ ;

3.4.4. Να βρεθούν τα θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης καθώς και η δεύτερη θεμελιώδης μορφή μιας επιφάνειας εκ περιστροφής, στις παρακάτω δύο περιπτώσεις.

- (i) Η καμπύλη που περιστρέφεται έχει τυχαία παράμετρο
- (ii) Η καμπύλη που περιστρέφεται έχει παράθετο ως κύκλος εόξου.

3.4.5. Να βρεθούν τα θεμελιώδη ποσά πρώτης και δεύτερης τάξης ενός γενικευμένου ελικοειδούς (Άσκηση 3.3.6), ενός ελικοειδούς (Παράδειγμα 3.3.21).



3.4.6. Να βρεθούν τα θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης καθώς και η δεύτερη θεμελιώδης μορφή μιας επιφάνειας γραφηκά.

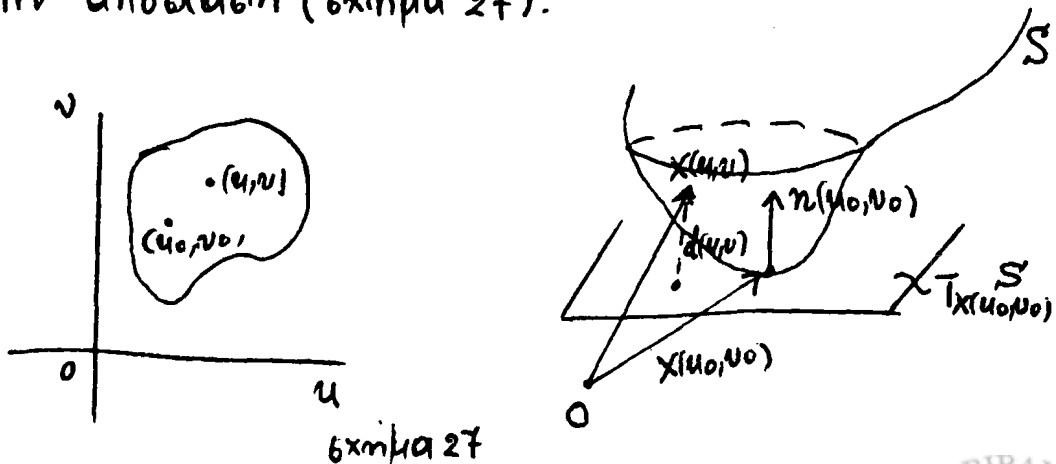
Θεωρούμε μια επιφάνεια  $S$  τάξης  $C^k$  ( $k \geq 2$ ) με παραμετρική παράσταση  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Έστω  $(u_0, v_0) \in U$  ένα σημείο του πεδίου ορισμού παραμέτρων. Από τον τύπο του Ταυλοτ θα έχουμε

$$(3.4.22) \quad X(u, v) = X(u_0, v_0) + X_u(u_0, v_0)(u - u_0) + X_v(u_0, v_0)(v - v_0) + \frac{1}{2} \left\{ X_{uu}(u_0, v_0)(u - u_0)^2 + 2X_{uv}(u_0, v_0)(u - u_0)(v - v_0) + X_{vv}(u_0, v_0)(v - v_0)^2 \right\} + o((u - u_0)^2 + (v - v_0)^2).$$

Έστω  $\eta(u_0, v_0)$  το μοναδιαίο και κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας  $S$  στο σημείο  $X(u_0, v_0)$ . Πολλαπλασιάζοντας τα μέλη της (3.4.22) εσωτερικά με το  $\eta(u_0, v_0)$  βρίσκουμε,

$$(3.4.23) \quad \langle X(u, v) - X(u_0, v_0), \eta(u_0, v_0) \rangle = \frac{1}{2} \left\{ L(u_0, v_0)(u - u_0)^2 + 2M(u_0, v_0)(u - u_0)(v - v_0) + N(u_0, v_0)(v - v_0)^2 \right\} + o((u - u_0)^2 + (v - v_0)^2).$$

Το πρώτο μέλος της (3.4.23) δίνει την προσεγγισμένη απόσταση του σημείου  $X(u, v)$  της επιφάνειας  $S$  από το εφαπτόμενο επίπεδο της  $S$  στο σημείο  $X(u_0, v_0)$ . Συμβολίζουμε με  $d(u, v)$  αυτή την απόσταση (βλ. σχήμα 27).



Με αυτές τους συμβολισμούς η (3.4.23) γράφεται με την παρακάτω μορφή



$$(3.4.24) \quad d(u,v) = \frac{1}{2} \left\{ L(u_0, v_0)(u-u_0)^2 + 2M(u_0, v_0)(u-u_0)(v-v_0) + N(u_0, v_0)(v-v_0)^2 \right\} + o((u-u_0)^2 + (v-v_0)^2).$$

Το σύνολο  $\Sigma = \left\{ (u, v, \omega) \in \mathbb{R}^3 : \omega = \frac{1}{2} \left( L(u_0, v_0)(u-u_0)^2 + 2M(u_0, v_0)(u-u_0)(v-v_0) + N(u_0, v_0)(v-v_0)^2 \right) \right\}$  είναι μια λεία επιφάνεια γραφτήκα, της κλάσης των παραβολοειδών, και λέγεται εγγύτατο παραβολοειδί (osculating paraboloid) της επιφάνειας  $S$  στο σημείο  $X(u_0, v_0)$ . Μπορεί εύκολα να διαπιστώσει κάποιος ότι οι επιφάνειες  $S$  και  $\Sigma$  έχουν στο  $(u_0, v_0)$  τα ίδια θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης.

Από την Αναλυτική Γεωμετρία είναι γνωστό ότι η επιφάνεια  $\Sigma$  είναι ελλειπτικό παραβολοειδές (αντίστοιχα, υπερβολικό παραβολοειδές) αν  $L(u_0, v_0)N(u_0, v_0) - M^2(u_0, v_0) > 0$  (αντίστοιχα,  $L(u_0, v_0)N(u_0, v_0) - M^2(u_0, v_0) < 0$ ). Η επιφάνεια  $\Sigma$  είναι ένας παραβολικός κύλινδρος, αν τα  $L(u_0, v_0)$ ,  $M(u_0, v_0)$ ,  $N(u_0, v_0)$  δεν είναι όλα μηδέν και  $L(u_0, v_0)N(u_0, v_0) - M^2(u_0, v_0) = 0$ . Τέλος, η  $\Sigma$  εκφυλίζεται σε επίπεδο, αν  $L(u_0, v_0) = M(u_0, v_0) = N(u_0, v_0) = 0$ . Με αυτό ως αφορμή δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 3.4.27: Ένα σημείο  $X(u_0, v_0)$  μιας επιφάνειας  $S$  λέγεται ελλειπτικό (αντίστοιχα, υπερβολικό) σημείο, αν  $L(u_0, v_0)N(u_0, v_0) - M^2(u_0, v_0) > 0$  (αντίστοιχα,  $L(u_0, v_0)N(u_0, v_0) - M^2(u_0, v_0) < 0$ ). Το σημείο  $X(u_0, v_0)$  λέγεται παραβολικό σημείο, αν  $L(u_0, v_0)N(u_0, v_0) - M^2(u_0, v_0) = 0$  και  $(L(u_0, v_0), M(u_0, v_0), N(u_0, v_0)) \neq (0, 0, 0)$ . Τέλος, το σημείο  $X(u_0, v_0)$  λέγεται ισόπεδο σημείο, αν  $L(u_0, v_0) = M(u_0, v_0) = N(u_0, v_0) = 0$ .

Παρατήρηση 3.4.28. Από τις σχέσεις (3.4.15) και τη σχέση (3.4.16) προκύπτει ότι το είδος ενός σημείου της επιφάνειας  $S$  δεν εξαρτάται από το σύστημα συντεταγμένων.



Παράδειγμα 3.4.29: Όλα τα σημεία του επιπέδου είναι ισοπέδα σημεία, όπως προκύπτει από το Παράδειγμα 3.4.19. Εξάλλου από το Παράδειγμα 3.4.20 προκύπτει ότι όλα τα σημεία της βγαίρας είναι ελλειπτικά σημεία. Τέλος, από το Παράδειγμα 3.4.22 συμπεραίνουμε ότι όλα τα σημεία του κυλίνδρου είναι παραβολικά σημεία.

Άσκηση 3.4.7. Με το Παράδειγμα 3.4.24 να επιβεβαιωθεί ότι ο πόρος έχει όλα τα είδη σημείων, εκτός από ισοπέδα σημεία.

Από τη σχέση (3.4.24) θέτουμε  $(u-u_0) = \cos\theta \sqrt{(u-u_0)^2 + (v-v_0)^2}$   
και  $(v-v_0) = \sin\theta \sqrt{(u-u_0)^2 + (v-v_0)^2}$  παίρνουμε

$$(3.4.25) \quad \frac{d(u,v)}{(u-u_0)^2 + (v-v_0)^2} = \frac{1}{2} \left\{ L(u_0, v_0) \cos^2\theta + 2M(u_0, v_0) \cos\theta \sin\theta + N(u_0, v_0) \sin^2\theta \right\} + \frac{o((u-u_0)^2 + (v-v_0)^2)}{(u-u_0)^2 + (v-v_0)^2} \dots$$

Παρατήρηση 3.4.30. Από τη σχέση (3.4.25) προκύπτει ότι το πρόσημο της  $d(u,v)$ , για σημεία γειτονικά του  $X(u_0, v_0)$ , εξαρτάται από το πρόσημο της παράστασης  $L(u_0, v_0) \cos^2\theta + 2M(u_0, v_0) \cos\theta \sin\theta + N(u_0, v_0) \sin^2\theta$ . Όμως το πρόσημο αυτής της παράστασης εξαρτάται από το πρόσημο της  $L(u_0, v_0)N(u_0, v_0) - M^2(u_0, v_0)$ , δηλαδή από το είδος του σημείου  $X(u_0, v_0)$ .

Άσκηση 3.4.8. Να αποδειχθεί ότι σε ένα ελλειπτικό σημείο  $X(u_0, v_0)$  μιας επιφάνειας  $S$ , υπάρχει περιοχή του σημείου στην επιφάνεια, η οποία βρίσκεται προς το ίδιο μέρος του εφαπτομένου επιπέδου  $T_{X(u_0, v_0)}S$ . Τι μπορούμε να πούμε στη περίπτωση υπερβολικού, παραβολικού ή ισοπέδου σημείου;



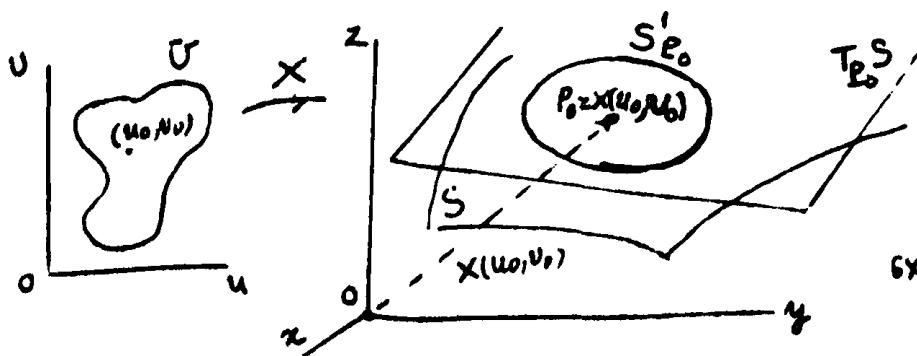
Άσκηση 3.4.9. Δίνεται επιφάνεια  $S$  με παραμετρική παράσταση  $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(u,v) = (u, v, u^2 + v^3)$ . Να αποδειχθεί ότι, όλα τα σημεία  $X(u,v)$  της  $S$  με  $v=0$  είναι παραβολοειδή σημεία. Επιπλέον, να διαπιστωθεί ότι κάθε περιοχή του σφαιρίου  $X(0,0)$ , έχει σημεία εκατέρωθεν του εφαπτόμενου επιπέδου της επιφάνειας  $S$  στο σημείο  $X(0,0)$ .

"

### 3.5. Κάθετη Καμπυλότητα - Κύριες Καμπυλότητες - Μέση Καμπυλότητα - Καμπυλότητα Gauss

Σε αυτή τη παράγραφο θα θεωρήσουμε επιφάνεια  $S$  με παραμετρική παράσταση  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ . Θα υποθέσουμε, για να μην επαναλαμβάνουμε, ότι η  $S$  είναι κοιλώσεων  $C^2$ -καξής, εκτός αν αναφέρουμε κάτι διαφορετικό. Με  $L$  και  $n$  θα συμβολίζουμε την απεικόνιση Weingarten και τον προανατολικό της  $S$ , ως προς το σύστημα  $X$ , αντίστοιχα. Επίσης  $\{e_1, e_2\}$  θα είναι η συνήθης βάση του  $\mathbb{R}^2$ .

Έστω σημείο  $(u_0, v_0) \in U$  και  $P_0 = X(u_0, v_0) \in S$ . Θεωρούμε τον μοναδιαίο κύκλο  $S'_{P_0}$ , στο εφαπτόμενο επίπεδο  $T_{P_0}S$  της επιφάνειας  $S$  (σχήμα 28), με κέντρο το σημείο  $P_0$ .



σχήμα 28



Ορισμός 3.5.1. Η συνάρτηση  $k_n \cdot S'_{P_0} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k_n(v) = \langle L\nu, \nu \rangle$  λέγεται συνάρτηση κάθετης καμπυλότητας της επιφάνειας  $S$  στο  $P_0$ , ως προς το σύστημα συντεταγμένων  $X$ . Η τιμή  $k_n(v)$  λέγεται κάθετη καμπυλότητα (normal curvature) της επιφάνειας  $S$  στο  $P_0$  και στη διεύθυνση  $\nu$ , ως προς το σύστημα  $X$ .

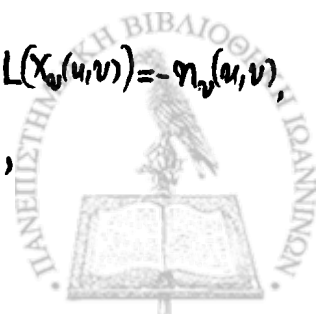
Παρατήρηση 3.5.2.(i) Είναι φανερό ότι  $k_n(v) = k_n(-v)$ .

(ii) Επειδή σε επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρου η νέα απεικόνιση Weingarten  $\bar{L}$  συνδέεται με την  $L$  με τη σχέση  $\bar{L} = \pm L$  (βλ. Πρόταση 3.4.6), προκύπτει από τον Ορισμό 3.5.1 ότι η κάθετη καμπυλότητα αλλάζει πρόσημο όταν αλλάξει ο προσανατολισμός της  $S$ .

Στη συνέχεια θα δώσουμε μια γεωμετρική ερμηνεία της κάθετης καμπυλότητας.

Έστω  $\gamma(s) = X(u(s), v(s))$ ,  $s \in I$ , μια καμπύλη της επιφάνειας  $S$  με παράμετρο το μήκος τόξου της (με φυσική παράμετρο),  $C^2$ -κάμπη κοιλώμενη και τέτοια ώστε  $\gamma(s_0) = X(u(s_0), v(s_0)) = P_0$  (δηλαδή,  $u(s_0) = u_0$ ,  $v(s_0) = v_0$ ) και  $\dot{\gamma}(s_0) = \nu$  (υπάρχει κάποια καμπύλη;). Ισχύει η σχέση,  $\langle \eta(u(s), v(s)), \dot{\gamma}(s) \rangle = 0$ , για κάθε  $s \in I$ , όπου  $\dot{\gamma}(s) = X_u(u(s), v(s)) \dot{u}(s) + X_v(u(s), v(s)) \dot{v}(s)$ . Με τον κανόνα σύνθεσης παραγώγισης, αν παραγωγίσουμε ως προς  $s$ , παίρνουμε  $\langle \eta_u(u(s), v(s)) \dot{u}(s) + \eta_v(u(s), v(s)) \dot{v}(s), \dot{\gamma}(s) \rangle + \langle \eta(u(s), v(s)), \ddot{\gamma}(s) \rangle = 0$ , για κάθε  $s \in I$ .

Επειδή (βλ. Πρόταση 3.4.3),  $L(X_u(u, v)) = -\eta_u(u, v)$  και  $L(X_v(u, v)) = -\eta_v(u, v)$ , η τελευταία σχέση γράφεται με τη μορφή,





$$- \langle L(X_u(u(s), v(s)) \dot{u}(s) + X_v(u(s), v(s)) \dot{v}(s)), \dot{\gamma}(s) \rangle + \langle \eta(u(s), v(s)), \ddot{\gamma}(s) \rangle = 0.$$

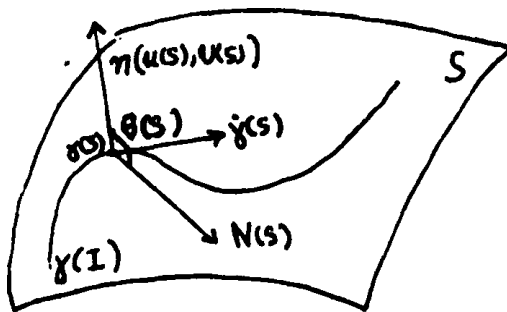
Δηλαδή,

$$(3.5.1) \quad \langle \eta(u(s), v(s)), \ddot{\gamma}(s) \rangle = \langle L(\dot{\gamma}(s)), \ddot{\gamma}(s) \rangle.$$

Όμως,  $\ddot{\gamma}(s) = k(s) N(s)$ , όπου  $k(s)$  είναι η καμπυλότητα της καμπύλης  $\gamma$  και  $N(s)$  το πρώτο κάθετο διάνυσμα της  $\gamma$  στο σημείο  $s$  (ή  $\gamma(s)$ ). Συνεπώς, η σχέση (3.5.1) δίνει

$$(3.5.2) \quad k_n(\dot{\gamma}(s)) = k(s) \cos \theta(s),$$

όπου  $k_n(\dot{\gamma}(s))$  είναι η κάθετη καμπυλότητα της επιφάνειας  $S$  στο σημείο  $\gamma(s)$  και στη διεύθυνση  $\dot{\gamma}(s)$ , και  $\theta(s)$  είναι η γωνία των διανυσμάτων  $N(s)$ ,  $\eta(u(s), v(s))$  στο σημείο  $\gamma(s)$  (βλ. σχήμα 29).



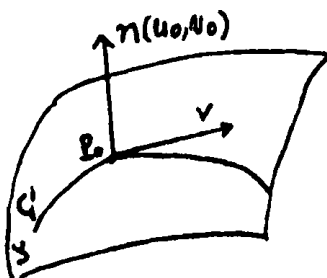
Σχήμα 29

Η σχέση (3.5.2) αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως τύπος του Meusnier.

Ειδικά, για  $s=s_0$ , θα έχουμε

$$(3.5.3) \quad k_n(v) = k(s_0) \cos \theta(s_0).$$

Έστω  $v \in S'_{P_0}$ , όπου  $P_0 = X(u_0, v_0)$ . Το σημείο  $P_0$  και τα διανύσματα  $v$ ,  $\eta(u_0, v_0)$  καθορίζουν ένα επίπεδο που τέμνει την επιφάνεια  $S$  κατά τη γραμμή  $C$  μιας επιπέδου καμπύλης (βλ. σχήμα 30).



Σχήμα 30

Καμπύλες της επιφάνειας  $S$ , που προκύπτουν κατ'αυτὸν τον τρόπο

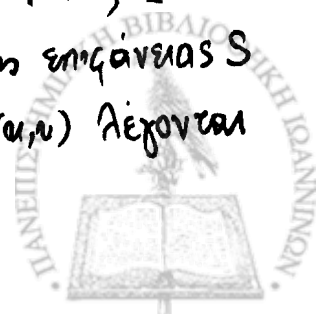


λέγονται κάθετες κομές (normal sections) της επιφάνειας  $S$  στο σημείο  $P_0 = X(u_0, v_0)$ . Μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι η κάθετη κοπή  $C$  έχει παράκετρο το θετικό εἶδος. Η  $C$  στο σημείο  $P_0$  έχει ως πρώτο κάθετο διάνυσμα το  $\pm n(u_0, v_0)$  (γιατί;). Συνεπώς, από τη σχέση (3.5.3) λαμβάνουμε  $k_n(v) = \pm k(s_0)$ , αφού η γωνία  $\angle (N(s_0), n(u_0, v_0)) = 0$  ή  $\pi$ , όπου  $k(s_0)$  είναι η καμπυλότητα στο  $P_0$  της κάθετης κοπής που ορίζεται από το  $v$ . Δηλαδή, η κάθετη καμπυλότητα της  $S$  στο  $P_0$  και στη διεύθυνση  $v \in S'_P$ , είναι η καμπυλότητα στο  $P_0$ , της κάθετης κοπής  $C$  που ορίζεται από το  $v$ , με κάποιο πρόσημο  $\pm$ . Άρα, παίρνοντας όλες τις κάθετες κομές της επιφάνειας  $S$  στο σημείο  $P_0$  και τις καμπυλότητες των κάθετων κομών στο  $P_0$ , μπορούμε να βρούμε όλες τις κάθετες καμπυλότητες της  $S$  στο  $P_0$ , με προσέγγιση προσήμου.

Η συνάρτηση κάθετης καμπυλότητας  $k_n: S'_P \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k_n(v) = \langle Lv, v \rangle$ , όπου  $P = X(u, v)$ , είναι συνεχής και ορίζεται στο συμπαγές σύνολο  $S'_P$ . Άρα, η  $k_n$  δέχεται το μέγιστό της και το ελάχιστό της στο  $S'_P$ . Ακριβέστερα, υπάρχουν  $e_1 \in S'_P$  και  $e_2 \in S'_P$ , τέτοια ώστε  $k_n(e_1) = \max_{v \in S'_P} k_n(v)$  και  $k_n(e_2) = \min_{v \in S'_P} k_n(v)$ . Συμβολίζουμε, για

συντόμηση,  $k_1(u, v) = k_n(e_1)$  και  $k_2(u, v) = k_n(e_2)$ .

Ορισμός 3.5.3. Οι τιμές  $k_1(u, v)$ ,  $k_2(u, v)$  ( $k_1(u, v) \geq k_2(u, v)$ ) λέγονται κύριες καμπυλότητες (principal curvatures) της επιφάνειας  $S$  στο σημείο  $X(u, v)$ . Επιπλέον, τα διανύσματα  $e_1(u, v)$ ,  $e_2(u, v)$  λέγονται κύρια διανύσματα (principal vectors) της επιφάνειας  $S$  στο σημείο  $X(u, v)$ . Οι διευθύνσεις των  $e_1(u, v)$ ,  $e_2(u, v)$  λέγονται



κύριες διευθύνσεις (principal directions) της  $S$  στο σημείο  $X(u,v)$ .

Παρατήρηση 3.5.4. (i) Να σημειώσουμε ότι, αν το  $v \in S'_P$  είναι κύριο διάνυσμα τότε και το  $-v \in S'_P$  είναι κύριο διάνυσμα.

(ii) Λαμβάνοντας υπόψη την Παρατήρηση 3.5.2 (ii) συμπεραίνουμε ότι: Για επιερειακή αλλαγή παραμέτρου που αλλάζει τον προσανατολισμό, επειδή η κάθετη καμπυλότητα αλλάζει πρόσημο, θα αλλάξει ο ρόλος των  $k_1(u,v)$ ,  $k_2(u,v)$  και  $e_1(u,v)$ ,  $e_2(u,v)$ .

Πριν προχωρήσουμε σε μερικά παραδείγματα θα δώσουμε έναν ορισμό.

Ορισμός 3.5.5. Ένα σημείο  $P = X(u,v)$  της επιφάνειας  $S$  λέγεται ομφαλικό σημείο (umbilic point), αν  $k_1(u,v) = k_2(u,v)$ . Διαφορετικά, δηλαδή αν  $k_1(u,v) \neq k_2(u,v)$ , θα λέγεται μη ομφαλικό σημείο.

Παρατήρηση 3.5.6. Σε ομφαλικό σημείο οι κύριες καμπυλότητες είναι ίσες. Δηλαδή, η συνάρτηση κάθετης καμπυλότητας είναι σταθερή, και συνεπώς κάθε διεύθυνση είναι κύρια διεύθυνση.

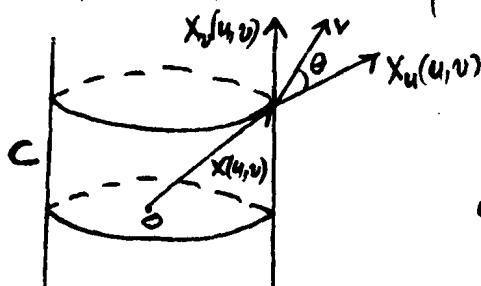
Παράδειγμα 3.5.7. Σύμφωνα με το Παράδειγμα 3.4.19 η Weingarten απεικόνιση  $L$  της επιφάνειας επίπεδο, είναι η μηδενική απεικόνιση. Δηλαδή,  $L = 0$ . Άρα, η συνάρτηση κάθετης καμπυλότητας σε κάθε σημείο του επιπέδου είναι σταθερή  $k_n = 0$ , αφού  $k_n(v) = \langle Lv, v \rangle = 0$ . Συνεπώς,  $k_1 = k_2 = 0$  παντού στο επίπεδο. Έτσι, όλα τα σημεία του επιπέδου είναι ομφαλικά σημεία και κάθε διεύθυνση είναι κύρια διεύθυνση.



Παράδειγμα 3.5.8. Η απεικόνιση Weingarten της σφαίρας ακτίνας  $R$  με παραμετρική παράσταση  $X: D = [0, 2\pi) \times (0, \pi) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(\varphi, \theta) = (R \cos \varphi \sin \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \theta)$  είναι η  $L = \frac{1}{R} I$  (βλ. Παράδειγμα 3.4.5). Άρα, η συνάρτηση κλίσης καμπυλότητας σε κάθε σημείο της σφαίρας είναι σταθερή  $k_n = \frac{1}{R}$ , αφού  $k_n(v) = \langle Lv, v \rangle = \frac{1}{R} \langle v, v \rangle = \frac{1}{R}$ . Συνεπώς,  $k_1 = k_2 = \frac{1}{R}$  παντού στη σφαίρα. Δηλαδή, όλα τα σημεία της σφαίρας είναι ομφαλικά σημεία και κάθε διεύθυνση είναι κύρια διεύθυνση.

Παρατήρηση 3.5.9. Σύμφωνα με το Παράδειγμα 3.2.8 ο προανατολιερός της σφαίρας, ως προς το εσωκεντρικό σύστημα συντεταγμένων, είναι το εσωτερικό μοναδιαίο κάθετο της σφαίρας. Αν θεωρήσουμε τον αντίθετο προανατολιερό (δηλαδή, το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο), τότε σύμφωνα με τη Παρατήρηση 3.5.4(ii) θα έχουμε  $k_1 = k_2 = -\frac{1}{R}$ , αφού η κάθετη καμπυλότητα αλλάζει πρόσημο.

Παράδειγμα 3.5.10. Η απεικόνιση  $X: D = [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(u, v) = (a \cos u, a \sin u, v)$  είναι παραμετρική παράσταση του ορθού κυκλικού κυλίνδρου  $C$ , ακτίνας  $a$ . Ο ανελκυστικός προανατολιερός είναι ο  $\eta(u, v) = (\cos u, \sin u, 0)$ . Στο σημείο  $X(u, v)$  τα διανύσματα  $X_u(u, v) = (-a \sin u, a \cos u, 0)$ ,  $X_v(u, v) = (0, 0, 1)$  αποτελούν μια βάση του εφαπτόμενου επιπέδου  $T_{X(u, v)} C$ . Κάθε μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα  $v$  γράφεται μονοσήμαντα ως προς αυτή τη βάση (σχήμα 31),



σχήμα 31

ως εξής: 
$$v = \frac{\cos \theta}{a} X_u(u, v) + \sin \theta X_v(u, v).$$



Επειδή, η απεικόνιση Weingarten είναι γραμμική και  $L(X_u(u,v)) = -\eta_u(u,v) = (\sin u, -\cos u, 0)$ ,  $L(X_v(u,v)) = -\eta_v(u,v) = (0, 0, 0)$ , λαμβάνουμε

$$k_1(v) = \langle Lv, v \rangle = \left\langle \frac{\cos \theta}{a} L(X_u(u,v)) + \sin \theta L(X_v(u,v)), \frac{\cos \theta}{a} X_u(u,v) + \sin \theta X_v(u,v) \right\rangle = -\frac{\cos^2 \theta}{a}.$$

Δηλαδή, η συνάρτηση κάθετης καμπυλότητας στο σημείο  $X(u,v)$  του κυλίνδρου δεν είναι σταθερή. Εξαρτάται από τη γωνία που σχηματίζει το  $v$  με το διάνυσμα  $X_u(u,v)$ . Η μεγαλύτερη τιμή της  $k_1$  είναι η 0, δηλαδή  $k_1(u,v) = 0$ , και λαμβάνεται για  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Συνεπώς, το διάνυσμα  $v = (0, 0, 1)$  είναι κύριο διάνυσμα. Επίσης, η μικρότερη τιμή της  $k_1$  είναι η  $-\frac{1}{a}$ , δηλαδή  $k_2(u,v) = -\frac{1}{a}$  και λαμβάνεται για  $\theta = 0$ . Συνεπώς, το διάνυσμα  $v = (-\sin u, \cos u, 0)$  είναι κύριο διάνυσμα. Δηλαδή, οι διευθύνσεις των γενεαριών και οι εφαπτόμενες των τομών του κυλίνδρου με επίπεδα κάθετα στον οριζόντιό του, είναι κύριες διευθύνσεις. Είναι προφανές ότι, αλλάζοντας τον προαναωλιμό του κυλίνδρου θα έχουμε,  $k_1(u,v) = \frac{1}{a}$  και  $k_2(u,v) = 0$ .

Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.5.6 έχουμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 3.5.11. Σε κάθε σημείο  $P = X(u,v) \in S$ , υπάρχει ορθοκανονική βάση  $\{e_1, e_2\}$  από κύρια διανύσματα, τέτοια ώστε να ισχύουν οι

$$(3.54) \quad Le_1 = k_1(u,v)e_1, \quad Le_2 = k_2(u,v)e_2.$$

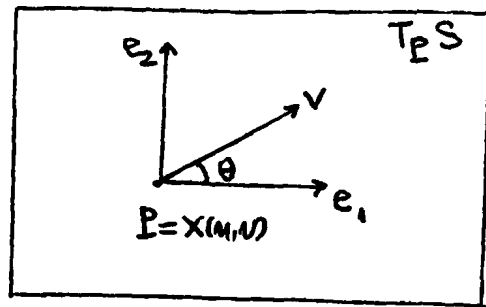
Πρόταση 3.5.12 (Rodriguez). Έστωσαν,  $P = X(u,v)$  και  $v \in S'_P$ . Το διάνυσμα  $v$  είναι κύριο διάνυσμα, και γενεώς η διεύθυνσή του είναι κύρια διεύθυνση, αν και μόνο αν το  $v$  είναι ιδιοδιάνυσμα της απεικόνισης Weingarten. Η αντίστοιχη ιδιοτιμή του  $v$  είναι



κύρια καμπυλότητα της  $S$  στο σημείο  $P = X(u, v)$ .

Απόδειξη. Αν το σημείο  $P$  είναι σφαιρικό, δηλαδή  $k_1(u, v) = k_2(u, v) = c$ , τότε η πρόταση είναι προφανής, αφού  $Lv = cv$ , λόγω των (3.5.4). Υποθέτουμε, για τη συνέχεια, ότι  $k_1(u, v) \neq k_2(u, v)$ . Έστω  $\{e_1, e_2\}$  η ορθοκανονική βάση, που εξααφαιρείται από τη Πρόταση 3.5.11. Το  $v$  γράφεται κατά μονοσήμαντο τρόπο (επίμα 3ε), ως προς τη βάση  $\{e_1, e_2\}$ , ως εξής:

$$(*) \quad v = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$$



επίμα 3ε

Συνεπώς,  $L(v) = k_1(u, v) \cos \theta e_1 + k_2(u, v) \sin \theta e_2$ . Υποθέτουμε, ότι το  $v$  είναι ιδιοδιάνυσμα της  $L$  με αντίστοιχη ιδιοτιμή  $k$ , δηλαδή  $L(v) = kv$ . Τότε,  $(k_1(u, v) - k) \cos \theta e_1 + (k_2(u, v) - k) \sin \theta e_2 = 0$ , ή αφού τα  $e_1, e_2$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα θα έχουμε

$$(**) \quad (k_1(u, v) - k) \cos \theta = 0 \quad \text{και} \quad (k_2(u, v) - k) \sin \theta = 0.$$

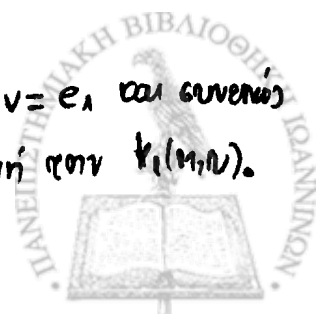
Από αυτές συμπεραίνουμε ότι  $\theta = 0$  και  $k = k_1(u, v)$  ή  $\theta = \frac{\pi}{2}$  και  $k = k_2(u, v)$ . Υποθέτουμε ότι το  $v$  είναι κύριο διάνυσμα με  $k_1(v) = k_2(v)$  (αναλόγως εφαρμόσαμε αν  $k_1(v) = k_2(v)$ ). Τότε, θα έχουμε

$$\begin{aligned} k_1(u, v) = k_2(v) &= \langle Lv, v \rangle = \langle k_1(u, v) \cos \theta e_1 + k_2(u, v) \sin \theta e_2, \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2 \rangle \\ &= k_1(u, v) \cos^2 \theta + k_2(u, v) \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$(k_1(u, v) - k_2(u, v)) \sin^2 \theta = 0$$

και συνεπώς, αφού  $k_1(u, v) \neq k_2(u, v)$ ,  $\theta = 0$ . Τότε όπως  $v = e_1$  και συνεπώς είναι (το  $v$ ) ιδιοδιάνυσμα της  $L$  με αντίστοιχη ιδιοτιμή την  $k_1(u, v)$ .



Άσκηση 3.5.1. Μια επιφάνεια  $S$  που έχει όλα τα σημεία ομογενικά είναι βέρος επιπέδου ή σφαίρας (Υπόθεση. Πρότασεις 3.4.25 και 3.4.26).

Παρατήρηση 3.5.13. Η Πρόταση 3.5.11 εξασφαλίζει, σε κάθε σημείο  $P = \chi(u, v)$  της επιφάνειας  $S$ , την ύπαρξη μιας ορθοκανονικής βάσης  $\{e_1, e_2\}$  από κύρια διανύσματα στο  $T_P S$ . Τα διανύσματα αυτά είναι, συγχρόνως και ιδιοδιανύσματα της απεικόνισης Weingarten  $L$  με αντίστοιχες ιδιοτιμές τις κύριες καμπυλότητες  $k_1(u, v), k_2(u, v)$ . Για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα  $v \in S'_P$ , το οποίο γραφτεί κατά μονοσήμαντο τρόπο ως  $v = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$ , θα έχουμε  $k_n(v) \frac{\text{ωθήβολι}}{\text{δουκέ}} k_n(\theta) = k_1(u, v) \cos^2\theta + k_2(u, v) \sin^2\theta$ . Δηλαδή,

$$(3.5.5) \quad k_n(\theta) = k_1(u, v) \cos^2\theta + k_2(u, v) \sin^2\theta.$$

Η σχέση (3.5.5) αναφέρεται στη Βιβλιογραφία ως κώπος του Euler

Ορισμός 3.5.14. Έστω επιφάνεια  $S$ . Οι συναρτήσεις  $K, H: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , που ορίζονται ως  $K(u, v) = k_1(u, v) k_2(u, v)$  και  $H(u, v) = \frac{1}{2}(k_1(u, v) + k_2(u, v))$ , λέγονται συνάρτηση καμπυλότητας Gauss και συνάρτηση μέσης καμπυλότητας της επιφάνειας  $S$ , αντίστοιχα. Οι τιμές  $K(u, v), H(u, v)$  λέγονται, αντίστοιχα, καμπυλότητα Gauss και μέση καμπυλότητα της επιφάνειας  $S$  στο σημείο  $(u, v)$  (ή στο σημείο  $\chi(u, v)$ ).

Παράδειγμα 3.5.15. Από προηγούμενα παραδείγματα προκύπτουν, αμέσως, τα εξής: (i) Η καμπυλότητα Gauss και η μέση καμπυλότητα του επιπέδου είναι παντού μηδέν. (ii) Η καμπυλότητα Gauss, σφαίρας ακτίνας  $R$  είναι παντού  $\frac{1}{R^2}$  και δεν εξαρτάται από τον προσ-



αναπολιωτό της σφαιράς. Η μέση καμπυλότητα της σφαιράς είναι σταθερή  $\pm \frac{1}{R}$ , ανάλογα με τον προσαναπολιωτό της.

(iii) Η καμπυλότητα Gauss του κυλίνδρου είναι σταθερή μηδέν, ενώ η μέση καμπυλότητα του κυλίνδρου ακτίνας  $a$  είναι σταθερή  $\pm \frac{1}{2a}$ , ανάλογα με τον προσαναπολιωτό του.

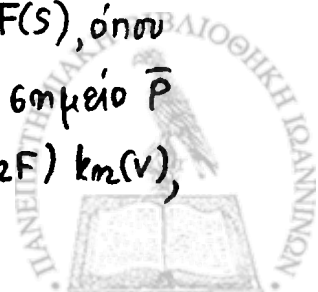
Άσκηση 3.5.2. Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα των κάθετων καμπυλότητων μιας επιφάνειας  $S$  σε ένα σημείο  $P = X(u, v)$ , ως προς δύο οποιεσδήποτε κάθετες διευθύνσεις είναι σταθερό και ίσο με  $2H(u, v)$ , όπου  $H$  είναι η συνάρτηση μέσης καμπυλότητας.

Άσκηση 3.5.3. Στο σημείο  $P = X(u, v)$  μιας επιφάνειας  $S$  δίνεται ένα σταθερό διάνυσμα  $v \in S'_P$ . Αν  $k_n(\theta)$  είναι η κάθετη καμπυλότητα της  $S$  στο  $P$  και στη διεύθυνση που  $u(\theta) \in S'_P$ , που σχηματίζει γωνία  $\theta \in [0, \pi]$  με το  $v$ , να αποδειχθεί η σχέση

$$H(u, v) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi k_n(\theta) d\theta.$$

Θεώρημα 3.5.16. Έστωσαν  $S$  επιφάνεια με παραμετρική παράσταση  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  και  $v \in S'_P$  ένα κύριο διάνυσμα στο  $P = X(u, v)$  με αντίστοιχη κύρια καμπυλότητα  $k_n(v)$ . Έστωσαν, επίσης,  $K(u, v)$  και  $H(u, v)$  η καμπυλότητα Gauss και η μέση καμπυλότητα στο σημείο  $X(u, v)$ , αντίστοιχα.

I) Αν  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  είναι μια ισομετρία του  $\mathbb{R}^3$ , η επιφάνεια  $F(S)$  έχει παραμετρική παράσταση  $Y = F \circ X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Τότε ισχύουν τα εξής: (i) Το διάνυσμα  $\bar{v} = dF(v) \in T'_P F(S)$ , όπου  $\bar{P} = F(P)$ , είναι κύριο διάνυσμα της  $F(S)$  στο σημείο  $\bar{P}$  με αντίστοιχη κύρια καμπυλότητα  $\bar{k}_n(\bar{v}) = (\text{sign} F) k_n(v)$ ,





(ii)  $\bar{K}(u,v) = K(u,v)$  και  $\bar{H}(u,v) = (\text{sign } F) H(u,v)$ , όπου με περιγραφόμενη (-) έχουμε συμβολίσει στοιχεία της επιφάνειας  $F(S)$ , ως προς το σύστημα συντεταγμένων  $\gamma$ .

II). Αν  $h: \bar{U} \subset \bar{\mathbb{R}}^2 \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ ,  $h(\bar{u}, \bar{v}) = (u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))$  είναι μια επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρου, τότε ισχύουν τα εξής:

(i)  $\bar{k}_n(\bar{u}, \bar{v}) = \pm k_n \circ h(\bar{u}, \bar{v})$ , (ii)  $\bar{K}(\bar{u}, \bar{v}) = K \circ h(\bar{u}, \bar{v})$  και  $\bar{H}(\bar{u}, \bar{v}) = \pm H \circ h(\bar{u}, \bar{v})$ , όπου με περιγραφόμενη (-) έχουμε συμβολίσει στοιχεία της  $S$ , ως προς την παραμετρική παράσταση  $\gamma = \chi \circ h: \bar{U} \subset \bar{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Το πρόσημο + (αντίστοιχα, το -) αναφέρεται σε επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρου, που διατηρούν (αντίστοιχα, αντιστρέφουν) τον προσανατολισμό της επιφάνειας  $S$ .

Απόδειξη. I) Είναι φανερό (γιατί;) ότι το διάνυσμα  $\bar{v} = dF(v)$  είναι μοναδιαίο διάνυσμα και βρίσκεται στο εφαπτόμενο επίπεδο  $T_{\bar{P}} F(S)$ , όπου  $\bar{P} = F(P)$ , της επιφάνειας  $F(S)$ . Εξ άλλου, αφού το  $v$  είναι κύριο διάνυσμα, θα ισχύει η σχέση  $L(v) = k_n(v)v$  σύμφωνα με την πρόταση 3.5.12. Από την σχέση (3.4.12)' θα πάρουμε

$$\begin{aligned} \bar{L}(\bar{v}) &= (\text{sign } F) dF \circ L \circ (dF)^{-1}(dF(v)) = (\text{sign } F) dF(L(v)) \\ &= (\text{sign } F) dF(k_n(v)v) = (\text{sign } F) k_n(v) dF(v) \\ &= (\text{sign } F) k_n(v) \bar{v}. \end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, το  $\bar{v}$  είναι κύριο διάνυσμα με αντίστοιχη κύρια καμπυλότητα  $\bar{k}_n(\bar{v}) = (\text{sign } F) k_n(v)$ . Η απόδειξη της (ii) είναι άμεση από το (i).

II) Η απόδειξη προκύπτει άμεσα, λόγω της Πρότασης 3.4.6 και του ορισμού της κάθετης καμπυλότητας.



Παρατήρηση 3.5.17. Η καμπυλότητα Gauss είναι η μόνη καμπυλότητα, που δεν αλλάζει πρόσημο σε ισοθεπίες του  $\mathbb{R}^3$  και επιτερετές αλλαγές παραμέτρου.

Στο Παράδειγμα 3.4.24. αφοηθήκαμε με την επιφάνεια του Τόρου. Βρήκαμε ότι, σε κάθε σημείο  $X(u,v)$ , τα διανύσματα  $X_u(u,v)$ ,  $X_v(u,v)$  είναι ιδιοδιανύσματα της απεικόνισης Weingarten με ιδιοτιμές  $\frac{1}{r}$  και  $\frac{\cos u}{a+r \cos u}$ , αντίστοιχα. Άρα, σύμφωνα με την Πρόταση 3.5.12, θα έχουμε  $k_1(u,v) = \frac{1}{r}$  και  $k_2(u,v) = \frac{\cos u}{a+r \cos u}$ . Συνεπώς,

$$K(u,v) = \frac{\cos u}{r(a+r \cos u)} \quad \text{και} \quad H(u,v) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} + \frac{\cos u}{a+r \cos u} \right).$$

Όμως, δεν είναι πάντοτε εύκολο να υπολογίσουμε τις κύριες καμπυλότητες  $k_1(u,v)$ ,  $k_2(u,v)$ , ώστε να βρούμε την καμπυλότητα Gauss και την μέση καμπυλότητα. Για το λόγο αυτό η παρακάτω πρόταση έχει αξία.

Πρόταση 3.5.18. Έστωσαν, επιφάνεια  $S$  και  $\{v, w\}$  μια βάση των διανυσμάτων του  $T_{\mathbb{P}}S$  (όχι αναγκαστικά ορθοκανονική βάση), όπου  $P = X(u,v)$ . Τότε ισχύουν οι σχέσεις:

$$(3.5.6) \quad L(v) \times L(w) = K(u,v) v \times w$$

$$(3.5.7) \quad L(v) \times w + v \times L(w) = 2H(u,v) v \times w,$$

όπου  $L$  είναι η απεικόνιση Weingarten της επιφάνειας  $S$  στο σημείο  $X(u,v)$ .

Απόδειξη. Γράψουμε τα διανύσματα  $L(v)$ ,  $L(w)$  ως προς τη βάση  $\{v, w\}$ . Έστω,



$$\begin{aligned} (*) \quad L(v) &= a_{11}v + a_{21}w \\ L(w) &= a_{12}v + a_{22}w. \end{aligned}$$

Ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης  $L$  ως προς τη βάση  $\{v, w\}$  είναι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Από τη Γραμμική Άλγεβρα γνωρίζουμε ότι, η ορίζουσα και το ίχνος αυτού του πίνακα παραμένουν αναλλοίωτα (δεν αλλάζουν), όταν αλλάξουμε βάση στο  $T_P S$  και βρούμε τον νέο πίνακα της  $L$ , ως προς τη νέα βάση. Αυτούς του αριθμούς θα συμβολίσουμε, για τον λόγο αυτό, με  $\det L$  και  $\text{trace } L$ . Σύμφωνα με τη Πρόταση 3.5.11, στο δηλείο  $P = X(u, v)$ , υπάρχει μια ορθοκανονική βάση  $\{e_1, e_2\}$ , τέτοια ώστε,  $Le_1 = k_1(u, v)e_1$ ,  $Le_2 = k_2(u, v)e_2$ . Ο πίνακας της απεικόνισης  $L$ , ως προς αυτή τη βάση, είναι ο

$$B = \begin{pmatrix} k_1(u, v) & 0 \\ 0 & k_2(u, v) \end{pmatrix}.$$

Συνοψώς,

$$\begin{aligned} (*) \quad K(u, v) &= k_1(u, v)k_2(u, v) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ \text{ε} \quad H(u, v) &= k_1(u, v) + k_2(u, v) = a_{11} + a_{22}. \end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (\*) λαμβάνουμε

$$L(v) \times L(w) = (a_{11}v + a_{21}w) \times (a_{12}v + a_{22}w) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})v \times w$$

και

$$L(v) \times w + v \times L(w) = (a_{11}v + a_{21}w) \times w + v \times (a_{12}v + a_{22}w) = (a_{11} + a_{22})v \times w.$$

Οι τελευταίες σχέσεις, με χρήση των (\*\*), δείχνουν τις προς απόδειξη σχέσεις (3.5.6) και (3.5.7).



Άσκηση 3.5.4. Να αναλύει οι σχέσεις (3.5.6) και (3.5.7), ως προς  $K(u,v)$  και  $H(u,v)$ .

Ειδικά, για  $v = X_u(u,v)$  και  $W = X_v(u,v)$ , οι σχέσεις (3.5.6) και (3.5.7) γίνονται, αντίστοιχα,

$$(3.5.8) \quad L(X_u(u,v)) \times L(X_v(u,v)) = K(u,v) X_u(u,v) \times X_v(u,v),$$

$$(3.5.9) \quad L(X_u(u,v)) \times X_v(u,v) + X_u(u,v) \times L(X_v(u,v)) = 2H(u,v) X_u(u,v) \times X_v(u,v).$$

Πολλαπλασιάζοντας τις (3.5.8), (3.5.9) εσωτερικά με  $X_u(u,v) \times X_v(u,v)$  και αφαιρώντας υπόψη την Άσκηση 1.1.4 (ii) λαμβάνουμε

$$K(u,v) = \frac{L(u,v)N(u,v) - M^2(u,v)}{E(u,v)G(u,v) - F^2(u,v)}$$

και

$$H(u,v) = \frac{E(u,v)N(u,v) - 2F(u,v)M(u,v) + G(u,v)L(u,v)}{2(E(u,v)G(u,v) - F^2(u,v))}$$

ή

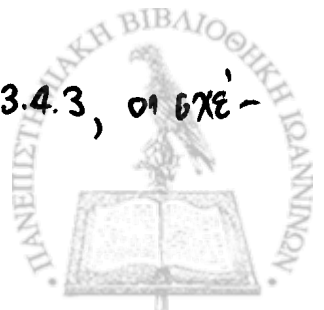
$$(3.5.10) \quad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

και

$$(3.5.11) \quad H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}.$$

Οι σχέσεις (3.5.10), (3.5.11) δίνουν τις συναρτήσεις καμπυλότητας Gauss και κέρως καμπυλότητας, συναρτήσεις των θεμελιωδών μεγεθών πρώτης και δεύτερης τάξης.

Εξάλλου, λαμβάνοντας υπόψη την Πρόταση 3.4.3, οι σχέσεις (3.5.8), (3.5.9) γράφονται, αντίστοιχα, ως



$$(3.5.12) \quad \eta_u(u,v) \times \eta_v(u,v) = K(u,v) X_u(u,v) \times X_v(u,v)$$

$$(3.5.13) \quad \eta_u(u,v) \times X_v(u,v) + X_u(u,v) \times \eta_v(u,v) = -2 H(u,v) X_u(u,v) \times X_v(u,v):$$

Λέμμα 3.5.5. Αν όλα τα εφαπτόμενα επίπεδα μιας επιφάνειας  $S$  είναι παράλληλα προς σταθερή ευθεία ( $\varepsilon$ ), να αποδειχθεί ότι η καμπυλότητα Gauss της  $S$  είναι παντού μηδέν.

Λέμμα 3.5.6. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε σημείο μιας επιφάνειας  $S$  ισχύει,  $H^2 - K \geq 0$ . Η ισότητα ισχύει, αν και μόνο αν το σημείο είναι ομφαλικό.

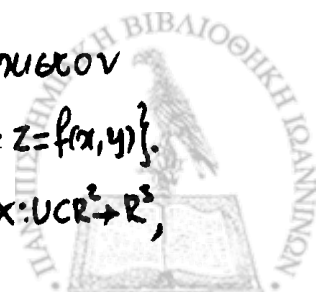
Πρόταση 3.5.19. Οι κύριες καμπυλότητες  $k_1(u,v), k_2(u,v)$  μιας επιφάνειας  $S$ , δίνονται από τις σχέσεις

$$(3.5.14) \quad \begin{aligned} k_1 &= H + \sqrt{H^2 - K} \\ k_2 &= H - \sqrt{H^2 - K} \end{aligned}$$

Απόδειξη. Είναι άμεση, αφού  $k_1 k_2 = K$  και  $k_1 + k_2 = 2H$ .

Παρατήρηση 3.5.20. Οι συναρτήσεις  $K, H$  είναι τουλάχιστον  $C^1$ -κάξες, όταν η επιφάνεια  $S$  είναι τουλάχιστον  $C^3$ -κάξης (γιατί;). Εξάλλου, οι συναρτήσεις  $k_1, k_2$  είναι τότε συνεχείς στο  $UCR^2$  αλλά όχι πάντα  $C^1$ -κάξες σε ολόκληρο το  $U$  (γιατί;)

Παραδειγμα 3.5.21 Έστω συνάρτηση  $f: UCR^2 \rightarrow \mathbb{R}$  τουλάχιστον  $C^2$ -κάξης. Θεωρούμε την επιφάνεια γραφήκα  $\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y)\}$ . Ένα σύστημα συνεσφαγμένων αυτής είναι η απεικόνιση,  $\chi: UCR^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,



$X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ . Άρα,

$$X_u(u, v) = (1, 0, f_u(u, v)), \quad X_v(u, v) = (0, 1, f_v(u, v)),$$

$$X_{uu}(u, v) = (0, 0, f_{uu}(u, v)), \quad X_{uv}(u, v) = (0, 0, f_{uv}(u, v)), \quad X_{vv}(u, v) = (0, 0, f_{vv}(u, v)),$$

$$E(u, v) = 1 + f_u^2(u, v), \quad F(u, v) = f_u(u, v) f_v(u, v), \quad G(u, v) = 1 + f_v^2(u, v),$$

$$n(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1 + f_u^2(u, v) + f_v^2(u, v)}} (-f_u(u, v), -f_v(u, v), 1).$$

Συνεπώς, τα θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης, ως προς το σύστημα συντεταγμένων  $X$ , δίνονται από τις σχέσεις

$$L(u, v) = \langle X_{uu}(u, v), n(u, v) \rangle = \frac{f_{uu}(u, v)}{\sqrt{1 + f_u^2(u, v) + f_v^2(u, v)}},$$

$$M(u, v) = \langle X_{uv}(u, v), n(u, v) \rangle = \frac{f_{uv}(u, v)}{\sqrt{1 + f_u^2(u, v) + f_v^2(u, v)}},$$

$$N(u, v) = \langle X_{vv}(u, v), n(u, v) \rangle = \frac{f_{vv}(u, v)}{\sqrt{1 + f_u^2(u, v) + f_v^2(u, v)}}.$$

Άρα η καμπυλότητα Gauss και η μέση καμπυλότητα ενός γραφήματος δίνονται από τις σχέσεις

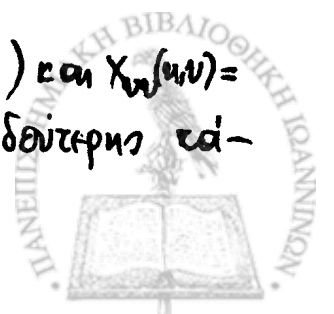
$$(3.5.15) \quad K = \frac{f_{uu} f_{vv} - f_{uv}^2}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^2},$$

$$(3.5.16) \quad H = \frac{(1 + f_u^2) f_{vv} - 2 f_u f_v f_{uv} + (1 + f_v^2) f_{uu}}{2 (1 + f_u^2 + f_v^2)^{3/2}}.$$

Παράδειγμα 3.5.22. Θεωρούμε την επιφάνεια του Παραδείματος 3.3.21, δηλαδή το ελικοειδές. Ο παρανακατασκευαστής του είναι ο

$$r(u, v) = \frac{1}{\sqrt{b^2 + a^2 u^2}} (b \sin au, -b \cos au, au).$$

Επειδή,  $X_{uu}(u, v) = (0, 0, 0)$ ,  $X_{uv}(u, v) = (-a \sin au, a \cos au, 0)$  και  $X_{vv}(u, v) = (-a^2 \cos au, -a^2 \sin au, 0)$ , τα θεμελιώδη μεγέθη δεύτερης τά-



ξής είναι τα εξής:  $L(u,v) = 0$ ,  $M(u,v) = \frac{-ab}{\sqrt{b^2 + a^2 u^2}}$  και  $N(u,v) = 0$ .

Συνεπώς, η καμπυλότητα Gauss και η μέση καμπυλότητα του ελικοειδούς στο σημείο  $(u,v)$  δίνονται από τις σχέσεις

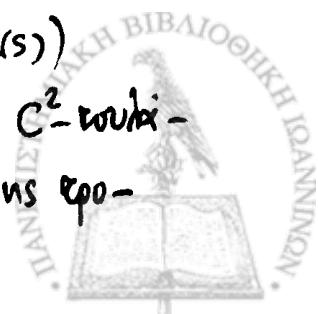
$$K(u,v) = -\frac{a^2 b^2}{(b^2 + a^2 u^2)^2}, \quad H(u,v) = 0.$$

Παρατηρούμε ότι, η μέση καμπυλότητα του ελικοειδούς είναι σταθερά ίση με μηδέν.

Ορισμός 3.5.23. Μια επιφάνεια  $S$  με παραμετρική παράσταση  $\chi: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , λέγεται επιφάνεια σταθερής καμπυλότητας Gauss, αν η συνάρτηση καμπυλότητας Gauss είναι σταθερή. Δηλαδή,  $K(u,v) = c$ , για κάθε  $(u,v) \in U$ . Η επιφάνεια  $S$  λέγεται επιφάνεια ελάχιστης έκτασης (minimal surface), αν η μέση καμπυλότητα είναι μηδέν παντού, δηλαδή  $H(u,v) = 0$  για κάθε  $(u,v) \in U$ .

Παρατήρηση 3.5.24. Το επίπεδο, η σφαίρα και ο κύλινδρος είναι επιφάνειες σταθερής καμπυλότητας Gauss. Το επίπεδο και το ελικοειδές είναι επιφάνειες ελάχιστης έκτασης. Άλλες επιφάνειες σταθερής καμπυλότητας Gauss θα εξετάζονται στη Παράγραφο 3.7. Στη Παράγραφο 3.7. θα ασχοληθούμε διεξοδικότερα και με τις επιφάνειες ελάχιστης έκτασης.

Παράδειγμα 3.5.25. Έστω  $\chi: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\chi(s) = (f(s), 0, g(s))$  απλή καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου, τάξης  $C^2$ -κωλύ-  
χικον και  $f'(s) > 0$ , για κάθε  $s \in I$ . Με περιστροφή της εφο-



χιάς  $\gamma(I)$  περί τον άξονα  $Oz$ , παράγει επιφάνεια  $S$  εκ περιστροφής με παραμετρική παράσταση  $X: D = I \times [0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  
 $X(s, \varphi) = (f(s)\cos\varphi, f(s)\sin\varphi, g(s))$ . Άρα,  $X_s(s, \varphi) = (f'(s)\cos\varphi, f'(s)\sin\varphi, \dot{g}(s))$ ,  
 $X_\varphi(s, \varphi) = (-f(s)\sin\varphi, f(s)\cos\varphi, 0)$ .  $E(s, \varphi) = \dot{f}^2(s) + \dot{g}^2(s) = 1$ , αφού  
 η  $\gamma$  έχει παράμετρο το μήκος τόξου,  $F(s, \varphi) = 0$ ,  $G(s, \varphi) = f^2(s)$   
 και  $E(s, \varphi)G(s, \varphi) - F^2(s, \varphi) = f^2(s)$ . Εξάλλου,

$\kappa(s, \varphi) = (-\dot{g}(s)\cos\varphi, -\dot{g}(s)\sin\varphi, \ddot{f}(s))$ ,  $X_{ss}(s, \varphi) = (\ddot{f}(s)\cos\varphi, \ddot{f}(s)\sin\varphi, \ddot{g}(s))$ ,  
 $X_{s\varphi}(s, \varphi) = (-\dot{f}(s)\sin\varphi, \dot{f}(s)\cos\varphi, 0)$ ,  $X_{\varphi\varphi}(s, \varphi) = (-f(s)\cos\varphi, -f(s)\sin\varphi, 0)$ . Άρα,  
 τα θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης είναι:  $L(s, \varphi) = -\dot{f}(s)\dot{g}(s) + \ddot{g}(s)f(s)$ ,  
 $M(s, \varphi) = 0$ ,  $N(s, \varphi) = f(s)\ddot{g}(s)$ . Να σημειώσουμε ότι τα θεμελιώδη μεγέθη  
 πρώτης και δεύτερης τάξης είναι ανεξάρτητα από τη παράμετρο  $\varphi$ .

Για την καμπυλότητα Gauss και τη μέση καμπυλότητα θα έχουμε  
 τις σχέσεις

$$(3.5.17) \quad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{f\dot{g}(\ddot{f}\ddot{g} - \ddot{g}\ddot{f})}{f^2}$$

και

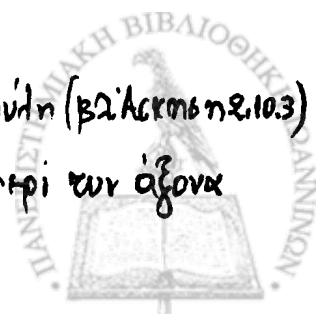
$$(3.5.18) \quad H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{g}}{f} - \ddot{f}\ddot{g} + \ddot{g}\ddot{f} \right).$$

Εξάλλου, επειδή  $\dot{f}^2 + \dot{g}^2 = 1$  και συνεπώς  $\dot{f}\ddot{f} + \dot{g}\ddot{g} = 0$ , η σχέση (3.5.17)  
 απλοποιείται περισσότερο και παίρνει τη μορφή

$$(3.5.19) \quad K = -\frac{\ddot{f}}{f}, \text{ δηλαδή } K(s, \varphi) = -\frac{\ddot{f}(s)}{f(s)}.$$

Παρατηρούμε ότι η καμπυλότητα Gauss και η μέση καμπυλότητα είναι σταθερά κατά μήκος κάθε παράλληλου κύκλου στη επιφάνεια εκ περιστροφής.

Άσκηση 3.5.7. Θεωρούμε την αλυσοειδή καμπύλη (βλ. άσκηση 10.3)  
 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma(t) = (a \cosh(\frac{t}{a} + b), 0, t)$ . Με περιστροφή περί των άξονα





Όσ παίρνουμε μια επιφάνεια εκ περιστροφής, γνωστή στη Βιβλιογραφία ως αλυσοειδής (Catenoid). Να αποδειχθεί ότι η μέση καμπυλότητα του αλυσοειδούς είναι παντού ίση με μηδέν.

Παρατήρηση 3.5.26. Από τη σχέση (3.5.10) προκύπτει μια διάσυνδεση του προσήμου της Καμπυλότητας Gauss μιας επιφάνειας  $S$ , σε ένα σημείο  $X(u,v)$ , και του είδους αυτού του σημείου (δηλαδή, αν είναι ελλειπτικό, υπερβολικό, παραβολικό ή ισόπεδο σημείο). Έτσι, το σημείο  $X(u,v)$  είναι ελλειπτικό (αντίστοιχα, υπερβολικό), αν  $K(u,v) > 0$  (αντίστοιχα,  $K(u,v) < 0$ ). Το σημείο  $X(u,v)$  είναι παραβολικό, αν  $K(u,v) = 0$  και  $H(u,v) \neq 0$ . Τέλος, το σημείο  $X(u,v)$  είναι ισόπεδο σημείο, αν  $K(u,v) = H(u,v) = 0$  (γιατί;).

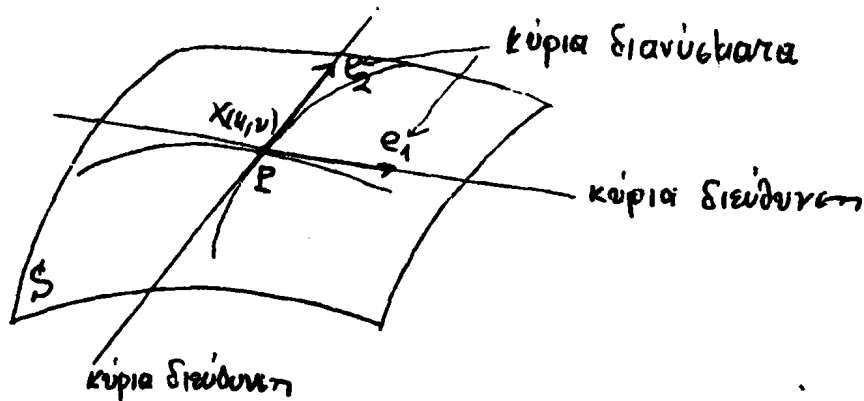
Άσκηση 3.5.8. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(u,v) = uv^3$ . Να εξετασθεί το είδος των σημείων του γραφήματος  $\Gamma_f$  της  $f$ .

Άσκηση 3.5.9. Να αποδειχθεί ότι, σε κάθε σημείο  $P = X(u,v)$  μιας επιφάνειας  $S$  και για κάθε διάνυσμα  $v \in T_P S$ , ισχύει η σχέση  $L^2(v) - 2H(u,v)L(v) + K(u,v)v = 0$ , όπου  $L^2(v) = L(L(v))$ . Η τετραγωνική μορφή  $\text{III}: T_P S \rightarrow \mathbb{R}$ , που ορίζεται ως  $\text{III}(v) = \langle L^2(v), v \rangle$ , λέγεται επίσημη δευτερεύουσα μορφή της επιφάνειας  $S$  στο σημείο  $X(u,v)$ . Να αποδειχθεί η σχέση  $\text{III} - 2H\text{II} + K\text{I} = 0$ .

Στη Πρόταση 3.5.11 διαπιστώσαμε ότι, σε κάθε σημείο  $P = X(u,v)$  μιας επιφάνειας  $S$ , υπάρχουν τουλάχιστον δύο κύριες διευθύνσεις,



που είναι ορθογώνιες. Ειδικά, αν το σημείο  $P$  δεν είναι ομφαλικό, τότε με την Πρόταση 3.5.12 βεβαιώνεται ότι, υπάρχουν ακριβώς δύο ορθογώνιες κύριες διευδύνσεις στο σημείο  $P = X(u, v)$ .



Ορισμός 3.5.27. Έστω  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$  μια κανονική καμπύλη της επιφάνειας  $S$ . Η καμπύλη  $\gamma$  λέγεται γραμμική καμπυλότητα (line of curvature) της επιφάνειας  $S$ , αν για κάθε  $t \in I$  η εφαπτομένη ευθεία της  $\gamma$  είναι κύρια διεύθυνση της επιφάνειας  $S$ .

Για παράδειγμα στη σφαίρα και στο επίπεδο κάθε καμπύλη είναι γραμμική καμπυλότητα, αφού σε αυτές τις επιφάνειες, σε κάθε σημείο κάθε διεύθυνση είναι κύρια διεύθυνση. Εξάλλου στο Παράδειγμα 3.4.24 διαπιστώσαμε ότι, τα διανύσματα  $X_u(u, v), X_v(u, v)$  τα οποία ως γνωστόν είναι τα διανύσματα ταχύτητας των παραμετρικών γραμμών, είναι ιδιοδιανύσματα της σπεικόνισης Weingarten και ως εκ τούτου έχουν κύριες διευδύνσεις, σύμφωνα με την Πρόταση 3.5.12. Άρα, οι παραμετρικές γραμμές αυτής της παραμετρικής παράστασης του Τόρου είναι γραμμές καμπυλότητας του Τόρου.



· Πριν διατυπώσουμε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη, ώστε μια κανονική καμπύλη της επιφάνειας  $S$  να είναι γραμμική καμπυλό-επτας, θα δούμε μερικές σχέσεις και συμβολισμούς.

Έστω,  $S$  επιφάνεια με παραμετρική παράσταση  $\chi: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  και αντίστροφο προαναασολιστό  $\eta: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Θεωρούμε ένα μη μηδενικό διάνυσμα  $v \in T_p S$ . Το διάνυσμα  $v$  γράφεται κατά μο-νοσήμαντο τρόπο ως  $v = \alpha \chi_u(u,v) + \beta \chi_v(u,v)$ , όπου  $\alpha, \beta$  είναι οι συνιστώσες του  $v$ , ως προς τη βάση  $\chi_u(u,v), \chi_v(u,v)$ . Προφανώς,  $\alpha \chi_u(u,v) + \beta \chi_v(u,v) = d\chi(\alpha e_1 + \beta e_2)$ , όπου  $\{e_1, e_2\}$  είναι η συνή-θης βάση του  $\mathbb{R}^2$ . Άρα,

$$(3.5.20) \quad v = d\chi(\alpha e_1 + \beta e_2) \quad \underline{\text{δέσμευε}} \quad d\chi(\alpha, \beta).$$

Δηλαδή, το  $v$  είναι, με τη παράγωγο απεικόνιση  $d\chi$ , εικόνα ενός διανύσματος του  $T_{(u,v)} \mathbb{R}^2$  με τις ίδιες συνιστώσες  $(\alpha, \beta)$ , ως προς τη συνήθη βάση  $\{e_1, e_2\}$ . Από την σχέση (3.5.20) λαμβάνου-με

$$(d\chi)^{-1}(v) = (\alpha, \beta) \quad \text{και} \quad d\eta \circ (d\chi)^{-1}(v) = d\eta(\alpha, \beta).$$

Συνεπώς,

$$(3.5.21) \quad -L(v) = d\eta(\alpha, \beta),$$

όπου  $L$  είναι η απεικόνιση Weingarten της επιφάνειας  $S$  στο σημείο  $\chi(u,v)$ . Από την σχέση (3.5.21) προκύπτει η πρόταση.

Πρόταση 3.5.28. Ένα διάνυσμα  $v = \alpha \chi_u(u,v) + \beta \chi_v(u,v) \in T_p S$  έχει κύρια διεύθυνση, στο σημείο  $p = \chi(u,v)$ , αν και μόνο αν ισχύει η σχέση

$$(3.5.22) \quad d\eta(\alpha, \beta) + k d\chi(\alpha, \beta) = 0,$$

όπου  $k$  είναι ένας πραγματικός αριθμός. Στη περίπτωση αυτή



ο αριθμός  $k$  είναι κύρια καμπυλότητα της επιφάνειας  $S$  στο σημείο  $X(u,v)$ .

Παρατήρηση 3.5.29 (ii) Η σχέση (3.5.22) αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως, τύπος του Rodrigues και συχνά γράφεται υπό τη μορφή

$$(3.5.23) \quad d\eta + k dx = 0.$$

(ii) Ειδικά, το διάνυσμα  $X_u(u,v)$  (δηλαδή,  $\alpha=1, \beta=0$ ) έχει κύρια διεύθυνση, με αντίστοιχη κύρια καμπυλότητα  $k$ , αν και μόνο αν  $d\eta(1,0) + k dx(1,0) = 0$  ή  $\eta_u(u,v) + k X_u(u,v) = 0$ . Όμοια το  $X_v(u,v)$  έχει κύρια διεύθυνση, με αντίστοιχη κύρια καμπυλότητα  $k$ , αν και μόνο αν ισχύει η σχέση  $\eta_v(u,v) + k X_v(u,v) = 0$ .

Απόδειξη της Πρότασης 3.5.28: Έστω ότι το  $v$  έχει κύρια διεύθυνση. Τότε, πρέπει να είναι ιδιοδιάνυσμα της απεικόνισης Weingarten με αντίστοιχη ιδιοτιμή κάποια κύρια καμπυλότητα, έστω  $k$ . Δηλαδή,

$$(*) \quad L(v) = kv.$$

Τότε,  $-d\eta \circ (dx)^{-1}(v) = kv$  και συνεπώς  $-d\eta \circ (dx)^{-1}(dx(a,b)) = k dx(a,b)$ .

Άρα,  $-d\eta(a,b) = k dx(a,b)$ , αφού  $(dx)^{-1} \circ dx = I$  (καυτότητα). Από τη τελευταία σχέση προκύπτει η σχέση (3.5.22).

Αντίστροφα, ακολουθώντας την αντίστροφη πορεία φθάνουμε στην (\*), η οποία δηλώνει ότι το διάνυσμα  $v$  έχει κύρια διεύθυνση, σύμφωνα με τη Πρόταση 3.5.12, στο σημείο  $X(u,v)$  της επιφάνειας  $S$ .

Από τη Πρόταση 3.5.28, προκύπτει άμεσα το εξής Πρόλημα.



Πόρισμα 3.5.30. Μια κανονική καμπύλη  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3, \gamma(t) = X(u(t), v(t))$  της επιφάνειας  $S$  είναι γραμμική καμπυλότητα, αν και μόνο αν ισχύει η σχέση

$$(3.5.24) \quad d\kappa(u'(t), v'(t)) + k(t) dX(u'(t), v'(t)) = 0,$$

όπου  $k(t)$  είναι μια συνάρτηση του  $t \in I$  και εκφράζει κύρια καμπυλότητα της επιφάνειας  $S$  στο σημείο  $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$ .

Η παρακάτω παρατήρηση σκοπό έχει να διευκρινίσει περισσότερο τις σχέσεις (3.5.22) και (3.5.24), προκειμένου να καταστούν χρήσιμες στις εφαρμογές.

Παρατήρηση 3.5.31. Η σχέση (3.5.22) γράφεται και με τη μορφή  $a\pi_u(u,v) + b\pi_v(u,v) + k(aX_u(u,v) + bX_v(u,v)) = 0$ , η οποία είναι ισοδύναμη με τις (αν πολλαπλασιάσουμε εσωτερικά με  $X_u(u,v)$  και  $X_v(u,v)$ )

$$(3.5.25) \quad \begin{cases} \alpha L(u,v) + \beta M(u,v) - k(\alpha E(u,v) + \beta F(u,v)) = 0 \\ \alpha M(u,v) + \beta N(u,v) - k(\alpha F(u,v) + \beta G(u,v)) = 0 \end{cases}$$

ή

$$(3.5.26) \quad \begin{cases} (L(u,v) - kE(u,v))\alpha + (M(u,v) - kF(u,v))\beta = 0 \\ (M(u,v) - kF(u,v))\alpha + (N(u,v) - kG(u,v))\beta = 0 \end{cases}.$$

Το σύστημα (3.5.25) κοιτάζοντας το ως ομογενές σύστημα με αγνώστους  $(\alpha, \beta)$ , είναι ισοδύναμο με την εξίσωση

$$(3.5.27) \quad (L(u,v)F(u,v) - M(u,v)E(u,v))\alpha^2 + (L(u,v)G(u,v) - E(u,v)N(u,v))\alpha\beta + (M(u,v)G(u,v) - N(u,v)F(u,v))\beta^2 = 0.$$

Όμοια, το σύστημα (3.5.26) είναι ομογενές ως προς  $\alpha, \beta$  και εξυπυδύναμο  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ . Συνεπώς, είναι ισοδύναμο με την εξίσωση



$$(3.5.28) \quad (E(u,v)G(u,v) - F^2(u,v))k^2 - (E(u,v)N(u,v) + L(u,v)G(u,v) - 2M(u,v)F(u,v))k + L(u,v)N(u,v) - M^2(u,v) = 0.$$

Αν το διάνυσμα  $v = \alpha X_u(u,v) + \beta X_v(u,v)$  ( $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ ) έχει κύρια διεύθυνση, κάθε πολλαπλάσιο του  $v$  έχει κύρια διεύθυνση. Έτσι, από την εξίσωση (3.5.27) μπορούμε να υπολογίσουμε τους λόγους  $\frac{\alpha}{\beta}$  ή  $\frac{\beta}{\alpha}$ , έτσι ώστε το διάνυσμα  $v$  ή κάθε πολλαπλάσιο του να έχει κύρια διεύθυνση. Εξάλλου από την εξίσωση (3.5.28) μπορούμε να βρούμε τις κύριες καμπυλότητες στο σημείο  $X(u,v)$ .

Άσκηση 3.5.10. Να διαπιστωθεί ότι η εξίσωση (3.5.28) έχει μη αρνητική διακρίνουσα. Συνεπώς, οι δύο πραγματικές λύσεις αυτή είναι οι κύριες καμπυλότητες της επιφάνειας  $S$  στο σημείο  $X(u,v)$ . Μπορούν, εύρα, να προκύψουν οι σχέσεις (3.5.10) και (3.5.11);

Με τη σχέση (3.5.27) βρίσκουμε ότι, η κανονική καμπύλη  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$  είναι γραμμική καμπυλότητας της επιφάνειας  $S$ , αν οι συναρτήσεις  $u(t), v(t)$ ,  $t \in I$ , πληρούν την διαφορική εξίσωση

$$(3.5.29) \quad (L(u(t), v(t))F(u(t), v(t)) - M(u(t), v(t))E(u(t), v(t)))(u'(t))^2 + (L(u(t), v(t))G(u(t), v(t)) - E(u(t), v(t))N(u(t), v(t)))u'(t)v'(t) + (M(u(t), v(t))G(u(t), v(t)) - N(u(t), v(t))F(u(t), v(t)))(v'(t))^2 = 0.$$

Άρα, προκειμένου να βρούμε τις καμπύλες που είναι γραμμικές καμπυλότητας της επιφάνειας  $S$ , αρκεί να λύσουμε (!) την διαφορική εξίσωση (3.5.29), ως προς  $u(t), v(t)$ . Για μια λύση  $(u(t), v(t))$  η καμπύλη  $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$  θα είναι γραμμική καμπυλότητας της επιφάνειας  $S$ . Για λόγους απομνημόνευσης η εξίσωση (3.5.29) γράφεται και με τη μορφή



$$\begin{vmatrix} (u'(t))^2 & -u'(t)v'(t) & (u'(t))^2 \\ L(u(t), v(t)) & M(u(t), v(t)) & N(u(t), v(t)) \\ E(u(t), v(t)) & F(u(t), v(t)) & G(u(t), v(t)) \end{vmatrix} = 0.$$

Παράδειγμα 3.5.32. Ο ορθός κυκλικός κύλινδρος  $C$ , ακτίνας  $a$ , έχει παραμετρική παράσταση  $X: D = [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(u, v) = (a \cos u, a \sin u, v)$ . Με υπολογισμούς βρίσκουμε,  $E(u, v) = a^2$ ,  $F(u, v) = 0$ ,  $G(u, v) = 1$ ,  $L(u, v) = a$ ,  $M(u, v) = 0$  και  $N(u, v) = 0$ . Συνεπώς, η διαφορική εξίσωση των γραμμών καμπυλότητας είναι  $a u'(t)v'(t) = 0$ .

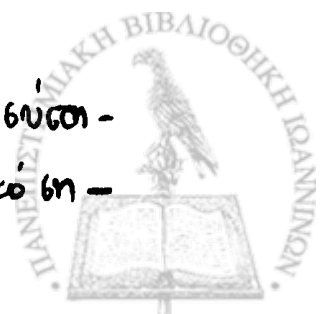
Οι λύσεις αυτές είναι οι:  $\{u(t) = \text{const.}, v = \text{αυθαίρετο}\}$ ,  $\{u = \text{αυθαίρετο}, v(t) = \text{const.}\}$ . Συνεπώς, οι γραμμές καμπυλότητας της επιφάνειας  $C$  είναι οι παραμετρικές γραμμές του εσωτήματος συντεταγμένων.

Άσκηση 3.5.11. Δίνεται επιφάνεια  $S$  με παραμετρική παράσταση  $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ . Να βρεθούν οι γραμμές καμπυλότητας αυτής της επιφάνειας.

Με αφορμή το Παράδειγμα 3.5.32 δίνουμε τον ορισμό

Ορισμός 3.5.33. Ένα σύστημα συντεταγμένων  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  της επιφάνειας  $S$  λέγεται σύστημα γραμμών καμπυλότητας, αν όλες οι παραμετρικές γραμμές του εσωτήματος  $X$  είναι γραμμές καμπυλότητας της επιφάνειας  $S$ .

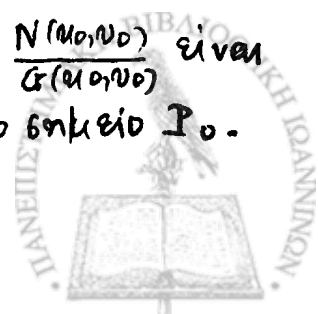
Πρόταση 3.5.34. Έστωσαν, επιφάνεια  $S$ ,  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ένα σύστημα συντεταγμένων της  $S$  και  $P_0 = X(u_0, v_0)$  ένα μη οφθαλμικό ση-



μείο αυτής. Οι παραμετρικές γραφές του ευστήχατος έχουν κύριες διευδύνσεις, στο σημείο  $P_0$ , αν και μόνο αν  $F(u_0, v_0) = M(u_0, v_0) = 0$ . Αν η επιφάνεια  $S$  δεν έχει ορθογώνια σημεία, τότε το σύστημα συντεταγμένων  $X$  είναι εύστηχα γραμμών καμπυλότητας, αν και μόνο αν ισχύουν, παντού, οι σχέσεις  $F = M = 0$ .

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι, οι παραμετρικές γραφές  $u = u_0$  και  $v = v_0$ , έχουν κύρια διεύθυνση στο σημείο  $X(u_0, v_0)$ . Τα διανύσματα  $X_u(u_0, v_0), X_v(u_0, v_0)$  είναι κάθετα, αφού το σημείο  $P_0$  είναι μη ορθογώνιο και ως εκ τούτου υπάρχουν ακριβώς δύο κύριες διευδύνσεις στο  $P_0$ , που είναι ορθογώνιες. Άρα,  $F(u_0, v_0) = \langle X_u(u_0, v_0), X_v(u_0, v_0) \rangle = 0$ . Τα διανύσματα  $X_u(u_0, v_0), X_v(u_0, v_0)$  είναι ιδιοδιανύσματα της απεικόνισης Weingarten  $L$  στο σημείο  $X(u_0, v_0)$ . Συνεπώς,  $L(X_u(u_0, v_0)) = \alpha X_u(u_0, v_0)$ , για κάποια σταθερά  $\alpha$ . Άρα,  $M(u_0, v_0) = \langle L(X_u(u_0, v_0)), X_v(u_0, v_0) \rangle = 0$ . Αντίστροφα, από τις σχέσεις  $F(u_0, v_0) = \langle X_u(u_0, v_0), X_v(u_0, v_0) \rangle = 0$ ;  $M(u_0, v_0) = \langle L(X_u(u_0, v_0)), X_v(u_0, v_0) \rangle = 0$ , συνάγουμε ότι το διάνυσμα  $L(X_u(u_0, v_0))$  είναι παράλληλο με το διάνυσμα  $X_v(u_0, v_0)$  και ως εκ τούτου είναι ιδιοδιάνυσμα της απεικόνισης  $L$ . Άρα, το  $X_u(u_0, v_0)$  έχει κύρια διεύθυνση. Όμοια, προχωράμε για το διάνυσμα  $X_v(u_0, v_0)$ . Το δεύτερο μέρος της πρότασης προκύπτει, άμεσα, από το πρώτο.

Άσκηση 3.5.12. Αν σε ένα σημείο σημείο  $P_0 = X(u_0, v_0)$  μιας επιφάνειας  $S$  οι παραμετρικές γραφές του ευστήχατος  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  έχουν κύριες διευδύνσεις, τότε οι αριθμοί  $\frac{L(u_0, v_0)}{E(u_0, v_0)}, \frac{N(u_0, v_0)}{G(u_0, v_0)}$  είναι οι κύριες καμπυλότητες της επιφάνειας  $S$  στο σημείο  $P_0$ .





Άσκηση 3.5.13. Έστω επιφάνεια  $S$ , τάξης  $C^3$  ασφαιρικών, χωρίς ομφαλικά σημεία. Αν  $\chi: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  είναι εύσητη γραμμών καμυλότητας της  $S$ , τότε ισχύει η σχέση

$$(k_2)_m - (k_1)_n = \frac{1}{2}(k_1 - k_2) \left( \frac{G_m}{G} + \frac{E_n}{E} \right).$$

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε μια άλλη κατηγορία καμυλών μιας επιφάνειας  $S$ . "

Ορισμός 3.5.35. Έστωσαν επιφάνεια  $S$  και  $P_0 \in S$  ένα σημείο της. Ένα μοναδιαίο διάνυσμα  $v \in S'_{P_0}$  λέγεται ασυμπτωτικό διάνυσμα (asymptotic vector) της επιφάνειας  $S$  στο σημείο  $P_0$ , αν η κούρση καμυλότητα  $k_2(v) = \langle L_n, v \rangle$  είναι μηδέν. Δηλαδή, αν  $k_2(v) = \langle L_n, v \rangle = 0$ . Αν το  $v$  είναι ασυμπτωτικό διάνυσμα, τότε η διεύθυνση που λέγεται ασυμπτωτική διεύθυνση της επιφάνειας  $S$  στο σημείο  $P_0$ .

Άσκηση 3.5.14. Έστω  $P_0$  ένα υπερβολικό σημείο της επιφάνειας  $S$ . Να αποδειχθεί ότι στο  $P_0$  υπάρχουν ακριβώς δύο ασυμπτωτικές διευθύνσεις, που διχοκομούνται από τις κύριες διευθύνσεις. Τι συμβαίνει σε ένα ελλειπτικό, παραβολικό ή ισόπεδο σημείο; (Υπόδειξη. Να χρησιμοποιηθεί ο τύπος του Euler, σχέση (3.5.5)).

Ορισμός 3.5.36. Μια κανονική καμυλή  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma(t) = \chi(u(t), v(t))$  της επιφάνειας  $S$  λέγεται ασυμπτωτική καμυλή (asymptotic curve) της επιφάνειας  $S$ , αν το διάνυσμα ταχύτητας  $\gamma'(t)$ , για κάθε  $t \in I$ , έχει ασυμπτωτική διεύθυνση.



Όπως στη περίπτωση των γραμμικών καμπυλότητας, θα βρούμε την εξίσωση από την οποία προκύπτουν οι αυστηρωτικές καμπύλες (γραμμές). Έστω,  $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$ ,  $t \in I$ , μια αυστηρωτική καμπύλη της επιφάνειας  $S$ . Τότε, το διάνυσμα  $\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$  είναι αυστηρωτικό διάνυσμα στο σημείο  $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$ , για κάθε  $t \in I$ . Άρα,

$$0 = k_n \left( \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \right) = \left\langle L \left( \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \right), \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \right\rangle = \frac{\langle L(\gamma'(t)), \gamma'(t) \rangle}{|\gamma'(t)|^2}$$

και συνεπώς

$$(3.5.30) \quad \langle L(\gamma'(t)), \gamma'(t) \rangle = 0, \text{ για κάθε } t \in I.$$

Δηλαδή, η κανονική καμπύλη  $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$  είναι αυστηρωτική καμπύλη, αν και μόνο αν ισχύει η σχέση (3.5.30). Επειδή,  $\gamma'(t) = X_u(u(t), v(t))u'(t) + X_v(u(t), v(t))v'(t)$ , συντηρείται η εξής πρόταση

Πρόταση 3.5.37. Μια κανονική καμπύλη  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$  είναι αυστηρωτική γραμμή της επιφάνειας  $S$ , αν και μόνο αν οι συναρτήσεις  $u(t), v(t)$  ικανοποιούν την διαφορική εξίσωση

$$(3.5.31) \quad L(u(t), v(t))(u'(t))^2 + 2M(u(t), v(t))u'(t)v'(t) + N(u(t), v(t))(v'(t))^2 = 0.$$

Η εύρεση των αυστηρωτικών γραμμών μιας επιφάνειας  $S$  ανάγεται στη λύση της διαφορικής εξίσωσης (3.5.31). Αν  $(u(t), v(t))$  είναι μια λύση, τότε η καμπύλη  $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$  είναι αυστηρωτική γραμμή της επιφάνειας.

Παράδειγμα 3.5.38. Θεωρούμε την επιφάνεια  $S$  με παρα-



μερική παράσταση  $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)$ . Με υπολογισμούς βρίσκουμε,

$$L(u,v) = \frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}, \quad M(u,v) = 0 \quad \text{και} \quad N(u,v) = \frac{-2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}.$$

Η διαφορική εξίσωση των ασυμπτωτικών γραμμών αυτής της επιφάνειας είναι η εξίσωση

$$2(u'(t))^2 - 2(v'(t))^2 = 0$$

ή

$$u'(t) + v'(t) = 0, \quad u'(t) - v'(t) = 0, \quad t \in I.$$

Από τις οποίες παίρνουμε,  $u(t) + v(t) = c_1$ ,  $u(t) - v(t) = c_2$ . Αυτές οι εξισώσεις στο επίπεδο  $\mathbb{R}^2$  παριστάνουν ευθείες παράλληλες προς τις διχοτόμους των αξόνων. Συνεπώς, οι ασυμπτωτικές γραμμές της επιφάνειας  $S$  είναι οι εικόνες αυτών των ευθειών με την απεικόνιση  $X$ .

Πρόταση 3.5.39. Οι ευθείες μιας επιφάνειας  $S$  είναι ασυμπτωτικές γραμμές της επιφάνειας.

Απόδειξη. Επειδή η εφαπτομένη ευθεία μιας καμπύλης και της αναπαράκλιπτώς της, με παράμετρο το μήκος τόξου είναι ίδιες, από τον τύπο του Meusnier (σχέση (3.5.2)) συντηρούνται ότι η εφαπτομένη της ευθείας έχει ασυμπτωτική δκύνουση  $k=0$ .

Η επόμενη πρόταση δίνει μια χαρακτηριστική ιδιότητα των ασυμπτωτικών γραμμών μιας επιφάνειας  $S$ .



Πρόταση 3.5.40. Έστω,  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$  μια κανονική καμπύλη της επιφάνειας  $S$ , με καμπυλότητα παντού θετική. Η καμπύλη  $\gamma$  είναι ασυμπτωτική καμπύλη της  $S$ , αν και μόνο αν το εγγύτατο επίπεδο της  $\gamma$ , σε κάθε  $t \in I$ , ευθυμίζεται με το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο σημείο  $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$ .

Απόδειξη. Από τον τύπο του Meusnier, αφού  $k > 0$ , συμπεραίνουμε ότι η καμπύλη  $\gamma$  είναι ασυμπτωτική γραμμική, αν και μόνο αν  $\cos\theta(t) = 0$ . Δηλαδή, αν και μόνο αν το πρώτο κάθετο διάνυσμα της καμπύλης  $\gamma$  είναι εφαπτόμενο στην επιφάνεια. Επειδή, και το διάνυσμα κατεύθυνσης της  $\gamma$  είναι εφαπτόμενο στην επιφάνεια, συνάγουμε το συμπέρασμα.

Παρατήρηση 3.5.41. Για ασυμπτωτικές καμπύλες της επιφάνειας, με καμπυλότητα  $k$  παντού θετική, προκύπτει οφέλιμο από τη Πρόταση 3.5.40, ότι το δεύτερο κάθετο διάνυσμα  $B(t)$  της καμπύλης είναι παράλληλο με το μονοδισαίο κάθετο της επιφάνειας. Δηλαδή, ισχύει η σχέση

$$(3.5.32) \quad B(t) = \pm n(u(t), v(t)), \text{ για κάθε } t \in I.$$

Με τη βοήθεια της Παρατήρησης 3.5.41 προκύπτει το παρακάτω θεώρημα, που οφείλεται στους Beltrami-Emmeyer.

Θεώρημα 3.5.42. Έστω  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$  μια ασυμπτωτική καμπύλη της επιφάνειας  $S$ , με καμπυλότητα  $k$  παντού θετική. Η σπέρση  $\kappa$  της  $\gamma$  ικανοποιεί την σχέση

$$(3.5.33) \quad |\tau(t)| = \sqrt{-K(u(t), v(t))}, \quad t \in I,$$



όπου  $K$  είναι η συνάρτηση καμπυλότητας Gauss της  $S$ .

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το  $t$  είναι παρακάτωτος μίκτος κόβου της καμπύλης  $\gamma$ , δηλαδή  $t=s$ . Με τη σχέση (3.5.32) και τους τύπους των Serret-Frenet, παίρνουμε

$$\begin{aligned} -\tau(s)N(s) &= \dot{B}(s) = \pm \{ \eta_u(u(s), v(s)) \dot{u}(s) + \eta_v(u(s), v(s)) \dot{v}(s) \} \\ &\stackrel{\text{πρόταση}}{=} \pm \left\{ -L(X_u(u(s), v(s)) \dot{u}(s) + X_v(u(s), v(s)) \dot{v}(s)) \right\} \\ &= \mp L(\dot{\gamma}(s)). \end{aligned}$$

$$\text{Συνεπώς, } \tau(s)^2 = |L(\dot{\gamma}(s))|^2 = \langle L(\dot{\gamma}(s)), L(\dot{\gamma}(s)) \rangle = \langle L^2(\dot{\gamma}(s)), \dot{\gamma}(s) \rangle$$

$$\stackrel{\text{Άσκηση}}{=} \left\langle 2H(u(s), v(s))L(\dot{\gamma}(s)) - K(u(s), v(s))\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s) \right\rangle$$

$$= -K(u(s), v(s)),$$

αφού  $\langle L(\dot{\gamma}(s)), \dot{\gamma}(s) \rangle = 0$  (η  $\gamma$  είναι ασημπτική γραμμή) και  $|\dot{\gamma}(s)| = 1$ .

Άσκηση 3.5.15. Να αποδειχθεί ότι μια κανονική καμπύλη  $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$ ,  $t \in I$ , μιας επιφάνειας  $S$ , με θετική καμπυλότητα και που είναι σιγχρόνως γραμμική καμπυλότητας και ασημπτική γραμμή, βρίσκεται σε ένα επίπεδο π. το οποίο εφαπτεται της επιφάνειας σε όλα τα σημεία  $\gamma(t)$ ,  $t \in I$ .

Κατ'αναλογία προς τον ορισμό 3.5.33 έχουμε τον ορισμό

Ορισμός 3.5.43. Ένα σύστημα συντεταγμένων  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  της επιφάνειας  $S$ , λέγεται σύστημα ασημπτικών γραμμών,



αν όλες οι παραμετρικές γραφές του συστήματος  $X$  είναι ασυμπτωτικές γραφές της επιφάνειας  $S$ .

Πρόταση 3.5.44. Έστω  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ένα σύστημα συντεταγμένων της επιφάνειας  $S$ . Το σύστημα  $X$  είναι σύστημα ασυμπτωτικών γραμμών, αν και μόνο αν ισχύουν οι σχέσεις  $L=N=0$ .

Απόδειξη. Έστω,  $L=N=0$ , παντού στο  $U$ . Η διαφορική εξίσωση (εξίσωση (3.5.31)) γίνεται

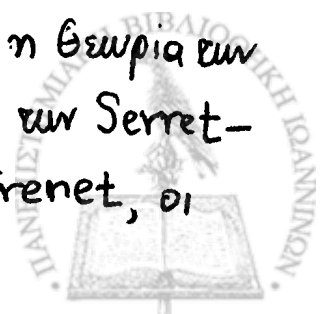
$$2M(u(t), v(t)) u'(t) v'(t) = 0.$$

Από αυτή προκύπτει ότι, οι καμπύλες  $u=const$  ή  $v=const$  είναι ασυμπτωτικές γραφές. Δηλαδή, όλες οι παραμετρικές γραφές του συστήματος είναι ασυμπτωτικές γραφές, και ως εκ τούτου το σύστημα  $X$  είναι σύστημα ασυμπτωτικών γραμμών.

Αντίστροφα, αν το σύστημα  $X$  είναι σύστημα ασυμπτωτικών γραμμών, τότε η διαφορική εξίσωση (3.5.31) θα επαληθεύεται από τις παραμετρικές γραφές  $(u=const, v(t)=t)$ ,  $(u(t)=t, v=const)$ . Συνεπώς,  $L=N=0$ , παντού στο  $U$ .

### 3.6. Οι Θεμελιώδεις Εξισώσεις της Θεωρίας Επιφανειών - Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Θεωρίας Επιφανειών

Στο δεύτερο κεφάλαιο διαπιστώσαμε ότι, η θεωρία των καμπυλών στηρίζεται στο πλαίσιο  $\{T, N, B\}$  των Serret-Frenet και στις εξισώσεις των Serret-Frenet, οι



οποίες εκφράζουν τις παραγώγους  $\dot{T}, \dot{N}, \dot{B}$  συναρτήσει των  $T, N, B$ . Σε αυτή τη παράγραφο θα επιδιώξουμε να βρούμε ανάλογες εξισώσεις για τη θεωρία των επιφανειών.

Σε ολόκληρη τη παράγραφο θα υποθέσουμε ότι,  $S$  είναι μια επιφάνεια τάξης τουλάχιστον  $C^3$ , αν και μερικές σχέσεις ισχύουν και για επιφάνειες με μικρότερη τάξη διαφορισιμότητας. Έστωσαν,  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ένα σύστημα συντεταγμένων της επιφάνειας  $S$  και  $n: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ο αντίστοιχος προανατολιζμός της. Δηλαδή,

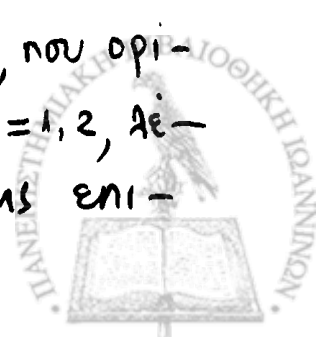
$$n(u,v) = \frac{X_u(u,v) \times X_v(u,v)}{|X_u(u,v) \times X_v(u,v)|} = \frac{X_u(u,v) \times X_v(u,v)}{\sqrt{E(u,v)G(u,v) - F^2(u,v)}}$$

Θα γράφουμε, χάριν απλότητας,  $X_u, X_v, n = \frac{X_u \times X_v}{\sqrt{EG - F^2}}, X_{uu}, X_{uv}, X_{vv}, n_u, n_v$ , χωρίς να λαμβάνουμε υπόψη σε ποιο σημείο υπολογίζονται αυτές οι απεικονίσεις.

Είναι γνωστό ότι, για κάθε σημείο  $(u,v) \in U$ , τα διανύσματα  $X_u, X_v, n$  συνιστούν μια βάση των διανυσμάτων του  $\mathbb{R}^3$ , η οποία ανήκει στον θετικό προανατολισμό του  $\mathbb{R}^3$ .

Θα συμβωνήσουμε σε κάποιους συμβολισμούς. Θέτουμε,  $X_1 = X_u, X_2 = X_v, X_{11} = X_{uu}, X_{12} = X_{uv}, X_{21} = X_{vu}$  και  $X_{22} = X_{vv}$ . Επίσης, θέτουμε  $\Gamma_{ijk} = \langle X_i, X_{jk} \rangle$ , για  $i, j, k = 1, 2$ .

Ορισμός 3.6.1. Οι συναρτήσεις  $\Gamma_{ijk}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , που ορίζονται ως  $\Gamma_{ijk}(u,v) = \langle X_i(u,v), X_{jk}(u,v) \rangle$ ,  $i, j, k = 1, 2$ , λέγονται σύμβολα Christoffel πρώτου είδους της επι-



ράειας  $S$ , ως προς το σύστημα συντεταγμένων  $x$ .

Πρόταση 3.6.2. Τα σύμβολα Christoffel πρώτου είδους είναι συμμετρικά, ως προς τον δεύτερο και τρίτο δείκτη (δηλαδή,  $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{ikj}$ ), και εκφράζονται με τη σχέση

$$(3.6.1) \quad \Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \{ \langle x_i, x_j \rangle_k + \langle x_i, x_k \rangle_j - \langle x_j, x_k \rangle_i \},$$

όπου  $\langle x_i, x_j \rangle_1, \langle x_i, x_j \rangle_2$  σημαίνει μερική παράγωγο της συνάρτησης  $\langle x_i, x_j \rangle$  ως προς  $u$  και  $v$ , αντίστοιχα.

Απόδειξη. Η συμμετρικότητα προκύπτει από το γεγονός ότι  $x_{jk} = x_{kj}$ . Από την άλλη πλευρά, με παραγωγή έχουμε  $\langle x_i, x_j \rangle_k + \langle x_i, x_k \rangle_j - \langle x_j, x_k \rangle_i = \langle x_{ik}, x_j \rangle + \langle x_i, x_{jk} \rangle + \langle x_{ij}, x_k \rangle + \langle x_i, x_{kj} \rangle - \langle x_{ji}, x_k \rangle - \langle x_j, x_{ki} \rangle = 2 \langle x_i, x_{jk} \rangle$ , από όπου προκύπτει η (3.6.1).

Επειδή,  $\langle x_1, x_1 \rangle = \langle x_u, x_u \rangle = E$ ,  $\langle x_1, x_2 \rangle = \langle x_2, x_1 \rangle = \langle x_u, x_v \rangle = F$  και  $\langle x_2, x_2 \rangle = \langle x_v, x_v \rangle = G$ , η Πρόταση 3.6.2 υποδηλασι το παρακάτω πρόβλημα.

Πρόβλημα 3.6.3. Τα σύμβολα Christoffel πρώτου είδους εκφράζονται με τις παραγωγούς των θεμελιωδών μεγεθών πρώτης τάξης. Ακριβέστερα, ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} \Gamma_{111} &= \frac{1}{2} E_u, & \Gamma_{112} &= \Gamma_{121} = \frac{1}{2} E_v, & \Gamma_{222} &= F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \Gamma_{211} &= F_u - \frac{1}{2} E_v, & \Gamma_{212} &= \Gamma_{221} = \frac{1}{2} G_u, & \Gamma_{222} &= \frac{1}{2} G_v. \end{aligned}$$

Θεωρούμε, τώρα, το σύστημα





$$(3.6.2) \quad \begin{aligned} E \Gamma_{jk}^1 + F \Gamma_{jk}^2 &= \Gamma_{1jk} \\ F \Gamma_{jk}^1 + G \Gamma_{jk}^2 &= \Gamma_{2jk} \end{aligned} ,$$

όπου  $j, k = 1, 2$ . Επειδή,  $EG - F^2 > 0$ , το σύστημα (3.6.2) έχει μοναδική λύση, ως προς  $\Gamma_{jk}^1, \Gamma_{jk}^2, j, k = 1, 2$ .

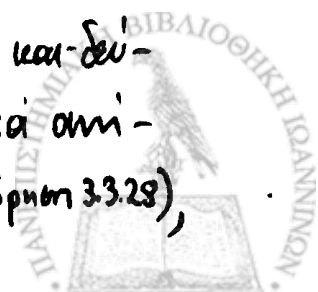
Ορισμός 3.6.4. Οι συναρτήσεις  $\Gamma_{ij}^k : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  λέγονται σύμβολα Christoffel δεύτερου είδους της επιφάνειας  $S$ , ως προς το σύστημα συντεταγμένων  $X$ .

Πρόταση 3.6.5. Τα σύμβολα Christoffel δεύτερου είδους είναι συμμετρικά ως προς τους κάτω δείκτες (δηλαδή,  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ ) και εκφράζονται συναρτήσει των θεμελιωδών μεγεθών πρώτης τάξης και των παραγώγων των. Ακριβέστερα, ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} & , & \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)} & , & \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)} & , & \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)} . \end{aligned}$$

Απόδειξη. Προκύπτει εύκολα, λύνοντας το σύστημα (3.6.2) και θέτοντας τις εκφράσεις των  $\Gamma_{jk}$  από το Πρόβλημα 3.6.3.

Παρατήρηση 3.6.6. Τα σύμβολα Christoffel πρώτου και δεύτερου είδους, καθώς και οσδήποτε εξαρτάται από αυτά σπινκόν στην εσωτερική Γεωμετρία της επιφάνειας (βλ. Παρατήρηση 3.3.28),



δηλαδή είναι εσωτερικές έννοιες της επιφάνειας.

Παράδειγμα 3.6.7. Θέλουμε να βρούμε τα σύμβολα Christoffel πρώτου και δεύτερου είδους του κυκλικού κυλίνδρου ακτίνας  $a$ , ως προς το σύστημα συντεταγμένων  $\chi: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\chi(u, v) = (a \cos u, a \sin u, v)$ ,  $D = [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ . Τα θεμελιώδη ποιά πρώτης τάξης του κυλίνδρου, ως προς αυτό το σύστημα, είναι:  $E(u, v) = a^2$ ,  $F(u, v) = 0$ , και  $G(u, v) = 1$ , δηλαδή είναι σταθερά. Άρα, από το Πρόβλημα 3.6.3 θα έχουμε  $\Gamma_{ij}^k = 0$ , για  $i, j, k = 1, 2$ . Όμοια από την Πρόταση 3.6.5 βρίσκουμε  $\Gamma_{ij}^k = 0$ , για  $i, j, k = 1, 2$ .

Άσκηση 3.6.1. Να βρεθούν τα σύμβολα Christoffel πρώτου και δεύτερου είδους της σφαίρας ακτίνας  $R$ , ως προς το σύστημα συντεταγμένων,  $\chi: D = [0, 2\pi) \times (0, \pi) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\chi(\varphi, \theta) = (R \cos \varphi \sin \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \theta)$ .

Άσκηση 3.6.2. Αν συμβολισουμε με  $g = EG - F^2$ , να αποδειχθούν οι σχέσεις

$$\sum_{i=1}^2 \Gamma_{i1}^i = \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial u}, \quad \sum_{i=1}^2 \Gamma_{i2}^i = \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial v}.$$

Τα διανύσματα  $X_u, X_v$  είναι βάση για τα εφαπτόμενα διανύσματα σε κάθε σημείο της επιφάνειας  $S$ , και ως εκ τούτου τα διανύσματα  $L(X_u) = -m_u$ ,  $L(X_v) = -m_v$ , όπου  $L$  είναι η απεικόνιση Weingarten, είναι γραμμικοί συνδυασμοί των διανυσμάτων της βάσης.

Έστω,

$$L(X_u) = -m_u = a_{11} X_u + a_{21} X_v$$

$$L(X_v) = -m_v = a_{12} X_u + a_{22} X_v.$$



Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη αυτών των εξισώσεων εσωτερικά με  $X_u, X_v$  παίρνουμε, αντίστοιχα,

$$(*) \quad \begin{cases} L = a_{11} E + a_{21} F \\ M = a_{11} F + a_{21} G \end{cases}$$

Όμοια από την δεύτερη εξίσωση έχουμε,

$$(**) \quad \begin{cases} M = a_{12} E + a_{22} F \\ N = a_{12} F + a_{22} G \end{cases}$$

Λύνοντας καθένα από τα συστήματα (\*) και (\*\*), παίρνουμε τις εκφράσεις των  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ). Ακριβέστερα, παίρνουμε

$$a_{11} = \frac{LG - MF}{EG - F^2}, \quad a_{12} = \frac{MG - NF}{EG - F^2}$$

$$a_{21} = \frac{ME - LF}{EG - F^2}, \quad a_{22} = \frac{NE - MF}{EG - F^2}.$$

Συνοψώς,

$$L(X_u) = -\eta_u = \frac{LG - MF}{EG - F^2} X_u + \frac{ME - LF}{EG - F^2} X_v$$

(3.6.3)

$$L(X_v) = -\eta_v = \frac{MG - NF}{EG - F^2} X_u + \frac{NE - MF}{EG - F^2} X_v.$$

Οι σχέσεις (3.6.3) λέγονται εξισώσεις Weingarten.

Παρατήρηση 3.6.8. Οι εξισώσεις Weingarten κρησικηποιήθηκαν εμμέσως, για την απόδειξη των σχέσεων (3.5.10) και (3.5.11).

Παρατήρηση 3.6.9 Όταν το σύστημα συνεσταχθέντων  $X$  είναι σύστημα γραμμών καμπυλότητας (οπότε,  $F = M = 0$ ), τότε οι εξισώσεις Weingarten γίνονται (πρόβου απλές!)



$$(3.6.4) \quad L(X_u) = -m_u = \frac{L}{E} X_u, \quad L(X_v) = -m_v = \frac{N}{G} X_v.$$

Με την συμβωνία και συμβολισμό που κάναμε στην αρχή της παραγράφου, και το γεγονός ότι τα διανύσματα  $X_1 = X_u$ ,  $X_2 = X_v$ ,  $n$  γεννιούνται μια βάση των διανυσμάτων του  $R^3$ , θα έχουμε

$$(***) \quad X_{jk} = \beta_{jk}^1 X_1 + \beta_{jk}^2 X_2 + \gamma_{jk} n, \quad (j, k = 1, 2),$$

όπου  $\beta_{jk}^1, \beta_{jk}^2, \gamma_{jk}$  είναι ποσότητες, που θα υπολογίσουμε. Πολλαπλασιάζοντας την (\*\*\*) εσωτερικά με το  $n$  παίρνουμε

$$\gamma_{jk} = \langle X_{jk}, n \rangle.$$

Άρα,

$$\gamma_{11} = \langle X_{11}, n \rangle = \langle X_{uu}, n \rangle = L, \quad \gamma_{22} = \langle X_{22}, n \rangle = \langle X_{vv}, n \rangle = N$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = \langle X_{12}, n \rangle = \langle X_{uv}, n \rangle = M.$$

Από την άλλη πλευρά, πολλαπλασιάζοντας την (\*\*\*) εσωτερικά με  $X_1, X_2$  παίρνουμε το σύστημα

$$E \beta_{jk}^1 + F \beta_{jk}^2 = \Gamma_{1jk}$$

$$F \beta_{jk}^1 + G \beta_{jk}^2 = \Gamma_{2jk}, \quad (j, k = 1, 2),$$

το οποίο συμπίπτει με το σύστημα (3.6.2) και ως εκ τούτου,  $\beta_{jk}^1 = \Gamma_{jk}^1$  και  $\beta_{jk}^2 = \Gamma_{jk}^2$ .

Λαμβάνοντας όλα τα παραπάνω υπόψη, η (\*\*\*) γράφεται υπό την μορφή του παρακάτω συστήματος εξισώσεων

$$(3.6.5) \quad X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L n$$

$$X_{uv} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + M n$$

$$X_{vu} = \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + M n$$

$$X_{vv} = \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + N n.$$

Οι εξισώσεις (3.6.5) λέγονται εξισώσεις του Gauss.



Θα συνεχίσουμε με μερικούς, ακόμη, λογαριασμούς.

Επειδή η επιφάνεια  $S$  είναι κυλάουσα  $C^2$  καίως θα ισχύουν οι σχέσεις:  $\frac{\partial}{\partial v}(X_{uv}) = \frac{\partial}{\partial u}(X_{vu})$ ,  $\frac{\partial}{\partial v}(X_{uv}) = \frac{\partial}{\partial u}(X_{uv})$  και ούτως,

$$(3.6.6) \quad \frac{\partial}{\partial v}(\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L n) = \frac{\partial}{\partial u}(\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + M n)$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + M n) = \frac{\partial}{\partial u}(\Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + N n).$$

Στις σχέσεις (3.6.6) θα κάνουμε τις παραγωγίσεις και όπου συναντάμε τα  $X_{uv}$ ,  $X_{uv} = X_{vu}$ ,  $X_{uv}$  θα τα αντικαθιστούμε με τα ίδια των από τις εξισώσεις του Gauss (σχέσεις (3.6.5)), όπου δε θα συναντάμε τα  $n_u, n_v$  θα τα αντικαθιστούμε με τα ίδια των από τις εξισώσεις Weingarten (σχέσεις (3.6.3)). Έτσι, σε κάθε μέλος των (3.6.6) θα έχουμε τα διανύσματα  $X_u, X_v, n$  με κάποιους συντελεστές. Επειδή, τα  $X_u, X_v, n$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα, οι συντελεστές τους θα είναι ίσοι. Δηλαδή, αν κάνουμε τη παραπάνω διαδικασία στη πρώτη των (3.6.6) θα πάρουμε τις παρακάτω πρως εξισώσεις

$$(3.6.7) \quad F \cdot \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{\partial}{\partial u} \Gamma_{12}^1 - \frac{\partial}{\partial v} \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1$$

$$- E \cdot \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{\partial}{\partial u} \Gamma_{12}^2 - \frac{\partial}{\partial v} \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial M}{\partial u} = L \Gamma_{12}^1 + M(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - N \Gamma_{11}^2.$$

Όμοια, από τη δεύτερη των (3.6.6) θα πάρουμε



$$(3.6.8) \quad F \cdot \frac{LN-M^2}{EG-F^2} = \frac{\partial}{\partial v} \Gamma_{12}^2 - \frac{\partial}{\partial u} \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2$$

$$-G \cdot \frac{LN-M^2}{EG-F^2} = \frac{\partial}{\partial v} \Gamma_{12}^1 - \frac{\partial}{\partial u} \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{22}^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial v} - \frac{\partial N}{\partial u} = L \Gamma_{22}^1 + M (\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - N \Gamma_{12}^2 .$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις εκφράσεις των σύμβολων Christoffel δεύτερου είδους συναρτήσει των θεμελιωδών μεγεθών πρώτης τάξης και των παραγώγων των, μπορούμε να δείξουμε ότι, οι δύο πρώτες εξισώσεις των (3.6.7) και οι δύο πρώτες εξισώσεις των (3.6.8) είναι όλες ισοδύναμες. Άρα, από όλη αυτή τη διαδικασία λαμβάνουμε στην ουσία τις παρακάτω εξισώσεις

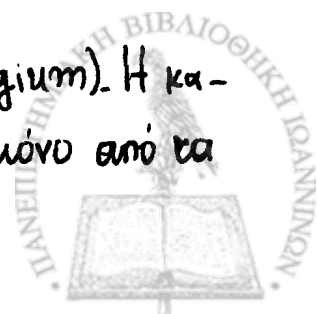
$$(3.6.9) \quad -E \cdot \frac{LN-M^2}{EG-F^2} = \frac{\partial}{\partial u} \Gamma_{12}^2 - \frac{\partial}{\partial v} \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 ,$$

$$(3.6.10) \quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial M}{\partial u} = L \Gamma_{12}^1 + M (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - N \Gamma_{11}^2 \\ \frac{\partial M}{\partial v} - \frac{\partial N}{\partial u} = L \Gamma_{22}^1 + M (\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - N \Gamma_{12}^2 . \end{cases}$$

Η εξίσωση (3.6.9) λέγεται τύπος του Gauss (Gauss formula), ενώ οι εξισώσεις (3.6.10) λέγονται εξισώσεις των Mainardi-Codazzi.

Επειδή τα σύμβολα Christoffel δεύτερου είδους εξαρτώνται από τα θεμελιώδη μεγέθη πρώτης τάξης και τις παραγώγους των, η εξίσωση (3.6.9) οδηγεί άμεσα στο εξής θεώρημα.

Θαυμάσιο Θεώρημα του Gauss (Theorema Egregium). Η καμπυλότητα Gauss μια επιφάνειας εξαρτάται μόνο από τα



θεμελιώδη μεγέθη πρώτης τάξης και τις παραγώγους των. Δηλαδή, αν ξέρουμε τα θεμελιώδη μεγέθη πρώτης τάξης μιας επιφάνειας, μπορούμε να υπολογίσουμε την καμπυλότητα Gauss της επιφάνειας.

Παρατήρηση 3.6.10. (i) Η καμπυλότητα Gauss εξαρτάται μόνο από τα θεμελιώδη μεγέθη πρώτης τάξης της επιφάνειας. Δηλαδή, είναι έννοια της Εσωτερικής Γεωμετρίας της επιφάνειας. Η εξάρτηση της καμπυλότητας Gauss από τα θεμελιώδη μεγέθη δεύτερης τάξης  $L, M, N$  που προκύπτει από την σχέση (3.5.10) είναι φαινομενική.

(ii) Αν δυο επιφάνειες έχουν παραμετρικές παραστάσεις με το ίδιο πεδίο ορισμού παραμέτρων και ίδια θεμελιώδη μεγέθη πρώτης τάξης, τότε έχουν και ίδια καμπυλότητα Gauss.

(iii) Το Theorema Egregium είναι ένα από τα επουδαιότερα και απλά θεωρήματα της Διαφορικής Γεωμετρίας. Μας δίνει μια αναγκαία συνθήκη ώστε, όταν δοθούν έξι συναρτήσεις  $E, F, G, L, M, N$  ορισμένες στο  $U \subset \mathbb{R}^2$ , να υπάρχει επιφάνεια  $S$  που έχει αυτές τις συναρτήσεις ως θεμελιώδη ποσά πρώτης και δεύτερης τάξης. Για παράδειγμα, όταν δοθούν  $E = G = 1, F = 0, L = 1, M = 0$  και  $N = -1$ , δεν υπάρχει επιφάνεια  $S$  που να έχει αυτές τις σταθερές συναρτήσεις ως θεμελιώδη ποσά πρώτης και δεύτερης τάξης. Πραγματικά, αν υπήρχε τέτοια επιφάνεια, θα είχε καμπυλότητα Gauss  $K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -1$ . Όμως, από τον τύπο του Gauss (σχέση (3.6.9)) η καμπυλότητα Gauss θα είναι  $K = 0$ , αντίφαση.



Αν στον τύπο του Gauss (σχέση (3.6.9)) αντικαταστήσου-  
με τα σύμβολα Christoffel δεύτερου είδους συναρτηθεί-  
των θεμελιωδών μεγεθών πρώτης τάξης και των παραγώγων  
των (Πρόταση 3.6.5) θα πάρουμε τη παρακάτω έκφραση για  
την καμπυλότητα Gauss

$$(3.6.11) \quad K = \frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{FE_u - EG_u}{E\sqrt{EG-F^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{2EF_u - FE_v - EE_v}{E\sqrt{EG-F^2}} \right) \right].$$

Η έκφραση για το  $K$ , που δίνεται από τη σχέση (3.6.11), λέγε-  
ται, επίσης, τύπος του Gauss και βρέθηκε από τον ίδιο τον  
Gauss.

Άσκηση 3.6.3. Όταν το σύστημα συντεταγμένων είναι ορθογώνιο  
(δηλαδή,  $F=0$ ), τότε ο τύπος του Gauss παίρνει τη μορφή

$$(3.6.12) \quad K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right) \right].$$

Άσκηση 3.6.4. Όταν, για το σύστημα συντεταγμένων, ισχύουν  
οι σχέσεις  $F(u,v)=0$ ,  $E(u,v)=G(u,v)=\lambda(u,v)$ , για όλα τα  
 $(u,v) \in U$ , τότε ο τύπος του Gauss παίρνει τη μορφή

$$(3.6.13) \quad K = -\frac{1}{2\lambda} \Delta \log \lambda,$$

όπου  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$  είναι ο Laplaceϊανός τελεστής.

Άσκηση 3.6.5. Μια επιφάνεια  $S$  έχει, ως προς ένα σύστημα  
συντεταγμένων  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , μετρική στην  $ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(1+u^2+v^2)^2}$ . Να  
βρεί η καμπυλότητα Gauss της επιφάνειας  $S$ .





Στο επόμενο παράδειγμα θα δούμε πως γίνονται οι εξισώσεις των Mainardi-Codazzi (εξισώσεις (3.6.10)), όταν το σύστημα συνεσταθμένων μιας επιφάνειας είναι σύστημα γραμμικών καμπυλότητας.

Παράδειγμα 3.6.11. Έστω  $X: UCR^2 \rightarrow R^3$  σύστημα γραμμικών καμπυλότητας μιας επιφάνειας  $S$ . Τότε,  $F=M=0$ . Έτσι, οι εξισώσεις των Mainardi-Codazzi παίρνουν τη μορφή

$$\frac{\partial L}{\partial v} = L \Gamma_{12}^1 - N \Gamma_{11}^2, \quad -\frac{\partial N}{\partial u} = L \Gamma_{22}^1 - N \Gamma_{12}^2.$$

Σε αυτή τη περίπτωση ( $F=M=0$ ), από τη Πρόταση 3.6.5 έ-  
αυψε,

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2} \frac{E_v}{E}, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2} \frac{E_v}{G}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} \frac{G_u}{E} \quad \text{και} \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} \frac{G_u}{G}.$$

Συνεπώς,

$$\frac{\partial L}{\partial v} = \frac{L}{2} \frac{E_v}{E} + \frac{N}{2} \frac{E_v}{G} = \frac{E_v}{2} \left( \frac{L}{E} + \frac{N}{G} \right),$$

$$\frac{\partial N}{\partial u} = \frac{N}{2} \frac{G_u}{G} + \frac{L}{2} \frac{G_u}{E} = \frac{G_u}{2} \left( \frac{L}{E} + \frac{N}{G} \right).$$

Επειδή όμως, σε αυτή τη περίπτωση,  $H = \frac{1}{2} \left( \frac{L}{E} + \frac{N}{G} \right)$ , όπου  $H$  είναι η μέση καμπυλότητα της επιφάνειας, οι εξισώσεις των Mainardi-Codazzi παίρνουν τη παρακάτω απλή μορφή

$$(3.6.14) \quad \frac{\partial L}{\partial v} = H E_v, \quad \frac{\partial N}{\partial u} = H G_u.$$

Παρατήρηση 3.6.12. Στη Συγχρονή Διαφορική Γεωμετρία (Γεωμετρία Riemann), ανει του κλασσικού συμβολισμού  $E, F, G$ , συναντάμε τον συμβολισμό  $g_{11} = E, g_{12} = g_{21} = F$  και  $g_{22} = G$ . Με αυτόν το συμβολισμό συναντάμε τις λογιστικές

$$R_{ijkl} = \sum_{\ell=1}^2 R_{ij\ell k} g_{\ell m}, \quad (i, j, k, m = 1, 2)$$



όπου

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial}{\partial u^i} \Gamma^l_{jk} - \frac{\partial}{\partial u^j} \Gamma^l_{ik} + \sum_{m=1}^2 (\Gamma^l_{im} \Gamma^m_{jk} - \Gamma^l_{jm} \Gamma^m_{ik})$$

και  $\frac{\partial}{\partial u^1} = \frac{\partial}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial v}$ .

Οι  $2^4=16$  ποσότητες  $R_{ijkl}$  είναι οι συνιστώσες μιας μαθηματικής έννοιας, που με τη σύγχρονη Διαφορική Γεωμετρία λέγεται καμπυλότητα της επιφάνειας  $S$ . Σε αυτή τη γλώσσα ο τύπος του Gauss γράφεται με τη μορφή

$$(3.6.15) \quad K = \frac{R_{1221}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Να συνοψίσουμε τα κείμενα τώρα συμπεράσματα αυτής της παραγράφου σε συνδυασμό με τις προηγούμενες παραγράφους. Έστωσαν  $S$  επιφάνεια  $C^3$ -κάξης τουλάχιστον,  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  μια παραμετρική της παράσταση και  $\eta: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , ο αντίστοιχος προανακολουθικός. Ορισθήκαν τα θεμελιώδη ποσά πρώτης και δεύτερης τάξης  $E, F, G, L, M, N: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Καθορίστηκαν, έστω, δύο τετραγωνικές μορφές

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

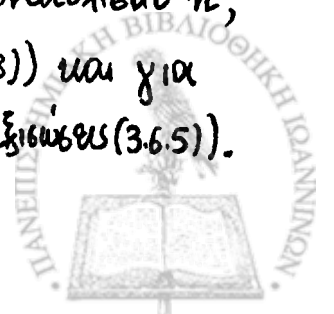
$$II = L du^2 + 2M du dv + N dv^2,$$

εκ των οποίων η  $ds^2$  είναι θετικά ορισμένη ( $E, G > 0, EG - F^2 > 0$ ).

Η καμπυλότητα Gauss της επιφάνειας δίνεται από τη σχέση

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (\text{σχέση (3.5.10)}).$$

Επιπλέον, για τον προανακολουθικό  $\eta$ , ισχύουν οι εξισώσεις Weingarten (εξισώσεις (3.6.3)) και για την απεικόνιση  $X$  ισχύουν οι εξισώσεις του Gauss (εξισώσεις (3.6.5)).



Κατ'αναλογία με την περίπτωση της θεωρίας των καμπυλίων, όπου δύο συναρτήσεις  $k = k(s)$  και  $\pi = \pi(s)$  καθορίζουν πλήρως, κατά προεχχίτη ισομετρίας του  $R^3$ , μια καμπύλη που έχει αυτές τις συναρτήσεις ως καμπυλότητα και στρέψη, θέτουμε το εξής Πρόβλημα. Δίνονται δύο τετραγωνικές μορφές  $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ ,  $\Pi = L du^2 + 2M du dv + N dv^2$ , όπου οι συναρτήσεις  $E, F, G : U \subset R^2 \rightarrow R$  είναι τουλάχιστον  $C^1$ -κλάσσης και οι συναρτήσεις  $L, M, N : U \subset R^2 \rightarrow R$  είναι τουλάχιστον συνεχείς. Αν η  $ds^2$  είναι δεσικά ορισμένη, υπάρχει επιφάνεια  $S$  που έχει την  $ds^2$  ως μετρική και την  $\Pi$  ως δεύτερη θεμελιώδη μορφή; Δηλαδή, υπάρχει λύση, ως προς  $X$  και  $n$ , του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων (3.6.3) και (3.6.5) (εξισώσεις Weingarten, εξισώσεις Gauss) με  $n = \frac{X_u \times X_v}{\sqrt{EG-F^2}}$ ; Η απάντηση είναι, εν γένει, όχι αφού τα θεμελιώδη ποσά πρώτης και δεύτερης κλάσσης πρέπει να ικανοποιούν (αν υπάρχει τέτοια επιφάνεια), την εξίσωση (3.6.9) (τύπος του Gauss) και τις εξισώσεις (3.6.10) (εξισώσεις των Mainardi-Codazzi), που είναι οι συνθήκες ολοκληρωσιμότητας (συμβατατικότητας) του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων (3.6.3) και (3.6.5). Ένα παράδειγμα αναφέρθηκε στη Παρατήρηση 3.6.10 (iii).

Σχετικά με αυτό το Πρόβλημα ισχύει το παρακάτω θεώρημα, το οποίο οφείλεται στον O. Bonnet και αναφέρεται χωρίς απόδειξη.

Θεμελιώδες Θεώρημα της Θεωρίας Επιφανειών. Έστω  $U$  ανοικτό υποσύνολο του  $R^2$ . Δίνονται οι τετραγωνικές



μορφές, που ορίζονται σε κάθε σημείο του  $U$ ,

$$I = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

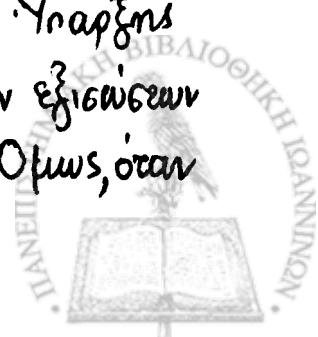
$$II = L du^2 + 2M du dv + N dv^2,$$

εκ των οποίων η  $I$  είναι θετική ορισμένη. Υποθέτουμε ότι, οι συναρτήσεις  $E, F, G: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  είναι  $C^2$ -τάξης τουλάχιστον και ότι οι συναρτήσεις  $L, M, N: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  είναι  $C^1$ -τάξης τουλάχιστον. Αν οι συναρτήσεις  $E, F, G, L, M, N$  ικανοποιούν τις εγγυηθείσες ολοκληρωσιμότητας, δηλαδή την εξίσωση (3.6.9, τύπος του Gauss) και τις εξισώσεις (3.6.10, εξισώσεις των Mainardi-Codazzi), τότε:

I) Για κάθε σημείο  $(u_0, v_0) \in U$ , υπάρχει μια συνεκτική περιοχή  $V$  (εξαρτάται εν γένει από το  $(u_0, v_0)$ ) του  $(u_0, v_0)$  με  $V \subset U$ , μια κανονική και αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση  $X: V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  τάξης  $C^3$  τουλάχιστον, έτσι ώστε η επιφάνεια  $S = X(V)$  έχει παραμετρική παράσταση. Στην απεικόνιση  $X$ , μετρική και δεύτερη θεμελιώδη μορφή τις τετραγωνικές μορφές  $I$  και  $II$  που δόθηκαν, αντιστοιχούν.

II) Αν  $S_1$  είναι μια άλλη επιφάνεια τουλάχιστον  $C^3$ -τάξης με παραμετρική παράσταση  $Y: V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , μετρική και δεύτερη θεμελιώδη μορφή τις τετραγωνικές μορφές που δόθηκαν, τότε υπάρχει μια ισομετρία  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , τέτοια ώστε  $F(S) = S_1$ . Δηλαδή, η επιφάνεια  $S$  καθορίζεται κατά μοναδικό τρόπο, κατά προσέγγιση ισομετρίας του  $\mathbb{R}^3$ .

Παρατήρηση 3.6.13. Η απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος της θεωρίας επιφανειών στηρίζεται σε θεωρήματα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσεων συστήματος διαφορικών εξισώσεων με βερικές παραχώρους. Έχει τεχνικές δυσκολίες. Όμως, όταν



οι συναρτήσεις  $E, F, G, L, M, N$  είναι ειδικές, τότε μπορούμε σχε-  
τικά εύκολα να ολοκληρώσουμε το σύστημα των εξισώσεων  
(3.6.3) και (3.6.5) με τη προνόθεση, φυσικά, ότι ικανοποιούνται  
οι συνθήκες ολοκληρωσιμότητας (εξίσωση (3.6.4) και εξίσωση (3.6.10)).

Παράδειγμα 3.6.14. Θα διερευνήσουμε αν υπάρχει επιφάνεια  $S$  με  
θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης τις σταθερές συναρτήσεις  $E=G=1$ ,  
 $F=0$  και με θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης τις σταθερές  
συναρτήσεις  $L=-1$ ,  $M=N=0$ . Όλες αυτές οι συναρτήσεις υποθέ-  
τουμε ότι, είναι ορισμένες σε ολόκληρο το  $R^2$ . Είναι φανερό ότι,  
η τετραγωνική μορφή  $I = du^2 + dv^2$  είναι θετικά ορισμένη.  
Επιπλέον, είναι φανερό ότι αυτές οι συναρτήσεις ικανοποιούν  
τις εξισώσεις ολοκληρωσιμότητας (3.6.4) και (3.6.10). Άρα, σύμφωνα  
να με το θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας επιφανειών, υπάρχει  
επιφάνεια που έχει αυτές τις συναρτήσεις ως θεμελιώδη ποσά  
πρώτης και δεύτερης τάξης. Για να βρούμε την επιφάνεια θα  
πρέπει να ολοκληρώσουμε (λύσουμε) το σύστημα των διαφορικών  
εξισώσεων (3.6.3) και (3.6.5), το οποίο στη συγκεκριμένη περι-  
πτωση ( $E=G=1, F=0, L=-1, M=N=0$ ) γίνεται

$$(3.6.16) \quad \eta_u = \chi_u, \quad \eta_v = 0 \quad \text{εξισώσεις Weingarten}$$

$$(3.6.17) \quad \chi_{uu} = -n, \quad \chi_{uv} = \chi_{vu} = 0, \quad \chi_{vv} = 0, \quad \text{εξισώσεις Gauss.}$$

Ισχύει, προφανώς, η σχέση  $\chi_{uu} = -\eta_u = -\chi_u$ , λόγω της πρώτης  
των (3.6.17) και της πρώτης των (3.6.16). Η γενική λύση αυτής  
είναι  $n$

$$(3.6.18) \quad \chi(u,v) = A(v) \cos u + B(v) \sin u + \Gamma(v),$$



όπου  $A(u) = (a_1(u), a_2(u), a_3(u))$ ,  $B(u) = (b_1(u), b_2(u), b_3(u))$  και  $\Gamma(u) = (\gamma_1(u), \gamma_2(u), \gamma_3(u))$ .

Από την (3.6.18) και τη δεύτερη των (3.6.17) παίρνουμε,

$$-A'(u) \sin u, -B'(u) \cos u = 0$$

και συνεπώς,  $A'(u) = B'(u) = 0$ , αφού οι συναρτήσεις  $\cos u, \sin u$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Άρα,  $A(u) = a$  και  $B(u) = b$ , όπου  $a, b$  είναι σταθερά διανύσματα. Εξάλλου, αφού  $\chi_{uv} = 0$ , θα έχουμε  $\chi_{uv} = \Gamma''(u) = 0$  και συνεπώς  $\Gamma(u) = cu + d$ , όπου  $c, d$  είναι σταθερά διανύσματα.

Δηλαδή,

$$\chi(u, v) = a \cos u + b \sin u + cu + d,$$

όπου  $a, b, c$  και  $d$  είναι σταθερά διανύσματα.

Όμως, τότε, θα έχουμε

$$E = 1 = a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u - 2 \langle a, b \rangle \cos u \sin u$$

$$F = 0 = -\langle a, c \rangle \sin u + \langle b, c \rangle \cos u$$

$$G = 1 = c^2,$$

από όπου προκύπτει (πώς;) ότι τα διανύσματα  $a, b, c$  είναι ορθοκανονική βάση του  $\mathbb{R}^3$ . Εύκολα διαπιστώνουμε ότι πρόκειται για ένα κυκλικό κώλυτρο, με γενέτριες παράλληλες προς το διάνυσμα  $c$  και οδηγό καμπύλη, τον μοναδιαίο κύκλο με κέντρο το διάνυσμα  $d$  και ο οποίος βρίσκεται σε επίπεδο παράλληλο στα διανύσματα  $a, b$ .

Άσκηση 3.6.6. Να βρεθεί (αν υπάρχει) επιφάνεια με θεμελιώδη μεγέθη  $E(u, v) = \sin^2 v$ ,  $F(u, v) = 0$ ,  $G(u, v) = 1$ ,  $L(u, v) = \sin^2 v$ ,  $M(u, v) = 0$  και  $N(u, v) = 1$ , όπου  $(u, v) \in U = \mathbb{R} \times (0, \pi)$ .

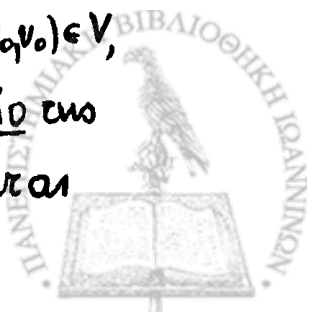


### 3.7. Γενικευμένες Επιφάνειες

Στις προηγούμενες παραγράφους αυτού του Κεφαλαίου εξετάσαμε υποσύνολα  $S$  του  $\mathbb{R}^3$ , για τα οποία υπάρχει μια απεικόνιση  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , η οποία είναι αμφίμονοσήμαντη (1-1), κανονική σε κάθε σημείο του  $U$  και τέτοια ώστε  $X(U) = S$ . Η υπόθεση ότι, η απεικόνιση  $X$  είναι αμφίμονοσήμαντη αποκλείει από την εξέταση υποσύνολα  $S \subset \mathbb{R}^3$ , που έχουν αυτοσφύρες. Επίσης, η υπόθεση ότι η απεικόνιση  $X$  είναι κανονική σε κάθε σημείο  $(u, v) \in U$  εξασφαλίζει την ύπαρξη εφαπτομένου επιπέδου στο σημείο  $X(u, v)$ . Έτσι, η υπόθεση της κανονικότητας αποκλείει υποσύνολα  $S \subset \mathbb{R}^3$  με σημεία, όπως η κορυφή του κώνου.

Σε αυτή τη παράγραφο θα τροποποιήσουμε τον Ορισμό 3.1.1 του Τμήματος Επιφάνειας, έτσι ώστε να συμπεριλάβουμε περιεσότερα υποσύνολα του  $\mathbb{R}^3$ .

Ορισμός 3.7.1. Μια απεικόνιση  $C^k$ -τάξης ( $k \geq 1$ ),  $X: V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , όπου  $V$  είναι ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^2$  λέγεται Γενικευμένη Επιφάνεια  $C^k$ -τάξης. Αν, η απεικόνιση  $X$  είναι κανονική σε κάθε σημείο  $(u, v) \in V$ , τότε η  $X$  λέγεται Κανονική Γενικευμένη Επιφάνεια. Ένα σημείο  $(u_0, v_0) \in V$ , όπου η  $X$  δεν είναι κανονική λέγεται Ιδιόζων σημείο στο Γενικευμένης Επιφάνειας. Το υποσύνολο  $X(V)$  του  $\mathbb{R}^3$  λέγεται



τροχιά της Γενικευμένης Επιφάνειας  $X$ .

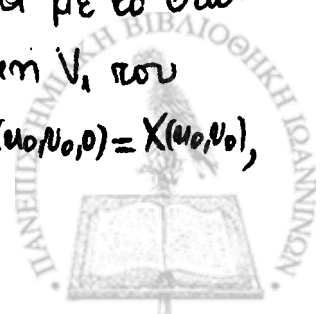
Στην επόμενη Πρόταση θα δούμε συνεχέιση της γενικευμένης επιφάνειας με την έννοια που τμήματος Επιφάνειας, που δόσαμε στον Ορισμό 3.1.1.

Πρόταση 3.7.2: Έστωσαν,  $X: V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ , κανονική γενικευμένη επιφάνεια  $C^k$ -τάξης ( $k \geq 1$ ) και  $(u_0, v_0) \in V$ . Τότε, υπάρχει περιοχή  $U$  που  $(u_0, v_0) \in U \subset V$ , τέτοια ώστε το υπούνολο  $X(U)$  του  $\mathbb{R}^3$  είναι τμήμα Επιφάνειας με την έννοια του Ορισμού 3.1.1 και με παραμετρική παράσταση την  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι  $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_0, v_0) \neq 0$ . Θεωρούμε την απεικόνιση  $F: V \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που ορίζεται ως,  $F(u,v,t) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v) + t)$ . Η παραγωγος απεικόνιση  $dF_{(u_0, v_0, 0)}$  της  $F$  στο σημείο  $(u_0, v_0, 0)$  έχει Ιακωβιανό πίνακα τον

$$J_F(u_0, v_0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Άρα η απεικόνιση  $F$  είναι κανονική στο σημείο  $(u_0, v_0, 0)$ , αφού  $\det J_F(u_0, v_0, 0) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_0, v_0) \neq 0$ . Συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα Αντίστροφης Συναρτησης, υπάρχει περιοχή  $V_1$  που  $(u_0, v_0, 0) \in V_1$  και περιοχή  $W_1$  του σημείου  $F(u_0, v_0, 0) = X(u_0, v_0)$ ,





έτσι ώστε η απεικόνιση  $F: V_1 \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow W_1 \subset \mathbb{R}^3$  να είναι διαφορομορφισμός. Θέτουμε,  $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \text{υπάρχει } t \in \mathbb{R}, \text{ώστε } (u,v,t) \in V_1\}$ . Η απεικόνιση,  $\chi: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\chi(u,v) = F(u,v,0)$  είναι αμφιμονοσήμαντη,  $C^k$ -επίσης και κανονική στο  $U$ . Είναι προφανές ότι  $U \subset V$ . Συνεπώς, το υποδύναμο  $\chi(U) \subset \mathbb{R}^3$  είναι τμήμα 'Επιφάνειας με την έννοια του Ορισμού 3.1.1.

''

Παρατήρηση 3.7.3. Για κανονικές γενικευμένες επιφάνειες

$\chi: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\chi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$  ορίζονται, όπως στη προηγούμενη παραγράφου τα εξής:  $\chi_u(u,v)$ ,  $\chi_v(u,v)$ ; το εφαπτόμενο επίπεδο στο  $\chi(u,v)$ , ο προανακλιτικός  $n(u,v) = \frac{\chi_u(u,v) \times \chi_v(u,v)}{|\chi_u(u,v) \times \chi_v(u,v)|}$ , τα θεμελιώδη ποσά πρώτης και δεύτερης τάξης, η καμπυλότητα Gauss  $K$  και η μέση καμπυλότητα  $H$ , οι κύριες και ασυμπτωτικές διευθύνσεις, κ.λ.π.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε μερικές ενδιαφέρουσες κατηγορίες γενικευμένων επιφανειών.

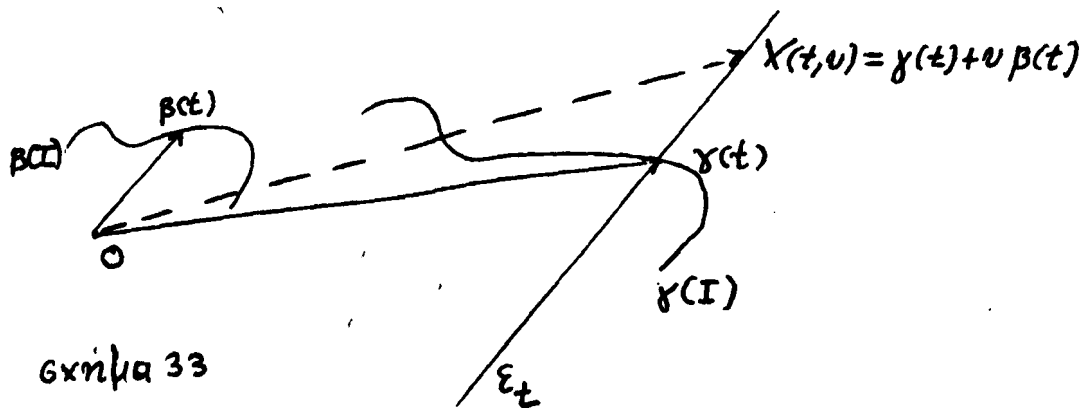
### α) Ευθριογενείς Επιφάνειες

Ορισμός 3.7.4. Έστωσαν,  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  και  $\beta: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  δυο καμπύλες  $C^k$ -επίσης ( $k \geq 1$ ) του  $\mathbb{R}^3$ , όπου  $I$  είναι ανοικτό διάστημα του  $\mathbb{R}$  και  $\beta(t) \neq 0$  για κάθε  $t \in I$ . Η γενικευμένη επιφάνεια,  $\chi: U = I \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\chi(t,v) = \gamma(t) + v\beta(t)$ , λέγεται ευδριογενής επιφάνεια (ruled surface).

Συμβολίζουμε με  $E_t$ ,  $t \in I$ , την ευθεία που ορίζεται από το



σημείο  $\gamma(t)$  και είναι παράλληλη με το διάνυσμα  $\beta(t)$ .  
Είναι φανερό, τότε, ότι η τροχιά της εθδοχενούς επιφάνειας  $X$  αποτελείται από όλες τις εθδεις  $\varepsilon_t$  (επίμα 33).



επίμα 33

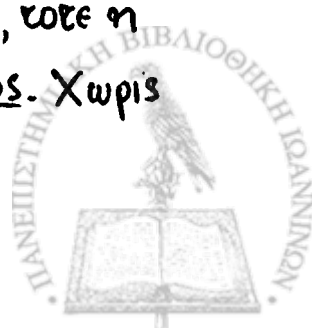
Η καμπύλη  $\gamma$  λέγεται καμπύλη αρεπρίας (directrix) της εθδοχενούς επιφάνειας και οι εθδεις  $\varepsilon_t, t \in I$ , λέγονται γενέ-  
ειρες της εθδοχενούς επιφάνειας.

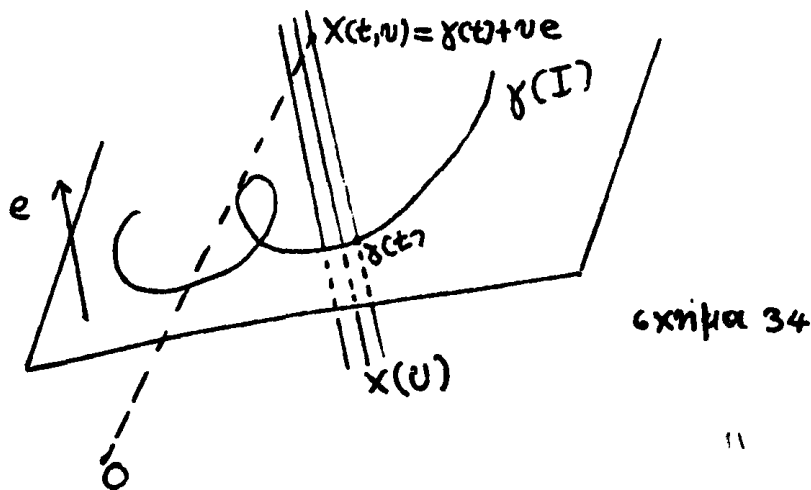
Τα ιδιάζοντα σημεία μιας εθδοχενούς επιφάνειας είναι τα σημεία  $(t, u) \in U = I \times \mathbb{R}$ , για τα οποία ιεχύει η εχέση

$$(3.7.1) \quad X_t(t, u) \times X_u(t, u) = (\gamma'(t) + u\beta'(t)) \times \beta(t) = 0.$$

Παράδειγμα 3.7.5. Θεωρούμε μια επίπεδη καμπύλη  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  του  $\mathbb{R}^3$  με παράμετρο το μήκος τόξου. Το σύνολο  $\gamma(I)$  μπορεί να έχει αυτοεκόες. Έστω  $e$  το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο  $\pi$  της καμπύλης. Η γενικευμένη επιφάνεια  $X: U = I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(s, u) = \gamma(s) + ue$  είναι εθδοχενής επιφάνεια και λέγεται γενικευμένος κύλινδρος. Εδώ η καμπύλη  $\beta: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , είναι η σταθερή καμπύλη  $\beta(t) = e$ , για κάθε  $t \in I$  (επίμα 34).

Ειδικά, αν η καμπύλη αρεπρίας  $\gamma$  είναι κύκλος, τότε η γενικευμένη επιφάνεια είναι ο κυκλικός κύλινδρος. Χωρίς





εκτίμα 34

βράβη τής γενικότetas μπορούμε να υποθέσουμε ότι το επίπεδο π τής καμπύλης είναι το επίπεδο συντεταγμένων Oxy και  $e = (0, 0, 1)$ . Τότε,  $X(s, u) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), u)$ , όπου  $\gamma_1(s), \gamma_2(s)$  είναι οι συντεταγμένες τής επιπέδου καμπύλης  $\gamma$ . Βρίσκουμε,

$$X_s(s, u) = (\dot{\gamma}_1(s), \dot{\gamma}_2(s), 0), \quad X_u(s, u) = (0, 0, 1)$$

και συνεπώς,

$$E(s, u) = 1, \quad F(s, u) = 0 \quad \text{και} \quad G(s, u) = 1.$$

Άρα, η χωικευμένη επιφάνεια  $X$  δεν έχει ιδιαίτερα σημεία, αφού  $|X_s(s, u) \times X_u(s, u)| = 1 \neq 0$ . Επίσης, ο αντιστοιχος προανατολιτικός είναι 0

$$\eta(s, u) = \frac{X_s(s, u) \times X_u(s, u)}{|X_s(s, u) \times X_u(s, u)|} = (\dot{\gamma}_2(s), -\dot{\gamma}_1(s), 0)$$

και συνεπώς

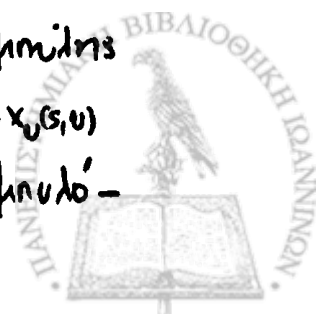
$$\eta_s(s, u) = (\ddot{\gamma}_2(s), -\ddot{\gamma}_1(s), 0), \quad \eta_u(s, u) = (0, 0, 0)$$

Επειδή,  $\dot{\gamma}_1^2(s) + \dot{\gamma}_2^2(s) = 1$  θα ισχύει η σχέση  $\dot{\gamma}_1(s) \ddot{\gamma}_2(s) + \dot{\gamma}_2(s) \ddot{\gamma}_1(s) = 0$ , για κάθε  $s \in I$ . Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \eta_s(s, u) &= (\ddot{\gamma}_2(s), -\ddot{\gamma}_1(s), 0) = (\dot{\gamma}_1(s) \ddot{\gamma}_2(s) - \dot{\gamma}_2(s) \ddot{\gamma}_1(s)) (\dot{\gamma}_1(s), \dot{\gamma}_2(s), 0) \\ &= k(s) X_s(s, u), \quad \text{όπου} \end{aligned}$$

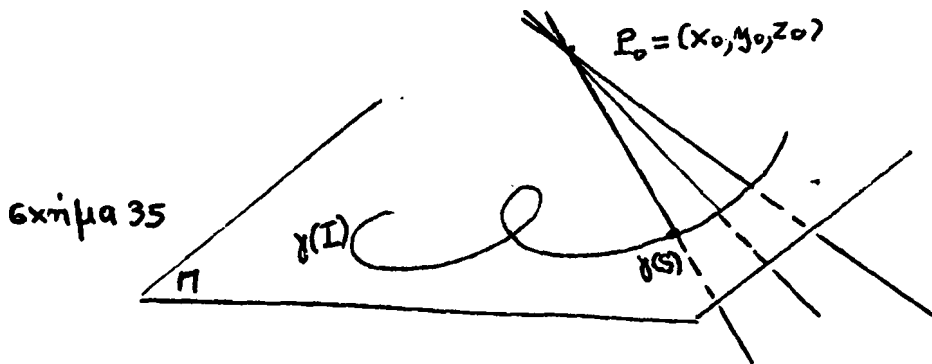
$k(s)$  είναι η προσμασμένη καμπυλότητα τής επιπέδου καμπύλης  $\gamma$  (βλ. σχέση (2.10.5)). Ισχύει, επίσης, η σχέση  $\eta_u(s, u) = (0, 0, 0) = 0 \cdot X_u(s, u)$

Άρα, σύμφωνα με τη Παρατήρηση 3.5.29 (ii), οι κύριες καμπυλό-



αυτές του γενικευμένου κυλίνδρου είναι 0 και  $-k(s)$ . Συνεπώς,  $K(s, \nu) = 0$  και  $H(s, \nu) = -\frac{1}{2}k(s)$ , για κάθε  $(s, \nu) \in I \times \mathbb{R}$ .

Παράδειγμα 3.7.6. Έστωσαν,  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  ένα σταθερό σημείο του  $\mathbb{R}^3$  και  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  μια επιπέδη καμπύλη με παράμετρο εκμάκος τόξου, έτσι ώστε το επίπεδο  $\pi$  της καμπύλης να μην περιέχει το σημείο  $P_0$ . Η γενικευμένη επιφάνεια  $X: U = I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(s, \nu) = (x_0, y_0, z_0) + \nu(\gamma(s) - (x_0, y_0, z_0))$  λέγεται γενικευμένος κώνος με κορυφή το σημείο  $P_0$ . Εδώ η καμπύλη αφετηρίας είναι η σταθερή καμπύλη  $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\sigma(s) = (x_0, y_0, z_0)$ ,  $s \in I$  και η καμπύλη β:  $I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , ορίζεται ως  $\beta(s) = \gamma(s) - (x_0, y_0, z_0)$  (βλ. σχήμα 35).



Οι γενέτειρες είναι οι ευθείες από το σημείο  $P_0$  και τα σημεία  $\gamma(s)$ , για κάθε  $s \in I$ . Βρίσκουμε,  $X_s(s, \nu) = \dot{\gamma}(s)\nu$ ,  $X_\nu(s, \nu) = \gamma(s) - (x_0, y_0, z_0)$ . Συνεπώς, τα ιδιαίτερα σημεία αυτής είναι τα σημεία  $(s, 0) \in U$ , δηλαδή όλα τα σημεία με ακόνα το σημείο  $P_0$ . Άρα, στα σημεία  $(s, \nu) \in U$  με  $\nu \neq 0$ , η απεικόνιση  $X$  είναι κανονική. Στα σημεία, όπου η  $X$  είναι κανονική θα έχουμε

$$n(s, \nu) = \frac{\dot{\gamma}(s) \times (\gamma(s) - (x_0, y_0, z_0))}{|\dot{\gamma}(s) \times (\gamma(s) - (x_0, y_0, z_0))|}$$

και ως εκ τούτου,  $n_\nu(s, \nu) = (0, 0, 0) = 0 \cdot X_\nu(s, \nu)$ . Άρα, το διάνυσμα  $X_\nu(s, \nu) = \gamma(s) - (x_0, y_0, z_0)$  έχει κύρια διεύθυνση με αντίστοιχη κύρια



καμπυλότητα 0. Συνεπώς, η καμπυλότητα Gauss  $K$  του γενικευμένου κώνου είναι παντού μηδέν. Δηλαδή,  $K=0$ : Όταν η γείνα κύκλος τότε ο γενικευμένος κώνος είναι ο κυκλικός κώνος.

Παράδειγμα 3.7.7: Έστω  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  μια κανονική καμπύλη με ευκαία παράμετρο, τάξης  $C^2$  κυλάσις. Η γενικευμένη επιφάνεια  $X: U = I \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(t, \nu) = \gamma(t) + \nu \gamma'(t)$  είναι ευδει- γενής επιφάνεια και λέγεται εφαπτομένη επιφάνεια (tangent surface) της καμπύλης  $\gamma$ . Βρίσκουμε,

$$X_t(t, \nu) = \gamma'(t) + \nu \gamma''(t) \text{ και } X_\nu(t, \nu) = \gamma'(t).$$

Άρα,

$$X_t(t, \nu) \times X_\nu(t, \nu) = \nu \gamma''(t) \times \gamma'(t)$$

και συνεπώς τα ιδιάζοντα σημεία αυτής είναι τα σημεία  $(t, \nu) \in U$  με  $\nu=0$  ή  $t$  τέτοιο ώστε  $\gamma''(t) \times \gamma'(t) = 0$ . Αν υποθέ- σουμε ότι η καμπυλότητα της καμπύλης  $\gamma$  είναι μη μηδενική στο  $I$ , τότε τα μόνα ιδιάζοντα σημεία της  $X$  είναι τα ση- μεία  $(t, 0) \in U$ ,  $t \in I$ . Δηλαδή, όλα τα σημεία που έχουν εικό- να  $X(t, 0) = \gamma(t)$  τα σημεία της  $\gamma$ . Εδώ η καμπύλη αρετηρίας είναι η καμπύλη  $\gamma$ , ενώ η καμπύλη  $\beta: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , ορίζεται ως  $\beta(t) = \gamma'(t)$ . Είναι φανερό ότι στα μη ιδιάζοντα σημεία θα έχου- με,  $\kappa(t, \nu) = \frac{\gamma''(t) \times \gamma'(t)}{|\gamma''(t) \times \gamma'(t)|}$  και συνεπώς  $\eta_\nu(t, \nu) = 0 = 0 \cdot X_\nu(t, \nu)$ .

Άρα, η καμπυλότητα Gauss της εφαπτομένης επιφάνειας μιας καμπύλης είναι παντού μηδέν.

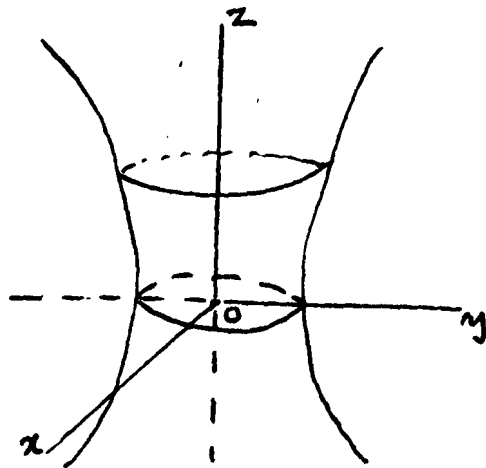
Παράδειγμα 3.7.8. Στο  $Oxy$  επίπεδο, θεωρούμε τον κύκλο  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma(s) = (\cos s, \sin s, 0)$ . Η ελλειογενής επιφάνεια  $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(s, \nu) = \gamma(s) + \nu(\gamma'(s) + e)$ , όπου  $e = (0, 0, 1)$ , είναι ε-



θωογενής επιφάνεια. Εδώ, η καμπύλη  $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , ορίζεται ως  $\beta(s) = \gamma'(s) + e = (-\sin s, \cos s, 1)$ . Συνεπώς,

$$X(s, u) = (\cos s - u \sin s, \sin s + u \cos s, u).$$

Είναι προφανές (γιατί;) η τροχιά της  $X$  είναι το βονόκωνο υπερβολοειδές εκ περιστροφής, με αναλυτική εξίσωση στη εξίσωση  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$  (εκτίμα 36).



εκτίμα 36

Βρίσκουμε,  $X_s(s, u) = (-\sin s - u \cos s, \cos s - u \sin s, 0)$ ,  $X_u(s, u) = (-\sin s, \cos s, 1)$  και συνεπώς  $X_s(s, u) \times X_u(s, u) = (\cos s - u \sin s, \sin s + u \cos s, -u) \neq (0, 0, 0)$ .

Άρα, αυτή η εθωογενής επιφάνεια είναι παντού κανονική. Εξάλλου η  $X$  είναι, όπως διαπιστώνεται εύκολα, αμφιμονοσήμαντη στο  $[0, 2\pi] \times \mathbb{R}$  και συνεπώς το υποέθνωλο  $X([0, 2\pi] \times \mathbb{R})$  του  $\mathbb{R}^3$  είναι τμήθια επιφάνειας με την έννοια του Ορισμού 3.1.1 και η απεικόνιση  $X|_{[0, 2\pi] \times \mathbb{R}}$  είναι παραμετρική παράσταση αυτής. Με υπολογισμούς μπορεί να βρεθεί ότι η καμπυλότητα Gauss αυτής της επιφάνειας δίνεται, από την σχέση  $K(s, u) = -\frac{1}{(1+2u^2)^2}$ . Έτσι, έχουμε ένα παράδειγμα εθωογενούς επιφάνειας της οποίας η καμπυλότητα Gauss δεν μηδενίζεται.

Άσκηση 3.7.1. Αν στο Παράδειγμα 3.7.8 πάρουμε,  $\beta(s) = -\gamma'(s) + e$

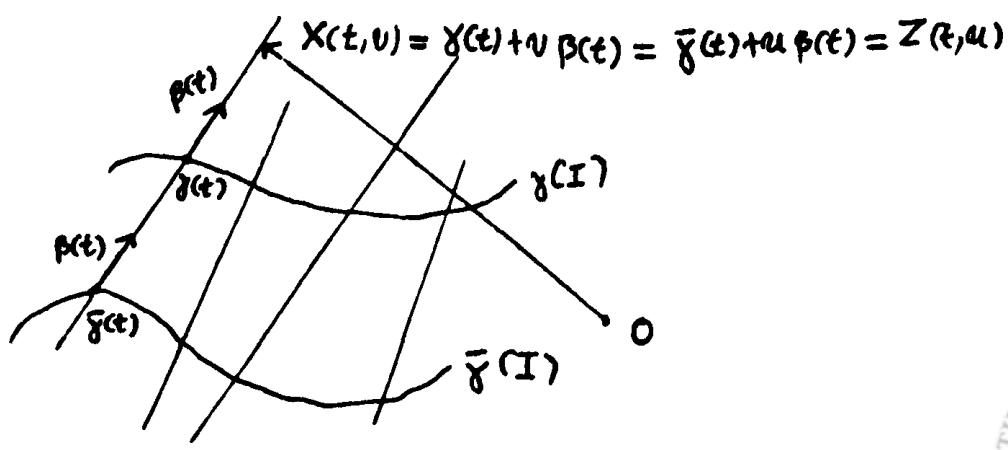


τότε η γενικευμένη επιφάνεια  $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(s, u) = \gamma(s) + u(-\gamma'(s) + e)$  είναι ευδοξογενής επιφάνεια με τροχιά, πάλι, το μονόχωνο υπερβολοειδές με εξίσωση  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ . Άρα, το μονόχωνο υπερβολοειδές παράγεται από δυο οικογένειες ευθειών. Το συμπέρασμα αυτό είναι γνωστό από την Αναλυτική Γεωμετρία.

Άσκηση 3.7.2. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy\}$  είναι τροχιά ευδοξογενούς επιφάνειας.

Παρατήρηση 3.7.9. Έστω  $X: U = I \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(t, u) = \gamma(t) + u\beta(t)$  μια ευδοξογενής επιφάνεια. Επειδή  $\beta(t) \neq 0$ , για κάθε  $t \in I$ , η καμπύλη  $e: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $e(t) = \frac{\beta(t)}{|\beta(t)|}$  κείται στη μοναδιαία σφαίρα και η ευδοξογενής επιφάνεια, που ορίζεται ως,  $Y(t, u) = \gamma(t) + u e(t)$  έχει την ίδια τροχιά με την  $X$  και τις ίδιες γενέτειρες.

Από την άλλη πλευρά, αν θεωρήσουμε μια καμπύλη  $\bar{\gamma}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που τέμνει την γενέτειρα  $\gamma$  στο σημείο  $\bar{\gamma}(t)$ , τότε η ευδοξογενής επιφάνεια που ορίζεται ως  $Z(t, u) = \bar{\gamma}(t) + u\beta(t)$  έχει την ίδια τροχιά όπως η  $X$  και τις ίδιες γενέτειρες. Δηλαδή, για μια ευδοξογενή επιφάνεια η καμπύλη αρετηρίας δεν ορίζεται μονοσήμαντα (βλ. σχήμα 37)



Σχήμα 37



Έτσι, για τα επόμενα θα θεωρούμε ευδαισργενείς επιφάνειες  $X: U = I \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(t, u) = \gamma(t) + u\beta(t)$ , με  $|\beta(t)| = 1$  για κάθε  $t \in I$ . Στη προσπάθεια μας να βρούμε στοιχεία αυτών ίσως χρειαστεί να αλλάξουμε την καμπύλη αφετηρίας ώστε να συνάγουμε πιο εύκολα τα αποτελέσματα μας.

Άρα, αν  $\beta$  είναι μια σταθερή καμπύλη, έστω  $\beta(t) = e$ ,  $t \in I$ , τότε οι γενέτειρες είναι όλες παράλληλες μεταξύ τους. Θεωρούμε την καμπύλη  $\bar{\gamma}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που είναι τομή της εσοχιάς  $X(U)$  με ένα επίπεδο κάθετο στις γενέτειρες. Τότε, σύμφωνα με το Παράδειγμα 3.7.5 πρόκειται για γενικευμένο κολίγδρο.

Θα ασχοληθούμε στη συνέχεια με ευδαισργενείς επιφάνειες  $X: U = I \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που ορίζονται ως.

(3.7.2)  $X(t, u) = \gamma(t) + u\beta(t)$ , με  $|\beta(t)| = 1$  και  $\beta'(t) \neq 0$ , για κάθε  $t \in I$ . Τέτοιες ευδαισργενείς επιφάνειες λέγονται μήκλινδρικές ευδαισργενείς επιφάνειες. Σημειώνουμε ότι, ισχύει η σχέση

$$(3.7.3) \quad \langle \beta'(t), \beta(t) \rangle = 0, \text{ για κάθε } t \in I,$$

αφού  $\langle \beta(t), \beta(t) \rangle = 1$ , για κάθε  $t \in I$ . Με υπολογισμούς βρίσκουμε,

$$X_t(t, u) = \gamma'(t) + u\beta'(t), \quad X_u(t, u) = \beta(t)$$

$$X_{tt}(t, u) = \gamma''(t) + u\beta''(t), \quad X_{tu}(t, u) = \beta'(t), \quad X_{uu}(t, u) = 0.$$

Άρα, τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης είναι τα εξής:

$$E(t, u) = (\gamma'(t))^2 + 2u\langle \gamma'(t), \beta'(t) \rangle + u^2(\beta'(t))^2, \quad F(t, u) = \langle \gamma'(t), \beta(t) \rangle, \quad G(t, u) = 1.$$

Συνοψώς, στα μήκλινδρικά στοιχεία (δηλαδή, εκεί όπου  $X_t(t, u) \times X_u(t, u) \neq 0$ ) έχουμε

$$n(t, u) = \frac{\gamma'(t) \times \beta(t) + u\beta'(t) \times \beta(t)}{g(t, u)},$$





$$\text{όπου } g(t, u) = \sqrt{E(t, u)G(t, u) - F^2(t, u)} = \left( (\gamma'(t))^2 + 2u \langle \gamma'(t), \beta'(t) \rangle + u^2 (\beta'(t))^2 - \langle \gamma'(t), \beta'(t) \rangle^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Τα θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης δίνονται από τις σχέσεις

$$L(t, u) = \langle X_{tt}(t, u), \eta(t, u) \rangle = \frac{1}{g(t, u)} \left[ \gamma'(t) \cdot \gamma'(t) \times \beta(t) + u (\gamma'(t) \cdot \beta'(t) \times \beta(t) + \beta'(t) \cdot \gamma(t) \times \beta'(t)) + u^2 \beta'(t) \cdot \beta'(t) \times \beta(t) \right]$$

$$M(t, u) = \langle X_{tu}(t, u), \eta(t, u) \rangle = \frac{1}{g(t, u)} \beta'(t) \cdot \gamma'(t) \times \beta(t)$$

$$N(t, u) = \langle X_{uu}(t, u), \eta(t, u) \rangle = 0.$$

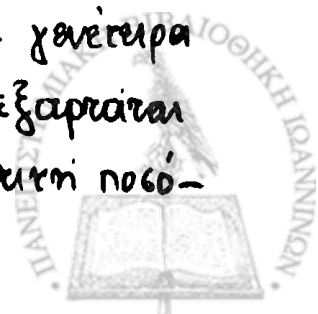
Από τη σχέση (3.5.10) συμπεραίνουμε ότι η καμπυλότητα Gauss, στα μη ιδιαίτερα σημεία  $(t, u)$ , δίνεται από τη σχέση

$$(3.7.4) \quad K(t, u) = - \frac{(\beta'(t) \cdot \gamma'(t) \times \beta(t))^2}{g^4(t, u)}.$$

Συνοψώς, κάθε ευδαιμονής επιφάνεια έχει, στα μη ιδιαίτερα σημεία, καμπυλότητα Gauss μη θετική, όπως προκύπτει από τη σχέση (3.7.4).

Ορισμός 3.7.10. Δίνεται μη κυλινδρική ευδαιμονής επιφάνεια  $X: U = I \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(t, u) = \gamma(t) + u\beta(t)$ , με  $|\beta(t)| = 1$  και  $\beta'(t) \neq 0$ , για κάθε  $t \in I$ . Η συνάρτηση  $\mu: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , που ορίζεται ως  $\mu(t, u) = \frac{\gamma'(t) \cdot \beta(t) \times \beta'(t)}{(\beta'(t))^2}$  λέγεται μέτρο σφελλότητας της ευδαιμονούς επιφάνειας.

Είναι φανερό ότι το μέτρο σφελλότητας  $\mu$  είναι ανεξάρτητο από τη παράμετρο  $u$  και ως εκ τούτου πάνω σε κάθε γραμμή είναι σταθερό. Συνοψώς, το μέτρο σφελλότητας δεν εξαρτάται από τη γραμμική αευστηρία, αλλά είναι μια χαρακτηριστική ποσό-



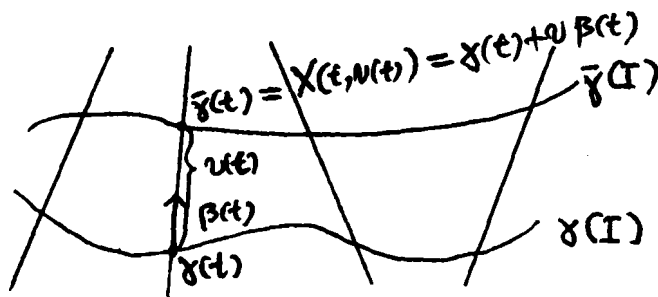
πηται της προσαίας της ευδαιογενούς επιφάνειας. Έτσι θα συμ-  
βολίζονται απλά με  $\beta(t)$ . Δηλαδή,

$$(3.7.5) \quad \mu(t) = \frac{\gamma'(t) \cdot \beta(t) \times \beta'(t)}{(\beta'(t))^2},$$

όπου  $\gamma$  είναι μια ευκαία καμπύλη αρετηρίας. Η συνάρτηση  
καμπυλότητας Gauss, στα δύο διάφορα σημεία, ως συνάρτηση  
του δεύτερου σερεβλότητας γράφεται ως

$$(3.7.6) \quad K(t, \nu) = - \frac{\mu^2(t) (\beta'(t))^2}{g^4(t, \nu)}.$$

Από την (3.7.2) θέτοντας  $\nu = \nu(t)$  προκύπτει μια καμπύλη  
 $\bar{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\bar{\gamma}(t) = X(t, \nu(t)) = \gamma(t) + \nu(t) \beta(t)$ , της οποίας η τροχιά  
βρίσκεται στη τροχιά της ευδαιογενούς επιφάνειας  $X$ . Δηλαδή,  
η καμπύλη  $\bar{\gamma}$  μπορεί να θεωρηθεί ως μια καμπύλη αρετη-  
ρίας (βλ. σχήμα 38)



σχήμα 38

Αναζητάμε κατάλληλη συνάρτηση  $\nu(t)$ , ώστε για την καμπύλη  
 $\bar{\gamma}$  να ισχύει η σχέση  $\langle \bar{\gamma}'(t), \beta'(t) \rangle = 0$ , για κάθε  $t \in I$ . Δηλαδή,

$$0 = \langle \bar{\gamma}'(t), \beta'(t) \rangle = \langle \gamma'(t) + \nu'(t) \beta(t) + \nu(t) \beta'(t), \beta'(t) \rangle = \\ = \langle \gamma'(t), \beta'(t) \rangle + \nu(t) \langle \beta'(t), \beta'(t) \rangle,$$

αφού  $\langle \beta(t), \beta'(t) \rangle = 0$ , για κάθε  $t \in I$ .

Άρα, η συνάρτηση  $\nu(t)$  που αναζητάμε δίνεται από τη σχέ-  
ση

$$\nu(t) = - \frac{\langle \gamma'(t), \beta'(t) \rangle}{(\beta'(t))^2}, \text{ για κάθε } t \in I.$$



Η καμπύλη  $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που ορίζεται ως

$$(3.7.7) \quad \sigma(t) = \gamma(t) - \frac{\langle \gamma'(t), \beta'(t) \rangle}{|\beta'(t)|^2} \beta(t),$$

η οποία είναι στη τροχιά της μη κυλινδρικής ευθυσθενούς επιφάνειας (3.7.2) λέγεται γραμμική συσφιξεως (striction line) αυτής. Το σημείο  $\sigma(t)$  λέγεται κεντρικό σημείο της  $X$  πάνω στη γενέτειρα  $\epsilon$ .

Άσκηση 3.7.3. Η γραμμική συσφιξεως μιας μη κυλινδρικής ευθυσθενούς επιφάνειας είναι χαρακτηριστική καμπύλη της τροχιάς της  $X$  και δεν εξαρτάται από τη γραμμική αφετηρίας  $\gamma$ , που χρησιμοποιήσαμε για τον ορισμό της  $\sigma$ .

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε μη κυλινδρικές ευθυσθενείς επιφάνειες με γραμμική αφετηρίας τη γραμμική συσφιξεως των.

Έστω μη κυλινδρική ευθυσθενής επιφάνεια  $X: U = I \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$(3.7.8) \quad X(t, u) = \sigma(t) + u \beta(t),$$

όπου  $\sigma$  είναι η γραμμική συσφιξεως της  $X$ , δηλαδή ισχύει η σχέση

$$(3.7.9) \quad \langle \sigma'(t), \beta'(t) \rangle = 0, \text{ για κάθε } t \in I.$$

Ισχύει επίσης η σχέση

$$(3.7.10) \quad |\beta(t)| = 1 \text{ και } \beta'(t) \neq 0, \text{ για κάθε } t \in I$$

και ως εκ τούτου ισχύει και η σχέση

$$(3.7.11) \quad \langle \beta(t), \beta'(t) \rangle = 0, \text{ για κάθε } t \in I.$$

Αυτή η παράσταση μιας μη κυλινδρικής ευθυσθενούς επιφάνειας, χρησιμοποιείται αρκετά συχνά στις εφαρμογές, αφού ελαφρύνει τους υπολογισμούς.



Παρατήρηση 3.7.11. Στη παράσταση (3.7.8) η παράμετρος  $u$  συμφορίζει την απόσταση του σημείου  $X(t, u)$  από το σημείο  $\sigma(t)$  κατά μήκος της γενέτρας  $\xi$ . Έτσι η παραμετρική γραμμή  $u=0$  είναι η γραμμή ευερίχθως.

Από τις σχέσεις (3.7.9) και (3.7.11) συμπεραίνουμε πως υπάρχει συνάρτηση  $\lambda(t)$  έτσι ώστε να ισχύει η σχέση  $\sigma'(t) \times \beta(t) = \lambda(t) \beta'(t)$ . Η συνάρτηση  $\lambda(t)$  δίνεται από τη σχέση

$$\lambda(t) = \frac{\sigma'(t) \cdot \beta(t) \times \beta'(t)}{(\beta'(t))^2} = \mu(t) = \text{μέτρο σκευβλότητας.}$$

Άρα,

$$(3.7.12) \quad \sigma'(t) \times \beta(t) = \mu(t) \beta'(t)$$

Βρίσκουμε,

$$X_t(t, u) = \sigma'(t) + u \beta'(t), \quad X_u(t, u) = \beta(t)$$

και συνεπώς

$$\begin{aligned} X_t(t, u) \times X_u(t, u) &= \sigma'(t) \times \beta(t) + u \beta'(t) \times \beta(t) \\ &= \mu(t) \beta'(t) + u \beta'(t) \times \beta(t), \end{aligned}$$

από όπου προκύπτει η σχέση

$$(3.7.13) \quad |X_t(t, u) \times X_u(t, u)|^2 = (\mu^2(t) + u^2) |\beta'(t)|^2$$

Η σχέση (3.7.13) μας διαβεβαιώνει για το εξής: Σε μια μη κυλινδρική ευδογενή επιφάνεια τα μοναδικά σημεία, που μπορεί να είναι ιδιαίτερα σημεία, είναι τα σημεία της γραμμής ευερίχθως και αυτά μόνο αν το μέτρο σκευβλότητας είναι μηδέν στο αντίστοιχο σημείο.

Συνεπώς, στα μη ιδιαίτερα σημεία, θα έχουμε

$$(3.7.14) \quad n(t, u) = \frac{\mu(t)}{\sqrt{\mu^2(t) + u^2}} \frac{\beta'(t)}{|\beta'(t)|} + \frac{u}{\sqrt{\mu^2(t) + u^2}} \frac{\beta(t)}{|\beta'(t)|} \times \beta(t).$$



Έσα μη ιδιάζοντα σπκεία της γραμμής ευσφίχξως (για  $v=0$ )  
 θα έσους,

$$(3.7.15) \quad n(t,0) = \frac{\mu(t)}{|\mu(t)|} \frac{\beta'(t)}{|\beta'(t)|}.$$

Συμβολίζοντας με  $\varphi(v)$  ( $0 \leq \varphi(v) \leq \pi$ ) τη γωνία που εκπικαίξει  
 το  $n(t,v)$  με το  $n(t,0)$  βρίσκουμε

$$\cos \varphi(v) = \frac{|\mu(t)|}{\sqrt{\mu(t)^2 + v^2}}, \quad \sin \varphi(v) = \frac{|v|}{\sqrt{\mu(t)^2 + v^2}}$$

και συνεπώς

$$(3.7.16) \quad \tan \varphi(v) = \frac{|v|}{|\mu(t)|}.$$

Εξάλλου η καμπυλότητα Gauss, κáινοντας χρήση των σχέσεων  
 (3.7.6) και (3.7.13) δίνεται, στα μη ιδιάζοντα σπκεία, από τη σχέση

$$(3.7.17) \quad K(t,v) = -\frac{\mu(t)^2}{(\mu(t)^2 + v^2)^2}.$$

Παράδειγμα 3.7.12. Στο Παράδειγμα 3.7.8 εξετάσαμε την  
 εωδειογενή επιφάνεια  $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(s,v) = \gamma(s) + v(\gamma'(s) + e)$ , όπου  $\gamma(s) =$   
 $(\cos s, \sin s, 0)$  και  $e = (0,0,1)$ . Οι γενέτριες είναι παράλληλες  
 προς το  $\beta(s) = \gamma'(s) + e$ . Επειδή,  $|\beta(s)| = \sqrt{2}$  μπορούμε να πα-  
 ριγράψουμε αυτή την εωδειογενή επιφάνεια και με την απει-  
 κόνιση  $Y: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $Y(s,u) = \gamma(s) + u\omega(s)$ , όπου  $\omega(s) = \frac{\gamma'(s) + e}{\sqrt{2}}$   
 και  $u = \sqrt{2}v$ . Επειδή,  $|\omega(s)| = 1$  και  $\omega'(s) = \frac{\gamma''(s)}{\sqrt{2}} \neq 0$ , αυτή  
 η εωδειογενής επιφάνεια είναι μη κυλινδρική. Το μέτρο αρε-  
 βλώτητας αυτής είναι

$$\mu(s) = \frac{\gamma'(s) \cdot \omega(s) \times \omega'(s)}{(\omega'(s))^2} = -1, \quad \text{για κάθε } s \in \mathbb{I}$$



Η γραμμική ευσφίγγεως, είναι η καμπύλη  $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  με

$$\sigma(s) = \gamma(s) - \frac{\langle \gamma'(s), \omega'(s) \rangle \omega(s)}{(\omega'(s))^2} = \gamma(s),$$

αφού  $\langle \gamma'(s), \omega'(s) \rangle = 0$ . Δηλαδή, η γραμμική ευσφίγγεως είναι ο ελάχιστος κύκλος. Εξάλλου, η καμπυλότητα Gauss αυτής της ευδαιογενούς επιφάνειας θα είναι, σύμφωνα με τη σχέση (3.7.17),  $K(s, u) = -\frac{1}{(1+u^2)^2}$  ή  $K(s, u) = -\frac{1}{(1+2uv)^2}$ , αφού  $u = \sqrt{2}v$ , όπως αναφέραμε στο Παράδειγμα 3.7.8.

Άσκηση 3.7.4. Θεωρούμε καμπύλη  $\gamma$  με καμπυλότητα  $k > 0$  και αρχή  $\tau \neq 0$ . Να αποδειχθεί ότι η γραμμική ευσφίγγεως της ευδαιογενούς επιφάνειας που παράγεται από τις δεύτερες καδέτους της καμπύλης  $\gamma$ , είναι η ίδια η καμπύλη  $\gamma$ .

Άσκηση 3.7.5. Θεωρούμε μια καμπύλη  $\gamma$  με καμπυλότητα  $k > 0$ . Να αποδειχθεί ότι, το μέτρο σφαιρότητας της ευδαιογενούς επιφάνειας που παράγεται από τις πρώτες καδέτους της καμπύλης, είναι  $1/6$  με  $\frac{\pi}{k^2 + \pi^2}$ , όπου  $\pi$  είναι η αρχή της καμπύλης  $\gamma$ .

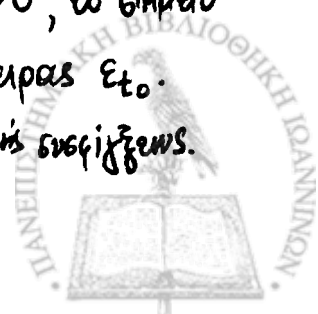
Άσκηση 3.7.6. Έστω,  $X(t, u) = \gamma(t) + u\beta(t)$  με  $|\beta(t)| = 1$  κανονική και μη κυλινδρική ευδαιογενής επιφάνεια. Θεωρούμε τις γενέτειρες

$$\varepsilon_{t_0} : X(t_0, u) = \gamma(t_0) + u\beta(t_0)$$

$$\varepsilon_{t_0+\varepsilon} : X(t_0+\varepsilon, u) = \gamma(t_0+\varepsilon) + u\beta(t_0+\varepsilon).$$

Η κοινή κάθετος των  $\varepsilon_{t_0}$  και  $\varepsilon_{t_0+\varepsilon}$  τέμνει αυτές στα σημεία  $X(t_0, u_1)$  και  $X(t_0+\varepsilon, u_2)$ , αντίστοιχα. Καθώς το  $\varepsilon \rightarrow 0$ , το σημείο  $X(t_0, u_1)$  πείνει στο κεντρικό σημείο  $\delta(t_0)$  της γενέτειρας  $\varepsilon_{t_0}$ .

Έχουμε, έτσι, ένα γεωμετρικό τρόπο κατασκευής της γραμμικής ευσφίγγεως.



Για μια ευδαισχηνή επιφάνεια  $X: U = I \times R \subset R^2 \rightarrow R^3$ ,  $X(t, u) = \gamma(t) + u\beta(t)$ , με  $|\beta(t)| = 1$ , και στα μη ιδιόζοντα σημεία της, η καμπυλότητα Gauss, όπως γνωρίζουμε (σχέση (3.7.4)), δίνεται από τη σχέση

$$K(t, u) = -\frac{(\beta'(t) \cdot \gamma'(t) \times \beta(t))^2}{g^{+}(t, u)} = -\frac{(\gamma'(t) \cdot \beta(t) \times \beta'(t))^2}{g^{+}(t, u)}$$

Ορισμός 3.7.13. Μια ευδαισχηνή επιφάνεια  $X(t, u) = \gamma(t) + u\beta(t)$ , με  $|\beta(t)| = 1$ , λέγεται αναπτωκτική (developable), αν ισχύει η σχέση  $\gamma'(t) \cdot \beta(t) \times \beta'(t) = 0$ , για κάθε  $t \in I$ .

Παρατήρηση 3.7.14. Είναι, αμέσως, προφανές ότι η καμπυλότητα Gauss μιας αναπτωκτικής επιφάνειας είναι παντοίχα μηδέν, στα μη ιδιόζοντα σημεία της.

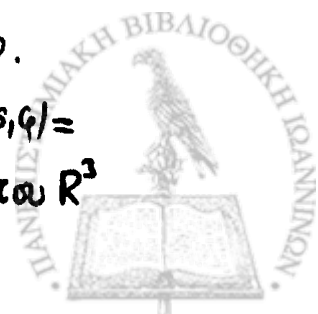
Άσκηση 3.7.7. Έστω  $X(t, u) = \gamma(t) + u\beta(t)$  μια αναπτωκτική επιφάνεια. Να αποδειχθεί ότι, στα μη ιδιόζοντα σημεία της, ισχύουν οι σχέσεις  $\langle \pi_u, X_u \rangle = \langle \pi_u, X_t \rangle = 0$ . Από αυτές προκύπτει ότι, το εφαπτόμενο επίπεδο μιας αναπτωκτικής επιφάνειας είναι σταθερό κατά μήκος μιας γενέτειρας.

β) Εκ Περιστροφής Επιφάνειες σταθερής Καμπυλότητας Gauss

Θεωρούμε μια καμπύλη  $\gamma: I \rightarrow R^3$ ,  $\gamma(s) = (f(s), 0, g(s))$ , όχι κατ'ανάγκη απλή, με παράμετρο το μήκος τόξου και ταχύτητος, πουλάκις,  $C^2$ . Ισχύουν οι σχέσεις

(3.7.18)  $\dot{f}^2(s) + \dot{g}^2(s) = 1$  και  $\dot{f}(s)\ddot{f}(s) + \dot{g}(s)\ddot{g}(s) = 0$ .

Η γενικευμένη επιφάνεια  $X: U = I \times R \subset R^2 \rightarrow R^3$ ,  $X(s, \varphi) = (f(s)\cos\varphi, f(s)\sin\varphi, g(s))$  έχει τροχιά το υποέυνολο του  $R^3$



που προκύπτει από τη περιστροφή της εσοχιάς  $\gamma(I)$  της  $\gamma$  περι τον άξονα  $Oz$ . Για τον λόγο αυτό η  $X$  λέγεται γενικευμένη επιφάνεια εκ περιστροφής. Βρίσκουμε,

$$X_s(s, \varphi) = (\dot{f}(s) \cos \varphi, \dot{f}(s) \sin \varphi, \dot{g}(s))$$

$$X_\varphi(s, \varphi) = (-f(s) \sin \varphi, f(s) \cos \varphi, 0)$$

και συνεπώς,

$$X_s(s, \varphi) \times X_\varphi(s, \varphi) = (-f(s)\dot{g}(s)\cos \varphi, -f(s)\dot{g}(s)\sin \varphi, f(s)\dot{f}(s)).$$

Άρα,

$$|X_s(s, \varphi) \times X_\varphi(s, \varphi)|^2 = \dot{f}(s)^2, \text{ για κάθε } (s, \varphi) \in U.$$

Ως εκ φύσεως τα μοναδικά ιδιόζοντα σημεία αυτής είναι τα σημεία όπου  $\dot{f}(s) = 0$ , δηλαδή τα σημεία στα οποία η καμπύλη  $\gamma$  κέμνει τον άξονα περιστροφής  $Oz$ . Υποθέτουμε ότι  $\dot{f}(s) > 0$ , για κάθε  $s \in I$ , η γενικευμένη επιφάνεια εκ περιστροφής είναι κανονική γενικευμένη επιφάνεια. Προχωρώντας όπως στο Παράδειγμα 3.5.25 βρίσκουμε ότι, η Καμπυλότητα Gauss αυτής δίνεται από την σχέση

$$K(s, \varphi) = - \frac{\ddot{f}(s)}{\dot{f}(s)}.$$

Αναζητάμε κανονικές γενικευμένες επιφάνειες εκ περιστροφής με σταθερή καμπυλότητα Gauss, έστω  $K_0$ . Σε αυτή την περίπτωση η  $\dot{f}(s)$  δίνεται από τη διαφορική εξίσωση

$$(3.7.19) \quad \ddot{f}(s) + K_0 \dot{f}(s) = 0$$

και η  $g(s)$  βρίσκεται, τότε, από τη πρώτη των σχέσεων (3.7.18).

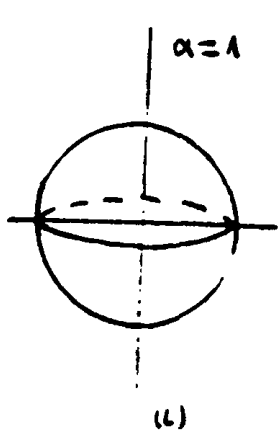
Περίπτωση 1.  $K_0 = 0$ . Από τη διαφορική εξίσωση (3.7.19) βρίσκουμε,  $\dot{f}(s) = a + b$ , όπου  $a, b$  σταθερές με  $|a| \leq 1$ . Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $0 \leq a \leq 1$ . Από τη πρώτη των



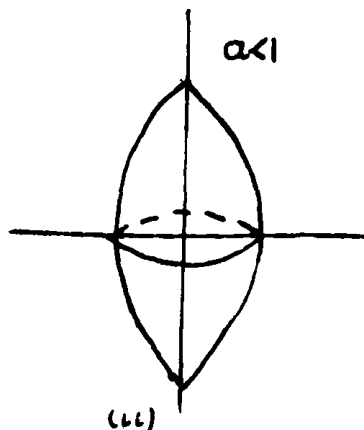


ὀρέξεων (3.7.18) θα έχουμε και  $g(s) = \sqrt{1-a^2}s + c$ , όπου  $c$  είναι ελεύθερο.  
 Για  $a=0$ , η επιφάνεια είναι ο κυκλικός κώνος. Για  $a < 1$ , είναι ένας κυκλικός κώνος και για  $a=1$ , πρόκειται για ένα επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής.

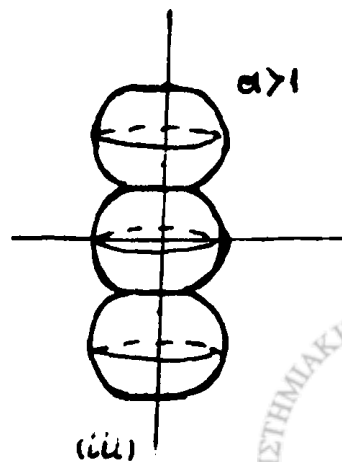
Περίπτωση 2.  $K_0 > 0$ . Δεχόμαστε για λόγους απλότητας ότι  $K \neq 1$ . Τότε η διαφορική εξίσωση (3.7.14) γίνεται  $\ddot{f} + f(s) = 0$ . Η γενική λύση αυτής είναι η  $f(s) = a_1 \cos s + a_2 \sin s$ , όπου  $a_1, a_2$  σταθερές ολοκληρώσεως. Η γενική λύση μπορεί να γραφεί και με τη μορφή  $f(s) = a \cos(s+b)$ . Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $b=0$  και  $a > 0$ , αν αλλάξουμε αρχή για τον ορισμό της φυσικής παραμέτρου. Τότε, θα έχουμε  $f(s) = a \cos s$ , με  $a^2 \sin^2 s \leq 1$ , και από τη πρώτη των (3.7.18) βρίσκουμε,  $g(s) = \pm \int_0^s \sqrt{1-a^2 \sin^2 t} dt$ . Για  $a=1$  είναι μια εφαίρα (εξήμα 39i). Για  $a < 1$ , η καμπύλη  $\gamma$  μπορεί να εκφραστεί με ελλειπτικά ολοκληρώματα και η εκ περιστροφής επιφάνεια έχει τη μορφή σφαιριού (εξήμα 39ii). Για  $a > 1$  και γενικώς  $0 \leq s \leq a \arcsin \frac{1}{a}$  για να είναι πραγματικό το ολοκλήρωμα, η καμπύλη  $\gamma$  μπορεί να εκφραστεί με ελλειπτικά ολοκληρώματα και η εκ περιστροφής επιφάνεια έχει τη μορφή κολώνας από χάντρες κομπολογιού (εξήμα 39iii).



(i)



(ii)

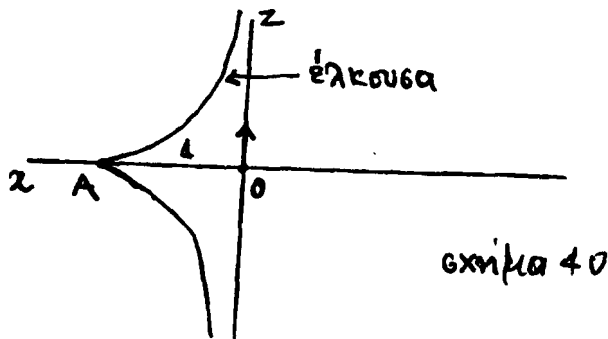


(iii)

Εξήμα 39

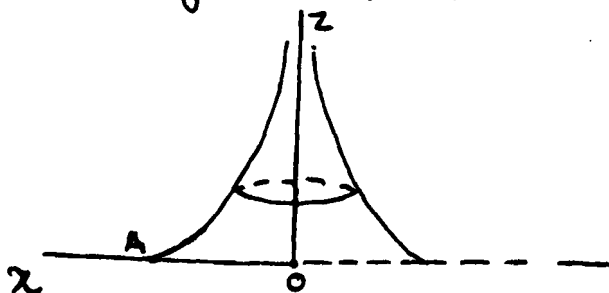


Περίπτωση 3:  $K_0 < 0$ . Δεχόμαστε για λόγους απλότητας  $K_0 = -1$ . Τότε η διαφορική εξίσωση (3.7.19) γίνεται  $\ddot{f}(s) - f(s) = 0$ . Η γενική λύση αυτής είναι η  $f(s) = \alpha e^s + \beta e^{-s}$ , όπου  $\alpha, \beta$  είναι σταθερές ολοκλήρωσης. Αν  $\alpha\beta = 0$ , χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $\beta = 0$  και  $\alpha > 0$ , αφού αλλάζοντας το  $s$  με το  $-s$  αλλάζουν οι ρόλοι των  $\alpha, \beta$ . Σε αυτή τη περίπτωση, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $\alpha = 1$ , με αλλαγή της αρχής για τον ορισμό της φυσικής παραμέτρου  $s$ . Άρα, θα έχουμε  $f(s) = e^s$  με τη συνθήκη  $e^{2s} \leq 1$ , και από τη πρώτη των (3.7.18) βρίσκουμε  $g(s) = \pm \int_0^s \sqrt{1 - e^{2s}} ds$ . Η καμπύλη  $\gamma$  έχει προσαί τη καμπύλη του σχήματος 40, γνωστή ως έλκουσα (tractrix).



σχήμα 40

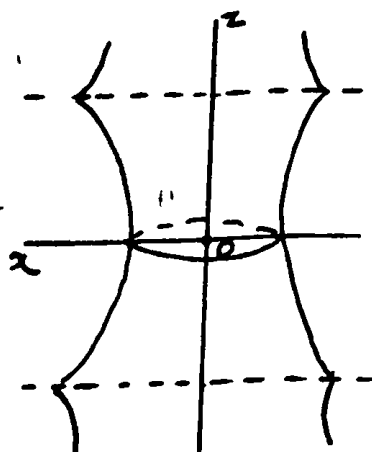
Η έλκουσα του σχήματος 40 προκύπτει από τη διαδρομή ενός βαχονιού A που έλκεται από νηφό που βρίσκεται στο σημείο 0, με άξονα μήκους 1, ο οποίος βαδίζει κατά μήκος του άξονα Oz. Η επιφάνεια που προκύπτει με περιστροφή της έλκουσας είναι η επιφάνεια του σχήματος 41, έχει σταθερή καμπυλότητα Gauss ίση με  $-1$  και λέγεται ψευδοσφαίρα (pseudosphere)



σχήμα 41

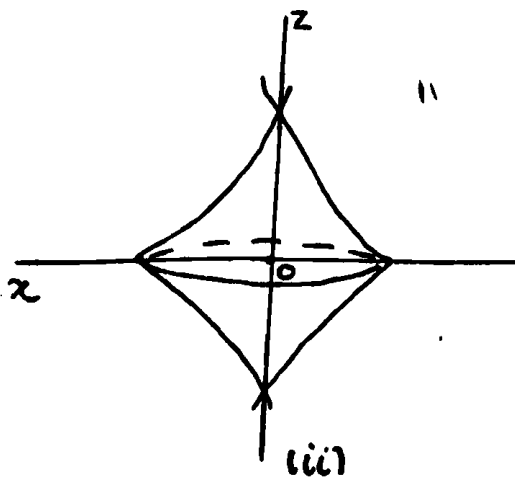


Έστω  $a, b \neq 0$ . Σε αυτή την περίπτωση, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $a=b$  ή  $a=-b$ , αλλάζοντας αρκεί για τη φυσική παράμετρο. Στη πρώτη περίπτωση η εκ περιστροφής επιφάνεια έχει τη μορφή του σχήματος 42(i) και στη δεύτερη περίπτωση έχει τη μορφή του σχήματος 42(ii).



(i)

σχήμα 42



(ii)

### γ) Επιφάνειες ελάχιστης Έκτασης

Στον Ορισμό 3.5.23 ονομάσαμε μια επιφάνεια  $S$  ελάχιστης έκτασης, αν η μέση καμπυλότητα  $H$  είναι παντού μηδέν. Έτσι, το επίπεδο, το ελικοειδές και το αηλουειδές (Παράδειγμα 3.5.22 και Άσκηση 3.5.7) διαπιστώσαμε ότι είναι επιφάνειες ελάχιστης έκτασης. Κατ'αναλογία, μια κανονική γενικευμένη επιφάνεια  $\chi: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  λέγεται ελάχιστης έκτασης, αν η μέση καμπυλότητα  $H$  είναι παντού μηδέν.

Θα δικαιολογήσουμε την ονομασία αυτών των επιφανειών δείχνοντας τη παρακάτω πρόταση



Πρόταση 3.7.15. Έστω  $C$  η τροχιά μιας απλής κλειστής καμπύλης του  $R^3$ . Αν μεταξύ όρων των επιφανειών τάξης  $C^2$  εστιάσιμων, με σύνορο την  $C$ , υπάρχει μια επιφάνεια  $S$  με ελάχιστο εμβαδόν, τότε η  $S$  είναι ελάχιστης έκτασης, δηλαδή έχει μέση καμπυλότητα παντού μηδενική.

Θα αποδείξουμε πρώτα το εξής Λήμμα

Λήμμα 3.7.16: Έστω  $f: \bar{D} \subset R^2 \rightarrow R$  μια συνεχής συνάρτηση, όπου  $\bar{D}$  είναι ένας κλειστός κύκλος. Αν για κάθε συνάρτηση  $g: \bar{D} \subset R^2 \rightarrow R$ , που είναι συνεχής στο  $\bar{D}$ , ισχύει η σχέση

$$\iint_{\bar{D}} g(u,v) f(u,v) du dv = 0,$$

τότε  $f(u,v) = 0$ , για κάθε  $(u,v) \in \bar{D}$ .

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι  $f(u,v) = 0$ , για κάθε σημείο  $(u,v)$  στο εσωτερικό  $\overset{\circ}{D}$  του  $\bar{D}$ . Έστω υπάρχει  $(u_0, v_0)$  στο εσωτερικό του  $\bar{D}$ , τέτοιο ώστε  $f(u_0, v_0) \neq 0$ , έστω  $f(u_0, v_0) > 0$ . Από τη συνέχεια της  $f$  προκύπτει ότι υπάρχει πεδράγωνο  $T$  πλευράς  $a$  και κέντρου το  $(u_0, v_0)$ , δηλαδή  $T = \{(u,v) \in R^2: |u-u_0| < \frac{a}{2}, |v-v_0| < \frac{a}{2}\}$ , στο οποίο η  $f$  είναι θετική και  $T \subset \overset{\circ}{D}$ . Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g: \bar{D} \rightarrow R$ , που ορίζεται ως

$$g(u,v) = \begin{cases} 0, & \text{για κάθε } (u,v) \in \bar{D} - T \\ (u-u_0 + \frac{a}{2})^2 (u-u_0 - \frac{a}{2})^2 (v-v_0 + \frac{a}{2})^2 (v-v_0 - \frac{a}{2})^2, & \text{για } (u,v) \in T. \end{cases}$$

Η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο  $\bar{D}$  και ισχύει

$\iint_{\bar{D}} g(u,v) f(u,v) du dv > 0$ , που αντιστοιχεί στην υπόθεση. Άρα,



$f(u,v) = 0$ , για κάθε  $(u,v) \in \bar{D}$ .

Απόδειξη της Πρότασης 3.7.15. Έστω  $X: \bar{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ένα σύστημα συνεκταγμένων της  $S$ , όπου  $\bar{D}$  κλειστός τόπος με  $X(\partial\bar{D}) = C$  και  $\partial\bar{D}$  το σύνορο του  $\bar{D}$ . Έστω  $n$  ο αντίστοιχος προαναταολιγμός. Θεωρούμε την απεικόνιση  $X^t: \bar{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που ορίζεται ως

$$X^t(u,v) = X(u,v) + t h(u,v) n(u,v), \quad (u,v) \in \bar{D}$$

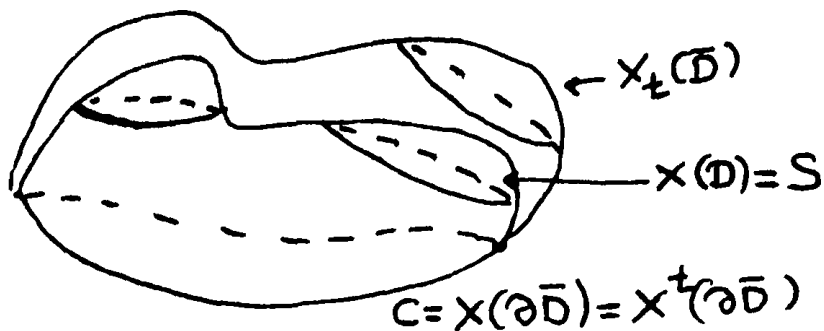
όπου  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ,  $h: \bar{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση τάξης  $C^2$  κυλινδρική, τέτοια ώστε  $h(\partial\bar{D}) = 0$  (δηλαδή, μηδενίζεται στα σημεία του συνόρου  $\partial\bar{D}$ ) και  $\varepsilon$  είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Προφανώς η  $X^t$  είναι γενικευμένη επιφάνεια, για κάθε  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , και  $X^0 = X$ . Έχουμε,

$$X_u^t = X_u + t h_u n + t h n_u$$

και

$$X_v^t = X_v + t h_v n + t h n_v,$$

όπου έχουμε παραλείψει, χάριν απλότητας, το σημείο  $(u,v)$  στο οποίο υπολογίζονται οι απεικονίσεις, και  $h_u, h_v$  είναι οι μερικές παραίγωγοι της  $h$ . Είναι φανερό ότι, για κάθε  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  έχουμε  $X^t(\partial\bar{D}) = C$ , αφού  $h(\partial\bar{D}) = 0$ .



Συμβολίζουμε με  $E^t, F^t, G^t$  τα δετερμιαντά ποσά πρώτης τάξης της  $X^t$  και βρίσκουμε,



$$E^t = E + 2th \langle X_u, n_u \rangle + t^2 h_u^2 + t^2 h^2 \langle n_u, n_u \rangle$$

$$F^t = F + th \{ \langle X_u, n_v \rangle + \langle X_v, n_u \rangle \} + t^2 h_u h_v + t^2 h^2 \langle n_u, n_v \rangle$$

$$G^t = G + 2th \langle X_v, n_v \rangle + t^2 h_v^2 + t^2 h^2 \langle n_v, n_v \rangle.$$

Συνεπώς,

$$E^t G^t - (F^t)^2 = EG - F^2 - 2th (EN - 2FM + GL) + (t^2)H,$$

όπου  $H$  είναι η μέση καμπυλότητα της  $S$  και  $(t^2)$  είναι οι όροι βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2, ως προς  $t$ . Από τη τελευταία σχέση προκύπτει ότι, αν το  $\varepsilon$  είναι αρκούντως μικρό, τότε η απεικόνιση  $X^t$  είναι κανονική στο  $\bar{D}$ , για κάθε  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Επιπλέον, από τη τελευταία σχέση παίρνουμε

$$\begin{aligned} \sqrt{E^t G^t - (F^t)^2} &= \sqrt{EG - F^2} \sqrt{1 - 4thH + (t^2)} \\ &= \sqrt{EG - F^2} (1 - 2thH + (t^2)), \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα εφαρμόσαμε τον τύπο του Taylor για ανάπτυγμα μιας τετραγωνικής ρίζας. Άρα, το εμβαδόν της  $X^t(\bar{D})$  είναι

$$A(t) = \iint_{\bar{D}} \sqrt{E^t G^t - (F^t)^2} du dv = A(0) - 2t \iint_{\bar{D}} h(u, v) H(u, v) dS + (t^2),$$

όπου  $A(0)$  είναι το εμβαδόν της  $S$  και  $dS$  το στοιχείο εμβαδού αυτής. Συνεπώς,

$$A'(0) = -2 \iint_{\bar{D}} h(u, v) H(u, v) \sqrt{EG - F^2} du dv,$$



όπου ο τόνος υποδηλοί παράγωγο ως προς  $t$ . Επειδή, η  $S$  έχει ελάχιστο εμβαδόν μεταξύ των  $\chi^t(\bar{D})$  θα πρέπει  $A'(0) = 0$  και συνεπώς

$$\iint_{\bar{D}} h(u, v) H(u, v) \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv = 0$$

Με το Λήμμα 3.7.16 συμπεραίνουμε ότι  $H = 0$ , παντού στο  $\bar{D}$ .

Παρατήρηση 3.7.17. (i) Μια επιφάνεια ελάχιστης έκτασης μπορεί πειραματικά να κατασκευαστεί βυθίζοντας μια απλή κλειστή καμπύλη από σύρμα σε διάλυμα σαπουνιού. Η λεπτή μεμβράνη σαπουνιού που προκύπτει και έχει σύνορο στη συρματινή καμπύλη είναι μια επιφάνεια ελάχιστης έκτασης.

(ii) Το πρόβλημα ύπαρξης επιφάνειας ελάχιστης έκτασης με σύνορο μια δοθείσα απλή και κλειστή καμπύλη του  $\mathbb{R}^3$  είναι γνωστό ως Πρόβλημα του Plateau. Θετική απάντηση στο Πρόβλημα αυτό δόθηκε το 1930 συγχρόνως και ανεξάρτητα από τον T. Rado και J. Douglas, οι οποίοι έδειξαν ότι: Όταν δοθεί απλή και κλειστή καμπύλη του Jordan, τότε υπάρχει μια ευλαχιστόν επιφάνεια ελάχιστης έκτασης με σύνορο την  $C$ .

(iii) Υπάρχει εκτενής βιβλιογραφία αφιερωμένη στις επιφάνειες ελάχιστης έκτασης. Σπουδαία συμπεράσματα και καινούργια παραδείγματα επιφανειών ελάχιστης έκτασης μπορούν να προκύψουν με μια μέθοδο, που αναπτύχθηκε από τον Weierstrass. Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στη θεωρία των αναλυτικών συναρτήσεων μιγαδικής Ανάλυσης.



Άσκηση 3.7.8. Οι επιφάνειες ελαχίστης έκτασης δεν έχουν ελλειπτικά σημεία.

Στο Παράδειγμα 3.5.21 είδαμε ότι η μέση καμπυλότητα  $H$  του γραφήματος  $\Gamma_f$  μιας συνάρτησης  $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  τάξης  $C^2$  τουλάχιστον δίνεται από τη σχέση

$$H = \frac{(1+f_u^2)f_{uu} - 2f_u f_v f_{uv} + (1+f_v^2)f_{vv}}{2(1+f_u^2+f_v^2)^{3/2}},$$

όπου  $f_u, f_v, f_{uu}, f_{uv}, f_{vv}$  είναι οι μερικές παραγώγοι της συνάρτησης  $f$ . Άρα, η διαφορική εξίσωση, με μερικές παραγώγους,  
(3.7.20)  $(1+f_u^2)f_{uu} - 2f_u f_v f_{uv} + (1+f_v^2)f_{vv} = 0,$   
έχει λύσεις των οποίων τα γραφήματα είναι επιφάνειες ελαχίστης έκτασης.

Είναι φανερό ότι οι συναρτήσεις της μορφής  $f(u,v) = au + bv + c$  είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (3.7.20). Εξάλλου τα γραφήματα τέτοιων συναρτήσεων είναι επίπεδα, που είναι ως γνωστόν επιφάνειες ελαχίστης έκτασης.

Στη συνέχεια θα αναζητήσουμε λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (3.7.20) που είναι της μορφής  $f(u,v) = g(u) + h(v)$ , όπου  $g$  και  $h$  είναι δύο συναρτήσεις μιας μεταβλητής, τάξης  $C^2$  τουλάχιστον. Σε αυτή την περίπτωση η διαφορική εξίσωση (3.7.20) παίρνει τη μορφή

$$(1+h'(v)^2)g''(u) + (1+g'(u)^2)h''(v) = 0,$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την

$$(*) \quad -\frac{g''(u)}{1+g'(u)^2} = \frac{h''(v)}{1+h'(v)^2}.$$





Επειδή, οι  $u$  και  $v$  είναι ανεξάρτητες μεταβλητές κάθε πλευρά της τελευταίας εξίσωσης είναι σταθερά, έστω  $a$ . Τότε,  $g''(u) + a(1+g'(u)^2) = 0$  και  $h''(v) - a(1+h'(v)^2) = 0$ , και συνεπώς,

$$g(u) = \frac{1}{a} \log \cos(au+b) + \gamma, \quad h(v) = -\frac{1}{a} \log(\cos(v+\delta)) + \varepsilon,$$

όπου  $a, b, \gamma, \delta$  και  $\varepsilon$  είναι κατάλληλες σταθερές. Να επισημάνουμε ότι, αν  $a=0$  τότε από τις (\*) προκύπτουν  $g(u) = bu + \gamma$  και  $h(v) = \delta v + \varepsilon$ , οπότε η συνάρτηση  $f(u,v) = g(u) + h(v) = bu + \delta v + \gamma + \varepsilon$  θα δίνει επίπεδο. Άλλως, η συνάρτηση

$$f(u,v) = \frac{1}{a} \log \frac{\cos(au+b)}{\cos(v+\delta)} + c$$

είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης (3.7.20) και συνεπώς το γράφημά της είναι επιφάνεια ελάχιστης έκτασης, γνωστή στην Βιβλιογραφία ως Επιφάνεια ελάχιστης έκτασης του Scherk.

Το αλυσοειδές είναι η επιφάνεια που παράγεται με περιστροφή της τροχιάς της αλυσοειδούς καμπύλης,  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \gamma(t) = (a \cosh(\frac{t}{a} + b), 0, t)$  περί τον άξονα  $Oz$ . Η επιφάνεια αυτή είναι ελάχιστης έκτασης (Άσκηση 3.5.7). Θα δείξουμε την Πρόταση.

Πρόταση 3.4.18. Κάθε κανονική γενικευμένη επιφάνεια εκ περιστροφής, που είναι ελάχιστης έκτασης, είναι μέρος επιπέδου ή μέρος ενός αλυσοειδούς.

Απόδειξη. Έστω  $\gamma(t) = (f(t), 0, g(t)), t \in I$  μια κανονική καμπύλη με  $f(t) > 0$ . Η απεικόνιση  $X: U = I \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

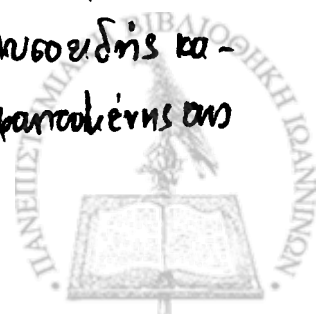


$X(t, \varphi) = (f(t)\cos\varphi, f(t)\sin\varphi, g(t))$  είναι μια κανονική γενικευμένη επιφάνεια εκ περιστροφής. Αν  $g'(t) = 0$  για κάθε  $t \in I$ , τότε η  $g(t)$  είναι σταθερά και η τροχιά της καμπύλης  $\gamma$  είναι μια ευθεία στο  $Oxz$  επίπεδο κάθετη στον άξονα  $Oz$ . Η τροχιά της γενικευμένης επιφάνειας είναι, τότε, ένα επίπεδο κάθετο στον άξονα  $Oz$ . Έστω  $g'(t_0) \neq 0$ , για κάποιο  $t_0 \in I$ , τότε σύμφωνα με το θεώρημα Αντιστροφής Συνάρτησης υπάρχει διάστημα  $J_1$  του  $t_0$ ,  $J_1 \subset I$ , και διάστημα  $J_2$  που  $g(t_0)$ , έτσι ώστε η  $g: J_1 \rightarrow J_2$  είναι διαφορομορφικός. Θεωρούμε την  $t = g^{-1}(z)$ . Η καμπύλη  $\beta = \gamma \circ g^{-1}: J_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\beta(z) = \gamma(g^{-1}(z)) = (f(g^{-1}(z)), 0, z) = (h(z), 0, z)$  είναι μια κανονική αναπαραμέτρηση της  $\gamma|_{J_1}$ . Η κανονική γενικευμένη επιφάνεια εκ περιστροφής, ως προς αυτή τη παραμέτρηση της καμπύλης, γίνεται  $X(z, \varphi) = (h(z)\cos\varphi, h(z)\sin\varphi, z)$ . Η μέση καμπυλότητα αυτής είναι παντού μηδέν στο  $J_2 \times \mathbb{R}$ , αν και μόνο αν ισχύει η σχέση

$$-h(z)h''(z) + 1 + h'(z)^2 = 0.$$

Η γενική λύση αυτής της διαφορικής εξίσωσης είναι η  $h(z) = a \cosh\left(\frac{z}{a} + b\right)$ .

Όμως, τότε, η καμπύλη  $\beta$  είναι μια αλυσοειδής καμπύλη. Άρα, μια κανονική γενικευμένη επιφάνεια αν δεν είναι μέρος επιπέδου θα είναι μέρος ενός αλυσοειδούς. Ο λόγος είναι διότι η συνάρτηση  $g'(t)$  δεν μπορεί να μηδενίζεται σε μερικά σημεία που διαστήματος  $I$  και να μην μηδενίζεται σε άλλα. Πραγματικά, έστω  $g'(t_0) = 0$  και  $g'(t) \neq 0$ , έστω  $g'(t) > 0$ , για κάθε  $t < t_0$ . Σύμφωνα με τα παραπάνω το μέρος της καμπύλης  $\gamma$  για  $t < t_0$  είναι αλυσοειδής καμπύλη και ο συντελεστής διεύθυνσης  $\frac{f'(t)}{g'(t)}$  της εφαπτομένης στο



δεν απειρίζεται καθώς το  $t$  κείναι στο  $t_0$ , που είναι αντί-  
γραφο.

Το ελικοειδές  $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(u,v) = (u \cos av, u \sin av, bv)$ , όπου  
 $a, b$  είναι μη μηδενικές σταθερές είναι επιφάνεια ελάχιστης  
έκτασης. Επιπλέον, είναι ευδαιμονής επιφάνεια, αφού γράφεται  
 $X(u,v) = (0,0,bv) + u(\cos av, \sin av, 0)$ . Ισχύει η παρακάτω Πρό-  
ταση.

Πρόταση 3.7.19. Μια κανονική ευδαιμονής επιφάνεια ελά-  
χιστης έκτασης, είναι μέρος επιπέδου ή μέρος ελικοειδούς.

Απόδειξη. Έστω  $X: U = I \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(t,u) = \gamma(t) + u\beta(t)$   
για ευδαιμονής επιφάνεια με  $|\beta(t)| = 1$ , για κάθε  $t \in I$ . Αν  
 $\beta'(t) = 0$ , για κάθε  $t \in I$ , τότε  $\beta(t) = e$  και όπως γνωρίζουμε  
πρόκειται για γενικευμένο κύλινδρο. Άρα, η καμπυλότητα Gauss  
είναι μηδέν. Επειδή, εξ υποθέσεως, και η μέση καμπυλότητα είναι  
μηδέν συνεπώς (πώς;) ότι η τροχιά της  $\gamma$  είναι ευθεία  
και συνεπώς η τροχιά της  $X$  είναι επίπεδο. Αν η  $X$  είναι μη  
κυλινδρική ευδαιμονής επιφάνεια, δηλαδή  $\beta'(t) \neq 0$ , για κάθε  
 $t \in I$ , τότε η ευδαιμονής επιφάνεια γράφεται, με γραμμική  
σφαιρικής τη γραμμική συνάρτηση, ως

$$X(t,u) = \sigma(t) + u\beta(t)$$

με

$$|\beta(t)| = 1, \langle \sigma'(t), \beta(t) \rangle = 0 \text{ και } \beta'(t) \neq 0, \text{ για κάθε } t \in I.$$

Η καμπύλη  $\beta$  είναι κανονική, αφού  $\beta'(t) \neq 0$  για κάθε  
 $t \in I$ . Μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να θεωρήσουμε -



με ότι το  $t$  είναι η παραμέτρος μήκους ενός καμπύλης  $\beta$ , η οποία κείται στη μοναδιαία σφαίρα, οφού  $|\beta(t)| = 1$  για κάθε  $t \in I$ .

Συνοψίζοντας, θα έχουμε

$$(3.7.21) \quad X(s, u) = \sigma(s) + u\beta(s)$$

$$|\beta(s)| = |\beta'(s)| = 1, \quad \langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle = 0, \quad \text{για κάθε } s \in I.$$

Θα υπολογίσουμε την μέση καμπυλότητα της (3.7.21).

Βρίσκουμε,

$$X_s = \sigma' + u\beta', \quad X_u = \beta, \quad X_{ss} = \sigma'' + u\beta'', \quad X_{su} = \beta', \quad X_{uu} = 0.$$

Άρα,

$$E = (\sigma')^2 + u^2, \quad F = \langle \sigma', \beta \rangle, \quad G = 1$$

και συνεπώς

$$|X_u \times X_u|^2 = (\sigma')^2 + u^2 - \langle \sigma', \beta \rangle^2 = (\sigma')^2 - \langle \sigma', \beta \rangle^2 + u^2.$$

Τα μόνα ιδιάζοντα σημεία της  $X$ , είναι εκείνα τα σημεία της γραμμής συσφιξεως ( $u=0$ ) για τα οποία τα διανύσματα  $\beta$  και  $\beta'$  είναι γραμμικά εξαρτημένα. Επειδή, εξ υποθέσεως, η  $X$  είναι κανονική ευδαιμονής επιφάνεια, πρέπει  $\beta$  και  $\beta'$  να είναι γραμμικά ανεξάρτητα παντού. Ο σκωτσίκος προσανατολισμός της  $X$  είναι

$$\eta = \frac{\sigma' \times \beta + u \beta' \times \beta}{\sqrt{(\sigma')^2 + u^2 - \langle \beta, \sigma' \rangle^2}}$$

και συνεπώς

$$L = \langle X_{ss}, \eta \rangle = \frac{1}{g} \left\{ \langle \sigma'', \sigma' \times \beta \rangle + u \langle \sigma'', \beta' \times \beta \rangle + \langle \beta'', \sigma' \times \beta \rangle + u^2 \langle \beta'', \beta' \times \beta \rangle \right\}$$

$$M = \langle X_{su}, \eta \rangle = \frac{1}{g} \langle \beta', \sigma' \times \beta \rangle, \quad N = \langle X_{uu}, \eta \rangle = 0,$$

όπου θέσαμε  $g = \sqrt{(\sigma')^2 + u^2 - \langle \beta, \sigma' \rangle^2}$ . Άρα, η μέση καμπυλότητα της



Χ είναι μηδέν, αν και μόνο αν ισχύει η σχέση  $LG - 2FM + NE = 0$ .  
 Δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει η σχέση

$$(3.7.22) \quad \langle \sigma'', \sigma' \times \beta \rangle - 2 \langle \beta, \sigma' \rangle \langle \beta', \sigma' \times \beta \rangle + u (\langle \sigma', \beta' \times \beta \rangle + \langle \beta'', \sigma' \times \beta \rangle) \\ + u^2 \langle \beta'', \beta' \times \beta \rangle = 0, \text{ για κάθε } (s, u) \in U.$$

Επειδή, οι συντελεστές της (3.7.22) αν θεωρηθεί ως πολυώνυμο ως προς  $u$ , εξαρτώνται μόνο από το  $s$  συνάχουμε ότι ισχύουν, για κάθε  $s \in I$ , οι σχέσεις

$$(3.7.23) \quad \langle \beta'', \beta' \times \beta \rangle = 0$$

$$(3.7.24) \quad \langle \sigma'', \beta' \times \beta \rangle + \langle \beta'', \sigma' \times \beta \rangle = 0$$

$$(3.7.25) \quad \langle \sigma'', \sigma' \times \beta \rangle - 2 \langle \beta, \sigma' \rangle \langle \beta', \sigma' \times \beta \rangle = 0.$$

Η (3.7.23) υποδηλοί ότι το  $\beta''$  είναι γραμμικός συνδυασμός των  $\beta$  και  $\beta'$ . Όμως,  $\langle \beta'', \beta' \rangle$ , αφού  $\langle \beta', \beta' \rangle = 1$ . Επίσης,  $\langle \beta'', \beta \rangle = -1$ , αφού  $\langle \beta', \beta \rangle = 0$  και  $|\beta'| = 1$ . Συνεπώς  $\beta'' = -\beta$ , και άρα η καμπυλότητα της σφαιρικής καμπύλης  $\beta$  είναι 1, όσο η ακτίνα της σφαίρας. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.7.4 η  $\beta$  είναι μεγάλος κύκλος της μοναδιαίας σφαίρας. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\beta(s) = (c \cos s, s \sin s, 0),$$

δηλαδή, η  $\beta$  κείται στο οριζ. επίπεδο. Σε αυτή την περίπτωση η (3.7.24) δίνει  $\langle \sigma'', \beta' \times \beta \rangle = 0$ , δηλαδή το  $\sigma''$  κείται στο επίπεδο των  $\beta'$  και  $\beta$ . Συνεπώς,  $\sigma'' = (\sigma_1'', \sigma_2'', 0)$  όπου  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , και ως εκ τούτου  $\sigma_3'' = 0$ . Δηλαδή,  $\sigma_3(s) = cs + d$ .

Άρα,  $\sigma(s) = (g_1(s), g_2(s), cs)$ , όπου υποθέσαμε ότι  $d = 0$ , διότι διαφορετικά κάνουμε παράλληλη μεταφορά προς τον άξονα  $Oz$ . Η σχέση

(3.7.25) δίνεται, τώρα,

$$c (-\sigma_1'' \sin s + \sigma_2'' \cos s - 2g_1' \cos s - 2\sigma_2' \sin s) = 0.$$



Αν  $c=0$ , τότε η καμπύλη  $\sigma$  έχει τροχιά στο  $Oxy$  επίπεδο, όπου βρίσκεται και η τροχιά της  $\beta$ . Συνεπώς, η τροχιά της  $X(s,u) = \sigma(s) + u\beta(s)$  είναι επίπεδο. Αν  $c \neq 0$ , θα έχουμε

$$(3.7.26) \quad -\sigma_1'' \sin s + \sigma_2'' \cos s - 2\sigma_1' \cos s - 2\sigma_2' \sin s = 0.$$

Συνδυάζοντας αυτήν με τη σχέση  $\langle \beta', \sigma' \rangle = 0$ , δηλαδή, την σχέση  $-\sigma_1' \sin s + \sigma_2' \cos s = 0$ , βρίσκουμε (πώς;)  $\sigma_1' = \sigma_2' = 0$ . Άρα,  $\sigma_1(s) = a_1$  και  $\sigma_2(s) = a_2$ , για κάθε  $s \in I$ . Συνεπώς,  $X(s,u) = \sigma(s) + u\beta(s) = (a_1 + u \cos s, a_2 + u \sin s, cs)$  ή με παράλληλη μεταφορά στο  $Oxy$  επίπεδο,

$$X(s,u) = (u \cos s, u \sin s, cs).$$

Άρα, η γενικευμένη επιφάνεια  $X$  είναι ελικοειδές. Έτσι, μια κανονική ευδυσχελής επιφάνεια ελάχιστης έκτασης, αν δεν είναι μέρος επιπέδου θα είναι μέρος ελικοειδούς.

Έστω  $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση  $C^2$ -επίσης. Η Λαπλασιανή της  $f$  είναι η συνάρτηση  $\Delta f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , που ορίζεται ως  $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$ , όπου  $\Delta$  είναι ο Λαπλασιανός τελεστής (Άσκηση 3.64). Μια συνάρτηση  $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , της οποίας η Λαπλασιανή μηδενίζεται παντού στο  $U$ , λέγεται αρμονική συνάρτηση.

Πρόταση 3.7.20 Έστω  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  μια κανονική γενικευμένη επιφάνεια, τέτοια ώστε  $E(u,v) = G(u,v)$  και  $F(u,v) = 0$ , για κάθε  $(u,v) \in U$ . Τότε, ισχύει η σχέση

$$(3.7.27) \quad X_{uu} + X_{vv} = 2EHn,$$

όπου  $H$  είναι η μέση καμπυλότητα της  $X$  και  $n$  ο αντίστοιχος προανατολισμός.



Απόδειξη. Από εις  $\langle X_u, X_u \rangle = \langle X_u, X_u \rangle$  και  $\langle X_u, X_u \rangle = 0$  με παραγωγή ως προς  $u$  και  $v$ , αντίστοιχα, παίρνουμε

$$\langle X_{uu}, X_u \rangle = \langle X_{vu}, X_u \rangle \text{ και } \langle X_{uv}, X_u \rangle + \langle X_u, X_{uv} \rangle = 0.$$

Άρα,  $\langle X_{uu}, X_u \rangle = \langle X_{vu}, X_u \rangle = \langle X_{uv}, X_u \rangle = -\langle X_u, X_{uv} \rangle$  και συνεπώς

$$\langle X_{uu} + X_{vv}, X_u \rangle = 0.$$

Όμοια βρίσκουμε

$$\langle X_{uu} + X_{vv}, X_v \rangle = 0.$$

Συνοψίζοντας, το  $X_{uu} + X_{vv}$  είναι παράλληλο με το  $n$ , ως κάθετο στα  $X_u, X_v$ . Έστω  $X_{uu} + X_{vv} = f n$ . Πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά με  $n$  λαμβάνουμε,  $L + N = f$ . Επειδή,

$$H = \frac{LG - 2FM + NE}{2(EG - F^2)} = \frac{1}{2} \frac{L+N}{E} \text{ ή } L+N = 2EH, \text{ συνάγουμε την (3.7.27).}$$

Παρατήρηση 3.7.21. Η ύπαρξη παραμέτρων  $(u, v)$  σε μια επιφάνεια  $S$ , έτσι ώστε  $E(u, v) = G(u, v)$  και  $F(u, v) = 0$ , οφείλεται στον S.S. Chern, An elementary proof of the existence of isothermic parameters on a surface, Proc. Amer. Math. Soc. 6(1955), 771-782. Τέτοιου είδους παράμετροι σε μια επιφάνεια  $S$  λέγονται ισοθερμικές παράμετροι.

Πρόταση 3.7.22. Έστω  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  μια κανονική γενικευμένη επιφάνεια, τέτοια ώστε  $E(u, v) = G(u, v)$  και  $F(u, v) = 0$ , για κάθε  $(u, v) \in U$ . Η  $X$  είναι ελάχιστης έπισης, αν και μόνο αν οι συναρτήσεις  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  είναι αρμονικές συναρτήσεις στο  $U$ .

Απόδειξη. Προκύπτει αμέσως από τη σχέση (3.7.27).



Το συμπέρασμα του Προτάματος 3.7.22 αποτελεί επάρκεια για τη μελέτη των επιφανειών ελάχιστης έκτασης με τη θεωρία των αναλυτικών συναρτήσεων της Μικροδίκης Ανάλυσης, αφού οι αρμονικές συναρτήσεις είναι στενά συνδεδεμένες με τις αναλυτικές συναρτήσεις.

Άσκηση 3.7.9. Δίνεται η κανονική γενικευμένη επιφάνεια  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(u,v) = (u \cos v, u \sin v, f(u))$ . Να βρεθεί η κρυσταλλική και  $f(u)$ , ώστε η  $X$  να είναι ελάχιστης έκτασης.

Άσκηση 3.7.10. Το μιγαδικό επίπεδο  $\mathbb{C}$  συνήθως ταυτίζεται με το  $\mathbb{R}^2$ , θέτοντας  $z = u + iv \in \mathbb{C}$ , για  $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ . Μια συνάρτηση  $f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = f_1(u,v) + i f_2(u,v)$ , είναι αναλυτική αν οι πραγματικές συναρτήσεις  $f_1, f_2: U \rightarrow \mathbb{R}$  έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης που ικανοποιούν τις εξισώσεις των Cauchy - Riemann,

$$(3.7.28) \quad \frac{\partial f_1}{\partial u} = \frac{\partial f_2}{\partial v}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial v} = -\frac{\partial f_2}{\partial u}.$$

Έστω  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$  μια κανονική γενικευμένη επιφάνεια. Ορίσουμε τις συναρτήσεις  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , ως εξής:

$$\varphi_1(z) = \frac{\partial x}{\partial u} - i \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \varphi_2(z) = \frac{\partial y}{\partial u} - i \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \varphi_3(z) = \frac{\partial z}{\partial u} - i \frac{\partial z}{\partial v},$$

όπου  $z = u + iv$ .

- Να αποδειχθεί, ότι  $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0$ , αν και μόνο αν  $E = G, F = 0$ .
- Έστω ότι η  $X$  είναι τουλάχιστον  $C^2$  τάξης και ισχύει η σχέση  $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0$ . Να αποδειχθεί ότι η  $X$  είναι ελάχιστη έκτασης, αν και μόνο αν οι συναρτήσεις  $\varphi_1, \varphi_2$  και  $\varphi_3$





είναι αναλυτικές συναρτήσεις.

### δ) Παράλληλες Επιφάνειες

Θεωρούμε μια κανονική γενικευμένη επιφάνεια  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$  με αντίστοιχο προεπιλεγμένο  $n(u,v)$ .

Όρισμός 3.7.23. Η γενικευμένη επιφάνεια  $\gamma: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma(u,v) = X(u,v) + a n(u,v)$ ,  $a = \text{σταθερά}$ , λέγεται παράλληλη επιφάνεια (parallel surface) της  $X$  σε απόσταση  $a$ .

Θα προχωρήσουμε με μερικούς υπολογισμούς. Βρίσκουμε,

$$\gamma_u(u,v) = X_u(u,v) + a n_u(u,v)$$

$$\gamma_v(u,v) = X_v(u,v) + a n_v(u,v).$$

Άρα,

$$\gamma_u(u,v) \times \gamma_v(u,v) = X_u(u,v) \times X_v(u,v) + a \{ X_u(u,v) \times n_v(u,v) + n_u(u,v) \times X_v(u,v) \} + a^2 n_u(u,v) \times n_v(u,v)$$

και συνεπώς, με τη βοήθεια των σχέσεων (3.5.12) και (3.5.13), λαμβάνουμε

$$(3.7.29) \quad \gamma_u(u,v) \times \gamma_v(u,v) = (1 - 2aH(u,v) + a^2K(u,v)) X_u(u,v) \times X_v(u,v),$$

όπου  $K(u,v)$ ,  $H(u,v)$  είναι η καμπυλότητα Gauss και η μέση καμπυλότητα της κανονικής γενικευμένης επιφάνειας  $X$ .

Με τη σχέση (3.7.29) προκύπτει ότι, τα ιδιάζοντα σημεία της παράλληλης επιφάνειας  $\gamma$  είναι τα σημεία  $(u,v) \in U$ , για τα οποία ισχύει η σχέση

$$(3.7.30) \quad 1 - 2aH(u,v) + a^2K(u,v) = 0.$$



Επειδή η σχέση (3.7.30) γράφεται και με τη μορφή

$$(3.7.31) \quad (1 - \alpha k_1(u, v)) (1 - \alpha k_2(u, v)) = 0,$$

όπου  $k_1(u, v)$ ,  $k_2(u, v)$  είναι οι κύριες καμπυλότητες της  $X$  στο σημείο  $(u, v)$  (ή  $X(u, v)$ ), συμπεραίνουμε ότι: Η γενικευμένη εμφάνιση  $Y$  είναι κανονική στα σημεία  $(u, v) \in U$ , όπου το  $\alpha$  είναι διαφορετικό από τους αριθμούς  $\frac{1}{k_1(u, v)}$  και  $\frac{1}{k_2(u, v)}$ .

Ο προανακλιτικός  $\bar{n}(u, v)$  της  $Y$ , στα μη ιδιάζοντα σημεία της, ικανοποιεί τη σχέση

$$(3.7.32) \quad \bar{n}(u, v) = \pm n(u, v),$$

όπως προκύπτει από τη σχέση (3.7.29).

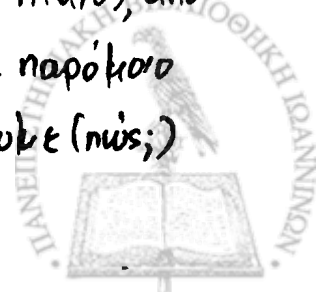
Θα αναζητήσουμε τη καμπυλότητα Gauss  $\bar{K}(u, v)$  και τη μέση καμπυλότητα  $\bar{H}(u, v)$  της παράλληλης εμφάνισης  $Y$ , στα μη ιδιάζοντα σημεία της.

Πρόταση 3.7.24. Η καμπυλότητα Gauss και η μέση καμπυλότητα της  $Y$ , στα μη ιδιάζοντα σημεία της, δίνονται από τις σχέσεις

$$(3.7.33) \quad \bar{K} = \frac{K}{1 - 2\alpha H + \alpha^2 K},$$

$$(3.7.34) \quad \bar{H} = \pm \frac{H - \alpha K}{1 - 2\alpha H + \alpha^2 K}.$$

Απόδειξη. Επειδή,  $\bar{n}_u(u, v) \times \bar{n}_v(u, v) = \bar{K}(u, v) Y_u(u, v) \times Y_v(u, v)$ ,  $n_u(u, v) \times n_v(u, v) = K(u, v) X_u(u, v) \times X_v(u, v)$ ,  $\bar{n}(u, v) = \pm n(u, v)$ , από τη σχέση (3.7.29) συνάγουμε τη σχέση (3.7.33). Με παρόμοιο τρόπο, κάνοντας χρήση της σχέσης (3.5.13) συνάγουμε (πώς;)



στη σχέση (3.7.34), το πρόσημο + (αντίστοιχα, το -) θεωρείται όταν  $\bar{n}(u,v) = n(u,v)$  (αντίστοιχα,  $\bar{n}(u,v) = -n(u,v)$ ).

Άσκηση 3.7.11. Να αποδειχθεί η σχέση  $\frac{\bar{H}^2 - \bar{K}}{\bar{K}^2} = \frac{H^2 - K}{K^2}$ .

Άσκηση 3.7.12. Να βρεθούν τα θεμελιώδη ποσά πρώτος και δεύτερος καξίος της παράλληλης εμφάνισης  $\gamma$ , στα μη ιδιάζοντα σημεία της.

Η παρακάτω ενδιαφέρουσα πρόταση οφείλεται στον Ο. Βονιελ.

Πρόταση 3.7.25. Αν η κανονική γενικευμένη επιφάνεια  $X$  έχει σταθερή μέση καμπυλότητα ίση με  $c \neq 0$ , τότε η παράλληλη εμφάνιση  $\gamma$  σε απόσταση  $a = \frac{1}{2c}$  έχει σταθερή καμπυλότητα Gauss ίση με  $4c^2$ , στα μη ιδιάζοντα σημεία της. Αν η  $X$  έχει σταθερή καμπυλότητα Gauss  $K = 4c^2 \neq 0$ , τότε υπάρχουν δυο παράλληλες επιφάνειες σε απόσταση  $a = \pm \frac{1}{2c}$  που έχουν σταθερή μέση καμπυλότητα ίση με  $\mp c$ , αντίστοιχα.

Απόδειξη. Για  $H = c$  και  $a = \frac{1}{2c}$ , η σχέση (3.7.33) δίνει  $\bar{K} = 4c^2$ . Όμοια, για  $K = 4c^2$  και  $a = \pm \frac{1}{2c}$  η σχέση (3.7.34), με το πρόσημο +, δίνει  $\bar{H} = \mp c$ , αντίστοιχα. Ανάλογα ισχύουν, αν εργαζτούμε με το πρόσημο - στη σχέση (3.7.34).



## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Για μια πληρέστερη προσέγγιση στο μάθημα οι φοιτητές μπορούν να συμβουλευτούν τα παρακάτω βιβλία, τα οποία υπάρχουν στη Βιβλιοθήκη του Τμήματος Μαθηματικών

- (1) Manfredo P. do Carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- (2) W. Klingenberg, A course in Differential Geometry, Translated by D. Hoffman, Springer, New York - Heidelberg - Berlin, 1978.
- (3) B. O'Neil, Elementary Differential Geometry, Academic Press, New York, 1966.
- (4) Ν.Κ. Στεφανίδης, Διαφορική Γεωμετρία, τόμος Ι, Θεσσαλονίκη 1982.
- (5) J. J. Stoker, Differential Geometry, Wiley-Interscience, New York, 1969.
- (6) D. J. Struik, Lectures on Classical Differential Geometry, 2nd ed., Addison-Wesley, Reading, MA, 1960.
- (7) T. J. Willmore, An Introduction to Differential Geometry, Oxford University Press, Oxford, 1959.

Για το Κεφάλαιο Ι αυτών των σημειώσεων μπορούν να συμβουλευθούν και τα παρακάτω

- (8) Α. Κατσάρας, Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός Περισσότερων της μιας μεταβλητών. Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Ιωάννινα 1980.
- (9) Θ. Χαβάνης, Μαθήματα Διαφορικού Λογισμού και Αναλυτικής Γεωμετρίας, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Ιωάννινα 1988.

