ΧΡΙΣΤΟΣ Γ. ΦΙΛΟΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ: ΥΠΑΡΞΗ ΚΑΙ ΜΟΝΟΣΗΜΑΝΤΟ ΛΥΣΕΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

B. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

C. ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ**

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 1993

ΧΡΙΣΤΟΣ Γ. ΦΙΛΟΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ: ΥΠΑΡΞΗ ΚΑΙ ΜΟΝΟΣΗΜΑΝΤΟ ΛΥΣΕΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Β. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

C. ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 1993

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Η διανομή στους/στις Φοιτητές/Φοιτήτριες του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων αυτής της συλλογής Ασκήσεων αποσκοπεί σε μια υποβοήθηση στην προσπάθεια για την εμπέδωση του περιεχομένου του Μαθήματος *"Διαφορικές Εξισώσεις Ι"* του $5^{ου}$ Εξαμήνου του Προγράμματος Σπουδών.

Για την εκμάθηση του γνωστικού αντικειμένου του Μαθήματος *"Διαφορικές Εξισώσεις Ι"*, οι Φοιτητές/Φοιτήτριες καλούνται (πέραν του αυτονόητου ότι θα πρέπει να παρακολουθούν τη διδασκαλία του Μαθήματος), αφού πρώτα μελετήσουν τη σχετική Θεωρία από το Βιβλίο *"Χρίστος Γ. Φίλος, Μια Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις, Ιωάννινα, 1992"* (και από τις διανειμόμενες σημειώσεις) και ασχοληθούν με τα σχετικά Παραδείγματα που περιλαμβάνονται στο Βιβλίο αυτό, στη συνέχεια να "εντρίψουν" στη λύση των Ασκήσεων και όχι απλώς να μελετήσουν τις λύσεις αυτών.

Δίνεται ακόμα μια συλλογή άλυτων Ασκήσεων που είναι κάπως συνθετότερες και σχετικά πιο προχωρημένης μορφής. Οι Φοιτητές/Φοιτήτριες (προ)καλούνται να προσπαθήσουν να λύσουν τις Ασκήσεις αυτές. Το αποτέλεσμα της προσπάθειας αυτής θα πρέπει να παραδοθεί στο τέλος του Εξαμήνου στον Διδάσκοντα *"εν είδει εργασίας"* για το Μάθημα *"Διαφορικές Εξισώσεις Ι"*. Τέλος, δίνονται τρία Θέματα για επεξεργασία· τα Θέματα αυτά θα πρέπει να παραδοθούν επεξεργασμένα (*"εν είδει εργασίας"*) στον Διδάσκοντα 10 ημέρες πριν από το τέλος του Εξαμήνου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Α. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ: ΥΠΑΡΞΗ ΚΑΙ ΜΟΝΟΣΗΜΑΝΤΟ ΛΥΣΕΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Α-1. *Να αποδειχθεί ότι σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις η συνάρτηση g πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο σημειούμενο σύνολο:*

(i) $g(x,y) = 4x^2+y^2$, $R = \{(x,y): |x|\leq 1, |y|\leq 1\}$.

(ii) $g(x,y) = x^3e^{-xy^2}$, $S = \{(x,y): 0\leq x\leq 1, y$ *αυθαίρετο*$\}$.

(iii) $g(x,y) = \begin{cases} y(3x-1), & \text{αν } x\geq 0 \\ y(2x-1), & \text{αν } x<0 \end{cases}$, $S = \{(x,y): |x|\leq 1, y$ *αυθαίρετο*$\}$.

(i) Η $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ είναι συνεχής στο R.

(ii) Είναι

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -2x^4ye^{-xy^2} \quad \text{για } 0\leq x\leq 1, y \in \mathbf{R}.$$

Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι η $\dfrac{\partial g}{\partial y}$, εκτός του ότι είναι συνεχής, είναι και φραγμένη στο S.

(iii) Έχουμε

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 3x-1, \text{ αν } x\geq 0, y \in \mathbf{R} \\ 2x-1, \text{ αν } x<0, y \in \mathbf{R} \end{cases}$$

και επομένως η $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ είναι συνεχής και φραγμένη στο S.

Α-2. *Να αποδειχθεί ότι σε καθεμιά από τις παρακάτω δύο περιπτώσεις η συνάρτηση g δεν πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο σημειούμενο σύνολο:*

(i) $g(x,y) = xy^2$, $S = \{(x,y): |x|\leq 1, y$ *αυθαίρετο*$\}$.

(ii) $g(x,y) = e^xy^{2/3}$, $R = \{(x,y): |x|\leq 1, |y|\leq 1\}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

(i) Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση g πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο S. Τότε θα υπάρχει μια σταθερά $K>0$ έτσι ώστε

$$|g(x,y)-g(x,z)| \leq K|y-z| \text{ για όλα τα } (x,y),\ (x,z) \in S.$$

Έτσι, θα έχουμε

$$|g(1,\delta)-g(1,\delta/2)| \leq K|\delta-\delta/2| \text{ για κάθε } \delta>0,$$

δηλαδή

$$3\delta \leq 2K \text{ για όλα τα } \delta>0,$$

το οποίο είναι ένα άτοπο.

(ii) Έστω ότι η g πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο R με σταθερά $K>0$. Τότε ισχύει

$$|g(x,y)-g(x,z)| \leq K|y-z| \text{ για όλα τα } (x,y),\ (x,z) \in R.$$

Επομένως

$$|g(0,\delta)-g(0,0)| \leq K|\delta-0| \text{ για κάθε } \delta\in(0,1],$$

δηλαδή

$$1 \leq K\delta^{1/3} \text{ για όλα τα } \delta\in(0,1],$$

το οποίο είναι αδύνατο.

Α-3. *Να αποδειχθεί ότι καθένα από τα παρακάτω δύο προβλήματα αρχικών τιμών έχει ακριβώς μια λύση στο σημειούμενο διάστημα:*

(i) $y' = 1+y+y^2\cos x,\ y(0) = 0\ ;\ I = [-1/3, 1/3].$

(ii) $y' = (4y+e^{-x^2})e^{2y},\ y(0) = 0\ ;\ I = \left[-\frac{1}{8\sqrt{e}}, \frac{1}{8\sqrt{e}}\right].$

(i) Ας είναι

$$R = \left\{(x,y):\ |x| \leq \frac{1}{3},\ |y| \leq b\right\},$$

όπου b είναι ένας θετικός αριθμός. Η συνάρτηση f με $f(x,y) = 1+y+y^2\cos x$ είναι συνεχής στο ορθογώνιο R. Ακόμα, η f πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο R, γιατί η $\frac{\partial f}{\partial y}$ υπάρχει και είναι συνεχής στο R. Έχουμε

$$M \equiv \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)| = 1+b+b^2>0.$$

Ας είναι

$$r = \min\left\{\frac{1}{3}, \frac{b}{M}\right\} = \min\left\{\frac{1}{3}, \frac{b}{1+b+b^2}\right\}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $[-r,r]$. Επιλέγοντας $b=1$, έχουμε $r=1/3$. Έτσι το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει ακριβώς μια λύση στο $[-1/3,1/3]$.

(ii) Ας είναι b ένας θετικός αριθμός και ας θεωρήσουμε το ορθογώνιο

$$R = \left\{(x,y): |x| \le \frac{1}{8\sqrt{e}},\ |y| \le b\right\}.$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f με $f(x,y) = (4y+e^{-x^2})e^{2y}$ είναι συνεχής στο R και άρα η f πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο R. Είναι

$$M \equiv \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)| = (4b+1)e^{2b}>0.$$

Ας θέσουμε

$$r = \min\left\{\frac{1}{8\sqrt{e}}, \frac{b}{M}\right\} = \min\left\{\frac{1}{8\sqrt{e}}, \frac{b}{(4b+1)e^{2b}}\right\}.$$

Για $b=1/4$, παίρνουμε $r = \dfrac{1}{8\sqrt{e}}$. Άρα, το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $\left[-\dfrac{1}{8\sqrt{e}}, \dfrac{1}{8\sqrt{e}}\right]$.

Α-4. *Να αποδειχθεί ότι:*

(i) *Το πρόβλημα αρχικών τιμών*

$$y' = y\log(1+|x|)+e^{-x}\log(1+y^2),\ y(0)=0$$

έχει ακριβώς μια λύση στην πραγματική ευθεία.

(ii) *Το πρόβλημα αρχικών τιμών*

$$y' = \frac{\cos y}{1-x^2},\ y(0)=-2$$

έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $(-1,1)$.

(i) Η συνάρτηση

$$f(x,y) = y\log(1+|x|)+e^{-x}\log(1+y^2),\ (x,y) \in \mathbf{R}^2$$

είναι συνεχής. Είναι

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \log(1+|x|)+e^{-x}\frac{2y}{1+y^2},\ (x,y) \in \mathbf{R}^2$$

και επομένως η $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ είναι συνεχής. Επιπλέον, αν J είναι ένα συμπαγές διάστημα, έχουμε για όλα τα $(x,y) \in J\times\mathbf{R}$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \le \log(1+|x|)+e^{-x}\frac{2|y|}{1+y^2} \le \log(1+|x|)+e^{-x}$$
$$\le \max_{x\in J}\left[\log(1+|x|)+e^{-x}\right],$$

δηλαδή η $\frac{\partial f}{\partial y}$ είναι φραγμένη στο $J\mathrm{x}\mathbf{R}$. Επομένως, για κάθε συμπαγές διάστημα J, η f πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο $J\mathrm{x}\mathbf{R}$. 'Αρα, το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει ακριβώς μια λύση στο $\mathbf{R}$.

(ii) Η συνάρτηση f με

$$f(x,y) = \frac{\cos y}{1-x^2}, \quad (x,y) \in (-1,1)\mathrm{x}\mathbf{R}$$

είναι συνεχής. Συνεχής επίσης είναι και η $\frac{\partial f}{\partial y}$, αφού

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\sin y}{1-x^2}, \quad (x,y) \in (-1,1)\mathrm{x}\mathbf{R}.$$

Ακόμα, παρατηρούμε ότι για κάθε συμπαγές διάστημα J με $J \subseteq (-1,1)$, η $\frac{\partial f}{\partial y}$ είναι φραγμένη στο $J\mathrm{x}\mathbf{R}$. 'Αρα, η συνάρτηση f πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο $J\mathrm{x}\mathbf{R}$ για κάθε συμπαγές υποδιάστημα J του (-1,1). Έτσι, το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει ακριβώς μια λύση στο (-1,1).

A-5. *Να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο λύσεων το πρόβλημα αρχικών τιμών*

$$y' = f(x,y), \quad y(0)=0,$$

όπου $f(x,y) = x+x^2y^4$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. *Να αποδειχθεί στη συνέχεια ότι, για κάθε συμπαγές διάστημα J, η συνάρτηση* f *δεν πληροί τη συνθήκη Lipschitz στο σύνολο* $J\mathrm{x}\mathbf{R}$.

Ας θεωρήσουμε το ορθογώνιο $R = \{(x,y): |x| \le a, |y| \le b\}$, όπου a>0 και b>0. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R. Επίσης, η $\frac{\partial f}{\partial y}$ υπάρχει και είναι συνεχής στο R και άρα η f πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο ορθογώνιο R. Έχουμε

$$M \equiv \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)| = a+a^2b^4>0.$$

Θέτουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$r = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} = \min\left\{a, \frac{b}{a+a^2b^4}\right\}.$$

Τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα [-r,r]. Θα βρούμε τώρα το μεγαλύτερο τέτοιο διάστημα. Για ένα δεδομένο a>0, η μέγιστη τιμή της παράστασης $b/(a+a^2b^4)$ λαμβάνεται για $b = 1/\sqrt[4]{3a}$ και είναι ίση με $3/(4a\sqrt[4]{3a})$. Τότε η μέγιστη τιμή του $r = \min\{a, 3/(4a\sqrt[4]{3a})\}$ είναι $\sqrt[9]{27/256}$ και λαμβάνεται για $a = \sqrt[9]{27/256}$. Έτσι, εκλέγοντας

$$a = \sqrt[9]{\frac{27}{256}} \text{ και } b = 1 \Big/ \sqrt[4]{3\sqrt[9]{\frac{27}{256}}}\quad ,$$

συμπεραίνουμε ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα

$$I = \left[-\sqrt[9]{\frac{27}{256}}, \sqrt[9]{\frac{27}{256}}\right].$$

Ας είναι J ένα συμπαγές διάστημα και ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση f πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο J×**R**. Τότε θα υπάρχει μια σταθερά K>0 έτσι ώστε

$$|f(x,y)-f(x,z)| \le K|y-z| \quad \text{για όλα τα } x \in J,\ y \in \mathbf{R},\ z \in \mathbf{R}.$$

Ας θεωρήσουμε ένα σημείο $x_0 \in J$ με $x_0 \neq 0$. Θα έχουμε

$$|f(x_0,y)-f(x_0,0)| \le K|y-0| \quad \text{για κάθε } y>0,$$

δηλαδή

$$x_0^2y^3 \le K \quad \text{για όλα τα } y>0,$$

που είναι ένα άτοπο. Επομένως, για κάθε συμπαγές διάστημα J, η f δεν πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο J×**R**.

Α-6. *Να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο λύσεων το πρόβλημα αρχικών τιμών*

$$y' = 1+xy^2 \ ,\ y(0)=0.$$

Θεωρούμε δύο αριθμούς a>0, b>0 και θέτουμε

$$R = \{(x,y): |x|\le a,\ |y|\le b\}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Η συνάρτηση f με $f(x,y) = 1+xy^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ είναι συνεχής στο ορθογώνιο R. Επίσης, η f πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο R, αφου η $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ υπάρχει και είναι συνεχής στο R. Είναι

$$M \equiv \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)| = 1+ab^2 > 0.$$

Ας είναι

$$r = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} = \min\left\{a, \frac{b}{1+ab^2}\right\}.$$

Το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $[-r,r]$. Για ένα δεδομένο $a>0$, η παράσταση $b/(1+ab^2)$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της $1/2\sqrt{a}$ για $b=1/\sqrt{a}$. Η μέγιστη τιμή του $r = \min\left\{a, 1/2\sqrt{a}\right\}$ λαμβάνεται για $a = 1/\sqrt[3]{4}$ και είναι ίση με $1/\sqrt[3]{4}$. Έτσι, επιλέγοντας

$$a = 1/\sqrt[3]{4} \quad \text{και} \quad b = \sqrt[3]{2},$$

συμπεραίνουμε ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $\left[-1/\sqrt[3]{4}, 1/\sqrt[3]{4}\right]$.

Α-7. *Να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο λύσεων το πρόβλημα αρχικών τιμών*

$$y_1'' = x^2 y_1' + x^4 y_1 + y_2 , \; y_2' = e^x y_1 - y_2 \; ; \; y_1(1)=2, \; y_1'(1)=0, \; y_2(1)=-1.$$

Θέτοντας $y_1=u_1$, $y_1'=u_2$, $y_2=u_3$, το πρόβλημα αρχικών τιμών μετασχηματίζεται στο ακόλουθο:

$$u_1' = u_2, \; u_2' = x^2 u_2 + x^4 u_1 + u_3, \; u_3' = e^x u_1 - u_3 \; ;$$
$$u_1(1)=2, \; u_2(1)=0, \; u_3(1)=-1.$$

Αυτό γράφεται και ως εξής

$$u' = Au , \; u(1) = u_0 ,$$

όπου

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x^4 & x^2 & 1 \\ e^x & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ για } x \in \mathbb{R}, \; u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \text{ και } u_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Έτσι, το πρόβλημα αρχικών τιμών που δόθηκε έχει ακριβώς μια λύση στην πραγματική ευθεία.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Α-8. *Να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο λύσεων το πρόβλημα αρχικών τιμών*

$$y_1' = 1+xy_2^2,\ y_2' = xy_1^2\ ;\ y_1(0)=y_2(0)=0.$$

Ας θέσουμε

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ και } f(x,y) \equiv f(x,y_1,y_2) = \begin{pmatrix} 1+xy_2^2 \\ xy_1^2 \end{pmatrix} \text{ για } (x,y) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}^2.$$

Το πρόβλημα αρχικών τιμών παίρνει τότε τη μορφή

$$y' = f(x,y),\ y(0) = 0.$$

Ας θεωρήσουμε το ορθογώνιο

$$R = \{(x,y):\ |x| \le a,\ |y| \le b\},$$

όπου $a>0$, $b>0$ είναι σταθερές. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R. Επίσης, αφού οι $\dfrac{\partial f}{\partial y_1}$ και $\dfrac{\partial f}{\partial y_2}$ υπάρχουν και είναι συνεχείς στο R, η f θα πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο ορθογώνιο R. Έχουμε

$$M \equiv \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)| = 1+ab^2 > 0.$$

Ας θέσουμε

$$r = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} = \min\left\{a, \frac{b}{1+ab^2}\right\}.$$

Το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $[-r,\ r]$. Θα βρούμε το μέγιστο τέτοιο διάστημα. Για ένα δεδομένο $a>0$, η παράσταση $b/\ (1+ab^2)$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της $1/2\sqrt{a}$ όταν $b=1/\sqrt{a}$. Τώρα, το $r = \min\ \{a, 1/2\sqrt{a}\}$ γίνεται μέγιστο για $a = 1/\sqrt[3]{4}$ και η αντίστοιχη μέγιστη τιμή είναι $r = 1/\sqrt[3]{4}$. Έτσι, επιλέγοντας

$$a = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\quad ,\ b = \sqrt[3]{2},$$

συμπεραίνουμε ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $\left[-1/\sqrt[3]{4},\ 1/\sqrt[3]{4}\right]$.

Α-9. *Να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο λύσεων το πρόβλημα αρχικών τιμών*

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$y' = x\sqrt{1+x^2+y^2}\,, \quad y(0) = 0.$$

Η συνάρτηση f με

$$f(x, y) = x\sqrt{1+x^2+y^2}\,, \quad (x, y)\in \mathbf{R}^2$$

είναι συνεχής. Ακόμα, η $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{R}^2$ αφού

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,, \quad (x, y)\in \mathbf{R}^2.$$

Ας είναι J ένα συμπαγές διάστημα. Τότε έχουμε για όλα τα $(x, y)\in J\times\mathbf{R}$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| = \frac{|x||y|}{\sqrt{1+x^2+y^2}} < |x| \leq \max_{t\in J} |t|$$

και επομένως η $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ είναι φραγμένη στο $J\times\mathbf{R}$. Άρα, το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει ακριβώς μια λύση στο $\mathbf{R}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

B. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

B-1. *Ας είναι* f *μια συνάρτηση στο διάστημα* $(0,\infty)$ *που δεν μηδενίζεται σε* n *τουλάχιστον σημεία. Να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις*

$$f_k(x) = x^{k-1}f(x),\ x\in(0,\infty)\quad (k=1,\dots,n)$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Ας υποθέσουμε ότι $c_1f_1+\dots+c_nf_n=0$, όπου c_k $(k=1,\dots,n)$ είναι σταθερές. Τότε

$$\left(c_1+c_2x+\dots+c_nx^{n-1}\right)f(x)=0 \text{ για όλα τα } x>0.$$

Ας είναι x_k $(k=1,\dots,n)$ διαφορετικά ανά δύο σημεία του διαστήματος $(0,\infty)$ στα οποία η συνάρτηση f δεν μηδενίζεται. Τότε

$$\begin{cases} c_1+c_2x_1+\dots+c_nx_1^{n-1}=0 \\ c_1+c_2x_2+\dots+c_nx_2^{n-1}=0 \\ \quad\vdots \\ c_1+c_2x_n+\dots+c_nx_n^{n-1}=0. \end{cases}$$

Το ομογενές αυτό γραμμικό αλγεβρικό σύστημα με αγνώστους $c_1, c_2, \dots, c_n$ έχει μόνο τη μηδενική λύση $c_1=c_2=\dots=c_n=0$, αφού η ορίζουσά του είναι

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{n}(x_i-x_j) \neq 0.$$

Αυτό αποδεικνύει τη γραμμική ανεξαρτησία των f_k $(k=1,\dots,n)$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Β-2. *Με τη βοήθεια της αντικατάστασης* $y = ze^{x^2}$, *να επιλυθεί η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση*

$$y''-4xy' +(4x^2-1)y = e^{x^2}.$$

Για κάθε $x \in \mathbf{R}$, έχουμε

$$y' = (z'+2xz)e^{x^2}$$

και

$$y'' = \left[z''+4xz'+(2+4x^2)z\right]e^{x^2}$$

και έτσι η διαφορική εξίσωση μετασχηματίζεται στην

$$z''+z = 1.$$

Οι λύσεις αυτής δίνονται από τον τύπο

$$z(x) = c_1\cos x+c_2\sin x+1,\ x \in \mathbf{R},$$

όπου οι c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές. Άρα, όλες οι λύσεις της αρχικής διαφορικής μας εξίσωσης είναι

$$y(x) = (c_1\cos x+c_2\sin x+1)e^{x^2},\ x \in \mathbf{R} \quad (c_1,\ c_2 \text{ αυθαίρετες σταθερές}).$$

Β-3. *Να επιλυθεί η ομογενής διαφορική εξίσωση*

$$y^{(5)}-y'-\frac{4}{x}y = 0,\ x>0$$

με τις αντικαταστάσεις $y=xz$, $z^{(4)}-z=w$.

Ας ονομάσουμε (Ε) τη διαφορική εξίσωσή μας. Κάνουμε την αντικατάσταση $y=zx$ για $x>0$. Τότε έχουμε για όλα τα $x>0$

$$y' = xz'+z \text{ και } y^{(5)}=xz^{(5)}+5z^{(4)}.$$

Έτσι, η (Ε) μετασχηματίζεται στην εξίσωση

$$xz^{(5)}+5z^{(4)}-xz'-5z = 0,$$

η οποία γράφεται ως

$$x\left[z^{(4)}-z\right]' + 5\left[z^{(4)}-z\right] = 0.$$

Με την αντικατάσταση $z^{(4)}-z = w$, η τελευταία διαφορική εξίσωση γίνεται

$$xw'+5w = 0,$$

της οποίας οι λύσεις είναι

$$w(x) = c/x^5\ ,\ x>0,$$

όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Έτσι, καταλήγουμε στη διαφορική εξίσωση

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

(E*) $$z^{(4)}-z = c/x^5 \quad , x>0.$$

Η αντίστοιχη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση της (E*) έχει τις γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις

$$z_1(x)=e^x,\ z_2(x)=e^{-x},\ z_3(x)=\cos x,\ z_4(x)=\sin x \quad \text{για } x>0.$$

Τώρα, για κάθε x>0, έχουμε

$$W(x) = \det\begin{pmatrix} z_1(x) & z_2(x) & z_3(x) & z_4(x) \\ z_1'(x) & z_2'(x) & z_3'(x) & z_4'(x) \\ z_1''(x) & z_2''(x) & z_3''(x) & z_4''(x) \\ z_1'''(x) & z_2'''(x) & z_3'''(x) & z_4'''(x) \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} e^x & e^{-x} & \cos x & \sin x \\ e^x & -e^{-x} & -\sin x & \cos x \\ e^x & e^{-x} & -\cos x & -\sin x \\ e^x & -e^{-x} & \sin x & -\cos x \end{pmatrix} = -8,$$

$$W_1(x) = \det\begin{pmatrix} 0 & e^{-x} & \cos x & \sin x \\ 0 & -e^{-x} & -\sin x & \cos x \\ 0 & e^{-x} & -\cos x & -\sin x \\ 1 & -e^{-x} & \sin x & -\cos x \end{pmatrix} = -2e^{-x},$$

$$W_2(x) = \det\begin{pmatrix} e^x & 0 & \cos x & \sin x \\ e^x & 0 & -\sin x & \cos x \\ e^x & 0 & -\cos x & -\sin x \\ e^x & 1 & \sin x & -\cos x \end{pmatrix} = 2e^{x},$$

$$W_3(x) = \det\begin{pmatrix} e^x & e^{-x} & 0 & \sin x \\ e^x & -e^{-x} & 0 & \cos x \\ e^x & e^{-x} & 0 & -\sin x \\ e^x & -e^{-x} & 1 & -\cos x \end{pmatrix} = -4\sin x,$$

$$W_4(x) = \det\begin{pmatrix} e^x & e^{-x} & \cos x & 0 \\ e^x & -e^{-x} & -\sin x & 0 \\ e^x & e^{-x} & -\cos x & 0 \\ e^x & -e^{-x} & \sin x & 1 \end{pmatrix} = 4\cos x.$$

'Αρα, μια μερική λύση της (E*) είναι για x>0

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$z_\mu(x) = \sum_{k=1}^{4} z_k(x) \int_1^x \frac{W_k(t)}{W(t)} \frac{c}{t^5}\, dt$$

$$= \frac{c}{4} e^x \int_1^x \frac{e^{-t}}{t^5} dt - \frac{c}{4} e^{-x} \int_1^x \frac{e^t}{t^5} dt + \frac{c}{2} \cos x \int_1^x \frac{\sin t}{t^5} dt - \frac{c}{2} \sin x \int_1^x \frac{\cos t}{t^5} dt.$$

Έτσι, όλες οι λύσεις της (Ε) θα δίνονται από τον τύπο

$$y(x) = x\left[c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3\cos x + c_4\sin x + c_5\left(e^x \int_1^x \frac{e^{-t}}{t^5} dt - e^{-x} \int_1^x \frac{e^t}{t^5} dt + 2\cos x \int_1^x \frac{\sin t}{t^5} dt - 2\sin x \int_1^x \frac{\cos t}{t^5} dt\right)\right]$$

για $x>0$, όπου c_i $(i=1, \ldots, 5)$ είναι αυθαίρετες σταθερές.

B-4. *Να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις*

$$y_1(x) = e^{-x^2/2},\ x > 0 \quad \textit{και} \quad y_2(x) = e^{-x^2/2} \int_0^x e^{t^2/2} dt,\ x > 0$$

αποτελούν ένα βασικό σύνολο λύσεων της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$xy''+xy'+y = 0,\ x > 0.$$

Στη συνέχεια, να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$xy''+xy'+y = 0;\ y(1)=1/\sqrt{e},\ y'(1)=-1/\sqrt{e}.$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι οι y_1, y_2 είναι λύσεις της διαφορικής μας εξίσωσης. Οι λύσεις αυτές είναι γραμμικά ανεξάρτητες, αφού

$$W(y_1,y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} e^{-x^2/2} & e^{-x^2/2}\int_0^x e^{t^2/2}dt \\ -xe^{-x^2/2} & -xe^{-x^2/2}\int_0^x e^{t^2/2}dt + 1 \end{pmatrix} = e^{-x^2/2} \neq 0$$

για όλα τα $x > 0$. Άρα, $\{y_1,y_2\}$ είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων. Παρατηρούμε ότι $y_1(1)=1/\sqrt{e}$ και $y_1'(1)=-1/\sqrt{e}$.. Άρα, η y_1 είναι η (μοναδική) λύση του προβλήματος αρχικών τιμών.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

B-5. *Με τον μετασχηματισμό* $x = \mathrm{tg}\,\frac{t}{2}$, *να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση*

$$(1+x^2)^2y''+2x(1+x^2)y'+4y = 0\,,\; x \in \mathbf{R}.$$

Έχουμε για κάθε $x \in \mathbf{R}$

$$y' \equiv \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{2}{1+x^2}\frac{dy}{dt}\,,\text{ ήτοι } (1+x^2)y' = 2\frac{dy}{dt}$$

και

$$y''\equiv \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{1+x^2}\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{4x}{(1+x^2)^2}\frac{dy}{dt} + \frac{4}{(1+x^2)^2}\frac{d^2y}{dt^2}\,,$$

ήτοι

$$(1+x^2)^2y'' = -4x\frac{dy}{dt} + 4\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Έτσι, η εξίσωσή μας μετασχηματίζεται στην

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0\,,$$

η οποία έχει ως δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις τις $\cos t$, $t \in \mathbf{R}$ και $\sin t$, $t \in \mathbf{R}$. Τώρα, δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της αρχικής διαφορικής εξίσωσης είναι οι συναρτήσεις

$$y(x) = \cos(2\mathrm{Artg}x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}\,,\; x \in \mathbf{R} \quad\text{και}\quad y_2(x) = \sin(2\mathrm{Artg}x) = \frac{2x}{1+x^2}\,,\; x \in \mathbf{R}.$$

Άρα, όλες οι λύσεις της διαφορικής μας εξίσωσης δίνονται από τον τύπο

$$y(x) = c_1\frac{1-x^2}{1+x^2} + c_2\frac{2x}{1+x^2}\,,\; x \in \mathbf{R}\;\; (c_1, c_2 \text{ αυθαίρετες σταθερές}).$$

B-6. *Δίνεται η γραμμική διαφορική εξίσωση*

$$y''+\omega^2y = A\cos\omega x,\; x\geq 0,$$

όπου ω *και* A *είναι θετικές σταθερές. Να αποδειχθεί ότι για κάθε λύση* y *αυτής είναι*

$$\limsup_{x\to\infty} |y(x)| = \infty.$$

Στη συνέχεια, να βρεθεί η λύση y *με*

$$y(0) = 0\,,\; y'(0) = 1.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ας ονομάσουμε (Ε) τη διαφορική μας εξίσωση και ας συμβολίσουμε με (E_0) την αντίστοιχη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση αυτής. Δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (E_0) είναι οι

$$y_1(x) = \cos\omega x,\ x\geq 0 \quad \text{και} \quad y_2(x) = \sin\omega x,\ x\geq 0.$$

Έχουμε για $x\geq 0$

$$W(y_1,y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} \cos\omega x & \sin\omega x \\ -\omega\sin\omega x & \omega\cos\omega x \end{pmatrix} = \omega > 0,$$

$$W_1(y_1,y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} 0 & \sin\omega x \\ 1 & \omega\cos\omega x \end{pmatrix} = -\sin\omega x,$$

$$W_2(y_1,y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} \cos\omega x & 0 \\ -\omega\sin\omega x & 1 \end{pmatrix} = \cos\omega x.$$

Έτσι, μια μερική λύση της (Ε) είναι για $x\geq 0$

$$\begin{aligned} y_\mu(x) &= y_1(x)\int_0^x \frac{W_1(y_1,y_2)(t)}{W(y_1,y_2)(t)}A\cos\omega t\,dt + y_2(x)\int_0^x \frac{W_2(y_1,y_2)(t)}{W(y_1,y_2)(t)}A\cos\omega t\,dt \\ &= -\frac{A}{\omega}\cos\omega x\int_0^x \sin\omega t\cos\omega t\,dt + \frac{A}{\omega}\sin\omega x\int_0^x \cos^2\omega t\,dt \\ &= -\frac{A}{2\omega}\cos\omega x\int_0^x \sin 2\omega t\,dt + \frac{A}{2\omega}\sin\omega x\int_0^x (\cos 2\omega t+1)\,dt \\ &= \frac{A}{2\omega}\cos\omega x\left[\frac{1}{2\omega}(\cos 2\omega x-1)\right] + \frac{A}{2\omega}\sin\omega x\left(\frac{1}{2\omega}\sin 2\omega x+x\right). \end{aligned}$$

Τελικά, βρίσκουμε

$$y_\mu(x) = \frac{A}{2\omega}x\sin\omega x,\ x\geq 0.$$

Όλες, λοιπόν, οι λύσεις της (Ε) δίνονται από τον τύπο $y = c_1y_1+c_2y_2+y_\mu$, δηλαδή από τον τύπο

$$y(x) = c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x+\frac{A}{2\omega}x\sin\omega x,\ x\geq 0,$$

όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές. Έτσι, για μια τυχούσα λύση y, έχουμε για όλα τα $\nu=1,2,\ldots$

$$\begin{aligned} \left|y\left((2\nu-1)\frac{\pi}{2\omega}\right)\right| &= \left|c_2(-1)^{\nu-1}+\frac{A\pi}{4\omega^2}(2\nu-1)(-1)^{\nu-1}\right| \\ &\geq -|c_2| + \frac{A\pi}{4\omega^2}(2\nu-1), \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\lim_{\nu\to\infty}\left|y\left((2\nu-1)\frac{\pi}{2\omega}\right)\right| = \infty.$$

'Αρα, για κάθε λύση y της (Ε) ισχύει

$$\limsup_{x\to\infty} |y(x)| = \infty.$$

Τέλος, για τη λύση y_0 που πληροί τις αρχικές συνθήκες $y_0(0)=0$, $y_0'(0)=1$, βρίσκουμε $c_1=0$ και $c_2=1/\omega$ και άρα είναι

$$y_0(x) = \frac{1}{\omega}\sin\omega x + \frac{A}{2\omega}x\sin\omega x = \frac{1}{\omega}\left(1+\frac{A}{2}x\right)\sin\omega x \quad \text{για } x\geq 0.$$

Β-7. *Δίνεται η γραμμική διαφορική εξίσωση*

$$y''+a_1y'+a_0y = b(x),\ x\geq 0,$$

όπου a_1, a_0 *είναι σταθερές και* b *είναι μια συνεχής συνάρτηση στο* $[0,\infty)$. *Ας είναι* r_1, r_2 *οι ρίζες του πολυωνύμου* $r^2+a_1r+a_0$ *με* $r_1 \neq r_2$ *και ας υποθέσουμε ότι* $\mathrm{Re}r_1<0$, $\mathrm{Re}r_2<0$. *Να αποδειχθεί ότι: Αν η* b *είναι φραγμένη, τότε όλες οι λύσεις είναι φραγμένες.*

Ας είναι $r_1=\alpha_1+i\beta_1$, $r_2=\alpha_2+i\beta_2$, όπου α_1, β_1, α_2, β_2 είναι πραγματικοί αριθμοί με $\alpha_1<0$, $\alpha_2<0$ και $(\alpha_1,\beta_1)\neq(\alpha_2,\beta_2)$. Δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης είναι οι

$$y_1(x) = e^{r_1x} = e^{\alpha_1x}(\cos\beta_1x+i\sin\beta_1x),\ x\geq 0\ ;$$
$$y_2(x) = e^{r_2x} = e^{\alpha_2x}(\cos\beta_2x+i\sin\beta_2x),\ x\geq 0\ .$$

Επειδή $\alpha_1<0$, $\alpha_2<0$, θα είναι

$$\lim_{x\to\infty} y_1(x) = \lim_{x\to\infty} y_2(x) = 0$$

και άρα όλες οι λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης τείνουν στο μηδέν για $x\to\infty$ και επομένως είναι φραγμένες. Αρκεί, λοιπόν, να διαπιστωθεί ότι υπάρχει μια φραγμένη μερική λύση, με την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση b είναι φραγμένη.
'Εχουμε για $x\geq 0$

$$W(y_1,y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} e^{r_1x} & e^{r_2x} \\ r_1e^{r_1x} & r_2e^{r_2x}\end{pmatrix} = (r_2-r_1)e^{(r_1+r_2)x} \neq 0,$$

$$W_1(y_1,y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} 0 & e^{r_2x} \\ 1 & r_2e^{r_2x}\end{pmatrix} = -e^{r_2x}\ ,$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$W_2(y_1,y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} e^{r_1x} & 0 \\ r_1e^{r_1x} & 1 \end{pmatrix} = e^{r_1x}\,.$$

Έτσι, μια μερική λύση της διαφορικής μας εξίσωσης είναι για $x \geq 0$

$$y_\mu(x) = y_1(x)\int_0^x \frac{W_1(y_1,y_2)(t)}{W(y_1,y_2)(t)}\,b(t)dt + y_2(x)\int_0^x \frac{W_2(y_1,y_2)(t)}{W(y_1,y_2)(t)}\,b(t)dt$$

$$= \frac{1}{r_1-r_2}\,e^{r_1x}\int_0^x e^{-r_1t}\,b(t)dt + \frac{1}{r_2-r_1}\,e^{r_2x}\int_0^x e^{-r_2t}\,b(t)dt.$$

Ας υποθέσουμε ότι η b είναι φραγμένη. Τότε υπάρχει μια σταθερά $K>0$ έτσι ώστε $|b(x)| \leq K$ για όλα τα $x \geq 0$. Έτσι, για κάθε $x \geq 0$ παίρνουμε

$$|r_1-r_2||y_\mu(x)| \leq |e^{r_1x}|\int_0^x |e^{-r_1t}|\,|b(t)|dt + |e^{r_2x}|\int_0^x |e^{-r_2t}|\,|b(t)|dt$$

$$= e^{\alpha_1x}\int_0^x e^{-\alpha_1t}\,|b(t)|dt + e^{\alpha_2x}\int_0^x e^{-\alpha_2t}\,|b(t)|dt$$

$$\leq K\left(e^{\alpha_1x}\int_0^x e^{-\alpha_1t}\,dt + e^{\alpha_2x}\int_0^x e^{-\alpha_2t}\,dt\right)$$

$$= K\left[e^{\alpha_1x}\frac{1}{-\alpha_1}\left(e^{-\alpha_1x}-1\right) + e^{\alpha_2x}\frac{1}{-\alpha_2}\left(e^{-\alpha_2x}-1\right)\right]$$

$$= K\left[\left(\frac{1}{-\alpha_1} + \frac{1}{-\alpha_2}\right) + \left(\frac{1}{\alpha_1}e^{\alpha_1x} + \frac{1}{\alpha_2}e^{\alpha_2x}\right)\right]$$

$$< K\left(\frac{1}{-\alpha_1} + \frac{1}{-\alpha_2}\right)$$

και άρα η μερική λύση y_μ είναι φραγμένη στο διάστημα $[0,\infty)$.

B-8. *Αν $\{y_1, \ldots, y_n\}$ είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων και $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ είναι ένα σύνολο λύσεων μιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης, να αποδειχθεί ότι*

$$W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = cW(y_1, \ldots, y_n),$$

όπου c είναι μια σταθερά.

Ας υποθέσουμε ότι η εξίσωσή μας είναι

$$a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+ \ldots +a_1y'+a_0y = 0,$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

όπου a_i (i=0, 1, . . . , n-1,n) είναι συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα I και $a_n(x)\neq 0$ για όλα τα $x\in I$. Ας είναι x_0 ένα σημείο του I. Αφού $\{y_1, \dots, y_n\}$ είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων, θα ισχύει

$$W(y_1, \dots, y_n)(x_0) \neq 0.$$

Τώρα, με τη βοήθεια του τύπου του Liouville, έχουμε για όλα τα $x\in I$

$$W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(x) = W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(x_0) \exp\left[- \int_{x_0}^{x} \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)} dt \right]$$

$$= \frac{W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(x_0)}{W(y_1, \dots, y_n)(x_0)} \left\{ W(y_1, \dots, y_n)(x_0) \exp\left[- \int_{x_0}^{x} \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)} dt \right] \right\}$$

$$= \frac{W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(x_0)}{W(y_1, \dots, y_n)(x_0)} W(y_1, \dots, y_n)(x).$$

B-9. (i) *Δίνεται η ομογενής διαφορική εξίσωση*

$$(*) \qquad y''+py'+qy = 0,$$

όπου p, q *είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις σε ένα διάστημα* I *και η* p *έχει συνεχή παράγωγο στο* I. *Να αποδειχθεί ότι η αντικατάσταση (όπου* $x_0\in I$)

$$y(x) = u(x) \exp\left[-\frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} p(t)dt \right], \ x\in I$$

μετασχηματίζει την (*) *στην εξίσωση*

$$(**) \qquad u''+\left(q-\frac{1}{2}p'-\frac{1}{4}p^2\right)u = 0.$$

Ακόμα, αν $\{u_1,u_2\}$ *είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων της* (**), *τότε οι συναρτήσεις*

$$y_i(x) = u_i(x) \exp\left[-\frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} p(t)dt \right], \ x\in I \quad (i=1,2)$$

αποτελούν ένα βασικό σύνολο λύσεων της (*).

(ii) *Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$y''+(2x+1)y'+\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)y = 0, \ x\in [0,1].$$

(i) Για κάθε $x\in I$, έχουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$y'(x) = \left[u'(x) - \frac{1}{2}p(x)u(x)\right]\exp\left[-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(t)dt\right]$$

και

$$y''(x) = \left\{u''(x) - p(x)u'(x) + \left[-\frac{1}{2}p'(x) + \frac{1}{4}p^2(x)\right]u(x)\right\}\exp\left[-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(t)dt\right].$$

Έτσι, μετά από τις πράξεις, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η δοθείσα αντικατάσταση μετασχηματίζει την (*) στην (**). Ας είναι, τώρα, $\{u_1, u_2\}$ ένα βασικό σύνολο λύσεων της (**). Τότε οι y_1, y_2 είναι λύσεις της (*). Οι λύσεις αυτές είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Πραγματικά· ας υποθέσουμε ότι $c_1y_1+c_2y_2=0$, όπου c_1, c_2 είναι σταθερές. Αυτό συνεπάγεται ότι αναγκαστικά $c_1=c_2=0$, αφού οι u_1, u_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Έτσι, $\{y_1, y_2\}$ είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων της εξίσωσης (*).

(ii) Η αντικατάσταση

$$y(x) = u(x)\exp\left[-\frac{1}{2}\int_{0}^{x}(2t+1)dt\right] = u(x)\, e^{-(x^2+x)/2},\ x\in[0,1]$$

μετασχηματίζει τη διαφορική εξίσωση στην

$$u'' + \left[\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}2 - \frac{1}{4}(2x+1)^2\right]u = 0,$$

δηλαδή στην εξίσωση

$$u''-u = 0.$$

Δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της τελευταίας εξίσωσης είναι

$$u_1(x) = e^{x},\ x\in[0,1] \ \text{ και } \ u_2(x) = e^{-x},\ x\in[0,1].$$

Έτσι, οι συναρτήσεις

$$y_1(x)=u_1(x)e^{-(x^2+x)/2}=e^{(x-x^2)/2} \ \text{ και } \ y_2(x)=u_2(x)e^{-(x^2+x)/2}=e^{-(x^2+3x)/2} \ \text{ για } x\in[0,1]$$

αποτελούν ένα βασικό σύνολο λύσεων της διαφορικής μας εξίσωσης και άρα όλες οι λύσεις της δίνονται από τον τύπο

$$y(x) = c_1e^{(x-x^2)/2}+c_2e^{-(x^2+3x)/2},\ x\in[0,1],$$

όπου οι c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

B-10. *Ας είναι* y_1 *και* y_2 *οι λύσεις της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης*

$$x^2y''+xy'+(x^2-\alpha^2)y = 0,\ x>0$$

(όπου α *σταθερά) με*

$$y_1(1)=1,\ y_1'(1)=0;\ y_2(1)=0,\ y_2'(1)=1.$$

Να βρεθεί η ορίζουσα Wronski των y_1, y_2.

Έχουμε

$$W(y_1, y_2)(1) = \det\begin{pmatrix} y_1(1) & y_2(1) \\ y_1'(1) & y_2'(1) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Στη συνέχεια, με χρήση του τύπου του Liouville, παίρνουμε για κάθε $x>0$

$$W(y_1,y_2)(x) = W(y_1,y_2)(1)\exp\left(-\int_1^x \frac{t}{t^2}\,dt\right) = \exp\left(-\int_1^x \frac{dt}{t}\right) = \frac{1}{x}.$$

B-11. *Ας είναι* f *μια συνεχής συνάρτηση στο* $(0,\infty)$. *Να επιλυθεί η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση*

$$y''+\frac{1}{4x^2}y = f(x)\cos x,\ x>0.$$

Ας συμβολίσουμε με (E) την μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωσή μας και με (E_0) την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση αυτής. Η (E_0) μπορεί να γραφεί ως

$$4x^2y''+y = 0.$$

Αυτή είναι μια διαφορική εξίσωση Euler, η οποία με την αντικατάσταση $t=\log x$, $x>0$ μετασχηματίζεται στην

$$4\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + y = 0.$$

Δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της τελευταίας εξίσωσης είναι οι $e^{t/2}$, $t\in\mathbf{R}$ και $te^{t/2}$, $t\in\mathbf{R}$. Επομένως, οι συναρτήσεις

$$y_1(x)=e^{\log x/2}=\sqrt{x},\ x>0 \quad \text{και} \quad y_2(x)=\log x\, e^{\log x/2}=\sqrt{x}\log x,\ x>0$$

συνιστούν ένα βασικό σύνολο λύσεων της (E_0). Τώρα, έχουμε για κάθε $x>0$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$W(y_1, y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \sqrt{x} & \sqrt{x}\log x \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \frac{1}{2\sqrt{x}}\log x + \frac{1}{\sqrt{x}} \end{pmatrix} = 1,$$

$$W_1(y_1, y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} 0 & y_2(x) \\ 1 & y_2'(x) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{x}\log x \\ 1 & \frac{1}{2\sqrt{x}}\log x + \frac{1}{\sqrt{x}} \end{pmatrix} = -\sqrt{x}\log x,$$

$$W_2(y_1, y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \sqrt{x} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{x}.$$

Έτσι, μια μερική λύση y_μ της (Ε) είναι

$$\begin{aligned} y_\mu(x) &= y_1(x)\int_1^x \frac{W_1(y_1, y_2)(t)}{W(y_1, y_2)(t)} f(t)\cos t\, dt + y_2(x)\int_1^x \frac{W_2(y_1, y_2)(t)}{W(y_1, y_2)(t)} f(t)\cos t\, dt \\ &= -\sqrt{x}\int_1^x f(t)\sqrt{t}\log t\cos t\, dt + \sqrt{x}\log x\int_1^x f(t)\sqrt{t}\cos t\, dt \end{aligned}$$

για $x>0$. Τέλος, όλες οι λύσεις της (Ε) δίνονται από τον τύπο $y=c_1y_1+c_2y_2+y_\mu$, δηλαδή από τον τύπο

$$y(x) = \sqrt{x}\left[c_1 - \int_1^x f(t)\sqrt{t}\log t\cos t\, dt\right] + \sqrt{x}\log x\left[c_2 + \int_1^x f(t)\sqrt{t}\cos t\, dt\right],\ x>0,$$

όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

B-12. *Ας θεωρήσουμε την μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση*

$$y''+y = b(x),\ x\geq 1,$$

όπου b *είναι μια συνεχής συνάρτηση στο* $[1,\infty)$. *Να αποδειχθεί ότι:*

(i) *Μια μερική λύση είναι*

$$y_\mu(x) = \int_1^x \sin(x-t)b(t)dt,\ x\geq 1.$$

(ii) *Αν* $\int_1^\infty |b(x)|dx < \infty$, *τότε κάθε λύση είναι φραγμένη.*

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης είναι οι

$$y_1(x) = \cos x,\ x\geq 1 \quad \text{και} \quad y_2(x) = \sin x,\ x\geq 1.$$

Η ορίζουσα Wronski αυτών είναι

$$W(y_1, y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} = 1,\ x\geq 1.$$

Βρίσκουμε

$$W_1(y_1, y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} 0 & y_2(x) \\ 1 & y_2'(x) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & \sin x \\ 1 & \cos x \end{pmatrix} = -\sin x,\ x\geq 1$$

και

$$W_2(y_1, y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & 1 \end{pmatrix} = \cos x,\ x\geq 1.$$

Έτσι, μια μερική λύση της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης είναι

$$\begin{aligned} y_\mu(x) &= y_1(x)\int_1^x \frac{W_1(y_1, y_2)(t)}{W(y_1, y_2)(t)}\, b(t)dt + y_2(x)\int_1^x \frac{W_2(y_1, y_2)(t)}{W(y_1, y_2)(t)}\, b(t)\, dt \\ &= \cos x\int_1^x (-\sin t)b(t)dt + \sin x\int_1^x \cos t\, b(t)\, dt \\ &= \int_1^x (-\cos x\sin t+\sin x\cos t)b(t)\, dt = \int_1^x \sin(x-t)b(t)\, dt,\ x\geq 1. \end{aligned}$$

Αν τώρα y είναι μια τυχούσα λύση της μη ομογενούς εξίσωσης, τότε θα υπάρχουν σταθερές c_1, c_2 έτσι ώστε $y = c_1y_1+c_2y_2+y_\mu$ και άρα θα έχουμε για κάθε $x\geq 1$

$$\begin{aligned} |y(x)| &\leq |c_1||\cos x|+|c_2||\sin x|+\int_1^x |\sin(x-t)||b(t)|dt \\ &\leq |c_1|+|c_2|+\int_1^x |b(t)|dt \leq |c_1|+|c_2|+\int_1^\infty |b(t)|dt. \end{aligned}$$

Αν λοιπόν ισχύει $\int_1^\infty |b(x)|dx < \infty$, τότε όλες οι λύσεις είναι φραγμένες.

B-13. *Μια μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης έχει τις λύσεις*

$$y_1(x) = 1+e^{x^2},\ y_2(x) = 1+xe^{x^2} \quad \text{και} \quad y_3(x) = (x+1)e^{x^2}+1 \quad \text{για } x \in \mathbf{R}.$$

Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση. Ιδιαίτερα, να βρεθεί η λύση y με

$$y(0) = 1,\ y'(0)=1.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ας καλέσουμε (Ε) την μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωσή μας και ας συμβολίσουμε με (E_0) την αντίστοιχη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση. Οι συναρτήσεις

$$Y_1(x) = y_3(x)-y_1(x) = xe^{x^2},\ x \in \mathbf{R}$$

και

$$Y_2(x) = y_3(x)-y_2(x) = e^{x^2},\ x \in \mathbf{R}$$

είναι λύσεις της (E_0). Οι Y_1, Y_2 αποτελούν ένα βασικό σύνολο λύσεων της (E_0), αφού για κάθε $x \in \mathbf{R}$

$$W(Y_1, Y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} xe^{x^2} & e^{x^2} \\ (1+2x^2)e^{x^2} & 2xe^{x^2} \end{pmatrix} = -e^{2x^2} \neq 0.$$

Έτσι, όλες οι λύσεις της (Ε) δίνονται από τον τύπο $y=c_1Y_1+c_2Y_2+y_1$, δηλαδή

$$y(x) = (c_1x+c_2+1)e^{x^2}+1,\ x \in \mathbf{R},$$

όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές. Τέλος, παρατηρούμε ότι $y_2(0)=y_2'(0)=1$. Άρα, η y_2 είναι η λύση της (Ε) που πληροί τις αρχικές συνθήκες $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

Β-14. *Να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση*

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y = 0,\ x\in(0,\pi),$$

αφού βρεθεί μια λύση y_1 αυτής της μορφής $y_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\sin(\alpha x)$, $x\in(0,\pi)$ (*α σταθερά*).

Για κάθε $x\in(0,\pi)$ έχουμε

$$y_1(x) = x^{-1/2}\sin(\alpha x),$$

$$y_1'(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2}\sin(\alpha x)+\alpha x^{-1/2}\cos(\alpha x),$$

$$y_1''(x) = \frac{3}{4}x^{-5/2}\sin(\alpha x)-\alpha x^{-3/2}\cos(\alpha x)-\alpha^2x^{-1/2}\sin(\alpha x).$$

Με την αντικατάσταση στην εξίσωση, βρίσκουμε ότι η y_1 είναι μια λύση αν και μόνο αν

$$(1-\alpha^2)x^{3/2}\sin(\alpha x) = 0 \quad \text{για κάθε } x\in(0,\pi).$$

Δηλαδή, η y_1 είναι μια λύση τότε και μόνον τότε αν $\alpha=1$ ή $\alpha=-1$. Επιλέγουμε $\alpha=1$ και έχουμε τη μερική λύση

$$y_1(x) = x^{-1/2}\sin x,\ x\in(0,\pi).$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Εκτελούμε τον μετασχηματισμό

$$y(x) = u(x)y_1(x) = u(x)x^{-1/2}\sin x \quad \text{για } x\in(0,\pi).$$

Τότε για όλα τα $x\in(0,\pi)$ είναι

$$y'(x) = u'(x)x^{-1/2}\sin x + u(x)\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\sin x + x^{-1/2}\cos x\right),$$

$$y''(x) = u''(x)x^{-1/2}\sin x + u'(x)\left(-x^{-3/2}\sin x + 2x^{-1/2}\cos x\right)$$
$$+u(x)\left(\frac{3}{4}x^{-5/2}\sin x - x^{-3/2}\cos x - x^{-1/2}\sin x\right).$$

'Ετσι, μετά από τις πράξεις, η εξίσωσή μας γίνεται

$$(\sin x)u'' + 2(\cos x)u' = 0.$$

Θέτοντας $u'=v$, καταλήγουμε στην ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$(\sin x)v' + 2(\cos x)v = 0,$$

η οποία έχει τη λύση

$$v_1(x) = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad x\in(0,\pi).$$

Τότε η συνάρτηση

$$y_2(x) = y_1(x)\int_{\pi/2}^{x} v_1(t)dt = x^{-1/2}\sin x\int_{\pi/2}^{x}\frac{dt}{\sin^2 t} = -x^{-1/2}\cos x, \quad x\in(0,\pi)$$

είναι μια λύση της εξίσωσής μας τέτοια ώστε το $\{y_1,y_2\}$ να είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων. 'Ετσι, όλες οι λύσεις της διαφορικής μας εξίσωσης δίνονται από τον τύπο

$$y(x) = x^{-1/2}(c_1\sin x + c_2\cos x), \quad x\in(0,\pi),$$

όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

B-15. *Ας είναι* f *και* g *δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις σε ένα διάστημα* I. *Να αποδειχθεί ότι:*

(i) *Αν οι* f *και* g *είναι γραμμικά εξαρτημένες, τότε* $W(f,g)(x)=0$ *για κάθε* $x\in I$.

(ii) *Αν* $W(f,g)(x)\neq 0$ *για κάποιο* $x\in I$, *τότε οι* f, g *είναι γραμμικά ανεξάρτητες.*

(iii) *Αν* $W(f,g)(x)=0$ *για κάθε* $x\in I$, *τότε οι* f, g *δεν είναι αναγκαστικά γραμμικά εξαρτημένες.* (*Αντιπαράδειγμα:* $f(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$ *και* $g(x)=x|x|$, $x\in\mathbb{R}$.)

(iv) *Αν* $W(f,g)(x)=0$ *για κάθε* $x\in I$ *και* $g(x)\neq 0$ *για όλα τα* $x\in I$, *τότε οι* f, g *είναι γραμμικά εξαρτημένες.*

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

(i) Ας υποθέσουμε ότι οι f, g είναι γραμμικά εξαρτημένες. Τότε υπάρχουν σταθερές c_1, c_2, όχι και οι δύο μηδέν, έτσι ώστε $c_1f+c_2g=0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $c_1\neq 0$. Τότε, θέτοντας $\lambda=-c_2/c_1$, έχουμε $f=\lambda g$. Έτσι, παίρνουμε

$$W(f,g)=\det\begin{pmatrix} f & g \\ f' & g' \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} \lambda g & g \\ \lambda g' & g' \end{pmatrix}=0.$$

(ii) Ας υποθέσουμε ότι $W(f,g)(x_0)\neq 0$ για κάποιο $x_0\in I$. Έστω ότι $c_1f+c_2g=0$, όπου c_1, c_2 είναι σταθερές. Τότε θα είναι και $c_1f'+c_2g'=0$. Έτσι, έχουμε

$$c_1f(x_0)+c_2g(x_0)=0,\ c_1f'(x_0)+c_2g'(x_0)=0.$$

Το ομογενές αυτό γραμμικό αλγεβρικό σύστημα έχει ορίζουσα την $W(f,g)(x_0)$ που δεν είναι μηδέν και επομένως έχει μόνο τη μηδενική λύση, δηλαδή αναγκαστικά είναι $c_1=c_2=0$. Αυτό αποδεικνύει την γραμμική ανεξαρτησία των f, g. [Ας σημειωθεί ότι το συμπέρασμά μας μπορεί να προκύψει από το (i).]

(iii) Ας θεωρήσουμε τις συναρτήσεις

$$f(x)=x^2,\ x\in\mathbf{R} \text{ και } g(x)=x|x|,\ x\in\mathbf{R}.$$

Έχουμε

$$W(f,g)(x)=\det\begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} x^2 & x|x| \\ 2x & 2|x| \end{pmatrix}=0 \text{ για όλα τα } x\in\mathbf{R}.$$

Από την άλλη μεριά, οι f, g είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Πραγματικά· αν υποθέσουμε ότι $c_1f+c_2g=0$, όπου c_1, c_2 είναι σταθερές, τότε (για $x=1$ και για $x=-1$) έχουμε

$$c_1+c_2=0 \text{ και } c_1-c_2=0,$$

που συνεπάγεται ότι αναγκαστικά $c_1=c_2=0$.

(iv) Ας υποθέσουμε ότι $W(f,g)(x)=0$ για κάθε $x\in I$ και ότι $g(x)\neq 0$ για όλα τα $x\in I$. Τότε έχουμε

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}=-\frac{W(f,g)}{g^2}=0$$

και άρα υπάρχει μια σταθερά c έτσι ώστε $f/g=c$. Επομένως, είναι $f-cg=0$, που σημαίνει ότι οι f, g είναι γραμμικά εξαρτημένες.

B-16. *Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών*

$$y''-y'-2y=4e^{-x};\ y(0)=\alpha,\ y'(0)=\beta,$$

όπου α, β *είναι σταθερές. Ακόμα, να βρεθεί η ικανή και αναγκαία συνθήκη για τα* α, β *ώστε η λύση να είναι φραγμένη στο* $[0,\infty)$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Η αντίστοιχη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση έχει ως δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις τις

$$y_1(x) = e^{-x},\ x\in \mathbf{R} \quad \text{και} \quad y_2(x) = e^{2x},\ x\in \mathbf{R}.$$

Εύκολα μπορούμε να βρούμε ότι μια μερική λύση της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής μας εξίσωσης είναι η

$$y_\mu(x) = -\frac{4}{3}xe^{-x},\ x\in \mathbf{R}.$$

Έτσι, όλες οι λύσεις της διαφορικής μας εξίσωσης δίνονται από τον τύπο $y=c_1y_1+c_2y_2+y_\mu$, δηλαδή από τον τύπο

$$y(x) = c_1e^{-x}+c_2e^{2x}-\frac{4}{3}xe^{-x},\ x\in \mathbf{R},$$

όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές. Τώρα, έχουμε

$$y(0) = c_1+c_2 = \alpha \quad \text{και} \quad y'(0) = -c_1+2c_2-\frac{4}{3} = \beta$$

από όπου προκύπτει $c_1= \frac{1}{3}\left(2\alpha-\beta-\frac{4}{3}\right)$ και $c_2= \frac{1}{3}\left(\alpha+\beta+\frac{4}{3}\right)$. Άρα, η λύση y_0 του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y_0(x) = \frac{1}{3}\left(2\alpha-\beta-\frac{4}{3}\right)e^{-x}+\frac{1}{3}\left(\alpha+\beta+\frac{4}{3}\right)e^{2x}-\frac{4}{3}xe^{-x},\ x\in \mathbf{R}.$$

Οι συναρτήσεις e^{-x} και xe^{-x} είναι φραγμένες για $x\geq 0$. Επομένως, η λύση y_0 είναι φραγμένη στο διάστημα $[0,\infty)$ αν και μόνο αν

$$\alpha+\beta+\frac{4}{3} = 0.$$

Β-17. *Δίνεται η γραμμική διαφορική εξίσωση*

$$(E_1) \qquad \left(1-\frac{1}{x}\right)y'' + \left(\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}y'-\frac{1}{x^3}\right)y' - \frac{1}{4}y = \frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3},\ x>1.$$

Να αποδειχθεί ότι η αντικατάσταση $t=1/x$ *μετασχηματίζει την* (E_1) *σε μια μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση* (E_2). *Να βρεθεί μια λύση* y_μ *της* (E_2) *της μορφής* $y_\mu(t)=t^m$, $0<t<1$ (m *ακέραιος*). *Ας είναι* (E_3) *η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση της* (E_2). *Να βρεθούν δύο λύσεις* y_1 *και* y_2 *της* (E_3) *των μορφών* $y_1(t)=\alpha t+\beta$, $0<t<1$ *και* $y_2(t)=e^{\gamma t}$, $0<t<1$ (α, β, γ *σταθερές*). *Τέλος, να βρεθούν όλες οι λύσεις της εξίσωσης* (E_1).

Έχουμε για κάθε $x>1$

$$y' \equiv \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt},$$

$$y'' \equiv \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{2}{x^3}\frac{dy}{dt} - \frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{2}{x^3}\frac{dy}{dt} - \frac{1}{x^4}\frac{d^2y}{dt^2}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

και έτσι, η (E_1) μετασχηματίζεται στην εξίσωση

$$(E_2) \qquad t^3(1-t)\frac{d^2y}{dt^2}+t^4\frac{dy}{dt}-t^3y = 2-2t-2t^2,\ 0<t<1.$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $y_\mu(t) = t^m$, $0<t<1$ (m ακέραιος) είναι μια λύση της (E_2) αν και μόνο αν $m=-1$. Άρα, είναι

$$y_\mu(t) = \frac{1}{t},\ 0<t<1.$$

Στη συνέχεια, βρίσκουμε ότι y_1 και y_2 είναι δύο λύσεις της (E_3) αν και μόνο αν $\alpha=1$, $\beta=0$ και $\gamma=1$. Άρα, δύο λύσεις της (E_3) είναι οι

$$y_1 \quad = t,\ 0<t<1 \ \text{ και } \ y_2(t) = e^t,\ 0<t<1.$$

Αυτές είναι γραμμικά ανεξάρτητες, αφού

$$W(y_1,y_2)(t) = \det\begin{pmatrix} t & e^t \\ 1 & e^t \end{pmatrix} = (t-1)e^t < 0 \quad \text{για } \ 0<t<1.$$

Έτσι, οι λύσεις της (E_2) δίνονται από τον τύπο $y=c_1y_1+c_2y_2+y_\mu$, δηλαδή από τον τύπο

$$y(t) = c_1t+c_2e^{1/x}+x,\ x>1,$$

όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

C. ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

C-1. *Να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις*

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad f_2(x) = \begin{pmatrix} xe^x \\ e^x \end{pmatrix} \quad \text{για } x \in [0,1]$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Στη συνέχεια, να αποδειχθεί ότι για οποιοδήποτε $x_0 \in [0,1]$ *τα διανύσματα* $f_1(x_0)$ *και* $f_2(x_0)$ *είναι γραμμικά εξαρτημένα. Μπορεί οι* f_1, f_2 *να είναι λύσεις ενός ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος;*

Ας υποθέσουμε ότι $c_1f_1+c_2f_2=0$, όπου c_1 και c_2 είναι σταθερές. Τότε

$$c_1+c_2e^x = 0 \quad \text{για κάθε } x \in [0,1].$$

Άρα θα είναι (για x=0 και για x=1)

$$c_1+c_2 = 0 \quad \text{και} \quad c_1+c_2e = 0$$

και επομένως θα πρέπει αναγκαστικά $c_1=c_2=0$. Αυτό αποδεικνύει τη γραμμική ανεξαρτησία των συναρτήσεων f_1 και f_2.

Για οποιοδήποτε σημείο $x_0 \in [0,1]$, τα διανύσματα $f_1(x_0)$ και $f_2(x_0)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, αφού ισχύει

$$e^{x_0} f_1(x_0)-f_2(x_0) = 0.$$

Αν οι f_1, f_2 ήταν λύσεις ενός ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος, τότε η γραμμική ανεξαρτησία των f_1, f_2 θα ισοδυναμούσε με τη γραμμική ανεξαρτησία των διανυσμάτων $f_1(x_0), f_2(x_0)$ για οποιοδήποτε $x_0 \in I$. 'Αρα, οι συναρτήσεις f_1, f_2 δεν είναι δυνατόν να είναι λύσεις ενός ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος.

C-2. *Να αποδειχθεί ότι η ορίζουσα κάθε πίνακα λύσεων του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος*

$$y' = \begin{pmatrix} 1-\cos^2x & \log(1+x^2) \\ x^2+7 & -\sin^2x \end{pmatrix} y, \quad x \in \mathbf{R}$$

είναι σταθερά.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ας είναι Y ένα πίνακας λύσεων. Τότε, με τη χρήση του τύπου του Jacobi, παίρνουμε για όλα τα $x \in \mathbb{R}$

$$\det Y(x) = \det Y(0) \exp\left[\int_0^x \left(1-\cos^2 t-\sin^2 t\right)dt\right] = \det Y(0).$$

C-3. *Δίνεται το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα* $y'=Ay$, *όπου* A *είναι ένας σταθερός τρίτης τάξης πίνακας. Αν*

$$y_1(x) = \begin{pmatrix} e^x+e^{2x} \\ e^{2x} \\ 0 \end{pmatrix},\ y_2(x) = \begin{pmatrix} e^x+e^{3x} \\ e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix},\ y_3(x) = \begin{pmatrix} e^x-e^{3x} \\ -e^{3x} \\ -e^{3x} \end{pmatrix} \text{ για } x \in \mathbf{R}$$

είναι τρείς λύσεις αυτού, να βρεθεί ο πίνακας συνάρτηση e^{xA}, $x \in \mathbf{R}$.

Ας θέσουμε

$$Y(x) = \begin{pmatrix} e^x+e^{2x} & e^x+e^{3x} & e^x-e^{3x} \\ e^{2x} & e^{3x} & -e^{3x} \\ 0 & e^{3x} & -e^{3x} \end{pmatrix},\ x \in \mathbf{R}.$$

Ο πίνακας Y είναι ένας πίνακας λύσεων. Επιπλέον, βρίσκουμε

$$\det Y(x) = 2e^{6x} \neq 0 \quad \text{για όλα τα } x \in \mathbf{R}.$$

'Αρα, Y είναι ένας βασικός πίνακας. Αφού και ο e^{xA}, $x \in \mathbf{R}$ είναι ένας βασικός πίνακας, θα υπάρχει ένας σταθερός τρίτης τάξης πίνακας C με $\det C \neq 0$ έτσι ώστε

$$e^{xA} = Y(x)C \quad \text{για κάθε } x \in \mathbf{R}.$$

Έχουμε για $x=0$

$$I = e^{0A} = Y(0)C, \text{ δηλαδή } C = Y^{-1}(0).$$

' Ετσι, παίρνουμε για όλα τα $x \in \mathbf{R}$

$$e^{xA} = Y(x)Y^{-1}(0) = \begin{pmatrix} e^x+e^{2x} & e^x+e^{3x} & e^x-e^{3x} \\ e^{2x} & e^{3x} & -e^{3x} \\ 0 & e^{3x} & -e^{3x} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$= \begin{pmatrix} e^{x} & \frac{1}{2}(e^{2x}-e^{x}) & \frac{1}{2}(-e^{2x}+e^{3x}) \\ 0 & e^{2x} & -e^{2x}+e^{3x} \\ 0 & 0 & e^{3x} \end{pmatrix}.$$

C-4. *Δεδομένου ότι για κάθε* $t \in \mathbf{R}$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu)!} t^{2\nu} = \cos t \quad \text{και} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{(2\nu-1)!} t^{2\nu-1} = \sin t \,,$$

*να επιλυθεί (χωρίς χρησιμοποίηση του Θεωρήματος του **Putzer**) το πρόβλημα αρχικών τιμών*

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} y \,, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ας θέσουμε

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι

$$A^{2\nu} = (-1)^{\nu} I \quad \text{και} \quad A^{2\nu-1} = (-1)^{\nu-1} A \qquad (\nu=1,2,\dots).$$

Έτσι, για κάθε $x \in \mathbf{R}$ παίρνουμε

$$e^{xA} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{\nu} A^{\nu}}{\nu!} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{2\nu} A^{2\nu}}{(2\nu)!} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{2\nu-1} A^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!}$$

$$= I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{2\nu} (-1)^{\nu} I}{(2\nu)!} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{2\nu-1} (-1)^{\nu-1} A}{(2\nu-1)!}$$

$$= \left[1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu)!} x^{2\nu} \right] I + \left[\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{(2\nu-1)!} x^{2\nu-1} \right] A$$

$$= (\cos x) I + (\sin x) A = \cos x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin x \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$= \begin{pmatrix} \cos x & 2\sin x \\ -\frac{1}{2}\sin x & \cos x \end{pmatrix}.$$

Η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y(x) = e^{(x-0)A}y(0) = \begin{pmatrix} \cos x & 2\sin x \\ -\frac{1}{2}\sin x & \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x-4\sin x \\ -\frac{1}{2}\sin x-2\cos x \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R}.$$

C-5. *Δίνεται το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα*

$$y' = Ay \quad \text{με} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(i) *Να αποδειχθεί ότι*

$$Y(x) = \begin{pmatrix} e^x & e^{2x} & e^{2x} \\ e^x & -e^{2x} & 0 \\ 3e^x & 0 & e^{2x} \end{pmatrix}, \; x \in \mathbf{R}$$

είναι ένας βασικός πίνακας.

(ii) *Να βρεθεί η λύση* y *με*

$$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(iii) *Να βρεθεί ένας βασικός πίνακας* Y^* *με* $Y^*(0)=-2I$.

(iv) *Να βρεθεί ο* e^{xA}, $x \in \mathbf{R}$.

(i) Για όλα τα $x \in \mathbf{R}$, έχουμε

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} e^x & 2e^{2x} & 2e^{2x} \\ e^x & -2e^{2x} & 0 \\ 3e^x & 0 & 2e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^x & e^{2x} & e^{2x} \\ e^x & -e^{2x} & 0 \\ 3e^x & 0 & e^{2x} \end{pmatrix} = AY(x)$$

και

$$\det Y(x) = e^{5x} \neq 0$$

και επομένως ο **Y** είναι ένας βασικός πίνακας.

(ii) Η ζητούμενη λύση είναι για $x \in \mathbf{R}$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$y(x) = Y(x)Y^{-1}(0)y(0) = \begin{pmatrix} e^x & e^{2x} & e^{2x} \\ e^x & -e^{2x} & 0 \\ 3e^x & 0 & e^{2x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^x+2e^{2x} \\ -e^x+e^{2x} \\ -3e^x+3e^{2x} \end{pmatrix}.$$

(iii) Θα είναι $Y^*=YC$ για κάποιον σταθερό τρίτης τάξης πίνακα C.Έτσι,

$$-2I = Y^*(0) = Y(0)C$$

και επομένως $C=-2Y^{-1}(0)$. Άρα, έχουμε για κάθε $x \in \mathbf{R}$

$$Y^*(x) = -2Y(x)Y^{-1}(0) = -2\begin{pmatrix} e^x & e^{2x} & e^{2x} \\ e^x & -e^{2x} & 0 \\ 3e^x & 0 & e^{2x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2e^x-4e^{2x} & 2e^x-2e^{2x} & -2e^x+2e^{2x} \\ 2e^x-2e^{2x} & 2e^x-4e^{2x} & -2e^x+2e^{2x} \\ 6e^x-6e^{2x} & 6e^x-6e^{2x} & -6e^x+4e^{2x} \end{pmatrix}.$$

(iv) Αφού ο e^{xA}, $x \in \mathbf{R}$ είναι επίσης ένας βασικός πίνακας, θα υπάρχει ένας σταθερός τρίτης τάξης πίνακας D τέτοιος ώστε

$$e^{xA} = Y^*(x)D \text{ για όλα τα } x \in \mathbf{R}.$$

Τότε θα είναι

$$I = e^{0A} = Y^*(0)D = -2ID = -2D$$

και άρα $D=-\frac{1}{2}I$. Επομένως, για όλα τα $x \in \mathbf{R}$

$$e^{xA} = -\frac{1}{2}Y^*(x) = \begin{pmatrix} -e^x+2e^{2x} & -e^x+e^{2x} & e^x-e^{2x} \\ -e^x+e^{2x} & -e^x+2e^{2x} & e^x-e^{2x} \\ -3e^x+3e^{2x} & -3e^x+3e^{2x} & 3e^x-2e^{2x} \end{pmatrix}.$$

C-6. *Ας είναι Y ένας βασικός πίνακας του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος*

$$y' = Ay,$$

όπου A είναι ένας συνεχής πίνακας- συνάρτηση σε ένα διάστημα I. Θέτουμε για τυχόντα $x, t \in I$

$$E(x, t) = Y(x)Y^{-1}(t).$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Να αποδειχθεί ότι

$$\frac{\partial}{\partial t} E(x, t) = -E(x, t)A(t) \quad \text{για } x, t \in I.$$

Αφού ο Y είναι ένας βασικός πίνακας, θα ισχύει $\det Y(t) \neq 0$ για όλα τα $t \in I$ (και επομένως θα ορίζεται ο $Y^{-1}(t)$ για $t \in I$) και ακόμα

$$Y'(t) = A(t)Y(t) \quad \text{για κάθε } t \in I.$$

Έτσι, για τυχόντα $x, t \in I$, παίρνουμε

$$\frac{\partial}{\partial t} E(x,t) = Y(x)\frac{dY^{-1}(t)}{dt} = Y(x)\left[-Y^{-1}(t)Y'(t)Y^{-1}(t)\right]$$

$$= -\left[Y(x)Y^{-1}(t)\right]\left[A(t)Y(t)\right]Y^{-1}(t) = -E(x, t)A(t).$$

C-7. *Δίνεται το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα*

$$y' = \begin{pmatrix} f & g \\ -g & f \end{pmatrix} y,$$

όπου f *και* g *είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις σε ένα διάστημα* I. *Ας είναι* x_0 *ένα σημείο του* I *και για κάθε* $x \in I$ *ας θέσουμε*

$$h_1(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)dt \quad \text{και} \quad h_2(x) = \exp\left[\int_{x_0}^{x} f(t)dt\right].$$

Να αποδειχθεί ότι

$$Y(x) = \begin{pmatrix} h_2(x)\cos h_1(x) & h_2(x)\sin h_1(x) \\ -h_2(x)\sin h_1(x) & h_2(x)\cos h_1(x) \end{pmatrix}, \quad x \in I$$

είναι ένας βασικός πίνακας. Να βρεθεί, στη συνέχεια, η λύση y *με*

$$y(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Αμέσως βρίσκουμε

$$\det Y(x) = [h_2(x)]^2 > 0 \quad \text{για όλα τα } x \in I.$$

Επίσης, έχουμε για κάθε $x \in I$

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} f(x)h_2(x)\cos h_1(x) - g(x)h_2(x)\sin h_1(x) & f(x)h_2(x)\sin h_1(x) + g(x)h_2(x)\cos h_1(x) \\ -f(x)h_2(x)\sin h_1(x) - g(x)h_2(x)\cos h_1(x) & f(x)h_2(x)\cos h_1(x) - g(x)h_2(x)\sin h_1(x) \end{pmatrix}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$=\begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ -g(x) & f(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_2(x)\cosh_1(x) & h_2(x)\sinh_1(x) \\ -h_2(x)\sinh_1(x) & h_2(x)\cosh_1(x) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ -g(x) & f(x) \end{pmatrix}Y(x).$$

'Αρα, ο Y είναι ένας βασικός πίνακας. Η ζητούμενη λύση θα είναι

$$y(x) = Y(x)Y^{-1}(x_0)y(x_0),\ x\in I.$$

Αλλά παρατηρούμε ότι $Y(x_0)=I$. 'Ετσι, είναι για κάθε $x\in I$

$$y(x) = Y(x)y(x_0) = \begin{pmatrix} h_2(x)\cosh_1(x) & h_2(x)\sinh_1(x) \\ -h_2(x)\sinh_1(x) & h_2(x)\cosh_1(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} h_2(x)\cosh_1(x) \\ -h_2(x)\sinh_1(x) \end{pmatrix}.$$

C-8. *Ας είναι* y_1 *η λύση του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος*

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix} y \quad (\varepsilon\neq 0 \ \textit{σταθερά})$$

και y_2 *η λύση του διαφορικού συστήματος*

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y$$

με

$$y_1(0) = y_2(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Να αποδειχθεί ότι $y_1 \to y_2$ *όταν* $\varepsilon \to 0$.

Αμέσως βρίσκουμε

$$y_2(x) = e^{(x-0)I}y_2(0) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \\ -e^{x} \end{pmatrix} \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}.$$

Στη συνέχεια, ας θέσουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1=1-\varepsilon$ και $\lambda_2=1+\varepsilon$ με $\lambda_1\neq\lambda_2$. Εύκολα βρίσκουμε ότι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$r_1' = (1-\varepsilon)r_1,\ r_2' = r_1+(1+\varepsilon)r_2\ ;\ r_1(0)=1,\ r_2(0)=0$$

είναι

$$r_1(x) = e^{(1-\varepsilon)x},\ \ r_2(x) = \frac{1}{2\varepsilon}\left[e^{(1+\varepsilon)x}-e^{(1-\varepsilon)x}\right] \text{ για } x\in\mathbf{R}.$$

Έτσι, παίρνουμε για κάθε $x \in \mathbf{R}$

$$e^{xA} = r_1(x)I+r_2(x)(A-\lambda_1 I) = e^{(1-\varepsilon)x}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\frac{1}{2\varepsilon}\left[e^{(1+\varepsilon)x}-e^{(1-\varepsilon)x}\right]\begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{(1+\varepsilon)x}+e^{(1-\varepsilon)x} & e^{(1+\varepsilon)x}-e^{(1-\varepsilon)x} \\ e^{(1+\varepsilon)x}-e^{(1-\varepsilon)x} & e^{(1+\varepsilon)x}+e^{(1-\varepsilon)x} \end{pmatrix}.$$

Άρα, έχουμε για κάθε $x \in \mathbf{R}$

$$y_1(x) = e^{(x-0)A}y_1(0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{(1+\varepsilon)x}+e^{(1-\varepsilon)x} & e^{(1+\varepsilon)x}-e^{(1-\varepsilon)x} \\ e^{(1+\varepsilon)x}-e^{(1-\varepsilon)x} & e^{(1+\varepsilon)x}+e^{(1-\varepsilon)x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{(1-\varepsilon)x} \\ -e^{(1-\varepsilon)x} \end{pmatrix}.$$

Επομένως, είναι

$$y_1(x) = e^{-\varepsilon x}y_2(x) \quad \text{για όλα τα } x\in\mathbf{R}$$

και άρα $y_1 \to y_2$ όταν $\varepsilon\to 0$.

C-9. *Ας είναι*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ \ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \ \text{ και }\ A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Να επιλυθούν τα ομογενή γραμμικά διαφορικά συστήματα $y'=A_1y$ *και* $y'=A_2y$. *Στη συνέχεια, να χρησιμοποιηθούν οι λύσεις αυτών για να επιλυθεί το ομογενές γραμμικό σύστημα* $y'=Ay$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Οι ιδιοτιμές του A_1 είναι 4 και 2. Η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$r_1' = 4r_1 \ , \ r_2' = r_1+2r_2 \ ; \ r_1(0) = 1 \ , \ r_2(0) = 0$$

είναι

$$r_1(x) = e^{4x} \ \text{και} \ r_2(x) = \frac{1}{2}\left(e^{4x}-e^{2x}\right) \ \text{για } x \in \mathbf{R}.$$

Έτσι, είναι για κάθε $x \in \mathbf{R}$

$$e^{xA_1} = e^{4x}\,I+\frac{1}{2}\left(e^{4x}-e^{2x}\right)(A_1-4I) = e^{4x}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\left(e^{4x}-e^{2x}\right)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

και επομένως

$$e^{xA_1} = \begin{pmatrix} e^{4x} & \frac{1}{2}\left(e^{2x}-e^{4x}\right) \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix}, \ x \in \mathbf{R}.$$

Ο A_2 έχει τις ιδιοτιμές 1,-2 και 3. Το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$r_1' = r_1 \ , \ r_2' = r_1-2r_2 \ , \ r_3' = r_2+3r_3 \ ; \ r_1(0) = 1 \ , \ r_2(0) = r_3(0) = 0$$

έχει τη λύση

$$r_1(x) = e^{x} \ , \ r_2(x) = \frac{1}{3}\left(e^{x}-e^{-2x}\right) \ , \ r_3(x) = -\frac{1}{6}e^{x}+\frac{1}{15}e^{-2x}+\frac{1}{10}e^{3x}$$

για $x \in \mathbf{R}$. Επίσης, είναι

$$A_2-I = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad (A_2-I)(A_2+2I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Έχουμε

$$e^{xA_2} = r_1(x)I+r_2(x)(A_2-I)+r_3(x)(A_2-I)(A_2+2I), \ x \in \mathbf{R}$$

και έτσι βρίσκουμε

$$e^{xA_2} = \begin{pmatrix} e^{x} & e^{-2x}-e^{x} & -3e^{x}+e^{-2x}+2e^{3x} \\ 0 & e^{-2x} & e^{-2x}-e^{3x} \\ 0 & 0 & e^{3x} \end{pmatrix} \ x \in \mathbf{R}.$$

Τώρα, είναι φανερό ότι θα είναι για όλα τα $x \in \mathbf{R}$

$$e^{xA} = \begin{pmatrix} e^{xA_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{xA_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{4x} & \frac{1}{2}\left(e^{2x}-e^{4x}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{x} & e^{-2x}-e^{x} & -3e^{x}+e^{-2x}+2e^{3x} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2x} & e^{-2x}-e^{3x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{3x} \end{pmatrix}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

C-10. (i) *Ας θεωρήσουμε το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα* $y' = Ay$, *όπου* A *είναι ένας σταθερός* n-*τάξης πίνακας. Αν* λ *είναι μια σταθερά και* c *είναι ένα* n-*διάστατο διάνυσμα, να αποδειχθεί ότι* $y(x)=e^{\lambda x}c$, $x \in \mathbf{R}$ *είναι μια λύση αν και μόνο αν* $Ac=\lambda c$.

(ii) *Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών*

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Η $y(x)=e^{\lambda x}c$, $x \in \mathbf{R}$ είναι μια λύση αν και μόνο αν για όλα τα $x \in \mathbf{R}$ ισχύει

$$\lambda e^{\lambda x}c = Ae^{\lambda x}c \quad ή \quad (Ac-\lambda c)e^{\lambda x} = 0,$$

δηλαδή αν και μόνο αν $Ac-\lambda c=0$. Έτσι, αν λ είναι μια ιδιοτιμή του πίνακα A και c είναι ένα ιδιοδιάνυσμα αυτού αντίστοιχο της ιδιοτιμής λ, τότε η $y(x)=e^{\lambda x}c$, $x \in \mathbf{R}$ είναι μια λύση του διαφορικού συστήματος. Ακόμα, αν $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ είναι διακεκριμμένες ιδιοτιμές του A και $c_1, \ldots, c_n$ είναι, αντίστοιχα των ιδιοτιμών αυτών, ιδιοδιανύσματα του πίνακα A, τότε οι συναρτήσεις

$$y_k(x) = e^{\lambda_k x}c_k, \; x \in R \quad (k=1, \ldots, n)$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του διαφορικού συστήματος, αφού τα αρχικά διανύσματα $y_k(0)=c_k$ $(k=1, \ldots, n)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα (γιατί αντιστοιχούν σε διαφορετικές ανά δύο ιδιοτιμές).

(ii) Ας ονομάσουμε A τον πίνακα του γραμμικού διαφορικού συστήματός μας. Οι ιδιοτιμές του A είναι

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3 \quad \text{και} \quad \lambda_3 = -2.$$

Επίσης, μπορούμε να βρούμε ότι τα διανύσματα

$$c_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad c_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

είναι ιδιοδιανύσματα του πίνακα A αντίστοιχα των ιδιοτιμών λ_1, λ_2 και λ_3. Έτσι, τρείς γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του γραμμικού διαφορικού συστήματος είναι για $x \in \mathbf{R}$

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}c_1 = \begin{pmatrix} -e^{x} \\ 4e^{x} \\ e^{x} \end{pmatrix}, \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}c_2 = \begin{pmatrix} e^{3x} \\ 2e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix} \text{και } y_3(x) = e^{\lambda_3 x}c_3 = \begin{pmatrix} -e^{-2x} \\ e^{-2x} \\ e^{-2x} \end{pmatrix}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Όλες οι λύσεις δίνονται από τον τύπο $y=C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3$, δηλαδή από τον τύπο

$$y(x)=\begin{pmatrix} -C_1e^{x}+C_2e^{3x}-C_3e^{-2x} \\ 4C_1e^{x}+2C_2e^{3x}+C_3e^{-2x} \\ C_1e^{x}+C_2e^{3x}+C_3e^{-2x} \end{pmatrix},\ x\in\mathbf{R},$$

όπου C_1, C_2 και C_3 είναι αυθαίρετες σταθερές. Για τη λύση y_0 του προβλήματος αρχικών τιμών έχουμε

$$-C_1+C_2-C_3=1\ ,\ 4C_1+2C_2+C_3=0\ ,\ C_1+C_2+C_3=-1$$

και άρα

$$C_1=1/3\ ,\ C_2=0 \text{ και } C_3=-4/3\ .$$

Επομένως, είναι

$$y_0(x)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}e^{x}+\frac{4}{3}e^{-2x} \\ \frac{4}{3}e^{x}-\frac{4}{3}e^{-2x} \\ \frac{1}{3}e^{x}-\frac{4}{3}e^{-2x} \end{pmatrix},\ x\in\mathbf{R}.$$

C-11. *Να βρεθεί ο σταθερός πίνακας* A, *αν*

$$e^{xA}=\begin{pmatrix} 2e^{2x}-e^{x} & e^{2x}-e^{x} & e^{x}-e^{2x} \\ e^{2x}-e^{x} & 2e^{2x}-e^{x} & e^{x}-e^{2x} \\ 3e^{2x}-3e^{x} & 3e^{2x}-3e^{x} & 3e^{x}-2e^{2x} \end{pmatrix},\ x\in\mathbf{R}.$$

Έχουμε

$$\left(e^{xA}\right)'=Ae^{xA} \quad \text{για κάθε } x\in\mathbf{R}.$$

Για x=0 (αφού ο A είναι σταθερός) παίρνουμε

$$A=\left(e^{xA}\right)'\Big|_{x=0}.$$

Έτσι, βρίσκουμε

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

C-12. *Να αποδειχθεί ότι*

$$Y(x)=\begin{pmatrix} e^{x} & xe^{x} & e^{2x} \\ e^{x} & (x+1)e^{x} & 2e^{2x} \\ e^{x} & (x+2)e^{x} & 4e^{2x} \end{pmatrix},\quad x\in \mathbf{R}$$

είναι ένας βασικός πίνακας ενός ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος της μορφής $y'=Ay$, *όπου* A *είναι ένας σταθερός τρίτης τάξης πίνακας. Να βρεθεί ο πίνακας* A.

Αμέσως βρίσκουμε

$$\det Y(x) = e^{4x} \neq 0\,,\quad x\in \mathbf{R}.$$

Επίσης, για κάθε $x \in \mathbf{R}$, έχουμε (μετά τους υπολογισμούς)

$$Y'(x)Y^{-1}(x)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}\equiv A$$

και επομένως

$$Y'(x) = AY(x) \quad \text{για όλα τα } x\in \mathbf{R}.$$

'Αρα, ο Y είναι ένας βασικός πίνακας του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος $y'=Ay$, όπου ο A ορίσθηκε παραπάνω.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ
Προτεινόμενες για λύση

1. Να αποδειχθεί ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = \frac{1}{1+x^2}\exp\left(-y^2\sin^2 x\right), \quad y(0) = 1$$

έχει ακριβώς μια λύση στην πραγματική ευθεία.

2. Να αποδειχθεί ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = (3x^2+1)\cos^2 y+(x^3-2x)\sin 2y, \quad y(5) = 7$$

έχει ακριβώς μια λύση στην πραγματική ευθεία.

3. Να βρεθεί μια λύση του προβλήματος αρχικών τιμών $y'=-x\sqrt{1-y^2}$, $y(0)=1$, διαφορετική από τη σταθερή λύση $y=1$ αυτού. Το γεγονός της ύπαρξης δύο λύσεων για το πρόβλημα αρχικών τιμών αυτό έρχεται σε αντίθεση με κάποιο από τα γνωστά κριτήρια ύπαρξης και μονοσημάντου λύσεων προβλημάτων αρχικών τιμών; Να δικαιολογηθεί η απάντηση.

4. Ας είναι λ μια πραγματική σταθερά με $|\lambda|\leq 1$. Να αποδειχθεί ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = y+\lambda x^2\sin y, \quad y(0) = 1$$

έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $[-1,1]$, η οποία είναι τέτοια ώστε

$$|y(x)-e^x| \leq |\lambda|\left(e^{|x|}-1\right) \quad \text{για } |x|\leq 1.$$

5. Αν $\lambda>0$, να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο λύσεων το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = \sqrt{1+2\lambda x-y^2}, \quad y(0) = 0.$$

6. Να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο λύσεων το πρόβλημα αρχικών τιμών

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$y''' + \frac{1}{1+x^2}y'' + y'\sin x + \frac{x}{y^2+z^2+1} = 0,$$
$$z'' + e^{-x}z' + \cos(y+z) = 0\ ;$$
$$y(0)=1\ ,\ y'(0)=0,\ y''(0)=5,\ z(0)=0,\ z'(0)=3.$$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Το διαφορικό σύστημα να αναχθεί σε μια 5-διάστατη διανυσματική διαφορική εξίσωση με την αντικατάσταση

$$y=y_1,\ y'=y_2,\ y''=y_3,\ z=y_4,\ z'=y_5.$$

7. Ας είναι ε, g, υ_0 και α θετικές σταθερές και ας θεωρήσουμε τα διαφορικά συστήματα

(*) $$y'' = -\varepsilon y',\ \ z'' = -g-\varepsilon z'$$

και

(**) $$y'' = 0,\ \ z'' = -g.$$

Να αποδειχθεί ότι καθένα από τα συστήματα (*) και (**) έχει ακριβώς μια λύση στην πραγματική ευθεία, η οποία πληροί τις αρχικές συνθήκες

(C) $$y(0) = z(0) = 0\ ,\ y'(0) = \upsilon_0\cos a\ ,\ z'(0) = \upsilon_0\sin a\ .$$

Στη συνέχεια, αν $\varphi = (y_1,z_1)$ είναι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (*)-(C) και $\omega = (y_2,z_2)$ είναι η λύση του (**)-(C), να αποδειχθεί ότι $|\varphi-\omega|\to 0$ όταν $\varepsilon\to 0$.

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Καθένα από τα συστήματα (*) και (**) να αναχθεί σε ένα (πρώτης τάξης) γραμμικό διαφορικό σύστημα.

8. Ας είναι $\{y_1,y_2\}$ ένα βασικό σύνολο πραγματικών λύσεων μιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης με διάστημα ορισμού το $(-\infty,\infty)$. Να αποδειχθεί ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της y_2 υπάρχει ακριβώς μια ρίζα της λύσης y_1.

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Παραγωγίσατε τη συνάρτηση $y_2/\,y_1$ και χρησιμοποιείστε το Θεώρημα του Rolle.

9. Ας είναι a, b και c θετικοί αριθμοί. Να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$ay''+by'+cy = 0$$

τείνουν στο μηδέν για $x\to\infty$.

10. Ας θεωρήσουμε τη γραμμική διαφορική εξίσωση

(E) $$y''+a_1y'+a_0y = b\ ,$$

όπου a_0, a_1 είναι σταθερές και b είναι μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0,\infty)$. Ας υποθέσουμε ότι οι ρίζες λ_1 και λ_2 της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\lambda^2+a_1\lambda+a_0 = 0$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

είναι διακεκριμμένες και $\mathrm{Re}\lambda_1<0$, $\mathrm{Re}\lambda_2<0$. Να αποδειχθεί ότι, αν ισχύει $\lim_{x\to\infty} b(x) = 0$, τότε όλες οι λύσεις της (E) τείνουν στο μηδέν για $x\to\infty$.

11. Ας θεωρήσουμε την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση

$$(E_0) \qquad y''+a_1y'+a_0y = 0,$$

όπου a_0, a_1 είναι συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα I, και ας είναι x_0 ένα σημείο του I. Ας υποθέσουμε ότι y_1 είναι μια λύση της (E_0) με $y_1(x)\neq 0$ για όλα τα $x\in I$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μια λύση y_2 της (E_0) τέτοια ώστε

$$W(y_1,y_2)(x_0) = 1 .$$

Να βρεθεί η y_2, συναρτήσει της y_1, από τον τύπο

$$y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x) = \exp\left[-\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt\right], \quad x\in I .$$

12. Δίνεται η διαφορική εξίσωση Riccati

$$y' = Py^2+Qy+R ,$$

όπου P, Q και R είναι συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα I και $P(x)\neq 0$ για όλα τα $x\in I$. Να αποδειχθεί ότι η αντικατάσταση $y = -\frac{z'}{Pz}$ μετασχηματίζει την εξίσωση αυτή στη γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$z''-\left[Q+(P'/P)\right]z'+PRz = 0 ,$$

όπου υποτίθεται ότι η P έχει συνεχή παράγωγο στο I.

Εφαρμογή : Να επιλυθούν οι ακόλουθες εξισώσεις Riccati:

(i) $xy' = x^2y^2-y+1$, $x>0$.

(ii) $x^2y' = x^4y^2+(3x^2-2x)y+2$, $x>0$.

(iii) $(\cos x)y' = (\cos^2 x)y^2+(\sin x-2\cos x)y+5$, $-\pi/2<x<\pi/2$.

13. Ας θεωρήσουμε τη γραμμική διαφορική εξίσωση

$$(E) \qquad y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_1y'+a_0y = b ,$$

όπου a_i $(i=0, 1, \ldots, n-1)$ είναι σταθερές και b είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $\mathbf{R}$. Ας είναι υ η λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης που πληροί τις αρχικές συνθήκες

$$\upsilon(0) = \upsilon'(0) = \ldots = \upsilon^{(n-2)}(0) = 0 , \quad \upsilon^{(n-1)}(0) =1 .$$

Να αποδειχθεί ότι

$$y(x) = \int_0^x \upsilon(x-t)b(t)dt , \quad x \in \mathbf{R}$$

είναι η λύση της (E) που πληροί τις αρχικές συνθήκες

$$y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) =0 .$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Να μετασχηματισθεί η (Ε) σε ένα γραμμικό διαφορικό σύστημα της μορφής $Y'=AY+B$ και να αποδειχθεί ότι, για κάθε $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{pmatrix} \upsilon(x) \\ \upsilon'(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \upsilon^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

είναι η n-οστή στήλη του e^{xA}.

14. Ας είναι p μια συνεχής πραγματική συνάρτηση στο $\mathbf{R}$, η οποία είναι περιοδική με περίοδο $T>0$, και ας θεωρήσουμε τη διαφορική εξίσωση του Hill

(Η) $$y''+py=0.$$

Να αναχθεί η (Η) σε ένα ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα. Ας είναι Φ ένας βασικός πίνακας αυτού με $\Phi(0)=I$ και ας υποθέσουμε ότι

$$\Phi(x+T)=\Phi(x)C \quad \text{για κάθε } x \in \mathbf{R},$$

όπου C είναι ένας σταθερός πίνακας. Να αποδειχθεί ότι $\det C=1$. Στη συνέχεια, ας είναι $2A=\mathrm{tr}C$. Να αποδειχθεί ότι, για $A^2<1$ όλες οι λύσεις της εξίσωσης (Η) είναι φραγμένες, ενώ η (Η) έχει (και) μη φραγμένες λύσεις όταν $A^2>1$.

15. Να αποδειχθεί ότι το διαφορικό σύστημα

$$y_1' = 2xy_1+y_2\,,\ y_2' = e^{-x}y_1+(\cos x)y_2\ ;\ x>0$$

έχει μια μη φραγμένη λύση.

16. Ας θεωρήσουμε τους n-τάξης τετραγωνικούς πίνακες

$$A=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

όπου λ είναι μια σταθερά. Να αποδειχθεί ότι $P^n=O$ και, στη συνέχεια, ότι

$$e^{xA}=e^{\lambda x}\left[I+xP+\frac{x^2P^2}{2!}+\dots+\frac{x^{n-1}P^{n-1}}{(n-1)!}\right],\ x\in\mathbf{R}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

17. (i) Αν A και T είναι n-τάξης τετραγωνικοί πίνακες με $\det T \neq 0$, να αποδειχθεί ότι $e^{T^{-1}AT} = T^{-1}e^{A}T$.

(ii) Αν

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{με} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

να βρεθεί ο e^{xA}, $x \in \mathbf{R}$.

18. Ας είναι

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Να αποδειχθεί ότι $A(A-5I)=\mathbf{O}$ και, στη συνέχεια, να βρεθεί ο e^{xA}, $x \in \mathbf{R}$.

19. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να εξετασθεί αν ο πίνακας-συνάρτηση Y είναι ή όχι βασικός πίνακας ενός ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος της μορφής $y'=Ay$ για κάποιον σταθερό πίνακα A:

(i) $$Y(x) = \begin{pmatrix} e^{x} & e^{-x} & e^{x}+2e^{-x} \\ e^{x} & -e^{-x} & e^{x}-2e^{-x} \\ 2e^{x} & e^{-x} & 2(e^{x}+e^{-x}) \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbf{R};$$

(ii) $$Y(x) = \begin{pmatrix} -5\cos 2x & -5\sin 2x & 3e^{2x} \\ -2(\cos 2x+\sin 2x) & 2(\cos 2x-\sin 2x) & 0 \\ \cos 2x & \sin 2x & e^{2x} \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbf{R};$$

(iii) $$Y(x) = e^{x}\begin{pmatrix} 1 & x+1 & x^2+1 \\ 1 & 2(x+1) & 4x^2 \\ 1 & x+2 & 3 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbf{R};$$

(iv) $$Y(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} & 2e^{-x} & e^{3x} \\ 2e^{x} & 2e^{-x} & e^{3x} \\ 3e^{x} & e^{-x} & 2e^{3x} \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

20. Να βρεθεί ένας βασικός πίνακας του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος y'=Ay με

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -5 & 6 & -6 & 1 & -1 \\ -3 & 7 & -3 & 7 & -6 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Να μελετηθεί η συμπεριφορά για $x \to \infty$ των λύσεων του διαφορικού συστήματος αυτού.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ

ΘΕΜΑ Ι. Ας είναι (Ε, ρ) ένας *μετρικός χώρος*. Μια απεικόνιση $T: E \to E$ είναι μια *συστολή*, αν υπάρχει ένας αριθμός θ με $0 \le \theta < 1$ τέτοιος ώστε $\rho(Tx, Ty) \le \theta \rho(x,y)$ για όλα τα x, y στο E. Ισχύει το ακόλουθο συμπέρασμα, γνωστό ως *Αρχή της Συστολής:* Αν (Ε, ρ) είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος και $T: E \to E$ είναι μια συστολή, τότε η T έχει ακριβώς ένα *σταθερό σημείο*, δηλαδή υπάρχει ένα ακριβώς σημείο $x \in E$ τέτοιο ώστε $Tx = x$.

Με εφαρμογή της Αρχής της Συστολής, να αποδειχθούν τα παρακάτω Θεωρήματα για την ύπαρξη και το μονοσήμαντο λύσεων προβλημάτων αρχικών τιμών.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α. *Ας είναι*

$$R = \{(x, y): |x-x_0| \le a,\ |y-y_0| \le b\},$$

όπου $a>0$, $b>0$, $x_0 \in \mathbf{R}$ *και* $y_0 \in \mathbf{K}^n$ *με* $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ *ή* $\mathbb{C}$. *Ας είναι, ακόμα,* $f: R \to \mathbf{K}^n$ *μια συνεχής συνάρτηση, η οποία πληροί τη συνθήκη του Lipschitz με σταθερά* $K>0$. *Ας θεωρήσουμε έναν αριθμό* r *με*

$$0 < r < \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{K}\right\},$$

όπου

$$M = \max_{(x,y)\in R} |f(x, y)| > 0 .$$

Τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = f(x, y)\ ,\ \ y(x_0) = y_0$$

έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $[x_0-r, x_0+r]$.

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Ας συμβολίσουμε με C τον χώρο όλων των συνεχών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το διάστημα $[x_0-r, x_0+r]$ και με τιμές στον $\mathbf{K}^n$. Για τυχούσες συναρτήσεις φ και ψ στον C ορίζουμε

$$\rho(\varphi, \psi) = \sup_{x_0-r \le x \le x_0+r} |\varphi(x)-\psi(x)| .$$

Θέτουμε

$$E = \{\varphi \in C: \rho(\varphi, y_0) \le b\} .$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Να αποδειχθεί ότι (E, ρ) είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος. Για τυχούσα συνάρτηση $\varphi \in E$, ορίζουμε

$$(T\varphi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt \quad \text{για } x \in [x_0-r, x_0+r] .$$

Να αποδειχθεί ότι ο τύπος αυτός ορίζει μια συστολή $T: E \to E$. Στη συνέχεια, να αποδειχθεί ότι το μοναδικό σταθερό σημείο της T είναι η μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών στο διάστημα $[x_0-r, x_0+r]$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β. *Ας είναι* $f: [x_0, x_0+a] \times K^n \to K^n$ *μια συνεχής συνάρτηση που πληροί τη συνθήκη του Lipschitz (με σταθερά* $K>0$*), όπου* $x_0 \in \mathbb{R}$, $a>0$ *και* $K=\mathbb{R}$ *ή* $K=\mathbb{C}$.

Τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = f(x, y) , \quad y(x_0) = y_0$$

έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $[x_0, x_0+a]$.

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Ας συμβολίσουμε με C τον χώρο όλων των συνεχών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το διάστημα $[x_0, x_0+a]$ και με τιμές στον K^n . Για τυχούσες συναρτήσεις φ και ψ στον C, ορίζουμε

$$\rho(\varphi, \psi) = \sup_{x_0 \le x \le x_0+a} \left[e^{-L(x-x_0)} |\varphi(x)-\psi(x)| \right] ,$$

όπου L είναι μια σταθερά με $L>K$. Να αποδειχθεί ότι (C, ρ) είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος. Για τυχούσα συνάρτηση $\varphi \in C$, ορίζουμε

$$(T\varphi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt \quad \text{για } x \in [x_0, x_0+a].$$

Να αποδειχθεί ότι ο τύπος αυτός ορίζει μια συστολή $T: C \to C$. Στη συνέχεια, να αποδειχθεί ότι το μοναδικό σταθερό σημείο της T είναι η μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών στο διάστημα $[x_0, x_0+a]$.

ΘΕΜΑ ΙΙ. Ας θεωρήσουμε το απλό εκκρεμές του Σχήματος 1. Με την προϋπόθεση ότι οι ταλαντώσεις είναι μικρές, η κίνηση περιγράφεται από τις λύσεις της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης

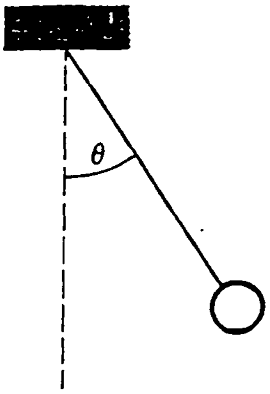
$$m \frac{d^2\theta}{dt^2} + m\omega_0^2\theta = 0.$$

Η σταθερά m είναι η μάζα και $\omega_0^2 = g/L$, όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας και L είναι το μήκος του εκκρεμούς. Οι αρχικές συνθήκες είναι

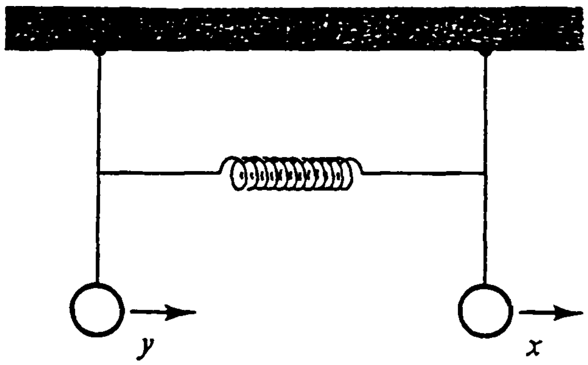
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\theta(0) = \theta_0 \quad \text{και} \quad \frac{d\theta}{dt}(0) = \upsilon_0 ,$$

όπου θ_0 είναι η αρχική γωνία του εκκρεμούς, δηλαδή η γωνία αυτού στο χρόνο $t=0$, και υ_0 είναι η αρχική (γωνιακή) ταχύτητα του εκκρεμούς.



ΣΧΗΜΑ 1



ΣΧΗΜΑ 2

Ας θεωρήσουμε τώρα δύο εκκρεμή του ιδίου μήκους L και της αυτής μάζας m που είναι συζευγμένα με ένα ελατήριο (Σχήμα 2). Ας είναι $x(t)$ και $y(t)$ οι αντίστοιχες γωνίες στον χρόνο t. Η δράση του ελατηρίου συνίσταται στην εισαγωγή μιας δύναμης ανάλογης προς τη διαφορά των μετατοπίσεων, δηλαδή μιας δύναμης της μορφής $k^*(x-y)$ όπου k^* είναι μια θετική σταθερά. Τότε η κίνηση περιγράφεται από τις λύσεις του διαφορικού συστήματος

$$(S) \qquad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} + m\omega_0^2 x = -k^*(x-y) \\[2ex] m\dfrac{d^2y}{dt^2} + m\omega_0^2 y = -k^*(x-y), \end{cases}$$

όπου $\omega_0^2 = g/L$ (g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας). Ας θέσουμε

$$k = k^*/m \quad \text{και} \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + 2k} .$$

Οι αρχικές συνθήκες είναι

$$\begin{cases} x(0) = x_0 , \ \dfrac{dx}{dt}(0) = \upsilon_{10} \\[2ex] y(0) = y_0 , \ \dfrac{dy}{dt}(0) = \upsilon_{20} , \end{cases}$$

όπου x_0, y_0 είναι οι αρχικές γωνίες των εκκρεμών (οι γωνίες, δηλαδή, στον χρόνο $t=0$) και υ_{10}, υ_{20} είναι οι αρχικές γωνιακές ταχύτητες αυτών.

Αν θέσουμε

$$x_1 = x , \ x_2 = \frac{dx}{dt} \ ; \quad y_1 = y , \ y_2 = \frac{dy}{dt} ,$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τότε το διαφορικό σύστημα (S) ανάγεται στο ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -\omega_0^2 x_1 - kx_1 + ky_1 \\ \dfrac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -\omega_0^2 y_1 - ky_1 + kx_1, \end{cases}$$

το οποίο μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$(\tilde{S}) \qquad \frac{dz}{dt} = Az,$$

όπου

$$z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

και

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_0^2-k & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k & 0 & -\omega_0^2-k & 0 \end{pmatrix}.$$

Να βρεθεί ο βασικός πίνακας $Z(t)$ *του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος* $(\tilde{S})$ *με*

$$Z(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \omega_0 & 0 & \omega_1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \omega_0 & 0 & -\omega_1 \end{pmatrix}.$$

Να βρεθούν, ακόμα, όλες οι λύσεις του $(\tilde{S})$. *Στη συνέχεια:*

(i) *Ας υποθέσουμε ότι οι αρχικές γωνίες είναι* $x_0=y_0=1$ *και ότι οι αρχικές γωνιακές ταχύτητες είναι μηδέν, δηλαδή* $\upsilon_{10}=\upsilon_{20}=0$. *Να βρεθεί η λύση του διαφορικού συστήματος* (S) *που αντιστοιχεί σε αυτές τις αρχικές συνθήκες.* Αυτή η

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

λύση είναι περιοδική με περίοδο $2\pi/\omega_0$ και αφορά την περίπτωση όπου η κίνηση των εκκρεμών είναι τέτοια ώστε το ελατήριο δεν είναι ποτέ τεντωμένο.

(ii) *Ας υποθέσουμε ότι* $x_0=1$, $y_0=-1$ *και* $\upsilon_{10}=\upsilon_{20}=0$. *Με αυτές τις αρχικές συνθήκες, να βρεθεί η λύση του διαφορικού συστήματος* (S). Αυτή η λύση είναι περιοδική με περίοδο $2\pi/\omega_1$. Η κίνηση των δύο εκκρεμών είναι ακριβώς αντίθετη. Επειδή $\omega_1>\omega_0$, συμπεραίνουμε ότι το ελατήριο επενεργεί ώστε τα εκκρεμή να ταλαντούνται γρηγορότερα.

(iii) *Ας είναι* $x_0=1$, $y_0=0$ *και* $\upsilon_{10}=\upsilon_{20}=0$. *Να βρεθεί η λύση του διαφορικού συστήματος* (S) *με αυτές τις αρχικές τιμές.* Αυτή η λύση είναι ένας γραμμικός συνδυασμός δύο περιοδικών συναρτήσεων, αλλά δεν είναι περιοδική εκτός αν η σταθερά k είναι τέτοια ώστε ω_1 να είναι ένα ρητό πολλαπλάσιο του ω_0.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ: Ο ζητούμενος βασικός πίνακας Z(t) του $(\tilde{S})$ είναι

$$Z(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) & \sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_1 t) & \sin(\omega_1 t) \\ -\omega_0\sin(\omega_0 t) & \omega_0\cos(\omega_0 t) & -\omega_1\sin(\omega_1 t) & \omega_1\cos(\omega_1 t) \\ \cos(\omega_0 t) & \sin(\omega_0 t) & -\cos(\omega_1 t) & -\sin(\omega_1 t) \\ -\omega_0\sin(\omega_0 t) & \omega_0\cos(\omega_0 t) & \omega_1\sin(\omega_1 t) & \omega_1\cos(\omega_1 t) \end{pmatrix}.$$

Κάθε λύση z(t) του $(\tilde{S})$ είναι της μορφής $z(t)=Z(t)c$, όπου c είναι ένα κατάλληλο διάνυσμα.

(i) $x(t) = \cos(\omega_0 t)\,,\ y(t) = \cos(\omega_0 t)\,.$

(ii) $x(t) = \cos(\omega_1 t)\,,\ y(t) = -\cos(\omega_1 t)\,.$

(iii) $x(t) = \frac{1}{2}\,[\cos(\omega_0 t)+\cos(\omega_1 t)]\,,\ y(t) = \frac{1}{2}\,[\cos(\omega_0 t)-\cos(\omega_1 t)]\,.$

ΘΕΜΑ III. Ας θεωρήσουμε το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

(S_0) $$y' = Ay\,,$$

όπου A *είναι ένας σταθερός* n-*τάξης τετραγωνικός πίνακας.*

Να αποδειχθεί πρώτα το ακόλουθο λήμμα.

ΛΗΜΜΑ. *Ας είναι* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *οι ιδιοτιμές του πίνακα* A *(όχι αναγκαστικά διακεκριμμένες) και* σ *ένας πραγματικός αριθμός με* $\sigma > \max_{1\le i\le n} \mathrm{Re}\lambda_i$. *Τότε υπάρχει μια σταθερά* K>0 *τέτοια ώστε*

$$|e^{xA}| \le Ke^{\sigma x} \quad \text{για όλα τα } x \ge 0\,.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Ας θεωρήσουμε τη λύση $r_1, r_2, \ldots, r_n$ του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{cases} r_1' = \lambda_1 r_1\,,\ r_i' = r_{i-1}+\lambda_i r_i \quad (i=2,\ldots,n) \\ r_1(0)=1\,,\ r_i(0)=0 \quad (i=2,\ldots,n)\,. \end{cases}$$

Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν θετικές σταθερές $c_1, c_2, \ldots, c_n$ έτσι ώστε

$$|r_i(x)| \le c_i e^{\sigma x} \quad \text{για κάθε } x \ge 0 \quad (i=1,2,\ldots,n).$$

Αν

$$P_k = \prod_{j=1}^{k}(A-\lambda_j I) \quad (k=1,2,\ldots,n-1)\,,$$

τότε (σύμφωνα με το Θεώρημα του Putzer) είναι

$$e^{xA} = r_1(x)I + \sum_{k=1}^{n-1} r_{k+1}(x)P_k \quad \text{για } x\in \mathbf{R}.$$

Από τον τύπο αυτόν θα προκύψει το ζητούμενο.

Τώρα, με τη χρησιμοποίηση του παραπάνω λήμματος, να αποδειχθεί το παρακάτω θεώρημα για την ασυμπτωτική ευστάθεια του (S_0).

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Η μηδενική λύση του* (S_0) *είναι ασυμπτωτικά ευσταθής αν όλες οι ιδιοτιμές του* A *έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη.*

Επίσης, πάλι με τη χρησιμοποίηση του παραπάνω λήμματος, να αποδειχθεί η ακόλουθη πρόταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Ας θεωρήσουμε το μη ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα*

(S) $$y' = Ay+b\,,$$

όπου b *είναι μια συνεχής* n*-διάστατη διανυσματική συνάρτηση στο διάστημα* $[0,\infty)$. *Ας υποθέσουμε ότι όλες οι ιδιοτιμές του* A *έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη. Ισχύουν:*

(i) *Αν* $\int_0^\infty |b(x)|dx < \infty$, *τότε όλες οι λύσεις του* (S) *είναι φραγμένες.*

(ii) *Αν* $\lim_{x\to\infty} b(x) = 0$, *τότε όλες οι λύσεις του* (S) *τείνουν στο μηδέν για* $x\to\infty$.

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Αν σ είναι ένας πραγματικός αριθμός μεγαλύτερος από το πραγματικό μέρος κάθε ιδιοτιμής του A, να αποδειχθεί ότι υπάρχει σταθερά K>0 έτσι ώστε για κάθε λύση y του (S) να ισχύει

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$|y(x)| \leq Ke^{\sigma x}\left[|y(0)| + \int_0^x e^{-\sigma s}\,|b(s)|ds\right] \quad \text{για όλα τα } x \geq 0.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Τυπώθηκε στο Πανεπιστημιακό Τυπογραφείο με δαπάνη του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Κ.Α. Πανεπιστημιακού Τυπογραφείου. ....

Copyright : Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Απαγορεύεται η μερική ή ολική ανατύπωση, καθώς και η λήψη φωτοαντιγράφων από το βιβλίο χωρίς τη γραπτή άδεια του Τμήματος Δημοσιευμάτων του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων και του συγγραφέα.

Διατίθεται και στο Βιβλιοπωλείο του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, Δομπόλη, 451 10 Ιωάννινα τηλ. 21801.

ΔΙΑΝΕΜΕΤΑΙ ΔΩΡΕΑΝ στους φοιτητές.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ