

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΙΩΑΝΝΗΣ Χ. ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ
Μαθηματικός

ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ
ΕΞΥΠΗΡΕΤΗΣΗΣ ΜΕ
ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΟΥΣ ΠΕΛΑΤΕΣ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2009



ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



026000321899



Αφιερώνεται
στους γονείς μου, Χαράλαμπο και Σοφία,
και στα αδέρφια μου Άγγελο και Κωνσταντίνα



Αφιερώνεται
στην Έψη



Τριμελής Συμβουλευτική Επιτροπή

Αναπληρωτής Καθηγητής Χρήστος Λάγκαρης

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

(Επιβλέπων Καθηγητής)

Καθηγητής Σωτήριος Λουκάς

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Αναπληρωτής Καθηγητής Σωτήριος Παπαχρήστος

ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ ΑΓΡΟΤΙΚΩΝ ΠΡΟΙΟΝΤΩΝ ΚΑΙ
ΤΡΟΦΙΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



Επταμελής Εξεταστική Επιτροπή

Αναπληρωτής Καθηγητής Χρήστος Λάγκαρης

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Καθηγητής Σωτήριος Λουκάς

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Αναπληρωτής Καθηγητής Σωτήριος Παπαχρήστος

ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ ΑΓΡΟΤΙΚΩΝ ΠΡΟΙΟΝΤΩΝ ΚΑΙ
ΤΡΟΦΙΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Καθηγητής Κοσμάς Φερεντίνος

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Αναπληρωτής Καθηγητής Νικόλαος Τσάντας

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

Αναπληρωτής Καθηγητής Γεώργιος Τσακλίδης

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Λέκτορας Κωνσταντίνα Σκούρη

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



Η παρούσα Διδακτορική Διατριβή εκπονήθηκε στον Τομέα Πιθανοτήτων, Στατιστικής και Επιχειρησιακής Έρευνας του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, με Επιβλέποντα Καθηγητή τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Χρήστο Λάγκαρη και μέλη της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής τον Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, κ. Σωτήριο Λουκά και τον Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Διοίκησης Επιχειρήσεων Αγροτικών Προϊόντων και Τροφίμων του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, κ. Σωτήριο Παπαχρήστο.

Η εκπόνηση της παρούσης διατριβής χρηματοδοτήθηκε από το Ι.Κ.Υ. του οποίου ήμουν υπότροφος την περίοδο 2006-2008.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά όσους συνέβαλαν στην πραγματοποίηση της παρούσης διατριβής. Πρωτίστως θεωρώ χρέος μου να εκφράσω τις ειλικρινείς ευχαριστίες μου προς τον δάσκαλο μου κ. Χρήστο Λάγκαρη για την συνεχή επιστημονική καθοδήγηση και τις πολύτιμες υποδείξεις του κατά τη συγγραφή της παρούσης διατριβής. Τον ευχαριστώ θερμά για τον χρόνο που διέθεσε καθ' όλη την περίοδο των μεταπτυχιακών μου σπουδών καθώς και για την ένθερμη ηθική και ψυχολογική υποστήριξη.

Οφείλω επίσης να ευχαριστήσω τον Καθηγητή κ. Σωτήριο Λουκά καθώς και τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Σωτήριο Παπαχρήστο για την συμμετοχή τους στην Τριμελή Συμβουλευτική Επιτροπή.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τους κ.κ. Κοσμά Φερεντίνο, Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, Νικόλαο Τσάντα, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών, Γεώργιο Τσακλίδη, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Αριστοτέλειου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, Κωνσταντίνα Σκούρη, Λέκτορα του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων για τη συμμετοχή τους στην Επταμελή Εξεταστική Επιτροπή.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλο το προσωπικό του Τομέα Πιθανοτήτων και Στατιστικής για την εποικοδομητική συνεργασία στην περίοδο των μεταπτυχιακών μου σπουδών και ιδιαίτερος τον Λέκτορα του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων κ. Απόστολο Μπατσίδη για τις πολύτιμες συμβουλές του και την συμπαράσταση του. Επίσης ευχαριστώ τον Διδάκτορα κ. Ιωάννη Κωνσταντάρα και Υποφ. Διδάκτορα κ. Βασίλειο Παππά για την συνεργασία όλα αυτά τα χρόνια.



Τέλος, θέλω με όλη μου τη καρδιά να ευχαριστήσω τους γονείς μου Χαράλαμπο και Σοφία και τα αδέρφια μου Άγγελο και Κωνσταντίνα για την αμέριστη ηθική και όχι μόνο συμπαράστασή τους όλη την περίοδο των σπουδών μου. Η αδιάκοπη ενθάρρυνση τους ήταν καθοριστική. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω την Έυη για την συνεχή ηθική και ψυχική συμπαράσταση που μου προσφέρει όλα αυτά τα χρόνια.

Ιωάννινα, Απρίλιος 2009

Ιωάννης Χ. Δημητρίου



Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Περίληψη	1
1.2	Περιγραφή και χαρακτηριστικά ενός συστήματος εξυπηρέτησης	1
1.3	Η έννοια της στατιστικής ισορροπίας	8
1.4	Σύντομη ιστορική αναδρομή	9
1.5	Ειδικές κατηγορίες συστημάτων εξυπηρέτησης	10
1.5.1	Συστήματα εξυπηρέτησης με προτεραιότητες	11
1.5.2	Συστήματα εξυπηρέτησης με διακοπές υπαλλήλων	15
1.5.3	Συστήματα εξυπηρέτησης με χρόνους προετοιμασίας (start up ή set up) και αποφόρτισης (close down)	18
1.5.4	Συστήματα εξυπηρέτησης με έναν υπάλληλο και πολλές φάσεις εξυπηρέτησης	20
1.5.5	Συστήματα εξυπηρέτησης με επαναλαμβανόμενες αφίξεις πελατών	24
1.5.6	Το βασικό μοντέλο $M/G/1$ με επαναλαμβανόμενες αφίξεις πελατών	28
1.5.7	Παραλλαγές του $M/G/1$ με επαναλαμβανόμενες αφίξεις πελατών	41
1.5.8	Το μοντέλο με επαναλαμβανόμενες αφίξεις και $c (> 1)$ υπαλλήλους	51
1.6	Συμβολή της παρούσης διατριβής	54
2	Ένα σύστημα ουράς επαναλαμβανόμενων αφίξεων με δύο φάσεις εξυπηρέτησης και διακοπές	59
2.1	Περίληψη	59
2.2	Περιγραφή του μοντέλου	60
2.3	Ανάλυση των καταστάσεων του συστήματος σε συνεχή χρόνο	63
2.4	Βοηθητικά αποτελέσματα	68
2.5	Συνθήκη στατιστικής ισορροπίας	72



2.6	Ανάλυση των καταστάσεων σε στατιστική ισορροπία	77
2.7	Χαρακτηριστικά μέτρα του συστήματος	80
2.8	Η Ιδιότητα της διάσπασης	81
2.9	Αριθμητικά αποτελέσματα	83
2.10	Ανακεφαλαίωση-Παρατηρήσεις	86
3	Ένα σύστημα ουράς με n φάσεις εξυπηρέτησης, διακοπές και $n - 1$ τύπους πελατών επαναλαμβανόμενων αφίξεων	89
3.1	Περίληψη	89
3.2	Περιγραφή του μοντέλου	90
3.3	Βοηθητικά αποτελέσματα	93
3.4	Ανάλυση σε στατιστική ισορροπία	102
3.5	Αναμενόμενοι αριθμοί πελατών στο σύστημα	107
3.6	Αριθμητικά αποτελέσματα	111
3.7	Ανακεφαλαίωση-Παρατηρήσεις	114
4	Ένα σύστημα εξυπηρέτησης με χρόνους προετοιμασίας/αποφόρτισης, διακοπές και επαναλαμβανόμενες αφίξεις πελατών	117
4.1	Περίληψη	117
4.2	Περιγραφή του μοντέλου	118
4.3	Βοηθητικά αποτελέσματα	121
4.4	Ανάλυση των καταστάσεων του συστήματος σε συνεχή χρόνο . .	127
4.5	Συνθήκη στατιστικής ισορροπίας	135
4.6	Ανάλυση των καταστάσεων του συστήματος σε στατιστική ισορρο- πία	138
4.7	Αριθμητικά αποτελέσματα	147
4.8	Ανακεφαλαίωση-Παρατηρήσεις	149
5	Επίλογος	151
5.1	Σκέψεις για μελλοντική έρευνα	151
6	Περίληψη	155
6.1	Περίληψη	155
6.2	Summary	157



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

1.1 Περίληψη

Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται αρχικά η περιγραφή ενός συστήματος εξυπηρέτησης και δίνονται ορισμένα παραδείγματα αυτού, όπως παρατηρούνται στην καθημερινότητα. Ακολούθως, παρατίθενται τα βασικά χαρακτηριστικά του. Υστερα από μία σύντομη ιστορική αναδρομή, γίνεται μία ανασκόπηση συστημάτων εξυπηρέτησης τα οποία εμφανίζονται στην παρούσα διατριβή. Στην εν λόγω ανασκόπηση παρουσιάζονται συστήματα με το χαρακτηριστικό των προτεραιοτήτων, των διακοπών των υπαλλήλων, καθώς και συστήματα στα οποία η διαδικασία εξυπηρέτησης αποτελείται από έναν αριθμό φάσεων εξυπηρέτησης. Επιπλέον περιγράφονται συστήματα στα οποία ο υπάλληλος χρειάζεται ένα χρόνο προετοιμασίας προτού ξεκινήσει να εξυπηρετεί πελάτες και ένα χρόνο αποφόρτισης αμέσως μετά. Ακολουθεί η λεπτομερής επισκόπηση των συστημάτων με επαναλαμβανόμενες αφίξεις πελατών, τα οποία αποτελούν και το κύριο αντικείμενο μελέτης της παρούσης διατριβής, καθώς και οι κύριες εφαρμογές αυτών. Τέλος, παρατίθεται η συμβολή της παρούσης διατριβής στη συγκεκριμένη περιοχή.

1.2 Περιγραφή και χαρακτηριστικά ενός συστήματος εξυπηρέτησης

Όλοι μας έχουμε ζήσει την δυσάρεστη εμπειρία να περιμένουμε σε μία ουρά ώστε να εξυπηρετηθούμε. Το φαινόμενο αυτό γίνεται όλο και περισσότερο συχνό, στο σημερινό συνωστισμένο τρόπο ζωής μας. Χρειάζεται να περιμένουμε



στην ουρά στο super market για να πληρώσουμε, στο αυτοκίνητο να ανάψει το πράσινο φανάρι, στις τράπεζες και στα ταχυδρομεία. Τα παραπάνω απλά παραδείγματα αφορούν ουρές οι οποίες είναι άμεσα αντιληπτές. Παρακάτω θα δούμε παραδείγματα συστημάτων εξυπηρέτησης τα οποία δεν γίνονται αντιληπτά με την πρώτη ματιά.

Στη βιομηχανία, η παραγωγή ενός προϊόντος που διατίθεται στην αγορά, χρειάζεται να προωθηθεί από πολλά στάδια με μία συγκεκριμένη σειρά, όπως αυτό της κατασκευής, ύστερα του τεχνικού ελέγχου και τέλος της συσκευασίας του. Είναι προφανές ότι για την εύρυθμη λειτουργία του συστήματος απαιτείται μία ισορροπία μεταξύ της λειτουργίας των σταδίων παραγωγής. Αν κάποιος από αυτά καθυστερεί για διάφορους λόγους (π.χ. συχνές βλάβες, ανεπαρκής αριθμός εργαζομένων) την περαίωση της εργασίας που του αναλογεί επηρεάζει άμεσα και την λειτουργία των άλλων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την καθυστέρηση της παράδοσης της παραγγελίας, που σημαίνει κακή ποιότητα εξυπηρέτησης και κατ' επέκταση απώλεια χρημάτων.

Σε ένα σταθμό πρώτων βοηθειών ή σε ένα τηλεφωνικό κέντρο, αν ο αριθμός των νοσοκομειακών οχημάτων ή των υπαλλήλων τηλεφωνικής εξυπηρέτησης είναι ανεπαρκής, μία "κλήση" θα χρειαστεί να περιμένει.

Σε ένα αεροδρόμιο υπάρχει ένας αριθμός διαδρόμων προσγείωσης. Τα αεροπλάνα που καταφθάνουν, δεσμεύουν έναν διάδρομο προσγείωσης. Αν δεν υπάρχει κάποιος ελεύθερος διάδρομος, τότε τα αεροπλάνα θα χρειαστεί να πραγματοποιήσουν κύκλους γύρω από το αεροδρόμιο μέχρις ότου βρουν διαθέσιμο διάδρομο. Βέβαια, σε κάθε κύκλο που θα πραγματοποιούν σπαταλούν καύσιμα και επομένως είναι προφανές ότι θα εξυπηρετηθεί (προσγειωθεί) αυτό που θα έχει τα λιγότερα.

Από τα παραπάνω παραδείγματα είναι προφανές ότι η μελέτη συστημάτων εξυπηρέτησης είναι ιδιαίτερα σημαντική τόσο από κοινωνική όσο και από οικονομική άποψη. Τα προβλήματα που προκύπτουν από την δυσλειτουργία των συστημάτων εξυπηρέτησης επηρεάζουν τόσο τους πελάτες όσο και τους διαχειριστές αυτών, αφού έχουν απώλεια σε χρήμα και αξιοπιστία. Η δυσλειτουργία των συστημάτων εξυπηρέτησης συμβαίνει γιατί υπάρχει περισσότερη ζήτηση για εξυπηρέτηση από την διαθέσιμη δύναμη που εξυπηρετεί. Επομένως κρίνεται απαραίτητος ο κατάλληλος προγραμματισμός ενός τέτοιου συστήματος ώστε, αφ' ενός μεν οι υπάλληλοι να είναι αρκετοί, ελαττώνοντας τον χρόνο αναμονής των πελατών στο σύστημα, παρέχοντας υψηλή ποιότητα εξυπηρέτησης και αφ' εταίρου νά μὴν μένουν κάποιες από αυτούς "εν αχρηστεία", γεγονός που συνεπάγεται αυξημένο κόστος. Η Θεωρία Συστημάτων Εξυπηρέτησης (Queueing



Theory) προσπαθεί να δώσει λύσεις στα παραπάνω προβλήματα.

Η Θεωρία Συστημάτων Εξυπηρέτησης, είναι η μαθηματική θεωρία που σκοπό έχει την μελέτη και πρόβλεψη της συμπεριφοράς διαφόρων συστημάτων παροχής εξυπηρέτησης ή ουρών (queueing system, waiting line, queue) σε ζητήσεις που εμφανίζονται τυχαία. Γενικά ένα σύστημα εξυπηρέτησης περιγράφεται από το ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα 1.1: Το γενικό μοντέλο ουράς.

Πελάτες καταφθάνουν από μία πηγή, σε έναν σταθμό εξυπηρέτησης που αποτελείται από έναν ή περισσότερους υπαλλήλους. Αν η εξυπηρέτηση δεν είναι άμεση, τοποθετούνται σε έναν χώρο αναμονής μέχρι να εξυπηρετηθούν και κατόπιν εγκαταλείπουν το σύστημα. Η πηγή μπορεί να είναι είτε πεπερασμένη είτε άπειρης χωρητικότητας και παριστά τον πληθυσμό από όπου προέρχονται οι πελάτες και ζητούν εξυπηρέτηση. Η έννοια του “πελάτη” και του “υπαλλήλου” χρησιμοποιείται γενικά και δεν αναφέρεται απαραίτητα σε άνθρωπο. Για παράδειγμα ένας πελάτης μπορεί να είναι ένα αεροπλάνο που πρόκειται να προσγειωθεί σε ένα αεροδρόμιο, ενώ στη συγκεκριμένη περίπτωση ο διάδρομος προσγείωσης παίζει το ρόλο του υπαλλήλου. Επιπλέον, ένα πρόγραμμα ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή που αναμένει να εκτελεστεί από τον κεντρικό επεξεργαστή αποτελούν τον πελάτη και τον υπάλληλο αντίστοιχα στο συγκεκριμένο σύστημα.

Η σύνδεση συστημάτων εξυπηρέτησης μεταξύ τους συνιστά τη δημιουργία δικτύων συστημάτων εξυπηρέτησης (queueing networks). Στα δίκτυα συστημάτων εξυπηρέτησης, η διαδικασία των αναχωρήσεων των πελατών από κάποιο σταθμό αποτελεί την διαδικασία αφίξεων για έναν άλλο σταθμό. Γενικά, τα δίκτυα εξυπηρέτησης χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες.

1. Κλειστά δίκτυα εξυπηρέτησης, στα οποία υπάρχουν μόνιμοι πελάτες που κινούνται εντός του δικτύου μεταξύ των σταθμών εξυπηρέτησης. Σε αυτή τη περίπτωση δεν εισέρχονται, ούτε αναχωρούν πελάτες από το σύστημα.



2. Ανοικτά δίκτυα εξυπηρέτησης, στα οποία καταφθάνουν πελάτες σε κάποιο σταθμό και αφού προωθηθούν σε έναν ή περισσότερους σταθμούς εντός του δικτύου, αναχωρούν.

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι σύνδεσης συστημάτων εξυπηρέτησης που συνιστούν το δίκτυο. Η σύνδεση αυτή είναι είτε σειριακή (tandem), είτε κυκλική (polling), είτε άτακτη (random). Το πιο ενδιαφέρον χαρακτηριστικό των δικτύων εξυπηρέτησης αποτελεί το φαινόμενο του μπλοκαρίσματος (blocking) ενός ή περισσότερων σταθμών. Σύμφωνα με αυτό, όταν κάποιος πελάτης ολοκληρώσει την εξυπηρέτησή του σε κάποιο σταθμό και ο σταθμός προορισμού του είναι ήδη κατειλημμένος, τότε μπλοκάρει τον σταθμό από τον οποίο προέρχεται. Σε αυτή τη περίπτωση, ο εν λόγω σταθμός παρότι δεν απασχολείται από κάποιο πελάτη, δεν είναι διαθέσιμος για να εξυπηρετήσει. Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στους Petros [156], Langaris [127].

Ένα σύστημα εξυπηρέτησης περιγράφεται λεπτομερώς από τα παρακάτω βασικά χαρακτηριστικά (βλέπε Gross and Harris [95], Jaiswal [102]).

Η Διαδικασία των Αφίξεων: Οι αφίξεις των πελατών σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης είναι συνήθως τυχαίες και επομένως είναι αναγκαίο να γνωρίζουμε την κατανομή πιθανότητας που περιγράφει το χρονικό διάστημα μεταξύ διαδοχικών αφίξεων (interarrival times) των πελατών. Η εύρεση της κατανομής του χρόνου μεταξύ διαδοχικών αφίξεων μπορεί να γίνει με τη βοήθεια μεθόδων της στατιστικής. Επομένως, αν $t_0, t_1, \dots$, χρονικές στιγμές διαδοχικών αφίξεων πελατών σε ένα σύστημα, τότε η διαδικασία αφίξεων (arrival process) χαρακτηρίζεται πλήρως από την κατανομή των τυχαίων μεταβλητών $\tau_k = t_k - t_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$. Πολλές φορές οι τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.) τ_k , $k \geq 1$, θεωρούνται ότι είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.)

$$A(x) = P(\tau_k \leq x), \quad x \geq 0,$$

η οποία καλείται και κατανομή των αφίξεων. Έτσι, για παράδειγμα θεωρούμε ότι οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων προέρχονται από την εκθετική κατανομή, ή την Erlang κατανομή ή οποιαδήποτε άλλη γενική κατανομή.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει και ο αριθμός των πελατών που καταφθάνουν ανά άφιξη. Οι αφίξεις των πελατών σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης θεωρούνται συνήθως μεμονωμένες, με την έννοια ότι σε κάθε άφιξη καταφθάνει ένας πελάτης. Σε πολλές βέβαια περιπτώσεις παρατηρείται το φαινόμενο οι πελάτες να καταφθάνουν ταυτόχρονα σε ομάδες (batch ή balk arrivals) τυχαίου ή σταθερού μεγέθους.



Ο τρόπος αντίδρασης του πελάτη που φθάνοντας σε ένα σύστημα, δεν βρεί διαθέσιμο τον υπάλληλο χρήζει επίσης ιδιαίτερης προσοχής. Ο πελάτης ίσως αποφασίσει να περιμένει υπομονετικά στην ουρά μέχρι να εξυπηρετηθεί ή να απογοητευθεί βλέποντας το μέγεθος της ουράς και να αναχωρήσει αμέσως. Σε αυτή τη περίπτωση θεωρούμε ότι είμαστε σε κατάσταση balk. Αν ο πελάτης αποφασίσει εν τέλει να παραμείνει για κάποιο χρονικό διάστημα στην ουρά και αναχωρήσει στη περίπτωση που δεν έρθει η σειρά του στην διάρκεια αυτού του χρόνου, θεωρούμε ότι είμαστε στη κατάσταση reneg. Και στις δυο παραπάνω περιπτώσεις ο πελάτης αναχωρεί χωρίς να εξυπηρετηθεί. Στη περίπτωση που υπάρχουν δύο ή περισσότερες ουρές που τοποθετούνται παράλληλα, παρατηρείται το φαινόμενο του jockeying, δηλαδή οι πελάτες μετακινούνται από την μία ουρά στην άλλη. Οι τρεις παραπάνω περιπτώσεις αποτελούν παραδείγματα συστημάτων εξυπηρέτησης με μη-υπομονετικούς πελάτες (impatient customers). Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν και τα συστήματα στα οποία αν ο πελάτης κατά την άφιξή του δεν βρεί διαθέσιμο τον υπάλληλο, αναχωρεί προσωρινά από το σύστημα και επαναλαμβάνει την προσπάθειά του να συνδεθεί με αυτόν για να εξυπηρετηθεί, ύστερα από κάποιο χρονικό διάστημα. Αυτά καλούνται συστήματα με επαναλαμβανόμενες αφίξεις πελατών (retrial queueing systems, queues with repeated demands, queues with retrial customers) και αποτελούν το κύριο αντικείμενο της παρούσης διατριβής.

Η Διαδικασία των Εξυπηρετήσεων: Η διαδικασία των εξυπηρετήσεων (service process) χαρακτηρίζεται από την κατανομή του χρόνου που ο πελάτης αναλώνει εξυπηρετούμενος. Εστω λοιπόν θ_k , $k = 1, 2, \dots$, τ.μ. που εκφράζει τον χρόνο εξυπηρέτησης του k πελάτη. Συνήθως θεωρούμε ότι οι τ.μ. θ_k ($k = 1, 2, \dots$) είναι ανεξάρτητες και ισόνομές με α.σ.κ.

$$S(x) = P(\theta_k \leq x), \quad x \geq 0,$$

η οποία καλείται κατανομή των εξυπηρετήσεων. Κατά αναλογία με την περίπτωση των αφίξεων σε κάθε εξυπηρέτηση μπορεί να εξυπηρετηθεί είτε ένας πελάτης, είτε να εξυπηρετηθεί μία ομάδα πελατών τυχαίου ή σταθερού μεγέθους. Επιπλέον υπάρχουν περιπτώσεις όπου η διαδικασία των εξυπηρετήσεων εξαρτάται από τον αριθμό των πελατών που αναμένουν για να εξυπηρετηθούν. Για παράδειγμα, ένας ξεναγός που καθοδηγεί ταυτόχρονα πολλούς ανθρώπους είτε ένα κεντρικό τερματικό που εξυπηρετεί παράλληλα έναν αριθμό Η/Υ. Επιπλέον σε κάποιες περιπτώσεις ο υπάλληλος εξυπηρετεί σε υψηλότερο ρυθμό ή να γίνεται λιγότερο αποτελεσματικός, όσο ο αριθμός των πελατών που περιμένουν στην ουρά αυξάνει.



Γενικά η διαδικασία αφίξεων και εξυπηρέτησεων ενός συστήματος εξυπηρέτησης θεωρούνται ανεξάρτητες.

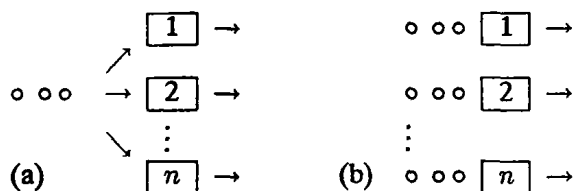
Πειθαρχία Ουράς: Οι κανόνες με τους οποίους επιλέγονται οι πελάτες ώστε να εξυπηρετηθούν από τους υπαλλήλους όταν διαμορφωθεί η ουρά, συνιστούν την έννοια της πειθαρχίας της ουράς. Η πειθαρχία ουράς που εμφανίζεται συχνότερα στην καθημερινότητα είναι να εξυπηρετείται ο καθένας με τη σειρά του, με την έννοια οι πρώτοι εξυπηρετούνται πρώτοι. Η παραπάνω πειθαρχία συναντάται στη βιβλιογραφία με τον όρο FIFO ή FCFS (First In First Out ή First Come First Served). Παρ' όλα αυτά υπάρχουν και περιπτώσεις που οι τελευταίοι πελάτες που θα έλθουν, εξυπηρετούνται πρώτοι (LIFO, Last In First Out ή LCFS, Last Come First Served). Η παραπάνω πειθαρχία έχει πολλές εφαρμογές σε συστήματα αποθήκευσης, όπου συνηθίζεται το τελευταίο αντικείμενο που αποθηκεύτηκε να είναι το πρώτο που θα επιλεγεί για να πουληθεί ή στην εκφόρτωση οχηματαγωγών πλοίων, όπου το πρώτο όχημα που θα αποβιβαστεί (εξυπηρετηθεί) είναι το τελευταίο που επιβιβάστηκε. Υπάρχουν και άλλες πειθαρχίες, όπως η επιλογή του πελάτη που θα εξυπηρετηθεί να γίνει με τυχαίο τρόπο (SIRO, Service In Random Order) και πλήθος παραλλαγών όπου εμφανίζεται το φαινόμενο της προτεραιότητας (priority discipline), όπως μία επείγουσα περίπτωση που φτάνει στα εξωτερικά ιατρεία ενός νοσοκομείου. Ενδιαφέρον επίσης παρουσιάζει και η πειθαρχία PS (Processor Sharing) με εφαρμογές σε δίκτυα υπολογιστών. Σύμφωνα με αυτή, ο παρεχόμενος χρόνος εξυπηρέτησης μοιράζεται σε ίσα μέρη σε όλους τους πελάτες που βρίσκονται στο σύστημα.

Χωρητικότητα του συστήματος: Με τον όρο αυτό αναφερόμαστε στον μέγιστο αριθμό πελατών που δέχεται το σύστημα. Σε πολλές περιπτώσεις ο χώρος αναμονής του συστήματος είναι περιορισμένος και επομένως μόλις ο αριθμός των πελατών φτάσει το όριο του χώρου το σύστημα δεν μπορεί να δεχθεί νέους πελάτες έως ότου ελευθερωθεί κάποια θέση. Σε αυτή τη περίπτωση συνήθως οι νέοι πελάτες αναχωρούν αμέσως.

Αριθμός υπαλλήλων ή των καναλιών εξυπηρέτησης: Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό της λειτουργίας ενός συστήματος εξυπηρέτησης είναι ο καθορισμός του αριθμού των υπαλλήλων που παρέχουν παντόχρονη εξυπηρέτηση. Υπάρχουν δύο βασικά συστήματα με πολλούς υπαλλήλους (multiserver queueing systems)

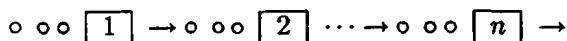


τα οποία περιγράφονται από το παρακάτω σχήμα.



Η διαφορά μεταξύ των δύο συστημάτων είναι ότι στο (a) υπάρχει μόνο μία ουρά πελατών που ζητά εξυπηρέτηση από n υπαλλήλους, ενώ στο (b) υπάρχει μία ουρά για κάθε ένα υπάλληλο. Για παράδειγμα ένα κομμωτήριο με πολλές πολυθρόνες, όπου οι πελάτες περιμένουν σε μία ουρά περιγράφεται από το (a), ενώ ένα supermarket με αρκετά ταμεία, όπου σε κάθε ένα από αυτά σχηματίζεται και από μία ουρά πελατών, από το (b).

Φάσεις εξυπηρέτησης: Πολλές φορές ένα σύστημα εξυπηρέτησης μπορεί να έχει από περισσότερες από μία φάσεις εξυπηρέτησης. Για παράδειγμα, ένα προϊόν που διατίθεται στην αγορά πρέπει να περάσει από αρκετά στάδια, όπως αυτό της παραγωγής, ακολούθως της συσκευασίας και τέλος του ελέγχου ποιότητας. Σε πολλές περιπτώσεις αν το προϊόν δεν ικανοποιεί κάποια ποιοτικά κριτήρια θα χρειαστεί να προωθηθεί ξανά σε κάποια ή όλα τα παραπάνω στάδια (επανατροφοδότηση, feedback). Το παρακάτω σχήμα περιγράφει ένα σύστημα ουράς με πολλές φάσεις εξυπηρέτησης.



Τα παραπάνω χαρακτηριστικά είναι αρκετά για να περιγράψουν με ακρίβεια ένα σύστημα εξυπηρέτησης. Για την ταχύτερη αναγνώριση των χαρακτηριστικών ενός συστήματος έχει επικρατήσει στη βιβλιογραφία ο παρακάτω συμβολισμός ο οποίος οφείλεται στον Kendall [111].

$$X^{[Y]}/Z^{[W]}/n/K \quad \text{Πειθαρχία ουράς}$$

όπου

X : Προσδιορίζει την κατανομή των αφίξεων.

Y : Προσδιορίζει την κατανομή του αριθμού των πελατών ανά άφιξη.

Z : Προσδιορίζει την κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης.

W : Προσδιορίζει την κατανομή του αριθμού των πελατών ανά εξυπηρέτηση.

n : Αριθμός των υπαλλήλων εξυπηρέτησης.

K : Προσδιορίζει την χωρητικότητα του συστήματος. Δηλαδή τον αριθμό των θέσεων στον χώρο αναμονής συν τον αριθμό των καναλιών εξυπηρέτησης.



Επιπλέον αν οι αφίξεις ή οι εξυπηρετήσεις είναι μεμονωμένες, οι εκθέτες στο συμβολισμό παραλείπονται. Αν η χωρητικότητα του συστήματος είναι απεριόριστη, το K επίσης παραλείπεται.

Επομένως όταν αναφερόμαστε σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης

$$G^{[m]}/G^{[k]}/n/\infty \quad FCFS$$

εννοούμε ένα σύστημα στο οποίο οι πελάτες καταφθάνουν στο σύστημα σύμφωνα με μία γενική κατανομή (G , general) σε ομάδες των m πελατών και εξυπηρετούνται σε ομάδες των k πελατών με διάρκεια εξυπηρέτησης που προέρχεται από μία γενική κατανομή. Υπάρχουν n υπάλληλοι εξυπηρέτησης ενώ το σύστημα είναι απεριόριστης χωρητικότητας. Τέλος η πειθαρχία της ουράς είναι $FCFS$.

Μέχρι τώρα, επικεντρωθήκαμε στη φυσική περιγραφή ενός συστήματος εξυπηρέτησης. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε εκείνα τα χαρακτηριστικά τα οποία έχουν πρακτική αξία και δίνουν απαντήσεις σε βασικά ερωτήματα σχετικά με την αποτελεσματικότητα και την ποιότητα εξυπηρέτησης που παρέχουν. Όπως έχει γίνει αντιληπτό, όλες οι διαδικασίες που λαμβάνουν χώρα στην διάρκεια της λειτουργίας ενός συστήματος εξυπηρέτησης εξαρτώνται από το χρόνο κάτω από ένα πιθανοθεωρητικό υπόβαθρο. Δηλαδή πρόκειται για στοχαστικές διαδικασίες. Έτσι ερωτήματα που πρέπει να απαντηθούν είναι της μορφής: ποιά η πιθανότητα ένας πελάτης φθάνοντας στο σύστημα να βρεί απασχολημένο τον υπάλληλο; Ποιά η κατανομή του χρόνου που πρέπει να περιμένει ένας πελάτης ώστε να εξυπηρετηθεί; Ποιά η κατανομή του αριθμού των πελατών που βρίσκονται στο σύστημα; Επομένως χαρακτηριστικά πρακτικού ενδιαφέροντος για ένα σύστημα εξυπηρέτησης είναι (α) ο αριθμός των πελατών που βρίσκονται στο σύστημα μία δεδομένη χρονική στιγμή t , η γνώση του οποίου είναι χρήσιμη στον σχεδιασμό του (b) ο χρόνος αναμονής ενός πελάτη στην ουρά αναμονής και στον χώρο εξυπηρέτησης, η γνώση του οποίου ενδιαφέρει τους πελάτες (c) ο συνολικός χρόνος που απαιτείται από τους υπαλλήλους για να εξυπηρετήσουν τους πελάτες που αναμένουν στην ουρά.

1.3 Η έννοια της στατιστικής ισορροπίας

Το πρώτο βήμα της ανάλυσης των συστημάτων εξυπηρέτησης αφορά την μελέτη τους σε εξάρτηση με το χρόνο t (time dependent analysis) από την έναρξη της λειτουργίας τους (όπου $t = 0$). Η ανάλυση του συστήματος σε συνεχή χρόνο είναι αρκετά πολύπλοκη και σε πολλά συστήματα αδύνατη. Αυτό συμβαίνει γιατί



μετά την έναρξη της λειτουργίας του αναμένουμε το σύστημα να δουλεύει για ένα χρονικό διάστημα μή ομαλά και οι καταστάσεις του να αλλάζουν συνεχώς. Ένα τυπικό παράδειγμα αποτελεί η λειτουργία των εξωτερικών ιατρείων ενός νοσοκομείου, όπου την στιγμή που ανοίγουν υπάρχει πολύς κόσμος να περιμένει. Αυτό σημαίνει ότι ο χρόνος αναμονής ενός πελάτη που φθάνει στο σύστημα λίγο μετά την έναρξη της λειτουργίας του συστήματος να εξαρτάται από τον αριθμό των πελατών που βρήκε ήδη εκεί (αρχικές συνθήκες, $t = 0$) και από τον χρόνο άφιξης του t . Το επόμενο βήμα είναι η μελέτη του συστήματος σε στατιστική ισορροπία (steady state analysis). Αυτό συμβαίνει όταν το σύστημα θεωρήσουμε ότι λειτουργεί για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα και επομένως η κατάσταση του δεν εξαρτάται πλέον από τις συνθήκες που επικρατούσαν στην έναρξη της λειτουργίας του. Η έννοια της στατιστικής ισορροπίας είναι θεμελιώδους σημασίας στη μελέτη συστημάτων εξυπηρέτησης και η εύρεση των συνθηκών κάτω από τις οποίες περιέχονται πρέπει να συνοδεύει πάντα την ανάλυση τους.

Όταν ένα σύστημα είναι σε στατιστική ισορροπία η κατάσταση του εξαρτάται από τον αριθμό των πελατών που εισέρχονται και εξέρχονται από αυτό. Πιο συγκεκριμένα, ας θεωρήσουμε με λ τον αναμενόμενο αριθμό αφίξεων και με μ τον αναμενόμενο ρυθμό εξυπηρέτησεων σε ένα σύστημα με c υπαλλήλους. Τότε ένα μέτρο της πυκνότητας κυκλοφορίας του συστήματος αποτελεί το πηλίκο $\rho = \lambda/c\mu$. Έτσι, αν $\rho > 1$ ($\lambda > c\mu$), τότε ο αναμενόμενος αριθμός των αφίξεων είναι μεγαλύτερος από τον μέγιστο αναμενόμενο αριθμό εξυπηρέτησεων και επομένως αναμένουμε το μήκος της ουράς να αυξάνει συνεχώς με τη πάροδο του χρόνου. Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα μας δεν θα φτάσει ποτέ σε κατάσταση στατιστικής ισορροπίας. Επομένως το σύστημα θα φτάσει σε κατάσταση στατιστικής ισορροπίας, δηλαδή η πιθανότητα να έρθει ένας πελάτης και να βρει πεπερασμένο αριθμό πελατών να περιμένουν μπροστά του να είναι θετική, όταν $\rho < 1$ ($\lambda < c\mu$).

1.4 Σύντομη ιστορική αναδρομή

Στο παρόν εδάφιο επιχειρείται μία σύντομη αναδρομή στην ιστορική εξέλιξη της θεωρίας συστημάτων εξυπηρέτησης, καθώς και στα βασικά εργαλεία μελέτης της.

Η αντιμετώπιση των προβλημάτων συμφόρησης στα συστήματα τηλεπικοινωνιών ήταν η αιτία, για την πρώτη προσπάθεια πιθανοθεωρητικής μοντελοποίησης τους. Ο Δανός Erlang [68], υπάλληλος της τηλεφωνικής εταιρείας της Κοπεγχάγης, δημοσίευσε το 1909, την πρώτη εργασία πάνω στο αντικείμενο της



θεωρίας συστημάτων εξυπηρέτησης, στη προσπάθεια του να βρεί μία φόρμουλα για τον αριθμό των κλήσεων που μπλοκάρονται (και επομένως χάνονται) εξαιτίας κατειλημμένης τηλεφωνικής γραμμής. Επιπλέον έδειξε ότι ο χρόνος μεταξύ διαδοχικών αφίξεων (τηλεφωνημάτων) προέρχεται από την εκθετική κατανομή. Ο ίδιος συγγραφέας [68], εισήγαγε την μέθοδο των φάσεων, θεωρώντας ότι ο χρόνος που απαιτείται για την διεκπεραίωση μίας τηλεφωνικής σύνδεσης αποτελείται από μία σειρά φάσεων, που η κάθε μία από αυτές προέρχεται από την εκθετική κατανομή. Σε αυτή τη κατανομή έδωσε το όνομά του.

Το 1953 ο Kendal [111] εισήγαγε τον συμβολισμό $A/B/c$, ενώ σημαντική ήταν και η συνεισφορά του Lindley [140] στη μελέτη του $G/G/1$ συστήματος με τη βοήθεια ολοκληρωτικών εξισώσεων. Ο Little [141], απέδειξε ένα αποτέλεσμα το οποίο ισχύει στη συντριπτική πλειοψηφία των συστημάτων εξυπηρέτησης. Συγκεκριμένα έδειξε ότι ο μέσος αριθμός των πελατών στο σύστημα είναι ίσος με το γινόμενο του ρυθμού αφίξεων, με τον μέσο χρόνο αναμονής. Η χρήση στοιχείων μιγαδικής ανάλυσης και μετασχηματισμών Laplace-Stieltjes, στη μελέτη συστημάτων εξυπηρέτησης οφείλεται στον Takacs [164], ενώ ιδιαίτερα σημαντική ήταν η συνεισφορά του Cox [54], για την εισαγωγή της μεθόδου συμπληρωματικής μεταβλητής. Στους Kendal [111], Gaver [88] οφείλεται η εισαγωγή της μεθόδου της υπεισερχόμενης Μαρκοβιανής αλυσίδας, που μαζί με τη μέθοδο συμπληρωματικής μεταβλητής αποτελούν τα συνηθέστερα εργαλεία ανάλυσης των συστημάτων εξυπηρέτησης. Ιδιαίτερη μνεία πρέπει να γίνει και στον Neuts [152] για την εισαγωγή των κατανομών τύπου φάσεων, που αποτελούν γενικεύσεις της εκθετικής κατανομής και της Erlang κατανομής (PH distribution), καθώς και των πινακο-αναλυτικών μεθόδων (matrix analytic methods), οι οποίες δίνουν τη δυνατότητα εύρεσης αποτελεσμάτων τα οποία είναι αλγοριθμικά, εύκολα στον υπολογισμό τους.

1.5 Ειδικές κατηγορίες συστημάτων εξυπηρέτησης

Στη παρούσα ενότητα θα παρουσιάσουμε συνοπτικά, ορισμένα βασικά είδη συστημάτων εξυπηρέτησης. Τα χαρακτηριστικά αυτών χρησιμοποιούνται στο κύριο αντικείμενο της παρούσης διατριβής, που αναφέρεται στη μελέτη συστημάτων με επαναλαμβανόμενες αφίξεις πελατών.



1.5.1 Συστήματα εξυπηρέτησης με προτεραιότητες

Η έννοια της προτεραιότητας στη μελέτη συστημάτων εξυπηρέτησης αναφέρεται γενικά στο τρόπο με τον οποίο ο υπάλληλος επιλέγει κάποιον πελάτη για να εξυπηρετήσει. Πρόκειται δηλαδή για μία μορφή πειθαρχίας της ουράς. Γενικά σε όλες της μορφές πειθαρχίας της ουράς υπάρχει η έννοια της προτεραιότητας (βλέπε Cohen [52], σελ. 427-429). Για παράδειγμα, στα συστήματα εξυπηρέτησης όπου οι πελάτες εξυπηρετούνται ανάλογα με το ποιός ήρθε πρώτος (FCFS), οι “αρχικοί” πελάτες εξυπηρετούνται πρώτοι και έπονται οι υπόλοιποι ανάλογα με τη σειρά άφιξης. Στα συστήματα με πειθαρχία LCLS εξυπηρετείται πρώτα ο πελάτης που φθάνει τελευταίος. Παρ’ όλα αυτά όμως, χάνει την προτεραιότητα του από νέους πελάτες που φθάνουν στο σύστημα όσο αυτός περιμένει για να εξυπηρετηθεί. Οι παραπάνω δύο περιπτώσεις αποτελούν τις απλούστερες μορφές προτεραιότητας και υποδηλώνουν ότι κάποιος από τους πελάτες που φθάνουν στο σύστημα κρίνεται περισσότερο σημαντικός από κάποιους άλλους και επομένως απαιτείται η ταχύτερη πρόσβασή τους στον υπάλληλο, ενώ σε ορισμένες περιπτώσεις η διάρκεια του χρόνου εξυπηρέτησης τους είναι επίσης διαφορετική. Επομένως σε ένα σύστημα με προτεραιότητες είναι αναγκαίο ο κάθε πελάτης να ανήκει σε μία από κάποιες διαφορετικές κατηγορίες οι οποίες σχηματίζονται σύμφωνα με κάποιο “μέτρο σημαντικότητας” (Gross and Harris [95], Jaiswal [102]).

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι κάθε πελάτης που καταφθάνει σε ένα σταθμό εξυπηρέτησης ανήκει σε μία από k ($k > 1$) διαφορετικές κατηγορίες. Για να διακρίνουμε το “μέτρο σημαντικότητας” σχετίζουμε κάθε κατηγορία με ένα δείκτη i , $1 \leq i \leq k$. Ο πελάτης της κατηγορίας i , θα λέμε ότι έχει προτεραιότητα έναντι των πελατών της κατηγορίας j , αν $i < j$. Επομένως η κατηγορία πελατών με την μεγαλύτερη σημαντικότητα είναι η 1, ενώ αυτή με τη μικρότερη είναι η k . Σε κάθε σύστημα εξυπηρέτησης με προτεραιότητες θα πρέπει να καθοριστούν τα ακόλουθα δύο ζητήματα:

1. Από ποιά κλάση (κατηγορία) θα επιλεγεί ένας πελάτης για εξυπηρέτηση από τον υπάλληλο, μόλις ολοκληρωθεί κάποια εξυπηρέτηση;
2. Επηρεάζει η ύπαρξη πελατών κάποιας κλάσης την εξέλιξη της εξυπηρέτησης ενός πελάτη κάποιας άλλης κλάσης;

Η απάντηση στο πρώτο ερώτημα οδηγεί σε δύο βασικά είδη προτεραιοτήτων:



- a. **Εξωγενείς προτεραιότητες:** Η επιλογή του επόμενου πελάτη που θα εξυπηρετηθεί εξαρτάται από τη γνώση της κλάσης στην οποία ανήκει. Στα συστήματα εξυπηρέτησης με το χαρακτηριστικό των προτεραιοτήτων, οι εξωγενείς προτεραιότητες συναντώνται συχνότερα και θα μελετηθούν λεπτομερώς παρακάτω.
- b. **Ενδογενείς προτεραιότητες:** Η επιλογή του επόμενου πελάτη που θα εξυπηρετηθεί εξαρτάται αποκλειστικώς ή μερικώς από την κατάσταση του συστήματος τη δεδομένη στιγμή. Για παράδειγμα εξαρτάται από τη κλάση του πελάτη που εξυπηρετήθηκε τελευταίος (εναλλάξ προτεραιότητα, *alternating discipline*) ή από το χρόνο αναμονής των πελατών που υπάρχουν τη δεδομένη στιγμή στο σύστημα (*dynamic priority discipline*). Μία άλλη μορφή ενδογενούς προτεραιότητας, ευρέως διαδεδομένη σε συστήματα δικτύων Η/Υ, είναι εκείνη κατά την οποία για κάθε ένα πελάτη που περιμένει στην ουρά, ο υπάλληλος αντιστοιχεί έναν προκαθορισμένο χρονικό διάστημα εξυπηρέτησης δ . Αν η διάρκεια του χρόνου εξυπηρέτησης ενός πελάτη είναι μεγαλύτερη από την προκαθορισμένη διάρκεια δ , τότε ο υπάλληλος διακόπτει την εξυπηρέτηση του και τον αναγκάζει να επιστρέψει πίσω στην ουρά, ενώ ακολούθως αρχίζει να εξυπηρετεί τον επόμενο πελάτη που περιμένει, για την ίδια προκαθορισμένη διάρκεια δ . Αυτή η μορφή προτεραιότητας αποκαλείται RR (*Round Robin*) και στη πράξη δίνει προτεραιότητα εξυπηρέτησης στους πελάτες που έχουν τις λιγότερες απαιτήσεις όσον αφορά τον χρόνο εξυπηρέτησης. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με συστήματα εξυπηρέτησης με το χαρακτηριστικό των ενδογενών προτεραιοτήτων, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο βιβλίο του Jaiswal [102], σελ. 175-215.

Σχετικά με το δεύτερο ερώτημα, η απάντηση μπορεί να εξαρτάται αλλά και να μην εξαρτάται από την κατάσταση στην οποία βρίσκεται το σύστημα, τόσο σε συστήματα με εξωγενείς όσο και ενδογενείς προτεραιότητες.

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε με λεπτομέρειες στις εξωγενείς προτεραιότητες. Υπενθυμίζουμε ότι σύμφωνα με αυτές, ο πελάτης που θα επιλεγεί για να εξυπηρετηθεί, μετά από κάποια εξυπηρέτηση εξαρτάται από την κλάση στην οποία ανήκει. Δηλαδή μεταξύ δύο πελατών, ενός της i κατηγορίας και ενός της j κατηγορίας όπου $i < j$, θα επιλεγεί για εξυπηρέτηση ο πελάτης της i κατηγορίας. Το ερώτημα που τίθεται τώρα όμως αναφέρεται στο τί θα συμβεί αν ένας πελάτης j κατηγορίας είναι στην εξυπηρέτηση και αφιχθεί ένας πελάτης i κατη-



γορίας, όπου $i < j$. Η απάντηση στο ερώτημα δίνεται από τις παρακάτω μορφές εξωγενών προτεραιοτήτων (Jaiswal [102]):

- (i) Διακόπτουσα προτεραιότητα (preemptive priority): Σύμφωνα με αυτή η εξυπηρέτηση του πελάτη της j κατηγορίας διακόπτεται άμεσα και ο υπάλληλος αρχίζει να εξυπηρετεί τον νέο αφιχθέντα πελάτη της i κατηγορίας.
- (ii) Μη διακόπτουσα προτεραιότητα (non-preemptive, head-of-the-line): Σύμφωνα με αυτή η άφιξη του πελάτη της i κατηγορίας δεν θα επηρεάσει την εξυπηρέτηση του πελάτη της j κατηγορίας. Μόλις ο υπάλληλος θα ολοκληρώσει την εν λόγω εξυπηρέτηση θα αρχίσει την εξυπηρέτηση του νέου αφιχθέντα πελάτη της i κατηγορίας.
- (iii) Κατ' επιλογή προτεραιότητα (discretionary discipline): Ο υπάλληλος αποφασίζει να επιλέξει είτε το (i), είτε το (ii) ανάλογα με την διάρκεια του χρόνου εξυπηρέτησης που έχει ήδη λάβει ο πελάτης της j κατηγορίας.

Η κατηγορία της διακόπτουσας προτεραιότητας μπορεί κατ' επέκταση να διαιρεθεί σε τρεις υποκατηγορίες, ανάλογα με τον τρόπο που θα εξυπηρετηθεί ο διακοπτόμενος πελάτης της j κατηγορίας όταν επιλεγεί ξανά για εξυπηρέτηση:

- (ia) Διακόπτουσα μη-επαναληπτική (preemptive resume): Σύμφωνα με αυτή ο διακοπτόμενος πελάτης, αρχίζει την εξυπηρέτηση από το σημείο στο οποίο αυτή διακόπει. Σε αυτή τη περίπτωση η διακοπή της εξυπηρέτησης δεν προκάλεσε απώλειες, όσον αφορά το χρόνο εξυπηρέτησης που είχε ήδη λάβει ο εν λόγω πελάτης πριν διακοπεί.
- (ib) Διακόπτουσα επαναληπτική-ταυτοτική (preemptive repeat identical or preemptive repeat without resampling): Σύμφωνα με αυτή ο διακοπτόμενος πελάτης επαναλαμβάνει την εξυπηρέτηση του από την αρχή. Επιπλέον η διάρκεια του χρόνου εξυπηρέτησης προέρχεται από την ίδια κατανομή με αυτή, κατά τη διάρκεια της οποίας προέκυψε η διακοπή ενώ θα παραμείνει ίδια ανεξάρτητα από τον αριθμό των διακοπών που ενδέχεται να συμβούν.
- (ic) Διακόπτουσα επαναληπτική-μη ταυτοτική (preemptive repeat different or preemptive repeat with resampling): Σύμφωνα με αυτή ο διακοπτόμενος πελάτης θα επαναλάβει από την αρχή την εξυπηρέτηση του, αλλά η διάρκειά



της θα προέρχεται από διαφορετική κάθε φορά κατανομή, η οποία θα είναι ανεξάρτητη από τον αριθμό των διακοπών που θα προκύψουν.

Η μελέτη συστημάτων εξυπηρέτησης με το χαρακτηριστικό των προτεραιοτήτων είναι σαφώς πολυπλοκότερη σε σχέση με τη μελέτη αυτών χωρίς προτεραιότητες. Αυτό είναι αναμενόμενο καθώς για την περιγραφή του συστήματος απαιτείται η επιπλέον πληροφορία της κλάσης από την οποία προέρχεται ο πελάτης που εξυπηρετείται. Ένα σύστημα εξυπηρέτησης με k κατηγορίες πελατών περιγράφεται στη γενικότητα του σύμφωνα με το συμβολισμό του Kendall ως εξής:

$$X_{[k]}^{[Y]} / Z_{[k]}^{[W]} / n / K_{[k]} \quad \text{Πειθαρχία ουράς}$$

όπου ο δείκτης k , στη διαδικασία των αφίξεων δηλώνει τον αριθμό των κατηγοριών των πελατών που φθάνουν στο σύστημα, στη διαδικασία εξυπηρέτησεων ότι κάθε μία από αυτές έχει διαφορετική κατανομή χρόνου εξυπηρέτησης, ενώ υπάρχουν διαφορετικές ουρές πεπερασμένης χωρητικότητας που δέχονται πελάτες για κάθε κατηγορία.

Οι πρώτες εργασίες πάνω στα συστήματα με προτεραιότητες εμφανίζονται στις αρχές της δεκαετίας του 1960 και εξαιτίας της πολυπλοκότητας της ανάλυσης αναφέρονταν σε δύο κατηγορίες πελατών. Ενδεικτικά αναφέρουμε αυτές των Gaver [89], Takacs [165], Jaiswal [103] και Keilson [114] καθώς και το βιβλίο του Jaiswal [102]. Η σημαντικότερη έννοια που προέκυψε στη μελέτη συστημάτων με προτεραιότητες είναι αυτή του χρόνου συμπλήρωσης εξυπηρέτησης (completion time) ενός πελάτη. Αυτή ορίστηκε σχεδόν ταυτόχρονα και ανεξάρτητα στις εργασίες των Gaver [89], Keilson [114] και Avi-Itzak and Naor [27].

Ο χρόνος συμπλήρωσης εξυπηρέτησης ενός πελάτη, ορίστηκε ως η διάρκεια του χρόνου από τη στιγμή που αρχίζει να εξυπηρετείται, έως τη στιγμή που τελειώνει οριστικά και ο υπάλληλος ελευθερώνεται και είναι έτοιμος να αρχίσει την εξυπηρέτηση ενός άλλου πελάτη της ίδιας κατηγορίας. Σύμφωνα με τον Gaver [89], ο χρόνος συμπλήρωσης εξυπηρέτησης ενός πελάτη της p κατηγορίας είναι το χρονικό διάστημα από τη στιγμή που ο εν λόγω πελάτης αρχίζει την εξυπηρέτηση του (προφανώς δεν υπάρχουν πελάτες των κατηγοριών $1, 2, \dots, p-1$ στο σύστημα) έως τη στιγμή που ξανά για πρώτη φορά δεν θα υπάρχουν πελάτες των κατηγοριών $1, 2, \dots, p-1$ στο σύστημα. Στη πράξη πρόκειται για τον χρόνο “εξυπηρέτησης” του πελάτη της p κατηγορίας που είναι επεκταμένος εξαιτίας πιθανών διακοπών στην εξυπηρέτηση του από πελάτες υψηλότερης προτεραιότητας. Προφανώς στη περίπτωση που στη διάρκεια της εξυπηρέτησης του πελάτη



της p κατηγορίας δεν έρθουν πελάτες υψηλότερης προτεραιότητας, ο χρόνος συμπλήρωσης εξυπηρέτησης ταυτίζεται με τον χρόνο εξυπηρέτησης του.

Στη πρόσφατη βιβλιογραφία εμφανίζονται πολυπλοκότερα συστήματα στα οποία εμφανίζεται το χαρακτηριστικό των διακοπών του υπαλλήλου (βλέπε παρακάτω) και συστήματα στα οποία οι πελάτες καταφθάνουν κατα ομάδες όπου σε κάθε ομάδα ενδέχεται να υπάρχουν πελάτες διαφόρων κατηγοριών (structured batch arrivals). Ενδεικτικά αναφέρουμε τις εργασίες των Takahashi and Takagi [166], Langaris and Katsaros [133]. Επίπλέον ο Langaris [128] εισήγαγε για πρώτη φορά την έννοια των προτεραιοτήτων σε δίκτυα συστημάτων εξυπηρέτησης. Θα πρέπει επίσης να αναφέρουμε την συμβολή του Eisenberg [66] στη μελέτη συστημάτων με ενδογενείς προτεραιότητες καθώς και τον Lee [137] που μελέτησε ένα παρόμοιο σύστημα. Επιπλέον θα πρέπει να σημειωθεί ότι αρκετά από τα συστήματα με κλάσεις πελατών και ενδογενείς προτεραιότητες επιλύονται με την βοήθεια ισχυρών μαθηματικών εργαλείων της μιγαδικής ανάλυσης και ανάγονται σε προβλήματα συνοριακών τιμών (boundary value problems, βλέπε Eisenberg [66], Lee [137], Cohen and Boxma [53]). Επιπλέον, εμφανίζονται εργασίες σε συστήματα με προτεραιότητες όπου υπάρχει το χαρακτηριστικό των επαναλαμβανόμενων αφίξεων, κύριο αντικείμενο μελέτης της παρούσης διατριβής.

1.5.2 Συστήματα εξυπηρέτησης με διακοπές υπαλλήλων

Η λειτουργία ενός κλασσικού συστήματος εξυπηρέτησης εναλλάσσεται μεταξύ περιόδων όπου ο υπάλληλος εξυπηρετεί (busy periods) πελάτες και σε περιόδους όπου παραμένει άεργος (idle periods), αναμένοντας νέες αφίξεις που θα ζητήσουν εξυπηρέτηση. Προκειται λοιπόν για συστήματα στα οποία ο υπάλληλος είναι πάντα διαθέσιμος ώστε να εξυπηρετήσει. Σε πρακτικές εφαρμογές όμως, παρατηρείται το φαινόμενο, όπου ο υπάλληλος (ή οι υπάλληλοι) δεν είναι διαθέσιμος για διάφορους λόγους. Αυτή η περίοδος απουσίας του υπαλλήλου μπορεί να θεωρηθεί ως ένα χρονικό διάστημα στο οποίο είτε ασχολείται με κάποια εργασία ανεξάρτητη από αυτή που μελετάμε, είτε πραγματοποιεί έναν έλεγχο συντήρησης στις μηχανές εξυπηρέτησης, είτε απλά πραγματοποιεί ένα προγραμματισμένο διάλειμμα. Για να μπορέσουμε να μελετήσουμε τέτοια συστήματα όπου παρατηρείται η προσωρινή απουσία του υπαλλήλου εισάγουμε την έννοια των διακοπών (server vacations). Ισοδύναμα ως θεωρήσουμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης όπου ο υπάλληλος εξυπηρετεί δύο κατηγοριών εργασίες, τις πρωτεύοντες και τις δευτερεύοντες. Τότε την περίοδο στην οποία ο υπάλληλος εξυπηρετεί



τις δευτερεύοντες εργασίες, παύει να είναι διαθέσιμος για τις πρωτεύοντες και επομένως από τη σκοπιά των πρωτεύοντων εργασιών (πελατών) μπορεί να θεωρηθεί ότι ο υπάλληλος είναι σε διακοπές. Χωρίς βλάβη της γενικότητας άς θεωρήσουμε ότι οι δευτερεύοντες εργασίες εξυπηρετούνται μόλις ολοκληρωθεί η εξυπηρέτηση των πρωτεύοντων, ενώ για να επιστρέψει ο υπάλληλος σε θέση εξυπηρέτησης για πρωτεύοντες, πρέπει να εξυπηρετήσει όλες τις δευτερεύοντες εργασίες. Τότε η συγκεκριμένη “περίοδος διακοπών” εξαρτάται από τον αριθμό των δευτερεύοντων εργασιών λίγο πριν την έναρξή τους, όσο και τον αριθμό των εργασιών καταφθάνουν κατά την διάρκεια αυτής. Με λίγα λόγια, η χρονική περίοδος στην οποία ο υπάλληλος δεν είναι διαθέσιμος στους πρωτεύοντες πελάτες δεν είναι κάθε φορά πιθανοθεωρητικά ίδιου μήκους και εξαρτάται από τον αριθμό των δευτερεύοντων εργασιών που καταφθάνουν στη διάρκεια των διακοπών. Επιτρέποντας λοιπόν, στον υπάλληλο να αναχωρεί για διακοπές σχηματίζονται συστήματα εξυπηρέτησης τα οποία είναι πιο ευέλικτα, προσεγγίζοντας αληθινές περιπτώσεις συστημάτων ουρών. Μερικές από αυτές είναι οι ακόλουθες.

Στους συνοριακούς σταθμούς μίας χώρας υπάρχει ένας αριθμός εισόδων από όπου γίνεται ο έλεγχος των διαβατηρίων. Ο αριθμός αυτών καθορίζεται από το επίπεδο της κίνησης ή το μήκος των αυτοκινητών που περιμένουν για να εισαχθούν στη χώρα. Όταν το μήκος της ουράς είναι πολύ μικρό, τότε κάποιες από τις εισόδους κλείνουν και ο έλεγχος πραγματοποιείται από τις υπόλοιπες. Όταν το μήκος αυξηθεί σε ένα συγκεκριμένο όριο, οι κλειστές εισοδοί ανοίγουν ξανά ώστε να ελαττώσουν το επίπεδο της κίνησης. Σε αυτή τη περίπτωση ο χρόνος στον οποίο οι εισοδοί είναι κλειστοί και επομένως οι υπάλληλοι απασχολούνται σε άλλες δραστηριότητες μπορεί να θεωρηθεί ως χρόνος διακοπών των εν λόγω υπαλλήλων. Ένα άλλο παράδειγμα συναντάται στη βιομηχανία όπου στο τέλος μίας εβδομάδας συνεχούς λειτουργίας μίας μηχανής, πραγματοποιείται ένας έλεγχος συντήρησης. Σε αυτή τη περίπτωση τα προϊόντα που προορίζονται προς επεξεργασία στη μηχανή “περιμένουν” σε μία υποθετική ουρά να επανέλθει σε κατάσταση λειτουργίας. Τότε ο χρόνος συντήρησης μπορεί να θεωρηθεί ως χρόνος διακοπών.

Είναι προφανές ότι μία μηχανή που παράγει προϊόντα (πελάτες) μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένα σύστημα ουράς με έναν υπάλληλο. Βλάβες της μηχανής μπορούν να συμβούν τυχαία και ανεξάρτητα από την κατάσταση του συστήματος. Ο χρόνος επιδιόρθωσης της μηχανής, ώστε να έρθει σε θέση λειτουργίας μπορεί να θεωρηθεί ως χρόνος διακοπών. Αξίζει να σημειωθεί ότι στο συγκεκρι-



κρυμμένο παράδειγμα ο χρόνος στον οποίο η μηχανή δεν είναι διαθέσιμη είναι ίδιου μήκους κάθε φορά που συμβαίνει βλάβη.

Η συμπεριφορά του υπαλλήλου ποικίλει τη στιγμή που αρχίζει ή ολοκληρώνεται η περίοδος διακοπών του. Όσον αφορά την έναρξη της περιόδου των διακοπών υπάρχουν δύο βασικοί κανόνες. Σύμφωνα με τον πρώτο, ένας υπάλληλος αναχωρεί για διακοπές κάθε φορά που στο σύστημα δεν υπάρχουν πελάτες (exhaustive type), ενώ σύμφωνα με τον δεύτερο μπορεί να αναχωρήσει ακόμα και όταν υπάρχουν πελάτες που περιμένουν στην ουρά (π.χ. να αναχωρήσει μόλις εξυπηρετηθεί ένα συγκεκριμένο αριθμό πελατών, non-exhaustive type). Επιπλέον, ένας άλλος κανόνας σχετικά με την έναρξη της περιόδου διακοπών αποτελεί και η χρονική στιγμή στην οποία διακόπτεται η εξυπηρέτηση ενός πελάτη εξαιτίας μίας βλάβης (breakdown). Τότε ο χρόνος διακοπών μπορεί να θεωρηθεί το χρονικό διάστημα επισκευής για να επανέλθει το σύστημα σε κατάσταση λειτουργίας. Όσον αφορά την ολοκλήρωση της περιόδου διακοπών υπάρχουν επίσης δυο βασικοί τύποι. Πρόκειται για τις απλές διακοπές (single vacations) και τις πολλαπλές διακοπές (multiple vacations).

Απλές διακοπές: Με την ολοκλήρωση των διακοπών του, ο υπάλληλος επιστρέφει σε κατάσταση λειτουργίας με την έννοια ότι αν βρεί πελάτες να περιμένουν τότε αρχίζει να τους εξυπηρετεί. Αν δεν βρεί, παραμένει άεργος αναμένοντας την πρώτη άφιξη που θα ζητήσει εξυπηρέτηση.

Πολλαπλές διακοπές: Σε αυτή τη περίπτωση ο υπάλληλος επαναλαμβάνει την περίοδο διακοπών του, έως ότου βρεί κάποιον πελάτη να περιμένει στην ουρά την στιγμή ολοκλήρωσης των διακοπών.

Υπάρχουν και άλλοι γενικότεροι κανόνες, όπως αυτή που απαιτεί ο υπάλληλος να τερματίσει τις διακοπές του όταν ένας προκαθορισμένος αριθμός πελατών περιμένει στην ουρά (threshold policies, N-policy). Σε συστήματα με πολλούς υπαλλήλους υπάρχουν και άλλες παραλλαγές σχετικά με την έναρξη/τερματισμό της περιόδου διακοπών, όπως αυτή που αναφέρεται στην ταυτόχρονη αναχώρηση για διακοπές όλων των υπαλλήλων (synchronized vacations) και αυτή που αναφέρεται στη περίπτωση που κάποιοι από αυτούς αναχωρούν για διακοπές ανεξάρτητα από τους άλλους (asynchronous vacations).

Η σημαντικότερη ιδιότητα που συναντάται στα συστήματα εξυπηρέτησης με διακοπές υπαλλήλου είναι η ιδιότητα της διάσπασης (decomposition property). Σύμφωνα με αυτή, η κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα ή η κατανομή του χρόνου αναμονής ενός πελάτη, μπορούν να θεωρηθούν ως η κατανομή του αθροίσματος δύο ανεξάρτητων τ.μ.. Η μία από αυτές είναι το μήκος της ου-



ράς ή αντίστοιχα ο χρόνος αναμονής ενός πελάτη, στο κλασσικό σύστημα χωρίς διακοπές και η άλλη το μήκος της ουράς και ο χρόνος αναμονής που οφείλονται στην ύπαρξη των διακοπών. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την ιδιότητα της διάσπασης στα συστήματα εξυπηρέτησης με διακοπές υπαλλήλων, παραπέμπουμε στις εργασίες των Doshi [61], Teghem [169].

Η μεγάλη εφαρμογή των συστημάτων εξυπηρέτησης με διακοπές υπαλλήλων, έχει εντείνει την ερευνητική δραστηριότητα πάνω σε τέτοια συστήματα. Για μία πλήρη επισκόπηση των εν λόγω συστημάτων παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο πρόσφατο βιβλίο των Tian and Zhang [170] καθώς και σε αυτό του Takagi [167], το οποίο αναφέρεται σε μοντέλα με έναν υπάλληλο. Επιπροσθέτως, λεπτομερή αποτελέσματα σχετικά με τα εν λόγω μοντέλα περιέχονται στις εργασίες των Doshi [61], Keilson and Servi [115], Blondia [28].

1.5.3 Συστήματα εξυπηρέτησης με χρόνους προετοιμασίας (start up ή set up) και αποφόρτισης (close down)

Συστήματα εξυπηρέτησης, όπου ο υπάλληλος για να αρχίσει να εξυπηρετεί κάποιον πελάτη, χρειάζεται έναν χρόνο προετοιμασίας και έναν χρόνο αποφόρτισης μετά από μία περίοδο συνεχούς εξυπηρέτησης πελατών συναντώνται συχνά στη βιομηχανική παραγωγή καθώς και σε συστήματα δικτύων υπολογιστών (SVC based virtual LAN-emulation) και παροχής υπηρεσιών διαδικτύου (IP over ATM). Ταυτόχρονα με τα παραπάνω χαρακτηριστικά είναι σύνηθες στα παραπάνω συστήματα να εμφανίζεται και το φαινόμενο των διαφορετικών κλάσεων των πελατών που ζητούν εξυπηρέτηση καθώς και αυτό των διακοπών του υπαλλήλου. Πρόκειται λοιπόν στη πράξη για πολύπλοκα συστήματα εξυπηρέτησης τα οποία θεωρούνται γενικεύσεις αυτών με τα χαρακτηριστικά των προτεραιοτήτων και των διακοπών.

Συστήματα εξυπηρέτησης με το χαρακτηριστικό της περιόδου προετοιμασίας και αυτά των διακοπών του υπαλλήλου συναντώνται στις εργασίες των Doshi [61] και Levy and Kleinfrock [136], στις οποίες ασχολούνται ιδιαίτερος με την ιδιότητα της διάσπασης που αναφέραμε στο προηγούμενο εδάφιο. Στη πράξη τα μοντέλα ουρών με χρόνους προετοιμασίας ή αποφόρτισης μπορεί να θεωρηθούν ως περιπτώσεις μοντέλων με διακοπές υπαλλήλου. Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα στο οποίο καταφθάνουν πελάτες και τοποθετούνται σε μία ουρά περιμένοντας να εξυπηρετηθούν. Ο υπάλληλος χρειάζεται ένα χρόνο προετοιμασίας μόλις φθάσει ο πρώτος πελάτης που με την άφιξή του τερματίζει την πε-



ρίοδο αεργίας του. Ακολούθως τον εξυπηρετεί, καθώς και όλους όσους φθάσαν κατά τη διάρκεια της περιόδου προετοιμασίας και εξυπηρέτησης του συγκεκριμένου πελάτη. Τότε το παραπάνω μοντέλο συράς είναι ισοδύναμο με ένα μοντέλο συράς με διακοπές υπαλλήλου, όπου η περίοδος διακοπών αρχίζει κάθε φορά που ολοκληρώνεται η περίοδος αεργίας του υπαλλήλου. Στο βιβλίο του Takagi [167] (σελ. 135-136) αναλύεται ένα σύστημα εξυπηρέτησης όπου εμφανίζονται τα χαρακτηριστικά της περιόδου προετοιμασίας, αποφόρτισης και των διακοπών του υπαλλήλου. Σε αυτό, ο υπάλληλος για να αρχίσει να εξυπηρετεί τους πελάτες χρειάζεται ένα χρόνο προετοιμασίας και μόλις ελευθερωθεί ενεργοποιεί μία περίοδο αποφόρτισης. Αν στη διάρκεια αυτής δεν έλθει κάποιος πελάτης τότε αναχωρεί για διακοπές, ενώ σε αντίθετη περίπτωση θα την διακόψει και θα προετοιμαστεί για να εξυπηρετήσει τους νέοαφικθέντες πελάτες. Σκοπός της εν λόγω μελέτης ήταν ο προσδιορισμός της κατανομής του χρόνου αναμονής ενός τυχαίου πελάτη. Το 1990 ο Takagi [168], εισήγαγε την έννοια του χρόνου προετοιμασίας σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης το οποίο δεχόταν P κατηγορίες πελατών. Σύμφωνα με αυτό, ο υπάλληλος χρειαζόταν να ενεργοποιήσει μία περίοδο προετοιμασίας S_p αν ένας πελάτης p κατηγορίας ήταν ο πρώτος που κατέφθανε στην διάρκεια της περιόδου αεργίας του, ενώ στη συνέχεια τον εξυπηρέτούσε.

Αξίζει να αναφερθούμε εδώ και σε κάποια μοντέλα με τα χαρακτηριστικά της περιόδου προετοιμασίας και αποφόρτισης που μελετήθηκαν εξαιτίας της εφαρμογής τους σε συστήματα παροχής υπηρεσιών διαδικτύου. Ενδεικτικά αναφέρουμε τις εργασίες των Sakai et. al [159] και Niu and Takahashi [154]. Σύμφωνα με αυτές ο χρόνος προετοιμασίας αντιστοιχούσε στο χρονικό διάστημα που απαιτείται για την σύνδεση του χρήστη με τον παροχέα εξυπηρέτησης (Internet Processor), ενώ η περίοδος αποφόρτισης στον χρόνο που απαιτείται για να διακοπεί η εν λόγω σύνδεση ύστερα από την εξυπηρέτηση που έλαβε ο χρήστης. Μετά το πέρας της περιόδου αποφόρτισης, ο υπάλληλος αναχωρούσε για διακοπές ενώ ο χώρος αναμονής ήταν πεπερασμένος. Επιπλέον έδωσαν τη δυνατότητα διακοπής της περιόδου αποφόρτισης και τη ευκαιρία για άμεση εξυπηρέτηση χωρίς να χρειαστεί να παρέλθει χρόνος προετοιμασίας, σε κάποιον πελάτη που θα κατέφθανε στο σύστημα στη διάρκεια της εν λόγω περιόδου αποφόρτισης.



1.5.4 Συστήματα εξυπηρέτησης με έναν υπάλληλο και πολλές φάσεις εξυπηρέτησης

Συστήματα ουρών στα οποία ένας υπάλληλος παρέχει σε κάθε πελάτη έναν αριθμό φάσεων εξυπηρέτησης σε σειρά μπορούν να αποδειχθούν χρήσιμα στην μοντελοποίηση δικτύων Η/Υ, γραμμών παραγωγής στη βιομηχανία και τηλεπικοινωνιακών συστημάτων. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε ένα κεντρικό επεξεργαστή, στον οποίο καταφθάνουν εργασίες προς επεξεργασία από έναν αριθμό υπο-επεξεργαστών. Ο κεντρικός επεξεργαστής αρχικά καταγράφει ή συλλέγει τις παραπάνω εργασίες και ακολούθως προχωρά στην εκτέλεση των εν λόγω εργασιών. Σε αυτό το σύστημα η πρώτη φάση εξυπηρέτησης αναφέρεται στη συλλογή ή καταγραφή των εργασιών ενώ η δεύτερη στην άμεση επεξεργασία τους. Επιπλέον, στη βιομηχανία για την προώθηση ενός προϊόντος στην αγορά απαιτείται η επεξεργασία του από έναν αριθμό διαφορετικών φάσεων. Αφού ολοκληρωθεί το κατασκευαστικό στάδιο, ο υπάλληλος θα ελέγξει την ποιότητα του προϊόντος και ακολούθως αν ικανοποιεί κάποια ποιοτικά κριτήρια θα προωθηθεί στο τελικό στάδιο της συσκευασίας, ενώ σε αντίθετη περίπτωση θα σταλλεί για να επαναλλάξει το στάδιο της κατασκευής. Το παραπάνω σύστημα παρέχει εξυπηρέτηση τριών φάσεων σε σειρά. Η πρώτη φάση αναφέρεται στη κατασκευή του προϊόντος, η δεύτερη στον ποιοτικό έλεγχο του και η τρίτη στη συσκευασία. Επιπλέον υπάρχει η δυνατότητα της επανατροφοδότησης στη πρώτη φάση της κατασκευής, στη περίπτωση που το προϊόν δεν ικανοποιεί τα ποιοτικά κριτήρια.

Τέτοιου είδους συστήματα, με δύο φάσεις εξυπηρέτησης μελετήθηκαν αρχικά στις εργασίες των Nair [150] και Taube-Netto [151]. Στις παραπάνω εργασίες αναλύθηκαν μοντέλα με δύο ουρές απείρου χωρητικότητας συνδεδεμένες σε σειρά (two queues in tandem) που εξυπηρετούνται από έναν υπάλληλο. Μόλις ολοκληρώσει την εξυπηρέτηση του στη πρώτη ουρά ο πελάτης προωθείται άμεσα στη δεύτερη. Ο υπάλληλος θα αρχίσει να εξυπηρετεί τους πελάτες της δεύτερης ουράς μόλις εξυπηρετήσει όλους τους πελάτες της πρώτης και ακολούθως θα επιστρέψει στην πρώτη ουρά. Αν κατά την επιστροφή του υπάλληλου υπάρχουν πελάτες που περιμένουν για την πρώτη φάση εξυπηρέτησης, θα αρχίσει να τους εξυπηρετεί έναν έναν ενώ σε αντίθετη περίπτωση παραμένει άεργος. Επιπλέον ο υπάλληλος μεταβαίνει από τη μία ουρά στην άλλη κάθε φορά που βρίσκει άδεια την εν λόγω ουρά. Στη διδακτορική διατριβή του Taube-Netto [151] μελετώνται παραλλαγές συστημάτων στα οποία υπάρχουν και άλλοι κανόνες σχετικά με το πότε ο υπάλληλος εναλλάσσεται μεταξύ των δύο ουρών. Αρ-



γότερα ο Katayama [109] ([108]) μελέτησε την κατανομή του χρόνου αναμονής ενός τυχαίου πελάτη, θεωρώντας ένα σύστημα με N ουρές απείρου χωρητικότητας συνδεδεμένες σε σειρά, οι οποίες εξυπηρετούνται από έναν υπάλληλο. Στο εν λόγω μοντέλο η σειρά με την οποία εξυπηρετούσε ο υπάλληλος τις N ουρές ήταν κυκλική (polling), δηλαδή της μορφής $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow N \rightarrow 1 \dots$. Τέλος, οι Iravani et. al [101], μελέτησαν ένα παρόμοιο σύστημα, δίνοντας κυρίως βάση στην εύρεση της βελτιστής πολιτικής λειτουργίας του. Οι Krishna and Lee [118], θεώρησαν ένα σύστημα στο οποίο οι πελάτες έφταναν ένας ένας και στη πρώτη φάση εξυπηρετούνταν κατά ομάδες τυχαίου μεγέθους. Ακολούθως τοποθετούνταν σε μία δεύτερη ουρά όπου ο ίδιος υπάλληλος αμέσως μετά την ομαδική εξυπηρέτηση, τους εξυπηρετούσε έναν-έναν. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης τόσο στη πρώτη, όσο και στη δεύτερη φάση προέρχονταν από την εκθετική κατανομή. Ο Doshi [62], γενίκευσε το παραπάνω σύστημα θεωρώντας ότι οι χρόνοι εξυπηρέτησης και στις δύο φάσεις προέρχονταν από μία αυθαίρετη κατανομή.

Οι Selvam and Sivasankaran [160] γενίκευσαν το μοντέλο του Doshi [62], θεωρώντας ότι μετά την ολοκλήρωση των μεμονωμένων εξυπηρετήσεων στη δεύτερη φάση επέστρεφε στη πρώτη ουρά και εξυπηρετούσε τους επόμενους πελάτες που ζητούσαν εξυπηρέτηση στη πρώτη φάση, ενώ σε αντίθετη περίπτωση αναχωρούσε για διακοπές, οι οποίες επαναλαμβάνονταν αν επίσης δεν υπήρχαν πελάτες να περιμένουν μετά την επιστροφή του από τις εν λόγω διακοπές. Οι Kim and Chae [112], μελέτησαν ένα παρόμοιο μοντέλο θεωρώντας ότι αν μετά το πέρας των μεμονωμένων εξυπηρετήσεων δεν υπήρχαν πελάτες να περιμένουν για να λάβουν την πρώτη φάση εξυπηρέτησης, ο υπάλληλος θα παρέμενε άεργος μέχρις ότου να συγκεντρωθούν τουλάχιστον N πελάτες στη πρώτη φάση για να ξεκινήσει να τους εξυπηρετεί. Στη περίπτωση που θα υπήρχαν πελάτες (≥ 1) μετά το πέρας των μεμονωμένων εξυπηρετήσεων, θα άρχιζε η πρώτη φάση της εξυπηρέτησης κατά ομάδες.

Ο Madan [143], θεώρησε ένα μοντέλο ουράς στο οποίο κάθε πελάτης αμέσως μετά το πέρας της βασικής (υποχρεωτικής) εξυπηρέτησης του έχει τη δυνατότητα να λάβει και μία επιπλέον προαιρετική φάση εξυπηρέτησης. Στο παρόν μοντέλο η διάρκεια της πρώτης (υποχρεωτικής) φάσης εξυπηρέτησης προέρχονταν από μία αυθαίρετη κατανομή ενώ η διάρκεια της δεύτερης (προαιρετικής) προέρχονταν από την εκθετική κατανομή. Τέτοια μοντέλα παρουσιάζουν πολλές εφαρμογές στη καθημερινότητα. Για παράδειγμα ως θεωρήσουμε τη λειτουργία ενός λιμανιού στο οποίο όλα τα πλοία που φτάνουν σε αυτό ξεφορτώνουν εμπορεύματα. Όμως, μόνο μερικά από αυτά φορτώνονται στη συνέχεια με άλλα προϊόντα. Στο εν λόγω σύστημα η πρώτη φάση εξυπηρέτησης που λαμβάνουν όλοι



οι πελάτες (πλοία), αναφέρεται στη εκφόρτωση των εμπορευμάτων, ενώ η δεύτερη φάση αναφέρεται μόνο σε ένα μέρος των πλοίων και αφορά την φόρτωση προϊόντων. Επομένως, ο συνολικός χρόνος εξυπηρέτησης ενός πελάτη (πλοίου) αποτελείται είτε από δύο φάσεις (αν φορτωθεί με νέα εμπορεύματα πριν αναχωρήσει), είτε από μία φάση στη περίπτωση που αναχωρήσει αμέσως μετά την πρώτη εξυπηρέτηση. Επιπλέον ως θεωρήσουμε τους πελάτες ενός διαφηρικού γραφείου στο οποίο σε πρώτη φάση όλοι συζητούν με τον δικηγόρο, τις λεπτομερείες της υπόθεσης τους. Όμως μόνο ένα μέρος από αυτούς θα τον προσλάβει. Οι πελάτες που τελικά θα προσλάβουν τον δικηγόρο λαμβάνουν εξυπηρέτηση δύο φάσεων (στη πρώτη γίνεται καταγραφή των λεπτομερειών της υπόθεσης και στη δεύτερη η παράσταση στο δικαστήριο), ενώ οι υπόλοιποι θα αναχωρήσουν λαμβάνοντας μία φάση, αυτή της συζήτησης της υπόθεσης με τον δικηγόρο.

Αργότερα ο Medhi [147], γενίκευσε το μοντέλο του Madan [143], θεωρώντας ότι η διάρκεια του χρόνου της δεύτερης προεραπικής φάσης εξυπηρέτησης προέρχονταν από μία αυθαίρετη κατανομή. Οι Choudhury and Paul [46] μελέτησαν ένα παρόμοιο μοντέλο στο οποίο κάθε φορά που το σύστημα άδειαζε, ο υπάλληλος παρεμενε άεργος μέχρις ότου συγκεντρωθούν στην ουρά τουλάχιστον $N (\geq 1)$ πελάτες. Οι ίδιοι συγγραφείς εισήγαγαν την έννοια της κατ' επιλογήν επανατροφοδότησης στο μοντέλο με την προαιρετική δεύτερη φάση εξυπηρέτησης. Συγκεκριμένα, κάθε φορά που ο πελάτης ολοκλήρωνε την διαδικασία εξυπηρέτησης του είχε την δυνατότητα (με πιθανότητα p) να επαναλάβει την εξυπηρέτηση του είτε (με πιθανότητα $1 - p$) να αναχωρήσει οριστικά από το σύστημα. Σε μία ακόμη γενίκευση της εργασίας του Madan [143], ο Choudhury [43] θεώρησε ένα μοντέλο στο οποίο μόλις ο υπάλληλος ελευθερωνόταν, ο υπάλληλος παρέμενε ανενεργός μέχρις ότου ο συνολικός χρόνος εξυπηρέτησης που απαιτείται συνολικά από τους πελάτες που καταφθάνουν ξεπεράσει ένα συγκεκριμένο σταθερό επίπεδο D (D -policy). Ο ίδιος συγγραφέας γενίκευσε τα μοντέλα των Madan [143] και Medhi [147], θεωρώντας ότι οι αφίξεις πελατών γίνονται κατά ομάδες τυχαίου μεγέθους. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι στα παραπάνω μοντέλα δεν υπάρχει χώρος αναμονής για πελάτες που ολοκληρώνουν τη πρώτη βασική φάση εξυπηρέτησης και αποφασίζουν να λάβουν την προαιρετική δεύτερη φάση. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, ο υπάλληλος ακολουθεί τον πελάτη καθώς μεταβαίνει από τη πρώτη στη δεύτερη φάση.

Ο Madan [142], εισήγαγε την έννοια των διακοπών του υπαλλήλου σε μοντέλα ουρών με δύο φάσεις εξυπηρέτησης θεωρώντας ένα σύστημα με μία ουρά απείρου χωρητικότητας και έναν υπάλληλο, ο οποίος παρέχει εξυπηρέτηση δύο φάσεων σε σειρά ή μία μετά την άλλη σε κάθε πελάτη. Ολοκληρώνοντας την εξυ-



πηρέτηση στη πρώτη φάση, ο υπάλληλος παρέχει αμέσως και την δεύτερη φάση εξυπηρέτησης σε κάθε πελάτη. Μετά το πέρας της δεύτερης φάσης εξυπηρέτησης, ο υπάλληλος έχει τη δυνατότητα να αναχωρήσει για διακοπές (με πιθανότητα p) σταθερού μήκους d , κάθε φορά, είτε να παραμείνει στο σύστημα και να συνεχίζει να εξυπηρετεί (με πιθανότητα $1 - p$). Εφαρμογές τέτοιων συστημάτων συναντώνται στη λειτουργία κρουαζιερόπλοιων όπου μετά την ολοκλήρωση ενός ταξιδιού μετ' επιστροφής, το πλοίο παύει να είναι διαθέσιμο για σταθερό χρονικό διάστημα. Το ταξίδι μπορεί να θεωρηθεί ως μία εξυπηρέτηση δύο φάσεων, τη διαδρομή προς τον προορισμό και ακολούθως αυτή της επιστροφής.

Ο Wang [172] εισήγαγε την έννοια των βλαβών του υπαλλήλου σε ένα σύστημα με δύο φάσεις εξυπηρέτησης. Συγκεκριμένα, γενίκευσε το μοντέλο του Madan [143] με την προαιρετική δεύτερη φάση εξυπηρέτησης, θεωρώντας εκθετικούς χρόνους ζωής για τον υπάλληλο και στις δύο φάσεις. Αμέσως μετά από κάποια βλάβη σε οποιαδήποτε φάση, ακολουθούσε η αντίστοιχη περίοδος επιδιόρθωσης η οποία προέρχονταν από αυθαίρετες κατανομές διαφορετικές για κάθε φάση. Πρόσφατα οι Choudhury and Tadj [48], γενίκευσαν το μοντέλο του Wang [172] θεωρώντας ότι η διάρκεια του χρόνου της προαιρετικής δεύτερης φάσης εξυπηρέτησης προέρχονταν από μία αυθαίρετη κατανομή. Επιπλέον θεώρησαν ότι πριν από την έναρξη της περιόδου επιδιόρθωσης, ο υπάλληλος ο υπάλληλος θα πρέπει να περιμένει για ένα χρονικό διάστημα που προέρχεται από μία αυθαίρετη κατανομή. Το εν λόγω χρονικό διάστημα το θεώρησαν ως καθυστέρηση στην έναρξη της επιδιόρθωσης.

Οι Choudhury and Madan [42] επίσης γενίκευσαν το μοντέλο του Madan [143], θεωρώντας ότι οι πελάτες κατέφθαναν κατά ομάδες τυχαίου μεγέθους ενώ ο χρόνος διακοπών του υπαλλήλου προέρχονταν από μία αυθαίρετη κατανομή. Οι ίδιοι συγγραφείς [44] γενίκευσαν το δικό τους μοντέλο προσθέτοντας επιπλέον την υπόθεση ότι κάθε φορά που ο υπάλληλος θα ελευθερωνόταν, θα παρέμενε άργος μέχρις ότου συγκεντρωθούν μπροστά του τουλάχιστον N (≥ 1) πελάτες. Ακολούθως θα άρχιζε να τους εξυπηρετεί. Οι Madan and Choudhury [144] εισήγαγαν την έννοια του χρόνου προετοιμασίας καθώς και αυτή της περιορισμένης προσβασιμότητας προς τον υπάλληλο στο μοντέλο του Madan [143]. Συγκεκριμένα θεώρησαν ένα σύστημα στο οποίο καταφθάνουν πελάτες κατά ομάδες τυχαίου μήκους με έναν υπάλληλο που παρέχει εξυπηρέτηση δύο φάσεων σε σειρά. Επιπλέον ο υπάλληλος για να αρχίσει να τους εξυπηρετεί (έναν-έναν), χρειάζεται αρχικά έναν χρόνο προετοιμασίας. Μόλις ολοκληρωθεί η δεύτερη φάση εξυπηρέτησης κάθε πελάτη, ο υπάλληλος είτε αναχωρεί για διακοπές (με πιθανότητα r), είτε παραμένει διαθέσιμος για να εξυπηρετήσει (με πιθανότητα



$1 - r$) τους υπόλοιπους πελάτες (αν υπάρχουν). Αξίζει να σημειωθεί ότι γυρνώντας ο υπάλληλος από τις διακοπές αν δεν βρεί πελάτες να περιμένουν για να εξυπηρετηθούν έχει την δυνατότητα να αναχωρήσει ξανά για διακοπές. Επικλέον, υπάρχει ένας κανόνας σχετικά με την αποδοχή της ομάδας πελατών στο σύστημα. Συγκεκριμένα, αν ο υπάλληλος δεν βρίσκεται σε διακοπές κάθε ομάδα γίνεται αποδεκτή με πιθανότητα c_1 , ενώ σε αντίθετη περίπτωση με c_2 . Ο Ke [110], γενίκευσε το κλασσικό μοντέλο του Madan [143], θεωρώντας ένα μοντέλο στο οποίο οι πελάτες καταφθάνουν κατά ομάδες τυχαίου μεγέθους, ενώ πριν αρχίσει την εξυπηρέτηση τους χρειάζεται έναν χρόνο προετοιμασίας η διάρκεια του οποίου προέρχεται από μία αυθαίρετη κατανομή. Αφού ολοκληρωθεί η πρώτη φάση εξυπηρέτησης, υπάρχουν οι εξής επιλογές για τον αντίστοιχο πελάτη. Είτε αναχωρεί από το σύστημα, είτε απαιτεί και μία δεύτερη φάση εξυπηρέτησης. Για την προαιρετική δεύτερη φάση εξυπηρέτησης, ο υπάλληλος παρέχει στον κάθε πελάτη μία από J τύπους εξυπηρέτησης.

Οι Choudhury and Paul [45], μελέτησαν ένα σύστημα με δύο φάσεις εξυπηρέτησης σε σειρά, πραγματοποιώντας και εκτίμηση των βασικών παραμέτρων του μοντέλου με την βοήθεια στατιστικών εργαλείων. Συγκεκριμένα θεώρησαν ένα σύστημα με δύο φάσεις εξυπηρέτησης, όπου μετά την ολοκλήρωση της δεύτερης φάσης κάθε πελάτη ο υπάλληλος είχε τη δυνατότητα (με πιθανότητα p) να αναχωρήσει για διακοπές, είτε να συνεχίσει να εξυπηρετεί πελάτες. Κάθε φορά που ο υπάλληλος επέστρεφε από διακοπές, μπορούσε να τις επαναλάβει (πολλαπλές διακοπές) μέχρις ότου να υπάρχει κάποιος πελάτης να περιμένει τη στιγμή επιστροφής του υπαλλήλου στο σύστημα. Πρόσφατα οι Choudhury and Tadj and Paul [47], γενίκευσαν το παραπάνω σύστημα θεωρώντας ότι οι πελάτες καταφθάνουν σε ομάδες τυχαίου μεγέθους.

1.5.5 Συστήματα εξυπηρέτησης με επαναλαμβανόμενες αφίξεις πελατών

Στο παρόν εδάφιο θα γίνει μία λεπτομερής επισκόπηση των συστημάτων εξυπηρέτησης με επαναλαμβανόμενες αφίξεις πελατών, που αποτελούν και το κύριο αντικείμενο μελέτης της παρούσης διατριβής.

Στα μοντέλα και στα παραδείγματα που είδαμε μέχρι τώρα και τα οποία ανήκουν στο κλάδο της κλασσικής θεωρίας συστημάτων εξυπηρέτησης, θεωρήσαμε ότι ο πελάτης που φθάνοντας στο σύστημα δεν μπορεί να εξυπηρετηθεί άμεσα, είτε τοποθετείται σε μία ουρά και περιμένει να εξυπηρετηθεί σύμφωνα με κάποια κριτηριακή, είτε αναχωρεί από το σύστημα χωρίς να λάβει εξυπηρέτηση.



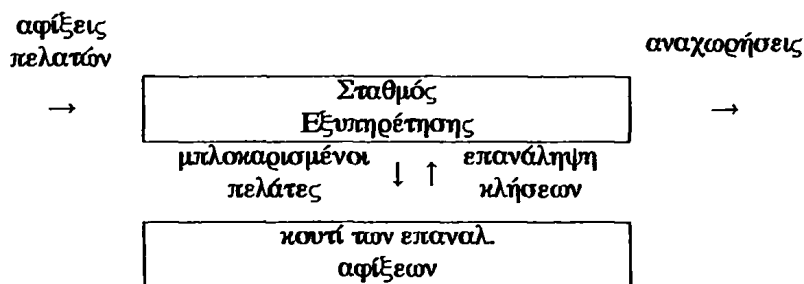
Δηλαδή οι μη υπομονετικοί πελάτες που επιλέγουν να αναχωρήσουν, χάνονται δια παντός για το σύστημα. Αυτό βέβαια είναι η μία πλευρά της πραγματικότητας. Συνήθως οι πελάτες που επιλέγουν να αναχωρήσουν από το σύστημα, επιστρέφουν αργότερα και προσπαθούν να εξυπηρετηθούν.

Τέτοιου είδους ουρές, με πελάτες που επιστρέφουν για να εξυπηρετηθούν μετά από κάποιο χρονικό διάστημα, συναντώνται συχνά στη καθημερινότητα. Για παράδειγμα ένας συνδρομητής τηλεφώνου που καλώντας, βρίσκει την γραμμή κατειλημμένη, συνεχίζει να καλεί έως ότου καταφέρει να συνδεθεί με το άτομο που επιθυμεί να μιλήσει. Επομένως η ροή των κλήσεων σε ένα τηλεφωνικό δίκτυο αποτελείται από δύο μερη: από τις κλήσεις που πραγματοποιούνται απευθείας και από εκείνες που είναι αποτέλεσμα της μη επιτυχούς σύνδεσης των απευθείας κλήσεων. Δηλαδή εκείνων που επαναλαμβάνονται μέχρι να συνδεθεί ο αντίστοιχος συνδρομητής. Επομένως κρίνεται αναγκαία η μοντελοποίηση της συμπεριφοράς του συνδρομητή ενός τηλεφωνικού κέντρου με τη βοήθεια συστημάτων που περιλαμβάνουν το χαρακτηριστικό των επαναλαμβανόμενων αφίξεων. Άλλη μία εφαρμογή, αναφέρεται στην διαδικασία προσγείωσης ενός αεροπλάνου σε κάποιο διάδρομο προσγείωσης, όπου το αεροπλάνο είναι υποχρεωμένο να κάνει κύκλους γύρω από το αεροδρόμιο (επαναλαμβάνει την άφιξή του) έως ότου βρει διαθέσιμο διάδρομο προσγείωσης.

Γενικά, η συγκεκριμένη κλάση συστημάτων εξυπηρέτησης έχει το ακόλουθο χαρακτηριστικό: ένας πελάτης που φθάνοντας στο σύστημα συναντά όλους τους διαθέσιμους υπάλληλους απασχολημένους, αναχωρεί προσωρινά από το σύστημα και επαναλαμβάνει την προσπάθειά του, ώστε να λάβει την εξυπηρέτηση που του αναλογεί μετά από τυχαίο χρονικό διάστημα. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω το συγκεκριμένο χαρακτηριστικό παίζει σημαντικό ρόλο στη μοντελοποίηση δικτύων και συστημάτων επικοινωνιών. Οι Falin and Templeton [80], τόνισαν ότι τα κλασσικά μοντέλα ουρών δεν λαμβάνουν υπόψη το χαρακτηριστικό των επαναλαμβανόμενων αφίξεων και επομένως δεν μπορούν να περιγράψουν ένα μεγάλο αριθμό σημαντικών πρακτικών εφαρμογών. Για να στηρίξουν τον ισχυρισμό τους αναφέρονται σε ένα σημαντικό βιβλίο σχετικά με την εφαρμογή της θεωρίας συστημάτων εξυπηρέτησης σε τηλεπικοινωνίες του Kosten [116], ο οποίος σημειώνει ότι “κάθε θεωρητικό αποτέλεσμα το οποίο δεν λαμβάνει υπόψη του, την επίδραση αυτής της επανάληψης πρέπει να θεωρείται ύποπτο”. Τα συστήματα ουρών με επαναλαμβανόμενες αφίξεις πελατών (*retrial queues or queues with repeated attempts or queues with returning customers*), εισήχθησαν για να αντιμετωπίσουν αυτήν την δυσλειτουργικότητα των κλασσικών συστημάτων.



Το γενικό μοντέλο συράς με επαναλαμβανόμενες αφίξεις πελατών μπορεί να περιγραφεί ως εξής. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν $c (\geq 1)$ διακεκριμένοι υπάλληλοι (θέσεις εξυπηρέτησης), στους οποίους καταφθάνουν πελάτες που ζητούν εξυπηρέτηση. Κάθε τέτοιος πελάτης καλείται πρωτεύων πελάτης (primary call or primary customer). Αν κατά την άφιξή του, ένας πρωτεύων πελάτης βρει διαθέσιμο κάποιον υπάλληλο, τον καταλαμβάνει άμεσα και αναχωρεί από το σύστημα μόλις ολοκληρωθεί η εξυπηρέτησή του. Σε αντίθετη περίπτωση κάθε πελάτης, είναι υποχρεωμένος να αναχωρήσει προσωρινά από αυτό και να επαναλάβει την προσπάθειά του για να εξυπηρετηθεί, ύστερα από τυχαίο χρονικό διάστημα μέχρις ότου βρει ελεύθερο κάποιον υπάλληλο. Αυτοί οι πελάτες, που αναγκάζονται να αναχωρήσουν από το σύστημα (αφού δεν βρήκαν διαθέσιμο τον υπάλληλο στην πρώτη τους προσπάθεια) λέγονται δευτερεύοντες πελάτες (secondary call or secondary customer) και υποθέτουμε ότι εισέρχονται σε έναν υποθετικό χώρο αναμονής, που αποκαλούμε “κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων” (retrial box). Κάθε τέτοιος πελάτης επαναλαμβάνει την προσπάθειά του (retrial customer) ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους, μετά από τυχαίο χρονικό διάστημα έως ότου σε κάποια προσπάθειά του βρει κάποιον υπάλληλο ελεύθερο. Σε αυτή τη περίπτωση θα εξυπηρετηθεί και θα αναχωρήσει από το σύστημα. Αξίζει να σημειωθεί ότι η χωρητικότητα του συστήματος είναι ίση με τον αριθμό των θέσεων εξυπηρέτησης και επομένως δεν σχηματίζεται ουρά μπροστά από τον σταθμό εξυπηρέτησης. Το ακόλουθο σχήμα περιγράφει ένα σύστημα συράς με επαναλαμβανόμενες αφίξεις.



Σχήμα 1.2: Το γενικό μοντέλο με επαναλαμβανόμενες αφίξεις.

Βασικά συστατικά στη μελέτη του συστήματος αποτελούν οι διαδικασίες των αφίξεων, των εξυπηρετήσεων και των επαναλαμβανόμενων αφίξεων. Σημειώνουμε, ότι η διαδικασία των αφίξεων αναφέρεται στη περίπτωση της πρώτης άφιξης του πελάτη στο σύστημα (πρωτεύων πελάτης).



a) Διαδικασία αφίξεων: Περιγράφεται από την ακολουθία a_n , $n \geq 1$, που εκφράζει την διάρκεια του χρόνου μεταξύ της άφιξης του n -οστού και $(n+1)$ -οστού πελάτη.

b) Διαδικασία εξυπηρέτησεων: Περιγράφεται από την ακολουθία τ_n , $n \geq 1$, που εκφράζει τη διάρκεια του χρόνου εξυπηρέτησης του n -οστού πελάτη.

c) Διαδικασία επαναλαμβανόμενων αφίξεων: Περιγράφεται από την ακολουθία $\{\zeta_n, r_{n_1}, r_{n_2}, \dots, r_{n_{\zeta_n}}, n \geq 1\}$, όπου η ζ_n , $n \geq 1$, εκφράζει τον μέγιστο αριθμό επαναλήψεων (προσπαθειών-retrials) που μπορούν να πραγματοποιηθούν από τον n -οστό προτεύοντα πελάτη που μπλοκαρίστηκε και εισήλθε στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων. Συνήθως υποθέτουμε ότι $\zeta_n = \infty$. Η $r_{n_1}, r_{n_2}, \dots, r_{n_{\zeta_n}}$, $n \geq 1$ εκφράζει τις διάρκειες των χρονικών διαστημάτων μεταξύ διαδοχικών επαναλήψεων του εν λόγω n -οστού πελάτη. Συνήθως υποθέτουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές r_k προέρχονται από την εκθετική κατανομή.

Επιπλέον υποθέτουμε ότι οι $\{a_k, k \geq 1\}$, $\{\tau_k, k \geq 1\}$, $\{r_k, k \geq 1\}$, είναι ανεξάρτητες ακολουθίες, ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών.

Ας ορίσουμε με $N(t)$, την τ.μ. που εκφράζει τον αριθμό των πελατών που βρίσκονται στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων και με $C(t)$ την τ.μ. που εκφράζει τον αριθμό των απασχολημένων υπαλλήλων, την χρονική στιγμή t . Τότε η εξέλιξη του συστήματος σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t μπορεί να καθοριστει από την διδιάστατη διαδικασία $X = (C(t), N(t); t \geq 0)$ με τιμές στο $S = \{0, 1, \dots, c\} \times \mathbb{Z}_+$.

Οι πρώτες εργασίες, σχετικά με τη μελέτη συστημάτων με επαναλαμβανόμενες αφίξεις πελατών, εμφανίζονται στη βιβλιογραφία στις αρχές της δεκαετίας του '50 από τους Kosten [117], Clos [50], Cohen [51] και Wilkinson [171], στη προσπάθεια τους να μοντελοποιήσουν τη συμπεριφορά των συνδρομητών των τηλεφωνικών δικτύων. Συγκεκριμένα το ενδιαφέρον τους εσπάζόταν στην πιθανότητα μπλοκαρίσματος ενός πελάτη (δηλαδή τη πιθανότητα να συναντήσει κατά την άφιξή του όλους τους υπάλληλους απασχολημένους) και στο ποσοστό των πελατών που τελικά χάνονται από το σύστημα. Από τις πρώτες εργασίες της δεκαετίας του '50 μέχρι σήμερα, έχουν δημοσιευτεί πάνω από 500 εργασίες σε διάφορα περιοδικά επιχειρησιακής έρευνας, μαθηματικού ενδιαφέροντος και τηλεπικοινωνιακών συστημάτων, γεγονός που φανερώνει το πρακτικό και ερευνητικό ενδιαφέρον για τη μελέτη τέτοιων συστημάτων. Επιπλέον διάφορα βιβλία θεωρίας ουρών (Kulkarni [121], Wolff [173]) έχουν αφιερώσει κεφάλαια σχετικά με τα εν λόγω μοντέλα, ενώ έχουν επίσης δημοσιευτεί δύο σημαντικές μονογραφίες, αυτές των Falin and Templeton [80] και Artalejo and Gomez-Corral [23]. Για μία περιεκτική επισκόπηση των βασικών αποτελεσμάτων στα μοντέλα με



επαναλαμβανόμενες αφίξεις πελατών ο αναγνώστης παραπέμπεται στις εξαιρετικές εργασίες των Yang and Templeton [177], Falin [70], [73], Artalejo [6], [5], Kulkarni and Liang [123] και Gomez-Corral [91].

Αξίζει να σημειωθεί ότι η ύπαρξη του χαρακτηριστικού των επαναλαμβανόμενων αφίξεων επιφέρει πολύ σημαντικές τεχνικές και μαθηματικές δυσκολίες στη μελέτη των συστημάτων. Το γεγονός αυτό έχει ως συνέπεια να είναι πολύ δύσκολη η εύρεση αναλυτικών αποτελεσμάτων κυρίως σε μοντέλα επαναλαμβανόμενων αφίξεων με σύνθετα χαρακτηριστικά. Έτσι σε πολλές εργασίες ακολουθούνται προσεγγιστικές μέθοδοι ανάλυσης. Στη συνέχεια θα επικεντρωθούμε στη μελέτη του απλούστερου μοντέλου με επαναλαμβανόμενες αφίξεις πελατών και έναν υπάλληλο εξυπηρέτησης καθώς και στις διάφορες παραλλαγές αυτού.

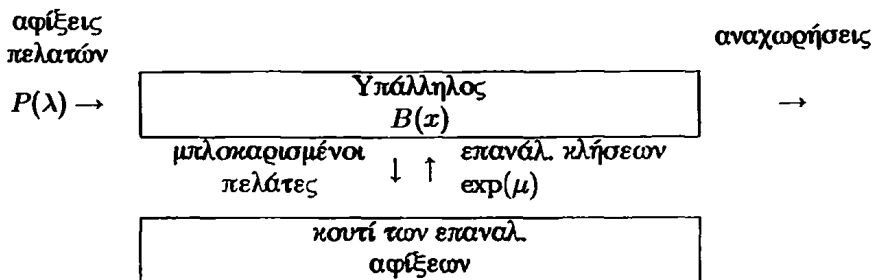
1.5.6 Το βασικό μοντέλο $M/G/1$ με επαναλαμβανόμενες αφίξεις πελατών

Στο παρόν εδάφιο θα παρουσιαστούν τα βασικά αποτελέσματα του μοντέλου $M/G/1$ με επαναλαμβανόμενες αφίξεις πελατών. Σύμφωνα με τον συμβολισμό που χρησιμοποιήσαμε στο προηγούμενο εδάφιο υπάρχει ένας υπάλληλος (οπότε $c = 1$) και επομένως η τ.μ. $C(t)$ λαμβάνει τις τιμές 0 ή 1 ανάλογα με το αν ο υπάλληλος είναι ελεύθερος ή απασχολημένος αντίστοιχα τη χρονική στιγμή t .

Πελάτες καταφθάνουν ένας ένας σύμφωνα με τη διαδικασία *Poisson* παραμέτρου λ . Αυτοί είναι οι πρωτεύοντες πελάτες. Αν ο υπάλληλος είναι ελεύθερος τη στιγμή άφιξης ενός πρωτεύοντος πελάτη, τότε ο εν λόγω πελάτης τον καταλαμβάνει και αναχωρεί αμέσως μετά την εξυπηρέτησή του. Σε αντίθετη περίπτωση ο πελάτης αναχωρεί προσωρινά από το σύστημα και εισέρχεται στο λεγόμενο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων (δευτερεύων πελάτης) απ' όπου επαναλαμβάνει την άφιξη του, ανεξάρτητα από τους άλλους πελάτες που ενδέχεται να βρίσκονται σε αυτό, μετά από τυχαίο χρονικό διάστημα με σκοπό να βρεί ελεύθερο τον υπάλληλο για να τον εξυπηρετήσει. Το χρονικό διάστημα μεταξύ διαδοχικών επαναλαμβανόμενων αφίξεων ενός δευτερεύοντος πελάτη, προέρχεται από την εκθετική κατανομή παραμέτρου μ . Ο δευτερεύων πελάτης που θα βρεί ελεύθερο τον υπάλληλο, θα εξυπηρετηθεί και θα αναχωρήσει, ενώ σε αντίθετη περίπτωση θα επαναλάβει την προσπάθειά του. Ο χρόνος εξυπηρέτησης ενός πελάτη (είτε πρωτεύοντος, είτε δευτερεύοντος) προέρχεται από μία αυθαίρετη κατανομή με α.σ.κ. $B(x)$. Επιπλέον οι διαδικασίες αφίξεων, εξυπηρέτησεων και επαναλαμβανόμενων αφίξεων θεωρούνται ανεξάρτητες. Το ακόλουθο



σχήμα περιγράφει το εν λόγω μοντέλο.



Σχήμα 1.3: Το $M/G/1$ μοντέλο με επαναλαμβανόμενες αφίξεις.

Η λειτουργία του συστήματος εξελίσσεται με τον ακόλουθο τρόπο. Ας υποθέσουμε ότι την χρονική στιγμή η_{i-1} , ολοκληρώνεται η εξυπηρέτηση του $(i-1)$ -οστού πελάτη (οι πελάτες αριθμούνται σύμφωνα με τη σειρά εξυπηρέτησης τους) και αναχωρεί από το σύστημα. Τότε ακόμα και αν υπάρχουν δευτερεύοντες πελάτες στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων, ο υπάλληλος θα παραμείνει άεργος. Αυτό συμβαίνει επειδή οι δευτερεύοντες πελάτες έχουν άγνοια της κατάστασης στην οποία βρίσκεται ο υπάλληλος. Ο υπάλληλος θα παραμείνει άεργος για ένα χρονικό διάστημα R_i περιμένοντας τον επόμενο, i -οστό πελάτη που θα ζητήσει εξυπηρέτηση. Ο i -οστός πελάτης που θα εξυπηρετηθεί θα είναι, είτε πρωτεύων, είτε δευτερεύων, ανάλογα με το ποιός θα ζητήσει πρώτος εξυπηρέτηση. Εστω $N_{i-1} = N(\eta_{i-1}) = n$, ο αριθμός των πελατών που βρίσκονται στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων αμέσως μετά την χρονική η_{i-1} . Τότε η τ.μ. R_i προέρχεται από την εκθετική κατανομή παραμέτρου $\lambda + n\mu$. Ο i -οστός πελάτης θα είναι πρωτεύων με πιθανότητα $\frac{\lambda}{\lambda + n\mu}$, ενώ θα είναι δευτερεύων με πιθανότητα $\frac{n\mu}{\lambda + n\mu}$. Τη χρονική στιγμή $\xi_i = \eta_{i-1} + R_i$, θα αρχίσει η εξυπηρέτηση του i -οστού πελάτη, η οποία θα ολοκληρωθεί μετά από χρόνο S_i (με S_i συμβολίζουμε την διάρκεια του χρόνου εξυπηρέτησης του i -οστού πελάτη). Όλοι οι πρωτεύοντες πελάτες που φθάνουν στο σύστημα στη διάρκεια της εξυπηρέτησης του εν λόγω πελάτη εισέρχονται στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων. Επιπλέον οι δευτερεύοντες πελάτες που επαναλαμβάνουν την προσπάθεια τους στη διάρκεια του S_i , δεν επηρεάζουν την εξέλιξη του συστήματος αφού, βρίσκοντας απασχολημένο τον υπάλληλο, επιστρέφουν ξανά στο κουτί. Την χρονική στιγμή



$\eta_i = \xi_i + S_i$, ολοκληρώνεται η εξυπηρέτηση του i -οστού πελάτη και ο υπάλληλος μένει άεργος ξανά.

Η διδιάστατη διαδικασία $(C(t), N(t); t \geq 0)$, περιγράφει την εξέλιξη του συστήματος και στην περίπτωση μας, όπου ο χρόνος εξυπηρέτησης προέρχεται από μία αυθαίρετη κατανομή, δεν είναι Μαρκοβιανή διαδικασία και επομένως για να μπορέσουμε να μελετήσουμε τις μελλοντικές της καταστάσεις, εισάγουμε μία συμπληρωματική μεταβλητή (στη περίπτωση όπου $C(t) = 1$) $\xi(t)$, η οποία εκφράζει τον χρόνο εξυπηρέτησης που έχει ήδη παρέλθει για τον πελάτη, που απασχολεί τον υπάλληλο τη χρονική στιγμή t (elapsed service time). Επιπλέον ορίζουμε

$$\beta(s) = \int_0^\infty e^{-st} dB(t), \quad \beta_k = (-1)^k \beta^{(k)}(0),$$

$$\rho = \lambda \beta_1, \quad k(z) = \sum_{n=0}^\infty k_n z^n = \beta(\lambda - \lambda z),$$

όπου $\beta^{(k)}(0)$ η παράγωγος k τάξης στο σημείο $s = 0$ και

$$k_n = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dB(t),$$

δηλαδή $\{k_n; n \geq 0\}$, είναι η κατανομή του αριθμού των προτεύοντων πελατών που φθάνουν στο σύστημα στη διάρκεια του χρόνου εξυπηρέτησης ενός πελάτη.

Τα πρώτα αποτελέσματα στο $M/G/1$ μοντέλο με επαναλαμβανόμενες αφίξεις πελατών εμφανίστηκαν στην εργασία των Keilson, Cozzolino and Young [113], οι οποίοι χρησιμοποίησαν την μέθοδο της συμπληρωματικής μεταβλητής (supplementary variable) για να μελετήσουν την από κοινού κατανομή της διδιάστατης διαδικασίας $(C(t), N(t); t \geq 0)$, ενώ ταυτόχρονα έδωσαν και την συνθήκη στατιστικής ισορροπίας. Ο Falin [75], μελέτησε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση στατιστικής ισορροπίας, υποθέτοντας ότι οι χρόνοι εξυπηρέτησης προέρχονται από την εκθετική κατανομή $S_i \sim \exp(\nu)$ ($M/M/1$ σύστημα). Ακολούθως προσάρμοσε την εν λόγω μελέτη στο μοντέλο με εκθετικές εξυπηρετήσεις και πολλούς υπαλλήλους ($M/M/c$ σύστημα). Η μέθοδος του βασίστηκε στην τεχνική της υπερωρχόμενης Μαρκοβιανής αλυσίδας (Imbedded Markov chain). Ετσι μελέτησε το σύστημα σε χρονικές στιγμές αναχώρησης ενός πελάτη από αυτό (σε αυτές τις στιγμές η στοχαστική διαδικασία που περιγράφει το σύστημα είναι Μαρκοβιανή) και παρατήρησε ότι,

$$N_i = N_{i-1} - B_i + \nu_i,$$



όπου η τ.μ. B_i εκφράζει τον αριθμό των πελατών της “ουράς” των επαναλαμβανόμενων αφίξεων που μπήκαν στην εξυπηρέτηση την χρονική στιγμή ξ_i (προφανώς $B_i = 1$ αν ο i -οστός πελάτης που λαμβάνει εξυπηρέτηση είναι δευτερεύων και $B_i = 0$ αν ο i -οστός πελάτης που λαμβάνει εξυπηρέτηση είναι πρωτεύων) και η τ.μ. ν_i εκφράζει τον αριθμό των πρωτεύοντων πελατών που φθάνουν στο σύστημα στη διάρκεια του χρόνου εξυπηρέτησης S_i του i -οστού πελάτη. Επομένως,

$$\Pr(B_i = 1 | N_{i-1} = n) = \frac{n\mu}{\lambda + n\mu}, \quad \Pr(B_i = 0 | N_{i-1} = n) = \frac{\lambda}{\lambda + n\mu}.$$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω και το θεώρημα του Foster (βλέπε και Pakes [155]), απέδειξε ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{N_i; i \geq 0\}$, είναι εργοδική αν $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$. Παράλληλα μελετήθηκαν και οι περιπτώσεις όπου $\rho > 1$ και $\rho = 1$. Αξίζει να σημειωθεί ότι στη περίπτωση όπου $\rho = 1$ η συμπεριφορά του συστήματος εξαρτάται από τον ρυθμό επαναλαμβανόμενων αφίξεων μ , των δευτερεύοντων πελατών. Όταν $\rho > 1$, ο αριθμός των πελατών στο κομμάτι των επαναλαμβανόμενων αφίξεων αυξάνει συνεχώς με τη πάροδο του χρόνου και το σύστημα δεν πρόκειται να περιέλθει σε κατάσταση στατιστικής ισορροπίας.

Η συνθήκη στατιστικής ισορροπίας για το μοντέλο με έναν υπάλληλο και εξυπηρετήσεις που προέρχονται από μία αυθαίρετη κατανομή, μελετήθηκε από τον Falin [77] με τη βοήθεια της περιόδου συνεχούς απασχόλησης του υπαλλήλου (busy period). Αξίζει να σημειωθεί, ότι η συνθήκη $\rho < 1$ είναι επίσης και αναγκαία για να βρισκεται το σύστημα σε στατιστική ισορροπία (βλέπε Sennott et al. [161]).

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στην εύρεση της από κοινού κατανομής της κατάστασης του υπαλλήλου και του αριθμού πελατών στο κομμάτι των επαναλαμβανόμενων αφίξεων, στο γενικό $M/G/1$ μοντέλο με επαναλαμβανόμενες αφίξεις. Εστω,

$$\begin{aligned} p_{0n}(t) &= P(C(t) = 0, N(t) = n), \\ p_{1n}(x, t) dx &= P(C(t) = 1, N(t) = n, x < \xi(t) \leq x + dx), \end{aligned}$$

όπου η τ.μ. $\xi(t)$ εκφράζει τον χρόνο εξυπηρέτησης που έχει ήδη παρέλθει για τον πελάτη που απασχολεί τον υπάλληλο την χρονική στιγμή t . Οι Keilson, Cozzolino and Young [113], ήταν οι πρώτοι που έδωσαν αποτελέσματα σχετικά με την από κοινού κατανομή της $(C(t), N(t); t \geq 0)$ χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της συμπληρωματικής μεταβλητής, θεωρώντας ότι το σύστημα ήταν σε κατάσταση στατιστικής ισορροπίας ($\rho < 1$). Ορίζοντας με $p_{0n} = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{0n}(t)$, $p_{1n}(x) =$



$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{1n}(x, t)$, απέδειξαν ότι,

$$\begin{aligned} P_0(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{0n} z^n = (1 - \rho) \exp\left\{\frac{\lambda}{\mu} \int_1^z \frac{1-k(u)}{k(u)-u} du\right\}, \\ P_1(z, x) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{1n}(x) z^n = \lambda \frac{1-z}{k(z)-z} P_0(z) [1 - B(x)] e^{-(\lambda - \lambda x)x}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Στην περίπτωση όπου $C(t) = 1$, ολοκληρώνοντας ως προς x την δεύτερη σχέση στην (1.1), προσδιορίζουμε την γεννήτρια των πιθανοτήτων $p_{1n} = P(C(t) = 1, N(t) = n)$,

$$P_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{1n} z^n = \frac{1 - k(z)}{k(z) - z} P_0(z).$$

Με την βοήθεια των γεννητριών $P_0(z)$, $P_1(z)$ μπορούμε να υπολογίσουμε χρήσιμα χαρακτηριστικά μεγέθη του συστήματος σε στατιστική ισορροπία όπως,

α) την γεννήτρια πιθανοτήτων του αριθμού των πελατών που βρίσκονται στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων,

$$P(z) = P_0(z) + P_1(z) = \frac{1 - z}{k(z) - z} P_0(z),$$

β) την γεννήτρια πιθανοτήτων του αριθμού των πελατών που βρίσκονται στο σύστημα $K(t) = C(t) + N(t)$ (στον χώρο εξυπηρέτησης και στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων),

$$Q(z) = P_0(z) + z P_1(z) = k(z) \frac{1 - z}{k(z) - z} P_0(z) = P(z) \times k(z),$$

γ) τις πιθανότητες των καταστάσεων του υπαλλήλου,

$$\begin{aligned} p_0 &= \text{Pr}(\text{ο υπάλληλος άεργος}) = 1 - \rho, \\ p_1 &= \text{Pr}(\text{ο υπάλληλος απασχολημένος}) = \rho, \end{aligned} \quad (1.2)$$

δ) τον αναμενόμενο αριθμό πελατών στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων και στο σύστημα συνολικά

$$\begin{aligned} E(N) &= \frac{d}{dz} P(z)|_{z=1} = \frac{\lambda^2}{1-\rho} \left(\frac{\beta_1}{\mu} + \frac{\beta_2}{2} \right), \\ E(K) &= \frac{d}{dz} Q(z)|_{z=1} = \rho + \frac{\lambda^2}{1-\rho} \left(\frac{\beta_1}{\mu} + \frac{\beta_2}{2} \right). \end{aligned}$$

Ο Aleksandron [3] και ο Falin [73], μελέτησαν το ίδιο σύστημα και βρήκαν τα ίδια αποτελέσματα με τα παραπάνω, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της υπεισερχόμενης Μαρκοβιανής αλυσίδας. Συγκεκριμένα μελέτησαν το σύστημα σε



χρονικές στιγμές αναχωρήσεων. Αν $\pi_n = \lim_{i \rightarrow \infty} N_i = n$, $n \geq 0$, η κατανομή της Μαρκοβιανής αλυσίδας N_i , τότε

$$\pi_n = \sum_{m=0}^n \pi_m \frac{\lambda}{\lambda + k\mu} k_{n-m} + \sum_{m=1}^{n+1} \pi_m \frac{m\mu}{\lambda + k\mu} k_{n-m+1},$$

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n z^n.$$

Αποδεικνύεται μετά από πράξεις ότι η $\phi(z)$ συμπίπτει με την γεννήτρια πιθανοτήτων σε στατιστική ισορροπία της κατανομής της τ.μ. $K(t) = C(t) + N(t)$, δηλαδή της $Q(z)$.

Νωρίτερα και ανεξάρτητα, οι Jonin and Sedol [104], μελέτησαν το σύστημα με εκθετικές εξυπηρετήσεις ($B(x) = 1 - e^{-\nu x}$) και έδωσαν ακριβείς εκφράσεις για τις πιθανότητες p_{0n} , p_{1n} , όπως δίνονται παρακάτω:

$$p_{0n} = \frac{\rho^n}{n! \mu^n} \prod_{i=0}^{n-1} (\lambda + i\mu) \times (1 - \rho)^{1+\lambda/\mu},$$

$$p_{1n} = \frac{\rho^{n+1}}{n! \mu^n} \prod_{i=0}^n (\lambda + i\mu) \times (1 - \rho)^{1+\lambda/\mu},$$

καθώς και εκφράσεις για την p_1 και τον αναμενόμενο αριθμό των πελατών που βρίσκονται στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων οποιαδήποτε χρονική στιγμή t , $E(N(t))$. Παρόμοιες εκφράσεις για τα p_1 , $E(N(t))$ έδωσαν, ο Jonin [105] και οι Jonin and Brezgunova [106] στη περίπτωση που οι εξυπηρετήσεις προέρχονταν από την κατανομή Erlang. Τέλος, σημειώνουμε τη συμβολή του Artalejo [9], που έδωσε ακριβείς εκφράσεις σε στατιστική ισορροπία στο μοντέλο με χρόνους εξυπηρέτησης που προέρχονταν από υπερεκθετική κατανομή, για την από κοινού κατανομή της κατάστασης του υπαλλήλου και του αριθμού των πελατών στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων.

Η μελέτη της χρονικά εξαρτημένης κατανομής του αριθμού των πελατών που βρίσκονται στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων (transient analysis), πραγματοποιήθηκε στις εργασίες του Falin [77], [73], με τη βοήθεια της στοχαστικής διαδικασίας $(C(t), \xi(t), N(t), I(t))$, όπου η τ.μ. $I(t)$ εκφράζει τον αριθμό των πελατών που έχουν εξυπηρετηθεί μέχρι τη χρονική στιγμή t , δεδομένου ότι το σύστημα στην έναρξη της λειτουργίας του ($t = 0$) ήταν άδειο. Η μελέτη του περιελάμβανε τον υπολογισμό των γεννητρικών πιθανοτήτων των μετασχηματισμών Laplace των

$$p_{0ni}(t) = \Pr(C(t) = 0, N(t) = n, I(t) = i),$$

$$p_{1ni}(x, t) dx = \Pr(C(t) = 0, N(t) = n, I(t) = i, x < \xi(t) \leq x + dx).$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η κατανομή της τ.μ. που περιγράφει την κατάσταση του υπαλλήλου σε στατιστική ισορροπία (1.2), εξαρτάται από την διάρκεια του χρόνου εξυπηρέτησης $B(x)$, μόνο μέσω της μέσης της τιμής β_1 και δεν



εξαρτάται καθόλου από τον ρυθμό επαναλαμβανόμενων αφίξεων μ , των δευτερευόντων πελατών. Στην πραγματικότητα, η εν λόγω κατανομή συμπίπτει με την αντίστοιχη κατανομή στο κλασσικό $M/G/1$ σύστημα χωρίς επαναλαμβανόμενες αφίξεις. Αυτό το αποτέλεσμα είναι προφανές αν σκεφτούμε ότι σε κάθε μοντέλο ουράς με έναν υπάλληλο η πιθανότητα, ο υπάλληλος να είναι απασχολημένος είναι ίση με την πυκνότητα κυκλοφορίας. Αφού στο γενικό μοντέλο με επαναλαμβανόμενες αφίξεις, οι πελάτες δεν αναχωρούν χωρίς εξυπηρέτηση, η πυκνότητα κυκλοφορίας ισούται με $\lambda\beta_1 = \rho$.

Είναι γνωστό ότι η μελέτη της περιόδου συνεχούς απασχόλησης σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης πελατών είναι ιδιαίτερα σημαντική. Η περίοδος συνεχούς απασχόλησης, εκφράζει την διάρκεια του χρόνου από τη στιγμή που ένας πελάτης φθάνει σε άδειο σύστημα, έως τη στιγμή που κάποιος πελάτης αναχωρώντας, αφήνει το σύστημα πάλι άδειο. Αξίζει να παρατηρήσουμε την διαφορά της εν λόγω περιόδου, μεταξύ ενός κλασσικού συστήματος και ενός συστήματος με επαναλαμβανόμενες αφίξεις. Σε ένα κλασσικό σύστημα ο υπάλληλος αρχίζει να εξυπηρετεί τον νέο-αφιχθέντα πελάτη και θα μείνει για πρώτη φορά άεργος όταν δεν θα υπάρχουν πελάτες στην ουρά. Δηλαδή η εν λόγω περίοδος αποτελείται από διαδοχικές περιόδους εξυπηρέτησης των πελατών που υπάρχουν στην ουρά. Στη περίπτωση του συστήματος με επαναλαμβανόμενες αφίξεις, ο υπάλληλος παραμένει πάντα άεργος για κάποιο χρονικό διάστημα μετά από κάθε εξυπηρέτηση, ακόμα και αν υπάρχουν δευτερεύοντες πελάτες στην ουρά. Αρα στη συγκεκριμένη περίπτωση η περίοδος συνεχούς απασχόλησης αποτελείται από περιόδους εξυπηρέτησης πελατών και περιόδους αεργίας (υπάρχουν δευτερεύοντες πελάτες στο κοντί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων). Επομένως στα συστήματα με επαναλαμβανόμενες αφίξεις, ως περίοδο συνεχούς απασχόλησης εννοούμε το χρονικό διάστημα από τη στιγμή που το κοντί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων είναι άδειο ($N(t) = 0$) και κάποιος πελάτης αρχίζει να εξυπηρετείται και ολοκληρώνεται τη στιγμή που αναχωρεί κάποιος πελάτης αφήνοντας για πρώτη φορά το κοντί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων πάλι άδειο ($C(t) = 0, N(t) = 0$).

Ο Aleksandrov [3], ήταν ο πρώτος που μελέτησε την δομή της περιόδου συνεχούς απασχόλησης στο $M/G/1$ σύστημα με επαναλαμβανόμενες αφίξεις, αλλά κάποιες από τις σχέσεις που προέκυψαν στη μελέτη του, ήταν λανθασμένες. Οι Choo and Conolly [39], επίσης ασχολήθηκαν με την εν λόγω περίοδο, αλλά στο σύστημα με εκθετικές εξυπηρετήσεις. Η λεπτομερής μελέτη της περιόδου συνεχούς απασχόλησης πραγματοποιήθηκε από τον Falin [77], με την βοήθεια της



μεθόδου των μαρκαρισμένων πελατών. Συγκεκριμένα, έδειξε ότι ο μετασχηματισμός Laplace της από κοινού κατανομής της γεννήτριας πιθανοτήτων της εν λόγω περιόδου L και του αριθμού των πελατών που εξυπηρετούνται στη διάρκεια αυτής I δίνεται από την ακόλουθη σχέση,

$$E[e^{-sL}y^I] = \frac{s+\lambda}{\lambda} - \frac{\mu}{\lambda} \left[\int_0^{\infty} \pi_{\infty}(s,y) \exp\left\{-\frac{1}{\mu} \int_0^u \frac{s+\lambda-\lambda y \beta(s+\lambda-\lambda v)}{y \beta(s+\lambda-\lambda v)-v} dv\right\} \times \frac{du}{y \beta(s+\lambda-\lambda v)-u} \right]^{-1},$$

όπου η ποσότητα $\pi_{\infty}(s,y)$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $y \beta(s+\lambda-\lambda z) = z$ στο διάστημα $[0, 1]$. Επιπλέον απέδειξε τα ακόλουθα, σχετικά με την συνθήκη στατιστικής ισορροπίας του συστήματος.

α) Αν $\rho > 1$ ή $\rho = 1$ και $\mu > 2\beta_1/\beta_2$ τότε $P(L = \infty) = P(I = \infty) > 0$;

β) Αν $\rho = 1$ και $\mu \geq 2\beta_1/\beta_2$ τότε $E[L] = E[I] = \infty$;

γ) Αν $\rho < 1$ τότε $E[I] = \frac{1}{1-\rho} \exp\left\{\frac{\lambda}{\mu} \int_0^1 \frac{1-k(u)}{k(u)-u} du\right\} < \infty$, $E[L] = \frac{E[I]-1}{\lambda} < \infty$.

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι συνθήκη στατιστικής ισορροπίας ή ισοδύναμα η συνθήκη κάτω από την οποία είναι θετικώς επαναληπτική η Μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφει την εξέλιξη του συστήματος, εξαρτάται από το αν είναι ή όχι πεπερασμένες οι τιμές των $E[L]$, $E[I]$. Άρα η συνθήκη $\rho < 1$ είναι αναγκαία και ικανή για να είναι το σύστημα σε στατιστική ισορροπία.

Ο Falin [69], γενίκευσε τα παραπάνω αποτελέσματα εισάγοντας την k -περίοδο συνεχούς απασχόλησης, η οποία αρχίζει όταν ένας πελάτης εισέρχεται στο σύστημα, βρίσκοντας ελεύθερο τον υπάλληλο ενώ υπάρχουν $k-1$, $k \geq 1$, πελάτες στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων και ολοκληρώνεται όταν, για πρώτη φορά, αναχωρώντας ένας πελάτης αφήνει άδειο το κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων. Η περίπτωση όπου $k=1$, παραπέμπει στον ορισμό της περιόδου συνεχούς απασχόλησης που δόθηκε προηγουμένως. Μία επίσης λεπτομερή μελέτη πάνω στον χρόνο συνεχούς απασχόλησης L , έδωσαν αργότερα οι Artalejo and Falin [13] εισάγοντας δύο νέα χαρακτηριστικά, αυτό του χρόνου αεργίας στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων (orbit idle period) και αυτό του χρόνου συνεχούς απασχόλησης στο εν λόγω κουτί (orbit busy period). Επιπλέον έδωσαν την σχέση που συνδέει την L με τον χρόνο συνεχούς απασχόλησης στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων. Αργότερα οι Artalejo and Lopez-Herrero [20], πρότειναν μία εναλλακτική μέθοδο με την βοήθεια των taboo πιθανοτήτων, για την μελέτη της περιόδου συνεχούς απασχόλησης και υπολόγησαν σε κλειστή μορφή την ροπή δεύτερης τάξης περί το μηδέν της εν λόγω περιόδου. Η Lopez-Herrero [138], μελέτησε εκτενώς την κατανομή του αριθμού των



πελατών I , που εξυπηρετούνται στην διάρκεια της περιόδου συνεχούς απασχόλησης L , με την βοήθεια της στατιστικής τεχνικής της μέγιστης εντροπίας. Ακολούθως, η ίδια συγγραφέας [139] έδωσε έναν επαναληπτικό αλγόριθμο για τον υπολογισμό της κατανομής του I , μελετώντας το σύστημα σε χρονικές στιγμές αναχωρήσεων. Τέλος, οι Artalejo and Gomez-Corral [19], προχώρησαν σε μία λεπτομερή μελέτη της περιόδου συνεχούς απασχόλησης στο $M/G/1$ σύστημα με περιορισμένες θέσεις (K) στο κομμάτι των επαναλαμβανόμενων αφίξεων.

Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό στη μελέτη συστημάτων με επαναλαμβανόμενες αφίξεις αποτελεί ο ουσιαστικός χρόνος αναμονής (virtual waiting time) $W(t)$, ο οποίος ορίζεται ως το χρονικό διάστημα που θα χρειαστεί να περιμένει ένας πελάτης για να εισέλθει στον χώρο εξυπηρέτησης, από τη στιγμή που έφτασε στο σύστημα τη χρονική στιγμή t . Ο Falin [71], πρότεινε μία μέθοδο για την μελέτη της $W(t)$ και τον υπολογισμό της αναμενόμενης τιμής της $E(W(t))$ στη περίπτωση των εκθετικών εξυπηρετήσεων ($B(x) = 1 - e^{-\nu x}$) και έδειξε ότι σε στατιστική ισορροπία

$$E(W) = \frac{\rho}{1-\rho} \left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\mu} \right).$$

Ασυμπτωτικές ιδιότητες της $W(t)$ σε περιπτώσεις όπου $\rho \rightarrow 1$, επίσης δόθηκαν από τον Falin [74]. Οι Choo and Conolly [39], επίσης ασχολήθηκαν με την μελέτη της $W(t)$, ενώ θα πρέπει να σημειώσουμε ότι όλες οι παραπάνω εργασίες αναφέρονταν σε μοντέλα με εκθετικές εξυπηρετήσεις. Οι Falin and Fricker [81], ήταν οι πρώτοι που μελέτησαν την κατανομή του ουσιαστικού χρόνου αναμονής, στο $M/G/1$ μοντέλο με επαναλαμβανόμενες αφίξεις πελατών, υπολογίζοντας τον μετασχηματισμό Laplace $E(e^{-sW})$, της $W(t)$ σε στατιστική ισορροπία, με την βοήθεια της μεθόδου των μαρκαρισμένων πελατών. Συγκεκριμένα,

$$E(e^{-sW}) = 1 - \rho + \frac{1-\rho}{s} \int_1^{\pi_\infty(s)} \frac{\lambda(1-u)[\beta(\lambda-\lambda u)-\beta(s+\lambda-\lambda u)]}{[\beta(\lambda-\lambda u)-u][\beta(s+\lambda-\lambda u)-u]} \\ \times \exp\left\{ \int_u^1 \frac{(\mu+s)[\beta(\lambda-\lambda v)-v] + \lambda(1-v)[\beta(\lambda-\lambda v)-\beta(s+\lambda-\lambda v)]}{\mu[\beta(\lambda-\lambda v)-v][\beta(s+\lambda-\lambda v)-v]} dv \right\} du,$$

όπου $\pi_\infty(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace του μήκους της περιόδου συνεχούς απασχόλησης στο κλασσικό $M/G/1$ σύστημα χωρίς επαναλαμβανόμενες αφίξεις. Ιδιαίτερη μνεία πρέπει να γίνει και στον Grishchekin [93] για την μελέτη του χρόνου αναμονής με την βοήθεια των κλαδωτών ανελξέων (branching process). Ο ουσιαστικός χρόνος αναμονής, μελετήθηκε και σε γενικότερα μοντέλα με επαναλαμβανόμενες αφίξεις. Για περισσότερες πληροφορίες, ο αναγνώστης παρα-



πέμπεται στις εργασίες των Choi, Han and Falin [35], Choi, Park and Pearce [36], Falin and Artalejo [79].

Παραπάνω παρατηρήσαμε το γεγονός ότι η λειτουργία του κλασσικού $M/G/1$ συστήματος με επαναλαμβανόμενες αφίξεις, εναλλάσσεται μεταξύ περιόδων εξυπηρέτησης και αεργίας, στη διάρκεια των οποίων ενδέχεται να υπάρχουν πελάτες στο κουτί. Επομένως το μοντέλο με επαναλαμβανόμενες αφίξεις μπορεί να θεωρηθεί και ως μία ειδική μορφή μοντέλου με διακοπές, στο οποίο οι διακοπές του υπάλληλου θα αρχίζουν αμέσως μετά από μία εξυπηρέτηση και η διάρκεια τους θα είναι όση και η διάρκεια του χρόνου που χρειάζεται κάποιος πελάτης (είτε από έξω, είτε από το κουτί) για να “καταλάβει” τον υπάλληλο. Αρα τίθεται το ερώτημα, αν στο εν λόγω σύστημα ισχύει κάποια μορφή διάσπασης (decomposition property), που να υποδεικνύει την εξάρτηση του συστήματος από τον ρυθμό επανάληψης των αφίξεων μ , των δευτερευόντων πελατών.

Η ιδιότητα της διάσπασης στα μοντέλα με επαναλαμβανόμενες αφίξεις πελατών έχει μελετηθεί από πολλούς συγγραφείς όπως οι Yang et al. [177], [175], Falin, Artalejo and Martin [82], Artalejo and Falin [12]. Οι Artalejo and Falin [12], έδωσαν και ακριβείς τύπους για την εύρεση ροπών της κατανομής του μήκους των πελατών στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων σε στατιστική ισορροπία. Συγκεκριμένα απέδειξαν ότι ο συνολικός αριθμός των πελατών K_μ στο $M/G/1$ σύστημα με επαναλαμβανόμενες αφίξεις πελατών, εκφράζεται ως το άθροισμα δύο ανεξάρτητων τ.μ., η μία από τις οποίες είναι ο συνολικός αριθμός του αριθμού των πελατών K_∞ , στο $M/G/1$ σύστημα χωρίς επαναλαμβανόμενες αφίξεις και η άλλη είναι η τ.μ. R_μ , που εκφράζει τον αριθμό των πελατών στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων, δοθέντος ότι ο υπάλληλος είναι άεργος. Δηλαδή $K_\mu = K_\infty + R_\mu$. Η γεννήτρια των πιθανοτήτων της R_μ δίνεται από,

$$R_\mu(z) = \exp\left\{\frac{\lambda}{\mu} \int_1^z \frac{1-k(u)}{k(u)-u} du\right\} = \frac{P_0(z)}{1-\rho},$$

ενώ είναι γνωστό ότι η γεννήτρια πιθανοτήτων του αριθμού των πελατών στο κλασσικό $M/G/1$ σύστημα χωρίς επαναλαμβανόμενες αφίξεις δίνεται από

$$Q_\infty(z) = (1-\rho) \frac{1-z}{k(z)-z} k(z).$$

Ετσι η γεννήτρια πιθανοτήτων του αριθμού των πελατών στο $M/G/1$ σύστημα με επαναλαμβανόμενες αφίξεις δίνεται από την $Q(z) = Q_\infty(z)R_\mu(z)$. Ομοια η γεννήτρια του αριθμού των πελατών στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων



δίνεται από την σχέση

$$P(z) = P_{\infty}(z)R_{\mu}(z),$$

όπου

$$P_{\infty}(z) = (1 - \rho) \frac{1 - z}{k(z) - z},$$

η γεννήτρια πιθανοτήτων του αριθμού των πελατών που βρίσκονται στην ουρά (όχι στην εξυπηρέτηση) στο κλασσικό $M/G/1$ σύστημα χωρίς επαναλαμβανόμενες αφίξεις. Εκτοτε η ιδιότητα της διάσπασης στα μοντέλα με επαναλαμβανόμενες αφίξεις πελατών μελετήθηκε σε πολλές παραλλαγές του μοντέλου $M/G/1$ με επαναλαμβανόμενες αφίξεις.

Ο Falin [70], [72], ήταν ο πρώτος που μελέτησε την διαδικασία αναχωρήσεων (departure process) στο $M/G/1$ σύστημα με επαναλαμβανόμενες αφίξεις. Η διαδικασία αναχωρήσεων ορίζεται ως η ακολουθία των χρονικών στιγμών η_i , $i \geq 1$, στις οποίες αναχωρούν οι πελάτες μετά το πέρας της εξυπηρέτησης τους ή ισόδυναμα από την ακολουθία $T_i = \eta_i - \eta_{i-1}$, των μεσοδιαστημάτων μεταξύ διαδοχικών αναχωρήσεων. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι το χρονικό διάστημα T_i αποτελείται από δύο μέρη. Το χρονικό διάστημα στο οποίο ο υπάλληλος παραμένει άεργος περιμένοντας τον i -οστό πελάτη, R_i και τον χρόνο εξυπηρέτησης S_i του εν λόγω πελάτη. Δηλαδή $T_i = R_i + S_i$. Ο Falin υπολόγισε εκφράσεις για την αναμενόμενη τιμή και την διακύμανση της T_i σε στατιστική ισορροπία. Αξίζει να σημειώσουμε ότι η αναμενόμενη τιμή της T_i ισούται με $E(T_i) = 1/\lambda$. Δηλαδή η $E(T_i)$ είναι ανεξάρτητη του ρυθμού επαναλαμβανόμενων αφίξεων μ . Αυτό είναι απόρροια του γεγονότος ότι σε στατιστική ισορροπία ο μέσος χρόνος μεταξύ διαδοχικών αναχωρήσεων, είναι ίσος με τον μέσο χρόνο μεταξύ διαδοχικών αφίξεων. Η δομή της διαδικασίας αναχωρήσεων μελετήθηκε εν συντομία και από τους Choo and Conolly [39].

Ανάλογης σημασίας με την διαδικασία αναχωρήσεων αποτελεί και η διαδικασία έναρξης των εξυπηρετήσεων $\{\xi_i; i \geq 1\}$ (quasi-input process), η οποία μελετήθηκε αρχικά από τον Falin [73]. Αμεσα συνδεδεμένη με την παραπάνω ακολουθία είναι η ακολουθία των μεσοδιαστημάτων $A_i = \xi_i - \xi_{i-1}$, μεταξύ διαδοχικών ενάρξεων εξυπηρέτησης. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι $E(A_i) = E(T_i) = 1/\lambda$.

Η πολυπλοκότητα της ανάλυσης και η αδυναμία που παρουσιάζεται στην πρακτική εφαρμογή των βασικών χαρακτηριστικών των μοντέλων με επαναλαμβανόμενες αφίξεις, έκρινε αναγκαία την εύρεση μεθόδων που θα δίνουν αλγο-



ριθμικά εύχρηστα υπολογιστικά αποτελέσματα. Για το λόγο αυτό τις τελευταίες δύο δεκαετίες, υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός εργασιών πάνω στα μοντέλα με επαναλαμβανόμενες αφίξεις με την βοήθεια πινακο-αναλυτικών μεθόδων (matrix analytic techniques), που εισήχθηκαν από τον Neuts [152], παράλληλα με την εισαγωγή των κατανομών τύπου φάσεων (PH-distribution). Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τις κατανομές τύπου φάσεων παραπέμπουμε τον αναγνώστη στους Neuts [152] και Dimitriou [58]. Με κατάλληλη μοντελοποίηση, αρκετά πολύπλοκα συστήματα μπορούν να περιγραφούν από μία Μαρκοβιανή αλυσίδα τύπου $M/G/1$ ή τύπου $G/M/1$, είτε να έχουν τη δομή μίας διαδικασίας QBD . Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τις πινακο-αναλυτικές μεθόδους στη μελέτη συστημάτων με επαναλαμβανόμενες αφίξεις, ο αναγνώστης παραπέμπεται στην λεπτομερή επισκόπηση του Gomez-Corral [91], καθώς και στο πρόσφατο βιβλίο των Artalejo and Gomez-Corral [23], που δίνει έμφαση στην υπολογιστική προσέγγιση τέτοιων συστημάτων.

Η πρώτη εργασία που μελετήθηκε με την βοήθεια πινακο-αναλυτικών μεθόδων έγινε από τους Diamond and Alfa [56], οι οποίοι θεώρησαν ότι οι χρόνοι εξυπηρέτησης προέρχονταν από μία PH-κατανομή. Σε αυτή τη περίπτωση η διαδικασία που περιγράφει την εξέλιξη του συστήματος είναι η $(C(t), N(t), J(t))$, όπου η $C(t)$ περιγράφει την κατάσταση του υπαλλήλου (0 αν είναι άεργος, 1 αν είναι απασχολημένος), η τ.μ. $N(t)$ εκφράζει τον αριθμό των πελατών στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων και η τ.μ. $J(t)$ εκφράζει την φάση στην οποία βρίσκεται η διαδικασία της εξυπηρέτησης. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η εν λόγω διαδικασία είναι Μαρκοβιανή, γεγονός που εξασφαλίζεται από την γνώση οποιαδήποτε στιγμή t της φάσης στην οποία βρίσκεται η διαδικασία εξυπηρέτησης μίας και κάθε φάση της εν λόγω διαδικασίας προέρχεται από την εκθετική κατανομή. Τα προβλήματα που αντιμετωπίζουμε με την εν λόγω μεθοδολογία αναφέρονται γενικά, στο υπολογιστικό μέρος εξαιτίας της επιπλέον μεταβλητής που περιγράφει τη διαδικασία που προέρχεται από την PH-κατανομή.

Η επισκόπηση του Gomez-Corral [91], παρουσιάζει όλες τις δημοσιεύσεις στο συγκεκριμένο αντικείμενο μέχρι το 2006 καθώς και διάφορες παραλλαγές αυτών. Ενδεικτικά αναφέρουμε αυτές των Dudin and Klimenok [64], [65], Choi, Chang and Dudin [30], Artalejo and Chakravarthy [11].

Αλγοριθμικές μέθοδοι για τον υπολογισμό της κατανομής του αριθμού των πελατών στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων στο $M/G/1$ σύστημα με επαναλαμβανόμενες αφίξεις μελετήθηκαν αρχικά από τον de Kok [55], συνδυάζοντας ιδιότητες των αναγεννητικών διαδικασιών (regenerative process) και την ιδιότητα PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages) του Wolff [173].



Παρά το γεγονός ότι τα χαρακτηριστικά του συστήματος σε στατιστική ισορροπία, όσον αφορά τον αναμενόμενο αριθμό πελατών στο κουτί δίνονται σε κλειστό τύπο είναι δύσκολα στο χειρισμό τους, καθώς εμπεριέχουν ολοκληρώσεις μετασχηματισμών Laplace, είτε λύσεις συναρτησιακών σχέσεων κ.ο.κ.. Αυτό σημαίνει στη πράξη, ότι η γεννήτρια συνάρτηση δεν αποκαλείται με ακρίβεια τα χαρακτηριστικά της κατανομής $\{p_n = p_{0n} + p_{1n}; n \geq 0\}$. Το ίδιο πρόβλημα υπάρχει ακόμα και στη περίπτωση του κλασσικού $M/G/1$ συστήματος χωρίς επαναλαμβανόμενες αφίξεις. Παρ' όλα αυτά, η κατανομή του αριθμού των πελατών στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων μπορεί να προσεγγιστεί σε κάποιες ειδικές περιπτώσεις. Το πρώτο αποτέλεσμα σε αυτή τη κατεύθυνση έδωσε ο Falin [77], ο οποίος απέδειξε ότι όταν το $\rho \rightarrow 1$ (heavy traffic analysis), η τ.μ. $(1 - \rho)N(t)$ συγκλίνει ασυμπτωτικά σε μία Γάμμα κατανομή. Το γεγονός ότι στα μοντέλα με επαναλαμβανόμενες αφίξεις υπάρχει επιπλέον μία παράμετρος μ , προκαλούν το ενδιαφέρον οι περιπτώσεις όπου $\mu \rightarrow 0$ και $\mu \rightarrow \infty$. Ο Falin [77], μελέτησε τις παραπάνω περιπτώσεις και απέδειξε ότι στη περίπτωση όπου $\mu \rightarrow 0$, δηλαδή στη περίπτωση που οι δευτερεύοντες πελάτες αργούν πολύ να επαναλάβουν την προσπάθεια τους για να συνδεθούν με τον υπάλληλο ($(1/\mu) \rightarrow \infty$), η κατανομή του αριθμού των πελατών στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων συγκλίνει ασυμπτωτικά σε μία κανονική κατανομή με μέση τιμή $\lambda\rho(1 - \rho)^{-1}\mu^{-1}$ και διακύμανση $(\lambda^3\beta_2 + 2\lambda\rho - 2\lambda\rho^2)/(2(1 - \rho)^2\mu)$. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον προκαλεί η περίπτωση όπου $\mu \rightarrow \infty$, δηλαδή όταν ο πελάτης που δεν βρήκε διαθέσιμο τον υπάλληλο σε κάποια προσπάθεια του, επαναλαμβάνει σχεδόν αμέσως την προσπάθεια να συνδεθεί μαζί του ($(1/\mu) \rightarrow 0$). Σε αυτή τη περίπτωση, το κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων συμπεριφέρεται σαν μία κανονική ουρά και επομένως η κατανομή του αριθμού των πελατών στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων συμπίπτει με την κατανομή του αριθμού των πελατών στο κλασσικό $M/G/1$ σύστημα χωρίς επαναλαμβανόμενες αφίξεις. Οι στατιστικές μέθοδοι της θεωρίας πληροφοριών και της αρχής της μέγιστης εντροπίας, χρησιμοποιήθηκαν για τον προσεγγιστικό υπολογισμό της κατανομής των καταστάσεων του $M/G/1$ μοντέλου με επαναλαμβανόμενες αφίξεις. Τις παραπάνω μεθόδους εφάρμοσαν στις εργασίες τους, οι Falin, Martin and Artalejo [83] και Artalejo and Lopez-Herrero [21].



1.5.7 Παραλλαγές του $M/G/1$ με επαναλαμβανόμενες αφίξεις πελατών

Σε όλα τα μοντέλα που αναφερθήκαμε παραπάνω, υποθέσαμε ότι η διάρκεια του χρόνου μεταξύ διαδοχικών επαναλήψεων της άφιξης ενός δευτερεύοντος πελάτη, προέρχονταν από την εκθετική κατανομή με παράμετρο μ . Επομένως η διάρκεια του χρόνου μεταξύ διαδοχικών επαναλήψεων από το κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων δοθέντος ότι υπάρχουν j (≥ 0) πελάτες στο κουτί, προέρχεται από την εκθετική κατανομή με παράμετρο $j\mu$. Ο παραπάνω “κανόνας” επανάληψης (classical retrial policy) της προσπάθειας ενός πελάτη βρίσκει άμεση εφαρμογή στη μοντελοποίηση συστημάτων τηλεφωνίας.

Αντιθέτως, πολλές εφαρμογές δικτύων υπολογιστών και επικοινωνιών βασίζονται στο χαρακτηριστικό ότι η διάρκεια του χρόνου μεταξύ διαδοχικών επαναλαμβανόμενων αφίξεων ελέγχεται από ένα ηλεκτρονικό μηχανισμό και επομένως είναι ανεξάρτητη από τον αριθμό των πελατών που προσπαθούν να συνδεθούν με τον υπάλληλο. Σε αυτή τη περίπτωση η διάρκεια του χρόνου μεταξύ διαδοχικών επαναλήψεων, προέρχεται από την εκθετική κατανομή με παράμετρο μ , ανεξάρτητα του αριθμού των πελατών που βρίσκονται στο κουτί (constant retrial policy). Ο Fayolle [85], ήταν ο πρώτος που εφάρμοσε τον παραπάνω κανόνα επανάληψης αφίξεων στο μοντέλο με εκθετικές εξυπηρετήσεις, ενώ ταυτόχρονα μελέτησε τις συνθήκες στατιστικής ισορροπίας και τον χρόνο αναμονής. Αργότερα ο Farahmand [86], μελέτησε το ίδιο σύστημα με χρόνους εξυπηρέτησης που προέρχονταν από μία αυθαίρετη κατανομή. Ο ίδιος συγγραφέας [86], [87] πρότεινε παραλλαγές του παραπάνω συστήματος με “μόνιμους” πελάτες, οι οποίοι χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι μόλις ολοκληρώσουν την εξυπηρέτησή τους θα εισέλθουν ξανά στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων. Ο εν λόγω κανόνας επανάληψης των προσπαθειών των δευτερευόντων πελατών, χρησιμοποιήθηκε και σε άλλες παραλλαγές του $M/G/1$ συστήματος με επαναλαμβανόμενες αφίξεις. Ενδεικτικά αναφέρουμε τις εργασίες των Choi, Shin and Ahn [38], Artalejo [8], Martin and Artalejo [145].

Αργότερα οι Martin and Gomez-Corral [146], συνδύασαν τους παραπάνω δύο κανόνες και δημιούργησαν ένα νέο κανόνα επανάληψης της άφιξης ενός δευτερεύοντος πελάτη. Σύμφωνα με αυτόν, ο χρόνος μεταξύ διαδοχικών προσπαθειών από το κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων προέρχεται από την εκθετική κατανομή με παράμετρο $j\mu + \alpha(1 - \delta_0j)$, $j \geq 0$ (linear retrial policy). Οι Artalejo and Gomez-Corral [14], μελέτησαν λεπτομερώς σε στατιστική ισορροπία, το $M/G/1$ σύστημα με τον εν λόγω κανόνα επανάληψης αφίξεων. Επιπλέον



έδωσαν ακριβείς εκφράσεις σε όρους υπεργεωμετρικών συναρτήσεων, στη περίπτωση των εκθετικών εξυπηρετήσεων. Οι ίδιοι συγγραφείς [16], [17], [18], μελέτησαν και άλλες παραλλαγές του $M/G/1$ συστήματος με γραμμικό κανόνα επανάλληψης αφίξεων. Επιπροσθέτως, θα πρέπει να σημειώσουμε και την συμβολή στο εν λόγω πεδίο, των Artalejo and Rodrigo [24] και Dudin and Klimenok [65]. Οι Diamond and Alfa [57], προχώρησαν ένα βήμα παραπάνω και μελέτησαν προσεγγιστικά το $M/PH/1$ σύστημα με τον χρόνο μεταξύ διαδοχικών προσπαθειών από το κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων να προέρχεται από μία PH-κατανομή.

Ακόμα και σε αυτές τις παραλλαγές στην κατανομή του χρόνου μεταξύ διαδοχικών προσπαθειών από το κουτί, το κόστος (υπολογιστικό ή τεχνικό) είναι μικρό αφού σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις διατηρείται ο χαρακτήρας της εκθετικής κατανομής. Μεγάλα προβλήματα, μαθηματικού χαρακτήρα, εμφανίζονται αν θεωρήσουμε ότι οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών προσπαθειών από το κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων προέρχονται από μία αυθαίρετη κατανομή. Η πρώτη προσπάθεια προς αυτή τη κατεύθυνση έγινε από τον Karjrin [107], που όμως αποδείχθηκε λανθασμένη (βλέπε Falin [73]). Το ίδιο μοντέλο μελετήθηκε αργότερα και από τους Choi, Park and Pearse [36] με εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης. Οι Yang et al. [175], προχώρησαν σε μία προσεγγιστική ανάλυση του $M/G/1$ συστήματος με χρόνους επανάλληψης αφίξεων, που προέρχονταν από μία γενική κατανομή και έδωσαν τη συνθήκη στατιστικής ισορροπίας. Ενδεικτικά αναφέρουμε και τις εργασίες των Gomez-Corral [90], Atencia and Moreno [25] και Krishna Kumar et al. [125] που μελέτησαν παραλλαγές συστημάτων με γενικούς χρόνους επανάλληψης αφίξεων.

Είναι σύνηθες σε πολλά συστήματα επικοινωνιών, οι αφίξεις των πελατών να πραγματοποιούνται κατά ομάδες (Batch arrivals). Ο Falin [71], ήταν ο πρώτος που μελέτησε ένα σύστημα με επαναλαμβανόμενες αφίξεις πελατών, στο οποίο οι πρωτεύοντες πελάτες καταφθάνουν σε ομάδες τυχαίου μεγέθους. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο την υπερωρχόμενης Μαρκοβιανής αλυσίδας μελέτησε την από κοινού κατανομή της κατάστασης του υπαλλήλου και του αριθμού των πελατών στο κουτί, σε χρονικές στιγμές αναχωρήσεων. Σε αυτά τα συστήματα οι πελάτες καταφθάνουν σε ομάδες μεγέθους k με πιθανότητα c_k και αν κατά την άφιξη ο υπάλληλος είναι ελεύθερος, ένας πελάτης από αυτούς τον καταλαμβάνει και οι υπόλοιποι εισέρχονται στο κουτί. Στη περίπτωση που ο υπάλληλος είναι απασχολημένος, ολόκληρη η ομάδα τοποθετείται στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων. Μία διαφορετική προσέγγιση δόθηκε από τους Yang



and Templeton [177]. Αξίζει να σημειωθεί ότι η παραδοχή των ομαδικών αφίξεων δεν περιπλέκει ιδιαίτερα την μελέτη των συστημάτων. Για παράδειγμα στο $M/G/1$ σύστημα με ομαδικές αφίξεις, η συνθήκη στατιστικής ισορροπίας δίνεται από την $\rho = \lambda \beta_1 \bar{c} < 1$, όπου $\bar{c} = \frac{d}{dz} c(z)|_{z=1}$, με $c(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, ενώ οι γεννήτριες πιθανοτήτων των καταστάσεων του συστήματος δίνονται από τις,

$$P_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{0n} z^n = (1 - \rho) \exp\left\{ \frac{\lambda}{\mu} \int_1^z \frac{1 - k(c(u)) \cdot \frac{c(u)}{u}}{k(c(u)) - u} du \right\},$$

$$P_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} p_{1n}(x) dx z^n = \frac{1 - k(c(z))}{k(c(z)) - z} P_0(z).$$

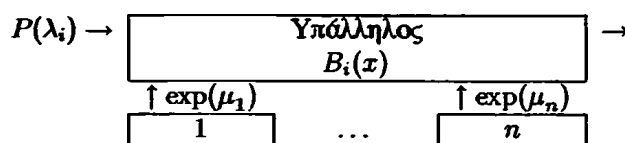
Η εφαρμοσιμότητα των μοντέλων με ομαδικές αφίξεις σε συστήματα επικοινωνιών καταδεικνύεται και στην εργασία των Langaris and Moutzoukis [135], που μελέτησαν ένα σύστημα reader-writer με επαναλαμβανόμενες αφίξεις, καθώς και σε αυτές του Langaris [129], [130], [131]. Παραλλαγές του βασικού μοντέλου με ομαδικές αφίξεις δόθηκαν και από τους Langaris and Moutzoukis [134], Moutzoukis and Langaris [148], ενώ με την βοήθεια πινακο-ανλυτικών μεθόδων, μελετήθηκαν και από τους Dudin and Klimenok [64], [65].

Στο βασικό μοντέλο και στις διάφορες παραλλαγές που έχουμε αναφέρει παραπάνω, θεωρήσαμε ότι όλοι οι πελάτες είναι “όμοιοι”, από την άποψη ότι οι διαδικασίες αφίξεων, εξυπηρέτησεων και επαναλαμβανόμενων αφίξεων είναι ίδιες για όλους τους πελάτες. Δηλαδή υποθέσαμε ότι οι πελάτες ανήκουν στην ίδια κλάση ή ισοδύναμα θεωρήσαμε μοντέλα με μία κλάση πελατών. Είναι προφανές, ότι το γεγονός αυτό δεν είναι ρεαλιστικό, καθώς η συμπεριφορά των πελατών συνήθως διαφέρει και ως προς τον τρόπο που φθάνουν στο σύστημα (διαφορετική διαδικασία αφίξεων) και ως προς τον τρόπο που ζητούν να εξυπηρετηθούν (διαφορετική διαδικασία εξυπηρέτησεων), καθώς και με τον τρόπο που επαναλαμβάνουν την προσπάθεια (διαφορετική διαδικασία επαναλαμβανόμενων αφίξεων) να συνδεθούν με τον υπάλληλο, στη περίπτωση που δεν τον βρήκαν διαθέσιμο στη πρώτη τους προσπάθεια. Επομένως, άμεσα αναγκαζόμαστε να μελετήσουμε συστήματα εξυπηρέτησης με επαναλαμβανόμενες αφίξεις και πολλές κλάσεις πελατών. Η μαθηματική ανάλυση συστημάτων με πολλές κλάσεις πελατών, είναι σαφώς δυσκολότερη και πολυπλοκότερη από την αντίστοιχη ανάλυση με μία κλάση. Το γεγονός αυτό συμβαίνει γιατί στην προκειμένη περίπτωση, η στοχαστική διαδικασία που εκφράζει τον αριθμό των πελατών στο σύστημα είναι πολυδιάστατη με τιμές στο Z_+^n , αν το μοντέλο μας δέχεται n διαφορετικές κλάσεις πελατών.

Οι Hanschke [97], Kulkarni [119] και Falin [70], ήταν οι πρώτοι που μελέτη-



σαν μοντέλα με πολλές κλάσεις πελατών, έναν υπάλληλο και επαναλαμβανόμενες αφίξεις. Το απλούστερο μοντέλο με n κλάσεις πελατών περιγράφεται ως εξής. Οι προτεύοντες πελάτες κλάσης i , $i = 1, 2, \dots, n$ (i -πελάτες) καταφθάνουν στο σύστημα σύμφωνα με την κατανομή *Poisson* παραμέτρου λ_i , και αν βρουν ελεύθερο τον υπάλληλο, εξυπηρετούνται και αναχωρούν. Σε αντίθετη περίπτωση, αναχωρούν προσωρινά από το σύστημα και εισέρχονται στο κουτί επαναλαμβανόμενων αφίξεων απ' όπου επαναλαμβάνουν την προσπάθειά τους να συνδεθούν με τον υπάλληλο μετά από εκθετικό χρονικό διάστημα παραμέτρου μ_i . Τέλος, οι χρόνοι εξυπηρέτησης προέρχονται από μία αυθαίρετη κατανομή με α.σ.κ. $B_i(x)$, για κάθε i -πελάτη. Προφανώς οι διαδικασίες αφίξεων, εξυπηρέτησεων και επαναλαμβανόμενων αφίξεων θεωρούνται ανεξάρτητες. Το παρακάτω σχήμα περιγράφει το εν λόγω μοντέλο.



Σχήμα 1.4: Το μοντέλο με n κλάσεις πελατών

Θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι το σύστημα είναι ισοδύναμο με το μοντέλο με n κουτιά επαναλαμβανόμενων αφίξεων, όσα και οι κλάσεις πελατών, από τα οποία κάθε i -πελάτης επαναλαμβάνει την προσπάθειά του μετά από εκθετικό χρόνο παραμέτρου μ_i , $i = 1, \dots, n$. Επιπλέον, έστω για $k = 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_1 + \dots + \lambda_n, & \beta_i(s) &= \int_0^\infty e^{-sz} dB_i(x), \\ \beta_{ik} &= (-1)^k \beta_i^{(k)}(0), & \beta_k &= \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} \beta_{ik}, \\ \rho_i &= \lambda_i \beta_{i1}, & \rho &= \sum_{i=1}^n \rho_i. \end{aligned}$$

Η στοχαστική διαδικασία που περιγράφει την εξέλιξη του συστήματος είναι η $(C(t), N_1(t), \dots, N_n(t))$, με τιμές στο $\{0, i\} \times \mathbb{Z}_+^n$, όπου η τ.μ. $C(t) = i$, $i = 1, 2, \dots, n$, υποδηλώνει ότι ο υπάλληλος είναι απασχολημένος με έναν i -πελάτη και η $N_i(t)$ εκφράζει τον αριθμό των i -πελατών που βρίσκονται στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων τη χρονική στιγμή t . Αξίζει να αναφέρουμε ότι το σύστημα μας είναι σε στατιστική ισορροπία όταν $\rho < 1$. Ο Hanschke [97] επίλυσε το πρόβλημα όταν $\mu_i \equiv \mu$, ενώ αργότερα ο Kulkarni [119], μελέτησε το μοντέλο με δύο κλάσεις πελατών και κατάφερε να υπολογίσει τον



αναμενόμενο αριθμό N_i , των i -πελατών, $i = 1, 2$, στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων, σε στατιστική ισορροπία. Ο Falin [70], μελέτησε το γενικό μοντέλο με n κλάσεις πελατών και έδειξε ότι οι αναμενόμενες τιμές N_i , του αριθμού των i -πελατών στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων, σε στατιστική ισορροπία, δίνονται από την ακόλουθη σχέση,

$$N_i = \frac{\lambda_i \rho}{\mu_i(1-\rho)} + \frac{\lambda_i \lambda \beta_2}{2} x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

όπου οι σταθερές x_i , είναι οι λύσεις του παρακάτω συστήματος εξισώσεων

$$\sum_{j=1}^n \frac{\mu_j \rho_j}{\mu_i + \mu_j} (x_i + x_j) = x_i - 1.$$

Αργότερα, ο Kulkarni [120] γενίκευσε το παραπάνω μοντέλο θεωρώντας ότι οι πελάτες κατέφθαναν σε ανεξάρτητες ομάδες τυχαίου μεγέθους. Δηλαδή κάθε ομάδα περιείχε πελάτες της ίδιας κλάσης και έστω C_i το μέγεθος της ομάδας των i -πελατών, με $c_{ik} = P(C_i = k)$, $k \geq 1$ και $c_i(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik} z^k$. Αν $\bar{c}_i^{(m)}$, $m = 1, 2, \dots$, η m -τάξη περί το μηδέν της κατανομής της C_i , $i = 1, 2, \dots, n$ και

$$\rho_i = \lambda_i \bar{c}_i^{(1)} \beta_{i1}, \quad \rho = \sum_{i=1}^n \rho_i,$$

τότε οι αναμενόμενοι αριθμοί των i -πελατών στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων σε στατιστική ισορροπία ($\rho < 1$), δίνονται από

$$N_i = \frac{\lambda_i (\rho + \bar{c}_i^{(1)} - 1)}{\mu_i(1-\rho)} + \frac{\lambda_i \bar{c}_i^{(1)}}{2} x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

όπου τα x_i , ήταν οι λύσεις του ακόλουθου γραμμικού συστήματος

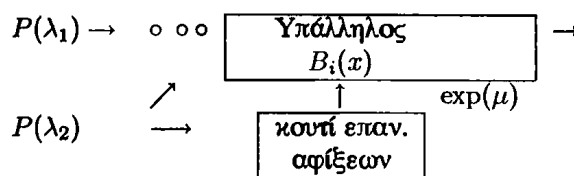
$$\sum_{j=1}^n \frac{\mu_j \rho_j}{\mu_i + \mu_j} (x_i + x_j) = x_i - \sum_{j=1}^n \lambda_j \bar{c}_j^{(1)} \beta_{j2} - \frac{\beta_{i1} (\bar{c}_i^{(2)} - (\bar{c}_i^{(1)})^2 - \bar{c}_i^{(1)})}{\bar{c}_i^{(1)}}.$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι λόγω της πολυπλοκότητας της πολυδιάστατης διαδικασίας που περιγράφει την εξέλιξη των εν λόγω συστημάτων, δεν υπάρχει μαθηματική απόδειξη για την ικανή και αναγκαία συνθήκη, κάτω από την οποία τα παραπάνω συστήματα βρίσκονται σε στατιστική ισορροπία. Γενικά όμως, κάθε σύστημα εξυπηρέτησης είναι σε στατιστική ισορροπία, όταν η συνολική πυκνότητα κυκλοφορίας $\rho < 1$.

Ο Grishechkin [94], μελέτησε το ίδιο σύστημα ακολουθώντας μιά νέα μέθοδο με την βοήθεια των κλαδικών ανελίξεων. Μοντέλα με επαναλαμβανόμενες αφίξεις και πολλές κλάσεις πελατών μελέτησαν και οι Langaris [129], [130], [131], Moutzoukis and Langaris [148], Choi and Chang [31].



Σε όλες τις σύγχρονες εφαρμογές της τηλεφωνίας και όχι μόνο, γίνεται συχνά από τον υπάλληλο, διαχωρισμός μεταξύ των πελατών όσον αφορά το ποιοί πελάτες θα εξυπηρετηθούν πρώτοι. Επομένως, η έννοια της προτεραιότητας αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της μελέτης των συστημάτων με επαναλαμβανόμενες αφίξεις. Το βασικό μοντέλο με επαναλαμβανόμενες αφίξεις και προτεραιότητες, χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη δύο τύπων πελατών, που φθάνουν στο σύστημα με διαφορετικές διαδικασίες αφίξεων. Ο πρώτος τύπος πελατών διακρίνεται ως υψηλής προτεραιότητας και με την άφιξή τους τοποθετούνται σε μία ουρά περιμένοντας να εξυπηρετηθούν με κάποια πειθαρχία. Ο δεύτερος τύπος πελατών διακρίνεται ως χαμηλής προτεραιότητας και στην περίπτωση μπλοκαρίσματος (είτε κατά την πρώτη άφιξή του, ή σε κάποια επανάληψη της) αναχωρεί αμέσως από το σύστημα και εισέρχεται στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων. Οι πελάτες χαμηλής προτεραιότητας, έχουν την δυνατότητα να συνδεθούν με τον υπάλληλο μόνο στη περίπτωση, που δεν υπάρχουν πελάτες υψηλής προτεραιότητας να περιμένουν στην ουρά. Επομένως οι πελάτες της ουράς έχουν μη-διακόπτοσα προτεραιότητα έναντι αυτών του κουτιού των επαναλαμβανόμενων αφίξεων. Το παρακάτω σχήμα περιγράφει ένα τέτοιο μοντέλο.



Σχήμα 1.5: Το μοντέλο με επαναλαμβανόμενες αφίξεις και προτεραιότητες

Οι Choi and Park [37], ήταν οι πρώτοι που εισήγαγαν την έννοια της προτεραιότητας στα συστήματα με επαναλαμβανόμενες αφίξεις μελετώντας την από κοινού κατανομή (σε όρους γεννητριών συναρτήσεων) του αριθμού των πελατών στην ουρά και στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων. Αργότερα οι Falin, Artalejo and Martin [82] μελέτησαν λεπτομερώς ένα παρόμοιο σύστημα, δίνοντας αποτελέσματα για την συνθήκη στατιστικής ισορροπίας, για την ιδιότητα της διάσπασης και διάφορα οριακά θεωρήματα. Ο ουσιαστικός χρόνος αναμονής ενός πελάτη χαμηλής προτεραιότητας μελετήθηκε από τους Choi, Han and Falin [35]. Αργότερα οι Choi et al. [33], επηρεασμένοι από μία πρακτική εφαρμογή κινητής τηλεφωνίας, μελέτησαν την από κοινού κατανομή του αριθμού των

πελατών στην ουρά και στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων στο παραπάνω μοντέλο, θεωρώντας ότι το μήκος της ουράς επαναλαμβανόμενων αφίξεων είναι πεπερασμένο.

Οι Langaris and Moutzoukis [134], θεώρησαν ένα μοντέλο επαναλαμβανόμενων αφίξεων με δύο τύπους πελατών, οι οποίοι καταφθάνουν σε ομάδες τυχαίου μήκους. Επιπλέον, υπέθεσαν ότι κάθε ομάδα είναι δυνατόν να περιέχει πελάτες και των δύο τύπων. Οι πελάτες υψηλής προτεραιότητας είχαν διακόπτωση μή επαναληπτική προτεραιότητα έναντι αυτών χαμηλής προτεραιότητας, ενώ κάθε φορά που ο υπάλληλος ελευθερωνόταν (δεν υπήρχαν πελάτες υψηλής προτεραιότητας στην ουρά) αναχωρούσε για απλές διακοπές. Στην εν λόγω εργασία μελέτησαν την από κοινού κατανομή του μήκους των ουρών υψηλής και χαμηλής προτεραιότητας καθώς και τον ουσιαστικό χρόνο αναμονής με την βοήθεια της μεθόδου των Falin and Fricker [81] και Choi, Han and Falin [35]. Λίγο αργότερα οι Moutzoukis and Langaris [148], γενίκευσαν το μοντέλο θεωρώντας n τύπους πελατών, εκ των οποίων οι i ($i < n$) σχηματίζουν κανονικές ουρές και οι υπόλοιποι $n - i$, καταλαμβάνουν $n - i$ κουτιά επαναλαμβανόμενων αφίξεων. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τη βιβλιογραφία των συστημάτων με επαναλαμβανόμενες αφίξεις και προτεραιότητες, ο αναγνώστης παραπέμπεται στην επισκόπηση του Choi and Chang [31] και στις εργασίες των Bocharov, Pavlova and Buzicova [29], Choi, Chang and Kim [32], Choi, Choi and Li [33].

Το βασικό χαρακτηριστικό των συστημάτων με επαναλαμβανόμενες αφίξεις, είναι το γεγονός ότι κάθε φορά που κάποιος πελάτης αδυνατεί να συνδεθεί με τον υπάλληλο, αναχωρεί προσωρινά από το σύστημα και επαναλαμβάνει την άφιξη του αργότερα, μέχρις ότου βρει τον υπάλληλο διαθέσιμο. Σε πολλές περιπτώσεις όμως ο πελάτης ύστερα από κάποιο αριθμό προσπαθειών εγκαταλείπει για πάντα το σύστημα. Αυτή η τροποποίηση της συμπεριφοράς των πελατών οδηγεί στη μελέτη συστημάτων με επαναλαμβανόμενες αφίξεις και ανυπόμονους πελάτες (impatient customers or non persistent customers). Το παραπάνω σύστημα λειτουργεί ως εξής: ο πελάτης που φθάνει στο σύστημα και βρίσκει απασχολημένο τον υπάλληλο, το εγκαταλείπει για πάντα με πιθανότητα $1 - H_1$, ή τοποθετείται στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων με πιθανότητα H_1 . Μετά τη δεύτερη αποτυχημένη προσπάθεια, παραμένει στο κουτί με πιθανότητα H_2 , είτε το εγκαταλείπει οριστικά με πιθανότητα $1 - H_2$. Μετά από την j -οστή αποτυχημένη προσπάθεια, θα παραμείνει στο κουτί με πιθανότητα H_j , είτε το εγκαταλείπει οριστικά με πιθανότητα $1 - H_j$ κ.ο.κ.. Η μελέτη λοιπόν, του εν λόγω συστήματος γίνεται με την βοήθεια της συνάρτησης $\{H_j; j \geq 1\}$. Συνή-



θως μελετώνται μοντέλα, όπου ισχύει $H_2 = H_3 = \dots$, δηλαδή η πιθανότητα, ο πελάτης να παραμείνει στο κοντί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων (και επομένως στο σύστημα) μετά από κάποια προσπάθεια, να μην εξαρτάται από τις προηγούμενες επαναλήψεις. Ο Falin [73], επιχείρησε τη μελέτη ενός τέτοιου γενικού συστήματος στη περίπτωση του $M/M/1$ συστήματος με επαναλαμβανόμενες αφίξεις. Η πρώτη εργασία που εμφανίστηκε στη βιβλιογραφία, με το στοιχείο των μή-υπομονετικών πελατών ήταν αυτή του Cohen [51], οποίος υπέθεσε ότι οι πελάτες του κοντιού των επαναλαμβανόμενων αφίξεων αναχωρούν από το σύστημα με ρυθμό δ . Δεν κατάφερε όμως, να βρεί ακριβή αποτελέσματα για την κατανομή του αριθμού των πελατών στο κοντί σε στατιστική ισορροπία, παρά μόνο στη περίπτωση των εκθετικών εξυπηρετήσεων. Οι Jonin and Sedol [104] μελέτησαν επίσης ένα παρόμοιο σύστημα. Η κύρια εργασία πάνω στο $M/G/1$ σύστημα με επαναλαμβανόμενες αφίξεις και μή-υπομονετικούς πελάτες οφείλεται στους Yang, Posner and Templeton [176], οι οποίοι θεώρησαν ότι $H_1 = H_2 < 1$, ενώ πρόσθετα αποτελέσματα παραθέτονται και στη μονογραφία των Falin and Templeton [80]. Παράλλαγες των μοντέλων με μή-υπομονετικούς πελάτες μελέτησαν και οι Choi and Chang [31], ενώ αποτελέσματα με τη βοήθεια πινακο-αναλυτικών μεθόδων έδωσαν και οι He, Li and Zhao [100].

Όπως και στα κλασσικά συστήματα εξυπηρέτησης, ο υπάλληλος ενός μοντέλου με επαναλαμβανόμενες αφίξεις ενδέχεται να υπόκειται σε βλάβες και ακολουθώς σε επισκευές, ώστε να επανέλθει σε κατάσταση λειτουργίας. Στα κλασσικά συστήματα η συμπεριφορά του πελάτη, του οποίου η εξυπηρέτηση διακόπηκε εξαιτίας κάποιας βλάβης διακρίνεται γενικά σε τρεις τύπους. Μόλις επιδιορθωθεί η βλάβη, είτε θα συνεχίσει την εξυπηρέτηση του από το σημείο που διεκόπει (preemptive resume), είτε θα επαναλάβει από την αρχή την ίδια (πιθανοθεωρητικά) εξυπηρέτηση (preemptive repeat identical), είτε θα εξυπηρετηθεί για χρόνο διαφορετικό σε σχέση με αυτόν, κατά τη διάρκεια του οποίου συνέβει η βλάβη (preemptive repeat different). Σε κάθε περίπτωση ο πελάτης, που διεκόπει δεν θα χάσει τη σειρά του, με την έννοια ότι επιστρέφοντας από την επισκευή ο υπάλληλος, θα αρχίσει να τον εξυπηρετεί. Η συμπεριφορά των πελατών στα συστήματα με επαναλαμβανόμενες αφίξεις διαφέρει σε σχέση με τα προηγούμενα. Σε αυτή τη περίπτωση, ο διακοπτόμενος πελάτης, είτε αναχωρεί οριστικά από το σύστημα χωρίς να ολοκληρώσει την εξυπηρέτηση του, είτε εισέρχεται στο κοντί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων. Αμέσως μετά την βλάβη, ακολουθεί άμεσα η επισκευή του υπαλλήλου. Είναι προφανές, ότι σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει η έννοια της σειράς και επομένως ο πελάτης που διακό-



πικε θα πρέπει να επαναλάβει την προσπάθεια του να συνδεθεί με τον υπάλληλο, ώστε να λάβει μία νέα, ανεξάρτητη από την προηγούμενη, εξυπηρέτηση.

$M/G/1$ συστήματα με επαναλαμβανόμενες αφίξεις με το χαρακτηριστικό των βλαβών και επισκευών του υπαλλήλου εισήχθηκαν από τους Kulkarni and Choi [122] και Aissani [1]. Οι Kulkarni and Choi [122], μελέτησαν με τη βοήθεια της υπεισερχόμενης Μαρκοβιανής αλυσίδας την κατανομή του αριθμού των πελατών στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων, ενώ χρησιμοποίησαν αποτελέσματα Μαρκοβιανών αναγεννητικών διαδικασιών για να διερευνήσουν τη συμπεριφορά της στοχαστικής διαδικασίας που περιγράφει την εξέλιξη του συστήματος. Ταυτόχρονα, έδωσαν και την συνθήκη στατιστικής ισορροπίας του μοντέλου. Αξίζει να σημειωθεί ότι στο συγκεκριμένο μοντέλο, οι βλάβες προέκυπταν, τόσο στη περίπτωση που ο υπάλληλος ήταν απασχολημένος, όσο και στη περίπτωση που ήταν άεργος. Αργότερα ο Artalejo [7], μελέτησε ένα πολυπλοκότερο σύστημα με $s \geq 1$ υπαλλήλους, που ο καθένας τους υπόκειται σε βλάβες και επισκευές, μόνο στη περίπτωση που είναι απασχολημένος. Επιπλέον, το μοντέλο περιελάμβανε και την συνάρτηση ανυπομονησίας $\{H_j; j \geq 1\}$, όπου $H_2 = H_3 = \dots$ με $H_2 < 1$, ενώ οι χρόνοι εξυπηρέτησης, προέρχονταν από την εκθετική κατανομή για όλους τους υπαλλήλους. Τέλος, μελέτησε με τη βοήθεια των αλγοριθμικών μεθόδων του de Kok [55], μία εναλλακτική προσέγγιση του μοντέλου των Kulkarni and Choi [122]. Παράλλαγες του $M/G/1$ συστήματος με επαναλαμβανόμενες αφίξεις με βλάβες και επισκευές μελέτησαν και οι Aissani and Artalejo [2], Sherman and Klaroufeh [162], Yang and Li [174] και Choudhury and Deka [41].

Οι Artalejo and Gomez-Corral [18] μελέτησαν ένα νέο σύστημα με επαναλαμβανόμενες αφίξεις, στο οποίο καταφθάνουν “αρνητικές” αφίξεις. Μία αρνητική άφιξη (ή αρνητικός πελάτης) επιδρά σαν ένα σήμα, που αναγκάζει έναν πελάτη της ουράς των επαναλαμβανόμενων αφίξεων (αν υπάρχουν τέτοιοι πελάτες) να αναχωρήσει αμέσως από το σύστημα. Επομένως, παράλληλα με την συνηθισμένη ροή πελατών, εμφανίζεται και η ροή των αρνητικών πελατών, που “διαγράφουν” ένα πελάτη από την ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων, με την προϋπόθεση ότι αυτή δεν θα είναι άδεια.

Η ανάλυση τέτοιων συστημάτων (retrial queues with negative customers), παρουσιάζει σημαντικές μαθηματικές δυσκολίες σε σχέση με αυτήν που χρησιμοποιήθηκε στα μοντέλα που αναφέραμε παραπάνω. Οι Artalejo and Gomez-Corral [18], γενίκευσαν την εργασία των Harisson and Pitel [98] και μελέτησαν το απλό $M/G/1$ σύστημα με επαναλαμβανόμενες αφίξεις και αρνητικούς πελάτες,



ενώ διερεύνησαν την κατανομή του αριθμού των πελατών στην ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων, καθώς και τη συνθήκη στατιστικής ισορροπίας. Ακριβή αποτελέσματα δεν δίνονται, μιάς και η ανάλυση βασίζεται στην αριθμητική επίλυση μιάς Fredholm ολοκληρωτικής εξίσωσης πρώτης τάξης. Παραλλαγές του παραπάνω μοντέλου μελετήθηκαν και από τους Artalejo and Gomez-Corral [15], [16], [17], Shin [163].

Στη πλειοψηφία των εργασιών στα μοντέλα με επαναλαμβανόμενες αφίξεις πελατών υποθετούμε ότι οι πρωτεύοντες πελάτες καταφθάνουν από μία πηγή απεριόριστης χωρητικότητας (άπειρος πληθυσμός) ή από έναν απεριόριστο αριθμό πηγών. Συγχρονες εφαρμογές της κινητής τηλεφωνίας και των τοπικών δικτύων Η/Υ στρέφουν το ενδιαφέρον στη μελέτη συστημάτων με επαναλαμβανόμενες αφίξεις από έναν πεπερασμένο αριθμό πηγών K ($< \infty$, πεπερασμένος πληθυσμός). Κάθε φορά που ένας πελάτης (πηγή) είναι ελεύθερος (δηλαδή δεν εξυπηρετείται, ούτε περιμένει για να εξυπηρετηθεί), πραγματοποιεί μία κλήση. Αν ο υπάλληλος είναι ελεύθερος τότε τον καταλαμβάνει και η κλήση του θα εξυπηρετηθεί. Κατά τη διάρκεια της εξυπηρέτησης της κλήσης, η αντίστοιχη πηγή (πελάτης) δεν μπορεί να πραγματοποιήσει νέα κλήση. Στη περίπτωση που η κλήση βρεί απασχολημένο τον υπάλληλο, εισέρχεται στην υποθετική ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων και προσπαθεί να συνδεθεί μετ'αυτόν. Η κύρια εργασία στον εν λόγω τομέα οφείλεται στους Falin and Artalejo [79]. Με τη μελέτη συστημάτων επαναλαμβανόμενων με το χαρακτηριστικό της πεπερασμένης πηγής ασχολήθηκαν και οι Dragieva [63], Artalejo [10].

Εχει αναφερθεί παραπάνω, ότι τα συστήματα εξυπηρέτησης με επαναλαμβανόμενες αφίξεις, είναι ειδικές περιπτώσεις συστημάτων με διακοπές υπαλλήλου. Στο βασικό μοντέλο, ο υπάλληλος δεν είναι διαθέσιμος μετά από κάθε εξυπηρέτηση ακόμα και αν υπάρχουν πελάτες στην ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων. Η κλασσική έννοια των διακοπών του υπαλλήλου, συναντάται σε διάφορες παραλλαγές του βασικού $M/G/1$ μοντέλου με επαναλαμβανόμενες αφίξεις. Το απλούστερο παράδειγμα αναφέρεται σε ένα $M/G/1$ σύστημα με δύο κλάσεις πελατών. Η πελάτες της πρώτης κλάσης τοποθετούνται σε μία ουρά και έχουν μη-διακόπτουσα προτεραιότητα έναντι των πελατών δεύτερης κλάσης, που εισέρχονται στο κοντί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων κάθε φορά που δεν καταφέρνουν να συνδεθούν με τον υπάλληλο σε κάποια άφιξή τους. Κάθε φορά που ο υπάλληλος ελευθερώνεται, δηλαδή όταν δεν θα περιμένει κανένας πελάτης πρώτης κλάσης στην ουρά, αναχωρεί για απλές διακοπές τυχαίου μήκους.



Επιστρέφοντας από τις διακοπές, αν βρεί πελάτες πρώτης κλάσης αρχίζει να τους εξυπηρετεί, ενώ σε αντίθετη περίπτωση παραμένει άεργος (άρα διαθέσιμος), αναμένοντας τη πρώτη άφιξη είτε πρωτεύοντα πελάτη, είτε δευτερεύοντα. Σε αυτό το σύστημα, συνδυάζονται οι έννοιες της προτεραιότητας και των διακοπών. Συστήματα εξυπηρέτησης με επαναλαμβανόμενες αφίξεις και διακοπές έχουν μελετηθεί από τους Artalejo and Rodrigo [24], Langaris and Moutzoukis [134], Moutzoukis and Langaris [148], Choi, Chang and Dudin [30].

Πρόσφατα, εμφανίστηκαν στη βιβλιογραφία, παραλλαγές του $M/G/1$ συστήματος με επαναλαμβανόμενες αφίξεις και δύο φάσεις εξυπηρέτησης, που παρέχονται από έναν υπάλληλο. Σε κλασσικά μοντέλα με έναν υπάλληλο, στα οποία η διαδικασία εξυπηρέτησης αποτελείται από έναν αριθμό φάσεων σε σειρά, αναφερθήκαμε εκτενώς σε προηγούμενο εδάφιο. Οι Artalejo and Choudhury [22], ήταν οι πρώτοι που εισήγαγαν το χαρακτηριστικό των επαναλαμβανόμενων αφίξεων σε μοντέλα με δύο φάσεις εξυπηρέτησης. Συγκεκριμένα γενίκευσαν το κλασσικό μοντέλο του Madan [143] θεωρώντας ένα σύστημα, στο οποίο πελάτες καταφθάνουν σύμφωνα με τη διαδικασία *Poisson* παραμέτρου λ και αν βρουν τον υπάλληλο απασχολημένο, αναχωρούν από το σύστημα και εισέρχονται στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων, απ' όπου προσπαθούν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο να συνδεθούν με τον υπάλληλο μετά από εκθετικό χρόνο παραμέτρου ν . Ο υπάλληλος παρέχει την πρώτη φάση εξυπηρέτησης σε όλους τους πελάτες και σε ένα ποσοστό αυτών (με πιθανότητα p) μία προαιρετική δεύτερη φάση. Οι πελάτες που δεν επιθυμούν δεύτερη φάση εξυπηρέτησης, αναχωρούν μετά το πέρας της πρώτης με πιθανότητα $q = 1 - p$. Επιπλέον οι χρόνοι εξυπηρέτησης τόσο στη πρώτη, όσο και στη δεύτερη προέρχονται από αυθαίρετες κατανομές. Οι συγγραφείς μελέτησαν την συνθήκη στατιστική ισορροπίας $\rho = \lambda\beta_1 < 1$ και την κατανομή του αριθμού των πελατών στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων κάτω από αυτή. Παραλλαγές του παραπάνω μοντέλου μελέτησαν και οι Choudhury [40], Choudhury and Deka [41] και οι Krishana Kumar et al. [124].

1.5.8 Το μοντέλο με επαναλαμβανόμενες αφίξεις και $c (> 1)$ υπαλλήλους

Η δομή και η λειτουργία του μοντέλου επαναλαμβανόμενων αφίξεων με $c (> 1)$ υπαλλήλους παραμένει ίδια. Αν κάποιος πελάτης φθάνοντας στο σύστημα, βρεί απασχολημένους όλους τους υπαλλήλους, θα εισέλθει στην ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων και θα προσπαθήσει μετά από τυχαίο χρονικό διάστημα



να συνδεθεί με κάποιον από αυτούς. Η στοχαστική διαδικασία $(C(t), N(t))$ με χώρο καταστάσεων $\{0, 1, \dots, c\} \times \mathbb{Z}^+$, περιγράφει την εξέλιξη του συστήματος. Θα πρέπει να τονίσουμε ότι εξαιτίας του μεγάλου αριθμού υπαλλήλων, είναι αδύνατη η μελέτη του συστήματος, θεωρώντας ότι οι χρόνοι εξυπηρέτησης προέρχονται από μία οποιαδήποτε γενική κατανομή. Για να διατηρηθεί ο Μαρκοβιανός χαρακτήρας του συστήματος θα πρέπει να γνωρίζουμε κάθε στιγμή τον χρόνο εξυπηρέτησης, που έχει λάβει κάθε πελάτης που εξυπηρετείται την δεδομένη στιγμή, γεγονός που αυξάνει ακόμα περισσότερο την πολυπλοκότητα.

Η πρώτη προσπάθεια μελέτης του συστήματος με πολλούς υπαλλήλους έγινε από τον Wilkinson [171], ο οποίος θεώρησε ότι οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων, οι χρόνοι εξυπηρέτησεων και οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών προσπαθειών από το κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων, προέρχονται από εκθετικές κατανομές με παράμετρους λ , ν και μ αντίστοιχα. Πρόκειται δηλαδή για ένα $M/M/c$ με επαναλαμβανόμενες αφίξεις και επομένως η διαδικασία που το περιγράφει είναι Μαρκοβιανή. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υπέθεσε ότι $\nu = 1$ και μελέτησε σε στατιστική ισορροπία βασικά χαρακτηριστικά, όπως η πιθανότητα μπλοκαρίσματος ενός πελάτη $B = \lim_{t \rightarrow \infty} \Pr(C(t) = c)$ και ο μέσος αριθμός πελατών στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων $N = \lim_{t \rightarrow \infty} E(N(t))$.

Λίγο αργότερα ο Cohen [51] μελέτησε ένα παρόμοιο σύστημα με μή-υπομονετικούς πελάτες, οι οποίοι είχαν τη δυνατότητα να αναχωρήσουν οριστικά από το σύστημα μετά από οποιαδήποτε αποτυχημένη προσπάθεια να συνδεθούν με κάποιον υπάλληλο. Στην ίδια εργασία μελετήθηκε η συνθήκη στατιστικής ισορροπίας, σε ένα “περικομμένο” (truncated) σύστημα. Στα περικομμένα συστήματα η χωρητικότητα του κουτιού επαναλαμβανόμενων αφίξεων είναι πεπερασμένη (M). Το γεγονός αυτό είναι σημαντικό μιάς και με αυτόν τον τρόπο περιορίζουμε σημαντικά τον χώρο καταστάσεων του συστήματος.

Ο Elluin [67], μελέτησε ένα σύστημα, στο οποίο ο πελάτης πρέπει να εξυπηρετηθεί σε δύο διαδοχικά στάδια για να αναχωρήσει. Και στα δύο στάδια, ο χρόνος εξυπηρέτησης προέρχεται από την εκθετική κατανομή. Αν η εξυπηρέτηση στο πρώτο στάδιο, που για παράδειγμα αντιστοιχεί στην επίτευξη της σύνδεσης μίας τηλεφωνικής συνδιάλεξης, είναι επιτυχής (με πιθανότητα p), τότε ακολουθεί η κύρια εξυπηρέτηση (έναρξη συνδιάλεξης). Σε αντίθετη περίπτωση, ο πελάτης εισέρχεται στην ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων και προσπαθεί να βρει διαθέσιμο κάποιον υπάλληλο.

Θα πρέπει να τονίσουμε ότι ακριβή αποτελέσματα σχετικά με την από κοινού κατανομή του αριθμού των απασχολημένων υπαλλήλων και του αριθμού των πελατών στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων, έχουμε για συστήματα



$M/M/c$, όπου $c \leq 2$. Αρχικά οι Jonin and Sedol [104] και αργότερα οι Falin [70], Hanschke [96], έδωσαν τα πρώτα λεπτομερή αποτελέσματα σε όρους υπεργεωμετρικών συναρτήσεων. Για την γενική περίπτωση $c > 2$, υπάρχουν αποτελέσματα μόνο για διάφορες ροές της στοχαστικής διαδικασίας που περιγράφει το εν λόγω σύστημα. Τέλος, ο Artalejo [8] μελέτησε λεπτομερώς το $M/M/2$ σύστημα με το χαρακτηριστικό ότι μόνο ο πρώτος από την ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων να μπορεί να επαναλάβει την προσπάθεια σύνδεσης (constant retrial policy).

Η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι ένα σύστημα με επαναλαμβανόμενες αφίξεις σε κατάσταση στατιστικής ισορροπίας, προκύπτει απλά από το γεγονός ότι ο ρυθμός αφίξεων των πελατών πρέπει να είναι μικρότερος από τον ρυθμό των εξυπηρετήσεων. Δηλαδή το σύστημα είναι σε κατάσταση στατιστικής ισορροπίας αν και μόνο αν $\rho = \lambda/c\mu < 1$. Παρ' όλα αυτά η απόδειξη έχει σημαντικές δυσκολίες. Σημαντική, όσον αφορά την μελέτη της συνθήκης στατιστικής ισορροπίας στα μοντέλα με πολλούς υπαλλήλους, ήταν η συμβολή των Falin [75], Hanschke [96].

Τα περισσότερα αποτελέσματα για συστήματα με πολλούς υπαλλήλους δίνονται με την βοήθεια προσεγγιστικών μεθόδων και περικομμένων μοντέλων. Ενδεικτικά αναφέρουμε τις εργασίες των Falin and Artalejo [84] και Neuts and Rao [153]. Για περισσότερες πληροφορίες για την ανάλυση συστημάτων με πολλούς υπαλλήλους με την βοήθεια πινακο-αναλυτικών μεθόδων, παραπέμπουμε τον αναγνώστη στην επισκόπηση του Gomez-Corral [92].

Η βιβλιογραφία πάνω στο αντικείμενο των επαναλαμβανόμενων αφίξεων είναι αρκετά μεγάλη και πλούσια και επομένως, ο αναγνώστης μπορεί να βρει έναν μεγάλο όγκο εργασιών πάνω σε συστήματα με διακριτό χρόνο (Atencia and Moreno [26]), συστήματα με έναν υπάλληλο ο οποίος κινείται κυκλικά (Langaris [129], [130], [131]), δίκτυα συστημάτων (Moutzoukis and Langaris [149], Gomez-Corral [91], Pourbabai [157]), συστήματα με εφαρμογές σε πρωτόκολλα επικοινωνιών CSMA/CD και τοπικών δικτύων (Choi, Shin and Ahn [38], Moutzoukis and Langaris [135]), συστήματα με εφαρμογές στη διαχείριση αποθεμάτων (Krishnamoorthy et al. [126]) κ.ο.κ.. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στις μονογραφίες των Falin and Templeton [80], Artalejo and Gomez-Corral [23], καθώς και στις επισκοπήσεις των Falin [70], Artalejo [5], Gomez-Corral [92] και Yang and Templeton [177].



1.6 Συμβολή της παρούσης διατριβής

Το πρώτο μοντέλο με επαναλαμβανόμενες αφίξεις και έναν υπάλληλο που παρέχει εξυπηρέτηση δύο φάσεων σε σειρά, μελετήθηκε από τους Artalejo and Choudhury [22]. Αργότερα ακολούθησαν παραλλαγές αυτού του συστήματος, περιλαμβάνοντας ομαδικές αφίξεις, διακοπές υπαλλήλου, βλάβες κ.ο.κ. (Choudhury [40], Choudhury and Deka [41]). Σύμφωνα με το βασικό μοντέλο, οι πελάτες φθάνουν μεμονομένα και αν βρουν ελεύθερο τον υπάλληλο, αρχίζουν να εξυπηρετούνται, ενώ σε αντίθετη περίπτωση, αν είναι απασχολημένος τοποθετούνται στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων. Οι πελάτες της ουράς των επαναλαμβανόμενων αφίξεων προσπαθούν επανειλημμένα, μέχρι να συνδεθούν με τον υπάλληλο. Ο υπάλληλος παρέχει την πρώτη φάση εξυπηρέτησης σε όλους τους πελάτες (είτε πρωτεύοντες, είτε δευτερεύοντες) και σε ένα ποσοστό αυτών, μία προαιρετική δεύτερη φάση. Η κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης σε κάθε φάση είναι πιθανοθεωρητικά ίδια, είτε πρόκειται για κάποιο πρωτεύοντα, είτε για κάποιο δευτερεύοντα πελάτη. Οι συγγραφείς μελέτησαν την συνθήκη στατιστικής ισορροπίας, καθώς και την κατανομή του αριθμού των πελατών στην ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων κάτω από τη συνθήκη αυτή.

Στο κεφάλαιο 2 της παρούσης διατριβής μελετάται ένα σύστημα, που αποτελεί πολλαπλή γενίκευση του προηγούμενου. Οι πελάτες καταφθάνουν στο σύστημα μεμονομένα και τοποθετούνται αρχικά σε μία ουρά απείρου χωρητικότητας, περιμένοντας την σειρά τους για να αρχίσουν την εξυπηρέτησή τους. Μετά το πέρας της πρώτης φάσης εξυπηρέτησης κάθε πελάτη, υπάρχουν δύο δυνατότητες για την μετέπειτα πορεία του. Είτε θα προωθηθεί άμεσα στην δεύτερη φάση εξυπηρέτησης, είτε θα αναχωρήσει από το σύστημα και θα εισέλθει στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων, απ' όπου κάθε ένας από αυτούς προσπαθεί (ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο) να συνδεθεί με τον υπάλληλο, ώστε να λάβει την δεύτερη φάση εξυπηρέτησης που του αναλογεί. Οι πελάτες που τοποθετούνται στην ουρά και συνεχίζουν την διαδικασία εξυπηρέτησης τους, χωρίς να εισέρχονται στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων, λέγονται πελάτες τύπου 1, ενώ όσοι τοποθετούνται στην ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων λέγονται τύπου 2. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης στη δεύτερη φάση είναι πιθανοθεωρητικά διαφορετικοί για κάθε τύπο πελάτη. Επιπλέον κάθε φορά που ελευθερώνεται ο υπάλληλος, αναχωρεί για αιρές διακοπές. Οι πελάτες τύπου 1 έχουν μη-διακόπτουσα προτεραιότητα, έναντι των πελατών τύπου 2, με την έννοια ότι για να είναι σε θέση ένας πελάτης τύπου 2, να βρεί διαθέσιμο τον υπάλληλο δεν πρέπει να υπάρχουν στο σύστημα πελάτες τύπου 1, με την επιστροφή του υπαλ-



λήλου από τις διακοπές.

Το παρόν μοντέλο γενικεύει τα υπάρχοντα συστήματα επαναλαμβανόμενων αφίξεων με δύο φάσεις εξυπηρέτησης, αφού για πρώτη φορά περιλαμβάνεται μία κανονική ουρά στην οποία τοποθετούνται όλοι οι αφιχθέντες πελάτες, που βρίσκουν μή διαθέσιμο τον υπάλληλο. Το γεγονός αυτό, δυσκολεύει σημαντικά την ανάλυση, καθώς θα πρέπει κάθε στιγμή να λαμβάνονται υπόψιν, τόσο το μήκος της κανονικής ουράς, όσο και το μήκος της ουράς των επαναλαμβανόμενων αφίξεων. Η ύπαρξη της κανονικής ουράς, προσδίδει στο μοντέλο μας το χαρακτηριστικό των προτεραιοτήτων μεταξύ των δύο τύπων πελατών, γεγονός που εμφανίζεται για πρώτη φορά στη σχετική βιβλιογραφία των μοντέλων με δύο φάσεις εξυπηρέτησης. Ένα επίσης πρωτότυπο χαρακτηριστικό του μοντέλου, είναι η προέλευση των πελατών τύπου 2. Σε όλα τα μοντέλα με επαναλαμβανόμενες αφίξεις και δύο τύπους πελατών, που περιλαμβάνουν το χαρακτηριστικό των προτεραιοτήτων, οι πελάτες τύπου 2 που τοποθετούνται τελικά στο κοντί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων προέρχονται από μία ανεξάρτητη, ως προς του τύπου 1, ροή πελατών που μπλοκαρίστηκαν και εισήλθαν σε αυτό. Στο υπό μελέτη μοντέλο οι πελάτες τύπου 2, προέρχονται αποκλειστικά από την ροή των πελατών τύπου 1, που τελικά “έχασαν” την προτεραιότητά τους, αφού η πρώτη φάση εξυπηρέτησης τους δεν ικανοποιούσε τα ποιοτικά κριτήρια που έθεσε ο υπάλληλος. Από τη στιγμή αυτή και μετά, η πορεία της διαδικασίας εξυπηρέτησης τους αλλάζει.

Εκτός από την εφαρμοσιμότητα του μοντέλου σε προβλήματα βιομηχανικής παραγωγής, όπου μετά το πέρας της πρώτης φάσης γίνεται έλεγχος ποιότητας της εξυπηρετούμενης μονάδας, αξίζει να σημειωθεί ότι το εν λόγω μοντέλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε περιπτώσεις αποφυγής συμφόρησης στην ουρά. Μετά το πέρας της πρώτης φάσης, αν ο υπάλληλος διακρίνει μεγάλο μήκος της ουράς, δεν συνεχίζει την εξυπηρέτηση του πελάτη, αλλά τον υποχρεώνει να εισέλθει στο κοντί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων και ακολούθως συνεχίζει να εξυπηρετεί τους πελάτες της κανονικής ουράς.

Για το μοντέλο αυτό μελετήθηκαν αρχικά, οι πιθανότητες των καταστάσεων σε συνεχή χρόνο. Κατόπιν διερευνήθηκε με την βοήθεια του κριτηρίου του Pakes, η συνθήκη κάτω από την οποία το σύστημα περιέχεται σε στατιστική ισορροπία και ακολούθησε η μελέτη των πιθανοτήτων των καταστάσεων κάτω από την εν λόγω συνθήκη. Επιπλέον αποδείχθηκε ότι στο υπό μελέτη μοντέλο ισχύει η ιδιότητα της διάσπασης. Τα αποτελέσματα της εργασίας αυτής δημοσιεύτηκαν στο περιοδικό Queueing Systems (βλέπε [59]).

Στο κεφάλαιο 3 μελετάται μία γενίκευση του μοντέλου του κεφαλαίου 2 με n



φάσεις εξυπηρέτησης και n τύπους πελατών. Οι πελάτες καταφθάνουν μεμονομένα και τοποθετούνται σε μία ουρά απείρου χωρητικότητας, περιμένοντας τη σειρά τους να εξυπηρετηθούν. Ο υπάλληλος παρέχει εξυπηρέτηση n φάσεων σε σειρά σε όλους τους πελάτες, ενώ σε κάθε φάση γίνεται έλεγχος των εξυπηρετούμενων μονάδων. Μετά το πέρας της i -οστής ($i = 1, 2, \dots, n - 1$) φάσης εξυπηρέτησης, αν η μονάδα δεν ικανοποιεί ορισμένα ποιοτικά κριτήρια εκτοπίζεται από το σύστημα και τοποθετείται στο i κουτί επαναλαμβανόμενων αφίξεων, απ' όπου επαναλαμβάνει την προσπάθεια για να συνδεθεί με τον υπάλληλο και να συνεχίσει τη διαδικασία εξυπηρέτησης στην $(i + 1)$ φάση. Σε αντίθετη περίπτωση, προωθείται άμεσα στην $(i + 1)$ φάση. Οι πελάτες που τοποθετούνται στην ουρά και συνεχίζουν την διαδικασία εξυπηρέτησης τους χωρίς να εισέλθουν σε κάποιο κουτί, καλούνται τύπου 1. Οι πελάτες που τοποθετούνται στο i ($i = 1, 2, \dots, n - 1$) κουτί επαναλαμβανόμενων αφίξεων, και αφού καταφέρουν να συνδεθούν με τον υπάλληλο συνεχίζουν τη διαδικασία εξυπηρέτησης τους χωρίς να εισέλθουν σε κάποιο j ($j > i$) κουτί, καλούνται τύπου $(i + 1)$ πελάτες. Οι πελάτες τύπου 1 έχουν μή-διακόπτοσα προτεραιότητα έναντι των πελατών τύπου $2, 3, \dots, n$. Κάθε φορά που ελευθερώνεται ο υπάλληλος (δεν υπάρχουν τύπου 1 πελάτες να περιμένουν στην ουρά) αναχωρεί για απλές διακοπές. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι πιθανοθεωρητικά διαφορετικοί, τόσο για κάθε φάση, όσο και για κάθε τύπο πελάτη στην αντίστοιχη φάση. Επιστρέφοντας από τις διακοπές ο υπάλληλος, αν δεν βρεί πελάτες τύπου 1, παραμένει άεργος περιμένοντας την πρώτη άφιξη που θα ζητήσει να εξυπηρετηθεί, είτε από το εξωτερικό περιβάλλον, είτε από κάποιο από τα $n - 1$ κουτιά επαναλαμβανόμενων αφίξεων.

Το υπό μελέτη μοντέλο γενικεύει σημαντικά τα αποτελέσματα του μοντέλου του κεφαλαίου 2, καθώς και τα συστήματα με επαναλαμβανόμενες αφίξεις και πολλούς τύπους πελατών. Η ανάλυση του εν λόγω συστήματος είναι διαφορετική από αυτή του κεφαλαίου 2, ενώ γίνεται αρκετά πολύπλοκη, αφού κάθε στιγμή θα πρέπει να λαμβάνουμε υπόψιν το μήκος μίας κανονικής ουράς, καθώς και τα μήκη $n - 1$ ουρών επαναλαμβανόμενων αφίξεων. Για πρώτη φορά στη σχετική βιβλιογραφία, κάθε πελάτης που φθάνει στο σύστημα, έχει τη δυνατότητα να εισέλθει σε ένα αριθμό κουτιών επαναλαμβανόμενων αφίξεων, μέχρι να αναχωρήσει μετά το πέρας της n -οστής φάσης. Επιπλέον για πρώτη φορά στα μοντέλα με πολλούς τύπους πελατών, οι πελάτες της i ουράς επαναλαμβανόμενων αφίξεων μπορούν να εισέλθουν στην j ουρά επαναλαμβανόμενων αφίξεων ($i < j$) και επομένως να αλλάξουν τύπο. Η αλλαγή του τύπου του πελάτη, προκαλεί την αλλαγή της μελλοντικής διαδικασίας εξυπηρέτησης του. Όπως και στο μοντέλο του κεφαλαίου 2, οι πελάτες των ουρών επαναλαμβανόμενων αφίξεων δεν



προέρχονται από ανεξάρτητες ροές πελατών, όπως συμβαίνει σε όλα τα αντίστοιχα μοντέλα με πολλούς τύπους πελατών. Για παράδειγμα οι πελάτες τύπου i , ενδέχεται να προέρχονται από τους τύπου $1, 2, \dots, i - 1$ πελάτες. Το υπό μελέτη μοντέλο, εκτός της εφαρμογής του σε προβλήματα βιομηχανικής παραγωγής όπου στο τέλος κάθε φάσης γίνεται έλεγχος ποιότητας της εξυπηρετούμενης μονάδας, μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί σε περιπτώσεις αποφυγής συμφόρησης της κανονικής ουράς. Μετά το πέρας κάθε φάσης, αν ο υπάλληλος αντιληφθεί μεγάλο μήκος ουράς, υποχρεώνει τον πελάτη να εισέλθει στο αντίστοιχο κουτί επαναλαμβανόμενων αφίξεων και ακολούθως συνεχίζει την εξυπηρέτηση των πελατών της κανονικής ουράς.

Για το υπό μελέτη μοντέλο μελετήθηκαν σε στατιστική ισορροπία οι αναμενόμενες τιμές του αριθμού των πελατών, τόσο της κανονικής ουράς, όσο και των ουρών επαναλαμβανόμενων αφίξεων ξεχωριστά. Τα αποτελέσματα της εν λόγω εργασίας [132] είναι υπό κρίση.

Τέλος στο κεφάλαιο 4 μελετάται για πρώτη φορά ένα σύστημα επαναλαμβανόμενων αφίξεων με τα χαρακτηριστικά του χρόνου προετοιμασίας (start up) και αποφόρτισης (close down), πριν και μετά αντίστοιχα, από μία περίοδο συνεχούς απασχόλησης του υπάλληλου. Συγκεκριμένα, καταφθάνουν μεμονομένα πελάτες κλάσης 1 και 2 και αν βρουν απασχολημένο τον υπάλληλο, οι μέν κλάσης 1 τοποθετούνται σε ουρά απείρου μήκους, ενώ οι δέ κλάσης 2 εισέρχονται στην ουρά επαναλαμβανόμενων αφίξεων. Για να αρχίσει ο υπάλληλος να εξυπηρετεί, είτε τους κλάσης 1, είτε κάποιον κλάσης 2, που κατάφερε να συνδεθεί μαζί του, χρειάζεται ένα χρόνο προετοιμασίας (διαφορετικό πιθανοθεωρητικά για κάθε τύπο πελάτη). Μόλις ο υπάλληλος ολοκληρώσει την εξυπηρέτηση όλων των πελατών που αναμένουν στην ουρά ή στο χώρο εξυπηρέτησης (το κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων δεν είναι αναγκαστικά άδειο), ενεργοποιεί μία περίοδο αποφόρτισης. Στη διάρκεια αυτής της περιόδου, ο υπάλληλος είναι διαθέσιμος μόνο για τους πελάτες τύπου 1. Συγκεκριμένα, αν κάποιος πελάτης τύπου 1 φθάσει στη διάρκεια του χρόνου αποφόρτισης, ο υπάλληλος ενεργοποιεί ένα χρόνο προετοιμασίας ώστε να είναι σε θέση να τον εξυπηρετήσει. Αν ο χρόνος αποφόρτισης παρέλθει χωρίς να αφιχθεί στο σύστημα κάποιος πελάτης τύπου 1, ο υπάλληλος αναχωρεί για ατέλει διακοπές. Επιστρέφοντας, αν δεν υπάρχουν τύπου 1 να αναμένουν στην ουρά, παραμένει άργος περιμένοντας την πρώτη άφιξη, είτε από έξω, είτε από την ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων.

Οι πελάτες κλάσης 1 έχουν μη-διακόπτουσα προτεραιότητα έναντι των πελατών κλάσης 2, με την έννοια ότι μία ενδεχόμενη άφιξή τους δεν επηρεάζει την εξυπηρέτηση ενός τύπου 2. Από την άλλη, η άφιξη ενός τύπου 1 πελάτη κατά



τη διάρκεια του χρόνου προετοιμασίας ενός τύπου 2, προκαλεί την διακοπή του και αναγκάζει τον υπάλληλο να ενεργοποιήσει έναν χρόνο προετοιμασίας, για να είναι σε θέση να εξυπηρετήσει τον νεο-αφιχθέντα τύπου 1 πελάτη. Σε αυτή τη περίπτωση ο διακοπτόμενος τύπου 2 πελάτης, δεν επιστρέφει στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων, αλλά παραμένει στον χώρο εξυπηρέτησης αναμένοντας τον υπάλληλο να εξυπηρετήσει τον νεο-αφιχθέντα τύπου 1 πελάτη καθώς και όλους τους τύπου 1, που ενδέχεται να φθάσουν στο σύστημα στη διάρκεια της διαδικασίας εξυπηρέτησης του. Ο υπάλληλος θα αρχίσει την διαδικασία εξυπηρέτησης του διακοπτόμενου πελάτη, όταν ολοκληρωθεί επιτυχώς η περίοδος αποφόρτισης που ενεργοποιείται αμέσως μετά την εξυπηρέτηση όλων των πελατών τύπου 1. Για το εν λόγω μοντέλο μελετώνται οι πιθανότητες των καταστάσεων σε συνεχή χρόνο και διερευνάται η συνθήκη στατιστικής ισορροπίας. Ακολούθως, μελετώνται οι πιθανότητες των καταστάσεων του μοντέλου, κάτω από αυτή τη συνθήκη.

Στο υπό μελέτη μοντέλο, τα χαρακτηριστικά του χρόνου προετοιμασίας και αποφόρτισης, συνδυάζονται για πρώτη φορά στα μοντέλα με επαναλαμβανόμενες αφίξεις. Αξίζει να σημειωθεί ότι είναι σύνηθες σε πολλές πρακτικές εφαρμογές η ύπαρξη τέτοιων χρονικών περιόδων, γεγονός που υποδηλώνει την εφαρμοσιμότητα του εν λόγω μοντέλου. Επιπλέον παρατηρείται ένα μεικτό είδος προτεραιότητας των πελατών τύπου 1, έναντι αυτών τύπου 2. Υπενθυμίζουμε ότι η διαδικασία εξυπηρέτησης ενός πελάτη τύπου 2, αποτελείται από τον χρόνο προετοιμασίας και τον καθαρό χρόνο εξυπηρέτησης. Στο παρόν μοντέλο, ο πελάτης τύπου 1 διακόπτει την διαδικασία εξυπηρέτησης αν αυτή βρίσκεται στην φάση του χρόνου προετοιμασίας, ενώ δεν την επηρεάζει καθόλου αν αυτή βρίσκεται στην φάση του καθαρού χρόνου εξυπηρέτησης. Δηλαδή παρατηρείται διακόπτουσα επαναληπτική προτεραιότητα όταν η διαδικασία εξυπηρέτησης βρίσκεται στη φάση του χρόνου προετοιμασίας και μη διακόπτουσα, όταν η διαδικασία είναι στη φάση του καθαρού χρόνου εξυπηρέτησης (βλέπε Jaiswal [102] σελ. 176-186). Επιπλέον, η προτεραιότητα των πελατών τύπου 1 διακρίνεται και από το γεγονός ότι ο υπάλληλος είναι διαθέσιμος μόνο για αυτούς, κατά τη διάρκεια της περιόδου αποφόρτισης. Οι παραπάνω παραλλαγές προτεραιοτήτων εμφανίζονται επίσης για πρώτη φορά στα μοντέλα με επαναλαμβανόμενες αφίξεις. Τα αποτελέσματα της παρούσης εργασίας θα δημοσιευθούν στο περιοδικό *Stochastic Models* (βλέπε [60]).



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ένα σύστημα ουράς επαναλαμβανόμενων αφίξεων με δύο φάσεις εξυπηρέτησης και διακοπές

2.1 Περίληψη

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάται ένα σύστημα ουράς με έναν υπάλληλο, ο οποίος παρέχει εξυπηρέτηση δύο φάσεων σε σειρά. Οι πελάτες φτάνοντας στο σύστημα τοποθετούνται σε μια κανονική ουρά και περιμένουν την σειρά τους για να εξυπηρετηθούν. Όλοι οι πελάτες λαμβάνουν εξυπηρέτηση και στις δυο φάσεις. Όταν κάποιος πελάτης ολοκληρώσει την πρώτη φάση εξυπηρέτησης, υπάρχουν δύο δυνατότητες για την μετέπειτα πορεία του. Είτε θα συνεχίσει άμεσα στην δεύτερη φάση εξυπηρέτησης, είτε θα αναχωρήσει προσωρινά από το σύστημα και θα εισέλθει στην ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων, απ' όπου επαναλαμβάνει την άφιξη του μετά από τυχαίο χρονικό διάστημα, ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους πελάτες που ενδέχεται να υπάρχουν ήδη εκεί, με σκοπό να συνδεθεί με τον υπάλληλο και να λάβει την δεύτερη φάση εξυπηρέτησης που του αναλογεί. Επιπλέον, κάθε φορά που ο υπάλληλος ελευθερώνεται, εγκαταλείπει το σύστημα για κάποιο χρονικό διάστημα (διακοπές).

Στο επόμενο εδάφιο περιγράφεται λεπτομερώς το μοντέλο και στην συνέχεια (εδάφιο 2.3) αναλύονται οι καταστάσεις του συστήματος σε συνεχή χρόνο. Ακολούθως (εδάφιο 2.4) δίνονται ορισμένα βοηθητικά αποτελέσματα, όσον αφορά τον χρόνο συμπλήρωσης εξυπηρέτησης ενός πελάτη καθώς και την περίοδο συ-



νεχούς απασχόλησης του υπάλληλου, τα οποία είναι απαραίτητα για την ανά-
λυση του μοντέλου. Στο εδάφιο 2.5, διερευνώνται οι συνθήκες κάτω από τις
οποίες το σύστημα είναι σε στατιστική ισορροπία και ακολουθώς αναλύονται οι
καταστάσεις (εδάφιο 2.6) κάτω από τις συνθήκες αυτές. Στο εδάφιο 2.7 υπολο-
γίζονται ορισμένα σημαντικά χαρακτηριστικά μέτρα του συστήματος, ενώ στο
εδάφιο 2.8 αποδεικνύεται ότι για το υπο μελέτη μοντέλο ισχύει η ιδιότητα της
διάσπασης. Τέλος (εδάφιο 2.9), εξάγονται ορισμένα αριθμητικά αποτελέσματα,
τα οποία είναι χρήσιμα για την κατανόηση της λειτουργίας του συστήματος.
Τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου περιλαμβάνονται στην εργασία των
Dimitriou and Langaris [59].

2.2 Περιγραφή του μοντέλου

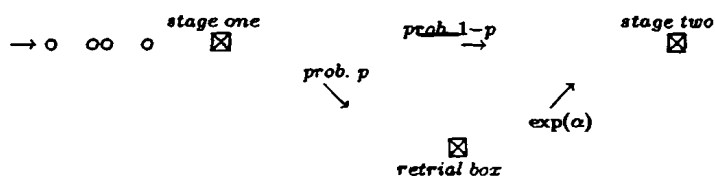
Θεωρούμε ένα σύστημα ουράς με έναν υπάλληλο, ο οποίος παρέχει εξυπηρέ-
τηση δύο φάσεων σε σειρά. Επιπλέον ο υπάλληλος ακολουθεί τον πελάτη στην
εξυπηρέτηση, καθώς αυτός μεταβαίνει από την πρώτη φάση στην δεύτερη. Οι
πελάτες φτάνουν στο σύστημα σύμφωνα με την κατανομή *Poisson* παραμέτρου
 λ και τοποθετούνται σε μια κανονική ουρά (προτεραιότητας) απείρου χωρητι-
κότητας περιμένοντας να εξυπηρετηθούν. Όλοι οι πελάτες λαμβάνουν εξυπη-
ρέτηση και στις δυο φάσεις. Όταν ένας πελάτης ολοκληρώσει την πρώτη φάση
εξυπηρέτησης, τότε υπάρχουν δυο δυνατότητες για την μετέπειτα πορεία του.
Είτε με πιθανότητα $1 - p$ θα προωθηθεί άμεσα στην δεύτερη φάση εξυπηρέτη-
σης, είτε με πιθανότητα p θα αναχωρήσει προσωρινά από το σύστημα και θα
εισέλθει στην λεγόμενη “ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων” (απείρου χω-
ρητικότητας). Από εκεί προσπαθεί, ανεξάρτητα από τους άλλους πελάτες που
υπάρχουν ήδη εκεί, μετά από τυχαίο χρονικό διάστημα που προέρχεται από την
εκθετική κατανομή με παράμετρο α , να βρεί τον υπάλληλο διαθέσιμο (άεργο)
ώστε να λάβει την δεύτερη φάση εξυπηρέτησης που του αναλογεί. Στη περι-
πτωση που ο πελάτης επιλέξει να αναχωρήσει από το σύστημα και να εισέλθει
στην ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων, ο υπάλληλος αρχίζει αμέσως την
πρώτη φάση εξυπηρέτησης του επόμενου πελάτη (αν υπάρχει) στην κανονική
ουρά. Κάθε φορά που ο υπάλληλος ελευθερώνεται, δηλαδή όταν δεν υπάρχουν
πελάτες που περιμένουν στην κανονική ουρά μετά το τέλος κάποιας εξυπηρέ-
τησης, εγκαταλείπει το σύστημα για τυχαίο χρονικό διάστημα (διακοπές). Πιο
συγκεκριμένα, οι διακοπές θεωρούνται απλές: ο υπάλληλος με την επιστροφή
του στο σύστημα αρχίζει να εξυπηρετεί τους πελάτες της κανονικής ουράς, αν
υπάρχουν. Αν την στιγμή της επιστροφής δεν υπάρχουν τέτοιοι πελάτες, τότε ο



υπάλληλος παραμένει άεργος αναμένοντας την πρώτη άφιξη που θα ζητήσει εξυπηρέτηση (είτε από έξω, είτε από την ουρά επαναλαμβανόμενων αφίξεων). Θα θεωρούμε ότι ο χρόνος διακοπών U_0 του υπαλλήλου προέρχεται από οποιαδήποτε αυθαίρετη συνεχή κατανομή με αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ) $B_0(x)$, συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) $b_0(x)$, μέση τιμή $\bar{b}_0$ και ροπή δεύτερης τάξης περί το μηδέν $\bar{b}_0^{(2)}$.

Θα καλούμε P_1 πελάτες, εκείνους που τοποθετούνται στην κανονική ουρά περιμένοντας να εξυπηρετηθούν ή συνεχίζουν τη διαδικασία εξυπηρέτησης τους χωρίς να εισέλθουν στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων, ενώ P_2 πελάτες, εκείνους που εισέρχονται στην ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων. Εστω, U_{ij} , $i = 1, 2$, $j = 1, 2$, η τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) που παριστά τον χρόνο εξυπηρέτησης του P_i πελάτη στην j φάση. Θεωρούμε ότι οι τ.μ U_{ij} προέρχονται από αυθαίρετες κατανομές με α.σ.κ. $B_{ij}(x)$, σ.π.π. $b_{ij}(x)$, μέση τιμή $\bar{b}_{ij}$ και ροπή δεύτερης τάξης περί το μηδέν $\bar{b}_{ij}^{(2)}$. Επιπροσθέτως, υποθέτουμε ότι όλες οι παραπάνω τ.μ. είναι ανεξάρτητες.

Σύμφωνα με τις παραπάνω παραδοχές, η δυναμική του συστήματος περιγράφεται από το ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα 2.1: Το μοντέλο με επαναλαμβανόμενες αφίξεις και δύο φάσεις εξυπηρέτησης

Οι Kumar, Vijayakumar and Arivudainambi [124], Artalejo and Choudhury [22] και ο Choudhury [40], ήταν οι πρώτοι που εισήγαγαν την έννοια των “επαναλαμβανόμενων αφίξεων” σε μοντέλα με δυο φάσεις εξυπηρέτησης. Οι Kumar et.al. [124] γενίκευσαν μια προηγούμενη εργασία τους σε ένα μοντέλο με μία φάση εξυπηρέτησης (Kumar et.al. [125]), θεωρώντας ένα σύστημα ουράς με δύο φάσεις εξυπηρέτησης, όπου κάθε πελάτης που βρίσκει μη διαθέσιμο τον υπάλληλο αναχωρεί για την ουρά επαναλαμβανόμενων αφίξεων. Από εκεί, μόνο ο πρώτος στην σειρά πελάτης προσπαθεί να συνδεθεί με τον υπάλληλο, μετά από τυχαίο χρονικό διάστημα, που προέρχεται από μία αυθαίρετη κατανομή. Επιπλέον όταν κάποιος πελάτης ολοκληρώσει την πρώτη φάση εξυπηρέτησης, είτε

ζητά να λάβει μια επιπλέον φάση εξυπηρέτησης, είτε αναχωρεί από το σύστημα. Στην εργασία του Choudhury [40] κάθε πελάτης, ολοκληρώνοντας την πρώτη φάση εξυπηρέτησης, συνεχίζει αμέσως και στην δεύτερη. Εν συνεχεία το εν λόγω μοντέλο, περιλαμβάνει διακοπές του υπαλλήλου, που υπόκειται σε ένα μηχανισμό Bernoulli, ενώ ο χρόνος μεταξύ διαδοχικών προσπαθειών ενός πελάτη από την ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $k\alpha + \beta$, όπου k ο αριθμός των πελατών που βρίσκονται στη δεδομένη στιγμή στην ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων (linear retrial policy). Θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι και στις τρεις παραπάνω εργασίες δεν υπάρχει κανονική ουρά και όλοι οι πελάτες, που βρίσκουν μη διαθέσιμο τον υπάλληλο τοποθετούνται στην ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων.

Το μοντέλο του παρόντος κεφαλαίου, που εμφανίζεται για πρώτη φορά στην βιβλιογραφία, είναι διαφορετικό ως προς την λειτουργία του και σαφώς γενικότερο από αυτά των Kumar et al. [124], Artalejo and Choudhury [22] και Choudhury [40], αφού σε οποιαδήποτε στιγμή δύο ουρές, η κανονική και αυτή των επαναλαμβανόμενων αφίξεων πρέπει να λαμβάνονται υπόψιν, κάνοντας πολύπλοκότερη την ανάλυσή του. Επιπλέον θα πρέπει να παρατηρηθεί ότι στο υπό μελέτη μοντέλο, οι πελάτες της ουράς των επαναλαμβανόμενων αφίξεων, έχουν ήδη λάβει ένα ποσοστό εξυπηρέτησης (αυτό της πρώτης φάσης) την στιγμή που εισέρχονται σε αυτήν, γεγονός που δεν ισχύει τόσο στα παραπάνω μοντέλα, όσο και σε άλλα συστήματα με επαναλαμβανόμενες αφίξεις πελατών. Το γεγονός αυτό το καθιστά ακόμα πιο ενδιαφέρον σε σχέση με τα προαναφερθέντα μοντέλα. Επιπροσθέτως θα πρέπει να επισημάνουμε ότι οι P_2 πελάτες προέρχονται από τη ροή των P_1 πελατών, που μετά την ολοκλήρωση της πρώτης φάσης εισήλθαν στο κουτί.

Το υπό μελέτη μοντέλο είναι κατάλληλο για να περιγράψει συστήματα με δυο φάσεις εξυπηρέτησης, όπου στην πρώτη φάση γίνεται έλεγχος των εξυπηρετούμενων μονάδων (πελάτες, εργασίες). Αν μία μονάδα ικανοποιεί κάποια ποιοτικά κριτήρια προωθείται άμεσα στην επόμενη φάση. Αν η ποιότητα της μονάδας είναι χαμηλή, τότε αποσύρεται προσωρινά από το σύστημα και επαναλαμβάνει την προσπάθειά της, ώστε να ολοκληρώσει την διαδικασία εξυπηρέτησής της, όταν ο υπάλληλος είναι ελεύθερος από μονάδες υψηλής ποιότητας. Τέτοιες καταστάσεις συναντώνται συχνά, στην μετάδοση “πακέτων” πληροφορίας στα τηλεπικοινωνιακά δίκτυα, σε βιομηχανικά συστήματα, σε δίκτυα υποεπεξεργαστών που συνδέονται με έναν κεντρικό επεξεργαστή κ.ο.κ..



2.3 Ανάλυση των καταστάσεων του συστήματος σε συνεχή χρόνο

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε τις πιθανότητες του αριθμού των πελατών που βρίσκονται στο σύστημα (στην κανονική ουρά και στην ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων) σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Το εν λόγω χαρακτηριστικό είναι από τα πιο ενδιαφέροντα ενός συστήματος εξυπηρέτησης και πολλές φορές είναι δύσκολο να μελετηθεί, ενώ άλλες είναι αδύνατο. Έτσι, τα πρώτα αποτελέσματα της ανάλυσης αφορούν τις χρονικά εξαρτημένες πιθανότητες των καταστάσεων του συστήματος.

Εστω $N_1(t)$, $N_2(t)$, οι τ.μ. που παριστούν τον αριθμό των P_1 και P_2 πελατών, που βρίσκονται στη κανονική ουρά και στην ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων αντίστοιχα, την χρονική στιγμή (χ.σ.) t . Ορίζουμε επιπλέον με,

$$\xi_t = \begin{cases} 0 & \text{υπάλληλος σε διακοπές την χ.σ. } t, \\ (i, j) & \text{υπάλληλος απασχολημένος στη } j \text{ φάση} \\ & \text{με } P_i \text{ πελάτη την χ.σ. } t, \\ id & \text{υπάλληλος άεργος την χ.σ. } t, \end{cases}$$

την τ.μ. που εκφράζει την κατάσταση που βρίσκεται ο υπάλληλος τη δεδομένη χ.σ. t . Με την βοήθεια των παραπάνω ορισμών, ορίζονται οι πιθανότητες των καταστάσεων του συστήματος ως

$$\begin{aligned} q(k_2, t) &= P(N_1(t) = 0, N_2(t) = k_2, \xi_t = id), \\ p_0(k_1, k_2, x, t) &= P(N_1(t) = k_1, N_2(t) = k_2, \xi_t = 0, x < \bar{U}_0(t) \leq x + dx), \\ p_{ij}(k_1, k_2, x, t) &= P(N_1(t) = k_1, N_2(t) = k_2, \xi_t = (i, j), x < \bar{U}_{ij}(t) \leq x + dx), \end{aligned}$$

όπου $\bar{U}_{ij}(t)$, $\bar{U}_0(t)$ είναι ο χρόνος εξυπηρέτησης, που έχει ήδη λάβει ο P_i πελάτης στην j φάση ($i = 1, 2, j = i, 2$) και ο χρόνος διακοπών, που έχει ήδη λάβει ο υπάλληλος αντίστοιχα, την χ.σ. t . Αν επιπλέον ορίσουμε και τις αντίστοιχες γεννήτριες πιθανοτήτων

$$\begin{aligned} Q(z_2, t) &= \sum_{k_2 \geq 0} q(k_2, t) z_2^{k_2}, \\ P_0(z_1, z_2, x, t) &= \sum_{k_1 \geq 0} \sum_{k_2 \geq 0} p_0(k_1, k_2, x, t) z_1^{k_1} z_2^{k_2}, \\ P_{ij}(z_1, z_2, x, t) &= \sum_{k_1 \geq 0} \sum_{k_2 \geq 0} p_{ij}(k_1, k_2, x, t) z_1^{k_1} z_2^{k_2}, \quad i, j = 1, 2, \end{aligned}$$



τότε συνδέοντας, κατά τον γνωστό τρόπο, τις πιθανότητες της χ.σ. t με αυτές της $t + dt$ παίρνουμε, στην περίπτωση όπου $x > 0$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right)p_{ij}(k_1, k_2, x, t) + (\lambda + \eta_{ij}(x))p_{ij}(k_1, k_2, x, t) &= \lambda p_{ij}(k_1 - 1, k_2, x, t), \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right)p_0(k_1, k_2, x, t) + (\lambda + \eta_0(x))p_0(k_1, k_2, x, t) &= \lambda p_0(k_1 - 1, k_2, x, t), \end{aligned}$$

και

$$\frac{d}{dt}q(k_2, t) + (\lambda + k_2\alpha)q(k_2, t) = \int_0^\infty p_0(0, k_2, x, t)\eta_0(x)dx,$$

ενώ οι αντίστοιχες αρχικές συνθήκες κάτω από τις οποίες θα πρέπει να επιλύσουμε τις παραπάνω εξισώσεις δίνονται από

$$\begin{aligned} p_{11}(k_1, k_2, 0, t) &= \delta_{\{k_1=0\}}\lambda q(k_2, t) + p \int_0^\infty p_{11}(k_1 + 1, k_2 - 1, x, t)\eta_{11}(x)dx \\ &\quad + \int_0^\infty p_0(k_1 + 1, k_2, x, t)\eta_0(x)dx \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 \int_0^\infty p_{i2}(k_1 + 1, k_2, x, t)\eta_{i2}(x)dx, \\ p_{12}(k_1, k_2, 0, t) &= (1 - p) \int_0^\infty p_{11}(k_1, k_2, x, t)\eta_{11}(x)dx, \\ p_{22}(k_1, k_2, 0, t) &= \delta_{\{k_1=0\}}\alpha(k_2 + 1)q(k_2 + 1, t), \\ p_0(k_1, k_2, 0, t) &= \delta_{\{k_1=0\}}[p \int_0^\infty p_{11}(0, k_2 - 1, x, t)\eta_{11}(x)dx \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 \int_0^\infty p_{i2}(0, k_2, x, t)\eta_{i2}(x)dx], \end{aligned}$$

όπου η συνάρτηση $\delta_{\{k_1=0\}}$ είναι το δέλτα του Kronecker και

$$\eta(x) = \frac{b(x)}{1 - B(x)}.$$

Ορίζοντας με $Q^*(z_2, s)$, $P_0^*(z_1, z_2, x, s)$, $P_{ij}^*(z_1, z_2, x, s)$ τους αντίστοιχους Μετασχηματισμούς Laplace (ML) των γεννήτριων συναρτήσεων που ορίστηκαν παραπάνω, καταλήγουμε στις εξής σχέσεις

$$\begin{aligned} P_0^*(z_1, z_2, x, s) &= P_0^*(z_1, z_2, 0, s)(1 - B_0(x))\exp[-(s + \lambda - \lambda z_1)x], \\ P_{ij}^*(z_1, z_2, x, s) &= P_{ij}^*(z_1, z_2, 0, s)(1 - B_{ij}(x))\exp[-(s + \lambda - \lambda z_1)x], \end{aligned} \quad (2.1)$$

και

$$\alpha z_2 \frac{d}{dz_2} Q^*(z_2, s) + (\lambda + s)Q^*(z_2, s) = 1 + P_0^*(0, z_2, 0, s)\beta_0^*(s + \lambda), \quad (2.2)$$



όπου $\beta_0^*(\cdot)$, $\beta_{ij}^*(\cdot)$ είναι οι M.L. των $b_0(\cdot)$, $b_{ij}(\cdot)$ αντίστοιχα. Με ανάλογο τρόπο οι αντίστοιχες αρχικές συνθήκες ($x = 0$) δίνονται από

$$\begin{aligned} P_0^*(0, z_2, 0, s) &= pz_2 P_{11}^*(0, z_2, 0, s) \beta_{11}^*(s + \lambda) + P_{12}^*(0, z_2, 0, s) \beta_{12}^*(s + \lambda) \\ &\quad + P_{22}^*(0, z_2, 0, s) \beta_{22}^*(s + \lambda), \\ P_{12}^*(z_1, z_2, 0, s) &= (1 - p) P_{11}^*(z_1, z_2, 0, s) \beta_{11}^*(s + \lambda - \lambda z_1), \\ P_{22}^*(0, z_2, 0, s) &= \alpha \frac{d}{dz_2} Q^*(z_2, s), \end{aligned} \quad (2.3)$$

ενώ

$$\begin{aligned} z_1 P_{11}^*(z_1, z_2, 0, s) &= pz_2 (P_{11}^*(z_1, z_2, 0, s) \beta_{11}^*(s + \lambda - \lambda z_1) \\ &\quad - P_{11}^*(0, z_2, 0, s) \beta_{11}^*(s + \lambda)) + P_0^*(0, z_2, 0, s) \\ &\quad \times (\beta_0^*(s + \lambda - \lambda z_1) - \beta_0^*(s + \lambda)) + P_{12}^*(z_1, z_2, 0, s) \\ &\quad \times \beta_{12}^*(s + \lambda - \lambda z_1) - P_{12}^*(0, z_2, 0, s) \beta_{12}^*(s + \lambda) \\ &\quad + P_{22}^*(z_1, z_2, 0, s) \beta_{22}^*(s + \lambda - \lambda z_1) \\ &\quad - P_{22}^*(0, z_2, 0, s) \beta_{22}^*(s + \lambda) + \lambda z_1 Q^*(z_2, s). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Αντικαθιστώντας τις (2.1), (2.3) στην (2.4) καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση

$$\begin{aligned} P_{11}^*(z_1, z_2, 0, s) &= \\ &\frac{\lambda z_1 Q^*(z_2, s) + \alpha \beta_{22}^*(s + \lambda - \lambda z_1) \frac{d}{dz_2} Q^*(z_2, s) - P_0^*(0, z_2, 0, s) [1 + \beta_0^*(s + \lambda) - \beta_0^*(s + \lambda - \lambda z_1)]}{z_1 - \beta_{11}^*(s + \lambda - \lambda z_1) [pz_2 + (1 - p) \beta_{12}^*(s + \lambda - \lambda z_1)]}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Ας ορίσουμε με $\tilde{S}$ τον χρόνο που απαιτείται από τον υπάλληλο για να εξυπηρετήσει πλήρως (δηλαδή είτε να ολοκληρώσει την διαδικασία εξυπηρέτησης και να αναχωρήσει από το σύστημα, είτε να εισέλθει στην ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων και να γίνει P_2 πελάτης) έναν P_1 πελάτη και έστω $N_1(\tilde{S})$, $N_2(\tilde{S})$ ο αριθμός των νέων P_1 και P_2 πελατών, που φτάνουν στην κανονική ουρά και στην ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων αντίστοιχα στην διάρκεια του $\tilde{S}$. Έστω επιπλέον

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{ij}(t) dt &= P(t < \tilde{S} \leq t + dt, N_1(\tilde{S}) = i, N_2(\tilde{S}) = j), \\ \tilde{\beta}^*(s, z_1, z_2) &= \int_0^\infty e^{-st} \sum_{i=0}^\infty \sum_{j=0}^1 \tilde{b}_{ij}(t) z_1^i z_2^j dt. \end{aligned}$$



Είναι προφανές ότι ο χρόνος εξυπηρέτησης ενός P_1 πελάτη είτε αποτελείται, με πιθανότητα p , μόνο από την πρώτη φάση (σε αυτή τη περίπτωση ο αριθμός των P_2 πελατών αυξάνει κατά ένα), είτε αποτελείται, με πιθανότητα $1 - p$, και από τις δυο φάσεις εξυπηρέτησης. Τότε,

$$\begin{aligned}\bar{b}_{20}(t) &= \sum_{k=0}^i e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} b_{11}(t)(1-p) * e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{i-k}}{(i-k)!} b_{12}(t), \\ \bar{b}_{i1}(t) &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!} b_{11}(t)p.\end{aligned}\quad (2.6)$$

Επομένως είναι εύκολα κατανοητό ότι,

$$\tilde{\beta}^*(s, z_1, z_2) = \beta_{11}^*(s + \lambda - \lambda z_1)[pz_2 + (1-p)\beta_{12}^*(s + \lambda - \lambda z_1)],$$

και επομένως η απόδειξη του ακόλουθου λήμματος αποτελεί απλή εφαρμογή του γνωστού θεωρήματος του Takacs [164].

Λήμμα 2.1 Για (i) $|z_2| < 1$, $\text{Re}(s) \geq 0$, ή (ii) $|z_2| \leq 1$, $\text{Re}(s) > 0$, ή (iii) $|z_2| \leq 1$, $\text{Re}(s) \geq 0$ και $\rho_1 = \lambda(\bar{b}_{11} + (1-p)\bar{b}_{12}) > 1$, η σχέση

$$z_1 - \beta_{11}^*(s + \lambda - \lambda z_1)[pz_2 + (1-p)\beta_{12}^*(s + \lambda - \lambda z_1)], \quad (2.7)$$

έχει μια και μόνο μία ρίζα, έστω $z_1 = x(s, z_2)$, μέσα στην περιοχή $|z_1| < 1$. Ειδικότερα για $s = 0$ και $z_2 = 1$, η $x(0, 1)$ είναι η μικρότερη θετική πραγματική ρίζα της (2.7) με $x(0, 1) < 1$ αν $\rho_1 > 1$ και $x(0, 1) = 1$ αν $\rho_1 \leq 1$.

Επειδή η συνάρτηση $P_{11}^*(z_1, z_2, 0, s)$ πρέπει να είναι αναλυτική για $|z_1| \leq 1$, $|z_2| \leq 1$, η ρίζα του παρονομαστή, $x(s, z_2)$, πρέπει να είναι και ρίζα του αριθμητή. Οπότε από την σχέση (2.5) χρησιμοποιώντας το παραπάνω Λήμμα, καταλήγουμε στην

$$P_0^*(0, z_2, 0, s) = \frac{\lambda x(s, z_2)Q^*(z_2, s) + \alpha\beta_{22}^*(s + \lambda - \lambda x(s, z_2))\frac{d}{dz_2}Q^*(z_2, s)}{1 + \beta_0^*(s + \lambda) - \beta_0^*(s + \lambda - \lambda x(s, z_2))}, \quad (2.8)$$

και αντικαθιστώντας στην συνέχεια στην (2.2) θα έχουμε

$$\alpha(z_2 - D_2(s, z_2))\frac{d}{dz_2}Q^*(z_2, s) + (s + \lambda - \lambda D_1(s, z_2))Q^*(z_2, s) = 1, \quad (2.9)$$



όπου

$$\begin{aligned} D_2(s, z_2) &= \frac{\beta_0^*(s+\lambda)\beta_{22}^*(s+\lambda-\lambda x(s, z_2))}{1+\beta_0^*(s+\lambda)-\beta_0^*(s+\lambda-\lambda x(s, z_2))}, \\ D_1(s, z_2) &= \frac{x(s, z_2)\beta_0^*(s+\lambda)}{1+\beta_0^*(s+\lambda)-\beta_0^*(s+\lambda-\lambda x(s, z_2))}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Εστω,

$$\rho_0 = \frac{\lambda p \bar{b}_0}{\beta_0^*(\lambda)}, \quad \rho_2 = \lambda p \bar{b}_{22}, \quad \rho = \rho_0 + \rho_1 + \rho_2, \quad (2.11)$$

όπου το ρ_1 δίνεται στο Λήμμα 2.1. Διατυπώνεται τώρα το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 2.2 Για (i) $\operatorname{Re}(s) > 0$, ή (ii) $\operatorname{Re}(s) \geq 0$ και $\rho > 1$, η εξίσωση

$$z_2 - D_2(s, z_2) = 0, \quad (2.12)$$

έχει μια και μόνο μια ρίζα, έστω $z_2 = \phi(s)$, μέσα στην περιοχή $|z_2| < 1$. Ειδικότερα για $s = 0$, η $\phi(0)$ είναι η μικρότερη θετική πραγματική ρίζα της (2.12), με $\phi(0) < 1$ αν $\rho > 1$ και $\phi(0) = 1$ αν $\rho \leq 1$.

Απόδειξη: Η απόδειξη του θεωρήματος είναι εξ' ολοκλήρου βασισμένη στην έννοια του "γενικευμένου τροποποιημένου χρόνου συμπλήρωσης εξυπηρέτησης" ενός P_2 πελάτη, η οποία θα αναλυθεί στην επόμενη παράγραφο. Έτσι, συγκρίνοντας την συνάρτηση $D_2(s, z_2)$, πρώτη από την σχέση (2.10), με την συνάρτηση $w_2^*(s, z_2)$ στην σχέση (2.17) του επόμενου εδαφίου, βλέπουμε ότι

$$D_2(s, z_2) = w_2^*(s, z_2) = \int_0^\infty e^{-st} \sum_{m=0}^\infty w_m^{(2)}(t) z_2^m dt,$$

όπου η συνάρτηση $w_m^{(2)}(t)$ είναι σ.π.π.. Δηλαδή η $D_2(s, z_2)$ είναι στην πράξη M.L. μιας γεννήτριας πιθανοτήτων.

Θεωρούμε την κλειστή καμπύλη $|z_2| = 1$. Τότε κάτω από την συνθήκη (i) ισχύει πάντα

$$|D_2(s, z_2)| \leq D_2(\operatorname{Re}(s), 1) < D_2(0, 1) = 1 \equiv |z_2|,$$

ενώ στην περίπτωση όπου $\operatorname{Re}(s) \geq 0$, πρέπει να θεωρήσουμε την κλειστή καμπύλη $|z_2| = 1 - \epsilon$ (όπου $\epsilon > 0$ είναι αρκετά μικρός αριθμός). Σε αυτή την περίπτωση

$$|D_2(s, z_2)| \leq D_2(\operatorname{Re}(s), 1 - \epsilon) < 1 - \epsilon \equiv |z_2|, \quad (2.13)$$



μόνο εαν επιπροσθέτως ισχύει

$$\frac{d}{d\epsilon} D_2(0, 1 - \epsilon) |_{\epsilon=0} = -\frac{\rho_0 + \rho_2}{1 - \rho_1} < \frac{d}{d\epsilon} (1 - \epsilon) |_{\epsilon=0} = -1,$$

ή ισοδύναμα $\rho > 1$, ώστε να ισχύει η σχέση (2.13). Το πρώτο μέρος της απόδειξης ολοκληρώνεται λαμβάνοντας υπόψιν το θεώρημα του Rouché.

Επιπλέον για $s = 0$ η κυρτή συνάρτηση $D_2(0, z_2)$ είναι αύξουσα ως προς z_2 , για $0 \leq z_2 \leq 1$, παίρνοντας τιμές $D_2(0, 0) < 1$ και $D_2(0, 1) = 1$ και συνεπώς $0 < \phi(0) < 1$ αν $\rho > 1$, ενώ για $\rho \leq 1$, έχουμε $\phi(0) = 1$, γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Λαμβάνοντας υπόψιν το παραπάνω θεώρημα, η διαφορική εξίσωση (2.9) μπορεί να επιλυθεί (βλέπε Falin and Fricker [81]) στα διαστήματα $[0, \phi(s))$ και $(\phi(s), 1]$. Τελικώς η γεννήτρια $Q^*(s, z_2)$, που προκύπτει ως λύση της εν λόγω διαφορικής εξίσωσης δίνεται από,

$$Q^*(s, z_2) = \frac{1}{s + \lambda - \lambda D_1(s, z_2)}, \quad \text{if } z_2 = \phi(s),$$

$$Q^*(s, z_2) = \int_{z_2}^{\phi(s)} \frac{1}{\alpha(D_2(s, u) - u)} \exp\left\{\int_u^{z_2} \frac{s + \lambda - \lambda D_1(s, x)}{\alpha(D_2(s, x) - x)} dx\right\} du, \quad \text{if } z_2 \neq \phi(s).$$

Αρα έχοντας υπολογίσει τη γεννήτρια συνάρτηση $Q^*(s, z_2)$, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.1), (2.3), (2.5) και (2.8), όλες οι γεννήτριες πιθανοτήτων που ορίστηκαν προηγουμένως είναι γνωστές. Με αυτό το αποτέλεσμα ολοκληρώνεται η ανάλυση του συστήματος σε συνεχή χρόνο.

2.4 Βοηθητικά αποτελέσματα

Στη συνέχεια δίνουμε κάποιους βασικούς ορισμούς, που χρησιμεύουν στην καλύτερη κατανόηση της λειτουργίας του μοντέλου. Επιπλέον, παρουσιάζουμε και αποδεικνύουμε ορισμένα βασικά αποτελέσματα, που βοηθούν στην ανάλυση του συστήματος (βλέπε απόδειξη Θεωρήματος 2.2 του προηγούμενου εδαφίου).

Ορισμός: Η περίοδος συνεχούς απασχόλησης των P_1 πελατών, εκφράζει την χρονική διάρκεια από τη στιγμή που κάποιος P_1 πελάτης αρχίζει να εξυπηρετείται μέχρι την στιγμή που ο υπάλληλος ελευθερώνεται για πρώτη φορά, δηλαδή όταν η ουρά προτεραιότητας αδειάζει.



Ας ορίσουμε

$$\begin{aligned} B^{(i)} &= \text{Διάρκεια περιόδου συνεχούς απασχόλησης } P_1 \\ &\quad \text{πελατών που αρχίζει με } i \text{ } P_1 \text{ πελάτες,} \\ N(B^{(i)}) &= \text{Αριθμός νέων } P_2 \text{ πελατών που φαίνουν στην} \\ &\quad \text{διάρκεια του } B^{(i)}, \\ g_m^{(i)}(t)dt &= P(t < B^{(i)} \leq t + dt, N(B^{(i)}) = m), i \geq 1, m \geq 0. \end{aligned}$$

Τότε εργαζόμενοι όπως οι Langaris and Katsaros [133], καταλήγουμε στην

$$g^{(i)}(s, z_2) \equiv \int_0^\infty e^{-st} \sum_{m=0}^\infty g_m^{(i)}(t) z_2^m dt = x^i(s, z_2),$$

όπου $x(s, z_2)$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης (2.7) του Λήμματος 2.1.

Ας ορίσουμε με C , την τ.μ. που εκφράζει το χρονικό διάστημα από την στιγμή που ένας P_2 (retiral) πελάτης βρίσκει διαθέσιμο τον υπάλληλο και αρχίζει την εξυπηρέτηση του, μέχρι την στιγμή που ο υπάλληλος είναι έτοιμος να αναχωρήσει για διακοπές (δηλαδή τη στιγμή που ολοκληρώνεται μία εξυπηρέτηση και η ουρά προτεραιότητας είναι άδεια). Εστω επίσης $N(C)$, τ.μ. που εκφράζει τον αριθμό των νέων πελατών που εισέρχονται στην ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων, στη διάρκεια του C . Τον χρόνο C , θα το καλούμε και ως "τροποποιημένο χρόνο συμπλήρωσης εξυπηρέτησης" ενός P_2 πελάτη. Παρατήρησε ότι αν δεν έρθει κανένας P_1 πελάτης στην διάρκεια του χρόνου εξυπηρέτησης του P_2 πελάτη, τότε το C ολοκληρώνεται και ο υπάλληλος αναχωρεί για διακοπές. Σε αυτή τη περίπτωση δεν έρχεται κανένας νέος P_2 πελάτης. Επιπροσθέτως, αν στην διάρκεια του χρόνου εξυπηρέτησης του P_2 πελάτη έρθουν i P_1 πελάτες, μετά το πέρας αυτού θα ακολουθήσει μια περίοδος συνεχούς απασχόλησης P_1 πελατών που αρχίζει με i P_1 πελάτες και μόλις αυτή ολοκληρωθεί, ο υπάλληλος θα αναχωρήσει για διακοπές. Σε αυτή τη περίπτωση υπάρχει η δυνατότητα να έχουμε νέους P_2 πελάτες. Έτσι αν ορίσουμε με $c_m(t)dt = P(t < C \leq t + dt, N(C) = m)$ την από κοινού σ.π.κ. των $C, N(C)$ τότε,

$$c_0(t) = e^{-\lambda t} b_{22}(t) + \sum_{i=1}^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!} b_{22}(t) * g_0^{(i)}(t),$$

$$c_m(t) = \sum_{i=1}^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!} b_{22}(t) * g_m^{(i)}(t),$$

όπου $*$ εκφράζει συνέλιξη και μετά από πράξεις καταλήγουμε στην

$$c^*(s, z_2) = \int_0^\infty e^{-st} \sum_{m=0}^\infty c_m(t) z_2^m dt = \beta_{22}^*(s + \lambda - \lambda x(s, z_2)). \quad (2.14)$$



Κατα αναλογία, ας ορίσουμε με V , την τ.μ. που εκφράζει το χρονικό διάστημα από τη στιγμή που ο υπάλληλος αναχωρεί για διακοπές, μέχρι την στιγμή που είναι για πρώτη φορά άεργος (δηλαδή τη στιγμή που επέστρεψε από τις διακοπές και βρήκε άδεια την ουρά προτεραιότητας). Επιπλέον, έστω $N(V)$, τ.μ. που εκφράζει τον αριθμό των νέων πελατών που εισέρχονται στην ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων, στη διάρκεια του V . Τον χρόνο V , θα το καλούμε και ως γενικευμένο χρόνο διακοπών του υπαλλήλου. Αν στη διάρκεια των διακοπών του υπαλλήλου δεν έρθει κανένας P_1 πελάτης, τότε μετά το πέρας αυτών ο υπάλληλος θα παραμείνει άεργος, ενώ κανένας νέος P_2 πελάτης δεν θα έχει εισέλθει στην ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων. Στη περίπτωση που έρθουν i P_1 πελάτες, στη διάρκεια των διακοπών, μετά την επιστροφή του υπαλλήλου θα ακολουθήσει μια περίοδος συνεχούς απασχόλησης P_1 πελατών που αρχίζει με i P_1 πελάτες και κατόπιν, ο υπάλληλος θα αναχωρήσει ξανά για διακοπές κ.ο.κ.. Στη παρούσα φάση ενδέχεται να έχω νέους P_2 πελάτες. Έτσι, αν ορίσουμε με

$$v_m(t)dt = P(t < V \leq t + dt, N(V) = m),$$

$$v^*(s, z_2) = \int_0^\infty e^{-st} \sum_{m=0}^\infty v_m(t) z_2^m dt,$$

την από κοινού σ.π.π. των V , $N(V)$ και τον Μ.Λ. της αντίστοιχης γεννήτριας πιθανοτήτων τότε

$$v_0(t) = e^{-\lambda t} b_0(t) + \sum_{i=1}^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!} b_0(t) * g_0^{(i)}(t) * v_0(t),$$

$$v_m(t) = \sum_{i=1}^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!} b_0(t) * \sum_{k=0}^m g_k^{(i)}(t) * v_{m-k}(t),$$

και επομένως

$$v^*(s, z_2) = \frac{\beta_0^*(s + \lambda)}{1 + \beta_0^*(s + \lambda) - \beta_0^*(s + \lambda - \lambda x(s, z_2))}. \quad (2.15)$$

Τώρα είμαστε σε θέση να ορίσουμε τις έννοιες του γενικευμένου τροποποιημένου χρόνου συμπλήρωσης εξυπηρέτησης ενός P_2 πελάτη και της γενικευμένης περιόδου συνεχούς απασχόλησης P_1 πελατών, λαμβάνοντας υπόψιν τις διακοπές του υπαλλήλου.

Ως “γενικευμένο τροποποιημένο χρόνο συμπλήρωσης εξυπηρέτησης”, έστω W_2 , ενός P_2 πελάτη, ορίζουμε την τ.μ. που εκφράζει το χρονικό διάστημα από την στιγμή που ένας P_2 πελάτης βρίσκει διαθέσιμο τον υπάλληλο και αρχίζει την εξυπηρέτηση του, μέχρι την στιγμή που ο υπάλληλος είναι άεργος για πρώτη



φορά. Παρατήρησε ότι η περίοδος W_2 αποτελείται από δύο ανεξάρτητες χρονικές περιόδους. Το χρονικό διάστημα από τη στιγμή που ένας P_2 πελάτης κατάφερε να συνδεθεί με τον υπάλληλο, έως τη στιγμή που ο υπάλληλος είναι έτοιμος να αναχωρήσει για διακοπές (C), συν το χρονικό διάστημα από τη στιγμή που ο υπάλληλος αναχώρησε για διακοπές, έως τη στιγμή που έμεινε άεργος για πρώτη φορά (V). Ως γενικευμένη περίοδο συνεχούς απασχόλησης, έστω W_1 , P_1 πελατών, ορίζουμε την τ.μ. που εκφράζει το χρονικό διάστημα από τη στιγμή που ένας P_1 πελάτης φτάνει σε άδεια σύστημα (ο υπάλληλος άεργος), μέχρι την στιγμή που ο υπάλληλος θα είναι άεργος για πρώτη φορά. Κατ' ανάλογο τρόπο, το W_1 αποτελείται από δύο ανεξάρτητα χρονικά διαστήματα. Από τη περίοδο συνεχούς απασχόλησης $B^{(1)}$ P_1 πελατών που ξεκινά με 1 P_1 πελάτη, συν το χρονικό διάστημα από τη στιγμή που ο υπάλληλος αναχώρησε για διακοπές (αμέσως μετά την ολοκλήρωση του $B^{(1)}$), έως τη στιγμή που έμεινε άεργος για πρώτη φορά (V). Έστω επιπλέον, $N(W_2)$, $N(W_1)$, τ.μ. που εκφράζουν τον αριθμό των νέων πελατών που εισέρχονται στην ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων, στη διάρκεια των W_2 , W_1 , αντίστοιχα.

Αν ορίσουμε με

$$w_m^{(i)}(t)dt = P(t < W_i \leq t + dt, N(W_i) = m), \quad i = 1, 2,$$

$$w_i^*(s, z_2) = \int_0^\infty e^{-st} \sum_{m=0}^\infty w_m^{(i)}(t) z_2^m dt.$$

τις από κοινού σ.π.π. των W_i , $N(W_i)$ και τους M.L. των αντίστοιχων γεννητριών πιθανοτήτων τότε

$$w_2^*(s, z_2) = c^*(s, z_2)v^*(s, z_2), \quad w_1^*(s, z_2) = x(s, z_2)v^*(s, z_2), \quad (2.16)$$

και επομένως

$$w_2^*(s, z_2) = \frac{\beta_0^*(s+\lambda)\beta_{22}^*(s+\lambda-\lambda x(s, z_2))}{1+\beta_0^*(s+\lambda)-\beta_0^*(s+\lambda-\lambda x(s, z_2))},$$

$$w_1^*(s, z_2) = \frac{x(s, z_2)\beta_0^*(s+\lambda)}{1+\beta_0^*(s+\lambda)-\beta_0^*(s+\lambda-\lambda x(s, z_2))}. \quad (2.17)$$

Παραγωγίζοντας τις προκύπτουσες σχέσεις ως προς z_2 στο σημείο $z_2 = 1$, $s = 0$ θα έχουμε

$$\frac{d}{dz_2} x(0, z_2)|_{z_2=1} = \frac{p}{1-\rho_1},$$

$$\frac{d}{dz_2} c^*(0, z_2)|_{z_2=1} = \frac{\rho_2}{1-\rho_1}, \quad (2.18)$$



$$\frac{d}{dz_2} v^*(0, z_2)|_{z_2=1} = \frac{\rho_0}{1 - \rho_1}, \quad (2.19)$$

όπου τα ρ_0, ρ_1, ρ_2 , δίνονται από την σχέση (2.11). Παρατήρησε ότι η σχέση (2.18) παριστά τον αναμενόμενο αριθμό των P_2 πελατών που εισέρχονται στην ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων στην διάρκεια ενός τροποποιημένου χρόνου συμπλήρωσης εξυπηρέτησης ενός P_2 πελάτη. Κατα αναλογία η σχέση (2.19) παριστά τον αναμενόμενο αριθμό των νέων P_2 πελατών, που εισέρχονται στην ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων στην διάρκεια μιας γενικευμένης περιόδου διακοπών του υπαλλήλου. Στην ουσία, η σχέση (2.19) δίνει την επίδραση των διακοπών στην ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων. Επομένως ο αναμενόμενος αριθμός των νέων P_2 πελατών, που εισέρχονται στην ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων, στη διάρκεια των W_2, W_1 δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις

$$E(N(W_2)) = \frac{d}{dz_2} w_2^*(0, z_2)|_{z_2=1} = \frac{\rho_0 + \rho_2}{1 - \rho_1}, \quad (2.20)$$

$$E(N(W_1)) = \frac{d}{dz_2} w_1^*(0, z_2)|_{z_2=1} = \frac{\rho + \rho_0}{1 - \rho_1}. \quad (2.21)$$

Θα πρέπει να τονιστεί εδώ, ότι ο όρος $E(N(W_2))$ μπορεί να θεωρηθεί ως η πυκνότητα κυκλοφορίας (traffic intensity) των P_2 πελατών στο σύστημα.

Παραγωγίζοντας τις σχέσεις (2.17), ως προς s στο σημείο $z_2 = 1, s = 0$, μπορούμε να υπολογίσουμε την αναμενόμενη διάρκεια των W_1 και W_2 αντιστοίχα. Τότε, οι εν λόγω όροι θα δίνονται από

$$\begin{aligned} E(W_1) &= -\frac{d}{ds} w_1^*(s, 1)|_{s=0} = \frac{p\rho_1 + \rho_0}{\lambda p(1 - \rho_1)}, \\ E(W_2) &= -\frac{d}{ds} w_2^*(s, 1)|_{s=0} = \frac{\rho_2 + \rho_0}{\lambda p(1 - \rho_1)}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

2.5 Συνθήκη στατιστικής ισορροπίας

Η συνθήκη στατιστικής ισορροπίας είναι θεμελιώδους σημασίας στα συστήματα εξυπηρέτησης, αφού μας δίνει πολύτιμες πληροφορίες για αυτά, ενώ τις περισσότερες φορές είναι επίπονη η εύρεσή της. Κάτω από την συνθήκη στατιστικής ισορροπίας, η στοχαστική διαδικασία, που περιγράφει τις καταστάσεις του μοντέλου μας είναι ευσταθής, ή ισοδύναμα το σύστημα είναι ευσταθές.



Εστω η στοχαστική διαδικασία

$$Z = \{(N_1(t), N_2(t), \xi_t) : 0 \leq t < \infty\},$$

όπου οι τ.μ. $N_i(t)$, ξ_t εκφράζουν αντίστοιχα, τους αριθμούς των P_i πελατών και την κατάσταση του υπαλλήλου στο σύστημα σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t .

Ορισμός: Ένα σύστημα ονομάζεται ευσταθές, αν και μόνο αν, οι οριακές πιθανότητες της διαδικασίας Z , καθώς το $t \rightarrow \infty$, υπάρχουν, είναι ανεξάρτητες της αρχικής κατάστασης του συστήματος, είναι θετικές και αθροίζουν στη μονάδα.

Σκοπός του παρόντος εδαφίου είναι η εύρεση της συνθήκης κάτω από την οποία η στοχαστική διαδικασία Z είναι ευσταθής. Για την επίτευξη αυτού, θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του Pakes [155], καθώς και αποτελέσματα από την Μαρκοβιανή θεωρία ανανεώσεων (Markov Renewal Theory) και την θεωρία Ημιαναγεννητικών διαδικασιών (Semi-regenerative processes).

- Ας θεωρήσουμε τις χρονικές στιγμές

$$T_0 = 0 < T_1 < T_2 < \dots,$$

όπου με T_i , θα συμβολίζουμε τα χρονικά σημεία κατά τα οποία ο υπάλληλος μένει άεργος για i -οστή φορά. Θα πρέπει να παρατηρήσουμε εδώ, ότι τα εν λόγω χρονικά σημεία είναι στιγμές ολοκλήρωσης είτε μιας γενικευμένης περιόδου συνεχούς απασχόλησης P_1 πελατών, είτε ενός γενικευμένου τροποποιημένου χρόνου συμπλήρωσης εξυπηρέτησης ενός P_2 πελάτη. Εστω επιπλέον $N_{2i} = N_2(T_i + 0)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, δηλαδή η τ.μ. N_{2i} εκφράζει τον αριθμό των πελατών, που βρίσκονται στην ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων αμέσως μετά την χρονική στιγμή T_i .

Είναι προφανές ότι η στοχαστική διαδικασία $\{N_{2i} : i = 0, 1, 2, \dots\}$ είναι μία μη διαχωρίσιμη (irreducible) και απεριοδική (aperiodic) Μαρκοβιανή αλυσίδα. Το ακόλουθο θεώρημα δίνει την συνθήκη, κάτω από την οποία η παραπάνω Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι θετικά επαναληπτική (δηλαδή οι οριακές της πιθανότητες υπάρχουν, είναι θετικές και αθροίζουν στη μονάδα).

Θεώρημα 2.3 Για $\rho < 1$ η μαρκοβιανή αλυσίδα $\{N_{2i} : i = 0, 1, 2, \dots\}$ είναι θετικά επαναληπτική.

Απόδειξη: Για την απόδειξη του θεωρήματος θα χρησιμοποιήσουμε το εξής κριτήριο που οφείλεται στον Pakes [155]:



Μια μή διαχωρίσιμη και απεριοδική Μαρκοβιανή αλυσίδα $(Y_n ; n \geq 0)$ με χώρο καταστάσεων τους μη αρνητικούς ακέραιους, είναι θετικά επαναληπτική αν $|\delta_k| < \infty$ για κάθε $k = 0, 1, 2, \dots$ και $\limsup_{k \rightarrow \infty} \delta_k < 0$ όπου $\delta_k = E[Y_{n+1} - Y_n | Y_n = k]$.

Για την Μαρκοβιανή αλυσίδα του μοντέλου μας, ας ορίσουμε τις πιθανότητες

$$h_{k,m}(t)dt = \Pr[t < T_{n+1} - T_n \leq t + dt, N_{2n+1} - N_{2n} = m | N_{2n} = k].$$

Τότε είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι για $m = 0, 1, 2, \dots$

$$h_{k,m}(t) = \lambda e^{-(\lambda+k\alpha)t} * w_m^{(1)}(t) + k\alpha e^{-(\lambda+k\alpha)t} * w_{m+1}^{(2)}(t),$$

ενώ για $m = -1$

$$h_{k,-1}(t) = k\alpha e^{-(\lambda+k\alpha)t} * e^{-\lambda t} b_{22}(t) * v_0(t) + k\alpha e^{-(\lambda+k\alpha)t} * \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!} b_{22}(t) * g_0^{(i)}(t) * v_0(t),$$

και επομένως μετά από πράξεις

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \sum_{m=-1}^{\infty} h_{k,m}(t) z^m dt = \frac{\lambda w_1^*(s, z) + \frac{k\alpha}{z} w_2^*(s, z)}{s + \lambda + k\alpha}. \quad (2.23)$$

Παραγωγίζοντας την (2.23), ως προς z στο σημείο $z = 1, s = 0$ καταλήγουμε στην

$$\delta_k = \frac{\lambda E(N(W_1)) + k\alpha[E(N(W_2)) - 1]}{\lambda + k\alpha}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

όπου τα $E(N(W_1))$, $E(N(W_2))$ έχουν οριστεί στις (2.21) και (2.20) αντίστοιχα.

Αρα αν υποθέσουμε ότι $\rho < 1$, τότε το $|\delta_k|$ είναι πεπερασμένο για κάθε μη αρνητικό ακέραιο k και επιπλέον $\limsup_{k \rightarrow \infty} \delta_k = E(N(W_2)) - 1 = \frac{\rho_0 + \rho_2}{1 - \rho_1} - 1 < 0$, και έτσι το κριτήριο ικανοποιείται και η Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{N_{2i} : i = 0, 1, 2, \dots\}$ είναι θετικά επαναληπτική. $\square$

Στη συνέχεια θα δώσουμε την ικανή συνθήκη, κάτω από την οποία το σύστημα μας είναι ευσταθές.

Θεώρημα 2.4 Για $\rho < 1$ η στοχαστική διαδικασία Z είναι ευσταθής.

Απόδειξη: Είναι προφανές ότι η στοχαστική διαδικασία Z είναι ημιαναγεννητική (semi regenerative) με υπερερχόμενη Μαρκοβιανή διαδικασία ανανεώσεων $\{N, T\} = \{(N_{2n}, T_n) : n = 0, 1, 2, \dots\}$.



Ας υποθέσουμε ότι $\rho < 1$ και έστω οι ποσότητες

$$m_k = E(T_1 | N_{20} = k),$$

και q_k $k = 0, 1, 2, \dots$ να είναι οι πιθανότητες σε στατιστική ισορροπία της Μαρκοβιανής αλυσίδας $\{N_{2i} : i = 0, 1, 2, \dots\}$. Παραγωγίζοντας την σχέση (2.23), ως προς s στο σημείο $z = 1$, $s = 0$, θα έχουμε

$$m_k = \frac{\lambda E(W_1) + k\alpha E(W_2) + 1}{\lambda + k\alpha},$$

και επομένως μετά από πράξεις

$$q \cdot m = \sum_{k=0}^{\infty} q_k m_k = E(W_2) + \{1 + \lambda[E(W_1) - E(W_2)]\} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q_k}{\lambda + k\alpha}. \quad (2.24)$$

Είναι γνωστό από την θεωρία των ημιαναγεννητικών διαδικασιών, ότι η διαδικασία Z είναι ευσταθής αν

$$q \cdot m < \infty.$$

Ομως είναι προφανές ότι πάντα υπάρχει ένας πεπερασμένος ακέραιος k^* τέτοιος ώστε

$$\frac{1}{\lambda + (k^* - 1)\alpha} > 1 > \frac{1}{\lambda + k^*\alpha},$$

και επομένως

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q_k}{\lambda + k\alpha} &= \sum_{k=0}^{k^*-1} \frac{q_k}{\lambda + k\alpha} + \sum_{k=k^*}^{\infty} \frac{q_k}{\lambda + k\alpha} < \sum_{k=0}^{k^*-1} \frac{q_k}{\lambda + k\alpha} \\ &+ \sum_{k=k^*}^{\infty} q_k = \sum_{k=0}^{k^*-1} \frac{q_k}{\lambda + k\alpha} + (1 - \sum_{k=0}^{k^*-1} q_k) < \infty. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας επιπλέον την σχέση (2.22) στην (2.24) τότε εύκολα προκύπτει ότι $q \cdot m < \infty$. Επομένως στην περίπτωση όπου $\rho < 1$, η στοχαστική διαδικασία Z είναι ευσταθής (αφού τότε $q \cdot m < \infty$, βλέπε Cinlar [49], Θεώρημα 6.12, p. 347) $\square$

Παραπάνω αποδείχθηκε μαθηματικά, ότι η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να περιέλθει το σύστημα σε στατιστική ισορροπία είναι η $\rho < 1$. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε μία διαισθητική απόδειξη βασιζόμενοι στον ορισμό της στατιστικής ισορροπίας.



Εστω R , ο συνολικός κύκλος εξυπηρέτησης (total service cycle), δηλαδή το χρονικό διάστημα που απαιτείται από τον υπάλληλο για να εξυπηρετήσει πλήρως ένα πελάτη και να αναχωρήσει από το σύστημα. Στη περίπτωση που ένας πελάτης ολοκληρώσει τη διαδικασία εξυπηρέτησης του, χωρίς να εισέλθει στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων, ο συνολικός χρόνος που θα απασχολήσει τον υπάλληλο είναι $R = B_{11} + B_{12}$, με πιθανότητα $1 - p$. Τότε ο M.L. της σ.π.π. είναι $r_0^*(s) = \beta_{11}^*(s)\beta_{12}^*(s)$. Αν μετά τη πρώτη φάση εξυπηρέτησης, ο πελάτης εισέλθει στην ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων, ο συνολικός κύκλος εξυπηρέτησης του είναι $R = B_{11} + \bar{V} + B_{22}$, με πιθανότητα p .

Η τ.μ. $\bar{V}$ εκφράζει αθροιστικά τον συνολικό χρόνο απουσίας του υπαλλήλου, ο οποίος οφείλεται στις διακοπές και που προηγείται πάντα πριν από την εξυπηρέτηση ενός πελάτη της ουράς των επαναλαμβανόμενων αφίξεων. Στην περίπτωση που δεν έρθει κάποιος πελάτης στη διάρκεια των διακοπών, ο χρόνος απουσίας του υπαλλήλου, είναι ίσος με την διάρκεια των διακοπών U_0 . Εάν έρθουν πελάτες στη διάρκεια των διακοπών, μετά το πέρας αυτών ο υπάλληλος θα αρχίσει την περίοδο συνεχούς απασχόλησης P_1 πελατών (οπότε παύει να ασχολείται με τον πελάτη που εισήλθε στην ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων). Άρα το εν λόγω χρονικό διάστημα θα διακοπεί και θα συνεχιστεί μόλις ο υπάλληλος αναχωρήσει ξανά για διακοπές και πριν γίνει διαθέσιμος για τον πελάτη. Η σ.π.π. $\bar{v}(t)$, της τ.μ. $\bar{V}$ ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση

$$\bar{v}(t) = e^{-\lambda t}b_0(t) + (1 - e^{-\lambda t})b_0(t) * \bar{v}(t),$$

με M.L.

$$\bar{v}^*(s) = \frac{\beta_0^*(\lambda + s)}{1 + \beta_0^*(\lambda + s) - \beta_0^*(s)},$$

με $E(\bar{V}) = -\frac{d}{ds}\bar{v}^*(s)|_{s=0} = \frac{b_0}{\beta_0^*(\lambda)}$.

Ο M.L. της σ.π.π. της R , σε αυτή τη περίπτωση δίνεται από την $r_1^*(s) = \beta_{11}^*(s)\bar{v}^*(s)\beta_{22}^*(s)$. Συνολικά ο M.L. της σ.π.π. της R είναι,

$$r^*(s) = (1 - p)r_0^*(s) + pr_1^*(s) = (1 - p)\beta_{11}^*(s)\beta_{22}^*(s) + p\beta_{11}^*(s)\bar{v}^*(s)\beta_{22}^*(s),$$

με μέση τιμή

$$E(R) = -\frac{d}{ds}r^*(s)|_{s=0} = \bar{b}_{11} + (1 - p)\bar{b}_{12} + p\bar{b}_{22} + \frac{p\bar{b}_0}{\beta_0^*(\lambda)}.$$



Ομως η αναμενόμενη διάρκεια ενός κύκλου εξυπηρέτησης, είναι η αναμενόμενη διάρκεια του χρόνου που απαιτείται για να εξυπηρετηθεί ένας πελάτης που φθάνει στο σύστημα. Γενικά, γνωρίζουμε ότι για να βρίσκεται ένα σύστημα σε στατιστική ισορροπία θα πρέπει η πυκνότητα κυκλοφορίας του, $\lambda E(R) < 1$. Ομως

$$\lambda E(R) = \lambda(\bar{b}_{11} + (1-p)\bar{b}_{12} + p\bar{b}_{22} + \frac{p\bar{b}_0}{\beta_0^*(\lambda)}) = \rho < 1.$$

2.6 Ανάλυση των καταστάσεων σε στατιστική ισορροπία

Ας υποθέσουμε ότι το σύστημα μας βρίσκεται σε στατιστική ισορροπία (ώστε $\rho < 1$) και ας ορίσουμε για $i, j = 1, 2$

$$p_0(k_1, k_2, x) = \lim_{t \rightarrow \infty} p_0(k_1, k_2, x, t),$$

$$q(k_2) = \lim_{t \rightarrow \infty} q(k_2, t),$$

$$p_{ij}(k_1, k_2, x) = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(k_1, k_2, x, t),$$

$$\begin{aligned} Q(z_2) &= \sum_{k_2 \geq 0} q(k_2) z_2^{k_2}, \\ P_0(z_1, z_2, x) &= \sum_{k_1 \geq 0} \sum_{k_2 \geq 0} p_0(k_1, k_2, x) z_1^{k_1} z_2^{k_2}, \\ P_{ij}(z_1, z_2, x) &= \sum_{k_1 \geq 0} \sum_{k_2 \geq 0} p_{ij}(k_1, k_2, x) z_1^{k_1} z_2^{k_2}. \end{aligned}$$

Τότε χρησιμοποιώντας γνωστές ιδιότητες των M.L. προκύπτει ότι $P(z_1, z_2, x) = \lim_{s \rightarrow 0} s P^*(z_1, z_2, x, s)$, $Q(z_2) = \lim_{s \rightarrow 0} s Q^*(z_2, s)$, και επομένως χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.1) και (2.2) καταλήγουμε στην περίπτωση όπου $x > 0$,

$$P_0(z_1, z_2, x) = P_0(z_1, z_2, 0)(1 - B_0(x)) \exp[-(\lambda - \lambda z_1)x],$$

$$P_{ij}(z_1, z_2, x) = P_{ij}(z_1, z_2, 0)(1 - B_{ij}(x)) \exp[-(\lambda - \lambda z_1)x], \quad (2.25)$$

και

$$\alpha z_2 \frac{d}{dz_2} Q(z_2) + \lambda Q(z_2) = P_0(0, z_2, 0) \beta_0^*(\lambda), \quad (2.26)$$



ενώ οι αρχικές συνθήκες (2.3) και (2.4) γίνονται

$$\begin{aligned} P_0(0, z_2, 0) &= pz_2 P_{11}(0, z_2, 0) \beta_{11}^*(\lambda) + P_{12}(0, z_2, 0) \beta_{12}^*(\lambda) \\ &\quad + P_{22}(0, z_2, 0) \beta_{22}^*(\lambda), \\ P_{12}(z_1, z_2, 0) &= (1-p) P_{11}(z_1, z_2, 0) \beta_{11}^*(\lambda - \lambda z_1), \\ P_{22}(0, z_2, 0) &= \alpha \frac{d}{dz_2} Q(z_2), \end{aligned} \quad (2.27)$$

και

$$P_{11}(z_1, z_2, 0) = \frac{\lambda z_1 Q(z_2) + \alpha \beta_{22}^*(\lambda - \lambda z_1) \frac{d}{dz_2} Q(z_2) - P_0(0, z_2, 0) [1 + \beta_0^*(\lambda) - \beta_0^*(\lambda - \lambda z_1)]}{z_1 - \beta_{11}^*(\lambda - \lambda z_1) [pz_2 + (1-p) \beta_{12}^*(\lambda - \lambda z_1)]}. \quad (2.28)$$

Επειδή η συνάρτηση $P_{11}(z_1, z_2, 0)$, πρέπει να είναι αναλυτική για $|z_1| \leq 1$, $|z_2| \leq 1$ η ρίζα του παρονομαστή (στην περιοχή $|z_1| < 1$) $x(z_2) \equiv x(0, z_2)$, πρέπει να είναι και ρίζα του αριθμητή. Επομένως αντικαθιστώντας στον αριθμητή της σχέσης (2.28) την ρίζα του παρονομαστή προκύπτει η σχέση

$$P_0(0, z_2, 0) = \frac{\lambda x(z_2) Q(z_2) + \alpha \beta_{22}^*(\lambda - \lambda x(z_2)) \frac{d}{dz_2} Q(z_2)}{1 + \beta_0^*(\lambda) - \beta_0^*(\lambda - \lambda x(z_2))}. \quad (2.29)$$

Στη συνέχεια αντικαθιστώντας την σχέση (2.29) στην (2.26) καταλήγουμε στη σχέση

$$\alpha(z_2 - w_2^*(0, z_2)) \frac{d}{dz_2} Q(z_2) + \lambda(1 - w_1^*(0, z_2)) Q(z_2) = 0. \quad (2.30)$$

Αν θεωρήσουμε τώρα την συνάρτηση

$$\omega(z_2) = \frac{1 - w_1^*(0, z_2)}{z_2 - w_2^*(0, z_2)},$$

τότε για $\rho < 1$, η ποσότητα $z_2 - w_2^*(0, z_2)$ δεν μηδενίζεται ποτέ για $|z_2| < 1$ (βλέπε Θεώρημα 2.2) και επαπλέον

$$\lim_{z_2 \rightarrow 1} \omega(z_2) = -\frac{p + \rho_0}{1 - \rho} < \infty.$$

Αρα η συνάρτηση $\omega(z_2)$ είναι αναλυτική στη περιοχή $|z_2| < 1$ και συνεχής στο σύνορό της. Επομένως για κάθε z_2 , που ανήκει στην περιοχή $|z_2| \leq 1$, μπορούμε



να επαλύσουμε την διαφορική εξίσωση (2.30) και θα έχουμε

$$Q(z_2) = Q(1) \exp\left\{-\frac{\lambda}{\alpha} \int_{z_2}^1 \frac{1 - w_1^*(0, u)}{w_2^*(0, u) - u} du\right\}. \quad (2.31)$$

Τελικά, ανακαθιστώντας την γεννήτρια $Q(z_2)$ στις πιθανογεννήτριες συναρτήσεις που ορίστηκαν παραπάνω, θέτοντας $z_1 = z_2 = 1$ και ζητώντας το αθροισμά τους να ισούται με μονάδα προκύπτει ότι

$$Q(1) = \frac{1 - \rho}{1 + \frac{\lambda \delta_0}{\beta_0^2(\lambda)}}. \quad (2.32)$$

Με αυτό το αποτέλεσμα όλες οι γεννήτριες συναρτήσεις, που περιγράφουν τις πιθανότητες των καταστάσεων του συστήματος σε στατιστική ισορροπία, είναι γνωστές.

Στο επόμενο θεώρημα αποδεικνύεται ότι η συνθήκη $\rho < 1$, είναι επίσης αναγκαία για να είναι το σύστημα μας ευσταθές.

Θεώρημα 2.5 Αν η στοχαστική διαδικασία Z είναι ευσταθής τότε $\rho < 1$.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι η Z είναι ευσταθής και $\rho > 1$. Τότε από το θεώρημα 2.2 η εξίσωση $z_2 - w_2^*(0, z_2) = 0$ έχει μοναδική ρίζα $\phi(0)$ εντός του μοναδιαίου κύκλου, αυστηρά μικρότερη της μονάδας ($\phi(0) < 1$) και επομένως $\lambda(1 - w_1^*(0, \phi(0))) \neq 0$. Αν λοιπόν θέσουμε $\phi(0)$ όπου z_2 στην (2.30) θα προκύψει

$$\lambda(1 - w_1^*(0, \phi(0)))Q(\phi(0)) = 0,$$

και επομένως $Q(\phi(0)) = \sum q(j)\phi^j(0) = 0$ με $0 < \phi(0) < 1$. Άρα $q(j) = 0 \quad \forall j$ και χρησιμοποιώντας τις γεννήτριες συναρτήσεις (2.25)-(2.29) είναι προφανές ότι όλες οι πιθανότητες των καταστάσεων του συστήματος μηδενίζονται. Αυτό το αποτέλεσμα προφανώς αντιβαίνει στην υπόθεση ότι το σύστημα μας είναι ευσταθές.

Εστω τέλος, ότι η Z είναι ευσταθής και ότι $\rho = 1$. Παραγωγίζοντας την σχέση (2.30), ως προς z_2 (στο σημείο $z_2 = 1$) καταλήγουμε (στην περίπτωση όπου $\rho = 1$) στη σχέση

$$\frac{d}{dz_2} \lambda(1 - w_1^*(0, z_2))|_{z_2=1} Q(1) = -\lambda E(N(W_1))Q(1) = 0,$$

και επομένως $Q(1) = \sum q(j) = 0$, το οποίο πάλι είναι αντίθετο με την υπόθεση ότι το σύστημά μας είναι ευσταθές.



2.7 Χαρακτηριστικά μέτρα του συστήματος

Ακολούθως θα χρησιμοποιήσουμε τους τύπους των γεννητριών συναρτήσεων, που παράχθησαν στην προηγούμενη παράγραφο, με σκοπό τον υπολογισμό των πιθανοτήτων των καταστάσεων του υπαλλήλου και του αναμενόμενου αριθμού των πελατών στην κανονική ουρά και στην ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων, σε στατιστική ισορροπία (όπου $\rho < 1$). Τα παραπάνω μέτρα είναι σημαντικά, ώστε να κατανοήσουμε την δυναμική του συστήματος.

Για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων των καταστάσεων του υπαλλήλου, θέτουμε $z_1 = z_2 = 1$ στις σχέσεις (2.25)-(2.29) και εύκολα προκύπτουν τα ακόλουθα αποτελέσματα

$$\begin{aligned}
 P[\text{ο υπάλληλος άεργος}] &= Q(1) = \frac{1-\rho}{1+\frac{\lambda b_0}{\beta_0^*(\lambda)}}, \\
 P[\text{ο υπάλληλος απασχολημένος με } P_1 \text{ πελατη στη 1η φάση}] &= P_{11}(1, 1) = \lambda \bar{b}_{11}, \\
 P[\text{ο υπάλληλος απασχολημένος με } P_1 \text{ πελατη στη 2η φάση}] &= P_{12}(1, 1) = \lambda(1-\rho)\bar{b}_{12}, \\
 P[\text{ο υπάλληλος απασχολημένος με } P_2 \text{ πελατη στη 2η φάση}] &= P_{22}(1, 1) = \lambda \rho \bar{b}_{22}, \\
 P[\text{ο υπάλληλος σε διακοπές}] &= P_0(1, 1) = \frac{\lambda \bar{b}_0}{\beta_0^*(\lambda)} \left(p + \frac{1-\rho}{1+\frac{\lambda b_0}{\beta_0^*(\lambda)}} \right).
 \end{aligned}
 \tag{2.33}$$

Ο υπολογισμός του αναμενόμενου αριθμού πελατών στην κανονική ουρά και στην ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων, απαιτεί τη παραγωγή των σχέσεων (2.25)-(2.29), ως προς z_1 και z_2 αντίστοιχα στο σημείο $(z_1, z_2) = (1, 1)$.

Επομένως, όσον αφορά τον αναμενόμενο αριθμό πελατών στην κανονική ουρά, έχουμε μετά από πράξεις τις ακόλουθες σχέσεις

$$\begin{aligned}
 E(N_1, \xi = (1, 1)) &= \frac{\lambda^3 \bar{b}_{11}}{2(1-\rho_1)} \rho^{(2)} + \frac{\lambda^2 \bar{b}_{11}^{(2)}}{2}, \\
 E(N_1, \xi = (1, 2)) &= \frac{\lambda^3 (1-\rho) \bar{b}_{12}}{2(1-\rho_1)} \rho^{(2)} + \lambda^2 (1-\rho) (\bar{b}_{11} \bar{b}_{12} + \frac{\bar{b}_{12}^{(2)}}{2}), \\
 E(N_1, \xi = (2, 2)) &= \frac{\lambda^2 \rho \bar{b}_{22}^{(2)}}{2}, \\
 E(N_1, \xi = 0) &= \frac{\lambda^2 \bar{b}_0^{(2)}}{2\beta_0^*(\lambda)} \left(p + \frac{1-\rho}{1+\frac{\lambda b_0}{\beta_0^*(\lambda)}} \right),
 \end{aligned}
 \tag{2.34}$$



ενώ στην περίπτωση των πελατών της ουράς των επαναλαμβανόμενων αφίξεων έχουμε

$$\begin{aligned} E(N_2, \xi = (1, 1)) &= K\bar{b}_{11}, \\ E(N_2, \xi = (1, 2)) &= K(1-p)\bar{b}_{12}, \\ E(N_2, \xi = (2, 2)) &= \bar{b}_{22}D, \\ E(N_2, \xi = 0) &= \frac{\bar{b}_0}{\beta_0^*(\lambda)} \left(\frac{\lambda p(\lambda + \alpha)}{\alpha} + D \right), \\ E(N_2, \xi = id) &= \frac{\lambda p}{\alpha}, \end{aligned}$$

όπου

$$D = \frac{\lambda p}{1-\rho} \left\{ \frac{\lambda}{\alpha}(p + \rho_0) + \frac{\lambda^2 p \rho^{(2)}}{2(1-\rho_1)} + \lambda p \bar{b}_{11} + \rho_0 \right\},$$

$$\rho^{(2)} = \bar{b}_{11}^{(2)} + (1-p)\bar{b}_{12}^{(2)} + 2(1-p)\bar{b}_{11}\bar{b}_{12} + p\bar{b}_{22}^{(2)} + \frac{p\bar{b}_0^{(2)}}{\beta_0^*(\lambda)} \left(1 + \frac{1-\rho}{p+\rho_0} \right),$$

$$K = \frac{\lambda^3 p \rho^{(2)}}{2(1-\rho)(1-\rho_1)} + \frac{\lambda^2(p + \rho_0)}{\alpha(1-\rho)} + \frac{\lambda(\lambda p \bar{b}_{11} + \rho_0)}{1-\rho}.$$

2.8 Η Ιδιότητα της διάσπασης

Η ιδιότητα της διάσπασης (decomposition property), παρατηρείται ευρέως σε συστήματα εξυπηρέτησης με διακοπές υπαλλήλου. Σύμφωνα με αυτή, βασικές τ.μ., όπως το μήκος της ουράς και ο χρόνος αναμονής ενός πελάτη σε στατιστική ισορροπία, προκύπτουν ως το άθροισμα δύο ανεξάρτητων τ.μ.. Μια από αυτές είναι το μήκος της ουράς (αντίστοιχα ο χρόνος αναμονής) του αντίστοιχου μοντέλου χωρίς διακοπές και η άλλη το μήκος της ουράς (αντίστοιχα ο χρόνος αναμονής) που οφείλεται στην ύπαρξη των διακοπών του υπαλλήλου.

Δεν είναι τυχαίο το γεγονός ότι η ιδιότητα της διάσπασης εμφανίζεται και στα συστήματα εξυπηρέτησης με επαναλαμβανόμενες αφίξεις πελατών, αφού τα εν λόγω μοντέλα μπορούν να θεωρηθούν ως συστήματα με διακοπές υπαλλήλου. Για να γίνει αυτό πιο σαφές, ας θεωρήσουμε ένα σύστημα με έναν υπάλληλο, ουρά απείρου χωρητικότητας, ενώ η σειρά με την οποία εξυπηρετεί ο υπάλληλος να είναι τυχαία (random service order). Ο υπάλληλος θα αναχωρήσει για διακοπές κάθε φορά που θα ολοκληρώσει την εξυπηρέτηση ενός πελάτη. Η κατανομή του χρόνου διακοπών του υπαλλήλου θα είναι εκθετική παραμέτρου $\lambda\alpha$,



αν υπάρχουν k πελάτες στην ουρά όταν ο υπάλληλος είναι έτοιμος να αναχωρήσει για διακοπές, ενώ ο όρος α είναι σταθερός. Επιπροσθέτως, οι διακοπές του υπαλλήλου θα τερματίζονται, αν στην διάρκεια αυτών έρθει στο σύστημα κάποιος νέος πελάτης. Σε αυτή τη περίπτωση ο υπάλληλος θα αρχίσει να εξυπηρετεί τον νέο εισερχόμενο πελάτη. Το παραπάνω μοντέλο με διακοπές υπαλλήλου είναι ισοδύναμο με ένα μοντέλο ουράς με επαναλαμβανόμενες αφίξεις πελατών.

Η ιδιότητα της διάσπασης στα συστήματα με επαναλαμβανόμενες αφίξεις πελατών μας δίνει την δυνατότητα να διακρίνουμε την εξάρτηση των χαρακτηριστικών τους από τον ρυθμό επανάληψης α , των προσπαθειών ενός πελάτη για να βρεί διαθέσιμο τον υπάλληλο και να εξυπηρετηθεί. Στα συγκεκριμένα συστήματα, το μήκος της ουράς και ο χρόνος αναμονής ενός πελάτη σε στατιστική ισορροπία, προκύπτουν ως το άθροισμα δύο ανεξάρτητων τ.μ.. Μια από αυτές είναι το μήκος της ουράς (αντίστοιχα ο χρόνος αναμονής) του αντίστοιχου μοντέλου χωρίς επαναλαμβανόμενες αφίξεις πελατών (δηλαδή ο ρυθμός επανάληψης της άφιξης $\alpha \rightarrow \infty$) και η άλλη το μήκος της ουράς (αντίστοιχα ο χρόνος αναμονής) που οφείλεται στην ύπαρξη των επαναλαμβανόμενων αφίξεων. Η εν λόγω ιδιότητα ισχύει και για το υπό μελέτη μοντέλο.

Ακριβέστερα, ας υποθέσουμε ότι ο ρυθμός αφίξεων στο μοντέλο μας $\alpha \rightarrow \infty$. Σε αυτή τη περίπτωση, οι πελάτες της ουράς των επαναλαμβανόμενων αφίξεων (P_2 πελάτες) συμπεριφέρονται σαν πελάτες μιας κανονικής ουράς, που όμως είναι χαμηλότερης προτεραιότητας σε σχέση με τους P_1 πελάτες. Τώρα το υπό μελέτη μοντέλο αποτελείται από δύο κανονικές ουρές. Όλοι οι πελάτες λαμβάνουν την πρώτη φάση εξυπηρέτησης στην πρώτη ουρά (P_1 πελάτες) και στη συνέχεια κάποιοι από αυτούς (με πιθανότητα p) εισέρχονται στην δεύτερη ουρά χαμηλής προτεραιότητας (P_2 πελάτες), περιμένοντας να λάβουν την δεύτερη φάση εξυπηρέτησης, ενώ οι υπόλοιποι (με πιθανότητα $1 - p$) προωθούνται άμεσα στην δεύτερη φάση εξυπηρέτησης. Είναι προφανές ότι στο εν λόγω μοντέλο ο υπάλληλος αρχίζει να εξυπηρετεί την ουρά χαμηλής προτεραιότητας (με μη-διακόπτουσα προτεραιότητα), κάθε φορά που επιστρέφει από διακοπές και δεν υπάρχουν πελάτες υψηλής προτεραιότητας να περιμένουν στην πρώτη ουρά. Τέλος, ο υπάλληλος αναχωρεί για διακοπές κάθε φορά που αντιμετωπίζει άδεια ουρά προτεραιότητας ή κάθε φορά που ολοκληρώνει την εξυπηρέτηση ενός P_2 πελάτη, παρόλο που και στις δυο περιπτώσεις ενδέχεται να υπάρχουν P_2 πελάτες στην δεύτερη ουρά που περιμένουν για να εξυπηρετηθούν.

Ας ορίσουμε με $\hat{N}_i$, $i = 1, 2$ τις τ.μ. που εκφράζουν τον αριθμό των P_i πελατών σε στατιστική ισορροπία του παραπάνω τροποποιημένου μοντέλου και με $\hat{P}_0(\cdot)$, $\hat{P}_j(\cdot)$ τις αντίστοιχες γεννήτριες συναρτήσεις. Τότε υποθέτοντας ότι



$\alpha \rightarrow \infty$ στις γεννήτριες συναρτήσεις που υπολογίσαμε στα προηγούμενα εδάφια για το βασικό υπο μελέτη μοντέλο με επαναλαμβανόμενες αφίξεις, προκύπτουν τα ακόλουθα αποτελέσματα

$$\hat{P}_{11}(z_1, z_2) = \frac{(1-\beta_{11}^*(\lambda-\lambda z_1))q_0}{(1-z_1)(z_1-a(z_1, z_2))} \left\{ z_1 - \frac{z(z_2)(1+\beta_0^*(\lambda)-\beta_0^*(\lambda-\lambda z_1))}{1+\beta_0^*(\lambda)-\beta_0^*(\lambda-\lambda x(z_2))} \right. \\ \left. + \frac{1-w_1^*(0, z_2)}{w_2^*(0, z_2)-z_2} [\beta_{22}^*(\lambda-\lambda z_1) - \frac{\beta_{22}^*(\lambda-\lambda x(z_2))(1+\beta_0^*(\lambda)-\beta_0^*(\lambda-\lambda z_1))}{1+\beta_0^*(\lambda)-\beta_0^*(\lambda-\lambda x(z_2))}] \right\},$$

$$\hat{P}_{12}(z_1, z_2) = \frac{(1-p)\beta_{11}^*(\lambda-\lambda z_1)(1-\beta_{12}^*(\lambda-\lambda z_1))}{1-\beta_{11}^*(\lambda-\lambda z_1)} \hat{P}_{11}(z_1, z_2),$$

$$\hat{P}_{22}(z_1, z_2) = \frac{(1-w_1^*(0, z_2))(1-\beta_{22}^*(\lambda-\lambda z_1))}{(w_2^*(0, z_2)-z_2)(1-z_1)} q_0,$$

$$\hat{P}_0(z_1, z_2) = \frac{(1-\beta_0^*(\lambda-\lambda z_1))q_0}{(1-z_1)(1+\beta_0^*(\lambda)-\beta_0^*(\lambda-\lambda x(z_2)))} \left\{ x(z_2) + \frac{(1-w_1^*(0, z_2))\beta_{22}^*(\lambda-\lambda x(z_2))}{w_2^*(0, z_2)-z_2} \right\},$$

όπου $q_0 \equiv Q(1)$ δίνεται από τη σχέση (2.32) και $a(z_1, z_2) = \beta_{11}^*(\lambda-\lambda z_1)[pz_2 + (1-p)\beta_{12}^*(\lambda-\lambda z_1)]$.

Τώρα είναι προφανές ότι οι γεννήτριες συναρτήσεις του υπο μελέτη μοντέλου και οι αντίστοιχες του τροποποιημένου συνδέονται μεταξύ τους ως εξής

$$Q(z_2) = q_0 Q_\alpha(z_2), \quad P_0(z_1, z_2) = \hat{P}_0(z_1, z_2) Q_\alpha(z_2),$$

$$P_{ij}(z_1, z_2) = \hat{P}_{ij}(z_1, z_2) Q_\alpha(z_2), \quad i, j = 1, 2,$$

όπου η ποσότητα

$$Q_\alpha(z_2) = E(z_2^{Q_\alpha}) = \exp\left\{-\frac{\lambda}{\alpha} \int_{z_2}^1 \frac{1-w_1^*(0, u)}{w_2^*(0, u)-u} du\right\},$$

είναι η γεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. Q_α , που εκφράζει (βλέπε σχέση (2.31)) τον αριθμό των πελατών της ουράς των επαναλαμβανόμενων αφίξεων, δοθέντος ότι ο υπάλληλος είναι άεργος. Αυτό το αποτέλεσμα επιβεβαιώνει το γεγονός ότι το υπό μελέτη μοντέλο ικανοποιεί την ιδιότητα της διάσπασης, που παρατηρείται σε συστήματα εξυπηρέτησης με επαναλαμβανόμενες αφίξεις πελατών (βλέπε Falin et al. [82]).

2.9 Αριθμητικά αποτελέσματα

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις που υπολογίστηκαν προηγουμένως, με σκοπό να εξάγουμε αριθμητικά αποτελέσματα και να εξετάσουμε τον



τρόπο με τον οποίο επηρεάζεται ο αναμενόμενος αριθμός πελατών $E(N_2)$ όταν αλλάζουμε τις τιμές των παραμέτρων του μοντέλου μας.

Για να κατασκευάσουμε τους πίνακες των αριθμητικών αποτελεσμάτων 2.1 – 2.5, υποθέτουμε ότι ο χρόνος διακοπών U_0 και οι χρόνοι εξυπηρέτησης του υπαλλήλου προέρχονται από τις εκθετικές κατανομές με σ.π.π. αντίστοιχα τις

$$b_0(x) = \frac{1}{\bar{b}_0} e^{-(1/\bar{b}_0)x}, \quad b_{ij}(x) = \frac{1}{\bar{b}_{ij}} e^{-(1/\bar{b}_{ij})x}, \quad i, j = 1, 2.$$

Επιπλέον υποθέτουμε ότι σε όλους τους παρακάτω πίνακες ισχύει $\bar{b}_{12} = 0.5$, $p = 0.5$.

Ο πίνακας 2.1 μας δείχνει τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται ο αναμενόμενος αριθμός πελατών $E(N_2)$ καθώς αλλάζουμε τις τιμές της μέσης διάρκειας των διακοπών του υπαλλήλου $\bar{b}_0$, για αυξανόμενες τιμές του ρυθμού αφίξεων λ . Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ακόμα και για μικρές τιμές του λ , για παράδειγμα $\lambda = 0.2$, το $E(N_2)$ αυξάνει από 0.229 σε 66.323 καθώς περνάμε από ένα σύστημα χωρίς διακοπές ($\bar{b}_0 = 0$) σε ένα σύστημα με μέση διάρκεια διακοπών $\bar{b}_0 = 3.9$. Επιπλέον, όταν ο ρυθμός των αφίξεων λ αυξάνει σε $\lambda = 0.6$, ακόμα και μια μικρή αύξηση της μέσης διάρκειας διακοπών από $\bar{b}_0 = 0$ σε $\bar{b}_0 = 0.4$ αυξάνει δραματικά τον αναμενόμενο αριθμό πελατών στην ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων σε 1696.1. Από τα παραπάνω αποτελέσματα είναι αντιληπτό, ότι η επιλογή του επιτρεπόμενου χρόνου διακοπών του υπαλλήλου είναι ιδιαίτερης σημασίας για την ομαλή λειτουργία του μοντέλου. Έτσι θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί, όσον αφορά την διάρκεια των διακοπών του υπαλλήλου, ώστε να αποφύγουμε μεγάλη αύξηση του αριθμού πελατών στην ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων.

$\lambda/\bar{b}_0$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.3	2.2	3.9
0.2	0.229	0.2779	0.3353	0.4025	0.4818	0.5755	0.7503	1.718	66.323
0.3	0.5131	0.641	0.8083	1.0287	1.3243	1.7299	2.6926	54.231	
0.4	1.1378	1.4866	2.0188	2.8701	4.3641	7.4778	38.347		
0.45	1.7538	2.3771	3.4485	5.5148	10.682	41.261			
0.5	2.8366	4.0762	6.6607	14.125	140.2				
0.55	4.9698	7.9557	17.347	1248.7					
0.6	10.037	20.887	1696.1						
0.65	27.659	435.68							
0.7	427.81								

Πίνακας 2.1: Τιμές του $E(N_2)$ για $\alpha = 0.8$, $\bar{b}_{11} = 1$, $\bar{b}_{22} = 0.33$



Ο πίνακας 2.2 περιέχει τιμές του $E(N_2)$, όταν μεταβάλλουμε το λ και την μέση διάρκεια του χρόνου μεταξύ επαναλαμβανόμενων αφίξεων $E(\text{retrial}) = 1/\alpha$. Η πρώτη στήλη του πίνακα 2.2 ($E(\text{retrial}) = 0$) αντιστοιχεί στο $E(N_2)$ του τροποποιημένου μοντέλου, που περιγράψαμε στο εδάφιο 2.8. Μπορεί να παρατηρηθεί η επίδραση της μέσης διάρκειας του χρόνου μεταξύ επαναλαμβανόμενων αφίξεων, στο $E(N_2)$ και επιπλέον να εξαχθούν χρήσιμα συμπεράσματα σχετικά με το μέγιστο επιτρεπόμενο χρόνο μεταξύ διαδοχικών επαναλήψεων, των πελατών της ουράς επαναλαμβανόμενων αφίξεων, ώστε να έχουμε όσο το δυνατόν μικρότερο μήκος στην εν λόγω ουρά.

$\lambda / E(\text{retrial})$	0	0.02	0.2	1	2	10
0.2	0.0908	0.0938	0.1207	0.2405	0.3902	1.5877
0.3	0.2739	0.2797	0.3264	0.5676	0.8613	3.2109
0.4	0.7905	0.8016	0.9019	1.3474	1.9043	6.3598
0.45	1.3918	1.4076	1.5495	2.18	2.9683	9.2742
0.5	2.6105	2.6339	2.845	3.783	4.9556	14.336
0.55	5.5417	5.5803	5.9279	7.4729	9.4041	24.854
0.6	15.749	15.831	16.571	19.859	23.969	56.851
0.65	354.17	355.48	367.22	419.38	484.58	1006.2

Πίνακας 2.2: Τιμές του $E(N_2)$ για $\bar{b}_0 = 0.2$, $\bar{b}_{11} = 1$, $\bar{b}_{22} = 0.33$

Οι πίνακες 2.3 και 2.4, δίνουν τιμές του $E(N_2)$, όταν μεταβάλλουμε την μέση διάρκεια του χρόνου εξυπηρέτησης στην πρώτη φάση $\bar{b}_{11}$ και την μέση διάρκεια του χρόνου εξυπηρέτησης ενός P_2 πελάτη $\bar{b}_{22}$ στην δεύτερη φάση αντίστοιχα. Μπορεί επίσης να παρατηρηθεί ο τρόπος με τον οποίο το $E(N_2)$ αυξάνει καθώς αυξάνουν τα $\bar{b}_{11}$, $\bar{b}_{22}$, ιδιαίτερα για μεγάλες τιμές του ρυθμού αφίξεων λ .

$\lambda / \bar{b}_{11}$	0.7	0.8	1	1.1	1.4	1.6	1.9	2.8	4.4
0.2	0.2295	0.2465	0.2779	0.2987	0.3797	0.4551	0.6129	1.892	403.3
0.3	0.4585	0.5083	0.641	0.7295	1.1397	1.6206	3.0542	1700.5	
0.4	0.8615	1.0148	1.4866	1.8565	4.2892	9.4264	101.85		
0.45	1.1843	1.4536	2.3771	3.2012	11.155	58.268			
0.5	1.6503	2.1352	4.0762	6.1912	67.333				
0.6	3.4947	5.3823	20.887	104.29					
0.65	5.5195	10.073	435.68						
0.75	21.845	1852.1							
0.8	151.65								

Πίνακας 2.3: Τιμές του $E(N_2)$ για $\bar{b}_0 = 0.2$, $\alpha = 0.8$, $\bar{b}_{22} = 0.33$



$\lambda/\bar{b}_{22}$	0.2	0.6	0.9	1.2	1.7	2.2	3.9	7.2
0.2	0.2697	0.2962	0.3202	0.3487	0.409	0.4915	1.1084	105.56
0.3	0.6072	0.721	0.8369	0.991	1.3794	2.07	125.1	
0.4	1.356	1.8293	2.4178	3.405	7.6509	66.169		
0.45	2.105	3.1561	4.7433	8.3593	207.52			
0.5	3.4511	6.1607	12.349	67.354				
0.55	6.2201	16.151	404.98					
0.6	13.469	678.52						
0.65	48.304							

Πίνακας 2.4: Τιμές του $E(N_2)$ για $\bar{b}_0 = 0.2$, $\alpha = 0.8$, $\bar{b}_{11} = 1$

Τέλος, ο πίνακας 2.5 δίνει τιμές των πιθανοτήτων $P_0 = P(\text{ο υπάλληλος άεργος})$ and $P_v = P(\text{ο υπάλληλος σε διακοπές})$, καθώς μεταβάλλουμε τον ρυθμό αφίξεων λ και την μέση διάρκεια των διακοπών του υπαλλήλου $\bar{b}_0$. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι οι P_0 και P_v δεν επηρεάζονται από τις διάφορες τιμές του ρυθμού των επαναλήψεων αφίξεων α (βλέπε σχέση (2.33)).

$\lambda/\bar{b}_0$	0	0.4	0.8	1.3	2.2	3.9
0.2	$P_0=0.7167$ $P_v=0$	0.6199	0.5262	0.4164	0.2447	0.0094
0.3	0.575 0	0.4476	0.3285	0.1971	0.0129	
0.4	0.4333 0	0.2872	0.1562	0.0213		
0.5	0.2917 0	0.1384	0.0075			
0.7	0.0083 0					

Πίνακας 2.5: Τιμές των P_0 , P_v για $\bar{b}_{11} = 1$, $\bar{b}_{22} = 0.33$

2.10 Ανακεφαλαίωση-Παρατηρήσεις

Στο κεφάλαιο αυτό, μελετήθηκε ένα μοντέλο επαναλαμβανόμενων αφίξεων, με έναν υπάλληλο, ο οποίος παρέχει εξυπηρέτηση δύο φάσεων σε σειρά. Οι πελάτες φτάνοντας στο σύστημα τοποθετούνται σε μια κανονική ουρά και περιμένουν να εξυπηρετηθούν. Κάθε πελάτης, που ολοκληρώνει την πρώτη φάση εξυπηρέτησης, είτε προωθείται άμεσα στην δεύτερη φάση εξυπηρέτησης, είτε εισέρχεται στην ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων, από όπου προσπαθεί να βρεί άεργο τον υπάλληλο και να λάβει την δεύτερη φάση εξυπηρέτησης, που του ανα-



λογεί. Ο υπάλληλος εξυπηρετεί σύμφωνα με την μη-διακόπτουσα προτεραιότητα ενώ κάθε φορά που ελευθερώνεται αναχωρεί για διακοπές.

Ορίζοντας μια Μαρκοβιανή διαδικασία ανανεώσεων σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές, η στοχαστική διαδικασία που περιγράφει το σύστημα μας είναι Ημιαναγεννητική και με την βοήθεια της αντίστοιχης θεωρίας βρέθηκε η συνθήκη στατιστικής ισορροπίας του υπό μελέτη μοντέλου. Επιπροσθέτως, χρησιμοποιώντας την μέθοδο της συμπληρωματικής μεταβλητής, βρέθηκαν οι εκφράσεις για τις γεννήτριες συναρτήσεις της κατανομής του αριθμού των πελατών στο σύστημα, τόσο σε συνεχή χρόνο, όσο και σε στατιστική ισορροπία. Με την βοήθεια των παραπάνω γεννητριών υπολογίστηκαν ορισμένα βασικά χαρακτηριστικά του μοντέλου, όπως οι πιθανότητες καταστάσεων του υπαλλήλου και ο αναμενόμενος αριθμός πελατών τόσο στην κανονική ουρά, όσο και στην ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων. Αποδείχθηκαν ορισμένα βοηθητικά αποτελέσματα, απαραίτητα για την ανάλυση, καθώς και το γεγονός ότι το υπό μελέτη μοντέλο ικανοποιεί την ιδιότητα της διασπασής. Τέλος, υπολογίστηκαν αριθμητικά αποτελέσματα, που έδωσαν χρήσιμα συμπεράσματα όσον αφορά τη μεταβολή του αναμενόμενου αριθμού P_2 πελατών, στις διάφορες αλλαγές των παραμέτρων του μοντέλου.

Θα ήταν ενδιαφέρον να μελετηθεί μια γενίκευση του παραπάνω μοντέλου, θεωρώντας n -φάσεις εξυπηρέτησης, έναν υπάλληλο, $(n-1)$ -ουρές επαναλαμβανόμενων αφίξεων και διακοπές υπαλλήλου. Ένα τέτοιο μοντέλο μελετάται στο επόμενο κεφάλαιο.



ΕΦΑΛΛΙΟ 3

να σύστημα ουράς με n άσεις εξυπηρέτησης, ιακοπές αι $n - 1$ τύπους πελατών παναλαμβανόμενων αφίξεων

1 Περίληψη

ο κεφάλαιο αυτό γενικεύεται το μοντέλο του προηγούμενου κεφαλαίου με θεώρηση πολλών ουρών επαναλαμβανόμενων αφίξεων (retrial boxes), κάθε α από τις οποίες περιέχει ένα συγκεκριμένο τύπο πελάτη. Έτσι, μελετάται α σύστημα εξυπηρέτησης με έναν υπάλληλο, ο οποίος παρέχει εξυπηρέτηση φάσεων σε σειρά. Όλοι οι πελάτες λαμβάνουν εξυπηρέτηση σε όλες τις φάσεις. Όταν ένας πελάτης ολοκληρώνει την εξυπηρέτηση του στην i -οστή φάση, είτε προωθείται άμεσα στην επόμενη, είτε εισέρχεται στο K_i retrial box ($= 1, 2, \dots, n-1$), απ' όπου επαναλαμβάνει την προσπάθειά του μετά από τυχαίο χρονικό διάστημα, ανεξάρτητα από τους άλλους πελάτες στο σύστημα, ώστε να ρεί διαθέσιμο τον υπάλληλο και να λάβει την εξυπηρέτηση του στην $(i+1)$ -οστή άση. Κάθε φορά που ο υπάλληλος ελευθερώνεται, αναχωρεί για διακοπές τυαίου μήκους. Πλήρης περιγραφή του συστήματος δίνεται στο επόμενο εδάφιο. κολούθως (εδάφιο 3.3), δίνονται ορισμένα βοηθητικά αποτελέσματα, τα οποία ρησιμοποιούνται για την ανάλυση του μοντέλου (εδάφιο 3.4). Στο εδάφιο 3.5 πολογίζονται οι αναμενόμενοι αριθμοί των πελατών τόσο στην ουρά, όσο και



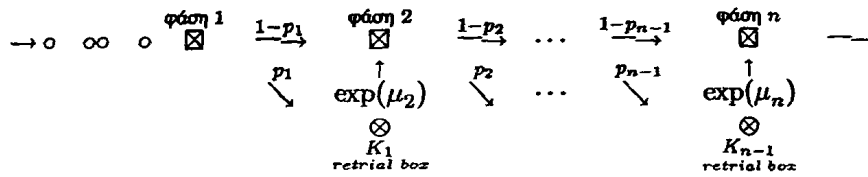
ληλος παραμένει άεργος αναμένοντας την πρώτη άφιξη (είτε από το εξωτερικό περιβάλλον, είτε από κάποιο retrial box), ώστε να αρχίσει την διαδικασία εξυπηρέτησης.

Ας ορίσουμε P_1 , τους πελάτες που τοποθετούνται στην κανονική ουρά και συνεχίζουν τη διαδικασία εξυπηρέτησης χωρίς να έχουν εισέλθει σε κάποιο retrial box, ενώ με P_i , $i = 2, 3, \dots, n$, αυτούς που εισέρχονται στο K_{i-1}^{th} retrial box και συνεχίζουν τη διαδικασία εξυπηρέτησης τους, εφόσον καταφέρουν να συνδεθούν με τον υπόλληλο, χωρίς να έχουν εισέλθει σε κάποιο άλλο retrial box. Αξίζει να παρατηρήσουμε το γεγονός, ότι κάθε πελάτης έχει την δυνατότητα, στην διάρκεια της διαδικασίας εξυπηρέτησης του, να μην εισέλθει σε κάποιο retrial box, είτε να εισέλθει σε περισσότερα από ένα retrial box. Επομένως ένας P_i πελάτης παραμένει P_i , για όσο χρόνο συνεχίζει την διαδικασία εξυπηρέτησης του, περνώντας από την μία φάση στην επόμενη, χωρίς να εισέλθει σε κάποιο retrial box (r.b.). Στη περίπτωση που ένας P_i πελάτης, στη διάρκεια της διαδικασίας εξυπηρέτησης του, εισέλθει στο K_{j-1}^{th} retrial box ($j > i$), τότε γίνεται P_j πελάτης. Εστω, B_{ij} , $i = 1, \dots, n$, $j = i, \dots, n$ η τ.μ. που παριστά τον χρόνο εξυπηρέτησης του P_i πελάτη στην j φάση. Θεωρούμε ότι οι τ.μ B_{ij} προέρχονται από αυθαίρετες κατανομές με α.σ.κ. $B_{ij}(x)$, σ.π.κ. $b_{ij}(x)$, μέση τιμή $\bar{b}_{ij}$ και ροπή δεύτερης τάξης περί το μηδέν $\bar{b}_{ij}^{(2)}$. Εμπροσθέντως, υποθέτουμε ότι όλες οι παραπάνω τ.μ. είναι ανεξάρτητες.

Αξίζει να παρατηρηθεί ότι το υπό μελέτη μοντέλο μπορεί να περιγραφεί θεωρώντας μόνο ένα retrial box, το οποίο όμως θα περιέχει $n - 1$ διαφορετικούς τύπους πελατών $P_2, \dots, P_n$. Ο χρόνος μεταξύ διαδοχικών επαναλήψεων αφίξεων του P_i πελάτη προέρχεται από την εκθετική κατανομή με παράμετρο μ_i , ενώ ο χρόνος εξυπηρέτησης του θα προέρχεται από μία αυθαίρετη κατανομή με σ.π.κ. είτε $\hat{b}_i(t) = b_{ii}(t) * b_{ii+1}(t) * \dots * b_{in}(t)$ με πιθανότητα $\hat{p}_i = \prod_{m=i}^{n-1} (1 - p_m)$, όπου σε αυτή την περίπτωση ο πελάτης θα ολοκληρώσει την διαδικασία εξυπηρέτησης του και θα αναχωρήσει από το σύστημα, είτε $\hat{b}_{ij}(t) = b_{ii}(t) * b_{ii+1}(t) * \dots * b_{ij-1}(t)$ με πιθανότητα $\hat{p}_{ij} = p_{j-1} \prod_{m=i}^{j-2} (1 - p_m)$, όπου σε αυτή την περίπτωση επιστρέφει στο retrial box ως P_j πελάτης ($j > i$).

Το ακόλουθο σχήμα περιγράφει το υπό μελέτη μοντέλο.





Σχήμα 3.1: Το μοντέλο με επαναλαμβανόμενες αφίξεις και n φάσεις εξυπηρέτησης.

Ο Falin [76] μελέτησε ένα μοντέλο με n -κλάσεις πελατών, στο οποίο οι αφίξεις των πελατών ήταν ομαδικές και ανεξάρτητες για κάθε κλάση. Σύμφωνα με αυτό, κάθε ομάδα πελατών που καταφθάνει στο σύστημα περιέχει πελάτες της ίδιας κλάσης. Ένας από αυτούς αρχίζει να εξυπηρετείται και οι υπόλοιποι τοποθετούνται στο αντίστοιχο κουτί επαναλαμβανόμενων αφίξεων. Επιπλέον δεν υπάρχει κανονική ουρά μπροστά από τον υπάλληλο. Αργότερα οι Moutzoukis and Langaris [148] μελέτησαν ένα γενικότερο μοντέλο, στο οποίο καταφθάνουν n -κλάσεις πελατών σε συσχετισμένες ομάδες. Οι πελάτες κλάσης $i = 1, 2, \dots, p$ τοποθετούνται σε p το πλήθος κανονικές ουρές και εξυπηρετούνται σύμφωνα με τον κανόνα της μή-διακόπτουσας προτεραιότητας, ενώ οι πελάτες κλάσης $i = p + 1, \dots, n$, που βρίσκουν, κατά την άφιξή τους, απασχολημένο τον υπάλληλο τοποθετούνται στα αντίστοιχα κουτιά επαναλαμβανόμενων αφίξεων. Και στα δύο παραπάνω μοντέλα υπάρχει μία φάση εξυπηρέτησης, ενώ επιπλέον οι πελάτες δεν αλλάζουν κλάση.

Οι Kumar et al. [124] και Choudhury [40], ήταν από τους πρώτους που εισήγαγαν το χαρακτηριστικό των επαναλαμβανόμενων αφίξεων σε μοντέλα με φάσεις εξυπηρέτησης, αλλά η μελέτη τους περιοριζόταν σε μοντέλα με δύο φάσεις ή μία μετά την άλλη. Επιπλέον, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι και στα δύο παραπάνω μοντέλα δεν υπάρχει κανονική ουρά και όλοι οι πελάτες που κατά την άφιξή τους βρίσκουν μη διαθέσιμο τον υπάλληλο, τοποθετούνται στην ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων.

Το μοντέλο του παρόντος κεφαλαίου αποτελεί σημαντική γενίκευση αυτού που μελετήθηκε στο κεφάλαιο 2, αλλά και των συστημάτων με πολλές κλάσεις πελατών, αφού για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία εμφανίζεται το χαρακτηριστικό των n -φάσεων εξυπηρέτησης αλλά κυρίως γιατί ένας πελάτης που προέρχεται από ένα οποιοδήποτε κουτί επαναλαμβανόμενων αφίξεων μπορεί κατά τη διάρκεια της διαδικασίας εξυπηρέτησης, να εισέλθει και σε άλλα διαφορετικά κουτιά

μέχρι να αναχωρήσει από το σύστημα. Σε αυτή τη περίπτωση έχει τη δυνατότητα να μεταβεί από μία κλάση πελατών σε μία άλλη. Το γεγονός αυτό επηρεάζει την ανάλυση του συστήματος αφού κάθε φορά που ένας πελάτης εισέρχεται σε κάποιο κοντί και αλλάζει κλάση, οπότε διαφοροποιείται η μετέπειτα διαδικασία εξυπηρέτησης του, έχει ήδη λάβει ένα ποσοστό εξυπηρέτησης ως πελάτης της προηγούμενης κλάσης στην οποία άνηκε. Το τελευταίο χαρακτηριστικό εμφανίζεται για πρώτη φορά στη μελέτη συστημάτων εξυπηρέτησης με επαναλαμβανόμενες αφίξεις πελατών. Επιπλέον θα πρέπει να παρατηρηθεί ότι οι P_i πελάτες $i = 2, \dots, n$, προέρχονται από τις ροές των P_j πελατών όπου $j = 1, 2, \dots, i - 1$.

Το υπό μελέτη μοντέλο είναι κατάλληλο για να περιγράψει συστήματα με $n \geq 1$ φάσεις εξυπηρέτησης, όπου σε κάθε φάση γίνεται έλεγχος των εξυπηρετούμενων μονάδων (πελάτες, εργασίες). Αν μία μονάδα ικανοποιεί κάποια ποιοτικά κριτήρια προωθείται άμεσα στην επόμενη φάση. Αν η ποιότητα της μονάδας είναι χαμηλή τότε αποσύρεται προσωρινά από το σύστημα και επαναλαμβάνει την προσπάθεια της, ώστε να ολοκληρώσει την διαδικασία εξυπηρέτησης της, όταν ο υπάλληλος είναι ελεύθερος από μονάδες υψηλής ποιότητας. Τέτοιες καταστάσεις συναντώνται συχνά, στην μετάδοση "πακέτων" πληροφορίας στα τηλεπικοινωνιακά δίκτυα, σε βιομηχανικά συστήματα, σε δίκτυα υποεπεξεργαστών που συνδέονται με έναν κεντρικό επεξεργαστή κ.ο.κ..

3.3 Βοηθητικά αποτελέσματα

Στη συνέχεια δίνονται μερικοί βασικοί ορισμοί και αποδεικνύονται κάποια βοηθητικά αποτελέσματα. Επιπλέον, αναφέρονται δύο βασικά θεωρήματα στα οποία θα βασιστεί η κύρια ανάλυση του μοντέλου.

Ως συνολικό κύκλο εξυπηρέτησης (total service cycle) ενός πελάτη, θα καλούμε το χρονικό διάστημα που ένας πελάτης απασχολεί τον υπάλληλο μέχρι αυτός να αναχωρήσει από το σύστημα. Αρα στην περίπτωση που ένας πελάτης δεν εισέλθει σε κανένα retrial box (με πιθανότητα $\bar{p}_0 = \prod_{i=1}^{n-1} (1 - p_i)$), στη διάρκεια της διαδικασίας εξυπηρέτησης του, θα απασχολήσει συνολικά τον υπάλληλο για χρόνο όσο το άθροισμα των n χρόνων εξυπηρέτησης (μια για κάθε φάση) ενός P_1 πελάτη, που εκφράζεται μέσω της τ.μ. $\bar{R}_0 = \sum_{j=1}^n B_{1j}$. Τότε ο M.L. της σ.π.π. της τ.μ. $\bar{R}_0$ θα είναι

$$\bar{r}_0(s) = \prod_{j=1}^n \beta_{1j}^*(s),$$

όπου $\beta_{ij}^*(\cdot)$ ο M.L. της $b_{ij}(\cdot)$. Ας υποθέσουμε τώρα, ότι κάποιος πελάτης εισέρχε-



ται σε r το πλήθος r.b. ($r = 1, 2, \dots, n-1$), για παράδειγμα τα $K_{m_1}, K_{m_2}, \dots, K_{m_r}$, στη διάρκεια της διαδικασίας εξυπηρέτησης του. Τότε είναι ξεκάθαρο ότι $m_1 = 1, 2, \dots, n-r$, $m_2 = m_1 + 1, \dots, n-r+1$, μέχρι $m_r = m_{r-1} + 1, \dots, n-1$. Επιπλέον η πιθανότητα πραγματοποίησης του εν λόγω γεγονότος είναι

$$\bar{p}_{m_1 m_2 \dots m_r} = p_{m_1} p_{m_2} \dots p_{m_r} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq m_1, \dots, m_r}}^{n-1} (1 - p_i).$$

Έτσι στη συγκεκριμένη περίπτωση, ο συνολικός χρόνος που απασχολεί τον υπάλληλο ένας πελάτης εκφράζεται μέσω της ακόλουθης τ.μ. (όπου $m_0 \equiv 0$)

$$\bar{R}_{m_1 m_2 \dots m_r} = \sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=m_{i-1}+1}^{m_i} B_{m_{i-1}+1j} + \bar{V} \right) + \sum_{j=m_r+1}^n B_{m_r+1j},$$

ενώ ο M.L. της αντίστοιχης σ.π.π. είναι

$$\bar{r}_{m_1 m_2 \dots m_r}(s) = (\bar{v}^*(s))^r \prod_{i=1}^{r+1} \prod_{j=m_{i-1}+1}^{m_i} \beta_{m_{i-1}+1j}^*(s),$$

με $m_{r+1} \equiv n$. Αξίζει εδώ να υπενθυμίσουμε ότι στη περίπτωση που ένας πελάτης εισέλθει σε κάποιο r.b., για να είναι σε θέση να συνεχίσει την διαδικασία εξυπηρέτησης του, πρέπει ο υπάλληλος να έχει επιστρέψει από διακοπές και να είναι άεργος. Η τ.μ. $\bar{V}$ εκφράζει αθροιστικά, το χρονικό διάστημα απουσίας του υπαλλήλου το οποίο οφείλεται στις διακοπές και που προηγείται πάντα πριν την εξυπηρέτηση οποιουδήποτε πελάτη, που προσπαθεί να συνδεθεί με τον υπάλληλο από κάποιο retrieval box. Στην περίπτωση που δεν έρθει κάποιος πελάτης στη διάρκεια των διακοπών, ο χρόνος απουσίας του υπαλλήλου, είναι ίσος με την διάρκεια των διακοπών U_0 . Εάν έρθουν πελάτες στη διάρκεια των διακοπών, μετά το πέρας αυτών ο υπάλληλος θα αρχίσει την περίοδο συνεχούς απασχόλησης P_1 πελατών. Αρα το εν λόγω χρονικό διάστημα θα διακοπεί και θα συνεχιστεί μόλις ο υπάλληλος αναχωρήσει ξανά για διακοπές και πριν γίνει διαθέσιμος για τον πελάτη. Η σ.π.π. $\bar{v}(t)$, της τ.μ. $\bar{V}$ ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση

$$\bar{v}(t) = e^{-\lambda t} b_0(t) + (1 - e^{-\lambda t}) b_0(t) * \bar{v}(t),$$

με M.L.

$$\bar{v}^*(s) = \frac{\beta_0^*(\lambda + s)}{1 + \beta_0^*(\lambda + s) - \beta_0^*(s)}.$$



Επομένως ο M.L. της σ.π.κ. του συνολικού κύκλου απασχόλησης ενός πελάτη $\bar{R}$ δίνεται από την

$$\bar{r}(s) = \bar{p}_0 \bar{r}_0(s) + \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{m_1=1}^{n-r} \sum_{m_2=m_1+1}^{n-r+1} \dots \sum_{m_r=m_{r-1}+1}^{n-1} \bar{p}_{m_1 m_2 \dots m_r} \bar{r}_{m_1 m_2 \dots m_r}(s),$$

ενώ παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση ως προς s , στο σημείο $s = 0$, θα έχουμε τη αναμενόμενη διάρκεια του εν λόγω χρονικού διαστήματος. Τότε

$$\rho^* \equiv -\lambda \frac{d}{ds} \bar{r}(s)|_{s=0} = \lambda E(\bar{R}) = \sum_{j=1}^n (\rho_j + \rho_{0j}), \quad (3.1)$$

όπου

$$\rho_{0j} = \frac{\lambda \bar{b}_0}{\bar{b}_0^2(\lambda)} p_{j-1}, \quad j = 2, 3, \dots, n, \quad (3.2)$$

$$\rho_j = \lambda p_{j-1} [\bar{b}_{jj} + \sum_{k=j+1}^n \bar{b}_{jk} \prod_{m=j}^{k-1} (1 - p_m)], \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

με $p_0 \equiv 1$, $p_{01} \equiv 0$. Ομως το ρ^* είναι ο αναμενόμενος αριθμός νέων πελατών που φτάνουν στο σύστημα στη διάρκεια του $\bar{R}$ και επομένως για να εξασφαλίσουμε ότι το σύστημα μας βρίσκεται σε στατιστική ισορροπία πρέπει να υποθέσουμε ότι $\rho^* < 1$.

Ας ορίσουμε με S_j την τ.μ. που εκφράζει το χρονικό διάστημα από τη στιγμή που ένας P_j πελάτης αρχίζει να εξυπηρετείται στην j -οστή φάση, μέχρι τη στιγμή που, είτε ολοκληρώθηκε η διαδικασία εξυπηρέτησης του και αναχώρησε από το σύστημα, είτε εισήχθει σε κάποιο retrieval box ελευθερώνοντας τον υπάλληλο. Εστω επιπλέον η τ.μ. $N_i(S_j)$, που εκφράζει τον αριθμό των νέων P_i πελατών που φτάνουν στο σύστημα στη διάρκεια του S_j . Θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι στη διάρκεια του S_j , φτάνουν νέοι P_1 πελάτες (εξωτερικές αφίξεις) και\ή ένας νέος P_{j+1} ή P_{j+2} ή ... ή P_n πελάτης ανάλογα σε πιο retrieval box θα επιλέξει ο P_j πελάτης να εισέλθει. Ας ορίσουμε επιπλέον

$$a^{(j)}(t, k_1, k_{j+1}, \dots, k_n) dt = P[N_i(S_j) = k_i \quad i = 1, j+1, \dots, n, \quad t < S_j \leq t + dt],$$

$$a_j(z_1, z_{j+1}, \dots, z_n) =$$

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_{j+1}=0}^1 \dots \sum_{k_n=0}^1 z_1^{k_1} z_{j+1}^{k_{j+1}} \dots z_n^{k_n} \int_{t=0}^{\infty} a^{(j)}(t, k_1, k_{j+1}, \dots, k_n) dt.$$

Τότε η διάρκεια του χρόνου S_j ενός P_j πελάτη αποτελείται, με πιθανότητα p_j , είτε από τη διάρκεια της εξυπηρέτησης στη j -οστή φάση (οπότε εισέρχεται στο



K_j^{th} κουτί και αυξάνει τον αριθμό των P_{j+1} πελατών κατά ένα), είτε με πιθανότητα $1 - p_j$, από τη διάρκεια της j -οστής και $(j + 1)$ -οστής (σε αυτή τη περίπτωση ο αριθμός των P_{j+1} πελατών παραμένει ο ίδιος). Στη δεύτερη περίπτωση με πιθανότητα p_{j+1} το εν λόγω χρονικό διάστημα τερματίζεται (από τότε ο πελάτης εισέρχεται στο K_{j+1}^{th} κουτί αυξάνοντας τον αριθμό των P_{j+2} πελατών κατά ένα), είτε με πιθανότητα $1 - p_{j+1}$, θα προστεθεί σε αυτήν και ο χρόνος εξυπηρέτησης της $(j + 2)$ -οστής φάσης κ.ο.κ.. Προφανώς ο αριθμός των P_1 πελατών που φθάνουν στο σύστημα στη διάρκεια του S_j είναι απεριόριστος. Συνολικά θα έχουμε

$$S_j = \begin{cases} \sum_{k=j}^m B_{jk}, & \text{με πιθανότητα } p_m \prod_{k=j}^{m-1} (1 - p_k), \quad m = j, \dots, n-1, \\ & (\text{αυξάνοντας τους } P_{m+1} \text{ κατά ένα}), \\ \sum_{k=j}^n B_{jk}, & \text{με πιθανότητα } \prod_{k=j}^{n-1} (1 - p_k), \\ & (\text{κανένας δεν εισέρχεται στα } K_k^{th} \text{ κουτιά}). \end{cases}$$

Αρα, για $j = 1, \dots, n$ και αν τα $0 = (0, \dots, 0)$, $1_{m+1} = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ είναι $1 \times (n-j)$ διάνυσμα με το 1_{m+1} να υποδηλώνει ότι $k_{m+1} = 1$, $k_i = 0$, $i \neq m+1$,

$$\begin{aligned} a^{(j)}(t, k_1, 0) &= \sum_{i_{jj}=0}^{k_1} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^{i_{jj}}}{i_{jj}!} b_{jj}(t) (1 - p_j) * \dots \\ &\quad * (1 - p_{n-1}) \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^{k_1 - \sum_{l=j}^{n-1} i_{jl}}}{(k_1 - \sum_{l=j}^{n-1} i_{jl})!} b_{jn}(t), \\ a^{(j)}(t, k_1, 1_{m+1}) &= \sum_{i_{jj}=0}^{k_1} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^{i_{jj}}}{i_{jj}!} b_{jj}(t) (1 - p_j) * \dots \\ &\quad * \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^{k_1 - \sum_{l=j}^{m-1} i_{jl}}}{(k_1 - \sum_{l=j}^{m-1} i_{jl})!} b_{jm}(t) p_m. \end{aligned}$$

Παρατήρησε, ότι στη περίπτωση όπου $n = 2$ οι συναρτήσεις $a^{(j)}(\cdot)$ συμπίπτουν με τις συναρτήσεις $\tilde{b}(\cdot)$, (2.6) του κεφαλαίου 2.

Επομένως λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω εύκολα καταλήγουμε για $j = 1, 2, \dots, n$, στην

$$a_j(z_1, z_{j+1}, \dots, z_n) = \sum_{m=j}^n p_m z_{m+1} \prod_{l=j}^{m-1} (1 - p_l) \prod_{k=j}^m \beta_{jk}^*(\lambda - \lambda z_1), \quad (3.3)$$

με $p_n \equiv 1$, $z_{n+1} \equiv 1$. Επανερωθώντας από την σχέση (3.2) έχουμε

$$\frac{d}{dz_1} a_1(z_1, 1, 1, \dots, 1) \big|_{z_1=1} = \rho_1.$$

Για την αποφυγή σύγχυσης θα δώσουμε στη συνέχεια ορισμένους συμβολισμούς. Έτσι για κάθε x_j , $j = 1, 2, \dots, n$, ας ορίσουμε με, x το $(1 \times (n-1))$ διάνυσμα $x = (x_2, x_3, \dots, x_n)$ και με $\bar{x}$ το $(1 \times n)$ διάνυσμα $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.



Στην συνέχεια ακολουθεί ένα απαραίτητο για τη μετέπειτα ανάλυση, λήμμα, η απόδειξη του οποίου είναι απλή εφαρμογή του θεωρήματος του Takacs [164].

Λήμμα 3.1 *Εαν (i) $|z_k| < 1$ για κάθε συγκεκριμένο $k = 2, \dots, n$, και $|z_m| \leq 1$ για όλα τα υπόλοιπα $2 \leq m \leq n$ με $m \neq k$, ή (ii) $|z_m| \leq 1$, για όλα τα $2 \leq m \leq n$ και $\rho_1 > 1$, τότε η σχέση*

$$z_1 - a_1(z_1, z_2, \dots, z_n), \quad (3.4)$$

έχει μία και μόνο μία ρίζα, έστω $z_1 = x(z)$, μέσα στο μοναδιαίο κύκλο $|z_1| < 1$. Ειδικότερα για $z = 1$, η $x(1)$ είναι η μικρότερη θετική πραγματική ρίζα της (3.4) με $x(1) < 1$ για $\rho_1 > 1$ και $x(1) = 1$ για $\rho_1 \leq 1$.

Ας συμβολίσουμε με $T^{(i)}$, τη διάρκεια της περιόδου συνεχούς απασχόλησης P_1 πελάτων, που ξεκινά με i P_1 πελάτες και έστω $N_j(T^{(i)})$, τ.μ. που εκφράζει τον αριθμό των νέων P_j πελατών που εισέρχονται στο K_{j-1}^{th} retrial box στη διάρκεια της $T^{(i)}$. Επιπλέον, ορίζουμε την από κοινού κατανομή τους και τον αντίστοιχο M.L. της γεννήτριας πιθανοτήτων

$$g_k^{(i)}(t)dt = P[N_j(T^{(i)}) = k_j \quad j = 2, 3, \dots, n, \quad t < T^{(i)} \leq t + dt],$$

$$G^{(i)}(s, z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} g_k^{(i)}(t) dt.$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1 των Langaris and Katsaros [133], είναι εύκολα αναληπτό ότι

$$G^{(i)}(0, z) = x^i(z),$$

όπου η $x(z)$ είναι το μοναδικό σημείο μηδενισμού της σχέσης $z_1 - a_1(z_1, z_2, \dots, z_n)$ εντός του μοναδιαίου κύκλου $|z_1| < 1$.

Εστω V , τ.μ. που εκφράζει το χρονικό διάστημα από τη στιγμή που ο υπάλληλος αναχωρεί για διακοπές, μέχρι τη στιγμή που θα είναι άεργος για πρώτη φορά. Επιπλέον, ορίζουμε με $N_j(V)$, τη τ.μ. που εκφράζει τον αριθμό των νέων P_j πελατών που εισέρχονται στο K_{j-1}^{th} retrial box στη διάρκεια της V . Αν

$$v_k(t)dt = P[N_j(V) = k_j \quad j = 2, 3, \dots, n, \quad t < V \leq t + dt],$$

$$v^*(s, z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} v_k(t) dt,$$



τότε

$$v_k(t) = e^{-\lambda t} b_0(t) \delta_{\{k=0\}} + \sum_{m=0}^k \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} b_0(t) * g_m^{(i)}(t) * v_{k-m}(t), \quad (3.5)$$

όπου

$$\delta_{\{A\}} = \begin{cases} 1, & \text{αν ισχύει το } A, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της (3.5) αντιστοιχεί στη περίπτωση όπου δεν έρχεται κανένας πελάτης στη διάρκεια των διακοπών του υπάλληλου, οπότε μετά το πέρας αυτών ο υπάλληλος καθίσταται άεργος. Ο δεύτερος όρος παραπέμπει στη περίπτωση όπου φθάσουν κατά τη διάρκεια των διακοπών $i \geq 1$ P_1 πελάτες, οπότε επιστρέφοντας ο υπάλληλος από τις διακοπές θα τους εξυπηρετήσει όλους. Κατά τη διάρκεια της περιόδου συνεχούς απασχόλησης των εν λόγω P_1 πελατών, m_2 από αυτούς θα εισέρθουν στο K_1^{th} κουτί (νέοι P_2 πελάτες), ..., m_n από αυτούς θα εισέλθουν στο K_{n-1}^{th} κουτί (νέοι P_n πελάτες), όπου $0 \leq m_j \leq k_j$. Μόλις ελευθερωθεί ο υπάλληλος θα αναχωρήσει πάλι για διακοπές όπου στη διάρκεια αυτών θα εισέλθουν στα αντίστοιχα κουτιά οι υπόλοιποι νέοι $k_j - m_j$, $j = 2, \dots, n$ πελάτες.

Σχηματίζοντας την γεννήτρια πιθανοτήτων και τον αντίστοιχο M.L. προκύπτει μετά από πράξεις

$$v^*(0, z) = \frac{\beta_0^*(\lambda)}{1 + \beta_0^*(\lambda) - \beta_0^*(\lambda - \lambda x(z))}. \quad (3.6)$$

Ας ορίσουμε με $D^{(i)}$, τη τ.μ. που εκφράζει τη χρονική διάρκεια από τη στιγμή κατά την οποία ένας P_i $i = 2, 3, \dots, n$ πελάτης κατάφερε να συνδεθεί με τον υπάλληλο, μέχρι τη στιγμή που ο υπάλληλος αναχωρεί για διακοπές για πρώτη φορά. Αυτή η χρονική διάρκεια είναι το άθροισμα του χρόνου S_i (δηλαδή από τη στιγμή που ο P_i πελάτης άρχισε τη διαδικασία εξυπηρέτησης του μέχρι τη στιγμή που, είτε την ολοκλήρωσε και αναχώρησε από το σύστημα, είτε την διέκοψε εισέρχοντας σε κάποιο retrial box), συν τη διάρκεια της περιόδου συνεχούς απασχόλησης P_1 πελατών που έφτασαν στο σύστημα στη διάρκεια του S_i . Εστω επιπλέον, $N_j(D^{(i)})$ η τ.μ. που εκφράζει τον αριθμό των νέων P_j πελατών που εισέρχονται στο K_{j-1}^{th} retrial box στη διάρκεια της $D^{(i)}$. Ορίζοντας την από κοινού κατανομή και τον M.L. της αντίστοιχης γεννήτριας πιθανοτήτων

$$d_k^{(i)}(t) dt = P[N_j(D^{(i)}) = k_j, j = 2, 3, \dots, n, t < D^{(i)} \leq t + dt],$$

$$D^{(i)}(s, z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} d_k^{(i)}(t) dt,$$



τότε

$$d_k^{(i)}(t) = e^{-\lambda t} \sum_{r=i}^n s_{ir}(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t} \sum_{r=i}^n s_{ir}(t) * g_{k-1, r+1}^{(m)}(t), \quad (3.7)$$

όπου $1_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ με 1 στη j -οστή θέση και

$$s_{ir}(t) = p_r \prod_{m=i}^{r-1} (1 - p_m) [b_{ii}(t) * \dots * b_{ir}(t)], \quad r = i, i+1, \dots, n,$$

(όπου $p_n = 1$, $\prod_{m=i}^j (1 - p_m) = 1$ για $j < i$) είναι ο συνολικός χρόνος, από τη στιγμή που ένας P_i (retiral) πελάτης αρχίζει να εξυπηρετείται μέχρι τη στιγμή που είτε εισέρχεται στο K_r^{th} retiral box και γίνεται P_{r+1} πελάτης, είτε ολοκληρώνει τη διαδικασία εξυπηρέτησης του αναχωρώντας από το σύστημα (στη περίπτωση όπου $r = n$). Ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της (3.7) αναφέρεται στη περίπτωση που στη διάρκεια του χρόνου εξυπηρέτησης του P_i πελάτη δεν έρθει κανένας P_1 πελάτης στο σύστημα. Οπότε μόλις ολοκληρωθεί ο εν λόγω χρόνος ο υπάλληλος θα είναι σε θέση να αναχωρήσει για διακοπές. Ο δεύτερος όρος αναφέρεται στη περίπτωση που στη διάρκεια του χρόνου που ένας P_i πελάτης απασχολεί τον υπάλληλο, φθάσουν m (≥ 1) P_1 πελάτες. Αν στη διάρκεια του εν λόγω χρονικού διαστήματος ο P_i πελάτης εισέλθει στο K_r^{th} κουτί ($r = i, \dots, n-1$), οπότε ο αριθμός των P_{r+1} πελατών αυξηθεί κατά ένα, ο υπάλληλος θα αρχίσει να εξυπηρετεί όλους τους αφιχθέντες P_1 πελάτες πριν ελευθερωθεί και στη διάρκεια της περιόδου συνεχούς απασχόλησης των παραπάνω P_1 πελατών θα εισέλθουν $k_2, \dots, k_r, k_{r+1} - 1, \dots, k_n, P_2, \dots, P_r, P_{r+1}, \dots, P_n$ πελάτες αντίστοιχα. Στη περίπτωση που ο P_i πελάτης ολοκληρώσει τη διαδικασία εξυπηρέτησης του χωρίς να εισέλθει σε κάποιο κουτί ($r = n$), ο υπάλληλος θα ολοκληρώσει τη περίοδο συνεχούς απασχόλησης των αφιχθέντων P_1 πελατών, στη διάρκεια της οποίας θα έρθουν k_j νέοι P_j , $j = 2, \dots, n$ πελάτες.

Δημιουργώντας τις γεννήτριες συναρτήσεις και σχηματίσουμε M.L. στα δυο μέλη της (3.7) προκύπτει ότι

$$D^{(i)}(0, z) = a_i(x(z), z_{i+1}, \dots, z_n),$$

όπου η συνάρτηση $a_i(z_1, z_{i+1}, \dots, z_n)$ έχει οριστεί στη σχέση (3.3).

Τελικά, ας ορίσουμε με $C^{(i)}$, τη τ.μ. που εκφράζει τη διάρκεια του χρόνου από τη στιγμή που ένας P_i πελάτης κατάφερε να συνδεθεί με τον υπάλληλο, μέχρι τη στιγμή που ο υπάλληλος παραμένει άεργος για πρώτη φορά και έτοιμος να δεχθεί τον επόμενο πελάτη που θα ζητήσει εξυπηρέτηση (είτε από εξωτερική



άφιξη, είτε από κάποιο retrial box). Παρατήρησε ότι το $C^{(i)}$ αποτελείται από δύο ανεξάρτητα χρονικά διαστήματα. Το χρονικό διάστημα από τη στιγμή που ο P_i πελάτης κατάφερε να συνδεθεί με τον υπάλληλο, μέχρι τη στιγμή που ο τελευταίος είναι έτοιμος να αναχωρήσει για διακοπές ($D^{(i)}$), συν το χρονικό διάστημα από τη στιγμή που ο υπάλληλος αναχώρησε για διακοπές, έως τη στιγμή που έμεινε άεργος για πρώτη φορά (V). Εστω $N_j(C^{(i)})$, τ.μ. που εκφράζει τον αριθμό των νέων P_j πελατών που εισέρχονται στο K_{j-1}^{th} retrial box στη διάρκεια της $C^{(i)}$ και επιπλέον ορίζουμε την από κοινού κατανομή και τον M.L. της αντίστοιχης γεννήτριας πιθανοτήτων

$$c_k^{(i)}(t)dt = P[N_j(C^{(i)}) = k, j = 2, 3, \dots, n, t < C^{(i)} \leq t + dt],$$

$$C^{(i)}(s, z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} c_k^{(i)}(t) dt.$$

Τότε μετά από πράξεις καταλήγουμε στη

$$C^{(i)}(0, z) = a_i(x(z), z_{i+1}, \dots, z_n) v^*(0, z). \quad (3.8)$$

Στη συνέχεια παραθέτουμε ένα σημαντικό για την ανάλυση Θεώρημα, η απόδειξη του οποίου είναι όμοια με αυτή του Θεωρήματος 3.2, των Moutzoukis and Langaris [148].

Θεώρημα 3.2 Για οποιαδήποτε μετάθεση $(i_2, i_3, \dots, i_n)$ του $(2, 3, \dots, n)$ και για (a) $|z_{i_m}| < 1$ για ένα συγκεκριμένο $m = j + 1, \dots, n$, και $|z_{i_r}| \leq 1$, για όλα τα υπόλοιπα $r = j + 1, \dots, n$ με $r \neq m$, ή (b) $|z_{i_r}| \leq 1$, για όλα τα $r = j + 1, \dots, n$, και $\bar{\rho}_{i_{j-1}} > 1$, ή (c) $|z_{i_r}| \leq 1$, για όλα τα $r = j + 1, \dots, n$, και $\bar{\rho}_{i_j} > 1 \geq \bar{\rho}_{i_{j-1}}$, η εξίσωση

$$z_{i_j} - C^{(i_j)}(0, w_{i_{j-1}}(z_{i_j}, z_{i_{j+1}}, \dots, z_{i_n})) = 0, \quad (3.9)$$

έχει για $j = 2, 3, \dots, n$, μία και μόνο μία ρίζα, έστω $z_{i_j} = x_{i_j}(z_{i_{j+1}}, \dots, z_{i_n})$, $j \neq n$, $z_{i_n} = x_{i_n}$, μέσα στην περιοχή $|z_{i_j}| < 1$, όπου τα διανύσματα $w_{i_j}(z_{i_{j+1}}, z_{i_{j+2}}, \dots, z_{i_n})$ ορίζονται ως

$$w_{i_1}(z_{i_2}, z_{i_3}, \dots, z_{i_n}) = (z_2, z_3, \dots, z_n),$$

$$w_{i_2}(z_{i_3}, z_{i_4}, \dots, z_{i_n}) = w_{i_1}(x_{i_2}(z_{i_3}, \dots, z_{i_n}), z_{i_3}, \dots, z_{i_n}),$$

$$w_{i_k}(z_{i_{k+1}}, z_{i_{k+2}}, \dots, z_{i_n}) = w_{i_{k-1}}(x_{i_k}(z_{i_{k+1}}, \dots, z_{i_n}), z_{i_{k+1}}, \dots, z_{i_n}),$$

$$k = 2, \dots, n-1,$$

ενώ $\bar{\rho}_{i_1} \equiv \rho_1$ και

$$\bar{\rho}_{i_j} = \frac{\partial}{\partial z_{i_j}} C^{(i_j)}(0, w_{i_{j-1}}(z_{i_j}, z_{i_{j+1}}, \dots, z_{i_n}))|_{z_{i_j}=z_{i_{j+1}}=\dots=z_{i_n}=1}.$$



Επιπλέον για $z_{i_r} = 1$, $r = j+1, \dots, n$, και $\bar{\rho}_{i_{j-1}} \leq 1$ η ρίζα $x_{i_j}(1, \dots, 1)$ είναι η μικρότερη θετική πραγματική ρίζα της (3.9) με $x_{i_j}(1, \dots, 1) < 1$ $\bar{\rho}_{i_j} > 1$ και $x_{i_j}(1, \dots, 1) = 1$ αν $\bar{\rho}_{i_j} \leq 1$.

Απόδειξη: Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη θα πρέπει να επισημάνουμε ότι το όρισμα του διανύσματος $w_{ij}(\cdot)$ δίνει την σειρά που κάθε φορά ακολουθούμε ώστε να εξαλείψουμε τα $z_{i_{j+1}}, \dots, z_{i_{n-1}}$ (θέτοντας κάθε φορά την κατάλληλη ρίζα $x_{i_{j+1}}(\cdot), \dots, x_{i_{n-1}}(\cdot)$) φτάνοντας στο τέλος να υπάρχει μόνο ο όρος z_{i_n} .

Η απόδειξη ακολουθεί αυτή των Langaris and Katsaros [133] και Moutzoukis and Langaris [148]. Ας υποθέσουμε ότι $i_2 = 2$. Τότε

$$C^{(i_2)}(0, w_{i_1}(z_{i_2}, z_{i_3}, \dots, z_{i_n})) = C^{(2)}(0, (z_2, z_3, \dots, z_n)).$$

Αν θεωρήσουμε μία κλειστή καμπύλη $|z_2| = 1 - \epsilon$, με $\epsilon > 0$, τότε κάτω από τις συνθήκες (a), (b), πάντα μπορεί να βρεθεί ένα $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε

$$\left| C^{(2)}(0, (z_2, z_3, \dots, z_n)) \right| \leq C^{(i_2)}(0, (|z_2|, |z_3|, \dots, |z_n|)) < 1 - \epsilon, \quad (3.10)$$

ενώ για την (c) αν $\bar{\rho}_{i_1} \equiv \rho_1 \leq 1$ χρειαζόμαστε επιπλέον,

$$\frac{d}{d\epsilon} C^{(2)}(0, (1 - \epsilon, 1, \dots, 1))|_{\epsilon=0} < -1,$$

ή ισοδύναμα χρειαζόμαστε $\bar{\rho}_2 > 1$ για να ισχύει η (3.10). Επομένως, χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Rouché, ολοκληρώνεται η απόδειξη του πρώτου μέρους του θεωρήματος.

Συνεχίζοντας, για $z_{i_r} = 1$, $r = 3, 4, \dots, n$ και $\bar{\rho}_{i_1} \equiv \rho_1 \leq 1$, η κυρτή συνάρτηση $C^{(2)}(0, (z_2, 1, \dots, 1))$ είναι αύξουσα ως προς z_2 για $0 \leq z_2 \leq 1$. Επιπλέον παίρνει τιμές $0 < C^{(i_2)}(0, (0, 1, \dots, 1)) < 1$ και $C^{(i_2)}(0, (1, 1, \dots, 1)) = 1$ και έτσι η ρίζα $x_2(1, \dots, 1)$ παίρνει τιμές στο $(0, 1)$ αν $\bar{\rho}_2 > 1$, ενώ για $\bar{\rho}_2 \leq 1$, η $x_2(1, \dots, 1)$ γίνεται ίση με τη μονάδα. Επομένως το θεώρημα αποδείχθηκε για $i_2 = 2$.

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Langrange και γράφοντας τη ρίζα $x_2(z_3, \dots, z_n)$ σε μορφή δυναμοσειράς, προκύπτει ότι

$$|x_2(z_3, \dots, z_n)| \leq x_2(|z_3|, \dots, |z_n|), \quad (3.11)$$

ενώ, θέτοντας $z_2 = x_2(z_3, \dots, z_n)$ στην (3.9) και παραγωγίζοντας, διαπιστώνεται ότι για $0 \leq z_j \leq 1$, $j = 3, 4, \dots, n$ $\bar{\rho}_2 \leq 1$,

$$\frac{\partial}{\partial z_j} x_2(z_3, \dots, z_n) > 0, \quad j = 3, 4, \dots, n, \quad (3.12)$$



και έτσι η $x_2(z_3, \dots, z_n)$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς z_j , $j = 3, 4, \dots, n$.

Εστω τώρα ότι το θεώρημα ισχύει για $j = 3, 4, \dots, m$. Τότε ακολουθώντας τη παραπάνω διαδικασία μπορούμε να αποδείξουμε σχέσεις ανάλογες με τις (3.11) και (3.12) για όλες τις ρίζες $x_{i_j}(z_{i_{j+1}}, \dots, z_{i_n})$, $j = 3, 4, \dots, m$ και να τις χρησιμοποιήσουμε επαναλαμβάνοντας την ίδια ανάλυση, για να αποδείξουμε ότι το Θεώρημα ισχύει για $j = m + 1$. Αυτό ολοκληρώνει και την απόδειξη του θεωρήματος. $\square$

Τώρα μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε μετάθεση $(i_2, i_3, \dots, i_n)$ του συνόλου $(2, 3, \dots, n)$, ο τελευταίος όρος $\bar{\rho}_{i_n} (> \bar{\rho}_{i_{n-1}} > \dots > \bar{\rho}_{i_2})$ δίνεται από,

$$\bar{\rho}_{i_n} = \frac{\rho_{i_n} + \rho_{0i_n} + \delta_{\{i_n < n\}} p_{i_n-1} \sum_{k=i_n+1}^n (\rho_k + \rho_{0k})}{1 - \rho_1 - \sum_{k=2}^{i_n-1} (\rho_k + \rho_{0k}) - \delta_{\{i_n < n\}} (1 - p_{i_n-1}) \sum_{k=i_n+1}^n (\rho_k + \rho_{0k})}, \quad (3.13)$$

και επομένως συγκρίνοντας τις σχέσεις (3.1), (3.13) προκύπτει ότι για $\rho^* < 1$, ο όρος $\bar{\rho}_{i_n}$ (και επομένως όλα τα υπόλοιπα $\bar{\rho}_{i_j}$) είναι πάντα μικρότερα τις μονάδας.

3.4 Ανάλυση σε στατιστική ισορροπία

Ακολουθεί η μελέτη των πιθανοτήτων των καταστάσεων του συστήματος σε στατιστική ισορροπία. Αξίζει να σημειωθεί ότι λόγω της πολυπλοκότητας του συστήματος κρίνεται αδύνατη η μελέτη του σε συνεχή χρόνο. Βάσει του συλλογισμού που αναπτύχθηκε στο προηγούμενο εδάφιο, το σύστημα μας να βρίσκεται σε στατιστική ισορροπία αν $\rho^* < 1$. Εστω N_1, N_i , $i = 2, \dots, n$, τ.μ. που εκφράζουν τον αριθμό των P_1, P_i πελατών που βρίσκονται στην ουρά (όχι στον χώρο εξυπηρέτησης) και στο K_{i-1}^{th} retrieval box αντίστοιχα. Ας ορίσουμε την τ.μ. που εκφράζει την κατάσταση του υπάλληλου με

$$\xi = \begin{cases} 0 & \text{υπάλληλος σε διακοπές,} \\ (i, j) & \text{υπάλληλος απασχολημένος στη } j \text{ φάση} \\ & \text{με } P_i \text{ πελάτη,} \\ id & \text{υπάλληλος άεργος,} \end{cases}$$

και τις ακόλουθες πιθανότητες

$$\begin{aligned} q(k) &= P(\xi = id, N_1 = 0, N_m = k_m, m = 2, 3, \dots, n), \\ p_0(\bar{k}, x) dx &= P(\xi = 0, N_m = k_m, m = 1, 2, \dots, n, x < \bar{U}_0 \leq x + dx), \\ p_{ij}(\bar{k}, x) dx &= P(\xi = (i, j), N_m = k_m, m = 1, 2, \dots, n, x < \bar{U}_{ij} \leq x + dx), \end{aligned} \quad (3.14)$$



όπου, $k = (k_2, \dots, k_n)$, $\bar{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n) \equiv (k_1, k)$, και $\bar{U}_{ij}$, $\bar{U}_0$ είναι ο χρόνος εξυπηρέτησης που έχει ήδη λάβει στη j -φάση ο P_i πελάτης και ο χρόνος διακοπών που έχει ήδη λάβει ο υπάλληλος αντιστοίχως. Τέλος, αν ορίσουμε τις αντίστοιχες γεννήτριες πιθανοτήτων,

$$Q(z) = \sum_{k \geq 0} q(k) z^k \equiv \sum_{k_2 \geq 0} \dots \sum_{k_n \geq 0} q(k_2, \dots, k_n) z_2^{k_2} z_3^{k_3} \dots z_n^{k_n},$$

$$P_0(\bar{z}, x) = \sum_{\bar{k} \geq 0} p_0(\bar{k}, x) \bar{z}^{\bar{k}},$$

$$P_{ij}(\bar{z}, x) = \sum_{\bar{k} \geq 0} p_{ij}(\bar{k}, x) \bar{z}^{\bar{k}}, \quad i, j = 1, 2,$$

τότε συνδέοντας, ως συνήθως, τις πιθανότητες (3.14) μεταξύ τους προκύπτουν στη περίπτωση για $x > 0$, οι ακόλουθες σχέσεις,

$$\frac{\partial}{\partial x} p_{ij}(\bar{k}, x) + (\lambda + \eta_{ij}(x)) p_{ij}(\bar{k}, x) = \lambda p_{ij}(\bar{k} - \bar{1}_1, x),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} p_0(\bar{k}, x) + (\lambda + \eta_0(x)) p_0(\bar{k}, x) = \lambda p_0(\bar{k} - \bar{1}_1, x),$$

και

$$\lambda q(k) + \sum_{r=2}^n \mu_r (k_r + 1) q(k + 1_r) = \int_0^\infty p_0(0, k, x) \eta_0(x) dx.$$

Τότε, σχηματίζοντας τους M.L. των γεννητριών πιθανοτήτων,

$$P_0(\bar{z}, x) = P_0(\bar{z}, 0)(1 - B_0(x)) \exp[-(\lambda - \lambda z_1)x],$$

$$P_{ij}(\bar{z}, x) = P_{ij}(\bar{z}, 0)(1 - B_{ij}(x)) \exp[-(\lambda - \lambda z_1)x], \quad (3.15)$$

και

$$\sum_{j=2}^n \mu_j z_j \frac{\partial}{\partial z_j} Q(z) + \lambda Q(z) = P_0((0, z), 0) \beta_0^*(\lambda), \quad (3.16)$$

όπου $\beta_0^*(\cdot)$ ο M.L. της $b_0(\cdot)$. Στη περίπτωση των οριακών συνθηκών ($x = 0$) προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις,

$$p_0(0, k, 0) = \sum_{i=1}^r \sum_{r=1}^{n-1} p_r \int_0^\infty p_{ir}(0, k - 1_{r+1}, x) \eta_{ir}(x) dx$$

$$+ \sum_{i=1}^n \int_0^\infty p_{in}(0, k, x) \eta_{in}(x) dx,$$

$$p_{11}(\bar{k}, 0) = \sum_{i=1}^r \sum_{r=1}^{n-1} p_r \int_0^\infty p_{ir}(\bar{k} + \bar{1}_1 - \bar{1}_{r+1}, x) \eta_{ir}(x) dx$$

$$+ \sum_{i=1}^n \int_0^\infty p_{in}(\bar{k} + \bar{1}_1, x) \eta_{in}(x) dx + \int_0^\infty p_0(\bar{k} + \bar{1}_1, x) \eta_0(x) dx$$

$$+ \delta_{\{k_1=0\}} \lambda q(k).$$



Για $i = 1, \dots, n, j = i + 1, \dots, n,$

$$\begin{aligned} p_{ij}(\bar{k}, 0) &= (1 - p_{j-1}) \int_0^\infty p_{ij-1}(\bar{k}, x) \eta_{ij-1}(x) dx, \\ p_{jj}(0, k, 0) &= \mu_j(k_j + 1) q(k + 1_j), j = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Με ανάλογο τρόπο,

$$\begin{aligned} P_0((0, z), 0) &= \sum_{m=1}^{n-1} p_m z_{m+1} \sum_{i=1}^m P_{im}((0, z), 0) \beta_{im}^*(\lambda) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n P_{in}((0, z), 0) \beta_{in}^*(\lambda), \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} P_{jj}((0, z), 0) &= \mu_j \frac{d}{dz_j} Q(z), \quad j = 2, \dots, n, \\ P_{1j}(\bar{z}, 0) &= P_{11}(\bar{z}, 0) \prod_{m=1}^{j-1} (1 - p_m) \beta_{1m}^*(\lambda - \lambda z_1), \quad j = 2, \dots, n, \\ P_{ij}(\bar{z}, 0) &= \mu_i \frac{d}{dz_i} Q(z) \prod_{m=i}^{j-1} (1 - p_m) \beta_{im}^*(\lambda - \lambda z_1), \quad \begin{array}{l} i = 2, \dots, n \\ j = i + 1, \dots, n, \end{array} \end{aligned} \quad (3.18)$$

ενώ για τον υπολογισμό της $P_{11}(\bar{z}, 0)$ χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.17) και (3.18) καταλήγουμε στη

$$\begin{aligned} P_{11}(\bar{z}, 0) &= \{ \lambda z_1 Q(z) + \sum_{j=2}^n a_j(z_1, z_{j+1}, \dots, z_n) P_{jj}((0, z), 0) \\ &\quad - P_0((0, z), 0) [1 + \beta_0^*(\lambda) - \beta_0^*(\lambda - \lambda z_1)] \} / [z_1 - a_1(\bar{z})]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Οπως έχουμε αναφέρει παραπάνω, επειδή η $P_{11}(\bar{z}, 0)$ είναι αναλυτική συνάρτηση για $|z_i| \leq 1, i = 1, 2, \dots, n$, θα πρέπει η ρίζα $x(z)$ του παρονομαστή να μηδενίζει τον αριθμητή. Επομένως αντικαθιστώντας στον αριθμητή της (3.19) την ρίζα $x(z)$ του παρονομαστή προκύπτει

$$P_0((0, z), 0) = \frac{\lambda x(z) Q(z) + \sum_{j=2}^n a_j(x(z), z_{j+1}, \dots, z_n) P_{jj}((0, z), 0)}{1 + \beta_0^*(\lambda) - \beta_0^*(\lambda - \lambda x(z))}. \quad (3.20)$$

Αντικαθιστώντας τις (3.17)-(3.20) στις σχέσεις (3.15), (3.16) και ολοκληρώνοντας ως προς x προκύπτουν τα ακόλουθα για $j = 2, \dots, n$

$$e_{1j}(z_1) P_{1j}(\bar{z}) = e_{11}(z_1) P_{11}(\bar{z}) \prod_{m=1}^{j-1} (1 - p_m) \beta_{1m}^*(\lambda - \lambda z_1), \quad (3.21)$$

$$e_{jj}(z_1) P_{jj}(\bar{z}) = \mu_j \frac{d}{dz_j} Q(z), \quad (3.22)$$

$$e_{ij}(z_1) P_{ij}(\bar{z}) = \mu_i \frac{d}{dz_i} Q(z) \prod_{m=i}^{j-1} (1 - p_m) \beta_{im}^*(\lambda - \lambda z_1), \quad \begin{array}{l} i = 2, \dots, n \\ j = i + 1, \dots, n, \end{array} \quad (3.23)$$



$$e_0(z_1)P_0(\bar{z}) = \frac{\lambda x(z_2, \dots, z_n)Q(z) + \sum_{j=2}^n e_{jj}(z_1)a_j(x(z_2, \dots, z_n), z_{j+1}, \dots, z_n)P_{jj}(\bar{z})}{1 + \beta_0^*(\lambda) - \beta_0^*(\lambda - \lambda x(z))}, \quad (3.24)$$

$$e_{11}(z_1)P_{11}(\bar{z}) = \{\lambda[z_1 - x(z)]Q(z) + \sum_{j=2}^n e_{jj}(z_1)[a_j(z_1, z_{j+1}, \dots, z_n) - a_j(x(z), z_{j+1}, \dots, z_n)]P_{jj}(\bar{z}) + e_0(z_1)[\beta_0^*(\lambda - \lambda z_1) - \beta_0^*(\lambda - \lambda x(z))]P_0(\bar{z})\} / [z_1 - a_1(\bar{z})], \quad (3.25)$$

$$\sum_{j=2}^n \mu_j z_j \frac{\partial}{\partial z_j} Q(z) + \lambda Q(z) = e_0(z_1)P_0(\bar{z})\beta_0^*(\lambda), \quad (3.26)$$

όπου $P(\bar{z}) = \int P(\bar{z}, x)dx$ και

$$e_{ij}(z_1) = \frac{\lambda - \lambda z_1}{1 - \beta_{ij}^*(\lambda - \lambda z_1)}, \quad e_{ij}(1) = \frac{1}{b_{ij}}.$$

Στη συνέχεια, θα χρησιμοποιήσουμε τις εκφράσεις των πιθανογεννητριών που ορίστηκαν παραπάνω ώστε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες των καταστάσεων του υπαλλήλου σε στατιστική ισορροπία. Έτσι, θέτοντας $\bar{z} = \bar{1}$, στις παραπάνω γεννήτριες προκύπτει το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.3 Για $\rho^* < 1$ οι τιμές των γεννητριών $P_{ij}(\cdot)$, $P_0(\cdot)$, $Q(\cdot)$ στο σημείο $\bar{z} = \bar{1}$ δίνονται από

$$\begin{aligned} P_{11}(\bar{1}) &= \lambda \bar{b}_{11}, \\ P_{jj}(\bar{1}) &= \lambda p_{j-1} \bar{b}_{jj}, \quad j = 2, \dots, n \\ P_{ij}(\bar{1}) &= \lambda p_{i-1} \bar{b}_{ij} \prod_{m=i}^{j-1} (1 - p_m), \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, n \\ j = i + 1, \dots, n \end{matrix} \\ Q(1) &= \frac{1 - \rho^*}{1 + \lambda \bar{b}_0 / \beta_0^*(\lambda)}, \\ P_0(\bar{1}) &= \frac{\lambda \bar{b}_0}{\beta_0^*(\lambda)} [\sum_{j=2}^n p_{j-1} + Q(1)]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Απόδειξη: Ας ορίσουμε την έκφραση

$$\mathcal{N}(\bar{z}) = Q(z) + P_0(\bar{z}) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n P_{ij}(\bar{z}). \quad (3.28)$$

Τότε από τις σχέσεις (3.21), (3.22) και (3.23)

$$P_{ij}(\bar{z}) = \frac{e_{ii}(z_1)}{e_{ij}(z_1)} P_{ii}(\bar{z}) \prod_{m=i}^{j-1} (1 - p_m) \beta_{im}^*(\lambda - \lambda z_1), \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ j = i + 1, \dots, n \end{matrix}$$



και θέτουμε $\bar{z} = \bar{1}$.

$$P_{ij}(\bar{1}) = P_{ii}(\bar{1}) \frac{\bar{b}_{ij}}{\bar{b}_{ii}} \prod_{m=i}^{j-1} (1 - p_m), \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ j = i + 1, \dots, n \end{matrix} \quad (3.29)$$

Αντικαθιστώντας την (3.29) στην (3.28), χρησιμοποιώντας την (3.24) και παρατηρώντας ότι $N(\bar{1}) = 1$, προκύπτει μετά από πράξεις ότι

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_1}{\lambda b_{11}} P_{11}(\bar{1}) + (1 + \frac{\lambda \bar{b}_0}{\beta_0^*(\lambda)}) Q(1) \\ & + \sum_{j=2}^n \frac{P_{1j}(\bar{1})}{\bar{b}_{1j}} [\bar{b}_{jj} + \sum_{k=j+1}^n \bar{b}_{jk} \prod_{m=j}^{k-1} (1 - p_m) + \frac{\bar{b}_0}{\beta_0^*(\lambda)}] = 1. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Χρησιμοποιώντας την (3.24) στη (3.25) και θέτουμε $\bar{z} = \bar{1}$ καταλήγουμε στη

$$\begin{aligned} \frac{P_{11}(\bar{1})}{b_{11}} = & \frac{\lambda}{1 - \rho_1} \{ (1 + \frac{\lambda \bar{b}_0}{\beta_0^*(\lambda)}) Q(1) \\ & + \sum_{j=2}^n \frac{P_{1j}(\bar{1})}{\bar{b}_{1j}} [\bar{b}_{jj} + \sum_{k=j+1}^n \bar{b}_{jk} \prod_{m=j}^{k-1} (1 - p_m) + \frac{\bar{b}_0}{\beta_0^*(\lambda)}] \}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

όπου το ρ_1 έχει οριστεί στο Λήμμα 3.1 και επομένως από τις (3.29)-(3.31) καταλήγουμε στις

$$P_{11}(\bar{1}) = \lambda \bar{b}_{11}, \quad P_{1j}(\bar{1}) = \lambda \bar{b}_{1j} \prod_{m=1}^{j-1} (1 - p_m), \quad j = 2, 3, \dots, n. \quad (3.32)$$

Πολλαπλασιάζοντας την σχέση (3.22) με z_j , προσθέτοντας για όλα τα $j = 2, \dots, n$ και αφαιρώντας την προκύπτουσα σχέση από την (3.26) χρησιμοποιώντας την (3.24) καταλήγουμε στη

$$\frac{\sum_{j=2}^n e_{jj}(z_1) P_{jj}(\bar{z})}{Q(z)} [D_j(z) - z_j] = \lambda [1 - x(z) f(x(z))], \quad (3.33)$$

όπου

$$f(x(z)) = \frac{\beta_0^*(\lambda)}{1 + \beta_0^*(\lambda) - \beta_0^*(\lambda - \lambda x(z))}, \quad (3.34)$$

$$D_j(z) = f(x(z)) a_j(x(z), z_{j+1}, \dots, z_n). \quad (3.35)$$

Είναι προφανές ότι από τις σχέσεις (3.6), (3.8) και (3.34), (3.35) ότι

$$D_i(z) \equiv C^{(i)}(0, z).$$

Επομένως για $\rho^* < 1$ το Θεώρημα 3.2 ισχύει για τα $D_i(z)$.



Έτσι θέτοντας $z_1 = 1$ και για οποιαδήποτε μετάθεση $(i_2, i_3, \dots, i_n)$ του $(2, 3, \dots, n)$, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.2 και αντικαθιστώντας διαδοχικά στην (3.33) κάθε z_{i_k} με την αντίστοιχη ρίζα $x_{i_k}(z_{i_{k+1}}, \dots, z_{i_n})$ της (3.33), μπορούμε να απαλλαγούμε από όλους εκτός από έναν όρους του αριστερού μέλους (3.33). Ο τελευταίος όρος είναι αυτός που αντιστοιχεί στη γεννήτρια $P_{i_n i_n}(\cdot)$. Στο σημείο αυτό καταδεικνύεται και η σπουδαιότητα του θεωρήματος 3.2. Σε κάθε αντικατάσταση της μοναδικής ρίζας εντός του μοναδιαίου κύκλου (πρέπει $\bar{\rho}_{i_k} < 1$), $x_{i_k}(z_{i_{k+1}}, \dots, z_{i_n})$, εφαρμόζουμε το κριτήριο του Takacs [164], αφού για $\rho^* < 1$, όλα τα $\bar{\rho}_{i_k} < 1$. Παρατηρώντας τέλος ότι από το Θεώρημα 3.2 για $\rho^* < 1$, $w_{i_n-1}(z_{i_n})|_{z_{i_n}=1} = 1$ προκύπτει από την (3.33) ότι

$$P_{jj}(\bar{1}) = \frac{\lambda p_{j-1} \bar{b}_{jj}}{1 - \rho^*} (1 + \frac{\lambda \bar{b}_0}{\beta_0^*(\lambda)}) Q(1), \quad j = 2, 3, \dots, n, \quad (3.36)$$

και έτσι αντικαθιστώντας στην (3.30) καταλήγουμε μετά από πράξεις ότι

$$Q(1) = \frac{1 - \rho^*}{1 + \frac{\lambda \bar{b}_0}{\beta_0^*(\lambda)}}, \quad (3.37)$$

που είναι η τρίτη της σχέσης (3.27).

Από τις (3.37) και (3.36) προκύπτει η πρώτη από την σχέση (3.27) και αντικαθιστώντας την έκφραση της $P_{jj}(\bar{1})$ στην (3.29) και (3.24) προκύπτει η δεύτερη και η τέταρτη σχέση της (3.27) αντιστοίχως και επομένως το θεώρημα έχει αποδειχθεί. $\square$

3.5 Αναμενόμενοι αριθμοί πελατών στο σύστημα

Ας υποθέσουμε ότι το σύστημα μας βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας και επομένως $\rho^* < 1$. Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τους αναμενόμενους αριθμούς πελατών τόσο στην κανονική ουρά, όσο και σε κάθε retrieval box ξεχωριστά.

Εστω επιπλέον για $p_0 \equiv 1$ και $j = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} \pi_j = & p_{j-1} \{ \bar{b}_{jj}^{(2)} + \sum_{k=j+1}^n \bar{b}_{jk}^{(2)} \prod_{m=j}^{k-1} (1 - p_m) \\ & + 2 \sum_{r=j}^{n-1} \prod_{m=j}^r (1 - p_m) \bar{b}_{jr} [\bar{b}_{jr+1} + \sum_{k=r+2}^n \bar{b}_{jk} \prod_{m=r+1}^{k-1} (1 - p_m)] \}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Τότε το επόμενο θεώρημα αναφέρεται στον υπολογισμό του αναμενόμενου αριθμού πελατών στην κανονική ουρά.



Θεώρημα 3.4 Ο αναμενόμενος αριθμός των P_1 πελατών της κανονικής ουράς δίνεται από,

$$E(N_1) = \frac{\lambda^2}{2(1-\rho_1)} \left\{ \frac{\bar{b}_0}{\beta_0^*(\lambda)} \left[\sum_{k=2}^n p_{k-1} + Q(1) \right] + \sum_{k=1}^n \pi_k \right\}, \quad (3.39)$$

όπου οι όροι $Q(1)$ και π_k δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις (3.37), (3.38).

Απόδειξη: Παραγωγίζοντας ως προς z_1 , τις σχέσεις (3.22), (3.23), (3.24) και θέτοντας $z_l = 1$, $l = 1, 2, \dots, n$, προκύπτει μετά από πράξεις,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{11}(z)}{\partial z_1} \Big|_{\bar{z}=1} &= \frac{\lambda^2 p_{1-1} \bar{b}_{11}^{(2)}}{2}, \\ \frac{\partial P_{ij}(z)}{\partial z_1} \Big|_{\bar{z}=1} &= \frac{\lambda^2 p_{i-1} \bar{b}_{ij}^{(2)}}{2} \prod_{m=i}^{j-1} (1-p_m) + \lambda^2 p_{i-1} \bar{b}_{ij} \prod_{m=i}^{j-1} (1-p_m) \sum_{m=i}^{j-1} \bar{b}_{im}, \\ &\quad i = 2, 3, \dots, n, \quad j = i+1, \dots, n, \\ \frac{\partial P_0(z)}{\partial z_1} \Big|_{\bar{z}=1} &= \frac{\lambda^2 \bar{b}_0^{(2)}}{2\beta_0^*(\lambda)} \left[\sum_{k=2}^n p_{k-1} + Q(1) \right]. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Με παρόμοιο τρόπο από τις (3.25), (3.21),

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{11}(z)}{\partial z_1} \Big|_{\bar{z}=1} &= \frac{\lambda^3 \bar{b}_{11}}{2(1-\rho_1)} \left[\frac{\bar{b}_0^{(2)}}{\beta_0^*(\lambda)} \left[\sum_{k=2}^n p_{k-1} + Q(1) \right] + \sum_{k=1}^n \pi_k \right] + \frac{\lambda^2 \bar{b}_{11}^{(2)}}{2}, \\ \frac{\partial P_{1j}(z)}{\partial z_1} \Big|_{\bar{z}=1} &= \frac{\lambda^3 \bar{b}_{1j}}{2(1-\rho_1)} \prod_{m=1}^{j-1} (1-p_m) \left[\frac{\bar{b}_0^{(2)}}{\beta_0^*(\lambda)} \left[\sum_{k=2}^n p_{k-1} + Q(1) \right] + \sum_{k=1}^n \pi_k \right] \\ &\quad + \lambda^2 \prod_{m=1}^{j-1} (1-p_m) \left[\bar{b}_{1j} \sum_{m=1}^{j-1} \bar{b}_{1m} + \frac{\bar{b}_{1j}^{(2)}}{2} \right], \quad j = 2, 3, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Παρατηρώντας τέλος ότι

$$E(N_1) = \frac{\partial \mathcal{N}(\bar{z})}{\partial z_1} \Big|_{\bar{z}=1} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{\partial P_{ij}(\bar{z})}{\partial z_1} \Big|_{\bar{z}=1} + \frac{\partial P_0(\bar{z})}{\partial z_1} \Big|_{\bar{z}=1},$$

και χρησιμοποιώντας τις (3.40) και (3.41) προκύπτει (3.39) και το Θεώρημα έχει αποδειχθεί. $\square$

Πριν προχωρήσουμε στο επόμενο θεώρημα, που αναφέρεται στους πελάτες επαναλαμβανόμενων αφίξεων, θα παραθέσουμε ορισμένα βοηθητικά αποτελέσματα. Έστω για $k, j = 2, \dots, n$, $m = 1, 2$,

$$h_k^{(m)} = \frac{d^m x(z)}{dz_k^m} \Big|_{z=1}, \quad \hat{\rho}_{jk}^{(m)} = \frac{d^m \alpha_j(x(z), \dots, z_k, \dots, 1)}{dz_k^m} \Big|_{z=1},$$



όπου ο όρος $x(z)$ ορίζεται στο Λήμμα 3.1 (παρατήρησε ότι $\hat{\rho}_{jk}^{(u)} \neq \hat{\rho}_{kj}^{(u)}$, $k \neq j$).
Τότε μετά από αρκετές προϋποθέσεις προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις

$$\begin{aligned} h_k^{(1)} &= \frac{p_{k-1}}{(1-\rho_1)} \prod_{m=1}^{k-2} (1-p_m), \\ h_k^{(2)} &= \frac{\lambda^2 (h_k^{(1)})^2}{(1-\rho_1)} \pi_1 + 2\lambda (h_k^{(1)})^2 \sum_{m=1}^{k-1} \bar{b}_{1m}, \\ \hat{\rho}_{jk}^{(1)} &= \lambda h_k^{(1)} (\bar{b}_{jj} + \sum_{r=j+1}^n \bar{b}_{jr} \prod_{m=j}^{r-1} (1-p_m)) + \delta_{\{k>j\}} [p_{k-1} \prod_{m=j}^{k-2} (1-p_m)], \\ \hat{\rho}_{jk}^{(2)} &= \lambda h_k^{(2)} (\bar{b}_{jj} + \sum_{r=j+1}^n \bar{b}_{jr} \prod_{m=j}^{r-1} (1-p_m)) + \frac{(\lambda h_k^{(1)})^2}{p_{j-1}} \pi_j \\ &\quad + \delta_{\{k>j\}} 2\lambda h_k^{(1)} p_{k-1} \prod_{m=j}^{k-2} (1-p_m) \sum_{r=j}^{k-1} \bar{b}_{jr}, \quad k, j = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

όπου $\prod_{m=j}^i (1-p_m) = 1$ για $j > i$. Επαυλέον ορίζουμε με

$$\begin{aligned} s_k &= \frac{\lambda Q(1, \dots, 1) h_k^{(2)}}{2p_{k-1} \prod_{m=1}^{k-2} (1-p_m)} + \frac{\lambda^2 p_{k-1}}{\mu_k (1-\rho_1)} + \frac{\lambda}{(1-\rho_1)} \sum_{j=2}^n \rho_{0j} (\hat{\rho}_{jk}^{(1)} + \frac{\lambda h_k^{(1)} \bar{b}_0}{\beta_0^*(\lambda)}) \\ &\quad + \frac{\lambda}{2p_{k-1} \prod_{m=1}^{k-2} (1-p_m)} \sum_{j=2}^n p_{j-1} \hat{\rho}_{jk}^{(2)} + \frac{\lambda^2 \bar{b}_0}{(1-\rho_1) \beta_0^*(\lambda)} [(1-\rho^*) h_k^{(1)} + \frac{\lambda p_{k-1}}{\mu_k}] \\ &\quad + \frac{P_0(1, \dots, 1)}{2p_{k-1} \bar{b}_0 \prod_{m=1}^{k-2} (1-p_m)} [\lambda \bar{b}_0 h_k^{(2)} + (\lambda h_k^{(1)})^2 \bar{b}_0^{(2)}] \quad k = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

και συμβολίζουμε με

$$D_{kl} = \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial z_l} Q(z)|_{z=1}, \quad k, l = 2, 3, \dots, n.$$

Θα πρέπει να παρατηρήσουμε εδώ ότι $D_{kl} = D_{lk} \forall k, l$.

Οπως έχουμε ήδη αναφέρει, σκοπός του παρόντος εδαφίου είναι η εύρεση των αναμενόμενων αριθμών των πελατών στο σύστημα. Η μέθοδος που θα χρησιμοποιηθεί συνίσταται στην κατάλληλη χρησιμοποίηση των σχέσεων (3.22)-(3.26). Τονίζουμε ότι από αυτές δεν μπορούν να προκύψουν αναλυτικές σχέσεις για τις γεννήτριες $Q(\cdot)$, $P_{ij}(\cdot)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ (βλέπε Falin [76], Moutzoukis and Langaris [148]). Η μέθοδος που θα χρησιμοποιήσουμε είναι ανάλογη με αυτή Falin [76], Moutzoukis and Langaris [148] με την διαφορά ότι ενώ στις εν λόγω εργασίες οι αναμενόμενοι αριθμοί πελατών προέκυπταν ως λύσεις ενός συστήματος εξισώσεων, στη περίπτωση μας ως λύσεις ενός συστήματος εξισώσεων



προκύπτουν οι όροι D_{kl} . Το επόμενο θεώρημα αναφέρεται στον υπολογισμό αυτών των ποσοτήτων.

Θεώρημα 3.5 Οι όροι D_{kl} , $k, l = 2, \dots, n$ προκύπτουν ως λύση του παρακάτω συστήματος γραμμικών εξισώσεων,

$$\begin{aligned} (\mu_k + \mu_l)D_{kl} = & \sum_{j=2}^{n-1} \mu_j D_{kj} (p_{l-1} \prod_{m=j}^{l-2} (1-p_m)) \delta_{\{l>j\}} + \sum_{j=2}^{n-1} \mu_j D_{lj} \delta_{\{k>j\}} \\ & \times (p_{k-1} \prod_{m=j}^{k-2} (1-p_m)) + p_{l-1} \prod_{m=1}^{l-2} (1-p_m) [\sum_{j=2}^n \frac{\mu_j(\rho_j + \rho_{0j})}{p_{j-1}(1-\rho_1)} D_{kj} \\ & + s_k] + p_{k-1} \prod_{m=1}^{k-2} (1-p_m) [\sum_{j=2}^n \frac{\mu_j(\rho_j + \rho_{0j})}{p_{j-1}(1-\rho_1)} D_{lj} + s_l]. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Απόδειξη: Αντικαθιστώντας την (3.24) στη (3.25) προκύπτει η

$$e_0(z_1)P_0(\bar{z}) = \frac{\lambda z_1 Q(z) + \sum_{j=2}^n e_{jj}(z_1) a_j(z_1, z_{j+1}, \dots, z_n) P_{jj}(\bar{z}) + e_{11}(z_1) P_{11}(\bar{z}) (a_1(\bar{z}) - z_1)}{1 + \beta_0^*(\lambda) - \beta_0^*(\lambda - \lambda z_1)},$$

και αντικαθιστώντας την στη (3.26) θέτοντας $z_1 = 1$ καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση

$$\sum_{j=2}^n \mu_j z_j \frac{\partial}{\partial z_j} Q(z) = \sum_{j=2}^n \frac{P_{jj}(1, z)}{\bar{b}_{jj}} a_j(1, z_{j+1}, \dots, z_n) + \frac{P_{11}(1, z)}{\bar{b}_{11}} (a_1(1, z) - 1). \quad (3.43)$$

Ακολούθως, προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (3.22) για όλα τα $j = 2, \dots, n$, θέτοντας $z_1 = 1$ και αφαιρώντας από την (3.43) προκύπτει η εξής βασική εξίσωση,

$$\sum_{j=2}^n \mu_j (z_j - 1) \frac{\partial}{\partial z_j} Q(z) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{P_{jj}(1, z)}{\bar{b}_{jj}} [a_j(1, z_{j+1}, \dots, z_n) - 1]. \quad (3.44)$$

Παραγωγίζοντας τέλος, την παραπάνω σχέση, ως προς z_k, z_l , χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι από τη σχέση (3.22) $\frac{\partial P_{jj}(z)}{\partial z_k} \big|_{\bar{z}=1} = \mu_j D_{jk} \bar{b}_{jj}$, $\forall k, j = 2, 3, \dots, n$, προκύπτει μετά από πολλές πράξεις η σχέση (3.42). $\square$

Αξίζει να σημειωθεί ότι το παραπάνω σύστημα εξισώσεων έχει σίγουρα λύση, όταν το σύστημα μας είναι σε κατάσταση στατιστικής ισορροπίας. Το επόμενο Λήμμα αναφέρεται στους αναμενόμενους αριθμούς των πελατών σε κάθε retrieval box ξεχωριστά.



Λήμμα 3.6 Ο αναμενόμενος αριθμός των P_k , $k = 2, 3, \dots, n$ πελατών του K_{k-1}^{th} retrieval box δίνονται από,

$$E(N_k) = \sum_{m=2}^n \frac{\mu_m(\rho_m + \rho_{0m})}{\lambda \rho_{m-1}(1-\rho_1)} D_{mk} + \frac{s_k \rho_1}{\lambda} + \sum_{m=2}^n \rho_{0m} (\hat{\rho}_{mk}^{(1)} + \frac{\lambda h_k^{(1)} \bar{b}_0}{\beta_0^*(\lambda)}) + \frac{\lambda \bar{b}_0}{\beta_0^*(\lambda)} [(1-\rho^*) h_k^{(1)} + \frac{\lambda p_{k-1}}{\mu_k}] + \frac{\lambda p_{k-1}}{\mu_k}. \quad (3.45)$$

Απόδειξη: Παραγωγίζοντας ως προς z_k , τις (3.25), (3.21) και θέτοντας $z_l = 1$, $l = 1, 2, \dots, n$ προκύπτουν μετά από πράξεις τα ακόλουθα,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{11}(z)}{\partial z_k} \Big|_{z=1} &= \bar{b}_{11} \left[\sum_{m=2}^n \frac{\mu_m(\rho_m + \rho_{0m})}{\rho_{m-1}(1-\rho_1)} D_{mk} + s_k \right], \\ \frac{\partial P_{1j}(z)}{\partial z_k} \Big|_{z=1} &= \frac{\bar{b}_{1j} \prod_{r=1}^{j-1} (1-\rho_r)}{\bar{b}_{11}} \frac{\partial P_{11}(z)}{\partial z_k} \Big|_{z=1}, \quad j = 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Με παρόμοιο τρόπο από τις (3.22), (3.23), (3.24) έχουμε,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{ii}(z)}{\partial z_k} \Big|_{z=1} &= \mu_i D_{ik} \bar{b}_{ii}, \\ \frac{\partial P_{ij}(z)}{\partial z_k} \Big|_{z=1} &= \frac{\bar{b}_{ij} \prod_{r=i}^{j-1} (1-\rho_r)}{\bar{b}_{ii}} \frac{\partial P_{ii}(z)}{\partial z_k} \Big|_{z=1}, \quad i = 2, \dots, n, \\ &\quad j = i+1, \dots, n, \\ \frac{\partial P_0(z)}{\partial z_k} \Big|_{z=1} &= \sum_{m=2}^n \frac{\mu_m \rho_{0m}}{\lambda \rho_{m-1}} D_{mk} + \frac{\lambda \bar{b}_0}{\beta_0^*(\lambda)} [(1-\rho^*) h_k^{(1)} + \frac{\lambda p_{k-1}}{\mu_k}] \\ &\quad + \sum_{m=2}^n \rho_{0m} (\hat{\rho}_{mk}^{(1)} + \frac{\lambda h_k^{(1)} \bar{b}_0}{\beta_0^*(\lambda)}). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Παρατηρώντας πόρα ότι για κάθε $k = 2, 3, \dots, n$, ισχύει

$$E(N_k) = \frac{\partial N(z)}{\partial z_k} \Big|_{z=1} = \frac{\partial Q(z)}{\partial z_k} \Big|_{z=1} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{\partial P_{ij}(z)}{\partial z_k} \Big|_{z=1} + \frac{\partial P_0(z)}{\partial z_k} \Big|_{z=1}, \quad (3.48)$$

και αντικαθιστώντας τις (3.46), (3.47) στην (3.48) καταλήγουμε μετά από πράξεις στην (3.45) και το θεώρημα έχει αποδειχθεί. Λύνοντας το σύστημα (3.42) βρίσκουμε τα D_{ki} και αντικαθιστώντας στην (3.45) υπολογίζονται οι αναμενόμενοι αριθμοί πελατών σε κάθε retrieval box ξεχωριστά. $\square$

3.6 Αριθμητικά αποτελέσματα

Στο εδάφιο αυτό χρησιμοποιούνται τα συμπεράσματα του προηγούμενου εδαφίου, για την εξαγωγή αριθμητικών αποτελεσμάτων. Για να παρατηρήσουμε το πώς μεταβάλλεται ο αναμενόμενος αριθμός πελατών σε κάθε retrieval box ξεχωριστά, καθώς αλλάζουν οι τιμές των παραμέτρων του συστήματος, δίνονται οι



Πίνακες 3.1-3.3. Οι πίνακες αφορούν το μοντέλο με $n = 4$ φάσεις εξυπηρέτησης και 3 retrial box. Θα χρησιμοποιήσουμε τους τύπους που προέκυψαν παραπάνω με σκοπό να μελετήσουμε το πως επηρεάζονται τα $E(N_i)$ $i = 2, 3, 4$ όταν μεταβάλλεται η μέση διάρκεια των διακοπών $\bar{b}_0$, ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης στην πρώτη φάση $\bar{b}_{11}$ και ο μέσος χρόνος μεταξύ διαδοχικών επαναλήψεων της άφιξης ενός πελάτη από το πρώτο retrial box $E(\text{retrial } K_1) = 1/\mu_2$, πάντα για αυξανόμενες τιμές του λ .

Για την κατασκευή των πινάκων, θεωρήσαμε ότι ο χρόνος διακοπών και όλοι οι χρόνοι εξυπηρέτησης προέρχονται από την εκθετική κατανομή με σ.π.π. αντιστοίχως, ως

$$b_0(x) = \frac{1}{\bar{b}_0} e^{-(1/\bar{b}_0)x}, \quad b_{ij}(x) = \frac{1}{\bar{b}_{ij}} e^{-(1/\bar{b}_{ij})x}, \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, 4 \\ j = i, \dots, 4. \end{matrix}$$

Επιπλέον υποθέτουμε σε όλους τους πίνακες ότι $\bar{b}_{14} = 0.2$, $\bar{b}_{12} = \bar{b}_{22} = \bar{b}_{23} = \bar{b}_{33} = 0.33$, $\bar{b}_{13} = \bar{b}_{24} = \bar{b}_{34} = \bar{b}_{44} = 0.25$, $p_1 = 0.7$, $p_2 = 0.5$, $p_3 = 0.1$. Τέλος, $\mu_3 = 0.5$, $\mu_4 = 2$.

Ο Πίνακας 3.1 μας δείχνει τον τρόπο με τον οποίο τα $E(N_i)$, $i = 2, 3, 4$ μεταβάλλονται καθώς αλλάζουμε τις τιμές της μέσης διάρκειας των διακοπών του υπαλλήλου για αυξανόμενες τιμές του λ . Αξίζει να παρατηρήσουμε τον κρίσιμο ρόλο που έχουν οι διακοπές στον καθορισμό του αριθμού των πελατών σε κάθε retrial box. Παρατηρούμε ότι ακόμα και για μία μικρή τιμή του λ , για παράδειγμα $\lambda = 0.15$, το $E(N_2)$ αυξάνει από 0.1488 σε 46.026 καθώς μεταβαίνουμε από ένα σύστημα χωρίς διακοπές ($\bar{b}_0 = 0$) σε ένα σύστημα όπου $\bar{b}_0 = 2.7$, ενώ η τιμή για το $E(N_3)$ αυξάνει από 0.2029 σε 64.83. Επιπλέον όταν η τιμή του λ γίνεται $\lambda = 0.42$ τότε, ακόμα και μία μικρή αύξηση της μέσης διάρκειας διακοπών από $\bar{b}_0 = 0$ σε $\bar{b}_0 = 0.6$ αυξάνει δραματικά τον αναμενόμενο αριθμό των πελατών του retrial box K_1 σε 267.02, ενώ τον αντίστοιχο για το retrial box K_2 σε 380.45. Επομένως θα πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί, όσον αφορά την διάρκεια των διακοπών που θα επιτρέψουμε στον υπάλληλο ώστε να αποφύγουμε δυσάρεστες περιπτώσεις με υπερπληθή retrial box. Η συμπεριφορά του τρίτου retrial box K_3 είναι καλύτερη, μας και το $E(N_4)$ κυμαίνεται σε μικρές τιμές και μας υποδεικνύει τρόπους για την μείωση της δραματικής επίδρασης της περιόδου των διακοπών, επιτρέποντας οι χρόνοι διαδοχικών επαναλήψεων των πελατών των retrial box να είναι μικρότεροι ($E(\text{retrial } K_3) = 1/\mu_4 = 0.5$), είτε/και μειώνοντας την πιθανότητα επιλογής κάποιου retrial box ($p_3 = 0.1$).

Παρόμοιες παρατηρήσεις μπορούν να προκύψουν από τον Πίνακα 3.2, που περιέχει τιμές των $E(N_i)$ $i = 2, 3, 4$ όταν μεταβάλλουμε τα λ , $\bar{b}_{11}$. Παρατηρούμε



ότι ο αναμενόμενος αριθμός των κελιών των retrieval box αυξάνει καθώς το $\bar{b}_{11}$ αυξάνει. Επιπλέον αυτή η αύξηση εξαρτάται από το πόσο γρήγορη ή αργή είναι η επανάληψη της άφιξης ($E(\text{retrial } K_i)$) ενός πελάτη από το retrieval box K_i και/ή από την προσέλευση (p_i) που θα δείξει κάποιος πελάτης στο αντίστοιχο retrieval box.

$\lambda \backslash \bar{b}_0$		0	0.2	0.6	1.3	2.7
0.15	$E(N_2)$	0.1488	0.1926	0.3084	0.6816	46.026
	$E(N_3)$	0.2029	0.2451	0.3602	0.7605	64.83
	$E(N_4)$	0.0112	0.0161	0.0282	0.0623	3.316
0.27		0.3798	0.5273	1.1548	120.04	
		0.4958	0.6693	1.3906	170.57	
		0.0287	0.0435	0.0954	8.599	
0.42		1.045	1.8373	267.02		
		1.3022	2.2913	380.45		
		0.0768	0.1395	19.077		
0.59		4.1926	221.4			
		5.2556	314.4			
		0.2956	15.814			
0.71		126.8				
		179.3				
		9.0327				

Πίνακας 3.1: Τιμές των $E(N_i)$, $i = 2, 3, 4$, για $\mu_2 = 1$, $\bar{b}_{11} = 0.5$.

$\lambda \backslash \bar{b}_{11}$		0.2	0.8	1.3	2.1	2.8	5.5
0.15	$E(N_2)$	0.1711	0.2233	0.3014	0.5481	1.0297	18522.3
	$E(N_3)$	0.2257	0.271	0.3291	0.4882	0.7737	26410.6
	$E(N_4)$	0.0145	0.0181	0.0226	0.0346	0.0595	1321.15
0.25		0.3646	0.6088	1.1043	4.3585	193.69	
		0.4783	0.7108	1.1131	3.97	263.19	
		0.0306	0.047	0.0755	0.25	13.378	
0.3		0.5051	0.9877	2.267	64.9		
		0.662	1.1428	2.354	85.09		
		0.042	0.0742	0.1496	4.423		
0.4		0.9447	3.034	112.03			
		1.2382	3.6085	156.15			
		0.0765	0.2161	7.9094			
0.5		1.8448	108.39				
		2.4349	152.81				
		0.1444	7.717				
0.71		92.596					
		131.62					
		6.632					

Πίνακας 3.2: Τιμές των $E(N_i)$, $i = 2, 3, 4$, για $\bar{b}_0 = 0.2$, $\mu_2 = 1$.



Τέλος, ο Πίνακας 3.3 περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο τα $E(N_i)$ $i = 2, 3, 4$ επηρεάζονται καθώς μεταβάλλουμε τον μέσο χρόνο επανάλληψης των διαδοχικών προσπαθειών $E(\text{retrial}) = 1/\mu_2$ ενός πελάτη από το πρώτο retrial box. Θα πρέπει να παρατηρήσουμε την αύξηση του $E(N_2)$, αλλά κυρίως την μείωση που παρατηρείται στις τιμές των $E(N_3)$ και $E(N_4)$ όταν αυξάνεται η τιμή του $1/\mu_2$. Η μείωση αυτή γίνεται ακόμα πιο αισθητή για αυξανόμενες τιμές του λ .

$\lambda \backslash E(\text{retrial } K_1)$		0.02	0.2	1	2	10
0.15	$E(N_2)$	0.0452	0.0727	0.1926	0.3397	1.4994
	$E(N_3)$	0.2539	0.2515	0.2454	0.2409	0.2329
	$E(N_4)$	0.0177	0.0171	0.0161	0.0157	0.0151
0.27		0.1423	0.2185	0.5373	0.9183	3.862
		0.7229	0.7087	0.6693	0.6443	0.5987
		0.0521	0.0488	0.0435	0.413	0.0382
0.42		0.4837	0.761	1.8373	3.045	11.953
		2.7032	2.5895	2.2913	2.1153	1.8179
		0.1904	0.1699	0.1395	0.1271	0.1093
0.59		8.33	60.25	221.4	371.7	1347.5
		464.3	419.03	314.4	265.23	192.75
		23.5	21.12	15.814	13.31	9.6763

Πίνακας 3.3: Τιμές των $E(N_i)$, $i = 2, 3, 4$, για $\bar{b}_0 = 0.2$, $\bar{b}_{11} = 0.5$.

3.7 Ανακεφαλαίωση-Παρατηρήσεις

Το μοντέλο που μελετήθηκε στο παρόν κεφάλαιο, αποτελεί γενίκευση αυτού του προηγούμενου κεφαλαίου. Περιλαμβάνει αυθαίρετο αριθμό, φάσεων εξυπηρέτησης και retrial box σε κάθε ένα από τα οποία υπάρχουν συγκεκριμένου τύπου πελάτες. Επίσης περιλαμβάνει μή-διακόπτιστα προτεραιότητα και απλές διακοπές του υπαλλήλου.

Υπολογίστηκαν σε κλειστή μορφή οι αναμενόμενοι αριθμοί των πελατών τόσο της κανονικής ουράς, όσο και αυτοί κάθε retrial box ξεχωριστά, σε στατιστική ισορροπία. Αξίζει να σημειωθεί, ότι για τον υπολογισμό των αναμενόμενων αριθμών των πελατών των retrial box, χρειαστηκαν οι ροπές πρώτης και δεύτερης τάξης της πιθανογεννήτριας συνάρτησης $Q(\cdot)$, που αντιστοιχεί στην περίπτωση που ο υπάλληλος είναι άεργος. Αυτές οι ροπές υπολογίζονται ως λύση ενός γραμμικού συστήματος. Παρόμοια μοντέλα μελετήθηκαν και από τους Falin [76], Moutzoukis and Langaris [148], Dimitriou and Langaris [59], όμως στο παρόν μοντέλο, η δυνατότητα κάθε πελάτη ενός οποιουδήποτε retrial box να ει-



σέλθει σε άλλο retrieval box στη διάρκεια της διαδικασίας εξυπηρέτησης του (αλλάζοντας ταυτόχρονα και τύπο) μελετήθηκε για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Ένα σύστημα εξυπηρέτησης με χρόνους προετοιμασίας/αποφόρτισης, διακοπές και επαναλαμβανόμενες αφίξεις πελατών

4.1 Περίληψη

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάται ένα μοντέλο με έναν υπάλληλο, στο οποίο καταφθάνουν πελάτες δύο κατηγοριών. Οι πελάτες της μίας κατηγορίας έχουν προτεραιότητα έναντι αυτών της άλλης. Οι πελάτες μικρότερης προτεραιότητας συμπεριφέρονται ως πελάτες με επαναλαμβανόμενες αφίξεις. Για να ξεκινήσει ο υπάλληλος να εξυπηρετεί, είτε τους πελάτες υψηλής προτεραιότητας, είτε κάποιον χαμηλής προτεραιότητας που τον βρήκε διαθέσιμο, χρειάζεται ένα χρόνο προετοιμασίας. Κάθε φορά που ο υπάλληλος ελευθερώνεται, ενεργοποιεί μία περίοδο αποφόρτισης, στη διάρκεια της οποίας είναι διαθέσιμος μόνο για τους πελάτες υψηλής προτεραιότητας. Αφού ολοκληρωθεί η περίοδος αποφόρτισης ο υπάλληλος αναχωρεί για τυχαίο χρονικό διάστημα. Το μοντέλο περιγράφεται λεπτομερώς στο επόμενο εδάφιο, ενώ με την βοήθεια ορισμένων σημαντικών βοηθητικών αποτελεσμάτων (εδάφιο 4.3) αναλύονται οι πιθανότητες των καταστάσεων του σε συνεχή χρόνο, στο εδάφιο 4.4. Ακολουθώς (εδάφιο 4.5), διερευ-



νούνται οι συνθήκες κάτω από τις οποίες το σύστημα είναι σε στατιστική ισορροπία, ενώ οι πιθανότητες των καταστάσεων του κάτω από αυτές τις συνθήκες, μελετώνται στο εδάφιο 4.6. Στο εδάφιο 4.7, με την βοήθεια των αποτελεσμάτων του εδαφίου 4.6, υπολογίζονται βασικά χαρακτηριστικά του συστήματος με την βοήθεια των οποίων (εδάφιο 4.8) κατασκευάζουμε πίνακες με αριθμητικά δεδομένα που περιγράφουν την λειτουργία του κάτω από πιθανές αλλαγές των βασικών του παραμέτρων. Τα αποτελέσματα που παρόντος κεφαλαίου περιλαμβάνονται στην εργασία των Dimitriou and Langaris [60].

4.2 Περιγραφή του μοντέλου

Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης με έναν υπάλληλο, στον οποίο καταφθάνουν πελάτες δύο κατηγοριών (κλάσεων) P_i , $i = 1, 2$. Οι P_1 πελάτες φθάνουν στο σύστημα σύμφωνα με την κατανομή *Poisson* παραμέτρου λ_1 και αν βρουν μη-διαθέσιμο τον υπάλληλο τοποθετούνται σε μία ουρά απείρου χωρητικότητας περιμένοντας τη σειρά τους για να εξυπηρετηθούν. Σε αντίθετη περίπτωση εξυπηρετούνται άμεσα και αναχωρούν από το σύστημα. Οι P_1 πελάτες καλούνται και τυπικοί πελάτες (*ordinary customers*). Οι P_2 πελάτες φθάνουν στο σύστημα σύμφωνα με τη κατανομή *Poisson* παραμέτρου λ_2 και αν βρουν μη-διαθέσιμο τον υπάλληλο αναχωρούν προσωρινά από το σύστημα και εισέρχονται στο κοντί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων (*retry box* απείρου χωρητικότητας) απ' όπου επαναλαμβάνουν την προσπάθεια τους, ανεξάρτητα από τους άλλους πελάτες που υπάρχουν ήδη εκεί, να συνδεθούν με τον υπάλληλο, μετά από τυχαίο χρονικό διάστημα που προέρχεται από την εκθετική κατανομή με παράμετρο α . Επιπλέον υποθέτουμε ότι οι P_1 πελάτες (ή πελάτες προτεραιότητας) έχουν πάντα μη-διακόπτοσα προτεραιότητα εξυπηρέτησης έναντι των P_2 πελατών (*retry πελατών*).

Για να ξεκινήσει να εξυπηρετεί ο υπάλληλος έναν P_1 πελάτη, που περιμένει στην κανονική ουρά ή έναν P_2 , που έχει καταφέρει να συνδεθεί με αυτόν, πρέπει πρώτα να ενεργοποιήσει έναν start-up χρόνο (χρόνο προετοιμασίας) S_i , $i = 1, 2$, διαφορετικό για κάθε τύπο πελάτη και ο οποίος προέρχεται από μία αυθαίρετη κατανομή με α.σ.κ. $S_i(x)$, σ.π.κ. $s_i(x)$ και πεπερασμένη ροπή πρώτης τάξης περί το μηδέν $\bar{s}_i$, $i = 1, 2$ αντίστοιχα. Επιπλέον, μόλις ο υπάλληλος εξυπηρετήσει όλους τους πελάτες που περίμεναν στην ουρά και στον χώρο εξυπηρέτησης (το *retry box* δεν είναι κατ' ανάγκη άδειο), ενεργοποιεί μία close-down περίοδο C (χρόνος αποφόρτισης), η οποία προέρχεται από μία αυθαίρετη κατανομή με α.σ.κ. $C(x)$, σ.π.κ. $c(x)$ και πεπερασμένη ροπή πρώτης τάξης περί το μηδέν $\bar{c}$.



Κατά τη διάρκεια της περιόδου αποφόρτισης, κανένας από τους πελάτες της ουράς των επαναλαμβανόμενων αφίξεων δεν μπορεί να έχει πρόσβαση στον υπάλληλο. Αντιθέτως, αν ένας P_1 πελάτης φτάσει κατά την διάρκεια της παραπάνω περιόδου C , τότε ο υπάλληλος διακόπτει την εν λόγω περίοδο και επανέρχεται σε κατάσταση λειτουργίας για να εξυπηρετήσει P_1 πελάτες, αφού πρώτα ενεργοποιήσει έναν “νέο” start-up χρόνο S_3 (special start-up), ο οποίος προέρχεται από μία αυθαίρετη κατανομή με α.σ.κ. $S_3(x)$, σ.π.π. $s_3(x)$ και πεπερασμένη ροπή πρώτης τάξης περί το μηδέν δ_3 . Αξίζει να παρατηρηθεί ότι το χρονικό διάστημα προετοιμασίας του υπαλλήλου (S_3) για να αρχίσει να εξυπηρετεί P_1 πελάτες μετά από άφιξη ενός τέτοιου πελάτη στη διάρκεια του χρόνου αποφόρτισης, είναι διαφορετικό πιθανοθεωρητικά από το αντίστοιχο που θα απαιτούνταν (S_1) στη περίπτωση που ολοκληρωνόταν η C . Αυτό μπορεί να εξηγηθεί από το γεγονός ότι, αφού δεν ολοκληρώθηκε η περίοδος αποφόρτισης (λόγω της άφιξης του P_1 πελάτη), ο χρόνος που απαιτείται για να επανέλθει ο υπάλληλος σε κατάσταση λειτουργίας είναι σίγουρα διαφορετικός από αυτόν που χρειάζεται αν η C είχε ολοκληρωθεί.

Όταν η περίοδος αποφόρτισης C ολοκληρωθεί επιτυχώς (δεν αφιχθεί κάποιος P_1 πελάτης στη διάρκεια της C), ο υπάλληλος αναχωρεί για διακοπές (απλές) τυχαίου μήκους V , που προέρχονται από μία αυθαίρετη κατανομή με α.σ.κ. $V(x)$, σ.π.π. $v(x)$, και πεπερασμένη ροπή πρώτης τάξης περί το μηδέν $\bar{v}$. Επιστρέφοντας ο υπάλληλος από τις διακοπές, αν βρεί P_1 πελάτες να περιμένουν στην κανονική ουρά ενεργοποιεί έναν start-up χρόνο S_1 και μετά το πέρας αυτού αρχίζει να εξυπηρετεί όλους τους P_1 πελάτες που περιμένουν στην ουρά. Ακολούθως, ενεργοποιεί μία close-down κ.ο.κ.. Σε αντίθετη περίπτωση παραμένει άεργος αναμένοντας την πρώτη άφιξη που θα ζητήσει εξυπηρέτηση, είτε από το εξωτερικό περιβάλλον, είτε από το retrial box για να αρχίσει την διαδικασία εξυπηρέτησης.

Αν κατά τη διάρκεια της περιόδου προετοιμασίας (S_2), που απαιτείται για την εξυπηρέτηση ενός P_2 πελάτη που κατάφερε να συνδεθεί με τον υπάλληλο, αφιχθεί ένας P_1 πελάτης, τότε ο υπάλληλος διακόπτει την S_2 και ενεργοποιεί μία περίοδο προετοιμασίας S_1 , ώστε να αρχίσει να εξυπηρετεί P_1 πελάτες. Σε αυτή τη περίπτωση ο P_2 πελάτης, του οποίου η περίοδος προετοιμασίας διακόπτεται, δεν επιστρέφει στο retrial box, αλλά παραμένει στον χώρο εξυπηρέτησης, αναμένοντας τον υπάλληλο να επανεκινήσει την περίοδο προετοιμασίας του, μόλις ολοκληρωθεί επιτυχώς η περίοδος αποφόρτισης (C), που ακολουθεί μετά την εξυπηρέτηση όλων των P_1 πελατών. Αντιθέτως αν ένας P_1 πελάτης αφιχθεί στο σύστημα κατά τη διάρκεια της εξυπηρέτησης ενός P_2 πελάτη (η S_2 έχει ολοκλη-



ρωθεί επιτυχώς), θα τοποθετηθεί στην ουρά και δεν θα τον επηρεάσει καθόλου. Σε αυτή τη περίπτωση ο υπάλληλος θα ολοκληρώσει την εξυπηρέτηση του P_2 πελάτη και στη συνέχεια αφού ενεργοποιήσει μία περίοδο προετοιμασίας S_1 θα εξυπηρετήσει όλους τους P_1 πελάτες που περιμένουν στην ουρά. Επομένως οι P_1 πελάτες έχουν διακόπτουσα επαναληπτική προτεραιότητα έναντι των P_2 πελατών, αν η διαδικασία εξυπηρέτησης του τελευταίου βρίσκεται στη φάση της προετοιμασίας και μη διακόπτουσα αν βρίσκεται στη φάση του καθαρού χρόνου εξυπηρέτησης.

Τέλος υποθέτουμε ότι οι χρόνοι εξυπηρέτησης των P_i , $i = 1, 2$ πελατών προέρχονται από μία αυθαίρετη κατανομή με α.σ.κ. $B_i(x)$, σ.π.π. $b_i(x)$ και πεπερασμένη ροπή πρώτης τάξης περί το μηδέν $\bar{b}_i$ αντίστοιχα, ενώ όλες οι τ.μ. που ορίστηκαν παραπάνω θεωρούνται ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Στο παρόν μοντέλο το χαρακτηριστικό των επαναλαμβανόμενων αφίξεων με δύο κλάσεις πελατών και αυτό των διακοπών με χρόνους προετοιμασίας/χρόνους αποφόρτισης, εμφανίζεται για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία. Οι Sakai et al. [159] μελέτησαν μοντέλο πεπερασμένης χωρητικότητας, όπου πελάτες καταφθάνουν σύμφωνα με τη κατανομή *Poisson* και στο οποίο εμφανίζονται τα χαρακτηριστικά των απλών διακοπών με χρόνους προετοιμασίας/χρόνους αποφόρτισης. Οι Niu et al. [154], γενίκευσαν το παραπάνω μοντέλο υποθέτοντας ότι οι αφίξεις των πελατών γίνονται σύμφωνα με μία μη-ανανεωτική διαδικασία (Markov Arrival Process) και παραθέτουν τις περιπτώσεις με απλές και πολλαπλές διακοπές. Και στις δύο εργασίες όλοι οι πελάτες που καταφθάνουν στο σύστημα τοποθετούνται σε μία ουρά περιμένοντας να εξυπηρετηθούν και επομένως δεν υπάρχει το χαρακτηριστικό των επαναλαμβανόμενων αφίξεων, ενώ ταυτόχρονα υπάρχει μία κλάση πελατών. Η ύπαρξη των δύο κλάσεων πελατών στο μοντέλο μας εισάγει και την έννοια της προτεραιότητας, που επίσης εμφανίζεται για πρώτη φορά σε μοντέλα με start-up και close-down χρόνους. Εφαρμογές τέτοιων μοντέλων παρουσιάζονται στην μελέτη τοπικών δικτύων (LAN) και στη βιομηχανική παραγωγή.

Το υπό μελέτη μοντέλο είναι κατάλληλο για να περιγράψει ένα σύστημα με δύο τύπους εξυπηρετούμενων μονάδων (πελάτες εργασίες), μία από τις οποίες έχει προτεραιότητα στην εξυπηρέτηση έναντι της άλλης, στο οποίο ο “μηχανολογικός εξοπλισμός” χρειάζεται ένα χρόνο προετοιμασίας (start-up), διαφορετικό για κάθε τύπο, πριν από τη χρήση του και ένα χρόνο αποφόρτισης (close-down) μετά τη χρήση του. Ένα απλό παράδειγμα εφαρμογής του υπό μελέτη μοντέλου είναι η λειτουργία ενός ιατρικού διαγνωστικού κέντρου στο οποίο υπάρχει ένας μαγνητικός τομογράφος.



Σε αυτό καταφθάνουν πελάτες (ασθενείς) δύο τύπων, αυτών που ζητούν άμεσα να εξεταστούν από τον ιατρό μέσω του τομογράφου και θεωρούνται υψηλής προτεραιότητας και αυτών που ζητούν τον ιατρό για να συζητήσουν τα αποτελέσματα των εξετάσεων τους ή να ζητήσουν ιατρικές συμβουλές και θεωρούνται χαμηλής προτεραιότητας σε σχέση με αυτούς που ζητούν άμεσα να εξεταστούν. Οι ασθενείς υψηλής προτεραιότητας τοποθετούνται σε ένα χώρο αναμονής περιμένοντας να εξεταστούν, ενώ οι ασθενείς χαμηλής προτεραιότητας αν βρουν μή διαθέσιμο τον ιατρό αναχωρούν από το σύστημα και επαναλαμβάνουν την άφιξή τους τηλεφωνικά, με σκοπό να βρουν διαθέσιμο τον ιατρό. Για να αρχίσει ο ιατρός να εξετάζει τους ασθενείς υψηλής προτεραιότητας, απαιτείται ένας χρόνος προετοιμασίας για να ενεργοποιηθούν τα λειτουργικά συστήματα του τομογράφου. Για τους ασθενείς χαμηλής προτεραιότητας απαιτείται ένα χρονικό διάστημα ώστε ο ιατρός να βρεί τον ιατρικό τους φάκελο και να τον μελετήσει, για να είναι σε θέση να τους απαντήσει. Μόλις ο ιατρός εξετάσει όλους τους ασθενείς υψηλής προτεραιότητας ή ολοκληρώσει τη συζήτηση/συνδιάλεξη με τον ασθενή χαμηλής προτεραιότητας ενεργοποιεί μία περίοδο αποφόρτισης, που αντιστοιχεί στο χρονικό διάστημα που απαιτείται για να απενεργοποιηθούν τα λειτουργικά συστήματα, είτε του τομογράφου, είτε του Η/Υ, που είναι αποθηκευμένος ο φάκελος του ασθενούς χαμηλής προτεραιότητας. Σε αυτό το χρονικό διάστημα είναι διαθέσιμος μόνο για εκτακτα περιστατικά ασθενών. Επιπλέον ο ιατρός δύναται να διακόψει τον χρόνο μελέτης του φακέλου ενός ασθενούς, αφήνοντας τον σε κατάσταση αναμονής, αν έρθει κάποιο επείγον περιστατικό στη διάρκεια της εν λόγω περιόδου. Η διαδικασία εξυπηρέτησης του διακοπόμενου ασθενούς, θα αρχίσει αμέσως μετά την περίοδο αποφόρτισης που ενεργοποιείται όταν εξυπηρετηθούν όλοι οι ασθενείς υψηλής προτεραιότητας. Κάθε φορά που ο ιατρός ελευθερώνεται, προχωρά σε μία προληπτική συντήρηση των μηχανικών συστημάτων του διαγνωστικού κέντρου.

Το προτεινόμενο μοντέλο, περιγράφει με ακρίβεια την λειτουργία του διαγνωστικού κέντρου που παρουσιάστηκε παραπάνω.

4.3 Βοηθητικά αποτελέσματα

Στη συνέχεια δίνονται ορισμένα βασικά αποτελέσματα που χρησιμεύουν στην κατανόηση της λειτουργίας του μοντέλου και τα οποία είναι απαραίτητα για ανάλυση του. Για λόγους συμβολισμού θα θεωρούμε στο εξής με $a^*(s)$ τον L.T. οποιασδήποτε συνάρτησης $a(t)$.

Ας ορίσουμε με $B^{(i)}$, την τ.μ. που εκφράζει τη διάρκεια της περιόδου συνε-



χούς απασχόλησης (busy period) των P_1 πελατών, η οποία αρχίζει με $i = 1, 2, \dots$ P_1 πελάτες και έστω η τ.μ. $\mathcal{N}(\mathcal{B}^{(i)})$ που εκφράζει τον αριθμό των νέων P_2 πελατών που φτάνουν στο σύστημα στη διάρκεια του $\mathcal{B}^{(i)}$. Έστω επιπλέον η από κοινού κατανομή τους

$$g_m^{(i)}(t)dt = \Pr[t < \mathcal{B}^{(i)} \leq t + dt, \mathcal{N}(\mathcal{B}^{(i)}) = m].$$

Τότε είναι γνωστό από τους Langaris and Katsaros [133] ότι

$$g^{*(i)}(s, z_2) = \int_0^\infty e^{-st} \sum_{m=0}^\infty g_m^{(i)}(t) z_2^m dt = x^i(s, z_2),$$

όπου $z_1 = x(s, z_2)$ είναι η μοναδική ρίζα εντός του μοναδιαίου κύκλου $|z_1| < 1$ της εξίσωσης

$$z_1 - b_1^*(s + \lambda_1(1 - z_1) + \lambda_2(1 - z_2)) = 0.$$

Ας ορίσουμε με R , την τ.μ. που εκφράζει τη διάρκεια του χρόνου από την στιγμή που αρχίζει μία περίοδος αποφόρτισης μέχρι τη χρονική στιγμή που θα ολοκληρωθεί επιτυχώς και με $N(R)$ την τ.μ. που εκφράζει τον αριθμό των νέων P_2 πελατών που φτάνουν στο σύστημα στη διάρκεια του R . Ορίζοντας την από κοινού κατανομή τους, τον M.L. της αντίστοιχης γεννήτριας

$$r_j(t)dt = \Pr[t < R \leq t + dt, N(R) = j], \quad r^*(s, z_2) = \int_0^\infty e^{-st} \sum_{j=0}^\infty r_j(t) z_2^j dt,$$

και συμβολίζοντας με

$$p_{im}(t) = e^{-\lambda_1 t} \frac{(\lambda_1 t)^i}{i!} e^{-\lambda_2 t} \frac{(\lambda_2 t)^m}{m!}, \quad a(s, z_1, z_2) = s + \lambda_1(1 - z_1) + \lambda_2(1 - z_2),$$

τότε

$$\begin{aligned} r_j(t) = & p_{0j}(t)c(t) + \{\lambda_1 \sum_{k=0}^j p_{0k}(t)[1 - C(t)]\} \\ & * \{\sum_{i=0}^\infty \sum_{m=0}^{j-k} p_{im}(t) s_3(t)\} * \sum_{l=0}^{j-k-m} g_l^{(i+1)}(t) * r_{j-k-m-l}(t). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Μετά από πράξεις καταλήγουμε στη

$$r^*(s, z_2) = \frac{c^*(a(s, 0, z_2))}{1 - M(s, x(s, z_2), z_2)},$$



όπου

$$M(s, z_1, z_2) = \lambda_1 z_1 s_3^*(a(s, z_1, z_2)) \frac{1 - c^*(a(s, 0, z_2))}{a(s, 0, z_2)}. \quad (4.2)$$

Ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της (4.1) αναφέρεται στη περίπτωση που δεν διακοπεί η περίοδος αποφόρτισης (δεν έρθει κανένας P_1 πελάτης στη διάρκεια της C). Ο δεύτερος όρος αναφέρεται στη περίπτωση που αφιχθεί ένας P_1 πελάτης, πριν ολοκληρωθεί η C . Τότε ο υπάλληλος θα διεκόςψει την C και θα ενεργοποιήσει μία περίοδο προετοιμασίας S_3 και εν συνεχεία θα εξυπηρετήσει όλους τους πελάτες της ουράς. Ακολούθως θα ενεργοποιήσει μία περίοδο αποφόρτισης κ.ο.κ..

Εστω τώρα Q , η τ.μ. που εκφράζει τη διάρκεια του χρόνου από τη στιγμή που ο υπάλληλος αναχωρεί για διακοπές, μέχρι τη χρονική στιγμή που είναι για πρώτη φορά άεργος (δηλαδή τη στιγμή που επιστρέφοντας από τις διακοπές βρεί άδεια την ουρά προτεραιότητας) και έστω επιπλέον η τ.μ. $N(Q)$, που εκφράζει τον αριθμό των νέων P_2 πελατών που φτάνουν στο σύστημα στη διάρκεια του Q . Ορίζοντας

$$q_j(t)dt = \Pr[t < Q \leq t + dt, N(Q) = j], \quad q^*(s, z_2) = \int_0^\infty e^{-st} \sum_{j=0}^\infty q_j(t) z_2^j dt,$$

τότε

$$q_j(t) = p_{0j}(t)v(t) + \sum_{i=1}^\infty \sum_{k=0}^j p_{ik}(t)v(t) * \sum_{l=0}^\infty \sum_{m=0}^{j-k} p_{lm}(t)s_1(t) * \sum_{r=0}^{j-k-m} g_r^{(i+1)}(t) * \sum_{n=0}^{j-k-m-r} r_n(t) * q_{j-n-k-m-r}(t), \quad (4.3)$$

και επομένως μετά από πράξεις

$$q^*(s, z_2) = \frac{v^*(a(s, 0, z_2))}{1 - [v^*(a(s, x(s, z_2), z_2)) - v^*(a(s, 0, z_2))]s_1^*(a(s, x(s, z_2), z_2))r^*(s, z_2)}. \quad (4.4)$$

Ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της (4.3) αναφέρεται στη περίπτωση που δεν αφιχθεί κάποιος P_1 πελάτης στη διάρκεια των διακοπών, οπότε μετά από το πέρας αυτής ο υπάλληλος θα μείνει άεργος, ενώ ο δεύτερος στη περίπτωση που έρθει τουλάχιστον ένας πελάτης στη διάρκεια των διακοπών. Στη δεύτερη περίπτωση μετά το πέρας των διακοπών, αφού υπάρχουν P_1 πελάτες στην ουρά, ο υπάλληλος ενεργοποιεί έναν χρόνο προετοιμασίας S_1 και στη συνέχεια εξυπηρετεί όλους τους πελάτες της ουράς. Ακολούθως ενεργοποιεί μία περίοδο αποφόρτισης C και μόλις αυτή ολοκληρωθεί επιτυχώς θα αναχωρήσει πάλι για διακοπές κ.ο.κ..



Παρατήρησε ότι αν ορίσουμε την

$$e(s, z_1, z_2) = \frac{c^*(a(s, 0, z_2))v^*(a(s, 0, z_2))}{1 - M(s, z_1, z_2) - c^*(a(s, 0, z_2))(v^*(a(s, z_1, z_2)) - v^*(a(s, 0, z_2))s_1^*(a(s, z_1, z_2)))}, \quad (4.5)$$

τότε η (4.4) γίνεται

$$q^*(s, z_2) = \frac{e(s, x(s, z_2), z_2)}{r^*(s, z_2)}. \quad (4.6)$$

Εστω τέλος $\rho_v = E(N(Q))$ ο αναμενόμενος αριθμός των P_2 πελατών που φθάνουν κατά τη διάρκεια του Q . Τότε παραγωγίζοντας την (4.4) ως προς z_2 και θέτοντας $z_2 = 1$, $s = 0$ προκύπτει ότι $\rho_v = \bar{\rho}_v / (1 - \lambda_1 \bar{b}_1)$ όπου

$$\bar{\rho}_v = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 v^*(\lambda_1) c^*(\lambda_1)} \{ (1 + \lambda_1 \bar{s}_3)(1 - c^*(\lambda_1))(1 - v^*(\lambda_1)) + \lambda_1 c^*(\lambda_1)(\bar{v} + \bar{s}_1(1 - v^*(\lambda_1))) \}.$$

Είμαστε πλέον έτοιμοι να ορίσουμε την έννοια του χρόνου συμπλήρωσης εξυπηρέτησης ενός P_2 πελάτη, έστω $\bar{W}_2$, ως τη διάρκεια του χρόνου από τη στιγμή που ένας P_2 πελάτης κατάφερε να συνδεθεί με τον υπάλληλο, μέχρι τη στιγμή που ο υπάλληλος είναι έτοιμος για να αναχωρήσει για διακοπές (δηλαδή τη στιγμή που δεν υπάρχουν πελάτες στην ουρά προτεραιότητας αμέσως μετά το πέρας της περιόδου αποφόρτισης). Εστω επακόλουθον $N(\bar{W}_2)$ η τ.μ. που εκφράζει τον αριθμό των νέων P_2 πελατών που φθάνουν στο σύστημα στη διάρκεια του $\bar{W}_2$ και έστω

$$\bar{w}_j(t)dt = \Pr[t < \bar{W}_2 \leq t + dt, N(\bar{W}_2) = j], \quad \bar{w}^*(s, z_2) = \int_0^\infty e^{-st} \sum_{j=0}^\infty \bar{w}_j(t) z_2^j dt.$$

Τότε

$$\begin{aligned} \bar{w}_j(t) = & \sum_{k=0}^j p_{0k}(t) s_2(t) * \sum_{m=0}^{j-k} p_{0m}(t) b_2(t) * r_{j-k-m}(t) \\ & + \sum_{k=0}^j p_{0k}(t) s_2(t) * \sum_{i=1}^\infty \sum_{m=0}^{j-k} p_{im}(t) b_2(t) \\ & * \sum_{l=0}^\infty \sum_{r=0}^{j-k-m} p_{lr}(t) s_1(t) * \sum_{n=0}^{j-k-m-r} g_n^{(i+l)}(t) * r_{j-k-m-r-n}(t) \\ & + \lambda_1 \sum_{k=0}^j p_{0k}(t) (1 - S_2(t)) * \sum_{i=0}^\infty \sum_{m=0}^{j-k} p_{im}(t) s_1(t) \\ & * \sum_{l=0}^{j-k-m} g_l^{(i+1)}(t) * \sum_{n=0}^{j-k-m-l} r_n(t) * \bar{w}_{j-k-m-l-n}(t). \end{aligned}$$

Ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους αναφέρεται στη περίπτωση που κανένας P_1 πελάτης δεν έρχεται στη διάρκεια της περιόδου προετοιμασίας S_2 , οπότε θα εξυπηρετηθεί ο P_2 πελάτης, ενώ θα ακολουθήσει μία περίοδος αποφόρτισης



αφού δεν ήρθε επίσης κανένας πελάτης στη διάρκεια της εξυπηρέτησης του συγκεκριμένου πελάτη. Όταν αυτή η περίοδος αποφόρτισης ολοκληρωθεί ο υπάλληλος θα αναχωρήσει για διακοπές. Ο δεύτερος αναφέρεται στη περίπτωση, που αφού ολοκληρωθεί χωρίς να διακοπεί η περίοδος S_2 , έρθει τουλάχιστον ένας P_1 πελάτης στη διάρκεια εξυπηρέτησης του εν λόγω P_2 πελάτη. Έτσι μετά την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησης του συγκεκριμένου πελάτη ακολουθεί μία περίοδος προετοιμασίας S_1 του υπαλλήλου ώστε να εξυπηρετήσει τους P_1 πελάτες που περιμένουν στην ουρά. Αφού τους εξυπηρετήσει όλους, θα ενεργοποιήσει μία περίοδο αποφόρτισης και μόλις αυτή ολοκληρωθεί επιτυχώς θα αναχωρήσει για διακοπές. Ο τρίτος όρος, αναφέρεται στη περίπτωση που κάποιος P_1 πελάτης αφιχθεί, πριν ολοκληρωθεί η S_2 . Τότε ο υπάλληλος διακόπτει την S_2 και ενεργοποιεί μία περίοδο προετοιμασίας S_1 . Ο P_2 πελάτης, του οποίου διακόπηκε η S_2 παραμένει στην ζώνη εξυπηρέτησης. Ακολουθεί μία περίοδος συνεχούς απασχόλησης των αφικνούμενων P_1 πελατών και μόλις αυτή ολοκληρωθεί ο υπάλληλος θα ενεργοποιήσει μία περίοδο αποφόρτισης. Ο P_2 πελάτης που ανέμενε στην ζώνη εξυπηρέτησης, αρχίζει τη διαδικασία εξυπηρέτησης του από την αρχή (ενεργοποίηση S_2 κ.ο.κ.) όταν η τελευταία περίοδος αποφόρτισης ολοκληρωθεί επιτυχώς.

Σχηματίζοντας την γεννήτρια συνάρτηση και τον αντίστοιχο M.L., τότε μετά από πράξεις προκύπτει ότι

$$\bar{w}^*(s, z_2) = \frac{L(s, x(s, z_2), z_2)r^*(s, z_2)}{1 - K(s, x(s, z_2), z_2)r^*(s, z_2)}, \quad (4.7)$$

όπου

$$\begin{aligned} L(s, z_1, z_2) &= s_2^*(a(s, 0, z_2))\{b_2^*(a(s, 0, z_2)) + s_1^*(a(s, z_1, z_2))[b_2^*(a(s, z_1, z_2)) \\ &\quad - b_2^*(a(s, 0, z_2))]\}, \\ K(s, z_1, z_2) &= \lambda_1 z_1 s_1^*(a(s, z_1, z_2)) \frac{1 - s_2^*(a(s, 0, z_2))}{a(s, 0, z_2)}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Αν τέλος $\rho_c = E(N(\bar{W}_2))$, ο αναμενόμενος αριθμός των P_2 πελατών που φθάνουν στη διάρκεια του $\bar{W}_2$, τότε παραγωγίζοντας την (4.7), ως προς z_2 και θέτοντας $z_2 = 1$, $s = 0$ προκύπτει μετά από πράξεις ότι $\rho_c = \bar{\rho}_c / (1 - \lambda_1 \bar{b}_1)$, όπου

$$\bar{\rho}_c = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 s_2^*(\lambda_1) c^*(\lambda_1)} \{ (1 + \lambda_1 \bar{s}_3)(1 - c^*(\lambda_1)) + c^*(\lambda_1)[(1 + \lambda_1 \bar{s}_1)(1 - s_2^*(\lambda_1)) + \lambda_1 s_2^*(\lambda_1)(\bar{b}_2 + \bar{s}_1(1 - b_2^*(\lambda_1)))] \}.$$



Ως γενικευμένο χρόνο συμπλήρωσης εξυπηρέτησης ενός P_2 πελάτη, έστω W_2 , ορίζουμε τη διάρκεια του χρόνου από τη στιγμή που ένας P_2 πελάτης κατάφερε να συνδεθεί με τον υπάλληλο, μέχρι τη στιγμή που ο υπάλληλος είναι άεργος για πρώτη φορά αναμένοντας τη πρώτη άφιξη που θα ζητήσει εξυπηρέτηση, είτε από το εξωτερικό περιβάλλον, είτε από το κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων. Έστω επιπλέον $N(W_2)$, η τ.μ. που εκφράζει τον αριθμό των νέων P_2 πελατών που φτάνουν στο σύστημα στη διάρκεια του W_2 και

$$w_j(t)dt = \Pr[t < W_2 \leq t + dt, N(W_2) = j], \quad w^*(s, z_2) = \int_0^\infty e^{-st} \sum_{j=0}^\infty w_j(t) z_2^j dt.$$

Είναι προφανές ότι το χρονικό διάστημα W_2 αποτελείται από δύο ανεξάρτητα χρονικά διαστήματα. Το χρονικό διάστημα από τη στιγμή που ένας P_2 πελάτης κατάφερε να συνδεθεί με τον υπάλληλο μέχρι τη στιγμή που ο υπάλληλος αναχωρεί για διακοπές ($\bar{W}_2$), συν το χρονικό διάστημα από τη στιγμή που ο υπάλληλος αναχωρεί για διακοπές, έως τη στιγμή που μένει άεργος για πρώτη φορά (Q). Άρα ο M.L. της παραπάνω γεννήτριας πιθανοτήτων δίνεται από

$$w^*(s, z_2) = \bar{w}^*(s, z_2) q^*(s, z_2),$$

και με τη βοήθεια των (4.6), (4.7) προκύπτει

$$w^*(s, z_2) = \frac{L(s, x(s, z_2), z_2) e(s, x(s, z_2), z_2)}{1 - K(s, x(s, z_2), z_2) r^*(s, z_2)}. \quad (4.9)$$

Παραγωγίζοντας την (4.9) ως προς z_2 και θέτοντας $z_2 = 1$, $s = 0$, υπολογίζεται ο αναμενόμενος αριθμός των P_2 πελατών που φτάνουν στη διάρκεια της W_2 , ενώ παραγωγίζοντας την ως προς s στο ίδιο σημείο προκύπτει η αναμενόμενη διάρκεια της εν λόγω περιόδου. Οι παραπάνω ποσότητες δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις

$$\rho_w = E(N(W_2)) = \frac{\bar{\rho}_v + \bar{\rho}_c}{1 - \lambda_1 \delta_1}, \quad E(W_2) = \frac{1 - \rho_w}{\lambda_2}. \quad (4.10)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι το ρ_w μπορεί να θεωρηθεί ως η πυκνότητα κυκλοφορίας των P_2 πελατών στο σύστημα.

Ορίζουμε ως γενικευμένη περίοδο συνεχούς απασχόλησης P_1 πελατών, έστω W_1 , το χρονικό διάστημα από τη στιγμή που ένας P_1 πελάτης φτάνει στο σύστημα βρίσκοντας άεργο τον υπάλληλο, μέχρι τη στιγμή που υπάλληλος είναι πάλι άεργος για πρώτη φορά. Αν ορίσουμε με $N(W_1)$, την τ.μ. που εκφράζει τον αριθμό



των νέων P_2 πελατών που φτάνουν στο σύστημα στη διάρκεια του W_1 και επιπλέον

$$d_j(t)dt = \Pr[t < W_1 \leq t + dt, N(W_1) = j], \quad d^*(s, z_2) = \int_0^\infty e^{-st} \sum_{j=0}^\infty d_j(t) z_2^j dt,$$

τότε

$$d_j(t) = \sum_{i=0}^\infty \sum_{m=0}^j p_{im}(t) s_1(t) * \sum_{l=0}^{j-m} g_l^{(i+1)}(t) * \sum_{k=0}^{j-m-l} r_k(t) * q_{j-m-l-k}(t).$$

Ο όρος του δεύτερου μέλους δηλώνει ότι η έλευση του P_1 πελάτη στο σύστημα ανάγκασε τον υπάλληλο να ενεργοποιήσει μία περίοδο S_1 ώστε να είναι σε θέση να εξυπηρετεί P_1 πελάτες. Μόλις εξυπηρετήσει όλους τους P_1 που περιμένουν στην ουρά, ενεργοποιεί μία περίοδο αποφόρτισης και όταν αυτή ολοκληρωθεί επιτυχώς ο υπάλληλος θα αναχωρήσει για διακοπές. Ακολουθεί η χρονική περίοδος από τη στιγμή που αρχίζουν οι διακοπές, έως ότου μείνει για πρώτη φορά ο υπάλληλος άεργος, η οποία εκφράζεται από τη τ.μ. Q που περιγράψαμε παραπάνω.

Τέλος, σχηματίζοντας τον M.L. της αντίστοιχης πιθανογεννήτριας προκύπτει

$$d^*(s, z_2) = x(s, z_2) s_1^*(a(s, x(s, z_2), z_2)) r^*(s, z_2) q^*(s, z_2). \quad (4.11)$$

Παραγωγίζοντας την (4.11) ως προς z_2 , s και θέτοντας $z_2 = 1$, $s = 0$ προκύπτουν ο αναμενόμενος αριθμός P_2 πελατών που φτάνουν στο σύστημα στη διάρκεια του W_1 και η αναμενόμενη διάρκεια της εν λόγω περιόδου αντίστοιχα. Τότε

$$E(N(W_1)) = \bar{\rho}_d / (1 - \lambda_1 \bar{b}_1), \quad E(W_1) = \frac{E(N(W_1))}{\lambda_2}, \quad (4.12)$$

όπου

$$\bar{\rho}_d = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 v^*(\lambda_1) c^*(\lambda_1)} \{ (1 + \lambda_1 \bar{s}_3)(1 - c^*(\lambda_1)) + c^*(\lambda_1) [\lambda_1 (\bar{v} + \bar{s}_1) + \lambda_1 \bar{b}_1 v^*(\lambda_1)] \}.$$

4.4 Ανάλυση των καταστάσεων του συστήματος σε συνεχή χρόνο

Ακολούθως, θα μελετηθούν οι πιθανότητες των καταστάσεων του συστήματος σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Κατά την ανάλυση του συστήματος θα χρησιμοποιηθούν τα αποτελέσματα του προηγούμενου εδαφίου και θα αναδειχθεί η σημαντικότητά τους.



Εστω $N_i(t)$, $i = 1, 2$, τ.μ. που εκφράζουν τον αριθμό των P_i πελατών στην κανονική ουρά και στην ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων αντίστοιχα τη χρονική στιγμή t . Ορίζουμε επιπλέον την

$$\xi_t = \begin{cases} b_i, & \text{ο υπάλληλος εξυπηρετεί } P_i \text{ πελάτη τη } \chi.σ. t \quad i = 1, 2, \\ s_i, & \text{ο υπάλληλος σε start up για } P_i \text{ πελάτη τη } \chi.σ. t \quad i = 1, 2, \\ s_3, & \text{ο υπάλληλος σε special start up για } P_1 \text{ πελάτη τη } \chi.σ. t, \\ c, & \text{ο υπάλληλος σε close down τη } \chi.σ. t, \\ v, & \text{ο υπάλληλος σε διακοπές τη } \chi.σ. t, \\ id, & \text{ο υπάλληλος άεργος τη } \chi.σ. t, \end{cases}$$

και

$$u_t = \begin{cases} 1, & \text{ένας } P_2 \text{ πελάτης έχει πριν διακοπεί, τη } \chi.σ. t, \\ 0, & \text{δεν έχει διακοπεί } P_2 \text{ πελάτης τη } \chi.σ. t. \end{cases}$$

Εστω $\bar{X}(t)$, τ.μ. που εκφράζει τον χρόνο που έχει ήδη παρέλθει τη στιγμή t , μιάς οποιασδήποτε τ.μ. X . Τότε με την βοήθεια των παραπάνω ορισμών, ορίζονται οι πιθανότητες των καταστάσεων του συστήματος ως,

$$p_{ij}^{(b_k)}(x, t)dx = \Pr[N_1(t) = i, N_2(t) = j, \xi_t = b_k, u_t = 0, x < \bar{B}_k(t) \leq x + dx], \\ k = 1, 2$$

$$p_{ij}^{(s_k)}(x, t)dx = \Pr[N_1(t) = i, N_2(t) = j, \xi_t = s_k, u_t = 0, x < \bar{S}_k(t) \leq x + dx], \\ k = 1, 2, 3$$

$$p_{ij}^{(c)}(x, t)dx = \Pr[N_1(t) = i, N_2(t) = j, \xi_t = c, u_t = 0, x < \bar{C}(t) \leq x + dx],$$

$$p_{ij}^{(v)}(x, t)dx = \Pr[N_1(t) = i, N_2(t) = j, \xi_t = v, u_t = 0, x < \bar{V}(t) \leq x + dx],$$

$$q_j^{(id)}(t) = \Pr[N_1(t) = 0, N_2(t) = j, \xi_t = id, u_t = 0],$$

ενώ οι M.L. των αντίστοιχων πιθανογεννητριών ως

$$P^{(\xi_t)}(s, z_1, z_2, x) = \int_0^\infty e^{-st} \sum_{i=0}^\infty \sum_{j=0}^\infty p_{ij}^{(\xi_t)}(x, t) z_1^i z_2^j dt,$$

$$Q^*(s, z_2) = \int_0^\infty e^{-st} \sum_{j=0}^\infty q_j^{(id)}(t) z_2^j dt.$$

Ας ορίσουμε επιπλέον με $\bar{p}_{ij}^{(\xi_t)}(x, t)$, $\bar{P}^{(\xi_t)}(s, z_1, z_2, x)$ τις αντίστοιχες ποσότητες στη περίπτωση όπου $u_t = 1$. Τότε συνδέοντας, κατά τον γνωστό τρόπο, τις πιθανότητες της χρονικής στιγμής t με αυτές της στιγμής $t + dt$, παίρνουμε όταν



$u_t = 0$ ως σχέσεις

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) p_{ij}^{(b_k)}(x, t) + (\lambda_1 + \lambda_2 + \eta_{b_k}(x)) p_{ij}^{(b_k)}(x, t) = \lambda_1 p_{i-1, j}^{(b_k)}(x, t) + \lambda_2 p_{i, j-1}^{(b_k)}(x, t), \quad k = 1, 2,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) p_{ij}^{(s_k)}(x, t) + (\lambda_1 + \lambda_2 + \eta_{s_k}(x)) p_{ij}^{(s_k)}(x, t) = \lambda_1 p_{i-1, j}^{(s_k)}(x, t) + \lambda_2 p_{i, j-1}^{(s_k)}(x, t), \quad k = 1, 3,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) p_{ij}^{(v)}(x, t) + (\lambda_1 + \lambda_2 + \eta_v(x)) p_{ij}^{(v)}(x, t) = \lambda_1 p_{i-1, j}^{(v)}(x, t) + \lambda_2 p_{i, j-1}^{(v)}(x, t),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) p_{0j}^{(s_2)}(x, t) + (\lambda_1 + \lambda_2 + \eta_{s_2}(x)) p_{0j}^{(s_2)}(x, t) = \lambda_2 p_{0, j-1}^{(s_2)}(x, t),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) p_{0j}^{(c)}(x, t) + (\lambda_1 + \lambda_2 + \eta_c(x)) p_{0j}^{(c)}(x, t) = \lambda_2 p_{0, j-1}^{(c)}(x, t),$$

και

$$\frac{d}{dt} q_j^{(id)}(t) + (\lambda_1 + \lambda_2 + j\alpha) q_j^{(id)}(t) = \int_0^\infty p_{0j}^{(v)}(x, t) \eta_v(x) dx,$$

ενώ όταν $u_t = 1$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) \tilde{p}_{ij}^{(b_1)}(x, t) + (\lambda_1 + \lambda_2 + \eta_{b_1}(x)) \tilde{p}_{ij}^{(b_1)}(x, t) = \lambda_1 \tilde{p}_{i-1, j}^{(b_1)}(x, t) + \lambda_2 \tilde{p}_{i, j-1}^{(b_1)}(x, t),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) \tilde{p}_{ij}^{(s_k)}(x, t) + (\lambda_1 + \lambda_2 + \eta_{s_k}(x)) \tilde{p}_{ij}^{(s_k)}(x, t) = \lambda_1 \tilde{p}_{i-1, j}^{(s_k)}(x, t) + \lambda_2 \tilde{p}_{i, j-1}^{(s_k)}(x, t), \quad k = 1, 3,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) \tilde{p}_{0j}^{(c)}(x, t) + (\lambda_1 + \lambda_2 + \eta_c(x)) \tilde{p}_{0j}^{(c)}(x, t) = \lambda_2 \tilde{p}_{0, j-1}^{(c)}(x, t).$$

όπου

$$\eta_{b_k}(x) = \frac{b_k(x)}{1-B_k(x)}, \quad k = 1, 2 \quad \eta_{s_k}(x) = \frac{s_k(x)}{1-B_k(x)}, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$\eta_v(x) = \frac{v(x)}{1-V(x)}, \quad \eta_c(x) = \frac{c(x)}{1-C(x)}.$$



Οι αντίστοιχες οριακές συνθήκες στη περίπτωση όπου $u_t = 0$ δίνονται από

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(b_1)}(0, t) &= \int_0^\infty p_{i+1j}^{(b_1)}(x, t) \eta_{b_1}(x) dx + \int_0^\infty p_{i+1j}^{(s_1)}(x, t) \eta_{s_1}(x) dx \\ &\quad + \int_0^\infty p_{i+1j}^{(s_2)}(0, t) \eta_{s_3}(x) dx, \\ p_{ij}^{(b_2)}(0, t) &= \delta_{\{i=0\}} \int_0^\infty p_{0j}^{(s_2)}(x, t) \eta_{s_2}(x) dx, \\ p_{ij}^{(s_1)}(0, t) &= \delta_{\{i=1\}} q_j^{(id)}(t) + \delta_{\{i \geq 1\}} \left\{ \int_0^\infty p_{ij}^{(v)}(x, t) \eta_v(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty p_{ij}^{(b_2)}(x, t) \eta_{b_2}(x) dx \right\}, \\ p_{ij}^{(s_2)}(0, t) &= \delta_{\{i=0\}} \left\{ \lambda_2 q_j^{(id)}(t) + (j+1) \alpha q_{j+1}^{(id)}(t) + \int_0^\infty \tilde{p}_{0j}^{(c)}(x, t) \eta_c(x) dx \right\}, \\ p_{ij}^{(s_3)}(0, t) &= \delta_{\{i=1\}} \lambda_1 \int_0^\infty \tilde{p}_{0j}^{(c)}(x, t) dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(c)}(0, t) &= \delta_{\{i=0\}} \left\{ \int_0^\infty p_{0j}^{(b_1)}(x, t) \eta_{b_1}(x) dx + \int_0^\infty p_{0j}^{(b_2)}(x, t) \eta_{b_2}(x) dx \right\}, \\ p_{ij}^{(v)}(0, t) &= \delta_{\{i=0\}} \int_0^\infty p_{ij}^{(c)}(x, t) \eta_c(x) dx. \end{aligned}$$

Στη περίπτωση όπου $u_t = 1$, οι οριακές συνθήκες δίνονται από

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{ij}^{(b_1)}(0, t) &= \int_0^\infty \tilde{p}_{i+1j}^{(b_1)}(x, t) \eta_{b_1}(x) dx + \int_0^\infty \tilde{p}_{i+1j}^{(s_1)}(x, t) \eta_{s_1}(x) dx \\ &\quad + \int_0^\infty \tilde{p}_{i+1j}^{(s_2)}(0, t) \eta_{s_3}(x) dx, \\ \tilde{p}_{ij}^{(s_1)}(0, t) &= \delta_{\{i=1\}} \lambda_1 \int_0^\infty \tilde{p}_{0j}^{(s_2)}(x, t) \eta_{s_2}(x) dx, \\ \tilde{p}_{ij}^{(s_3)}(0, t) &= \delta_{\{i=1\}} \lambda_1 \int_0^\infty \tilde{p}_{0j}^{(c)}(x, t) dx, \\ \tilde{p}_{ij}^{(c)}(0, t) &= \delta_{\{i=0\}} \int_0^\infty \tilde{p}_{0j}^{(b_1)}(x, t) \eta_{b_1}(x) dx. \end{aligned}$$

Αν υποθέσουμε ότι το σύστημα είναι αρχικά άδειο, δηλαδή $q_0^{(id)}(0) = 1$ σχηματίσουμε τις γεννήτριες των παραπάνω πιθανοτήτων, τους αντίστοιχους M.L. και λύνοντας τις απλές διαφορικές εξισώσεις που εμφανίζονται προκύπτει για $x > 0$, $\text{Re}(s) \geq 0$, $|z_i| \leq 1$, $i = 1, 2$, ότι

$$\begin{aligned} P^{(b_k)}(s, z_1, z_2, x) &= P^{(b_k)}(s, z_1, z_2, 0)(1 - B_k(x)) \exp[-a(s, z_1, z_2)x], \quad k = 1, 2 \\ P^{(s_k)}(s, z_1, z_2, x) &= P^{(s_k)}(s, z_1, z_2, 0)(1 - S_k(x)) \exp[-a(s, z_1, z_2)x], \quad k = 1, 2, 3 \\ P^{(c)}(s, 0, z_2, x) &= P^{(c)}(s, 0, z_2, 0)(1 - C(x)) \exp[-a(s, 0, z_2)x], \\ P^{(v)}(s, z_1, z_2, x) &= P^{(v)}(s, 0, z_2, 0)(1 - V(x)) \exp[-a(s, z_1, z_2)x], \end{aligned} \tag{4.13}$$



και

$$\begin{aligned}\bar{P}^{(b_1)}(s, z_1, z_2, x) &= \bar{P}^{(b_1)}(s, z_1, z_2, 0)(1 - B_1(x)) \exp[-a(s, z_1, z_2)x], \\ \bar{P}^{(s_k)}(s, z_1, z_2, x) &= \bar{P}^{(s_k)}(s, z_1, z_2, 0)(1 - S_k(x)) \exp[-a(s, z_1, z_2)x], \quad k = 1, 3 \\ \bar{P}^{(c)}(s, 0, z_2, x) &= \bar{P}^{(c)}(s, 0, z_2, 0)(1 - C(x)) \exp[-a(s, 0, z_2)x],\end{aligned}\quad (4.14)$$

ενώ στην περίπτωση που ο υπάλληλος είναι άεργος

$$\alpha z_2 \frac{d}{dz_2} Q^*(s, z_2) + (s + \lambda) Q^*(s, z_2) = 1 + P^{(v)}(s, 0, z_2, 0) v^*(a(s, 0, z_2)). \quad (4.15)$$

Με ανάλογο τρόπο, ύστερα από πράξεις καταλήγουμε στην περίπτωση των οριακών συνθηκών ($x = 0$) στις ακόλουθες σχέσεις,

$$\begin{aligned}[z_1 - b_1^*(a(s, z_1, z_2))] P^{(b_1)}(s, z_1, z_2, 0) &= P^{(s_1)}(s, z_1, z_2, 0) s_1^*(a(s, z_1, z_2)) \\ &+ P^{(s_3)}(s, z_1, z_2, 0) s_3^*(a(s, z_1, z_2)) - P^{(b_1)}(s, 0, z_2, 0) b_1^*(a(s, 0, z_2))\end{aligned}\quad (4.16)$$

$$\begin{aligned}[z_1 - b_1^*(a(s, z_1, z_2))] \bar{P}^{(b_1)}(s, z_1, z_2, 0) &= \bar{P}^{(s_1)}(s, z_1, z_2, 0) s_1^*(a(s, z_1, z_2)) \\ &+ \bar{P}^{(s_3)}(s, z_1, z_2, 0) s_3^*(a(s, z_1, z_2)) - \bar{P}^{(b_1)}(s, 0, z_2, 0) b_1^*(a(s, 0, z_2)),\end{aligned}\quad (4.17)$$

$$\begin{aligned}\bar{P}^{(s_1)}(s, z_1, z_2, 0) &= \lambda_1 z_1 \frac{1 - s_2^*(a(s, 0, z_2))}{a(s, 0, z_2)} P^{(s_2)}(s, 0, z_2, 0), \\ P^{(s_3)}(s, z_1, z_2, 0) &= \lambda_1 z_1 \frac{1 - c^*(a(s, 0, z_2))}{a(s, 0, z_2)} P^{(c)}(s, 0, z_2, 0), \\ \bar{P}^{(s_3)}(s, z_1, z_2, 0) &= \lambda_1 z_1 \frac{1 - c^*(a(s, 0, z_2))}{a(s, 0, z_2)} \bar{P}^{(c)}(s, 0, z_2, 0),\end{aligned}\quad (4.18)$$

$$\begin{aligned}P^{(v)}(s, 0, z_2, 0) &= P^{(c)}(s, 0, z_2, 0) c^*(a(s, 0, z_2)), \\ \bar{P}^{(c)}(s, 0, z_2, 0) &= \bar{P}^{(b_1)}(s, 0, z_2, 0) b_1^*(a(s, 0, z_2)), \\ P^{(b_2)}(s, 0, z_2, 0) &= P^{(s_2)}(s, 0, z_2, 0) s_2^*(a(s, 0, z_2)).\end{aligned}\quad (4.19)$$

Επιπλέον,

$$\begin{aligned}P^{(c)}(s, 0, z_2, 0) &= P^{(b_1)}(s, 0, z_2, 0) b_1^*(a(s, 0, z_2)) + P^{(b_2)}(s, 0, z_2, 0) b_2^*(a(s, 0, z_2)), \\ P^{(s_1)}(s, z_1, z_2, 0) &= \lambda_1 z_1 Q^*(s, z_2) + P^{(v)}(s, 0, z_2, 0) [v^*(a(s, z_1, z_2)) \\ &- v^*(a(s, 0, z_2))] + P^{(b_2)}(s, 0, z_2, 0) [b_2^*(a(s, z_1, z_2)) - b_2^*(a(s, 0, z_2))], \\ P^{(s_2)}(s, 0, z_2, 0) &= \alpha \frac{d}{dz_2} Q^*(s, z_2) + \lambda_2 Q^*(s, z_2) + \bar{P}^{(c)}(s, 0, z_2, 0) c^*(a(s, 0, z_2)).\end{aligned}\quad (4.20)$$



Ας ορίσουμε τώρα με

$$T(s, z_1, z_2) = 1 - K(s, z_1, z_2)c^*(a(s, 0, z_2)) - M(s, z_1, z_2),$$

όπου οι συναρτήσεις K και M έχουν οριστεί στις (4.8) και (4.2) αντιστοίχως. Τότε αντικαθιστώντας από τις (4.18), (4.20) και (4.19) στη (4.17) προκύπτει

$$\tilde{P}^{(b_1)}(s, z_1, z_2, 0) = \frac{K(s, z_1, z_2) Q_1^*(s, z_2) - T(s, z_1, z_2) \tilde{P}^{(c)}(s, 0, z_2, 0)}{z_1 - b_1^*(a(s, z_1, z_2))}.$$

όπου

$$Q_1^*(s, z_2) = \alpha \frac{d}{dz_2} Q^*(s, z_2) + \lambda_2 Q^*(s, z_2).$$

Επειδή όμως η $\tilde{P}^{(b_1)}(s, z_1, z_2, 0)$ είναι αναλυτική για $|z_i| \leq 1$, $i = 1, 2$, πρέπει η ρίζα του παρονομαστή στο $|z_1| \leq 1$, έστω $x(s, z_2)$, να είναι και ρίζα του αριθμητή. Τότε όμως

$$\tilde{P}^{(c)}(s, 0, z_2, 0) = \frac{K(s, x(s, z_2), z_2)}{T(s, x(s, z_2), z_2)} Q_1^*(s, z_2), \quad (4.21)$$

$$\tilde{P}^{(b_1)}(s, z_1, z_2, 0) = \frac{\tilde{R}(s, z_1, z_2)}{z_1 - b_1^*(a(s, z_1, z_2))} Q_1^*(s, z_2), \quad (4.22)$$

όπου

$$\tilde{R}(s, z_1, z_2) = K(s, z_1, z_2) - K(s, x(s, z_2), z_2) \frac{T(s, z_1, z_2)}{T(s, x(s, z_2), z_2)}.$$

Επιπλέον, αντικαθιστώντας την (4.21) οι (4.18) και (4.20) γίνονται

$$\tilde{P}^{(s_3)}(s, z_1, z_2, 0) = \frac{M(s, z_1, z_2) K(s, x(s, z_2), z_2)}{T(s, x(s, z_2), z_2) s_3^*(a(s, z_1, z_2))} Q_1^*(s, z_2), \quad (4.23)$$

$$P^{(s_2)}(s, 0, z_2, 0) = R(s, z_2) Q_1^*(s, z_2), \quad (4.24)$$

όπου

$$R(s, z_2) = 1 + c^*(a(s, 0, z_2)) \frac{K(s, x(s, z_2), z_2)}{T(s, x(s, z_2), z_2)}.$$

Αντικαθιστώντας τις (4.18), (4.19), (4.20) στη (4.16) καταλήγουμε ύστερα από πράξεις στη

$$\begin{aligned} [z_1 - b_1^*(a(s, z_1, z_2))] P^{(b_1)}(s, z_1, z_2, 0) &= \lambda_1 z_1 s_1^*(a(s, z_1, z_2)) Q^*(s, z_2) \\ &+ P^{(b_2)}(s, 0, z_2, 0) \left[\frac{L(s, z_1, z_2)}{s_2^*(a(s, 0, z_2))} - \frac{b_2^*(a(s, 0, z_2)) c^*(a(s, 0, z_2)) v^*(a(s, 0, z_2))}{e(s, z_1, z_2)} \right] \\ &- P^{(b_1)}(s, 0, z_2, 0) b_1^*(a(s, 0, z_2)) \frac{c^*(a(s, 0, z_2)) v^*(a(s, 0, z_2))}{e(s, z_1, z_2)} \end{aligned} \quad (4.25)$$



Εξαιλείφοντας το αριστερό μέλος της παραπάνω εξίσωσης από την μοναδική ρίζα του, $x(s, z_2)$, στο $|z_1| \leq 1$, προκύπτει ότι

$$P^{(b_1)}(s, 0, z_2, 0)b_1^*(a(s, 0, z_2)) = \frac{\lambda_1 d^*(s, z_2)}{c^*(a(s, 0, z_2))v^*(a(s, 0, z_2))} Q^*(s, z_2) \\ + P^{(b_2)}(s, 0, z_2, 0) \left[\frac{L(s, x(s, z_2), z_2)e(s, x(s, z_2), z_2)}{s_2^*(a(s, 0, z_2))c^*(a(s, 0, z_2))v^*(a(s, 0, z_2))} - b_2^*(a(s, 0, z_2)) \right] \quad (4.26)$$

Επιπλέον από τις (4.18), (4.19), (4.24) έχουμε

$$\tilde{P}^{(s_1)}(s, z_1, z_2, 0) = \frac{K(s, z_1, z_2)}{s_1^*(a(s, z_1, z_2))} R(s, z_2) Q_1^*(s, z_2), \\ P^{(b_2)}(s, 0, z_2, 0) = s_2^*(a(s, 0, z_2)) R(s, z_2) Q_1^*(s, z_2) \quad (4.27)$$

Τότε αντικαθιστώντας τις (4.26), (4.27) στις (4.19), (4.20) προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις

$$P^{(v)}(s, 0, z_2, 0) = \frac{Q_2^*(s, z_2)}{v^*(a(s, 0, z_2))}, \\ P^{(c)}(s, 0, z_2, 0) = \frac{Q_2^*(s, z_2)}{v^*(a(s, 0, z_2))c^*(a(s, 0, z_2))} \quad (4.28)$$

όπου

$$Q_2^*(s, z_2) = (\lambda_1 d^*(s, z_2) + \lambda_2 w^*(s, z_2)) Q^*(s, z_2) + \alpha w^*(s, z_2) \frac{d}{dz_2} Q^*(s, z_2)$$

ενώ αντικαθιστώντας την (4.28) στη (4.18)

$$P^{(s_3)}(s, z_1, z_2, 0) = \frac{M(s, z_1, z_2)}{s_3^*(a(s, z_1, z_2))} \frac{Q_2^*(s, z_2)}{v^*(a(s, 0, z_2))c^*(a(s, 0, z_2))}. \quad (4.29)$$

Τέλος, αντικαθιστώντας τις (4.26), (4.27), στη (4.25) και θέτοντας

$$h_1(s, z_1, z_2) = \alpha [L(s, z_1, z_2) R(s, z_2) - w^*(s, z_2)/e(s, z_1, z_2)], \\ h_2(s, z_1, z_2) = \lambda_1 z_1 s_1^*(a(s, z_1, z_2)) + \lambda_2 h_1(s, z_1, z_2)/\alpha - \lambda_1 d^*(s, z_2)/e(s, z_1, z_2), \quad (4.30)$$

καταλήγουμε στη

$$P^{(b_1)}(s, z_1, z_2, 0) = \frac{h_1(s, z_1, z_2) \frac{d}{dz_2} Q^*(s, z_2) + h_2(s, z_1, z_2) Q^*(s, z_2)}{z_1 - b_1^*(a(s, z_1, z_2))}, \quad (4.31)$$

Αντικαθιστώντας την (4.28) στην (4.15),

$$\alpha(z_2 - D(s, z_2)) \frac{d}{dz_2} Q^*(s, z_2) + F(s, z_2) Q^*(s, z_2) = 1, \quad (4.32)$$



όπου

$$\begin{aligned} D(s, z_2) &= L(s, x(s, z_2), z_2) R(s, z_2) e(s, x(s, z_2), z_2), \\ F(s, z_2) &= s + \lambda - \lambda_1 x(s, z_2) s_1^*(a(s, x(s, z_2), z_2)) e(s, x(s, z_2), z_2) - \lambda_2 D(s, z_2) \\ &= s + \lambda_1 (1 - d^*(s, z_2)) + \lambda_2 (1 - D(s, z_2)). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Για να προχωρήσουμε στην ανάλυση θα πρέπει να διατυπώσουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 4.1 Για (i) $Re(s) > 0, |w| \leq 1$ ή για (ii) $Re(s) \geq 0, |w| < 1$ ή για (iii) $Re(s) \geq 0, |w| \leq 1$ και

$$\rho = \lambda_1 \bar{b}_1 + \bar{\rho}_v + \bar{\rho}_c > 1 \quad (4.34)$$

η εξίσωση

$$z_2 - wD(s, z_2) = 0 \quad (4.35)$$

έχει μία και μόνο μία ρίζα, έστω $z_2 = \phi(s, w)$, μέσα στη περιοχή $|z_2| < 1$. Ειδικότερα για $s = 0$ και $w = 1$, η $\phi(0, 1)$ είναι η μικρότερη θετική πραγματική ρίζα της (4.35) με $\phi(0, 1) < 1$ αν $\rho > 1$ και $\phi(0, 1) = 1$ αν $\rho \leq 1$.

Απόδειξη: Συγκρίνοντας τη $D(s, z_2)$ της σχέσης (4.33) με τη γεννήτρια συνάρτηση $w^*(s, z_2)$ της σχέσης (4.9) του προηγούμενου εδαφίου βλέπουμε ότι,

$$D(s, z_2) = w^*(s, z_2) = \int_0^\infty e^{-st} \sum_{j=0}^\infty w_j(t) z_2^j dt,$$

που σημαίνει ότι η $D(s, z_2)$ είναι M.L. μιάς γεννήτριας συνάρτησης.

Θεωρούμε τώρα την κλειστή καμπύλη $|z_2| = 1 - \epsilon$ (όπου $\epsilon > 0$ είναι αρκετά μικρός αριθμός). Τότε κάτω από τις συνθήκες (i) και (ii) μπορούμε πάντα να βρούμε ένα αρκετά μικρό ϵ τέτοιο ώστε

$$|wD(s, z_2)| \leq |w| D(Re(s), 1 - \epsilon) < 1 - \epsilon, \quad (4.36)$$

ενώ για $Re(s) \geq 0, |w| \leq 1$ χρειαζόμαστε επιπρόσθετος

$$\frac{d}{d\epsilon} D(0, 1 - \epsilon) |_{\epsilon=0} < -1,$$

ή ισοδύναμα $\rho > 1$ για να ισχύει η (4.36). Το πρώτο μέρος της απόδειξης ολοκληρώνεται λαμβάνοντας υπόψιν το θεώρημα του Rouché.



Επιπλέον για $s = 0$ και $w = 1$ η κυρτή συνάρτηση $D(0, z_2)$ είναι αύξουσα ως προς z_2 , για $0 \leq z_2 \leq 1$, παίρνοντας τιμές $0 < D(0, 0) < 1$ και $D(0, 1) = 1$ και συνεπώς $0 < \phi(0, 1) < 1$ αν $\rho > 1$, ενώ για $\rho \leq 1$, $\phi(0, 1) = 1$, γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν το παραπάνω θεώρημα, η διαφορική εξίσωση (4.32) μπορεί να επιλυθεί (βλέπε Falin and Fricker [81]) στα διαστήματα $[0, \varphi(s, 1))$ και $(\varphi(s, 1), 1]$. Επομένως η λύση της εν λόγω διαφορικής εξίσωσης είναι

$$Q^*(s, z_2) = \frac{1}{F(s, z_2)}, \quad \text{αν } z_2 = \phi(s, 1),$$

$$Q^*(s, z_2) = \int_{z_2}^{\phi(s, 1)} \frac{1}{\alpha(D(s, u) - u)} \exp\left\{\int_u^{z_2} \frac{F(s, x)}{\alpha(D(s, x) - x)} dx\right\} du, \quad \text{αν } z_2 \neq \phi(s, 1).$$

Ετσι η γεννήτρια $Q^*(s, z_2)$ είναι γνωστή και επομένως από τη δεύτερη σχέση της (4.20) και από τις (4.21)-(4.31) όλες οι γεννήτριες συναρτήσεις είναι γνωστές. Αυτό το αποτέλεσμα ολοκληρώνει την ανάλυση του συστήματος σε συνεχή χρόνο.

4.5 Συνθήκη στατιστικής ισορροπίας

Στη συνέχεια θα μελετηθεί η συνθήκη κάτω από την οποία το σύστημα μας βρίσκεται σε στατιστική ισορροπία ή ισοδύναμα η η συνθήκη κάτω από την οποία, η στοχαστική διαδικασία που περιγράφει το σύστημά μας είναι ευσταθής. Γενικά μία στοχαστική διαδικασία $(Y(t); t \geq 0)$ λέμε ότι είναι ευσταθής, αν οι οριακές της πιθανότητες καθώς το $t \rightarrow \infty$ υπάρχουν και ορίζουν κατανομή. Για την εύρεση της συνθήκης στατιστικής ισορροπίας θα χρησιμοποιηθεί το κριτήριο του Pakes καθώς και αποτελέσματα από την θεωρία των ημιαναγεννητικών διαδικασιών.

Ας θεωρήσουμε τις χρονικές στιγμές T_n , $n = 0, 1, \dots$, στις οποίες ολοκληρώνεται είτε μία γενικευμένη περίοδος συνεχούς απασχόλησης P_1 πελατών, είτε ένας γενικευμένος χρόνος συμπλήρωσης απασχόλησης ενός P_2 πελάτη. Παρατήρησε ότι στις εν λόγω χρονικές στιγμές ο υπάλληλος μένει άεργος. Εστω

$$0 = T_0 < T_1 < T_2 < \dots,$$

και $\zeta_n = N_2(T_n + 0)$, ο αριθμός των P_2 πελατών στο κοντί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων λίγο μετά την στιγμή T_n . Τότε είναι προφανές ότι η στοχαστική διαδικασία $Y = (\zeta_n; n \geq 0)$ είναι μια μη διαχωρίσιμη (irreducible) και απεριοδική (aperiodic) μαρκοβιανή αλυσίδα. Το ακόλουθο θεώρημα δίνει την



συνθήκη, κάτω από την οποία η παραπάνω μαρκοβιανή αλυσίδα είναι θετικά επαναληπτική (δηλαδή οι οριακές της πιθανότητες υπάρχουν, είναι θετικές και αθροίζουν στη μονάδα).

Θεώρημα 4.2 Για $\rho < 1$ η Μαρκοβιανή αλυσίδα Y είναι θετικώς επαναληπτική.

Απόδειξη: Για να αποδείξουμε το εν λόγω θεώρημα θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω κριτήριο που οφείλεται στον Pakes [155]:

Μια μη διαχωρίσιμη και απεριοδική Μαρκοβιανή αλυσίδα $(Y_n; n \geq 0)$ με χώρο καταστάσεων τους μη αρνητικούς ακέραιους, είναι θετικώς επαναληπτική αν $|\delta_k| < \infty$ για κάθε $k = 0, 1, 2, \dots$ και $\limsup_{k \rightarrow \infty} \delta_k < 0$ όπου $\delta_k = E[Y_{n+1} - Y_n | Y_n = k]$.

Για την Μαρκοβιανή αλυσίδα του μοντέλου μας, ας ορίσουμε τις πιθανότητες $h_{k,m}(t)dt = \Pr[t < T_{n+1} - T_n \leq t + dt, N_2(T_{n+1}) - N_2(T_n) = m | N_2(T_n) = k]$.

Τότε είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι για $m = 0, 1, 2, \dots$

$$h_{k,m}(t) = \lambda_1 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + k\alpha)t} * d_m(t) + \lambda_2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + k\alpha)t} * w_m(t) + k\alpha e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + k\alpha)t} * w_{m+1}(t),$$

ενώ για $m = -1$,

$$h_{k,-1}(t) = k\alpha e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + k\alpha)t} * w_0(t),$$

και επομένως

$$\int_0^\infty e^{-st} \sum_{m=-1}^\infty h_{k,m}(t) z^m dt = \frac{\lambda_1 d^*(s, z) + \lambda_2 w^*(s, z) + \frac{k\alpha}{z} w^*(s, z)}{s + \lambda_1 + \lambda_2 + k\alpha}. \quad (4.37)$$

Παραγωγίζοντας την (4.37) ως προς z και θέτοντας $z = 1, s = 0$ προκύπτει ότι

$$\delta_k = \frac{\lambda_1 E(N(W_1)) + \lambda_2 E(N(W_2)) + k\alpha[E(N(W_2)) - 1]}{\lambda_1 + \lambda_2 + k\alpha}, \quad k = 0, 1, \dots$$

όπου τα $E(N(W_1)), E(N(W_2))$ έχουν υπολογιστεί στις (4.12) και (4.10) αναστοίχως.

Τότε για $\rho < 1$ αντιλαμβανόμαστε ότι τα $|\delta_k|$ είναι πεπερασμένα για κάθε μη αρνητικό ακέραιο k . Επιπλέον $\limsup_{k \rightarrow \infty} \delta_k = E(N(W_2)) - 1 = \frac{\rho-1}{1-\lambda_1 b_1} < 0$ και επομένως το κριτήριο ικανοποιείται. $\square$



Εστω η στοχαστική διαδικασία

$$Z = \{(N_1(t), N_2(t), \xi_t) : 0 \leq t < \infty\},$$

όπου οι τ.μ. $N_i(t)$, $i = 1, 2$, ξ_t εκφράζουν αντίστοιχα, τους αριθμούς των P_i πελατών και την κατάσταση του υπαλλήλου στο σύστημα σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t . Η Z είναι η στοχαστική διαδικασία που περιγράφει την λειτουργία του συστήματος οποιαδήποτε χρονική στιγμή t . Το παρακάτω θεώρημα μας δίνει μία ικανή συνθήκη για να είναι η Z ευσταθής ή ισοδύναμα το σύστημα μας να είναι σε στατιστική ισορροπία.

Θεώρημα 4.3 Για $\rho < 1$ η στοχαστική διαδικασία Z είναι ευσταθής.

Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε τις ποσότητες

$$m_k = E(T_1 | \zeta_0 = k).$$

Τότε παραγωγίζοντας την (4.37) ως προς s και θέτοντας $z = 1$, $s = 0$ προκύπτει

$$m_k = \frac{\lambda_1 E(W_1) + \lambda_2 E(W_2) + k\alpha E(W_2) + 1}{\lambda_1 + \lambda_2 + k\alpha},$$

και αν q_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, είναι οι πιθανότητες των καταστάσεων σε στατιστική ισορροπία της θετικά επαναληπτικής Μαρκοβιανής αλυσίδας Y τότε,

$$q \cdot m = \sum_{k=0}^{\infty} q_k m_k = E(W_2) + \{1 + \lambda_1 [E(W_1) - E(W_2)]\} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + k\alpha}. \quad (4.38)$$

Είναι προφανές, ότι πάντα υπάρχει ένας πεπερασμένος μη αρνητικός ακέραιος k^* τέτοιος ώστε

$$\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + (k^* - 1)\alpha} > 1 > \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + k^*\alpha},$$

και επομένως

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + k\alpha} &= \sum_{k=0}^{k^*-1} \frac{q_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + k\alpha} + \sum_{k=k^*}^{\infty} \frac{q_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + k\alpha} < \sum_{k=0}^{k^*-1} \frac{q_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + k\alpha} \\ &+ \sum_{k=k^*}^{\infty} q_k = \sum_{k=0}^{k^*-1} \frac{q_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + k\alpha} + (1 - \sum_{k=0}^{k^*-1} q_k) < \infty. \end{aligned}$$

Τότε, χρησιμοποιώντας τις (4.10), (4.12) είναι προφανές από την (4.38) ότι $q \cdot m < \infty$.



Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι η Z είναι μία ημι-αναγεννητική διαδικασία με υπεισερχόμενη μη διαχωρίσιμη απεριοδική Μαρκοβιανή διαδικασία ανανεώσεων την $\{Y, T\} = \{(\zeta_n, T_n) : n = 0, 1, 2, \dots\}$. Τότε από τη θεωρία των ημι-αναγεννητικών διαδικασιών (βλέπε Cinlar [49], Θεώρημα 6.12, p. 347), η Z είναι ευσταθής αφού $q \cdot m < \infty$ και επομένως το θεώρημα έχει αποδειχθεί. $\square$

4.6 Ανάλυση των καταστάσεων του συστήματος σε στατιστική ισορροπία

Ας υποθέσουμε ότι το σύστημα βρίσκεται σε στατιστική ισορροπία, οπότε $\rho < 1$. Εστω επιπλέον στη περίπτωση $u_t = 0$

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(\xi_t)}(x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}^{(\xi_t)}(x, t), & q_j^{(id)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} q_j^{(id)}(t), \\ P^{(\xi_t)}(z_1, z_2, x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}^{(\xi_t)}(x) z_1^i z_2^j, & Q^*(z_2) &= \sum_{j=0}^{\infty} q_j^{(id)} z_2^j, \\ P^{(\xi_t)}(z_1, z_2) &= \int_0^{\infty} P^{(\xi_t)}(z_1, z_2, x) dx, \end{aligned}$$

και έστω $\bar{p}_{ij}^{(\xi_t)}(x)$, $\bar{P}^{(\xi_t)}(z_1, z_2, x)$, $\bar{P}^{(\xi_t)}(z_1, z_2)$ οι αντίστοιχες ποσότητες στη περίπτωση όπου $u_t = 1$. Τότε είναι γνωστό ότι ισχύει

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(\xi_t)}(x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}^{(\xi_t)}(x, t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \int_0^{\infty} e^{-st} p_{ij}^{(\xi_t)}(x, t) dt, \\ q_j^{(id)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} q_j^{(id)}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \int_0^{\infty} e^{-st} q_j^{(id)}(t) dt, \end{aligned}$$

και επομένως ολοκληρώνοντας ως προς x , πολλαπλασιάζοντας με s και παίρνοντας τα αντίστοιχα όρια για $s \rightarrow \infty$ στις σχέσεις (4.13), (4.14) καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned} P^{(b_k)}(z_1, z_2) &= P^{(b_k)}(z_1, z_2, 0) [1 - b_k^*(a(0, z_1, z_2))] / a(0, z_1, z_2), \quad k = 1, 2 \\ P^{(s_k)}(z_1, z_2) &= P^{(s_k)}(z_1, z_2, 0) [1 - s_k^*(a(0, z_1, z_2))] / a(0, z_1, z_2), \quad k = 1, 2, 3 \\ P^{(c)}(0, z_2) &= P^{(c)}(0, z_2, 0) [1 - c^*(a(0, 0, z_2))] / a(0, 0, z_2), \\ P^{(v)}(z_1, z_2) &= P^{(v)}(0, z_2, 0) [1 - v^*(a(0, z_1, z_2))] / a(0, z_1, z_2) \end{aligned} \quad (4.39)$$

και

$$\begin{aligned} \bar{P}^{(b_1)}(z_1, z_2) &= \bar{P}^{(b_1)}(z_1, z_2, 0) [1 - b_1^*(a(0, z_1, z_2))] / a(0, z_1, z_2), \\ \bar{P}^{(s_k)}(z_1, z_2) &= \bar{P}^{(s_k)}(z_1, z_2, 0) [1 - s_k^*(a(0, z_1, z_2))] / a(0, z_1, z_2), \quad k = 1, 3 \\ \bar{P}^{(c)}(0, z_2) &= \bar{P}^{(c)}(0, z_2, 0) [1 - c^*(a(0, 0, z_2))] / a(0, 0, z_2). \end{aligned} \quad (4.40)$$



Με παρόμοιο τρόπο παίρνουμε τις ανάλογες εκφράσεις για τις οριακές συνθήκες

$$\begin{aligned}
 \bar{P}^{(c)}(0, z_2, 0) &= \frac{K(0, x(0, z_2), z_2)}{T(0, x(0, z_2), z_2)} Q_1^*(z_2), \\
 \bar{P}^{(b_1)}(z_1, z_2, 0) &= \frac{\bar{R}(0, z_1, z_2)}{z_1 - b_1^*(a(0, z_1, z_2))} Q_1^*(z_2), \\
 \bar{P}^{(s_3)}(z_1, z_2, 0) &= \frac{M(0, z_1, z_2) K(0, x(0, z_2), z_2)}{T(0, x(0, z_2), z_2) s_3^*(a(0, z_1, z_2))} Q_1^*(z_2), \\
 P^{(s_2)}(0, z_2, 0) &= R(0, z_2) Q_1^*(z_2), \\
 \bar{P}^{(s_1)}(z_1, z_2, 0) &= \frac{K(0, z_1, z_2)}{s_1^*(a(0, z_1, z_2))} R(0, z_2) Q_1^*(z_2), \\
 P^{(b_2)}(0, z_2, 0) &= s_2^*(a(0, 0, z_2)) R(0, z_2) Q_1^*(z_2),
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

$$\begin{aligned}
 P^{(v)}(0, z_2, 0) &= \frac{Q_2^*(z_2)}{v^*(a(0, 0, z_2))}, \\
 P^{(c)}(0, z_2, 0) &= \frac{Q_2^*(z_2)}{v^*(a(0, 0, z_2)) c^*(a(0, 0, z_2))}, \\
 P^{(s_3)}(z_1, z_2, 0) &= \frac{M(0, z_1, z_2)}{s_3^*(a(0, z_1, z_2))} \frac{Q_2^*(z_2)}{v^*(a(0, 0, z_2)) c^*(a(0, 0, z_2))},
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

όπου

$$\begin{aligned}
 Q_1^*(z_2) &= a \frac{d}{dz_2} Q^*(z_2) + \lambda_2 Q^*(z_2), \\
 Q_2^*(z_2) &= (\lambda_1 d^*(0, z_2) + \lambda_2 w^*(0, z_2)) Q^*(z_2) + \alpha w^*(0, z_2) \frac{d}{dz_2} Q^*(z_2),
 \end{aligned}$$

ενώ

$$\begin{aligned}
 P^{(s_1)}(z_1, z_2, 0) &= \lambda_1 z_1 Q^*(z_2) + P^{(v)}(0, z_2, 0) [v^*(a(0, z_1, z_2)) - v^*(a(0, 0, z_2))] \\
 &\quad + P^{(b_2)}(0, z_2, 0) [b_2^*(a(0, z_1, z_2)) - b_2^*(a(0, 0, z_2))],
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

$$P^{(b_1)}(z_1, z_2, 0) = \frac{h_1(0, z_1, z_2) \frac{d}{dz_2} Q^*(z_2) + h_2(0, z_1, z_2) Q^*(z_2)}{z_1 - b_1^*(a(0, z_1, z_2))}. \tag{4.44}$$

Αντίστοιχα, η διαφορική εξίσωση (4.32) γίνεται

$$\alpha(z_2 - D(0, z_2)) \frac{d}{dz_2} Q^*(z_2) + F(0, z_2) Q^*(z_2) = 0, \tag{4.45}$$

όπου $D(0, z_2) = w^*(0, z_2)$. Επιπλέον από τη σχέση (4.33) έχουμε

$$F(0, z_2) = \lambda_1(1 - d^*(0, z_2)) + \lambda_2(1 - D(0, z_2)) = \lambda[1 - G(z_2)],$$



όπου

$$G(z_2) = \frac{\lambda_1 d^*(0, z_2) + \lambda_2 w^*(0, z_2)}{\lambda}.$$

Εστω τώρα

$$\omega(z_2) = \frac{1 - G(z_2)}{z_2 - w^*(0, z_2)},$$

τότε από το Θεώρημα 4.1, για $\rho < 1$ η ποσότητα $z_2 - w^*(0, z_2)$ δεν μηδενίζεται πουθενά εντός του $|z_2| < 1$ και επιπλέον

$$\lim_{z_2 \rightarrow 1} \omega(z_2) = -\frac{\frac{\lambda_1}{\lambda} \bar{\rho}_d + \frac{\lambda_2}{\lambda} (\bar{\rho}_v + \bar{\rho}_c)}{1 - \rho} < \infty.$$

Αρα η $\omega(z_2)$ είναι αναλυτική συνάρτηση στο $|z_2| < 1$ και συνεχής στο σύνορο της. Επομένως η εξίσωση (4.45) μπορεί να επιλυθεί για κάθε $|z_2| \leq 1$ και προκύπτει

$$Q^*(z_2) = Q^*(1) \exp\left\{-\frac{\lambda}{\alpha} \int_{z_2}^1 \frac{1 - G(u)}{w^*(0, u) - u} du\right\}.$$

Αξίζει να παρατηρηθεί ότι όλες οι γεννήτριες συναρτήσεις που ορίστηκαν παραπάνω εκφράζονται σαν συναρτήσεις της $Q^*(z_2)$. Έτσι, ανακαθιστώντας την γεννήτρια $Q^*(z_2)$ στις παραπάνω γεννήτριες, θέτοντας $z_1 = z_2 = 1$ και απαιτώντας το συνολικό άθροισμα να ισούται με μονάδα τότε

$$Q^*(1) = \frac{1 - \rho}{1 - \lambda_1 \bar{b}_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \bar{\rho}_d},$$

και επομένως όλες οι γεννήτριες των πιθανοτήτων των καταστάσεων του συστήματος σε στατιστική ισορροπία είναι γνωστές.

Το επόμενο θεώρημα μας υποδεικνύει ότι η συνθήκη $\rho < 1$ είναι επίσης αναγκαία για να είναι το σύστημα μας ευσταθές.

Θεώρημα 4.4 Αν η στοχαστική διαδικασία Z είναι ευσταθής τότε $\rho < 1$.

Απόδειξη: Εστω ότι η Z είναι ευσταθής και ότι $\rho > 1$. Τότε από το Θεώρημα 4.1 η εξίσωση $z_2 - D(0, z_2) = 0$ έχει μοναδική ρίζα $0 < \phi(0, 1) < 1$ και επιπλέον

$$F(0, \phi(0, 1)) = \lambda_1(1 - d^*(0, \phi(0, 1))) + \lambda_2(1 - D(0, \phi(0, 1))) \neq 0.$$

Θέτοντας τώρα στην (4.45) $\phi(0, 1)$ αντί του z_2 προκύπτει ότι

$$F(0, \phi(0, 1))Q^*(\phi(0, 1)) = 0,$$



και επομένως $Q^*(\phi(0,1)) = \sum q_j^{(id)} \phi^j(0,1) = 0$ όπου $0 < \phi(0,1) < 1$. Άρα $q_j^{(id)} = 0 \quad \forall j$ και επαχθέν από τις γεννήτριες συναρτήσεις (4.39)-(4.44) είναι ξεκάθαρο ότι όλες οι πιθανότητες γίνονται μηδέν. Αυτό το αποτέλεσμα είναι αντίθετο με την υπόθεση ότι το σύστημα μας είναι ευσταθές.

Εστω τέλος ότι η Z είναι ευσταθής και ότι $\rho = 1$. Παραγωγίζοντας την (4.45) ως προς z_2 και θέτοντας $z_2 = 1$ προκύπτει στη περίπτωση όπου $\rho = 1$ ότι

$$\frac{d}{dz_2} F(0, z_2)|_{z_2=1} Q^*(1) = -[\lambda_1 E(N(W_1)) + \lambda_2 E(N(W_2))] Q^*(1) = 0,$$

και επομένως $Q^*(1) = \sum q_j^{(id)} = 0$, γεγονός που επίσης αντιτίθεται στην υπόθεση ότι το σύστημα μας είναι ευσταθές. $\square$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τους τύπους των γεννητριών συναρτήσεων που προέκυψαν παραπάνω, ώστε να υπολογίσουμε ορισμένα βασικά χαρακτηριστικά του συστήματος. Επομένως, θέτοντας $z_1 = z_2 = 1$ στις σχέσεις (4.39)-(4.44) βρίσκουμε τις πιθανότητες των καταστάσεων του υπαλλήλου σε στατιστική ισορροπία

$$P[\text{υπάλληλος άεργος}] = P(\xi = id) = Q^*(1) = \frac{1-\rho}{1-\lambda_1 \bar{b}_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \rho_d},$$

$$P[\text{απασχολημένος με } P_1 \text{ πελάτη}] = P(\xi = b_1) = \lambda_1 \bar{b}_1,$$

$$P[\text{απασχολημένος } P_2 \text{ πελάτη}] = P(\xi = b_2) = \lambda_2 \bar{b}_2,$$

$$P[\text{σε start up } P_2 \text{ πελάτη}] = P(\xi = s_2) = \frac{\lambda_2}{s_2^*(\lambda_1)} \frac{1-s_2^*(\lambda_1)}{\lambda_1},$$

$$P[\text{σε διακοπές}] = P(\xi = v) = \frac{\lambda_2 + \lambda_1 Q^*(1)}{v^*(\lambda_1)} \bar{v},$$

$$P[\text{σε close down}] = P(\xi = c) = \frac{1-c^*(\lambda_1)}{\lambda_1 c^*(\lambda_1)} \left[\lambda_2 \frac{1-s_2^*(\lambda_1)}{s_2^*(\lambda_1)} + \frac{\lambda_2 + \lambda_1 Q^*(1)}{v^*(\lambda_1)} \right],$$

$$P[\text{special start up για πελάτη } P_1] = P(\xi = s_3) = \lambda_1 \bar{s}_3 P(\xi = c),$$

$$P[\text{σε start up } P_1 \text{ πελάτη}] = P(\xi = s_1) = \bar{s}_1 \left[\frac{\lambda_2 + \lambda_1 Q^*(1)}{v^*(\lambda_1)} - \lambda_2 b_2^*(\lambda_1) + \lambda_2 \frac{1-s_2^*(\lambda_1)}{s_2^*(\lambda_1)} \right],$$

ενώ παραγωγίζοντας τις αντίστοιχες γεννήτριες ως προς z_1 και θέτοντας $z_1 = z_2 = 1$ προκύπτουν οι αναμενόμενοι αριθμοί των P_1 πελατών ανάλογα με την



κατάσταση που βρίσκεται ο υπάλληλος και δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις,

$$\begin{aligned} E(N_1; \xi = v) &= \frac{\lambda_1 \bar{v}^{(2)}}{2v^*(\lambda_1)} (\lambda_2 + \lambda_1 Q^*(1)), \\ E(N_1; \xi = s_3) &= (1 - c^*(\lambda_1)) (\bar{s}_3 + \frac{\lambda_1 \bar{s}_3^{(2)}}{2}) (\frac{\lambda_2 + \lambda_1 Q^*(1)}{c^*(\lambda_1) v^*(\lambda_1)} + \lambda_2 \frac{1 - s_2^*(\lambda_1)}{c^*(\lambda_1) s_2^*(\lambda_1)}), \\ E(N_1; \xi = s_1) &= \lambda_1 \bar{s}_1 [Q^*(1) + \frac{\bar{v}}{v^*(\lambda_1)} (\lambda_2 + \lambda_1 Q^*(1)) + \lambda_2 \bar{b}_2] + \frac{\lambda_1 \bar{s}_1^{(2)}}{2} \\ &\quad \times [\frac{\lambda_2 + \lambda_1 Q^*(1)}{v^*(\lambda_1)} - \lambda_2 \bar{b}_2^*(\lambda_1)] + \frac{\lambda_2 (1 - s_2^*(\lambda_1)) (\bar{s}_1 + \lambda_1 \frac{\bar{s}_1^{(2)}}{2})}{s_2^*(\lambda_1)}, \\ E(N_1; \xi = b_2) &= \frac{\lambda_1 \lambda_2 \bar{b}_2^{(2)}}{2}, \\ E(N_1; \xi = b_1) &= \frac{\lambda_1 \bar{b}_1}{2(1 - \lambda_1 \bar{b}_1)} (\lambda_1 \bar{b}_1^{(2)} / \bar{b}_1 + A_1 + A_2), \end{aligned}$$

όπου

$$A_1 = \frac{\lambda_2 (1 - s_2^*(\lambda_1))}{s_2^*(\lambda_1) c^*(\lambda_1)} \left[(1 - c^*(\lambda_1)) (\lambda_1 \bar{s}_3^{(2)} + 2\bar{s}_3) + c^*(\lambda_1) (\lambda_1 \bar{s}_1^{(2)} + 2\bar{s}_1) \right],$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \lambda_1 (\lambda_1 \bar{s}_1^{(2)} + 2\bar{s}_1) Q^*(1) + \frac{\lambda_2 + \lambda_1 Q^*(1)}{c^*(\lambda_1) v^*(\lambda_1)} \left[(1 - c^*(\lambda_1)) (\lambda_1 \bar{s}_3^{(2)} + 2\bar{s}_3) \right. \\ &\quad \left. + \lambda_1 c^*(\lambda_1) (\bar{s}_1^{(2)} (1 - v^*(\lambda_1)) + 2\bar{s}_1 \bar{v} + \bar{v}^{(2)}) \right] \\ &\quad + \lambda_1 \lambda_2 (\bar{s}_1^{(2)} (1 - b_2^*(\lambda_1)) + 2\bar{s}_1 \bar{b}_2 + \bar{b}_2^{(2)}), \end{aligned}$$

ενώ $\bar{a}^{(2)}$ η ροπή δεύτερης τάξης πέρι το μηδέν μάζ οποιασδήποτε σ.π.π. $a(t)$.

Για να υπολογίσουμε εκφράσεις για τον αναμενόμενο αριθμό των πελατών στην ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων, θα χρειαστεί να παραγωγίσουμε τις σχέσεις (4.39)-(4.44) ως προς z_2 και να θέσουμε $z_1 = z_2 = 1$. Σε πρώτη φάση θα υπολογίσουμε τις παραγώγους ορισμένων συναρτήσεων που ορίστηκαν παραπάνω. Εστω,

$$\begin{aligned} U(0, x(0, z_2), z_2) &= \frac{K(0, x(0, z_2), z_2)}{T(0, x(0, z_2), z_2)}, \quad U = U(0, 1, 1) = \frac{1 - s_2^*(\lambda_1)}{c^*(\lambda_1) s_2^*(\lambda_1)}, \\ Q^{*(n)} &= \frac{d^n}{dz_2^n} Q^*(z_2) \Big|_{z_2=1}, \quad n = 1, 2. \end{aligned}$$

Τότε,

$$\begin{aligned} Q^{*(1)} &= \frac{\lambda_2}{\alpha} \left(\frac{\lambda_1 \bar{\rho}_d + \lambda_2 (\bar{\rho}_c + \bar{\rho}_u)}{\lambda_1 \bar{\rho}_d + \lambda_2 (1 - \lambda_1 \bar{b}_1)} \right), \\ Q^{*(2)} &= \frac{\lambda_1 \bar{\rho}_d + \lambda_2 (\bar{\rho}_c + \bar{\rho}_u)}{\alpha (1 - \rho)} Q^{*(1)} + \frac{1 - \lambda_1 \bar{b}_1}{2\alpha (1 - \rho)} [\lambda_2 \rho_w^{(2)} + \lambda_1 \rho_d^{(2)} Q^*(1)], \end{aligned}$$



$$H_1 = \alpha Q^{*(2)} + \lambda_2 Q^{*(1)}, \quad H_2 = \alpha Q^{*(2)} + (\lambda + \alpha) Q^{*(1)}$$

όπου οι ποσότητες $\rho_d^{(2)}$ και $\rho_w^{(2)}$ δίνονται παρακάτω από τις σχέσεις (4.46) και (4.47) αντίστοιχα. Ας υποθέσουμε ότι για οποιαδήποτε συνάρτηση $f^*(z_2)$ ισχύει $f^{*(\nu)} = \frac{d^\nu}{dz_2^\nu} f^*(z_2)|_{z_2=1}$ και

$$\sigma_{f^*}(z_2) = \left(\frac{1-f^*(a(0,0,z_2))}{a(0,0,z_2)} \right), \quad \sigma_{f^*} = \sigma_{f^*}(1) = \frac{1-f^*(\lambda_1)}{\lambda_1},$$

$$\sigma_{f^*}^{(1)} = \frac{d}{dz_2} \sigma_{f^*}(z_2)|_{z_2=1} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 f^{*(1)}(\lambda_1) + \lambda_2 (1-f^*(\lambda_1))}{\lambda_1^2},$$

$$\sigma_{f^*}^{(2)} = \frac{d^2}{dz_2^2} \sigma_{f^*}(z_2)|_{z_2=1} = \frac{-\lambda_1^2 \lambda_2^2 f^{*(2)}(\lambda_1) + 2\lambda_2 (\lambda_1 \lambda_2 f^{*(1)}(\lambda_1) + \lambda_2 (1-f^*(\lambda_1)))}{\lambda_1^3},$$

ενώ για τη συνάρτηση $w(0, x(0, z_2), z_2)$, έστω $\tilde{w}^{(v)} = \frac{d^v}{dz_2^v} w(0, x(0, z_2), z_2)|_{z_2=1}$. Τότε

$$\hat{K}^{(1)} = \lambda_2 s_2^{*(1)}(\lambda_1) + \frac{\lambda_2}{1-\lambda_1 b_1} \sigma_{s_2^*}(1 + \lambda_1 \bar{s}_1),$$

$$\hat{M}^{(1)} = \lambda_2 c^{*(1)}(\lambda_1) + \frac{\lambda_2}{1-\lambda_1 b_1} \sigma_{c^*}(1 + \lambda_1 \bar{s}_3),$$

$$\hat{T}^{(1)} = -\hat{K}^{(1)} c^*(\lambda_1) + \lambda_1 \lambda_2 c^{*(1)}(\lambda_1) \sigma_{s_2^*} - \hat{M}^{(1)},$$

$$\hat{U}^{(1)} = \{\hat{K}^{(1)} c^*(\lambda_1) s_2^*(\lambda_1) - \hat{T}^{(1)} \lambda_1 \sigma_{s_2^*}\} / (c^*(\lambda_1) s_2^*(\lambda_1))^2,$$

$$\hat{e}^{(1)} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1(1-\lambda_1 b_1)} \left[\frac{\lambda_1 \sigma_{c^*}(1 + \lambda_1 \bar{s}_3) + \lambda_1 c^*(\lambda_1) (\bar{v} + \bar{s}_1 \lambda_1 \sigma_{v^*})}{c^*(\lambda_1) v^*(\lambda_1)} \right],$$

$$\hat{L}^{(1)} = -\lambda_2 s_2^{*(1)}(\lambda_1) + \frac{\lambda_2}{1-\lambda_1 b_1} s_2^*(\lambda_1) (\bar{b}_2 + \bar{s}_1 \lambda_1 \sigma_{b_2^*}),$$

$$R^{(1)} = \frac{d}{dz_2} R(0, z_2)|_{z_2=1} = c^*(\lambda_1) \hat{U}^{(1)} - \frac{\lambda_2 c^{*(1)}(\lambda_1) \lambda_1 \sigma_{s_2^*}}{c^*(\lambda_1) s_2^*(\lambda_1)},$$

όπου $\hat{U}^{(v)}$, $\hat{e}^{(v)}$ οι παράγωγοι v τάξης ως προς z_2 των συναρτήσεων $U(0, x(0, z_2), z_2)$, $e(0, x(0, z_2), z_2)$ αντίστοιχα, ενώ οι συναρτήσεις K, M, T, L, R , έχουν οριστεί σε προηγούμενα εδάφια. Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω ποσότητες προκύπτουν τα ακόλουθα αποτελέσματα για τους πελάτες της ουράς των επαναλαμβανόμενων αφίξεων.

$$E(N_2; \xi = v) = \frac{\bar{v}}{v^*(\lambda_1)} H_2 + \frac{\lambda_2 + \lambda_1 Q^*(1)}{v^*(\lambda_1)} \lambda_2 \left[\frac{\bar{v}^{(2)}}{2} + \frac{v^{*(1)}(\lambda_1)}{v^*(\lambda_1)} \bar{v} \right],$$

$$E(N_2; \xi = s_2) = \sigma_{s_2^*} [\lambda_2 R^{(1)} + \frac{H_1}{s_2^*(\lambda_1)}] + \frac{\lambda_2}{s_2^*(\lambda_1)} \sigma_{s_2^*}^{(1)},$$

$$E(N_2; \xi = b_2) = \bar{b}_2 [s_2^*(\lambda_1) (\lambda_2 R^{(1)} + \frac{H_1}{s_2^*(\lambda_1)}) - \lambda_2^2 \frac{s_2^{*(1)}(\lambda_1)}{s_2^*(\lambda_1)}] + \frac{\lambda_2^2}{2} \bar{b}_2^{(2)},$$



$$E(N_2; \xi = c) = \sigma_c \{ [\lambda_2 U^{(1)} + H_1 U] + \frac{1}{c^*(\lambda_1) v^*(\lambda_1)} [H_2 + \frac{(\lambda_2 + \lambda_1 Q^*(1))}{c^*(\lambda_1) v^*(\lambda_1)} \lambda_2 \\ \times (c^{*(1)}(\lambda_1) v^*(\lambda_1) + c^*(\lambda_1) v^{*(1)}(\lambda_1))] \} + \sigma_c^{(1)} [\lambda_2 U + \frac{(\lambda_2 + \lambda_1 Q^*(1))}{c^*(\lambda_1) v^*(\lambda_1)}],$$

$$E(N_2; \xi = s_3) = \lambda_1 \{ \bar{s}_3 E(N_2; \xi = c) + \frac{\lambda_2}{2} \bar{s}_3^{(2)} P(\xi = c) \},$$

$$E(N_2; \xi = s_1, u = 1) = \lambda_1 \bar{s}_1 [\frac{\lambda_2}{s_2^*(\lambda_1)} \sigma_{s_2}^{(1)} + \sigma_{s_2} (\lambda_2 R^{(1)} + \frac{H_1}{s_2^*(\lambda_1)})] \\ + \frac{\lambda_2^2 \lambda_1}{2 s_2^*(\lambda_1)} \bar{s}_1^{(2)} \sigma_{s_2},$$

$$E(N_2; \xi = s_1, u = 0) = \frac{\lambda_2 \bar{s}_1^{(2)}}{2} [\frac{\lambda_2 + \lambda_1 Q^*(1)}{v^*(\lambda_1)} - \lambda_2 b_2^*(\lambda_1)] + \bar{s}_1 \{ \frac{\lambda_2 + \lambda_1 Q^*(1)}{v^*(\lambda_1)} \lambda_2 [\bar{v} \\ + v^{*(1)}(\lambda_1)] + \lambda_1 Q^{*(1)} + \frac{\lambda_1 \sigma_{v^*}}{v^*(\lambda_1)} [H_2 + \frac{\lambda_2 v^{*(1)}(\lambda_1)}{v^*(\lambda_1)} (\lambda_2 + \lambda_1 Q^*(1))] \\ + \lambda_1 \sigma_{b_2} [s_2^*(\lambda_1) (\lambda_2 R^{(1)} + \frac{H_1}{s_2^*(\lambda_1)}) - \frac{\lambda_2^2 s_2^{*(1)}(\lambda_1)}{s_2^*(\lambda_1)}] \\ + \lambda_2^2 (\bar{b}_2 + b_2^{*(1)}(\lambda_1)) \}.$$

Για τον υπολογισμό της $E(N_2; \xi = b_1)$ χρειαζόμαστε επιπλέον και τις ακόλουθες σχέσεις,

$$\hat{K}^{(2)} = 2 \frac{\lambda_2^2 s_2^{*(1)}(\lambda_1)}{\lambda_1 (1 - \lambda_1 b_1)} (1 + \lambda_1 \bar{s}_1) + \frac{2 \lambda_2^2}{\lambda_1 (1 - \lambda_1 b_1)} \sigma_{s_2} - \lambda_2^2 s_2^{*(2)}(\lambda_1) \\ + \frac{\lambda_2^2 \sigma_{s_2}}{(1 - \lambda_1 b_1)^2} [(\lambda_1 \bar{s}_1^{(2)} + 2 \bar{s}_1) + \frac{\lambda_1 \bar{b}_1^{(2)}}{1 - \lambda_1 b_1} (1 + \lambda_1 \bar{s}_1)], \\ \hat{M}^{(2)} = 2 \frac{\lambda_2^2 c^{*(1)}(\lambda_1)}{\lambda_1 (1 - \lambda_1 b_1)} (1 + \lambda_1 \bar{s}_3) + 2 \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1 (1 - \lambda_1 b_1)} \sigma_c - \lambda_2^2 c^{*(2)}(\lambda_1) \\ + \frac{\lambda_2^2 \sigma_c}{(1 - \lambda_1 b_1)^2} [(\lambda_1 \bar{s}_3^{(2)} + 2 \bar{s}_3) + \frac{\lambda_1 \bar{b}_1^{(2)}}{1 - \lambda_1 b_1} (1 + \lambda_1 \bar{s}_3)], \\ \hat{L}^{(2)} = \lambda_2^2 s_2^{*(2)}(\lambda_1) - 2 \frac{\lambda_2^2 s_2^{*(1)}(\lambda_1) (\bar{b}_2 + s_1)}{1 - \lambda_1 b_1} + 2 \frac{\lambda_2^2 \bar{s}_1 (s_2^{*(1)}(\lambda_1) b_2^*(\lambda_1) + s_2^*(\lambda_1) b_2^{*(1)}(\lambda_1))}{1 - \lambda_1 b_1} \\ + \frac{\lambda_2^2 s_2^*(\lambda_1)}{(1 - \lambda_1 b_1)^2} [\frac{\lambda_1 \bar{b}_1^{(2)}}{1 - \lambda_1 b_1} (\bar{b}_2 + \lambda_1 \bar{s}_1 \sigma_{b_2}) + (\bar{b}_2^{(2)} + \lambda_1 \bar{s}_1^{(2)} \sigma_{b_2} + 2 \bar{s}_1 \bar{b}_2)], \\ \hat{e}^{(2)} = \hat{j} + 2 \left(\frac{\lambda_2 (c^{*(1)}(\lambda_1) v^*(\lambda_1) + c^*(\lambda_1) v^{*(1)}(\lambda_1))}{c^*(\lambda_1) v^*(\lambda_1)} + \hat{e}^{(1)} \right) \hat{e}^{(1)},$$



όπου

$$\begin{aligned} \hat{J} = & \{ \hat{M}^{(2)} + \lambda_2^2 c^{*(2)}(\lambda_1) - \frac{2\lambda_2^2 c^{*(1)}(\lambda_1)(\bar{v} + \bar{s}_1)}{1 - \lambda_1 \bar{s}_1} \\ & + \frac{2\lambda_2^2 \bar{s}_1 (c^{*(1)}(\lambda_1)v^*(\lambda_1) + c^{*(\lambda_1)}v^*(\lambda_1))}{1 - \lambda_1 \bar{s}_1} + \frac{\lambda_2^2 c^{*(\lambda_1)}[\bar{s}_1^{(2)}\lambda_1\sigma_{v^*} + 2\bar{s}_1\bar{v} + \bar{v}^{(2)}]}{(1 - \lambda_1 \bar{s}_1)^2} \\ & + \frac{\lambda_1 \bar{s}_1^{(2)}}{1 - \lambda_1 \bar{s}_1} (\bar{v} + \bar{s}_1\lambda_1\sigma_{v^*}) \} / [c^*(\lambda_1)v^*(\lambda_1)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{T}^{(2)} &= -\hat{K}^{(2)}c^*(\lambda_1) + 2\lambda_2 c^{*(1)}(\lambda_1)\hat{K}^{(1)} - \lambda_2^2 c^{*(2)}(\lambda_1)\lambda_1\sigma_{s_2^*} - \hat{M}^{(2)}, \\ \hat{U}^{(2)} &= \frac{\hat{K}^{(2)} - 2\hat{T}^{(1)(1)} - \hat{T}^{(2)}U}{c^*(\lambda_1)s_2^*(\lambda_1)}. \end{aligned}$$

Εστω τώρα, $\tilde{w}^{(\nu)} = \frac{d^\nu}{dz_2^\nu} w(0, 1, z_2)|_{z_2=1}$ η ν οστή παράγωγος οποιαδήποτε συνάρτησης $w(0, z_1, z_2)$. Τότε

$$\begin{aligned} \tilde{K}^{(1)} &= \lambda_1 [\lambda_2 \bar{s}_1 \sigma_{s_2^*} + \sigma_{s_2^*}^{(1)}], \quad \tilde{K}^{(2)} = \lambda_1 [\sigma_{s_2^*}^{(2)} + \lambda_2^2 \bar{s}_1^{(2)} \sigma_{s_2^*} + 2\lambda_2 \bar{s}_1 \sigma_{s_2^*}^{(1)}], \\ \tilde{M}^{(1)} &= \lambda_1 [\lambda_2 \bar{s}_3 \sigma_{c^*} + \sigma_{c^*}^{(1)}], \quad \tilde{M}^{(2)} = \lambda_1 [\sigma_{c^*}^{(2)} + \lambda_2^2 \bar{s}_3^{(2)} \sigma_{c^*} + 2\lambda_2 \bar{s}_3 \sigma_{c^*}^{(1)}], \\ \tilde{T}^{(1)} &= -\tilde{K}^{(1)}c^*(\lambda_1) + \lambda_2 c^{*(1)}(\lambda_1)\lambda_1\sigma_{s_2^*} - \tilde{M}^{(1)}, \\ \tilde{T}^{(2)} &= -\tilde{K}^{(2)}c^*(\lambda_1) + 2\lambda_2 c^{*(1)}(\lambda_1)\tilde{K}^{(1)} - \lambda_2^2 c^{*(2)}(\lambda_1)\lambda_1\sigma_{s_2^*} - \tilde{M}^{(2)}, \\ \tilde{R}^{(1)} &= -\frac{d}{dz_2} \tilde{R}(0, 1, z_2)|_{z_2=1} = \tilde{T}^{(1)}U + c^*(\lambda_1)s_2^*(\lambda_1)\tilde{U}^{(1)} - \tilde{K}^{(1)}, \\ \tilde{R}^{(2)} &= -\frac{d^2}{dz_2^2} \tilde{R}(0, 1, z_2)|_{z_2=1} = \tilde{T}^{(2)}U + 2\tilde{T}^{(1)}\tilde{U}^{(1)} + c^*(\lambda_1)s_2^*(\lambda_1)\tilde{U}^{(2)} - \tilde{K}^{(2)}, \end{aligned}$$

και τελικά,

$$E(N_2; \xi = b_1, u = 1) = \frac{H_1}{\lambda_2} \tilde{R}^{(1)} + \frac{\tilde{R}^{(2)}}{2}.$$

Τέλος, για τον υπολογισμό της $E(N_2; \xi = b_1, u = 0)$, χρειαζόμαστε επιπλέον τις παραγώγους στο σημείο $z_2 = 1$, των συναρτήσεων $L(0, 1, z_2)$, $h_i(0, 1, z_2)$, $i = 1, 2$, και $e_1(0, 1, z_2) = 1/e(0, 1, z_2)$ που ορίστηκαν στα προη-



γούμενα εδάφια. Τότε μετά από πράξεις

$$\begin{aligned}\tilde{L}^{(1)} &= -\lambda_2 s_2^{*(1)}(\lambda_1) + \lambda_2 s_2^*(\lambda_1) (\bar{b}_2 + \bar{s}_1 \lambda_1 \sigma_{b_2^*}), \\ \tilde{L}^{(2)} &= \lambda_2^2 s_2^{*(2)}(\lambda_1) + 2\lambda_2^2 \bar{s}_1 (s_2^{*(1)}(\lambda_1) b_2^*(\lambda_1) + s_2^*(\lambda_1) b_2^{*(1)}(\lambda_1)) \\ &\quad + \lambda_2^2 s_2^*(\lambda_1) (\bar{s}_1^{(2)} \lambda_1 \sigma_{b_2^*} + 2\bar{s}_1 \bar{b}_2 + \bar{b}_2^{(2)}) - 2\lambda_2^2 s_2^{*(1)}(\lambda_1) (\bar{b}_2 + \bar{s}_1), \\ R^{(2)} &= \frac{d^2}{dz^2} R(0, z_2)|_{z_2=1} = \lambda_2^2 c^{*(2)}(\lambda_1) U - 2\lambda_2 c^{*(1)}(\lambda_1) \check{U}^{(1)} + c^*(\lambda_1) \check{U}^{(2)}, \\ \tilde{e}_1^{(1)} &= -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left[\frac{\lambda_1 \sigma_{v^*} (1 + \lambda_1 \bar{s}_3) + \lambda_1 c^*(\lambda_1) (\bar{v} + \bar{s}_1 \lambda_1 \sigma_{v^*})}{c^*(\lambda_1) v^*(\lambda_1)} \right], \\ \tilde{e}_1^{(2)} &= 2\lambda_2 \left[\frac{c^{*(1)}(\lambda_1) v^*(\lambda_1) + c^*(\lambda_1) v^{*(1)}(\lambda_1)}{c^*(\lambda_1) v^*(\lambda_1)} \right] \tilde{e}_1^{(1)} - (1 - \lambda_1 \bar{b}_1) \hat{J} + \frac{\lambda_1 \lambda_2^2}{(1 - \lambda_1 \bar{b}_1)^2} \\ &\quad \times \left[\frac{\bar{b}_1 (1 - \lambda_1 \bar{b}_1) (\sigma_{e^*}(\lambda_1 \bar{s}_3^{(2)} + 2\bar{s}_3) + c^*(\lambda_1) (\bar{s}_1^{(2)} \lambda_1 \sigma_{v^*} + 2\bar{s}_1 \bar{v} + \bar{v}^{(2)}))}{c^*(\lambda_1) v^*(\lambda_1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\bar{b}_1^{(2)} (\sigma_{e^*} (1 + \lambda_1 \bar{s}_3) + c^*(\lambda_1) (\bar{v} + \lambda_1 \sigma_{v^*} \bar{s}_1))}{c^*(\lambda_1) v^*(\lambda_1)} \right],\end{aligned}$$

ενώ

$$\begin{aligned}\tilde{h}_1^{(2)} &= \alpha \{ \tilde{L}^{(2)} / s_2^*(\lambda_1) + 2\tilde{L}^{(1)} R^{(1)} + s_2^*(\lambda_1) \tilde{R}^{(2)} - 2\tilde{e}_1^{(1)} - \tilde{e}_1^{(2)} \}, \\ \tilde{h}_2^{(2)} &= \lambda_1 \lambda_2^2 \bar{s}_1^{(2)} - \lambda_1 \tilde{e}_1^{(2)} + \frac{\lambda_2}{\alpha} \tilde{h}_1^{(2)}, \\ \tilde{h}_1^{(1)} &= \alpha \{ \tilde{L}^{(1)} / s_2^*(\lambda_1) + s_2^*(\lambda_1) R^{(1)} - 1 - \tilde{e}_1^{(1)} \}, \\ \tilde{h}_2^{(1)} &= \lambda_1 \lambda_2 \bar{s}_1 + \frac{\lambda_2}{\alpha} \tilde{h}_1^{(1)} - \lambda_1 \tilde{e}_1^{(1)}.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω,

$$\begin{aligned}E(N_2; \xi = b_1, u = 0) &= -\frac{1}{2\lambda_2} \{ 2\tilde{h}_1^{(1)} Q^{*(2)} + \tilde{h}_2^{(2)} Q^*(1) \\ &\quad + (\tilde{h}_1^{(2)} + 2\tilde{h}_2^{(1)}) \frac{Q^*(1)}{\alpha} \left(\frac{\lambda_1 \bar{\rho}_d + \lambda_2 (\bar{\rho}_e + \bar{\rho}_v)}{1 - \rho} \right) \},\end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned}\rho_r &= \frac{\lambda_2 \sigma_{e^*} (1 + \lambda_1 \bar{s}_3)}{(1 - \lambda_1 \bar{b}_1) c^*(\lambda_1)}, \\ \rho_r^{(2)} &= \frac{2\lambda_2^2 [c^{*(1)}(\lambda_1) (1 + \lambda_1 \bar{s}_3) + c^*(\lambda_1) \sigma_{e^*}]}{\lambda_1 (1 - \lambda_1 \bar{b}_1) (c^*(\lambda_1))^2} + \frac{\lambda_2^2 \sigma_{e^*} (\lambda_1 \bar{s}_3^{(2)} + 2\bar{s}_3)}{c^*(\lambda_1) (1 - \lambda_1 \bar{b}_1)^2} + 2\rho_r^2 + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \bar{b}_1^{(2)} \rho_r}{(1 - \lambda_1 \bar{b}_1)^2}, \\ \rho_d^{(2)} &= \frac{\lambda_2^2 \bar{b}_1^{(2)}}{(1 - \lambda_1 \bar{b}_1)^3} (1 + \lambda_1 \bar{s}_1) + 2 \frac{\lambda_2 (\bar{b}_1 + \bar{s}_1) (1)}{(1 - \lambda_1 \bar{b}_1)^2} + \frac{\lambda_2^2}{(1 - \lambda_1 \bar{b}_1)^2} (\bar{s}_1^{(2)} + 2\bar{b}_1 \bar{s}_1) + \check{e}^{(2)},\end{aligned}\tag{4.46}$$

$$\begin{aligned}\rho_w^{(2)} &= \frac{1}{s_2^*(\lambda_1)} \{ \hat{L}^{(2)} + \hat{K}^{(2)} + 2(\hat{L}^{(1)} \check{e}^{(1)} + \hat{K}^{(1)} \rho_r) + s_2^*(\lambda_1) \check{e}^{(2)} + \lambda_1 \sigma_{s_2^*} \rho_r^{(2)} \\ &\quad + 2\lambda_2 \rho_w \{ s_2^{*(1)}(\lambda_1) + \frac{\sigma_{e^*} [\lambda_1 \sigma_{e^*} (1 + \lambda_1 \bar{s}_3) + c^*(\lambda_1) (1 + \lambda_1 \bar{s}_1)]}{(1 - \lambda_1 \bar{b}_1) c^*(\lambda_1)} \} \}.\end{aligned}\tag{4.47}$$



4.7 Αριθμητικά αποτελέσματα

Στο παρόν εδάφιο θα παρουσιαστούν ορισμένα αριθμητικά αποτελέσματα, τα οποία δίνουν πολύτιμες πληροφορίες σχετικά με την λειτουργία του συστήματος σε στατιστική ισορροπία. Το σημαντικότερο χαρακτηριστικό μέτρο του μοντέλου μας, αποτελεί ο αναμενόμενος αριθμός, $E(N_2)$, των P_2 πελατών που βρίσκονται στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων. Είναι προφανές ότι αν ο αριθμός των εν λόγω πελατών που προσπαθούν να συνδεθούν με τον υπαλλήλο είναι αρκετά μεγάλος θα επηρεάσει δραματικά την λειτουργία και ειδικότερα την εφαρμογή του εν λόγω μοντέλου. Αρα κρίνεται σκόπιμη η μελέτη του αριθμού των πελατών του κουτιού των επαναλαμβανόμενων αφίξεων ώστε να αποφύγουμε περιπτώσεις με υπερβολικά μεγάλο αριθμό τέτοιων πελατών.

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τις πιθανογεννήτριες συναρτήσεις που υπολογίστηκαν στο προηγούμενο εδάφιο, ώστε να κατασκευάσουμε πίνακες με αριθμητικά αποτελέσματα για το $E(N_2)$. Επιπλέον θα μελετήσουμε τον τρόπο με τον οποίο το $E(N_2)$ επηρεάζεται από “εξωτερικούς”, για τους P_2 πελάτες, παράγοντες, όπως ο ρυθμός αφίξεων των P_1 πελατών, ο χρόνος προετοιμασίας (startup), ο χρόνος αποφόρτισης (close down) και η περίοδος διακοπών του υπαλλήλου.

Για να κατασκευάσουμε τους εν λόγω πίνακες θα υποθέσουμε ότι όλες οι εμπλεκόμενες τ.μ. προέρχονται από την εκθετική κατανομή με σ.π.π. τις,

$$\xi(x) = \frac{1}{\xi} e^{-(1/\xi)x}, \quad \xi = b_1, b_2, b_3, s_1, s_2, s_3, c, v.$$

Επιπλέον υποθέτουμε ότι σε όλους τους ακόλουθους πίνακες ισχύει $\bar{b}_1 = 1$, $\bar{b}_2 = 0.5$, $\bar{s}_2 = 0.33$, $\bar{s}_3 = 0.5$, $\lambda_2 = 0.1$, $\alpha = 0.8$.

Ο Πίνακας 4.1 παρουσιάζει τον τρόπο με τον οποίο το $E(N_2)$ μεταβάλλεται όταν αλλάζουμε τις τιμές της μέσης διάρκειας της περιόδου προετοιμασίας του υπαλλήλου για τους P_1 πελάτες $\bar{s}_1$, για αυξανόμενες τιμές του ρυθμού αφίξεων λ_1 . Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι ακόμα και για μικρές τιμές του λ_1 , έστω $\lambda_1 = 0.2$, το $E(N_2)$ αυξάνει από 0.4652 σε 7.212 καθώς μεταβαίνουμε από ένα σύστημα χωρίς περίοδο προετοιμασίας ($\bar{s}_1 = 0$) σε ένα σύστημα με $\bar{s}_1 = 10$. Επιπλέον, όταν η τιμή του λ_1 αυξηθεί σε $\lambda_1 = 0.6$, τότε ακόμα και μία μικρή αύξηση της τιμής της μέσης διάρκειας προετοιμασίας από $\bar{s}_1 = 0$ σε $\bar{s}_1 = 0.2$,



αυξάνει δραματικά τον αναμενόμενο αριθμό των P_2 πελατών σε 145.78.

$\lambda_1 / \bar{s}_1$	0	0.2	1	1.5	2.5	4	6	7.8	10
0.1	0.2395	0.2539	0.3212	0.3696	0.4844	0.6913	1.03	1.3986	1.935
0.2	0.4652	0.5024	0.6757	0.8015	1.1052	1.6862	2.7758	4.2383	7.212
0.3	0.8453	0.927	1.3211	1.6243	2.431	4.3821	10.929	55.865	
0.35	1.1535	1.2774	1.8995	2.4092	3.924	8.9728	243.8		
0.4	1.6182	1.8163	2.8822	3.8585	7.5091	49.269			
0.45	2.3853	2.7343	4.876	7.3469	26.985				
0.5	3.8457	4.5869	10.839	26.155					
0.55	7.5224	9.9732	436.92						
0.6	31.056	145.78							

Πίνακας 4.1: Τιμές του $E(N_2)$ για $\bar{v} = 0.8$, $\bar{c} = 0.8$.

Ο Πίνακας 4.2 περιέχει τιμές του $E(N_2)$ όταν μεταβάλουμε την τιμή της μέσης διάρκειας της περιόδου αποφόρτισης $\bar{c}$, ενώ ο Πίνακας 4.3 περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο το $E(N_2)$ επηρεάζεται όταν αλλάζουμε την τιμή της μέσης διάρκειας των διακοπών του υπαλλήλου $\bar{v}$. Εύκολα παρατηρούμε ότι τόσο η περίοδος αποφόρτισης, όσο και η περίοδος διακοπών του υπαλλήλου έχουν σημαντικό ρόλο στην λειτουργία του συστήματος αυξάνοντας, σε μερικές περιπτώσεις δραματικά, τον αναμενόμενο αριθμό των P_2 πελατών στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων. Επομένως θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί, όσον αφορά τον καθορισμό του μέγιστου χρόνου αποφόρτισης και διακοπών που επιτρέπουμε, ώστε να αποφύγουμε την περίπτωση μεγάλου αριθμού P_2 πελατών.

$\lambda_1 / \bar{c}$	0	0.2	0.5	1	1.5	2	2.5	4	5.5
0.1	0.28	0.3111	0.3639	0.4707	0.6063	0.7803	1.0076	2.4011	12.681
0.2	0.6182	0.6877	0.8064	1.0549	1.3974	1.8995	2.7049	36.598	
0.3	1.1733	1.3316	1.6197	2.3165	3.5706	6.502	21.255		
0.35	1.6156	1.8707	2.365	3.7502	7.2182	31.788			
0.4	2.2762	2.7217	3.6762	7.2288	35.04				
0.45	3.3626	4.2503	6.5447	26.877					
0.5	5.4541	7.7336	17.386						
0.55	10.999	22.878							
0.6	63.439								

Πίνακας 4.2: Τιμές του $E(N_2)$ για $\bar{v} = 0.8$, $\bar{s}_1 = 2$.



$\lambda_1 / \bar{v}$	0	0.2	0.5	0.7	1	1.2	1.5	2	4
0.1	0.2376	0.2727	0.3387	0.3934	0.4964	0.5819	0.7376	1.1357	27.037
0.2	0.4731	0.5543	0.7165	0.8599	1.1542	1.4253	1.9924	4.0831	
0.3	0.8156	0.9899	1.3703	1.747	2.6646	3.7358	7.1767	16.32	
0.35	1.0639	1.3244	1.9345	2.5996	4.5293	7.5617	36.539		
0.4	1.4031	1.8082	2.8586	4.1969	9.8411	35.188			
0.45	1.896	2.5663	4.6254	8.1817	122.05				
0.5	2.6699	3.9085	9.2276	33.959					
0.55	4.043	6.8615	47.37						
0.6	7.0629	18.06							
0.65	18.387								

Πίνακας 4.3 : Τιμές του $E(N_2)$ για $\bar{c} = 0.8$, $\bar{s}_1 = 2$.

4.8 Ανακεφαλαίωση-Παρατηρήσεις

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήθηκε ένα μοντέλο ουράς επαναλαμβανόμενων αφίξεων με έναν υπάλληλο και δύο κλάσεις πελατών. Για να αρχίσει ο υπάλληλος να εξυπηρετεί έναν πελάτη οποιασδήποτε κλάσης, χρειάζεται μία περίοδο προετοιμασίας, ενώ κάθε φορά που δεν θα υπάρχουν πελάτες να αναμένουν να εξυπηρετηθούν (δηλαδή δεν υπάρχουν πελάτες στην κανονική ουρά και στον χώρο εξυπηρέτησης) ο υπάλληλος ενεργοποιεί μία περίοδο αποφόρτισης και κατόπιν αυτής αναχωρεί για αβλές διακοπές. Παρόλο που το μοντέλο μας είναι αρκετά πολύπλοκο, εμπεριέχοντας έναν μεγάλο αριθμό τ.μ., καταφέραμε να το περιγράψουμε και να το επιλύσουμε με αποτελέσματα σε κλειστή μορφή. Η στοχαστική διαδικασία που περιγράφει το μοντέλο μας είναι μία ημιαναγεννητική διαδικασία και ανακαλύπτοντας μία Μαρκοβιανή ανανεωτική διαδικασία σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές χρησιμοποιήσαμε την Μαρκοβιανή θεωρία ανανεώσεων ώστε να βρούμε την συνθήκη στατιστικής ισορροπίας του συστήματος μας. Ακολούθως, χρησιμοποιήσαμε την μέθοδο της συμπληρωματικής μεταβλητής για να υπολογίσουμε τις γεννήτριες συναρτήσεις των πιθανοτήτων των καταστάσεων του συστήματος, τόσο σε συνεχή χρόνο, όσο και σε στατιστική ισορροπία. Τέλος, με την βοήθεια των εν λόγω γεννητριών κατασκευάσαμε πίνακες με αριθμητικά αποτελέσματα, τα οποία μας δίνουν σημαντικές πληροφορίες σχετικά με την λειτουργία του συστήματος μας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Επίλογος

5.1 Σκέψεις για μελλοντική έρευνα

Το μοντέλο του κεφαλαίου 2, είναι απλό, πρωτότυπο και μπορεί να περιγράψει καταστάσεις που εμφανίζονται στη βιομηχανική παραγωγή, όπου στο τέλος της πρώτης φάσης γίνεται ένας έλεγχος, σχετικά με τα ποιοτικά κριτήρια που ικανοποιεί η εξυπηρετούμενη μονάδα. Αν τα ικανοποιεί, θα προωθηθεί άμεσα στη δεύτερη φάση, ενώ σε αντίθετη περίπτωση θα “χάσει” την προτεραιότητα της και θα προσπαθήσει να ολοκληρώσει αργότερα την διαδικασία εξυπηρέτησης της, όταν ο υπάλληλος θα είναι ελεύθερος από μονάδες υψηλής προτεραιότητας.

Εξαιτίας της εφαρμοσιμότητας του μοντέλου σε τέτοιες καταστάσεις θα ήταν σκόπιμο να εξεταστούν και οι περιπτώσεις, όπου η μηχανή που εξυπηρετεί θα υπόκειται σε βλάβες και ακολουθώντας σε επισκευές σε οποιαδήποτε φάση. Επιπλέον θα μπορούσε εύκολα να εισαχθούν και οι έννοιες του χρόνου προετοιμασίας και αποφόρτισης, καθώς και η θεώρηση της άφιξης των πελατών κατά ομάδες τυχαίου μεγέθους.

Η ύπαρξη της κανονικής ουράς στο μοντέλο του κεφαλαίου 2, κάνει σαφώς πολυπλοκότερη την ανάλυση. Όμως πρόβλημα συνωστισμού στον υπάλληλο δημιουργούν κυρίως οι πελάτες της ουράς των επαναλαμβανόμενων αφίξεων. Οι Artalejo and Gomez-Corral [18] εισήγαγαν την έννοια των αρνητικών αφίξεων, που λαμβάνουν χώρα μόνο όταν ο υπάλληλος είναι απασχολημένος και έχουν τη δυνατότητα να διαγράψουν ένα πελάτη κάθε φορά, της ουράς των επαναλαμβανόμενων αφίξεων. Η μαθηματική ανάλυση τέτοιων μοντέλων γίνεται πολύ δύσκολη, καθώς το πρόβλημα της μελέτης της κατανομής της ουράς επαναλαμβανόμενων αφίξεων, ανάγεται στην αριθμητική επίλυση μίας Fredholm ολοκληρωτικής εξίσωσης. Θα άξιζε η μελέτη του μοντέλου του κεφαλαίου 2 εισάγοντας την



έννοια των αρνητικών αφίξεων, καθώς θα γενίκευε και τα αντίστοιχα μοντέλα με δύο φάσεις εξυπηρέτησης, αλλά και γενικά τα μοντέλα επαναλαμβανόμενων αφίξεων με δύο κλάσεις πελατών.

Επιπλέον η μελέτη του χρόνου αναμονής ενός συγκεκριμένου πελάτη και του χρόνου συνεχούς απασχόλησης του υπάλληλου, στο μοντέλο των Artalejo and Gomez-Corral [18] θα έδινε σημαντικά μαθηματικά και πρακτικά αποτελέσματα. Οι Harrison and Pitel [99] είχαν μελετήσει το κλασσικό $M/G/1$ σύστημα με αρνητικές αφίξεις.

Ενδιαφέρον θα είχε και η μελέτη του μοντέλου του κεφαλαίου 2, με την θεώρηση της πιθανότητας εισαγωγής του πελάτη στην ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων να εξαρτάται από τον αριθμό των πελατών που βρίσκονται στην ουρά. Δηλαδή η πιθανότητα εκτοπισμού ενός πελάτη από τη διαδικασία εξυπηρέτησης να είναι συσχετισμένη με τον αριθμό των πελατών που περιμένουν στην κανονική ουρά. Η μελέτη της περιόδου συνεχούς απασχόλησης, καθώς και του χρόνου αναμονής ενός πελάτη της ουράς επαναλαμβανόμενων αφίξεων, αποτελεί επίσης προτεραιότητα.

Στο μοντέλο του κεφαλαίου 2, οι πελάτες της κανονικής ουράς έχουνμή διακόπτουσα προτεραιότητα έναντι αυτών της ουράς επαναλαμβανόμενων αφίξεων. Το εν λόγω μοντέλο θα γινόταν ακόμα πιο περίπλοκο, αλλά συνάμα ρεαλιστικό αν θεωρούσαμε διακόπτουσα μή επαναληπτική προτεραιότητα. Είναι κατανοητό ότι σε αυτή τη περίπτωση οι εκφράσεις των πιθανοτήτων θα περιλάμβαναν και τον ήδη διανυθέντα χρόνο στη εξυπηρέτηση του πελάτη που διεκδίκη.

Το μοντέλο του κεφαλαίου 3, αποτελεί μία σημαντική γενίκευση αυτού του κεφαλαίου 2. Υπενθυμίζουμε, ότι κάθε πελάτης της i -ουράς επαναλαμβανόμενων αφίξεων, εισήχθει σε αυτή μετά το πέρας της i -οστής φάσης και προσπαθεί να συνδεθεί με τον υπάλληλο για να συνεχίσει την διαδικασία εξυπηρέτησης στην $(i + 1)$ φάση εξυπηρέτησης. Ενδιαφέρον θα παρουσίαζε η μελέτη του συστήματος, όπου μετά το πέρας της i -οστής φάσης, ο πελάτης να μπορεί να συνεχίσει τη διαδικασία εξυπηρέτησης από οποιαδήποτε φάση, ή να εισέλθει σε οποιαδήποτε ουρά επαναλαμβανόμενων αφίξεων και από εκεί να προσπαθεί να συνδεθεί με τον υπάλληλο για να συνεχίσει τη διαδικασία εξυπηρέτησης του, από επίσης οποιαδήποτε φάση. Η γενίκευση αυτή σαφώς θα έκανε ακόμα πιο περίπλοκη την ήδη βεβαρημένη ανάλυση αλλά θα έδινε στο σύστημα μία ρεαλιστική ευελιξία, όσον αφορά την επιλογή της φάσης εξυπηρέτησης από τον πελάτη. Επίσης σημαντική θα ήταν και η θεώρηση των εννοιών των χρόνων προετοιμασίας και αποφόρτισης πριν και μετά από κάθε φάση εξυπηρέτησης, καθώς και η υπόθεση των ομαδικών αφίξεων.



Η περιοχή των δικτύων εξυπηρέτησης με επαναλαμβανόμενες αφίξεις προσφέρεται προς έρευνα καθώς τα αποτελέσματα που έχουν προκύψει είναι περιορισμένα (Moutzoukis and Langaris [149], Gomez-Corral [91], Pourbabai [157]). Δίκτυα που δέχονται κανονικούς πελάτες, αλλά και πελάτες, που η άφιξη τους προκαλεί απλά την μεταφορά πελατών (Networks with triggered customer movement) από ένα σταθμό εξυπηρέτησης σε έναν άλλο, έχουν εφαρμογές σε τηλεπικοινωνιακά συστήματα. Η μελέτη τέτοιων συστημάτων, με το χαρακτηριστικό των επαναλαμβανόμενων αφίξεων θα έδινε πολύ σημαντικά αποτελέσματα με άμεσες εφαρμογές.

Η μελέτη συστημάτων εξυπηρέτησης με επαναλαμβανόμενες αφίξεις και προτεραιότητες, περιορίζεται σε μοντέλα με εξωγενείς προτεραιότητες. Ενδιαφέρον θα είχε η μελέτη συστημάτων με ενδογενείς προτεραιότητες. Ακόμα όμως και σε μοντέλα χωρίς επαναλαμβανόμενες αφίξεις, η ύπαρξη τέτοιων κανόνων προτεραιότητας προκαλούν μεγάλα προβλήματα, όσον αφορά τη μαθηματική μελέτη τους.

Θα πρέπει να παρατηρήσουμε, ότι στη βιβλιογραφία μοντέλων με επαναλαμβανόμενες αφίξεις και διακοπές, εμφανίζεται μόνο η περίπτωση των απλών διακοπών. Μόλις ο υπάλληλος ελευθερωθεί, αναχωρεί για απλές διακοπές και επιστρέφοντας αν δέν υπάρχουν πελάτες προτεραιότητας στην κανονική ουρά παραμένει άεργος περιμένοντας τη πρώτη άφιξη που θα ζητήσει να εξυπηρετηθεί. Σε αυτή τη περίοδο αργίας, οι πελάτες της ουράς επαναλαμβανόμενων αφίξεων έχουν τη δυνατότητα να συνδεθούν με τον υπάλληλο. Ενδιαφέρον θα είχε η μελέτη συστημάτων με επαναλαμβανόμενες αφίξεις και πολλαπλές διακοπές.

Ενδιαφέρον θα παρουσίαζε και η μελέτη ενός μοντέλου με πολλές κλάσεις πελατών και προτεραιότητες, στο οποίο οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών προσπαθειών από την ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων να προέρχεται από μία αυθαίρετη κατανομή. Τα μοντέλα με γενικούς χρόνους επανάληψης, περιορίζονται σε μία κλάση πελατών, ενώ για την επιλύσή τους, οι διάφοροι συγγραφείς (Choi et al. [36], Gomez-Corral [90]), υπέθεσαν ότι μόνο ο πρώτος από την ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων μπορεί να προσπαθήσει για να συνδεθεί με τον υπάλληλο. Η υπόθεση αυτή μπορεί να είναι ενδιαφέρουσα από μαθηματικής άποψης, αλλά έχει αποδειχθεί ότι δεν είναι ρεαλιστική για την περιγραφή συστημάτων με επαναλαμβανόμενες αφίξεις.

Συνεχίζοντας, θα πρέπει να αναφέρουμε ότι χρήζουν μελέτης τα συστήματα με επαναλαμβανόμενες αφίξεις και πολλούς υπαλλήλους. Η ανάλυση τέτοιων συστημάτων, περιορίζεται σε μοντέλα με εκθετικούς (ή από PH κατανομή) χρό-



νους εξυπηρέτησης (βλέπε Falin [70]). Ενδιαφέρον θα παρουσίαζε η περίπτωση με χρόνους εξυπηρέτησης που θα προέρχονταν από αυθαίρετες κατανομές. Επιπλέον, αναλυτικά αποτελέσματα, όσον αφορά την κατανομή του αριθμού των πελατών στην ουρά επαναλαμβανόμενων αφίξεων, υπάρχουν μόνο για μοντέλα $M/M/2$ (βλέπε Hanschke [96], Artalejo [8]).

Τέλος, τα συστήματα εξυπηρέτησης με επαναλαμβανόμενες αφίξεις σε διακριτό χρόνο επίσης προσφέρονται για περαιτέρω έρευνα. Αξίζει να σημειωθεί ότι η ανάλυση τέτοιων συστημάτων είναι εντελώς διαφορετική σε σχέση με αυτή σε συνεχή χρόνο.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Περίληψη

6.1 Περίληψη

Στην παρούσα διατριβή μελετήθηκαν τρία συστήματα εξυπηρέτησης με κύριο χαρακτηριστικό, αυτό των επαναλαμβανόμενων αφίξεων.

Στο κεφάλαιο 2 μελετήθηκε ένα μοντέλο επαναλαμβανόμενων αφίξεων με έναν υπάλληλο, ο οποίος παρέχει εξυπηρέτηση δύο φάσεων σε σειρά σε κάθε πελάτη που καταφθάνει στο σύστημα. Οι πελάτες φθάνουν μεμονομένα στο σύστημα και τοποθετούνται σε μία ουρά. Κάθε πελάτης που ολοκληρώνει την πρώτη φάση εξυπηρέτησης, είτε προωθείται άμεσα στη δεύτερη φάση, είτε εισέρχεται στην ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων, απ' όπου προσπαθεί μετά από τυχαίο χρονικό διάστημα να συνδεθεί με τον υπάλληλο και να λάβει τη δεύτερη φάση εξυπηρέτησης που του αναλογεί. Κάθε φορά που ο υπάλληλος ελευθερώνεται αναχωρεί για απλές διακοπές.

Μελετώντας το σύστημα σε χρονικές στιγμές αναχωρήσεων, ορίστηκε μία Μαρκοβιανή διαδικασία ανανεώσεων, με τη βοήθεια της οποίας αποδείχθηκε ότι η στοχαστική διαδικασία που περιγράφει την εξέλιξη του συστήματος είναι ημιαναγεννητική. Χρησιμοποιώντας αποτελέσματα της Μαρκοβιανής θεωρίας ανανεώσεων, διερευνήθηκαν οι συνθήκες κάτω από τις οποίες το σύστημα μας είναι σε στατιστική ισορροπία. Η από κοινού κατανομή του αριθμού των πελατών στην κανονική ουρά και στην ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων, μελετήθηκε σε όρους γεννητριών συναρτήσεων με τη βοήθεια της μεθόδου της συμπληρωματικής μεταβλητής, τόσο σε συνεχή χρόνο, όσο και σε στατιστική ισορροπία. Με τη βοήθεια των γεννητριών συναρτήσεων υπολογίστηκαν διάφορα χαρακτηριστικά του συστήματος, όπως οι πιθανότητες των καταστάσεων του υπαλλήλου και οι αναμενόμενοι αριθμοί των πελατών τόσο στη κανονική



ουρά, όσο και στην ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων ξεχωριστά. Επιπλέον, κατασκευάστηκαν πίνακες με αριθμητικά αποτελέσματα, που περιγράφουν ουσιαστικά τη λειτουργία του συστήματος. Τέλος, αποδείχθηκε ότι στο υπό μελέτη μοντέλο ισχύει η ιδιότητα της διάσπασης, που παρατηρείται στη πλειονότητα των συστημάτων με επαναλαμβανόμενες αφίξεις.

Στο κεφάλαιο 3, μελετήθηκε μία γενίκευση του μοντέλου του κεφαλαίου 2, με έναν υπάλληλο που παρέχει εξυπηρέτηση n φάσεων σε σειρά και $(n - 1)$ -τύπους πελατών επαναλαμβανόμενων αφίξεων. Οι πελάτες φθάνοντας στο σύστημα τοποθετούνται σε μία κανονική ουρά απείρου μήκους και περιμένουν τη σειρά τους να εξυπηρετηθούν. Μετά το πέρας της i -οστής φάσης εξυπηρέτησης ($i = 1, \dots, n - 1$) ο πελάτης είτε προωθείται άμεσα στην $(i + 1)$ -στή φάση, είτε εισέρχεται στην i -οστή ουρά επαναλαμβανόμενων αφίξεων, απ' όπου προσπαθεί να συνδεθεί με τον υπάλληλο για να λάβει την $(i + 1)$ -οστή φάση εξυπηρέτησης που του αναλογεί. Όλοι οι πελάτες αναχωρούν αφού λάβουν n φάσεις εξυπηρέτησης. Οι πελάτες της κανονικής ουράς έχουν μη διακόπτουσα προτεραιότητα έναντι αυτών που βρίσκονται στις $(n - 1)$ ουρές επαναλαμβανόμενων αφίξεων, ενώ κάθε φορά που ελευθερώνεται ο υπάλληλος αναχωρεί για απλές διακοπές.

Υπολογίστηκαν σε στατιστική ισορροπία και σε κλειστή μορφή οι αναμενόμενοι αριθμοί των πελατών στην κανονική ουρά, ενώ με την επίλυση ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων υπολογίστηκαν και οι αναμενόμενες τιμές των πελατών κάθε ουράς επαναλαμβανόμενων αφίξεων ξεχωριστά. Επιπλέον, δόθηκαν αριθμητικά αποτελέσματα που περιγράφουν τη δομή του εν λόγω συστήματος.

Στο κεφάλαιο 4 μελετήθηκε ένα μοντέλο επαναλαμβανόμενων αφίξεων με δύο κλάσεις πελατών και χρόνους προετοιμασίας και αποφόρτισης. Οι πελάτες κλάσης 1 τοποθετούνται στην ουρά, ενώ οι κλάσης 2 στο κουτί των επαναλαμβανόμενων αφίξεων, εφόσον δεν βρουν διαθέσιμο τον υπάλληλο σε κάποια προσπάθειά τους. Για να αρχίσει να εξυπηρετεί έναν πελάτη οποιασδήποτε κλάσης, ο υπάλληλος χρειάζεται ένα χρόνο προετοιμασίας, ενώ κάθε φορά που δεν υπάρχουν πελάτες να περιμένουν στην κανονική ουρά, ενεργοποιεί μία περίοδο αποφόρτισης, στη διάρκεια της οποίας είναι διαθέσιμος μόνο για τους πελάτες προτεραιότητας (κλάσης 1). Μόλις ολοκληρωθεί επιτυχώς η περίοδος αποφόρτισης, ο υπάλληλος αναχωρεί για απλές διακοπές. Οι πελάτες κλάσης 1, έχουν διακόπτουσα επαναληπτική προτεραιότητα, όταν η διαδικασία εξυπηρέτησης ενός πελάτη κλάσης 2 (retrial) βρίσκεται σε φάση προετοιμασίας και μη διακόπτουσα προτεραιότητα όταν βρίσκεται στη φάση της άμεσης εξυπηρέτησης.

Η διαδικασία που περιγράφει την εξέλιξη του συστήματος είναι ημιαναγεν-



νητική, αν μελετήσουμε το σύστημα σε χρονικές στιγμές αναχωρήσεων. Χρησιμοποιώντας, αποτελέσματα της θεωρίας Μαρκοβιανών ανανεώσεων διερευνήθηκε η συνθήκη στατιστικής ισορροπίας, ενώ με τη βοήθεια της μεθόδου της συμπληρωματικής μεταβλητής μελετήθηκαν οι πιθανότητες των καταστάσεων του συστήματος, τόσο σε συνεχή χρόνο, όσο και σε στατιστική ισορροπία. Υπολογίστηκαν οι αναμενόμενοι αριθμοί των πελατών, τόσο στη κανονική ουρά, όσο και στην ουρά των επαναλαμβανόμενων αφίξεων ξεχωριστά, με τη βοήθεια των οποίων κατασκευάστηκαν πίνακες με χρήσιμα αριθμητικά αποτελέσματα.

6.2 Summary

In this dissertation we study three queueing systems, with the feature of repeated attempts. In chapter 2, a queueing system with a single server providing two phases of service in succession is considered. Every customer receives service in the first phase and in the sequel, either proceeds immediately to the second, or joins the retrial box from where he retries independently of the other customers that might be in orbit, after a random ammount of time, in order to find available the server and get a special second phase service. Whenever the server faces an empty queue, departs for a single vacation.

Upon discovering a Markov Renewal Process at departing epochs, we describe our system as a Semi-regenerative process and use the Markov renewal theory to derive conditions for the system stability. Moreover using the supplementary variable technique, we obtain generating functions of the system state probabilities, both in transient and in steady state. Using the corresponding generating functions we derive several useful performance measures such as, the probabilities of server state and the mean number of customers both in ordinary queue and in the retrial box. A stochastic decomposition result is also presented, while numerical results are finally obtained and used to investigate the system behaviour.

In chapter 3, we propose a generalization of the above described two phase model, considering model with a single server providing n phases of service in succession, and $(n - 1)$ types of retrial customers. Customers are placed upon arrival in a single ordinary queue, waiting to start their service procedure. Every customer receives service in all phases and upon service completion in the i th phase, the customer, either proceeds directly to the $(i + 1)$ th phase, or joins the i th retrial box from where he retries independently, both from the customer in the corresponding box and from the customers from other boxes, after a random ammount of time, to find a position for the $(i + 1)$ th phase service. Moreover every



time the server faces an empty queue, departs for a single vacation.

The mean number of customers in the ordinary queue, in steady state, is obtained in product form, while the mean number of customer in each retrial box separately are also obtained, using the solution of a set of linear equations. These performance measures are used to investigate the systems performance by providing some numerical results.

Finally in chapter 4, a queueing model with two kinds of customers, ordinary and retrial, is studied. To start serving both types of customers, the server needs a start-up period, while when there are no ordinary customers waiting in the queue, the server performs a close-down period. The ordinary customers have preemptive repeat priority, when the server performs a start up time in order to serve a retrial customer, and non preemptive priority when the server is busy with this type of customer. During the close down period no retrial customers can access the server, while the arrival of an ordinary customer forces the server to return and prepare to serve him. Every time a close down period is successfully completed, the server departs for a single vacation.

The stochastic process, describing the evolution of our system is semi regenerative, by discovering a Markov renewal process on departure epochs. Using the corresponding theory, the stability conditions are investigated, while generating functions of the joint distribution of the number of customers in the ordinary queue and in the retrial box are obtained, both in transient, and in steady state, using the supplementary variable technique. Performance measures are also obtained and used to derive numerical results, describing the evolution of the system.



Βιβλιογραφία

- [1] A. Aissani, A retrial queue with redudancy and unreliable server, Queueing Systems 17 (1994) 431-449.
- [2] A. Aissani, J.R. Artalejo, On the single server retrial queue subject to breakdowns, Queueing Systems 30 (1998) 309-321.
- [3] A.M. Aleksandrov, A queueing system with repeated orders, Eng. Cybernet. Rev. 12 (3) (1974) 1-4.
- [4] J. Amador, J.R. Artalejo, The $M/G/1$ retrial queue: New descriptors of customer's behaviour, Journal of Computational and Applied Mathematics, *in press*.
- [5] J.R. Artalejo, A classified bibliography of research on retrial queues: Progress in 1990-1999, Top 7(2) (1999) 187-211.
- [6] J.R. Artalejo, Accesible bibliography on retrial queues, Mathematical and Computer Modelling 30 (3-4) (1999) 1-6.
- [7] J.R. Artalejo, New results in retrial queueing systems with breakdowns of servers, Statistica Neerlandica 48 (1992) 23-36.
- [8] J.R. Artalejo, Stationary analysis of the characteristics of the $M/M/2$ queue with constant repeated attempts, Opsearch 33 (1996) 83-95.
- [9] J.R. Artalejo, Explicit formulae for the characteristics of the $M/H_2/1$ retrial queue, Jour. Op. Res. Soc. 44 (3) (1993) 309-313.
- [10] J.R. Artalejo, Retrial queues with finite number of sources, Journal of the Korean Mathematical Society 35 (1998) 503-525.
- [11] J.R. Artalejo, S.R. Chakravarthy, Algorithmic analysis of the $MAP/PH/1$ retrial queue, Top 14 (2006) 293-332.



- [12] J.R. Artalejo, G. Falin, Stochastic decomposition for retrial queues, *Top* 2 (1994) 329-342.
- [13] J.R. Artalejo, G. Falin, On the orbit characteristics of the $M/G/1$ retrial queue, *Naval Research Logistics* 43 (8) (1996) 1147-1161.
- [14] J.R. Artalejo, A. Gomez-Corral, Steady state solution of a single server queue with linear repeated requests, *Journal of Applied Probability* 34 (1997) 223-233.
- [15] J.R. Artalejo, A. Gomez-Corral, Stochastic analysis of the departure and quasi-input process in a versatile single server queue, *J. Appl. Math. Stoch. Anal.* 9 (1996) 171-183.
- [16] J.R. Artalejo, A. Gomez-Corral, Generalized birth and death process with applications to queues with repeated attempts and negative arrivals, *OR Spectrum* 20 (1998) 5-14.
- [17] J.R. Artalejo, A. Gomez-Corral, Analysis of a stochastic clearing system with repeated attempts, *Stochastic Models* 14 (1998) 623-645.
- [18] J.R. Artalejo, A. Gomez-Corral, On a single server queue with negative arrivals and requests repeated, *Journal of Applied Probability* 36 (1999) 907-918.
- [19] J.R. Artalejo, A. Gomez-Corral, A note on the busy period of the $M/G/1$ queue with finite retrial buffer, *Probability in Engineering and Informational Sciences* 21 (2007) 77-82.
- [20] J.R. Artalejo, M.J. Lopez-Herrero, On the busy period of the $M/G/1$ retrial queue, *Naval Research Logistics* 47 (2000) 115-127.
- [21] J.R. Artalejo, M.J. Lopez-Herrero, The $M/G/1$ retrial queue: An information theoretic approach, *Statistics and Operation Research Transactions* 29 (2005) 119-137.
- [22] J.R. Artalejo, G. Choudhury, Steady state analysis of an $M/G/1$ queue with repeated attempts and two-phase service, *Quality Technology and Quantitative Management* 1 (2004) 189-199.
- [23] J.R. Artalejo, A. Gomez-Corral, *Retrial Queueing Systems, A Computational Approach*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2008).



- [24] J.R. Artalejo, A. Rodrigo, On the single server queue with linear retrial policy and exhaustive vacations, In: Stochastic Processes and their Applications 126-205 Narosa Publishing, New Delhi.
- [25] I. Atencia, P. Moreno, A single server retrial queue with general retrial times and Bernoulli schedule, Appl. Math. Comp. 162 (2005) 855-880.
- [26] I. Atencia, P. Moreno, A discrete time $Geo/G/1$ retrial queue with general retrial times, Queueing Systems 48 (2004) 5-21.
- [27] B. Avi-Itzhak, P. Naor, On a problem of preemptive priority queueing, Oper. Res. 13 (1965) 308-318.
- [28] C. Blondia, A finite capacity multi queueing system with priorities and repeated server vacations, Queueing Systems 5 (1989) 313-330.
- [29] P.P. Bocharov, O.I. Pavlova, D.A. Buzicova, $M/G/1/r$ retrial queueing systems with priority of primary customers, Mathematical and Computer Modelling 30 (3-4) (1999) 89-98.
- [30] B.D. Choi, Y. Chang, A.N. Dudin, $BMAP/SM/1$ retrial queue with controllable operation modes, Eur. J. Oper. Res. 131 (2001) 16-30.
- [31] B.D. Choi, Y. Chang, Single server retrial queues with priority calls, Mathematical and Computer Modelling 30 (1999) 7-32.
- [32] B.D. Choi, Y. Chang, B. Kim, $MAP_1/MAP_2/c$ retrial queue with guard channels and its application to cellular networks, Top 7 (1999) 231-248.
- [33] B.D. Choi, K.B. Choi, Y.W. Li, $M/G/1$ retrial queueing systems with two types of calls and finite capacity, Queueing Systems 19 (1995) 215-229.
- [34] D.I. Choi, T. Kim, Analysis of a two phase queueing system with vacations and Bernoulli feedback, Stochastic Analysis and Applications 21(5) (2003) 1009-1019.
- [35] B.D. Choi, D.H. Han, G.I. Falin, On the virtual waiting time for an $M/G/1$ retrial queue with two types of calls, J. Appl. Math. Stoc. Anal. 6 (1993) 11-23.
- [36] B.D. Choi, K.K. Park, C.E.M. Pearce, An $M/M/1$ retrial queue with control policy and general retrial times, Queueing Systems 14 (1993) 275-292.



- [37] B.D. Choi, K.K. Park, The $M/G/1$ retrial queue with Bernoulli schedule, *Queueing Systems* 7 (1990) 219-227.
- [38] B.D. Choi, Y.W. Shin, W.C. Ahn, Retrial queues with collisions arising from unslotted *CSMA/CD* protocol, *Queueing Systems* 11 (1992) 335-356.
- [39] Q.H. Choo, B. Connolly, New results in the theory of repeated orders queueing systems, *Journal of Applied Probability* 16 (1979) 631-640.
- [40] G. Choudhury, Steady state analysis of a $M/G/1$ queue with linear retrial policy and two phase service under Bernoulli vacation schedule, *Applied Mathematical Modelling* (2007), doi: 10.1016/j.apm.2007.09.020.
- [41] G. Choudhury, K. Deka, An $M/G/1$ retrial queueing system with two phases of service subject to the server breakdown and repair, *Performance Evaluation* (2008), doi: 10.1016/j.peva.2008.04.004.
- [42] G. Choudhury, K.C. Madan, A two phase batch arrival queueing system with a vacation time under Bernoulli schedule, *Appl. Math. Comp.* 149 (2004) 337-349.
- [43] G. Choudhury, An $M/G/1$ queueing system with two phase service under D-policy, *Infor. Manag. Sci.* 16 (4) (2005) 1-17.
- [44] G. Choudhury, K.C. Madan, A two stage batch arrival queueing system with a modified Bernoulli schedule vacation under N-policy, *Mathematical and Computer Modelling* 42 (2005) 71-85.
- [45] G. Choudhury, M. Paul, A two phases queueing system with Bernoulli vacation schedule under multiple vacation policy, *Statistical Methodology* 3 (2006) 174-185.
- [46] G. Choudhury, M. Paul, A batch arrival queue with an additional service channel under N-policy, *Appl. Math. Comp.* 156 (2004) 115-130.
- [47] G. Choudhury, L. Tadj, M. Paul, Steady state analysis of an $M^z/G/1$ queue with two phase service and Bernoulli vacation schedule under multiple vacation policy, *Appl. Math. Comp.* 31 (2007) 1079-1091.
- [48] G. Choudhury, L. Tadj, An $M/G/1$ queue with two phases of service subject to the servers breakdown and delayed repair, *Appl. Math. Model. in Press* (2008).



- [49] E. Cinlar, *Introduction to Stochastic Processes*, Prentice-Hall (1975).
- [50] C. Clos, An aspect of the dialing behaviour of subscribers and its effect on the trunk plant, *The Bell System Technical Journal* 27 (1948) 424-445.
- [51] J.W. Cohen, Basic problems of telephone traffic theory and the influence of repeated calls, *Philips Telecommunication Review* 18 (1957) 49-100.
- [52] J.W. Cohen, *The single server queue*, North Holland (1982) New York.
- [53] J.W. Cohen, O.J. Boxma, *Boundary Value Problems in Queueing System Analysis*, North Holland Publishing Company (1983).
- [54] D.R. Cox, The analysis of non Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables, *Proc. Camb. Phil. Soc* 51 (1955) 433-441.
- [55] A.G. de Kok, Algorithmic methods for single server systems with repeated attempts, *Statistica Neerlandica* 38 (1) (1984) 23-32.
- [56] J.E. Diamond, A. S. Alfa, Matrix Analytic methods for $M/PH/1$ retrial queues, *Stochastic Models* 11 (1995) 447-470.
- [57] J.E. Diamond, A. S. Alfa, Approximation method for $M/PH/1$ retrial queue with phase-type inter retrial times, *Eur. J. Oper. Res.* 113 (1999) 620-631.
- [58] I. Dimitriou, Phase type distributions, A survey, (2005) MSc Thesis (In Greek).
- [59] I. Dimitriou, C. Langaris, Analysis of a retrial queue with two-phase service and server vacations, *Queueing Systems* vol 60 (1-2) (2008) 111-129.
- [60] I. Dimitriou, C. Langaris, A queueing model with start-up/close-down times and retrial customers, *to appear in Stochastic Models* vol 25 (2) (2009).
- [61] B.T. Doshi, Queueing systems with vacations-A survey, *Queueing Systems* 1 (1986) 29-66.
- [62] B.T. Doshi, Analysis of a two phase queueing system with general service times, *Operation Research Letters* 10 (1991) 265-272.
- [63] V.I. Dragieva, A single server queueing system with finite source of repeated calls, *Problems of Information Transmission* 30 (1994) 283-289.



- [64] A.N. Dudin, V. Klimenok, Queueing system $BMAP/G/1$ with repeated calls, *Mathematical and Computer modelling*, 30 (3-4) (1999) 115-128
- [65] A.N. Dudin, V. Klimenok, A retrial $BMAP/SM/1$ with linear repeated requests, *Queueing Systems* 34 (2000) 47-66.
- [66] M. Eisenberg, Two queues with alternating service, *Siam J. Appl. Math* 36 (2) (1979) 287-303.
- [67] A. Elldin, Approach to the theoretical description of repeated call attempts, *Ericsson Technics* 23 (3) (1967) 346-407.
- [68] A.K. Erlang, The Theory of Probabilities and telephone conversations, *NYT Tidsskrift Matt* 20 (1909) 33-39.
- [69] G.I. Falin, Functioning under non steady conditions of a single channel system with group arrivals of requests and repeated calls, *Ukrainian Mat. Journal* 33 (1981) 429-432.
- [70] G.I. Falin, A survey of retrial queues, *Queueing Systems* 7 (1990) 127-168.
- [71] G.I. Falin, Aggregate arrival of customers in one line system with repeated calls, *Ukrainian Math. J.* 28 (1976) 437-440.
- [72] G.I. Falin, The output flow of a single line queueing system when there are secondary orders, *Eng. Cybr. Rev.* 16 (1978) 64-67.
- [73] G.I. Falin, Single-line repeated orders queueing systems, *Optimization* 5 (1986) 649-667.
- [74] G.I. Falin, On the waiting time process in a single-line queue with repeated calls, *J. Appl. Prob.* 23 (1986) 185-192.
- [75] G.I. Falin, On ergodicity of multichannel queueing systems with repeated calls, *Sov. Journal Comp. Syst. Sci.* 25 (1) (1987) 60-65.
- [76] G.I. Falin, On a multiclass batch arrival retrial queue, *Adv. Appl. Prob.* 20 (1988) 483-487.
- [77] G.I. Falin, A single-line system with secondary orders, *Eng. Cybernet. Rev.* 17 (2) (1979) 76-83.
- [78] G.I. Falin, Estimation of retrial rate in a retrial queue, *Queueing Systems* 19 (1995) 231-246.



- [79] G.I. Falin, R. Artalejo, A finite source retrial queue, *Europ. J. Oper. Res.* 108 (1998) 409-424.
- [80] G.I. Falin, J.G.C. Templeton, *Retrial Queues*, Chapman and Hall, London (1997).
- [81] G.I. Falin, C. Fricker, On the virtual waiting time in an $M/G/1$ retrial queue, *Journal of Applied Probability* 28 (1991) 446-460.
- [82] G.I. Falin, J.R. Artalejo, M. Martin, On the single server retrial queue with priority customers. *Queueing Systems* 14 (1993) 439-455.
- [83] G.I. Falin, M. Martin, J.R. Artalejo, Information theoretic approximations for the $M/G/1$ retrial queue, *Acta Informatica* 31 (1994) 559-571.
- [84] G.I. Falin, J.R. Artalejo, Approximations for multiserver queues with balking/retrial discipline, *OR Spectrum* 17 (1995) 239-244.
- [85] G. Fayole, A simple telephone exchange with delayed feedback, *Teletraffic Analysis and Computer Performance Evaluation*, Elsevier Publishers (1986) 245-253.
- [86] K. Farahmand, N.H. Smith, Retrial queues with recurrent demand option, *J. Appl. Math. Stoc. Anal.* 9 (1996) 221-228.
- [87] K. Farahmand, Single line queue with recurrent repeated demands, *Queueing Systems* 22 (1996) 425-435.
- [88] D.P. Gaver, Imbedded Markov chain analysis of a waiting line process in continuous time, *Ann. Math. Stat.* 30 (1959) 698-720.
- [89] D.P. Gaver, A waiting line with interrupted service including priorities, *J. Roy. Stat. Soc. Ser. B* 24 (1962) 73-90.
- [90] A. Gomez-Corral, Stochastic analysis of a single server retrial queue with general retrial times, *Naval Research Logistics* 46 (1999) 561-581.
- [91] A. Gomez-Corral, A matrix geometric approximation for tandem queue with blocking and repeated attempts, *Operation Research Letters* 30 (2002) 360-374.
- [92] A. Gomez-Corral, A bibliographical guide to the analysis of retrial queue through matrix analytic techniques, *Annals of Operation Research* 141 (2006) 163-191.



- [93] S.A. Grishechkin, Branching processes and systems with repeated calls or random discipline, *Theory Probab. Appl.* 36 (3) (1990) 28-53.
- [94] S.A. Grishechkin, Multiclass batch arrival retrial queues analyzed as branching processes with immigration, *Queueing Systems* 11 (4) (1992) 395-418.
- [95] D. Gross, C.M. Harris, *Fundamentals of Queueing Theory*, 2nd Edition Wiley and Sons (1985) New York.
- [96] T. Hanchke, Explicit formulas for the characteristics of the $M/M/2/2$ queue with repeated attempts, *Journal of Applied Probability* 24 (1987) 486-494.
- [97] T. Hanchke, The $M/G/1/1$ queue with repeated attempts and different types of feedback effects, *OR Spectrum* 7 (1985) 209-215.
- [98] P. Harrison, E. Pitel, The $M/G/1$ queue with negative customers, *Adv. Appl. Prob.* 28 (1996) 540-566.
- [99] P. Harrison, E. Pitel, Sojourn times in single server queues with negative customers, *J. Appl. Prob.* 30 (1993) 943-963.
- [100] Q.M. He, H. Li, Y.Q. Zhao, Ergodicity of the $BMAP/PH/s/s + K$ retrial queue with PH retrial times, *Queueing Systems* 35 (2000) 323-347.
- [101] S.M.R. Iravani, M.J.M. Posner, J.A. Buzacott, A two stage tandem queue attended by moving server with holding and switching costs, *Queueing Systems* 26 (3-4) (1997) 203-228.
- [102] N.K. Jaiswal, *Priority Queues*, Academic Press (1968) New York.
- [103] N.K. Jaiswal, Preemptive resume priority queue, *Oper. Res.* 9 (1961) 732-742.
- [104] G.L. Jonin, Ya.Ya. Sedol, Investigation of telephone systems in presence of repeated calls, *Latvian Mathematical Yearbook* 7 (1970) 71-83.
- [105] G.L. Jonin, A single line system with repeated calls, In: *Scient. Techn. Conf. Problems of Informational Networks and Automatic Switching* (1971) 84-94.
- [106] G.L. Jonin, N.M. Brezgunova, Single line system with repeated calls in the case of Γ - distributed occupation time, *Latvian Mathematical Yearbook* 11 (1972) 65-71.



- [107] V.A. Karypin, A study of the stationary characteristics of a queueing system with recurring demands, *Cybernetics* 13 (1977) 584-590.
- [108] T. Katayama, K. Kobayashi, Sojourn time analysis of a queueing system with two phase service and server vacations, *Naval Research Logistics* 54(1) (2006) 59-65.
- [109] T. Katayama, Mean Sojourn times in a multistage tandem queue served by a single server, *J. Oper. Res. Soc. Japan* 31 (2) (1988) 233-251.
- [110] J-C. Ke, An $M^{[x]}/G/1$ system with start-up and J additional options for service, *Appl. Math. Model.* (2007) doi:10.1016/j.am.2006.12.011.
- [111] D.G. Kendall, Stochastic Processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of imbedded markov chain, *Ann. Math. Stat.* 24 (1953) 338-354.
- [112] T.S. Kim, K.C. Chae, A two phase queueing system with threshold, *IEEE* (1998) 502-508.
- [113] J. Keilson, J. Cozzolino, H. Young, A service system with unfilled requests repeated, *Operation Research* 16 (1968) 1126-1137.
- [114] J. Keilson, Queues subject to service interruptions, *Ann. Mth. Stat.* 33 (1962) 1314-1322.
- [115] J. Keilson, L.D. Servi, Dynamics of the $M/G/1$ vacation model, *Oper. Res.* 35 (4) 575-582.
- [116] L. Kosten, *Stochastic Theory of Service Systems*, Pergamon Press (1973).
- [117] L. Kosten, On the influence of repeated calls in the theory of probabilities of blocking, *De Ingenieur* 59 (1947) 1-25.
- [118] C.M. Krishna, Y.H. Lee, A study of a two phase service, *Operation Research Letters* 9 (1990) 91-97.
- [119] V.G. Kulkarni, On queueing systems with retrials, *J. Appl. Prob.* 20 (1983) 380-389.
- [120] V.G. Kulkarni, Expected waiting times in a multiclass batch arrival retrial queue, *J. Appl. Prob.* 23 (1986) 144-159.



- [121] V.G. Kulkarni, *Modelling and Analysis of Stochastic Systems*, Chapman and Hall (1995) London.
- [122] V.G. Kulkarni, B.D. Choi, Retrial queue with server subject to breakdowns and repairs, *Queueing Systems* 7(2) (1990) 191-208.
- [123] V.G. Kulkarni, H.M. Liang, Retrial queues revisited, in: *Frontiers in Queueing*, ed. J.H. Dshalalow, CRP Press, 1997, pp. 19-34.
- [124] B. Krishna Kumar, A. Vijayakumar, D. Arivudainambi, An $M/G/1$ retrial queueing system with two phase service and preemptive resume, *Annals of Operation Research* 113 (2002) 61-79.
- [125] B. Krishna Kumar, D. Arivudainambi, A. Vijayakumar, On the $M^{(x)}/G/1$ retrial queue with Bernoulli schedule and general retrial times, *Asia Pacific Journal of Operation Research* 19 (2002) 117-194.
- [126] A. Krishnamoorthy, M.E. Islam, (s, S) inventory system with postponed demands, *Stoch. Anal. Appl.* 22 (2004) 827-842.
- [127] C. Langaris, The blocking phenomenon in multiple sequential service systems, *Phd Thesis Univ of London* (1982)
- [128] C. Langaris, Waiting time analysis of a two stage queueing system with priorities between customers, *Queueing Systems* 14 (1993) 457-473.
- [129] C. Langaris, A polling model with retrial customers, *Journal of Operation Research Society of Japan* 40 (1997) 489-508.
- [130] C. Langaris, Gated polling models with customers in orbit, *Mathematical and Computer Modelling* 30 (3-4) (1999) 171-187.
- [131] C. Langaris, Markovian polling systems with mixed service discipline and retrial customers, *Top* 7 (1999) 305-322.
- [132] C. Langaris, I. Dimitriou, A queueing system with n -phases of service and $(n - 1)$ -types of retrial customers, *under review*.
- [133] C. Langaris, A. Katsaros, Time depended analysis of a queue with batch arrivals and N levels of non-preemptive priority, *Queueing Systems* 19 (1995) 269-288.



- [134] C. Langaris, E. Moutzoukis, A retrial queue with structured batch arrivals, priorities and retrial customers, *Queueing Systems* 19 (1995) 269-288.
- [135] C. Langaris, E. Moutzoukis, A batch arrival reader-writer queue with retrial writers, *Stochastic Models* 13 (1997) 523-545.
- [136] H. Levy, L. Kleinrock, A queue with starter and a queue with vacations: Delay analysis by decomposition, *Oper. Research* 34 (3) (1986) 426-436.
- [137] D.S. Lee, Analysis of a two queue model with Bernoulli schedules, *J. Appl. Prob.* 34 (1997) 176-191.
- [138] M.J. Lopez-Herrero, A maximum entropy approach for the busy period of the $M/G/1$ retrial queue, *Annals of Operation Research* 141 (2006) 271-281.
- [139] M.J. Lopez-Herrero, Distribution of the number of customers served in an $M/G/1$ retrial queue, *Journal of Applied Probability* 39 (2002) 407-412.
- [140] D. Lindley The theory of queues with a single server, *Proc. Camb. Phil. Soc.* 48 (1952) 277-289.
- [141] J.D.C. Little, A proof of the queueing formula $L = \lambda W$, *Oper. Res.* 9 (1961) 383-387.
- [142] K.C. Madan, On a single server queue with two-stages of heterogeneous service and deterministic server vacations, *International Journal of System Science* 32 (7) (2001) 837-844.
- [143] K.C. Madan, An $M/G/1$ queue with second optional service, *Queueing Systems* 34 (2000) 37-46.
- [144] K.C. Madan, G. Choudhury, Steady state analysis of an $M^x/(G_1, G_2)/1$ queue with restricted admissibility and a random set up, *Infor. Manag. Sci.* 17 (2) (2006) 33-56.
- [145] M. Martin, J.R. Artalejo, Analysis of an $M/G/1$ queue with two types of impatience units, *Adv. Appl. Prob.* 27 (1995) 840-861.
- [146] M. Martin, A. Gomez-Corral, On the $M/G/1$ retrial queueing system with linear control policy, *Top* 3 (1995) 285-305.



- [147] J. Medhi, A single server Poisson input queue with a second optional channel, *Queueing Systems* 42 (2002) 239-242.
- [148] E. Moutzoukis, C. Langaris, Non-preemptive priorities and vacations in a multiclass retrial queueing system, *Stochastic Models* 12 (1996) 455-472.
- [149] E. Moutzoukis, C. Langaris, Two queues in tandem with retrial customers, *Probability in Engineering and Informational Sciences* 15 (2001) 311-325.
- [150] S.S. Nair, Two queues in series attended by a single server, *Bull. Soc. Math.* 25 (1973) 160-176.
- [151] M. Taube-Netto, Two queues in tandem attended by a single server, Phd Thesis, Univ. Michigan (1972)
- [152] M. Neuts, *Matrix Geometric Solutions in Stochastic Models: An algorithmic approach*, John Hopkins Univ. Press (1981) Baltimore.
- [153] M. Neuts, B. Rao, Numerical investigation of multiserver retrial queues, *Queueing Systems* 7 (1990) 169-190.
- [154] Z. Niu, Y. Takahashi, A finite-capacity queue with exhaustive vacation/close-down/set-up times and Markovian arrival processes, *Queueing Systems* 31 (1999) 1-23.
- [155] A.G. Pakes, Some conditions of ergodicity and recurrence of Markov chains, *Operation Research* 17 (1969) 1058-1061.
- [156] H.G. Perros, *Queueing Networks with blocking*, Oxford Press (1994).
- [157] B. Pourbabai, Tandem behaviour of a telecommunication system with finite buffers and repeated calls, *Queueing Systems* 6 (1990) 89-108.
- [158] A. Rodrigo, M. Vasquez, G.I. Falin, A new Markovian description of the $M/G/1$ retrial queue, *Eur. J. Oper. Res.* 104 (1998) 231-240.
- [159] Y. Sakai, Y. Takahashi, Y. Takahashi, T. Hasegawa, A composite queue with vacation/set-up/close-down times for SVCC in IP over ATM networks, *Journal of Operation Research Society of Japan* 41 (1998) 68-80.
- [160] D.D. Selvam, V. Sivasankaran, A two phase queueing systems with server vacations, *Oper. Res. Let.* 15 (1994) 163-168.



- [161] L.I. Sennot, P.A. Humblet, R.L. Tweedy, Mean drift and the non ergodicity of Markov Chain, *Oper. Res.* 31 (4) (1983) 783-788.
- [162] N.P. Sherman, J.P. Klaroufeh, An $M/M/1$ retrial queue with unreliable server, *Operatin Research Letters* 24 (2006) 697-705.
- [163] Y.W. Shin, Multiserver retrial queue with negative arrivals and disasters, *Queueing Systems* 55 (2007) 223-237.
- [164] L. Takacs, *Introduction to the Theory of Queues*, Oxford Univ. Press, New York (1962).
- [165] L. Takacs, Priority queues, *Oper. Res.* 12 (1964) 63-74.
- [166] Y. Takahashi, H. Takagi, Structured priority queue with batch arrivals, *J. Oper. Res. Japan* 33 (3) (1990) 242-261.
- [167] H. Takagi, *Queueing Analysis: A Foundation of Performance Evaluation*, vol. 1 (1981) Amsterdam.
- [168] H. Takagi, Priority queues with set-up times, *Oper. Res.* 38 (4) (1990) 667-677.
- [169] J. Teghem, Control of the service process in a queueing system, *Eur. J. Oper. Res.* 23 (1986) 141-158.
- [170] N. Tian, Z.G. Zhang, *Vacation Queueing Models, Theory and Applications*, Springer-Verlag (2006) New York.
- [171] R.I. Wilkinson, Theories for toll traffic engineering in the USA, *The Bell System Technical Journal* 35 (1956) 421-514.
- [172] J. Wang, An $M/G/1$ queue with second optional service and server breakdowns, *Comput. Math. Appl.* 47 (2004) 1713-1723.
- [173] R.W. Wolff, *Stochastic Modelling and the Theory of Queues*, Prentice-Hall (1989) New Jersey.
- [174] T. Yang, H. Li, The $M/G/1$ retrial queue with the server subject to starting failures, *Queueing Systems* 16 (1994) 83-96.
- [175] T. Yang, M.J. Posner, J.G.C. Templeton, H. Li, An approximation method for the $M/G/1$ retrial queue with general retrial times, *Europ. Jour. Oper. Res.* 76 (1994) 552-562.



- [176] T. Yang, M.J. Posner, J.G.C. Templeton, The $M/G/1$ retrial queue with non persistent customers, *Queueing Systems* 7 (2) (1990) 209-218.
- [177] T. Yang, J.G.C. Templeton, A survey of retrial queues, *Queueing Systems* 2 (1987) 201-233.

