

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



026000265211



Ανίχνευση και προσδιορισμός ανομοιογενών
ιδιοτήτων υλικών με τη χρήση
ακουστικών-ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων

Διδακτορική Διατριβή

Κωνσταντίνος Κ. Μπαγανάς

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός &
Μηχανικός Η/Υ Α.Π.Θ.

Εργαστήριο Μαθηματικής Μοντελοποίησης και Επιστημονικών Υπολογισμών
Τμήμα Μηχανικών των Υλικών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Ελλάδα

Μάρτιος 2007



ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΚΕΝΤΡΟ ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ
ΕΡΕΥΝΑΣ
ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΚΕΝΤΡΟ ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΚΕΝΤΡΟ ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΚΕΝΤΡΟ ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ
ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΚΕΝΤΡΟ ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΚΕΝΤΡΟ ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ
ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΚΕΝΤΡΟ ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ
ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΚΕΝΤΡΟ ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ



Ap-Ecay
9/2/9-5-2007



ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

Αντώνης Χαραλαμπίδης (Επιβλέπων)

Καθηγητής Τμήματος Μηχανικών των Υλικών Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Χρήστος Β. Μασσαλάς

Καθηγητής Τμήματος Μηχανικών των Υλικών Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Γεώργιος Ε. Σταυρουλάκης

Καθηγητής Τμήματος Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης Πανεπιστημίου Κρήτης

ΕΠΤΑΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

Γεώργιος Δ. Μανώλης

Καθηγητής Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών Α.Π.Θ.

Γεώργιος Ε. Σταυρουλάκης

Καθηγητής Τμήματος Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης Πανεπιστημίου Κρήτης

Αντώνης Χαραλαμπίδης

Καθηγητής Τμήματος Μηχανικών των Υλικών Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Βασίλειος Κ. Καλπακίδης

Αν. Καθηγητής Τμήματος Μηχανικών των Υλικών Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Θεόδωρος Ματίκας

Αν. Καθηγητής Τμήματος Μηχανικών των Υλικών Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Αθανάσιος Κεχαγιάς

Επίκ. Καθηγητής Γενικού Τμήματος Α.Π.Θ.

Ελευθέριος Σκούρας

Επίκ. Καθηγητής Τμήματος Μηχανικών των Υλικών Πανεπιστημίου Ιωαννίνων



Στους αγαπημένους μου γονείς
Κωνσταντίνο και Αγγελική



Ανίχνευση και προσδιορισμός ανομοιογενών ιδιοτήτων υλικών με τη χρήση ακουστικών-ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων

Κωνσταντίνος Κ. Μπαγανάς

Διδακτορική Διατριβή

Υποβληθείσα
στο Τμήμα Μηχανικών των Υλικών
του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
Μάρτιος 2007

Περίληψη

Στην πλειονότητά τους οι τεχνικές μη-καταστροφικού ελέγχου και οι μέθοδοι αντίστροφης σκέδασης αποσκοπούν στον εντοπισμό ή και στον χαρακτηρισμό των ανομοιογενειών που εμφανίζονται εντός των υλικών. Η υλοποίησή τους απαιτεί την ανάλυση των κυματικών φαινομένων εντός των ανομοιογενειών ή και των χωρίων που τα περιέχουν. Η κατανόηση της κυματικής συμπεριφοράς, η δυνατότητα διεξαγωγής κατάλληλων μετρήσεων, το μαθηματικό μοντέλο του συστήματος και η υπολογιστική υλοποίησή του, αποτελούν τα πλέον σημαντικά βήματα για την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος· δηλαδή, την εύρεση του μεγέθους, του σχήματος, της μορφής της ανομοιογένειας, ή των ηλεκτρικών, μαγνητικών ή ελαστικών ιδιοτήτων της.

Στην παρούσα εργασία εστιάζουμε αρχικά την προσοχή μας σε ανομοιογενή υλικά με συνεχώς μεταβαλλόμενες ιδιότητες σε πεπερασμένο ή μή περιβάλλον χωρίο. Στην περίπτωση που η ανομοιογένεια υφίσταται μόνο στη μία διάσταση και έχει ομαλό χαρακτήρα, η επίλυση της κυματικής διάδοσης αποδεικνύεται εφικτή και μάλιστα με αναλυτικό τρόπο. Δεδομένης της έλλειψης στη βιβλιογραφία αναλυτικής μεθόδου που αντιμετωπίζει συνολικά ομαλές ανομοιογένειες, προτείνουμε ένα σχήμα που στηρίζεται στη μέθοδο Frobenius. Οι λύσεις που εξάγονται υπό μορφή δυναμοσειρών είναι πρότυπες, αντιμετωπίζουν μεγάλο εύρος ανομοιογενών προφίλ, απαιτούν ελάχιστη υπολογιστική ισχύ και παρέχουν αξιόπιστα αποτελέσματα σε φαινόμενα όπως διάδοση ιδιορρυθμών σε ανομοιογενείς μικροκυματικούς κυματοδηγούς (Κεφ. 2-4), ανάπτυξη ιδιορρυθμών και υπολογισμός ιδιοσυχνοτήτων σε ανομοιογενή μικροκυματικά αντηχεία (Κεφ. 5) και διάδοση κυμάτων σε ανομοιογενή ελαστικά στρώματα (Κεφ. 6). Τα παραπάνω μας επιτρέπουν να εμβαθύνουμε στη φυσική ερμηνεία και κατανόηση των κυματικών φαινομένων σε τέτοιου είδους υλικά και να προβούμε σε σημαντικά συμπεράσματα και παρατηρήσεις. Σημαντικότερες δε εξ' αυτών πιστεύουμε πως είναι η μαθηματική ταυτότητα που προτείνουμε για την εκτίμηση της



πρώτης συχνότητας αποκοπής του κύριου ρυθμού από τη γνώση της μέσης τιμής του ανομοιογενούς ηλεκτρικού ή μαγνητικού προφίλ και, επίσης, η επίδραση της συχνότητας και της μορφής της ανομοιογένειας στα φαινόμενα ανάκλασης, ολικής ανάκλασης και διάδοσης.

Για την επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος ανακατασκευής ανομοιογενών προφίλ προτείνουμε τη χρήση μιας μικροκυματικής διάταξης κυματοδηγών που ένας εκ' των οποίων εμπεριέχει το υπό εξέταση ανομοιογενές υλικό (Κεφ. 2-4). Οι μετρήσεις που λαμβάνονται από υπολογιστικές προσομοιώσεις σε συνδυασμό με έναν διαφορικής εξέλιξης γενετικό αλγόριθμο, συνιστούν μια πλατφόρμα αντιστροφής που επιτυγχάνει τον προσδιορισμό του προφίλ της ανομοιογένειας και η οποία εύκολα υλοποιείται σε εργαστηριακές συνθήκες. Οι ανακατασκευές που επιτυγχάνονται τόσο σε διηλεκτρικά όσο και μαγνητικά προφίλ αποδεικνύονται ακριβείς και αξιόπιστες. Τα αριθμητικά αποτελέσματα που παρουσιάζουμε αφορούν γραμμικές, παραβολικές και κυβικές ανομοιογένειες.

Η προτεινόμενη διαδικασία αντιστροφής επιτυγχάνει αντίστοιχα αποτελέσματα και στο Κεφ. 6 που μελετούμε την κυματική διάδοση σε ανομοιογενές ελαστικό στρώμα εντός ομογενούς ελαστικού ημιχώρου. Οι ανακατασκευές που εξάγονται είναι εξίσου ακριβείς, ακόμη και παρουσία ενθόρυβων δεδομένων.

Στη συνέχεια στρέφουμε την προσοχή μας σε περιπτώσεις ανομοιογενειών που εμφανίζονται ως διακριτά ομογενή σώματα εντός πεπερασμένου ομογενούς χωρίου. Είναι αξιοσημείωτο ότι στη βιβλιογραφία λίγες μέθοδοι αντιμετωπίζουν ευθέα και αντίστροφα προβλήματα που αφορούν ανομοιογένειες σε φραγμένα χωρία. Σε όλες σχεδόν τις περιπτώσεις ο περιβάλλον χώρος θεωρείται άπειρος, ημιάπειρος ή άπειρος κατά τη μία διάσταση και εφαρμόζονται αριθμητικές μέθοδοι πεπερασμένων ή συνοριακών στοιχείων και διαφορών (FEM, BEM, TDFD). Αναλυτικές μέθοδοι έχουν εφαρμοστεί με επιτυχία στην επίλυση προβλημάτων που εμπλέκουν μόνο όμοια μεταξύ τους γεωμετρικά στοιχεία, δηλαδή σφαίρες, κυλίνδρους, κύκλους κλπ., με την προϋπόθεση ότι συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες εφαρμόζονται, πάντα, όμως, σε μη-φραγμένα περιβάλλοντα χωρία. Στη γνώση του συγγραφέα δεν έχει επιχειρηθεί ως τώρα η εφαρμογή αναλυτικών μεθόδων στην ανάλυση κυματικών προβλημάτων που εμπλέκουν φραγμένα περιβάλλοντα χωρία. Αυτό το γεγονός μας οδήγησε στη μελέτη της εξαναγκασμένης διέγερσης φραγμένου ελαστικού κυλίνδρου που περιέχει ένα σφαιρικό σκεδαστή στο εσωτερικό του (Κεφ. 7). Η εξαγόμενη λύση, που βασίζεται σε αναπτύγματα των ιδιολύσεων της ελαστοδυναμικής Navier εξίσωσης στον ελεύθερο χώρο, προσδίδουν καλές εκτιμήσεις της θέσεως και του μεγέθους του σφαιρικού σκεδαστή από την παρατήρηση των μορφών του στάσιμου πεδίου μετατοπίσεων στην ελεύθερη επιφάνεια του κυλίνδρου, επιτυγχάνοντας άμεσα την επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος.

Τέλος, επεκτείνουμε τη μελέτη του προβλήματος σκέδασης κοντινού-πεδίου σε ημιάπειρα περιβάλλοντα χωρία. Πιο αναλυτικά, στο Κεφ. 8 ενδιαφερόμαστε στη μαθηματική θεμελίωση και επέκταση της Μεθόδου Γραμμικής Δειγματοληψίας (Linear Sampling Method - LSM) στην περίπτωση διαπερατού και χωρίς απώλειες σκεδαστή σε ομογενή ημιχώρο. Τεκμηριώνουμε τη



μέθοδο θεωρητικά και παρουσιάζουμε αριθμητικά αποτελέσματα ανακατασκευής τρισδιάστατων σχεδαστών από μετρήσεις στην ελεύθερη επιφάνεια του χωρίου, πιστοποιώντας τη λειτουργικότητα της μεθόδου στην εν λόγω περίπτωση.



Αντί προλόγου

Η παρούσα διδακτορική διατριβή εκπονήθηκε, εν πρώτοις, στο Γενικό Τμήμα της Πολυτεχνιακής Σχολής του Α.Π.Θ. στο πλάι του τότε Επίκ. Καθηγητή Αντώνη Χαραλαμπίδου και διήρκησε από το Μάρτιο 2001 έως το Δεκέμβριο 2002. Η μετακίνηση του κ. Χαραλαμπίδου στο Τμήμα Μηχανικών των Υλικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων οδήγησε στην επανεκκίνηση του διδακτορικού μου το Μάρτιο 2003 και την περάτωσή του στα μέσα του 2006, κατά τη διάρκεια της στρατιωτικής μου θητείας.

Όντας, πλέον, στην ευχάριστη θέση της ολοκλήρωσης των ερευνητικών μου προσπαθειών, στα πλαίσια του διδακτορικού μου, αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου Αντώνη Χαραλαμπίδου για την απλόχερη επιστημονική του αρωγή, για την ελευθερία που μου παρείχε, την εμπιστοσύνη που μου επιδείκνυε και, κυρίως, για την μαθηματική κλίση και έμπνευση που μου εμφύσησε όλα αυτά τα χρόνια.

Επίσης, Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή Γεώργιο Μανώλη του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών του Α.Π.Θ. για την επιστημονική του συμβολή στη διατριβή μου και για τη φιλική μας συνεργασία στην οποία αφιέρωσε φιλότιμα και ανιδιοτελώς κόπο και χρόνο.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω ακόμη και στο μακρινό μας συνεργάτη Αναπλ. Καθηγητή Bojan B. Guzina του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου της Μιννεσότα για την επιστημονική συμβολή του στις ερευνητικές μας προσπάθειές τόσο σε αριθμητικό-υπολογιστικό όσο και σε θεωρητικό επίπεδο.

Σημαντική, συν τοις άλλοις, ήταν και η οικονομική υποστήριξη που εξέλαβα, μέσω της συμμετοχής σε ερευνητικά προγράμματα, από τον Αναπλ. Καθηγητή Δημήτριο Φωτιάδη του Τμήματος Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, και τον ευχαριστώ εγκάρδια για αυτό.

Οφείλω, ολοκληρώνοντας, να ευχαριστήσω τα μέλη της επταμελούς εξεταστικής επιτροπής για τη συμμετοχή τους σε αυτήν και για την ξεχωριστή τιμή που αποτελεί η παρουσία τους στην υποστήριξη της διατριβής μου.

Μάρτιος 2007

Κωνσταντίνος Κ. Μπαγανάς



Περιεχόμενα

Περίληψη	vii
Αντί προλόγου	xi
1 Βιβλιογραφική αναδρομή και διάρθρωση της διατριβής	2
2 Κυματική διάδοση και ανακατασκευή διηλεκτρικής ανομοιογένειας σε κυλινδρικούς κυματοδηγούς	12
2.1 Περίληψη του προβλήματος	12
2.2 Οι εξισώσεις του Maxwell σε ανομοιογενή μέσα	13
2.3 Κυματική διάδοση σε κυλινδρικό κυματοδηγό	16
2.4 Κυματική διάδοση σε σύστημα κυλινδρικών κυματοδηγών	18
2.4.1 Η μικροκυματική διάταξη μετρήσεων	18
2.4.2 Υπολογισμός των πεδιακών συνιστωσών	19
2.4.3 Έλεγχος με αναλυτικές λύσεις	21
2.4.4 Συχνότητες αποκοπής	24
2.5 Επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος	24
2.5.1 Διατύπωση της συνάρτησης σφάλματος	24
2.5.2 Ο γενετικός αλγόριθμος διαφορικής εξέλιξης	26
2.6 Αριθμητικά αποτελέσματα	27
2.6.1 Η διαδικασία προσομοίωσης	27
2.6.2 Ανακατασκευή ανομοιογένειας από μετρήσεις των $\ D\ $, $\ G\ $	28
2.6.3 Ανακατασκευή ανομοιογένειας από μετρήσεις των D , G	30
2.7 Συμπεράσματα	31
3 Κυματική διάδοση και ανακατασκευή διηλεκτρικής ανομοιογένειας σε τετραγωνικούς κυματοδηγούς	34
3.1 Περίληψη του προβλήματος	34
3.2 Οι εξισώσεις του Maxwell σε ανομοιογενή μέσα	35
3.3 Κυματική διάδοση σε τετραγωνικό κυματοδηγό	38



3.4	Κυματική διάδοση σε σύστημα τετραγωνικών κυματοδηγών	39
3.4.1	Υπολογισμός των πεδιακών συνιστωσών	40
3.4.2	Έλεγχος με αναλυτικές λύσεις	41
3.4.3	Οι μορφές του πεδίου εντός του ανομοιογενούς μέσου	43
3.4.4	Συχνότητες αποκοπής	47
3.5	Αριθμητικά αποτελέσματα	48
3.5.1	Η διαδικασία προσομοίωσης	48
3.5.2	Ανακατασκευή ανομοιογένειας από μετρήσεις των $\ D\ $, $\ G\ $	49
3.6	Συμπεράσματα	52
4	Κυματική διάδοση και ανακατασκευή μαγνητικής ανομοιογένειας σε τετραγωνικούς κυματοδηγούς	54
4.1	Περίληψη του προβλήματος	54
4.2	Εξισώσεις του Maxwell σε ανομοιογενή μέσα	54
4.3	Κυματική διάδοση σε τετραγωνικό κυματοδηγό	58
4.4	Κυματική διάδοση σε σύστημα τετραγωνικών κυματοδηγών	59
4.4.1	Υπολογισμός πεδιακών συνιστωσών	59
4.4.2	Έλεγχος με αναλυτικές λύσεις	61
4.4.3	Συχνότητες αποκοπής	63
4.5	Αριθμητικά αποτελέσματα	66
4.5.1	Η διαδικασία προσομοίωσης	66
4.5.2	Ανακατασκευή ανομοιογένειας από μετρήσεις των $\ D\ $, $\ G\ $	66
4.6	Συμπεράσματα	67
5	Ανομοιογενή διηλεκτρικά αντηχεία	70
5.1	Περίληψη	70
5.2	Τετραγωνικά αντηχεία	70
5.2.1	Συμφωνία με αναλυτικές λύσεις	73
5.3	Κυλινδρικά αντηχεία	75
5.3.1	Έλεγχος με αναλυτικές λύσεις	78
5.4	Αριθμητικά αποτελέσματα	81
5.4.1	Ιδιοσυχνότητες	81
5.4.2	Μορφές των ιδιοκαταστάσεων	83
5.4.3	Το αντίστροφο πρόβλημα	85
5.5	Συμπεράσματα	86
6	Κυματική διάδοση και ανακατασκευή ιδιοτήτων σε ανομοιογενή ελαστικά μέσα	90
6.1	Περίληψη του προβλήματος	90



Περιεχόμενα	xv
6.2 Διατύπωση του προβλήματος	90
6.3 Έλεγχος της Frobenius λύσης	93
6.4 Το ευθύ πρόβλημα	94
6.5 Επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος	95
6.5.1 Η συνάρτηση σφάλματος	95
6.5.2 Γενετικοί αλγόριθμοι ελαχιστοποίησης	96
6.6 Αριθμητικά αποτελέσματα	96
6.7 Συμπεράσματα	98
7 Ανίχνευση σφαιρικών εγκλεισμών σε φραγμένο ελαστικό κυλινδρικό χώρο	104
7.1 Περίληψη του προβλήματος	104
7.2 Διατύπωση του προβλήματος	105
7.3 Επίλυση του ευθέως προβλήματος	108
7.4 Αριθμητικά αποτελέσματα	113
7.5 Συμπεράσματα	115
8 Η Μέθοδος Γραμμικής Δειγματοληψίας στην αντίστροφη σκέδαση κοντινού-πεδίου σε διαπερατό ελαστικό σκεδαστή	120
8.1 Περίληψη του προβλήματος	120
8.2 Μοντελοποίηση του προβλήματος σκέδασης	120
8.3 Το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης	122
8.4 Εισαγωγικά στοιχεία	123
8.5 Η Μέθοδος Γραμμικής Δειγματοληψίας	126
8.6 Επιλυσιμότητα ολοκληρωτικής εξίσωσης κοντινού-πεδίου	127
8.6.1 Προσεγγιστική ιδιότητα δυναμικών απλού-στρώματος	129
8.7 Ιδιότητες τελεστή κοντινού-πεδίου	129
8.8 Ιδιότητες της λύσης πυκνότητας	134
8.8.1 Συμπεριφορά της λύσης στον εξωτερικό χώρο Ω^-	136
8.9 Αριθμητικά αποτελέσματα	137
8.10 Συμπεράσματα	140
9 Σύνοψη διατριβής	144
Παράρτημα	148
A Οι βαθμωτές συναρτήσεις $F_l(n;l)$	148
Βιβλιογραφία-Αναφορές	150



Κατάλογος Σχημάτων

2.1	Η μικροκυματική διάταξη μετρήσεων.	18
2.2	Εξέλιξη του σφάλματος $\frac{\ D-D_{Pr}\ }{\ D\ }$ συναρτήσει της συχνότητας για την περίπτωση $\varepsilon_m = 3$	22
2.3	Εξέλιξη του σφάλματος $\frac{\ G-G_{Pr}\ }{\ G\ }$ συναρτήσει της συχνότητας για την περίπτωση $\varepsilon_m = 3$	23
2.4	Εξέλιξη του σφάλματος $\frac{\ D-D_{Pr}\ }{\ D\ }$ συναρτήσει της συχνότητας για την περίπτωση $\varepsilon_r(z) = 3 + 20z$	23
2.5	Εξέλιξη του σφάλματος $\frac{\ G-G_{Pr}\ }{\ G\ }$ συναρτήσει της συχνότητας για την περίπτωση $\varepsilon_r(z) = 3 + 20z$	23
2.6	Οι συχνότητες αποκοπής $f_{c,11}, \tilde{f}_{c,11}$	25
2.7	Η συνάρτηση σφάλματος $J_2(\tilde{\varepsilon})$ συναρτήσει των γενεών του Γ.Α.	28
2.8	Εξέλιξη της $\tilde{\varepsilon}_0$ παραμέτρου συναρτήσει των γενεών του Γ.Α.	29
2.9	Εξέλιξη της $\tilde{\varepsilon}_1$ παραμέτρου συναρτήσει των γενεών του Γ.Α.	29
2.10	Εξέλιξη της $\tilde{\varepsilon}_2$ παραμέτρου συναρτήσει των γενεών του Γ.Α.	29
2.11	Εξέλιξη της $\tilde{\varepsilon}_3$ παραμέτρου συναρτήσει των γενεών του Γ.Α.	30
2.12	Σύγκριση των ε και $\tilde{\varepsilon}$ κατά μήκος του μεσαίου κυματοδηγού.	30
2.13	Η συνάρτηση σφάλματος $J_1(\varepsilon)$ συναρτήσει των γενεών του Γ.Α.	31
2.14	Εξέλιξη της $\tilde{\varepsilon}_0$ παραμέτρου συναρτήσει των γενεών του Γ.Α.	31
2.15	Εξέλιξη της $\tilde{\varepsilon}_1$ παραμέτρου συναρτήσει των γενεών του Γ.Α.	32
2.16	Εξέλιξη της $\tilde{\varepsilon}_2$ παραμέτρου συναρτήσει των γενεών του Γ.Α.	32
2.17	Εξέλιξη της $\tilde{\varepsilon}_3$ παραμέτρου συναρτήσει των γενεών του Γ.Α.	32
2.18	Σύγκριση των ε και $\tilde{\varepsilon}$ κατά μήκος του μεσαίου κυματοδηγού.	33
3.1	Η μετρητική μικροκυματική διάταξη	40
3.2	Εξέλιξη του σφάλματος $\frac{\ D-D_{Pr}\ }{\ D\ }$ συναρτήσει της συχνότητας για $\varepsilon_m = 5$	43
3.3	Εξέλιξη του σφάλματος $\frac{\ G-G_{Pr}\ }{\ G\ }$ συναρτήσει της συχνότητας για $\varepsilon_m = 5$	44
3.4	Εξέλιξη του σφάλματος $\frac{\ D-D_{Pr}\ }{\ D\ }$ συναρτήσει της συχνότητας για $\varepsilon_r(z) = 3.12 + 5.47z$	44
3.5	Εξέλιξη του σφάλματος $\frac{\ G-G_{Pr}\ }{\ G\ }$ συναρτήσει της συχνότητας για $\varepsilon_r(z) = 3.12 + 5.47z$	45



3.6	Οι μορφές του πεδίου $E_y(\alpha/2, z)$ στις συχνότητες διέγερσης $f_1 = 3.3(\text{GHz})$, $f_2 = 3.5(\text{GHz})$, $f_3 = 3.6(\text{GHz})$, $f_4 = 3.7(\text{GHz})$ για την ανομοιογένεια $\epsilon_r(z) = 2.5 + 5.47z$	46
3.7	Οι μορφές του πεδίου $E_y(\alpha/2, z)$ για μικρές μεταβολές της παραμέτρου ϵ_0 της ανομοιογένειας $\epsilon_r(z) = \epsilon_0 + 5.47z$ στη συχνότητα διέγερσης $f = 3.7(\text{GHz})$	46
3.8	Συγκριτικό διάγραμμα των $f_{c,10}$, $\tilde{f}_{c,10}$	48
3.9	Η συνάρτηση σφάλματος $J_2(\bar{\epsilon})$ συναρτήσει των γενεών του Γ.Α.	49
3.10	Εξέλιξη της $\bar{\epsilon}_0$ παραμέτρου συναρτήσει των γενεών του Γ.Α.	50
3.11	Εξέλιξη της $\bar{\epsilon}_1$ παραμέτρου συναρτήσει των γενεών του Γ.Α.	50
3.12	Εξέλιξη της $\bar{\epsilon}_2$ παραμέτρου συναρτήσει των γενεών του Γ.Α.	51
3.13	Εξέλιξη της $\bar{\epsilon}_3$ παραμέτρου συναρτήσει των γενεών του Γ.Α.	51
3.14	Σύγκριση των ϵ και $\bar{\epsilon}$ κατά μήκος του μεσαίου κυματοδηγού.	52
4.1	Η μικροκυματική διάταξη μετρήσεων	59
4.2	Εξέλιξη του σφάλματος $\log_{10} \left(\frac{\ D - D_{Pr}\ }{\ D\ } \right)$ συναρτήσει της συχνότητας για την περίπτωση $\mu_r(z) = 428 + 520.5z$	63
4.3	Εξέλιξη του σφάλματος $\log_{10} \left(\frac{\ G - G_{Pr}\ }{\ G\ } \right)$ συναρτήσει της συχνότητας για την περίπτωση $\mu_r(z) = 428 + 520.5z$	64
4.4	Οι τιμές του σχετικού σφάλματος $\frac{ f_{c,11} - [f]_{c,11} }{f_{c,11}} \%$ για τα ανομοιογενή μαγνητικά προφίλ του Πίνακα 4.1.	65
4.5	$J_2(\bar{\mu}) = 0.084$. Ισχύει: $\max_{z \in [0, d]} (\mu_r^1(\text{real}) - \mu_r^1(\text{guess})) = 29.1$	67
4.6	$J_2(\bar{\mu}) = 0.031$. Ισχύει: $\max_{z \in [0, d]} (\mu_r^2(\text{real}) - \mu_r^2(\text{guess})) = 9.81$	68
4.7	$J_2(\bar{\mu}) = 0.066$. Ισχύει: $\max_{z \in [0, d]} (\mu_r^1(\text{real}) - \mu_r^1(\text{guess})) = 11.12$	68
4.8	$J_2(\bar{\mu}) = 0.051$. Ισχύει: $\max_{z \in [0, d]} (\mu_r^2(\text{real}) - \mu_r^2(\text{guess})) = 64.37$	69
4.9	$J_2(\bar{\mu}) = 0.042$. Ισχύει: $\max_{z \in [0, d]} (\mu_r^3(\text{real}) - \mu_r^3(\text{guess})) = 3.60$	69
5.1	Σύγκριση TE_{113} ιδιορρυθμών. Διαστάσεις αντηχείου: $\alpha = b = 3\text{cm}$, $d = 7\text{cm}$	74
5.2	Οι ρίζες της $F(f)$. Διαστάσεις αντηχείου: $\alpha = b = 3\text{cm}$, $d = 7\text{cm}$	74
5.3	Σύγκριση TE_{112} ιδιορρυθμών. Διαστάσεις αντηχείου: $\alpha = b = 3\text{cm}$, $d = 7\text{cm}$	76
5.4	Οι ρίζες της $F(f)$. Διαστάσεις αντηχείου: $\alpha = b = 3\text{cm}$, $d = 7\text{cm}$	76
5.5	Σύγκριση TE_{123} ιδιορρυθμών. Διαστάσεις αντηχείου: $\alpha = 2.5\text{cm}$, $L = 7\text{cm}$	79
5.6	Οι ρίζες της $F(f)$. Διαστάσεις αντηχείου: $\alpha = 2.5\text{cm}$, $L = 7\text{cm}$	79
5.7	Σύγκριση TE_{212} ιδιορρυθμών. Διαστάσεις αντηχείου: $\alpha = 2.5\text{cm}$, $L = 7\text{cm}$	80
5.8	Οι ρίζες της $F(f)$. Διαστάσεις αντηχείου: $\alpha = 2.5\text{cm}$, $L = 7\text{cm}$	81
5.9	Συγκριτικό διάγραμμα των ιδιοσυχνοτήτων $f_{c,111}$, $\tilde{f}_{c,111}$ σε τετραγωνικό και κυλινδρικό αντηχείο.	83



- 5.10 Πεδιακοί ιδιορρυθμοί στην περίπτωση της ανομοιογένειας $\epsilon_r(z) = 4 - 13.47z + 50.24z^2$ για $m = n = 1$. Διαστάσεις τετραγωνικού αντηχείου: $a = b = 3cm, d = 7cm$ 84
- 5.11 Πεδιακοί ιδιορρυθμοί στην περίπτωση της ανομοιογένειας $\epsilon_r(z) = 3.27 - 13.07z + 279.34z^2 - 946.96z^3$ για $m = 2, n = 1$. Διαστάσεις κυλινδρικού αντηχείου: $a = 2.5cm, L = 7cm$ 84
- 5.12 $\|G\|, \|D\|$ συναρτήσει της συχνότητας f για το ανομοιογενές προφίλ $\epsilon_r(z) = 3 - 35.55z + 335.72z^2 - 915z^3$. Διαστάσεις τετραγωνικού κυματοδηγού: $a = b = 3cm, d = 7cm$. Οι ιδιοσυχνότητες είναι ονομαστικά: $f_{c,101} = 3.6587, f_{c,102} = 4.4453, f_{c,103} = 5.4835$ (GHz). 85
- 5.13 $\|G\|, \|D\|$ συναρτήσει της συχνότητας f για το ομογενές προφίλ $\epsilon_r = 3$. Διαστάσεις τετραγωνικού κυματοδηγού: $a = b = 3cm, d = 7cm$. Οι ιδιοσυχνότητες είναι ονομαστικά: $f_{c,101} = 3.1385, f_{c,102} = 3.79948$, (GHz). 86
- 5.14 $\|G\|, \|D\|$ συναρτήσει της συχνότητας f για το ανομοιογενές προφίλ $\epsilon_r(z) = 3 - 15z$. Διαστάσεις τετραγωνικού κυματοδηγού: $a = b = 3cm, d = 7cm$. Οι ιδιοσυχνότητες είναι ονομαστικά: $f_{c,101} = 3.444, f_{c,102} = 4.196, f_{c,103} = 5.187, f_{c,104} = 6.318$ (GHz). 87
- 5.15 Οι μεταβολές του σφάλματος $\log_{10}(J(\epsilon_0, \epsilon_1))$ στη γειτονιά του ολικού ελαχίστου $\bar{\epsilon}_0 = 3, \bar{\epsilon}_1 = -15$. Διαστάσεις τετραγωνικού κυματοδηγού: $a = b = 3cm, d = 7cm$. 87
- 6.1 Το πρόβλημα διάδοσης. 91
- 6.2 Μεταβολή του σφάλματος $|(\|A_r^{Frob}\| - \|A_r^{Coll}\|)|$ συναρτήσει της συχνότητας. . . 100
- 6.3 Μεταβολή του σφάλματος $|(\|A_t^{Frob}\| - \|A_t^{Coll}\|)|$ συναρτήσει της συχνότητας. . . 100
- 6.4 Το πεδίο μετατοπίσεων $u_{inh}(z; \chi_2(z))$ στις συχνότητες διέγερσης $f = 500(\text{Hz})$ και $f = 4.5(\text{kHz})$ για το ανομοιογενές προφίλ $\chi_2(z) = [3 \ 0.5 \ -0.5](\text{GPa})$ ($L = 1.25\text{m}$). 101
- 6.5 Οι μορφές του πεδίου $u_{inh}(z; \chi_2(z))$ για μικρές μεταβολές του συντελεστή χ_0 του ανομοιογενούς προφίλ $\chi_2(z) = [\chi_0 \ \chi_1 \ \chi_2] = [2.45 \ -1.28 \ 1.52](\text{GPa})$ στη συχνότητα διέγερσης $f = 500(\text{Hz})$. Ονομαστικά, το χ_0 μεταβάλλεται από $2.45(\text{GPa})$ (η άνω γραμμή στην Εικόνα) σε $2.3(\text{GPa})$ (η κάτω γραμμή στην Εικόνα). δηλαδή, μια μεταβολή της τάξης 6% ($L = 1.25\text{m}$). 101
- 6.6 Η συνάρτηση σφάλματος $J(x)$ συναρτήσει των χ_0, χ_1 . Ολικό ελάχιστο στη θέση $\chi_0 = 3, \chi_1 = 0.5$ (GPa). 102
- 6.7 Ανακατασκευή του ομογενούς προφίλ $\chi_2(z) = 3$ για διάφορες περιπτώσεις ενθόρυβων δεδομένων. 102
- 6.8 Ανακατασκευή του γραμμικού προφίλ $\chi_2(z) = 3 + 0.5z$ για διάφορες περιπτώσεις ενθόρυβων δεδομένων. 103
- 6.9 Ανακατασκευή της παραβολικής ανομοιογένειας $\chi_2(z) = 3 + 0.5z - 0.5z^2$ για διάφορες περιπτώσεις ενθόρυβων δεδομένων. 103



7.1	Η γεωμετρία του προβλήματος. S_z είναι το επιφανειακό στοιχείο εφαρμογής του φορτίου πίεσης P , S_a , S_b και S_c είναι οι πλευρικές επιφάνειες του κυλίνδρου. . . .	106
7.2	Τα σφαιρικά συστήματα συντεταγμένων O και O'	106
7.3	Συνθήκη συνέχειας μετατοπίσεων στην επιφάνεια του εγκλεισμού.	116
7.4	Κανονικοποιημένο πεδίο μετατόπισης στην επιφάνεια S_a ($b = a/3$, $z_1 = 7.5cm$, $\lambda_p = D/4$).	116
7.5	Κανονικοποιημένο πεδίο μετατόπισης στην επιφάνεια S_a ($b = a/3$, $z_1 = 7.5cm$, $\lambda_p = D/3$).	117
7.6	Κανονικοποιημένο πεδίο μετατόπισης στην επιφάνεια S_a ($b = a/3$, $z_1 = 5cm$, $\lambda_p = D/3$).	117
7.7	Κανονικοποιημένο πεδίο μετατόπισης στην επιφάνεια S_a ($b = a/3$, $z_1 = 5cm$, $\lambda_p = D/4$).	118
7.8	Κανονικοποιημένο πεδίο μετατόπισης στην επιφάνεια S_a ($b = a/2$, $z_1 = 7.5cm$, $\lambda_p = D/4$).	118
7.9	Κανονικοποιημένο πεδίο μετατόπισης στην επιφάνεια S_a ($b = a/2.5$, $z_1 = 7.5cm$, $\lambda_p = D/4$).	119
8.1	Διέγερση ελαστικού εγκλεισμού στον ημιάπειρο χώρο Ω από αρμονική σημειακή πηγή στο $\zeta \in \Gamma_1$	121
8.2	Διαταραγμένος σχεδαστής	136
8.3	Διάταξη δοκιμών	138
8.4	Μονός συνεκτικός σχεδαστής ($\bar{\omega} = 1$)	139
8.5	Μονός συνεκτικός σχεδαστής ($\bar{\omega} = 2$)	141
8.6	Σχεδαστής δύο διακριτών σωμάτων ($\bar{\omega} = 1$)	141
8.7	Σχεδαστής δύο διακριτών σωμάτων ($\bar{\omega} = 2$)	142



Κατάλογος Πινάκων

2.1	Οι συχνότητες αποκοπής $f_{c,11}$, $\tilde{f}_{c,11}$.	25
2.2	Παράμετροι γενετικού αλγορίθμου	28
3.1	Οι συχνότητες αποκοπής $f_{c,10}$, $\tilde{f}_{c,10}$.	47
3.2	Παράμετροι γενετικού αλγορίθμου	49
4.1	Οι συχνότητες αποκοπής $f_{c,11}$, $[f]_{c,11}$.	65
4.2	Αυθαίρετα προφίλ στην περίπτωση $\mu_c^1 = 5000$	66
4.3	Αυθαίρετα προφίλ στην περίπτωση $\mu_c^1 = 10000$	66
4.4	Παράμετροι γενετικού αλγορίθμου	67
5.1	Οι συχνότητες αποκοπής $f_{c,111}$, $\tilde{f}_{c,111}$.	82
6.1	Παράμετροι γενετικού αλγορίθμου.	97
6.2	SNR και Μέγιστο Σχετικό Σφάλμα %.	98



Κεφάλαιο 1

Βιβλιογραφική αναδρομή και διάρθρωση της διατριβής

Το μονοδιάστατο πρόβλημα της ανακατασκευής των ιδιοτήτων ενός ανομοιογενούς διηλεκτρικού υλικού με συνεχώς μεταβαλλόμενο ή στρωματοποιημένο προφίλ έχει αντιμετωπιστεί από πολλούς ερευνητές έως τώρα (δες [40], [113]). Οι Were και Aki [113], Jordan και Ahn [59], Coen [27], καθώς και άλλοι συγγραφείς ([72], [70], [53], [44]), έχουν μελετήσει αναλυτικά ανομοιογενή διηλεκτρικά μέσα (ημιάπειρους χώρους, κυρίως) διάφορων προφίλ· για παράδειγμα, γραμμικά, τετραγωνικά, ημιτονοειδή, εκθετικά κ.α. Χρησιμοποίησαν, ως επί το πλείστον, επίπεδα προσπίπτοντα κύματα σε διάφορες γωνίες πρόσπτωσης, κινούμενοι τόσο στο χώρο συχνοτήτων, όσο και στον πραγματικό χωρόχρονο, θεωρώντας θεμελιώδεις και εξελεγμένες τεχνικές αντίστροφης σκέδασης. Η διέγερση με επίπεδα κύματα έχει, αναμφισβήτητα, θεωρητικά πλεονεκτήματα αλλά μειονεχτεί σε περιπτώσεις ρεαλιστικών πειραματικών εφαρμογών αντίστροφης σκέδασης. Η αποτίμηση ή ο έλεγχος των διηλεκτρικών ιδιοτήτων υλικών, όπως ελάσματα (sheets), πλέγματα (webs), ίνες (fibers), βιομηχανικά υλικά, διηλεκτρικά που χρησιμοποιούνται στην κατασκευή ηλεκτρικών συσκευών και μερών, απαιτούν ακριβείς και εύκολες στην υλοποίηση μεθόδους μη καταστροφικού ελέγχου (Non-Destructive Testing - NDT). Ένα πλήθος ερευνητών έχουν επιλύσει τέτοια προβλήματα εφαρμόζοντας πρακτικότερες πηγές, όπως διηλεκτρικούς ανοικτούς κυματοδηγούς ([107], [83], [40], [113], [59], [27], [72], [70], [53], [44]), αισθητήρες ομοαξονικών γραμμών [83] και κοιλότητες συντονισμού σε επαφή με διηλεκτρικά μέσα [40]. Ένα σημαντικό μειονέκτημα που συναντάται είναι ότι σε πολλές από αυτές τις πρακτικές μεθόδους εύρεσης διηλεκτρικής διαπερατότητας απαιτείται κατάλληλο κόψιμο και μορφοποίηση των διηλεκτρικών δειγμάτων. Για παράδειγμα, μόνο σφαίρες και κύλινδροι απαιτούνται για μεθόδους με συντονιστές, ορθογώνια δείγματα και πλάκες για μεθόδους με κυματοδηγούς κ.λ.π.

Λύσεις σε κλειστή μορφή έχουν βρεθεί μόνο σε ειδικές περιπτώσεις ανομοιογενών προφίλ [110]. Προσεγγιστικές λύσεις, ακόμη, δύνανται να εξαχθούν με την αντικατάσταση της συνεχούς ανομοιογένειας από μια σειρά πεπερασμένων και ομογενών στρωμάτων (layers) (δες [25], [98]).



Όταν τα πάχη των στρωμάτων αυτών είναι κατά πολύ λεπτότερα του μήκους κύματος του διαδιδόμενου κύματος, οι λύσεις που λαμβάνονται είναι επαρκώς ακριβείς. Αυτή η λογική εφαρμόστηκε και στο παρελθόν σε μεθόδους πεπερασμένων διαφορών [97], στην Transmission Line μέθοδο [26], την WKB μέθοδο συνδυασμένη με ασυμπτωτική σύμπτωση (asymptotic matching) (δες [25] και [79]), τη μέθοδο propagation/scattering matrix [25] κ.λ.π.

Έχοντας υπόψη τα παραπάνω, στα Κεφάλαια 2-3 προτείνουμε μια τεχνική που εφαρμόζεται σε τυχαία διηλεκτρικά προφίλ της μορφής $\epsilon(z) = \epsilon_0 \epsilon_r(z)$, με ϵ_0 να δηλώνεται η διηλεκτρική διαπερατότητα του ελεύθερου χώρου και $\epsilon_r(z)$ η σχετική διηλεκτρική διαπερατότητα της ανομοιογένειας. Η προτεινόμενη μεθοδολογία απαιτεί μόνο τη $\epsilon_r(z)$ να είναι ομαλή και συνεχής συνάρτηση, ώστε να μπορεί να εκφραστεί σε μια σειρά δυνάμεων του z . Με χρήση της *Frobenius* μεθόδου επιτυγχάνεται η λύση του ευθέως προβλήματος κυματικής διάδοσης εντός ανομοιογένειας που χαρακτηρίζεται από τυχαίο προφίλ $\epsilon_r(z)$. Σε ό,τι αφορά το αντίστροφο πρόβλημα, προτείνουμε την υλοποίηση μιας μικροκυματικής διάταξης τριών κυματοδηγών (κυλινδρικών στο Κεφ. 2 και τετραγωνικών στο Κεφ. 3), ένας εκ των οποίων περιέχει το υπό εξέταση ανομοιογενές διηλεκτρικό. Για την επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος ορίζουμε μια συνάρτηση σφάλματος κατάλληλης μορφής και εκμεταλλευόμαστε την ισχύ ενός γενετικού αλγορίθμου διαφορικής εξέλιξης. Η λύση από την ελαχιστοποίηση συνίσταται στην εύρεση των συντελεστών $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \dots$ του αναπτύγματος της $\epsilon_r(z)$. Στα αριθμητικά παραδείγματα παρατίθενται ανακατασκευές κυβικών ανομοιογενειών με εξαιρετικά ακριβή αποτελέσματα.

Σε ό,τι αφορά τη μαγνητική επιτρεπτότητα, η γνώση των χωρικών της μεταβολών είναι υψηλής σημασίας σε διάφορες εφαρμοσμένες επιστημονικές περιοχές. Για παράδειγμα, στη μοντελοποίηση ηλεκτρομαγνητικών πεδίων στη γεωλογική έρευνα σε πολλές πρακτικές εφαρμογές ένα αγώγιμο αντικείμενο έχει σημαντικές μαγνητικές ιδιότητες. Επίσης, μεταλλεύματα που περιέχουν μαγνητίτη και γεωτρητική λάσπη με βαριά συστατικά χαρακτηρίζονται από ισχυρά ανώμαλη αγωγιμότητα και μαγνητική επιτρεπτότητα και μπορούν να προκαλέσουν σημαντικές επιδράσεις στην απόκριση ηλεκτρομαγνητικών μετρητικών διατάξεων. Στη γεωλογική έρευνα οι μαγνητικές ιδιότητες των πετρωμάτων, και ιδιαίτερα η ανώμαλη συμπεριφορά τους, προσελκύουν, επίσης, το επιστημονικό ενδιαφέρον. Πληροφορίες σχετικές με τη μαγνητική επιτρεπτότητα είναι σημαντικές σε πολλούς τομείς, όπως η εμβιομηχανική, ιατρικές εφαρμογές και οι τηλεπικοινωνίες.

Διάφορες μέθοδοι έχουν εφαρμοστεί μέχρι τώρα για τον καθορισμό ή, απλώς, την εκτίμηση των άγνωστων μεταβλλόμενων μαγνητικών ιδιοτήτων των υλικών που μας ενδιαφέρουν. Παράδειγματος χάριν, στη γεωηλεκτρική έρευνα η αποκαλούμενη μέθοδος S_μ (δες [94], [95], [106]) ενισχύει την πιθανότητα ανακατασκευής των μαγνητικών ιδιοτήτων των γεωλογικών υλικών και της ανώμαλης αγωγιμότητας και μαγνητικής επιτρεπτότητας από τα ίδια δεδομένα στο πεδίο του χρόνου του μαγνητικού πεδίου. Οι Cheryauka και Zhdanov [23] επεκτείνουν γραμμικές και μη-γραμμικές προσεγγίσεις για ηλεκτρομαγνητικά πεδία σε μέσα με ανομοιογενή κατανομή των ηλεκτρικών και μαγνητικών ιδιοτήτων. Αυτές οι προσεγγίσεις θέτουν τη βάση για ταχεία



ηλεκτρομαγνητική μοντελοποίηση και απεικόνιση σε πολυδιάστατα περιβάλλοντα, όπου μαζί η ηλεκτρική και η μαγνητική ανομοιογένεια είναι ουσιώδη χαρακτηριστικά του μοντέλου. Στην τεχνολογία μεταλλικών λεπτών φιλμ ο καθορισμός της σύνθεσης λεπτών φιλμ με υψηλή ανάλυση στη νανομετρική κλίμακα είναι απαραίτητη. Για αυτόν το σκοπό, το αποκαλούμενο μοντέλο Mixing Roughness Information depth (MRI) εξελίχθηκε για την ανακατασκευή και ποσοτικοποίηση των προφίλ. Επίσης, στην εμβιομηχανική διάφορες θεωρίες έχουν εισαχθεί για την απεικόνιση πραγματικών τρισδιάστατων ιδιοτήτων σε γενικές περιπτώσεις αυθαίρετης κατανομής της μαγνητικής επιτρεπτότητας.

Ρεαλιστικά υπολογιστικά μοντέλα ανομοιογενών διηλεκτρικών ή/και μαγνητικών μέσων, όπως κυματική σκέδαση από ανομοιογενή αντικείμενα αυθαίρετης μορφής και κυματική διάδοση σε στρωματοποιημένα μέσα στις τηλεπικοινωνίες, στη μηχανική και στη γεωλογική έρευνα, βασίζονται περισσότερο σε προσεγγιστικές αριθμητικές μεθόδους· δηλαδή, σε μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων, πεπερασμένων διαφορών, συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων και φασματικών μεθόδων. Οι αναλυτικές μέθοδοι, βεβαίως, δεν μπορούν να χειριστούν τέτοιες απαιτητικές εφαρμογές, αλλά θέτουν σοβαρή υποψηφιότητα σε περιπτώσεις που οι γεωμετρίες που εμπλέκονται στις εφαρμογές είναι όμοιες με επιφάνειες συντεταγμένων (π.χ. τετραγωνικές, κυλινδρικές ή σφαιρικές), τα χωρικά πεδία που πληρώνονται από ανομοιογένειες έχουν, επίσης, χαρακτηριστικά σχήματα και οι μεταβαλλόμενες ιδιότητες είναι τμηματικά ομαλές. Στη βιβλιογραφία, αναλυτικοί χειρισμοί τμηματικώς σταθερών, γραμμικών και τετραγωνικών ανομοιογενειών μπορούν εύκολα να βρεθούν· ειδικά σε ελαστικά και διηλεκτρικά ανομοιογενή υλικά. Η έλλειψη παρόμοιων μελετών σε μαγνητικά μέσα είναι ένα γεγονός, δεδομένου ότι διάφορες επιστημονικές περιοχές αντιμετωπίζουν τέτοια υλικά και ότι τα θεωρήματα αμοιβαιότητας, που εμφανίζονται σε πολλές από αυτές (π.χ. στις εξισώσεις του Maxwell), παρέχουν εύκολους τρόπους μελέτης τέτοιων υλικών.

Στο Κεφάλαιο 4 εφαρμόζουμε το μοντέλο των κυματοδηγών των Κεφαλαίων 2-3 για την εκτίμηση άγνωστων προφίλ μαγνητικής επιτρεπτότητας υλικών. Ακολουθούμε τη μεθοδολογία που βασίζεται στη Frobenius μέθοδο (δες [6], [7]) και η οποία δύναται να εφαρμοστεί σε κάθε ανομοιογενές μαγνητικό προφίλ της μορφής $\mu(z) = \mu^* \mu_+(z)$, όπου μ^* είναι η μαγνητική επιτρεπτότητα του ελεύθερου χώρου και $\mu_+(z)$ δηλώνει τη σχετική μαγνητική επιτρεπτότητα του ανομοιογενούς υλικού. Όμοια, η μόνη προϋπόθεση είναι $\mu_+(z) \in \mathbb{C}$, ώστε να μπορεί να εκφραστεί ως σειρά δυνάμεων του z .

Περίληπτικά, όπως και στα Κεφ. 2-3, εφαρμόζουμε χωρισμό των μεταβλητών για τη μελέτη των εξισώσεων Maxwell. Εχμεταλλευόμενοι την πολωνυμική μορφή της $\mu_+(z)$ κάνουμε χρήση της μεθόδου Frobenius και καταλήγουμε, για το z -εξαρτώμενο όρο του ηλεκτρικού πεδίου, σε μια συνήθη διαφορική εξίσωση με μη-σταθερούς συντελεστές. Τότε, οι επαναληπτικές εξισώσεις που προκύπτουν για τους Frobenius συντελεστές μπορούν να λυθούν συμβολικά ή αναλυτικά. Τα αποτελέσματα της εν λόγω μαθηματικής ανάλυσης χρησιμοποιούνται για την επίλυση του



ευθέως προβλήματος διάδοσης στο σύστημα των κυματοδηγών. Εξ' αυτών, ο κεντρικός περιέχει το ανομοιογενές υλικό και οι υπόλοιποι ομογενή μέσα. Στη συνέχεια, προχωρούμε στην επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος που συνίσταται στην ανακατασκευή του μαγνητικού προφίλ. Υλοποιούμε μια διαδικασία ελαχιστοποίησης συνάρτησης σφάλματος που χρησιμοποιεί ένα γενετικό αλγόριθμο και αναζητά τους άγνωστους συντελεστές $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots$, στην επέκταση του $\mu_r(z)$. Τονίζουμε ότι επιλύουμε το αντίστροφο πρόβλημα για την περίπτωση κυβικής ανομοιογένειας που είναι επαρκές για πολλές ρεαλιστικές εφαρμογές. Τελικά, παρουσιάζουμε αντιπροσωπευτικά αριθμητικά αποτελέσματα που πιστοποιούν την καταλληλότητα της προτεινόμενης προσέγγισης και σε αυτή την περίπτωση.

Προκειμένου να ολοκληρώσουμε την ανάλυση των κυματικών φαινομένων εντός μικροκυματικών στοιχείων που περιέχουν κατά τη μία διάσταση ανομοιογενή διηλεκτρικά μέσα, μελετούμε στο Κεφάλαιο 5 τη συμπεριφορά των πεδίων εντός μικροκυματικών ανομοιογενών αντηχείων. Προς αυτό το σκοπό, αξιοποιούμε την ανάλυση των Κεφαλαίων 2-3 και υπολογίζουμε τις ιδιοσυχνότητες και τους ιδιορρυθμούς εντός κυλινδρικών και τετραγωνικών αντηχείων για διηλεκτρικές ανομοιογένειες μέχρι και κυβικής τάξεως. Τα αποτελέσματα είναι εξαιρετικά ακριβή και σε πλήρη ταύτιση με αναλυτικές κλειστές λύσεις για απλές ανομοιογένειες. Παρουσιάζονται, ενδεικτικά, διαγράμματα ιδιοσυχνοτήτων και ιδιομορφών για μια πλειάδα ανομοιογενειών προφίλ.

Αναφορικά με τις ελαστικές ανομοιογένειες, προσφάτως, έχει αναπτυχθεί ιδιαίτερα το επιστημονικό ενδιαφέρον στη μελέτη της κυματικής διάδοσης σε πραγματικά και τεχνητά μέσα με εφαρμογές στη διάδοση ακουστικού σήματος, σε σεισμικώς επαγόμενες κινήσεις, στον NDT, στον έλεγχο θορύβου, στην εξερεύνηση του εδάφους κ.λ.π. (δες [42], [11], [12], [25]). Λόγω της σύνθετης δομής αυτών των μέσων, η κυματική διάδοση συνοδεύεται από φαινόμενα ανάκλασης, διάθλασης, περίθλασης και σκέδασης που είναι δύσκολο να ποσοτικοποιηθούν. Ως αποτέλεσμα, είναι αναγκαία η εισαγωγή στρωμάτων καθώς και εξαρτώμενων σε χωρικές συντεταγμένες ιδιοτήτων στη μαθηματική περιγραφή τέτοιων προβλημάτων. Για παράδειγμα, στην εδαφομηχανική, πειράματα έχουν πιστοποιήσει ότι ακόμα και σε ιζηματώδη εδαφικά αποθέματα, η σκληρότητα, που εκφράζεται σε όρους των ελαστικών ιδιοτήτων, αλλάζει με το βάθος ως αποτέλεσμα εναλλαγών στην ενεργή πίεση περιορισμού (effective confining pressure). Συνεπώς, το ελαστικό μέτρο (elastic moduli) παρουσιάζει συνεχή μεταβολή με το βάθος και τέτοια εδάφη ονομάζονται εγκαρσίως ανομοιογενή. Γενικά, η συνθετότητα τέτοιων προβλημάτων είναι μεγάλη ώστε οι περισσότερες περιπτώσεις πρέπει να εξεταστούν μεμονωμένα και στα πλαίσια συγκεκριμένων εφαρμογών. Επιπλέον, η καταφυγή σε αριθμητικές μεθόδους λύσεις είναι συνήθως αναγκαστική ([24], [73], [61]).

Τα υλικά συναρτησιακής μεταβολής (Functionally Graded Materials - FGMs) αποτελούν μια σημαντική περιοχή στην έρευνα των υλικών με εν δυνάμει πολλές εφαρμογές. Σε ένα ιδανικό FGM οι ιδιότητες του υλικού μπορούν να μεταβάλλονται ομαλά στη μία διάσταση. Εμπεριστατωμένες ανασκοπίσεις της τρέχουσας έρευνας στα FGM μπορούν να βρεθούν σε άρθρα



των Hirai [57] και Markworth [76], και στο βιβλίο των Suresh και Mortensen [105]. Επίσης, πρέπει να δοθεί προσοχή στην ανάκτηση Green συναρτήσεων για την ειδική περίπτωση των FGM· μια τέτοια συνάρτηση για ένα ειδικού τύπου πρόβλημα ελαστοδυναμικής έχει εξαχθεί από τον Vre-
tos [111].

Ελαστικά κύματα σε διακριτώς στρωματοποιημένα μέσα και σε μεταβλητής ταχύτητας στρώ-
ματα συζητούνται στο [42]. Οι Brekhovskikh [11] και Chew [25] εξετάζουν κυρίως ακουστικά
και ηλεκτρομαγνητικά κύματα, με τον πρώτο να εστιάζει στην κυματική ανάκλαση και διάθλαση
σε διακριτά και συνεχή στρωματοποιημένα μέσα και τον δεύτερο σε ειδικές μεθόδους όπως
μεταβολικές τεχνικές, mode matching, Green συναρτήσεις, ολοκληρωτικές εξισώσεις και την T-
matrix προσέγγιση. Γενικά, το μεγαλύτερο τμήμα της έρευνας πάνω σε κύματα σε ανομοιογενή
συνεχή μέσα εστιάζει σε κύματα σε διακριτά στρωματοποιημένα μέσα και υπό αρμονικές συνθήκες
διέγερσης. Μεγάλης σημασίας είναι η επίπεδη βαθμωτή κυματική εξίσωση με μήκος κύματος
εξαρτώμενο από το βάθος, διότι αντιστοιχεί, για παράδειγμα, σε οριζοντίως και καθέτως πολωμένα
ελαστικά εγκάρσια κύματα.

Διάφορες μεθοδολογίες είναι διαθέσιμες για την επίλυση της διάδοσης βαθμωτών κυμάτων σε
ανομοιογενή μέσα. Μία κλάση ειδικευμένων τεχνικών βασίζεται στην προσέγγιση της γεωμε-
τρικής οπτικής για υψηλές συχνότητες (ή σχετικά μικρά μήκη κύματος συγκριτικά με την κλίμακα
της ετερογένειας) [67]. Η παρουσία των σημείων εναλλαγής όπου η λύση (που μπορεί να δεχθεί
μια μετάφραση ακτίνας) παύει να υφίσταται, καθιστά αναγκαίες κατάλληλες αναβαθμίσεις σε
αυτήν την τεχνική και, ως τέτοιες, είναι γνωστές ως η WKB μέθοδος [8]. Σε μέσα στα οποία η
εξάρτηση των παραμέτρων του υλικού στη θέση είναι αυθαίρετη, μια διαφορετική κλάση τεχνικών
που βασίζεται σε διαδοχικές προσεγγίσεις είναι διαθέσιμη. Παραδείγματα τέτοια εμφανίζονται
στο [11] για τον υπολογισμό συντελεστών ανάκλασης για ηλεκτρομαγνητικά κύματα που προσπί-
πτουν σε ανομοιογενές στρώμα πεπερασμένου πάχους, με την γεωμετρική οπτική να παρέχει μια
πρώτη προσέγγιση. Εντούτοις, δεν είναι δυνατή η διάκριση του κυματικού πεδίου σε αυθαίρετα
ανομοιογενή μέσα σε άθροισμα ενός προσπίπτοντος και ενός ανακλώμενου κύματος, λόγω της
συνεχούς σκέδασης του σήματος από τις ανομοιογένειες.

Μια εναλλακτική μέθοδος έρευνας της κυματικής διάδοσης σε ένα συνεχώς στρωματοποιημένο
μέσο είναι ο μετασχηματισμός Fourier-Bessel που οδηγεί σε μια ολοκληρωτική αναπαράσταση
του κυματικού πεδίου. Εφαρμογές αυτής της μεθόδου περιλαμβάνουν τη βαθμωτή διάδοση σε
ένα στρώμα με κυματάριθμο που εξαρτάται γραμμικά από το βάθος και σε ένα στρώμα Erstein.
Μια πλήρης λίστα γνωστών λύσεων για ανακλώμενα βαθμωτά πεδία σε ανομοιογενή στρώματα
παρουσιάζεται στο [11] και περιλαμβάνει, επίσης, κυματάριθμους που μεταβάλλονται με το βάθος,
έστω z , ως γραμμική συνάρτηση, ως η αντίστροφη μιας γραμμικής συνάρτησης, ως γενικά
πολυώνυμα δευτέρας τάξεως και πάνω και ως την εκθετική συνάρτηση. Η λύση στο επίπεδο της
βαθμωτής κυματικής εξίσωσης εκφράζεται σε όρους πλάτους και φάσεως που είναι εξαρτώμενη
από το βάθος και εμπλέκουν τη λύση της υπεργεωμετρικής εξίσωσης της οποίας η ακριβής μορφή



εξαρτάται από το συγκεκριμένο τύπο κυματάριθμου υπό θεώρηση. Είναι επίσης δυνατή η εξέταση της διάδοσης ελαστικών κυμάτων, υπό την προϋπόθεση ότι μαζί οι ελαστικές παράμετροι και η πυκνότητα μεταβάλλονται με το βάθος z έτσι ώστε οι κυματάριθμοι που αντιστοιχούν σε πρωτεύοντα και δευτερεύοντα κύματα να μπορούν να εκφραστούν σε σειρές του z , με τους γραμμικούς όρους να μπορούν να διατηρηθούν.

Στην παρούσα διατριβή στρέφουμε την προσοχή μας στην κάθετη πρόσπτωση ενός επιπέδου κύματος σε ένα στρώμα μεταξύ δύο ομογενών ημιάπειρων χώρων. Το στρώμα είναι μονοαξονικά ανομοιογενές, δηλαδή έχει ιδιότητες της μορφής $\chi(z) = 2\mu(z) + \lambda(z)$, όπου λ, μ είναι οι Lamé ελαστικές παράμετροι που εξαρτώνται σε μία συντεταγμένη, έστω z . Επιπρόσθετα, θεωρούμε το υλικό του στρώματος γραμμικό, ελαστικό και ισοτροπικό. Οι Caviglia και Morro [16] απέδειξαν την ύπαρξη και μοναδικότητα C^2 λύσεων για αυτό το πρόβλημα ανάκλασης-διάδοσης και εξήγαγαν λύσεις βάσει της ανάλυσης Fourier. Επίσης, κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι το ανακλώμενο και το διαδιδόμενο κομμάτι της λύσης είναι κατάλληλες συνελλίξεις του προσπίπτοντος κύματος. Εν προκειμένω, στο Κεφάλαιο 6 επεκτείνουμε τη μελέτη τους παρέχοντας μια αναλυτική λύση που βασίζεται στη μέθοδο Frobenius, η οποία πρόσφατα εφαρμόστηκε στην περιγραφή κυλινδρικών κυμάτων στη γενική περίπτωση ακτινικά ανομοιογενών υλικών με μη-περιορισμένη κυλινδρική ανισοτροπία [101]. Ακόμη, παρέχουμε τη δυνατότητα επίλυσης του προβλήματος για κάθε είδος ανομοιογενούς προφίλ το οποίο μπορεί να εκφραστεί σε σειρά δυνάμεων του z . Μέχρι τώρα, σύμφωνα με τη γνώση του συγγραφέα, μόνο ειδικά ανομοιογενή προφίλ έχουν μελετηθεί σε παρόμοιες εφαρμογές. Ειδικότερα, οι Idriss και Seed στο [58] ερεύνησαν την περίπτωση $\chi(z) = Cz^n$ για $n < 2$. Για $\chi(z) = C(z_0 + z)^n$, όπου z_0 μια σταθερά, έχουν επιλυθεί οι ακόλουθες ειδικές περιπτώσεις: $n = 1$ από τον Ambraseys [2], $n = 4/3$ από τον Schreyer [100], $n = 2$ από τον Gazetas [46], ενώ οι Toki και Cherry [108], Dakoulas και Gazetas [38], και ο Towhata [109] παρουσίασαν λύσεις για κλάσεις υλικών για ένα μεγάλο εύρος τιμών του n . Επιπρόσθετα, σημαντικό γεγονός σχετικό με τη λύση σειρών της Frobenius είναι ότι παρέχει πρότυπα (benchmark) αποτελέσματα, θεωρώντας ότι ιδιαίτερη προσοχή έχει δοθεί στη συχνότητα διέγερσης (δηλαδή, τη συχνότητα του προσπίπτοντος κύματος του προβλήματος) και στην πεπερασμένη ακρίβεια των υπολογιστών που αποτελούν τους κύριους παράγοντες υποβάθμισης της ακρίβειας της λύσης σε αριθμητικές εφαρμογές. Τελικά, προχωρούμε στην ανακατασκευή του ανομοιογενούς προφίλ που συνιστά το αντίστροφο πρόβλημα. Για το σκοπό αυτό υλοποιούμε μια προσέγγιση ελαχιστοποίησης συνάρτησης σφάλματος που χρησιμοποιεί έναν διαφορικής εξέλιξης γενετικό αλγόριθμο βελτι-στοποίησης. Η λύση που επιτυγχάνει το ελάχιστο είναι ουσιαστικά εκτιμήσεις των συντελεστών $\chi_0, \chi_1, \chi_2, \dots$ στη σειρά ανάπτυξης της ανομοιογένειας $\chi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \chi_i z^i$. Επίσης, παρέχουμε μια σειρά αριθμητικών αποτελεσμάτων ανατασκευής προφίλ τάξεως μηδενικής, πρώτης και δεύτερης, ώστε να εκθέσουμε τις δυνατότητες της προτεινόμενης μεθοδολογίας.

Για προβλήματα ελαστοδυναμικής, και ιδιαίτερα αυτά στα οποία η ατέλεια (ρωγμή, εγκλεισμός ή κοιλότητα) εντοπίζεται στο εσωτερικό ενός φραγμένου μέσου, διάφορες αριθμητικές τεχνικές



έχουν καταστρωθεί ώστε να προσομοιώσουν ακουστικά και ελαστικά πεδία σε σύνθετους χώρους, υπό συνθήκες χρονο-εξαρτώμενων ή αρμονικών πεδίων μετατοπίσεων. Για παράδειγμα, ο Markleia και οι συνεργάτες του [77], [43] υιοθέτησαν τη Finite Integration Technique (FIT) στην ελαστοδυναμική για τη μοντελοποίηση υπερηχητικών κυμάτων, καθώς και συζευγμένους υπερηχητικούς-ηλεκτρομαγνητικούς μετατροπείς στα πλαίσια του NDT δειγμάτων με διάφορες ατέλειες. Επίσης, ο Kitahara και οι συνεργάτες του [64], [84] χρησιμοποίησαν γραμμικές μεθόδους αντιστροφής σκέδασης στην ανάλυση προβλημάτων με ατέλειες σε τρισδιάστατα ελαστικά σώματα. Αυτές οι μέθοδοι βασίζονται στις Born και Kirchhoff προσεγγίσεις για τα άγνωστα πεδία μετατοπίσεων στην ολοκληρωτική αναπαράσταση του σχεδιαζόμενου πεδίου. Οι οπισθοσχεδιαζόμενες κυματομορφές από ατέλειες που λαμβάνονται από υπερηχητικές μετρήσεις χρησιμοποιούνται τότε ως δεδομένα στις 3D γραμμικές μεθόδους αντιστροφής. Οι διατυπώσεις προβλημάτων σε ολοκληρωτικές εξισώσεις είναι κατάλληλες για την εύρεση εγκλεισμών, δεδομένου ότι μόνο επιφανειακές διακριτοποιήσεις απαιτούνται, με προφανή μείωση του μεγέθους του προβλήματος υπό εξέταση. Παραδείγματος χάριν, εσωτερικές ρωγμές έχουν ανιχνευθεί σε δείγματα διά της ελαχιστοποίησης συναρτήσεως σφάλματος μεταξύ των θεωρητικών και πειραματικών τιμών του ακουστικού δυναμικού και της ροής στην επιφάνεια [89], και θαμμένες κοιλοότητες ανιχνεύθηκαν με τη χρήση επαναλήψεων βασισμένων στον υπερκαθορισμό των συνοριακών δεδομένων στις επιφάνειες [60]. Επίσης, ο Burczynski και οι συνεργάτες του [13] συνέζηξαν τα συνοριακά ολοκληρώματα με αλγόριθμους εξελικτικού τύπου σε προβλήματα ταυτοποίησης ρωγμών και κοιλοτήτων σε διάφορες δομές.

Μία προφανής χρήση των αναλυτικών-αριθμητικών τεχνικών που αναφέρθηκαν παραπάνω είναι στον NDT. Ειδικότερα, ο NDT έχει εφαρμοστεί (α) στην ανίχνευση ατελειών, ρωγμών, εγκλεισμών και κοιλοτήτων σε κατασκευαστικά υλικά και στελέχη, (β) στον καθορισμό των πραγματικών ιδιοτήτων υλικών σε δομές, μαζί και την υποβάθμισή τους στην πάροδο του χρόνου και (γ) εκτιμήσεις in-situ ιδιοτήτων [66]. Στο ίδιο περιεχόμενο, αναφέρουμε το NDT κυλινδρικών ή κυβικών δοκιμών τσιμέντου, καθώς επίσης και NDT κατασκευαστικών στελεχών σε όλες τις κλίμακες μεγεθών, που είναι θεμελιώδους σημασίας στη συντήρηση και ενίσχυση της κατασκευαστικής ακεραιότητας [116].

Συνολικά, τα προβλήματα που περιλαμβάνουν φραγμένα χωρία στις δύο ή τρεις διαστάσεις, με ατέλειες ή ανομοιογένειες, και τα οποία έχουν επιλυθεί από αναλυτικές μεθόδους, περιορίζονται σε περιπτώσεις απλών ή όμοιων γεωμετριών· δηλαδή, κυλινδρικών αντικειμένων σε κυλινδρικά σώματα (δες [18]), σφαιρικών σωμάτων μέσα σε σφαιρικό υπόστρωμα (δες [19]), κ.λ.π. Σε αυτές τις περιπτώσεις, τα πεδία εκφράζονται ως αναπτύγματα σειρών που χρησιμοποιούν πλήρεις βάσεις ιδιοσυναρτήσεων της ίδιας γεωμετρίας. Τότε, χρησιμοποιώντας προσθετικά θεωρήματα που αναφέρονται στην ίδια γεωμετρία και χειριζόμενοι τις εξισώσεις που προκύπτουν από τις συνοριακές συνθήκες, το εν λόγω συνοριακό πρόβλημα εκφυλλίζεται σε ένα $N \times N$ αλγεβρικό γραμμικό σύστημα τύπου $AX=B$, όπου X περιέχει τους άγνωστους συντελεστές αναπτύγματος



των προκειμένων πεδίων. Ο πίνακας **A** είναι επακριβώς υπολογισμένος, τα στοιχεία του είναι απλές εκφράσεις ή αναπτύγματα σειρών από γνωστές συναρτήσεις.

Αντιθέτως, σε προβλήματα με ανόμοιες γεωμετρίες, απαιτείται ειδικός χειρισμός των συνοριακών συνθηκών ώστε να μορφωθεί το γραμμικό σύστημα εξισώσεων. Οι συντελεστές των πινάκων **A** και **B** στο σύστημα αυτό πρέπει να είναι εκφρασμένοι ως πολλαπλές άπειρες σειρές από αναπτύγματα προβολών (επιφανειακά ολοκληρώματα) πάνω στις χαρακτηριστικές συνοριακές επιφάνειες του προβλήματος. Ο αριθμητικός χειρισμός τέτοιων εκφράσεων είναι εξαιρετικά δύσκολος δεδομένου ότι τα σφάλματα αποκοπής και στρογγυλοποίησης που συσσωρεύονται, λόγω των πολλαπλών επαναληπτικών αριθμητικών κύκλων (loops), προκαλούν αναπόφευκτα σφάλματα και, συνεπώς, απαιτείται προσεκτική αριθμητική υλοποίηση ώστε να παραχθούν σωστά αποτελέσματα. Μια αποδοτική προσέγγιση στο πρόβλημα είναι η εφαρμογή T-matrix μεθόδων (ή, προσέγγιση μηδενικού πεδίου, δες [90], [91]), όπου θεωρούνται προβλήματα διάδοσης και σκέδασης που αφορούν ανόμοιες γεωμετρίες (όπως άπειρος κύλινδρος και εξωτερική σφαίρα). Επίσης, οι Lee και Mal [71] χρησιμοποιούν μια χωρικού ολοκληρώματος τεχνική στο χειρισμό φαινομένων πολλαπλής σκέδασης στην ελαστοδυναμική. Κάποιες αντιπροσωπευτικές τεχνικές για τη μελέτη της αλληλεπίδρασης αρμονικών ελαστικών κυμάτων με (α) εγκλεισμούς σε ημιάπειρους χώρους και (β) κυκλικές κοιλότητες με ή χωρίς συνοριακές ρωγμές σε μια άπειρη πλάκα, μπορούν να βρεθούν στις αναφορές [41], [85] και [17], αντίστοιχα.

Στο Κεφάλαιο 7 μελετούμε ένα Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών (ΠΣΤ) που συνδυάζει ανόμοιες γεωμετρικές επιφάνειες. Ακριβέστερα, κινούμαστε στα γενικά πλαίσια της φασματικής ανάλυσης, εκτείνοντας τη χρήση των Navier ιδιοδιανυσμάτων (δες [55], [45], [102], [37], [75], [104], [82]) στην περίπτωση σφαιρικού εγκλεισμού (η σφαιρική γεωμετρία) ιδανικού ρευστού, αυθαίρετα τοποθετημένου σε κυλινδρικό ελαστικό σώμα (η κυλινδρική γεωμετρία). Τα δύο σώματα θεωρούνται φραγμένα στον Ευκλείδειο τρισδιάστατο χώρο. Το εν λόγω μοντέλο αποτελεί καλή προσομοίωση δοκιμίων τσιμέντου που περιέχουν ρευστό σφαιρικό εγκλεισμό (ή μια κενή κοιλότητα, ως ειδική περίπτωση). Ερευνούμε τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις του συστήματος, αν και υπάρχει η δυνατότητα μελέτης των ελεύθερων ταλαντώσεών του, καθώς επιδιώκουμε τον καθορισμό των ιδιοσυχνοτήτων και ιδιοδιανυσμάτων του· ανάλυση που ενδείκνυται για την ανίχνευση του εγκλεισμού. Ουσιαστικά, οι ελεύθερες και οι εξαναγκασμένες ταλαντώσεις συνδέονται, δεδομένου ότι η γνώση των ιδιοκαταστάσεων του συστήματος συνεπάγεται τον υπολογισμό των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων από υπέρθεση, αν και αυτή η αντιμετώπιση είναι αριθμητικά πιο απαιτητική. Στην παρούσα μελέτη, αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα της διέγερσης άμεσα, αποφεύγοντας τις λύσεις των διαφόρων ενδιάμεσων ομογενών προβλημάτων, δίνοντας προτεραιότητα στους μηχανισμούς ανίχνευσης σε εξωτερικά φορτία παρά στις ελεύθερες ταλαντώσεις. Τελικά, η διαδικασία διέγερσης έχει έναν ακόμη βαθμό ελευθερίας· ονομαστικά, τη θέση της πηγής διέγερσης.

Μεταξύ του τεράστιου όγκου σχημάτων αντίστροφης σκέδασης, η Μέθοδος Γραμμικής Δειγ-



ματοληψίας (Linear Sampling Method - LSM) που προτάθηκε από τους Colton, Kirsch και τους συνεργάτες τους [29, 32, 34, 35] για την ακουστική σκέδαση μακρινού-πεδίου, έχει προκαλέσει μεγάλο ενδιαφέρον λόγω της απλότητάς της και της σχετικής ανεξαρτησίας της από τη γεωμετρία και τις συνοριακές συνθήκες που χαρακτηρίζουν την επιφάνεια του σκεδαστή. Μέχρι του παρόντος, η μέθοδος έχει επιτυχώς εφαρμοστεί στην ηλεκτρομαγνητική σκέδαση μακρινού-πεδίου [31, 33, 54] και στην ελαστική μακρινού-πεδίου [1, 3, 20, 22, 49, 96] αντιμετωπίζοντας μια πληθώρα διατάξεων σκεδαστών.

Πρόσφατα, οι Nintcheu Fata και Guzina [87] υιοθέτησαν την LSM στην ελαστοδυναμική σκέδαση κοντινού-πεδίου για την ανακατασκευή μη-διαπερατών αντικειμένων σε άπειρο ή ημιάπειρο ελαστικό χώρο. Η ανάλυσή τους εστιάζεται σε Dirichlet και Neumann συνοριακές συνθήκες που οδηγούν σε απλά εσωτερικά προβλήματα που διατηρούν τον τύπο των συνοριακών συνθηκών. Στο Κεφάλαιο 8 επεκτείνουμε τα αποτελέσματά τους στην περίπτωση διαπερατών σκεδαστών, μια περίπτωση που συναντάται σε πραγματικά περιβάλλοντα και εφαρμογές. Για την προκειμένη κλάση προβλημάτων αντιστροφής σκέδασης, θεωρούμε την ανάλυση των αποκαλούμενων προβλημάτων μετάδοσης (*Transmission Problem - TP*) και εσωτερικού προβλήματος μετάδοσης (*Interior Transmission Problem - ITP*) ως βασικά στοιχεία για την ανάπτυξη του απαραίτητου θεωρητικού πλαισίου. Ανάλογα προβλήματα διάδοσης αντιμετωπίστηκαν και στην ακουστική [29, 32, 34]. Η 2D περίπτωση μακρινού-πεδίου για διαπερατούς ελαστικούς σκεδαστές μελετήθηκε στα [22, 96], ενώ τα 3D αντίστοιχα προβλήματα για διαπερατούς ελαστικούς σκεδαστές μελετήθηκαν στο [20]. Για ανισοτροπικά μέσα αναφερόμαστε στα [14, 15] για την ακουστική και στο [21] για την ελαστοδυναμική.

Πιο αναλυτικά, το προτεινόμενο σχήμα αντιστροφής βασίζεται σε μία γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση πρώτου είδους της οποίας η λύση καθίσταται μη-φραγμένη όταν το (δοκιμαστικό) σημείο εφαρμογής της Green συναρτήσεως προσεγγίζει το σύνορο του ελαστικού σκεδαστή από το εσωτερικό του. Παρέχουμε, επίσης, τη θεωρητική τεκμηρίωση (α) των αναγκαίων προβλημάτων μετάδοσης για προβλήματα ελαστοδυναμικής κοντινού-πεδίου και (β) των ιδιοτήτων επιλυσιμότητας της εν λόγω γραμμικής εξίσωσης αναφορικά με διαπερατούς σκεδαστές. Ακόμη, παραθέτουμε αριθμητικά αποτελέσματα που εμπλέκουν συνεκτικούς ελαστικούς σκεδαστές αναδεικνύοντας τη λειτουργικότητα της μεθόδου ανακατασκευής. Σημειώνουμε ότι η ανάλυση που ακολουθείται αναφέρεται στον $\mathbb{R}^3$.



Κεφάλαιο 2

Κυματική διάδοση και ανακατασκευή διηλεκτρικής ανομοιογένειας σε κυλινδρικούς κυματοδηγούς*

2.1 Περίληψη του προβλήματος

Στο παρόν κεφάλαιο μελετούμε τη διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε κυλινδρικό κυματοδηγό πληρωμένο από ανομοιογενές διηλεκτρικό υλικό. Η ανομοιογένεια αναφέρεται στη διαμήκη κατεύθυνση, δηλαδή, η διηλεκτρική επιδεκτικότητα περιγράφεται από μια συνάρτηση της μορφής $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r(z)$. Πρώτα επιλύουμε το ευθύ πρόβλημα κυματικής διάδοσης. Ακολούθως, αναπτύσσουμε μια υπολογιστική διαδικασία για την επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος και την εφαρμόζουμε στην εκτίμηση ενός άγνωστου διηλεκτρικού προφίλ. Σημαντικό χαρακτηριστικό της προσέγγισής μας είναι η ανάπτυξη της άγνωστης συνάρτησης $\epsilon_r(z)$ σε δυναμοσειρά. Η ανακατασκευή του αγνώστου διηλεκτρικού προφίλ έγκειται στον καθορισμό των συντελεστών της δυναμοσειράς που επιτυγχάνεται διαμέσου της ελαχιστοποίησης μιας κατάλληλα μορφοποιημένης συνάρτησης σφάλματος. Για τον έλεγχο της προτεινόμενης μεθόδου εξετάζουμε υπολογιστικά διάφορα ανομοιογενή προφίλ και με το συνδυασμό ενός διαφορικής εξέλιξης γενετικού αλγορίθμου καταλήγουμε σε πολύ ακριβή αποτελέσματα.

*Σχετική δημοσίευση: K Baganas, A Charalambopoulos and A Kehagias, Inhomogeneous dielectric media: wave propagation and dielectric permittivity reconstruction, *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, Vol. 15(10), pp. 1373-1400, 2001.



2.2 Οι εξισώσεις του Maxwell σε ανομοιογενή μέσα

Οι εξισώσεις του Maxwell στην περίπτωση συνεχούς ανομοιογενούς διηλεκτρικού μέσου, κατά τη μία διεύθυνση, με διαπερατότητα $\epsilon_r(z) = \epsilon_0 \epsilon_r(z)$, λαμβάνουν την κάτωθι μορφή:

$$\nabla \cdot (\epsilon_r(z) \mathbf{E}(\mathbf{r})) = 0, \quad (2.1)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})) - \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = k^2 \epsilon_r(z) \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (2.2)$$

με $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ να δηλώνει το ηλεκτρικό πεδίο, $k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ είναι ο κυματάριθμος, $\omega = 2\pi f$ είναι η γωνιακή συχνότητα και μ_0 είναι η μαγνητική επιτρεπτότητα του ελεύθερου χώρου.

Ενδιαφερόμαστε για τους TE ιδιορρυθμούς οι οποίοι, εκφραζόμενοι σε κυλινδρικές συντεταγμένες r, ϕ, z , λαμβάνουν τη μορφή:

$$\mathbf{E}(r, \phi, z) = E_r(r, \phi, z) \hat{\mathbf{r}} + E_\phi(r, \phi, z) \hat{\phi}, \quad (2.3)$$

με $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\phi}$ να δηλώνουν τα μοναδιαία διανύσματα. Εφαρμόζοντας χωρισμό των μεταβλητών λαμβάνουμε

$$E_r(r, \phi, z) = R_r(r) \Phi_r(\phi) Z_r(z), \quad E_\phi(r, \phi, z) = R_\phi(r) \Phi_\phi(\phi) Z_\phi(z).$$

Εισάγοντας τις παραπάνω εκφράσεις στην (2.1), λαμβάνουμε

$$\frac{R'_r}{R_r} = -\frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{R_\phi}{R_r} \frac{\Phi'_r}{\Phi_r} \frac{Z_\phi}{Z_r}. \quad (2.4)$$

Επιπρόσθετα, χειριζόμενοι την Εξ.(2.2) οδηγούμαστε στις κάτωθι εξισώσεις:

$$\frac{R''_r}{R_r} + \frac{1}{r} \frac{R'_r}{R_r} + \frac{1}{r^2} \frac{\Phi''_r}{\Phi_r} + \frac{Z''_r}{Z_r} - \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{R_\phi \Phi'_r Z_\phi}{R_r \Phi_r Z_r} + k^2 \epsilon_r(z) = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{R''_\phi}{R_\phi} + \frac{1}{r} \frac{R'_\phi}{R_\phi} + \frac{1}{r^2} \frac{\Phi''_\phi}{\Phi_\phi} + \frac{Z''_\phi}{Z_\phi} - \frac{1}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{R_r \Phi'_r Z_r}{R_\phi \Phi_\phi Z_\phi} + k^2 \epsilon_r(z) = 0, \quad (2.6)$$

Ο χωρισμός των μεταβλητών οδηγεί στις

$$\frac{\Phi'_\phi}{\Phi_r} = \lambda, \quad (\lambda \text{ σταθερά}) \quad (2.7)$$

$$\frac{Z_\phi}{Z_r} = q, \quad (q \text{ σταθερά}) \quad (2.8)$$



καθώς, επίσης, και στις εξισώσεις

$$\Phi_r'' - \mu \Phi_r = \Phi_r'' + n^2 \Phi_r = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.9)$$

$$Z_r'' + [k^2 \epsilon_r(z) - \xi^2] Z_r = 0, \quad (2.10)$$

$$r^2 R_r'' + r R_r' + [\mu + r^2 \xi^2 - 1] R_r - 2\lambda q R_\phi = 0, \quad (2.11)$$

με μ, ξ να είναι σταθερές του χωρισμού μεταβλητών. Οι αποδεκτές τιμές τις σταθεράς μ είναι $\mu = -n^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$, ώστε να αναδειχθούν 2π περιοδικές λύσεις. Η ειδική περίπτωση $\mu = n = 0$ αναλύεται αργότερα. Συνεπώς, η Εξ.(2.4) γράφεται ως

$$\frac{R_r'}{R_r} = -\frac{1}{r} - \frac{R_\phi}{r R_r} \lambda q, \quad (2.12)$$

και συνδυαζόμενη με την Εξ.(2.11) παράγει την ακόλουθη διαφορική εξίσωση

$$r^2 R_r'' + 3r R_r' + (r^2 \xi^2 + \mu + 1) R_r = 0. \quad (2.13)$$

Η γενική λύση της Εξ.(2.13) είναι της μορφής

$$R_r(r) = A_n r^{-1} J_n(\xi r) + B_n r^{-1} Y_n(\xi r), \quad (2.14)$$

θεωρώντας τις αυθαίρετες σταθερές A_n, B_n και J_n, Y_n να δηλώνουν τις Bessel συναρτήσεις πρώτου και δευτέρου είδους, αντίστοιχα. Ο καθορισμός της ακτινικής συνιστώσας $R_r(r)$ συνεπάγεται την εύρεση της $R_\phi(r)$ διαμέσου της Εξ.(2.12)

$$R_\phi(r) = -\frac{\xi}{q\lambda} [A_n J_n'(\xi r) + B_n Y_n'(\xi r)]. \quad (2.15)$$

Επιπρόσθετα, η Εξ.(2.9) συνεπάγεται, επίσης, ότι

$$\Phi_r(\phi) = C_n \cos(n\phi) + D_n \sin(n\phi), \quad (2.16)$$

με C_n, D_n ως σταθερές. Χρησιμοποιώντας την Εξ.(2.7) λαμβάνουμε

$$\Phi_\phi(\phi) = \frac{\lambda}{n} [C_n \sin(n\phi) - D_n \cos(n\phi)], \quad (2.17)$$

δεδομένου ότι δεν επιτρέπονται ολοκληρωτικές σταθερές που θα οδηγούσαν σε παραβίαση της διαχωρισιμότητας της Εξ.(2.6). Επίσης, η Εξ.(2.6) αναμένεται να διαχωρίζει τις μεταβλητές της, εάν $\frac{\Phi_r''}{\Phi_r}$ είναι σταθερά, γεγονός που πιστοποιείται από την Εξ.(2.17).

Αξιοποιώντας τις Εξισώσεις (2.7)-(2.10), (2.16) και (2.17) παρατηρούμε ότι η Εξ.(2.6) μπορεί



να γραφεί ως

$$r^2 R_\phi'' + r R_\phi' + (r^2 \xi^2 + \mu - 1) R_\phi + 2 \frac{\mu}{\lambda q} R_r = 0. \quad (2.18)$$

Επομένως, πρέπει να αποδειχθεί ότι η γενική λύση (2.15) ικανοποιεί την Εξ.(2.18). Αυτό επιτυγχάνεται εάν αντικαταστήσουμε τις εκφράσεις (2.14), (2.15) στην Εξ.(2.18), οπότε λαμβάνουμε

$$A_n [x^3 J_n''(x) + x^2 J_n'''(x) + (\mu + x^2 - 1)x J_n'(x) - 2\mu J_n(x)] + B_n [x^3 Y_n''(x) + x^2 Y_n'''(x) + (\mu + x^2 - 1)x Y_n'(x) - 2\mu Y_n(x)] = 0, \quad (2.19)$$

όπου $x = \xi r$.

Ωστόσο, κάθε όρος στην παραπάνω εξίσωση μηδενίζεται, καθιστώντας τις (2.19) και (2.18) αληθείς. Αυτό αποδεικνύεται εάν παραγωγίσουμε την εξίσωση Bessel

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0,$$

και εκμεταλλευτούμε την ίδια την εξίσωση (παρόμοια αποτελέσματα λαμβάνουμε για του όρους που αφορούν την $Y_n(x)$).

Εστιάζουμε, στη συνέχεια, στο χειρισμό της Εξ.(2.10). Η σχετική διηλεκτρική διαπερατότητα αναπτύσσεται σε σειρά δυνάμεων του z ως

$$\varepsilon_r(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i z^i = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 z + \varepsilon_2 z^2 + \dots. \quad (2.20)$$

Πρόκειται να εφαρμόσουμε τη μέθοδο Frobenius για την επίλυση της Εξ.(2.10), θεωρώντας ότι η συνιστώσα $Z_r(z)$ μπορεί να εκφραστεί ως

$$Z_r(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots, \quad (2.21)$$

δεδομένου ότι το κέντρο της ανάπτυξης 0 είναι ένα regular σημείο για την διαφορική εξίσωση (2.10) (δες [10], [56]). Συνεπώς, η συνιστώσα $Z_r(z)$ καθορίζεται από τους συντελεστές $c_i, i = 0, 1, 2, \dots$.

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις (2.20), (2.21) στην Εξ.(2.10), παράγεται το ακόλουθο επαναληπτικό σχήμα

$$(i+2)(i+1)c_{i+2} - \xi^2 c_i + k^2 \sum_{j=0}^i c_{i-j} \varepsilon_j = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots.$$



Ισοδύναμα, θέτοντας $H^2 = k^2 \epsilon_0 - \xi^2$, λαμβάνουμε

$$c_2 = -\frac{H^2}{2} c_0 \quad \text{και} \quad (i+2)(i+1)c_{i+2} + H^2 c_i + k^2 \sum_{j=1}^i c_{i-j} \epsilon_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.22)$$

Από το παρόν σχήμα, συμπεραίνουμε ότι οι παράμετροι c_i ($i \geq 2$) είναι συναρτήσεις των c_0, c_1, H, k και των συντελεστών $\epsilon_j, j = 0, \dots, i-2$, δηλαδή $c_i = c_i(c_0, c_1, H, k, \epsilon_0, \dots, \epsilon_{i-2})$. Ειδικότερα, έχουμε

$$c_i = c_0 u_i(H, k, \epsilon_0, \dots, \epsilon_{i-2}) + c_1 w_i(H, k, \epsilon_0, \dots, \epsilon_{i-2}),$$

όπου u_i, w_i είναι ομαλές συναρτήσεις των ορισμάτων τους. Πιο αναλυτικά, οι u_i, w_i γεννούν δύο ανεξάρτητες λύσεις για τη συνθήκη διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως (2.10).

Από τη λύση των επαναληπτικών Εξισώσεων (2.22), οι αναζητούμενες συνιστώσες $Z_r(z), Z_\phi(z)$ του ηλεκτρικού πεδίου καθορίζονται από του συντελεστές ανάπτυξης των δυναμοσειρών τους. Σημειώνουμε ότι η συμπεριφορά των $c_2, c_3, \dots, c_L$ δύναται να μελετηθεί αναλυτικά για μικρές τιμές του L . Μεγαλύτερες τιμές απαιτούν τη χρήση εμπορικών υπολογιστικών πακέτων, για παράδειγμα την *Maple*.

Οι αυθαίρετοι συντελεστές που εμφανίζονται στις παραπάνω εξισώσεις υπολογίζονται διαμέσου των συνοριακών συνθηκών του προβλήματος.

Οι δύο ειδικές περιπτώσεις, που αφορούν τις τιμές των μ, ξ αναλύονται ως εξής:

- (i) Όταν $\mu = 0$, η μεταβλητή ξ αναγκαστικά μηδενίζεται και λαμβάνουμε $R_r = \frac{d_1}{r}$ και $R_\phi = d_2 r + \frac{d_3}{r}$ (d_1, d_2, d_3 σταθερές).
- (ii) Όταν $\mu = -n^2 \neq 0$ και $\xi = 0$, οι εκφράσεις των πεδίων μπορούν να ληφθούν από τη γενική περίπτωση για $\xi \rightarrow 0$ και αξιοποιώντας την ασυμπτωτική συμπεριφορά των εν λόγω συναρτήσεων.

2.3 Κυματική διάδοση σε κυλινδρικό κυματοδηγό

Εφαρμόζουμε τις λύσεις της προηγούμενης παραγράφου στον υπολογισμό του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου σε κυλινδρικό κυματοδηγό με γραμμικό, ιστροπικό, ανομοιογενές και χωρίς απώλειες διηλεκτρικό υλικό. Αυτό συνεπάγεται ότι η $\epsilon_r(z)$ είναι μια συνάρτηση στον $\mathbb{R}$ [25].

Οι συνοριακές συνθήκες για την περίπτωση ομογενούς διηλεκτρικού και ανομοιογενούς της μορφής $\epsilon(r, \phi, z) = \epsilon_0 \epsilon_r(z)$ είναι οι ακόλουθες.

Συνθήκη 1: Οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου οφείλουν να έχουν φραγμένες τιμές στο κέντρο ($r = 0$) του κυματοδηγού.

Συνθήκη 2: Η εφαπτομενική συνιστώσα πρέπει να μηδενίζεται στην επιφάνεια του κυλίνδρου $r = a$, a η ακτίνα της διατομής του κυματοδηγού. Δηλαδή, $E_\phi(a, \phi, z) = 0$ για $\phi \in [0, 2\pi]$.

Σε ό,τι αφορά τη γενική λύση για $\mu = -n^2, n = 1, 2, \dots$, υπό το φως των συνοριακών



συνθηκών, ισχύουν τα ακόλουθα. Η Συνθήκη 1 συνεπάγεται ότι οι λύσεις που εμπλέκουν τις Bessel συναρτήσεις δευτέρου είδους και τις παραγώγους τους αποκλείονται λόγω των ανωμαλιών τους στο $r = 0$. Αυτό εξάγεται από τη συμπεριφορά των Bessel όταν $x \rightarrow 0$:

$$Y_n(x) = \begin{cases} -\frac{\Gamma(n)}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right) + O(x \ln(x)), & n = 1, \\ -\frac{\Gamma(n)}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^n + O(x^{2-n}), & n \geq 2, \end{cases}$$

όπου $\Gamma(n)$ είναι η συνάρτηση Γάμμα. Οι συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους έχουν την ακόλουθη ασυμπτωτική συμπεριφορά καθώς $x \rightarrow 0$:

$$J_n(x) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \frac{x^n}{2} + O(x^{n+2}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

και επομένως είναι δεκτές ως τμήματα της λύσης. Συμπερασματικά, η λύση αποτελείται από συνδυασμούς όρων της μορφής $\frac{J_n(x)}{x}$ και $J'_n(x)$ που μηδενίζονται καθώς $x \rightarrow 0$.

Από τη Συνθήκη 2 εξάγουμε ότι $J'_n(\xi\alpha) = 0$, και, συνεπώς, το ξ διακριτοποιείται ως $\xi_{mn} = -\frac{x_{mn}}{\alpha}$, όπου x_{mn} είναι η m -ρίζα της $J'_n(x)$ και $m = 1, 2, \dots$. Η διακριτοποίηση του ξ συνεπάγεται $H \equiv H_{mn} = \sqrt{k^2 \epsilon_0 - \xi_{mn}^2}$. Συνεπώς, οι εκφράσεις των TE ιδιορρυθμών είναι:

$$\begin{aligned} R_r(r) &= A_n \frac{J_n(\xi_{mn}r)}{r}, \quad R_\phi(r) = -\frac{\xi_{mn}}{\lambda q} A_n J'_n(\xi_{mn}r), \quad n, m = 1, 2, \dots, \\ \Phi_r(\phi) &= C_n \cos(n\phi) + D_n \sin(n\phi), \\ \Phi_\phi(\phi) &= \frac{\lambda}{n} [C_n \sin(n\phi) - D_n \cos(n\phi)], \quad n = 1, 2, \dots, \\ Z_r(z) &= \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots, \quad Z_\phi(z) = q Z_r(z), \end{aligned} \quad (2.23)$$

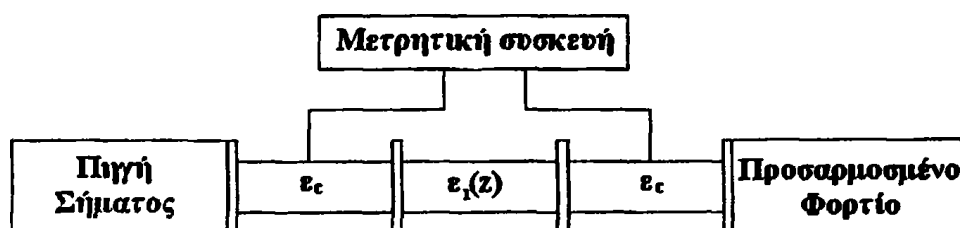
όπου για κάθε επιλογή των $n, m = 1, 2, \dots$, τα c_i ικανοποιούν την επαναληπτική εξίσωση:

$$c_2 = -\frac{H_{mn}^2}{2} c_0, \quad (i+2)(i+1)c_{i+2} + H_{mn}^2 c_i + k^2 \sum_{j=1}^i c_{i-j} \epsilon_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.24)$$

Στην περίπτωση ομογενούς διηλεκτρικού υλικού, η εξάρτηση κατά z στο πεδίο είναι τριγωνομετρική, όπως μπορεί να εξαχθεί από την Εξ.(2.10). Οι Εξισώσεις (2.23) και (2.24) χρησιμοποιούνται, ακόμη, και για την περίπτωση μη σταθερής διηλεκτρικής διαπερατότητας.

Σχετικά με την ειδική περίπτωση $\mu = 0$, η Συνθήκη 1 συνεπάγεται ότι $R_r = 0$ και ότι ο συντελεστής της R_ϕ , δηλαδή ο d_3 , μηδενίζεται, ακολούθως. Η Συνθήκη 2 συνεπάγεται ότι $d_2 = 0$ ή $E_\phi = 0$. Επομένως, δεν υφίστανται αζιμουθιακές συμμετρικές λύσεις.





Εικόνα 2.1: Η μικροκυματική διάταξη μετρήσεων.

2.4 Κυματική διάδοση σε σύστημα κυλινδρικών κυματοδηγών

Προκειμένου να επιτύχουμε την ανακατασκευή της διηλεκτρικής διαπερατότητας, κάνουμε χρήση μιας μετρητικής διάταξης για την επίλυση του ευθέως προβλήματος. Στην παρούσα παράγραφο παρουσιάζουμε την εν λόγω διάταξη και επιλύουμε το ευθύ πρόβλημα κυματοδηγησης.

2.4.1 Η μικροκυματική διάταξη μετρήσεων

Η μετρητική διάταξη αποτελείται από τρεις κυλινδρικούς κυματοδηγούς διασυνδεδεμένους όπως υποδεικνύεται στην Εικόνα 2.1.

Οι δύο ακραίοι κυματοδηγοί περιέχουν το ίδιο ομογενές και ισότροπο διηλεκτρικό υλικό ϵ_c . Ο μεσαίος κυματοδηγός περιέχει το ανομοιογενές διηλεκτρικό υλικό και αποτελεί τον κύριο στόχο του αντιστρόφου προβλήματος. Η διάταξη διεγείρεται από κατάλληλα επιλεγμένους ΤΕ ρυθμούς που γεννούνται από μικροκυματική πηγή σήματος (δες Εικόνα 2.1). Θεωρούμε, επίσης, τέλεια διασύνδεση μεταξύ των κυματοδηγών (δεν υπάρχουν απώλειες στα σύνορά τους), ένα φορτίο προσαρτημένο στον δεξί κυματοδηγό, που απορροφά τελείως το διαδιδόμενο κύμα χωρίς να δημιουργεί ανακλώμενο, και δύο μετρητικά άκρα που εφαρμόζουν στον πρώτο και στον τρίτο κυματοδηγό που δημιουργούν αμελητέες παρεμβολές στα πεδία εντός των κυματοδηγών.

Στην ανάλυση που ακολουθεί, θεωρούμε διάδοση του TE_{11} ιδιορρυθμού, που είναι ο κύριος ρυθμός σε κυλινδρικούς κυματοδηγούς. Επίσης, εισάγουμε την εξής απλοποίηση. Μέχρι τώρα, θεωρούσαμε τη σχετική διηλεκτρική διαπερατότητα να εκφράζεται ως μια σειρά Taylor

$$\epsilon_r(z) = \epsilon_0 + \epsilon_1 z + \epsilon_2 z^2 + \dots$$

Προφανώς, σε όλες τις πρακτικές εφαρμογές, το παραπάνω ανάπτυγμα περιορίζεται σε πεπερασμένο αριθμό όρων. Για ό,τι ακολουθεί, θεωρείται ότι η ανομοιογένεια είναι κυβική, δηλαδή,

$$\epsilon_r(z) = \epsilon_0 + \epsilon_1 z + \epsilon_2 z^2 + \epsilon_3 z^3.$$

Το κυβικό πολυωνυμικό ανάπτυγμα αρκεί να προσεγγίσει με ικανοποιητική ακρίβεια ένα ομαλά μεταβαλλόμενο διηλεκτρικό προφίλ. Ωστόσο, η ανάλυση μπορεί να γενικευτεί σε N -τάξεως



πολύωνυμα.

2.4.2 Υπολογισμός των πεδιακών συνιστωσών

Θεωρούμε, αρχικά, τις συχνότητες στις οποίες υφίσταται η κυματική διάδοση. Οι συχνότητες αποκοπής στους δύο ακραίους κυματοδηγούς έχουν τη μορφή (δες [9])

$$f_{c,mn} = \frac{\xi_{mn}}{2\pi\sqrt{\mu_0\epsilon_0\epsilon_c}} \quad n, m = 1, 2, \dots$$

Δεδομένου ότι μας ενδιαφέρουν οι TE_{1m} ιδιορρυθμοί, έχουμε:

$$f_{c,1m} = \frac{\xi_{1m}}{2\pi\sqrt{\mu_0\epsilon_0\epsilon_c}} \quad m = 1, 2, \dots$$

Αυτό συνεπάγεται ότι για τη συχνότητα διέγερσης f πρέπει να ισχύει $f > f_{c,11}$, με

$$f_{c,11} = \frac{\xi_{11}}{2\pi\sqrt{\mu_0\epsilon_0\epsilon_c}} = \frac{1.841}{2\pi\alpha\sqrt{\mu_0\epsilon_0\epsilon_c}}.$$

Συνεπώς, η δυνατότητα διάδοσης τουλάχιστον εντός του πρώτου κυματοδηγού προϋποθέτει ότι $f > f_{c,11}$. Προφανώς, εάν $f > f_{c,11}$ και $f < f_{c,12}$, τότε μόνο ο TE_{11} ρυθμός μπορεί να διεγερθεί εντός του κυματοδηγού. Σε αυτό το σημείο σημειώνουμε ότι επιλέγοντας κατάλληλα τη συχνότητα διέγερσης, αρκεί να μελετήσουμε μόνο τα πεδία που δημιουργεί εντός της διάταξης ένας TE_{11} ιδιορρυθμός, διεγερόμενος εντός του πρώτου κυματοδηγού. Σε ό,τι ακολουθεί, ϵ_c είναι η διηλεκτρική σταθερά για τους δύο ακραίους κυματοδηγούς, $\beta = \sqrt{k^2\epsilon_c - \xi_{11}^2}$, $k = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ και $\xi_{11} = \frac{\pi}{a} = \frac{1.841}{a}$.

Κυματοδηγός 1: Οι εκφράσεις του ηλεκτρικού πεδίου είναι:

$$\begin{aligned} E_r(r, \phi, z) &= \frac{j\omega\mu_0}{\xi_{11}^2} C \frac{J_1(\xi_{11}r)}{r} \sin(\phi) (e^{-j\beta z} + Ge^{j\beta z}), \\ E_\phi(r, \phi, z) &= \frac{j\omega\mu_0}{\xi_{11}} C J_1'(\xi_{11}r) \cos(\phi) (e^{-j\beta z} + Ge^{j\beta z}), \end{aligned}$$

όπου C είναι μια αυθαίρετη σταθερά και G είναι ο συντελεστής ανάκλασης.

Κυματοδηγός 2: Αντίστοιχα, έχουμε:

$$\begin{aligned} E_r(r, \phi, z) &= \frac{j\omega\mu_0}{\xi_{11}^2} C \frac{J_1(\xi_{11}r)}{r} \sin(\phi) \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i, \\ E_\phi(r, \phi, z) &= \frac{j\omega\mu_0}{\xi_{11}} C J_1'(\xi_{11}r) \cos(\phi) \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i. \end{aligned}$$



Κυματοδηγός 3: Οι πεδιακές εκφράσεις είναι:

$$E_r(r, \phi, z) = \frac{j\omega\mu_0}{\xi_{11}^2} CD \frac{J_1(\xi_{11}r)}{r} \sin(\phi) e^{-j\beta z},$$

$$E_\phi(r, \phi, z) = \frac{j\omega\mu_0}{\xi_{11}} CD J_1'(\xi_{11}r) \cos(\phi) e^{-j\beta z},$$

όπου D είναι ο συντελεστής διάδοσης.

Ορίζουμε ως $\epsilon := [\epsilon_0 \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3]$. Υπενθυμίζουμε ότι στα πλαίσια του αντιστρόφου προβλήματος που θα ακολουθήσει, οι μετρούμενες ποσότητες στην διάταξη είναι οι $D = D(\epsilon, f, \alpha, d)$, $G = G(\epsilon, f, \alpha, d)$, όπου f, α, d θα λαμβάνουν γνωστές τιμές, ενώ το διάνυσμα ϵ αποτελεί το αναζητούμενο μέγεθος. Τα D, G δύνανται να μετρηθούν. Καθορίζουμε παρακάτω την εξάρτησή τους από τα $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ (και τα f, d). Ο τελικός μας σκοπός είναι να εκτιμήσουμε τα $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ ώστε οι θεωρητικά υπολογισμένες τιμές των D, G να ταυτίζονται με τις αντίστοιχες που λαμβάνονται από την μικροκυματική διάταξη των κυματοδηγών.

Στο σύνορο $z = 0$, από τη συνέχεια των συνιστωσών και των παραγώγων τους, εξάγουμε ότι:

$$c_0 = 1 + G, \quad (2.25)$$

$$c_1 = -j\beta(1 - G). \quad (2.26)$$

Παρόμοια, στη διεπιφάνεια $z = d$ λαμβάνουμε

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i d^i = D e^{-j\beta d} \Leftrightarrow c_0 Z_1(d) + c_1 Z_2(d) = D e^{-j\beta d}, \quad (2.27)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i c_i d^{i-1} = -j\beta D e^{-j\beta d} \Leftrightarrow c_0 Z_1'(d) + c_1 Z_2'(d) = -j\beta D e^{-j\beta d}, \quad (2.28)$$

όπου $Z_1(d) = 1 + u_2 d^2 + u_3 d^3 + \dots$ και $Z_2(d) = d + w_2 d^2 + w_3 d^3 + \dots$.

Οι εξισώσεις (2.25-2.28) μπορούν να γραφούν ως ένα 4×4 γραμμικό σύστημα $AX = B$, με

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -j\beta & 0 \\ Z_1(d) & Z_2(d) & 0 & -e^{-j\beta d} \\ Z_1'(d) & Z_2'(d) & 0 & j\beta e^{-j\beta d} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ G \\ D \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -j\beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Συνεπώς, οι πίνακες A, B είναι πλήρως ορισμένοι και ο πίνακας X περιέχει τους αγνώστους του ευθέως προβλήματος.



2.4.3 Έλεγχος με αναλυτικές λύσεις

Στην παρούσα παράγραφο ερευνούμε την ακρίβεια της προτεινόμενης μεθόδου συγκρίνοντάς την με ήδη υπάρχουσες αναλυτικές λύσεις για δύο περιπτώσεις απλών διηλεκτρικών προφίλ.

Περίπτωση 1: $\epsilon_r(z) = \epsilon_m = \text{σταθερά}$. Τότε, οι εκφράσεις των πεδιακών μεγεθών είναι:

$$E_r(r, \phi, z) = \frac{j\omega\mu_0}{\xi_{11}^2} C \frac{J_1(\xi_{11}r)}{r} \sin \phi (C_m e^{-j\beta_m z} + G_m e^{j\beta_m z}),$$

$$E_\phi(r, \phi, z) = \frac{j\omega\mu_0}{\xi_{11}} C J_1'(\xi_{11}r) \cos \phi (C_m e^{-j\beta_m z} + G_m e^{j\beta_m z}),$$

όπου m υποδεικνύει το μεσαίο κυματοδηγό, C_m είναι ο συντελεστής διάδοσης, G_m είναι ο συντελεστής ανάκλασης και $\beta_m = \sqrt{k^2 \epsilon_m - \xi_{11}^2}$. Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες λαμβάνουμε το κάτωθι 4×4 γραμμικό σύστημα $AX=B$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ \beta_m & -\beta_m & \beta & 0 \\ e^{-j\beta_m d} & e^{j\beta_m d} & 0 & -e^{-j\beta d} \\ \beta_m e^{-j\beta_m d} & -\beta_m e^{j\beta_m d} & 0 & -\beta e^{-j\beta d} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} C_m \\ G_m \\ G \\ D \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Επιλύουμε το εν λόγω σύστημα για διάφορα διηλεκτρικά προφίλ ϵ_m λαμβάνοντας τιμές για τα C , G που είναι ταυτόσημες με τη Frobenius προσέγγιση (έστω C_{Fr} , G_{Fr}). Αυτό το γεγονός παρουσιάζεται για ένα αντιπροσωπευτικό εύρος συχνοτήτων στις Εικόνες 2.2 και 2.3, όπου $\|\cdot\|$ δηλώνει τη νόρμα μιγαδικού αριθμού.

Περίπτωση 2: $\epsilon_r(z) = \alpha + bz$. Θεωρώντας γραμμική ανομοιογένεια, η Εξ.(2.10) παίρνει τη μορφή

$$Z_r'' + [k^2(\alpha + bz) - \xi^2]Z_r = 0 \Leftrightarrow Z_r'' + (k^2\alpha - \xi^2 + k^2bz)Z_r = 0$$

$$\Leftrightarrow Z_r'' + (A + Bz)Z_r = 0,$$

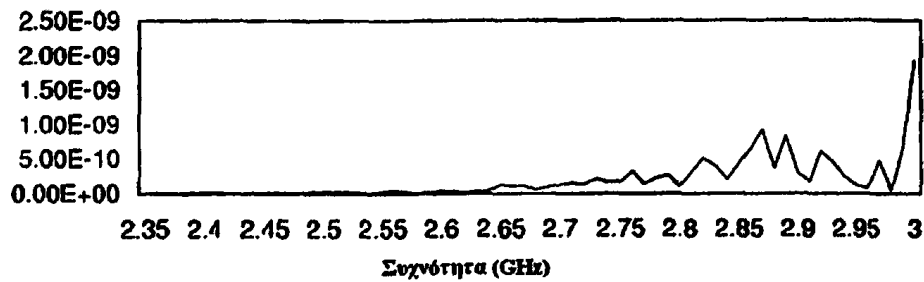
όπου $A = k^2\alpha - \xi^2$ και $B = k^2b$. Εφαρμόζοντας την αλλαγή μεταβλητής $n(z) = -B^{1/3}(z + \frac{A}{B})$, λαμβάνουμε

$$\ddot{Z}_r = nZ_r, \quad (2.29)$$

όπου $\ddot{Z}_r$ δηλώνει τη δεύτερη παράγωγο ως προς το n . Η γενική λύση της Εξ.(2.29) εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των Airy συναρτήσεων $Ai(n)$, $Bi(n)$ πρώτου και δευτέρου είδους, αντίστοιχα. Συνεπώς, οι z -εξαρτώμενοι όροι των πεδιακών συνιστωσών εκφράζονται ως

$$Z_r(z) = \alpha_1 Ai(n(z)) + \alpha_2 Bi(n(z)), \quad Z_\phi(z) = qZ_r(z),$$





Εικόνα 2.2: Εξέλιξη του σφάλματος $\frac{\|D-D_{Fr}\|}{\|D\|}$ συναρτήσει της συχνότητας για την περίπτωση $\epsilon_m = 3$.

όπου α_1, α_2 είναι αυθαίρετες σταθερές. Επομένως, το ηλεκτρικό πεδίο εντός του μεσαίου κυματοδηγού μορφοποιείται ως

$$E_r(r, \phi, z) = \frac{j\omega\mu_0}{\xi_{11}^2} C \frac{J_1(\xi_{11}r)}{r} \sin(\phi) (\alpha_1 \text{Ai}(n(z)) + \alpha_2 \text{Bi}(n(z))),$$

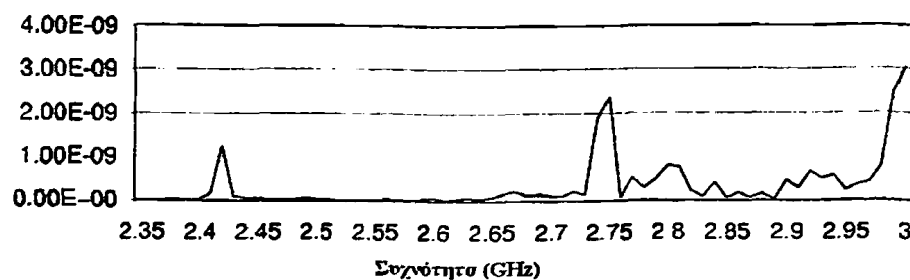
$$E_\phi(r, \phi, z) = \frac{j\omega\mu_0}{\xi_{11}} C J_1'(\xi_{11}r) \cos(\phi) (\alpha_1 \text{Ai}(n(z)) + \alpha_2 \text{Bi}(n(z))).$$

Εφαρμόζοντας τις ίδιες συνοριακές συνθήκες στα σημεία $z = 0 \Leftrightarrow n_0 \equiv n(0) = -\frac{A}{B^{2/3}}$ και $z = d \Leftrightarrow n_d \equiv n(d) = -B^{1/3}(d + \frac{A}{B})$, λαμβάνουμε το ακόλουθο γραμμικό σύστημα $AX=B$:

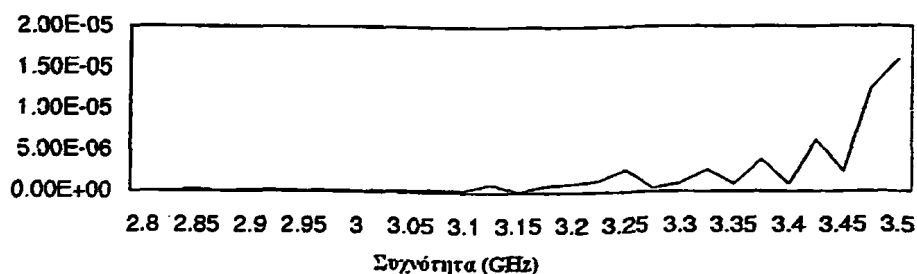
$$A = \begin{bmatrix} \text{Ai}(n_0) & \text{Bi}(n_0) & -1 & 0 \\ -B^{1/3}\text{Ai}'(n_0) & -B^{1/3}\text{Bi}'(n_0) & -j\beta & 0 \\ \text{Ai}(n_d) & \text{Bi}(n_d) & 0 & -e^{-j\beta d} \\ -B^{1/3}\text{Ai}'(n_d) & -B^{1/3}\text{Bi}'(n_d) & 0 & -j\beta e^{-j\beta d} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ G \\ D \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -j\beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Επιλύουμε το σύστημα για μια πλειάδα γραμμικών προφίλ και εξάγουμε τιμές για τους συντελεστές D, G που είναι σχεδόν ταυτόσημες με τη Frobenius προσέγγιση (έστω C_{Fr}, G_{Fr}), όπως εκθέτεται από τις Εικόνες 2.4 και 2.5.

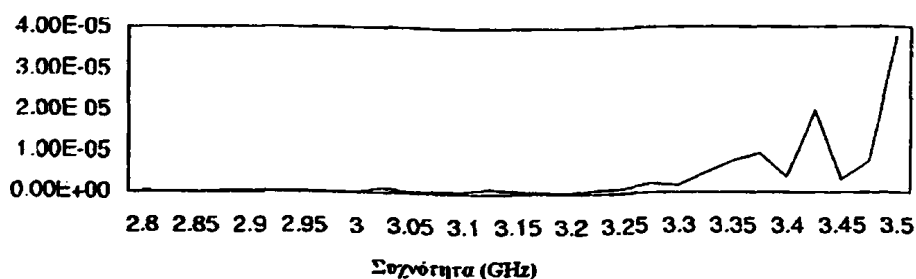
Συνεπώς, οι λύσεις της Frobenius μεθόδου είναι σε πλήρη συμφωνία με ανεξάρτητα λαμβανόμενες λύσεις για τα δύο είδη διηλεκτρικών προφίλ που συζητήθηκαν παραπάνω.



Εικόνα 2.3: Εξέλιξη του σφάλματος $\frac{\|G - G_{Pr}\|}{\|G\|}$ συναρτήσει της συχνότητας για την περίπτωση $\epsilon_m = 3$.



Εικόνα 2.4: Εξέλιξη του σφάλματος $\frac{\|D - D_{Pr}\|}{\|D\|}$ συναρτήσει της συχνότητας για την περίπτωση $\epsilon_r(z) = 3 + 20z$.



Εικόνα 2.5: Εξέλιξη του σφάλματος $\frac{\|G - G_{Pr}\|}{\|G\|}$ συναρτήσει της συχνότητας για την περίπτωση $\epsilon_r(z) = 3 + 20z$.

2.4.4 Συχνότητες αποκοπής

Οι συχνότητες αποκοπής στην περίπτωση ομογενούς διηλεκτρικού υλικού για TE_{mn} ρυθμούς καθορίζονται από τη σχέση

$$f_{c,mn} = \frac{\xi_{mn}}{2\pi\sqrt{\mu_0\epsilon_0\bar{\epsilon}_c}}, \quad m, n = 1, 2, \dots$$

Προφανώς, για συχνότητες διέγερσης μικρότερες της $f_{c,mn}$, η τιμή του συντελεστή διάδοσης τείνει στο μηδέν.

Το θέμα των συχνοτήτων αποκοπής μπορεί να επεκταθεί και στην περίπτωση ανομοιογενών διηλεκτρικών. Έχοντας υλοποιήσει ένα πλήθος αριθμητικών προσομοιώσεων, εξάγαμε το συμπέρασμα ότι ενυπάρχει μια τέτοια συχνότητα, τουλάχιστον για τον ιδιορρυθμό που μας ενδιαφέρει, δηλαδή, τον TE_{11} . Συνεπώς, ορίζουμε ως $f_{c,11}$ τη συχνότητα εκείνη στην οποία ο συντελεστής διάδοσης γίνεται για πρώτη φορά μικρότερος του ορίου 0.05. Για την εκτίμηση της συχνότητας $f_{c,11}$, που έρχεται σε συμφωνία με την αντίστοιχη φόρμουλα σε περίπτωση ομογενούς διηλεκτρικού, ενδείκνυται η σχέση:

$$\tilde{f}_{c,11} = \frac{\xi_{11}}{2\pi\sqrt{\mu_0\epsilon_0\bar{\epsilon}}}$$

(όπου $\bar{\epsilon} = \frac{1}{d} \int_0^d \epsilon_r(z) dz$ είναι η μέση τιμή του διηλεκτρικού προφίλ). Αποτελεί δε μια πολύ καλή προσέγγιση της $f_{c,11}$, που μπορεί να υπολογιστεί πειραματικά (από προσομοίωση) βάσει του παραπάνω ορισμού, γεγονός που δικαιολογεί την επιλογή της τιμής κατωφλίου 0.05 που έχουμε επιλέξει. Στον Πίνακα 2.1 παραθέτουμε συγκριτιστικά τις $f_{c,11}$ και $\tilde{f}_{c,11}$ για διάφορα αντιπροσωπευτικά διηλεκτρικά προφίλ. Σημειώνουμε ότι το σχετικό σφάλμα δεν υπερβαίνει την τιμή 5.5%. Για καλύτερη θέαση των αποτελεσμάτων περιλαμβάνουμε την Εικ.2.6.

2.5 Επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος

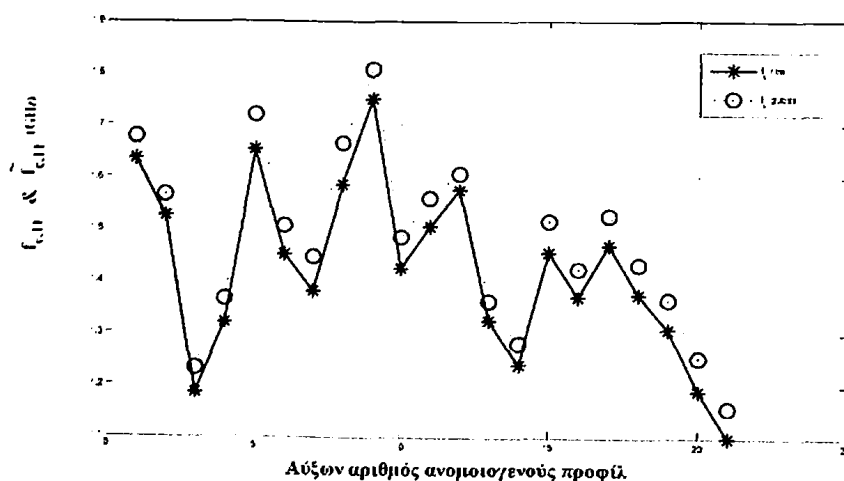
2.5.1 Διατύπωση της συνάρτησης σφάλματος

Είμαστε, πλέον, στη θέση να διατυπώσουμε ως πρόβλημα ελαχιστοποίησης την εκτίμηση των άγνωστων $\epsilon(i)$, $i = 1, 2, 3, 4$ παραμέτρων. Υπενθυμίζουμε ότι έχουμε εξάγει ακριβείς εκφράσεις για τα $D(\epsilon, f, \alpha, d)$ και $G(\epsilon, f, \alpha, d)$. Θεωρούμε τα α, d συγκεκριμένα και γνωστά. Επιλέγουμε, ακόμη, διάφορες διακριτές συχνότητες διεγέρσεως $f_1, f_2, \dots, f_K$. Είμαστε, πλέον, σε θέση ώστε να ορίσουμε τη συνάρτηση σφάλματος:

$$J_1(\epsilon) := \sum_{k=1}^K (\|D_k - D(\epsilon, f, \alpha, d)\|) + (\|G_k - G(\epsilon, f, \alpha, d)\|), \quad (2.30)$$



$\varepsilon_r(z)$	$\bar{\varepsilon}$	$f_{c,11}$	$\tilde{f}_{c,11}$	Rel. Error %
$2.5 + 5.47z$	3.047	1.6774	1.635	2.5933
$2.95 + 5.47z$	3.497	1.5658	1.525	2.6754
$3.12 + 5.47z$	5.647	1.2322	1.185	3.9831
$3.55 + 10.47z$	4.597	1.3657	1.320	3.4621
$4.25 - 13.47z$	2.903	1.7185	1.652	4.0254
$5.13 - 13.47z$	3.783	1.5054	1.450	3.8207
$5.45 - 13.47z$	4.103	1.4455	1.380	4.7464
$2.15 + 25.47z - 120.24z^2$	3.0938	1.6647	1.585	5.0284
$2.75 + 5.47z - 50.24z^2$	2.6271	1.8065	1.75	3.2286
$2.95 + 25.47z - 120.24z^2$	3.8939	1.4839	1.424	4.2065
$3.15 + 10.47z - 50.24z^2$	3.5271	1.5591	1.505	3.5947
$4 - 13.47z + 50.24z^2$	3.3229	1.6063	1.575	1.9873
$5.3 - 13.47z + 50.24z^2$	4.6229	1.3618	1.325	2.7774
$5.9 - 13.47z + 50.24z^2$	5.2229	1.2812	1.240	3.3226
$3.25 - 13.47z + 279.24z^2 - 946.92z^3$	3.7324	1.5156	1.455	4.1649
$3.75 - 13.47z + 279.24z^2 - 946.92z^3$	4.2324	1.4233	1.370	3.8905
$4.25 - 13.47z + 200.24z^2 - 946.92z^3$	3.6790	1.5266	1.470	3.8503
$4.75 - 13.47z + 200.24z^2 - 946.92z^3$	4.1790	1.4323	1.375	4.1673
$5.40 + 10.47z - 250.24z^2 + 746.92z^3$	4.6043	1.3646	1.308	4.3272
$6.25 + 10.47z - 250.24z^2 + 746.92z^3$	5.4543	1.2537	1.190	5.3529
$7.20 + 10.47z - 250.24z^2 + 746.92z^3$	6.4043	1.1570	1.100	5.1818

Πίνακας 2.1: Οι συχνότητες αποκοπής $f_{c,11}$, $\tilde{f}_{c,11}$.Εικόνα 2.6: Οι συχνότητες αποκοπής $f_{c,11}$, $\tilde{f}_{c,11}$.

όπου $\|\cdot\|$ δηλώνει τη νόρμα μιγαδικού αριθμού. D_k, G_k είναι οι συντελεστές ανάκλασης και διάδοσης που αντιστοιχούν στην συχνότητα διέγερσης f_k , ενώ $D(\mathbf{e}, f_k, \alpha, d), G(\mathbf{e}, f_k, \alpha, d)$ αποτελούν τις θεωρητικώς λαμβανόμενες τιμές των ιδίων ποσοτήτων. Συνεπώς, η $J_1(\mathbf{e})$ αποτελεί μέτρο της ασυμφωνίας μεταξύ των θεωρητικώς και πειραματικώς λαμβανομένων ποσοτήτων για όλες τις συχνότητες διέγερσης που χρησιμοποιούνται στην επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος. Προφανώς, αναζητούμε εκείνα τα $\mathbf{e}$ που ελαχιστοποιούν τη συνάρτηση σφάλματος. Το ολικό ελάχιστο, έστω $\bar{\mathbf{e}}$, υποθέτει ότι $J_1(\bar{\mathbf{e}}) = 0$. Προφανώς, ο τέλειος μηδενισμός είναι αδύνατος δεδομένου ότι υφίστανται παράγοντες, όπως η πολυωνυμική προσέγγιση του $\epsilon_r(z)$ και η πεπερασμένη μετρητική ακρίβεια, που καθιστούν αδύνατη την τέλεια ταύτιση των θεωρητικών και των πειραματικών δεδομένων.

Η χρήση της συνάρτησης σφάλματος προϋποθέτει τη δυνατότητα μέτρησης του πραγματικού και του φανταστικού όρου των D, G , που ισοδυναμεί με τη γνώση των μέτρων τους και των φάσεών τους. Στην περίπτωση που η μέτρηση των φάσεων είναι αδύνατη ή μη δόκιμη πρακτικά, μια εναλλακτική συνάρτηση σφάλματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί που αξιοποιεί τα πλάτη των μεγεθών:

$$J_2(\mathbf{e}) := \sum_{k=1}^K | \|D_k\| - \|D(\mathbf{e}, f_k, \alpha, d)\| | + | \|G_k\| - \|G(\mathbf{e}, f_k, \alpha, d)\| |, \quad (2.31)$$

όπου $|\cdot|$ δηλώνει την απόλυτη τιμή.

2.5.2 Ο γενετικός αλγόριθμος διαφορικής εξέλιξης

Στα τμήμα της αριθμητικής υλοποίησης του αντιστρόφου προβλήματος, χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση σφάλματος στα πλαίσια που ορίζει ο Γενετικός Αλγόριθμος (Γ.Α.) που χρησιμοποιούμε. Οι γενετικοί αλγόριθμοι εκτελούν ολική βελτιστοποίηση μιμούμενοι τις φυσικές διαδικασίες επιλογής. Χρησιμοποιούνται ευρύτατα σε πολλά επιστημονικά πεδία με θεαματικά αποτελέσματα. Ειδικότερα, ως αναφορά σε εφαρμογές ηλεκτρομαγνητικών πεδίων προτείνουμε την [114].

Στις προσομοιώσεις μας χρησιμοποιούμε τον διαφορικής εξέλιξης (Differential Evolution-DE) γενετικό αλγόριθμο, που περιγράφεται λεπτομερειακά από τους εμπνευστές του στην [103]. Συνεχίζουμε εκθέτοντας μια σύντομη περιγραφή του.

Ο αλγόριθμος επιχειρεί να ελαχιστοποιήσει μια συνάρτηση $z(\mathbf{x})$, όπου $\mathbf{x}$ είναι οι ανεξάρτητες μεταβλητές. Στην ορολογία των γενετικών αλγορίθμων, ο DE αλγόριθμος εκτελεί διάφορες επαναλήψεις που η κάθε μία εξ' αυτών ονομάζεται "γενεά". Κάθε γενεά συνίσταται από ένα αριθμό "φαινότυπων", δηλαδή δοκιμαστικών $\mathbf{x}_1^{old}, \mathbf{x}_2^{old}, \dots, \mathbf{x}_N^{old}$, με N να δηλώνει το "εύρος του πληθυσμού". Οι φαινότυποι της επόμενης γενεάς $\mathbf{x}_1^{new}, \mathbf{x}_2^{new}, \dots, \mathbf{x}_N^{new}$ εξάγονται από την



προγονική γενεά βάσει του κανόνα:

$$x_i^{new} = x_r^{old} + F \cdot (x_s^{old} - x_t^{old}), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

όπου r, s, t επιλέγονται τυχαία (ώστε να είναι μεταξύ τους διάφορα) από το σύνολο $1, 2, \dots, N$. Αποδεικνύεται ότι η παράμετρος F ελέγχει την ενίσχυση της διαφορικής μεταβολής. Εάν

$$z(x_i^{new}) < z(x_r^{old}) \quad (2.32)$$

τότε ο x_i^{new} αντικαθιστά τον x_r^{old} ως μέλος της νέας γενεάς. Η εν λόγω διαδικασία προσομοιώνει, κατά κάποιον τρόπο, τη φυσική εξελικτική διαδικασία. Επίσης, λειτουργεί και σαν ένας μηχανισμός που προσομοιώνει τη γενετική μετάλλαξη-ποικιλότητα και ελέγχεται από την παράμετρο P που ονομάζεται πιθανότητα διασταύρωσης (υψηλό P συνεπάγεται μεγάλη μετάλλαξη-ποικιλότητα).

Απαραίτητη για την υλοποίηση του προκειμένου αλγορίθμου είναι η εισαγωγή ενός κριτηρίου λήξης (stopping criterion). Επιλέγουμε τον εξής: ο αλγόριθμος τερματίζεται (και το τρέχον διάνυσμα x γίνεται αποδεκτό ως ολικό ελάχιστο) όταν η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης γίνεται μικρότερη του κατωφλίου δ .

2.6 Αριθμητικά αποτελέσματα

Παρουσιάζουμε παραδείγματα ανακατασκευής διηλεκτρικής διαπερατότητας. Πιο αναλυτικά, παρουσιάζονται παραδείγματα που προέρχονται από προσομοιώσεις σε ένα μικροκυματικό σύστημα κυλινδρικών κυματοδηγών με $d = 20\text{cm}$, $a = 3\text{cm}$ και δεδομένες διαπερατότητες ϵ, ϵ_c . Ακολουθώντας την ανάλυση που παρουσιάστηκε σε προηγούμενες παραγράφους, υπολογίζουμε τα κυματικά πεδία εντός του συστήματος με απώτερο σκοπό να λάβουμε δεδομένα ώστε να υλοποιήσουμε τη διαδικασία επίλυσης του αντιστρόφου προβλήματος. Θα αναζητήσουμε προσεγγίσεις $\tilde{\epsilon}$ της πραγματικής ανομοιογένειας ϵ .

Επιλέγουμε $\epsilon_c = 8$, ώστε $f_{c,11} = \frac{\xi_{11}}{2\pi\sqrt{\mu_0\epsilon_0\epsilon_c}} = \frac{1.841}{2\pi\sqrt{\mu_0\epsilon_0\epsilon_c}} = 1.0352\text{GHz}$ και $f_{c,12} = \frac{\xi_{12}}{2\pi\sqrt{\mu_0\epsilon_0\epsilon_c}} \cong 2.896$, $f_{c,11} = 2.998\text{GHz}$. Συνεπώς, σύμφωνα με τους σχολιασμούς της Παραγράφου 2.5.2 αναμένουμε ότι για συχνότητες διέγερσης στο συχνотικό παράθυρο $[f_{c,11} \ f_{c,12}]$ μόνο ο TE_{11} ιδιορρυθμός υφίσταται εντός των κυματοδηγών.

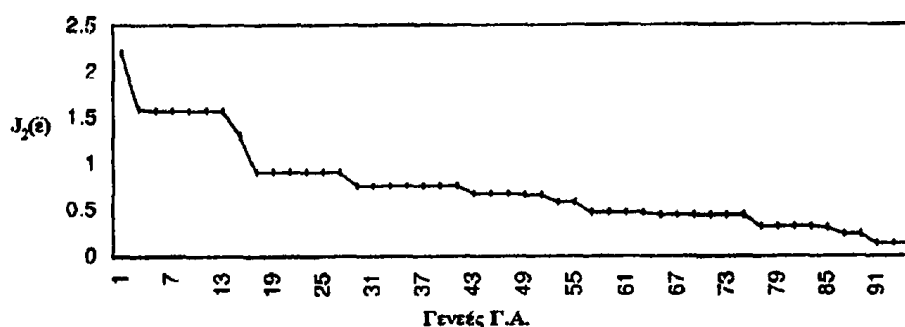
2.6.1 Η διαδικασία προσομοίωσης

Στα εικονικά πειράματα που διεξάγουμε χρησιμοποιούμε τέσσερις συχνότητες: $f_1 = 1.7$, $f_2 = 1.8$, $f_3 = 2$, $f_4 = 2.4$ (σε GHz). Αναφορικά με το γενετικό αλγόριθμο, επιλέγουμε για τις διάφορες παραμέτρους του τις τιμές που παρατίθενται στον Πίνακα 2.2 και οι οποίες παράγουν ακριβείς εκτιμήσεις, σύμφωνα με τα πειράματα που έχουμε διεξάγει.



Παράμετροι	Σημασία
$V_{min} = [1 \quad -40 \quad -400 \quad -1000]$	Κάτω φράγματα των παραμέτρων.
$V_{max} = [7.5 \quad 40 \quad 400 \quad 1000]$	Άνω φράγματα των παραμέτρων.
$N=120$	Αριθμός δοκιμαστικών διανυσμάτων γενεάς.
Iterations=150	Μέγιστος αριθμός γενεών.
$F=0.5$	Ενίσχυση διαφορικής μεταβολής.
$P=0.8$	Πιθανότητα γενετικής διασταύρωσης.

Πίνακας 2.2: Παράμετροι γενετικού αλγορίθμου

Εικόνα 2.7: Η συνάρτηση σφάλματος $J_2(\bar{\epsilon})$ συναρτήσει των γενεών του Γ.Α.

Οι τιμές των V_{min} , V_{max} επιλέχθηκαν ώστε να διασφαλίζεται ότι όλες οι τιμές ϵ πρακτικού ενδιαφέροντος περιλαμβάνονται στον υπερκύβο του τετραδιάστατου χώρου που αναζητά τις υποψήφιες λύσεις ο γενετικός αλγόριθμος. Επίσης, στις προσομοιώσεις μας έχουμε επιλέξει ως $\delta = 10^{-1}$ την τιμή κατωφλίου στην οποία τερματίζει ο αλγόριθμος. Με άλλα λόγια, λαμβάνουμε ακριβή αποτελέσματα όταν οι $J_1(\bar{\epsilon})$ ή $J_2(\bar{\epsilon})$ λαμβάνουν τιμές μικρότερες του δ . Αυτό πραγματοποιείται, εν γένει, σε λιγότερο από 100 γενεές.

Στα παρακάτω κεφάλαια παρουσιάζουμε εκτιμήσεις των ϵ συντελεστών όπως λαμβάνονται από δύο είδη δεδομένων: Πρώτον, μετρήσεις των πλατών των D, G και δεύτερον, μετρήσεις των πλατών και των φάσεων των D, G .

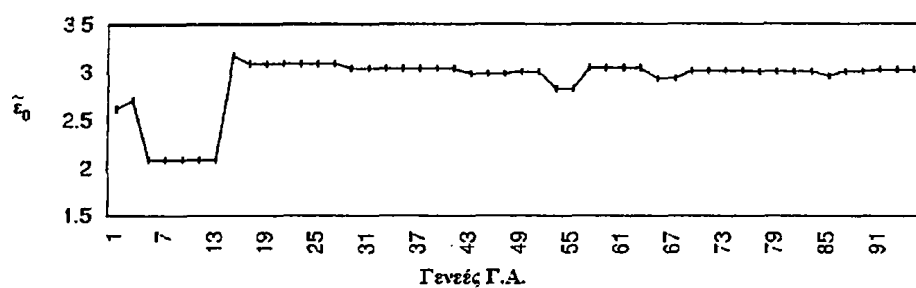
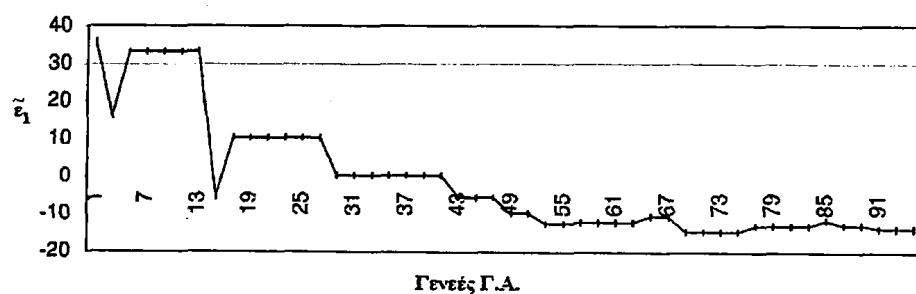
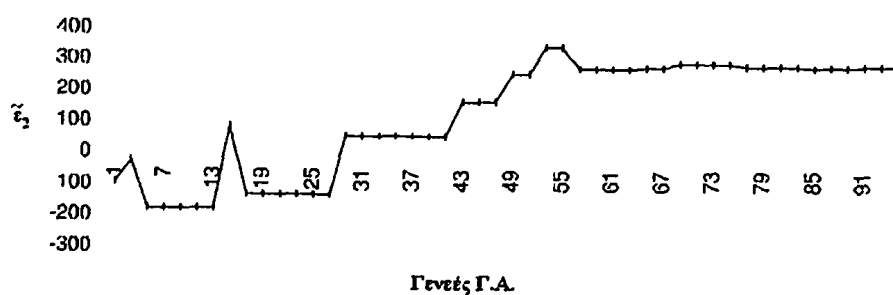
2.6.2 Ανακατασκευή ανομοιογένειας από μετρήσεις των $\|D\|$, $\|G\|$.

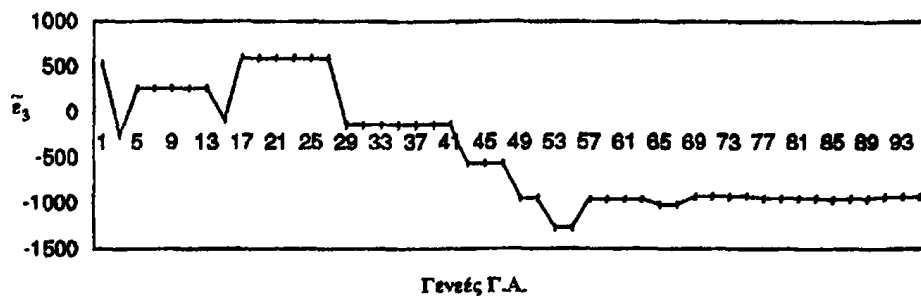
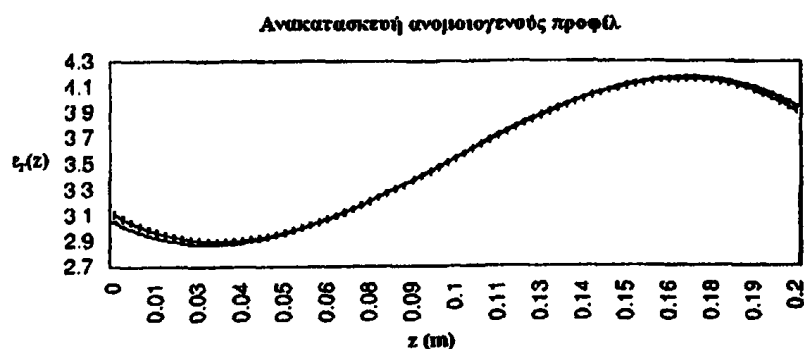
Σε αυτήν την περίπτωση τα πειραματικά δεδομένα αναφέρονται μόνο τα πλάτη των D, G . Τα ακόλουθα διαγράμματα αναπαράγουν τα αποτελέσματα του γενετικού αλγορίθμου. Η Εικ.2.7 παρουσιάζει την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης σφάλματος σε κάθε γενεά του αλγορίθμου. Οι Εικ.2.8-2.11 αναπαριστούν την εξέλιξη των παραμέτρων $\bar{\epsilon}_0$, $\bar{\epsilon}_1$, $\bar{\epsilon}_2$, $\bar{\epsilon}_3$, αντίστοιχα.

Αναφορικά με τη συνάρτηση σφάλματος, η καλύτερη προσέγγιση είναι:

$$\bar{\epsilon} = [\bar{\epsilon}_0 \quad \bar{\epsilon}_1 \quad \bar{\epsilon}_2 \quad \bar{\epsilon}_3] = [3.11 \quad -15.11 \quad 293.31 \quad -988.39], \quad (2.33)$$



Εικόνα 2.8: Εξέλιξη της ε_0 παραμέτρου συναρτήσει των γενεών του Γ.Α.Εικόνα 2.9: Εξέλιξη της ε_1 παραμέτρου συναρτήσει των γενεών του Γ.Α.Εικόνα 2.10: Εξέλιξη της ε_2 παραμέτρου συναρτήσει των γενεών του Γ.Α.

Εικόνα 2.11: Εξέλιξη της $\bar{\epsilon}_3$ παραμέτρου συναρτήσει των γενεών του Γ.Α.Εικόνα 2.12: Σύγκριση των ϵ και $\bar{\epsilon}$ κατά μήκος του μεσαίου κυματοδηγού.

ενώ η πραγματικές τιμές είναι:

$$\epsilon = [\epsilon_0 \ \epsilon_1 \ \epsilon_2 \ \epsilon_3] = [3.05 \quad -13.47 \quad 279.7 \quad -946.92]. \quad (2.34)$$

Ορίζουμε, ως εκτίμηση του σφάλματος, την εξής ποσότητα:

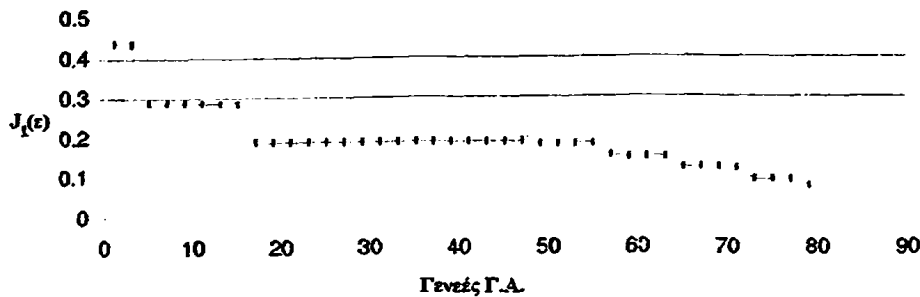
$$\Delta \epsilon := \left[\left| \frac{\epsilon_0 - \bar{\epsilon}_0}{\epsilon_0} \right| \quad \left| \frac{\epsilon_1 - \bar{\epsilon}_1}{\epsilon_1} \right| \quad \left| \frac{\epsilon_2 - \bar{\epsilon}_2}{\epsilon_2} \right| \quad \left| \frac{\epsilon_3 - \bar{\epsilon}_3}{\epsilon_3} \right| \right] \cdot 100(\%).$$

Οπότε, λαμβάνουμε $\Delta \epsilon = [2 \ 1.2 \ 5 \ 4]\%$. Η Εικ.2.12 παρουσιάζει την ανακατασκευή του προφίλ της Εξ.(2.34) από την προσέγγιση της Εξ.(2.33).

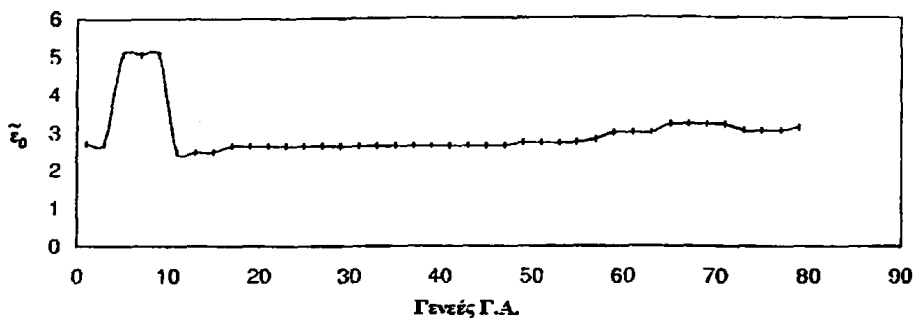
2.6.3 Ανακατασκευή ανομοιογένειας από μετρήσεις των D , G .

Τα διαγράμματα παρακάτω αναπαράγουν τα αποτελέσματα του γενετικού αλγορίθμου. Η Εικ.2.13 αναπαριστά την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης σφάλματος $J_1(\epsilon)$ για κάθε δεύτερη επανάληψη του αλγορίθμου και οι Εικ.2.14-2.17 εκθέτουν την εξέλιξη των προτεινόμενων λύσεων $\bar{\epsilon}_0, \bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, \bar{\epsilon}_3$,





Εικόνα 2.13: Η συνάρτηση σφάλματος $J_1(\varepsilon)$ συναρτήσει των γενεών του Γ.Α.



Εικόνα 2.14: Εξέλιξη της $\bar{\varepsilon}_0$ παραμέτρου συναρτήσει των γενεών του Γ.Α.

αντίστοιχα.

Η κάλλιστη λύση, μετά από 93 γενεές, είναι:

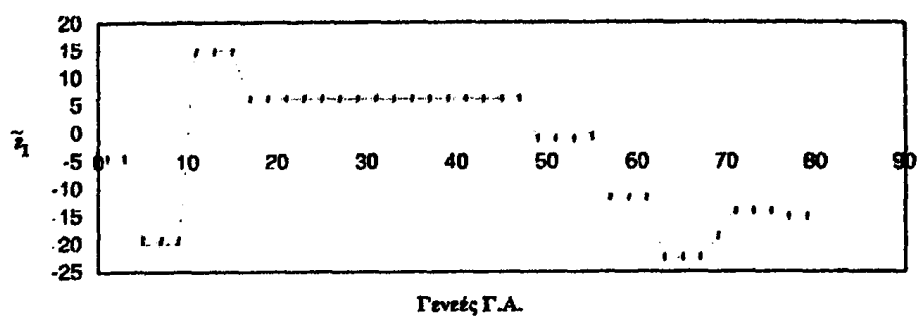
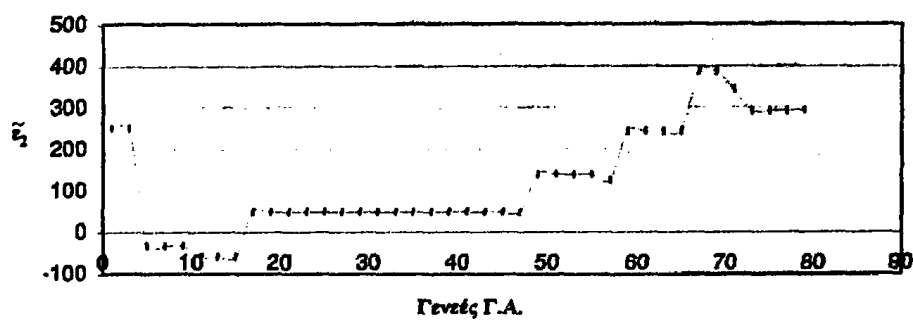
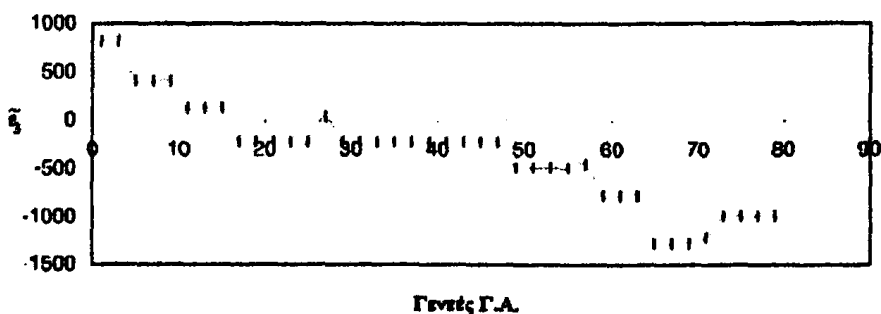
$$\bar{\varepsilon} = [\bar{\varepsilon}_0 \bar{\varepsilon}_1 \bar{\varepsilon}_2 \bar{\varepsilon}_3] = [3.02 \quad -13.67 \quad 281.7 \quad -933.21], \quad (2.35)$$

ενώ η πραγματικές τιμές είναι $\varepsilon = [\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3] = [3.05 \quad -13.47 \quad 279.7 \quad -946.92]$. Το σφάλμα είναι $\Delta\varepsilon = [1 \quad 1.5 \quad 9 \quad 1.5]\%$. Η ακρίβεια της εκτίμησής μας εκθέτεται στην Εικ.2.18.

2.7 Συμπεράσματα

Η χρήση της Frobenius μεθόδου για την επίλυση του ευθέως προβλήματος διάδοσης εντός υλικού με μονοδιάστατη ανομοιογένεια αποδεικνύεται εξαιρετικά ακριβής και ταυτόχρονα συμφέρουσα υπολογιστικά. Στις προσομοιώσεις μας χρειάστηκαν λιγότεροι από τους πρώτους 150 όρους της δυναμοσειράς του ηλεκτρικού πεδίου ώστε να εξαχθεί η αναλυτική λύση. Ασφαλώς, η ακρίβεια της λύσης εξαρτάται από τη συχνότητα διέγερσης, την τάξη της ανομοιογένειας (τετραγωνικής,



Εικόνα 2.15: Εξέλιξη της ε_1 παραμέτρου συναρτήσει των γενεών του Γ.Α.Εικόνα 2.16: Εξέλιξη της ε_2 παραμέτρου συναρτήσει των γενεών του Γ.Α.Εικόνα 2.17: Εξέλιξη της ε_3 παραμέτρου συναρτήσει των γενεών του Γ.Α.



Εικόνα 2.18: Σύγκριση των ε και $\bar{\varepsilon}$ κατά μήκος του μεσαίου κυματοδηγού.

κυβικής κλπ) και τον αριθμό των δεκαδικών ψηφίων που επεξεργάζονται τα αριθμητικά πακέτα προσομοίωσης (πχ. Matlab, Maple). Πακέτα πολλαπλής ακρίβειας (πχ. 32 δεκαδικών ψηφίων) είναι 'πιο ανθεκτικά' στις μεταβολές της συχνότητας και την άνοδο της τάξης της ανομοιογένειας. Παρατηρήσαμε ότι το ευθύ πρόβλημα διάδοσης επιλύεται με μεγάλη ακρίβεια με χρήση αριθμητικών πακέτων quadruple precision (32 δεκαδικά ψηφία) για ανομοιογένεια μέχρι και 10ης τάξεως. Από την άλλη πλευρά, η προτεινόμενη μέθοδος ανακατασκευής παρέχει εξαιρετικά αποτελέσματα, σε σύντομο χρονικό διάστημα, μέχρι και σε 3ης τάξεως ανομοιογένεια. Επίσης, τα αριθμητικά αποτελέσματα καταδεικνύουν ότι οι μετρήσεις των πλατών και μόνο αρκούν για την επίτευξη ακριβούς ανακατασκευής. Η περαιτέρω γνώση και των φάσεων εξυπηρετεί απλώς την ταχύτερη εύρεση μιας καλής προσέγγισης· η ακρίβεια ανακατασκευής είναι όμως ανεπαίσθητα καλύτερη. Σε επόμενα κεφάλαια θα μελετήσουμε και το πώς ο θόρυβος στα δεδομένα επηρεάζει την ακρίβεια της ανακατασκευής σε προφίλ που συναντώνται στην πράξη, όπως 1ης και 2ης τάξης.

Αξίζει, τέλος, να αναφερθούμε και στη δυνατότητα προσεγγιστικού υπολογισμού της πρώτης συχνότητας αποκοπής στα εν λόγω ανομοιογενή μέσα που επιτυγχάνεται βάσει της μέσης τιμής της ανομοιογένειας. Το γεγονός αυτό μπορεί να αποδειχθεί εξαιρετικά χρήσιμο στη διαδικασία ανακατασκευής αφού η γνώση της συχνότητας αποκοπής από πειραματικές μετρήσεις παρέχει ενδείξεις για τη μέση τιμή της ανομοιογένειας.

Κεφάλαιο 3

Κυματική διάδοση και ανακατασκευή διηλεκτρικής ανομοιογένειας σε τετραγωνικούς κυματοδηγούς[†]

3.1 Περίληψη του προβλήματος

Στο παρόν κεφάλαιο συνεχίζουμε τη μελέτη του προβλήματος διάδοσης σε ανομοιογενή μέσα με χρήση της Frobenius μεθόδου και, ειδικότερα, εξετάζουμε την περίπτωση που το περιβάλλον μέσο είναι τετραγωνικοί κυματοδηγοί. Συν τοις άλλοις, εξετάζουμε και τη μορφή που λαμβάνει το πεδίο σε ένα τέτοιο μέσο και το πώς αυτή τροποποιείται βάσει μεταβολών της συχνότητας αλλά και αλλαγών του ίδιου του ανομοιογενούς προφίλ. Τονίζουμε ότι η μελέτη της περίπτωσης τετραγωνικών κυματοδηγών επιβάλλεται λόγω του ότι οι κυματοδηγοί που χρησιμοποιούνται στην πράξη είναι κυρίως τετραγωνικοί. Επίσης, ερευνάται και η ύπαρξη συχνοτήτων αποκοπής καθώς και η δυνατότητα ανακατασκευής της ανομοιογένειας ακολουθώντας την ίδια οδό, δηλαδή τη χρήση ενός διαφορικού γενετικού αλγορίθμου βελτιστοποίησης.

[†]Σχετική δημοσίευση: K Baganas, Inhomogeneous dielectric media: wave propagation and dielectric permittivity reconstruction in the case of a rectangular waveguide, *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, Vol. 15(10), pp. 1371-1392, 2002.



3.2 Οι εξισώσεις του Maxwell σε ανομοιογενή μέσα

Οι εξισώσεις του Maxwell στην περίπτωση συνεχούς ανομοιογενούς διηλεκτρικού μέσου, κατά τη μία διεύθυνση, με διαπερατότητα $\epsilon_r(z) = \epsilon_0 \epsilon_r(z)$, λαμβάνουν την κάτωθι μορφή

$$\nabla \cdot (\epsilon_r(z) \mathbf{E}(\mathbf{r})) = 0, \quad (3.1)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})) - \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = k^2 \epsilon_r(z) \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (3.2)$$

με $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ να δηλώνει το ηλεκτρικό πεδίο, $k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ είναι ο κυματάριθος, $\omega = 2\pi f$ είναι η γωνιακή συχνότητα και μ_0 είναι η μαγνητική επιτρεπτότητα του ελεύθερου χώρου.

Ενδιαφερόμαστε για τους TE ιδιορρυθμούς, οι οποίοι, εκφραζόμενοι σε καρτεσιανές συντεταγμένες x, y, z , λαμβάνουν τη μορφή

$$\mathbf{E}(x, y, z) = E_x(x, y, z)\hat{x} + E_y(x, y, z)\hat{y}, \quad (3.3)$$

με $\hat{x}, \hat{y}$ να δηλώνονται τα μοναδιαία διανύσματα. Εφαρμόζοντας το χωρισμό των μεταβλητών λαμβάνουμε

$$E_x(x, y, z) = X_x(x)Y_x(y)Z_x(z), \quad E_y(x, y, z) = X_y(x)Y_y(y)Z_y(z).$$

Εισάγοντας τις παραπάνω εκφράσεις στην (3.1), λαμβάνουμε: $\frac{X'_x}{X_x} + \frac{X_y}{X_x} \frac{Y'_y}{Y_y} \frac{Z'_y}{Z_x}$, ή ισοδύναμα

$$Z_y = \kappa Z_x, \quad (3.4)$$

$$Y'_y = \lambda Y_x, \quad (3.5)$$

$$X'_x = -\kappa \lambda X_y, \quad (3.6)$$

όπου κ, λ είναι αυθαίρετες σταθερές.

Επιπρόσθετα η Εξ.(3.2) σε συνδυασμό με την Εξ.(3.4), και με χωρισμό των μεταβλητών, συνεπάγεται τις κάτωθι εκφράσεις

$$\frac{X''_x}{X_x} + \frac{Y''_x}{Y_x} + \frac{Z''_x}{Z_x} + k^2 \epsilon_r(z) = 0, \quad (3.7)$$

$$\frac{X''_y}{X_y} + \frac{Y''_y}{Y_y} + \frac{Z''_y}{Z_y} + k^2 \epsilon_r(z) = 0, \quad (3.8)$$



Ο χωρισμός των μεταβλητών στην Εξ.(3.7) οδηγεί στις

$$\frac{X''}{X} = -p^2, \quad (p \text{ σταθερά}), \quad (3.9)$$

$$\frac{Y''}{Y} = -q^2, \quad (q \text{ σταθερά}), \quad (3.10)$$

$$Z'' + [k^2 \epsilon_r(z) - \xi^2] Z = 0, \quad (3.11)$$

όπου $\xi^2 = p^2 + q^2$. Η γενική λύση των Εξισώσεων (3.9)-(3.10) είναι

$$X(x) = A_1 \cos(px) + A_2 \sin(px), \quad (3.12)$$

$$Y(y) = B_1 \cos(qy) + B_2 \sin(qy), \quad (3.13)$$

όπου $p, q \neq 0$ και A_1, A_2, B_1, B_2 είναι αυθαίρετες σταθερές. Η περίπτωση $p = 0$ και/ή $q = 0$ αναλύεται αργότερα.

Εστιάζουμε, στη συνέχεια, στο χειρισμό της Εξ.(3.11). Η σχετική διηλεκτρική διαπερατότητα αναπτύσσεται σε σειρά δυνάμεων του z ως

$$\epsilon_r(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon_i z^i = \epsilon_0 + \epsilon_1 z + \epsilon_2 z^2 + \dots \quad (3.14)$$

Πρόκειται να εφαρμόσουμε τη μέθοδο Frobenius για την επίλυση της Εξ.(3.11), θεωρώντας ότι η συνιστώσα $Z_x(z)$ μπορεί να εκφραστεί ως

$$Z_x(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots, \quad (3.15)$$

δεδομένου ότι το κέντρο της ανάπτυξης 0 είναι ένα ομαλό σημείο (regular point) για την διαφορική εξίσωση (3.11). Συνεπώς, η συνιστώσα $Z_x(z)$ καθορίζεται από τους συντελεστές $c_i, i = 0, 1, 2, \dots$.

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις (3.14)-(3.15) στην Εξ.(3.11), παράγεται το ακόλουθο επαναληπτικό σχήμα

$$(i+2)(i+1)c_{i+2} - \xi^2 c_i + k^2 \sum_{j=0}^i c_{i-j} \epsilon_j = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Ισοδύναμα, θέτοντας $H^2 = k^2 \epsilon_0 - \xi^2$, λαμβάνουμε

$$c_2 = -\frac{H^2}{2} c_0 \quad \text{και} \quad (i+2)(i+1)c_{i+2} + H^2 c_i + k^2 \sum_{j=1}^i c_{i-j} \epsilon_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.16)$$



Από το παρόν σχήμα, συμπεραίνουμε ότι c_i ($i \geq 2$) είναι συναρτήσεις των c_0, c_1, H, k και των συντελεστών $\varepsilon_j, j = 0, \dots, i-2$, δηλαδή $c_i = c_i(c_0, c_1, H, k, \varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{i-2})$. Ειδικότερα, έχουμε

$$c_i = c_0 u_i(H, k, \varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{i-2}) + c_1 w_i(H, k, \varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{i-2}),$$

όπου u_i, w_i είναι ομαλές συναρτήσεις των ορισμάτων τους.

Συνδυάζοντας τις εκφράσεις (3.12), (3.13) και (3.15) λαμβάνουμε τη γενική μορφή της x -συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου

$$E_x(x, y, z) = [A_1 \cos(px) + A_2 \sin(px)] \cdot [B_1 \cos(qy) + B_2 \sin(qy)] \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right). \quad (3.17)$$

Χειριζόμενοι την Εξ.(3.8), λαμβάνουμε, αντίστοιχα, για την y -συνιστώσα:

$$E_y(x, y, z) = [C_1 \cos(px) + C_2 \sin(px)] \cdot [D_1 \cos(qy) + D_2 \sin(qy)] \cdot k \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right), \quad (3.18)$$

όπου p, q, c_i είναι όμοιες με τις παραμέτρους στην Εξ.(3.17) και οι C_1, C_2, D_1, D_2 είναι αυθαίρετες σταθερές. Η πολλαπλασιαστική σταθερά k εισάγεται ώστε η Εξ.(3.4) να ικανοποιείται.

Από τη λύση των επαναληπτικών Εξισώσεων (3.17), οι αναζητούμενες συνιστώσες $Z_x(z), Z_y(z)$ του ηλεκτρικού πεδίου καθορίζονται από του συντελεστές ανάπτυξης των δυναμοσειρών τους.

Η θεώρηση των (3.4)-(3.6) ή, ισοδύναμα, η ικανοποίηση της Εξ.(3.1) απαιτούν ότι οι συνδυαστικοί συντελεστές δεν είναι ανεξάρτητοι, αλλά ικανοποιούν τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$C_1 = -\frac{A_2 p}{\chi \lambda}, \quad C_2 = \frac{A_1 p}{\chi \lambda}, \quad (3.19)$$

$$D_1 = -\lambda \frac{B_2}{q}, \quad D_2 = \lambda \frac{B_1}{q}. \quad (3.20)$$

Συνεπώς, οι τελικές λύσεις είναι:

$$E_x(x, y, z) = [A_1 \cos(px) + A_2 \sin(px)] \cdot [B_1 \cos(qy) + B_2 \sin(qy)] \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right), \quad (3.21)$$

$$E_y(x, y, z) = \frac{p}{q} [A_1 \sin(px) - A_2 \cos(px)] \cdot [B_1 \sin(qy) - B_2 \cos(qy)] \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right). \quad (3.22)$$

Οι τρεις ειδικές περιπτώσεις, που αφορούν τις τιμές των p, q αναλύονται ως εξής:

1. Όταν $p = 0, q \neq 0$, οι x -συνιστώσες X_x, X_y μορφοποιούνται ως: $X_x(x) = A_1 x + A_2$ και $X_y(x) = C_1 x + C_2$. Εισάγοντας αυτές τις εκφράσεις στην Εξ.(3.6) και σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα των Εξισώσεων (3.4)-(3.5), ο συντελεστής C_1 μηδενίζεται. Έτσι, οδηγούμαστε



στις γενικές λύσεις:

$$E_x = (A_1 x + A_2) \cdot [B_1 \cos(qy) + B_2 \sin(qy)] \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right), \quad (3.23)$$

$$E_y = \frac{A_1}{q} [B_2 \cos(qy) - B_1 \sin(qy)] \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right). \quad (3.24)$$

2. Όταν $q = 0$, $p \neq 0$, παρόμοιος χειρισμός οδηγεί στις γενικές λύσεις:

$$E_x = \frac{D_1}{p} [C_2 \cos(px) - C_1 \sin(px)] \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right), \quad (3.25)$$

$$E_y = [C_1 \cos(px) + C_2 \sin(px)] (D_1 y + D_2) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right). \quad (3.26)$$

3. Όταν $p = 0$, $q = 0$, οι γενικές λύσεις είναι:

$$E_x = (A_1 x + A_2) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right), \quad (3.27)$$

$$E_y = (-A_1 y + D_2) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right). \quad (3.28)$$

3.3 Κυματική διάδοση σε τετραγωνικό κυματοδηγό

Προκειμένου να εξάγουμε την ακριβή μορφή του TE πεδίου εντός ενός τετραγωνικού κυματοδηγού, εφαρμόζουμε κατάλληλες συνοριακές συνθήκες στις εκφράσεις της προηγούμενης παραγράφου.

Σε αυτό το σημείο τονίζουμε ότι η ανάλυσή μας μπορεί ευθέως να επεκταθεί σε μη ιδανικά διηλεκτρικά ($(\sigma \neq 0)$ και $\text{Im}(\epsilon_r(z)) \neq 0$ [25]) θεωρώντας ότι $\epsilon'_r(z) = \epsilon_r(z) - j\frac{\sigma}{\omega}$. Αυτό συνεπάγεται ότι όλοι οι συντελεστές c_i θα έχουν, πιθανώς, φανταστικά μέρη.

Οι εκφράσεις που παρουσιάζονται παρακάτω αφορούν την περίπτωση $\epsilon(x, y, z) = \epsilon_0 \epsilon_r(z)$. Οι ακόλουθες συνοριακές συνθήκες πρέπει να ικανοποιούνται από το TE ηλεκτρικό πεδίο:

Συνθήκη 1: Οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου οφείλουν να έχουν φραγμένες τιμές εντός του κυματοδηγού.

Συνθήκη 2: Η εφαπτομενική συνιστώσα πρέπει να μηδενίζεται στην επιφάνεια του κυλίνδρου, δηλαδή στα άκρα $x = 0, a$ και $y = 0, b$, όπου a, b οι διαστάσεις της διατομής του κυματοδηγού.

Ότι αφορά τη γενική λύση για όλες τις τιμές των p, q , υπό το φως των συνοριακών συνθηκών, ισχύουν τα ακόλουθα: Η Συνθήκη 1 ικανοποιείται αυτόματα για όλες τις τιμές του. Η Συνθήκη



2 οδηγεί στις ακόλουθες περιπτώσεις:

Περίπτωση 1. $p, q \neq 0$: Η Συνθήκη 2 συνεπάγεται ότι $A_2 = B_1 = 0$ και $p \equiv p_m = \frac{m\pi}{a}$, $q \equiv q_n = \frac{n\pi}{b}$, όπου $m, n = 1, 2, \dots$. Συνεπώς, οι εκφράσεις των TE_{mn} είναι:

$$E_x(x, y, z) = E_0 \cos(p_m x) \sin(q_n y) \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right), \quad (3.29)$$

$$E_y(x, y, z) = -\frac{p_m}{q_n} E_0 \sin(p_m x) \cos(q_n y) \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right), \quad (3.30)$$

όπου E_0 είναι μια αυθαίρετη σταθερά πλάτους.

Περίπτωση 2. $q = 0, p \neq 0$: Η Συνθήκη 2 συνεπάγεται ότι $C_1 = D_1 = 0$ και $p \equiv p_m = \frac{m\pi}{a}$, όπου $m = 1, 2, \dots$. Συνεπώς, οι εκφράσεις των TE_{m0} ρυθμών είναι:

$$E_x(x, y, z) = 0, \quad (3.31)$$

$$E_y(x, y, z) = E_0 \sin(p_m x) \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right). \quad (3.32)$$

Περίπτωση 3. $p = 0, q \neq 0$: Η Συνθήκη 2 συνεπάγεται ότι $A_1 = B_1 = 0$ και $q \equiv q_n = \frac{n\pi}{b}$, όπου $n = 1, 2, \dots$. Συνεπώς, οι εκφράσεις των TE_{0n} ρυθμών είναι:

$$E_x(x, y, z) = E_0 \sin(q_n y) \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right), \quad (3.33)$$

$$E_y(x, y, z) = 0. \quad (3.34)$$

Περίπτωση 4. $p = q = 0$: Η Συνθήκη 2 συνεπάγεται ότι $A_1 = A_2 = D_2 = 0$ και ότι οι συνιστώσες E_x, E_y πρέπει να μηδενίζονται. Επομένως, δεν υπάρχει δυνατότητα διάδοσης του εν λόγω ρυθμού εντός του τετραγωνικού κυματοδηγού.

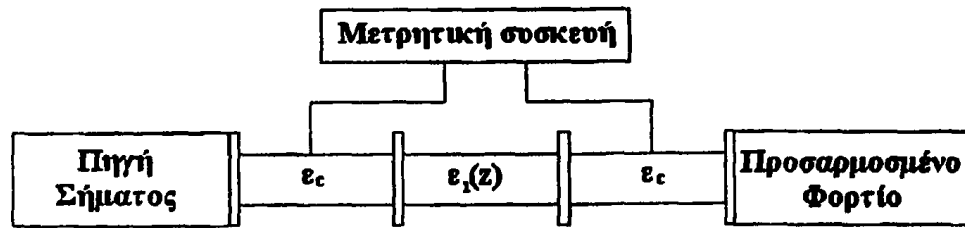
3.4 Κυματική διάδοση σε σύστημα τετραγωνικών κυματοδηγών

Προκειμένου να επιτύχουμε την ανακατασκευή της διηλεκτρικής διαπερατότητας, κάνουμε χρήση της μετρητικής διάταξης του προηγούμενου Κεφαλαίου με τη διαφορά ότι χρησιμοποιούμε τετραγωνικούς κυματοδηγούς (δες Εικόνας 3.1). Θεωρούμε διάδοση του TE_{10} ρυθμού, που είναι ο κύριος ρυθμός σε τετραγωνικούς κυματοδηγούς.

Για ό,τι ακολουθεί, θεωρείται ότι η ανομοιογένεια είναι κυβική, δηλαδή,

$$\epsilon_r(z) = \epsilon_0 + \epsilon_1 z + \epsilon_2 z^2 + \epsilon_3 z^3.$$





Εικόνα 3.1: Η μετρητική μικροκυματική διάταξη

αν και η παρούσα ανάλυση μπορεί να γενικευτεί σε N -τάξεως πολυώνυμα.

3.4.1 Υπολογισμός των πεδιακών συνιστωσών

Θεωρούμε, αρχικά, τις συχνότητες στις οποίες υφίσταται κυματική διάδοση.

Οι συχνότητες αποκοπής στους δύο ακραίους κυματοδηγούς έχουν τη μορφή (δες [9])

$$f_{c,nm} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2}{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_c}} \quad n, m = 1, 2, \dots$$

Δεδομένου ότι μας ενδιαφέρουν οι TE_{1m} ιδιορρυθμοί, έχουμε

$$f_{c,1m} = \frac{\xi_{1m}}{2\pi \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_c}} \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.35)$$

Αυτό συνεπάγεται ότι για τη συχνότητα διέγερσης f πρέπει να ισχύει $f > f_{c,10}$, με

$$f_{c,10} = \frac{1}{2a \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_c}}. \quad (3.36)$$

Συνεπώς, η δυνατότητα διάδοσης τουλάχιστον εντός του πρώτου κυματοδηγού προϋποθέτει ότι $f > f_{c,10}$. Σε ό,τι ακολουθεί, ϵ_c είναι η διηλεκτρική σταθερά των δύο ακραίων κυματοδηγών, $\beta = \sqrt{k^2 \epsilon_c - (\frac{\pi}{a})^2}$, $k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$.

Κυματοδηγός 1: Οι εκφράσεις του ηλεκτρικού πεδίου είναι

$$E_y(x, z) = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) (e^{-j\beta z} + G e^{j\beta z}), \quad (3.37)$$

όπου E_0 είναι μια αυθαίρετη σταθερά και G είναι ο συντελεστής ανάκλασης.

Κυματοδηγός 2: Αντίστοιχα, έχουμε

$$E_y(x, z) = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i. \quad (3.38)$$



Κυματοδηγός 3: Οι πεδιακές εκφράσεις είναι

$$E_y(x, z) = DE_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta z}, \quad (3.39)$$

όπου D είναι ο συντελεστής διάδοσης.

Ορίζουμε ως $\epsilon := [\epsilon_0 \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3]$. Υπενθυμίζουμε ότι στα πλαίσια του αντιστρόφου προβλήματος οι μετρούμενες ποσότητες στην διάταξη θα είναι οι $D = D(\epsilon, f, \alpha, d)$, $G = G(\epsilon, f, \alpha, d)$, όπου f, α, d λαμβάνουν γνωστές τιμές, ενώ το διάνυσμα ϵ αποτελεί το αναζητούμενο μέγεθος. Τα D, G δύνανται να μετρηθούν. Καθορίζουμε παρακάτω την εξάρτησή τους από τα $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ (και τα f, d). Ο τελικός μας σκοπός είναι να εκτιμήσουμε τα $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ ώστε οι θεωρητικά υπολογισμένες τιμές των D, G να ταυτίζονται με τις αντίστοιχες που λαμβάνονται από την μικροκυματική διάταξη των κυματοδηγών.

Στο σύνορο $z = 0$, από τη συνέχεια των συνιστωσών και των παραγώγων τους, εξάγουμε τα εξής:

$$c_0 = 1 + G, \quad (3.40)$$

$$c_1 = -j\beta(1 - G). \quad (3.41)$$

Παρόμοια, στη διεπιφάνεια $z = d$ λαμβάνουμε:

$$c_0 Z_1(d) + c_1 Z_2(d) = De^{-j\beta d}, \quad (3.42)$$

$$c_0 Z'_1(d) + c_1 Z'_2(d) = -j\beta De^{-j\beta d}, \quad (3.43)$$

όπου $Z_1(d) = 1 + u_2 d^2 + u_3 d^3 + \dots$ και $Z_2(d) = d + w_2 d^2 + w_3 d^3 + \dots$.

Οι Εξισώσεις (3.40-3.43) μπορούν να γραφούν ως ένα 4×4 γραμμικό σύστημα $AX = B$, με

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -j\beta & 0 \\ Z_1(d) & Z_2(d) & 0 & -e^{-j\beta d} \\ Z'_1(d) & Z'_2(d) & 0 & j\beta e^{-j\beta d} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ G \\ D \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -j\beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Συνεπώς, οι A, B είναι πλήρως ορισμένοι πίνακες και ο πίνακας X περιέχει τους αγνώστους του ευθέως προβλήματος.

3.4.2 Έλεγχος με αναλυτικές λύσεις

Στην παρούσα παράγραφο ερευνούμε την ακρίβεια της προτεινόμενης μεθόδου συγκρίνοντάς την με ήδη υπάρχουσες αναλυτικές λύσεις για δύο περιπτώσεις απλών διηλεκτρικών προφίλ.

Περίπτωση 1: $\epsilon_r(z) = \epsilon_m = \text{σταθερά}$. Τότε, οι εκφράσεις του πεδίου εντός του μεσαίου



κυματοδηγού είναι:

$$E_y(x, z) = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) (C_m e^{-j\beta_m z} + G_m e^{j\beta_m z}),$$

όπου m υποδεικνύει το μεσαίο κυματοδηγό, C_m είναι ο συντελεστής διάδοσης, G_m είναι ο συντελεστής ανάκλασης και $\beta_m = \sqrt{k^2 \epsilon_m - (\frac{\pi x}{a})^2}$. Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες λαμβάνουμε το κάτωθι 4x4 γραμμικό σύστημα $AX=B$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ \beta_m & -\beta_m & \beta & 0 \\ e^{-j\beta_m d} & e^{j\beta_m d} & 0 & -e^{-j\beta d} \\ \beta_m e^{-j\beta_m d} & -\beta_m e^{j\beta_m d} & 0 & -\beta e^{-j\beta d} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} C_m \\ G_m \\ G \\ D \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Το εν λόγω σύστημα επιλύθηκε για διάφορα διηλεκτρικά προφίλ ϵ_m λαμβάνοντας τιμές για τα C, G που είναι ταυτόσημες με τη Frobenius προσέγγιση (έστω D_{Fr}, G_{Fr}). Αυτό το γεγονός παρουσιάζεται για ένα εύρος συχνοτήτων στις Εικόνες 3.2 και 3.3.

Περίπτωση 2: $\epsilon_r(z) = \alpha + bz$. Θεωρώντας γραμμική ανομοιογένεια, η Εξ.(3.11) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} Z_y'' + [k^2(\alpha + bz) - \xi^2]Z_y &= 0 \Leftrightarrow Z_y'' + (k^2\alpha - \xi^2 + k^2bz)Z_y = 0 \\ &\Leftrightarrow Z_y'' + (A + Bz)Z_y = 0, \end{aligned}$$

όπου $A = k^2\alpha - \xi^2$ και $B = k^2b$. Εφαρμόζοντας την αλλαγή μεταβλητής $n(z) = -B^{1/3}(z + \frac{A}{B})$, λαμβάνουμε

$$\ddot{Z}_y = nZ_y, \quad (3.44)$$

όπου $\ddot{Z}_y$ δηλώνει τη δεύτερη παράγωγο ως προς το n . Συνεπώς, οι z -εξαρτώμενοι όροι των πεδιακών συνιστωσών εκφράζονται ως

$$Z_y(z) = \alpha_1 \text{Ai}(n(z)) + \alpha_2 \text{Bi}(n(z)),$$

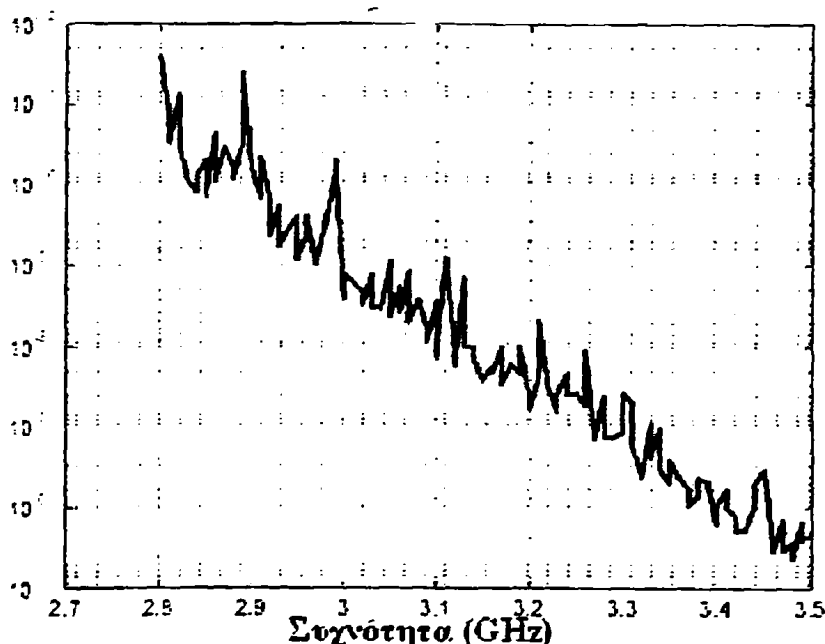
όπου α_1, α_2 είναι αυθαίρετες σταθερές. Επομένως, το ηλεκτρικό πεδίο εντός του μεσαίου κυματοδηγού μορφοποιείται ως

$$E_y(x, z) = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) (\alpha_1 \text{Ai}(n(z)) + \alpha_2 \text{Bi}(n(z))).$$



Εφαρμόζοντας τις ίδιες συνοριακές συνθήκες στα σημεία $z = 0 \Leftrightarrow n_0 \equiv n(0) = -\frac{A}{B^{2/3}}$ και $z = d \Leftrightarrow n_d \equiv n(d) = -B^{1/3}(d + \frac{A}{B})$, λαμβάνουμε το ακόλουθο γραμμικό σύστημα $AX=B$:

$$A = \begin{bmatrix} Ai(n_0) & Bi(n_0) & -1 & 0 \\ -B^{1/3}Ai'(n_0) & -B^{1/3}Bi'(n_0) & -j\beta & 0 \\ Ai(n_d) & Bi(n_d) & 0 & -e^{-j\beta d} \\ -B^{1/3}Ai'(n_d) & -B^{1/3}Bi'(n_d) & 0 & -j\beta e^{-j\beta d} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ G \\ D \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -j\beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$



Εικόνα 3.2: Εξέλιξη του σφάλματος $\frac{\|D-D_{Fc}\|}{\|D\|}$ συναρτήσει της συχνότητας για $\epsilon_m = 5$.

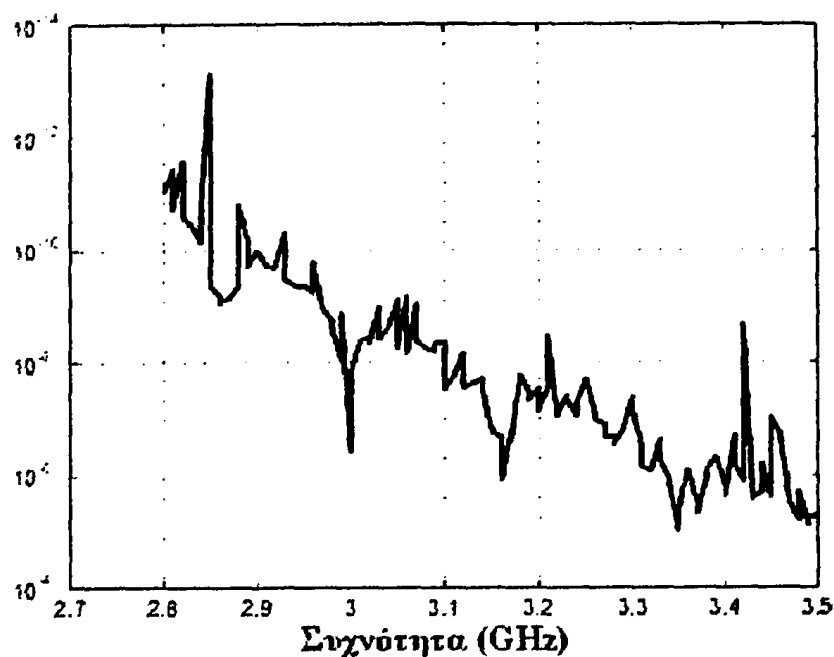
Το σύστημα επιλύθηκε για μια πλειάδα γραμμικών προφίλ και προέκυψαν τιμές για τα D, G που είναι ταυτόσημες με τη Frobenius προσέγγιση που προτείνουμε, όπως εκθέτεται από τις Εικόνες 3.4 και 3.5.

Συνεπώς, οι λύσεις της Frobenius μεθόδου είναι σε πλήρη συμφωνία με ανεξάρτητα λαμβανόμενες λύσεις για τα δύο είδη διηλεκτρικών προφίλ που συζητήθηκαν παραπάνω.

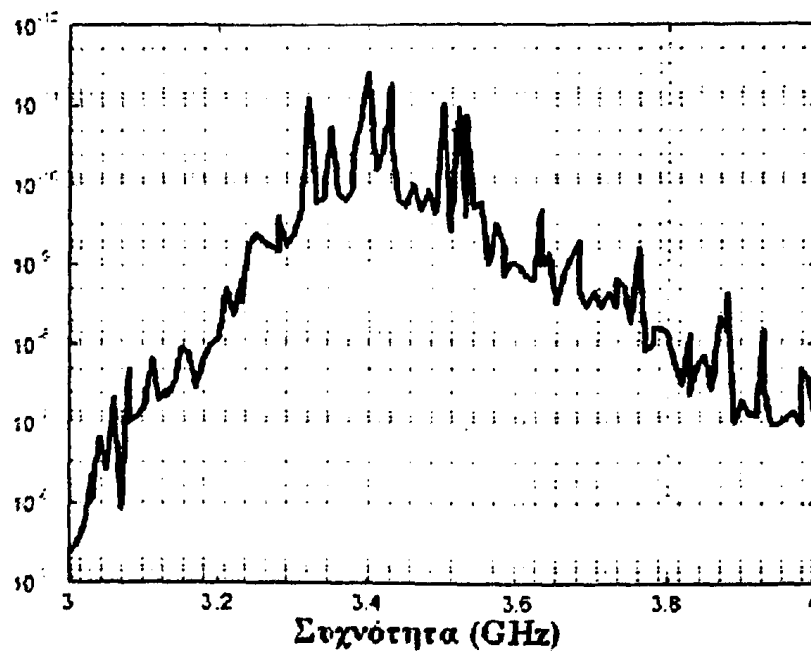
3.4.3 Οι μορφές του πεδίου εντός του ανομοιογενούς μέσου

Στην παρούσα παράγραφο, προκειμένου να εξετάσουμε τη φυσική του προβλήματος, εστιάζουμε την προσοχή μας στο ανομοιογενές υλικό και μελετούμε τις μορφές του πεδίου $E_y(x, z)$ καθώς η συχνότητα ή η παράμετρος ϵ_0 αλλάζουν κατά βούληση. Επίσης, μελετούμε τι συμβαίνει στο

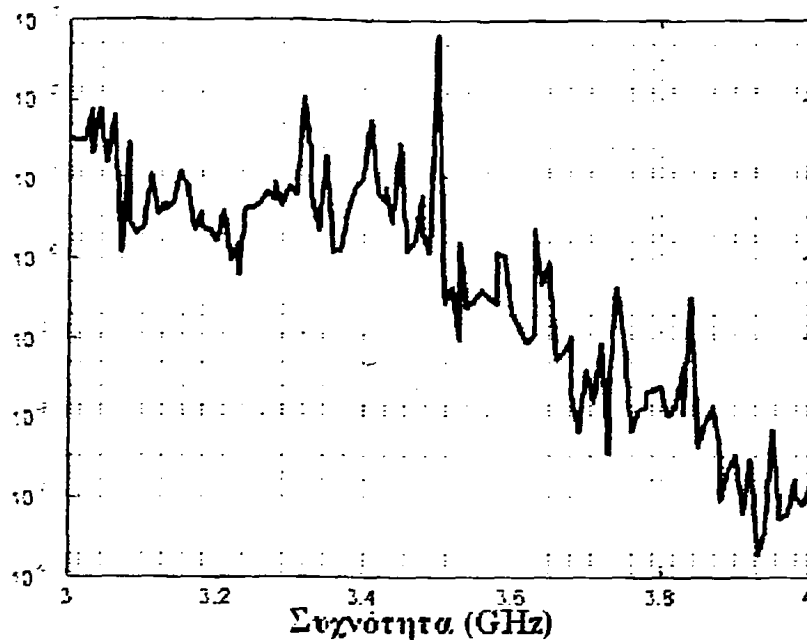




Εικόνα 3.3: Εξέλιξη του σφάλματος $\frac{\|G - G_{Pr}\|}{\|G\|}$ συναρτήσει της συχνότητας για $\epsilon_m = 5$.



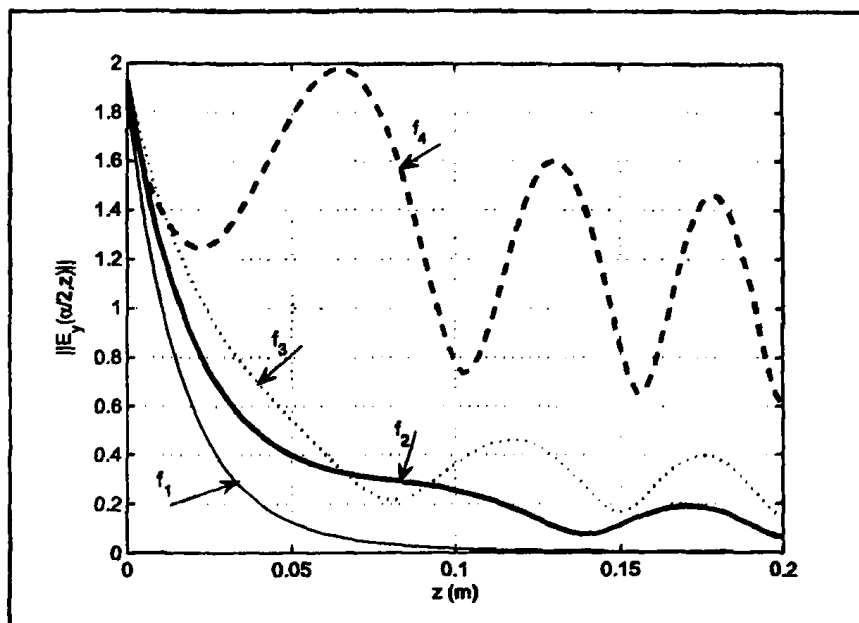
Εικόνα 3.4: Εξέλιξη του σφάλματος $\frac{\|D - D_{Pr}\|}{\|D\|}$ συναρτήσει της συχνότητας για $\epsilon_r(z) = 3.12 + 5.47z$.



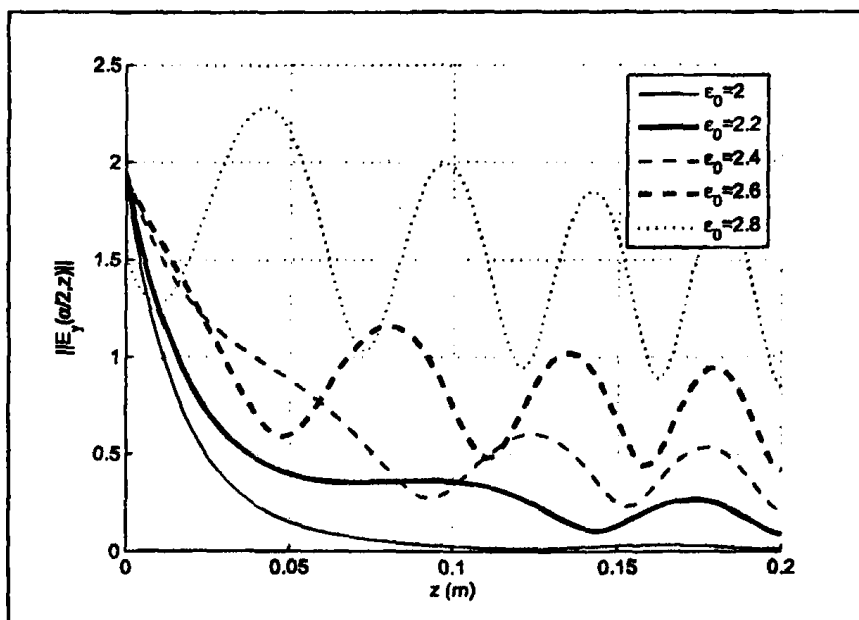
Εικόνα 3.5: Εξέλιξη του σφάλματος $\frac{\|G - G_F\|}{\|G\|}$ συναρτήσει της συχνότητας για $\epsilon_r(z) = 3.12 + 5.47z$.

ανακλώμενο και το διαδιδόμενο κύμα καθώς η ανομοιογένεια παρουσιάζει κλίσεις που φυσικά ενισχύουν την αδιαπερατότητα του ανομοιογενούς στρώματος και την ανακλώμενη ενέργεια.

Το πεδίο λαμβάνει τη μορφή στάσιμου κύματος κατά μήκος του z άξονα (αυτό οφείλεται στο πεπερασμένο πάχος του στρώματος κατά z) με μια μικρή ταλάντωση στην περιβάλλουσά του (δες Εικόνες 3.6 και 3.7). Για όλα τα είδη των ανομοιογενειών (π.χ., γραμμικά, τετραγωνικά κ.λ.π.) υπάρχουν τιμές των συντελεστών ϵ_i , $i = 0, 1, 2, \dots$, και των συχνοτήτων διέγερσης που οδηγούν στην ολική ανάκλαση του προσπίπτοντος κύματος. Σε αυτήν την περίπτωση, οι ταλαντώσεις του πεδίου εξασθενίζουν και το πεδίο βαθμιαία μηδενίζεται. Κοντά στο σύνορο $z = 0$ η ισχυρή εξασθένιση του πεδίου δηλώνει το φυσικό γεγονός ότι ένα μικρό ποσό την ενέργειας του προσπίπτοντος πεδίου διαπερνά το ανομοιογενές στρώμα. Επίσης, οι αριθμητικές προσομοιώσεις αναδεικνύουν ότι αυτός ο μηχανισμός απόσβεσης εμφανίζεται σε όλες τις συχνότητες και για όλα τα πολυώνυμα $\epsilon_r(z)$ με αιχμηρές κλίσεις και μεγάλες ταλαντώσεις. Σε περιπτώσεις προφίλ με ομαλές κλίσεις, όπως τα γραμμικά και τα τετραγωνικά προφίλ, το πεδίο αρχίζει να υποβαθμίζεται για συχνότητες που πλησιάζουν τη συχνότητα αποκοπής ή αποσβένεται ταχύτατα για συχνότητες μικρότερες της.



Εικόνα 3.6: Οι μορφές του πεδίου $E_y(a/2, z)$ στις συχνότητες διέγερσης $f_1 = 3.3(\text{GHz})$, $f_2 = 3.5(\text{GHz})$, $f_3 = 3.6(\text{GHz})$, $f_4 = 3.7(\text{GHz})$ για την ανομοιογένεια $\epsilon_r(z) = 2.5 + 5.47z$.



Εικόνα 3.7: Οι μορφές του πεδίου $E_y(a/2, z)$ για μικρές μεταβολές της παραμέτρου ϵ_0 της ανομοιογένειας $\epsilon_r(z) = \epsilon_0 + 5.47z$ στη συχνότητα διέγερσης $f = 3.7(\text{GHz})$.

$\epsilon_r(z)$	$\bar{\epsilon}$	$f_{c,10}$	$f_{c,10}$	Rel. Error %
2.5 +5.47z	3.047	3.44	3.48	1.15
2.95 +5.47z	3.497	3.21	3.25	1.23
3.12 +5.47z	3.667	3.13	3.18	1.57
3.55 +10.47z	4.597	2.8	2.845	1.58
4.25 -13.47z	2.903	3.52	3.91	9.97
5.13 -13.47z	3.783	3.08	3.26	5.52
5.45 -13.47z	4.103	2.96	3.11	4.82
2.15+25.47z-120.24z ²	3.0938	3.41	3.26	4.6
2.75+5.47z-50.24z ²	2.6271	3.67	3.62	1.38
2.95+25.47z-120.24z ²	3.8939	3.04	2.96	2.7
3.00+10.47z-40.24z ²	3.511	3.2	3.16	1.27
3.15+10.47z-50.24z ²	3.5271	3.2	3.15	1.59
4-13.47z+50.24z ²	3.3229	3.29	3.32	0.9
5.0+10.47z-70.24z ²	5.11	2.65	2.62	1.15
5.3-13.47z+50.24z ²	4.623	2.79	2.8	0.36
5.9-13.47z+50.24z ²	5.223	2.62	2.63	0.38
6+10.47z-80.24z ²	5.977	2.45	2.41	1.76
3.0-10.47z+80.24z ² -300.92z ³	2.421	3.85	3.905	1.41
3.25-13.47z+279.24z ² -946.92z ³	3.732	3.10	3.16	1.89
3.75-13.47z+279.24z ² -946.92z ³	4.232	2.91	2.96	1.69
4.0-15.47z+80.24z ² -300.92z ³	2.921	3.51	3.7	5.134
4.25-13.47z+200.24z ² -946.92z ³	3.679	3.13	3.06	1.9
4.75-13.47z+200.24z ² -946.92z ³	4.179	2.93	2.87	2.09
5.0-15.47z+80.24z ² -300.92z ³	3.921	3.03	3.075	1.46
5.40+10.47z-250.24z ² +746.92z ³	4.604	2.79	2.92	4.45
6.25+10.47z-250.24z ² +746.92z ³	5.454	2.57	2.61	1.53
7.20+10.47z-250.24z ² +746.92z ³	6.404	2.37	2.39	0.84

Πίνακας 3.1: Οι συχνότητες αποκοπής $f_{c,10}$, $\bar{f}_{c,10}$.

3.4.4 Συχνότητες αποκοπής

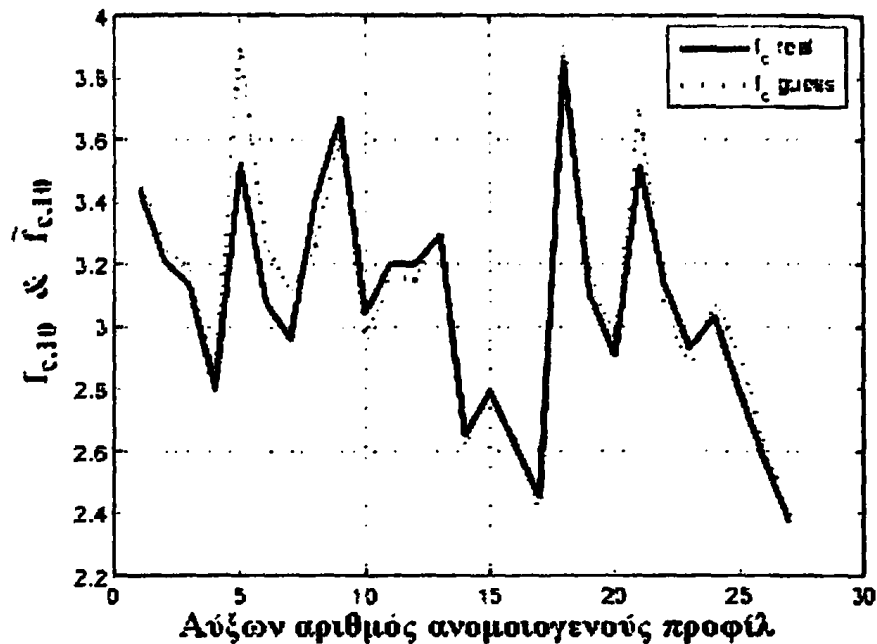
Ορίζουμε ως $f_{c,10}$ (σύμφωνα και με όσα έχουν συζητηθεί στο προηγούμενο Κεφάλαιο) τη συχνότητα εκείνη στην οποία ο συντελεστής διάδοσης γίνεται για πρώτη φορά μικρότερος του ορίου 0.05. Προσεγγίζουμε τη συχνότητα $f_{c,10}$ βάσει της κάτωθι έκφρασης:

$$\bar{f}_{c,10} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu_0\epsilon_0\bar{\epsilon}}}, \quad (3.45)$$

(όπου $\bar{\epsilon} = \frac{1}{d} \int_0^d \epsilon_r(z) dz$ είναι η μέση τιμή του διηλεκτρικού προφίλ).

Στον Πίνακα 3.1 παραθέτουμε συγκριτιστικά τις $f_{c,10}$ και $\bar{f}_{c,10}$ για διάφορα αντιπροσωπευτικά διηλεκτρικά προφίλ. Η Εικ.3.8 συμπεριλαμβάνεται για καλύτερη θέαση των αποτελεσμάτων.



Εικόνα 3.8: Συγκριτικό διάγραμμα των $f_{c,10}$, $\tilde{f}_{c,10}$

3.5 Αριθμητικά αποτελέσματα

Στα πλαίσια της αριθμητικής υλοποίησης του αντιστρόφου προβλήματος, ακολουθούμε τη διαδικασία του προηγούμενου Κεφαλαίου. Συνοπτικά, χειριζόμαστε τα δεδομένα των προσομοιώσεων ώστε να μορφοποιήσουμε μια διαδικασία ελαχιστοποίησης συναρτησιακού με τη χρήση του γενετικού αλγορίθμου διαφορικής εξέλιξης.

Παρουσιάζουμε παραδείγματα ανακατασκευής διηλεκτρικής διαπερατότητας υλοποιώντας εικονικά πειράματα. Πιο αναλυτικά, παρουσιάζονται παραδείγματα προσομοιώσεων στο μικροκυματικό σύστημα τετραγωνικών κυματοδηγών με $d = 20\text{cm}$, $a = 2.5\text{cm}$ και δεδομένες διαπερατότητες $\epsilon_r(z)$, ϵ_c . Ακολούθως, υπολογίζουμε τα κυματικά πεδία εντός του συστήματος με απώτερο σκοπό να λάβουμε δεδομένα ώστε να υλοποιήσουμε τη διαδικασία επίλυσης του αντιστρόφου προβλήματος. Αναζητούμε προσεγγίσεις $\tilde{\epsilon}$ της πραγματικής ανομοιογένειας ϵ .

Επιλέγουμε $\epsilon_c = 8$ και, συνεπώς, $f_{c,10} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu_0\epsilon_0\epsilon_c}} = 2.12\text{GHz}$.

3.5.1 Η διαδικασία προσομοίωσης

Στα εικονικά πειράματα που διεξάγουμε χρησιμοποιούμε τέσσερις συχνότητες: $f_1 = 3.3$, $f_2 = 3.5$, $f_3 = 3.7$, $f_4 = 3.9$ (σε GHz). Αναφορικά με το γενετικό αλγόριθμο, επιλέγουμε τιμές παραμέτρων όπως παρατίθενται στον Πίνακα 3.2 και οι οποίες παράγουν ακριβείς εκτιμήσεις.



Παράμετροι	Σημασία
$V_{min} = [1 \quad -40 \quad -400 \quad -1000]$	Κάτω φράγματα των παραμέτρων.
$V_{max} = [7.5 \quad 40 \quad 400 \quad 1000]$	Άνω φράγματα των παραμέτρων.
$N=220$	Αριθμός δοκιμαστικών διανυσμάτων ανά γενεά.
$Iterations=110$	Μέγιστος αριθμός γενεών.
$F=0.5$	Ενίσχυση διαφορικής μεταβολής.
$P=0.8$	Πιθανότητα γενετικής διασταύρωσης.

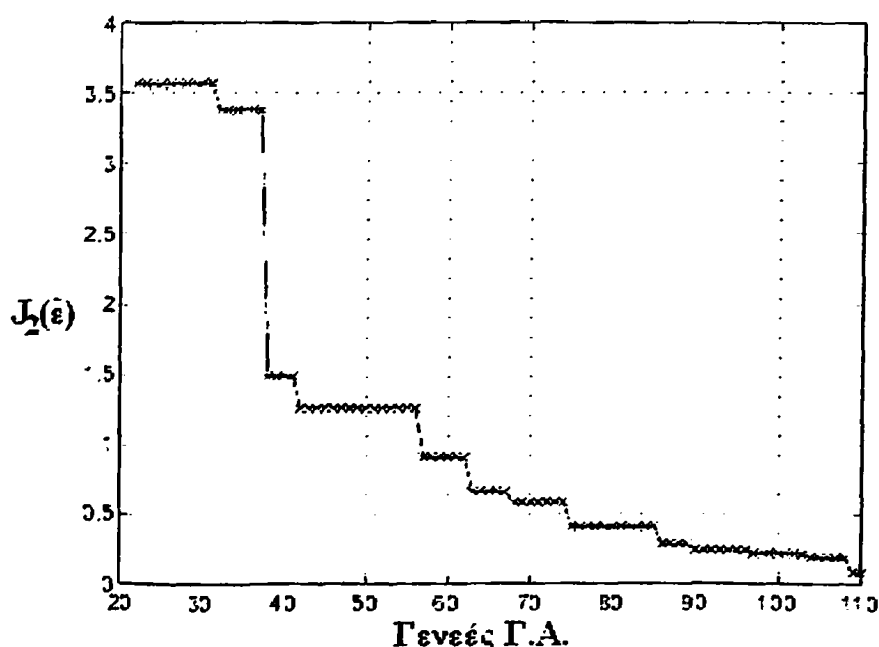
Πίνακας 3.2: Παράμετροι γενετικού αλγορίθμου

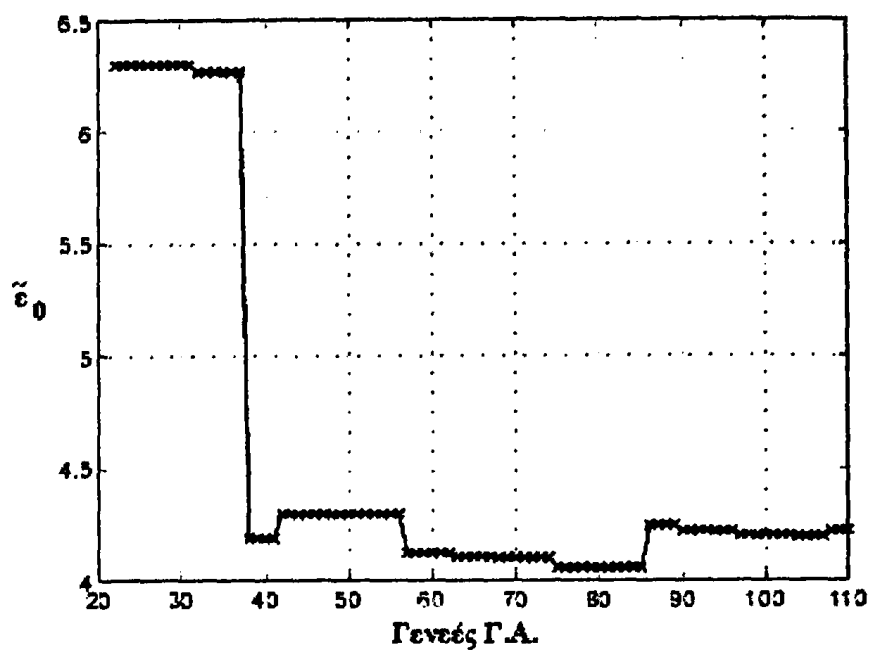
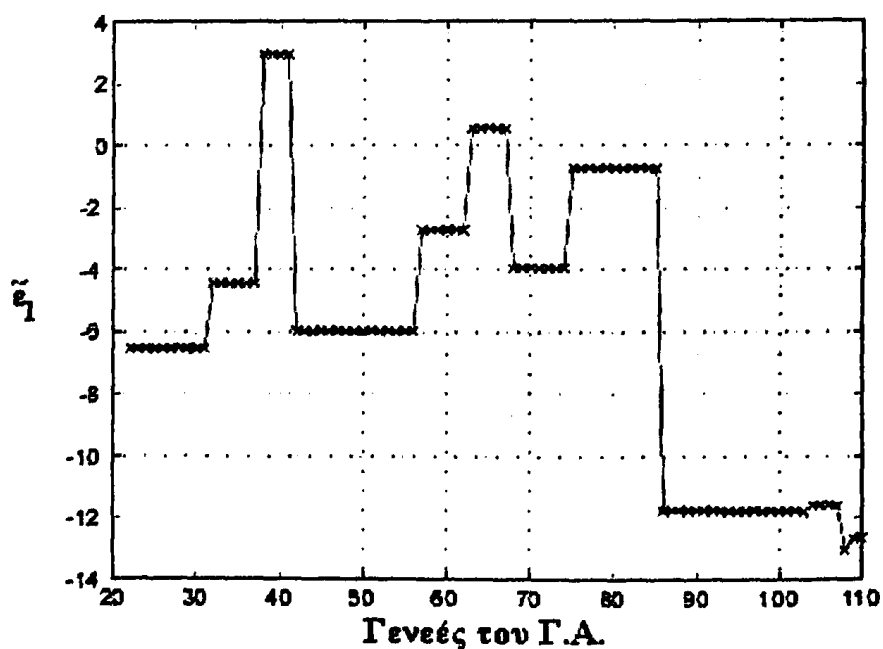
Στις προσομοιώσεις η τιμή κατωφλίου στην οποία τερματίζεται ο αλγόριθμος είναι $\delta = 10^{-1}$.

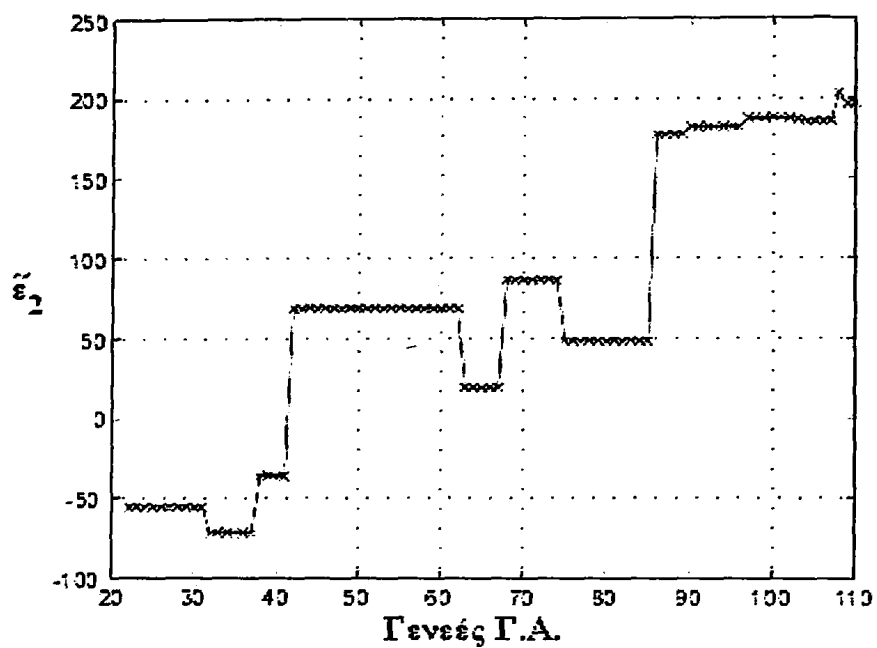
Στη συνέχεια παρουσιάζουμε εκτιμήσεις των ϵ συντελεστών όπως λαμβάνονται από μετρήσεις των πλατών των D, G .

3.5.2 Ανακατασκευή ανομοιογένειας από μετρήσεις των $\|D\|$, $\|G\|$

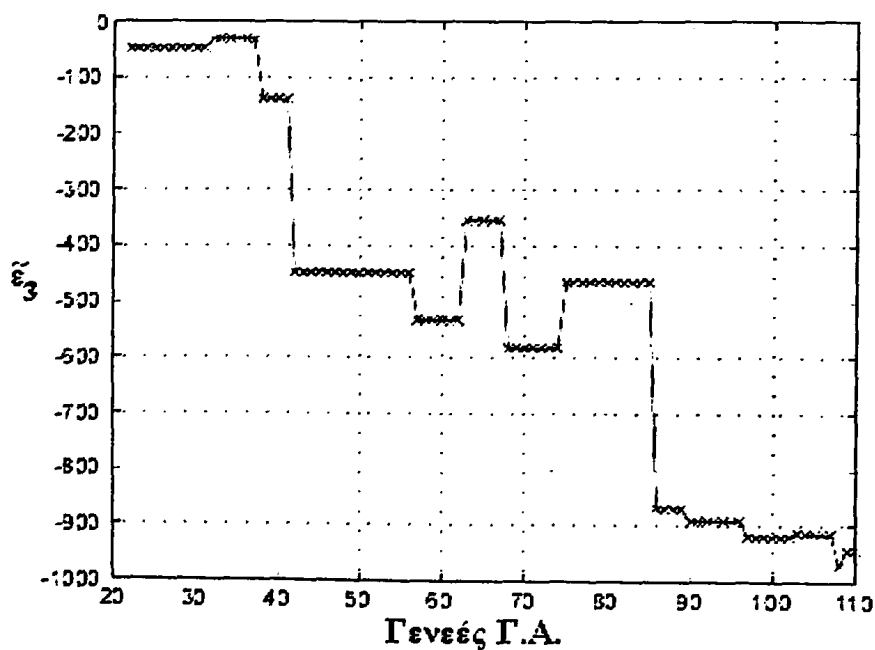
Τα πειραματικά δεδομένα αναφέρονται στα μέτρα των D, G . Παρόμοια, τα διαγράμματα παρακάτω αναπαράγουν τα αποτελέσματα του γενετικού αλγορίθμου. Η Εικ.3.9 αναπαριστά την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης σφάλματος $J_2(\epsilon)$ της Εξ.(2.31) σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου και οι Εικ.3.10-3.13 εκθέτουν την εξέλιξη των προτεινόμενων λύσεων $\tilde{\epsilon}_0, \tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2, \tilde{\epsilon}_3$, αντίστοιχα.

Εικόνα 3.9: Η συνάρτηση σφάλματος $J_2(\tilde{\epsilon})$ συναρτήσει των γενεών του Γ.Α.

Εικόνα 3.10: Εξέλιξη της $\tilde{\epsilon}_0$ παραμέτρου συναρτήσει των γενεών του Γ.Α.Εικόνα 3.11: Εξέλιξη της $\tilde{\epsilon}_1$ παραμέτρου συναρτήσει των γενεών του Γ.Α.



Εικόνα 3.12: Εξέλιξη της ε_2 παραμέτρου συναρτήσει των γενεών του Γ.Α.



Εικόνα 3.13: Εξέλιξη της ε_3 παραμέτρου συναρτήσει των γενεών του Γ.Α.

Η κάλλιστη λύση, μετά από 110 γενεές, είναι:

$$\bar{\epsilon} = [\bar{\epsilon}_0 \bar{\epsilon}_1 \bar{\epsilon}_2 \bar{\epsilon}_3] = [4.22 \quad -12.67 \quad 196.23 \quad -944.15],$$

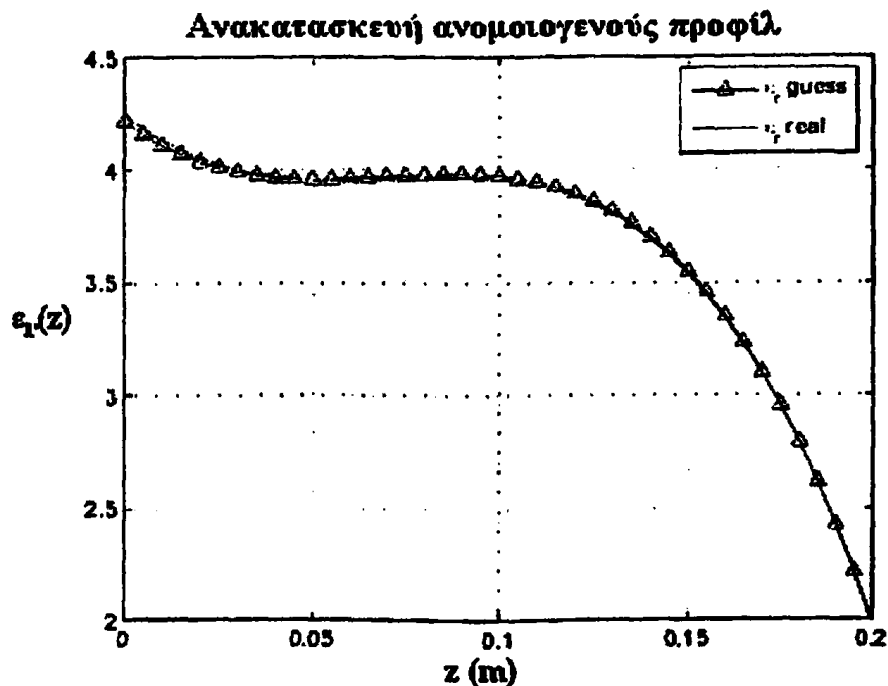
ενώ η πραγματικές τιμές είναι:

$$\epsilon = [\epsilon_0 \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3] = [4.25 \quad -13.47 \quad 200.24 \quad -946.92].$$

Το αντίστοιχο σχετικό επί τοις εκατό σφάλμα ορίζεται ως:

$$\Delta\epsilon := \left[\left| \frac{\epsilon_0 - \bar{\epsilon}_0}{\epsilon_0} \right| \quad \left| \frac{\epsilon_1 - \bar{\epsilon}_1}{\epsilon_1} \right| \quad \left| \frac{\epsilon_2 - \bar{\epsilon}_2}{\epsilon_2} \right| \quad \left| \frac{\epsilon_3 - \bar{\epsilon}_3}{\epsilon_3} \right| \right] \cdot 100(\%).$$

Και επομένως έχουμε $\Delta\epsilon = [0.7059 \quad 5.9391 \quad 2.0026 \quad 0.2925](\%)$. Η ακρίβεια της ανακατασκευής εκθέτεται στην Εικ.3.14.



Εικόνα 3.14: Σύγκριση των ϵ και $\bar{\epsilon}$ κατά μήκος του μεσαίου κυματοδηγού.

3.6 Συμπεράσματα

Η προτεινόμενη μεθοδολογία που βασίζεται στη χρήση της μεθόδου Frobenius και ενός γενετικού αλγορίθμου βρίσκει εφαρμογή και στην περίπτωση τετραγωνικών κυματοδηγών, γεγονός που την



καθιστά ακόμη πιο ελκυστική σε πραγματικές εφαρμογές. Όπως και στην περίπτωση κυλινδρικού κυματοδηγού, έτσι και στο παρόν κεφάλαιο, με λιγότερους από 150 όρους της δυναμοσειράς του ηλεκτρικού πεδίου εξασφαλίζεται ακρίβεια στη λύση. Η ακρίβεια, σαφώς, εξαρτάται από τη συχνότητα διέγερσης, την τάξη της ανομοιογένειας (τετραγωνικής, κυβικής κλπ) και τον αριθμό των δεκαδικών ψηφίων που επεξεργάζονται τα αριθμητικά πακέτα προσομοίωσης. Επιπρόσθετα, η πρώτη συχνότητα αποκοπής μπορεί να υπολογιστεί αριθμητικά πάλι από τη μέση τιμή της ανομοιογένειας, με όλα τα οφέλη που συνεπάγεται αυτό στη διαδικασία ανακατασκευής της στο αντίστροφο πρόβλημα.

Στον παρόν κεφάλαιο, εστιάσαμε, επίσης, την προσοχή μας στη μορφή του πεδίου εντός της ανομοιογένειας. Τα συμπεράσματα που εξάγαμε, που ισχύουν ασφαλώς και στην περίπτωση κυλινδρικού κυματοδηγού, είναι από άποψης φυσικής αναμενόμενα. Πιο αναλυτικά, το πεδίο λαμβάνει τη μορφή στάσιμου κύματος κατά μήκος του z άξονα (αυτό οφείλεται στο πεπερασμένο πάχος του στρώματος κατά z) με μια μικρή ταλάντωση στην περιβάλλουσά του. Για όλα τα είδη των ανομοιογενειών (π.χ., γραμμικά, τετραγωνικά κ.λ.π.) μπορούμε να βρούμε τιμές των συντελεστών ε_i , $i = 0, 1, 2, \dots$, και των συχνοτήτων διέγερσης που οδηγούν στην ολική ανάκλαση του προσπίπτοντος πεδίου. Σε αυτήν την περίπτωση, οι ταλαντώσεις του πεδίου εξασθενίζουν και το πεδίο βαθμιαία μηδενίζεται. Κοντά στο σύνορο $z = 0$ η ισχυρή εξασθένιση του πεδίου δηλώνει το φυσικό γεγονός ότι ένα μικρό ποσό την ενέργειας του προσπίπτοντος πεδίου διαπερνά το ανομοιογενές στρώμα. Επίσης, οι αριθμητικές προσομοιώσεις αναδεικνύουν ότι αυτός ο μηχανισμός απόσβεσης εμφανίζεται σε όλες τις συχνότητες και για όλα τα πολυώνυμα $\varepsilon_r(z)$ με αιχμηρές κλίσεις και μεγάλες ταλαντώσεις. Σε περιπτώσεις προφίλ με ομαλές κλίσεις, όπως τα γραμμικά και τα τετραγωνικά προφίλ, το πεδίο αρχίζει να υποβαθμίζεται για συχνότητες που πλησιάζουν τη συχνότητα αποκοπής ή αποσβένεται ταχύτατα για συχνότητες μικρότερες της. Συμπληρώνουμε ότι δεν διαφαίνεται να ενυπάρχει κανόνας που να συνδέει την τάξη της ανομοιογένειας και τη συχνότητα διέγερσης με το φαινόμενο ολικής ανάκλασης.



Κεφάλαιο 4

Κυματική διάδοση και ανακατασκευή μαγνητικής ανομοιογένειας σε τετραγωνικούς κυματοδηγούς[‡]

4.1 Περίληψη του προβλήματος

Συνεχίζουμε στην εφαρμογή της μεθοδολογίας που προτάθηκε στα προηγούμενα κεφάλαια στη διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε ένα τέλειο, χωρίς απώλειες, μαγνητικό μέσο με συνεχώς μεταβαλλόμενη μαγνητική επιτρεπτότητα $\mu(z)$. Θεωρούμε, και σε αυτήν την περίπτωση, ότι η ανομοιογένεια είναι αυθαίρετη και περιγράφεται από μια σειρά δυνάμεων του z . Προσδίδουμε ιδιαίτερη προσοχή στην πρώτη συχνότητα αποκοπής του κύριου ρυθμού διάδοσης TM_{11} και παρατηρούμε για άλλη μια φορά ότι η μέση τιμή του ανομοιογενούς μαγνητικού προφίλ προσδίδει βέβαιες εκτιμήσεις για τη συχνότητα αποκοπής.

4.2 Εξισώσεις του Maxwell σε ανομοιογενή μέσα

Θεωρώντας ανομοιογενή μαγνητικά υλικά με μαγνητική επιτρεπτότητα $\mu(z) = \mu^* \mu_r(z)$, οι εξισώσεις του Maxwell λαμβάνουν τη μορφή:

$$\nabla \cdot (\mu_r(z) \mathbf{H}) = 0, \quad (4.1)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} = k^2 \mu_r(z) \mathbf{H}, \quad (4.2)$$

[‡]Σχετική δημοσίευση: K Baganas, Inhomogeneous magnetic media: wave propagation and magnetic permeability reconstruction, *Progress in Electromagnetics Research*, PIER 46, pp. 313-333, 2004.



όπου $k = \omega \sqrt{\mu^* \epsilon^*}$ είναι ο κυματάρθμος, $\omega = 2\pi f$ είναι η γωνιακή συχνότητα και μ^* , ϵ^* είναι η μαγνητική επιτρεπτότητα και η διηλεκτρική διαπερατότητα του ελεύθερου χώρου, αντίστοιχα.

Εστιάζουμε την ανάλυσή μας σε TM ρυθμούς που σε καρτεσιανές συντεταγμένες λαμβάνουν τη μορφή:

$$\mathbf{H}(x, y, z) = H_x(x, y, z)\hat{x} + H_y(x, y, z)\hat{y}, \quad (4.3)$$

όπου $\hat{x}$, $\hat{y}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα. Εφαρμόζοντας χωρισμό των μεταβλητών, οι συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου μορφοποιούνται ως $H_x(x, y, z) = X_x(x)Y_y(y)Z_z(z)$, $H_y(x, y, z) = X_y(x)Y_y(y)Z_z(z)$. Από την Εξ.(4.1), προκύπτει ότι $\frac{X'_x}{X_x} + \frac{X'_y}{X_y} + \frac{Z'_z}{Z_z} = 0$, ή

$$Z'_y = \kappa Z_x, \quad (4.4)$$

$$Y'_y = \lambda Y_x, \quad (4.5)$$

$$X'_x = -\kappa\lambda X_y, \quad (4.6)$$

όπου κ, λ είναι σταθεροί συντελεστές.

Επιπλέον, η Εξ.(4.2), αναφορικά με την Εξ.(4.4), και μετά την εισαγωγή του χωρισμού των μεταβλητών, συνεπάγεται την ακόλουθη βαθμωτή διαφορική εξίσωση:

$$\frac{X''_x}{X_x} + \frac{Y''_x}{Y_x} + \frac{Z''_x}{Z_x} + k^2 \mu_r(z) = 0, \quad (4.7)$$

$$\frac{X''_y}{X_y} + \frac{Y''_y}{Y_y} + \frac{Z''_y}{Z_y} + k^2 \mu_r(z) = 0. \quad (4.8)$$

Χειριζόμενοι πρώτα την Εξ.(4.7), εφαρμόζουμε χωρισμό των μεταβλητών που οδηγούν στις σχέσεις:

$$\frac{X''_x}{X_x} = -p^2, \quad (p \text{ σταθερά}) \quad (4.9)$$

$$\frac{Y''_x}{Y_x} = -q^2, \quad (q \text{ σταθερά}) \quad (4.10)$$

$$Z''_x + [k^2 \mu_r(z) - \xi^2] Z_x = 0, \quad (4.11)$$

όπου $\xi^2 = p^2 + q^2$. Οι γενικές λύσεις των Εξισώσεων (4.9)-(4.10) είναι οι

$$X_x(x) = A_1 \cos(px) + A_2 \sin(px), \quad (4.12)$$

$$Y_x(y) = B_1 \cos(qy) + B_2 \sin(qy), \quad (4.13)$$

όπου $p, q \neq 0$ και A_1, A_2, B_1, B_2 είναι αυθαίρετες σταθερές. Οι περιπτώσεις $p = 0$ ή/και $q = 0$ αναλύονται παρακάτω.

Προκειμένου να εξάγουμε τη γενική λύση της Εξ.(4.11) επεκτείνουμε τη σχετική μαγνητική



επιτρεπτότητα σε δυναμοσειρά της μορφής:

$$\mu_r(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i z^i = \mu_0 + \mu_1 z + \mu_2 z^2 + \dots, \quad (4.14)$$

καθώς και

$$Z_x(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots, \quad (4.15)$$

δεδομένου ότι το κέντρο της επέκτασης 0 είναι ομαλό σημείο για τη συνήθη διαφορική εξίσωση (4.11). Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις (4.14), (4.15) στην Εξ.(4.11) εξάγουμε το ακόλουθο επαναληπτικό σχήμα:

$$c_2 = -\frac{H^2}{2c_0}, \quad (i+2)(i+1)c_{i+2} + H^2 c_i + k^2 \sum_{j=1}^i c_{i-j} \mu_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (4.16)$$

θέτοντας $H^2 = k^2 \mu_0 - \xi^2$. Από το σχήμα αυτό λαμβάνουμε ότι τα c_i ($i \geq 2$) είναι συναρτήσεις των c_0, c_1, H, k και των συντελεστών της επιτρεπτότητας $\mu_j, j = 0, \dots, i-2$, δηλαδή $c_i = c_i(c_0, c_1, H, k, \mu_0, \dots, \mu_{i-2})$. Ειδικότερα, τα c_i μπορούν να γραφούν ως:

$$c_i = c_0 u_i(H, k, \mu_0, \dots, \mu_{i-2}) + c_1 w_i(H, k, \mu_0, \dots, \mu_{i-2}),$$

όπου u_i, w_i είναι ομαλές συναρτήσεις των ορισμάτων τους. Για παράδειγμα, για $i = 1$ στην Εξ.(4.16) λαμβάνουμε $c_3 = -\frac{H^2}{6} c_1 - \frac{k^2}{6} \mu_1 c_0$, όπου $u_3(\cdot) = -\frac{H^2}{6}$ και $w_3(\cdot) = -\frac{k^2}{6} \mu_1$. Επίσης, για $i = 2$, λαμβάνουμε $c_4 = \left(\frac{H^4}{2} - k^2 \mu_2 \frac{c_0}{12} - \frac{k^2 \mu_1}{12} c_1 \right)$, όπου $u_4(\cdot) = \left(\frac{H^4}{2} - k^2 \mu_2 \right) \frac{1}{12}$ και $w_4 = -\frac{k^2 \mu_1}{12}$.

Συνδυάζοντας τις εκφράσεις (4.12), (4.13) και (4.15), λαμβάνουμε τη γενική μορφή της x -συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου:

$$H_z(x, y, z) = [A_1 \cos(px) + A_2 \sin(px)] \cdot [B_1 \cos(qy) + B_2 \sin(qy)] \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right). \quad (4.17)$$

Χειριζόμενοι, επίσης, την Εξ.(4.8) λαμβάνουμε, ομοίως, για την y -συνιστώσα του πεδίου:

$$H_y(x, y, z) = [C_1 \cos(px) + C_2 \sin(px)] \cdot [D_1 \cos(qy) + D_2 \sin(qy)] \cdot k \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right), \quad (4.18)$$

όπου p, q, c_i είναι οι ίδιοι με τους συντελεστές της Εξ.(4.17) (αυτό εξηγείται θεωρούμενοι τις εξισώσεις (4.4)-(4.6)) και C_1, C_2, D_1, D_2 είναι αυθαίρετες σταθερές. Τονίζουμε ότι η πολλαπλασιαστική σταθερά k έχει εισαχθεί ώστε η Εξ.(4.4) να ικανοποιείται.

Η επίλυση των επαναληπτικών εξισώσεων (4.16) συνεπάγεται τον άμεσο καθορισμό των αναζητούμενων συνιστωσών $Z_x(z), Z_y(z)$ των μαγνητικών πεδίων. Όλες οι άλλες συνιστώσες



έχουν ήδη προσδιοριστεί και, συνεπώς, η λύση των εξισώσεων (4.16) οδηγεί στον καθορισμό των εξισώσεων Maxwell για τη συγκεκριμένη δομή υπό θεώρηση.

Πλήρης θεώρηση των Εξισώσεων (4.4)-(4.6), ή, ισοδύναμα, πλήρης ικανοποίηση της Εξ.(4.1) απαιτεί την εξάρτηση των συντελεστών μίξης και την πλήρωση των εξισώσεων:

$$C_1 = -\frac{A_2 p}{\kappa \lambda}, \quad C_2 = \frac{A_1 p}{\kappa \lambda}, \quad D_1 = -\lambda \frac{B_2}{q}, \quad D_2 = \lambda \frac{B_1}{q}. \quad (4.19)$$

Καταλήγουμε, εν τέλει, στις λύσεις:

$$H_x(x, y, z) = [A_1 \cos(px) + A_2 \sin(px)] \cdot [B_1 \cos(qy) + B_2 \sin(qy)] \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right), \quad (4.20)$$

$$H_y(x, y, z) = \frac{p}{q} [A_1 \sin(px) - A_2 \cos(px)] \cdot [B_1 \sin(qy) - B_2 \cos(qy)] \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right). \quad (4.21)$$

Όλοι οι αυθαίρετοι συντελεστές που εμφανίζονται στις παραπάνω εξισώσεις θα προσδιοριστούν από ανεξάρτητες συνοριακές συνθήκες που αναφέρονται στο εκάστοτε πρόβλημα.

Πριν προχωρήσουμε παρακάτω, σημειώνουμε ότι υπάρχουν τρεις ειδικές περιπτώσεις που αναφέρονται στις τιμές των σταθερών του χωρισμού των μεταβλητών p και q .

Περίπτωση 1. Όταν $p = 0$ και $q \neq 0$, η x -συνιστώσες X_x, X_y γίνονται: $X_x(x) = A_1 x + A_2$ και $X_y(x) = C_1 x + C_2$. Εισάγοντάς τες στην Εξ.(4.6) και σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα των Εξισώσεων (4.4)-(4.5) οδηγούν στο μηδενισμό του C_1 συντελεστή και στην εξής μορφή για τη γενική λύση:

$$H_x = (A_1 x + A_2) \cdot [B_1 \cos(qy) + B_2 \sin(qy)] \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right), \quad (4.22)$$

$$H_y = \frac{A_1}{q} \cdot [B_2 \cos(qy) - B_1 \sin(qy)] \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right). \quad (4.23)$$

Περίπτωση 2. Όταν $q = 0$ και $p \neq 0$, ανάλογος χειρισμός οδηγεί στη γενική λύση:

$$H_x = \frac{D_1}{p} \cdot [C_2 \cos(px) - C_1 \sin(px)] \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right), \quad (4.24)$$

$$H_y = [C_1 \cos(px) + C_2 \sin(px)] \cdot (D_1 y + D_2) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right). \quad (4.25)$$



Περίπτωση 3. Όταν $p = 0$ και $q = 0$ λαμβάνουμε:

$$H_z = (A_1x + A_2) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right), \quad (4.26)$$

$$H_y = (-A_1y + D_2) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right). \quad (4.27)$$

4.3 Κυματική διάδοση σε τετραγωνικό κυματοδηγό

Οι συνοριακές συνθήκες απαιτούν από το TM μαγνητικό πεδίο τα ακόλουθα:

Συνθήκη 1: Οι συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου πρέπει να έχουν φραγμένες τιμές εντός του κυματοδηγού.

Συνθήκη 2: Η κάθετη συνιστώσα πρέπει να μηδενίζεται στην επιφάνεια του κυματοδηγού (δηλαδή, στην επιφάνεια $x = 0, a$ και $y = 0, b$, όπου a είναι το πλάτος και b είναι το ύψος της διατομής του κυματοδηγού).

Η Συνθήκη 1 αυτομάτως ικανοποιείται για όλες τις τιμές p, q . Η Συνθήκη 2 οδηγεί στις κάτωθι περιπτώσεις.

Περίπτωση 1. $p, q \neq 0$: Η Συνθήκη 2 συνεπάγεται ότι $A_1 = B_2 = 0$ και οδηγεί στη διακριτοποίηση των p, q . Δηλαδή, $p = p_m = \frac{m\pi}{a}$ και $q = q_n = \frac{n\pi}{b}$, όπου $m, n = 1, 2, \dots$. Συνεπώς, οι εκφράσεις των TM_{mn} ρυθμών είναι:

$$H_z(x, y, z) = H_0 \sin(p_m x) \cos(q_n y) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right), \quad (4.28)$$

$$H_y(x, y, z) = -\frac{p_m}{q_n} H_0 \cos(p_m x) \sin(q_n y) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right), \quad (4.29)$$

όπου H_0 είναι μια αυθαίρετη σταθερά πλάτους.

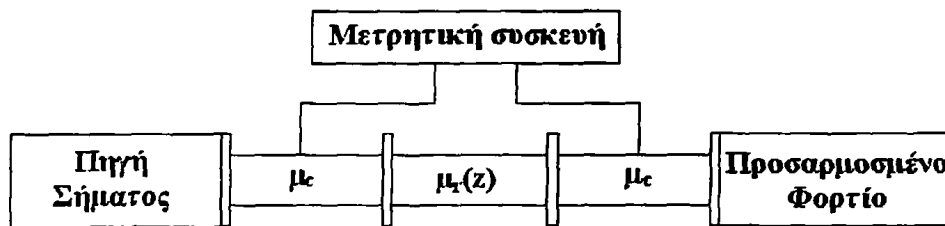
Περίπτωση 2. $p \neq 0, q = 0$: Η Συνθήκη 2 συνεπάγεται ότι $D_1 = D_2 = 0$ και οι TM_{m0} ρυθμοί μηδενίζονται.

Περίπτωση 3. $p = 0, q \neq 0$: Η Συνθήκη 2 συνεπάγεται ότι $E_0 = 0$ και οι TM_{0n} ρυθμοί μηδενίζονται, επίσης.

Περίπτωση 4. $p = q = 0$: Η Συνθήκη 2 συνεπάγεται ότι ο TM_{00} μηδενίζεται.

Είναι ξεκάθαρο ότι μόνο TM_{mn} ($m, n \neq 0$) ρυθμοί διαδίδονται κατά μήκος του τετραγωνικού κυματοδηγού με ανομοιογενές μαγνητικό υλικό.





Εικόνα 4.1: Η μικροκυματική διάταξη μετρήσεων

4.4 Κυματική διάδοση σε σύστημα τετραγωνικών κυματοδηγών

Για την επίλυση του ευθέως προβλήματος υιοθετείται η μετρητική διάταξη της Εικόνας 4.1. Οι δύο ακραίοι κυματοδηγοί έχουν υλικά με σταθερή σχετική μαγνητική επιτρεπτότητα μ_c . Ο μεσαίος περιέχει ένα ανομοιογενές μαγνητικό γέμισμα, που αποτελεί και το στόχο του αντίστροφου προβλήματος. Το σύστημα διεγείρεται από κατάλληλους TM ηλεκτρικούς ρυθμούς που παράγει μια πηγή σήματος. Θεωρούμε τέλειες συνδέσεις μεταξύ των κυματοδηγών και ένα φορτίο προσαρμοσμένο στα δεξιά της διάταξης. Αυτές οι θεωρήσεις συνεπάγονται κυματική διάδοση χωρίς απώλειες και ιδανική απόσβεση του προσπίπτοντος κύματος στο φορτίο.

Μελετούμε τη διάδοση του TM_{11} ρυθμού, που είναι ο κύριος ρυθμός για τετραγωνικούς κυματοδηγούς, και θεωρούμε τρίτης τάξεως πολυωνυμική επέκταση για την επιτρεπτότητα $\mu_r(z)$, δηλαδή: $\mu_r(z) = \mu_0 + \mu_1 z + \mu_2 z^2 + \mu_3 z^3$.

4.4.1 Υπολογισμός πεδιακών συνιστωσών

Οι συχνότητες αποκοπής για τους δύο ακραίους κυματοδηγούς, που έχουν σχετική επιτρεπτότητα $\mu_r = \mu_c$, είναι οι εξής (δες [9])

$$f_{c,mn} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2}{\mu^* \epsilon^* \mu_c}}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.30)$$

Αυτό συνεπάγεται ότι η συχνότητα διέγερσης f πρέπει να είναι μεγαλύτερη από την πρώτη συχνότητα αποκοπής $f_{c,11}$ η οποία είναι

$$f_{c,11} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\frac{1}{a})^2 + (\frac{1}{b})^2}{\mu^* \epsilon^* \mu_c}}. \quad (4.31)$$

Συνεπώς, $f > f_{c,11}$ αποτελεί προϋπόθεση για τη διάδοση του κύματος κατά μήκος του συστήματος των κυματοδηγών. Σε ό,τι ακολουθεί μ_c είναι η σταθερή επιτρεπτότητα του διηλεκτρικού εντός του δεξιού και του αριστερού κυματοδηγού, $\beta = \sqrt{k^2 \mu_c - (\frac{\pi}{a})^2 - (\frac{\pi}{b})^2}$ και $k = \omega \sqrt{\mu^* \epsilon^*}$.



Κυματοδηγός 1: Η έκφραση του πεδίου είναι:

$$H_x(x, y, z) = H_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) (e^{-j\beta z} + G e^{j\beta z}), \quad (4.32)$$

$$H_y(x, y, z) = -\frac{b}{a} H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) (e^{-j\beta z} + G e^{j\beta z}), \quad (4.33)$$

όπου H_0 είναι μια αυθαίρετη σταθερά και G είναι ο συντελεστής ανάκλασης.

Κυματοδηγός 2: Το πεδίο εκφράζεται ως:

$$H_x(x, y, z) = H_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i, \quad (4.34)$$

$$H_y(x, y, z) = -\frac{b}{a} H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i. \quad (4.35)$$

Κυματοδηγός 3: Οι αντίστοιχες εκφράσεις είναι:

$$H_x(x, y, z) = D \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}, \quad (4.36)$$

$$H_y(x, y, z) = -\frac{b}{a} D \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}, \quad (4.37)$$

όπου D είναι ο συντελεστής διάδοσης.

Θεωρούμε $\mu = [\mu_0 \mu_1 \mu_2 \mu_3]$. Υπενθυμίζουμε ότι στα πλαίσια του αντιστροφικού προβλήματος οι ποσότητες που λαμβάνονται από τη μετρητική διάταξη θα είναι οι $D = D(\mu, f, a, b, d)$, $G = G(\mu, f, a, b, d)$, όπου f, a, b, d θα θεωρούνται γνωστά ενώ μ θα είναι το μέγεθος που αναζητούμε. Πρακτικά, τα D, G μπορούν να μετρηθούν. Στη συνέχεια θα καθορίσουμε τη συναρτησιακή τους εξάρτηση από τα $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ (και f, a, b, d). Το τελικό βήμα συνίσταται στον καθορισμό κατάλληλων τιμών για τα $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ ώστε οι θεωρητικώς λαμβανόμενες τιμές των D, G να συμφωνούν με τις αντίστοιχες μετρήσεις του πεδίου.

Συνεχίζουμε αναζητώντας εκφράσεις για τα $D(\mu, f, a, b, d)$ και $G(\mu, f, a, b, d)$. Προς αυτόν το σκοπό χρησιμοποιούμε τις συνοριακές συνθήκες για τους τρεις κυματοδηγούς.

Στη διεπιφάνεια $z = 0$, λόγω της συνέχειας των συνιστωσών και των παραγώγων τους, έχουμε

$$c_0 = 1 + G, \quad (4.38)$$

$$c_1 = -j\beta \cdot (1 - G). \quad (4.39)$$



Ομοίως, στη διεπιφάνεια $z = d$ έχουμε

$$c_0 Z_1(d) + c_1 Z_2(d) = \frac{D}{H_0} e^{-j\beta d}, \quad (4.40)$$

$$c_0 Z'_1(d) + c_1 Z'_2(d) = -j\beta \frac{D}{H_0} e^{-j\beta d}, \quad (4.41)$$

όπου $Z_1(d) = 1 + u_2 d^2 + u_3 d^3 + \dots$ και $Z_2(d) = d + w_2 d^2 + w_3 d^3 + \dots$. Οι Εξισώσεις (4.38)-(4.41) μπορούν να γραφούν ως ένα 4×4 γραμμικό σύστημα $AX = B$, με

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -j\beta & 0 \\ Z_1(d) & Z_2(d) & 0 & -e^{-j\beta d}/H_0 \\ Z'_1(d) & Z'_2(d) & 0 & j\beta e^{-j\beta d}/H_0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ G \\ D \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -j\beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Συνεπώς, οι A και B είναι πλήρως καθορισμένα σε όρους γνωστών παραμέτρων, ο X περιέχει τους αγνώστους του ευθέως προβλήματος και $AX = B$ είναι μια γραμμική εξίσωση πινάκων που μπορεί να λυθεί αναλυτικά με αντιστροφή πινάκων.

4.4.2 Έλεγχος με αναλυτικές λύσεις

Εξετάζουμε στην παρούσα παράγραφο τη συμφωνία της προτεινόμενης λύσης με ήδη υπάρχουσες αναλυτικές λύσεις για δύο περιπτώσεις απλών μαγνητικών προφίλ.

Περίπτωση 1. $\mu_r(z) \equiv \mu_m =$ σταθερά: Σε αυτήν την περίπτωση οι εκφράσεις του πεδίου εντός του μεσαίου κυματοδηγού είναι:

$$H_x(x, y, z) = H_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) (C_m e^{-j\beta_m z} + G_m e^{j\beta_m z}),$$

όπου m δηλώνει το μεσαίο κυματοδηγό, C_m είναι ο συντελεστής διάδοσης, G_m είναι ο συντελεστής ανάκλασης και $\beta_m = \sqrt{k^2 \mu_m - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}$. Εφαρμόζοντας τις ίδιες συνοριακές συνθήκες μεταξύ των κυματοδηγών, λαμβάνουμε το αντίστοιχο 4×4 γραμμικό σύστημα $AX = B$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ \beta_m & -\beta_m & \beta & 0 \\ e^{-j\beta_m d} & e^{j\beta_m d} & 0 & -e^{-j\beta d}/H_0 \\ \beta_m e^{-j\beta_m d} & -\beta_m e^{j\beta_m d} & 0 & -\beta e^{-j\beta d}/H_0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} C_m \\ G_m \\ G \\ D \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Η επίλυση του παραπάνω συστήματος για διάφορα προφίλ μ_m σε ένα μεγάλο εύρος συχνοτήτων στις οποίες η μέθοδος συγκλίνει, εξήγαγε τιμές για τα G , D οι οποίες είναι ταυτόσημες με τις αντίστοιχες της Frobenius προσέγγισης, έστω G_{Fr} , D_{Fr} .

Σε αυτό το σημείο αναφέρουμε ότι η αναγκαία συνθήκη σύγκλισης $\lim_{i \rightarrow \infty} |c_i z^i| = 0$ ικανο-



ποιείται για κάθε $z \in [0, d]$ και σε ένα κατάλληλο εύρος συχνοτήτων, όπως θα εξηγηθεί ακολούθως. Για παράδειγμα, για $\mu_m = 50$ και για $z = 0.1$: $|c_i z^i| \leq 10^{-16}$ για $i \geq 60$ στη συχνότητα των 1.2GHz. Επιπρόσθετα, ο ρυθμός σύγκλισης ελέγχεται από τη σύγκριση της επίδρασης των επιπλέον όρων στο μερικό Frobenius άθροισμα σε κάθε βήμα. Δηλαδή, αν $S_i = \sum_{n=0}^i c_n z^n$, τότε $\left| \frac{S_i - S_{i+1}}{S_i} \right| \leq 10^{-16}$ για $i \geq 60$. Ο ρυθμός σύγκλισης μεταβάλλεται καθώς η συχνότητα αλλάζει. Ονομαστικά, μειώνεται καθώς η συχνότητα αυξάνεται. Παραδείγματος χάριν, όταν $f = 1.5\text{GHz}$ τότε $\left| \frac{S_i - S_{i+1}}{S_i} \right| \leq 10^{-16}$ για $i \geq 77$ και για κάθε $j \geq 1$. Επίσης, για την περίπτωση αυθαίρετου κυβικού ανομοιογενούς προφίλ, έστω $\mu = [3000 \ 185.47 \ 200.24 \ -2946.92]$, λαμβάνουμε ότι $\left| \frac{S_i - S_{i+1}}{S_i} \right| \leq 10^{-16}$ για $i \geq 57$ στη συχνότητα των 150MHz και $i \geq 116$ στη συχνότητα των 300MHz.

Γενικά, σε όλες τις περιπτώσεις ανομοιογενών προφίλ που εξετάσαμε, 120 όροι $c_i z^i$ της σειράς Frobenius ήταν αρκετοί ώστε να αναπαραστήσουν τη λύση με ακρίβεια και ευστάθεια.

Περίπτωση 2. $\mu_r(z) = a + bz$: Στην περίπτωση γραμμικής ανομοιογένειας, η Εξ.(4.11) τροποποιείται ως

$$\begin{aligned} Z_y'' + [k^2(a + bz) - \xi^2] \cdot Z_y &= 0 \Leftrightarrow Z_y'' + (k^2 a - \xi^2 + k^2 bz) \cdot Z_y = 0 \\ &\Leftrightarrow Z_y'' + (A + Bz) \cdot Z_y = 0, \end{aligned}$$

όπου $A = k^2 a - \xi^2$ και $B = k^2 b$. Εφαρμόζοντας την αλλαγή μεταβλητής $n(z) = -B^{1/3} \cdot (z + \frac{A}{B})$, λαμβάνουμε:

$$\ddot{Z}_y = n Z_y, \quad (4.42)$$

όπου $\ddot{Z}_y$ δηλώνει τη δεύτερη παράγωγο αναφορικά με το όρισμα n . Συνεπώς

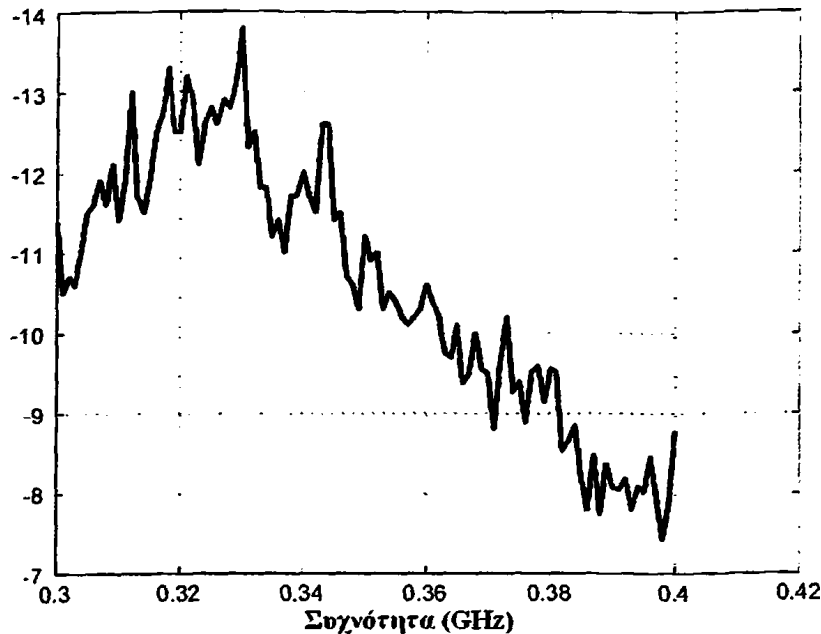
$$Z_y(z) = a_1 Ai(n(z)) + a_2 Bi(n(z)),$$

όπου a_1, a_2 είναι αυθαίρετες παράμετροι. Επομένως, το πεδίο εντός του μεσαίου κυματοδηγού μπορεί να γραφεί αναλυτικά ως:

$$H_x(x, y, z) = H_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cdot [a_1 Ai(n(z)) + a_2 Bi(n(z))].$$

Εφαρμόζοντας τις ίδιες συνοριακές συνθήκες στα σημεία $z = 0 \Leftrightarrow n_0 \equiv n(0) = -\frac{A}{B^{1/3}}$ και $z = d \Leftrightarrow n_d \equiv n(d) = -B^{-1/3} \cdot (d + \frac{A}{B})$ λαμβάνουμε το αντίστοιχο 4x4 γραμμικό σύστημα





Εικόνα 4.2: Εξέλιξη του σφάλματος $\log_{10} \left(\frac{\|D - D_F\|}{\|D\|} \right)$ συναρτήσει της συχνότητας για την περίπτωση $\mu_r(z) = 428 + 520.5z$.

$AX = B$, με:

$$A = \begin{bmatrix} Ai(n_0) & Bi(n_0) & -1 & 0 \\ -B^{1/3}Ai'(n_0) & -B^{1/3}Bi'(n_0) & -j\beta & 0 \\ Ai(n_d) & Bi(n_d) & 0 & -e^{-j\beta d}/H_0 \\ -B^{1/3}Ai'(n_d) & -B^{1/3}Bi'(n_d) & 0 & j\beta e^{-j\beta d}/H_0 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ G \\ D \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ -j\beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

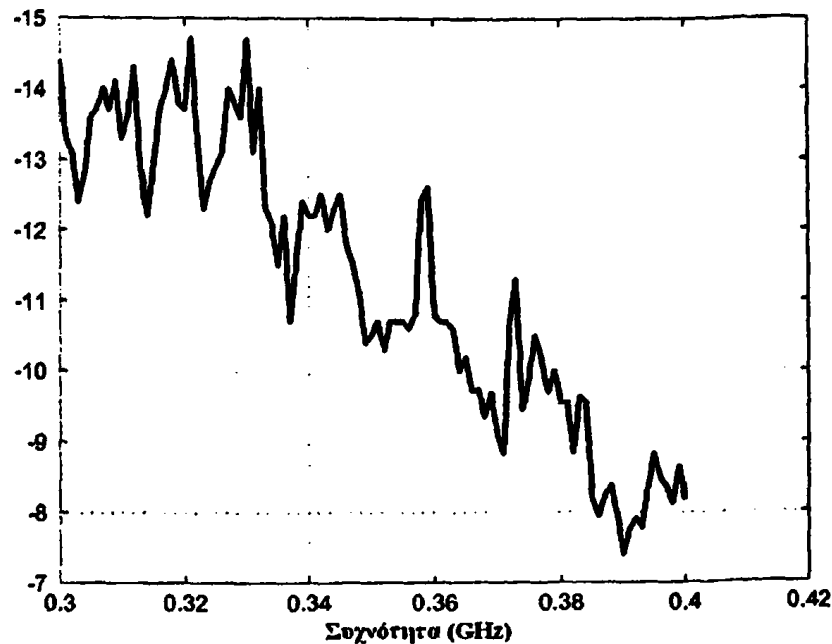
Η επίλυση του παρόντος συστήματος για διάφορα γραμμικά προφίλ $\mu_r(z) = a + bz$ και παρήγαγε τιμές των G και D που είναι εξαιρετικά κοντά στην προσέγγιση Frobenius. Για παράδειγμα, στην περίπτωση ενός αυθαίρετου γραμμικού προφίλ, η ταύτιση πιστοποιείται στις Εικόνες 4.2-4.3.

Συμπερασματικά, οι λύσεις που εξήγαγε η Frobenius μεθοδος είναι σε πλήρης συμφωνία με ανεξάρτητα λαμβανόμενες λύσεις για του δύο τύπους ανομοιογένειας που συζητήθηκαν παραπάνω.

4.4.3 Συχνότητες αποκοπής

Στα προηγούμενα κεφάλαια (δες [6], [7]) εξάγαμε σχέσεις που αφορούν την πρώτη συχνότητα αποκοπής του κύριου ρυθμού διάδοσης και τη μέση τιμή του ανομοιογενούς προφίλ. Σύμφωνα με ό,τι ακολουθεί, μια παρόμοια σχέση ισχύει και στην περίπτωση ανομοιογενών μαγνητικών





Εικόνα 4.3: Εξέλιξη του σφάλματος $\log_{10} \left(\frac{\| \sigma - \sigma_{FE} \|^2}{\| \sigma \|^2} \right)$ συνάρτησε της συχνότητας για την περίπτωση $\mu_r(z) = 428 + 520.5z$.

προφίλ.

Ειδικότερα, μια καλή προσέγγιση της $f_{c,11}$ μπορεί να διατυπωθεί λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση που δίνει την συχνότητα αποκοπής στην περίπτωση σταθερής μαγνητικής επιτρεπτότητας. Ονομαστικά, έχουμε:

$$[f]_{c,11} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\frac{1}{a})^2 + (\frac{1}{b})^2}{\mu^* \epsilon^* [\mu]}} \quad (4.43)$$

(όπου $[\mu] = \frac{1}{a} \int_0^a \mu_r(z) dz$ είναι η μέση τιμή του μαγνητικού προφίλ). Επομένως, συνδυάζοντας την Εξ.(4.43) με μια πειραματική τιμή της $f_{c,11}$ λαμβάνουμε μια εκτίμηση για τη μέση τιμή του προφίλ.

Ο παρακάτω Πίνακας αναπαριστά τις τιμές των $f_{c,11}$ και $[f]_{c,11}$ για μια πλειάδα αντιπροσωπευτικών προφίλ. Το σφάλμα της προτεινόμενης προσεγγίσεως παρατηρείται ότι είναι μικρότερο του 3%.

Η Εικόνα 4.4 παρέχει καλύτερη θέαση των δεδομένων του Πίνακα 4.1.



$\mu_r(z)$	$[\mu]$	$f_{c,11}(\text{GHz})$	$[f]_{c,11}(\text{GHz})$
40 + 5.47z	40.547	1.05	1.08
290-185.7z	271.43	0.407	0.419
1500 + 510.5z	1551.05	0.168	0.171
3000+300.3z	3030.03	0.127	0.122
5000+330.2z	5033.02	94.49(MHz)	94.425(MHz)
10000-590z	9941	67.23(MHz)	67.05(MHz)
40+5.47z-90.24z ²	39.34	1.068	1.096
290-85.47z+150.24z ²	283.46	0.398	0.4
850+55.30z-520.24z ²	848.6	0.23	0.231
1500+210.5z-840.24z ²	1509.8	0.173	0.173
3000+100.3z-1200.4z ²	2994	0.123	0.122
5000+130.2z-1350z ²	4995	94.85(MHz)	94.98(MHz)
10000-250z-1170.4z ²	9959.4	67.17(MHz)	67(MHz)
30-4.7z+8.24z ² -130.92z ³	290.63	0.393	0.396
290-30.47z+290.24z ² -130.92z ³	290.63	0.393	0.396
850-13.47z+290.24z ² -96.92z ³	852.33	0.23	0.231
1500-200.47z+150.24z ² -2300.92z ³	1477.35	0.174	0.175
3000+185.47z+200.24z ² -2946.92z ³	3015.32	0.122	0.123
5000-280.47z+1200z ² -8946.92z ³	4970	95.1(MHz)	95.25(MHz)
10000-250.47z+1180.24z ² -12300.92z ³	9966.1	67.15(MHz)	67.05(MHz)

Πίνακας 4.1: Οι συχνότητες αποκοπής $f_{c,11}$, $[f]_{c,11}$.

Σχετικό % σφάλμα των συχνότητων αποκοπής

Εικόνα 4.4: Οι τιμές του σχετικού σφάλματος $\frac{|f_{c,11}-[f]_{c,11}|}{f_{c,11}}\%$ για τα ανομοιογενή μαγνητικά προφίλ του Πίνακα 4.1.

μ_r^i ($\mu_c^1 = 5000$)
$\mu_r^1 = 2850 - 4775.13 \cdot z + 10241.65 \cdot z^2 + 20007.53 \cdot z^3$
$\mu_r^2 = 547.5 + 1700.47 \cdot z - 4350.24 \cdot z^2 - 2300.92 \cdot z^3$

Πίνακας 4.2: Αυθαίρετα προφίλ στην περίπτωση $\mu_c^1 = 5000$

μ_r^i ($\mu_c^1 = 10000$)
$\mu_r^1 = 47.5 + 1700.11 \cdot z - 4350 \cdot z^2 - 3000.82 \cdot z^3$
$\mu_r^2 = 350.3 + 3341.27 \cdot z - 6150 \cdot z^2 - 8400.92 \cdot z^3$
$\mu_r^3 = 187.5 - 200.47 \cdot z + 1750.24 \cdot z^2 + 7000.20 \cdot z^3$

Πίνακας 4.3: Αυθαίρετα προφίλ στην περίπτωση $\mu_c^1 = 10000$

4.5 Αριθμητικά αποτελέσματα

Παρουσιάζουμε στο κεφάλαιο αυτό τα αποτελέσματα των εικονικών πειραμάτων μας. Θεωρούμε ένα μετρητικό σύστημα τριών κυματοδηγών (Εικόνα 4.1) με $d = 20\text{cm}$, $a = 2.5\text{cm}$, $b = 5\text{cm}$ και συγκεκριμένες $\mu^i = [\mu_0^i \mu_1^i \mu_2^i \mu_3^i]$ και μ_c τιμές, όπου i αναπαριστά το i ανομοιογενές προφίλ υπό θεώρηση. Στη συνέχεια, λαμβάνουμε τιμές του πεδίου εντός του συστήματος υλοποιώντας την ανάλυση που παρουσιάστηκε στην παράγραφο 3.4.1. Αυτές οι τιμές αποτελούν τις “εικονικές μετρήσεις”. Θεωρούμε τις μ^i τιμές ως άγνωστες και χειριζόμαστε το μοντέλο ελαχιστοποίησης της συνάρτησης σφάλματος και τη λύση του αντίστροφου προβλήματος ώστε να εξάγουμε “καλές” εκτιμήσεις $\tilde{\mu}^i$ των πραγματικών μ^i τιμών (δηλαδή, εκτιμήσεις $\tilde{\mu}^i$ που συνεπάγονται τιμές για τη συνάρτηση σφάλματος πλησίον της μηδενικής).

Επίσης, προσδίδουμε αυθαίρετες τιμές στην επιτρεπτότητα μ_c , δηλαδή, $\mu_c^1 = 5000$ και $\mu_c^2 = 10000$, ώστε $f_{c,11}^1 \approx 95\text{MHz}$ και $f_{c,11}^2 \approx 67\text{MHz}$.

4.5.1 Η διαδικασία προσομοίωσης

Στα εικονικά μας πειράματα χειριζόμαστε τα αντιπροσωπευτικά μαγνητικά προφίλ των Πινάκων 4.2-4.3. Οι παράμετροι του γενετικού αλγορίθμου που παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.4 παράγουν επαρκώς ακριβείς εκτιμήσεις των προφίλ. Επίσης, βάσει διαφόρων αριθμητικών δοκιμών που έχουμε διεξάγει, συμπεραίνουμε ότι $\delta = 10^{-2}$ (τρία σημαντικά ψηφία) είναι κατάλληλη τιμή ως κριτήριο τερματισμού. Αυτό πιστοποιείται από τις εικόνες που ακολουθούν και παρουσιάζουν τα προσεγγιστικά προφίλ $\tilde{\mu}^i(z)$ εν συγκρίσει με τα πραγματικά προφίλ $\mu_r^i(z)$. Τα εν λόγω αποτελέσματα προέκυψαν από μετρήσεις των μέτρων των D^i , G^i .

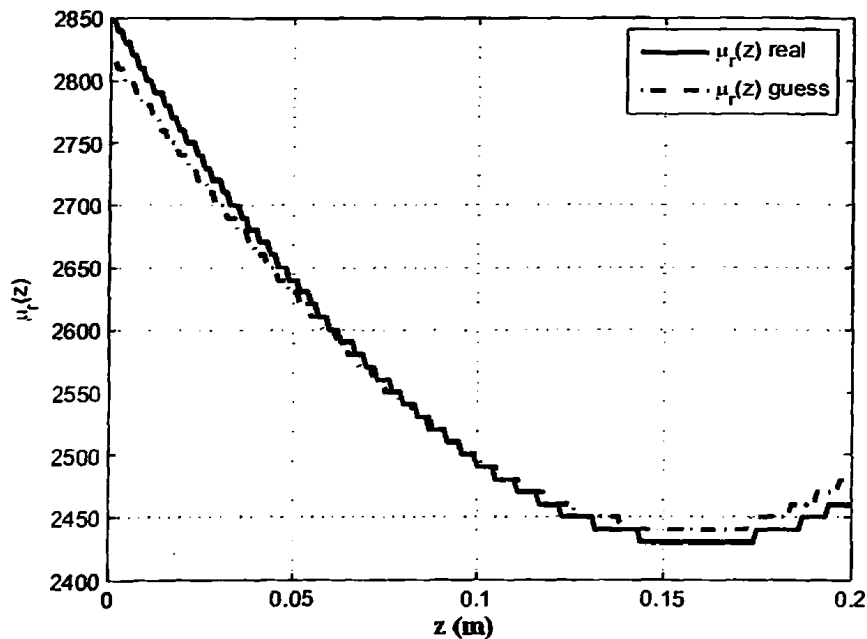
4.5.2 Ανακατασκευή ανομοιογένειας από μετρήσεις των $\|D\|$, $\|G\|$

Οι προσεγγίσεις που αποκτήθηκαν αναφορικά με τη συνάρτηση σφάλματος $J_2(\mu)$ (δες Εξ.(2.31)) και το κατώφλι δ παράγουν πολύ καλές προσεγγίσεις για τα αντίστοιχα μαγνητικά προφίλ, όπως



Παράμετροι	Σημασία
N=150	Αριθμός δοκιμαστικών διανυσμάτων ανά γενεά.
Iterations=120	Μέγιστος αριθμός γενεών.
F=0.5	Ενίσχυση διαφορικής μεταβολής.
P=0.8	Πιθανότητα γενετικής διασταύρωσης.

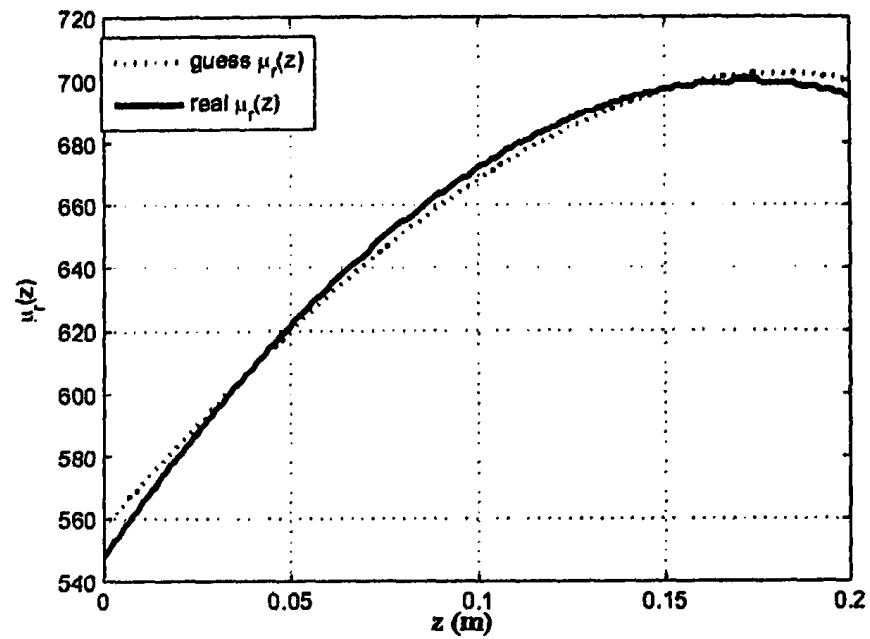
Πίνακας 4.4: Παράμετροι γενετικού αλγορίθμου

Εικόνα 4.5: $J_2(\bar{\mu}) = 0.084$. Ισχύει: $\max_{z \in [0, d]} (|\mu_r^1(\text{real}) - \mu_r^1(\text{guess})|) = 29.1$.

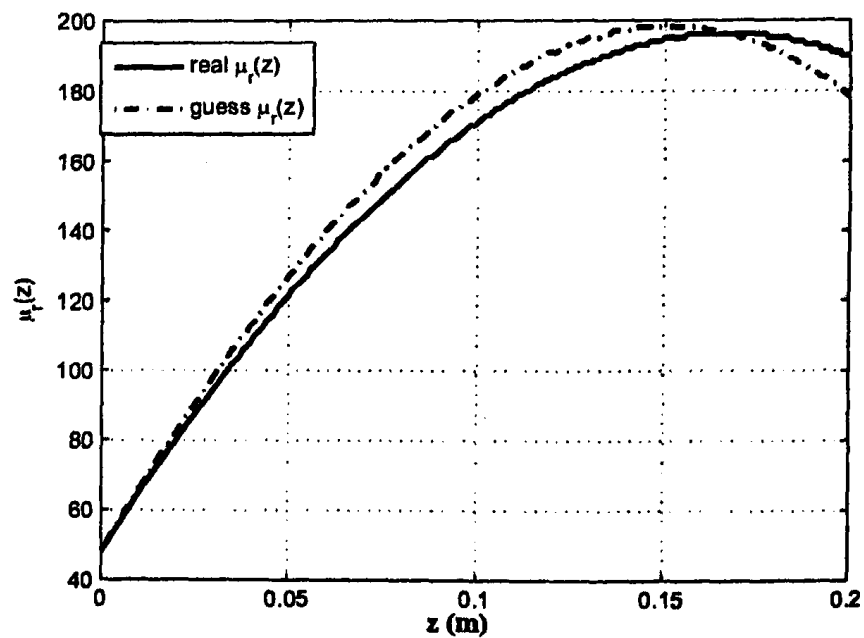
μπορεί να φανεί στις Εικόνες 4.5-4.6 ($\mu_c^1 = 5000$) και 4.7-4.9 ($\mu_c^2 = 10000$).

4.6 Συμπεράσματα

Στο παρόν κεφάλαιο, η προτεινόμενη αναλυτική πλατφόρμα επίλυσης της κυματικής διάδοσης σε ένα μαγνητικό ανομοιογενές υλικό κατά τη διαμήκη διεύθυνση απέδωσε εξαιρετικά αποτελέσματα τόσο στο ευθύ όσο και στο αντίστροφο πρόβλημα. Τα συμπεράσματα που αφορούν τόσο τους όρους που κρατάμε στη δυναμοσειρά, την εκτίμηση της πρώτης συχνότητας αποκοπής όσο και την εμφάνιση ολικής ανάκλασης είναι τα ίδια με τα αντίστοιχα των προηγούμενων κεφαλαίων.

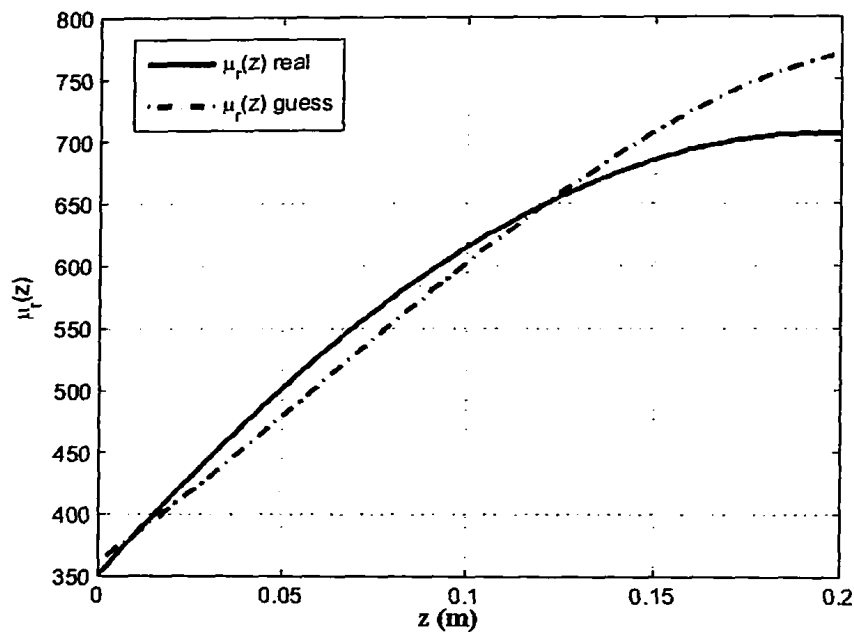


Εικόνα 4.6: $J_2(\tilde{\mu}) = 0.031$. Ισχύει: $\max_{s \in [0,d]} (|\mu_r^2(real) - \mu_r^2(guess)|) = 9.81$.

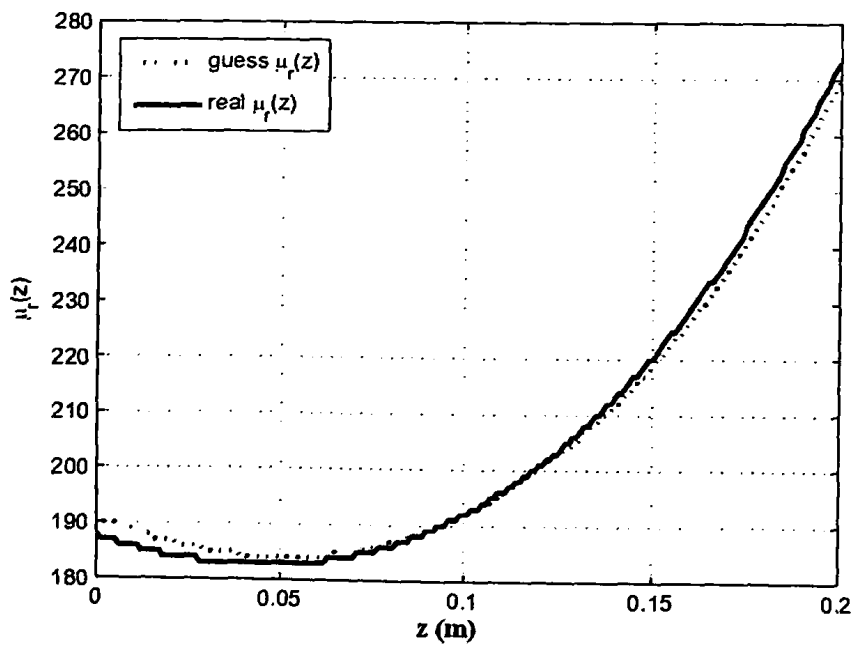


Εικόνα 4.7: $J_2(\tilde{\mu}) = 0.066$. Ισχύει: $\max_{s \in [0,d]} (|\mu_r^1(real) - \mu_r^1(guess)|) = 11.12$.





Εικόνα 4.8: $J_2(\tilde{\mu}) = 0.051$. Ισχύει: $\max_{z \in [0, d]} (|\mu_r^2(real) - \mu_r^2(guess)|) = 64.37$.



Εικόνα 4.9: $J_2(\tilde{\mu}) = 0.042$. Ισχύει: $\max_{z \in [0, d]} (|\mu_r^3(real) - \mu_r^3(guess)|) = 3.60$.



Κεφάλαιο 5

Ανομοιογενή διηλεκτρικά αντηχεία^{††}

5.1 Περίληψη

Προκειμένου να προσδώσουμε μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα για τις αλλαγές που επιφέρει η ύπαρξη ανομοιογένειας κατά τη μία διάσταση εντός ενός μικροκυματικού στοιχείου, μελετούμε τη συμπεριφορά των πεδίων εντός μικροκυματικών αντηχείων που περιέχουν τέτοια ανομοιογενή διηλεκτρικά υλικά. Παρακάτω, αυτό που κάνουμε είναι ότι αξιοποιούμε την ανάλυση των προηγούμενων κεφαλαίων για τον υπολογισμό των ιδιοκαταστάσεων εντός τετραγωνικών και κυλινδρικών αντηχείων. Αποδεικνύεται μέσω παραδειγμάτων ότι η αναλυτική ρουτίνα που υλοποιούμε, και βασίζεται στη μέθοδο Frobenius, παράγει εξαιρετικά αποτελέσματα ακόμα και για πολύ μεγάλες τάξης ιδιορρυθμών σε ανομοιογένειες μέχρι και κυβικής τάξης.

5.2 Τετραγωνικά αντηχεία

Στο παρόν κεφάλαιο εκμεταλλευόμαστε την ανάλυση του Κεφαλαίου 3 για την εξαγωγή των ιδιορρυθμών και των ιδιοσυχνοτήτων τετραγωνικών αντηχείων που περιέχουν ανομοιογενή διηλεκτρικά υλικά. Προς το σκοπό αυτό, εφαρμόζουμε στις εκφράσεις (3.29)-(3.34) τις συνοριακές συνθήκες που επιβάλλονται στα τοιχώματα του αντηχείου του οποίου οι διαστάσεις ορίζονται ως a, b, d κατά του καρτεσιανούς άξονες x, y, z , αντίστοιχα.

Πιο αναλυτικά, οι συνοριακές συνθήκες επί των τοιχωμάτων του αντηχείου είναι:

$$E_x = 0|_{y=0, y=b, z=0, z=d} \quad (5.1)$$

$$E_y = 0|_{x=0, x=a, z=0, z=d} \quad (5.2)$$

^{††}Σχετική δημοσίευση: K Baganas, Microwave cavities with continuously varying dielectric fillings (υπό προετοιμασία)



Οφείλουμε να κάνουμε διάκριση μεταξύ των κάτωθι περιπτώσεων.

Περίπτωση 1: Στη γενικότερη περίπτωση των TE_{mn} ιδιορρυθμών οι εκφράσεις του πεδίου είναι:

$$E_x = (A_1 \cos(px) + A_2 \sin(px)) \cdot [B_1 \cos(qy) + B_2 \sin(qy)] \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right),$$

$$E_y = \frac{p}{q} \cdot (A_1 \sin(px) - A_2 \cos(px)) \cdot [B_1 \sin(qy) - B_2 \cos(qy)] \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right).$$

Η συνθήκη (5.1) συνεπάγεται ότι $B_1 = 0$ και $q \equiv q_n = \frac{n\pi}{b}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Η συνθήκη (5.2) συνεπάγεται ότι $A_2 = 0$ και $p \equiv p_m = \frac{m\pi}{a}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$. Ακόμη, ο συνδυασμός τους οδηγεί στο σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned} c_0 &= 0 \\ \wedge \\ F(f) &= \sum_{i=0}^{\infty} c_i d^i = 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Συνεπώς, οι TE_{mn} ιδιορρυθμοί γράφονται αναλυτικά ως

$$E_x = E_{xo} \cos(p_m x) \sin(q_n y) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right), \quad (5.4)$$

$$E_y = -\frac{p_m}{q_n} E_{xo} \sin(p_m x) \cos(q_n y) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right), \quad (5.5)$$

όπου E_{xo} μια αυθαίρετη σταθερά πλάτους.

Περίπτωση 2: Όταν $p = 0$ και $q \neq 0$ (TE_{0n} ιδιορρυθμοί) οι εκφράσεις του πεδίου λαμβάνουν τη μορφή:

$$E_x = (A_1 x + A_2) \cdot [B_1 \cos(qy) + B_2 \sin(qy)] \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right),$$

$$E_y = \frac{A_1}{q} \cdot [B_2 \cos(qy) - B_1 \sin(qy)] \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right).$$

Από τη συνθήκη (5.1) έχουμε ότι $B_1 = 0$ και $q \equiv q_n = \frac{n\pi}{b}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Λαμβάνοντας υπόψη και τη συνθήκη (5.2), προκύπτει ότι $E_y = 0$. Επίσης, οι c_i συντελεστές οφείλουν να ικανοποιούν το σύστημα (5.3). Συνεπώς, η τελική μορφή των TE_{0n} ιδιορρυθμών είναι

$$E_x = E_{xo} \sin(q_n y) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right), \quad (5.6)$$

όπου E_{xo} μια αυθαίρετη σταθερά πλάτους.

Περίπτωση 3: Όταν $p \neq 0$ και $q = 0$ (TE_{m0} ιδιορρυθμοί), παρόμοιος χειρισμός των εξισώσεων



του πεδίου

$$E_x = \frac{D_1}{p} \cdot [C_2 \cos(px) - C_1 \sin(px)] \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right),$$

$$E_y = [C_1 \cos(px) + C_2 \sin(px)] \cdot (D_1 y + D_2) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right),$$

οδηγεί στους ιδιορρυθμούς

$$E_y = E_{y0} \sin(p_m y) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right), \quad (5.7)$$

όπου οι συντελεστές c_i ικανοποιούν το σύστημα (5.3), $p \equiv p_m = \frac{m\pi}{a}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ και E_{y0} η αυθαίρετη σταθερά πλάτους.

Περίπτωση 4: Για $p = 0$ και $q = 0$ (TE₀₀ ιδιορρυθμός) η γενική λύση είναι της μορφής

$$E_x = (A_1 x + A_2) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right),$$

$$E_y = (-A_1 y + D_2) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right).$$

Οι συνθήκες (5.1) και (5.2) οδηγούν στο μηδενισμό των E_x , E_y . Επομένως, ο TE₀₀ ιδιορρυθμός αποσβένεται ταχύτητα εντός τετραγωνικού αντηχείου.

Παρατηρήσαμε στην ανάλυση παραπάνω ότι οι οριακές συνθήκες οδηγούν στη διακριτοποίηση των p, q . Εκτός αυτών των σταθερών, μια άλλη "αυθαίρετη σταθερά", έστω l , αναμένεται να ενυπάρχει στη δυναμοσειρά $\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$. Η ύπαρξή της προβλέπεται λόγω της πεπερασμένης κατά τον άξονα z διάστασης του αντηχείου. Επομένως, οφείλει κανείς να κάνει λόγο για TE _{mnl} ιδιορρυθμούς εντός του αντηχείου.

Είναι γνωστό ότι οι TE _{mnl} ιδιορρυθμοί διεγείρονται μόνο σε συγκεκριμένες συχνότητες διέγερσης $f = f_{c,mnl}$ (ιδιοσυχνότητες), οι οποίες υπολογίζονται αριθμητικά από την ικανοποίηση του συστήματος (5.3), θεωρώντας ότι οι c_i συντελεστές ικανοποιούν την επαναληπτική εξίσωση

$$(i+2)(i+1)c_{i+2} - \xi_{mn}^2 c_i + k_{c,mnl}^2 \sum_{j=0}^i c_{i-j} \varepsilon_j = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (5.8)$$

και $\omega_{c,mnl} = 2\pi f_{c,mnl}$, $k_{c,mnl} = \omega_{c,mnl} \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$, $\xi_{mn}^2 = p_m^2 + q_n^2$, $p_m = \frac{m\pi}{a}$ και $q_n = \frac{n\pi}{b}$.

Το εν λόγω σύστημα είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα ανεύρεσης των ριζών της συνάρτησης $F(f)$ οι οποίες, για δεδομένες τιμές των m, n , αναφέρονται στις τιμές του δείκτη $l = 1, 2, \dots$ δηλαδή, η πρώτη ρίζα της $F(f)$ αντιστοιχεί στην ιδιοσυχνότητα $f_{c,mn1}$, η δεύτερη στην $f_{c,mn2}$ κ.ο.κ.

Στην συνέχεια ελέγχεται η συμφωνία της Frobenius λύσης με υπάρχουσες αναλυτικές λύσεις



για δύο απλές μορφές διηλεκτρικών προφίλ.

5.2.1 Συμφωνία με αναλυτικές λύσεις

Περίπτωση 1: $\epsilon_r(z) \equiv \epsilon_m = \text{σταθερά}$.

Σε αυτήν την περίπτωση οι ρυθμοί εντός του αντηχείου έχουν τη μορφή

$$E_x = E_{x0} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{l\pi z}{d}\right), \quad (5.9)$$

$$E_y = E_{y0} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{l\pi z}{d}\right), \quad (5.10)$$

με E_{x0}, E_{y0} να δηλώνουν αυθαίρετα πλάτη. Οι αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες δίνονται από τον τύπο (δες [9])

$$f_{c,mnl} = \frac{1}{2\sqrt{\mu_0\epsilon_m}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{l}{d}\right)^2}, \quad (5.11)$$

όπου a, b, d ορίζουν τις διαστάσεις του αντηχείου.

Στο παράδειγμα που ακολουθεί παρουσιάζεται η ταύτιση των θεωρητικά υπολογισμένων ιδιοκαταστάσεων με τις αντίστοιχες της Frobenius για διάφορα σταθερά διηλεκτρικά προφίλ ϵ_m .

$\epsilon_m = 2$: $m = 1, n = 1$. Όπως διαφαίνεται από τις Εξισώσεις (5.4)-(5.5) και (5.9)-(5.10), οι x, y -εξαρτώμενοι όροι των E_x, E_y είναι ταυτόσημοι. Σε ό,τι αφορά τους z -εξαρτώμενους όρους, η ταύτιση της σειράς $(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i)$ με τη μορφή του ημιτόνου του ρυθμού TE_{113} παρουσιάζεται στην Εικ.5.1 που ακολουθεί¹.

Αναφερόμενοι στις ιδιοσυχνότητες, επιλύουμε το σύστημα (5.3) αριθμητικά και εξάγουμε τις ρίζες της συνάρτησης $F(f)$ που ταυτίζονται με τις ιδιοσυχνότητες της Εξίσωσης (5.11) · η δε ακρίβεια υπολογισμού των ριζών είναι της τάξης 10^{-14} . Στην Εικ.5.2 διακρίνονται οι ρίζες της $F(f)$ που αντιστοιχούν στις ιδιοσυχνότητες $m = n = 1$ και $l = 1, 2, 3, 4$.

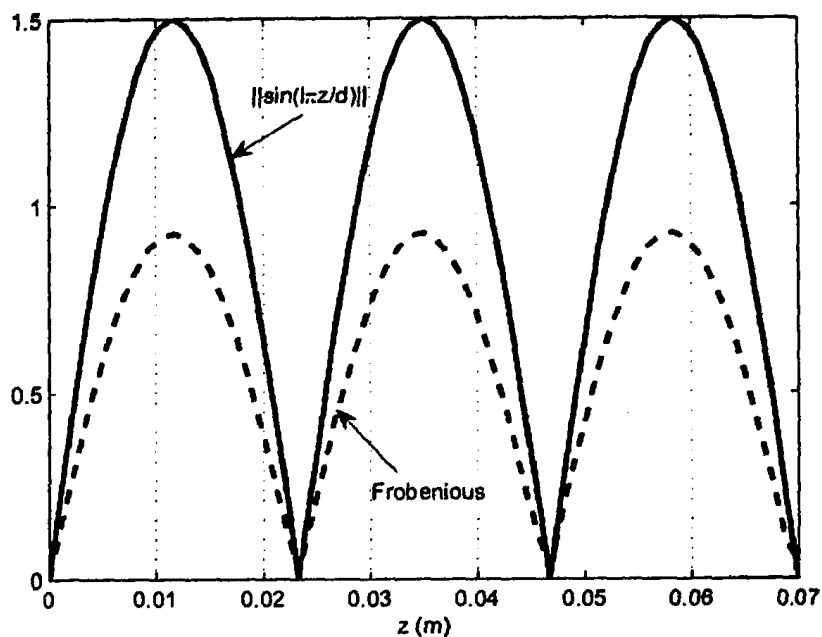
Περίπτωση 2: $\epsilon_r(z) = \epsilon_0 + \epsilon_1 z$. Στην περίπτωση γραμμικής ανομοιογένειας οι z -εξαρτώμενοι όροι των συνιστωσών του πεδίου ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση:

$$\ddot{Z}(z) = zZ(z), \quad (5.12)$$

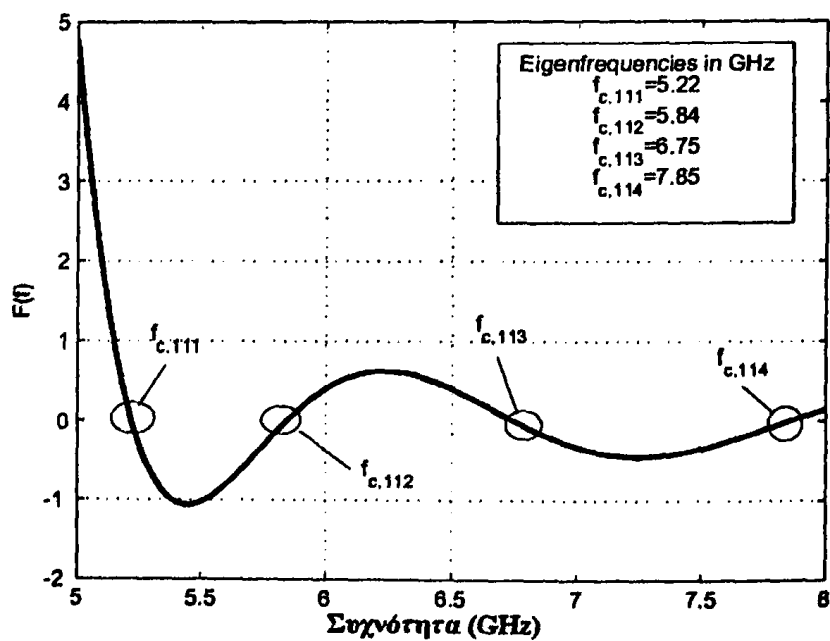
όπου με Z δηλώνονται τα Z_x, Z_y . Η γενική λύση της Εξ.(5.12) είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των Airy συναρτήσεων $Ai(n), Bi(n)$ πρώτου και δευτέρου είδους, αντίστοιχα. Επομένως, τα

¹ Τονίζουμε ότι στις προσομοιώσεις που διεξάγαμε η ταύτιση των ιδιομορφών είναι απόλυτη. Στα διαγράμματα, προκειμένου να αναδείξουμε την ταύτιση των μορφών, έχουμε μεταβάλει τα πλάτη τους για λόγους οπτικής διάκρισης.





Εικόνα 5.1: Σύγκριση TE_{113} ιδιορρυθμών. Διαστάσεις αντηχείου: $a = b = 3\text{cm}$, $d = 7\text{cm}$.



Εικόνα 5.2: Οι ρίζες της $F(f)$. Διαστάσεις αντηχείου: $a = b = 3\text{cm}$, $d = 7\text{cm}$.

z-εξαρτώμενα τμήματα των συνιστωσών του πεδίου έχουν τη μορφή

$$Z(z) = a_1 Ai(n(z)) + a_2 Bi(n(z)),$$

όπου a_1, a_2 είναι αυθαίρετοι συντελεστές, $n(z) = -B^{1/3} \left(z + \frac{A}{B} \right)$, $A = k^2 \epsilon_0 - \xi^2$, $B = k^2 \epsilon_1$ και $\xi^2 = p_m^2 + q_n^2$. Συνεπώς, το πεδίο εντός του κυματοδηγού γράφεται ως

$$E_x = E_{x0} \cos(p_m x) \sin(q_n y) \cdot [a_1 Ai(n(z)) + a_2 Bi(n(z))], \quad (5.13)$$

$$E_y = -\frac{p_m}{q_n} E_{x0} \sin(p_m x) \cos(q_n y) \cdot [a_1 Ai(n(z)) + a_2 Bi(n(z))]. \quad (5.14)$$

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες λαμβάνουμε το εξής 2x2 πρόβλημα ιδιοτιμών $AX = 0$:

$$A = \begin{bmatrix} Ai(n_o) & Bi(n_o) \\ Ai(n_d) & Bi(n_d) \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix},$$

όπου $n_o = -\frac{A}{B^{2/3}}$, $n_d = -B^{1/3} \left(d + \frac{A}{B} \right)$. Στην περίπτωση αυτή οι αναζητούμενες ιδιοσυχνότητες είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$\text{Det}(A) = 0. \quad (5.15)$$

Η επίλυση του συστήματος για ένα αντιπροσωπευτικό γραμμικό προφίλ παράγει αποτελέσματα που είναι σε πλήρη ταύτιση με τη Frobenius προσέγγιση (Εικόνες 4.3-4.4).

$\epsilon_r = 3 + 20z$: $m = 1, n = 1$. Όπως διακρίνεται από τις Εξισώσεις (5.4)-(5.5) και (5.13)-(5.14), τα x και y τμήματα των E_x, E_y συνιστωσών είναι όμοια. Σε ό,τι αφορά το z-εξαρτώμενο κομμάτι, στην Εικ.5.3 που ακολουθεί παρουσιάζεται η ταύτιση του ημιτόνου και της σειράς $(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i)$ για το ρυθμό TE₁₁₂.

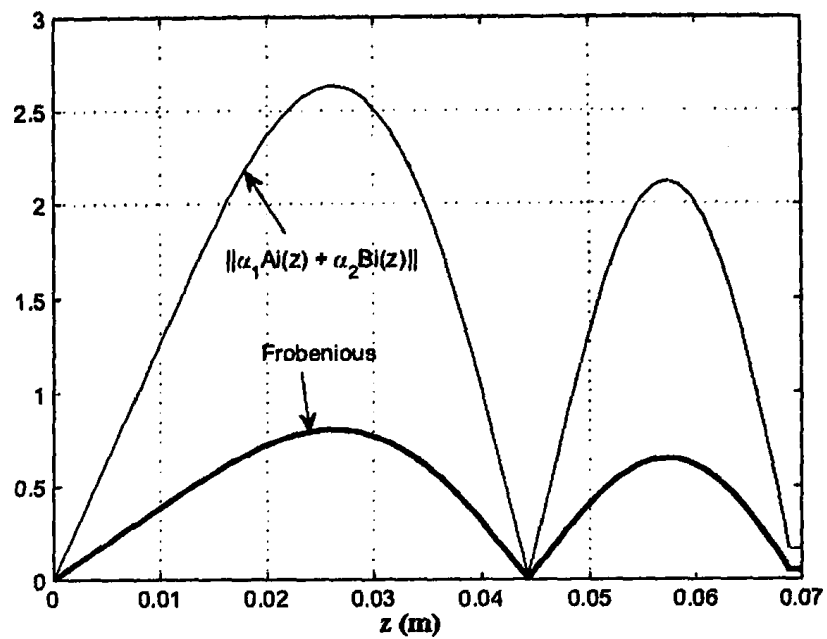
Αναφορικά με τις ιδιοσυχνότητες, η επίλυση του συστήματος (5.3) ακολουθούμενη από τις ρίζες της $F(f)$ δηλώνει την πλήρη ταύτιση των συχνοτήτων με αυτές του συστήματος (5.15). Παρακάτω, στην Εικ.5.4 διακρίνονται οι ρίζες της $F(f)$ που αντιστοιχούν στις ιδιοσυχνότητες $m = 1, n = 1$ και $l = 1, 2, 3, 4$.

Συνεπώς, οι Frobenius λύσεις είναι σε πλήρη συμφωνία με ανεξάρτητα λαμβανόμενες λύσεις για τα δύο είδη διηλεκτρικών προφίλ που συζητήθηκαν στα παραπάνω.

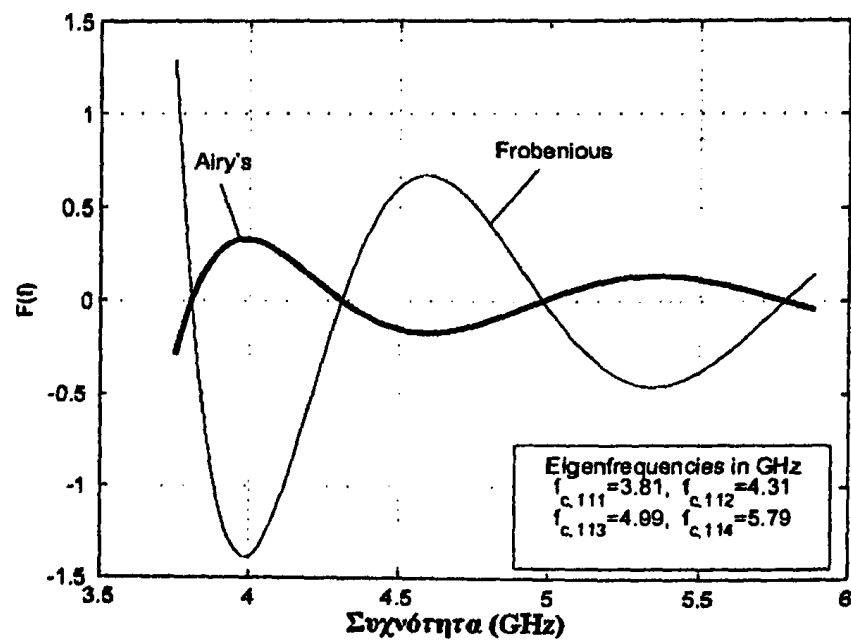
5.3 Κυλινδρικά αντηχεία

Στην περίπτωση των κυλινδρικών αντηχείων κάνουμε χρήση των εκφράσεων του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου του Κεφαλαίου 3. Όμοια με την παράγραφο 4.2 εφαρμόζουμε τις οριακές συνθήκες στα τοιχώματα του αντηχείου και εξάγουμε τις δυνατές ιδιοκαταστάσεις του αντηχείου. Πιο αναλυτικά, οι οριακές συνθήκες στο κυλινδρικό τοίχωμα (η ακτίνα του αντηχείου δηλώνεται





Εικόνα 5.3: Σύγκριση TE_{112} ιδιορρυθμών. Διαστάσεις αντηχείου: $a = b = 3\text{cm}$, $d = 7\text{cm}$.



Εικόνα 5.4: Οι ρίζες της $F(f)$. Διαστάσεις αντηχείου: $a = b = 3\text{cm}$, $d = 7\text{cm}$.

ως a και ως L το μήκος του) είναι:

$$E_r = 0|_{z=0, z=L}, \quad (5.16)$$

$$E_\phi = 0|_{z=0, z=L, r=a}. \quad (5.17)$$

Οι γενικές εκφράσεις του πεδίου είναι:

$$E_r(r, \phi, z) = A_n \frac{J_n(\xi_{mn}r)}{r} \cdot [C_n \cos(n\phi) + D_n \sin(n\phi)] \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right),$$

$$E_\phi(r, \phi, z) = -\frac{\xi_{mn}}{n} A_n J'_n(\xi_{mn}r) \cdot [C_n \sin(n\phi) - D_n \cos(n\phi)] \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right),$$

οι οποίες με κατάλληλη επιλογή του άξονα ϕ μορφοποιούνται ως:

$$E_r(r, \phi, z) = A_n \frac{J_n(\xi_{mn}r)}{r} \sin(n\phi) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right), \quad (5.18)$$

$$E_\phi(r, \phi, z) = \frac{\xi_{mn}}{n} A_n J'_n(\xi_{mn}r) \cos(n\phi) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right), \quad (5.19)$$

όπου $m, n \geq 1$, A_n, C_n και D_n είναι αυθαίρετοι συντελεστές, και $\xi_{mn} = \frac{R_{mn}}{a}$ (R_{mn} είναι η m -ρίζα της εξίσωσης της παραγώγου της Bessel n -τάξης: $J'_n(R) = 0$). Επίσης, οι c_i συντελεστές ικανοποιούν την επαναληπτική εξίσωση

$$c_2 = -\frac{H_{mn}^2}{2} c_0, \quad (i+2)(i+1)c_{i+2} + H_{mn}^2 c_i + k^2 \sum_{j=0}^i c_{i-j} \epsilon_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (5.20)$$

όπου $\omega = 2\pi f_{c,mnl}$, $k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ και $H_{mn} = \sqrt{k^2 \epsilon_0 - \xi_{mn}^2}$.

Θεωρώντας τις συνθήκες (5.16) και (5.17) λαμβάνουμε το σύστημα:

$$\begin{aligned} c_0 &= 0 \\ \wedge \\ F(f) &= \sum_{i=0}^{\infty} c_i L^i = 0. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Επομένως, οι TE_{mn} ιδιορρυθμοί εκφράζονται από τις Εξισώσεις (5.18)-(5.19), υπό την προϋπόθεση ότι τα c_i ικανοποιούν το σύστημα (5.21).

Και στην περίπτωση κυλινδρικού αντηχείου οφείλουμε να κάνουμε λόγο για TE_{mnl} ιδιορρυθμούς, δεδομένου ότι στη σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$ εμπεριέχεται και μια άλλη σταθερά, έστω l , εκτός των m, n . Οι ιδιορρυθμοί TE_{mnl} διεγείρονται σε ορισμένες ιδιοσυχνότητες $f = f_{c,mnl}$ που ικανοποιούν



το σύστημα (5.21), πρόβλημα που ισοδυναμεί με την εύρεση των ριζών της $F(f)$.

Στη συνέχεια ελέγχουμε τη συμφωνία της προτεινόμενης λύσης με ήδη υπάρχουσες αναλυτικές λύσεις για ομογενή και γραμμικώς ανομοιογενή προφίλ.

5.3.1 Έλεγχος με αναλυτικές λύσεις

Περίπτωση 1: $\varepsilon_r(z) \equiv \varepsilon_m = \text{constant}$.

Οι εκφράσεις του πεδίου εντός του αντηχείου είναι:

$$E_r = C_n \frac{J_n(\xi_{mn}r)}{r} \sin(n\phi) \sin(\beta z), \quad (5.22)$$

$$E_\phi = C_n \frac{\xi_{mn}}{n} J'_n(\xi_{mn}r) \cos(n\phi) \sin(\beta z), \quad (5.23)$$

όπου C_n είναι η αυθαίρετη σταθερά κλάτους. Οι ιδιοσυχνότητες δίνονται από τον τύπο [9]:

$$f_{c,mnl} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_m}} \sqrt{\left(\frac{l}{2L}\right)^2 + \left(\frac{\xi_{mn}}{2\pi}\right)^2}, \quad (5.24)$$

όπου L το μήκος του αντηχείου.

Στο ακόλουθο παράδειγμα ομογενούς προφίλ ε_m δεικνύεται η συμφωνία των θεωρητικά υπολογισμένων ιδιορρυθμών και ιδιοσυχνότητων με τους αντίστοιχους της μεθόδου Frobenius.

$\varepsilon_m = 3.9$: $m = 1$, $n = 2$. Τα x και y μέρη των E_r , E_ϕ συνιστωσών είναι όμοια, όπως προκύπτει από τις Εξισώσεις (5.18)-(5.19) και (5.22)-(5.23). Σε ό,τι αφορά το z τμήμα, στην Εικ.5.5 που ακολουθεί παρουσιάζεται η ταύτιση των μορφών της σειράς $(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i)$ με του ημιτόνου του ρυθμού TE_{123} .

Αναφερόμενοι στις ιδιοσυχνότητες, η επίλυση του συστήματος (5.21) παρέχει τις ρίζες της ποσότητας $F(f)$ που ταυτίζονται με τις ιδιοσυχνότητες που δίνονται από την Εξ.(5.24). Παρακάτω, στην Εικ.5.6 διακρίνονται οι ρίζες της συνάρτησης $F(f)$ που αναφέρονται στις συχνότητες: $m = 1$, $n = 2$ και $l = 1, 2, 3, 4$.

Περίπτωση 2: $\varepsilon_r(z) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 z$. Στην περίπτωση γραμμικής ανομοιογένειας τα z -εξαρτώμενα τμήματα των συνιστωσών του πεδίου ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση:

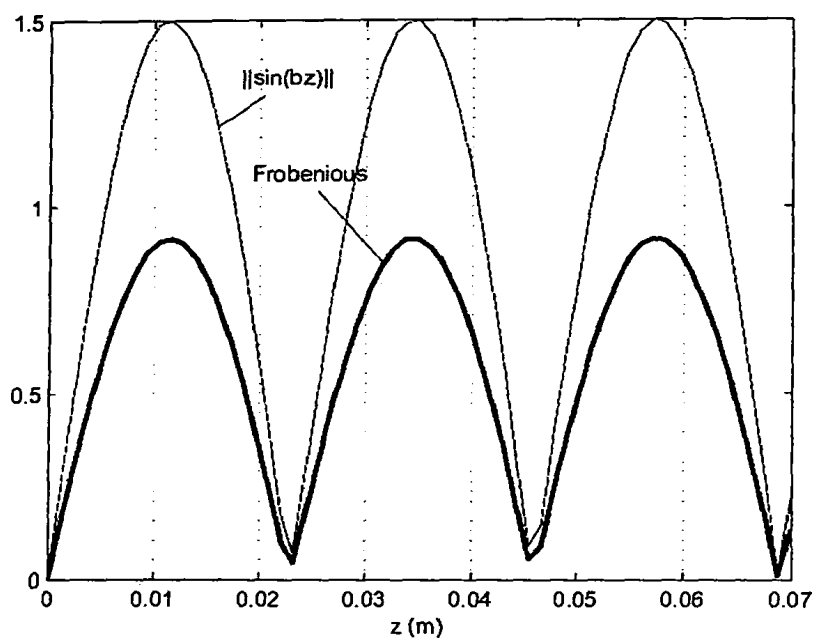
$$\ddot{Z}(z) = zZ(z) \quad (5.25)$$

και συνεπώς το πεδίο γράφεται ως

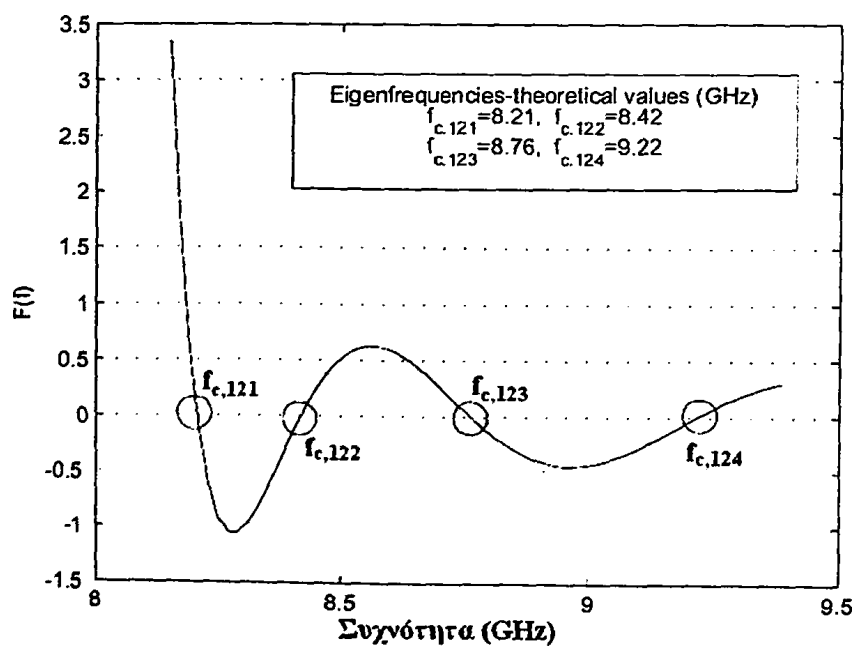
$$E_x = E_{x0} \cos(p_m x) \sin(q_n y) \cdot [a_1 Ai(n(z)) + a_2 Bi(n(z))], \quad (5.26)$$

$$E_y = -\frac{p_m}{q_n} E_{x0} \sin(p_m x) \cos(q_n y) \cdot [a_1 Ai(n(z)) + a_2 Bi(n(z))]. \quad (5.27)$$

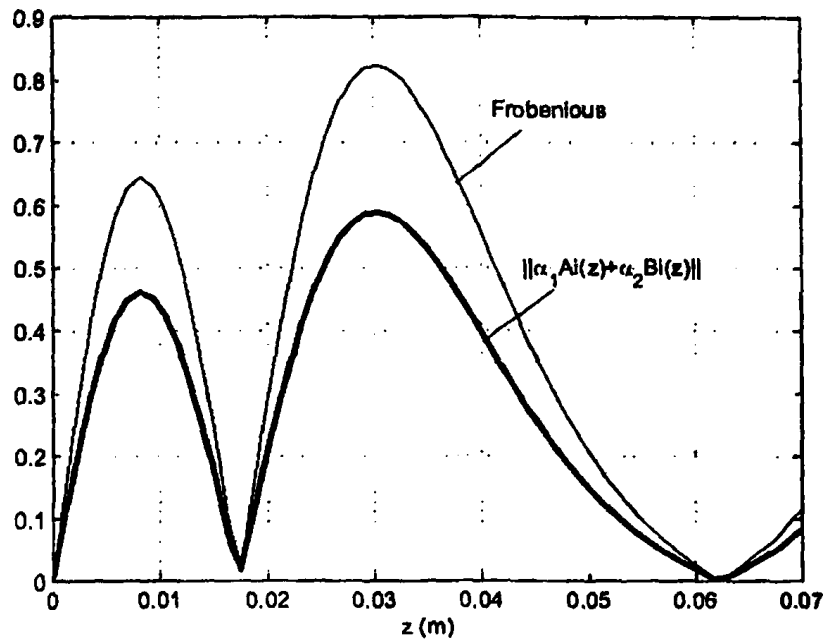




Εικόνα 5.5: Σύγκριση TE_{123} ιδιορρυθμών. Διαστάσεις αντηχείου: $\alpha = 2.5\text{cm}$, $L = 7\text{cm}$.



Εικόνα 5.6: Οι ρίζες της $F(f)$. Διαστάσεις αντηχείου: $\alpha = 2.5\text{cm}$, $L = 7\text{cm}$.



Εικόνα 5.7: Σύγκριση TE_{212} ιδιορρυθμών. Διαστάσεις αντηχείου: $\alpha = 2.5\text{cm}$, $L = 7\text{cm}$.

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες λαμβάνουμε το 2×2 πρόβλημα ιδιοτιμών $AX = 0$:

$$A = \begin{bmatrix} Ai(n_o) & Bi(n_o) \\ Ai(n_d) & Bi(n_d) \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix},$$

όπου $A = k^2 \epsilon_0 - \xi^2$, $B = k^2 \epsilon_1$ και $n_o = -\frac{A}{B^{2/3}}$, $n_L = -B^{1/3} (L + \frac{A}{B})$. Σε αυτήν την περίπτωση, οι ιδιοσυχνότητες που αναζητούμε είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$\text{Det}(A) = 0. \quad (5.28)$$

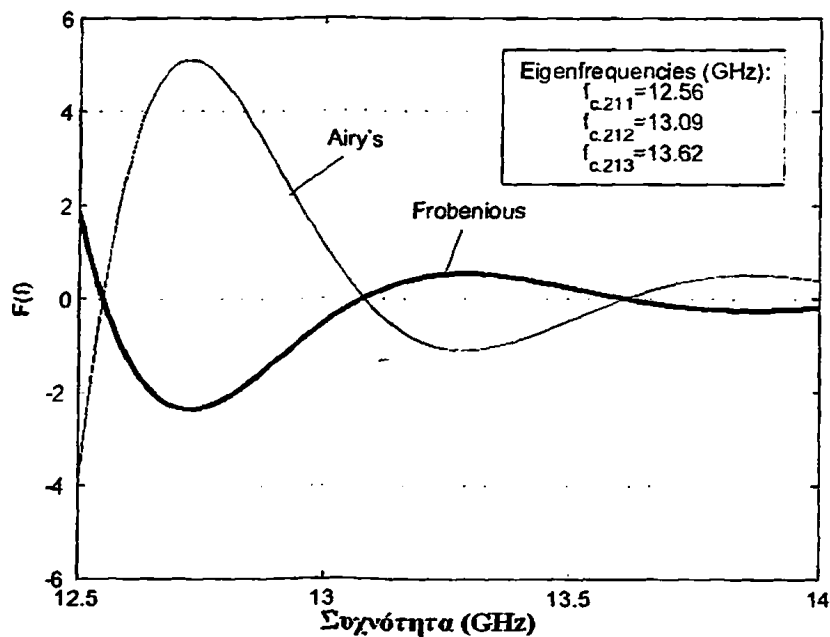
Τα αποτελέσματα της επίλυσης του συστήματος για ένα αντιπροσωπευτικό γραμμικό προφίλ είναι σε πλήρη συμφωνία με αυτά της Frobenius μεθόδου και παρουσιάζονται στις Εικόνες 4.7-4.8.

$\epsilon_r = 3 - 15z$: $m = 2$, $n = 1$. Τα x και y μέρη των E_x, E_y συνιστωσών είναι όμοια, όπως προκύπτει από τις Εξισώσεις (5.18)-(5.19) και (5.26)-(5.27). Σε ό,τι αφορά το z μέρος, στην Εικ.5.7 δεικνύεται η ταύτιση του ημιτόνου με τη σειρά $(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i)$ για το ρυθμό TE_{212} .

Αναφερόμενοι, τέλος, στις ιδιοσυχνότητες, η επίλυση του συστήματος (5.21) εξάγει με ακρίβεια τις ιδιοσυχνότητες, όπως αυτές ορίζονται από την Εξ.(5.28). Στην Εικ.5.8 διακρίνονται οι ρίζες της συνάρτησης $F(f)$ που αντιστοιχούν στις ιδιοσυχνότητες $m = 2$, $n = 1$ και $l = 1, 2, 3, 4$.

Συνεπώς, η Frobenius λύση είναι σε συμφωνία με ανεξάρτητα λαμβανόμενες λύσεις για τα





Εικόνα 5.8: Οι ρίζες της $F(f)$. Διαστάσεις αντηχείου: $\alpha = 2.5\text{cm}$, $L = 7\text{cm}$.

δύο είδη προφίλ που συζητήθηκαν στο παρόν κεφάλαιο.

5.4 Αριθμητικά αποτελέσματα

Στη συνέχεια παραθέτουμε ενδεικτικά διάφορα αριθμητικά αποτελέσματα προσομοιώσεων που αφορούν γραμμικά, παραβολικά και κυβικά ανομοιογενή προφίλ και αφορούν τις αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες που εξάγονται από την επίλυση των συστημάτων (5.16) και (5.17). Στην επόμενη παράγραφο παρουσιάζουμε μορφές ιδιοκαταστάσεων για δύο τυχαία επιλεγμένα προφίλ, ένα παραβολικό και ένα κυβικό· για τις συγκεκριμένες ιδιοκαταστάσεις μελετούμε τις τιμές των συντελεστών c_i των Εξισώσεων (5.20) και (5.21) και εν τέλει υπολογίζουμε τη συγκλίνουσα σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$ κατά μήκος του αντηχείου.

5.4.1 Ιδιοσυχνότητες

Στον Πίνακα 5.1 που ακολουθεί παρατίθενται οι τιμές των ιδιοσυχνοτήτων του ρυθμού TE_{111} για μια πλειάδα διηλεκτρικών προφίλ, τόσο για τετραγωνικό όσο και για κυλινδρικό κυματοδηγό. Επίσης, συγκρίνονται οι $f_{c,111}$ της μεθόδου Frobenius με τις $\tilde{f}_{c,111}$ των σχέσεων:



Διηλεκτρικό προφίλ	Τετραγωνικό αντηχείο		Κυλινδρικό αντηχείο	
$\epsilon_r(z)$	$f_{c,111}$	$\bar{f}_{c,111}$	$f_{c,111}$	$\bar{f}_{c,111}$
$2.36 + 5.47z$	4.62	4.62	8.82	8.46
$3.72 + 5.47z$	3.74	3.73	6.86	6.86
$3.25 + 11.61z$	3.86	3.86	7.04	7.09
$4.03 - 12.42z$	3.88	3.89	7.09	7.15
$6.08 - 15.32z$	3.13	3.14	5.72	5.76
$6.25 - 15.47z$	3.1	3.09	5.64	5.68
$2.15 + 25.12z - 120.24z^2$	4.34	4.39	7.84	8.06
$2.75 + 5.47z - 55.24z^2$	4.38	4.37	8.02	8.03
$2.95 + 25.21z - 125.03z^2$	3.84	3.88	6.98	7.11
$3 + 13.47z - 40.04z^2$	4.00	4.00	7.28	7.35
$3.15 + 15.16z - 50.83z^2$	3.88	3.89	7.08	7.15
$4 - 13.47z + 50.24z^2$	3.90	3.89	7.42	7.14
$6 + 10.38z - 80.14z^2$	2.96	2.96	5.44	5.43
$3 - 11.17z + 91.14z^2 - 290.82z^3$	4.48	4.47	8.20	8.20
$3.25 - 13.07z + 279.34z^2 - 946.96z^3$	4.18	4.15	7.68	7.62
$3.75 - 13.47z + 286.24z^2 - 946.72z^3$	3.90	3.86	7.14	7.08
$4 - 15.37z + 80.14z^2 - 300.92z^3$	3.92	3.91	7.14	7.18
$4.25 - 12.41z + 200.24z^2 - 946.92z^3$	3.68	3.66	6.76	6.73
$4.75 - 13.47z + 230.24z^2 - 946.62z^3$	3.48	3.45	6.38	6.34

Πίνακας 5.1: Οι συχνότητες αποκοπής $f_{c,111}$, $\bar{f}_{c,111}$.

$$\bar{f}_{c,111} = \frac{1}{2\sqrt{\mu_0\bar{\epsilon}_m}} \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{d}\right)^2} \quad (\text{τετραγωνικό αντηχείο}) \quad (5.29)$$

$$\bar{f}_{c,111} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\bar{\epsilon}_m}} \sqrt{\left(\frac{1}{2L}\right)^2 + \left(\frac{\xi_{11}}{2\pi}\right)^2} \quad (\text{κυλινδρικό αντηχείο}) \quad (5.30)$$

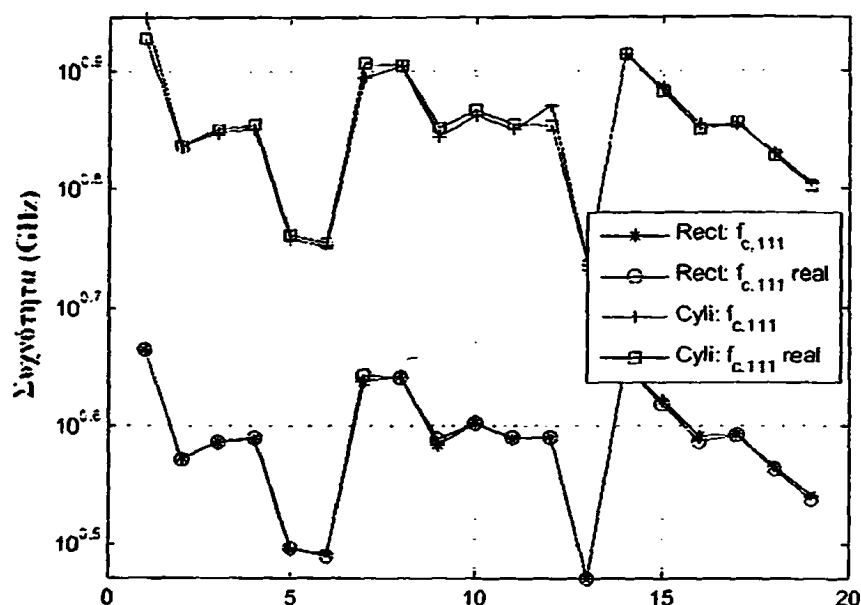
όπου $\bar{\epsilon}_m$ είναι η μέση τιμή του ανομοιογενούς προφίλ, δηλαδή

$$\bar{\epsilon}_m = \frac{1}{D} \int_{z=0}^{z=D} \epsilon_r(z) dz \quad (5.31)$$

όπου D είναι το μήκος του αντηχείου. Η επιλογή της μέσης τιμής $\bar{\epsilon}_m$ και ο υπολογισμός των $\bar{f}_{c,111}$, που όπως αποδεικνύεται από τις προσομοιώσεις, αποτελεί μια πολύ καλή προσέγγιση των πραγματικών $f_{c,111}$.

Στην Εικόνα 5.9 προσδίδονται και σχηματικώς οι τιμές του Πίνακα δεικνύοντας την ακρίβεια των προσεγγιστικών ιδιοσυχνοτήτων $\bar{f}_{c,111}$.



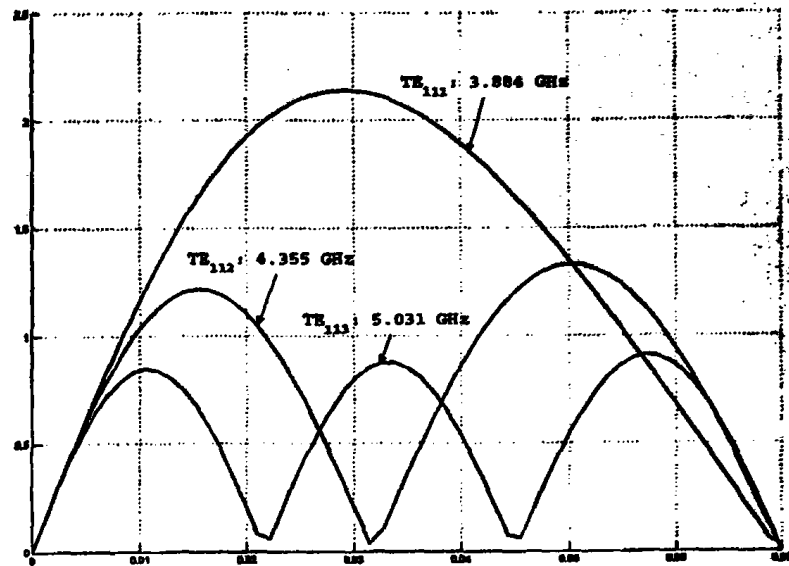


Εικόνα 5.9: Συγκριτικό διάγραμμα των ιδιοσυχνοτήτων $f_{c,111}$, $\tilde{f}_{c,111}$ σε τετραγωνικό και κυλινδρικό αντηχείο.

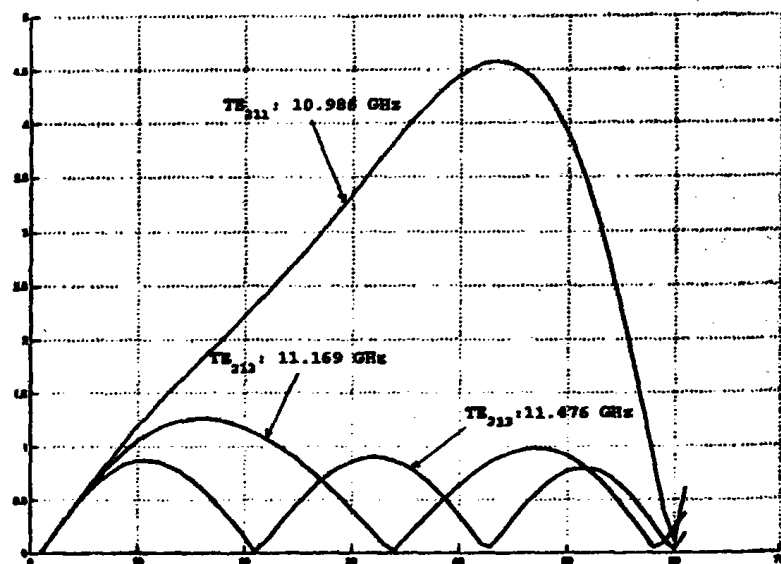
5.4.2 Μορφές των ιδιοκαταστάσεων

Η ανάλυση με τη μέθοδο Frobenius παρέχει τη δυνατότητα εύρεσης των ιδιορρυθμών σε κάθε ιδιοσυχνότητα. Προς αυτό το σκοπό, στην παρούσα παράγραφο δεικνύουμε τη λειτουργικότητα της μεθόδου παραθέτοντας στις Εικόνες 5.10-5.11 τις κυματομορφές δύο τυχαία επιλεγμένων ανομοιογενειών σε διάφορες ιδιοσυχνότητες στην περίπτωση τετραγωνικού και κυλινδρικού κυματοδηγού αντίστοιχα.

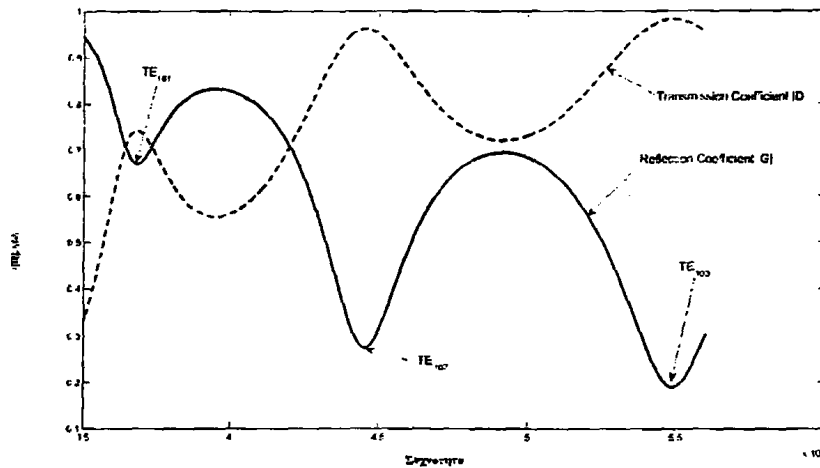
Στην Εικ.5.12 εκθέτουμε τη μεταβολή των μέτρων των συντελεστών ανάκλασης και διάδοσης συναρτήσει της συχνότητας για το ανομοιογενές προφίλ $\epsilon_r(z) = 3 - 35.55z + 335.72z^2 - 915z^3$, θεωρούμενοι τη μετρητική διάταξη των προηγούμενων κεφαλαίων. Παρατηρούμε ότι οι μορφές παρουσιάζουν ακρότατα στις ιδιοσυχνότητες TE_{10l} , $l = 1, 2, 3$, ενός τετραγωνικού αντηχείου με τις ίδιες διαστάσεις, φέρον το εν λόγω ανομοιογενές υλικό. Τα ακρότατα εμφανίζονται διότι σε αυτές τις συχνότητες εντός του αντηχείου ενισχύονται ενεργειακά τα στάσιμα κύματα, γεγονός που συνεπάγεται μείωση του συντελεστή ανάκλασης και ενίσχυση του συντελεστή διάδοσης (δες Εικ. 5.12).



Εικόνα 5.10: Πεδιακοί ιδιορρυθμοί στην περίπτωση της ανομοιογένειας $\epsilon_r(z) = 4 - 13.47z + 50.24z^2$ για $m = n = 1$. Διαστάσεις τετραγωνικού αντηχείου: $a = b = 3\text{cm}$, $d = 7\text{cm}$.



Εικόνα 5.11: Πεδιακοί ιδιορρυθμοί στην περίπτωση της ανομοιογένειας $\epsilon_r(z) = 3.27 - 13.07z + 279.34z^2 - 946.96z^3$ για $m = 2$, $n = 1$. Διαστάσεις κυλινδρικού αντηχείου: $a = 2.5\text{cm}$, $L = 7\text{cm}$.



Εικόνα 5.12: $\|G\|$, $\|D\|$ συναρτήσει της συχνότητας f για το ανομοιογενές προφίλ $\epsilon_r(z) = 3 - 35.55z + 335.72z^2 - 915z^3$. Διαστάσεις τετραγωνικού κυματοδηγού: $a = b = 3\text{cm}$, $d = 7\text{cm}$. Οι ιδιοσυχνότητες είναι ονομαστικά: $f_{c,101} = 3.6587$, $f_{c,102} = 4.4453$, $f_{c,103} = 5.4835$ (GHz).

5.4.3 Το αντιστρόφο πρόβλημα

Η εκτίμηση των ιδιοσυχνοτήτων που εξάγεται από τα ακρότατα της μεταβολής των συντελεστών ανάκλασης και διάδοσης ως προς τη συχνότητα διέγερσης, όπως παρουσιάστηκε στην Εικ.5.12, επιτρέπει την επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος για την περίπτωση ομογενούς και γραμμικού ανομοιογενούς προφίλ. Η διαδικασία αντιστροφής είναι απλή και ακριβής στην περίπτωση απλής ομογένειας· τότε, οι ιδιοσυχνότητες δίνονται από την έκφραση:

$$f_{c,mnl} = \frac{1}{2\sqrt{\mu_0\epsilon_c}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{l}{d}\right)^2}, \quad (5.32)$$

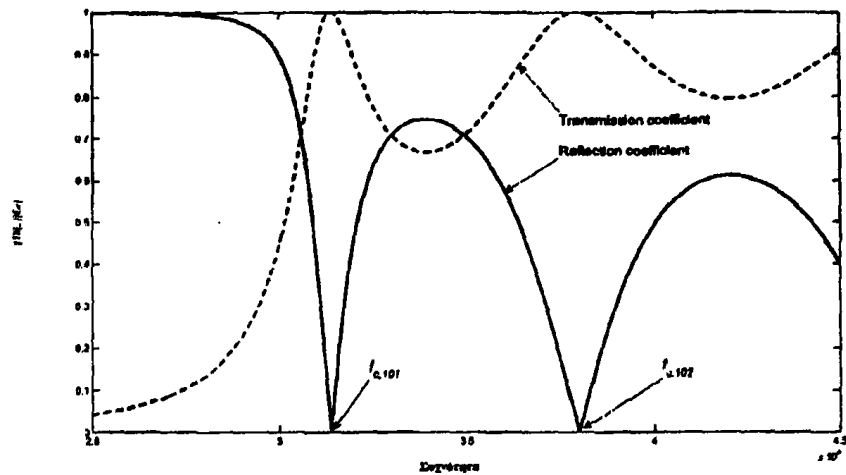
και η διηλεκτρική παράμετρος ως:

$$\epsilon_c = \frac{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{l}{d}\right)^2}{4f_{c,mnl}^2 \mu_0}. \quad (5.33)$$

Συνεπώς, οι γνώση έστω και μίας εκ των ιδιοσυχνοτήτων $f_{c,mnl}$, μέσω της παραπάνω εξίσωσης, παρέχει την τιμή του άγνωστου ομογενούς προφίλ. Ως παράδειγμα, παρουσιάζουμε στην Εικ.5.13 τις μεταβολές των συντελεστών ανάκλασης και διάδοσης για το ομογενές προφίλ $\epsilon_c = 3$. Οι τιμές των ιδιοσυχνοτήτων που δεικνύονται από τα ακρότατα των μορφών είναι επακριβώς αυτοί που προβλέπονται από την Εξ.(5.33) για $\epsilon_c = 3$.

Η επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος στην περίπτωση γραμμικής ανομοιογένειας απαιτεί την επίλυση ενός προβλήματος ελαχιστοποίησης με συνάρτηση σφάλματος την ορίζουσα της





Εικόνα 5.13: $\|G\|$, $\|D\|$ συναρτήσεως της συχνότητας f για το ομογενές προφίλ $\epsilon_r = 3$. Διαστάσεις τετραγωνικού κυματοδηγού: $a = b = 3\text{cm}$, $d = 7\text{cm}$. Οι ιδιοσυχνότητες είναι ονομαστικά: $f_{c,101} = 3.1385$, $f_{c,102} = 3.79948$, (GHz).

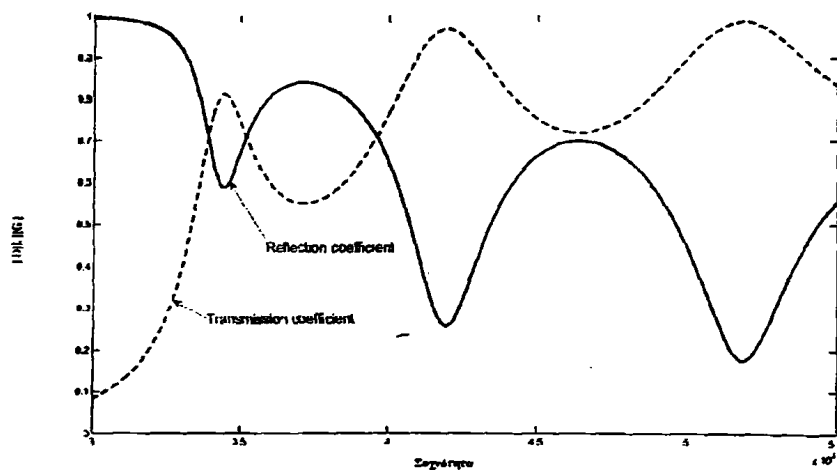
Εξ.(5.15). Πιο αναλυτικά, αναζητούμε τις παραμέτρους ϵ_0 , ϵ_1 ώστε $\text{Det}(A) = 0$ για τις ιδιοσυχνότητες που δεικνύουν τα ακρότατα των μορφών των συντελεστών ανάκλασης και διάδοσης. Ενδεικτικά, εκθέτουμε στην Εικ.5.14 την εξέλιξη των συντελεστών ανάκλασης και διάδοσης στην περίπτωση της ανομοιογένειας $\epsilon_r(z) = 3 - 15z$. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση σφάλματος εμφανίζει διάφορα τοπικά ελάχιστα, όπως παρουσιάζεται στην Εικ.5.15, γεγονός που καθιστά αναγκαία τη χρησιμοποίηση μιας ισχυρής διαδικασίας ελαχιστοποίησης για την εύρεση του ολικού ελαχίστου. Πιο αναλυτικά, στην Εικ.5.15 εκθέτεται η μετάβολη της συνάρτησης σφάλματος, που χειρίζεται τις τιμές της ορίζουσας $\text{Det}(A; \epsilon_0, \epsilon_1, f)$ στις ιδιοσυχνότητες $f_{101} = 3.444$, $f_{102} = 4.196$, $f_{103} = 5.187$, $f_{104} = 6.318$ (σε GHz), στη γειτονιά του ολικού ελαχίστου $\bar{\epsilon}_0 = 3$, $\bar{\epsilon}_1 = -15$. ορίζεται δε ως

$$J(\epsilon_0, \epsilon_1) := \sum_{i=1}^{i=4} |\text{Det}(A; \epsilon_0, \epsilon_1, f_{10i})|^2.$$

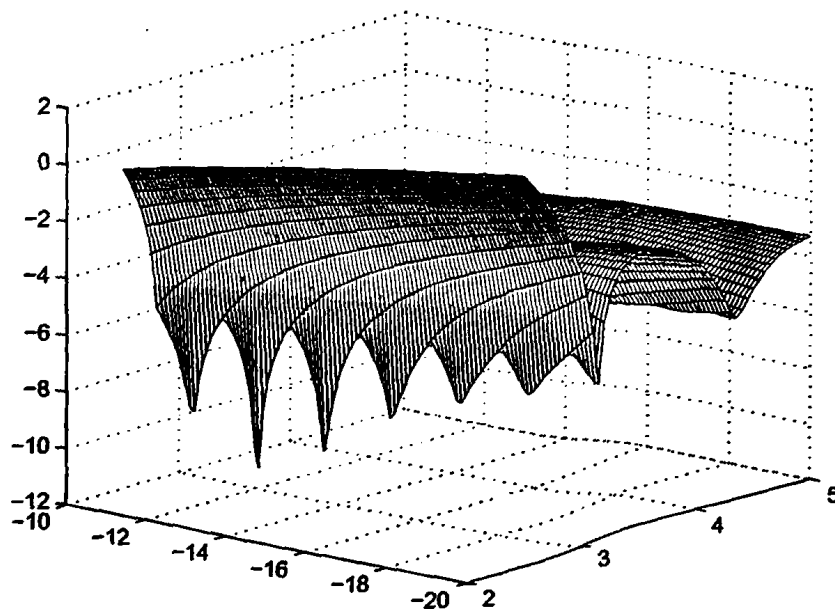
5.5 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό αξιοποιούνται τα θεωρητικά αποτελέσματα των προηγούμενων κεφαλαίων για τον ακριβή υπολογισμό των ιδιοκαταστάσεων εντός τετραγωνικών και κυλινδρικών αντηχείων εφοδιασμένων με ανομοιογενή κατά τη μία διάσταση διηλεκτρικά υλικά. Με τη χρήση της Frobenius παρέχεται η δυνατότητα υπολογισμού των ιδιοκαταστάσεων σε υψηλές τάξεις και συχνότητες και με εξαιρετικά μικρό υπολογιστικό κόστος. Επιπρόσθετα, προτείνεται και ένας νέος τρόπος εκτίμησης της πρώτης ιδιοσυχνότητας του εκάστοτε ιδιορρυθμού, βάσει της μέση





Εικόνα 5.14: $\|G\|, \|D\|$ συνάρτηση της συχνότητας f για το ανομοιογενές προφίλ $\epsilon_r(z) = 3 - 15z$. Διαστάσεις τετραγωνικού κυματοδηγού: $a = b = 3\text{cm}$, $d = 7\text{cm}$. Οι ιδιοσυχνότητες είναι ονομαστικά: $f_{c,101} = 3.444$, $f_{c,102} = 4.196$, $f_{c,103} = 5.187$, $f_{c,104} = 6.318$ (GHz).



Εικόνα 5.15: Οι μεταβολές του σφάλματος $\log_{10}(J(\epsilon_0, \epsilon_1))$ στη γειτονιά του ολικού ελαχίστου $\bar{\epsilon}_0 = 3, \bar{\epsilon}_1 = -15$. Διαστάσεις τετραγωνικού κυματοδηγού: $a = b = 3\text{cm}$, $d = 7\text{cm}$.

τιμής της ανομοιογένειας, γεγονός που συνδέεται άρρηκτα με αντίστοιχα συμπεράσματα των προηγούμενων κεφαλαίων. Τονίζεται δε ότι η σαφής εξάρτηση των ιδιοκαταστάσεων από τον διακριτό, όπως αποδεικνύεται, συντελεστή l , που εμφανίζεται στην παραπάνω ανάλυση λόγω της πεπερασμένης κατά z διάστασης του αντηχείου. Κατά αυτόν τον τρόπο ολοκληρώνεται η μελέτη των βασικών μικροκυματικών στοιχείων, τουτέστιν κυματοδηγών και αντηχείων, που περιέχουν ανομοιογενή υλικά.



Κεφάλαιο 6

Κυματική διάδοση και ανακατασκευή ιδιοτήτων σε ανομοιογενή ελαστικά μέσα^{††}

6.1 Περίληψη του προβλήματος

Συνεχίζουμε τη σπουδή για την εύρεση αναλυτικής λύσης σε προβλήματα που εμπλέκουν συνεχείς κατά τη μία διάσταση ανομοιογένειες. Εστιάζουμε δε το ενδιαφέρον μας στην ελαστοδυναμική μικρών μετατοπίσεων και πιο ειδικά στην αναλυτική επίλυση ενός προβλήματος ανάκλασης-διάδοσης που αναφέρεται σε ανομοιογενή υλικά με χωρικά εξαρτώμενες ελαστικές παραμέτρους. Η μέθοδος Frobenius χρησιμοποιείται για τη μελέτη της διάδοσης ενός αρμονικού ελαστικού επιπέδου κύματος σε στρωματοποιημένα και ανομοιογενή κατά τη μία διάσταση ελαστικά μέσα. Βάσει μιας σειράς αριθμητικών παραδειγμάτων που παρουσιάζονται, αυτή η προσέγγιση συγκρίνεται με μια συμβατική collocation μέθοδο και αποδεικνύεται η επίτευξη ακριβούς λύση. Τέλος, στην αντιμετώπιση του αντίστροφου προβλήματος, τα συνθετικά δεδομένα της collocation σε συνδυασμό με τη Frobenius λύση του ευθέως προβλήματος αξιοποιούνται από έναν διαφορικής εξέλιξης γενετικό αλγόριθμο για την ανακατασκευή ανομοιογενών προφίλ μέχρι και δευτέρας τάξεως.

6.2 Διατύπωση του προβλήματος

Θεωρούμε ένα στρώμα πάχους L που αποτελείται από ένα ανομοιογενές και ιστροπικό ελαστικό υλικό ανάμεσα σε δύο ομογενείς ημιχώρους. Έστω $z \in \mathbb{R}$ η καρτεσιανή συντεταγμένη ώστε $z \in [0, L]$ να είναι το στρώμα, που ονομάζουμε Ω_2 , και $z > L$, $z < 0$ να είναι οι ημιχώροι Ω_1 και Ω_3 , αντίστοιχα (δες Εικ.6.1). Το πεδίο μετατόπισης u εξαρτάται από το διάνυσμα θέσης x

^{††}Σχετική δημοσίευση: K. Baganas, Wave propagation and profile reconstruction in inhomogeneous elastic media, *Wave Motion*, Vol. 42(3), pp. 261-273, 2005.



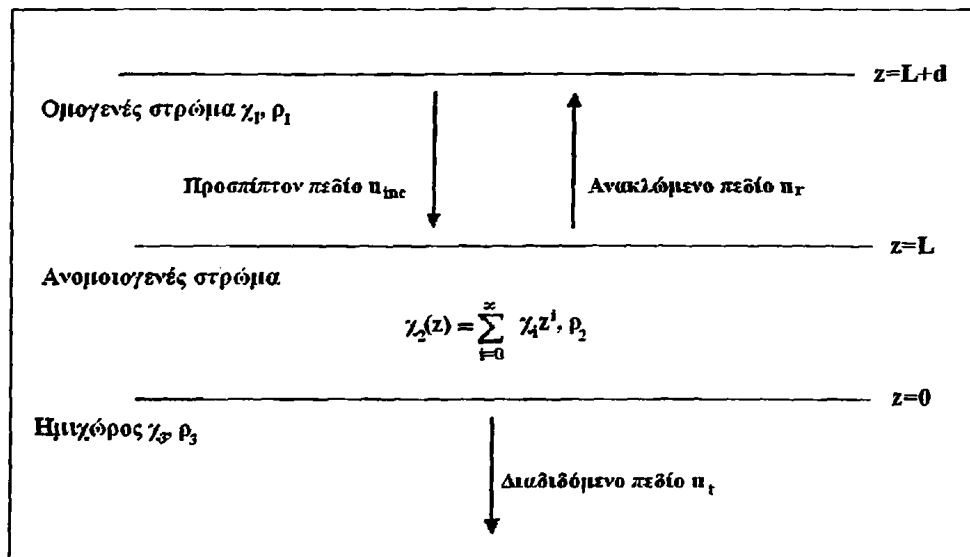
μόνο διά της μεταβλητής z . Οι διαμήκεις (κατά μήκος της διεύθυνσης διάδοσης) και οι εγκάρσιες συνιστώσες του u ικανοποιούν τις αποσυνζευγμένες μερικές διαφορικές εξισώσεις της μορφής:

$$\partial_z (\chi(z) \partial_z u(z, t)) = \rho \partial_t^2 u(z, t), \quad (6.1)$$

όπου $u(z, t)$ είναι η άγνωστη συνάρτηση στο χώρο $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \times \mathbb{R}^+$, ρ είναι η πυκνότητα μάζας και $\chi(z)$ είναι συνάρτηση των Lamé παραμέτρων $\lambda(z)$, $\mu(z)$. Βάσει κοινής σημειολογίας, $\chi(z) = 2\mu(z) + \lambda(z)$ ή $\chi(z) = \mu(z)$ όταν διαμήκεις ή εγκάρσιες κολώσεις θεωρούνται, αντίστοιχα. Τα χ_i και ρ_i είναι σταθερά στους χώρους Ω_i , $i = 1, 3$. Συνεπώς, στους χώρους αυτούς η διαφορική εξίσωση (6.1) λαμβάνει τη μορφή

$$c_i^2 \partial_z^2 u(z, t) - \partial_t^2 u(z, t) = 0, \quad (6.2)$$

όπου $c_i^2 = \chi_i / \rho_i$.



Εικόνα 6.1: Το πρόβλημα διάδοσης.

Έχουμε υπόψιν τη διαδικασία ανάκλασης-διάδοσης που γεννιέται από κύμα που προέρχεται από τον ημιάπειρο χώρο $z > L$. Το προσπίπτον κύμα u_{inc} είναι γνωστό ως αρμονικό επίπεδο κύμα $u_{inc}(z, t) = A_{inc} e^{-ik_1 z} e^{i\omega t}$, όπου A_{inc} δηλώνει το πλάτος του κύματος και $k_1 = \omega \sqrt{\rho_1 / \chi_1}$. Το ανακλώμενο κύμα λαμβάνει τη μορφή $u_r(z, t) = A_r e^{ik_1 z} e^{i\omega t}$, όπου A_r δηλώνει το πλάτος του. Το διεγερόμενο πεδίο στο ανομοιογενές στρώμα εκφράζεται σε σειρές Taylor ως

$$u_{inh}(z, t) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} u_i z^i \right) e^{i\omega t}, \quad (6.3)$$



ενώ το διαδιδόμενο κύμα έχει τη μορφή $u_i(z, t) = A_i e^{-ik_3 z} e^{i\omega t}$, όπου A_i δηλώνει το πλάτος και $k_3 = \omega \sqrt{\rho_3/\chi_3}$. Σε ό,τι ακολουθεί ο όρος $e^{i\omega t}$ παραλείπεται.

Θεωρούμε τις συνοριακές συνθήκες στο $z = 0$ και $z = L$ όπου πρέπει να ισχύει συνέχεια των μετατοπίσεων και των εγκάρσιων πιέσεων, δηλαδή στο $z = 0$: $u_{inh} = u_i$, ή

$$u_0 = A_i, \quad (6.4)$$

και $\chi_2(0) \partial_z u_{inh}(0) = \chi_3 \partial_z u_i(0)$, ή

$$u_1 = -\frac{\chi_3 i k_3}{\chi_2(0)} A_i. \quad (6.5)$$

Επίσης, στο $z = L$: $u_{inh}(L) = u_{inc}(L) + u_r(L)$, ή

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i L^i = A_r e^{ik_1 L} + A_{inc} e^{-ik_1 L}, \quad (6.6)$$

και $\chi_1 \partial_z (u_{inc} + u_r) = \chi_2(L) \partial_z u_{inh}(L)$, ή

$$\chi_1 i k_1 (A_r e^{ik_1 L} - A_{inc} e^{-ik_1 L}) = \chi_2(L) \sum_{i=1}^{\infty} i u_i L^{i-1}. \quad (6.7)$$

Η Εξ.(6.1), στο ανομοιογενές στρώμα στο πεδίο συχνοτήτων έχει τη μορφή

$$\chi_2(z) u_{inh}''(z) + \chi_2'(z) u_{inh}'(z) + \rho_2 \omega^2 u_{inh}(z) = 0, \quad (6.8)$$

όπου το ρ_2 δηλώνει την πυκνότητα στο Ω_2 .

Εφαρμόζοντας τη Frobenius μέθοδο στην Εξ.(6.8) λαμβάνουμε το ακόλουθο επαναληπτικό σχήμα εξισώσεων για κάθε $i = 0, 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} \rho_2 \omega^2 u_i + \sum_{j=1}^i (i-j+1)(i-j+2) u_{i-j+2} \chi_j + (i+1)(i+2) u_{i+2} \chi_0 \\ + \sum_{j=0}^i (i-j+1)(j+1) u_{i-j+1} \chi_{j+1} = 0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Αυτή η εξίσωση συνεπάγεται ότι κάθε u_i , $i \geq 2$, μπορεί να εκφραστεί μέσω των u_0, u_1 δηλαδή $u_i = u_i(u_0, u_1)$. Οι u_0, u_1 είναι οι μόνες ανεξάρτητες άγνωστες σταθερές ανάμεσα στα u_i και αποτελούν δύο από τους τέσσερις αγνώστους του ευθέως προβλήματος κυματικής διάδοσης. Με άλλα λόγια, ο υπολογισμός των u_0, u_1 καθιστά δυνατό τον καθορισμό των u_i για $i \geq 2$. Συνεπώς, οι Εξισώσεις (6.6)-(6.7) οδηγούν

$$u_0 Z_0(L) + u_1 Z_1(L) = A_r e^{ik_1 L} + A_{inc} e^{-ik_1 L}, \quad (6.10)$$



$$\chi_2(L) [u_0 Z_0'(L) + u_1 Z_1'(L)] = \chi_1 i k_1 (A_r e^{i k_1 L} - A_{inc} e^{-i k_1 L}), \quad (6.11)$$

όπου $Z_0(\cdot)$, $Z_0'(\cdot)$, $Z_1(\cdot)$, $Z_1'(\cdot)$ είναι γνωστές εκφράσεις των ορισμάτων τους ρ , ω , L και χ_i , $i = 0, 1, 2, \dots$. Οι Εξισώσεις (6.4)-(6.5) και (6.10)-(6.11) δίνουν μορφή σε ένα 4×4 γραμμικό σύστημα εξισώσεων του οποίου η λύση είναι:

$$A_r = \frac{G_t B - B_t G}{G H_2 - G_t} e^{-i k_1 L}, \quad (6.12)$$

$$u_0 = A_t = \frac{A_r e^{i k_1 L} + B}{G}, \quad (6.13)$$

$$u_1 = H_1 \cdot u_0, \quad (6.14)$$

όπου $H_1 = -\frac{\chi_3 i k_3}{\chi_2(0)}$, $H_2 = \frac{\chi_1 i k_1}{\chi_2(L)}$, $B = A_{inc} e^{-i k_1 L}$, $B_t = -H_2 B$, $G = Z_0(L) + H_1 Z_1(L)$, $G_t = Z_0'(L) + H_1 Z_1'(L)$. Οι Εξισώσεις (6.12)-(6.14) ουσιαστικά περιγράφουν τη λύση του εν λόγω προβλήματος ανάκλασης-διάδοσης.

Τα υπολογιστικά πακέτα Maple και Matlab παρέχουν επαρκή εργαλεία για τη συμβολική ή την αριθμητική επίλυση των επαναληπτικών εξισώσεων της Εξ.(6.9) υπό τον όρο ότι μόνο ομαλές ανομοιογένειες εμπλέκονται και ότι οι συχνότητες διέγερσης είναι μικρότερες των 5KHz. Για ανομοιογένειες τάξεως μεγαλύτερης του δύο, 15 δεκαδικών ψηφίων ακρίβεια είναι ανεπαρκής και γι' αυτό πρέπει να χρησιμοποιούνται πακέτα πολλαπλής ακρίβειας. Στις προσομοιώσεις μας κάναμε χρήση και του αριθμητικού πακέτου του Allan Miller στη Fortran 90¹ που επιλύει με ακρίβεια το ευθύ πρόβλημα για ανομοιογένειες μέχρι και δεκάτης τάξεως.

6.3 Έλεγχος της Frobenius λύσης

Προκειμένου να ελέγξουμε τη Frobenius λύση χρησιμοποιούμε τη ρουτίνα 'bvp4c' [5] του Matlab που παράγει λύσεις για συνοριακά προβλήματα δύο σημείων για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις με collocation. Προτιμούμε αυτή τη μέθοδο και όχι τις υπάρχουσες αναλυτικές λύσεις που αναφέρθηκαν για διάφορες περιπτώσεις του $\chi_2(z)$ στην Εξ.(6.8), διότι (α) παράγει αποτελέσματα τελείως "ανεξάρτητα" από τις λύσεις της Frobenius και (β) μπορεί να χειριστεί κάθε συνεχή και ομαλή μορφή $\chi_2(z)$.

Οι Εικόνες 6.2 και 6.3 παριστούν το απόλυτο σφάλμα του πλάτους των συντελεστών ανάκλασης και διάδοσης που λήφθηκαν από την collocation και τη Frobenius για μια αντιπροσωπευτική περίπτωση τετραγωνικού προφίλ· ονομαστικά, για το προφίλ $x = [\chi_0 \chi_1 \chi_2]^T = [3 \ 0.5 \ -0.5]^T$ (GPa) και για $A_{inc} = 1$, $L = 1.25$ (m), $E_1 = E_3 = 1$ (GPa), $\nu_1 = \nu_3 = 0.3$, $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 3000$ (kg/m³). Τονίζουμε ότι το $\|\cdot\|$ δηλώνει το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού και το $|\cdot|$ την απόλυτη τιμή.

¹Ο κώδικας διατίθεται στη διεύθυνση <http://users.bigpond.net.au/amiller/quad.html>.



Οι Εικόνες παραπάνω παρουσιάζουν ότι τέλεια συμφωνία επιτυγχάνεται στο εύρος των συχνοτήτων 0 με 1.5(KHz). Σε μεγαλύτερες τιμές το απόλυτο σφάλμα αυξάνεται με τρόπο που αναδεικνύει τον "χονδρικό" χαρακτήρα της Frobenius προσέγγισης όταν οι συχνότητα αυξάνεται, γεγονός που αποτελεί κοινό τόπο σε λύσεις δυναμοσειρών· δηλαδή, το να γίνονται ασταθείς σε υψηλές συχνότητες λόγω της πεπερασμένης ακρίβειας του υπολογιστή².

6.4 Το ευθύ πρόβλημα

Στην παρούσα παράγραφο, προκειμένου να εξετάσουμε τη φυσική του προβλήματος, εστιάζουμε την προσοχή μας στο ανομοιογενές στρώμα και μελετούμε τις μορφές του παίρνει το πεδίο $u_{inh}(z)$ καθώς η $\chi_2(z)$ διαφοροποιείται από τους περιβάλλοντες ημιχώρους. Επίσης, μελετούμε τι συμβαίνει στο ανακλώμενο και το διαδιδόμενο κύμα καθώς η ανομοιογένεια παρουσιάζει κλίσεις και ταλαντώσεις που φυσικά ενισχύουν την κυματική αδιαπερατότητα του στρώματος και την ανακλώμενη κυματική ενέργεια.

Το πεδίο $u_{inh}(z)$ λαμβάνει τη μορφή στάσιμου κύματος κατά μήκος του z άξονα (αυτό οφείλεται στο πεπερασμένο πάχος του στρώματος κατά z) με μια μικρή ταλάντωση στην περιβάλλουσά του (δες Εικ.6.4). Για όλα τα είδη των ανομοιογενειών (π.χ., γραμμικά, τετραγωνικά κ.λ.π.) υπάρχουν τιμές των συντελεστών χ_i , $i = 0, 1, 2, \dots$, του $\chi_2(z)$ και των συχνοτήτων διέγερσης που οδηγούν στην ολική ανάκλαση του προσπίπτοντος πεδίου. Σε αυτήν την περίπτωση, οι ταλαντώσεις του πεδίου εξασθενίζουν και το πεδίο βαθμιαία μηδενίζεται (δες Εικ.6.5). Κοντά στο σύνορο $z = L$ η ισχυρή εξασθένιση του πεδίου δηλώνει το φυσικό γεγονός ότι ένα μικρό ποσό την ενέργειας του προσπίπτοντος πεδίου διαπερνά το ανομοιογενές στρώμα. Επίσης, οι αριθμητικές προσομοιώσεις αναδεικνύουν ότι αυτός ο μηχανισμός απόσβεσης εμφανίζεται σε όλες τις συχνότητες και για όλα τα πολυώνυμα $\chi_2(z)$ με αιχμηρές κλίσεις και μεγάλες ταλαντώσεις. Σε περιπτώσεις προφίλ με ομαλές κλίσεις, όπως τα γραμμικά και τα τετραγωνικά προφίλ, το πεδίο αρχίζει να υποβαθμίζεται για μήκη κύματος (δηλαδή, το μήκος κύματος του προσπίπτοντος πεδίου) που προσεγγίζουν την τιμή $L/7$ και ολική ανάκλαση υφίσταται οπωσδήποτε για μήκη μικρότερα από $L/10$. Αντιθέτως, εάν το μήκος δεν είναι τόσο μικρό, τότε η κύρια συνεισφορά στην ολική ανάκλαση προέρχεται από τη διαφορά μεταξύ των ελαστικών ιδιοτήτων του στρώματος και του περιβάλλοντος μέσου, δηλαδή χ_1 στο Ω_1 και $\chi_2(L)$, χ_3 στο Ω_3 και $\chi_2(0)$.

²Στις δοκιμές μας ισχύει η αναγκαία συνθήκη $\lim_{i \rightarrow \infty} |u_i z^i| = 0$, ή ισοδύναμα, $|u_i z^i| < \epsilon$, $\epsilon > 0, \forall i > M(\epsilon)$, $M(\epsilon) \in \mathbb{N}$. Τονίζουμε, επίσης, ότι το M μεταβάλλεται από 25 (κυρίως στα ομογενή προφίλ) σε 150 (κυρίως σε σύνθετα προφίλ, π.χ. κυβικά).



6.5 Επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος

Η προτεινόμενη ανάλυση εφαρμόζεται ακόμη και όταν το Ω_1 είναι ένα φραγμένο επίπεδο στρώμα, υπό τη θεώρηση ότι το κυματικό πεδίο που δημιουργείται από την αλληλεπίδραση του ανακλώμενου κύματος με το άνω σύνορο $S_1 : z = L + d$ (δες Εικ.6.1) είναι αμελητέο. Από φυσικής άποψης, η απήφηση φαινομένων πολλαπλής ανάκλασης είναι βάσιμη όταν το d είναι $d \gg \lambda$ (π.χ. $d > 10\lambda$), όπου λ είναι το μήκος κύματος. Σε ό,τι ακολουθεί θεωρείται ισχύουσα η παραπάνω θέση.

Θεωρούμε το πρόβλημα ανάκλασης-διάδοσης που παρουσιάζεται στην Εικ.6.1. Αυτό είναι το μοντέλο, για παράδειγμα, στη γεωλογική εξερεύνηση, όπου ο στόχος είναι το ανομοιογενές στρώμα εδάφους Ω_2 , ενώ το S_1 δηλώνει την ελεύθερη επιφάνεια της γης. Το αντίστροφο πρόβλημα συνίσταται στην εκτίμηση της ανομοιογένειας $\chi_2(z)$ από μετρήσεις του ανακλώμενου κύματος στην S_1 .

6.5.1 Η συνάρτηση σφάλματος

Διατυπώνουμε τώρα ως πρόβλημα ελαχιστοποίησης την εκτίμηση των αγνώστων $\mathbf{x} = [\chi_0 \chi_1 \dots \chi_M]^T$ παραμέτρων. Υπενθυμίζουμε ότι έχουμε ήδη λάβει μια “συμπαγή έκφραση” για το $A_r(\mathbf{x}, f, L, d)$ στην Εξ.(6.12). Για το εν λόγω πρόβλημα τα L και d είναι σταθερά. Επιλέγουμε διάφορες διακριτές συχνότητες διέγερσης, έστω $f_1, f_2, \dots, f_K$. Τότε, ορίζουμε τη συνάρτηση σφάλματος ως³

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K \left| \left(\|\tilde{A}_k\| - \|A_r(\mathbf{x}, f_k, L, d)\| \right) \right|. \quad (6.15)$$

$\tilde{A}_k$ είναι οι συντελεστές ανάκλασης που λαμβάνονται από την collocation μέθοδο, “διεφθαρμένοι” από θόρυβο, ενώ $A_r(\mathbf{x}, f_k, L, d)$ είναι οι θεωρητικώς εξαχόμενες τιμές της Frobenius. Συνεπώς, η $J(\mathbf{x})$ αποτελεί μέτρο της διαφοράς μεταξύ “μετρούμενων” (από collocation μαζί με θόρυβο) και των θεωρητικών αποτελεσμάτων (Frobenius δεδομένα), για όλες τις συχνότητες που χρησιμοποιούνται στο πείραμα. Η ζητούμενη εκτίμηση συνίσταται στον καθορισμό των $\tilde{\chi}_i$ που ελαχιστοποιούν την $J(\mathbf{x})$ ή, υπό την ασθενή έννοια, στον καθορισμό των $\tilde{\chi}_i$ ώστε το $\tilde{\chi}_2(z)$ να είναι μια καλή προσέγγιση της πραγματικής ανομοιογένειας $\chi_2(z)$. Με άλλα λόγια, το ολικό ελάχιστο επιτυγχάνεται σε κάποιο $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{\chi}_i)$ ώστε $J(\tilde{\mathbf{x}})$ γίνεται πολύ μικρό. Διάφοροι παράγοντες, όπως η πολυωνυμική προσέγγιση του $\chi_2(z)$, πεπερασμένη ακρίβεια μέτρησης και ο θόρυβος, οδηγούν σε μη μηδενικές θετικές τιμές της $J(\tilde{\mathbf{x}})$.

³Τονίζουμε ότι η συνάρτηση σφάλματος $J(\mathbf{x})$ έχει τη μορφή μιας μετρικής που είναι ισοδύναμη με άλλες γνωστές μετρικές στον γραμμικό διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^K$, όπως η Ευκλείδεια μετρική.



6.5.2 Γενετικοί αλγόριθμοι ελαχιστοποίησης

Διεξάγουμε την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης σφάλματος με τη χρήση του γενετικού αλγορίθμου των προηγούμενων κεφαλαίων, ο οποίος περιγράφεται λεπτομερώς από τους εμπνευστές του στο [103].

Η επιλογή αυτού του ισχυρού Γ.Α. για την ανακατασκευή προφίλ οφείλεται στο γεγονός ότι το $J(x)$ παρουσιάζει μεγάλες ταλαντώσεις και πολλά τοπικά ελάχιστα, ακόμα και όταν ένα γραμμικό προφίλ εμπλέκεται στο πρόβλημα (δες Εικ.6.6 παρακάτω). Παραδοσιακές μέθοδοι βελτιστοποίησης, όπως οι Gradient μέθοδοι, έχουν τη διάθεση να εγκλωβίζονται σε τοπικά ελάχιστα. Επιπλέον, στις μεθόδους Random Search τα σημεία στο χώρο αναζήτησης είναι τυχαία επιλεγμένα που είναι μια όχι έξυπνη στρατηγική. Στην Iterated Hillclimbing τα δοκίμια είναι τυχαία κατανεμημένα σε όλον το χώρο αναζήτησης και όσα σημεία θα υπάρχουν σε περιοχές μικρής προσέγγισης, θα υπάρχουν και σε περιοχές υψηλής προσέγγισης. Εντούτοις, ένας γενετικός αλγόριθμος ξεκινά με έναν αρχικό τυχαίο πληθυσμό και κατανέμει περισσότερα δοκιμαστικά διανύσματα σε περιοχές που έχουν υψηλή προσέγγιση. Η Simulated Annealing χειρίζεται μόνο έναν υποψήφιο τη φορά, όπως η Random Search, και έτσι δεν δημιουργεί μια καθολική εικόνα του χώρου αναζήτησης και δεν χρησιμοποιούνται πληροφορίες παλαιών κινήσεων στην επιλογή των νέων. Επίσης, στους Γ.Α. η αναζήτηση δεν περιορίζεται ούτε από τη συνέχεια της συνάρτησης ούτε από την ύπαρξη συναρτήσης παραγώγου. Οι Γ.Α. αναζητούν σε ένα πληθυσμό και όχι σε ένα μοναδικό σημείο. Με αυτόν τον τρόπο, εξασφαλίζουν αριθμητική ασφάλεια. Διατηρώντας, επίσης, έναν πληθυσμό καλώς επιλεγμένων σημείων δοκιμής, η πιθανότητα εύρεσης λάθους ελαχίστου μειώνεται.

6.6 Αριθμητικά αποτελέσματα

Είμαστε πλέον σε θέση να παρουσιάσουμε πειράματα ανακατασκευής της ελαστικής ανομοιογένειας. Αυτά είναι πειράματα προσομοίωσης· δηλαδή, δεν περιλαμβάνουν μετρήσεις ενός πραγματικού φυσικού συστήματος. Αντιθέτως, υλοποιούμε τη γεωμετρία της Εικ.6.1 με $L = 1.25(\text{m})$, $d = 10(\text{m})$ και συγκεκριμένες E_i , ν_i , ρ_i και χ_i ελαστικές παραμέτρους. Τότε, λαμβάνουμε αριθμητικές τιμές για τα ανακλώμενα και διαδιδόμενα πεδία χειριζόμενοι την collocation μέθοδο της Παραγράφου 6.3. Αυτές οι αριθμητικές τιμές, μαζί με προσθετικό θόρυβο, είναι οι “εικονικές μετρήσεις”. Θεωρούμε, στη συνέχεια, τις x τιμές ως άγνωστες και χρησιμοποιούμε τη διαδικασία ελαχιστοποίησης της συνάρτησης σφάλματος και τη Frobenius λύση του ευθέους προβλήματος ώστε να λάβουμε “καλές” εκτιμήσεις $\tilde{x}$ των πραγματικών x τιμών (δηλαδή, εκτιμήσεις που παράγουν σχεδόν μηδενικές τιμές για τη συνάρτηση σφάλματος).

Προκειμένου να επιδείξουμε τη δυνατότητα εφαρμογής της προτεινόμενης μεθόδου, προχωρούμε στην ανακατασκευή τριών τυπικών παραδειγμάτων ανομοιογένειας, ονομαστικά, ένα σταθερό, ένα γραμμικό και ένα τετραγωνικό, με τις ακόλουθες ιδιότητες: $E_1 = E_3 = 1(\text{GPa})$, $\nu_1 =$



Παράμετρος	Σημασία
$V_{min} = 10^9 \cdot [1 \ -1 \ 1]$	Κάτω όρια των παραμέτρων.
$V_{max} = 10^9 \cdot [5 \ 1 \ 1]$	Άνω όρια των παραμέτρων.
$N = 250$	Αριθμός των δοκιμαστικών διανυσμάτων ανά γενεά.
Iterations = 150	Μέγιστος αριθμός γενεών.
$F = 0.4$	Ενίσχυση διαφορικής μεταβολής.
$P = 0.8$	Πιθανότητα γενετικής διασταύρωσης
Strategy	DE/best/2/bin

Πίνακας 6.1: Παράμετροι γενετικού αλγορίθμου.

$\nu_3 = 0.3$, $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 3000(\text{kg/m}^3)$, $A_{inc} = 1$ και $\chi_2(z) = 3$ (GPa), $\chi_2(z) = 3 + 0.5z$ (GPa) and $\chi_3(z) = 3 + 0.5z - 0.5z^2$ (GPa).

Στα εικονικά πειράματά μας χρησιμοποιούμε τις τέσσερις συχνότητες $f_1 = 1.5$, $f_2 = 2.5$, $f_3 = 3.5$, $f_4 = 4$ (σε KHz). Τα αντίστοιχα μήκη κύματος είναι $\lambda_1 = 0.4466(m)$, $\lambda_2 = 0.2679(m)$, $\lambda_3 = 0.1914(m)$, $\lambda_4 = 0.1675(m)$. Τονίζουμε ότι $\lambda_i < 20d$, για $i = 1, 2, 3, 4$, και κάθε λ_i είναι συγκρίσιμο με μέγεθος της ανομοιογένειας. Σε ό,τι αφορά τις παραμέτρους του γενετικού αλγορίθμου, βρήκαμε ότι οι επιλογές του Πίνακα 6.1 παράγουν επαρκώς ακριβείς εκτιμήσεις των παραμέτρων. Οι τιμές των V_{min} , V_{max} εξασφαλίζουν ότι οι περισσότερες από τις τιμές x πρακτικού ενδιαφέροντος περιλαμβάνονται στον υπερκύβο του τρισδιάστατου χώρου εντός του οποίου ερευνά ο Γ.Α. Τα πειράματά μας υποδεικνύουν ότι $\delta = 0.002$ (δηλαδή τέσσερα σημαντικά ψηφία) είναι μια καλή τιμή κατωφλίου ως κριτήριο τερματισμού. Με άλλα λόγια, ο τερματισμός του αλγορίθμου όταν $J(\bar{x}) < \delta$ παράγει καλές εκτιμήσεις του x , γεγονός που επιτυγχάνεται σε λιγότερες από 50 γενεές.

Παρουσιάζουμε παρακάτω εκτιμήσεις για τρία είδη προφίλ λαμβάνοντας υπόψιν μετρήσεις πλάτους του u_r · δηλαδή, θεωρητικά δεδομένα για το A_r που λαμβάνονται από τη Frobenius και “μολυσμένα” δεδομένα από την collocation. Ο θόρυβος υλοποιείται από μια τυχαία μεταβλητή με ομοιόμορφη κατανομή πυκνότητας πιθανότητας στο διάστημα $[-1, 1]$. Τα ενθόρυβα δεδομένα επιλέγονται ώστε ο λόγος σήματος προς θόρυβο (SNR) να είναι ίσος, για παράδειγμα, με 0.03, δηλαδή 3% θόρυβος. Ως SNR εννοείται το σχετικό σφάλμα

$$SNR = \left[\sum_{i=1}^4 \left(\frac{|A_r^i| - |\bar{A}_r^i|}{|A_r^i|} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (6.16)$$

όπου $A_r = [A_r^1 \ A_r^2 \ A_r^3 \ A_r^4]^T$ είναι τα θεωρητικά δεδομένα που παράγει η μέθοδος Frobenius και $\bar{A}_r = [\bar{A}_r^1 \ \bar{A}_r^2 \ \bar{A}_r^3 \ \bar{A}_r^4]^T$ είναι τα “ενθόρυβα” δεδομένα της collocation.

Ορίζουμε τώρα ένα μέτρο που χαρακτηρίζει την προτεινόμενη μεθοδολογία ανακατασκευής, αφού δεικνύει, υπό μια $L_2([0, L])$ έννοια, τη διαφορά μεταξύ των προσεγγιστικών προφίλ και των πραγματικών που αναζητούνται. Έστω $\chi(z)$ και $\bar{\chi}(z)$ να δηλώνουν την πραγματική και την



προσεγγιστική ανομοιογένεια, αντίστοιχα. Αυτό το μέτρο είναι στην ουσία ένα σχετικό σφάλμα (Relative Error (RE)) και ορίζεται ως:

$$RE = \frac{\| \chi(z) - \bar{\chi}(z) \|_{L_2([0,L])}}{\| \chi(z) \|_{L_2([0,L])}}, \quad (6.17)$$

όπου $\|\cdot\|_{L_2([0,L])}$ δηλώνει τη συνήθη νόρμα στο χώρο $L_2([0, L])$. Τονίζουμε ότι τα $\chi(z)$ και $\bar{\chi}(z)$ ανήκουν στο χώρο $L_2([0, L])$ αφού είναι συναρτήσεις πεπερασμένης ενέργειας.

Είμαστε πλέον σε θέση να παρουσιάσουμε τον Πίνακα 6.2 ως αποτέλεσμα μεγάλου πλήθους προσομοιώσεων που έχουμε διεξάγει για μια ποικιλία ομογενών, γραμμικών και τετραγωνικών προφίλ. Όπως μπορούμε να διακρίνουμε η προτεινόμενη μεθοδολογία ανακατασκευής προφίλ δουλεύει επαρκώς καλά για αυτά τα είδη ανομοιογενειών, θεωρώντας ότι ο SNR δεν υπερβαίνει το 3%.

Προφίλ	SNR	Μέγιστο Σχετικό Σφάλμα %
Ομογενές	0.02	0.03
	0.03	0.35
	0.04	0.7
	0.05	1.2
Γραμμικό	0.02.	0.7
	0.03.	1.85
	0.04.	3.4
	0.05.	14
Τετραγωνικό	0.01.	0.7
	0.02.	2.0
	0.03.	3.5

Πίνακας 6.2: SNR και Μέγιστο Σχετικό Σφάλμα %.

6.7 Συμπεράσματα

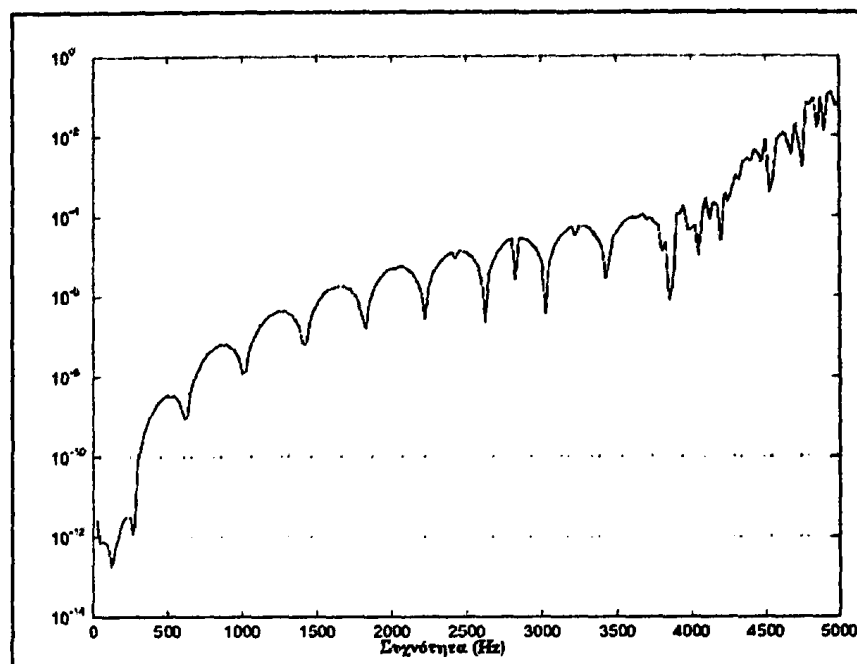
Στο παρόν κεφάλαιο, υπολογίζεται το αρμονικό πεδίο μετατοπίσεων που αναπτύσσεται σε έναν ομογενή ελαστικό ημιάπειρο χώρο, που περιέχει ένα ανομοιογενές ελαστικό στρώμα, και χρησιμοποιείται ως μέσο για την ανακατασκευή του προφίλ των ελαστικών ιδιοτήτων του στρώματος.

Για το ευθύ πρόβλημα ανάκλασης-διάδοσης εξάγεται η αναλυτική λύση με την εφαρμογή της μεθόδου Frobenius και, ταυτόχρονα, παρέχεται η δυνατότητα επίλυσης του προβλήματος για όλα τα προφίλ της μορφής $\chi(z)$, υπό την προϋπόθεση ότι το $\chi(z)$ είναι μια ομαλή συνάρτηση και μπορεί να εκφραστεί σε σειρά δυνάμεων του ορίσματος της. Η αναλυτική λύση παρέχει τη δυνατότητα εξέτασης των μορφών του πεδίου εντός της ανομοιογένειας. Ιδιαίτερης σημασίας είναι ο μηχανισμός σταδιακής απόσβεσης του πεδίου με την άνοδο της συχνότητας διέγερσης, γεγονός που παρατηρείται σε κάθε μορφής προφίλ. Επίσης, δεικνύεται το βάθος στο οποίο διεισδύει το

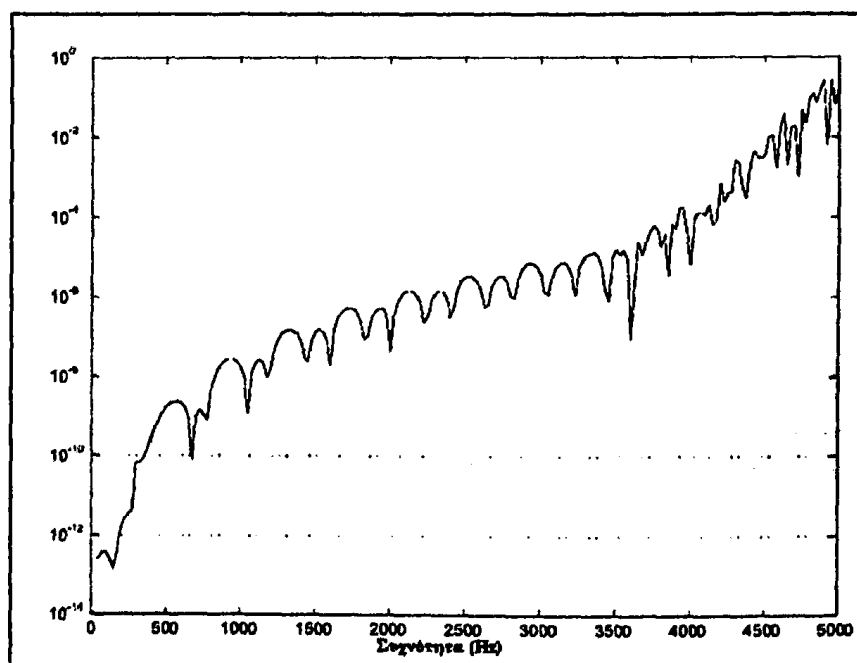


προσπίπτον κύμα στο ανομοιογενές στρώμα, υπό συνθήκες ολικής ανάκλασης. Ακόμη, η Frobenius λύση μαζί με έναν διαφορικής εξέλιξης γενετικό αλγόριθμο συνεργάζονται για την επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος, παράγοντας μια σειρά αριθμητικών παραδειγμάτων ανακατασκευών προφίλ από ενθόρυβα δεδομένα προσομοίωσης. Τα αποτελέσματα που ανακτώνται προτείνουν μια καλώς συμπεριφερόμενη μέθοδο για την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος από μετρήσεις του πλάτους του πεδίου μετατόπισης στην ελεύθερη επιφάνεια του ημιάπειρου χώρου.

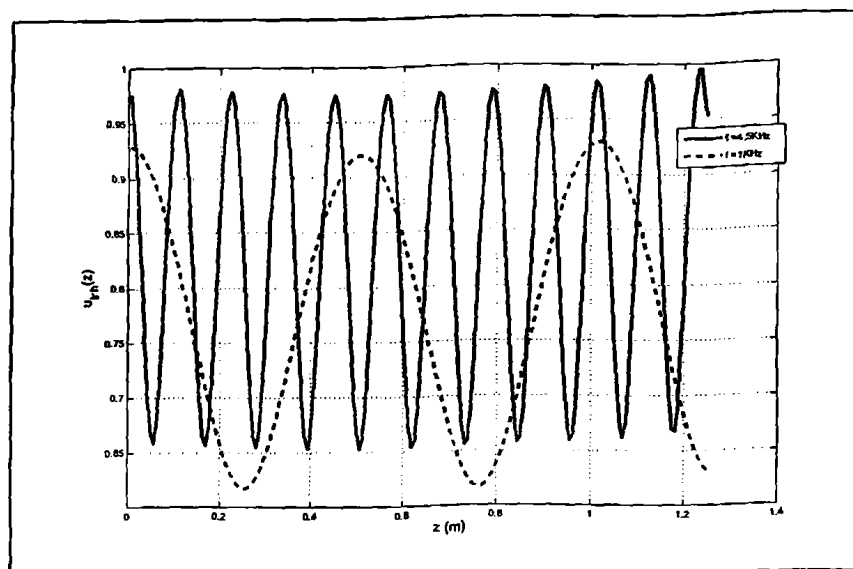




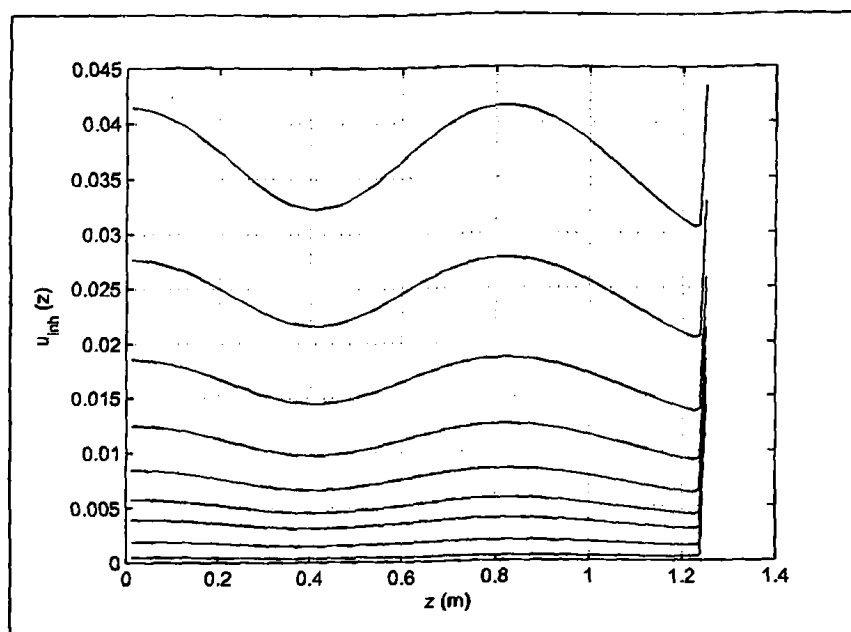
Εικόνα 6.2: Μεταβολή του σφάλματος $|(\|A_r^{Frob}\| - \|A_r^{Coll}\|)|$ συναρτήσει της συχνότητας.



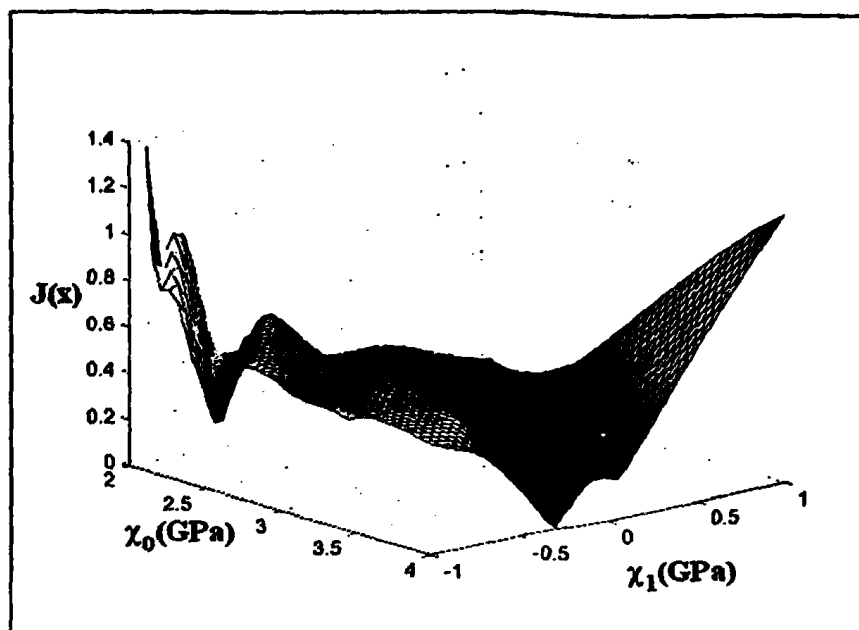
Εικόνα 6.3: Μεταβολή του σφάλματος $|(\|A_i^{Frob}\| - \|A_i^{Coll}\|)|$ συναρτήσει της συχνότητας.



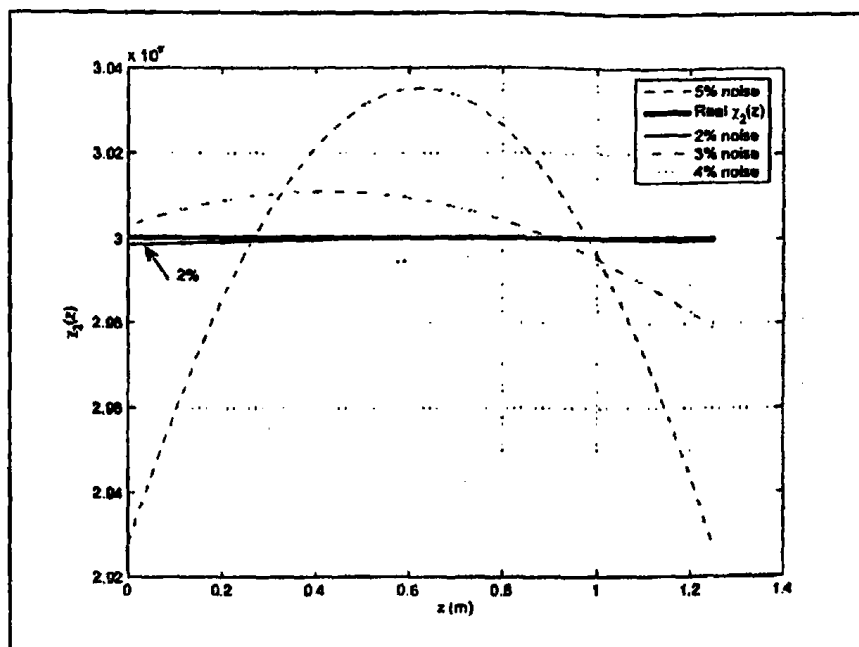
Εικόνα 6.4: Το πεδίο μετατοπίσεων $u_{inh}(z; \chi_2(z))$ στις συχνότητες διέγερσης $f = 500(\text{Hz})$ και $f = 4.5(\text{kHz})$ για το ανομοιογενές προφίλ $\chi_2(z) = [3 \ 0.5 \ -0.5](\text{GPa})$ ($L = 1.25\text{m}$).



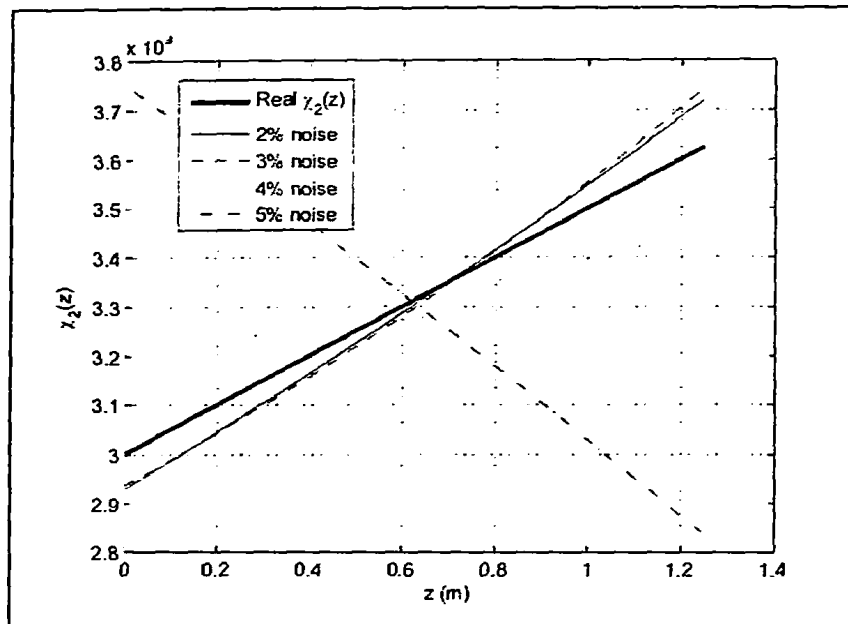
Εικόνα 6.5: Οι μορφές του πεδίου $u_{inh}(z; \chi_2(z))$ για μικρές μεταβολές του συντελεστή χ_0 του ανομοιογενούς προφίλ $\chi_2(z) = [\chi_0 \ \chi_1 \ \chi_2] = [2.45 \ -1.28 \ 1.52](\text{GPa})$ στη συχνότητα διέγερσης $f = 500(\text{Hz})$. Ονομαστικά, το χ_0 μεταβάλλεται από $2.45(\text{GPa})$ (η άνω γραμμή στην Εικόνα) σε $2.3(\text{GPa})$ (η κάτω γραμμή στην Εικόνα). δηλαδή, μια μεταβολή της τάξης 6% ($L = 1.25\text{m}$).



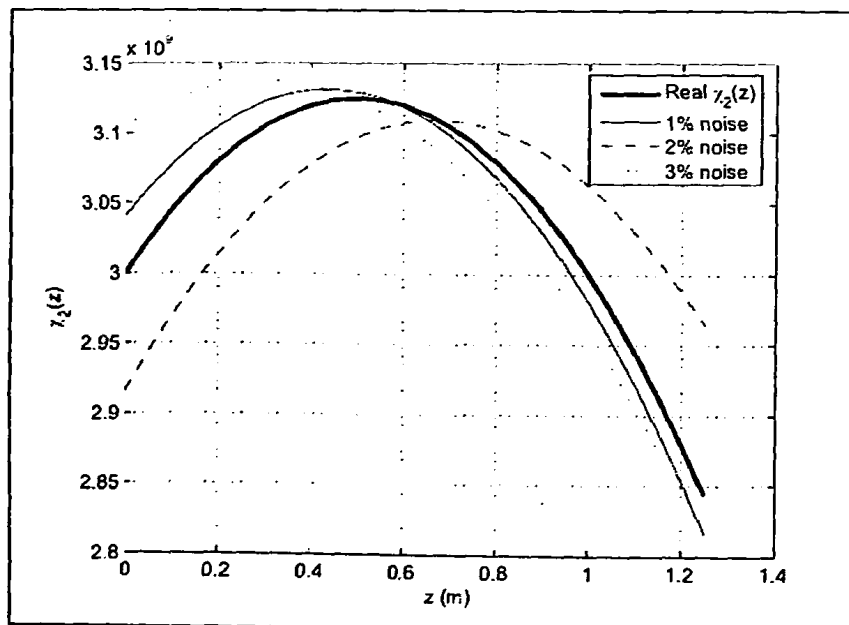
Εικόνα 6.6: Η συνάρτηση σφάλματος $J(x)$ συναρτήσει των χ_0, χ_1 . Ολικό ελάχιστο στη θέση $\chi_0 = 3, \chi_1 = 0.5$ (GPa).



Εικόνα 6.7: Ανακατασκευή του ομογενούς προφίλ $\chi_2(z) = 3$ για διάφορες περιπτώσεις ενθόρυβων δεδομένων.



Εικόνα 6.8: Ανακατασκευή του γραμμικού προφίλ $\chi_2(z) = 3 + 0.5z$ για διάφορες περιπτώσεις ενθόρυβων δεδομένων.



Εικόνα 6.9: Ανακατασκευή της παραβολικής ανομοιογένειας $\chi_2(z) = 3 + 0.5z - 0.5z^2$ για διάφορες περιπτώσεις ενθόρυβων δεδομένων.

Κεφάλαιο 7

Ανίχνευση σφαιρικών εγκλεισμών σε φραγμένο ελαστικό κυλινδρικό χωρίο[§]

7.1 Περίληψη του προβλήματος

Στο παρόν κεφάλαιο μελετούμε το θεωρητικό σκέλος μιας μεθόδου μη-καταστροφικού ελέγχου που σχετίζεται με την ανίχνευση ενός σφαιρικού εγκλεισμού εντός κυκλικού κυλίνδρου. Ο κύλινδρος θεωρείται ότι είναι ένα γραμμικό, ομογενές και ισοτροπικό μέσο στον τρισδιάστατο χώρο, ενώ ο εγκλεισμός περιέχει ιδανικό ρευστό. Η διέγερση του συστήματος συνίσταται σε μια κάθετη, αρμονική και ομοιόμορφη πίεση που εφαρμόζεται σε μια από τις κάθετες επιφάνειες του κυλίνδρου· οι επιφάνειες θεωρούνται ελεύθερες τάσεων. Τα πεδία μετατόπισης που διεγείρονται εντός και εκτός του εγκλεισμού εκφράζονται σε όρους των Navier ιδιοδιανυσμάτων. Η αναλυτική λύση που εξάγεται για το προκείμενο πρόβλημα συνοριακών τιμών επιτρέπει την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος ανακατασκευής από το αρμονικό πεδίο μετατοπίσεων στις εξωτερικές επιφάνειες του κυλίνδρου. Πιο αναλυτικά, η λύση αξιοποιείται αριθμητικά σε ένα πλήθος θέσεων του εγκλεισμού και τα αποτελέσματα αναδεικνύουν τη δυνατότητα εύρεσης και ανακατασκευής του εγκλεισμού από μετρήσεις επί των επιφανειών του κυλίνδρου.

Φυσικώς, το πρόβλημα συνίσταται στα εξής στοιχεία. Ένα σημειακό αρμονικό εξωτερικό φορτίο, συγκεντρωμένο σε ένα μικρό επιφανειακό στοιχείο του κυλίνδρου, παράγει δύο διακριτά πεδία μετατοπίσεων, ένα στο εσωτερικό του κυλίνδρου και ένα εντός του εγκλεισμού. Τα πεδία αυτά συσχετίζονται μέσω συνθηκών συνέχειας στην επιφάνεια του εγκλεισμού. Επιπρόσθετα, οι υπόλοιπες εξωτερικές επιφάνειες του ανομοιογενούς σώματος, εκτός της περιοχής διέγερσης, είναι ελεύθερα τάσεων. Το πρώτο βήμα στην αναλυτική επίλυση είναι η αναπαράσταση των πεδίων μετατόπισης σε όρους σφαιρικών Navier ιδιοσυναρτήσεων. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούνται

[§] Σχετική δημοσίευση: K Baganas, A Charalambopoulos and G D Manolis, Detection of spherical inclusions in a bounded, elastic cylindrical domain, *Wave Motion*, Vol. 41, pp. 13-28, 2005.



προσθετικά θεωρήματα για το χειρισμό δύο δυσκολιών· μία που προκύπτει λόγω της αυθαίρετης θέσης του εγκλεισμού και μία λόγω του κυλινδρικού σχήματος του περιβάλλοντος ελαστικού σώματος. Λαμβάνοντας υπόψιν τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος, και ακολουθώντας εκτεταμένους χειρισμούς, προκύπτει ένα αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων από το οποίο εξάγονται οι συντελεστές των Navier ιδιοσυναπτιγμάτων. Ακολουθώντας, παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα για την περίπτωση που ο εγκλεισμός και η πηγή διέγερσης βρίσκονται επί του άξονα συμμετρίας του προβλήματος. Αναφέρουμε, ακόμη, ότι αν και τα αποτελέσματα αφορούν μόνο αυτήν την περίπτωση, η θεωρητική ανάλυση που παρουσιάζεται είναι κατάλληλη για τη μοντελοποίηση πολλών άλλων εφαρμογών. Σύμφωνα με αριθμητικά αποτελέσματα, το πεδίο μετατοπίσεων στην πλευρική επιφάνεια του κυλίνδρου παρέχει χρήσιμες πληροφορίες για την εξαγωγή της θέσης και του μεγέθους του εγκλεισμού. Ειδικότερα, η θέση ταυτοποιείται από απλή θεώρηση των δεδομένων, ενώ μόνο μια επαρκής εκτίμηση της διαμέτρου μπορεί να επιτευχθεί. Αυτό το γεγονός συνιστά το πρώτο στάδιο μιας μεθόδου για την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος, δηλαδή, του εντοπισμού της θέσης του εγκλεισμού και της εκτίμησης των διαστάσεων του διαμέσου μετρήσεων των μετατοπίσεων στις επιφάνειες του κυλίνδρου.

7.2 Διατύπωση του προβλήματος

Θεωρούμε ένα κυλινδρικό σώμα ακτίνας a και μήκους d από ελαστικό ομογενές και ισотροπικό υλικό όγκου V που χαρακτηρίζεται από τις σταθερές Lamé λ , μ , και την πυκνότητα ρ . Εντός του κυλίνδρου υπάρχει ένας σφαιρικός εγκλεισμός, ακτίνας b , από ιδεατό ρευστό με πυκνότητα ρ_f και ταχύτητα διάδοσης c_f , που είναι κεντραρισμένος στο αυθαίρετο σημείο O (z_1, z_2 δεικνύουν την απόστασή του από τις κάθετες επιφάνειες).

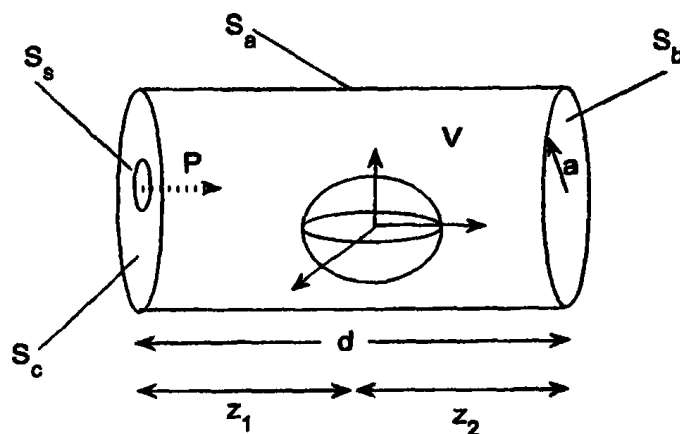
Η ανάλυση που ακολουθεί περιλαμβάνει δύο διακριτά συστήματα συντεταγμένων, ένα στο σημείο O , που είναι τοπικό στον εγκλεισμό, και ένα δεύτερο τοποθετημένο στο σημείο O' , πάνω στο άξονα συμμετρίας του κυλίνδρου (δες Εικόνα 7.2).

Θεωρούμε ότι ένα κάθετο, αρμονικό και ομοιόμορφο φορτίο πίεσης με συχνότητα ω εφαρμόζεται στην επιφάνεια S , του σώματος. Το εν λόγω σύστημα (δηλαδή, ο κύλινδρος με τον εγκλεισμό) αποκρίνεται στη διέγερση και αυτή η δυναμική διαδικασία περιγράφεται από ένα πεδίο μετατόπισης $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$ που αναπτύσσεται στο ελαστικό μέσο, καθώς, επίσης, από το πεδίο δυναμικού της ταχύτητας $\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$ στην περιοχή του ρευστού.

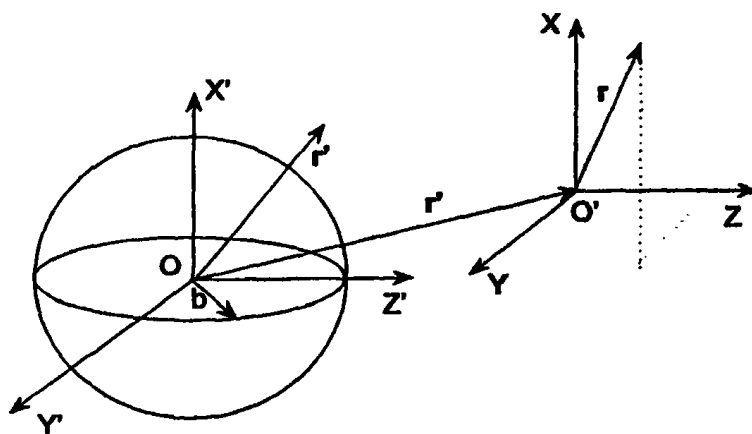
Στα πλαίσια της τρισδιάστατης θεωρίας της ελαστικότητας για απειροστές μετατοπίσεις, το πεδίο μετατοπίσεων $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ ικανοποιεί την εξίσωση Navier που εκφράζεται βάσει του συστήματος συντεταγμένων στο O ως

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) + \rho \omega^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0, \mathbf{r} \in V. \quad (7.1)$$





Εικόνα 7.1: Η γεωμετρία του προβλήματος. S_b είναι το επιφανειακό στοιχείο εφαρμογής του φορτίου πίεσης P , S_a , S_b και S_c είναι οι πλευρικές επιφάνειες του κυλίνδρου.



Εικόνα 7.2: Τα σφαιρικά συστήματα συντεταγμένων O και O'



Εισάγοντας τις αδιάστατες μεταβλητές $\mathbf{r}' = \frac{\mathbf{r}}{a}$, $\Omega = \frac{\omega a}{c_p}$ στην (7.1) ανακτούμε την ακόλουθη εξίσωση

$$c_s' \nabla'^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}') + (1 - c_s'^2) \nabla' \nabla' \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}') + \Omega^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}') = 0, \quad (7.2)$$

όπου $\nabla' = a \nabla$, $c_s' = \frac{c_s}{c_p}$, $c_p = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{1/2}$, $c_s = \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^{1/2}$.

Ακόμη, η κίνηση ενός μη-κολλώδους και αστροβίλλου ρευστού που υφίσταται μικρές παραμορφώσεις, περιγράφεται από το δυναμικό ταχύτητας $\Phi(\mathbf{r}, t)$ του οποίου το μη-χρονοεξαρτώμενο τμήμα του ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz $\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) + \frac{\omega^2}{c_f^2} \Phi(\mathbf{r}) = 0$, ή σε αδιάστατη μορφή:

$$\nabla'^2 \Phi(\mathbf{r}') + k_f'^2 \Phi(\mathbf{r}') = 0, \quad (7.3)$$

όπου $c_f' = \frac{c_f}{c_p}$ και $k_f' = \frac{\Omega}{c_f'}$. Η πίεση $P(\mathbf{r}, t)$ στο ρευστό εξάγεται από το δυναμικό της ταχύτητας ως $P(\mathbf{r}, t) = -\rho_f \left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right)$, ή το μη-χρονοεξαρτώμενο τμήμα του σε αδιάστατη μορφή ως

$$P'(\mathbf{r}') = \frac{P(\mathbf{r}')}{\mu} = i\Omega \rho_f' \frac{1}{c_s'^2} \Phi(\mathbf{r}'), \quad (7.4)$$

όπου $\rho_f' = \rho_f/\rho$. Το πεδίο μετατόπισης του ρευστού $\mathbf{u}^f(\mathbf{r}')$ και η αντίστοιχη ταχύτητα $\mathbf{v}^f(\mathbf{r}') = -i\Omega \mathbf{u}^f(\mathbf{r}')$ εξάγονται εύκολα από το δυναμικό διαμέσου της σχέσης

$$\mathbf{u}^f(\cdot) = \frac{i}{\Omega} \nabla' \Phi(\cdot) \quad (7.5)$$

Η παρουσία της πηγής διέγερσης απαιτεί τη μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος βάσει των συνοριακών συνθηκών στις επιφάνειες S_a, S_b, S_c, S_f και S_s (δες Ευκόνα 7.1). Πρώτον, θεωρούμε ότι οι επιφάνειες S_w , $w = \{a, b\}$ και $S_c \setminus S_s$ είναι ελεύθερες τάσεων, δηλαδή

$$\mathbf{T}\mathbf{u}(\mathbf{r}') = 0, \quad \mathbf{r}' \in S', \quad (7.6)$$

όπου $\mathbf{T} = 2\mu' \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla' + \lambda' \hat{\mathbf{n}} \nabla' \cdot + \mu' \hat{\mathbf{n}} \times \nabla' \times$, δηλώνει τον αδιάστατο τανυστή τάσεων. Επιπλέον, S' είναι η εξωτερική επιφάνεια του κυλίνδρου εκτός της επιφάνειας εφαρμογής της πηγής S_s , δηλαδή $S' = (S_a \cup S_b \cup S_c) \setminus S_s$, $\hat{\mathbf{n}}$ είναι το μοναδιαίο εξωτερικό εγκάθετο διάνυσμα στην S', S_s, S_f , και $(\lambda', \mu') = (\lambda/\mu, 1)$. Επίσης, το πεδίο διέγερσης περιγράφεται από τη σχέση

$$P_s(\mathbf{r}') = -P_s' \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r}' \in S_s, \quad (7.7)$$

όπου P_s' δηλώνει ένα αυθαίρετο σταθερό πλάτος. Συνεπώς, η ακόλουθη συνθήκη ισχύει στην S_s

$$\mathbf{T}\mathbf{u}(\mathbf{r}') = -P_s' \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r}' \in S_s. \quad (7.8)$$

Θεωρώντας την επιφάνεια του εγκλεισμού, οι συνθήκες της πίεσης και της εγκάθετης συνέχειας



της μετατόπισης πρέπει να ισχύουν:

$$\mathbf{T}\mathbf{u}(\mathbf{r}') = -\mathbf{P}'(\mathbf{r}')\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{r}' \in S_f, \quad (7.9)$$

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}') = \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{u}^f(\mathbf{r}'), \mathbf{r}' \in S_f. \quad (7.10)$$

Τονίζουμε ότι το πρόβλημα που εκφράζεται από τις Εξισώσεις κίνησης (7.2)-(7.3) και τις συνοριακές συνθήκες (7.6), (7.8)-(7.10) ορίζουν ένα καλώς-τοποθετημένο μαθηματικό πρόβλημα.

7.3 Επίλυση του ευθέως προβλήματος

Στην ελαστική περιοχή το πεδίο μετατόπισης αναπαρίσταται σε όρους της πλήρους βάσης των Navier ιδιοσυναρτήσεων, δηλαδή για $\mathbf{r}' \in V$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}') = \sum_{n=0,1,2}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sum_{l=1}^2 \{ \alpha_n^{m,l} \mathbf{L}_n^{m,l}(\mathbf{r}') + \beta_n^{m,l} \mathbf{M}_n^{m,l}(\mathbf{r}') + \gamma_n^{m,l} \mathbf{N}_n^{m,l}(\mathbf{r}') \}, \quad (7.11)$$

όπου η άθροιση επί του n για τα δύο τελευταία διανύσματα αρχίζει από $n=1$, ενώ για το πρώτο από $n=0$. Στα παραπάνω (δες [82])

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_n^{m,l}(\mathbf{r}') &= \dot{g}_n^l(k_p' r') \mathbf{P}_n^m(\hat{\mathbf{r}}) + \sqrt{n(n+1)} \frac{g_n^l(k_p' r')}{k_p' r'} \mathbf{B}_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \\ \mathbf{M}_n^{m,l}(\mathbf{r}') &= \sqrt{n(n+1)} g_n^l(k_s' r') \mathbf{C}_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \\ \mathbf{N}_n^{m,l}(\mathbf{r}') &= \left(\begin{array}{c} n(n+1) \frac{\dot{g}_n^l(k_s' r')}{k_s' r'} \mathbf{P}_n^m(\hat{\mathbf{r}}) + \\ \sqrt{n(n+1)} \left[\dot{g}_n^l(k_s' r') + \frac{g_n^l(k_s' r')}{k_s' r'} \right] \mathbf{B}_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \end{array} \right), \end{aligned} \quad (7.12)$$

όπου $k_p' = \frac{\Omega}{c_p}$, $k_s' = \frac{\Omega}{c_s}$, $g_n^1(z)$ και $g_n^2(z)$ αναπαριστούν τις σφαιρικές Bessel συναρτήσεις πρώτου είδους και τις Hankel συναρτήσεις πρώτου είδους, αντίστοιχα, και $\dot{g}_n^l(z)$ δηλώνουν παραγώγιση αναφορικά με το όρισμα. Οι συναρτήσεις $\mathbf{P}_n^m(\hat{\mathbf{r}})$, $\mathbf{B}_n^m(\hat{\mathbf{r}})$, και $\mathbf{C}_n^m(\hat{\mathbf{r}})$ είναι οι σφαιρικές διανυσματικές αρμονικές που είναι ορισμένες στη μοναδιαία σφαίρα και εισήχθησαν από τον Hansen [55]. Σε σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ) , ορίζονται ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_n^m(\hat{\mathbf{r}}) &= \hat{\mathbf{r}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \\ \mathbf{B}_n^m(\hat{\mathbf{r}}) &= \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \left\{ \hat{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right\} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \\ \mathbf{C}_n^m(\hat{\mathbf{r}}) &= \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \left\{ \hat{\theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} - \hat{\phi} \frac{\partial}{\partial \theta} \right\} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \end{aligned} \quad (7.13)$$



όπου $\hat{\theta}$ και $\hat{\phi}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα στις θ και ϕ διευθύνσεις, αντίστοιχα, $Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) = P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi}$ είναι μιγαδικές βαθμωτές σφαιρικές αρμονικές και $P_n^m(\cos \theta)$ είναι οι γνωστές Legendre συναρτήσεις. Τελικά, οι συναρτήσεις $TL_n^{m,l}(\hat{\mathbf{r}})$, $TM_n^{m,l}(\hat{\mathbf{r}})$ και $TN_n^{m,l}(\hat{\mathbf{r}})$ που λαμβάνονται όταν ο τελεστής τάσεων $\mathbf{T}$ εφαρμόζεται στα Navier αναπτύγματα δίνονται ως (δες [82] και [19]):

$$\begin{aligned} TL_n^{m,l}(\hat{\mathbf{r}}) &= A_n^l(k_p'; r') P_n^m(\hat{\mathbf{r}}) + B_n^l(k_p'; r') B_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \\ TM_n^{m,l}(\hat{\mathbf{r}}) &= C_n^l(k_s'; r') C_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \\ TN_n^{m,l}(\hat{\mathbf{r}}) &= D_n^l(k_s'; r') P_n^m(\hat{\mathbf{r}}) + E_n^l(k_s'; r') B_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} A_n^l(k_p'; r') &= -\left[\frac{4}{r'} \dot{g}_n^l(k_p' r') + 2k_p' \left(1 - \frac{n(n+1)}{k_p'^2 r'^2} + \lambda' k_p' \right) g_n^l(k_p' r') \right], \\ B_n^l(k_p'; r') &= 2\sqrt{n(n+1)} \left[\frac{1}{r'} \dot{g}_n^l(k_p' r') - \frac{g_n^l(k_p' r')}{k_p' r'^2} \right], \\ C_n^l(k_s'; r') &= \sqrt{n(n+1)} \left[k_s' \dot{g}_n^l(k_s' r') - \frac{1}{r'} g_n^l(k_s' r') \right], \\ D_n^l(k_s'; r') &= 2n(n+1) \left[\frac{\dot{g}_n^l(k_s' r')}{r'} - \frac{g_n^l(k_s' r')}{k_s' r'^2} \right], \\ E_n^l(k_s'; r') &= \sqrt{n(n+1)} \left[-2 \frac{\dot{g}_n^l(k_s' r') - k_s' r' g_n^l(k_s' r')}{r'} + 2 \frac{n(n+1)-1}{k_s' r'^2} g_n^l(k_s' r') \right]. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Στην περίπτωση ρευστού, το δυναμικό ταχύτητας Φ δίνεται ως:

$$\Phi(\mathbf{r}') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[c_n^m j_n(k_f' r') P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi} \right], \quad (7.15)$$

όπου μόνο $l = 1$ λαμβάνεται ώστε να πιστοποιηθεί ότι το Φ παραμένει φραγμένο. Το πεδίο μετατόπισης στο ρευστό, θεωρώντας τις Εξισώσεις (7.5) και (7.15), εκφράζεται ως:

$$\mathbf{u}^f(\mathbf{r}') = \frac{i}{c_f'} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[c_n^m j_n(k_f' r') \mathbf{P}_n^m(\hat{\mathbf{r}}) + c_n^m j_n(k_f' r') \frac{\sqrt{n(n+1)}}{r'} \mathbf{B}_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \right]. \quad (7.16)$$

Επίσης, αντικαθιστώντας την Εξ. (7.15) για το δυναμικό ταχύτητας Φ στην Εξ. (7.4), το ανάπτυγμα για την πίεση λαμβάνει τη μορφή:

$$P'(\mathbf{r}') = i\Omega \rho_f' \frac{1}{c_f'^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[c_n^m j_n(k_f' r') P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi} \right]. \quad (7.17)$$



Δεδομένου ότι οι εκφράσεις (7.11) και (7.15) ικανοποιούν τις Εξισώσεις (7.2) και (7.3), αντίστοιχα, παραμένει να βεβαιωθεί ότι οι συνοριακές συνθήκες (7.6), (7.8)-(7.10) ικανοποιούνται.

Η εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών στην S_f δίνει ότι για $\mathbf{r}' \in S_f$, όπου $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_f' = b/a$:

$$\mathbf{T}\mathbf{u}(\mathbf{r}') = -P'(\mathbf{r}')\hat{\mathbf{r}} \quad \eta$$

$$\sum_{l=1}^2 [a_n^{m,l} A_n^l(k_p'; r_f') + \gamma_n^{m,l} D_n^l(k_s'; r_f')] = -i\Omega\rho_f' \frac{1}{c_f^2} c_n^m j_n(k_f' r_f'), \quad (7.18)$$

$$\sum_{l=1}^2 [a_n^{m,l} B_n^l(k_p'; r_f') + \gamma_n^{m,l} E_n^l(k_s'; r_f')] = 0, \quad (7.19)$$

$$\sum_{l=1}^2 [\beta_n^{m,l} C_n^l(k_s'; r_f')] = 0, \quad (7.20)$$

$$\text{και } \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}') = \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{u}^f(\mathbf{r}'), \quad \eta$$

$$\sum_{l=1}^2 \left[a_n^{m,l} g_n^l(k_p' r_f') + \gamma_n^{m,l} n(n+1) \frac{g_n^l(k_s' r_f')}{k_s' r_f'} \right] = \frac{i}{c_f^2} c_n^m j_n'(k_f' r_f'). \quad (7.21)$$

Επιλύοντας το σύστημα των Εξισώσεων (7.18)-(7.21) εξαγάγουμε

$$\beta_n^{m,2} = -\frac{C_n^1(k_s'; r_f')}{C_n^2(k_s'; r_f')} \beta_n^{m,1}, \quad n \geq 1, \quad (7.22)$$

$$a_0^{0,2} = c_0^0 F_{12}, \quad (7.23)$$

$$a_0^{0,1} = \frac{F_2}{F_1} c_0^0, \quad (7.24)$$

$$a_n^{m,1} = \sum_{l=1}^2 \gamma_n^{m,l} F_{10}(l; n), \quad n \geq 1, \quad (7.25)$$

$$a_n^{m,2} = -\sum_{l=1}^2 \gamma_n^{m,l} F_{11}(l; n), \quad n \geq 1, \quad (7.26)$$

όπου οι συναρτήσεις F_i , $i = 1, \dots, 12$ δίνονται στο Παράρτημα Α. Εισάγοντας αυτές τις εκφράσεις στην Εξ.(7.11), το πεδίο $\mathbf{u}(\mathbf{r}')$ λαμβάνει τη μορφή

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{r}') = & c_0^0 \left(F_{12} L_0^{0,2} + \frac{F_2}{F_1} L_0^{0,1} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ \beta_n^{m,1} \left(M_n^{m,1} - \frac{C_n^1}{C_n^2} M_n^{m,2} \right) + \right. \\ & \left. \sum_{l=1}^2 \gamma_n^{m,l} (F_{10} L_n^{m,1} - F_{11} L_n^{m,2} + N_n^{m,l}) \right\}. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Αυτή η μορφή περιέχει λιγότερους άγνωστους συντελεστές, δηλαδή τους $\{c_0^0, \beta_n^{m,1}, \gamma_n^{m,l}\}$, σε



αντίθεση με την Εξ.(7.11) που περιέχει τους $\{a_n^{m,l}, \beta_n^{m,1}, \gamma_n^{m,l}\}$. Αυτή η αντικατάσταση συνεπάγεται πιο βολικό χειρισμό των συνοριακών συνθηκών.

Το ανάπτυγμα οφείλει να ικανοποιεί τις υπόλοιπες συνοριακές συνθήκες στην επιφάνεια του κυλίνδρου. Προκειμένου να υλοποιήσουμε αναλυτικές τεχνικές, πρέπει να υιοθετήσουμε την παραπάνω παράσταση σε ένα σύστημα συντεταγμένων κατάλληλο για την κυλινδρική γεωμετρία. Αυτό είναι απαραίτητο στην περίπτωση που ο εγκλεισμός δεν είναι επί του άξονα συμμετρίας z' . Τότε, η χρήση προσθετικών θεωρημάτων για τα διανύσματα του Hansen παράγουν νέες εκφράσεις για το $u(\vec{r}')$ σε όρους των σφαιρικών διανυσματικών κυματοσυναρτήσεων, αναφορικά με το O' ($\vec{r}_0 = (r_0, \theta_0, \phi_0)$) που ανήκει στον άξονα συμμετρίας z' του ελαστικού κυλίνδρου (δες Εικ.7.2). Συνεπώς, θεωρούμε τις εκφράσεις

$$L_n^{m,l} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{r=-s}^s A(r, s; m, n, l) L'_{rs1}, \quad (7.28)$$

$$M_n^{m,l} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{r=-s}^s [A_{rs}^{mn}(m, n, l) M'_{rs1} + B_{rs}^{mn}(m, n, l) N'_{rs1}], \quad (7.29)$$

$$N_n^{m,l} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{r=-s}^s [A_{rs}^{mn}(m, n, l) N'_{rs1} + B_{rs}^{mn}(m, n, l) M'_{rs1}], \quad (7.30)$$

όπου $A(r, s; m, n, l)$, $A_{rs}^{mn}(m, n, l)$, $B_{rs}^{mn}(m, n, l)$ είναι συντελεστές, υπολογισμένοι από τον Cruzan [37], και L'_{rs1} , M'_{rs1} , N'_{rs1} είναι της ίδιας μορφής με τα $L_n^{m,l}$, $M_n^{m,l}$, $N_n^{m,l}$, αλλά αναφέρονται στο O' σύστημα. Το πεδίο μετατοπίσεων, σύμφωνα με το O' , είναι, τελικά, εκφρασμένο ως

$$u(\vec{r}') = c_0^0 \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{r=-s}^s \left[F_{12} A(r, s; 0, 0, 2) L'_{rs2} + \frac{F_2}{F_1} A(r, s; 0, 0, 1) L'_{rs1} \right] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ \frac{\beta_n^{m,1}}{\sum_{l=1}^2 \gamma_n^{m,l}} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{r=-s}^s \Theta_1(r, s; m, n) + \right. \\ \left. \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{r=-s}^s \Theta_2(r, s; m, n, l) \right\}.$$

όπου

$$\Theta_1(r, s; m, n) = \left(\frac{[A_{rs}^{mn}(m, n, 1) M'_{rs1} + B_{rs}^{mn}(m, n, 1) N'_{rs1}] - \frac{C_1^1}{C_n^2} [A_{rs}^{mn}(m, n, 2) M'_{rs2} + B_{rs}^{mn}(m, n, 2) N'_{rs2}]}{C_n^2} \right), \\ \Theta_2(r, s; m, n, l) = \left(\frac{F_{10} A(r, s; m, n, 1) L'_{rs1} - F_{11} A(r, s; m, n, 2) L'_{rs2} + [A_{rs}^{mn}(m, n, l) N'_{rs1} + B_{rs}^{mn}(m, n, l) M'_{rs1}]}{C_n^2} \right).$$

Δεδομένου ότι ο επιφανειακός τελεστής τάσεων $\mathbf{T}$ είναι αμετάβλητος σε μετασχηματισμούς συστημάτων συντεταγμένων, εισάγοντας τις παραπάνω εκφράσεις στην Εξ.(7.6) και Εξ.(7.8),



δίδεται ο τελεστής τροπών T άμεσα· ονομαστικά (δες [37])

$$TL'_{r,2} = A_s^2(k'_p; \tilde{r}') P'_s(\tilde{r}) + B_s^2(k'_p; \tilde{r}') B'_s(\tilde{r}),$$

όπου A_s^2, B_s^2 είναι συντελεστές όμοιοι με αυτούς των Εξισώσεων (7.14), με τη διαφορά ότι εκφράζονται σε όρους του νέου συστήματος συντεταγμένων.

Το ακόλουθο βήμα, μετά την εισαγωγή του $u(\tilde{r}')$ στις Εξισώσεις (7.6), (7.8) και εκφράζοντας την παράσταση $[Tu(\tilde{r}')]$ σε όρους των $(\tilde{r}', \tilde{\theta}, \tilde{\phi})$, συνίσταται στον μετασχηματισμό των O' σφαιρικών συντεταγμένων σε κυλινδρικές, δηλαδή, $\tilde{z}' = \tilde{r}' \cos \tilde{\theta}$, $\tilde{\rho}' = \tilde{r}' \sin \tilde{\theta}$ και $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}$.

Αναφέρουμε εδώ ότι η Εξ.(7.6) απαιτεί ιδιαίτερο χειρισμό. Για παράδειγμα, θεωρώντας την επιφάνεια $S_a = \{\tilde{r}' = (\tilde{\rho}', \tilde{\phi}, \tilde{z}') : \tilde{\rho}' = 1, \tilde{\phi} \in [0, 2\pi], \tilde{z}' \in [-z'_1, z'_2]\}$, η Εξ.(7.6) λαμβάνει τη μορφή $\hat{\rho}[\cdot]_{\tilde{\rho}'} + \hat{\phi}[\cdot]_{\tilde{\phi}} + \hat{z}[\cdot]_{\tilde{z}'} = 0$, όπου $\{\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{z}\}$ δηλώνουν την ορθοκανονική βάση για το σύστημα κυλινδρικών συντεταγμένων στο O' , και $[\cdot]_{\tilde{\rho}'}, [\cdot]_{\tilde{\phi}}, [\cdot]_{\tilde{z}'}$ είναι εκφράσεις από άπειρα και πεπερασμένα αθροίσματα γινομένων συναρτήσεων των $\tilde{\phi}, \tilde{z}'$ με παραμέτρους n, m, r, s και συντελεστές $c_0^0, \beta_n^{m,1}, \gamma_n^{m,1}$. Συνεπώς, τρεις νέες ανεξάρτητες εξισώσεις μπορούν να εξαχθούν από αυτήν τη μορφή, δηλαδή, $\hat{\rho}[\cdot]_{\tilde{\rho}'} + \hat{\phi}[\cdot]_{\tilde{\phi}} + \hat{z}[\cdot]_{\tilde{z}'} = 0 \Leftrightarrow [\cdot]_{\tilde{\rho}'} = 0, [\cdot]_{\tilde{\phi}} = 0, [\cdot]_{\tilde{z}'} = 0$. Δυστυχώς, αυτές οι "ανεξάρτητες" εξισώσεις είναι εξαιρετικά σύνθετες εκφράσεις των συναρτήσεων των $\tilde{\phi}$ και $\tilde{z}'$ μεταβλητών. Προκειμένου να λάβουμε ένα αλγεβρικό σύστημα από γραμμικώς ανεξάρτητες εξισώσεις για του άγνωστους συντελεστές $c_0^0, \beta_n^{m,1}$ and $\gamma_n^{m,1}$, χρησιμοποιούμε ένα σύνολο από συναρτήσεις βάσης, ονομαστικά τις $\{f_n(\tilde{\phi}, \tilde{z}')\}$, όπως ακολουθεί. Θεωρούμε $[\cdot]_{\tilde{z}'} = 0$. Τότε, τα ακόλουθα επιφανειακά ολοκληρώματα επί των $\tilde{\phi}'$ και $\tilde{z}'$:

$$\begin{aligned} \int f_0(\tilde{\phi}, \tilde{z}') [\cdot]_{\tilde{z}'} d\tilde{\phi} d\tilde{z}' &= 0, \\ \int f_1(\tilde{\phi}, \tilde{z}') [\cdot]_{\tilde{z}'} d\tilde{\phi} d\tilde{z}' &= 0, \\ &\vdots \\ \int f_N(\tilde{\phi}, \tilde{z}') [\cdot]_{\tilde{z}'} d\tilde{\phi} d\tilde{z}' &= 0, \end{aligned} \quad (7.31)$$

δίνουν μορφή σε ένα σύστημα από N γραμμικώς ανεξάρτητων εξισώσεων των $c_0^0, \beta_n^{m,1}, \gamma_n^{m,1}$, όπου N είναι μια παράμετρος αποκοπής για τη λύση σε μορφή σειράς, δηλαδή, το N συναπάγεται ότι $n = 1 \dots N_0$, ενώ $N_0 = N_0(N)$.

Τονίζουμε ότι τα προσθετικά θεωρήματα παρέχουν τη δυνατότητα του αναλυτικού χειρισμού τέτοιων ολοκληρωμάτων, κυρίως, λόγω των κατάλληλων συστημάτων συντεταγμένων που υιοθετήθηκαν στο παρόν πρόβλημα. Επιπλέον, αναφέρουμε ότι η ενιαία μεθοδολογία προβολών που εφαρμόστηκε ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος, και καθιστά την αντιμετώ-



πιση των κάθετων άκρων του κυλίνδρου βατή χωρίς τη δημιουργία ποιοτικών διαφορών με την κυρτή επιφάνειά του.

Επιπρόσθετα, τονίζουμε ότι η αντίστοιχη ανάλυση που αφορά της επιφάνεια S_s γεννά ένα σύνολο ολοκληρωμάτων που εμφανίζονται στο δεξιο σκέλος αυτών των εξισώσεων. Αυτά τα ολοκληρώματα προέρχονται από το φορτίο πίεσης στην επιφάνεια S_s και συνιστούν γνωστούς όρους χωρίς άμεση εξάρτηση στους αγνώστους συντελεστές του προβλήματος.

Τελικά, συλλέγουμε αυτά τα συστήματα των εξισώσεων ώστε να δώσουμε μορφή σε ένα γραμμικό σύστημα $AX=B$, όπου X δηλώνει το διάνυσμα-στήλη των άγνωστων συντελεστών $c_0^0, \beta_n^{m,1}, \gamma_n^{m,l}$, ο A περιέχει ολοκληρώματα πάνω σε όλες τις συναρτήσεις που εμφανίζονται στις αγκύλες (εννοούμε ότι περιέχεται στην $[\cdot]_z$, μέσα στα επιφανειακά ολοκληρώματα), και B είναι το διάνυσμα της "πηγής", λόγω του φορτίου πίεσης. Συνεπώς, $X=A^{-1}B$ και η λύση είναι:

$$u(\tilde{r}') = c_0^0 \sum_{s=0}^{N_1} \sum_{r=-s}^s \left[F_{12} A(r, s; 0, 0, 2) L'_{rs2} + \frac{F_2}{F_1} A(r, s; 0, 0, 1) L'_{rs1} \right] + \\ + \sum_{n=1}^{N_0} \sum_{m=-n}^n \left\{ \beta_n^{m,1} \sum_{s=0}^{N_2} \sum_{r=-s}^s \Theta_3(r, s; m, n) + \sum_{l=1}^2 \gamma_n^{m,l} \sum_{s=0}^{N_3} \sum_{r=-s}^s \Theta_4(r, s; m, n, l) \right\},$$

όπου

$$\Theta_3(r, s; m, n) = \left(\frac{[A_{rs}^{mn}(m, n, 1) M'_{rs1} + B_{rs}^{mn}(m, n, 1) N'_{rs1}] -}{\frac{C_1^1}{C_2^2}} [A_{rs}^{mn}(m, n, 2) M'_{rs2} + B_{rs}^{mn}(m, n, 2) N'_{rs2}] \right), \\ \Theta_4(r, s; m, n, l) = \left(\frac{F_{10} A(r, s; m, n, 1) L'_{rs1} - F_{11} A(r, s; m, n, 2) L'_{rs2} +}{[A_{rs}^{mn}(m, n, l) N'_{rs1} + B_{rs}^{mn}(m, n, l) M'_{rs1}]} \right),$$

και N_1, N_2, N_3 είναι κατάλληλα επιλεγμένοι παράμετροι αποκοπής ώστε οι αντίστοιχες πεπερασμένες σειρές να προσεγγίζουν επαρκώς τα όριά τους. Ειδικά, είναι κατανοητό ότι η έκφραση $\sum_{s=0}^{N_1} \sum_{r=-s}^s [F_{12} A(r, s; 0, 0, 2) L'_{rs2}]$ προσεγγίζει το όριο $\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{r=-s}^s [F_{12} A(r, s; 0, 0, 2) L'_{rs2}]$ και όμοια για τους υπόλοιπους όρους.

7.4 Αριθμητικά αποτελέσματα

Το πρόβλημα υπό θεώρηση αναφέρεται στην περίπτωση που ο εγκλεισμός βρίσκεται κεντραρισμένος στον άξονα συμμετρίας του κυλίνδρου. Το φορτίο πίεσης εφαρμόζεται στην κάθετη επιφάνεια S_b , και το κέντρο της S_s περιοχής ανήκει, επίσης, στον άξονα συμμετρίας. Για αυτήν τη γεωμετρία, το τρισδιάστατο πρόβλημα εκφυλλίζεται σε ένα ισοδύναμο δυσδιάστατο. Ο συντελεστής m είναι μηδέν λόγω της αξονοσυμμετρίας του προβλήματος. Το πεδίο μετατόπισης



στον εγκλεισμό έχει τη μορφή:

$$u(r') = c_0^0 \left(F_{12} L_0^{0,2} + \frac{F_2}{F_1} L_0^{0,1} \right) + \sum_{n=1}^N \left\{ \beta_n^{0,1} \left(M_n^{0,1} - \frac{C_n^1}{C_n^2} M_n^{0,2} \right) + \sum_{l=1}^2 \gamma_n^{0,l} (F_{10} L_n^{0,1} - F_{11} L_n^{0,2} + N_n^{0,l}) \right\}. \quad (7.32)$$

Για τις επίπεδες επιφάνειες S_b , S_c , S_s , ένας κατάλληλος χώρος συναρτήσεων είναι οι Bessel συναρτήσεις μηδενικής τάξης, δηλαδή, $J_0(x_i \rho')$, όπου x_i υποδηλώνει την i -th ρίζα της $J_0(x) = 0$. Στην κυρτή επιφάνεια, χρησιμοποιείται μια απλή βάση τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Το διάνυσμα X των $2 \times (3N + 1)$ άγνωστων συντελεστών έχει τη μορφή

$$X = \left[\underbrace{\gamma_1^{0,1} \dots \gamma_N^{0,1}}_{N_{\text{coeffs}}} \underbrace{\gamma_1^{0,2} \dots \gamma_N^{0,2}}_{N_{\text{coeffs}}} \underbrace{\beta_1^{0,1} \dots \beta_N^{0,1}}_{N_{\text{coeffs}}} c_0^0 \underbrace{\gamma_1^{0,1} \dots \gamma_N^{0,1}}_{N_{\text{coeffs}}} \underbrace{\gamma_1^{0,2} \dots \gamma_N^{0,2}}_{N_{\text{coeffs}}} \underbrace{\beta_1^{0,1} \dots \beta_N^{0,1}}_{N_{\text{coeffs}}} c_0^0 \right]^T$$

όπου οι πρώτοι $3N + 1$ συντελεστές δηλώνουν τα πραγματικά μέρη και οι υπόλοιποι τα αντίστοιχα φανταστικά, ενώ T δηλώνει τον ανάστροφο. Θεωρούμε τώρα τον αριθμό των ανεξάρτητων εξισώσεων που λαμβάνονται από τις συνοριακές συνθήκες στις επιφάνειες S_a , S_b , S_c , S_s . Στις επιφάνειες S_a οι εξισώσεις $[\cdot]_{\rho'} = 0$, $[\cdot]_{\psi} = 0$ και $[\cdot]_{z'} = 0$ παρέχουν $2(N_a + 1)$, $2N_a$ και $2N_a$ εξισώσεις, αντίστοιχα. Στις επιφάνειες S_b και S_c παρέχουν $2 \times (3 \times 2N_{bc})$ εξισώσεις και στην S_s επιφάνεια άλλες $3 \times 2N_s$ εξισώσεις (τονίζουμε ότι $2 \times$ δηλώνει ότι τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη μηδενίζονται). Συνεπώς, το σύστημα $AX=B$ παραμένει σύμμορφο όταν $2 \times (3N + 1) = 2 \times (3N_a + 1) + 2 \times (6N_{bc}) + 3 \times (2N_s)$, ή $N = N_a + 2N_{bc} + N_s$.

Οι υπολογισμοί αναφέρονται σε υλικές ιδιότητες που προσομοιάζουν τα δοκίμια τσιμέντου, δηλαδή, $d = 30 \text{ cm}$, $a = 7.5 \text{ cm}$, $E = 26 \times 10^9 \text{ (N/m}^2\text{)}$ είναι ο συντελεστής του Young, $\nu = 0.15$ είναι ο λόγος Poisson και $\rho = 3000 \text{ Kg/m}^3$. Ο σφαιρικός εγκλεισμός θεωρείται ότι περιέχει νερό, δηλαδή $B = 2.2 \times 10^9 \text{ (Pa)}$, $\nu = 0.5$, $c_f = 1493 \text{ m/s}$ και $\rho = 1000 \text{ (Kg/m}^3\text{)}$. Το φορτίο πίεσης είναι της τάξης του 1 MPa , που συνεπάγεται ότι το κανονικοποιημένο πλάτος πίεσης είναι $P'_s \simeq 10^{-4}$. Η κυκλική περιοχή S_s έχει διάμετρο 1.2 cm ώστε να προσομοιώνει ένα σημειακό φορτίο.

Δοκιμάσαμε τα αποτελέσματά μας για μια πλειάδα συχνοτήτων στο συχνοτικό παράθυρο των 50 KHz (όπου το μήκος κύματος για το πρωτεύον πεδίο είναι $\lambda_p \simeq 6 \text{ cm}$) και 350 KHz ($\lambda_p \simeq 9 \text{ mm}$) και εξάγαμε ότι όταν η συχνότητα διέγερσης λαμβάνει τιμές εκτός του παραθύρου, ο συντελεστής αποκοπής N αυξάνεται ιδιαίτερα, γεγονός που οδηγεί σε μεγάλο υπολογιστικό φόρτο με χαμηλή ακρίβεια. Ωστόσο, είναι αξιοσημείωτο ότι η σύγκλιση του αριθμητικού σχήματος επιτυγχάνεται σε χαμηλό επίπεδο αποκοπής, και η ευστάθεια της μεθόδου βελτιώνεται σημαντικά όταν το μήκος κύματος είναι συγκρίσιμο της χαρακτηριστικής διάστασης του εγκλεισμού. Εντούτοις, σε κάθε περίπτωση, ελέγχουμε τα αποτελέσματά μας διαμέσου της ικανοποίησης, σε επαρκή πλαίσια ακρίβειας, των συνοριακών συνθηκών.



Πρώτα, η Εικ.7.3 παριστά ένα δοκιμαστικό παράδειγμα που πιστοποιεί την ευστάθεια της λύσης μας. Δείχνει πως τα πεδία μετατόπισης εντός (συμπαγής γραμμή) και εκτός (ασυνεχής γραμμή) του εγκλεισμού ικανοποιούν τη συνθήκη συνέχειας των μετατοπίσεων στην επιφάνεια S_f .

Στο επόμενο σύνολο αποτελεσμάτων, οι Εικόνες (7.4)-(7.5) παρουσιάζουν το κανονικοποιημένο πεδίο μετατοπίσεων στην επιφάνεια S_a για δύο διαφορετικές περιπτώσεις του λ_p στις οποίες είναι συγκρίσιμο με τη διάμετρο του εγκλεισμού $D = 2b$, όπου $D = 2a/3 = 5 \text{ cm}$. Επίσης, ο εγκλεισμός είναι τοποθετημένος στο $z_1 = 7.5 \text{ cm}$. Ειδικά, η Εικ.7.4 αναφέρεται στην περίπτωση $\lambda_p = D/4 = 1.25 \text{ cm}$ και η Εικ.7.5 στην $\lambda_p = D/3 \simeq 1.67 \text{ cm}$.

Το ακόλουθο σύνολο Εικόνων αποτελείται από τις (7.6)-(7.7) και αντιστοιχεί στην περίπτωση που ο εγκλεισμός είναι πλησίον του φορτίου πίεση. Συνεπώς, θέτοντας $D = 5 \text{ cm}$ και τοποθετώντας το O στη θέση $z_1 = 5 \text{ cm}$, λαμβάνουμε, για $\lambda_p = D/3 \simeq 1.67 \text{ cm}$, το γράφημα της Εικ.7.6 και για $\lambda_p = D/4 = 1.25 \text{ cm}$ το γράφημα της Εικ.7.7.

Οι δύο τελευταίες Εικόνες αναφέρονται στην περίπτωση που το O βρίσκεται στη θέση $z_1 = 7.5 \text{ cm}$, και η συχνότητα διέγερσης είναι τέτοια ώστε $\lambda_p = D/4$. Τότε, η διάμετρος του εγκλεισμού αλλάζει· εξετάζουμε το πεδίο όταν $b = a/2 = 3.75 \text{ cm}$ (δες Εικ.7.8) και $b = a/2.5 = 3 \text{ cm}$ (δες Εικ.7.9).

Σύμφωνα με τις παραπάνω Εικόνες, ο εγκλεισμός εμφανίζεται ως μια μικρή διαταραχή στο πεδίο μετατοπίσεων. Με αυτό εννοούμε τη μορφή στο γράφημα που αναπτύσσεται ακριβώς πάνω και περιφερειακά του εγκλεισμού. Το κέντρο αυτής της μορφής, έστω $\tilde{O}$, σχεδόν ταυτίζεται στη θέση με το κέντρο του εγκλεισμού O , ένα γεγονός που υφίσταται καθώς μετακινούμε τον εγκλεισμό κατά μήκος του άξονα συμμετρίας. Επίσης, διαφαίνεται ότι $\tilde{O}$ είναι ένα κρίσιμο σημείο, δεδομένου ότι υφίσταται πάντα αλλαγή του προσήμου της παραγώγου στο σημείο αυτό. Συμπερασματικά, το ανώμαλο σημείο και η διαταραχή διακρίνονται εύκολα με απλή θεώρηση του πεδίου, γεγονός που προσδίδει κύρος στις αριθμητικές δοκιμές που έχουμε διεξάγει.

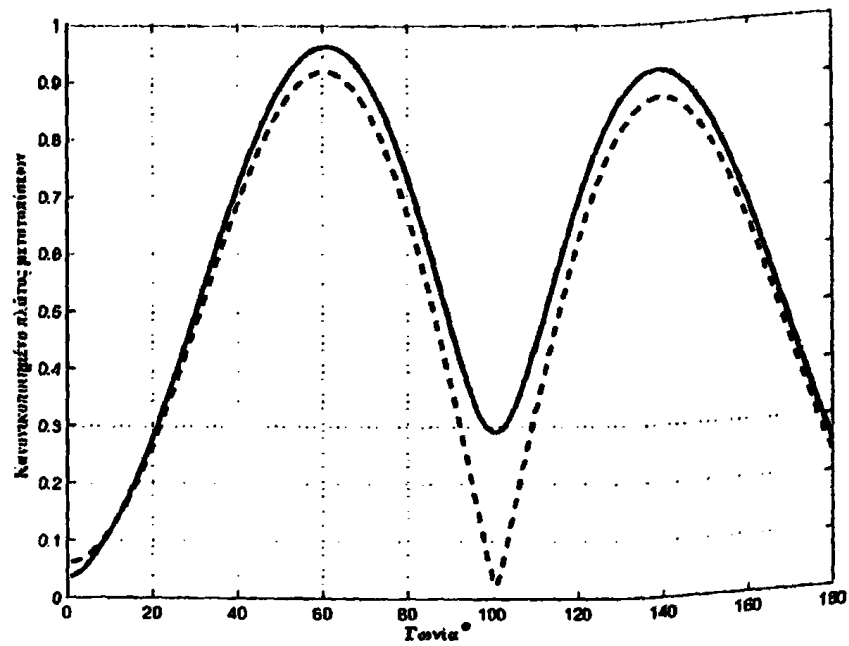
7.5 Συμπεράσματα

Στο παρόν κεφάλαιο υπολογίζεται το αρμονικό πεδίο μετατοπίσεων που δημιουργείται εντός ελαστικού κυλίνδρου, πεπερασμένων διαστάσεων, που περιέχει μια εσωτερική ατέλεια, και χρησιμοποιείται για την εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με τη θέση, τη μορφή και το μέγεθός της.

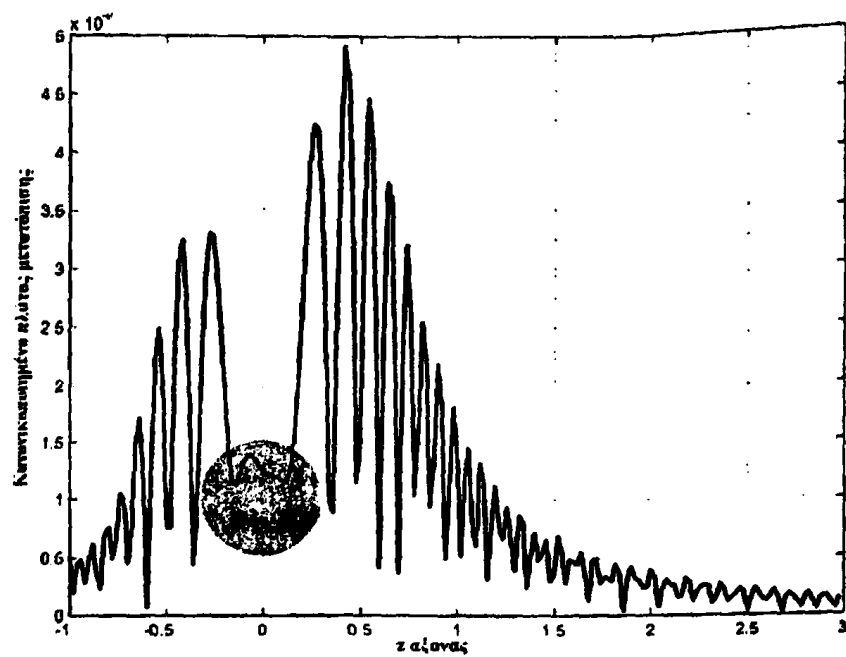
Ειδικότερα, θεωρείται ένας σφαιρικός εγκλεισμός που περιέχει ιδανικό ρευστό και είναι αυθαίρετα τοποθετημένος εντός του ομογενούς και ισотροπικού κυλίνδρου.

Με τη χρήση των Navier ιδιοσυναρτήσεων εξάγεται η αναλυτική λύση για το ευθύ πρόβλημα, στο οποίο το κέντρο του εγκλεισμού ανήκει στο διαμήκη άξονα του κυλίνδρου. Τα λαμβανόμενα αποτελέσματα υπαγορεύουν μια έμμεση μέθοδο επίλυσης του αντίστροφου προβλήματος διά της απλής μέτρησης του πεδίου μετατοπίσεων κατά μήκος της εξωτερικής επιφάνειας του κυλίνδρου

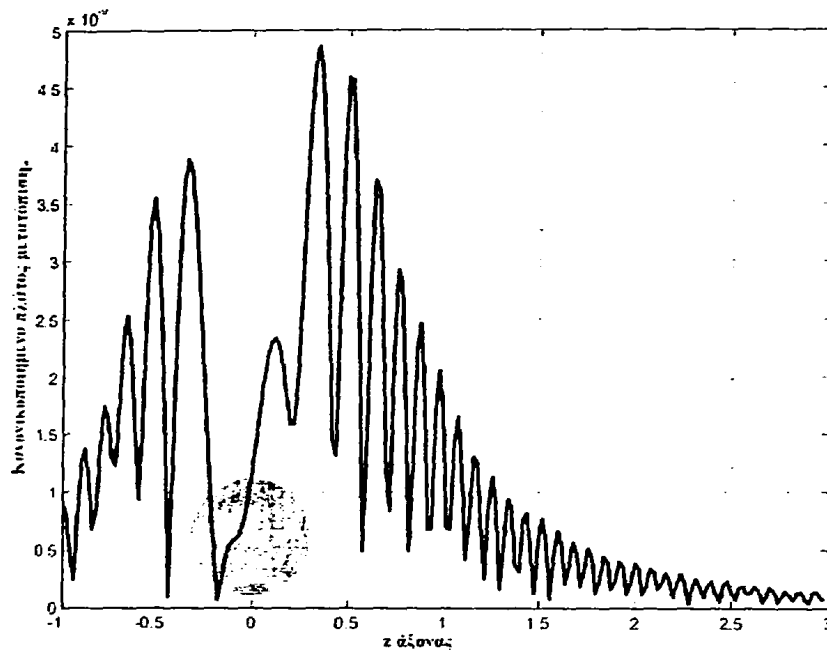




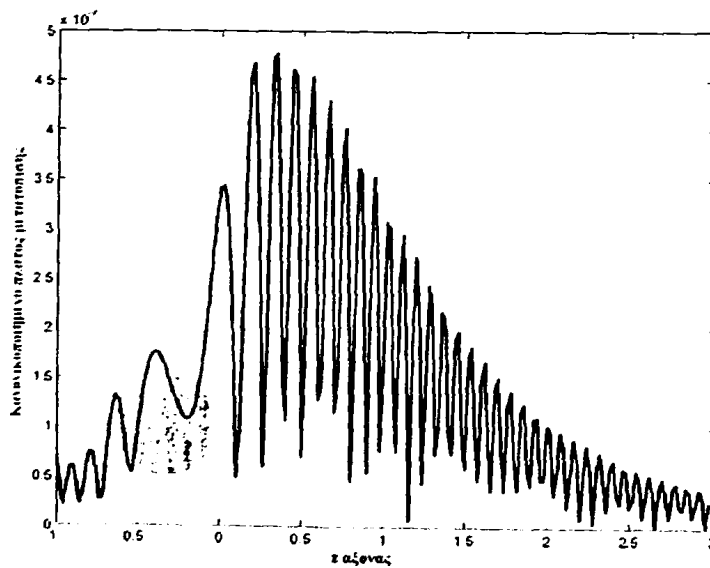
Εικόνα 7.3: Συνθήκη συνέχειας μετατοπίσεων στην επιφάνεια του εγκλεισμού.



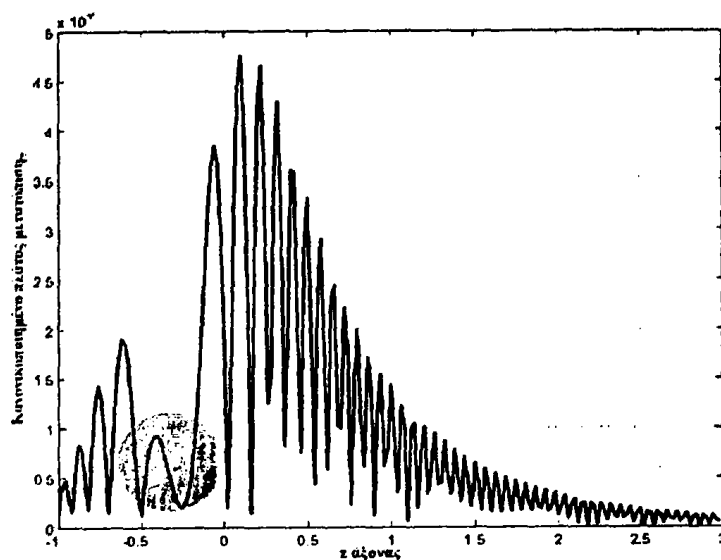
Εικόνα 7.4: Κανονικοποιημένο πεδίο μετατόπισης στην επιφάνεια S_a ($b = a/3, z_1 = 7.5cm, \lambda_p = D/4$).



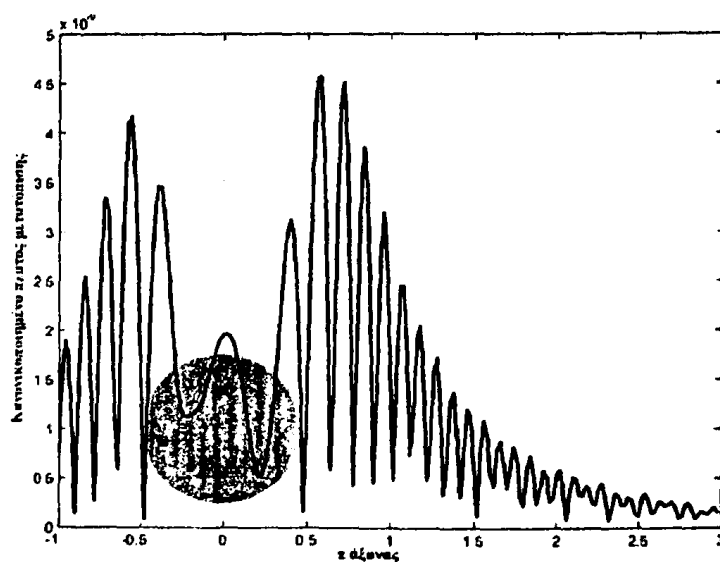
Εικόνα 7.5: Κανονικοποιημένο πεδίο μετατόπισης στην επιφάνεια S_a ($b = a/3, z_1 = 7.5\text{cm}, \lambda_p = D/3$).



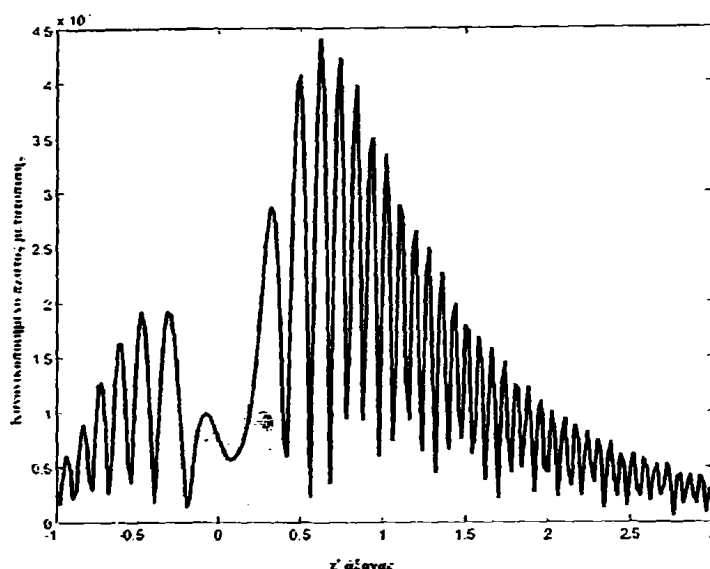
Εικόνα 7.6: Κανονικοποιημένο πεδίο μετατόπισης στην επιφάνεια S_a ($b = a/3, z_1 = 5\text{cm}, \lambda_p = D/3$).



Εικόνα 7.7: Κανονικοποιημένο πεδίο μετωπίας στην επιφάνεια S_a ($b = a/3, z_1 = 5\text{cm}, \lambda_p = D/4$).



Εικόνα 7.8: Κανονικοποιημένο πεδίο μετωπίας στην επιφάνεια S_a ($b = a/2, z_1 = 7.5\text{cm}, \lambda_p = D/4$).



Εικόνα 7.9: Κανονικοποιημένο πεδίο μετατόπισης στην επιφάνεια S_a ($b = a/2.5$, $z_1 = 7.5\text{cm}$, $\lambda_p = D/4$).

S_a , εστιάζοντας σε συγκεκριμένες διαταραχές του σήματος που δημιουργούνται στη γειτονιά του εγκλεισμού. Αυτό το γεγονός, καθώς και ο ενοποιημένος χειρισμός των συνοριακών συνθηκών, διακρίνουν την παρούσα εργασία από το αντίστοιχο πρόβλημα σε άπειρους, σε μήκος, κυματοδηγούς. Σε αυτές τις περιπτώσεις, οι μοντέρνες τεχνικές χρησιμοποιούν ψηφιακά φίλτρα και πύλες για την απομάκρυνση ανακλάσεων σε εγκαθήμες επιφάνειες (flat ends). Αντιθέτως, σε πεπερασμένους κυματοδηγούς, η ελαστική ενέργεια εγκλωβίζεται στον πεπερασμένο χώρο και παρατηρούνται φαινόμενα πολλαπλής σκέδασης. Σε χωρία τύπου κυματοδηγού (wave-guide-type host matrix) μεγάλα ποσά ενέργειας διαδίδονται ως επιφανειακά κύματα, γεγονός που συνεπάγεται ότι δεν δύνανται να αξιοποιηθούν για την ανίχνευση ανομοιογενειών και, ιδιαίτερα, όταν μικρά μήκη κύματος διεγείρονται και ο εγκλεισμός είναι σε απόσταση από εξωτερικές επιφάνειες.

Σε ό,τι αφορά τη δυνατότητα αξιοποίησης των παρόντων αποτελεσμάτων σε μηχανολογικές εφαρμογές, τονίζουμε ότι κυλινδρικά δοκίμια τσιμέντου χρησιμοποιούνται πάντα στην κατασκευαστική βιομηχανία ως μέσα ελέγχου της ποιότητας του μίγματος. Η ανίχνευση ανομοιογενειών στα δείγματα ανακλούν σοβαρά μειονεκτήματα στην καθολική συμπεριφορά της κατασκευής ή κατασκευαστικών τμημάτων που δημιουργούνται από το αυθεντικό μείγμα. Γενικά, τα προβλήματα που αφορούν στην ύπαρξη εγκλεισμών σε συνεχή ελαστικά μέσα είναι εξαιρετικής σπουδαιότητας σε επιστημονικά πεδία, όπως fracture mechanics, μη-καταστροφικό έλεγχο υλικών, συντήρηση και ενίσχυση κατασκευών, εδαφομηχανική, γεωφυσική έρευνα, πετρελαϊκή ανίχνευση κ.λ.π.

Κεφάλαιο 8

Η Μέθοδος Γραμμικής Δειγματοληψίας στην αντίστροφη σκέδαση κοντινού-πεδίου σε διαπερατό ελαστικό σκεδαστή**

8.1 Περίληψη του προβλήματος

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε το πρόβλημα ανακατασκευής θαμμένων διαπερατών σκεδαστών από μετρήσεις κοντινού-πεδίου στα πλαίσια της Μεθόδου Γραμμικής Δειγματοληψίας (Linear Sampling Method-LSM). Το προτεινόμενο σχήμα αντιστροφής βασίζεται σε μια γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση πρώτου είδους της οποίας η λύση καθίσταται μη-φραγμένη όταν το (δοκιμαστικό) σημείο εφαρμογής της Green συναρτήσεως προσεγγίζει το σύνορο του ελαστικού σκεδαστή από το εσωτερικό του. Παρέχουμε, επίσης, το κατάλληλο θεωρητικό υπόβαθρο για την πιστοποίηση (α) των αναγκαίων προβλημάτων μετάδοσης για προβλήματα ελαστοδυναμικής κοντινού-πεδίου και (β) των ιδιοτήτων επιλυσιμότητας της εν λόγω γραμμικής εξίσωσης αναφορικά με διαπερατούς σκεδαστές. Ακόμη, περιλαμβάνουμε και ένα σύνολο αριθμητικών αποτελεσμάτων επιδεικνύοντας τη λειτουργικότητα της μεθόδου ανακατασκευής.

8.2 Μοντελοποίηση του προβλήματος σκέδασης

Σε ό,τι ακολουθεί, αναφερόμαστε στη σκέδαση κοντινού-πεδίου αρμονικών ελαστικών κυμάτων από ένα φραγμένο διαπερατό σκεδαστή $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$, ενσωματωμένο εντός ενός ομογενούς και ισοτροπικού ημιάπειρου ελαστικού χώρου $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (δες Εικ.7.1). Ο σκεδαστής, με σύνορο Γ

**Σχετική δημοσίευση: K Baganas, B B Guzina, A Charalambopoulos and G D Manolis, A linear sampling method for the inverse transmission problem in near-field elastodynamics, *Inverse Problems*, Vol. 22, pp. 1835-53, 2006.



κλάσης C^2 , χαρακτηρίζεται από τις θετικές πραγματικές Lamé σταθερές λ_i και μ_i και πυκνότητα μάζας ρ_i . Οι αντίστοιχες ιδιότητες του περιβάλλοντος χώρου είναι οι λ_e , μ_e και ρ_e . η ελεύθερη επιφάνεια δηλώνεται ως S . Επίσης, εισάγουμε το καρτεσιανό σύστημα αναφοράς $\{O; \xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ ώστε $\xi_3 = 0$ ταυτίζεται με την S . ορίζεται ως $\Omega^- = \Omega \setminus (\Omega_C \cup \Gamma)$ ο διαταραγμένος ημιάπειρος χώρος, και δηλώνεται ως ω η συχνότητα διεγέρσεως. Στη συνέχεια, ο χρονοαρμονικός παράγοντας $e^{i\omega t}$ παραλείπεται λόγω συντομίας.

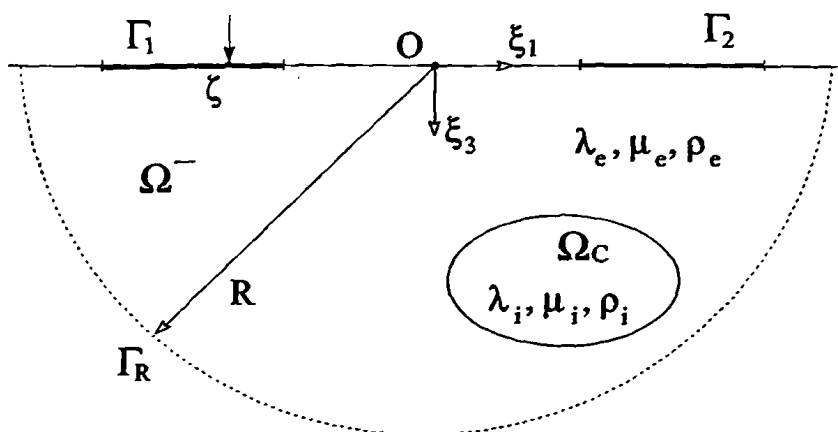
Στη συνέχεια, θεωρούμε το προσπίπτον πεδίο u^{F^*} που γεννάται από μοναδιαία σημειακή πηγή που δρα στο ζ σε μια πεπερασμένη επιφάνεια $\Gamma_1 \subset S$ (δες Εικ.7.1). Τονίζουμε ότι $u^{F^*}(\xi, \zeta) \equiv \hat{u}^k(\xi, \zeta)$, $\xi \in \Omega$, $\zeta \in \Gamma_1$, με $\hat{u}^k(\xi, \zeta)$ να δηλώνει την ελαστοδυναμική Green συνάρτηση μετατοπίσεων για ημιάπειρο χώρο [92] στο ξ λόγω σημειακού φορτίου στο ζ κατά την k συντεταγμένη διεύθυνση ($k=1, 2, 3$). Ορίζοντας το σχεδαζόμενο πεδίο ως $u^{S^*}(\xi, \zeta)$, το ολικό πεδίο μετατοπίσεων $u^k(\xi, \zeta)$ at $\xi \in \Omega^-$ γράφεται ως

$$u^k(\xi, \zeta) = \hat{u}^k(\xi, \zeta) + u^{S^*}(\xi, \zeta). \quad (8.1)$$

Για πληρότητα, το διάνυσμα τροπών $t(\cdot; u)$ που αναφέρεται στο πεδίο μετατόπισης u σε μια ομαλή επιφάνεια $\Sigma \subset \Omega$ με μοναδιαίο εγκάρσιο διάνυσμα n ορίζεται ως

$$t(\xi; u) = n(\xi) \cdot \mathbf{C}_\alpha : \nabla u(\xi), \quad \xi \in \Sigma, \quad (8.2)$$

με $\mathbf{C}_\alpha = \lambda_\alpha \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2 + 2\mu_\alpha \mathbf{I}_4$ να δηλώνει τον ιστροπικό ελαστικό τανυστή, $\mathbf{I}_j$ ($j=2, 4$) είναι ο συμμετρικός j -τάξης ταυτοτικός τανυστής, και $\alpha = e, i$.



Εικόνα 8.1: Διέγερση ελαστικού εγκλεισμού στον ημιάπειρο χώρο Ω από αρμονική σημειακή πηγή στο $\zeta \in \Gamma_1$.

Είμαστε πλέον σε θέση να περιγράψουμε το ευθύ πρόβλημα ελαστοδυναμικής για έναν διαπερατό σχεδαστή Ω_C ως ένα πρόβλημα εύρεσης του σχεδαζόμενου πεδίου $u^{S^*} \in C^2(\Omega^-) \cap C^1(\Omega^- \cup \Gamma \cup S)$



και του εσωτερικού πεδίου $w^k \in C^2(\Omega_C) \cap C^1(\overline{\Omega_C})$ που ικανοποιούν τις πεδιακές εξισώσεις

$$L_0 u^{S^k}(\xi, \zeta) + \rho_0 \omega^2 u^{S^k}(\xi, \zeta) = 0, \quad \xi \in \Omega^-, \quad \zeta \in \Gamma_1, \quad (8.3)$$

$$L_1 w^k(\xi, \zeta) + \rho_1 \omega^2 w^k(\xi, \zeta) = 0, \quad \xi \in \Omega_C, \quad (8.4)$$

όπου

$$L_\alpha = \mu_\alpha \nabla^2 + (\lambda_\alpha + \mu_\alpha) \nabla \nabla \cdot, \quad \alpha = c, i$$

και τις συνοριακές συνθήκες

$$t^{S^k}(\xi, \zeta) + t^{F^k}(\xi, \zeta) = t^k(\xi; w), \quad \xi \in \Gamma, \quad \zeta \in \Gamma_1, \quad (8.5)$$

$$u^{S^k}(\xi, \zeta) + u^{F^k}(\xi, \zeta) = w^k(\xi, \zeta), \quad \xi \in \Gamma, \quad \zeta \in \Gamma_1, \quad (8.6)$$

$$t^{S^k}(\xi, \zeta) = 0, \quad \xi \in S, \quad \zeta \in \Gamma_1. \quad (8.7)$$

Σημειώνουμε ότι $\nabla = \nabla_\xi$ εκτός και αν δηλώνεται διαφορετικά, $t^{S^k}(\xi, \zeta) = n(\xi) \cdot C_e : \nabla u^{S^k}(\xi, \zeta)$, $t^{F^k}(\xi, \zeta) \equiv \hat{t}^k(\xi, \zeta) = n(\xi) \cdot C_e : \nabla u^{F^k}(\xi, \zeta)$, $t^k(\xi; w) = n(\xi) \cdot C_i : \nabla w^k(\xi, \zeta)$, και n είναι το μοναδιαίο εγγάθετο διάνυσμα στην Γ με κατεύθυνση προς το εξωτερικό του Ω^- .

Για ημιάπειρους χώρους όπως στο προκείμενο πρόβλημα, η καλή-τοποθέτηση του ευθέως προβλήματος σκέδασης διατηρείται με την προϋπόθεση ότι το u^{S^k} ικανοποιεί τη γενικευμένη συνθήκη ακτινοβολίας [74]

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \left\{ \dot{u}^j(\xi, x) \cdot t^{S^k}(\xi, \zeta) - \dot{t}^j(\xi, x) \cdot u^{S^k}(\xi, \zeta) \right\} d\Gamma_\xi = 0, \quad x \in \Omega^-, \quad j = 1, 2, 3, \quad (8.8)$$

όπου Γ_R είναι ένα ημισφαίριο ακτίνα R με κέντρο στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων (δες Εικ.7.1).

Σε ό,τι ακολουθεί, θεωρείται ότι το ευθύ πρόβλημα σκέδασης των Εξ.(8.3)–(8.8) επιδέχεται μία μοναδική λύση $u^{S^k} \in H_{loc}^1(\Omega^-)$, $w^k \in H^1(\Omega_C)$, όπου H^1, H_{loc}^1 δηλώνουν τους συνήθεις χώρους Sobolev [65].

8.3 Το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης

Εισάγουμε πρώτα τον Green ταυνοστή μετατοπίσεων $\hat{U}(\xi, \zeta)$ στο $\xi \in \Omega \setminus \{\zeta\}$ λόγω σημειακής πηγής στο $\zeta \in \Gamma_1$ ως

$$\hat{U}(\xi, \zeta) = (\hat{u}^1(\xi, \zeta), \hat{u}^2(\xi, \zeta), \hat{u}^3(\xi, \zeta)) = \begin{pmatrix} \hat{u}_1^1(\xi, \zeta) & \hat{u}_1^2(\xi, \zeta) & \hat{u}_1^3(\xi, \zeta) \\ \hat{u}_2^1(\xi, \zeta) & \hat{u}_2^2(\xi, \zeta) & \hat{u}_2^3(\xi, \zeta) \\ \hat{u}_3^1(\xi, \zeta) & \hat{u}_3^2(\xi, \zeta) & \hat{u}_3^3(\xi, \zeta) \end{pmatrix}. \quad (8.9)$$



Ακολουθως, $u(\xi, z; d) = \hat{U}(\xi, z) \cdot d$ δηλώνει τη μετατόπιση στο $\xi \in \Omega \setminus \{z\}$ λόγω σημειακής πηγής στο z που δρα στην κατεύθυνση που ορίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα $d \in \mathbb{R}^3$. Όπως αποδεικνύεται στο [51], το Green ταυυστής του ημιάπειρου χώρου χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα αμοιβαιότητας $\hat{U}(\xi, \zeta) = [\hat{U}(\zeta, \xi)]^T$ όπου με "τ" δηλώνεται ο ανάστροφος πίνακας. Παρομοίως, ο ταυυστής σκέδασης $U^S(\xi, \zeta)$ αναφορικά με τις Εξ.(8.3)–(8.8) ορίζεται ως

$$U^S(\xi, \zeta) = (u^{S^1}(\xi, \zeta), u^{S^2}(\xi, \zeta), u^{S^3}(\xi, \zeta)) = \begin{pmatrix} u_1^{S^1}(\xi, \zeta) & u_1^{S^2}(\xi, \zeta) & u_1^{S^3}(\xi, \zeta) \\ u_2^{S^1}(\xi, \zeta) & u_2^{S^2}(\xi, \zeta) & u_2^{S^3}(\xi, \zeta) \\ u_3^{S^1}(\xi, \zeta) & u_3^{S^2}(\xi, \zeta) & u_3^{S^3}(\xi, \zeta) \end{pmatrix} \quad (8.10)$$

σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Είναι χρήσιμο να τονίσουμε ότι η εφαρμογή των ολοκληρωτικών ταυτοτήτων του Betti [69] σε όρους των $\hat{U}$ και U^S όπως στο [88] δεικνύει ότι ο ταυυστής σκέδασης έχει ιδιότητες αμοιβαιότητας, δηλαδή $U^S(\xi, \zeta) = [U^S(\zeta, \xi)]^T$.

Αναφορικά με την ομαλή επιφάνεια Σ με μοναδιαίο εγγάθετο διάνυσμα n , οι ταυυστές τροπών των πεδίων $\hat{U}(\xi, \zeta)$ και $U^S(\xi, \zeta)$ δηλώνονται αντίστοιχα ως

$$\hat{T}(\xi, \zeta) = n(\xi) \cdot C_e : \nabla \hat{U}(\xi, \zeta) = \begin{pmatrix} \hat{t}_1^1(\xi, \zeta) & \hat{t}_1^2(\xi, \zeta) & \hat{t}_1^3(\xi, \zeta) \\ \hat{t}_2^1(\xi, \zeta) & \hat{t}_2^2(\xi, \zeta) & \hat{t}_2^3(\xi, \zeta) \\ \hat{t}_3^1(\xi, \zeta) & \hat{t}_3^2(\xi, \zeta) & \hat{t}_3^3(\xi, \zeta) \end{pmatrix}, \quad \Sigma \subset \Omega \quad (8.11)$$

$$T^S(\xi, \zeta) = n(\xi) \cdot C_e : \nabla U^S(\xi, \zeta) = \begin{pmatrix} t_1^{S^1}(\xi, \zeta) & t_1^{S^2}(\xi, \zeta) & t_1^{S^3}(\xi, \zeta) \\ t_2^{S^1}(\xi, \zeta) & t_2^{S^2}(\xi, \zeta) & t_2^{S^3}(\xi, \zeta) \\ t_3^{S^1}(\xi, \zeta) & t_3^{S^2}(\xi, \zeta) & t_3^{S^3}(\xi, \zeta) \end{pmatrix}, \quad \Sigma \subset \Omega^- \quad (8.12)$$

Υπό αυτούς τους όρους, το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης τοποθετείται ως ένα πρόβλημα ανακατασκευής του συνόρου του Ω_C από τη γνώση του ταυυστή σκέδασης $U^S(\xi, \zeta)$ για όλα τα σημειακά φορτία $\zeta \in \Gamma_1 \subset S$ και για όλα τα σημεία παρατήρησης $\xi \in \Gamma_2 \subset S$. Ο εν λόγω μαθηματικός χειρισμός στα πλαίσια της LSM παρουσιάζεται στη συνέχεια. Για λόγους πληρότητας τονίζεται ότι οι επιφάνειες Γ_1 και Γ_2 μπορούν να είναι "ξένες", να επικαλύπτονται μερικώς, ή και να είναι ταυτόσημες καθώς ο παρόν φορμαλισμός δεν κάνει καμιά διάκριση μεταξύ αυτών των τριών περιπτώσεων.

8.4 Εισαγωγικά στοιχεία

Έστω $S_1 \subset \bar{\Omega}$ επιφάνεια πεπερασμένου εύρους, και $L_2(S_1)$ ο Hilbert χώρος των τετραγωνικώς ολοκληρώσιμων διανυσματικών πεδίων εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο

$$(g, h)_{L_2(S_1)} = \int_{S_1} \overline{g(x)} \cdot h(x) s_x,$$



όπου η μπάρα δεικνύει τον μιγαδικό συζυγή και $g, h \in L_2(S_1)$. Θεωρούμε $D \subset \Omega$ ένα φραγμένο χώρο με σύνορο ∂D κλάσης C^2 και έστω $\mathbb{H}(D)$ είναι το σύνολο των κλασσικών λύσεων της ομογενούς εξίσωσης Navier στον D , δηλαδή

$$\mathbb{H}(D) = \{u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D}) : (L_e + \rho_e \omega^2)u = 0 \text{ in } D\}.$$

Ακολουθώς, έστω $L_2(D)$ και $H^1(D) = \{u \in L_2(D), \nabla u \in L_2(D)\}$ οι χώροι Hilbert εφοδιασμένοι με τα αντίστοιχα Hermitian γινόμενα

$$\begin{aligned} (v, u)_{L_2(D)} &= \int_D \overline{v(\xi)} \cdot u(\xi) V_\xi, \\ (v, u)_{H^1(D)} &= \theta \int_D \overline{v(\xi)} \cdot u(\xi) V_\xi + \int_D \overline{\nabla v(\xi)} : C_e : \nabla u(\xi) V_\xi, \end{aligned}$$

όπου $\mathbb{R} \ni \theta > 0$, και με $\overline{\mathbb{H}(D)}$ δηλώνεται η κλειστότητα του $\mathbb{H}(D)$ με τη νόρμα

$$\|u\|_{H^1(D)} = \sqrt{(u, u)_{H^1(D)}}.$$

Για πληρότητα επαναλαμβάνουμε το ακόλουθο θεώρημα που απέδειξαν οι Fata και Guzina (δες [87]).

Θεώρημα 4.1.* Έστω S_1 επιφάνεια πεπερασμένου εύρους και κλάσης C^2 σε ένα μη-φραγμένο σώμα $\Omega \in \mathbb{R}^3$ και $g \in L_2(S_1)$. Τότε, το δυναμικό απλού στρώματος

$$v(\xi) = \int_{S_1} \hat{U}(\xi, x) \cdot g(x) s_x = \int_{S_1} \hat{u}^k(\xi, x) \cdot g_k(x) s_x, \quad \xi \in \Omega \setminus S_1, \quad k = 1, 2, 3 \quad (8.13)$$

είναι ακτινοβολούσα λύση στην ομογενή εξίσωση Navier στο $\Omega \setminus S_1$, δηλαδή,

$$L_e v(\xi) + \rho_e \omega^2 v(\xi) = 0, \quad \xi \in \Omega \setminus S_1, \quad (8.14)$$

και

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \{\hat{u}^j(\xi, x) \cdot t(\xi; v) - \hat{t}^j(\xi, x) \cdot v(\xi)\} d\Gamma_\xi = 0, \quad x \in \Omega, \quad j = 1, 2, 3, \quad (8.15)$$

όπου $t(\xi; v) = n(\xi) \cdot C_e : \nabla v(\xi)$ είναι το διάνυσμα τροπών που συνδέεται με το πεδίο μετατοπίσεων $v(\cdot)$ σε κάθε κανονική επιφάνεια στον Ω με μοναδιαίο εγκάθετο διάνυσμα n . $\square$

*Ανάλογα θεωρήματα για αναπαράστάσεις μέσω απλών και διπλών δυναμικών στρωμάτων παρουσιάζονται στο βιβλίο του Kellogg [62].



Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, τα στοιχεία “κλειδιά” στην εφαρμογή της LSM για την ανακατασκευή διαπερατών σχεδιαστών από ελαστικά κύματα είναι τα αποκαλούμενα *Πρόβλημα Μετάδοσης* (Transmission Problem-TP) και το αντίστοιχο *Εσωτερικό Πρόβλημα Μετάδοσης* (Interior Transmission Problem-ITP), που και τα δύο σχετίζονται με το ευθύ πρόβλημα σκέδασης των Εξ.(8.3)–(8.8). Οι ορισμοί τους είναι οι ακόλουθοι :

TP: Δοθέντων $f \in H^{1/2}(\Gamma)$ και $h \in H^{-1/2}(\Gamma)$, επιζητούμε $v \in H_{loc}^1(\Omega^-)$ και $w \in H^1(\Omega_C)$ ώστε

$$(L_e + \rho_e \omega^2) v = 0, \quad \text{in } \Omega^-, \quad (8.16)$$

$$(L_i + \rho_i \omega^2) w = 0, \quad \text{in } \Omega_C, \quad (8.17)$$

$$w - v = f, \quad \text{on } \Gamma, \quad (8.18)$$

$$t(\cdot; w) - t(\cdot; v) = h, \quad \text{on } \Gamma, \quad (8.19)$$

με το v να ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας

$$- \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \{ \hat{u}^j(\xi, x) \cdot t(\xi; v) - \hat{t}^j(\xi, x) \cdot v(\xi) \} d\Gamma_\xi = 0, \quad x \in \Omega, \quad j = 1, 2, 3. \quad (8.20)$$

ITP: Δοθέντων $f \in H^{1/2}(\Gamma)$ και $h \in H^{-1/2}(\Gamma)$, επιζητούμε $v \in H^1(\Omega_C)$ και $w \in H^1(\Omega_C)$ που ικανοποιούν τις

$$(L_e + \rho_e \omega^2) v = 0, \quad \text{in } \Omega_C, \quad (8.21)$$

$$(L_i + \rho_i \omega^2) w = 0, \quad \text{in } \Omega_C, \quad (8.22)$$

$$w - v = f, \quad \text{on } \Gamma, \quad (8.23)$$

$$t(\cdot; w) - t(\cdot; v) = h, \quad \text{on } \Gamma. \quad (8.24)$$

Τώρα, είμαστε σε θέση να εισάγουμε το κάτωθι Λήμμα που θα παίζει ουσιαστικό ρόλο στην πιστοποίηση της LSM για διαπερατούς σχεδιαστές.

Λήμμα 4.1. Δεδομένης κατανομής πυκνότητας $g \in L_2(\Gamma_1)$, η λύση στο πρόβλημα σκέδασης από έναν διαπερατό σχεδιαστή χωρίς απώλειες Ω_C στον ημιάπειρο ελαστικό χώρο Ω λόγω του ελεύθερου (δηλαδή προσπίπτοντος) πεδίου

$$v^F(\xi) = \int_{\Gamma_1} \hat{U}(\xi, x) \cdot g(x) s_x, \quad \xi \in \Omega \setminus \Gamma_1, \quad (8.25)$$

δίνεται από το σχεδάζόμενο πεδίο

$$v^S(\xi) = \int_{\Gamma_1} U^S(\xi, x) \cdot g(x) s_x = \int_{\Gamma_1} u^{S^k}(\xi, x) \cdot g_k(x) s_x, \quad \xi \in \Omega^-, \quad k = 1, 2, 3, \quad (8.26)$$



που ικανοποιεί τη γενικευμένη συνθήκη ακτινοβολίας

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \left\{ \dot{u}^j(\xi, x) \cdot t^{S^*}(\xi, \zeta) - \dot{t}^j(\xi, x) \cdot u^{S^*}(\xi, \zeta) \right\} d\Gamma_\xi = 0, \quad x \in \Omega^-, \quad j = 1, 2, 3. \quad (8.27)$$

Απόδειξη. Υιοθετούμε την προσέγγιση που ακολούθησαν οι Guzina και Madhagon [52] για το χειρισμό προβλημάτων σκέδασης σε στρωματοποιημένα ελαστικά μέσα. Ακολουθώντας την απόδειξη του θεωρήματος 9 στο [74] μπορεί ναδειχθεί με τη χρήση: α) του γεγονότος ότι $u^{S^*} \in C^2(\Omega^-) \cap C^1(\Omega^- \cup \Gamma \cup S)$ είναι ακτινοβολούντα ελαστοδυναμικά πεδία με $t^{S^*}|_S = 0$, και β) της προαναφερόμενης αμοιβαιότητας του τανυστή σκέδασης U^S , ότι v^S που δίνεται από την Εξ.(8.26) είναι μια ακτινοβολούσα ελαστοδυναμική κατάσταση στο Ω^- με $t(\cdot; v^S)|_S = 0$. Με παρόμοιο τρόπο ακολουθεί ότι

$$w(\xi) = \int_{\Gamma_1} w^k(\xi, x) \cdot g_k(x) s_x, \quad \xi \in \Omega_C, \quad k = 1, 2, 3,$$

είναι μια ελαστοδυναμική κατάσταση στο Ω_C όπου $w^k \in C^2(\Omega_C) \cap C^1(\overline{\Omega_C})$ ορίζονται μέσου των Εξ.(8.3)–(8.8). Αντίστοιχα, μπορεί ναδειχθεί από τον πολλαπλασιασμό των Εξ.(8.5)–(8.6) με $g_k(\zeta)$ και ολοκληρώνοντας στην Γ_1 ότι

$$\begin{aligned} L_0 v^S(\xi, \zeta) + \rho_0 \omega^2 v^S(\xi, \zeta) &= 0, & \xi \in \Omega^-, \\ L_1 w(\xi) + \rho_1 \omega^2 w(\xi) &= 0, & \xi \in \Omega_C, \\ t(\xi; v^S) + t(\xi; v^F) &= t(\xi; w), & \xi \in \Gamma, \\ v^S(\xi) + v^F(\xi) &= w(\xi), & \xi \in \Gamma, \\ t(\xi; v^S) &= 0, & \xi \in S. \end{aligned}$$

με

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \left\{ \dot{u}^j(\xi, x) \cdot t(\xi; v^S) - \dot{t}^j(\xi, x) \cdot v^S(\xi) \right\} d\Gamma_\xi = 0, \quad x \in \Omega^-, \quad j = 1, 2, 3.$$

Από το θεώρημα μοναδικότητας του προβλήματος διάδοσης σε ημίαιρα στερεά [74], v^S που δίνεται από την Εξ.(8.26) είναι συνεπώς η μοναδική λύση στο πρόβλημα σκέδασης από το διαπερατό σκεδαστή χωρίς απώλειες Ω_C λόγω του ελεύθερου πεδίου της Εξ.(8.25). ■

8.5 Η Μέθοδος Γραμμικής Δειγματοληψίας

Η ιδέα κλειδί της LSM είναι η εύρεση ενός ελεύθερου πεδίου v^F , που διεγείρεται λόγω των πηγών επί της επιφάνειας Γ_1 με πυκνότητα g , ώστε το αντίστοιχο σκεδαζόμενο πεδίο v^S να ταυτίζεται



με μία ανώμαλη ακτινοβολούσα λύση της ομογενούς Navier εξίσωσης στο Ω^- . επιλέγεται δε ως τέτοιο πεδίο μετατοπίσεων το $\hat{U}(\cdot, z) \cdot d$, το πεδίο δηλαδή που οφείλεται σε μοναδιαία σημειακή πηγή στο $z \in \Omega_C$ στη d διεύθυνση. Με άλλα λόγια, σκοπός μας είναι η εύρεση του διανύσματος πυκνότητας $g_{z,d}(\cdot) \equiv g(\cdot; z, d) \in L_2(\Gamma_1)$ που ικανοποιεί την ολοκληρωτική εξίσωση κοντινού-πεδίου

$$\int_{\Gamma_1} U^S(\xi, x) \cdot g_{z,d}(x) s_x = \hat{U}(\xi, z) \cdot d, \quad \xi \in \Gamma_2, \quad z \in \Omega_C. \quad (8.28)$$

Η Εξ.(8.28) αποτελεί μια Fredholm ολοκληρωτική εξίσωση πρώτου είδους με ομαλό πυρήνα U^S , που συνθέτει τις πειραματικές παρατηρήσεις στην επιφάνεια των δεκτών Γ_2 λόγω διεγέρσεων στην επιφάνεια Γ_1 . Οι εξισώσεις αυτής της κλάσης αποτελούν μη καλώς-τοποθετημένα προβλήματα υπό την έννοια του Hadamard, γεγονός που καθιστά αναγκαία τη μαθηματική πιστοποίηση της ύπαρξης, της μοναδικότητας και της συνέχειας (αναφορικά με τα πειραματικά δεδομένα) μιας λύσης $g_{z,d}(\cdot)$ που θα αποδειχθεί στη συνέχεια του κεφαλαίου.

8.6 Επιλυσιμότητα ολοκληρωτικής εξίσωσης κοντινού-πεδίου

Αναφορικά στην Εξ.(8.28), ο τελεστής κοντινού-πεδίου $\mathcal{F} : L_2(\Gamma_1) \rightarrow L_2(\Gamma_2)$ μπορεί να οριστεί ως

$$(\mathcal{F}g)(\xi) := \int_{\Gamma_1} U^S(\xi, x) \cdot g(x) s_x, \quad \xi \in \Gamma_2. \quad (8.29)$$

Για το $U^S \in L_2(\Gamma_2 \times \Gamma_1)$ ο τελεστής $\mathcal{F}$ είναι καλώς ορισμένος, γραμμικός και συμπαγής από το $L_2(\Gamma_1)$ στο $L_2(\Gamma_2)$ (δες [68]), καθιστώντας συνεπώς την ολοκληρωτική εξίσωση (8.28) μη καλώς-τοποθετημένη. Η επιλυσιμότητά της εξετάζεται σε όρους του ακόλουθου θεωρήματος.

Θεώρημα 6.1. Έστω $z \in \Omega_C$ σταθερό. Τότε η ολοκληρωτική εξίσωση πρώτου είδους Εξ.(8.28) επιδέχεται τη λύση $g(\cdot; z, d) \in L_2(\Gamma_1)$ αν και μόνο αν υπάρχει ένα ζεύγος λύσεων (v^F, w) του ITP που δίνεται ως

$$(L_e + \rho_e \omega^2) v^F(\xi) = 0, \quad \xi \in \Omega_C, \quad (8.30)$$

$$(L_i + \rho_i \omega^2) w(\xi) = 0, \quad \xi \in \Omega_C, \quad (8.31)$$

$$w(\xi) = v^F(\xi) + \hat{U}(\xi, z) \cdot d, \quad \xi \in \Gamma, \quad z \in \Omega_C, \quad (8.32)$$

$$t(\xi; w) = t(\xi; v^F) + \hat{T}(\xi, z) \cdot d, \quad \xi \in \Gamma, \quad z \in \Omega_C, \quad (8.33)$$

όπου v^F είναι το δυναμικό απλού-στρώματος:

$$v^F(\xi) = \int_{\Gamma_1} \hat{U}(\xi, x) \cdot g_{z,d}(x) s_x, \quad \xi \in \Omega \setminus \Gamma_1. \quad (8.34)$$



Απόδειξη. Έστω $g_{z,d}(\cdot)$ λύση της Εξ.(8.28), και έστω v^F που ορίζεται από την Εξ.(8.34). Σύμφωνα με το Λήμμα 4.1,

$$v^S(\xi) = \int_{\Gamma_1} U^S(\xi, x) \cdot g_{z,d}(x) s_x, \quad \xi \in \Omega^-, \quad (8.35)$$

είναι ακτινοβολούσα λύση της ομογενούς Navier εξίσωσης στον Ω^- . Για $z \in \Omega_C$ και $\xi \in \Omega^-$, αποδεικνύεται στο [51] ότι $\hat{U}(\xi, z) \cdot d$ είναι επίσης μια ακτινοβολούσα λύση της ομογενούς Navier εξίσωσης στο $\Omega^- \subset \Omega$. Από την Εξ.(8.28), ακολουθεί ότι $v^S(\xi) = \hat{U}(\xi, z) \cdot d$ στο Γ_2 . Λόγω του γεγονότος ότι $t(\xi; v^S) = \hat{T}(\xi, z) \cdot d$ στο Γ_2 καθώς επίσης και το ότι μηδενίζονται στο $S \supset \Gamma_2$ εξ' ορισμού, ακολουθεί βάσει του θεωρήματος μοναδικότητας του Holmgren [28] ότι

$$v^S(\xi) = \hat{U}(\xi, z) \cdot d, \quad \xi \in \Omega^-. \quad (8.36)$$

Σχετικά με τη σκέδαση από ένα διαπερατό αντικείμενο λόγω του προσπίπτοντος πεδίου v^F που δίνεται από την Εξ.(8.34), λαμβάνουμε

$$(L_e + \rho_e \omega^2) v^F(\xi) = 0, \quad \xi \in \Omega \supset \Omega_C, \quad (8.37)$$

$$(L_i + \rho_i \omega^2) w(\xi) = 0, \quad \xi \in \Omega_C, \quad (8.38)$$

$$w(\xi) = v^F(\xi) + v^S(\xi), \quad \xi \in \Gamma, \quad (8.39)$$

$$t(\xi; w) = t(\xi; v^F) + t(\xi; v^S), \quad \xi \in \Gamma, \quad (8.40)$$

δεδομένου ότι $S \supset \Gamma_1 \cap \Omega = \emptyset$. Λαμβάνοντας το όριο της Εξ.(8.36) καθώς $\xi \rightarrow y \in \Gamma$ και αντικαθιστώντας στις Εξισώσεις (8.39) και (8.40) λαμβάνουμε τις (8.30)–(8.33).

Αντίστροφα, έστω v^F να επιδέχεται μια αναπαράσταση δυναμικού απλού-στρώματος της Εξ.(8.34) και να ικανοποιεί το ITP των Εξ.(8.30)–(8.33). Υπό αυτήν την προϋπόθεση, θεωρούμε τη σκέδαση από το διαπερατό σώμα Ω_C λόγω του ελεύθερου πεδίου της Εξ.(8.34) ώστε οι Εξισώσεις (8.3)–(8.8) να ισχύουν όταν u^{F^k}, u^{S^k} και w^k αντικαθίστανται από τα πεδία v^F, v^S και w , αντίστοιχα. Από το Λήμμα 4.1, το σκεδαζόμενο πεδίο v^S λόγω του v^F δίνεται από την Εξ.(8.35). Αλλά από τις Εξ.(8.30)–(8.33) και τις ιδιότητες του $\hat{U}(\xi, z) \cdot d$ όταν $z \in \Omega_C$, ακολουθεί ότι οι Εξ.(8.3)–(8.8) επίσης ισχύουν όταν v^S αντικαθίσταται από $\hat{U} \cdot d$. Από τη μοναδικότητα του σκεδαζόμενου πεδίου στο Ω^- [74], εξάγουμε την Εξ.(8.36) και λαμβάνοντας το όριο $\xi \rightarrow y \in \Gamma_2$, η Εξ.(8.28) απευθείας προκύπτει. ■

Λήμμα 6.1. Για όλα τα $g \in L_2(\Gamma_1)$ και $u \in L_2(\Gamma_2)$, η ακόλουθη ταυτότητα ισχύει

$$(\mathcal{F}g, u)_{L_2(\Gamma_2)} = (g, \mathcal{F}^*u)_{L_2(\Gamma_1)}, \quad (8.41)$$



όπου $\mathcal{F}^* : L_2(\Gamma_2) \rightarrow L_2(\Gamma_1)$ δηλώνει το συζυγή τελεστή του $\mathcal{F}$ που δίνεται από

$$(\mathcal{F}^* u)(x) := \int_{\Gamma_2} \overline{U^S(\xi, x)}^T \cdot u(\xi) s_\xi, \quad x \in \Gamma_1. \quad (8.42)$$

Απόδειξη. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}g, u)_{L_2(\Gamma_2)} &= \int_{\Gamma_2} u(\xi) \left[\int_{\Gamma_1} \overline{U^S(\xi, x)} \cdot g(x) s_x \right] s_\xi = \\ &= \int_{\Gamma_1} \overline{g(x)} \left[\int_{\Gamma_2} \overline{U^S(\xi, x)}^T \cdot u(\xi) s_\xi \right] s_x = (g, \mathcal{F}^* u)_{L_2(\Gamma_1)}. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (8.43)$$

8.6.1 Προσεγγιστική ιδιότητα δυναμικών απλού-στρώματος

Μια σημαντική παρατήρηση στα πλαίσια της LSM είναι ότι το δυναμικό απλού-στρώματος της Εξ.(8.34), που ορίζει το ελεύθερο πεδίο u^F , διαδραματίζει τον ίδιο ρόλο σε προβλήματα σχέδσης κοντινού-πεδίου όπως και οι κυματοσυναρτήσεις Herglotz στα προβλήματα μακρινού-πεδίου (στην ακουστική ή στην ελαστικότητα) [36, 39, 87].

Δεδομένης της δυνατότητας ότι οι Εξ.(8.30)–(8.33) μπορεί να μην επιδέχονται λύση της μορφής Εξ.(8.34), είναι σημαντικό να εξεταστεί αν το τελευταίο πρόβλημα είναι επιλύσιμο τουλάχιστον υπό την έννοια της προσεγγίσεως. Για αυτό το σκοπό, έστω $\mathcal{S} : L_2(\Gamma_1) \rightarrow \overline{\mathbb{H}(\Omega_C)}$ που ορίζει έναν ολοκληρωτικό τελεστή απλού-στρώματος

$$(\mathcal{S}g)(\xi) = \int_{\Gamma_1} \dot{U}(\xi, x) \cdot g(x) s_x, \quad \xi \in \Omega_C. \quad (8.44)$$

Ο τελεστής $\mathcal{S}$ είναι καλώς-ορισμένος δεδομένου ότι $\Gamma_1 \cap \overline{\Omega_C} = \emptyset$ και συνεπώς $\mathcal{S}g \in C^\infty(\overline{\Omega_C}) \subset C^2(\Omega_C) \cap C^1(\overline{\Omega_C})$. Επίσης, από το θεώρημα 4.1, $\mathcal{S}g$ ικανοποιεί την ομογενή Navier εξίσωση στο Ω_C και επομένως $\mathcal{S}g \in \mathbb{H}(\Omega_C)$. Οι Fata και Guzina στο [87] αποδεικνύουν ότι το ακόλουθο θεώρημα που υποστηρίζει την ιδέα ότι το ITP των Εξ.(8.30)–(8.33) είναι υποκείμενο υπό την έννοια της νόρμας σε μια λύση σε όρους δυναμικού απλού-στρώματος της Εξ.(8.34).

Θεώρημα 6.2. Ο χώρος δυναμικών απλού-στρώματος $\{\mathcal{S}g, g \in L_2(\Gamma_1)\}$ που δίνεται από την εξίσωση (8.44) είναι πυκνός στο χώρο των κλασικών λύσεων της ομογενούς εξίσωσης Navier $(L_e + \rho_e \omega^2)u = 0$ στο Ω_C αναφορικά με τη νόρμα $H^1(\Omega_C)$, δηλαδή, $\mathcal{S}(L_2(\Gamma_1))$ είναι πυκνό αναφορικά με τη νόρμα $H^1(\Omega_C)$ στο $\overline{\mathbb{H}(\Omega_C)}$. $\square$

8.7 Ιδιότητες τελεστή κοντινού-πεδίου

Για να χειριστούμε την μη καλώς-τοποθετημένη φύση της Εξ.(8.28) είναι σημαντικό να α) εξετάσουμε τη μοναδικότητα της λύσης g , όταν η τελευταία υπάρχει, και β) να καταδείξουμε



την ύπαρξη προσεγγιστικής λύσης g_ε σε περιπτώσεις που το δεξιό σκέλος $\hat{U} \cdot d$ δεν ανήκει στο πεδίο τιμών του $\mathcal{F}$.

Ως πρώτο βήμα, θεωρούμε την περίπτωση που η εξίσωση κοντινού-πεδίου $(\mathcal{F}g)(\xi) = \hat{U}(\xi, z) \cdot d$, $\xi \in \Gamma_2$, $z \in \Omega_C$ επιδέχεται μια λύση.

Θεώρημα 7.1. *Ο τελεστής κοντινού-πεδίου $\mathcal{F} : L_2(\Gamma_1) \rightarrow L_2(\Gamma_2)$ που δίνεται από την Εξ. (8.29) είναι ένα-προς-ένα αν και μόνο αν δεν υπάρχει ζεύγος ιδιοσυναρτήσεων (v^F, w) του ομογενούς ITP*

$$(L_e + \rho_e \omega^2) v^F(\xi) = 0, \quad \xi \in \Omega_C, \quad (8.45)$$

$$(L_i + \rho_i \omega^2) w(\xi) = 0, \quad \xi \in \Omega_C, \quad (8.46)$$

$$w(\xi) = v^F(\xi), \quad \xi \in \Gamma, \quad (8.47)$$

$$t(\xi; w) = t(\xi; v^F), \quad \xi \in \Gamma, \quad (8.48)$$

όπου v^F είναι ένα δυναμικό απλού-στρώματος που δίνεται από την Εξ. (8.34).

Απόδειξη. Η υπόθεση ότι $(\mathcal{F}g)(\xi) = 0$ για $\xi \in \Gamma_2$ απαιτεί, μέσω του θεωρήματος μοναδικότητας του Holmgren, ότι $v^S = 0$ στο Ω^- . Λαμβάνοντας το όριο $\xi \rightarrow y \in \Gamma$ βρίσκουμε ότι $v^S = 0$ στο Γ , ή ισοδύναμα, $\hat{U}(y, z) \cdot d = \hat{T}(y, z) \cdot d = 0$, $y \in \Gamma$, $z \in \Omega_C$. Βάσει του θεωρήματος 6.1, η εξίσωση $\mathcal{F}g = 0$ είναι επομένως επιλύσιμη αν και μόνο αν το ομογενές ITP Εξ. (8.45)–(8.48) επιδέχεται μια λύση (v^F, w) όπου v^F δίνεται από την Εξ. (8.34). Αντίστοιχα, η υπόθεση ότι $\mathcal{F}g = 0$ επιδέχεται μή-τετριμμένη λύση $g \neq 0$ είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη ζεύγους ιδιοσυναρτήσεων $(v^F = Sg, w)$ του ομογενούς ITP που έρχεται σε αντίθεση με την προϋπόθεση του θεωρήματος και συνεπώς ολοκληρώνεται η απόδειξη. Για πληρότητα, είναι χρήσιμο να τονιστεί ότι οι ιδιοτιμές των εξισώσεων (8.45)–(8.48) μορφοποιούν ένα διακριτό σύνολο όπως δεικνύεται στο [21]. ■

Για την υποστήριξη των παραπάνω, έστω B να δηλώνει ένα φραγμένο γραμμικό τελεστή από το $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ στο $L_2(\Gamma_2)$ που απεικονίζει τα συνοριακά δεδομένα $(f, h) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ στη συνιστώσα κοντινού-πεδίου $v^S \in L_2(\Gamma_2)$ της λύσης (v^S, w) στο TP

$$(L_e + \rho_e \omega^2) v^S(\xi) = 0, \quad \xi \in \Omega^-, \quad (8.49)$$

$$(L_i + \rho_i \omega^2) w(\xi) = 0, \quad \xi \in \Omega_C, \quad (8.50)$$

$$w(\xi) - v^S(\xi) = f(\xi), \quad \xi \in \Gamma, \quad (8.51)$$

$$t(\xi; w) - t(\xi; v^S) = h(\xi), \quad \xi \in \Gamma, \quad (8.52)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \{ \hat{u}^j(\xi, x) \cdot t(\xi; v^S) - \hat{v}^j(\xi, x) \cdot v^S(\xi) \} d\Gamma_\xi = 0, \quad x \in \Omega, \quad j = 1, 2, 3. \quad (8.53)$$



Θεώρημα 7.2. Το σύνολο $\mathcal{B}(H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma))$ είναι πυκνό στο $L_2(\Gamma_2)$.

Απόδειξη. Δηλώνουμε πρώτα το εξής. Σύμφωνα με το Λήμμα 4.1 η λύση στο πρόβλημα σκέδασης από το Ω_C στο Ω λόγω του ελεύθερου πεδίου $v_g(\cdot) = \int_{\Gamma_2} \hat{U}(\cdot, \xi) \overline{g(\xi)} s_\xi$, $g \in L_2(\Gamma_2)$, δίνεται από $\tilde{v}^S(\cdot) = \int_{\Gamma_2} \hat{U}^S(\cdot, \xi) \overline{g(\xi)} s_\xi$. Σαν αποτέλεσμα της Εξ.(8.10), $\hat{U}^S := [\tilde{u}_j^S]$ ($i, j=1, 2, 3$) όπου $\tilde{u}^{S^*}(\zeta, \xi)$ κατανοείται ως το σκεδαζόμενο πεδίο στο ζ λόγω μοναδιαίας σημειακής πηγής στο $\xi \in \Gamma_2 \subset S$ στην k κατεύθυνση. Σε ό,τι ακολουθεί, το αντίστοιχο TP ορίζεται από τις Εξισώσεις (8.16)–(8.20) με $v = \tilde{v}^S$, $w = \tilde{w}$ και $(f, h) = (v_g|_\Gamma, t(\cdot; v_g)|_\Gamma)$.

Είμαστε πλέον σε θέση να παραθέσουμε την απόδειξη. Το σκεδαζόμενο πεδίο $v^S(\xi)$ στις Εξισώσεις (8.49)–(8.52) μπορεί να εκφραστεί ως (δες [86])

$$v^S(\xi) = \int_{\Gamma} \hat{T}(n, \xi)^T \cdot v^S(n) \Gamma_n - \int_{\Gamma} \hat{U}(n, \xi)^T \cdot t(n; v^S) \Gamma_n, \quad \xi \in \Omega^-. \quad (8.54)$$

Αντίστοιχα, για $g \in L_2(\Gamma_2)$ λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} (B(f, h), g)_{L_2(\Gamma_2)} &= \int_{\Gamma_2} g(\xi) \overline{v^S(\xi)} s_\xi = \int_{\Gamma} \overline{v^S(x)} \left(\int_{\Gamma_2} \overline{\hat{T}(x, \xi)} g(\xi) s_\xi \right) \Gamma_x \\ &\quad - \int_{\Gamma} t(x; \overline{v^S}) \left(\int_{\Gamma_2} \overline{\hat{U}(x, \xi)} g(\xi) s_\xi \right) \Gamma_x = \int_{\Gamma} \overline{v^S(x)} \cdot t(x; \overline{v_g}) \Gamma_x \\ &\quad - \int_{\Gamma} t(x; \overline{v^S}) \cdot \overline{v_g(x)} \Gamma_x = \int_{\Gamma} \overline{v^S(x)} [t(x; \tilde{w}) - t(x; \overline{v^S})] \Gamma_x \\ &\quad - \int_{\Gamma} t(x; \overline{v^S}) [\overline{w(x)} - \overline{v^S(x)}] \Gamma_x = \int_{\Gamma} [\overline{w(x)} - \overline{f(x)}] t(x; \tilde{w}) \Gamma_x \\ &\quad - \int_{\Gamma} [t(x; \tilde{w}) - \overline{h(x)}] \overline{w(x)} \Gamma_x = \int_{\Gamma} \overline{h(x)} \cdot \overline{w(x)} \Gamma_x - \int_{\Gamma} \overline{f(x)} \cdot t(x; \tilde{w}) \Gamma_x. \end{aligned}$$

Σαν αποτέλεσμα, ο συζυγής τελεστής B^* χαρακτηρίζεται ως $B^*g = (-t(\cdot; \tilde{w})|_\Gamma, \tilde{w}|_\Gamma)$. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι ο B^* είναι ένα-προς-ένα. Προς αυτήν την κατεύθυνση έστω $B^*g = 0 \Leftrightarrow (-t(\cdot; \tilde{w})|_\Gamma, \tilde{w}|_\Gamma) = (\overline{-t(\cdot; \tilde{w})|_\Gamma}, \overline{\tilde{w}|_\Gamma}) = 0$ or $(-t(\cdot; \tilde{w})|_\Gamma, \tilde{w}|_\Gamma) = 0 \Leftrightarrow \tilde{w}|_\Gamma = 0$ και $t(\cdot; \tilde{w})|_\Gamma = 0$. Συνεπώς, $\tilde{v}^S$ ικανοποιεί την εξίσωση Navier στο Ω^- , τη γενικευμένη συνθήκη ακτινοβολίας, και τις συνοριακές συνθήκες $\tilde{v}^S = -v_g$, $t(\cdot; \tilde{v}^S) = -t(\cdot; v_g)$ στο Γ . Μέσω της Εξ.(8.54), βρίσκουμε ότι

$$\tilde{v}^S(\xi) = - \int_{\Gamma} \hat{T}(n, \xi)^T \cdot v_g(n) \Gamma_n + \int_{\Gamma} \hat{U}(n, \xi)^T \cdot t(n; v_g) \Gamma_n, \quad \xi \in \Omega^-. \quad (8.55)$$

Αφού $\hat{U}(\cdot, \xi) \in \mathbb{H}(\Omega_C)$ και $v_g(\cdot) \in \mathbb{H}(\Omega_C)$, το θεώρημα αμοιβαιότητας του Graffi στην ελαστοδυναμική [115] εφαρμοσμένο στην Ω_C απαιτεί ότι το δεξί σκέλος της Εξ.(8.55) μηδενίζεται ταυτοτικά ώστε $\tilde{v}^S \equiv 0$ στον Ω^- . Επακαλούμενοι το θεώρημα μοναδικότητας του Holmgren και τις συνοριακές συνθήκες στην Γ , έχουμε ότι $v_g = \tilde{v}^S$ στον Ω^- και επομένως $\tilde{g} = 0$ ή $g = 0$. Όπως αποδεικνύεται στο [80], $\mathcal{N}(B^*) = \mathcal{R}(B)^a$. Άρα, λόγω του γεγονότος ότι B^* είναι ένα-προς-ένα εξάγουμε το συμπέρασμα ότι το πεδίο του $\mathcal{B}$ είναι πυκνό στον $L_2(\Gamma_2)$. ■



Ισχύει ότι

$$\mathcal{N}(\mathcal{B}) = \mathcal{R}(\mathcal{B}^*)^\perp = \{(f_0, h_0) \in \mathcal{D}(\mathcal{B}) : \int_{\Gamma} [h_0 \bar{w} - f_0 t(\cdot; \bar{w})] \Gamma = 0, \forall (-t(\cdot; \bar{w}), \bar{w}) \in \mathcal{R}(\mathcal{B}^*)\}, \quad (8.56)$$

όπου $\bar{w}$ όπως στην απόδειξη του θεωρήματος 7.2 και $\mathcal{D}(\mathcal{B}) = H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$. Χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες του Green συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένα ζεύγος $(w|_{\Gamma}, t(\cdot; w)|_{\Gamma})$, για $w \in H^1(\Omega_C)$ που είναι λύση της $(L_0 + \rho_0 \omega^2)w = 0$ στο Ω_C , που ανήκει στον $\mathcal{N}(\mathcal{B})$. Επομένως, ο $\mathcal{B}$ δεν είναι ένα-προς-ένα.

Για το δεύτερο σκέλος της υπόθεσής μας, ορίζουμε το υποσύνολο

$$\mathbb{H}_{\gamma}(\Gamma) = \{(v|_{\Gamma}, t(\cdot; v)|_{\Gamma}) : v \in \overline{\mathbb{H}(\Omega_C)}\}.$$

Λήμμα 7.1. $\mathbb{H}_{\gamma}(\Gamma)$ είναι ένα κλειστό υποσύνολο του $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$.

Απόδειξη. Θεωρούμε $(f, h) \in \overline{\mathbb{H}_{\gamma}(\Gamma)}$. Τότε υπάρχει μια ακολουθία $(v_n, t(\cdot; v_n))$, $v_n \in \overline{\mathbb{H}(\Omega_C)}$ που συγκλίνει στο (f, h) στον $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ (λόγω της πληρότητας του $\overline{\mathbb{H}(\Omega_C)}$ και της συνέχειας του τελεστή ίχνους). Επομένως, η ακολουθία $(v_n, t(\cdot; v_n))$ είναι φραγμένη στον $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ και θεωρώντας την v_n ως λύση σε ένα πρόβλημα μικτών συνοριακών τιμών (impedance boundary value problem), η (v_n) είναι φραγμένη στον $H^1(\Omega_C)$. Γι' αυτόν το λόγο, λόγω του θεωρήματος του Riesz, μπορούμε να εξάγουμε μια υπακολουθία, που για απλότητα την ονομάζουμε και πάλι v_n , που ασθενώς συγκλίνει στον $H^1(\Omega_C)$ σε μια συνάρτηση v , όπου $v \in \overline{\mathbb{H}(\Omega_C)}$. Με ισχυρισμούς συνέχειας του τελεστή ίχνους έχουμε ότι $(v_n, t(\cdot; v_n))$ ασθενώς συγκλίνει στο $(v, t(\cdot; v))$ στον $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ και από τη μοναδικότητα του ορίου $(f, h) = (v, t(\cdot; v)) \Rightarrow (f, h) \in \mathbb{H}_{\gamma}(\Gamma)$. ■

Λόγω του Λήμματος 7.1, ο $\mathbb{H}_{\gamma}(\Gamma)$ εφοδιασμένος με την νόρμα του $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ είναι ένας Banach χώρος. Ακολουθώντας, ορίζουμε τον $\mathcal{B}_0$ ως περιορισμό του $\mathcal{B}$ στον $\mathbb{H}_{\gamma}(\Gamma)$.

Θεώρημα 7.3. Ο τελεστής $\mathcal{B}_0 : \mathbb{H}_{\gamma}(\Gamma) \rightarrow L_2(\Gamma_2)$ είναι ένα-προς-ένα, συμπαγής και έχει πυκνή εικόνα αν η συχνότητα ω δεν είναι ιδιοτιμή του ITP των Εξισώσεων (8.21)–(8.24).

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{B}_0(f, h) = 0$ για $(f, h) \in \mathbb{H}_{\gamma}(\Gamma)$ και έστω (u, w) η αντίστοιχη λύση του TP των Εξισώσεων (8.16)–(8.20) για τα προκείμενα συνοριακά δεδομένα. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Holmgren, $u = 0$ στον Ω^- και λόγω συνέχειας $u|_{\Gamma} = 0$, $t(\cdot; u)|_{\Gamma} = 0$. Έτσι, το



w ικανοποιεί το πρόβλημα μιχτών συνοριακών τιμών

$$(\mathbf{L}_i + \rho_i \omega^2)w = 0, \quad \text{in } \Omega_C, \quad (8.57)$$

$$w = f, \quad \text{on } \Gamma, \quad (8.58)$$

$$t(\cdot; w) = h, \quad \text{on } \Gamma. \quad (8.59)$$

Από το Λήμμα 7.1 και τον ορισμό του $\mathbb{H}_\gamma$, υπάρχει επίσης $v \in H^1(\Omega_C)$ ώστε $t(\cdot; v)|_\Gamma = h$ και $v|_\Gamma = f$. Τότε, το ζεύγος (w, v) είναι η λύση του ομογενούς ITP και από τη θεώρηση ότι ω δεν είναι ιδιοτιμή διάδοσης, λαμβάνουμε ότι $w = v = 0$ στον Ω_C , και λόγω συνέχειας $f = h = 0$. Άρα ο $\mathcal{B}_0$ είναι ένα-προς-ένα.

Για να καταδειχθεί η συμπαγεία του, ο τελεστής $\mathcal{B}_0$ μπορεί να ειπωθεί ως η σύνθεση ενός συνεχούς τελεστή λύσης του TP με τον τελεστή περιορισμού $\mathcal{P} : H^1(\Omega^-) \rightarrow L_2(\Gamma_2)$ που ορίζεται από την Εξίσωση (8.54) ως

$$\mathcal{P}(v^S) := v^S(\xi)|_{\xi \in \Gamma_2} = \int_{\Gamma} \hat{T}(n, \xi)^T \cdot v^S(n) \Gamma_n - \int_{\Gamma} \hat{U}(n, \xi)^T \cdot t(n; v^S) \Gamma_n, \quad (8.60)$$

που απεικονίζει την ακτινοβολούσα λύση στον $L_2(\Gamma_2)$. Αφού $\Gamma \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\mathcal{P}$ είναι προφανώς συμπαγής και συνεπώς ο $\mathcal{B}_0$ είναι επίσης συμπαγής.

Προκειμένου ναδειχθεί ότι το σύνολο $\mathcal{B}_0(\mathbb{H}_\gamma(\Gamma))$ είναι πυκνό στον $L_2(\Gamma_2)$, επαρκεί ναδειχθεί ότι $\mathcal{R}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{B}_0)$. Έστω (u, w) λύση του TP και $u_{\Gamma_2} \equiv u|_{\Gamma_2} \in \mathcal{R}(\mathcal{B})$. Έστω (v, w) η μοναδική λύση του ITP με συνοριακά δεδομένα $(u|_\Gamma, t(\cdot; u)|_\Gamma)$. Επομένως, (u, w) είναι η λύση του TP με συνοριακά δεδομένα $(v|_\Gamma, t(\cdot; v)|_\Gamma) \in \mathbb{H}_\gamma(\Gamma)$. Σαν αποτέλεσμα, $\mathcal{B}_0(v|_\Gamma, t(\cdot; v)|_\Gamma) = u_{\Gamma_2}$ ή $u_{\Gamma_2} \in \mathcal{R}(\mathcal{B}_0)$. ■

Συμπέρασμα: Θεωρούμε ότι $u \in L_2(\Gamma_2)$. Τότε, για κάθε $\epsilon > 0$, $\exists g_\epsilon \in L_2(\Gamma_1) : \mathcal{H}g_\epsilon := (v_{g_\epsilon}|_\Gamma, t(\cdot; v_{g_\epsilon})|_\Gamma)$ που ικανοποιεί

$$\|\mathcal{B}_0(\mathcal{H}g_\epsilon) - u\|_{L_2(\Gamma_2)} \leq \epsilon, \quad (8.61)$$

όπου v_{g_ϵ} είναι το δυναμικό απλού-στρώματος της Εξ.(8.25) με πυρήνα g_ϵ .

Απόδειξη. Η απόδειξη απορρέει από τα ακόλουθα γεγονότα: α) $\mathcal{H}g_\epsilon \in \mathbb{H}_\gamma(\Gamma)$, β) $\mathcal{B}_0$ έχει πυκνή εικόνα στον $L_2(\Gamma_2)$ και γ) ο τελεστής $\mathcal{I}$ χνους είναι συνεχής. ■

Από την Εξ.(8.61), είναι προφανές ότι ο τελεστής κοντινού-πεδίου $\mathcal{F} : L_2(\Gamma_1) \rightarrow L_2(\Gamma_2)$ που δίνεται από την Εξ.(8.29) είναι πυκνός στον $L_2(\Gamma_2)$ δεδομένου ότι $\mathcal{F}g_\epsilon = \mathcal{B}_0(\mathcal{H}g_\epsilon)$.



8.8 Ιδιότητες της λύσης πυκνότητας

Έχοντας επαληθεύσει την ένα-προς-ένα ιδιότητα και την πυκνότητα της εικόνας του τελεστή κοντινού-πεδίου $\mathcal{F}$ που εμφανίζεται στην Εξ.(8.28), είμαστε σε θέση να εξετάσουμε τη συμπεριφορά της λύσης στην τελευταία εξίσωση, που για διευκόλυνση γράφεται ως

$$B_0(\mathcal{H}g)(\xi) = \hat{U}(\xi, z) \cdot d, \quad \xi \in \Gamma_2, \quad z \in \Omega_C, \quad (8.62)$$

όταν το σημείο δειγμάτων z προσεγγίζει το σύνορο του σχεδαστή. Όπως αποδεικνύεται από το θεώρημα 6.1, η Εξ.(8.62) επιλύεται αν και μόνο αν η λύση (v^F, w) του ITP των Εξισώσεων (8.30)–(8.33) είναι τέτοια ώστε η v^F να μπορεί να αναπαρασταθεί σε όρους της g μέσω του δυναμικού απλού-στρώματος της Εξ.(8.34). Γενικά, αυτό δεν είναι αληθές αλλά μπορούμε να βρούμε μια προσεγγιστική λύση g_ϵ ως ακολούθως.

Θεώρημα 8.1. Έστω $z \in \Omega_C$ σταθερό. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $g_\epsilon \in L_2(\Gamma_1)$ τέτοιο ώστε

$$\|B_0(\mathcal{H}g_\epsilon)(\cdot) - \hat{U}(\cdot, z) \cdot d\|_{L_2(\Gamma_2)} \leq \epsilon, \quad (8.63)$$

και

$$\lim_{z \rightarrow \gamma \in \Gamma} \|g_\epsilon(\cdot)\|_{L_2(\Gamma_1)} = \infty. \quad (8.64)$$

Απόδειξη. Έστω $z \in \Omega_C$ και $(\hat{U}(\xi, z) \cdot d, w)$ λύση του TP των Εξ.(8.16)–(8.20) με συνοριακή συνθήκη $(v^F|_\Gamma, t(\cdot; v^F)|_\Gamma)$, όπου (v^F, w) είναι μία λύση του προβλήματος των Εξ.(8.30)–(8.33). Θεωρώντας επιπλέον ότι w δεν είναι ιδιοτιμή διάδοσης ώστε (v^F, w) είναι μοναδικό. Σε ό,τι ακολουθεί, c_j ($j=1, 2, \dots$) θα χρησιμοποιηθούν για να δηλώνουν θετικές πραγματικές σταθερές. Σαν αποτέλεσμα των Εξ.(8.30)–(8.33) και του θεωρήματος ίχνους, υπάρχει μία σταθερά c_1 ώστε

$$\|w\|_{H^1(\Omega_C)} + \|v^F\|_{H^1(\Omega_C)} \geq \|w - v^F\|_{H^1(\Omega_C)} \geq c_1 \|w - v^F\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = c_1 \|\hat{U}(\cdot, z) \cdot d\|_{H^{1/2}(\Gamma)}.$$

Όταν το σημείο δειγμάτων $z \in \Omega_C$ προσεγγίζει το σύνορο του σχεδαστή, μπορεί να δειχθεί χρησιμοποιώντας τον μη-ομαλό χαρακτήρα της συνάρτησης Green του ημιχώρου [50] ότι

$$\lim_{z \rightarrow \gamma \in \Gamma} \|\hat{U}(\cdot; z) \cdot d\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = \infty. \quad (8.65)$$

Πρώτα θέλουμε να δείξουμε ότι $\lim_{z \rightarrow \gamma \in \Gamma} \|v^F\|_{H^1(\Omega_C)} = \infty$. Θεωρούμε το αντίθετο, δηλαδή ότι $\|v^F\|_{H^1(\Omega_C)} \leq c_2$. Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα ίχνους υπάρχει c_3 ώστε $\|v^F\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq c_3 c_2$ και $\|t(\cdot; v^F)\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq c_3 c_2$. Ανακαλώντας ότι το ζεύγος $(\hat{U}(\cdot, z) \cdot d, w)$ είναι λύση του TP με συνοριακά δεδομένα $(f, h) := (v^F|_\Gamma, t(\cdot, v^F)|_\Gamma)$ και θεωρώντας την καλή-τοποθέτηση του TP, η



συνέχεια της λύσης στα συνοριακά δεδομένα απαιτεί ότι

$$\|w\|_{H^1(\Omega_C)} + \|\hat{U}(\cdot, z) \cdot d\|_{H_{loc}^1(\Omega^-)} \leq c_4 \left(\|v^F\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|t(\cdot; v^F)\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \right) \leq 2c_4 c_3 c_2 \quad (8.66)$$

Μέσω της Εξ.(8.65) και του θεωρήματος ίχνους διά του οποίου

$$\|\hat{U}(\cdot, z) \cdot d\|_{H_{loc}^1(\Omega^-)} \geq c_5 \|\hat{U}(\cdot; z) \cdot d\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + c_6, \quad z \in \Omega_C$$

η ανισότητα της Εξ.(8.66) αντιτίθεται στο γεγονός ότι $\|\hat{U}(\cdot, z) \cdot d\|_{H_{loc}^1(\Omega^-)}$ εκρύνγνεται όταν $z \rightarrow y \in \Gamma$. Συνεπώς, $\lim_{z \rightarrow y \in \Gamma} \|v^F\|_{H^1(\Omega_C)} = \infty$.

Από το θεώρημα 6.2, βρίσκουμε ότι η πυκνότητα $g_\epsilon \in L_2(\Gamma_1)$ αναφέρεται σε ένα αυθαίρετα μικρό ϵ τέτοιο ώστε

$$\|v^F - Sg_\epsilon\|_{H^1(\Omega_C)} \leq \epsilon'. \quad (8.67)$$

Αντίστοιχα, $\|v^F\|_{H^1(\Omega_C)} \leq \|Sg_\epsilon\|_{H^1(\Omega_C)} + \epsilon'$, και επομένως $\lim_{z \rightarrow y \in \Gamma} \|Sg_\epsilon\|_{H^1(\Omega_C)} = \infty$. Δεδομένου ότι ο τελεστής απλού-στρώματος S είναι φραγμένος από $L_2(\Gamma_1) \rightarrow H^1(\Omega_C)$, ακολουθεί ότι υπάρχει μια σταθερά c_7 ώστε

$$\|Sg_\epsilon\|_{H^1(\Omega_C)} \leq c_7 \|g_\epsilon\|_{L_2(\Gamma_1)}$$

και συνεπώς

$$\lim_{z \rightarrow y \in \Gamma} \|g_\epsilon\|_{L_2(\Gamma_1)} = \infty$$

όπως αξιώνει η Εξ.(8.64).

Απομένει τώρα να δειχθεί ότι η προσεγγιστική λύση πυκνότητας g_ϵ , που επιλέγεται βάσει της Εξ.(8.67), ικανοποιεί την Εξ.(8.63). Βάσει της Εξ.(8.67), της συνέχειας της λύσεως, και του θεωρήματος ίχνους υπάρχει μια σταθερά c_8 ώστε

$$\|v^F - Sg_\epsilon\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq c_8 \epsilon', \quad \|t(\cdot, v^F) - t(\cdot, Sg_\epsilon)\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq c_8 \epsilon', \quad (8.68)$$

Από το θεώρημα 7.3, ο τελεστής B_0 είναι συνεχής λόγω ότι $\mathbb{H}_\gamma(\Gamma) \subset H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ στο $L_2(\Gamma_2)$. Επιπλέον, $B_0(v^F|_\Gamma, t(\cdot; v^F)) = \hat{U}(\cdot, z) \cdot d$ στο Γ_2 αφού $(\hat{U}(\xi, z) \cdot d, w)$ είναι η λύση του TP των Εξ.(8.16)–(8.20) με συνοριακές συνθήκες $(v^F|_\Gamma, t(\cdot; v^F)|_\Gamma)$. Ως αποτέλεσμα, για αυθαίρετα μικρό $\epsilon > 0$ υπάρχει $\epsilon' > 0$ (δες Εξ.(8.68)) τέτοιο ώστε

$$\|B_0(\mathcal{H}g_\epsilon)(\cdot) - \hat{U}(\cdot; z) \cdot d\|_{L_2(\Gamma_2)} \leq \epsilon. \quad (8.69)$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται επιλέγοντας ϵ' σύμφωνα με ϵ στην Εξ.(8.69) και λαμβάνοντας g_ϵ αναλογικά με το ϵ' στην Εξ.(8.67). ■

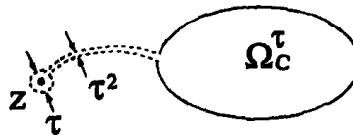


8.8.1 Συμπεριφορά της λύσης στον εξωτερικό χώρο Ω^-

Για να ερευνηθεί η περίπτωση όταν $z \in \Omega^-$, μπορούμε να υιοθετήσουμε την προσέγγιση στο [87] και να θεωρήσουμε το διαταραγμένο πεδίο του σχεδαστή $\Omega_C^\tau = \Omega_C \cup H_\tau \cup B_\tau(z)$ στην Εικ. 8.2, όπου B_τ είναι μία περικυκλωμένη σφαίρα διαμέτρου $\tau > 0$ κεντραρισμένη στο z , και H_τ είναι ένα σωληνοειδές χωρίο διαμέτρου τ^2 που ομαλώς συνδέει τα Ω_C και B_τ . Επιπλέον, έστω Γ και Γ^τ να δηλώνουν τα αντίστοιχα σύνορα των Ω_C και Ω_C^τ ώστε $\Gamma^\tau \setminus (\Gamma^\tau \cap \Gamma)$ είναι το σύνορο του προσαρτήματος. Υπό αυτήν τη θεώρηση, είναι χρήσιμο να θεωρήσουμε την διαταραγμένη ολοκληρωτική εξίσωση

$$\int_{\Gamma_1} (U^S(\xi, x) + V_\tau(\xi, x)) \cdot g_{z,d}^\tau(x) s_x = \hat{U}(\xi, z) \cdot d, \quad \xi \in \Gamma_2, \quad z \in \Omega^-. \quad (8.70)$$

στη θέση της Εξ.(8.28) όπου U^S είναι ο αρχικός τανυστής σχεδάσεως επαγόμενος από το Ω_C , και $U^S + V_\tau$ είναι το διαταραγμένο ανάλογο που γεννάται από το $\Omega_C^\tau \subset \Omega$ και περιέχει το σημείο δοκιμών.



Εικόνα 8.2: Διαταραγμένος σχεδαστής

Θεώρημα 8.2. Έστω $z \in \Omega^- = \Omega \setminus (\Omega_C \cup \Gamma)$ σταθερό, και έστω $\Omega_C^\tau \ni z$ να δηλώνει μια διαταραχή του Ω_C με $\tau > 0$ επαρκώς μικρό ώστε $\Omega_C^\tau \subset \Omega$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει μια διαταραγμένη πυκνότητα $g_\epsilon^\tau \in L_2(\Gamma_1)$ ώστε

$$\left\| \int_{\Gamma_1} (U^S(\cdot, x) + V_\tau(\cdot, x)) \cdot g_\epsilon^\tau(x) s_x - \hat{U}(\cdot, z) \cdot d \right\|_{L_2(\Gamma_2)} \leq \epsilon, \quad (8.71)$$

και

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \|g_\epsilon^\tau(\cdot)\|_{L_2(\Gamma_1)} = \infty, \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} V_\tau(\xi, \cdot) = 0, \quad \xi \in \Gamma_2 \quad (8.72)$$

Απόδειξη. Από την υπόθεση ότι $z \in \Omega_C^\tau \subset \Omega$ σταθερό, εφαρμογή του θεωρήματος 8.1 στο διαταραγμένο σχεδαστή Ω_C^τ καταδεικνύει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει μία λύση, που δηλώνεται ως $g_\epsilon^\tau \in L_2(\Gamma_1)$ που ικανοποιεί την ανισότητα της Εξ.(8.71). Ακολουθώντας, υπερθέτοντας το όριο $z \rightarrow y \in \Gamma^\tau$ με το $\tau \rightarrow 0$, συμπεραίνουμε ότι από την Εξ.(8.64) ότι $\lim_{\tau \rightarrow 0} \|g_\epsilon^\tau(\cdot)\|_{L_2(\Gamma_1)} = \infty$. Για να αποδείξουμε ότι $\lim_{\tau \rightarrow 0} V_\tau(\xi, \cdot) = 0$ για $\xi \in \Gamma_2$, χρησιμοποιούμε τη συνοριακή ολοκληρωτική



αναπαράσταση του διαταραγμένου σκεδαζόμενου πεδίου $U^S(\xi, x) + V_\tau(\xi, x)$, $\xi \in \Gamma_2$, $x \in \Gamma_1$ σε όρους ολοκληρωμάτων επί του διαμορφωμένου συνόρου Γ^* (ανάλογου της Εξ.(8.60) για το μη διαταραγμένο σκεδαστή) και αναπτύσσουμε έναν τρόπο εκτίμησης του όρου διαταραχής V_τ ως $\tau \rightarrow 0$. Η απόδειξη της Εξ.(8.72) για τον διαταραγμένο ελαστικό σκεδαστή Ω_C^* μιμείται την αντίστοιχη στο [87] για μη-διαπερατούς σκεδαστές και παραλείπεται στο παρόν για συντομία. ■

8.9 Αριθμητικά αποτελέσματα

Για την εξέταση της χρησιμότητας της ολοκληρωτικής εξίσωσης κοντινού-πεδίου της Εξ.(8.28) ως μέσο για την ανάδειξη διαπερατών σκεδαστών από επιφανειακές ελαστικές κυματομορφές, θεωρούμε τη δοκιμαστική επιφάνεια $\Gamma_1 = \Gamma_2 \subset S$ διαστάσεων $7d \times 7d$ όπως φαίνεται στην Εικόνα 8.3 όπου $\xi_i = \xi_i/d$ ($i = 1, 2, 3$). Ο ελαστικός ημιχώρος, που εμπεριέχει μέχρι και δύο διαπερατούς σκεδαστές, χαρακτηρίζεται από τις παραμέτρους Lamé $\lambda_e = \mu_e$ και πυκνότητα μάζας ρ_e . Στην εικόνα, ο σκεδαστής "Α" είναι ένα ελλειψοειδές κεντραρισμένο στο $(d, d, 2d)$ με κύριους άξονες $(d, 0.5d, 0.5d)$ και υλικές ιδιότητες $(\lambda_i^A, \mu_i^A, \rho_i^A)$. το "Β" ανάλογο είναι ένα κεντροειδές στο $(-1.5d, -1.5d, 2d)$, και κύριους άξονες $(d, 0.8d, 0.5d)$, και χαρακτηριστικές ιδιότητες $(\lambda_i^B, \mu_i^B, \rho_i^B)$. Σε ό,τι ακολουθεί, τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται αναφέρονται σε δύο συχνότητες διέγερσης

$$\bar{\omega} = \frac{\omega d}{\sqrt{\mu_e/\rho_e}} \in \{1, 2\}$$

και σε δύο διατάξεις σκεδαστών, ονομαστικά:

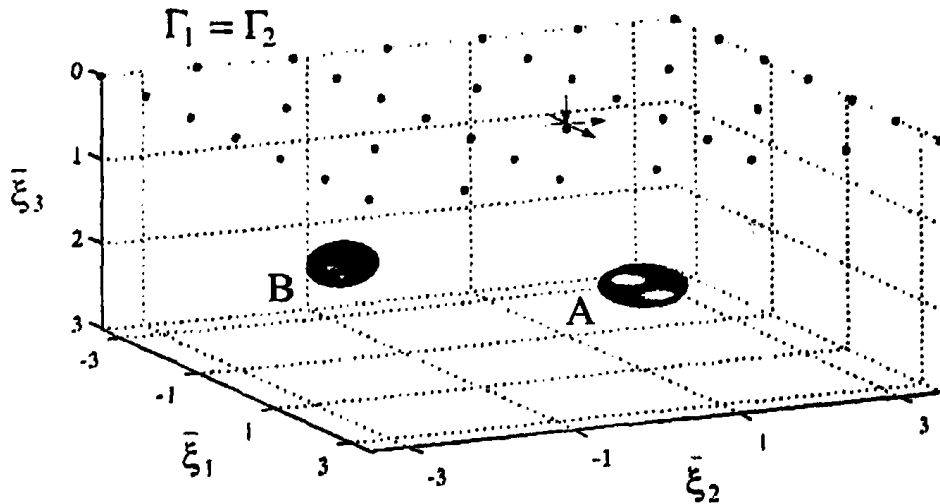
- *Μονός σκεδαστής:* ο ελαστικός ημιχώρος περιέχει τον σκεδαστή Α με ιδιότητες:
 $(\lambda_i^A, \mu_i^A, \rho_i^A) = (11.6\mu_e, 5\mu_e, 1.2\rho_e)$,
- *Σκεδαστής δύο διακριτών σωμάτων:* ο ελαστικός ημιχώρος περιέχει τους σκεδαστές Α και Β με ιδιότητες: $(\lambda_i^A, \mu_i^A, \rho_i^A) = (0.46\mu_e, 0.2\mu_e, 0.8\rho_e)$ και $(\lambda_i^B, \mu_i^B, \rho_i^B) = (11.6\mu_e, 5\mu_e, 1.2\rho_e)$.

Στη συνέχεια, ο ημιχώρος διεγείρεται από $M = 40\bar{\omega}^2$ σημεία πλέγματος ξ^k , $k = 1, 2, \dots, M$ των οποίων η διάταξη εντός της επιφάνειας δοκιμών για $\bar{\omega} = 1$ εκθέτεται στην Εικόνα 8.3. Σε κάθε σημειακή πηγή, αρμονική διέγερση μεγέθους $\mu_e d^2$ εφαρμόζεται ακολουθιακά στις τρεις συντεταγμένες διευθύνσεις ξ_i ($i = 1, 2, 3$). Υπό αυτήν τη θεώρηση, οι τιμές του ταυυστή σκέδασης $U^S(\xi^j, \xi^k)$, $j, k = 1, 2, \dots, M$ υπολογίζονται μέσω μιας μεθόδου συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων για την ελαστοδυναμική [93], και η Εξ.(8.28) αποδεικνύεται στα πλαίσια μια μεθόδου collocation ώστε

$$(\mathcal{F}g_{z,d})(\xi^k) = b_{z,d}(\xi^k), \quad \xi^k \in \Gamma_2, \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (8.73)$$

με $\mathcal{F}$ να δηλώνει τον συμπαγή τελεστή κοντινού-πεδίου που δίνεται από την Εξ.(8.29) και $b_{z,d} = \hat{U}(\cdot, z) \cdot d$. Για την αναγκαία παρεμβολή των U^S και $g_{z,d}$ μεταξύ των σημείων του πλέγματος και





Εικόνα 8.3: Διάταξη δοκιμών

για τους αριθμητικούς υπολογισμούς του επιφανειακού ολοκληρώματος στην Γ_1 στην Εξ.(8.29), η επιφάνεια δοκιμών διακριτοποιείται σε όρους του $N = 9\omega^2$ οκτώ-κόμβων (quadratic) στοιχεία όπως φαίνεται στην Εικόνα 8.3 για την περίπτωση $\bar{\omega} = 1$, δηλαδή $N = 9$. Τονίζεται ότι η πυκνότητα του πλέγματος για $\bar{\omega} = 2$ διπλασιάζεται (σε κάθε κατεύθυνση ξ_1 και ξ_2) αναφορικά με το “χαμηλής-συχνότητας” ανάλογο στην Εικόνα 8.3 ώστε να κατασταλούν τα πιθανά ανεπιθύμητα φαινόμενα της χωροδιάταξης (detrimental effects of spatial aliasing [99]) που προκαλούνται από την υπό-δειγματοληψία (under-sampling) των επιφανειακών ελαστικών κυματομορφών.

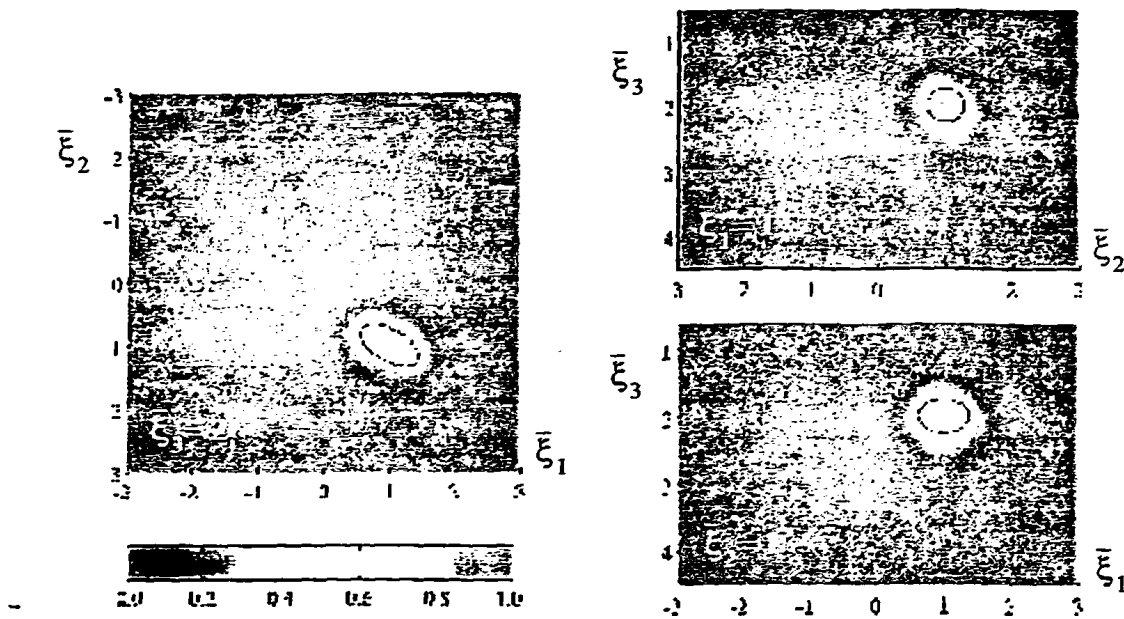
Για την επίλυση του εν λόγω μη καλώς-τοποθετημένου προβλήματος σε μια σταθερή μορφή, εφαρμόζεται η μέθοδος ομαλοποίησης του Tikhonov [63] όπου η λύση ομαλοποίησης (regularized solution) της Εξ.(8.29) και αντίστοιχα το διακριτοποιημένο ανάλογό της από την (8.73) εξάγονται από την ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού (cost functional)

$$J_\alpha(g_{z,d}) = \|\mathcal{F}g_{z,d} - b_{z,d}\|_{L_2(\Gamma_2)}^2 + \alpha \|g_{z,d}\|_{L_2(\Gamma_1)}^2, \quad \mathbb{R} \ni \alpha > 0 \quad (8.74)$$

όπου α είναι η παράμετρος ομαλοποίησης που επιλέγεται από την αρχή ασυμφωνίας του Μοροζον (Morozov discrepancy principle [81]).

Σε ό,τι ακολουθεί, οι τμηματικές κατανομές $1/\|\bar{g}_{z,d}\|_{L_2(\Gamma_1)}$ για τις προαναφερθείσες συχνότητες διεγέρσεως και τις διατάξεις των σχεδαστών παρουσιάζονται θεωρώντας ότι $d = (1, 1, 1)/\sqrt{3}$ για τον προσανατολισμό μιας υποθετικής σημειακής πηγής στην Εξ.(8.28). Σε κάθε γράφημα, οι



Εικόνα 8.4: Μονός συνεκτικός σκεδαστής ($\bar{\omega} = 1$)

κανονικοποιημένες τιμές της νόρμας της ομαλοποιημένης λύσης

$$\|\bar{g}_{z,d}\|_{L_2(\Gamma_1)} = \frac{\|g_{z,d}\|_{L_2(\Gamma_1)}}{\max_{z \in \Pi} \|g_{z,d}\|_{L_2(\Gamma_1)}}$$

όπου Π δηλώνει τον τετραγωνικό χώρο ενδιαφέροντος, υπολογίζονται σε ένα ομοιόμορφο πλέγμα σημείων δειγματοληψίας με ενδιάμεσα κενά $0.06d$ σε κατευθύνσεις παράλληλες στα ευθείας-γραμμής (straight-line) τμήματα του $\partial\Pi$.

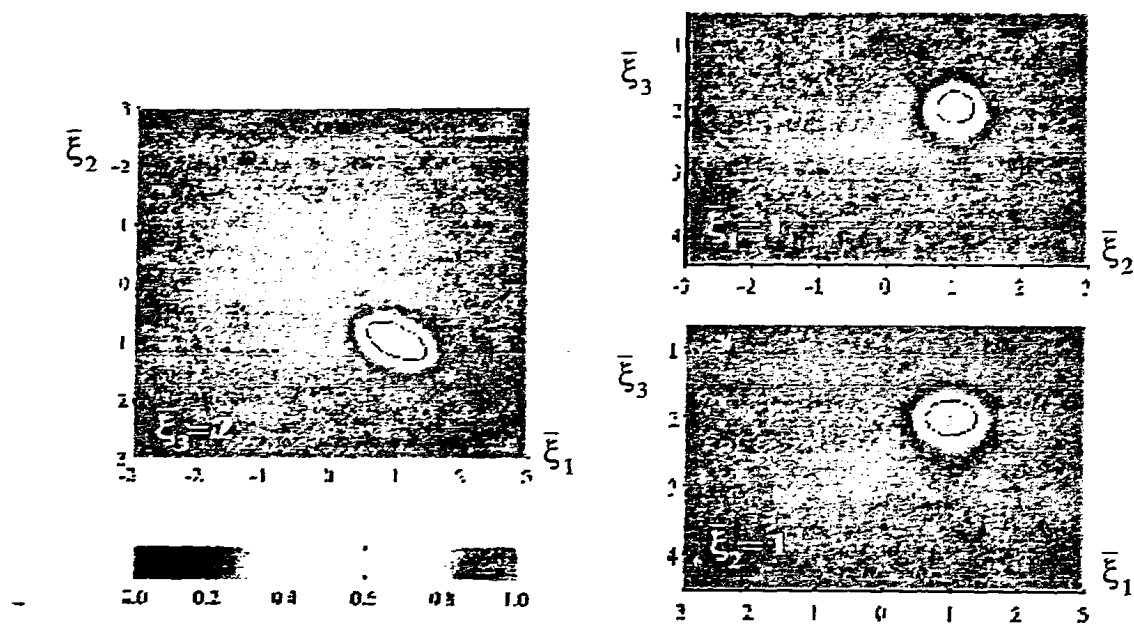
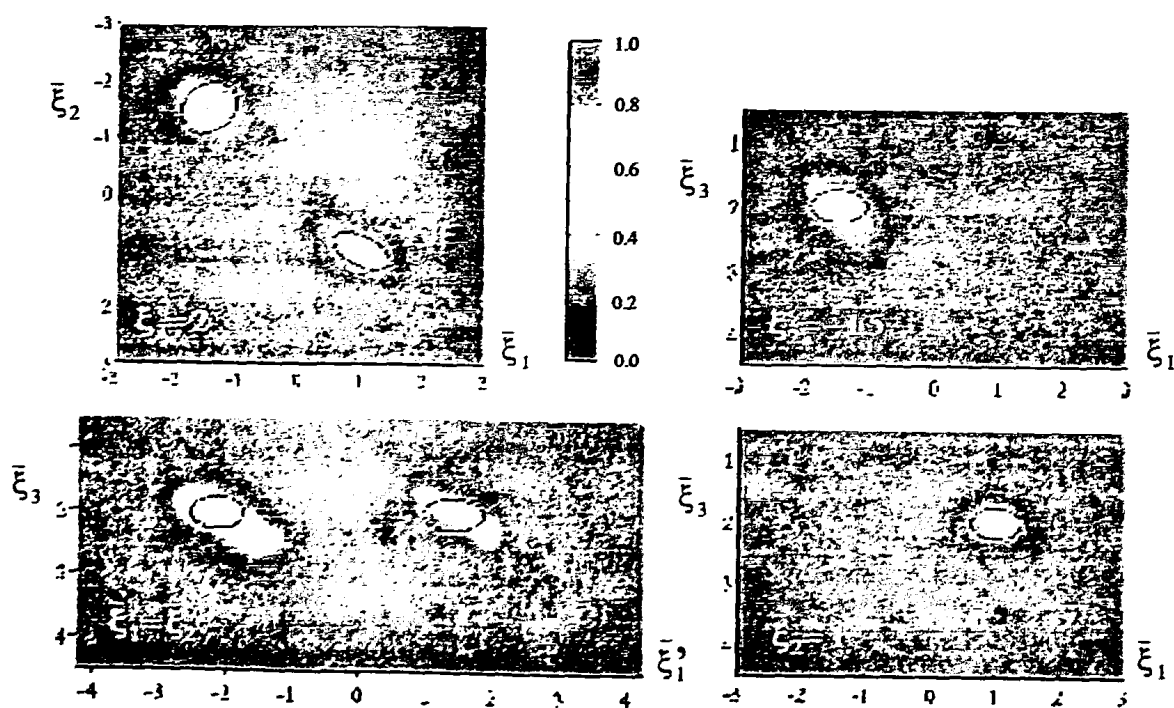
Αναφορικά στη διάταξη μονού-σκεδαστή, οι Εικόνες 8.4 και 8.5 παρουσιάζουν τις μεταβολές της αμοιβαίας πυκνοτικής νόρμας στα τρία ορθογώνια τμήματα που περιέχουν το κεντροειδές του σκεδαστή για $\bar{\omega} = 1$ και $\bar{\omega} = 2$, αντίστοιχα. Σε κάθε διάγραμμα, το περίγραμμα του “αληθινού” σκεδαστή ($\Pi \cap \Gamma$) ενδείκνυται ως μαύρο. Όπως φαίνεται, οι μή-τετρισμένες τιμές του $1/\|\bar{g}_{z,d}\|_{L_2(\Gamma_1)}$ λογικώς τω τρόπω εκθέτουν το σύνολο του σκεδαστή στην οριζόντια και στην κάθετη διεύθυνση παρά το πεπερασμένο διάφραγμα (limited aperture) της διάταξης δοκαιών (δες Εικ. 8.3). Όπως αναμενόταν, τα αποτελέσματα για $\bar{\omega} = 2$ (shear-wavelength-to-obstacle-size ratio $\gamma = \pi$) είναι πιο ακριβή από τα αντίστοιχα για $\bar{\omega} = 1$ ($\gamma = 2\pi$). Βάσει της Εξ.(8.73) και της θεωρούμενης σχέσης $M = 40\bar{\omega}^2$, είναι αξιοσημείωτο ότι τέτοια αύξηση στην αξιοπιστία των ανακατασκευών ακολουθείται από μια αύξηση στο υπολογιστικό κόστος που προσαρτάται στον υπολογισμό του δεξιού σκέλους του $b_{z,d}$.

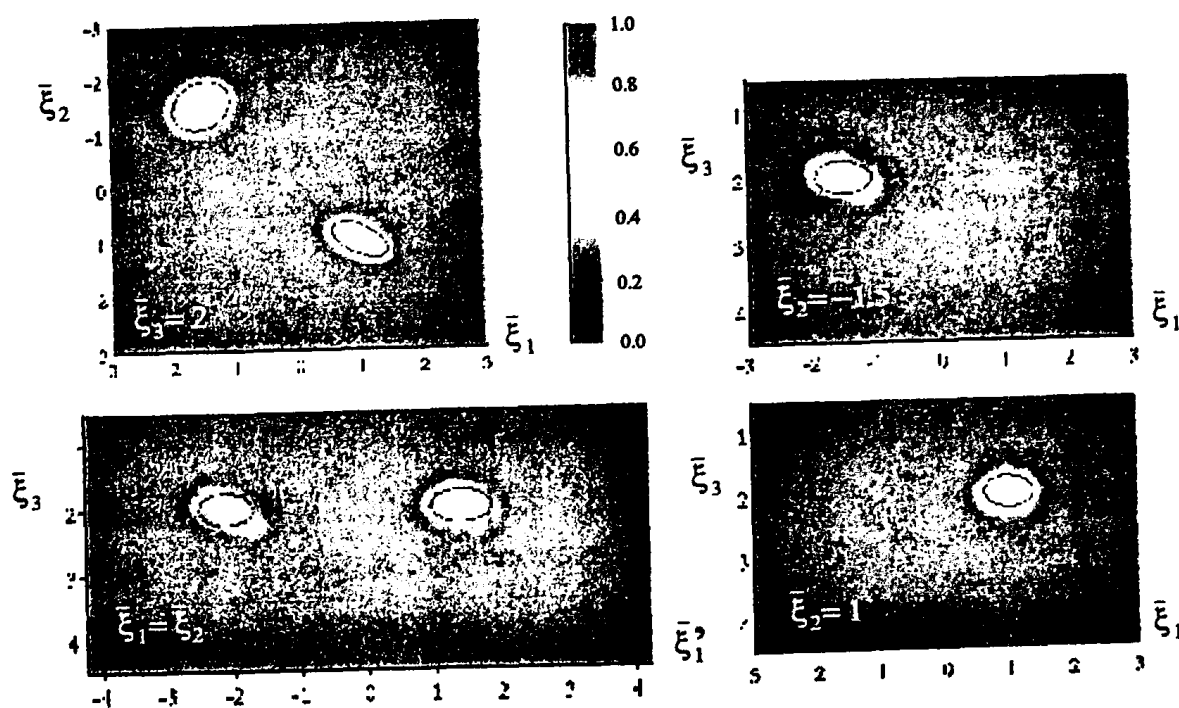
Τα αποτελέσματα διπλού-σχεδαστή για $\bar{\omega} = 1$ και $\bar{\omega} = 2$ παρουσιάζονται αντίστοιχα στις Εικόνες 8.6 και 8.7, όπου η επικεφαλίδα "αληθινό" (true) σχεδαστές είναι και πάλι σε μαύρο. Υποστηρίζοντας τις παρατηρήσεις παραπάνω, οι χαρακτηριστικές τμηματικές κατανομές του $1/\|\bar{g}(\cdot; z)\|_{L_2(\Gamma_1)}$ επιδεικνύουν ακόμη ότι η ελαστοδυναμική LSM κοντινού-πεδίου είναι ικανή να ανακατασκευάσει διακριτούς διαπερατούς σχεδαστές σε ένα εύρος ελαστικών αντιθέσεων σε όρους των παραμέτρων Lamé. Τονίζεται ότι οι σχεδαστές A και B στο μοντέλο του διπλού σχεδαστή χαρακτηρίζονται από $\mu_i^A/\mu_e = 1/5$ και $\mu_i^B/\mu_e = 5$ που επιτρέπουν τους χαρακτηρισμούς ως "μαλακός" (soft) και "σκληρός" (stiff), αντίστοιχα. Αναφορικά με αυτό, η εξέταση των διαγραμμάτων εξ' αριστερών στις Εικόνες 8.6 και 8.7 προτείνει ότι και οι δύο τύποι διαπερατών σωμάτων παρουσιάζουν όμοια επιδεκτικότητα σε ανακατασκευές από ελαστικά κύματα με μέσα της LSM.

8.10 Συμπεράσματα

Η γεωμετρική ανακατασκευή θαμμένων διαπερατών αντικειμένων από τη γνώση ελαστικών κυματομορφών κοντινού-πεδίου που προκύπτουν λόγω σκέδασης, εξετάζονται μέσω της Μεθόδου Γραμμικής Δειγματοληψίας. Η προτεινόμενη μεθοδολογία έχει να κάνει με τη γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση πρώτου είδους της οποίας η λύση γίνεται μη-φραγμένη όσο το σημείο πηγής (δειγματοληψίας) της συναρτήσεως Green πλησιάζει το σύνορο του ελαστικού σχεδαστή εκ των έσω. Για τον αυστηρό χειρισμό του προβλήματος, αναπτύχθηκε το θεωρητικό πλαίσιο που επαληθεύει α) τα απαραίτητα εσωτερικά προβλήματα μετάδοσης για την ελαστοδυναμική κοντινού-πεδίου, β) την ένα-προς-ένα ιδιότητα και την πυκνότητα εικόνας του τελεστή σκέδασης κοντινού-πεδίου, και γ) τη μη-φραγμένη δυναμική της χαρακτηριστικής λύσης πυκνότητας της οποίας η αμοιβαία νόρμα χρησιμοποιείται ως χαρακτηριστική συνάρτηση για το σχεδαστή. Ένα σύνολο αριθμητικών αποτελεσμάτων με συνεκτικούς ελαστικούς σχεδαστές συμπεριλαμβάνεται για να επιδείξει τη λειτουργικότητα της μεθόδου ανακατασκευής σε τρισδιάστατα προβλήματα.



Εικόνα 8.5: Μονός συνεκτικός σχεδαστής ($\bar{\omega} = 2$)Εικόνα 8.6: Σχεδαστής δύο διακριτών σωμάτων ($\bar{\omega} = 1$)

Εικόνα 8.7: Σχεδαστής δύο διακριτών σωμάτων ($\bar{\omega} = 2$)

Κεφάλαιο 9

Σύνοψη διατριβής

Στην παρούσα εργασία αντιμετωπίζουμε βάσει αναλυτικών μεθόδων προβλήματα κυματικής διάδοσης και σκέδασης σε πεπερασμένα (μικροκυματικά αντηχεία, ελαστικά δοκίμια), μή-πεπερασμένα κατά τη μία χωρική διάσταση (μικροκυματικοί και ελαστικοί κυματοδηγοί) και ημιάπειρα χωρία (ελαστικής ημιχώρος). Η αναλυτική μορφή και η αριθμητική ακρίβεια των εξαγόμενων αποτελεσμάτων, ο μικρός υπολογιστικός φόρτος, η ευστάθεια των λύσεων σε ενθόρυβα δεδομένα, που ενισχύεται με τη χρήση υπολογιστικών πακέτων πολλαπλής ακρίβειας, και η δυνατότητα συνεργασίας με ρουτίνες επίλυσης αντίστροφων προβλημάτων καθιστούν τις προτεινόμενες μεθόδους ιδιαίτερα ελκυστικές για το χειρισμό μονοδιάστατων ανομοιογενειών και σκεδαστών απλών γεωμετρικών μορφών. Τα αριθμητικά αποτελέσματα, η ακρίβεια των οποίων αξιώνει τη χρήση τους και ως πρότυπα δεδομένα (benchmark results) για την βελτίωση αριθμητικών μεθόδων, επιτρέπουν την εμβάθυνση στα φυσικά φαινόμενα της κυματικής διάδοσης με αποτέλεσμα την εξαγωγή σημαντικών συμπερασμάτων για τα υπό εξέταση υλικά. Φαινόμενα όπως η ολική ανάκλαση και η αντίστοιχη εκθετική απόσβεση του κύματος, οι ιδιοσυχνότητες αποκοπής, οι διαδιδόμενοι ιδιορρυθμοί και τα στάσιμα κύματα, αναδεικνύονται γραφικώς και υπολογίζονται με ακρίβεια. Δεδομένα που στην περίπτωση διηλεκτρικών και μαγνητικών ανομοιογενειών, με την εφαρμογή μιας γενετικής μεθόδου ελαχιστοποίησης, οδηγούν στην επίλυση του αντίστροφου προβλήματος ανακατασκευής άγνωστων ανομοιογενών προφίλ, ενώ στην περίπτωση διαπερατού εγκλεισμού σε πεπερασμένο χωρίο άμεσα υποδεικνύουν τη θέση και το μέγεθός του. Η ανακατασκευή του συνόρου ενός διαπερατού σκεδαστή απαιτεί τη χρήση σύγχρονων τεχνικών αντίστροφης σκέδασης, όπως η LSM, την οποία τεκμηριώνουμε θεωρητικά και εφαρμόζουμε με επιτυχία σε απλούς και πολλαπλούς διαπερατούς σκεδαστές θαμμένους στον ημιάπειρο τρισδιάστατο χώρο.

Πιο αναλυτικά, ο αριθμητικός χειρισμός της κυματικής διάδοσης σε ανομοιογενή διηλεκτρικά και μαγνητικά υλικά με προφίλ συνεχές, ομαλό, χωρίς οξείες μεταβολές και ταλαντώσεις, είναι εφικτός με τη χρήση αριθμητικών πακέτων πολλαπλής ακρίβειας (arbitrary precision arithmetic). Στις προσομοιώσεις που διεξάγουμε χρησιμοποιούμε αριθμητική 32 δεκαδικών ψηφίων και αντιμετωπίζουμε μέχρι και 10ης τάξεως ανομοιογένεια. Η ακρίβεια των αποτελεσμάτων υποβαθμί-



ζεται βέβαια με την υιοθέτηση ανομοιογενειών μεγαλύτερης τάξεως, καθώς και με την άνοδο της συχνότητας διέγερσης του συστήματος· οι διαφορές σε μέγεθος απόλυτων τιμών των στοιχείων που απαρτίζουν το τελικό γραμμικό σύστημα διευρύνονται και ο καταστατικός αριθμός (condition number) ακολουθώντας μεγαλώνει. Αξίζει να τονιστεί ότι σε όλες τις περιπτώσεις 150 όροι της Frobenius δυναμοσειράς αρκούν για να εκτιμηθεί το όριο με ευστάθεια και ακρίβεια. Για παράδειγμα, στο Κεφ. 4 η αναγκαία συνθήκη σύγκλισης $\lim_{i \rightarrow \infty} |c_i z^i| = 0$ ικανοποιείται για κάθε $z \in [0, d]$, δεδομένου ότι $|c_i z^i| \leq 10^{-16}$ για $i \geq 120$ στο συχνοτικό παράθυρο που εφαρμόζεται, και για το ρυθμό σύγκλισης ισχύει ότι $\left| \frac{S_i - S_{i+j}}{S_i} \right| \leq 10^{-16}$ για $i \geq 120$.

Σε όλες τις περιπτώσεις, η Frobenius αποδίδει ταυτόσημα αποτελέσματα με τα αντίστοιχα αναλυτικών κλειστών λύσεων, που εξάγονται για ομογενή και γραμμικώς ανομοιογενή προφίλ. Παρατηρείται δε ότι η ταύτιση των λύσεων σταδιακά αποκλίνει όσο αυξάνει η συχνότητα διέγερσης, όπως παρουσιάζεται στα αντίστοιχα διαγράμματα των Κεφ. 2-5, γεγονός που υπερσκελίζεται με τη χρήση πολλαπλής αριθμητικής ακρίβειας. Ομοίως και στο Κεφ. 6, ο έλεγχος με την collocation ρουτίνα επίλυσης συνοριακών προβλημάτων δύο σημείων αποφέρει εξαιρετικά αποτελέσματα, εξαρτώμενα πάντα από το συχνοτικό παράθυρο εφαρμογής και τη μορφή της ανομοιογένειας.

Εντός των ηλεκτρομαγνητικών και ελαστικών υλικών που εξετάζουμε στα Κεφ. 2-6, τα διεγερόμενα πεδία έχουν τη μορφή στάσιμων κυμάτων με μεταβαλλόμενη περιβάλλουσα (ασθενής ταλάντωση) λόγω της παρουσίας συνεχών ανομοιογενειών. Σε κάθε περίπτωση, η άνοδος της τάξης της ανομοιογένειας ενισχύει την κυματική αδιαπερατότητα του υλικού και την ανακλώμενη ενέργεια· η ύπαρξη αιχμηρών κλίσεων ή ταλαντώσεων στη μορφή της προκαλεί μερική ή ολική ανάκλαση. Η τελευταία εξαρτάται και από τη συχνότητα διεγέρσεως του συστήματος η οποία όταν δεν υπερβαίνει τη συχνότητα αποκοπής (Κεφ. 2-4) ή όταν το αντίστοιχο μήκος κύματος δεν ξεπερνά το $1/7$ του χαρακτηριστικού μεγέθους του υλικού (Κεφ. 6) το πεδίο εκθετικά αποσβαίνει εισχωρώντας σε ένα μικρό βάθος εντός της ανομοιογένειας, παρέχοντας έτσι ελάχιστες πληροφορίες για το χαρακτήρα της ανομοιογένειας.

Η έννοια της συχνότητας αποκοπής αποκτά εξίσου σημαντικό ρόλο και στην περίπτωση ανομοιογενών διηλεκτρικών και μαγνητικών υλικών. Ελλείπει ορισμού της στη βιβλιογραφία προτείνουμε στα Κεφ. 2-5 νέες φόρμουλες ορισμού και υπολογισμού, που είναι σε συμφωνία με τις αντίστοιχες των ομογενών περιπτώσεων, και οι οποίες κάνουν χρήση των μέσων τιμών των ανομοιογενών προφίλ (δες ΠαρAGR. 2.4.4, 3.4.4, 4.4.3, 5.4.1). Οι κατά αυτόν τον τρόπο θεωρητικά λαμβανόμενες τιμές προσεγγίζουν με μεγάλη ακρίβεια τις τιμές που εξάγονται από υπολογιστικές προσομοιώσεις, υποδεικνύοντας έτσι έναν έμμεσο τρόπο εκτίμησης της μέσης ανομοιογένειας που αποτελεί σημαντική πληροφορία στα πλαίσια του αντιστρόφου προβλήματος.

Κύριο ρόλο στην ανακατασκευή των ηλεκτρομαγνητικών και ελαστικών ιδιοτήτων των υλικών στα Κεφ. 2-6 έχει ο διαφορικής εξέλιξης γενετικός αλγόριθμος. Η επιλογή αυτού του ισχυρού Γ.Α. για την ανακατασκευή ανομοιογενών προφίλ οφείλεται στο γεγονός ότι η εκάστοτε συνάρτηση σφάλματος παρουσιάζει σημαντικές μεταβολές και πλήθος τοπικών ελαχίστων, ακόμη και



στην περίπτωση γραμμικού προφίλ (δες π.χ. Κεφ. 6, Εικ.6.6). Οι τιμές των παραμέτρων που του αποδόθηκαν στα αριθμητικά αποτελέσματα που παρατίθενται οφείλονται σε πλήθος δοκιμαστικών προσομοιώσεων που έχουμε διεξάγει.

Η προτεινόμενη μέθοδος ανακατασκευής διηλεκτρικών, μαγνητικών και ελαστικών ανομοιογενειών στα Κεφ. 2-6 παρέχει εξαιρετικά ακριβή αποτελέσματα υπό το καθεστώς αθόρυβων δεδομένων, απαιτούνται λιγότερες από 150 γενεές του Γ.Α. και ανταποκρίνεται επιτυχώς σε προβλήματα που εμπλέκουν μέχρι και 3ης τάξεως ανομοιογένειες. Τα αριθμητικά αποτελέσματα καταδεικνύουν ότι οι μετρήσεις των πλατών αρκούν για την επίτευξη της ανακατασκευής, αν και η γνώση των φάσεων είναι εφικτή σε πρακτικές εφαρμογές. Οι χρήσιμες τεσσάρων διακριτών συχνοτήτων διέγερσης (άρα και διακριτών μηκών κύματος) στις οποίες λαμβάνουμε ανεξάρτητες μεταξύ τους πληροφορίες για την ανομοιογένεια είναι επίσης αναγκαία για την εύρεση του ολικού ελαχίστου όπως επέδειξε το πλήθος των προσομοιώσεων που διεξάγαμε. Παρουσία ενθόρυβων δεδομένων, η προτεινόμενη μέθοδος παρουσιάζεται επαρκώς "ανθεκτική" όπως διαφαίνεται στα παραδείγματα του Κεφ. 6· διακρίνουμε πως η ανακατασκευή επιτυγχάνεται σε όλα τα είδη ανομοιογενειών, θεωρώντας ότι ο SNR δεν υπερβαίνει το 2%. Προφανώς, αύξηση του SNR συνεπάγεται άνοδο της απόκλισης μεταξύ πραγματικού και προσεγγιστικού ανομοιογενούς προφίλ.

Η χρήση των Navier ιδιοσυναρτήσεων για την επίλυση του προβλήματος σχεδασής του Κεφ. 7 που εμπλέκει πεπερασμένα χωρία με ανόμοιες γεωμετρικές αποδεικνύεται επιτυχής. Η δυσχέρεια στη θεωρητική εύρεση της λύσης που προκαλούν η συνύπαρξη του κυλινδρικού χωρίου με το σφαιρικό σχεδαστή, το πεπερασμένο μέγεθός τους, καθώς και η διαπερατότητα του σχεδαστή, αντιμετωπίζεται με τη χρήση κατάλληλων προσθετικών θεωρημάτων. Η αριθμητική υλοποίηση του ευθέως προβλήματος είναι εξαιρετικά περίπλοκη και επιτυγχάνεται αποκλειστικά με τη χρήση αριθμητικών πακέτων πολλαπλής ακρίβειας. Η αριθμητική ακρίβεια και ευστάθεια απαιτούν την εφαρμογή κατάλληλου συχνοτικού παραθύρου διέγερσης ώστε τα αντίστοιχα μήκοι κύματος να είναι συγκρίσιμα με τις χαρακτηριστικές διαστάσεις του συστήματος. Γεγονός που έχει ως συνέπεια η σύγκλιση του αριθμητικού σχήματος να συγκρατείται σε χαμηλά επίπεδα αποκοπής, ο καταστατικός αριθμός του τελικού γραμμικού πίνακα να είναι βέλτιστος (αύξηση της ευστάθειας του συστήματος) και οι συνοριακές συνθήκες να ικανοποιούνται ακριβέστερα (δες Εικ. 7.3).

Τα λαμβανόμενα αποτελέσματα υπαγορεύουν μια έμμεση μέθοδο επίλυσης του αντιστρόφου προβλήματος από τη μέτρηση του πεδίου μετατοπίσεων κατά μήκος της εξωτερικής επιφάνειας του κυλίνδρου, εστιάζοντας δε σε συγκεκριμένες διαταραχές του πεδίου που δημιουργούνται στη γειτονιά του εγκλεισμού. Πιο συγκεκριμένα, ο εγκλεισμός εμφανίζεται ως μια μικρή διαταραχή που έχει εμφανές εύρος και χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη ενός κρίσιμου σημείου στο οποίο παρατηρείται αλλαγή κλίσης του πεδίου (αλλαγή της πρώτης παραγώγου του πεδίου μετατοπίσεων). Το εν λόγω σημείο ταυτίζεται σε θέση με το κέντρο του εγκλεισμού, και το εύρος της κυματικής διαταραχής εκτείνεται όσο και το μέγεθός του (δες Εικ. 7.4-7.9).

Η ανίχνευση και η ανακατασκευή διαπερατού σχεδαστή από μετρήσεις κοντινού-πεδίου σε



ημιάπειρο χωρίο αντιμετωπίζεται με την υιοθέτηση της Μεθόδου Γραμμικής Δειγματοληψίας (LSM). Για τον αυστηρό μαθηματικό χειρισμό του προβλήματος, επαληθεύουμε α) τα απαραίτητα εσωτερικά προβλήματα διάδοσης για την ελαστοδυναμική κοντινού-πεδίου, β) την ένα-προς-ένα ιδιότητα και την πυκνότητα της εικόνας του τελεστή σκέδασης κοντινού-πεδίου, και γ) τη μη φραγμένη συμπεριφορά της ομαλοποιημένης λύσης της οποίας η αμοιβαία νόρμα χρησιμοποιείται ως χαρακτηριστική συνάρτηση για το σκεδαστή. Η λειτουργικότητα της μεθόδου αναδεικνύεται αριθμητικώς στις Εικ. 8.4-8.7 και αφορά τις περιπτώσεις μονού συνεκτικού σκεδαστή και σκεδαστή δύο διακριτών συνεκτικών σωμάτων στον τρισδιάστατο χώρο υπό το καθεστώς δύο διακριτών συχνοτήτων διέγερσης. Η ανακατασκευή επιτυγχάνεται τόσο στην περίπτωση “μαλακών” (soft) όσο και “σκληρών” (stiff) σκεδαστών με τη χρήση της μεθόδου ομαλοποίησης του Tikhonov και της αρχής ασυμφωνίας του Μποροζον για την επιλογή της παραμέτρου ομαλοποίησης α .

Ολοκληρώνουμε τη συνολική θεώρηση της διατριβής σχολιάζοντας τα σημεία εκείνα που καταδεικνύουν τους μελλοντικούς ερευνητικούς μας στόχους. Βάσει των Κεφ. 2-6, ανοικτό πρόβλημα συνιστά η εύρεση του κανόνα που υποδεικνύει τον τρόπο εξάρτησης της ολικής ανάκλασης από την τάξη της ανομοιογένειας και τη συχνότητα διέγερσης· η εύρεση δηλαδή της μαθηματικής σχέσης μεταξύ των συντελεστών του προφίλ της ανομοιογένειας, της συχνότητας διέγερσης και του συντελεστή ανακλάσεως. Επίσης, προς μελέτη τίθεται και η δυνατότητα ανακατασκευής ανομοιογενειών μη ιδανικών υλικών. Τα μη-ιδανικά διηλεκτρικά χαρακτηρίζονται από τη σχέση $\epsilon_r'(z) = \epsilon_r(z) - j\frac{\sigma}{\omega}$ με ($\sigma \neq 0$) και $\text{Im}(\epsilon_r(z)) \neq 0$ [25], γεγονός που συνεπάγεται διπλασιασμό των άγνωστων συντελεστών στα πλαίσια του αντίστροφου προβλήματος με άμεση επιβάρυνση του Γ.Α. Αν και η πλειονότητα των εφαρμογών αναφέρεται σε κυματοδηγούς κυλινδρικής ή τετραγωνικής διατομής, μεγάλης σημασίας είναι και η εξέταση της κυματοδηγησης και της ανακατασκευής σε κυματοδηγούς αυθαίρετης διατομής (π.χ. ελλειπτικής), καθώς και το πώς υλοποιούνται σε περιβάλλον εργαστηρίου σε πειραματικά μοντέλα με μη-ιδανικές συνοριακές συνθήκες, μη-ιδανικά φορτία απόσβεσης και με ενθόρυβα δεδομένα. Η επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος από τη γνώση των ιδιοσυχνοτήτων του σκεδαστή, που θίγεται στο Κεφ. 5 και επιτυγχάνεται για ομογενή και γραμμικώς ανομοιογενή σκεδαστή, συνιστά μία νέα ιδέα και εν δυνάμει μία νέα μέθοδο αντιστροφής. Ακόμη, δεδομένης της έλλειψης στη βιβλιογραφία αναλυτικών μεθόδων που χειρίζονται προβλήματα σκέδασης σε πεπερασμένα χωρία, προτείνουμε τη μελέτη προβλημάτων, αντίστοιχων του Κεφ. 7, στα πλαίσια του ηλεκτρομαγνητισμού και της ακουστικής. Εξαιρετικής σπουδαιότητας, επίσης, είναι η επέκταση της LSM στη σκέδαση κοντινού-πεδίου από ανισότροπους και ανομοιογενείς σκεδαστές καθώς και η εύρεση συναρτήσεων Green που θα επέτρεπαν την τεκμηρίωση και εφαρμογή της σε προβλήματα πεπερασμένων χωρίων.



Παράρτημα Α

Οι βαθμωτές συναρτήσεις $F_i(n; l)$

Οι βαθμωτές συναρτήσεις $F_i(n; l)$, $i = 1, 2, \dots, 12$ που εμφανίζονται στους συντελεστές επέκτασης των Εξισώσεων (7.22)-(7.26) και η διανυσματική συνάρτηση $F_{13}(n; m; l)$ εκφράζονται ως κάτωθι:

$$\begin{aligned}
 F_0(n; l) &= -\frac{i\Omega\rho_f}{c_s^2} g_n^1(k'_f r'_f), \\
 F_1(n; l) &= \left[\frac{A_0^1(k'_p; r'_f)}{A_0^2(k'_p; r'_f)} - \frac{\dot{g}_0^1(k'_p r'_f)}{\dot{g}_0^2(k'_p r'_f)} \right], \\
 F_2(n; l) &= \frac{F_0^0}{A_0^2(k'_p; r'_f)} - \frac{i \dot{g}_0^1(k'_f r'_f)}{c_f \dot{g}_0^2(k'_p r'_f)}, \\
 F_3(n; l) &= \frac{B_n^1(k'_p; r'_f)}{B_n^2(k'_p; r'_f)} - \frac{\dot{g}_n^1(k'_p r'_f)}{\dot{g}_n^2(k'_p r'_f)}, \\
 F_4(n; l) &= \frac{D_n^1(k'_s; r'_f)}{A_n^2(k'_p; r'_f)} - \frac{E_n^1(k'_s; r'_f)}{B_n^2(k'_p r'_f)}, \\
 F_5(n; l) &= \frac{B_n^1(k'_p; r'_f)}{B_n^2(k'_p; r'_f)} - \frac{\dot{g}_n^1(k'_p r'_f)}{\dot{g}_n^2(k'_p r'_f)}, \\
 F_6(n; l) &= \frac{i \dot{g}_n^1(k'_f r'_f)}{c_f \dot{g}_n^2(k'_p r'_f)}, \\
 F_7(n; l) &= n(n+1) \frac{g_n^1(k'_s r'_f)}{\dot{g}_n^2(k'_p r'_f)} - \frac{E_n^1(k'_s; r'_f)}{B_n^2(k'_p; r'_f)}, \\
 F_8(n; l) &= \frac{F_4(n; l)}{F_3(n)} - \frac{F_7(n; l)}{F_5(n)},
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 F_9(n; l) &= \frac{F_0(0)}{F_3(n) A_n^2(k'_p; r'_f)} - \frac{F_6(n)}{F_5(n)}, \\
 F_{10}(n; l) &= \frac{F_7(n; l)}{F_5(n)} - \frac{F_6(n) F_8(n; l)}{F_5(n) F_9(n)}, \\
 F_{11}(n; l) &= \frac{B_n^1(k'_p; r'_f)}{B_n^2(k'_p; r'_f)} F_{10}(n; l) + \frac{E_n^1(k'_s; r'_f)}{B_n^2(k'_p; r'_f)}, \\
 F_{12}(n; l) &= \frac{F_0(0)}{A_0^2(k'_p; r'_f)} - \frac{A_0^1(k'_p; r'_f) F_2}{A_0^2(k'_p; r'_f) F_1}, \\
 F_{13}(n; m; l) &= L_n^{m,1}(r'_f) F_{10}(n; l) - L_n^{m,2}(r'_f) F_{11}(n; l) + N_n^{m,l}(r'_f).
 \end{aligned}$$



Βιβλιογραφία-Αναφορές

- [1] C J S Alves and R Kress (2002), *On the far-field operator in elastic obstacle scattering*, IMA J. Appl. Math. **67**, pp 1-21.
- [2] N Ambrascys (1959), *A note on the response of an elastic overburden of varying rigidity to an arbitrary ground motion*, Bull. Seis. Soc. Am. **49**, pp 211-220.
- [3] T Arens (2001), *Linear sampling methods for 2D inverse elastic wave scattering*, Inverse Problems **17**, pp 1445-1464.
- [4] W Auzinger (1998), **Fundamentals of Functionally Graded Materials**, The Institute of Materials, IOM Communications Ltd., London.
- [5] W Auzinger, G Kneisl, O Koch, E B Weinmüller (2001), *A Collocation Code for Singular Boundary Value Problems in Ordinary Differential Equations*, ANUM, Vienna University of Technology **18**.
- [6] K Baganas, A Charalambopoulos and A Kehagias (2001), *Inhomogeneous dielectric media: wave propagation and dielectric permittivity reconstruction*, J. Electromagn. Waves Appl. **15**(10). pp 1373-1400.
- [7] K Baganas (2002), *Inhomogeneous Dielectric Media: Wave Propagation and Dielectric Permittivity Reconstruction in the Case of a Rectangular Waveguide*, J. Electromagn. Waves Appl. **16**(10), pp 1371-1392.
- [8] L Bahar (1967), *Generalized WKB method with application to problems of propagation in inhomogeneous media*, J. Math. Phys. **8**.
- [9] K Balanis (1998), **Advanced Engineering Electromagnetics**, John Willey and Sons, New York.
- [10] G Birkhoff and G Rota (1962), **Ordinary Differential Equations**, Ginn and Company.
- [11] L M Brekhovskikh and R Beycr (1976), **Waves in layered media, 2nd Edn.**, Academic Press, New York.



- [12] K E Bullen and B A Bolt (1985), *An introduction to the theory of seismology*, 4th Edn., Cambridge University Press, Cambridge.
- [13] T Burczynski, W Beluch, A Dlugosz, M Nowakowski and P Orantek (2000), *Evolutionary methods in inverse problems of engineering mechanics*, Elsevier, Inv. Prob. Engng. Mech., London.
- [14] F Cakoni and H Haddar (2001), *The linear sampling method for anisotropic media: part II*, Preprints MSRI Berkeley 26.
- [15] F Cakoni, H Haddar and D Colton (2002), *The linear sampling method for anisotropic media*, J. Comput. Appl. Math. 146, pp 285-299.
- [16] G Caviglia and A Morro (2002), *Existence and uniqueness for wave propagation in inhomogeneous elastic solids*, Seminario Matematico 8, Università di Padova.
- [17] Z Chang and A Mal (1999), *Scattering for Lamb waves from a rivet hole with edge cracks*, Mech. Mater. 31, pp 197-204.
- [18] A Charalambopoulos, D Fotiadis and C Massalas (1998), *Free vibrations of a double layered elastic isotropic cylindrical rod*, Int. J. Engng. Sci. 36, pp 711-731.
- [19] A Charalambopoulos, G Dassios, D Fotiadis and C Massalas (1998), *Dynamic characteristics of the human skull-brain system*, Comp. Math. Model. 27(2), pp 81-101.
- [20] A Charalambopoulos, K Kiriaki and D Gintides (2002), *The linear sampling method for the transmission problem in three-dimensional linear elasticity*, Inverse Problems 18, pp 1-12.
- [21] A Charalambopoulos (2002), *On the interior transmission problem in nondissipative, inhomogeneous, anisotropic elasticity*, J. Elasticity 67, pp 149-170.
- [22] A Charalambopoulos, K Kiriaki and D Gintides (2003), *The linear sampling method for non-absorbing penetrable elastic bodies*, Inverse Problems 19, pp 549-561.
- [23] A B Cheryauka and M S Zhdanov (2001), *Nonlinear approximations for an EM scattering problem in a medium with joint electrical and magnetic inhomogeneities*, Radio Sci.
- [24] Y K Cheung, L G Tham and Z X Lei (1993), *Wave propagation in layered media by time domain BEM*, Earthq. Engng. Struct. Dyn. 22, pp 225-244.
- [25] W C Chew (1995), *Waves and fields in inhomogeneous media*, IEEE Press.



- [26] C Christopoulos (1995), *The Transmission-Line Modeling Method: TLM*, IEEE Press.
- [27] S Coen, K M Kenneth and D J Angelakos (1981), *Inverse scattering technique applied to remote sensing of layered media*, IEEE Trans. Ant. Prop. AP-29(2).
- [28] D Colton (1980), *Analytic Theory of Partial Differential Equations*, Pitman, London.
- [29] D Colton and A Kirsch (1996), *A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region*, Inverse Problems 12, pp 383-393.
- [30] D Colton, P Monk and R Kress (1997), *Inverse scattering from an orthotropic medium*, J. Comp. Appl. Math. 81, pp 269-298.
- [31] D Colton and P Monk (1998), *Linear sampling method for the detection of leukemia using microwaves*, SIAM J. Appl. Math. 58, pp 926-941.
- [32] D Colton, R Potthast and M Piana (1999), *A simple method using Morozov's discrepancy principle for solving scattering problems*, Inverse Problems 13, pp 1477-1493.
- [33] D Colton and P Monk (1999), *Linear sampling method for the detection of leukemia using microwaves II*, SIAM J. Appl. Math. 60, pp 241-255.
- [34] D Colton, P Monk and J Coyle (2000), *Recent developments in inverse acoustic scattering theory*, SIAM Rev 42, pp 369-414.
- [35] D Colton, P Monk and K Giebermann (2000), *Regularized sampling method for solving three-dimensional inverse scattering problems*, SIAM J. Sci. Comput. 21, pp 2316-2330.
- [36] D Colton and R Kress (2000), *On the denseness of Herglotz wave functions and electromagnetic Herglotz pairs in Sobolev spaces*, Math. Meth. Appl. Sci. 24, pp 1289-1303.
- [37] O Cruzan (1962), *Translation addition theorems for spherical vector wave functions*, Q. Appl. Math. 20, pp 33-40.
- [38] P Dakoulas and G Gazetas (1985), *A class of inhomogeneous shear models for seismic response of dams and embankments*, Soil Dyn. Earthq. Engng. 4, pp 166-182.
- [39] G Dassion and Z Rigou (1995), *Elastic Herglotz functions*, SIAM J. Appl. Math. 55, pp 1345-1361.
- [40] M C Decreton and F E Gardiol (1974), *Simple nondestructive method for measurement of complex permittivity*, IEEE Trans. Instrum. Meas. IM-23.



- [41] A Doyum and F Erdogan (1991), *An elastic half-space containing a flat inclusion under a harmonic surface load*, J. Sound Vibr. **147**(1), pp 13-37.
- [42] W M Ewing, W S Jardetzky and F Press (1957), *Elastic waves in layered media*, McGraw-Hill, New York.
- [43] P Fellingner, R Marklein, J Langenberg and S Klaholz (1995), *Numerical modeling of elastic wave propagation and scattering with EFIT - elastodynamic finite integration technique*, Wave Motion **21**, pp 47-66.
- [44] P V Frangos and D L Jaggard (1987), *The reconstruction of stratified dielectric profiles using successive approximations*, IEEE Trans. Ant. Prop. **AP-35**(11).
- [45] B Friedman and J Russek (1954), *Addition theorems for spherical waves*, Q. Appl. Math. **12**, pp 13-23.
- [46] G Gazetas (1982), *Vibrational characteristics of soil deposits with variable wave velocity*, Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech. **6**, pp 1-20.
- [47] D Gintides and K Kiriaki (1992), *On the continuity dependence of elastic scattering amplitudes upon the shape of the scatterer*, Inverse Problems **8**, pp 95-118.
- [48] D Gintides (1999), *The inverse scattering problem in three-dimensional elasticity*, Z. Angew Math. Mech. **79**, pp 675-684.
- [49] D Gintides and K Kiriaki (2001), *The far-field equations in linear elasticity-an inversion scheme*, Z. Angew Math. Mech. **81**, pp 305-316.
- [50] B Guzina and R Y S Pak (2001), *On the analysis of wave motions in a multi-layered solid*, Q. J. Mech. Appl. Math. **54**, pp 13-37.
- [51] B Guzina, M Bonnet and R Y S Pak (2003), *On the stress-wave imaging of cavities in a semi-infinite solid*, Int. J. Solids Struct. **40**, pp 1505-1523.
- [52] B Guzina and A Madyarov (2006), *A probe method for inverse scattering in layered elastic solids* (in preparation).
- [53] T M Habashy, W C Chew and E Y Chow (1986), *Simultaneous reconstruction of permittivity and conductivity profiles in a radially inhomogeneous slab*, Radio Sci. **21**(4).
- [54] H Haddar and P Monk (2002), *The linear sampling method for solving the electromagnetic inverse medium problem*, Inverse Problems **18**, pp 891-906.



- [55] W Hansen (1935), *A new type of expansion in radiation problems*, Phys. Rev. **47**, pp 139-143.
- [56] E Hille (1976), *Ordinary Differential Equations in the Complex Plane*, Dover.
- [57] T Hirai (1996), *Functionally graded materials*, Proccs. Ceram. **17B** Part 2, pp 292-341.
- [58] I M Idriss and H B Seed (1968), *Seismic response of horizontal soil layers*, J. Soil Mech. Found. Div. **94**, pp 1003-1031.
- [59] A K Jordan and S Ahn (1979), *Inverse scattering theory and profile reconstruction*, Proc. IEEE **126**(10).
- [60] A Kassab, F Moslehy and A Daryapurkar (1994), *Nondestructive detection of cavities by an inverse elastostatics boundary element method*, Eng. Analysis Bound. Elem. **13**, pp 45-55.
- [61] E Kausel and G D Manolis (2000), *The Thin-Layer Method in seismology and earthquake engineering, in Wave Motion in Earthquake Engineering*, WIT Press.
- [62] O D Kellogg (1957), *Foundations of Potential Theory*, Dover.
- [63] A Kirsch (1996), *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, Springer-Verlag, Berlin.
- [64] M Kitahara and S Hirose (1998), *Elastodynamic inversion of 3D cavity from backscattering data*, Inv. Prob. Engng. Mech. pp 163-170.
- [65] R J Knops and L E Payne (1971), *Uniqueness Theorems in Linear Elasticity*, Springer-Verlag, Berlin.
- [66] J Krautkramer and H Krautkramer (1990), *Ultrasonic Testing of Material's*, 4th Edition, Springer-Verlag, Berlin.
- [67] Yu A Kravtsov and Yu I Orlov (1990), *Geometrical Optics of Inhomogeneous Media*, Springer-Verlag, Berlin.
- [68] R Kress (1999), *Linear Integral Equations*, Springer-Verlag, Berlin.
- [69] V D Kupradze (1979), *Three-Dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity*, North Holland, Amsterdam.
- [70] H D Ladouceur and A K Jordan (1985), *Renormalization of an inverse-scattering theory for inhomogeneous dielectrics*, J. Opt. Soc. Am. **2**(11).



- [71] J Lee and A Mal (1995), **A volume integral equation technique for multiple scattering in elastodynamics**, Appl. Math. Comp. **67**, pp 135-159.
- [72] D Lesselier (1982), *Optimization techniques and inverse problems: reconstruction of conductivity profiles in the time-domain*, IEEE Trans. Ant. Prop. **AP-30**(1).
- [73] Y B Liu and R S Wu (1994), *A comparison between phase screen, finite difference and eigenfunction expansion calculations for scalar waves in inhomogeneous media*, Bull. Seismol. Soc. Am. **84**, pp 1154-1168.
- [74] A I Madyarov and B Guzina (2006), *A radiation condition for layered elastic media*, J. Elast. **82**, pp 73-98.
- [75] A Mal and S Bose (1974), *Dynamic elastic moduli of a suspension of imperfectly bonded spheres*, Cambridge Phil. Soc. Proc. **76**, pp 587-600.
- [76] A J Markworth and K S Ramesh (1995), *Modeling studies applied to functionally graded materials*, J. Mater. Sci. **30**, pp 2183-2193.
- [77] R Marklein (1997), **Numerical Methods for the Modeling of Acoustic, Electromagnetic, Elastic and Piezoelectric Wave Propagation Problems in the Time Domain Based on the Finite Integration Technique**, Shaker Verlag, Aachen.
- [78] P A Martin (1990), *On the scattering of elastic waves by an elastic inclusion in two dimensions*, Q. J. Mech. Appl. Math. **43**, pp 275-291.
- [79] P Mathey and P Jullien (1996), *Numerical analysis of a WKB inverse method in view of index profile reconstruction in diffused waveguides*, Opt. Comm. **122**, pp 127-134.
- [80] W McLean (2000), **Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations**, Cambridge University Press.
- [81] V A Morozov (1984), **Methods for Solving Incorrectly Solved Problems**, Springer Verlag.
- [82] P Morse and H Feshbach (1953), **Methods of theoretical physics, Vol. 2**, McGraw-Hill, New York.
- [83] J R Mosig, J Cl Besson, M Gex-Fabry and F E Gardiol (1981), *Reflection of an open-ended coaxial line and application to nondestructive measurement of materials*, IEEE Trans. Instrum. Meas. **IM-30**(1).



- [84] N Nakahata and M Kitahara (2000), *Inversion of defects by linearized scattering methods with measured waveforms*, Inv. Prob. Engng. Mech. Proceedings, International Symposium, Elsevier Science.
- [85] F Nintcheu, B Guzina and M Bonnet (2002), *Computational Basis for Elastodynamic Cavity Identification in a Semi-Infinite Solid*, IABEM, Conference Proceedings, Austin, University of Texas Publication.
- [86] F Nintcheu (2003), *3D Subterranean imaging via elastic waves*, PhD Thesis, University of Minnesota.
- [87] F Nintcheu and B Guzina (2004), *A linear sampling method for near-field inverse problems in elastodynamics*, Inverse Problems 20, pp 713-736.
- [88] F Nintcheu and B Guzina (2006), *Elastic scatterer reconstruction via the regularized sampling method*, J. Appl. Math. (submitted).
- [89] N Nishimura and S Kobayashi (1991), *A boundary integral equation method for an inverse problem related to crack detection*, Int. J. Num. Meth. Engng. 32, pp 1371-1387.
- [90] S Olsson (1993), *Point force excitation of an elastic infinite circular cylinder with an embedded spherical cavity*, J. Acous. Soc. Am. 93, pp 2479-2488.
- [91] S Olsson (1990), *Scattering of acoustic waves by a sphere outside an infinite circular cylinder*, J. Acous. Soc. Am. 88, pp 515-524.
- [92] R Y S Pak (1987), *Asymmetric wave propagation in a half-space by a method of potentials*, J. Appl. Mech. 54, pp 121-126.
- [93] R Y S Pak and B Guzina (1999), *Seismic soil-structure interaction analysis by direct boundary element methods*, Int. J. Solids Struct. 26, pp 4743-4766.
- [94] D A Pavlov and M S Zhdanov (1998), *Anomalous conductivity and magnetic permeability effects in time domain electromagnetic data*, Internat. Mtg. 68th Ann., pp 440-443, Soc. Expl. Geoph.
- [95] D A Pavlov and M S Zhdanov (2001), *Analysis and interpretation of anomalous conductivity and magnetic permeability effects in time domain electromagnetic data. Part I: Numerical modeling*, J. Appl. Geoph. 46(4), pp 217-233.
- [96] G Pelekanos and V Sevrouglou (2003), *Inverse scattering by penetrable objects in two-dimensional elastodynamics*, J. Comput. Appl. Math. 151, pp 129-140.
- [97] D Potter (1973), *Computational Physics*, Wiley Interscience, New York.



- [98] D Rafizadeh and S Ho (1997), *Numerical analysis of vectorial wave propagation in waveguides with arbitrary refractive index profiles*, Opt. Comm. **141**, pp 17-20.
- [99] J Ronen (1987), *Wave-equation trace interpolation*, Geophysics **52**, pp 973-984.
- [100] H Schreyer (1977), *One dimensional elastic waves in inhomogeneous media*, J. Engng. Mech. Div. **103**, pp 979-990.
- [101] A L Shuvalov (2002), *The Frobenius power series solution for cylindrically anisotropic radially inhomogeneous elastic materials*, Q. J. Mech. Appl. Math. **56(3)**, pp 327-345.
- [102] S Stein (1961), *Addition theorems for spherical wave functions*, Q. Appl. Math. **19**, pp 15-24.
- [103] R Storn and K Prise (1997), *Differential Evolution - a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces*, Kluwer Acad. Publ. **11**, pp :341-359.
- [104] J Stratton (1941), **Electromagnetic Theory**, McGraw-Hill, New York.
- [105] S Suresh and A Mortensen (1998), **Fundamentals of Functionally Graded Materials**, The Institute of Materials, IOM Communications Ltd., London.
- [106] E Tartaras, M S Zhdanov, A Saito and T Hara (2000), *Fast imaging of TDEM data based on S-inversion*, J. Appl. Geoph. **43(1)**, pp 15-32.
- [107] V Tcodoris, T Sphicopoulos and F E Gardiol (1985), *The reflection from an open-ended waveguide terminated by a layered dielectric medium*, IEEE Trans. Microw. Theory Techn. **33(5)**.
- [108] K Toki and S Cherry (1972), *Inference of subsurface accelerations and strain from accelerograms recorded at ground surface*, Earthq. Engng., Proc. 4th Europ. Symp., pp 73-92.
- [109] I Towhata (1996), *Seismic wave propagation in elastic soil with continuous variation of shear modulus in the vertical direction*, Soils Found. **36(1)**, pp 61-72.
- [110] G Tyras (1969), **Radiation and propagation of electromagnetic waves**, Academic Press, New York.
- [111] C Vrettos (1991), *Surface Green's functions for continuously nonhomogeneous soil*, Comp. Meth. Adv. Geomech., pp 801-804.
- [112] Y Z Wang, W B Wang, X Jiaotong and R S Wu (1997), **Propagation of a monopulse in layered and inhomogeneous media using an adaptive multiscale wavelet collocation method**, Expanded Abstracts of the Technical Program, SEG 67th Annual Meeting, Dallas.



- [113] J A Ware and K Aki (1969), *Continuous and discrete inverse scattering problems in a stratified elastic medium. I: Planes at normal incidence*, J. Acous. Soc. Am. 45(4).
- [114] D Weile and E Miclielssen (1997), *Genetic algorithm optimization applied to electromagnetics: A review*, IEEE Trans. Ant. Prop. 45, pp 343-353.
- [115] L T Wheeler and E Sternberg (1968), *Some theorems in classical elastodynamics*, Arch. Rat. Mech. Anal. 31, pp 51-90.
- [116] E Whitehurst (1966), *Evaluation of Concrete Properties from Sonic Tests*, ACI-American Concrete Institute, Detroit, Michigan.

α 15800

