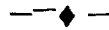


# Αλγόριθμοι Κατασκευής και Μελέτη Προβλημάτων Χρωματισμού Κλάσεων Τέλειων Γραφημάτων

Δήμητρα Τσάμη

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΕΞΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ



Ιωάννινα, Φεβρουάριος 2010

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE  
UNIVERSITY OF IOANNINA



ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΚΑΙ ΜΕΛΕΤΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ  
ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΥ ΚΛΑΣΕΩΝ ΤΕΛΕΙΩΝ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Η  
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΕΞΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ

Υποβάλλεται στην

ορισθείσα από την Γενική Συνέλευση Ειδικής Σύνθεσης  
του Τμήματος Πληροφορικής  
Εξεταστική Επιτροπή

από την

Δήμητρα Τσάμη

ως μέρος των Υποχρεώσεων

για τη λήψη

του

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ  
ΜΕ ΕΞΕΙΔΙΚΕΥΣΗ ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Φεβρουάριος 2010





ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΕΡΓΟ  
ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΕΡΓΟ

II

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΕΡΓΟ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΕΡΓΟ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΕΡΓΟ  
ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΕΡΓΟ  
ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΕΡΓΟ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΕΡΓΟ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΕΡΓΟ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΕΡΓΟ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΕΡΓΟ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΕΡΓΟ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΕΡΓΟ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΕΡΓΟ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΕΡΓΟ



## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

---

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Σταύρο Δ. Νικολόπουλο για την πολύτιμη βοήθειά του και τις χρήσιμες παρατηρήσεις του. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω την διδάκτορα Κυριακή Ιωαννίδου για την πολύτιμη συμβολή της στην ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας.



# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

---

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1	Θέμα Μελέτης	1
1.2	Βασικές Έννοιες και Ορισμοί	2
1.3	Δομή της Εργασίας	2
1.4	NP-Πληρότητα	4
1.5	Τα Προβλήματα Χρωματισμού και Μέγιστης Κλίκας	5
<b>2</b>	<b>Τέλεια Γραφήματα</b>	<b>9</b>
2.1	Τέλεια Γραφήματα	9
2.1.1	Ιδιότητες Τέλειων Γραφημάτων	9
2.2	Τριγωνικά Γραφήματα	11
2.2.1	Ιδιότητες Τριγωνικών Γραφημάτων	11
2.2.2	Κατασκευή Τριγωνικών Γραφημάτων	14
2.3	Γραφήματα Split	16
2.3.1	Ιδιότητες Split Γραφημάτων	16
2.3.2	Κατασκευή Split Γραφημάτων	18
2.4	Γραφήματα Undirected Path	19
2.4.1	Ιδιότητες Undirected Path Γραφημάτων	19
2.4.2	Κατασκευή Undirected Path Γραφημάτων	20
2.5	Γραφήματα Interval	21
2.5.1	Ιδιότητες Interval Γραφημάτων	21
2.5.2	Κατασκευή Interval Γραφημάτων	21
2.6	Γραφήματα Cograph	23
2.6.1	Ιδιότητες Cograph Γραφημάτων	23
2.6.2	Κατασκευή Cograph Γραφημάτων	24
2.7	Γραφήματα Threshold	26
2.7.1	Ιδιότητες Threshold Γραφημάτων	26
2.7.2	Κατασκευή Threshold Γραφημάτων	27
2.8	Γραφήματα Quasi-Threshold	27



2.8.1	Ιδιότητες Quasi Threshold Γραφημάτων	27
2.8.2	Δενδρική Αναπαράσταση Quasi Threshold Γραφημάτων	29
2.8.3	Κατασκευή Quasi Threshold Γραφημάτων	29
2.9	Δέντρα	31
2.9.1	Ιδιότητες Δέντρων	31
2.9.2	Κατασκευή Δέντρων	32
<b>3</b>	<b>Αλγόριθμοι Χρωματισμού I</b>	<b>34</b>
3.1	Εισαγωγή	34
3.2	Μη Πολυωνυμικά Προβλήματα	34
3.3	Σειριακός Αλγόριθμος Χρωματισμού	35
3.4	Αλγόριθμος Χρωματισμού «Πρώτα η Μεγαλύτερη»	36
3.5	Αλγόριθμος Χρωματισμού «Τελευταία η Μικρότερη»	37
3.6	Αλγόριθμος Χρωματισμού «Βαθμός Χρώματος»	38
3.7	Παραδείγματα Χρωματισμού	39
3.8	Παρατηρήσεις	42
<b>4</b>	<b>Αλγόριθμοι Χρωματισμού II</b>	<b>45</b>
4.1	Χρωματισμός Colinear	45
4.1.1	Ορισμός Colinear Χρωματισμού	45
4.1.2	Αλγόριθμος Colinear Χρωματισμού	46
4.2	Χρωματισμός Pair-Complete	48
4.2.1	Ορισμός Pair-Complete Χρωματισμού	48
4.2.2	Αλγόριθμος Pair-Complete Χρωματισμού	49
4.3	Αρμονικός Χρωματισμός	51
4.3.1	Ορισμός Αρμονικού Χρωματισμού	51
4.3.2	Αλγόριθμος Αρμονικού Χρωματισμού Χρωματισμού σε Split Strongly Chordal Γραφήματα	52
<b>5</b>	<b>Πειραματικά Αποτελέσματα</b>	<b>53</b>
5.1	Εισαγωγή	53
5.2	Γραφήματα Cograph	54
5.3	Γραφήματα Quasi Threshold	55



5.4 Γραφήματα Threshold	56
5.5 Γραφήματα Interval	56
5.6. Γραφήματα Cographs	57
5.7 Γραφήματα Split	58
5.8 Γραφήματα Undirected Path	60
5.9 Δέντρα	60
5.10 Τυχαία Γραφήματα	61
<b>6 Ανάλυση Αποτελεσμάτων</b>	<b>62</b>
6.1 Colinear Χρωματισμός	62
6.2 Pair Complete και Harmonious Χρωματισμός	64
6.3 Ευριστικές Μέθοδοι	66
<b>7 Συμπεράσματα-Επεκτάσεις</b>	<b>69</b>
7.1 Εισαγωγή	69
7.2 Μελέτη Colinear Κλάσης και άλλων Κλάσεων Τέλειων Γραφημάτων	70
7.3 Μελέτη Προβλημάτων Χρωματισμού Ακμών και Κόμβων	70
<b>Αναφορές</b>	<b>72</b>
<b>Σύντομο Βιογραφικό</b>	<b>76</b>



## ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΠΙΝΑΚΩΝ

---

3.1	Αποτέλεσμα Χρωματισμού ύστερα από την εφαρμογή του «Σειριακού» Αλγορίθμου	40
3.2	Αποτέλεσμα χρωματισμού ύστερα από την εφαρμογή του αλγορίθμου «Πρώτα η Μεγαλύτερη»	40
3.3	Αποτέλεσμα χρωματισμού ύστερα από την εφαρμογή του αλγορίθμου «Τελευταία η Μικρότερη»	41
3.4	Αποτέλεσμα χρωματισμού ύστερα από την εφαρμογή του αλγορίθμου «Βαθμός Χρώματος»	42
5.1	Πειραματικά αποτελέσματα σε Τριγωνικά γραφήματα	54
5.2	Πειραματικά αποτελέσματα σε <i>Quasi Threshold</i> γραφήματα	55
5.3	Πειραματικά αποτελέσματα σε <i>Threshold</i> γραφήματα	56
5.4	Πειραματικά αποτελέσματα σε <i>Interval</i> γραφήματα	57
5.5	Πειραματικά αποτελέσματα σε γραφήματα <i>Cograph</i>	57
5.6	Πειραματικά αποτελέσματα σε <i>Split</i> γραφήματα όπου το ανεξάρτητο σύνολο $I$ είναι μεγαλύτερο από την κλίκα $K$	58
5.7	Πειραματικά αποτελέσματα σε <i>Split</i> γραφήματα όπου το ανεξάρτητο σύνολο $I$ είναι μικρότερο από την κλίκα $K$	59
5.8	Πειραματικά αποτελέσματα σε <i>Undirected Path</i> γραφήματα	60
5.9	Πειραματικά αποτελέσματα σε Δέντρα	61
5.10	Πειραματικά αποτελέσματα σε τυχαία γραφήματα	61
6.1	Χρωματισμός <i>Colinear</i>	62
6.2	Χρωματισμός <i>Pair Complete</i>	64
6.3	«Σειριακός» αλγόριθμος και αλγόριθμος «Πρώτα η Μεγαλύτερη»	67





## ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

---

2.1	Κλάσεις τέλειων γραφημάτων που μελετήθηκαν	11
2.2	Ένα γριγωνικό γράφημα	12
2.3	Διαμέριση <i>split</i> γραφήματος	16
2.4	Απαγορευμένα υπογραφήματα για <i>split comparability</i> γραφήματα	18
2.5	Ένα <i>undirected path</i> γράφημα	19
2.6	Ένα <i>interval</i> γράφημα	22
2.7	Ένα <i>cograph</i> και το <i>cotree</i> στο οποίο αντιστοιχεί	23
2.8	Ένα <i>threshold</i> γράφημα και η δενδρική του αναπαράσταση	26
2.9	Ένα <i>QT</i> -γράφημα και η δενδρική του αναπαράσταση	29
2.10	Δέντρο με 5 κόμβους και 4 ακμές	32
3.1	Τυχαίο (τριγωνικό) γράφημα	39
3.2	Αποτέλεσμα χρωματισμού ύστερα από την εφαρμογή του «Σειριακού» αλγορίθμου	40
3.3	Αποτέλεσμα χρωματισμού ύστερα από την εφαρμογή του αλγορίθμου «Πρώτα η Μεγαλύτερη»	41
3.4	Αποτέλεσμα χρωματισμού ύστερα από την εφαρμογή του αλγορίθμου «Τελευταία η Μικρότερη»	41
3.5	Αποτέλεσμα χρωματισμού ύστερα από την εφαρμογή του αλγορίθμου «Βαθμός Χρώματος»	42
4.1	Η πολυπλοκότητα του προβλήματος <i>Pair Complete</i> σε τέλεια γραφήματα	49
4.2	Η τυπική δομή του <i>Cent-tree</i> $T_C(G)$ ενός <i>Threshold</i> γραφήματος $G$	50
5.1	<i>Colinear</i> χρωματισμός σε συμπλήρωμα <i>Split</i> γραφήματος	60
6.1	Η πολυπλοκότητα του <i>Pair Complete</i> Χρωματισμού σε τέλεια γραφήματα	65
6.2	Το <i>cent-tree</i> $T_C(G)$ ενός <i>threshold</i> γραφήματος $G$	65
6.3	Η δενδρική αναπαράσταση $T_C(G)$ , ενός <i>quasi threshold</i> γραφήματος	66
7.1	Οι κλάσεις των <i>Linear</i> και <i>Colinear</i> γραφημάτων	70



## ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΩΝ

---

$G$	Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G$
$V(G)$	Το σύνολο των κόμβων του $G$
$E(G)$	Το σύνολο των ακμών του $G$
$N(x)$	Γειτονιά του κόμβου $x$
$N[x]$	Κλειστή Γειτονιά του κόμβου $x$
$\bar{G}$	Συμπλήρωμα γραφήματος $G$
$cent(G) = \{x \in V \mid N[x] = V\}$	Κέντρο του γραφήματος $G$
$C_n$	Άχορδος κύκλος $n$ κόμβων
$K_n$	Πλήρες γράφημα $n$ κόμβων
$P_n$	Μονοπάτι $n$ κόμβων
$\alpha(G)$	Ανεξάρτητο σύνολο
$\omega(G)$	Πληθικός αριθμός της μέγιστης κλίκα
$\chi(G)$	Χρωματικός αριθμός
$\lambda(G)$	Colinear χρωματικός αριθμός
$\psi(G)$	Αχρωματικός αριθμός
$h(G)$	Αρμονικός αριθμός
NP	Η κλάση των μη ντετερμινιστικών προβλημάτων πολυωνυμικού χρόνου
P	Η κλάση των ντετερμινιστικών προβλημάτων πολυωνυμικού χρόνου
$\forall x$	Για κάθε $x$
$A \subseteq X$	Το $A$ είναι υποσύνολο του $X$
$B \subset X$	Το $B$ είναι γνήσιο υποσύνολο του $X$
$ X $	Το μέγεθος του συνόλου $X$
$A \cup B$	Η ένωση των συνόλων $A, B$
$A \cap B$	Η τομή των συνόλων $A, B$
$\emptyset$	Το κενό σύνολο



## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

---

Δήμητρα Τσάμη του Ιωάννη και της Βασιλικής.

ΜΕ, Τμήμα Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Φεβρουάριος 2010.

Τίτλος: Αλγόριθμοι Κατασκευής και Μελέτη Προβλημάτων Χρωματισμού Κλάσεων Τέλειων Γραφημάτων.

Επιβλέπων Καθηγητής: Σταύρος Δ. Νικολόπουλος.

Αντικείμενα της παρούσας εργασίας είναι ο σχεδιασμός και η υλοποίηση αλγορίθμων κατασκευής κλάσεων τέλειων γραφημάτων και η μελέτη και η υλοποίηση αλγορίθμων χρωματισμού σε κλάσεις τέλειων γραφημάτων.

Χρωματισμός ενός γραφήματος, στην πιο απλή του μορφή, είναι η απόδοση χρωμάτων στις κορυφές του, έτσι ώστε να μην υπάρχουν γειτονικές κορυφές με το ίδιο χρώμα. Όπως είναι γνωστό το πρόβλημα του χρωματισμού τυχαίων γραφημάτων ανήκει στην κατηγορία των δυσεπίλυτων προβλημάτων. Για αυτό το λόγο έχουν αναπτυχθεί και αρκετές ευριστικές μέθοδοι που προσεγγίζουν το χρωματικό αριθμό ενός τυχαίου γραφήματος. Στην παρούσα μελέτη εξετάζουμε ευριστικές μεθόδους χρωματισμού όπως ο «Σειριακός αλγόριθμος» και μερικές ακόμα παραλλαγές του όπως οι μέθοδοι «Πρώτα η Μεγαλύτερη», «Τελευταία η Μικρότερη» και «Βαθμός Χρώματος».

Εκτός από την απλή μορφή χρωματισμού κόμβων γραφημάτων, υπάρχουν αρκετές παραλλαγές του προβλήματος που θέτουν επιπλέον περιορισμούς στο χρωματισμό των κόμβων. Κάποιες από αυτές τις παραλλαγές προβλημάτων χρωματισμού που μελετάμε είναι ο *colinear* χρωματισμός, ο *pair complete* χρωματισμός καθώς και ο αρμονικός χρωματισμός. Συγκεκριμένα ο *colinear* χρωματικός αριθμός του συμπληρώματος ενός γραφήματος αποτελεί άνω φράγμα για τον χρωματικό αριθμό του γραφήματος.

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, τα συγκεκριμένα προβλήματα χρωματισμού τα εξετάζουμε σε τέλεια γραφήματα. Ένα γράφημα είναι τέλειο αν ο χρωματικός αριθμός ισούται με τον πληθικό αριθμό της μέγιστης κλίκας, και η σχέση αυτή ισχύει για κάθε επαγόμενο υπογράφημα του. Προβλήματα όπως του χρωματισμού, της εύρεσης της μέγιστης κλίκας και του μέγιστου ανεξάρτητου συνόλου μπορούν να επιλυθούν σε πολυωνυμικό χρόνο για αρκετές κλάσεις τέλειων γραφημάτων. Τα τέλεια γραφήματα που μελετάμε και για τα οποία σχεδιάσαμε αλγορίθμους κατασκευής είναι τα τριγωνικά γραφήματα (*chordal*), τα



διαμερίσιμα γραφήματα (*split*), τα γραφήματα διαστημάτων (*interval*), τα γραφήματα μη κατευθυνόμενου μονοπατιού (*undirected path*), τα συμπληρωματικά παραγόμενα γραφήματα (*cograph*), τα γραφήματα κατωφλιού (*threshold*), τα γραφήματα *quasi threshold* και η κλάση των δέντρων (*tree*). Σε κάθε μια από τις παραπάνω κλάσεις εφαρμόσαμε και μεθόδους εύρεσης μέγιστης κλίκας.

Τέλος πραγματοποιήσαμε πειραματικές μετρήσεις εφαρμόζοντας τους αλγορίθμους χρωματισμού που αναφέρθηκαν αρχικά, στις κλάσεις των γραφημάτων που επιλέξαμε με σκοπό τη μελέτη της συμπεριφοράς των αλγορίθμων χρωματισμού και την σύγκριση των αποτελεσμάτων χρωματισμού και του χρωματικού αριθμού των γραφημάτων με το άνω φράγμα που παρέχει ο *colinear* χρωματισμός του συμπληρώματος του γραφήματος.



## EXTENDED ABSTRACT IN ENGLISH

---

Dimitra Tsami I., V.

MSc, Department of Computer Science, University of Ioannina, Greece, February 2010.

Thesis Title: Construction Algorithms and Study of Coloring Problems on Perfect Graphs.

Thesis Supervisor: Stavros D. Nikolopoulos.

The objective of this thesis is to design and implement algorithms, to construct perfect graphs and also to study and implement coloring algorithms for perfect graphs.

A graph coloring in its simplest form is the assignment of colors to the graph vertices, such that all adjacent vertices have different colors. It is well-known that coloring of arbitrary graphs belongs to the class of NP-complete problems. For this reason several heuristic methods have been developed that approximate the chromatic number of an arbitrary graph. In this thesis, we study heuristic coloring methods, such as the "Sequential" algorithm and some of its variants, such as "Largest First", "Smaller Last" and "Color Degree".

Apart from the simple form of the graph coloring problem, there are several variants of graph coloring that impose more restrictions on the graph coloring. We study some of these variants, such as "Colinear" coloring, "Pair complete" coloring and "Harmonious" coloring. Specifically, it has been shown that the colinear chromatic number of the complement a graph is an upper bound of the graph's chromatic number.

As we mentioned earlier, we study graph coloring problems in the class of perfect graphs. A graph is called perfect if its chromatic number is equal to the maximum clique number, and this property holds for every induced subgraph. Problems such as graph coloring, and computation of maximum clique and computation of maximum independent set can be solved in polynomial time for most perfect graphs. We study specific subclasses of the perfect class, namely chordal, split, interval, undirected path, cographs, threshold, quasi-threshold and tree graphs. Furthermore, we have designed algorithms that generate random graphs for each of these classes. In all of the above classes we have use methods that find the maximum clique.

Finally, we have performed several experiments using the previously mentioned coloring algorithms, on the selected graph subclasses, which all belong to the class of perfect graphs.



The purpose of these experiments is to study the behavior of graph coloring algorithms and evaluate the upper bound that is provided by the colinear coloring.



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

- 
- 1.1 Θέμα Μελέτης
  - 1.2 Δομή της Διατριβής
  - 1.3 Βασικές Έννοιες και Ορισμοί
  - 1.4 NP-Πληρότητα
  - 1.5 Τα Προβλήματα Χρωματισμού και Μέγιστης Κλίκας
- 

### 1.1 Θέμα Μελέτης

Το πρόβλημα του χρωματισμού γραφημάτων αποτελεί ένα ενεργό πεδίο έρευνας αλλά ταυτόχρονα έχει και πολλές πρακτικές εφαρμογές. Αποτελεί σημαντική πρόκληση για θεωρητική μελέτη, ενώ μπορεί και να μοντελοποιήσει πολλά πρακτικά προβλήματα όπως το πρόβλημα του προγραμματισμού εργασιών, της δέσμευσης καταχωρητών, το πρόβλημα του *pattern matching*, και προβλήματα *puzzle* όπως το *sudoku*.

Όπως είναι γνωστό το πρόβλημα του χρωματισμού τυχαίων γραφημάτων ανήκει στην κατηγορία των δυσεπίλυτων προβλημάτων. Για αυτό το λόγο έχουν αναπτυχθεί και αρκετές ευριστικές μέθοδοι που προσεγγίζουν το χρωματικό αριθμό ενός τυχαίου γραφήματος. Στόχοι της παρούσας εργασίας είναι ο σχεδιασμός και η υλοποίηση αλγορίθμων κατασκευής κλάσεων τέλειων γραφημάτων, η μελέτη και η υλοποίηση αλγορίθμων χρωματισμού σε τέλεια γραφήματα, και η μελέτη της συμπεριφοράς των αλγορίθμων χρωματισμού σε τέλεια γραφήματα. Στην μελέτη που πραγματοποιήθηκε οι αλγόριθμοι χρωματισμού δέχονται ως είσοδο τέλεια γραφήματα. Οι κατηγορίες των τέλειων γραφημάτων επιλέχθηκαν ως είσοδοι στις ευριστικές μεθόδους διότι είναι δυνατόν να υπολογίζουμε πολυωνμικά το χρωματικό αριθμό ενός γραφήματος που ανήκει στις κατηγορίες αυτές. Στη συνέχεια μπορούμε να συγκρίνουμε το γνωστό χρωματικό αριθμό του τέλειου γραφήματος που εξετάζουμε με το χρωματικό αριθμό που δίνεται προσεγγιστικά από τον αντίστοιχο αλγόριθμο χρωματισμού. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να διαπιστώσουμε πόσο απέχει το αποτέλεσμα που δίνει ο αλγόριθμος από το βέλτιστο, και να διακρίνουμε πόσο



αποτελεσματικός είναι για τις κατηγορίες που εξετάσαμε. Η υλοποίηση των αλγορίθμων πραγματοποιήθηκε σε γλώσσα προγραμματισμού C++ και με την χρήση της βιβλιοθήκης LEDA [58].

## 1.2 Δομή της Διατριβής

Στην ενότητα αυτή γίνεται περιγραφή της δομής της εργασίας. Η παρούσα μελέτη αποτελείται από επτά κεφάλαια συνολικά. Στο Κεφάλαιο 1, όπως είδαμε, παρουσιάζεται το θέμα της μελέτης καθώς και ο σκοπός για τον οποίο εξετάστηκε το παραπάνω θέμα. Επίσης στο Κεφάλαιο 1 γίνεται μια συνοπτική αναφορά σε βασικές έννοιες και ορισμούς που σχετίζονται με το αντικείμενο της παρούσας μελέτης. Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζονται οι κλάσεις τέλειων γραφημάτων οι οποίες μελετήθηκαν στην εργασία αυτή και είναι: (α) η κλάση των *chordal* γραφημάτων, (β) η κλάση των *split* γραφημάτων, (γ) η κλάση των *interval* γραφημάτων, (δ) η κλάση των *undirected path* γραφημάτων, (ε) η κλάση των *cograph* γραφημάτων, (στ) η κλάση των *threshold* γραφημάτων, (ζ) η κλάση των *quasi threshold* γραφημάτων, (η) η κλάση των δέντρων. Για όλες τις κλάσεις γραφημάτων περιγράφεται ο τρόπος κατασκευής τους καθώς και η μέθοδος υπολογισμού της μέγιστης κλίκας. Στο Κεφάλαιο 3 περιγράφονται και μελετώνται οι τέσσερις βασικοί αλγόριθμοι χρωματισμού (α) «Σειριακός» αλγόριθμος, (β) αλγόριθμος «Πρώτα η Μεγαλύτερη», (γ) αλγόριθμος «Τελευταία η Μικρότερη» και (δ) αλγόριθμος «Βαθμός Χρώματος». Στο ίδιο κεφάλαιο παρουσιάζεται ψευδοκώδικας για τους παραπάνω αλγορίθμους καθώς και αναλυτικά παραδείγματα που υποδεικνύουν τον τρόπο που λειτουργούν. Στο επόμενο κεφάλαιο, το Κεφάλαιο 4, παρουσιάζονται οι αλγόριθμοι χρωματισμού (α) *colinear*, (β) *pair complete* και γίνεται μια αναφορά στον αρμονικό χρωματισμό. Στο Κεφάλαιο 5 παρατίθενται οι πίνακες με τα πειραματικά αποτελέσματα που προέκυψαν ύστερα από την εφαρμογή των αλγορίθμων χρωματισμού που περιγράφηκαν στα Κεφάλαια 3 και 4 στις κλάσεις των τέλειων γραφημάτων που μελετήθηκαν. Στο Κεφάλαιο 6 παρουσιάζονται παρατηρήσεις πάνω στα πειραματικά αποτελέσματα, συγκρίσεις, συμπεράσματα. Το Κεφάλαιο 7 περιέχει προτάσεις για μελλοντικά βήματα που μπορούν να γίνουν στο θέμα με το οποίο πραγματεύεται η συγκεκριμένη εργασία και επεκτάσεις πάνω στα ζητήματα τα οποία έχουν συζητηθεί.

## 1.3 Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

Σε αυτή την ενότητα γίνεται μια παρουσίαση ορισμών και εννοιών που είναι αρκετά χρήσιμες ώστε να προσεγγίσουμε καλύτερα το θέμα με το οποίο πραγματεύεται η εργασία. Στην παρούσα εργασία τα γραφήματα που ασχοληθήκαμε ανήκουν στην κατηγορία των μη κατευθυνόμενων συνδεδεμένων απλών γραφημάτων. Παρακάτω παρουσιάζονται οι ορισμοί





του κατευθυνόμενου γραφήματος, του απλού γραφήματος και του συνδεδεμένου γραφήματος.

Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα  $G$  (*undirected graph*) είναι ένα ζεύγος  $V(G), E(G)$ , όπου  $V(G)$  είναι ένα πεπερασμένο σύνολο αποτελούμενο από  $n = |V(G)|$  στοιχεία, τα οποία ονομάζονται κόμβοι (*vertex*), και  $E(G)$  είναι ένα σύνολο  $e = |E(G)|$  μη διατεταγμένων ζευγών κόμβων που ονομάζονται ακμές (*edges*), δηλ.  $E(G) = \{(x, y) \mid x, y \in V(G), x, y\}$ . Ένα γράφημα  $G$  με σύνολο κορυφών  $V(G)$  και σύνολο ακμών  $E(G)$  είναι απλό εάν  $(x, x)$  δεν ανήκει στο  $E(G)$  για κάθε κόμβο  $x \in V(G)$ .

Στην συνέχεια δίνουμε τον ορισμό των συνεκτικών συνιστωσών ενός γραφήματος: Έστω ένα γράφημα  $G$  και ας υποθέσουμε ότι το σύνολο των κορυφών του  $V(G)$ , αποτελείται από  $l$  ανεξάρτητα μεταξύ τους υποσύνολα  $V_1, V_2, \dots, V_l$  ενώ δύο κορυφές του  $u$  και  $v$  ενώνονται μόνο αν ανήκουν στο ίδιο υποσύνολο. Τα υπογραφήματα  $G_1$  με σύνολα  $V(G_1), E(G_1)$ ,  $G_2$  με σύνολα  $V(G_2), E(G_2), \dots, G_l$  με σύνολα  $V(G_l), E(G_l)$  ονομάζονται *συνεκτικές συνιστώσες*. Επιπλέον ένα γράφημα  $G$  ονομάζεται *συνδεδεμένο* ή *συνεκτικό* αν έχει μόνο μια συνεκτική συνιστώσα.

Άκολουθούν μερικές ακόμα βασικές έννοιες που θα συναντήσουμε στα επόμενα κεφάλαια: Ονομάζουμε *σύνολο γειτνίασης* ενός κόμβου  $x \in V(G)$  και το συμβολίζουμε  $N(x)$ , το σύνολο που ορίζεται από τη σχέση  $N(x) = \{y \mid y \in V \text{ και } (x, y) \in E\}$ . Ενώ *κλειστή γειτονιά*  $N[x] = x \cup N(x)$ .

Ένα γράφημα  $G$  με σύνολα κορυφών και ακμών αντίστοιχα  $V(G), E(G)$  ονομάζεται *πλήρες*, εάν τα μέλη κάθε ζεύγους κόμβων γειτνιάζουν, δηλαδή εάν για κάθε  $x, y \in V(G)$  ισχύει  $(x, y) \in E(G)$ . *Σκελετικό Δέντρο* ενός συνδεδεμένου γραφήματος  $G$  ονομάζεται ένα δέντρο  $T$  που είναι υπογράφημα του γραφήματος  $G$  με σύνολο κόμβων  $V(T) = V(G)$ .

Ένα σύνολο  $W$  υποσύνολο ενός συνόλου  $V$ , το οποίο επάγει ένα πλήρες γράφημα  $G(W)$  λέγεται *κλίκα*. Εάν δεν υπάρχει κλίκα  $W'$  στο γράφημα  $G$  τέτοια ώστε η κλίκα  $W$  να είναι γνήσιο υποσύνολό της, τότε η κλίκα  $W$  λέγεται *μείζονα κλίκα*. Εάν δεν υπάρχει κλίκα  $W'$  στο γράφημα  $G$  τέτοια ώστε  $|W| < |W'|$ , τότε η κλίκα  $W$  λέγεται *μέγιστη κλίκα*. Ο πληθικός αριθμός της μέγιστης κλίκας ενός γραφήματος  $G$  ονομάζεται *αριθμός κλίκας* και συμβολίζεται με  $\omega(G)$ .



Χρωματισμός ενός γραφήματος είναι η απόδοση χρωμάτων στις κορυφές του έτσι ώστε να μην υπάρχουν γειτονικές κορυφές με το ίδιο χρώμα. Ένα γράφημα ονομάζεται  $k$ -χρωματίσιμο αν μπορεί να χρωματιστεί με  $k$  χρώματα. Ένα γράφημα  $G$  ονομάζεται  $k$ -χρωματικό αν είναι  $k$ -χρωματίσιμο αλλά δεν είναι  $(k-1)$ -χρωματίσιμο, το  $k$  λέγεται χρωματικός αριθμός και συμβολίζεται με  $\chi(G)$ . Εάν ένα γράφημα  $G$  είναι  $k$ -χρωματίσιμο τότε  $\chi(G) \leq k$ . Εάν ένα γράφημα  $G$  είναι  $k$ -χρωματικό τότε  $\chi(G) = k$ . Εάν ένα γράφημα  $G$  μπορεί να χρωματιστεί με  $s > \chi(G)$  χρώματα, τότε μπορεί να χρωματιστεί και με  $c$  χρώματα, όπου  $\chi(G) = k < c < s$ .

Τέλος παρατίθενται οι ορισμοί για τα τέλεια και τριγωνικά γραφήματα και του τέλειου σχήματος απαλοιφής σε τριγωνικά γραφήματα: Ένα γράφημα  $G$  λέγεται τέλειο αν ο αριθμός της κλίκας ισούται με το χρωματικό αριθμό, δηλ εάν ισχύει η σχέση  $\omega(G) = \chi(G)$ . Ένα γράφημα είναι τριγωνικό όταν κάθε κύκλος μεγαλύτερος ή ίσος του τέσσερα έχει χορδή. Τα τριγωνικά γραφήματα ανήκουν στην κλάση των τέλειων γραφημάτων. Τέλειο σχήμα απαλοιφής ενός τριγωνικού γραφήματος  $G$  ονομάζεται μια ακολουθία κόμβων  $\sigma = [v_1, v_2, v_3, \dots, v_n]$  εάν το σύνολο κόμβων που προκύπτει από την τομή των συνόλων  $\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}$  και  $N(v_i)$  είναι κλίκα. Κάθε κόμβος της διάταξης αυτής είναι *simplicial*, δηλαδή οι κόμβοι που βρίσκονται δεξιά του στη διάταξη  $\sigma$  σχηματίζουν πλήρες γράφημα. Για την εύρεση ενός τέλειου σχήματος απαλοιφής σε ένα γράφημα δύο από τους πιο γνωστούς αλγόριθμους είναι οι *LexBFS* [48] και *Maximum Cardinality Search* [51].

## 1.4 NP-Πληρότητα

Διαισθητικά η κλάση πολυπλοκότητας NP είναι το σύνολο όλων των προβλημάτων για τα οποία η λύση τους μπορεί να αποδειχτεί ότι είναι σωστή σε πολυωνυμικό χρόνο. Η κλάση πολυπλοκότητας NP είναι το σύνολο όλων των προβλημάτων απόφασης που μπορούν να επιλυθούν σε πολυωνυμικό χρόνο από μια μη-ντετερμινιστική μηχανή *Turing*.

Η κλάση NP εμπεριέχει επίσης πολλά «δύσκολα» προβλήματα για τα οποία δεν υπάρχει γνωστός πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος, παρά μόνο εκθετικός. Εάν υπάρχει ένας αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου για κάποιο από αυτά τα προβλήματα, τότε υπάρχει αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου για όλα τα προβλήματα της κλάσης.



Στην κλάση NP εμπεριέχεται η κλάση πολυπλοκότητας P. Ένα πρόβλημα Π ανήκει στην κλάση P, ένα υπάρχει ένας ντετερμινιστικός αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου που να το επιλύει. Ένα πρόβλημα Π ανήκει στην κλάση NP εάν υπάρχει ένας μη ντετερμινιστικός αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου που να το επιλύει. Η κλάση πολυπλοκότητας NP εμπεριέχει την κλάση πολυπλοκότητας P,  $P \subseteq NP$ . Ένα πολύ σημαντικό ανοικτό πρόβλημα είναι εάν  $P = NP$ .

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε την έννοια της αναγωγής. Ένα πρόβλημα  $\Pi_1$  ανάγεται πολυωνυμικά σε ένα πρόβλημα  $\Pi_2$  αν υπάρχει μια συνάρτηση  $f$  η οποία απεικονίζει τα στιγμιότυπα του  $\Pi_1$  στο  $\Pi_2$  τέτοια ώστε μια λύση για το στιγμιότυπο  $f(I)$  του προβλήματος  $\Pi_2$  αποτελεί λύση για το στιγμιότυπο  $I$  του προβλήματος  $\Pi_1$ , για κάθε  $I$ . Διαισθητικά αυτό σημαίνει ότι το πρόβλημα  $\Pi_1$  δεν λύνεται πιο δύσκολα από το  $\Pi_2$  συν έναν πολυωνυμικό όρο, για το οποίο θα μπορούσαμε να λύσουμε το πρόβλημα  $\Pi_1$  συνδυάζοντας την συνάρτηση  $f$  με τον καλύτερο αλγόριθμο που επιλύει το πρόβλημα  $\Pi_2$ . Άρα εάν  $\Pi_1 \preceq \Pi_2$  τότε για την πολυπλοκότητα των προβλημάτων ισχύει:  $Complexity(\Pi_1) \leq Complexity(\Pi_2) + Polynomial$ .

Αφού ορίσαμε την έννοια της αναγωγής μπορούμε να περιγράψουμε τα NP-hard προβλήματα. Ένα πρόβλημα Π είναι NP-hard αν και μόνο αν ισχύει κάποια από τις ισοδύναμες συνθήκες.

- i.  $\Pi' \preceq \Pi$  για κάθε  $\Pi' \in NP$
- ii.  $\Pi \in P \Rightarrow P = NP$
- iii. Η ύπαρξη ενός ντετερμινιστικού πολυωνυμικού αλγορίθμου για το πρόβλημα Π σημαίνει την ύπαρξη ενός τέτοιου αλγορίθμου για κάθε πρόβλημα που ανήκει στο NP.

Ένα πρόβλημα Π είναι NP-πλήρες εάν ανήκει στο NP και είναι NP-hard. Για να δείξουμε ότι ένα πρόβλημα είναι NP-πλήρες δείχνουμε ότι το πρόβλημα Π ανήκει στο NP και κάποιο γνωστό NP-πλήρες πρόβλημα  $\Pi'$  μετασχηματίζεται σε αυτό. Ο Cook επικεντρώθηκε στα NP προβλήματα απόφασης [12] και έδειξε ότι το πρόβλημα SATISFABILITY-SAT είναι NP-πλήρες (θεώρημα του Cook) και πρότεινε και άλλα NP-πλήρη προβλήματα.

#### 1.4.1 Τα Προβλήματα Χρωματισμού και Μέγιστης Κλίκας

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται τα NP-πλήρη προβλήματα που μελετήσαμε στην παρούσα εργασία. Ένα πρόβλημα Π μπορεί στην γενική του περίπτωση να είναι δύσκολο να επιλυθεί αλλά για κάποιο συγκεκριμένο στιγμιότυπο εισόδου να έχει αποτελεσματική λύση.



Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελεί το πρόβλημα της εύρεσης της μέγιστης κλίκας σε αρκετές κλάσεις τέλειων γραφημάτων.

**Το Πρόβλημα της εύρεσης της Μέγιστης Κλίκας** Για το πρόβλημα της εύρεσης της μέγιστης κλίκας σε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα  $G(V, E)$  είσοδος είναι ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα και έξοδος η μέγιστη κλίκα του γραφήματος, ή μια από αυτές αν το γράφημα έχει παραπάνω από μια. Το πρόβλημα της εύρεσης της μέγιστης κλίκας είναι δύσκολο, το πρόβλημα της απόφασης είναι NP-πλήρες [37].

Στην βιβλιογραφία έχουν προταθεί αρκετές μέθοδοι και αλγόριθμοι που έχουν αναπτυχθεί για την εύρεση της μέγιστης κλίκας σε ένα τυχαίο γράφημα [1] και βασίζονται σε ευριστικές μεθόδους, προσεγγιστικές μεθόδους, *enumerative* και άλλες. Μια από της πιο αποτελεσματικές σε χρόνο μεθόδους που είναι γνωστή μέχρι σήμερα είναι ο αλγόριθμος του *Robson* [45]. Στην παρούσα εργασία μελετούμε κλάσεις τέλειων γραφημάτων, όπου είναι δυνατόν να βρεθεί η μέγιστη κλίκα του γραφήματος χρησιμοποιώντας αλγορίθμους που βασίζονται στον *semidefinite* προγραμματισμό. Ωστόσο η διαδικασία αυτή είναι πολύ πολύπλοκη οπότε έχουν αναπτυχθεί εξειδικευμένες μέθοδοι για τις διαφορετικές κλάσεις τέλειων γραφημάτων. Για παράδειγμα, στα τριγωνικά γραφήματα η μέγιστη κλίκα μπορεί να υπολογιστεί με την απαρίθμηση όλων των *maximal* κλικών του γραφήματος σε ένα τέλειο σχήμα απαλοιφής, και τον εντοπισμό της κλίκας με το μέγιστο μέγεθος από αυτές. Την μέθοδο αυτή την παρουσιάζουμε αναλυτικά σε κεφάλαιο που ακολουθεί, καθώς και αντίστοιχες μεθόδους για τις υπόλοιπες κλάσεις τέλειων γραφημάτων που μελετήσαμε.

**Το Πρόβλημα του Χρωματισμού** Στο πρόβλημα του χρωματισμού, ως πρόβλημα βελτιστοποίησης, δοθέντος ενός μη κατευθυνόμενου γραφήματος  $G(V, E)$  αναζητούμε τον ελάχιστο αριθμό χρωμάτων για τον οποίο το γράφημα  $G$  επιδέχεται έναν κατάλληλο και χρωματισμό. Είναι NP-δύσκολο να υπολογίσουμε το χρωματικό αριθμό ενός γραφήματος. Αντίστοιχα αν εκφράσουμε το πρόβλημα χρωματισμού σαν πρόβλημα απόφασης, δοθέντος ενός μη κατευθυνόμενου γραφήματος  $G(V, E)$  και ενός ακεραίου  $k$  το ζητούμενο είναι αν υπάρχει ένας κατάλληλος  $k$ -χρωματισμός του γραφήματος  $G$ . Το πρόβλημα είναι NP-πλήρες, εκτός από τις περιπτώσεις όπου  $k = 1$  ή  $k = 2$ .

Στη βιβλιογραφία έχουν προταθεί διάφορες μέθοδοι χρωματισμού τυχαίων γραφημάτων όπως η *brute-force*, όπου για έναν  $k$ -χρωματισμό ενός γραφήματος  $G$  ελέγχει  $k!$  συνδυασμούς αν είναι επιτρεπτοί χρωματισμοί, οι μέθοδοι που βασίζονται σε *deletion-contraction* αλγορίθμους, Στην παρούσα εργασία, μελετήθηκε ο άπληστος αλγόριθμος (*greedy*)



χρωματισμού, καθώς και κάποιες παραλλαγές του, όπου εξετάζει τους κόμβους με βάση μια διάταξη τους  $u_1, u_2, \dots, u_n$  και προσδίδει στον κόμβο  $u_i$  που εξετάζεται το ελάχιστο διαθέσιμο χρώμα, όπου δεν έχει χρησιμοποιηθεί σε κάποιον από τους γείτονές του που προηγούνται στη διάταξη. Το αποτέλεσμα του χρωματισμού που προκύπτει από έναν άπληστο αλγόριθμο εξαρτάται από την διάταξη των κόμβων του γραφήματος. Μπορεί για κάποια συγκεκριμένη διάταξη κόμβων να αποδοθεί ένας βέλτιστος χρωματισμός (πχ. διάταξη τέλειου σχήματος απαλοιφής για τριγωνικά γραφήματα) και για κάποια άλλη διάταξη να παραχθεί ένα αυθαίρετα κακό αποτέλεσμα (πχ. για ένα *crown* γράφημα  $n$  κόμβων που χρωματίζεται με 2 χρώματα υπάρχει μια διάταξη που ο άπληστος αλγόριθμος του προσδίδει  $n/2$  χρώματα). Υπάρχουν πολλές ευριστικές μέθοδοι που βασίζονται στον άπληστο αλγόριθμο και χρησιμοποιούν είτε στατικές είτε δυναμικές στρατηγικές για την διάταξη των κόμβων του γραφήματος που χρωματίζεται. Στο κεφάλαιο 3 μελετούμε κάποιες από αυτές τις μεθόδους που εξετάζουν τους κόμβους ανάλογα με το βαθμό τους και το πλήθος των χρωματισμένων γειτόνων τους.

Εκτός από την πιο απλή μορφή χρωματισμού που περιγράψαμε προηγουμένως, υπάρχουν αρκετές παραλλαγές του προβλήματος που θέτουν επιπλέον περιορισμούς στο χρωματισμό των κόμβων του γραφήματος. Μερικά γνωστά προβλήματα χρωματισμού είναι το *weak coloring*, ένας *improper* χρωματισμός κόμβων όπου κάθε μη απομονωμένος κόμβος έχει τουλάχιστον ένα γειτονικό κόμβο με διαφορετικό χρώμα, το πρόβλημα του αρμονικού χρωματισμού και το πρόβλημα του *pair complete* χρωματισμού, που παρουσιάζονται παρακάτω.

**Το Πρόβλημα του Harmonious χρωματισμού** Στο πρόβλημα του αρμονικού χρωματισμού δοθέντος ενός μη κατευθυνόμενου γραφήματος  $G(V, E)$  και ενός ακεραίου  $K \leq |V|$  το ζητούμενο είναι αν υπάρχει ένας ελάχιστος ακεραίος  $k \leq K$  και ένας κατάλληλος  $k$ -χρωματισμός του γραφήματος  $G$ , τέτοιος ώστε κάθε ζεύγος χρωμάτων να εμφανίζεται το πολύ σε ένα ζεύγος συνδεδεμένων κόμβων του γραφήματος. Το πρόβλημα του αρμονικού χρωματισμού περιγράφεται αναλυτικά στο Κεφάλαιο 4.

**Το Πρόβλημα του Pair Complete χρωματισμού** Στο πρόβλημα του *pair complete* χρωματισμού δοθέντος ενός μη κατευθυνόμενου γραφήματος  $G(V, E)$  και ενός ακεραίου  $K \leq |V|$  το ζητούμενο είναι αν υπάρχει ένας ακεραίος  $k \geq K$  και ένας κατάλληλος  $k$ -χρωματισμός του γραφήματος  $G$ , τέτοιος ώστε κάθε ζεύγος χρωμάτων να εμφανίζεται τουλάχιστον σε ένα ζεύγος συνδεδεμένων κόμβων του γραφήματος. Ο αχρωματικός αριθμός  $\psi(G)$  είναι ο μέγιστος αριθμός χρωμάτων που επιδέχεται ένα γράφημα από τον *pair complete*



χρωματισμό. Η εύρεση του αχρωματικού αριθμού αποτελεί την εκδοχή του προβλήματος βελτιστοποίησης για τον *pair complete* χρωματισμό και είναι NP-hard, ενώ ο προσδιορισμός αν ο  $\psi(G)$  είναι μεγαλύτερος από κάποιο ακέραιο  $K$  είναι NP-πλήρες [23]. Για οποιαδήποτε σταθερό ακέραιο  $k$  είναι δυνατό να προσδιοριστεί προσεγγιστικά εάν ο αχρωματικός αριθμός είναι τουλάχιστον ίσος με  $k$  [17]. Το πρόβλημα του *pair complete* χρωματισμού και οι ειδικές περιπτώσεις που επιλύεται πολυωνυμικά παρουσιάζονται αναλυτικά στο Κεφάλαιο 4.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### ΤΕΛΕΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

- 
- 2.1 Τέλεια Γραφήματα
  - 2.2 Τριγωνικά Γραφήματα
  - 2.3 Γραφήματα Split
  - 2.4 Γραφήματα Undirected Path
  - 2.5 Γραφήματα Interval
  - 2.6 Γραφήματα Cograph
  - 2.7 Γραφήματα Threshold
  - 2.8 Γραφήματα Quasi-Threshold
  - 2.9 Δέντρα
- 

#### 2.1 Τέλεια Γραφήματα

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι ιδιότητες και οι αλγόριθμοι κατασκευής κλάσεων τέλειων γραφημάτων που υλοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία. Για κάθε μια από τις κλάσεις που μελετήθηκαν παρουσιάζεται ο αλγόριθμος κατασκευής τυχαίων γραφημάτων που ανήκουν στην αντίστοιχη κλάση και ο αλγόριθμος εύρεσης της μέγιστης κλίκας του γραφήματος. Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται ο χαρακτηρισμός και ιδιότητες της ευρύτερης οικογένειας των τέλειων γραφημάτων.

##### 2.1.1 Ιδιότητες Τέλειων Γραφημάτων

Μια πολύ σημαντική ιδιότητα των τέλειων γραφημάτων είναι ότι ο χρωματικός αριθμός  $\chi(G)$  ενός τέλειου γραφήματος  $G$ , ισούται με τον πληθικό αριθμό  $\omega(G)$  της μέγιστης κλίκας του γραφήματος, και η ιδιότητα αυτή ισχύει για κάθε επαγόμενο υπογράφημα του  $G$ . Στο θεώρημα που ακολουθεί διατυπώνεται πιο αυστηρά η παραπάνω ιδιότητα:



**Θεώρημα 2.1** Έστω ένα τέλει γράφημα  $G(V, E)$ , οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:  
[39]

$$(i) \omega(G_A) = \chi(G_A) \quad \forall A \subseteq V$$

$$(ii) a(G_A) = k(G_A) \quad \forall A \subseteq V$$

Σε ένα τυχαίο γράφημα ο πληθικός αριθμός της μέγιστης κλίκας παρέχει ένα κάτω φράγμα για την τιμή του χρωματικού αριθμού, διότι κάθε κόμβος της κλίκας θα πρέπει να χρωματιστεί με διαφορετικό χρώμα. Σε ένα τέλει γράφημα, όπως είδαμε, αυτό το κάτω φράγμα είναι απόλυτο και ισχύει για κάθε επαγόμενο υπογράφημα του.

Στην παρούσα μελέτη βασιζόμενοι στην ιδιότητα αυτή, αναπτύξαμε μεθόδους για την εύρεση της μέγιστης κλίκας σε τέλεια γραφήματα, έτσι ώστε να γνωρίζουμε τον ακριβές χρωματικό αριθμό του γραφήματος. Επιπλέον το θεώρημα 2.1 εκφράζει και μια ακόμα ιδιότητα των τριγωνικών γραφημάτων σε σχέση με το μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο ενός τέλει γραφήματος  $G$ .

Ο χαρακτηρισμός της κλάσης των τέλειων γραφημάτων αποτελούσε ένα από τα πιο μακροχρόνια ανοιχτά προβλήματα. Ένας από τους πρώτους προσδιορισμούς της κλάσης αυτής δόθηκε από τον Lovász το 1972:

**Πρόταση 2.1** Ένα γράφημα  $G(V, E)$  είναι τέλει αν και μόνο αν το συμπλήρωμά του  $\bar{G}$  είναι τέλει γράφημα.

Άλλος ένας χαρακτηρισμός για τα τέλεια γραφήματα δόθηκε από τον Berge. Ένα γράφημα που δεν περιέχει περιττά *holes* ή περιττά *antiholes* ονομάζεται *Berge* γράφημα [4]. Συγκεκριμένα ένα γράφημα  $G(V, E)$  που δεν περιέχει υπογραφήματα ισομορφικά στο  $C_{2k+1}$  ή στο  $\bar{C}_{2k+1}$  για  $k \geq 2$  είναι γράφημα *Berge*. Τα γραφήματα *Berge* ανήκουν στην κλάση των τέλειων γραφημάτων. Αυτό που δεν είχε γίνει σαφές ήταν αν ισχύει το αντίστροφο, δηλαδή αν κάθε γράφημα *Berge* είναι και τριγωνικό γράφημα. Την ιδιότητα αυτή την απέδειξαν οι Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour, R. Thomas όπως διατυπώνεται και στο παρακάτω θεώρημα:

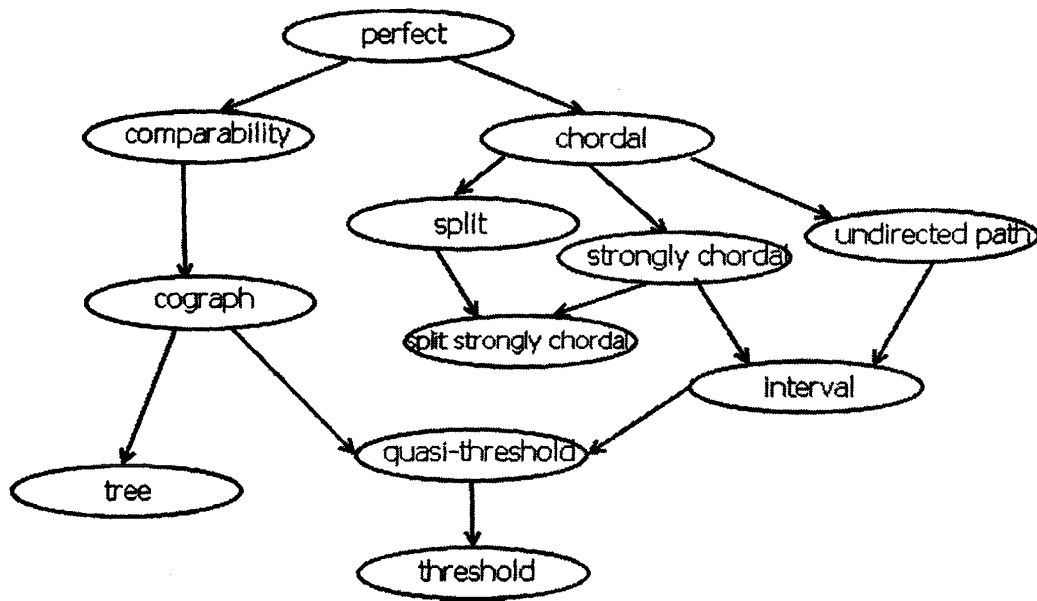
**Θεώρημα 2.2** [9] Ένα γράφημα  $G(V, E)$  είναι τέλει αν και μόνο εάν δεν περιέχει περιττούς κύκλους ισομορφικούς στο  $C_{2k+1}$  ή στο  $\bar{C}_{2k+1}$  για  $k \geq 2$ .

Η κλάση των τέλειων γραφημάτων περιέχει πολλές σημαντικές οικογένειες γραφημάτων και εξυπηρετεί στην ομαδοποίηση των αποτελεσμάτων που σχετίζονται με χρωματισμό, εύρεση





μέγιστης κλίκας. Για παράδειγμα το πρόβλημα του χρωματισμού, της εύρεσης της μέγιστης κλίκας και του μέγιστου ανεξάρτητου συνόλου μπορούν να επιλυθούν σε πολυωνυμικό χρόνο για αρκετές κλάσεις τέλειων γραφημάτων [29].



Σχήμα 2.1: Κλάσεις τέλειων γραφημάτων που μελετήθηκαν

Στο σχήμα 2.1 περιγράφεται η ιεραρχία των κλάσεων των τέλειων γραφημάτων που επιλέξαμε για να μελετήσουμε. Στις ενότητες που θα ακολουθήσουν παρουσιάζονται οι βασικές ιδιότητες για κάθε μια από τις παραπάνω κλάσεις που μελετήθηκαν. Επιπλέον περιγράφεται ο αλγόριθμος κατασκευής γραφημάτων και εύρεσης μέγιστης κλίκας

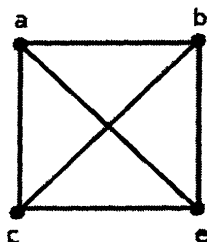
## 2.2 Τριγωνικά Γραφήματα

Στην ενότητα αυτή εξετάζουμε την κλάση των τριγωνικών γραφημάτων. Αρχικά γίνεται αναφορά σε βασικές ιδιότητες των γραφημάτων αυτών και στη συνέχεια περιγράφεται ο αλγόριθμος κατασκευής τυχαίων γραφημάτων που ανήκουν σε αυτή την κλάση.

### 2.2.1 Ιδιότητες Τριγωνικών Γραφημάτων

Στην ενότητα αυτή εξετάζεται η κλάση των τριγωνικών γραφημάτων που ανήκει στην κατηγορία των τέλειων γραφημάτων [27]. Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα  $G$  ονομάζεται τριγωνικό γράφημα εάν κάθε κύκλος μήκους τέσσερα και άνω έχει χορδή. Ισοδύναμα το

γράφημα  $G$  δεν περιέχει επαγόμενο υπογράφημα ισομορφικό στο γράφημα  $C_n$  με  $n > 3$ . Σε ένα τριγωνικό γράφημα  $G$ , κάθε επαγόμενο υπογράφημα  $H_G$  έχει την τριγωνική ιδιότητα.



Σχήμα 2.2: Ένα τριγωνικό γράφημα

Ο *Dirac* [14] έδειξε ότι κάθε τριγωνικό γράφημα  $G$  έχει έναν *simplicial* κόμβο  $v$ , έναν κόμβο δηλαδή όπου οι γείτονες του  $N(v)$  αποτελούν κλίκα. Οι *Fulkerson* και *Gross* [22], αφού βασίστηκαν στο θεώρημα του *Dirac* [14], απέδωσαν χρήσιμους αλγοριθμικούς χαρακτηρισμούς για τα τριγωνικά γραφήματα. Λαμβάνοντας υπ όψη και την τριγωνική ιδιότητα πρότειναν μια επαναληπτική διαδικασία για την αναγνώριση των τριγωνικών γραφημάτων. Συγκεκριμένα ο αλγόριθμος αυτός εντοπίζει επαναληπτικά έναν *simplicial* κόμβο στο γράφημα και τον διαγράφει μέχρι το γράφημα να μείνει με κανέναν κόμβο, άρα είναι τριγωνικό ή δεν μπορεί να εντοπιστεί άλλος *simplicial* κόμβος οπότε το γράφημα δεν είναι τριγωνικό.

Τα θεωρήματα που ακολουθούν συνοψίζουν τους παραπάνω χαρακτηρισμούς για τα τριγωνικά γραφήματα:

**Λήμμα 2.1** Κάθε τριγωνικό γράφημα  $G$  έχει έναν *simplicial* κόμβο. Επιπλέον, εάν το γράφημα  $G$  δεν είναι πλήρες, έχει δύο *simplicial* κόμβους που δεν συνδέονται μεταξύ τους.

**Θεώρημα 2.3** [14] [22] Εστω ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα  $G$ . Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες

1. Το γράφημα  $G$  είναι τριγωνικό.
2. Το γράφημα  $G$  έχει ένα τέλει σχήμα απαλοιφής.
3. Κάθε *minimal vertex separator* επάγει ένα πλήρες υπογράφημα  $H_G$  του γραφήματος  $G$ .

Ένα τέλει σχήμα απαλοιφής για ένα τριγωνικό γράφημα είναι μια ακολουθία κόμβων του τέτοια ώστε κάθε κόμβος  $u$  και όσοι έπονται αυτού στην ακολουθία, αποτελούν κλίκα στο γράφημα. Συγκεκριμένα τέλει σχήμα απαλοιφής ενός τριγωνικού γραφήματος  $G$  ονομάζεται



μια ακολουθία κόμβων  $\sigma = [v_1, v_2, v_3, \dots, v_n]$  εάν για κάθε  $i$ , ο κόμβος  $v_i$  είναι *simplicial* στο γράφημα  $G[\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}]$ . Το σύνολο κόμβων που προκύπτει από την τομή των συνόλων  $\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}$  και  $N(v_i)$  είναι κλίκα. Για την εύρεση ενός τέλει σχήματος απαλοιφής σε ένα τριγωνικό γράφημα δύο αρκετά γνωστοί αλγόριθμοι είναι οι LexBFS [40] και *Maximum Cardinality Search* [47].

Η εύρεση ενός τέλει σχήματος απαλοιφής σε τριγωνικό γράφημα συναντά αρκετές πρακτικές εφαρμογές. Μια αρκετά σημαντική εφαρμογή τους είναι στην αναγνώριση τριγωνικών γραφημάτων. Η διαδικασία αυτή μπορεί να πραγματοποιηθεί με την εύρεση μιας ακολουθίας  $\sigma$  χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο LexBFS ή MCS και στη συνέχεια με τον έλεγχο αν η ακολουθία  $\sigma$  αποτελεί ένα τέλει σχήμα απαλοιφής. Σε αυτή την διαδικασία αναγνώρισης βασίστηκε και ο αλγόριθμος κατασκευής τριγωνικών γραφημάτων που θα παρουσιαστεί στην συνέχεια. Το θεώρημα 2.4 συνοψίζει την ιδιότητα των τριγωνικών γραφημάτων που περιγράψαμε:

**Θεώρημα 2.4** Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα  $G$  είναι τριγωνικό εάν και μόνο εάν η ακολουθία κόμβων  $\sigma$ , που προκύπτει από τον αλγόριθμο LexBFS, είναι ένα τέλει σχήμα απαλοιφής.

Μια ακόμα εφαρμογή που συναντά η αναζήτηση ενός τέλει σχήματος απαλοιφής σε τριγωνικά γραφήματα είναι η εύρεση της μέγιστης κλίκας σε αυτά σε πολυωνυμικό χρόνο, ενώ το ίδιο πρόβλημα παραμένει NP-πλήρες σε γενικά γραφήματα. Γενικά ένα τριγωνικό γράφημα μπορεί γραμμικό πλήθος από *maximal* κλίκες, ενώ ένα μη τριγωνικό γράφημα μπορεί να έχει εκθετικό πλήθος από *maximal* κλίκες. Για την εύρεση όλων των *maximal* κλικών σε τριγωνικά γραφήματα αρκεί να υπολογίσουμε ένα τέλει σχήμα απαλοιφής  $\sigma$ , με κάποια από τις μεθόδους που περιγράφηκαν παραπάνω και στη συνέχεια για κάθε κόμβο  $u$  της ακολουθίας να ελέγξουμε αν αποτελεί *maximal* κλίκα με τους γείτονές του που έπονται αυτού στο  $\sigma$ . Η *maximal* κλίκα με το μεγαλύτερο μέγεθος αποτελεί και μέγιστη κλίκα για το τριγωνικό γράφημα.

Στο σημείο αυτό αξίζει να παρουσιαστεί ο αλγόριθμος *Maximum Cardinality Search* (MCS) [47] ο οποίος και αποτελεί βασικό μέρος της υλοποίησης του αλγορίθμου για την παραγωγή τριγωνικών γραφημάτων. Ο αλγόριθμος αριθμεί τους κόμβους του γραφήματος από το  $n$  μέχρι το 1, όπου  $n$  το πλήθος των κόμβων του γραφήματος. Ο κόμβος που επιλέγεται σε κάθε βήμα να αριθμηθεί είναι ο κόμβος με τους περισσότερους αριθμημένους γείτονες. Επιπλέον ο



αλγόριθμος MCS εφαρμόστηκε για την εύρεση της μέγιστης κλίκας σε αρκετές από τις κλάσεις τριγωνικών γραφημάτων που μελετήσαμε στις επόμενες παραγράφους.

### Αλγόριθμος “MCS”

Είσοδος: Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα  $G$

Έξοδος: Μια ακολουθία των κόμβων  $\sigma$ , του γραφήματος  $G$

1. Για  $i = n$  μέχρι 1 επέλεξε τον κόμβο  $v$  από το σύνολο  $V$  με τους περισσότερους αριθμημένους γείτονες
2. Αρίθμησε τον κόμβο  $v$  με τον αριθμό  $i$
3. Τοποθέτησε τον κόμβο  $v$  στην θέση  $i$  της ακολουθίας  $\sigma$
4. Αφαίρεσε τον κόμβο  $v$  από το σύνολο  $V$

Η ακολουθία  $\sigma$  που κατασκευάζει ο αλγόριθμος MCS είναι τέλειο σχήμα απαλοιφής μόνο στην περίπτωση που το γράφημα είναι τριγωνικό.

### 2.2.2 Κατασκευή Τριγωνικών γραφημάτων

Τα παραπάνω θεωρήματα και η μελέτη των ιδιοτήτων των τριγωνικών γραφημάτων φάνηκαν αρκετά χρήσιμα στην υλοποίηση των αλγορίθμων για την παραγωγή τυχαίων γραφημάτων που ανήκουν σε αυτή την κλάση. Η διαδικασία κατασκευής τριγωνικών γραφημάτων αποτελείται από δύο βασικά βήματα: Στο πρώτο βήμα κατασκευάζουμε ένα τυχαίο γράφημα  $G$  χρησιμοποιώντας την γεννήτρια συνάρτηση που παρέχει η LEDA και το χρησιμοποιούμε ως είσοδο στον αλγόριθμο *Maximum Cardinality Search*.

Στο επόμενο βήμα γίνεται διάσχιση της ακολουθίας των κόμβων  $\sigma$  που προκύπτει απ τον αλγόριθμο MCS. Για κάθε κόμβο  $v_i$  της ακολουθίας  $\sigma$  βρίσκουμε το σύνολο κόμβων  $S_1 = \{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}$  και το σύνολο κόμβων  $S_2 = N(v_i)$  και  $S_3 = S_1 \cap S_2$ . Για κάθε κόμβο  $v_i$  που ανήκει στο σύνολο  $S_3$  ελέγχουμε αν συνδέεται με ακμή με όλους τους κόμβους του συνόλου  $S_3$ , και αν δεν συνδέεται τότε προσθέτουμε μια νέα ακμή. Αφού γίνει έλεγχος για όλα τα στοιχεία του  $S_3$ , τελικά οι κόμβοι του συνόλου  $S_3$  θα σχηματίζουν κλίκα.

Όπως είδαμε η παραπάνω διαδικασία γίνεται επαναληπτικά, για κάθε κόμβο  $v_i$  που ανήκει στην ακολουθία  $\sigma$ . Δηλαδή για κάθε κόμβο  $v_i$  βρίσκουμε το σύνολο  $S_3$  και συμπληρώνουμε όπου χρειάζεται με νέες ακμές. Κατά την διαδικασία αυτή, υπολογίζουμε και το μέγεθος των κλικών που προκύπτουν. Το μεγαλύτερο από αυτά τα μεγέθη αποτελεί και το μέγεθος της μέγιστης κλίκας του γραφήματος που κατασκευάσαμε. Το τελικό γράφημα  $G$  που προκύπτει απ την συμπλήρωση με ακμές είναι τριγωνικό, αφού έχει ένα τέλειο σχήμα απαλοιφής  $\sigma$ .



Επιπλέον για το τριγωνικό αυτό γράφημα, όπως είδαμε κατά την κατασκευή του, μπορούμε να υπολογίσουμε το μέγεθος της μέγιστης κλίκας. Το γράφημα είναι τριγωνικό άρα είναι και τέλειο, επομένως ο χρωματικός αριθμός του γραφήματος είναι ίσος με τον αριθμό μέγιστης κλίκας, που είναι υπολογίσιμος.

Συνοψίζοντας, με την παραπάνω μέθοδο που περιγράψαμε και υλοποιήθηκε, κατασκευάζουμε τριγωνικά γραφήματα και βρίσκουμε τον ακριβή χρωματικό τους αριθμό. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τα γραφήματα αυτά ως εισόδους στις προσεγγιστικές μεθόδους χρωματισμού.

### Αλγόριθμος “Τριγωνικά Γραφήματα”

Είσοδος: Ένας τυχαίο γράφημα  $G$ .

Έξοδος: Ένα τριγωνικό γράφημα.

1. Κατασκεύασε μια ακολουθία κόμβων  $\sigma$  για το τυχαίο γράφημα  $G$  και αποθήκευσέ τη σε μια λίστα  $L=MCS$ .
2. Αν η λίστα είναι άδεια ο αλγόριθμος τερματίζει, αλλιώς εξέτασε την κορυφή  $u_i$  που προηγείται στην λίστα.
3. Βρες τα στοιχεία στη λίστα  $L$  που βρίσκονται δεξιά του  $u_i$  και αποθήκευσέ τα στο σύνολο  $S_1$ , μαζί με την  $u_i$ .
4. Βρες τις γειτονικές κορυφές τις  $u_i$  και αποθήκευσέ αυτές στο σύνολο  $S_2$ , μαζί με την  $u_i$ .
5. Υπολόγισε την τομή των συνόλων  $S_1$  και  $S_2$ , έστω  $S_3$  το σύνολο αυτό.
6. Υπολόγισε το μέγεθος του  $S_3$  και αποθήκευσέ το σε μια μεταβλητή  $temp$ .
7. Εάν  $temp > max\_clique$  τότε  $max\_clique = temp$ .
8. Βρες όλες τις γειτονικές κορυφές της πρώτης κορυφής  $k$  στο  $S_3$  αρχικής και αποθήκευσέ αυτές στο  $S_4$ , αφάιρεσε την πρώτη κορυφή  $k$  που εξετάστηκε από το  $S_3$ .
9. Έλεγξε αν κάθε κορυφή  $y$  που βρίσκεται στο  $S_3$  είναι μέλος και στο σύνολο  $S_4$  εάν δεν είναι τότε πρόσθεσε νέα ακμή μεταξύ της  $k$  και της  $y$ .
10. Αν το  $S_3$  περιέχει ένα μόνο στοιχείο πήγαινε στο βήμα 11, αλλιώς στο βήμα 8.
11. Αφαίρεσε το στοιχείο  $u_i$  από την λίστα  $L$  και επίστρεψε στο βήμα 2.

Ο παρακάτω αλγόριθμος υπολογίζει την μέγιστη κλίκα ενός τριγωνικού γραφήματος. Δέχεται ως είσοδο ένα τέλειο σχήμα απαλοιφής που κατασκευάζεται από τον αλγόριθμο  $MCS$ . Για κάθε στοιχείο της ακολουθίας ελέγχει αν η κλίκα με τους γείτονες του δεξιά στην ακολουθία είναι  $maximal$ . Ο αλγόριθμος επιστρέφει το μέγεθος της μέγιστης κλίκας του τριγωνικού γραφήματος, από όλες τις  $maximal$  κλίκες που έχει εξετάσει.



### Αλγόριθμος "Maximum\_Clique\_Chordal"

Είσοδος: Ένας τυχαίο γράφημα  $G$  και ένα  $\sigma = MCS$ .

Έξοδος: Η μέγιστη κλίκα του γραφήματος.

1. Βρες τα στοιχεία στη λίστα  $\sigma$  που βρίσκονται δεξιά του  $u_i$  και αποθήκευσέ τα στο σύνολο  $S_1$ , μαζί με την  $u_i$ .
2. Βρες τις γειτονικές κορυφές τις  $u_i$  και αποθήκευσέ αυτές στο σύνολο  $S_2$ , μαζί με την  $u_i$ .
3. Υπολόγισε την τομή των συνόλων  $S_1$  και  $S_2$ , έστω  $S_3$  το σύνολο αυτό.
4. Υπολόγισε το μέγεθος του  $S_3$  και αποθήκευσέ το σε μια μεταβλητή  $temp$ .
5. Εάν  $temp > max\_clique$  τότε  $max\_clique = temp$ .

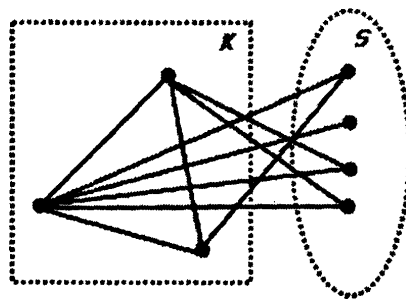
## 2.3 Γραφήματα Split

Στην ενότητα που ακολουθεί παρουσιάζεται η κλάση των *split* γραφημάτων. Αρχικά δίνονται βασικοί ορισμοί και θεωρήματα που αφορούν σε αυτή την κλάση και στη συνέχεια περιγράφεται ο τρόπος κατασκευής τυχαίων *split* γραφημάτων.

### 2.3.1 Ιδιότητες Split γραφημάτων

Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα  $G=(V,E)$  είναι *split* αν υπάρχει μια διαμέριση  $V = S + K$  του συνόλου των κόμβων του, όπου:  $S$  είναι ένα σταθερό σύνολο, που δεν είναι απαραίτητα το μέγιστο και  $K$  είναι ένα πλήρες σύνολο (κλίκα), που επίσης δεν είναι απαραίτητα μέγιστη.

Γενικά, η διαμέριση  $V = S + K$  ενός *Split* γραφήματος δεν είναι μοναδική. Μια τέτοια διαμέριση φαίνεται στο Σχήμα 2.3



Σχήμα 2.3: Διαμέριση *split* γραφήματος

Εφόσον ένα σταθερό σύνολο  $S$  ενός γραφήματος  $G$  είναι ένα πλήρες σύνολο για το συμπλήρωμά του  $\overline{G}$  και αντιστρόφως, προκύπτει το παρακάτω θεώρημα:

**Θεώρημα 2.5** Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα  $G$  είναι *split* αν και μόνο αν το συμπλήρωμά του  $\bar{G}$  είναι *split*.

Επίσης σημαντικό είναι το παρακάτω θεώρημα για τα *split* γραφήματα. Από το θεώρημα αυτό βλέπουμε ότι η διαμέριση ενός *split* γραφήματος σε ανεξάρτητο σύνολο  $S$  και σε πλήρες σύνολο  $K$  δεν είναι μοναδική:

**Θεώρημα 2.6** Έστω ότι το  $G$  είναι ένα *split* γράφημα και  $V = S + K$ , τότε ισχύει ακριβώς μία από τις παρακάτω συνθήκες[19]

(i)  $|S| = a(G)$  και  $|K| = \omega(G)$

(ii)  $|S| = a(G)$  και  $|K| = \omega(G) - 1$

(iii)  $|S| = a(G) - 1$  και  $|K| = \omega(G)$

Τα θεωρήματα που ακολουθούν περιγράφουν τη σχέση των *split* γραφημάτων με τα τριγωνικά και τα *comparability* γραφήματα αντίστοιχα. Τα *split* γραφήματα είναι και τριγωνικά, και το συμπλήρωμά τους είναι επίσης τριγωνικό γράφημα:

**Θεώρημα 2.7** [20] Έστω ότι το  $G$  είναι ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα. Τότε οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(i) Το  $G$  είναι ένα *split* γράφημα

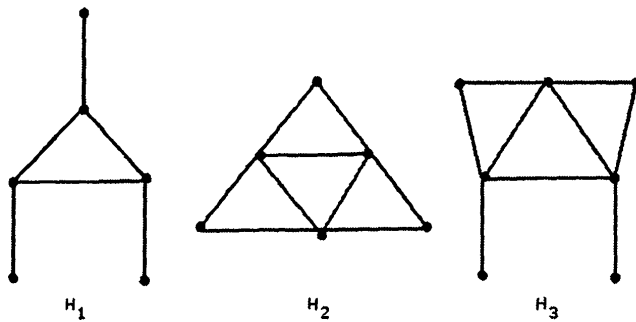
(ii) Τα  $G, \bar{G}$  είναι τριγωνικά γραφήματα

(iii) Το  $G$  δεν περιέχει επαγόμενο υπογράφημα ισοδύναμο με  $2K_2, C_4, C_5$

Εάν ένα γράφημα είναι ταυτόχρονα *split* και *interval* τότε και το συμπλήρωμά του είναι *split* και *comparability*. Στο παρακάτω θεώρημα διατυπώνεται η σχέση των *split* γραφημάτων με τα *comparability* και παρουσιάζονται τα απαγορευμένα υπογραφήματα για *split comparability* γραφήματα:

**Θεώρημα 2.8** Ένα *split* γράφημα  $G$  είναι και *comparability* αν και μόνο αν το  $G$  δεν περιέχει κανένα επαγόμενο υπογράφημα, που να είναι ισοδύναμο με τα  $H_1, H_2, H_3$ . [20]





Σχήμα 2.4: Απαγορευμένα υπογραφήματα για *split comparability* γραφήματα

### 2.3.2 Αλγόριθμος Κατασκευής Split Γραφημάτων

Με βάση τις ιδιότητες των *split* γραφημάτων που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη παράγραφο, σχεδιάστηκε και υλοποιήθηκε ο αλγόριθμος κατασκευής *split* γραφημάτων. Ο αλγόριθμος δέχεται ως είσοδο δυο ακεραίους, το πλήθος των κλίμακων  $K$  και το πλήθος των κόμβων του ανεξάρτητου συνόλου  $S$ . Οι κόμβοι αριθμούνται και κατασκευάζεται ένα λεξικό με την αριθμότητά τους. Στη συνέχεια αποφασίζεται με τυχαιότητα αν κάθε κόμβος με αριθμότητα από 0 ως  $|S_2|$  συνδέεται με κάποιον από τους κόμβους με αριθμότητα από  $|S_2|$  ως  $|S_1| + |S_2|$ .

#### Αλγόριθμος «Split\_graph»

Είσοδος: Το πλήθος των κόμβων του συνόλου  $S_1$  και του συνόλου  $S_2$

Έξοδος: Ένα *split* γράφημα

1. Δημιούργησε το πλήρες γράφημα *split\_gr* που αποτελείται από  $S_2$  κόμβους, δηλαδή δημιούργησε μια κλίμακα.
2. Δημιούργησε τους κόμβους του συνόλου  $S_1$  και εισήγαγέ τους στο γράφημα *split\_gr*.
3. Αρίθμησε όλους τους κόμβους του *split\_gr*, ξεκινώντας από 0 και αυξάνοντας κατά 1 κάθε φορά και εισήγαγέ τους σε ένα λεξικό  $D$
4. Για όλα τα στοιχεία του λεξικού, αποφάσισε με πιθανότητα 0,5 αν κάθε κόμβος με αριθμότητα από 0 ως  $|S_2|$  συνδέεται με κάθε κόμβο με αριθμότητα από  $|S_2|$  ως  $|S_1| + |S_2|$ .

Στον παραπάνω αλγόριθμο αποφασίζεται με πιθανότητα 0,5 αν δυο κόμβοι συνδέονται μεταξύ τους με ακμή. Για να κατασκευάσουμε πυκνά ή αραιά γραφήματα *split* μεταβάλλουμε ανάλογα την τιμή της πιθανότητας.



## 2.4 Γραφήματα Undirected Path

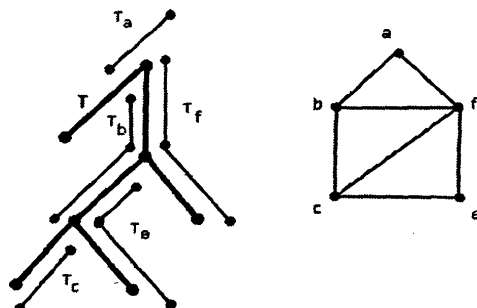
Στην ενότητα που ακολουθεί δίνεται ο ορισμός της οικογένειας των *intersection* γραφημάτων καθώς και οι βασικές ιδιότητες των *undirected path* γραφημάτων που ανήκουν σε αυτή την οικογένεια. Στη συνέχεια παρουσιάζεται ο αλγόριθμος κατασκευής τυχαίων γραφημάτων που ανήκουν σε αυτή την κλάση.

### 2.4.1 Ιδιότητες Undirected Path Γραφημάτων

Έστω  $F$  μια οικογένεια μη κενών συνόλων. Το *intersection* γράφημα του  $F$  κατασκευάζεται αναπαριστώντας κάθε σύνολο στο  $F$  με ένα κόμβο:

$$x \rightarrow y \Leftrightarrow S_x \cap S_y \neq \emptyset$$

Τα *undirected path* γραφήματα ανήκουν στην οικογένεια των *Intersection* γραφημάτων και μπορούν να μοντελοποιηθούν από ένα σύνολο μονοπατιών σε ένα δέντρο, όπου κάθε κόμβος του γραφήματος αντιστοιχεί σε ένα μονοπάτι στο δέντρο και δυο κόμβοι συνδέονται με ακμή εάν τα αντίστοιχα μονοπάτια στο δέντρο έχουν έναν κοινό κόμβο. Τα γραφήματα αυτά αποτελούν *proper* κλάση των τριγωνικών γραφημάτων.



Σχήμα 2.5: Ένα Undirected Path γράφημα

**Θεώρημα 2.9** Έστω ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα  $G$ . Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες [23][8][53]

- (i) Το γράφημα  $G$  είναι τριγωνικό.
- (ii) Το γράφημα  $G$  είναι *intersection* γράφημα μιας οικογένειας υποδέντρων ενός δέντρου.
- (iii) Υπάρχει ένα δέντρο  $T$  όπου το σύνολο των κόμβων του είναι το σύνολο των *maximal* κλίκων του  $G$  έτσι ώστε κάθε επαγόμενο υπογράφημα  $H_T$  είναι συνδεδεμένο και το σύνολο των κόμβων του  $H_T$  αποτελείται από τις *maximal* κλίκες στις οποίες ανήκει ο κόμβος  $v$ .

## 2.4.2 Αλγόριθμος Κατασκευής Undirected Path Γραφημάτων

Ο σχεδιασμός του αλγορίθμου παραγωγής *undirected path* γραφημάτων βασίζεται στη μοντελοποίηση των γραφημάτων που παρουσιάστηκε στην αρχή της παραγράφου. Ο αλγόριθμος δέχεται ως είσοδο έναν ακέραιο  $n$  που αντιστοιχεί στο πλήθος των κόμβων του γραφήματος που θα παραχθεί και η έξοδός του είναι ένα *undirected path graph* με  $n$  κόμβους.

Αρχικά παράγουμε ένα τυχαίο γράφημα  $G(V)$  με  $n$  κόμβους, όπου οι κόμβοι του  $V$  αποτελούν ένα ανεξάρτητο σύνολο και ένα τυχαίο γράφημα *temp\_graph*. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε το σκελετικό δέντρο  $T$  του τυχαίου γραφήματος *temp\_graph* και κάθε κόμβος του γραφήματος  $G$  αντιστοιχίζεται με ένα τυχαίο μονοπάτι του δέντρου  $T$ . Οι κόμβοι των μονοπατιών αποθηκεύονται σε ένα σύνολο  $S_u$  για κάθε κόμβο  $u$  του  $G$ . Για κάθε ζεύγος κόμβων  $u, v$  του γραφήματος  $G$  για τους οποίους τα αντίστοιχα σύνολα  $S_u, S_v$  έχουν κοινά στοιχεία, προστίθεται μια ακμή μεταξύ τους στο γράφημα  $G$ .

### Αλγόριθμος “Undirected Path Graph”

Είσοδος: Ένας ακέραιος  $n$ .

Έξοδος: Ένα *undirected path graph*  $G$ .

1. Κατασκεύασε ένα γράφημα  $G(V)$  με  $|V| = n$  και  $V$  είναι ανεξάρτητο σύνολο.
2. Κατασκεύασε ένα τυχαίο γράφημα *temp\_graph* και το σκελετικό δέντρο  $T$  του γραφήματος.
3. Για κάθε κόμβο  $u$  του γραφήματος  $G$  επέλεξε ένα τυχαίο μονοπάτι του  $T$  και αποθήκευσε τους κόμβους του μονοπατιού στο σύνολο  $S_u$ .
4. Για κάθε ζεύγος κόμβων  $u, v$  του γραφήματος  $G$  έλεγξε αν  $S_u \cap S_v \neq \emptyset$ .
5. Εάν τα σύνολα έχουν κοινά στοιχεία πρόσθεσε μια ακμή μεταξύ των κόμβων  $u, v$ .
6. Επίστρεψε το γράφημα  $G$ .

Στον παραπάνω αλγόριθμο η πυκνότητα του *undirected path* γραφήματος που παράγεται εξαρτάται από μέγεθος των μονοπατιών στο τυχαίο δέντρο που κατασκευάζεται. Για να κατασκευάσουμε πυκνά η αραιά γραφήματα *undirected path* μεταβάλλουμε ανάλογα το πλήθος των κόμβων που συμμετέχουν στα μονοπάτια.

Για την εύρεση της μέγιστης κλίκας σε *undirected path* εφαρμόζουμε την μέθοδο που παρουσιάστηκε σε προηγούμενη παράγραφο για τα τριγωνικά γραφήματα.



## 2.5 Γραφήματα Interval

Στην ενότητα που ακολουθεί δίνεται ο ορισμός και οι βασικές ιδιότητες των *interval* γραφημάτων. Στη συνέχεια παρουσιάζεται ο αλγόριθμος κατασκευής τυχαίων γραφημάτων που ανήκουν σε αυτή την κλάση.

### 2.5.1 Ιδιότητες Interval Γραφημάτων

Το *intersection* γράφημα μιας οικογένειας από διαστήματα σε ένα γραμμικά διατεταγμένο σύνολο (όπως η γραμμή των πραγματικών) ονομάζεται *interval* γράφημα. Κάθε επαγόμενο υπογράφημα ενός *interval* γραφήματος είναι *interval* γράφημα.

Τα *interval* γραφήματα ικανοποιούν την Τριγωνική Ιδιότητα Γραφημάτων [32] δηλ σε κάθε απλός κύκλος μήκους  $l > 3$  υπάρχει ακμή

Επιπλέον το συμπλήρωμα ενός *interval* γραφήματος ικανοποιεί την ιδιότητα της *transitive* διάταξης [25]. Η Ιδιότητα *Transitive Orientation* ορίζεται ως εξής: Σε κάθε ακμή μπορεί να ανατεθεί μια μονόδρομη κατεύθυνση με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε το κατευθυνόμενο γράφημα που προκύπτει  $(V, F) : (a, b) \text{ και } (b, c) \in F \Rightarrow (a, c) \in F (\forall a, b, c \in V)$ . Τα γραφήματα που ικανοποιούν την ιδιότητα της *transitive orientation* ονομάζονται *comparability*.

Στο παρακάτω θεώρημα συνοψίζονται όλες οι ιδιότητες των *interval* γραφημάτων που περιγράφηκαν προηγουμένως:

**Θεώρημα 2.10** [26] Έστω ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα  $G$ . Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- (i) Το γράφημα  $G$  είναι *interval* γράφημα
- (ii) Το γράφημα  $G$  ικανοποιεί την τριγωνική ιδιότητα και το συμπλήρωμά του  $\bar{G}$ , είναι ένα *comparability* γράφημα.
- (iii) Οι *maximal* κλίκες του γραφήματος  $G$  μπορούν να διαταχθούν γραμμικά έτσι ώστε  $\forall x \in G$ , όλες οι κλίκες που συμμετέχει ο κόμβος  $x$  εμφανίζονται διαδοχικά.

### 2.5.2 Κατασκευή Interval Γραφημάτων

Για την κατασκευή *interval* γραφημάτων βασιστήκαμε στις ιδιότητές τους όπως περιγράφηκαν προηγουμένως. Στην συνέχεια ακολουθεί ο αλγόριθμος κατασκευής *interval* γραφημάτων καθώς και η περιγραφή του.

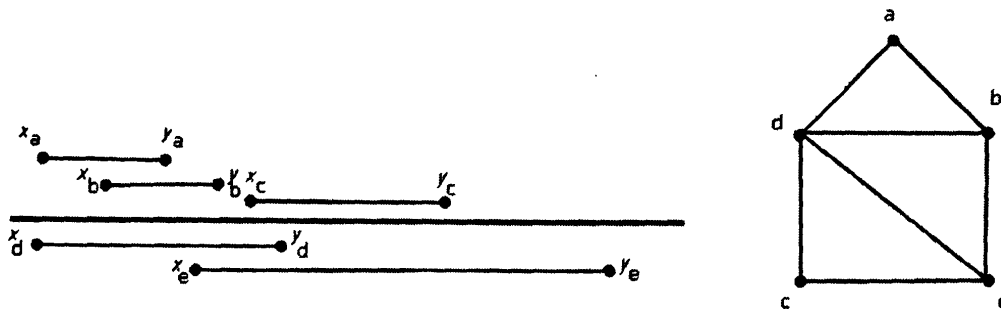


**Αλγόριθμος «Interval\_graph»** Είσοδος: Ένας ακέραιος  $n$  που εκφράζει το πλήθος των κορυφών του *interval* γραφήματος

Έξοδος: Ένα *interval* γράφημα με  $n$  κόμβους

1. Αν  $i \geq n$  πήγαινε στο βήμα 2. Αλλιώς κατασκεύασε μια τριάδα  $p(x, y, u)$ , όπου  $x = \text{Random}(0, \text{max})$ ,  $y = \text{Random}(x + 1, \text{max})$ . Τα  $x, y$ , αντιστοιχούν στα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος που αντιπροσωπεύει τον κόμβο  $u$ . Αύξησε κατά ένα το  $i$ , πήγαινε στο βήμα 1.
2. Ταξιλόγησε την λίστα με τις τριάδες  $p(x, y, u)$  ως προς  $x$ , πήγαινε στο βήμα 3.
3. Για το στοιχείο  $p_i(x, y, u)$  έλεγξε αν  $p_i.\text{next} \neq \text{null}$ . Αν ναι,  $p_j(x, y, v) = p_i.\text{next}$ , τότε πήγαινε στο βήμα 4. Αλλιώς πήγαινε στο βήμα 5.
4. Έλεγξε αν  $p_i \rightarrow y \geq p_j \rightarrow x$ , εάν ισχύει ένωσε με ακμή της κορυφές  $u, v$ ,  $p_j = p_i.\text{next}$ . Αν  $p_i.\text{next} \neq \text{null}$  πήγαινε στο βήμα 4, αλλιώς πήγαινε στο βήμα 3.
5. Επίστρεψε το τελικό *interval* γράφημα.

Για να υλοποιήσουμε τον παραπάνω αλγόριθμο χρησιμοποιήσαμε μια λίστα που κάθε της κόμβος είναι μια τριάδα  $p(x, y, u)$ . Τα  $x, y$  αντιπροσωπεύουν τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος  $(x, y)$  που αντιστοιχεί στον κόμβο  $u$ . Επιπλέον θεωρήσαμε ότι το άκρο  $x$  είναι μικρότερο από το άκρο  $y$  για κάθε ευθύγραμμο τμήμα, στην εικόνα που ακολουθεί γίνεται πιο σαφής η παραπάνω αντιστοίχιση. Τέλος ταξινομήσαμε την λίστα με τους κόμβους  $p_i$ , ως προς  $x$ , και συγκρίναμε το άκρο  $y$  του κάθε ευθύγραμμου τμήματος  $t_i$  με το άκρο  $x$  των τμημάτων  $t_j$  που βρίσκονται μετά από αυτό στην παραπάνω διάταξη. Στις συγκρίσεις αυτές ένα τμήμα  $t_i$  θα επικαλύπτεται με ένα τμήμα  $t_j$  που ακολουθεί στην διάταξη, εάν το άκρο του  $y_i$  είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το άκρο  $x_j$  των τμημάτων  $t_j$  που έπονται. Εάν βρεθεί κάποιο από τα τμήματα  $t_j$  που έπονται με μεγαλύτερο άκρο  $x_j$  η σύγκριση σταματάει για τρέχον  $t_i$ . Η διαδικασία που περιγράφηκε επαναλαμβάνεται για κάθε τμήμα  $t_i$  ή αντίστοιχα τριάδα  $p_i$  που υπάρχει στην ταξινομημένη λίστα.



Σχήμα 2.6: *Interval* γράφημα

Κάθε ένα από τα διαστήματα  $(x_i, y_i)$  αντιστοιχεί σε ένα κόμβο  $u_i$  στο γράφημα και μοντελοποιείται στον αλγόριθμο από μια τριάδα  $p_i(x_i, y_i, u_i)$ .

## 2.6 Γραφήματα Cograph

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται τα γραφήματα *cograph*. Αρχικά περιγράφεται η κλάση που ανήκουν και οι ιδιότητές τους και στη συνέχεια οι αλγόριθμοι κατασκευής τυχαίων γραφημάτων *cograph* και εύρεσης μέγιστης κλίμακας σε *cograph*.

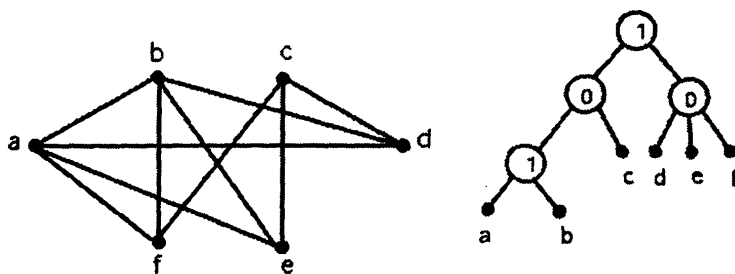
### 2.6.1 Ιδιότητες Cograph Γραφημάτων

Τα *cograph* ορίζονται σαν την κλάση των γραφημάτων που παράγονται από έναν μόνο κόμβο, υπό την κλειστότητα των πράξεων της ένωσης και του συμπληρώματος. Η κλάση των *cograph* γραφημάτων ορίζεται επαγωγικά ως εξής:

- (i) Ένα γράφημα με έναν μόνο κόμβο είναι *cograph*.
- (ii) Η ένωση *cograph* γραφημάτων είναι *cograph*.
- (iii) Το συμπλήρωμα ενός *cograph* είναι επίσης *cograph*.

Η κλάση των *cograph* γραφημάτων ορίστηκε ανεξάρτητα από διάφορους συγγραφείς τη δεκαετία του 1970 όπως οι Jung [36], Lerchs [37], Seinshe [49], και Sumner [50]. Δυο αρκετά σημαντικές αλγοριθμικές ιδιότητες που έδειξε ο Lerchs [37] μεταξύ άλλων ιδιοτήτων για τα *cographs* είναι οι εξής:

- (i) Τα *cograph* δεν έχουν  $P_4$
- (ii) Τα *cograph* έχουν μοναδική δενδρική αναπαράσταση που λέγεται *cotree*.



Σχήμα 2.7: Ένα *Cograph* και το *Cotree* στο οποίο αντιστοιχεί

Το *cotree*  $T$  είναι ένα δέντρο όπου οι εσωτερικοί του κόμβοι έχουν ως ετικέτες τους αριθμούς 0 και 1. Κάθε *cotree*  $T$  ορίζει ένα *cograph*  $G$  με κόμβους τα φύλλα του δέντρου  $T$ . Το υποδέντρο με ρίζα κάθε κόμβο του δέντρου  $T$  αντιστοιχεί σε ένα επαγόμενο υπογράφημα του  $G$  που έχει ως κόμβους το σύνολο των φύλλων του αντίστοιχου υποδέντρου:

1. Ένα υποδέντρο που αποτελείται από ένα μοναδικό κόμβο φύλλο αντιστοιχεί σε ένα επαγόμενο υπογράφημα με ένα μόνο κόμβο.
2. Ένα υποδέντρο με ρίζα που έχει ετικέτα 0 αντιστοιχεί στην ένωση των υπογραφημάτων που ορίζονται από τα παιδιά του κόμβου αυτού.
3. Ένα υποδέντρο με ρίζα που έχει ετικέτα 1 αντιστοιχεί στην σύνθεση των υπογραφημάτων που ορίζονται απ τα παιδιά του κόμβου αυτού.

Μια ισοδύναμη περιγραφή της κατασκευής ενός *cograph* από το αντίστοιχο *cotree* είναι η εξής: Σε ένα *cograph*  $G$  δυο κόμβοι συνδέονται με ακμή αν και μόνο αν ο πλησιέστερος κοινός πρόγονος των αντίστοιχων φύλλων στο *cotree*  $T$  έχει ετικέτα 1. Αντίστροφα κάθε *cograph* μπορεί να αναπαρασταθεί με τον παραπάνω τρόπο από ένα *cotree*. Η αναπαράσταση αυτή είναι μοναδική αν εξασφαλίσουμε ότι οι ετικέτες για κάθε μονοπάτι από την ρίζα σε φύλλο στο  $T$  εναλλάσσονται σε 0 και 1 [12].

### 2.6.2 Αλγόριθμος Κατασκευής Γραφημάτων *Cograph*

Ο αλγόριθμος για την κατασκευή *cographs* βασίζεται στην αναπαράσταση τους με *cotree*. Είσοδος του αλγορίθμου είναι το πλήθος των κόμβων  $n$  του γραφήματος και έξοδος το *cograph*  $G$  με  $n$  κόμβους. Αρχικά παράγεται ένα τυχαίο γράφημα  $n$  κόμβων *temp\_graph* και ένα γράφημα με  $n$  απομονωμένους κόμβους  $G$ , και το σκελετικό δέντρο  $T$ , του *temp\_graph*. Στο δέντρο  $T$  επιλέγεται τυχαία ένας κόμβος σαν ρίζα και το δέντρο  $T$  συμπληρώνεται με κόμβους ώστε το πλήθος των φύλλων του να είναι ίσο με  $n$  και κάθε εσωτερικός κόμβος να έχει τουλάχιστον δυο παιδιά. Κάθε φύλλο του δέντρου  $T$  αντιστοιχίζεται με έναν κόμβο του γραφήματος  $G$ . Στη συνέχεια πραγματοποιείται *BFS* διάσχιση των κόμβων του δέντρου και οι κόμβοι που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο αριθμούνται με τις ετικέτες 0 και 1 εναλλάξ ανά επίπεδο. Για κάθε ζεύγος φύλλων του δέντρου γίνεται η αναζήτηση του πλησιέστερου κοινού προγόνου τους ξεκινώντας από το επίπεδο των φύλλων προς τα πάνω και ελέγχεται η ετικέτα του κοινού προγόνου. Αν η ετικέτα του είναι 1, οι αντίστοιχοι κόμβοι του γραφήματος  $G$  συνδέονται με ακμή.



### Αλγόριθμος “Cographs”

Είσοδος: Ένας ακέραιος  $n$ , που αντιστοιχεί στο πλήθος των κόμβων του γραφήματος.

Έξοδος: Ένα *cograph* γράφημα με  $n$  κόμβους.

1. Κατασκεύασε ένα τυχαίο γράφημα  $n$  κόμβων *temp\_graph*.
2. Υπολόγισε το σκελετικό δέντρο  $T$  του γραφήματος *temp\_graph*.
3. Κατασκεύασε ένα γράφημα  $G$  με  $|V(G)| = n$  και  $|E(G)| = 0$ .
4. Επίλεξε τυχαία ρίζα έναν κόμβο  $u \in T$  και σε κάθε κόμβο  $v \in T$  με βαθμό  $T.degree(v) = 2$  πρόσθεσε έναν νέο κόμβο-παιδί.
5. Συμπλήρωσε το δέντρο  $T$  με νέους κόμβους έτσι ώστε το γράφημα  $T$  να έχει  $n$  φύλλα.
6. Διέσχισε κατά πλάτος (*BFS*) τους κόμβους του δέντρου  $T$  και αρίθμησε τους κόμβους με τις ετικέτες 0 και 1 εναλλάξ ανά επίπεδο.
7. Συσχέτισε κάθε κόμβο του γραφήματος  $G$  με έναν κόμβο-φύλλο του δέντρου  $T$  και για κάθε ζεύγος φύλλων του δέντρου, βρες τον πλησιέστερο κοινό πρόγονο ξεκινώντας από το επίπεδο των φύλλων προς τα πάνω. Έλεγξε την ετικέτα του κοινού προγόνου και αν ισούται με 1 σύνδεσε με ακμή τους αντίστοιχους κόμβους του γραφήματος  $G$ .
8. Επίστρεψε το *cograph* γράφημα  $G$ .

Για την εκτίμηση της απόδοσης των προσεγγιστικών αλγορίθμων χρωματισμού που θα εξεταστούν σε επόμενο κεφάλαιο είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε την τιμή της μέγιστης κλίκας του γραφήματος. Η διαδικασία για την εύρεση της μέγιστης κλίκας σε *cographs* απλουστεύεται εφόσον έχει κατασκευαστεί η αντίστοιχη δενδρική αναπαράσταση *cotree* του *cograph* γραφήματος. Στον αλγόριθμο που υλοποιήθηκε για την εύρεση της μέγιστης κλίκας σε *cograph* οι κόμβοι του αντίστοιχου *cotree* ταξινομούνται ανάλογα με το επίπεδο που βρίσκονται και διασχίζονται πρώτοι οι κόμβοι που βρίσκονται στο χαμηλότερο επίπεδο. Κάθε κόμβος-φύλλο αντιστοιχίζεται με μια ετικέτα *clique\_num* = 1. Για κάθε εσωτερικό  $u \in cotree$  με τιμή *operation\_label*( $u$ ) = 1 το *clique\_num* υπολογίζεται ως το άθροισμα των αντίστοιχων ετικετών των παιδιών του,  $v$ , δηλαδή  $clique\_num(u) = clique\_num(v_1) + clique\_num(v_2) \dots + clique\_num(v_i)$ . Ενώ για κάθε εσωτερικό  $u \in cotree$  με τιμή *operation\_label*( $u$ ) = 0 το *clique\_num* ισούται με το μέγιστη τιμή των αντίστοιχων ετικετών των παιδιών του,  $v$ , δηλαδή  $clique\_num(u) = max(clique\_num(v_i))$ .

### Αλγόριθμος “Cotree\_Max\_Clique”

Είσοδος: Το *cotree*  $T$  ενός *cograph*  $G$ .

Έξοδος: Το μέγεθος της μέγιστης κλίκας του *cograph*  $G$ .

1. Ταξινόμησε τους κόμβους του *cotree*  $T$  με βάση το επίπεδο στο δέντρο.
2. Για κάθε φύλλο  $v_i$  του  $T$  θέσε  $clique\_num(v_i) = 1$



3. Διέσχισε τους κόμβους  $u$  του  $T$  από το χαμηλότερο στο υψηλότερο επίπεδο μέχρι τη ρίζα του  $T$ 
  - a. Αν  $u$  εσωτερικός κόμβος του  $T$  με  $operation\_label(u) = 1$ , θέσε  $clique\_num(u) = clique\_num(v_1) + clique\_num(v_2) \dots + clique\_num(v_i)$ , όπου  $v_i = child(u)$ .
  - b. Αλλιώς αν  $u$  εσωτερικός κόμβος του  $T$  με  $operation\_label(u) = 0$ , θέσε  $clique\_num(u) = max(clique\_num(v_i))$ .
4. Επίστρεψε το  $clique\_num$  της ρίζας του  $T$

## 2.7 Γραφήματα Threshold

Στις ενότητες που ακολουθούν περιγράφεται η κλάση των *threshold* γραφημάτων και παρουσιάζεται ο αλγόριθμος κατασκευής γραφημάτων που ανήκουν στην κλάση αυτή και ο αλγόριθμος εύρεσης μέγιστης κλίκας σε *threshold* γραφήματα.

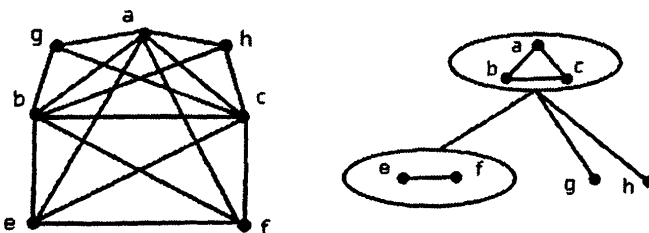
### 2.7.1 Ιδιότητες Threshold Γραφημάτων

Τα *threshold* γραφήματα [28] αποτελούν ειδική περίπτωση των *cographs* και *split* γραφημάτων. Κάθε γράφημα που ανήκει και στις δυο κλάσεις είναι και *threshold* γράφημα. Επίσης τα *threshold* γραφήματα είναι ειδική περίπτωση των *interval* γραφημάτων. Στα *threshold* γραφήματα αναφέρθηκαν πρώτοι οι *Chvatal* και *Hammer* [10] και απέδειξαν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

**Θεώρημα 2.11** Ένα γράφημα  $G$  είναι *threshold* γράφημα εάν και μόνο αν το  $G$  δεν έχει κανένα επαγόμενο υπογράφημα ισομορφικό στο  $C_4$ , στο  $P_4$  ή στο  $2K_2$ . [10]

Ένα *threshold* γράφημα μπορεί να κατασκευαστεί από έναν κόμβο εφαρμόζοντας επαναληπτικά μια απ τις εξής λειτουργίες

- (i) Προσθήκη ενός απομονωμένου κόμβου στο γράφημα.
- (ii) Προσθήκη ενός κόμβου που συνδέεται με όλους τους κόμβους που ανήκουν στο γράφημα.



Σχήμα 2.8: Ένα *Threshold* γράφημα και η δενδρική του αναπαράσταση



## 2.7.2 Αλγόριθμος Κατασκευής Threshold Γραφημάτων

Στην ενότητα αυτή περιγράφεται ο αλγόριθμος κατασκευής *threshold* γραφημάτων. Ο αλγόριθμος βασίζεται στην ιδιότητα που περιγράφηκε στην παραπάνω ενότητα, δηλαδή στην επαναληπτική διαδικασία προσθήκης απομονωμένου κόμβου ή κόμβου που συνδέεται με όλους τους κόμβους που ανήκουν στο γράφημα, ξεκινώντας αρχικά με ένα κόμβο. Ο χρήστης δίνει ως όρισμα το πλήθος  $n$  των κόμβων του γραφήματος. Ως έξοδος επιστρέφεται το τυχαίο *threshold* γράφημα που κατασκευάστηκε και έχει  $n$  κόμβους. Για να κατασκευαστεί το *threshold* γράφημα εφαρμόζεται μια από τις λειτουργίες *add disjointed node D* και *starring S* για κάθε νέο κόμβο που προστίθεται στο γράφημα. Η επιλογή της λειτουργίας που θα εφαρμοστεί σε κάθε κόμβο γίνεται τυχαία και με ίσες πιθανότητες.

### Αλγόριθμος “Threshold\_graph”

Είσοδος: Ένας ακέραιος  $n$ , που αντιστοιχεί στο πλήθος των κόμβων του γραφήματος.

Έξοδος: Ένα *threshold* γράφημα.

1. Αρχικά  $i = 1$ , και το πλήθος των κορυφών του γραφήματος είναι ένα.
2. Αν  $i < n$  κατασκεύασε ένα νέο κόμβο στο γράφημα και επέλεξε λειτουργία,  $operation = Random(0, 1)$ . Αύξησε το  $i$ ,  $i = i + 1$ . Αν  $i = n$  πήγαινε στο βήμα 4.
3. Αν  $operation = 1$ , τότε σύνδεσε με ακμές το νέο κόμβο με όλους τους κόμβους του γραφήματος, που έχουν τοποθετηθεί σε προηγούμενο βήμα. Αν  $operation = 0$ , πρόσθεσε το νέο κόμβο στο γράφημα, χωρίς να συνδέεται με κάποιο κόμβο. Πήγαινε στο βήμα 2.
4. Επίστρεψε το *threshold* γράφημα των  $n$  κορυφών.

## 2.8 Γραφήματα Quasi Threshold

Στην παράγραφο που ακολουθεί περιγράφεται η κλάση των Quasi Threshold γραφημάτων και παρουσιάζεται ο αλγόριθμος κατασκευής τους.

### 2.8.1 Ιδιότητες Quasi Threshold Γραφημάτων

Αυτή η κλάση γραφημάτων μελετήθηκε για πρώτη φορά από τον Wolk 1962 [54]. Ένα γράφημα  $G = (V, E)$  ονομάζεται *Quasi Threshold* [53][54][55] εάν κάθε ακμή του γραφήματος  $G$  είναι είτε *free* είτε *semi-free*. Μια ακμή  $(x, y)$  ονομάζεται *semi-free* εάν  $N[x] \subset N[y]$  ή  $N[x] \subset N[y]$ . Μια ακμή  $(x, y)$  ονομάζεται *free* εάν  $N[x] = N[y]$ . Για ευκολία ορίζουμε:  $cent(G) = \{x \in V \mid N[x] = V\}$



Στο θεώρημα που ακολουθεί συνοψίζονται οι βασικές ιδιότητες των *quasi threshold* γραφημάτων:

**Θεώρημα 2.12** [41][43] Έστω  $G$  ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα, τότε οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- (i) Το γράφημα  $G$  είναι  $QT$ -γράφημα.
- (ii) Για κάθε συνδεδεμένο επαγόμενο υπογράφημα  $G[S]$ ,  $S$  υποσύνολο του  $V$ , ισχύει  $cent(G) \neq \emptyset$ .
- (iii) Το γράφημα  $G$  δεν περιέχει κανένα επαγόμενο υπογράφημα που να είναι  $P_4$  ή  $C_4$ .

Επιπλέον ισχύουν οι εξής ιδιότητες για τα *quasi threshold* γραφήματα:

**Λήμμα 2.2** [41][43] Οι παρακάτω προτάσεις ισχύουν:

- (i) Ένα γράφημα  $G$  είναι  $QT$ -γράφημα εάν και μόνο εάν  $G - cent(G)$  είναι *Quasi Threshold* Γράφημα.
- (ii) Εάν  $V - cent(G) \neq \emptyset$  τότε το γράφημα  $G = (V - cent(G), E)$  περιέχει τουλάχιστον δύο συνεκτικές συνιστώσες.

Έστω  $G$  ένα  $QT$ -γράφημα, τότε  $V_1 = cent(G) \neq \emptyset$  από το θεώρημα 2.12. Αναθέτουμε στο  $G$  το  $G_1$ ,  $G := G_1$  και  $G - V_1 = G_2 \cup G_3 \cup \dots \cup G_r$  όπου  $G_i$  είναι συνιστώσες του  $G - V_1$  με  $2 \leq i \leq r$ . Τότε το  $G_i$  είναι ένα  $QT$ -γράφημα και το  $V_i = cent(G_i) \neq \emptyset$ . Τέλος μπορούμε να ορίσουμε την ακόλουθη διαμέριση του συνόλου  $V$ :  $V = V_1 + V_2 + \dots + V_k$ , όπου  $V_i = cent(G_i)$ . Επιπλέον ορίζουμε μια μερική διάταξη  $\preceq$  στο  $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ , όπου  $V_i \preceq V_j$ , εάν  $V_j \subseteq V(G_i)$ .

Έστω  $G$  ένα συνδεδεμένο  $QT$ -γράφημα και  $V = V_1 + V_2 + \dots + V_k$  η διαμέριση που ορίστηκε πιο πάνω. Ειδικότερα  $V_1 := cent(G)$ . Τότε αυτή η διαμέριση και το μερικώς διατεταγμένο σύνολο  $(\{V_i\}, \preceq)$  έχουν τις εξής ιδιότητες: Εάν  $V_i \preceq V_j$  τότε κάθε κόμβος του συνόλου  $V_i$  και κάθε κόμβος του συνόλου  $V_j$  συνδέονται με ακμή στο γράφημα  $G$ . Για κάθε  $V_j$   $cent(G[\{\cup V_i | V_i \subseteq V_j\}]) = V_j$ . Για κάθε δυο σύνολα  $V_s$  και  $V_t$  τέτοια ώστε  $V_s \preceq V_t$ ,  $G[\{\cup V_i | V_s \preceq V_i \preceq V_t\}]$  είναι ένα πλήρες γράφημα. Επιπλέον για κάθε μείζων σύνολο  $V_i$  της διάταξης  $(\{V_i\}, \preceq)$ , το γράφημα  $G[\{\cup V_i | V_i \preceq V_i \preceq V_i\}]$  είναι ένα μείζων πλήρες υπογράφημα του γραφήματος  $G$ . Κάθε ακμή που έχει και τα δύο άκρα της στο σύνολο  $V_i$  είναι *free* ακμή. Κάθε ακμή με το ένα άκρο της στο σύνολο  $V_i$  και το άλλο της άκρο στο σύνολο  $V_j$ , όπου  $V_i \neq V_j$ , είναι *semi-free* ακμή.

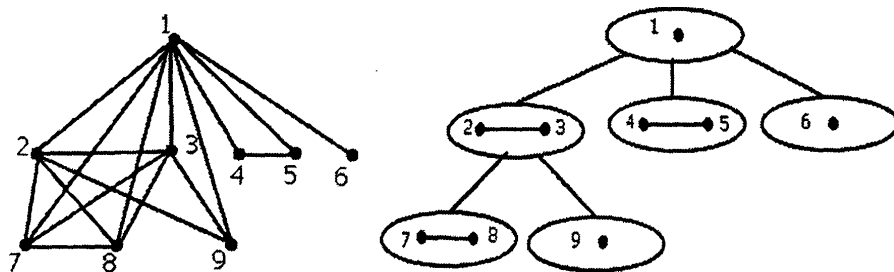


Τέλος τα *Quasi Threshold* γραφήματα ορίζονται σαν τα γραφήματα εκείνα που δεν περιέχουν  $2K_2$  και το συμπλήρωμά τους  $\bar{G}$  είναι *Quasi Threshold*.

### 2.8.2 Δενδρική Αναπαράσταση *Quasi Threshold* γραφημάτων

Σύμφωνα με τις ιδιότητες που ορίστηκαν στην προηγούμενη ενότητα ορίζουμε μια δομή, που τις συνοψίζει, που ονομάζεται *cent-tree* του γραφήματος  $G$  και συμβολίζεται με  $T_c(G)$ . Το *cent-tree* είναι ένα ριζωμένο δέντρο με ρίζα το σύνολο  $V_1$ . Κάθε κόμβος  $V_i$  του  $T_c(G)$  είναι είτε φύλλο, είτε εσωτερικός κόμβος με δύο τουλάχιστον παιδιά. Επιπλέον  $V_s \preceq V_i$  εάν το  $V_s$  είναι πρόγονος του  $V_i$  στο  $T_c(G)$ .

Στο Σχήμα 2.7 ακολουθεί ένα παράδειγμα στο οποίο φαίνεται ένα *QT*-γράφημα καθώς και η δενδρική του αναπαράσταση, δηλαδή το *cent-tree* που του αντιστοιχεί.



Σχήμα 2.9: Ένα *QT*-γράφημα και η δενδρική του αναπαράσταση

### 2.8.3 Αλγόριθμος Κατασκευής *Quasi-Threshold* γραφημάτων

Για την κατασκευή τυχαίων *QT*-γραφημάτων βασιστήκαμε στις ιδιότητες των *cent-tree*. Η βασική ιδέα στον αλγόριθμο είναι ότι αρχικά κατασκευάζεται το δέντρο *cent-tree* που θεωρούμε ότι αντιστοιχεί σε ένα τυχαίο γράφημα *QT*, και στην συνέχεια, σύμφωνα με τις ιδιότητες του *cent-tree* κατασκευάζεται το αντίστοιχο *quasi-threshold QT*. Στο πρώτο βήμα του αλγορίθμου παράγεται ένα γράφημα *QT* με πλήθος κόμβων  $|V(QT)| = n$  και ακμές  $|E(QT)| = 0$  και ένα σύνολο κλικών  $|C| = \text{num\_of\_tree\_nodes}$  με τυχαίο πλήθος κόμβων η κάθε κλίκα, όπου το άθροισμα του πλήθους των κόμβων των κλικων ισούται με  $|V(QT)| = n$ .

Στην συνέχεια παράγεται ένα τυχαίο γράφημα *temp\_graph* με πλήθος κόμβων  $|V(\text{temp\_graph})| = \text{num\_of\_tree\_nodes}$  και κατασκευάζεται ένα *spanning tree T* του τυχαίου



γραφήματος. Κάθε κόμβος του δέντρου  $T$  αντιστοιχίζεται με μια κλίκα του συνόλου  $C$ . Στους κόμβους του  $T$  που έχουν βαθμό δύο προστίθεται ένας νέος κόμβος και αντιστοιχίζεται σε αυτόν μια κλίκα του συνόλου  $C$ . Εάν το πλήθος των κόμβων στο δέντρο  $T$  ξεπερνά το πλήθος των κλικών τότε διασπάται τυχαία μια κλίκα από το  $C$  για να γίνει η αντιστοίχιση ένα προς ένα μεταξύ των κόμβων του  $T$  και των κλικών του συνόλου  $C$ .

Το δέντρο  $T$  που παράγεται με τον παραπάνω τρόπο αποτελεί ένα *cent-tree* για το γράφημα  $QT$  που θέλουμε να παράγουμε. Για να κατασκευαστεί το τελικό  $QT$  γράφημα κάθε κόμβος κλίκα συνδέεται με όλες τις κλίκες που βρίσκονται στο μονοπάτι του δέντρου από τον πατέρα της μέχρι την ρίζα. Στην συνέχεια παρουσιάζεται ο αλγόριθμος

### Αλγόριθμος “QuasiThreshold”

Είσοδος :Ένας ακέραιος  $n$ , ίσως με το πλήθος των κορυφών του  $QT$  γραφήματος.

Έξοδος :Ένα  $QT$ -γράφημα  $G$ ,  $n$  κόμβων.

1. Αν  $n > 0$ , κατασκεύασε κλίκα  $L\_clique$ , με τυχαίο πλήθος κόμβων μεγέθους  $num\_of\_node = Random(1, max)$ ,  $n = n - num\_of\_node$ . Αλλιώς πήγαινε στο βήμα 3.
2. Εισήγαγε την λίστα με τους κόμβους της κλικας  $L\_clique$  του  $G$ , στην λίστα με τους κόμβους του *cent-tree*,  $L\_tree$ , θέσε  $num\_of\_tree\_nodes++$ . Πήγαινε στο βήμα 1.
3. Κατασκεύασε ένα τυχαίο γράφημα με πλήθος κόμβων  $|V(temp\_graph)| = num\_of\_tree\_nodes$
4. Κατασκεύασε ένα σκελετικό δέντρο  $T$  του γραφήματος  $temp\_graph$  και συμπλήρωσε με ένα ακόμα κόμβο παιδί τους κόμβους του με βαθμό 2.
5. Αντιστοίχισε κάθε κλίκα της λίστας  $L\_tree$  με τους κόμβους του δέντρου. Εάν το πλήθος των κόμβων του δέντρου είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των κλικών διάσπασε τυχαία κλίκες για να γίνει η αντιστοίχιση.
6. Σύνδεσε κάθε κόμβο-κλίκα του  $T$  με όλες τις κλίκες που βρίσκονται στο μονοπάτι του δέντρου από τον πατέρα της μέχρι την ρίζα.
7. Επιστρέψε το *quasi-threshold* γράφημα  $G$ .

Για την εύρεση της μέγιστης κλικας σε ένα *quasi-threshold* γράφημα αρκεί να υπολογίσουμε το πλήθος κόμβων από τη ρίζα του *cent-tree* σε κάθε φύλλο του. Το μονοπάτι μεταξύ φύλλου-ρίζας με το μέγιστο πλήθος κόμβων αποτελεί τη μέγιστη κλίκα του γραφήματος  $QT$ . Ο αλγόριθμος που υλοποιήθηκε για την εύρεση της μέγιστης κλικας ξεκινά από κάθε φύλλο  $u \in T$  και υπολογίζει το άθροισμα  $clique\_num$  των κόμβων των κλικών  $clique\_nodes(u)$  στο μονοπάτι προς την ρίζα του *cent-tree*.



### Αλγόριθμος “Max\_Clique\_QuasiThreshold”

Είσοδος : Το *cent-tree*  $T$  ενός  $QT$ -γραφήματος, η λίστα με τα φύλλα του δέντρου  $T$ .

Έξοδος : Το μέγεθος της μέγιστης κλίκας του  $QT$ .

1. Για κάθε κόμβο-φύλλο  $u \in T$ 
  - a. Επανάλαβε μέχρι  $u = root$ 
    - a1. Θέσε  $clique\_num = clique\_num + clique\_nodes(u)$
    - a2. Βρες τον πρόγονο του κόμβου  $u$ ,  $p\_u = parent(u)$ .
    - a3. Θέσε  $u = p\_u$
  - b. Εάν  $clique\_num > max\_clique$  τότε  $max\_clique = clique\_num$ .
2. Επίστρεψε το μέγεθος της μέγιστης κλίκας  $max\_clique$ .

## 2.9 Δέντρα

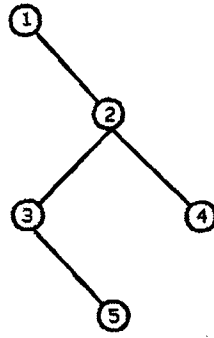
Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται η κλάση των δέντρων. Στην πρώτη ενότητα περιγράφονται οι βασικές ιδιότητες των δέντρων και στην συνέχεια περιγράφεται ο αλγόριθμος κατασκευής τους.

### 2.9.1 Ιδιότητες Δέντρων

Τα δέντρα είναι συνδεδεμένα γραφήματα που δεν περιέχουν κύκλους. Πολλά *NP-hard* προβλήματα για μη κατευθυνόμενα γραφήματα επιλύονται σε πολυωνυμικό χρόνο όταν περιορίζονται στην κλάση των δέντρων. Για παράδειγμα ένα δέντρο με τουλάχιστον μια ακμή έχει χρωματικό αριθμό και μέγεθος μέγιστης κλίκας ίσο με δύο,  $\chi(G) = \omega(G) = 2$ . Τα γραφήματα  $G$  που ανήκουν σε αυτή την κλάση ικανοποιούν τις παρακάτω ισοδύναμες συνθήκες:

1. Το γράφημα  $G$  είναι συνδεδεμένο και άκυκλο
2. Το γράφημα  $G$  δεν έχει κύκλους και ένας κύκλος σχηματίζεται σε αυτό με την προσθήκη μια οποιασδήποτε νέας ακμής.
3. Το γράφημα  $G$  είναι συνδεδεμένο ενώ γίνεται μη συνεκτικό με την αφαίρεση μιας οποιασδήποτε ακμής.
4. Οποιοιδήποτε δυο κόμβοι στο γράφημα  $G$  συνδέονται με ένα μοναδικό απλό μονοπάτι.





Σχήμα 2.10: Δέντρο με 5 κόμβους και 4 ακμές

Για ένα δέντρο  $G$  με  $|V(G)| = n$ , οι παραπάνω προτάσεις είναι ισοδύναμες για καθεμία από τις εξής συνθήκες:

1. Το γράφημα  $G$  είναι συνεκτικό και έχει πλήθος ακμών  $|E(G)| = n-1$ .
2. Το γράφημα  $G$  δεν έχει απλούς κύκλους και έχει πλήθος ακμών  $|E(G)| = n-1$ .

Τα παρακάτω δεδομένα ισχύουν για ένα δέντρο με  $n$  μετρήσιμους κόμβους:

1. Κάθε δέντρο είναι ένα διμερές γράφημα και ένα median γράφημα. Κάθε δέντρο με μετρήσιμες ακμές είναι *planar*.
2. Για κάθε συνδεδεμένο γράφημα  $G$  κατασκευάζεται ένα σκελετικό δέντρο  $ST$ , το οποίο είναι ένα δέντρο που περιέχει κάθε κόμβο του γραφήματος  $G$  και οι ακμές του ανήκουν στις ακμές του  $G$ . Για κάθε συνδεδεμένο γράφημα  $G$  κατασκευάζεται ένα κανονικό σκελετικό δέντρο  $ST$ . [44]
3. Κάθε πεπερασμένο δέντρο με τουλάχιστον δυο κόμβους, έστω  $n$  έχει τουλάχιστον δυο φύλλα ή κόμβους με βαθμό ένα. Το δέντρο με το ελάχιστο πλήθος φύλλων αντιστοιχεί σε γράφημα μονοπάτι ενώ το δέντρο με το μέγιστο πλήθος φύλλων  $(n-1)$  αντιστοιχεί στο *star* γράφημα.
4. Για κάθε τρεις κόμβους στο δέντρο, τα τρία μονοπάτια μεταξύ τους έχουν τουλάχιστον ένα κοινό κόμβο.

### 2.9.2 Κατασκευή Δέντρων

Για την κατασκευή δέντρων  $n$  κόμβων βασιστήκαμε στην πρόταση 3. Συγκεκριμένα κατασκευάζουμε ένα τυχαίο γράφημα  $n$  κόμβων με την χρήση της συνάρτησης *random\_simple\_undirected\_graph*( $G, n, m$ ) της LEDA και στη συνέχεια με την κλήση της συνάρτησης *SPANNING\_TREE*( $G$ ) κρατάμε στο  $G$  τις ακμές που δε συμμετέχουν σε κύκλο και επιστρέφονται από την συνάρτηση σε λίστα. Το πλήθος των φύλλων του δέντρου που θα κατασκευαστεί εξαρτάται από το πλήθος των ακμών  $m$  στο τυχαίο γράφημα  $G$ .



### Αλγόριθμος «Construct\_Tree»

Είσοδος: Ένας ακέραιος  $n$

Έξοδος: Ένα δέντρο  $G$ ,  $n$  κόμβων και  $n-1$  ακμών.

1. Κατασκεύασε ένα τυχαίο γράφημα  $G$  με  $n$  κόμβους και  $m$  ακμές.  
*random\_simple\_undirected\_graph( $G, n, m$ )*
2. Βρες τις ακμές του σκελετικού δέντρου και αποθήκευσέ αυτές σε μια λίστα  
 $L = \text{SPANNING\_TREE}(G)$ .
3. Διάγραψε από το γράφημα  $G$  όσες ακμές δεν ανήκουν στην λίστα  $L$ .
4. Επίστρεψε το γράφημα  $G$ .



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

# ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΥ I

- 
- 3.1 Εισαγωγή
  - 3.2 Σειριακός Αλγόριθμος Χρωματισμού
  - 3.3 Αλγόριθμος Χρωματισμού «Πρώτα η Μεγαλύτερη»
  - 3.5 Αλγόριθμος Χρωματισμού «Τελευταία η Μικρότερη»
  - 3.6 Αλγόριθμος Χρωματισμού «Βαθμός Χρώματος»
  - 3.7 Παραδείγματα Χρωματισμού
  - 3.8 Παρατηρήσεις
- 

### 3.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται αναφορά στους αλγόριθμους χρωματισμού που υλοποιήθηκαν καθώς και στον τρόπο με τον οποίο λειτουργούν. Στην ενότητα 3.2 γίνεται λόγος για τα μη πολυωνυμικά προβλήματα, αφού και ο χρωματισμός γραφημάτων ανήκει σε αυτή την κατηγορία προβλημάτων. Στις ενότητες 3.2 – 3.6 παρουσιάζονται οι αλγόριθμοι χρωματισμού (α) «Σειριακός» αλγόριθμος, (β) αλγόριθμος «Πρώτα η Μεγαλύτερη» [52], (γ) αλγόριθμος «Τελευταία η Μικρότερη» [42] και, (δ) αλγόριθμος «Βαθμός Χρώματος» [6] αντίστοιχα. Τέλος στην ενότητα 3.7 παρουσιάζονται παραδείγματα που δείχνουν τον τρόπο με τον οποίο εργάζονται οι παραπάνω αλγόριθμοι.

### 3.2 Μη πολυωνυμικά προβλήματα

Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή το πρόβλημα του χρωματισμού των κορυφών ενός τυχαίου γραφήματος ανήκει στην κατηγορία των μη πολυωνυμικών προβλημάτων. Τα μη πολυωνυμικά προβλήματα επιλύονται με αρκετά χρονοβόρους αλγόριθμους, για το λόγο αυτό είναι προτιμότερο να χρησιμοποιηθούν προσεγγιστικές μέθοδοι. Οι ευριστικές αυτές μέθοδοι δίνουν μια προσεγγιστική λύση για το πρόβλημα, σε ορισμένες περιπτώσεις δίνουν και την βέλτιστη, και απαιτούν λιγότερο χρόνο. Ο χρωματισμός των κορυφών ενός τυχαίου





γραφήματος είναι μη πολωννυμικό πρόβλημα. Για τυχαία γραφήματα με μικρό πλήθος κορυφών και με εξαντλητική αναζήτηση είναι εφικτό να βρεθεί ο χρωματικός αριθμός. Για τυχαία όμως γραφήματα με μεγάλο πλήθος κορυφών κάθε προσπάθεια για την εύρεση του ακριβούς χρωματικού αριθμού φαίνεται μη αποτελεσματική. Ως αποτέλεσμα για το πρόβλημα του χρωματισμού των κορυφών ενός τυχαίου γραφήματος αναπτύχθηκαν ορισμένες προσεγγιστικές μέθοδοι. Στις ενότητες που ακολουθούν γίνεται μια αναφορά για τις ευριστικές μεθόδους που εξετάστηκαν και παρουσιάζεται ψευδοκώδικας.

### 3.3 Σειριακός Αλγόριθμος Χρωματισμού

Μία βασική προσεγγιστική μέθοδος χρωματισμού που εξετάστηκε και υλοποιήθηκε στην παρούσα εργασία είναι η σειριακή μέθοδος. Η σειριακή μέθοδος λειτουργεί βασιζόμενη στην φιλοσοφία των άπληστων αλγορίθμων. Αυτό σημαίνει ότι η μέθοδος αποφασίζει στο επόμενο βήμα για το χρωματισμό μιας κορυφής με βάση το τοπικό βέλτιστο, χωρίς να λαμβάνει υπόψη της το ολικό βέλτιστο.

Η σειριακή μέθοδος λειτουργεί όπως περιγράφεται παρακάτω. Ως πρώτο βήμα όλες οι κορυφές του γραφήματος αριθμούνται από 1 ως  $n$ , καθώς και τα δυνατά διαθέσιμα χρώματα αριθμούνται από 1 ως  $n$ . Στην συνέχεια οι κορυφές του γραφήματος χρωματίζονται μία προς μία, ανάλογο με την σειρά που εξετάζονται. Η κορυφή που εξετάζεται κάθε φορά χρωματίζεται με το ελάχιστο χρώμα που είναι διαθέσιμο, δηλαδή με το χρώμα που δεν έχει χρησιμοποιηθεί για τον χρωματισμό των γειτονικών κορυφών της και έχει την ελάχιστη επιτρεπτή τιμή μεταξύ των αριθμών 1 ως  $n$ . Παρακάτω παρουσιάζεται ψευδοκώδικας για μεγαλύτερη κατανόηση της λειτουργίας του αλγορίθμου.

#### «Σειριακός» Αλγόριθμος Χρωματισμού

Είσοδος : Μια τυχαία αρίθμηση των κορυφών του γραφήματος  $G$

Έξοδος : Ένας χρωματισμός του γραφήματος.

1. Θέσε  $i := 1$ .
2. Θέσε  $c := 1$ .
3. Ταξινόμησε τα χρώματα των γειτονικών κορυφών της κορυφής  $u_i$  κατά μη φθίνουσα τάξη και ονόμασε  $L_i$  τη λίστα αυτή.
4. Αν το χρώμα  $c$  δεν ανήκει στην λίστα  $L_i$ , τότε χρωμάτισε την κορυφή  $u_i$  με το χρώμα  $c$ . Πήγαινε στο βήμα 6.
5. Θέσε  $c := c + 1$ , πήγαινε στο βήμα 4.
6. Αν  $i < n$  τότε θέσε  $i := i + 1$  και πήγαινε στο βήμα 2, αλλιώς ο αλγόριθμος τερματίζει.



Παρατηρούμε ότι ο παραπάνω αλγόριθμος δέχεται ως είσοδο μια τυχαία αρίθμηση των κορυφών ενός γραφήματος  $G$ . Επίσης γνωρίζουμε ότι οι  $n$  κορυφές ενός γραφήματος μπορούν να αριθμηθούν με  $n!$  τρόπους. Συμπεραίνουμε ότι αν τρέξουμε τον «Σειριακό» αλγόριθμο σε ένα γράφημα και εξετάζουμε κάθε φορά με διαφορετική σειρά τις κορυφές του γραφήματος τότε είναι πολύ πιθανό να προκύψουν διαφορετικοί χρωματισμοί για το ίδιο γράφημα. Διαπιστώνουμε ότι ο «Σειριακός» αλγόριθμος χρωματισμού δεν είναι αρκετά αποτελεσματικός για την προσέγγιση του χρωματικού αριθμού ενός τυχαίου γραφήματος.

### 3.4 Αλγόριθμος Χρωματισμού «Πρώτα η Μεγαλύτερη»

Τα αποτελέσματα χρωματισμού του σειριακού αλγορίθμου δεν είναι αρκετά ικανοποιητικά, για αυτό το λόγο έγιναν προσπάθειες για την βελτίωσή του. Μια απ τις ιδέες που εφαρμόστηκαν για την βελτίωση του σειριακού αλγορίθμου είναι ότι είναι πιο δύσκολο να χρωματιστούν οι κορυφές με μεγάλο βαθμό. Στην παρατήρηση αυτή στηρίζεται και ο αλγόριθμος «Πρώτα η Μεγαλύτερη».

Η ευριστική μέθοδος «Πρώτα η Μεγαλύτερη» διαφέρει από τον σειριακό αλγόριθμο χρωματισμού στον τρόπο επιλογής της κορυφής που εξετάζεται κάθε φορά. Ο «Σειριακός» αλγόριθμος χρωματισμού εξετάζει τις κορυφές του γραφήματος σύμφωνα με μια τυχαία αρίθμηση που τους έχει δοθεί αρχικά. Ο αλγόριθμος χρωματισμού «Πρώτα η Μεγαλύτερη» ταξινομεί τις κορυφές του γραφήματος κατά φθίνουσα τάξη, σε σχέση με το βαθμό τους. Επομένως σε αυτή την ευριστική μέθοδο η πρώτη κορυφή που εξετάζεται είναι αυτή με το μεγαλύτερο βαθμό, στην συνέχεια εξετάζεται η κορυφή με τον αμέσως μικρότερο βαθμό και ο αλγόριθμος συνεχίζεται λαμβάνοντας υπ' όψη την φθίνουσα διάταξη των κορυφών του γραφήματος. Εφόσον επιλέγεται κάθε φορά μια διαφορετική κορυφή για να χρωματιστεί με το κριτήριο που αναφέρθηκε πιο πάνω, στην συνέχεια γίνεται επιλογή ενός χρώματος για την κορυφή αυτή με βάση τα κριτήρια που χρησιμοποιεί ο «Σειριακός» αλγόριθμος χρωματισμού. Παρακάτω ακολουθεί ο ψευδοκώδικας για τον αλγόριθμο «Πρώτα η Μεγαλύτερη».

#### Αλγόριθμος Χρωματισμού «Πρώτα η Μεγαλύτερη»

Είσοδος : Ένα γράφημα  $G$ .

Έξοδος : Ένας χρωματισμός του γραφήματος.

1. Ταξινόμηση τις κορυφές του γραφήματος κατά φθίνουσα τάξη, ως προς το βαθμό τους.
2. Θέσε  $i := 1$ .



3. Θέσε  $c := 1$ .
4. Ταξιόνησε τα χρώματα των γειτονικών κορυφών της κορυφής  $u_i$  κατά μη φθίνουσα τάξη, έστω  $L_i$  η λίστα αυτή.
5. Αν το χρώμα  $c$  δεν ανήκει στην λίστα  $L_i$ , τότε χρωμάτισε την κορυφή  $u_i$  με το χρώμα  $c$ , πήγαινε στο βήμα 7.
6. Θέσε  $c := c + 1$ , πήγαινε στο βήμα 5.
7. Αν  $i < n$  τότε θέσε  $i := i + 1$  και πήγαινε στο βήμα 3, αλλιώς ο αλγόριθμος τερματίζει.

### 3.5 Αλγόριθμος Χρωματισμού «Τελευταία η Μικρότερη»

Στην ενότητα αυτή γίνεται λόγος για μια ακόμη προσεγγιστική μέθοδο χρωματισμού που μελετήθηκε και υλοποιήθηκε στην παρούσα εργασία. Η μέθοδος αυτή ονομάζεται «Τελευταία η Μικρότερη» και διαφέρει από την «Σειριακή» μέθοδο, όπως και ο αλγόριθμος «Πρώτα η Μεγαλύτερη», στο ότι υπάρχει κάποιο κριτήριο για την επιλογή της κάθε κορυφής για χρωματισμό και δεν γίνεται με τυχαίο τρόπο όπως συμβαίνει στον σειριακό αλγόριθμο.

Στη μέθοδο αυτή γίνεται ταξινόμηση των κορυφών του γραφήματος κατά φθίνουσα τάξη, ως προς των βαθμό τους. Στη συνέχεια η κορυφή με τον μικρότερο βαθμό διαγράφεται, καθώς και οι προσπίπτουσες ακμές τις, ώστε να χρωματιστεί τελευταία. Στη συνέχεια γίνεται ταξινόμηση του γραφήματος ξανά και πάλι αφαιρείται η κορυφή με το μικρότερο βαθμό για να χρωματιστεί προτελευταία. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται για όλες τις κορυφές του γραφήματος. Η ταξινόμηση που προκύπτει δεν είναι οπωσδήποτε ίδια με αυτή που προκύπτει από τον αλγόριθμο «Πρώτα η Μεγαλύτερη». Αφού γίνει η επιλογή της κορυφής με τα κριτήρια που αναφέρθηκαν παραπάνω, στην συνέχεια η κορυφή χρωματίζεται με το χρώμα που επιλέγεται με βάση τα κριτήρια του «Σειριακού» αλγορίθμου χρωματισμού. Παρακάτω παρουσιάζεται ο ψευδοκώδικας για την μέθοδο «Τελευταία η Μικρότερη».

#### Αλγόριθμος «Τελευταία η Μικρότερη»

Είσοδος: Ένα γράφημα  $G$ .

Έξοδος : Ένας χρωματισμός του γραφήματος.

1. Θέσε  $j := 1$
2. Ταξινόμηση τις κορυφές του γραφήματος κατά φθίνουσα τάξη, ως προς το βαθμό τους.
3. Αφαίρεσε την κορυφή με το μικρότερο βαθμό από το γράφημα και τοποθέτησέ την στην λίστα  $L_{degree}$ .
4. Θέσε  $j := j + 1$ .



5. Εάν  $j < n$ , πήγαινε στο βήμα 2, αλλιώς πήγαινε στο βήμα 6.
6. Θέσε  $i := 1$ .
7. Θέσε  $c := 1$ .
8. Ταξινόμησε τα χρώματα των γειτονικών κορυφών της κορυφής  $u_i$  κατά μη φθίνουσα τάξη και ονόμασε  $L_i$  τη λίστα αυτή.
9. Αν το χρώμα  $c$  δεν ανήκει στην λίστα  $L_i$ , τότε χρωμάτισε την κορυφή  $u_i$  με το χρώμα  $c$ , πήγαινε στο βήμα 11.
10. Θέσε  $c := c + 1$ , πήγαινε στο βήμα 9.
11. Αν  $i < n$  τότε θέσε  $i := i + 1$  και πήγαινε στο βήμα 7, αλλιώς ο αλγόριθμος τερματίζει.

Στη λίστα  $L_{degree}$  οι εισαγωγές των στοιχείων της γίνονται στην αρχή της λίστας, ώστε η κορυφή που αφαιρέθηκε πρώτη από το γράφημα να χρωματιστεί τελευταία.

### 3.6 Αλγόριθμος Χρωματισμού «Βαθμός Χρώματος»

Ο αλγόριθμος που παρουσιάζεται σε αυτή την ενότητα αποτελεί συνδυασμό του αλγορίθμου «Πρώτα η Μεγαλύτερη» και της μεθόδου «Τελευταία η Μικρότερη» και ονομάζεται αλγόριθμος «Βαθμός Χρώματος» (Brelaz, 1979). Ως βαθμός χρώματος μιας κορυφής  $u$  ορίζεται το πλήθος των διαφορετικών χρωμάτων που χρησιμοποιήθηκαν για τον χρωματισμό των γειτονικών κορυφών της κορυφής  $u$  του γραφήματος  $G$ .

Η διαφορά του αλγορίθμου αυτού από τους δύο προηγούμενους είναι ότι, στους δυο προηγούμενους, όταν δύο κορυφές έχουν τον ίδιο βαθμό, τότε επιλέγεται τυχαία κάποια από τις δύο για να εξεταστεί, ενώ στον αλγόριθμο «Βαθμός Χρώματος» η επιλογή μεταξύ των κορυφών στις οποίες υπάρχει ισοπαλία δεν γίνεται με τυχαίο τρόπο. Παρακάτω ακολουθεί ο ψευδοκώδικας για τον αλγόριθμο «Βαθμός Χρώματος» καθώς και ορισμένες παρατηρήσεις που αφορούν τον τρόπο λειτουργίας του.

#### Αλγόριθμος «Βαθμός Χρώματος» (Brelaz)

Είσοδος : Ένα γράφημα  $G$ .

Έξοδος : Ένας χρωματισμός του γραφήματος.

1. Ταξινόμησε τις κορυφές κατά φθίνουσα τάξη ως προς τους βαθμούς τους.
2. Δώσε το χρώμα 1 στην κορυφή με το μεγαλύτερο βαθμό.
3. Επίλεξε την κορυφή με το μεγαλύτερο βαθμό χρώματος. Αν υπάρχει ισοπαλία, τότε επέλεξε την κορυφή που δεν είναι χρωματισμένη και έχει το μεγαλύτερο βαθμό στο μη



χρωματισμένο γράφημα. Η κορυφή που επιλέγεται χρωματίζεται με το μικρότερο επιτρεπτό χρώμα.

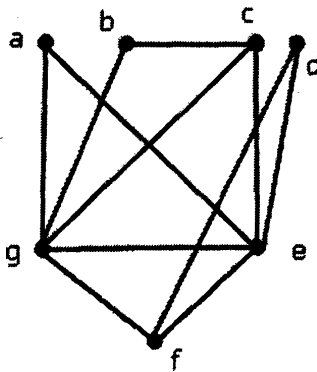
4. Αν δεν έχουν χρωματιστεί όλες οι κορυφές του γραφήματος, πηγαίνει στο βήμα 3.

Ύστερα από την παρουσίαση του αλγορίθμου μπορούμε να διακρίνουμε ότι το κριτήριο στην περίπτωση ισοπαλίας όταν πρέπει να επιλεγεί μια κορυφή για χρωματισμό είναι ο βαθμός της κορυφής. Δηλαδή μεταξύ δυο κορυφών με τον ίδιο βαθμό χρώματος επιλέγεται η κορυφή με το μεγαλύτερο βαθμό στο γράφημα. Επιπλέον παρατηρούμε ότι η σειρά με την οποία θα χρωματιστούν οι κορυφές δεν είναι γνωστή από την αρχή, αλλά αποφασίζεται κάθε φορά, όπως βλέπουμε παραπάνω, στο βήμα 3 του αλγορίθμου. Τα κριτήρια με βάση τα οποία επιλέγεται χρώμα για κάθε κορυφή του αλγορίθμου είναι όμοια με τα κριτήρια βάση τα οποία αποφασίζει η σειριακή μέθοδος.

### 3.7 Παραδείγματα Χρωματισμού

Σε αυτή την παράγραφο, ύστερα από την παρουσίαση των αλγορίθμων χρωματισμού που υλοποιήθηκαν, παρουσιάζονται ορισμένα παραδείγματα που δείχνουν τον τρόπο λειτουργίας τους. Πιο συγκεκριμένα χρησιμοποιείται ένα τυχαίο γράφημα ώστε να χρωματιστεί, που είναι το ίδιο και για τις τέσσερις μεθόδους.

Παράδειγμα



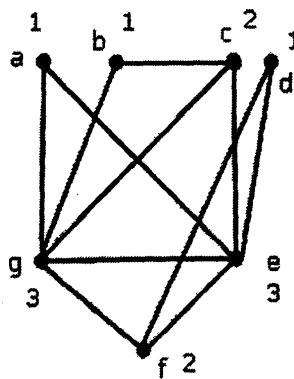
Σχήμα 3.1: Τυχαίο τριγωνικό γράφημα

Έστω το γράφημα του παραπάνω σχήματος. Εφαρμόζοντας τους τέσσερις αλγορίθμους χρωματισμού προκύπτουν οι παρακάτω χρωματισμοί:

## 1. «Σειριακός» Αλγόριθμος

Πίνακας 3.1: Αποτέλεσμα χρωματισμού ύστερα από την εφαρμογή του «Σειριακού» αλγορίθμου

Κορυφή	Σειρά	Χρώμα
a	1	1
b	2	1
c	3	2
d	4	1
e	5	3
f	6	2
g	7	4

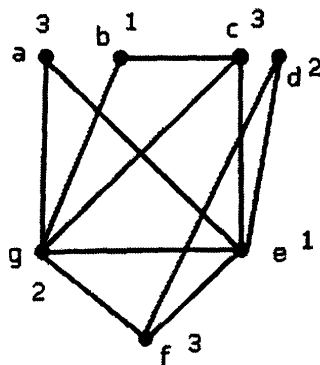


Σχήμα 3.2: Αποτέλεσμα χρωματισμού του «Σειριακού» Αλγορίθμου

## 2. Αλγόριθμος «Πρώτα η Μεγαλύτερη»

Πίνακας 3.2: Αποτέλεσμα Χρωματισμού ύστερα από την Εφαρμογή του Αλγορίθμου «Πρώτα η Μεγαλύτερη»

Κορυφή	Σειρά Χρω/σμου	Χρώμα	Βαθμός
a	5	3	2
b	6	1	2
c	3	3	3
d	7	2	2
e	1	1	5
f	4	3	3
g	2	2	5

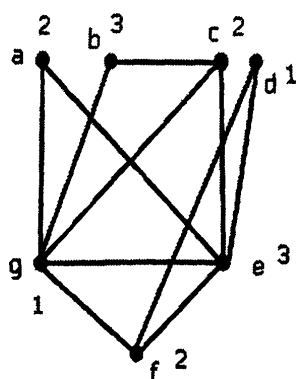


Σχήμα 3.3: Αποτέλεσμα χρωματισμού ύστερα από την εφαρμογή του αλγορίθμου «Πρώτα η Μεγαλύτερη»

### 3. Αλγόριθμος «Τελευταία η Μικρότερη»

Πίνακας 3.3: Αποτέλεσμα Χρωματισμού ύστερα από την Εφαρμογή του Αλγορίθμου «Τελευταία η Μικρότερη».

Κορυφή	Σειρά	Χρώμα	Βαθμός	Βαθμός Χρω/σμού Υπόλοιπων Κορυφών
a	7	2	2	b2, c3, d2, e4, f3, g4
b	6	3	2	c2, d2, e4, f3, g3
c	5	2	2	d2, e3, f3, g2
d	4	1	2	e2, f2, g2
e	3	3	2	f1, g1
f	2	2	1	g0
g	1	1	0	-----



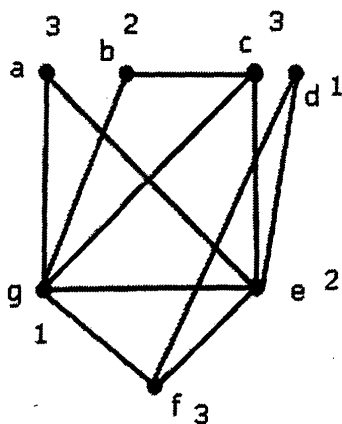
Σχήμα 3.4: Αποτέλεσμα χρωματισμού ύστερα από την εφαρμογή του αλγορίθμου «Τελευταία η Μικρότερη».



#### 4. Αλγόριθμος «Βαθμός Χρώματος» (Brelaz)

Πίνακας 3.4: Αποτέλεσμα Χρωματισμού Ύστερα από την Εφαρμογή του Αλγορίθμου «Βαθμός Χρώματος»

Κορυφή	Βαθμός	Σειρά Χρω/σμού	Χρώμα	Βαθμός Χρώματος	Βαθμός Χρώματος Άλλων Κορυφών
a	2	5	3	2	b2, d2
b	2	6	2	2	d2
c	3	3	3	2	a2, b2, d2, f2
d	2	7	1	2	-----
e	5	2	2	1	a2, b1, c2, d1, f2
f	3	4	3	2	a2, b2, d2
g	5	1	1	-----	a1, b1, c1, d0 ,e1, f1



Σχήμα 3.5: Αποτέλεσμα χρωματισμού ύστερα από την εφαρμογή του αλγορίθμου «Βαθμός Χρώματος»

### 3.8 Παρατηρήσεις

Στην ενότητα 3.7 χρησιμοποιήσαμε το ίδιο γράφημα για να το χρωματίσουμε με τις τέσσερις διαφορετικές μεθόδους χρωματισμού. Παρατηρώντας τους πίνακες των αποτελεσμάτων μπορούμε να εξαγάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα για τις μεθόδους χρωματισμού και να διακρίνουμε τις διαφορές μεταξύ τους ως προς τον τρόπο που λειτουργούν. Στον Πίνακα 3.1, η πρώτη στήλη περιέχει τις κορυφές του γραφήματος, η δεύτερη την σειρά χρωματισμού των κορυφών και η τρίτη τα χρώματα που αποδόθηκαν στις κορυφές σύμφωνα με τον σειριακό αλγόριθμο. Παρατηρούμε ότι η σειριακή μέθοδος δεν εξετάζει κανένα κριτήριο για την σειρά





με την οποία χρωματίζονται οι κορυφές, στην προκειμένη περίπτωση οι κορυφές χρωματίζονται σύμφωνα με την λεξικογραφική διάταξη των ετικετών τους. Επίσης διακρίνουμε ότι η σειριακή μέθοδος στο συγκεκριμένο παράδειγμα χρησιμοποιεί τέσσερα διαφορετικά χρώματα.

Στον Πίνακα 3.2 διακρίνουμε την πρώτη στήλη με τις ετικέτες των κορυφών, την δεύτερη στήλη με την σειρά χρωματισμού, την τρίτη στήλη με τα χρώματα που προσδίδει η μέθοδος «Πρώτα η Μεγαλύτερη» και την τέταρτη στήλη με τους βαθμούς των κορυφών. Κριτήριο για την σειρά χρωματισμού, όπως βλέπουμε και στα αποτελέσματα είναι ο βαθμός της κορυφής, μάλιστα προηγούνται οι κορυφές με τον μεγαλύτερο βαθμό. Όπως βλέπουμε στον Πίνακα 3.2, πρώτα χρωματίζεται η κορυφή  $e$  με βαθμό 5, μετά η  $g$  που έχει και αυτή βαθμό 5, (μεταξύ των βαθμών των κορυφών  $e$  και  $g$  υπάρχει ισοπαλία, αλλά σύμφωνα με την μέθοδο «Πρώτα η Μεγαλύτερη», στις ισοπαλίες επιλέγεται μια κορυφή στην τύχη μεταξύ αυτών που είναι ισόπαλες), στην συνέχεια η  $c$  κ.ο.κ. μέχρι να χρωματιστούν όλες. Παρατηρούμε ότι η μέθοδος «Πρώτα η Μεγαλύτερη» χρησιμοποιεί 3 χρώματα για το ίδιο γράφημα του σχήματος, ένα λιγότερο χρώμα από την σειριακή μέθοδο.

Στον Πίνακα 3.3 διακρίνουμε την πρώτη στήλη με τις ετικέτες των κορυφών, την δεύτερη στήλη με την σειρά χρωματισμού (αντίστροφη της σειράς αφαίρεσης των κορυφών), την τρίτη στήλη με τα χρώματα που προσδίδει η μέθοδος «Τελευταία η Μικρότερη», την τέταρτη στήλη με τον βαθμό της κάθε κορυφής όταν αφαιρείται από το γράφημα και την πέμπτη στήλη με τους βαθμούς των κορυφών στο γράφημα εφόσον αφαιρεθεί η κορυφή της αντίστοιχης γραμμής. Παρατηρούμε ότι η κορυφή  $a$  αφαιρείται πρώτη από το γράφημα ενώ χρωματίζεται τελευταία, η  $b$  αφαιρείται δεύτερη από το γράφημα ενώ χρωματίζεται προτελευταία κ.ο.κ. Όπως αναφέραμε κατά την παρουσίαση του αλγορίθμου η σειρά αφαίρεσης των κορυφών καθορίζει την σειρά χρωματισμού και μάλιστα η σειρά χρωματισμού είναι αντίστροφη της σειράς αφαίρεσης.

Στον τελευταίο πίνακα, τον Πίνακα 3.4, βλέπουμε τα αντίστοιχα αποτελέσματα που μας έδωσε η μέθοδος «Βαθμός Χρώματος» για το ίδιο γράφημα που χρωματίστηκε και με τις προηγούμενες μεθόδους. Στην τρίτη στήλη του Πίνακα 3.4 βλέπουμε την σειρά χρωματισμού των κορυφών, στην τέταρτη στήλη τα χρώματα, στην πέμπτη στήλη διακρίνουμε τον βαθμό χρώματος των κορυφών τη στιγμή που χρωματίζονται ενώ στην έκτη στήλη των βαθμό χρώματος των υπολοίπων αχρωμάτιστων κορυφών, μετά την επιλογή και των χρωματισμό της κορυφής που επιλέγεται. Παρατηρούμε ότι πρώτα χρωματίζεται η  $g$  γιατί έχει τον μεγαλύτερο βαθμό (θα μπορούσε να επιλεγεί και η  $e$  στην θέση της  $g$ ) ενώ σύμφωνα με την



τελευταία στήλη και την γραμμή που αντιστοιχεί στην  $g$ , ο «Βαθμός Χρώματος» των κορυφών που συνδέονται μαζί της αυξάνεται κατά ένα.. Στην συνέχεια, μεταξύ των κορυφών που έχουν βαθμό χρώματος ένα (έχουμε ισοπαλία μεταξύ των κορυφών με τον μεγαλύτερο βαθμό χρώματος) επιλέγεται η κορυφή που έχει τον μεγαλύτερο βαθμό και είναι η  $e$ , επίσης ενημερώνονται στην τελευταία στήλη και την γραμμή που αντιστοιχεί στην κορυφή  $e$  οι βαθμοί χρώματος των υπολοίπων αχρωμάτιστων κορυφών. Η παραπάνω διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να χρωματιστούν όλες οι κορυφές του γραφήματος. Τελικά και ο «Βαθμός Χρώματος» χρησιμοποιεί τρία διαφορετικά χρώματα για τον χρωματισμό του γραφήματος.

Αν συγκρίνουμε τα αποτελέσματα που μας έδωσαν οι τέσσερις αυτές μέθοδοι παρατηρούμε ότι ο «Σειριακός» αλγόριθμος χρησιμοποίησε ένα παραπάνω χρώμα σε σχέση με τις υπόλοιπες μεθόδους. Μάλιστα και οι τρεις αυτές μέθοδοι έδωσαν τον βέλτιστο χρωματισμό για το γράφημα. Ένας λόγος στον οποίο οφείλεται η μεγαλύτερη απόδοση των τριών τελευταίων αλγορίθμων είναι ότι οι μέθοδοι αυτοί φροντίζουν ώστε να χρωματιστούν πρώτα οι κορυφές με τον μεγαλύτερο βαθμό και όπως επισημίναμε και στην αρχή του κεφαλαίου ο χρωματισμός κορυφών με μεγαλύτερο βαθμό είναι πιο δύσκολος. Η μέθοδος «Πρώτα η Μεγαλύτερη» και η μέθοδος «Τελευταία η Μικρότερη» χρησιμοποιούν ως κριτήριο για την επιλογή κορυφής τον βαθμό της. Αν και φαίνεται ότι είναι ίδιες βλέπουμε ότι η ταξινόμηση των κορυφών που δίνουν δεν είναι απαραίτητα ίδια μεταξύ τους. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα βλέπουμε ότι οι μέθοδοι αυτές χρωματίζουν τις κορυφές με διαφορετική σειρά. Περισσότερες λεπτομέρειες και αποτελέσματα χρωματισμού θα ακολουθήσουν σε επόμενο κεφάλαιο.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΥ II

---

#### 4.1 Χρωματισμός Colinear

#### 4.2 Χρωματισμός Pair-Complete

#### 4.3 Αρμονικός Χρωματισμός

---

#### 4.1 Χρωματισμός Colinear

Στην ενότητα αυτή περιγράφεται ο *colinear* χρωματισμός ενός γραφήματος  $G$ . Ο χρωματισμός αυτός είναι *improper* και εφαρμόζεται σε οποιοδήποτε γράφημα. Μια σημαντική ιδιότητα του χρωματισμού είναι ότι παρέχει ένα άνω φράγμα για τον χρωματικό αριθμό  $\chi(G)$  όταν εφαρμόζεται στο συμπλήρωμα  $\bar{G}$ , του γραφήματος  $G$ . Στις ενότητες που ακολουθούν

##### 4.1.1 Ορισμός Colinear Χρωματισμού

Ένας *colinear* χρωματισμός [34] ενός γραφήματος  $G$  είναι ένας χρωματισμός των κόμβων του τέτοιος ώστε δυο κόμβοι χρωματίζονται με διαφορετικό χρώμα, εάν τα αντίστοιχα σύνολα κλικών τους δεν εμπεριέχονται το ένα στο άλλο. Το σύνολο κλικών ενός κόμβου  $u$  είναι το σύνολο όλων των *maximal* κλικών του  $G$  που περιέχουν τον κόμβο  $u$ . Ο *colinear* χρωματικός αριθμός  $\lambda(G)$  του γραφήματος  $G$  είναι ο ελάχιστος ακέραιος  $k$  για τον οποίο το  $G$  χρωματίζεται με  $k$  χρώματα ύστερα από την εφαρμογή του *colinear* χρωματισμού. Ακολουθούν οι ορισμοί όσων περιγράφηκαν σε αυτή την παράγραφο.

**Ορισμός 4.1** Έστω ένα γράφημα  $G$  και έστω  $u \in V(G)$ . Το σύνολο κλικών του κόμβου  $u$  είναι το σύνολο όλων των *maximal* κλικών του γραφήματος  $G$  που περιέχουν τον κόμβο  $u$  και συμβολίζεται με  $C_G(u)$ .



**Ορισμός 4.2** Έστω ένα γράφημα  $G$  και ένας ακέραιος  $k$ . Ένας χάρτης απεικόνισης (*surjective map*)  $\kappa : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  ονομάζεται *colinear* χρωματισμός του  $G$  εάν το  $\{C_G(u) : \kappa(u) = i\}$  είναι γραμμικά ταξινομημένο από τη σχέση *inclusion* για όλα τα  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , όπου το  $C_G(u)$  είναι το σύνολο κλικών του  $u$ , ή ισοδύναμα, για δυο κόμβους  $u, v \in V(G)$ , εάν  $\kappa(u) = \kappa(v)$  τότε είτε  $C_G(u) \subseteq C_G(v)$  ή  $C_G(v) \subseteq C_G(u)$ . Ο ελάχιστος ακέραιος  $k$  για τον οποίο το γράφημα  $G$  είναι  $k$ -*colinear* χρωματίσιμο ονομάζεται *colinear* χρωματικός αριθμός του  $G$  και συμβολίζεται με το  $\lambda(G)$ .

Στη συνέχεια παρουσιάζεται ο *colinear* χρωματισμός σε γραφήματα και η σχέση του με τον *proper* χρωματισμό. Συγκεκριμένα έχει αποδειχθεί [34] ότι για κάθε γράφημα  $G$  ο *colinear* χρωματικός αριθμός του  $\bar{G}$  είναι ένα άνω φράγμα για το χρωματικό αριθμό  $\chi(G)$ .

**Πρόταση 4.1** Έστω ένα γράφημα  $G$ . Εάν το  $\kappa : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  είναι ένας  $k$ -*colinear* χρωματισμός του  $\bar{G}$ , τότε το  $\kappa$  είναι ένας χρωματισμός του γραφήματος  $G$ .

**Πρόταση 4.2** Για κάθε γράφημα  $G$ ,  $\lambda(\bar{G}) \geq \chi(G)$ .

**Πρόταση 4.3** Έστω ένα γράφημα  $G$ . Ένας χρωματισμός  $\kappa : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  του  $G$  είναι ένας  $k$ -*colinear* χρωματισμός του  $G$  εάν και μόνο εάν  $N_G[u] \subseteq N_G[v]$  ή  $N_G[v] \subseteq N_G[u]$  για κάθε  $u, v \in V(G)$  με  $\kappa(u) = \kappa(v)$ .

### 4.1.2 Αλγόριθμος Colinear Χρωματισμού

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζεται ο αλγόριθμος [34] ο οποίος υλοποιήθηκε με σκοπό την μελέτη των πειραματικών αποτελεσμάτων. Ο αλγόριθμος είναι πολυωνυμικός και μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε γράφημα  $G$ . Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί ένα κατευθυνόμενο άκυκλο γράφημα (DAG)  $D_G$  ενός γραφήματος  $G$ .

Για την κατασκευή του DAG  $D_G$  ενός γραφήματος  $G$  αρχικά, για κάθε κόμβο  $u$  του γραφήματος  $G$  υπολογίζεται το  $N[u]$  και στη συνέχεια κατασκευάζεται το γράφημα  $D$  για το οποίο ισχύει:  $V(D) = V(G)$  και  $E(D) = \{\overline{xy} : x, y \in V(D) \text{ και } N_G[x] \subseteq N_G[y]\}$ . Εάν  $N_G[x] = N_G[y]$  τότε στο γράφημα  $D$  προστίθεται μια απ της δυο ακμές, έτσι ώστε να μην έχει κύκλους. Για να επιτευχθεί το παραπάνω, το σύνολο κόμβων  $V(G)$  διαμερίζεται στα σύνολα  $S_1, S_2, \dots, S_l$ , τέτοια ώστε για κάθε  $i \in \{1, 2, \dots, l\}$  οι κόμβοι  $x, y$  ανήκουν σε ένα σύνολο  $S_i$  εάν και μόνο εάν  $N_G[x] = N_G[y]$ . Για τους κόμβους που ανήκουν στο ίδιο σύνολο  $S_i$



προστίθεται η ακμή  $\overline{xy}$  εάν και μόνο εάν  $x < y$ . Για τους κόμβους που ανήκουν σε διαφορετικά σύνολα, προστίθεται η ακμή  $\overline{xy}$  εάν και μόνο εάν  $N_G[x] \subset N_G[y]$ .

#### Αλγόριθμος «Colinear\_Coloring»

1. Υπολόγισε το σύνολο  $N[u]$  για κάθε  $u$  του γραφήματος  $G$ , βρες τις *inclusion* σχέσεις των συνόλων αυτών και κατασκεύασε το DAG  $D_G$  του γραφήματος  $G$ .
2. Βρες το ελάχιστο *path cover*  $P(D_G)$  και το μέγεθος του  $p(D_G)$  του γραφήματος  $D_G$ .
3. Θέσε ένα χρώμα  $\kappa(u)$  για κάθε κόμβο  $u \in V(D_G)$ , τέτοιο ώστε οι κόμβοι που ανήκουν στο ίδιο μονοπάτι  $P(D_G)$  έχουν το ίδιο χρώμα και κόμβοι που ανήκουν σε διαφορετικά μονοπάτια να έχουν διαφορετικό χρώμα.
4. Επίστρεψε την τιμή  $\kappa(u)$  για κάθε κόμβο  $u \in V(D_G)$ , και το μέγεθος  $p(D_G)$  του ελάχιστου *path cover* του  $D_G$ .

Το  $\kappa$  είναι ένας *colinear* χρωματισμός και το  $p(D_G)$  ισούται με τον *colinear* χρωματικό αριθμό  $\lambda(G)$  του γραφήματος  $G$ .

Το δεύτερο βήμα του αλγορίθμου απαιτεί την εύρεση ενός *minimum path cover* σε DAG, έστω  $D_G$ . Για την υλοποίηση του αλγορίθμου στο βήμα αυτό χρησιμοποιείται μια συνάρτηση που υπολογίζει ένα *maximal matching* σε ένα διμερές γράφημα  $B$ , το οποίο κατασκευάζεται από το γράφημα  $D_G$ . Παρακάτω ακολουθεί η λεπτομερής περιγραφή της κατασκευής του διμερούς γραφήματος από το DAG και ο υπολογισμός ενός *minimum path cover* σε ένα DAG μέσω της εύρεσης ενός *maximal matching* στο διμερές γράφημα που κατασκευάστηκε.

**Εύρεση *minimum path cover* σε DAG** Έστω ένα DAG  $D_G$  με σύνολο κόμβων  $V(D) = \{1, 2, \dots, n\}$  και ακμές  $E(D)$ . Κατασκευάζουμε ένα διμερές γράφημα  $B$  με  $V(B) = V(D) \cup V'(D)$  όπου  $V'(D) = \{1', 2', \dots, n'\}$  και  $\{u, v'\} \in E(B)$  αν και μόνο εάν  $(u, v) \in E(D)$ . Αφού κατασκευάσαμε το διμερές γράφημα  $B$  βρίσκουμε ένα *maximal matching*  $M \subseteq E(B)$  με  $|M| = m$  ακμές. Για την εύρεση του *path cover*  $P(D)$  ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία.



1.  $P \leftarrow \emptyset$
2. Επανάλαβε μέχρι το  $P$  να καλύπτει όλους τους κόμβους
  - a. Επίλεξε έναν κόμβο  $u \in V(D)$  τ.ω.  $u \notin P$  και  $u' \notin M$
  - b.  $p \leftarrow u$
  - c. Εφόσον υπάρχουν ζεύγη  $(u, w')$ , θέσε  $p : p \leftarrow w$  και  $u \leftarrow w$
  - d.  $P \leftarrow P \cup \{p\}$
3. Επίστρεψε το  $P$

Σύμφωνα με την Πρόταση 4.2 για κάθε γράφημα  $G$ ,  $\lambda(\bar{G}) \geq \chi(G)$ . Δίνονται οι παρακάτω ορισμοί για την ιδιότητα  $\chi$ -colinear και  $\alpha$ -colinear ενός γραφήματος  $G$ .

Ένα γράφημα  $G$  έχει την ιδιότητα  $\chi$ -colinear εάν για κάθε επαγόμενο υπογράφημα  $G_A$  ισχύει:  
 $\chi(G_A) = \lambda(\bar{G}_A)$  για  $A \subseteq V(G)$ .

Ένα γράφημα  $G$  έχει την ιδιότητα  $\alpha$ -colinear εάν για κάθε επαγόμενο υπογράφημα  $G_A$  ισχύει:  
 $\alpha(G_A) = \lambda(\bar{G}_A)$  για  $A \subseteq V(G)$ .

**Πρόταση 4.4** Κάθε *threshold* γράφημα έχει την  $\chi$ -colinear ιδιότητα.

**Πρόταση 4.5** Κάθε γράφημα που έχει την  $\chi$ -colinear ιδιότητα είναι *co-chordal*.

## 4.2 Χρωματισμός Pair-Complete

Στην ενότητα αυτή περιγράφεται ο *pair complete* χρωματισμός, που αποτελεί παραλλαγή της απλής μορφής του χρωματισμού, θέτοντας επιπλέον κανόνες στον τρόπο με τον οποίο χρωματίζονται οι κόμβοι του γραφήματος.

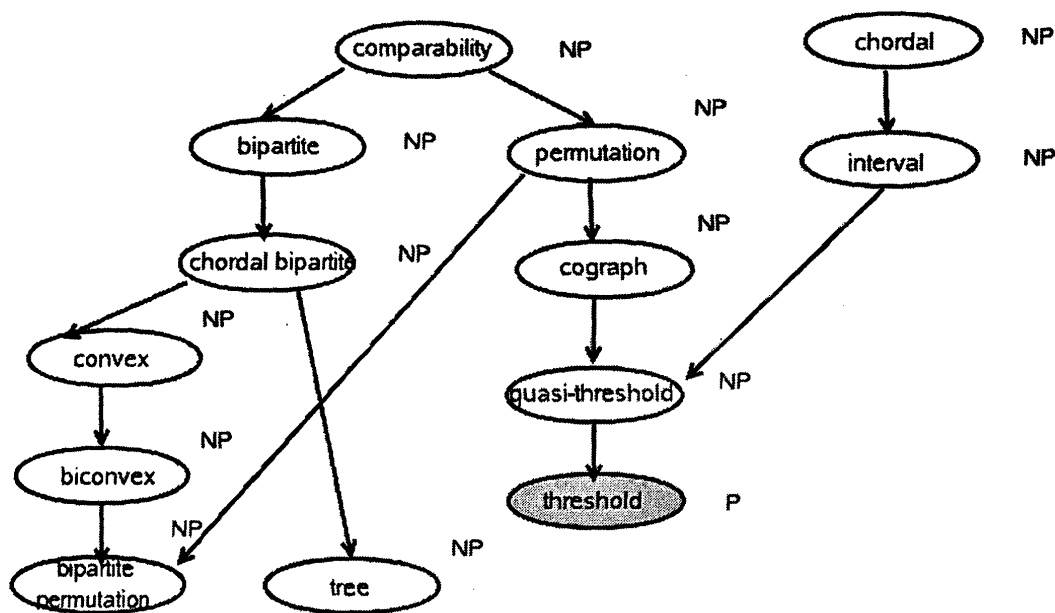
### 4.2.1 Ορισμός Pair-Complete Χρωματισμού

Ο *pair-complete* χρωματισμός ενός γραφήματος  $G$  είναι ένας *proper* χρωματισμός κόμβων τέτοιος ώστε κάθε ζεύγος χρωμάτων εμφανίζεται μαζί σε τουλάχιστον μια ακμή. Ο αχρωματικός αριθμός  $\psi(G)$  είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος  $k$  για τον οποίο το γράφημα  $G$  χρωματίζεται ύστερα από την εφαρμογή του *pair-complete* χρωματισμού με  $k$  χρώματα.

Την έννοια του αχρωματικού αριθμού εισήγαγαν οι *Harary* κ άλλοι [17][30][31][33]. Ο *pair-complete* χρωματισμός έχει αποδειχθεί ότι είναι *NP-hard* σε ένα τυχαίο γράφημα *Yannakakis* και *Gavril* [57], ενώ η πολυπλοκότητα του προβλήματος έχει μελετηθεί σε διάφορες κλάσεις



τέλειων γραφημάτων. Στο Σχήμα 4.1 φαίνεται η πολυπλοκότητα του προβλήματος στις κλάσεις τέλειων γραφημάτων που έχουν μελετηθεί έως τώρα.



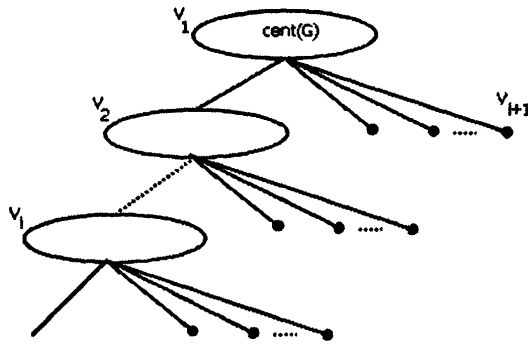
Σχήμα 4.1 Η πολυπλοκότητα του προβλήματος *Pair Complete* σε τέλεια γραφήματα

Στο Σχήμα 4.1 βλέπουμε ότι το πρόβλημα του *pair-complete* χρωματισμού είναι πολυωνομικό για την κλάση των *threshold* γραφημάτων [3]. Στην επόμενη παράγραφο παρουσιάζεται ο αλγόριθμος που προτάθηκε από τους [3] και υλοποιήθηκε στην παρούσα εργασία.

#### 4.2.2 Αλγόριθμος *Pair-Complete*

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζεται το πρόβλημα *pair-complete* χρωματισμού σε *threshold* γραφήματα και ένας *linear-time* αλγόριθμος χρωματισμού για την κλάση αυτή. Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 2 ένα *threshold* γραφήματα  $G$  έχει μια δενδρική αναπαράσταση που ονομάζεται *cent-tree* και συμβολίζεται με  $T_C(G)$ . Στο Σχήμα 4.2 φαίνεται μια τυπική δενδρική αναπαράσταση ενός *threshold* γραφήματος.





Σχήμα 4.2 Η τυπική δομή του Cent-tree  $T_C(G)$  ενός Threshold γραφήματος  $G$

Το πρόβλημα του *pair-complete* χρωματισμού λύνεται σε γραμμικό χρόνο σε *threshold* γραφήματα χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της δενδρικής τους δομής. Οι κόμβοι των συνόλων  $V_i$  που ανήκουν στο αριστερό μονοπάτι του δέντρου  $T_C(G)$  αποτελούν κλίκα στο γράφημα  $G$ , άρα σε κάθε κόμβο  $u \in V_i$  του αριστερού μονοπατιού ανατίθεται ένα διαφορετικό χρώμα. Αν το πλήθος των κόμβων στο μονοπάτι αυτό είναι  $n'$  αποδεικνύεται ότι  $\psi(G) = n'$ . Επειδή οι  $n'$  κόμβοι του αριστερού μονοπατιού αποτελούν κλίκα ισχύει  $\omega(G) = n'$  άρα και  $\psi(G) = \omega(G)$ . Λόγω των ιδιοτήτων του δέντρου  $T_C(G)$  για το *threshold* γράφημα  $G$  ισχύει  $\chi(G) = \omega(G)$ .

**Αλγόριθμος «Pair-Complete-Coloring»**

Είσοδος: Ένα *threshold* γράφημα  $G$ .

Έξοδος: Ένας *pair-complete* χρωματισμός του  $G$  με  $\psi(G) = \omega(G)$ .

1. Κατασκεύασε το *cent-tree* του  $G$ ,  $T_C(G)$ .
2. Χρωμάτισε τους κόμβους του αριστερού μονοπατιού του  $T_C(G)$  με διαφορετικά μεταξύ τους χρώματα από σύνολο  $C = \{1, 2, \dots, \psi(G)\}$ .
3. Χρωμάτισε κάθε φύλλο του  $T_C(G)$  με χρώμα που ήδη έχει ανατεθεί στους κόμβους που ανήκουν στον αδερφικό κόμβο-κλίκα
4. Χρωμάτισε απομονωμένους κόμβους, εάν υπάρχουν, με χρώμα του συνόλου  $C$ .

**Θεώρημα 4.1** Έστω ένα *threshold* γράφημα  $G$ . Το πρόβλημα του *pair-complete* χρωματισμού επιλύεται σε γραμμικό χρόνο για το γράφημα  $G$  και με αχρωματικό αριθμό  $\psi(G) = \omega(G)$ .





### 4.3 Αρμονικός Χρωματισμός

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται το πρόβλημα του Αρμονικού χρωματισμού γραφημάτων και η πολυπλοκότητα του προβλήματος σε τέλεια γραφήματα. Επίσης παρουσιάζεται ένας πολυωνυμικός αλγόριθμος για τον αρμονικό χρωματισμό *split strongly chordal* γραφημάτων.

#### 4.3.1 Ορισμός Αρμονικού Χρωματισμού

Ο αρμονικός χρωματισμός ενός γραφήματος  $G$  είναι ένας *proper* χρωματισμός κόμβων τέτοιος ώστε κάθε ζεύγος χρωμάτων εμφανίζεται μαζί το πολύ σε μια ακμή. Ο αρμονικός αριθμός  $h(G)$  είναι ο ελάχιστος ακέραιος  $k$  για τον οποίο το γράφημα  $G$  χρωματίζεται ύστερα από την εφαρμογή του αρμονικού χρωματισμού με  $k$  χρώματα. Οι Frank, Hopcroft and Krishnamoorthy έδειξαν ότι το πρόβλημα του αρμονικού χρωματισμού είναι *NP-hard complete* σε γενικά γραφήματα, ενώ η πολυπλοκότητα του προβλήματος έχει μελετηθεί σε διάφορες κλάσεις τέλειων γραφημάτων.

Έχει αποδειχθεί [5] ότι το πρόβλημα παραμένει *NP-complete* σε γραφήματα που είναι ταυτοχρόνως *interval* και *cographs*. Ο Bodlaender έχει δείξει ότι το πρόβλημα του αρμονικού χρωματισμού παραμένει *NP-complete* σε μη συνδεδεμένα *interval* γραφήματα και σε μη συνδεδεμένα *cographs* και η [34] σε συνδεδεμένα *interval* γραφήματα. Το πρόβλημα του αρμονικού χρωματισμού έχει αποδειχθεί *NP-complete* και για τις κλάσεις των *split* γραφημάτων [1], των δέντρων, των μη συνδεδεμένων *bipartite permutation* γραφημάτων [15][16], των συνδεδεμένων *bipartite permutation* γραφημάτων και των μη συνδεδεμένων *quasi-threshold* και *threshold* γραφημάτων.

Ωστόσο το πρόβλημα του αρμονικού χρωματισμού σε συνδεδεμένα *cographs* είναι τετριμμένο αφού ο κάθε κόμβος του γραφήματος πρέπει να χρωματιστεί με διαφορετικό χρώμα, διότι κάθε κόμβος απέχει το πολύ από κάθε άλλο κόμβο στο γράφημα απόσταση δύο. Άρα το πρόβλημα του αρμονικού χρωματισμού επιλύεται σε πολυωνυμικό χρόνο για τα συνδεδεμένα *quasi-threshold* και *threshold* γραφήματα.

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζεται ένας πολυωνυμικός αλγόριθμος [34] για τον αρμονικό χρωματισμό σε *split strongly chordal* γραφήματα που υλοποιήθηκε στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας.



### 4.3.2 Αλγόριθμος Αρμονικού Χρωματισμού σε Split Strongly Chordal Γραφήματα

Τα *split strongly chordal* γραφήματα είναι υποκλάση των τριγωνικών γραφημάτων. Ένα γράφημα  $G$  είναι *strongly chordal* εάν και μόνο εάν έχει ένα ισχυρό σχήμα απαλοιφής. Στη συγκεκριμένη παράγραφο παρουσιάζεται ο αλγόριθμος που υλοποιήθηκε για τον αρμονικό χρωματισμό των *split strongly chordal* γραφημάτων.

Ο πολυωνυμικός αλγόριθμος που προτάθηκε [34] απαιτεί την κατασκευή ενός γραφήματος  $H_G$  από το *split* γράφημα  $G$  που θα χρωματιστεί και ονομάζεται *neighborhood intersection* γράφημα του γραφήματος  $G$ .

Κατασκευή του γραφήματος  $H_G$  από *split* γράφημα  $G$ . Έστω ένα *split* γράφημα  $G$  με  $E(G)$  σύνολο ακμών και  $V(G) = K + I$  μια διαμέριση του συνόλου των κόμβων του όπου το σύνολο  $I$  αποτελεί ανεξάρτητο σύνολο και το σύνολο  $K$  είναι κλίκα στο γράφημα  $G$ . Για κάθε κόμβο  $u \in I$  υπολογίζουμε το σύνολο  $N(u)$  και κατασκευάζουμε το γράφημα  $H_G$  με σύνολο κόμβων  $V(H_G) = I$  και σύνολο ακμών  $E(H_G) = \{uv : u, v \in I \text{ και } N(u) \cap N(v) \neq \emptyset\}$ .

**Πρόταση 4.5** Το γράφημα  $H_G$  ενός *split strongly chordal* γραφήματος είναι τριγωνικό γράφημα.

#### Αλγόριθμος «Αρμονικού Χρωματισμού» σε Split Strongly Chordal

Είσοδος: Ένας *split strongly chordal*  $G$  γράφημα και τα σύνολα  $V(G) = K + I$ .

Έξοδος: Ένας ακέραιος ίσος με το πλήθος των χρωμάτων που χρησιμοποιήθηκαν για τον αρμονικό χρωματισμό του γραφήματος  $G$  και το αντίστοιχο χρώμα για κάθε κόμβο  $u \in V(G)$ .

1. Κατασκεύασε το  $H_G$  γράφημα του γραφήματος  $G$ .
2. Υπολόγισε τον χρωματικό αριθμό του τριγωνικού γραφήματος  $H_G$  και έναν ελάχιστο *proper* χρωματισμό  $\kappa$  του  $H_G$ .
3. Χρωμάτισε κάθε κόμβο  $u \in I$ , του γραφήματος  $G$  με  $\kappa'(u) = \kappa(u)$  και για κάθε  $v \in K$ ,  $\kappa'(v)$  να ανήκει στο σύνολο  $\{\chi(H_G) + 1, \chi(H_G) + 2, \dots, \chi(H_G) + |K|\}$



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

### ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

---

- 5.1 Εισαγωγή
  - 5.2 Chordal Γραφήματα
  - 5.3 Quasi Threshold Γραφήματα
  - 5.4 Threshold Γραφήματα
  - 5.5 Interval Γραφήματα
  - 5.6 Cographs
  - 5.7 Split Γραφήματα
  - 5.8 Undirected Path Γραφήματα
  - 5.9 Δέντρα
  - 5.10 Τυχαία Γραφήματα
- 

#### 5.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται τα πειραματικά αποτελέσματα ύστερα από την εφαρμογή των αλγορίθμων χρωματισμού σε τέλεια γραφήματα. Οι πειραματικές μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν σε γραφήματα με πλήθος κόμβων 500 και με μεταβαλλόμενη τιμή πυκνότητας μεταξύ των τιμών 0,2, 0,5 και 0,7. Η τιμή της πυκνότητας για ένα γράφημα δίνεται από την σχέση  $D = 2|E|/|V|(|V|-1)$ . Η μέγιστη τιμή πυκνότητας ισούται με 1 όταν  $|E| = \frac{1}{2}|V|(|V|-1)$  για πλήρη γραφήματα, ενώ η μικρότερη τιμή πυκνότητας ισούται με 0, για  $|E| = 0$  [11]. Πειραματικά αποτελέσματα παρουσιάζονται και για τυχαία γραφήματα με 500 κόμβους στην τελευταία ενότητα. Οι μετρήσεις αυτές πραγματοποιήθηκαν με σκοπό την μελέτη της συμπεριφοράς του *colinear* χρωματικού αριθμού  $\lambda(\bar{G})$ , ως άνω φράγμα στο χρωματικό αριθμό  $\chi(G)$ .



## 5.2 Chordal Γραφήματα

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα χρωματισμού σε *chordal* γραφήματα. Οι μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν σε γραφήματα με διαφορετική πυκνότητα ακμών για την καλύτερη μελέτη της συμπεριφοράς των αλγορίθμων χρωματισμού. Η πυκνότητα ακμών στα *chordal* γραφήματα που κατασκευάστηκαν εξαρτάται από την πυκνότητα του τυχαίου γραφήματος που παράγεται και στο οποίο βασίζεται η κατασκευή τους. Για τα γραφήματα που κατασκευάζονται υπολογίζεται το μέγεθος της μέγιστης κλίκας, ώστε να εκτιμηθεί η απόδοση των αλγορίθμων χρωματισμού σε σχέση με το πλήθος χρωμάτων που χρησιμοποιούν. Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάστηκε ο αλγόριθμος *Maximum Cardinality Search* που υλοποιήθηκε και υπολογίζει ένα τέλειο σχήμα απαλοιφής  $\sigma$  για το τριγωνικό γράφημα που δέχεται ως είσοδο. Στην συνέχεια διασχίζοντας το  $\sigma$  εντοπίζουμε όλες τις *maximal* κλίκες του γραφήματος και κρατάμε ως μέγιστη την *maximal* με το μεγαλύτερο μέγεθος. Στον Πίνακα 5.1 που ακολουθεί παρουσιάζονται τα αποτελέσματα χρωματισμού σε *chordal* γραφήματα.

Πίνακας 5.1: Πειραματικά Αποτελέσματα σε Τριγωνικά Γραφήματα 500 κόμβων

Πυκνότητα	$\omega(G)$	F.F.	L.F.	S.F.	Brelaz	Colinear	$\lambda(\bar{G})/\omega(G)$
3%	36	40	37	36	36	300	8,33
20%	136	140	137	136	136	373	2,74
40%	202	207	204	202	202	415	2,05
50%	257	262	259	259	259	431	1,67
60%	285	290	286	285	285	447	1,56

Οι μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν *chordal* γραφήματα με 500 κόμβους. Οι τέσσερις προσεγγιστικές μέθοδοι χρωματισμού εφαρμόζονται στο *chordal* γράφημα  $G$  που κατασκευάζεται κάθε φορά ενώ ο *colinear* χρωματισμός εφαρμόζεται στο συμπλήρωμα  $\bar{G}$ , του  $G$ .

Στην αντίστοιχη στήλη για τον *colinear* χρωματισμό του συμπληρώματος του γραφήματος  $G$  παρατηρούμε ότι  $\lambda(\bar{G}) \geq \chi(G)$ . Όταν η πυκνότητα του γραφήματος αυξάνεται τότε αυξάνεται και ο *colinear* χρωματικός αριθμός του γραφήματος  $\bar{G}$ . Παρατηρούμε ότι ο λόγος  $\lambda(\bar{G})/\omega(G)$  μειώνεται με την αύξηση της πυκνότητας του γραφήματος  $G$ .



### 5.3 Quasi Threshold Γραφήματα

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα χρωματισμού σε *quasi threshold* γραφήματα. Οι μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν σε γραφήματα με διαφορετική πυκνότητα ακμών για την καλύτερη μελέτη της συμπεριφοράς των αλγορίθμων χρωματισμού. Η πυκνότητα ακμών στα *quasi threshold* γραφήματα εξαρτάται από το πλήθος των κόμβων και την πυκνότητα του τυχαίου γραφήματος από το οποίο κατασκευάζεται το *cent-tree*, στο οποίο βασίζεται η κατασκευή των *quasi threshold* γραφημάτων. Για τα γραφήματα που κατασκευάζονται υπολογίζεται και το μέγεθος της μέγιστης κλίκας ώστε να εκτιμηθεί η απόδοση των αλγορίθμων χρωματισμού σε σχέση με το πλήθος χρωμάτων που χρησιμοποιούν. Για την εύρεση της μέγιστης κλίκας σε ένα *quasi threshold* γράφημα υπολογίζουμε το μέγιστο βεβαρημένο μονοπάτι από την ρίζα σε κόμβο φύλλο του *cent-tree* του γραφήματος. Το βάρος του κάθε κόμβου του *cent-tree* ισούται με το πλήθος των κόμβων της κλίκας που περιέχει. Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάστηκε αναλυτικά ο αλγόριθμος που υπολογίζει την μέγιστη κλίκα σε ένα *quasi threshold* γράφημα.

Πίνακας 5.2: Πειραματικά Αποτελέσματα σε Quasi Threshold Γραφήματα 500 κόμβων

Πυκνότητα	$\omega(G)$	F.F.	L.F.	L.S.	Brelaz	Colinear	$\lambda(\bar{G})/\omega(G)$
20%	87	87	87	87	87	495	5,69
30%	136	136	136	136	136	499	3,66
50%	229	229	229	229	229	500	2,18
60%	335	335	335	335	335	500	1,49

Οι μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν σε *quasi threshold* γραφήματα με 500 κόμβους. Οι τέσσερις προσεγγιστικές μέθοδοι χρωματισμού εφαρμόζονται στο *quasi threshold* γράφημα  $G$  που κατασκευάζεται κάθε φορά ενώ ο *colinear* χρωματισμός εφαρμόζεται στο συμπλήρωμα  $\bar{G}$  του  $G$ . Στον Πίνακα 5.2 παρατηρούμε ότι όλες οι προσεγγιστικές μέθοδοι χρωματίζουν με το ελάχιστο πλήθος χρωμάτων τα γραφήματα που κατασκευάζονται. Στην αντίστοιχη στήλη για τον *colinear* χρωματισμό του συμπληρώματος του γραφήματος  $G$  παρατηρούμε ότι  $\lambda(\bar{G}) > \chi(G)$ . Όταν η πυκνότητα του γραφήματος είναι  $p \geq 50\%$  τότε ο *colinear* χρωματικός αριθμός των γραφημάτων στα πειράματα που πραγματοποιήθηκαν ισούται με το πλήθος των κόμβων του γραφήματος. Στην τελευταία στήλη παρατηρούμε ότι ο λόγος  $\lambda(\bar{G})/\omega(G)$  μειώνεται με την αύξηση της πυκνότητας του γραφήματος  $G$ .



## 5.4 Threshold Γραφήματα

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα χρωματισμού σε *threshold* γραφήματα. Οι μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν σε γραφήματα με διαφορετική πυκνότητα ακμών για την καλύτερη μελέτη της συμπεριφοράς των αλγορίθμων χρωματισμού. Η πυκνότητα ακμών στα *threshold* γραφήματα που υλοποιήθηκαν μεταβάλλεται ανάλογα με το πλήθος και την αλληλουχία των πράξεων “*staring*” και “*add*” κατά την προσθήκη κόμβων στο γράφημα που κατασκευάζεται. Για τα γραφήματα που κατασκευάζονται υπολογίζεται και το μέγεθος της μέγιστης κλίκας ώστε να εκτιμηθεί η απόδοση των αλγορίθμων χρωματισμού σε σχέση με το πλήθος χρωμάτων που χρησιμοποιούν. Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάστηκε ο αλγόριθμος που υπολογίζει την μέγιστη κλίκα σε ένα *threshold* γράφημα και βασίζεται στο *cent-tree* του γραφήματος.

Πίνακας 5.3: Πειραματικά Αποτελέσματα σε *Threshold* Γραφήματα 500 κόμβων

Πυκνότητα	$\omega(G)$	F.F.	L.F.	L.S.	Brelaz	$\lambda(\bar{G})$	$\psi(G)$
30%	154	154	154	154	154	154	154
50%	243	243	243	243	243	243	243
70%	353	353	353	353	353	353	353
90%	450	450	450	450	450	450	450

Οι μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν σε *threshold* γραφήματα με 500 κόμβους. Οι τέσσερις προσεγγιστικές μέθοδοι χρωματισμού εφαρμόζονται στο *threshold* γράφημα  $G$  που κατασκευάζεται κάθε φορά ενώ ο *colinear* χρωματισμός εφαρμόζεται στο συμπλήρωμα του  $G$ ,  $\bar{G}$ . Επιπλέον για τα *threshold* γραφήματα υλοποιήθηκε ο αλγόριθμος για τον *pair complete* χρωματισμό τους. Στον Πίνακα 5.3 παρατηρούμε ότι όλες οι προσεγγιστικές μέθοδοι χρωματίζουν με το ελάχιστο πλήθος χρωμάτων τα γραφήματα που κατασκευάζονται. Ο αλγόριθμος για τον *pair complete* χρωματισμό χρησιμοποιεί επίσης το ελάχιστο πλήθος χρωμάτων. Στην αντίστοιχη στήλη για τον *colinear* χρωματισμό του συμπληρώματος του γραφήματος  $G$  παρατηρούμε ότι  $\lambda(\bar{G}) = \chi(G)$  όπως και έχει αποδειχθεί.

## 5.5 Interval Γραφήματα

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα χρωματισμού σε *interval* γραφήματα. Οι μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν σε γραφήματα με διαφορετική πυκνότητα ακμών για την καλύτερη μελέτη της συμπεριφοράς των αλγορίθμων χρωματισμού. Η πυκνότητα ακμών στα *interval* γραφήματα που υλοποιήθηκαν μεταβάλλεται ανάλογα με το μήκος των ευθύγραμμων τμημάτων στο οποίο αντιστοιχίζονται οι κόμβοι του. Για τα γραφήματα που κατασκευάζονται υπολογίζεται και το μέγεθος της μέγιστης κλίκας ώστε να εκτιμηθεί η απόδοση των



αλγορίθμων χρωματισμού σε σχέση με το πλήθος χρωμάτων που χρησιμοποιούν. Για την εύρεση του μεγέθους της μέγιστης κλίκας σε ένα *interval* γράφημα χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο MCS όπως παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 2.

Πίνακας 5.4: Πειραματικά Αποτελέσματα σε *Interval* Γραφήματα 500 κόμβων

Πυκνότητα	$\omega(G)$	F.F.	L.F.	S.F.	Brelaz	$\lambda(\bar{G})$	$\lambda(\bar{G})/\omega(G)$
25%	97	100	98	97	97	232	2,39
50%	191	199	192	191	191	495	2,59
70%	257	263	259	257	257	496	1,93

## 5.6 Cograph Γραφήματα

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα χρωματισμού σε γραφήματα *cographs*. Οι μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν σε γραφήματα με διαφορετική πυκνότητα ακμών για την καλύτερη μελέτη της συμπεριφοράς των αλγορίθμων χρωματισμού. Η πυκνότητα ακμών στα *cograph* γραφήματα εξαρτάται από το πλήθος των κόμβων και την πυκνότητα του τυχαίου γραφήματος με βάση το οποίο κατασκευάστηκε το *cotree*, στο οποίο βασίζεται η κατασκευή των *cograph*. Για τα γραφήματα που κατασκευάζονται υπολογίζεται και το μέγεθος της μέγιστης κλίκας ώστε να εκτιμηθεί η απόδοση των αλγορίθμων χρωματισμού σε σχέση με το πλήθος χρωμάτων που χρησιμοποιούν. Για την εύρεση της μέγιστης κλίκας σε ένα γράφημα *cograph* χρησιμοποιούμε το *cotree* του γραφήματος. Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάστηκε αναλυτικά ο αλγόριθμος που υπολογίζει την μέγιστη κλίκα σε ένα *cograph* γράφημα.

Πίνακας 5.5: Πειραματικά Αποτελέσματα σε Γραφήματα *Cograph* 500 κόμβων

Πυκνότητα	$\omega(G)$	F.F.	L.F.	S.F.	Brelaz	Colinear	$\lambda(\bar{G})/\omega(G)$
20%	116	116	116	116	116	261	2,25
50%	151	151	151	151	151	247	1,63
60%	204	204	204	204	204	277	1,35
70%	235	235	235	235	235	301	1,28

Οι μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν σε γραφήματα *cograph* με 500 κόμβους. Οι τέσσερις προσεγγιστικές μέθοδοι χρωματισμού εφαρμόζονται στο *cograph*  $G$  που κατασκευάζεται κάθε φορά ενώ ο *colinear* χρωματισμός εφαρμόζεται στο συμπλήρωμα του  $\bar{G}$ ,  $G$ . Στον Πίνακα 5.5 παρατηρούμε ότι όλες οι προσεγγιστικές μέθοδοι χρωματίζουν με το ελάχιστο πλήθος χρωμάτων τα γραφήματα που κατασκευάζονται. Στην αντίστοιχη στήλη για τον



*colinear* χρωματισμό του συμπληρώματος του γραφήματος  $G$  παρατηρούμε ότι  $\lambda(\bar{G}) > \chi(G)$ . Όταν η πυκνότητα και η μέγιστη κλίκα του γραφήματος αυξάνονται, τότε αυξάνεται και ο *colinear* χρωματικός αριθμός. Παρατηρούμε ωστόσο, ότι ο λόγος  $\lambda(\bar{G})/\omega(G)$  μειώνεται με την αύξηση της πυκνότητας του γραφήματος  $G$  και πλησιάζει την τιμή ένα. Συμπεραίνουμε ότι το  $\lambda(\bar{G})$  αποτελεί καλό άνω φράγμα για το  $\chi(G)$  σε *cographs*.

## 5.7 Split Γραφήματα

Πίνακας 5.6: Πειραματικά Αποτελέσματα σε Split Γραφήματα όπου το Ανεξάρτητο σύνολο  $I$  είναι μεγαλύτερο από την Κλίκα  $K$

Κόμβοι	D	$\omega(G)$	F.F.	L.F.	S.F.	Brelaz	$\lambda(\bar{G})$	$\lambda(\bar{G})/\omega(G)$
$I \gg K$ (430-70)	Dense 20%	57	57	57	57	57	299	5,24
$I > K$ (387-123)	Dense 20-25%	113	114	113	113	113	387	3,42
$I > K$ (330-170)	Dense 25-30%	163	164	163	163	163	330	2,02
$I > K$ (276-223)	Dense 50%	224	224	224	224	224	276	1,23

Στον Πίνακα 5.6 καταγράφονται τα αποτελέσματα χρωματισμού σε *split* γραφήματα στην περίπτωση όπου το πλήθος των κόμβων του ανεξάρτητου συνόλου  $I$  είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των κόμβων της κλίκας  $K$ .

Για τους τέσσερις προσεγγιστικούς αλγόριθμους παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα χρωματισμού δεν απέχει από το μέγεθος της μέγιστης κλίκας του γραφήματος, εκτός από τον Σειριακό αλγόριθμο που διαφέρει κατά μέσο όρο κατά ένα από τον ελάχιστο χρωματισμό. Ενδιαφέρον παρουσιάζουν ωστόσο τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τον *colinear* χρωματισμό του συμπληρώματος  $\bar{G}$  του *split* γραφήματος  $G$ .

Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 4  $\lambda(\bar{G}) \geq \chi(G)$  για κάθε γράφημα  $G$ . Στον Πίνακα 5.6, στην αντίστοιχη στήλη για τον *colinear* χρωματισμό, παρατηρούμε ότι όταν το πλήθος των κόμβων του  $I$  είναι κατά πολύ μεγαλύτερο από το πλήθος κόμβων της κλίκας  $K$  ισχύει  $\lambda(\bar{G}) \geq \chi(G)$ , όταν το γράφημα  $G$  είναι είτε πολύ πυκνό είτε πολύ αραιό. Ενώ στο σύνολο των περιπτώσεων όπου το σύνολο  $I$  είναι απλά μεγαλύτερο από την κλίκα  $K$  παρατηρούμε ότι  $\lambda(\bar{G}) \geq \chi(G)$  και  $\lambda(\bar{G}) = I$ . Η ισότητα αυτή παρατηρείται διότι αν  $I > K$  στο *split* γράφημα





$G$  τότε  $I' < K'$  στο συμπλήρωμα  $\bar{G}$ , του  $G$  οπότε κατά τον *colinear* χρωματισμό του γραφήματος  $\bar{G}$  οι κόμβοι της κλίκας  $K'$  χρωματίζονται με διαφορετικά χρώματα. Επιπλέον τα γραφήματα που κατασκευάζονται είναι συνδεδεμένα οπότε στο συμπλήρωμά τους όλοι οι κόμβοι της κλίκας θα συνδέονται με κάποιον από τους κόμβους του ανεξάρτητου συνόλου. Αυτό συμβαίνει διότι έχουν διαφορετικά υποσύνολα γειτόνων από το σύνολο  $I'$ . Η ισότητα δεν εμφανίζεται στην περίπτωση όπου  $I \gg K$  στο γράφημα  $G$ , γιατί στο συμπλήρωμα  $\bar{G}$   $I' \ll K'$  οπότε πολλοί κόμβοι από την κλίκα  $K'$  μπορούν να έχουν κοινούς γείτονες στο  $I'$  οπότε και οι κόμβοι της κλίκας μπορούν να πάρουν το ίδιο χρώμα.

Πίνακας 5.7: Πειραματικά Αποτελέσματα σε *Split* Γραφήματα όπου το ανεξάρτητο σύνολο  $I$  είναι μικρότερο από την κλίκα  $K$

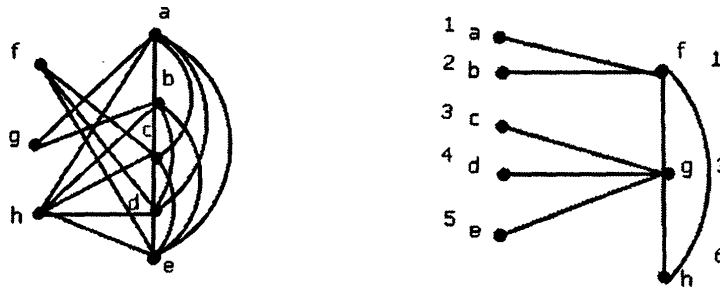
Κόμβοι	Πυκνότητα	$\omega(G)$	F.F.	L.F.	S.F.	Brelaz	colinear
$I < K$ 500	Dense 70-90%	K	K	K	K	K	$\geq K$
$I < K$ 500	Sparse 50-60%	K	K	K	K	K	$\geq K$

Στον Πίνακα 5.7 φαίνονται τα αποτελέσματα χρωματισμού σε *split* γραφήματα όπου το πλήθος των κόμβων του ανεξάρτητου συνόλου  $I$  είναι μικρότερο από το πλήθος των κόμβων της κλίκας  $K$ . Για τους τέσσερις προσεγγιστικούς αλγορίθμους παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα χρωματισμού δεν απέχει από το μέγεθος της μέγιστης κλίκας του γραφήματος.

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν και σε αυτή την περίπτωση τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τον *colinear* χρωματισμό του συμπληρώματος  $\bar{G}$  του *split* γραφήματος  $G$ . Όπως βλέπουμε στην αντίστοιχη στήλη του Πίνακα 5.7 για τον *colinear* χρωματισμό του συμπληρώματος του  $G$  προκύπτει στις περισσότερες περιπτώσεις  $\lambda(\bar{G}) = K$ . Στην περίπτωση που  $I < K$  για το *split* γράφημα  $G$ , στο συμπλήρωμα  $\bar{G}$  ισχύει η σχέση  $K' < I'$ . Οι κόμβοι  $u$  του ανεξάρτητου συνόλου  $I'$  χρωματίζονται με διαφορετικά χρώματα διότι οι ακμές που τους συνδέουν με τους κόμβους  $v$  της κλίκας  $K$  σχηματίζουν διαφορετικές *maximal* κλίκες για τους κόμβους  $u$  (στις κλίκες που προκύπτουν δεν μπορούν να συμμετέχουν δυο κόμβοι από το σύνολο  $I'$ ). Επομένως, αφού τα σύνολα  $C(u)$ ,  $u \in I'$ , περιέχουν διαφορετικά σύνολα *maximal* κλικών οι κόμβοι  $u \in I'$  χρωματίζονται με διαφορετικά χρώματα, οπότε  $\lambda(\bar{G}) \geq I' = K$ . Στις περισσότερες περιπτώσεις συμβαίνει οι κόμβοι  $v$  του συνόλου  $K'$  να χρωματίζονται με κάποιο από τα χρώματα των κόμβων  $u$  που συνδέονται, και αφού  $K' < I'$  συνεπάγεται ότι το γράφημα  $\bar{G}$  δεν θα χρωματιστεί με παραπάνω από  $I'$ , άρα  $\lambda(\bar{G}) = |I'| = |K|$ . Ωστόσο η



παραπάνω σχέση δεν ισχύει για όλα τα *split* γραφήματα με  $I < K$ . Υπάρχουν παραδείγματα όπου  $\lambda(\bar{G}) > |I'| = |K|$ . Στο σχήμα 5.1 βλέπουμε ένα τέτοιο παράδειγμα.



Σχήμα 5.1: Colinear χρωματισμός σε συμπλήρωμα *Split* γραφήματος

### 5.8 Undirected Path Γραφήματα

Στον Πίνακα 5.8 παρουσιάζονται οι μετρήσεις για τα *undirected path* γραφήματα. Οι μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν σε γραφήματα με 500 κόμβους και μεταβαλλόμενη πυκνότητα. Δοθέντος ενός δέντρου με πλήθος κόμβων  $n'$ , πυκνότητα του *undirected path* γραφήματος μεταβάλλεται με την μεταβολή του πεδίου τιμών του μήκους των μονοπατιών στα οποία αντιστοιχίζονται οι κόμβοι του γραφήματος. Για την εύρεση της μέγιστης κλίκας σε *undirected path* γραφήματα χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο *MCS*.

Πίνακας 5.8: Πειραματικά Αποτελέσματα σε *Undirected Path* Γραφήματα

Πυκνότητα	$\omega(G)$	F.F.	L.F.	S.F.	Brelaz	Colinear	$\lambda(\bar{G})/\omega(G)$
20%	94	95	94	94	94	497	5,28
50%	186	186	186	186	186	500	2,68
70%	320	320	320	320	320	500	1,56

### 5.9 Δέντρα

Στον Πίνακα 5.9 παρουσιάζονται οι μετρήσεις για τυχαία δέντρα με 500 κόμβους. Οι μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν σε γραφήματα με 500 κόμβους και μεταβαλλόμενο πλήθος φύλλων. Το πλήθος των φύλλων του δέντρου που θα κατασκευαστεί εξαρτάται από το πλήθος των ακμών  $m$  στο τυχαίο γράφημα  $G$ . Έπιπλέον γνωρίζουμε ότι ένα δέντρο με τουλάχιστον μια ακμή έχει χρωματικό αριθμό και μέγεθος μέγιστης κλίκας ίσο με δύο,  $\chi(G) = \omega(G) = 2$ .



Πίνακας 5.9: Πειραματικά Αποτελέσματα σε Δέντρα 500 Κόμβων

$\Delta(T)$	$D(G)$	$\omega(T)$	F.F.	L.F.	S.F.	Brelaz	$\lambda(\bar{T})$	$\lambda(\bar{G})/\omega(G)$
62	20%	2	4	3	2	2	58	29
121	50%	2	4	3	2	2	31	15,5
177	70%	2	4	2	2	2	18	9
499	100%	2	2	2	2	2	2	1

### 5.10 Χρωματισμός Τυχαίων Γραφημάτων

Στην τελευταία αυτή παράγραφο του κεφαλαίου παρουσιάζονται πειραματικά αποτελέσματα για τυχαία γραφήματα 500 κόμβων τα οποία κατασκευάστηκαν με τη χρήση της συνάρτησης της LEDA[58] *random\_simple\_undirected\_graph(G,n,m)*. Σκοπός της πραγματοποίησης αυτών των πειραμάτων ήταν να διαπιστώσουμε (α) ποιος αλγόριθμος χρησιμοποιεί τα περισσότερα χρώματα σε τυχαία γραφήματα και (β) ποια είναι η εκτίμηση του άνω φράγματος του  $\chi(G)$  που δίνει ο *colinear* χρωματισμός συμπληρώματος  $\bar{G}$ , του γραφήματος  $G$ .

Πίνακας 5.10 Πειραματικά Αποτελέσματα σε Τυχαία Γραφήματα 500 Κόμβων

Πυκνότητα	F.F.	L.F.	S.F.	Brelaz	colinear
4%	4	3	3	3	326
20%	32	30	31	27	500
30%	45	42	44	39	500
40%	55	53	52	48	500
50%	76	74	74	73	500
60%	88	85	86	80	500
70%	111	107	109	102	500
80%	134	129	127	120	500

Από της δυο τελευταίες στήλες συμπεραίνουμε ότι το  $\lambda(\bar{G})$  δεν αποτελεί καλό άνω φράγμα του  $\chi(G)$  σε τυχαία γραφήματα. Ακόμα και για πολύ μικρές τιμές πυκνότητας το  $\lambda(\bar{G})$  έχει αρκετά μεγάλη τιμή η οποία αυξάνεται με την αύξηση της πυκνότητας του γραφήματος  $G$  και πλησιάζει το πλήθος των κόμβων του.



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

## ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

### 6.1 Colinear Χρωματισμός

### 6.2 Pair Complete και Harmonious Χρωματισμός

### 6.3 Ευριστικές Μέθοδοι

### 6.1 Colinear Χρωματισμός

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται παρατηρήσεις και συμπεράσματα που προκύπτουν από τα πειραματικά αποτελέσματα του *colinear* χρωματισμού σε τέλεια και τυχαία γραφήματα. Στον Πίνακα 6.1 που ακολουθεί βλέπουμε τα συγκεντρωτικά αποτελέσματα του *colinear* χρωματισμού σε όλες τις κλάσεις γραφημάτων που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 5. Οι μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν σε γραφήματα με πλήθος κόμβων  $|V(G)| = 500$  και πυκνότητας  $0,2 \leq p \leq 0,7$ . Για κάθε γράφημα  $G$  που κατασκευάστηκε, υπολογίστηκε το μέγεθος της μέγιστης κλίκας  $\omega(G) = \chi(G)$ , ενώ ο *colinear* χρωματισμός εφαρμόστηκε στο συμπλήρωμα  $\bar{G}$  του γραφήματος  $G$ . Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 4  $\lambda(\bar{G}) \geq \chi(G) \forall G$ . Στον Πίνακα 6.1 συγκρίνεται η τιμή του  $\chi(G)$  με το  $\lambda(\bar{G})$  για κάθε μια από της κλάσης γραφημάτων που εξετάστηκαν.

Πίνακας 6.1: Χρωματισμός Colinear

Γράφημα	Πυκνότητα $\approx 20\%$			Πυκνότητα $\approx 50\%$			Πυκνότητα $\approx 70\%$		
	$\chi(G)$	$\lambda(\bar{G})$	$\lambda(\bar{G})/\chi(G)$	$\chi(G)$	$\lambda(\bar{G})$	$\lambda(\bar{G})/\chi(G)$	$\chi(G)$	$\lambda(\bar{G})$	$\lambda(\bar{G})/\chi(G)$
Chordal	136	373	2.74	257	431	1.67	285	447	1,56
Quasi Threshold	87	495	5.68	229	500	2.18	335	500	1,49
Threshold	154	154	1.0	243	243	1.0	353	353	1,0
Interval	97	232	2.39	191	495	2.59	257	496	1,92
Cograph	116	261	2.25	151	247	1.63	235	301	1,28



Undirected Path	94	497	5.28	186	500	2.68	320	500	1,56
Tree	2	58	29	2	31	15.5	2	18	9
Random Graph	-	500	-	-	500	-	-	500	-

Από τον Πίνακα 6.1 οδηγούμαστε στα παρακάτω συμπεράσματα:

**Συμπέρασμα 1:** Για τα αραιά *chordal* γραφήματα η τιμή του  $\lambda(\bar{G})$  είναι αρκετά μεγαλύτερη από το χρωματικό αριθμό  $\chi(G)$  του γραφήματος  $G$  και αυξάνεται με την αύξηση της πυκνότητας  $D$  και της μέγιστης κλίκας του γραφήματος  $G$ . Ο λόγος  $\lambda(\bar{G})/\chi(G)$  μειώνεται με την αύξηση της πυκνότητας του γραφήματος  $G$ . Παρόμοια συμπεριφορά παρουσιάζει ο αλγόριθμος για τα *interval*.

**Συμπέρασμα 2:** Για τα *cographs* το  $\lambda(\bar{G})$  κυμαίνεται σε χαμηλότερες τιμές σε σχέση με αυτές που συναντήσαμε σε *chordal* και *quasi threshold* γραφήματα. Ο λόγος  $\lambda(\bar{G})/\chi(G)$  μειώνεται με την αύξηση της πυκνότητας του γραφήματος  $G$  και παρατηρούμε ότι πλησιάζει την τιμή 1 για *cograph* με πυκνότητας  $\approx 70\%$ . Συμπεραίνουμε ότι το  $\lambda(\bar{G})$  αποτελεί ένα καλό άνω φράγμα για το χρωματικό αριθμό των γραφημάτων *cograph*.

**Συμπέρασμα 3:** Για *threshold* γραφήματα η τιμή του  $\lambda(\bar{G}) = \chi(G)$ , όπως και έχει αποδειχθεί [34]

**Συμπέρασμα 4:** Σε τυχαία δέντρα  $G$ , με την αύξηση του πλήθους των φύλλων παρατηρείται μείωση του *colinear* χρωματικού αριθμού  $\lambda(\bar{G})$ . Αυτό συμβαίνει διότι τα φύλλα στο  $G$  αποτελούν κλίκα στο  $\bar{G}$ , οπότε περισσότεροι κόμβοι στο  $\bar{G}$  έχουν κοινούς γείτονες, άρα έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα να χρωματιστούν με το ίδιο χρώμα στο  $\bar{G}$ . Στην περίπτωση που το δέντρο έχει το ελάχιστο πλήθος φύλλων (*path*) τότε χρησιμοποιείται μεγάλο πλήθος χρωμάτων ( $n-2$ ) από τον *colinear* χρωματισμό για το συμπλήρωμα του. Ενώ στην περίπτωση που το δέντρο έχει το μέγιστο πλήθος φύλλων (*star*) τότε ο *colinear* χρωματίζει το συμπλήρωμα του  $\bar{G}$  με το ελάχιστο πλήθος χρωμάτων (2).



**Συμπέρασμα 5:** Για τα γραφήματα *undirected path* και *quasi threshold* ο *colinear* χρωματικός αριθμός παίρνει μεγάλες τιμές που τείνουν στο πλήθος των κόμβων των γραφημάτων, ακόμα και για γραφήματα  $G$  με μικρή πυκνότητα.

**Συμπέρασμα 6:** Για τα split γραφήματα ο λόγος  $\lambda(\bar{G})/\chi(G)$  μειώνεται με την αύξηση της πυκνότητας του γραφήματος  $G$  και παρατηρούμε ότι πλησιάζει την τιμή 1 για *split* πυκνότητας  $\approx 70\%$ .

**Συμπέρασμα 7:** Για τυχαία γραφήματα η τιμή του  $\lambda(\bar{G})$  τείνει να εξισωθεί με το πλήθος των κόμβων του γραφήματος  $G$ , δηλαδή  $\lambda(\bar{G}) \sqcup |V(G)|$ . Το αποτέλεσμα αυτό ερμηνεύεται με το ότι στα τυχαία γραφήματα  $G$  που κατασκευάζονται οι κόμβοι τους δεν έχουν κοινά υποσύνολα γειτόνων. (Τα τυχαία γραφήματα που κατασκευάζονται δεν έχουν κάποιες συγκεκριμένες ιδιότητες). Ωστόσο για τυχαία γραφήματα  $G$  με πολύ μικρή πυκνότητα η τιμή του  $\lambda(\bar{G})$  ελαττώνεται σε σχέση με το πλήθος των κόμβων του γραφήματος. Για παράδειγμα τυχαία γραφήματα  $G$  με  $|V(G)| = 500$  και πυκνότητα της τάξης 5% έχουν  $\lambda(\bar{G}) \sqcup 300$ . Ο λόγος που παρατηρείται η μείωση στο  $\lambda(\bar{G})$  με την μείωση της πυκνότητας στο γράφημα  $G$ , είναι ότι το συμπλήρωμά του  $\bar{G}$  έχει πολύ μεγάλη πυκνότητα και σαν αποτέλεσμα αυξάνεται η πιθανότητα οι κόμβοι του  $\bar{G}$  να έχουν κοινά σύνολα από *maximal* κλίκες.

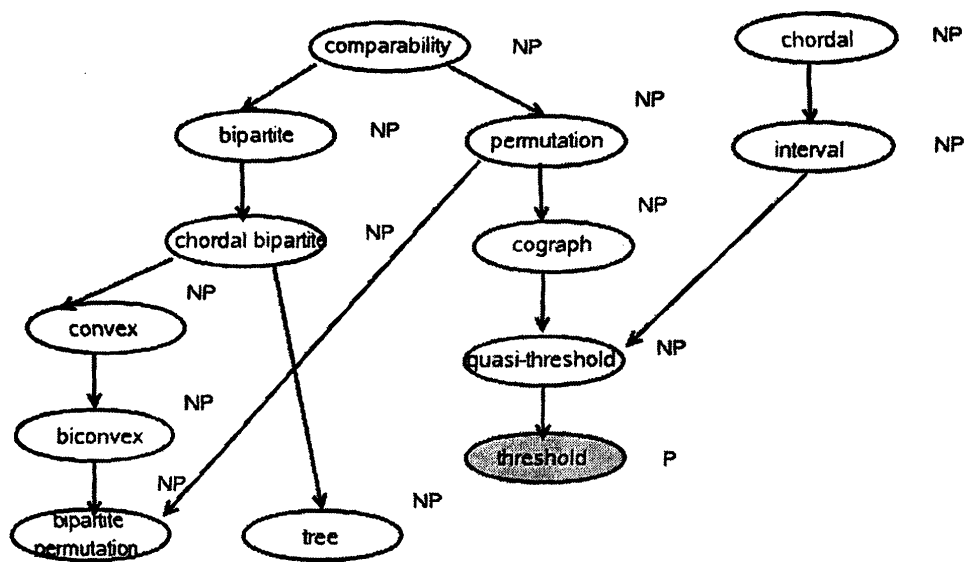
## 6.2 Pair Complete και Harmonious Χρωματισμός

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται συμπεράσματα σχετικά με τον pair complete χρωματισμό και τον αρμονικό χρωματισμό στις κλάσεις γραφημάτων που μελετήθηκαν. Όπως είδαμε στην Ενότητα 4.2 για τα Threshold γραφήματα ισχύει  $\psi(G) = \omega(G)$ . Για τις υπόλοιπες κλάσεις γραφημάτων που μελετήσαμε ο Pair Complete χρωματισμός είναι NP.

Πίνακας 6.2: Χρωματισμός Pair Complete

Γράφημα	Πυκνότητα $\approx 20\%$		Πυκνότητα $\approx 50\%$		Πυκνότητα $\approx 70\%$	
	$\chi(G)$	$\psi(G)$	$\chi(G)$	$\psi(G)$	$\chi(G)$	$\psi(G)$
Threshold	154	154	243	243	353	353

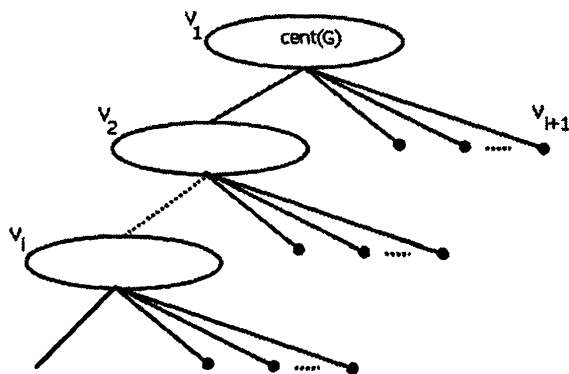




Σχήμα 6.1: Η πολυπλοκότητα του *Pair Complete* χρωματισμού σε τέλεια γραφήματα

Το πρόβλημα της εύρεσης του αρμονικού χρωματικού αριθμού  $h(G)$  σε συνεκτικά γραφήματα *cograph* είναι *trivial*. Κάθε κόμβος θα λάβει διαφορετικό χρώμα αφού απέχει το πολύ απόσταση 2 από κάθε άλλο κόμβο στο *cograph*.

Στα *threshold* γραφήματα το πρόβλημα της εύρεσης του αρμονικού χρωματικού αριθμού είναι πολυωνυμικό. Στο Σχήμα 6.2 βλέπουμε την δενδρική αναπαράσταση ενός *threshold* γραφήματος.



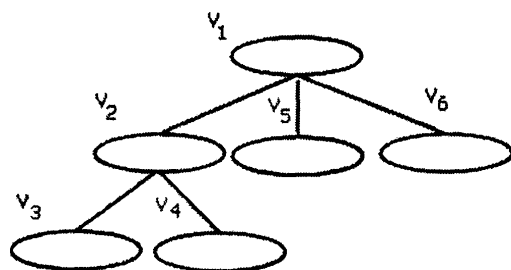
Σχήμα 6.2: Το *cent-tree*  $T_C(G)$  ενός *threshold* γραφήματος  $G$

Κάθε κόμβος του *threshold* γραφήματος πρέπει να χρωματιστεί με διαφορετικό χρώμα αφού στο αριστερότερο μονοπάτι του δένδρου  $T_C(G)$ , τα υποσύνολα  $V_1, \dots, V_i$  των κόμβων του



συνόλου  $V$  αποτελούν κλίκα πρέπει να πάρουν διαφορετικά χρώματα. Επίσης οι κόμβοι στα  $n'$  σύνολα,  $V_{i+1}, \dots, V_{i+n'}$  θα πρέπει να χρωματιστούν με διαφορετικά χρώματα, αλλιώς θα υπάρχουν τουλάχιστον δυο ακμές που θα ξεκινάνε από τον κοινό τους πρόγονο στο  $T_C(G)$  και καταλήγουν σε κόμβους με ίδιο χρώμα.

Στα συνεκτικά *quasi threshold* γραφήματα το πρόβλημα της εύρεσης του αρμονικού χρωματικού αριθμού είναι *trivial*. Στο Σχήμα 6.3 βλέπουμε την δενδρική αναπαράσταση  $T_C(G)$ , ενός *quasi threshold* γραφήματος.



Σχήμα 6.3: Η δενδρική αναπαράσταση  $T_C(G)$ , ενός *quasi threshold* γραφήματος

Κατά μήκος ενός μονοπατιού στο *cent-tree* ενός *quasi threshold* γραφήματος  $G$ , που ξεκινά απ τη ρίζα και καταλήγει σε φύλλο, οι κόμβοι των συνόλων  $V_i$  θα πρέπει να πάρουν διαφορετικά χρώματα γιατί ανήκουν στην ίδια κλίκα. Για τα σύνολα των κόμβων  $V_i$  και  $V_j$  που ανήκουν σε διαφορετικά μονοπάτια, οι κόμβοι των συνόλων θα πρέπει να χρωματιστούν με διαφορετικά χρώματα, αλλιώς θα υπάρχουν τουλάχιστον δυο ακμές που θα ξεκινάνε από τον κοινό τους πρόγονο στο  $T_C(G)$  και καταλήγουν σε κόμβους με ίδιο χρώμα. Άρα για τα συνεκτικά *quasi threshold* γραφήματα ο αρμονικός χρωματικός αριθμός  $h(G)$  ισούται με το πλήθος των κόμβων  $|V(G)|$  του γραφήματος  $G$ .

### 6.3 Ευριστικές Μέθοδοι

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται τα συγκεντρωτικά αποτελέσματα των ευριστικών αλγορίθμων χρωματισμού σε όλες τις κατηγορίες γραφημάτων που μελετήθηκαν. Στον Πίνακα 6.3 βλέπουμε το χρωματικό αριθμό και το πλήθος χρωμάτων που προκύπτουν σε κάθε μια από τις κλάσεις γραφημάτων ύστερα από τις μεθόδους «Σειριακός Αλγόριθμος» και αλγόριθμος «Πρώτα η Μεγαλύτερη». Παρατηρούμε ότι τις μεγαλύτερες αποκλίσεις από τον βέλτιστο χρωματισμό παρουσιάζει ο «Σειριακός Αλγόριθμος» για τα *chordal* και για τα *interval* γραφήματα ενώ ο αλγόριθμος «Πρώτα η Μεγαλύτερη» παρουσιάζει μικρότερες αποκλίσεις για τις ίδιες κλάσεις γραφημάτων.





Πίνακας 6.3: Σειριακός Αλγόριθμος και Αλγόριθμος «Πρώτα η Μεγαλύτερη»

Γράφημα	Πυκνότητα $\approx 20\%$			Πυκνότητα $\approx 50\%$			Πυκνότητα $\approx 70\%$		
	$\chi(G)$	FF	LF	$\chi(G)$	FF	LF	$\chi(G)$	FF	LF
Chordal	136	140	137	257	262	259	285	290	286
Quasi Threshold	87	87	87	229	229	229	335	335	335
Threshold	154	154	154	243	243	243	353	353	353
Interval	97	100	98	191	198	192	257	263	259
Cograph	116	116	116	151	151	151	235	235	235
Undirected Path	94	95	94	186	186	186	320	320	320
Tree	2	4	3	2	4	3	2	4	2
Split	113	114	113	163	164	163	224	224	224
Random Graph	-	32	30	-	76	74	-	111	107

Οι μέθοδοι «Τελευταία η Μικρότερη» και «Βαθμός Χρώματος» από τα πειραματικά αποτελέσματα φαίνεται να δίνουν τον βέλτιστο χρωματισμό για τα τέλεια γραφήματα που μελετήθηκαν.

Στον Πίνακα 5.1 παρατηρούμε ότι ο «Σειριακός αλγόριθμος» χρωματισμού χρησιμοποιεί κατά μέσο όρο 4 χρώματα περισσότερα από το ελάχιστο πλήθος χρωμάτων που απαιτούνται για το χρωματισμό ενός *chordal* γραφήματος. Η διαφορά των χρωμάτων που χρησιμοποιούνται βλέπουμε ότι δεν επηρεάζεται κατά πολύ από την μεταβολή της πυκνότητας του γραφήματος. Ο αλγόριθμος «Πρώτα η Μεγαλύτερη» διαφέρει κατά μέσο όρο κατά 1 από το ελάχιστο πλήθος των χρωμάτων που απαιτούνται για τον βέλτιστο χρωματισμό.

Οι αλγόριθμοι «Τελευταία η Μικρότερη» και «Βαθμός Χρώματος» αποδίδουν καλύτερα από τους δυο προηγούμενους. Στις αντίστοιχες στήλες του Πίνακα 5.1 βλέπουμε ότι το πλήθος χρωμάτων που χρησιμοποιούν δεν διαφέρει από το ελάχιστο πλήθος που απαιτείται για τον χρωματισμό τους.



Για τυχαία δέντρα παρατηρούμε ότι ο «Σειριακός Αλγόριθμος» και ο Αλγόριθμος «Πρώτα η Μεγαλύτερη» χρησιμοποιούν πλήθος χρωμάτων κοντά στο βέλτιστο, με τον «Σειριακό Αλγόριθμο» να χρησιμοποιεί περισσότερα χρώματα από όλους τους ευριστικούς αλγορίθμους. Ο αλγόριθμος «Τελευταία η Μικρότερη» και «Βαθμός Χρώματος» χρησιμοποιούν το ελάχιστο πλήθος χρωμάτων που απαιτείται για το χρωματισμό δέντρων. Πιο συγκεκριμένα αποδεικνύεται η μέθοδος του «Βαθμού Χρώματος» προσδιορίζει το χρωματικό αριθμό του γραφήματος.

Για τα διμερή γραφήματα ισχύει το Θεώρημα 6.1. Τα δέντρα ανήκουν στην κλάση των διμερών γραφημάτων οπότε ισχύει και για αυτά το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 6.1** [6] Αν το συνδεδεμένο γράφημα  $G$  με  $n \geq 3$  κορυφές είναι διμερές, τότε η μέθοδος του «Βαθμού Χρώματος» προσδιορίζει το χρωματικό αριθμό του γραφήματος.

Σε τυχαία γραφήματα τα περισσότερα χρώματα χρησιμοποιεί η μέθοδος «Σειριακός Αλγόριθμος» και λιγότερα χρώματα για το χρωματισμό του γραφήματος χρησιμοποιούν οι μέθοδοι «Τελευταία η Μικρότερη» και «Βαθμός Χρώματος».

Ένας λόγος στον οποίο οφείλεται η καλύτερη απόδοση των τριών τελευταίων αλγορίθμων είναι ότι οι μέθοδοι αυτοί φροντίζουν ώστε να χρωματιστούν πρώτα οι κορυφές με τον μεγαλύτερο βαθμό και όπως επισημάναμε και στην αρχή του κεφαλαίου ο χρωματισμός κορυφών με μεγαλύτερο βαθμό είναι πιο δύσκολος. Η μέθοδος «Πρώτα η Μεγαλύτερη» και η μέθοδος «Τελευταία η Μικρότερη» χρησιμοποιούν ως κριτήριο για την επιλογή κορυφής τον βαθμό της. Αν και φαίνεται ότι είναι ίδιες, η ταξινόμηση των κορυφών που δίνουν δεν είναι απαραίτητα ίδια μεταξύ τους.

Όπως αναφέραμε και σε προηγούμενο κεφάλαιο, οι παρατηρήσεις στις οποίες βασίστηκαν οι αλγόριθμοι (α) «Πρώτα η Μεγαλύτερη», (β) «Τελευταία η Μικρότερη» (γ) «Βαθμός Χρώματος» ώστε να αποτελέσουν βελτιώσεις του «Σειριακού» αλγορίθμου είναι οι εξής:

1. Είναι δυσκολότερος ο χρωματισμός κορυφών μεγαλύτερου βαθμού.
2. Ο χρωματισμός πολλών κορυφών με το ίδιο χρώμα συμφέρει.

Μάλιστα ο αλγόριθμος «Βαθμός Χρώματος» αποτελεί συνδυασμό των μεθόδων «Πρώτα η Μεγαλύτερη» και «Τελευταία η Μικρότερη» οπότε είναι λογικό να αποδίδει περισσότερο, σε σχέση με τα αποτελέσματα χρωματισμού, σε σύγκριση με τις προηγούμενες μεθόδους.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

### ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ

---

7.1 Εισαγωγή

7.2 Μελέτη Colinear Κλάσης και άλλων Κλάσεων Τέλειων Γραφημάτων

7.3 Μελέτη Προβλημάτων Χρωματισμού Ακμών και Κόμβων

---

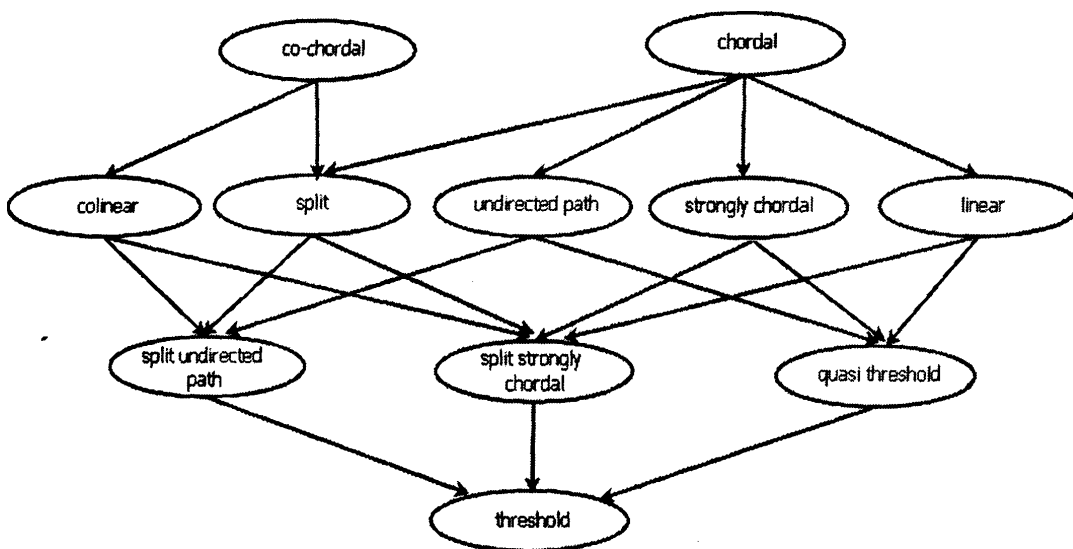
#### 7.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό προτείνονται θέματα για μελλοντική μελέτη που είναι σχετικά με την παρούσα εργασία. Όπως είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια, αντικείμενο μελέτης της παρούσας εργασίας είναι η κατασκευή και ο χρωματισμός τέλειων γραφημάτων. Οι κλάσεις των τέλειων γραφημάτων που μελετήθηκαν και για τις οποίες υλοποιήθηκαν αλγόριθμοι κατασκευής και εύρεσης μέγιστης κλίκας είναι οι εξής: (α) η κλάση των *chordal* γραφημάτων, (β) η κλάση των *split* γραφημάτων, (γ) η κλάση των *interval* γραφημάτων, (δ) η κλάση των *undirected path* γραφημάτων, (ε) η κλάση των *cograph* γραφημάτων, (στ) η κλάση των *threshold* γραφημάτων, (ζ) η κλάση των *quasi threshold* γραφημάτων(η) η κλάση των δέντρων. Επιπλέον μελετήθηκαν και υλοποιήθηκαν οι ευριστικοί αλγόριθμοι *proper* χρωματισμού «Σειριακός Αλγόριθμος», «Πρώτα η Μεγαλύτερη» «Τελευταία η Μικρότερη» και «Βαθμός Χρώματος». Επίσης υλοποιήθηκε ο αλγόριθμος *colinear, improper* χρωματισμού και ο αλγόριθμος *pair complete* για τα *threshold* γραφήματα. Τα θέματα που προτείνονται για μελλοντική μελέτη και σχετίζονται με το αντικείμενο της εργασίας αφορούν στη μελέτη περισσότερων κλάσεων γραφημάτων, στην μελέτη της κλάσης των *colinear* γραφημάτων, σε προβλήματα χρωματισμού και σε προβλήματα εύρεσης ελάχιστου ανεξάρτητου συνόλου  $\alpha(G)$ .



## 7.2 Μελέτη της Colinear Κλάσης και άλλων Κλάσεων Τέλειων Γραφημάτων

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον θα παρουσίαζε η μελέτη περισσότερων κλάσεων τέλειων γραφημάτων και ιδιαίτερα της κλάσης των *colinear* γραφημάτων. Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 4 ένα γράφημα  $G$  έχει την ιδιότητα  $\chi$ -*colinear* εάν για κάθε επαγόμενο υπογράφημα  $G_A$  ισχύει  $\chi(G_A) = \lambda(\overline{G}_A)$  για  $A \subseteq V(G)$  και την ιδιότητα  $\alpha$ -*colinear* εάν για κάθε επαγόμενο υπογράφημα  $G_A$  ισχύει  $\alpha(G_A) = \lambda(\overline{G}_A)$  για  $A \subseteq V(G)$ . Επίσης είδαμε ότι κάθε *threshold* γράφημα έχει την  $\chi$ -*colinear* ιδιότητα και κάθε γράφημα που έχει την  $\chi$ -*colinear* ιδιότητα είναι *co-chordal*. Στο Σχήμα 7.1 φαίνονται οι κλάσεις των *linear* και *colinear* γραφημάτων



Σχήμα 7.1: Οι κλάσεις των *Linear* και *Colinear* γραφημάτων

Σε μια επέκταση της παρούσας εργασίας θα μπορούσαν να υλοποιηθούν αλγόριθμοι κατασκευής *split undirected path* γραφημάτων και *split strongly chordal* γραφημάτων και να μελετηθούν τα προβλήματα κλασσικού χρωματισμού, *colinear* και αρμονικού χρωματισμού στις κλάσεις αυτές.

## 7.3 Μελέτη Προβλημάτων Χρωματισμού Ακμών και Κόμβων

Στην παρούσα μελέτη ασχοληθήκαμε με το πρόβλημα του χρωματισμού των κόμβων ενός γραφήματος και κάποιες παραλλαγές του. Μια επέκταση στο θέμα αυτό θα μπορούσε να είναι ο χρωματισμός ακμών ενός γραφήματος. Ο χρωματισμός ακμών ενός γραφήματος  $G$

είναι ο χρωματισμός των ακμών του, έτσι ώστε οι ακμές που συνδέονται μεταξύ τους να χρωματίζονται με διαφορετικό χρώμα. Δοθέντος ενός γραφήματος  $G$ , στο πρόβλημα του χρωματισμού ακμών το ζητούμενο είναι αν μπορούμε να χρωματίσουμε το γράφημα  $G$  με το πολύ  $n$  χρώματα. Το ελάχιστο πλήθος χρωμάτων λέγεται χρωματικός δείκτης και συμβολίζεται με  $\chi'(G)$ .

Ιδιότητες χρωματισμού ακμών [7]:

1.  $\chi'(G) = 1$  εάν και μόνο εάν το  $G$  αποτελεί *matching*.
2.  $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ .
3.  $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$  (Τα γραφήματα χωρίζονται σε δυο κλάσεις: Κλάση 1 γραφήματα με  $\chi'(G) = \Delta(G)$ . Κλάση 2 γραφήματα με  $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ ).
4.  $\chi'(G) \leq \Delta(G) + \mu(G)$ , όπου  $G$  μπορεί να είναι ένα *multigraph*.
5.  $\chi'(G) \leq (3/2)\Delta(G)$  για οποιοδήποτε *multigraph*
6.  $\chi'(G) = \Delta(G)$  εάν το  $G$  είναι *bipartite*.
7.  $\chi'(G) = \Delta(G)$  if  $G$  είναι *simple, planar* και  $\Delta(G) \geq 7$ .
8.  $\chi'(G) = \Delta(G)$  για σχεδόν κάθε γράφημα

Επιπλέον θα είχε ενδιαφέρον και η μελέτη διαφορετικών προβλημάτων χρωματισμού κόμβων σε τέλεια γραφήματα όπως *Subcoloring*. Ένας *improper* χρωματισμός κόμβων όπου κάθε διαφορετικό χρώμα επάγει μια ένωση από κλίκες (*union of cliques*). Επίσης το πρόβλημα του *Weak* που είναι ένας *improper* χρωματισμός κόμβων όπου κάθε *non-isolated* κόμβος έχει τουλάχιστον έναν γείτονα με διαφορετικό χρώμα. Τέλος το πρόβλημα του *Cocoloring* που αποτελεί επίσης *improper* χρωματισμός κόμβων όπου κάθε χρωματική κλάση επάγει ένα ανεξάρτητο σύνολο ή μια κλίκα.



- [1] J. Abello, P. M. Pardalos, M. G. C Resende, "On maximum clique problems in very large graphs", in Abello, J.; Vitter, J., *External Memory Algorithms, DIMACS Series on Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 50, American Mathematical Society, pp. 119–130, 1999
- [2] K. Asdre, K. Ioannidou, S.D. Nikolopoulos, "The harmonious coloring problem is NP-complete for interval and permutation graphs", *Discrete Applied Mathematics* 155, pp. 2377-2382, 2006.
- [3] K. Asdre and S.D. Nikolopoulos, "NP-completeness results for some problems on subclasses of bipartite and chordal graphs", *Theor. Comput. Sci.* 381, pp 248-259, 2007.
- [4] C. Berge, "Perfect graphs" *Six Papers on Graph Theory*. Calcutta: Indian Statistical Institute. pp. 1–21, 1963.
- [5] H.L. Bodlaender, "Achromatic number is NP-complete for cographs and interval Graphs", *Inform. Proc. Lett.* 31, pp135-138, 1989.
- [6] D. Brelaz "New Methods to Color the Vertices of a Graph" in *CACM*(22), pp. 251-256, 1979.
- [7] J.A. Bondy, U.S.R. Murty, "Graph Theory", Springer, pp. 457-476, 2008.
- [8] P. Buneman, the recovery of trees from measures of dissimilarity, in Hodson, Kendall, *Tutu*, pp 387-395, 1972.
- [9] M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour, R. Thomas, "The strong perfect graph theorem", *Annals of Mathematics* 164 (1), pp 51–229, 2006
- [10] V. Chvatal, Hammer, Peter L., "Aggregation of inequalities in integer programming", *Annals of Discrete Mathematics*, 1, pp. 145–162, 1977
- [11] Coleman, Thomas F.; Moré, Jorge J., "Estimation of sparse Jacobian matrices and graph coloring Problems", *SIAM Journal on Numerical Analysis* 20 (1), pp. 187–209, 1983
- [12] S. A Cook, "The complexity of theorem-proving procedures", *Proc. 3rd ACM Symposium on Theory of Computing*, pp. 151–158, 1971.
- [13] D. G Corneil, H. Lerchs, Burlingham L. Stewart, "Complement reducible graphs", *Discrete Applied Mathematics* 3, pp 163–174, 1981.
- [14] G. A. Dirac, "On rigid circuit graphs", *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 25, pp 71-76, 1961.
- [15] K.J. Edwards, "The harmonious chromatic number and the achromatic number", *Surveys in Combinatorics* (R.A. Baily, ed.), Cambridge University Press, Cambridge, pp 13-47, 1997
- [16] K.J. Edwards, C. McDiarmid, "The complexity of harmonious coloring for trees", *Discrete Applied Math.* 57, pp 133-144, 1995.



- [17] M. Farber, G Hahn, P. Hell, D. J Miller., “Concerning the achromatic number of graphs”, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 40: 21–39, 1986.
- [18] O. Frank, F Harary, M. Plantholt, “The line-distinguishing chromatic number of a graph”, *Ars Combin.* 14, pp 241–252, 1982
- [19] S. Földes, Hammer, Peter L. “Split graphs having Dilworth number two”, *Canad. J. Math.* 29, no. 3, pp 666-672, 1977a
- [20] S. Földes, Hammer, Peter L. “Split graphs”, *Proceedings of the Eighth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Louisiana State Univ., Baton Rouge, La.)*, *Congressus Numerantium*, XIX, Winnipeg: Utilitas Math., pp. 311–315, 1977.
- [21] S. Földes, Hammer, Peter L. “The Dilworth number of a graph”, *Ann. Discrete Math.* 2, pp 211-219, 1978.
- [22] D. Fulkerson, O. Gross, “Incidence matrices and interval graphs”, *Pac. J. Math* 15, pp 835-855, 1965.
- [23] M. R. Garey and D. S. Johnson, “Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness.” W.H. Freeman. ISBN 0-7167-1045-5. A1.1: GT5, pp.191, 1979.
- [24] F. Gavril, “The intersection graphs of subtrees in trees are exactly the chordal graphs”, *J. Combinatorial Theory Ser B* 16, pp 47-56, 1974.
- [25] A. Ghoulia-Houri, “Characterisation des matrices totalement unimodulaires”, *C.R. Acad. Sci.Paris*, 254, pp. 1192–1194, 1962
- [26] P. C. Gilmore, A. J. Hoffman, “A characterization of comparability graphs and of interval graphs”, *Canadian Journal of Mathematics* 16, pp 539–548, 1964
- [27] M. C. Golumbic, “Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs”, Academic Press, New York, 1980. *Transactions on Graphics*, Vol. 3(2), pp 101-112, October 2001.
- [28] M. C. Golumbic, “Trivially perfect Graphs”, *Discrete Math.* 24, pp. 105-107, 1978.
- [29] M. Grötschel, L. Lovász, A. Schrijver, “Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization”, Springer-Verlag, chapter 9, “Stable Sets in Graphs”, pp. 273–303, 1988
- [30] F. Harary, S.T. Hedetniemi, “The achromatic number of a graph”, *J. Combin. Theory* 8, pp 154–161, 1970.
- [31] F. Harary, S.T. Hedetniemi, G. Prins, “An interpolation theory for graphical homomorphisms”, *Port. Math.* 26, pp. 453–462, 1967
- [32] G. Hajos, “Über eine Art von Graphen” *Internat. Math. Nachr.*, pp. 65.16, 1957.
- [33] J.E. Hopcroft, M.S. Krishnamoorthy, “On the harmonious coloring of graphs”, *SIAM J. Alg. Discrete Meth.* 4, pp 306–311, 1983.



- [34] K. Ioannidou and S.D. Nikolopoulos, "Colinear Coloring on Graphs", 3rd Int'l Workshop on Algorithms and Computation (WALCOM'09), LNCS 5431, pp. 117–128, 2009.
- [35] K. Ioannidou and S.D. Nikolopoulos, "Harmonious Coloring on Subclasses of Colinear Graphs", 4th Int'l Workshop on Algorithms and Computation (WALCOM'10), to appear.
- [36] H. A Jung, "On a class of posets and the corresponding comparability graphs", *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 24, pp 125–133, 1978.
- [37] R. M. Karp, "Probabilistic analysis of some combinatorial search problems", in Traub, J. F., "Algorithms and Complexity: New Directions and Recent Results", New York: Academic Press, pp. 1–19, 1976.
- [38] H. Lerchs, "On cliques and kernels", Tech. Report, Dept. of Comp. Sci., Univ. of Toronto, 1971
- [39] L. Lovász, "A characterization of perfect graphs", *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 13, pp 95–98, 1972
- [40] G. S. Lueker, "Structured breadth first search and chordal graphs", Princeton Univ. Tech. Rep, 1974
- [41] M. Kano, S.D. Nikolopoulos, "On the structure of A-free graphs: Part II", TR–1999-25, Department of Computer Science, University of Ioannina, 1999.
- [42] D. W. Matula, G. Marble, J. D. Isaacson, "Graph coloring algorithms". In *Graph Theory and Computing*, R C Read, Ed., Academic Press, New York, pp. 109–122, 1972.
- [43] S.D. Nikolopoulos, "Recognizing cographs and threshold graphs through a classification of their edges", *Inform. Process. Lett.* 75 129–139, 2000.
- [44] Diestel, Reinhard, "Graph Theory" (3rd ed.), Berlin, New York: Springer-Verlag, 2005
- [45] J. M. Robson, "Algorithms for maximum independent sets", *Journal of Algorithms* 7 (3): pp. 425–440, 1986
- [46] D. J. Rose, "Triangulated graphs and the elimination process", *J. Math. Anal. Appl.* 32, pp 597-609, 1970.
- [47] D. J. Rose and R. E. Tarjan "Algorithmic aspects of vertex elimination on graphs", *ACM Symp. Theory Comput., Proc 7<sup>th</sup> Annu.*, pp 245-254, 1975.
- [48] D. J. Rose, R. E. Tarjan, and G. S. Lueker, "Algorithmic aspects of vertex elimination on graphs", *SIAM J. Comp* 5, pp 266-283, 1976.
- [49] S. Seinsche, "On a property of the class of  $n$ -colorable graphs", *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 16, pp 191–193, 1974.
- [50] D. P. Sumner, "Dacey graphs", *J. Austral. Math. Soc.* 18, pp 492–502, 1974.
- [51] R. E. Tarjan, "Maximal cardinality search and chordal graphs", Stanford Univ., Unpublished Lecture Notes, 1976.





- [52] D. J. A. Welsh, M. B. Powell, "An upper bound for the chromatic number of a graph and its application to timetabling problems", *The Computer Journal* 10 (1), pp. 85–86, 1967
- [53] J. R. Walter, "Representations of *chordal* graphs as subtrees of a tree", *J. Graph Theory* 2, pp. 265-267, 1978.
- [54] E. S. Wolk, "The comparability graph of a tree", *Proceedings of the American Mathematical Society* 13 (5), pp. 789–795, 1962.
- [55] E. S. Wolk, "A note on "The comparability graph of a tree", *Proceedings of the American Mathematical Society* 16 (1), pp. 17–20, 1965.
- [56] Yan, Jing-Ho, Chen, Jer-Jeong, Chang, Gerard J., "Quasi-threshold graphs", *Discrete Applied Mathematics* 69 (3): pp. 247–255, 1996.
- [57] M. Yannakakis, F. Gavril, "Edge dominating sets in graphs", *SIAM J. Appl. Math.* 38, pp 364–372, 1980
- [58] The LEDA User Manual, Algorithmic Solutions, [http://www.algorithmic-solutions.info/leda\\_manual/MANUAL.html](http://www.algorithmic-solutions.info/leda_manual/MANUAL.html)



## ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ

---

Η Δήμητρα Τσάμη γεννήθηκε το 1983 στον Πύργο Ηλείας. Το 2001 εισήχθη στο Τμήμα Πληροφορικής του Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων. Το 2005 αποφοίτησε και συνέχισε τις σπουδές της στο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών του ίδιου τμήματος.

