

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



Thaniporn Chaysri

ΘΕΩΡΙΑ PERRON-FROBENIUS ,
ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Ιωάννινα, 2014

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα υπολογιστικά μαθηματικά και πληροφορική που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την 5/11/2014 από την εξεταστική επιτροπή:

Όνοματεπώνυμο	Βαθμίδα
Δημήτριος Νουτσός	Καθηγητής
Ευστράτιος Γαλλόπουλος	Καθηγητής
Παρασκευάς Βασσάλος	Επίκουρος Καθηγητής

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

“Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή.”

Thaniporn Chaysri

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Αρχικά, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές ευχαριστίες μου στον Καθηγητή Νούτσο Δημήτριο, ο οποίος με εισήγαγε στον κόσμο της «Αριθμητικής Γραμμικής Άλγεβρας» κατά τη διάρκεια του τρίτου έτους των σπουδών μου καθώς και κατά την διάρκεια των μεταπτυχιακών σπουδών μου. Δεν ήταν μόνο ο καλός επιβλέπων για τη διατριβή μου, αλλά και για πολλά άλλα που χρειάστηκα κατά τη διάρκεια της ζωής μου στα Ιωάννινα. Τον ευχαριστώ πολύ για την υπομονή του, τον ενθουσιασμό και την τεράστια γνώση που μου προσέφερε.

Εκτός από τον επιβλέποντα καθηγητή μου, θα ήθελα να ευχαριστήσω ξεχωριστά τα μέλη της τριμελούς επιτροπής για την παρούσα εργασία, τους καθηγητές κ.Βασάλο και κ.Γαλλόπουλο, για τη συμβολή τους στην ολοκλήρωση και στη διόρθωση της εργασίας μου. Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές του τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, που με δίδαξαν από την αρχή της προπτυχιακής μου ζωής. Ειδικά, τον κ.Μέξη, ο οποίος έκανε το μάθημα της «Γραμμικής Άλγεβρας», όταν ήμουν στο πρώτο έτος των σπουδών μου για την τεράστια γνώση που μου προσέφερε, τον κ.Γαλάνη, ο οποίος με εισήγαγε στον κλάδο των Υπολογιστικών Μαθηματικών με το μάθημα «Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση» όταν ήμουν δευτεροετής φοιτήτρια. Επίσης, τον κ.Χωρίκη για την υπομονή του όταν εκτός από το μεταπτυχιακό μάθημα που μου έκανε, μου μάθανε συγχρόνως να χρησιμοποιώ MATLAB και να γράφω σε L^AT_EX.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους δασκάλους από το Κέντρο Διδασκαλίας Ελληνικής Γλώσσας και Πολιτισμού (ΚΕ.Δ.Ε.Γ.ΠΟ.) του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, οι οποίοι μου δίδαξαν την ελληνική γλώσσα τόσο καλά για να καταφέρω να σπουδάσω σε ελληνικό πανεπιστήμιο και να είμαι σε θέση να γράψω αυτή τη διατριβή στα ελληνικά.

Κλείνοντας, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για την υποστήριξη, την ενθάρρυνση και τα κίνητρα που μου προσέφερε προκειμένου να σπουδάσω στην Ελλάδα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Από το 1907, ο Oskar Perron απέδειξε ένα θεώρημα για θετικούς πίνακες, το οποίο επεκτάθηκε από τον Georg Frobenius το 1912 για μη αναγωγίμους μη αρνητικούς πίνακες. Στη συνέχεια αναπτύχθηκε η γνωστή θεωρία Perron-Frobenius για μη αρνητικούς πίνακες. Θα διατυπώσουμε τους ορισμούς και θεωρήματα που χρειάζεται για το Θεώρημα Perron-Frobenius, και στην συνέχεια θα μελετήσουμε το Θεώρημα Perron-Frobenius και τις εφαρμογές του για τους κυκλικούς, primitive και μη-αναγωγίμους πίνακες. Πολλοί επιστήμονες έχουν επεκτείνει και εφαρμόσει αυτό το θεώρημα σε πολλούς κλάδους. Θα μελετήσουμε κάποιους απ'αυτούς, όπως την αριθμητική γραμμική άλγεβρα όσον αφορά την ιδιότητα Perron-Frobenius, διασπάσεις Perron-Frobenius καθώς και εφαρμογές του θεωρήματος Stein-Rosenberg. Στην μελέτη δυναμικών συστημάτων, χρησιμοποιώντας θεωρία κώνων, μπορούμε να εφαρμόσουμε την ιδιότητα Perron-Frobenius για τη μελέτη της προσβασιμότητας και παραμονής της τροχιάς στον κώνο των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών. Έστω $A = sI - B$ ένας τετραγωνικός πίνακας. Χαρακτηρίζουμε τους πίνακες A και B και μελετούμε μια ειδική κατηγορία των M -πίνακων και επεκτάσεων αυτής. Τέλος, μελετούμε το πως ιδιότητα Perron εφαρμόζεται στους πίνακες προσήμου που ανήκει στον κλάδο της Συνδυαστικής θεωρίας πινάκων (Combinatorial matrix theory).

ABSTRACT

The foundations of what today is called Perron-Frobenius theory were laid by Oscar Perron in 1907 with a result on positive matrices and Georg Frobenius in 1912, who extended that result to the case of irreducible nonnegative matrices. In this thesis, we first provide all the definitions and theorems that are necessary to understand the Perron-Frobenius theorem. We then study the theorem and its extensions and the associated Perron-Frobenius property, with special emphasis on situations involving cyclic, primitive and irreducible matrices. As is well known, the theorem finds uses in a large number of areas. We are particularly interested in its applications in numerical linear algebra where we consider Perron-Frobenius splittings and extensions of the Stein-Rosenberg theorem. Another application of interest is that of dynamical systems and the associated cone theory, where we apply the property to the study reachability and holdability of nonnegative states. We also consider square matrices of the form $A = sI - B$ and study a special class of M -matrices and extensions thereof. We finally study a topic from Combinatorial Matrix Theory, that is the application of the Perron-Frobenius property to sign pattern matrices.

ΣΥΜΒΟΛΑ

$\rho(A)$	Φασματική Ακτίνα του πίνακα A
$\sigma(A)$	Φάσμα των ιδιοτιμών του πίνακα A
$\lambda(A)$	Spectral abscissa του πίνακα A
$\det(A)$	Ορίσουζα του πίνακα A
A^T	Ανάστροφος του πίνακα A
A^H	Συζυγής Ανάστροφος του πίνακα A
$\ A\ $	Ευκλείδεια νόρμα του πίνακα A
$\ A\ _1$	l_1 -norm του πίνακα A
$\ A\ _\infty$	l_∞ -norm του πίνακα A ή Maximum norm του πίνακα A
\mathbb{R}	Σώμα των Πραγματικών Αριθμών
\mathbb{C}	Σώμα των Μιγαδικών Αριθμών
\mathbb{Z}	Σώμα των Ακεραίων Αριθμών
\mathbb{Z}_+	Σώμα των Ακεραίων Θετικών Αριθμών
\mathbb{Z}_-	Σώμα των Ακεραίων Αρνητικών Αριθμών
$i = 1(1)n$	$i = 1, 2, 3, \dots, n$
\mathbb{R}_+^n	Nonnegative orthant ή σύνολο των μη-αρνητικών διανυσμάτων στο \mathbb{R}^n (Μη-αρνητικός Κώνος)
x^T	Ανάστροφος του διανύσματος $x \in \mathbb{R}^n$
x^H	Συζυγής ανάστροφος του διανύσματος $x \in \mathbb{C}^n$
$\ x\ $	Ευκλείδεια νόρμα του διανύσματος x
$\ x\ _1$	l_1 -norm του διανύσματος x
$\ x\ _\infty$	l_∞ -norm του διανύσματος x ή Maximum norm του διανύσματος x
$\ x\ _p$	l_p -norm του διανύσματος x
$p_A(\lambda)$	Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο του πίνακα A
$tr(A)$	Τίχνος του A (trace of A)
e^A	Εκθετικός πίνακας του A
$\deg(p)$	Βαθμός του πολυωνύμου p

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη	i
Abstract	iii
1 Εισαγωγή, Ορισμοί και Βασική Θεωρία	3
1.1 Πίνακες	3
1.1.1 Βασικοί ορισμοί των πινάκων	3
1.1.2 Πράξεις Πινάκων	6
1.1.3 Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα	7
1.1.4 Αναγώγιμοι και Μη-Αναγώγιμοι Πίνακες	9
1.1.5 Θετικά ορισμένοι Πίνακες	9
1.1.6 Ελάχιστο Πολυώνυμο (Minimal Polynomial)	10
1.1.7 Κανονική Μορφή του Frobenius (Frobenius Normal Form)	10
1.1.8 Ειδικές κατηγορίες πινάκων	11
1.2 Εισαγωγή στη Θεωρία Γραφημάτων	11
1.2.1 Ορισμός	11
1.2.2 Κλάση Πρόσβασης (access class)	12
1.2.3 Primitive γράφημα	12
1.2.4 Αναγώγιμο Γράφημα (Reduced Graph)	13
1.3 Εισαγωγή στη θεωρία κώνων (cone theory)	13
2 Θεωρία Perron-Frobenius	15
2.1 Θεωρία Perron-Frobenius	15

2.2	Θεωρία Perron-Frobenius για κυκλικούς πίνακες (cyclic matrices) και Primitive πίνακες	20
2.3	Θεωρία Perron-Frobenius και αναγώγιμοι πίνακες	24
3	Επεκτάσεις του Θεωρήματος Perron-Frobenius	29
3.1	Ιδιότητα Perron-Frobenius (Perron-Frobenius property)	29
3.1.1	Ιδιότητα Perron-Frobenius	29
3.1.2	Άθροισμα στήλων ή γραμμών και φασματική ακτίνα	35
3.1.3	Ιδιότητες Μονοτονίας	38
3.2	Διασπάσεις Perron-Frobenius (Perron-Frobenius Splittings)	39
3.3	Θεώρημα Stein-Rosenberg σε σχέση με τις διασπάσεις πινάκων	48
3.3.1	Θεωρήματα Stein-Rosenberg σχετιζόμενα με μη αρνητικές διασπάσεις	49
3.3.2	Θεωρήματα Stein-Rosenberg σχετιζόμενα με διασπάσεις Perron-Frobenius	53
3.4	Επεκτάσεις της θεωρίας Perron-Frobenius στη θεωρία κώνων	57
3.4.1	Προσβασιμότητα και παραμονή της τροχιάς στον κώνο των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών	57
3.4.2	Κώνος προσβασιμότητας για τους ουσιαστικά μη αρνητικούς πίνακες	61
4	M-πίνακες (M-matrices)	67
4.1	EM -πίνακες και M_θ -πίνακες	69
4.2	Γενικευμένοι M -πίνακες (Generalized M -matrices) ή GM -matrices	74
5	Πίνακας προσήμου (Sign Pattern Matrix)	77
5.1	Πίνακας προσήμου και κατευθυνόμενο γράφημα	78
5.2	Πίνακας Προσήμου με την Θεωρία Perron-Frobenius	79
5.3	Πίνακας Προσήμου που απαιτεί την τελική θετικότητα ή τελική μη αρνητικότητα	82

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ, ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

1.1 Πίνακες

1.1.1 Βασικοί ορισμοί των πινάκων

Ορισμός 1.1. Ένας πίνακας A με n γραμμές και m στήλες λέγεται $n \times m$ πίνακας και γράφεται ως

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

ή

$$A = [a_{ij}]_{n \times m},$$

όπου το a_{ij} είναι το στοιχείο στην i -γραμμή και j -στήλη του πίνακα. Συμβολίζουμε $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ αν τα $a_{ij} \in \mathbb{R}$ και $A \in \mathbb{C}^{n,m}$ αν τα $a_{ij} \in \mathbb{C}$.

Ορισμός 1.2. Ένας πίνακας A με n γραμμές και n στήλες λέγεται **τετραγωνικός πίνακας** (*square matrix*).

Ορισμός 1.3. Ένας τετραγωνικός πίνακας D λέγεται **διαγώνιος πίνακας** (*diagonal matrix*) αν τα μη διαγώνια στοιχεία του είναι όλα μηδέν. Συμβολίζεται ως $D = \text{diag}(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn})$, όπου $d_{ii}, i = 1(1)n$ τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα D .

Ορισμός 1.4. Ένας τετραγωνικός πίνακας A λέγεται

- **κάτω τριγώνιος πίνακας** (*lower triangular matrix*) αν τα στοιχεία a_{ij} για $i < j$ είναι όλα μηδέν,
- **άνω τριγώνιος πίνακας** (*upper triangular matrix*) αν τα στοιχεία a_{ij} για $i > j$ είναι όλα μηδέν.

Ορισμός 1.5. Ένας πίνακας A λέγεται **μηδενικός πίνακας** (*zero matrix*) αν τα στοιχεία a_{ij} για κάθε i, j είναι όλα μηδέν και συμβολίζεται με \mathbb{O} ή με απλό 0 .

Ορισμός 1.6. Ένας πίνακας I λέγεται **μοναδιαίος πίνακας** (*identity matrix*) αν είναι διαγώνιος πίνακας με όλα τα διαγώνια στοιχεία μονάδες και συμβολίζεται με I .

Ορισμός 1.7. Ο **ανάστροφος πίνακας** (*transpose matrix*) του $A = [a_{ij}]_{n \times m}$ είναι ο $A^T = [a_{ji}]_{m \times n}$.

Ορισμός 1.8. Ο **συζυγής ανάστροφος πίνακας** (*conjugate transpose matrix*) του $A \in \mathbb{C}^{n,m}$ είναι ο $A^H \in \mathbb{C}^{m,n}$ που αποτελείται από τα συζυγής στοιχεία του A^T .

Ορισμός 1.9. Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ λέγεται **συμμετρικός πίνακας** (*symmetric matrix*) αν και μόνο αν $A^T = A$.

Ορισμός 1.10. Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ λέγεται **ερμιτιανός πίνακας** (*Hermitian matrix*) αν και μόνο αν $A^H = A$.

Ορισμός 1.11. Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ λέγεται **αντι-ερμιτιανός πίνακας** (*Anti-Hermitian matrix*) αν και μόνο αν $A^H = -A$.

Ορισμός 1.12. Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι **αντιστρέψιμος** (*invertible*) αν υπάρχει πίνακας $A^{-1} \in \mathbb{C}^{n,n}$ τέτοιος ώστε

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A,$$

όταν ο I είναι ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας και ο πίνακας A^{-1} ονομάζεται **αντίστροφος πίνακας** (*inverse matrix*) του A .

Ορισμός 1.13. Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ λέγεται **ορθομοναδιαίος πίνακας** (*unitary matrix*) αν ισχύει την σχέση

$$AA^H = I = A^H A,$$

όταν ο I είναι ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας και ο πίνακας A^H είναι ο συζυγής ανάστροφος πίνακας του A .

Ορισμός 1.14. Ένας τετραγωνικός πίνακας A λέγεται **ορθογώνιος πίνακας** (*orthogonal matrix*) αν και μόνο αν $A^T = A^{-1}$.

Ορισμός 1.15. Ένας τετραγωνικός πίνακας A λέγεται

- **θετικός πίνακας** (*positive matrix*) αν ισχύει $a_{ij} > 0$ για κάθε i και j και συμβολίζεται με $A > 0$,
- **μη αρνητικός πίνακας** (*nonnegative matrix*) αν ισχύει $a_{ij} \geq 0$ για κάθε i και j και συμβολίζεται με $A \geq 0$.

Ορισμός 1.16. Ένας τετραγωνικός πίνακας A λέγεται

- **ουσιαστικά θετικός πίνακας** (*essentially positive matrix*) αν ισχύει $a_{ij} > 0$ για κάθε $i \neq j$ και συμβολίζεται με $A \stackrel{e}{>} 0$,
- **ουσιαστικά μη αρνητικός πίνακας** (*essentially nonnegative matrix*) αν ισχύει $a_{ij} \geq 0$ για κάθε $i \neq j$ και συμβολίζεται με $A \stackrel{e}{\geq} 0$.

Ορισμός 1.17. Ένας τετραγωνικός πίνακας A λέγεται

- **τελικά θετικός πίνακας** (*eventually positive matrix*) αν υπάρχει $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ τέτοιο ώστε $A^k > 0$ για κάθε $k \geq k_0$ και συμβολίζεται με $A \stackrel{v}{>} 0$,
- **τελικά μη αρνητικός πίνακας** (*eventually nonnegative matrix*) αν υπάρχει $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ τέτοιο ώστε $A^k \geq 0$ για κάθε $k \geq k_0$ και συμβολίζεται με $A \stackrel{v}{\geq} 0$.

Ο μικρότερος δυνατός θετικός ακέραιος $k_0 = k_0(A)$, ώστε ο A να είναι τελικά θετικός ή τελικά μη αρνητικός, λέγεται **δείκτης δύναμης** (*power index*) του A .

Ορισμός 1.18. Ένας τετραγωνικός πίνακας A λέγεται

- **εκθετικά θετικός πίνακας** (*exponentially positive matrix*) αν για κάθε $t \geq 0$ ισχύει $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} > 0$,
- **εκθετικά μη αρνητικός πίνακας** (*exponentially nonnegative matrix*) αν για κάθε $t \geq 0$ ισχύει $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \geq 0$.

Θεώρημα 1.19. [13] Ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι εκθετικά μη αρνητικός πίνακας αν και μόνο αν είναι ουσιαστικά μη αρνητικός πίνακας.

Ορισμός 1.20. Ένας τετραγωνικός πίνακας A λέγεται

- **τελικά εκθετικά θετικός πίνακας** (*eventually exponentially positive matrix*) αν υπάρχει $t_0 \in [0, \infty)$ τέτοιο ώστε για κάθε $t \geq t_0$ ισχύει $e^{tA} > 0$,
- **τελικά εκθετικά μη αρνητικός πίνακας** (*eventually exponentially nonnegative matrix*) αν υπάρχει $t_0 \in [0, \infty)$ τέτοιο ώστε για κάθε $t \geq t_0$ ισχύει $e^{tA} \geq 0$.

Ο μικρότερος δυνατός μη αρνητικός ακέραιος $t_0 = t_0(A)$, ώστε ο A να είναι τελικά εκθετικά θετικός ή τελικά εκθετικά μη αρνητικός, λέγεται **εκθετικός δείκτης** (*exponential index*) του A .

Ορισμός 1.21. Ένας τετραγωνικός πίνακας A λέγεται **μηδενοποιήσιμος** (*nilpotent*) αν υπάρχει $k \in \mathbb{Z}_+$ τέτοιο ώστε $A^k = 0$. Ο μικρότερος δυνατός τέτοιο $k \in \mathbb{Z}_+$ λέγεται **δείκτης μηδενοποίησης** (*index of nilpotence*) του A .

Ορισμός 1.22. Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,m}$. Ο πίνακας S_{ij} που προκύπτει από τον πίνακα A όταν διαγράψουμε τη γραμμή i και τη στήλη j λέγεται **υποπίνακας** (*submatrix*) του A .

Ορισμός 1.23. Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Ο πίνακας $P \in \mathbb{C}^{m,m}$ ($m < n$) που προκύπτει από τον πίνακα A όταν διαγράψουμε $m - n$ γραμμές και τις ίδιες $m - n$ στήλες λέγεται **κύριος υποπίνακας** (*principal submatrix*) του A .

1.1.2 Πράξεις Πινάκων

Εκτός από τις γνωστές πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού πινάκων, ορίζονται και οι παρακάτω πράξεις:

Ορισμός 1.24. Το ευθύ άθροισμα (*direct sum*) του $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ και του $B \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Γενικά, έστω $A_i, i = 1, \dots, n$ τετραγωνικοί πίνακες, τότε το ευθύ άθροισμα όλων αυτών είναι

$$\bigoplus_{i=1}^n A_i = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{bmatrix}.$$

Ορισμός 1.25. Το γινόμενο του Kronecker (Kronecker product) $A \in \mathbb{C}^{n,m}$ και του $B \in \mathbb{C}^{q,r}$ είναι ο πίνακας $C \in \mathbb{C}^{n+q,m+r}$ τέτοιος ώστε

$$C = A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nm}B \end{bmatrix}.$$

1.1.3 Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

Ορισμός 1.26. Έστω ο τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Αν $x \in \mathbb{C}^n$ με $x \neq 0$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε

$$Ax = \lambda x, \quad (1.1)$$

τότε το λ ονομάζεται **ιδιοτιμή (eigenvalue)** του πίνακα A και το διάνυσμα x ονομάζεται **ιδιοδιάνυσμα (eigenvector)** ή δεξιό ιδιοδιάνυσμα (*right eigenvector*) του πίνακα A , αντίστοιχο της ιδιοτιμής λ .

Αν $y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε

$$y^H A = \lambda y^H, \quad (1.2)$$

τότε το διάνυσμα y ονομάζεται **αριστερό ιδιοδιάνυσμα (left eigenvector)** του πίνακα A , αντίστοιχο της ιδιοτιμής λ .

Πρόταση 1.27. Έστω ο τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

- i) το λ είναι μια ιδιοτιμή του A ,
- ii) $\det(A - \lambda I) = 0$.

Ορισμός 1.28. Έστω ο τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, τότε

- $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ λέγεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του πίνακα A ,
- $p_A(\lambda) = 0$ λέγεται **χαρακτηριστική εξίσωση** του πίνακα A , ρίζες της οποίας είναι όλες οι ιδιοτιμές του A .

Ορισμός 1.29. Έστω ο τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ και $\lambda_i \in \mathbb{C}, i = 1(1)n$ ιδιοτιμές του A τότε

- $\sigma(A) := \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ λέγεται **φάσμα των ιδιοτιμών (spectrum)** του πίνακα A ,
- $\rho(A) := \max_{i=1(1)n} |\lambda_i|$ λέγεται **φασματική ακτίνα (spectral radius)** του πίνακα A ,
- $\lambda(A) : \lambda(A) \in \sigma(A)$ τέτοιο ώστε $|\operatorname{Re}(\lambda_i)| = \max_i |\operatorname{Re}(\lambda_i)|, \lambda_i \in \sigma(A), i = 1(1)n$ λέγεται **spectral abscissa** του πίνακα A ,
- λ λέγεται **κυρίαρχη ιδιοτιμή (dominant eigenvalue)** του πίνακα A αν $|\lambda| := \rho(A)$,
- $\lambda \in \sigma(A)$ λέγεται **αυστηρά κυρίαρχη ιδιοτιμή (strictly dominant eigenvalue)** του πίνακα A αν $|\lambda| > |\mu|, \forall \mu \in \sigma(A), \mu \neq \lambda$.

Ορισμός 1.30. **Βαθμίδα (rank)** ενός πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,m}$ λέγεται ο μέγιστος αριθμός γραμμικών ανεξαρτήτων γραμμών ή στηλών του πίνακα και συμβολίζεται με $\operatorname{rank}(A)$.

Ορισμός 1.31. **Μηδενικότητα (Nullity)** ενός πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,m}$ λέγεται ο μέγιστος αριθμός εξαρτημένων συνιστωσών του διανύσματος x του ομογενούς γραμμικού συστήματος $Ax = 0$ και συμβολίζεται με $\operatorname{Nullity}(A)$.

Θεώρημα 1.32. Για $A \in \mathbb{C}^{n,m}$ έχουμε $\operatorname{rank}(A) + \operatorname{Nullity}(A) = m$.

Ορισμός 1.33. Έστω ο τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ τότε ο **συνήθης ιδιοχώρος (ordinary eigenspace)** του A για την ιδιοτιμή λ του A συμβολίζεται με $E_\lambda(A)$ και ορίζεται με $E_\lambda(A) = \mathcal{N}(A - \lambda I)$ όπου $\mathcal{N}(A - \lambda I)$ είναι ο πυρήνας (nullspace) του $A - \lambda I$. Η διάσταση του χώρου αυτού είναι $\operatorname{Nullity}(A - \lambda I)$.

Θεώρημα 1.34 (Κανονική μορφή του Schur). [19] Δοθέντος ενός πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, υπάρχει ένας ορθοκανονικός πίνακας $Q \in \mathbb{C}^{n,n}$ και ένας άνω τριγωνικός πίνακας $T \in \mathbb{C}^{n,n}$ τέτοιος ώστε

$$Q^H A Q = T. \quad (1.3)$$

Προφανώς οι ιδιοτιμές του A θα είναι τα διαγώνια στοιχεία του T .

Θεώρημα 1.35 (Πραγματική Κανονική μορφή του Schur). [19] Δοθέντος ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, υπάρχει ένας πραγματικός ορθογώνιος πίνακας $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ και πραγματικός “σχεδόν” άνω τριγωνικός πίνακας $T \in \mathbb{R}^{n,n}$ τέτοιος ώστε

$$Q^T A Q = T. \quad (1.4)$$

Το “σχεδόν” άνω τριγωνικός σημαίνει ότι ο T θα είναι block άνω τριγωνικός με διαγώνια blocks 1×1 , που θα αντιστοιχούν στις πραγματικές ιδιοτιμές ή 2×2 , που θα αντιστοιχούν σε ζεύγη συζυγών μιγαδικών ιδιοτιμών.

Θεώρημα 1.36 (Geršgorin). [19] Αν $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, τότε οι ιδιοτιμές του λ_i , $i = 1(1)n$ ανήκουν στην ένωση των δίσκων του μιγαδικού επιπέδου

$$\bigcup_{i=1}^n \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \right\}. \quad (1.5)$$

1.1.4 Αναγώγιμοι και Μη-Αναγώγιμοι Πίνακες

Ορισμός 1.37. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ λέγεται **αναγώγιμος** (*reducible*) αν υπάρχει μεταθετικός πίνακας $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ τέτοιος ώστε

$$P A P^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad (1.6)$$

όπου $A_{11} \in \mathbb{C}^{r,r}$, $A_{22} \in \mathbb{C}^{n-r,n-r}$ και $A_{12} \in \mathbb{C}^{r,n-r}$, $0 < r < n$.

Ορισμός 1.38. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ λέγεται **μη-αναγώγιμος** (*irreducible*) αν δεν είναι αναγώγιμος.

1.1.5 Θετικά ορισμένοι Πίνακες

Ορισμός 1.39. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ με $A^H = A$ λέγεται **θετικά ορισμένος** αν για κάθε διάνυσμα $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ισχύει $(x, Ax)_2 > 0$ ή $x^H A x > 0$.

Θεώρημα 1.40. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ με $A^T = A$ είναι **θετικά ορισμένος** αν για κάθε διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ισχύει $(x, Ax)_2 > 0$ ή $x^T Ax > 0$.

Θεώρημα 1.41. Έστω ότι ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ με $A^H = A$ (Ερμιτιανός) και θετικά ορισμένος. Αν διαγράψουμε μια οποιαδήποτε γραμμή του και την αντίστοιχη στήλη του, ο πίνακας $A' \in \mathbb{C}^{(n-1),(n-1)}$ που απομένει είναι επίσης Ερμιτιανός και θετικά ορισμένος.

Πόρισμα 1.42. Έστω ότι ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι Ερμιτιανός και θετικά ορισμένος τότε αν διαγράψουμε οσοδήποτε γραμμές του και τις αντίστοιχες στήλες του ο πίνακας που απομένει είναι επίσης Ερμιτιανός και θετικά ορισμένος.

Πόρισμα 1.43. Έστω ότι ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι Ερμιτιανός και θετικά ορισμένος τότε τα διαγώνια στοιχεία του είναι θετικά.

Θεώρημα 1.44. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ με $A^T = A$ (συμμετρικός) είναι θετικά ορισμένος αν όλοι οι κύριοι $p \times p$ υποπίνακες του $A_{p \times p}$, $p = 1(1)n$, έχουν ορίζουσες θετικές.

1.1.6 Ελάχιστο Πολυώνυμο (Minimal Polynomial)

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο το $p_A(\lambda)$ ορίζουμε τον ορισμό του ελαχίστου πολυωνύμου ως εξής:

Ορισμός 1.45. Το πολυώνυμο m λέγεται **ελάχιστο πολυώνυμο (minimal polynomial)** και συμβολίζεται με $m_A(\lambda)$ για τον πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ αν $m_A(\lambda)$ είναι το πολυώνυμο μικρότερου δυνατού βαθμού τέτοιο ώστε $m_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow p_A(\lambda) = 0$. Προφανώς, ισχύει ότι $\deg(m_A(\lambda)) \leq \deg(p_A(\lambda))$. Το $m_A(\lambda)$ είναι κανονικοποιημένο (δηλαδή ο συντελεστής του μεγιστοβαθμίου όρου του είναι η μονάδα).

1.1.7 Κανονική Μορφή του Frobenius (Frobenius Normal Form)

Ορισμός 1.46. Για κάθε αναγώγιμο πίνακα A υπάρχει μεταθετικός πίνακας P τέτοιος ώστε να ισχύει

$$PAP^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1p} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{pp} \end{bmatrix}, \quad (1.7)$$

όπου A_{ii} , $i = 1(1)p$ είναι μη-αναγώγιμος πίνακας ή 1×1 μηδενικός πίνακας.

1.1.8 Ειδικές κατηγορίες πινάκων

- Ο A λέγεται **M -Πίνακας** (**M -Matrix**), αν $A = sI - B$, με $B \geq 0$ και $s \geq \rho(B) \geq 0$.
- Ο A λέγεται **Ψευδο- M -Πίνακας** (**Pseudo- M -Matrix**), αν $A = sI - B$, με $B \stackrel{v}{>} 0$ και $s > \rho(B)$.
- Ο A λέγεται **M_v -Πίνακας** (**M_v -Matrix**), αν $A = sI - B$, με $B \stackrel{v}{\geq} 0$ και $s \geq \rho(B) \geq 0$.
- Ο A λέγεται **Z -Πίνακας** (**Z -Matrix**), αν $a_{ij} \leq 0$, $\forall i \neq j$. Τότε, ο $-A$ λέγεται ουσιαστικά μη αρνητικός (essentially nonnegative).
- Ο A λέγεται **P -Πίνακας** (**P -Matrix**), αν κάθε κύρια υποορίζουσα του είναι θετική.
- A λέγεται **P_0 -Πίνακας** (**P_0 -Matrix**), αν κάθε κύρια υποορίζουσα του είναι μη αρνητική.

1.2 Εισαγωγή στη Θεωρία Γραφημάτων

1.2.1 Ορισμός

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα (directed graph) Γ είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος $\Gamma = (V, E)$ όπου

- V είναι το σύνολο όλων των κορυφών (vertex set), δηλαδή αν το γράφημα Γ έχει n κορυφές, τότε $V(\Gamma) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ και το πλήθος των κορυφών είναι $|V(\Gamma)| = n$.
- $E \subseteq V \times V$ είναι το σύνολο των ακμών (edge set) δηλαδή αν το γράφημα Γ έχει m ακμές, τότε $E(\Gamma) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Κάθε ακμή είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος δύο κορυφών: $e = (v_i, v_j)$ και το πλήθος των ακμών είναι $|E(\Gamma)| = m$.

Ορίζουμε τα παρακάτω:

- **γειτονιά** μιας κορυφής $v \in V(\Gamma)$: $N_\Gamma(v) = \{u | (v, u) \in E(\Gamma) \text{ ή } (u, v) \in E(\Gamma)\}$,

- **βαθμό κορυφής (degree of vertices)**: $\deg_{\Gamma}(v) = |N_{\Gamma}(v)|$,
- **περίπατο (walk) W** από την κορυφή u στη v : την ακολουθία κορυφών που αρχίζει από την u και τελειώνει στη v , δηλαδή $W = [u = i_1, i_2, \dots, i_{k+1} = v]$, τότε το μήκος του είναι k ,
- **μονοπάτι (path) P** από την κορυφή u στη v : την ακολουθία κορυφών που αρχίζει από την u και τελειώνει στη v και όλες οι κορυφές είναι διακεκριμένες, δηλαδή $P = [u = i_1, i_2, \dots, i_{k+1} = v]$, τότε το μήκος του είναι k ,
- **κύκλος (cycle) C** στο Γ : την ακολουθία κορυφών που αρχίζει και τελειώνει στην ίδια κορυφή και όλες οι κορυφές είναι διακεκριμένες, δηλαδή $C = [u = i_1, i_2, \dots, i_k, i_1 = u]$, τότε το μήκος του είναι k . Είναι ένα μονοπάτι από την u στην u μήκος k .

1.2.2 Κλάση Πρόσβασης (access class)

Λέμε ότι μια κορυφή $u \in V$ έχει **πρόσβαση (has access)** στη $v \in V$ αν υπάρχει ένα μονοπάτι από την u στη v στο Γ .

Ορίζουμε τα παρακάτω ως εξής:

- $In(v)$: το σύνολο των κορυφών που έχουν πρόσβαση στη v ,
- $Out(v)$: το σύνολο των κορυφών στις οποίες η v έχει πρόσβαση,
- το ζευγός κορυφών u και v λέγεται **ισοδύναμη πρόσβαση (access equivalent)** αν η u έχει πρόσβαση στην v και η v στην u .

1.2.3 Primitive γράφημα

Ορισμός 1.47. Ένα γράφημα Γ λέγεται **συνεκτικό (connected)** αν για κάθε ζεύγος κορυφών $u, v \in V(\Gamma)$ υπάρχει (u, v) -μονοπάτι στο Γ .

Ορισμός 1.48. Ένα κατευθυνόμενο γράφημα Γ λέγεται **ισχυρά συνεκτικό (strongly connected)** αν για κάθε ζεύγος κορυφών $u, v \in V(\Gamma)$ υπάρχει (u, v) -μονοπάτι στο Γ .

Ορισμός 1.49. Ένα κατευθυνόμενο γράφημα Γ λέγεται **primitive** αν είναι ισχυρά συνεκτικό και ο ΜΚΔ των μηκών όλων των κύκλων του είναι 1.

Θεώρημα 1.50. Ένα κατευθυνόμενο γράφημα Γ είναι *primitive* αν $\exists k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\forall u, v \in V(\Gamma)$, υπάρχει ένας περίπατος μήκους k από την u στη v .

1.2.4 Αναγώγιμο Γράφημα (Reduced Graph)

Ορισμός 1.51. Ένα σύνολο ακμών $K \subset E$ στο γράφημα $\Gamma = (V, E)$ λέγεται *αναγώγιμη κλάση του A* αν το υπογράφημα (K, E_k) είναι αυστηρά συνεκτικό, όπου $E_k = \{(e_i, e_j) \mid i, j \in K\} \subset E$.

Ορισμός 1.52. [9] Ένα γράφημα $R(A) = (V, E)$ λέγεται *αναγώγιμο γράφημα (reduced graph)* αν

- $V = \{K : K \text{ είναι μια μη-αναγώγιμη κλάση του } A\}$,
- $E = \{(K, L) : \exists (j, l) \in \Gamma(A), j \in K, l \in L\}$.

1.3 Εισαγωγή στη θεωρία κώνων (cone theory)

Ορισμός 1.53. Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^n$, κατασκευάζουμε τα σύνολα:

- S^G : το σύνολο που παράγεται από το S και αποτελείται από όλους τους πεπερασμένους μη αρνητικούς γραμμικούς συνδιασμούς στοιχείων του S ,
- $S^* = \{y \in \mathbb{R}^n : x \in S \rightarrow (x, y) \geq 0\}$: το δυϊκό (dual) χώρο του S όπου το (x, y) είναι το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο.

Το σύνολο K καλείται **κώνος (cone)** αν $K = K^G$.

Ορισμός 1.54. Ένας κυρτός κώνος (convex cone) λέγεται:

- σημειακός (pointed) αν $K \cap (-K) = \{0\}$, δηλαδή $x, -x \in K \Rightarrow x = 0$,
- μη τετριμμένος (solid) αν $\text{int}(K) \neq \emptyset$ όπου $\text{int}(K)$ είναι εσωτερικό του K ,
- ανακατασκευάσιμος (reproducing) αν $K - K = \mathbb{R}^n$, δηλαδή $(\forall z \in \mathbb{R}^n) (\exists x, y \in K)$ τέτοιο ώστε $z = x - y$.

Θεώρημα 1.55. Έστω K είναι ένας σημειακός κλειστός κυρτός (pointed closed convex) κώνος. Τότε,

$$\text{int}(K^*) = \{y \in K^* : 0 \neq x \in K \rightarrow (x, y) > 0\}.$$

Ορισμός 1.56. Ένας κυρτός κώνος λέγεται *proper cone* αν είναι:

1. κλειστός (*closed*) αν $K + K \subseteq K$, δηλαδή $x, y \in K \Rightarrow x + y \in K$ και $\mathbb{R}_+ K \subseteq K$, δηλαδή $x \in K, c \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow cx \in K$,
2. σημειακός (*pointed*), δηλαδή $x, -x \in K \Rightarrow x = 0$,
3. μη τετριμμένος (*solid*), δηλαδή $\text{int}(K) \neq \emptyset$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΘΕΩΡΙΑ PERRON-FROBENIUS

2.1 Θεωρία Perron-Frobenius

Πριν διατυπώσουμε και αποδείξουμε το θεώρημα Perron-Frobenius θα δώσουμε μερικές βασικές χρήσιμες προτάσεις.

Λήμμα 2.1. [18] Έστω ένας $n \times n$ μη-αναγώγιμος πίνακας $A \geq 0$, τότε $(I + A)^{n-1} > 0$.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξω ότι $(I + A)^{n-1} x > 0$ για $x \geq 0$ και $x \neq 0$.

Ορίζουμε μια ακολουθία $x_{k+1} = (I + A)x_k \geq 0$, $k = 0(1)n - 2$, $x_0 = x$.

Δηλαδή,

$$x_{k+1} = (I + A)x_k = x_k + Ax_k. \quad (2.1)$$

Αφού, $x_{k+1} = x_k + Ax_k$, το διάνυσμα x_{k+1} δεν έχει περισσότερα μηδενικά στοιχεία από το x_k . Θα δείξουμε ότι x_{k+1} έχει λιγότερα μηδενικά στοιχεία από την x_k .

Έστω ότι x_k και x_{k+1} έχουν ακριβώς τα ίδια μηδενικά στοιχεία. Τότε, υπάρχει μεταθετικός πίνακας P τέτοιος ώστε

$$Px_{k+1} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Px_k = \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y, z \in \mathbb{R}^m, \quad y, z > 0, \quad 1 \leq m < n. \quad (2.2)$$

Τότε, από την σχέση (2.1) έχουμε

$$Px_{k+1} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = P(x_k + Ax_k) = Px_k + PAP^T Px_k \quad (2.3)$$

και από την σχέση (2.2) και (2.3) έχουμε

$$\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Για να ισχύει η σχέση (2.4) πρέπει $A_{21} = 0$, άτοπο, επειδή ο A είναι μη-αναγώγιμος.

Άρα, επειδή $x_0 = x$ έχει το πολύ $n - 1$ μηδενικά στοιχεία, το x_k θα έχει το πολύ $n - k - 1$ μηδενικά στοιχεία, και συνεπώς, το $x_{n-1} = (I + A)^{n-1} x_0$ θα είναι θετικό διάνυσμα. \square

Ορισμός 2.2. Έστω ένας $n \times n$ μη-αναγώγιμος πίνακας $A \geq 0$ και ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $x \geq 0$. Ορίζουμε την ποσότητα

$$r_x = \min_{x_i > 0} \left\{ \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j}{x_i} \right\} \geq 0. \quad (2.5)$$

Ορισμός 2.3. Έστω ένας $n \times n$ μη-αναγώγιμος πίνακας $A \geq 0$ και ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $z \geq 0$. Το z λέγεται ακραίο διάνυσμα (*extremal vector*) του A αν

$$Az \geq rz, \quad (2.6)$$

όπου $r = \sup_{z > 0} \{\lambda \geq 0 \mid Az \geq \lambda z\}$.

Λήμμα 2.4. [18] Έστω ένας $n \times n$ μη-αναγώγιμος πίνακας $A \geq 0$ τότε,

$$r = \sup_{x \geq 0, x \neq 0} \{r_x\} > 0.$$

Επιπλέον, κάθε ακραίο διάνυσμα z είναι ένα θετικό ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A με την αντίστοιχη ιδιοτιμή r . Δηλαδή,

$$Az = rz, \quad z > 0.$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι $r = \sup_{x \geq 0, x \neq 0} \{r_x\} > 0$.

Έστω ένα διάνυσμα e με όλα τα στοιχεία μονάδες. Τότε, έχουμε

$$r_e = \min_{e_i > 0} \left\{ \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij} e_j}{e_i} \right\} = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} \right\} > 0.$$

Επειδή $r \geq r_e$ συνεπάγεται ότι $r > 0$.

Θα δείξουμε ότι κάθε ακραίο διάνυσμα z είναι ένα θετικό ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A με την αντίστοιχη ιδιοτιμή r .

Έστω ότι z είναι ένα ακραίο διάνυσμα και ότι δεν ισχύει $Az = rz$, δηλαδή,

$$Az - rz = s \geq 0.$$

Έστω $s \neq 0$ τότε, από το Λήμμα 2.1 έχουμε $(I + A)^{n-1}s > 0 \Leftrightarrow Aw - rw > 0$, με $w = (I + A)^{n-1}z > 0$, άτοπο, επειδή αν $Aw - rw > 0$ τότε $r_w > r$.

Άρα, $s = 0 \Leftrightarrow Az = rz$. Όποτε, $w = (I + A)^{n-1}z = (1 + r)^{n-1}z > 0 \Rightarrow z > 0$. \square

Θεώρημα 2.5. Έστω ένας $n \times n$ μη-αναγώγιμος πίνακας $A \geq 0$ και $B \in \mathbb{C}^{n,n}$ με $|B| \leq A$. Αν β είναι μια ιδιοτιμή του B , τότε

$$|\beta| \leq r,$$

όπου $r = \sup_{x \geq 0, x \neq 0} \{r_x\} > 0$. Επιπλέον, $|\beta| = r$, δηλαδή, $\beta = re^{i\phi}$ ανν $|B| = A$

όπου

$$B = e^{i\phi} D A D^{-1} \quad (2.7)$$

και D είναι διαγώνιος πίνακας με όλα τα στοιχεία στη διαγώνιο να έχουν μέτρο 1.

Απόδειξη. Αν $\beta y = B y$, $y \neq 0$ τότε, για κάθε $i = 1(1)n$ έχουμε

$$\beta y_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} y_j \Rightarrow |\beta| |y_i| = \left| \sum_{j=1}^n b_{ij} y_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |b_{ij}| |y_j| \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} |y_j|.$$

Άρα, για κάθε i έχουμε

$$|\beta| |y| \leq |B| |y| \leq A |y|, \quad (2.8)$$

το οποίο συνεπάγεται ότι $|\beta| \leq r_{|y|} \leq r$, δηλαδή $|\beta| \leq r$.

Αν $|\beta| = r$ τότε, από την σχέση (2.8) έχουμε

$$r |y| \leq |B| |y| \leq A |y|,$$

δηλαδή, το $|y|$ είναι ένα ακραίο διάνυσμα και συνεπώς είναι ένα θετικό ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή r . Επομένως,

$$|\beta| |y| = |B| |y| = A |y|$$

και αφού $|y| > 0$ και $|B| \leq A$, τότε έχουμε $|B| = A$.

Θεωρώ τον διαγώνιο πίνακα

$$D = \text{diag} \left(\frac{y_1}{|y_1|}, \frac{y_2}{|y_2|}, \dots, \frac{y_n}{|y_n|} \right).$$

Προφανώς, για κάθε i έχουμε $\left| \frac{y_i}{|y_i|} \right| = 1$ και

$$D|y| = \begin{bmatrix} \frac{y_1}{|y_1|} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{y_2}{|y_2|} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{y_n}{|y_n|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |y_1| \\ |y_2| \\ \vdots \\ |y_n| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = y.$$

Έστω, $\beta = re^{i\Phi}$, τότε

$$By = \beta y \Leftrightarrow BD|y| = re^{i\Phi}D|y| \Leftrightarrow e^{-i\Phi}D^{-1}BD|y| = r|y|.$$

Έστω, $C = e^{-i\Phi}D^{-1}BD$, έχουμε

$$C|y| = r|y|.$$

Τότε,

$$C|y| = |B||y| = A|y|.$$

Άρα, $|c_{ij}| = \left| e^{i\Phi} \frac{|y_i|}{y_i} b_{ij} \frac{y_j}{|y_j|} \right| = |e^{i\Phi}| \frac{|y_i|}{|y_i|} |b_{ij}| \frac{|y_j|}{|y_j|} = |b_{ij}|$. Δηλαδή, προφανώς, $|C| = |B| = A$, άρα, αφού έχουμε $C|y| = |C||y|$ και $|y| > 0$ τότε $e^{-i\Phi}D^{-1}BD = C = |C| = A \Rightarrow A = e^{-i\Phi}D^{-1}BD \Rightarrow B = e^{i\Phi}DBD^{-1}$.

Αντίστροφα, αν $B = e^{i\Phi}DBD^{-1}$ τότε, $|B| = A$ και B έχει ιδιοτιμή β με $|\beta| = r$. \square

Πόρισμα 2.6. Έστω ένας $n \times n$ μη-αναγώγιμος πίνακας $A \geq 0$. Τότε, η θετική ιδιοτιμή $r = \sup_{x \geq 0, x \neq 0} \{r_x\}$ είναι η φασματική ακτίνα $\rho(A)$ του A .

Απόδειξη. Έστω $B = A$, τότε από το Θεώρημα 2.5 η r είναι φασματική ακτίνα $\rho(A)$ του A . \square

Πόρισμα 2.7. Έστω ένας $n \times n$ μη-αναγώγιμος πίνακας $A \geq 0$ και B είναι ένας κύριος τετραγωνικός υποπίνακας του A , τότε $\rho(B) < \rho(A)$.

Απόδειξη. Αφού B είναι ένα κύριος τετραγωνικός υποπίνακας του A , τότε υπάρχει ένας μεταθετικός πίνακας P τέτοιος ώστε

$$PAP^T = \begin{bmatrix} B & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Θεωρώ τον πίνακα $C = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Προφανώς, $C \leq PAP^T$, $C \neq PAP^T$. Από το Θεώρημα 2.5 για τον πίνακα C αντί το B έχουμε $\rho(C) < \rho(A)$. \square

Θεώρημα 2.8 (Perron-Frobenius). Έστω ένας $n \times n$ μη-αναγωγίμος πίνακας $A \geq 0$ και $\rho(A)$ η φασματική ακτίνα του. Τότε,

1. ο A έχει μια θετική ιδιοτιμή την $\lambda = \rho(A)$,
2. υπάρχει ένα ιδιοδιάνυσμα $x > 0$ που αντιστοιχεί στη $\rho(A)$,
3. η $\rho(A)$ αυξάνει όταν κάποιο στοιχείο του A αυξάνει,
4. η $\rho(A)$ είναι απλή ιδιοτιμή του A ,
5. δεν υπάρχει άλλο μη αρνητικό ιδιοδιάνυσμα του A .

Απόδειξη. 1. Από το Θεώρημα 2.5 και το πόρισμα 2.6 ολοκληρώθηκε η απόδειξη.

2. Από το Πόρισμα 2.4 ολοκληρώθηκε η απόδειξη.

3. Έστω \tilde{A} ένας μη-αναγωγίμος πίνακας που προέκυψε από τον A αυξάνοντας κάποιο στοιχείο του. Τότε, $\tilde{A} \geq A$ και $\tilde{A} \neq A$. Από το Θεώρημα 2.5 έχουμε $\rho(\tilde{A}) > \rho(A)$. Άρα, η $\rho(A)$ αυξάνει όταν κάποιο στοιχείο του A αυξάνει.

4. Έστω το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p_A(t) = \det(tI_n - A)$ τότε έχουμε,

$$p'_A(t) = \sum_{i=1}^n \det(tI_{n-1} - A_i),$$

όπου A_i είναι ο κύριος υποπίνακας του A που σχηματίζεται από τον A αν διαγράψουμε την i -γραμμή και την i -στήλη. Με I_n συμβολίζουμε τον $n \times n$ μοναδιαίο πίνακα.

Από το Πόρισμα 2.7, έχουμε $\rho(A_i) < \rho(A)$, δηλαδή $\det(tI_{n-1} - A_i)$ δεν

2.2. Θεωρία Perron-Frobenius για κυκλικούς πίνακες (cyclic matrices) και
Κεφάλαιο 2. Primitive πίνακες

μηδενίζεται για κάθε $t \geq \rho(A)$.

Άρα, $\det(\rho(A)I_{n-1} - A_i) > 0$ και $p'_A(\rho(A)) = \sum_{i=1}^n \det(\rho(A)I_{n-1} - A_i) > 0$.

Δηλαδή, $\rho(A)$ είναι ρίζα του $p_A(t)$ με πολλαπλότητα ίση με 1, άρα, $\rho(A)$ είναι απλή ιδιοτιμή.

5. Έστω ότι υπάρχει ακόμα ένα ιδιοδιάνυσμα $y \geq 0$, $y \neq cx$, c σταθερά, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ , $\lambda \neq \rho(A)$. Αν πολλαπλασιάσουμε το y με $(I + A)^k$, $k \geq n - 1$ έχουμε $(I + A)^k y = (1 + \lambda)^k y > 0$, $\forall k \geq n - 1$.
Άρα, $y > 0$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ με

$$\rho(A) > \lambda > -1. \quad (2.9)$$

Αφού $x, y > 0$, επιλέγουμε αρκετά μικρό θετικό πραγματικό αριθμό t τέτοιο ώστε $z = x - ty \geq 0$. Τότε,

$$Az = A(x - ty) = \rho(A)x - \lambda ty.$$

από τη (2.9) έχουμε

$$\rho(A)x - \lambda ty > \rho(A)(x - ty) = \rho(A)z,$$

που σημαίνει ότι $Az > \rho(A)z$, οπότε $r_z > \rho(A)$, άτοπο αφού $\rho(A)$ είναι το supremum όλων των r_z .

□

2.2 Θεωρία Perron-Frobenius για κυκλικούς πίνακες (cyclic matrices) και Primitive πίνακες

Ορισμός 2.9. Έστω ότι ο $A \geq 0$ είναι μη-αναγώγιμος πίνακας διάστασης $n \times n$ και έστω k το πλήθος των ιδιοτιμών του A με μέτρο ίσο με τη $\rho(A)$. Αν $k = 1$, τότε ο A λέγεται **primitive**. Αν $k > 1$, τότε A λέγεται **κυκλικός (cyclic)** με δείκτη k ή k -**κυκλικός (k-cyclic)**.

Τα παρακάτω θεωρήματα και πορίσματα διατυπώνονται χωρίς την απόδειξή τους.

Θεώρημα 2.10. Έστω ότι ένας $n \times n$ μη-αναγώγιμος πίνακας $A \geq 0$ έχει k ιδιοτιμές τέτοιες ώστε

$$\lambda_0 = re^{i\theta_0}, \lambda_1 = re^{i\theta_1}, \lambda_2 = re^{i\theta_2}, \dots, \lambda_{k-1} = re^{i\theta_{k-1}},$$

με μέτρο $\rho(A) = r$, $0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{k-1} < 2\pi$, τότε

2.2. Θεωρία Perron-Frobenius για κυκλικούς πίνακες (cyclic matrices) και
Κεφάλαιο 2. Primitive πίνακες

1. τα λ_i είναι διακεκριμένες ρίζες της $\lambda^k - r^k = 0$,
2. το φάσμα ιδιοτιμών $S = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}\}$ του A μένει αναλλοίωτο κάτω από στροφή του μιγαδικού επιπέδου κατά $\frac{2\pi}{k}$,
3. αν $k > 1$, τότε υπάρχει μεταθετικός πίνακας P τέτοιος ώστε

$$PAP^T = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{k-1,k} \\ A_{k1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Θεώρημα 2.11. Έστω ένας $n \times n$ μη-αναγώγιμος k -κυκλικός πίνακας $A \geq 0$ και z το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στη $\rho(A)$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{k-1} \\ A_k & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_k \end{bmatrix} > 0.$$

Τότε, το ιδιοδιάνυσμα $y^{(j)}$ που αντιστοιχεί στο $\lambda_j = re^{\frac{i2\pi j}{k}}$ είναι

$$y^{(j)} = \begin{bmatrix} z_1 \\ e^{\frac{i2\pi j}{k}} z_2 \\ e^{\frac{i2\pi 2j}{k}} z_3 \\ \vdots \\ e^{\frac{i2\pi(k-1)j}{k}} z_k \end{bmatrix}.$$

Θεώρημα 2.12. Έστω ότι ο $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι μη-αναγώγιμος k -κυκλικός πίνακας με $A \geq 0$. Αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι το $\lambda^n + a_1\lambda^{n_1} + a_2\lambda^{n_2} + \cdots + a_s\lambda^{n_s}$ με $a_1, \dots, a_s \neq 0$ και $n > n_1 > n_2 > \dots > n_s$, τότε $k = \text{MK}\Delta\{n - n_1, n_1 - n_2, \dots, n_{s-1} - n_s\}$.

Πόρισμα 2.13. Έστω ότι ο $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι μη-αναγώγιμος πίνακας με $A \geq 0$. Αν $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii} > 0$, τότε ο A είναι primitive.

2.2. Θεωρία Perron-Frobenius για κυκλικούς πίνακες (cyclic matrices) και Κεφάλαιο 2. Primitive πίνακες

Πόρισμα 2.14. Έστω ότι ο $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι k -κυκλικός πίνακας. Αν $k > 1$, τότε $\text{tr}(A) = 0$.

Πόρισμα 2.15. Έστω ότι ο $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Αν $A > 0$, τότε ο A είναι primitive.

Θεώρημα 2.16. Έστω ότι ο $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι μη-αναγωγίμος πίνακας με $A \geq 0$. Αν A είναι primitive, τότε και ο A^m είναι primitive για κάθε $m \in \mathbb{Z}_+$.

Θεώρημα 2.17. Έστω ότι $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ με $A \geq 0$. Τότε, $A^m > 0$ για κάποιο $m \in \mathbb{Z}$ ανν ο A είναι primitive.

Θεώρημα 2.18. Έστω ένας $n \times n$ μη-αναγωγίμος πίνακας $A \geq 0$, S_i είναι το σύνολο των μηκών m_i όλων των ταυτοτικών μονοπατιών του κόμβου P_i στο κατευθυνόμενο γράφημα $\Gamma(A)$. Έστω επίσης ότι

$$k_i = MK\Delta \{m_i\}.$$

Τότε, $k = k_1 = k_2 = \dots = k_n$ είναι ο δείκτης κυκλικότητας (index of cyclicity) του A . Αν $k = 1$, τότε ο A είναι primitive.

Ορισμός 2.19. Το μικρότερο $m \in \mathbb{Z}$ για το οποίο ισχύει $A^m > 0$ λέγεται index of primitivity.

Ορισμός 2.20. Έστω ότι ο $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι (όχι αναγκαστικά μη-αναγωγίμος ή μη αρνητικός) πίνακας και έστω k το πλήθος των ιδιοτιμών του A με μέτρο ίσο με την φασματική ακτίνα $\rho(A)$. Λέμε ότι ο A είναι ασθενώς κυκλικός με δείκτη $k > 1$ (weakly cyclic of index $k > 1$) αν υπάρχει μεταθετικός πίνακας P τέτοιος ώστε

$$PAP^T = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{k-1,k} \\ A_{k1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Θεώρημα 2.21. Έστω ότι ο A είναι ασθενώς κυκλικός με δείκτη $k > 1$. Τότε A^{jk} είναι πλήρως αναγωγίμος για κάθε $j \geq 1$ και υπάρχει μεταθετικός πίνακας P

2.2. Θεωρία Perron-Frobenius για κυκλικούς πίνακες (cyclic matrices) και
 Κεφάλαιο 2. Primitive πίνακες

τέτοιος ώστε

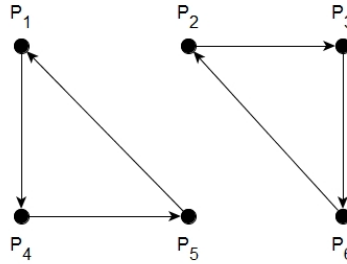
$$PA^kP^T = \begin{bmatrix} C_1^j & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_2^j & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & C_3^j & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_k^j \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

όπου $\rho(C_1) = \rho(C_2) = \cdots = \rho(C_k) = \rho^k(A)$. Επιπλέον, ο $A \geq 0$ είναι μη-αναγωγίμος και k -κυκλικός πίνακας ανν κάθε υποπίνακας C_i είναι primitive.

Παράδειγμα 2.22. Θεωρώ τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

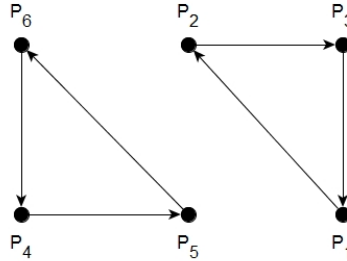
Το κατευθυνόμενο γράφημα του είναι $\Gamma(A)$:



τότε υπάρχει μεταθετικός πίνακας P τέτοιος ώστε

$$PAP^T = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Το γράφημα $\Gamma(PAP^T)$ είναι:



Τα διαγώνια blocks και οι ιδιοτιμές τους είναι

$$A_{11} = A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}, \lambda_3 = e^{i\frac{4\pi}{3}}.$$

Τα $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}, \lambda_3 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$ έχουν πολλαπλότητα 2.

Τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στις λ_i είναι

Για $\lambda_1 = 1, x^{(1)} = (1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)^T \geq 0, y^{(1)} = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)^T > 0.$

Για $\lambda_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}, x^{(2)} = (1 \ e^{i\frac{2\pi}{3}} \ e^{i\frac{4\pi}{3}} \ 0 \ 0 \ 0)^T, y^{(2)} = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ e^{i\frac{2\pi}{3}} \ e^{i\frac{4\pi}{3}})^T.$

Για $\lambda_3 = e^{i\frac{4\pi}{3}}, x^{(3)} = (1 \ e^{i\frac{4\pi}{3}} \ e^{i\frac{8\pi}{3}} \ 0 \ 0 \ 0)^T, y^{(3)} = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ e^{i\frac{4\pi}{3}} \ e^{i\frac{8\pi}{3}})^T.$

2.3 Θεωρία Perron-Frobenius και αναγώγιμοι πίνακες

Θεώρημα 2.23. Έστω ένας $n \times n$ αναγώγιμος πίνακας $A \geq 0$. Τότε,

1. ο A έχει μια ιδιοτιμή ίση με τη φασματική ακτίνα $\rho(A)$. Επιπλέον, $\rho(A) > 0$ εκτός αν A είναι αναγώγιμος και η κανονική μορφή Frobenius του A είναι αυστηρά άνω τριγωνικός πίνακας.
2. Στην $\rho(A)$ αντιστοιχεί ένα ιδιοδιάνυσμα $x \geq 0$.
3. Η $\rho(A)$ δεν μειώνεται όταν κάποιο στοιχείο του A αυξάνει.

Θεώρημα 2.24. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $A \geq 0$ και $B \in \mathbb{C}^{n,n}$ τέτοιο ώστε $0 \leq |B| \leq A$. Τότε,

$$\rho(B) \leq \rho(A). \quad (2.13)$$

Πόρισμα 2.25. Έστω ένας $n \times n$ πίνακας $A \geq 0$ και B είναι ένας κύριος τετραγωνικός υποπίνακας του A , τότε $\rho(B) \leq \rho(A)$.

Παρατηρούμε ότι οι προτάσεις στην περίπτωση των αναγώγιμων πινάκων είναι ασθενέστερες εκείνων για τους μη-αναγώγιμους πίνακες. Για παράδειγμα: (i) για το ιδιοδιάνυσμα x , εκεί είχαμε $x > 0$, εδώ έχουμε $x \geq 0$. (ii) Εκεί λέγαμε ότι η $\rho(A)$ αυξάνει όταν κάποιο στοιχείο αυξάνει, εδώ λέμε ότι η $\rho(A)$ δεν μειώνεται. (iii) Από το Θεώρημα 2.24 και το Πόρισμα 2.25 έχουμε $\rho(B) \leq \rho(A)$ ενώ η αντίστοιχη σχέση στην περίπτωση μη-αναγώγιμων πινάκων είναι $\rho(B) < \rho(A)$.

Θεώρημα 2.26. Έστω ένας μη αρνητικός αναγώγιμος πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ και έστω S_1, S_2, \dots, S_r τα σύνολα των κορυφών που αντιστοιχούν στα διαγώνια blocks $A_{11}, A_{22}, \dots, A_{rr}$ της κανονικής μορφής Frobenius του A στο κατευθυνόμενο γράφημα $\Gamma(A)$. Στη $\rho(A)$ αντιστοιχεί ένα θετικό ιδιοδιάνυσμα ανν κάθε σύνολο S_k που αντιστοιχεί σε A_{kk} όπου $\rho(A_{kk}) = \rho(A)$ δεν συνδέεται με άλλο σύνολο S_j ενώ κάθε σύνολο S_i που αντιστοιχεί σε A_{ii} με $\rho(A_{ii}) < \rho(A)$ συνδέεται με τουλάχιστον ένα σύνολο S_k που αντιστοιχεί σε A_{kk} με $\rho(A_{kk}) = \rho(A)$.

Παράδειγμα 2.27. Θεωρώ τον μη αρνητικό πίνακα A στην κανονική μορφή Frobenius:

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right].$$

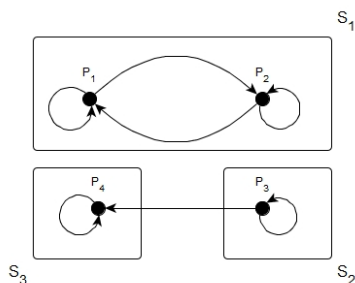
Τότε τα διαγώνια blocks και η φασματική ακτίνα τους είναι

$$A_{11} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right], \rho(A_{11}) = 2 = \rho(A),$$

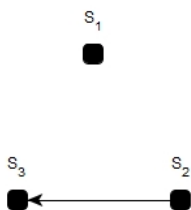
$$A_{22} = \left[\begin{array}{c} 1 \end{array} \right], \rho(A_{22}) = 1 < \rho(A),$$

$$A_{33} = \left[\begin{array}{c} 2 \end{array} \right], \rho(A_{33}) = 2 = \rho(A).$$

Έστω τα σύνολα $S_1 = \{P_1, P_2\}$, $S_2 = \{P_3\}$ και $S_3 = \{P_4\}$. Το γράφημα του A είναι $\Gamma(A)$:



ή το αναγώγιμος γράφημα $R(A)$ είναι:



Παρατηρούμε ότι τα S_1 και S_3 δεν συνδέονται με άλλα σύνολα, ενώ το S_2 συνδέεται με το S_3 . Ο A έχει θετικό ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην $\rho(A)$. Τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν σε $\rho(A)$ είναι $x^{(1)} = (1 \ 1 \ 1 \ 1)^T > 0$ και $x^{(2)} = (1 \ 1 \ 0 \ 0)^T \geq 0$. Άρα, ισχύει το Θεώρημα 2.26.

Θεώρημα 2.28. Έστω ένας μη αρνητικός αναγώγιμος πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Στη $\rho(A)$ αντιστοιχεί ένα θετικό ιδιοδιάνυσμα x του A και ένα θετικό ιδιοδιάνυσμα y του A^T αν η κανονική μορφή Frobenius του A είναι ένας block διαγώνιος πίνακας όπου κάθε διαγώνιο block έχει φασματική ακτίνα $\rho(A)$.

Παράδειγμα 2.29. Θεωρώ τον μη αρνητικό πίνακα B στην κανονική μορφή Frobenius:

$$B = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right], B^T = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right].$$

Τότε τα διαγώνια blocks και η φασματική ακτίνα τους είναι

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \rho(B_{11}) = 4 = \rho(B),$$

$$B_{22} = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}, \rho(B_{22}) = 4 = \rho(B),$$

$$B_{33} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \rho(B_{33}) = 4 = \rho(B).$$

Παρατηρούμε ότι κάθε *block* έχει φασματική ακτίνα $\rho(B) = 4$.

Άρα, από το Θεώρημα 2.28, τα B και B^T έχουν ένα θετικό ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην $\rho(B)$. Τα ιδιοδιανύσματα του B είναι $x^{(1)} = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)^T > 0$, $x^{(2)} = (1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0)^T \geq 0$ και $x^{(3)} = (1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)^T \geq 0$. Τα ιδιοδιανύσματα του B^T είναι $y^{(1)} = (3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 1)^T > 0$, $y^{(2)} = (0 \ 0 \ 3 \ 3 \ 1)^T \geq 0$ και $y^{(3)} = (0 \ 0 \ 0 \ 3 \ 1)^T \geq 0$.

Κεφάλαιο 2.

2.3. Θεωρία Perron-Frobenius και αναγωγή πίνακες

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ PERRON-FROBENIUS

3.1 Ιδιότητα Perron-Frobenius (Perron-Frobenius property)

3.1.1 Ιδιότητα Perron-Frobenius

Θα δώσουμε στην παράγραφο αυτή μια επέκταση της θεωρίας Perron-Frobenius μελετώντας πίνακες που δεν είναι μη αρνητικοί αλλά έχουν θετική την κυρίαρχη ιδιοτιμή και μη αρνητικό το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Θα λέμε τότε ότι ο πίνακας A έχει ένα Perron-Frobenius ιδιοζεύγος (eigenpair). Ορίσουμε εδώ τη νόρμα

Frobenius ως εξής: $\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, $\forall A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Παρατηρούμε ότι η

νόρμα Frobenius δεν είναι φυσική νόρμα. Μια ικανή συνθήκη για την ύπαρξη Perron-Frobenius ιδιοζεύγους δίνεται από το θεώρημα που ακολουθεί.

Θεώρημα 3.1. [16] Έστω ένας συμμετρικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, αν για τον A πληρείται η ανισότητα

$$e^T A e \geq \sqrt{(n-1)^2 + 1} \|A\|_F, \quad (3.1)$$

όπου $e = (1 \ 1 \ \dots \ 1)^T$, τότε ο A έχει ένα Perron-Frobenius ιδιοζεύγος.

Παράδειγμα 3.2. Έστω ο

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 5 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Κεφάλαιο 3. 3.1. Ιδιότητα Perron-Frobenius (Perron-Frobenius property)

Ισχύει ότι $e^T A_1 e = 29 > \sqrt{(n-1)^2 + 1} \|A_1\|_F = 27.6586$.

Οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 11.5219$, $\lambda_2 = 1.6602$, $\lambda_3 = -4.1821$ και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι $x^{(1)} = (0.3365 \ 0.7217 \ 0.6049)^T$, $x^{(2)} = (0.4902 \ 0.4142 \ -0.7669)^T$, $x^{(3)} = (0.8040 \ -0.5546 \ 0.2144)^T$. Παρατηρούμε ότι ισχύει το Θεώρημα 3.1, το ιδιοζεύγος είναι $(11.5219, (0.3365 \ 0.7217 \ 0.6049)^T)$.

Παράδειγμα 3.3. Έστω ο

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 \\ 5 & 5 & 5 \\ -1 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ενώ, $e^T A_2 e = 27 < \sqrt{(n-1)^2 + 1} \|A_2\|_F = 27.6586$, οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 10.7903$, $\lambda_2 = 3.2861$, $\lambda_3 = -5.0764$ και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι $x^{(1)} = (0.2676 \ 0.7516 \ 0.6028)^T$, $x^{(2)} = (-0.5929 \ -0.3647 \ 0.7179)^T$, $x^{(3)} = (-0.7595 \ 0.5496 \ -0.3481)^T$. Παρατηρούμε ότι δεν ισχύει το Θεώρημα 3.1, ενώ ο A_2 έχει το ιδιοζεύγος $(10.7903, (0.2676 \ 0.7516 \ 0.6028)^T)$.

Ορισμός 3.4. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ έχει την ιδιότητα Perron-Frobenius (Perron-Frobenius property) αν η κυρίαρχη ιδιοτιμή του είναι $\lambda_1 > 0$ και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του είναι $x^{(1)} \geq 0$.

Ορισμός 3.5. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ έχει την ισχυρή ιδιότητα Perron-Frobenius (strong Perron-Frobenius property) αν η κυρίαρχη ιδιοτιμή του είναι $\lambda_1 > 0$, είναι απλή ιδιοτιμή και ισχύει $\lambda_1 > |\lambda_i|$, $i = 2(1)n$ και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του είναι $x^{(1)} > 0$.

Θεώρημα 3.6. [10] Έστω ένας συμμετρικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, τότε οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- (i) A έχει την ισχυρή ιδιότητα Perron-Frobenius,
- (ii) A είναι ο τελικά θετικός πίνακας.

Απόδειξη. (i) \Rightarrow (ii): Ο A έχει την ισχυρή ιδιότητα Perron-Frobenius, τότε υπάρχει απλή θετική ιδιοτιμή λ_1 και το αντίστοιχο θετικό ιδιοδιάνυσμα $x^{(1)} \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε

$$\lambda_1 = \rho(A) > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

Κεφάλαιο 3. 3.1. Ιδιότητα Perron-Frobenius (Perron-Frobenius property)

Επιλέγουμε τυχαίο διάνυσμα $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $x^{(0)} \geq 0$ με $\|x^{(0)}\|_2 = 1$ τέτοιο ώστε

$$x^{(0)} = \sum_{i=1}^n c_i x^{(i)},$$

όπου $x^{(i)}$, $i = 1(1)n$ τα ιδιοδιανύσματα του A . Αφού ο A είναι συμμετρικός, τότε τα ιδιοδιανύσματα αποτελούν ορθογώνια βάση, δηλαδή, $c_i = (x^{(0)}, x^{(i)})$, $i = 1(1)n$, $c_1 > 0$. Άρα, από την θεωρία της μεθόδου δυνάμεων, έχουμε

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k x^{(0)} = x^{(1)}.$$

Οπότε, για κάποιο σταθερό $x^{(0)} \geq 0$ υπάρχει $m > 0$ τέτοιο ώστε $A^k x^{(0)} > 0$, $\forall k \geq m$. Παίρνουμε το μεγαλύτερο m πάνω σε όλο το σύνολο $S = \{z | z \geq 0, \|z\|_2 = 1\}$, το

$$k_0 = \max_{x^{(0)} \in S} \left\{ m \mid A^k x^{(0)} > 0, \forall k \geq m \right\}.$$

Τότε, για κάθε $x^{(0)} \geq 0$, $A^k x^{(0)} > 0$, $\forall k \geq k_0$. Άρα, ο A είναι τελικά θετικός πίνακας.

(ii) \Rightarrow (i): Έστω ότι ο A είναι τελικά θετικός πίνακας τότε, υπάρχει k_0 τέτοιο ώστε $A^k > 0$, $\forall k > k_0$. Από το Θεώρημα Perron-Frobenius προκύπτει ότι η κυρίαρχη ιδιοτιμή του A^k είναι η απλή ιδιοτιμή $\lambda^k > 0$ και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $x^{(1)} > 0$. Τότε, η κυρίαρχη ιδιοτιμή του A είναι η απλή ιδιοτιμή $\sqrt[k]{\lambda^k} = \lambda_1 > 0$, με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $x^{(1)} > 0$. Άρα, ο A έχει την ισχυρή ιδιότητα Perron-Frobenius. \square

Παράδειγμα 3.7. Έστω ο πίνακας του παραδείγματος 3.2. Εύκολα φαίνεται ότι ο A είναι τελικά θετικός πίνακας ($A^k > 0$ με $k \geq 2$). Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.6 επιβεβαιώνεται ότι ο A έχει την ισχυρή ιδιότητα Perron-Frobenius.

Παράδειγμα 3.8. Έστω ο πίνακας του παραδείγματος 3.3. Εύκολα φαίνεται ότι ο A είναι τελικά θετικός πίνακας ($A^k > 0$ με $k \geq 2$). Το Θεώρημα 3.6 αποδεικνύει ότι ο A έχει την ισχυρή ιδιότητα Perron-Frobenius, ενώ το Θεώρημα 3.1 δεν δίνει απάντηση.

Θεώρημα 3.9. [10] Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, τότε οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- (i) οι A και A^T έχουν την ισχυρή ιδιότητα Perron-Frobenius,

Κεφάλαιο 3. 3.1. Ιδιότητα Perron-Frobenius (Perron-Frobenius property)

(ii) ο A είναι ένας τελικά θετικός πίνακας,

(iii) ο A^T είναι ένας τελικά θετικός πίνακας.

Απόδειξη. (i) \Rightarrow (ii): Έστω $A = XDX^{-1}$ είναι η κανονική μορφή Jordan του πίνακα A . Υποθέτουμε ότι η ιδιοτιμή $\lambda_1 = \rho(A)$ είναι το πρώτο στοιχείο στη διαγώνιο του D . Άρα, η κανονική μορφή του Jordan γράφεται ως:

$$A = \left[x^{(1)} | X_{n,n-1} \right] \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & D_{n-1,n-1} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} y^{(1)T} \\ \hline Y_{n-1,n} \end{array} \right], \quad (3.2)$$

όπου $y^{(1)T}$ και $Y_{n-1,n}$ είναι πρώτη γραμμή και ο πίνακας που σχηματίζεται από τις τελευταίες $n - 1$ γραμμές του πίνακα X^{-1} , αντίστοιχα.

Αφού ο A έχει την ισχυρή ιδιότητα Perron-Frobenius, τότε το ιδιοδιάνυσμα $x^{(1)} > 0$ και από την σχέση (3.2) έχουμε

$$A^T = \left[y^{(1)} | Y_{n-1,n}^T \right] \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & D_{n-1,n-1}^T \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x^{(1)T} \\ \hline X_{n,n-1}^T \end{array} \right]. \quad (3.3)$$

Ο πίνακας $D_{n-1,n-1}^T$ είναι block διαγώνιος πίνακας που σχηματίζεται από τους αναστρέφους των Jordan blocks εκτός την λ_1 . Άρα, υπάρχει μεταθετικός πίνακας $P \in \mathbb{R}^{n-1,n-1}$ τέτοιος ώστε $D_{n-1,n-1} = P^T D_{n-1,n-1}^T P$ και η σχέση (3.3) γράφεται ως:

$$\begin{aligned} A^T &= \left[y^{(1)} | Y_{n-1,n}^T \right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P^T \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & D_{n-1,n-1}^T \end{array} \right] \\ &\times \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P^T \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x^{(1)T} \\ \hline X_{n,n-1}^T \end{array} \right] \\ &= \left[y^{(1)} | Y_{n-1,n}^T \right] \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & D_{n-1,n-1} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x^{(1)T} \\ \hline X_{n,n-1}^T \end{array} \right], \end{aligned} \quad (3.4)$$

όπου $Y_{n-1,n}^T = Y_{n-1,n}^T P$ και $X_{n,n-1}^T = P^T X_{n,n-1}^T$.

Η σχέση (3.4) είναι η κανονική μορφή Jordan του A^T , τότε το $y^{(1)}$ είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί σε κυρίαρχη ιδιοτιμή λ_1 . Επειδή, ο A^T έχει την ισχυρή ιδιότητα Perron-Frobenius, τότε το ιδιοδιάνυσμα $y^{(1)} > 0$ ή $y^{(1)} < 0$ και αφού $y^{(1)T}$ είναι πρώτη γραμμή του πίνακα X^{-1} , τότε $(y^{(1)}, x^{(1)}) = 1$ που σημαίνει ότι $y^{(1)} > 0$. Από την σχέση (3.2) έχουμε

$$A^k = \left[x^{(1)} | X_{n,n-1} \right] \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1^k & 0 \\ \hline 0 & D_{n-1,n-1}^k \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} y^{(1)T} \\ \hline Y_{n-1,n} \end{array} \right]$$

Κεφάλαιο 3. 3.1. Ιδιότητα Perron-Frobenius (Perron-Frobenius property)

ή

$$\frac{1}{\lambda_1^k} A^k = \left[x^{(1)} | X_{n,n-1} \right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{\lambda_1^k} D_{n-1,n-1}^k \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} y^{(1)T} \\ \hline Y_{n-1,n} \end{array} \right]. \quad (3.5)$$

Αφού η λ_1 είναι απλή κυρίαρχη ιδιοτιμή, τότε έχουμε

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_1^k} D_{n-1,n-1}^k = 0.$$

Επομένως,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_1^k} A^k = x^{(1)} y^{(1)T} > 0. \quad (3.6)$$

Άρα, $\exists k_0 > 0$ τέτοιο ώστε $A^k > 0$, $\forall k \geq k_0$. Δηλαδή, ο A είναι τελικά θετικός πίνακας.

(ii) \Leftrightarrow (iii): Προφανές, από τον ορισμό των τελικά θετικών πινάκων.

(ii) \Rightarrow (i): Ανάλογα με την απόδειξη του Θεωρήματος 3.6 θεωρώντας ότι οι A και A^T είναι τελικά θετικοί πίνακες. \square

Θεώρημα 3.10. Έστω ότι ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι ένας τελικά μη αρνητικός πίνακας που δεν είναι μηδενολογικός. Τότε, οι A και A^T έχουν την ιδιότητα Perron-Frobenius.

Παράδειγμα 3.11. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 5 & 5 & 5 \\ -1 & 5 & 5 \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 \\ 5 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Εύκολα φαίνεται ότι οι A και A^T είναι τελικά θετικοί πίνακες ($A^k > 0$, $(A^T)^k > 0$ με $k \geq 2$). Το ιδιοζεύγος του A είναι $(11.0901, (0.3563 \ 0.7500 \ 0.5573)^T)$ και το ιδιοζεύγος του A^T είναι $(11.0901, (0.2484 \ 0.7283 \ 0.6387)^T)$. Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.9 επιβεβαιώνεται ότι οι A και A^T έχουν την ισχυρή ιδιότητα Perron-Frobenius.

Θεώρημα 3.12. [12] Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

- (i) $\exists a \geq 0$ τ.ω. οι $A + aI$ και $A^T + aI$ έχουν την ισχυρή ιδιότητα Perron-Frobenius,

Κεφάλαιο 3. 3.1. Ιδιότητα Perron-Frobenius (Perron-Frobenius property)

- (ii) ο $A + aI$ είναι ένας τελικά θετικός πίνακας για κάποιο $a \geq 0$,
- (iii) ο $A^T + aI$ είναι ένας τελικά θετικός πίνακας για κάποιο $a \geq 0$,
- (iv) ο A είναι ένας τελικά εκθετικά θετικός πίνακας,
- (v) ο A^T είναι ένας τελικά εκθετικά θετικός πίνακας.

Θεώρημα 3.13. [10] Έστω ότι οι πίνακες $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, A^T έχουν την ιδιότητα Perron-Frobenius με την κυρίαρχη ιδιοτιμή $\lambda_1 = \rho(A)$ να είναι απλή ιδιοτιμή. Τότε,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_1^k} A^k = x^{(1)} y^{(1)T} \geq 0, \quad (3.7)$$

όπου $x^{(1)}, y^{(1)}$ είναι το δεξιό και το αριστερό ιδιοδιάνυσμα του A .

Θεώρημα 3.14. [12] Έστω ένας τελικά εκθετικά μη αρνητικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Τότε, ισχύει τα παρακάτω:

- (i) οι e^A και e^{A^T} έχουν την ιδιότητα Perron-Frobenius,
- (ii) αν $\rho(e^A)$ είναι απλή ιδιοτιμή του e^A και $\rho(e^A) = e^{\rho(A)}$, τότε $\exists a_0 \geq 0$ τ.ω.
 $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{A + aI}{\rho(A + aI)} \right)^k = x^{(1)} y^{(1)T}, \forall a \geq a_0$, όπου $x^{(1)}$ είναι το δεξιό ιδιοδιάνυσμα και $y^{(1)}$ είναι το αριστερό ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχούν στη $\rho(A)$ και πληρούν τη σχέση $x^{(1)T} y^{(1)} = 1$.

Παράδειγμα 3.15. Έστω

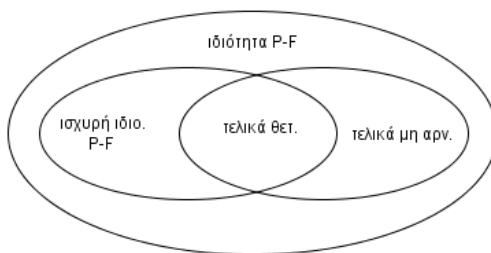
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ -5 & 5 & 5 \\ -1 & 5 & 5 \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 5 & 5 & 5 \\ -1 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ο A δεν είναι τελικά θετικός πίνακας. Η κυρίαρχη ιδιοτιμή του A είναι $\lambda_1 = 8.6753$ και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι $x^{(1)} = (0.2967 \ 0.6034 \ 0.7402)^T$. Η κυρίαρχη ιδιοτιμή του A^T είναι 8.6753 και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι $(-0.4153 \ 0.4838 \ 0.7706)^T$.

Άρα, ο A έχει την ισχυρή ιδιότητα Perron-Frobenius, ενώ ο A^T δεν την έχει. Ο A δεν πληροί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 3.9 και επομένως δεν είναι τελικά θετικός πίνακας.

Κεφάλαιο 3. 3.1. Ιδιότητα Perron-Frobenius (Perron-Frobenius property)

Από το παράδειγμα δείξαμε ότι η κλάση των τελικά θετικών πινάκων είναι υποκλάση της κλάσης των πινάκων, οι οποίοι έχουν την ισχυρή ιδιότητα Perron-Frobenius, ενώ η κλάση των τελικά μη αρνητικών πινάκων είναι υποκλάση της κλάσης των πινάκων, οι οποίοι έχουν την ιδιότητα Perron-Frobenius. Δηλαδή,



3.1.2 Άθροισμα στήλων ή γραμμών και φασματική ακτίνα

Θεώρημα 3.16. [10] Έστω $A^T \in \mathbb{R}^{n,n}$ έχει την ιδιότητα Perron-Frobenius, τότε ισχύει είτε

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = \rho(A), \quad \forall i = 1(1)n \quad (3.8)$$

είτε

$$\min_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right) \leq \rho(A) \leq \max_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right). \quad (3.9)$$

Επιπλέον, αν ο A^T έχει την ισχυρή ιδιότητα Perron-Frobenius, τότε

$$\min_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right) < \rho(A) < \max_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right). \quad (3.10)$$

Απόδειξη. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ και $(\rho(A), y)$ είναι το Perron-Frobenius ιδιοζεύγος του A^T . Θεωρώ το διάνυσμα $\xi \in \mathbb{R}^n$ με $\xi = (1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1)^T$. Σχηματίζουμε

Κεφάλαιο 3. 3.1. Ιδιότητα Perron-Frobenius (Perron-Frobenius property)

τον πίνακα $y^T A\xi$:

$$y^T A\xi = y^T \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} \\ \sum_{j=1}^n a_{2j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \left(y_i \sum_{j=1}^n a_{ij} \right).$$

Τότε,

$$y^T A\xi \leq \max_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right) \sum_{i=1}^n y_i. \quad (3.11)$$

Ανάλογα, έχουμε

$$y^T A\xi = \sum_{i=1}^n \left(y_i \sum_{j=1}^n a_{ij} \right) \geq \min_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right) \sum_{i=1}^n y_i. \quad (3.12)$$

Επιπλέον ισχύει

$$y^T A\xi = \xi^T A^T y = \rho(A) \xi^T y = \rho(A) \sum_{i=1}^n y_i. \quad (3.13)$$

Οπότε, από τις σχέσεις (3.11), (3.12) και (3.13) καταλήγουμε στην (3.9).

Στην περίπτωση που ο A^T έχει την ισχυρή ιδιότητα Perron-Frobenius, θα έχουμε ότι $y > 0$, τις ανισότητες (3.11) και (3.12) να γίνονται γνήσιες, που αποδεικνύουν την (3.10). Η σχέση (3.9) θα είναι ισότητα αν $\max_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right) = \min_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right)$, δηλαδή αν ισχύει η σχέση (3.8). \square

Παράδειγμα 3.17. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -5 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix},$$

όπου ο A^T έχει την ισχυρή ιδιότητα Perron-Frobenius με ιδιοζεύγος $(4.9362, (0.0423 \ 0.5122 \ 0.8578)^T)$.

Κεφάλαιο 3. 3.1. Ιδιότητα Perron-Frobenius (Perron-Frobenius property)

Τα αθροίσματα των γραμμών $\sum_{j=1}^n a_{ij}$ είναι $(-5 \ 9 \ 3)^T$. Παρατηρούμε ότι ισχύει το Θεώρημα 3.16 ($-5 < 4.9362 < 9$).

Θεώρημα 3.18. [10] Έστω \mathcal{P} , το σύνολο όλων των μη αρνητικών διανυσμάτων

$x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T \geq 0$ με $x_i > 0$ για τουλάχιστον ένα i και $\mathcal{P}^* \subset \mathcal{P}$, το σύνολο όλων των θετικών διανυσμάτων $x > 0$. Αν $A^T \in \mathbb{R}^{n,n}$ έχει την ιδιότητα Perron-Frobenius και $x \in \mathcal{P}^*$, τότε ισχύει είτε

$$\frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j}{x_i} = \rho(A), \quad \forall i = 1(1)n \quad (3.14)$$

είτε

$$\min_i \left(\frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j}{x_i} \right) \leq \rho(A) \leq \max_i \left(\frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j}{x_i} \right). \quad (3.15)$$

Επιπλέον, αν ο A^T έχει την ισχυρή ιδιότητα Perron-Frobenius, τότε ισχύει

$$\min_i \left(\frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j}{x_i} \right) < \rho(A) < \max_i \left(\frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j}{x_i} \right) \quad (3.16)$$

και

$$\sup_{x \in \mathcal{P}^*} \left\{ \min_i \left(\frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j}{x_i} \right) \right\} = \rho(A) = \inf_{x \in \mathcal{P}^*} \left\{ \max_i \left(\frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j}{x_i} \right) \right\}. \quad (3.17)$$

Απόδειξη. Έστω $x \in \mathcal{P}^*$. Θεωρούμε το διαγώνιο πίνακα $D = \text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ και το μετασχηματισμό ομοιότητας $B = D^{-1}AD$. Τότε, τα στοιχεία του B είναι $b_{ij} = \frac{a_{ij}x_j}{x_i}$. Ο B^T έχει την ιδιότητα Perron-Frobenius και με βάση το Θεώρημα 3.16 αποδεικνύονται οι σχέσεις (3.14), (3.15) και (3.16). Από την (3.16) προκύπτει ότι

$$\sup_{x \in \mathcal{P}^*} \left\{ \min_i \left(\frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j}{x_i} \right) \right\} \leq \rho(A) \leq \inf_{x \in \mathcal{P}^*} \left\{ \max_i \left(\frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j}{x_i} \right) \right\}. \quad (3.18)$$

Κεφάλαιο 3. 3.1. Ιδιότητα Perron-Frobenius (Perron-Frobenius property)

Επιλέγουμε y το ιδιοδιάνυσμα Perron-Frobenius του A στην θέση του x . Τότε, οι ανισότητες στην (3.18) γίνονται ισότητες και αποδεικνύεται η σχέση (3.17). \square

3.1.3 Ιδιότητες Μονοτονίας

Θεώρημα 3.19. [10] Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$, τέτοιοι ώστε $A \leq B$ και οι A, B^T έχουν την ιδιότητα Perron-Frobenius (ή οι A^T, B έχουν την ιδιότητα Perron-Frobenius), τότε

$$\rho(A) \leq \rho(B). \quad (3.19)$$

Επιπλέον, αν οι A, B^T (ή οι A^T, B) έχουν την ισχυρή ιδιότητα Perron-Frobenius και $A \neq B$, τότε $\rho(A) < \rho(B)$.

Το Θεώρημα 3.19 ισχύει μόνο για μονοτονία δύο πινάκων $A \leq B$, δηλαδή αν έχουμε ένα πίνακα C με $A \leq C \leq B$ δεν ισχύει κατ'ανάγκη ότι $\rho(A) \leq \rho(C) \leq \rho(B)$.

Παράδειγμα 3.20. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -5 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -0.5 \\ -4 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -0.5 \\ 5 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix},$$

όπου $A \leq C \leq B$.

Ο A έχει την ισχυρή ιδιότητα Perron-Frobenius με το ιδιοζεύγος $(4.9362, (0.0423 \ 0.5122 \ 0.8578)^T)$. Ο B^T έχει την ισχυρή ιδιότητα Perron-Frobenius με το ιδιοζεύγος $(6.8463, (0.6043 \ 0.7566 \ 0.2499)^T)$. Ο C έχει την ισχυρή ιδιότητα Perron-Frobenius με το ιδιοζεύγος $(3.3712, (0.3375 \ 0.3111 \ 0.8884)^T)$ ενώ ο C^T δεν έχει την ιδιότητα Perron-Frobenius.

Από το Θεώρημα 3.19 επιβεβαιώνουμε ότι $\rho(A) = 4.9362 < \rho(B) = 6.8463$ και ότι $\rho(C) = 3.1958 < \rho(B) = 6.8463$. Ισχύει όμως ότι $\rho(C) = 3.1958 < \rho(A) = 4.9362$ παρόλο που $A \leq C$.

Θεώρημα 3.21. [10] Έστω (i) $A^T \in \mathbb{R}^{n,n}$ έχει την ιδιότητα Perron-Frobenius και $x \geq 0$ ($x \neq 0$) τέτοιο ώστε $Ax - \alpha x \geq 0$ για ένα σταθερό $\alpha > 0$ ή (ii) $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ έχει την ιδιότητα Perron-Frobenius και $x \geq 0$ ($x \neq 0$) τέτοιο ώστε $x^T A - \alpha x^T \geq 0$ για ένα σταθερό $\alpha > 0$. Τότε,

$$\alpha \leq \rho(A). \quad (3.20)$$

Επιπλέον, αν $Ax - \alpha x > 0$ ή $x^T A - \alpha x^T > 0$, τότε $\alpha < \rho(A)$.

Κεφάλαιο 3. 3.2. Διασπάσεις Perron-Frobenius (Perron-Frobenius Splittings)

Θεώρημα 3.22. [10] Έστω (i) $A^T \in \mathbb{R}^{n,n}$ έχει την ιδιότητα Perron-Frobenius και $x > 0$ ($x \neq 0$) τέτοιο ώστε $\alpha x - Ax \geq 0$ για ένα σταθερό $\alpha > 0$ ή (ii) $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ έχει την ιδιότητα Perron-Frobenius και $x > 0$ τέτοιο ώστε $\alpha x^T - x^T A \geq 0$ για ένα σταθερό $\alpha > 0$. Τότε,

$$\rho(A) \leq \alpha. \quad (3.21)$$

Επιπλέον, αν $\alpha x - Ax > 0$ ή $\alpha x^T - x^T A > 0$, τότε $\rho(A) < \alpha$.

Θεώρημα 3.23. [10] Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ έχει την ιδιότητα Perron-Frobenius και $x \geq 0$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα και έστω $y \neq 0$ τέτοιο ώστε $y^T x > 0$. Τότε,

$$B = A + \epsilon xy^T, \epsilon > 0, \quad (3.22)$$

έχει την ιδιότητα Perron-Frobenius και η φασματική ακτίνα πληροί την σχέση

$$\rho(A) < \rho(B). \quad (3.23)$$

Επιπλέον, αν ο A έχει την ισχυρή ιδιότητα Perron-Frobenius, τότε ο B έχει και την ισχυρή ιδιότητα Perron-Frobenius.

3.2 Διασπάσεις Perron-Frobenius (Perron-Frobenius Splittings)

Έστω ένα πραγματικό ομαλό γραμμικό σύστημα με n εξισώσεις και n αγνώστους

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{n,n}, \quad \det(A) \neq 0, \quad x, b \in \mathbb{R}^n. \quad (3.24)$$

Θεωρούμε μια διάσπαση (splitting) του πίνακα A

$$A = M - N, \quad (3.25)$$

όπου ο M είναι αντιστρέψιμος.

Από την (3.24) και (3.25) θα έχουμε

$$(M - N)x = b \Rightarrow Mx = Nx + b \quad (3.26)$$

ή ισοδύναμα

$$x = M^{-1}Nx + M^{-1}b. \quad (3.27)$$

Η εξίσωση (3.27) οδηγεί στην κατασκευή του αλγόριθμου

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.28)$$

Κεφάλαιο 3. 3.2. Διασπάσεις Perron-Frobenius (Perron-Frobenius Splittings)

ή ισοδύναμα με τον αλγόριθμο από την (3.26)

$$Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.29)$$

με $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ αυθέραιτο αρχικό διάνυσμα.

Είναι γνωτό ότι ο αλγόριθμος (3.28) συγκλίνει στη λύση του (3.24) αν και μόνο αν

$$\rho(M^{-1}N) < 1. \quad (3.30)$$

Ορισμός 3.24. Έστω ένας αντιστρέψιμος πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Η διάσπαση $A = M - N$ λέγεται

- M -διάσπαση αν ο M είναι M -πίνακας και $N \geq 0$,
- Κανονική διάσπαση (*regular splitting*) αν $M^{-1} \geq 0$ και $N \geq 0$,
- Ασθενώς Κανονική πρώτης κατηγορίας (*weak regular of first type*) αν $M^{-1} \geq 0$ και $M^{-1}N \geq 0$,
- Ασθενώς Κανονική δεύτερης κατηγορίας (*weak regular of second type*) αν $M^{-1} \geq 0$ και $NM^{-1} \geq 0$,
- Μη αρνητική πρώτης κατηγορίας (*nonnegative of first type*) αν $M^{-1}N \geq 0$,
- Μη αρνητική δεύτερης κατηγορίας (*nonnegative of second type*) αν $NM^{-1} \geq 0$,
- Διάσπαση Perron-Frobenius πρώτης κατηγορίας (*Perron-Frobenius splittings of the first kind*) ή διάσπαση Perron-Frobenius αν ο $M^{-1}N$ έχει την ιδιότητα Perron-Frobenius,
- Διάσπαση Perron-Frobenius δεύτερης κατηγορίας (*Perron-Frobenius splittings of the second kind*) αν ο NM^{-1} έχει την ιδιότητα Perron-Frobenius.

Θεώρημα 3.25. [10] Έστω ένας αντιστρέψιμος πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ και η διάσπαση Perron-Frobenius πρώτης κατηγορίας $A = M - N$ με x το ιδιοδιάνυσμα Perron-Frobenius του $M^{-1}N$. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

- (i) $\rho(M^{-1}N) < 1$,
- (ii) $A^{-1}N$ έχει την ιδιότητα Perron-Frobenius,

Κεφάλαιο 3. 3.2. Διασπάσεις Perron-Frobenius (Perron-Frobenius Splittings)

$$(iii) \rho(M^{-1}N) = \frac{\rho(A^{-1}N)}{1 + \rho(A^{-1}N)},$$

$$(iv) A^{-1}Mx \geq x,$$

$$(v) A^{-1}Nx \geq M^{-1}Nx.$$

Απόδειξη. Έστω ο αντιστρέψιμος πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ και $A = M - N$ τότε, έχουμε την σχέση

$$\begin{aligned} A^{-1}N &= (M - N)^{-1}N = (M - MM^{-1}N)^{-1}N = (M(I - M^{-1}N))^{-1}N \\ &= (I - M^{-1}N)^{-1}M^{-1}N. \end{aligned} \quad (3.31)$$

και

$$\begin{aligned} M^{-1}N &= (A + N)^{-1}N = (A + AA^{-1}N)^{-1}N = (A(I + A^{-1}N))^{-1}N \\ &= (I + A^{-1}N)^{-1}A^{-1}N. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Άρα, οι $A^{-1}N$ και $M^{-1}N$ έχουν το ίδιο σύνολο ιδιοδιανυσμάτων. Έστω ότι μ_i είναι ιδιοτιμή του $A^{-1}N$ και λ_i είναι ιδιοτιμή του $M^{-1}N$, $i = 1(1)n$. Από την (3.31) προκύπτει ότι αυτές συνδέονται με τη σχέση

$$\mu_i = \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_i}, \quad i = 1(1)n. \quad (3.33)$$

(i) \Rightarrow (ii): Από την υπόθεση $\rho(M^{-1}N) < 1$ και την (3.33), προκύπτει ότι υπάρχει ιδιοτιμή $\mu = \frac{\rho(M^{-1}N)}{1 - \rho(M^{-1}N)} > 0$ του $A^{-1}N$ που αντιστοιχεί στο ιδιοδιάνυσμα x . Έστω ότι ο $A^{-1}N$ έχει άλλη ιδιοτιμή $\mu' = \frac{\lambda'}{1 - \lambda'}$ που αντιστοιχεί στο $\rho(A^{-1}N)$. Τότε,

$$\rho(A^{-1}N) = |\mu'| = \frac{|\lambda'|}{|1 - \lambda'|} > \frac{\rho(M^{-1}N)}{1 - \rho(M^{-1}N)} = |\mu|.$$

Η ιδιοτιμή λ' ανήκει στον δίσκο $|z| \leq \rho(M^{-1}N)$ και το $1 - \rho(M^{-1}N)$ είναι η απόσταση του σημείου 1 από τον δίσκο, επομένως $|1 - \lambda'| \geq 1 - \rho(M^{-1}N)$. Καταλήγουμε σε άτοπο επειδή δεν θα ισχύει η παραπάνω ανισότητα.

Κεφάλαιο 3. 3.2. Διασπάσεις Perron-Frobenius (Perron-Frobenius Splittings)

(ii) \Rightarrow (iii): Επειδή ο $A^{-1}N$ έχει την ιδιότητα Perron-Frobenius, τότε έχει το ιδιοζεύγος $(\rho(A^{-1}N), x)$. Πολλαπλασιάζουμε την (3.32) με το x και έχουμε

$$\begin{aligned}(M^{-1}N)x &= ((I + A^{-1}N)^{-1}A^{-1}N)x \\ \Leftrightarrow \rho(M^{-1}N)x &= \frac{\rho(A^{-1}N)}{1 + \rho(A^{-1}N)}x \\ \Leftrightarrow \rho(M^{-1}N) &= \frac{\rho(A^{-1}N)}{1 + \rho(A^{-1}N)}.\end{aligned}$$

(iii) \Rightarrow (i): Ισχύει διότι $\rho(A^{-1}N) > 0$.

(i) \Leftrightarrow (iv): Προφνώς ισχύει ότι

$$\begin{aligned}(A^{-1}M)x &= (M - N)^{-1}Mx = (M - MM^{-1}N)^{-1}Mx = (M(I - M^{-1}N))^{-1}Mx \\ &= (I - M^{-1}N)^{-1}M^{-1}Mx = (I - M^{-1}N)^{-1}x = \frac{1}{1 - \rho(M^{-1}N)}x.\end{aligned}$$

Επειδή $x \geq 0$, $x \neq 0$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 - \rho(M^{-1}N)}x \geq x &\Leftrightarrow 0 < 1 - \rho(M^{-1}N) < 1 \\ &\Leftrightarrow 0 < \rho(M^{-1}N) < 1.\end{aligned}$$

(i) \Leftrightarrow (v): Από την σχέση (3.31) και $x \geq 0$, $x \neq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}A^{-1}Nx \geq M^{-1}Nx &\Leftrightarrow \frac{\rho(M^{-1}N)}{1 - \rho(M^{-1}N)}x \geq \rho(M^{-1}N)x \\ &\Leftrightarrow \rho(M^{-1}N) < 1.\end{aligned}$$

□

Θεώρημα 3.26. [10] Έστω ένας αντιστρέψιμος πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ και η διάσπαση Perron-Frobenius δεύτερης κατηγορίας $A = M - N$ με x το ιδιοδιάνυσμα Perron-Frobenius του NM^{-1} . Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

- (i) $\rho(M^{-1}N) = \rho(NM^{-1}) < 1$,
- (ii) NA^{-1} έχει την ιδιότητα Perron-Frobenius,
- (iii) $\rho(M^{-1}N) = \frac{\rho(A^{-1}N)}{1 + \rho(A^{-1}N)}$,

Κεφάλαιο 3. 3.2. Διασπάσεις Perron-Frobenius (Perron-Frobenius Splittings)

(iv) $MA^{-1}x \geq x$,

(v) $NA^{-1}x \geq NM^{-1}x$.

Θεώρημα 3.27. [10] Έστω ένας αντιστρέψιμος πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ και η διάσπαση Perron-Frobenius πρώτης κατηγορίας $A = M - N$ με x το ιδιοδιάνυσμα Perron-Frobenius του $M^{-1}N$. Αν ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις:

(i) $\exists y \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $A^T y \geq 0$, $N^T y \geq 0$ και $y^T Ax > 0$,

(ii) $\exists y \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $A^T y \geq 0$, $M^T y \geq 0$ και $y^T Ax > 0$,

τότε $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Η απόδειξη βασίζεται στο γεγονός ότι αν θεωρήσουμε το διάνυσμα z τέτοιο ώστε $y = (A^T)^{-1}z$ τότε, οι παραπάνω υποθέσεις γίνονται πιο απλές και γράφονται ως εξής:

(i) $\exists z \geq 0$ τέτοιο ώστε $z^T(A^{-1}N) \geq 0$, $z^T x > 0$,

(ii) $\exists z \geq 0$ τέτοιο ώστε $z^T(A^{-1}M) \geq 0$, $z^T x > 0$.

Πόρισμα 3.28. [10] Έστω ένας αντιστρέψιμος πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ και η διάσπαση Perron-Frobenius πρώτης κατηγορίας $A = M - N$ με x το ιδιοδιάνυσμα Perron-Frobenius του $M^{-1}N$. Αν είτε $(A^{-1}N)^T$ είτε $(A^{-1}M)^T$ έχει την ιδιότητα Perron-Frobenius με y το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα Perron-Frobenius τέτοιο ώστε $y^T x > 0$, τότε $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Παράδειγμα 3.29. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 3 & 10 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Τότε,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.875 & -2 & -0.625 \\ -0.125 & 1 & 0.375 \\ 0.375 & -1 & -0.125 \end{bmatrix}, M^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5455 & -0.8182 & -1 \\ -0.0909 & 0.3030 & 0.3333 \\ 0.2727 & -0.5758 & -0.3333 \end{bmatrix},$$

Κεφάλαιο 3. 3.2. Διασπάσεις Perron-Frobenius (Perron-Frobenius Splittings)

$$M^{-1}N = \begin{bmatrix} -1.2727 & 0.1818 & 3.9091 \\ 0.5455 & 0.6364 & -1.1515 \\ -0.6364 & 0.0909 & 1.7879 \end{bmatrix},$$

$$A^{-1}N = \begin{bmatrix} -1.75 & 0.875 & 5 \\ 1.25 & 1.875 & -2 \\ -0.75 & 0.375 & 2 \end{bmatrix}, A^{-1}M = \begin{bmatrix} -0.75 & 0.875 & 5 \\ 1.25 & 2.875 & -2 \\ -0.75 & 0.375 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ο $M^{-1}N$ έχει την ισχυρή ιδιότητα Perron-Frobenius με ιδιοζεύγος $(0.6762, (0.4245 \ 0.8893 \ 0.1703)^T)$.

Παρατηρούμε ότι για $z = (3 \ 10 \ 6)^T$ ισχύουν και οι δύο υποθέσεις του Θεωρήματος 3.27: $z^T(A^{-1}N) = (2.75 \ 23.625 \ 7) > 0$, $z^T(A^{-1}M) = (5.75 \ 33.625 \ 13) > 0$ και $z^T x = 11.1883$. Επιβεβαιώνεται έτσι, δύο φορές, ότι $\rho(M^{-1}N) = 0.6762 < 1$.

Θεώρημα 3.30. [10] Έστω ένας αντιστρέψιμος πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ και η διάσπαση Perron-Frobenius δεύτερης κατηγορίας $A^T = M^T - N^T$ με x το ιδιοδιάνυσμα Perron-Frobenius του $(M^{-1}N)^T$. Αν ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις:

- (i) $\exists y \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $Ay \geq 0$, $Ny \geq 0$ και $y^T A^T x > 0$,
- (ii) $\exists y \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $Ay \geq 0$, $My \geq 0$ και $y^T A^T x > 0$,

τότε $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Ομοίως μετασχηματίζονται οι παραπάνω υποθέσεις στις εξής:

- (i) $\exists z \geq 0$ τέτοιο ώστε $(NA^{-1})z \geq 0$, $z^T x > 0$,
- (ii) $\exists z \geq 0$ τέτοιο ώστε $(MA^{-1})z \geq 0$, $z^T x > 0$.

Παράδειγμα 3.31. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

όπου

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} -0.3333 & 0.6667 & 0 \\ 0.4333 & -0.4667 & 0.1 \\ -0.1333 & 0.0667 & 0.2 \end{bmatrix}, NM^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2333 & 0.1333 & -0.1 \\ -0.3667 & 0.9333 & 0.3 \\ -0.4333 & 1.4667 & -0.1 \end{bmatrix},$$

Κεφάλαιο 3. 3.2. Διασπάσεις Perron-Frobenius (Perron-Frobenius Splittings)

$$NA^{-1} = \begin{bmatrix} 0.375 & 0 & -0.125 \\ 2 & -4 & -1 \\ 2.125 & -4 & -1.375 \end{bmatrix}, MA^{-1} = \begin{bmatrix} 1.375 & 0 & -0.125 \\ 2 & -3 & -1 \\ 2.125 & -4 & -0.375 \end{bmatrix}.$$

Ο NM^{-1} έχει την ιδιότητα Perron-Frobenius με $x = (0.8467 \ 0.2893 \ 0.4466)^T$ το ιδιοδιάνυσμα Perron-Frobenius του $(M^{-1}N)^T$. Δεν ισχύει καμία υπόθεση του Θεωρήματος 3.30 και παρατηρούμε ότι $\rho(NM^{-1}) = 1.2481 > 1$.

Οι υποθέσεις των Θεωρημάτων 3.27 και 3.30 αποτελούν μόνο ικανές συνθήκες για την σύγκλιση μιας διάσπασης. Το παρακάτω είναι αντιπαράδειγμα, το οποίο δείχνει ότι δεν υπάρχει τέτοιο y αλλά η διάσπαση συγκλίνει.

Παράδειγμα 3.32. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & 14 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 12 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Τότε,

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0.0833 & 0.0833 & -0.0833 \end{bmatrix}, M^{-1}N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0.0833 & -0.0833 & -0.5 \end{bmatrix},$$

$$A^{-1}N = \begin{bmatrix} 0.0769 & 2.0769 & -12 \\ -0.3077 & -0.3077 & 0 \\ 0.0769 & 0.0769 & -1 \end{bmatrix}, A^{-1}M = \begin{bmatrix} 1.0769 & 2.0769 & -12 \\ -0.3077 & 0.6923 & 0 \\ 0.0769 & 0.0769 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ο $M^{-1}N$ έχει την ιδιότητα Perron-Frobenius. Δεν υπάρχει $z \geq 0 (z \neq 0)$ τέτοιο ώστε να ισχύει μια από τις προτάσεις (i) ή (ii). Παρόλα αυτά έχουμε ότι η διάσπαση συγκλίνει ($\rho(M^{-1}N) = 0.9360 < 1$).

Τα παρακάτω θεώρημα αποτελούν θεωρήματα σύγκρισης δύο συγκλινουσών διασπάσεων τα οποία διατυπώνονται χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 3.33. [10] Έστω ένας αντιστρέψιμος πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Αν ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις:

- (i) $A = M_1 - N_1$ και $A^T = M_2^T - N_2^T$ δύο συγκλινουσες διασπάσεις Perron-Frobenius πρώτης και δεύτερης κατηγορίας, αντίστοιχα, με $T_1 := M_1^{-1}N_1$,

Κεφάλαιο 3. 3.2. Διασπάσεις Perron-Frobenius (Perron-Frobenius Splittings)

$T_2^T := (M_2^{-1}N_2)^T$ και $x \geq 0, y \geq 0$ τα αντίστοιχα ιδιοδιάνυσμα Perron-Frobenius τέτοια ώστε

$$y^T A^{-1} \geq 0, y^T x > 0 \text{ και } N_2 x \geq N_1 x, \quad (3.34)$$

(ii) $A^T = M_1^T - N_1^T$ και $A = M_2 - N_2$ δύο συγκλίνουσες διασπάσεις Perron-Frobenius δεύτερης και πρώτης κατηγορίας, αντίστοιχα, με $T_1^T := (M_1^{-1}N_1)^T, T_2 := M_2^{-1}N_2$ και $w \geq 0, z \geq 0$ τα αντίστοιχα ιδιοδιάνυσμα Perron-Frobenius τέτοια ώστε

$$w^T A^{-1} \geq 0, w^T z > 0 \text{ και } N_2 z \geq N_1 z. \quad (3.35)$$

Τότε,

$$\rho(T_1) \leq \rho(T_2). \quad (3.36)$$

Επιπλέον, αν $y^T A^{-1} > 0$ και $N_2 x \neq N_1 x$ για την πρόταση (i) ή $w^T A^{-1} > 0$ και $N_2 z \neq N_1 z$ για την πρόταση (ii), τότε

$$\rho(T_1) < \rho(T_2). \quad (3.37)$$

Θεώρημα 3.34. [10] Έστω ένας αντιστρέψιμος πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Αν ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις:

(i) $A = M_1 - N_1$ και $A^T = M_2^T - N_2^T$ δύο συγκλίνουσες διασπάσεις Perron-Frobenius πρώτης και δεύτερης κατηγορίας, αντίστοιχα, με $T_1 := M_1^{-1}N_1, T_2^T := (M_2^{-1}N_2)^T$ και $x \geq 0, y \geq 0$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα Perron-Frobenius τέτοια ώστε

$$N_1 x \geq 0, \text{ και } y^T M_1^{-1} \geq y^T M_2^{-1}, y^T x > 0, \quad (3.38)$$

(ii) $A^T = M_1^T - N_1^T$ και $A = M_2 - N_2$ δύο συγκλίνουσες διασπάσεις Perron-Frobenius δεύτερης και πρώτης κατηγορίας, αντίστοιχα, με $T_1^T := (M_1^{-1}N_1)^T, T_2 := M_2^{-1}N_2$ και $w \geq 0, z \geq 0$ τα αντίστοιχα ιδιοδιάνυσμα Perron-Frobenius τέτοια ώστε

$$N_2 z \geq 0, \text{ και } w^T M_1^{-1} \geq w^T M_2^{-1}, w^T z > 0. \quad (3.39)$$

Τότε,

$$\rho(T_1) \leq \rho(T_2). \quad (3.40)$$

Κεφάλαιο 3. 3.2. Διασπάσεις Perron-Frobenius (Perron-Frobenius Splittings)

Επιπλέον, αν $y^T M_1^{-1} > y^T M_2^{-1}$ και $N_1 x \neq 0$ για την πρόταση (i) ή $w^T M_1^{-1} > w^T M_2^{-1}$ και $N_2 z \neq 0$ για την πρόταση (ii), τότε

$$\rho(T_1) < \rho(T_2). \quad (3.41)$$

Ενώ, αν $y^T M_1^{-1} = y^T M_2^{-1}$ για την πρόταση (i) ή $w^T M_1^{-1} = w^T M_2^{-1}$ για την πρόταση (ii), τότε,

$$\rho(T_1) = \rho(T_2). \quad (3.42)$$

Παράδειγμα 3.35. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}, A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2 = M_3 - N_3,$$

με

$$M_1 = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}, N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -0.5 \\ -1 & -0.5 & 5 \end{bmatrix},$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}, N_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Τότε,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2222 & 0.0556 & 0.0556 \\ 0.0556 & 0.2222 & 0.0556 \\ 0.0556 & 0.0556 & 0.2222 \end{bmatrix}, M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2105 & 0.0439 & 0.0088 \\ 0.0526 & 0.2193 & 0.0439 \\ 0.0526 & 0.0526 & 0.2105 \end{bmatrix},$$

$$M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0.004 & 0.202 & 0.0202 \\ 0.0404 & 0.0202 & 0.202 \end{bmatrix}, M_3^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1563 & 0.0417 & 0.0104 \\ 0.0417 & 0.1667 & -0.0417 \\ 0.0104 & -0.0417 & 0.1563 \end{bmatrix}.$$

Η διάσπαση $A = M_1 - N_1$ είναι κανονική διάσπαση (*regular splitting*), η οποία ανήκει στις διασπάσεις Perron-Frobenius πρώτης κατηγορίας με

$$T_1 = M_1^{-1} N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.2105 \\ 0 & 0 & 0.0526 \\ 0 & 0 & 0.0526 \end{bmatrix}, x = (0.9828 \ 0.1414 \ 0.0505)^T.$$

Κεφάλαιο 33.3. Θεώρημα Stein-Rosenberg σε σχέση με τις διασπάσεις πινάκων

Η διάσπαση $A = M_2 - N_2$ είναι και αυτή κανονική διάσπαση, επομένως θεωρείται και διάσπαση Perron-Frobenius δεύτερης κατηγορίας με

$$T_2^T = (M_2^{-1}N_2)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0.202 & 0.0202 \\ 0.2 & 0.0141 & 0.1414 \\ 0.2 & 0.1051 & 0.0505 \end{bmatrix}, y = (0.461 \ 0.6275 \ 0.6275)^T.$$

Ισχύει ότι $y^T A^{-1} = (1.05 \ 2.049 \ 2.049) > 0$, $y^T x = 0.5735 > 0$ και $N_2 x = (0.1919 \ 1.0081 \ 0.0707)^T > (0.0505 \ 0 \ 0)^T = N_1 x$.

Παρατηρούμε ότι, $\rho(T_1) = 0.0526 < 0.3025 = \rho(T_2)$. Ισχύει το Θεώρημα 3.33. Η διάσπαση $A = M_2 - N_2$ θεωρείται και διάσπαση Perron-Frobenius δεύτερης κατηγορίας με $w = (0.461 \ 0.6275 \ 0.6275)^T$. Η διάσπαση $A = M_3 - N_3$ είναι διάσπαση Perron-Frobenius πρώτης κατηγορίας με

$$T_3 = M_3^{-1}N_3 = \begin{bmatrix} 0.2708 & -0.0417 & 0.1458 \\ -0.0833 & 0.1667 & 0.4167 \\ 0.0625 & 0.3750 & 0.1875 \end{bmatrix}, z = (0.2473 \ 0.6712 \ 0.6988)^T.$$

Ισχύει ότι $N_2 z = (1.37 \ 0.5967 \ 0.3356) \geq 0$ και $w^T M_2^{-1} = (0.1201 \ 0.1394 \ 0.1394) > (0.1047 \ 0.0976 \ 0.0767) = w^T M_3^{-1}$, $w^T z = 0.9737 > 0$.

Παρατηρούμε ότι, $\rho(T_2) = 0.3025 < 0.5698 = \rho(T_3)$. Ισχύει το Θεώρημα 3.34.

3.3 Θεώρημα Stein-Rosenberg σε σχέση με τις διασπάσεις πινάκων

Ορισμός 3.36. Κάθε $n \times n$ πίνακας B με $b_{ii} = 0$, $\forall i = 1(1)n$ λέγεται πίνακας Jacobi. Θεωρούμε μια διάσπαση (splitting) του πίνακα B

$$B = L + U, \quad (3.43)$$

όπου οι L και U είναι $n \times n$ ανστηρά κάτω και άνω τριγωνικοί πίνακες, αντίστοιχα.

Ορισμός 3.37. Έστω ένας $n \times n$ μη-αναγώγιμος μη αρνητικός πίνακας Jacobi $B = L + U$. Ο πίνακας

$$L_1 = (I - L)^{-1}U \quad (3.44)$$

λέγεται πίνακας Gauss-Seidel.

Το 1948, οι Stein και Rosenberg διατύπωσαν και απέδειξαν το θεώρημα, το οποίο συγκρίνει την φασματική ακτίνα του πίνακα Jacobi και του πίνακα Gauss-Seidel (από τους παραπάνω ορισμούς) και αυτό το θεώρημα είναι γνωστό ως θεώρημα Stein-Rosenberg.

Κεφάλαιο 33.3. Θεώρημα Stein-Rosenberg σε σχέση με τις διασπάσεις πινάκων

Θεώρημα 3.38 (Stein-Rosenberg). Έστω ένας $n \times n$ μη αρνητικός πίνακας Jacobi B και ο αντίστοιχος $n \times n$ μη αρνητικός πίνακας Gauss-Seidel L_1 . Τότε, ισχύει μόνο μια από τις ακόλουθες αλληλοαποκλειόμενες σχέσεις:

- (i) $\rho(B) = \rho(L_1) = 0$,
- (ii) $0 < \rho(L_1) < \rho(B) < 1$,
- (iii) $1 = \rho(B) = \rho(L_1)$,
- (iv) $1 < \rho(B) < \rho(L_1)$.

Κατά συνέπεια, οι πίνακες Jacobi και Gauss-Seidel L_1 είτε θα συγκλίνουν και οι δύο, είτε θα αποκλίνουν.

Το 2008 ο Νούτσος διατύπωσε και απέδειξε θεωρήματα τύπου Stein-Rosenberg για μη αρνητικές διασπάσεις καθώς και για διασπάσεις Perron-Frobenius (Ορισμός 3.24).

3.3.1 Θεωρήματα Stein-Rosenberg σχετιζόμενα με μη αρνητικές διασπάσεις

Θεώρημα 3.39. [11] Έστω ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ και οι μη αρνητικές διασπάσεις $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$, με $M_i^{-1}N_i \geq 0$, $i = 1, 2$ και

$$M_1^{-1}N_1 \geq M_1^{-1}N_2 \geq 0, N_1 \neq N_2, N_2 \neq 0. \quad (3.45)$$

Υποθέτουμε ότι οι πίνακες $M_1^{-1}N_1$, $T = M_1^{-1}(N_1 - N_2)$ και $F = M_1^{-1}N_2$ είναι, εκτός από μεταθετικό μετασχηματισμό χρησιμοποιώντας την ίδια μετάθεση, της μορφής:

$$M_1^{-1}N_1 = \begin{pmatrix} P_{11} & 0 \\ P_{21} & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 \\ T_{21} & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.46)$$

όπου P_{11}, T_{11} και F_{11} είναι $k \times k$ πίνακες ($k \leq n$), P_{11} είναι μη-αναγώγιμος και $T_{11}, F_{11} \neq 0$. Τότε, ισχύει μόνο μια από τις παρακάτω προτάσεις:

- (i) $0 < \rho(M_2^{-1}N_2) < \rho(M_1^{-1}N_1) < 1$,
- (ii) $\rho(M_2^{-1}N_2) = \rho(M_1^{-1}N_1) = 1$,

Κεφάλαιο 33.3. Θεώρημα Stein-Rosenberg σε σχέση με τις διασπάσεις πινάκων

$$(iii) \rho(M_2^{-1}N_2) > \rho(M_1^{-1}N_1) > 1.$$

Αν $T_{11} = 0$, τότε οι (i) και (iii) γράφονται $0 < \rho(M_2^{-1}N_2) = \rho(M_1^{-1}N_1) < 1$ και $\rho(M_2^{-1}N_2) = \rho(M_1^{-1}N_1) > 1$, αντίστοιχα. Αν $F_{11} = 0$, τότε ισχύει $\rho(M_2^{-1}N_2) = 0$ στην (i).

Παράδειγμα 3.40. Έστω ο μη αντιστρέψιμος πίνακας A και οι διασπάσεις $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}, N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, M_1^{-1}N_1 = \begin{bmatrix} 0.3571 & 0 & 0.3571 \\ 1.0714 & 0 & 0.0714 \\ 0.7857 & 0 & 0.2857 \end{bmatrix},$$

$$\rho(M_1^{-1}N_1) = 0.8524,$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0.5 & 3 & -2 \\ -0.5 & -2 & 4 \end{bmatrix}, N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}, M_2^{-1}N_2 = \begin{bmatrix} 0.28 & 0 & 0.4 \\ 0.84 & 0 & 0.2 \\ 0.58 & 0 & 0.4 \end{bmatrix},$$

$$\rho(M_2^{-1}N_2) = 0.8254,$$

$$F = M_1^{-1}N_2 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0.3571 \\ 0.75 & 0 & 0.0714 \\ 0.5 & 0 & 0.2857 \end{bmatrix}, T = M_1^{-1}(N_1 - N_2) = \begin{bmatrix} 0.1071 & 0 & 0 \\ 0.3214 & 0 & 0 \\ 0.2857 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεώρηματος 3.39 με $M_1^{-1}N_1 \geq M_1^{-1}N_2 \geq 0$, $N_1 \neq N_2$, $N_2 \neq 0$ και $T_{11}, F_{11} \neq 0$. Πραγματικά για τις φασματικές ακτίνες ισχύει η (i): $0 < \rho(M_2^{-1}N_2) = 0.8254 < \rho(M_1^{-1}N_1) = 0.8524 < 1$.

Θεώρημα 3.41. [11] Έστω ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ και οι μη αρνητικές διασπάσεις $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$, με $M_i^{-1}N_i \geq 0$, $i = 1, 2$ και

$$M_2^{-1}N_1 \geq M_2^{-1}N_2 \geq 0, N_1 \neq N_2, N_2 \neq 0. \quad (3.47)$$

Υποθέτουμε ότι οι πίνακες $M_2^{-1}N_2$, $T = M_2^{-1}(N_1 - N_2)$ και $F = M_2^{-1}N_1$ είναι, εκτός από μεταθετικό μετασχηματισμό χρησιμοποιώντας την ίδια μετάθεση, της μορφής:

$$M_2^{-1}N_2 = \begin{pmatrix} P_{11} & 0 \\ P_{21} & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 \\ T_{21} & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.48)$$

Κεφάλαιο 33.3. Θεώρημα Stein-Rosenberg σε σχέση με τις διασπάσεις πινάκων

όπου P_{11}, T_{11} και F_{11} είναι $k \times k$ πίνακες ($k \leq n$), F_{11} είναι μη-αναγώγιμος και $T_{11}, P_{11} \neq 0$. Τότε, ισχύει μόνο μια από τις παρακάτω προτάσεις:

$$(i) \quad 0 < \rho(M_2^{-1}N_2) < \rho(M_1^{-1}N_1) < 1,$$

$$(ii) \quad \rho(M_2^{-1}N_2) = \rho(M_1^{-1}N_1) = 1,$$

$$(iii) \quad \rho(M_2^{-1}N_2) > \rho(M_1^{-1}N_1) > 1.$$

Αν $T_{11} = 0$, τότε οι (i) και (iii) γράφονται $0 < \rho(M_2^{-1}N_2) = \rho(M_1^{-1}N_1) < 1$ και $\rho(M_2^{-1}N_2) = \rho(M_1^{-1}N_1) > 1$, αντίστοιχα. Αν $P_{11} = 0$, τότε ισχύει $\rho(M_2^{-1}N_2) = 0$ στην (i).

Παράδειγμα 3.42. Έστω ο μη-αντιστρέψιμος πίνακας A και οι διασπάσεις $A = M_3 - N_3 = M_4 - N_4$:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}, N_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_3^{-1}N_3 = \begin{bmatrix} 0.4444 & 0.2778 & 0 \\ 0.6667 & 0.1667 & 0 \\ 0.7778 & 0.1111 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\rho(M_3^{-1}N_3) = 0.7577,$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} 3.5 & -0.5 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -0.5 & -2 & 3 \end{bmatrix}, N_4 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_4^{-1}N_4 = \begin{bmatrix} 0.375 & 0.2083 & 0 \\ 0.5 & 0.1667 & 0 \\ 0.5625 & 0.1458 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\rho(M_4^{-1}N_4) = 0.61,$$

$$F = M_4^{-1}N_3 = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.4167 & 0 \\ 1 & 0.3333 & 0 \\ 1.125 & 0.2917 & 0 \end{bmatrix}, T = M_4^{-1}(N_3 - N_4) = \begin{bmatrix} 0.375 & 0.2083 & 0 \\ 0.5 & 0.1667 & 0 \\ 0.5625 & 0.1458 & 0 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 3.41 με $M_4^{-1}N_3 \geq M_4^{-1}N_4 \geq 0$, $N_3 \neq N_4$, $N_4 \neq 0$. και $T_{11}, P_{11} \neq 0$. Πραγματικά για τις φασματικές ακτίνες ισχύει η (i): $0 < \rho(M_4^{-1}N_4) = 0.61 < \rho(M_3^{-1}N_3) = 0.7577 < 1$.

Θεώρημα 3.43. [11] Αν ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 3.39 τότε, ισχύουν και οι υποθέσεις του Θεωρήματος 3.41. Επομένως, το Θεώρημα 3.41 είναι πιο ισχυρό από το Θεώρημα 3.39.

Κεφάλαιο 33.3. Θεώρημα Stein-Rosenberg σε σχέση με τις διασπάσεις πινάκων

Απόδειξη. Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 3.39, δηλαδή,

$$T = M_1^{-1}(N_1 - N_2) \geq 0, F = M_1^{-1}N_2 \geq 0, T, F \neq 0.$$

Τότε,

$$\begin{aligned} T' &= M_2^{-1}(N_1 - N_2) = (M_1 - N_1 + N_2)^{-1}(N_1 - N_2) \\ &= (I - M_1^{-1}(N_1 - N_2))^{-1} M_1^{-1}(N_1 - N_2) \\ &= (I - T)^{-1}T \end{aligned} \quad (3.49)$$

και

$$\begin{aligned} F' &= M_2^{-1}N_1 = (M_1 - N_1 + N_2)^{-1}N_1 \\ &= (I - M_1^{-1}(N_1 - N_2))^{-1} M_1^{-1}N_1 \\ &= (I - T)^{-1}M_1^{-1}N_1. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Επειδή $M_2^{-1}N_2 \geq 0$, από το Θεώρημα Perron-Frobenius έστω $x_2 \geq 0$ το ιδιοδιάνυσμα του $M_2^{-1}N_2$ που αντιστοιχεί στην $\rho_2 = \rho(M_2^{-1}N_2) > 0$. Τότε,

$$M_2^{-1}N_2x_2 = (I - T)^{-1}Fx_2 = \rho_2x_2 \Leftrightarrow (F + \rho_2T)x_2 = \rho_2x_2. \quad (3.51)$$

Η σχέση (3.46) δίνει τις κανονικές μορφές Frobenius των $P = M_1^{-1}N_1$, F και T . Έστω το διάνυσμα $x_2 = \begin{pmatrix} x_2^{(1)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix}$, όπου το $x_2^{(1)} \in \mathbb{R}^k$ αντιστοιχεί στα blocks P_{11} , F_{11} και T_{11} .

Αφού, $\rho_2 > 0$, $F_{11} \geq 0$, $T_{11} \geq 0$ και $P_{11} = F_{11} + T_{11}$ είναι μη-αναγωγίμος πίνακας, τότε ο $F_{11} + \rho_2T_{11}$ είναι επίσης μη-αναγωγίμος πίνακας.

Από τη σχέση (3.51), έχουμε ότι $x_2^{(1)} > 0$. Λαμβάνοντας υπόψη το πρώτο block της (3.51) θα έχουμε ότι

$$(F_{11} + \rho_2T_{11})x_2^{(1)} = \rho_2x_2^{(1)} \Rightarrow \rho_2T_{11}x_2^{(1)} \leq \rho_2x_2^{(1)} \Leftrightarrow T_{11}x_2^{(1)} \leq x_2^{(1)}.$$

Από το Λήμμα των Marek και Szyld [8] εξασφαλίζουμε ότι $\rho(T) \leq 1$. Επειδή, $I - T$ είναι αντιστρέψιμος, τότε $\rho(T) < 1$ και θα έχουμε ότι

$$T' = (I - T)^{-1}T = T + T^2 + T^3 + \dots \geq 0$$

και

$$F' = (I - T)^{-1}M_1^{-1}N_1 = (I + T + T^2 + T^3 + \dots)M_1^{-1}N_1 \geq 0.$$

Αφού το block P_{11} του $P = M_1^{-1}N_1$ είναι μη-αναγωγίμος, τότε το F'_{11} είναι επίσης μη-αναγωγίμος πίνακας. Είναι προφανές ότι $T' \neq 0$ και $F' \neq 0$. Τότε, ισχύει και η υπόθεση του Θεωρήματος 3.41. \square

Κεφάλαιο 33.3. Θεώρημα Stein-Rosenberg σε σχέση με τις διασπάσεις πινάκων

Παρατήρηση Στα παραπάνω θεωρήματα, οι πίνακες P , T και F μπορούν να γραφούν και με την ανάστροφη μορφή των:

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.52)$$

3.3.2 Θεωρήματα Stein-Rosenberg σχετιζόμενα με διασπάσεις Perron-Frobenius

Θεώρημα 3.44. [11] Έστω ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ και οι διασπάσεις $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ είναι

(α') διασπάσεις Perron-Frobenius δεύτερης και πρώτης κατηγορίας, αντίστοιχα, με y_1, x_2 το αντίστοιχο αριστερό και δεξιό Perron ιδιοδιάνυσμα, δηλαδή $y_1^T M_1^{-1} N_1 = \rho(M_1^{-1} N_1) y_1^T$, $M_2^{-1} N_2 x_2 = \rho(M_2^{-1} N_2) x_2$, και

$$M_1^{-1} N_1 x_2 \geq M_1^{-1} N_2 x_2 \geq 0, M_1^{-1} N_1 x_2 \neq M_1^{-1} N_2 x_2, M_1^{-1} N_2 x_2 \neq 0, \quad (3.53)$$

ή

(β') διασπάσεις Perron-Frobenius πρώτης και δεύτερης κατηγορίας, αντίστοιχα, με x_1, y_2 το αντίστοιχο δεξιό και αριστερό Perron ιδιοδιάνυσμα, δηλαδή $M_1^{-1} N_1 x_1 = \rho(M_1^{-1} N_1) x_1$, $y_2^T M_2^{-1} N_2 = \rho(M_2^{-1} N_2) y_2^T$, και

$$y_2^T M_1^{-1} N_1 \geq y_2^T M_1^{-1} N_2 \geq 0, y_2^T M_1^{-1} N_1 \neq y_2^T M_1^{-1} N_2, y_2^T M_1^{-1} N_2 \neq 0. \quad (3.54)$$

Υποθέτουμε ότι οι πίνακες $M_1^{-1} N_1$, $T = M_1^{-1} (N_1 - N_2)$ και $F = M_1^{-1} N_2$ είναι, εκτός από μεταθετικό μετασχηματισμό χρησιμοποιώντας την ίδια μετάθεση, της μορφής:

$$M_1^{-1} N_1 = \begin{pmatrix} P_{11} & 0 \\ P_{21} & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 \\ T_{21} & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.55)$$

όπου P_{11}, T_{11} και F_{11} είναι $k \times k$ πίνακες ($k \leq n$), P_{11}^T ή P_{11} έχει την ισχυρή ιδιότητα Perron-Frobenius και $T_{11}, F_{11} \neq 0$. Τότε, ισχύει μόνο μια από τις παρακάτω προτάσεις:

$$(i) 0 < \rho(M_2^{-1} N_2) < \rho(M_1^{-1} N_1) < 1,$$

Κεφάλαιο 33.3. Θεώρημα Stein-Rosenberg σε σχέση με τις διασπάσεις πινάκων

$$(ii) \rho(M_2^{-1}N_2) = \rho(M_1^{-1}N_1) = 1,$$

$$(iii) \rho(M_2^{-1}N_2) > \rho(M_1^{-1}N_1) > 1.$$

Αν $T_{11} = 0$, τότε οι (i) και (iii) γράφονται $0 < \rho(M_2^{-1}N_2) = \rho(M_1^{-1}N_1) < 1$ και $\rho(M_2^{-1}N_2) = \rho(M_1^{-1}N_1) > 1$, αντίστοιχα. Αν $F_{11} = 0$, τότε ισχύει $\rho(M_2^{-1}N_2) = 0$ στην (i).

Παράδειγμα 3.45. Έστω ο πίνακας A και οι διασπάσεις $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, M_1 = \begin{bmatrix} -4 & -0.5 & 5 \\ -0.5 & 3 & -1 \\ 4 & -1.5 & 2 \end{bmatrix}, N_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 2 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 1 & -0.5 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_1^{-1}N_1 = \begin{bmatrix} 0.1821 & -0.0412 & 0.0756 \\ 0.3230 & 0.3608 & 0.1718 \\ 0.3780 & 0.1031 & 0.4777 \end{bmatrix}, \rho(M_1^{-1}N_1) = 0.6015.$$

Ο $M_1^{-1}N_1$ έχει την ιδιότητα Perron-Frobenius με δεξιό ιδιοδιάνυσμα

$$x_1 = (0.0741 \ 0.6434 \ 0.7619)^T.$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} -4.5 & -0.5 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \\ 4 & -1.5 & 2 \end{bmatrix}, N_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -0.5 & 1 \end{bmatrix},$$

$$N_2M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0.3571 & 0.5595 & 0.6667 \\ -0.0714 & 0.3214 & 0 \\ 0.0714 & 0.0119 & 0.3333 \end{bmatrix}, \rho(N_2M_2^{-1}) = 0.4286.$$

ο $N_2M_2^{-1}$ έχει την ιδιότητα Perron-Frobenius με αριστερό ιδιοδιάνυσμα

$$y_2^T = (0.8704 \ 0.3482 \ 0.3482)^T.$$

Παρατηρώ ότι ισχύει η υπόθεση (3.54), δηλαδή,

$$y_2^T M_1^{-1} N_1 = (0.4026 \ 0.1256 \ 0.2919) \geq y_2^T M_1^{-1} N_2 = (0.2704 \ 0.1256 \ 0.0419) \geq 0,$$

Κεφάλαιο 33.3. Θεώρημα Stein-Rosenberg σε σχέση με τις διασπάσεις πινάκων

$$F = M_1^{-1}N_2 = \begin{bmatrix} 0.1684 & -0.0412 & -0.0137 \\ 0.1100 & 0.3608 & -0.2131 \\ 0.2457 & 0.1031 & 0.3677 \end{bmatrix},$$

$$T = M_1^{-1}(N_1 - N_2) = \begin{bmatrix} 0.0137 & 0 & 0.0893 \\ 0.2131 & 0 & 0.3849 \\ 0.1323 & 0 & 0.1100 \end{bmatrix}.$$

Ο $P_{11} = M_1^{-1}N_1$ έχει την ισχυρή ιδιότητα Perron-Frobenius και $T_{11}, F_{11} \neq 0$.

Πραγματικά, για τις φασματικές ακτίνες ισχύει η (i) του Θεωρήματος 3.44: $0 < \rho(M_2^{-1}N_2) = 0.4286 < 0.6015 = \rho(M_1^{-1}N_1) < 1$.

Θεώρημα 3.46. [11] Έστω ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ και οι διασπάσεις $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ είναι

(α') διασπάσεις Perron-Frobenius πρώτης και δεύτερης κατηγορίας, αντίστοιχα, με x_1, y_2 το αντίστοιχο δεξιό και αριστερό Perron ιδιοδιάνυσμα, δηλαδή $M_1^{-1}N_1x_1 = \rho(M_1^{-1}N_1)x_1, y_2^T M_2^{-1}N_2 = \rho(M_2^{-1}N_2)y_2^T$, και

$$M_2^{-1}N_1x_1 \geq M_2^{-1}N_2x_1 \geq 0, M_2^{-1}N_1x_1 \neq M_2^{-1}N_2x_1, M_2^{-1}N_2x_1 \neq 0, \quad (3.56)$$

ή

(β') διασπάσεις Perron-Frobenius δεύτερης και πρώτης κατηγορίας, αντίστοιχα, με y_1, x_2 το αντίστοιχο αριστερό και δεξιό Perron ιδιοδιάνυσμα, δηλαδή $y_1^T M_1^{-1}N_1 = \rho(M_1^{-1}N_1)y_1^T, M_2^{-1}N_2x_2 = \rho(M_2^{-1}N_2)x_2$, και

$$y_1^T M_2^{-1}N_1 \geq y_1^T M_2^{-1}N_2 \geq 0, y_1^T M_2^{-1}N_1 \neq y_1^T M_2^{-1}N_2, y_1^T M_2^{-1}N_2 \neq 0. \quad (3.57)$$

Υποθέτουμε ότι ο πίνακας $M_2^{-1}N_2, T = M_2^{-1}(N_1 - N_2)$ και $F = M_2^{-1}N_1$ είναι, εκτός από μεταθετικό μετασχηματισμό χρησιμοποιώντας την ίδια μετάθεση, της μορφής:

$$M_2^{-1}N_2 = \begin{pmatrix} P_{11} & 0 \\ P_{21} & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 \\ T_{21} & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.58)$$

όπου P_{11}, T_{11} και F_{11} είναι $k \times k$ πίνακες ($k \leq n$), P_{11}^T ή P_{11} έχει την ισχυρή ιδιότητα Perron-Frobenius και $T_{11}, F_{11} \neq 0$. Τότε, ισχύει μόνο μια από τις παρακάτω προτάσεις:

Κεφάλαιο 33.3. Θεώρημα Stein-Rosenberg σε σχέση με τις διασπάσεις πινάκων

$$(i) \ 0 < \rho(M_2^{-1}N_2) < \rho(M_1^{-1}N_1) < 1,$$

$$(ii) \ \rho(M_2^{-1}N_2) = \rho(M_1^{-1}N_1) = 1,$$

$$(iii) \ \rho(M_2^{-1}N_2) > \rho(M_1^{-1}N_1) > 1.$$

Αν $T_{11} = 0$, τότε οι (i) και (iii) γράφονται $0 < \rho(M_2^{-1}N_2) = \rho(M_1^{-1}N_1) < 1$ και $\rho(M_2^{-1}N_2) = \rho(M_1^{-1}N_1) > 1$, αντίστοιχα. Αν $P_{11} = 0$, τότε ισχύει $\rho(M_2^{-1}N_2) = 0$ στην (i).

Παράδειγμα 3.47. Έστω ο πίνακας A και οι διασπάσεις $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}, M_1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}, N_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$M_1^{-1}N_1 = \begin{bmatrix} 0.7143 & 0.3571 & -0.2143 \\ 0.1429 & 1.0714 & 1.3571 \\ -0.4286 & 0.7857 & 1.4286 \end{bmatrix}, \rho(M_1^{-1}N_1) = 2.2737.$$

Ο $M_1^{-1}N_1$ έχει την ιδιότητα Perron-Frobenius με δεξιό ιδιοδιάνυσμα

$$x_1 = (0.0817 \ 0.7503 \ 0.6561)^T.$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0.9 & -1 & 0 \\ 1 & 0.9 & -2 \\ 0 & -2 & 1.9 \end{bmatrix}, N_2 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 & -2 \\ 2 & -0.1 & 1 \\ -2 & 1 & 0.9 \end{bmatrix},$$

$$N_2M_2^{-1} = \begin{bmatrix} -26.2671 & 23.5404 & 23.7267 \\ 39.6894 & -33.7205 & -34.9689 \\ -5.4658 & 2.9193 & 3.5466 \end{bmatrix}, \rho(M_2^{-1}N_2) = 56.9531.$$

Ο $N_2M_2^{-1}$ έχει την ιδιότητα Perron-Frobenius με αριστερό ιδιοδιάνυσμα

$$y_2 = (0.0195 \ 0.2157 \ 0.9763)^T.$$

Παρατηρώ ότι ισχύει η υπόθεση (3.57), δηλαδή,

$$M_2^{-1}N_1x_1 = (75.4592 \ 66.7645 \ 68.9336)^T \geq M_2^{-1}N_2x_1 = (42.1903 \ 36.6509 \ 37.9602)^T \geq 0,$$

Κεφάλαιο 3. 3.4. Επεκτάσεις της θεωρίας Perron-Frobenius στη θεωρία κώνων

$$F = M_2^{-1}N_1 = \begin{bmatrix} 29.6894 & -36.0248 & -77.5155 \\ 24.7205 & -32.4224 & -67.7640 \\ 24.9689 & -33.6025 & -69.7516 \end{bmatrix},$$

$$T = M_2^{-1}(N_1 - N_2) = \begin{bmatrix} 29.8696 & -24.7826 & -26.0870 \\ 24.7826 & -22.3043 & -23.4783 \\ 26.0870 & -23.4783 & -23.6087 \end{bmatrix}.$$

Ο $P_{11} = M_2^{-1}N_2$ έχει την ισχυρή ιδιότητα Perron-Frobenius και $T_{11}, F_{11} \neq 0$.

Πραγματικά, για τις φασματικές ακτίνες ισχύει η (iii) του Θεωρήματος 3.46: $\rho(M_2^{-1}N_2) = 56.9531 > 2.2737 = \rho(M_1^{-1}N_1) > 1$.

Παρατήρηση Στα παραπάνω θεωρήματα, οι πίνακες P , T και F μπορούν και εδώ να γραφούν στην ανάστροφη μορφή (3.52).

3.4 Επεκτάσεις της θεωρίας Perron-Frobenius στη θεωρία κώνων

Θα μελετήσουμε εδώ τις ιδιότητες των λύσεων του δυναμικού διαφορικού συστήματος

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad A \in \mathbb{R}^{n,n}, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0. \quad (3.59)$$

Το διαφορικό αυτό σύστημα έχει πολλές εφαρμογές σε προβλήματα πληθυσμών που προέρχονται από Μηχανική, Βιολογία, Ιατρική, Οικονομία και από άλλες επιστήμες.

Η λύση του συστήματος αυτού είναι η γνωστή

$$x(t) = e^{tA}x_0, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.60)$$

Ενδιαφέρει όμως στα προβλήματα πληθυσμών η συμπεριφορά της τροχιάς που προέρχεται από το x_0

$$\{x(t) = e^{tA}x_0 | t \in [0, \infty)\}.$$

3.4.1 Προσβασιμότητα και παραμονή της τροχιάς στον κώνο των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών

Το 2008, οι Νούτσος και Tsatsomeros βρήκαν τα χαρακτηριστικά του συστήματος για το πότε η τροχιά γίνεται μη αρνητική σε πεπερασμένο χρόνο (αυτό

Κεφάλαιο 3. 3.4. Επεκτάσεις της θεωρίας Perron-Frobenius στη θεωρία κώνων

λέγεται προσβασιμότητα στον \mathbb{R}_+^n) και τότε παραμένει μη αρνητική για κάθε επόμενη χρονική στιγμή (αυτό λέγεται παραμονή στον \mathbb{R}_+^n). Πιο συγκεκριμένα μελέτησαν

- (i) πίνακες A για τους οποίους ο e^{tA} γίνεται και παραμένει μη αρνητικός μετά από ένα χρονικό διάστημα. Οι πίνακες αυτοί λέγονται τελικά εκθετικά μη αρνητικοί.
- (ii) Τα αρχικά σημεία x_0 που δημιουργούν μη αρνητικές τροχιές. Τα σημεία αυτά βρίσκονται στον simplicial κώνο $K = e^{t_0 A} \mathbb{R}_+^n = \{x_0 \in \mathbb{R}^n | (\exists y \geq 0)[x_0 = e^{t_0 A} y \geq 0]\}$ και λέγονται σημεία μη αρνητικής αφετηρίας (nonnegative potential).

Το θεώρημα και το πόρισμα που ακολουθούν αποτελούν ικανή συνθήκη ώστε ένας πίνακας να είναι τελικά εκθετικά μη αρνητικός πίνακας.

Θεώρημα 3.48. [12] Έστω ένας τελικά μη αρνητικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ με $\text{index}_0(A) \leq 1$. Τότε, ο A είναι τελικά εκθετικά μη αρνητικός πίνακας.

Πόρισμα 3.49. [12] Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ τέτοιος ώστε ο $A + aI$ είναι τελικά μη αρνητικός πίνακας $\forall a \in [a_1, a_2]$, $a_1 < a_2$. Τότε, ο A είναι τελικά εκθετικά μη αρνητικός πίνακας.

Έστω ένας τελικά εκθετικά μη αρνητικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ με εκθετικό δείκτη $t_0 = t_0(A) \geq 0$. Θα μελετήσουμε τα σημεία μη αρνητικής αφετηρίας, δηλαδή, το σύνολο που αποτελείται από όλα τα αρχικά σημεία που δημιουργούν τροχιές που εισέρχονται στον \mathbb{R}_+^n σε πεπερασμένο χρόνο και παραμένουν στον \mathbb{R}_+^n για κάθε επόμενη χρονική στιγμή. Αυτό το σύνολο γράφεται ως:

$$X_A(\mathbb{R}_+^n) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n | (\exists \hat{t} = \hat{t}(x_0) \geq 0)(\forall t \geq \hat{t})[e^{tA} x_0 \geq 0]\}. \quad (3.61)$$

Ορίζουμε τον simplicial κώνο ως εξής:

$$K = e^{t_0 A} \mathbb{R}_+^n = \{x_0 \in \mathbb{R}^n | (\exists y \geq 0)[x_0 = e^{t_0 A} y]\}. \quad (3.62)$$

Λήμμα 3.50. [12] Θεωρώ το σύνολο

$$Y_A(K) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n | (\exists \hat{t} = \hat{t}(x_0) \geq 0)[e^{\hat{t}A} x_0 \in K]\}. \quad (3.63)$$

Για τους simplicial κώνους K και $Y_A(K)$ ισχύει $K \subseteq \mathbb{R}_+^n \subseteq Y_A(K)$.

Κεφάλαιο 3. 3.4. Επεκτάσεις της θεωρίας Perron-Frobenius στη θεωρία κώνων

Απόδειξη. Αφού $e^{t_0 A} \geq 0$, τότε $K \subseteq \mathbb{R}_+^n$. Αν $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$, τότε για $\hat{t} = 2t_0$ έχουμε $e^{\hat{t}A}x_0 = e^{t_0A}(e^{t_0A}x_0) \in K$. Άρα, $\mathbb{R}_+^n \subseteq Y_A(K)$. \square

Πρόταση 3.51. [12] Έστω ένας τελικά εκθετικά μη αρνητικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ με εκθετικό δείκτη $t_0 = t_0(A) \geq 0$ και $K = e^{t_0A}\mathbb{R}_+^n$. Θεωρώ το σύνολο

$$X_A(K) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n | (\exists \hat{t} = \hat{t}(x_0) \geq 0)(\forall t \geq \hat{t})[e^{tA}x_0 \in K]\}. \quad (3.64)$$

Τότε,

$$Y_A(K) = X_A(\mathbb{R}_+^n) = X_A(K).$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι $Y_A(K) = X_A(\mathbb{R}_+^n)$

Έστω $x_0 \in Y_A(K)$, τότε $(\exists \hat{t}, y \geq 0$ τ.ω. $e^{\hat{t}A}x_0 = e^{t_0A}y$). Έτσι, $x_0 = e^{(t_0-\hat{t})A}y$ και $(\forall t \geq \hat{t})(\exists t + t_0 - \hat{t} \geq t_0$ τ.ω. $e^{tA}x_0 = e^{(t+t_0-\hat{t})A}y) \geq 0$. Όποτε, $x_0 \in X_A(\mathbb{R}_+^n)$, δηλ. $Y_A(K) \subseteq X_A(\mathbb{R}_+^n)$.

Έστω $x_0 \in X_A(\mathbb{R}_+^n)$, τότε $(\exists \hat{t} \geq 0$ τ.ω. $e^{tA}x_0 \geq 0)$, $\forall t \geq \hat{t}$. Έστω $\tilde{t} = \hat{t} + t_0$, τότε $e^{\tilde{t}A}x_0 = e^{t_0A}(e^{\hat{t}A}x_0) \in K$. Όποτε, $x_0 \in K$, δηλ. $X_A(\mathbb{R}_+^n) \subseteq Y_A(K)$.

Θα δείξουμε ότι $X_A(\mathbb{R}_+^n) = X_A(K)$

Αρκεί να δείξουμε ότι $X_A(\mathbb{R}_+^n) \subseteq X_A(K)$ γιατί ισχύει $X_A(K) \subseteq X_A(\mathbb{R}_+^n)$ αφού $K \subseteq \mathbb{R}_+^n$. Έστω $x_0 \in X_A(\mathbb{R}_+^n)$, τότε $(\exists \hat{t} \geq 0$ τ.ω. $e^{t_0A}e^{sA}x_0 \in K)$, $\forall s \geq \hat{t}$. Τότε, $(\forall t \geq t_0 + \hat{t}) e^{tA}x_0 \in K$. Όποτε, $x_0 \in X_A(K)$, δηλ. $X_A(\mathbb{R}_+^n) \subseteq X_A(K)$. \square

Παράδειγμα 3.52. Θεωρούμε τον πίνακα A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι οι πίνακες A και A^T έχουν την ισχυρή ιδιότητα Perron-Frobenius. Ο A είναι τελικά εκθετικά θετικός πίνακας διότι $\exists t_0 = t_0(A) = 1.041$ τέτοιο ώστε να ισχύει $e^{tA} > 0$, $\forall t \geq t_0$, δηλαδή,

$$e^A = \begin{bmatrix} 11.1776 & 0.5058 & 15.7846 & 17.6845 & 17.6166 \\ 1.7337 & 0.7355 & -0.2648 & 2.2246 & 3.6078 \\ 15.3081 & 4.8661 & 18.2090 & 25.8185 & 27.0052 \\ 13.8483 & 4.4510 & 16.1514 & 24.1884 & 25.7484 \\ 8.2857 & 3.2679 & 10.5772 & 15.3114 & 17.2990 \end{bmatrix},$$

Κεφάλαιο 3. 3.4. Επεκτάσεις της θεωρίας Perron-Frobenius στη θεωρία κώνων

και

$$e^{t_0 A} = \begin{bmatrix} 13.2041 & 1.0365 & 18.5116 & 21.2068 & 21.2325 \\ 1.9308 & 0.7076 & 0.0006 & 2.5731 & 4.0600 \\ 18.1797 & 5.6832 & 21.6448 & 30.7166 & 32.2444 \\ 16.4730 & 5.2156 & 19.3353 & 28.6911 & 30.6069 \\ 9.9637 & 3.8265 & 12.5914 & 18.2348 & 20.4346 \end{bmatrix}.$$

Άρα, ο κώνος $K = e^{t_0 A} \mathbb{R}_+^n$ είναι ο κώνος που παράγεται από τις στήλες του $e^{t_0 A}$. Εξετάζουμε τα παρακάτω σημεία της τροχιάς $x(t) = e^{tA} x(0)$:

$$x_0 = x(0) = \begin{bmatrix} 2.8918 \\ 1.6962 \\ 1.2474 \\ -4.2096 \\ 1.2686 \end{bmatrix}, x(1) = e^A x_0 = \begin{bmatrix} 0.7748 \\ 1.1426 \\ 0.8093 \\ -1.4152 \\ 0.1882 \end{bmatrix}, x(2) = e^{2A} x_0 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ -0.5 \\ 0.7 \\ -0.5 \\ 0.3 \end{bmatrix},$$

$$x(3) = e^{3A} x_0 = \begin{bmatrix} 10.5923 \\ -0.063 \\ 10.098 \\ 8.8653 \\ 5.7898 \end{bmatrix}, x(4) = e^{4A} x_0 = \begin{bmatrix} 536.531 \\ 56.2534 \\ 730.9581 \\ 673.0159 \\ 430.2642 \end{bmatrix},$$

$$e^{(t_0+1)A} x_0 = \begin{bmatrix} 0.3792 \\ -0.5725 \\ 0.6932 \\ -0.4741 \\ 0.3213 \end{bmatrix}, e^{(t_0+2)A} x_0 = \begin{bmatrix} 12.1674 \\ 0.1573 \\ 12.0787 \\ 10.7053 \\ 6.9028 \end{bmatrix}, e^{(2t_0+1)A} x_0 = \begin{bmatrix} 14.0143 \\ 0.4121 \\ 14.4428 \\ 12.8965 \\ 8.2372 \end{bmatrix},$$

$$e^{(2t_0+2)A} x_0 = \begin{bmatrix} 758 \\ 79.2 \\ 1034.9 \\ 953.2 \\ 610.2 \end{bmatrix}, e^{(3t_0+1)A} x_0 = \begin{bmatrix} 901.2 \\ 94 \\ 1231.5 \\ 1134.4 \\ 726.6 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρώ ότι $e^{(t_0+1)A} x_0 \notin K$ αφού $e^A x_0 \notin \mathbb{R}_+^n$; $e^{(t_0+2)A} x_0 \notin K$ αφού $e^{2A} x_0 \notin \mathbb{R}_+^n$; $e^{(2t_0+2)A} x_0 \in K$ αφού $e^{(t_0+2)A} x_0 \in \mathbb{R}_+^n$. Επομένως, τα σημεία $x(t)$ της τροχιάς είναι στον K για κάθε $t \geq 2t_0 + 2$.

Κεφάλαιο 3. 3.4. Επεκτάσεις της θεωρίας Perron-Frobenius στη θεωρία κώνων

Λήμμα 3.53. [12] Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, ένας αντιστρέψιμος πίνακας $S \in \mathbb{R}^{n,n}$ και $K = S\mathbb{R}_+^n$. Τότε,

$$((\exists a \geq 0)((A + aI)K \subseteq K)) \Leftrightarrow ((\forall t \geq 0)(e^{tA}K \subseteq K)).$$

Πόρισμα 3.54. [12] Έστω ένας τελικά εκθετικά μη αρνητικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ με εκθετικό δείκτη $t_0 = t_0(A) \geq 0$ και $K = e^{t_0 A}\mathbb{R}_+^n$. Τότε,

$$((\forall t \geq 0)(e^{tA}K \subseteq K)) \Leftrightarrow (t_0 = 0).$$

ή ισοδύναμα

$$((\forall t \geq 0)(e^{tA}K \subseteq K)) \Leftrightarrow (A \text{ ουσιαστικά μη αρνητικός πίνακας}).$$

3.4.2 Κώνος προσβασιμότητας για τους ουσιαστικά μη αρνητικούς πίνακες

Το 2009, οι Νούτσος και Tsatsomeros βρήκαν τα αριθμητικά χαρακτηριστικά του κώνου προσβασιμότητας για τους ουσιαστικά μη αρνητικούς πίνακες και κατασκεύασαν τον αλγόριθμο που αποφασίζει αν το $x_0 \in X_A(\mathbb{R}_+^n)$.

Πριν καταλήξουν στον αλγόριθμο, δίνουν μια σειρά από ορισμούς, λήμματα, προτάσεις, θεωρήματα και πορίσματα ως εξής:

Ορισμός 3.55. [13] Έστω ένας ουσιαστικά μη αρνητικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Θεωρούμε το

$$h(A) = \sup \left\{ h \mid \min_{1 \leq i \leq n} (1 + ha_{ii}) > 0 \right\}.$$

Παρατηρούμε ότι $h(A) = \sup \{h \mid (I + hA) \geq 0\} \geq 0$ και $h(A) = \infty$ όταν $A \geq 0$.

Θεωρώ την ακολουθία $\{x^{(k)}\}$ με αρχική τιμή $\{x_0\}$ που παράγεται από το σύστημα πεπερασμένων διαφορών των Cauchy-Euler ως εξής:

$$x^{(k)} = (I + hA)^k x_0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Αυτή η ακολουθία είναι η διακριτή τροχιά (που αντιστοιχεί σε βήμα h), η οποία προέρχεται από την $x_0 = x^{(0)}$.

Ορισμός 3.56. Έστω ένας ουσιαστικά μη αρνητικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ και ένα $h \in (0, h(A))$. Θεωρούμε το διακριτό κώνο προσβασιμότητας (discrete reachability cone) $X_{A,h}(\mathbb{R}_+^n)$ ως εξής:

$$X_{A,h}(\mathbb{R}_+^n) = \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n \mid (\exists k_0 = k_0(x_0) \geq 0)(\forall k \geq k_0)[(I + hA)^k x_0 \in \mathbb{R}_+^n] \right\}.$$

Κεφάλαιο 3. 3.4. Επεκτάσεις της θεωρίας Perron-Frobenius στη θεωρία κώνων

Ο κώνος $X_{A,h}(\mathbb{R}_+^n)$ είναι το σύνολο όλων των αρχικών τιμών $x_0 \in \mathbb{R}^n$ που δημιουργούν διακριτές τροχιές $\{x^{(k)}\}$ που καταλήγουν και παραμένουν μη αρνητικές στον \mathbb{R}_+^n για κάθε επόμενη χρονική στιγμή.

Ορισμός 3.57. Έστω ένας ουσιαστικά μη αρνητικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Ορίζουμε το συνεχές σύνολο όλων των αρχικών τιμών $x_0 \in \mathbb{R}^n$ που δημιουργούν τροχιές $x(t) = e^{tA}x_0$ που καταλήγουν και παραμένουν στον $\text{int } \mathbb{R}_+^n$ για κάθε επόμενη χρονική στιγμή ως $X_A(\text{int } \mathbb{R}_+^n)$.

Ορισμός 3.58. Έστω ένας ουσιαστικά μη αρνητικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ και ένα $h \in (0, h(A))$. Ορίζουμε το διακριτό σύνολο όλων των αρχικών τιμών $x_0 \in \mathbb{R}^n$ που δημιουργούν διακριτές τροχιές $\{x^{(k)}\}$ που καταλήγουν και παραμένουν στον $\text{int } \mathbb{R}_+^n$ για κάθε επόμενη χρονική στιγμή ως $X_{A,h}(\text{int } \mathbb{R}_+^n)$.

Θεώρημα 3.59. [13] Έστω ένας ουσιαστικά μη αρνητικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ και έστω $h \in (0, h(A))$ τέτοιο ώστε ο $(I + hA)$ να είναι αντιστρέψιμος. Τότε,

$$X_A(\mathbb{R}_+^n) = X_{A,h}(\mathbb{R}_+^n). \quad (3.65)$$

Αν, επιπλέον, ο A είναι μη-αναγώγιμος, τότε,

$$X_A(\mathbb{R}_+^n) \setminus \{0\} = X_A(\text{int } \mathbb{R}_+^n) = X_{A,h}(\text{int } \mathbb{R}_+^n) = X_{A,h}(\mathbb{R}_+^n) \setminus \{0\}. \quad (3.66)$$

Το παρακάτω συμπέρασμα μας διευκολύνει να αποφασήσουμε για το πότε το $x_0 \in X_A(\mathbb{R}_+^n)$ ελέγχοντας διακριτές τροχιές, δηλαδή αν $x_0 \in X_{A,h}(\mathbb{R}_+^n)$. Για μη-αναγώγιμο πίνακα ο αλγόριθμος χαρακτηρισμού του $X_A(\mathbb{R}_+^n)$ βασίζεται στα παρακάτω θεωρήματα

Λήμμα 3.60. [13] Έστω ένας ουσιαστικά μη αρνητικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Τότε, $\forall h \in (0, h(A))$ έχουμε $1 + h\lambda(A) > |1 + h\mu|$, $\forall \mu \in \sigma(A)$, $\mu \neq \lambda(A)$, όπου $\lambda(A)$ η ιδιοτιμή του A με το μέγιστο πραγματικό μέρος.

Ορίζουμε ως \mathcal{L}_B ενός μη αρνητικού και μη-αναγώγιμου πίνακα B , το ευθύ άθροισμα όλων των ιδιοχώρων που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές του B εκτός από την $\rho(B)$: $\mathcal{L}_B = \bigoplus_{\mu \neq \rho(B)} \mathcal{N}_\mu(B)$.

Θεώρημα 3.61. [13] Έστω ένας μη-αναγώγιμος ουσιαστικά μη αρνητικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ και $h \in (0, h(A))$ τ.ω. ο πίνακας $B = I + hA$ να είναι αντιστρέψιμος. Έστω $\Gamma = \mathbb{R}_+^n \cup (-\mathbb{R}_+^n)$. Τότε

$$X_A(\text{int } \Gamma) \cup \{0\} = X_A(\Gamma) = (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{L}_B) \cup \{0\}. \quad (3.67)$$

Κεφάλαιο 3. 3.4. Επεκτάσεις της θεωρίας Perron-Frobenius στη θεωρία κώνων

Θεώρημα 3.62. [13] Έστω ένας μη-αναγωγίμος ουσιαστικά μη αρνητικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ και $h \in (0, h(A))$ τ.ω. ο $B = I + hA$ να είναι αντιστρέψιμος. Για ένα $x_0 \in \mathbb{R}^n$ θεωρώ το διάνυσμα $x^{(k)} = B^k x_0$, $k = 1, 2, \dots$. Τότε ισχύει μία από τις τρεις προτάσεις:

- (i) $x_0 \in X_A(\mathbb{R}_+^n)$ και $\exists k_0 \in \mathbb{Z}_{0,+}$ τ.ω. $x^{(k)} > 0$, $\forall k \geq k_0$,
- (ii) $x_0 \notin X_A(\mathbb{R}_+^n) \cup \mathcal{L}_B$ και $\exists k_0 \in \mathbb{Z}_{0,+}$ τ.ω. $x^{(k)} < 0$, $\forall k \geq k_0$,
- (iii) $x \in \mathcal{L}_B$ και $\forall k \in \mathbb{Z}_{0,+}$ $x^{(k)}$ έχει συγχρόνως θετικό και αρνητικό στοιχείο.

Αλγόριθμος που ελέγχει αν $x_0 \in X_A(\mathbb{R}_+^n)$ για μη-αναγωγίμους, ουσιαστικά μη αρνητικούς πίνακες: [13]

Δεδομένα: $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, A μη-αναγωγίμος ουσιαστικά μη αρνητικός, $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, ϵ (επιθυμητή ακρίβεια της εκτίμησης $\frac{\mu_2}{\mu_1}$), tol (η ακρίβεια της μηχανής)

Αρχή:

$$h(A) = \sup \left\{ h \mid \min_{1 \leq i \leq n} (1 + ha_{ii}) > 0 \right\};$$

Επιλογή h με $0 < h < h(A)$ ώστε $\exists (I + hA)^{-1}$;

$$B = I + hA;$$

Για $k = 1$ έως ότου $x^{(k)} > 0$ ή $x^{(k)} < 0$

$$x^{(k)} = Bx^{(k-1)};$$

$$k_0 = k;$$

Τέλος Για

Αν $x^{(k_0)} < 0$

$$x^{(0)} \notin X_A(\mathbb{R}_+^n);$$

Αλλιώς

$$x^{(0)} = x^{(k_0)};$$

$$i = \text{δείκτης του } \max_j ((x^{(0)})_j);$$

Για $k = 1$ έως ότου $|r^{(k)} - r^{(k-1)}| \leq \epsilon |r^{(k)}|$

$$x^{(k)} = Bx^{(k-1)};$$

Κεφάλαιο 3. 3.4. Επεκτάσεις της θεωρίας Perron-Frobenius στη θεωρία κώνων

$$\hat{\mu}_1^{(k)} = \frac{(x^{(k)})_i}{(x^{(k-1)})_i};$$

$$r^{(k)} = \frac{\hat{\mu}_1^{(k)} - \hat{\mu}_1^{(k-1)}}{\hat{\mu}_1^{(k-1)} - \hat{\mu}_1^{(k-2)}};$$

Τέλος Για'

Αν $(r^{(k)})^{k_0} \sim \text{tol}$

$$x^{(0)} \notin X_A(\mathbb{R}_+^n);$$

Αλλιώς

$$x^{(0)} \in X_A(\mathbb{R}_+^n);$$

Τέλος 'Αν'

Τέλος 'Αν'

Τέλος

Παράδειγμα 3.63. Έστω ο μη-αναγώγιμος ουσιαστικά μη αρνητικός πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 1 & 3 \\ 3 & \frac{1}{2} & 3 \\ 2 & 1 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Παίρνω $h(A) = \sup \left\{ h \mid \min_{1 \leq i \leq n} (1 + ha_{ii}) \geq 0 \right\} = 5$ και επιλέγω $h \in (0, 5)$ τέτοιο ώστε $\exists (I + hA)^{-1}$. Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 4.1422$, $\lambda_2 = -2.4054$, $\lambda_3 = -1.1868$.

Επιλέγω $h = 4$, τότε

$$B = I + hA = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 12 \\ 12 & 3 & 12 \\ 8 & 4 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του B είναι $\mu_1 = 17.5689 > |\mu_2| = |-8.6217| > |\mu_3| = |-3.7472|$. Η κυρίαρχη ιδιοτιμή του B είναι η $\mu_1 = 17.5689$. Έστω $x_0 = (1 \quad -0.2 \quad 4.5)^T$, από τον αλγόριθμο, υπολογίζουμε τα $x^{(k)}$, $r^{(k)}$:

$$x^{(1)} = Bx_0 = \begin{bmatrix} 55.2 \\ 65.4 \\ 8.1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^3.$$

Κεφάλαιο 3. 3.4. Επεκτάσεις της θεωρίας Perron-Frobenius στη θεωρία κώνων

Άρα, $x \in X_A(\mathbb{R}_+^3)$. Παρατηρώ για $x_0 = (0 \ -1 \ 0.5)^T$ έχουμε:

$$x^{(1)} = Bx_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -3.9 \end{bmatrix}, x^{(2)} = Bx^{(1)} = \begin{bmatrix} -30.8 \\ -13.8 \\ 27.22 \end{bmatrix}, x^{(3)} = Bx^{(2)} = \begin{bmatrix} 209.84 \\ -84.36 \\ -296.156 \end{bmatrix},$$

$$x^{(4)} = Bx^{(3)} = \begin{bmatrix} -3471.6 \\ -1288.9 \\ 1282 \end{bmatrix}, x^{(5)} = Bx^{(4)} = \begin{bmatrix} 3286 \\ -30142 \\ -32672 \end{bmatrix}, x^{(6)} = Bx^{(5)} = \begin{bmatrix} -506060 \\ -443060 \\ -100810 \end{bmatrix} < 0.$$

Άρα, $x \notin X_A(\mathbb{R}_+^3)$.

Κεφάλαιο 3. 3.4. Επεκτάσεις της θεωρίας Perron-Frobenius στη θεωρία κώνων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

M –ΠΙΝΑΚΕΣ (M –MATRICES)

Ο ορισμός του M –πίνακα (M –matrix) που έχει δωθεί στο Κεφάλαιο 1, έχει χρησιμοποιηθεί πρώτη φορά από τον Α. Ostrowski. Το 1977 ο R.J. Plemmons έχει δώσει τα χαρακτηριστικά των αντιστρέψιμων M –πινάκων μέσα από τα επόμενα θεωρήματα.

Θεώρημα 4.1. [15] Έστω ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \geq 2$. Ο A είναι M –πίνακας αν ισχύει κάθε μια από τις παρακάτω ισοδύναμες προτάσεις:

- (i) $(A + D)^{-1} > 0$, για κάθε διαγώνιο πίνακα $D \geq 0$,
- (ii) $(A + \alpha I)^{-1} > 0$, $\forall \alpha \geq 0$,
- (iii) ο αντίστροφος κάθε κύριου υποπίνακα του A είναι θετικός,
- (iv) ο αντίστροφος κάθε κύριου υποπίνακα του A , τάξης 1, 2 και n είναι θετικός.

Θεώρημα 4.2. [17] Ένας πίνακας T συγκλίνει ($\rho(T) < 1$) αν υπάρχει ο αντίστροφος του $I - T$ και

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k \geq 0. \quad (4.1)$$

Θεώρημα 4.3. [18] Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι αντιστρέψιμος M –πίνακας (nonsingular M –matrix) αν ο A είναι Z –πίνακας και $A^{-1} \geq 0$.

Απόδειξη. (\Rightarrow): Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι αντιστρέψιμος M –πίνακας, τότε $A = sI - B$, $B \geq 0$, $s > \rho(B)$. Τότε,

$$A^{-1} = (sI - B)^{-1} = \frac{1}{s} \left(I - \frac{1}{s} B \right)^{-1} = \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{s} B \right)^k \geq 0.$$

Κεφάλαιο 4.

(\Leftarrow): Έστω ένας πίνακας A είναι Z -πίνακας και $A^{-1} \geq 0$. Προφανώς ισχύει ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και γράφεται $A = sI - B$, $B \geq 0$, $s \geq 0$. Τότε,

$$A^{-1} = \frac{1}{s} \left(I - \frac{1}{s} B \right)^{-1} \geq 0.$$

και από το Θεώρημα 4.2 έχουμε ότι ο $\frac{1}{s} B$ συγκλίνει, δηλαδή $\rho\left(\frac{1}{s} B\right) < 1 \Leftrightarrow \rho(B) < s$. Άρα, ο A είναι αντιστρέψιμος M -πίνακας. \square

Θεώρημα 4.4. [18] Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι μη-αναγώγιμος και αντιστρέψιμος M -πίνακας αν ο A είναι Z -πίνακας και $A^{-1} > 0$.

Θεώρημα 4.5. [6] Αν ο B είναι ψευδο- M -πίνακας, τότε $B^{-1} \stackrel{v}{>} 0$.

Απόδειξη. Έστω ότι ο B είναι ψευδο- M -πίνακας τότε θα υπάρχει $A \stackrel{v}{>} 0$ και $\alpha > \rho(A)$ τ.ω. $B = \alpha I - A$. Έστω $\lambda = \rho(A)$ με $x, y > 0$ το αντίστοιχο δεξιό και αριστερό ιδιοδιάνυσμα, δηλαδή $Ax = \lambda x$, $y^T A = \lambda y^T$. Η $(\alpha - \lambda)^{-1}$ είναι η αυστηρά κυρίαρχη θετική ιδιοτιμή του B^{-1} .

Επομένως, $Bx = (\alpha - \lambda)x$, x είναι το δεξιό ιδιοδιάνυσμα του B^{-1} που αντιστοιχεί στην $(\alpha - \lambda)^{-1}$, ανάλογα, y^T είναι το αριστερό ιδιοδιάνυσμα του B^{-1} . Άρα, $B^{-1} \stackrel{v}{>} 0$. Το αντίστροφο αποδεικνύεται ακολουθώντας ακριβώς την αντίστροφη πορεία. \square

Θα ασχολούμαι μόνο με αντιστρέψιμους M -πίνακες που σχηματίζονται από μη-αναγώγιμους τελικά μη αρνητικούς πίνακες.

Λήμμα 4.6. [7] Έστω μη-αναγώγιμος τελικά μη αρνητικός πίνακας $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ με $\text{index}_0(B) \leq 1$ και έστω $e^{(i)}$ το i διάνυσμα της μοναδιαίας βάσης του \mathbb{R}^n , τότε $\exists \lambda_i > 0$ τ.ω. αν $\lambda_i > s > \rho(B)$, θα ισχύει $(sI - B)^{-1} e^{(i)} > 0$.

Θεώρημα 4.7. [7] Έστω μη-αναγώγιμος τελικά μη αρνητικός πίνακας $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ με $\text{index}_0(B) \leq 1$, τότε $\exists \lambda > \rho(B)$ τ.ω. αν $\lambda > s > \rho(B)$, θα ισχύει $(sI - B)^{-1} > 0$.

Απόδειξη. Από το λήμμα 4.6, $\forall i = 1(1)n$, $\exists \lambda_i > s > \rho(B)$, τότε $(sI - B)^{-1} e^{(i)} > 0$. Έστω $\lambda = \min_{i=1(1)n} (\lambda_i)$. Αν $\lambda > s > \rho(B)$, τότε $(sI - B)^{-1} e^{(i)} > 0$, $\forall i = 1(1)n$. Επειδή, η $(sI - B)^{-1} e^{(i)}$ είναι η i -στή στήλη του $(sI - B)^{-1}$, τότε $(sI - B)^{-1} > 0$. \square

Παράδειγμα 4.8. Έστω ο πίνακας

$$A_1 = sI - B_1, B_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, s > 4.$$

Έχουμε $\rho(B_1) = 4$, ο B_1 είναι μη αρνητικός πίνακας. Ο $A_1 = 5I - B_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ είναι M -πίνακας.

4.1 EM -πίνακες και M_v -πίνακες

Ορισμός 4.9. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ λέγεται EM -πίνακας αν $A = sI - B$, με $0 < \rho(B) \leq s$ όπου ο B είναι τελικά μη αρνητικός πίνακας ($B \stackrel{v}{\geq} 0$).

Παράδειγμα 4.10. Έστω ο πίνακας

$$A_2 = sI - B_2, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, s \geq 3.4142.$$

Έχουμε ότι $\rho(B_2) = 3.4142$, $B_2 \stackrel{v}{\geq} 0$ ($\forall k \geq 3, B_2^k \geq 0$). Άρα, ο A_2 είναι EM -πίνακας.

Ορισμός 4.11. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ λέγεται M_v -πίνακας αν $A = sI - B$, με $0 \leq \rho(B) \leq s$ όπου ο B είναι τελικά μη αρνητικός πίνακας ($B \stackrel{v}{\geq} 0$).

Παράδειγμα 4.12. Από το Παράδειγμα 4.10, είναι προφανές ότι ο $B_2 \stackrel{v}{\geq} 0$. Επομένως, ο A_2 είναι M_v -πίνακας.

Παράδειγμα 4.13. Έστω ο πίνακας

$$A_3 = sI - B_3, B_3 = \begin{bmatrix} 2 & -0.5 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}, s \geq 6.4326.$$

Έχουμε ότι $\rho(B) = 6.4326$, ο B_3 είναι τελικά μη αρνητικός πίνακας ($\forall k \geq 5$, $B_3^k \geq 0$). Επομένως, ο A_3 είναι M_v -πίνακας και EM -πίνακας.

Παράδειγμα 4.14. Έστω ο πίνακας

$$A_4 = sI - B_4, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad s \geq 0.$$

Έχουμε ότι $\rho(B) = 0$, ο B_4 είναι τελικά μη αρνητικός πίνακας ($\forall k \geq 3$, $B_4^k \geq 0$). Παρατηρώ ότι ο B_4 είναι και μηδενολογικός πίνακας ($\forall k \geq 5$, $B_4^k = 0$). Επομένως, ο A_4 είναι M_v -πίνακας αλλά δεν είναι EM -πίνακας.

Από τους ορισμούς, παρατηρούμε ότι οι EM -πίνακες είναι γνήσιο υποσύνολο των M_v -πινάκων, διότι οι M_v -πίνακες περιέχουν και τους μηδενολογικούς πίνακες, ενώ οι EM -πίνακες δεν τους περιέχουν.

Θεώρημα 4.15. [14] Έστω ένας M_v -πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, τότε ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις:

- (i) $s - \rho(B) \in \sigma(A)$,
- (ii) $\operatorname{Re} \lambda \geq 0, \forall \lambda \in \sigma(A)$,
- (iii) $\det(A) \geq 0, \det(A) = 0 \Leftrightarrow s = \rho(B)$,
- (iv) αν $\rho(B) > 0$, τότε υπάρχει ένα ιδιοδιάνυσμα $x \geq 0$ του A και ένα ιδιοδιάνυσμα $y \geq 0$ του A^T που αντιστοιχούν στην $\lambda(A) = s - \rho(B)$,
- (v) αν ο B είναι τελικά θετικός πίνακας και $s > \rho(B)$, τότε υπάρχει ένα ιδιοδιάνυσμα $x > 0$ του A και ένα ιδιοδιάνυσμα $y > 0$ του A^T που αντιστοιχούν στην $\lambda(A) = s - \rho(B)$ και $\operatorname{Re} \lambda > 0, \forall \lambda \in \sigma(A)$.

Θεώρημα 4.16. [14] Έστω ένας M_v -πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, τότε για κάθε αναπαράσταση της μορφής $A = tI - \hat{B}$, με \hat{B} τελικά μη αρνητικό πίνακα, θα έχουμε $t \geq \rho(\hat{B})$. Επιπλέον, αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε $t > \rho(\hat{B})$.

Απόδειξη. Αφού ο $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι M_v -πίνακας, τότε ο A γράφεται ως $A = sI - B$, με B τελικά μη αρνητικό πίνακα τ.ω. $0 \leq \rho(B) \leq s$.

Έστω μια αναπαράσταση του A , $A = tI - \hat{B}$ με \hat{B} τελικά μη αρνητικό πίνακα. Αν ο B είναι μηδενολογικός, τότε $0 = \rho(B) \in \sigma(B)$. Από το Θεώρημα 3.10, ισχύει ότι $\rho(B) \in \sigma(B)$ και όταν ο B δεν είναι μηδενολογικός. Για τον \hat{B} θα έχουμε ότι αν $t \geq s$, τότε

$$\begin{aligned} \rho(\hat{B}) = \rho((t-s)I + B) = \rho(B) + t - s &\Leftrightarrow t = s - \rho(B) + \rho(\hat{B}) \\ &\Rightarrow t \geq \rho(\hat{B}). \end{aligned}$$

Αν $t \leq s$, τότε

$$\begin{aligned} \rho(B) = \rho(\hat{B}) + s - t &\Leftrightarrow t = s - \rho(B) + \rho(\hat{B}) \\ &\Rightarrow t \geq \rho(\hat{B}). \end{aligned}$$

Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε από το Θεώρημα 4.15 (iii) έχουμε ότι $s > \rho(B)$ και επομένως $t > \rho(\hat{B})$. \square

Πρόταση 4.17. [14] Έστω ότι ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ γράφεται στην μορφή $A = sI - B$, όπου ο B είναι τελικά μη αρνητικός πίνακας. Τότε, ο A είναι M_v -πίνακας αν $A + \epsilon I$ είναι αντιστρέψιμος M_v -πίνακας, $\forall \epsilon > 0$.

Θεώρημα 4.18. [14] Έστω ένας M_v -πίνακας $A = sI - B \in \mathbb{R}^{n,n}$ όπου ο B είναι τελικά θετικός πίνακας, τότε ο $-A$ είναι τελικά εκθετικά θετικός πίνακας, δηλαδή, $\exists t_0 \geq 0$ τ.ω. $e^{-tA} > 0$, $\forall t \geq t_0$.

Θεώρημα 4.19. [14] Έστω ένας M_v -πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ γράφεται στην μορφή $A = sI - B$, όπου ο B είναι τελικά μη αρνητικός πίνακας. Υποθέτω ότι $\text{index}_0(B) \leq 1$. Τότε ο $-A$ είναι τελικά εκθετικά μη αρνητικός πίνακας.

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει από το Θεώρημα 3.48 και από το γεγονός ότι $e^{-tA} = e^{-t(sI-B)} = e^{-ts}e^{tB} \geq 0$. \square

Πόρισμα 4.20. [14] Έστω ένας M_v -πίνακας $A = sI - B \in \mathbb{R}^{n,n}$ τέτοιος ώστε $B + \alpha I$ είναι τελικά μη αρνητικός πίνακας για κάποιο $\alpha \in \mathbb{R}$, $-\alpha \notin \sigma(B)$. Τότε ο $-A$ είναι τελικά εκθετικά μη αρνητικός πίνακας.

Απόδειξη. Αφού ο $A = sI - B \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι M_v -πίνακας και ο $B + \alpha I$ είναι τελικά μη αρνητικός πίνακας για κάποιο $\alpha \in \mathbb{R}$ από το Θεώρημα 4.16 έχουμε ότι $s + \alpha \geq \rho(B + \alpha I)$. Επειδή $-\alpha \notin \sigma(B)$ έχουμε ότι $\text{index}_0(B + \alpha I) \leq 1$. Το συμπέρασμα προκύπτει εύκολα από το Θεώρημα 4.19 αν στην θέση του B θέσουμε το $B + \alpha I$. \square

Θεώρημα 4.21. [14] Έστω ότι ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ γράφεται στην μορφή $A = sI - B$, όπου ο B είναι τελικά μη αρνητικός πίνακας και έχει θετικό ιδιοδιάνυσμα. Θεωρώ τις παρακάτω προτάσεις:

- (i) ο A είναι M_v -πίνακας,
- (ii) υπάρχει ένας αντιστρέψιμος διαγώνιος πίνακας $D \geq 0$ τέτοιος ώστε το άθροισμα γραμμών του AD να είναι μη αρνητικός,
- (iii) $\exists x > 0$ τέτοιο ώστε $Ax \geq 0$.

Τότε, (i) \Rightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii). Επιπλέον, αν ο B δεν είναι μηδενολογισίμος, τότε οι παραπάνω προτάσεις (i) – (iii) είναι ισοδύναμες.

Παράδειγμα 4.22. Έστω ο πίνακας

$$A = sI - B, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad s \geq 2.5616.$$

Έχουμε $\rho(B) = 2.5616$, ο B είναι τελικά μη αρνητικός πίνακας ($\forall k \geq 4, B^k \geq 0$).

Άρα, έστω $s = 3$, τότε ο $A = 3I - B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ είναι M_v -πίνακας.

Υπάρχει ένας αντιστρέψιμος διαγώνιος πίνακας $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \geq 0$ τέτοιος

ώστε $AD = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ και τα αθροίσματα όλων των γραμμών του AD είναι

θετικά.

Επιπλέον, $\exists x = (1 \ 1 \ 1 \ 1)^T > 0$ τέτοιο ώστε $Ax = (2 \ 2 \ 1 \ 3)^T \geq 0$.

Θεώρημα 4.23. [14] Έστω ένας μη-αντιστρέψιμος M_v -πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ γράφεται στην μορφή $A = sI - B$, όπου ο B είναι τελικά θετικός πίνακας. Τότε, ισχύουν τα παρακάτω:

- (i) $\text{rank}(A) = n - 1$,
- (ii) $\exists x > 0$ τέτοιο ώστε $Ax = 0$,
- (iii) για κάποιο διάνυσμα $u \neq x$ τέτοιο ώστε $Au \geq 0$, τότε $u = 0$.

Απόδειξη. Αφού ο $A = sI - B \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι μη-αντιστρέψιμος M_v -πίνακας, από το Θεώρημα 4.15 (iii) έχουμε $s = \rho(B)$.

- (i) Από το Θεώρημα 3.9, ο B έχει την ισχυρή ιδιότητα Perron-Frobenius και τότε η $\rho(B)$ είναι απλή ιδιοτιμή του B . Επομένως, $0 = s - \rho(B)$ είναι απλή ιδιοτιμή του A . Δηλαδή, $\text{rank}(A) = n - 1$.
- (ii) Αφού ο B έχει την ισχυρή ιδιότητα Perron-Frobenius, τότε $\exists x > 0$ τέτοιο ώστε $Bx = \rho(B)x$, δηλαδή $Ax = \rho(B)x - Bx = 0$.
- (iii) Από το Θεώρημα 3.9, ο B^T έχει την ισχυρή ιδιότητα Perron-Frobenius και $\exists z > 0$ τέτοιο ώστε $z^T B = \rho(B)z^T$. Έστω ένα διάνυσμα $u \neq x$ τέτοιο ώστε $Au \geq 0$. Αν $Au \neq 0$, τότε $z^T Au > 0$. Όμως, $z^T Au = \rho(B)z^T u - z^T Bu = \rho(B)z^T u - \rho(B)z^T u = 0$, άτοπο. Άρα, $Au = 0$.

□

Θεώρημα 4.24. [14] Έστω ότι $A = sI - B \in \mathbb{R}^{n,n}$ και $E = sI - F \in \mathbb{R}^{n,n}$, όπου ο B, F είναι τελικά μη αρνητικοί πίνακες και δεν είναι μηδενοποιήσιμοι. Υποθέτουμε ότι τουλάχιστον ένας από τους B, B^T, F, F^T έχει θετικό ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στη φασματική ακτίνα του. Αν ο A είναι M_v -πίνακας και $A \leq E$, τότε και ο E είναι M_v -πίνακας.

Απόδειξη. Θα αποδείξω την περίπτωση που ο B έχει θετικό ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στη φασματική ακτίνα του.

Έστω ότι υπάρχει ένα διάνυσμα $x > 0$ τ.ω. $Bx = \rho(B)x$. Αφού ο F είναι τελικά μη αρνητικός πίνακας, από το Θεώρημα 3.10, $\exists y \geq 0$ τ.ω. $y^T F = \rho(F)y^T$. Έχουμε

$$A \leq E \Rightarrow sI - B \leq sI - F \Rightarrow B \geq F$$

και τότε

$$\rho(B)y^T x = y^T Bx \geq y^T Fx = \rho(F)y^T x.$$

Αφού $y^T x > 0$, τότε $\rho(B) \geq \rho(F)$. Αν ο A είναι M_v -πίνακας, τότε από το Θεώρημα 4.16 έχουμε $s \geq \rho(B) \geq \rho(F)$, άρα ο F είναι και M_v -πίνακας.

Ανάλογα, και για τις περιπτώσεις που ένα από τα B^T, F, F^T έχει θετικό ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στη φασματική ακτίνα του. □

4.2 Γενικευμένοι M -πίνακες (Generalized M -matrices) ή GM -matrices

Ο γενικευμένος M -πίνακας ή GM -πίνακας ορίζεται από τον εξής ορισμό:

Ορισμός 4.25. [2] Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ λέγεται GM -πίνακας αν $A = sI - B$, με $s \geq \rho(B) > 0$ όπου οι B και B^T έχουν την ιδιότητα Perron-Frobenius.

Ορισμός 4.26. [2] Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ λέγεται αντίστροφος GM -πίνακας αν ο αντίστροφος του είναι GM -πίνακας.

Θεώρημα 4.27. [2] Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ με τις ιδιοτιμές του να έχουν τη διάταξη $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$. Ο A είναι αντιστρέψιμος GM -πίνακας αν οι A^{-1} και A^{-1T} έχουν την ιδιότητα Perron-Frobenius και για τις ιδιοτιμές του A^{-1} ισχύει $0 < \lambda_n < \operatorname{Re}(\lambda_i)$ για όλα τα $\lambda_i \neq \lambda_n$.

Πόρισμα 4.28. [2] Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι αντίστροφος GM -πίνακας αν οι A και A^T έχουν την ιδιότητα Perron-Frobenius και $\operatorname{Re}(\lambda^{-1}) > \rho(A)^{-1}$, $\forall \lambda \in \sigma(A)$, $\lambda \neq \rho(A)$.

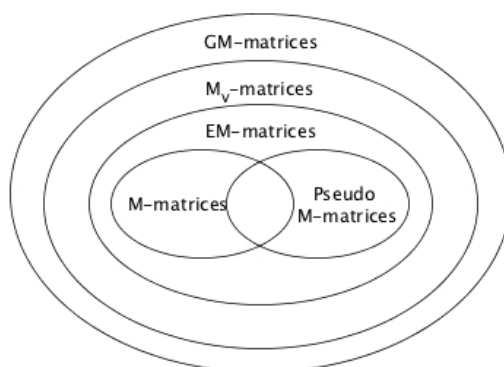
Πόρισμα 4.29. [2] Κάθε πραγματική ιδιοτιμή ενός αντιστρέψιμου GM -πίνακα είναι θετική.

Παράδειγμα 4.30. Έστω ο πίνακας

$$A = sI - B, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad s > 3.$$

Παρατηρούμε ότι $\rho(B) = 3$ και έχουμε ότι οι B και B^T έχουν την ιδιότητα Perron-Frobenius με ιδιοζεύγους $(3, (1 \ 1 \ 0 \ 0)^T)$ και $(3, (1 \ 2 \ 0 \ 0)^T)$, αντίστοιχα. Ο A είναι GM -πίνακας.

Από τον ορισμό των M -πινάκων γνωρίζουμε ότι κάθε M -πίνακας δεν είναι ψευδο- M -πίνακας, ούτε κάθε ψευδο- M -πίνακας είναι M -πίνακας. Οι δύο αυτές κατηγορίες είναι υποκλάση των EM -πινάκων ή M -πινάκων που έχουν τον B να είναι τελικά μη αρνητικός πίνακας. Οι M_v -πίνακες είναι γνήσιο υπερσύνολο των EM -πινάκων. Τελικά, οι GM -πίνακες αποτελούν την πιο γενική όλων αυτών των κατηγοριών. Τις κατηγορίες αυτών των πινάκων μπορούμε να τις παραστήσουμε γραφικά ως εξής:



Κεφάλαιο 4.

4.2. Γενικευμένοι M -πίνακες
(Generalized M -matrices) ή GM -matrices

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΡΟΣΗΜΟΥ (SIGN PATTERN MATRIX)

Ο πίνακας προσήμου έχει χρησιμοποιηθεί πρώτη φορά το 1947 από τον P. Samuelson στο βιβλίο “Foundations of Economic Analysis”. Ο πίνακας προσήμου συσχετίζει τους πίνακες και τα γραφήματα, δηλαδή ανήκει στον κλάδο της συνδυαστικής θεωρίας πινάκων (combinatorial matrix theory).

Ορισμός 5.1. Ο πίνακας προσήμου (*Sign Pattern Matrix*) ενός πίνακα A είναι ο πίνακας που έχει ως στοιχεία τα $+$, $-$, 0 αν το αντίστοιχο στοιχείο του A είναι θετικό, αρνητικό, ή μηδέν, αντίστοιχα και συμβολίζεται με $\mathcal{A} = \text{sgn}(A)$.

Ορισμός 5.2. Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ο οποίος έχει πίνακα προσήμου (*sign pattern*) τον \mathcal{A} . Ορίζουμε ως κλάση προσήμου (*sign pattern class*) του πίνακα \mathcal{A} , το σύνολο όλων των πινάκων $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ τετοιών ώστε $\text{sgn}(B) = \mathcal{A}$ και την συμβολίζουμε με $\mathcal{Q}(\mathcal{A})$.

Παράδειγμα 5.3. Έστω ένας πίνακας

$$B = \begin{bmatrix} 12 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & -6 & 7 & 0.5 \\ 2 & 0.75 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Τότε, } \text{sgn}(B) = \mathcal{A} = \begin{bmatrix} + & - & + & 0 \\ 0 & - & + & - \\ + & - & + & + \\ + & + & - & 0 \end{bmatrix} \text{ και λέμε ότι } B \in \mathcal{Q}(\mathcal{A}).$$

Θα λέμε ότι ένας πίνακας A απαιτεί την ιδιότητα P [5] αν κάθε πραγματικός πίνακας στην κλάση προσήμου $\mathcal{Q}(\mathcal{A})$ έχει την ιδιότητα P , ενώ ένας πίνακας

\mathcal{A} επιτρέπει την ιδιότητα P [5] αν κάποιος πραγματικός πίνακας στην κλάση προσήμου $\mathcal{Q}(\mathcal{A})$ έχει την ιδιότητα P .

Ορισμός 5.4. Λέμε ότι ο \mathcal{A} απαιτεί μηδενopoίηση (nilpotence) αν για κάθε $A \in \mathcal{Q}(\mathcal{A})$, A είναι μηδενopoίσιμος (nilpotent).

Ορισμός 5.5. Δείκτης μηδενopoίησης (index of nilpotence) του πίνακα προσήμου \mathcal{A} είναι ο μεγαλύτερος δείκτης μηδενopoίησης των πινάκων $B \in \mathcal{Q}(\mathcal{A})$.

5.1 Πίνακας προσήμου και κατευθυνόμενο γράφημα

Έστω \mathcal{A} ένας πίνακας προσήμου διάστασης $n \times n$ και $A = [a_{ij}] \in \mathcal{Q}(\mathcal{A})$. Το κατευθυνόμενο γράφημα του A είναι $\Gamma(A)$ και δίνεται από

$$\Gamma(A) = (\{1, 2, \dots, n\}, \{(i, j) : a_{ij} \neq 0\}). \quad (5.1)$$

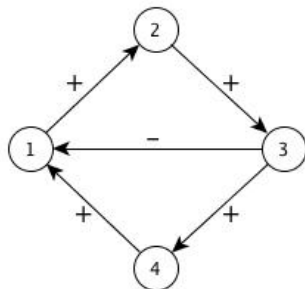
Τότε :

- ορίζουμε με $A_{\mathcal{A}}$ τον πίνακα με στοιχεία $0, 1, -1$ στις θέσεις όπου ο \mathcal{A} έχει $0, +$ και $-$ αντίστοιχα. Τότε $\mathcal{A} \geq 0$ αν $A_{\mathcal{A}} \geq 0$.
- Αν $A_{\mathcal{A}} = [a_{ij}]$ και $\gamma = [i_1, i_2, \dots, i_k, i_1]$ είναι ένας κύκλος στο $\Gamma(\mathcal{A})$, ορίζουμε με **sign** του γ : $\text{sgn}(\gamma) = \text{sgn}(a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_{k-1} i_k} a_{i_k i_1})$.
- Θα λεμε ότι ο πίνακας προσήμου \mathcal{A} είναι κυκλικά μη αρνητικός (cyclically nonnegative) αν το πρόσημο κάθε κύκλου γ στο $\Gamma(\mathcal{A})$ είναι μη αρνητικό.

Παράδειγμα 5.6. Έστω ένας πίνακας προσήμου $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 \\ - & 0 & 0 & + \\ + & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, τότε

θα έχουμε $A_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Ο $\gamma = [2, 3, 4, 1, 2]$ είναι ένας κύκλος στο $\Gamma(\mathcal{A})$, άρα ο *sign* του γ : $\text{sgn}(\gamma) = \text{sgn}(a_{23}a_{34}a_{41}a_{12}) = +$. Στο γράφημα $\Gamma(\mathcal{A})$ μπορούμε να σημειώσουμε και τα πρόσημα ως εξής:



Ορισμός 5.7 (Frobenius test for primitivity). [1] Για $\mathcal{A} \geq 0$, το γράφημα $\Gamma(\mathcal{A})$ είναι *primitive* αν για κάθε $A \in \mathcal{Q}(\mathcal{A})$, $\exists m$ τέτοιο ώστε $A^k > 0$, $\forall k \geq m$. Αν ισχύει για ένα $A \in \mathcal{Q}(\mathcal{A})$, τότε θα ισχύει για όλα.

Ορισμός 5.8. [3] Ο \mathcal{A} είναι *primitive* αν το γράφημα $\Gamma(\mathcal{A})$ είναι *primitive*.

5.2 Πίνακας Προσήμου με την Θεωρία Perron-Frobenius

Το 1990, οι Eschenbach και Johnson[4] έδωσαν τον ορισμό των λέξεων “απαιτεί” και “επιτρέπει” την ιδιότητα Perron ότι: ο πίνακας προσήμου \mathcal{A} “απαιτεί” την ιδιότητα Perron αν κάθε πίνακας $A \in \mathcal{Q}(\mathcal{A})$ έχει τη φασματική ακτίνα μεταξύ των ιδιοτιμών του. Ο πίνακας προσήμου \mathcal{A} “επιτρέπει” την ιδιότητα Perron αν κάποιος πίνακας $A \in \mathcal{Q}(\mathcal{A})$ έχει τη φασματική ακτίνα μεταξύ των ιδιοτιμών του. Διατυπώνουμε τα παρακάτω θεωρήματα:

Θεώρημα 5.9. [4] Ένας πίνακας προσήμου \mathcal{A} διάστασης $n \times n$, απαιτεί την ιδιότητα Perron αν και μόνο αν ο \mathcal{A} είναι κυκλικά μη αρνητικός πίνακας προσήμου.

Απόδειξη. Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι αν ο πίνακας προσήμου \mathcal{A} είναι κυκλικά μη αρνητικός, τότε ο \mathcal{A} απαιτεί την ιδιότητα Perron διότι θα υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε $A^k \geq 0$, για κάθε $A \in \mathcal{Q}(\mathcal{A})$.

Μένει να αποδείξουμε ότι αν ο πίνακας προσήμου \mathcal{A} απαιτεί την ιδιότητα Perron τότε, ο \mathcal{A} είναι κυκλικά μη αρνητικός πίνακας. Υποθέτουμε ότι ο \mathcal{A} δεν είναι

κυκλικά μη αρνητικός πίνακας. Τότε, ο \mathcal{A} έχει έναν αρνητικό κύκλο γ μήκους k , για κάποιο $k \in 1, 2, \dots, n$. Έστω ο $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ όπου $B_\gamma(0) = [b_\gamma(0)_{ij}]$ ορίζεται ως εξής:

$$b_\gamma(0)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν } a_{ij} = + \text{ και } a_{ij} \in \gamma \\ -1 & \text{αν } a_{ij} = - \text{ και } a_{ij} \in \gamma \\ 0 & \text{άλλου.} \end{cases}$$

Τότε, ο $B_\gamma(0)$ έχει k διακριτές μη-μηδενικές ιδιοτιμές, οι οποίες είναι οι k -στές ρίζες του -1 . Αν k είναι άρτιος, τότε έχει $\frac{k}{2}$ ζεύγη συζυγών μιγαδικών ιδιοτιμών που τα μέτρα τους είναι ίσα με 1. Αν k είναι περιττός, τότε έχει $\frac{k-1}{2}$ ζεύγη συζυγών μιγαδικών ιδιοτιμών που τα μέτρα τους είναι ίσα με 1 και την πραγματική ιδιοτιμή -1 .

Θεωρούμε ένα $\epsilon > 0$ με $B_\gamma(\epsilon) = [b_\gamma(\epsilon)_{ij}]$ να ορίζεται ως εξής:

$$b_\gamma(\epsilon)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν } a_{ij} = + \text{ και } a_{ij} \in \gamma \\ -1 & \text{αν } a_{ij} = - \text{ και } a_{ij} \in \gamma \\ \epsilon & \text{αν } a_{ij} = + \text{ και } a_{ij} \notin \gamma \\ -\epsilon & \text{αν } a_{ij} = - \text{ και } a_{ij} \notin \gamma \\ 0 & \text{άλλου.} \end{cases}$$

Τότε, ο $B_\gamma(\epsilon)$ είναι μια διαταραχή του $B_\gamma(0)$, άρα για πολύ μικρό ϵ θα έχουμε ότι ο $B_\gamma(\epsilon)$ έχει k διακριτές ιδιοτιμές κοντά στις μιγαδικές ρίζες του -1 , ενώ οι άλλες ιδιοτιμές είναι κοντά στο 0. Επομένως η κλάση προσέμου $\mathcal{Q}(\mathcal{A})$ περιέχει ένα πίνακα που δεν έχει την ιδιότητα Perron, άτοπο. \square

Θα δώσουμε δύο λήμματα χωρίς απόδειξη που χρησιμεύουν στη διατύπωση του θεωρήματος, για το πότε ο \mathcal{A} επιτρέπει την ιδιότητα Perron.

Ορισμός 5.10. [4] Έστω ότι ο $A \geq 0$ είναι k -κυκλικός μη-αναγώγιμος πίνακας διάστασης $n \times n$, $k \geq 2$. Αν ο A έχει ακριβώς k ιδιοτιμές με μέγιστο μέτρο $\rho(A)$, τότε ο A λέγεται **k -primitive**.

Ορισμός 5.11. [4] Ένας k -κυκλικός πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ λέγεται **αυστηρά k -κυκλικός (strictly k -cyclic)** αν $\#j > k$ τέτοιος ώστε ο A είναι j -κυκλικός.

Λήμμα 5.12. [4] Ένας μη-αναγώγιμος πίνακας διάστασης $n \times n$ είναι k -primitive αν και μόνο αν είναι αυστηρά k -κυκλικός πίνακας.

Λήμμα 5.13. [4] Ένας αυστηρά k -κυκλικός πίνακας προσέμου \mathcal{A} διάστασης $n \times n$ επιτρέπει την ιδιότητα Perron αν ο \mathcal{A}_+ έχει ένα μη-αναγώγιμο κύριο υποπίνακα, ο οποίος είναι k -primitive για $k \geq 2$ ή είναι primitive αν $k = 1$, όπου

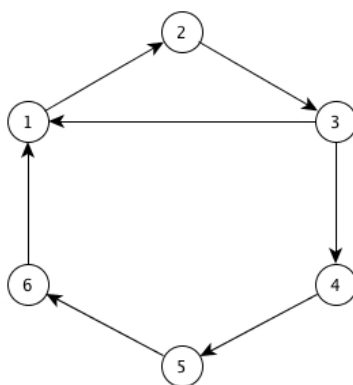
\mathcal{A}_+ είναι ο πίνακας προσήμου που προκύπτει από τον \mathcal{A} αν θέσουμε 0 στις θέσεις που ο \mathcal{A} έχει $-$.

Θεώρημα 5.14. [4] Έστω ένας αυστηρά k -κυκλικός πίνακας προσήμου \mathcal{A} διάστασης $n \times n$. Τότε ο \mathcal{A} επιτρέπει την ιδιότητα Perron αν υπάρχει $\hat{A} \in \mathcal{Q}(\mathcal{A})$, όπου το μη αρνητικό μέρος \hat{A}_+ έχει ένα μη-αναγωγίμο κύριο υποπίνακα, ο οποίος είναι k -primitive για $k \geq 2$ ή είναι primitive αν $k = 1$.

Παράδειγμα 5.15. Έστω ένας πίνακας προσήμου

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 & 0 \\ + & 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + \\ + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ο $\Gamma(\mathcal{A})$ είναι:



Παρατηρώ ότι ο \mathcal{A} έχει 2 κύκλους τους (a_{12}, a_{23}, a_{31}) και $(a_{12}, a_{23}, a_{34}, a_{45}, a_{56}, a_{61})$. Υπάρχει μη-αναγωγίμος υποπίνακας του \mathcal{A} που είναι 3-primitive. Από το Θεώρημα 5.14 επιβεβαιώνεται ότι ο \mathcal{A} επιτρέπει την ιδιότητα Perron.

5.3. Πίνακας Προσήμου που απαιτεί την τελική θετικότητα ή τελική μη αρνητικότητα
Κεφάλαιο 5.

5.3 Πίνακας Προσήμου που απαιτεί την τελική θετικότητα ή τελική μη αρνητικότητα

Έστω ένας πίνακας προσήμου \mathcal{A} που απαιτεί την τελική μη αρνητικότητα. Από το Θεώρημα 3.10, έχουμε ότι ένας πίνακας $A \in \mathcal{Q}(\mathcal{A})$ θα είναι μηδενοποιήσιμος ή θα έχει την ιδιότητα Perron-Frobenius, επομένως ο \mathcal{A} απαιτεί την ιδιότητα Perron. Από τα Θεωρήματα 5.9 και 5.14 έχουμε ότι ένας πίνακας προσήμου \mathcal{A} απαιτεί την ιδιότητα Perron αν και μόνο αν ο \mathcal{A} είναι κυκλικά μη αρνητικός πίνακας, δηλαδή κάθε κύκλος του $\Gamma(\mathcal{A})$ έχει θετικό πρόσημο. Το αντίστροφο δεν ισχύει δηλαδή αν ο \mathcal{A} απαιτεί την ιδιότητα Perron δεν σημαίνει ότι ο \mathcal{A} απαιτεί τελική μη αρνητικότητα. Αυτό αποδεικνύεται από το γεγονός ότι αν οι A και A^T έχουν την ιδιότητα Perron-Frobenius δεν συνεπάγεται ότι ο \mathcal{A} είναι τελικά μη αρνητικός. Τα παρακάτω θεωρήματα δείχνουν ότι τα στοιχεία του πίνακα προσήμου που αντιστοιχεί σε ένα κύκλο δεν μπορεί να είναι αρνητικά.

Θεώρημα 5.16. [3] Έστω ένας πίνακας προσήμου $\mathcal{A} = [a_{ij}]$ διάστασης $n \times n$. Αν η ακμή $a_{st} = -$ και υπάρχει ένας κύκλος $\gamma = [i_1, i_2, \dots, i_k, i_1]$ με $i_1 = s, i_2 = t$ στην $\Gamma(\mathcal{A})$, τότε ο \mathcal{A} δεν απαιτεί την τελική μη αρνητικότητα.

Πόρισμα 5.17. [3] Αν ο πίνακας προσήμου \mathcal{A} απαιτεί την τελική μη αρνητικότητα, τότε κάθε μη-αναγώγιμος κύριος υποπίνακας του \mathcal{A} είναι μη αρνητικός.

Θεώρημα 5.18. [3] Ο πίνακας προσήμου \mathcal{A} απαιτεί την τελική μη αρνητικότητα αν και μόνο αν ο \mathcal{A} είναι μη αρνητικός και primitive.

Απόδειξη. Αν ο \mathcal{A} είναι μη αρνητικός και primitive, τότε από το Θεώρημα 5.7 είναι προφανές ότι ο \mathcal{A} απαιτεί την τελική θετικότητα. Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι ο $\mathcal{A} = [a_{ij}]$ απαιτεί την τελική θετικότητα και θα δείξουμε ότι ο \mathcal{A} είναι μη αρνητικός και primitive. Έστω μια ακμή $a_{st} = -$, από το Πόρισμα 5.17 έχουμε ότι η a_{st} δεν είναι μέσα σε κανένα μη-αναγώγιμο κύριο υποπίνακα του \mathcal{A} . Άρα, ο \mathcal{A} είναι αναγώγιμος και όλες οι δυνάμεις του $A \in \mathcal{Q}(\mathcal{A})$ περιέχουν τουλάχιστον ένα μηδενικό στοιχείο. Επομένως, ο \mathcal{A} δεν απαιτεί την τελική θετικότητα, άτοπο. Έτσι ο \mathcal{A} είναι μη αρνητικός και από το Θεώρημα 5.7 έχουμε ότι ο \mathcal{A} πρέπει να είναι και primitive. \square

Θεώρημα 5.19. [3] Αν ο πίνακας προσήμου $\mathcal{A} = [a_{ij}]$ διάστασης $n \times n$ απαιτεί την τελική μη αρνητικότητα και $a_{st} = -$, τότε κάθε κλάση που έχει πρόσβαση στο s ή το t έχει πρόσβαση στη κλάση αυτή πρέπει να είναι τετριμμένη (δηλαδή δεν υπάρχει ακμή μεταξύ των κορυφών s και t , επιπλέον οι s και t δεν έχουν βρόγχο).

5.3. Πίνακας Προσήμου που απαιτεί την τελική θετικότητα ή τελική μη αρνητικότητα
Κεφάλαιο 5. αρνητικότητα

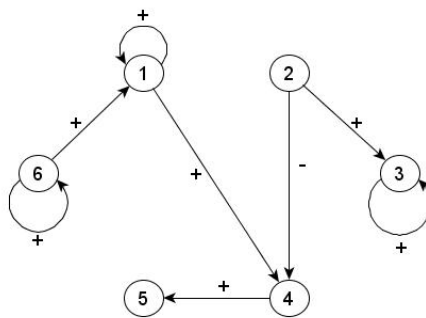
Θεώρημα 5.20. [3] Ο πίνακας προσήμου $\mathcal{A} = [a_{ij}]$ απαιτεί την τελική μη αρνητικότητα αν και μόνο αν για κάθε s, t τέτοια ώστε η ακμή $a_{st} = -$, $\mathcal{A}[In(s)]$ και $\mathcal{A}[Out(t)]$ απαιτεί μηδενοποίηση.

Απόδειξη. Έστω ότι για κάθε s, t τέτοιος ώστε $a_{st} = -$, $\mathcal{A}[In(s)]$ και $\mathcal{A}[Out(t)]$ απαιτεί μηδενοποίηση. Τότε, δεν υπάρχει αρνητικό στοιχείο του \mathcal{A} που αντιστοιχεί σε ένα κύκλο του $\Gamma(\mathcal{A})$. Έστω k_0 ο μεγαλύτερος δείκτης μηδενοποίησης μεταξύ όλων των $\mathcal{A}[In(s)]$ και $\mathcal{A}[Out(t)]$. Τότε, κάθε περίπατος στο $\Gamma(\mathcal{A})$ που περιέχει ένα $-$ πρέπει να έχει μήκος το πολύ k_0 , δηλαδή για κάθε $A \in \mathcal{Q}(\mathcal{A})$ και κάθε $k > k_0$ ισχύει $A^k \geq 0$. Το αντίστροφο είναι συμπέρασμα του Θεωρήματος 5.19. \square

Παράδειγμα 5.21. Έστω ένας πίνακας προσήμου

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} + & 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ + & 0 & 0 & 0 & 0 & + \end{bmatrix}.$$

Ο $\Gamma(\mathcal{A})$ είναι:



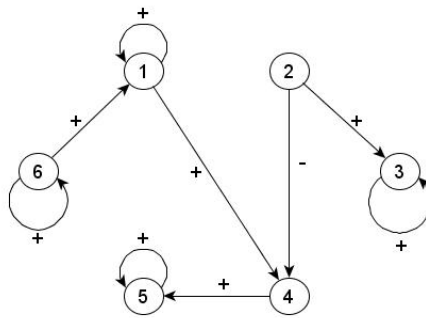
Σύμφωνα με το θεώρημα, έχουμε $a_{24} = -$, τότε $[In(2)] = \{2\}$ και $[Out(4)] = \{4, 5\}$. Ο $\mathcal{A}[In(2)] = [0]$ απαιτεί μηδενοποίηση με δείκτης 1 και ο $\mathcal{A}[Out(4)] = \begin{bmatrix} 0 & + \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ απαιτεί μηδενοποίηση με δείκτη 2. Άρα, για κάθε $A \in \mathcal{Q}(\mathcal{A})$, έχουμε ότι $A^k \geq 0$, $k \geq 2$.

5.3. Πίνακας Προσήμου που απαιτεί την τελική θετικότητα ή τελική μη αρνητικότητα

Παρατηρώ ότι αν αλλάξω το \mathcal{A} στο $[Out(4)] = \{4, 5\}$ να έχει $\mathcal{A}[Out(4)] = \begin{bmatrix} 0 & + \\ 0 & + \end{bmatrix}$ δηλαδή,

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} + & 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + & 0 \\ + & 0 & 0 & 0 & 0 & + \end{bmatrix}.$$

Τότε, το νέο $\Gamma(\mathcal{A})$ θα είναι:



Παρατηρώ ότι για $a_{24} = -$ έχουμε $[In(2)] = \{2\}$ και $[Out(4)] = \{4, 5\}$. Ο $\mathcal{A}[In(2)] = [0]$ απαιτεί μηδενοποίηση με δείκτη 1 αλλά ο $\mathcal{A}[Out(4)] = \begin{bmatrix} 0 & + \\ 0 & + \end{bmatrix}$ δεν απαιτεί μηδενοποίηση. Άρα, κάθε πίνακας $B \in \mathcal{Q}(\mathcal{A})$ δεν θα είναι τελικά μη αρνητικός γιατί ο B δεν είναι μηδενοποιήσιμος. Για παράδειγμα, έστω ο

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{Q}(\mathcal{A})$$

δεν θα είναι τελικά μη αρνητικός.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Berman A. and Plemmons R.J. *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*. Society of Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1994.
- [2] Elhashash A. and Szyld D.B. Generalizations of M-matrices which may not have a nonnegative inverse. *Linear Algebra and its Applications*, 429:2435–2450, 2008.
- [3] Ellison E.M., Hogben L., and Tsatsomeros M.J. Sign Patterns that require eventual positivity or require eventual nonnegativity. *Electronic Journal of Linear Algebra*, 19:98–107, 2010.
- [4] Eschenbach C.A. and Johnson C.R. A Combinatorial converse to the Perron-Frobenius theorem. *Linear Algebra and its Applications*, 136:173–180, 1990.
- [5] Eschenbach C.A. and Li Z. Potentially nilpotent sign pattern matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 299:81–99, 1999.
- [6] Johnson C.R. and Tarazaga P. On matrices with Perron-Frobenius properties and some negative entries. *Positivity*, 8:327–338, 2004.
- [7] Le T.H. and McDonald J.J. Inverse of M-matrices created with irreducible eventually nonnegative matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 419:668–674, 2006.
- [8] Marek I. and Szyld D.B. Comparison theorems for weak splittings of bounded operators. *Numerical Mathematics*, 58:387–397, 1990.

- [9] Naqvi S.C. and McDonald J.J. The combinatorial structure of eventually nonnegative matrices. *Electronic Journal of Linear Algebra*, 9:255–269, 2002.
- [10] Noutsos D. On Perron-Frobenius property of matrices having some negative entries. *Linear Algebra and its Applications*, 412:132–153, 2006.
- [11] Noutsos D. On Stein-Rosenberg type theorems for nonnegative and Perron-Frobenius splittings. *Linear Algebra and its Applications*, 429:1983–1996, 2008.
- [12] Noutsos D. and Tsatsomeris M.J. Reachability and holdability of nonnegative states. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 30, No.2:700–712, 2008.
- [13] Noutsos D. and Tsatsomeris M.J. On the numerical characterization of the reachability cone for an essentially nonnegative matrix. *Linear Algebra and its Applications*, 430:1350–1363, 2009.
- [14] Olesky D.D., Tsatsomeris M.J., and Van Den Driessche P. M_v -Matrices : A Generalization of M-Matrices based on eventually nonnegative matrices. *Electronic Journal of Linear Algebra*, 18:339–351, 2009.
- [15] Plemmons R.J. M-Matrix Characterizations.I – Nonsingular M-Matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 18:175–188, 1977.
- [16] Tarazaga P., Raydan M. and Hurman A. Perron-Frobenius theorem for matrices with some negative entries. *Linear Algebra and its Applications*, 328:57–68, 2001.
- [17] Varga R.S. *Matrix Iterative Analysis*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs. N.J., 1962.
- [18] Νούτσος Δ. Σημείωση για το μάθημα Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα I (Perron Frobenius theory), 2012.
- [19] Χατζηδμήμος Α. Δουγάλης Β., Νούτσος Δ. *Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα*. Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Ιωαννίνων, 2012.