ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΜΠΑΚΟΓΙΑΝΝΗ ΧΑΡΙΚΛΕΙΑ

ΜΕΙΚΤΟΙ ΧΩΡΟΙ ΤΥΠΟΥ TSIRELSON ΚΑΙ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΧΩΡΩΝ BANACH

ΙΩΑΝΝΙΝΑ, 2013

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σε αυτή τη μεταπτυχιακή διατριβή μελετάμε πως από ένα $K \subseteq c_{00}$ ορίζεται μία νόρμα $||\cdot||_K$ στον c_{00} και ο αντίστοιχος χώρος Banach X_K που είναι η πλήρωση αυτού. Παρουσιάζουμε τους χώρους $T[(\mathcal{A}_n, \theta)]$, $T[(\mathcal{S}, \frac{1}{2})]$ (που ονομάζεται χώρος του Tsirelson και συμβολίζεται με T) και τον χώρο $T[(\mathcal{A}_n, \frac{1}{\log_2(n+1)})_{n=1}^{\infty}]$ (που ονομάζεται χώρος του Schlumprecht και συμβολίζεται με S). Παρουσιάζουμε την απόδειξη ότι οι c_0 και ℓ_1 δεν είναι παραμορφώσιμοι, ότι ο χώρος T είναι $2-\varepsilon$ παραμορφώσιμος για κάθε $\varepsilon > 0$ και ότι ο χώρος S είναι απεριόριστα παραμορφώσιμος.

ABSTRACT

In this master thesis we study how from a set $K \subseteq c_{00}$ one norm $||\cdot||_K$ on c_{00} and the corresponding Banach space X_K, which is its completion, are defined. We present the spaces $T[(\mathcal{A}_n, \theta)]$, $T[(\mathcal{S}, \frac{1}{2})]$ (which is named Tsirelson's space and is denoted with T) and the space $T[(\mathcal{A}_n, \frac{1}{\log_2(n+1)})_{n=1}^{\infty}]$ (which is named Schlumprecht's space and is denoted with S). We present the proof that the spaces c_0 and ℓ_1 are not distortable, that the space T is $2-\varepsilon$ distortable for every $\varepsilon > 0$ and that the space S is arbitrarily distortable.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή **7**

2 Συμβολισμοί, ορισμοί και βασική θεωρία **11**

3 Ο χώρος $T[(\mathcal{A}_n, \theta)]$ **17**

4 Παραμόρφωση χώρων Banach **25**

5 Ο χώρος του Tsirelson **29**

6 Ο χώρος του Schlumprecht **41**

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Θεωρούμε τον χώρο των τελικά μηδενικών ακολουθιών

$$c_{00} = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \ : \ \exists \ n_0 \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε: } \forall n \geq n_0 \ \ x_n = 0\}.$$

Ένα $K \subseteq c_{00}$ υπό κάποιες προϋποθέσεις ορίζει μία νόρμα στον c_{00} από τον τύπο

$$||x||_K = \sup\{f(x) : f \in K\}$$

για κάθε $x \in c_{00}$, όπου για $f = (\alpha_1, \alpha_2, ...) \in c_{00}$ και για $x = (\beta_1, \beta_2, ...) \in c_{00}$ $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i \beta_i$. Η πλήρωση του χώρου $(c_{00}, || \cdot ||_K)$ είναι ένας χώρος Banach και θα συμβολίζεται με X_K. Στην παρούσα εργασία μελετάμε χώρους Banach που ορίζονται με τον συγκεκριμένο τρόπο.

Θεωρούμε την οικογένεια υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ με το πολύ n στοιχεία $\mathcal{A}_n = \{A \subseteq \mathbb{N} : \ |A| \leq n\}$. Αν $0 < \theta < 1$ η συνάρτηση που απεικονίζει μία οικογένεια $(f_i)_{i=1}^d$ του c_{00} με $f_1 < \cdots < f_d$ και $d \leq n$ στο $\theta(f_1 + ... + f_d) \in K$ ονομάζεται $(\mathcal{A}_n, \theta)$ πράξη. Θεωρώντας K το ελάχιστο υποσύνολο του c_{00} για το οποίο

(1) $\pm e_i^* \in K$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$

(2) Το σύνολο K είναι κλειστό ως προς την $(\mathcal{A}_n, \theta)$ πράξη

ο αντίστοιχος χώρος X_K θα συμβολίζεται με $T[(\mathcal{A}_n, \theta)]$. Η νόρμα αυτού του χώρου ικανοποιεί την εξής αναδρομική σχέση. Για κάθε $x \in c_{00}$ ισχύει

$$||x||_K = \max\{||x||_\infty, \ \theta \sup\{\sum_{i=1}^{d} ||E_i x|| : \ \ d \leq n, \ \ E_1 < E_2 < ... < E_d\}\}$$

(όπου αν $E \subseteq \mathbb{N}$ και $x \in c_{00}$ με Ex συμβολίζεται ο περιορισμός του x στο E). Ο χώρος αυτός είναι ο απλούστερος χώρος Banach του οποίου η νόρμα ικανοποιεί μία αναδρομική σχέση. Ο S. Bellenot [5] το 1985 απέδειξε ότι ο χώρος $T[(\mathcal{A}_n, \theta)]$ είναι ισόμορφος με κάποιον ℓ_p, $1 < p < \infty$ ή τον c_0. Συγκεκριμένα όταν $\theta \leq \frac{1}{n}$ ο χώρος είναι ισομετρικός με τον c_0, ενώ όταν $\frac{1}{n} < \theta < 1$ ο χώρος $T[(\mathcal{A}_n, \theta)]$ είναι ισόμορφος με τον ℓ_p, όπου p ο αριθμός ο οποίος ορίζεται από τη σχέση $\frac{1}{p} + \log_n(\frac{1}{\theta}) = 1$. Ο Σ. Αργυρός και Ε. Δεληγιάννη [2] παρουσίασαν με απλούστερη απόδειξη αυτό το αποτέλεσμα.

Θεωρούμε την οικογένεια Schreier, $\mathcal{S} = \{F \subseteq \mathbb{N} : \ |F| \leq \min F\} \bigcup \{\emptyset\}$. Η συνάρτηση που απεικονίζει μία οικογένεια $(f_i)_{i=1}^d$ του c_{00} με $d \leq f_1 < \cdots < f_d$ στο $\frac{1}{2}(f_1 + ... + f_d) \in K$ ονομάζεται $(\mathcal{S}, \frac{1}{2})$ πράξη. Θεωρώντας K το ελάχιστο υποσύνολο του c_{00} για το οποίο

(1) $\pm e_n^* \in K$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$

(2) Το σύνολο K είναι κλειστό ως προς την $(\mathcal{S}, \frac{1}{2})$ πράξη

ο αντίστοιχος χώρος X_K θα συμβολίζεται με $T = T[(\mathcal{S}, \frac{1}{2})]$. Η νόρμα αυτού του χώρου ικανοποιεί την εξής αναδρομική σχέση. Για κάθε $x \in c_{00}$ ισχύει

$$||x|| = \max\{||x||_\infty \ , \ \frac{1}{2}\sup\{\sum_{i=1}^{d} ||E_i x|| : \ d \le E_1 < E_2 < ... < E_d\}\}.$$

Ο χώρος αυτός ήταν ο πρώτος χώρος που κατασκευάστηκε του οποίου η νόρμα ικανοποιεί μία αναδρομική σχέση. Ο B.S. Tsirelson [23] το 1974 κατασκεύασε τον πρώτο χώρο Banach που δεν περιείχε ισομορφικά κανέναν από τους ℓ_p, $1 \le p < \infty$ ή τον c_0, καταρρίπτοντας έτσι την γενική πεποίθηση περί του αντιθέτου. Ο χώρος $T[(\mathcal{S}, \frac{1}{2})]$ που προαναφέραμε, που επίσης δεν περιέχει ισομορφικά κανέναν από τους ℓ_p, $1 \le p < \infty$ ή τον c_0, είναι ο δυικός του χώρου που όρισε ο Tsirelson και παρουσιάστηκε από τους Figiel και Johnson [9] έναν χρόνο αργότερα.

Αν στον ορισμό του συνόλου K αντί μίας πράξης $(\mathcal{A}_n, \theta)$ ή $(\mathcal{S}, \frac{1}{2})$ χρησιμοποιηθούν πεπερασμένες ή αριθμήσιμες το πλήθος πράξεις τότε ο χώρος X_K που προκύπτει λέγεται μεικτός χώρος τύπου Tsirelson. Αν χρησιμοποιηθούν πεπερασμένες το πλήθος οικογένειες $(\mathcal{A}_{n_k}, \theta_k)_{k=1}^{l}$ στον ορισμό του norming συνόλου K τότε προκύπτει αντίστοιχο αποτέλεσμα με αυτό που προαναφέραμε με χρήση μιας οικογένειας $(\mathcal{A}_n, \theta)$. Συγκεκριμένα για $l \in \mathbb{N}$, $n_1, n_2, ..., n_l \in \mathbb{N}$ και $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_l \in (0,1)$ ορίζεται ο χώρος X_K, όπου K είναι το ελάχιστο υποσύνολο του c_{00} το οποίο ικανοποιεί τις ιδιότητες

(1) $\pm e_i^* \in K$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$

(2) Για κάθε $k = 1, ..., l$ το σύνολο K είναι κλειστό ως προς την $(\mathcal{A}_{n_k}, \theta_k)$ πράξη.

Ο χώρος αυτός θα συμβολίζεται με $T[(\mathcal{A}_{n_k}, \theta_k)_{k=1}^{l}]$ και η νόρμα του ικανοποιεί την ακόλουθη αναδρομική σχέση. Για κάθε $x \in c_{00}$ ισχύει

$$||x||_K = \max\{||x||_\infty, \max_{k=1,...,l}\{\theta_k \sup\{\sum_{i=1}^{d} ||E_i x|| : \ d \le n_k, \ E_1 < E_2 < ... < E_d\}\}\}.$$

Οι Bernues και Δεληγιάννη [6] απέδειξαν ότι αν $\theta_k > \frac{1}{n_k}$ για ένα τουλάχιστον $k \in \{1, ..., l\}$ τότε ο χώρος Banach $T[(\mathcal{A}_{n_k}, \theta_k)_{k=1}^{l}]$ είναι ισόμορφος με τον ℓ_p, όπου

$$p = \min\{\frac{1}{1 - \log_{n_k}(\frac{1}{\theta_k})} : \theta_k > \frac{1}{n_k}\}.$$

Δηλαδή μία από τις οικογένειες $(\mathcal{A}_{n_k}, \theta_k)_{k=1}^{l}$ κυριαρχεί έναντι των υπολοίπων.

Η κατάσταση αλλάζει δραματικά αν αντί για πεπερασμένες το πλήθος οικογένειες χρησιμοποιηθούν άπειρες το πλήθος οικογένειες. Θεωρούμε $\phi(x) = \log_2(x+1)$ και K το ελάχιστο υποσύνολο του c_{00} το οποίο ικανοποιεί τις ιδιότητες

(i) $\pm e_n^* \in K$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$

(ii) Για κάθε $l = 1, 2, ...$ το σύνολο K είναι κλειστό ως προς την $(\mathcal{A}_l, \frac{1}{\phi(l)})$ πράξη.

Ορίζεται έτσι ο αντίστοιχος χώρος X_K, ο οποίος θα συμβολίζεται με $S = T[(\mathcal{A}_n, \frac{1}{\phi(n)})_{n=1}^{\infty}]$. Η νόρμα αυτού του χώρου ικανοποιεί την εξής αναδρομική σχέση. Για κάθε $x \in c_{00}$ ισχύει

$$||x|| = \max\{||x||_\infty, \sup\{\frac{1}{\phi(l)}\sum_{i=1}^{l} ||E_i x|| : l \ge 2 \ , \ E_1 < E_2 < ... < E_l\}\}.$$

Αυτός ο χώρος κατασκευάστηκε από τον T. Schlumprecht [21] το 1991 και είναι το πρώτο παράδειγμα απεριόριστα παραμορφώσιμου χώρου Banach. Ο χώρος αυτός δεν περιέχει ισομορφικά κανέναν από τους χώρους ℓ_p, $1 \le p < \infty$ ή τον c_0.

Ο χώρος S του Schlumprecht δεν αποτέλεσε απλώς ένα παθολογικό παράδειγμα χώρου Banach. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν στις σχετικές αποδείξεις για τον S συνέβαλαν ουσιαστικά στην ανάπτυξη της θεωρίας χώρων Banach τις δύο δεκαετίες που ακολούθησαν. Οι Odell και Schlumprecht [19] το 1992 απέδειξαν ότι ο χώρος ℓ_p για $1 < p < \infty$ είναι απεριόριστα παραμορφώσιμος. Η απόδειξη αυτού του αποτελέσματος στηρίζεται ουσιαστικά στον χώρο του Schlumprecht. Οι W. T. Gowers και B. Maurey [10] κατασκεύασαν, χρησιμοποιώντας ως ουσιαστικό συστατικό της κατασκευής τους τον χώρο του Schlumprecht, έναν χώρο Banach X_{GM} ο οποίος είναι Κληρονομικά Αδιάσπαστος (ή Καθολικά Αδιάσπαστος) (Hereditarily Idecomposable, H.I.). Ένας χώρος Banach X καλείται H.I. αν δεν υπάρχει υπόχωρός του που να μπορεί να διασπαστεί ως ευθύ άθροισμα δύο περαιτέρω απειροδιάστατων υποχώρων του. Σημειώνουμε ότι ένας H.I. χώρος δεν έχει κανέναν απειροδιάστατο υπόχωρο με unconditional βάση. Οι Σ. Αργυρός και Ε. Δεληγιάννη [3] παρουσίασαν έναν ασυμπτωτικά ℓ_1 απεριόριστα παραμορφώσιμο χώρο με unconditional βάση καθώς επίσης έναν ασυμπτωτικά ℓ_1 H.I. χώρο. Η N. Tomczak-Jaegermann [22] απέδειξε ότι κάθε H.I. χώρος είναι απεριόριστα παραμορφώσιμος. Οι Σ. Αργυρός και Α. Τόλιας [4] παρουσίασαν την κατασκευή ενός μη διαχωρίσιμου H.I. χώρου και απέδειξαν ότι κάθε διαχωρίσιμος χώρος Banach που δεν περιέχει ισομορφικά τον ℓ_1 είναι πηλίκο ενός H.I. χώρου.

Περνάμε τώρα στην έννοια της παραμόρφωσης χώρων Banach. Έστω $(X, ||\cdot||)$ ένας απειροδιάστατος χώρος Banach. Αν $|||\cdot|||$ είναι μία ισοδύναμη νόρμα στον χώρο X και $\lambda > 1$ λέμε ότι η $|||\cdot|||$ είναι μία $\lambda-$παραμόρφωση του X αν για κάθε απειροδιάστατο υπόχωρο Y του X ισχύει

$$\sup\{\frac{|||x|||}{|||y|||},\ x, y \in Y,\ ||x|| = ||y|| = 1\} \geq \lambda.$$

Ο X λέγεται $\lambda-$παραμορφώσιμος αν υπάρχει μία $\lambda-$παραμόρφωση του X. Ο X λέγεται παραμορφώσιμος αν είναι $\lambda-$παραμορφώσιμος για κάποιο $\lambda > 1$. Ο X λέγεται απεριόριστα παραμορφώσιμος αν είναι $\lambda-$παραμορφώσιμος για κάθε $\lambda > 1$. Ο R.C. James [13] το 1964 απέδειξε ότι οι χώροι c_0 και ℓ_1 δεν είναι παραμορφώσιμοι. Ο Milman [17] το 1971 απέδειξε ότι αν ένας χώρος Banach δεν περιέχει ισομορφικά τους c_0 και ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, τότε περιέχει ισομορφικά έναν παραμορφώσιμο υπόχωρο. Σε συνδυασμό με το αποτέλεσμα των Odell και Schlumprecht που προαναφέραμε προκύπτει ότι αν ένας χώρος Banach δεν περιέχει ισομορφικά τους c_0 και ℓ_1 τότε περιέχει ισομορφικά έναν παραμορφώσιμο υπόχωρο.

Οι E. Odell, N. Tomczak-Jaegermann και R. Wagner [20] το 1997 απέδειξαν ότι ο χώρος του Tsirelson είναι $2 - \varepsilon$ παραμορφώσιμος για κάθε $\varepsilon > 0$. Ένα ερώτημα το οποίο παραμένει ανοιχτό μέχρι και σήμερα είναι αν υπάρχει χώρος ο οποίος να είναι παραμορφώσιμος αλλά όχι απεριόριστα παραμορφώσιμος. Ένας υποψήφιος χώρος για τον οποίο μπορεί να συμβαίνει αυτό είναι ο χώρος του Tsirelson. Ο λόγος για τον οποίο ο χώρος του Tsirelson είναι υποψήφιος για κάτι τέτοιο είναι ότι δεν γνωρίζουμε αν είναι $\lambda-$παραμορφώσιμος για $\lambda \geq 2$.

Στο δεύτερο κεφάλαιο δίνουμε ορισμούς, συμβολισμούς και βασική θεωρία για βάσεις Schauder σε χώρους Banach η οποία προέρχεται από τα βιβλία [1], [11], [12], [15], [16], [18]. Επίσης στο ίδιο κεφάλαιο παρουσιάζουμε αναλυτικά τις ιδιότητες του χώρου X_K, που είναι η πλήρωση του $(c_{00}, ||\cdot||_K)$, σε συνάρτηση με τις ιδιότητες του norming συνόλου K. Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε τον χώρο $T[(\mathcal{A}_n, \theta)]$ και την απόδειξη των Σ. Αργυρού και Ε. Δεληγιάννη [2] ότι όταν $\theta \leq \frac{1}{n}$ ο χώρος είναι ισομετρικός με τον c_0, ενώ όταν $\frac{1}{n} < \theta < 1$ ο χώρος είναι ισόμορφος με τον ℓ_p. Στο τέταρτο κεφάλαιο μελετάμε την έννοια της παραμόρφωσης χώρων Banach και παρουσιάζουμε την απόδειξη του R.C. James [13] ότι οι χώροι ℓ_1 και ο c_0 δεν είναι παραμορφώσιμοι. Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε τον χώρο του Tsirelson ακολουθώντας τους Figiel και Johnson [9]. Παραθέτουμε την απόδειξη ότι ο χώρος του Tsirelson δεν περιέχει ισομορφικά κανέναν από τους χώρους ℓ_p, $1 \leq p < \infty$ ή τον c_0. Τέλος σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε την απόδειξη των E. Odell, N. Tomczak-Jaegermann and R. Wagner [20] οι οποίοι απέδειξαν ότι ο χώρος του Tsirelson είναι $2 - \varepsilon$ παραμορφώσιμος για κάθε $\varepsilon > 0$. Στο έκτο και τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας παρουσιάζουμε τον χώρο του Schlumprecht και την απόδειξη ότι είναι ένας απεριόριστα παραμορφώσιμος χώρος Banach.

Κεφάλαιο 2

Συμβολισμοί, ορισμοί και βασική θεωρία

Ορισμός 2.1. *Μία ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σε έναν χώρο Banach X ονομάζεται βάση Schauder του X αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει μοναδική ακολουθία πραγματικών αριθμών $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$. Μία ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγεται Schauder βασική ακολουθία αν είναι βάση Schauder του κλειστού υποχώρου που παράγει.*

Η ακόλουθη πρόταση δίνει έναν χαρακτηρισμό των Schauder βασικών ακολουθιών.

Πρόταση 2.2. *Μία ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σε έναν χώρο Banach X είναι Schauder βασική ακολουθία αν και μόνο αν ισχύουν τα εξής*

(1) $e_n \neq 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(2) υπάρχει σταθερά $C \geq 1$ τέτοια ώστε για κάθε ακολουθία συντελεστών $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και κάθε m, n με $m < n$ να ισχύει

$$||\sum_{k=1}^{m} \alpha_k e_k|| \leq C||\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k||.$$

Ορισμός 2.3. *Η βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ονομάζεται μονότονη όταν $C = 1$ και ονομάζεται διμονότονη όταν ισχύει*

$$||\sum_{k=l}^{m} \alpha_k e_k|| \leq ||\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k||$$

για κάθε ακολουθία συντελεστών $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ και κάθε l, m, n με $1 \leq l \leq m \leq n$. Χάριν συντομίας με τον όρο βάση θα εννοούμε βάση Schauder.

Ορισμός 2.4. *Έστω X ένας χώρος Banach με βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του X. Μία ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X με $x_n \neq 0$ για $n = 1, 2, ...$ ονομάζεται block βάση της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αν υπάρχει ακολουθία πραγματικών αριθμών $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών ώστε : $x_n = \sum\limits_{k=m_{n-1}+1}^{m_n} \lambda_k e_k$ για κάθε $n = 1, 2, ...$, όπου $m_0 = 0$. Ένας χώρος $Y = \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ θα ονομάζεται block υπόχωρος του X.*

Ορισμός 2.5. *Αν η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βάση του X ονομάζουμε δυϊκή ακολουθία της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ την ακολουθία των συναρτησοειδών $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ με $e_n^*(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i) = \alpha_n$ για κάθε n και για κάθε $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i \in X$.*

Πρόταση 2.6. *Η $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική στον X^*.*

Απόδειξη. Θέτουμε $P_n : X \to X$ με τύπο $P_n(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ και $K = \sup ||P_n||$. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι $e_n^* \in X^*$. Ισοδύναμα αρκεί να δείξουμε ότι τα e_n^* είναι φραγμένοι γραμμικοί τελεστές. Γραμμικοί προφανώς είναι άρα μένει να δείξουμε ότι είναι και φραγμένοι. Πράγματι έχουμε

$$\begin{aligned} |e_n^*(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i)| &= |\lambda_n| \\ &\leq \frac{||P_n(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i)|| + ||P_{n-1}(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i)||}{||e_n||} \\ &\leq \frac{2K}{||e_n||} \cdot ||\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i||. \end{aligned}$$

Άρα $e_n^* \in X^*$ και $||e_n^*|| \leq \frac{2K}{||e_n||}$, για κάθε $n = 1, 2, ...$

Τέλος για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ με $n \leq m$ και $(\lambda_i)_{i=1}^{m}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών ισχύει

$$P_n^*(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i^*) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*$$

και εφόσον $||P_n^*|| = ||P_n||$ προκύπτει ότι

$$||\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*|| \leq K||\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i^*||.$$

Επομένως η ακολουθία $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική στον X^*. □

Ορισμός 2.7. *Έστω X χώρος Banach με βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \in X$. Ονομάζουμε φορέα του x και συμβολίζουμε με $\mathrm{supp}(x)$ το σύνολο $\mathrm{supp}(x) = \{n \in \mathbb{N} : \alpha_n \neq 0\}$. Επιπλέον συμβολίζουμε με $\mathrm{ran}(x)$ το μικρότερο διάστημα που περιέχει τον φορέα του x.*

Για A, B πεπερασμένα μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{N}$ γράφουμε $A < B$ αν $\max A < \min B$, ενώ αν $n \in \mathbb{N}$ και A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ τότε γράφουμε $n \leq A$ όταν $n \leq \min A$.

Αν $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \in X$ και $y = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k \in X$ γράφουμε $n \leq x$, αν $n \leq \mathrm{supp}(x)$ και $x < y$ αν $\mathrm{supp}(x) < \mathrm{supp}(y)$. Αν $x < y$ τότε λέμε ότι τα x, y είναι διαδοχικά διανύσματα. Επιπλέον με τον όρο διάστημα εννοούμε κάθε σύνολο της μορφής $E = \{i \in \mathbb{N} : n \leq i \leq m\}$ για $m, n \in \mathbb{N}$. Τέλος αν $x \in X$ και E πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ συμβολίζουμε με $E(x)$ ή Ex ή $x|_E$ το διάνυσμα $E(x) = \sum_{n\in E} \alpha_n e_n$.

Θεωρούμε τον χώρο των τελικά μηδενικών ακολουθιών

$$c_{00} = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \ : \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε: } \forall n \geq n_0 \ \ x_n = 0\}.$$

Αν $K \subseteq c_{00}$ μη κενό τότε για κάθε $x \in c_{00}$, θέτουμε

$$||x||_K = \sup\{f(x) : f \in K\}$$

όπου $f(x) =< f, x >= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i b_i$ με $f = (\alpha_1, \alpha_2, ...)$ και $x = (b_1, b_2, ...)$. Το άθροισμα αυτό είναι ουσιαστικά πεπερασμένο γιατί $x \in c_{00}$ άρα πεπερασμένοι όροι του θα είναι μη μηδενικοί.

Πρόταση 2.8. *Έστω $K \subseteq c_{00}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες*

(i) $e_n^* \in K$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$

(ii) K συμμετρικό, δηλαδή αν $f \in K$ τότε και $-f \in K$

(iii) Για κάθε $f \in K$ ισχύει $||f||_\infty \leq 1$.

Τότε η $||\cdot||_K$ είναι νόρμα στον c_{00} και $||e_n||_K = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Καταρχήν η ιδιότητα (iii) μας εξασφαλίζει ότι για κάθε $x \in c_{00}$ η ποσότητα $||x||_K$ είναι πραγματικός αριθμός και μάλιστα $||x||_K \leq ||x||_1$, όπου $||x||_1$ είναι η ℓ_1 νόρμα του x. Άρα $||\cdot||_K : c_{00} \to \mathbb{R}$.

Υποθέτουμε ότι το K έχει τις παραπάνω ιδιότητες και θα αποδείξουμε ότι η $||\cdot||_K$ είναι νόρμα, δηλαδή ικανοποιεί τις ιδιότητες

(i) $||x||_K \geq 0$ και $||x||_K = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $||\lambda x||_K = |\lambda| \cdot ||x||_K,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in c_{00}$

(iii) $||x+y||_K \leq ||x||_K + ||y||_K,\ \forall x, y \in c_{00}$

(i) Για κάθε $x \in c_{00}$ και κάθε $f \in K$ ισχύει : $\max\{f(x), -f(x)\} = |f(x)|$. Έχουμε ότι $||x||_K \geq 0 \Leftrightarrow \sup\{f(x) : f \in K\} \geq 0$. Αφού όμως το K είναι συμμετρικό θα ισχύει $\sup\{f(x) : f \in K\} = \sup\{|f(x)| : f \in K\} \geq 0$. Επομένως
$$||x||_K \geq 0.$$
Μένει να αποδείξουμε ότι $||x||_K = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Όταν $x = 0$ τότε $||x||_K = 0$. Επιπλέον αν $x \neq 0$ δηλαδή $x = (x_1, x_2, ...)$ τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $x_{n_0} \neq 0$. Άρα θα έχουμε $||x||_K \geq \max\{e_{n_0}^*(x), -e_{n_0}^*(x)\} = |x_{n_0}| > 0$. Επομένως ισχύει ότι
$$||x||_K = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

(ii) Έχουμε ότι
$$\begin{aligned}
||\lambda x||_K &= \sup\{f(\lambda x) : f \in K\} \\
&= \sup\{|f(\lambda x)| : f \in K\} \\
&= \sup\{|\lambda| \cdot |f(x)| : f \in K\} \\
&= |\lambda| \cdot \sup\{|f(x)| : f \in K\} \\
&= |\lambda| \cdot ||x||_K.
\end{aligned}$$
Όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι το σύνολο K είναι συμμετρικό.

(iii) Έστω $x, y \in c_{00}$. Για κάθε $f = \sum \alpha_i e_i^* \in K$ έχουμε ότι
$$\begin{aligned}
f(x+y) &= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i (x_i + y_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i y_i \\
&= f(x) + f(y) \\
&\leq ||x||_K + ||y||_K.
\end{aligned}$$
Άρα $\sup\{f(x+y) : f \in K\} \leq ||x||_K + ||y||_K$. Συνεπώς
$$||x+y||_K \leq ||x||_K + ||y||_K.$$
Επομένως η $||\cdot||_K$ είναι νόρμα.

Τέλος έχουμε ότι $||e_n||_K \geq e_n^*(e_n) = 1$ και επιπλέον $||e_n||_K = \sup\{f(e_n) : f \in K\} \leq 1$ το οποίο ισχύει από την τρίτη ιδιότητα του συνόλου K. Επομένως $||e_n||_K = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Η πλήρωση του χώρου $(c_{00}, ||\cdot||_K)$ συμβολίζεται με $(X_K, ||\cdot||_K)$. Αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $(X, ||\cdot||)$.

Πρόταση 2.9. *Αν $K \subseteq c_{00}$ το οποίο ικανοποιεί τις ιδιότητες (i),(ii),(iii) της Πρότασης 2.8 και επιπλέον την ακόλουθη ιδιότητα :*

$$(iv)\ \text{Αν}\ \ f \in K\ \text{και}\ \ E\ \text{διάστημα τότε}\ \ Ef \in K$$

τότε η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι διμονότονη βάση Schauder του X.

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι διμονότονη βάση Schauder για τον X πρέπει σύμφωνα με την Πρόταση 2.2 να δείξουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, κάθε ακολουθία συντελεστών $(\alpha_k)_{k=1}^n$ και κάθε $1 \leq l \leq m \leq n$ ισχύει

$$||\sum_{k=l}^{m} \alpha_k e_k|| \leq ||\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k||.$$

Ισοδύναμα αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $f \in K$ ισχύει :

$$f(\sum_{k=l}^{m} \alpha_k e_k) \leq ||\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k||.$$

Έστω $f \in K$. Τότε για το διάστημα $E = \{l, ..., m\}$ λόγω της ιδιότητας (iv) θα έχουμε ότι $Ef \in K$. Άρα

$$\begin{aligned} f(\sum_{k=l}^{m} \alpha_k e_k) &= Ef(\sum_{k=l}^{m} \alpha_k e_k) \\ &= Ef(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k) \\ &\leq ||\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k||. \end{aligned}$$

□

Ορισμός 2.10. *Μία βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγεται unconditional βάση αν υπάρχει σταθερά $C \geq 1$ τέτοια ώστε για κάθε ακολουθία συντελεστών $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και κάθε ακολουθία προσήμων $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, δηλαδή $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει*

$$||\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \alpha_i e_i|| \leq C||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i||. \tag{2.1}$$

Ο μικρότερος αριθμός C ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση (2.1) ονομάζεται unconditional σταθερά της βάσης $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Λέμε ότι η unconditional βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι C-unconditional αν η unconditional σταθερά της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μικρότερη ή ίση του C.

Πρόταση 2.11. *Αν $K \subseteq c_{00}$ το οποίο ικανοποιεί τις ιδιότητες (i),(ii),(iii),(iv) των Προτάσεων 2.8, 2.9 και επιπλέον την ακόλουθη ιδιότητα*

$$(v)\ \text{Αν}\ f = \sum \alpha_i e_i^* \in K\ \text{τότε για κάθε επιλογή προσήμων}\ \varepsilon_i \in \{-1, 1\}\ \text{το}\ g = \sum \varepsilon_i \alpha_i e_i^* \in K$$

τότε η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι 1-unconditional βάση του X.

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι 1-unconditional βάση του X αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε ακολουθία συντελεστών $(\alpha_i)_{i=1}^n$ και κάθε ακολουθία προσήμων $(\varepsilon_i)_{i=1}^n$ ισχύει

$$||\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \alpha_i e_i|| \leq ||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i||.$$

Ισοδύναμα αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $f \in K$ ισχύει

$$f(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \alpha_i e_i) \leq ||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i||.$$

Έστω $f = \sum_{i=1}^{d} \beta_i e_i^* \in K$ τότε λόγω της ιδιότητας (v) για το $g = \sum_{i=1}^{d} \varepsilon_i \beta_i e_i^*$ έχουμε ότι $g \in K$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} f(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \alpha_i e_i) &= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \alpha_i \beta_i \\ &= g(\sum_{i=1}^{d} \alpha_i e_i) \\ &\leq ||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i|| \end{aligned}$$

□

Ορισμός 2.12. *Έστω X χώρος Banach με βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγεται 1-subsymmetric αν είναι 1-unconditional και επιπλέον για κάθε $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ και κάθε γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ισχύει*

$$||\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i|| = ||\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_{n_i}||.$$

Πρόταση 2.13. *Αν $K \subseteq c_{00}$ το οποίο ικανοποιεί τις ιδιότητες (i),(ii),(iii),(iv),(v) των Προτάσεων 2.8, 2.9, 2.11 και επιπλέον την ακόλουθη ιδιότητα*
(vi) Για κάθε $d \in \mathbb{N}$, κάθε επιλογή $(\beta_i)_{i=1}^{d}$ πραγματικών αριθμών και κάθε γνησίως αύξουσα επιλογή φυσικών $(n_i)_{i=1}^{d}$ ισχύει η ισοδυναμία

$$\sum_{i=1}^{d} \beta_i e_i^* \in K \;\Leftrightarrow\; \sum_{i=1}^{d} \beta_i e_{n_i}^* \in K$$

τότε η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι 1-subsymmetric βάση του X.

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι 1-subsymmetric βάση του X αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$, κάθε επιλογή $(\alpha_i)_{i=1}^{m}$ πραγματικών αριθμών και κάθε γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών $(n_i)_{i=1}^{d}$ ισχύει

$$||\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i|| = ||\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_{n_i}||.$$

Για να αποδειχθεί αυτό αρκεί να δείξουμε ότι

$$||\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i|| \leq ||\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_{n_i}|| \quad \text{και} \quad ||\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_{n_i}|| \leq ||\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i||.$$

Θα αποδείξουμε μόνο την πρώτη ανισότητα. Η απόδειξη της άλλης είναι παρόμοια και για τον λόγο αυτό θα την παραλείψουμε. Ισοδύναμα αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $f \in K$ ισχύει

$$f(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i) \leq ||\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_{n_i}||.$$

Έστω $f = \sum_{i=1}^{d} \beta_i e_i^* \in K$, τότε για το $g = \sum_{i=1}^{d} \beta_i e_{n_i}^*$ από την ιδιότητα (vi) προκύπτει ότι $g \in K$. Έτσι έχουμε

$$
\begin{aligned}
f(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i) &= \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \beta_i \\
&= g(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_{n_i}) \\
&\leq ||\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_{n_i}||.
\end{aligned}
$$

Επομένως έχουμε ότι

$$||\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i|| \leq ||\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_{n_i}||.$$

Άρα η πρόταση αποδείχθηκε. □

Παρατήρηση 2.14. *Όλοι οι χώροι Banach που θα παρουσιάσουμε στην παρούσα εργασία ορίζονται ως εξής : Για κατάλληλο σύνολο K ορίζουμε μία νόρμα στον c_{00} και θεωρούμε τον χώρο X_K που είναι η πλήρωση του χώρου $(c_{00}, ||\cdot||_K)$. Παρατηρούμε ότι ακόμη και οι κλασικοί χώροι Banach $(c_0, ||\cdot||_\infty)$ και $(\ell_p, ||\cdot||_p)$ είναι χώροι αυτής της μορφής. Πράγματι για τον χώρο c_0 το σύνολο K που παίζει αυτό τον ρόλο είναι το $K = \{\pm e_n^* : n \in \mathbb{N}\}$. Για τον χώρο $\ell_p, 1 < p < \infty$ το σύνολο που πρέπει να θεωρήσουμε είναι το $K = \{\sum_{i=1}^{d} \beta_i e_i^* : \sum_{i=1}^{d} |\beta_i|^q \leq 1, d \in \mathbb{N}, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_d \in \mathbb{R}\}$, όπου q ο συζυγής εκθέτης του p. Τέλος για τον χώρο ℓ_1 το σύνολο που πρέπει να θεωρήσουμε είναι το $K = \{\sum_{i=1}^{d} \varepsilon_i e_i^* : \varepsilon_i \in \{-1, 1\}, d \in \mathbb{N}\}$.*

Κεφάλαιο 3

Ο χώρος $T[(\mathcal{A}_n, \theta)]$

Για $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την οικογένεια των υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ με το πολύ n στοιχεία : $\mathcal{A}_n = \{A \subseteq \mathbb{N} : |A| \leq n\}$. Για δεδομένο $n \in \mathbb{N}$, $0 < \theta < 1$ ορίζουμε τον αριθμό p από την σχέση :

$$\frac{1}{p} + \log_n(\frac{1}{\theta}) = 1$$

και τον αριθμό q να είναι ο συζυγής εκθέτης του p, δηλαδή τον αριθμό που ορίζεται από τη σχέση

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Από αυτές τις δύο σχέσεις προκύπτει ότι

$$\frac{1}{q} = \log_n(\frac{1}{\theta}) \Rightarrow n^{\frac{1}{q}} = \frac{1}{\theta} \Rightarrow \theta = \frac{1}{n^{\frac{1}{q}}}.$$

Το norming σύνολο K θα οριστεί ως $K = \bigcup\limits_{s=0}^{\infty} K_s$, όπου τα σύνολα K_s είναι μία ακολουθία υποσυνόλων του c_{00} τα οποία ορίζουμε επαγωγικά

$$K_0 = \{\pm e_n^* : n \in \mathbb{N}\}.$$

Έχοντας ορίσει το K_s ορίζουμε

$$K_{s+1} = K_s \cup \{\theta(f_1 + f_2 + ... + f_d) : f_i \in K_s, \ \ i = 1, ..., d, \ \ d \leq n \text{ και } f_1, f_2, ..., f_d \text{ διαδοχικά}\}.$$

Θέτουμε $K = \bigcup\limits_{s=0}^{\infty} K_s$. Το K ορίζει νόρμα στον c_{00} με τύπο $||x|| = \sup\{f(x) : f \in K\}$ για κάθε $x \in c_{00}$. Ο χώρος $T[(A_n, \theta)]$ είναι η πλήρωση του $(c_{00}, || \cdot ||)$.

Ο S. Bellenot [5] το 1985 απέδειξε ότι ο χώρος $X = T[(\mathcal{A}_n, \theta)]$ είναι ισόμορφος με κάποιον ℓ_p, $1 < p < \infty$ ή τον c_0. Η απόδειξη που θα παρουσιάσουμε εδώ γίνεται με διαφορετικά επιχειρήματα και οφείλεται στους Σ. Αργυρό και Ε. Δεληγιάννη [2].

Παρατήρηση 3.1. *Το norming σύνολο K του χώρου $X = T[(\mathcal{A}_n, \theta)]$ ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες*

(i) $e_n^* \in K$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

(ii) K *συμμετρικό, δηλαδή αν* $f \in K$ *τότε και* $-f \in K$.

(iii) Για κάθε $f \in K$ *ισχύει* $||f||_\infty \leq 1$.

(iv) Αν $f \in K$ *και κάθε* $E \subseteq \mathbb{N}$ *(ειδικότερα για* E *διάστημα) ισχύει* $Ef \in K$.

(v) Αν $\sum\limits_{i=1}^{d} \alpha_i e_i^* \in K$ *τότε για κάθε επιλογή προσήμων* $(\varepsilon_i)_{i=1}^d$ *στο* $\{-1, 1\}$ *ισχύει* $\sum\limits_{i=1}^{d} \varepsilon_i \alpha_i e_i^* \in K$.

(vi) Για κάθε $d \in \mathbb{N}$, κάθε επιλογή $(\beta_i)_{i=1}^d$ πραγματικών αριθμών και κάθε γνησίως αύξουσα επιλογή φυσικών $(n_i)_{i=1}^d$ ισχύει η ισοδυναμία

$$\sum_{i=1}^d \beta_i e_i^* \in K \;\Leftrightarrow\; \sum_{i=1}^d \beta_i e_{n_i}^* \in K$$

Επομένως από την Πρόταση 2.13 η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι 1-unconditional και 1-subsymmetric βάση του χώρου $T[(\mathcal{A}_n,\theta)]$.

Απόδειξη. Αποδεικνύεται εύκολα με επαγωγή ότι κάθε σύνολο K_s, $s = 0,1,2,...$ ικανοποιεί αυτές τις ιδιότητες επομένως το norming σύνολο K ως ένωση αυτών των συνόλων θα ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες. □

Παρατήρηση 3.2. *Για κάθε $x \in X$ και $(E_i)_{i=1}^n$ διαδοχικά σύνολα ισχύει*

$$||x|| \geq \theta \sum_{i=1}^n ||E_i x||.$$

Απόδειξη. Έστω $x \in X$, $(E_i)_{i=1}^n$ διαδοχικά σύνολα και έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $i = 1,...,n$ μπορούμε να επιλέξουμε $f_i \in K$, ώστε $f_i(E_i x) \geq ||E_i x|| - \varepsilon$. Από Παρατήρηση 3.1 τα f_i μπορούν να επιλεγούν ώστε $\operatorname{supp} f_i \subseteq E_i$, $i = 1,...,n$. Ορίζουμε $f = \theta(f_1 + ... + f_n)$. Τότε $f \in K$ άρα έχουμε

$$\begin{aligned}
||x|| &\geq f(x) \\
&= \theta(f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)) \\
&= \theta(f_1(E_1 x) + ... + f_n(E_n x)) \\
&\geq \theta \sum_{i=1}^n ||E_i x|| - n\theta\varepsilon.
\end{aligned}$$

Εφόσον η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$ θα έχουμε ότι

$$||x|| \geq \theta \sum_{i=1}^n ||E_i x||.$$

□

Θα δείξουμε κατόπιν την απόδειξη των δύο βασικών θεωρημάτων τα οποία αποδεικνύουν ότι ο χώρος $T[(\mathcal{A}_n,\theta)]$ είναι ισόμορφος με κάποιον ℓ_p, $1 < p < \infty$ ή τον c_0.

Θεώρημα 3.3. *Αν $\theta \leq \frac{1}{n}$ τότε ο χώρος $T[(\mathcal{A}_n,\theta)]$ είναι ισομετρικός του c_0.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι $||x|| = ||x||_\infty$ για κάθε $x \in c_{00}$. Αρχικά θα δείξουμε ότι

$$||x|| \leq ||x||_\infty.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $f \in K$ ισχύει $f(x) \leq ||x||_\infty$. Θα δείξουμε με επαγωγή στο s ότι για κάθε $f \in K_s$ ισχύει : $f(x) \leq ||x||_\infty$. Αν $f \in K_0$ τότε $f(x) \leq \sup\{g(x) : g \in K_0\} = ||x||_\infty$.

Υποθέτουμε ότι ισχύει $f(x) \leq ||x||_\infty$ για κάθε $f \in K_s$ και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για κάθε $f \in K_{s+1}$. Έστω $f \in K_{s+1} \setminus K_s$. Τότε το f θα είναι της μορφής $f = \theta(f_1 + ... + f_d)$ με $f_i \in K_s$ $i = 1,...,d, d \leq n$ και τα $f_1,...,f_d$ διαδοχικά. Επομένως θα ισχύει :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \theta(f_1(x) + ... + f_d(x)) \\
&\leq \theta(||x||_\infty + ... + ||x||_\infty) \\
&= \theta d ||x||_\infty \\
&\leq \theta n ||x||_\infty \\
&\leq ||x||_\infty.
\end{aligned}$$

Επομένως $f(x) \leq ||x||_\infty$ για κάθε $f \in K$, δηλαδή $||x|| \leq ||x||_\infty$. Επιπλέον έχουμε ότι

$$\begin{aligned} ||x||_\infty &= \sup\{|x_i| : i \in \mathbb{N}\} \\ &= \sup\{\pm(e_i)^*(x) : i \in \mathbb{N}\} \\ &= \sup\{f(x) : f \in K_0\} \\ &\leq \sup\{f(x) : f \in K\} \\ &= ||x||. \end{aligned}$$

Άρα

$$||x||_\infty \leq ||x||.$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $||x|| = ||x||_\infty$ για κάθε $x \in c_{00}$. Επομένως εφόσον ο $T[(\mathcal{A}_n, \theta)]$ είναι η πλήρωση του $(c_{00}, ||\cdot||)$ προκύπτει ότι ο $T[(\mathcal{A}_n, \theta)]$ είναι ισομετρικός του c_0. □

Παρατήρηση 3.4. *Αν* $0 \leq \alpha_j \leq \beta_j$ *τότε* $||\sum \alpha_j e_j|| \leq ||\sum \beta_j e_j||$.

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $f \in K$ ισχύει $f(\sum \alpha_j e_j) \leq ||\sum \beta_j e_j||$. Έστω $f \in K$ με $f = \sum \gamma_j e_j^*$. Θέτουμε $f' = \sum |\gamma_j| e_j^*$. Από την Παρατήρηση 3.1 (v), έχουμε ότι $f' \in K$. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} f(\sum \alpha_j e_j) &= \sum \alpha_j \gamma_j \\ &\leq \sum \alpha_j |\gamma_j| \\ &\leq \sum \beta_j |\gamma_j| \\ &= (\sum |\gamma_j| e_j^*)(\sum \beta_j e_j) \\ &= f'(\sum \beta_j e_j) \\ &\leq ||\sum \beta_j e_j||. \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε ότι

$$||\sum \alpha_j e_j|| \leq ||\sum \beta_j e_j||.$$

□

Θεώρημα 3.5. *Αν* $\frac{1}{n} < \theta < 1$ *τότε ο χώρος* $T[(\mathcal{A}_n, \theta)]$ *είναι ισομορφικός με τον* ℓ_p *, όπου* p *είναι ο αριθμός για τον οποίο ισχύει η σχέση* $\frac{1}{p} + \log_n(\frac{1}{\theta}) = 1$.

Απόδειξη. Θεωρούμε q το συζυγή εκθέτη του p οπότε $\theta = \frac{1}{n^{\frac{1}{q}}}$. Θα κάνουμε την απόδειξη του θεωρήματος σε τέσσερα βήματα.

Βήμα 1 : Για κάθε $x \in c_{00}$ ισχύει

$$||x|| \leq ||x||_p.$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι $f(x) \leq ||x||_p$ για κάθε $f \in K$. Θα το δείξουμε με επαγωγή στο s για κάθε $f \in K_s$. Αν $f \in K_0$ τότε

$$f(x) \leq \sup\{f(x) : f \in K_0\} = ||x||_\infty \leq ||x||_p.$$

Υποθέτουμε ότι $f(x) \leq ||x||_p$ για κάθε $f \in K_s$ και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για κάθε $f \in K_{s+1}$. Έστω $f \in K_{s+1} \setminus K_s$. Τότε το f θα είναι της μορφής $f = \theta(f_1 + ... + f_d)$, με $f_1, f_2, ..., f_d$ διαδοχικά, $d \leq n$ και $f_1, ..., f_d \in K_s$ οπότε έχουμε

$$f(x) \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{q}}} \sum_{i=1}^{d} f_i(x).$$

Θέτουμε $x_i = (\text{supp}(f_i))(x)$ για $i = 1, ..., n$. Τότε τα x_i είναι διαδοχικά (άρα με ξένα supp) και $f_i(x) = f_i(x_i)$ οπότε, χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^{\frac{1}{q}}}\sum_{i=1}^{d} f_i(x) &= \frac{1}{n^{\frac{1}{q}}}\sum_{i=1}^{d} f_i(x_i) \\
&\leq \frac{1}{n^{\frac{1}{q}}}\sum_{i=1}^{d} ||x_i||_p \\
&= \frac{1}{n^{\frac{1}{q}}}\sum_{i=1}^{d} ||x_i||_p \cdot 1 \\
&\leq \frac{1}{n^{\frac{1}{q}}}(\sum_{i=1}^{d} ||x_i||_p^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^{d} 1^q)^{\frac{1}{q}} \quad \text{(από ανισότητα Hölder)} \\
&= (\frac{d}{n})^{\frac{1}{q}}(\sum_{i=1}^{d} ||x_i||_p^p)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq (\sum_{i=1}^{d} ||x_i||_p^p)^{\frac{1}{p}} \leq ||x||_p.
\end{aligned}$$

Επομένως $f(x) \leq ||x||_p$ για κάθε $f \in K_{s+1}$. Η επαγωγή είναι πλήρης, άρα

$$||x|| \leq ||x||_p.$$

□

Βήμα 2 : Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{p}}} m^{\frac{1}{p}} \leq ||\sum_{i=1}^{m} e_i||.$$

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε ότι για κάθε $F \subseteq \mathbb{N}$ με $|F| = n^s$

$$||\sum_{i\in F} e_i|| = (\theta n)^s.$$

Καταρχήν από το πρώτο βήμα προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
||\sum_{i\in F} e_i|| &\leq ||\sum_{i\in F} e_i||_p \\
&= (\sum_{i\in F} 1^p)^{\frac{1}{p}} = |F|^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{s}{p}} \\
&= (n^{1-\frac{1}{q}})^s = (\frac{1}{n^{\frac{1}{q}}} n)^s \\
&= (\theta n)^s.
\end{aligned}$$

Μένει λοιπόν να αποδείξουμε ότι

$$||\sum_{i\in F} e_i|| \geq (\theta n)^s.$$

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο s. Για $s = 0$ έχουμε ότι $||e_k|| \geq e_k^*(e_k) = 1 = (\theta n)^0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Επομένως για $s = 0$ ισχύει.

Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο s και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $s+1$. Έστω F με $|F| = n^{s+1} = n \cdot n^s$. Διασπούμε το F σε n διαδοχικά σύνολα μεγέθους n^s, δηλαδή : $F = F_1 \bigcup ... \bigcup F_n$, όπου

$|F_i| = n^s,\ F_1 < F_2 < ... < F_n$. Τότε από την παρατήρηση (3.2) και από την επαγωγική υπόθεση θα έχουμε

$$||\sum_{i\in F} e_i|| \geq \theta \sum_{j=1}^{n} ||\sum_{i\in F_j} e_i|| \geq \theta(n(\theta n)^s) = (\theta n)^{s+1}.$$

Επομένως ισχύει ότι $||\sum\limits_{i\in F} e_i|| = (\theta \cdot n)^s$ για κάθε $F \subseteq \mathbb{N}$ με $|F| = n^s$.

Έστω τώρα $m \in \mathbb{N}$. Επιλέγουμε $s \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ τέτοιο ώστε $n^s \leq m < n^{s+1}$. Τότε

$$||\sum_{i=1}^{m} e_i|| \geq ||\sum_{i=1}^{n^s} e_i|| = (\theta \cdot n)^s = n^{\frac{s}{p}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}} n^{\frac{s+1}{p}} \geq \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}} m^{\frac{1}{p}}$$

Επομένως για κάθε $m \in \mathbb{N}$ έχουμε :

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{p}}} m^{\frac{1}{p}} \leq ||\sum_{i=1}^{m} e_i||.$$

□

Βήμα 3 : Για κάθε $l \in \mathbb{N}$ και κάθε block ακολουθία $(x_k)_{k=1}^{l}$ της βάσης $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ με $||x_k|| = 1$ ισχύει

$$||\sum_{k=1}^{l} \alpha_k x_k|| \leq \frac{2}{\theta} ||\sum_{k=1}^{l} \alpha_k e_k||$$

για κάθε επιλογή συντελεστών $(\alpha_k)_{k=1}^{l}$.

Απόδειξη. Εφόσον η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι 1-unconditional βάση του χώρου μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι τα x_k έχουν μη αρνητικές συντεταγμένες και ότι όλοι οι συντελεστές (α_k) είναι θετικοί.

Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\phi \in K$ ισχύει

$$\phi(\sum_{k=1}^{l} \alpha_k x_k) \leq \frac{2}{\theta} ||\sum_{k=1}^{l} \alpha_k e_k||.$$

Πάλι λόγω της unconditionality μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλα τα συναρτησοειδή που θα εμφανιστούν στην απόδειξη έχουν μη αρνητικές συντεταγμένες. Χωρίς βλάβη της γενικότητας (παραλείποντας τα x_k για τα οποία $\phi(x_k) = 0$) μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\phi(x_k) > 0$ για κάθε $k = 1, ..., l$. Για την απόδειξη εισάγουμε τις παρακάτω έννοιες.

Ορισμός 3.6. *Καλούμε ανάλυση της $\phi \in K_m$ μία ακολουθία $(F_s(\phi))_{s=0}^{m}$ υποσυνόλων του $\bigcup\limits_{s=0}^{\infty} K_s$ για την οποία ισχύουν τα εξής:*

(1) $F_m(\phi) = \{\phi\}$.

(2) Για κάθε $f \in F_0(\phi)$ ισχύει $f \in K_0$ άρα αυτά τα f θα είναι της μορφής e_n^*.

(3) Για κάθε s το σύνολο $F_s(\phi)$ περιέχει διαδοχικά στοιχεία του K_s, με $\bigcup\limits_{f\in F_s(\phi)} \mathrm{supp}(f) = \mathrm{supp}(\phi)$.

(4) Για κάθε s με $0 \leq s < m$ και για κάθε $f \in F_{s+1}(\phi)$ ισχύει ακριβώς ένα από τα εξής δύο

4.1) $f \in F_s(\phi)$

4.2) *υπάρχει $d \leq n$ και διαδοχικά $f_1, ..., f_d \in F_s(\phi)$ με $f = \theta(f_1 + ... + f_d)$*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Κάθε $f \in K$ έχει ανάλυση αλλά όχι απαραίτητα μοναδική.

Ορισμός 3.7. *Έστω $(F_s(\phi))_{s=0}^m$ μία ανάλυση της ϕ. Για $k=1,...,l$ ορίζουμε*

$$\begin{aligned} s_k &= \max\{s : 0\le s<m \text{ για το οποίο υπάρχουν τουλάχιστον δύο } f_1,f_2\in F_s(\phi) \text{ τέτοια ώστε} \\ &\quad f_i(x_k)>0, i=1,2\} \end{aligned}$$

και $s_k=0$, αν το $\mathrm{supp}(x_k)$ είναι μονοσύνολο.

Έτσι για κάθε $k=1,...,l$ αν $\{f\in F_{s_k}(\phi) : f(x_k)>0\}=\{f_1<\cdots<f_{d_k}\}$. Ορίζουμε τα $x_k^{'}$ και $x_k^{''}$ ως εξής

$$x_k^{'}=x_k|_{\mathrm{supp}\, f_1} \quad \text{και} \quad x_k^{''}=x_k|_{\bigcup_{i=2}^{d_k}\mathrm{supp}(f_i)}.$$

Το $x_k^{'}$ (αντίστοιχα $x_k^{''}$) καλείται αρχικό τμήμα (αντίστοιχα τελικό τμήμα) του x_k ως προς την $(F_s(\phi))_{s=0}^m$.

Θα δείξουμε ότι

$$\phi(\sum_{k=1}^l \alpha_k x_k^{'})\le \frac{1}{\theta}||\sum_{k=1}^l \alpha_k e_k|| \tag{3.1}$$

και

$$\phi(\sum_{k=1}^l \alpha_k x_k^{''})\le \frac{1}{\theta}||\sum_{k=1}^l \alpha_k e_k|| \tag{3.2}$$

Έχοντας αποδείξει τις (3.1), (3.2) προκύπτει ότι $\phi(\sum_{k=1}^l \alpha_k x_k)\le \frac{2}{\theta}||\sum_{k=1}^l \alpha_k e_k||$. Οι σχέσεις (3.1), (3.2) αποδεικνύονται με όμοιο τρόπο και για το λόγο αυτό θα δώσουμε μόνο την απόδειξη της (3.1). Αρκεί να αποδείξουμε (και η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο s) ότι για κάθε $J\subseteq\{1,...,l\}$ και κάθε $f\in F_s(\phi)$ ισχύει

$$f(\sum_{k\in J} \alpha_k x_k^{'})\le \frac{1}{\theta}||\sum_{k\in J} \alpha_k e_k|| \tag{3.3}$$

Αν $f\in F_0(\phi)$ τότε η f θα είναι κάποιο στοιχείο του K_0, δηλαδή $f=e_i^*$ για κάποιο i οπότε αν $i\in\mathrm{supp}(x_{k_0}^{'})$ έχουμε

$$e_i^*(\sum_{k\in J}\alpha_k x_k^{'})=\alpha_{k_0}e_i^*(x_{k_0}^{'})\le\alpha_{k_0}=||\alpha_{k_0}e_{k_0}||\le\frac{1}{\theta}||\sum_{k=1}^l\alpha_k e_k||.$$

Άρα για $f\in F_0(\phi)$ ισχύει.

Υποθέτουμε ότι η σχέση (3.3) ισχύει για κάθε $f\in F_s(\phi)$ και κάθε $J\subseteq\{1,...,l\}$ Έστω $J\subseteq\{1,...,l\}$ και $f\in F_{s+1}(\phi)$. Τότε το f θα είναι της μορφής $f=\theta(f_1+...+f_d)$ με $f_i\in F_s(\phi)$, $i=1,...,d$ όπου $d\le n$ και $f_1,...,f_d$ διαδοχικά.

Θεωρούμε τα σύνολα

$$K=\{k\in J : \exists i\in\{1,...,d-1\} \text{ τέτοιο ώστε} : f_i(x_k^{'})>0 \text{ και } f_{i+1}(x_k^{'})>0\}.$$

$$I=\{i\in\{1,...,d\} : \exists k\in J\setminus K \text{τέτοιο ώστε} : f_i(x_k^{'})>0\}.$$

Ισχυρισμός. $|K|+|I|\le n$

Απόδειξη. Έστω $k\in K$ τότε από τον ορισμό του συνόλου K υπάρχει i με $1<i\le d$ τέτοιο ώστε : $f_{i-1}(x_k^{'})>0$ και $f_i(x_k^{'})>0$. Εφόσον υπάρχει μοναδικό $g\in F_{s_k}(\phi)$ ώστε $g(x_k)>0$ συμπεραίνουμε ότι $s+1\le s_k$. Άρα υπάρχει $h\in F_{s_k}(\phi)$ τέτοιο ώστε $\mathrm{supp}(f)\subseteq\mathrm{supp}(h)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \min\mathrm{supp}(x_k) &\le \min\mathrm{supp}(x_k^{'})\le\max\mathrm{supp}(f_{i-1})<\min\mathrm{supp}(f_i) \\ &\le \max\mathrm{supp}(f_i)\le\max\mathrm{supp}(f)\le\max\mathrm{supp}(h)\le\max\mathrm{supp}(x_k). \end{aligned}$$

Συνεπώς $\{\lambda : f_i(x_\lambda^{'}) > 0\} = \{k\}$ και εφόσον $k \in K$ προκύπτει ότι $i \notin I$ Έτσι ορίζεται μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση από το K στο $\{1, ..., d\} \setminus I$. Άρα $|K| \leq d - |I| \leq n - |I|$, από όπου προκύπτει ότι

$$|K| + |I| \leq n.$$

$\square$

Για κάθε $i \in I$ ορίζουμε : $E_i = \{k \in J \setminus K : f_i(x_k^{'}) > 0\}$. Τότε $E_i \cap K = \emptyset$ για κάθε $i \in I$. Έχουμε

$$f(\sum_{k\in J} \alpha_k x_k^{'}) = \theta \sum_{i=1}^{d} \sum_{k\in J} f_i(\alpha_k x_k^{'}) = \theta[\sum_{i\in I} f_i(\sum_{k\in E_i} \alpha_k x_k^{'}) + \sum_{k\in K}(\sum_{i=1}^{d} f_i)(\alpha_k x_k^{'})] \ \ (1).$$

Για κάθε k (ειδικότερα για κάθε $k \in K$) ισχύει

$$(\sum_{i=1}^{d} f_i)(\alpha_k x_k^{'}) \leq \frac{1}{\theta}||\alpha_k x_k^{'}|| \leq \frac{1}{\theta}||\alpha_k x_k|| = \frac{1}{\theta}||\alpha_k e_k||.$$

Επίσης από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι $f_i(\sum_{k\in E_i} \alpha_k x_k^{'}) \leq \frac{1}{\theta}||\sum_{k\in E_i} \alpha_k e_k||$ για κάθε $i \in I$. Χρησιμοποιώντας ότι $|K| + |I| \leq n$ και το γεγονός ότι η οικογένεια $\{E_i,\ i \in I\} \cup \{\{k\},\ k \in K\}$ αποτελείται από διαδοχικά σύνολα και χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση 3.2, προκύπτει ότι

$$f(\sum_{k\in J} \alpha_k x_k^{'}) \leq \theta(\frac{1}{\theta} \sum_{i\in I} ||E_i(\sum_{k\in J} \alpha_k e_k)|| + \frac{1}{\theta} \sum_{k\in K} ||\alpha_k e_k||) \leq \frac{1}{\theta}||\sum_{k\in J} \alpha_k e_k||.$$

$\square$

Βήμα 4 : Για κάθε l και για κάθε επιλογή θετικών συντελεστών $(r_j)_{j=1}^{l}$ με $r_j \in \mathbb{Q}$ ισχύει

$$||\sum_{j=1}^{l} r_j^{\frac{1}{p}} e_j|| \geq \frac{1}{2n}(\sum_{j=1}^{l} r_j)^{\frac{1}{p}}.$$

Απόδειξη. Γράφουμε τα r_j με κοινό παρονομαστή k $r_j = \frac{k_j}{k}$ με $k_j, k \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $s_0 = 0,\ s_j = k_1 + ... + k_j$ και $u_j = \sum_{i=s_{j-1}+1}^{s_j} e_i,\ j = 1, ..., l$. Από το πρώτο βήμα έχουμε ότι $||u_j|| \leq k_j^{\frac{1}{p}}$. Επομένως, από την Παρατήρηση 3.4, έχουμε

$$||\sum_{j=1}^{l} r_j^{\frac{1}{p}} e_j|| = \frac{1}{k^{\frac{1}{p}}}||\sum_{j=1}^{l} k_j^{\frac{1}{p}} e_j|| \geq \frac{1}{k^{\frac{1}{p}}}||\sum_{j=1}^{l} ||u_j|| e_j||.$$

Η $\frac{u_j}{||u_j||}$ είναι η block ακολουθία της βάσης $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ με $||\frac{u_j}{||u_j||}|| = 1$ οπότε από το Βήμα 3 έχουμε ότι

$$||\sum \alpha_k \frac{u_k}{||u_k||}|| \leq \frac{2}{\theta}||\sum \alpha_k e_k||.$$

Έτσι προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k^{\frac{1}{p}}}||\sum_{j=1}^{l} ||u_j|| e_j|| &\geq \frac{\theta}{2}\frac{1}{k^{\frac{1}{p}}}||\sum_{j=1}^{l} ||u_j|| \frac{u_j}{||u_j||}|| \\
&= \frac{\theta}{2}\frac{1}{k^{\frac{1}{p}}}||\sum_{j=1}^{l} u_j|| \\
&= \frac{\theta}{2}\frac{1}{k^{\frac{1}{p}}}||\sum_{j=1}^{l} \sum_{i=s_{j-1}+1}^{s_j} e_i|| \\
&= \frac{\theta}{2}\frac{1}{k^{\frac{1}{p}}}||\sum_{i=1}^{s_l} e_i||.
\end{aligned}$$

Από το Βήμα 2 έχουμε

$$||\sum_{i=1}^{s_l} e_i|| \geq \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}} s_l^{\frac{1}{p}}$$

οπότε θέτοντας $\theta = \frac{1}{n^{\frac{1}{q}}}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\theta}{2}\frac{1}{k^{\frac{1}{p}}}||\sum_{i=1}^{s_l} e_i|| &\geq \frac{1}{2n}\frac{s_l^{\frac{1}{p}}}{k^{\frac{1}{p}}} \\
&= \frac{1}{2n}\Big(\frac{\sum_{j=1}^{l} k_j}{k}\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{1}{2n}(\sum_{j=1}^{l} r_j)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

□

Επομένως από το Βήμα 4, την πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς και το γεγονός ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι 1-unconditional προκύπτει ότι

$$||\sum_{k=1}^{l} \alpha_k e_k|| \geq \frac{1}{2n}(\sum_{k=1}^{l} |\alpha_k|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

για κάθε επιλογή συντελεστών $(\alpha_k)_{k=1}^{l}$. Συνοψίζοντας έχουμε αποδείξει ότι για κάθε $x \in c_{00}$ ισχύει :

$$\frac{1}{2n}||x||_p \leq ||x|| \leq ||x||_p.$$

Επομένως ο χώρος $T[(\mathcal{A}_n,\theta)]$ είναι ισομορφικός με τον ℓ_p. □

Κεφάλαιο 4

Παραμόρφωση χώρων Banach

Ορισμός 4.1. *Έστω $(X, ||\cdot||)$ ένας απειροδιάστατος χώρος Banach. Αν $|||\cdot|||$ είναι μία ισοδύναμη νόρμα στον χώρο X και $\lambda > 1$ λέμε ότι η $|||\cdot|||$ είναι μία $\lambda-$παραμόρφωση του X αν για κάθε Y απειροδιάστατο υπόχωρο του X ισχύει*

$$\sup\{\frac{|||x|||}{|||y|||},\ x, y \in Y,\ ||x|| = ||y|| = 1\} \geq \lambda. \tag{4.1}$$

Ο X λέγεται $\lambda-$παραμορφώσιμος αν υπάρχει μία $\lambda-$παραμόρφωση του X. Ο X λέγεται παραμορφώσιμος αν είναι $\lambda-$παραμορφώσιμος για κάποιο $\lambda > 1$. Ο X λέγεται απεριόριστα παραμορφώσιμος αν είναι $\lambda-$παραμορφώσιμος για κάθε $\lambda > 1$.

Παρατήρηση 4.2. *Στην περίπτωση που ο χώρος $(X, ||\cdot||)$ έχει Schauder βάση, για να δείξουμε ότι η $|||\cdot|||$ είναι μία $\lambda-$παραμόρφωση του X αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει η σχέση (4.1) μόνο για Y που είναι block υπόχωρος του X. Αυτό συμβαίνει λόγω του ακόλουθου θεωρήματος.*

Θεώρημα 4.3. *Αν X χώρος Banach με βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, Y απειροδιάστατος υπόχωρος του X και $\varepsilon > 0$ τότε υπάρχει W απειροδιάστατος υπόχωρος του Y και Z block υπόχωρος του X ώστε οι χώροι W,Z να είναι $1 + \varepsilon$ ισομορφικοί.*

Ένας χώρος Banach $(X, ||\cdot||)$ δεν είναι $\lambda-$παραμορφώσιμος αν και μόνο αν για κάθε ισοδύναμη νόρμα $|||\cdot|||$ στον X υπάρχει απειροδιάστατος υπόχωρος Y του X ώστε οι νόρμες $||\cdot||$, $|||\cdot|||$ να είναι $\lambda-$ισοδύναμες στον Y (που σημαίνει ότι ο ταυτοτικός τελεστής $I : (Y, \|\cdot\|) \to (Y, |||\cdot|||)$ να είναι $\lambda-$ισομορφισμός, δηλαδή $||I|| \cdot ||I^{-1}|| \leq \lambda$).

Ο R.C. James [13] το 1964 απέδειξε ότι οι χώροι ℓ_1 και ο c_0 δεν είναι παραμορφώσιμοι. Στα παρακάτω δίνουμε την απόδειξη των ακόλουθων θεωρημάτων.

Θεώρημα 4.4. *Ο χώρος ℓ_1 δεν είναι παραμορφώσιμος.*

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε ισοδύναμη νόρμα $|||\cdot|||$ στον ℓ_1 και για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει Y απειροδιάστατος υπόχωρος του ℓ_1 ώστε να ισχύει

$$\sup\{\frac{|||x|||}{|||y|||},\ x, y \in Y,\ ||x||_1 = ||y||_1 = 1\} \leq 1 + \varepsilon.$$

Ισοδύναμα αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε ισοδύναμη νόρμα $|||\cdot|||$ στον ℓ_1 και για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει απειροδιάστατος υπόχωρος Y του ℓ_1 ώστε ο ταυτοτικός τελεστής είναι $1 + \varepsilon$ ισομορφισμός των χώρων $(Y, ||\cdot||_1)$, $(Y, |||\cdot|||)$.

Έστω $\varepsilon > 0$ και $|||\cdot|||$ μία ισοδύναμη νόρμα στον ℓ_1. Τότε από την ισοδυναμία της $|||\cdot|||$ με την $||\cdot||$ προκύπτει ότι υπάρχουν $m, M > 0$ τέτοια ώστε

$$m|||x||| \leq ||x||_1 \leq M|||x|||\ \ \forall x \in \ell_1. \tag{4.2}$$

Για $n = 1, 2, ...$ θέτουμε

$$A_n = \{x \in \ell_1 :\ |||x||| = 1,\ P_n(x) = 0\ \text{ και το σύνολο }\ \{m \in \mathbb{N} : e^*_m(x) \neq 0\}\ \text{πεπερασμένο}\}$$

όπου P_n, e_m^* είναι οι προβολές και τα διορθογώνια συναρτησοειδή που αντιστοιχούν στη συνήθη βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του ℓ_1.

Θέτουμε $\lambda_n = \sup\{||x||_1 : \ x \in A_n\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε ότι $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$. Επομένως $\lambda_n \geq \lambda_{n+1}$ για κάθε n. Αφού για κάθε $x \in A_n$ ισχύει $|||x||| = 1$ από την σχέση (4.2) προκύπτει ότι

$$m \leq \lambda_n \leq M, \ \ n = 1, 2, ...$$

Έτσι η ακολουθία $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα και φραγμένη άρα συγκλίνουσα. Θέτουμε $\lim \lambda_n = \lambda$. Τότε $m \leq \lambda \leq M$. Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε : $\lambda_{n_0} < \lambda(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$.

Επιλέγουμε $x_1 \in A_{n_0}$ τέτοιο ώστε : $||x_1||_1 > \frac{\lambda}{(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}$. Αφού έχουμε επιλέξει $x_1 \in A_{n_0}$ τότε θα ισχύει $|||x_1||| = 1$, $\ P_{n_0}(x_1) = 0$ και επειδή το σύνολο $\{m \in \mathbb{N} : e_m^*(x_1) \neq 0\}$ είναι πεπερασμένο προκύπτει ότι υπάρχει $n_1 > n_0$ τέτοιο ώστε $e_m^*(x_1) = 0$ για κάθε $m \geq n_1$. Οπότε το x_1 μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$x_1 = \sum_{i=n_0+1}^{n_1} \alpha_i e_i.$$

Επιλέγουμε το $x_2 \in A_{n_1}$ τέτοιο ώστε $\ ||x_2||_1 > \frac{\lambda}{(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}$.

$$x_2 \in A_{n_1} \ \text{ οπότε } |||x_2||| = 1, \ \ P_{n_1}(x_2) = 0 \ \text{ και } \ x_2 = \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \alpha_i e_i.$$

Έτσι συνεχίζοντας επαγωγικά κατασκευάζουμε την ακολουθία $x_1, x_2, x_3, ...$ και φυσικούς αριθμούς $n_0 < n_1 < n_2 < n_3 < .....$ ώστε

(i) $x_k = \sum\limits_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \beta_i e_i$.

(ii) $|||x_k||| = 1$.

(iii) $||x_k||_1 > \frac{\lambda}{(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}$.

Θεωρούμε τον χώρο $Y = \text{span}\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$. Έστω $y \in Y$. Τότε το y θα γράφεται στη μορφή $y = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$. Επειδή $P_{n_0}(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k) = 0$ και το διάνυσμα $y = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$ έχει πεπερασμένο φορέα, έχουμε $\frac{y}{|||y|||} \in A_{n_0}$ άρα

$$||\frac{y}{|||y|||}||_1 \leq \lambda_{n_0} \text{ συνεπώς } \|y\|_1 \leq \lambda_{n_0}|||y|||$$

και εφόσον $\lambda_{n_0} < \lambda(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$, προκύπτει

$$\|y\|_1 \leq \lambda(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}|||y|||.$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
|||y||| &= |||\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k||| \leq \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \cdot |||x_k||| = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \\
&\leq \frac{(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \cdot ||x_k||_1 \qquad \big(\text{διότι } ||x_k||_1 > \tfrac{\lambda}{(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}\big) \\
&= \frac{(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}{\lambda} ||\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k||_1 \\
&= \frac{(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}{\lambda} ||y||_1.
\end{aligned}$$

Έτσι έχουμε αποδείξει ότι για κάθε $y \in Y$ ισχύει

$$\frac{\lambda}{(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}} \cdot |||y||| \leq ||y||_1 \leq \lambda(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \cdot |||y|||.$$

Άρα ο ταυτοτικός τελεστής είναι $1+\varepsilon$ ισομορφισμός των χώρων $(Y, ||\cdot||_1)$, $(Y, |||\cdot|||)$.

Επομένως ο χώρος ℓ_1 δεν είναι παραμορφώσιμος. □

Θεώρημα 4.5. *Ο χώρος c_0 δεν είναι παραμορφώσιμος.*

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε ότι ο χώρος c_0 δεν είναι παραμορφώσιμος αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε ισοδύναμη νόρμα $|||\cdot|||$ στον c_0 και για κάθε $\varepsilon_1 > 0$ υπάρχει απειροδιάστατος υπόχωρος Y του c_0, ώστε ο ταυτοτικός τελεστής να είναι $1+\varepsilon_1$ ισομορφισμός των χώρων $(Y, ||\cdot||_\infty)$, $(Y, |||\cdot|||)$.

Έστω $\varepsilon_1 > 0$ και $|||\cdot|||$ μία ισοδύναμη νόρμα στον c_0. Επιλέγουμε $\varepsilon > 0$ ώστε $\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \leq 1+\varepsilon_1$. Από την ισοδυναμία της $|||\cdot|||$ με την $||\cdot||_\infty$ προκύπτει ότι υπάρχουν $m, M > 0$ τέτοια ώστε

$$m|||x||| \leq ||x||_\infty \leq M|||x||| \ \ \forall x \in c_0. \tag{4.3}$$

Για $n = 1, 2, \ldots$ θέτουμε

$$A_n = \{x \in c_0 : \ |||x||| = 1, \ P_n(x) = 0 \ \text{ και το σύνολο } \ \{m \in \mathbb{N} : e_m^*(x) \neq 0\} \text{ πεπερασμένο}\}$$

όπου P_n, e_m^* είναι οι προβολές και τα διορθογώνια συναρτησοειδή που αντιστοιχούν στη συνήθη βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του c_0.

Θέτουμε $\lambda_n = \inf\{||x||_\infty : \ x \in A_n\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε ότι $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$. Επομένως $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$ για κάθε n. Αφού για κάθε $x \in A_n$ ισχύει $|||x||| = 1$ από (4.3) προκύπτει ότι :

$$m \leq \lambda_n \leq M, \ \ n = 1, 2, \ldots.$$

Έτσι η ακολουθία $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα και φραγμένη άρα συγκλίνουσα. Θέτουμε $\lim \lambda_n = \lambda$. Τότε $m \leq \lambda \leq M$. Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε :

$$\lambda_{n_0} > \frac{\lambda}{(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}.$$

Επιλέγουμε $x_1 \in A_{n_0}$ τέτοιο ώστε : $||x_1||_\infty < \lambda(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$. Αφού έχουμε επιλέξει $x_1 \in A_{n_0}$ ισχύει $|||x_1||| = 1$, $P_{n_0}(x_1) = 0$ και επειδή το σύνολο $\{m \in \mathbb{N} : e_m^*(x_1) \neq 0\}$ είναι πεπερασμένο προκύπτει ότι υπάρχει $n_1 > n_0$ τέτοιο ώστε $e_m^*(x_1) = 0$ για κάθε $m \geq n_1$. Οπότε το x_1 μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$x_1 = \sum_{i=n_0+1}^{n_1} \alpha_i e_i.$$

Επιλέγουμε το $x_2 \in A_{n_1}$ τέτοιο ώστε : $||x_2||_\infty < \lambda(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$. Εφόσον $x_2 \in A_{n_1}$ έχουμε $|||x_2||| = 1$, $P_{n_1}(x_2) = 0$. Άρα το x_2 γράφεται στη μορφή

$$x_2 = \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \alpha_i e_i.$$

Έτσι συνεχίζοντας επαγωγικά κατασκευάζουμε μια ακολουθία $x_1, x_2, x_3, \ldots$ και φυσικούς αριθμούς $n_0 < n_1 < n_2 < n_3 < \ldots..$ ώστε

(i) $x_k = \sum\limits_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \alpha_i e_i$.

(ii) $||x_k||_\infty < \lambda(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$.

(iii) $|||x_k||| = 1$.

Θεωρούμε τώρα τον χώρο $Y = \text{span}\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$. Έστω $y \in Y$. Τότε το y θα είναι της μορφής $y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$. Εφόσον $\frac{y}{|||y|||} \in A_{n_0}$, θα έχουμε

$$\lambda_{n_0} \leq ||\frac{y}{|||y|||}||_\infty \Rightarrow |||y||| \leq \frac{1}{\lambda_{n_0}}||y||_\infty.$$

Θεωρούμε $k_0 \in \{1, ..., n\}$ ώστε $|\alpha_{k_0}| = \max\{|\alpha_k|, k = 1, ..., n\}$. Θέτουμε $\beta_k = \alpha_k$ για $k \neq k_0$ και $\beta_{k_0} = -\alpha_{k_0}$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} |||\sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k||| &\leq \frac{1}{\lambda_{n_0}}||\sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k||_\infty \\ &\leq \frac{1}{\lambda_{n_0}}\lambda(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \max|\beta_k| \\ &\leq (1+\varepsilon)\max|\beta_k| \\ &= (1+\varepsilon)\max|\alpha_k|. \end{aligned}$$

Επιπλέον έχουμε ότι

$$||y||_\infty = \max|\alpha_k| \cdot ||x_k||_\infty \leq \lambda(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \max|\alpha_k|.$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} |||\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k||| &\geq |||2\alpha_{k_0}x_{k_0}||| - |||\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k - 2\alpha_{k_0}x_{k_0}||| \\ &= 2|\alpha_{k_0}| - |||\sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k||| \\ &\geq 2|\alpha_{k_0}| - (1+\varepsilon)\max|\alpha_k| \\ &= (2-1-\varepsilon)\max|\alpha_k| \\ &= (1-\varepsilon)\max|\alpha_k| \\ &\geq (1-\varepsilon)\cdot\frac{1}{\lambda(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}\cdot||y||_\infty. \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$\frac{1-\varepsilon}{\lambda(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}\cdot||y||_\infty \leq |||y||| \leq \frac{(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}{\lambda}\cdot||y||_\infty.$$

Άρα ο ταυτοτικός τελεστής είναι $\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$ άρα και $1+\varepsilon_1$ ισομορφισμός των χώρων $(Y, ||\cdot||_\infty)$, $(Y, |||\cdot|||)$. Επομένως ο χώρος c_0 δεν είναι παραμορφώσιμος. □

Κεφάλαιο 5

Ο χώρος του Tsirelson

Από τα πρώτα χρόνια ανάπτυξης της θεωρίας χώρων Banach και μέχρι το 1974 υπήρχε η πεποίθηση ότι κάθε απειροδιάστατος χώρος Banach περιείχε ισομορφικά κάποιον από τους χώρους ℓ_p για $1 \leq p < \infty$ ή τον c_0.

Ο Tsirelson [23] ανέτρεψε αυτή την πεποίθηση το 1974 κατασκευάζοντας έναν χώρο Banach ο οποίος δεν περιείχε ισομορφικά κανέναν από τους c_0 ή ℓ_p, $1 \leq p < \infty$. Το άρθρο όμως που θα παρουσιάσουμε σε αυτό το κεφάλαιο είναι των Figiel και Johnson [9] οι οποίοι ένα χρόνο αργότερα έκαναν την ίδια απόδειξη για τον δυικό του χώρου του Tsirelson. Οι P. G. Casazza and T. J. Shura [7] δίνουν μία συστηματική μελέτη του χώρου του Tsirelson και κάποιων παραλλαγών του χώρου αυτού. Τέλος θα αποδείξουμε ότι ο χώρος αυτός είναι $2-\varepsilon$ παραμορφώσιμος για κάθε $\varepsilon > 0$.

Θεωρούμε τον χώρο των τελικά μηδενικών ακολουθιών

$$c_{00} = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \ : \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \text{τέτοιο ώστε:} \ \forall n \geq n_0 \ \ x_n = 0\}$$

και την οικογένεια Schreier $\mathcal{S} = \{F \subseteq \mathbb{N} : \ \ |F| \leq \min F\} \bigcup \{\emptyset\}$. Μια ακολουθία n διανυσμάτων $(y_i)_{i=1}^n$ του c_{00} λέγεται αποδεκτή αν ισχύει $n \leq y_1 < \cdots < y_n$.

Ορίζουμε επαγωγικά μία ακολουθία υποσυνόλων του c_{00} ως εξής

$$K_0 = \{\pm e_n^* : n \in \mathbb{N}\}.$$

Έχοντας ορίσει το K_s ορίζουμε

$$K_{s+1} = K_s \bigcup \{\frac{1}{2}(f_1 + f_2 + ... + f_d) : f_i \in K_s, \ i = 1, ..., d \ \ \text{και} \ \ d \leq f_1 < f_2 < ... < f_d\}.$$

Θέτουμε $K = \bigcup\limits_{s=0}^{\infty} K_s$ και $||x|| = \sup\{f(x) : f \in K\}$ για κάθε $x \in c_{00}$.

Παρατήρηση 5.1. *Το σύνολο K έχει τις ακόλουθες ιδιότητες*

(i) $e_n^* \in K$, *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

(ii) K *συμμετρικό, δηλαδή αν* $f \in K$ *τότε και* $-f \in K$.

(iii) Για κάθε $f \in K$, $||f||_\infty \leq 1$.

(iv) Αν $f \in K$ *και* $E \subseteq \mathbb{N}$ *(ειδικότερα για E διάστημα) ισχύει* $Ef \in K$.

(v) Αν $\sum\limits_{i=1}^{d} \alpha_i e_i^* \in K$ *τότε για κάθε επιλογή προσήμων* $(\varepsilon_i)_{i=1}^d$ *στο* $\{-1, 1\}$ *ισχύει* $\sum\limits_{i=1}^{d} \varepsilon_i \alpha_i e_i^* \in K$.

Επομένως από την Πρόταση 2.11 η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι 1-unconditional βάση του χώρου του Tsirelson.

Απόδειξη. Αποδεικνύεται εύκολα με επαγωγή ότι κάθε σύνολο K_s, $s = 0, 1, 2, ...$ ικανοποιεί αυτές τις ιδιότητες επομένως το norming σύνολο K ως ένωση αυτών των συνόλων θα ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες. $\square$

Ο χώρος του Tsirelson είναι η πλήρωση του $(c_{00}, ||\cdot||)$ και θα τον συμβολίζουμε με T. Θα δείξουμε ότι ο χώρος του Tsirelson δεν περιέχει ισομορφικά κανέναν $\ell_p, 1 \leq p < \infty$ ή c_0.

Πρόταση 5.2. *(1) Αν $f_1, f_2, ..., f_d \in K$ με $d \leq f_1 < f_2 < ... < f_d$, τότε $\frac{1}{2}(f_1 + f_2 + ... + f_d) \in K$.*

(2) Αν $n \leq x_1 < x_2 < ... < x_n$, τότε

$$||\sum_{i=1}^{n} x_i|| \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} ||x_i||.$$

Απόδειξη. (1) Για κάθε $i = 1, ..., d$ έχουμε ότι $f_i \in K$ και αφού $K = \bigcup_{s=0}^{\infty} K_s$ προκύπτει ότι υπάρχει $s_i \in \{0, 1, 2, ...\}$ τέτοιο ώστε $f_i \in K_{s_i}$. Παίρνουμε $s_0 \geq \max\{s_1, s_2, ..., s_d\}$. Εφόσον η ακολουθία συνόλων $(K_s)_{s=0}^{\infty}$ είναι γνησίως αύξουσα θα ισχύει ότι $f_i \in K_{s_0}$ για κάθε $i = 1, ..., d$. Αυτό σημαίνει ότι $\frac{1}{2}(f_1 + f_2 + ... + f_d) \in K_{s_0+1}$. Επομένως

$$\frac{1}{2}(f_1 + f_2 + ... + f_d) \in K.$$

(2) Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $i = 1, ..., d$ μπορούμε να επιλέξουμε $f_i \in K$ τέτοια ώστε $f_i(x_i) > ||x_i|| - \varepsilon$. Από την ιδιότητα (iv) του συνόλου K μπορούμε να επιλέξουμε τα f_i ώστε $\operatorname{supp} f_i \subseteq \operatorname{supp} x_i$. Αφού $f = \frac{1}{2}(f_1 + f_2 + ... + f_d) \in K$ έχουμε

$$\begin{aligned}
||\sum_{i=1}^{n} x_i|| &\geq f(\sum_{i=1}^{n} x_i) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \\
&> \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(||x_i|| - \varepsilon) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} ||x_i|| - \frac{n\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

για κάθε $\varepsilon > 0$. Επομένως

$$||\sum_{i=1}^{n} x_i|| \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} ||x_i||.$$

$\square$

Ιστορικά ο χώρος του Tsirelson είναι ο πρώτος χώρος που κατασκευάστηκε του οποίου η νόρμα ικανοποιεί μία αναδρομική σχέση (την οποία αποδεικνύουμε στην ακόλουθη πρόταση).

Πρόταση 5.3. *Για κάθε $x \in c_{00}$ ισχύει*

$$||x|| = \max\{||x||_{\infty}\ ,\ \frac{1}{2}\sup\{\sum_{i=1}^{d} ||E_i x|| : \ d \leq E_1 < E_2 < ... < E_d\}\}.$$

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε ότι

$$||x|| \geq \max\{||x||_{\infty}\ ,\ \frac{1}{2}\sup\{\sum_{i=1}^{d} ||E_i x|| : \ d \leq E_1 < E_2 < ... < E_d\}\}.$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} ||x||_\infty &= \sup\{\pm e_i^*(x) : i \in \mathbb{N}\} \\ &= \sup\{f(x) : f \in K_0\} \\ &\leq \sup\{f(x) : f \in K\} = ||x|| \end{aligned}$$

Άρα $||x||_\infty \leq ||x||$. Επιπλέον αν E_i διαδοχικά υποσύνολα με $d \leq E_1 < \cdots < E_d$. Τότε από ιδιότητα (iv) του συνόλου K έχουμε

$$||x|| \geq ||\sum_{i=1}^{d} E_i x||.$$

Επιπλέον από Πρόταση 5.2 έχουμε

$$||\sum_{i=1}^{d} E_i x|| \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} ||E_i x||.$$

Επομένως η μία ανισότητα έχει αποδειχθεί. Μένει τώρα να δείξουμε ότι

$$||x|| \leq \max\{||x||_\infty \ , \ \frac{1}{2}\sup\{\sum_{i=1}^{d} ||E_i x|| : \ \ d \leq E_1 < E_2 < ... < E_d\}\}.$$

Ισοδύναμα αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $f \in K$ και για κάθε $x \in c_{00}$ ισχύει

$$f(x) \leq \max\{||x||_\infty \ , \ \frac{1}{2}\sup\{\sum_{i=1}^{d} ||E_i x|| : \ \ d \leq E_1 < E_2 < ... < E_d\}\}.$$

Έστω $f \in K$. Αν $f \in K_0$ τότε $f(x) \leq \sup\{g(x) : g \in K_0\} \leq ||x||_\infty$, συνεπώς στην περίπτωση αυτή η ανισότητα ισχύει.

Αν $f \in K \setminus K_0$ τότε το f θα γράφεται στη μορφή $f = \frac{1}{2}(f_1 + f_2 + ... + f_d)$, με $d \leq f_1 < ... < f_d$ και $f_i \in K$. Οπότε θέτοντας $E_i = \operatorname{supp} f_i$, $i = 1, ..., d$ έχουμε $d \leq E_1 < ... < E_d$, οπότε

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} f_i(x) \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} ||E_i x||.$$

Επομένως από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$||x|| = \max\{||x||_\infty \ , \ \frac{1}{2}\sup\{\sum_{i=1}^{d} ||E_i x|| : \ \ d \leq E_1 < E_2 < ... < E_d\}\}.$$

□

Πρόταση 5.4. *Ο χώρος του Tsirelson δεν περιέχει ισομορφικά κανέναν από τους ℓ_p, $1 \leq p < \infty$ ή τον c_0.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο χώρος ℓ_p με $p > 1$ εμφυτεύεται ισομορφικά στον χώρο του Tsirelson. Τότε υπάρχει μοναδιαία block βάση $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η οποία είναι ισοδύναμη με την συνηθισμένη βάση του ℓ_p δηλαδή υπάρχουν $m, M > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε επιλογή συντελεστών $(\alpha_i)_{i=1}^n$ έχουμε

$$m(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq ||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i|| \leq M(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Για κάθε n επιλέγουμε $n \leq x_{k_1} < x_{k_2} < ... < x_{k_n}$. Τότε από την προηγούμενη σχέση και από Πρόταση 5.2 έχουμε

$$\frac{n}{2} \leq ||\sum_{i=1}^{n} x_{k_i}|| \leq Mn^{\frac{1}{p}} \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Επομένως ισχύει ότι $n^{1-\frac{1}{p}} \leq 2M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άτοπο. Άρα ο χώρος ℓ_p δεν εμφυτεύεται ισομορφικά στον T για $p > 1$.

Ομοίως υποθέτουμε τώρα ότι ο c_0 εμφυτεύεται ισομορφικά στον T. Τότε υπάρχει μοναδιαία block βάση $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η οποία είναι ισοδύναμη με την συνηθισμένη βάση του c_0, δηλαδή υπάρχουν $m, M > 0$ τέτοια ώστε

$$m \cdot \max|\alpha_i| \leq ||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i|| \leq M \cdot \max|\alpha_i|$$

Χρησιμοποιώντας την πρόταση 5.2 αν $n \leq x_{k_1} < x_{k_2} < ... < x_{k_n}$ θα έχουμε

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i| \leq ||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{k_i}|| \leq M \cdot \max|\alpha_i|.$$

Οπότε προκύπτει ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\frac{n}{2} \leq ||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i|| \leq M.$$

Δηλαδή $n \leq 2M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άτοπο. Άρα ο χώρος c_0 δεν εμφυτεύεται ισομορφικά στον T.

Θα αποδείξουμε ότι ο χώρος ℓ_1 δεν εμφυτεύεται ισομορφικά στον T.

Υποθέτουμε ότι ο ℓ_1 εμφυτεύεται ισομορφικά στον T. Άμεση συνέπεια του θεωρήματος του James (θεώρημα 4.4) είναι το εξής

Πόρισμα 5.5. *Έστω X χώρος Banach ώστε ο ℓ_1 να εμφυτεύεται ισομορφικά στον X. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $(1+\varepsilon)-$ισομορφική εμφύτευση του ℓ_1 στον X (δηλαδή υπάρχει ισομορφική εμφύτευση $S : \ell_1 \to X$ ώστε $\|S\| \leq 1$ και $\|S^{-1}\| \leq 1+\varepsilon$).*

Σημείωση: Στην περίπτωση που ο X έχει βάση Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η S μπορεί να επιλεγεί ώστε να απεικονίζει τη συνήθη βάση του ℓ_1 σε μία block βάση $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Επομένως από το θεώρημα του James θα έχουμε ότι υπάρχει μοναδιαία block βάση $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε

$$\frac{8}{9}\sum_{k=0}^{n}|\alpha_k| \leq ||\sum_{k=0}^{n} \alpha_k x_k|| \leq \sum_{k=0}^{n}|\alpha_k|$$

για κάθε επιλογή συντελεστών $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ και $n = 1, 2, ...$ Για ευκολία στον συμβολισμό θα ξεκινήσουμε την αρίθμηση από το 0 και όχι από το 1 όπως συνήθως. Τότε για κάθε $m = 1, 2, ...$ ισχύει ότι

$$\frac{16}{9} \leq ||x_0 + \frac{x_1 + ... + x_m}{m}|| \tag{5.1}$$

Ισχυρισμός. *Έστω $n_0 = \max\operatorname{supp}(x_0)$. Τότε για κάθε $m \geq 2n_0$*

$$||x_0 + \frac{x_1 + ... + x_m}{m}|| \leq \frac{7}{4}. \tag{5.2}$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $f \in K$ ισχύει

$$f(x_0 + \frac{x_1 + ... + x_m}{m}) \leq \frac{7}{4}.$$

Έστω $f \in K$. Αν $f \in K_0$ τότε το f θα είναι κάποιο από τα $\pm e_n^*$ άρα θα έχουμε

$$f(x_0 + \frac{x_1 + ... + x_m}{m}) \leq 1 \leq \frac{7}{4}.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $f \in K \setminus K_0$. Τότε το f θα είναι της μορφής : $f = \frac{1}{2}(f_1 + f_2 + ... + f_d)$ όπου $f_i \in K,\ i = 1, ..., d$ και $d \le f_1 < f_2 < ... < f_d$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις

Περίπτωση 1: $n_0 < d$.

Σε αυτή την περίπτωση $\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} x_0 = \emptyset$. Άρα $f(x_0) = 0$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} f(x_0 + \frac{x_1 + ... + x_m}{m}) &= f(\frac{x_1 + ... + x_m}{m}) \\ &\le \frac{1}{m}||x_1 + ... + x_m|| \\ &\le \frac{1}{m}(||x_1|| + ... + ||x_m||) \\ &\le 1 \end{aligned}$$

Περίπτωση 2: $d \le n_0$.

Διαμερίζουμε το σύνολο $\{1, ..., m\}$ θεωρώντας τα εξής σύνολα

$$A = \{1 \le i \le m : \operatorname{supp} x_i \cap \operatorname{supp} f_j \neq \emptyset \text{ για δύο τουλάχιστον } j\}.$$

$$B = \{1 \le i \le m : \operatorname{supp} x_i \cap \operatorname{supp} f_j \neq \emptyset \text{ για το πολύ ένα } j\}.$$

Για κάθε $i \in A$, θέτουμε $j(i) = \min\{j : \operatorname{supp} x_i \cap \operatorname{supp} f_j \neq \emptyset\}$. Με αυτό τον τρόπο ορίζεται η απεικόνιση $j : A \to \{1, ..., d\}$ η οποία είναι 1-1. Πράγματι αν $i_1 < i_2$ δύο στοιχεία του Α τότε θα δείξουμε ότι $j(i_1) \neq j(i_2)$. Έχουμε ότι για το x_{i_1} θα ισχύει $\operatorname{supp}(x_{i_1}) \cap \operatorname{supp}(f_{j_{i_1}}) \neq \emptyset$ και επιπλέον υπάρχει $j > j_{i_1}$ ώστε $\operatorname{supp}(x_{i_1}) \cap \operatorname{supp} f_j \neq \emptyset$. Εφόσον $\max\operatorname{supp} f_{j(i_1)} < \min\operatorname{supp} f_j \le \max\operatorname{supp} x_{i_1} < \max\operatorname{supp} x_{i_2}$ προκύπτει ότι $j(i_1) \neq j(i_2)$. Επομένως $|A| \le d$.

Επιπλέον έχουμε ότι για κάθε $i \in B$ ισχύει ότι είτε το $\operatorname{supp}(x_i)$ δεν τέμνει κανένα $\operatorname{supp}(f_j)$ οπότε $f(x_i) = 0$, είτε τέμνει το $\operatorname{supp} f_j$ για ένα μοναδικό j το οποίο θα το συμβολίσουμε με k_i οπότε τότε θα έχουμε

$$f(x_i) = \frac{1}{2}(\sum_{j=1}^{d} f_j)(x_i) = \frac{1}{2}f_{k_i}(x_i) \le \frac{1}{2}||x_i|| \le \frac{1}{2}.$$

Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} f(x_0 + \frac{x_1 + ... + x_m}{m}) &= f(x_0) + \frac{1}{m}f(\sum_{i=1}^{m} x_i) \\ &= f(x_0) + \frac{1}{m}(\sum_{i \in A} f(x_i) + \sum_{i \in B} f(x_i)) \\ &\le f(x_0) + \frac{1}{m}(\sum_{i \in A} ||x_i|| + \sum_{i \in B} \frac{1}{2}) \\ &\le 1 + \frac{1}{m}(|A| + \frac{1}{2}(m - |A|)) \\ &= 1 + \frac{1}{m}(\frac{m}{2} + \frac{|A|}{2}) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{|A|}{2m} \\ &\le 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

όπου η ανισότητα $\frac{|A|}{2m} \le \frac{1}{4}$ προκύπτει από το γεγονός ότι $|A| \le d \le n_0 \le \frac{m}{2}$. Άρα ο ισχυρισμός ισχύει και στην δεύτερη περίπτωση. □

Επομένως από τις σχέσεις (5.1) , (5.2) προκύπτει ότι

$$\frac{16}{9} \le ||x_0 + \frac{x_1 + ... + x_m}{m}|| \le \frac{7}{4}.$$

Άτοπο. Άρα ο χώρος ℓ_1 δεν εμφυτεύεται ισομορφικά στον T. □

Στα παρακάτω θα αποδείξουμε ότι ο χώρος του Tsirelson είναι $2-\varepsilon$ παραμορφώσιμος για κάθε $\varepsilon > 0$. Για την απόδειξη αυτού του αποτελέσματος, όπως και για αποτελέσματα στο επόμενο κεφάλαιο (χώρος του Schlumprecht) θα χρειαστούμε το ακόλουθο βαθύ θεώρημα που οφείλεται στον Krivine. Πριν την διατύπωση του θεωρήματος εισάγουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 5.6. *Έστω Y χώρος Banach με βάση $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Λέμε ότι ο χώρος ℓ_p με $1 \leq p < \infty$ (αντίστοιχα ο c_0) είναι πεπερασμένα block αναπαραστάσιμος στον Y, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει νορμαρισμένη block ακολουθία $(z_i)_{i=1}^n$ της (y_i) (δηλαδή $\|z_i\| = 1$ για κάθε $i = 1, ..., n$) η οποία είναι $1+\varepsilon$ ισομορφική με την μοναδιαία βάση του ℓ_p^n (αντίστοιχα του ℓ_∞^n).*

Θεώρημα 5.7 (Θεώρημα Krivine). *Για κάθε βασική ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ο χώρος ℓ_p, $1 \leq p < \infty$ ή ο c_0 είναι πεπερασμένα block αναπαραστάσιμος στον Y.*

Λήμμα 5.8. *Έστω Y block υπόχωρος του T. Τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $(y_i)_{i=1}^n$ νορμαρισμένη block ακολουθία στον Y τέτοια ώστε*

$$\frac{1}{1+\delta}\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i| \leq ||\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i|| \leq \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|$$

για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $(\alpha_i)_{i=1}^n$.

Απόδειξη. Έστω $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ block βάση της του Y. Από το θεώρημα του Krivine, κάποιος ℓ_p, $1 \leq p < \infty$ ή ο c_0 είναι πεπερασμένα block αναπαραστάσιμος στον υπόχωρο Y του T. Υποθέτουμε ότι για $p > 1$ ο ℓ_p είναι πεπερασμένα block αναπαραστάσιμος στον Y. Άρα θα ισχύει ότι για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει νορμαρισμένη block $(y_i)_{i=1}^n$ στον Y, με $y_1 \geq n$ ώστε να ισχύει

$$(1-\delta)(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq ||\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i|| \leq (1+\delta)(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^p)^{\frac{1}{p}} \tag{5.3}$$

για κάθε $(\alpha_i)_{i=1}^n$. Από την (5.3) προκύπτει ότι $||y_i|| \geq 1-\delta$ για κάθε $i = 1, ..., n$ και έχουμε ότι

$$||\sum_{i=1}^{n}y_i|| \leq (1+\delta)n^{\frac{1}{p}} \tag{5.4}$$

Επιπλέον από την Πρόταση 5.2 (2) εφόσον $n \leq y_1 < y_2 < ... < y_n$ θα ισχύει ότι

$$(1-\delta)\frac{n}{2} \leq ||\sum_{i=1}^{n}y_i||. \tag{5.5}$$

Από τις σχέσεις (5.4),(5.5) προκύπτει ότι

$$(1-\delta)\frac{n}{2} < (1+\delta)n^{\frac{1}{p}}.$$

Επομένως $n^{\frac{1}{q}} < 2\frac{(1+\delta)}{(1-\delta)}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου q ο συζυγής εκθέτης του p. Άτοπο.

Άρα ο ℓ_p για $p > 1$ δεν μπορεί να είναι πεπερασμένα block αναπαραστάσιμος στον Y και ομοίως αποκλείεται να είναι και ο c_0. Επομένως προκύπτει ότι ο ℓ_1 είναι πεπερασμένα block αναπαραστάσιμος στον Y, οπότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $(y_i)_{i=1}^n$ νορμαρισμένη block ακολουθία στον Y η οποία είναι $(1+\delta)$ ισοδύναμη με την μοναδιαία βάση του ℓ_1^n δηλαδή :

$$\frac{1}{1+\delta}\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i| \leq ||\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i|| \leq \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|$$

για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $(\alpha_i)_{i=1}^n$. ☐

Πρόταση 5.9. *Ο χώρος του Tsirelson είναι* $2-\varepsilon$ *παραμορφώσιμος για κάθε* $\varepsilon > 0$.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$ και επιλέγουμε $\varepsilon' > 0$ τέτοιο ώστε

$$\frac{2}{(1+\varepsilon')^4} > 2 - \varepsilon$$

και $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{n} < \varepsilon'$. Για κάθε $x \in c_{00}$ θέτουμε

$$|||x||| = \sup\{\sum_{i=1}^{n} ||E_i x|| : E_1 < E_2 < ... < E_n\}.$$

Άμεσα προκύπτει ότι η $|||\cdot|||$ είναι νόρμα στον c_{00}.

Ισχυρισμός. ***(1)*** *Για* $x \in T$ *ισχύει*

$$||x|| \leq |||x||| \leq n||x||.$$

(2) *Για* $n \leq x$ *ισχύει*

$$|||x||| \leq 2||x||.$$

Απόδειξη. (1) Πράγματι αν για κάθε $x \in c_{00}$ επιλέξουμε $E_1 = \mathrm{supp}(x)$ και $E_i,\ i = 2, ..., n$ ώστε $E_i \cap \mathrm{supp}(x) = \emptyset$ για κάθε $i = 2, ..., n$ τότε έχουμε

$$||x|| = ||E_1 x|| = \sum_{i=1}^{n} ||E_i x|| \leq |||x|||.$$

Επιπλέον για κάθε επιλογή $E_i,\ i = 1, ..., n$ διαδοχικών συνόλων ισχύει ότι $||E_i x|| \leq ||x||$. Επομένως αθροίζοντας κατά μέλη θα έχουμε ότι $\sum\limits_{i=1}^{n} ||E_i x|| \leq n||x||$. Άρα $|||x||| \leq n||x||$. Έτσι προκύπτει ότι

$$||x|| \leq |||x||| \leq n||x||.$$

Εφόσον οι νόρμες $||\cdot||, |||\cdot|||$ είναι ισοδύναμες στον c_{00} προκύπτει ότι έχουν την ίδια πλήρωση άρα η σχέση (1) ισχύει για κάθε $x \in T$. Συνεπώς η $|||\cdot|||$ είναι μία ισοδύναμη νόρμα της $||\cdot||$ στον χώρο του Tsirelson.

(2) Για $n \leq x$, τότε για κάθε $n \leq E_1 < ... < E_n$ θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} ||x|| &\geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} ||E_i x|| \Rightarrow \\ \sum_{i=1}^{n} ||E_i x|| &\leq 2||x||. \end{aligned}$$

Άρα για $n \leq x$ ισχύει $|||x||| \leq 2||x||$. □

Ισχυρισμός. *Για κάθε* $k > n$, *για κάθε* $\delta > 0$, *σε κάθε block υπόχωρο* Y *του* T *υπάρχει νορμαρισμένη* $(y_i)_{i=1}^{k}$ *block ακολουθία στον* Y *ώστε για το διάνυσμα* $y = \frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k} y_i$ *να ισχύει*

$$||y|| \geq \frac{1}{1+\delta} \ \text{και}\ |||y||| \leq 1 + \frac{n}{k}.$$

Απόδειξη. Από το Λήμμα 5.8, έχουμε ότι υπάρχει μία νορμαρισμένη block ακολουθία $(y_i)_{i=1}^{k}$ στον Y με $y_1 \geq n$ η οποία είναι $(1+\delta)$ ισοδύναμη με την μοναδιαία βάση του ℓ_1^k. Δηλαδή

$$\frac{1}{1+\delta}\sum_{i=1}^{k} |\alpha_i| \leq ||\sum_{i=1}^{k} \alpha_i y_i|| \leq \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|$$

για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $(\alpha_i)_{i=1}^k$. Θέτοντας $y = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^k y_i$ θα ισχύει

$$\frac{1}{1+\delta} \le ||y|| \le 1.$$

Για να δείξουμε ότι $|||y||| \le 1 + \frac{n}{k}$ αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε επιλογή διαδοχικών συνόλων $E_1 < E_2 < ... < E_n$ ισχύει ότι

$$\sum_{j=1}^n ||E_j y|| \le 1 + \frac{n}{k}.$$

Αρκεί να το αποδείξουμε στην περίπτωση που $n \le E_1$. Διότι αν δεν συμβαίνει αυτό θέτοντας $i_0 = \min\{i : n \ge \min E_i\}$ τα διαστήματα $E_1, ..., E_n$ μπορούν να αντικατασταθούν από τα $[n, \max E_{i_0}], E_{i_0+1}, ..., E_n$. Έτσι τα διαστήματα ή τα τμήματα διαστημάτων που βρίσκονται κάτω από το n μπορούμε να τα παραλείψουμε γιατί η συνεισφορά τους στο άθροισμα $\sum_{i=1}^n ||E_j y||$ είναι μηδενική.

Ορίζουμε τα ακόλουθα σύνολα

$$I = \{i : E_j \cap \operatorname{supp}(y_i) \ne \emptyset \ \text{ για το πολύ ένα } j\}.$$

και

$$J = \{1, ..., k\} \setminus I.$$

Τότε όπως εύκολα βλέπουμε $|J| \le n$, όπως στην απόδειξη του ισχυρισμού (περίπτωση 2).

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n ||E_j y|| &= \frac{1}{k}\sum_{j=1}^n ||E_j(\sum_{i=1}^k y_i)|| \\
&= \frac{1}{k}\sum_{j=1}^n ||E_j(\sum_{i\in I} y_i + \sum_{i\in J} y_i)|| \\
&\le \frac{1}{k}\big(\sum_{j=1}^n ||E_j(\sum_{i\in I} y_i)|| + \sum_{j=1}^n ||E_j(\sum_{i\in J} y_i)||\big) \\
&= \frac{1}{k}\big(\sum_{i\in I}\sum_{j=1}^n ||E_j y_i|| + \sum_{i\in J}\sum_{j=1}^n ||E_j y_i||\big).
\end{aligned}$$

Για κάθε $i \in I$ ισχύει ότι

$$\sum_{j=1}^n ||E_j y_i|| \le ||y_i||$$

διότι $E_j \cap \operatorname{supp}(y_i) \ne \emptyset$, για ένα το πολύ j.

Για κάθε $i \in J$ αφού $n \le E_1 < E_2 < ... < E_n$, από ιδιότητα της νόρμας στον χώρο του Tsirelson έχουμε ότι

$$||y_i|| \ge \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n ||E_j y_i|| \Rightarrow \sum_{j=1}^n ||E_j y_i|| \le 2||y_i||.$$

Επομένως έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k}\Big(\sum_{i\in I}\sum_{j=1}^{n}||E_jy_i||+\sum_{i\in J}\sum_{j=1}^{n}||E_jy_i||\Big) &\leq \frac{1}{k}\Big(\sum_{i\in I}||y_i||+\sum_{i\in J}2||y_i||\Big)\\
&\leq \frac{1}{k}(k-|J|+2|J|)\\
&= \frac{1}{k}(k+|J|)\\
&\leq \frac{1}{k}(k+n)\\
&= 1+\frac{n}{k}.
\end{aligned}$$

Επομένως έχουμε ότι $|||y|||\leq 1+\frac{n}{k}$ άρα ο ισχυρισμός αποδείχτηκε. □

Έστω Y block υπόχωρος του T. Χρησιμοποιώντας τον προηγούμενο ισχυρισμό επιλέγουμε block ακολουθία $(z_i)_{i=1}^n$ στον Y και $(N_i)_{i=1}^n$ γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα.

(1) Κάθε z_i θα είναι της μορφής $z_i=\frac{1}{N_i}\sum\limits_{l=1}^{N_i}z_{i,l}$, όπου $(z_{i,l})_{i=1}^{N_i}$ block ακολουθία στον Y με $||z_{i,l}||=1$.

(2) $||z_i||\geq\frac{1}{1+\varepsilon'}$.

(3) $N_1\geq\frac{n}{\varepsilon'}$ και $N_{i+1}\geq\max\operatorname{supp}(z_i)\cdot\frac{1}{\varepsilon'-\frac{1}{n}}$ για $1\leq i\leq n$.

Από τις παραπάνω ιδιότητες προκύπτει ότι

$$||z_i||\leq 1,\ \text{ για κάθε }\ i=1,...,n.$$

Θέτουμε

$$z=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}z_i.$$

Επιλέγοντας $E_i=\operatorname{supp}(z_i)$, $i=1,...,n$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}
|||z||| &\geq \sum_{j=1}^{n}||E_jz||\\
&= \sum_{j=1}^{n}||E_j(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}z_i)||\\
&= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}||z_i||\\
&\geq \frac{2}{1+\varepsilon'}.
\end{aligned}$$

Θα δείξουμε τώρα ότι

$$||z||\leq 1+\varepsilon^{'}.$$

Αρχικά έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
||z||_\infty &= \sup\{\pm e_k^*(z):k\in\mathbb{N}\}\\
&\leq \frac{2}{n}\max\{||z_i||_\infty, i=1,2,...,n\}\\
&\leq \frac{2}{n}\max\{||z_i||, i=1,2,...,n\}\\
&\leq \frac{2}{n}\leq 1\leq 1+\varepsilon^{'}
\end{aligned}$$

Έστω τώρα $m \leq E_1 < E_2 < ... < E_m$. Θέτουμε $i_0 = \min\{i : m \leq \max \operatorname{supp}(z_i)\}$. Αρχικά για $i < i_0$ ισχύει ότι $E_j \cap \operatorname{supp}(z_i) = \emptyset$ οπότε θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}||E_j z|| &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}||E_j(\sum_{i=i_0}^{n} z_i)|| \\
&\leq \frac{1}{n}\big(\sum_{j=1}^{m}||E_j(z_{i_0})|| + \sum_{j=1}^{m}||E_j(\sum_{i=i_0+1}^{n} z_i)||\big) \\
&\leq \frac{1}{n}\big(\sum_{j=1}^{m}||E_j(z_{i_0})|| + \sum_{i=i_0+1}^{n}\sum_{j=1}^{m}||E_j z_i||\big).
\end{aligned}$$

Εφόσον έχουμε $m \leq E_1 < E_2 < ... < E_m$, από Πρόταση 5.3 θα ισχύει ότι

$$\sum_{j=1}^{m}||E_j z_{i_0}|| \leq 2||z_{i_0}|| \leq 2.$$

Επιπλέον θα δείξουμε ότι για κάθε i με $i_0 + 1 \leq i \leq n$ ισχύει

$$\sum_{j=1}^{m}||E_j z_i|| \leq 1 + \frac{m}{N_i}.$$

Έστω i με $i_0 + 1 \leq i \leq n$. Τότε

$$\sum_{j=1}^{m}||E_j z_i|| \leq \frac{1}{N_i}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{N_i}||E_j z_{i,l}||.$$

Διαμερίζουμε το σύνολο $\{1, ..., N_i\}$ ως εξής. Θεωρούμε τα ακόλουθα σύνολα

$$A = \{l : E_j \cap \operatorname{supp}(z_{i,l}) \ \text{για δύο τουλάχιστον} \ j\}$$

και

$$B = \{l : E_j \cap \operatorname{supp}(z_{i,l}) \ \text{για ένα το πολύ} \ j\}$$

Τότε εύκολα βλέπουμε ότι $|A| \leq m$, όπως και στην απόδειξη προηγούμενου ισχυρισμού (περίπτωση 2). Άρα θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N_i}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{N_i}||E_j z_{i,l}|| &\leq \frac{1}{N_i}\big(\sum_{l\in A}\sum_{j=1}^{m}||E_j z_{i,l}|| + \sum_{l\in B}||z_{i,l}||\big) \\
&\leq \frac{1}{N_i}\big(\sum_{l\in A}2||z_i|| + |B|\big) \\
&\leq \frac{1}{N_i}(2|A| + |B|) \\
&= \frac{1}{N_i}(N_i + |A|) \\
&\leq \frac{1}{N_i}(N_i + m) \\
&= 1 + \frac{m}{N_i}.
\end{aligned}$$

Επιπλέον εφόσον η ακολουθία $(N_i)_{i=1}^{n}$ είναι γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών θα ισχύει ότι

$$\sum_{j=1}^{m}||E_j z_i|| \leq 1 + \frac{m}{N_i} \leq 1 + \frac{m}{N_{i_0+1}}.$$

Επομένως θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\big(\sum_{j=1}^{m}||E_j(z_{i_0})|| + \sum_{i=i_0+1}^{n}\sum_{j=1}^{m}||E_j z_i||\big) &\leq \frac{1}{n}\big(2+\sum_{i=i_0+1}^{n}(1+\frac{m}{N_{i_0+1}})\big)\\
&\leq \frac{1}{n}\big(2+(n-1)1+(n-1)\frac{m}{N_{i_0+1}}\big)\\
&\leq 1+\frac{1}{n}+\frac{m}{N_{i_0+1}}\\
&\leq 1+\frac{1}{n}+\varepsilon^{'}-\frac{1}{n}\\
&= 1+\varepsilon^{'}
\end{aligned}$$

Άρα για το διάνυσμα z έχουμε $z \in Y$ και

$$||z|| \leq 1+\varepsilon^{'} \;\text{ και }\; |||z||| \geq \frac{2}{1+\varepsilon^{'}}.$$

Εφαρμόζοντας τον Ισχυρισμό 5 μπορούμε να επιλέξουμε $y \in Y$ ώστε

$$||y|| \geq \frac{1}{1+\varepsilon^{'}} \;\text{ και }\; |||y||| \leq 1+\frac{n}{N_1} \leq 1+\varepsilon^{'}.$$

Θέτουμε $y^{'} = \frac{y}{||y||}$ και $z^{'} = \frac{z}{||z||}$. Τότε ισχύει ότι $y^{'}, z^{'} \in Y$ και επιπλέον $||y^{'}|| = 1$ και $||z^{'}|| = 1$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{|||z^{'}|||}{|||y^{'}|||} &= \frac{|||\frac{z}{||z||}|||}{|||\frac{y}{||y||}|||}\\
&= \frac{|||z|||\cdot||y||}{|||y|||\cdot||z||}\\
&\geq \frac{(\frac{2}{1+\varepsilon^{'}})\cdot(\frac{1}{1+\varepsilon^{'}})}{(1+\varepsilon^{'})\cdot(1+\varepsilon^{'})}\\
&\geq \frac{(\frac{2}{1+\varepsilon^{'}})\cdot(\frac{1}{1+\varepsilon^{'}})}{(1+\varepsilon^{'})\cdot(1+\varepsilon^{'})}\\
&= \frac{2}{(1+\varepsilon^{'})^4}\\
&> 2-\varepsilon
\end{aligned}$$

Επομένως ο χώρος του Tsirelson είναι $2-\varepsilon$ παραμορφώσιμος. $\square$

Κεφάλαιο 6

Ο χώρος του Schlumprecht

Ο T. Schlumprecht [21] το 1991 κατασκεύασε έναν απεριόριστα παραμορφώσιμο χώρο Banach. Σημειώνουμε ότι ήταν ο πρώτος χώρος που κατασκευάστηκε με αυτή την ιδιότητα. Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τον συγκεκριμένο χώρο.

Θα ορίσουμε τον χώρο του Schlumprecht.

Ορισμός 6.1. *Θεωρούμε μία συνάρτηση $\phi : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες*

(1) $\phi(1) = 1, \phi(x) < x$ *για κάθε* $x > 1$.

(2) Η ϕ *είναι γνησίως αύξουσα και* $\lim\limits_{x\to+\infty} \phi(x) = +\infty$.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\phi(x)}{x^q} = 0$ *για κάθε* $q > 0$.

(4) Η συνάρτηση $g(x) = \frac{x}{\phi(x)}$, $x \geq 1$ *είναι κοίλη.*

(5) $\phi(xy) \leq \phi(x)\phi(y)$ *για κάθε* $x, y \geq 1$.

Ορίζουμε επαγωγικά ακολουθίες υποσυνόλων του c_{00} *ως εξής*

$$K_0^0 = \{\pm e_n^* : n \in \mathbb{N}\} \ \ , \ \ K_0^l = \emptyset, \ \forall \ l \geq 1.$$

Έχοντας ορίσει το K_s^l, $\forall \ l = 0, 1, 2, ...$ *και* $K_s = \bigcup\limits_{l=0}^{\infty} K_s^l$ *ορίζουμε τα* K_{s+1}^l *ως εξής*

$$K_{s+1}^0 = \{\pm e_n^* : n \in \mathbb{N}\}.$$

και

$$K_{s+1}^l = K_s^l \bigcup \{\frac{1}{\phi(l)}(f_1 + ... + f_d) : \ f_i \in K_s, \ \ \forall \ i = 1, ..., d, \ f_1 < f_2 < \cdots < f_d \ \text{και} \ d \leq l\}.$$

$$K_{s+1} = \bigcup_{l=0}^{\infty} K_{s+1}^l.$$

Ορίζουμε

$$K = \bigcup_{s=0}^{\infty} K_s.$$

Για κάθε $x \in c_{00}$ *ορίζουμε* $||x|| = \sup\{f(x) : f \in K\}$.

Επίσης για $l \geq 1$ *θεωρούμε τα σύνολα*

$$K^l = \bigcup_{s=0}^{\infty} K_s^l$$

και για κάθε $x \in c_{00}$ *ορίζουμε* $||x||_l = \sup\{f(x) : f \in K^l\}$. *Οι νόρμες* $(|| \cdot ||_l), l = 1, 2, ...$ *θα χρησιμοποιηθούν στο να αποδείξουμε ότι ο χώρος είναι απεριόριστα παραμορφώσιμος.*

Η πλήρωση του $(c_{00}, \|\cdot\|)$ είναι ο χώρος του Schlumprecht και θα τον συμβολίζουμε με S. Με το επόμενο λήμμα εξασφαλίζουμε ότι υπάρχει μία τουλάχιστον συνάρτηση ϕ που ικανοποιεί τις ιδιότητες (1)-(5) που αναφέραμε στον ορισμό του χώρου.

Λήμμα 6.2. *Έστω $\phi(x) = \log_2(x+1),\ x \geq 1$. Τότε η συνάρτηση ϕ ικανοποιεί τις ιδιότητες (1)-(5) του ορισμού.*

Απόδειξη. **(1)** Έχουμε ότι $\phi(1) = \log_2(1+1) = \log_2 2 = 1$. Για να αποδείξουμε ότι $\phi(x) < x$ για κάθε $x > 1$ θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \phi(x) - x = \log_2(x+1) - x$. Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση αυτή είναι γνησίως φθίνουσα. Πράγματι

$$h'(x) = \frac{1}{(x+1)\log 2} - 1.$$

Έχουμε $h'(x) < 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{(x+1)\log 2} < 1 \ \Leftrightarrow \frac{1}{\log 2} < x+1 \ \Leftrightarrow\ x > \frac{1}{\log 2} - 1$, το οποίο ισχύει γιατί $x > 1$. Συνεπώς η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα για $x > 1$ έχουμε

$$h(x) < h(1) = 0 \ \Rightarrow\ \phi(x) < x \text{ για κάθε } x > 1.$$

(2) Αν

$$x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ \log_2(x_1+1) < \log_2(x_2+1) \ \Rightarrow\ \phi(x_1) < \phi(x_2).$$

Άρα η συνάρτηση ϕ είναι γνησίως φθίνουσα και

$$\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x+1)}{\log 2} = \frac{1}{\log 2} \lim_{x\to+\infty} \log(x+1) = +\infty.$$

(3) Έστω $q > 0$. Θα δείξουμε ότι $\lim_{x\to+\infty} \frac{\phi(x)}{x^q} = 0$. Έχουμε ότι $\lim_{x\to+\infty} \log_2(x+1) = +\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} x^q = +\infty$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{\phi'(x)}{(x^q)'} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{(x+1)\log 2}}{qx^{q-1}} \\
&= \frac{1}{q\log 2} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(x+1)x^{q-1}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Επομένως $\lim_{x\to+\infty} \frac{\phi(x)}{x^q} = 0$ για κάθε $q > 0$.

(4) Έχουμε

$$g(x) = \frac{x}{\phi(x)} = \frac{x}{\log_2(x+1)} = \frac{x\log 2}{\log(x+1)}.$$

Προκύπτει ότι

$$g'(x) = \frac{\log 2 \log(x+1) - \frac{x}{x+1}\log 2}{\log^2(x+1)}.$$

Επιπλέον έχουμε ότι

$$g''(x) = \frac{-x\log 2\log(x+1) - 2\log 2\log(x+1) + 2x\log 2}{(x+1)^2\log^3(x+1)}.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = -x\log(x+1) - 2\log(x+1) + 2x$. Αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση αυτή είναι φθίνουσα άρα για $x > 0$ θα έχουμε ότι $f(x) < f(0) = 0$. Από αυτό προκύπτει ότι $g''(x) \leq 0$. Επομένως η συνάρτηση $g(x) = \frac{x}{\phi(x)}, x \geq 1$ είναι κοίλη.

(5) Θα δείξουμε ότι $\phi(xy) \leq \phi(x)\phi(y)$ για $x, y \geq 1$. Ισοδύναμα αρκεί να δείξουμε ότι

$$\log_2(xy+1) - \log_2(x+1)\log_2(y+1) \leq 0.$$

Σταθεροποιώντας $y \geq 1$, θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = \log_2(xy+1) - \log_2(x+1)\log_2(y+1)$ και θα αποδείξουμε ότι αυτή η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα. Εφόσον

$$h'(x) = \frac{y}{(xy+1)\log 2} - \frac{\log_2(y+1)}{(x+1)\log 2} = \frac{y(x+1) - (xy+1)\log_2(y+1)}{(xy+1)(x+1)}$$

για να δείξουμε ότι $h'(x) \leq 0$ αρκεί να δείξουμε ότι $y(x+1) - (xy+1)\log_2(y+1) \leq 0$. Για το λόγο αυτό θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = y(x+1) - (xy+1)\log_2(y+1)$. Έχουμε ότι $f'(x) = y(1 - \log_2(y+1))$. Αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση αυτή είναι φθίνουσα στο $[1, +\infty)$, άρα για $x > 1$ θα ισχύει $f(x) < f(1) = 2y - (y+1)\log_2(y+1)$.

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση $w(y) = 2y - (y+1)\log_2(y+1)$ για την οποία προκύπτει ότι ισχύει ότι είναι φθίνουσα άρα για $y > 1$ θα έχουμε $w(y) < w(1) = 0$, δηλαδή $2y - (y+1)\log_2(y+1) \leq 0$. Άρα για κάθε $x \in [1, +\infty)$ ισχύει ότι $f(x) = y(x+1) - (xy+1)\log_2(y+1) \leq 0$, οπότε η συνάρτηση $h(x)$ είναι φθίνουσα οπότε για $x > 1$ θα έχουμε $h(x) \leq h(1) = 0$. Επομένως

$$\phi(xy) \leq \phi(x)\phi(y).$$

□

Παρατήρηση 6.3. *Το norming σύνολο K είναι το ελάχιστο υποσύνολο του c_{00} που ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες.*

(i) $\pm e_n^* \in K$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Για κάθε $l = 1, 2, ...$ *το σύνολο* K *είναι κλειστό ως προς την* $(\mathcal{A}_l, \frac{1}{\phi(l)})$ *πράξη, δηλαδή αν* $f_1 < f_2 < \cdots < f_d$ *ανήκουν στο* K *με* $d \leq l$ *τότε και* $\frac{1}{\phi(l)}(f_1 + ... + f_d) \in K$.

Για το λόγο αυτό ο χώρος συμβολίζεται και με $S = T[(\mathcal{A}_n, \frac{1}{\phi(n)})_{n=1}^{\infty}]$.

Παρατήρηση 6.4. *Το norming σύνολο K ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες*

(i) $e_n^* \in K$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

(ii) K *συμμετρικό, δηλαδή αν* $f \in K$ *τότε και* $-f \in K$.

(iii) Για κάθε $f \in K$ *ισχύει* $||f||_\infty \leq 1$.

(iv) Αν $f \in K$ *και* E *διάστημα* $\Rightarrow Ef \in K$.

(v) Αν $f = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i e_i^* \in K$ *τότε για κάθε επιλογή προσήμων* $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ *το* $g = \sum_{i=1}^{d} \varepsilon_i \alpha_i e_i^* \in K$.

(vi) Αν $f = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i e_i^* \in K$, *τότε για κάθε* $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *γν. αύξουσα ακολουθία το* $g = \sum_{i=1}^{d} \alpha_{n_i} e_{n_i}^* \in K$.

Επομένως από Πρόταση 2.13 η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *είναι* $1-$ *unconditional και* $1-$ *subsymmetric βάση του χώρου* S.

Απόδειξη. Αποδεικνύεται εύκολα με επαγωγή ότι κάθε σύνολο K_s, $s = 0, 1, 2, ...$ ικανοποιεί αυτές τις ιδιότητες επομένως το norming σύνολο K ως ένωση αυτών των συνόλων θα ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες. □

Πρόταση 6.5. *Για κάθε* $x \in S$ *ισχύει*

$$||x|| = \max\{||x||_\infty, \sup\{\frac{1}{\phi(l)} \sum_{i=1}^{l} ||E_i x|| : l \geq 2\ ,\ E_1 < E_2 < ... < E_l\}\}.$$

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} ||x||_\infty &= \sup\{\pm e_i^*(x) : i \in \mathbb{N}\} \\ &= \sup\{f(x) : f \in K_0\} \\ &\leq \sup\{f(x) : f \in K\} = ||x|| \end{aligned}$$

Άρα $||x||_\infty \leq ||x||$. Έστω $l \geq 2$ και $(E_i)_{i=1}^l$ με $E_1 < E_2 < \cdots < E_l$. Τότε από ιδιότητα (iv) του συνόλου K μπορούμε να επιλέξουμε $f_i \in K$ ώστε $E_i = \mathrm{supp}(f_i)$ για κάθε $i = 1, ..., l$ και $f_i(x) = ||E_i x||$. Ορίζουμε $f = \frac{1}{\phi(l)}(f_1 + ... + f_l)$. Τότε από Παρατήρηση 6.3, (ii) ισχύει ότι $f \in K$ οπότε θα έχουμε

$$\frac{1}{\phi(l)} \sum_{i=1}^{l} ||E_i x|| = \frac{1}{\phi(l)}(f_1(x) + ... + f_l(x)) = f(x) \leq ||x||.$$

Άρα

$$||x|| \geq \max\{||x||_\infty, \sup\{\frac{1}{\phi(l)} \sum_{i=1}^{l} ||E_i x|| : l \geq 2 \ , \ E_1 < E_2 < ... < E_l\}\} \tag{6.1}$$

Μένει να δείξουμε ότι ισχύει και η αντίστροφη ανισότητα. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $f \in K$ ισχύει

$$f(x) \leq \max\{||x||_\infty, \sup\{\frac{1}{\phi(l)} \sum_{i=1}^{l} ||E_i x|| : l \geq 2 \ , \ E_1 < E_2 < ... < E_l\}\}.$$

Έστω $f \in K$. Αν $f \in K_0$ τότε θα έχουμε $f(x) \leq \sup\{g(x) : g \in K_0\} \leq ||x||_\infty$. Άρα η ανισότητα ισχύει σε αυτή την περίπτωση. Αν $f \in K \setminus K_0$, τότε το f θα γράφεται στη μορφή $f = \frac{1}{\phi(l)}(f_1 + f_2 + ... + f_l)$ με $f_i \in K$ και $f_1 < \cdots < f_l$. Οπότε θέτοντας $E_i = \mathrm{supp}(f_i)$ για κάθε $i = 1, ..., l$ έχουμε $E_1 < \cdots < E_l$. Άρα

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\phi(l)}(f_1(x) + ... + f_l(x)) \\ &= \frac{1}{\phi(l)}(f_1(E_1(x)) + ... + f_l(E_l(x))) \\ &\leq \frac{1}{\phi(l)}(||E_1 x|| + ... + ||E_l x||). \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε

$$||x|| \leq \max\{||x||_\infty, \sup\{\frac{1}{\phi(l)} \sum_{i=1}^{l} ||E_i x|| : l \geq 2 \ , \ E_1 < E_2 < ... < E_l\}\} \tag{6.2}$$

Από τις σχέσεις (6.1), (6.2) προκύπτει ότι

$$||x|| = \max\{||x||_\infty, \sup\{\frac{1}{\phi(l)} \sum_{i=1}^{l} ||E_i x|| : l \geq 2 \ , \ E_1 < E_2 < ... < E_l\}\}.$$

□

Παρατήρηση 6.6. *Για κάθε $l \in \mathbb{N}$ η $||\cdot||_l$ είναι νόρμα στον S και ισχύει*

$$\frac{1}{\phi(l)}||x|| \leq ||x||_l \leq ||x|| \ \ \forall \, x \in S.$$

Επομένως η $||\cdot||_l$ είναι ισοδύναμη νόρμα της $||\cdot||$ στον S.

Θεώρημα 6.7. *Για κάθε $l \in \mathbb{N}$, κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε Z απειροδιάστατο υπόχωρο του S, υπάρχουν $z_1, z_2 \in Z$ με $||z_1|| = ||z_2|| = 1$ τέτοια ώστε*

$$||z_1||_l \geq 1 - \varepsilon \text{ και } ||z_2||_l \leq \frac{1+\varepsilon}{\phi(l)}.$$

Αν αποδείξουμε αυτό το θεώρημα τότε θα έχει αποδειχθεί ότι ο χώρος μας είναι απεριόριστα παραμορφώσιμος. Αυτό συμβαίνει γιατί αν ισχύει το παραπάνω θεώρημα τότε

$$\sup\{\frac{||y_1||_l}{||y_2||_l} : ||y_1|| = ||y_2|| = 1,\ y_1, y_2 \in Z\} \geq \frac{||z_1||_l}{||z_2||_l} \geq \phi(l)\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

Άρα ο χώρος θα είναι απεριόριστα παραμορφώσιμος. Για να αποδείξουμε όμως αυτό το θεώρημα θα χρειαστούμε τα ακόλουθα λήμματα.

Λήμμα 6.8. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει*

$$||\sum_{i=1}^{n} e_i|| = \frac{n}{\phi(n)}.$$

Απόδειξη. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι

$$||\sum_{i=1}^{n} e_i|| \geq \frac{n}{\phi(n)}. \tag{6.3}$$

Για να το αποδείξουμε αρκεί να βρούμε ένα $f \in K$ τέτοιο ώστε $f(\sum_{i=1}^{n} e_i) = \frac{n}{\phi(n)}$. Πράγματι για το $f = \frac{1}{\phi(n)}(e_1^* + ... + e_n^*)$ έχουμε

$$||\sum_{i=1}^{n} e_i|| \geq f(\sum_{i=1}^{n} e_i) = \frac{n}{\phi(n)}.$$

Μένει να αποδείξουμε ότι

$$||\sum_{i=1}^{n} e_i|| \leq \frac{n}{\phi(n)} \tag{6.4}$$

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή. Για $n = 1$ έχουμε ότι $||e_1|| = 1$ άρα ισχύει. Υποθέτουμε ότι για κάθε $k < n$ ισχύει $||\sum_{i=1}^{k} e_i|| \leq \frac{k}{\phi(k)}$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $f \in K$ ισχύει

$$f(\sum_{i=1}^{n} e_i) \leq \frac{n}{\phi(n)}.$$

Αν $f \in K_0$ τότε το f θα είναι κάποιο από τα e_m^* (γιατί μπορούμε λόγω της unconditionality να θεωρήσουμε ότι το f έχει θετικές συντεταγμένες). Οπότε θα έχουμε $e_m^*(\sum_{i=1}^{n} e_i) \leq 1 \leq \frac{n}{\phi(n)}$ γιατί ισχύει $\phi(n) \leq n,\ \forall n \geq 1$. Αν τώρα $f \in K \setminus K_0$ τότε θα είναι της μορφής $f = \frac{1}{\phi(l)}(f_1 + ... + f_l)$ με $f_1, ..., f_l$ να είναι διαδοχικά και $f_j \in K$ για κάθε $j = 1, ..., l$, όπου $l \geq 2$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(\sum_{i=1}^{n} e_i) > \frac{1}{\phi(2)}||\sum_{i=1}^{n} e_i||$. Θέτουμε

$$E_j = (\operatorname{supp} f_j) \cap \{1, ..., n\},\ \ n_j = |E_j|.$$

Αν $n_1 = n$, τότε $n_i = 0$ για $i = 2, ...n$ και θα ισχύει ότι

$$f(\sum_{i=1}^{n} e_i) = \frac{1}{\phi(l)} f_1(\sum_{i=1}^{n} e_i) \leq \frac{||\sum_{i=1}^{n} e_i||}{\phi(l)} < \frac{1}{\phi(2)}||\sum_{i=1}^{n} e_i||.$$

Άτοπο. Επομένως θα ισχύει ότι $n_j < n$ για $j = 1, ..., l$. Επιπλέον έχουμε

$$\sum_{j=1}^{l} n_j \leq n.$$

Από επαγωγική υπόθεση και από το γεγονός ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι $1-$ subsymmetric βάση του χώρου θα έχουμε $||\sum\limits_{i\in E_j} e_i|| \leq \frac{|E_j|}{\phi(|E_j|)} = \frac{n_j}{\phi(n_j)}$. Άρα

$$\begin{aligned} f(\sum_{i=1}^{n} e_i) &= \frac{1}{\phi(l)}(f_1(\sum_{i\in E_1} e_i) + ... + f_l(\sum_{i\in E_l} e_i)) \\ &\leq \frac{1}{\phi(l)}(\frac{n_1}{\phi(n_1)} + ... + \frac{n_l}{\phi(n_l)}) \\ &= \frac{l}{\phi(l)}(\frac{1}{l}(\frac{n_1}{\phi(n_1)} + ... + \frac{n_l}{\phi(n_l)})). \end{aligned}$$

Όμως από ιδιότητα (4) η συνάρτηση $g(x) = \frac{x}{\phi(x)}$ είναι κοίλη άρα θα ισχύει

$$\alpha_1 g(t_1) + ... + \alpha_m g(t_m) \leq g(\alpha_1 t_1 + ... + \alpha_m t_m).$$

για κάθε $\alpha_i \geq 0$ με $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$, ενώ από ιδιότητα (2) η συνάρτηση g είναι αύξουσα. Επομένως

$$\begin{aligned} \frac{1}{l}(\frac{n_1}{\phi(n_1)} + ... + \frac{n_l}{\phi(n_l)}) &= \frac{1}{l}g(n_1) + ... + \frac{1}{l}g(n_l) \\ &\leq g(\frac{1}{l}n_1 + ... + \frac{1}{l}n_l) \\ &= g(\frac{1}{l}(n_1 + ... + n_l)) \\ &\leq g(\frac{n}{l}) \\ &= \frac{\frac{n}{l}}{\phi(\frac{n}{l})}. \end{aligned}$$

Άρα

$$\frac{l}{\phi(l)}(\frac{1}{l}(\frac{n_1}{\phi(n_1)} + ... + \frac{n_l}{\phi(n_l)})) \leq \frac{l}{\phi(l)}\frac{\frac{n}{l}}{\phi(\frac{n}{l})} = \frac{n}{\phi(l)\phi(\frac{n}{l})}.$$

και από ιδιότητα (5) της ϕ ισχύει $\phi(l)\phi(\frac{n}{l}) \geq \phi(n) \Rightarrow \frac{1}{\phi(l)\phi(\frac{n}{l})} \leq \phi(n)$ οπότε $\frac{n}{\phi(l)\phi(\frac{n}{l})} \leq \frac{n}{\phi(n)}$. Αυτό σημαίνει ότι

$$||\sum_{i=1}^{n} e_i|| \leq \frac{n}{\phi(n)}.$$

Από τις σχέσεις λοιπόν (6.3), (6.4) προκύπτει ότι

$$||\sum_{i=1}^{n} e_i|| = \frac{n}{\phi(n)}.$$

□

Για το επόμενο λήμμα θα χρειαστούμε τον ορισμό και το Θεώρημα του Krivine που έχουμε αναφέρει στο προηγούμενο κεφάλαιο (Θεώρημα 5.7).

Λήμμα 6.9. *Ο χώρος ℓ_1 είναι πεπερασμένα block αναπαραστάσιμος σε κάθε block υπόχωρο του S.*

Απόδειξη. Έστω Y block υπόχωρος του S. Από το θεώρημα του Krivine κάποιος από τους χώρους ℓ_p, $1 \leq p < \infty$ ή ο c_0 είναι πεπερασμένα block αναπαραστάσιμος στον Y. Αρκεί να δείξουμε ότι ο ℓ_p για $1 < p < \infty$ και ο c_0 δεν είναι πεπερασμένα block αναπαραστάσιμοι στον Y.

Υποθέτουμε ότι ο ℓ_p , με $1 < p < \infty$ είναι πεπερασμένα block αναπαραστάσιμος στον Y, οπότε θα ισχύει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει νορμαρισμένη block $(z_i)_{i=1}^n$ στον Y ώστε να ισχύει

$$(1-\varepsilon)(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq ||\sum_{i=1}^n \alpha_i z_i|| \leq (1+\varepsilon)(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^p)^{\frac{1}{p}}. \tag{6.5}$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι

$$||\frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}\sum_{i=1}^n z_i|| \leq 1+\varepsilon. \tag{6.6}$$

Από (6.5) έχουμε ότι $||z_i|| \geq 1-\varepsilon$, για $i = 1, ..., n$. Επιλέγουμε $f_i \in K$ με $f_i(z_i) \geq 1-\varepsilon$ και θέτουμε $f = \frac{1}{\phi(n)}(f_1 + ... + f_n)$. Τότε $f \in K$ άρα έχουμε

$$\begin{aligned} f(\sum_{i=1}^n z_i) &= \frac{1}{\phi(n)}(f_1(z_1) + ... + f_n(z_n)) \\ &\geq \frac{n}{\phi(n)}(1-\varepsilon). \end{aligned}$$

Άρα

$$||\sum_{i=1}^n z_i|| \geq f(\sum_{i=1}^n z_i) \geq \frac{n}{\phi(n)}(1-\varepsilon).$$

Επομένως έχουμε

$$||\frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}\sum_{i=1}^n z_i|| \geq \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}\frac{n}{\phi(n)}(1-\varepsilon) = \frac{n^{1-\frac{1}{p}}(1-\varepsilon)}{\phi(n)}. \tag{6.7}$$

Από τις σχέσεις (6.6),(6.7) έχουμε

$$1+\varepsilon \geq \frac{n^{1-\frac{1}{p}}}{\phi(n)}(1-\varepsilon) \Rightarrow \frac{\phi(n)}{n^{1-\frac{1}{p}}} \geq \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

για κάθε n και για κάθε ε. Άτοπο από την ιδιότητα (3) της ϕ. Με όμοιο τρόπο αποκλείεται και ο χώρος c_0 να είναι πεπερασμένα block αναπαραστάσιμος στον Y. Επομένως ο μόνος χώρος ο οποίος μπορεί να είναι πεπερασμένα block αναπαραστάσιμος στον Y είναι ο χώρος ℓ_1. □

Λήμμα 6.10. *Έστω $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ block βάση της $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ για την οποία ισχύει το εξής. Υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $(k_n) \subseteq \mathbb{N}$, γνησίως φθίνουσα ακολουθία $(\varepsilon_n) \subseteq \mathbb{R}$ με $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ και για κάθε n υπάρχει νορμαρισμένη block βάση $(y_{n,i})_{i=1}^{k_n}$ η οποία είναι $1+\varepsilon_n$ ισοδύναμη με την μοναδιαία βάση του $\ell_1^{k_n}$ τέτοια ώστε $y_n = \frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n} y_{n,i}$. Τότε για κάθε $l \in \mathbb{N}$ ισχύει*

$$\lim_{n_1\to\infty}\lim_{n_2\to\infty} .... \lim_{n_l\to\infty} ||\sum_{i=1}^l y_{n_i}|| = \frac{l}{\phi(l)}.$$

Θεωρούμε ως δεδομένο αυτό το λήμμα για προχωρήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος και κατόπιν θα αποδείξουμε το λήμμα.

Απόδειξη Θεωρήματος 6.7. Έστω Z απειροδιάστατος υπόχωρος του X και $\varepsilon > 0$.

Από τα λήμματα 6.10 και 6.9 υπάρχει $(y_i)_{i=1}^l \subset Z$ με $y_1 < y_2 < ... < y_l$ τέτοια ώστε

$$||y_i|| \geq 1-\varepsilon,\ 1 \leq i \leq l \text{ και } ||\sum_{i=1}^{l} y_i|| \leq \frac{l}{\phi(l)}.$$

Θέτουμε

$$z_1 = \frac{\sum_{i=1}^{l} y_i}{||\sum_{i=1}^{l} y_i||}.$$

Για κάθε $i = 1, ..., l$ επιλέγουμε $f_i \in K$ ώστε $\operatorname{supp}(f_i) \subseteq \operatorname{supp}(y_i)$ και $f_i(y_i) \geq 1-\varepsilon$. Θέτουμε $f = \frac{1}{\phi(l)}(f_1 + f_2 + ... + f_l)$. Τότε $f \in K^l$ επομένως θα έχουμε

$$\begin{aligned}
||z_1||_l &\geq f(z_1) \\
&= \frac{1}{\phi(l)}(f_1(z_1) + f_2(z_1) + ... + f_l(z_1)) \\
&= \frac{1}{\phi(l)} \frac{1}{||\sum_{i=1}^{l} y_i||}(f_1(\sum_{i=1}^{l} y_i) + ... + f_l(\sum_{i=1}^{l} y_i)) \\
&= \frac{1}{\phi(l)} \frac{1}{||\sum_{i=1}^{l} y_i||}(f_1(y_1) + ... + f_l(y_l)) \\
&\geq \frac{1}{\phi(l)} \frac{\phi(l)}{l} l(1-\varepsilon) \\
&= 1-\varepsilon.
\end{aligned}$$

Άρα $||z_1||_l \geq 1-\varepsilon$.

Επιλέγουμε τώρα το z_2 ως εξής. Έστω $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{2l}{n} < \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1+\frac{\varepsilon}{2}}$ και επιλέγουμε σύμφωνα με το λήμμα (6.9) στοιχεία $x_1, x_2, ..., x_n$ του Z τέτοια ώστε $(x_j)_{j=1}^n$ να είναι $1+\frac{\varepsilon}{2}$ ισοδύναμη με τη μοναδιαία βάση του ℓ_1^n και $||x_j|| = 1$ οπότε

$$\frac{n}{1+\frac{\varepsilon}{2}} \leq ||\sum_{j=1}^{n} x_j|| \leq n.$$

Θέτουμε

$$z_2 = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j}{||\sum_{j=1}^{n} x_j||}.$$

Τότε $||z_2|| = 1$. Έστω $f \in K^l$. Τότε το f θα είναι της μορφής $f = \frac{1}{\phi(l)}(f_1 + f_2 + ... + f_l)$ με $f_i \in K$ και $f_1 < \cdots < f_l$.

Για κάθε $i = 1, ..., l$ υπάρχουν το πολύ δύο στοιχεία x_{j_s} τέτοια ώστε

$$\operatorname{supp}(x_{j_s}) \cap \operatorname{supp} f_i \neq \emptyset \ \text{ και } \ \operatorname{supp}(x_{j_s}) \setminus \operatorname{supp} f_i \neq \emptyset, \quad s = 1, 2$$

(Δηλαδή υπάρχουν το πολύ δύο x_{j_s} για τα οποία ισχύει $\operatorname{supp}(x_{j_s}) \cap \operatorname{supp} f_i \neq \emptyset$ αλλά δεν θα βρίσκονται εξ ολοκλήρου μέσα στο f_i.) Ορίζουμε το σύνολο

$$I_i = \{j : \operatorname{supp}(x_j) \subset \operatorname{ran} f_i\}.$$

Θέτουμε $\tilde{f}_i = E_i f_i$ όπου $E_i = \bigcup\{\text{supp}(x_j) : j \in I_i\}$. Τότε ισχύει

$$|f_i(z_2)| \leq |\tilde{f}_i(z_2)| + \frac{2}{||\sum\limits_{j=1}^{n} x_j||}.$$

Από τη σχέση (6) έχουμε ότι

$$\frac{n}{1+\frac{\varepsilon}{2}} \leq ||\sum_{j=1}^{n} x_j|| \;\Rightarrow\; \frac{1}{||\sum\limits_{j=1}^{n} x_j||} \leq \frac{1+\frac{\varepsilon}{2}}{n}.$$

Άρα

$$|f_i(z_2)| \leq |\tilde{f}_i(z_2)| + 2\frac{1+\frac{\varepsilon}{2}}{n}\ .$$

Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned}
f(z_2) &= \frac{1}{\phi(l)}\sum_{i=1}^{l} f_i(z_2) \\
&\leq \frac{1}{\phi(l)}\sum_{i=1}^{l} \tilde{f}_i(z_2) + \frac{l}{\phi(l)}2\frac{1+\frac{\varepsilon}{2}}{n} \\
&\leq \frac{1}{\phi(l)}\frac{n}{||\sum\limits_{j=1}^{n} x_j||} + \frac{l}{\phi(l)}2\frac{1+\frac{\varepsilon}{2}}{n} \\
&\leq \frac{1}{\phi(l)}n\frac{1+\frac{\varepsilon}{2}}{n} + \frac{l}{\phi(l)}2\frac{1+\frac{\varepsilon}{2}}{n} \\
&\leq \frac{1+\frac{\varepsilon}{2}}{\phi(l)}(1+\frac{2l}{n}) \\
&\leq \frac{1+\frac{\varepsilon}{2}}{\phi(l)} + \frac{1+\frac{\varepsilon}{2}}{\phi(l)}\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1+\frac{\varepsilon}{2}} \\
&= \frac{1+\frac{\varepsilon}{2}}{\phi(l)} + \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{\phi(l)} \\
&= \frac{1+\varepsilon}{\phi(l)}.
\end{aligned}$$

Επομένως $||z_2||_l \leq \frac{1+\varepsilon}{\phi(l)}$. Άρα ο χώρος είναι απεριόριστα παραμορφώσιμος. □

Συνεπώς για να ολοκληρωθεί η απόδειξη μένει να αποδείξουμε το Λήμμα 6.10.

Απόδειξη Λήμματος 6.10 . Έστω $y_n = \frac{1}{k_n}\sum\limits_{i=1}^{k_n} y_{n,i}$ για $n \in \mathbb{N}$ και $(y_{n,i})_{i=1}^{k_n}$ είναι $1+\varepsilon_n$ ισοδύναμη με την μοναδιαία βάση του $\ell_1^{k_n}$. Για $x, \tilde{x} \in c_{00}$ και $m \in \mathbb{N}$ με $x < e_m < \tilde{x}$ θα δείξουμε ότι ισχύει η εξής σχέση

$$\lim_{n\to\infty} ||x + y_n + \tilde{x^n}|| = ||x + e_m + \tilde{x}|| \tag{6.8}$$

όπου $\tilde{x} = \sum\limits_{i=m+1}^{\infty} \alpha_i e_i$, $\tilde{x^n} = \sum\limits_{i=m+1}^{\infty} \alpha_i e_{i+s_n}$ και $s_n \in \mathbb{N}$ να είναι κατάλληλα επιλεγμένο τέτοιο ώστε $y_n < \tilde{x^n}$.

Υποθέτουμε ότι ισχύει η παραπάνω σχέση οπότε τότε σύμφωνα και με το λήμμα (6.8) θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{l}{\phi(l)} &= ||\sum_{i=1}^{l} e_i|| \\
&= \lim_{n\to\infty} ||e_1 + \sum_{i=2}^{l} e_{i+n}|| \\
&= \lim_{n_1\to\infty} \lim_{n\to\infty} ||y_{n_1} + \sum_{i=2}^{l} e_{i+n}|| \\
&= \lim_{n_1\to\infty} \lim_{n\to\infty} ||y_{n_1} + e_{n+2} + \sum_{i=3}^{l} e_{i+n}|| \\
&= \lim_{n_1\to\infty} \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} ||y_{n_1} + e_{n+2} + \sum_{i=3}^{l} e_{i+m}|| \\
&= \lim_{n_1\to\infty} \lim_{n_2\to\infty} \lim_{m\to\infty} ||y_{n_1} + y_{n_2} + \sum_{i=3}^{l} e_{i+m}|| \\
&= ..... \\
&= \lim_{n_1\to\infty} \lim_{n_2\to\infty} ... \lim_{n_l\to\infty} ||\sum_{i=1}^{l} y_{n_i}||.
\end{aligned}$$

Επομένως το λήμμα έχει αποδειχθεί και το μόνο που απομένει είναι να αποδείξουμε ότι ισχύει η σχέση (6.8). Αρχικά θα χρειαστούμε τον ακόλουθο ισχυρισμό.

Ισχυρισμός. *Για $x, y \in c_{00}$ και $n \in \mathbb{N}$ με $x < e_n < y$ και $\alpha, \beta \geq 0$ ισχύει*

$$||x + \alpha e_n|| + ||\beta e_n + y|| \leq \max\{||x + (\alpha+\beta)e_n|| + ||y|| \ , \ ||x|| + ||(\alpha+\beta)e_n + y||\}.$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε με επαγωγή στο $k \in \mathbb{N}$, για κάθε $x, y \in c_{00}$ και $n \in \mathbb{N}$ με $|\operatorname{supp}(x)| + |\operatorname{supp}(y)| \leq k$, $x < e_n < y$ και για κάθε q_1, q_2, α, β θετικούς πραγματικούς αριθμούς ότι ισχύει η σχέση

$$q_1||x + \alpha e_n|| + q_2||\beta e_n + y|| \leq \max\{q_1||x + (\alpha+\beta)e_n|| + q_2||y||, q_1||x|| + q_2||(\alpha+\beta)e_n + y||\}.$$

Για $k = 0$ έχουμε $x = 0$ και $y = 0$ οπότε

$$\begin{aligned}
q_1||\alpha e_n|| + q_2||\beta e_n|| &\leq \max\{q_1||(\alpha+\beta)e_n||, q_2||(\alpha+\beta)e_n||\} \Leftrightarrow \\
\alpha q_1 + \beta q_2 &\leq \max\{(\alpha+\beta)q_1, (\alpha+\beta)q_2\}
\end{aligned}$$

Αν $q_1 \leq q_2$ τότε $\alpha q_1 + \beta q_2 \leq \alpha q_2 + \beta q_2 = (\alpha+\beta)q_2$. Αν $q_2 \leq q_1$ τότε $\alpha q_1 + \beta q_2 \leq \alpha q_1 + \beta q_1 = (\alpha+\beta)q_1$. Επομένως

$$\alpha q_1 + \beta q_2 \leq \max\{(\alpha+\beta)q_1, (\alpha+\beta)q_2\}.$$

Άρα για $k = 0$ η σχέση ισχύει.

Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για κάποιο $k \geq 0$ και έστω ότι έχουμε $x, y \in c_{00}$ με $x < e_n < y$ και $|\operatorname{supp}(x)| + |\operatorname{supp}(y)| = k + 1$. Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις

Πρώτη περίπτωση :

$$||x + \alpha e_n|| = ||x + \alpha e_n||_\infty \text{ και } ||\beta e_n + y|| = ||\beta e_n + y||_\infty.$$

Αν $||x + \alpha e_n|| = ||x||_\infty$ τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
q_1||x + \alpha e_n|| + q_2||\beta e_n + y|| &= q_1||x|| + q_2||\beta e_n + y|| \\
&\leq q_1||x|| + q_2||(\alpha+\beta)e_n + y||.
\end{aligned}$$

Αν $||\beta e_n + y|| = ||y||_\infty$ τότε έχουμε

$$\begin{aligned} q_1||x+\alpha e_n|| + q_2||\beta e_n + y|| &= q_1||x+\alpha e_n|| + q_2||y|| \\ &\leq q_1||x+(\alpha+\beta)e_n|| + q_2||y||. \end{aligned}$$

Αν $||x+\alpha e_n|| = \alpha$ και $||\beta e_n + y|| = \beta$ τότε έχουμε

$$\begin{aligned} q_1||x+\alpha e_n|| + q_2||\beta e_n + y|| &= q_1\alpha + q_2\beta \\ &\leq q_2\alpha + q_2\beta \\ &= q_2(\alpha+\beta) \\ &= q_2||(\alpha+\beta)e_n|| \\ &\leq q_2||(\alpha+\beta)e_n + y|| \\ &\leq q_1||x|| + q_2||(\alpha+\beta)e_n + y||. \end{aligned}$$

Άρα η σχέση ισχύει.

Δεύτερη περίπτωση :

$$||x+\alpha e_n|| \neq ||x+\alpha e_n||_\infty.$$

Τότε βρίσκουμε $l \geq 2$ και $f_1, f_2, ..., f_l$ με $f_1 < f_2 < ... < f_l$ τέτοια ώστε $\operatorname{supp} f_i \bigcap \operatorname{supp}(x) \neq \emptyset$ για $i = 1, ..., l-1$. Θέτουμε $E_i = \operatorname{supp} f_i$, οπότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} q_1||x+\alpha e_n|| + q_2||\beta e_n + y|| &= q_1\frac{1}{\phi(l)}(f_1(x+\alpha e_n) + ... + f_l(x+\alpha e_n)) + q_2||\beta e_n + y|| \\ &= \frac{q_1}{\phi(l)}\sum_{i=1}^{l-1}||E_i(x)|| + \frac{q_1}{\phi(l)}||E_l(x+\alpha e_n)|| + q_2||\beta e_n + y||. \end{aligned}$$

Έχουμε ότι $|\operatorname{supp} E_l(x)| + |\operatorname{supp}(y)| < |\operatorname{supp}(x)| + |\operatorname{supp}(y)| = k+1$ επομένως χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση έχουμε

$$\frac{q_1}{\phi(l)}||E_l(x+\alpha e_n)|| + q_2||\beta e_n + y|| \leq \{\frac{q_1}{\phi(l)}||E_l(x) + (\alpha+\beta)e_n|| + q_2||y|| \ , \ \frac{q_1}{\phi(l)}||E_l(x)|| + q_2||(\alpha+\beta)e_n + y||\}.$$

Άρα

$$\frac{q_1}{\phi(l)}\sum_{i=1}^{l-1}||E_i(x)|| + \frac{q_1}{\phi(l)}||E_l(x+\alpha e_n)|| + q_2||\beta e_n + y|| \leq \frac{q_1}{\phi(l)}\sum_{i=1}^{l-1}||E_i(x)|| + \frac{q_1}{\phi(l)}||E_l(x) + (\alpha+\beta)e_n|| + q_2||y||.$$

ή

$$\frac{q_1}{\phi(l)}\sum_{i=1}^{l-1}||E_i(x)|| + \frac{q_1}{\phi(l)}||E_l(x+\alpha e_n)|| + q_2||\beta e_n + y|| \leq \frac{q_1}{\phi(l)}\sum_{i=1}^{l-1}||E_i(x)|| + \frac{q_1}{\phi(l)}||E_l(x)|| + q_2||(\alpha+\beta)e_n + y||.$$

Θα έχουμε δηλαδή ότι

$$\frac{q_1}{\phi(l)}\sum_{i=1}^{l-1}||E_i(x)|| + \frac{q_1}{\phi(l)}||E_l(x+\alpha e_n)|| + q_2||\beta e_n + y|| \leq \max\{q_1||x + (\alpha+\beta)e_n|| + q_2||y||, q_1||x|| + q_2||(\alpha+\beta)e_n + y||\}.$$

Άρα η σχέση ισχύει και ομοίως προκύπτει ότι ισχύει και στην περίπτωση όπου $||\beta e_n + y|| \neq ||\beta e_n + y||_\infty$. $\square$

Για να δείξουμε ότι ισχύει η σχέση (6.8) αρχικά παρατηρούμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$||x + e_m + \tilde{x}||_k \leq (1+\varepsilon_n)||x + y_n + \tilde{x^n}||.$$

Ή ισοδύναμα μπορούμε να αποδείξουμε ότι ισχύει η ακόλουθη πρόταση

Πρόταση 6.11. *Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει το εξής. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, x, $m \in \mathbb{N}$ και για κάθε $\tilde{x}$ με $x < e_m < \tilde{x}$ ισχύει ότι για κάθε $f \in K_k$ υπάρχει $g \in K$ τέτοιο ώστε*

$$f(x + e_m + \tilde{x}) \leq (1 + \varepsilon_n)g(x + y_n + \tilde{x^n}).$$

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Για $k = 0$ έχουμε ότι κάθε $f \in K_0$ θα είναι κάποιο από τα συναρτησοειδή $\pm e_n^*$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $n \in \text{supp}(x + e_m + \tilde{x})$. Αν $n \in \text{supp}(x)$ θέτουμε $g = f$. Αν $n \in \text{supp}(\tilde{x})$ θέτουμε $g = \pm e_{n+s_n}^*$, όπου s_n είναι ο αριθμός που έχουμε επιλέξει το $\tilde{x}^n$. Αν $n = m$ επιλέγουμε $g \in K$ ώστε $g(y_n) \geq \frac{1}{1+\varepsilon_n}$. Σε κάθε περίπτωση έχουμε ότι

$$\pm e_n^*(x + e_m + \tilde{x}) \leq (1 + \varepsilon_n)g(x + y_n + \tilde{x^n}).$$

Επομένως για $k = 0$ η σχέση ισχύει.

Υποθέτουμε τώρα ότι η σχέση ισχύει για κάθε $f \in K_k$ και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για κάθε $f \in K_{k+1}$. Έστω $f \in K_{k+1} \setminus K_k$. Τότε το f θα είναι της μορφής $f = \frac{1}{\phi(l)}(f_1 + f_2 + ... + f_l)$ με $f_i \in K_k$, για κάθε $i = 1, ..., l$ και διαδοχικά.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $m \in \text{supp}(f_{k_0})$ για κάποιο k_0, $1 \leq k_0 \leq l$. θέτουμε

$$y = x|_{\text{supp} f_{k_0}} \text{ και } \tilde{y} = \tilde{x}|_{\text{supp} f_{k_0}}.$$

Για $i < k_0$ θέτουμε $g_i = f_i$. Για $i > k_0$ αν $f_i = \sum \alpha_r e_r$ θέτουμε $g_i = \sum \alpha_r e_{r+s_n}$, όπου s_n είναι ο αριθμός που έχουμε επιλέξει το $\tilde{x}^n$. Εφόσον $f_{k_0} \in K_k$, από επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι υπάρχει $g_{k_0} \in K$ τέτοιο ώστε

$$f_{k_0}(y + e_m + \tilde{y}) \leq (1 + \varepsilon_n)g_{k_0}(y + y_n + \tilde{y^n}).$$

Οπότε για το $f \in K_{k+1}$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} f(x + e_m + \tilde{x}) &= \frac{1}{\phi(l)}(\sum_{i=1}^{k_0-1} f_i(x) + f_{k_0}(x + e_m + \tilde{x}) + \sum_{i=k_0+1}^{l} f_i(\tilde{x})) \\ &\leq (1 + \varepsilon_n)\frac{1}{\phi(l)}(\sum_{i=1}^{l} g_i(x + y_n + \tilde{x^n})) \\ &= (1 + \varepsilon_n)g(x + y_n + \tilde{x^n}) \end{aligned}$$

όπου $g = \frac{1}{\phi(l)} \sum_{i=1}^{l} g_i \in K$. □

Άρα έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \inf ||x + y_n + \tilde{x^n}|| \geq ||x + e_m + \tilde{x}||.$$

Αφού κάθε υπακολουθία της $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ εξακολουθεί να ικανοποιεί τις υποθέσεις του λήμματος (6.10) αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 6.12. *Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και κάθε $x < e_m < \tilde{x}$ με $|\text{supp}(x)| + |\text{supp}(\tilde{x})| \leq k$ ισχύει*

$$\lim_{n\to+\infty} \inf ||x + y_n + \tilde{x^n}|| \leq ||x + e_m + \tilde{x}||. \tag{6.9}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Για $k = 0$ έχουμε $x = \tilde{x} = 0 = \tilde{x^n}$. Επιπλέον ξέρουμε ότι η $(y_{n,i})_{i=1}^{k_n}$ είναι νορμαρισμένη και $1 + \varepsilon_n$ ισοδύναμη με την μοναδιαία βάση του $\ell_1^{k_n}$ άρα θα ισχύει

$$\frac{1}{1 + \varepsilon_n} \leq ||y_n|| \leq 1.$$

Επομένως

$$\lim_{n\to+\infty} \inf ||y_n|| \leq 1 = ||e_m||.$$

Άρα για $k = 0$ η σχέση (6.9) ισχύει. Υποθέτουμε τώρα ότι η ανισότητα αυτή ισχύει για κάποιο $k \geq 0$ και σταθεροποιούμε $x, \tilde{x} \in c_{00}$ με $x < e_m < \tilde{x}$ και $|\operatorname{supp}(x)| + |\operatorname{supp}(\tilde{x})| = k+1$. Διακρίνουμε τώρα τις ακόλουθες περιπτώσεις

Πρώτη περίπτωση : Αν $||x + y_n + \tilde{x^n}|| = ||x + y_n + \tilde{x^n}||_\infty$ για άπειρα $n \in \mathbb{N}$. Ισχύει ότι : $||x + y_n + \tilde{x^n}||_\infty \leq ||x + e_m + \tilde{x}||_\infty$ γιατί :

$$||y_n|| \leq 1.$$

Επομένως έχουμε ότι

$$||x + y_n + \tilde{x^n}|| = ||x + y_n + \tilde{x^n}||_\infty \leq ||x + e_m + \tilde{x}||_\infty \leq ||x + e_m + \tilde{x}||.$$

Άρα στην πρώτη περίπτωση η σχέση (6.9) ισχύει.

Δεύτερη περίπτωση : Για μια υπακολουθία $(y_n^{'})$ της $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχουμε ότι

$$||x + y_n^{'} + \tilde{x^n}|| = \frac{1}{\phi(l_n)} \sum_{i=1}^{l_n} f_i^{(n)}(x + y_n^{'} + \tilde{x^n})$$

όπου $l_n \to \infty$ και $f_1^{(n)} < f_2^{(n)} < ... < f_{l_n}^{(n)}$. Αφού $\phi(l_n) \to \infty$ καθώς $n \to \infty$ τότε η συνεισφορά των x και $\tilde{x^n}$ στην νόρμα $||x + y_n^{'} + \tilde{x^n}||$ είναι αμελητέα και αυτό γιατί $||x||_n \to 0$ και $||\tilde{x^n}||_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$ αφού για κάθε $f \in K^n$ ισχύει

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \frac{1}{\phi(n)}(f_1(x) + ...f_n(x)) \\ &\leq \frac{1}{\phi(n)}||x||' \\ &\to 0 \end{aligned}$$

όπου $||\cdot||'$ είναι η ℓ_1 νόρμα του x. Επομένως έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \inf ||x + y_n + \tilde{x^n}|| = \lim_{n\to\infty} \inf ||y_n|| = 1 \leq ||x + e_m + \tilde{x}||.$$

Άρα η σχέση (6.9) ισχύει και στην δεύτερη περίπτωση.

Τρίτη περίπτωση : Υπάρχει $l \geq 2$ και υπακολουθία $(y_n^{'})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (η οποία για ευκολία στον συμβολισμό μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι η ίδια η $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$) ώστε

$$\lim_{n\to\infty}(||x + y_n^{'} + \tilde{x^n}|| - \frac{1}{\phi(l)} \sum_{i=1}^{l} f_i^{(n)}(x + y_n^{'} + \tilde{x^n})) = 0,$$

όπου $f_1^{(n)} < f_2^{(n)} < ... < f_l^{(n)}$ και έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες.

(1) $\operatorname{supp}(x + y_n + \tilde{x^n}) \bigcap \operatorname{supp} f_i^{(n)} \neq \emptyset$, $i \leq l$ και $\operatorname{supp}(x + y_n + \tilde{x^n}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{l} \operatorname{supp} f_i^{(n)}$.

(2) Το σύνολο $E_i = \operatorname{supp}(x) \bigcap \operatorname{supp} f_i^{(n)}, i = 1, ..., l$ δεν εξαρτάται από το n .

(3) Υπάρχουν $\tilde{f}_1 < \tilde{f}_2 < ... < \tilde{f}_l$ στο K και ακέραιοι r_n τέτοια ώστε $\operatorname{supp}(\tilde{x^n}) \bigcap \operatorname{supp} f_i^{(n)} = \operatorname{supp} \tilde{f}_i + r_n$ για $n \in \mathbb{N}$.

(4) Για $i \leq l$ και $1 \leq j \leq k_n$ έχουμε $\operatorname{supp}(y_{n_j}) \subseteq \operatorname{supp} f_i^{(n)}$ ή $\operatorname{supp}(y_{n_j}) \bigcap \operatorname{supp} f_i^{(n)} = \emptyset$.
Πράγματι για $i \leq l$ θέτοντας

$$\tilde{f_i^{(n)}} = f_i^{(n)} \text{ ,αν } \operatorname{supp} f_i^{(n)} \cap \operatorname{supp}(y_n) = \emptyset.$$

και

$$\tilde{f_i^{(n)}} = f_i^{(n)}|_{[\min \operatorname{supp}(y_{n,s+1}), \max \operatorname{supp}(y_{n,t-1})]}.$$

όπου $s = \min\{\tilde{s} : \operatorname{supp}(y_{n_{\tilde{s}}}) \bigcap \operatorname{supp} f_i^{(n)} \neq \emptyset\}$ και $t = \max\{\tilde{s} : \operatorname{supp}(y_{n_{\tilde{s}}}) \bigcap \operatorname{supp} f_i^{(n)} \neq \emptyset\}$, η τιμή $\sum_{i=1}^{l} f_i^{(n)}(x + y_n + \tilde{x^n})$ διαφέρει από την $\sum_{i=1}^{l} \tilde{f_i^{(n)}}(x + y_n + \tilde{x^n})$ το πολύ κατά $\frac{2l}{k_n}$.

(5) Για $i \leq l$ υπάρχει η τιμή

$$q_i = \lim_{n\to\infty} \frac{|\{j \leq k_n : \operatorname{supp}(y_{n,j}) \subset \operatorname{supp} f_i^{(n)}\}|}{k_n}.$$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες υποπεριπτώσεις .

Περίπτωση 3α : Υπάρχουν $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $0 \leq l_1 \leq l_2 - 1 < l_2 \leq l$ και

$$||x + y_n + \tilde{x^n}|| = \frac{1}{\phi(l)}[\sum_{i=1}^{l_1-1} f_i^{(n)}(x) + f_{l_1}^{(n)}(x + y_n) + \sum_{i=l_1+1}^{l_2} f_i^{(n)}(y_n) + f_{l_2+1}^{(n)}(y_n + \tilde{x^n}) + \sum_{i=l_2+2}^{l} f_i^{(n)}(\tilde{x^n})].$$

Η $(y_{n,j})_{j=1}^{k_n}$ είναι $1 + \varepsilon_n$ ισοδύναμη με την μοναδιαία βάση του $\ell_1^{k_n}$ επομένως ισοδύναμα θα ισχύει $\frac{1}{1+\varepsilon_n} \leq ||y_n|| \leq 1$ και επιπλέον

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\phi(l)} \sum_{i=l_1}^{l_2+1} f_i^{(n)}(y_n) &= \frac{1}{\phi(l)} \sum_{i=1}^{l} f_i^{(n)}(y_n) \\
&\leq ||y_n|| \\
&\leq 1
\end{aligned}$$

Επιπλέον από ιδιότητα (4) σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε

$$\begin{aligned}
||x + y_n + \tilde{x^n}|| &\leq \frac{1}{\phi(l)}[\sum_{i=1}^{l_1} f_i^{(n)}(x) + \sum_{i=l_1}^{l_2+1} f_i^{(n)}(y_n) + \sum_{i=l_2+1}^{l} f_i^{(n)}(\tilde{x^n})] \\
&\leq \frac{1}{\phi(l)}[\sum_{i=1}^{l_1} f_i^{(n)}(x) + 1 + \sum_{i=l_2+1}^{l} f_i^{(n)}(\tilde{x^n})] \\
&\leq ||x + e_m + \tilde{x}||.
\end{aligned}$$

Περίπτωση 3β : Υπάρχει $1 \leq l_1 \leq l$ τέτοιο ώστε

$$||x + y_n + \tilde{x^n}|| = \frac{1}{\phi(l)}[\sum_{i=1}^{l_1-1} f_i^{(n)}(x) + f_{l_1}^{(n)}(x + y_n + \tilde{x^n}) + \sum_{i=l_1+1}^{l} f_i^{(n)}(\tilde{x^n})]$$

Από την (1) σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε ότι $|\operatorname{supp} f_{l_1}^{(n)} \cap \operatorname{supp}(x + \tilde{x^n})| < |\operatorname{supp}(x + \tilde{x^n}))| = k + 1$ άρα θα ισχύει η επαγωγική υπόθεση. Επομένως

$$||x + y_n + \tilde{x^n}|| \leq ||x + e_m + \tilde{x}||.$$

Περίπτωση 3γ : Υπάρχει $l_1 < l$ τέτοιο ώστε

$$||x + y_n + \tilde{x^n}|| = \frac{1}{\phi(l)}[\sum_{i=1}^{l_1-1} f_i^{(n)}(x) + f_{l_1}^{(n)}(x + y_n) + f_{l_1+1}^{(n)}(y_n + \tilde{x^n}) + \sum_{i=l_1+2}^{l} f_i^{(n)}(\tilde{x^n})].$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mathrm{supp}(x) \neq \emptyset$ και ότι $\mathrm{supp}(\tilde{x}) \neq \emptyset$. Αν

$$q_{l_1} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\{j \leq k_n : \mathrm{supp}(y_{n,j}) \subset \mathrm{supp}\, f_{l_1}^{(n)}\}|}{k_n} \to 0$$

τότε $\lim_{n\to\infty} f_{l_1}^{(n)}(x+y_n) = f_{l_1}^{(n)}(x)$. Αλλιώς υπάρχει ακολουθία $(j_n) \subseteq \mathbb{N}$ με $\lim_{n\to\infty} j_n = \infty$ τέτοια ώστε

$$\mathrm{supp}\, f_{l_1}^{(n)}(y_n) = \frac{1}{k_n}\sum_{j=1}^{j_n} y_{n,j} \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{j_n}{k_n} = q_{l_1} > 0.$$

Η ακολουθία $(\frac{f_{l_1}^{(n)}|_{\mathrm{supp}(y_n)}}{q_{l_1}})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ασυμπτωτικά ίση με την ακολουθία $(\tilde{y_n})$, όπου $\tilde{y_n} = \frac{1}{j_n}\sum\limits_{j=1}^{j_n} y_{n,j}$. Εφόσον η $(\tilde{y_n})$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του τελευταίου λήμματος, από την επαγωγική υπόθεση θα έχουμε ότι για κάποιο σύνολο $N \subseteq \mathbb{N}$ και για κάθε $n \in N$ θα ισχύει

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f_{l_1}^{(n)}(x+y_n) &= q_{l_1} \lim_{n\to\infty} f_{l_1}^{(n)}(\frac{x}{q_{l_1}} + \tilde{y_n}) \\
&\leq q_{l_1} \cdot ||\frac{E_{l_1}x}{q_{l_1}} + e_m|| \\
&\leq ||E_{l_1}x + q_{l_1}e_m||
\end{aligned}$$

όπου $E_{l_1} = \mathrm{supp}\, f_{l_1}$. Ομοίως δείχνουμε ότι για κάποιο σύνολο $M \subseteq N$ για κάθε $n \in M$ θα ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{f}_{l_1+1}^{(n)}(y_n + \tilde{x^n}) \leq ||q_{l_1+1}e_m + \tilde{E}_{l_1+1}\tilde{x}||$$

όπου $\tilde{E}_{l_1+1} = \mathrm{supp}\, \tilde{f}_i \cap \mathrm{supp}(\tilde{x})$. Άρα έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\inf ||x+y_n+\tilde{x^n}|| &\leq \frac{1}{\phi(l)}\Big(\sum_{i=1}^{l_1-1} f_i^{(n)}(x) + f_{l_1}^{(n)}(x+y_n) + \tilde{f}_{l_1+1}^{(n)}(y_n+\tilde{x^n}) + \sum_{i=l_1+2}^{l} \tilde{f}_i^{(n)}(\tilde{x^n})\Big) \\
&\leq \frac{1}{\phi(l)}\Big(\sum_{i=1}^{l_1-1} f_i^{(n)}(x) + ||E_{l_1}x + q_{l_1}e_m|| + ||q_{l_1+1}e_m + \tilde{E}_{l_1+1}\tilde{x}|| + \sum_{i=l_1+2}^{l} \tilde{f}_i^{(n)}(\tilde{x^n})\Big) \\
&\leq \frac{1}{\phi(l)}\Big(\sum_{i=1}^{l_1-1} f_i^{(n)}(x) + \sum_{i=l_1+2}^{l} f_i^{(n)}(\tilde{x^n}) \\
&+ \max\{||||E_{l_1}x + e_m|| + \tilde{E}_{l_1+1}^{(n)}\tilde{x}||, ||E_{l_1}x|| + ||e_m + \tilde{E}_{l_1+1}\tilde{x}||\}\Big) \\
&\leq ||x + e_m + \tilde{x}||.
\end{aligned}$$

Επομένως η σχέση (6.9) ισχύει και στην τρίτη περίπτωση. □

□

Βιβλιογραφία

[1] F. Albiac and N. J. Kalton, *Topics in Banach space Theory*, Springer, **233**, 2006.

[2] S. Argyros and I. Deliyanni, *Banach spaces of the type of Tsirelson*, preprint 1992.

[3] S. Argyros and I. Deliyanni, *Examples of asymptotic ℓ_1 Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **349**, (1997), no. 3, 973-995.

[4] S. Argyros and A. Tolias, *Methods in the theory of Hereditarily Idecomposable Banach spaces*, Mem. Amer. Math. Soc. **170**, (2004), no. 806.

[5] S. F. Bellenot, *Tsirelson superspaces and ℓ_p*, J. of Funct. Analysis, **69** (1986), 207-228.

[6] J. Bernues and I. Deliyanni, *Families of finite subsets of $\mathbb{N}$ of low complexity and Tsirelson type spaces*, Math. Nachr. **222**, (2001), 15-29.

[7] P. G. Casazza and T. J. Shura, *Tsirelson's space*, Springer-Verlang, 1989.

[8] I. Deliyianni, (Ε. Δεληγιάννη), *Αναδρομικά οριζόμενες νόρμες και εφαρμογές τους σε προβλήματα παραμόρφωσης και ύπαρξης unconditional βάσης σε χώρους Banach*, Διδακτορική διατριβή, Πανεπιστήμιο Κρήτης, 1995.

[9] T. Figiel and W.B. Johnson, *A uniformly convex Banach space which contains no ℓ_p* , Comp. Math **29**, (1974), 179-190.

[10] W. T. Gowers and B. Maurey, *The unconditional basic sequenceproblem*, Journal of AMS **6**, (1993), 851-874.

[11] P. Habala, P. Hajek and V. Zizler, *Introduction to Banach spaces I*, matfyzpress, 1996.

[12] P. Habala, P. Hajek and V. Zizler, *Introduction to Banach spaces II*, matfyzpress, 1996.

[13] R. C. James, *Uniformly non-square Banach spaces*, Ann. of Math. **80**, (1964), 542-550.

[14] J. L. Krivine, *Sous espaces de dimension finie des espaces de Banach reticules*, Ann. of Math. **104** (1976), 1-29.

[15] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach spaces I*, Springer-Verlag **92**, 1977.

[16] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach spaces II*, Springer-Verlag **97**, 1979.

[17] V.D. Milman, *The geometric theory of Banach spaces, Part II:Geometry of the unit sphere*, Russian Math. Surveys **26**, (1971), 79-163.

[18] Σ. Νεγρεπόντης, Θ. Ζαχαριάδης, Ν. Καλαμίδας, Β. Φαρμάκη, *Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση*, Εκδόσεις ΑΙΘΡΑ, 1988.

[19] E. Odell and T. Schloumprecht, *The distortion problem*, Acta Math **173**, (1994), 259-281.

[20] E. Odell, N. Tomczak-Jaegermann and R. Wagner, *Proximity to ℓ_1 and Distortion in Asymptotic ℓ_1 spaces*, J. of Funct. Analysis 1997.

[21] Th. Schlumprecht, *An arbitrarily distortable Banach space*, Israel J. Math. **76**, (1991), no. 1-2, 81–95.

[22] N. Tomczak-Jaegermann, *Banach spaces of type p have arbitrarily distortable subspaces*, Geom. Funct. Anal., **6**, (1996), no. 6, 1074-1082.

[23] B.S. Tsirelson, *Not every Banach space contains ℓ_p or c_0*, Funct. Anal. App **8**, (1974), 138-141.