ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Προσεγγισεισ Προτυπων και η Εικασια Επιπεδησ Καλυψησ

Χριστινα-Θεοδωρα Κουλουρη

Μεταπτυχιακη Διατριβη

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2014

Η παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή εκπονήθηκε στα πλαίσια του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών, για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα

«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ» (Ανάλυση-Άλγεβρα-Γεωμετρία)

που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, υπό την επίβλεψη του **Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Απόστολου Μπεληγιάννη**.

Εγκρίθηκε την 14/01/2014 από την Τριμελή Επιτροπή Εξέτασης:

Μπεληγιάννης Απόστολος, Αναπληρωτής Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
(Επιβλέπων Καθηγητής)

Μαρμαρίδης Νικόλαος, Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Θωμά Απόστολος, Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

«Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή.»

Χριστίνα-Θεοδώρα Κουλούρη

Αφιερώνεται στους γονείς μου

Μαρίνα και Σπύρο.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Έστω R ένας προσεταιριστικός δακτύλιος με μονάδα. Το κεντρικό πρόβλημα της θεωρίας προτύπων είναι η κατά το δυνατόν πληρέστερη περιγραφή της κατηγορίας όλων των (δεξιών ή αριστερών) προτύπων υπεράνω του R, καθώς και της δομής των ομομορφισμών μεταξύ προτύπων. Η περιγραφή αυτή μπορεί να είναι μέσω συνδυαστικών ή ομολογικών αναλλοίωτων. Μια τέτοια περιγραφή είναι δυνατή μόνο για μια περιορισμένη κλάση δακτυλίων, π.χ. για την κλάση των ημιαπλών δακτυλίων. Για τους περισσότερους δακτυλίους η επίλυση του προβλήματος είναι αδύνατη.

Καθώς το κεντρικό πρόβλημα δεν έχει εφικτή λύση, φυσιολογικά η προσοχή μας στρέφεται στην επίλυση ενός ασθενέστερου προβλήματος το οποίο βασίζεται στην ιδέα δυνατότητας προσέγγισης τυχαίων προτύπων μέσω καλά συμπεριφερόμενων προτύπων με γνωστή δομή. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να χωριστεί σε δύο υποπροβλήματα:

($\mathbf{\Pi_1}$) Περιγραφή της δομής σημαντικών κλάσεων προτύπων υπεράνω του δακτυλίου R και των ομομορφισμών τους.

($\mathbf{\Pi_2}$) Προσέγγιση τυχαίων προτύπων μέσω κλάσεων προτύπων των οποίων η δομή μας είναι γνωστή.

Η μελέτη των αλληλοσυνδεόμενων προβλημάτων ($\mathbf{\Pi_1}$) και ($\mathbf{\Pi_2}$) είναι γνωστή ως Θεωρία Προσέγγισης Προτύπων και τα τελευταία χρόνια διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην Θεωρία Δακτυλίων και Προτύπων, στην Ομολογική Άλγεβρα και στην Θεωρία Αναπαραστάσεων.

Κεντρικός στόχος της διατριβής είναι η παρουσίαση της γενικής θεωρίας προσέγγισης προτύπων και ακολούθως η μελέτη του παραπάνω προβλήματος στην ειδική περίπτωση κατά την οποία η κλάση ομαλά συμπεριφερόμενων προτύπων με γνωστή δομή είναι η κλάση των επίπεδων προτύπων (flat modules). Θα επικεντρωθούμε κυρίως στην μελέτη του υποπροβλήματος ($\mathbf{\Pi_2}$), για διάφορες σημαντικές κλάσεις προτύπων των οποίων η δομή είναι ήδη γνωστή. Αναλυτικότερα το κεντρικό αποτέλεσμα της διατριβής είναι η απόδειξη της σημαντικής *Εικασίας Επίπεδης Κάλυψης* την οποία θα αναπτύξουμε λεπτομερέστερα παρακάτω, και η οποία πιστοποιεί ότι κάθε πρότυπο υπεράνω τυχόντος δακτυλίου μπορεί να προσεγγισθεί, και μάλιστα με ελάχιστο τρόπο, από ένα μοναδικά καθορισμένο επίπεδο πρότυπο. Αυτό το αποτέλεσμα σε συνδυασμό με το γεγονός ότι τα επίπεδα πρότυπα προκύπτουν από τον δακτύλιο με σχετικά απλό τρόπο (και άρα η δομή τους είναι σχετικά ομαλή και προσιτή), δείχνει ότι τα προβλήματα ($\mathbf{\Pi_1}$) και ($\mathbf{\Pi_2}$) στην ειδική περίπτωση την οποία εξετάζει η διατριβή, έχουν εφικτή επίλυση.

• • •

Η ιδέα η οποία οδήγησε στην διατύπωση της Εικασίας Επίπεδης Κάλυψης προέκυψε ως εξής. Έστω R ένας προσεταιριστικός δακτύλιος με μονάδα. Θα χρειασθούμε παρακάτω την ακόλουθη χρήσιμη έννοια "ελαχιστότητας" ομομορφισμών.

Ένας ομομορφισμός προτύπων $f\colon M \longrightarrow N$ καλείται *δεξιά*, αντίστοιχα, *αριστερά*, *ελάχιστος*, αν κάθε ενδομορφισμός $\alpha\colon M \longrightarrow M$, αντίστοιχα, $\beta\colon N \longrightarrow N$, με την ιδιότητα $f \circ \alpha = f$, αντίστοιχα $\beta \circ f = f$, είναι αυτομορφισμός του M, αντίστοιχα του N.

1. Κάθε (αριστερό) R-πρότυπο M είναι επιμορφική εικόνα ενός ελεύθερου (free) προτύπου, και επειδή τα ελεύθερα πρότυπα είναι προβολικά (projective), έπεται ότι κάθε (αριστερό) R-πρότυπο είναι επιμορφική εικόνα ενός προβολικού προτύπου: υπάρχει ένα προβολικό R-πρότυπο P και ένας επιμορφισμός $f\colon P \longrightarrow M$ έτσι ώστε κάθε ομομορφισμός προτύπων $Q \longrightarrow M$, όπου το πρότυπο Q είναι προβολικό, αναλύεται μέσω του f.

   Σημειώνουμε ότι το προβολικό πρότυπο P δεν είναι απαραίτητα μοναδικά καθορισμένο μέχρι ισομορφισμό από το M, και γενικότερα δεν είναι εφικτή η ύπαρξη ενός ελάχιστου τέτοιου προβολικού προτύπου το οποίο έχει ως επιμορφική εικόνα το M. Αυτό συμβαίνει αν το M έχει *προβολική κάλυψη* δηλαδή έναν δεξιά ελάχιστο επιμορφισμό $f\colon P \longrightarrow M$, όπου το πρότυπο P είναι προβολικό. Είναι τότε εύκολο να δει κανείς ότι το P είναι μοναδικά καθορισμένο μέχρι ισομορφισμό από το M και επίσης είναι ευθύς προσθετέος κάθε προβολικού προτύπου το οποίο έχει ως επιμορφική εικόνα το M.

   Προς την κατεύθυνση της ύπαρξης προβολικής κάλυψης για κάθε πρότυπο υπεράνω του R, ο H. Bass σε μια θεμελιώδη εργασία του το 1960 χαρακτήρισε τους δακτυλίους για τους οποίους κάθε πρότυπο έχει μια προβολική κάλυψη. Αυτοί οι δακτύλιοι έγιναν έκτοτε γνωστοί ως *τέλειοι δακτύλιοι (perfect rings)*.

   • *Επομένως υπεράνω ενός τέλειου δακτυλίου, κάθε πρότυπο είναι επιμορφική εικόνα ενός μοναδικά καθορισμένου ελάχιστου προβολικού προτύπου.*

2. Δυϊκά κάθε (αριστερό) R-πρότυπο M μπορεί να θεωρηθεί ως υποπρότυπο ενός ενέσιμου (injective) προτύπου: υπάρχει ένα ενέσιμο R-πρότυπο I και ένας μονομορφισμός $g\colon M \longrightarrow I$ έτσι ώστε κάθε ομομορφισμός προτύπων $M \longrightarrow J$, όπου το πρότυπο J είναι ενέσιμο, αναλύεται μέσω του g. Αυτό το αποτέλεσμα οφείλεται στον R. Baer.

   Το 1953 οι B. Eckmann και A. Schöpf απέδειξαν την ύπαρξη ενέσιμων περιβλημάτων του M: δηλαδή απέδειξαν την ύπαρξη ενός αριστερά ελάχιστου μονομορφισμού $g\colon M \longrightarrow I$, όπου το πρότυπο I είναι ενέσιμο, για κάθε πρότυπο M υπεράνω τυχόντος δακτυλίου R. Είναι τότε εύκολο να δει κανείς ότι το I είναι μοναδικά καθορισμένο μέχρι ισομορφισμό από το M και επίσης είναι ευθύς προσθετέος κάθε ενέσιμου προτύπου το οποίο περιέχει ως υποπρότυπο το M.

   • *Επομένως υπεράνω ενός τυχόντος δακτυλίου, κάθε πρότυπο είναι υποπρότυπο ενός μοναδικά καθορισμένου ελάχιστου ενέσιμου προτύπου.*

Τα παραπάνω αποτελέσματα δείχνουν ότι κάθε πρότυπο μπορεί να προσεγγιστεί, κάποιες φορές με ελάχιστο τρόπο, μέσω προβολικών ή/και ενέσιμων προτύπων. Αυτή η παρατήρηση αποτελεί τη βάση της Ομολογικής Άλγεβρας καθώς η ύπαρξη προβολικών ή ενέσιμων προσεγγίσεων επιτρέπει την προβολική ή ενέσιμη ανάλυση προτύπων και έτσι την κατασκευή αριστερά ή δεξιά παραγόμενων συναρτητών.

Μετά τα προβολικά και ενέσιμα πρότυπα, η σπουδαιότερη κλάση προτύπων είναι η κλάση των επίπεδων προτύπων. Έτσι το επόμενο φυσιολογικό βήμα στην παραπάνω θεώρηση αποτελεί το ακόλουθο ερώτημα:

Πρόβλημα: *Μπορεί να προσεγγιστεί κάθε πρότυπο υπεράνω τυχόντος δακτυλίου με επίπεδα πρότυπα, κατά προτίμηση με ελάχιστο τρόπο;*

Την έννοια του επίπεδου προτύπου εισήγαγε και μελέτησε ο Serre σε ένα παράρτημα του φημισμένου άρθρου του GAGA (Geometrie algebrique et geometrie analytique), περίπου το $1955/1956$, βλέπε [29]. Σημειώνουμε ότι, όπως δείχνει το Θεώρημα των Lazard-Govorov [24], ένα πρότυπο υπεράνω ενός δακτυλίου είναι επίπεδο αν και μόνον αν είναι το ευθύ όριο ενός ευθέος συστήματος πεπερασμένα παραγόμενων ελεύθερων (ή προβολικών) προτύπων. Έτσι τα επίπεδα πρότυπα προκύπτουν από τον δακτύλιο R μέσω δύο “πράξεων”: πεπερασμένων ευθέων αθροισμάτων του R και ευθέων ορίων. Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσει κανείς ότι την ίδια περίοδο κατά την οποία άρχισαν να μελετώνται τα επίπεδα πρότυπα, ξεκίνησε και η μελέτη των ενέσιμων περιβλημάτων και των προβολικών καλύψεων.

Με βάση την έννοια των ενέσιμων περιβλημάτων και των προβολικών καλύψεων, κατά την εικοσαετία 1960-1980 διάφορα είδη (ελάχιστων) προσεγγίσεων προτύπων μέσω γνωστών κλάσεων προτύπων έκαναν την εμφάνιση τους. Αυτές οι προσεγγίσεις έγιναν γνωστές ως περιβλήματα (envelopes) και καλύψεις (covers), όπως για παράδειγμα τα καθαρά ενέσιμα περιβλήματα (pure-injective envelopes) των Fuchs και Warfield. Σταδιακά έγινε σαφές ότι τα διάφορα είδη περιβλημάτων και καλύψεων που είχαν οριστεί είχαν ως χαρακτηριστικό στοιχείο την μοναδικότητα που προερχόταν από τους ορισμούς τους. Έτσι οι Auslander και Smalø και ο Enochs [11] θέλοντας να ορίσουν περιβλήματα (envelopes) και καλύψεις (covers) προτύπων με την έννοια της μοναδικότητας ως βασικό χαρακτηριστικό τους, οδηγήθηκαν ανεξάρτητα στον ακόλουθο ορισμό:

Εάν $\mathcal{C}$ είναι μία προσθετική κατηγορία και $\mathcal{F}$ μία κλάση αντικειμένων της, τότε ένας μορφισμός $\phi\colon F \longrightarrow X$ στην $\mathcal{C}$ καλείται $\mathcal{F}$-precover του X, εάν $F \in \mathcal{F}$ και ο επαγόμενος ομομορφισμός $\mathsf{Hom}(G, F) \longrightarrow \mathsf{Hom}(G, X)$ είναι επί για κάθε $G \in \mathcal{F}$. Το $\mathcal{F}$-precover $\phi\colon F \longrightarrow X$ καλείται ένα $\mathcal{F}$-cover του X εάν ο ομομορφισμός f είναι δεξιά ελάχιστος, δηλαδή κάθε ενδομορφισμός $f\colon F \longrightarrow F$ ο οποίος κάνει το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
& F \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[d, "\phi"] \\
F \arrow[r, "\phi"] & X
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό, είναι αυτομορφισμός.

Τα preenvelopes και τα envelopes ορίζονται δυϊκά.

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ορολογία το αποτέλεσμα των Baer, Eckmann, Schöpf πιστοποιεί ότι κάθε πρότυπο υπεράνω τυχόντος δακτυλίου έχει ενέσιμο περίβλημα, και το Θεώρημα του Bass πιστοποιεί ότι κάθε (αριστερό) πρότυπο υπεράνω του δακτυλίου R έχει προβολική κάλυψη αν και μόνον αν ο δακτύλιος R είναι αριστερά τέλειος. Σημειώνουμε ότι οι αριστερά τέλειοι δακτύλιοι είναι ακριβώς οι δακτύλιοι για τους οποίους τα επίπεδα πρότυπα συμπίπτουν με τα προβολικά. Έτσι έμμεσα βλέπουμε ότι σε αριστερά τέλειους δακτυλίους, κάθε αριστερό πρότυπο έχει μία επίπεδη κάλυψη. Με βάση αυτή την παρατήρηση και μετά την μελέτη κάποιων ειδικών περιπτώσεων δακτυλίων (μεταθετικές ακέραιες περιοχές) στις οποίες μπορεί κανείς να δει σχετικά εύκολα ότι κάθε πρότυπο έχει επίπεδη κάλυψη, ο Enochs στο άρθρο του [11] το 1981 διατύπωσε την ακόλουθη εικασία:

Εικασία Επίπεδης Κάλυψης (Flat Cover Conjecture): Κάθε πρότυπο υπεράνω οποιουδήποτε δακτυλίου έχει μία επίπεδη κάλυψη.

Στην ίδια εργασία [11] αποδείχθηκε ότι εάν ένα πρότυπο έχει επίπεδο precover, τότε έχει και επίπεδο cover, το οποίο έδωσε κάποια ώθηση στη μελέτη της εικασίας.

Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση που ο δακτύλιος είναι κανονικός (regular) με την έννοια του von Neumann και των αριστερά τέλειων δακτυλίων του Bass, η Εικασία Επίπεδης Κάλυψης έχει θετική απάντηση. Κατά την εικοσαετία 1981-2001 διάφοροι ερευνητές, αναπτύσσοντας νέες μεθόδους και θεωρίες προσπάθησαν να επιλύσουν και να δώσουν μία θετική απάντηση στην εικασία. Ανάμεσα τους:

1. Ο J. Xu, ο οποίος το 1995, [33], απέδειξε ότι η Εικασία είναι αληθής για όλους τους μεταθετικούς δακτυλίους της Noether με πεπερασμένη διάσταση Krull.

2. Οι Belshoff, Enochs, Xu [12] οι οποίοι απέδειξαν ότι η Εικασία είναι αληθής για όλους τους συναφείς δακτυλίους με πεπερασμένη ασθενή ολική διάσταση.

Το 2001 η εικασία αποδείχθηκε πλήρως, ταυτόχρονα και ανεξάρτητα, από τους L.Bican, R. El Bashir και E.Enochs [7] οι οποίοι έδωσαν σε κοινή τους εργασία δύο διαφορετικές αποδείξεις στην Εικασία.

- Η πρώτη απόδειξη, που οφείλεται στους L.Bican και R. El Bashir, χρησιμοποιεί ένα αποτέλεσμα του R. El Bashir το οποίο δείχνει ότι ένας ομομορφισμός $F \longrightarrow M$ ενός επιπέδου προτύπου F (επαρκώς μεγάλο) στο M περιέχει ένα μη-μηδενικό καθαρό υπο-πρότυπο (pure submodule) του F στον πυρήνα του.
- Η άλλη απόδειξη, που οφείλεται στον E.Enochs, είναι μία μη-τετριμμένη εφαρμογή ενός θεωρήματος το οποίο αποδείχθηκε την ίδια περίοδο (2001) από τους Eklof και Trlifaj [15], και το οποίο εγγυάται την ύπαρξη «ειδικών» precovers και preenvelopes για κάποια συστρεπτικά ζεύγη (cotorsion pairs) κλάσεων προτύπων.

Στην παρούσα διατριβή θα επικεντρωθούμε στην παρουσίαση της απόδειξης της Εικασίας Επίπεδης Κάλυψης από τον E.Enochs. Επίσης θα δούμε και αποτελέσματα προσεγγίσεων προτύπων, κυρίως του E.Enochs, τα οποία αφορούν, μεταξύ άλλων, την ύπαρξη επίπεδων preenvelopes και επίπεδων περιβλημάτων, ενέσιμων precovers και ενέσιμων καλύψεων, και προβολικών preenvelopes και προβολικών περιβλημάτων. Η βασική ιδέα αυτών των προσεγγί-σεων είναι ότι η ύπαρξη ειδικού τύπου προσεγγίσεων προτύπων έχει σημαντικές συνέπειες για τον δακτύλιο οι οποίες καθιστούν ευκολότερη την περαιτέρω μελέτη του.

Συνοψίζουμε τα κυριότερα αποτελέσματα της διατριβής. Έστω R ένας προσεταιριστικός δακτύλιος με μονάδα.

1. Έστω R-Proj η κλάση των προβολικών αριστερών R-προτύπων.
   (α') Η κλάση R-Proj είναι πάντα precovering.
   (β') Η κλάση R-Proj είναι covering αν και μόνον αν ο δακτύλιος R είναι αριστερά τέλειος.
   (γ') Η κλάση R-Proj είναι (pre)enveloping αν και μόνον αν ο δακτύλιος R είναι αριστερά τέλειος και δεξιά συναφής.
2. Έστω R-Inj η κλάση των ενέσιμων αριστερών R-προτύπων.
   (α') Η κλάση R-Inj είναι πάντα enveloping.
   (β') Η κλάση R-Inj είναι (pre)covering αν και μόνον αν ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether.
3. Έστω R-Flat η κλάση των επίπεδων αριστερών R-προτύπων.
   (α') Η κλάση R-Flat είναι πάντα covering.
   (β') Η κλάση R-Flat είναι preenveloping αν και μόνον αν ο δακτύλιος R είναι δεξιά συναφής.

Βασικά εργαλεία για την συγγραφή της παρούσας διατριβής, αποτέλεσαν τα βιβλία των Enochs-Jenda [14] και Göbel-Trlifaj [17], και το βιβλίο του Xu, [32].

• • •

Η διατριβή έχει οργανωθεί σε εφτά Κεφάλαια και ένα σύντομο παράρτημα.

Στο πρώτο Κεφάλαιο, το οποίο έχει προπαρασκευαστικό χαρακτήρα, υπενθυμίζουμε τις θεμελιώδεις ιδιότητες των προτύπων, υποπροτύπων και ομομορφισμών προτύπων και κατα-λήγουμε στο συμπέρασμα ότι η κλάση των προτύπων μαζί με τους ομομορφισμούς προτύπων αποτελεί μία προσθετική και μάλιστα αβελιανή κατηγορία. Αποδεικνύουμε το λήμμα του Nakayama και αναπτύσσουμε τις έννοιες των ευθέων γινομένων, ευθέων αθροισμάτων, ελεύθερων προτύπων και τανυστικών γινομένων.

Συνεχίζουμε με την ανάπτυξη της θεωρίας των ακριβών ακολουθιών και ακριβών συναρτητών και αποδεικνύουμε ιδιαίτερα ότι συναρτητές $- \otimes X$, $X \otimes -$ είναι πάντα δεξιά ακριβείς. Τέλος, παραθέτουμε τις βασικές ιδιότητες των pullbacks και των pushouts και μελετάμε τις γενικεύσεις τους, δηλαδή τα ευθέα και τα αντίστροφα όρια, τα οποία θα χρησιμοποιηθούν σε επόμενα Κεφάλαια της διατριβής.

Στο δεύτερο Κεφάλαιο αναπτύσσουμε τα βασικά στοιχεία Ομολογικής Άλγεβρας τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε στην Διατριβή. Αναλυτικότερα εισάγουμε την έννοια του συμπλόκου προτύπων με σκοπό να ορίσουμε την n-οστή ομολογία τους H_n και αποδεικνύουμε την ύπαρξη μίας μακρά ακριβούς ακολουθίας μεταξύ διαφορετικών ομολογιών. Στη συνέχεια, παραθέτοντας τις βασικές ιδιότητες των προβολικών και ενέσιμων προτύπων, κατασκευάζουμε τις προβολικές και ενέσιμες αναλύσεις ενός τυχαίου προτύπου M. Ορίζουμε πότε δύο σύμπλοκα έχουν τον ίδιο ομοτοπικό τύπο και αποδεικνύουμε το Θεώρημα σύγκρισης το οποίο θα μας οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι δύο προβολικές (αντ. ενέσιμες) αναλύσεις ενός τυχαίου προτύπου M έχουν τον ίδιο ομοτοπικό τύπο. Τέλος, θα αναφερθούμε στη Θεωρία των παραγόμενων συναρτητών και θα επικεντρώσουμε την ανάλυσή μας στους παραγόμενους συναρτητές Ext και Tor των προσθετικών συναρτητών Hom και $\otimes$.

Στο τρίτο Κεφάλαιο αναλύουμε τα σημαντικότερα αποτελέσματα από τη θεωρία των επίπεδων προτύπων. Έτσι μετά τον ορισμό ενός επίπεδου προτύπου, βλέπουμε ότι κάθε προβολικό πρότυπο είναι επίπεδο. Στη συνέχεια, δίνοντας την έννοια του προτύπου χαρακτήρων, μελετούμε την σχέση επίπεδων και ενέσιμων προτύπων, και αποδεικνύουμε το Θεώρημα των Bourbaki-Lambek το οποίο πιστοποιεί ότι ένα πρότυπο είναι επίπεδο αν και μόνο αν το πρότυπο χαρακτήρων του είναι ενέσιμο πρότυπο.

Αποδεικνύουμε ότι το ευθύ όριο επίπεδων προτύπων είναι ξανά επίπεδο πρότυπο το οποίο θα παίξει σημαντικό ρόλο στην απόδειξη του E.Enochs στην Εικασία Επίπεδης Κάλυψης. Τέλος, αναπτύσσουμε τη βασική θεωρία των συναφών δακτυλίων, ορίζουμε την έννοια των πεπερασμένα παραστάσιμων προτύπων και αποδεικνύουμε ένα σημαντικό θεώρημα του Chase σύμφωνα με το οποίο το ευθύ γινόμενο επίπεδων αριστερών R-προτύπων είναι επίπεδο αν και μόνο αν ο δακτύλιος R είναι δεξιά συναφής.

Στο τέταρτο Κεφάλαιο αναπτύσσουμε τα βασικά στοιχεία της γενικής θεωρίας προσεγγίσεων προτύπων. Εισάγουμε τις έννοιες των precovers και preenvelopes, καθώς και τις ελαχιστικές εκδοχές τους, δηλαδή τις έννοιες των covers και envelopes και ορίζουμε πότε μία κλάση καλείται (pre)covering και (pre)enveloping. Συνεχίζουμε με την έννοια του συστρεπτικού ζεύγους, δίνουμε τους ορισμούς των συστρεπτικών και καθαρά ενέσιμων προτύπων και αποδεικνύουμε ότι το ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$, όπου $\mathcal{F}$ είναι η κλάση των επίπεδων προτύπων και $\mathcal{C}$ των συστρεπτικών, είναι συστρεπτικό ζεύγος. Επίσης, ορίζουμε πότε μία κλάση ή ένα σύνολο προτύπων συνπαράγει ή παράγει ένα συστρεπτικό ζεύγος. Δίνουμε την έννοια του ειδικού precover (preenvelope) και ορίζοντας πότε μία κλάση καλείται ειδική precovering (preenveloping) αποδεικνύουμε το λήμμα του Wakamatsu το οποίο θα μας οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι εάν σε ένα συστρεπτικό ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ η κλάση $\mathcal{F}$ είναι covering τότε είναι και ειδική precovering και εάν η κλάση $\mathcal{C}$ είναι enveloping τότε είναι και ειδική preenveloping. Ορίζουμε πότε ένα συστρεπτικό ζεύγος είναι πλήρες, κλειστό και τέλειο και καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι κάθε τέλειο συστρεπτκό ζεύγος είναι πλήρες.

Στην συνέχεια, με τη βοήθεια της έννοιας του γεννήτορα επεκτάσεων, αποδεικνύουμε ένα βασικό αποτέλεσμα το οποίο βοήθησε στην επίλυση της Εικασίας Επίπεδης Κάλυψης και το οποίο εξασφαλίζει ότι αν μία κλάση προτύπων, με βασικό παράδειγμα την κλάση των επίπεδων προτύπων, είναι κλειστή στα ευθέα όρια και κάθε πρότυπο έχει ένα precover, τότε έχει και ένα cover. Τέλος, θα αναλύσουμε και θα δώσουμε απαντήσεις στο ακόλουθο πρόβλημα:

Πρόβλημα: Είναι δυνατόν πρότυπα υπεράνω ενός δακτυλίου να προσεγγισθούν (με ελάχιστο τρόπο) μέσω σημαντικών κλάσεων προτύπων, όπως για παράδειγμα η κλάση των προβολικών, ενέσιμων ή επίπεδων, προτύπων;

Στο πέμπτο Κεφάλαιο αποδεικνύουμε την Εικασία Επίπεδης Κάλυψης για κάποιες κλάσεις δακτυλίων οι οποίοι ικανοποιούν συγκεκριμένες συνθήκες πεπερατότητας ομολογικών διαστάσεων. Εν πρώτοις, ορίζουμε το καθαρά ενέσιμο envelope ενός προτύπου και αποδεικνύουμε ότι υπεράνω ενός δεξιά συναφή δακτυλίου, το καθαρά ενέσιμο envelope ενός επίπεδου προτύπου είναι επίπεδο πρότυπο. Το αποτέλεσμα αυτό θα μας βοηθήσει να αποδείξουμε ότι υπεράνω ενός δεξιά συναφή δακτυλίου, κάθε πρότυπο M έχει επίπεδη κάλυψη αν και μόνο αν υπάρχει ακριβής ακολουθία της μορφής: $0 \longrightarrow M \longrightarrow G \longrightarrow F \longrightarrow 0$, όπου το F είναι επίπεδο και το G είναι συστρεπτικό και έχει επίπεδη κάλυψη. Συνεχίζουμε με την απόδειξη ύπαρξης επίπεδων καλύψεων των καθαρά ενέσιμων προτύπων υπεράνω ενός δεξιά συναφή δακτυλίου και καταλήγουμε ότι τα επίπεδα πρότυπα έχουν πάντα επίπεδες καλύψεις υπεράνω αυτών των δακτυλίων.

Αποδεικνύουμε ότι εάν σε μία ακριβή ακολουθία $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$, υπεράνω ενός δεξιά συναφή δακτυλίου, τα A, B έχουν επίπεδες καλύψεις τότε έχει και το C και έτσι οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι πρότυπα με πεπερασμένη επίπεδη διάσταση έχουν επίπεδες καλύψεις. Κλείνουμε το κεφάλαιο αυτό με την απόδειξη ύπαρξης επίπεδων καλύψεων προτύπων με πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση και δίνουμε εφαρμόγες πάνω στο αποτέλεσμα αυτό με επίπεδες καλύψεις προτύπων με πεπερασμένη καθαρά ενέσιμη διάσταση.

Στο έκτο Κεφάλαιο παρουσιάζουμε την απόδειξη της Εικασίας Επίπεδης Κάλυψης από τον E.Enochs.

- (Βασική Ιδέα της Απόδειξης): O E.Enochs χρησιμοποιεί ένα θεώρημα των Eklof και Trlifaj το οποίο αφορά συνθήκες μηδενισμού του συναρτητή Ext και το οποίο εγγυάται ύπαρξη «ειδικών» precovers και preenvelopes για συστρεπτικά ζεύγη τα οποία συνπαράγονται από ένα σύνολο προτύπων. Αυτό το αποτέλεσμα σε συνδυασμό με το γεγονός ότι η ύπαρξη των επίπεδων precovers επάγει την ύπαρξη των επίπεδων covers, ανάγει την απόδειξη της Εικασίας στην απόδειξη του ισχυρισμού ότι το επίπεδο συστρεπτικό ζεύγος συνπαράγεται από ένα σύνολο προτύπων. Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού από τον E.Enochs αποτελεί το τελευταίο βήμα στην απόδειξη της Εικασίας Επίπεδης Κάλυψης.

Στο έβδομο Κεφάλαιο περιγράφουμε εν συντομία και χωρίς αποδείξεις νεότερες εξελίξεις και γενικεύσεις οι οποίες έλαβαν χώρα την δεκαετία μετά την απόδειξη της Εικασίας Επίπεδης Κάλυψης (2002-2012). Τα αποτελέσματα τα οποία αναφέρουμε αφορούν την ύπαρξη επίπεδων καλύψεων σε κατηγορίες γενικότερες των κατηγοριών προτύπων, και στις οποίες μπορούμε να ορίσουμε την έννοια της επιπεδότητας. Αυτές οι κατηγορίες περιλαμβάνουν κατάλληλες κατηγορίες του Grothendieck και ειδικότερα κατηγορίες δραγμάτων (sheaves) υπεράνω τοπολογικών χώρων οι οποίες διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην Αλγεβρική Γεωμετρία.

Η Διατριβή κλείνει με ένα Παράρτημα στο οποίο αναλύουμε τα βασικά στοιχεία της θεωρίας συνόλων, της θεωρίας διατακτικών αριθμών και πληθαρίθμων, και της υπερπεπερασμένης επαγωγής, τα οποία χρησιμοποιούμε στην Διατριβή.

Ευχαριστίες:

Με την ολοκλήρωση της μεταπτυχιακής μου διατριβής, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους ανθρώπους που συνέβαλαν στην διεκπεραίωση της.

Κατά κύριο λόγο, οφείλω να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον επιβλέποντα μου Αναπληρωτή Καθηγητή κ.Απόστολο Μπεληγιάννη, που μου έδωσε την ευκαιρία να ασχοληθώ με ένα θέμα ιδιαιτέρου ενδιαφέροντος. Τον ευχαριστώ επίσης για τις πολύτιμες γνώσεις και συμβουλές που μου παρείχε καθ'ολη τη διάρκεια της διατριβής, καθώς και για την υποστήριξη και την καθοδήγηση του.

Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα άλλα μέλη της τριμελούς επιτροπής εξέτασης για την παρούσα εργασία, τον Καθηγητή κ. Νικόλαο Μαρμαρίδη και τον Καθηγητή κ. Απόστολο Θωμά, για την συμβολή τους στην ολοκλήρωση και στην διόρθωση της εργασίας μου.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για τα όσα έχει κάνει για μένα και τους φίλους μου για τη στήριξη, τη συμπαράσταση και την κατανόησή τους.

Χριστίνα-Θεοδώρα Κουλούρη

Ιωάννινα, Ιανουάριος 2014

Κεφάλαιο 1

Στοιχεία θεωρίας Προτύπων

Στο κεφάλαιο αυτό, το οποίο έχει προπαρασκευαστικό χαρακτήρα, αναπτύσσουμε τη βασική θεωρία προτύπων η οποία θα μας χρειασθεί στα επόμενα κεφάλαια.

Επίσης εισάγουμε ορολογία και συμβολισμούς οι οποίοι θα παραμείνουν εν χρήσει καθ' όλη την έκταση της διατριβής.

1.1 Πρότυπα, Υποπρότυπα και Ομομορφισμοί

Από τώρα και στο εξής με τον όρο *δακτύλιο* θα εννοούμε έναν προσεταιριστικό δακτύλιο με μονάδα (όχι απαραίτητα μεταθετικό).

Έστω R ένας δακτύλιος. Υπενθυμίζουμε την έννοια του (αριστερού) R-προτύπου:

Ορισμός 1.1.1. *Ένα* **αριστερό R-πρότυπο** *είναι μια (προσθετική) αβελιανή ομάδα M η οποία είναι εφοδιασμένη με μια απεικόνιση (αριστερή δράση)*

$$\star: \ R \times M \longrightarrow M, \quad (r, m) \ \longmapsto \ r \star m$$

η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες, $\forall x, y \in M$ και $\forall r, s \in R$:

1. $r \star (x + y) = r \star x + r \star y$
2. $(r + s) \star x = r \star x + s \star x$
3. $(rs) \star x = r \star (s \star x)$
4. $1 \star x = x$

(όπου $1 = 1_R$ είναι η μονάδα του δακτυλίου R.)

Παρατήρηση 1.1.2. Η έννοια του δεξιού R-προτύπου είναι δυϊκή της έννοιας του αριστερού R-προτύπου. Έτσι ένα **δεξιό R-πρότυπο** είναι μια (προσθετική) αβελιανή ομάδα M η οποία είναι εφοδιασμένη με μια απεικόνιση (δεξιά δράση)

$$\star: \ M \times R \longrightarrow M, \quad (m, r) \ \longmapsto \ m \star r$$

η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες, $\forall x, y \in M$ και $\forall r, s \in R$:

1. $(x + y) \star r = x \star r + y \star r$
2. $x \star (r + s) = x \star r + x \star s$
3. $x \star (rs) = (x \star r) \star s$

4. $x \star 1 = x$

Χάριν απλότητας και αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, από τώρα και στο εξής, αν M είναι ένα αριστερό, αντίστοιχα δεξιό, R-πρότυπο υπεράνω του δακτυλίου R, θα σημειώνουμε με $rm := r \star m$, αντίστοιχα $mr := m \star r$, τη δράση του στοιχείου $r \in R$ επί του στοιχείου $m \in M$.

Σημειώνουμε ότι αν R είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος τότε κάθε αριστερό R-πρότυπο M μπορεί να γίνει δεξιό R-πρότυπο ορίζοντας δεξιά δράση $\star\colon M \times R \longrightarrow M$, $(x,r) \longmapsto x \star r := rx$. Έτσι σε αυτή την περίπτωση τα αριστερά R-πρότυπα συμπίπτουν με τα δεξιά R-πρότυπα.

Ορισμός 1.1.3. *Ο* **αντίθετος δακτύλιος** R^{op} *του δακτυλίου* R*, είναι ο δακτύλιος του οποίου η υποκείμενη αβελιανή ομάδα συμπίπτει με την υποκείμενη αβελιανή ομάδα του δακτυλίου* R*, και ο πολλαπλασιασμός* $\cdot^{\mathsf{op}}$ *του* R^{op} *ορίζεται μέσω του πολλαπλασιασμού του* R *ως εξής:* $r \cdot^{\mathsf{op}} s = sr$.

Κάθε αριστερό R-πρότυπο μπορεί να γίνει δεξιό R^{op}-πρότυπο ορίζοντας δεξιά δράση

$$\star\colon M \times R^{\mathsf{op}} \longrightarrow M,\ (x,r) \longmapsto x \star r := rx$$

$\forall x \in M, \forall r \in R$. Παρόμοια, ένα δεξιό R-πρότυπο μπορεί να γίνει αριστερό R^{op}-πρότυπο.

Συνεχίζουμε τώρα με κάποια παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.1.4.

1. Όταν ο δακτύλιος R είναι ένα σώμα F τότε οι συνθήκες που ικανοποιούνται για ένα αριστερό R-πρότυπο είναι ακριβώς οι ίδιες με αυτές του διανυσματικού χώρου υπεράνω του F, έτσι πρότυπα υπεράνω ενός σώματος F και διανυσματικοί χώροι υπεράνω του F συμπίπτουν.

2. Κάθε αβελιανή ομάδα είναι ένα αριστερό $R = \mathbb{Z}$-πρότυπο με αριστερή δράση

$$R \times M \longrightarrow M, \quad (r,m) \longmapsto rm := \begin{cases} m + \cdots + m \ (r \text{ φορές}) & ,\text{αν } r > 0 \\ 0 & ,\text{αν } r = 0 \\ (-r) \cdot m & ,\text{αν } r < 0 \end{cases}$$

Παρόμοια, κάθε αβελιανή ομάδα είναι ένα δεξιό $R = \mathbb{Z}$-πρότυπο.

3. Κάθε δακτύλιος R είναι ένα πρότυπο υπεράνω του εαυτού του εάν ορίσουμε την δράση

$$R \times R \longrightarrow R, \quad (r,s) \longmapsto r \cdot s.$$

Επιπλέον, κάθε ιδεώδες I υπεράνω ενός δακτυλίου R είναι ένα R-πρότυπο.

4. Η αβελιανή ομάδα $\mathbb{M}_n(R)$ (το σύνολο των $n \times n$-πινάκων υπεράνω του R) είναι ένα αριστερό R-πρότυπο με αριστερή δράση

$$R \times M_n(R) \longrightarrow M_n(R), \quad (r,(a_{ij})) \longmapsto (r \cdot a_{ij})$$

$\forall r \in R$, $\forall (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(R)$. Παρόμοια, $\mathbb{M}_n(R)$ είναι και δεξιό R-πρότυπο.

Ορισμός 1.1.5. *Έστω* R,S *δύο δακτύλιοι, τότε μια αβελιανή ομάδα* M *λέγεται* (R,S)-**διπρότυπο**, *εάν* M *είναι ένα αριστερό* R*-πρότυπο και δεξιό* S*-πρότυπο και επιπλέον ισχύει*

$$(rm)s = r(ms), \quad \forall\, r \in R,\ \forall\, s \in S,\ \forall\, m \in M$$

Παρατήρηση 1.1.6. Κάθε δακτύλιος R είναι ένα (R,R)-διπρότυπο.

Στο εξής θα αναφερόμαστε σε αριστερά R-πρότυπα. Τα ίδια αποτελέσματα ισχύουν και για δεξιά.

Ορισμός 1.1.7. *Εάν M είναι ένα αριστερό R-πρότυπο, τότε ένα* **υποπρότυπο** *N του M είναι μια προσθετική υποομάδα N του M η οποία είναι κλειστή στην αριστερή δράση*

$$R \times N \longrightarrow N, \quad (r, n) \longmapsto r \cdot n \in N, \quad \forall n \in N, \forall r \in R$$

Κάποια στοιχειώδη παραδείγματα υποπροτύπων είναι τα εξής:

Παράδειγμα 1.1.8.

1. Το $\{0\}$ και το M είναι υποπρότυπα ενός αριστερού R-προτύπου M και τα ονομάζουμε τετριμμένα. Ένα αριστερό R-πρότυπο M λέγεται **απλό** εάν τα μόνα υποπρότυπα του είναι το $\{0\}$ και το M. Ένα **γνήσιο** υποπρότυπο του M είναι ένα υποπρότυπο N με $N \neq M$.

2. Εάν ο δακτύλιος R θεωρηθεί ως αριστερό πρότυπο υπεράνω του εαυτού του, τότε ένα υποπρότυπο του R είναι ένα αριστερό ιδεώδες του.

3. Εάν M είναι ένα αριστερό R-πρότυπο και $r \in R$, όπου R μεταθετικός δακτύλιος, τότε το σύνολο
$$rM = \big\{rm \mid m \in M\big\}$$
είναι ένα υποπρότυπο του M.

4. Εάν $\{M_\alpha, \alpha \in \Delta\}$ είναι μια οικογένεια υποπροτύπων ενός αριστερού R-προτύπου M, τότε το σύνολο
$$\sum_{\alpha \in \Delta} M_\alpha = \Big\{ \sum_{\alpha \in \Delta} x_\alpha \mid x_\alpha \in M_\alpha, \ \forall \alpha \in \Delta \Big\}$$
είναι ένα υποπρότυπο του M.

5. Εάν $(S_i)_{i \in I}$ είναι μία οικογένεια υποπροτύπων ενός αριστερού R-προτύπου M, τότε η τομή $\cap_{i \in I}(S_i)$ είναι ένα υποπρότυπο του M.

6. Εάν X είναι ένα υποσύνολο ενός αριστερού R-προτύπου M, τότε το σύνολο όλων των R-γραμμικών συνδυασμών των στοιχείων του X
$$\langle X \rangle = \Big\{ \sum_{i=1}^{k} r_i \cdot x_i \mid \ r_i \in R, \ \ x_i \in X \Big\}$$
καλείται το **υποπρότυπο που παράγεται από το** X. Εάν τώρα το υποσύνολο X αποτελείται από ένα στοιχείο m, δηλαδή $X = \{m\}$, τότε το σύνολο
$$\langle m \rangle = \big\{rm \mid r \in R\big\}$$
καλείται το υποπρότυπο που παράγεται από το m. Ένα αριστερό R-πρότυπο M καλείται **κυκλικό** εάν υπάρχει $m \in M$ με
$$M = \langle m \rangle = \{rm \mid r \in R\}$$
Για παράδειγμα, αν ο δακτύλιος R ιδωθεί ως αριστερό R-πρότυπο τότε είναι ένα κυκλικό R-πρότυπο διότι $R = \langle 1 \rangle$.

Ας περάσουμε στον ορισμό ενός πεπερασμένα παραγόμενου προτύπου.

Ορισμός 1.1.9. *Ένα αριστερό R-πρότυπο M είναι* **πεπερασμένα παραγόμενο** *εάν το M παράγεται από ένα πεπερασμένο σύνολο, δηλαδή υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο του M $X = \{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq M$ έτσι ώστε*
$$M = \langle X \rangle.$$

Ορισμός 1.1.10. *Εάν N είναι ένα υποπρότυπο ενός αριστερού R-προτύπου M, τότε το* **πρότυπο πηλίκο** *είναι η ομάδα πηλίκο M/N (M είναι αβελιανή ομάδα και N είναι υποομάδα της) εφοδιασμένη με μία αριστερή δράση*

$$R \times M/N \longrightarrow M/N, \quad (r, m+N) \longmapsto r \cdot (m+N) := r \cdot m + N$$

Τώρα θα παρουσιάσουμε την έννοια του ομομορφισμού προτύπων.

Ορισμός 1.1.11. *Έστω R ένας δακτύλιος και M, N δύο αριστερά R-πρότυπα.*

1. *Η απεικόνιση $f\colon M \longrightarrow N$ είναι ένας* **ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων** *εάν $\forall m, m' \in M$ και $\forall r \in R$*
   (a) $f(m+m') = f(m) + f(m')$,
   (b) $f(rm) = rf(m)$.
2. *Ένας ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων $f\colon M \longrightarrow N$ λέγεται* **μονομορφισμός** *(αντ.* **επιμορφισμός***) αν ως απεικόνιση η f είναι $1-1$ (αντ. επί).* **Ισομορφισμός αριστερών R-προτύπων** *είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων που είναι ταυτόχρονα ως απεικόνιση $1-1$ και επί και ένας ισομορφισμός $f\colon M \longrightarrow M$ καλείται* **αυτομορφισμός** *στο M. Δύο αριστερά R-πρότυπα M και N λέγονται* **ισομορφικά** *και τα συμβολίζουμε $M \cong N$ εάν υπάρχει ισομορφισμός $f\colon M \longrightarrow N$.*
3. *Εάν $f\colon M \longrightarrow N$ είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων τότε :*
   (a) *Το υποσύνολο*
   $$\operatorname{Ker} f = \{m \in M \mid f(m) = 0\} \quad \textit{καλείται } \textbf{πυρήνας} \textit{ της } f.$$
   (b) *Το υποσύνολο*
   $$\operatorname{Im} f = \{n \in N \mid \exists m \in M \ \textit{με}\ n = f(m)\} \quad \textit{καλείται } \textbf{εικόνα} \textit{ της } f.$$
   (c) *Το σύνολο*
   $$\operatorname{Coker} f = N/\operatorname{Im} f \quad \textit{καλείται } \textbf{συνπυρήνας} \textit{ της } f.$$
4. *Ορίζουμε*
   $$\operatorname{Hom}_R(M, N) = \{\textit{όλοι οι ομομορφισμοί αριστερών } R\textit{-προτύπων } M \longrightarrow N\}$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι:

1. το υποσύνολο $\operatorname{Ker} f$ του M είναι υποπρότυπο του M,
2. το υποσύνολο $\operatorname{Im} f$ του N είναι υποπρότυπο του N, και επομένως ορίζεται το πρότυπο πηλίκο $N/\operatorname{Im} f$.

Επίσης εύκολα βλέπουμε ότι ένας ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων f είναι μονομορφισμός αν και μόνο αν $\operatorname{Ker} f = 0$ και ένας ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων f είναι επιμορφισμός αν και μόνο αν $\operatorname{Im} f = N$.

Επιπλέον, ένας ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων f είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν υπάρχει ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων $g\colon N \longrightarrow M$ τέτοιος ώστε

$$f \circ g = \mathrm{Id}_N \quad \text{και} \quad g \circ f = \mathrm{Id}_M.$$

Πρόταση 1.1.12. *Έστω M, N δύο αριστερά R-πρότυπα. Εάν $f, g \in \mathsf{Hom}_R(M, N)$ τότε ορίζουμε $f + g$ ως*

$$(f + g)(m) := f(m) + g(m), \forall m \in M.$$

Τότε $f + g \in \mathsf{Hom}_R(M, N)$ και έτσι με αυτή την πράξη το σύνολο $\mathsf{Hom}_R(M, N)$ είναι μία αβελιανή ομάδα. Εάν R είναι μεταθετικός δακτύλιος, τότε για $r \in R$, ορίζουμε rf ως

$$(rf)(m) := f(rm), \forall m \in M.$$

Τότε $rf \in \mathsf{Hom}_R(M, N)$ και με αυτή την αριστερή δράση του μεταθετικού δακτυλίου η αβελιανή ομάδα $\mathsf{Hom}_R(M, N)$ είναι αριστερό R-πρότυπο.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [10, Proposition 2,Chapter 10]. □

Παρατήρηση 1.1.13. Σημειώνουμε ότι άν ο δακτύλιος R δεν είναι μεταθετικός τότε η αβελιανή ομάδα $\mathsf{Hom}_R(M, N)$ είναι δεξιό R-πρότυπο μέσω της δεξιάς δράσης $(fr)(m) := f(rm)$.

Παρατήρηση 1.1.14. Έστω R, S δύο δακτύλιοι.

- Εάν το M είναι ένα (R, S)-διπρότυπο και το N ένα αριστερό R-πρότυπο, τότε η αβελιανή ομάδα $\mathsf{Hom}_R(M, N)$ είναι ένα αριστερό S-πρότυπο ορίζοντας αριστερή δράση
$$S \times \mathsf{Hom}_R(M, N) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(M, N), \quad (s, f) \longmapsto sf$$
όπου $sf : M \longrightarrow N$ με $(sf)(m) := f(ms)$.

- Εάν το M είναι ένα (R, S)-διπρότυπο και το N ένα δεξιό S-πρότυπο, τότε η αβελιανή ομάδα $\mathsf{Hom}_S(M, N)$ είναι ένα δεξιό R-πρότυπο ορίζοντας δεξιά δράση
$$\mathsf{Hom}_S(M, N) \times R \longrightarrow \mathsf{Hom}_S(M, N), \quad (f, r) \longmapsto fr$$
όπου $rf : M \longrightarrow N$ με $(rf)(m) := f(rm)$.

- Εάν το M είναι ένα αριστερό R-πρότυπο και το N ένα (R, S)-διπρότυπο, τότε η αβελιανή ομάδα $\mathsf{Hom}_R(M, N)$ είναι ένα δεξιό S-πρότυπο ορίζοντας δεξιά δράση
$$\mathsf{Hom}_R(M, N) \times S \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(M, N), \quad (f, s) \longmapsto fs$$
όπου $fs : M \longrightarrow N$ με $(fs)(m) := f(m)s$.

- Εάν το M είναι ένα δεξιό S-πρότυπο και το N ένα (R, S)-διπρότυπο, τότε η αβελιανή ομάδα $\mathsf{Hom}_S(M, N)$ είναι ένα αριστερό R-πρότυπο ορίζοντας αριστερή δράση
$$R \times \mathsf{Hom}_S(M, N) \longrightarrow \mathsf{Hom}_S(M, N), \quad (r, f) \longmapsto rf$$
όπου $rf : M \longrightarrow N$ με $(rf)(m) := rf(m)$.

Θεώρημα 1.1.15. *Έστω M είναι ένα αριστερό R-πρότυπο. Τότε η απεικόνιση*

$$\phi\colon \mathsf{Hom}_R(R, M) \longrightarrow M, \quad \phi(f) := f(1)$$

είναι ένας ισομορφισμός αριστερών R-προτύπων, όπου $f \in \mathsf{Hom}_R(R, M)$.

Απόδειξη. Από την προηγούμενη παρατήρηση έπεται εύκολα ότι το $\mathsf{Hom}_R(R, M)$ είναι ένα αριστερό R-πρότυπο. Αρχικά θα δείξουμε ότι η απεικόνιση ϕ είναι ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων. Έχουμε ότι $\phi(f + g) = (f + g)(1) = f(1) + g(1) = \phi(f) + \phi(g)$ και $\phi(rf) = (rf)(1) = f(r) = rf(1) = r\phi(f)$. Επομένως η ϕ είναι ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων. Εάν $f \in \mathsf{Ker}\,\phi$, τότε $0 = \phi(f) = f(1)$. Τότε $f(r) = f(r \cdot 1) = rf(1) = r \cdot 0 = 0$, $\forall r \in R$ και επομένως $f = 0$. Άρα η ϕ είναι μονομορφισμός. Εάν $x \in M$, τότε η απεικόνιση $f_x : R \to M$ ορισμένη ως $f_x(r) = rx$ είναι ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων και έχουμε ότι $\phi(f_x) = x$. Επομένως, η ϕ είναι επιμορφισμός. □

Θα περάσουμε τώρα στα τρία βασικά θεωρήματα ισομορφισμών για πρότυπα.

Θεώρημα 1.1.16. *1.* **(Πρώτο Θεώρημα Ισομορφισμών)** *Εάν $f\colon M \longrightarrow N$ είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων, τότε υπάρχει ισομορφισμός αριστερών R-προτύπων*

$$\phi\colon M/\operatorname{Ker} f \longrightarrow \operatorname{Im} f, \quad \phi(m + \operatorname{Ker} f) = f(m)$$

2. **(Δεύτερο Θεώρημα Ισομορφισμών)** *Εάν M_1 και M_2 είναι υποπρότυπα ενός αριστερού R-προτύπου M τέτοια ώστε $M_1 \subseteq M_2$, τότε M_2/M_1 είναι υποπρότυπο του M/M_1 και υπάρχει ισομορφισμός αριστερών R-προτύπων*

$$f\colon M/M_1 \Big/ M_2/M_1 \longrightarrow M/M_2$$

3. **(Τρίτο Θεώρημα Ισομορφισμών)** *Εάν M_1 και M_2 είναι υποπρότυπα ενός αριστερού R-προτύπου M, τότε υπάρχει ισομορφισμός αριστερών R-προτύπων*

$$f\colon M_1/M_1 \cap M_2 \longrightarrow (M_1 + M_2)/M_2$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [24, theorem 2.11, 2.12, 2, 13]. □

Κλείνουμε τώρα την παράγραφο αυτή με τον ορισμό του ριζικού του Jacobson με σκοπό να αναφερθούμε στο λήμμα του Nakayama.

Ορισμός 1.1.17. *Το* **ριζικό του Jacobson** *$J = \operatorname{rad} R$ ορίζεται να είναι η τομή όλων των μεγιστοτικών αριστερών ιδεωδών ενός δακτυλίου R.*

Αποδεικνύεται ότι το ριζικό του Jacobson είναι ένα αμφίπλευρο ιδεώδες και συμπίπτει με τον τομή των μεγιστοτικών δεξιών ιδεωδών του R.

Τα στοιχεία του $\operatorname{rad} R$ χαρακτηρίζονται από την εξής πρόταση:

Πρόταση 1.1.18. *Αν c είναι ένα στοιχείο ενός δακτυλίου R, τότε $c \in \operatorname{rad} R$ αν και μόνο αν, για κάθε $a \in R$, το στοιχείο $1 - ac$ έχει ένα αριστερό αντίστροφο, δηλαδή υπάρχει $s \in R$ τέτοιο ώστε $s(1 - ac) = 1$.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [24, proposition 4.50]. □

Εάν M είναι ένα αριστερό R-πρότυπο και I είναι ένα δεξιό ιδεώδες του R, τότε

$$IM = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \mid x_i \in M, a_i \in I \Big\}$$

είναι μία υποομάδα του M.

Τώρα ας περάσουμε στο λήμμα του Nakayama.

Λήμμα 1.1.19. *(***Λήμμα του Nakayama***) Έστω M ένα πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό R-πρότυπο και $J = \operatorname{rad} R$ το ριζικό του Jacobson. Αν $M = JM$ τότε $M = \{0\}$.*

Απόδειξη. Επειδή M είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό R-πρότυπο, έστω $K = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ ένα ελαχιστοτικό σύνολο που παράγει το M, με την έννοια ότι δεν υπάρχει άλλο γνήσιο υποσύνολο του K που να το παράγει. Από υπόθεση έχουμε ότι $M = JM$, επομένως $m_1 = \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot m_i$, όπου $r_i \in J$. Άρα έχουμε ότι

$$(1 - r_1) \cdot m_1 = \sum_{i=2}^{n} r_i \cdot m_i.$$

Επειδή $r_1 \in J$, από την Πρόταση (1.1.18), το $1 - r_1$ θα έχει αριστερό αντίστροφο, έστω $s \in R$. Δηλαδή θα ισχύει ότι $s(1 - r_1) = 1$. Άρα $(1 - r_1) \cdot m_1 = \sum_{i=2}^{n} r_i \cdot m_i \Rightarrow s(1 - r_1) \cdot m_1 = \sum_{i=2}^{n} s r_i \cdot m_i \Rightarrow m_1 = \sum_{i=2}^{n} s r_i \cdot m_i$. Άρα το M παράγεται από το σύνολο $\{m_2, \ldots, m_n\} \subsetneq \{m_1, \ldots, m_n\}$. Άτοπο, άρα $M = \{0\}$. □

Η ακόλουθη συνέπεια είναι επίσης γνωστή ως Λήμμα του Nakayama.

Πόρισμα 1.1.20. *Έστω M, N δύο αριστερά R-πρότυπα με $N \subseteq M$. Έστω M ένα πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό R-πρότυπο. Εάν $M = N + JM$ τότε $M = N$.*

Απόδειξη. Ισχύει ότι $J(M/N) = (JM + N)/N$. Οπότε αν αντικαταστήσουμε στην ισότητα αυτή την υπόθεσή μας ότι $M = N + JM$ θα έχουμε ότι $J(M/N) = M/N$. Το M/N είναι πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό R-πρότυπο ως πηλίκο πεπερασμένα παραγόμενου αριστερού R-προτύπου. Έτσι αν εφαρμόσουμε το Λήμμα του Nakayama στο M/N, θα έχουμε ότι $M/N = 0$ δηλαδή $M = N$, εφόσον $N \subseteq M$. □

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η κλάση των αριστερών προτύπων μαζί με τους ομομορφισμούς αριστερών R-προτύπων υπεράνω του δακτυλίου R, αποτελεί μια (προσθετική και μάλιστα αβελιανή) κατηγορία, η οποία συμβολίζεται με R-Mod . Παρόμοια η κλάση των δεξιών προτύπων μαζί με τους ομομορφισμούς δεξιών R-προτύπων υπεράνω του δακτυλίου R, αποτελεί μια (προσθετική και μάλιστα αβελιανή) κατηγορία, η οποία συμβολίζεται με Mod-R .

1.2 Κατασκευές Προτύπων

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εισάγουμε τέσσερις έννοιες-κατασκευές οι οποίες θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια καθώς παίζουν σημαντικό ρόλο στην απόδειξη του κεντρικού αποτελέσματος της διατριβής. Αυτές οι έννοιες-κατασκευές είναι τα ευθέα γινόμενα, τα ευθέα αθροίσματα, τα ελεύθερα πρότυπα, και τα τανυστικά γινόμενα.

1.2.1 Ευθέα Γινόμενα και Αθροίσματα

Ας ξεκινήσουμε με τα ευθέα γινόμενα:

Έστω R δακτύλιος με μονάδα και $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ μια οικογένεια αριστερών R-προτύπων, όπου Δ είναι ένα σύνολο δεικτών. Τότε το καρτεσιανό γινόμενο συνόλων

$$\prod_{\alpha\in\Delta} M_\alpha = \{(m_\alpha) \mid m_\alpha \in M_\alpha,\ \forall\alpha \in \Delta\}$$

γίνεται αριστερό R-πρότυπο αν ορίσουμε:

1. $(m_\alpha) + (m'_\alpha) = (m_\alpha + m'_\alpha)$,
2. $r \cdot (m_\alpha) = (r \cdot m_\alpha), \quad \forall m_\alpha, m'_\alpha \in \prod_{\alpha\in\Delta} M_\alpha, \forall r \in R$.

Επιπλέον ορίζουμε ομομορφισμούς, $\forall\beta \in \Delta$:

$$\varpi_\beta\colon \prod_{\alpha\in\Delta} M_\alpha \longrightarrow M_\beta, \quad \varpi_\beta((m_\alpha)) = m_\beta$$

Η οικογένεια $\{\varpi_\alpha\colon \prod_{\alpha\in\Delta} M_\alpha \longrightarrow M_\alpha\}$ καλείται **οικογένεια κανονικών προβολών**. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι κάθε τέτοια απεικόνιση ϖ_α είναι επιμορφισμός.

Το αριστερό R-πρότυπο $\prod_{\alpha\in\Delta} M_\alpha$ μαζί με την οικογένεια των κανονικών προβολών $\{\varpi_\alpha\colon \prod_{\alpha\in\Delta} M_\alpha \longrightarrow M_\alpha\}$ καλείται **ευθύ γινόμενο** της οικογενείας $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ και συμβολίζεται με $\big(\prod_{\alpha\in\Delta} M_\alpha, \varpi_\alpha\big)$.

Η επόμενη Πρόταση μας δίνει μια βασική ιδιότητα του ευθέως γινομένου $\big(\prod_{\alpha\in\Delta} M_\alpha, \varpi_\alpha\big)$.

Πρόταση 1.2.1. *Εάν $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ είναι μια οικογένεια αριστερών R-προτύπων, τότε το ευθύ γινόμενο $\big(\prod_{\alpha\in\Delta} M_\alpha, \varpi_\alpha\big)$ έχει την ιδιότητα ότι για κάθε αριστερό R-πρότυπο N και για κάθε* *οικογένεια ομομορφισμών αριστερών R-προτύπων $\{f_\alpha \colon N \longrightarrow M_\alpha\}$ υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων $f \colon N \longrightarrow \prod_{\alpha\in\Delta} M_\alpha$ που κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[d, "f_\alpha"] \\ \prod_{\alpha\in\Delta} M_\alpha \arrow[r, two heads, "\pi_\alpha"'] & M_\alpha \end{tikzcd}$$

Δηλαδή, κάθε απεικόνιση $f_\alpha \colon N \longrightarrow M_\alpha$ γράφεται ως $f_\alpha = \varpi_\alpha \circ f$, $\forall \alpha \in \Delta$ για κάποιον ομομορφισμό $f \colon N \longrightarrow \prod_{\alpha\in\Delta} M_\alpha$.

Απόδειξη. Έστω N ένα αριστερό R-πρότυπο και υποθέτουμε ότι $\forall \alpha \in \Delta$, $f_\alpha \colon N \to M_\alpha$ είναι ομομορφισμοί αριστερών R-προτύπων. Ορίζουμε

$$f \colon N \longrightarrow \prod_{\alpha\in\Delta} M_\alpha, \quad f(x) = (f_\alpha(x)).$$

Τότε $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$, $\forall \alpha \in \Delta$. Τώρα ας υποθέσουμε ότι $g \colon N \longrightarrow \prod_{\alpha\in\Delta} M_\alpha$ είναι επίσης ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων τέτοιος ώστε $f_\alpha = \varpi_\alpha \circ g$, $\forall \alpha \in \Delta$. Εάν $g(x) = (x_\alpha)$ τότε $f_\alpha(x) = \varpi_\alpha \circ g(x) = \varpi_\alpha((x_\alpha)) = x_\alpha$ άρα $(x_\alpha) = (f_\alpha(x)) = f(x)$. Επομένως $f = g$ και έτσι έχουμε και την μοναδικότητα. □

Η ιδιότητα της Πρότασης (1.2.1) είναι γνωστή ως καθολική ιδιότητα του ευθέως γινομένου.

Το αριστερό R-πρότυπο $\prod_{\alpha\in\Delta} M_\alpha$ έχει ένα υποπρότυπο το λεγόμενο «*εξωτερικό ευθύ άθροισμα*» της οικογενείας $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$. Αν $(m_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ είναι ένα στοιχείο του ευθέως γινομένου $\prod_{\alpha\in\Delta} M_\alpha$, θα λέμε ότι η ακολουθία $(m_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ μηδενίζεται **σχεδόν παντού** ή $m_\alpha = 0$ (σχεδόν παντού), αν $m_\alpha = 0$ για όλους τους δείκτες $a \in \Delta$ εκτός από πεπερασμένο πλήθος. Τώρα μπορούμε να ορίσουμε το υποπρότυπο εξωτερικό ευθύ άθροισμα της οικογενείας $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$:

$$\bigoplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha = \Big\{ (x_\alpha) \in \prod_{\alpha\in\Delta} M_\alpha \;\mid\; x_\alpha = 0 \text{ (σχεδόν παντού)} \Big\}$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι στην περίπτωση που το σύνολο δεικτών Δ είναι πεπερασμένο ισχύει ότι $\bigoplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha = \prod_{\alpha\in\Delta} M_\alpha$.

Ορίζουμε ομομορφισμούς, $\forall \alpha \in \Delta$:

$$i_\alpha \colon M_\alpha \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha, \quad i_\alpha(x) = (x_\beta) \text{ όπου } x_\beta = \begin{cases} 0 & , \forall \beta \neq \alpha \\ x & , \text{αν } \beta = \alpha \end{cases}.$$

Αυτή η οικογένεια $\{i_\alpha \colon M_\alpha \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha\}$ καλείται **οικογένεια κανονικών εγκλείσεων** και κάθε τέτοια i_α είναι μονομορφισμός.

Το αριστερό R-πρότυπο $\bigoplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha$ μαζί με την οικογένεια των κανονικών εγκλείσεων $\big\{ i_\alpha \colon M_\alpha \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha \big\}$ καλείται **εξωτερικό ευθύ άθροισμα** της οικογενείας $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ και συμβολίζεται με $\big(\bigoplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha, i_\alpha \big)$.

Παρατήρηση 1.2.2. Εάν $\{f_i \colon U_i \longrightarrow V_i\}_{i\in I}$ είναι μία οικογένεια ομομορφισμών αριστερών R-προτύπων τότε επάγεται ένας ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων

$$\phi \colon \bigoplus_{i\in I} U_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} V_i, \quad (u_i) \longmapsto \phi((u_i)) := (f_i(u_i))$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η ϕ είναι μονομορφισμός (επιμορφισμός, αντ. ισομορφισμός) αν και μόνο αν κάθε f_i είναι μονομορφισμός (επιμορφισμός, αντ. ισομορφισμός).

Η επόμενη Πρόταση μας δίνει μια βασική ιδιότητα του εξωτερικού ευθέως αθροίσματος.

Πρόταση 1.2.3. *Εάν $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ είναι μια οικογένεια αριστερών R-προτύπων, τότε το εξωτερικό ευθύ άθροισμα $\left(\bigoplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha, i_\alpha\right)$ έχει την ιδιότητα ότι για κάθε αριστερό R-πρότυπο N και για κάθε οικογένεια ομομορφισμών αριστερών R-προτύπων $\{f_\alpha\colon M_\alpha \longrightarrow N\}$ υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $f\colon \bigoplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha \longrightarrow N$ που κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} & M_\alpha \arrow[dl, "i_\alpha"'] \arrow[d, "f_\alpha"] \\ \bigoplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha \arrow[r, dashed, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

Δηλαδή, κάθε απεικόνιση $f_\alpha\colon M_\alpha \longrightarrow N$ γράφεται ως $f_\alpha = f\circ i_\alpha$, $\forall\alpha\in\Delta$ για κάποιον ομομορφισμό $f\colon \bigoplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha \longrightarrow N$.

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται κατά τον ίδιο τρόπο με την απόδειξη της πρότασης (1.2.1), μόνο που εδώ ορίζουμε

$$f\colon \bigoplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha \longrightarrow N, \quad f((x_\alpha)) = \sum_{\alpha\in\Delta} f_\alpha(x_\alpha),\ \ \forall (x_\alpha)\in \bigoplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha$$

□

Ορίσαμε το «εξωτερικό ευθύ άθροισμα» $\bigoplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha$ μιας οικογενείας αριστερών R-προτύπων $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$. Τώρα θέλουμε να ξέρουμε πότε ένα αριστερό R-πρότυπο M είναι (ισόμορφο με) το ευθύ άθροισμα $\bigoplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha$ μιας οικογένειας $\{M_\alpha, \alpha\in\Delta\}$ υποπροτύπων του M. Δηλαδή πότε το M είναι το «εσωτερικό ευθύ άθροισμα»;

Έτσι έστω ένα αριστερό R-πρότυπο M και μια οικογένεια $\{M_\alpha, \alpha\in\Delta\}$ υποπροτύπων του M. Το υποπρότυπο του M που παράγεται από τα $\{M_\alpha\}$ είναι ακριβώς το άθροισμά τους, $\sum_{\alpha\in\Delta} M_\alpha$.

Ορισμός 1.2.4. *Το άθροισμα υποπροτύπων*

$$\sum_{\alpha\in\Delta} M_\alpha = \Big\{ \sum_{\alpha\in\Delta} m_\alpha \in M \ \mid\ m_\alpha\in M_\alpha \ \ \&\ \ m_\alpha = 0 \ \ \text{(σχεδόν παντού)}\Big\}$$

καλείται **εσωτερικό ευθύ άθροισμα** *αν και μόνο αν*

$$\forall\alpha\in\Delta: \quad M_\alpha \bigcap \sum_{\beta\in\Delta,\beta\neq\alpha} M_\beta = \{0\}$$

Τότε θα γράφουμε $\sum_{\alpha\in\Delta} M_\alpha = \bigoplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha$.

Ορισμός 1.2.5. *Ένα υποπρότυπο N ενός R-προτύπου M λέγεται* **ευθύς προσθετέος** *(***direct summand***) του M εάν υπάρχει και άλλο υποπρότυπο C του M τέτοιο ώστε $M = N\oplus C$, δηλαδή $N\cap C = 0$ και $M = N + C$.*

Μία συνέπεια του ορισμού (1.2.4) είναι η εξής Πρόταση:

Πρόταση 1.2.6. *Έστω $\{M_\alpha, \alpha\in\Delta\}$ μια οικογένεια υποπροτύπων του M. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :*

1. *Το άθροισμα $\sum_{\alpha\in\Delta} M_\alpha$ είναι ευθύ.*
2. *Αν $\sum_{\alpha\in\Delta} m_\alpha = \sum_{\alpha\in\Delta} m'_\alpha$ τότε $m_\alpha = m'_\alpha$, $\forall\alpha\in\Delta$.*

3. *Αν* $\sum_{\alpha\in\Delta} m_\alpha = 0$ *τότε* $m_\alpha = 0, \forall\alpha \in \Delta$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [6, Proposition 2.1.10]. □

Επομένως αν το M είναι το «εσωτερικό ευθύ άθροισμα» των υποπροτύπων του, $\{M_\alpha, \alpha \in \Delta\}$, τότε κάθε $x \in M$ έχει μοναδική έκφραση της μορφής $x = m_{\alpha_1} + m_{\alpha_2} + \ldots$, όπου κάθε $m_{\alpha_i} \in M_{\alpha_i}$.

Παρατήρηση 1.2.7. Εάν το M είναι το «εσωτερικό ευθύ άθροισμα» των υποπροτύπων του, $\{M_\alpha, \alpha \in \Delta\}$, τότε η μοναδική απεικόνιση $\bigoplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha \longrightarrow M$ που επάγεται από τις εγκλείσεις $M_\alpha \longrightarrow M$, σύμφωνα με την καθολική ιδιότητα του «εξωτερικού ευθέως αθροίσματος», είναι ένας ισομορφισμός. Έτσι το M είναι ισομορφικό με το εξωτερικό ευθύ άθροισμα των $\{M_\alpha, \alpha \in \Delta\}$. Επομένως το εσωτερικό ευθύ άθροισμα των $\{M_\alpha, \alpha \in \Delta\}$ είναι ισομορφικό με το εξωτερικό τους ευθύ άθροισμα και αυτός είναι ο λόγος που τα ταυτίζουμε και χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό και για τα δύο.

Ολοκληρώνουμε αυτή την παράγραφο με τους ακόλουθους ισομορφισμούς αβελιανών ο–μάδων.

Πρόταση 1.2.8. *Έστω* $\{M_\alpha\}$ *μία οικογένεια από αριστερά* R*-πρότυπα και*

$$\Big\{\varpi_\alpha \colon \prod_{\alpha\in\Delta} M_\alpha \longrightarrow M_\alpha\Big\}, \quad \text{η οικογένεια των κανονικών προβολών.}$$

Τότε η απεικόνιση

$$\phi\colon \operatorname{\mathsf{Hom}}_R\Big(N, \prod_{\alpha\in\Delta} M_\alpha\Big) \longrightarrow \prod_{\alpha\in\Delta} \operatorname{\mathsf{Hom}}_R(N, M_\alpha), \quad \phi(f) = (\varpi_\alpha \circ f)_{\alpha\in\Delta}$$

είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η ϕ είναι ένας ομομορφισμός αβελιανών ομάδων. Τώρα έστω $(f_\alpha)_{\alpha\in\Delta} \in \prod_{\alpha\in\Delta} \operatorname{\mathsf{Hom}}_R(N, M_\alpha)$. Τότε κάθε f_α είναι μια απεικόνιση από το N στο $M_\alpha, \forall\alpha \in \Delta$. Έτσι από την καθολική ιδιότητα του ευθέως γινομένου $\prod_{\alpha\in\Delta} M_\alpha$, μπορούμε να ορίσουμε μια απεικόνιση

$$f\colon N \longrightarrow \prod_{\alpha\in\Delta} M_\alpha, \quad f(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha\in\Delta}$$

η οποία είναι ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων και επιπλέον ισχύει $\varpi_\alpha \circ f = f_\alpha, \forall\alpha \in \Delta$. Επομένως $\phi(f) = (\varpi_\alpha \circ f)_{\alpha\in\Delta} = (f_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$. Και έτσι δείξαμε ότι η ϕ είναι επί. Τώρα μένει να δείξουμε ότι η ϕ είναι και $1-1$. Έτσι έστω $f \in \operatorname{\mathsf{Ker}}\phi$ τότε θα έχουμε ότι $\phi(f) = 0 \Rightarrow (\varpi_\alpha \circ f)(x) = \varpi_\alpha((f(x))) = 0, \forall\alpha \in \Delta, \forall x \in N$. Αλλά τότε θα έχουμε ότι $f(x) = 0, \forall x \in N$. Έτσι $f = 0$ και άρα η ϕ είναι και $1-1$. □

Πρόταση 1.2.9. *Έστω* $\{M_\alpha\}$ *μία οικογένεια από αριστερά* R*-πρότυπα και*

$$\Big\{i_\alpha \colon M_\alpha \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha\Big\}, \quad \text{η οικογένεια των κανονικών εγκλείσεων.}$$

Τότε η απεικόνιση

$$\phi\colon \operatorname{\mathsf{Hom}}_R\Big(\bigoplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha, N\Big) \longrightarrow \prod_{\alpha\in\Delta} \operatorname{\mathsf{Hom}}_R(M_\alpha, N), \quad \phi(f) = (f \circ i_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$$

είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται κατά τον ίδιο τρόπο με την απόδειξη της πρότασης (1.2.8). □

Συμβολισμοί : Αν $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ είναι μια οικογένεια αριστερών R-προτύπων και $M_\alpha = M$, $\forall\alpha\in\Delta$ τότε από τώρα και στο εξής θα χρησιμοποιούμε τους ακόλουθους συμβολισμούς:

$$\bigoplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha := M^{(\Delta)} \qquad \& \qquad \prod_{\alpha\in\Delta} M_\alpha := M^{\Delta}$$

1.2.2 Ελεύθερα Πρότυπα

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε πρότυπα τα οποία έχουν απλή δομή, και τα οποία είναι γνωστά ως ελεύθερα πρότυπα. Πριν δώσουμε τον ορισμό τους, ας ξεκινήσουμε με τον ορισμό της βάσης ενός αριστερού R-προτύπου.

Ορισμός 1.2.10. *Έστω F ένα αριστερό R-πρότυπο και $X = \{x_i\}_{i\in I}$ ένα υποσύνολο του F. Το σύνολο X καλείται* **σύνολο γεννητόρων** *του F αν κάθε στοιχείο $x\in F$ μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός*

$$x = \sum_{i\in I} r_i x_i,\ r_i = 0, \text{για } \forall i\in I, \text{εκτός από πεπερασμένο πλήθος δεικτών}$$

για κάποια $x_1,\dots,x_n\in X$ και $r_1,\dots,r_n\in R$.

Ορισμός 1.2.11. *Έστω F ένα αριστερό R-πρότυπο και $X = \{x_i\}_{i\in I}$ ένα υποσύνολο του F. Το σύνολο X καλείται R-***γραμμικά ανεξάρτητο** *αν ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή*

$$\sum_{i\in I} r_i x_i = 0, \quad r_i\in R,\ x_i\in X \quad\Longrightarrow\quad r_i = 0, \forall i\in I$$

Ορισμός 1.2.12. *Έστω F ένα αριστερό R-πρότυπο και $X = \{x_i\}_{i\in I}$ ένα υποσύνολο του F. Το σύνολο X καλείται* **βάση** *του F αν και μόνο αν το X είναι σύνολο γεννητόρων του F και R-γραμμικά ανεξάρτητο.*

Από τον ορισμό της βάσης έπεται η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 1.2.13. *Έστω $X = \{x_i\}_{i\in I}$ ένα υποσύνολο ενός αριστερού R-προτύπου F. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

1. *Το X είναι βάση του F.*
2. *Κάθε $x\in F$ γράφεται ως $x = \sum_{i\in I} r_i x_i$, όπου $x_i\in X$ και $r_i\in R$ είναι μοναδικά και $r_i = 0$ εκτός από πεπερασμένο πλήθος δεικτών.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [6, Proposition 2.2.3]. □

Ας περάσουμε τώρα στον ορισμό του ελεύθερου προτύπου.

Ορισμός 1.2.14. *Ένα αριστερό R-πρότυπο F ονομάζεται* **ελεύθερο** *αν και μόνο αν το F έχει βάση.*

Ας αναφέρουμε τώρα κάποια παραδείγματα ελεύθερων προτύπων.

Παράδειγμα 1.2.15. 1. Το μηδενικό R-πρότυπο είναι ελεύθερο με βάση το κενό σύνολο.

2. Κάθε δακτύλιος R είναι ελεύθερος αν ιδωθεί ως αριστερό R-πρότυπο (αντ. και δεξιό) διότι το σύνολο $\{1\}$ αποτελεί μία βάση του R.

3. Το R-πρότυπο $R^n = \{(r_1, r_2, \dots, r_n) \mid r_i \in R,\ 1 \leq i \leq n\}$ είναι ελεύθερο με βάση το σύνολο
$$X = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$
όπου $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ και το 1 βρίσκεται στην i-θέση.

4. Η αβελιανή ομάδα $\mathbb{M}_n(R)$ είναι ελεύθερο αριστερό R-πρότυπο με βάση
$$X = \{E_{ij}\}_{i,j \leq n}$$
όπου E_{ij} είναι οι $n \times n$ πίνακες των οποίων το μοναδικό μη-μηδενικό στοιχείο είναι το 1 το οποίο βρίσκεται στην (i, j)-θέση.

Παρατήρηση 1.2.16. Κάθε F-διανυσματικός χώρος, όπου F σώμα, είναι ένα ελεύθερο F-πρότυπο. Όταν ο δακτύλιος R δεν είναι σώμα, υπάρχουν πρότυπα που δεν είναι ελεύθερα. Για παράδειγμα, το $\mathbb{Z}$-πρότυπο $\mathbb{Z}_m$ $(m > 1)$ δεν είναι ελεύθερο γιατί $ma = 0$ για κάθε $a \in \mathbb{Z}_m$, δηλαδή το 0 δεν γράφεται κατά μοναδικό τρόπο όπως απαιτεί η Πρόταση (1.2.13).

Συνεχίζουμε με την πρόταση ύπαρξης των ελεύθερων προτύπων.

Πρόταση 1.2.17. *Για κάθε σύνολο X, υπάρχει αριστερό R-πρότυπο F το οποίο είναι ελεύθερο στο X.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [24, Proposition 2.33]. □

Από την Πρόταση (1.2.13) έχουμε το εξής πόρισμα.

Πόρισμα 1.2.18. *Ένα αριστερό R-πρότυπο F είναι ελεύθερο αν και μόνο αν υπάρχει σύνολο I τέτοιο ώστε $F \cong R^{(I)} \cong \oplus_{i \in I} R_i$ με $R_i = R$.*

Απόδειξη. $(\Rightarrow)$ Ας υποθέσουμε ότι το F είναι ένα ελεύθερο αριστερό R-πρότυπο με βάση $X = \{x_i\}_{i \in I}$. Έτσι από την Πρόταση (1.2.13) κάθε $x \in F$ γράφεται ως $x = \sum_{i \in I} r_i x_i$, όπου $x_i \in X$ και $r_i \in R$ είναι μοναδικά και $r_i = 0$ εκτός από πεπερασμένο πλήθος δεικτών. Θεωρούμε την απεικόνιση
$$f\colon F \longrightarrow R^{(I)}, \quad f(x) = (r_i)$$
Επειδή, κάθε στοιχείο $x \in F$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως R-γραμμικός συνδυασμός στοιχείων της βάσης X, έπεται ότι η απεικόνιση f είναι καλά ορισμένη. Προφανώς η f είναι ομομορφισμός R-προτύπων και εύκολα βλέπουμε ότι η f είναι μονομορφισμός και επιμορφισμός. Έτσι αυτή η f είναι ο επιθυμητός ισομορφισμός.

$(\Leftarrow)$ Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει σύνολο I τέτοιο ώστε $F \cong R^{(I)}$ και έστω $f\colon F \longrightarrow R^{(I)}$ ένας ισομορφισμός. Θεωρούμε το σύνολο $\{r_i\} \subseteq R^{(I)}$ με $r_i = (r'_j)$ όπου $r'_j = \begin{cases} 1_R & \text{, αν } i = j \\ 0_R & \text{, αν } i \neq j \end{cases}$.
Το σύνολο $B = \{r_i\}_{i \in I}$ είναι βάση του $R^{(I)}$ και έτσι λόγω του ισομορφισμού f έχουμε ότι το σύνολο $f^{-1}(B)$ είναι βάση του F, οπότε το F είναι ελεύθερο. □

Ας περάσουμε στην καθολική ιδιότητα των ελεύθερων προτύπων.

Πρόταση 1.2.19. *Έστω F ένα ελεύθερο αριστερό R-πρότυπο και $B = \{b_i \mid i \in I\}$ μια βάση του. Εάν N είναι ένα άλλο αριστερό R-πρότυπο και εάν $\gamma\colon B \longrightarrow N$ είναι μια απεικόνιση, τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων $g\colon F \longrightarrow N$ με $gi = \gamma$ όπου $i\colon B \longrightarrow F$ είναι η απεικόνιση εγκλεισμού, δηλαδή $g(b_i) = \gamma(b_i), \forall b_i \in B$, άρα έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα.*

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "i"'] \arrow[d, "\gamma"] \\ F \arrow[r, dashed, "g"'] & N \end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Επειδή το F είναι ελεύθερο αριστερό R-πρότυπο με βάση το $B = \{b_i \mid i \in I\}$ έχουμε ότι κάθε $x \in F$ γράφεται ως $x = \sum_{i \in I} r_{b_i} b_i$, όπου $b_i \in B$ και $r_{b_i} \in R$ είναι μοναδικά και $r_{b_i} = 0$ εκτός από πεπερασμένο πλήθος δεικτών. Άρα υπάρχει μια καλά ορισμένη απεικόνιση

$$g\colon F \longrightarrow N, \quad g(x) = \sum_{i \in I} r_{b_i} \gamma(b_i) \quad r_{b_i} \in R, \quad b_i \in B$$

Προφανώς $g(b_i) = \gamma(b_i)$. Αν τώρα πάρουμε ένα $s \in R$ τότε έχουμε ότι $sx = \sum_{i \in I} s r_{b_i} b_i$. Εάν $x' = \sum_{i \in I} r'_{b_i} b_i$, όπου $b_i \in B$ και $r'_{b_i} \in R$ τότε $x + x' = \sum (r_{b_i} + r'_{b_i}) b_i$. Από τον τύπο της g έπεται ότι είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων. Εφόσον το F έχει βάση το B, η g είναι ο μοναδικός ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων τέτοιος ώστε $g(b_i) = \gamma(b_i)$. Αυτό έπεται από το γεγονός ότι δύο ομομορφισμοί αριστερών R-προτύπων που συμφωνούν σε ένα σύνολο γεννητόρων είναι ίσοι. □

Συνεχίζουμε με μία ιδιότητα των ελεύθερων προτύπων η οποία δεν αναφέρεται σε βάσεις.

Θεώρημα 1.2.20. *Έστω F ένα ελεύθερο αριστερό R-πρότυπο, τότε για κάθε επιμορφισμό $p\colon A \longrightarrow A''$ και κάθε ομομορφισμό $h\colon F \longrightarrow A''$, υπάρχει ένας ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων $g\colon F \longrightarrow A$ που κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "h"] \\ A \arrow[r, two heads, "p"'] & A''. \end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Έστω $B = \{b_i \mid i \in I\}$ μια βάση του F. Για κάθε $b_i \in B$, έχουμε ότι το στοιχείο $h(b_i) \in A''$. Επειδή η απεικόνιση p είναι επιμορφισμός, υπάρχει κάποιο $a_i \in A$ με $p(a_i) = h(b_i), \forall i$. Από το αξίωμα επιλογής, υπάρχει μια απεικόνιση $\gamma\colon B \longrightarrow A$ με $\gamma(b_i) = a_i$ για κάποιο $b_i \in B$. Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων

$$g\colon F \longrightarrow A, \quad b_i \longmapsto g(b_i) = \gamma(b_i) = a_i, \quad \forall i \in I$$

Τώρα, $p \circ g(b_i) = p(g(b_i)) = p(a_i) = h(b_i)$. Έτσι η $p \circ g$ συμφωνεί με την h στην βάση $B = \{b_i \mid i \in I\}$ και εφόσον το F έχει βάση το B, έχουμε ότι $p \circ g = h$ και άρα το διάγραμμα είναι μεταθετικό. □

Τέλος, η επόμενη πρόταση θα μας δώσει τη δυνατότητα να χρησιμοποιούμε ελεύθερα πρότυπα για να περιγράφουμε τυχαία πρότυπα.

Πρόταση 1.2.21. *Κάθε αριστερό R-πρότυπο M είναι επιμορφική εικόνα ενός ελεύθερου αριστερού R-προτύπου.*

Απόδειξη. Έστω M ένα αριστερό R-πρότυπο και $\{x_i\}_{i \in I}$ ένα σύνολο γεννητόρων του M. Από το Πόρισμα (1.2.18) έχουμε ότι το $R^{(I)}$ είναι ελεύθερο αριστερό R-πρότυπο. Ορίζουμε απεικόνιση

$$\phi\colon R^{(I)} \longrightarrow M \ , \quad (r_i) \longmapsto \phi((r_i)) = \sum_{i \in I} r_i x_i, \quad r_i \in R, x_i \in X$$

Τότε

$$\begin{aligned} \phi((r_i) + (r'_i)) &= \phi((r_i + r'_i)) = \sum_{i \in I} (r_i + r'_i) x_i \\ &= \sum_{i \in I} r_i x_i + \sum_{i \in I} r'_i x_i \\ &= \phi((r_i)) + \phi((r'_i)) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\phi(r(r_i)) &= \phi((rr_i)) = \sum_{i\in I}(rr_i)x_i \\ &= r\Big(\sum_{i\in I} r_i x_i\Big) = r\phi((r_i))\end{aligned}$$

$\forall (r_i), (r_i') \in R^{(I)}$ και $\forall r \in R$. Επομένως, η ϕ είναι ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων. Εάν $x \in M$, τότε το x μπορεί να γραφεί ως $x = \sum_{i\in I} r_i x_i$ όπου $r_i = 0$ εκτός από πεπερασμένο πλήθος δεικτών. Έπεται ότι $(r_i) \in R^{(I)}$, έτσι $\phi((r_i)) = \sum_{i\in I} r_i x_i$ και επομένως η ϕ είναι επιμορφισμός. □

Παρατήρηση 1.2.22. Χρησιμοποιώντας την παραπάνω πρόταση και το Πρώτο Θεώρημα Ισομορφισμών έχουμε ότι κάθε αριστερό R-πρότυπο είναι ένα πρότυπο πηλίκο ενός ελεύθερου αριστερού R-προτύπου.

1.2.3 Τανυστικά Γινόμενα Προτύπων

Στην ενότητα αυτή εισάγουμε την έννοια του τανυστικού γινομένου δύο προτύπων M και N υπεράνω ενός δακτυλίου R. Θα είμαστε συνοπτικοί καθώς αναπτύσσουμε μόνο εκείνες τις στοιχειώδεις προτάσεις που θα βρουν εφαρμογές σε παρακάτω κεφάλαια της διατριβής.

Ας ξεκινήσουμε με τον ορισμό της ισόρροπης απεικόνισης.

Ορισμός 1.2.23. *Έστω M ένα δεξιό R-πρότυπο, N ένα αριστερό R-πρότυπο και G μια αβελιανή ομάδα. Τότε η απεικόνιση $\rho\colon M \times N \longrightarrow G$ λέγεται R-**ισόρροπη (R-balanced)** εάν, $\forall x, x' \in M$, $\forall y, y' \in N$, $\forall r \in R$, ισχύουν τα εξής :*

1. $\rho(x + x', y) = \rho(x, y) + \rho(x', y)$,
2. $\rho(x, y + y') = \rho(x, y) + \rho(x, y')$,
3. $\rho(xr, y) = \rho(x, ry)$

Οι R-ισόρροπες απεικονίσεις παίζουν καθοριστικό ρόλο στην κατασκευή των τανυστικών γινομένων προτύπων. Τώρα είμαστε σε θέση να δώσουμε τον ορισμό του τανυστικού γινομένου μέσω μιας καθολικής ιδιότητας.

Ορισμός 1.2.24. *Εάν M είναι ένα δεξιό R-πρότυπο και N ένα αριστερό R-πρότυπο, τότε μία αβελιανή ομάδα T μαζί με μία R-ισόρροπη απεικόνιση $\rho\colon M \times N \longrightarrow T$ λέγεται **τανυστικό γινόμενο** των M και N εάν για κάθε άλλη αβελιανή ομάδα G και R-ισόρροπη απεικόνιση $\rho'\colon M \times N \longrightarrow G$, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός αβελιανών ομάδων $f\colon T \longrightarrow G$ που κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} & M \times N \arrow[dl, "\rho"'] \arrow[d, "\rho'"] \\ T \arrow[r, dashed, "f"'] & G \end{tikzcd}$$

Από εδώ και στο εξής το δεξιό R-πρότυπο M θα το συμβολίζουμε με M_R, το αριστερό R-πρότυπο N με ${}_RN$ και το τανυστικό γινόμενο των M_R και ${}_RN$ θα συμβολίζεται (προσωρινά) με (T, ρ).

Πρόταση 1.2.25. *Εάν ένα τανυστικό γινόμενο (T, ρ) των M_R και ${}_RN$ υπάρχει, τότε είναι μοναδικό μέσω ισομορφισμού αβελιανών ομάδων.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [6, Proposition 2.3.2]. □

Συνεχίζουμε με το θεώρημα ύπαρξης.

Θεώρημα 1.2.26. *Το τανυστικό γινόμενο των M_R και $_RN$ υπάρχει.*

Απόδειξη. Έστω F η ελεύθερη αβελιανή ομάδα με βάση $M \times N$, δηλαδή

$$F = \Big\{ \sum_i m_i(x_i, y_i) \mid m_i \in \mathbb{Z},\ (x_i, y_i) \in M \times N \Big\} \cong \mathbb{Z}^{(M\times N)}$$

Έστω S η υποομάδα της F η οποία παράγεται από όλα τα στοιχεία της μορφής

$$\big\{(x + x', y) - (x, y) - (x', y),\ (x, y + y') - (x, y) - (x, y'),\ (xr, y) - (x, ry)\big\}$$

όπου $x, x' \in M, y, y' \in N, r \in R$. Ορίζουμε απεικόνιση

$$\rho\colon M \times N \longrightarrow F/S,\ \ \rho(x, y) = (x, y) + S.$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η απεικόνιση ρ είναι R-ισόρροπη. Τώρα, έστω $\rho'\colon M \times N \longrightarrow G$ μία άλλη R-ισόρροπη απεικόνιση σε μία αβελιανή ομάδα G. Επειδή η F είναι ελεύθερη στο $M\times N$, από την καθολική ιδιότητα των ελεύθερων (βλέπε Πρόταση (1.2.19)) υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $h\colon F \to G$ που επεκτείνει την ρ', δηλαδή $h(x, y) = \rho'(x, y)$. Αλλά $S \subset \operatorname{Ker} h$ επειδή η ρ' είναι R-ισόρροπη απεικόνιση. Επομένως υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός ομάδων

$$\phi\colon F/S \longrightarrow G$$

που κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} & M \times N \arrow[dl, "\rho"'] \arrow[d, "\rho'"] \\ F/S \arrow[r, dashed, "\phi"'] & G \end{tikzcd}$$

Έτσι $(F/S, \rho)$ είναι ένα τανυστικό γινόμενο των M_R και $_RN$. □

Παρατήρηση 1.2.27. Η ομάδα πηλίκο F/S, που κατασκευάστηκε στην απόδειξη του προηγούμενου Θεωρήματος, από τώρα και στο εξής θα συμβολίζεται με $M \otimes_R N$ και τα σύμπλοκα $(x, y)+S \in F/S := M\otimes_R N$ θα συμβολίζονται με $x\otimes y$. Θα καλούμε με $M\otimes_R N$ το τανυστικό γινόμενο των M_R και $_RN$ και η R-ισόρροπη απεικόνιση

$$\rho\colon M \times N \longrightarrow F/S := M \otimes_R N,\ \ (x, y) \longmapsto \rho(x, y) = (x, y) + S := x \otimes y$$

θα καλείται **κανονική** R**-ισόρροπη απεικόνιση**. Επιπλέον, εάν $x, x' \in M, y, y' \in N$ και $r \in R$ τότε :

1. $(x + x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y,$
2. $x \otimes (y + y') = x \otimes y + x \otimes y',$
3. $(xr) \otimes y = x \otimes (ry).$

Εάν $0_M, 0_N, 0_R$ είναι τα ταυτοτικά στοιχεία της πρόσθεσης των M, N και R αντίστοιχα, τότε για κάθε $x \in M$ και $y \in N$ έχουμε

$$\begin{aligned}(x \otimes y) + (0_M \otimes 0_N) &= (x \otimes y) + (0_M \otimes 0_R y) = (x \otimes y) + (0_M 0_R \otimes y) \\ &= (x \otimes y) + (0_M \otimes y) = (x + 0_M) \otimes y = x \otimes y\end{aligned}$$

Ομοίως έχουμε ότι $(0_M \otimes 0_N) + (x \otimes y) = x \otimes y$. Έτσι το $0_M \otimes 0_N$ είναι το ταυτοτικό στοιχείο της πρόσθεσης του $M \otimes_R N$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι $x \otimes 0_N = 0_M \otimes 0_N = 0_M \otimes y$ για κάθε $x \in M$ και $y \in N$.

Η $M \otimes_R N$ ως αβελιανή ομάδα παράγεται από τα στοιχεία $x \otimes y$. Δηλαδή το σύνολο

$$\{x \otimes y\}_{(x,y) \in M \times N}$$

είναι ένα σύνολο γεννητόρων της $M \otimes_R N$. Επειδή όμως και $-(x \otimes y) = (-x) \otimes y$, τα στοιχεία του $M \otimes_R N$ είναι της μορφής:

$$M \otimes_R N = \Big\{ \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i \otimes y_i) \mid n_i \in \mathbb{Z},\ x_i \in M,\ y_i \in N \Big\}$$

Παρατήρηση 1.2.28. Γενικότερα, η αβελιανή ομάδα $M \otimes_R N$ δεν είναι ούτε δεξιό ούτε αριστερό R-πρότυπο. Είναι απλά $\mathbb{Z}$-πρότυπο. Όμως, εάν R, S είναι δύο δακτύλιοι και έχουμε ότι το M είναι ένα (R, S)-διπρότυπο και το N είναι ένα αριστερό S-πρότυπο, τότε το τανυστικό γινόμενο $M \otimes_S N$ είναι ένα αριστερό R-πρότυπο ορίζοντας αριστερή δράση

$$R\ \times M \otimes_S N \longrightarrow M \otimes_S N,$$

$$\Big(r, \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i \otimes y_i)\Big) \longmapsto r\Big(\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i \otimes y_i)\Big) := \sum_{i=1}^{k} n_i (r x_i \otimes y_i)$$

Ομοίως, αν έχουμε ότι το M είναι ένα δεξιό S-πρότυπο και το N είναι ένα (S, R)-διπρότυπο, τότε το τανυστικό γινόμενο $M \otimes_S N$ είναι ένα δεξιό R-πρότυπο ορίζοντας δεξιά δράση

$$M \otimes_S N\ \times R \longrightarrow M \otimes_S N,$$

$$\Big(\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i \otimes y_i), r\Big) \longmapsto \Big(\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i \otimes y_i)\Big) r := \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i \otimes (y_i r))$$

Τώρα, θα αποδείξουμε κάποιες βασικές ιδιότητες των τανυστικών γινομένων.

Πρόταση 1.2.29. (Τανυστικό γινόμενο ομομορφισμών) *Έστω*

$$f\colon M_R \longrightarrow M'_R, \quad g\colon {}_R N \longrightarrow_R N'$$

ομομορφισμοί προτύπων. Τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός αβελιανών ομάδων

$$h\colon M \otimes_R N \longrightarrow M' \otimes_R N'$$

τέτοιος ώστε

$$h\Big(\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i \otimes y_i)\Big) = \sum_{i=1}^{k} n_i (f(x_i) \otimes g(y_i)).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα :

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "f\times g"] \arrow[dr, "h'"] & M \otimes_R N \arrow[d, dashed, "\exists\,!\,h"] \\ M' \times N' \arrow[r, "\rho'"'] & M' \otimes_R N' \end{tikzcd}$$

όπου ρ, ρ' είναι οι κανονικές R-ισόρροπες απεικονίσεις. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$h' \colon M \times N \longrightarrow M' \otimes_R N', \;\; h' = \rho' \circ (f \times g)$$

Δηλαδή $h'(x, y) = \rho' \circ (f \times g)(x, y) = \rho'(f(x), g(y)) = f(x) \otimes g(y)$ για κάθε $(x, y) \in M \times N$. Παρατηρούμε ότι η h' είναι R-ισόρροπη απεικόνιση. Επομένως υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός αβελιανών ομάδων $h\colon M \otimes_R N \to M' \otimes_R N'$ τέτοιος ώστε $h \circ \rho = h'$. Έστω $\sum_{i=1}^k n_i(x_i \otimes y_i) \in M \otimes_R N$. Τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned} h\Big(\sum_{i=1}^k n_i(x_i \otimes y_i\Big) &= \sum_{i=1}^k n_i(h(x_i \otimes y_i)) = \sum_{i=1}^k n_i(h(\rho(x_i, y_i))) \\ &= \sum_{i=1}^k n_i h'(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^k n_i(f(x_i) \otimes g(y_i)) \end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 1.2.30. Η απεικόνιση $h\colon M \otimes_R N \longrightarrow M' \otimes_R N'$ της προηγούμενης Πρότασης συμβολίζεται με $f \otimes g$. Τώρα αν υποθέσουμε ότι $f'\colon M'_R \longrightarrow M''_R$, $g'\colon {}_RN' \longrightarrow_R N''$ είναι ομομορφισμοί προτύπων τότε λαμβάνουμε την απεικόνιση

$$f' \otimes g' \colon M' \otimes_R N' \longrightarrow M'' \otimes_R N''$$

και η σύνθεση των απεικονίσεων $f \otimes g$ και $f' \otimes g'$ ορίζεται ως εξής:

$$(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g).$$

Επιπλέον, $\mathrm{Id_M} \otimes \mathrm{Id_N} \colon M \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N$ είναι η ταυτότητα στο $M \otimes_R N$ και εάν οι ομομορφισμοί $f\colon M_R \longrightarrow M'_R$, $g\colon {}_RN \longrightarrow_R N'$ είναι ισομορφισμοί τότε και η απεικόνιση $f \otimes g$ είναι ισομορφισμός και ισχύει ότι $(f \otimes g)^{-1} = f^{-1} \otimes g^{-1}$.

Τέλος, θα αναφέρουμε δύο βασικούς ισομορφισμούς:

Πρόταση 1.2.31. *Υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός*

$$\phi_M \colon R \otimes_R M \longrightarrow M, \quad \sum_{i=1}^k n_i(r_i \otimes x_i) \longmapsto \phi_M\Big(\sum_{i=1}^k n_i(r_i \otimes x_i)\Big) := \sum_{i=1}^k n_i r_i x_i$$

για κάθε αριστερό R-πρότυπο M.

Απόδειξη. Η απεικόνιση $k\colon R \times M \to M$ που δίνεται από $(r, x) \longmapsto k(r, x) := rx$ είναι R-ισόρροπη απεικόνιση και έτσι υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός αβελιανών ομάδων

$$\phi_M \colon R \otimes_R M \longrightarrow M$$

τέτοιος ώστε

$$\begin{tikzcd} & R \times M \arrow[dl, "\rho"'] \arrow[d, "k"] \\ R \otimes_R M \arrow[r, dashed, "\exists\phi_M"'] & M \end{tikzcd}$$

$\phi_M \circ \rho = k$ όπου ρ είναι η κανονική R-ισόρροπη απεικόνιση. Επομένως, για κάθε στοιχείο $\sum_{i=1}^k n_i(r_i \otimes x_i) \in R \otimes_R M$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \phi_M\Big(\sum_{i=1}^k n_i(r_i \otimes x_i)\Big) &= \sum_{i=1}^k n_i \phi_M(r_i \otimes x_i) = \sum_{i=1}^k n_i \phi_M(\rho(r_i, x_i)) \\ &= \sum_{i=1}^k n_i k(r_i, x_i) = \sum_{i=1}^k n_i r_i x_i \end{aligned}$$

Αλλά η απεικόνιση $h\colon M \longrightarrow R \otimes_R M$ που δίνεται από $h(x) = 1_R \otimes x$ είναι ομομορφισμός αβελιανών ομάδων και έχουμε ότι $\phi_M \circ h = \mathrm{Id}_M$. Επιπλέον η $R \otimes_R M$ παράγεται από το στοιχείο $1_R \otimes x$ και έτσι έχουμε ότι και $h \circ \phi_M = \mathrm{Id}_{R \otimes_R M}$. Άρα η ϕ_M είναι ισομορφισμός με αντίστροφη $(\phi_M)^{-1} = h$. □

Η επόμενη πρόταση μας λέει ότι το τανυστικό γινόμενο διατηρεί τυχαία ευθέα αθροίσματα.

Πρόταση 1.2.32. *Έστω $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ μία οικογένεια δεξιών R-προτύπων και N ένα αριστερό R-πρότυπο. Τότε υπάρχει μοναδικός ισομορφισμός αβελιανών ομάδων*

$$h\colon \big(\oplus_{\alpha \in \Delta} M_\alpha\big) \otimes_R N \longrightarrow \oplus_{\alpha \in \Delta}\big(M_\alpha \otimes_R N\big)$$

τέτοιος ώστε

$$h\Big(\sum_{i=1}^k n_i((x_{\alpha_i}) \otimes y_i)\Big) = \Big(\sum_{i=1}^k n_i(x_{\alpha_i} \otimes y_i)\Big)$$

Απόδειξη. Η απεικόνιση $\rho'\colon (\oplus_{\alpha \in \Delta} M_\alpha) \times N \longrightarrow \oplus_{\alpha \in \Delta}(M_\alpha \otimes_R N)$ που δίνεται από $((x_\alpha), y) \mapsto (x_\alpha \otimes y)$ είναι R-ισόρροπη απεικόνιση, άρα υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός αβελιανών ομάδων

$$h\colon (\oplus_{\alpha \in \Delta} M_\alpha) \otimes_R N \longrightarrow \oplus_{\alpha \in \Delta}(M_\alpha \otimes_R N)$$

τέτοιος ώστε

$$\begin{tikzcd} & (\oplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha) \times N \arrow[dl, "\rho"'] \arrow[d, "\rho'"] \\ (\oplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha) \otimes_R N \arrow[r, dashed, "\exists h"'] & \oplus_{\alpha\in\Delta}\big(M_\alpha \otimes_R N\big) \end{tikzcd}$$

$h \circ \rho = \rho'$, όπου ρ είναι η κανονική R-ισόρροπη απεικόνιση. Επομένως, για κάθε στοιχείο $\sum_{i=1}^k n_i((x_{\alpha_i}) \otimes y_i) \in \big(\oplus_{\alpha \in \Delta} M_\alpha\big) \otimes_R N$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} h\Big(\sum_{i=1}^k n_i((x_{\alpha_i}) \otimes y_i)\Big) &= \sum_{i=1}^k n_i h((x_{\alpha_i}) \otimes y_i) = \sum_{i=1}^k n_i h(\rho((x_{\alpha_i}), y_i)) \\ &= \sum_{i=1}^k n_i \rho'((x_{\alpha_i}), y_i) = \sum_{i=1}^k n_i (x_{\alpha_i} \otimes y_i) \\ &= \Big(\sum_{i=1}^k n_i(x_{\alpha_i} \otimes y_i)\Big) \end{aligned}$$

Έχουμε ότι $i_\alpha\colon M_\alpha \longrightarrow \oplus M_\alpha$ είναι η κανονική έγκλειση, επομένως μπορούμε να έχουμε την απεικόνιση $i_\alpha \otimes \mathrm{Id}_{\mathrm{N}}\colon M_\alpha \otimes_R N \longrightarrow (\oplus M_\alpha) \otimes_R N$.

Επιπλέον έχουμε ότι $\hat{i}_\alpha \colon M_\alpha \otimes_R N \longrightarrow \oplus_{\alpha\in\Delta}(M_\alpha \otimes_R N)$ είναι η κανονική έγκλειση και έτσι από την καθολική ιδιότητα του ευθέως αθροίσματος έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα :

$$\begin{tikzcd}
& M_\alpha \otimes N \arrow[dl, "\hat{i}_\alpha"'] \arrow[d, "i_\alpha \otimes \mathrm{Id}_N"] \\
\oplus_{\alpha\in\Delta}(M_\alpha \otimes_R N) \arrow[r, dashed, "\exists h'"'] & (\oplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha) \otimes_R N
\end{tikzcd}$$

Δηλαδή, έχουμε τον ομομορφισμό

$$h' \colon \oplus_{\alpha\in\Delta}\,(M_\alpha \otimes_R N) \longrightarrow (\oplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha) \otimes_R N$$

για τον οποίον ισχύει ότι $h' \circ \hat{i}_\alpha = i_\alpha \otimes \mathrm{Id}_N$. Επομένως, για κάθε

$$\Big(\sum_{i=1}^{k} n_i(x_{\alpha_i} \otimes y_i)\Big) \in \oplus_{\alpha\in\Delta}(M_\alpha \otimes_R N)$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
h'\Big(\big(\sum_{i=1}^{k} n_i(x_{\alpha_i} \otimes y_i)\big)\Big) &= \sum_{i=1}^{k} n_i h'((x_{\alpha_i} \otimes y_i)) = \sum_{i=1}^{k} n_i (h' \circ \hat{i}_\alpha)(x_{\alpha_i} \otimes y_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k} n_i (i_\alpha \otimes \mathrm{Id}_N)(x_{\alpha_i} \otimes y_i) = \sum_{i=1}^{k} n_i (i_\alpha(x_{\alpha_i}) \otimes y_i)
\end{aligned}$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι $h \circ h' = \mathrm{Id}_{\oplus_{\alpha\in\Delta}(M_\alpha \otimes_R N)}$ και $h' \circ h = \mathrm{Id}_{(\oplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha) \otimes_R N}$. Επομένως η h είναι ισομορφισμός με αντίστροφη $h^{-1} = h'$. □

1.3 Ακριβείς Ακολουθίες και Συναρτητές

Σε αυτή την παράγραφο θα παραθέσουμε τα βασικά αποτελέσματα και θα εισάγουμε τη βασική ορολογία από την θεωρία των ακριβών ακολουθιών και των (αριστερά ή δεξιά) ακριβών συναρτητών.

1.3.1 Ακριβείς Ακολουθίες Προτύπων

Ορισμός 1.3.1. *Μία ακολουθία από αριστερά R-πρότυπα και ομομορφισμούς αριστερών R-προτύπων*

$$\cdots \longrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

λέγεται **ακριβής ακολουθία** *εάν* $\mathsf{Im}\, f_{n+1} = \mathsf{Ker}\, f_n, \forall n$.

Μία ακριβή ακολουθία της μορφής

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

λέγεται **σύντομη ακριβή ακολουθία** *ή* **επέκταση** *του M' από το M''.*

Άμεση συνέπεια του ορισμού είναι η εξής πρόταση:

Πρόταση 1.3.2. 1. *Μια ακολουθία $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$ είναι ακριβής αν και μόνο αν η f είναι μονομορφισμός.*

2. *Μια ακολουθία* $B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ *είναι ακριβής αν και μόνο αν η* g *είναι επιμορφισμός.*

3. *Μια ακολουθία* $0 \longrightarrow A \xrightarrow{h} B \longrightarrow 0$ *είναι ακριβής αν και μόνο αν η* h *είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη. 1. Η εικόνα της $0 \longrightarrow A$ είναι $\{0\}$, έτσι από την ακρίβεια έχουμε ότι $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ και έτσι η f είναι μονομορφισμός. Αντίστροφα, δεδομένης της $f\colon A \longrightarrow B$, υπάρχει ακριβής ακολουθία

$$\operatorname{Ker} f \xrightarrow{i} A \xrightarrow{f} B$$

όπου i είναι η έγκλειση. Εάν η f είναι μονομορφισμός, τότε $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

2. Ο πυρήνας της $C \longrightarrow 0$ είναι C, έτσι από την ακρίβεια έχουμε ότι $\operatorname{Im} g = C$ και έτσι η g είναι επιμορφισμός. Αντίστροφα, δεδομένης της $g\colon B \longrightarrow C$, υπάρχει ακριβής ακολουθία

$$B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{\varpi} C/\operatorname{Im} g$$

όπου ϖ είναι η κανονική προβολή. Εάν η g είναι επιμορφισμός, τότε $C = \operatorname{Im} g$ και έτσι $C/\operatorname{Im} g = \{0\}$.

3. Από το 1. έχουμε ότι η h είναι μονομορφισμός αν-ν η ακολουθία $0 \longrightarrow A \xrightarrow{h} B$ είναι ακριβής και από το 2. έχουμε ότι η h είναι επιμορφισμός αν και μόνο αν η ακολουθία $A \xrightarrow{h} B \longrightarrow 0$ είναι ακριβής. Επομένως, η h είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν η ακολουθία $0 \longrightarrow A \xrightarrow{h} B \longrightarrow 0$ είναι ακριβής. □

Παρατήρηση 1.3.3. Επειδή κάθε αριστερό R-πρότυπο M είναι επιμορφική εικόνα ενός ελεύθερου αριστερού R-προτύπου, μπορούμε να δημιουργήσουμε την ακριβή ακολουθία

$$\cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

όπου κάθε F_i είναι ελεύθερο, $\forall$ αριστερό R-πρότυπο M. Αυτή η ακολουθία λέγεται **ελεύθερη ανάλυση** (**free resolution**) του M.

Λήμμα 1.3.4. (Snake Lemma) *Υποθέτουμε ότι έχουμε το εξής μεταθετικό διάγραμμα αριστερών* R*-προτύπων και ομομορφισμών αριστερών* R*-προτύπων:*

$$\begin{tikzcd}
 & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\sigma'"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\sigma"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\sigma''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "f'"'] & N \arrow[r, "g'"'] & N'' &
\end{tikzcd}$$

(δηλαδή, $f' \circ \sigma = \sigma \circ f$ *και* $g' \circ \sigma = \sigma'' \circ g$*) με ακριβείς γραμμές. Τότε υπάρχει ομομορφισμός αριστερών* R*-προτύπων* $d\colon \operatorname{Ker}\sigma'' \longrightarrow \operatorname{Coker}\sigma'$ *τέτοιος ώστε η ακολουθία*

$$\operatorname{Ker}\sigma' \xrightarrow{\bar{f}} \operatorname{Ker}\sigma \xrightarrow{\bar{g}} \operatorname{Ker}\sigma'' \xrightarrow{d} \operatorname{Coker}\sigma' \xrightarrow{\bar{f}'} \operatorname{Coker}\sigma \xrightarrow{\bar{g}'} \operatorname{Coker}\sigma''$$

είναι ακριβής.

Επιπλέον, εάν η f *είναι* $1-1$*, τότε είναι και η* $\bar{f}$ *και εάν η* g' *είναι επί, τότε είναι και η* $\bar{g}'$*.*

Απόδειξη. Έστω $x \in \operatorname{Ker}\sigma' \Rightarrow \sigma'(x) = 0 \Rightarrow f' \circ \sigma'(x) = 0 \Rightarrow \sigma \circ f(x) = 0 \Rightarrow \sigma(f(x)) = 0 \Rightarrow f(x) \in \operatorname{Ker}\sigma$. Άρα $f(\operatorname{Ker}\sigma') \subseteq \operatorname{Ker}\sigma$. Έτσι η f επάγει τον ομομορφισμό αριστερών R-προτύπων

$$\bar{f}\colon \operatorname{Ker}\sigma' \longrightarrow \operatorname{Ker}\sigma, \quad \bar{f}(x) = f(x).$$

Ομοίως θα έχουμε ότι και η g επάγει τον ομομορφισμό αριστερών R-προτύπων

$$\bar{g}\colon \operatorname{Ker}\sigma \longrightarrow \operatorname{Ker}\sigma'', \quad \bar{g}(x) = g(x).$$

Επιπλέον, επάγονται οι ομομορφισμοί αριστερών R-προτύπων

$$\bar{f}'\colon \operatorname{Coker}\sigma' \longrightarrow \operatorname{Coker}\sigma, \quad \bar{f}'(x + \operatorname{Im}\sigma') = f'(x) + \operatorname{Im}\sigma$$

$$\bar{g}'\colon \operatorname{Coker}\sigma \longrightarrow \operatorname{Coker}\sigma'', \quad \bar{g}'(x + \operatorname{Im}\sigma) = g'(x) + \operatorname{Im}\sigma''.$$

Έτσι έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & \operatorname{Ker}\sigma' \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "i_{\sigma'}"'] & \operatorname{Ker}\sigma \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[d, "i_{\sigma}"'] & \operatorname{Ker}\sigma'' \arrow[d, "i_{\sigma''}"'] & \\
 & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\sigma'"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\sigma"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\sigma''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\varpi_{\sigma'}"'] & N \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\varpi_{\sigma}"'] & N'' \arrow[d, "\varpi_{\sigma''}"'] & \\
 & \operatorname{Coker}\sigma' \arrow[r, "\bar{f}'"] \arrow[d] & \operatorname{Coker}\sigma \arrow[r, "\bar{g}'"] \arrow[d] & \operatorname{Coker}\sigma'' \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

όπου i είναι οι απεικονίσεις έγκλεισης και ϖ οι κανονικές προβολές. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι οι ακολουθίες

$$\operatorname{Ker}\sigma' \xrightarrow{\bar{f}} \operatorname{Ker}\sigma \xrightarrow{\bar{g}} \operatorname{Ker}\sigma''$$

$$\operatorname{Coker}\sigma' \xrightarrow{\bar{f}'} \operatorname{Coker}\sigma \xrightarrow{\bar{g}'} \operatorname{Coker}\sigma''.$$

είναι ακριβείς. Έτσι απομένει να κατασκευάσουμε την d και να αποδείξουμε ότι έχουμε α-κρίβεια στο $\operatorname{Ker}\sigma''$ και $\operatorname{Coker}\sigma'$. Η απεικόνιση d ορίζεται ως εξής: Έστω $x'' \in \operatorname{Ker}\sigma''$. Επειδή η απεικόνιση g είναι επί θα υπάρχει $x \in M$ τέτοιο ώστε $g(x) = x''$. Τότε όμως $g' \circ \sigma(x) = \sigma'' \circ g(x) = \sigma''(x'') = 0$. Έτσι έχουμε ότι $\sigma(x) \in \operatorname{Ker} g' = \operatorname{Im} f'$. Επομένως υπάρχει $y' \in N'$ τέτοιο ώστε $f'(y') = \sigma(x)$. Ορίζουμε

$$d\colon \operatorname{Ker}\sigma'' \longrightarrow \operatorname{Coker}\sigma', \quad d(x'') = y' + \operatorname{Im}\sigma'$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η d είναι καλά ορισμένος ομομορφισμός και για την απόδειξη της ακρίβειας στο $\operatorname{Ker}\sigma''$ και $\operatorname{Coker}\sigma'$ βλέπε [6, lemma 11.1.9].

Εάν η f είναι $1-1$ τότε θα έχουμε ότι και η σύνθεση $f \circ i_{\sigma'}$ είναι $1-1$. Έτσι από την μεταθετικότητα του διαγράμματος θα έχουμε ότι η σύνθεση $i_\sigma \circ \bar{f}$ είναι $1-1$ και άρα η $\bar{f}$ είναι $1-1$.

Έστω ότι η g' είναι επί και έστω $\bar{b} \in \operatorname{Coker}\sigma''$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $\bar{c} \in \operatorname{Coker}\sigma$ με $\bar{g}'(\bar{c}) = \bar{b}$. Η $\varpi_{\sigma''}$ είναι επί επομένως υπάρχει $n'' \in N''$ τέτοιο ώστε $\varpi_{\sigma''}(n'') = \bar{b}$. Επιπλέον η g' είναι επί άρα υπάρχει $n \in N$ τέτοιο ώστε $g'(n) = n''$. Τότε υπάρχει $\bar{c} \in \operatorname{Coker}\sigma$ με $\varpi_\sigma(n) = \bar{c}$ και από την μεταθετικότητα του διαγράμματος θα έχουμε ότι

$$\bar{g}' \circ \varpi_\sigma(n) = \varpi_{\sigma''} \circ g'(n) \Rightarrow \bar{g}'(\bar{c}) = \varpi_{\sigma''}(n'') = \bar{b}$$

Δηλαδή $\bar{g}'(\bar{c}) = \bar{b}$. Επομένως και η $\bar{g}'$ είναι επί. □

Ορισμός 1.3.5. *Μία σύντομη ακριβής ακολουθία*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

καλείται **διασπάσιμη (split)** *αν και μόνο αν υπάρχει ισομορφισμός*

$$\phi\colon M \longrightarrow M' \oplus M''$$

τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_{\mathrm{M'}}"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\phi"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}_{\mathrm{M''}}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "i_{M'}"'] & M' \oplus M'' \arrow[r, "\varpi_{M''}"'] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Πρόταση 1.3.6. *Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

1. *Η σύντομη ακριβής ακολουθία*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

είναι διασπάσιμη.

2. *Υπάρχει ομομορφισμός* $g' : M'' \longrightarrow M$ *τέτοιος ώστε:* $g \circ g' = \mathrm{Id}_{\mathrm{M''}}$

3. *Υπάρχει ομομορφισμός* $f' : M \longrightarrow M'$ *τέτοιος ώστε:* $f' \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{M'}}$

Απόδειξη. $(1 \Rightarrow 2)$ Θεωρούμε τον ομομορφισμό

$$i_{M''} : M'' \longrightarrow M' \oplus M'', \quad y \longmapsto i_{M''}(y) = (0, y)$$

και θέτουμε $g' = \varphi^{-1} \circ i_{M''} : M'' \longrightarrow M$. Τότε πρέπει να αποδείξουμε ότι: $g \circ g' = \mathrm{Id}_{\mathrm{M''}}$. Από το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_{\mathrm{M'}}"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\phi"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}_{\mathrm{M''}}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "i_{M'}"'] & M' \oplus M'' \arrow[r, "\varpi_{M''}"'] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

θα ισχύει το εξής : $\varpi_{M''} \circ \phi = g \Rightarrow \varpi_{M''} \circ \phi \circ \phi^{-1} = g \circ \phi^{-1} \Rightarrow \varpi_{M''} \circ \mathrm{Id}_{\mathrm{M'\oplus M''}} = g \circ \phi^{-1} \Rightarrow \varpi_{M''} = g \circ \phi^{-1} \Rightarrow \varpi_{M''} \circ i_{M''} = g \circ \phi^{-1} \circ i_{M''} \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathrm{M''}} = g \circ \phi^{-1} \circ i_{M''} \Rightarrow g \circ g' = \mathrm{Id}_{\mathrm{M''}}$.

$(2 \Rightarrow 3)$ Έχουμε ότι υπάρχει ομομορφισμός $g' : M'' \to M$ τέτοιος ώστε $g \circ g' = \mathrm{Id}_{\mathrm{M''}}$. Θα κατασκευάσουμε έναν ισομορφισμό

$$\kappa : M' \oplus M'' \longrightarrow M, \quad (x, y) \longmapsto \kappa(x, y) = f(x) + g'(y)$$

Για κάθε $(x, y) \in M' \oplus M''$ θα ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
(g \circ \kappa)(x, y) &= g(\kappa(x, y)) = g(f(x) + g'(y)) = g(f(x)) + g(g'(y)) \\
&= 0 + y = y = \varpi_{M''}(x, y)
\end{aligned}$$

Άρα $g \circ \kappa = \varpi_{M''}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η κ είναι ισομορφισμός. Τότε θα ισχύει:

$$g \circ \kappa = \varpi_{M''} \Rightarrow (g \circ \kappa) \circ \kappa^{-1} = \varpi_{M''} \circ \kappa^{-1} \Rightarrow g = \varpi_{M''} \circ \kappa^{-1}$$

Θέτουμε $\phi := \kappa^{-1} \ : M \to M' \oplus M''$ και έτσι $g = \varpi_{M''} \circ \phi$. Μένει να δείξουμε ότι: $\phi \circ f = i_{M'} \Leftrightarrow \kappa^{-1} \circ f = i_{M'} \Leftrightarrow f = \kappa \circ i_{M'}$. Ισχύει ότι:

$$(\kappa \circ i_{M'})(x) = \kappa(i_{M'}(x)) = \kappa(x, 0) = f(x).$$

Οπότε $\kappa \circ i_{M'} = f$. Θέτουμε $f' : M \to M'$ να είναι ο ομομορφισμός $f' = \varpi_{M'} \circ \phi$. Τότε πρέπει να δείξουμε ότι $f' \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{M}'}$. Πράγματι : $f' \circ f = \varpi_{M'} \circ \phi \circ f = \varpi_{M'} \circ \phi \circ \kappa \circ i_{M'} = \varpi_{M'} \circ \mathrm{Id} \circ i_{M'} = \varpi_{M'} \circ i_{M'} = \mathrm{Id}_{\mathrm{M}'}$.

$(3 \Rightarrow 1)$ Γνωρίζουμε ότι υπάρχει ομομορφισμός $f' : M \to M'$, τέτοιος ώστε $f' \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{M}'}$. Ορίζουμε

$$\phi : M \longrightarrow M' \oplus M'', \quad m \longmapsto \phi(m) = (f'(m), g(m))$$

έναν ομομορφισμό. Αν αποδείξουμε ότι $\varpi_{M''} \circ \phi = g$ και $\phi \circ f = i_{M'}$, τότε η ϕ θα είναι ισομορφισμός από το Snake Lemma. Πράγματι έχουμε ότι:

$$(\varpi_{M''} \circ \phi)(m) = \varpi_{M''}(f'(m), g(m)) = g(m), \forall m \in M \Rightarrow \varpi_{M''} \circ \phi = g$$

και

$$(\phi \circ f)(x) = \phi(f(x)) = (f'(f(x)), g(f(x))) = ((f' \circ f)(x), 0) = (x, 0) = i_{M'}(x),$$

$$\forall x \in M' \Rightarrow \phi \circ f = i_{M'}.$$

Επομένως η ϕ είναι ισομορφισμός. □

Διατηρώντας τους συμβολισμούς της Πρότασης (1.3.6), έχουμε το ακόλουθο Πόρισμα.

Πόρισμα 1.3.7. *Εάν μία σύντομη ακριβής ακολουθία της μορφής*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

είναι διασπάσιμη τότε ο μονομορφισμός f καλείται **διασπάσιμος μονομορφισμός** *και η απεικόνιση f' καλείται* **απεικόνιση διάσπασης** *για την f. Ομοίως, ο επιμορφισμός g καλείται* **διασπάσιμος επιμορφισμός** *και η απεικόνιση g' καλείται* **απεικόνιση διάσπασης** *για την g.*

Πρόταση 1.3.8. *Εάν $f\colon M' \longrightarrow M$ είναι ένας διασπάσιμος μονομορφισμός με απεικόνιση διάσπασης $f'\colon M \longrightarrow M'$ τότε*

$$M = \mathsf{Im}\, f \oplus \mathsf{Ker}\, f'$$

Απόδειξη. Επειδή f είναι ένας διασπάσιμος μονομορφισμός με απεικόνιση διάσπασης την f' ισχύει ότι $f' \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{M}'}$. Τώρα θεωρούμε την σύνθεση $f \circ f'\colon M \longrightarrow M$. Έστω $x \in M$, τότε $f(f'(x)) \in M$. Έστω $z = x - (f \circ f')(x) \in M$. Τότε

$$\begin{aligned} f'(z) &= f'(x - (f \circ f')(x)) = f'(x) - [f'(f \circ f')(x)] \\ &= f'(x) - [(f' \circ f)(f'(x))] = f'(x) - f'(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

επειδή $f' \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{M}'}$. Άρα, $z \in \mathsf{Ker}\, f'$ και έτσι $x = (f \circ f')(x) + z \in \mathsf{Im}\, f + \mathsf{Ker}\, f'$. Επομένως, $M = \mathsf{Im}\, f + \mathsf{Ker}\, f'$. Εάν $y \in \mathsf{Im}\, f \cap \mathsf{Ker}\, f'$, τότε $y \in \mathsf{Im}\, f$ δηλαδή $y = f(x)$ για κάποιο $x \in M'$. Άρα $f'(y) = f'(f(x)) = \mathrm{Id}_{M'}(x) = x = 0$ επειδή $y \in \mathsf{Ker}\, f'$. Έτσι, $x = 0$ και επειδή $y = f(x)$ θα έχουμε ότι και $y = 0$. Άρα $\mathsf{Im}\, f \cap \mathsf{Ker}\, f' = 0$ και έτσι $M = \mathsf{Im}\, f \oplus \mathsf{Ker}\, f'$. □

Ομοίως θα έχουμε:

Πρόταση 1.3.9. *Εάν $g\colon M \longrightarrow M''$ είναι ένας διασπάσιμος επιμορφισμός με απεικόνιση διάσπασης $g'\colon M'' \longrightarrow M$ τότε*

$$M = \mathsf{Im}\, g' \oplus \mathsf{Ker}\, g$$

Παρατήρηση 1.3.10. Έστω $f\colon M' \longrightarrow M$ ένας διασπάσιμος μονομορφισμός με απεικόνιση διάσπασης $f'\colon M \longrightarrow M'$. Τότε, εάν εφαρμόσουμε το Πρώτο Θεώρημα Ισομορφισμών για την f θα έχουμε ότι $\mathsf{Im}\, f \cong M'$. Άρα από την Πρόταση (1.3.8) θα έχουμε ότι το M' είναι ευθύς προσθετέος του M. Ομοίως, εάν $g\colon M \longrightarrow M''$ είναι ένας διασπάσιμος επιμορφισμός με απεικόνιση διάσπασης $g'\colon M'' \longrightarrow M$ τότε το M'' είναι ευθύς προσθετέος του M.

1.3.2 Συναρτητές

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με τους Συναρτητές και ειδικότερα με τους Συναρτητές Hom και $\otimes$ που θα μας απασχολήσουν αρκετά αργότερα. Αρχικά ας υπενθυμίσουμε τον ορισμό της κατηγορίας.

Ορισμός 1.3.11. *Μια* **κατηγορία** *$\mathcal{C}$ αποτελείται από τα ακόλουθα :*

1. *Μια κλάση αντικειμένων, που συμβολίζεται με $\mathsf{ob}(\mathcal{C})$.*
2. *Ένα σύνολο μορφισμών $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, όπου το ζεύγος $(A, B) \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$, με την ιδιότητα ότι $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \cap \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A', B') = \emptyset$ όταν $(A, B) \neq (A', B')$. Εάν $f \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ τότε γράφουμε $f\colon A \longrightarrow B$ και λέμε ότι f είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$ από το A στο B.*
3. *Μια σύνθεση $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$ για όλα τα αντικείμενα A, B, C, που δίνεται από $(g, f) \longmapsto gf$ (ή $g \circ f$), και ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:*
   (a) *για κάθε $A \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$, υπάρχει ένας ταυτοτικός μορφισμός $\mathrm{Id_A} \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ τέτοιος ώστε $f \circ \mathrm{Id_A} = \mathrm{Id_B} \circ f = f$, $\forall f \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.*
   (b) *$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, $\forall f \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B), g \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C), h \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$.*

Παράδειγμα 1.3.12. Χαρακτηριστικά παραδείγματα κατηγοριών είναι τα εξής: Set, Ab, Top και R-Mod των οποίων τα αντικείμενα αντίστοιχα είναι τα σύνολα, οι αβελιανές ομάδες, οι τοπολογικοί χώροι, και τα αριστερά R-πρότυπα, και μορφισμοί είναι οι συναρτήσεις, οι ομομορφισμοί ομάδων, οι συνεχείς απεικονίσεις και οι ομομορφισμοί αριστερών R-προτύπων, αντίστοιχα, με τις συνήθεις συνθέσεις.

Μία μέθοδος μετάδοσης πληροφοριών από μία κατηγορία σε μία άλλη, κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να διατηρείται η δομή, είναι η έννοια του συναρτητή.

Ορισμός 1.3.13. *Εάν $\mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$ είναι δύο κατηγορίες, τότε λέμε ότι έχουμε έναν* **συναλλοίωτο συναρτητή (covariant functor)** *$F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ όταν έχουμε*

1. *Μία απεικόνιση*
$$F\colon \mathsf{ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{ob}(\mathcal{D})$$
$$A \longmapsto F(A)$$
για κάθε $A \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$.
2. *Μία απεικόνιση*
$$F_{A,B}\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \longmapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$$
$$f \longmapsto F(f)$$
για κάθε $f \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, τέτοια ώστε:

(a) *εάν* $f \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$, *τότε:*

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

(b) $F(\mathrm{Id}_A) = \mathrm{Id}_{F(A)}$, *για κάθε* $A \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$.

Παράδειγμα 1.3.14. (ΣΥΝΑΛΛΟΙΩΤΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΤΕΣ) Τα παρακάτω παραδείγματα αποτελούν κάποιες βασικές κλάσεις συναλλοίωτων συναρτητών.

1. **Ταυτοτικοί Συναρτητές**: Εάν $\mathcal{C}$ είναι μια κατηγορία, τότε ο ταυτοτικός συναρτητής $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ δίνεται από $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}(\mathrm{A}) = A$, για κάθε $A \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$ και εάν $f \colon A \to B$ είναι ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$, τότε $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}(f) \colon \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}(A) \longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}(B)$ είναι ο μορφισμός $f \colon A \longrightarrow B$.

2. **Ο Συναρτητής** $\mathsf{Hom}_R(X, -)$: Έστω X ένα αριστερό R-πρότυπο. Ορίζουμε

$$\mathsf{Hom}_R(X, -) : R\text{-}\mathsf{Mod} \longrightarrow \mathsf{Ab}$$
$$M \longmapsto \mathsf{Hom}_R(X, M)$$

για κάθε αριστερό R-πρότυπο M. Εάν $f \colon M \longrightarrow N$ είναι ένας ομομορφισμός στην R-Mod, έστω $\mathsf{Hom}_R(X, -)(f) = f_*$, όπου

$$f_* \colon \mathsf{Hom}_R(X, M) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(X, N)$$
$$h \longmapsto f_*(h) = f \circ h.$$

3. **Οι Συναρτητές** $- \otimes_R X$ και $X \otimes_R -$: Τα τανυστικά γινόμενα που ορίσαμε σε προηγούμενη ενότητα χρησιμοποιούνται για να ορίσουμε έναν συναρτητή από την Mod-R στην Ab και έναν συναρτητή από την R-Mod στην Ab.

(a) Έστω X ένα αριστερό R-πρότυπο. Ορίζουμε

$$- \otimes_R X : \mathsf{Mod}\text{-}R \longrightarrow \mathsf{Ab}$$
$$M \longmapsto M \otimes_R X$$

για κάθε δεξιό R-πρότυπο M. Εάν $f \colon M \longrightarrow N$ είναι ένας ομομορφισμός στην Mod-R, έστω $(- \otimes_R X)(f) = f \otimes \mathrm{Id_X}$, όπου

$$f \otimes \mathrm{Id_X} \colon M \otimes_R X \longrightarrow N \otimes_R X$$
$$\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i \otimes y_i) \longmapsto \sum_{i=1}^{k} n_i (f(x_i) \otimes y_i).$$

(b) Έστω X ένα δεξιό R-πρότυπο. Ορίζουμε

$$X \otimes_R - : R\text{-}\mathsf{Mod} \longrightarrow \mathsf{Ab}$$
$$M \longmapsto X \otimes_R M$$

για κάθε αριστερό R-πρότυπο M. Εάν $f \colon M \longrightarrow N$ είναι ένας μορφισμός στην R-Mod, έστω $(X \otimes_R -)(f) = \mathrm{Id_X} \otimes f$, όπου

$$\mathrm{Id_X} \otimes f \colon X \otimes_R M \longrightarrow X \otimes_R N$$
$$\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i \otimes y_i) \longmapsto \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i \otimes f(y_i)).$$

Έχουμε και έναν δεύτερο τύπο συναρτητή, ο οποίος αντιστρέφει την κατεύθυνση των βελών.

Ορισμός 1.3.15. *Λέμε ότι έχουμε έναν* **αντισυναλλοίωτο συναρτητή (contravariant functor)** $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *όταν έχουμε*

1. *Μία απεικόνιση*
$$\begin{aligned} F\colon \mathsf{ob}(\mathcal{C}) &\longrightarrow \mathsf{ob}(\mathcal{D}) \\ A &\longmapsto F(A) \end{aligned}$$
για κάθε $A \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$.

2. *Μία απεικόνιση*
$$\begin{aligned} F_{A,B}\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) &\longmapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(F(B),F(A)) \\ f &\longmapsto F(f) \end{aligned}$$
για κάθε $f \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$, *τέτοια ώστε:*

   (a) *εάν* $f \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$, $g \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C)$, *τότε:*
   $$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$$

   (b) $F(\mathrm{Id_A}) = \mathrm{Id_{F(A)}}$, *για κάθε* $A \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$.

Παράδειγμα 1.3.16. Ο Συναρτητής $\mathsf{Hom}_R(-,X)$: Έστω X ένα αριστερό R-πρότυπο. Ορίζουμε
$$\begin{aligned} \mathsf{Hom}_R(-,X)\colon R\text{-}\mathsf{Mod} &\longrightarrow \mathsf{Ab} \\ M &\longmapsto \mathsf{Hom}_R(M,X) \end{aligned}$$
για κάθε αριστερό R-πρότυπο M. Εάν $f\colon M \longrightarrow N$ είναι ένας ομομορφισμός στην R-Mod, έστω $\mathsf{Hom}_R(-,X)(f) = f^*$, όπου
$$\begin{aligned} f^*\colon \mathsf{Hom}_R(N,X) &\longrightarrow \mathsf{Hom}_R(M,X) \\ h &\longmapsto f^*(h) = h \circ f. \end{aligned}$$

Ας περάσουμε τώρα στις έννοιες του προσθετικού και πιστού συναρτητή.

Ορισμός 1.3.17. *Μια κατηγορία* $\mathcal{C}$ *καλείται* **προσθετική** *εάν για τυχόντα αντικείμενα* $A, B \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$, *το σύνολο* $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ *είναι αβελιανή ομάδα τέτοια ώστε αν* $f, f_1, f_2 \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$, $g, g_1, g_2 \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C)$ *τότε*
$$g(f_1+f_2) = gf_1 + gf_2 \quad \text{και} \quad (g_1+g_2)f = g_1f + g_2f.$$

Ορισμός 1.3.18. *Έστω* $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ *δύο προσθετικές κατηγορίες. Τότε ένας συναρτητής* $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *καλείται* **προσθετικός** *εάν για κάθε* $f, g \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$, *έχουμε ότι*
$$F(f+g) = F(f) + F(g).$$

Ορισμός 1.3.19. *Ένας συναρτητής* $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *καλείται* **πιστός (faithful)** *εάν για κάθε* $A, B \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$ *η απεικόνιση*
$$\begin{aligned} F_{A,B}\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) &\longmapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A),F(B)) \\ f &\longmapsto F(f) \end{aligned}$$
είναι $1-1$.

Τώρα θα αναφέρουμε τον ορισμό του αριστερά ακριβή, του δεξιά ακριβή και του ακριβή συναρτητή.

Ορισμός 1.3.20. *Ένας συναλλοίωτος συναρτητής* $F\colon R$-Mod $\longrightarrow$ Ab *καλείται* **αριστερά ακριβής** *αν η ακρίβεια της ακολουθίας αριστερών R-προτύπων*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

συνεπάγεται την ακρίβεια της ακολουθίας αβελιανών ομάδων

$$0 \longrightarrow F(M') \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(M'') \,.$$

Επίσης, ένας συναλλοίωτος συναρτητής $F\colon R$-Mod $\longrightarrow$ Ab *καλείται* **δεξιά ακριβής** *αν η ακρίβεια της ακολουθίας αριστερών R-προτύπων*

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

συνεπάγεται την ακρίβεια της ακολουθίας αβελιανών ομάδων

$$F(M') \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(M'') \longrightarrow 0 \,.$$

Τέλος, ένας συναλλοίωτος συναρτητής $F\colon R$-Mod $\longrightarrow$ Ab *καλείται* **ακριβής** *αν η ακρίβεια της ακολουθίας αριστερών R-προτύπων*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

συνεπάγεται την ακρίβεια της ακολουθίας αβελιανών ομάδων

$$0 \longrightarrow F(M') \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(M'') \longrightarrow 0 \,.$$

Ορισμός 1.3.21. *Ένας αντισυναλλοίωτος συναρτητής* $F\colon R$-Mod $\longrightarrow$ Ab *καλείται* **αριστερά ακριβής** *αν η ακρίβεια της ακολουθίας αριστερών R-προτύπων*

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

συνεπάγεται την ακρίβεια της ακολουθίας αβελιανών ομάδων

$$0 \longrightarrow F(M'') \xrightarrow{F(g)} F(M) \xrightarrow{F(f)} F(M') \,.$$

Επίσης, ένας αντισυναλλοίωτος συναρτητής $F\colon R$-Mod $\longrightarrow$ Ab *καλείται* **δεξιά ακριβής** *αν η ακρίβεια της ακολουθίας αριστερών R-προτύπων*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

συνεπάγεται την ακρίβεια της ακολουθίας αβελιανών ομάδων

$$F(M'') \xrightarrow{F(g)} F(M) \xrightarrow{F(f)} F(M') \longrightarrow 0 \,.$$

Τέλος, ένας αντισυναλλοίωτος συναρτητής $F\colon R$-Mod $\longrightarrow$ Ab *καλείται* **ακριβής** *αν η ακρίβεια της ακολουθίας αριστερών R-προτύπων*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

συνεπάγεται την ακρίβεια της ακολουθίας αβελιανών ομάδων

$$0 \longrightarrow F(M'') \xrightarrow{F(g)} F(M) \xrightarrow{F(f)} F(M') \longrightarrow 0 \,.$$

Επομένως, ακριβείς συναρτητές, είτε συναλλοίωτοι είτε αντισυναλλοίωτοι, είναι ακριβώς εκείνοι οι συναρτητές που στέλνουν σύντομες ακριβείς ακολουθίες σε σύντομες ακριβείς ακολουθίες.

Αποδεικνύεται ότι :

Πρόταση 1.3.22. *Για οποιοδήποτε αριστερό R-πρότυπο X, οι συναρτητές*

$$\mathsf{Hom}_R(-,X)\colon R\text{-}\mathsf{Mod} \to \mathsf{Ab} \quad \textit{και} \quad \mathsf{Hom}_R(X,-)\colon R\text{-}\mathsf{Mod} \to \mathsf{Ab}$$

είναι αριστερά ακριβείς.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [24, Theorems 2.38, 2.40]. □

Πρόταση 1.3.23. *Για οποιοδήποτε αριστερό R-πρότυπο X, ο συναρτητής $-\otimes_R X$ είναι δεξιά ακριβής. Επίσης για οποιοδήποτε δεξιό R-πρότυπο X, ο συναρτητής $X\otimes_R -$ είναι δεξιά ακριβής.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [24, Theorem 2.63]. □

1.4 Pullbacks και pushouts

Σε αυτή την ενότητα θα αναφέρουμε δύο χρήσιμες κατασκευές, η μία δυϊκή της άλλης, αυτές των pullbacks και των pushouts. Ας ξεκινήσουμε με τον ορισμό του pushout.

Ορισμός 1.4.1. *Έστω C μια κατηγορία. Το* **pushout** *του διαγράμματος*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \\ C & \end{tikzcd}$$

στην κατηγορία $\mathcal{C}$, είναι ένα αντικείμενο D μαζί με τους μορφισμούς $h\colon B \longrightarrow D$ και $k\colon C \longrightarrow D$, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες δύο συνθήκες:

1. *Υπάρχει ένα μεταθετικό διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, dashed, "h"] \\ C \arrow[r, dashed, "k"] & D \end{tikzcd}$$

2. *Για οποιοδήποτε αντικείμενο D' και μορφισμούς $g'\colon B \longrightarrow D'$ και $f'\colon C \longrightarrow D'$ με $g'\circ f = f'\circ g$, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\phi\colon D \longrightarrow D'$ που κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "h"] \arrow[ddr, bend left, "g'"] & \\ C \arrow[r, "k"'] \arrow[drr, bend right, "f'"'] & D \arrow[dr, dotted, "\phi"] & \\ & & D' \end{tikzcd}$$

Το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "h"] \\ C \arrow[r, "k"] & D, \end{tikzcd}$$

όπως περιγράψαμε παραπάνω, καλείται **pushout διάγραμμα** .

Επίσης έχουμε και την δυϊκή κατασκευή :

Ορισμός 1.4.2. *Έστω C μια κατηγορία. Το* **pullback** *του διαγράμματος*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

στην κατηγορία $\mathcal{C}$, είναι ένα αντικείμενο P μαζί με τους μορφισμούς $h\colon P \longrightarrow A$ και $k\colon P \longrightarrow B$, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες δύο συνθήκες:

1. *Υπάρχει ένα μεταθετικό διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[d, dashed, "k"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

2. *Για οποιοδήποτε αντικείμενο P' και μορφισμούς $h'\colon P' \longrightarrow A$ και $k'\colon P' \longrightarrow B$ με $f \circ h' = g \circ k'$, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\sigma\colon P' \longrightarrow P$ που κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό*

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[dr, dotted, "\sigma"] \arrow[drr, bend left, "h'"] \arrow[ddr, bend right, "k'"'] & & \\ & P \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

Το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

όπως περιγράψαμε παραπάνω, καλείται **pullback διάγραμμα** .

Συνεχίζουμε αποδεικνύοντας την ύπαρξη των pullbacks και των pushouts στην κατηγορία των αριστερών R-προτύπων R-Mod.

Πρόταση 1.4.3. 1. *Το pullback δύο ομομορφισμών αριστερών R-προτύπων*

$$f\colon A \longrightarrow C \quad \text{και} \quad g\colon B \longrightarrow C$$

στην R-Mod υπάρχει.

2. *Το pushout δύο ομομορφισμών αριστερών R-προτύπων*

$$f\colon A \longrightarrow B \quad \textit{και} \quad g\colon A \longrightarrow C$$

στην R-Mod *υπάρχει.*

Απόδειξη. 1. Ορίζουμε

$$P = \{(b,a) \in B \oplus A \mid g(b) = f(a)\}$$

Επιπλέον, ορίζουμε $h\colon P \longrightarrow A,\ (b,a) \longmapsto a$ και $k\colon P \longrightarrow B,\ (b,a) \longmapsto b$. Έστω $(b,a) \in P$. Τότε

$$g \circ k(b,a) = f \circ h(b,a) \Leftrightarrow g(k(b,a)) = f(h(b,a)) \Leftrightarrow g(b) = f(a),$$

το οποίο ισχύει διότι $(b,a) \in P$. Επομένως, $g \circ k = f \circ h$. Εάν (P', h', k') είναι άλλη τριάδα τέτοια ώστε $g \circ k' = f \circ h'$, ορίζουμε απεικόνιση

$$\sigma\colon P' \longrightarrow P, \quad p' \longmapsto (k'(p'), h'(p')).$$

Οι τιμές του σ βρίσκονται μέσα στο P δίοτι $g(k'(p')) = f(h'(p'))$. Επιπλέον,

$$h \circ \sigma(p') = h(\sigma(p')) = h(k'(p'), h'(p')) = h'(p') \Rightarrow h \circ \sigma = h'$$

$$k \circ \sigma(p') = k(\sigma(p')) = k(k'(p'), h'(p')) = k'(p') \Rightarrow k \circ \sigma = k'$$

Τέλος, η σ είναι η μοναδική απεικόνιση τέτοια ώστε $h \circ \sigma = h', k \circ \sigma = k'$. Έστω $\phi\colon P' \longrightarrow P$ έτσι ώστε $h \circ \phi = h', k \circ \phi = k'$. Τότε $\phi(p') = (b,a)$ και

$$h \circ \phi(p') = h(\phi(p')) = h(b,a) = a$$

$$k \circ \phi(p') = k(\phi(p')) = k(b,a) = b$$

Έτσι εάν η ϕ ικανοποιεί τις $h \circ \phi(p') = h'(p'), k \circ \phi(p') = k'(p')$, τότε $h'(p') = a, k'(p') = b$. Άρα $\phi = \sigma$. Έτσι το P μαζί με τους ομομορφισμούς h, k είναι ένα pullback των ομομορφισμών αριστερών R-προτύπων f, g.

2. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι

$$K = \{(g(a), -f(a)) \in C \oplus B \mid a \in A\}$$

είναι υποπρότυπο του $C \oplus B$. Ορίζουμε

$$D = (C \oplus B)/K$$

Επιπλέον, ορίζουμε $h\colon B \longrightarrow D,\ b \longmapsto (0,b) + K$ και $k\colon C \longrightarrow D,\ c \longmapsto (c,0) + K$. Έστω $a \in A$. Τότε

$$k \circ g(a) = h \circ f(a) \Leftrightarrow k(g(a)) = h(f(a)) \Leftrightarrow (g(a),0) + K = (0, f(a)) + K$$

$$\Leftrightarrow (g(a),0) - (0, f(a)) \in K \Leftrightarrow (g(a), -f(a)) \in K, \text{ το οποίο ισχύει } \forall a \in A.$$

Επομένως, $k \circ g = h \circ f$. Εάν (D', f', g') είναι άλλη τριάδα τέτοια ώστε $f' \circ g = g' \circ f$, ορίζουμε απεικόνιση

$$\phi\colon D \longrightarrow D', \quad (c,b) + K \longmapsto f'(c) + g'(b).$$

Κατά τον ίδιο τρόπο όπως στην απόδειξή του 1. αποδεικνύεται ότι $\phi \circ h = g', \phi \circ k = f'$ και ότι η απεικόνιση ϕ είναι μοναδική. Τότε το D μαζί με τους ομομορφισμούς h, k είναι ένα pushout των ομομορφισμών αριστερών R-προτύπων f, g. □

Παρατήρηση 1.4.4. Έστω $(P, h, k), (\bar{P}, \bar{h}, \bar{k})$ δύο pullbacks των ομομορφισμών αριστερών R-προτύπων $f\colon A \longrightarrow C$ και $g\colon B \longrightarrow C$, τότε λόγω της καθολικής ιδιότητας του Ορισμού (1.4.2) (βλέπε 2),υπάρχει μοναδικός ισομορφισμός $\phi\colon \bar{P} \longrightarrow P$, έτσι ώστε $h \circ \phi = \bar{h}$ και $k \circ \phi = \bar{k}$. Επομένως, το pullback δύο ομομορφισμών είναι μοναδικό μέσω ισομορφισμού.

Επίσης, το pushout δύο ομομορφισμών είναι μοναδικό μέσω ισομορφισμού.

Κλείνουμε τώρα την ενότητα αυτή με μία ιδιότητα που έχουν τα pullbacks και τα pushouts, η οποία συνδέει τα pullbacks αντίστοιχα και τα pushouts με τις ακριβείς ακολουθίες.

Πρόταση 1.4.5. *Θεωρούμε το pullback διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

1. *Εάν η f είναι μονομορφισμός, τότε είναι και η k.*

2. *Εάν η f είναι επιμορφισμός, τότε είναι και η k.*

3. *Ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία $A \xrightarrow{f} C \xrightarrow{\epsilon} L$ είναι ακριβής. Τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\delta\colon B \longrightarrow L$ ο οποίος κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό με ακριβείς στήλες:*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"] \arrow[d, dashed, "\delta"] & C \arrow[d, "\epsilon"] \\ L \arrow[r, equal] & L \end{tikzcd}$$

   Εάν η g και η ϵ είναι επιμορφισμοί, τότε είναι και η δ.

4. *Ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία $E \xrightarrow{\epsilon} A \xrightarrow{f} C$ είναι ακριβής. Τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $l\colon E \longrightarrow P$ ο οποίος κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό με ακριβείς στήλες:*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "l"] & E \arrow[d, "\epsilon"] \\ P \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

   Εάν η ϵ είναι μονομορφισμός, τότε είναι και η l.

Απόδειξη. 1. Έστω $(b, a) \in \mathsf{Ker}\, k$, δηλαδή $(b, a) \in P$ με $k(b, a) = b = 0$. Επειδή $(b, a) \in P$ έχουμε ότι $f(a) = g(b) = g(0) = 0$, δηλαδή $a \in \mathsf{Ker}\, f$. Επειδή όμως η f είναι μονομορφισμός έχουμε ότι $a = 0$. Επομένως $(b, a) = (0, 0)$.

2. Έστω $b \in B$. Άρα $g(b) \in C$. Επειδή η f είναι επιμορφισμός, υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $f(a) = g(b)$. Επομένως $(b, a) \in P$ με $k(b, a) = b$ και έτσι η k είναι επιμορφισμός.

3. Ο ομομορφισμός $\delta = \epsilon \circ g$ είναι ο μοναδικός ομομορφισμός που κάνει το διάγραμμα μεταθετικό. Μένει να δείξουμε ότι η ακολουθία $P \xrightarrow{k} B \xrightarrow{\delta} L$ είναι ακριβής, δηλαδή ότι $\operatorname{Im} k = \operatorname{Ker} \delta$. Έχουμε ότι

$$\delta \circ k = \epsilon \circ g \circ k = \epsilon \circ f \circ h = 0 \circ h = 0$$

Επομένως, $\operatorname{Im} k \subseteq \operatorname{Ker} \delta$. Αντίστροφα, έστω $b \in \operatorname{Ker} \delta$, δηλαδή $0 = \delta(b) = \epsilon \circ g(b) = \epsilon(g(b))$. Άρα $g(b) \in \operatorname{Ker} \epsilon = \operatorname{Im} f$. Επομένως, υπάρχει $a \in A$ με $f(a) = g(b)$ και συνεπώς $(b, a) \in P$ με $b = k(b, a) \in \operatorname{Im} k$. Τέλος, είναι προφανές ότι η δ είναι επιμορφισμός όταν και η g και η ϵ είναι επιμορφισμοί.

4. Έστω $e \in E$. Ορίζουμε απεικόνιση

$$l \colon E \longrightarrow P,\ e \longmapsto (0, \epsilon(e))$$

Οι τιμές της l βρίσκονται μέσα στο P διότι $g(0) = f(\epsilon(e)) = 0$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η l είναι η μοναδική απεικόνιση η οποία κάνει το διάγραμμα μεταθετικό με ακριβείς στήλες. Από τον ορισμό της l έπεται εύκολα η μεταθετικότητα του διαγράμματος. Μένει να δείξουμε ότι η ακολουθία $E \xrightarrow{l} P \xrightarrow{k} B$ είναι ακριβής, δηλαδή ότι $\operatorname{Ker} k = \operatorname{Im} l$. Έχουμε ότι $k \circ l(e) = k(0, \epsilon(e)) = 0, \forall e \in E$. Επομένως μένει να δείξουμε ότι $\operatorname{Ker} k \subseteq \operatorname{Im} l$. Έστω $(b, a) \in \operatorname{Ker} k$, δηλαδή $(b.a) \in P$ με $0 = k(b, a) = b$. Επειδή $(b, a) \in P$, έχουμε ότι $f(a) = g(b) = g(0) = 0$. Επομένως $a \in \operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} \epsilon$, δηλαδή υπάρχει $e \in E$ με $\epsilon(e) = a$. Άρα $(b, a) = (0, \epsilon(e)) = l(e) \in \operatorname{Im} l$.

Τώρα έστω $e \in \operatorname{Ker} l$ δηλαδή $l(e) = (0, \epsilon(e)) = 0 \Rightarrow \epsilon(e) = 0$. Άρα $e \in \operatorname{Ker} \epsilon$ και επειδή η ϵ είναι μονομορφισμός, έχουμε ότι $e = 0$. Έτσι η l είναι μονομορφισμός όταν είναι η ϵ μονομορφισμός. □

Πρόταση 1.4.6. *Θεωρούμε το pushout διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "h"] \\ C \arrow[r, "k"] & D, \end{tikzcd}$$

Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

1. *Εάν η f είναι μονομορφισμός, τότε είναι και η k.*

2. *Εάν η f είναι επιμορφισμός, τότε είναι και η k.*

3. *Ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία $E \xrightarrow{\epsilon} A \xrightarrow{f} B$ είναι ακριβής. Τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\delta \colon E \longrightarrow C$ ο οποίος κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό με ακριβείς γραμμές:*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, equal] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & B \arrow[d, "h"] \\ E \arrow[r, dashed, "\delta"] & C \arrow[r, "k"] & D \end{tikzcd}$$

   Εάν η g και η ϵ είναι μονομορφισμοί, τότε είναι και η δ.

4. *Ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\epsilon} L$ είναι ακριβής. Τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $l \colon D \longrightarrow L$ ο οποίος κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό με ακριβείς γραμμές:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & B \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "h"] & L \arrow[d, equal] \\ C \arrow[r, "k"] & D \arrow[r, "l"] & L \end{tikzcd}$$

Εάν η ϵ είναι επιμορφισμός, τότε είναι και η l.

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται κατά τον ίδιο τρόπο όπως η απόδειξη της Πρότασης (1.4.5). □

1.5 Ευθέα και Αντίστροφα Όρια

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε δύο ακόμα κατασκευές, όπου η μία γενικεύει τα pull-backs και τις τομές και η άλλη γενικεύει τα pushouts και τις ενώσεις. Και οι δύο κατασκευές έχουν ως βάση μία οικογένεια προτύπων $\{M_i \mid i \in I\}$, όπου I είναι ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο εφοδιασμένο με μία επιπλέον ιδιότητα η οποία περιγράφεται στον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 1.5.1. *Ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο καλείται* **κατευθυνόμενο** *(***directed poset***) εάν $\forall i, j \in I$ υπάρχει ένα $k \in I$ με $i, j \leq k$.*

Ας περάσουμε τώρα στον ορισμό του ευθέος συστήματος αριστερών R-προτύπων.

Ορισμός 1.5.2. *Έστω I ένα κατευθυνόμενο σύνολο. Ένα* **ευθύ σύστημα** *(***direct system***) αριστερών R-προτύπων υπεράνω του I είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος $\{M_i, f_{ji}\}$ που αποτελείται από μία οικογένεια αριστερών R-προτύπων $\{M_i \mid i \in I\}$ μαζί με μία οικογένεια ομομορφισμών αριστερών R-προτύπων*

$$\{f_{ji} \colon M_i \longrightarrow M_j\}$$

όταν $i \leq j$ τέτοια ώστε

1. *$\forall i \in I$: $f_{ii} = \mathrm{Id}_{M_i}$.*
2. *$\forall i \leq j \leq k$: $f_{kj} \circ f_{ji} = f_{ki}$.*

Ορισμός 1.5.3. *Έστω I ένα κατευθυνόμενο σύνολο και έστω $\{M_i, f_{ji}\}$ ένα ευθύ σύστημα αριστερών R-προτύπων υπεράνω του I. Το* **ευθύ όριο** *(***direct limit***) του ευθέος συστήματος $\{M_i, f_{ji}\}$ είναι ένα αριστερό R-πρότυπο $\varinjlim M_i$ μαζί με μια οικογένεια ομομορφισμών αριστερών R-προτύπων*

$$\left\{a_i \colon M_i \longrightarrow \varinjlim M_i \mid i \in I\right\}$$

τέτοια ώστε

1. *$\forall i \leq j$: $a_j \circ f_{ji} = a_i$*
2. *Για κάθε άλλο αριστερό R-πρότυπο X και απεικονίσεις $k_i \colon M_i \longrightarrow X$ που ικανοποιούν την σχέση $k_j \circ f_{ji} = k_i$, $\forall i \leq j$, τότε υπάρχει μοναδική απεικόνιση $\theta \colon \varinjlim M_i \longrightarrow X$ τέτοια ώστε $k_i = \theta \circ a_i$.*

Ας περάσουμε τώρα στο θεώρημα ύπαρξης του ευθέος ορίου ενός ευθέος συστήματος αριστερών R-προτύπων.

Θεώρημα 1.5.4. *Το ευθύ όριο ενός ευθέος συστήματος $\{M_i, f_{ji}\}$ αριστερών R-προτύπων υπεράνω ενός κατευθυνόμενου συνόλου I, πάντα υπάρχει.*

Απόδειξη. Έστω $\lambda_i \colon M_i \longrightarrow \oplus M_i$, $\forall i \in I$, η κανονική έγκλειση. Ορίζουμε

$$D = \oplus M_i / S,$$

όπου S είναι υποπρότυπο του $\oplus M_i$ που παράγεται από στοιχεία της μορφής $\{\lambda_j \circ f_{ji}(m_i) - \lambda_i(m_i)\}$ με $m_i \in M_i$ και $i \leq j$. Επιπλέον, ορίζουμε

$$a_i \colon M_i \longrightarrow D, m_i \longmapsto a_i(m_i) := \lambda_i(m_i) + S.$$

Έστω $m_i \in M_i$ τότε $a_j \circ f_{ji}(m_i) = a_i(m_i) \Leftrightarrow a_j(f_{ji}(m_i) = a_i(m_i) \Leftrightarrow \lambda_j \circ f_{ji}(m_i) + S = \lambda_i(m_i) + S \Leftrightarrow \lambda_j \circ f_{ji}(m_i) - \lambda_i(m_i) \in S$, το οποίο ισχύει. Επομένως, $a_j \circ f_{ji} = a_i$.

Ας υποθέσουμε ότι X είναι ένα αριστερό R-πρότυπο και έστω ότι υπάρχουν R-απεικονίσεις $k_i \colon M_i \longrightarrow X$ που ικανοποιούν την σχέση $k_j \circ f_{ji} = k_i \forall i \leq j$. Ορίζουμε

$$\theta \colon D \longrightarrow X,\ (m_i) + S \longmapsto \theta((m_i) + S) := k_i(m_i)$$

Επίσης, $\theta \circ a_i(m_i) = \theta(a_i(m_i)) = \theta(\lambda_i(m_i) + S) = k_i(m_i)$. Τέλος, η θ είναι η μοναδική απεικόνιση τέτοια ώστε $\theta \circ a_i = k_i$. Εάν $\phi \colon D \longrightarrow X$ είναι μία απεικόνιση τέτοια ώστε $\phi \circ a_i = k_i$, τότε $\phi((m_i) + S) = x$ και $\phi \circ a_i(m_i) = \phi(a_i(m_i)) = \phi(\lambda_i(m_i) + S) = \phi((m_i) + S) = x$. Έτσι επειδή η ϕ ικανοποιεί την $\phi \circ a_i(m_i) = k_i(m_i), \forall i, \forall m_i$, θα έχουμε ότι $x = k_i(m_i)$ και έτσι $\phi = \theta$. Επομένως, $D \cong \varinjlim M_i$. □

Παρατήρηση 1.5.5. Κάθε στοιχείο του $\varinjlim M_i$ έχει αντιπρόσωπο ένα στοιχείο της μορφής $\lambda_i(m_i) + S$.

Παράδειγμα 1.5.6. Έστω I ένα κατευθυνόμενο σύνολο, M ένα αριστερό R-πρότυπο και $\{M_i\}_{i \in I}$ μια οικογένεια υποπροτύπων του M τέτοια ώστε για κάθε ζεύγος $i, j \in I$, υπάρχει $k \in I$ με $M_i + M_j \subseteq M_k$. Θέτουμε $i \leq j$ εάν $M_i \subseteq M_j$ και έστω $f_{ji} \colon M_i \longrightarrow M_j$ η κανονική έγκλειση. Τότε $\{M_i, f_{ji}\}$ είναι ένα ευθύ σύστημα αριστερών R-προτύπων και

$$\varinjlim M_i = \cup_{i \in I} M_i.$$

Εάν τώρα θεωρήσουμε ένα αριστερό R-πρότυπο M και την οικογένεια όλων των πεπερασμένα παραγόμενων υποπροτύπων του η οποία πληρεί την παραπάνω συνθήκη, τότε $\cup_{i \in I} M_i = M$ και έτσι $\varinjlim M_i = M$.

Παρατήρηση 1.5.7. Κάθε αριστερό R-πρότυπο είναι το ευθύ όριο των πεπερασμένα παραγόμενων υποπροτύπων του.

Τώρα θα περάσουμε σε δύο σημαντικές ιδιότητες των ευθέων ορίων.

Ορισμός 1.5.8. *Εάν $\{A_i, a_{ji}\}$ και $\{B_i, b_{ji}\}$ είναι δύο ευθέα συστήματα αριστερών R-προτύπων υπεράνω του ίδιου συνόλου δεικτών I, τότε ένας* **μετασχηματισμός** *(μορφισμός ευθέων συστημάτων)*

$$r \colon \{A_i, a_{ji}\} \longrightarrow \{B_i, b_{ji}\}$$

είναι μία οικογένεια ομομορφισμών αριστερών R-προτύπων $r = \{r_i \colon A_i \longrightarrow B_i\}$ τέτοια ώστε $b_{ji} \circ r_i = r_j \circ a_{ji}$. Ένας μετασχηματισμός $r \colon \{A_i, a_{ji}\} \longrightarrow \{B_i, b_{ji}\}$ δίνει έναν ομομορφισμό αριστερών R-προτύπων

$$\varinjlim r_i \colon \varinjlim A_i \longrightarrow \varinjlim B_i$$

$$\varinjlim r_i(\lambda_i(a_i) + S) = \mu_i \circ r_i(a_i) + T$$

όπου $S \subseteq \oplus A_i$ και $T \subseteq \oplus B_i$. και λ_i και μ_i είναι οι κανονικές εγκλείσεις των A_i και B_i στα ευθέα αθροίσματα.

Πρόταση 1.5.9. *Έστω I ένα κατευθυνόμενο σύνολο και $\{A_i, a_{ji}\}, \{B_i, b_{ji}\}, \{C_i, c_{ji}\}$ ευθέα συστήματα αριστερών R-προτύπων υπεράνω του συνόλου I. Εάν*

$$r \colon \{A_i, a_{ji}\} \longrightarrow \{B_i, b_{ji}\} \text{ και } s \colon \{B_i, b_{ji}\} \longrightarrow \{C_i, c_{ji}\}$$

είναι μετασχηματισμοί ευθέων συστημάτων και εάν η ακολουθία

$$0 \longrightarrow A_i \xrightarrow{r_i} B_i \xrightarrow{s_i} C_i \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής $\forall i \in I$*, τότε η επαγόμενη ακολουθία προτύπων*

$$0 \longrightarrow \varinjlim A_i \xrightarrow{\varinjlim r_i} \varinjlim B_i \xrightarrow{\varinjlim s_i} \varinjlim C_i \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [25, Proposition 7.100]. $\square$

Επομένως σύμφωνα με την παραπάνω Πρόταση ο συναρτητής ευθύ όριο είναι ακριβής, δηλαδή διατηρεί ακριβείς ακολουθίες. Το επόμενο αποτέλεσμα δείχνει ότι ο συναρτητής ευθύ όριο διατηρεί τανυστικά γινόμενα.

Πρόταση 1.5.10. *Εάν* A *είναι ένα δεξιό* R*-πρότυπο τότε ο συναρτητής* $A \otimes_R -$ *διατηρεί τα ευθέα όρια. Επομένως, εάν* $\{B_i, b_{ji}\}$ *είναι ένα ευθύ σύστημα αριστερών* R*-προτύπων, τότε υπάρχει ισομορφισμός*

$$\varinjlim (A \otimes_R B_i) \cong A \otimes_R (\varinjlim B_i).$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [24, Theorem 5.27]. $\square$

Τώρα θα μελετήσουμε την δυϊκή κατασκευή.

Ορισμός 1.5.11. *Έστω* I *ένα κατευθυνόμενο σύνολο. Ένα* **αντίστροφο σύστημα** *(***inverse system***) αριστερών* R*-προτύπων υπεράνω του* I *είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος* $\{M_i, f_{ij}\}$ *που αποτελείται από μία οικογένεια αριστερών* R*-προτύπων* $\{M_i \mid i \in I\}$ *μαζί με μία οικογένεια ομομορφισμών αριστερών* R*-προτύπων*

$$\{f_{ij} \colon M_j \longrightarrow M_i\}$$

όταν $i \leq j$ *τέτοια ώστε*

1. $\forall i \in I\colon\ f_{ii} = \mathrm{Id}_{M_i}$.
2. $\forall i \leq j \leq k\colon\ f_{ij} \circ f_{jk} = f_{ik}$.

Έτσι αντίστοιχα έχουμε τον ορισμό του αντίστροφου ορίου:

Ορισμός 1.5.12. *Έστω* I *ένα κατευθυνόμενο σύνολο και έστω* $\{M_i, f_{ij}\}$ *ένα αντίστροφο σύστημα αριστερών* R*-προτύπων υπεράνω του* I*. Το* **αντίστροφο όριο** *(***inverse limit***) του αντιστρόφου συστήματος* $\{M_i, f_{ij}\}$ *είναι ένα αριστερό* R*-πρότυπο* $\varprojlim M_i$ *με μια οικογένεια ομομορφισμών αριστερών* R*-προτύπων*

$$\left\{a_i \colon \varprojlim M_i \longrightarrow M_i \mid i \in I\right\}$$

τέτοια ώστε

1. $\forall i \leq j\colon\ f_{ij} \circ a_j = a_i$.
2. *Για κάθε άλλο αριστερό* R*-πρότυπο* X *και απεικονίσεις* $k_i \colon X \longrightarrow M_i$ *που ικανοποιούν την σχέση* $f_{ij} \circ k_j = k_i\ \forall i \leq j$*, τότε υπάρχει μοναδική απεικόνιση* $\theta \colon X \longrightarrow \varprojlim M_i$ *τέτοια ώστε* $k_i = a_i \circ \theta$.

Θεώρημα 1.5.13. *Το αντίστροφο όριο ενός αντίστροφου συστήματος* $\{M_i, f_{ij}\}$ *αριστερών* R*-προτύπων υπεράνω ενός κατευθυνόμενου συνόλου* I*, πάντα υπάρχει.*

Απόδειξη. Εάν $p_i \colon \prod M_i \longrightarrow M_i$ είναι η i-οστή απεικόνιση προβολής, ορίζουμε

$$L = \{(m_i) \in \prod M_i \mid m_i = f_{ij}(m_j)\}$$

και $a_i \colon L \longrightarrow M_i$ να είναι ο περιορισμός $p_i|L$. Έστω $(m_i) \in L$, τότε

$$f_{ij} \circ a_j((m_i)) = f_{ij}(a_j((m_i))) = f_{ij}(m_j) = m_i = a_i((m_i)).$$

Επομένως, $f_{ij} \circ a_j = a_i$.

Ας υποθέσουμε ότι X είναι ένα αριστερό R-πρότυπο και έστω ότι υπάρχουν R-απεικονίσεις $k_i \colon X \longrightarrow M_i$ που ικανοποιούν την σχέση $f_{ij} \circ k_j = k_i, \forall i \leq j$. Ορίζουμε

$$\theta \colon X \longrightarrow \prod M_i,\ x \longmapsto \theta(x) := (k_i(x))$$

Επειδή $f_{ij} \circ k_j = k_i, \forall i \leq j$, έχουμε ότι $\mathsf{Im}\,\theta \subseteq L$. Επίσης, $a_i \circ \theta(x) = a_i(\theta(x)) = a_i((k_i(x))) = k_i(x) \Rightarrow a_i \circ \theta = k_i$. Τέλος, η θ είναι η μοναδική απεικόνιση τέτοια ώστε $a_i \circ \theta = k_i$. Εάν $\phi \colon X \longrightarrow L$ είναι μία απεικόνιση τέτοια ώστε $a_i \circ \phi = k_i$ τότε $\phi(x) = (m_i)$ και $a_i \circ \phi(x) = a_i(\phi(x)) = a_i((m_i)) = m_i$. Έτσι επειδή η ϕ ικανοποιεί την $a_i \circ \phi(x) = k_i(x), \forall i, \forall x$ θα έχουμε ότι $m_i = k_i(x)$, και έτσι $\phi = \theta$. Επομένως, $L \cong \varprojlim M_i$. □

Παράδειγμα 1.5.14. Έστω $\{M_i\}_{i \in I}$ μία οικογένεια υποπροτύπων ενός αριστερού προτύπου M διατεταγμένη με την αντίστροφη έγκλειση, δηλαδή εάν $i \leq j$ τότε $M_j \subseteq M_i$. Τότε η οικογένεια $\{M_i\}_{i \in I}$ μαζί με τις αντίστροφες εγκλείσεις συνιστούν ένα αντίστροφο σύστημα αριστερών R-προτύπων και έτσι

$$\varprojlim M_i \cong \bigcap_{i \in I} M_i$$

Τέλος αναφέρουμε το εξής χρήσιμο αποτέλεσμα:

Πρόταση 1.5.15. *Εάν A είναι ένα αριστερό R-πρότυπο, τότε ισχύουν τα εξής:*

1. $\mathsf{Hom}_R(A, \varprojlim M_i) \;\cong\; \varprojlim \mathsf{Hom}_R(A, M_i)$,
2. $\mathsf{Hom}_R(\varinjlim M_i, A) \;\cong\; \varprojlim \mathsf{Hom}_R(M_i, A)$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [24, Propositions 5.21,5.26]. □

Παρατήρηση 1.5.16. Έστω $a_i \colon M_i \longrightarrow \varinjlim M_i$ και $a_i' \colon M_i \longrightarrow \varinjlim' M_i$ δύο ευθέα όρια ενός ευθέος συστήματος αριστερών R-προτύπων, τότε λόγω της καθολικής ιδιότητας του Ορισμού (1.5.3), υπάρχει μοναδικός ισομορφισμός $\alpha \colon \varinjlim M_i \xrightarrow{\cong} \varinjlim' M_i$, έτσι ώστε: $\alpha \circ \alpha_i = \alpha_i'$, $\forall i \in I$. Επομένως το ευθύ όριο είναι μοναδικό μέσω ενός ισομορφισμού ο οποίος μετατίθεται με τις δομικούς ομομορφισμούς του ευθέος συστήματος.

Επίσης το αντίστροφο όριο είναι μοναδικό μέσω ενός ισομορφισμού ο οποίος μετατίθεται με τις δομικούς ομομορφισμούς του αντίστροφου συστήματος.

Υπενθυμίζουμε, βλέπε και την ενότητα 3 του Κεφαλαίου 3, ότι ένα πρότυπο A καλείται **πεπερασμένα παραστάσιμο** (**finitely presented**) αν υπάρχει μια ακριβής ακολουθία

$$P^1 \longrightarrow P^0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

όπου τα P^1, P^0 είναι πεπερασμένα παραγόμενα ελεύθερα πρότυπα. Τα πεπερασμένα παραστάσιμα πρότυπα αποτελούν μια σημαντική κλάση προτύπων λόγω του ακόλουθου αποτελέσματος. Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο βιβλίο [21].

Πρόταση 1.5.17. *Κάθε πρότυπο A υπεράνω τυχόντος δακτυλίου R είναι ευθύ όριο ενός ευθέος συστήματος $\{F_i \mid i \in I\}$ πεπερασμένα παραστάσιμων προτύπων:*

$$A = \varinjlim F_i$$

Κεφάλαιο 2

Στοιχεία Ομολογικής Άλγεβρας

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναπτύξουμε τα βασικά στοιχεία Ομολογικής Άλγεβρας, τα οποία θα χρειαστούμε στην συνέχεια της διατριβής.

Θα μελετήσουμε σύμπλοκα προτύπων υπεράνω ενός τυχόντος δακτυλίου καθώς και την ομολογία τους, η οποία θα μας οδηγήσει με χρήση ειδικού τύπου αναλύσεων προτύπων στην έννοια του παραγόμενου συναρτητή. Ειδικότερα θα μελετήσουμε προβολικές και ενέσιμες αναλύσεις προτύπων και θα επικεντρώσουμε την ανάλυσή μας στους παραγόμενους συναρτητές Ext και Tor των προσθετικών συναρτητών Hom και $\otimes$.

2.1 Σύμπλοκα Προτύπων και Ομολογία

Μία από τις πλέον βασικές έννοιες στην Ομολογική Άλγεβρα είναι αυτή του συμπλόκου προτύπων.

Ορισμός 2.1.1. *Ένα* **σύμπλοκο** $(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{d}_\bullet)$ **(chain complex)** *είναι μία ακολουθία* $\{C_n, d_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *αριστερών R-προτύπων και ομομορφισμών αριστερών R-προτύπων*

$$\mathbf{C}_\bullet = \ \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

τέτοια ώστε $d_n \circ d_{n+1} = 0$ για όλα τα $n \in \mathbb{Z}$. Εν συντομία το σύμπλοκο το συμβολίζουμε με $\mathbf{C}_\bullet$ και οι ομομορφισμοί αριστερών R-προτύπων d_n καλούνται **διαφορικά.**

Παρατήρηση 2.1.2. Η σχέση $d_n \circ d_{n+1} = 0$ είναι ισοδύναμη με την έγκλειση $\mathsf{Im}\, d_{n+1} \subseteq \mathsf{Ker}\, d_n$.

Παράδειγμα 2.1.3.

1. Κάθε ακριβής ακολουθία είναι ένα σύμπλοκο, διότι οι απαιτούμενες εγκλείσεις $\mathsf{Im}\, d_{n+1} \subseteq \mathsf{Ker}\, d_n$, σε αυτή την περίπτωση είναι ισότητες.

2. Το μηδενικό σύμπλοκο είναι το σύμπλοκο $(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{d}_\bullet)$ του οποίου κάθε όρος $C_n = \{0\}$ και κατά ανάγκη κάθε διαφορικό $d_n = \{0\}$.

3. Εάν $(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{d}_\bullet)$ είναι ένα σύμπλοκο,

$$\mathbf{C}_\bullet = \ \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

και εάν $F\colon R\text{-}\mathsf{Mod} \longrightarrow S\text{-}\mathsf{Mod}$ είναι ένας προσθετικός συναλλοίωτος συναρτητής, όπου R, S δύο δακτύλιοι, τότε η ακολουθία $F(\mathbf{C}_\bullet)$ που ορίζεται ως

$$F(\mathbf{C}_\bullet) = \ \cdots \longrightarrow F(C_{n+1}) \xrightarrow{F(d_{n+1})} F(C_n) \xrightarrow{F(d_n)} F(C_{n-1}) \longrightarrow \cdots$$

είναι επίσης σύμπλοκο.

Με σκοπό να δημιουργήσουμε την κατηγορία των συμπλόκων θα εισάγουμε την έννοια του μορφισμού μεταξύ δύο συμπλόκων.

Ορισμός 2.1.4. *Έστω $(\mathbf{C_\bullet}, \mathbf{d_\bullet}), (\mathbf{C'_\bullet}, \mathbf{d'_\bullet})$ δύο σύμπλοκα. Τότε ένας* **μορφισμός**

$$\mathbf{f_\bullet}\colon (\mathbf{C_\bullet}, \mathbf{d_\bullet}) \longrightarrow (\mathbf{C'_\bullet}, \mathbf{d'_\bullet})$$

είναι μία οικογένεια ομομορφισμών αριστερών R-προτύπων $f_n\colon C_n \longrightarrow C'_n, \forall n \in \mathbb{Z}$, τέτοια ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots . \\
\cdots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"'] & C'_n \arrow[r, "d'_n"'] & C'_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η σύνθεση $\mathbf{g_\bullet} \circ \mathbf{f_\bullet}$ δύο μορφισμών

$$\mathbf{f_\bullet}\colon (\mathbf{C_\bullet}, \mathbf{d_\bullet}) \longrightarrow (\mathbf{C'_\bullet}, \mathbf{d'_\bullet}) \quad \& \quad \mathbf{g_\bullet}\colon (\mathbf{C'_\bullet}, \mathbf{d'_\bullet}) \longrightarrow (\mathbf{C''_\bullet}, \mathbf{d''_\bullet})$$

είναι ξανά μορφισμός, εάν ορίσουμε $(\mathbf{g_\bullet} \circ \mathbf{f_\bullet})_n = g_n \circ f_n \ \forall n \in \mathbb{Z}$. Επιπλέον, έχουμε ότι ο ταυτοτικός μορφισμός στο $(\mathbf{C_\bullet}, \mathbf{d_\bullet})$ είναι η οικογένεια των ταυτοτικών ομομορφισμών αριστερών R-προτύπων $\mathrm{Id}_{C_n}\colon C_n \longrightarrow C_n$.

Από εδώ και στο εξής την κατηγορία όλων των συμπλόκων από αριστερά R-πρότυπα θα την συμβολίζουμε με $\mathcal{C}(R)$. Η κατηγορία $\mathcal{C}(R)$ είναι προσθετική εάν ορίσουμε $(\mathbf{f_\bullet} + \mathbf{g_\bullet})_n = f_n + g_n, \forall n \in \mathbb{Z}$.

Ορισμός 2.1.5. *Εάν $(\mathbf{C_\bullet}, \mathbf{d_\bullet})$ είναι ένα σύμπλοκο, τότε η n-οστή* **ομολογία (homology)** *του συμπλόκου $(\mathbf{C_\bullet}, \mathbf{d_\bullet})$ ορίζεται να είναι το πρότυπο πηλίκο $\mathsf{Ker}\, d_n / \mathsf{Im}\, d_{n+1}$ και συμβολίζεται με $\mathsf{H}_n(\mathbf{C_\bullet})$:*

$$\mathsf{H}_n(\mathbf{C_\bullet}) = \mathsf{Ker}\, d_n / \mathsf{Im}\, d_{n+1}$$

Επομένως μια ακριβής ακολουθία έχει παντού μηδενική ομολογία $\mathsf{H}_n(\mathbf{C_\bullet}) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$, και αντίστροφα.

Θεώρημα 2.1.6. *Η αντιστοιχία*

$$\mathsf{H}_n\colon \mathcal{C}(R) \longrightarrow R\text{-}\mathsf{Mod}$$
$$\mathbf{C_\bullet} \longmapsto \mathsf{H}_n(\mathbf{C_\bullet}) = \mathsf{Ker}\, d_n / \mathsf{Im}\, d_{n+1}$$

ορίζει έναν προσθετικό συναλλοίωτο συναρτητή, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι αν $\mathbf{f_\bullet}\colon (\mathbf{C_\bullet}, \mathbf{d_\bullet}) \longrightarrow (\mathbf{C_\bullet}, \mathbf{d'_\bullet})$ είναι ένας μορφισμός μεταξύ των συμπλόκων $(\mathbf{C_\bullet}, \mathbf{d_\bullet}), (\mathbf{C'_\bullet}, \mathbf{d'_\bullet})$, τότε επάγεται ένας ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων: $\mathsf{H}_n(\mathbf{f_\bullet})\colon \mathsf{H}_n(\mathbf{C_\bullet}) \longrightarrow \mathsf{H}_n(\mathbf{C'_\bullet})$. Εάν

$$\mathbf{f_\bullet}\colon (\mathbf{C_\bullet}, \mathbf{d_\bullet}) \longrightarrow (\mathbf{C_\bullet}, \mathbf{d'}\bullet)$$

είναι ένας τέτοιος μορφισμός, τότε έχουμε το εξής μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\
C'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"'] & C'_n \arrow[r, "d'_n"'] & C'_{n-1}
\end{tikzcd}$$

Εάν $x \in \operatorname{Ker} d_n$ τότε $d_n(x) = 0$ και $f_n(x) \in C'_n$. Όμως

$$d'_n(f_n(x)) = (d'_n \circ f_n)(x) = (f_{n-1} \circ d_n)(x) = f_{n-1}(d_n(x)) = f_{n-1}(0) = 0,$$

άρα $f_n(x) \in \operatorname{Ker} d'_n$. Έτσι ορίζουμε

$$\mathsf{H}_n(\mathbf{f}_\bullet) \colon \mathsf{H}_n(\mathbf{C}_\bullet) \longrightarrow \mathsf{H}_n(\mathbf{C'}_\bullet)$$
$$x + \operatorname{Im} d_{n+1} \longmapsto \mathsf{H}_n(\mathbf{f}_\bullet)(x + \operatorname{Im} d_{n+1}) = f_n(x) + \operatorname{Im} d'_{n+1}.$$

Η απεικόνιση αυτή είναι καλά ορισμένη και εύκολα δείχνει κανείς ότι η $\mathsf{H}_n(\mathbf{f}_\bullet)$ είναι ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων.

Ας δούμε τώρα ότι η H_n είναι ένας συναρτητής. Είναι προφανές ότι $\mathsf{H}_n(\mathrm{Id}_{\mathbf{C}_\bullet}) = \mathrm{Id}_{\mathsf{H}_n(\mathbf{C}_\bullet)}$. Εάν $\mathbf{g}_\bullet \colon (\mathbf{C'}_\bullet, \mathbf{d'}_\bullet) \longrightarrow (\mathbf{C''}_\bullet, \mathbf{d''}_\bullet)$ είναι ένας άλλος μορφισμός συμπλόκων τότε η σύνθεση ορίζεται και έχουμε ότι

$$\mathsf{H}_n(\mathbf{g}_\bullet \circ \mathbf{f}_\bullet) \colon \mathsf{H}_n(\mathbf{C}_\bullet) \longrightarrow \mathsf{H}_n(\mathbf{C''}_\bullet).$$

Επιπλέον:

$$\begin{aligned} \mathsf{H}_n(\mathbf{g}_\bullet \circ \mathbf{f}_\bullet)(x + \operatorname{Im} d_{n+1}) &= (g_n \circ f_n)(x) + \operatorname{Im} d''_{n+1} \\ &= g_n(f_n(x)) + \operatorname{Im} d''_{n+1} \\ &= \mathsf{H}_n(\mathbf{g}_\bullet)(f_n(x) + \operatorname{Im} d'_{n+1}) \\ &= \mathsf{H}_n(\mathbf{g}_\bullet)\mathsf{H}_n(\mathbf{f}_\bullet)(x + \operatorname{Im} d_{n+1}) \end{aligned}$$

Άρα ισχύει ότι $\mathsf{H}_n(\mathbf{g}_\bullet \circ \mathbf{f}_\bullet) = \mathsf{H}_n(\mathbf{g}_\bullet)\mathsf{H}_n(\mathbf{f}_\bullet)$

Τέλος, η H_n είναι προσθετικός συναρτητής:

Εάν $\mathbf{h}_\bullet \colon (\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{d}_\bullet) \longrightarrow (\mathbf{C'}_\bullet, \mathbf{d'}_\bullet)$ είναι ένας άλλος μορφισμός συμπλόκων τότε έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \mathsf{H}_n(\mathbf{f}_\bullet + \mathbf{h}_\bullet)(x + \operatorname{Im} d_{n+1}) &= (f_n + h_n)(x) + \operatorname{Im} d'_{n+1} \\ &= f_n(x) + h_n(x) + \operatorname{Im} d'_{n+1} \\ &= (\mathsf{H}_n(\mathbf{f}_\bullet) + \mathsf{H}_n(\mathbf{h}_\bullet))(x + \operatorname{Im} d_{n+1}) \end{aligned}$$

Άρα, $\mathsf{H}_n(\mathbf{f}_\bullet + \mathbf{h}_\bullet) = \mathsf{H}_n(\mathbf{f}_\bullet) + \mathsf{H}_n(\mathbf{h}_\bullet)$ □

Η πρόταση που ακολουθεί μας λέει ότι οι ακριβείς συναρτητές διατηρούν την ομολογία.

Πρόταση 2.1.7. *Έστω R, S δύο δακτύλιοι και $F \colon R\text{-}\mathsf{Mod} \longrightarrow S\text{-}\mathsf{Mod}$ ένας ακριβής προσθετικός συναλλοίωτος συναρτητής. Τότε για οποιοδήποτε σύμπλοκο $(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{d}_\bullet) \in \mathcal{C}(R)$ και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ υπάρχει ένας ισομορφισμός*

$$\mathsf{H}_n(F(\mathbf{C}_\bullet), F(\mathbf{d}_\bullet)) \cong F(\mathsf{H}_n(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{d}_\bullet))$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [25, Proposition 10.38]. □

Ας περάσουμε τώρα να δούμε πότε δύο μορφισμοί συμπλόκων είναι ομοτοπικοί.

Ορισμός 2.1.8. *Έστω $(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{d}_\bullet), (\mathbf{C'}_\bullet, \mathbf{d'}_\bullet)$ δύο σύμπλοκα αριστερών R-προτύπων και*

$$\mathbf{f}_\bullet, \mathbf{g}_\bullet \colon (\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{d}_\bullet) \longrightarrow (\mathbf{C'}_\bullet, \mathbf{d'}_\bullet)$$

δύο μορφισμοί μεταξύ των συμπλόκων αυτών. Τότε ο $\mathbf{f}_\bullet$ καλείται **ομοτοπικός** *με τον $\mathbf{g}_\bullet$, και συμβολίζεται με $\mathbf{f}_\bullet \cong \mathbf{g}_\bullet$, εάν υπάρχουν ομομορφισμοί $s_n \colon C_n \longrightarrow C'_{n+1}$ τέτοιοι ώστε, $\forall n \in \mathbb{Z}$*

$$f_n - g_n = d'_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n$$

Η $\mathbf{s}_\bullet = (s_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ καλείται **ομοτοπία** *μεταξύ των $\mathbf{f}_\bullet$ και $\mathbf{g}_\bullet$.*

Δύο σύμπλοκα αριστερών R-προτύπων $(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{d}_\bullet), (\mathbf{C'}_\bullet, \mathbf{d'}_\bullet)$ λέμε ότι έχουν τον **ίδιο ομοτοπικό τύπο** *εάν υπάρχουν μορφισμοί $\mathbf{f}_\bullet \colon (\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{d}_\bullet) \longrightarrow (\mathbf{C'}_\bullet, \mathbf{d'}_\bullet)$ και $\mathbf{g}_\bullet \colon (\mathbf{C'}_\bullet, \mathbf{d'}_\bullet) \longrightarrow (\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{d}_\bullet)$ τέτοιοι ώστε $\mathbf{g}_\bullet \circ \mathbf{f}_\bullet \cong \mathrm{Id}_{\mathbf{C}_\bullet}$ και $\mathbf{f}_\bullet \circ \mathbf{g}_\bullet \cong \mathrm{Id}_{\mathbf{C'}_\bullet}$, όπου $\mathrm{Id}_{\mathbf{C}_\bullet}$, $\mathrm{Id}_{\mathbf{C'}_\bullet}$ είναι οι ταυτοτικοί μορφισμοί στα σύμπλοκα $\mathbf{C}_\bullet$ και $\mathbf{C}'_\bullet$ αντίστοιχα.*

Πρόταση 2.1.9. *Εάν* $\mathbf{f}_\bullet, \mathbf{g}_\bullet \colon (\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{d}_\bullet) \longrightarrow (\mathbf{C'}_\bullet, \mathbf{d'}_\bullet)$ *είναι δύο ομοτοπικοί μορφισμοί, δηλαδή* $\mathbf{f}_\bullet \cong \mathbf{g}_\bullet$*, τότε* $\mathsf{H}_n(\mathbf{f}_\bullet) = \mathsf{H}_n(\mathbf{g}_\bullet), \forall n \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι $\mathsf{H}_n(\mathbf{f}_\bullet), \mathsf{H}_n(\mathbf{g}_\bullet) \colon \mathsf{H}_n(\mathbf{C}_\bullet) \longrightarrow \mathsf{H}_n(\mathbf{C'}_\bullet)$. Θα αποδείξουμε ότι

$$\mathsf{H}_n(\mathbf{f}_\bullet)(x + \operatorname{Im} d_{n+1}) = \mathsf{H}_n(\mathbf{g}_\bullet)(x + \operatorname{Im} d_{n+1}), \forall n \in \mathbb{Z}, \forall\ x + \operatorname{Im} d_{n+1} \in \mathsf{H}_n(\mathbf{C}_\bullet),$$

Όμως,

$$\begin{aligned} &\mathsf{H}_n(\mathbf{f}_\bullet)(x + \operatorname{Im} d_{n+1}) = \mathsf{H}_n(\mathbf{g}_\bullet)(x + \operatorname{Im} d_{n+1}), \forall n \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow f_n(x) + \operatorname{Im} d'_{n+1} = g_n(x) + \operatorname{Im} d'_{n+1}, \forall n \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow f_n(x) - g_n(x) \in \operatorname{Im} d'_{n+1}, \forall n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι $f_n(x) - g_n(x) \in \operatorname{Im} d'_{n+1}, \forall x \in \operatorname{Ker} d_n, \forall n \in \mathbb{Z}$.

Επειδή $\mathbf{f}_\bullet \cong \mathbf{g}_\bullet$ έχουμε ότι υπάρχουν ομομορφισμοί $s_n \colon C_n \longrightarrow C'_{n+1}$ τέτοιοι ώστε, $\forall n \in \mathbb{Z}$ $f_n - g_n = d'_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n$, επομένως για $x \in \operatorname{Ker} d_n$ έχουμε:

$$f_n(x) - g_n(x) = d'_{n+1}(s_n(x)) + s_{n-1}(d_n(x)) = d'_{n+1}(s_n(x)),$$

δηλαδή $f_n(x) - g_n(x) \in \operatorname{Im} d'_{n+1}, \forall n \in \mathbb{Z}$. □

Συνεχίζουμε με κάποιους ορισμούς.

Ορισμός 2.1.10. 1. *Ένας μορφισμός συμπλόκων* $\mathbf{f}_\bullet \colon (\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{d}_\bullet) \longrightarrow (\mathbf{C'}_\bullet, \mathbf{d'}_\bullet)$ *καλείται* **ισομορφισμός** *αν και μόνο αν κάθε* $f_n \colon C_n \to C'_n$ *είναι ισομορφισμός στην* R-$\mathsf{Mod}, \forall n \in \mathbb{Z}$.

2. *Εάν* $\mathbf{f}_\bullet \colon (\mathbf{C'}_\bullet, \mathbf{d'}_\bullet) \longrightarrow (\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{d}_\bullet), \mathbf{g}_\bullet \colon (\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{d}_\bullet) \longrightarrow (\mathbf{C''}_\bullet, \mathbf{d''}_\bullet)$ *είναι δύο μορφισμοί συμπλόκων, λέμε ότι έχουμε μία* **σύντομη ακριβή ακολουθία συμπλόκων** *:*

$$0 \longrightarrow (\mathbf{C'}_\bullet, \mathbf{d'}_\bullet) \xrightarrow{\mathbf{f}_\bullet} (\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{d}_\bullet) \xrightarrow{\mathbf{g}_\bullet} (\mathbf{C''}_\bullet, \mathbf{d''}_\bullet) \longrightarrow 0$$

όταν

- *Ο μορφισμός συμπλόκων* $\mathbf{f}_\bullet$ *είναι μονομορφισμός (δηλαδή* $\forall n \in \mathbb{Z}$*, κάθε* f_n *είναι μονομορφισμός προτύπων).*
- *Ο μορφισμός συμπλόκων* $\mathbf{g}_\bullet$ *είναι επιμορφισμός (δηλαδή* $\forall n \in \mathbb{Z}$*, κάθε* g_n *είναι επιμορφισμός προτύπων).*
- $\forall n \in \mathbb{Z} : \operatorname{Ker} g_n = \operatorname{Im} f_n$

Δηλαδή, εάν γράψουμε κάθε σύμπλοκο ως στήλη, τότε σύντομη ακριβής ακολουθία συμπλόκων είναι ακριβώς το ακόλουθο άπειρο μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}"] \arrow[d, "d'_{n+1}"'] & C_{n+1} \arrow[r, "g_{n+1}"] \arrow[d, "d_{n+1}"'] & C''_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "d''_{n+1}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "d'_n"'] & C_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "d_n"'] & C''_n \arrow[r] \arrow[d, "d''_n"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] \arrow[d] & C_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"] \arrow[d] & C''_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Ας συνεχίσουμε με μία θεμελιώδη κατασκευή η οποία μας δίνει μία σχέση μεταξύ διαφορετικών ομολογιών. Αρχικά θα αναφέρουμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 2.1.11. *Εάν $(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{d}_\bullet)$ είναι ένα σύμπλοκο τότε ο ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων $d_n : C_n \longrightarrow C_{n-1}$ επάγει έναν ομομορφισμό αριστερών R-προτύπων*

$$\bar{d_n} : \ \mathsf{Coker}\, d_{n+1} \longrightarrow \mathsf{Ker}\, d_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Επιπλέον, $\mathsf{H}_n(\mathbf{C}_\bullet) = \mathsf{Ker}\, \bar{d_n}$ *και* $\mathsf{H}_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet) = \mathsf{Coker}\, \bar{d_n}$.

Απόδειξη. Ορίζουμε απεικόνιση

$$\bar{d_n} : \ \mathsf{Coker}\, d_{n+1} \longrightarrow \mathsf{Ker}\, d_{n-1}$$

$$x + \mathsf{Im}\, d_{n+1} \longmapsto \bar{d_n}(x + \mathsf{Im}\, d_{n+1}) := d_n(x)$$

Έχουμε ότι $d_n(x) \in \mathsf{Im}\, d_n \subseteq \mathsf{Ker}\, d_{n-1}$ (επειδή $(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{d}_\bullet)$ είναι σύμπλοκο). Επομένως η εικόνα της $\bar{d_n}$ ανήκει στο $\mathsf{Ker}\, d_{n-1}$. Αν $x + \mathsf{Im}\, d_{n+1} = x' + \mathsf{Im}\, d_{n+1} \Rightarrow x - x' \in \mathsf{Im}\, d_{n+1} \Rightarrow \exists\ y \in C_{n+1} \mid d_{n+1}(y) = x - x' \Rightarrow d_n(x) - d_n(x') = d_n(d_{n+1}(y)) = 0 \Rightarrow d_n(x) = d_n(x')$. Επομένως η απεικόνιση $\bar{d_n}$ είναι καλά ορισμένη και εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι και ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων .

Επιπλέον,

$$x + \mathsf{Im}\, d_{n+1} \in \mathsf{Ker}\, \bar{d_n} \Leftrightarrow \bar{d_n}(x + \mathsf{Im}\, d_{n+1}) = 0 \Leftrightarrow d_n(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathsf{Ker}\, d_n$$

Έτσι $\mathsf{Ker}\, \bar{d_n} = \mathsf{Ker}\, d_n \big/ \mathsf{Im}\, d_{n+1} = \mathsf{H}_n(\mathbf{C}_\bullet)$. Και,

$$\mathsf{Im}\, \bar{d_n} = \big\{ \bar{d_n}(x + \mathsf{Im}\, d_{n+1}) \mid x \in C_n \big\} = \big\{ d_n(x) \mid x \in C_n \big\} = \mathsf{Im}\, d_n \subseteq \mathsf{Ker}\, d_{n-1}$$

άρα, $\mathsf{Coker}\, \bar{d_n} = \mathsf{Ker}\, d_{n-1} \big/ \mathsf{Im}\, \bar{d_n} = \mathsf{Ker}\, d_{n-1} \big/ \mathsf{Im}\, d_n = \mathsf{H}_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet)$. □

Τώρα είμαστε σε θέση να αποδείξουμε την εξής Πρόταση:

Πρόταση 2.1.12. *Εάν*

$$0 \longrightarrow (\mathbf{C'}_\bullet, \mathbf{d'}_\bullet) \xrightarrow{\mathbf{f}_\bullet} (\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{d}_\bullet) \xrightarrow{\mathbf{g}_\bullet} (\mathbf{C''}_\bullet, \mathbf{d''}_\bullet) \longrightarrow 0$$

είναι μία σύντομη ακριβής ακολουθία συμπλόκων τότε υπάρχει μία ακριβής ακολουθία προτύπων

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{H}_{n+1}(\mathbf{C''}_\bullet) \xrightarrow{\phi_{n+1}} \mathsf{H}_n(\mathbf{C'}_\bullet) \xrightarrow{\mathsf{H}_n(\mathbf{f}_\bullet)} \mathsf{H}_n(\mathbf{C}_\bullet) \xrightarrow{\mathsf{H}_n(\mathbf{g}_\bullet)} \mathsf{H}_n(\mathbf{C''}_\bullet) \xrightarrow{\phi_n} \mathsf{H}_{n-1}(\mathbf{C'}_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

Απόδειξη. Επειδή $0 \longrightarrow (\mathbf{C'}_\bullet, \mathbf{d'}_\bullet) \xrightarrow{\mathbf{f}_\bullet} (\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{d}_\bullet) \xrightarrow{\mathbf{g}_\bullet} (\mathbf{C''}_\bullet, \mathbf{d''}_\bullet) \longrightarrow 0$ είναι μία σύντομη ακριβής ακολουθία συμπλόκων τότε $\forall n \in \mathbb{Z}$ έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές και στήλες.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathsf{Ker}\, d'_n \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{Ker}\, d_n \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{Ker}\, d''_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "d'_n"'] & C_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "d_n"'] & C''_n \arrow[r] \arrow[d, "d''_n"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] \arrow[d] & C_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"] \arrow[d] & C''_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathsf{Coker}\, d'_n \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{Coker}\, d_n \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{Coker}\, d''_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Χρησιμοποιώντας αυτό το διάγραμμα και το λήμμα $(2.1.11)$ θα πάρουμε το εξής μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{H_n}(\mathbf{C}'.) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H_n}(\mathbf{C}.) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H_n}(\mathbf{C}''.) \arrow[d] & \\
 & \mathsf{Coker}\, d'_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}'_n"'] & \mathsf{Coker}\, d_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}_n"'] & \mathsf{Coker}\, d''_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}''_n"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathsf{Ker}\, d'_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{Ker}\, d_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{Ker}\, d''_{n-1} \arrow[d] & \\
 & \mathrm{H_{n-1}}(\mathbf{C}'.) \arrow[r] & \mathrm{H_{n-1}}(\mathbf{C}.) \arrow[r] & \mathrm{H_{n-1}}(\mathbf{C}''.) &
\end{tikzcd}$$

$\forall n \in \mathbb{Z}$. Επομένως, $\forall n \in \mathbb{Z}$ το Snake lemma (βλέπε Λήμμα $(1.3.4)$) μας δίνει έναν ομομορφισμό $\phi_n \colon \mathsf{H}_n(\mathbf{C}''_\bullet) \longrightarrow \mathsf{H}_{n-1}(\mathbf{C}'_\bullet)$. $\square$

Ορισμός 2.1.13. *Ο ομομορφισμός* $\phi_n \colon \mathsf{H}_n(\mathbf{C}''_\bullet) \longrightarrow \mathsf{H}_{n-1}(\mathbf{C}'_\bullet)$ *καλείται* **συνδετικός ομομορφισμός (connecting homomorphism)** *και η ακριβή ακολουθία*

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{H}_{n+1}(\mathbf{C}''_\bullet) \xrightarrow{\phi_{n+1}} \mathsf{H}_n(\mathbf{C}'_\bullet) \xrightarrow{\mathsf{H}_n(\mathbf{f}_\bullet)} \mathsf{H}_n(\mathbf{C}_\bullet) \xrightarrow{\mathsf{H}_n(\mathbf{g}_\bullet)} \mathsf{H}_n(\mathbf{C}''_\bullet) \xrightarrow{\phi_n} \mathsf{H}_{n-1}(\mathbf{C}'_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

$\forall n \in \mathbb{Z}$, *καλείται* **μακρά ακριβής ακολουθία (long exact sequence.)**

2.2 Προβολικές και Ενέσιμες Αναλύσεις

Είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι με δεδομένο ένα αριστερό R-πρότυπο M μπορούμε να δημιουργήσουμε μια ακριβή ακολουθία

$$\cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

όπου κάθε F_i είναι ελεύθερο. Μια τέτοια ακολουθία καλείται ελεύθερη ανάλυση του M. Σε αυτή την ενότητα θα δούμε ότι κάθε αριστερό R-πρότυπο M έχει επιπλέον προβολικές και ενέσιμες αναλύσεις, όπου τα προβολικά και τα ενέσιμα πρότυπα είναι δύο άλλες κλάσεις προτύπων, στις οποίες θα αναφέρουμε τα βασικά εργαλεία που θα μας χρειαστούν αργότερα.

Ας ξεκινήσουμε με τα προβολικά πρότυπα.

Ορισμός 2.2.1. *Ένα αριστερό R-πρότυπο P λέγεται* **προβολικό (projective)** *αν για κάθε επιμορφισμό αριστερών R-προτύπων $\psi\colon A \longrightarrow B$ και κάθε ομομορφισμό αριστερών R-προτύπων $f\colon P \longrightarrow B$, υπάρχει ομομορφισμός $g\colon P \longrightarrow A$ ώστε να ισχύει $f = \psi \circ g$. Δηλαδή το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταδετικό:*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "\psi"'] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Παρατήρηση 2.2.2. Από το Θεώρημα (1.2.20) και τον ορισμό του προβολικού προτύπου συνεπάγεται ότι κάθε ελεύθερο πρότυπο είναι προβολικό. Έτσι κάθε δακτύλιος R είναι προβολικός αν ιδωθεί ως αριστερό R-πρότυπο (αντ. και δεξιό). Όμως υπάρχουν προβολικά πρότυπα τα οποία δεν είναι ελεύθερα, βλέπε το παράδειγμα (2.2.5) παρακάτω.

Ας συνεχίσουμε με ένα Θεώρημα που παραθέτει τις βασικές ιδιότητες ενός προβολικού προτύπου.

Θεώρημα 2.2.3. *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για ένα αριστερό R-πρότυπο P.*

1. *Το P είναι προβολικό.*

2. *Ο συναρτητής $\mathsf{Hom}_R(P,-)\colon R\text{-}\mathsf{Mod} \longrightarrow \mathsf{Ab}$ είναι δεξιά ακριβής.*

3. *Κάθε σύντομη ακριβής ακολουθία*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

διασπάται.

4. *Το P είναι ευθύς προσθετέος ενός ελεύθερου αριστερού R-προτύπου.*

Απόδειξη. $(1 \Rightarrow 2)$ Έστω ότι το αριστερό R-πρότυπο P είναι προβολικό. Γνωρίζουμε ότι ο συναρτητής $\mathsf{Hom}_R(P,-)$ είναι πάντα αριστερά ακριβής. Δηλαδή, για κάθε αριστερό R-πρότυπο P, εφαρμόζοντας τον συναρτητή $\mathsf{Hom}_R(P,-)$ σε μία ακριβή ακολουθία αριστερών R-προτύπων

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

έχουμε μία ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(P,L) \xrightarrow{f_*} \mathsf{Hom}_R(P,M) \xrightarrow{g_*} \mathsf{Hom}_R(P,N).$$

Για να είναι ο συναρτητής $\mathsf{Hom}_R(P,-)$ και δεξιά ακριβής, πρέπει να αποδείξουμε ότι έχουμε ακρίβεια στο τέλος της ακολουθίας

$$\mathsf{Hom}_R(P,M) \xrightarrow{g_*} \mathsf{Hom}_R(P,N)$$

Δηλαδή αρκεί να αποδείξουμε ότι η g_* είναι επιμορφισμός. Επειδή το P είναι προβολικό έχουμε ότι για κάθε ομομορφισμό αριστερών R-προτύπων $h\colon P \longrightarrow N$ και κάθε επιμορφισμό

$g\colon M \longrightarrow N$ υπάρχει ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων $k\colon P \longrightarrow M$ με $h = g \circ k$. Δηλαδή το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "k"'] \arrow[d, "h"] & \\ M \arrow[r, two heads, "g"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Επομένως, για κάθε $h \in \mathsf{Hom}_R(P,N)$, υπάρχει $k \in \mathsf{Hom}_R(P,M)$ τέτοιος ώστε $h = g \circ k$. Όμως, $g_*\colon \mathsf{Hom}_R(P,M) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(P,N), \quad k \longmapsto g_*(k) = g \circ k$. Άρα $h = g \circ k \Rightarrow h = g_*(k)$. Άρα για κάθε $h \in \mathsf{Hom}_R(P,N)$, υπάρχει $k \in \mathsf{Hom}_R(P,M)$ τέτοιος ώστε $h = g_*(k)$. Επομένως αποδείξαμε ότι ο ομομορφισμός g_* είναι επιμορφισμός και άρα ο συναρτητής $\mathsf{Hom}_R(P,-)$ είναι δεξιά ακριβής.

($2 \Rightarrow 3$) Έστω ότι ο συναρτητής $\mathsf{Hom}_R(P,-)$ είναι δεξιά ακριβής και ας υποθέσούμε ότι $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ είναι μία σύντομη ακριβής ακολουθία. Επομένως έχουμε ότι η ακολουθία $B \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ είναι ακριβής. Έτσι εάν εφαρμόσουμε τον συναρτητή $\mathsf{Hom}_R(P,-)$ στην ακολουθία αυτή θα μας δώσει μια ακριβή ακολουθία

$$\mathsf{Hom}_R(P,B) \xrightarrow{g_*} \mathsf{Hom}_R(P,P) \longrightarrow 0.$$

Δηλαδή, για κάθε $k \in \mathsf{Hom}_R(P,P)$, υπάρχει $g' \in \mathsf{Hom}_R(P,B)$ τέτοιος ώστε $g_*(g') = k \Rightarrow g \circ g' = k$. Επειδή ισχύει για κάθε $k \in \mathsf{Hom}_R(P,P)$, άρα και για $k = \mathrm{Id_P} \in \mathsf{Hom}_R(P,P)$ θα έχουμε ότι $g \circ g' = \mathrm{Id_P}$. Επομένως από την Πρόταση (1.3.6) η σύντομη ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0.$$

είναι διασπάσιμη.

($3 \Rightarrow 4$) Έστω ότι κάθε σύντομη ακριβής ακολουθία που τελειώνει με P διασπάται και F ένα ελεύθερο αριστερό R-πρότυπο. Γνωρίζουμε ότι κάθε αριστερό R-πρότυπο είναι επιμορφική εικόνα ενός ελεύθερου αριστερού R-προτύπου. Έστω ότι το P είναι επιμορφική εικόνα του F. Επομένως υπάρχει ένας επιμορφισμός $h\colon F \twoheadrightarrow P$ που κάνει την παρακάτω ακολουθία ακριβή:

$$0 \longrightarrow \mathsf{Ker}\, h \xrightarrow{i} F \xrightarrow{h} P \longrightarrow 0.$$

Η ακολουθία αυτή τελειώνει με P, επομένως διασπάται. Έτσι από τον Ορισμό (1.3.5) έπεται ότι $F \cong P \oplus \mathsf{Ker}\, h$, δηλαδή το P είναι ευθύς προσθετέος του F.

($4 \Rightarrow 1$) Έστω ότι το P είναι ευθύς προσθετέος ενός ελεύθερου αριστερού R-προτύπου F. Τότε υπάρχουν απεικονίσεις $h\colon F \longrightarrow P$ και $i\colon P \longrightarrow F$ με $h \circ i = \mathrm{Id_P}$, όπου i είναι η έγκλειση. Θεωρούμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "h"] \arrow[d, dashed, "\exists g"'] & P \arrow[dl, dashed, "g \circ i"] \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "\psi"'] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

όπου ψ είναι επιμορφισμός. Η σύνθεση $f \circ h$ είναι μία απεικόνιση $F \longrightarrow B$. Επειδή το F είναι ελεύθερο, επομένως και προβολικό, υπάρχει απεικόνιση $g\colon F \longrightarrow A$ τέτοια ώστε $\psi \circ g = f \circ h$. Αλλά τότε

$$\begin{aligned} \psi \circ g = f \circ h \quad &\Longrightarrow \quad \psi \circ g \circ i = f \circ h \circ i \Longrightarrow \psi \circ (g \circ i) = f \circ (h \circ i) \\ &\Longrightarrow \quad \psi \circ (g \circ i) = f \circ \mathrm{Id_P} \Longrightarrow \psi \circ (g \circ i) = f \end{aligned}$$

Άρα για κάθε επιμορφισμό αριστερών R-προτύπων $\psi\colon A \longrightarrow B$ και για κάθε ομομορφισμό αριστερών R-προτύπων $f\colon P \longrightarrow B$, υπάρχει ομομορφισμός $g \circ i\colon P \longrightarrow A$ τέτοιος ώστε $\psi \circ (g \circ i) = f$. Άρα το αριστερό R-πρότυπο P είναι προβολικό. $\square$

Παρατήρηση 2.2.4. Τα ελεύθερα $\mathbb{Z}$-πρότυπα δεν έχουν μη-μηδενικά στοιχεία πεπερασμένης τάξης. Έτσι καμία μη-μηδενική πεπερασμένη αβελιανή ομάδα δεν μπορεί να είναι ευθύς προσθετέος ενός ελεύθερου $\mathbb{Z}$-προτύπου. Επομένως, από το προηγούμενο Θεώρημα έπεται ότι μη-μηδενικές πεπερασμένες αβελιανές ομάδες δεν είναι ποτέ προβολικά $\mathbb{Z}$-πρότυπα.

Η επόμενη πρόταση μας πληροφορεί ότι τα προβολικά πρότυπα «συμπεριφέρονται καλά» ως προς το ευθύ άθροισμα.

Πρόταση 2.2.5. *Έστω $(P_i)_{i\in I}$ μία οικογένεια αριστερών R-προτύπων. Τότε το ευθύ άθροισμα $\oplus_{i\in I}P_i$ είναι προβολικό αριστερό R-πρότυπο αν και μόνο αν κάθε P_i είναι προβολικό.*

Απόδειξη. Αν το ευθύ άθροισμα $\oplus_{i\in I}P_i$ είναι προβολικό τότε $\oplus_{i\in I}P_i \oplus X$ είναι ελεύθερο για κάποιο X. Άρα κάθε P_i είναι ευθύς προσθετέος ελεύθερου και άρα κάθε P_i είναι προβολικό. Αντίστροφα, αν για κάθε $i \in I$ υπάρχει ελεύθερο πρότυπο F_i τέτοιο ώστε $F_i = P_i \oplus X_i$ για κάποιο $X_i \subseteq F_i$, τότε

$$\oplus_{i\in I}F_i = \oplus_{i\in I}(P_i \oplus X_i) = (\oplus_{i\in I}P_i) \oplus (\oplus_{i\in I}X_i)$$

Όμως $\oplus_{i\in I}F_i$ είναι ελεύθερο με βάση την ένωση των βάσεων των F_i. Άρα το ευθύ άθροισμα $\oplus_{i\in I}P_i$ είναι ευθύς προσθετέος ελεύθερου και άρα είναι προβολικό. □

Παράδειγμα 2.2.6. Θεωρούμε το $P = \mathbb{Z}_6$ ως πρότυπο πάνω από το δακτύλιο $R = \mathbb{Z}_6$, το οποίο είναι προβολικό. Επειδή

$$P \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$$

από την προηγούμενη Πρόταση έχουμε ότι τα $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$ είναι προβολικά, αλλά όμως δεν είναι ελεύθερα ως $\mathbb{Z}_6$-πρότυπα, διότι αν ήταν ελεύθερα θα είχαν τουλάχιστον 6 στοιχεία.

Υπάρχει και μία άλλη σημαντική κλάση προτύπων, αυτή των ενέσιμων προτύπων. Η κλάση αυτή είναι δυϊκή της κλάσης των προβολικών προτύπων.

Ορισμός 2.2.7. *Ένα αριστερό R-πρότυπο E λέγεται* **ενέσιμο (injective)** *αν για κάθε μονομορφισμό αριστερών R-προτύπων $i\colon A \longrightarrow B$ και κάθε ομομορφισμό αριστερών R-προτύπων $f\colon A \longrightarrow E$, υπάρχει ομομορφισμός $g\colon B \longrightarrow E$ ώστε να ισχύει $f = g \circ i$. Δηλαδή το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, dashed, "\exists\, g"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

Ας περάσουμε τώρα στον κατηγορικό ορισμό του ενέσιμου προτύπου ο οποίος είναι ισοδύναμος με τον Ορισμό (2.2.7) :

Πρόταση 2.2.8. *Ένα αριστερό R-πρότυπο E είναι ενέσιμο αν και μόνο αν ο συναρτητής $\mathsf{Hom}_R(-,E)\colon R\text{-}\mathsf{Mod} \longrightarrow \mathsf{Ab}$ είναι ακριβής.*

Απόδειξη. Έστω ότι το αριστερό R-πρότυπο E είναι ενέσιμο. Γνωρίζουμε ότι ο συναρτητής $\mathsf{Hom}_R(-,E)$ είναι πάντα αριστερά ακριβής. Δηλαδή, για κάθε αριστερό R-πρότυπο E, εφαρμόζοντας τον συναρτητή $\mathsf{Hom}_R(-,E)$ σε μία ακριβή ακολουθία αριστερών R-προτύπων

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

έχουμε μία ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(N,E) \xrightarrow{g^*} \mathsf{Hom}_R(M,E) \xrightarrow{f^*} \mathsf{Hom}_R(L,E).$$

Για να είναι ο συναρτητής $\mathsf{Hom}_R(-,E)$ και δεξιά ακριβής, πρέπει να αποδείξουμε ότι έχουμε ακρίβεια στο τέλος της ακολουθίας

$$\mathsf{Hom}_R(M,E) \xrightarrow{f^*} \mathsf{Hom}_R(L,E).$$

Δηλαδή αρκεί να αποδείξουμε ότι η f^* είναι επιμορφισμός. Επειδή το E είναι ενέσιμο έχουμε ότι για κάθε ομομορφισμό αριστερών R-προτύπων $h\colon L \longrightarrow E$ και κάθε μονομορφισμό $f\colon L \longrightarrow M$ υπάρχει ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων $k\colon M \longrightarrow E$ με $h = k\circ f$. Δηλαδή το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & M \arrow[dl, dashed, "\exists\, k"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

Επομένως, για κάθε $h \in \mathsf{Hom}_R(L,E)$, υπάρχει $k \in \mathsf{Hom}_R(M,E)$ τέτοιος ώστε $h = k\circ f$. Όμως, $f^*\colon \mathsf{Hom}_R(M,E) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(L,E), \quad k \longmapsto f^*(k) = k\circ f$. Άρα $h = k\circ f \Rightarrow h = f^*(k)$. Άρα για κάθε $h \in \mathsf{Hom}_R(L,E)$, υπάρχει $k \in \mathsf{Hom}_R(M,E)$ τέτοιος ώστε $h = f^*(k)$. Επομένως αποδείξαμε ότι ο ομομορφισμός f^* είναι επιμορφισμός και άρα ο συναρτητής $\mathsf{Hom}_R(-,E)$ είναι δεξιά ακριβής.

Αντίστροφα, έστω ότι ο συναρτητής $\mathsf{Hom}_R(-,E)$ είναι δεξιά ακριβής. Έστω ένας μονομορφισμός $f\colon L \longrightarrow M$ και ένας τυχαίος ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων $h\colon L \longrightarrow E$,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & M \\ & E & \end{tikzcd}$$

Τότε θα έχουμε την εξής ακριβή ακολουθία προτύπων:

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{\pi} M/L \longrightarrow 0.$$

Αν εφαρμόσουμε τον ακριβή συναρτητή $\mathsf{Hom}_R(-,E)$ στην παραπάνω ακριβή ακολουθία θα έχουμε:

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(M/L,E) \xrightarrow{\pi^*} \mathsf{Hom}_R(M,E) \xrightarrow{f^*} \mathsf{Hom}_R(L,E) \longrightarrow 0$$

η οποία είναι ακριβής ακολουθία (εφόσον ο συναρτητής $\mathsf{Hom}_R(-,E)$ είναι αριστερά και δεξιά ακριβής). Άρα f^* είναι επιμορφισμός και έτσι για κάθε ομομορφισμό $h\colon L \longrightarrow E$, υπάρχει ομομορφισμός $k\colon M \longrightarrow E$ τέτοιος ώστε $f^*(k) = h \Rightarrow k\circ f = h$. Άρα για κάθε μονομορφισμό $f\colon L \longrightarrow M$ και ομομορφισμό αριστερών R-προτύπων $h\colon L \longrightarrow E$, υπάρχει ομομορφισμός $k\colon M \longrightarrow E$ τέτοιος ώστε $k\circ f = h$. Δηλαδή το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & M \arrow[dl, dashed, "\exists\, k"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

□

Πρόταση 2.2.9. *1. Εάν $(E_k)_{k\in K}$ είναι μία οικογένεια ενέσιμων αριστερών R-προτύπων, τότε το ευθύ γινόμενο $\prod_{k\in K} E_k$ είναι επίσης ένα ενέσιμο αριστερό R-πρότυπο.*

2. *Κάθε ευθύς προσθετέος ενός ενέσιμου αριστερού R-προτύπου E, είναι ενέσιμο αριστερό R-πρότυπο.*

Απόδειξη. 1. Θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & B \\ & E & \end{tikzcd}$$

όπου $E = \prod_{k\in K} E_k$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει ομομορφισμός $g\colon B \longrightarrow E$ τέτοιος ώστε $g \circ i = f$. Έστω $p_k\colon E \longrightarrow E_k$ η k-κανονική προβολή έτσι ώστε $p_k \circ f\colon A \longrightarrow E_k$. Επειδή κάθε E_k είναι ενέσιμο αριστερό R-πρότυπο τότε

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p_k\circ f"'] & B \arrow[dl, dashed, "\exists\, g_k"] \\ & E_k & \end{tikzcd}$$

υπάρχει ομομορφισμός $g_k\colon B \longrightarrow E_k$ τέτοιος ώστε $g_k \circ i = p_k \circ f$. Τώρα ορίζουμε απεικόνιση $g\colon B \longrightarrow E,\ \ b \longmapsto (g_k(b))$. Έστω $a \in A$. Τότε

$$g \circ i(a) = g(i(a)) = (g_k(i(a))) = (p_k \circ f(a)) = (p_k(f(a))) = f(a)$$

επειδή $x = (p_k(x))$ για κάθε x που ανήκει στο ευθύ γινόμενο.

2. Ας υποθέσουμε ότι $E = E_1 \oplus E_2$. Έστω $i\colon E_1 \longrightarrow E$ η έγκλειση και έστω $p\colon E \longrightarrow E_1$ η προβολή (έτσι ώστε $p \circ i = \mathrm{Id}_{E_1}$.) Θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f"'] & C \\ & E_1 & \end{tikzcd}$$

Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει ομομορφισμός $g\colon C \longrightarrow E_1$ τέτοιος ώστε $g \circ j = f$. Επειδή το E είναι αριστερά ενέσιμο R-πρότυπο τότε

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i\circ f"'] & C \arrow[dl, dashed, "\exists\, g_0"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

υπάρχει ομομορφισμός $g_0\colon C \longrightarrow E$ τέτοιος ώστε $g_0 \circ j = i \circ f$. Ορίζουμε $g\colon C \longrightarrow E_1,\ \ c \longmapsto p \circ g_0(c)$. Τότε

$$g \circ j = p \circ g_0 \circ j = p \circ i \circ f = \mathrm{Id}_{E_1} \circ f = f$$

□

Πόρισμα 2.2.10. *Κάθε πεπερασμένο ευθύ άθροισμα ενέσιμων αριστερών R-προτύπων είναι ενέσιμο αριστερό R-πρότυπο.*

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από το γεγονός ότι το ευθύ άθροισμα πεπερασμένου πλήθους προτύπων συμπίπτει με το ευθύ τους γινόμενο. □

Ένα άπειρο ευθύ άθροισμα ενέσιμων αριστερών R-προτύπων δεν είναι απαραίτητα ενέσιμο αριστερό R-πρότυπο. Θα δούμε σε επόμενο Κεφάλαιο της διατριβής ότι όλα τα ευθέα αθροίσματα ενέσιμων αριστερών R-προτύπων είναι ενέσιμα αριστερά R-πρότυπα αν και μόνο αν ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether (βλέπε Θεώρημα $(4.5.6)$).

Ένα χρήσιμο αποτέλεσμα είναι το ακόλουθο θεώρημα που οφείλεται στον R.Baer.

Θεώρημα 2.2.11. (Κριτήριο του Baer) *Ένα αριστερό R-πρότυπο E είναι ενέσιμο αν και μόνο αν κάθε ομομορφισμός $f\colon I \longrightarrow E$, όπου I είναι ένα αριστερό ιδεώδες του R, μπορεί να επεκταθεί στο R.*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[dl, dashed, "\exists\, g"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [24, theorem 3.30]. □

Ορισμός 2.2.12. *Έστω R μία περιοχή κύριων ιδεωδών, τότε ένα αριστερό R-πρότυπο M καλείται* **διαιρετό (divisible)**, *εάν για κάθε $m \in M$ και μη-μηδενικό $r \in R$, υπάρχει $m' \in M$ τέτοιο ώστε $m = rm'$.*

Τώρα θα αναφέρουμε δύο προτάσεις οι οποίες θα μας χρειαστούν στην απόδειξη ενός σημαντικού Θεωρήματος.

Πρόταση 2.2.13. *Έστω R μία περιοχή κύριων ιδεωδών. Τότε ένα αριστερό R-πρότυπο E είναι ενέσιμο αν και μόνο αν είναι διαιρετό.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [14, Theorem 3.1.4]. □

Παράδειγμα 2.2.14.

1. Θεωρούμε το $M = \mathbb{Q}$ ως αριστερό πρότυπο πάνω από το δακτύλιο $R = \mathbb{Z}$. Έχουμε ότι το $\mathbb{Q}$ είναι διαιρετό γιατί για κάθε $0 \neq z \in \mathbb{Z}$ και $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, υπάρχει $\frac{\mu}{\nu} \in \mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε $\frac{p}{q} = z\frac{\mu}{\nu}$, εάν θέσουμε $\frac{\mu}{\nu} = \frac{p}{qz}$. Επομένως σύμφωνα με την παραπάνω Πρόταση, το $\mathbb{Q}$ είναι ενέσιμο αριστερό $\mathbb{Z}$-πρότυπο διότι το $\mathbb{Z}$ είναι περιοχή κύριων ιδεωδών.
2. Κάθε μη-μηδενική πεπερασμένη αβελιανή ομάδα δεν είναι ενέσιμο $\mathbb{Z}$-πρότυπο διότι δεν είναι διαιρετό.

Πρόταση 2.2.15.

1. *Κάθε αβελιανή ομάδα μπορεί να εμφυτευτεί σε μία ενέσιμη αβελιανή ομάδα.*
2. *Εάν $R \longrightarrow S$ είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων και E ένα ενέσιμο αριστερό R-πρότυπο, τότε $\mathsf{Hom}_R(S, E)$ είναι ένα ενέσιμο αριστερό S-πρότυπο. Δηλαδή εάν G είναι μία διαιρετή αβελιανή ομάδα, τότε $\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, G)$ είναι ένα ενέσιμο αριστερό R-πρότυπο, για κάθε δακτύλιο R.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [14, Corollary 3.1.5, Proposition 3.1.6]. □

Το ακόλουθο θεώρημα θα μας δώσει την δυνατότητα να χρησιμοποιούμε ενέσιμα πρότυπα για να περιγράφουμε αυθαίρετα πρότυπα.

Θεώρημα 2.2.16. (Baer (1940)) *Κάθε αριστερό R-πρότυπο M μπορεί να εμφυτευθεί σε ένα ενέσιμο αριστερό R-πρότυπο E.*

Απόδειξη. Έστω M ένα αριστερό R-πρότυπο. Αν το M ιδωθεί ως αβελιανή ομάδα, ορίζουμε

$$\phi\colon M \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M)$$

$$m \longmapsto \phi_m, \text{ όπου } \phi_m(r) := rm$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η ϕ είναι ομομορφισμός αβελιανών ομάδων. Τώρα θα αποδείξουμε ότι η ϕ είναι $1-1$. Έστω ότι $\phi_m = 0$, άρα $m = 1 \cdot m = \phi_m(1) = 0 \Rightarrow m = 0$.

Από την προηγούμενη Πρόταση (βλέπε 1.) υπάρχει ενέσιμη αβελιανή ομάδα G και μία εμφύτευση ομάδων $i\colon M \longrightarrow G$. Επειδή ο συναρτητής $\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, -)$ είναι αριστερά ακριβής και συναλλοίωτος, εάν τον εφαρμόσουμε στην εμφύτευση i, θα έχουμε τον εγκλεισμό $i_*\colon \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, G)$ και έτσι η σύνθεση $i_* \circ \phi$ είναι $1-1$. Έτσι το M εμφυτεύεται στην $\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, G)$, η οποία από την προηγούμενη Πρόταση (βλέπε 2.) είναι ένα ενέσιμο αριστερό R-πρότυπο. □

Περισσότερα παραδείγματα ενέσιμων και προβολικών προτύπων δίνονται από το ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα. Υπενθυμίζουμε ότι ένας δακτύλιος R καλείται **ημι-απλός (semi-simple)** εάν κάθε αριστερό R-πρότυπο είναι ημιαπλό, δηλαδή ευθύ άθροισμα απλών αριστερών R-προτύπων.

Πρόταση 2.2.17. *Οι ακόλουθες συνθήκες στον δακτύλιο R είναι ισοδύναμες.*

1. *Ο δακτύλιος R είναι ημι-απλός.*
2. *Κάθε (αριστερό) R-πρότυπο M είναι ενέσιμο.*
3. *Κάθε (αριστερό) R-πρότυπο M είναι προβολικό.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [24, Proposition 4.5]. □

Ας περάσουμε τώρα στον ορισμό της προβολικής και της ενέσιμης ανάλυσης ενός αριστερού R-προτύπου A.

Ορισμός 2.2.18. *Ένα* **θετικό σύμπλοκο** *είναι ένα σύμπλοκο $(\mathbf{M_\bullet}, \mathbf{d_\bullet})$ της μορφής*

$$\mathbf{M_\bullet} = \cdots \longrightarrow M_n \xrightarrow{d_n} M_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_1 \xrightarrow{d_1} M_0 \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow 0$$

Το σύμπλοκο $\mathbf{M_\bullet}$, όπου το πρότυπο A έχει αφαιρεθεί, δηλαδή το σύμπλοκο

$$\mathbf{M_A} = \cdots \longrightarrow M_n \xrightarrow{d_n} M_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_1 \xrightarrow{d_1} M_0 \longrightarrow 0$$

καλείται **deleted** *σύμπλοκο του $(\mathbf{M_\bullet}, \mathbf{d_\bullet})$.*

Μια ακολουθία $\{C^n, d^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ αριστερών R-προτύπων και ομομορφισμών αριστερών R-προτύπων

$$\mathbf{C_\bullet} = \cdots \longrightarrow C^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} C^n \xrightarrow{d^n} C^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \cdots$$

τέτοια ώστε $d^{n+1} \circ d^n = 0$ για όλα τα $n \in \mathbb{Z}$ είναι ένα **συν-αλυσιδωτό σύμπλοκο (cochain complex)**. Όπως στα σύμπλοκα έτσι και στα συν-αλυσιδωτά σύμπλοκα ορίζεται ανάλογα η έννοια του μορφισμού συν-αλυσιδωτών συμπλόκων f^n, η n-οστή συν-ομολογία του συν-αλυσιδωτού συμπλόκου H^n και τα (deleted) θετικά συν-αλυσιδωτά σύμπλοκα.

Ορισμός 2.2.19. **Προβολική ανάλυση (projective resolution)** *ενός αριστερού R-προτύπου A είναι ένα ακριβές θετικό σύμπλοκο*

$$\mathbf{P_\bullet} = \cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow 0$$

όπου κάθε P_n είναι προβολικό για $n = 0, 1, 2, \ldots$ Εάν $\mathbf{P}_\bullet$ είναι μία προβολική ανάλυση ενός αριστερού R-προτύπου A τότε η **deleted προβολική ανάλυση (deleted projective resolution)** *είναι το deleted θετικό σύμπλοκο*

$$\mathbf{P_A} = \cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow 0$$

Αντίστοιχα,

Ενέσιμη ανάλυση (injective resolution) *ενός αριστερού R-προτύπου A είναι ένα ακριβές θετικό συν-αλυσιδωτό σύμπλοκο*

$$\mathbf{E}_\bullet = 0 \longrightarrow A \longrightarrow E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} \cdots \longrightarrow E^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} E^n \longrightarrow \cdots$$

όπου κάθε E^n είναι ενέσιμο για $n = 0, 1, 2, \ldots$ Εάν $\mathbf{E}_\bullet$ είναι μία ενέσιμη ανάλυση ενός αριστερού R-προτύπου A τότε η **deleted ενέσιμη ανάλυση (deleted injective resolution)** *είναι το deleted θετικό συν-αλυσιδωτό σύμπλοκο*

$$\mathbf{E^A} = 0 \longrightarrow E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} \cdots \longrightarrow E^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} E^n \longrightarrow \cdots$$

Πρόταση 2.2.20. *Κάθε αριστερό R-πρότυπο A έχει τουλάχιστον μία προβολική και μία ενέσιμη ανάλυση.*

Απόδειξη. Εάν A είναι ένα αριστερό R-πρότυπο γνωρίζουμε ότι είναι επιμορφική εικόνα ενός ελεύθερου αριστερού R-προτύπου. Επειδή όμως κάθε ελεύθερο πρότυπο είναι προβολικό έχουμε ότι το αριστερό R-πρότυπο A είναι επιμορφική εικόνα ενός προβολικού αριστερού R-προτύπου. Άρα υπάρχει ένα προβολικό αριστερό R-πρότυπο P_0 και ένας επιμορφισμός $d_0 \colon P_0 \longrightarrow A$. Επομένως, έχουμε την ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow K_0 \xrightarrow{i_0} P_0 \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow 0,$$

όπου K_0 είναι ο πυρήνας της d_0 και i_0 η κανονική έγκλειση. Με τον ίδιο τρόπο, υπάρχει προβολικό αριστερό R-πρότυπο P_1 και ένας επιμορφισμός $\epsilon_1 \colon P_1 \longrightarrow K_0$ και μία ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow K_1 \xrightarrow{i_1} P_1 \xrightarrow{\epsilon_1} K_0 \longrightarrow 0,$$

Ορίζουμε

$$d_1 \colon P_1 \longrightarrow P_0, \quad \text{την σύνθεση} \quad d_1 = i_0 \circ \epsilon_1.$$

Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία θα πάρουμε το παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "\epsilon_n"'] & P_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\epsilon_1"'] & P_0 \arrow[r, "d_0"] & A \arrow[r] & 0 \\
 & K_{n-1} \arrow[ur, "i_{n-1}"'] \arrow[d] & & & K_0 \arrow[ur, "i_0"'] \arrow[d] & & & \\
0 \arrow[ur] & 0 & & 0 \arrow[ur] & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

όπου $d_n = i_{n-1} \circ \epsilon_n$ για $n = 1, 2, 3, \ldots$

Επιπλέον έχουμε ότι,

$$\begin{aligned}
x \in \operatorname{Ker} d_n \quad &\Leftrightarrow \quad d_n(x) = 0 \Leftrightarrow (i_{n-1} \circ \epsilon_n)(x) = 0 \Leftrightarrow i_{n-1}(\epsilon_n(x)) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \epsilon_n(x) \in \operatorname{Ker} i_{n-1} = 0 \Leftrightarrow \epsilon_n(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker} \epsilon_n
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} d_{n+1} &= \{d_{n+1}(x) \mid x \in P_{n+1}\} = \{i_n \circ \epsilon_{n+1}(x) \mid x \in P_{n+1}\} \\
&= \{i_n(\epsilon_{n+1}(x)) \mid x \in P_{n+1}\} = \{i_n(y) \mid y = \epsilon_{n+1}(x) \in K_n\} \\
&= \operatorname{Im} i_n
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\operatorname{Ker} d_n = \operatorname{Ker} \epsilon_n \ \ \& \ \ \operatorname{Im} d_{n+1} = \operatorname{Im} i_n$$

Όμως $\operatorname{Ker} \epsilon_n = \operatorname{Im} i_n$, άρα έχουμε ότι $\operatorname{Ker} d_n = \operatorname{Im} d_{n+1}$ για $n = 1, 2, 3, \ldots$

Έτσι,

$$\mathbf{P}_\bullet = \cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow 0$$

είναι μία προβολική ανάλυση του A.

Μία ενέσιμη ανάλυση του A μπορεί να κατασκευαστεί χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι κάθε πρότυπο μπορεί να εμφυτευθεί σε ένα ενέσιμο πρότυπο και χρησιμοποιώντας τους συνπυρήνες κατά τον ίδιο τρόπο όπως χρησιμοποιήσαμε τους πυρήνες στην κατασκευή της προβολικής ανάλυσης του A. Κάνοντας αυτή την διαδικασία θα πάρουμε το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "d^{-1}"] & E^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d] & E^1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E^n \arrow[r, "d^n"] \arrow[d] & E^{n+1} \arrow[r] & \cdots \\
 & & C^0 \arrow[ur] \arrow[d] & & & C^n \arrow[ur] \arrow[d] & & \\
 & 0 \arrow[ur] & 0 & & 0 \arrow[ur] & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Τότε $\operatorname{Im} d^n = \operatorname{Ker} d^{n+1}$ για $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ και έτσι,

$$\mathbf{E}_\bullet = 0 \longrightarrow A \longrightarrow E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} \cdots \longrightarrow E^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} E^n \longrightarrow \cdots$$

είναι μία ενέσιμη ανάλυση του A. □

Ας περάσουμε σε κάποια παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.2.21.

1. Θεωρούμε το $A = \mathbb{Z}_2$ ως αριστερό πρότυπο πάνω από το δακτύλιο $R = \mathbb{Z}_4$. Τότε η ακολουθία

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{d_n} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{d_{n-1}} \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{d_0} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

είναι μία προβολική ανάλυση του A, όπου $d_n([a]) = [2a]$, $\forall n \geq 1$ και $d_0([a]) = [a]$.

2. Θεωρούμε το $A = \mathbb{Z}$ ως αριστερό πρότυπο πάνω από το δακτύλιο $R = \mathbb{Z}$. Τότε η ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{d^{-1}} \mathbb{Q} \xrightarrow{d^0} \mathbb{Z}/\mathbb{Q} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

είναι μία ενέσιμη ανάλυση του προτύπου A, όπου d^{-1} είναι η κανονική έγκλειση και d^0 η κανονική προβολή.

Ένα πρότυπο έχει αρκετές προβολικές (αντ. ενέσιμες) αναλύσεις. Θα αποδείξουμε ότι δύο προβολικές (αντ. ενέσιμες) αναλύσεις ενός προτύπου έχουν τον ίδιο ομοτοπικό τύπο. Για να το αποδείξουμε αυτό χρειαζόμαστε το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 2.2.22. (Θεώρημα Σύγκρισης) *Έστω*

$$\mathbf{P}_\bullet = \cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow 0$$

ένα σύμπλοκο όπου κάθε P_n είναι προβολικό για $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ και έστω ότι το σύμπλοκο

$$\mathbf{Q}_\bullet = \cdots \longrightarrow Q_n \xrightarrow{k_n} Q_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_1 \xrightarrow{k_1} Q_0 \xrightarrow{k_0} B \longrightarrow 0$$

είναι ακριβές. Τότε για κάθε ομομορφισμό αριστερών R-προτύπων $f : A \longrightarrow B$, ο f επεκτείνεται σε έναν μορφισμό συμπλόκων $\mathbf{f}_\bullet : \mathbf{P_A} \longrightarrow \mathbf{Q_B}$ έτσι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, dashed, "f_n"] & P_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, dashed, "f_{n-1}"] & \cdots \arrow[r, "d_1"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, dashed, "f_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_n \arrow[r, "k_n"] & Q_{n-1} \arrow[r, "k_{n-1}"] & \cdots \arrow[r, "k_1"] & Q_0 \arrow[r, "k_0"] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό. Επιπλέον, αν ο $f : A \longrightarrow B$ επεκτείνεται και σε έναν άλλο μορφισμό συμπλόκων ${\mathbf{f}^*}_\bullet : \mathbf{P_A} \longrightarrow \mathbf{Q_B}$ τότε οι μορφισμοί $\mathbf{f}_\bullet, {\mathbf{f}^*}_\bullet$ είναι ομοτοπικοί, δηλαδή $\mathbf{f}_\bullet \cong \mathbf{f}^*_\bullet$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε την ύπαρξη των f_n με επαγωγή στο $n \geq 0$. Για $n = 0$ θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & P_0 \arrow[dl, dashed, "f_0"'] \arrow[d, "f \circ d_0"] & \\
Q_0 \arrow[r, "k_0"'] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Επειδή k_0 είναι επιμορφισμός και το P_0 είναι προβολικό, υπάρχει ομομορφισμός $f_0 : P_0 \longrightarrow Q_0$ με $k_0 \circ f_0 = f \circ d_0$. Για το επαγωγικό βήμα θεωρούμε ότι οι ομομορφισμοί $f_0, f_1, \ldots, f_n$ έχουν βρεθεί και κάνουν το διάγραμμα μεταθετικό. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει ομομορφισμός $f_{n+1} : P_{n+1} \longrightarrow Q_{n+1}$ τέτοιος ώστε $k_{n+1} \circ f_{n+1} = f_n \circ d_{n+1}$. Θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
P_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & P_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & P_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\
Q_{n+1} \arrow[r, "k_{n+1}"] & Q_n \arrow[r, "k_n"] & Q_{n-1}.
\end{tikzcd}$$

Έχουμε ότι $k_n \circ f_n \circ d_{n+1} = f_{n-1} \circ d_n \circ d_{n+1} = 0 \Rightarrow \mathsf{Im}(f_n \circ d_{n+1}) \subseteq \mathsf{Ker}\, k_n$. Από την ακρίβεια όμως της κάτω γραμμής έχουμε ότι $\mathsf{Im}\, k_{n+1} = \mathsf{Ker}\, k_n$. Άρα $\mathsf{Im}(f_n \circ d_{n+1}) \subseteq \mathsf{Im}\, k_{n+1}$, και έτσι έχουμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & P_{n+1} \arrow[dl, dashed, "f_{n+1}"'] \arrow[d, "f_n \circ d_{n+1}"] & \\
Q_{n+1} \arrow[r, "k_{n+1}"'] & \mathsf{Im}\, k_{n+1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

και επειδή το P_{n+1} είναι προβολικό, υπάρχει απεικόνιση $f_{n+1} : P_{n+1} \longrightarrow Q_{n+1}$ τέτοια ώστε $k_{n+1} \circ f_{n+1} = f_n \circ d_{n+1}$. Για την απόδειξη της μοναδικότητα της $\mathbf{f}_\bullet : \mathbf{P_A} \longrightarrow \mathbf{Q_B}$ μέσω ομοτοπίας βλέπε [24, Theorem 6.16]. □

Πρόταση 2.2.23. *Εάν $\mathbf{P}_\bullet$, $\mathbf{Q}_\bullet$ είναι προβολικές αναλύσεις ενός αριστερού R-προτύπου A, τότε τα σύμπλοκα $\mathbf{P_A}, \mathbf{Q_A}$ έχουν τον ίδιο ομοτοπικό τύπο.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο ταυτοτικός ομομορφισμός $\mathrm{Id}_A : A \longrightarrow A$ επεκτείνεται στους μορφισμούς συμπλόκων $\mathbf{f_\bullet} : \mathbf{P_A} \longrightarrow \mathbf{Q_A}$ και $\mathbf{g_\bullet} : \mathbf{Q_A} \longrightarrow \mathbf{P_A}$. Άρα, $\mathbf{g_\bullet} \circ \mathbf{f_\bullet} : \mathbf{P_A} \longrightarrow \mathbf{P_A}$ και $\mathbf{f_\bullet} \circ \mathbf{g_\bullet} : \mathbf{Q_A} \longrightarrow \mathbf{Q_A}$. Επιπλέον, έχουμε ότι και $\mathrm{Id}_{\mathbf{P_A}} : \mathbf{P_A} \longrightarrow \mathbf{P_A}$ και $\mathrm{Id}_{\mathbf{Q_A}} : \mathbf{Q_A} \longrightarrow \mathbf{Q_A}$ είναι οι ταυτοτικοί μορφισμοί συμπλόκων στο $\mathbf{P_A}$ και $\mathbf{Q_A}$, αντίστοιχα. Λόγω μοναδικότητας από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι $\mathbf{g_\bullet} \circ \mathbf{f_\bullet} \cong \mathrm{Id}_{\mathbf{P_A}}$ και $\mathbf{f_\bullet} \circ \mathbf{g_\bullet} \cong \mathrm{Id}_{\mathbf{Q_A}}$. Άρα $\mathbf{P_A}$ και $\mathbf{Q_A}$ έχουν τον ίδιο ομοτοπικό τύπο. □

Παρατήρηση 2.2.24. Δυϊκά ισχύει το θεώρημα σύγκρισης και για ενέσιμα πρότυπα. Έτσι έστω

$$\mathbf{E_\bullet} = 0 \longrightarrow A \xrightarrow{k^{-1}} E^0 \xrightarrow{k^0} E^1 \xrightarrow{k^1} \cdots \longrightarrow E^{n-1} \xrightarrow{k^{n-1}} E^n \xrightarrow{k^n} \cdots$$

ένα συν-αλυσιδωτό σύμπλοκο όπου κάθε E^n είναι προβολικό για $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ και έστω ότι το συν-αλυσιδωτό σύμπλοκο

$$\mathbf{D_\bullet} = 0 \longrightarrow B \xrightarrow{d^{-1}} N^0 \xrightarrow{d^0} N^1 \xrightarrow{d^1} \cdots \longrightarrow N^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} N^n \xrightarrow{d^n} \cdots$$

είναι ακριβές. Τότε για κάθε ομομορφισμό αριστερών R-προτύπων $f : B \longrightarrow A$, ο f επεκτείνεται σε έναν μορφισμό συν-αλυσιδωτών συμπλόκων $\mathbf{f_\bullet} : \mathbf{D^B} \longrightarrow \mathbf{E^A}$ έτσι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "d^{-1}"] \arrow[d, "f"] & N^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, dashed, "f^0"] & \cdots \arrow[r, "d^{n-1}"] & N^n \arrow[r, "d^n"] \arrow[d, dashed, "f^n"] & N^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "k^{-1}"] & E^0 \arrow[r, "k^0"] & \cdots \arrow[r, "k^1"] & E^n \arrow[r, "k^n"] & E^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό. Επιπλέον, αν ο $f : B \longrightarrow A$ επεκτείνεται και σε έναν άλλο μορφισμό συν-αλυσιδωτών συμπλόκων $\mathbf{f^*_\bullet} : \mathbf{D^B} \longrightarrow \mathbf{E^A}$ τότε οι μορφισμοί $\mathbf{f_\bullet}, \mathbf{f^*_\bullet}$ είναι ομοτοπικοί, δηλαδή $\mathbf{f_\bullet} \cong \mathbf{f^*_\bullet}$.

Έτσι εάν $\mathbf{E_\bullet}$, $\mathbf{D_\bullet}$ είναι ενέσιμες αναλύσεις ενός αριστερού R-προτύπου A, τότε $\mathbf{E^A}, \mathbf{D^A}$ έχουν τον ίδιο ομοτοπικό τύπο.

2.3 Οι Συναρτητές Ext και Tor

Στην Ομολογική Άλγεβρα κυρίαρχο ρόλο διαδραματίζουν οι δεξιά και αριστερά παραγόμενοι συναρτητές. Εμείς θα επικεντρωθούμε σε εκείνους τους δεξιά και αριστερά παραγόμενους συναρτητές που μπορούν να κατασκευαστούν από τους συναρτητές Hom και $\otimes$, δηλαδή τους συναρτητές Ext και Tor.

Ας ξεκινήσουμε με τους αριστερά παραγόμενους συναρτητές που κατασκευάζονται από έναν προσθετικό συναλλοίωτο συναρτητή $F : R$-Mod $\longrightarrow$ Ab.

Ο Συναρτητής $\mathbf{L_n F} : \mathbf{R}$-Mod $\longrightarrow$ Ab :

Έστω ένα αριστερό R-πρότυπο M και επιλέγουμε μία προβολική ανάλυση του

$$\mathbf{P_\bullet} = \cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0.$$

Κατασκευάζουμε την deleted προβολική ανάλυση του $\mathbf{P_\bullet}$, δηλαδή

$$\mathbf{P_M} = \cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow 0$$

και εφαρμόζουμε σε αυτήν τον συναρτητή F. Τότε θα έχουμε το σύμπλοκο

$$F(\mathbf{P_M}) = \cdots \longrightarrow F(P_n) \stackrel{F(d_n)}{\longrightarrow} F(P_{n-1}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow F(P_1) \stackrel{F(d_1)}{\longrightarrow} F(P_0) \longrightarrow 0.$$

Εάν σε αυτό το σύμπλοκο θεωρήσουμε τις ομολογικές ομάδες $\mathsf{H}_n(F(\mathbf{P_M}))$ μπορούμε να ορίσουμε,

$$L_nF\colon R\text{-}\mathsf{Mod} \longrightarrow \mathsf{Ab}$$
$$M \longmapsto L_nF(M) := \mathsf{H}_n(F(\mathbf{P_M})).$$

Έστω N ένα αριστερό R-πρότυπο και $\mathbf{Q_\bullet}$ μία προβολική του ανάλυση. Εάν $f\colon M \longrightarrow N$ είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων τότε από το Θεώρημα Σύγκρισης, υπάρχει μορφισμός συμπλόκων $\mathbf{f_\bullet}\colon \mathbf{P_M} \longrightarrow \mathbf{Q_N}$. Δηλαδή έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, dashed, "f_n"] & P_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, dashed, "f_{n-1}"] & \cdots \arrow[r, "d_1"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, dashed, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_n \arrow[r, "k_n"] & Q_{n-1} \arrow[r, "k_{n-1}"] & \cdots \arrow[r, "k_1"] & Q_0 \arrow[r, "k_0"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Διαγράφουμε τα M, N και εφαρμόζουμε τον συναρτητή F στο διάγραμμα και θα έχουμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & F(P_n) \arrow[r, "F(d_n)"] \arrow[d, "F(f_n)"] & F(P_{n-1}) \arrow[r, "F(d_{n-1})"] \arrow[d, "F(f_{n-1})"] & \cdots\cdots \arrow[r, "F(d_1)"] & F(P_0) \arrow[r, "F(d_0)"] \arrow[d, "F(f_0)"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & F(Q_n) \arrow[r, "F(k_n)"] & F(Q_{n-1}) \arrow[r, "F(k_{n-1})"] & \cdots\cdots \arrow[r, "F(k_1)"] & F(Q_0) \arrow[r, "F(k_0)"] & 0
\end{tikzcd}$$

όπου η πάνω και η κάτω γραμμή είναι σύμπλοκα. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι και $F(\mathbf{f_\bullet})\colon F(\mathbf{P_M}) \longrightarrow F(\mathbf{P_N})$ είναι επίσης μορφισμός συμπλόκων. Από αυτόν τον μορφισμό επάγεται ένας ομομορφισμός ομάδων

$$\mathsf{H}_n(F(\mathbf{f_\bullet})\colon \mathsf{H}_n(F(\mathbf{P_M})) \longrightarrow \mathsf{H}_n(F(\mathbf{P_N}))$$

Ορίζουμε,

$$L_nF(f) := \mathsf{H}_n(F(\mathbf{f_\bullet}))$$

Πρόταση 2.3.1. *Εάν $F\colon R\text{-}\mathsf{Mod} \longrightarrow \mathsf{Ab}$ ένας προσθετικός συναλλοίωτος συναρτητής, τότε*

$$L_nF\colon R\text{-}\mathsf{Mod} \longrightarrow \mathsf{Ab}$$

είναι ένας προσθετικός συναλλοίωτος συναρτητής για κάθε ακέραιο $n \geq 0$.

Απόδειξη. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι ο L_nF είναι ένας προσθετικός συναλλοίωτος συναρτητής. Θα αποδείξουμε ότι ο L_nF είναι καλά ορισμένος στους ομομορφισμούς, δηλαδή ότι ο ομομορφισμός ομάδων

$$\mathsf{H}_n(F(\mathbf{f_\bullet})\colon \mathsf{H}_n(F(\mathbf{P_M})) \longrightarrow \mathsf{H}_n(F(\mathbf{P_N}))$$

δεν εξαρτάται από την επιλογή του μορφισμού $\mathbf{f_\bullet}$ που επεκτείνεται ο ομομορφισμός f. Έστω ότι ο f επεκτείνεται και σε έναν άλλον μορφισμό $\mathbf{g_\bullet}\colon \mathbf{P_M} \longrightarrow \mathbf{Q_N}$. Τότε από το Θεώρημα Σύγκρισης έχουμε οι μορφισμοί $\mathbf{f_\bullet}, \mathbf{g_\bullet}$ είναι ομοτοπικοί, δηλαδή $\mathbf{f_\bullet} \cong \mathbf{g_\bullet}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι και οι μορφισμοί $F(\mathbf{f_\bullet}), F(\mathbf{g_\bullet})$ είναι επίσης ομοτοπικοί, $F(\mathbf{f_\bullet}) \cong F(\mathbf{g_\bullet})$ και έτσι από την Πρόταση (2.1.9) έχουμε ότι $\mathsf{H}_n(F(\mathbf{f_\bullet})) \cong \mathsf{H}_n(F(\mathbf{g_\bullet}))$. $\square$

Ορισμός 2.3.2. *Εάν* $F\colon R\text{-}\mathsf{Mod} \longrightarrow \mathsf{Ab}$ *ένας προσθετικός συναλλοίωτος συναρτητής, τότε ο συναρτητής*

$$L_nF\colon R\text{-}\mathsf{Mod} \longrightarrow \mathsf{Ab}$$

καλείται ο n**-οστός αριστερά παραγόμενος συναρτητής του** F.

Παρατήρηση 2.3.3. Ο συναρτητής L_nF δεν είναι μοναδικός επειδή η κατασκευή του εξαρτάται από τις προβολικές αναλύσεις που θα επιλεχθούν για τα πρότυπα. Εάν επιλέξουμε διαφορετικές προβολικές αναλύσεις τότε θα πάρουμε έναν δεύτερο συναρτητή $\bar{L}_nF\colon R\text{-}\mathsf{Mod} \longrightarrow \mathsf{Ab}$ με τον ίδιο τρόπο όπως τον L_nF. Οι συναρτητές L_nF και $\bar{L}_nF$, γενικά, δεν είναι ίσοι αλλά το σημαντικό σημείο είναι ότι είναι φυσικά ισόμορφοι. Διατηρώντας τους παραπάνω συμβολισμούς, αυτή η φυσική ισοδυναμία συναρτητών αποδεικνύεται στην πρόταση που ακολουθεί.

Πρόταση 2.3.4. *Έστω* $F\colon R\text{-}\mathsf{Mod} \longrightarrow \mathsf{Ab}$ *ένας προσθετικός συναλλοίωτος συναρτητής. Τότε οι συναρτητές* L_nF *και* $\bar{L}_nF$ *είναι φυσικά ισόμορφοι.*

Απόδειξη. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι εάν $\mathbf{P}_\bullet, \mathbf{P}'_\bullet$ είναι προβολικές αναλύσεις ενός αριστερού R-προτύπου M, τότε για κάθε $n \geq 0$

$$\mathsf{H}_n(F(\mathbf{P_M})) \cong \mathsf{H}_n(F(\mathbf{P'_M}))$$

Έστω $\mathbf{P}_\bullet, \mathbf{P}'_\bullet$ δύο προβολικές αναλύσεις ενός αριστερού R-προτύπου M. Τότε εάν ο ταυτοτικός ομομορφισμός $\mathrm{Id}_M\colon M \longrightarrow M$ επεκτείνεται στους μορφισμούς συμπλόκων $\mathbf{f}_\bullet\colon \mathbf{P_M} \longrightarrow \mathbf{P'_M}$, $\mathbf{g}_\bullet\colon \mathbf{P'_M} \longrightarrow \mathbf{P_M}$, από την Πρόταση (2.2.23) έπεται ότι $\mathbf{g}_\bullet \circ \mathbf{f}_\bullet \cong \mathrm{Id}_{\mathbf{P_M}}$ και $\mathbf{f}_\bullet \circ \mathbf{g}_\bullet \cong \mathrm{Id}_{\mathbf{P'_M}}$. Άρα θα ισχύει και

$$F(\mathbf{g}_\bullet \circ \mathbf{f}_\bullet) \cong F(\mathrm{Id}_{\mathbf{P_M}}),\ F(\mathbf{f}_\bullet \circ \mathbf{g}_\bullet) \cong F(\mathrm{Id}_{\mathbf{P'_M}})$$

Από τις ιδιότητες των συναρτητών H_n και F έχουμε

$$\begin{aligned} \mathsf{H}_n(F(\mathbf{g}_\bullet))\mathsf{H}_n(F(\mathbf{f}_\bullet)) &= \mathsf{H}_n(F(\mathbf{g}_\bullet)F(\mathbf{f}_\bullet)) = \mathsf{H}_n(F(\mathbf{g}_\bullet \circ \mathbf{f}_\bullet) \\ &= \mathsf{H}_n(F(\mathrm{Id}_{\mathbf{P_M}}) = \mathsf{H}_n(\mathrm{Id}_{F(\mathbf{P_M})}) \\ &= \mathrm{Id}_{\mathsf{H}_n(F(\mathbf{P_M}))} \end{aligned}$$

Παρόμοια,

$$\mathsf{H}_n(F(\mathbf{f}_\bullet))\mathsf{H}_n(F(\mathbf{g}_\bullet)) = \mathrm{Id}_{\mathsf{H}_n(F(\mathbf{P'_M}))}$$

και έτσι

$$\mathsf{H}_n(F(\mathbf{f}_\bullet))\colon \mathsf{H}_n(F(\mathbf{P_M})) \longrightarrow \mathsf{H}_n(F(\mathbf{P'_M}))$$

είναι ένας ισομορφισμός. Έστω $\eta_M = \mathsf{H}_n(F(\mathbf{f}_\bullet))$. Τώρα θα αποδείξουμε ότι οι ισομορφισμοί η_M ορίζουν έναν φυσικό ισομορφισμό συναρτητών. Έστω $\mathbf{Q_N}, \mathbf{Q'_N}$ δύο προβολικές αναλύσεις ενός αριστερού R-προτύπου N. Εάν $f\colon M \longrightarrow N$ είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων, τότε έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \mathsf{H}_n(F(\mathbf{P_M})) \arrow[r, "\eta_M"] \arrow[d, "\mathsf{H}_n(F(\mathbf{h}_\bullet))"'] & \mathsf{H}_n(F(\mathbf{P'_M})) \arrow[d, "\mathsf{H}_n(F(\mathbf{k}_\bullet))"] \\ \mathsf{H}_n(F(\mathbf{Q_N})) \arrow[r, "\eta_N"'] & \mathsf{H}_n(F(\mathbf{Q'_N})) \end{tikzcd}$$

όπου $\mathbf{h}_\bullet\colon \mathbf{P_M} \longrightarrow \mathbf{Q_N}$ και $\mathbf{k}_\bullet\colon \mathbf{P'_M} \longrightarrow \mathbf{Q'_N}$ είναι οι μορφισμοί που επεκτείνεται ο f. Επομένως έχουμε έναν φυσικό ισομορφισμό $\eta\colon L_nF \longrightarrow \bar{L}_nF$ και έτσι οι $L_nF, \bar{L}_nF$ είναι φυσικά ισόμορφοι συναρτητές. □

Παρατήρηση 2.3.5. Εάν $F\colon R\text{-Mod} \longrightarrow \mathsf{Ab}$ είναι ένας προσθετικός αντισυναλλοίωτος συναρτητής, τότε ο συναρ–τητής

$$L_nF\colon R\text{-Mod} \longrightarrow \mathsf{Ab}$$

κατασκευάζεται από ενέσιμες αναλύσεις, και όπως παραπάνω, θα είναι ανεξάρτητος από αυτές.

Τώρα είμαστε σε θέση να κατασκευάσουμε τους n-οστούς αριστερά παραγόμενους συναρτητές που κατασκευάζονται από τους συναρτητές του $\otimes$.

1. **Ο Συναρτητής** $\mathsf{Tor}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{R}}(-,\mathbf{X})$: Έστω X ένα αριστερό R-πρότυπο και ο συναρτητής $-\otimes_R X\colon \text{Mod-}R \longrightarrow \mathsf{Ab}$. Έστω

$$\mathbf{P}_\bullet = \cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0.$$

μία προβολική ανάλυση ενός δεξιού R-προτύπου M. Τότε έχουμε το σύμπλοκο

$$\mathbf{P_M} \otimes_R X = \cdots \longrightarrow P_n \otimes_R X \xrightarrow{d_n\otimes \mathrm{Id}_X} P_{n-1} \otimes_R X \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \otimes_R X \longrightarrow 0.$$

Ορίζουμε,

$$\mathsf{Tor}_n^R(-,X)\colon \text{Mod-}R \longrightarrow \mathsf{Ab}$$
$$M \longmapsto \mathsf{Tor}_n^R(M,X) := \mathsf{H}_n(\mathbf{P_M} \otimes_R X)$$

Έστω N ένα δεξιό R-πρότυπο και $\mathbf{Q}_\bullet$ μία προβολική του ανάλυση. Εάν $f\colon M \longrightarrow N$ είναι ένας ομομορφισμός δεξιών R-προτύπων τότε από το Θεώρημα Σύγκρισης, υπάρχει μορφισμός συμπλόκων $\mathbf{f}_\bullet\colon \mathbf{P_M} \longrightarrow \mathbf{Q_N}$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι και $\mathbf{f}_\bullet \otimes_R \mathrm{Id}_X\colon \mathbf{P_M} \otimes_R X \longrightarrow \mathbf{Q_N} \otimes_R X$ είναι επίσης μορφισμός συμπλόκων. Από αυτόν τον μορφισμό επάγεται ένας ομομορφισμός ομάδων

$$\mathsf{H}_n(\mathbf{f}_\bullet \otimes \mathrm{Id}_X)\colon \mathsf{H}_n(\mathbf{P_M} \otimes_R X) \longrightarrow \mathsf{H}_n(\mathbf{Q_N} \otimes_R X)$$

Ορίζουμε,

$$\mathsf{Tor}_n^R(f,X) := \mathsf{H}_n(\mathbf{f}_\bullet \otimes \mathrm{Id}_X)$$

2. **Ο Συναρτητής** $\mathsf{tor}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{R}}(\mathbf{M},-)$: Ο συναρτητής $\mathsf{tor}_n^R(M,-)$ είναι δυϊκός του $\mathsf{Tor}_n^R(-,X)$.

Έστω M ένα δεξιό R-πρότυπο και ο συναρτητής $M \otimes_R -\colon R\text{-Mod} \longrightarrow \mathsf{Ab}$. Τότε εάν X είναι ένα αριστερό R-πρότυπο ορίζουμε

$$\mathsf{tor}_n^R(M,-)\colon R\text{-Mod} \longrightarrow \mathsf{Ab}$$
$$X \longmapsto \mathsf{tor}_n^R(M,X) := \mathsf{H}_n(M \otimes_R \mathbf{P_X}),$$

όπου $\mathbf{P_X}$ είναι μία προβολική ανάλυση του X. Επιπλέον, έστω N ένα αριστερό R-πρότυπο και $\mathbf{Q}_\bullet$ μία προβολική του ανάλυση. Τότε εάν $f\colon X \longrightarrow N$ είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων, ορίζουμε

$$\mathsf{tor}_n^R(M,f) := \mathsf{H}_n(\mathrm{Id}_M \otimes \mathbf{f}_\bullet)$$

όπου,

$$\mathsf{H}_n(\mathrm{Id}_M \otimes \mathbf{f}_\bullet)\colon \mathsf{H}_n(M \otimes_R \mathbf{P_X}) \longrightarrow \mathsf{H}_n(M \otimes_R \mathbf{Q_N}).$$

Παρατήρηση 2.3.6. Αποδεικνύεται ότι για όλα τα πρότυπα ${}_RX, M_R$

$$\mathsf{tor}_n^R(M,-)(X) = \mathsf{Tor}_n^R(-,X)(M)$$

Επομένως η κοινή τιμή $\mathsf{Tor}_n^R(M,X)$ μπορεί να υπολογιστεί είτε χρησιμοποιώντας προβολικές αναλύσεις του M, είτε προβολικές αναλύσεις του X. Για την απόδειξη βλέπε [24, Theorem 6.32].

Πόρισμα 2.3.7. *Το πρότυπο* $\mathsf{Tor}_n^R(M,X)$ *είναι ανεξάρτητο της επιλογής των προβολικών αναλύσεων των* M *και* X.

Απόδειξη. Ισχύει διότι ο συναρτητής $\mathsf{Tor}_n^R(-,X)$ είναι αριστερά παραγόμενος συναρτητής. □

Από τώρα θα γράφουμε Tor_*^R αντί για tor_*^R.

Πρόταση 2.3.8. *Έστω* F *ένας προσθετικός συναλλοίωτος συναρτητής. Εάν ο* F *είναι δεξιά ακριβής, τότε* $L_0F(M) \cong F(M)$, *για όλα τα αριστερά* R*-πρότυπα* M *και εάν* P *είναι ένα προβολικό αριστερό* R*-πρότυπο τότε* $L_nF(P) = 0$, *για* $n = 1,2,3,\ldots$ *Ειδικότερα, για όλα τα δεξιά* R*-πρότυπα* M *και αριστερά* R*-πρότυπα* N, *ισχύει ότι*

$$\mathsf{Tor}_0^R(M,N) = M \otimes_R N$$

και εάν P *είναι ένα προβολικό δεξιό* R*-πρότυπο και* Q *είναι ένα προβολικό αριστερό* R*-πρότυπο τότε*

$$\mathsf{Tor}_n^R(P,N) = 0 \quad \textit{και} \quad \mathsf{Tor}_n^R(M,Q) = 0, \quad \forall n \geq 1.$$

Απόδειξη. Εάν $\mathbf{P}_\bullet$ είναι μία προβολική ανάλυση του M, τότε η ακολουθία

$$P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0.$$

είναι ακριβής. Επειδή ο συναρτητής F είναι δεξιά ακριβής, επάγεται ότι η ακολουθία

$$F(P_1) \xrightarrow{F(d_1)} F(P_0) \xrightarrow{F(d_0)} F(M) \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής. Εξετάζοντας την

$$F(P_1) \xrightarrow{F(d_1)} F(P_0) \longrightarrow 0$$

βλέπουμε ότι

$$L_0F(M) = \mathsf{H}_0(F_{\mathbf{P_M}}) = \mathsf{Ker}(F(P_0) \longrightarrow 0) \big/ \mathsf{Im}\, F(d_1) = F(P_0) \big/ \mathsf{Ker}\, F(d_0) \cong F(M).$$

Εάν P είναι ένα προβολικό αριστερό R-πρότυπο, τότε

$$\mathbf{P}_\bullet := \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow P \xrightarrow{\mathrm{Id}_P} P \longrightarrow 0.$$

είναι μία προβολική ανάλυση του P. Αυτή η ανάλυση μας δίνει το σύμπλοκο

$$F(\mathbf{P}_\bullet) := \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow F(P) \longrightarrow 0$$

Είναι προφανές ότι $L_nF(P) = 0$, για $n = 1,2,3,\ldots$

Επομένως, $\mathsf{Tor}_n^R(M,N) = M \otimes_R N$, $\mathsf{Tor}_n^R(P,N) = 0$ και $\mathsf{Tor}_n^R(M,Q) = 0, \forall n \geq 1$, διότι οι συναρτητές $-\otimes_R N$, $M \otimes_R -$ είναι δύο συναλλοίωτοι δεξιά ακριβείς προσθετικοί συναρτητές. □

Τώρα θα αναφέρουμε ένα λήμμα το οποίο μας δείχνει έναν τρόπο κατασκευής προβολικών αναλύσεων:

Λήμμα 2.3.9. (Horseshoe Lemma) *Έστω το ακόλουθο διάγραμμα αριστερών R-προτύπων όπου η γραμμή είναι ακριβής και οι στήλες είναι προβολικές αναλύσεις:*

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] & \\
 & P'_1 \arrow[d] & & P''_1 \arrow[d] & \\
 & P'_0 \arrow[d] & & P''_0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Τότε υπάρχει η προβολική ανάλυση του A και μορφισμοί συμπλόκων έτσι ώστε οι τρεις στήλες να δημιουργούν μια ακριβή ακολουθία συμπλόκων.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [31, Lemma 2.2.8]. □

Παρατήρηση 2.3.10. Ισχύει και η δυϊκή πρόταση, με δυϊκή απόδειξη, όπου οι προβολικές αναλύσεις αντικαθίστανται με ενέσιμες αναλύσεις.

Με την βοήθεια του προηγούμενου λήμματος έχουμε την εξής Πρόταση:

Πρόταση 2.3.11. *Εάν $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ είναι μία σύντομη ακριβής ακολουθία δεξιών R-προτύπων, υπάρχει μία μακρά ακριβής ακολουθία για κάθε αριστερό R-πρότυπο B,*

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{Tor}_2^R(A',B) \longrightarrow \mathsf{Tor}_2^R(A,B) \longrightarrow \mathsf{Tor}_2^R(A'',B) \longrightarrow \mathsf{Tor}_1^R(A',B) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathsf{Tor}_1^R(A,B) \longrightarrow \mathsf{Tor}_1^R(A'',B) \longrightarrow A' \otimes_R B \longrightarrow A \otimes_R B \longrightarrow A'' \otimes_R B \longrightarrow 0$$

Μία ανάλογη μακρά ακριβή ακολουθία έχουμε και για τον συναρτητή $\mathsf{Tor}_n^R(B,-)$

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [24, theorem 6.27, corollary 6.30]. □

Ας περάσουμε τώρα στους δεξιά παραγόμενους συναρτητές οι οποίοι επάγονται από έναν προσθετικό συναλλοίωτο συναρτητή $F\colon R\text{-}\mathsf{Mod} \longrightarrow \mathsf{Ab}$.

Ο Συναρτητής $\mathbf{R^nF}\colon \mathbf{R}\text{-}\mathsf{Mod} \longrightarrow \mathsf{Ab}$:

Έστω ένα αριστερό R-πρότυπο M και

$$\mathbf{E_\bullet} = 0 \longrightarrow M \xrightarrow{k^{-1}} E^0 \xrightarrow{k^0} E^1 \xrightarrow{k^1} \cdots \longrightarrow E^{n-1} \xrightarrow{k^{n-1}} E^n \xrightarrow{k^n} \cdots$$

μία ενέσιμη ανάλυση του. Κατασκευάζουμε την deleted ενέσιμη ανάλυση του $\mathbf{E_\bullet}$, δηλαδή

$$\mathbf{E^M} = 0 \longrightarrow E^0 \xrightarrow{k^0} E^1 \xrightarrow{k^1} \cdots \longrightarrow E^{n-1} \xrightarrow{k^{n-1}} E^n \xrightarrow{k^n} \cdots$$

και εφαρμόζουμε σε αυτήν τον συναρτητή F. Τότε θα έχουμε το συν-αλυσιδωτό σύμπλοκο

$$F(\mathbf{E^M}) = 0 \longrightarrow F(E^0) \xrightarrow{F(k^0)} F(E^1) \xrightarrow{F(k^1)} \cdots \longrightarrow F(E^{n-1}) \xrightarrow{F(k^{n-1})} F(E^n) \xrightarrow{F(k^n)} \cdots$$

Εάν σε αυτό το συν-αλυσιδωτό σύμπλοκο θεωρήσουμε τις συν-ομολογικές ομάδες $\mathsf{H}^n(F(\mathbf{E^M}))$ μπορούμε να ορίσουμε,

$$R^nF\colon R\text{-}\mathsf{Mod} \longrightarrow \mathsf{Ab}$$
$$M \longmapsto R^nF(M) := \mathsf{H}^n(F(\mathbf{E^M})).$$

Έστω N ένα αριστερό R-πρότυπο και $\mathbf{Q_\bullet}$ μία ενέσιμη ανάλυση του. Εάν $f\colon M \longrightarrow N$ είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων τότε από το δυϊκό Θεώρημα Σύγκρισης, υπάρχει μορφισμός συν-αλυσιδωτών συμπλόκων $\mathbf{f_\bullet}\colon \mathbf{E^M} \longrightarrow \mathbf{Q^N}$. Δηλαδή έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "k^{-1}"] \arrow[d, "f"] & E^0 \arrow[r, "k^0"] \arrow[d, dashed, "f^0"] & \cdots \arrow[r, "k^{n-1}"] & E^n \arrow[r, "k^n"] \arrow[d, dashed, "f^n"] & E^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "d^{-1}"] & D^0 \arrow[r, "d^0"] & \cdots \arrow[r, "d^{n-1}"] & D^n \arrow[r, "d^n"] & d^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Διαγράφουμε τα M, N και εφαρμόζουμε τον συναρτητή F στο διάγραμμα και θα έχουμε:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F(E^0) \arrow[r, "F(k^0)"] \arrow[d, "F(f^0)"] & \cdots \arrow[r, "F(k^{n-1})"] & F(E^n) \arrow[r, "F(k^n)"] \arrow[d, "F(f^n)"] & F(E^{n+1}) \arrow[r] \arrow[d, "F(f^{n+1})"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & F(D^0) \arrow[r, "F(d^0)"] & \cdots \arrow[r, "F(d^{n-1})"] & F(D^n) \arrow[r, "F(d^n)"] & F(d^{n+1}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

όπου η πάνω και η κάτω γραμμή είναι σύμπλοκα. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι και $F(\mathbf{f_\bullet})\colon F(\mathbf{E^M}) \longrightarrow F(\mathbf{Q^N})$ είναι επίσης μορφισμός συν-αλυσιδωτών συμπλόκων. Από αυτόν τον μορφισμό επάγεται ένας ομομορφισμός ομάδων

$$\mathsf{H}^n(F(\mathbf{f_\bullet}))\colon \mathsf{H}^n(F(\mathbf{E^M})) \longrightarrow \mathsf{H}^n(F(\mathbf{Q^N})).$$

Ορίζουμε,

$$R^nF(f) := \mathsf{H}^n(F(\mathbf{f_\bullet})).$$

Πρόταση 2.3.12. *Εάν $F\colon R$-Mod $\longrightarrow$ Ab ένας προσθετικός συναλλοίωτος συναρτητής, τότε*

$$R^nF\colon R\text{-}\mathsf{Mod} \longrightarrow \mathsf{Ab}$$

είναι ένας προσθετικός συναλλοίωτος συναρτητής για κάθε ακέραιο $n \geq 0$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη της πρότασης (2.3.1) □

Ορισμός 2.3.13. *Εάν $F\colon R$-Mod $\longrightarrow$ Ab ένας προσθετικός συναλλοίωτος συναρτητής, τότε ο συναρτητής*

$$R^nF\colon R\text{-}\mathsf{Mod} \longrightarrow \mathsf{Ab}$$

καλείται ο **n-οστός δεξιά παραγόμενος συναρτητής του** *F.*

Παρατήρηση 2.3.14. Όπως στους αριστερά παραγόμενους συναρτητές, έτσι και στους δεξιά παραγόμενους ο συναρτητής R^nF είναι ανεξάρτητος της επιλογής των ενέσιμων αναλύσεων που εκάστοτε λαμβάνονται.

Παρατήρηση 2.3.15. Εάν $F\colon R\text{-Mod} \longrightarrow \mathsf{Ab}$ ένας προσθετικός αντισυναλλοίωτος συναρτητής, τότε ο συναρτητής

$$R^nF\colon R\text{-Mod} \longrightarrow \mathsf{Ab}$$

κατασκευάζεται από προβολικές αναλύσεις και είναι ανεξάρτητος από αυτές.

Τώρα είμαστε σε θέση να κατασκευάσουμε τους n-οστούς δεξιά παραγόμενους συναρτητές που κατασκευάζονται από τους συναρτητές του Hom .

1. **Ο Συναρτητής** $\mathsf{Ext}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{R}}(\mathbf{X},-)$: Έστω X ένα αριστερό R-πρότυπο και ο συναρτητής $\mathsf{Hom}_R(X,-)\colon R\text{-Mod} \longrightarrow \mathsf{Ab}$. Έστω

$$\mathbf{E}_\bullet = 0 \longrightarrow M \xrightarrow{k^{-1}} E^0 \xrightarrow{k^0} E^1 \xrightarrow{k^1} \cdots \longrightarrow E^{n-1} \xrightarrow{k^{n-1}} E^n \xrightarrow{k^n} \cdots$$

μία ενέσιμη ανάλυση ενός αριστερού R-προτύπου M. Τότε έχουμε το συν-αλυσιδωτό σύμπλοκο

$$\mathsf{Hom}_R(X,\mathbf{E^M}) = 0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(X,E^0) \xrightarrow{(k^0)_*} \cdots \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(X,E^n) \xrightarrow{(k^n)_*} \cdots$$

Ορίζουμε,

$$\mathsf{Ext}^n_R(X,-)\colon R\text{-Mod} \longrightarrow \mathsf{Ab}$$
$$M \longmapsto \mathsf{Ext}^n_R(X,M) := \mathsf{H}^n(\mathsf{Hom}_R(X,\mathbf{E^M})).$$

Έστω N ένα αριστερό R-πρότυπο και $\mathbf{D}_\bullet$ μία ενέσιμη ανάλυση του. Εάν $f\colon M \longrightarrow N$ είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων τότε από το δυϊκό Θεώρημα Σύγκρισης, υπάρχει μορφισμός συν-αλυσιδωτών συμπλόκων $\mathbf{f}_\bullet\colon \mathbf{E^M} \longrightarrow \mathbf{D^N}$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι και

$$\mathsf{Hom}_R(X,\mathbf{f}_\bullet)\colon\ \mathsf{Hom}_R(X,\mathbf{E^M}) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(X,\mathbf{Q^N})$$

είναι επίσης μορφισμός συν-αλυσιδωτών συμπλόκων. Από αυτόν τον μορφισμό επάγεται ένας ομομορφισμός ομάδων

$$\mathsf{H}^n(\mathsf{Hom}_R(X,\mathbf{f}_\bullet))\colon \mathsf{H}^n(\mathsf{Hom}_R(X,\mathbf{E^M})) \longrightarrow \mathsf{H}^n(\mathsf{Hom}_R(X,\mathbf{Q^N})$$

Ορίζουμε,

$$\mathsf{Ext}^n_R(X,f) := \mathsf{H}^n(\mathsf{Hom}_R(X,\mathbf{f}_\bullet))$$

2. **Ο Συναρτητής** $\mathsf{ext}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{R}}(-,\mathbf{M})$: Έστω M ένα αριστερό R-πρότυπο και ο συναρτητής $\mathsf{Hom}_R(-,M)\colon\ \mathsf{Mod}\text{-}R \longrightarrow \mathsf{Ab}$. Επειδή ο συναρτητής $\mathsf{Hom}_R(-,M)$ είναι αντισυναλλοίωτος θα πάρουμε προβολικές αναλύσεις. Έτσι έστω

$$\mathbf{P}_\bullet = \cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} X \longrightarrow 0$$

μία προβολική ανάλυση ενός αριστερού R-προτύπου X. Τότε έχουμε το συν-αλυσιδωτό σύμπλοκο

$$\mathsf{Hom}_R(\mathbf{P_X},M) = \cdots \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(P_n,M) \xrightarrow{(d_n)^*} \cdots \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(P_0,M) \longrightarrow 0.$$

Ορίζουμε,

$$\mathsf{ext}^n_R(-,M)\colon\ \mathsf{Mod}\text{-}R \longrightarrow \mathsf{Ab}$$
$$X \longmapsto \mathsf{ext}^n_R(X,M) := \mathsf{H}^n(\mathsf{Hom}_R(\mathbf{P_X},M)).$$

Έστω N ένα αριστερό R-πρότυπο και $\mathbf{Q}_\bullet$ μία προβολική ανάλυση του. Εάν $f\colon X \longrightarrow N$ είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων τότε από το Θεώρημα Σύγκρισης, υπάρχει μορφισμός συμπλόκων $\mathbf{f}_\bullet\colon \mathbf{P_X} \longrightarrow \mathbf{Q_N}$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι και

$\mathsf{Hom}_R(\mathbf{f}_\bullet, M)\colon\ \mathsf{Hom}_R(\mathbf{P_X}, M) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(\mathbf{Q_N}, M)$ είναι επίσης μορφισμός συν-αλυσιδωτών συμπλόκων. Από αυτόν τον μορφισμό επάγεται ένας ομομορφισμός ομάδων

$$\mathsf{H}^n(\mathsf{Hom}_R(\mathbf{f}_\bullet, M))\colon \mathsf{H}^n(\mathsf{Hom}_R(\mathbf{P_X}, M)) \longrightarrow \mathsf{H}^n(\mathsf{Hom}_R(\mathbf{Q_N}, M))$$

Ορίζουμε,

$$\mathsf{ext}^n_R(f, M) := \mathsf{H}^n(\mathsf{Hom}_R(\mathbf{f}_\bullet, M))$$

Παρατήρηση 2.3.16. Αποδεικνύεται ότι για όλα τα πρότυπα X, M υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός

$$\mathsf{Ext}^n_R(X, -)(M) \;\cong\; \mathsf{ext}^n_R(-, M)(X)$$

Επομένως η κοινή τιμή $\mathsf{Ext}^n_R(X, M)$ μπορεί να υπολογιστεί είτε χρησιμοποιώντας προβολικές αναλύσεις του X, είτε ενέσιμες αναλύσεις του M. Για την απόδειξη βλέπε [24, Theorem 6.32]. Έτσι από τώρα θα γράφουμε Ext^n_R αντί ext^n_R.

Πόρισμα 2.3.17. *Το πρότυπο $\mathsf{Ext}^n_R(X, M)$ είναι ανεξάρτητο της επιλογής των προβολικών αναλύσεων του X και των ενέσιμων αναλύσεων του M.*

Απόδειξη. Προκύπτει από το γεγονός ότι ο συναρτητής $\mathsf{Ext}^R_n(X, -)$ είναι ο δεξιά παραγόμενος συναρτητής του συναρτητή $\mathsf{Hom}_R(X, -)$. □

Δυϊκή της Πρότασης (2.3.8) είναι η ακόλουθη:

Πρόταση 2.3.18.
1. *Έστω $F\colon R$-$\mathsf{Mod} \longrightarrow \mathsf{Ab}$ ένας προσθετικός συναλλοίωτος συναρτητής. Εάν ο F είναι αριστερά ακριβής, τότε $R^0F(M) \cong F(M)$, για όλα τα αριστερά R-πρότυπα M και εάν E είναι ένα ενέσιμο αριστερό R-πρότυπο τότε $R^nF(E) = 0$, για $n = 1, 2, 3, \ldots$ Ειδικότερα, για όλα τα αριστερά R-πρότυπα M,N, ισχύει ότι*

$$\mathsf{Ext}^0_R(M, N) = \mathsf{Hom}_R(M, N)$$

και εάν E είναι ένα ενέσιμο αριστερό R-πρότυπο τότε

$$\mathsf{Ext}^n_R(M, E) = 0, \forall n \geq 1.$$

2. *Έστω $F\colon R$-$\mathsf{Mod} \longrightarrow \mathsf{Ab}$ ένας προσθετικός αντισυναλλοίωτος συναρτητής. Εάν ο F είναι αριστερά ακριβής, τότε $R^0F(M) \cong F(M)$, για όλα τα αριστερά R-πρότυπα M και εάν P είναι ένα προβολικό αριστερό R-πρότυπο τότε $R^nF(P) = 0$, για $n = 1, 2, 3, \ldots$ Ειδικότερα, για όλα τα αριστερά R-πρότυπα M,N, ισχύει ότι*

$$\mathsf{Ext}^0_R(M, N) = \mathsf{Hom}_R(M, N)$$

και εάν P είναι ένα προβολικό αριστερό R-πρότυπο τότε

$$\mathsf{Ext}^n_R(P, N) = 0, \forall n \geq 1.$$

Θεώρημα 2.3.19. *Για οποιαδήποτε δύο αριστερά R-πρότυπα M, N τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

1. *Κάθε ακριβή ακολουθία $0 \longrightarrow M \xrightarrow{a} X \xrightarrow{b} N \longrightarrow 0$ είναι διασπάσιμη.*
2. $\mathsf{Ext}^1_R(N, M) = 0.$

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [24, Proposition 7.24, Theorem 7.31]. □

Όπως και με την Πρόταση (2.3.11), έχουμε το ακόλουθο ανάλογο αποτέλεσμα:

Πρόταση 2.3.20. *Εάν* $0 \longrightarrow B' \longrightarrow B \longrightarrow B'' \longrightarrow 0$ *είναι μία σύντομη ακριβή ακολουθία αριστερών* R*-προτύπων, υπάρχει μία μακρά ακριβή ακολουθία για κάθε αριστερό* R*-πρότυπο* A,

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(A, B') \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(A, B) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(A, B'') \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_R(A, B') \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathsf{Ext}^1_R(A, B) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_R(A, B'') \longrightarrow \mathsf{Ext}^2_R(A, B') \longrightarrow \mathsf{Ext}^2_R(A, B) \longrightarrow \mathsf{Ext}^2_R(A, B'') \longrightarrow \cdots$$

Μία ανάλογη μακρά ακριβή ακολουθία έχουμε και για τον συναρτητή $\mathsf{Ext}^R_n(-, B)$.

Κεφάλαιο 3

Επίπεδα Πρότυπα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε τις βασικές ιδιότητες της σημαντικής κλάσης των επίπεδων (flat) προτύπων υπεράνω τυχόντος δακτυλίου. Θα αναπτύξουμε την βασική θεωρία των επίπεδων προτύπων καθώς και τις βασικές ιδιότητες των συναφών (coherent) δακτυλίων οι οποίοι θα μας φανούν χρήσιμοι στα επόμενα Κεφάλαια της διατριβής.

3.1 Επίπεδα Πρότυπα και ο Συναρτητής $\bigotimes$

Στην ενότητα αυτή, R θα συμβολίζει έναν τυχαίο δακτύλιο (ο οποίος όπως πάντα θεωρείται προσεταιριστικός με μονάδα).

Την έννοια του επίπεδου προτύπου εισήγαγε και μελέτησε ο Serre σε ένα παράρτημα του φημισμένου άρθρου του GAGA (Geometrie algebrique et geometrie analytique), περίπου το $1955/1956$.

Τα επίπεδα αριστερά πρότυπα μπορούν να οριστούν ως τα πρότυπα M τα οποία καθιστούν τον δεξιά ακριβή τανυστικό συναρτητή $-\otimes_R M$ ακριβή, όπως ακριβώς τα προβολικά πρότυπα καθιστούν ακριβή τον συναλλοίωτο αριστερά ακριβή συναρτητή $\mathsf{Hom}_R(M,-)$. Έτσι οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 3.1.1. *Ένα αριστερό R-πρότυπο M καλείται* **επίπεδο (flat)** *αν ο συναρτητής $-\otimes_R M\colon \mathsf{Mod}\text{-}R \longrightarrow \mathsf{Ab}$ είναι ακριβής. Δηλαδή αν*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{k} C \longrightarrow 0$$

είναι μία σύντομη ακριβής ακολουθία από δεξιά R-πρότυπα, τότε

$$0 \longrightarrow A\otimes_R M \xrightarrow{i\otimes \mathrm{Id}_M} B\otimes_R M \xrightarrow{k\otimes \mathrm{Id}_M} C\otimes_R M \longrightarrow 0$$

είναι μία ακριβής ακολουθία από αβελιανές ομάδες.

Παρατήρηση 3.1.2. Η έννοια του επίπεδου δεξιού R-προτύπου είναι ανάλογη της έννοιας του επίπεδου αριστερού R-προτύπου. Έτσι, ένα επίπεδο δεξιό R-πρότυπο M καθιστά τον συναρτητή $M\otimes_R -\colon R\text{-}\mathsf{Mod} \longrightarrow \mathsf{Ab}$ ακριβή.

Παρατήρηση 3.1.3. Επειδή ο συναρτητής $-\otimes_R M\colon \mathsf{Mod}\text{-}R \longrightarrow \mathsf{Ab}$ είναι δεξιά ακριβής, διαπιστώνουμε ότι ένα αριστερό R-πρότυπο M είναι επίπεδο αν και μόνο αν, ο ομομορφισμός $i\colon A \longrightarrow B$ είναι μονομορφισμός συνεπάγεται ότι και ο ομομορφισμός $i\otimes \mathrm{Id}_M\colon A\otimes_R M \longrightarrow B\otimes_R M$ είναι μονομορφισμός.

Συνεχίζουμε με κάποια παραδείγματα επίπεδων προτύπων.

Πρόταση 3.1.4. *Έστω R ένας δακτύλιος.*

1. *Ο δακτύλιος R είναι ένα επίπεδο αριστερό R-πρότυπο.*
2. *Το ευθύ άθροισμα $\bigoplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha$ αριστερών R-προτύπων είναι επίπεδο αν και μόνο αν κάθε αριστερό R-πρότυπο M_α είναι επίπεδο.*
3. *Κάθε προβολικό αριστερό R-πρότυπο P είναι επίπεδο.*

Απόδειξη. 1. Έστω $i\colon A \longrightarrow B$ ένας μονομορφισμός δεξιών R-προτύπων. Θα αποδείξουμε ότι ο ομομορφισμός $i\otimes \mathrm{Id}_R\colon A\otimes_R R \longrightarrow B\otimes_R R$ είναι μονομορφισμός αβελιανών ομάδων. Θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\sigma"'] & B \arrow[d, "\tau"] \\ A\otimes_R R \arrow[r, "i\otimes \mathrm{Id}_R"'] & B\otimes_R R \end{tikzcd}$$

όπου

$$\sigma\colon A \longrightarrow A\otimes_R R, \quad a \longmapsto \sigma(a) = a\otimes 1_R$$

$$\tau\colon B \longrightarrow B\otimes_R R, \quad b \longmapsto \tau(b) = b\otimes 1_R$$

Από την Πρόταση (1.2.31) έχουμε ότι σ,τ είναι ισομορφισμοί, οπότε $i\otimes \mathrm{Id}_R = \tau i \sigma^{-1}$ είναι μονομορφισμός. Επομένως, ο δακτύλιος R είναι ένα επίπεδο αριστερό R-πρότυπο υπεράνω του εαυτού του.

2. Έστω $j\colon A \longrightarrow B$ ένας μονομορφισμός δεξιών R-προτύπων. Τότε έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} A\otimes_R (\oplus M_\alpha) \arrow[r, "j\otimes \mathrm{Id}_{(\oplus M_\alpha)}"] \arrow[d, "h"'] & B\otimes_R (\oplus M_\alpha) \arrow[d, "\bar{h}"] \\ \oplus_{\alpha\in\Delta}(A\otimes_R M_\alpha) \arrow[r, "\oplus(j\otimes \mathrm{Id}_{M_\alpha})"'] & \oplus_{\alpha\in\Delta}(B\otimes_R M_\alpha) \end{tikzcd}$$

όπου $\oplus(j\otimes \mathrm{Id}_{M_\alpha})\colon\ \oplus_{\alpha\in\Delta}\,(A\otimes_R M_\alpha) \longrightarrow \oplus_{\alpha\in\Delta}(B\otimes_R M_\alpha)$ ορίζεται ως εξής:

$$\Big(\sum_{i=1}^{k} n_i(a_i\otimes m_{a_i})\Big) \longmapsto \Big(\sum_{i=1}^{k} n_i(j(a_i)\otimes m_{a_i})\Big)$$

Από την Πρόταση (1.2.32) έχουμε ότι οι ομομορφισμοί $h,\bar{h}$ είναι ισομορφισμοί. Έτσι από το διάγραμμα έχουμε ότι ο ομομορφισμός $j\otimes \mathrm{Id}_{(\oplus M_\alpha)}$ είναι μονομορφισμός αν και μόνο αν ο ομομορφισμός $\oplus(j\otimes_R \mathrm{Id}_{M_\alpha})$ είναι μονομορφισμός. Λαμβάνοντας υπόψιν την Παρατήρηση (1.2.2) έχουμε ότι ο ομομορφισμός $\oplus(j\otimes_R \mathrm{Id}_{M_\alpha})$ είναι μονομορφισμός αν και μόνο αν ο ομομορφισμός $j\otimes_R \mathrm{Id}_{M_\alpha}$ είναι μονομορφισμός. Επομένως το ευθύ άθροισμα $\oplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha$ είναι επίπεδο αν και μόνο αν κάθε M_α είναι επίπεδο.

3. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι κάθε ελεύθερο αριστερό R-πρότυπο είναι επίπεδο. Έτσι, έστω F ένα ελεύθερο αριστερό R-πρότυπο. Άρα υπάρχει σύνολο Δ τέτοιο ώστε $F\cong R^{(\Delta)} = \oplus_{\alpha\in\Delta} R_\alpha$ όπου $R_\alpha = R,\ \forall\alpha\in\Delta$. Από το 1. έχουμε ότι κάθε $R_\alpha = R$ είναι επίπεδο αριστερό R-πρότυπο και έτσι από το 2. το ευθύ άθροισμα $\oplus_{\alpha\in\Delta} R_\alpha$ είναι επίπεδο αριστερό R-πρότυπο. Επομένως το F είναι επίπεδο αριστερό R-πρότυπο.

Τώρα, έστω P ένα προβολικό αριστερό R-πρότυπο. Τότε το P είναι ευθύς προσθετέος ενός ελεύθερου αριστερού R-προτύπου, και επειδή αποδείξαμε ότι κάθε ελεύθερο αριστερό R-πρότυπο είναι και επίπεδο, έχουμε ότι το P είναι ευθύς προσθετέος επίπεδου αριστερού R-προτύπου. Οπότε από το 2. έχουμε ότι το P είναι επίπεδο αριστερό R-πρότυπο. Επομένως, όλα τα προβολικά πρότυπα είναι πάντα επίπεδα. □

Παρατήρηση 3.1.5. 1. Υπάρχουν επίπεδα πρότυπα τα οποία δεν είναι προβολικά, βλέπε το Παράδειγμα (3.1.8) παρακάτω.

2. Δεν είναι όλα τα αριστερά R-πρότυπα επίπεδα. Για παράδειγμα, το αριστερό $\mathbb{Z}$-πρότυπο $\mathbb{Z}_n$ δεν είναι επίπεδο για $n > 1$. Όντως, εάν θεωρήσουμε την έγκλειση $i\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ τότε έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \arrow[r, "i\otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}_n}"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \\
\mathbb{Z}_n \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

όπου η f είναι ισομορφισμός από την Πρόταση (1.2.31) και $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_n = 0$ εφόσον $\frac{p}{q}\otimes[a] = \frac{pn}{qn}\otimes[a] = \frac{p}{qn}\otimes n[a] = \frac{p}{qn}\otimes[na] = \frac{p}{qn}\otimes[0] = 0$, για κάθε γεννήτορα $\frac{p}{q}\otimes[a] \in \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_n$. Οπότε έχουμε ότι $\psi = (i\otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}_n})\circ f^{-1}$. Ο ομομορφισμός ψ δεν είναι σε καμία περίπτωση μονομορφισμός διότι $|\mathbb{Z}_n| = n > 0$. Έτσι ο ομομορφισμός $i\otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}_n}$ δεν είναι μονομορφισμός διότι αν ήταν μονομορφισμός τότε και η σύνθεση $(i\otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}_n})\circ f^{-1}$ θα ήταν μονομορφισμός δηλαδή ο ομομορφισμός ψ θα ήταν μονομορφισμός, πράγμα αδύνατο.

Περισσότερα παραδείγματα επίπεδων προτύπων δίνονται από το ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα. Υπενθυμίζουμε ότι ένας δακτύλιος R καλείται **κανονικός** με την έννοια του **von Neumann (von Neumann regular)** εάν, για κάθε $r \in R$, υπάρχει ένα $r' \in R$ με $rr'r = r$. Δηλαδή, μπορεί να δει κανείς το r' ως ένα γενικευμένο αντίστροφο του r.

Θεώρημα 3.1.6. (Harada (1956)) *Ένας δακτύλιος R είναι κανονικός με την έννοια του von Neumann αν και μόνο αν κάθε (αριστερό) R-πρότυπο είναι επίπεδο.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [24, Theorem 4.9]. □

Θα μελετήσουμε εν συντομία στη συνέχεια επίπεδα πρότυπα υπεράνω (μεταθετικών) ακέραιων περιοχών.

Έστω R μια ακέραια περιοχή, U το σύνολο των μη-μηδενικών στοιχείων του R και N ένα αριστερό R-πρότυπο. Ορίζουμε ως $U^{-1}N$ το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας των διατεταγμένων ζευγών $(u,n), u \in U, n \in N$ κάτω από τη σχέση ισοδυναμίας $(u,n)\sigma(u',n') \Leftrightarrow u'n = un'$ στο N. Δηλαδή

$$U^{-1}N := U \times N/\sigma$$

Τότε το σύνολο $U^{-1}N$ είναι μία αβελιανή ομάδα με πρόσθεση που ορίζεται ως $\overline{(u_1,n_1)} + \overline{(u_2,n_2)} = \overline{(u_1u_2, u_2n_1 + u_1n_2)}$ παρατηρώντας ότι το στοιχείο $e = \overline{(1,0)}$ είναι το ταυτοτικό και ότι κάθε $\overline{(u,n)} \in U^{-1}N$ έχει προσθετικό αντίστροφο το στοιχείο $\overline{(-u,n)} \in U^{-1}N$. Επιπλέον εάν ορίσουμε τη δράση

$$R \times U^{-1}N \longrightarrow U^{-1}N, \quad (r, \overline{(u,n)}) \longmapsto r\overline{(u,n)} := \overline{(u,rn)}$$

εύκολα βλέπει κανείς ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες του αριστερού R-προτύπου και έτσι το $U^{-1}N$ γίνεται αριστερό R-πρότυπο.

Λήμμα 3.1.7. *Έστω R μια ακέραια περιοχή με σώμα πηλίκο Q και N ένα αριστερό R-πρότυπο. Τότε*

1. *Υπάρχει ένας ισομορφισμός αριστερών R-προτύπων $f\colon Q \otimes_R N \longrightarrow U^{-1}N$.*

2. *$\frac{1}{d} \otimes n = 0$ στο $Q \otimes_R N$ αν και μόνο αν $rn = 0$ για κάποιο μη-μηδενικό $r \in R$.*

Απόδειξη. 1. Έστω η απεικόνιση

$$h\colon Q \times N \longrightarrow U^{-1}N, \quad (\frac{a}{b}, n) \longmapsto \overline{(b, an)}$$

Θα αποδείξουμε ότι η h είναι μία R-ισόρροπη απεικόνιση. Για $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Q, m, n \in N, r \in R$ έχουμε

1.
$$\begin{aligned} h\Big(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}, m\Big) &= h\Big(\frac{ad+cb}{bd}, m\Big) = \overline{(bd, (ad+cb)m)} \\ &= \overline{(b, am)} + \overline{(d, cm)} = h\Big(\frac{a}{b}, m\Big) + h\Big(\frac{c}{d}, m\Big). \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} h\Big(\frac{a}{b}, m+n\Big) &= \overline{(b, a(m+n))} = \overline{(b^2, ba(m+n))} \\ &= \overline{(b^2, bam + ban)} = \overline{(b, am)} + \overline{(b, an)} \\ &= h\Big(\frac{a}{b}, m\Big) + h\Big(\frac{a}{b}, n\Big). \end{aligned}$$

3.
$$h\Big(\frac{a}{b}, rm\Big) = \overline{(b, a(rm))} = \overline{(b, (ar)m)} = h\Big(\frac{ar}{b}, m\Big).$$

Επομένως, η h είναι μία R-ισόρροπη απεικόνιση και άρα από την καθολική ιδιότητα του τανυστικού γινομένου υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός

$$f\colon Q \otimes_R N \longrightarrow U^{-1}N \ \text{ τέτοιος ώστε } f\Big(\Big(\frac{a}{b}\Big) \otimes n\Big) = h\Big(\frac{a}{b}, n\Big) = \overline{(b, an)}$$

για κάθε γεννήτορα $\left(\frac{a}{b} \otimes n\right) \in Q \otimes_R N$. Επιπλέον, η απεικόνιση

$$g\colon U^{-1}N \longrightarrow Q \otimes_R N, \quad \overline{(u,n)} \longmapsto g(\overline{(u,n)}) := \Big(\frac{1}{u}\Big) \otimes n$$

είναι καλά ορισμένη. Πράγματι, έστω $\overline{(u_1, n_1)} = \overline{(u_2, n_2)}$. Τότε υπάρχει ένα $x \in U$ τέτοιο ώστε $xu_1n_2 = xu_2n_1$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \Big(\frac{1}{u_1}\Big) \otimes n_1 &= \Big(\Big(\frac{1}{u_1}\Big)\Big(\frac{1}{(xu_2)}\Big)\Big) \otimes (xu_2n_1) \\ &= \Big(\Big(\frac{1}{u_1}\Big)\Big(\frac{1}{(xu_2)}\Big)\Big) \otimes (xu_1n_2) \\ &= \Big(\frac{1}{u_2}\Big) \otimes n_2 \end{aligned}$$

έτσι η g είναι καλά ορισμένη.

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι οι f και g είναι αντίστροφες:

$$f(g(\overline{(u,n)})) = f\Big(\Big(\frac{1}{u}\Big) \otimes n\Big) = \overline{(u, 1 \cdot n)} = \overline{(u,n)}$$

και
$$g\Big(f\Big(\Big(\frac{a}{b}\Big)\otimes n\Big)\Big) = g(\overline{(b,an)} = \Big(\frac{1}{b}\Big)\otimes an = \Big(\frac{a}{b}\Big)\otimes n.$$
Επομένως, $U^{-1}N$ είναι ισόμορφο με το $Q\otimes_R N$ σαν αριστερό R-πρότυπο.

2. Επειδή $U^{-1}N$ είναι ισόμορφο με το $Q\otimes_R N$, έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{d}\otimes n = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad f\Big(\Big(\frac{1}{d}\Big)\otimes n\Big) = \overline{(d,n)} = 0 = \overline{(1,0)}\\ &\Leftrightarrow \quad \text{υπάρχει } r\in R-\{0\} \text{ τέτοιο ώστε } rn=0.\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 3.1.8. Θεωρούμε το $M=\mathbb{Q}$ ως αριστερό πρότυπο πάνω από το δακτύλιο $R=\mathbb{Z}$. Θα αποδείξουμε ότι το M είναι επίπεδο αριστερό $\mathbb{Z}$-πρότυπο αλλά όχι προβολικό.

Έστω $f\colon N'\longrightarrow N$ ένας μονομορφισμός δεξιών $\mathbb{Z}$-προτύπων και

$$f\otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{Q}}\colon N'\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\longrightarrow N\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$$

η απεικόνιση που επάγεται αν εφαρμόσουμε τον συναρτητή $-\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$. Έστω $\sum_{i=1}^{n} n_i'\otimes\frac{p_i}{q_i}\in N'\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned}0 &= (f\otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{Q}})\Big(\sum_{i=1}^{k} n_i'\otimes\frac{p_i}{q_i}\Big) = \sum_{i=1}^{k}\Big(f(n_i')\otimes\frac{p_i}{q_i}\Big)\\ &= f(n_1')\otimes\frac{p_1q_2\dots q_k}{q_1q_2\dots q_k} + f(n_2')\otimes\frac{p_2q_1q_3\dots q_k}{q_1q_2\dots q_k}+\dots+f(n_k')\otimes\frac{p_kq_1\dots q_{k-1}}{q_1q_2\dots q_k}\\ &= \big(f(n_1')p_1q_2\dots q_k + f(n_2')p_2q_1q_3\dots q_k + f(n_k')p_kq_1\dots q_{k-1}\big)\otimes\frac{1}{q_1q_2\dots q_k}\\ &= \Big(\sum_{i=1}^{k} f(n_i')p_iq_1\dots\hat{q}_i\dots q_k\Big)\otimes\frac{1}{q_1q_2\dots q_k}\end{aligned}$$

Έχουμε ότι $\sum_{i=1}^{k} f(n_i')p_iq_1\cdots\hat{q}_i\dots q_k\in N$ επειδή $p_iq_1\dots\hat{q}_i\dots q_k\in\mathbb{Z}$ και N είναι ένα δεξιό $\mathbb{Z}$-πρότυπο. Έτσι αν εφαρμόσουμε το παραπάνω λήμμα για την ακέραια περιοχή $R=\mathbb{Z}$ που έχει ως σώμα πηλίκο το $Q=\mathbb{Q}$ έχουμε ότι

$$0=\sum_{i=1}^{k} f(n_i')p_iq_1\dots\hat{q}_i\dots q_k = f\Big(\sum_{i=1}^{k} n_i'p_iq_1\dots\hat{q}_i\dots q_k\Big)$$

Επειδή όμως ο f είναι μονομορφισμός, έχουμε ότι $\sum_{i=1}^{k} n_i'p_iq_1\dots\hat{q}_i\dots q_k=0$. Επομένως,

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{i=1}^{k} n_i'p_iq_1\dots\hat{q}_i\dots q_k\otimes\frac{1}{q_1q_2\dots q_k}\\ &= \sum_{i=1}^{k} n_i'\otimes\frac{p_i}{q_i}\end{aligned}$$

Άρα, ο ομομορφισμός $f\otimes\mathrm{Id}_{\mathbb{Q}}$ είναι μονομορφισμός και έτσι το $M=\mathbb{Q}$ είναι ένα επίπεδο αριστερό $\mathbb{Z}$-πρότυπο.

Έστω F ένα ελεύθερο αριστερό $\mathbb{Z}$-πρότυπο με αριθμήσιμη βάση $X=\{x_1,x_2,\dots\}$. Ορίζουμε $g\colon X\longrightarrow\mathbb{Q},\quad x_i\longmapsto i^{-1}$. Από την καθολική ιδιότητα των ελεύθερων προτύπων έχουμε ότι υπάρχει $\mathbb{Z}$-ομομορφισμός $\bar{g}\colon F \longrightarrow \mathbb{Q}$ που κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"'] & F \arrow[dl, dashed, "\exists\, \bar{g}"] \\ \mathbb{Q} & \end{tikzcd}$$

Η επαγόμενη απεικόνιση $\bar{g}\colon F \longrightarrow \mathbb{Q}$ είναι ένας $\mathbb{Z}$-επιμορφισμός επειδή

$$ab^{-1} = g(ax_b)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το $\mathbb{Q}$ δεν είναι προβολικό αριστερό $\mathbb{Z}$-πρότυπο. Τότε το διάγραμμα είναι μεταθετικό για κάποιο $\mathbb{Z}$-ομομορφισμό $h\colon \mathbb{Q} \longrightarrow F$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Q} \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "\mathrm{Id}_{\mathbb{Q}}"] \\ F \arrow[r, "\bar{g}"'] & \mathbb{Q} \end{tikzcd}$$

Ας υποθέσουμε ότι $h(1) = \sum_i a_i x_i$, όπου $a_i = 0$ σχεδόν παντού. Έστω

$$n = 1 + \mathsf{max}_i |a_i|$$

και ας υποθέσουμε ότι $h(n^{-1}) = \sum_i b_i x_i$. Τότε

$$\begin{aligned} \sum_i n b_i x_i &= n \sum_i b_i x_i = nh(n^{-1}) \\ &= h(nn^{-1}) = h(1) \\ &= \sum_i a_i x_i \end{aligned}$$

Έτσι $\sum_i (a_i - nb_i)x_i = 0$. Επειδή το X είναι γραμμικά ανεξάρτητο, έχουμε ότι $a_i = nb_i$, οπότε το n διαιρεί κάθε a_i. Αλλά αυτό είναι αδύνατο επειδή $|n| > |a_i|, \forall i$. Επομένως, το επίπεδο $\mathbb{Z}$-πρότυπο $\mathbb{Q}$ δεν μπορεί να είναι προβολικό.

Τώρα θα δούμε πως μπορούμε να συνδέσουμε τα επίπεδα με τα ενέσιμα πρότυπα. Για να κάνουμε αυτή τη σύνδεση χρειαζόμαστε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 3.1.9. *Εάν M είναι ένα αριστερό R-πρότυπο, ορίζουμε ως* **πρότυπο χαρακτήρων** *του M, το δεξιό R-πρότυπο*

$$M^+ = \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

Παρατήρηση 3.1.10. Το $M^+ = \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ είναι ένα δεξιό R-πρότυπο ορίζοντας δεξιά δράση

$$\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \times R \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \quad (f, r) \longmapsto fr$$

όπου $fr\colon M \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \;\; m \longmapsto (fr)(m) := f(rm)$

Παρόμοια, εάν M είναι ένα δεξιό R-πρότυπο, τότε το M^+ είναι ένα αριστερό R-πρότυπο ορίζοντας αριστερή δράση

$$R \times \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \quad (r, f) \longmapsto rf$$

όπου $rf\colon M \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \;\; m \longmapsto (rf)(m) := f(mr)$

Ορισμός 3.1.11. *Ένα ενέσιμο αριστερό R-πρότυπο E καλείται* **ενέσιμος συνγεννήτορας (injective cogenerator)** *για τα αριστερά R-πρότυπα εάν για κάθε αριστερό R-πρότυπο M και μη-μηδενικό στοιχείο $x \in M$, υπάρχει ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων $f \in \mathsf{Hom}_R(M, E)$ τέτοιος ώστε $f(x) \neq 0$.*

Με άλλα λόγια το αριστερό R-πρότυπο E είναι ενέσιμος συνγεννήτορας στην κατηγορία των αριστερών R-προτύπων αν και μόνον αν ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής

$$\mathsf{Hom}_R(-, E)\colon R\text{-}\mathsf{Mod} \longrightarrow \mathsf{Ab}$$

είναι πιστός (faithful) και ακριβής.

Λήμμα 3.1.12. *Η αβελιανή ομάδα $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ είναι ένας ενέσιμος συνγεννήτορας στην κατηγορία των αβελιανών ομάδων.*

Απόδειξη. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η ομάδα $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ είναι ένα ενέσιμο αριστερό $\mathbb{Z}$-πρότυπο. Είδαμε στο Παράδειγμα (2.2.14) ότι το $\mathbb{Q}$ ως αριστερό $\mathbb{Z}$-πρότυπο είναι διαιρετό. Επομένως και το $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ είναι διαιρετό ως ομομορφική εικόνα διαιρετού. Έτσι από την Πρόταση (2.2.13) έχουμε ότι το $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ είναι ένα ενέσιμο αριστερό $\mathbb{Z}$-πρότυπο, διότι το $\mathbb{Z}$ είναι περιοχή κύριων ιδεωδών.

Έστω G μια αβελιανή ομάδα. Θα αποδείξουμε ότι για κάθε μη-μηδενικό στοιχείο $0 \neq g \in G$, υπάρχει ένας ομομορφισμός αβελιανών ομάδων $f \in \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ τέτοιος ώστε $f(g) \neq 0$. Έστω $\langle g \rangle \subseteq G$, το $\mathbb{Z}$-υποπρότυπο της G που παράγεται από το g, και θέτουμε

$$\mathsf{Ann}_{\mathbb{Z}}(g) = \{n \in \mathbb{Z} \mid ng = 0\}$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι το $\mathsf{Ann}_{\mathbb{Z}}(g)$ είναι ένα ιδεώδες του $\mathbb{Z}$. Στην πραγματικότητα, το $\mathsf{Ann}_{\mathbb{Z}}(g)$ είναι ο πυρήνας του επιμορφισμού $\tau\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \langle g \rangle, \ \ n \longmapsto ng$. Έστω

$$\bar{\tau}\colon \mathbb{Z}/\mathsf{Ann}_{\mathbb{Z}}(g) \longrightarrow \langle g \rangle, \ \ n + \mathsf{Ann}_{\mathbb{Z}}(g) \longmapsto \bar{\tau}(n + \mathsf{Ann}_{\mathbb{Z}}(g)) := ng$$

ο επαγόμενος ισομορφισμός.

Επειδή $0 \neq g$, έχουμε ότι $\mathsf{Ann}_{\mathbb{Z}}(g) \subsetneq \mathbb{Z}$. Ειδικότερα, υπάρχει ένας πρώτος αριθμός $p \in \mathbb{Z}$ τέτοιος ώστε $\mathsf{Ann}_{\mathbb{Z}}(g) \subseteq p\mathbb{Z}$. Έστω η απεικόνιση

$$a\colon \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \ \ n + p\mathbb{Z} \longmapsto a(n + p\mathbb{Z}) := \frac{n}{p} + \mathbb{Z}.$$

Ορίζουμε $\phi\colon \langle g \rangle \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ την σύνθεση των παρακάτω απεικονίσεων

$$\langle g \rangle \xrightarrow{\bar{\tau}^{-1}} \mathbb{Z}/\mathsf{Ann}_{\mathbb{Z}}(g) \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xrightarrow{a} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

όπου $\pi(n + \mathsf{Ann}_{\mathbb{Z}}(g)) = n + \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Από τον ορισμό της ϕ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \phi(g) &= a \circ \pi \circ \bar{\tau}^{-1}(g) \\ &= a \circ \pi(1 + \mathsf{Ann}_{\mathbb{Z}}(g)) \\ &= a(1 + \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \\ &= \frac{1}{p} + \mathbb{Z} \neq 0. \end{aligned}$$

Επειδή το $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ είναι ένα ενέσιμο $\mathbb{Z}$-πρότυπο, υπάρχει ένας ομομορφισμός αβελιανών ομάδων

$$f\colon G \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \langle g \rangle \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\phi"'] & G \arrow[dl, dashed, "\exists\, f"] \\ & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

όπου i είναι η κανονική έγκλειση. Επομένως $f(g) = \phi(g) \neq 0$. □

Έχουμε δει ότι ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής $\mathsf{Hom}_R(-, X)\colon R\text{-}\mathsf{Mod} \to \mathsf{Ab}$ είναι αριστερά ακριβής, για οποιοδήποτε αριστερό R-πρότυπο X. Δηλαδή, η ακρίβεια της ακολουθίας αριστερών R-προτύπων

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

συνεπάγεται την ακρίβεια της ακολουθίας αβελιανών ομάδων

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(M'', X) \xrightarrow{g^*} \mathsf{Hom}_R(M, X) \xrightarrow{f^*} \mathsf{Hom}_R(M', X).$$

Αποδεικνύεται ότι αν το αριστερό R-πρότυπο X είναι ένας ενέσιμος συνγεννήτορας τότε έχουμε και την αντίστροφη συνεπαγωγή. Δηλαδή, η ακρίβεια της ακολουθίας αβελιανών ομάδων

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(M'', X) \xrightarrow{g^*} \mathsf{Hom}_R(M, X) \xrightarrow{f^*} \mathsf{Hom}_R(M', X) \longrightarrow 0$$

είναι ισοδύναμη με την ακρίβεια της ακολουθίας αριστερών R-προτύπων

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0.$$

Για την απόδειξη βλέπε [14, Lemma 3.2.8]. Στο Λήμμα (3.1.12) αποδείξαμε ότι η αβελιανή ομάδα $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ είναι ένας ενέσιμος συνγεννήτορας στην κατηγορία των αβελιανών ομάδων. Επομένως άμεσα θα έχουμε το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 3.1.13. *Μια ακολουθία αριστερών R-προτύπων*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής αν και μόνο αν η ακολουθία

$$0 \longrightarrow M''^{+} \xrightarrow{g^*} M^{+} \xrightarrow{f^*} M'^{+} \longrightarrow 0$$

από τα πρότυπα χαρακτήρων τους, είναι ακριβής.

Υπάρχει μία σχέση «συζυγίας» ανάμεσα στο Hom και στο $\otimes$, η οποία δίνεται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.1.14. *Δοθέντων προτύπων A_R, ${}_RB_S$, C_S, όπου R και S είναι δακτύλιοι, υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός :*

$$\tau_{A,B,C}\colon \mathsf{Hom}_S\Big(A \otimes_R B, C\Big) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(A, \mathsf{Hom}_S(B, C))$$

$$f \longmapsto \tau_{A,B,C}(f)$$

για κάθε $f\colon A \otimes_R B \longrightarrow C$ και

$$\tau_{A,B,C}(f)\colon A \longrightarrow \mathsf{Hom}_S(B, C), \ \ a \longmapsto \tau_{A,B,C}(f)(a) := \tau_{A,B,C}(f)_a$$

όπου $\tau_{A,B,C}(f)_a\colon B \longrightarrow C, \ \ b \longmapsto \tau_{A,B,C}(f)_a(b) := f(a \otimes b)$, για $a \in A$, $b \in B$.

Απόδειξη. Έστω $\tau = \tau_{A,B,C}$. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η απεικόνιση τ είναι ένας ομομορφισμός αβελιανών ομάδων. Έτσι, έστω $f, g\colon A \otimes_R B \longrightarrow C$. Για κάθε $a \in A$ έχουμε ότι

$$\tau(f+g)_a(b) =: (f+g)(a\otimes b) = f(a\otimes b) + g(a\otimes b) = \tau(f)_a(b) + \tau(g)_a(b)$$

Άρα, $\tau(f+g) = \tau(f) + \tau(g)$

Εάν $\tau(f)_a = 0$ για κάθε $a \in A$, τότε $0 = \tau(f)_a(b) = f(a\otimes b)$ για κάθε $a \in A$ και $b \in B$. Επομένως, $f = 0$ επειδή μηδενίζεται σε κάθε γεννήτορα του $A \otimes_R B$. Άρα, η τ είναι μονομορφισμός.

Τώρα θα αποδείξουμε ότι η τ είναι επιμορφισμός. Εάν $F\colon A \longrightarrow \mathsf{Hom}_S(B, C)$ είναι ένας ομομορφισμός δεξιών R-προτύπων, ορίζουμε

$$\phi\colon A \times B \longrightarrow C, \quad (a, b) \longmapsto \phi(a, b) := F_a(b)$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η ϕ είναι R-ισόρροπη. Τώρα, θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\phi"'] & A \otimes_R B \arrow[dl, dashed, "\bar{\phi}"] \\ C & \end{tikzcd}$$

Άρα υπάρχει ένας ομομορφισμός αβελιανών ομάδων $\bar{\phi}\colon A \otimes_R B \longrightarrow C$ τέτοιος ώστε $\bar{\phi}(a \otimes b) = \phi(a, b) = F_a(b)$ για κάθε $a \in A$ και $b \in B$. Επομένως, $F = \tau(\bar{\phi})$ και έτσι η τ είναι επιμορφισμός. $\square$

Ας περάσουμε τώρα στην ακόλουθη αξιοσημείωτη σύνδεση ανάμεσα στα επίπεδα και ενέσιμα πρότυπα.

Πρόταση 3.1.15. (Bourbaki-Lambek) (1961, 1964) *Ένα αριστερό R-πρότυπο M είναι επίπεδο αν και μόνο αν το M^+ είναι ένα ενέσιμο δεξιό R-πρότυπο.*

Απόδειξη. Έστω M ένα επίπεδο αριστερό R-πρότυπο. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι το M^+ είναι ένα ενέσιμο δεξιό R-πρότυπο. Από την Πρόταση (2.2.8) αρκεί να αποδείξουμε ότι ο συναρτητής $\mathsf{Hom}_R(-, M^+)$ είναι δεξιά ακριβής. Έτσι έστω $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$ μία ακριβής ακολουθία δεξιών R-προτύπων. Θα αποδείξουμε ότι η επαγόμενη ακολουθία

$$\mathsf{Hom}_R(B, M^+) \xrightarrow{f^*} \mathsf{Hom}_R(A, M^+) \longrightarrow 0$$

είναι μία ακριβής ακολουθία αβελιανών ομάδων, δηλαδή θα αποδείξουμε ότι η f^* είναι επιμορφισμός. Επειδή το M είναι ένα επίπεδο αριστερό R-πρότυπο εφαρμόζοντας τον συναρτητή $-\otimes_R M$ στην ακριβή ακολουθία $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$ έχουμε ότι η επαγόμενη ακολουθία

$$0 \longrightarrow A \otimes_R M \xrightarrow{f\otimes \mathrm{Id}_M} B \otimes_R M \tag{3.1}$$

είναι μία ακριβής ακολουθία αβελιανών ομάδων. Επιπλέον, επειδή το $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ είναι ένα ενέσιμο αριστερό $\mathbb{Z}$-πρότυπο, εφαρμόζοντας τον συναρτητή $\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ στην (3.1) θα πάρουμε την ακόλουθη ακριβή ακολουθία

$$\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(B \otimes_R M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right) \xrightarrow{(f\otimes \mathrm{Id}_M)^*} \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(A \otimes_R M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right) \longrightarrow 0$$

Οπότε έχουμε το εξής μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(B \otimes_R M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right) \arrow[r, "\tau_{B,M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}"] \arrow[d, "(f\otimes \mathrm{Id}_M)^*"'] & \mathsf{Hom}_R(B, \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \arrow[d, "f^*"] \\ \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(A \otimes_R M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right) \arrow[r, "\tau_{A,M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}"'] & \mathsf{Hom}_R(A, \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \end{tikzcd}$$

όπου $\tau_{B,M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$, $\tau_{A,M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$ είναι οι ισομορφισμοί του προηγούμενου Θεωρήματος. Επομένως, $\tau_{A,M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}} \circ (f \otimes \mathrm{Id}_M)^* = f^* \circ \tau_{B,M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$. Έτσι η f^* είναι επιμορφισμός και το M^+ είναι ένα ενέσιμο δεξιό R-πρότυπο.

Αντίστροφα, έστω ότι το M^+ είναι ένα ενέσιμο δεξιό R-πρότυπο και έστω $f\colon A \longrightarrow B$ ένας μονομορφισμός δεξιών R-προτύπων. Για να αποδείξουμε ότι το M είναι ένα επίπεδο αριστερό R-πρότυπο θα αποδείξουμε ότι η απεικόνιση $f \otimes \mathrm{Id}_M\colon A \otimes_R M \longrightarrow B \otimes_R M$ είναι επίσης μονομορφισμός. Έχουμε ότι το M^+ είναι ένα ενέσιμο δεξιό R-πρότυπο οπότε έχουμε ότι η ακολουθία

$$\mathsf{Hom}_R(B, M^+) \xrightarrow{f^*} \mathsf{Hom}_R(A, M^+) \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής. Έτσι έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Hom}_R(B, M^+) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\tau^{-1}_{B,M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}"'] & \mathsf{Hom}_R(A, M^+) \arrow[d, "\tau^{-1}_{A,M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}"] \\ \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(B \otimes_R M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right) \arrow[r, "(f\otimes \mathrm{Id}_M)^*"] & \mathsf{Hom}_R\left(A \otimes_R M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right) \end{tikzcd}$$

Επομένως, $(f \otimes \mathrm{Id}_M)^* \circ \tau^{-1}_{B,M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}} = \tau^{-1}_{A,M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}} \circ f^*$. Έτσι η απεικόνιση $(f \otimes \mathrm{Id}_M)^*$ είναι επιμορφισμός. Οπότε από το Λήμμα (3.1.13) έχουμε ότι η απεικόνιση

$$f \otimes \mathrm{Id}_M\colon A \otimes_R M \longrightarrow B \otimes_R M$$

είναι μονομορφισμός. Άρα το M είναι ένα επίπεδο αριστερό R-πρότυπο. □

Είδαμε στο Κριτήριο του Baer (βλέπε Θεώρημα (2.2.11)) ότι τα αριστερά ιδεώδη του R χρησιμεύουν για να διαπιστώνουμε πότε ένα αριστερό R-πρότυπο είναι ενέσιμο. Χρησιμοποιώντας το Κριτήριο του Baer και την προηγούμενη πρόταση που συνδέει τα ενέσιμα με τα επίπεδα πρότυπα θα αποδείξουμε ότι τα δεξιά ιδεώδη του R χρησιμεύουν επίσης για να διαπιστώνουμε πότε ένα αριστερό R-πρότυπο είναι επίπεδο.

Πρόταση 3.1.16. *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για ένα αριστερό R-πρότυπο M.*

1. *Το M είναι επίπεδο.*

2. *Η ακολουθία*

$$0 \longrightarrow I \otimes_R M \xrightarrow{i\otimes \mathrm{Id}_M} R \otimes_R M$$

είναι ακριβής για κάθε δεξιό ιδεώδες I, όπου $i\colon I \longrightarrow R$ είναι η έγκλειση.

3. *Η ακολουθία*

$$0 \longrightarrow J \otimes_R M \xrightarrow{j\otimes \mathrm{Id}_M} R \otimes_R M$$

είναι ακριβής για κάθε πεπερασμένα παραγόμενο δεξιό ιδεώδες J, όπου $j\colon J \longrightarrow R$ είναι η έγκλειση.

Απόδειξη. $(1 \Rightarrow 2)$ Εάν $0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} R$ είναι η κανονική έγκλειση και το M είναι επίπεδο αριστερό R-πρότυπο, τότε η ακολουθία

$$0 \longrightarrow I \otimes_R M \xrightarrow{i\otimes \mathrm{Id}_M} R \otimes_R M$$

είναι ακριβής για κάθε δεξιό ιδεώδες I.

$(2 \Rightarrow 3)$ Ισχύει τετριμμένα διότι το (2) είναι ισχυρότερο του (3).

$(3 \Rightarrow 2)$ Ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία $0 \longrightarrow J \otimes_R M \longrightarrow R \otimes_R M$ είναι ακριβής για κάθε πεπερασμένα παραγόμενο δεξιό ιδεώδες J. Έστω I ένα τυχαίο δεξιό ιδεώδες του R

και $\sum_{i=1}^{n}(a_i \otimes x_i) \in I \otimes_R M$. Επομένως, τα $a_i \in I$, για κάθε $i = 1, \dots, n$. Αν θέσουμε $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = A \subseteq I \subseteq R$ τότε το υποσύνολο

$$AR = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i r_i \mid r_i \in R,\ a_i \in A \Big\}$$

είναι ακριβώς το δεξιό ιδεώδες του R που παράγεται από το A. Το A είναι πεπερασμένο, επομένως το AR είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο δεξιό ιδεώδες του R. Θέτουμε $J = AR$ και προφανώς έχουμε ότι $J \subseteq I$. Έτσι, έχουμε τις κανονικές εγκλείσεις

$$i_J \colon J \longrightarrow I, \quad i_I \colon I \longrightarrow R,$$

στις οποίες αν εφαρμόσουμε τον συναρτητή $- \otimes M$ θα μας δώσουν τον ομομορφισμό

$$J \otimes_R M \xrightarrow{i_J \otimes \mathrm{Id}_M} I \otimes_R M \xrightarrow{i_I \otimes \mathrm{Id}_M} R \otimes_R M \ .$$

Από υπόθεση, η παραπάνω σύνθεση

$$(i_I \otimes \mathrm{Id}_M) \circ (i_J \otimes \mathrm{Id}_M) = (i_I \circ i_J) \otimes \mathrm{Id}_M \colon J \otimes_R M \longrightarrow R \otimes_R M$$

είναι μονομορφισμός αβελιανών ομάδων. Θα αποδείξουμε ότι και η απεικόνιση $i_I \otimes \mathrm{Id}_M$ είναι επίσης μονομορφισμός. Έστω $\sum_{i=1}^{n}(a_i \otimes x_i) \in \mathsf{Ker}(i_I \otimes \mathrm{Id}_M)$. Τότε

$$\begin{aligned}
(i_I \otimes \mathrm{Id}_M)\Big(\sum_{i=1}^{n}(a_i \otimes x_i)\Big) = 0_{R \otimes_R M} \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}(a_i \otimes x_i) = 0_{R \otimes_R M} \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}((i_I \circ i_J)(a_i) \otimes x_i) = 0_{R \otimes_R M} \\
&\Leftrightarrow \quad ((i_I \circ i_J) \otimes \mathrm{Id}_M)\Big(\sum_{i=1}^{n}(a_i \otimes x_i)\Big) = 0_{R \otimes_R M}
\end{aligned}$$

Επομένως, $\sum_{i=1}^{n}(a_i \otimes x_i) \in \mathsf{Ker}((i_I \circ i_J) \otimes \mathrm{Id}_M)$ και επειδή $(i_I \circ i_J) \otimes \mathrm{Id}_M$ είναι μονομορφισμός έχουμε ότι $\sum_{i=1}^{n}(a_i \otimes x_i) = 0_{J \otimes_R M}$.

Άρα $(i_J \otimes \mathrm{Id}_M)\big(\sum_{i=1}^{n}(a_i \otimes x_i)\big) = (i_J \otimes \mathrm{Id}_M)(0_{J \otimes_R M})$ και έτσι έχουμε ότι $\sum_{i=1}^{n}(a_i \otimes x_i) = 0_{I \otimes_R M}$.

Επομένως, η απεικόνιση $i_I \otimes \mathrm{Id}_M$ είναι επίσης μονομορφισμός.

$(2 \Rightarrow 1)$ Εάν I είναι ένα τυχαίο δεξιό ιδεώδες του R, τότε έχουμε την ακριβή ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$0 \longrightarrow I \otimes_R M \xrightarrow{i \otimes \mathrm{Id}_M} R \otimes_R M \tag{3.2}$$

Επειδή το $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ είναι ένα ενέσιμο αριστερό $\mathbb{Z}$-πρότυπο εάν εφαρμόσουμε τον αντισυναλλοίωτο συναρτητή $\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ στην (3.2) θα πάρουμε την εξής ακριβή ακολουθία

$$\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(R \otimes_R M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\big) \xrightarrow{(i \otimes \mathrm{Id}_M)^*} \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(I \otimes_R M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\big) \longrightarrow 0.$$

Οπότε έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(R \otimes_R M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\big) \arrow[r, "(i \otimes \mathrm{Id}_M)^*"] \arrow[d, "\tau_{R,M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}"'] & \mathsf{Hom}_R\big(I \otimes_R M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\big) \arrow[d, "\tau_{I,M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}"] \\
\mathsf{Hom}_R(R, M^+) \arrow[r, "\psi"] & \mathsf{Hom}_R(I, M^+)
\end{tikzcd}$$

όπου $\tau_{R,M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$, $\tau_{I,M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$ είναι οι ισομορφισμοί του Θεωρήματος $(3.1.14)$. Από την μεταθετικότητα του διαγράμματος έχουμε ότι η απεικόνιση

$$\psi\colon \mathsf{Hom}_R(R, M^+) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(I, M^+)$$

είναι επί. Επομένως, εάν $f\colon I \longrightarrow M^+$ είναι μία απεικόνιση, τότε υπάρχει μία απεικόνιση $g\colon R \longrightarrow M^+$ που επεκτείνει την f στο R. Έτσι, από το κριτήριο του Baer έχουμε ότι το M^+ είναι ένα ενέσιμο δεξιό R-πρότυπο και άρα από την Πρόταση $(3.1.15)$ το M είναι ένα επίπεδο αριστερό R-πρότυπο. □

Εάν M είναι ένα αριστερό R-πρότυπο και I είναι ένα δεξιό ιδεώδες του R, τότε το σύνολο

$$IM = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \mid x_i \in M, a_i \in I \Big\}$$

είναι μία υποομάδα του M.

Πόρισμα 3.1.17. *Έστω I ένα δεξιό ιδεώδες του R και M ένα αριστερό R-πρότυπο. Τότε $(R/I) \otimes_R M \cong M/IM$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την εξής ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{j} R \xrightarrow{\varpi} R/I \longrightarrow 0.$$

Επειδή ο συναρτητής $-\otimes_R M$ είναι δεξιά ακριβής, αν τον εφαρμόσουμε στην παραπάνω ακριβή ακολουθία, θα πάρουμε την εξής ακριβή ακολουθία:

$$I \otimes_R M \xrightarrow{j\otimes \mathrm{Id}_M} R \otimes_R M \xrightarrow{\varpi\otimes \mathrm{Id}_M} R/I \otimes_R M \longrightarrow 0.$$

Τώρα, ισχύει ότι $\mathsf{Im}(j\otimes \mathrm{Id}_M) = IM$ και $R\otimes_R M \cong M$. Οπότε προκύπτει η ακριβής ακολουθία:

$$0 \longrightarrow IM \longrightarrow M \longrightarrow R/I \otimes_R M \longrightarrow 0.$$

Επομένως, ισχύει ότι $(R/I) \otimes_R M \cong M/IM$. □

Η πρόταση που ακολουθεί μας δίνει μία επιπλέον σύνδεση ανάμεσα στα αριστερά R-πρότυπα και στα δεξιά ιδεώδη του R.

Πρόταση 3.1.18. *Εάν M είναι ένα αριστερό R-πρότυπο και I ένα (πεπερασμένα παραγόμενο) δεξιό ιδεώδες του R, τότε ο επιμορφισμός αβελιανών ομάδων*

$$\phi_M\colon I \otimes_R M \longrightarrow IM, \ \ \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i \longmapsto \phi_M\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i\Big) := \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν το M είναι επίπεδο.

Απόδειξη. Εάν I είναι ένα (πεπερασμένα παραγόμενο) δεξιό ιδεώδες του R, έστω $i\colon I \longrightarrow R$ η κανονική έγκλειση. Εάν το M είναι ένα επίπεδο αριστερό R-πρότυπο τότε από την Πρόταση $(3.1.16)$ έχουμε ότι η ακολουθία

$$0 \longrightarrow I \otimes_R M \xrightarrow{i\otimes \mathrm{Id}_M} R \otimes_R M$$

είναι ακριβής. Για να αποδείξουμε ότι ο επιμορφισμός ϕ_M είναι ισομορφισμός αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι μονομορφισμός. Θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \otimes_R M \arrow[r, "i\otimes \mathrm{Id}_M"] \arrow[d, "\phi_M"'] & R \otimes_R M \arrow[d, "\phi_R"] \\ 0 \arrow[r] & IM \arrow[r, "j"'] & RM = M \end{tikzcd}$$

όπου j είναι η έγκλειση και ϕ_R είναι ο ισομορφισμός της Πρότασης (1.2.31). Οπότε έχουμε ότι $i \otimes \mathrm{Id}_M = (\phi_R)^{-1} \circ j \circ \phi_M$. Αν $\sum_{i=1}^n a_i \otimes x_i \in \mathsf{Ker}\, \phi_M$ τότε $\phi_M(\sum_{i=1}^n a_i \otimes x_i) = 0_{IM}$. Επομένως,

$$\begin{aligned} (i \otimes \mathrm{Id}_M)\Big(\sum_{i=1}^n a_i \otimes x_i\Big) &= ((\phi_R)^{-1} \circ j \circ \phi_M)\Big(\sum_{i=1}^n a_i \otimes x_i\Big) \\ &= ((\phi_R)^{-1} \circ j)\Big(\phi_M\Big(\sum_{i=1}^n a_i \otimes x_i\Big)\Big) \\ &= ((\phi_R)^{-1} \circ j)(0_{IM}) \\ &= (\phi_R)^{-1}(j(0_{IM})) \\ &= (\phi_R)^{-1}(0_M) \\ &= 0_{R\otimes_R M} \end{aligned}$$

Άρα $\sum_{i=1}^n a_i \otimes x_i \in \mathsf{Ker}(i \otimes \mathrm{Id}_M)$. Επειδή όμως η απεικόνιση $i \otimes \mathrm{Id}_M$ είναι μονομορφισμός έχουμε ότι $\sum_{i=1}^n a_i \otimes x_i = 0_{I\otimes_R M}$. Έτσι η ϕ_M είναι μονομορφισμός.

Αντίστροφα, θεωρούμε ότι ϕ_M είναι ισομορφισμός. Από το παραπάνω διάγραμμα έχουμε ότι $i \otimes \mathrm{Id}_M = (\phi_R)^{-1} \circ j \circ \phi_M$. Άρα, η απεικόνιση $i \otimes \mathrm{Id}_M$ είναι μονομορφισμός επειδή η j είναι μονομορφισμός και $(\phi_R)^{-1}$ ισομορφισμός. Έτσι, από την Πρόταση (3.1.16) έχουμε ότι το M είναι επίπεδο αριστερό R-πρότυπο. □

Η ακόλουθη Πρόταση μας δίνει ένα χρήσιμο κριτήριο για το πότε το πηλίκο ενός επίπεδου προτύπου είναι επίπεδο πρότυπο.

Πρόταση 3.1.19. *Έστω $0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} F \xrightarrow{\phi} M \longrightarrow 0$ μία ακριβής ακολουθία αριστερών R-προτύπων, όπου F είναι επίπεδο. Τότε το M είναι επίπεδο αν και μόνο αν $K \cap IF = IK$ για κάθε (πεπερασμένα παραγόμενο) δεξιό ιδεώδες I του R.*

Απόδειξη. Έστω μία ακριβής ακολουθία αριστερών R-προτύπων

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} F \xrightarrow{\phi} M \longrightarrow 0,$$

όπου F είναι επίπεδο και I ένα (πεπερασμένα παραγόμενο) δεξιό ιδεώδες του R. Επειδή ο συναρτητής $I \otimes_R -$ είναι δεξιά ακριβής έχουμε την ακριβή ακολουθία

$$I \otimes_R K \xrightarrow{\mathrm{Id}_I\otimes i} I \otimes_R F \xrightarrow{\mathrm{Id}_I\otimes \phi} I \otimes_R M \longrightarrow 0.$$

Από την Πρόταση (3.1.18) υπάρχει ο ισομορφισμός

$$\phi_F \colon I \otimes_R F \longrightarrow IF, \ \ \sum_{i=1}^n a_i \otimes f_i \longmapsto \phi_F\Big(\sum_{i=1}^n a_i \otimes f_i\Big) := \sum_{i=1}^n a_i f_i$$

επειδή το F είναι επίπεδο. Επιπλέον έχουμε τον επιμορφισμό $\phi_K\colon I\otimes_R K \longrightarrow IK$ και έτσι έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
I\otimes_R K \arrow[r, "\mathrm{Id}_I\otimes i"] \arrow[d, "\phi_K"] & I\otimes_R F \arrow[r, "\mathrm{Id}_I\otimes\phi"] \arrow[d, "\phi_F"] & I\otimes_R M \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\gamma"] & 0 \\
IK \arrow[r, "j"] & IF \arrow[r, "\varpi"] & IF/IK \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

όπου j είναι η έγκλειση και ϖ η κανονική προβολή. Εάν $\sum_{i=1}^n a_i\otimes m_i \in I\otimes_R M$, τότε επειδή η απεικόνιση $\mathrm{Id}_I\otimes\phi$ είναι επιμορφισμός, υπάρχει $\sum_{i=1}^n a_i\otimes f_i\in I\otimes_R F$ τέτοιο ώστε $(\mathrm{Id}_I\otimes\phi)\Big(\sum_{i=1}^n a_i\otimes f_i\Big)=\sum_{i=1}^n a_i\otimes m_i$, δηλαδή $\sum_{i=1}^n a_i\otimes\phi(f_i)=\sum_{i=1}^n a_i\otimes m_i$. Ορίζουμε, $\gamma\Big(\sum_{i=1}^n a_i\otimes m_i\Big)=\varpi\circ\phi_F\Big(\sum_{i=1}^n a_i\otimes f_i\Big)$. Επομένως, υπάρχει απεικόνιση

$$\gamma\colon I\otimes_R M\longrightarrow IF/IK,\ \ \sum_{i=1}^n a_i\otimes\phi(f_i)\longmapsto \gamma\Big(\sum_{i=1}^n a_i\otimes\phi(f_i)\Big):=\sum_{i=1}^n a_if_i+IK$$

όπου $f_i\in F, a_i\in I$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι είναι καλά ορισμένη. Επειδή η ϕ_K είναι επίμορφισμός και η ϕ_F είναι ισομορφισμός, η απεικόνιση γ είναι ισομορφισμός. Τώρα έχουμε ότι

$$\phi(IF)=\Big\{\phi\Big(\sum_{i=1}^n a_if_i\Big)\mid f_i\in F, a_i\in I\Big\}=\Big\{\sum_{i=1}^n a_i\phi(f_i)\Big\}=IM$$

Επομένως, από το Πρώτο Θεώρημα Ισομορφισμών έχουμε τον εξής ισομορφισμό

$$\delta\colon IF/(IF\cap K)\longrightarrow \phi(IF)=IM$$

$$\sum_{i=1}^n a_if_i+(IF\cap K)\longmapsto \delta\Big(\sum_{i=1}^n a_if_i+(IF\cap K)\Big):=\phi\Big(\sum_{i=1}^n a_if_i\Big)$$

Έστω $\sigma\colon IF/IK\longrightarrow IF/(IF\cap K)$ η σύνθεση των παρακάτω απεικονίσεων

$$IF/IK\xrightarrow{\gamma^{-1}} I\otimes_R M\xrightarrow{\phi_M} IM\xrightarrow{\delta^{-1}} IF/(IF\cap K)$$

Έτσι, $\sigma(\sum_{i=1}^n a_if_i+IK)=\sum_{i=1}^n a_if_i+(IF\cap K)$. Αλλά, $IK\subseteq IF\cap K$ έτσι, από το δεύτερο θεώρημα ισομορφισμών έχουμε ότι $\mathsf{Ker}\,\sigma=(IF\cap K)/IK$. Επομένως, η σ είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν $IF\cap K=IK$. Επιπλέον επειδή γ^{-1},δ^{-1} είναι ισομορφισμοί, η σ είναι ισομορφισμός αν και μόνο η ϕ_M είναι ισομορφισμός.

Εάν το M είναι επίπεδο, από την Πρόταση (3.1.18) έχουμε ότι η ϕ_M είναι ισομορφισμός. Επομένως, η σ είναι ισομορφισμός και έτσι $IF\cap K=IK$. Αντίστροφα, εάν $IF\cap K=IK$ για κάθε (πεπερασμένα παραγόμενο) δεξιό ιδεώδες I, τότε η ϕ_M είναι ισομορφισμός και έτσι πάλι από την Πρόταση (3.1.18) έχουμε ότι το M είναι επίπεδο. □

Συνεχίζουμε αποδεικνύοντας ότι το ευθύ όριο επίπεδων προτύπων είναι επίπεδο πρότυπο.

Πρόταση 3.1.20. *Έστω $\{M_i, f_{ji}\}$ ένα ευθύ σύστημα επίπεδων αριστερών R-προτύπων υπεράνω ενός κατευθυνόμενου συνόλου δεικτών I. Τότε, το ευθύ όριο του ευθέος συστήματος $\{M_i, f_{ji}\}$, δηλαδή το πρότυπο $\varinjlim M_i$, είναι επίσης επίπεδο αριστερό R-πρότυπο.*

Απόδειξη. Έστω $i\colon A\longrightarrow B$ ένας μονομορφισμός δεξιών R-προτύπων. Θα αποδείξουμε ότι η απεικόνιση $i\otimes\mathrm{Id}_{\varinjlim M_i}\colon A\otimes_R(\varinjlim M_i)\longrightarrow B\otimes_R(\varinjlim M_i)$ είναι ένας μονομορφισμός αβελιανών ομάδων. Επειδή κάθε M_i είναι επίπεδο, ο ομομορφισμός

$$i\otimes\mathrm{Id}_{M_i}\colon A\otimes_R M_i\longrightarrow B\otimes_R M_i$$

είναι μονομορφισμός αβελιανών ομάδων, για κάθε $i \in I$. Θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim(A \otimes_R M_i) \arrow[r, "\varinjlim(i\otimes \mathrm{Id}_{M_i})"] \arrow[d, "\phi"'] & \varinjlim(B \otimes_R M_i) \arrow[d, "\psi"] \\
A \otimes_R (\varinjlim M_i) \arrow[r, "i\otimes \mathrm{Id}_{\varinjlim M_i}"] & B \otimes_R (\varinjlim M_i)
\end{tikzcd}$$

όπου ϕ, ψ είναι ισομορφισμοί από την Πρόταση (1.5.10). Επειδή για κάθε $i \in I$ ο ομομορφισμός $i \otimes \mathrm{Id}_{M_i}$ είναι μονομορφισμός, από την Πρόταση (1.5.9) έχουμε ότι και η απεικόνιση $\varinjlim(i \otimes \mathrm{Id}_{M_i})$ είναι μονομορφισμός. Επομένως, $i \otimes \mathrm{Id}_{\varinjlim M_i} = \psi \circ \varinjlim(i \otimes \mathrm{Id}_{M_i}) \circ \phi^{-1}$ είναι επίσης μονομορφισμός. Έτσι, το ευθύ όριο $\varinjlim M_i$ είναι επίπεδο αριστερό R-πρότυπο. □

Αντίθετα τυχαία (πεπερασμένα ή μη) όρια επίπεδων προτύπων δεν είναι απαραίτητα επίπεδο πρότυπο. Για παράδειγμα κάθε πεπερασμένα παραστάσιμο (finitely presented) πρότυπο (βλέπε ορισμό (3.3.1)) υπεράνω τυχόντος δακτυλίου είναι συνπυρήνας, και άρα συνόριο, ενός ομομορφισμού μεταξύ δύο πεπερασμένα παραγόμενων ελεύθερων, και άρα επίπεδων, προτύπων. Όμως ένα τέτοιο πρότυπο δεν είναι πάντα επίπεδο. Ιδιαίτερα αυτό το οποίο ισχύει είναι ότι κάθε πεπερασμένα παραστάσιμο πρότυπο είναι επίπεδο αν και μόνον αν δακτύλιος είναι κανονικός (regular) με την έννοια του von Neumann.

Πόρισμα 3.1.21. *Εάν κάθε πεπερασμένα παραγόμενο υποπρότυπο ενός αριστερού R-προτύπου M είναι επίπεδο, τότε και το M είναι επίπεδο.*

Απόδειξη. Έστω $\{M_i\}_{i\in I}$ η οικογένεια των πεπερασμένα παραγόμενων υποπροτύπων του M. Τότε από την Παρατήρηση (1.5.7) έχουμε ότι το M είναι το ευθύ όριο των $\{M_i\}_{i\in I}$, δηλαδή $M = \varinjlim M_i$. Επειδή από υπόθεση έχουμε ότι κάθε M_i είναι επίπεδο χρησιμοποιώντας την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι και το $\varinjlim M_i$ είναι επίπεδο πρότυπο. Επομένως το M είναι επίπεδο. □

Το ακόλουθο Θεώρημα χαρακτηρίζει τα επίπεδα πρότυπα.

Θεώρημα 3.1.22. (Lazard-Govorov (1964)) *Ένα αριστερό R-πρότυπο M είναι επίπεδο αν και μόνο αν είναι το ευθύ όριο από ένα ευθύ σύστημα πεπερασμένα παραγόμενων προβολικών προτύπων.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [24, Theorem 5.40]. □

Κλείνουμε τώρα την παράγραφο αυτή αναφέροντας έναν πιο ισχυρό ορισμό από τον ορισμό του επίπεδου προτύπου:

Ορισμός 3.1.23. *Ένα αριστερό R-πρότυπο M καλείται* **πιστά επίπεδο (faithfully flat)** *αν ισχύει:*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

είναι μία σύντομη ακριβής ακολουθία δεξιών R-προτύπων, αν και μόνο αν,

$$0 \longrightarrow A \otimes_R M \longrightarrow B \otimes_R M \longrightarrow C \otimes_R M \longrightarrow 0$$

είναι μία ακριβής ακολουθία από αβελιανές ομάδες.

Λήμμα 3.1.24. *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για ένα αριστερό R-πρότυπο M.*

1. *Το M είναι πιστά επίπεδο.*

2. *Το M είναι επίπεδο και εάν για οποιοδήποτε δεξιό R-πρότυπο N ισχύει:*

$$N \otimes_R M = 0 \quad \Longrightarrow \quad N = 0$$

3. *Το M είναι επίπεδο και $mM \neq M$ για κάθε μέγιστο δεξιό ιδεώδες m του R.*

Απόδειξη. $(1 \Rightarrow 2)$ Από τον ορισμό του πιστά επίπεδου προτύπου έπεται ότι κάθε πιστά επίπεδο πρότυπο είναι επίπεδο. Θα δούμε αργότερα ότι υπάρχουν επίπεδα πρότυπα τα οποία δεν είναι πιστά επίπεδα, βλέπε Παράδειγμα(3.1.25). Έστω N ένα δεξιό R-πρότυπο τέτοιο ώστε $N \otimes_R M = 0$. Επομένως έχουμε την ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow N \otimes_R M \longrightarrow 0.$$

από αβελιανές ομάδες. Επειδή όμως το M είναι πιστά επίπεδο έχουμε ότι η ακολουθία

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής. Οπότε $N = 0$.

$(2 \Rightarrow 3)$ Από το Πόρισμα (3.1.17) έχουμε ότι $M/mM \cong (R/m) \otimes_R M$. Όμως, $(R/m) \otimes_R M \neq 0$ διότι $R/m \neq 0$. Επομένως, $M/mM \neq 0$ και έτσι $mM \neq M$.

$(3 \Rightarrow 2)$ Υποθέτουμε ότι $N \neq 0$ και έστω $x \in N$, $x \neq 0$. Έστω $\langle x \rangle \subseteq N$, το R-υποπρότυπο του N που παράγεται από το x, και θέτουμε

$$\mathsf{Ann}_R(x) = \{r \in R \mid xr = 0\}$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι $\mathsf{Ann}_R(x)$ είναι ένα ιδεώδες του R. Στην πραγματικότητα, $\mathsf{Ann}_R(x)$ είναι ο πυρήνας του επιμορφισμού $\tau \colon R \longrightarrow \langle x \rangle, \;\; r \longmapsto xr$. Έστω

$$\bar{\tau} \colon R/\mathsf{Ann}_R(x) \longrightarrow \langle x \rangle, \;\; r + \mathsf{Ann}_R(x) \longmapsto \bar{\tau}(r + \mathsf{Ann}_R(x)) := xr$$

ο επαγόμενος ισομορφισμός. Τότε $\langle x \rangle \cong R/\mathsf{Ann}_R(x)$. Έστω m ένα μέγιστο ιδεώδες του R που περιέχει το $\mathsf{Ann}_R(x)$. Τότε από υπόθεση, $M \neq mM \supset \mathsf{Ann}_R(x)M$. Άρα,

$$\langle x \rangle \otimes_R M = R/\mathsf{Ann}_R(x) \otimes_R M = M/\mathsf{Ann}_R(x)M \neq 0.$$

Τώρα, έχουμε μία απεικόνιση η οποία είναι μονομορφισμός:

$$0 \longrightarrow \langle x \rangle \longrightarrow N$$

και επειδή το M είναι επίπεδο έχουμε ότι και η απεικόνιση

$$0 \longrightarrow \langle x \rangle \otimes_R M \longrightarrow N \otimes_R M$$

είναι επίσης μονομορφισμός. Επομένως, $N \otimes_R M \neq 0$ εφόσον $\langle x \rangle \otimes_R M \neq 0$.

$(2 \Rightarrow 1)$ Έστω (1) : $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$ μία ακολουθία από δεξιά R-πρότυπα και ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία (2) : $0 \longrightarrow A \otimes_R M \xrightarrow{f \otimes \mathsf{Id}_M} B \otimes_R M$ είναι ακριβής για κάθε αριστερό R-πρότυπο M. Από την ακολουθία (1) έπεται η εξής ακριβής ακολουθία:

$$0 \longrightarrow \mathsf{Ker}\, f \xrightarrow{i} A \xrightarrow{f} B.$$

Επειδή το M είναι επίπεδο έχουμε ότι και η ακολουθία:

$$0 \longrightarrow \mathsf{Ker}\, f \otimes_R M \xrightarrow{i} A \otimes_R M \xrightarrow{f} B \otimes_R M$$

είναι ακριβής. Από την ακρίβεια της (2) έπεται ότι $\mathsf{Ker}\, f \otimes_R M = 0$ και έτσι από υπόθεση έχουμε ότι $\mathsf{Ker}\, f = 0$. Επομένως ο ομομορφισμός f είναι μονομορφισμός και έτσι η ακολουθία (1) είναι ακριβής. □

Παράδειγμα 3.1.25. Το $\mathbb{Z}$-πρότυπο $\mathbb{Q}$ είναι επίπεδο αλλά δεν είναι πιστά επίπεδο. Πράγματι:

Είδαμε στο Παράδειγμα (3.1.8) ότι το $\mathbb{Z}$-πρότυπο $\mathbb{Q}$ είναι επίπεδο. Όμως δεν είναι πιστά επίπεδο διότι ενώ $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n = 0$, το $\mathbb{Z}_n \neq 0$.

3.2 Επίπεδα Πρότυπα και ο Συναρτητής Tor

Είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι $\mathsf{Tor}_n^R(M,Q)=0, \forall n \geq 1$ εάν το Q είναι ένα προβολικό αριστερό R-πρότυπο και M ένα τυχαίο δεξιό R-πρότυπο. Σε αυτή την ενότητα θα δούμε ότι το ίδιο ισχύει και για τα επίπεδα πρότυπα.

Πρόταση 3.2.1. *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για ένα αριστερό R-πρότυπο M.*

1. *Το M είναι επίπεδο.*
2. $\mathsf{Tor}_1^R(C,M)=0$ *για κάθε δεξιό R-πρότυπο C.*
3. $\mathsf{Tor}_n^R(C,M)=0$ *για κάθε δεξιό R-πρότυπο C και για κάθε $n \geq 1$.*

Απόδειξη. $(3 \Rightarrow 2)$ Είναι προφανές.

$(2 \Rightarrow 1)$ Ας υποθέσουμε ότι

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

είναι μία σύντομη ακριβής ακολουθία δεξιών R-προτύπων. Τότε, για κάθε αριστερό R-πρότυπο M, από το Θεώρημα (2.3.11), υπάρχει μία μακρά ακριβής ακολουθία

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{Tor}_1^R(A,M) \longrightarrow \mathsf{Tor}_1^R(B,M) \longrightarrow \mathsf{Tor}_1^R(C,M) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow A \otimes_R M \longrightarrow B \otimes_R M \longrightarrow C \otimes_R M \longrightarrow 0$$

Εάν $\mathsf{Tor}_1^R(C,M)=0$ για κάθε δεξιό R-πρότυπο C, τότε η ακολουθία

$$0 \longrightarrow A \otimes_R M \longrightarrow B \otimes_R M \longrightarrow C \otimes_R M \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής, και έτσι το M είναι επίπεδο.

$(1 \Rightarrow 3)$ Έστω ότι το M είναι επίπεδο αριστερό R-πρότυπο και έστω C ένα δεξιό R-πρότυπο. Τότε υπάρχει μία σύντομη ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

δεξιών R-προτύπων με P προβολικό. Θα αποδείξουμε ότι $\mathsf{Tor}_n^R(C,M)=0$ για κάθε $n \geq 1$. Θα το αποδείξουμε με επαγωγή στο n. Για $n=1$, έχουμε από το Θεώρημα (2.3.11) την ακριβή ακολουθία

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{Tor}_1^R(K,M) \longrightarrow \mathsf{Tor}_1^R(P,M) \longrightarrow \mathsf{Tor}_1^R(C,M) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow K \otimes_R M \longrightarrow P \otimes_R M \longrightarrow C \otimes_R M \longrightarrow 0.$$

Από την Πρόταση (2.3.8) έχουμε ότι $\mathsf{Tor}_1^R(P,M)=0$. Έτσι έχουμε την ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathsf{Tor}_1^R(C,M) \longrightarrow K \otimes_R M \longrightarrow P \otimes_R M \longrightarrow C \otimes_R M \longrightarrow 0.$$

Επειδή το M είναι επίπεδο αριστερό R-πρότυπο, η απεικόνιση

$$K \otimes_R M \longrightarrow P \otimes_R M$$

είναι μονομορφισμός. Επομένως, $\mathsf{Tor}_1^R(C,M)=0$.

Τώρα, έστω ότι $\mathsf{Tor}_k^R(C,M)=0$ για $k=1,2,\ldots,n-1$ και για κάθε δεξιό R-πρότυπο C. Τότε ξανά από το Θεώρημα (2.3.11) έχουμε την ακριβή ακολουθία

$$\mathsf{Tor}_n^R(K,M) \longrightarrow \mathsf{Tor}_n^R(P,M) \longrightarrow \mathsf{Tor}_n^R(C,M) \longrightarrow \mathsf{Tor}_{n-1}^R(K,M) \longrightarrow \cdots$$

Όμως ισχύει ότι $\mathsf{Tor}_n^R(P,M)=0$ και $\mathsf{Tor}_{n-1}^R(K,M)=0$. Έτσι έχουμε την ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathsf{Tor}_n^R(C,M) \longrightarrow 0$$

Επομένως έχουμε $\mathsf{Tor}_n^R(C,M)=0$. $\square$

Παρατήρηση 3.2.2. Δυϊκά, ισχύει ότι M είναι ένα επίπεδο δεξιό R-πρότυπο αν και μόνο αν $\mathsf{Tor}_n^R(M, C) = 0$ για κάθε αριστερό R-πρότυπο C και για κάθε $n \geq 1$.

Θεώρημα 3.2.3. *Ένα αριστερό R-πρότυπο M είναι επίπεδο αν και μόνο αν $\mathsf{Tor}_1^R(M, R/I) = 0$ για κάθε πεπερασμένα παραγόμενο δεξιό ιδεώδες I του R.*

Απόδειξη. Έστω M ένα επίπεδο αριστερό R-πρότυπο και I ένα πεπερασμένα παραγόμενο δεξιό ιδεώδες του R. Τότε υπάρχει μία σύντομη ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$$

Για $n = 1$, έχουμε από το Θεώρημα (2.3.11) την ακριβή ακολουθία

$$\mathsf{Tor}_1^R(I, M) \longrightarrow \mathsf{Tor}_1^R(R, M) \longrightarrow \mathsf{Tor}_1^R(R/I, M) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow I \otimes_R M \longrightarrow R \otimes_R M \longrightarrow R/I \otimes_R M \longrightarrow 0.$$

Εάν το M είναι επίπεδο αριστερό R-πρότυπο, η απεικόνιση $I \otimes_R M \longrightarrow R \otimes_R M$ είναι μονομορφισμός. Επομένως, $\mathsf{Tor}_1^R(R/I, M) = 0$.

Αντίστροφα, εάν $\mathsf{Tor}_1^R(M, R/I) = 0$ τότε έχουμε την ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow I \otimes_R M \longrightarrow R \otimes_R M \longrightarrow R/I \otimes_R M \longrightarrow 0.$$

Άρα, από την Πρόταση (3.1.16) έχουμε ότι το M είναι επίπεδο αριστερό R-πρότυπο. □

Η ακόλουθη έννοια της καθαρά ακριβούς ακολουθίας είναι στενά συνδεδεμένη με την έννοια του επίπεδου προτύπου.

Ορισμός 3.2.4. *Μία ακριβής ακολουθία $0 \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow 0$ αριστερών R-προτύπων καλείται* **καθαρά ακριβής (pure exact)**, *εάν η ακολουθία αβελιανών ομάδων*

$$0 \longrightarrow A \otimes_R K \longrightarrow A \otimes_R L \longrightarrow A \otimes_R M \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής για κάθε δεξιό R-πρότυπο A.

Κάποια παραδείγματα καθαρά ακριβών ακολουθιών είναι τα εξής:

Παράδειγμα 3.2.5.

1. Κάθε διασπάσιμη ακριβής ακολουθία είναι καθαρά ακριβής.
2. Κάθε ευθύ όριο ενός ευθέος συστήματος διασπάσιμων ακριβών ακολουθιών είναι καθαρά ακριβής και αντίστροφα κάθε καθαρά ακριβής ακολουθία είναι το ευθύ όριο ενός ευθέος συστήματος διασπάσιμων ακριβών ακολουθιών.
3. Αν R είναι ένας κανονικός δακτύλιος με την έννοια του von Neumann, τότε κάθε σύντομη ακριβής ακολουθία (αριστερών) R-προτύπων είναι καθαρά ακριβής.

Η βασική σχέση ανάμεσα στα επίπεδα πρότυπα και τις καθαρά ακριβείς ακολουθίες δίνεται στην ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 3.2.6. *Ένα αριστερό R-πρότυπο M είναι επίπεδο αν και μόνο αν κάθε ακριβής ακολουθία $0 \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow 0$ αριστερών R-προτύπων είναι καθαρά ακριβής.*

Απόδειξη. Έστω M ένα επίπεδο αριστερό R-πρότυπο και έστω

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

μία ακριβής ακολουθία αριστερών R-προτύπων. Τότε, για κάθε δεξιό R-πρότυπο A από το Θεώρημα (2.3.11) για $n = 1$ έχουμε την ακριβή ακολουθία

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{Tor}_1^R(A,K) \longrightarrow \mathsf{Tor}_1^R(A,L) \longrightarrow \mathsf{Tor}_1^R(A,M) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow A \otimes_R K \longrightarrow A \otimes_R L \longrightarrow A \otimes_R M \longrightarrow 0.$$

Επειδή όμως το αριστερό R-πρότυπο M είναι επίπεδο από την Πρόταση (3.2.1) έχουμε ότι $\mathsf{Tor}_1^R(A,M) = 0$. Άρα έχουμε την ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow A \otimes_R K \longrightarrow A \otimes_R L \longrightarrow A \otimes_R M \longrightarrow 0.$$

για κάθε δεξιό R-πρότυπο A. Επομένως η ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

είναι καθαρά ακριβής.

Αντίστροφα, επιλέγουμε μία καθαρά ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} L \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

αριστερών R-προτύπων με L ελεύθερο. Τότε, για κάθε δεξιό R-πρότυπο A από το Θεώρημα (2.3.11) για $n = 1$ έχουμε την ακριβή ακολουθία

$$\mathsf{Tor}_1^R(A,K) \longrightarrow \mathsf{Tor}_1^R(A,L) \longrightarrow \mathsf{Tor}_1^R(A,M) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow A \otimes_R K \xrightarrow{\mathrm{Id}_A \otimes i} A \otimes_R L \longrightarrow A \otimes_R M \longrightarrow 0.$$

Επειδή όμως το L είναι ελεύθερο, άρα και προβολικό, έχουμε ότι $\mathsf{Tor}_1^R(A,L) = 0$. Επιπλέον, επειδή η ακολουθία $0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} L \longrightarrow M \longrightarrow 0$ είναι καθαρά ακριβής, έχουμε ότι η απεικόνιση $\mathrm{Id}_A \otimes i$ είναι μονομορφισμός. Επομένως, $\mathsf{Tor}_1^R(A,M) = 0$ για κάθε δεξιό R-πρότυπο A. Άρα, από την Πρόταση (3.2.1) έχουμε ότι το M είναι επίπεδο αριστερό R-πρότυπο. $\square$

Πόρισμα 3.2.7. *Έστω $0 \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow 0$ μία ακριβής ακολουθία αριστερών R-προτύπων. Εάν το M είναι επίπεδο, τότε το K είναι επίπεδο αν και μόνο αν το L είναι επίπεδο.*

Απόδειξη. Για κάθε δεξιό R-πρότυπο X, από το Θεώρημα (2.3.11), υπάρχει ακριβή ακολουθία

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{Tor}_2^R(X,M) \longrightarrow \mathsf{Tor}_1^R(X,K) \longrightarrow \mathsf{Tor}_1^R(X,L) \longrightarrow \mathsf{Tor}_1^R(X,M) \longrightarrow \cdots$$

Επειδή το M είναι επίπεδο, από την Πρόταση (3.2.1) έχουμε ότι

$$\mathsf{Tor}_2^R(X,M) = 0 = \mathsf{Tor}_1^R(X,M)$$

Επομένως έχουμε την ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathsf{Tor}_1^R(X,K) \longrightarrow \mathsf{Tor}_1^R(X,L) \longrightarrow 0.$$

Άρα, $\mathsf{Tor}_1^R(X,K) \cong \mathsf{Tor}_1^R(X,L)$. Έτσι εάν το K είναι επίπεδο δηλαδή έχουμε ότι $\mathsf{Tor}_1^R(X,K) = 0$ τότε και $\mathsf{Tor}_1^R(X,L) = 0$. Επομένως και το L είναι επίπεδο. Και αντίστροφα, εάν το L είναι επίπεδο δηλαδή έχουμε ότι $\mathsf{Tor}_1^R(X,L) = 0$ τότε και $\mathsf{Tor}_1^R(X,K) = 0$ και έτσι και το K είναι επίπεδο. $\square$

Παρατήρηση 3.2.8. Στο παραπάνω Πόρισμα αν K, L είναι επίπεδα πρότυπα, τότε δεν συνεπάγεται απαραίτητα ότι το πρότυπο M είναι επίπεδο. Για παράδειγμα, η ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{\eta} \mathbb{Z}_6 \longrightarrow 0$$

είναι μία ακριβής ακολουθία αβελιανών ομάδων, όπου $f(x) = 6x$ για κάθε $x \in \mathbb{Z}$ και η η κανονική προβολή. Όμως, το $\mathbb{Z}$ είναι επίπεδο $\mathbb{Z}$-πρότυπο αλλά το $\mathbb{Z}_6$ δεν είναι (βλέπε Παρατήρηση (3.1.5)(2)).

3.3 Συναφείς Δακτύλιοι

Γενικά, εάν $\{M_i\}_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια επίπεδων αριστερών R-προτύπων υπεράνω ενός τυχαίου δακτυλίου R, τότε το ευθύ γινόμενο $M = \prod_{i\in I} M_i$ δεν είναι πάντα επίπεδο πρότυπο (βλέπε Παράδειγμα 3.3.11). Όμως, υπάρχουν δακτύλιοι υπεράνω των οποίων το M είναι πάντα επίπεδο πρότυπο. Αυτοί οι δακτύλιοι ορίστηκαν από τον S.U.Chase το 1960. Πριν δώσουμε τον ορισμό τους, ας ξεκινήσουμε με τον ορισμό ενός πεπερασμένα παραστάσιμου αριστερού R-προτύπου.

Ορισμός 3.3.1. *Ένα αριστερό R-πρότυπο M λέγεται* **πεπερασμένα παραστάσιμο (finitely presented)** *εάν υπάρχει μία ακριβής ακολουθία*

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

αριστερών R-προτύπων, όπου F είναι πεπερασμένα παραγόμενο και ελεύθερο και K είναι πεπερασμένα παραγόμενο.

Το Λήμμα που ακολουθεί θα μας δώσει μία επιπλέον πληροφορία για τα πεπερασμένα παραστάσιμα πρότυπα.

Λήμμα 3.3.2. *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για ένα αριστερό R-πρότυπο M.*

1. *Υπάρχει μία ακριβής ακολουθία*

$$F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

όπου F_1 και F_0 είναι πεπερασμένα παραγόμενα και ελεύθερα αριστερά R-πρότυπα.

2. *Υπάρχουν φυσικοί αριθμοί m, n τέτοιοι ώστε η ακολουθία*

$$R^m \longrightarrow R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

να είναι ακριβής.

3. *Το M είναι πεπερασμένα παραστάσιμο.*

Απόδειξη. $(1 \Leftrightarrow 2)$ Η ισοδυναμία των 1. και 2. προκύπτει εύκολα από το γεγονός ότι για κάθε πεπερασμένα παραγόμενο και ελεύθερο πρότυπο F υ–πάρχει ένας φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε $F \cong R^n$.

$(3 \Rightarrow 2)$ Έστω ότι το M είναι πεπερασμένα παραστάσιμο. Άρα υπάρχει μία ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

αριστερών R-προτύπων, όπου F είναι πεπερασμένα παραγόμενο και ελεύθερο και K είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Επειδή το F είναι πεπερασμένα παραγόμενο και ελεύθερο, υπάρχει φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε $F \cong R^n$. Επιπλέον, εάν το K παράγεται από m

στοιχεία, τότε υπάρχει ένας επιμορφισμός $R^m \longrightarrow K$. Έτσι έχουμε μία ακριβή ακολουθία $R^m \longrightarrow R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$.

$(2 \Rightarrow 3)$ Έστω ότι υπάρχουν φυσικοί αριθμοί m, n τέτοιοι ώστε η ακολουθία

$$R^m \xrightarrow{\alpha} R^n \xrightarrow{\beta} M \longrightarrow 0$$

να είναι ακριβής και έστω $K = \operatorname{Ker}\beta$. Τότε από την ακρίβεια της ακολουθίας έχουμε ότι $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Ker}\beta$, δηλαδή ότι $\operatorname{Im}\alpha = K$. Άρα το K είναι πεπερασμένα παραγόμενο διότι υπάρχει επιμορφισμός $R^m \longrightarrow \operatorname{Im}\alpha$. Επομένως, από την ύπαρξη της ακριβής ακολουθίας

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow R^n \xrightarrow{\beta} M \longrightarrow 0$$

έπεται ότι το M είναι πεπερασμένα παραστάσιμο. □

Ορισμός 3.3.3. *Ένα πεπερασμένα παραστάσιμο αριστερό R-πρότυπο M καλείται* **συναφές (coherent)** *εάν κάθε πεπερασμένα παραγόμενο υποπρότυπο του M είναι πεπερασμένα παραστάσιμο.*

Ας δούμε τώρα πότε ένας δακτύλιος καλείται συναφής.

Ορισμός 3.3.4. *Ένας δακτύλιος R καλείται* **αριστερά συναφής** *(left coherent)αν το ${}_RR$ είναι συναφές ως αριστερό R-πρότυπο.*

Οι δεξιά συναφείς δακτύλιοι ορίζονται παρόμοια, και, θα λέμε ότι ένας δακτύλιος R είναι συναφής αν είναι και αριστερά και δεξιά συναφής .

Παράδειγμα 3.3.5.
1. Εάν k είναι ένα σώμα, τότε ο πολυωνυμικός δακτύλιος $R = k[X]$ (απείρων ή πεπερασμένων) μεταβλητών X είναι συναφής δακτύλιος.
2. Κάθε περιοχή κύριων ιδεωδών είναι συναφής δακτύλιος.
3. Ένα παράδειγμα μη-δεξιά συναφή δακτυλίου είναι η $\mathbb{Q}$-άλγεβρα με σύνολο γεννητόρων $y, x_1, x_2, \ldots$ και σχέσεις $x_i y = 0$ για κάθε i. Για λεπτομέρειες βλέπε [22, Examples $4.46(c), (d)$].

Έστω M ένα δεξιό R-πρότυπο και $\{N_i\}_{i\in I}$ μία οικογένεια αριστερών R-προτύπων. Έχουμε δει ότι το τανυστικό γινόμενο διατηρεί τυχαία ευθέα αθροίσματα, δηλαδή,

$$M \otimes_R (\oplus_I N_i) \cong \oplus_I (M \otimes_R N_i)$$

ως $\mathbb{Z}$-πρότυπα, για κάθε σύνολο δεικτών I, πεπερασμένο ή άπειρο. Το ακόλουθο Παράδειγμα μας δείχνει ότι το παραπάνω δεν ισχύει εν γένει αν το ευθύ άθροισμα $\oplus$ αντικατασταθεί με το ευθύ γινόμενο $\prod$.

Παράδειγμα 3.3.6. Εάν $R = \mathbb{Z}$, έστω $N_i = \mathbb{Z}/2^i\mathbb{Z}$ $(i \in \mathbb{N})$ και $M = \mathbb{Q}$. Τότε $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2^i\mathbb{Z} = 0$ επειδή κάθε $\mathbb{Z}/2^i\mathbb{Z}$ είναι πεπερασμένη αβελιανή ομάδα και η $\mathbb{Q}$ είναι διαιρετή. Επομένως, $\prod_i (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2^i\mathbb{Z}) = 0$. Από την άλλη, έστω $g = (1 + 2^i\mathbb{Z})_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_i \mathbb{Z}/2^i\mathbb{Z}$. Ας υποθέσουμε ότι η τάξη του g είναι πεπερασμένη, έστω n. Τότε $n + 2^i\mathbb{Z} = 0$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Αυτό σημαίνει ότι το 2^i διαιρεί το n για κάθε $i \in \mathbb{N}$, πράγμα αδύνατο. Έτσι η τάξη του g είναι άπειρη. Επομένως, $\langle g \rangle \cong \mathbb{Z}$ και έτσι έχουμε την ακριβή ακολουθία $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \prod_i \mathbb{Z}/2^i\mathbb{Z}$. Επειδή όμως το $\mathbb{Q}$ είναι επίπεδο $\mathbb{Z}$-πρότυπο έχουμε ότι και η ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (\prod_i \mathbb{Z}/2^i\mathbb{Z})$$

είναι ακριβής. Αλλά $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Q} \neq 0$, και έτσι $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (\prod_i \mathbb{Z}/2^i\mathbb{Z}) \neq 0$. Επομένως,

$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (\prod_i \mathbb{Z}/2^i\mathbb{Z}) \neq \prod_i (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2^i\mathbb{Z}).$$

Τώρα θα δούμε ότι όταν το M είναι πεπερασμένα παραστάσιμο πρότυπο τότε

$$M \otimes_R (\prod_I N_i) \cong \prod_I (M \otimes_R N_i)$$

μέσω της απεικόνισης

$$\phi\colon M \otimes_R \big(\prod_I N_i\big) \longrightarrow \prod_I (M \otimes_R N_i)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{n} x_\lambda \otimes (y_{i_\lambda}) \longmapsto \Big(\sum_{\lambda=1}^{n} x_\lambda \otimes y_{i_\lambda}\Big)$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η ϕ είναι ισομορφισμός όταν το M είναι πεπερασμένα παραγόμενο και ελεύθερο.

Λήμμα 3.3.7. *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για ένα δεξιό R-πρότυπο M.*

1. *Το M είναι πεπερασμένα παραγόμενο.*

2. *Η απεικόνιση $\phi\colon M \otimes_R \big(\prod_I N_i\big) \longrightarrow \prod_I (M \otimes_R N_i)$ είναι ένας επιμορφισμός για κάθε οικογένεια $\{N_i\}_{i\in I}$ αριστερών R-προτύπων.*

3. *Η απεικόνιση $\phi\colon M \otimes_R R^I \longrightarrow M^I$ είναι ένας επιμορφισμός για κάθε σύνολο δεικτών I.*

4. *Η απεικόνιση $\phi\colon M \otimes_R R^M \longrightarrow M^M$ είναι ένας επιμορφισμός.*

Απόδειξη. $(1 \Rightarrow 2)$ Εάν το M είναι πεπερασμένα παραγόμενο, τότε υπάρχει ένας επιμορφισμός $R^n \longrightarrow M$ για κάποιο φυσικό αριθμό n. Έστω $F = R^n$. Τότε έχουμε την σύντομη ακριβή ακολουθία $0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$. Από αυτή την ακολουθία έπεται το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
K \otimes_R \big(\prod_I N_i\big) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_K"] & F \otimes_R \big(\prod_I N_i\big) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_F"] & M \otimes_R \big(\prod_I N_i\big) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_M"] & 0 \\
\prod_I (K \otimes_R N_i) \arrow[r] & \prod_I (F \otimes_R N_i) \arrow[r] & \prod_I (M \otimes_R N_i) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

με ακριβείς γραμμές. Επειδή $F = R^n$, έχουμε ότι το F είναι πεπερασμένα παραγόμενο και ελεύθερο και έτσι η ϕ_F είναι ισομορφισμός. Επομένως από την μεταθετικότητα του διαγράμματος έχουμε ότι η ϕ_M είναι επιμορφισμός.

$(2 \Rightarrow 3)$ Εάν θέσουμε $N_i = R$ για κάθε $i \in I$ τότε η απεικόνιση

$$\phi\colon M \otimes_R R^I \longrightarrow M^I$$

$$\sum_{\lambda=1}^{n} x_\lambda \otimes (r_{i_\lambda}) \longmapsto \sum_{\lambda=1}^{n} (x_\lambda r_{i_\lambda})$$

είναι ένας επιμορφισμός για κάθε σύνολο I.

$(3 \Rightarrow 4)$ Ισχύει θέτοντας $I = M$.

$(4 \Rightarrow 1)$ Ας υποθέσουμε ότι ένα στοιχείο $(x_x) \in M^M$ είναι τέτοιο ώστε $x = x_x$ για κάθε $x \in M$. Τότε επειδή η ϕ είναι επιμορφισμός, υπάρχει ένα στοιχείο $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes (r_{ix}) \in M \otimes_R R^M$

τέτοιο ώστε $(x_x) = \phi(\sum_{i=1}^n x_i \otimes (r_{ix}))$. Από αυτό έπεται ότι

$$\begin{aligned}(x_x) &= \phi\Big(\sum_{i=1}^n x_i \otimes (r_{ix})\Big)\\ &= \sum_{i=1}^n \phi(x_i \otimes (r_{ix}))\\ &= \sum_{i=1}^n (x_i r_{ix})\\ &= \Big(\sum_{i=1}^n x_i r_{ix}\Big)\end{aligned}$$

Επομένως, για κάθε $x \in M$, έχουμε ότι $\sum_{i=1}^n x_i r_{ix} = x$, άρα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων του M. □

Θεώρημα 3.3.8. *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για ένα δεξιό R-πρότυπο M.*

1. *Το M είναι πεπερασμένα παραστάσιμο.*
2. *Η απεικόνιση $\phi\colon M \otimes_R \big(\prod_I N_i\big) \longrightarrow \prod_I (M \otimes_R N_i)$ είναι ένας ισομορφισμός για κάθε οικογένεια $\{N_i\}_{i\in I}$ αριστερών R-προτύπων.*
3. *Η απεικόνιση $\phi\colon M \otimes_R R^I \longrightarrow M^I$ είναι ένας ισομορφισμός για κάθε σύνολο δεικτών I.*

Απόδειξη. $(1 \Rightarrow 2)$ Ας υποθέσουμε ότι το M είναι πεπερασμένα παραστάσιμο. Τότε από το Λήμμα (3.3.2) υπάρχει η ακριβής ακολουθία

$$F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

όπου F_1 και F_0 είναι πεπερασμένα παραγόμενα και ελεύθερα δεξιά R-πρότυπα. Θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} F_1 \otimes_R \big(\prod_I N_i\big) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{F_1}"] & F_0 \otimes_R \big(\prod_I N_i\big) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{F_0}"] & M \otimes_R \big(\prod_I N_i\big) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_M"] & 0 \\ \prod_I (F_1 \otimes_R N_i) \arrow[r] & \prod_I (F_0 \otimes_R N_i) \arrow[r] & \prod_I (M \otimes_R N_i) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

με ακριβείς γραμμές. Επειδή οι απεικονίσεις ϕ_{F_1}, ϕ_{F_0} είναι ισομορφισμοί, από την μεταθετικότητα του διαγράμματος έπεται ότι και η ϕ_M είναι ισομορφισμός.

$(2 \Rightarrow 3)$ Έπεται εύκολα θέτοντας $N_i = R$ για κάθε $i \in I$.

$(3 \Rightarrow 1)$ Από το Λήμμα (3.3.7) έπεται ότι το M είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Επομένως, υπάρχει μία ακριβής ακολουθία $0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$ όπου F πεπερασμένα παραγόμενο και ελεύθερο. Αρκεί να αποδείξουμε ότι το K είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Για οποιοδήποτε σύνολο I, έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & K \bigotimes_R R^I \arrow[r] \arrow[d, "\phi_K"] & F \bigotimes_R R^I \arrow[r] \arrow[d, "\phi_F"] & M \bigotimes_R R^I \arrow[r] \arrow[d, "\phi_M"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K^I \arrow[r] & F^I \arrow[r] & M^I \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

με ακριβείς γραμμές όπου ϕ_F, ϕ_M είναι ισομορφισμοί. Από την μεταθετικότητα του διαγράμματος έπεται ότι η ϕ_K είναι επιμορφισμός. Επομένως από το Λήμμα (3.3.7) έχουμε ότι το K είναι πεπερασμένα παραγόμενο. □

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε το ακόλουθο Θεώρημα του Chase το οποίο χαρακτηρίζει τους δεξιά συναφείς δακτυλίους με βάση ιδιότητες επίπεδων αριστερών προτύπων.

Θεώρημα 3.3.9. (Chase) *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για έναν δακτύλιο R.*

1. *Κάθε ευθύ γινόμενο επίπεδων αριστερών R-προτύπων είναι επίπεδο.*
2. *Για κάθε σύνολο I, το αριστερό R-πρότυπο R^I είναι επίπεδο.*
3. *Κάθε πεπερασμένα παραστάσιμο δεξιό R-πρότυπο είναι συναφές.*
4. *Ο δακτύλιος R είναι δεξιά συναφής.*

Απόδειξη. $(1 \Rightarrow 2)$ Εάν ο δακτύλιος R ιδωθεί ως αριστερό πρότυπο υπεράνω του εαυτού του είναι επίπεδο. Επομένως, το αριστερό R-πρότυπο $R^I = \prod_{i \in I} R_i$, με $R_i = R$ για κάθε $i \in I$, είναι επίπεδο.

$(2 \Rightarrow 3)$ Έστω M ένα πεπερασμένα παραστάσιμο δεξιό R-πρότυπο και N ένα πεπερασμένα παραγόμενο υποπρότυπο του M. Για κάθε σύνολο I, υπάρχει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} N \otimes_R R^I & \xrightarrow{k} & M \otimes_R R^I \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_N} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_M} \\ N^I & \xrightarrow{\lambda} & M^I \end{array}$$

όπου $\lambda \colon N^I \longrightarrow M^I$ είναι η κανονική έγκλειση. Επειδή το αριστερό R-πρότυπο R^I είναι επίπεδο, έχουμε ότι η απεικόνιση $k \colon N \otimes_R R^I \longrightarrow M \otimes_R R^I$ είναι μονομορφισμός. Επιπλέον, επειδή το M είναι ένα πεπερασμένα παραστάσιμο δεξιό R-πρότυπο, από το Θεώρημα $(3.3.8)$ έχουμε ότι η ϕ_M είναι ισομορφισμός. Έτσι από τη μεταθετικότητα του διαγράμματος έχουμε ότι η απεικόνιση ϕ_N είναι μονομορφισμός. Επιπλέον επειδή το N είναι πεπερασμένα παραγόμενο, από το Λήμμα $(3.3.7)$ έχουμε ότι η ϕ_N είναι και επιμορφισμός. Επομένως, η ϕ_N είναι ισομορφισμός και άρα το N είναι πεπερασμένα παραστάσιμο.

$(3 \Rightarrow 4)$ Έστω ότι κάθε πεπερασμένα παραστάσιμο δεξιό R-πρότυπο είναι συναφές. Για να αποδείξουμε ότι ο δακτύλιος R είναι δεξιά συναφής, αρκεί να αποδείξουμε ότι το R είναι πεπερασμένα παραστάσιμο ως δεξιό R-πρότυπο. Από την ύπαρξη της ακριβής ακολουθίας

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow R \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

έπεται εύκολα ότι το R είναι πεπερασμένα παραστάσιμο.

$(4 \Rightarrow 1)$ Έστω $\{N_i\}_{i \in I}$ μία οικογένεια επίπεδων αριστερών R-προτύπων, και J ένα πεπερασμένα παραγόμενο δεξιό ιδεώδες του R. Επειδή ο δακτύλιος R είναι δεξιά συναφής, έχουμε ότι το J είναι πεπερασμένα παραστάσιμο. Άρα, από το Θεώρημα $(3.3.8)$ ισχύει ότι $J \otimes_R \left(\prod_I N_i\right) \cong \prod_I (J \otimes_R N_i)$. Αλλά επειδή κάθε N_i είναι επίπεδο, έχουμε ότι $J \otimes_R N_i \subset R \otimes_R N_i$. Επομένως,

$$\begin{aligned} J \otimes_R \big(\prod_I N_i\big) &\cong \prod_I (J \otimes_R N_i) \\ &\subseteq \prod_I (R \otimes_R N_i) \\ &\cong \prod_I N_i \\ &\cong R \otimes_R \big(\prod_I N_i\big) \end{aligned}$$

Άρα, έχουμε την ακριβή ακολουθία $0 \longrightarrow J \otimes_R \left(\prod_I N_i\right) \longrightarrow R \otimes_R \left(\prod_I N_i\right)$ και έτσι από την Πρόταση $(3.1.16)$ έχουμε ότι το $\prod_I N_i$ είναι επίπεδο αριστερό R-πρότυπο. □

Είναι χρήσιμο να έχουμε υπ' όψιν μας την «αλλαγή πλευράς» στις συνθήκες 1. και 2.- 4. στο Θεώρημα 3.3.9.

Παρατήρηση 3.3.10. Ας υποθέσουμε ότι M είναι ένα πεπερασμένα παραστάσιμο δεξιό R-πρότυπο. Τότε υπάρχει μία ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

με F_0, K πεπερασμένα παραγόμενα και F_0 ελεύθερο. Εάν ο R είναι δεξιά συναφής, τότε από το προηγούμενο Θεώρημα έχουμε ότι το K είναι πεπερασμένα παραστάσιμο. Επομένως συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία, βλέπουμε ότι όταν ο δακτύλιος R είναι δεξιά συναφής τότε κάθε πεπερασμένα παραστάσιμο δεξιό R-πρότυπο M έχει ελεύθερη ανάλυση

$$\cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

όπου κάθε F_i είναι πεπερασμένα παραγόμενο και ελεύθερο.

Παράδειγμα 3.3.11. Είδαμε στο Παράδειγμα $(3.3.5)(3.)$ ότι η $\mathbb{Q}$-άλγεβρα με γεννήτορες $y, x_1, x_2, \ldots$ και σχέσεις $x_i y = 0$ για κάθε i είναι ένας μη-συναφής δακτύλιος. Αυτός ο δακτύλιος είναι επίπεδο πρότυπο υπεράνω του εαυτού του όμως το άπειρο ευθύ γινόμενο τους δεν είναι επίπεδο πρότυπο σύμφωνα με το Θεώρημα του Chase.

Παρατήρηση 3.3.12. Το Θεώρημα του Chase (Θεώρημα 3.3.9), θέτει το ακόλουθο ενδιαφέρον ερώτημα:

- Πότε το ευθύ γινόμενο τυχούσας οικογένειας προβολικών αριστερών R-προτύπων υπεράνω ενός δακτυλίου R είναι προβολικό πρότυπο;

Η απάντηση δόθηκε πάλι από τον Chase: Οι δακτύλιοι οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω ιδιότητα είναι ακριβώς οι δεξιά συναφείς δακτύλιοι για τους οποίους κάθε επίπεδο πρότυπο είναι προβολικό, δηλαδή οι δεξιά συναφείς και αριστερά τέλειοι δακτύλιοι, βλέπε το Θεώρημα του Bass (Θεώρημα 4.4.9) στο επόμενο Κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 4

Προσεγγίσεις Προτύπων και Συστρεπτικά Ζεύγη

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναπτύξουμε τη βασική θεωρία προσέγγισης σε κατηγορίες προτύπων, υπεράνω προσεταιριστικών δακτυλίων με μονάδα.

Εισάγουμε τις έννοιες των precovers και preenvelopes, καθώς και τις ελαχιστικές (minimal) εκδοχές τους, δηλαδή τις έννοιες των covers και envelopes. Επίσης θα αναπτύξουμε την έννοια των συστρεπτικών ζευγών (cotorsion pairs) τα οποία παίζουν κυρίαρχο ρόλο στην θεωρία προσεγγίσεων προτύπων.

Ιδιαίτερα στο παρόν κεφάλαιο θα μας απασχολήσει το φυσικό ερώτημα αν πρότυπα υπεράνω ενός δακτυλίου μπορούν να προσεγγισθούν (με ελάχιστο τρόπο) μέσω σημαντικών κλάσεων προτύπων, όπως για παράδειγμα η κλάση των προβολικών, ενέσιμων ή επίπεδων προτύπων.

4.1 Προσεγγίσεις Προτύπων

Στην ενότητα αυτή το R θα συμβολίζει έναν τυχαίο (προσεταιριστικό με μονάδα) δακτύλιο, το M ένα αριστερό R-πρότυπο και το $\mathcal{C}$ μία κλάση αριστερών R-προτύπων η οποία είναι κλειστή κάτω από ισομορφισμούς και ευθείς προσθετέους.

Ορισμός 4.1.1. *Ένας ομομορφισμός προτύπων $f\colon M \longrightarrow C$ καλείται $\mathcal{C}$-**preenvelope** του M, αν:*

1. *$C \in \mathcal{C}$.*
2. *για κάθε ομομορφισμό $f'\colon M \longrightarrow C'$, όπου $C' \in \mathcal{C}$, υπάρχει ένας ομομορφισμός $g\colon C \longrightarrow C'$ τέτοιος ώστε το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f'"'] & C \arrow[dl, dashed, "g"] \\ C' & \end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό.

Η συνθήκη 2. διατυπώνεται ισοδύναμα ως εξής: για κάθε $C' \in \mathcal{C}$, η επαγόμενη ακολουθία

$$\mathsf{Hom}_R(C, C') \xrightarrow{f^*} \mathsf{Hom}_R(M, C') \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής.

*Το $\mathcal{C}$-preenvelope $f\colon M \longrightarrow C$ καλείται ένα $\mathcal{C}$-***envelope (περίβλημα)** *του M εάν κάθε ενδομορφισμός προτύπων $g\colon C \longrightarrow C$ που κάνει το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[dl, dashed, "g"] \\ C & \end{tikzcd}$$

μεταθετικό, είναι ένας αυτομορφισμός.

Μερικές φορές, θα καλούμε, χάριν απλότητας, το C *(pre)envelope* του M, καθώς ο ομομορφισμός $f\colon M \longrightarrow C$ θα υπονοείται εύκολα, και θα το συμβολίζουμε με C^M.

Ένα $\mathcal{C}$-envelope του M είναι μοναδικό με την ακόλουθη έννοια:

Πρόταση 4.1.2. *Εάν $f\colon M \longrightarrow C$ και $f'\colon M \longrightarrow C'$ είναι δύο $\mathcal{C}$-envelopes του M, τότε υπάρχει ισομορφισμός $g\colon C \longrightarrow C'$ τέτοιος ώστε το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "f'"] \\ C \arrow[r, dashed, "g"] & C' \end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό.

Απόδειξη. Επειδή $f\colon M \longrightarrow C$ και $f'\colon M \longrightarrow C'$ είναι $\mathcal{C}$-preenvelopes του M, υπάρχουν ομομορφισμοί $g\colon C \longrightarrow C'$ και $g'\colon C' \longrightarrow C$ τέτοιοι ώστε τα ακόλουθα διαγράμματα να είναι μεταθετικά,

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f'"'] & C \arrow[dl, dashed, "g"] \\ C' & \end{tikzcd} \quad \text{και} \quad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "f"'] & C' \arrow[dl, dashed, "g'"] \\ C & \end{tikzcd}$$

δηλαδή, $f' = g \circ f$ και $f = g' \circ f'$. Επομένως, $f' = (g \circ g') \circ f'$ και $f = (g' \circ g) \circ f$ και επειδή $f\colon M \longrightarrow C$ και $f'\colon M \longrightarrow C'$ είναι $\mathcal{C}$-envelopes του M έχουμε ότι οι ομομορφισμοί $g \circ g'$ και $g' \circ g$ είναι αυτομορφισμοί. Τώρα, ο ομομορφισμός $(g' \circ g)^{-1} \circ g'$ είναι ο αριστερός αντίστροφος του g και ο ομομορφισμός $g' \circ (g \circ g')^{-1}$ είναι ο δεξιός αντίστροφος του g. Άρα, ο ομομορφισμός g είναι ισομορφισμός και εκ' κατασκευής ικανοποιεί την $f' = g \circ f$. $\square$

Επομένως, ένα πρότυπο M αν έχει αρκετά $\mathcal{C}$-envelopes, δηλαδή αν έχει τουλάχιστον ένα $\mathcal{C}$-envelope, τότε κάθε δύο τυχόντα $\mathcal{C}$-envelopes είναι ισόμορφα μεταξύ τους, πράγμα το οποίο δεν συμβαίνει εν γένει με τα $\mathcal{C}$-preenvelopes. Ωστόσο, εάν υπάρχει ένα $\mathcal{C}$-envelope τότε αυτό είναι ισόμορφο με έναν ευθύ προσθετέο κάθε $\mathcal{C}$-preenvelope του M:

Λήμμα 4.1.3. *Έστω $f\colon M \longrightarrow C$ ένα $\mathcal{C}$-envelope και $f'\colon M \longrightarrow C'$ ένα $\mathcal{C}$-preenvelope ενός προτύπου M. Τότε*

1. *$C' = D \oplus D'$, όπου $\operatorname{Im} f' \subseteq D$ και $f'\colon M \longrightarrow D$ ένα $\mathcal{C}$-envelope του M.*

2. *Το f' είναι ένα $\mathcal{C}$-envelope του M, αν και μόνο αν το C' δεν μπορεί να γραφεί ως ευθύ άθροισμα $C' = D \oplus D'$, με $\operatorname{Im} f' \subseteq D$ και $D' \neq 0$.*

Απόδειξη. 1. Επειδή $f\colon M \longrightarrow C$ είναι ένα $\mathcal{C}$-envelope και $f'\colon M \longrightarrow C'$ ένα $\mathcal{C}$-preenvelope του M έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, dashed, "g"] \\ M \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f'"] \arrow[dr, "f"'] & C' \arrow[d, dashed, "g'"] \\ & C \end{tikzcd}$$

τέτοιο ώστε $f' = g \circ f$ και $f = g' \circ f'$. Επομένως, $f = g' \circ g \circ f$. Επειδή όμως $f\colon M \longrightarrow C$ είναι ένα $\mathcal{C}$-envelope του M έχουμε ότι ο ομομορφισμός $g' \circ g$ είναι αυτομορφισμός στο C, και έτσι υπάρχει ομομορφισμός $k\colon C \longrightarrow C$ τέτοιος ώστε $k \circ (g' \circ g) = \mathrm{Id}_C \Rightarrow (k \circ g') \circ g = \mathrm{Id}_C$. Άρα ο g είναι διασπάσιμος μονομορφισμός με απεικόνιση διάσπασης $k \circ g'$. Έτσι, $C' = \mathsf{Im}\, g \oplus \mathsf{Ker}(k \circ g')$. Από το Πρώτο Θεώρημα Ισομορφισμών για την g έχουμε ότι $\mathsf{Im}\, g \cong C$. Έτσι $D = \mathsf{Im}\, g$ είναι ένας ευθύς προσθετέος του C' που περιέχει το $\mathsf{Im}\, f'$.

2. Ας υποθέσουμε ότι το f' είναι ένα $\mathcal{C}$-envelope του M και ότι το C' μπορεί να γραφεί ως ευθύ άθροισμα $C' = D \oplus D'$, με $\mathsf{Im}\, f' \subseteq D$ και $D' \neq 0$. Κατασκευάζουμε την απεικόνιση

$$g\colon D \oplus D' \longrightarrow C'$$

να είναι η προβολή στο D. Τότε ισχύει ότι $f' = g \circ f'$. Επειδή το f' είναι ένα $\mathcal{C}$-envelope του M, η απεικόνιση g πρέπει να είναι αυτομορφισμός. Αυτό είναι αδύνατο εκτός εάν το $D' = 0$. Άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι $D' \neq 0$. Επομένως το C' δεν μπορεί να γραφεί ως ευθύ άθροισμα $C' = D \oplus D'$, με $\mathsf{Im}\, f' \subseteq D$ και $D' \neq 0$. Αντίστροφα, έστω ότι το C' δεν μπορεί να γραφεί ως ευθύ άθροισμα $C' = D \oplus D'$, με $\mathsf{Im}\, f' \subseteq D$ και $D' \neq 0$. Από το 1. όμως έχουμε ότι $C' = D \oplus D'$, όπου $\mathsf{Im}\, f' \subseteq D$ και $f'\colon M \longrightarrow D$ ένα $\mathcal{C}$-envelope του M. Επομένως, $D' = 0$ και έτσι $C' = D$. Άρα, το f' είναι ένα $\mathcal{C}$-envelope του M. □

Τώρα θα αναφέρουμε εν συντομία την δυϊκή έννοια:

Ορισμός 4.1.4. *Ένας ομομορφισμός προτύπων $f\colon C \longrightarrow M$ καλείται $\mathcal{C}$-**precover** του M, αν:*

1. *$C \in \mathcal{C}$.*
2. *για κάθε ομομορφισμό $f'\colon C' \longrightarrow M$, όπου $C' \in \mathcal{C}$, υπάρχει ένας ομομορφισμός $g\colon C' \longrightarrow C$ τέτοιος ώστε το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} & C' \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "f'"] \\ C \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό.

Η συνθήκη 2. διατυπώνεται ισοδύναμα ως εξής: για κάθε $C' \in \mathcal{C}$ η επαγόμενη ακολουθία

$$\mathsf{Hom}_R(C', C) \xrightarrow{f_*} \mathsf{Hom}_R(C', M) \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής.

*Το $\mathcal{C}$-precover $f\colon C \longrightarrow M$ καλείται ένα $\mathcal{C}$-**cover (κάλυψη)** του M εάν κάθε ενδομορφισμός $g\colon C \longrightarrow C$ που κάνει το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "f"] \\ C \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

μεταθετικό, είναι ένας αυτομορφισμός.

Ομοίως, τα $\mathcal{C}$-**covers**, εάν υπάρχουν, είναι μοναδικά μέσω κατάλληλου ισομορφισμού:

Πρόταση 4.1.5. *Εάν $f: C \longrightarrow M$ και $f': C' \longrightarrow M$ είναι δύο $\mathcal{C}$- covers του M, τότε υπάρχει ισομορφισμός $g: C \longrightarrow C'$ τέτοιος ώστε το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} & M \\ C \arrow[ur, "f"] \arrow[r, dashed, "g"] & C' \arrow[u, "f'"'] \end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης της Πρότασης (4.1.2). □

Όπως στο Λήμμα (4.1.3) θα έχουμε:

Λήμμα 4.1.6. *Έστω $f: C \longrightarrow M$ ένα $\mathcal{C}$-cover και $f': C' \longrightarrow M$ ένα $\mathcal{C}$-precover ενός προτύπου M. Τότε*

1. *$C' = D \oplus D'$, όπου $D \subseteq \operatorname{Ker} f'$ και $f'|D'$ ένα $\mathcal{C}$-cover του M.*

2. *Το f' είναι ένα $\mathcal{C}$-cover του M, αν και μόνο αν ο μοναδικός ευθύς προσθετέος του C' που περιέχεται στο $\operatorname{Ker} f'$ είναι ο μηδενικός.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του Λήμματος (4.1.3). □

Παρατήρηση 4.1.7. Ένα $\mathcal{C}$-cover $f: C \longrightarrow M$ δεν είναι απαραίτητα επιμορφισμός, αλλά εάν το M είναι ομομορφική εικόνα κάποιου προτύπου $C \in \mathcal{C}$, τότε κάθε $\mathcal{C}$-precover του M είναι επιμορφισμός. Για παράδειγμα αυτό συμβαίνει για κάθε πρότυπο M αν (και μόνον αν) η κλάση $\mathcal{C}$ περιέχει όλα τα προβολικά πρότυπα.

Ομοίως, ένα $\mathcal{C}$-envelope $f: M \longrightarrow C$ δεν είναι απαραίτητα μονομορφισμός, αλλά εάν το M μπορεί να εμφυτευθεί σε κάποιο πρότυπο $C \in \mathcal{C}$, τότε κάθε $\mathcal{C}$-preenvelope του M είναι μονομορφισμός. Για παράδειγμα αυτό συμβαίνει για κάθε πρότυπο M αν (και μόνον αν) η κλάση $\mathcal{C}$ περιέχει όλα τα ενέσιμα πρότυπα.

Ας περάσουμε τώρα στο εξής ερώτημα: Πότε το ευθύ άθροισμα από envelopes (αντίστοιχα covers) είναι ξανά envelope (αντίστοιχα cover); Προτού δώσουμε απάντηση σε αυτό το ερώτημα θα αναφέρουμε μία παρατήρηση που θα μας χρειαστεί.

Παρατήρηση 4.1.8. Έστω C_1, C_2 δύο αριστερά R-πρότυπα και $p_i: C_1 \oplus C_2 \longrightarrow C_i$, $i = 1, 2$ οι κανονικές προβολές και $q_i: C_i \longrightarrow C_1 \oplus C_2$, $i = 1, 2$ οι κανονικές εγκλείσεις. Για έναν ενδομορφισμό $f: C_1 \oplus C_2 \longrightarrow C_1 \oplus C_2$ ορίζουμε ομομορφισμούς αριστερών R-προτύπων

$$f_{ij}: C_j \longrightarrow C_i \ \text{ με } f_{ij} = p_i \circ f \circ q_j$$

Γράφοντας τα στοιχεία του $C_1 \oplus C_2$ ως στήλες $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ όπου $c_1 \in C_1, c_2 \in C_2$, μπορούμε να εκφράσουμε τον ενδομορφισμό f ως πίνακα

$$f = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$$

Αντίστροφα, εάν έχουμε ομομορφισμούς αριστερών R-προτύπων $f_{ij}: C_j \longrightarrow C_i$, ο παραπάνω πίνακας f ορίζει έναν ενδομορφισμό στο $C_1 \oplus C_2$ με $f_{ij} = p_i \circ f \circ q_j$.

Επιπλέον, αν οι ενδομορφισμοί $f, g\colon C_1 \oplus C_2 \longrightarrow C_1 \oplus C_2$ έχουν την μορφή

$$f = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ 0 & f_{22} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad g = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

αντίστοιχα, όπου $f_{11}, g_{11}\colon C_1 \longrightarrow C_1$ και $f_{22}, g_{22}\colon C_2 \longrightarrow C_2$ είναι αυτομορφισμοί, τότε f και g είναι επίσης αυτομορφισμοί με αντίστροφους

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} f_{11}^{-1} & -f_{11}^{-1} f_{12} f_{22}^{-1} \\ 0 & f_{22}^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} g_{11}^{-1} & 0 \\ -g_{22}^{-1} g_{21} g_{11}^{-1} & g_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

αντίστοιχα.

Η πρόταση που ακολουθεί μας αποδεικνύει ότι το πεπερασμένο ευθύ άθροισμα από $\mathcal{C}$-envelopes είναι ξανά $\mathcal{C}$-envelope όταν η κλάση $\mathcal{C}$ είναι κλειστή κάτω από πεπερασμένα ευθέα αθροίσματα.

Πρόταση 4.1.9. *Ας υποθέσουμε ότι η κλάση $\mathcal{C}$ είναι κλειστή κάτω από πεπερασμένα ευθέα αθροίσματα και έστω $f_i\colon M_i \longrightarrow C_i$ ένα $\mathcal{C}$-(pre)envelope ενός αριστερού R-προτύπου M_i, για $i = 1, 2$. Τότε $f_1 \oplus f_2\colon M_1 \oplus M_2 \longrightarrow C_1 \oplus C_2$ είναι ένα $\mathcal{C}$-(pre)envelope του $M_1 \oplus M_2$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι κάθε $f_i\colon M_i \longrightarrow C_i$ είναι ένα $\mathcal{C}$-preenvelope. Έστω

$$f'\colon M_1 \oplus M_2 \longrightarrow C'$$

μία απεικόνιση με $C' \in \mathcal{C}$. Εάν $p_i\colon M_i \longrightarrow M_1 \oplus M_2$ είναι η κανονική προβολή τότε επειδή $f_i\colon M_i \longrightarrow C_i$ είναι ένα $\mathcal{C}$-preenvelope έχουμε ότι υπάρχει απεικόνιση $g_i\colon C_i \longrightarrow C'$ τέτοια ώστε $f' \circ p_i = g_i \circ f_i$. Τότε εάν $g\colon C_1 \oplus C_2 \longrightarrow C'$ είναι η μοναδική απεικόνιση τέτοια ώστε $g|C_i = g_i$, τότε $f' = g \circ (f_1 \oplus f_2)$. Επομένως, $f_1 \oplus f_2\colon M_1 \oplus M_2 \longrightarrow C_1 \oplus C_2$ είναι ένα $\mathcal{C}$-preenvelope του $M_1 \oplus M_2$.

Τώρα ας υποθέσουμε ότι κάθε $f_i\colon M_i \longrightarrow C_i$ είναι ένα $\mathcal{C}$-envelope. Έστω $g\colon C_1 \oplus C_2 \longrightarrow C_1 \oplus C_2$ ένας ενδομορφισμός τέτοιος ώστε $f_1 \oplus f_2 = g \circ (f_1 \oplus f_2)$. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι ο g είναι αυτομορφισμός. Γράφοντας τον g σε μορφή πίνακα

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

θα έχουμε για κάθε $m_1 \in M_1$ και $m_2 \in M_2$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_1(m_1) \\ f_2(m_2) \end{pmatrix} &= (f_1 \oplus f_2)(m_1, m_2) = (g \circ (f_1 \oplus f_2))(m_1, m_2) \\ &= \begin{pmatrix} g_{11} f_1(m_1) + g_{12} f_2(m_2) \\ g_{21} f_1(m_1) + g_{22} f_2(m_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Επομένως,

$$f_1(m_1) = g_{11} f_1(m_1) + g_{12} f_2(m_2), \; f_2(m_2) = g_{21} f_1(m_1) + g_{22} f_2(m_2)$$

Άρα, $f_1 = g_{11} f_1$, $0 = g_{12} f_2$, $f_2 = g_{22} f_2$, $0 = g_{21} f_1$. Έτσι έχουμε ότι g_{11} και g_{22} είναι αυτομορφισμοί και επειδή $0 = g_{12} f_2$ έχουμε ότι $f_2 = (-g_{21} g_{11}^{-1} g_{12} + g_{22}) f_2$. Επομένως, $-g_{21} g_{11}^{-1} g_{12} + g_{22}$ είναι επίσης αυτομορφισμός. Τώρα θεωρούμε τον πολλαπλασιασμό πινάκων

$$\begin{pmatrix} 1_{C_1} & 0 \\ -g_{21} g_{11}^{-1} & 1_{C_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ 0 & -g_{21} g_{11}^{-1} g_{12} + g_{22} \end{pmatrix}$$

Από την προηγούμενη παρατήρηση έχουμε ότι οι ομομορφισμοί

$$\begin{pmatrix} 1_{C_1} & 0 \\ -g_{21} g_{11}^{-1} & 1_{C_2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ 0 & -g_{21} g_{11}^{-1} g_{12} + g_{22} \end{pmatrix}$$

είναι αυτομορφισμοί. Επομένως και ο ομομορφισμός g είναι αυτομορφισμός. □

Ομοίως θα έχουμε:

Πρόταση 4.1.10. *Ας υποθέσουμε ότι η κλάση $\mathcal{C}$ είναι κλειστή κάτω από πεπερασμένα ευθέα αθροίσματα και έστω $f_i\colon C_i \longrightarrow M_i$ ένα $\mathcal{C}$-(pre)cover ενός αριστερού R-προτύπου M_i, για $i = 1, 2$. Τότε $f_1 \oplus f_2\colon C_1 \oplus C_2 \longrightarrow M_1 \oplus M_2$ είναι ένα $\mathcal{C}$-(pre)cover του $M_1 \oplus M_2$.*

Τα παραπάνω θέτουν φυσιολογικά το ερώτημα: πότε ο δακτύλιος R ή η κατηγορία R-Mod έχει αρκετά $\mathcal{C}$-(pre)envelopes ή/και αρκετά $\mathcal{C}$-(pre)covers;

Ορισμός 4.1.11. *Μία κλάση προτύπων $\mathcal{C} \subseteq R$-Mod καλείται* **(pre)enveloping** *εάν κάθε αριστερό R-πρότυπο έχει ένα $\mathcal{C}$-(pre)envelope και καλείται* **(pre)covering** *εάν κάθε αριστερό R-πρότυπο έχει ένα $\mathcal{C}$-(pre)cover.*

Παράδειγμα 4.1.12.

1. Η κλάση R-Inj των ενέσιμων αριστερών R-προτύπων είναι enveloping κλάση, βλέπε Θεώρημα (4.4.3).
2. Έστω R-Proj η κλάση των προβολικών αριστερών R-προτύπων. Κάθε αριστερό R-πρότυπο M έχει ένα R-Proj-precover διότι κάθε πρότυπο είναι επιμορφική εικόνα ενός προβολικού προτύπου. Έτσι, η κλάση R-Proj είναι πάντα precovering κλάση και θα δούμε σε επόμενη ενότητα ότι είναι covering κλάση αν και μόνο αν ο δακτύλιος R είναι «αριστερά τέλειος» (left perfect).

Παρατήρηση 4.1.13. Τα $\mathcal{C}$-preenvelopes και τα $\mathcal{C}$-precovers καλούνται επίσης **αριστερές (left)** και **δεξιές προσεγγίσεις (right approximations)** ενώ τα $\mathcal{C}$-envelopes και τα $\mathcal{C}$-covers λέγονται **ελάχιστες αριστερές (minimal left)** και **ελάχιστες δεξιές προσεγγίσεις (minimal right approximations)** .

Επίσης στην βιβλιογραφία ο όρος preenveloping κλάση προτύπων απαντάται και ως **covariantly finite** κλάση προτύπων, και ο όρος precovering κλάση προτύπων απαντάται και ως **contravariantly finite** κλάση προτύπων, βλέπε [3].

Θα δείξουμε τώρα ότι υπό κάποιες προϋποθέσεις, τα $\mathcal{C}$-covers και τα $\mathcal{C}$-envelopes ικανοποιούν επιπλέον ιδιότητες. Πρώτα χρειαζόμαστε κάποιους ορισμούς.

Ορισμός 4.1.14. *Ορίζουμε:*

$$\mathcal{C}^{\perp} = \{N \in R\text{-Mod} \mid \mathrm{Ext}^1_R(C, N) = 0, \text{για κάθε } C \in \mathcal{C}\}$$

$$^{\perp}\mathcal{C} = \{N \in R\text{-Mod} \mid \mathrm{Ext}^1_R(N, C) = 0, \text{για κάθε } C \in \mathcal{C}\}.$$

Η κλάση προτύπων $\mathcal{C}^{\perp}$ καλείται η **δεξιά ορθογώνια κλάση** *του $\mathcal{C}$ και η κλάση προτύπων $^{\perp}\mathcal{C}$ καλείται η* **αριστερή ορθογώνια κλάση** *του $\mathcal{C}$.*

Παρατήρηση 4.1.15. Για οποιαδήποτε κλάση προτύπων $\mathcal{C} \subseteq R$-Mod, ισχύει ότι:

$$\mathcal{C} \subset {}^{\perp}(\mathcal{C}^{\perp}) \quad \& \quad \mathcal{C} \subset ({}^{\perp}\mathcal{C})^{\perp}$$

Επιπλέον, εάν $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$ έπεται ότι $^{\perp}\mathcal{C}_2 \subset {}^{\perp}\mathcal{C}_1$ και $\mathcal{C}_2^{\perp} \subset \mathcal{C}_1^{\perp}$. Επομένως, για κάθε κλάση $\mathcal{C}$ ισχύει ότι:

$$\mathcal{C}^{\perp} = ({}^{\perp}(\mathcal{C}^{\perp}))^{\perp} \quad \& \quad {}^{\perp}\mathcal{C} = {}^{\perp}(({}^{\perp}\mathcal{C})^{\perp})$$

Ορισμός 4.1.16. *Ένα $\mathcal{C}$-preenvelope $f\colon M \longrightarrow C$ του M καλείται* **ειδικό (special preenvelope)** *εάν η f είναι μονομορφισμός και $\mathrm{Coker}\, f \in {}^{\perp}\mathcal{C}$. Έτσι, ένα ειδικό $\mathcal{C}$-preenvelope μπορεί να ιδωθεί ως μία ακριβής ακολουθία*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} C \longrightarrow D \longrightarrow 0$$

με $C \in \mathcal{C}$ και $D \in {}^{\perp}\mathcal{C}$.

Δυϊκά, ένα $\mathcal{C}$-precover $f\colon C \longrightarrow M$ του M καλείται **ειδικό (special precover)** *, εάν η f είναι επιμορφισμός και $\mathsf{Ker}\, f \in \mathcal{C}^{\perp}$. Δηλαδή ένα ειδικό $\mathcal{C}$-precover μπορεί να ιδωθεί ως μία ακριβής ακολουθία*

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow C \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$$

με $C \in \mathcal{C}$ και $B \in \mathcal{C}^{\perp}$.

Παρατήρηση 4.1.17. Εάν $\mathcal{C}$ είναι μία κλάση προτύπων τέτοια ώστε κάθε πρότυπο M έχει ένα ειδικό $\mathcal{C}$-preenvelope (ειδικό $\mathcal{C}$-precover) τότε η $\mathcal{C}$ καλείται **ειδική preenveloping** (**ειδική precovering**) κλάση .

Ορισμός 4.1.18. *Μία κλάση $\mathcal{C}$ είναι* **κλειστή στις επεκτάσεις** *εάν για κάθε ακριβή ακολουθία αριστερών R-προτύπων*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

με $M, L \in \mathcal{C}$, ισχύει ότι $N \in \mathcal{C}$.

Το ακόλουθο Λήμμα είναι γνωστό ως Λήμμα του Wakamatsu. Μας αποδεικνύει ότι κάτω από κάποιες υποθέσεις στην κλάση $\mathcal{C}$, τα $\mathcal{C}$-covers και τα $\mathcal{C}$-envelopes είναι ειδικά.

Λήμμα 4.1.19. *(**Λήμμα του Wakamatsu**) Έστω M ένα αριστερό R-πρότυπο και $\mathcal{C}$ μία κλάση προτύπων κλειστή στις επεκτάσεις.*

1. *Έστω $f\colon M \longrightarrow C$ ένα $\mathcal{C}$-envelope του M, το οποίο είναι μονομορφισμός. Τότε το f είναι ειδικό.*

2. *Έστω $f\colon C \longrightarrow M$ ένα $\mathcal{C}$-cover του M, το οποίο είναι επιμορφισμός. Τότε το f είναι ειδικό.*

Απόδειξη. 1. Από την υπόθεση, υπάρχει μία ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} D \longrightarrow 0.$$

Θα αποδείξουμε ότι το $D \in {}^{\perp}\mathcal{C}$, δηλαδή ότι $\mathsf{Ext}^1_R(D, C') = 0$ για κάθε $C' \in \mathcal{C}$. Από το Θεώρημα (2.3.19) αρκεί να αποδείξουμε ότι μία τυχαία επέκταση

$$0 \longrightarrow C' \xrightarrow{k} X \xrightarrow{h} D \longrightarrow 0$$

με $C' \in \mathcal{C}$ είναι διασπάσιμη. Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση h διασπάται. Θεωρούμε το pullback των απεικονίσεων g και h:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & C' \arrow[r, equal] \arrow[d] & C' \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & P \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"] & X \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] & C \arrow[r, "g"] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Επειδή $C, C' \in \mathcal{C}$ και η κλάση $\mathcal{C}$ είναι κλειστή στις επεκτάσεις έχουμε ότι το $P \in \mathcal{C}$. Επομένως, επειδή η f είναι ένα $\mathcal{C}$-envelope του M,

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & C \arrow[dl, dashed, "\delta"] \\ P & \end{tikzcd}$$

υπάρχει ένας ομομορφισμός $\delta\colon C \longrightarrow P$ τέτοιος ώστε $\alpha = \delta \circ f$. Τότε $f = \gamma \circ \alpha = \gamma \circ \delta \circ f$, επομένως ο ομομορφισμός $\gamma \circ \delta$ είναι ένας αυτομορφισμός στο C.

Ορίζουμε $i\colon D \longrightarrow X$ ως $i(g(c)) = \beta \circ \delta \circ (\gamma \circ \delta)^{-1}(c)$. Η απεικόνιση αυτή είναι καλά ορισμένη, διότι εάν $g(c) = g(c')$ τότε $c - c' \in \mathsf{Ker}\, g = \mathsf{Im}\, f$, άρα υπάρχει $m \in M$ τέτοιο ώστε $f(m) = c - c'$ και επιπλέον

$$\delta \circ (\gamma \circ \delta)^{-1} \circ f(m) = \delta \circ (\gamma \circ \delta)^{-1} \circ \gamma \circ \delta \circ f(m) = \delta \circ f(m) = \alpha(m).$$

Επομένως,

$$\beta \circ \delta \circ (\gamma \circ \delta)^{-1}(c - c') = \beta \circ \delta \circ (\gamma \circ \delta)^{-1} \circ f(m) = \beta \circ \alpha(m) = 0$$

και έτσι $\beta \circ \delta \circ (\gamma \circ \delta)^{-1}(c) = \beta \circ \delta \circ (\gamma \circ \delta)^{-1}(c')$.

Επιπλέον,

$$h \circ i \circ g = h \circ \beta \circ \delta \circ (\gamma \circ \delta)^{-1} = g \circ \gamma \circ \delta \circ (\gamma \circ \delta)^{-1} = g$$

και επειδή η g είναι επιμορφισμός έχουμε ότι $h \circ i = \mathrm{Id}_D$. Επομένως, η απεικόνιση h διασπάται.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του 1. □

4.2 Συστρεπτικά Ζεύγη

Σε αυτή την ενότητα θα εισάγουμε την έννοια του συστρεπτικού ζεύγους (cotorsion pair) κλάσεων προτύπων η οποία διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην ομολογική άλγεβρα και ιδιαίτερα, όπως θα δούμε αργότερα, στην θεωρία προσεγγίσεων. Η έννοια του συστρεπτικού ζεύγους εισήχθηκε από τον Luigi Salce το 1979 στα πλαίσια της κατηγορίας των αβελιανών ομάδων.

Ορισμός 4.2.1. *Έστω $\mathcal{F}, \mathcal{C}$ δύο κλάσεις αριστερών R-προτύπων. Το ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ καλείται* **συστρεπτικό ζεύγος (cotorsion pair)** *εάν $\mathcal{F}^{\perp} = \mathcal{C}$ και ${}^{\perp}\mathcal{C} = \mathcal{F}$.*

Όπως θα δούμε αργότερα πολλά συστρεπτικά ζεύγη "συν-παράγονται" από σύνολα ή κλάσεις προτύπων με την ακόλουθη έννοια.

Ορισμός 4.2.2. *Μία κλάση $\mathcal{D}$ λέμε ότι* **παράγει (generate)** *το συστρεπτικό ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ εάν ${}^{\perp}\mathcal{D} = \mathcal{F}$ και μία κλάση $\mathcal{G}$ λέμε ότι* **συνπαράγει (cogenerate)** *το συστρεπτικό ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ εάν $\mathcal{G}^{\perp} = \mathcal{C}$.*

Ορισμός 4.2.3. *Εάν $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ είναι ένα συστρεπτικό ζεύγος, τότε η κλάση $\mathcal{K} = \mathcal{F} \cap \mathcal{C}$ καλείται* **πυρήνας** *του συστρεπτικού ζεύγους $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$.*

Παρατήρηση 4.2.4. Κάθε πρότυπο K το οποίο ανήκει στον πυρήνα του συστρεπτικού ζεύγους $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ ικανοποιεί τη σχέση $\mathsf{Ext}^1_R(K, K) = 0$.

Ας περάσουμε σε κάποια παραδείγματα συστρεπτικών ζευγών.

Παράδειγμα 4.2.5. Εάν R-Mod συμβολίζει την κλάση των αριστερών R-προτύπων και R-Inj, R-Proj συμβολίζουν τις κλάσεις των ενέσιμων και προβολικών αριστερών R-προτύπων αντίστοιχα, τότε τα ζεύγη

$$(R\text{-Mod}, R\text{-Inj}) \quad \& \quad (R\text{-Proj}, R\text{-Mod})$$

είναι συστρεπτικά ζεύγη με πυρήνες R-Inj και R-Proj αντίστοιχα. Αυτά τα ζεύγη καλούνται **τετριμμένα συστρεπτικά ζεύγη** .

Σημειώνουμε ότι επειδή $(R\text{-Proj})^{\perp} = R\text{-Mod}$ και ${}^{\perp}(R\text{-Mod}) = R\text{-Proj}$, έπεται ότι το συστρεπτικό ζεύγος $(R\text{-Proj}, R\text{-Mod})$ συνπαράγεται από την κλάση των προβολικών προτύπων. Επιπλέον, το συστρεπτικό ζεύγος $(R\text{-Mod}, R\text{-Inj})$ συνπαράγεται από το σύνολο

$$\mathcal{G} = \{R/I \in R\text{-Mod} \mid I \text{ αριστερό ιδεώδες}\}$$

και παράγεται από την κλάση των ενέσιμων αριστερών R-προτύπων. Αυτό οφείλεται στην ισοδυναμία

$$E \text{ ενέσιμο αριστερό } R\text{-πρότυπο} \Leftrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(R/I, E) = 0, \forall \text{αριστερό ιδεώδες } I \subseteq R$$

και στο γεγονός ότι ${}^{\perp}(R\text{-Inj}) = R\text{-Mod}$.

Συνεχίζουμε με κάποιες παρατηρήσεις που αφορούν ιδιότητες των κλάσεων προτύπων $\mathcal{F}$ και $\mathcal{C}$ σε ένα συστρεπτικό ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$.

Παρατήρηση 4.2.6. Εάν $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ είναι ένα συστρεπτικό ζεύγος τότε:

1. Οι κλάσεις $\mathcal{F}, \mathcal{C}$ είναι κλειστές στις επεκτάσεις και στους ευθείς προσθετέους.
2. Η κλάση $\mathcal{F}$ περιέχει όλα τα προβολικά πρότυπα ενώ η κλάση $\mathcal{C}$ περιέχει όλα τα ενέσιμα πρότυπα.
3. Η κλάση $\mathcal{F}$ είναι κλειστή κάτω από (άπειρα ή πεπερασμένα) ευθέα αθροίσματα και η κλάση $\mathcal{C}$ κάτω από (άπειρα ή πεπερασμένα) ευθέα γινόμενα. Πραγματικά αυτό προκύπτει από τους φυσικούς ισομορφισμούς:
$$\prod_{i\in I} \mathrm{Ext}^1_R(F_i, N) \;\cong\; \mathrm{Ext}^1_R(\bigoplus_{i\in I} F_i, N)$$
και
$$\mathrm{Ext}^1_R(M, \prod\nolimits_{i\in I} C_i) \;\cong\; \prod_{i\in I} \mathrm{Ext}^1_{R}, (M, C_i)$$
4. Εάν το ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ παράγεται από ένα σύνολο X τότε το ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ παράγεται από το πρότυπο $\prod_{M\in X} M$. Ενώ, εάν το ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ συνπαράγεται από ένα σύνολο X τότε συνπαράγεται από το πρότυπο $\oplus_{M\in X} M$.

Τώρα θα ορίσουμε ένα συστρεπτικό ζεύγος το οποίο θα μας φανεί πολύ χρήσιμο στη συνέχεια της διατριβής. Ας περάσουμε όμως πρώτα σε κάποιους ορισμούς που θα μας χρειαστούν.

Ορισμός 4.2.7. *Ένα αριστερό R-πρότυπο M καλείται* **συστρεπτικό (cotorsion)** *εάν*

$$\mathrm{Ext}^1_R(F, M) = 0$$

για κάθε επίπεδο αριστερό R-πρότυπο F.

Με άλλα λόγια αν συμβολίσουμε με R-Flat την κλάση των επίπεδων αριστερών R-προτύπων και R-Cotor την κλάση των συστρεπτικών αριστερών R-προτύπων, τότε:

$$(R\text{-Flat})^{\perp} = R\text{-Cotor}$$

Πρόταση 4.2.8. *Εάν M είναι ένα συστρεπτικό αριστερό R-πρότυπο, τότε*

$$\mathsf{Ext}^i_R(F, M) = 0$$

για όλα τα επίπεδα αριστερά R-πρότυπα F και για κάθε $i \geq 1$.

Απόδειξη. Έστω F ένα επίπεδο αριστερό R-πρότυπο και

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{a_{i-1}} P_{i-2} \xrightarrow{a_{i-2}} P_{i-3} \xrightarrow{a_{i-3}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{a_1} P_0 \xrightarrow{a_0} F \longrightarrow 0$$

μία ακριβής ακολουθία με κάθε P_i προβολικό, όπου $i \geq 2$. Αν αναλύσουμε αυτή την ακολουθία θα έχουμε τις εξής σύντομες ακριβείς ακολουθίες :

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P_{i-2} \longrightarrow K_{i-3} \longrightarrow 0 \tag{4.1}$$

$$0 \longrightarrow K_{i-3} \longrightarrow P_{i-3} \longrightarrow K_{i-4} \longrightarrow 0 \tag{4.2}$$

$$\vdots$$

$$0 \longrightarrow K_2 \longrightarrow P_2 \longrightarrow K_1 \longrightarrow 0 \tag{4.3}$$

$$0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow P_1 \longrightarrow K_0 \longrightarrow 0 \tag{4.4}$$

$$0 \longrightarrow K_0 \longrightarrow P_0 \longrightarrow F \longrightarrow 0 \tag{4.5}$$

όπου $K_j = \mathsf{Ker}\, a_j$, $j = 0, \ldots, i-3$, $i \geq 2$. Τότε, αν εφαρμόσουμε το Πόρισμα $(3.2.7)$ στην (4.5) έχουμε ότι το K_0 είναι επίπεδο εφόσον τα P_0, F είναι επίπεδα. Ομοίως στην (4.4) θα έχουμε ότι το K_1 είναι επίπεδο και συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία, θα φτάσουμε στην (4.1) και θα έχουμε ότι το K είναι επίπεδο.

Τώρα, αν εφαρμόσουμε την Πρόταση $(2.3.20)$ στην (4.1) θα έχουμε την εξής μακρά ακριβή ακολουθία για κάθε συστρεπτικό αριστερό R-πρότυπο M:

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(K_{i-3}, M) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(P_{i-2}, M) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(K, M) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathsf{Ext}^1_R(K_{i-3}, M) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_R(P_{i-2}, M) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_R(K, M) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathsf{Ext}^2_R(K_{i-3}, M) \longrightarrow \mathsf{Ext}^2_R(P_{i-2}, M) \longrightarrow \mathsf{Ext}^2_R(K, M) \longrightarrow \cdots$$

Όμως επειδή το M είναι συστρεπτικό, το K_{i-3} είναι επίπεδο και το P_{i-2} είναι προβολικό έχουμε ότι: $\mathsf{Ext}^1_R(K_{i-3}, M) = \mathsf{Ext}^1_R(P_{i-2}, M) = \mathsf{Ext}^2_R(P_{i-2}, M) = 0$. Επομένως θα έχουμε ότι $\mathsf{Ext}^1_R(K, M) \cong \mathsf{Ext}^2_R(K_{i-3}, M)$. Εφαρμόζοντας την Πρόταση $(2.3.20)$ και στις άλλες ακριβείς ακολουθίες θα έχουμε τα εξής:

$$\begin{aligned}
\mathsf{Ext}^1_R(K, M) &\cong \mathsf{Ext}^2_R(K_{i-3}, M) \\
\mathsf{Ext}^2_R(K_{i-3}, M) &\cong \mathsf{Ext}^3_R(K_{i-4}, M) \\
&\vdots \\
\mathsf{Ext}^{i-3}_R(K_2, M) &\cong \mathsf{Ext}^{i-2}_R(K_1, M) \\
\mathsf{Ext}^{i-2}_R(K_1, M) &\cong \mathsf{Ext}^{i-1}_R(K_0, M) \\
\mathsf{Ext}^{i-1}_R(K_0, M) &\cong \mathsf{Ext}^{i}_R(F, M)
\end{aligned}$$

Άρα θα έχουμε ότι $\mathsf{Ext}^1_R(K, M) \cong \mathsf{Ext}^i_R(F, M)$ και επειδή το K είναι επίπεδο και το M συστρεπτικό, δηλαδή $\mathsf{Ext}^1_R(K, M) = 0$, θα έχουμε ότι $\mathsf{Ext}^i_R(F, M) = 0$, $i \geq 2$. □

Ορισμός 4.2.9. *Ένα αριστερό R-πρότυπο M καλείται* **καθαρά ενέσιμο (pure injective)** *εάν για κάθε καθαρά ακριβή ακολουθία*

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

αριστερών R-προτύπων, η ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(L, M) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(K, M) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(J, M) \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής.

*Συμβολίζουμε με R-*PInj *την πλήρη υποκατηγορία της R-*Mod *η οποία αποτελείται από τα καθαρά ενέσιμα αριστερά R-πρότυπα.*

Παρατήρηση 4.2.10. Προφανώς κάθε ενέσιμο πρότυπο είναι καθαρά ενέσιμο.

Παρατήρηση 4.2.11. Επειδή ο συναρτητής $\mathsf{Hom}_R(-, M)$ είναι αριστερά ακριβής, τότε το M είναι καθαρά ενέσιμο αν και μόνο αν η ακολουθία

$$\mathsf{Hom}_R(K, M) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(J, M) \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής για όλους τους καθαρούς μονομορφισμούς $0 \longrightarrow J \longrightarrow K$.

Λήμμα 4.2.12. *Κάθε καθαρά ενέσιμο αριστερό R-πρότυπο είναι συστρεπτικό. Επομένως έχουμε εγκλείσεις:*

$$R\text{-}\mathsf{Inj} \ \subseteq \ R\text{-}\mathsf{PInj} \ \subseteq \ R\text{-}\mathsf{Cotor}$$

Απόδειξη. Έστω M ένα καθαρά ενέσιμο αριστερό R-πρότυπο και

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

μία σύντομη προβολική ανάλυση ενός επίπεδου αριστερού R-προτύπου F. Θα αποδείξουμε ότι είναι καθαρά ακριβής. Έστω X ένα τυχαίο δεξιό R-πρότυπο. Από το Θεώρημα (2.3.11), υπάρχει μία μακρά ακριβής ακολουθία

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{Tor}_1^R(X, K) \longrightarrow \mathsf{Tor}_1^R(X, P) \longrightarrow \mathsf{Tor}_1^R(X, F) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow X \otimes_R K \longrightarrow X \otimes_R P \longrightarrow X \otimes_R F \longrightarrow 0$$

Τότε επειδή το F είναι επίπεδο αριστερό R-πρότυπο έχουμε ότι $\mathsf{Tor}_n^R(X, F) = 0, \ \forall n \geq 1$. Επομένως η ακολουθία

$$0 \longrightarrow X \otimes_R K \longrightarrow X \otimes_R P \longrightarrow X \otimes_R F \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής. Άρα η ακολουθία $0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow F \longrightarrow 0$ είναι καθαρά ακριβής εφόσον το X ήταν τυχαίο πρότυπο.

Τώρα επειδή το M είναι καθαρά ενέσιμο αριστερό R-πρότυπο, έχουμε ότι η ακολουθία

$$\mathsf{Hom}_R(P, M) \xrightarrow{\beta} \mathsf{Hom}_R(K, M) \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής. Από την Πρόταση (2.3.20) υπάρχει μία μακρά ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(F, M) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(P, M) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(K, M) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathsf{Ext}_R^1(F, M) \longrightarrow \mathsf{Ext}_R^1(P, M) \longrightarrow \mathsf{Ext}_R^1(K, M) \longrightarrow \cdots$$

Όμως, επειδή τα πρότυπα P, K είναι προβολικά έχουμε ότι

$$\mathsf{Ext}^1_R(P, M) = 0 = \mathsf{Ext}^1_R(K, M).$$

Επομένως η ακολουθία που προκύπτει είναι η εξής:

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(F, M) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(P, M) \xrightarrow{\beta} \mathsf{Hom}_R(K, M) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_R(F, M) \longrightarrow 0$$

Επειδή η β είναι επιμορφισμός έχουμε ότι $\mathsf{Ext}^1_R(F, M) = 0$ και έτσι το M είναι συστρεπτικό πρότυπο. □

Λήμμα 4.2.13. *Εάν M_1 είναι ένας ευθύς προσθετέος ενός καθαρά ενέσιμου αριστερού R-προτύπου M, τότε το M_1 είναι καθαρά ενέσιμο αριστερό R-πρότυπο.*

Απόδειξη. Έστω ότι $M = M_1 \oplus M_2$ για κάποιο αριστερό R-πρότυπο M_2. Θεωρούμε την καθαρά ακριβή ακολουθία $0 \longrightarrow J \longrightarrow K$. Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία

$$\mathsf{Hom}_R(K, M_1) \xrightarrow{\mu} \mathsf{Hom}_R(J, M_1) \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής. Έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hom}_R(K, M) \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\phi"] & \mathsf{Hom}_R(J, M) \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & 0 \\
\mathsf{Hom}_R(K, M_1) \oplus \mathsf{Hom}_R(K, M_2) \arrow[r, "\lambda"] & \mathsf{Hom}_R(J, M_1) \oplus \mathsf{Hom}_R(J, M_2) &
\end{tikzcd}$$

όπου ϕ, ψ είναι ισομορφισμοί και ο ομομορφισμός k είναι επιμορφισμός επειδή το M είναι καθαρά ενέσιμο αριστερό R-πρότυπο. Επομένως θα έχουμε ότι $\lambda \circ \phi = \psi \circ k$ και έτσι ο ομομορφισμός λ είναι επιμορφισμός. Επιπλέον έχουμε το εξής μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hom}_R(K, M_1) \oplus \mathsf{Hom}_R(K, M_2) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\pi"] & \mathsf{Hom}_R(J, M_1) \oplus \mathsf{Hom}_R(J, M_2) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\pi}"] & 0 \\
\mathsf{Hom}_R(K, M_1) \arrow[r, "\mu"] & \mathsf{Hom}_R(J, M_1) &
\end{tikzcd}$$

όπου $\pi, \bar{\pi}$ είναι οι κανονικές προβολές. Επομένως θα έχουμε ότι $\mu \circ \pi = \bar{\pi} \circ \lambda$ και έτσι ο ομομορφισμός μ είναι επιμορφισμός. Άρα, η ακολουθία

$$\mathsf{Hom}_R(K, M_1) \xrightarrow{\mu} \mathsf{Hom}_R(J, M_1) \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής. □

Πρόταση 4.2.14. *Για κάθε αριστερό R-πρότυπο M, το πρότυπο χαρακτήρων M^+ είναι ένα καθαρά ενέσιμο δεξιό R-πρότυπο.*

Απόδειξη. Έστω $0 \longrightarrow J \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow 0$ μία καθαρά ακριβής ακολουθία δεξιών R-προτύπων. Για να αποδείξουμε ότι το πρότυπο χαρακτήρων M^+ είναι ένα καθαρά ενέσιμο δεξιό R-πρότυπο πρέπει να αποδείξουμε ότι η ακολουθία

$$\mathsf{Hom}_R(K, M^+) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(J, M^+) \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής. Δηλαδή, ότι η ακολουθία

$$\mathsf{Hom}_R(K, \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(J, \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής. Όμως από το Θεώρημα (3.1.14) έχουμε φυσικούς ισομορφισμούς

$$\mathsf{Hom}_R(K, \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \cong \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(K \otimes_R M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

και

$$\mathsf{Hom}_R(J, \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \cong \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(J \otimes_R M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι η ακολουθία

$$\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(K \otimes_R M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(J \otimes_R M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής. Όμως επειδή η ακολουθία $0 \longrightarrow J \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow 0$ είναι καθαρά ακριβής έχουμε ότι η ακολουθία

$$0 \longrightarrow J \otimes_R M \longrightarrow K \otimes_R M \longrightarrow L \otimes_R M \longrightarrow 0 \tag{4.6}$$

είναι ακριβής για κάθε αριστερό R-πρότυπο M. Επομένως εάν εφαρμόσουμε τον συναρτητή $\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ στην (4.6), επειδή η αβελιανή ομάδα $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ είναι ενέσιμο $\mathbb{Z}$-πρότυπο, θα πάρουμε την ακριβή ακολουθία

$$\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(K \otimes_R M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(J \otimes_R M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

και επομένως το πρότυπο M^+ είναι καθαρά ενέσιμο δεξιό R-πρότυπο. □

Λήμμα 4.2.15. *Εάν $\mathcal{F} = R$-Flat είναι η κλάση των επίπεδων αριστερών R-προτύπων και $\mathcal{C} = R$-Cotor είναι η κλάση των συστρεπτικών αριστερών R-προτύπων, τότε το ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ είναι συστρεπτικό.*

Απόδειξη. Επειδή $\mathcal{C}$ είναι η κλάση των συστρεπτικών προτύπων έχουμε ότι $\mathcal{C} = \mathcal{F}^{\perp}$ διότι $\mathcal{C} = \{M \in R\text{-}\mathsf{Mod} \mid \mathsf{Ext}^1_R(F, M) = 0 \ \text{ για κάθε } F \in \mathcal{F}\}$. Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mathcal{F} = {}^{\perp}\mathcal{C}$, δηλαδή ότι ένα τυχαίο $F \in {}^{\perp}\mathcal{C}$ είναι επίπεδο αριστερό R-πρότυπο. Έχουμε ότι $F \in {}^{\perp}\mathcal{C}$ άρα $\mathsf{Ext}^1_R(F, C) = 0$ για κάθε $C \in \mathcal{C}$. Χρησιμοποιώντας την Προηγούμενη Πρόταση και το Λήμμα (4.2.12) έχουμε ότι για κάθε δεξιό R-πρότυπο M, το πρότυπο χαρακτήρων M^+ είναι συστρεπτικό. Επομένως θα έχουμε ότι $\mathsf{Ext}^1_R(F, M^+) = 0$. Έστω $\mathbf{P}_\bullet$ μία deleted προβολική ανάλυση του F. Τότε από το Θεώρημα (3.1.14) και την Πρόταση (2.1.7), επειδή ο συναρτητής $\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ είναι ακριβής (επειδή το $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ είναι ενέσιμο αριστερό $\mathbb{Z}$-πρότυπο), έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathsf{Ext}^1_R(F, M^+) &= \mathsf{Ext}^1_R(F, \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \\
&= \mathsf{H}_1(\mathsf{Hom}_R(\mathbf{P}_\bullet, \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))) \\
&\cong \mathsf{H}_1(\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}((M \otimes_R \mathbf{P}_\bullet, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))) \\
&\cong \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathsf{H}_1(M \otimes_R \mathbf{P}_\bullet), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\
&\cong \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathsf{Tor}^R_1(M, F), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\
&\cong (\mathsf{Tor}^R_1(M, F))^+
\end{aligned}$$

Άρα, $(\mathsf{Tor}^R_1(M, F))^+ = 0$ και έτσι $\mathsf{Tor}^R_1(M, F) = 0$ επειδή η αβελιανή ομάδα $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ είναι ενέσιμος συνγεννήτορας. Επομένως το F είναι επίπεδο αριστερό R-πρότυπο. □

Παρατήρηση 4.2.16. Το συστρεπτικό ζεύγος

$$(R\text{-Flat}, R\text{-Cotor})$$

καλείται **επίπεδο συστρεπτικό ζεύγος** ή **συστρεπτικό ζεύγος του Enochs** καθώς ο Edgar Enochs ήταν αυτός ο οποίος μελέτησε αρχικά το παραπάνω συστρεπτικό ζεύγος σε μια σειρα εργασιών με κυριότερη τη εργασία [11].

Ας περάσουμε τώρα σε ένα πόρισμα που έπεται από το Λήμμα του Wakamatsu.

Πόρισμα 4.2.17. *Έστω R ένας δακτύλιος και $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ ένα συστρεπτικό ζεύγος.*

1. *Αν η κλάση $\mathcal{F}$ είναι covering, τότε η $\mathcal{F}$ είναι ειδική precovering κλάση.*

2. *Αν η κλάση $\mathcal{C}$ είναι enveloping, τότε η $\mathcal{C}$ είναι ειδική preenveloping κλάση.*

Απόδειξη. Επειδή το ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ είναι συστρεπτικό έχουμε ότι οι κλάσεις $\mathcal{F}$,$\mathcal{C}$ είναι κλειστές στις επεκτάσεις και ότι η κλάση $\mathcal{F}$ περιέχει όλα τα προβολικά πρότυπα και η κλάση $\mathcal{C}$ περιέχει όλα τα ενέσιμα πρότυπα. Επομένως, από την Παρατήρηση (4.1.7) έχουμε ότι κάθε $\mathcal{F}$-precover είναι επιμορφισμός και κάθε $\mathcal{C}$-preenvelope είναι μονομορφισμός. Επειδή από υπόθεση κάθε R-πρότυπο έχει $\mathcal{F}$-cover και $\mathcal{C}$-envelope, από το Λήμμα του Wakamatsu θα έχουμε ότι κάθε R-πρότυπο έχει ειδικό $\mathcal{F}$-precover και ειδικό $\mathcal{F}$-preenvelope. □

Συνεχίζουμε με το Λήμμα του Salce το οποίο μας συνδέει τα ειδικά $\mathcal{F}$-precovers με τα ειδικά $\mathcal{C}$-preenvelopes όταν το ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ είναι συστρεπτικό στην κατηγορία των αριστερών R-προτύπων.

Λήμμα 4.2.18. ***(Λήμμα του Salce (1979))*** *Έστω R ένας δακτύλιος και $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ ένα συστρεπτικό ζεύγος στην κατηγορία των αριστερών R-προτύπων. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Κάθε πρότυπο έχει ένα ειδικό $\mathcal{F}$-precover.*

2. *Κάθε πρότυπο έχει ένα ειδικό $\mathcal{C}$-preenvelope.*

Σε αυτή την περίπτωση, το συστρεπτικό ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ καλείται **πλήρες**.

Απόδειξη. $(1 \Rightarrow 2)$ Έστω M ένα αριστερό R-πρότυπο. Επειδή κάθε πρότυπο μπορεί να εμφυτευθεί σε ένα ενέσιμο πρότυπο, υπάρχει μία ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} D \longrightarrow 0$$

με E ενέσιμο πρότυπο. Από υπόθεση, υπάρχει ένα ειδικό $\mathcal{F}$-precover ρ του D

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{j} F \xrightarrow{\rho} D \longrightarrow 0$$

με $C \in \mathcal{C}$ και $F \in \mathcal{F}$. Θεωρούμε το pullback των απεικονίσεων π και ρ:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & M \arrow[r, equal] \arrow[d] & M \arrow[d, "i"] & \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & P \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"] & E \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r, "j"] & F \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Επειδή το E είναι ενέσιμο πρότυπο έχουμε ότι το $E \in \mathcal{C}$. Επιπλέον επειδή το $C \in \mathcal{C}$ και η κλάση $\mathcal{C}$ είναι κλειστή στις επεκτάσεις έχουμε ότι και το $P \in \mathcal{C}$. Έτσι η ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow P \xrightarrow{\gamma} F \longrightarrow 0$$

είναι ένα ειδικό $\mathcal{C}$-preenvelope του M.

$(2 \Rightarrow 1)$ Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του $(1 \Rightarrow 2)$. □

Σε κάποιες περιπτώσεις υπάρχουν οι ελάχιστες προσεγγίσεις, δηλαδή, τα συστρεπτικά ζεύγη είναι «τέλεια» με την έννοια του ακόλουθου ορισμού:

Ορισμός 4.2.19. *Έστω R ένας δακτύλιος και $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ ένα συστρεπτικό ζεύγος.*

1. *Το συστρεπτικό ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ καλείται* **τέλειο***, όταν η κλάση προτύπων $\mathcal{F}$ είναι καλύπτουσα (covering) κλάση και η κλάση προτύπων $\mathcal{C}$ είναι περιβάλλουσα (envelopping) κλάση.*

2. *Το συστρεπτικό ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ καλείται* **κλειστό***, όταν η κλάση προτύπων $\mathcal{F}$ είναι κλειστή στα ευθέα όρια στην κατηγορία των αριστερών R-προτύπων.*

Παρατήρηση 4.2.20. Από το Πόρισμα του Wakamatsu είναι εύκολο να δει κανείς ότι κάθε τέλειο συστρεπτικό ζεύγος είναι πλήρες.

Ένα ενδιαφέρον πρόβλημα το οποίο προκύπτει φυσιολογικά είναι το εξής:

1. Είναι το πλήρες συστρεπτικό ζεύγος $(R\text{-}\mathsf{Mod}, R\text{-}\mathsf{Inj})$ τέλειο;

2. Είναι το πλήρες συστρεπτικό ζεύγος $(R\text{-}\mathsf{Proj}, R\text{-}\mathsf{Mod})$ τέλειο;

3. Είναι το συστρεπτικό ζεύγος $(R\text{-}\mathsf{Flat}, R\text{-}\mathsf{Cotor})$ πλήρες ή τέλειο;

Όπως προκύπτει εύκολα το συστρεπτικό ζεύγος $(R\text{-}\mathsf{Mod}, R\text{-}\mathsf{Inj})$ είναι πλήρες και κλειστό, το συστρεπτικό ζεύγος $(R\text{-}\mathsf{Proj}, R\text{-}\mathsf{Mod})$ είναι πλήρες, και το συστρεπτικό ζεύγος $(R\text{-}\mathsf{Flat}, R\text{-}\mathsf{Cotor})$ είναι κλειστό.

Θα δούμε στην επόμενη ενότητα ότι το συστρεπτικό ζεύγος $(R\text{-}\mathsf{Mod}, R\text{-}\mathsf{Inj})$ είναι τέλειο, το συστρεπτικό ζεύγος $(R\text{-}\mathsf{Proj}, R\text{-}\mathsf{Mod})$ γενικά **δεν** είναι τέλειο, και στο κύριο αποτέλεσμα της διατριβής, βλέπε Κεφάλαιο 6, θα δείξουμε ότι το συστρεπτικό ζεύγος $(R\text{-}\mathsf{Flat}, R\text{-}\mathsf{Cotor})$ είναι πλήρες, τέλειο και κλειστό.

4.3 Γεννήτορες Επεκτάσεων και Ελάχιστες Προσεγγίσεις

Σκοπός μας στην παρούσα ενότητα είναι να δείξουμε ότι αν μια κλάση προτύπων είναι κλειστή στα ευθέα όρια και κάθε πρότυπο έχει ένα precover, τότε έχει και ένα cover. Θα δούμε επίσης διάφορες συνέπειες και εφαρμογές αυτού του σημαντικού αποτελέσματος. Στην απόδειξη ύπαρξης ελάχιστων προσεγγίσεων θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια του γεννήτορα επεκτάσεων.

Ορισμός 4.3.1. *Έστω $\mathcal{C}$ μία κλάση αριστερών R-προτύπων και M ένα αριστερό R-πρότυπο. Μία επέκταση*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow G \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

με $C \in \mathcal{C}$ καλείται **Ext-γεννήτορας** *για την κλάση επεκτάσεων $\mathsf{Ext}(\mathcal{C}, M)$, εάν για κάθε επέκταση*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow G' \longrightarrow C' \longrightarrow 0$$

με $C' \in \mathcal{C}$, υπάρχουν ομομορφισμοί $f \in \mathsf{Hom}_R(G', G)$ και $g \in \mathsf{Hom}_R(C', C)$ τέτοιοι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & G' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & C' \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & G \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό.

Επιπλέον, ένας Ext-γεννήτορας για την κλάση επεκτάσεων $\mathsf{Ext}(\mathcal{C}, M)$, *καλείται* **ελάχιστος** *εάν κάθε μεταθετικό διάγραμμα της μορφής*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & G \arrow[r] \arrow[d, "f"] & C \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & G \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

μπορεί να συμπληρωθεί μόνο από αυτομορφισμούς.

Στα επόμενα, έχοντας σταθεροποιήσει ένα αριστερό πρότυπο M και την κλάση $\mathcal{C}$, θα γράφουμε Ext-γεννήτορας αντί Ext-γεννήτορας για την κλάση επεκτάσεων $\mathsf{Ext}(\mathcal{C}, M)$.

Παρατήρηση 4.3.2. Εάν $0 \longrightarrow M \longrightarrow G \longrightarrow C \longrightarrow 0$ με $C \in \mathcal{C}$ είναι ένας Ext-γεννήτορας και

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & G \arrow[r] \arrow[d, "f"] & C \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & G' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

είναι ένα μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές και $C' \in \mathcal{C}$, τότε η επέκταση

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow G' \longrightarrow C' \longrightarrow 0$$

είναι επίσης Ext-γεννήτορας.

Παράδειγμα 4.3.3. Έστω $\mathcal{C} = R$-Mod η κατηγορία των αριστερών R-προτύπων. Για οποιοδήποτε αριστερό R-πρότυπο M, από το Θεώρημα $(2.2.15)$ το M μπορεί να εμφυτευθεί σε ένα ενέσιμο πρότυπο E, δηλαδή υπάρχει η επέκταση

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

με E ενέσιμο πρότυπο και $C \in \mathcal{C}$. Αυτή η επέκταση είναι ένας Ext-γεννήτορας.

Θα αποδείξουμε ότι η ύπαρξη ενός Ext-γεννήτορα σχετίζεται με την ύπαρξη ενός $\mathcal{C}^{\perp}$-preenvelope, και η ύπαρξη ενός ελάχιστου Ext-γεννήτορα σχετίζεται με την ύπαρξη ενός $\mathcal{C}^{\perp}$-envelope.

Πρόταση 4.3.4. *Ας υποθέσουμε ότι η κλάση* $\mathcal{C}$ *είναι κλειστή στις επεκτάσεις και ότι η επέκταση* $0 \longrightarrow M \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$, *όπου* $C \in \mathcal{C}$, *είναι ένας ελάχιστος Ext-γεννήτορας. Τότε* $B \in \mathcal{C}^{\perp}$.

Απόδειξη. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι το $B \in \mathcal{C}^{\perp}$, δηλαδή ότι $\mathsf{Ext}^1_R(C', B) = 0$ για κάθε $C' \in \mathcal{C}$. Από το Θεώρημα $(2.3.19)$ αρκεί να αποδείξουμε ότι μία τυχούσα επέκταση

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{k} X \xrightarrow{h} C' \longrightarrow 0$$

με $C' \in \mathcal{C}$ είναι διασπάσιμη. Χρησιμοποιούμε το pushout του διαγράμματος

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[d] & C \\ X & \end{tikzcd}$$

για να πάρουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές και στήλες

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "k"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "j"] & X \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & C' \arrow[r, equal] \arrow[d] & C' \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Επειδή $C, C' \in \mathcal{C}$ και η κλάση $\mathcal{C}$ είναι κλειστή στις επεκτάσεις, έχουμε ότι το $P \in \mathcal{C}$. Επειδή $0 \longrightarrow M \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ είναι ένας Ext-γεννήτορας, έχουμε ότι υπάρχουν απεικονίσεις g, l που κάνουν το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & X \arrow[r] \arrow[d, "g"] & P \arrow[r] \arrow[d, "l"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Επιπλέον, επειδή ο Ext-γεννήτορας $0 \longrightarrow M \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ είναι ελάχιστος έχουμε ότι ο ομομορφισμός $g \circ k$ είναι αυτομορφισμός στο B. Επομένως, ο k είναι διασπάσιμος μονομορφισμός και άρα η επέκταση

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{k} X \xrightarrow{h} C' \longrightarrow 0$$

διασπάται. Άρα καταλήγουμε ότι το πρότυπο B ανήκει στην κλάση $\mathcal{C}^{\perp}$. □

Το παρακάτω σημαντικό Θεώρημα είναι το κύριο τεχνικό αποτέλεσμα το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε στην συνέχεια της παρούσης υποενότητας για να αποδείξουμε την ύπαρξη $\mathcal{C}^{\perp}$-envelopes, για κάθε preenveloping κλάση προτύπων $\mathcal{C}$ η οποία είναι κλειστή στα ευθέα όρια.

Θεώρημα 4.3.5. *Ας υποθέσουμε ότι η κλάση αριστερών R-προτύπων $\mathcal{C}$ είναι κλειστή στα ευθέα όρια. Αν M είναι ένα αριστερό R-πρότυπο και υπάρχει ένας Ext-γεννήτορας για την κλάση επεκτάσεων* $\mathrm{Ext}(\mathcal{C}, M)$*, τότε υπάρχει και ένας ελάχιστος Ext-γεννήτορας.*

Απόδειξη. Η απόδειξη θα χωριστεί σε τρία λήμματα. □

Λήμμα 4.3.6. *Ας υποθέσουμε ότι η κλάση αριστερών R-προτύπων $\mathcal{C}$ είναι κλειστή στα ευθέα όρια και για οποιοδήποτε αριστερό R-πρότυπο M η επέκταση*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

είναι ένας Ext-γεννήτορας. Τότε υπάρχει ένας Ext-γεννήτορας

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow B' \longrightarrow C' \longrightarrow 0$$

και ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & B \arrow[r] \arrow[d, "f"] & C \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

τέτοιο ώστε $\mathsf{Ker}(f) = \mathsf{Ker}(f' \circ f)$ *για οποιοδήποτε μεταθετικό διάγραμμα με γραμμές Ext-γεννήτορες*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & B \arrow[r] \arrow[d, "f"] & C \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & B' \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & C' \arrow[r] \arrow[d, "g'"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & B'' \arrow[r] & C'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Θα προσπαθήσουμε να καταλήξουμε σε άτοπο υποθέτοντας ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει. Με υπερπεπερασμένη επαγωγή, θα κατασκευάσουμε ένα ευθύ σύστημα Ext-γεννητόρων με σύνολο δεικτών όλους τους διατακτικούς αριθμούς ως εξής:

Θέτουμε $B' = B_0 = B, C' = C_0 = C, f = \mathrm{Id}_B$ και $g = \mathrm{Id}_C$. Τότε υπάρχουν $B_1 = B'', C_1 = C'', f_{10} = f'$ και $g_{10} = g'$ τέτοια ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & B_0 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & C_0 \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & B_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_{10}"] & C_0 \arrow[r] \arrow[d, "g_{10}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & B_1 \arrow[r] & C_1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

οι γραμμές είναι Ext-γεννήτορες, και $0 = \mathsf{Ker}\, f \subsetneq \mathsf{Ker}\, f_{10}$.

Ας υποθέσουμε ότι έχει ορισθεί ο Ext-γεννήτορας

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow B_\alpha \longrightarrow C_\alpha \longrightarrow 0$$

μαζί με τους ομομορφισμούς $f_{\alpha\beta} \in \mathsf{Hom}_R(B_\beta, B_\alpha)$ και $g_{\alpha\beta} \in \mathsf{Hom}_R(C_\beta, C_\alpha)$ για όλα τα $\beta \leq \alpha$. Τότε από την υπόθεση υπάρχουν $B_{\alpha+1}, C_{\alpha+1} \in \mathcal{C}$, $f_{\alpha+1,\alpha}$ και $g_{\alpha+1,\alpha}$ τέτοια ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & B_\alpha \arrow[r] \arrow[d, "f_{\alpha+1,\alpha}"] & C_\alpha \arrow[r] \arrow[d, "g_{\alpha+1,\alpha}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & B_{\alpha+1} \arrow[r] & C_{\alpha+1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

οι γραμμές είναι Ext-γεννήτορες και $\mathsf{Ker}\, f_{\alpha,0} \subsetneq \mathsf{Ker}\, f_{\alpha+1,0}$ όπου

$$f_{\alpha+1,\beta} = f_{\alpha+1,\alpha} f_{\alpha\beta} \quad \text{και} \quad g_{\alpha+1,\beta} = g_{\alpha+1,\alpha} g_{\alpha\beta}, \quad \forall\, \beta \leq \alpha$$

Εάν ο διατακτικός αριθμός α είναι οριακός, θέτουμε $B_\alpha = \varinjlim B_\beta$ και $C_\alpha = \varinjlim C_\beta$. Θεωρούμε το ευθύ όριο $0 \longrightarrow M \longrightarrow B_\alpha \longrightarrow C_\alpha \longrightarrow 0$ των Ext-γεννητόρων

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow B_\beta \longrightarrow C_\beta \longrightarrow 0, (\beta < \alpha).$$

Επειδή η κλάση $\mathcal{C}$ είναι κλειστή στα ευθέα όρια, έχουμε ότι $C_\alpha \in \mathcal{C}$. Επομένως, επειδή η επέκταση $0 \longrightarrow M \longrightarrow B_\beta \longrightarrow C_\beta \longrightarrow 0$ είναι ένας Ext-γεννήτορας για κάποιο $\beta < \alpha$, έχουμε ότι και η επέκταση
$$0 \longrightarrow M \longrightarrow B_\alpha \longrightarrow C_\alpha \longrightarrow 0$$
είναι επίσης Ext-γεννήτορας. Θέτουμε
$$f_{\alpha\beta} = \varinjlim f_{\beta'\beta} \quad \text{και} \quad g_{\alpha\beta} = \varinjlim g_{\beta'\beta}, \quad \forall\, \beta \leq \beta' < \alpha$$
Τότε $\mathsf{Ker}\, f_{\beta,0} \subsetneq \mathsf{Ker}\, f_{\alpha,0}$, για όλα τα $\beta < \alpha$.

Καθώς αυτή η διαδικασία μπορεί να συνεχισθεί, με υπερπεπερασμένη επαγωγή, για κάθε διατακτικό αριθμό α, αποκτούμε μία αυστηρώς αύξουσα αλυσίδα $(\mathsf{Ker}\, f_{\beta,0} \mid \beta < \alpha)$ που αποτελείται από υποπρότυπα του B. Ιδιαίτερα τότε το πλήθος στοιχείων του B είναι μεγαλύτερο από κάθε διατακτικό αριθμό. Αυτό όμως είναι προφανώς άτοπο, διότι διαφορετικά το B θα περιείχε μη-ισόμορφα υποπρότυπα οσοδήποτε μεγάλου πλήθους στοιχείων. Επομένως υπάρχει Ext-γεννήτορας με την επιθυμητή ιδιότητα. $\square$

Λήμμα 4.3.7. *Ας υποθέσουμε ότι η κλάση αριστερών R-προτύπων $\mathcal{C}$ είναι κλειστή στα ευθέα όρια και για οποιοδήποτε αριστερό R-πρότυπο M η επέκταση*
$$0 \longrightarrow M \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$
είναι ένας Ext-γεννήτορας. Τότε υπάρχει ένας Ext-γεννήτορας
$$0 \longrightarrow M \longrightarrow B' \longrightarrow C' \longrightarrow 0$$
και ένα μεταθετικό διάγραμμα
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & B \arrow[r] \arrow[d, "f"] & C \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
τέτοιο ώστε $\mathsf{Ker}\, f' = 0$ για οποιοδήποτε μεταθετικό διάγραμμα με γραμμές Ext-γεννήτορες
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & B' \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & C' \arrow[r] \arrow[d, "g'"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & B'' \arrow[r] & C'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Με επαγωγή στο $n < \omega$, συμπεραίνουμε από το προηγούμενο Λήμμα ότι υπάρχει ένα αριθμήσιμο ευθύ σύστημα $\mathcal{D}$ από Ext-γεννήτορες
$$0 \longrightarrow M \longrightarrow B_n \longrightarrow C_n \longrightarrow 0$$
με ομομορφισμούς $f_{n+1,n} \in \mathsf{Hom}_R(B_n, B_{n+1}), g_{n+1,n} \in \mathsf{Hom}_R(C_n, C_{n+1})$, τέτοιοι ώστε ο μηδενικός όρος του $\mathcal{D}$ είναι ο δεδομένος Ext-γεννήτορας
$$0 \longrightarrow M \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$
το διάγραμμα
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & B_n \arrow[r] \arrow[d, "f_{n+1,n}"] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "g_{n+1,n}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & B_{n+1} \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό, και για οποιοδήποτε μεταθετικό διάγραμμα με γραμμές Ext-γεννήτορες

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & B_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{f}"] & C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{g}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & \bar{B} \arrow[r] & \bar{C} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

έχουμε ότι $\mathsf{Ker}(f_{n+1,n}) = \mathsf{Ker}(\bar{f} f_{n+1,n})$.

Θέτουμε $B' = \varinjlim B_n$ και $C' = \varinjlim C_n (n < \omega)$ και θεωρούμε το ευθύ όριο

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow B' \longrightarrow C' \longrightarrow 0$$

των Ext-γεννητόρων

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow B_n \longrightarrow C_n \longrightarrow 0$$

$(n < \omega)$. Επειδή η κλάση $\mathcal{C}$ είναι κλειστή στα ευθέα όρια, έχουμε ότι $C' \in \mathcal{C}$. Επομένως, επειδή η επέκταση

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow B_n \longrightarrow C_n \longrightarrow 0$$

είναι ένας Ext-γεννήτορας για κάποιο $n < \omega$, έχουμε ότι και η επέκταση

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow B' \longrightarrow C' \longrightarrow 0$$

είναι επίσης Ext-γεννήτορας. Θα αποδείξουμε ότι αυτός ο γεννήτορας έχει την επιθυμητή ιδιότητα.

Έστω $a_n \colon B_n \longrightarrow \varinjlim B_n$ οι προφανείς απεικονίσεις. Θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & \varinjlim B_n \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & \varinjlim C_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & B'' \arrow[r] & C'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Εάν η f' δεν είναι μονομορφισμός, τότε υπάρχει $x \neq 0 \in \varinjlim B_n$ τέτοιο ώστε $f'(x) = 0$. Επειδή $x = a_n(x_n)$ για κάποιο $x_n \in B_n$ τότε $f'(x) = f' \circ a_n(x_n) = 0$. Δηλαδή $x_n \in \mathsf{Ker}\, f' \circ a_n$. Έχουμε όμως ότι $f' \circ a_n = f' \circ a_{n+1} \circ f_{n+1,n}$. Επομένως, $\mathsf{Ker}\, f' \circ a_n = \mathsf{Ker}\, f' \circ a_{n+1} \circ f_{n+1,n} = \mathsf{Ker}\, f_{n+1,n}$. Άρα, $x_n \in \mathsf{Ker}\, f_{n+1,n}$ και έτσι $x = a_n(x_n) = a_{n+1} \circ f_{n+1,n}(x_n) = 0$, άτοπο. Επομένως η f' είναι μονομορφισμός. □

Λήμμα 4.3.8. *Ας υποθέσουμε ότι η κλάση αριστερών R-προτύπων $\mathcal{C}$ είναι κλειστή στα ευθέα όρια. Εάν ο γεννήτορας*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow B' \longrightarrow C' \longrightarrow 0$$

έχει την ιδιότητα του προηγούμενου λήμματος, τότε είναι ελάχιστος.

Απόδειξη. Πρέπει να αποδείξουμε ότι σε κάθε μεταθετικό διάγραμμα της μορφής:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & B' \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & C' \arrow[r] \arrow[d, "g'"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

η f' είναι αυτομορφισμός.

Έστω ότι η f' δεν είναι αυτομορφισμός. Με υπερπεπερασμένη επαγωγή κατασκευάζουμε ένα ευθύ σύστημα από Ext-γεννήτορες

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow B_\alpha \longrightarrow C_\alpha \longrightarrow 0 \qquad (\epsilon)$$

με δείκτες διατακτικούς αριθμούς και μονομορφισμούς $f_{\alpha\beta} \in \mathsf{Hom}_R(B_\beta, B_\alpha)$, οι οποίοι δεν είναι επιμορφισμοί, όπου $\beta < \alpha$, ως εξής: Ορίζουμε

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow B_\alpha \longrightarrow C_\alpha \longrightarrow 0$$

να είναι η επέκταση

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow B' \longrightarrow C' \longrightarrow 0$$

στην περίπτωση κατά την οποία $\alpha = 0$ ή α μη-οριακός διατακτικός και $B_\alpha = \varinjlim B_\beta$, και $C_\alpha = \varinjlim C_\beta$ στην περίπτωση κατά την οποία το α είναι οριακός διατακτικός. Τότε για κάθε μη-οριακό διατακτικό αριθμό α αποκτούμε μία αυστηρώς αύξουσα αλυσίδα $(\mathsf{Im}\, f_{\alpha,\beta} \mid \beta < \alpha)$ που αποτελείται από υποπρότυπα του B'. Αυτό όμως, όπως και στο Λήμμα 4.3.6, είναι προφανώς άτοπο. Άρα η f' είναι αυτομορφισμός και επομένως ο γεννήτορας (ϵ) είναι ελάχιστος. □

Τώρα είμαστε σε θέση να αναφέρουμε τη σχέση ανάμεσα στα envelopes και τους ελάχιστους Ext-γεννήτορες.

Θεώρημα 4.3.9. *Ας υποθέσουμε ότι η κλάση αριστερών R-προτύπων $\mathcal{C}$ είναι κλειστή στις επεκτάσεις και στα ευθέα όρια. Αν M είναι ένα αριστερό R-πρότυπο και υπάρχει ένας* Ext*-γεννήτορας για την κλάση επεκτάσεων* $\mathsf{Ext}(\mathcal{C}, M)$*, τότε το M έχει ένα $\mathcal{C}^\perp$-envelope.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα (4.3.5) έχουμε έναν ελάχιστο Ext-γεννήτορα

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} B \xrightarrow{k} C \longrightarrow 0,$$

όπου το $B \in \mathcal{C}^\perp$ από την Πρόταση (4.3.4). Αρχικά θα αποδείξουμε ότι ο ομομορφισμός $M \xrightarrow{i} B$ είναι ένα $\mathcal{C}^\perp$-preenvelope του M. Έστω $E \in \mathcal{C}^\perp$. Τότε από την Πρόταση (2.3.20) έχουμε την ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(C, E) \xrightarrow{k^*} \mathsf{Hom}_R(B, E) \xrightarrow{i^*} \mathsf{Hom}_R(M, E) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_R(C, E)$$

Επειδή $\mathsf{Ext}^1_R(C, E) = 0$, έπεται ότι για κάθε ομομορφισμό $f : M \longrightarrow E$ υπάρχει ομομορφισμός $g : B \longrightarrow E$ τέτοιος ώστε $i^*(g) = f$ δηλαδή $g \circ i = f$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, "g"] \\ E & \end{tikzcd}$$

Επιπλέον, επειδή ο Ext-γεννήτορας $0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} B \xrightarrow{k} C \longrightarrow 0$, είναι ελάχιστος έχουμε ότι ο ομομορφισμός $M \xrightarrow{i} B$ είναι ένα $\mathcal{C}^\perp$-envelope του M. □

Θεώρημα 4.3.10. *(**Enochs (1981)**) Έστω R ένας δακτύλιος, M ένα αριστερό R-πρότυπο και $\mathcal{C}$ μία κλάση κλειστή στα ευθέα όρια. Εάν το M έχει ένα $\mathcal{C}$-precover τότε το M έχει ένα $\mathcal{C}$-cover.*

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται κατά τον ίδιο τρόπο όπως η απόδειξη του θεωρήματος (4.3.5). □

Πόρισμα 4.3.11. *Εάν $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ είναι ένα πλήρες και κλειστό συστρεπτικό ζεύγος, τότε είναι τέλειο.*

Απόδειξη. Επειδή το συστρεπτικό ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ είναι πλήρες, έπεται ότι η κλάση $\mathcal{F}$ είναι precovering και η κλάση $\mathcal{C}$ είναι preenveloping. Για να αποδείξουμε ότι το συστρεπτικό ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ είναι τέλειο πρέπει να αποδείξουμε ότι η κλάση $\mathcal{F}$ είναι καλύπτουσα (covering) κλάση και ότι η κλάση $\mathcal{C}$ είναι περιβάλλουσα (enveloping) κλάση.

- Το γεγονός ότι κάθε πρότυπο M έχει ένα $\mathcal{F}$-cover είναι συνέπεια του Θεωρήματος $(4.3.10)$.

- Για να αποδείξουμε οτι κάθε πρότυπο M έχει ένα $\mathcal{C}$-envelope αρχικά παρατηρούμε ότι έχουμε μία ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow C \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

με $C \in \mathcal{C}$ και $F \in \mathcal{F}$. Δηλαδή, υπάρχει Ext-γεννήτορας για την κλάση επεκτάσεων $\mathsf{Ext}(\mathcal{F}, M)$ με τον μεσαίο όρο $C \in \mathcal{C} = \mathcal{F}^{\perp}$. Άρα, από το Θεώρημα $(4.3.9)$ το M έχει ένα $\mathcal{F}^{\perp}$-envelope. Έτσι επειδή $\mathcal{C} = \mathcal{F}^{\perp}$ το M έχει ένα $\mathcal{C}$-envelope. □

4.4 Προβολικές Καλύψεις και Ενέσιμα Περιβλήματα

Στην παρούσα ενότητα θα δούμε δυο σημαντικές εφαρμογές των αποτελεσμάτων της προηγούμενης παραγράφου.

Μία άμεση εφαρμογή του Θεωρήματος $(4.3.9)$ είναι το ακόλουθο Θεώρημα των Eckmann-Schöpf (1953) το οποίο αναφέρεται στην ύπαρξη των ενέσιμων περιβλημάτων (injective envelopes). Πριν το διατυπώσουμε, χρειαζόμαστε δύο ορισμούς.

Ορισμός 4.4.1. *Ένα υποπρότυπο N ενός αριστερού R-προτύπου M καλείται* **ουσιώδες** *(***essential***) εάν ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή*

$$K \cap N = 0, \text{για όλα τα υποπρότυπα } K \text{ του } M \Longrightarrow K = 0.$$

Ορισμός 4.4.2. (Eckmann-Schöpf) *Ένα ενέσιμο πρότυπο E καλείται* **ενέσιμο περίβλημα** *(***injective envelope** *ή* **injective hull***) ενός αριστερού R-προτύπου M εάν το M μπορεί να εμφυτευθεί ουσιωδώς στο E, δηλαδή εάν υπάρχει ένας μονομορφισμός $\phi\colon M \longrightarrow E$ τέτοιος ώστε η εικόνα $\mathsf{Im}(\phi)$ να είναι ουσιώδες υποπρότυπο του E.*

Αποδεικνύεται ότι ένας ομομορφισμός $\phi\colon M \longrightarrow E$ είναι ένα R-Inj-envelope, όπου E είναι ένα ενέσιμο πρότυπο και R-Inj είναι η κλάση των ενέσιμων αριστερών R-προτύπων αν και μόνο αν ο ομομορφισμός $\phi\colon M \longrightarrow E$ είναι ενέσιμο περίβλημα σύμφωνα με τον ορισμό των Eckmann-Schöpf (Για την απόδειξη βλέπε [32, Theorem $1.2.11$]).

Θεώρημα 4.4.3. (Eckmann-Schöpf) *Έστω R ένας δακτύλιος. Τότε κάθε αριστερό R-πρότυπο έχει ένα ενέσιμο περίβλημα.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με το παραπάνω η ύπαρξη των ενέσιμων περιβλημάτων είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη των R-Inj-envelopes. Έστω $\mathcal{C} = R$-Mod η κατηγορία των αριστερών R-προτύπων στο Θεώρημα $(4.3.9)$. Παρατηρούμε ότι $R\text{-Mod}^{\perp} = R$-Inj. Από το Παράδειγμα $(4.3.3)$ έχουμε ότι για οποιοδήποτε αριστερό R-πρότυπο M υπάρχει ένας Ext-γεννήτορας

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

με E ενέσιμο πρότυπο και $C \in \mathcal{C}$. Άρα από το Θεώρημα $(4.3.9)$, το M έχει ένα R-Inj-envelope δηλαδή ένα ενέσιμο περίβλημα. □

Κλείνουμε την ενότητα αυτή με μία εφαρμογή του Θεωρήματος $(4.3.10)$. Η εφαρμογή αυτή αφορά τις προβολικές καλύψεις (projective covers) και συγκεκριμένα ένα τμήμα του Θεωρήματος του Bass. Πριν περάσουμε στο Θεώρημα ας δώσουμε κάποιους ορισμούς που θα μας χρειαστούν.

Ορισμός 4.4.4. *Για οποιοδήποτε αριστερό R-πρότυπο M, ένα υποπρότυπο $S \subset M$ καλείται* **μικρό** *ή* **πλεονάζον** *(***small** *ή* **superfluous***) εάν για κάθε υποπρότυπο $L \subset M$, ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή*

$$S + L = M \Longrightarrow L = M.$$

Ένα τέτοιο υποπρότυπο συμβολίζεται με $S << M$.

Ορισμός 4.4.5. (Bass (1960)) *Έστω P ένα προβολικό R-πρότυπο. Ένας επιμορφισμός $\phi\colon P \longrightarrow M$ καλείται* **προβολική κάλυψη** *(***projective cover***) εάν $\operatorname{Ker}\phi << P$.*

Ορισμός 4.4.6. *Ένας προσεταιριστικός δακτύλιος R καλείται* **αριστερά τέλειος** *(***left perfect***) εάν κάθε αριστερό R-πρότυπο έχει μία προβολική κάλυψη.*

Αποδεικνύεται ότι ένας ομομορφισμός $\phi\colon P \longrightarrow M$ είναι ένα R-Proj-cover, όπου $P \in R$-Proj αν και μόνο αν ο ομομορφισμός $\phi\colon P \longrightarrow M$ είναι προβολική κάλυψη σύμφωνα με τον ορισμό του Bass (Για την απόδειξη βλέπε [32, Theorem 1.2.12]).

Ορισμός 4.4.7. *Έστω R ένας δακτύλιος. Ένα υποσύνολο $S \subset R$ καλείται* **αριστερά** *T-***μηδενοδύναμο** *(***left T-nilpotent***) εάν για κάθε αριθμήσιμη ακολουθία $\{a_i \in S \mid i \geq 1\}$, υπάρχει ένας ακέραιος n τέτοιος ώστε $a_1 a_2 \cdots a_n = 0$.*

Έστω $J = J(R)$ το ριζικό του Jacobson ενός δακτυλίου R. Αποδεικνύεται ότι όταν ο δακτύλιος R είναι αριστερά τέλειος, το $J = J(R)$ είναι αριστερά T-μηδενοδύναμο (Για την απόδειξη βλέπε [32, Remark 1.4.9]). Η σημασία της έννοιας του T-μηδενοδύναμου συνόλου οφείλεται στο γεγονός ότι το ριζικό $J = J(R)$ είναι αριστερά T-μηδενοδύναμο ακριβώς όταν το Λήμμα του Nakayama (βλέπε Λήμμα (1.1.19)) ισχύει για όλα τα αριστερά R-πρότυπα, πεπερασμένα παραγόμενα ή μη:

Λήμμα 4.4.8. *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Το J είναι αριστερά T-μηδενοδύναμο.*
2. *$JM \neq M$ για κάθε αριστερό R-πρότυπο $M \neq 0$.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [2, Lemma 28.3] □

Ας περάσουμε στο Θεώρημα του Bass.

Θεώρημα 4.4.9. (Bass) *Για οποιονδήποτε προσεταιριστικό δακτύλιο R τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Ο δακτύλιος R είναι αριστερά τέλειος.*
2. *Κάθε επίπεδο αριστερό R-πρότυπο είναι προβολικό.*
3. *Κάθε ευθύ όριο προβολικών αριστερών R-προτύπων είναι ξανά προβολικό.*

Απόδειξη. $(3 \Rightarrow 1)$ Έστω $\mathcal{C} = R$-Proj η κλάση των προβολικών αριστερών R-προτύπων στο Θεώρημα (4.3.10). Επειδή κάθε αριστερό R-πρότυπο M είναι η επιμορφική εικόνα ενός προβολικού αριστερού R-προτύπου P έχουμε την ακριβή ακολουθία της μορφής

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P \xrightarrow{\phi} M \longrightarrow 0.$$

όπου $K = \operatorname{Ker}\phi$. Τότε $P \longrightarrow M$ είναι μία R-Proj-precover του M. Επειδή από υπόθεση η κλάση R-Proj είναι κλειστή στα ευθέα όρια από το Θεώρημα (4.3.10) έχουμε ότι ο ομομορφισμός $P \longrightarrow M$ είναι ένα R-Proj-cover του M. Επομένως το M έχει μία προβολική κάλυψη επειδή η ύπαρξη των προβολικών καλύψεων είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη των R-Proj-covers.

($1 \Rightarrow 2$) Έστω F ένα επίπεδο αριστερό R-πρότυπο. Τότε από υπόθεση το F έχει μία προβολική κάλυψη, έστω $\phi\colon P \longrightarrow F$, όπου P είναι ένα προβολικό αριστερό R-πρότυπο. Δηλαδή έχουμε τη σύντομη ακριβή ακολουθία της μορφής

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P \xrightarrow{\phi} F \longrightarrow 0,$$

όπου $K = \operatorname{Ker}\phi$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι το $K = 0$, διότι τότε θα έχουμε τη σύντομη ακριβή ακολουθία της μορφής

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{\phi} F \longrightarrow 0,$$

και έτσι $P \cong F$.

Επειδή ο δακτύλιος R είναι αριστερά τέλειος, έχουμε ότι το ριζικό του Jacobson $J = J(R)$ είναι αριστερά T-μηδενοδύναμο. Επιπλέον, το ριζικό του Jacobson του προβολικού αριστερού προτύπου P είναι JP και αποδεικνύεται ότι $JP = \sum\{L \subset P \mid L << P\}$ (Για τις αποδείξεις βλέπε [2, Proposition 17.10,9.13]). Έτσι, επειδή $K << P$ έχουμε ότι $K << JP$. Από την Πρόταση (3.1.19) επειδή το F είναι επίπεδο αριστερό R-πρότυπο έχουμε ότι $K \cap JP = JK$. Επομένως, $K = JK$ και έτσι από το Λήμμα (4.4.8) έχουμε ότι το $K = 0$.

($2 \Rightarrow 3$) Έστω $\{P_i \mid i \in I\}$ μία οικογένεια προβολικών αριστερών R-προτύπων. Επειδή κάθε προβολικό πρότυπο είναι επίπεδο έχουμε ότι η οικογένεια $\{P_i \mid i \in I\}$ είναι μία οικογένεια επίπεδων αριστερών R-προτύπων. Γνωρίζουμε ότι το ευθύ όριο επίπεδων αριστερών R-προτύπων είναι ξανά επίπεδο αριστερό R-πρότυπο από την Πρόταση (3.1.20). Έτσι $\varinjlim P_i$ είναι επίπεδο αριστερό R-πρότυπο. Από υπόθεση όμως έχουμε ότι κάθε επίπεδο πρότυπο είναι προβολικό. Επομένως, το ευθύ όριο $\varinjlim P_i$ είναι προβολικό αριστερό R-πρότυπο. □

Παραπέμπουμε στο εξαιρετικά βιβλία [2] και [22] για περισσότερες πληροφορίες για τους τέλειους δακτυλίους.

Συνοψίζοντας, στην παρούσα ενότητα είδαμε ότι

- Η κλάση R-Inj των ενέσιμων αριστερών προτύπων είναι enveloping.
- Η κλάση R-Proj των προβολικών αριστερών προτύπων είναι precovering.
- Η κλάση R-Proj των προβολικών αριστερών προτύπων είναι covering αν και μόνον αν ο δακτύλιος R είναι αριστερά τέλειος.

Από το Θεώρημα του Chase (3.3.9) έπεται ότι (άπειρα) γινόμενα επίπεδων αριστερών R-προτύπων είναι επίπεδο πρότυπο αν και μόνον αν ο δακτύλιος R είναι δεξιά συναφής. Τι συμβαίνει αν στη θέση των επίπεδων προτύπων έχουμε προβολικά πρότυπα; Την απάντηση δίνει το ακόλουθο Θεώρημα το οποίο οφείλεται πάλι στον Chase.

Θεώρημα 4.4.10. (Chase, 1960) *[8] Για έναν δακτύλιο R, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

1. *Η κλάση R-Proj είναι κλειστή στα (άπειρα) ευθέα γινόμενα.*
2. *Ο δακτύλιος R είναι αριστερά τέλειος και δεξιά συναφής.*

Απόδειξη. Αν ο δακτύλιος R είναι αριστερά τέλειος τότε $R\text{-Proj} = R\text{-Flat}$. Αν επιπλέον ο δακτύλιος R είναι δεξιά συναφής, τότε από το Θεώρημα (3.3.9) έχουμε ότι η κλάση $R\text{-Proj} = R\text{-Flat}$ είναι κλειστή στα (άπειρα) ευθέα γινόμενα. Για την απόδειξη του αντίστροφου παραπέμπουμε στο βιβλίο των Anderson-Fuller [2]. □

4.5 Ενέσιμες Καλύψεις και Επίπεδα/Προβολικά Περιβλήματα

Κεντρικός σκοπός της παρούσης ενότητας είναι η μελέτη του ερωτημάτων: Για ποιούς δακτυλίους R, για κάθε αριστερό R-πρότυπο M, υπάρχει R-Inj-(pre)cover $E \longrightarrow M$; Παρόμοια για ποιούς δακτυλίους R, για κάθε αριστερό R-πρότυπο M, υπάρχει R-Flat-(pre)envelope $M \longrightarrow F$ ή R-Proj-(pre)envelope $M \longrightarrow P$; Με άλλα λόγια θα εξετάσουμε τα εξής προβλήματα:

- Για ποιούς δακτυλίους R, η κλάση R-Inj των ενέσιμων αριστερών R-προτύπων είναι (pre)covering;
- Για ποιούς δακτυλίους R, η κλάση R-Flat των επίπεδων αριστερών R-προτύπων είναι (pre)enveloping;
- Για ποιούς δακτυλίους R, η κλάση R-Proj των προβολικών αριστερών R-προτύπων είναι (pre)enveloping;

Όπως θα δούμε, γενικά η κλάση R-Inj δεν είναι (pre)covering και οι κλάσεις R-Flat και R-Proj δεν είναι (pre)enveloping.

Προτού αναφέρουμε τα Θεωρήματα, τα οποία οφείλονται στον Enochs [11], που δίνουν απάντηση στα παραπάνω ερωτήματα, θα ορίσουμε τους δακτυλίους της Noether. Ας ξεκινήσουμε με τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 4.5.1. 1. *Ένα αριστερό R-πρότυπο M πάνω από κάποιον δακτύλιο R ικανοποιεί την αύξουσα συνθήκη αλυσίδας* **(ascending chain condition) (**ACC**)** *αν κάθε αύξουσα αλυσίδα υποπροτύπων του M*

$$S_1 \subseteq S_2 \subseteq S_3 \subseteq \cdots$$

είναι τελικά σταθερή. Δηλαδή, αν υπάρχει ένας ακέραιος n τέτοιος ώστε $S_n = S_{n+1} = S_{n+2} = \ldots$.

2. *Ένα αριστερό R-πρότυπο M πάνω από κάποιον δακτύλιο R ικανοποιεί την συνθήκη μεγίστου (**maximum condition**) αν κάθε μη κενή οικογένεια F υποπροτύπων του M έχει ένα μέγιστο στοιχείο, δηλαδή, υπάρχει κάποιο $S_0 \in F$ για το οποίο δεν υπάρχει κάποιο $S \in F$ με $S_0 \subsetneq S$.*

Πρόταση 4.5.2. *Οι παρακάτω συνθήκες είναι ισοδύναμες για κάθε αριστερό R-πρότυπο M.*

1. *Το M ικανοποιεί την συνθήκη (ACC) στα υποπρότυπα.*
2. *Το M ικανοποιεί την συνθήκη μεγίστου (maximum condition.).*
3. *Κάθε υποπρότυπο του M είναι πεπερασμένα παραγόμενο.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [24, Proposition 3.15]). □

Ορισμός 4.5.3. *Ένα αριστερό R-πρότυπο M καλείται* **πρότυπο της Noether** *αν ικανοποιεί μία από τις ισοδύναμες συνθήκες της παραπάνω Πρότασης.*

Ας δούμε τώρα πότε ένας δακτύλιος καλείται δακτύλιος της Noether.

Ορισμός 4.5.4. *Ένας δακτύλιος R καλείται* **αριστερός δακτύλιος της Noether** *αν το ${}_RR$ είναι ένα πρότυπο της Noether ως αριστερό R-πρότυπο.*

Οι δεξιοί δακτύλιοι της Noether ορίζονται παρόμοια, και, κάθε μεταθετικός αριστερός δακτύλιος της Noether είναι και δεξιός δακτύλιος της Noether και τον ονομάζουμε δακτύλιο της Noether.

Παράδειγμα 4.5.5. Κάθε περιοχή κύριων ιδεωδών είναι δακτύλιος της Noether.

Ας συνεχίσουμε τώρα με κάποια αποτελέσματα που αφορούν τα ενέσιμα πρότυπα υπεράνω ενός δακτυλίου της Noether παραλείποντας τις αποδείξεις. Το πρώτο αποτέλεσμα χαρακτηρίζει τους δακτυλίους της Noether και οφείλεται στους Cartan-Eilenberg, Bass, Matlis, Papp.

Θεώρημα 4.5.6. *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για έναν δακτύλιο R.*

1. *Ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether.*

2. *Κάθε ευθύ όριο ενέσιμων αριστερών R-προτύπων είναι ενέσιμο αριστερό R-πρότυπο.*

3. *Κάθε ευθύ άθροισμα ενέσιμων αριστερών R-προτύπων είναι ενέσιμο αριστερό R-πρότυπο.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [14, Theorem 3.1.17]) □

Ορισμός 4.5.7. *Ένα αριστερό R-πρότυπο M καλείται* **μη-αναλύσιμο (indecomposable)** *εάν δεν υπάρχουν μη-μηδενικά υποπρότυπα M_1 και M_2 του M τέτοια ώστε $M = M_1 \oplus M_2$.*

Τα ενέσιμα πρότυπα υπεράνω ενός τυχαίου δακτυλίου R δεν έχουν απαραίτητα μη-αναλύσιμες αποσυνθέσεις. Στην πραγματικότητα όμως, εάν ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether, τότε κάθε ενέσιμο αριστερό R-πρότυπο έχει μια μη-αναλύσιμη διάσπαση. Το ακόλουθο Θεώρημα οφείλεται στον Matlis.

Θεώρημα 4.5.8. *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για έναν δακτύλιο R.*

1. *Ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether.*

2. *Κάθε ενέσιμο αριστερό R-πρότυπο είναι ευθύ άθροισμα από μη-αναλύσιμα πρότυπα.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [2, Theorem 25.6]. □

Παρατήρηση 4.5.9. Η κλάση ισομορφίας των αντιπροσώπων των μη-αναλύσιμων ενέσιμων προτύπων σχηματίζουν ένα σύνολο, βλέπε [16].

Από εδώ και στο εξής με τον όρο ενέσιμο (pre)cover (injective (pre)cover) θα εννοούμε ένα R-Inj- (pre)cover και θα αποδείξουμε ότι η κλάση R-Inj των ενέσιμων αριστερών R-προτύπων είναι covering ακριβώς όταν ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether.

Πρόταση 4.5.10. *Έστω R-Inj η κλάση των ενέσιμων αριστερών R-προτύπων. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether.*

2. *Η κλάση R-Inj των ενέσιμων αριστερών R-προτύπων είναι precovering.*

Απόδειξη. $(1 \Rightarrow 2)$ Εάν ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether τότε από το Θεώρημα (4.5.8) κάθε ενέσιμο αριστερό R-πρότυπο είναι το ευθύ άθροισμα από μη-αναλύσιμα ενέσιμα αριστερά R-πρότυπα. Από την Παρατήρηση (4.5.9), έστω $X = \{E_i, \mid i \in I\}$ το σύνολο των αντιπροσώπων (μέσω ισομορφισμού) των μη-αναλύσιμων ενέσιμων αριστερών R-προτύπων. Έτσι, κάθε ενέσιμο αριστερό R-πρότυπο είναι το ευθύ άθροισμα από κόπιες διαφόρων $E_i \in X$. Επομένως, για ένα αριστερό R-πρότυπο M, η απεικόνιση $\phi\colon E \longrightarrow M$ με E ενέσιμο θα είναι ένα ενέσιμο precover εάν κάθε απεικόνιση $\phi'\colon E_i \longrightarrow M$ με $E_i \in X$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί μέσω της ϕ, δηλαδή το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & E_i \arrow[dl, dashed, "k"'] \arrow[d, "\phi'"] \\ E \arrow[r, "\phi"] & M \end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό. Για $E_i \in X$, έστω $Y_i = \mathsf{Hom}_R(E_i, M)$ και $E_i^{(Y_i)}$ το ευθύ άθροισμα από Y_i κόπιες του E_i. Έστω η απεικόνιση

$$g\colon E_i^{(Y_i)} \longrightarrow M, \quad (x_\phi)_{\phi \in Y_i} \longmapsto \sum_{\phi \in Y_i} \phi(x_\phi)$$

Τότε κάθε απεικόνιση $\phi'\colon E_i \longrightarrow M$,

$$\begin{tikzcd} & E_i \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "\phi'"] \\ E_i^{(Y_i)} \arrow[r, "g"] & M \end{tikzcd}$$

μπορεί να παραγοντοποιηθεί μέσω της $g\colon E_i^{(Y_i)} \longrightarrow M$ απεικονίζοντας το E_i στην ϕ' συνιστώσα του $E_i^{(Y_i)}$. Ορίζουμε $E = \oplus E_i^{(Y_i)}$. Εάν $k\colon E_i \longrightarrow E$ είναι η απεικόνιση $i \circ h$ όπου $i\colon E_i^{(Y_i)} \longrightarrow \oplus E_i^{(Y_i)}$ είναι οι απεικονίσεις έγκλεισης τότε για κάθε $e_i \in E_i$ έχουμε ότι

$$\phi \circ k(e_i) = \phi \circ i \circ h(e_i) = \phi \circ i(h(e_i)) = \phi(h(e_i)) = \oplus g(h(e_i)) = g \circ h(e_i) = \phi'(e_i)$$

δηλαδή ισχύει ότι $\phi \circ k = \phi'$. Άρα $\phi\colon E \longrightarrow M$ είναι ένα ενέσιμο precover του M.

($2 \Rightarrow 1$) Για να αποδείξουμε ότι ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether αρκεί να αποδείξουμε ότι το ευθύ άθροισμα $\oplus E_i$ μίας οικογενείας $(E_i)_{i\in I}$ ενέσιμων αριστερών R-προτύπων είναι ενέσιμο αριστερό R-πρότυπο(βλέπε Θεώρημα (4.5.6)).

Έστω $(E_i)_{i\in I}$ μία οικογένεια από ενέσιμα αριστερά R-πρότυπα. Επειδή από υπόθεση η κλάση R-Inj είναι precovering, το ευθύ άθροισμα $\oplus E_i$ έχει ένα ενέσιμο precover, έστω $\phi\colon E \longrightarrow \oplus E_i$, όπου E ενέσιμο αριστερό R-πρότυπο. Τότε, για κάθε i, θεωρούμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & E_j \arrow[dl, dashed, "f_i"'] \arrow[d, "k"] \\ E \arrow[r, "\phi"] & \oplus E_i \end{tikzcd}$$

όπου $k\colon E_j \longrightarrow \oplus E_i$ είναι η κανονική έγκλειση για κάθε j και

$$\phi \circ f_i = k \tag{4.7}$$

Από την καθολική ιδιότητα του ευθέος αθροίσματος, θα έχουμε το εξής διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} E_j \arrow[r, "k"] \arrow[d, "f_i"'] & \oplus E_i \arrow[dl, dashed, "\mu"] \\ E & \end{tikzcd}$$

δηλαδή ότι υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\mu\colon \oplus E_i \longrightarrow E$ τέτοιος ώστε

$$\mu \circ k = f_i \tag{4.8}$$

Άρα από (4.7) και (4.8) θα έχουμε ότι $\phi \circ \mu \circ k = k$ και έτσι από την μοναδικότητα του ομομορφισμού μ θα έχουμε ότι $\phi \circ \mu = \mathrm{Id}_{\oplus E_i}$. Άρα ο μ είναι διασπάσιμος μονομορφισμός και έτσι το $\oplus E_i$ είναι ευθύς προσθετέος του E, όπου E ενέσιμο αριστερό R-πρότυπο. Έτσι από την Πρόταση (2.2.9) το $\oplus E_i$ είναι ενέσιμο αριστερό R-πρότυπο ως ευθύς προσθετέος ενέσιμου. □

Το ακόλουθο αποτέλεσμα είναι μια ισχυρότερη εκδοχή της Πρότασης 4.5.10.

Θεώρημα 4.5.11. *Ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether αν και μόνο αν η κλάση R-Inj των ενέσιμων αριστερών R-προτύπων είναι covering.*

Απόδειξη. Εάν ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether τότε από το Θεώρημα (4.5.6) η κλάση R-Inj των ενέσιμων αριστερών R-προτύπων είναι κλειστή στα ευθέα όρια. Επιπλέον από την προηγούμενη Πρόταση έχουμε ότι η κλάση R-Inj των ενέσιμων αριστερών R-προτύπων είναι precovering. Έτσι από το Θεώρημα (4.3.10) η κλάση R-Inj των ενέσιμων αριστερών R-προτύπων είναι covering.

Αντίστροφα, εάν η κλάση R-Inj των ενέσιμων αριστερών R-προτύπων είναι covering τότε είναι και precovering και άρα από την προηγούμενη Πρόταση έχουμε ότι ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether. □

Ας περάσουμε τώρα στο δεύτερο ερώτημα μας: Για ποιούς δακτυλίους R, η κλάση R-Flat των επίπεδων αριστερών R-προτύπων είναι (pre)enveloping; Σημειώνοντας ότι με τον όρο επίπεδο (pre)envelope θα εννοούμε ένα R-Flat-(pre)envelope, το Θεώρημα που ακολουθεί μας αποδεικνύει ότι η ύπαρξη των επίπεδων preenvelopes είναι ισοδύναμη με το να είναι ο δακτύλιος R δεξιά συναφής.

Θεώρημα 4.5.12. *Ο δακτύλιος R είναι δεξιά συναφής αν και μόνον αν η κλάση R-Flat των αριστερά επίπεδων προτύπων είναι preenveloping.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι ο δακτύλιος R είναι δεξιά συναφής. Έστω $\aleph_\alpha$ ένας άπειρος πληθικός αριθμός και έστω M ένα αριστερό R-πρότυπο με $\mathrm{Card}\, M \leq \aleph_\alpha$. Έστω $f \colon M \longrightarrow F$ ένας ομομορφισμός με F ένα επίπεδο αριστερό R-πρότυπο. Τότε $\mathrm{Card}\, f(M) \leq \aleph_\alpha$. Έστω $X = f(M)$. Τότε το X είναι υποπρότυπο του F με $\mathrm{Card}\, X \leq \aleph_\alpha$. Άρα, από το Λήμμα των Jensen-Lenzing (βλέπε Λήμμα (6.2.2) (1.)) υπάρχει ένας άπειρος πληθικός αριθμός $\aleph_\beta$ και ένα καθαρό, επομένως επίπεδο, υποπρότυπο G του F με $X = f(M) \subset G$ και $\mathrm{Card}\, G \leq \aleph_\beta$. Αλλά τότε έχουμε ανάλυση $M \longrightarrow G \longrightarrow F$. Επομένως υπάρχει ένας άπειρος πληθικός αριθμός $\aleph_\beta$ τέτοιος ώστε κάθε ομομορφισμός $M \longrightarrow F$ με F ένα επίπεδο αριστερό R-πρότυπο έχει ανάλυση $M \longrightarrow G \longrightarrow F$ με G επίπεδο αριστερό R-πρότυπο και $\mathrm{Card}\, G \leq \aleph_\beta$.

Έστω ότι υπάρχει ένα σύνολο X με πληθικό αριθμό $\aleph_\beta$ τέτοιο ώστε κάθε ομομορφισμός $M \longrightarrow F$ με F ένα επίπεδο αριστερό R-πρότυπο να παραγοντοποιείται σε $M \longrightarrow G \longrightarrow F$ για κάποιο G επίπεδο αριστερό R-πρότυπο με $G \subset X$ (σαν σύνολα). Τώρα, ας είναι $(\phi_i)_{i \in I}$ όλοι αυτοί οι ομομορφισμοί $\phi_i \colon M \longrightarrow G_i$ με $G_i \subset X$. Τότε κάθε ομομορφισμός $M \longrightarrow F$ παραγοντοποιείται σε $M \longrightarrow G_j \longrightarrow F$ για κάποιο j. Θα αποδείξουμε ότι η απεικόνιση $\phi \colon M \longrightarrow \prod_I G_i$ είναι ένα επίπεδο preenvelope του M. Επειδή ο δακτύλιος R είναι δεξιά συναφής έχουμε ότι το $\prod_I G_i$ είναι ένα επίπεδο αριστερό R-πρότυπο. Έστω $f \colon M \longrightarrow F$ ένας ομομορφισμός με F ένα επίπεδο αριστερό R-πρότυπο. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει ομομορφισμός $g \colon \prod_I G_i \longrightarrow F$ ο οποίος κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f"'] & \prod_I G_i \arrow[dl, dashed, "g"] \\
F &
\end{tikzcd}$$

Όμως αποδείξαμε ότι κάθε τέτοια $M \xrightarrow{f} F$ παραγοντοποιείται σε $M \xrightarrow{\phi_i} G_j \xrightarrow{h} F$ για κάποιο j, δηλαδή $f = h \circ \phi_i$. Ορίζουμε ως $g\colon \prod_I G_i \longrightarrow F$ την απεικόνιση $h \circ \varpi_i$ όπου $\varpi_i\colon \prod_I G_i \longrightarrow G_i$ οι απεικονίσεις προβολής. Τότε για κάθε $m \in M$ έχουμε ότι

$$g \circ \phi(m) = h \circ \varpi_i \circ \phi(m) = h \circ \varpi_i(\prod \phi_i(m)) = h \circ \varpi_i(\phi_i(m)) = h \circ \phi_i(m) = f(m)$$

δηλαδή ισχύει ότι $g \circ \phi = f$.

Αντίστροφα, έστω ότι η κλάση R-Flat των επίπεδων αριστερών R-προτύπων είναι preenveloping. Για να αποδείξουμε ότι ο δακτύλιος R είναι δεξιά συναφής αρκεί να αποδείξουμε ότι το ευθύ γινόμενο $\prod F_i$ μίας οικογενείας $(F_i)_{i\in I}$ επίπεδων αριστερών R-προτύπων είναι επίπεδο αριστερό R-πρότυπο (βλέπε Θεώρημα του Chase-Θεώρημα (3.3.9)).

Έστω $(F_i)_{i\in I}$ μία οικογένεια επίπεδων αριστερών R-προτύπων. Επειδή από υπόθεση η κλάση R-Flat είναι preenveloping, το ευθύ γινόμενο $\prod F_i$ έχει ένα επίπεδο preenvelope, έ-στω $\phi\colon \prod F_i \longrightarrow F$, όπου F επίπεδο αριστερό R-πρότυπο. Τότε, για κάθε i, θεωρούμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\prod F_i \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "p_i"'] & F \arrow[dl, dashed, "f_i"] \\
F_i &
\end{tikzcd}$$

όπου $p_i\colon \prod F_j \longrightarrow F_i$ είναι η κανονική προβολή για κάθε j και

$$p_i = f_i \circ \phi \tag{4.9}$$

Από την καθολική ιδιότητα του ευθέος γινομένου, θα έχουμε το εξής διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
& F \arrow[dl, dashed, "\lambda"'] \arrow[d, "f_i"] \\
\prod F_i \arrow[r, two heads, "p_i"'] & F_i
\end{tikzcd}$$

δηλαδή ότι υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\lambda\colon F \longrightarrow \prod F_i$ τέτοιος ώστε

$$p_i \circ \lambda = f_i \tag{4.10}$$

Άρα από τις (4.9) και (4.10) θα έχουμε ότι $p_i = p_i \circ (\lambda \circ \phi)$ και έτσι από την μοναδικότητα του ομομορφισμού λ θα έχουμε ότι $\lambda \circ \phi = \mathrm{Id}_{\prod F_i}$. Άρα ο ϕ είναι διασπάσιμος μονομορφισμός και έτσι το $\prod F_i$ είναι ευθύς προσθετέος του F, όπου F επίπεδο αριστερό R-πρότυπο. Έτσι από την Πρόταση (3.1.4) το $\prod F_i$ είναι επίπεδο αριστερό R-πρότυπο ως ευθύς προσθετέος επίπεδου. □

Το παραπάνω Θεώρημα μας αποδεικνύει την ύπαρξη των επίπεδων preenvelopes, αλλά το ερώτημα της ύπαρξης των επίπεδων envelopes είναι ακόμα ανοιχτό. Ο Enochs [11] στην προσπάθεια του να προσδιορίσει τους δακτυλίους υπεράνω των οποίων κάθε πρότυπο έχει ένα επίπεδο envelope απέδειξε ότι για μία τοπική περιοχή της Noether, κάθε πρότυπο έχει ένα επίπεδο envelope αν ο δακτύλιος έχει ασθενή ολική διάσταση μικρότερη ή ίση με 2. Το αποτέλεσμα αυτό διατυπώνεται στο Θεώρημα που ακολουθεί.

Θεώρημα 4.5.13. 1. *Για μία περιοχή R τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(a) *Κάθε αριστερό R-πρότυπο έχει ένα επίπεδο envelope,*

(b) *Το αντίστροφο όριο οποιουδήποτε αντίστροφου συστήματος επίπεδων προτύπων είναι επίπεδο πρότυπο.*

2. *Από τις συνθήκες* (a),(b) *συνεπάγεται ότι*

   (c) *Η ασθενής ολική διάσταση του R είναι μικρότερη ή ιση με 2.*

3. *Εάν R είναι μία τοπική περιοχή της Noether τότε οι συνθήκες* (a),(b) *, είναι ισοδύναμες με την* (c).

Συνεχίζουμε με ένα αποτέλεσμα που αποδείχθηκε από τους Asensio, Martinez, το οποίο λύνει το πρόβλημα ύπαρξης των επίπεδων envelopes στην περίπτωση των μεταθετικών δακτυλίων.

Θεώρημα 4.5.14. *Για έναν μεταθετικό δακτύλιο R τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Ο δακτύλιος R είναι δεξιά συναφής με ασθενή ολική διάσταση του R μικρότερη ή ιση με 2 (*$\text{w.gl.dim}(R) \leq 2$*).*

2. *Κάθε αριστερό R-πρότυπο έχει ένα επίπεδο envelope.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη, βλέπε [4, Theorem 9]. □

Κλείνουμε το παρόν Κεφάλαιο με τα ακόλουθα αποτελέσματα τα οποία οφείλονται στους Asensio-Mayor, Hernandez [4] και τα οποία χαρακτηρίζουν τους (μεταθετικούς) δακτυλίους R για τους οποίους η κλάση R-Proj των προβολικών αριστερών R-προτύπων είναι (pre)enveloping.

Θεώρημα 4.5.15. *Για έναν δακτύλιο R, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Η κλάση R-Proj των προβολικών αριστερών R-προτύπων είναι preenveloping.*

2. *Ο δακτύλιος R είναι αριστερά τέλειος και δεξιά συναφής.*

Απόδειξη. 2. $\Longrightarrow$ 1. Επειδή ο δακτύλιος R είναι αριστερά τέλειος, έχουμε R-Proj $=$ R-Flat, και επειδή ο δακτύλιος R είναι δεξιά συναφής, έπεται ότι η κλάση R-Flat είναι preenveloping από το Θεώρημα (4.5.12). Άρα η κλάση R-Proj είναι preenveloping.

1. $\Longrightarrow$ 2. Αν η κλάση R-Proj των προβολικών αριστερών R-προτύπων είναι preenveloping, τότε η κλάση R-Proj είναι κλειστή στα ευθέα γινόμενα (εύκολα βλέπουμε ότι κάθε preenveloping κλάση έχει αυτή την ιδιότητα). Τότε από το Θεώρημα (4.4.10), έπεται ότι ο δακτύλιος R είναι αριστερά τέλειος και δεξιά συναφής. □

Επειδή ένας μεταθετικός δακτύλιος είναι τέλειος και συναφής αν και μόνον αν είναι δακτύλιος του Artin, δηλαδή κάθε φθίνουσα αλυσίδα ιδεωδών του σταματά, βλέπε [8], θα έχουμε την ακόλουθη συνέπεια του Θεωρήματος (4.5.15).

Θεώρημα 4.5.16. *Για έναν μεταθετικό δακτύλιο R, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Η κλάση R-Proj των προβολικών αριστερών R-προτύπων είναι preenveloping.*

2. *Ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος του Artin.*

Το ακόλουθο αποτέλεσμα είναι μία ισχυρότερη εκδοχή του Θεωρήματος (4.5.15).

Θεώρημα 4.5.17. *Για έναν δακτύλιο R, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Η κλάση R-Proj των προβολικών αριστερών R-προτύπων είναι enveloping.*

2. *Ο δακτύλιος R είναι αριστερά τέλειος και δεξιά συναφής.*

Απόδειξη. Εάν η κλάση R-Proj των προβολικών αριστερών R-προτύπων είναι enveloping τότε είναι και preenveloping και άρα από το Θεώρημα (4.5.15) έχουμε ότι ο δακτύλιος R είναι αριστερά τέλειος και δεξιά συναφής. Για την απόδειξη του αντιστρόφου παραπέμπουμε στο βιβλίο του M.Prest [28, Proposition 3.9, Corollary 14.22] και στο άρθρο των H.Krause-M.Saorin [20, Theorem 2.3]. □

Για καλύψεις ή περιβλήματα περισσότερων κλάσεων προτύπων υπεράνω δακτυλίων παραπέμπουμε στο άρθρο των Rada-Saorin [23] και στο άρθρο των Aldrich-Enochs-Jenda-Oyonarte [1].

Κεφάλαιο 5

Επίπεδες Καλύψεις

Σε αυτό το Κεφάλαιο θα επικεντρωθούμε στην θεωρία επίπεδων καλύψεων (flat covers) προτύπων υπεράνω ενός δακτυλίου. Ειδικότερα θα αποδείξουμε την ύπαρξη επίπεδων καλύψεων για μεγάλες κλάσεις δακτυλίων οι οποίοι ικανοποιούν διάφορες ομολογικές συνθήκες περατότητας, π.χ. πεπερασμένη ασθενή ομολογική διάσταση, πεπερασμένη καθαρά ολική ομολογική διάσταση, κτλ.

5.1 Πρότυπα με Πεπερασμένη Ασθενή Ομολογική Διάσταση

Έστω R-Flat η κλάση των επίπεδων αριστερών R-προτύπων. Από εδώ και στο εξής με τον όρο επίπεδο (pre)cover (flat (pre)cover) θα εννοούμε ένα R-Flat-(pre)cover. Σκοπός μας σε αυτή την ενότητα είναι να δείξουμε ότι κάθε αριστερό R-πρότυπο με πεπερασμένη επίπεδη διάσταση έχει ένα επίπεδο cover, όταν ο δακτύλιος R είναι δεξιά συναφής.

Παρατήρηση 5.1.1. Έστω M ένα αριστερό R-πρότυπο. Εάν $\phi\colon F \longrightarrow M$ είναι ένα επίπεδο precover του M, τότε σύμφωνα με την Παρατήρηση $(4.1.7)$, η ϕ είναι επιμορφισμός επειδή η κλάση R-Flat περιέχει όλα τα προβολικά πρότυπα.

Παρατήρηση 5.1.2. Από την Πρόταση $(3.1.20)$ έχουμε ότι η κλάση R-Flat είναι κλειστή στα ευθέα όρια. Επομένως, από το Θεώρημα $(4.3.10)$ η αναζήτηση ενός επίπεδου cover έγκειται στην αναζήτηση ενός επίπεδου precover.

Ας περάσουμε τώρα σε μία Πρόταση που θα μας χρειαστεί αρκετά στην συνέχεια.

Πρόταση 5.1.3. *Εάν $0 \longrightarrow C \xrightarrow{i} F \xrightarrow{\phi} M \longrightarrow 0$ είναι μία ακριβής ακολουθία αριστερών R-προτύπων με C συστρεπτικό και F επίπεδο τότε ο ομομορφισμός $\phi\colon F \longrightarrow M$ είναι ένα επίπεδο precover του M. Αντίστροφα, εάν $\phi\colon F \longrightarrow M$ είναι ένα επίπεδο cover του M, τότε ο πυρήνας $\mathsf{Ker}\,\phi$ είναι συστρεπτικό πρότυπο.*

Απόδειξη. Έστω G ένα επίπεδο αριστερό R-πρότυπο. Από την Πρόταση $(2.3.20)$ υπάρχει η μακρά ακριβής ακολουθία:

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(G,C) \xrightarrow{i_*} \mathsf{Hom}_R(G,F) \xrightarrow{\phi_*} \mathsf{Hom}_R(G,M) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathsf{Ext}^1_R(G,C) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_R(G,F) \longrightarrow \cdots$$

Όμως επειδή το G είναι επίπεδο και το C συστρεπτικό έχουμε ότι $\mathsf{Ext}^1_R(G,C) = 0$. Επομένως η ϕ_* είναι επιμορφισμός και έτσι για κάθε ομομορφισμό $f\colon G \longrightarrow M$ υπάρχει ομομορφισμός

$g\colon G \longrightarrow F$ τέτοιος ώστε $\phi_*(g) = f$ δηλαδή $\phi \circ g = f$. Δηλαδή έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "f"] \\ F \arrow[r, "\phi"] & M \end{tikzcd}$$

και έτσι ο ομομορφισμός $\phi\colon F \longrightarrow M$ είναι ένα επίπεδο precover του M.

Αντίστροφα, έστω $\phi\colon F \longrightarrow M$ ένα επίπεδο cover του M και $K = \mathsf{Ker}\,\phi$ ο πυρήνας της ϕ. Από την Παρατήρηση (5.1.1) έχουμε ότι η ϕ είναι επιμορφισμός και έτσι έχουμε την ακριβή ακολουθία:

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{k} F \xrightarrow{\phi} M \longrightarrow 0$$

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι το K είναι συστρεπτικό, δηλαδή ότι $\mathsf{Ext}^1_R(F', K) = 0$ για κάθε επίπεδο αριστερό R-πρότυπο F'. Από το Θεώρημα (2.3.19) αρκεί να αποδείξουμε ότι μία τυχαία επέκταση

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} F' \longrightarrow 0$$

είναι διασπάσιμη. Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση α διασπάται. Χρησιμοποιούμε το pushout του διαγράμματος

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "k"'] & A \\ F & \end{tikzcd}$$

για να πάρουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές και στήλες:

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "k"] & A \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "k'"] & F' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & F \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\phi"] & B \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\phi'"] & F' \arrow[r] & 0 \\ & M \arrow[r, equal] \arrow[d] & M \arrow[d] & & \\ & 0 & 0 & & \end{tikzcd}$$

Έχουμε ότι τα F, F' είναι επίπεδα πρότυπα, οπότε από το Πόρισμα (3.2.6) θα έχουμε ότι και το B είναι επίπεδο πρότυπο. Τώρα, επειδή $\phi\colon F \longrightarrow M$ ένα επίπεδο cover του M έχουμε ότι

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, dashed, "\rho"'] \arrow[d, "\phi'"] \\ F \arrow[r, "\phi"] & M \end{tikzcd}$$

υπάρχει ομομορφισμός $\rho\colon B \longrightarrow F$ τέτοιος ώστε $\phi \circ \rho = \phi'$. Επιπλέον επειδή:

$$\phi = \phi' \circ \gamma = \phi \circ \rho \circ \gamma = \phi \circ (\rho \circ \gamma)$$

έχουμε ότι ο ομομορφισμός $\rho \circ \gamma$ είναι ένας αυτομορφισμός στο F. Έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
K \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "k"] & A \arrow[r, dashed, "\sigma"] \arrow[d, "k'"] & K \arrow[d, "k"] \\
F \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\phi"] & B \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\phi'"] & F \arrow[d, "\phi"] \\
M \arrow[r, equal] \arrow[d] & M \arrow[r, equal] \arrow[d] & M \arrow[d] \\
0 & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

Επειδή $\phi \circ \rho = \phi'$ έχουμε ότι η ρ επάγει έναν ομομορφισμό $\sigma\colon A \longrightarrow K$ τέτοιον ώστε $k \circ \sigma = \rho \circ k'$. Τότε θα έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\sigma\circ\alpha"] & F \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\rho\circ\gamma"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "k"] & F \arrow[r, "\phi"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Τώρα επειδή ο ομομορφισμός $\rho \circ \gamma$ είναι ισομορφισμός, από το Snake Lemma θα έχουμε ότι και ο ομομορφισμός $\sigma \circ \alpha$ είναι ισομορφισμός και μάλιστα αυτομορφισμός στο K. Επομένως, ο ομομορφισμός α είναι διασπάσιμος μονομορφισμός και άρα η επέκταση

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} F' \longrightarrow 0$$

διασπάται. Άρα, $\mathsf{Ext}^1_R(F', K) = 0$ για κάθε επίπεδο αριστερό R-πρότυπο F' και έτσι το $K = \mathsf{Ker}\,\phi$ είναι συστρεπτικό πρότυπο. □

Πόρισμα 5.1.4. *Εάν ένα αριστερό R-πρότυπο M έχει ένα επίπεδο cover*

$$\phi\colon F \longrightarrow M$$

τότε το M είναι συστρεπτικό αν και μόνο αν το F είναι συστρεπτικό.

Απόδειξη. Έστω $\phi\colon F \longrightarrow M$ ένα επίπεδο cover του M και $K = \mathsf{Ker}\,\phi$ ο πυρήνας της ϕ. Επειδή η ϕ είναι επιμορφισμός έχουμε την ακριβή ακολουθία:

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{k} F \xrightarrow{\phi} M \longrightarrow 0$$

Έστω G ένα επίπεδο αριστερό R-πρότυπο. Από την Πρόταση (2.3.20) υπάρχει η μακρά ακριβής ακολουθία:

$$\longrightarrow \mathsf{Ext}^1_R(G, K) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_R(G, F) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_R(G, M) \longrightarrow \mathsf{Ext}^2_R(G, K) \longrightarrow \cdots$$

Από την προηγούμενη Πρόταση έχουμε ότι το K είναι συστρεπτικό. Επομένως από την Πρόταση (4.2.8) έχουμε ότι $\mathsf{Ext}^1_R(G, K) = \mathsf{Ext}^2_R(G, K) = 0$. Άρα, $\mathsf{Ext}^1_R(G, F) \cong \mathsf{Ext}^1_R(G, M)$ και έτσι το M είναι συστρεπτικό αν και μόνο αν το F είναι συστρεπτικό. □

Τα συστρεπτικά πρότυπα παίζουν κυρίαρχο ρόλο στην διαδικασία εύρεσης επίπεδων pre-covers. Αρχικά θα χρειαστούμε το ακόλουθο:

Πρόταση 5.1.5. *Έστω $0 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_3 \longrightarrow 0$ μία ακριβής ακολουθία αριστερών R-προτύπων.*

1. *Εάν τα C_1 και C_3 είναι συστρεπτικά πρότυπα, τότε και το C_2 είναι συστρεπτικό.*
2. *Εάν τα C_1 και C_2 είναι συστρεπτικά πρότυπα, τότε και το C_3 είναι συστρεπτικό.*

Απόδειξη. 1. Έστω F ένα επίπεδο αριστερό R-πρότυπο. Από την Πρόταση (2.3.20) υπάρχει η μακρά ακριβής ακολουθία:

$$\longrightarrow \mathsf{Ext}^1_R(F, C_1) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_R(F, C_2) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_R(F, C_3) \longrightarrow \cdots$$

Επειδή τα C_1 και C_3 είναι συστρεπτικά πρότυπα θα έχουμε ότι

$$\mathsf{Ext}^1_R(F, C_1) = \mathsf{Ext}^1_R(F, C_3) = 0$$

Επομένως και $\mathsf{Ext}^1_R(F, C_2) = 0$. Επειδή το F ήταν τυχαίο επίπεδο αριστερό R-πρότυπο, έχουμε ότι για κάθε επίπεδο αριστερό R-πρότυπο F, $\mathsf{Ext}^1_R(F, C_2) = 0$. Άρα το C_2 είναι συστρεπτικό πρότυπο.

2. Έστω F ένα επίπεδο αριστερό R-πρότυπο. Από την Πρόταση (2.3.20) υπάρχει η μακρά ακριβής ακολουθία:

$$\longrightarrow \mathsf{Ext}^1_R(F, C_1) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_R(F, C_2) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_R(F, C_3) \longrightarrow \mathsf{Ext}^2_R(F, C_1) \longrightarrow \cdots$$

Από υπόθεση έχουμε ότι τα C_1 και C_2 είναι συστρεπτικά πρότυπα, άρα από την Πρόταση (4.2.8) θα έχουμε ότι

$$\mathsf{Ext}^1_R(F, C_1) = \mathsf{Ext}^1_R(F, C_2) = \mathsf{Ext}^2_R(F, C_1) = 0$$

Επομένως και $\mathsf{Ext}^1_R(F, C_3) = 0$. Επειδή το F ήταν τυχαίο επίπεδο αριστερό R-πρότυπο, έχουμε ότι για κάθε επίπεδο αριστερό R-πρότυπο F, $\mathsf{Ext}^1_R(F, C_3) = 0$. Άρα το C_3 είναι συστρεπτικό πρότυπο. □

Ας περάσουμε τώρα σε έναν ισομορφισμό που θα μας χρειαστεί.

Θεώρημα 5.1.6. *Έστω R, S δακτύλιοι, A ένα πεπερασμένα παραστάσιμο δεξιό S-πρότυπο, B ένα (R, S)-διπρότυπο, και C ένα ενέσιμο αριστερό R-πρότυπο. Τότε υπάρχει ένας φυσικός ομομορφισμός*

$$\tau \colon A \otimes_S \mathsf{Hom}_R(B, C) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(\mathsf{Hom}_S(A, B), C), \qquad a \otimes f \longmapsto \tau(a \otimes f)$$

για κάθε $a \in A$, $f \in \mathsf{Hom}_R(B, C)$ και

$$\tau(a \otimes f) \colon \mathsf{Hom}_S(A, B) \longrightarrow C, \qquad g \longmapsto \tau(a \otimes f)(g) := f(g(a))$$

όπου $g \in \mathsf{Hom}_S(A, B)$.

Απόδειξη. Επειδή το A είναι πεπερασμένα παραστάσιμο, από το Λήμμα (3.3.2) υπάρχει η ακριβής ακολουθία

$$F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

όπου F_1 και F_0 είναι πεπερασμένα παραγόμενα και ελεύθερα δεξιά S-πρότυπα. Θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
F_1 \otimes_S \mathsf{Hom}_R(B, C) \arrow[r] \arrow[d, "k"] & F_0 \otimes_S \mathsf{Hom}_R(B, C) \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"] & A \otimes_S \mathsf{Hom}_R(B, C) \arrow[r] \arrow[d, "\tau"] & 0 \\
\mathsf{Hom}_R(\mathsf{Hom}_S(F_1, B), C) \arrow[r] & \mathsf{Hom}_R(\mathsf{Hom}_S(F_0, B), C) \arrow[r] & \mathsf{Hom}_R(\mathsf{Hom}_S(A, B), C) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

με ακριβείς γραμμές. Επειδή το F_1 είναι πεπερασμένα παραγόμενο και ελεύθερο δεξιό S-πρότυπο, υπάρχει φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε $F_1 \cong S^n$, άρα θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} F_1 \otimes_S \mathsf{Hom}_R(B,C) &\cong S^n \otimes_S \mathsf{Hom}_R(B,C) \\ &\cong \oplus_{\alpha\in I} S_\alpha \otimes_S \mathsf{Hom}_R(B,C) \\ &\cong \oplus_{\alpha\in I}(S_\alpha \otimes_S \mathsf{Hom}_R(B,C)) \\ &\cong \oplus_{\alpha\in I} \mathsf{Hom}_R(B,C) \end{aligned}$$

όπου $I = \{1, 2, \ldots, n\}, S_\alpha = S$ και

$$\begin{aligned} \mathsf{Hom}_R(\mathsf{Hom}_S(F_1,B),C) &\cong \mathsf{Hom}_R(\mathsf{Hom}_S(S^n,B),C) \\ &\cong \mathsf{Hom}_R(\mathsf{Hom}_S(\oplus_{\alpha\in I} S_\alpha,B),C) \\ &\cong \mathsf{Hom}_R\Big(\prod_{\alpha\in I}\mathsf{Hom}_S(S_\alpha,B),C\Big) \\ &\cong \oplus_{\alpha\in I} \mathsf{Hom}_R(B,C) \end{aligned}$$

Επομένως η απεικόνιση k είναι ισομορφισμός. Ομοίως και η απεικόνιση λ είναι ισομορφισμός. Έτσι από την μεταθετικότητα του διαγράμματος έπεται ότι και η τ είναι ισομορφισμός. □

Το ακόλουθο αποτέλεσμα θα μας είναι χρήσιμο στη συνέχεια και μπορεί να θεωρηθεί ως μερικό «αντίστροφο» του Θεωρήματος των Bourbaki-Lambek, βλέπε Πρόταση (3.1.15).

Λήμμα 5.1.7. *Εάν R είναι ένας δεξιά συναφής δακτύλιος και E ένα ενέσιμο δεξιό R-πρότυπο, τότε το $E^+ = \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(E, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ είναι ένα επίπεδο αριστερό R-πρότυπο.*

Απόδειξη. Έστω I ένα πεπερασμένα παραγόμενο δεξιό ιδεώδες του R και

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow R \tag{5.1}$$

η κανονική έγκλειση. Για να αποδείξουμε ότι το $E^+ = \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(E, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ είναι ένα επίπεδο αριστερό R-πρότυπο αρκεί να αποδείξουμε ότι η ακολουθία

$$0 \longrightarrow I \otimes_R \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(E,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha} R \otimes_R \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(E,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

είναι ακριβής, δηλαδή ότι η απεικόνιση

$$\alpha\colon I \otimes_R \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(E,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow R \otimes_R \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(E,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

είναι μονομορφισμός. Τώρα εάν εφαρμόσουμε τον συναρτητή $\mathsf{Hom}_R(-, E)$, όπου E ένα ενέσιμο δεξιό R-πρότυπο, στην (5.1) θα πάρουμε την ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(R,E) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(I,E) \tag{5.2}$$

Επιπλέον, έναν εφαρμόσουμε τον συναρτητή $\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ στην (5.2) θα πάρουμε την ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathsf{Hom}_R(I,E),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta} \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathsf{Hom}_R(R,E),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

Έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} I \otimes_R \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(E,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\tau"] & R \otimes_R \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(E,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[d, "\bar{\tau}"] \\ \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathsf{Hom}_R(I,E),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r, "\beta"] & \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathsf{Hom}_R(R,E),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \end{tikzcd}$$

Επειδή ο δακτύλιος R είναι δεξιά συναφής, κάθε πεπερασμένα παραγόμενο δεξιό ιδεώδες I είναι πεπερασμένα παραστάσιμο. Επομένως, από το Θεώρημα (5.1.6) έχουμε ότι η τ είναι ισομορφισμός. Επιπλέον έχουμε ότι

$$\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathsf{Hom}_R(R,E),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(E,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong R \otimes_R \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(E,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

Άρα και η $\bar{\tau}$ είναι ισομορφισμός. Έτσι λόγω μεταθετικότητας του διαγράμματος έχουμε ότι $\beta\circ\tau = \bar{\tau}\circ\alpha$ και άρα η απεικόνιση α είναι μονομορφισμός εφόσον η β είναι μονομορφισμός. □

Πρόταση 5.1.8. *Εάν R είναι ένας δεξιά συναφής δακτύλιος τότε για οποιοδήποτε δεξιό R-πρότυπο M, το αριστερό R-πρότυπο $M^+ = \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ έχει ένα επίπεδο cover.*

Απόδειξη. Έστω $M \subset E$ με E ένα ενέσιμο δεξιό R-πρότυπο. Η εμφύτευση $i\colon M \longrightarrow E$ μας δίνει την απεικόνιση $i^*\colon E^+ \longrightarrow M^+$. Από το προηγούμενο Λήμμα έχουμε ότι το E^+ είναι ένα επίπεδο αριστερό R-πρότυπο. Θα αποδείξουμε ότι η απεικόνιση $i^*\colon E^+ \longrightarrow M^+$ είναι ένα επίπεδο precover του M^+. Έστω F ένα επίπεδο αριστερό R-πρότυπο. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι η ακολουθία

$$\mathsf{Hom}_R(F,E^+) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(F,M^+) \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής ή ισοδύναμα ότι η ακολουθία

$$\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(E\otimes_R F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(M\otimes_R F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής. Αλλά επειδή το F είναι ένα επίπεδο αριστερό R-πρότυπο έχουμε ότι η ακολουθία

$$0 \longrightarrow M\otimes_R F \longrightarrow E\otimes_R F \tag{5.3}$$

είναι ακριβής. Έτσι εάν εφαρμόσουμε τον συναρτητή $\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(-,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ στην (5.3), επειδή η αβελιανή ομάδα $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ είναι ενέσιμο $\mathbb{Z}$-πρότυπο, θα πάρουμε την ακριβή ακολουθία

$$\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(E\otimes_R F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(M\otimes_R F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

Επομένως, η απεικόνιση $i^*\colon E^+ \longrightarrow M^+$ είναι ένα επίπεδο precover του M^+, άρα και cover. □

Πρόταση 5.1.9. *Η ακολουθία $0 \longrightarrow T \longrightarrow N$ αριστερών R-προτύπων είναι καθαρά ακριβής αν και μόνο αν η απεικόνιση $N^+ \longrightarrow T^+$ έχει δεξιό αντίστροφο.*

Απόδειξη. Εάν η ακολουθία $0 \longrightarrow T \longrightarrow N$ είναι καθαρά ακριβής τότε για κάθε δεξιό R-πρότυπο M έχουμε ότι η ακολουθία

$$0 \longrightarrow M\otimes_R T \longrightarrow M\otimes_R N \tag{5.4}$$

είναι ακριβής. Τώρα αν εφαρμόσουμε τον συναρτητή $\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(-,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ στην (5.4), επειδή η αβελιανή ομάδα $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ είναι ενέσιμο $\mathbb{Z}$-πρότυπο, θα πάρουμε την ακριβή ακολουθία

$$\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(M\otimes_R N,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(M\otimes_R T,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

ή ισοδύναμα την ακριβή ακολουθία

$$\mathsf{Hom}_R(M,N^+) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(M,T^+) \longrightarrow 0$$

Αν θέσουμε $M = T^+$ τότε έχουμε ότι η ακολουθία

$$\mathsf{Hom}_R(T^+,N^+) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(T^+,T^+) \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής. Επομένως η απεικόνιση $N^+ \longrightarrow T^+$ έχει δεξιό αντίστροφο.

Αντίστροφα, έστω ότι η απεικόνιση $f\colon N^+ \longrightarrow T^+$ έχει δεξιό αντίστροφο. Άρα υπάρχει απεικόνιση $g\colon T^+ \longrightarrow N^+$ τέτοια ώστε $f \circ g = \mathrm{Id}_{T^+}$, δηλαδή το T^+ είναι ευθύς προσθετέος του N^+. Επομένως για κάθε δεξιό R-πρότυπο M, έχουμε την ακριβή ακολουθία

$$\mathsf{Hom}_R(M, N^+) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(M, T^+) \longrightarrow 0$$

ή ισοδύναμα την ακριβή ακολουθία

$$\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R T, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

Επειδή η αβελιανή ομάδα $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ είναι ένας ενέσιμος συνγεννήτορας θα έχουμε την ακριβή ακολουθία $0 \longrightarrow M \otimes_R T \longrightarrow M \otimes_R N$ και έτσι η ακολουθία

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow N$$

είναι καθαρά ακριβής. □

Θεώρημα 5.1.10. *Έστω R ένας δακτύλιος και M ένα αριστερό R-πρότυπο. Τότε:*

1. *Υπάρχει ένας R-μονομορφισμός ο οποίος είναι φυσικός στο M:*

$$i_M\colon M \longrightarrow M^{++}, \quad x \longmapsto i_M(x)$$

όπου

$$\begin{aligned} i_M(x)\colon M^+ &\longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ f &\longmapsto i_M(x)(f) := f(x) \end{aligned}$$

για κάθε $f \in M^+$, $x \in M$.

2. *Ο μονομορφισμός i_M είναι καθαρός. Με άλλα λόγια το M μπορεί να εμφυτευθεί καθαρά σε ένα καθαρά ενέσιμο πρότυπο.*

3. *Εάν το M είναι καθαρά ενέσιμο τότε είναι ευθύς προσθετέος του M^{++}.*

Απόδειξη. 1. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η απεικόνιση i_M είναι ένας R-ομομορφισμός ο οποίος είναι φυσικός στο M. Τώρα, έστω $x \in M$ τέτοιο ώστε $i_M(x) = 0$. Άρα $0 = i_M(x)(f) = f(x)$, για κάθε $f \in M^+$. Όμως επειδή η αβελιανή ομάδα $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ είναι ένας ενέσιμος συνγεννήτορας θα έχουμε ότι $x = 0$. Επομένως ο ομομορφισμός i_M είναι ένας R-μονομορφισμός.

2.Για να αποδείξουμε ότι ο μονομορφισμός i_M είναι καθαρός αρκεί να αποδείξουμε σύμφωνα με την προηγούμενη Πρόταση ότι η απεικόνιση $M^{+++} \longrightarrow M^+$ έχει δεξιό αντίστροφο. Αλλά ο φυσικός μονομορφισμός $i_{M^+}\colon M^+ \longrightarrow M^{+++}$ είναι ο δεξιός αντίστροφος που αναζητάμε.

3. Ας υποθέσουμε ότι το M είναι καθαρά ενέσιμο. Από το 2, υπάρχει η καθαρά ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i_M} M^{++}$$

Επειδή το M είναι καθαρά ενέσιμο θα πάρουμε την ακριβή ακολουθία

$$\mathsf{Hom}_R(M^{++}, M) \xrightarrow{i_M^*} \mathsf{Hom}_R(M, M) \longrightarrow 0$$

Δηλαδή υπάρχει ομομορφισμός $g\colon M^{++} \longrightarrow M$ τέτοιος ώστε $g \circ i_M = \mathrm{Id}_M$. Άρα ο i_M είναι διασπάσιμος μονομορφισμός και έτσι το M είναι ευθύς προσθετέος του M^{++}. □

Θεώρημα 5.1.11. *Έστω R ένας δεξιά συναφής δακτύλιος. Τότε κάθε καθαρά ενέσιμο αριστερό R-πρότυπο M έχει ένα επίπεδο cover $\phi\colon F \longrightarrow M$ με F και $\mathsf{Ker}\,\phi$ καθαρά ενέσιμα.*

Απόδειξη. Έστω M ένα καθαρά ενέσιμο αριστερό R-πρότυπο. Από το 3. του προηγούμενου Θεωρήματος έχουμε ότι το M είναι ευθύς προσθετέος του M^{++}. Αλλά το M^{+} είναι ένα δεξιό R-πρότυπο και έτσι το M^{++} έχει ένα επίπεδο cover $\phi\colon F \longrightarrow M^{++}$ από την Πρόταση (5.1.8). Αλλά τότε η σύνθεση $F \longrightarrow M^{++} \xrightarrow{\pi} M$, όπου π είναι η κανονική προβολή είναι ένα επίπεδο precover του M, άρα και cover.

Έστω $\phi\colon F \longrightarrow M$ ένα επίπεδο cover του M και $K = \mathsf{Ker}\,\phi$ ο πυρήνας της ϕ. Από την Παρατήρηση (5.1.1) έχουμε ότι η ϕ είναι επιμορφισμός και έτσι έχουμε την ακριβή ακολουθία:

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{k} F \xrightarrow{\phi} M \longrightarrow 0 \tag{5.5}$$

Η (5.5) επάγει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "k"] \arrow[d, "i_K"] & F \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "i_F"] & M \arrow[r] \arrow[d, "i_M"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K^{++} \arrow[r, "k^{++}"] & F^{++} \arrow[r, "\phi^{++}"] & M^{++} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Επειδή το M είναι καθαρά ενέσιμο έχουμε ότι ο i_M είναι διασπάσιμος μονομορφισμός. Άρα υπάρχει ομομορφισμός $\varpi_M\colon M^{++} \longrightarrow M$ τέτοιος ώστε $\varpi_M \circ i_M = \mathsf{Id}_M$. Θεωρούμε την σύνθεση $\varpi_M \circ \phi^{++}\colon F^{++} \longrightarrow M$ Έχουμε ότι το F είναι επίπεδο αριστερό R-πρότυπο, άρα το F^{+} είναι ένα ενέσιμο δεξιό R-πρότυπο. Έτσι από το Λήμμα (5.1.7) επειδή ο δακτύλιος R είναι δεξιά συναφής έχουμε ότι το F^{++} είναι ένα επίπεδο αριστερό R-πρότυπο. Τώρα επειδή το $\phi\colon F \longrightarrow M$ είναι ένα επίπεδο cover του M, θα έχουμε ότι

$$\begin{tikzcd}
 & F^{++} \arrow[dl, dashed, "\rho"'] \arrow[d, "\varpi_M \circ \phi^{++}"] \\
F \arrow[r, "\phi"] & M
\end{tikzcd}$$

υπάρχει ομομορφισμός $\rho\colon F^{++} \longrightarrow F$ τέτοιος ώστε $\phi \circ \rho = \varpi_M \circ \phi^{++}$. Επιπλέον επειδή:

$$\phi \circ (\rho \circ i_F) = \varpi_M \circ \phi^{++} \circ i_F = \varpi_M \circ i_M \circ \phi = \mathrm{Id}_M \circ \phi = \phi$$

έχουμε ότι ο ομομορφισμός $\rho \circ i_F$ είναι ένας αυτομορφισμός στο F, άρα ο i_F είναι διασπάσιμος μονομορφισμός. Έτσι υπάρχει ομομορφισμός $\varpi_F\colon F^{++} \longrightarrow F$ τέτοιος ώστε $\varpi_F \circ i_F = \mathrm{Id}_F$. Άρα το F είναι ευθύς προσθετέος του F^{++}. Επειδή τώρα το F^{++} είναι καθαρά ενέσιμο(βλέπε Πρόταση (4.2.14)) και ευθύς προσθετέος καθαρού ενέσιμου είναι καθαρά ενέσιμο πρότυπο (βλέπε Λήμμα (4.2.13)), έχουμε ότι το F είναι καθαρά ενέσιμο. Επιπλέον έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
K \arrow[r, "i_K"] \arrow[d, "k"] & K^{++} \arrow[r, dashed, "\sigma"] \arrow[d, "k^{++}"] & K \arrow[d, "k"] \\
F \arrow[r, "i_F"] \arrow[d, "\phi"] & F^{++} \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\phi^{++}"] & F \arrow[d, "\phi"] \\
M \arrow[r, "i_M"] \arrow[d] & M^{++} \arrow[r, "\varpi_M"] \arrow[d] & M \arrow[d] \\
0 & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

Επειδή $\varpi_M \circ \phi^{++} = \phi \circ \rho$, έχουμε ότι η ρ επάγει έναν ομομορφισμό $\sigma \colon K^{++} \longrightarrow K$ τέτοιον ώστε $k \circ \sigma = \rho \circ k^{++}$. Τότε θα έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\sigma\circ i_K"] & F \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\rho\circ i_F"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "k"] & F \arrow[r, "\phi"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Τώρα επειδή ο ομομορφισμός $\rho \circ i_F$ είναι ισομορφισμός, από το Snake Lemma θα έχουμε ότι και ο ομομορφισμός $\sigma \circ i_K$ είναι ισομορφισμός και μάλιστα αυτομορφισμός στο K. Επομένως, ο ομομορφισμός i_K είναι διασπάσιμος μονομορφισμός. Άρα το K είναι ευθύς προσθετέος του K^{++} και έτσι όπως προηγουμένως το K είναι καθαρά ενέσιμο. □

Έστω R-PInj η κλάση των καθαρά ενέσιμων αριστερών R-προτύπων. Για οποιοδήποτε αριστερό R-πρότυπο M, ένα R-PInj-envelope του M καλείται **καθαρά ενέσιμο envelope (pure injective envelope)** , και συμβολίζεται με $PE(M)$. Επιπλέον, η απεικόνιση

$$\phi \colon M \longrightarrow PE(M)$$

είναι μονομορφισμός και αυτό έπεται από το γεγονός ότι κάθε πρότυπο μπορεί να εμφυτευθεί σε ένα ενέσιμο πρότυπο και ότι κάθε ενέσιμο πρότυπο είναι καθαρά ενέσιμο.

Το ακόλουθο Λήμμα μας πιστοποιεί ένα πολύ σημαντικό γεγονός που αφορά τα καθαρά ενέσιμα envelopes υπεράνω συναφών δακτυλίων. Αυτό το γεγονός θα αποδειχθεί ιδιαίτερα χρήσιμο στην κατασκευή επίπεδων precovers.

Λήμμα 5.1.12. *Έστω R ένας δεξιά συναφής δακτύλιος. Εάν F είναι ένα επίπεδο αριστερό R-πρότυπο και $PE(F)$ ένα καθαρά ενέσιμο envelope του F, τότε το $PE(F)$ είναι επίπεδο. Επιπλέον και το $PE(F)/F$ είναι επίσης επίπεδο.*

Απόδειξη. Έστω $P = PE(F)$ και $i \colon F \longrightarrow P$ ο επαγόμενος μονομορφισμός. Έστω $K = \operatorname{Coker} i$. Έτσι έχουμε την ακόλουθη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{i} P \longrightarrow K \longrightarrow 0 \tag{5.6}$$

Η ακολουθία (5.6) επάγει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i_F"] & P \arrow[r] \arrow[d, "i_P"] & K \arrow[r] \arrow[d, "i_K"] & 0 \\
0 \arrow[r] & F^{++} \arrow[r, "i^{++}"] & P^{++} \arrow[r] & K^{++} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Επειδή το P είναι καθαρά ενέσιμο έχουμε ότι ο i_P είναι διασπάσιμος μονομορφισμός. Άρα υπάρχει ομομορφισμός $\varpi_P \colon P^{++} \longrightarrow P$ τέτοιος ώστε $\varpi_P \circ i_P = \mathrm{Id}_P$. Τώρα επειδή το $i \colon F \longrightarrow P$ είναι ένα καθαρά ενέσιμο envelope του F και το F^{++} είναι καθαρά ενέσιμο, θα έχουμε ότι

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i_F"'] & P \arrow[dl, dashed, "k"] \\
F^{++}
\end{tikzcd}$$

υπάρχει ομομορφισμός $k \colon P \longrightarrow F^{++}$ τέτοιος ώστε $k \circ i = i_F$. Επιπλέον επειδή:

$$[(\varpi_P \circ i^{++}) \circ k] \circ i = \varpi_P \circ i^{++} \circ k \circ i = \varpi_P \circ i^{++} \circ i_F = \varpi_P \circ i_P \circ i = \mathrm{Id}_P \circ i = i$$

έχουμε ότι ο ομομορφισμός $(\varpi_P \circ i^{++}) \circ k$ είναι ένας αυτομορφισμός στο P, άρα ο k είναι διασπάσιμος μονομορφισμός. Έτσι υπάρχει ομομορφισμός $\lambda\colon F^{++} \longrightarrow P$ τέτοιος ώστε $\lambda \circ k = \mathrm{Id}_P$. Άρα το P είναι ευθύς προσθετέος του F^{++}. Έχουμε ότι το F είναι επίπεδο αριστερό R-πρότυπο, άρα το F^{+} είναι ένα ενέσιμο δεξιό R-πρότυπο. Έτσι από το Λήμμα (5.1.7) επειδή ο δακτύλιος R είναι δεξιά συναφής έχουμε ότι το F^{++} είναι ένα επίπεδο αριστερό R-πρότυπο. Επομένως το P είναι επίπεδο ως ευθύς προσθετέος επίπεδου. Επιπλέον επειδή η ακολουθία (5.6) είναι καθαρά ακριβής από την Πρόταση (3.2.5) έχουμε ότι το K είναι επίπεδο. Επομένως το $P/F \cong P/\operatorname{Im} i = \operatorname{Coker} i = K$ είναι επίπεδο. $\square$

Πρόταση 5.1.13. *Έστω R ένας δεξιά συναφής δακτύλιος και M ένα αριστερό R-πρότυπο. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Το M έχει ένα επίπεδο cover.*
2. *Υπάρχει μία ακριβής ακολουθία $0 \longrightarrow M \longrightarrow G \longrightarrow F \longrightarrow 0$, όπου το F είναι επίπεδο, το G συστρεπτικό και έχει ένα επίπεδο cover.*
3. *Υπάρχει μία ακριβής ακολουθία $0 \longrightarrow M \longrightarrow G \longrightarrow F \longrightarrow 0$, όπου το F είναι επίπεδο και το G έχει ένα επίπεδο cover.*

Απόδειξη. $(3 \Rightarrow 1)$ Έστω ότι υπάρχει μία ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow G \longrightarrow F \longrightarrow 0 \tag{5.7}$$

όπου το F είναι επίπεδο και το G έχει ένα επίπεδο cover. Στην ακολουθία (5.7) ας θεωρήσουμε ότι το M είναι υποπρότυπο του G και ότι το F είναι το πηλίκο G/M. Επειδή τώρα το G έχει ένα επίπεδο cover, έστω $\phi\colon F' \longrightarrow G$ ένα επίπεδο cover του. Θεωρούμε την σύνθεση $F' \xrightarrow{\phi} G \xrightarrow{\pi} G/M = F$, όπου π είναι η προβολή. Η σύνθεση αυτή έχει πυρήνα

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}(\pi \circ \phi) &= \{x \in F' \mid \pi \circ \phi(x) = 0\}\\ &= \{x \in F' \mid \phi(x) + M = 0\}\\ &= \{x \in F' \mid \phi(x) \in M\}\\ &= \phi^{-1}(M)\end{aligned}$$

Επιπλέον, η σύνθεση $\pi \circ \phi$ είναι επιμορφισμός ως σύνθεση επιμορφισμών, άρα $\operatorname{Im}(\pi \circ \phi) = G/M = F$. Επομένως από το Πρώτο Θεώρημα Ισομορφισμών έχουμε ότι $F'/\phi^{-1}(M) \cong F$. Από υπόθεση έχουμε ότι το F είναι επίπεδο πρότυπο, επομένως και το $F'/\phi^{-1}(M)$ είναι επίπεδο. Τώρα έστω η ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \phi^{-1}(M) \longrightarrow F' \longrightarrow F'/\phi^{-1}(M) \longrightarrow 0$$

Επειδή τα $F'/\phi^{-1}(M), F'$ είναι επίπεδα πρότυπα, από το Πόρισμα (3.2.6) έχουμε ότι και το $\phi^{-1}(M)$ είναι επίπεδο. Επιπλέον, επειδή η απεικόνιση $\phi\colon F' \longrightarrow G$ είναι ένα επίπεδο cover του G, ο πυρήνας της $K = \operatorname{Ker}\phi$ είναι συστρεπτικό από την Πρόταση (5.1.3) και η απεικόνιση ϕ επάγει τον επιμορφισμό $\phi'\colon \phi^{-1}(M) \longrightarrow M$ του οποίου ο πυρήνας είναι ξανά το $K = \operatorname{Ker}\phi$. Έτσι έχουμε την ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}\phi \longrightarrow \phi^{-1}(M) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

όπου το $\operatorname{Ker}\phi$ είναι συστρεπτικό και το $\phi^{-1}(M)$ είναι επίπεδο. Επομένως από την Πρόταση (5.1.3) ο επιμορφισμός $\phi'\colon \phi^{-1}(M) \longrightarrow M$ είναι ένα επίπεδο precover του M, άρα και cover.

$(1 \Rightarrow 2)$ Ας υποθέσουμε ότι το M έχει ένα επίπεδο cover $\phi\colon F' \longrightarrow M$ με πυρήνα $K = \operatorname{Ker}\phi$. Τότε από την Πρόταση (5.1.3) έχουμε ότι το K είναι συστρεπτικό. Έστω $F' \longrightarrow P$

ένα καθαρά ενέσιμο envelope του F' με συνπυρήνα F. Από το Λήμμα (5.1.12) τα F, P είναι επίπεδα πρότυπα. Τότε χρησιμοποιώντας το pushout των απεικονίσεων

$$\begin{tikzcd} F' \arrow[r] \arrow[d] & M \\ P & \end{tikzcd}$$

θα πάρουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές και στήλες

$$\begin{tikzcd} & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, equal] & F' \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & & F \arrow[r, equal] \arrow[d] & F \arrow[d] & \\ & & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

Εφαρμόζοντας την Πρόταση (5.1.5) στην ακριβή ακολουθία $0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow G \longrightarrow 0$ θα πάρουμε ότι το G είναι συστρεπτικό, επειδή τα K, P είναι συστρεπτικά. Επιπλέον από την Πρόταση (5.1.3) έπεται ότι η απεικόνιση $P \longrightarrow G$ είναι ένα επίπεδο precover του G, άρα και cover, επειδή το K είναι συστρεπτικό και το P επίπεδο. Επομένως η ακολουθία

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow G \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

είναι η επιθυμητή ακολουθία.

$(2 \Rightarrow 3)$ Προφανές. □

Παρατήρηση 5.1.14. Έστω R ένας δεξιά συναφής δακτύλιος και F ένα επίπεδο αριστερό R-πρότυπο. Ας υποθέσουμε ότι $F \longrightarrow P$ είναι ένα καθαρά ενέσιμο envelope του F με συνπυρήνα K. Επομένως υπάρχει η ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow P \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

Από το Λήμμα (5.1.12) έχουμε ότι το K είναι επίπεδο. Επιπλέον επειδή το P είναι καθαρά ενέσιμο άρα και συστρεπτικό έχει ένα επίπεδο cover(βλέπε Θεώρημα (5.1.11)). Έτσι από την προηγούμενη Πρόταση έχουμε ότι το F έχει ένα επίπεδο cover. Επομένως κάθε επίπεδο πρότυπο έχει ένα επίπεδο cover.

Θεώρημα 5.1.15. *Έστω R ένας δεξιά συναφής δακτύλιος και*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

μία ακριβής ακολουθία αριστερών R-προτύπων. Εάν τα A, C έχουν επίπεδα covers, τότε και το B έχει ένα επίπεδο cover.

Απόδειξη. Έστω $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ η δεδομένη ακριβή ακολουθία και $\psi\colon F \longrightarrow C$ ένα επίπεδο cover του C. Θεωρούμε το pullback των απεικονίσεων

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d, "\psi"] \\ B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

Οπότε θα έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "k"] \arrow[d, equal] & P \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi_1"] & F \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Θα αποδείξουμε ότι το P έχει ένα επίπεδο cover. Από υπόθεση έχουμε ότι το A έχει ένα επίπεδο cover. Άρα από την Πρόταση $(5.1.13)$ υπάρχει μία ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow G \longrightarrow D \longrightarrow 0$$

με D επίπεδο, G συστρεπτικό και το G να έχει ένα επίπεδο cover. Χρησιμοποιώντας το pushout των απεικονίσεων

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & P \\ G & \end{tikzcd}$$

θα πάρουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές και στήλες

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & G \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] & 0 \\ & D \arrow[r, equal] \arrow[d] & D \arrow[d] & & \\ & 0 & 0 & & \end{tikzcd}$$

Επειδή το G είναι συστρεπτικό και το F είναι επίπεδο, έχουμε ότι $\mathsf{Ext}^1_R(F,G) = 0$, και έτσι η ακολουθία $0 \longrightarrow G \longrightarrow L \longrightarrow F \longrightarrow 0$ διασπάται. Άρα θα έχουμε ότι $L \cong G \oplus F$. Από υπόθεση το G έχει ένα επίπεδο cover και επειδή το F είναι επίπεδο από την προηγούμενη Παρατήρηση και το F έχει ένα επίπεδο cover. Επομένως από την Πρόταση $(4.1.10)$ και το L έχει ένα επίπεδο cover. Έτσι από την ύπαρξη της ακριβούς ακολουθίας

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow L \longrightarrow D \longrightarrow 0,$$

όπου το D είναι επίπεδο και το L έχει ένα επίπεδο cover έπεται ότι το P έχει ένα επίπεδο cover.

Ας υποθέσουμε ότι ο ομομορφισμός $\sigma\colon F' \longrightarrow P$ είναι ένα επίπεδο cover του P. Θα αποδείξουμε ότι ο ομομορφισμός $\pi_1 \circ \sigma\colon F' \longrightarrow B$ είναι ένα επίπεδο precover του B. Έτσι, έστω ο ομομορφισμός $\sigma_1\colon F'' \longrightarrow B$, με F'' επίπεδο. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει ομομορφισμός $h\colon F'' \longrightarrow F'$ ο οποίος κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} & F'' \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "\sigma_1"] \\ F' \arrow[r, "\pi_1\circ\sigma"'] & B \end{tikzcd}$$

δηλαδή τέτοιος ώστε $\pi_1 \circ \sigma \circ h = \sigma_1$. Θεωρούμε την απεικόνιση $g \circ \sigma_1\colon F'' \longrightarrow C$. Επειδή $\psi\colon F \longrightarrow C$ είναι ένα επίπεδο cover του C, έχουμε ότι υπάρχει ομομορφισμός $q\colon F'' \longrightarrow F$ τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} & F'' \arrow[dl, dashed, "q"'] \arrow[d, "g\circ\sigma_1"] \\ F \arrow[r, "\psi"] & C \end{tikzcd}$$

δηλαδή $\psi \circ q = g \circ \sigma_1$. Δηλαδή υπάρχει ομομορφισμός $q\colon F'' \longrightarrow F$ τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} F'' \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\sigma_1"] & F \arrow[d, "\psi"] \\ B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

Όμως επειδή το P είναι το pullback των απεικονίσεων

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d, "\psi"] \\ B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

θα έχουμε ότι υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $p\colon F'' \longrightarrow P$ τέτοιος ώστε $\sigma_1 = \pi_1 \circ p$ και $q = \pi \circ p$. Τώρα επειδή $\sigma\colon F' \longrightarrow P$ είναι ένα επίπεδο cover του P θα έχουμε ότι υπάρχει ομομορφισμός $h\colon F'' \longrightarrow F'$ ο οποίος κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} & F'' \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "p"] \\ F' \arrow[r, "\sigma"'] & P \end{tikzcd}$$

δηλαδή $\sigma \circ h = p$. Επομένως, $\sigma_1 = \pi_1 \circ p = \pi_1 \circ \sigma \circ h$. Άρα, $\pi_1 \circ \sigma\colon F' \longrightarrow B$ είναι ένα επίπεδο precover του B και έτσι το B έχει ένα επίπεδο cover. □

Θεώρημα 5.1.16. *Έστω R ένας δεξιά συναφής δακτύλιος και*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

μία ακριβής ακολουθία αριστερών R-προτύπων. Εάν τα A, B έχουν επίπεδα covers, τότε και το C έχει ένα επίπεδο cover.

Απόδειξη. Επειδή το A έχει ένα επίπεδο cover, από την Πρόταση (5.1.13), υπάρχει μία ακριβής ακολουθία $0 \longrightarrow A \longrightarrow G \longrightarrow D \longrightarrow 0$ με D επίπεδο, G συστρεπτικό και το G να έχει ένα επίπεδο cover. Τώρα, χρησιμοποιώντας το pushout των απεικονίσεων

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \\ G & \end{tikzcd}$$

θα πάρουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές και στήλες

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & G \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] & 0 \\ & D \arrow[r, equal] \arrow[d] & D \arrow[d] & & \\ & 0 & 0 & & \end{tikzcd}$$

Το D είναι επίπεδο, άρα από την Παρατήρηση $(5.1.14)$ έχει ένα επίπεδο cover. Επιπλέον από υπόθεση το B έχει ένα επίπεδο cover. Έτσι αν εφαρμόσουμε το προηγούμενο Θεώρημα στην ακριβή ακολουθία $0 \longrightarrow B \longrightarrow L \longrightarrow D \longrightarrow 0$ θα έχουμε ότι και το L έχει ένα επίπεδο cover. Έστω $\psi \colon F \longrightarrow L$ ένα επίπεδο cover του L και $K = \mathsf{Ker}\,\psi$ ο πυρήνας της ψ, το οποίο είναι συστρεπτικό από την Πρόταση $(5.1.3)$. Χρησιμοποιώντας το pullback των απεικονίσεων

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d] \\ G \arrow[r] & L \end{tikzcd}$$

θα πάρουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές και στήλες

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\ & K \arrow[r, equal] \arrow[d] & K \arrow[d] & & \\ 0 \arrow[r] & H \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & G \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] & 0 \\ & 0 & 0 & & \end{tikzcd}$$

Εφαρμόζοντας την Πρόταση $(5.1.5)$ στην ακριβή ακολουθία $0 \longrightarrow K \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow 0$ θα έχουμε ότι το H είναι συστρεπτικό, επειδή τα K, G είναι συστρεπτικά. Επομένως, από την Πρόταση $(5.1.3)$, επειδή στην ακριβή ακολουθία $0 \longrightarrow H \longrightarrow F \longrightarrow C \longrightarrow 0$ το H είναι συστρεπτικό και το F επίπεδο, έχουμε ότι $F \longrightarrow C$ είναι ένα επίπεδο precover του C και έτσι το C έχει ένα επίπεδο cover. $\square$

Ως τώρα είδαμε ότι σε μία ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

εάν τα A, C έχουν επίπεδα covers τότε έχει και το B και εάν τα A, B έχουν επίπεδα covers τότε έχει και το C. Ισχύει όμως στην εναπομένουσα περίπτωση; Δηλαδή, εάν τα B, C έχουν επίπεδα covers, έχει και το A ; Για αυτήν την περίπτωση ισχύει το ακόλουθο Θεώρημα:

Θεώρημα 5.1.17. *Έστω R ένας δεξιά συναφής δακτύλιος. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Κάθε συστρεπτικό αριστερό R-πρότυπο έχει ένα επίπεδο cover.*

2. *Σε κάθε ακριβή ακολουθία, $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$, όπου τα B, C έχουν επίπεδα covers, και το A έχει ένα επίπεδο cover.*

Απόδειξη. $(1 \Rightarrow 2)$ Επειδή το C έχει ένα επίπεδο cover, έστω $\psi\colon F \longrightarrow C$ ένα επίπεδο cover του και $K = \mathsf{Ker}\,\psi$ ο πυρήνας της ψ, το οποίο είναι συστρεπτικό από την Πρόταση (5.1.3). Χρησιμοποιώντας το pullback των απεικονίσεων

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d] \\ B \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

θα πάρουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές και στήλες

$$\begin{tikzcd} & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ & & K \arrow[r, equal] \arrow[d] & K \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & G \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

Επειδή το K είναι συστρεπτικό, από το 1., θα έχει ένα επίπεδο cover. Επιπλέον, εάν εφαρμόσουμε το Θεώρημα (5.1.15) στην ακριβή ακολουθία $0 \longrightarrow K \longrightarrow G \longrightarrow B \longrightarrow 0$ θα έχουμε ότι και το G έχει ένα επίπεδο cover, επειδή το B έχει ένα επίπεδο cover. Επομένως, από την Πρόταση (5.1.13), επειδή στην ακριβή ακολουθία $0 \longrightarrow A \longrightarrow G \longrightarrow F \longrightarrow 0$ το F είναι επίπεδο και το G έχει ένα επίπεδο cover, έπεται ότι το A έχει ένα επίπεδο cover.

$(2 \Rightarrow 1)$ Έστω G ένα συστρεπτικό πρότυπο. Θα αποδείξουμε ότι το G έχει ένα επίπεδο cover χρησιμοποιώντας την υπόθεση 2. Θεωρούμε την ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow E \longrightarrow L \longrightarrow 0,$$

όπου $G \longrightarrow E$ είναι ένα ενέσιμο envelope του G. Επειδή κάθε ενέσιμο πρότυπο είναι καθαρά ενέσιμο και κάθε καθαρά ενέσιμο πρότυπο έχει ένα επίπεδο cover, έπεται ότι το E έχει ένα επίπεδο cover. Έστω $\psi\colon F \longrightarrow E$ ένα επίπεδο cover του και $K = \mathsf{Ker}\,\psi$ ο πυρήνας της

ψ, το οποίο είναι συστρεπτικό από την Πρόταση (5.1.3). Χρησιμοποιώντας το pullback των απεικονίσεων

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d] \\ G \arrow[r] & E \end{tikzcd}$$

θα πάρουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές και στήλες

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\ & K \arrow[r, equal] \arrow[d] & K \arrow[d] & & \\ 0 \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & G \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] & 0 \\ & 0 & 0 & & \end{tikzcd}$$

Εφαρμόζοντας την Πρόταση (5.1.5) στην ακριβή ακολουθία $0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow G \longrightarrow 0$ θα έχουμε ότι το P είναι συστρεπτικό, επειδή τα K, G είναι συστρεπτικά. Επομένως, από την Πρόταση (5.1.3), επειδή στην ακριβή ακολουθία $0 \longrightarrow P \longrightarrow F \longrightarrow L \longrightarrow 0$ το P είναι συστρεπτικό και το F επίπεδο, έχουμε ότι $F \longrightarrow L$ είναι ένα επίπεδο precover του L και έτσι το L έχει ένα επίπεδο cover. Τώρα αν εφαρμόσουμε την υπόθεση 2. στην ακριβή ακολουθία $0 \longrightarrow G \longrightarrow E \longrightarrow L \longrightarrow 0$, όπου τα E, L έχουν επίπεδα covers, θα έχουμε ότι και το G έχει ένα επίπεδο cover. □

Ας περάσουμε τώρα σε μία γενίκευση του Θεωρήματος (5.1.16).

Θεώρημα 5.1.18. *Έστω R ένας δεξιά συναφής δακτύλιος. Για οποιοδήποτε αριστερό R-πρότυπο M, εάν υπάρχει μία ακριβής ακολουθία*

$$0 \longrightarrow M_n \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

όπου κάθε M_i $(0 \leq i \leq n)$ έχει ένα επίπεδο cover, τότε το M έχει ένα επίπεδο cover.

Απόδειξη. Αναλύουμε την ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow M_n \xrightarrow{a_n} M_{n-1} \xrightarrow{a_{n-1}} \cdots \longrightarrow M_1 \xrightarrow{a_1} M_0 \xrightarrow{a_0} M \longrightarrow 0$$

στις εξής σύντομες ακριβείς ακολουθίες :

$$0 \longrightarrow M_n \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow K_{n-2} \longrightarrow 0 \tag{5.8}$$

$$0 \longrightarrow K_{n-2} \longrightarrow M_{n-2} \longrightarrow K_{n-3} \longrightarrow 0 \tag{5.9}$$

$$\vdots$$

$$0 \longrightarrow K_2 \longrightarrow M_2 \longrightarrow K_1 \longrightarrow 0 \tag{5.10}$$

$$0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow M_1 \longrightarrow K_0 \longrightarrow 0 \tag{5.11}$$

$$0 \longrightarrow K_0 \longrightarrow M_0 \longrightarrow F \longrightarrow 0 \tag{5.12}$$

όπου $K_i = \mathsf{Ker}\, a_i$, $i = 0, \ldots, n-2$. Τώρα, αν εφαρμόσουμε το Θεώρημα $(5.1.16)$ στην (5.8) θα έχουμε ότι το K_{n-2} έχει ένα επίπεδο cover επειδή τα M_n, M_{n-1} έχουν επίπεδα covers από υπόθεση. Ομοίως στην (5.9) θα έχουμε ότι το K_{n-3} έχει ένα επίπεδο cover και συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία, θα φτάσουμε στην (5.12) και θα έχουμε ότι το M έχει ένα επίπεδο cover. □

Από τα αποτελέσματα που έχουμε αναφέρει έως τώρα, τα M_i $(0 \leq i \leq n)$ του προηγούμενου Θεωρήματος μπορεί να είναι επίπεδα πρότυπα, ενέσιμα πρότυπα και καθαρά ενέσιμα πρότυπα. Εμείς θα ασχοληθούμε στην περίπτωση όπου κάθε M_i $(0 \leq i \leq n)$ είναι ένα επίπεδο πρότυπο. Προτού διατυπώσουμε το σχετικό Θεώρημα, χρειαζόμαστε κάποιους ορισμούς.

Ορισμός 5.1.19. **Επίπεδη ανάλυση (flat resolution)**, *αντίστοιχα* **προβολική ανάλυση (projective resolution)**, *ενός αριστερού R-προτύπου M είναι μία ακριβή ακολουθία της μορφής:*

$$\cdots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

όπου κάθε F_i είναι επίπεδο, αντίστοιχα προβολικό, πρότυπο.

Παρατήρηση 5.1.20. Από την Πρόταση $(2.2.20)$ έχουμε ότι κάθε πρότυπο έχει μία προβολική ανάλυση. Έτσι κάθε πρότυπο έχει και μία επίπεδη ανάλυση, επειδή κάθε προβολικό πρότυπο είναι και επίπεδο.

Το μήκος μίας επίπεδης ή προβολικής ανάλυσης

$$\cdots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

του M είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε το F_n είναι μη-μηδενικό και κάθε $F_i = 0$ για κάθε $i > n$. Αν δεν υπάρχει τέτοιος φυσικός αριθμός n, ορίζουμε το μήκος της να είναι άπειρο. Είναι γνωστό ότι το μήκος δυο τυχόντων επίπεδων ή προβολικών αναλύσεων του M είναι ίδιο, βλέπε [31] για περισσότερες λεπτομέρειες. Έτσι έχει νόημα ο ακόλουθος ορισμός.

Ορισμός 5.1.21. *Το ελάχιστο μήκος τυχούσας επίπεδης, αντίστοιχα προβολικής, ανάλυσης του M καλείται* **επίπεδη διάσταση (flat dimension)**, *αντίστοιχα* **προβολική διάσταση (projective dimension)**, *του M και συμβολίζεται με $\mathsf{fd}_R\, M$, αντίστοιχα $\mathsf{pd}_R\, M$.*

Ορισμός 5.1.22. *Η* **ασθενής ολική (ομολογική) διάσταση** *(***weak global (homological) dimension***) ενός δακτυλίου R, η οποία συμβολίζεται ως $\mathsf{w.gl.dim}(R)$, ορίζεται ως εξής:*

$$\mathsf{w.gl.dim}\, R = \sup\{\mathsf{fd}(M) \mid M \in R\text{-}\mathsf{Mod}\}$$

Η **αριστερή ολική ομολογική διάσταση** *(left global homological dimension) του δακτυλίου R ορίζεται να είναι ο φυσικός αριθμός ή ∞:*

$$\mathsf{l.gl.dim}\, R = \sup\left\{\, \mathsf{pd}_R\, M \mid M \in R\text{-}\mathsf{Mod} \,\right\}$$

Παρόμοια ορίζεται η **δεξιά ολική ομολογική διάσταση** (right global homological dimension) $\mathsf{r.gl.dim}\, R$ του δακτυλίου R. Υπάρχουν παραδείγματα δακτυλίων για τους οποίους $\mathsf{r.gl.dim}\, R \neq \mathsf{l.gl.dim}\, R$, βλέπε [31].

Από την άλλη πλευρά η ασθενής ολική (ομολογική) διάσταση ορίζεται και παρόμοια και για δεξιά R-πρότυπα και είναι γνωστό ότι

$$\sup\{\mathsf{fd}(M) \mid M \in \mathsf{Mod}\text{-}R\} = \mathsf{w.gl.dim}(R) = \sup\{\mathsf{fd}(M) \mid M \in R\text{-}\mathsf{Mod}\}$$

δηλαδή η ασθενή ολική (ομολογική) διάσταση του δακτυλίου είναι συμμετρική και συμπίπτει με την δεξιά εκδοχή της, βλέπε [31].

Θεώρημα 5.1.23. *Έστω R ένας δεξιά συναφής δακτύλιος και M ένα αριστερό R-πρότυπο με πεπερασμένη επίπεδη διάσταση. Τότε το M έχει ένα επίπεδο cover.*

Απόδειξη. Έστω $\mathsf{fd}(M) = n < \infty$, η επίπεδη διάσταση του M. Άρα, υπάρχει μία ακριβής ακολουθία της μορφής:

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

όπου κάθε F_i $(0 \leq i \leq n)$ είναι ένα επίπεδο πρότυπο. Από την Παρατήρηση $(5.1.14)$ έχουμε ότι κάθε F_i $(0 \leq i \leq n)$ έχει ένα επίπεδο cover. Έτσι από το Θεώρημα $(5.1.18)$ έχουμε ότι το M έχει ένα επίπεδο cover. □

Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος είναι το εξής:

Θεώρημα 5.1.24. *Έστω R ένας δεξιά συναφής δακτύλιος. Εάν το R έχει πεπερασμένη ασθενή ολική (ομολογική) διάσταση:* $\mathsf{w.gl.dim}\, R < \infty$*, τότε κάθε αριστερό R-πρότυπο έχει ένα επίπεδο cover.*

Απόδειξη. Από τον ορισμό της ασθενούς ολικής (ομολογικής) διάστασης του δακτυλίου R, έπεται ότι κάθε αριστερό R-πρότυπο έχει πεπερασμένη επίπεδη διάσταση. Άρα, από το προηγούμενο Θεώρημα, κάθε αριστερό R-πρότυπο έχει ένα επίπεδο cover. □

5.2 Πρότυπα με Πεπερασμένη Ομολογική Διάσταση

Στην παρούσα ενότητα θα αποδείξουμε ότι υπεράνω ενός συναφή δακτυλίου κάθε αριστερό πρότυπο με πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση έχει ένα επίπεδο cover. Ας αρχίσουμε με ένα Λήμμα το οποίο είναι παρόμοιο με το Λήμμα του Schanuel (βλέπε [24, proposition 3.12]).

Λήμμα 5.2.1. *Ας υποθέσουμε ότι ένα αριστερό R-πρότυπο M έχει δύο επίπεδα precovers όπως ακολούθως:*

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{g} F \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{h} G \xrightarrow{k} M \longrightarrow 0$$

τότε $K \oplus G \cong F \oplus L$.

Απόδειξη. Επειδή $k\colon G \longrightarrow M$ είναι ένα επίπεδο precover του M, υπάρχει ομομορφισμός $p\colon F \longrightarrow G$ που κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, dashed, "p"'] \arrow[d, "f"] \\ G \arrow[r, "k"'] & M \end{tikzcd}$$

Ο ομομορφισμός $p\colon F \longrightarrow G$ επάγει έναν ομομορφισμό $\mu\colon K \longrightarrow L$ τέτοιον ώστε $h \circ \mu = p \circ g$. Επομένως έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\mu"] & F \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "h"] & G \arrow[r, "k"] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Ομοίως, επειδή $f\colon F \longrightarrow M$ είναι ένα επίπεδο precover του M, έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "h"] \arrow[d, "l"] & G \arrow[r, "k"] \arrow[d, "q"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "g"] & F \arrow[r, "f"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Έχουμε ότι $f = k \circ p$ και ότι $k = f \circ q$. Επομένως, $f = f \circ (q \circ p)$ και $k = k \circ (p \circ q)$, ή ισοδύναμα $f(\mathrm{Id}_F - q \circ p) = 0$ και $k(\mathrm{Id}_G - p \circ q) = 0$. Άρα, $\mathsf{Im}(\mathrm{Id}_F - q \circ p) \subset K$ και $\mathsf{Im}(\mathrm{Id}_G - p \circ q) \subset L$, ή ισοδύναμα $(\mathrm{Id}_F - q \circ p)(F) \subset K$ και $(\mathrm{Id}_G - p \circ q)(G) \subset L$.

Ορίζουμε δύο απεικονίσεις σ και ψ όπως ακολούθως:

$$\sigma\colon F \oplus L \longrightarrow G \oplus K, \quad (x', y) \longmapsto \sigma((x', y)) := (p(x') - y, -q(y) - (\mathrm{Id}_F - q \circ p)(x'))$$

$$\psi\colon G \oplus K \longrightarrow F \oplus L, \quad (x, y') \longmapsto \psi((x, y')) := (q(x) - y', -p(y') - (\mathrm{Id}_G - p \circ q)(x))$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι $\sigma \circ \psi = \mathrm{Id}_{G \oplus K}$ και $\psi \circ \sigma = \mathrm{Id}_{F \oplus L}$. □

Αξίζει να σημειωθεί ότι το Λήμμα του Schanuel ισχύει για προβολικά και ενέσιμα πρότυπα, αλλά δεν ισχύει για επίπεδα πρότυπα. Με άλλα λόγια αν στο παραπάνω Λήμμα υποθέσουμε ότι τα πρότυπα F και G είναι επίπεδα αλλά όχι απαραίτητα επίπεδα precovers του M, τότε γενικά $K \oplus G \ncong F \oplus L$.

Λήμμα 5.2.2. *Έστω $0 \longrightarrow A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{p} C \longrightarrow 0$ μία ακριβής ακολουθία αριστερών R-προτύπων. Εάν τα A, C έχουν επίπεδα covers, και το A είναι συστρεπτικό, τότε υπάρχει ένα μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές και στήλες.*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

όπου $D = F \oplus G$ και $F \longrightarrow A$, $G \longrightarrow C$ είναι τα δοθέντα επίπεδα covers. Επιπλέον, $D \longrightarrow B$ είναι ένα επίπεδο precover του B και το N είναι συστρεπτικό.

Απόδειξη. Έστω $h\colon G \longrightarrow C$ ένα επίπεδο cover του C με πυρήνα $L = \mathsf{Ker}\, h$. Από την Πρόταση (2.3.20) για το αριστερό R-πρότυπο G, υπάρχει η μακρά ακριβής ακολουθία:

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(G, A) \xrightarrow{g_*} \mathsf{Hom}_R(G, B) \xrightarrow{p_*} \mathsf{Hom}_R(G, C) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathsf{Ext}^1_R(G, A) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_R(G, B) \longrightarrow \cdots$$

Όμως επειδή το G είναι επίπεδο και το A συστρεπτικό έχουμε ότι $\mathsf{Ext}^1_R(G, A) = 0$. Επομένως η p_* είναι επιμορφισμός και έτσι για κάθε ομομορφισμό $h\colon G \longrightarrow C$ υπάρχει ομομορφισμός $u\colon G \longrightarrow B$ τέτοιος ώστε $p_*(u) = h$ δηλαδή $p \circ u = h$. Έστω $f\colon F \longrightarrow A$ ένα επίπεδο cover του

A με πυρήνα $K = \mathsf{Ker}\, f$. Ορίζουμε: $\bar{h}\colon F \oplus G \longrightarrow B, \quad (x, y) \longmapsto \bar{h}((x, y)) := g \circ f(x) + u(y)$ για κάθε $x \in F$, $y \in G$. Επομένως, έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & F \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & D \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\bar{h}"] & G \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] & B \arrow[r, "p"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{5.13}$$

όπου $D = F \oplus G$ και i, k είναι οι απεικονίσεις έγκλεισης και προβολής, αντίστοιχα, επειδή,

$$\bar{h} \circ i(x) = \bar{h}((x, 0)) = g \circ f(x) + u(0) = g \circ f(x)$$

$$p \circ \bar{h}((x, y)) = p(g \circ f(x) + u(y)) = p \circ g \circ f(x) + p \circ u(y) = p \circ u(y) = h(y) = h \circ k((x, y))$$

Τώρα επειδή $h\colon G \longrightarrow C$, $f\colon F \longrightarrow A$ είναι επίπεδα covers έχουμε ότι οι ομομορφισμοί f, h είναι επιμορφισμοί. Έτσι από την μεταθετικότητα του διαγράμματος (5.13) και η $\bar{h}$ είναι επιμορφισμός. Έστω N ο πυρήνας της $\bar{h}$. Άρα θα έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r, dashed, "\bar{i}"] \arrow[d] & N \arrow[r, dashed, "\bar{k}"] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & F \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & D \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\bar{h}"] & G \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

όπου $i(x) = \bar{i}(x)$ για κάθε $x \in K$ και $k(y) = \bar{k}(y)$ για κάθε $y \in N$. Επειδή $f, h, \bar{h}$ είναι επιμορφισμοί, θα έχουμε ότι $\mathsf{Coker}\, f = \mathsf{Coker}\, h = \mathsf{Coker}\, \bar{h} = 0$. Από το Snake Lemma επειδή ο i είναι μονομορφισμός και ο $\bar{i}$ είναι μονομορφισμός. Επίσης. από το Snake Lemma ο $\bar{k}$ είναι επιμορφισμός διότι υπάρχει ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων $d\colon L \longrightarrow \mathsf{Coker}\, f = 0$.

Επειδή $h\colon G \longrightarrow C$, $f\colon F \longrightarrow A$ είναι επίπεδα covers, από την Πρόταση (5.1.3) έχουμε ότι οι πυρήνες K, L είναι συστρεπτικά πρότυπα. Άρα και το N είναι συστρεπτικό, από την Πρόταση (5.1.5). Επειδή $D = F \oplus G$, έχουμε ότι είναι επίπεδο ως ευθύ άθροισμα επίπεδων. Επομένως, από την Πρόταση (5.1.3), $\bar{h}\colon D \longrightarrow B$ είναι ένα επίπεδο precover του B. $\square$

Είδαμε στην προηγούμενη ενότητα ότι υπεράνω ενός δεξιά συναφή δακτυλίου R, κάθε καθαρά ενέσιμο αριστερό R-πρότυπο έχει ένα επίπεδο cover. Τώρα είμαστε σε θέση να χρησιμοποιήσουμε καθαρά ενέσιμα πρότυπα με σκοπό να κατασκευάσουμε πρότυπα τα οποία έχουν επίσης επίπεδα covers.

Θεώρημα 5.2.3. *Έστω R ένας δεξιά συναφής δακτύλιος. Για ένα αριστερό R-πρότυπο M εάν υπάρχει μία ακριβής ακολουθία*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow P_0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_t \longrightarrow 0 \tag{5.14}$$

όπου κάθε P_i, $0 \le i \le t$ είναι καθαρά ενέσιμο, τότε:

1. *Το M έχει ένα επίπεδο cover και*

2. *Υπάρχουν ακριβείς ακολουθίες*

$$0 \longrightarrow K_i \longrightarrow F_i \longrightarrow K_{i-1} \longrightarrow 0$$

όπου για $i = 0$, $K_{-1} = M$, το K_0 είναι συστρεπτικό και το F_0 είναι επίπεδο και για κάθε $i \geq 1$, το K_i είναι συστρεπτικό και το F_i είναι επίπεδο και συστρεπτικό.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε τα 1. - 2. με επαγωγή στο μήκος της ακολουθίας (5.14).

Εάν το $t = 0$, τότε από υπόθεση υπάρχει η ακριβής ακολουθία $0 \longrightarrow M \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$. Άρα, $M \cong P_0$ και έτσι το M είναι καθαρά ενέσιμο πρότυπο. Επομένως, από το Θεώρημα (5.1.11) έχουμε μία ακριβή ακολουθία $0 \longrightarrow K_0 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ με $F_0 \longrightarrow M$ ένα επίπεδο cover του M και F_0, K_0 καθαρά ενέσιμα άρα και συστρεπτικά.

Τώρα ας υποθέσουμε ότι ισχύουν τα 1.-2. για κάθε αριστερό R-πρότυπο που έχει ανάλυση, της μορφής (5.14), με μήκος μικρότερο ή ίσο με $t-1$ και θα αποδείξουμε τα 1.-2. όταν το μήκος της ακολουθίας είναι ίσο με t.

Έτσι θεωρούμε το εξής διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] & P_0 \arrow[r] \arrow[dr] & P_1 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_t \arrow[r] & 0 \\ & & & N \arrow[dr] & & & & \\ & & & & 0 & & & \end{tikzcd} \tag{5.15}$$

όπου $N \cong \mathsf{Coker}\, i$. Από το διάγραμμα (5.15) θα λάβουμε την ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} P_0 \longrightarrow N \longrightarrow 0,$$

όπου το N έχει ανάλυση, της μορφής (5.14), με μήκος μικρότερο ή ίσο με $t-1$. Επιπλέον το P_0 ως καθαρά ενέσιμο πρότυπο έχει ανάλυση, της μορφής (5.14), με μήκος μικρότερο ή ίσο με $t-1$. Έτσι αν εφαρμόσουμε την υπόθεση της επαγωγής μας για τα P_0, N θα έχουμε τις εξής ακριβείς ακολουθίες: $0 \longrightarrow L_i \longrightarrow F_i \longrightarrow L_{i-1} \longrightarrow 0$ όπου για $i = 0$, $L_{-1} = N$, το L_0 είναι συστρεπτικό και το F_0 είναι επίπεδο και για κάθε $i \geq 1$, το L_i είναι συστρεπτικό και το F_i είναι επίπεδο και συστρεπτικό και $0 \longrightarrow W_i \longrightarrow G_i \longrightarrow W_{i-1} \longrightarrow 0$ όπου για $i = 0$, $W_{-1} = P_0$, το W_0 είναι συστρεπτικό και το G_0 είναι επίπεδο και για κάθε $i \geq 1$, το W_i είναι συστρεπτικό και το G_i είναι επίπεδο και συστρεπτικό. Τώρα χρησιμοποιώντας το pullback των απεικονίσεων

$$\begin{tikzcd} & F_0 \arrow[d] \\ P_0 \arrow[r] & N \end{tikzcd}$$

θα πάρουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές και στήλες

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & L_0 \arrow[r, equal] \arrow[d] & L_0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & H \arrow[r] \arrow[d] & F_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Από την ύπαρξη της ακριβούς ακολουθίας $0 \longrightarrow L_1 \longrightarrow F_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow 0$, επειδή το L_1 είναι συστρεπτικό και το F_1 είναι επίπεδο έπεται ότι το $F_1 \longrightarrow L_0$ είναι ένα επίπεδο cover του L_0. Επιπλέον, από την ύπαρξη της ακριβούς ακολουθίας $0 \longrightarrow W_0 \longrightarrow G_0 \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$, επειδή το W_0 είναι συστρεπτικό και το G_0 είναι επίπεδο έπεται ότι το $G_0 \longrightarrow P_0$ είναι ένα επίπεδο cover του P_0. Επίσης, το L_0 είναι συστρεπτικό. Έτσι εάν εφαρμόσουμε το Λήμμα (5.2.2) στην ακριβή ακολουθία $0 \longrightarrow L_0 \longrightarrow H \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$ θα πάρουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές και στήλες

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & L_1 \arrow[r] \arrow[d] & K_0 \arrow[r] \arrow[d] & W_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_1 \arrow[r] \arrow[d] & Z_0 \arrow[r] \arrow[d] & G_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & L_0 \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

όπου $Z_0 = F_1 \oplus G_0$, $Z_0 \longrightarrow H$ είναι ένα επίπεδο precover του H και το K_0 είναι συστρεπτικό. Τώρα χρησιμοποιώντας το pullback των απεικονίσεων

$$\begin{tikzcd}
 & Z_0 \arrow[d] \\
M \arrow[r] & H
\end{tikzcd}$$

θα πάρουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές και στήλες

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & K_0 \arrow[r, equal] \arrow[d] & K_0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & V_0 \arrow[r] \arrow[d] & Z_0 \arrow[r] \arrow[d] & F_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[r] \arrow[d] & F_0 \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Στην ακριβή ακολουθία $0 \longrightarrow V_0 \longrightarrow Z_0 \longrightarrow F_0 \longrightarrow 0$ επειδή τα Z_0, F_0 είναι επίπεδα, από το Πόρισμα (3.2.6) θα έχουμε ότι και το V_0 είναι επίπεδο. Επίσης, το K_0 είναι συστρεπτικό. Έτσι, από την ύπαρξη της ακριβούς ακολουθίας $0 \longrightarrow K_0 \longrightarrow V_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ έπεται ότι το $V_0 \longrightarrow M$ είναι ένα επίπεδο precover του M, άρα και επίπεδο cover, επομένως αποδείξαμε το 1. και βρήκαμε και την πρώτη ακριβή ακολουθία για το M. Τώρα πρέπει να βρούμε την επιθυμητή ακριβή ακολουθία για το K_0. Από την ύπαρξη της ακριβούς ακολουθίας

$$0 \longrightarrow L_2 \longrightarrow F_2 \longrightarrow L_1 \longrightarrow 0,$$

επειδή το L_2 είναι συστρεπτικό και το F_2 είναι επίπεδο έπεται ότι το $F_2 \longrightarrow L_1$ είναι ένα επίπεδο cover του L_1. Επιπλέον, από την ύπαρξη της ακριβούς ακολουθίας

$$0 \longrightarrow W_1 \longrightarrow G_1 \longrightarrow W_0 \longrightarrow 0,$$

επειδή το W_1 είναι συστρεπτικό και το G_1 είναι επίπεδο έπεται ότι το $G_1 \longrightarrow W_0$ είναι ένα επίπεδο cover του W_0. Επίσης, το L_1 είναι συστρεπτικό. Έτσι εάν εφαρμόσουμε το Λήμμα (5.2.2) στην ακριβή ακολουθία $0 \longrightarrow L_1 \longrightarrow K_0 \longrightarrow W_0 \longrightarrow 0$ θα πάρουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές και στήλες

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & L_2 \arrow[r] \arrow[d] & K_1 \arrow[r] \arrow[d] & W_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_2 \arrow[r] \arrow[d] & Z_1 \arrow[r] \arrow[d] & G_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & L_1 \arrow[r] \arrow[d] & K_0 \arrow[r] \arrow[d] & W_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

όπου $Z_1 = F_2 \oplus G_1$, $Z_1 \longrightarrow K_0$ είναι ένα επίπεδο precover του K_0 και το K_1 είναι συστρεπτικό. Επομένως, έχουμε την ακριβή ακολουθία $0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow Z_1 \longrightarrow K_0 \longrightarrow 0$ όπου το K_1 είναι συστρεπτικό και το Z_1 είναι επίπεδο και συστρεπτικό επειδή το K_0 είναι συστρεπτικό. Έτσι, βρήκαμε και την επιθυμητή ακριβή ακολουθία για το K_0. Συνεχίζοντας αυτή την διαδικασία θα βρούμε όλες τις επιθυμητές ακριβείς ακολουθίες για το M. □

Είδαμε στο Κεφάλαιο 2 ότι μία ακριβή ακολουθία της μορφής

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^{n-1} \longrightarrow E^n \longrightarrow \cdots$$

όπου κάθε E^n είναι ενέσιμο για $n = 0, 1, 2, \ldots$ είναι μία ενέσιμη ανάλυση ενός αριστερού R-προτύπου M. Τώρα, δυϊκά του ορισμού (5.1.21) έχουμε τον ορισμό της ενέσιμης διάστασης.

Το μήκος μίας ενέσιμης ανάλυσης του M όπως η παραπάνω είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε το E^n είναι μη-μηδενικό και κάθε $E^i = 0$ για κάθε $i > n$. Αν δεν υπάρχει τέτοιος φυσικός αριθμός n, ορίζουμε το μήκος της να είναι άπειρο. Είναι γνωστό ότι το μήκος δυο τυχόντων ενέσιμων αναλύσεων του M είναι ίδιο. Δυϊκά ορίζεται το μήκος προβολικών αναλύσεων του M και είναι γνωστό ότι το μήκος δυο τυχόντων προβολικών αναλύσεων του M είναι ίδιο, βλέπε [31]. Έτσι έχει νόημα ο ακόλουθος ορισμός.

Ορισμός 5.2.4. *Το ελάχιστο μήκος τυχούσας ενέσιμης ανάλυσης του M καλείται* **ενέσιμη διάσταση (injective dimension)** *του M και συμβολίζεται με $\mathsf{id}_R M$.*

Αποδεικνύεται ότι για κάθε δακτύλιο R ισχύει (βλέπε [31]):

$$\sup \{ \mathsf{id}_R M \mid M \in R\text{-}\mathsf{Mod} \} = \sup \{ \mathsf{pd}_R M \mid M \in R\text{-}\mathsf{Mod} \}$$

Έτσι έχει έννοια να επαναλάβουμε εμπλουτισμένο τον Ορισμό 5.1.22 ως εξής:

Ορισμός 5.2.5. *Η* **αριστερή ολική ομολογική διάσταση** *(left global homological dimension) του δακτυλίου R ορίζεται να είναι ο φυσικός αριθμός ή ∞:*

$$\mathsf{l.\,gl.\,dim}\, R = \sup \{ \mathsf{id}_R M \mid M \in R\text{-}\mathsf{Mod} \} = \sup \{ \mathsf{pd}_R M \mid M \in R\text{-}\mathsf{Mod} \}$$

Παρόμοια ορίζεται η **δεξιά ολική ομολογική διάσταση** *(right global homological dimension)* $\mathsf{r.\,gl.\,dim}\, R$ *του δακτυλίου R.*

Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος (5.2.3) είναι το εξής Πόρισμα:

Πόρισμα 5.2.6. *Έστω R ένας δεξιά συναφής δακτύλιος. Εάν ένα αριστερό R-πρότυπο M έχει πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση, τότε έχει ένα επίπεδο cover.*

Απόδειξη. Έστω $\mathsf{id}(M) = n < \infty$, η ενέσιμη διάσταση του M. Άρα, υπάρχει μία ακριβής ακολουθία της μορφής:

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^{n-1} \longrightarrow E^n \longrightarrow 0$$

όπου κάθε E_i $(0 \leq i \leq n)$ είναι ένα ενέσιμο πρότυπο. Επειδή όμως κάθε ενέσιμο πρότυπο είναι καθαρά ενέσιμο έχουμε ότι τα E_i $(0 \leq i \leq n)$ είναι καθαρά ενέσιμα πρότυπα. Έτσι από το Θεώρημα (5.2.3), το M έχει ένα επίπεδο cover. □

Με χρήση του παραπάνω πορίσματος, έχουμε το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 5.2.7. *Έστω R ένας δεξιά συναφής δακτύλιος με πεπερασμένη αριστερή ολική ομολογική διάσταση: $\mathsf{l.\,gl.\,dim}\, R < \infty$. Τότε κάθε αριστερό R-πρότυπο έχει ένα επίπεδο cover.*

Τα παραπάνω αποτελέσματα καλύπτουν μια ευρεία κλάση δακτυλίων τα πρότυπα των οποίων έχουν επίπεδη κάλυψη. Για παράδειγμα αναφέρουμε το εξής πόρισμα.

Πόρισμα 5.2.8. *Έστω R ένας δεξιός δακτύλιος της Noether με πεπερασμένη αριστερή ολική ομολογική διάσταση, για παράδειγμα R είναι ένα σώμα. Τότε κάθε αριστερό $R[x_1, x_2, \cdots, x_n]$-πρότυπο υπεράνω του πολυωνυμικού δακτυλίου $R[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ στις n μεταβλητές έχει επίπεδο cover.*

Απόδειξη. Είναι γνωστό, βλέπε [31], ότι ισχύει η ακόλουθη σχέση μεταξύ ολικών ομολογικών διαστάσεων

$$\mathsf{l.\,gl.\,dim}\, R[x_1, x_2, \cdots, x_n] = n + \mathsf{l.\,gl.\,dim}\, R$$

Επομένως, επειδή $\mathsf{l.\,gl.\,dim}\, R < \infty$, θα έχουμε $\mathsf{l.\,gl.\,dim}\, R[x_1, x_2, \cdots, x_n] < \infty$ και το συμπέρασμα προκύπτει από το Θεώρημα 5.2.7. □

Παράδειγμα 5.2.9. Κάθε $\mathbb{Z}$-πρότυπο, δηλαδή κάθε αβελιανή ομάδα, έχει επίπεδη κάλυψη. Πράγματι, ο δακτύλιος $\mathbb{Z}$ είναι μεταθετικός δακτύλιος της Noether και έχει ολική ομολογική διάσταση $\mathsf{gl.\,dim}\, \mathbb{Z} = 1$. Άρα από το Θεώρημα 5.2.7 Κάθε $\mathbb{Z}$-πρότυπο έχει μία επίπεδη κάλυψη.

Επιπλέον κάθε $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$-πρότυπο έχει μία επίπεδη κάλυψη, όπως προκύπτει από το Πόρισμα 5.2.8.

5.3 Πρότυπα με Πεπερασμένη Καθαρά Ομολογική Διάσταση

Κλείνουμε το παρόν Κεφάλαιο με την παρούσα σύντομη ενότητα δίνοντας εφαρμογές του Θεωρήματος 5.2.3 σε επίπεδες καλύψεις προτύπων τα οποία έχουν πεπερασμένη καθαρά ενέσιμη διάσταση. Θα χρειασθούμε πρώτα κάποιους ορισμούς από την καθαρά ομολογική άλγεβρα. Παραπέμπουμε στο βιβλίο των Jensen και Lenzing [21] για περισσότερες λεπτομέρειες.

Σε αναλογία με τον ορισμό της προβολικής ή ενέσιμης διάστασης ενός προτύπου και της ολικής ομολογικής διάστασης ενός δακτυλίου ορίζονται και οι «καθαρές» εκδοχές τους. Ο ορισμοί είναι παρόμοιοι με τους ορισμούς 5.2.4 και 5.2.5, χρησιμοποιώντας παντού καθαρά ακριβείς ακολουθίες στην θέση των συνήθων ακριβών ακολουθιών.

Ορισμός 5.3.1. *Μια ακριβής ακολουθία*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^{n-1} \longrightarrow E^n \longrightarrow \cdots$$

καλείται **καθαρά ενέσιμη ανάλυση** *(pure injective resolution) του αριστερού R-προτύπου M, αν κάθε πρότυπο E^k είναι καθαρά ενέσιμο και η ακολουθία παραμένει ακριβής μετά την εφαρμογή του συναρτητή $\mathsf{Hom}_R(-, E)$, για κάθε καθαρά ενέσιμο πρότυπο E.*

Το μήκος μίας καθαρά ενέσιμης ανάλυσης του M είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε το E^n είναι μη-μηδενικό και κάθε $E^i = 0$ για κάθε $i > n$. Αν δεν υπάρχει τέτοιος φυσικός αριθμός n, τότε ορίζουμε το μήκος να είναι άπειρο. Αποδεικνύεται ότι το μήκος δύο τυχαίων καθαρά ενέσιμων αναλύσεων ενός προτύπου έχουν το ίδιο μήκος. Έτσι έχει έννοια ο ακόλουθος ορισμός.

Ορισμός 5.3.2. *Η* **καθαρά ενέσιμη διάσταση (pure injective dimension)** *του M ορίζεται να είναι το μήκος τυχούσας καθαρά ενέσιμης ανάλυσης του M, και συμβολίζεται με $\mathsf{pid}(M)$.*

Δυϊκά ορίζεται η έννοια του καθαρά προβολικού προτύπου, η έννοια της καθαρά προβολικής ανάλυσης, καθώς και η **καθαρά προβολική δάσταση** (pure projective dimension) $\mathsf{ppd}_R\, M$ ενός αριστερού R-προτύπου.

Αποδεικνύεται ότι για κάθε δακτύλιο R ισχύει (βλέπε [21]):

$$\sup \left\{ \mathsf{pid}_R\, M \mid M \in R\text{-}\mathsf{Mod} \right\} = \sup \left\{ \mathsf{ppd}_R\, M \mid M \in R\text{-}\mathsf{Mod} \right\}$$

Έτσι έχει έννοια ο ακόλουθος ορισμός.

Ορισμός 5.3.3. *Η* **αριστερή καθαρά ολική ομολογική διάσταση** *(left pure global homological dimension) του δακτυλίου R ορίζεται να είναι ο φυσικός αριθμός ή ∞:*

$$\mathsf{l.\,p.\,gl.\,dim}\, R = \sup \left\{ \mathsf{pid}_R\, M \mid M \in R\text{-}\mathsf{Mod} \right\} = \sup \left\{ \mathsf{ppd}_R\, M \mid M \in R\text{-}\mathsf{Mod} \right\}$$

Παρόμοια ορίζεται η **δεξιά καθαρά ολική ομολογική διάσταση** *(right pure global homological dimension)* $\mathsf{r.\,p.\,gl.\,dim}\, R$ *του δακτυλίου R.*

Με χρήση του Θεωρήματος 5.2.3, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 5.3.4. *Έστω R ένας δεξιά συναφής δακτύλιος με πεπερασμένη (αριστερή) καθαρά ολική ομολογική διάσταση:* $\mathsf{l.\,p.\,gl.\,dim}\, R < \infty$*. Τότε κάθε αριστερό R-πρότυπο έχει ένα επίπεδο cover.*

Για την καθαρά ολική ομολογική διάσταση, ισχύει το ακόλουθο βασικό αποτέλεσμα, το οποίο δίνει μια εικόνα για το ποιοι δακτύλιοι έχουν πεπερασμένη καθαρά ολική ομολογική διάσταση.

Θεώρημα 5.3.5. *(***Gruson-Jensen***) [21] Έστω R ένας δακτύλιος του οποίου το πλήθος στοιχείων είναι φραγμένο από τον πληθικό αριθμό $\aleph_t$, όπου $t \geq 0$: $|R| \leq \aleph_t$. Τότε:*

$$\mathsf{l.\,p.\,gl.\,dim}\, R \leq t + 1$$

Με χρήση των Θεωρήματων 5.3.4 και 5.3.5, έχουμε τώρα το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 5.3.6. *Έστω R ένας δεξιά συναφής δακτύλιος του οποίου το πλήθος στοιχείων είναι φραγμένο από τον πληθικό αριθμό $\aleph_t$, όπου $t \geq 0$: $|R| \leq \aleph_t$. Τότε κάθε αριστερό R-πρότυπο έχει ένα επίπεδο cover.*

Επειδή κάθε αριθμήσιμος δακτύλιος, δηλαδή $|R| \leq \aleph_0$, ιδιαίτερα κάθε πεπερασμένος δακτύλιος, ικανοποιεί σύμφωνα με το Θεώρημα 5.3.5 τη σχέση

$$\mathsf{l.\,p.\,gl.\,dim}\, R \leq 1,$$

θα έχουμε:

Πόρισμα 5.3.7. *Έστω R ένας αριθμήσιμος, π.χ. πεπερασμένος, δεξιά συναφής δακτύλιος. Τότε κάθε αριστερό R-πρότυπο έχει ένα επίπεδο cover.*

Στο επόμενο Κεφάλαιο της διατριβής θα δούμε ότι οι περιορισμοί στα πρότυπα ή στον δακτύλιο οι οποίοι τέθηκαν για την ύπαρξη επίπεδων καλύψεων δεν είναι απαραίτητοι και μπορούν να διαγραφούν.

Κεφάλαιο 6

Κάθε Πρότυπο έχει μία Επίπεδη Κάλυψη

Σε αυτό το Κεφάλαιο θα χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα των προηγουμένων κεφαλαίων και στοιχεία σύνολο-θεωρητικής Ομολογικής Άλγεβρας για να αποδείξουμε το κεντρικό αποτέλεσμα της διατριβής: την Εικασία Επίπεδης Κάλυψης την οποία διατύπωσε ο Enochs το 1981. Η απόδειξη της εικασίας δόθηκε το 2001 ανεξάρτητα από τους Bican, Bashir και Enochs οι οποίοι, για την απόδειξή της, χρησιμοποίησαν ένα σημαντικό αποτέλεσμα των Eklof-Trlifaj περί μηδενισμού του συναρτητή επέκτασης Ext.

6.1 Σύνολο-Θεωρητική Ομολογική Άλγεβρα

Σε αυτή την παράγραφο θα παρουσιάσουμε κάποια αποτελέσματα από την σύνολο-θεωρητική Ομολογική Άλγεβρα που θα μας χρειαστούν στη συνέχεια. Για τα στοιχεία της θεωρίας συνόλων, υπερπεπερασμένης επαγωγής, και αριθμητικής πληθαρίθμων τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε, παραπέμπουμε στο Παράρτημα Α΄.

Θα ξεκινήσουμε με το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 6.1.1. *Για οποιοδήποτε σύνολο X, υπάρχει ένας οριακός διατακτικός αριθμός λ τέτοιος ώστε εάν $(\alpha_x)_{x\in X}$ είναι μία οικογένεια διατακτικών τέτοια ώστε $\alpha_x < \lambda$ για κάθε $x \in X$, τότε υπάρχει ένας διατακτικός $\lambda' < \lambda$ τέτοιος ώστε $\alpha_x < \lambda'$ για κάθε $x \in X$.*

Απόδειξη. Έστω ότι $\mathsf{Card}\, X \leq \aleph_\beta$ και έστω λ ο ελάχιστος διατακτικός τέτοιος ώστε $\mathsf{Card}\, \lambda = \aleph_{\beta+1}$. Τότε ο διατακτικός λ είναι οριακός και εάν $\alpha < \lambda$ τότε $\mathsf{Card}(\alpha) \leq \aleph_\beta$. Τώρα έστω $(\alpha_x)_{x\in X}$ μία οικογένεια διατακτικών τέτοια ώστε $\alpha_x < \lambda$ για κάθε $x \in X$. Το X είναι καλά διατεταγμένο και έστω $\lambda' = \sum_{x\in X} \alpha_x$. Τότε $\alpha_x \leq \lambda'$ για κάθε $x \in X$ και

$$\mathsf{Card}(\lambda') = \sum_{x\in X} \mathsf{Card}(\alpha_x) \leq \mathsf{Card}\, X \cdot \aleph_\beta \leq \aleph_\beta^2 = \aleph_\beta < \aleph_{\beta+1}$$

Έτσι, $\lambda' < \lambda$. □

Πόρισμα 6.1.2. *Έστω X είναι ένα σύνολο και λ ένας οριακός διατακτικός αριθμός με την ιδιότητα του προηγούμενου λήμματος. Εάν $(Y_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ είναι μία οικογένεια υποσυνόλων ενός συνόλου Y με $Y_\alpha \subset Y_\beta$ όταν $\alpha \leq \beta < \lambda$ και $Y = \cup_{\alpha<\lambda} Y_\alpha$, τότε για οποιαδήποτε συνάρτηση $f\colon X \longrightarrow Y$, υπάρχει ένα $\alpha < \lambda$ τέτοιο ώστε $f(X) \subset Y_\alpha$.*

Απόδειξη. Για κάθε $x \in X$, έστω $\alpha_x < \lambda$ ένας διατακτικός τέτοιος ώστε $f(x) \in Y_{\alpha_x}$. Τότε από το προηγούμενο Λήμμα υπάρχει ένας διατακτικός λ' τέτοιος ώστε $\alpha_x \leq \lambda' < \lambda$ για κάθε $x \in X$ και άρα έχουμε ότι $f(X) \subset Y_{\lambda'}$. □

Παρατήρηση 6.1.3. Από το Πόρισμα έπεται ότι κάθε συνάρτηση $f : X \longrightarrow Y$ έχει ανάλυση $X \longrightarrow Y_\alpha \longrightarrow Y$ με $\alpha < \lambda$ και $Y_\alpha \longrightarrow Y$ η κανονική έγκλειση. Το ίδιο ακριβώς ισχύει όταν τα X, Y είναι πρότυπα, ο f ομομορφισμός, και όλα τα $Y_\alpha \subset Y$ υποπρότυπα του Y.

Ας περάσουμε τώρα στον ορισμό της συνεχούς αλυσίδας.

Ορισμός 6.1.4. *Έστω λ ένας διατακτικός αριθμός. Μία οικογένεια $(M_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ υποπροτύπων ενός προτύπου M καλείται* **συνεχής (καλά διατεταγμένη) αλυσίδα (continuous (well ordered) chain)** *υποπροτύπων εάν $M_\alpha \subset M_\beta$ όταν $\alpha \leq \beta < \lambda$ και εάν $M_\beta = \cup_{\alpha<\beta} M_\alpha$ όταν $\beta < \lambda$ είναι ένας οριακός διατακτικός.*

Το ακόλουθο αποτέλεσμα του Eklof μας παρέχει μία σημαντική συνθήκη για τον μηδενισμό του Ext.

Θεώρημα 6.1.5. *Έστω M, N δύο πρότυπα και ας υποθέσουμε ότι το M είναι η ένωση μίας συνεχούς αλυσίδας υποπροτύπων $(M_\alpha)_{\alpha<\lambda}$. Τότε εάν $\mathsf{Ext}^1_R(M_0, N) = 0$ και $\mathsf{Ext}^1_R(M_{\alpha+1}/M_\alpha, N) = 0$ όταν $\alpha + 1 < \lambda$, τότε $\mathsf{Ext}^1_R(M, N) = 0$.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε με χρήση της υπερπεπερασμένης επαγωγής στο $\beta < \lambda$ ότι ισχύει: $\mathsf{Ext}^1_R(M_\beta, N) = 0$. Για $\beta = 0$ είναι προφανές.

Ας υποθέσουμε ότι $\mathsf{Ext}^1_R(M_\alpha, N) = 0$ για κάθε $\alpha < \beta$. Εάν β δεν είναι οριακός διατακτικός, έστω $\beta = \alpha + 1$. Η σύντομη ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow M_\alpha \longrightarrow M_{\alpha+1} \longrightarrow M_{\alpha+1}/M_\alpha \longrightarrow 0$$

επάγει την ακριβή ακολουθία

$$\mathsf{Ext}^1_R(M_{\alpha+1}/M_\alpha, N) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_R(M_{\alpha+1}, N) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_R(M_\alpha, N)$$

όπου $\mathsf{Ext}^1_R(M_\alpha, N) = 0$ από την υπόθεση της επαγωγής και $\mathsf{Ext}^1_R(M_{\alpha+1}/M_\alpha, N) = 0$ από υπόθεση. Έτσι και $\mathsf{Ext}^1_R(M_{\alpha+1}, N) = 0$.

Τώρα ας υποθέσουμε ότι $\beta < \lambda$ είναι ένας οριακός διατακτικός τέτοιος ώστε $\mathsf{Ext}^1_R(M_\alpha, N) = 0$ για κάθε $\alpha < \beta$. Θα αποδείξουμε ότι $\mathsf{Ext}^1_R(M_\beta, N) = 0$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι μία τυχαία επέκταση της μορφής

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} M_\beta \longrightarrow 0$$

διασπάται. Για να το αποδείξουμε αυτό, θα ορίσουμε με χρήση ξανά της υπερπεπερασμένης επαγωγής για $\alpha < \beta$, μία συνεχή αύξουσα αλυσίδα από ομομορφισμούς $\rho_\alpha : M_\alpha \longrightarrow G$ τέτοιους ώστε $g \circ \rho_\alpha = \mathrm{Id}_{M_\alpha}$, δηλαδή οι ομομορφισμοί ρ_α να είναι οι απεικονίσεις διάσπασης των ομομορφισμών $g|g^{-1}(M_\alpha)$. Ας υποθέσουμε ότι οι ομομορφισμοί ρ_α έχουν ορισθεί για όλα τα $\alpha < \tau$. Εάν τ είναι ένας οριακός διατακτικός, θέτουμε $\rho_\tau = \cup_{\alpha<\tau} \rho_\alpha$. Εάν $\tau = \gamma + 1 < \beta$ για κάποιο γ, έστω $\sigma : M_\tau \longrightarrow G$ η απεικόνιση διάσπασης της $g|g^{-1}(M_\tau)$, η οποία υπάρχει επειδή $\mathsf{Ext}^1_R(M_\tau, N) = 0$ από την υπόθεση της επαγωγής. Επειδή ρ_γ και $\sigma|M_\gamma$ είναι απεικονίσεις διάσπασης της $g|g^{-1}(M_\gamma)$, υπάρχει ένας ομομορφισμός $\theta : M_\gamma \longrightarrow N$ τέτοιος ώστε $f \circ \theta = \rho_\gamma - \sigma|M_\gamma$. Επειδή από υπόθεση $\mathsf{Ext}^1_R(M_\tau/M_\gamma, N) = 0$, ο ομομορφισμός θ επεκτείνεται σε έναν ομομορφισμό $\theta' : M_\tau \longrightarrow N$. Εάν ορίσουμε $\rho_\tau = \sigma + (f \circ \theta')$, τότε ρ_τ είναι μία απεικόνιση διάσπασης της $g|g^{-1}(M_\tau)$ που επεκτείνει την ρ_γ. □

Άμεση συνέπεια του παραπάνω Λήμματος είναι το εξής Πόρισμα:

Πόρισμα 6.1.6. *Έστω $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ ένα συστρεπτικό ζεύγος και ας υποθέσουμε ότι ένα πρότυπο F είναι η ένωση μίας συνεχούς αλυσίδας υποπροτύπων $(F_\alpha)_{\alpha<\lambda}$. Εάν $F_0 \in \mathcal{F}$ και $F_{\alpha+1}/F_\alpha \in \mathcal{F}$ όταν $\alpha + 1 < \lambda$, τότε $F \in \mathcal{F}$.*

6.2 Η Εικασία Επίπεδης Κάλυψης

Στην ενότητα αυτή στόχος μας είναι να αποδείξουμε την Εικασία Επίπεδης Κάλυψης (Flat Cover Conjecture) η οποία αποτελεί το κεντρικό αποτέλεσμα της διατριβής. Η Εικασία Επίπεδης Κάλυψης οφείλεται στον Enochs [11], και πιστοποιεί ότι κάθε πρότυπο έχει μία επίπεδη κάλυψη. Η απόδειξη της εικασίας δόθηκε το 2001 ανεξάρτητα από τους Bican, Bashir και Enochs χρησιμοποιώντας ένα σημαντικό αποτέλεσμα των Eklof-Trlifaj περί μηδενισμού του Ext.

Στην παρούσα ενότητα το R θα συμβολίζει ένα τυχαίο (προσεταιριστικό με μονάδα) δακτύλιο και όλα τα πρότυπα είναι αριστερά R-πρότυπα.

Ο Salce έθεσε το 1979 το ακόλουθο ενδιαφέρον ερώτημα: εάν έχουμε ένα συστρεπτικό ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ (στην κατηγορία των αβελιανών ομάδων), πότε κάθε αβελιανή ομάδα έχει ένα ειδικό $\mathcal{F}$-precover και ειδικό $\mathcal{C}$-preenvelope; Η απάντηση δόθηκε το 2000 από τους Gobel-Shelah [18, Theorem 6.1], οι οποίοι απέδειξαν ότι αυτό ισχύει στην περίπτωση που το συστρεπτικό ζεύγος συνπαράγεται από ένα σύνολο αβελιανών ομάδων πεπερασμένης βαθμίδας. Οι Eklof-Trlifaj το 2001 επεξέτειναν αυτό το αποτέλεσμα για κάθε συστρεπτικό ζεύγος στην κατηγορία των αριστερών προτύπων υπεράνω ενός δακτυλίου το οποίο συνπαράγεται από ένα σύνολο προτύπων. Το αποτέλεσμα των Eklof-Trlifaj, το οποίο είναι το κλειδί για την απόδειξη της εικασίας επίπεδης κάλυψης, είναι το Θεώρημα που ακολουθεί.

Θεώρημα 6.2.1. (Eklof, Trlifaj) *(2001) [15]) Έστω $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ ένα συστρεπτικό ζεύγος στην κατηγορία των αριστερών R-προτύπων. Εάν το συστρεπτικό ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ συνπαράγεται από ένα σύνολο προτύπων, τότε κάθε R-πρότυπο έχει ένα ειδικό $\mathcal{C}$-preenvelope (και έτσι κάθε R-πρότυπο έχει ένα ειδικό $\mathcal{F}$-precover).*

Απόδειξη. Εάν το συστρεπτικό ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ συνπαράγεται από ένα σύνολο προτύπων X, τότε συνπαράγεται από το πρότυπο $A = \oplus_{M \in X} M$. Τώρα έστω

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{i} P \xrightarrow{\varpi} A \longrightarrow 0$$

μία ακριβή ακολουθία με P προβολικό και K ένα αριστερό R-πρότυπο.

Έστω λ ένας διατακτικός αριθμός. Με υπερπεπερασμένη επαγωγή θα κατασκευάσουμε μία αύξουσα αλυσίδα προτύπων $(M_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ ως εξής:

Έστω $M_0 = K$ και ας υποθέσουμε ότι το πρότυπο M_α έχει ορισθεί. Για $\alpha < \lambda$, επιλέγουμε το σύνολο δεικτών $I_\alpha = \mathsf{Hom}_R(S, M_\alpha)$. Ορίζουμε i_α ως το ευθύ άθροισμα από $|I_\alpha|$ κόπιες του ομομορφισμού i, δηλαδή

$$i_\alpha := i^{(I_\alpha)} \in \mathsf{Hom}_R(S^{(I_\alpha)}, P^{(I_\alpha)})$$

Τότε ο i_α είναι μονομορφισμός και το $\mathsf{Coker}\, i_\alpha$ είναι ισόμορφο με το ευθύ άθροισμα από κόπιες του A. Έστω

$$\phi_\alpha \colon S^{(I_\alpha)} \longrightarrow M_\alpha, \quad (x_f)_{f \in I_\alpha} \longmapsto \sum_{f \in I_\alpha} f(x_f)$$

ο κανονικός μορφισμός.

Ορίζουμε το $M_{\alpha+1}$ ως το pushout των απεικονίσεων i_α και ϕ_α:

$$\begin{tikzcd} S^{(I_\alpha)} \arrow[r, "i_\alpha"] \arrow[d, "\phi_\alpha"] & P^{(I_\alpha)} \arrow[d, "\psi_\alpha"] \\ M_\alpha \arrow[r] & M_{\alpha+1} \end{tikzcd}$$

Έτσι από την pushout κατασκευή έχουμε ότι για $\alpha + 1 < \lambda$ το $M_\alpha \subset M_{\alpha+1}$, κάθε ομομορφισμός $S \longrightarrow M_\alpha$ έχει επέκταση $P \longrightarrow M_{\alpha+1}$ και το πηλίκο $M_{\alpha+1}/M_\alpha$ είναι το ευθύ άθροισμα από κόπιες του $P/S \cong A$.

Εάν $\beta \leq \lambda$ είναι ένας οριακός διατακτικός, θέτουμε $M_\beta = \cup_{\alpha<\beta} M_\alpha$ και έτσι $(M_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ είναι μία συνεχής αλυσίδα.

Τώρα, έστω λ ο οριακός διατακτικός του Πορίσματος (6.1.2) και $C = \cup_{\alpha<\lambda} M_\alpha$. Τότε από την Παρατήρηση (6.1.3) έχουμε ότι οποιοδήποτε ομομορφισμός $S \longrightarrow C$ έχει ανάλυση

$$S \longrightarrow M_\alpha \longrightarrow C, \text{ για } \alpha < \lambda.$$

Επειδή ο λ είναι ένας οριακός διατακτικός, έχουμε ότι $\alpha + 1 < \lambda$ και έτσι από την προηγούμενη κατασκευή κάθε ομομορφισμός $S \longrightarrow M_\alpha$ έχει επέκταση $P \longrightarrow M_{\alpha+1}$. Έτσι, κάθε ομομορφισμός $S \longrightarrow C$ έχει επέκταση $P \longrightarrow C$. Επομένως έχουμε ότι $\mathsf{Ext}^1_R(A, C) = 0$. Τώρα επειδή το πρότυπο A συνπαράγει το συστρεπτικό ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ θα έχουμε ότι $A^\perp = \mathcal{C}$ δηλαδή $C \in \mathcal{C}$ αν και μόνο αν $\mathsf{Ext}^1_R(A, C) = 0$. Επομένως το $C \in \mathcal{C}$. Επειδή το $A \in \mathcal{F}$ και η κλάση F είναι κλειστή κάτω από τυχαία ευθέα αθροίσματα, έχουμε ότι κάθε ευθύ άθροισμα U από κόπιες του A ανήκει στην κλάση F. Τώρα, έστω $F = C/K = (\cup_{\alpha<\lambda} M_\alpha)/K$. Εάν θέσουμε $F_\alpha = M_\alpha/K$ για κάθε $\alpha < \lambda$, τότε θα έχουμε ότι το $F = \cup_{\alpha<\lambda} F_\alpha$. Επιπλέον,

$$\mathsf{Ext}^1_R(F_0, D) = \mathsf{Ext}^1_R(M_0/K, D) = \mathsf{Ext}^1_R(M_0/M_0, D) = 0$$

και

$$\begin{aligned} \mathsf{Ext}^1_R(F_{\alpha+1}/F_\alpha, D) &= \mathsf{Ext}^1_R(M_{\alpha+1}/K/M_\alpha/K, D) \\ &= \mathsf{Ext}^1_R(M_{\alpha+1}/M_\alpha, D) \\ &\cong \mathsf{Ext}^1_R(U, D) = 0 \end{aligned}$$

για κάθε $D \in \mathcal{C}$. Επομένως από το Λήμμα (6.1.5) έχουμε ότι $\mathsf{Ext}^1_R(F, D) = 0$ για κάθε $D \in \mathcal{C}$ και έτσι το $F \in \mathcal{F}$. Η ύπαρξη της ακριβούς ακολουθίας

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow C \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

μας δίνει ένα ειδικό $\mathcal{C}$–preenvelope του K. Επειδή το K ήταν τυχαίο, κάθε πρότυπο έχει ένα ειδικό $\mathcal{C}$–preenvelope άρα και ειδικό $\mathcal{F}$-precover, σύμφωνα με το Λήμμα του Salce(βλέπε Λήμμα (4.2.18)). □

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα, το πρόβλημα αν κάθε πρότυπο έχει επίπεδη κάλυψη, ανάγεται στο πρόβλημα αν το επίπεδο συστρεπτικό ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$, όπου $\mathcal{F}$ είναι η κλάση των επίπεδων προτύπων και $\mathcal{C}$ η κλάση των συστρεπτικών προτύπων, συνπαράγεται από ένα σύνολο προτύπων. Το πρόβλημα αυτό έχει θετική απάντηση. Για να περιγράψουμε την απάντηση χρειαζόμαστε το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 6.2.2. *(**Jensen and Lenzing**) Έστω R ένας δακτύλιος με $\mathsf{Card}\, R \leq \aleph$ όπου $\aleph$ είναι ένας άπειρος πληθικός αριθμός.*

1. *Έστω M ένα αριστερό R-πρότυπο και X ένα υποσύνολο του M με $\mathsf{Card}\, X \leq \aleph$. Τότε υπάρχει ένα καθαρό υποπρότυπο $N \subseteq M$ τέτοιο ώστε $X \subseteq N$ και $\mathsf{Card}\, N \leq \aleph$.*

2. *Ας υποθέσουμε ότι $C \subseteq A$ είναι ένα καθαρό υποπρότυπο του A και $B/C \subseteq A/C$ ένα καθαρό υποπρότυπο του A/C. Τότε το $B \subseteq A$ είναι καθαρό υποπρότυπο του A.*

3. *Ας υποθέσουμε ότι $A_0 \subseteq \cdots \subseteq A_\alpha \subseteq A_{\alpha+1} \subseteq \cdots$ είναι μία αλυσίδα από καθαρά υποπρότυπα ενός αριστερού R-προτύπου M. Τότε η ένωση $\cup_\alpha A_\alpha$ είναι ένα καθαρό υποπρότυπο του M.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [21, theorem 6.4]. □

Πόρισμα 6.2.3. *([13, corollary 2.3]) Κάθε αριστερό R-πρότυπο M είναι η ένωση μίας συνεχούς αλυσίδας καθαρών υποπροτύπων $\{M_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ με $\mathsf{Card}\, M_0 \leq \aleph$ και $\mathsf{Card}(M_{\alpha+1}/M_\alpha) \leq \aleph$ για $\alpha + 1 < \lambda$.*

Απόδειξη. Εάν υποθέσουμε ότι τα στοιχεία του M είναι καλά διατεταγμένα, θα κατασκευάσουμε τα M_α με υπερπεπερασμένη επαγωγή. Έστω $M_0 \subset M$ καθαρό υποπρότυπο που περιέχει το ελαχιστικό στοιχείο του M με $\mathsf{Card}\, M_0 \leq \aleph$.

Εάν το M_α έχει κατασκευαστεί, έστω $M_{\alpha+1}/M_\alpha \subseteq M/M_\alpha$ καθαρό υποπρότυπο όπου το $M_{\alpha+1}$ περιέχει το ελαχιστικό στοιχείο του M που δεν ανήκει στο M_α(εκτός αν $M_\alpha = M$ που σε αυτή την περίπτωση $\lambda = \alpha + 1$) και με $\mathsf{Card}(M_{\alpha+1}/M_\alpha) \leq \aleph$.

Για κάθε οριακό διατακτικό $\beta < \lambda$ έστω $M_\beta = \cup_{\alpha<\beta} M_\alpha$ όπου το M_α έχει κατασκευαστεί για κάθε $\alpha < \beta$. □

Θεώρημα 6.2.4. *Έστω R ένας δακτύλιος. Το επίπεδο συστρεπτικό ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ στην κατηγορία των αριστερών R-προτύπων συνπαράγεται από ένα σύνολο προτύπων.*

Απόδειξη. Έστω ότι $\mathsf{Card}\, R \leq \aleph$ όπου $\aleph$ είναι ένας άπειρος πληθικός αριθμός και $\mathcal{Y}$ ένα σύνολο αντιπροσώπων όλων των επίπεδων προτύπων G με $\mathsf{Card}\, G \leq \aleph$. Δηλαδή,

$$\mathcal{Y} = \{G \in \mathcal{F} \mid \mathsf{Card}\, G \leq \aleph\}$$

Θα αποδείξουμε ότι το επίπεδο συστρεπτικό ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ συνπαράγεται από το σύνολο $\mathcal{Y}$, δηλαδή ότι ισχύει $\mathcal{Y}^\perp = \mathcal{C}$ ή ισοδύναμα ότι ένα αριστερό R-πρότυπο C είναι συστρεπτικό αν και μόνο αν $\mathsf{Ext}^1_R(G, C) = 0$ για κάθε $G \in \mathcal{Y}$.

Έστω C ένα αριστερό συστρεπτικό R-πρότυπο. Τότε ισχύει ότι $\mathsf{Ext}^1_R(F, C) = 0$ για κάθε $F \in \mathcal{F}$, άρα και για τα στοιχεία του $\mathcal{Y}$, και έτσι $\mathsf{Ext}^1_R(G, C) = 0$ για κάθε $G \in \mathcal{Y}$.

Αντίστροφα, έστω ότι $\mathsf{Ext}^1_R(G, C) = 0$ για κάθε $G \in \mathcal{Y}$ και έστω $F \in \mathcal{F}$ ένα επίπεδο αριστερό R-πρότυπο. Από το προηγούμενο Πόρισμα, το F είναι η ένωση μίας συνεχούς αλυσίδας $\{F_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ καθαρών υποπροτύπων του F με $\mathsf{Card}\, F_0 \leq \aleph$ και $\mathsf{Card}(F_{\alpha+1}/F_\alpha) \leq \aleph$ για $\alpha + 1 < \lambda$. Έχουμε ότι το F_0 είναι καθαρό υποπρότυπο του F, άρα υπάρχει η καθαρά ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow F_0 \longrightarrow F \longrightarrow F/F_0 \longrightarrow 0$$

Επομένως έχουμε ότι το F/F_0 είναι επίπεδο αριστερό R-πρότυπο. Επειδή και το F είναι επίπεδο αριστερό R-πρότυπο, από το Πόρισμα (3.2.6) έχουμε ότι και το F_0 είναι επίπεδο αριστερό R-πρότυπο. Επιπλέον επειδή $\mathsf{Card}\, F_0 \leq \aleph$, έχουμε ότι το $F_0 \in \mathcal{Y}$. Ομοίως επειδή το F_α είναι καθαρό υποπρότυπο του F έχουμε ότι το F/F_α είναι επίπεδο αριστερό R-πρότυπο. Από το προηγούμενο Πόρισμα έχουμε ότι το $F_{\alpha+1}/F_\alpha \subseteq F/F_\alpha$ είναι καθαρό υποπρότυπο του F/F_α. Έτσι το $F_{\alpha+1}/F_\alpha$ είναι επίπεδο αριστερό R-πρότυπο ως καθαρό υποπρότυπο επίπεδου. Επιπλέον επειδή $\mathsf{Card}(F_{\alpha+1}/F_\alpha) \leq \aleph$ για $\alpha + 1 < \lambda$, έχουμε ότι το $F_{\alpha+1}/F_\alpha \in \mathcal{Y}$. Έτσι ισχύουν ότι $\mathsf{Ext}^1_R(F_0, C) = 0$ και $\mathsf{Ext}^1_R(F_{\alpha+1}/F_\alpha, C) = 0$. Επειδή το F είναι η ένωση μίας συνεχούς αλυσίδας $\{F_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ καθαρών υποπροτύπων, από το Λήμμα (6.1.5) θα έχουμε ότι $\mathsf{Ext}^1_R(F, C) = 0$ και άρα το C είναι αριστερό συστρεπτικό R-πρότυπο. □

Επειδή η ύπαρξη των επίπεδων precovers επάγει την ύπαρξη των επίπεδων covers, καταλήγουμε στην απόδειξη της Εικασίας Επίπεδης Κάλυψης.

Θεώρημα 6.2.5. *Κάθε R-πρότυπο έχει μία επίπεδη κάλυψη.*

Απόδειξη. Έστω $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ το επίπεδο συστρεπτικό ζεύγος. Από την προηγούμενη Πρόταση το συστρεπτικό ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ συνπαράγεται από ένα σύνολο προτύπων. Έτσι από το Θεώρημα (6.2.1) κάθε R-πρότυπο έχει ένα ειδικό $\mathcal{C}$-preenvelope άρα και ειδικό $\mathcal{F}$-precover, σύμφωνα με το Λήμμα του Salce(βλέπε Λήμμα (4.2.18)). Άρα από το Θεώρημα (4.3.10) κάθε R-πρότυπο έχει ένα $\mathcal{F}$-cover, δηλαδή μία επίπεδη κάλυψη. □

Σημειώνουμε ότι ως άμεση απόρροια του Θεωρήματος 6.2.5, έπεται ότι κάθε πρότυπο A υπεράνω τυχόντος δακτυλίου R έχει μια ελάχιστη επίπεδη ανάλυση:

$$\cdots \longrightarrow F^{n+1} \longrightarrow F^n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F^1 \longrightarrow F^0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

δηλαδή κάθε πρότυπο F^k είναι επίπεδο, οι επαγόμενοι ομομορφισμοί $F^{n+1} \longrightarrow \mathsf{Im}(F^{n+1} \to F^n)$ και $F^0 \longrightarrow A$ είναι επίπεδες καλύψεις. Ιδιαίτερα το επαγόμενο σύμπλοκο

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(F, F^{n+1}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(F, F^0) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(F, A) \longrightarrow 0$$

είναι ακριβές για κάθε επίπεδο πρότυπο F.

Κεφάλαιο 7

Νεότερες Εξελίξεις και Γενικεύσεις

Μετά την απόδειξη της Εικασίας Επίπεδης Κάλυψης σε μια κατηγορία προτύπων από τους Bican, Bashir και Enochs, αποδείχθηκαν από πολλούς ερευνητές πολλά ανάλογα αποτελέσματα περί ύπαρξης επίπεδων καλύψεων σε γενικότερες κατηγορίες, για παράδειγμα σε κατηγορίες συμπλόκων υπεράνω μιας κατηγορίας προτύπων, σε κατηγορίες δραγμάτων (sheaves) υπεράνω ενός δακτυλιοειδούς χώρου (ringed space), σε κατηγορίες συνπροτύπων (comodules) υπεράνω κατάλληλων συναλγεβρών (coalgebras), κτλ.

Σκοπός του παρόντος σύντομου Κεφαλαίου είναι να περιγράψουμε (εν συντομία και χωρίς αποδείξεις) κάποιες από τις σημαντικότερες εξελίξεις περί ύπαρξης επίπεδων καλύψεων σε κατηγορίες γενικότερες των κατηγοριών προτύπων.

Οι έννοιες οι οποίες εισήχθηκαν και μελετήθηκαν στα προηγούμενα Κεφάλαια ορίζονται και σε τυχούσες (προσθετικές ή αβελιανές) κατηγορίες. Έτσι έχει έννοια να μιλάμε για (pre)covers αντικειμένων μιας κατηγορίας ως προς μια κλάση αντικειμένων της, και επίσης για το πότε μια υποκατηγορία μιας κατηγορίας είναι (pre)covering).

Για παράδειγμα αν $\mathcal{A}$ είναι μια προσθετική κατηγορία, και $\mathcal{F}$ μια πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{A}$, ισοδύναμα μια κλάση αντικειμένων της, τότε ένας μορφισμός $f\colon F \longrightarrow M$ καλείται $\mathcal{F}$-precover του M, αν: $F \in \mathcal{F}$, και για κάθε μορφισμό $f'\colon F' \longrightarrow M$, όπου $F' \in \mathcal{F}$, υπάρχει ένας μορφισμός $g\colon F' \longrightarrow F$ τέτοιος ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & F' \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "f'"] \\ F \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό.

Το $\mathcal{F}$-precover $f\colon F \longrightarrow M$ καλείται $\mathcal{F}$-cover του M εάν κάθε ενδομορφισμός $g\colon F \longrightarrow F$ που κάνει το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "f"] \\ F \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

μεταθετικό, είναι αυτομορφισμός.

Τέλος η υποκατηγορία $\mathcal{F}$ καλείται (pre)covering στην $\mathcal{A}$, αν κάθε αντικείμενο της $\mathcal{A}$ έχει ένα $\mathcal{F}$-(pre)cover.

Ανάλογα ορίζονται οι έννοιες των μορφισμών οι οποίοι είναι (pre)envelopes και των υποκατηγοριών οι οποίες είναι (pre)enveloping σε μια προσθετική κατηγορία.

Στα επόμενα θα θεωρήσουμε γνωστά βασικά στοιχεία της θεωρίας αβελιανών κατηγοριών, τα περισσότερα εκ των οποίων αναλύθηκαν στο πλαίσιο της κατηγορίας προτύπων υπεράνω ενός δακτυλίου.

7.1 Καλύψεις σε Κατηγορίες του Grothendieck

Μια από τις πρώτες γενικεύσεις του Θεωρήματος Επίπεδης κάλυψης των Bashir, Bican, Enochs απετέλεσε ένα αποτέλεσμα του El Bashir στο πλαίσιο των κατηγοριών του Grothendieck την οποία υπενθυμίζουμε παρακάτω.

Ορισμός 7.1.1. *Μια αβελιανή κατηγορία $\mathcal{G}$ καλείται* **κατηγορία του Grothendieck** *αν:*

1. *Η κατηγορία $\mathcal{G}$ έχει γεννήτορα, δηλαδή ένα αντικείμενο G έτσι ώστε ο αναπαραστάσιμος συναρτητής $\mathsf{Hom}_{\mathcal{G}}(G,-)\colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathfrak{Ab}$ είναι πιστός (faithful).*
2. *Η κατηγορία $\mathcal{G}$ έχει ακριβή ευθέα όρια, δηλαδή υπάρχει το ευθύ άθροισμα στην $\mathcal{G}$ για κάθε οικογένεια αντικειμένων της υπεράνω τυχαίου συνόλου δεικτών, και επομένως η $\mathcal{G}$ έχει ευθέα όρια, και επιπλέον ο συναρτητής «ευθύ όριο» $\varinjlim$ στην $\mathcal{G}$ είναι ακριβής.*

Παράδειγμα 7.1.2. Η κατηγορία προτύπων υπεράνω ενός δακτυλίου είναι κατηγορία του Grothendieck. Επίσης η κατηγορία δραγμάτων (sheaves) αβελιανών ομάδων ή προτύπων υπεράνω ενός τοπολογικού χώρου ή ενός δακτυλιοειδούς χώρου είναι κατηγορία του Grothendieck. Η κατηγορία συμπλόκων υπεράνω μιας κατηγορίας προτύπων, ή γενικότερα υπεράνω μιας κατηγορίας του Grothendieck, είναι επίσης κατηγορία του Grothendieck. Για περισσότερες πληροφορίες αναφορικά με την θεωρία των κατηγοριών του Grothendieck, παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα βιβλία των Stenstrom [30] και Popescu [27].

Για κατηγορίες του Grothendieck, οι Enochs-Xu χρησιμοποιώντας παρόμοιες μεθόδους με αυτές του Κεφαλαίου 4, απέδειξαν την ακόλουθη γενίκευση του Θεωρήματος (4.3.10).

Θεώρημα 7.1.3 (Enochs-Xu). *Έστω $\mathcal{G}$ μια κατηγορία του Grothendieck και έστω $\mathcal{F}$ μια πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{G}$ η οποία είναι κλειστή στα ευθέα όρια. Αν ένα αντικείμενο X της $\mathcal{G}$ έχει $\mathcal{F}$-precover, τότε το X έχει $\mathcal{F}$-cover.*

Επομένως αν $\mathcal{F}$ είναι μια πλήρης υποκατηγορία μιας κατηγορίας του Grothendieck η οποία είναι κλειστή στα ευθέα όρια, τότε η $\mathcal{F}$ είναι covering αν και μόνον αν είναι precovering.

Με βάση το παραπάνω αποτέλεσμα των Enochs-Xu και χρησιμοποιώντας ανάλογες μεθόδους με τις μεθόδους των Bican-El Bashir-Enochs, ο El Bashir απέδειξε την ακόλουθη ενδιαφέρουσα γενίκευση του Θεωρήματος (6.2.5).

Θεώρημα 7.1.4 (El Bashir (2006) [5]). *Έστω $\mathcal{G}$ μια κατηγορία του Grothendieck και έστω $\mathcal{F}$ μια πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{G}$ η οποία είναι κλειστή στα ευθέα όρια. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα υποσύνολο $S \subseteq \mathcal{F}$ έτσι ώστε κάθε αντικείμενο της $\mathcal{F}$ να γράφεται ως ευθύ όριο ενός ευθέος συστήματος αντικειμένων του συνόλου S.*

Τότε κάθε αντικείμενο της $\mathcal{G}$ έχει μια $\mathcal{F}$-κάλυψη και η $\mathcal{F}$ είναι covering.

Η επόμενη παρατήρηση δείχνει ότι πράγματι το παραπάνω αποτέλεσμα αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος Επίπεδης Κάλυψης (6.2.5).

Παρατήρηση 7.1.5. **1.** Η κατηγορία R-Mod υπεράνω ενός δακτυλίου R είναι μια κατηγορία του Grothendieck και η πλήρης υποκατηγορία $\mathcal{F} = R$-Flat είναι γνωστό ότι είναι κλειστή στα ευθέα όρια. Επιπλέον κάθε επίπεδο πρότυπο μπορεί να γραφεί ως ευθύ όριο πεπερασμένα παραγόμενων προβολικών προτύπων. Έτσι θέτοντας S να είναι το σύνολο των κλάσεων ισομορφίας των πεπερασμένα παραγόμενων προβολικών προτύπων, βλέπουμε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θεωρήματος (7.1.3). Έτσι έχουμε ως πόρισμα το Θεώρημα 6.2.5: κάθε πρότυπο έχει μια επίπεδη κάλυψη.

2. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $\mathcal{R}$ ένα δράγμα (sheaf) δακτυλίων υπεράνω του X. Αποδεικνύεται, βλέπε [5], ότι η κατηγορία των επίπεδων δραγμάτων προτύπων υπεράνω του δράγματος δακτυλίων $\mathcal{R}$ υπεράνω του X ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος (7.1.3). Άρα η πλήρης υποκατηγορία των επίπεδων δραγμάτων είναι covering στην κατηγορία των δραγμάτων προτύπων υπεράνω του δράγματος δακτυλίων $\mathcal{R}$.

Είναι γνωστό ότι σπάνια σε κατηγορίες δραγμάτων υπεράνω ενός τοπολογικού χώρου υπάρχουν αρκετά προβολικά αντικείμενα. Έτσι η ύπαρξη επίπεδων καλύψεων σε κατηγορίες δραγμάτων υπεράνω τοπολογικών χώρων έχει σημαντικές συνέπειες στην μελέτη παραγόμενων συναρτητών σε αυτές τις κατηγορίες οι οποίοι μπορούν να ορισθούν με χρήση επίπεδων αναλύσεων.

7.2 Καλύψεις σε Προσιτές Κατηγορίες

Πρόσφατα, βλέπε [26], ο Wolfgang Rump απέδειξε ένα θεώρημα ύπαρξης επίπεδων καλύψεων σε αρκετά γενικές, όχι απαραίτητα αβελιανές, κατηγορίες. Στην παρούσα ενότητα θα περιγράψουμε εν συντομία τα αποτελέσματα του Rump και τις συνέπειές τους.

Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία η οποία έχει ευθέα όρια. Ένα αντικείμενο E της $\mathcal{A}$ καλείται **πεπερασμένα παραστάσιμο** αν ο συναρτητής

$$\mathcal{A}(E,-)\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathfrak{Ab}$$

διατηρεί ευθέα όρια. Η πλήρης υποκατηγορία των πεπερασμένα παραστάσιμων αντικειμένων της $\mathcal{A}$ συμβολίζεται με $\mathsf{fp}\mathcal{A}$.

Ορισμός 7.2.1. *Μια προσθετική κατηγορία $\mathcal{A}$ καλείται* **τοπικά πεπερασμένα παραστάσιμη** *ή* **πεπερασμένα προσιτή** *(***locally finitely presented** *ή (***finitely accessible***), αν:*

1. *Η $\mathcal{A}$ έχει ευθέα όρια.*

2. *Η πλήρης υποκατηγορία $\mathsf{fp}\mathcal{A}$ των πεπερασμένα παραστάσιμων αντικειμένων της $\mathcal{A}$ είναι σκελετικά μικρή, δηλαδή το πλήθος των κλάσεων ισομορφίας των αντικειμένων της αποτελεί σύνολο.*

3. *Κάθε αντικείμενο της $\mathcal{A}$ γράφεται ως ευθύ όριο ενός συστήματος πεπερασμένα παραστάσιμων αντικειμένων της $\mathcal{A}$.*

Παράδειγμα 7.2.2. Κατηγορίες προτύπων Mod-R υπεράνω τυχόντων δακτυλίων R, και γενικότερα κατηγορίες Mod-$\mathcal{C}$ προσθετικών συναρτητών με τιμές στην κατηγορία των αβελιανών ομάδων, υπεράνω σκελετικά μικρών προσθετικών κατηγοριών $\mathcal{C}$, είναι σπουδαία παραδείγματα τοπικά πεπερασμένα παραστάσιμων κατηγοριών.

Από τη σκοπιά του κεντρικού θέματος της παρούσης διατριβής, το σημαντικότερο ίσως παράδειγμα τοπικά πεπερασμένα παραστάσιμης κατηγορίας είναι η κατηγορία R-Flat των επίπεδων προτύπων υπεράνω ενός δακτυλίου.

Από τώρα και στο εξής σταθεροποιούμε μια τοπικά πεπερασμένα παραστάσιμη προσθετική κατηγορία $\mathcal{A}$.

Η ακόλουθη έννοια ακρίβειας γενικεύει την έννοια καθαρής ακρίβειας σε κατηγορίες προτύπων που μελετήθηκε στο Κεφάλαιο 5.

Μια ακολουθία αντικειμένων και μορφισμών

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \qquad (*)$$

στην $\mathcal{A}$ καλείται **καθαρά ακριβής**, αν η επαγόμενη ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}(X, A) \longrightarrow \mathcal{A}(X, B) \longrightarrow \mathcal{A}(X, C) \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής, για κάθε πεπερασμένα παραστάσιμο αντικείμενο X της $\mathcal{A}$.

Αν $(*)$ είναι μια καθαρά ακριβής ακολουθία στην $\mathcal{A}$, τότε ο μορφισμός $A \longrightarrow B$ θα καλείται **καθαρός μονομορφισμός** (**pure monomorphism**) και ο μορφισμός $B \longrightarrow C$ θα καλείται **καθαρός επιμορφισμός** (**pure epimorphism**).

Καθώς η πεπερασμένα παραστάσιμη προσθετική κατηγορία $\mathcal{A}$ δεν είναι απαραίτητα αβελιανή, για να διατυπώσουμε το Θεώρημα του Rump χρειαζόμαστε την ακόλουθη έννοια ακρίβειας.

Ορισμός 7.2.3. *Μια τοπικά πεπερασμένα παραστάσιμη προσθετική κατηγορία $\mathcal{A}$ καλείται* **αριστερά ακριβής** *αν είναι εφοδιασμένη με μια διακεκριμένη κλάση μορφισμών E οι οποίοι είναι συνπυρήνες μορφισμών στην $\mathcal{A}$, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:*

1. *Η κλάση E είναι κλειστή στην σύνθεση μορφισμών και περιέχει τους ταυτοτικούς μορφισμούς αντικειμένων της $\mathcal{A}$.*
2. *Αν η σύνθεση μορφισμών $A \longrightarrow B \longrightarrow C$ ανήκει στην κλάση E, τότε ο μορφισμός $B \longrightarrow C$ ανήκει στην κλάση E.*
3. *Το pullback ενός μορφισμούς στην κλάση E με έναν τυχαίο μορφισμό στην $\mathcal{A}$ υπάρχει και ανήκει στην κλάση E.*

Η κλάση E καλείται **αριστερή δομή ακρίβειας** *της $\mathcal{A}$.*

Σε μια αριστερά ακριβή τοπικά πεπερασμένα παραστάσιμη προσθετική κατηγορία $\mathcal{A}$ μπορεί να ορισθεί η έννοια επίπεδων αντικειμένων ως εξής:

Ορισμός 7.2.4. *Έστω $(\mathcal{A}, \mathsf{E})$ μια αριστερά ακριβής τοπικά πεπερασμένα παραστάσιμη προσθετική κατηγορία, όπου E είναι η αριστερή δομή ακρίβειας της $\mathcal{A}$.*

Ένα αντικείμενο F της $\mathcal{A}$ καλείται **επίπεδο** *αν κάθε στοιχείο $A \longrightarrow F$ που ανήκει στην E είναι καθαρός επιμορφισμός.*

Το ακόλουθο σημαντικό Θεώρημα οφείλεται στον Rump και γενικεύει όλα τα ανάλογα αποτελέσματα περί ύπαρξης επίπεδων καλύψεων σε διάφορα πλαίσια.

Θεώρημα 7.2.5 (Rump [26])**.** *Έστω $\mathcal{A}$ μια τοπικά πεπερασμένα παραστάσιμη αριστερά ακριβής προσθετική κατηγορία με αριστερή δομή ακρίβειας E, και υποθέτουμε ότι κάθε καθαρός επιμορφισμός στην $\mathcal{A}$ ανήκει στην κλάση E. Τότε κάθε αντικείμενο της $\mathcal{A}$ έχει μια επίπεδη κάλυψη.*

Ειδικεύοντας το παραπάνω Θεώρημα σε αβελιανές κατηγορίες και σημειώνοντας ότι μια τοπικά πεπερασμένα παραστάσιμη προσθετική κατηγορία είναι αβελιανή αν και μόνον αν είναι κατηγορία του Grothendieck, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα το οποίο οφείλεται επίσης στον Rump:

Θεώρημα 7.2.6. *Έστω $\mathcal{A}$ τοπικά πεπερασμένα παραστάσιμη κατηγορία του Grothendieck, και $\mathcal{B}$ μια πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{A}$ η οποία είναι κλειστή στα ευθέα όρια, και υποθέτουμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι ανακλαστική, δηλαδή ο συναρτητής έγκλεισης $\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ έχει έναν αριστερά συζυγή συναρτητή. Τότε κάθε αντικείμενο της $\mathcal{B}$ έχει επίπεδη κάλυψη.*

Παρόμοια αποτελέσματα στην μη-αβελιανή περίπτωση αποδείχθηκαν την ίδια περίοδο από τους Crivei-Prest-Torecillas [9]. Έστω $\mathcal{A}$ μια τοπικά πεπερασμένα παραστάσιμη προσθετική κατηγορία και $\mathcal{C}$ μια πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{A}$. Θα λέμε ότι η $\mathcal{C}$ είναι *κλειστή στις καθαρά επιμορφικές εικόνες* αν κάθε φορά που έχουμε έναν καθαρό επιμορφισμό $C \longrightarrow A$ στην $\mathcal{A}$ και το αντικείμενο C ανήκει στην $\mathcal{C}$, τότε και το αντικείμενο A ανήκει στην $\mathcal{C}$. Δυϊκά θα λέμε ότι η $\mathcal{C}$ είναι *κλειστή στα καθαρά μονομορφικά υποαντικείμενα* αν κάθε φορά που έχουμε έναν καθαρό μονομορφισμό $A \longrightarrow C$ στην $\mathcal{A}$ και το αντικείμενο C ανήκει στην $\mathcal{C}$, τότε και το αντικείμενο A ανήκει στην $\mathcal{C}$.

Θεώρημα 7.2.7. (Crivei-Prest-Torecillas) *[9] Έστω $\mathcal{A}$ μια τοπικά πεπερασμένα παραστάσιμη προσθετική κατηγορία και $\mathcal{C}$ μια πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{A}$ η οποία είναι κλειστή στα ευθέα όρια και στις καθαρά επιμορφικές εικόνες. Τότε η υποκατηγορία $\mathcal{C}$ είναι covering στην $\mathcal{A}$.*

Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να γενικευθεί σε ειδικού τύπου υποκατηγορίες: αν $\mathcal{A}$ είναι μια τοπικά πεπερασμένα παραστάσιμη προσθετική κατηγορία με άπειρα γινόμενα, τότε μια πλήρης υποκατηγορία $\mathcal{D}$ της $\mathcal{A}$ καλείται **ορίσιμη** (**definable**), αν η $\mathcal{D}$ είναι κλειστή στα (άπειρα) γινόμενα, στα ευθέα όρια και στα καθαρά μονομορφικά υποαντικείμενα.

Θεώρημα 7.2.8. (Crivei-Prest-Torecillas) *[9] Έστω $\mathcal{D}$ μια ορίσιμη υποκατηγορία μιας τοπικά πεπερασμένα παραστάσιμης προσθετικής κατηγορίας $\mathcal{A}$ με άπειρα γινόμενα και $\mathcal{C}$ μια πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{D}$ η οποία είναι κλειστή στα ευθέα όρια και στις καθαρά επιμορφικές εικόνες. Τότε η υποκατηγορία $\mathcal{C}$ είναι covering στην $\mathcal{D}$.*

Έστω $\mathcal{A}$ μια τοπικά πεπερασμένα παραστάσιμη προσθετική κατηγορία. Ένα αντικείμενο F της $\mathcal{A}$ καλείται **επίπεδο** (**flat**) αν κάθε επιμορφισμός στην $\mathcal{A}$ ο οποίος καταλήγει στο F είναι καθαρός. Δυϊκά ένα αντικείμενο E της $\mathcal{A}$ καλείται **απόλυτα καθαρό** (**absolutely pure**) αν κάθε μονομορφισμός στην $\mathcal{A}$ ο οποίος ξεκινά από το E είναι καθαρός.

Είναι εύκολο να δειχθεί αν η $\mathcal{A}$ είναι επιπλέον πλήρης, δηλαδή η $\mathcal{A}$ έχει συνπυρήνες, τότε η κλάση των επίπεδων αντικειμένων της $\mathcal{A}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 7.2.7. Έτσι έχουμε την ακόλουθη συνέπεια του Θεωρήματος 7.2.7.

Πόρισμα 7.2.9. (Crivei-Prest-Torecillas) *[9] Έστω $\mathcal{A}$ μια τοπικά πεπερασμένα παραστάσιμη προσθετική κατηγορία με άπειρα γινόμενα και συνπυρήνες. Τότε η υποκατηγορία* $\mathsf{Flat}\text{-}\mathcal{A}$ *των επίπεδων αντικειμένων της $\mathcal{A}$ είναι covering στην $\mathcal{A}$.*

Παράδειγμα 7.2.10. Παραδείγματα κατηγοριών οι οποίες ικανοποιούν τις υποθέσεις του παραπάνω πορίσματος αποτελούν κατηγορίες προτύπων και κατηγοριών συνπροτύπων συναλγεβρών υπεράνω ενός σώματος. Έτσι η κλάση των επίπεδων προτύπων υπεράνω ενός δακτυλίου και η κλάση των επίπεδων συνπροτύπων μιας συνάλγεβρας υπεράνω ενός σώματος είναι covering.

Το Θεωρήματα 7.2.6, 7.2.7 και 7.2.8 δείχνουν την ύπαρξη επίπεδων καλύψεων σε διάφορες κατηγορίες, αβελιανές και μη-αβελιανές, και καλύπτουν όλα τα γνωστά ανάλογα αποτελέσματα της βιβλιογραφίας. Αναφέρουμε ενδεικτικά ότι με βάση το Θεώρημα 7.2.6 αποκτούμε επίπεδες καλύψεις σε κατηγορίες:

1. Κατηγορίες προτύπων υπεράνω δακτυλίων και κατηγορίες συναρτητών με τιμές στις αβελιανές ομάδες υπεράνω σκελετικά μικρών προσθετικών κατηγοριών.

2. Κατηγορίες δραγμάτων υπεράνω ενός δακτυλιοειδούς χώρου.

3. Κατηγορίες ημι-συναφών δραγμάτων (quasi-coherent sheaves) τα οποία ορίζονται υπεράνω σχημάτων (schemes).

4. Κατηγορίες αναπαραστάσεων διατεταγμένων συνόλων.

5. Κατηγορίες συμπλόκων υπεράνω κατηγοριών προτύπων.

6. Κατηγορίες συνπροτύπων (comodules) υπεράνω (αριστερά) ημι-τέλειων συναλγεβρών semiperfect coalgebras.

7. Διάφορες κατηγορίες αντικειμένων εφοδιασμένων με filtration.

Κλείνουμε την παρούσα ενότητα με το ακόλουθο αποτέλεσμα των Crivei-Prest-Torecillas το οποίο γενικεύει ένα σχετικό αποτέλεσμα των Rada-Saorin [23] και το οποίο μας εξασφαλίζει την ύπαρξη περιβλημάτων σε τοπικά πεπερασμένα παραστάσιμες προσθετικές κατηγορίες.

Θεώρημα 7.2.11. (Crivei-Prest-Torecillas) *[9] Έστω $\mathcal{A}$ μια τοπικά πεπερασμένα παραστάσιμη προσθετική κατηγορία με άπειρα γινόμενα, και $\mathcal{F}$ μια πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{A}$ η οποία είναι κλειστή στα ευθέα όρια και στα καθαρά μονομορφικά υποαντικείμενα. Τότε η υποκατηγορία $\mathcal{F}$ είναι preenveloping στην $\mathcal{A}$.*

Υπενθυμίζουμε ότι μια τοπικά πεπερασμένα παραστάσιμη προσθετική κατηγορία $\mathcal{A}$ καλείται **τοπικά συναφής** (**locally coherent**) αν η $\mathcal{A}$ και η κατηγορία $\mathsf{fp}(\mathcal{A})$ των πεπερασμένα παραστάσιμων αντικειμένων της είναι αβελιανές κατηγορίες. Για παράδειγμα η κατηγορία δεξιών προτύπων $\mathsf{Mod}\text{-}R$ υπεράνω ενός δακτυλίου R είναι τοπικά συναφής αν και μόνον αν ο δακτύλιος R είναι δεξιά συναφής.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα οφείλεται στους Crivei-Prest-Torecillas και είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 7.2.10.

Πόρισμα 7.2.12. (Crivei-Prest-Torecillas) *[9] Έστω $\mathcal{A}$ μια τοπικά πεπερασμένα παραστάσιμη προσθετική κατηγορία με άπειρα γινόμενα και συνπυρήνες. Τότε η κλάση των απόλυτα καθαρών αντικειμένων της $\mathcal{A}$ είναι preenveloping στην $\mathcal{A}$.*

Αν η $\mathcal{A}$ είναι τοπικά συναφής, τότε η κλάση των επίπεδων αντικειμένων της $\mathcal{A}$ είναι preenveloping στην $\mathcal{A}$.

Για περισσότερες λεπτομέρειες αποτελέσματα καλύψεων ή περιβλημάτων κλάσεων προτύπων σε κατηγορίες προτύπων ή αντικειμένων σε γενικότερες κατηγορίες, παραπέμπουμε στα άρθρα των Rump [26], Rada-Saorin [23], και Crivei-Prest-Torecillas [9].

Παράρτημα Α΄

Υπερπεπερασμένη Επαγωγή

Στο παρόν παράρτημα θα παρουσιάσουμε εν συντομία κάποια αποτελέσματα από τη Θεωρία συνόλων.

Α΄.1 Το Λήμμα του Zorn

Στο εξής με τον όρο κλάση θα εννοούμε μία συλλογή η οποία ίσως είναι πολύ μεγάλη για να λέγεται σύνολο. Μερικοί ορισμοί που θα δώσουμε σχετικά με σύνολα μπορούν να ισχύουν και για κλάσεις.

Ορισμός Α΄.1.1. *Ένα* **μερικά διατεταγμένο σύνολο** *είναι ένα σύνολο X με μία σχέση $\leq$ τέτοια ώστε*

1. $x \leq x$,
2. *εάν* $x \leq y$ *και* $y \leq z$ *τότε* $x \leq z$,
3. *εάν* $x \leq y$ *και* $y \leq x$ *τότε* $x = y, \forall x, y, z \in X$.

Ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο X λέγεται **ολικά διατεταγμένο** *εάν $\forall x, y \in X$ είτε $x \leq y$ ή $y \leq x$. Εάν S είναι ένα υποσύνολο ενός μερικά διατεταγμένου συνόλου X, τότε λέμε ότι το S έχει την* **επαγόμενη διάταξη** *με $x \leq y$ στο S όπως ακριβώς αυτή η σχέση ικανοποιείται στο X .*

Ορισμός Α΄.1.2. *Έστω X είναι ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο. Ένα στοιχείο $x \in X$ λέγεται* **άνω φράγμα** *του υποσυνόλου $S \subset X$ εάν $y \leq x, \forall y \in S$. Ένα στοιχείο $x \in X$ λέγεται* **μεγιστοτικό στοιχείο** *του X εάν $x \leq y$, $y \in X$ συνεπάγεται ότι $x = y$. Το μερικά διατεταγμένο σύνολο X λέγεται* **επαγωγικά διατεταγμένο** *εάν κάθε υποσύνολο $S \subset X$ του X, το οποίο είναι ολικά διατεταγμένο με την επαγόμενη διάταξη, έχει άνω φράγμα στο X.*

Θεώρημα Α΄.1.3. (Το Λήμμα του Zorn) *Κάθε επαγωγικά διατεταγμένο σύνολο έχει μεγιστοτικό στοιχείο.*

Ορισμός Α΄.1.4. *Ένα στοιχείο x ενός μερικά διατεταγμένου συνόλου X λέγεται* **ελαχιστικό** *εάν $x \leq y, \forall y \in X$. Ένα ολικά διατεταγμένο σύνολο X λέγεται* **καλά διατεταγμένο** *εάν κάθε μη κενό υποσύνολο του S έχει ελαχιστικό στοιχείο (το S έχει την επαγόμενη διάταξη).*

Διαφορετικά, λέμε ότι ένα ολικά διατεταγμένο σύνολο X είναι καλά διατεταγμένο αν και μόνο αν όταν έχουμε $x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \ldots$ για στοιχεία $x_n \in X$ υπάρχει ένα n_0 τέτοιο ώστε $x_n = x_{n_0}$ για $n \geq n_0$.

Ορισμός Α΄.1.5. *Δύο καλά διατεταγμένα σύνολα X και Y είναι* **ισόμορφα** *εάν υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία $f : X \to Y$ η οποία διατηρεί τη διάταξη, δηλαδή εάν $x_1 \leq x_2$ στο X τότε $f(x_1) \leq f(x_2)$ στο Y. Εάν X και Y είναι ισομόμορφα σύνολα τότε γράφουμε ότι $X \cong Y$. Μια τέτοια $f : X \to Y$, λέγεται ισομορφισμός και εάν η f είναι ισομορφισμός τότε είναι και η f^{-1} .*

Ορισμός Α΄.1.6. *Εάν X είναι ένα καλά διατεταγμένο σύνολο, τότε ένα υποσύνολο S του X λέγεται* **τμήμα (segment)** *του X εάν έχουμε $y \leq x$ και $x \in S$ τότε και $y \in S$.*

Η ένωση και η τομή οποιασδήποτε συλλογής από τμήματα ενός καλά διατεταγμένου συνόλου X είναι τμήμα του X. Εάν S και T είναι τμήματα του X τότε είτε $S \subset T$ είτε $T \subset S$. Το X είναι τμήμα του X. Εάν $S \neq X$ και ένα στοιχείο $x \in X$ είναι ελαχιστικό στοιχείο του $X - S$, τότε $S_x = \{y \in X \mid y < x\}$ είναι ένα τμήμα του X και αναφέρεται ως **αρχικό τμήμα (initial segment)**. Έχουμε ότι το σύνολο των αρχικών τμημάτων του X διατεταγμένο με την έγκλειση είναι ένα καλά διατεταγμένο σύνολο το οποίο είναι ισομορφικό με το X. Έτσι εάν $S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset \ldots$ είναι τμήματα του X, τότε για κάποιο $n_0 \geq 0, S_n = S_{n_0}$, $\forall n \geq n_0$.

Θεώρημα Α΄.1.7. *Εάν X και Y είναι δύο καλά διατεταγμένα σύνολα, τότε ακριβώς ένα από τα παρακάτω ισχύει:*

1. *Το X είναι ισομορφικό με το Y.*
2. *Το X είναι ισομορφικό με ένα αρχικό τμήμα του Y.*
3. *Το Y είναι ισομορφικό με ένα αρχικό τμήμα του X.*

Εάν το X είναι ισομορφικό με ένα αρχικό τμήμα του Y (αντίστοιχα το Y είναι ισομορφικό με ένα αρχικό τμήμα του X) το συμβολίζουμε με $X < Y$(αντίστοιχα $Y < X$) και όταν $X \leq Y$ σημαίνει ότι $X < Y$ ή $X \cong Y$.

Πρόταση Α΄.1.8. *Σε κάθε σύνολο μπορούμε να ορίσουμε μια σχέση καλής διάταξης.*

Α΄.2 Διατακτικοί και πληθικοί αριθμοί

Έστω X ένα καλά διατεταγμένο σύνολο με ‘άρκετά στοιχεία” τότε το X έχει πρώτο στοιχείο, δεύτερο στοιχείο, τρίτο στοιχείο κ.ο.κ. Οι διατακτικοί αριθμοί μπορεί να ιδωθούν ως αριθμοί που αντιπροσωπεύουν τη θέση ενός στοιχείου σε ένα καλά διατεταγμένο σύνολο.

Για παράδειγμα, εάν οι ακέραιοι αριθμοί οριστούν ως σύνολα :

$$0 = \emptyset$$

$$1 = \{0\}$$
$$2 = \{0, 1\}$$
$$3 = \{0, 1, 2\}$$
$$\ldots\ldots$$
$$n = \{0, 1, 2, \ldots n - 1\}$$

τότε η διάταξη :

$$0 \subsetneqq \{0\} \subsetneqq \{0, 1\} \subsetneqq \{0, 1, 2\} \cdots \subsetneqq \{0, 1, \ldots n - 1\}$$

χρησιμοποιείται για να ορίσει τη συνήθη διάταξη :

$$0 < 1 < 2 < \cdots < n < \cdots$$

του συνόλου $\mathbb{N}_0$ των φυσικών αριθμών. Κάτω από αυτή τη διάταξη, το σύνολο n είναι καλά διατεταγμένο για $n = 0, 1, 2 \ldots$. Έστω το σύνολο n και έστω :

$$S_0 = \{x \in n \mid x < 0\} = \emptyset = 0$$

$$S_1 = \{x \in n \mid x < 1\} = \{0\} = 1$$

$$S_2 = \{x \in n \mid x < 2\} = \{0, 1\} = 2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_{n-1} = \{x \in n \mid x < n-1\} = \{0, 1, \cdots n-2\} = n-1$$

τότε το n είναι καλά διατεταγμένο σύνολο τέτοιο ώστε $k = S_k, \forall k \in n$.

Ορισμός Α΄.2.1. *Ένα καλά διατεταγμένο σύνολο α λέγεται* **διατακτικός αριθμός (ordinal number)** *εάν $x = S_x$,$\forall x \in \alpha$.*

Εάν X είναι ένα καλά διατεταγμένο σύνολο τέτοιο ώστε $X \cong \alpha$, τότε λέμε ότι το X έχει διατακτικό αριθμό a και γράφουμε $\mathsf{Ord}\, X = \alpha$. Για κάθε τέτοιο σύνολο X, υπάρχει μοναδικός διατακτικός αριθμός α έτσι ώστε $\mathsf{Ord}\, X = \alpha$.

Πιο σύντομα : Κάθε καλά διατεταγμένο σύνολο έχει μοναδικό διατακτικό αριθμό.

Εάν $\mathsf{Ord}\, X = a$ και X είναι πεπερασμένο σύνολο τότε το a είναι πεπερασμένος διατακτικός αριθμός αλλιώς το a είναι άπειρος διατακτικός αριθμός.

Στο παράδειγμά μας, καθένα από τα σύνολα n είναι διατακτικός αριθμός και εάν το $\mathbb{N}_0$ έχει τη συνήθη διάταξη τότε $\mathsf{Ord}\, \mathbb{N}_0 = \omega$. Εάν X είναι ένα καλά διατεταγμένο σύνολο και $x \in X$ τέτοιο ώστε $S_x \approx n$, τότε το x καταλαμβάνει την $(n+1)$-θέση στο X για $n = 0, 1, 2 \ldots$. Έτσι εάν X και Y είναι δύο καλά διατεταγμένα σύνολα τα οποία είναι ισομορφικά τότε το $x \in X$ καταλαμβάνει την ίδια θέση στο X όπως το $y \in Y$ καταλαμβάνει στο Y εάν $S_x \approx S_y$.

Πρόσθεση Διατακτικών αριθμών : Εάν $\alpha = \mathsf{Ord}\, X$ και $\beta = \mathsf{Ord}\, Y$ όπου X, Y είναι καλά διατεταγμένα σύνολα τέτοια ώστε $X \cap Y = \emptyset$ τότε $\alpha + \beta = \mathsf{Ord}(X \cup Y)$ όπου $X \cup Y$ είναι καλά διατεταγμένο σύνολο έτσι ώστε $x < y$, $\forall x \in X$ και $\forall y \in Y$ και οι επαγόμενες διατάξεις στο X και στο Y είναι οι αρχικές διατάξεις.

Ορισμός Α΄.2.2. *Ένας διατακτικός αριθμός $\alpha > 0$ με $\alpha = \mathsf{Ord}\, X$ λέγεται* **οριακός διατακτικός (limit ordinal)** *εάν το X δεν έχει «τελευταίο στοιχείο». Από τον ορισμό της πρόσθεσης των διατακτικών αριθμών που ορίσαμε παραπάνω, βλέπουμε ότι $\alpha > 0$ είναι οριακός διατακτικός αριθμός εάν και μόνο αν $\alpha \neq \beta + 1$ για οποιουνδήποτε διατακτικό αριθμό β.*

Πρόταση Α΄.2.3. *Η ιδιότητα της τριχοτομίας ισχύει για την κλάση των διατακτικών αριθμών. Δηλαδή, εάν α και β είναι διατακτικοί αριθμοί, τότε ακριβώς μία από τις σχέσεις $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, και $\beta < \alpha$ ισχύει.*

Εάν X και Y είναι καλά διατεταγμένα σύνολα, γράφουμε ότι $\mathsf{Ord}\, X = \mathsf{Ord}\, Y$ εάν X και Y είναι ισομορφικά. Γράφουμε ότι $\mathsf{Ord}\, X < \mathsf{Ord}\, Y$ εάν το X είναι ισομορφικό με ένα αρχικό τμήμα του Y και $\mathsf{Ord}\, X > \mathsf{Ord}\, Y$ εάν το Y είναι ισομορφικό με ένα αρχικό τμήμα του X. Τότε από το Θεώρημα Α΄.1.7 βλέπουμε ότι $\big\{ \mathsf{Ord}\, X \mid X$ είναι ένα σύνολο$\big\}$ είναι ένα ολικά διατεταγμένο σύνολο.

Θεώρημα Α΄.2.4. *Η κλάση $\big\{ \mathsf{Ord}\, X \mid X$ είναι ένα σύνολο$\big\}$ είναι καλά διατεταγμένη.*

Μία σημαντική πτυχή των διατακτικών αριθμών είναι ότι αυτοί οι αριθμοί μας επιτρέπουν να επεκτείνουμε την επαγωγή που εφαρμόζεται με τους ακέραιους αριθμούς στους διατακτικούς, μια μέθοδος γνωστή ως «υπερπεπερασμένη επαγωγή».

Πρόταση Α΄.2.5. (Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΥΠΕΡΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗΣ ΕΠΑΓΩΓΗΣ) *Έστω $S(\beta)$ μια κατάσταση η οποία είναι αληθής ή ψευδής για κάθε διατακτικό αριθμό β. Εάν η $S(\alpha)$ είναι αληθής για κάθε διατακτικό $\alpha < \beta$ και συνεπάγεται ότι και η $S(\beta)$ είναι αληθής, τότε η $S(\beta)$ είναι αληθής για κάθε διατακτικό αριθμό β.*

Πρόταση Α΄.2.6. (Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΥΠΕΡΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗΣ ΕΠΑΓΩΓΗΣ) (Εναλλακτική Μορφή) *Έστω $S(\beta)$ μια κατάσταση η οποία είναι αληθής ή ψευδής για κάθε διατακτικό αριθμό β. Εάν οι ακόλουθες δύο συνθήκες ικανοποιούνται, τότε η $S(\beta)$ είναι αληθής για όλους τους διατακτικούς αριθμούς β.*

1. *Εάν η $S(0)$ είναι αληθής και όταν έχουμε ότι η $S(\alpha)$ είναι αληθής συνεπάγεται ότι και η $S(\alpha+1)$ είναι αληθής για κάθε μη-οριακό διατακτικό α.*

2. *Εάν β είναι ένας οριακός διατακτικός και η $S(\alpha)$ είναι αληθής για $\alpha < \beta$,τότε η $S(\beta)$ είναι αληθής.*

Υπάρχει μια ανάλογη αρχή η λεγόμενη ως **Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΥΠΕΡΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ**. Αυτή η ΑΡΧΗ λέει, για παράδειγμα, αν θέλουμε να κατασκευάσουμε σύνολα M_α για όλα τα $\alpha < \beta$, αρκεί να έχουμε δεδομένο το M_0, να δείξουμε πως θα πάρουμε τα $M_{\alpha+1}$ από τα M_α όταν $\alpha + 1 < \beta$ και πως θα πάρουμε το M_γ από όλα τα M_α, $\alpha < \gamma$ όταν $\gamma < \beta$ είναι ένας οριακός διατακτικός.

ΠΛΗΘΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ :

Η κατασκευή των διατακτικών αριθμών ορίζουν την έννοια της θέσης ενός στοιχείου σε ένα σύνολο. Η ακόλουθη κατασκευή των πληθικών αριθμών αντιστοιχεί σε μία διαισθητική έννοια ότι δύο σύνολα X και Y έχουν τον ίδιο «αριθμό» στοιχείων εάν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων τους χωρίς να λαμβάνουμε υπόψιν μας τη διάταξη των συνόλων X και Y.

Ορισμός Α΄.2.7. *Εάν X, Y είναι δύο σύνολα, λέμε ότι τα X και Y έχουν τον ίδιο* **πληθικό αριθμό (cardinal number)** *εάν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία $f : X \to Y$ και γράφουμε $\mathsf{Card}\, X = \mathsf{Card}\, Y$. Λέμε ότι $\mathsf{Card}\, X \le \mathsf{Card}\, Y$ εάν υπάρχει ένας μονομορφισμός $f : X \to Y$.*

Θεώρημα Α΄.2.8. *Εάν X, Y είναι δύο σύνολα, τότε είτε $\mathsf{Card}\, X \le \mathsf{Card}\, Y$ ή $\mathsf{Card}\, Y \le \mathsf{Card}\, X$.*

Θεώρημα Α΄.2.9. (Cantor, Schröder, Bernstein). *Έστω X, Y δύο σύνολα. Εάν $\mathsf{Card}\, X \le \mathsf{Card}\, Y$ και $\mathsf{Card}\, Y \le \mathsf{Card}\, X$ τότε $\mathsf{Card}\, X = \mathsf{Card}\, Y$.*

Θεώρημα Α΄.2.10. *Η κλάση $\{\mathsf{Card}\, X \mid X \text{ είναι ένα σύνολο}\}$ είναι καλά διατεταγμένη.*

Χρησιμοποιούμε τα σύμβολα $0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ για να συμβολίσουμε τους πεπερασμένους πληθικούς αριθμούς. Εάν $\mathsf{Card}\, X = n$ τότε λέμε ότι το X έχει πεπερασμένο πληθικό αριθμό n. Υπάρχουν επίσης και άπειροι πληθικοί αριθμοί. Τους άπειρους πληθικούς αριθμούς τους γράφουμε με $\aleph_\alpha$ όπου α είναι ένας διατακτικός αριθμός. Έτσι $\aleph_0$ είναι ο μικρότερος άπειρος πληθικός αριθμός. Επομένως $\aleph_0 = \mathsf{Card}\, \mathbb{N}_0$. Τότε για οποιονδήποτε πληθικό αριθμό $\aleph_\alpha$, $\aleph_{\alpha+1}$ είναι ο μικρότερος πληθικός αριθμός ο οποίος είναι μεγαλύτερος από τον $\aleph_\alpha$. Επιπλέον εάν β είναι ένας οριακός διατακτικός, $\aleph_\beta$ είναι ο μικρότερος πληθικός αριθμός ο οποίος είναι μεγαλύτερος από τον $\aleph_\alpha$ για όλους τους διατακτικούς αριθμούς $\alpha < \beta$.

Ορισμός Α΄.2.11. (πρόσθεση και πολλαπλασιασμός πληθικών αριθμών) *Εάν m_1 και m_2 είναι δύο πληθικοί αριθμοί με $m_1 = \mathsf{Card}\, X_1$, $m_2 = \mathsf{Card}\, X_2$, ορίζουμε $m_1 \cdot m_2 = \mathsf{Card}(X_1 \times X_2)$ και $m_1 + m_2 = \mathsf{Card}(X_1 \cup X_2)$ εάν $X_1 \cap X_2 = \emptyset$.*

Από αυτόν τον ορισμό έχουμε τα εξής συμπεράσματα :

1. $n + \aleph_0 = \aleph_0$ για οποιοδήποτε πεπερασμένο $n \geq 0$,
2. $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$, $n \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ εάν $n \geq 1$,
3. $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ (δηλαδή $\aleph_0^2 = \aleph_0$).

Γενικότερα :

Πρόταση Α′.2.12. *Για οποιονδήποτε άπειρο πληθικό αριθμό $\aleph_\alpha$ ισχύει ότι $\aleph_\alpha^2 = \aleph_\alpha$.*

Παράρτημα Β΄

Περίληψη - Abstract

Περίληψη. Οι κεντρικοί στόχοι της παρούσης Διατριβής είναι (α) η παρουσίαση της γενικής θεωρίας προσέγγισης προτύπων από κλάσεις ομαλά συμπεριφερόμενων προτύπων με γνωστή δομή, και (β) η μελέτη του προβλήματος εύρεσης και μοναδικότητας (ελάχιστης) προσέγγισης προτύπων στην ειδική περίπτωση κατά την οποία η κλάση ομαλά συμπεριφερόμενων προτύπων με γνωστή δομή είναι η κλάση των επίπεδων προτύπων (flat modules).

Θα επικεντρωθούμε κυρίως στην μελέτη ύπαρξης και μοναδικότητας προσεγγίσεων, για διάφορες σημαντικές κλάσεις προτύπων των οποίων η δομή είναι ήδη γνωστή: τα κυριότερα παραδείγματα τα οποία θα μας απασχολήσουν είναι οι προβολικές, ενέσιμες, και επίπεδες προσεγγίσεις. Αναλυτικότερα το κεντρικό αποτέλεσμα της διατριβής είναι η απόδειξη της σημαντικής *Εικασίας Επίπεδης Κάλυψης* του Enochs η οποία πιστοποιεί ότι κάθε πρότυπο υπεράνω τυχόντος δακτυλίου μπορεί να προσεγγισθεί, και μάλιστα με ελάχιστο τρόπο, από ένα μοναδικά καθορισμένο επίπεδο πρότυπο. Αυτό το αποτέλεσμα σε συνδυασμό με το γεγονός ότι τα επίπεδα πρότυπα προκύπτουν από τον δακτύλιο με σχετικά απλό τρόπο (και άρα η δομή τους είναι σχετικά ομαλή και προσιτή), δείχνει ότι το πρόβλημα ύπαρξης και μοναδικότητας προσέγγισης προτύπων στην ειδική περίπτωση των επίπεδων προσεγγίσεων, έχει πλήρη επίλυση.

Abstract. The principal aims of this thesis are (α) the presentation of the general approximation theory of modules by well-behaved classes of modules with known structure, and (β) the study of the problem of existence and uniqueness of (minimal) approximations of modules in the special case where the well-behaved class of modules with known structure is the class of flat modules.

We will focus mainly on the study of existence and uniqueness of approximations for several important classes of modules whose structure is already known: the main examples that concern us consist of projective, injective, and flat approximations. In more detail, the main result of the thesis is the proof of the important *Flat Cover Conjecture* which ensures that any module over any associative unital ring admits a minimal approximation by a uniquely determined, up to isomorphism, flat module. This result combined with the fact that flat modules are constructed from the ring by a relatively simple way (and therefore their structure is relatively smooth and accessible), shows that the problem of the existence and uniqueness of approximation of modules in the special case of flat approximations, admits a complete solution.

Ευρετήριο

Βιβλιογραφία

[1] **S. Aldrich, E. Enochs, O. Jenda, L. Oyonarte**. *Envelopes and covers by modules of finite injective and projective dimensions.* J. Algebra, Vol. **242**, (2001), no.2, 447–459.

[2] **F.W. Anderson and K.R. Fuller**. RINGS AND CATEGORIES OF MODULES. *Springer-Verlag Graduate Texts in Mathematics*, Vol. **13**, 1974.

[3] **M. Auslander, I. Reiten, and S. Smaloe**. REPRESENTATION THEORY OF ARTIN ALGEBRAS. *Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol.* **36**, *Cambridge University Press, Cambridge, (1997), xiv+425 pp.*

[4] **J. Asensio Mayor and J. Martinez Hernandez**. *Flat envelopes in commutative rings.* Israel J. Math., Vol. **62**, (1988), no.1, 123–128.

[5] **R. El Bashir**. *Covers and directed colimits.* Algebr. Represent. Theory, Vol. **9**, (2006), 423–430.

[6] **P. Bland**. RINGS AND THEIR MODULES. *De Gruyter*, 2011.

[7] **L. Bican, R. El Bashir and E. Enochs**. *All modules have flat covers. Bull.London Math.Soc.* Vol. **33**, (2001), 385-390.

[8] **S. Chase**. *Direct product of modules. Transactions of the American Mathematical Society*, **97** (1960), 457–473.

[9] **S. Crivei, M. Prest, B. Torrecillas**. *Covers in finitely accessible categories. Proceedings of the American Mathematical Society*, **138** (2010), 1213–1221.

[10] **D. Dummit and R. Foote**. ABSTRACT ALGEBRA. *Third Edition, John Wiley and Sons,Inc*, 2004.

[11] **E. Enochs**. *Injective and flat covers, envelopes and resolvents.* Israel J. Math., Vol. **39**, (1981), no.3, 189–209.

[12] **E. Enochs, R. Belshoff and J. Xu**. *The existence of flat covers.* Proc. Amer. Math. Soc, Vol. **122**, (1994), no.4, 985–991.

[13] **E. Enochs and L.Oyonarte**. *Flat covers and cotorsion envelopes of sheaves.* Proc. Amer. Math. Soc, Vol. **130**, (2001), no.5, 1285–1292.

[14] **E. Enochs and O.M.G. Jenda**. RELATIVE HOMOLOGICAL ALGEBRA. *De Gruyter Expositions in Mathematics*, Vol. **30**, 2000.

[15] **P. Eklof and J. Trlifaj**. *How to make Ext vanish. Bull.London Math.Soc.* Vol. **33**, (2001), 41–51.

[16] **P. Gabriel**. *Objects injectifs dans les Categories abeliennes. Sem. Dubreil*, 1958/59.

[17] **R. Göbel and J. Trlifaj**. APPROXIMATIONS AND ENDOMORPHISM ALGEBRAS OF MODULES. *De Gruyter Expositions in Mathematics*, Vol. **41**, 2006.

[18] **R. Göbel and S.Shelah**. *Cotorsion theories and splitters. Trans. Amer. Math. Soc*, **354** (2000), 5357–5379.

[19] **H.Bass**. *Finitistic dimension and a homological characterization of semi-primary rings. Trans.Amer.Math.Soc, Vol.* **95**, 1960, 466-488.

[20] **H.Krause and M.Saorin**. *On minimal approximations of modules. Contemp.Math, Vol.* **229**, 1998, 227-236.

[21] **C.U. Jensen and H. Lenzing**. MODEL THEORETIC ALGEBRA. *Gordon and Breach, Algebra, Logic and Applications, Vol.* **2**, 1989.

[22] **T.Y. Lam**. LECTURES ON MODULES AND RINGS. *Springer Graduate Texts in Mathematics*, 1999.

[23] **J. Rada, M. Saorin**. *Rings characterized by (pre)envelopes and (pre)covers of their modules. Comm. Algebra*, **26** (1998), 899–912.

[24] **J. Rotman**. AN INTRODUCTION TO HOMOLOGICAL ALGEBRA. *Second Edition, Springer,USA*, 2004.

[25] **J. Rotman**. ADVANCED MODERN ALGEBRA, SECOND EDITION. *Prentice Hall*, 2003.

[26] **W. Rump**. *Flat covers in abelian and in non-abelian categories. Advances in Mathematics*, **225** (2010), 1589–1615.

[27] **N. Popescu**. ABELIAN CATEGORIES WITH APPLICATIONS TO RINGS AND MODULES. *Academic Press*, Vol. **3**, 1973.

[28] **M. Prest**. MODEL THEORY AND MODULES. *London Mathematical Society, Lecture Notes Series,Cambridge University Press, Cambridge,*, Vol. **130**, 1988.

[29] **J.P.Serre**. *Geometrie algebrique et geometrie analytique. Ann.Inst.Fourier*, **6** (1956), 669–719.

[30] **B. Stenstrom**. RINGS OF QUOTIENTS. AN INTRODUCTION TO METHODS OF RING THEORY. *Springer-Verlag*, Vol. **217**, 1975.

[31] **C. Weibel**. AN INTRODUCTION TO HOMOLOGICAL ALGEBRA. *Cambridge studies in advanced mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, UK*, 2004.

[32] **J. Xu**. FLAT COVERS OF MODULES. *Springer-Verlag Lecture Notes in Mathematics 1634, Berlin*, 1996.

[33] **J. Xu**. *The existence of flat covers over noetherian rings of finite Krull dimension. Proc. Amer. Math. Soc*, Vol. **123**, (1995).