

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ



ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ, ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
& ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

ΣΟΦΙΑ ΚΑΪΔΑΝΤΖΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

**ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΗ ΛΟΞΗ-ΚΑΝΟΝΙΚΗ
ΚΑΤΑΝΟΜΗ**

**Μια Ανασκόπηση και μια Εφαρμογή
στη Διερεύνηση της Ανεξαρτησίας**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ, 2014

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στη Στατιστική και Επιχειρησιακή Έρευνα, που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την 18/06/2014 από την εξεταστική επιτροπή:

Ζωγράφος Κωνσταντίνος, Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων (Επιβλέπων).

Λουκάς Σωτήριος, Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Μπατσιδης Απόστολος, Λέκτορας του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Υπεύθυνη Δήλωση

«Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή»

Υπογραφή

Σοφία Καϊδαντζή

Αφιερώνεται στους
γονείς μου Ελευθέριο
και Αναστασία και
στα αδέρφια μου.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα διατριβή πραγματοποιήθηκε κατά τη διάρκεια του τελευταίου έτους φοίτησής μου στο Τμήμα Μαθηματικών της Σχολής Θετικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων για την απόκτηση μεταπτυχιακού διπλώματος ειδίκευσης στον τομέα «Στατιστικής και Επιχειρησιακής Έρευνας».

Με την περάτωση της παρούσας μεταπτυχιακής διατριβής μου δίνεται η ευκαιρία να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου σε ορισμένα άτομα που με βοήθησαν στα διάφορα στάδια ανάπτυξής της.

Πρωτίστως ευχαριστώ θερμά τον Επιβλέποντα Καθηγητή μου κ. Κωνσταντίνο Ζωγράφο, για την επιλογή του θέματος και την επίβλεψη της διατριβής, καθώς επίσης και για τη διαρκή υποστήριξη και μέριμνά του για την ολοκλήρωσή της. Οι παραινέσεις και οι διορθώσεις του ήταν πολύ χρήσιμες για την πρόοδο της παρούσας μεταπτυχιακής διατριβής.

Θερμές ευχαριστίες οφείλω επίσης στους κ.κ. Σωτήριο Λουκά και Απόστολο Μπατσίδα, για τη συμμετοχή τους στην Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή, για τον πολύτιμο χρόνο που αφιέρωσαν για την κρίση της διατριβής και για τις χρήσιμες παρατηρήσεις και επισημάνσεις τους.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τους καθηγητές του Τομέα Στατιστικής και Επιχειρησιακής Έρευνας για την επιστημονική, πνευματική και ηθική υποστήριξή τους.

Θερμές ευχαριστίες θα ήθελα να εκφράσω στους φίλους που απέκτησα κατά τη διάρκεια των σπουδών μου στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων και ιδιαίτερα στο φίλο μου Δημήτρη για την ψυχολογική και συναισθηματική υποστήριξη και ενθάρρυνση.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου Ελευθέριο και Αναστασία, τα αδέρφια μου Γιώτα, Φάνη και Αρετή και τη γιαγιά μου Σοφία για τη συνεχή ενθάρρυνση, τη συναισθηματική, ηθική και οικονομική ενίσχυση και την αμέριστη συμπαράστασή και κατανόησή τους όλα τα χρόνια των σπουδών μου.

Σοφία Καϊδαντζή

Ιωάννινα, Ιούλιος 2014.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Ιστορική Αναδρομή.....	1
1.2 Σκοπός της Μεταπτυχιακής Διατριβής.....	6

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΗ ΛΟΞΗ-ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

2.1 Εισαγωγή.....	9
2.2 Ορισμός της πολυδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής.....	12
2.3 Στοχαστικές αναπαραστάσεις μιας πολυδιάστατης λοξής-κανονικής τυχαίας μεταβλητής.....	24
2.3.1. Μέθοδος Μετασχηματισμού.....	27
2.3.2. Μέθοδος της Δέσμευσης.....	30
2.4 Μερικές βασικές έννοιες και ιδιότητες της πολυδιά- στατης λοξής-κανονικής κατανομής.....	34
2.4.1. Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής.....	35

2.4.2. Πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή με παραμέτρους θέσης και κλίμακας.....	36
2.4.3. Χαρακτηριστική Συνάρτηση.....	39
2.4.4. Ροπές.....	40
2.4.5. Περιθώριες κατανομές.....	48
2.4.6. Γραμμικοί Μετασχηματισμοί και Ανεξαρτη- σία.....	50
2.4.7. Θεωρία Τετραγωνικών Μορφών.....	62
2.4.8. Εντροπία του Shannon.....	74
2.5 Η διδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή.....	81

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

3.1 Εισαγωγή.....	91
3.2 Μέθοδος Μέγιστης Πιθανοφάνειας.....	93
3.2.1. Εφαρμογές σε πραγματικά δεδομένα.....	107
3.3 Από κοινού πληροφορία και πίνακας πληροφορί- ας Fisher για την πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή.....	112
3.3.1. Δείκτης από κοινού πληροφορίας.....	114
3.3.2. Πρόβλημα μη αντιστρεψιμότητας του πίνα- κα πληροφορίας Fisher.....	123

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4**ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ ΣΤΗΝ ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΗ ΛΟΞΗ-
ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ**

4.1. Εισαγωγή.....	129
4.2. Monte Carlo προσομοίωση για έλεγχο της ανεξαρ- τησίας στην πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατά- νομή.....	132
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	155
ΠΕΡΙΛΗΨΗ	167
ABSTRACT	171
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	175

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Ιστορική αναδρομή

Η συμμετρία είναι μια έννοια που συναντάται συχνά γύρω μας και γενικά την επικαλούμαστε όταν θέλουμε να αποδώσουμε, σε διάφορα πράγματα ή και πρόσωπα ακόμη, μια αίσθηση αρμονίας και ισορροπίας. Έτσι και στη στατιστική παρατηρείται ότι πολλές στατιστικές διαδικασίες προϋποθέτουν κάποια μορφή συμμετρίας ή αλλιώς κανονικότητας με κάποιες επιπλέον ιδιότητες. Ωστόσο, δεν υπάρχει παντού συμμετρία και έτσι κρίθηκε απαραίτητη η δημιουργία κάποιων εργαλείων για τον έλεγχο της ύπαρξης της ή μη, αλλά και η δημιουργία κάποιων μεθόδων για την κατασκευή διαδικασιών ή μοντέλων που δε βασίζονται σ' αυτήν. Στο δεύτερο πλαίσιο, προέκυψε η αναγκαιότητα για τη δημιουργία των λεγόμενων λοξών κατανομών.

Μια εκ των λοξών κατανομών είναι και η λοξή-κανονική κατανομή (Skew-Normal distribution ή σύντομα SN), η οποία αντιπροσωπεύει ένα υπερεξάνομο της κανονικής οικογένειας κατανομών και την οποία όρισε, στη μονοδιάστατη περίπτωση, το 1985 ο Adelchi Azzalini αν και οι πρώτες αναφορές στις μη-

κανονικές ή μη-συμμετρικές κατανομές ανιχνεύονται το 19^ο αιώνα με το ενδιαφέρον να εντείνεται τα τελευταία 20 χρόνια. Οι πρώτες αυτές αναφορές γίνονται από τους Francis Ysidro Edgeworth (1886), Karl Pearson (1893), Gustav Theodor Fechner (1897), Fernando de Helguero (1908) και John Tuckey (1977). Συγκεκριμένα, σύμφωνα με τους Kotz & Vicari (2005), η πρώτη φορά που εμφανίστηκε η μορφή της λοξής-κανονικής κατανομής στη βιβλιογραφία είναι το 1950 από τον Birnbaum, ο οποίος πρότεινε την εφαρμογή της μεθόδου που σήμερα είναι γνωστή ως “μέθοδος της δέσμευσης” και η οποία παρουσιάζεται σε επόμενη ενότητα. Η μέθοδος αυτή προέκυψε από την ιδέα της μοντελοποίησης της λοξότητας με την κατασκευή μιας μαθηματικώς ευέλικτης οικογένειας κατανομών ξεκινώντας από τη συμμετρική κανονική κατανομή και τροποποιώντας την στα πλαίσια της Μπεϋζιανής ανάλυσης. Ανεξάρτητα από τον Birnbaum (1950), η μέθοδος αυτή εντοπίζεται πολύ αργότερα στην εργασία των O’Hagan & Leonard (1976), ενώ με ανάλογα προβλήματα ασχολήθηκε και ο Nelson (1964). Μια ισοδύναμη αναπαράσταση αναπτύσσεται από τον Roberts (1966). Οι Aigner et al. (1977) αντιμετωπίζουν το ίδιο πρόβλημα μοντελοποίησης της λοξότητας και προτείνουν την λεγόμενη “μέθοδο του μετασχηματισμού”, η οποία παρουσιάζεται παρακάτω. Το πρόβλημα αυτό εξετάζεται περαιτέρω από τους Mukhopadhyah & Vidakovic (1995) με εφαρμογές στην Μπεϋζιανή ανάλυση για την κατασκευή λοξών εκ των προτέρων κλάσεων. Οι ίδιοι ερευνητές προτείνουν επίσης γενικεύσεις της κατανομής. Ακολούθως, πρώτοι οι Azzalini & Dalla Valle (1996) ασχολήθηκαν περαιτέρω με την πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή, ενώ σημαντική είναι η

συμβολή των Arnold & Beaver (2000, 2002) με εφαρμογές και επιπλέον διερευνήσεις τους, με πιο πρόσφατες έρευνες αυτές του M. G. Genton και των συνεργατών του (Marchenko & Genton, 2010, Kim & Genton, 2011). Μια νέα κλάση πολυδιάστατων λοξών κατανομών με εφαρμογές σε Μπεϊζιανά μοντέλα παλινδρόμησης προτείνεται από τους Sahu et al. (2003), με την πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή που προκύπτει να συγκρίνεται με την “κλασική”, όπως αναφέρεται, λοξή-κανονική κατανομή από τους Azzalini et al. (2014) με ειδική αναφορά στην ανάλυση σε συστάδες με τη χρήση πιθανοθεωρητικού μοντέλου (model-based clustering). Τέλος, όπως αναφέρουν οι Kotz & Vicari (2005), θα πρέπει να τονιστεί ότι “η κινητήριος δύναμη πίσω από την ανάπτυξη της νεότερης θεωρίας και των εφαρμογών των λοξών-κανονικών κατανομών ήταν αδιαμφισβήτητα ο A. Azzalini (με τους φοιτητές και τους συνεργάτες του)”.

Όπως προαναφέρθηκε, πολλοί μελετητές διερεύνησαν περαιτέρω τη λοξή-κανονική κατανομή προτείνοντας διάφορες επεκτάσεις και γενικεύσεις αυτής. Το κίνητρο για τη δημιουργία αυτών των επεκτάσεων πηγάζει από τη δυσκολία επεξεργασίας συνόλων δεδομένων που συχνά δεν ικανοποιούν βασικές συνθήκες, όπως η ανεξαρτησία και η κανονικότητα, και αφορούν εφαρμογές σε διάφορους τομείς όπως η οικονομετρία, η κλιματολογία, η ωκεανογραφία, η αστρονομία, η μηχανική και οι βιοϊατρικές επιστήμες. Ο Genton (2004) μελετά και παρουσιάζει εφαρμογές σε αυτούς τους τομείς. Στη μονοδιάστατη περίπτωση έχουν εισαχθεί πολλές επεκτάσεις της λοξής-κανονικής κατανομής, όπως η Balakrishnan λοξή-κανονική (Balakrishnan, 2002), η γενικευμένη Balakrishnan λοξή-κανονική

(Yadegari et al., 2008), η γενικευμένη λοξή-κανονική (Arellano-Valle et al., 2004), μια ανασκόπηση των οποίων παρουσιάζεται στη διατριβή της Σωκράτους (2009), η λογαριθμική λοξή-κανονική κατανομή (Lin & Stoyanov, 2009), η alpha-power λοξή-κανονική (Martinez-Florez, 2011), η λογαριθμική alpha-power λοξή-κανονική (Martinez-Florez et al., 2013) και η Βήτα λοξή-κανονική κατανομή (Mameli & Musio, 2013). Στην πολυδιάστατη περίπτωση έχουν επίσης εισαχθεί αρκετές επεκτάσεις και γενικεύσεις της λοξής-κανονικής κατανομής, όπως η κλειστή λοξή-κανονική (Dominguez-Molina et al., 2003), η οποία έχει τις περισσότερες κοινές ιδιότητες με την κανονική κατανομή από οποιαδήποτε άλλη κατανομή, η γενικευμένη λοξή-κανονική (Genton & Loperfido, 2002) και η λοξή-κανονική/ανεξάρτητη κατανομή (Lachos et al., 2007).

Εκτός από τη λοξή-κανονική κατανομή, πολλές είναι οι επεκτάσεις που έγιναν για διάφορες οικογένειες κατανομών σε λοξές οικογένειες κατανομών. Οι Branco & Dey (2001) διατυπώνουν τις λοξές εκδοχές διάφορων πολυδιάστατων οικογενειών, όπως της λογιστικής, της stable, της Subbotin (ή exponential power), της Student t, της Pearson τύπου II και άλλων. Οι Nadarajah & Kotz (2003, 2004, 2005) συνδυάζοντας διαφορετικές συμμετρικές κατανομές, όπως η Student t, η ομοιόμορφη, η Cauchy, η λογιστική και η διπλή εκθετική (Laplace) παράγαν πολυάριθμες οικογένειες λοξών κατανομών. Τέλος, οι Ma & Genton (2004) προτείνουν μια ευέλικτη κλάση λοξών-συμμετρικών κατανομών για την οποία η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ορίζεται να είναι το γινόμενο μιας συμμετρικής πυκνότητας (όχι απαραίτητα κανονικής ή Laplace)

και μιας μη συμμετρικής συνάρτησης.

Η ονομασία της λοξής-κανονικής κατανομής προέκυψε από το γεγονός ότι αναφέρεται σε μια παραμετρική οικογένεια κατανομών πιθανότητας η οποία περιλαμβάνει την τυπική κανονική κατανομή ως ειδική περίπτωση. Ουσιαστικά, πρόκειται για μια κατανομή η οποία επεκτείνει την κλάση των κανονικών κατανομών με την προσθήκη μιας παραμέτρου η οποία ρυθμίζει τη λοξότητα (skewness). Σύμφωνα με τους Azzalini et al. (2014), η λοξότητα είναι το χαρακτηριστικό που αυξάνεται πιο εύκολα καθώς απομακρύνεται κάποιος από τη συμμετρία της κανονικής κατανομής, γεγονός που εξηγεί την ευρεία χρήση του προθέματος “λοξή”. Επιπλέον, σύμφωνα με τον Azzalini (2005), το πρόθεμα “λοξή” που εμφανίζεται σε τίτλους διάφορων πρόσφατων εργασιών αποτελεί αναγνωριστικό της προσέγγισης της κατανομής παρά περιγραφή του τεχνικού περιεχομένου.

Τα τελευταία 15 χρόνια, το ενδιαφέρον πολλών μελετητών εστιάζεται στην ανάπτυξη ευέλικτων παραμετρικών κλάσεων κατανομών με έμφαση στην πολυδιάστατη περίπτωση. Επιπλέον, σε πρακτικές εφαρμογές, καθώς τα περισσότερα προβλήματα τα οποία έχουμε να αντιμετωπίσουμε είναι πολυσύνθετα και καθότι πολυδιάστατα υπάρχουν πολλές περισσότερες κατανομές να χειριστούν μη κανονικά δεδομένα, θα ασχοληθούμε με την πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή.

Από θεωρητικής πλευράς, η πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή παρουσιάζει ενδιαφέρον επειδή είναι μαθηματικώς ευέλικτη κατανομή και ως επέκταση της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής διατηρεί αρκετές από τις ιδιότητές της, όπως θα δούμε στη συνέχεια. Από άποψη εφαρμογών είναι κατάλληλη για την

ανάλυση πολυδιάστατων δεδομένων τα οποία παρουσιάζουν μονοκόρυφη κατανομή αλλά με μια κάποια παρουσία λοξότητας.

Το αντικείμενο των πολυδιάστατων λοξών κατανομών είναι σχετικά πρόσφατο στη θεωρία κατανομών, τις πιθανότητες και τη στατιστική. Έτσι η διαθέσιμη βιβλιογραφία εξαντλείται σε μια σημαντική σειρά εργασιών, πολλές από τις οποίες αξιοποιούνται στη διατριβή αυτή και μνημονεύονται στη βιβλιογραφία. Πρόσφατα, τον Φεβρουάριο του 2014, εκδόθηκε η πρώτη μονογραφία στο θέμα αυτό με τίτλο *The Skew-Normal and Related Families*, από τον A. Azzalini σε συνεργασία με την A. Capitanio και τις εκδόσεις Cambridge. Η μονογραφία αυτή δεν είναι ακόμη διαθέσιμη στη συγγραφέα και η μόνη πρόσβαση που υπήρξε σ' αυτήν ήταν μέσω της ηλεκτρονικής βιβλιοθήκης Safari FLOW (www.safariflow.com). Έτσι δεν αξιοποιήθηκε σημαντικά η μονογραφία στη σύνταξη της παρούσας μεταπτυχιακής διατριβής αφού επιπλέον η διατριβή βρισκόταν σε προχωρημένο στάδιο όταν εκδόθηκε η εν' λόγω μονογραφία.

1.2 Σκοπός της Μεταπτυχιακής Διατριβής

Σκοπός της παρούσας μεταπτυχιακής διατριβής είναι μια παρουσίαση και κριτική ανασκόπηση της πολυδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής, των ιδιοτήτων και των χαρακτηριστικών αυτής, τα οποία αποτέλεσαν αντικείμενο μελέτης πολλών ερευνητών με το ενδιαφέρον να εντείνεται τα τελευταία 10 χρόνια. Από τα σημαντικότερα αποτελέσματα που θα παρουσιαστούν για την κατανομή αυτή το ενδιαφέρον θα επικεντρωθεί στο πρόβλημα της ανεξαρτησίας μεταξύ των συνιστωσών ενός τυχαίου

διανύσματος από την πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή, με τις συνιστώσες να αποτελούν είτε μεταβλητές είτε υποδιανύσματα του τυχαίου διανύσματος. Στα πλαίσια ελέγχου αυτού του προβλήματος διεξάγεται μια Monte Carlo μελέτη προσομοίωσης για τη διερεύνηση της ανεξαρτησίας στο περιβάλλον της λοξής-κανονικής κατανομής.

ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΗ ΛΟΞΗ-ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

2.1 Εισαγωγή

Σύμφωνα με τους Azzalini & Capitanio (1999, σελ. 2), σε μια προσπάθεια να καταφύγουμε σε πιο ευέλικτες στατιστικές μεθόδους επεξεργασίας συνεχών παρατηρήσεων της πολυδιάστατης ανάλυσης με ταυτόχρονη επαρκή αντιπροσώπευση των χαρακτηριστικών που έχουν αυτές και με περιορισμό κάποιων μη-ρεαλιστικών υποθέσεων παρατηρούμε ότι με μια παραμετρική προσέγγιση αυτών των μεθόδων η υπόθεση της κανονικότητας, η οποία υπόκειται στις περισσότερες από αυτές τις μεθόδους, είναι αυτή που επηρεάζεται στο ελάχιστο. Για το λόγο αυτό, η υπόθεση της κανονικότητας και κατ' επέκταση η πολυδιάστατη κανονική κατανομή είναι σημαντική λόγω της μαθηματικής επιλυσιμότητας και της ευχέρειάς της να διαχειρίζεται γραμμικούς συνδυασμούς, περιθώριες και δεσμευμένες κατανομές.

Στην πράξη, δεν καταλήγουμε να έχουμε πάντα κανονική (Gaussian) κατανομή, όμως με χρήση κατάλληλου μετασχηματισμού των μεταβλητών μπορούμε να επιτύχουμε κανονικότητα, χωρίς ωστόσο να καταφέρουμε να αποφύγουμε τη δημιουργία διαφόρων άλλων προβλημάτων, όπως για παράδειγμα δυσκολία στην ερμηνεία των νέων μετασχηματισμένων μεταβλητών. Σε κάποιες περιπτώσεις μονοκόρυφων πολυδιάστατων κατανομών παρατηρείται λοξότητα και η ανάγκη για αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος οδήγησε στην επέκταση-γενίκευση της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής στην πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή.

Οι Kotz & Vicari (2005) καταγράφουν χρονολογικά την εξέλιξη της θεωρίας των λοξών συνεχών κατανομών (skew distributions) και ακολουθώντας τον Azzalini (1985), αναφέρουν ότι για την εισαγωγή των κατανομών αυτών όλα ξεκίνησαν από την απλή ιδέα της ανακατανομής της μάζας πιθανότητας μιας συμμετρικής πυκνότητας f ορίζοντας, από τον Azzalini, τη μονοδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή με πυκνότητα g έτσι ώστε για κάθε x να ισχύει: $g(x) + g(-x) = 2f(x)$. Έτσι, οδηγηθήκαμε στον ορισμό της λοξής-κανονικής οικογένειας κατανομών, η οποία έχει το πλεονέκτημα να διατηρεί πολλές στατιστικές ιδιότητες της κανονικής οικογένειας κατανομών, όπως θα δούμε στην ενότητα 2.4.

Όπως προαναφέρθηκε, ο Azzalini (1985) πρώτος επεκτείνει τη λοξή-κανονική κατανομή στην πολυδιάστατη περίπτωση δίνοντας τον τύπο της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας αυτής, ο οποίος ωστόσο δεν ήταν ικανοποιητικός, καθώς οι περιθώριες κατανομές δεν ακολουθούσαν λοξή-κανονική

κατανομή. Αργότερα, οι Azzalini & Dalla Valle (1996) αναπτύσσουν μια επέκταση της μονοδιάστατης περίπτωσης ξεκινώντας από τις ιδιότητες αυτής και καταλήγοντας στην πολυδιάστατη οικογένεια με μονοδιάστατες λοξές-κανονικές περιθώριες κατανομές. Πολλοί ερευνητές πρότειναν διάφορους ορισμούς για την πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή, ωστόσο ο ορισμός που παρουσίασαν οι Azzalini & Dalla Valle (1996) υιοθετήθηκε στις περισσότερες ερευνητικές εργασίες, όπως και στην παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή για λόγους που αναφέρονται στη συνέχεια.

Σύμφωνα με τους Balakrishnan et al. (2013, σελ. 1) τα τελευταία χρόνια η επέκταση των κανονικών στατιστικών μοντέλων σε μη-κανονικά (non-Gaussian) έχει δημιουργήσει πολλά ανοικτά ερευνητικά θέματα. Έχουν προταθεί διάφορες προσεγγίσεις για την ανάπτυξη πολυδιάστατων μη-κανονικών κατανομών. Για την προσέγγιση τέτοιων επεκτάσεων συνιστώνται δύο κύριες κατευθύνσεις, οι πολυδιάστατες λοξές κατανομές και τα μοντέλα copula. Οι πολυδιάστατες λοξές κατανομές είναι επεκτάσεις των πολυδιάστατων κανονικών κατανομών σε μοντέλα με λοξότητα και βαριές ουρές και περιλαμβάνουν την πολυδιάστατη κανονική ως ειδική περίπτωση. Παράλληλα, τα μοντέλα copula είναι πρακτικά εργαλεία για τη κατασκευή πολυδιάστατων κατανομών με από κοινού δομή εξάρτησης και ανεξάρτητα από τις περιθώριες κατανομές τους. Η εργασία των Balakrishnan et al. (2013) συνοψίζει τα σημαντικά σημεία του συνεδρίου που διεξήχθη στο Διεθνές Ερευνητικό Σταθμό Bnaff (BIRS) του Καναδά το 2013 και σκοπός του ήταν να γίνει μια προσπάθεια ενοποίησης των δύο παραπάνω κατηγοριών

μοντέλων με σκοπό την περαιτέρω πρόοδο της επέκτασης των πολυδιάστατων μη-κανονικών μοντέλων χωρίς ωστόσο να αποφεύγονται διάφορα προβλήματα και σε αυτήν την περίπτωση.

2.2 Ορισμός της πολυδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής

Βασικό αντικείμενο της ενότητας αυτής είναι η παρουσίαση τριών ορισμών από τους πολλούς που έχουν διατυπωθεί για την πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή και η παρουσίαση των διαφορών που υπάρχουν μεταξύ τους. Πριν την παρουσίαση των ορισμών αυτών παρατίθεται ένα σημαντικό Λήμμα το οποίο υποδεικνύει τρόπο κατασκευής μιας πολυδιάστατης λοξής συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας. Έπειτα, αναφέρονται δύο σημαντικά αποτελέσματα τα οποία συνδέονται με το Λήμμα και το μεν πρώτο παρέχει έναν αλγόριθμο για την παραγωγή τυχαίων μεταβλητών με κατανομή αυτή του Λήμματος και το δεύτερο παρέχει την οικογένεια των κατανομών που παράγεται υπό τις συνθήκες του Λήμματος. Ακόμη, παρατίθενται κάποιες εισαγωγικές έννοιες που αφορούν τις παραμέτρους των ορισμών.

Το Λήμμα που ακολουθεί αποτελεί γενίκευση του Λήμματος 1 του Azzalini (1985) στην πολυδιάστατη περίπτωση και έχει παρουσιαστεί στη βιβλιογραφία από τους Azzalini & Capitanio (2003). Το αποτέλεσμα αναφέρεται στην κεντρική συμμετρία, η οποία αποτελεί χαρακτηριστικό διάφορων οικογενειών κατανομών και ιδιαίτερα των ελλειπτικών

πυκνοτήτων. Η αναγκαιότητα επίκλησης της έννοιας της συμμετρικής συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας έγκειται στο γεγονός ότι μονοδιάστατα αυτή ορίζεται μοναδικά και με απλή μορφή, ενώ στην πολυδιάστατη περίπτωση διατυπώνεται ποικιλοτρόπως (Serfling, 2006). Έτσι, υπό την έννοια της κεντρικής συμμετρίας και για συνεχείς μεταβλητές $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$, θα λέμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας f κατανέμεται κεντρικά συμμετρικά γύρω από ένα σημείο $\underline{\xi} \in \mathbb{R}^n$ αν ικανοποιεί τη σχέση $f(\underline{y} - \underline{\xi}) = f(\underline{\xi} - \underline{y})$, για όλα τα $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$.

Λήμμα 2.2.1. Αν f_0 μια n -διάστατη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) κεντρικά συμμετρική γύρω από το $\underline{0}$, $G(\cdot)$ μια μονοδιάστατη διαφορίσιμη και συνεχής συνάρτηση κατανομής, τέτοια ώστε η πυκνότητα G' να υπάρχει σχεδόν παντού και να είναι συμμετρική γύρω από το 0 και w μια πραγματική συνάρτηση τέτοια ώστε $w(-\underline{y}) = -w(\underline{y})$, για όλα τα $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$, τότε η συνάρτηση

$$f(\underline{x}) = 2f_0(\underline{x})G(w(\underline{x})), \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n,$$

είναι μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας στον \mathbb{R}^n .

Η απόδειξη του Λήμματος 2.2.1. δίνεται αναλυτικά από τους Azzalini & Capitanio (2003) και παραλείπεται.

Ακολουθούν τα δύο ενδιαφέροντα αποτελέσματα που συνδέονται με το Λήμμα 2.2.1. και δόθηκαν από τον Azzalini (2005).

- 1) **Στοχαστική αναπαράσταση** Αν x και y είναι δύο ανεξάρτητες μεταβλητές, με αντίστοιχες πυκνότητες G' και f_0 , οι οποίες ικανοποιούν τις συνθήκες του Λήμματος 2.2.1. και z μια τυχαία πολυδιάστατη μεταβλητή που ορίζεται

$$z = \begin{cases} y, & \text{αν } x < w(y) \\ -y, & \text{αλλιώς} \end{cases}, \text{ τότε η κατανομή της } z \text{ είναι η}$$

$f(z)$ του Λήμματος 2.2.1..

- 2) **Διατάραξη της αμεταβλητότητας (Perturbation Invariance)** Αν $y \sim f_0$ και $z \sim f$ δύο μεταβλητές οι οποίες ικανοποιούν τις συνθήκες του Λήμματος 2.2.1., τότε $t(y) \stackrel{d}{=} t(z)$ για κάθε πραγματική συνάρτηση t τέτοια, ώστε $t(x) = t(-x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, και ανεξάρτητα της επιλογής των συναρτήσεων G και w .

Ο συμβολισμός " $\stackrel{d}{=}$ " σημαίνει ισότητα κατά κατανομή.

Ένα πιο γενικό αποτέλεσμα παρόμοιο με το 2) αλλά λιγότερο λειτουργικό δίνεται από τους Azzalini & Capitanio (1999). Επίσης, παρόμοιο είναι το αποτέλεσμα που διατυπώνεται

από τους Genton & Loperfido (2005) και διαφοροποιείται από το 2) επιβάλλοντας τον περιορισμό η f_0 να είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ελλειπτικής κατανομής και αντικαθιστώντας τη συνάρτηση $G(w(\underline{x}))$ από τη συνάρτηση $\pi(\underline{x})$ που ικανοποιεί τις συνθήκες $\pi(\underline{x}) \geq 0$, $\pi(\underline{x}) + \pi(-\underline{x}) = 1$, για κάθε $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$.

Στους τρεις ορισμούς που θα παρουσιαστούν παρακάτω για την πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή οι συναρτήσεις που εισάγονται στο Λήμμα 2.2.1. ορίζονται ως εξής: α) $f_0 \equiv \phi_k(\cdot, \Omega)$, όπου $\phi_k(\cdot, \Omega)$ η συνάρτηση πυκνότητας μιας k - διάστατης κανονικής κατανομής με πίνακα συσχέτισης Ω , β) $G \equiv \Phi$, όπου Φ η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής και γ) ως w λαμβάνεται μια γραμμική συνάρτηση.

Πρώτος ο Azzalini (1985) έδωσε τον ορισμό της πολυδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής ως μια τυπική επέκταση της μονοδιάστατης λοξής-κανονικής συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας.

Ορισμός 2.2.2. (Azzalini, 1985) Ένα k - διάστατο τυχαίο διάνυσμα $\underline{x} = (x_1, \dots, x_k)^T \in \mathbb{R}^k$ θα λέγεται ότι ακολουθεί μια πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή αν η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας του \underline{x} είναι της μορφής

$$f(\underline{x}) = c\phi_k(\underline{x};\Omega) \prod_{i=1}^k \Phi(\lambda_i x_i),$$

όπου $\phi_k(\cdot, \Omega)$ είναι η πυκνότητα μιας k - διάστατης κανονικής κατανομής με $k \times k$ πίνακα συσχέτισης $\Omega = (\rho_{ij})$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ είναι k πραγματικοί αριθμοί, ενώ με Φ συμβολίζεται η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τοπικής κανονικής κατανομής.

Σημειώνεται ότι, σύμφωνα με τους Gupta & Chen (2003), ο πίνακας $\Omega = (\rho_{ij})$ δεν είναι ο πίνακας συσχέτισης του \underline{x} αν και αποτελεί γενικά έναν πίνακα συσχέτισης και σύμφωνα με τον Azzalini (1985, σελ. 178) η c είναι σταθερά κανονικοποίησης τέτοια ώστε το ολοκλήρωμα της ανωτέρω πυκνότητας να είναι ίσο με τη μονάδα. Ακόμη, τα μη-διαγώνια στοιχεία του πίνακα συσχέτισης είναι της μορφής $\delta_i \delta_j \rho_{ij}$, όπου $\delta_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{1 + \lambda_i^2}}$, $i, j = 1, \dots, k$.

Οι Azzalini και Dalla Valle (1996) επισημαίνουν ότι ο Ορισμός 2.2.2. αποτελεί μια πολυδιάστατη εκδοχή της λοξής-κανονικής κατανομής αλλά έχει το μειονέκτημα να είναι τοπική μαθηματική επέκταση αντίστοιχου ορισμού της μονοδιάστατης περίπτωσης και οι περιθώριες που προκύπτουν απ' αυτόν δεν έχουν την ιδιότητα να είναι λοξές-κανονικές συναρτήσεις πυκνοτήτων πιθανοτήτων.

Στη συνέχεια, οι ίδιοι ερευνητές προτείνουν μια άλλη προσέγγιση της πολυδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής βασισμένη στην κατανομή των Farlie-Gumbel-Morgenstern σύμφωνα με την οποία μπορεί να υπολογιστεί μια πολυδιάστατη κατανομή από συγκεκριμένες περιθώριες. Η κατανομή αυτή στη διδιάστατη περίπτωση δίνεται από τη σχέση

$$F(x_1, x_2) = F_1(x_1)F_2(x_2)(1 + \alpha(1 - F_1(x_1))(1 - F_2(x_2))),$$

για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, όπου F_1 και F_2 είναι οι περιθώριες κατανομές από τη μονοδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή και α μια παράμετρος η οποία παίρνει τιμές στο διάστημα $(-1, 1)$. Η προσέγγιση αυτή αποτελεί επίσης μια τοπική μαθηματική επέκταση από τη μονοδιάστατη στη διδιάστατη περίπτωση και δε συνδέεται με τις εγγενείς ιδιότητες των περιθώριων κατανομών F_1 και F_2 . Συγκεκριμένα, από την κατανομή αυτή δεν μπορεί να παραχθεί η διδιάστατη κανονική κατανομή όταν $F_1(x) = F_2(x) = \Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Ένα ακόμη μειονέκτημα είναι ο περιορισμός των εφικτών τιμών της συσχέτισης των μεταβλητών x_1 και x_2 στο διάστημα $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, οι οποίες λαμβάνονται με μεταβολή της τιμής της παραμέτρου α .

Οι Azzalini & Dalla Valle (1996) επισημαίνουν ότι ο ορισμός αυτός αποτελεί τοπική μαθηματική επέκταση αντίστοιχου

ορισμού της μονοδιάστατης περίπτωσης. Έτσι, διατυπώνουν τον ακόλουθο ορισμό της πολυδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής, τον οποίο θα κρατήσουμε ως βασικό ορισμό για τη συνέχεια της διατριβής και ο οποίος είναι εφοδιασμένος με πολλές στατιστικές ιδιότητες.

Ορισμός 2.2.3. (Azzalini & Dalla Valle, 1996) Το τυχαίο k -διάστατο διάνυσμα \underline{x} θα λέγεται ότι ακολουθεί k -διάστατη λοξή-κανονική κατανομή αν η από κοινού πυκνότητα του \underline{x} είναι της μορφής

$$f(\underline{x}) = 2\phi_k(\underline{x}, \Omega) \Phi(\underline{\alpha}^T \underline{x}), \text{ για κάθε } \underline{x} \in \mathbb{R}^k,$$

όπου $\underline{\alpha}$ είναι ένα k -διάστατο διάνυσμα πραγματικών αριθμών. Ο συμβολισμός που θα χρησιμοποιηθεί για την κατανομή αυτή είναι $SN_k(\underline{0}, \Omega, \underline{\alpha})$.

Επισημαίνεται ότι και σ' αυτόν τον ορισμό ο Ω δεν είναι ο πίνακας συσχέτισης του \underline{x} και ότι αν ο πίνακας Ω είναι διαγώνιος δε συνεπάγεται ότι όλες οι συνιστώσες του \underline{x} είναι ανεξάρτητες. Ακόμη, αν $\underline{\alpha} = \underline{0}$ η $f(\underline{x})$ οδηγεί στη σ.π.π. της $N_k(\underline{0}, \Omega)$.

Ως προς το συμβολισμό $SN_k(\underline{0}, \Omega, \underline{\alpha})$ που δόθηκε, η πρώτη συνιστώσα αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως παράμετρος θέσης,

με τιμή Ω , η δεύτερη συνιστώσα Ω αναφέρεται ως παράμετρος διασποράς ή κλίμακας και η τρίτη συνιστώσα α αναφέρεται ως παράμετρος λοξότητας (skewness, slant or shape parameter). Στο εδάφιο 2.4. θα παρουσιαστεί ο ορισμός της πολυδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής με παράμετρο θέσης διαφορετική του μηδενικού διανύσματος.

Σχετικά με τον ορισμό 2.2.3., οι Gupta & Chen (2001, 2003) παρατήρησαν ότι αν οι συνιστώσες x_1, \dots, x_k , του τυχαίου διανύσματος \underline{x} , αποτελούν ένα τυχαίο δείγμα από τη μονοδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή $SN(\lambda)$, η κατανομή του τυχαίου διανύσματος $\underline{x} = (x_1, \dots, x_k)^T$ δεν αποτελεί μια $SN_k(\Omega, \Omega, \alpha)$, ενώ αντίστοιχη συμπεριφορά αποτελεί χαρακτηριστική ιδιότητα της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής. Έτσι, καταλήγουμε στο γεγονός ότι ούτε ο δεύτερος ορισμός είναι επαρκώς αντιπροσωπευτικός της πολυδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής αφού δεν οδηγεί στην ικανοποίηση, από την πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή, χαρακτηριστικής ιδιότητας της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής.

Για τις παρατηρήσεις που αναφέρθηκαν σε κάθε έναν από τους ορισμούς παραπάνω και τις αμφιβολίες που δημιούργησαν ως προς την καταλληλότητά τους, οι Gupta & Chen (2003) πρότειναν ένα βελτιωμένο ορισμό της πολυδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής. Αυτό το νέο μοντέλο πυκνότητας

πιθανότητας πέραν του ότι διατηρεί πολλές χρήσιμες στατιστικές ιδιότητες, αποτελεί και μια από κοινού κατανομή ανεξάρτητων και ισόνομων λοξών-κανονικών τυχαίων μεταβλητών.

Θεωρούμε ένα τυχαίο διάνυσμα \underline{x} στο οποίο αντιστοιχεί μια παράμετρος λοξότητας $\underline{d} = (d_1, \dots, d_k)^T$, όπου κάθε συνιστώσα αυτής αναφέρεται στην αντίστοιχη συνιστώσα του \underline{x} . Σημειώνεται ότι κάθε παράμετρος κατεύθυνσης ή σχήματος d_j που αντιστοιχεί στη συνιστώσα x_j , $j = 1, \dots, k$, μπορεί να επηρεάσει το σχήμα μιας άλλης τυχαίας συνιστώσας μέσω του πίνακα συσχέτισης που χρησιμοποιείται στην εκάστοτε πολυδιάστατη κανονική κατανομή. Έτσι, ο τρίτος ορισμός της πολυδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής είναι ο ακόλουθος.

Ορισμός 2.2.4. (Gupta & Chen, 2003) Έστω Ω ένας $k \times k$ θετικά ορισμένος πίνακας. Ένα $k \times 1$ τυχαίο διάνυσμα \underline{x} θα λέγεται ότι ακολουθεί πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή αν η συνάρτηση πυκνότητάς του είναι της μορφής

$$f(\underline{x}, \Omega, \underline{d}) = 2^k \phi_k(\underline{x}, \Omega) \prod_{j=1}^k \Phi(\underline{\lambda}_j^T \underline{x}),$$

όπου $\underline{d} = (d_1, \dots, d_k)^T$ η παράμετρος ή το διάνυσμα λοξότητας, για κάποιους πραγματικούς αριθμούς d_1, \dots, d_k και $\underline{\lambda}_1, \dots, \underline{\lambda}_k$ είναι k

πραγματικά k - διάστατα διανύσματα που ικανοποιούν τη σχέση

$$\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) = \Omega^{-1/2} \text{diag}(d_1, \dots, d_k).$$

Ο συμβολισμός που θα χρησιμοποιηθεί για την κατανομή αυτή είναι $SN_k(0, \Omega, \underline{d})$.

Η παράμετρος λοξότητας \underline{d} , που στον Ορισμό 2.2.3. έχει συμβολιστεί με $\underline{\alpha}$, κάποιες φορές αναφέρεται και ως παράμετρος κατεύθυνσης, καθώς επισημαίνει εκείνες τις κατευθύνσεις των οποίων οι αποκλίσεις από την κανονικότητα είναι εντονότερες. Ακόμη, επειδή κάποιες ιδιότητες της πολυδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής εκφράζονται καλύτερα με κανονικοποίηση του διανύσματος λοξότητας \underline{d} , στη βιβλιογραφία υπάρχει και η παράμετρος κανονικοποίησης $\underline{\delta}$ η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\underline{\delta} = \frac{\Omega \underline{d}}{\sqrt{1 + \underline{d}^T \Omega \underline{d}}}, \text{ ή ισοδύναμα } \underline{d} = \frac{\Omega^{-1} \underline{\delta}}{\sqrt{1 - \underline{\delta}^T \Omega^{-1} \underline{\delta}}}. \quad (2.1)$$

Παρατηρήσεις.

1. Θέτοντας $d_1 = \dots = d_k = 0$ στις δύο παραπάνω σχέσεις του Ορισμού 2.2.4. προκύπτει η από κοινού k - διάστατη κανονική κατανομή $\phi_k(\underline{x}, \Omega)$. Ακόμη, για τον πίνακα $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ ισχύει

$$\Lambda^T \Omega \Lambda = \text{diag}(d_1^2, \dots, d_k^2).$$

Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη ότι ο πίνακας Ω είναι συμμετρικός και την ανάλυση κατά Jordan του πίνακα αυτού, το διάνυσμα λοξότητας d επηρεάζει το σχήμα της κατανομής μέσω των ιδιοδιανυσμάτων $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ του πίνακα Ω .

2. Οι Ορισμοί 2.2.2. και 2.2.4. οδηγούν σε δύο διαφορετικές οικογένειες κατανομών. Συγκεκριμένα, ο Ορισμός 2.2.2. αποτελεί ειδική περίπτωση του Ορισμού 2.2.4.. Αυτό προκύπτει εύκολα παρατηρώντας ότι, για κάθε τυχαίο διάνυσμα x που ακολουθεί πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή, σύμφωνα με τον Ορισμό 2.2.2. αν $y = Ax$ με $|A| \neq 0$ και $A \neq I$, το y ακολουθεί πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή σύμφωνα με τον Ορισμό 2.2.4. και όχι με τον Ορισμό 2.2.2.. Επομένως, το μοντέλο που προτείνεται από τον Ορισμό 2.2.2. δεν είναι κλειστό ως προς γραμμικούς μετασχηματισμούς. Ωστόσο, τα μοντέλα του Ορισμού 2.2.4. είναι κλειστά με την έννοια ότι: για κάθε x που ακολουθεί πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή, σύμφωνα με τον Ορισμό 2.2.4., ο γραμμικός μετασχηματισμός Ax ακολουθεί και αυτός την ίδια κατανομή για κάθε πίνακα A , με $|A| \neq 0$ και $A \neq I$.

Τέλος, επιθυμώντας οι Gupta & Chen (2003) να αποσαφηνίσουν πως κατέληξαν στον Ορισμό 2.2.4., απέδειξαν μέσω Λήμματος ότι το ολοκλήρωμα της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας (μέσω του Ορισμού αυτού) επί του χώρου ορισμού

$$\int_{\mathbb{R}^k} f(x, \Omega, d) dx = 1.$$

Θα διευκρινιστεί στη συνέχεια η σχέση μεταξύ των συναρτήσεων πυκνοτήτων πιθανότητας των Ορισμών 2.2.3. και 2.2.4.. Πάλι αποδεικνύεται ότι ο Ορισμός 2.2.3. αποτελεί ειδική περίπτωση του Ορισμού 2.2.4.. Επίσης, από το Θεώρημα 2.2.5. που ακολουθεί αποδεικνύεται ότι ένα τυχαίο δείγμα που προέρχεται από τη μονοδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή σίγουρα θα ανήκει στην οικογένεια πολυδιάστατων λοξών-κανονικών κατανομών του Ορισμού 2.2.4. αλλά όχι σε αυτήν του Ορισμού 2.2.3.. Επομένως, πρόκειται για δύο διαφορετικές οικογένειες κατανομών.

Θεώρημα 2.2.5. Έστω $SN_k(\underline{0}, \Omega, \underline{a})$ και $SN_k(\underline{0}, \Omega, \underline{d})$ οι οικογένειες κατανομών πιθανότητας όπως αυτές ορίστηκαν στον Ορισμό 2.2.3. και στον Ορισμό 2.2.4. αντίστοιχα. Για κάθε τυχαίο δείγμα \underline{x} από τη μονοδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή ισχύει ότι: $\underline{x} = (x_1, \dots, x_k)^T \in SN_k(\underline{0}, \Omega, \underline{d})$ αλλά $\underline{x} \notin SN_k(\underline{0}, \Omega, \underline{a})$.

Το Θεώρημα 2.2.5. αποδεικνύεται πλήρως από τους Gupta & Chen (2003).

Εκτός από αυτούς τους τρεις ορισμούς που δόθηκαν παραπάνω και σύμφωνα με τους Kotz & Vicari (2005), οι Kollo & Traat (2001) και οι Gupta & Kollo (2000) τροποποίησαν ελαφρώς τον ορισμό των Azzalini & Dalla Valle (1996) υποθέτοντας ότι ο πίνακας Ω είναι ένας $k \times k$ θετικά ορισμένος πίνακας και υποστηρίζουν ότι αυτή η παραμετροποίηση περιγράφει απλούστερα τις κατανομές των εκτιμητών των παραμέτρων.

2.3 Στοχαστικές αναπαραστάσεις μιας πολυδιάστατης λοξής-κανονικής τυχαίας μεταβλητής

Όπως προαναφέρθηκε, στη διατριβή αυτή το ενδιαφέρον θα επικεντρωθεί στον Ορισμό 2.2.3., καθώς είναι ο ορισμός που έχει υιοθετηθεί από τους περισσότερους μελετητές της πολυδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής εξάγοντας πληθώρα στατιστικών αποτελεσμάτων αλλά, επίσης, επειδή όπως αναφέρουν οι Azzalini & Capitanio (2014) η σ.π.π. του ορισμού 2.2.3. “αναπαριστά αναμφισβήτητα την απλούστερη επιλογή που περιλαμβάνει έναν παράγοντα μορφοποίησης τύπου Gauss που εφαρμόζεται σε μια πολυδιάστατη κανονική κατανομή”. Πριν παρουσιαστούν οι ιδιότητες που διέπουν την οικογένεια κατανομών του ορισμού αυτού θα αναφερθούν ενδεικτικά δύο από τις προσεγγίσεις που υπάρχουν στη βιβλιογραφία για την δημιουργία του ορισμού αυτού: η μέθοδος του μετασχηματισμού και η μέθοδος της δέσμευσης. Κάθε μία από τις μεθόδους αυτές εξασφαλίζει την πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή από την πολυδιάστατη κανονική κατανομή παρέχοντας ταυτόχρονα ξεχωριστή ερμηνεία. Οι μεθοδολογίες αυτές είναι χρήσιμες για την παραγωγή τυχαίων αριθμών αλλά και για την εξαγωγή διαφορών ιδιοτήτων με απλούστερο τρόπο. Για την ανάπτυξη αυτών των μεθόδων θα χρειαστεί να διατυπωθούν ο ορισμός της μονοδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής, όπως δόθηκε από τον Azzalini (1985), καθώς και κάποιες εισαγωγικές προτάσεις που ισχύουν γι’ αυτήν, οι οποίες παρουσιάζονται από τους Azzalini & Dalla Valle (1996).

Ορισμός 2.3.1. (Μονοδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή) Μια τυχαία μεταβλητή x λέγεται ότι ακολουθεί λοξή-κανονική κατανομή με παράμετρο λοξότητας λ και συμβολίζεται $x \sim SN(\lambda)$ αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητάς της δίνεται από τη σχέση:

$$f(x; \lambda) = 2\phi(x)\Phi(\lambda x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

όπου $\phi(x)$ και $\Phi(x)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής $N(0,1)$, αντίστοιχα.

Πρόταση 2.3.2. (Στοχαστική αναπαράσταση) Αν y και w είναι δύο ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές και η τυχαία μεταβλητή x ορίζεται, $x = \begin{cases} y, & \text{αν } \lambda y > w \\ -y, & \text{αν } \lambda y \leq w \end{cases}$, τότε $x \sim SN(\lambda)$, για $\lambda \in \mathbb{R}$.

Εφαρμόζοντας την Πρόταση 2.3.2. για $x = \frac{\lambda y - w}{(1 + \lambda^2)^{1/2}}$,

προκύπτει το παρακάτω αποτέλεσμα.

Πρόταση 2.3.3. Αν (x, y) μια διδιάστατη κανονική τυχαία μεταβλητή με περιθώριες τυπικές κανονικές κατανομές και συσχέτιση δ , τότε η δεσμευμένη κατανομή του y δοθέντος $x > 0$

είναι λοξή κανονική κατανομή με παράμετρο $\lambda(\delta) = \frac{\delta}{(1-\delta^2)^{1/2}}$

ή συμβολικά $y|x > 0 \sim SN\{\lambda(\delta)\}$.

Το αποτέλεσμα αυτό είναι χρήσιμο όταν δε διατίθενται όλες οι κανονικές μεταβλητές λόγω περικοπής ή διαγραφής (censoring operation) και αποδείχθηκε με διαφορετικό τρόπο από τους Arnold et al. (1993) για διδιάστατη αποκομμένη κανονική κατανομή.

Ακόμη, αξίζει να σημειωθεί ότι οι σχέσεις που συνδέουν τα λ και δ είναι οι εξής:

$$\delta(\lambda) = \frac{\lambda}{(1+\lambda^2)^{1/2}}, \quad \lambda(\delta) = \frac{\delta}{(1-\delta^2)^{1/2}}.$$

Η επόμενη αναπαράσταση της μονοδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής οφείλεται στον Azzalini (1986) και εμφανίζεται επίσης στην εργασία των Azzalini & Dalla Valle (1996).

Πρόταση 2.3.4. Αν y_0 και y_1 είναι δύο ανεξάρτητες τυπικές κανονικές μεταβλητές και $\delta \in (-1,1)$, τότε η τυχαία μεταβλητή

$$x = \delta|y_0| + (1-\delta^2)^{1/2} y_1$$

ακολουθεί λοξή-κανονική κατανομή με παράμετρο $\lambda(\delta)$ ή συμβολικά $x \sim SN(\lambda(\delta))$.

Διαθέτοντας πλέον τα κατάλληλα εργαλεία μπορούν να αναπτυχθούν η μέθοδος του μετασχηματισμού και η μέθοδος της δέσμευσης μέσω των οποίων θα προκύψουν οι στοχαστικές αναπαραστάσεις μιας πολυδιάστατης λοξής-κανονικής τυχαιάς μεταβλητής.

2.3.1. Μέθοδος του μετασχηματισμού

Αυτή η πρώτη προσέγγιση για την κατασκευή του Ορισμού 2.2.3. βασίζεται στην αντίστοιχη μέθοδο μετασχηματισμού της μονοδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής. Η μέθοδος αναφέρθηκε πρώτη φορά στη βιβλιογραφία από τους Azzalini & Dalla Valle (1996).

Θεωρούμε την k - διάστατη τυχαιά μεταβλητή $\underline{x} = (x_1, \dots, x_k)^T$ τέτοια, ώστε κάθε συνιστώσα αυτής να ακολουθεί μονοδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή. Στόχος μας είναι να ορισθεί η από κοινού κατανομή των x_i , $i = 1, \dots, k$, ως πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή. Στην κατεύθυνση αυτή, θεωρούμε ακόμη την k - διάστατη κανονική τυχαιά μεταβλητή $\underline{y} = (y_1, \dots, y_k)^T$ με τυποποιημένες ($E(y_i) = 0$, $i = 1, \dots, k$) περιθώριες κατανομές και τη μονοδιάστατη τοπική κανονική μεταβλητή y_0 , ανεξάρτητη της μεταβλητής \underline{y} .

Τότε,

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ \underline{y} \end{pmatrix} \sim \mathbf{N}_{k+1} \left\{ \underline{0}, \begin{pmatrix} 1 & \underline{0}^T \\ \underline{0} & \Psi \end{pmatrix} \right\}$$

όπου Ψ είναι ένας $k \times k$ πλήρους βαθμίδας πίνακας συσχέτισης και ορίζουμε

$$x_i = \delta_i |y_0| + (1 - \delta_i^2)^{1/2} y_i, \quad i = 1, \dots, k, \quad (2.2)$$

όπου $-1 < \delta_i < 1$, για $i = 1, \dots, k$. Τότε, βάσει της Πρότασης 2.3.4., προκύπτει ότι $x_i \sim SN(\lambda(\delta_i))$, $i = 1, \dots, k$. Έπειτα από αλγεβρικούς υπολογισμούς προκύπτει ότι η κατανομή της $\underline{x} = (x_1, \dots, x_k)^T$ είναι η k - διάστατη λοξή-κανονική κατανομή με παραμέτρους $\underline{\lambda}$ και Ψ και με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από την πυκνότητα του Ορισμού 2.2.3.:

$$f_k(\underline{x}) = 2\phi_k(\underline{x}; \Omega) \Phi(\underline{\alpha}^T \underline{x}), \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^k,$$

όπου

$$\underline{\alpha}^T = \frac{\underline{\lambda}^T \Psi^{-1} \Delta^{-1}}{(1 + \underline{\lambda}^T \Psi^{-1} \underline{\lambda})^{1/2}},$$

$$\Delta = \text{diag}\left(\left(1 - \delta_1^2\right)^{1/2}, \dots, \left(1 - \delta_k^2\right)^{1/2}\right),$$

$$\underline{\lambda} = \left(\lambda(\delta_1), \dots, \lambda(\delta_k)\right)^T,$$

$$\Omega = \Delta\left(\Psi + \underline{\lambda}\underline{\lambda}^T\right)\Delta$$

και $\phi_k(x; \Omega)$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της k - διάστατης κανονικής κατανομής με τοπικές κανονικές περιθώριες και πίνακα συσχέτισης Ω . Συμβολικά $\underline{x} \sim SN_k(\underline{0}, \Psi, \underline{\lambda})$.

Η μέθοδος αυτή επίσης παρέχει μια απλή μέθοδο γέννησης δεδομένων από πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή για χρήση τους σε προσομοιώσεις. Επιπλέον, εφαρμόζεται στα χρηματοοικονομικά και την οικονομετρία, όπως επισημαίνεται από τον Adcock (2010).

Σύμφωνα με τους Azzalini & Capitanio (2014), έπειτα από τους Azzalini & Capitanio (1999), οι περισσότερες εργασίες που ακολούθησαν υιοθέτησαν την αναπαραμέτρηση $(\Omega, \underline{\alpha})$ ή μια παραλλαγή αυτής, η οποία συμβολίζεται με $(\Omega, \underline{\eta})$ και αναφέρεται σε επόμενη ενότητα. Άλλοι ερευνητές υιοθετούν την αναπαραμέτρηση $(\Psi, \underline{\lambda})$, όπως οι Adcock & Shutes (1999) οι οποίοι προτιμούν αυτή την αναπαραμέτρηση για λόγους ερμηνευσιμότητας οικονομικών εφαρμογών. Παρόμοια αναπαραμέτρηση με την $(\Psi, \underline{\lambda})$ παρουσιάζεται από τους Azzalini & Capitanio (2014).

2.3.2. Μέθοδος της Δέσμευσης

Η δεύτερη προσέγγιση για την κατασκευή του Ορισμού 2.2.3. βασίζεται στην αντίστοιχη μέθοδο δέσμευσης της μονοδιάστατης περίπτωσης. Προέκυψε απ' την προσπάθεια να εξετασθεί αν παράγεται η ίδια συνάρτηση κατανομής, με αυτή της παραπάνω μεθόδου, ξεκινώντας από διαφορετική ιδιότητα της μονοδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής. Σύμφωνα με τους Azzalini & Capitanio (2014), η μέθοδος αυτή διατυπώνεται με δύο ισοδύναμες μορφές.

Λαμβάνοντας, λοιπόν, υπόψη την Πρόταση 2.3.3. υποθέτουμε ότι y_0 είναι μια μονοδιάστατη κανονική τυχαία μεταβλητή και \underline{y} μια k - διάστατη κανονική τυχαία μεταβλητή με τυπικές κανονικές περιθώριες κατανομές. Έτσι, αν $y_0 \sim N(0,1)$ και $\underline{y} \sim N_k(\underline{0}, \underline{\Omega})$ είναι ανεξάρτητες μεταβλητές, τότε οι μεταβλητές

$$\underline{z}' = (\underline{y} \mid y_0 > \underline{\alpha}^T \underline{y}), \quad \underline{z} = \begin{cases} \underline{y} & \text{αν } y_0 > \underline{\alpha}^T \underline{y} \\ -\underline{y} & \text{αλλιώς} \end{cases}, \quad (2.3)$$

έχουν κατανομή την $SN_k(\underline{0}, \underline{\Omega}, \underline{\alpha})$.

Οι παραπάνω μεταβλητές μπορούν να διατυπωθούν με μια ισοδύναμη μορφή η οποία επιτρέπει μια ενδιαφέρουσα ερμηνεία.

Έστω

$$y_1 = \left(1 + \underline{\alpha}^T \Omega \underline{\alpha}\right)^{-1/2} \left(\underline{\alpha}^T \underline{y} - y_0\right),$$

έτσι ώστε

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \underline{y} \end{pmatrix} \sim N_{k+1}(\underline{0}, \Omega^*),$$

όπου $\Omega^* = \begin{pmatrix} 1 & \underline{\delta}^T \\ \underline{\delta} & \Omega \end{pmatrix}$ ένας πλήρους βαθμίδας $k \times k$ πίνακας συσχέτισης και $\underline{\delta}$ δίνεται από τη σχέση (2.1). Τότε οι μεταβλητές στη σχέση (2.3) μπορούν να γραφούν ως εξής

$$\underline{z}' = (\underline{y} | y_1 > 0), \quad \underline{z} = \begin{cases} \underline{y} & \text{αν } y_1 > 0 \\ -\underline{y} & \text{αλλιώς} \end{cases}.$$

Με αυτή τη μορφή για τη μεταβλητή \underline{z}' μπορεί να εξηγηθεί καλύτερα πως προκύπτει η κατανομή της. Η κατανομή της \underline{z}' είναι μια k - διάστατη λοξή-κανονική κατανομή, καθώς από την Πρόταση 2.3.3. κάθε μία από τις δεσμευμένες τυχαίες μεταβλητές $y_i | y_1 > 0$, για $i = 1, \dots, k$, έχει μονοδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή $SN(\lambda(\delta_i))$, για $i = 1, \dots, k$.

Αυτή η μέθοδος, όπως και η προηγούμενη, είναι χρήσιμη για τη γέννηση πολυδιάστατων λοξών-κανονικών

διανυσμάτων για χρήση σε προσομοιώσεις. Όσον αφορά την επιλογή της μορφής των μεταβλητών, οι Azzalini & Capitanio (2014) αναφέρουν ότι για γέννηση τυχαίων αριθμών προτιμάται η δεύτερη μορφή, χαρακτηρίζοντας την πρώτη ως άβολη διότι περιλαμβάνει απόρριψη των μισών δειγμάτων y , κατά μέσο όρο. Ωστόσο, για τη δεύτερη μορφή της z' αναφέρουν ότι είναι ενδιαφέρουσα, καθώς υποδηλώνει μια σύνδεση μεταξύ της λοξής-κανονικής κατανομής με έναν μηχανισμό περικοπής ή διαγραφής (censoring mechanism), αρκετά γνωστό σε ένα πλαίσιο εφαρμογών, κυρίως στις κοινωνικές επιστήμες, όπου μια μεταβλητή y παρατηρείται μόνο όταν μια συσχετισμένη μεταβλητή y_1 , η οποία συνήθως δεν έχει παρατηρηθεί, ικανοποιεί μια συγκεκριμένη συνθήκη. Αυτή η κατάσταση είναι γνωστή ως επιλεκτική δειγματοληψία.

Επιπλέον, από τους Azzalini & Dalla Valle (1996) αποδεικνύεται εύκολα ότι οι δύο κλάσεις κατανομών που προκύπτουν από τις μεθόδους του μετασχηματισμού και της δέσμευσης είναι ισοδύναμες.

Αξιοποιώντας την ιδιότητα της δέσμευσης προέκυψαν δύο νέες μέθοδοι αναπαράστασης της πολυδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής, τις οποίες περιέγραψαν οι Arnold & Beaver (2000, 2002). Η πρώτη μέθοδος αναπτύχθηκε μέσω των λεγόμενων «κρυφών μοντέλων αποκοπής» (hidden truncation models), με εφαρμογές σε χρηματοοικονομικά προβλήματα, βλέπε Adcock et al. (2012), ενώ η δεύτερη μέθοδος αναπαράστασης, η οποία είναι

έναν γραμμικό μετασχηματισμό του κρυφού μοντέλου αποκοπής, προϋποθέτει τη θεώρηση $k+1$ μονοδιάστατων ανεξάρτητων και ισόνομων τυπικών κανονικών τυχαίων

μεταβλητών y_1, \dots, y_k και w , με την $\underline{x} = \left(y \mid \lambda_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i y_i > w \right)$,

$\lambda_i \in \mathbb{R}$, για $i = 0, \dots, k$, να έχει k - διάστατη λοξή-κανονική κατανομή.

Παρατηρήσεις.

1. Από την απόδειξη της ισοδυναμίας των δύο προσεγγίσεων που παρουσίασαν οι Azzalini & Dalla Valle (1996) παρέχεται η σχέση που συνδέει τις δύο μεθόδους μέσω του στοιχείου ω_{ij} του πίνακα Ω και του αντίστοιχου στοιχείου ψ_{ij} του πίνακα Ψ . Η σχέση αυτή είναι:

$$\omega_{ij} = \delta_i \delta_j + \psi_{ij} (1 - \delta_i^2)^{1/2} (1 - \delta_j^2)^{1/2}, \quad i > 0, \quad j > 0, \quad (2.4)$$

η οποία αποτελεί τη συσχέτιση δύο συνιστωσών x_i και x_j που ορίζονται σύμφωνα με τη σχέση (2.2), ενώ $\text{corr}(y_0, x_j) = \delta_j$, $j = 1, \dots, k$, όπου με corr συμβολίζεται η συσχέτιση. Έτσι, η πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή μπορεί να αναπαρασταθεί είτε μέσω του ζεύγους των παραμέτρων $(\underline{\lambda}, \Psi)$ είτε μέσω του ζεύγους των παραμέτρων $(\underline{\alpha}, \Omega)$. Στο παράρτημα της εργασίας των Azzalini & Capitanio (1999), αποδεικνύεται,

μέσω πρότασης, ότι για οποιαδήποτε επιλογή πίνακα συσχέτισης Ω και διανύσματος $\alpha \in \mathbb{R}^k$, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του Ορισμού 2.2.3. ανήκει στην οικογένεια των k - διάστατων λοξών-κανονικών κατανομών.

2. Η διαφορά των δύο μεθόδων αναπαράστασης έγκειται στην επιλογή της μεταβλητής που αντικαθιστά τη μεταβλητή y_0 . Στη μέθοδο του μετασχηματισμού απαιτείται η αντικατάσταση με τη μεταβλητή $|y_0|$ ενώ στη μέθοδο της δέσμευσης απαιτείται η συνθήκη-δέσμευση $y_0 > \alpha^T \underline{y}$ ή αλλιώς $y_1 > 0$. Η συμμετρία της $N(0,1)$ είναι αυτή που καθιστά τις δύο μεθόδους ισοδύναμες.

2.4 Μερικές βασικές έννοιες και ιδιότητες της πολυδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν πολλές ιδιότητες και προτάσεις που επεκτείνονται από τη μονοδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή στην πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή, του Ορισμού 2.2.3.. Ακόμη, η ομοιότητα που παρουσιάζεται μεταξύ της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής και της πολυδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής και η επέκταση πολλών ιδιοτήτων της πολυδιάστατης κανονικής στην πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή καθιστά τη δεύτερη μια ευέλικτη κατανομή με πληθώρα εφαρμογών. Στην ενότητα αυτή γίνεται μια κριτική ανασκόπηση και μελέτη αυτών των ιδιοτήτων και παρουσιάζονται κάποιες

βασικές έννοιες της πολυδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής καθώς και κάποια σημαντικά χαρακτηριστικά της κατανομής αυτής που δεν επηρεάζονται από την πολυδιάστατη επέκταση, όπως η χαρακτηριστική συνάρτηση και η ροπογεννήτρια συνάρτηση με τις ροπές που προκύπτουν μέσω αυτής. Θα εισαχθεί επίσης η πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή με γενικές παραμέτρους θέσης και κλίμακας.

2.4.1. Αθροιστική συνάρτηση κατανομής

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της k - διάστατης μεταβλητής \underline{x} με κατανομή την $SN_k(\underline{\nu}, \Omega, \underline{\alpha})$ δόθηκε από τους Azzalini & Dalla Valle (1996) και είναι

$$\begin{aligned} F_k(x_1, \dots, x_k) &= P\{X_1 \leq x_1, \dots, X_k \leq x_k\} \\ &= 2 \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_k} \phi_k(\underline{y}; \Omega) \Phi(\underline{\alpha}^T \underline{y}) d\nu_1 \cdots d\nu_k \\ &= 2 \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_k} \int_{-\infty}^{\underline{\alpha}^T \underline{y}} \phi_k(\underline{y}; \Omega) \Phi(u) du d\nu_1 \cdots d\nu_k, \end{aligned}$$

για $\underline{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$. Τότε

$$F_k(x_1, \dots, x_k) = 2P\{y_0^* \leq 0, y_1 \leq x_1, \dots, y_k \leq x_k\}, \quad (2.5)$$

όπου $(y_0, y_1, \dots, y_k)^T$ έχει κατανομή $N_{k+1} \left\{ \underline{0}, \begin{pmatrix} 1 & \underline{0}^T \\ \underline{0} & \Psi \end{pmatrix} \right\}$ και

$y_0^* = y_0 - \underline{\alpha}^T \underline{y}$, έτσι ώστε

$$\begin{pmatrix} y_0^* \\ \underline{y} \end{pmatrix} \sim N_{k+1} \left(\underline{0}, \begin{pmatrix} 1 + \underline{\alpha}^T \Psi \underline{\alpha} & -\underline{\alpha}^T \Psi \\ -\Psi \underline{\alpha} & \Psi \end{pmatrix} \right). \quad (2.6)$$

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της $\underline{x} \sim SN_k(\underline{0}, \Psi, \underline{\lambda})$ μπορεί να προκύψει από την (2.5) υπολογίζοντας την αθροιστική συνάρτηση κατανομής μιας $(k+1)$ - διάστατης κανονικής μεταβλητής με κατανομή την (2.6).

2.4.2. Πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή με παραμέτρους θέσης και κλίμακας

Για τις έννοιες και τις ιδιότητες που ακολουθούν η παράμετρος θέσης $\underline{\xi}$ θεωρείται διαφορετική του μηδενός και ταυτόχρονα εισάγεται μια παράμετρος κλίμακας, ο $k \times k$ διαγώνιος πίνακας ω . Στο πλαίσιο αυτό, έστω η συνεχής τυχαία μεταβλητή

$$\underline{y} = \underline{\xi} + \omega \underline{x}$$

όπου $\underline{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_k)^T$ και $\omega = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_k)$, υποθέτοντας ότι τα

διαγώνια στοιχεία του ω είναι θετικά και $\underline{x} \sim SN_k(\underline{0}, \Omega_{\underline{x}}, \underline{\alpha})$. Συγκεκριμένα, ο πίνακας ω σχηματίζεται από τις τυπικές αποκλίσεις του θετικά ορισμένου πίνακα $\Omega_{\underline{x}}$.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του \underline{y} είναι

$$f(\underline{y}) = 2\phi_k(\underline{y} - \underline{\xi}; \Omega) \Phi(\underline{\alpha}^T \omega^{-1}(\underline{y} - \underline{\xi})), \quad \underline{y} \in \mathbb{R}^k, \quad (2.7)$$

όπου $\Omega = \omega \Omega_{\underline{x}} \omega$ είναι ο πίνακας συσχέτισης. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(\underline{y})$ είναι η k - διάστατη λοξή-κανονική κατανομή με παραμέτρους θέσης και κλίμακας $\underline{\xi}$ και ω αντιστοίχα. Συμβολικά $\underline{y} \sim SN_k(\underline{\xi}, \Omega, \underline{\alpha})$.

Παρατηρήσεις.

1. Ο λόγος για τον οποίο υπάρχει ο όρος ω^{-1} στην Φ είναι για να παραμείνει αμετάβλητη η παράμετρος λοξότητας $\underline{\alpha}$ αν εφαρμοστεί ένας ακόμη μετασχηματισμός θέσης και κλίμακας στην μεταβλητή \underline{y} της μορφής $\underline{y}' = \underline{\alpha} + b\underline{y}$, όπου b ένας θετικά ορισμένος διαγώνιος πίνακας.

2. Η μέθοδος του μετασχηματισμού σε αυτήν την περίπτωση διαμορφώνεται σύμφωνα με την πρόταση που ακολουθεί και δίνεται από τους Contreras-Reyes & Arellano-Valle (2012).

Πρόταση 2.4.1. Έστω $\underline{y} \sim SN_k(\underline{\xi}, \Omega, \underline{\alpha})$, όπου Ω ένας συμμετρικός

και θετικά ορισμένος πίνακας και $\underline{\delta} = \frac{\Omega \underline{\alpha}}{\sqrt{1 + \underline{\alpha}^T \Omega \underline{\alpha}}}$ η κανονική

παράμετρος λοξότητας. Τότε $\underline{y} = \underline{\xi} + \underline{\delta} |u_0| + \underline{u}$, όπου $u_0 \sim N(0,1)$

και $\underline{u} \sim N_k(\underline{0}, \Omega - \underline{\delta} \underline{\delta}^T)$ και είναι ανεξάρτητα.

3. Όταν χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $\underline{y} \sim SN_k(\underline{\xi}, \Omega, \underline{\alpha})$ θα πρέπει να υποτίθεται σιωπηρά ότι $\Omega > \mathbf{0}_{k \times k}$.

4. Ο πίνακας ω μπορεί να γραφεί επίσης ως $\omega = (\Omega \odot \mathbf{1}_k)^{1/2}$, όπου με \odot συμβολίζεται το γινόμενο Hadamard μεταξύ δύο πινάκων.

5. Σύμφωνα με τους Azzalini & Capitanio (2014) για την $SN_k(\underline{\xi}, \Omega, \underline{\alpha})$ ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα, η οποία αποτελεί επέκταση αντίστοιχης ιδιότητας της μονοδιάστατης περίπτωσης και αποδεικνύεται από τους ίδιους ερευνητές.

Πρόταση 2.4.2. Η πυκνότητα της $SN_k(\underline{\xi}, \Omega, \underline{\alpha})$ που δίνεται από τη σχέση (2.7) είναι λογαριθμικά κοίλη (log-concave), δηλαδή, ο λογάριθμός της είναι μια κοίλη συνάρτηση του \underline{x} , για οποιαδήποτε επιλογή των παραμέτρων.

Από την ιδιότητα αυτή συμπεραίνεται ότι τα χωρία που

οριοθετούνται από τις ισοϋψείς καμπύλες της κατανομής είναι κυρτά σύνολα.

2.4.3. Χαρακτηριστική συνάρτηση

Οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις έχουν χρήσιμες ιδιότητες και προσδιορίζουν μοναδικά την συνάρτηση κατανομής. Ωστόσο, υπάρχουν σημαντικές δυσκολίες στον προσδιορισμό τους στο περιβάλλον πολυδιάστατων κατανομών. Στη μονοδιάστατη περίπτωση, ο Pewsey (2003) διατύπωσε την χαρακτηριστική συνάρτηση για τη μονοδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή, ενώ οι Kim & Genton (2011) μελετούν τη μορφή της χαρακτηριστικής συνάρτησης για την πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή, ο ορισμός της οποίας δίνεται στο Θεώρημα 2.4.3., καθώς επίσης και για άλλες κατανομές όπως τη λοξή- t κατανομή και τη λοξή-slash κατανομή.

Ο συμβολισμός που δίνεται για τη χαρακτηριστική συνάρτηση ενός k -διάστατου τυχαίου διανύσματος \underline{x} είναι $\psi_{\underline{x}} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{C}$, όπου $\psi_{\underline{x}}(\underline{t}) = E\left(\exp\left(it^T \underline{x}\right)\right)$, για κάθε $\underline{t} \in \mathbb{R}^k$, και ο προσδιορισμός της χαρακτηριστικής συνάρτησης της πολυδιάστατης λοξής κατανομής δίνεται στο θεώρημα που ακολουθεί.

Θεώρημα 2.4.3. Έστω $\underline{x} \sim SN_k(\underline{\xi}, \Omega, \alpha)$. Τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση της \underline{x} είναι

$$\begin{aligned}\psi_{\underline{x}}(\underline{t}) &= 2 \exp\left(i \underline{t}^T \underline{\xi} - \frac{1}{2} \underline{t}^T \Omega \underline{t}\right) \Phi\left(i \underline{\varrho}^T \omega \underline{t}\right) \\ &= \exp\left(i \underline{t}^T \underline{\xi} - \frac{1}{2} \underline{t}^T \Omega \underline{t}\right) \left\{1 + i \tau\left(\underline{\varrho}^T \omega \underline{t}\right)\right\}, \quad \underline{t} \in \mathbb{R}^k,\end{aligned}$$

$$\text{όπου } \underline{\varrho} = \frac{\Omega \underline{\alpha}}{\left(1 + \underline{\alpha}^T \Omega \underline{\alpha}\right)^{1/2}} \quad \text{και} \quad \tau(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du, \quad x > 0 \quad \text{και}$$

$$\tau(-x) = -\tau(x).$$

Το Θεώρημα 2.4.3. αποδεικνύεται με τρεις τρόπους από τους Kim & Genton (2011).

2.4.4. Ροπές

Επεκτείνοντας τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της μονοδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής οι Azzalini & Dalla Valle (1996) υπολόγισαν τη ροπογεννήτρια συνάρτηση $M(\underline{t})$ για την πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή, η οποία για $\underline{x} \sim SN_k(\underline{0}, \Omega, \underline{\alpha})$ και $\underline{t} \in \mathbb{R}^k$ είναι

$$\begin{aligned}M(\underline{t}) &= 2 \int_{\mathbb{R}^k} e^{i \underline{t}^T \underline{x}} \phi_k(\underline{x}; \Omega) \Phi\left(\underline{\alpha}^T \underline{x}\right) d\underline{x} \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^k} e^{i \underline{t}^T \underline{x}} (2\pi)^{-k/2} |\Omega|^{-1/2} e^{-1/2 \underline{x}^T \Omega^{-1} \underline{x}} \Phi\left(\underline{\alpha}^T \underline{x}\right) d\underline{x}\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{(2\pi)^{k/2} |\Omega|^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^k} e^{-1/2(\underline{x}^T \Omega^{-1} \underline{x} - 2\underline{t}^T \underline{x})} \Phi(\underline{\alpha}^T \underline{x}) d\underline{x}.$$

Προσθαφαιρώντας την ποσότητα $e^{1/2\underline{t}^T \Omega \underline{t}}$ και έπειτα από αλγεβρικές πράξεις η ροπογεννήτρια συνάρτηση γίνεται

$$\begin{aligned} M(\underline{t}) &= \frac{2e^{1/2\underline{t}^T \Omega \underline{t}}}{(2\pi)^{k/2} |\Omega|^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^k} e^{-1/2(\underline{x}^T \Omega^{-1} \underline{x} - 2\underline{t}^T \underline{x} + \underline{t}^T \Omega \underline{t})} \Phi(\underline{\alpha}^T \underline{x}) d\underline{x} \\ &= \frac{2e^{1/2\underline{t}^T \Omega \underline{t}}}{(2\pi)^{k/2} |\Omega|^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^k} e^{-1/2(\underline{x} - \Omega \underline{t})^T \Omega^{-1} (\underline{x} - \Omega \underline{t})} \Phi(\underline{\alpha}^T \underline{x}) d\underline{x}. \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό $\underline{x} = \underline{u} + \Omega \underline{t}$ προκύπτει

$$\begin{aligned} M(\underline{t}) &= \frac{2e^{1/2\underline{t}^T \Omega \underline{t}}}{(2\pi)^{k/2} |\Omega|^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^k} e^{-1/2\underline{u}^T \Omega^{-1} \underline{u}} \Phi(\underline{\alpha}^T (\underline{u} + \Omega \underline{t})) d\underline{u} \\ &= 2e^{1/2\underline{t}^T \Omega \underline{t}} E\left(\Phi(\underline{\alpha}^T (\underline{u} + \Omega \underline{t}))\right), \end{aligned}$$

όπου $\underline{u} \sim N_k(\underline{0}, \Omega)$.

Οι υπολογισμοί στη ροπογεννήτρια συνάρτηση μπορούν να συνεχιστούν χρησιμοποιώντας την παρακάτω γνωστή πρόταση που ισχύει για την πολυδιάστατη κανονική κατανομή, όπου ισχύει

ότι $\underline{h}^T \underline{u} \sim N\left(0, \underline{h}^T \Sigma \underline{h}\right)$ αν $\underline{u} \sim N_k(\underline{0}, \Sigma)$ και δίνεται από τους Azzalini & Dalla Valle (1996).

Πρόταση 2.4.4. Αν $\underline{u} \sim N_k(\underline{0}, \Omega)$, τότε

$$E\left(\Phi\left(c + \underline{b}^T \underline{u}\right)\right) = \Phi\left(\frac{c}{\left(1 + \underline{b}^T \Omega \underline{b}\right)^{1/2}}\right),$$

για κάθε σταθερά c και $\underline{b} \in \mathbb{R}^k$.

Επομένως, ο τύπος της ροπογεννήτριας συνάρτησης γίνεται:

$$\begin{aligned} M(\underline{t}) &= 2e^{1/2 \underline{t}^T \Omega \underline{t}} \Phi\left(\frac{\underline{\alpha}^T \Omega \underline{t}}{\left(1 + \underline{\alpha}^T \Omega \underline{\alpha}\right)^{1/2}}\right) \\ &= 2e^{1/2 \underline{t}^T \Omega \underline{t}} \Phi\left(\underline{\delta}^T \underline{t}\right), \end{aligned}$$

όπου $\underline{\delta} = \left(1 + \underline{\alpha}^T \Omega \underline{\alpha}\right)^{-1/2} \Omega \underline{\alpha}$.

Παίρνοντας τις μερικές παραγώγους της $M(\underline{t})$ μπορούν να υπολογιστούν οι ροπές της $SN_k(\underline{\mu} = \underline{0}, \Omega, \underline{\alpha})$, όπου $\underline{\mu}$ είναι η μέση τιμή της $\phi_k(\underline{x}; \underline{\mu}, \Omega)$. Οι Genton et al. (2001) έδωσαν αναλυτικά τις

μερικές παραγώγους της ροπογεννήτριας συνάρτησης και μέσω αυτών, για $\underline{t} = \underline{0}$, υπολόγισαν τις τέσσερις πρώτες ροπές της πολυδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής οι οποίες είναι

$$M_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \underline{\xi},$$

$$M_2 = \underline{\Omega},$$

$$M_3 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\underline{\xi} \otimes \underline{\Omega} + \text{vec}(\underline{\Omega}) \underline{\xi}^T + (\mathbf{I}_n \otimes \underline{\xi}) \underline{\Omega} - (\mathbf{I}_n \otimes \underline{\xi}) (\underline{\xi} \otimes \underline{\xi}^T) \right],$$

$$M_4 = (\mathbf{I}_{n^2} + U_{n,n}) (\underline{\Omega} \otimes \underline{\Omega}) + \text{vec}(\underline{\Omega}) \text{vec}(\underline{\Omega}^T),$$

όπου $U_{n,n}$ ο $n^2 \times n^2$ πίνακας μεταθέσεων που συνδέεται με έναν $n \times n$ πίνακα και \otimes να συμβολίζει το γινόμενο Kronecker μεταξύ δύο πινάκων.

Στην περίπτωση που η μέση τιμή $\underline{\mu}$ δεν είναι μηδέν, οπότε $\underline{x} \sim SN_k(\underline{\mu}, \underline{\Omega}, \underline{\alpha})$, οι Genton et al. (2001) έδωσαν τη μορφή που παίρνουν οι τέσσερις πρώτες ροπές.

Παρατηρήσεις.

1. Στην περίπτωση που εισάγονται οι παράμετροι θέσης και κλίμακας, $\underline{\xi}$ και ω αντίστοιχα, η ροπογεννήτρια συνάρτηση της μεταβλητής $\underline{y} = \underline{\xi} + \omega \underline{x} \sim SN_k(\underline{\xi}, \bar{\underline{\Omega}}, \underline{\alpha})$ δίνεται από τη σχέση:

$$M(\underline{t}) = 2 \exp\left(\underline{\mu}^T \underline{t} + \frac{1}{2} \underline{t}^T \bar{\Omega} \underline{t}\right) \Phi\left(\underline{\delta}^T \omega \underline{t}\right), \quad \underline{t} \in \mathbb{R}^k, \quad (2.8)$$

όπου $\underline{\delta} = \left(1 + \underline{\alpha}^T \bar{\Omega} \underline{\alpha}\right)^{-1/2} \bar{\Omega} \underline{\alpha}$ και $\bar{\Omega} = \omega^{-1} \Omega \omega^{-1}$ ο πίνακας συσχέτισης που συνδέεται με τον Ω .

2. Από τις δύο πρώτες ροπές προκύπτουν το μέσο διάνυσμα και ο πίνακας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων του $\underline{x} \sim SN_k(\underline{0}, \Omega, \underline{\alpha})$ που δίνονται από τις σχέσεις

$$\mu_{\underline{x}} = E(\underline{x}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \underline{\delta}, \quad \Sigma = Var(\underline{x}) = \Omega - \mu_{\underline{x}} \mu_{\underline{x}}^T.$$

Επίσης, μπορούν να υπολογιστούν οι συσχετίσεις μεταξύ των συνιστωσών της \underline{x} με τη βοήθεια των σχέσεων των δύο πρώτων

ροπών που βρέθηκαν, σύμφωνα με τις οποίες : $E(x_i) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \delta_i,$

$Var(x_i) = 1 - \frac{2}{\pi} \delta_i^2$ και $Cov(x_i, x_j) = \omega_{ij} - \frac{2}{\pi} \delta_i \delta_j,$ $i = 1, \dots, k,$

$j = 1, \dots, k$ και ω_{ij} όπως ορίζονται από τη σχέση (2.4). Έτσι, για $i = 1, \dots, k$ και $j = 1, \dots, k$ προκύπτει

$$\begin{aligned} \rho_{ij} = Corr(x_i, x_j) &= \frac{Cov(x_i, x_j)}{\sqrt{Var(x_i)} \sqrt{Var(x_j)}} \\ &= \frac{\omega_{ij} - \frac{2}{\pi} \delta_i \delta_j}{\sqrt{1 - \frac{2}{\pi} \delta_i^2} \sqrt{1 - \frac{2}{\pi} \delta_j^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\delta_i \delta_j + \psi_{ij} \sqrt{1 - \delta_i^2} \sqrt{1 - \delta_j^2} - \frac{2}{\pi} \delta_i \delta_j}{\sqrt{1 - \frac{2}{\pi} \delta_i^2} \sqrt{1 - \frac{2}{\pi} \delta_j^2}} \\
&= \frac{\psi_{ij} \sqrt{1 - \delta_i^2} \sqrt{1 - \delta_j^2} + \delta_i \delta_j \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)}{\sqrt{1 - \frac{2}{\pi} \delta_i^2} \sqrt{1 - \frac{2}{\pi} \delta_j^2}}. \tag{2.9}
\end{aligned}$$

3. Από τη ροπογεννήτρια συνάρτηση προκύπτει η γεννήτρια συνάρτηση ημιαναλλοιώτων (cumulant generating function) του $\underline{x} \sim SN_k(\underline{0}, \Omega, \alpha)$ που δίνεται από τη σχέση

$$K(\underline{t}) = \log M(\underline{t}) = \frac{1}{2} \underline{t}^T \Omega \underline{t} + \log \left(2\Phi \left(\underline{\delta}^T \underline{t} \right) \right).$$

Η γεννήτρια συνάρτηση ημιαναλλοιώτων $K(\underline{t})$ βοηθά στον υπολογισμό συνοπτικών δεικτών για την πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή. Οι πιο γνωστοί δείκτες παρουσιάστηκαν από τον Mardia (1970, 1974) και εκφράζουν την πολυδιάστατη λοξότητα και κύρτωση. Ο δείκτης λοξότητας της \underline{x} δίνεται από τη σχέση

$$\gamma_{1,k} = \left(\frac{4 - \pi}{2} \right)^2 \left(\mu_x^T \Sigma^{-1} \mu_x \right)^3.$$

Αντίστοιχα, ο δείκτης κύρτωσης της \underline{x} δίνεται από τη σχέση

$$\gamma_{2,k} = 2(\pi - 3) \left(\mu_{\tilde{x}}^T \Sigma^{-1} \mu_{\tilde{x}} \right)^2.$$

Ωστόσο, στη βιβλιογραφία υπάρχει ένας εναλλακτικός τύπος για το δείκτη λοξότητας, ο οποίος δόθηκε από τον McCullagh (1987). Αυτός ο τύπος διαφέρει ως προς τον τρόπο υπολογισμού, χωρίς αυτό να επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα, καθώς οι δύο δείκτες εν τέλει ταυτίζονται. Έτσι, ο δείκτης λοξότητας δίνεται εναλλακτικά από τη σχέση

$$\gamma_{1,k}^* = \left(\frac{4 - \pi}{2} \right)^2 \left(\frac{\mu_{\tilde{x}}^T \Omega^{-1} \mu_{\tilde{x}}}{1 - \mu_{\tilde{x}}^T \Omega^{-1} \mu_{\tilde{x}}} \right)^3.$$

Παρόμοια, ο δείκτης κύρτωσης μπορεί να δοθεί εναλλακτικά από τη σχέση

$$\gamma_{2,k}^* = 2(\pi - 3) \left(\frac{\mu_{\tilde{x}}^T \Omega^{-1} \mu_{\tilde{x}}}{1 - \mu_{\tilde{x}}^T \Omega^{-1} \mu_{\tilde{x}}} \right)^2.$$

Επιπλέον, από τη μορφή των τύπων αυτών μπορούν να υπολογιστούν ευκολότερα οι προσεγγιστικές μέγιστες τιμές των δεικτών λοξότητας και κύρτωσης που είναι 0,9905 και 0,869 αντίστοιχα και συμπίπτουν με τις αντίστοιχες τιμές των δεικτών λοξότητας και κύρτωσης της μονοδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής.

4. Μια ιδιότητα που προκύπτει με τη βοήθεια της ροπογεννήτριας συνάρτησης και αναφέρεται από τον Azzalini (2005) και τους Azzalini & Capitanio (2014) είναι ότι το άθροισμα μιας πολυδιάστατης λοξής-κανονικής μεταβλητής με μια πολυδιάστατη κανονική μεταβλητή, ανεξάρτητη της πρώτης, είναι πάλι μια πολυδιάστατη λοξή-κανονική μεταβλητή. Η ιδιότητα αυτή αποτελεί επέκταση ανάλογης ιδιότητας της μονοδιάστατης περίπτωσης.

Πρόταση 2.4.5. Αν $x_1 \sim SN_k(\xi, \Omega, \alpha)$ και $x_2 \sim N_k(\mu, \Sigma)$ είναι ανεξάρτητες μεταβλητές, τότε

$$\underline{x} = x_1 + x_2 \sim SN_k\left(\xi + \mu, \check{\Omega}, \check{\alpha}\right),$$

όπου $\check{\Omega} = \Omega + \Sigma$ και $\check{\alpha} = \left(1 + \eta^T \check{\Omega}^{-1} \eta\right)^{-1/2} \check{\omega} \check{\Omega}^{-1} \Omega \eta$, θέτοντας $\eta = \omega^{-1} \alpha$ και $\check{\omega} = \left(\check{\Omega} \mathbb{O}_k\right)^{1/2}$.

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση υπήρξε αντικείμενο μελέτης πολλών ερευνητών και για τα διάφορα αποτελέσματα που προέκυψαν γι' αυτή, ενδεικτικά αναφέρονται οι εργασίες των Arellano-Valle & Genton (2005) για θεμελιώδεις λοξές-συμμετρικές κατανομές, των Arellano-Valle & Azzalini (2006) για ενοποιημένες λοξές-κανονικές κατανομές, των Arellano-Valle et al. (2006) για μίξεις κλίμακας λοξών-κανονικών κατανομών και των Arellano-Valle & Genton (2010) για τετραγωνικές μορφές τυχαίων διανυσμάτων πολυδιάστατων κατανομών.

2.4.5. Περιθώριες κατανομές

Από τη μέθοδο του μετασχηματισμού, που περιγράφηκε παραπάνω, για τη γέννηση της πολυδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής υποδηλώνεται ότι οι περιθώριες κατανομές υποδιανυσμάτων ενός πολυδιάστατα λοξού-κανονικού τυχαίου διανύσματος είναι επίσης πολυδιάστατες λοξές-κανονικές κατανομές. Στην πρόταση που ακολουθεί διερευνώνται οι περιθώριες αυτές κατανομές των υποδιανυσμάτων μιας k - διάστατης λοξής-κανονικής τυχαίας μεταβλητής και δίνεται από τους Azzalini & Capitanio (2014).

Πρόταση 2.4.6. Έστω $\underline{x} \sim SN_k(\underline{0}, \Omega, \underline{\alpha})$ και $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\underline{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$,

$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{pmatrix}$, $\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$, με $x_1, \xi_1, \alpha_1, h \times 1$ διανύσματα και

Ω_{11} $h \times h$ πίνακας με $1 \leq h \leq k$. Τότε:

$$x_1 \sim SN_h(\xi_1, \Omega_{11}, \alpha_1^*),$$

$$\text{όπου } \alpha_1^* = \frac{\alpha_1 + \Omega_{11}^{-1} \Omega_{12} \alpha_2}{(1 + \alpha_2^T \Omega_{22 \cdot 1} \alpha_2)^{1/2}}, \quad \Omega_{22 \cdot 1} = \Omega_{22} - \Omega_{21} \Omega_{11}^{-1} \Omega_{12}.$$

Σύμφωνα με τους ίδιους ερευνητές, θεωρώντας $\underline{\delta} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$,

με δ_1 $h \times 1$ διάνυσμα, και έπειτα από εκτίμηση της

ροπογεννήτριας συνάρτησης που δίνεται από τη σχέση (2.8) για $\underline{t} = (\underline{z}^T, 0)^T$ προκύπτει η ροπογεννήτρια συνάρτηση της μεταβλητής x_1 , η οποία δίνεται από τη σχέση

$$M_{x_1}(\underline{z}) = 2 \exp\left(\underline{z}^T \underline{\xi}_1 + \frac{1}{2} \underline{z}^T \Omega_{11} \underline{z}\right) \Phi\left(\delta_1^T \omega_{11} \underline{z}\right), \quad \underline{z} \in \mathbb{R}^h,$$

από την οποία αποδεικνύεται ότι η x_1 έχει τη μορφή λοξής-κανονικής μεταβλητής με παράμετρο θέσης $\underline{\xi}_1$ και παράμετρο κλίμακας Ω_{11} . Για την εύρεση της παραμέτρου λοξότητας α_1^* χρησιμοποιείται ο δεύτερος τύπος από τη σχέση (2.1) με αντικατάσταση του $\underline{\delta}$ από το δ_1 , το οποίο είναι οι πρώτες h συνιστώσες του δεύτερου τύπου από τη σχέση (2.1). Έπειτα από πράξεις προκύπτει η ζητούμενη σχέση για την παράμετρο α_1^* . Έτσι, $x_1 \sim SN_h(\underline{\xi}_1, \Omega_{11}, \alpha_1^*)$.

Παρατήρηση.

Ο Akdemir (2009, σελ. 39) προτείνει μια νέα οικογένεια λοξών-κανονικών πυκνοτήτων πιθανοτήτων με παράμετρο κλίμακας

$$\Omega^{1/2} = \begin{pmatrix} \Omega_{11}^{1/2} & \Omega_{12}^{1/2} \\ \Omega_{21}^{1/2} & \Omega_{22}^{1/2} \end{pmatrix}. \quad \text{Γι' αυτήν την οικογένεια κατανομών}$$

παρουσιάζει και αποδεικνύει το παραπάνω θεώρημα προσθέτοντας ότι αν $\Omega_{12}^{1/2} = O_{h \times (k-h)}$ και $\Omega_{21}^{1/2} = O_{(k-h) \times h}$ τότε οι μεταβλητές x_1 και x_2 είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Βάσει αυτού του αποτελέσματος παρατίθενται διάφορα ενδιαφέροντα πορίσματα.

2.4.6. Γραμμικοί μετασχηματισμοί και Ανεξαρτησία

Ένα βασικό χαρακτηριστικό της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής είναι η ευκολία της να χειρίζεται γραμμικές και τετραγωνικές μορφές, χαρακτηριστικό το οποίο μεταφέρεται και στην πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή. Σύμφωνα με τους Azzalini & Capitanio (2014), το αναλλοίωτο της πολυδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής ως προς τους γραμμικούς μετασχηματισμούς έπεται από τη σχέση (2.8). Σε αυτήν την υποενότητα παρουσιάζονται σημαντικά αποτελέσματα που προέκυψαν για γραμμικούς μετασχηματισμούς λοξών-κανονικών τυχαίων διανυσμάτων και παρουσιάζεται πόρισμα στο οποίο μπορεί να βασιστεί ένας έλεγχος ανεξαρτησίας μεταξύ συνιστωσών ενός λοξού-κανονικού τυχαίου διανύσματος.

Η πρόταση που ακολουθεί μελετά την κατανομή ενός γραμμικού συνδυασμού μιας πολυδιάστατης λοξής-κανονικής τυχαίας μεταβλητής και εξετάζεται από τους Azzalini & Capitanio (1999).

Πρόταση 2.4.7. Αν $x \sim SN_k(\theta, \Omega, \alpha)$ και A ένας $k \times k$ μη ιδιάζων πίνακας τέτοιος ώστε ο $A^T \Omega A$ να είναι ένας πίνακας συσχέτισης, τότε

$$A^T \underline{x} \sim SN_k(\underline{0}, A^T \Omega A, A^{-1} \underline{\alpha}).$$

Η απόδειξη της πρότασης προκύπτει μέσω τυπικών κανόνων μετασχηματισμού τυχαιών μεταβλητών. Επίσης, η συνθήκη ότι ο $A^T \Omega A$ είναι ένας πίνακας συσχέτισης δεν είναι αναγκαία αλλά υιοθετείται χάριν απλότητας της απόδειξης.

Το παρακάτω αποτέλεσμα απορρέει από την προηγούμενη πρόταση και αναφέρεται από τους Azzalini & Dalla Valle (1996).

Πόρισμα 2.4.8. Αν $\underline{x} \sim SN_k(\underline{0}, \Omega, \underline{\alpha})$ και $S = \text{diag}(s_1, \dots, s_k)$, ένας διαγώνιος πίνακας όπου s_1, \dots, s_k είναι μια ακολουθία όρων με στοιχεία $+1$ και -1 , τότε

$$S\underline{x} \sim SN_k(\underline{0}, S\Omega S, S\underline{\alpha}).$$

Επιπλέον, αν τα στοιχεία του πίνακα S είναι όλα ίσα με -1 , τότε $-\underline{x} \sim SN_k(\underline{0}, \Omega, -\underline{\alpha})$.

Αν αντί για πίνακα εφαρμόσουμε το αποτέλεσμα της Πρότασης 2.4.7. για ένα διάνυσμα, τότε η κατανομή του γραμμικού συνδυασμού δίνεται από την πρόταση που ακολουθεί και διατυπώνεται από τους Contreras-Reyes & Arellano-Valle (2012).

Πρόταση 2.4.9. Έστω $\underline{y} \sim SN_k(\underline{\xi}, \Omega, \underline{\alpha})$, όπου Ω ένας συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας και $\underline{\delta} = (1 + \underline{\alpha}^T \Omega \underline{\alpha})^{-1/2} \Omega \underline{\alpha}$ η κανονική παράμετρος λοξότητας. Τότε για κάθε διάνυσμα $\underline{p}, \underline{q} \in \mathbb{R}^k$, ισχύει:

$$\underline{p}^T(\underline{y} - \underline{q}) \sim SN_1 \left(\underline{p}^T(\underline{\xi} - \underline{q}), \underline{p}^T \Omega \underline{p}, \frac{\underline{p}^T \underline{\delta}}{\sqrt{\underline{p}^T \Omega \underline{p} - (\underline{p}^T \underline{\delta})^2}} \right).$$

Απόδειξη.

Από την Πρόταση 2.4.1. ισχύει:

$$\underline{p}^T(\underline{y} - \underline{q}) \stackrel{d}{=} \underline{p}^T(\underline{\xi} - \underline{q}) + \underline{p}^T \underline{\delta} |u_0| + \underline{p}^T \underline{u}. \quad (2.10)$$

Ακόμα, καθώς $\underline{u} \sim N_k(\underline{0}, \Omega - \underline{\delta} \underline{\delta}^T)$, από την ιδιότητα του αναλλοίωτου της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής σε γραμμικούς μετασχηματισμούς, προκύπτει ότι:

$\underline{p}^T \underline{u} \sim N_1 \left(\underline{0}, \underline{p}^T \Omega \underline{p} - (\underline{p}^T \underline{\delta})^2 \right)$ και είναι ανεξάρτητο του u_0 , ή

$\underline{p}^T \underline{u} \sim N_1 \left(\underline{0}, \underline{p}^T \Omega \underline{p} \left(1 - \left(\frac{\underline{p}^T \underline{\delta}}{\sqrt{\underline{p}^T \Omega \underline{p}}} \right)^2 \right) \right)$ και είναι ανεξάρτητο του

u_0 , ή

$\tilde{p}^T \underline{u} \sim N_1\left(0, \tilde{p}^T \Omega \tilde{p} (1 - \delta_0^2)\right)$ και είναι ανεξάρτητο του u_0 , με

$$\delta_0 = \frac{\tilde{p}^T \underline{\delta}}{\sqrt{\tilde{p}^T \Omega \tilde{p}}}, \text{ ή}$$

$\tilde{p}^T \underline{u} \stackrel{d}{=} \sqrt{\tilde{p}^T \Omega \tilde{p}} \sqrt{1 - \delta_0^2} u_1$, με $u_1 \sim N(0,1)$ ανεξάρτητο του u_0 .

Επομένως, η σχέση (2.10) γίνεται:

$$\tilde{p}^T (\underline{y} - \underline{q}) \stackrel{d}{=} \tilde{p}^T (\underline{\xi} - \underline{q}) + \sqrt{\tilde{p}^T \Omega \tilde{p}} \frac{\tilde{p}^T \underline{\delta}}{\sqrt{\tilde{p}^T \Omega \tilde{p}}} |u_0| + \sqrt{\tilde{p}^T \Omega \tilde{p}} \sqrt{1 - \delta_0^2} u_1, \text{ ή}$$

$$\tilde{p}^T (\underline{y} - \underline{q}) \stackrel{d}{=} \tilde{p}^T (\underline{\xi} - \underline{q}) + \sqrt{\tilde{p}^T \Omega \tilde{p}} \left(\delta_0 |u_0| + \sqrt{1 - \delta_0^2} u_1 \right), \text{ ή}$$

$$\tilde{p}^T (\underline{y} - \underline{q}) \stackrel{d}{=} \tilde{p}^T (\underline{\xi} - \underline{q}) + \sqrt{\tilde{p}^T \Omega \tilde{p}} z_0, \quad (2.11)$$

όπου $z_0 = \delta_0 |u_0| + \sqrt{1 - \delta_0^2} u_1$, με κατανομή

$$z_0 \sim SN_1 \left(0, 1, \frac{\delta_0}{\sqrt{1 - \delta_0^2}} \right), \text{ η οποία προκύπτει με τη βοήθεια της}$$

Πρότασης 2.3.4.. Κάνοντας τους υπολογισμούς με τη μεταβλητή z_0 στην (2.11) παίρνουμε το ζητούμενο. \blacktriangle

Πρόταση 2.4.10. Για μια τυχαία μεταβλητή $\underline{x} \sim SN_k(\underline{0}, \Omega, \underline{\alpha})$, με Ω θετικά ορισμένο πίνακα, υπάρχει ένας γραμμικός μετασχηματισμός $\underline{x}^* = A^* \underline{x}$ τέτοιος ώστε $\underline{x}^* \sim SN_k(\underline{0}, I_k, \underline{\alpha}^*)$, όπου το πολύ μια συνιστώσα του $\underline{\alpha}^*$ είναι μη-μηδενική.

Απόδειξη.

Σύμφωνα με τον Muirhead (1982, p. 592, Theorem A9.7), χρησιμοποιώντας την παραγοντοποίηση $\Omega = C^T C$, με C έναν $k \times k$ πίνακα, και πολλαπλασιάζοντας την \underline{x} με τον αντίστροφο του C^T προκύπτει ο γραμμικός μετασχηματισμός $\underline{y} = (C^T)^{-1} \underline{x}$ τέτοιος, ώστε $\underline{y} \sim SN_k(\underline{0}, I_k, C\underline{\alpha})$. Θεωρώντας τώρα τον $k \times k$ ορθογώνιο πίνακα P έτσι, ώστε μία στήλη του να έχει την ίδια διεύθυνση με τον $C\underline{\alpha}$ (οπότε εξασφαλίζεται η μη - μηδενικότητα του $\underline{\alpha}^*$) και ορίζοντας $\underline{x}^* = P^T \underline{y}$ παίρνουμε το ζητούμενο, όπου $A^* = P^T (C^T)^{-1} = (C^{-1} P)^T$. \blacktriangle

Η Πρόταση 2.4.10. διατυπώνεται και αποδεικνύεται από τους Azzalini & Capitanio (1999) και ορίζει ένα είδος “κανονικής μορφής” της οποίας οι συνιστώσες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους με μία συνιστώσα, το πολύ, να απορροφά όλη την ασυμμετρία της πολυδιάστατης κατανομής. Ακόμη, τα στοιχεία του πίνακα A^* αντιστρέφονται (σύμφωνα με την απόδειξη παραπάνω

$A^* = (C^{-1}P)^T$) με αποτέλεσμα να επιτυγχάνεται κάλυψη της κλάσης $SN_k(\mathbf{0}, \Omega, \alpha)$ ξεκινώντας από την \underline{x}^* και κάνοντας τους κατάλληλους γραμμικούς μετασχηματισμούς. Η πυκνότητα της \underline{x}^* είναι της μορφής

$$2\Phi(\alpha_j^* y_j) \prod_{i=1}^k \phi(y_i),$$

όπου $\alpha_j^* = (\alpha^T \Omega \alpha)^{1/2}$ είναι η μόνη μη-μηδενική συνιστώσα της α^* .

Ακολουθεί ένας χαρακτηρισμός που δόθηκε στην πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή από τους Gupta & Huang (2002) και παρουσιάζει αξιοσημείωτη ομοιότητα με αποτέλεσμα της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής, όπου αν όλοι οι γραμμικοί συνδυασμοί $\underline{h}^T \underline{z}$ μιας πολυδιάστατης τυχαίας μεταβλητής \underline{z} έχουν μονοδιάστατη κανονική κατανομή, τότε η \underline{z} έχει πολυδιάστατη κανονική κατανομή. Από την Πρόταση 2.4.9. αν $\underline{x} \sim SN_k(\mathbf{0}, \Omega, \alpha)$, τότε $\underline{h}^T \underline{x} \sim SN_1(\mathbf{0}, \underline{h}^T \Omega \underline{h}, \alpha^*)$, $\underline{h} \in \mathbb{R}^k$, όπου

$$\alpha^* = \frac{\underline{h}^T \underline{\alpha}}{\sqrt{\underline{h}^T \Omega \underline{h} - (\underline{h}^T \underline{\alpha})^2}}, \text{ δηλαδή ο γραμμικός μετασχηματισμός}$$

$\underline{h}^T \underline{x}$ έχει μονοδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή. Το αντίστροφο

του αποτελέσματος αυτού δίνεται από την πρόταση που ακολουθεί.

Θεώρημα 2.4.11. Έστω $\underline{\mu}_x$ και Σ το μέσο διάνυσμα και ο πίνακας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων αντίστοιχα της k - διάστατης τυχαίας μεταβλητής x . Έστω ακόμη $\Omega = \Sigma + \underline{\mu}_x \underline{\mu}_x^T$. Υποθέτουμε ότι, για κάθε $\underline{h} \in \mathbb{R}^k$ τέτοιο, ώστε $\underline{h}^T \Omega \underline{h} = 1$, ο γραμμικός μετασχηματισμός $\underline{h}^T x$ έχει μονοδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή, με παράμετρο λοξότητας που εξαρτάται από το \underline{h} . Τότε η x έχει πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή.

Απόδειξη.

Για κάθε $\underline{h} \in \mathbb{R}^k$,

$$E(\underline{h}^T x) = \underline{h}^T E(x) = \underline{h}^T \underline{\mu}_x, \quad \text{Var}(\underline{h}^T x) = \underline{h}^T \text{Var}(x) \underline{h} = \underline{h}^T \Sigma \underline{h}.$$

Αν $\underline{h}^T \Omega \underline{h} = 1$ με $\underline{h}^T x$ να έχει μονοδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή με ροπογεννήτρια συνάρτηση $2e^{t^2/2} \Phi(\delta_{\underline{h}} t)$, $t \in \mathbb{R}$, τότε

$$M_{\underline{h}^T x}(t) = E\left(e^{t \underline{h}^T x}\right) = M_x(t \underline{h}) = 2e^{t^2/2} E(\delta_{\underline{h}} t),$$

όπου $\delta_{\underline{h}}$ τέτοιο, ώστε $E(\underline{h}^T x) = c \delta_{\underline{h}} = \underline{h}^T \underline{\mu}_x$ και $c = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Τώρα θα

δείξουμε ότι $\delta_{\tilde{h}} = \frac{\tilde{\alpha}^T \Omega \tilde{h}}{(1 + \tilde{\alpha}^T \Omega \tilde{\alpha})^{1/2}}$. Έστω $\tilde{\alpha} = \frac{\Omega^{-1} \tilde{\mu}_{\tilde{x}}}{\sqrt{c^2 - \tilde{\mu}_{\tilde{x}}^T \Omega^{-1} \tilde{\mu}_{\tilde{x}}}}$.

Τότε παρατηρείται ότι

$$1 + \tilde{\alpha}^T \Omega \tilde{\alpha} = 1 + \frac{\tilde{\mu}_{\tilde{x}}^T \Omega^{-1} \Omega \Omega^{-1} \tilde{\mu}_{\tilde{x}}}{c^2 - \tilde{\mu}_{\tilde{x}}^T \Omega^{-1} \tilde{\mu}_{\tilde{x}}} = \frac{c^2}{c^2 - \tilde{\mu}_{\tilde{x}}^T \Omega^{-1} \tilde{\mu}_{\tilde{x}}},$$

και

$$\tilde{\alpha}^T \Omega \tilde{h} = \frac{\tilde{\mu}_{\tilde{x}}^T \Omega^{-1}}{\sqrt{c^2 - \tilde{\mu}_{\tilde{x}}^T \Omega^{-1} \tilde{\mu}_{\tilde{x}}}} \Omega \tilde{h} = \frac{\tilde{\mu}_{\tilde{x}}^T \tilde{h}}{\sqrt{c^2 - \tilde{\mu}_{\tilde{x}}^T \Omega^{-1} \tilde{\mu}_{\tilde{x}}}} = \frac{c \delta_{\tilde{h}}}{\sqrt{c^2 - \tilde{\mu}_{\tilde{x}}^T \Omega^{-1} \tilde{\mu}_{\tilde{x}}}}.$$

Οπότε, η ροπογεννήτρια συνάρτηση γίνεται

$$M_{\tilde{h}^T \tilde{x}}(t) = 2e^{\frac{1}{2} t^2 \tilde{h}^T \Omega \tilde{h}} \Phi \left(\frac{\tilde{\alpha}^T \Omega \tilde{h} t}{(1 + \tilde{\alpha}^T \Omega \tilde{\alpha})^{1/2}} \right).$$

Θέτοντας $t=1$ και καθώς υποθέσαμε ότι $\tilde{h}^T \Omega \tilde{h} = 1$ η ροπογεννήτρια συνάρτηση γίνεται

$$M_{\tilde{h}^T \tilde{x}}(1) = M_{\tilde{x}}(\tilde{h}) = 2e^{\frac{1}{2} \tilde{h}^T \Omega \tilde{h}} \Phi \left(\frac{\tilde{\alpha}^T \Omega \tilde{h}}{(1 + \tilde{\alpha}^T \Omega \tilde{\alpha})^{1/2}} \right)$$

που είναι η ροπογεννήτρια συνάρτηση της $SN_k(\underline{0}, \Omega, \underline{\alpha})$ και η απόδειξη ολοκληρώνεται. ▲

Οι Azzalini & Capitanio (2014) διατυπώνουν και αποδεικνύουν τον παραπάνω χαρακτηρισμό με διαφορετικό τρόπο από αυτόν που παρουσίασαν οι Gupta & Huang (2002). Σύμφωνα με τους πρώτους, οι Gupta & Huang (2002) περιλαμβάνουν στην εργασία τους άλλα στοιχεία των γραμμικών και των τετραγωνικών μορφών πολυδιάστατων λοξών-κανονικών μεταβλητών.

Ένα ακόμη χαρακτηριστικό που απασχόλησε πολλούς ερευνητές είναι η ανεξαρτησία μεταξύ των συνιστωσών μιας πολυδιάστατης λοξής-κανονικής μεταβλητής. Πρώτοι οι Azzalini & Capitanio (1999) εξετάζουν την κατανομή των συνιστωσών ενός γραμμικού μετασχηματισμού και τις συνθήκες ανεξαρτησίας που ισχύουν μεταξύ ομάδων συνιστωσών ενός γραμμικού μετασχηματισμού. Πριν παρουσιαστεί το αποτέλεσμα αυτό στη γενικευμένη περίπτωση των γραμμικών μετασχηματισμών ακολουθεί ένα προκαταρκτικό αποτέλεσμα που δίνεται από τους Azzalini & Capitanio (2014).

Πρόταση 2.4.12. Για οποιαδήποτε $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\underline{\mu}_1, \underline{b}_1 \in \mathbb{R}^p$, $\underline{\mu}_2, \underline{b}_2 \in \mathbb{R}^q$ τέτοια ώστε $\underline{b}_1 \neq \underline{0}$ και $\underline{b}_2 \neq \underline{0}$ και οποιουδήποτε συμμετρικούς θετικά ορισμένους πίνακες Σ_1, Σ_2 , δεν υπάρχουν $a, c \in \mathbb{R}$, $\underline{b}, \underline{\mu} \in \mathbb{R}^{p+q}$ και πίνακας Σ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} \phi_p(x_1 - \mu_1; \Sigma_1) \Phi(a_1 + b_1^T x_1) \phi_q(x_2 - \mu_2; \Sigma_2) \Phi(a_2 + b_2^T x_2) = \\ = c \phi_{p+q}(x - \mu; \Sigma) \Phi(a + b^T x), \end{aligned}$$

για κάθε $x_1 \in \mathbb{R}^p$, $x_2 \in \mathbb{R}^q$, $x = (x_1^T, x_2^T)^T$.

Στην ειδική περίπτωση $a_1 = a_2 = 0$, το δεύτερο σκέλος της παραπάνω σχέσης αντιστοιχεί στο γινόμενο δύο πολυδιάστατων λοξών-κανονικών σ.π.π. με μη-μηδενική παράμετρο λοξότητας η κάθε μία. Το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι το γινόμενο αυτό δεν μπορεί να εκφραστεί ως μια άλλη πολυδιάστατη λοξή-κανονική σ.π.π.. Έτσι, σύμφωνα με τους Azzalini & Capitanio (2014), εφαρμόζοντας επανειλημμένα το παραπάνω συμπέρασμα προκύπτει ότι: αν το διάνυσμα $x \sim SN_k(0, \Omega, \alpha)$ διαμεριστεί σε h υποδιανύσματα, έτσι ώστε $x^T = (x_1^T, \dots, x_h^T)$, τότε η από κοινού ανεξαρτησία αυτών των h συνιστωσών απαιτεί η δομή των παραμέτρων της κατανομής να είναι της μορφής

$$\Omega = \text{diag}(\Omega_{11}, \dots, \Omega_{hh}),$$

$$\alpha = (0, \dots, \alpha_j, \dots, 0)^T, \alpha_j \neq 0 \text{ για κάποιο } j = 1, \dots, h,$$

έτσι ώστε η από κοινού σ.π.π. του Ορισμού 2.2.3. να μπορεί να παραγοντοποιηθεί σε γινόμενο χωριστών μεταβλητών.

Τέλος, το συμπέρασμα στο οποίο καταλήγουν οι ίδιοι ερευνητές με βάση το παραπάνω αποτέλεσμα είναι ότι “η ανεξαρτησία μεταξύ ενός συνόλου συνιστωσών ισχύει μόνο αν το πολύ μία από αυτές έχει περιθώρια λοξή-κανονική κατανομή”. Ως επακόλουθα προκύπτουν τα εξής: i) δύο μη-συμμετρικές περιθώριες συνιστώσες μιας πολυδιάστατης λοξής-κανονικής μεταβλητής δεν μπορούν να είναι ανεξάρτητες, και ii) η από κοινού κατανομή ενός συνόλου ανεξάρτητων λοξών-κανονικών μεταβλητών με μη-μηδενική παράμετρο λοξότητας (μονοδιάστατη ή πολυδιάστατη) δεν μπορεί να είναι πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή.

Ακολούθως, παρουσιάζονται η επέκταση του παραπάνω αποτελέσματος για τους γραμμικούς μετασχηματισμούς και ένα πόρισμα που προκύπτει από αυτή. Τα παρακάτω διατυπώνονται από τους Azzalini & Capitanio (2014).

Πρόταση 2.4.13. Αν $x \sim SN_k(0, \Omega, \alpha)$ και A ένας $k \times k$ μη ιδιάζων πίνακας τέτοιος ώστε $A^T \Omega A$ να είναι ένας θετικά ορισμένος πίνακας συσχέτισης, τότε οι μεταβλητές $(y_1, \dots, y_p) = A^T x$ είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν οι ακόλουθες συνθήκες ισχύουν ταυτόχρονα

- i. $A_i^T \Omega A_j = 0_{m_i \times m_j}$ για $i \neq j, i, j = 1, \dots, p$
- ii. $A_i^T \Omega \omega^{-1} \alpha \neq 0$ για το πολύ ένα $i, i = 1, \dots, p,$

όπου A_i είναι $m_i \times k$ υποπίνακες του πίνακα A τέτοιοι ώστε

$$A = (A_1, \dots, A_p), \text{ με } \sum_{i=1}^p m_i = k.$$

Η απόδειξη της Πρότασης 2.4.13. δίνεται από τους Azzalini & Capitanio (2014) και παραλείπεται.

Πόρισμα 2.4.14. Έστω $\underline{x} \sim SN_k(\underline{0}, \Omega, \underline{\alpha})$ και $\{s_1, \dots, s_h\}$ μια διαμέριση του συνόλου $\{1, \dots, k\}$. Έστω $(\underline{x}_{s_1}^T, \dots, \underline{x}_{s_h}^T)$ η αντίστοιχη διαμέριση του \underline{x} . Τότε τα $\underline{x}_{s_1}, \dots, \underline{x}_{s_h}$ είναι από κοινού ανεξάρτητα αν και μόνο αν οι ακόλουθες συνθήκες ισχύουν ταυτόχρονα

- i. $\Omega_{s_i s_j} = O_{s_i s_j}$ για $i \neq j, i, j = 1, \dots, h$
- ii. $\alpha_{s_i} \neq \underline{0}$ για το πολύ ένα $i, i = 1, \dots, h,$

όπου $\Omega_{s_i s_j}$ είναι ο υποπίνακας του Ω που σχηματίζεται από s_i γραμμές και s_j στήλες.

Στο Πόρισμα 2.4.14. θα βασιστεί η διερεύνηση της ανεξαρτησίας μεταξύ συνιστωσών μιας πολυδιάστατης λοξής-κανονικής μεταβλητής που παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 4 μέσω προσομοίωσης.

2.4.7. Θεωρία τετραγωνικών μορφών

Ένα μεγάλο σύνολο αποτελεσμάτων που διέπουν τις τετραγωνικές μορφές της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής εξακολουθούν να ισχύουν για την πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή με παράμετρο θέσης $\underline{0}$ με τη βοήθεια της γενικής ιδιότητας της διατάραξης της αμεταβλητότητας $t(\underline{x}) = t(-\underline{x})$. Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τους Azzalini & Capitanio (2014) οι δύο οικογένειες κατανομών συνδέονται σύμφωνα με το παρακάτω αποτέλεσμα.

Πόρισμα 2.4.15. Αν $\underline{x} \sim SN_k(\underline{0}, \Omega, \underline{\alpha})$ και A είναι ένας $k \times k$ συμμετρικός πίνακας, τότε

$$\underline{x}^T A \underline{x} \stackrel{d}{=} \underline{y}^T A \underline{y},$$

όπου $\underline{y} \sim N_k(\underline{0}, \Omega)$.

Σε αυτή την υποενότητα παρουσιάζονται αποτελέσματα που προβάλλουν την επέκταση γνωστών ιδιοτήτων της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής στην πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή, όπως η κατανομή μιας τετραγωνικής μορφής και η ανεξαρτησία δυο τετραγωνικών μορφών, καθώς και αποτελέσματα που αποτελούν τις πιο χαρακτηριστικές ιδιότητες των τετραγωνικών μορφών της πολυδιάστατης λοξής-κανονικής

κατανομής, όπως η ροπογεννήτρια συνάρτησή της και οι δύο πρώτες ροπές της.

I. Κατανομές τετραγωνικών μορφών

Είναι γνωστή η σχέση της χ^2 - κατανομής με την κανονική κατανομή. Ανάλογη σχέση υπάρχει μεταξύ της μονοδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής και της χ^2 - κατανομής. Συγκεκριμένα, ο Azzalini (1985) αναφέρει ότι $x^2 \sim \chi_1^2$, όταν $x \sim SN(\lambda)$. Οι Azzalini & Dalla Valle (1996) γενικεύουν το αποτέλεσμα αυτό για την πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή, και ειδικότερα αποδεικνύουν ότι $\underline{x}^T \Omega^{-1} \underline{x} \sim \chi_k^2$, όταν $\underline{x} \sim SN_k(\underline{0}, \Omega, \alpha)$. Το παρακάτω αποτέλεσμα γενικεύει περαιτέρω την ιδιότητα αυτή και αποδεικνύεται από τους Azzalini & Capitanio (1999).

Πρόταση 2.4.16. Αν $\underline{x} \sim SN_k(\underline{0}, \Omega, \alpha)$ και B είναι ένας $k \times k$ συμμετρικός θετικά ημιορισμένος πίνακας με $rank(B) = p$ και τέτοιος ώστε $B\Omega B = B$, τότε $\underline{x}^T B \underline{x} \sim \chi_p^2$.

Απόδειξη.

Αρχικά θα θεωρήσουμε την απλή περίπτωση του τυχαίου διανύσματος $\underline{y} \sim SN_p(\underline{0}, I_p, \alpha)$. Για κάθε ορθογώνιο πίνακα A ισχύει $\underline{y}^T \underline{y} = \underline{y}^T A A^T \underline{y}$, αποτέλεσμα που εξακολουθεί να ισχύει για

έναν πίνακα που έχει μια στήλη στην ίδια κατεύθυνση με την παράμετρο λοξότητας α , δηλαδή $a_j = n\alpha$, $j = 1, \dots, p$. Με αυτό τον τρόπο κατασκευάζεται η κανονική μορφή που συνδέεται με τη μεταβλητή \underline{y} . Έτσι, προκύπτει ότι $\underline{y}^T \underline{y} \sim \chi_p^2$ ανεξάρτητα από την παράμετρο λοξότητας α .

Στη γενική περίπτωση $\underline{y} \sim SN_k(\underline{0}, \Omega, \alpha)$, από την Πρόταση 2.4.10.

υπάρχει γραμμικός μετασχηματισμός $\underline{y}^* = A^* \underline{y}$ τέτοιος ώστε

$\underline{y}^* \sim SN_k(\underline{0}, I_k, \alpha^*)$ με το πολύ μία συνιστώσα του α^* μη-

μηδενική. Οπότε, έστω M ένας $k \times p$ πλήρους βαθμίδας πίνακας

με $p \leq k$ και έστω $B = MM^T$. Τότε $\underline{x}^T B \underline{x} = \underline{x}^T M M^T \underline{x} = \underline{y}^{*T} \underline{y}^*$ και

σύμφωνα με την Πρόταση 2.4.7. ισχύει ότι

$$\underline{y}^* = M^T \underline{x} \sim SN_p(\underline{0}, M^T \Omega M, \alpha_{\underline{y}^*}^*), \quad \text{όπου} \quad \alpha_{\underline{y}^*}^* = (M^T)^{-1} \alpha.$$

Ωστόσο, από τη σχέση που ισχύει για τον πίνακα B παρατηρούμε ότι: $B \Omega B = B$, και επομένως $M M^T \Omega M M^T = M M^T$.

Πολλαπλασιάζοντας κατάλληλα με $(M^T M)^{-1} M^T$ προκύπτει

$$(M^T M)^{-1} M^T M M^T \Omega M M^T = (M^T M)^{-1} M^T M M^T \quad \text{ή έπειτα από}$$

απαλοιφή προκύπτει $M^T \Omega M M^T = M^T$. Πολλαπλασιάζοντας

πάλι κατάλληλα με $M (M^T M)^{-1}$ προκύπτει

$$M^T \Omega M (M^T M)^{-1} M^T M = (M^T M)^{-1} M^T M \quad \text{το οποίο οδηγεί στη}$$

σχέση $M^T \Omega M = I_p$. Έτσι, $\underline{y}^* \sim SN_p \left(\underline{0}, I_p, \alpha_{\underline{y}^*} \right)$, δηλαδή η σχέση ανάχθηκε στην απλή περίπτωση που εξετάστηκε αρχικά και έτσι τελικά στη γενική περίπτωση ισχύει ότι $\underline{y}^T \underline{y} \sim \chi_p^2$. ▲

Ένα συμπέρασμα που αξίζει να σημειωθεί είναι η ανεξαρτησία της πολυδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής από την παράμετρο λοξότητας α , χαρακτηριστικό που παρατηρείται σε αποτελέσματα που παρατίθενται σε επόμενη υποενότητα.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα αποτελεί συνέπεια της προηγούμενης πρότασης και δίνεται από τους Azzalini & Capitanio (1999).

Πόρισμα 2.4.17. Αν $\underline{x} \sim SN_k(\underline{0}, \Omega, \alpha)$ και C ένας $k \times p$ πίνακας πλήρους βαθμίδας ($p \leq k$), τότε $\underline{x}^T C \left(C^T \Omega C \right)^{-1} C^T \underline{x} \sim \chi_p^2$.

Ενδιαφέρον αποτέλεσμα αποτελεί η επιλογή $C = \Omega^{-1}$. Στην περίπτωση αυτή, $\underline{x}^T \Omega^{-1} \underline{x} \sim \chi_k^2$.

II. Ροπές τετραγωνικών μορφών

Οι Gupta & Huang (2002) προσδιορίζουν τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της τετραγωνικής μορφής

$Q = (x - \alpha)^T A (x - \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}^k$, όταν $x \sim SN_k(0, \Omega, \alpha)$ και A ένας $k \times k$ συμμετρικός πίνακας.

Θεώρημα 2.4.18. Η ροπογεννήτρια συνάρτηση της $Q = (x - \alpha)^T A (x - \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}^k$ δίνεται από τη σχέση

$$M(t) = \frac{2 \exp \left\{ \alpha^T \left[tA + 2t^2 A (\Omega^{-1} - 2tA)^{-1} A \right] \alpha \right\}}{|\mathbf{I} - 2tA\Omega|^{1/2}} \times \Phi \left(- \frac{2t\alpha^T (\Omega^{-1} - 2tA)^{-1} A \alpha}{\left(1 + \alpha^T (\Omega^{-1} - 2tA)^{-1} \alpha \right)^{1/2}} \right), t \in \mathbb{R}.$$

Απόδειξη.

Για $t \in \mathbb{R}$ η ροπογεννήτρια συνάρτηση της Q είναι

$$\begin{aligned} M(t) &= 2 \int_{\mathbb{R}^k} e^{t(x-\alpha)^T A (x-\alpha)} \phi_k(x; \Omega) \Phi(\alpha^T x) dx \\ &= \frac{2}{(2\pi)^{k/2} |\Omega|^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^k} e^{t(x-\alpha)^T A (x-\alpha)} e^{-\frac{1}{2} x^T \Omega^{-1} x} \Phi(\alpha^T x) dx \\ &= \frac{2}{(2\pi)^{k/2} |\Omega|^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\frac{1}{2} (x^T \Omega^{-1} x - 2t(x-\alpha)^T A (x-\alpha))} \Phi(\alpha^T x) dx \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{(2\pi)^{k/2} |\Omega|^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\frac{1}{2}(\underline{x}^T (\Omega^{-1} - 2tA) \underline{x} + 4t\alpha^T A \underline{x} - 2t\alpha^T A \alpha)} \Phi(\alpha^T \underline{x}) d\underline{x}.$$

Εφαρμόζοντας στην τελευταία σχέση το μετασχηματισμό $\underline{x} = -2t(\Omega^{-1} - 2tA)^{-1} A\alpha + (\Omega^{-1} - 2tA)^{-1/2} \underline{u}$, όπου $\underline{u} \sim N_k(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ και έπειτα από αλγεβρικούς υπολογισμούς η ροπογεννήτρια συνάρτηση δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} M(t) &= \frac{2e^{\alpha^T \left(tA + 2t^2 A (\Omega^{-1} - 2tA)^{-1} A \right) \alpha}}{|\mathbf{I} - 2tA\Omega|^{1/2}} \\ &\times \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\frac{1}{2}\underline{u}^T \underline{u}} \Phi\left(\alpha^T \left(-2t(\Omega^{-1} - 2tA)^{-1} A\alpha + (\Omega^{-1} - 2tA)^{-1/2} \underline{u} \right)\right) d\underline{u}, \\ &= \frac{2e^{\alpha^T \left(tA + 2t^2 A (\Omega^{-1} - 2tA)^{-1} A \right) \alpha}}{|\mathbf{I} - 2tA\Omega|^{1/2}} \\ &\times E_{\underline{u}} \left(\Phi \left(-2t\alpha^T (\Omega^{-1} - 2tA)^{-1} A\alpha + \alpha^T (\Omega^{-1} - 2tA)^{-1/2} \underline{u} \right) \right). \end{aligned}$$

Από την Πρόταση 2.4.4. η ροπογεννήτρια συνάρτηση τελικά παίρνει τη μορφή

$$M(t) = \frac{2e^{\alpha^T \left(tA + 2t^2 A (\Omega^{-1} - 2tA)^{-1} A \right) \alpha}}{|I - 2tA\Omega|^{1/2}} \times \Phi \left(- \frac{2t\alpha^T \left(\Omega^{-1} - 2tA \right)^{-1} A \alpha}{\left(1 + \alpha^T \left(\Omega^{-1} - 2tA \right)^{-1/2} \alpha \right)^{1/2}} \right),$$

που είναι η ζητούμενη μορφή. ▲

Στη συνέχεια, οι ίδιοι συγγραφείς διερευνούν τη μορφή της ροπογεννήτριας συνάρτησης για διάφορες επιλογές των παραμέτρων της κατανομής της \underline{x} .

Οι Genton et al. (2001) με τη βοήθεια των τεσσάρων πρώτων ροπών που υπολόγισαν για την $\underline{x} \sim SN_k(\underline{\mu}, \Omega, \underline{\alpha})$, διατυπώνουν τις δύο πρώτες ροπές μιας τετραγωνικής μορφής, την αναμενόμενη τιμή και τη συνδιακύμανση, και τη συσχέτιση δύο τυχαίων τετραγωνικών μορφών με τύπους που δίνονται στην πρόταση που ακολουθεί.

Πρόταση 2.4.19. Έστω $\underline{x} \sim SN_k(\underline{\mu}, \Omega, \underline{\alpha})$ και A, B δύο $k \times k$ συμμετρικοί πίνακες. Τότε

$$(a) \ E(\underline{x}^T A \underline{x}) = tr(A\Omega) + \underline{\mu}^T A \underline{\mu} + 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \underline{\mu}^T A \underline{\alpha},$$

$$(b) \text{Var}\left(\tilde{x}^T A \tilde{x}\right) = 2\text{tr}\left[\left(A\Omega\right)^2\right] + 4\tilde{\mu}^T\left(A\Omega A\right)\left(\tilde{\mu} + 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\tilde{\delta}\right) - 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[2\left(\tilde{\delta}^T A \tilde{\delta}\right)\left(\tilde{\mu}^T A \tilde{\delta}\right) + 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\tilde{\mu}^T A \tilde{\delta}\right)^2\right],$$

$$(c) \text{Cov}\left(\tilde{x}^T A \tilde{x}, \tilde{x}^T B \tilde{x}\right) = 2\text{tr}\left(A\Omega B\Omega\right) + 2\tilde{\mu}^T\left(A\Omega B + B\Omega A\right)\left(\tilde{\mu} + 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\tilde{\delta}\right) - 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\left(\tilde{\delta}^T A \tilde{\delta}\right)\left(\tilde{\mu}^T B \tilde{\delta}\right) + \left(\tilde{\mu}^T A \tilde{\delta}\right)\left(\tilde{\delta}^T B \tilde{\delta}\right) + 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\tilde{\mu}^T A \tilde{\delta}\right)\left(\tilde{\mu}^T B \tilde{\delta}\right)\right].$$

Παρατηρείται ότι όταν $\tilde{\delta} = \underline{0}$ ή ισοδύναμα $\underline{\alpha} = \underline{0}$ οι παραπάνω σχέσεις μετατρέπονται στις αντίστοιχες σχέσεις που ισχύουν για τις τετραγωνικές μορφές της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής.

III. Ανεξαρτησία γραμμικών και τετραγωνικών μορφών

Σε αυτή την υποενότητα μελετώνται οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες κάτω από τις οποίες γραμμικές και τετραγωνικές μορφές λοξών-κανονικών τυχαίων διανυσμάτων είναι ανεξάρτητες. Επίσης, δίνονται οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες κάτω από τις οποίες δύο τετραγωνικές μορφές λοξών-κανονικών τυχαίων διανυσμάτων είναι ανεξάρτητες. Τα παρακάτω δύο θεωρήματα διατυπώνουν τις συνθήκες που εξασφαλίζουν την ανεξαρτησία σε κάθε μία από τις περιπτώσεις

που προαναφέρθηκαν και αποδεικνύονται πλήρως από τους Gupta & Huang (2002).

Θεώρημα 2.4.20. Έστω $\underline{x} \sim SN_k(\underline{0}, \Omega, \underline{\alpha})$ και A ένας $k \times k$ συμμετρικός πίνακας. Τότε η γραμμική μορφή $\underline{h}^T \underline{x}$, με $\underline{h} \in \mathbb{R}^k$, και η τετραγωνική μορφή $\underline{x}^T A \underline{x}$ είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν $A\Omega \underline{h} = \underline{0}$ και $A\Omega \underline{\alpha} = \underline{0}$.

Θεώρημα 2.4.21. Έστω $\underline{x} \sim SN_k(\underline{0}, \Omega, \underline{\alpha})$ και A, B δύο $k \times k$ συμμετρικοί πίνακες. Τότε οι τετραγωνικές μορφές $\underline{x}^T A \underline{x}$ και $\underline{x}^T B \underline{x}$ είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν $A\Omega B = \mathbf{O}_{k \times k}$.

Τα επόμενα θεωρήματα διερευνούν τις συνθήκες κάτω από τις οποίες p τετραγωνικές μορφές είναι ανεξάρτητες και διατυπώνονται από τους Azzalini & Capitanio (1999).

Θεώρημα 2.4.22. Αν $\underline{x} \sim SN_k(\underline{0}, \Omega, \underline{\alpha})$ και $B_i, i = 1, \dots, p$ είναι $k \times k$ συμμετρικοί θετικά ημιορισμένοι πίνακες με $rank(B_i) = r_i, i = 1, \dots, p$ τέτοιοι, ώστε

- i. $B_i \Omega B_j = \mathbf{O}_{k \times k}$ για $i \neq j$,
- ii. $\underline{\alpha}^T \Omega B_i \Omega \underline{\alpha} \neq 0$ για το πολύ ένα i ,

τότε οι τετραγωνικές μορφές $\underline{x}^T \mathbf{B}_i \underline{x}$, $i = 1, \dots, p$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Απόδειξη.

Παρόμοια με την απόδειξη της Πρότασης 2.4.16. θεωρούμε τους $k \times r_i$ πίνακες \mathbf{M}_i με $\text{rank}(\mathbf{M}_i) = r_i$, $i = 1, \dots, p$ και έστω

$\mathbf{B}_i = \mathbf{M}_i \mathbf{M}_i^T$. Τότε μπορούμε να γράψουμε

$\underline{x}^T \mathbf{B}_i \underline{x} = \underline{x}^T \mathbf{M}_i \mathbf{M}_i^T \underline{x} = \left(\mathbf{M}_i^T \underline{x} \right)^T \left(\mathbf{M}_i^T \underline{x} \right)$. Οπότε οι τετραγωνικές

μορφές $\underline{x}^T \mathbf{B}_i \underline{x}$, $i = 1, \dots, p$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους αν οι

γραμμικές μορφές $\mathbf{M}_i^T \underline{x}$, $i = 1, \dots, p$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Η ανεξαρτησία μεταξύ γραμμικών μετασχηματισμών ορίζεται σύμφωνα με την Πρόταση 2.4.13.. Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι

ικανοποιούνται οι συνθήκες (i) $\mathbf{M}_i^T \Omega \mathbf{M}_j = \mathbf{O}_{k \times k}$ για $i \neq j$ και (ii)

$\mathbf{M}_i^T \Omega \alpha \neq \mathbf{0}$ για το πολύ ένα i . Βάσει των σχέσεων που ισχύουν

για τους πίνακες \mathbf{B}_i , $i = 1, \dots, p$ παρατηρούμε ότι $\mathbf{B}_i \Omega \mathbf{B}_j = \mathbf{O}_{k \times k}$ ή

$\mathbf{M}_i \mathbf{M}_i^T \Omega \mathbf{M}_j \mathbf{M}_j^T = \mathbf{O}_{k \times k}$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$\mathbf{M}_i \neq \mathbf{O}_{k \times r_i}$ και $\mathbf{M}_j^T \neq \mathbf{O}_{r_j \times k}$, προκύπτει $\mathbf{M}_i^T \Omega \mathbf{M}_j = \mathbf{O}_{r_i \times r_j}$, για

$i \neq j$, επομένως αποδείχθηκε ότι ικανοποιείται η συνθήκη (i).

Επιπλέον, $\alpha^T \Omega \mathbf{B}_i \Omega \alpha \neq 0$ ή $\alpha^T \Omega \mathbf{M}_i \mathbf{M}_i^T \Omega \alpha \neq 0$ ή

$\left(\mathbf{M}_i^T \Omega \alpha \right)^T \left(\mathbf{M}_i^T \Omega \alpha \right) \neq 0$ από την οποία προκύπτει ότι $\mathbf{M}_i^T \Omega \alpha \neq \mathbf{0}$,

για το πολύ ένα i , οπότε οι γραμμικές μορφές $\mathbf{M}_i^T \underline{x}$, $i = 1, \dots, p$,

είναι ανεξάρτητες και με την ικανοποίηση της συνθήκης (ii) η απόδειξη ολοκληρώνεται. ▲

Θεώρημα 2.4.23. (Fisher-Cochran) Αν $\underline{x} \sim SN_k(\underline{0}, I_k, \underline{\alpha})$ και B_i , $i = 1, \dots, p$, είναι $k \times k$ συμμετρικοί θετικά ημιορισμένοι πίνακες με

$rank(B_i) = r_i$, $i = 1, \dots, p$ τέτοιοι, ώστε $\sum_{i=1}^p B_i = I_k$ και $B_i \underline{\alpha} \neq \underline{0}$ για

τουλάχιστον ένα i , τότε οι τετραγωνικές μορφές $\underline{x}^T B_i \underline{x}$, $i = 1, \dots, p$

είναι ανεξάρτητες $\chi_{p_i}^2$ αν και μόνο αν $\sum_{i=1}^p p_i = k$.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.23. βασίζεται στα βήματα του κλασικού Θεωρήματος Fisher-Cochran που δόθηκε, μεταξύ άλλων, από το Rao (1973), λαμβάνοντας υπόψη το Θεώρημα 2.4.22. για την ανεξαρτησία μεταξύ τετραγωνικών μορφών και την Πρόταση 2.4.16. για τις περιθώριες κατανομές αυτών.

Τα παραπάνω θεμελιώδη θεωρήματα είναι άρρηκτα συνδεδεμένα με τα παρακάτω αποτελέσματα που διατυπώνονται από το Loperfido (2001). Η πρόταση που ακολουθεί είναι χρήσιμη για τη διατύπωση περαιτέρω αποτελεσμάτων και ερευνά την κατανομή ενός πίνακα που προκύπτει από το γινόμενο ενός λοξού-κανονικού τυχαίου διανύσματος με τον ανάστροφό του.

Πρόταση 2.4.24. Έστω $x \sim SN_k(\Omega, \alpha)$. Τότε $xx^T \sim W(\Omega, 1)$, όπου W η κατανομή Wishart.

Η πρόταση που ακολουθεί είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 2.4.24. και εξετάζει την από κοινού κατανομή μερικών τετραγωνικών μορφών παρατηρώντας ότι η κατανομή του τυχαίου πίνακα xx^T δεν εξαρτάται από την παράμετρο λοξότητας α .

Πρόταση 2.4.25. Έστω $x \sim SN_k(\Omega, \alpha)$ και $B_i, i=1, \dots, p$, τετραγωνικοί πίνακες τάξης r . Τότε η από κοινού κατανομή των τετραγωνικών μορφών $x^T B_1 x, x^T B_2 x, \dots, x^T B_p x$ δεν εξαρτάται από την παράμετρο λοξότητας α .

Οι αποδείξεις των Προτάσεων 2.4.24. και 2.4.25. δίνονται αναλυτικά από τον Loperfido (2001) και παραλείπονται.

Στην υποενότητα αυτή παρουσιάστηκαν μόνο οι πιο βασικές ιδιότητες των γραμμικών και τετραγωνικών μορφών λοξών-κανονικών τυχαίων μεταβλητών. Πρόσθετες ιδιότητες προκύπτουν για τις κατανομές τετραγωνικών μορφών λοξών-κανονικών τυχαίων διανυσμάτων και βρίσκουν εφαρμογή σε πολλά προβλήματα, όπως για παράδειγμα στη δημιουργία t -test (Loperfido (2001)) και στις χρονοσειρές (Genton et al. (2001)).

2.4.8. Εντροπία του Shannon

Στην υποενότητα αυτή το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στον προσδιορισμό της εντροπίας του Shannon για την πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή. Αρχικά, δίνεται ο γενικός ορισμός της εντροπίας και στη συνέχεια παρατίθενται κάποια χρήσιμα αποτελέσματα για την απλούστευση των υπολογισμών της εντροπίας του Shannon στην πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή.

Η πρώτη φορά που εμφανίστηκε στη βιβλιογραφία η έννοια της εντροπίας μιας κατανομής πιθανότητας ήταν το 1948 από τον Shannon στα πλαίσια της θεμελίωσης της μαθηματικής θεωρίας της επικοινωνίας. Έκτοτε, η εντροπία του Shannon έχει χρησιμοποιηθεί, σε διάφορα εννοιολογικά πλαίσια, σε όλες σχεδόν τις επιστημονικές περιοχές και αποτελεί μια δυναμική ποσότητα για τον φορμαλισμό και την επίλυση προβλημάτων που αναφέρονται σε πολλούς επιστημονικούς κλάδους.

Σύμφωνα, λοιπόν, με τον Shannon (1948), δίνεται ακολούθως ο ορισμός της εντροπίας του Shannon ή αλλιώς της διαφορικής εντροπίας (differential entropy) για μια πολυδιάστατη συνεχή τυχαία μεταβλητή.

Ορισμός 2.4.26. Έστω $\underline{x} \in \mathbb{R}^k$ μια k -διάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{\underline{x}}(\underline{x})$. Τότε η εντροπία του Shannon δίνεται από τη σχέση

$$H(\underline{x}) = -E(\log f_{\underline{x}}(\underline{x})) = - \int_{\mathbb{R}^k} f_{\underline{x}}(\underline{x}) \log f_{\underline{x}}(\underline{x}) d\underline{x}.$$

Ακολουθώς δίνονται οι ορισμοί της από κοινού εντροπίας ενός ζεύγους τυχαίων μεταβλητών και της υπό συνθήκη εντροπίας μιας τυχαίας μεταβλητής δοθείσης μιας άλλης τυχαίας μεταβλητής. Οι ορισμοί τους εισάγονται από τους Cover & Thomas (2006) και απαιτούνται για τη μετέπειτα ανάπτυξη της θεωρίας αναδεικνύοντας τις σχέσεις που συνδέουν την εντροπία με άλλα μέτρα πληροφορίας και τις αναπαραστάσεις που μπορούν να δοθούν για την εντροπία. Με την εισαγωγή των ορισμών αυτών επεκτείνεται κατά κάποιον τρόπο ο ορισμός της εντροπίας μιας τυχαίας μεταβλητής στην εντροπία ενός ζεύγους τυχαίων μεταβλητών, μια επέκταση που ωστόσο δεν προσφέρει κάτι καινούριο καθώς το ζεύγος των τυχαίων μεταβλητών θα μπορούσε να θεωρηθεί ως ένα τυχαίο διάνυσμα.

Ορισμός 2.4.27. Η από κοινού εντροπία ενός ζεύγους τυχαίων μεταβλητών $(\underline{x}, \underline{y})$ με $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ και $\underline{y} \in \mathbb{R}^m$ και από κοινού σ.π.π. $f_{\underline{x}, \underline{y}}(\underline{x}, \underline{y})$ ορίζεται να είναι

$$\begin{aligned} H(\underline{x}, \underline{y}) &= -E(\log f_{\underline{x}, \underline{y}}(\underline{x}, \underline{y})) \\ &= - \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} f_{\underline{x}, \underline{y}}(\underline{x}, \underline{y}) \log f_{\underline{x}, \underline{y}}(\underline{x}, \underline{y}) d\underline{x} d\underline{y}. \end{aligned}$$

Ορισμός 2.4.28. Η υπό συνθήκη εντροπία μιας $(n + m)$ -διάστατης τυχαίας μεταβλητής $(\underline{x}, \underline{y})$ με πυκνότητα $f_{\underline{x}, \underline{y}}(\underline{x}, \underline{y})$ ορίζεται να είναι

$$\begin{aligned} H(\underline{y} | \underline{x}) &= -E\left(\log f_{\underline{y}|\underline{x}}(\underline{y} | \underline{x})\right) \\ &= - \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} f_{\underline{x}, \underline{y}}(\underline{x}, \underline{y}) \log f_{\underline{y}|\underline{x}}(\underline{y} | \underline{x}) d\underline{x} d\underline{y}. \end{aligned}$$

Από τους Ορισμούς 2.4.27. και 2.4.28. εξάγονται κάποιες σημαντικές σχέσεις-αναπαραστάσεις για την εντροπία και αποδεικνύονται από τους Cover & Thomas (2006).

Θεώρημα 2.4.29. Αν $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{y} \in \mathbb{R}^m$ και $\underline{z} \in \mathbb{R}^k$ με από κοινού σ.π.π. $f_{\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}}(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$, περιθώριες κατανομές ανά ζεύγη $f_{\underline{x}, \underline{y}}(\underline{x}, \underline{y})$, $f_{\underline{x}, \underline{z}}(\underline{x}, \underline{z})$, $f_{\underline{y}, \underline{z}}(\underline{y}, \underline{z})$ και περιθώριες κατανομές ανά μεταβλητή $f_{\underline{x}}(\underline{x})$, $f_{\underline{y}}(\underline{y})$, $f_{\underline{z}}(\underline{z})$ τότε ισχύουν τα εξής:

- i. (Chain rule) $H(\underline{x}, \underline{y}) = H(\underline{x}) + H(\underline{y} | \underline{x})$
- ii. $H(\underline{x}, \underline{y} | \underline{z}) = H(\underline{x} | \underline{z}) + H(\underline{y} | \underline{x}, \underline{z})$.

Παρατήρηση.

Σημειώνεται ότι $H(\underline{y} | \underline{x}) \neq H(\underline{x} | \underline{y})$. Ωστόσο, λόγω συμμετρίας

ισχύει ότι $H(\underline{x}) - H(\underline{x} | \underline{y}) = H(\underline{y}) - H(\underline{y} | \underline{x})$.

Πριν διατυπωθεί ο ορισμός της εντροπίας για την πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή δίνεται ένα σημαντικό λήμμα, το οποίο παρουσιάζεται από τους Arellano-Valle et al. (2013) και αποδεικνύει ότι η εντροπία μιας πολυδιάστατης ελλειπτικής κατανομής με παραμέτρους θέσης και κλίμακας δεν εξαρτάται από την παράμετρο θέσης. Το αποτέλεσμα αυτό εξειδικεύει για την περίπτωση της πολυδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής ιδιότητα της εντροπίας του Shannon, σύμφωνα με την οποία το εν λόγω μέτρο ενώ παραμένει αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς θέσης δεν παραμένει αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς κλίμακος (Cover and Thomas (1991, p. 234, 238)).

Λήμμα 2.4.30. Έστω $f_{\underline{x}}(\underline{x}) = |\Omega|^{-1/2} f_{\underline{x}_0}(\Omega^{-1/2}(\underline{x} - \underline{\xi}))$ η σ.π.π. με παραμέτρους θέσης και κλίμακας $\underline{\xi} \in \mathbb{R}^k$ και $\Omega \in \mathbb{R}^{k \times k}$ αντιστοίχα. Έστω $\underline{x}_0 = \Omega^{-1/2}(\underline{x} - \underline{\xi})$ μια τυποποιημένη μορφή της \underline{x} με τυποποιημένη σ.π.π. $f_{\underline{x}_0}(\underline{x}_0)$ η οποία δεν εξαρτάται από τις παραμέτρους $\underline{\xi}$ και Ω . Τότε,

$$H(\underline{x}) = \frac{1}{2} \log |\Omega| + H(\underline{x}_0),$$

όπου $H(x_0) = -E\left(\log\left(f_{x_0}(x_0)\right)\right)$ είναι η εντροπία του τυποποιημένου τυχαίου διανύσματος x_0 .

Το αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από τη σχέση $E\left(\log f_x(x)\right) = -\frac{1}{2}\log|\Omega| + E\left(\log\left(f_{x_0}(x_0)\right)\right)$.

Ένας άλλος συμβολισμός που έχει αποδοθεί στην εντροπία είναι ο H_x ο οποίος θα υιοθετηθεί για το υπόλοιπο της παρούσας διατριβής.

Με τη βοήθεια του Λήμματος 2.4.30. οι Arellano-Valle et al. (2013) υπολόγισαν την εντροπία του Shannon για την πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή.

Έστω $x \sim SN_k(\xi, \Omega, \alpha)$ με σ.π.π. $f(x) = 2\phi_k(x; \xi, \Omega)\Phi\left(\alpha^T(x - \xi)\right)$, $x \in \mathbb{R}^k$, όπου $\phi_k(x; \xi, \Omega) = |\Omega|^{-1/2}\phi_k(x_0)$ η σ.π.π. της k - διάστατης $N_k(\xi, \Omega)$ κατανομής, $x_0 = \Omega^{-1/2}(x - \xi)$, $\phi_k(x_0)$ είναι η σ.π.π. της k - διάστατης $N_k(0, I_k)$ κατανομής και Φ είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της μονοδιάστατης τυπικής κατανομής. Τότε, η σ.π.π. της x μπορεί να γραφεί ως εξής

$$f(x) = |\Omega|^{-1/2} f(x_0), \text{ με } f(x_0) = 2\phi_k(x_0)\Phi(\bar{\alpha}^T x_0), \quad (2.12)$$

όπου $\bar{\alpha} = \Omega^{1/2}\alpha$. Επομένως, μπορεί να εφαρμοστεί το Λήμμα 2.4.30. και να υπολογιστεί η εντροπία της k - διάστατης λοξής-κανονικής κατανομής. Προκειμένου να απλοποιηθούν οι υπολογισμοί δίνεται το ακόλουθο αποτέλεσμα για το οποίο έστω $x_0 \sim SN_k(0, I_k, \alpha)$, δηλαδή x_0 ακολουθεί την k - διάστατη τυποποιημένη λοξή-κανονική κατανομή με σ.π.π. $f(x_0) = 2\phi_k(x_0)\Phi(\alpha^T x_0)$.

Λήμμα 2.4.31. Έστω $x \sim SN_k(\xi, \Omega, \alpha)$ και $x_0 = \Omega^{-1/2}(x - \xi)$. Έστω ακόμη $x_{0N} \sim N_k(0, I_k)$ και $w \sim SN_1(\|\alpha\|)$, όπου $\|\bar{\alpha}\| = \bar{\alpha}^T \bar{\alpha} = (\alpha^T \Omega \alpha)^{1/2}$. Τότε $x_0 \sim SN_k(0, I_k, \bar{\alpha})$, $\alpha^T(x - \xi) = \bar{\alpha}^T x_0 = \|\bar{\alpha}\| w$ και $g(x_0) = g(x_{0N})$ για οποιαδήποτε άρτια συνάρτηση g .

Από τα Λήμματα 2.4.30. και 2.4.31. προκύπτει η ακόλουθη πρόταση με την οποία υπολογίζεται η εντροπία της πολυδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής.

Πρόταση 2.4.32. Η εντροπία ενός λοξού-κανονικού τυχαίου διανύσματος $x \sim SN_k(\xi, \Omega, \alpha)$ είναι

$$H_x^{SN_k} = H_{x_N}^{N_k} - E\left(\log\left(2\Phi\left(\|\bar{\alpha}\|w\right)\right)\right),$$

όπου $H_{x_N}^{N_k}$ είναι η εντροπία του $x_N \sim N_k(\xi, \Omega)$, $w \sim SN_1(\|\bar{\alpha}\|)$ και $\bar{\alpha} = \Omega^{1/2}\alpha$.

Απόδειξη.

Έστω $x_0 = \Omega^{-1/2}(x - \xi)$. Από τα Λήμματα 2.4.30. και 2.4.31. και τη σχέση (2.12) έχουμε

$$\begin{aligned} E\left(\log(f(x))\right) &= -\frac{1}{2}\log|\Omega| + E\left(\log\left(2\phi_k(x_0)\Phi\left(\bar{\alpha}^T x_0\right)\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2}\log|\Omega| + E\left(\log\left(\phi_k(x_0)\right)\right) + E\left(\log\left(2\Phi\left(\bar{\alpha}^T x_0\right)\right)\right), \end{aligned}$$

και επειδή η συνάρτηση ϕ_k είναι άρτια ισχύει ότι $E\left(\log\left(\phi_k(x_0)\right)\right) = E\left(\log\left(\phi_k(x_{0N})\right)\right)$, όπου $x_{0N} \sim N_k(0, I_k)$, και επειδή $\bar{\alpha}^T x_0 \stackrel{d}{=} \|\bar{\alpha}\|w$ ισχύει ότι $E\left(\log\left(2\Phi\left(\bar{\alpha}^T x_0\right)\right)\right) = E\left(\log\left(2\Phi\left(\|\bar{\alpha}\|w\right)\right)\right)$. Οπότε προκύπτει

$$E\left(\log(f(x))\right) = -\frac{1}{2}\log|\Omega| + E\left(\log\left(\phi_k(x_{0N})\right)\right) + E\left(\log\left(2\Phi\left(\|\bar{\alpha}\|w\right)\right)\right)$$

$$= -H_{\mathcal{X}_N}^{N_k} + E\left(\log\left(2\Phi\left(\|\bar{\alpha}\|_w\right)\right)\right),$$

και η απόδειξη ολοκληρώνεται. ▲

Πολλοί ερευνητές μελέτησαν τη μορφή της εντροπίας του Shannon για διάφορες πολυδιάστατες οικογένειες κατανομών. Μερικές εκφράσεις της εντροπίας για κάποιες συνεχείς πολυδιάστατες κατανομές δίνονται από τους Ahmed & Gokhale (1989), για τις πολυδιάστατες ελλειπτικές και λοξές-ελλειπτικές κατανομές με έμφαση στην πολυδιάστατη κανονική και λοξή-κανονική κατανομή και την πολυδιάστατη Student t και λοξή- t δίνονται από τους Arellano-Valle et al. (2013), ενώ αναλυτικές εκφράσεις της εντροπίας του Shannon για 15 πολυδιάστατες οικογένειες κατανομών δίνονται από τους Zografos & Nadarajah (2005) και τον Zografos (2008) για την ελλειπτική οικογένεια κατανομών.

2.5 Η διδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή

Για να γίνει κατανοητή η πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή και οι ιδιότητες αυτής στην ενότητα αυτή εφαρμόζονται κάποια από τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη ενότητα και τέλος αναλύεται η μορφή της διδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής.

Από τον Ορισμό 2.2.3. η σ.π.π. της διδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής δίνεται από τη σχέση

$$f(x_1, x_2) = 2\phi_2(x_1, x_2; \omega) \Phi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2), \quad x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \quad (2.13)$$

όπου ω είναι τα μη-διαγώνια στοιχεία του πίνακα $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ \omega & 1 \end{pmatrix}$.

Αντικαθιστώντας τον πίνακα $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ \omega & 1 \end{pmatrix}$ στον δεύτερο τύπο της σχέσης (2.1) και έπειτα από αλγεβρικούς υπολογισμούς οι συνιστώσες της παραμέτρου λοξότητας $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)^T$ δίνονται από τις σχέσεις

$$\alpha_1 = \frac{\delta_1 - \delta_2 \omega}{\left((1 - \omega^2)(1 - \omega^2 - \delta_1^2 - \delta_2^2 + 2\delta_1 \delta_2 \omega) \right)^{\frac{1}{2}}}$$

και

$$\alpha_2 = \frac{\delta_2 - \delta_1 \omega}{\left((1 - \omega^2)(1 - \omega^2 - \delta_1^2 - \delta_2^2 + 2\delta_1 \delta_2 \omega) \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Οι παράμετροι λοξότητας εξαρτώνται από τα δ_i , $i = 1, 2$, τα οποία ορίζονται στο εδάφιο 2.3.1..

Από την Πρόταση 2.4.6. οι περιθώριες κατανομές των x_1 και x_2 είναι μονοδιάστατες λοξές-κανονικές κατανομές και παρουσιάζονται στην πρόταση που ακολουθεί.

Πρόταση 2.5.1. Αν $\underline{x} = (x_1, x_2)^T \sim SN(\alpha_1, \alpha_2; \omega)$ τότε $x_i \sim SN(\alpha_i^*)$,

$$i = 1, 2, \text{ όπου } \alpha_1^* = \frac{\alpha_1 + \omega\alpha_2}{\left(1 + (1 - \omega^2)\alpha_2^2\right)^{\frac{1}{2}}} \text{ και } \alpha_2^* = \frac{\alpha_2 + \omega\alpha_1}{\left(1 + (1 - \omega^2)\alpha_1^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Η παράμετρος ω υπολογίζεται από τη διακύμανση ή τη συσχέτιση των x_1 και x_2 οι οποίες υπολογίζονται ότι είναι

$$\text{Cov}(x_1, x_2) = \omega - \frac{2}{\pi} \delta_1 \delta_2 \text{ και } \rho_{12} = \frac{\omega - \frac{2}{\pi} \delta_1 \delta_2}{\left(\left(1 - \frac{2}{\pi} \delta_1^2\right)\left(1 - \frac{2}{\pi} \delta_2^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.14)$$

Σημειώνεται ότι η παράμετρος ω δεν είναι αυθαίρετη. Ο πίνακας συσχετίσεων $\Omega^* = \begin{pmatrix} 1 & \underline{\delta}^T \\ \underline{\delta} & \Omega \end{pmatrix}$, ο οποίος ορίζεται στην υποενότητα 2.3.2., απαιτείται να είναι θετικά ορισμένος και για τη διδιάστατη περίπτωση αυτή η προϋπόθεση ικανοποιείται αν όλες οι οριζουσες των κύριων υποπινάκων του Ω^* είναι θετικοί. Αυτή η προϋπόθεση οδηγεί στην ακόλουθη συνθήκη για την παράμετρο ω :

$$\delta_1\delta_2 - \left((1-\delta_1^2)(1-\delta_2^2) \right)^{\frac{1}{2}} < \omega < \delta_1\delta_2 + \left((1-\delta_1^2)(1-\delta_2^2) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Από τη συνθήκη αυτή για την παράμετρο ω και σύμφωνα με τη σχέση (2.14), έπειτα από πράξεις προκύπτει το κριτήριο που ακολουθεί με το οποίο καθορίζονται οι εφικτές τιμές της συσχέτισης ρ για τη διδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή,

$$\frac{\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\delta_1\delta_2 - \left((1-\delta_1^2)(1-\delta_2^2) \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\left(1 - \frac{2}{\pi}\delta_1^2\right)\left(1 - \frac{2}{\pi}\delta_2^2\right) \right)^{\frac{1}{2}}} < \rho < \frac{\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\delta_1\delta_2 + \left((1-\delta_1^2)(1-\delta_2^2) \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\left(1 - \frac{2}{\pi}\delta_1^2\right)\left(1 - \frac{2}{\pi}\delta_2^2\right) \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Στο ίδιο κριτήριο καταλήγουμε αν η συσχέτιση δίνεται από τον τύπο

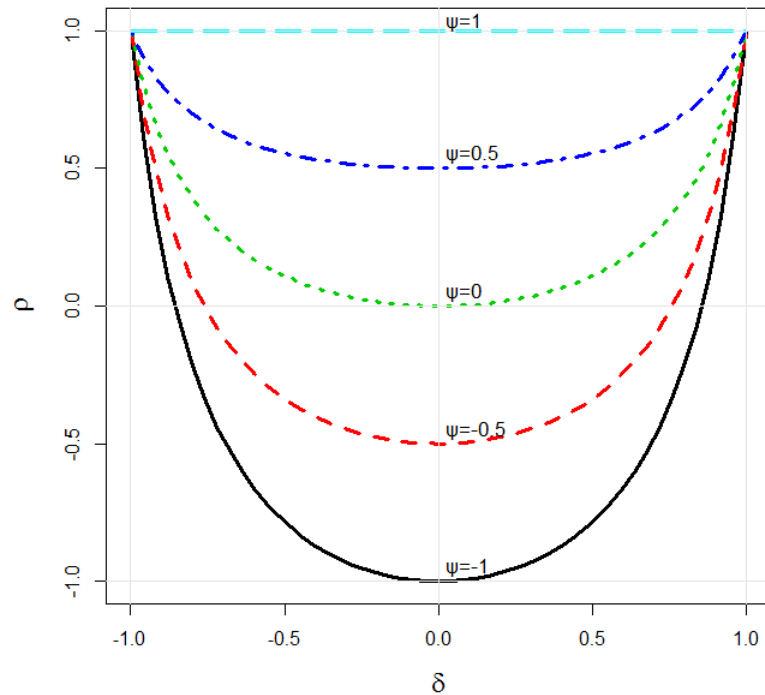
$$\rho_{12} = \frac{\psi \left((1-\delta_1^2)(1-\delta_2^2) \right)^{1/2} + \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\delta_1\delta_2}{\left(\left(1 - \frac{2}{\pi}\delta_1^2\right)\left(1 - \frac{2}{\pi}\delta_2^2\right) \right)^{1/2}}, \quad (2.15)$$

σύμφωνα με τη σχέση (2.9), καθώς

$$\omega = \delta_1\delta_2 + \psi \left((1-\delta_1^2)(1-\delta_2^2) \right)^{1/2},$$

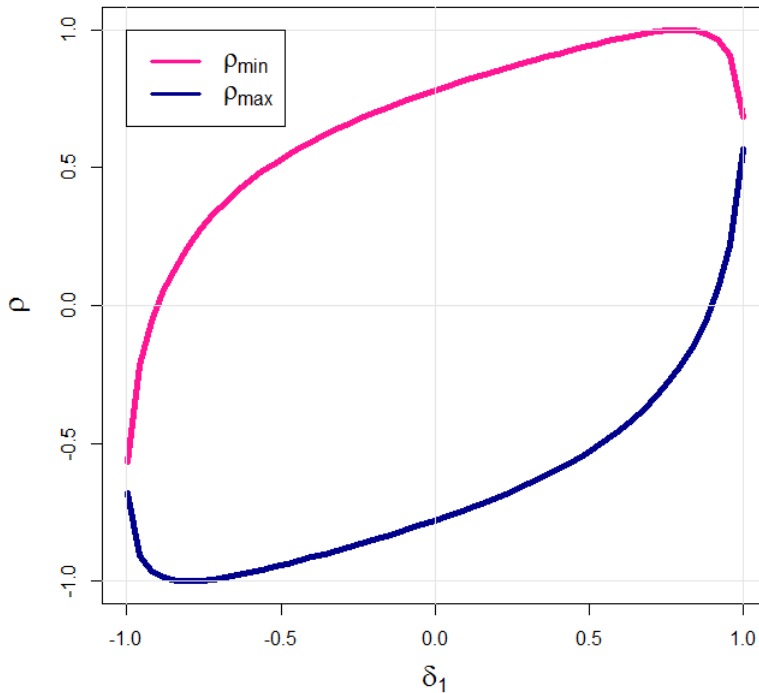
οπότε για την παράμετρο ψ ισχύει η συνθήκη $-1 < \psi < 1$. Έτσι, αν $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ τότε οι εφικτές

τιμές της συσχέτισης ρ συναρτήσει των παραμέτρων ψ και δ φαίνονται στο Διάγραμμα 1.



Διάγραμμα 1: Σχέση μεταξύ ρ και δ για διάφορες τιμές της παραμέτρου ψ (Genton, 2004, σελ. 18)

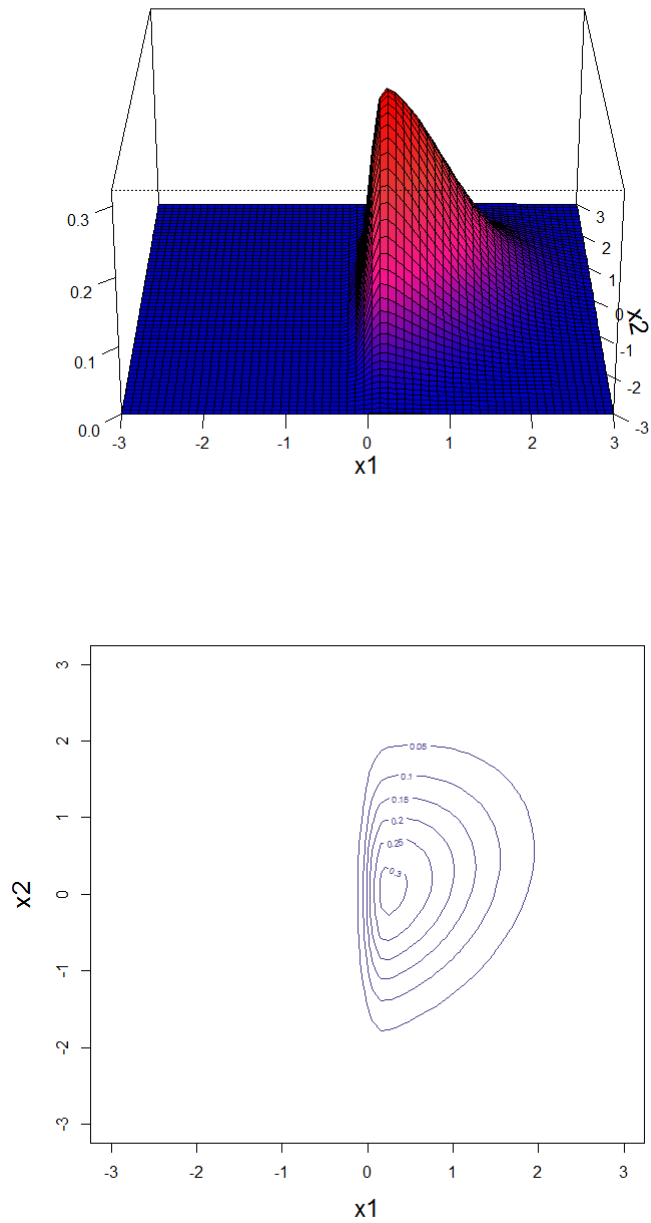
Στη γενική περίπτωση $\delta_1 \neq \delta_2$ το άνω όριο της συσχέτισης ρ είναι μικρότερο από 1. Στο Διάγραμμα 2 φαίνονται τα ανώτερα και κατώτερα όρια της συσχέτισης ρ συναρτήσει της παραμέτρου δ_1 για συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου δ_2 .



Διάγραμμα 2: Εφικτές τιμές της συσχέτισης ρ με την παράμετρο δ_1 , για $\delta_2 = 0.8$

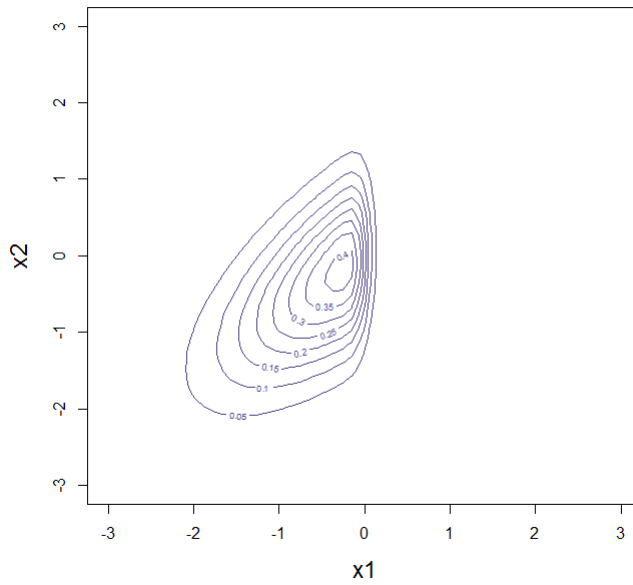
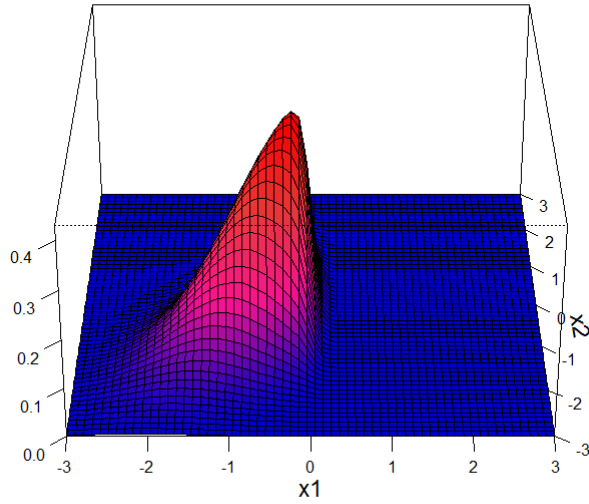
Σύμφωνα με τους Azzalini & Dalla Valle (1996), το συμπέρασμα που προκύπτει από τα Διαγράμματα 1 και 2 είναι ότι η σ.π.π. της διδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής που δίνεται από τη σχέση (2.13) καλύπτει ένα αρκετά ευρύ φάσμα τιμών της συσχέτισης ρ , το οποίο είναι ευρύτερο σε σχέση με το φάσμα τιμών που προκύπτει από τη φόρμουλα των Farlie-Gumbel-Morgenstern.

(a) $\delta_1 = \delta_2 = 0.8$ και $\omega = 0.3$



Διάγραμμα 3(a): Γραφική παράσταση και διάγραμμα ισοψών διδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής με τιμές παραμέτρων $\delta_1 = \delta_2 = 0.8$ και $\omega = 0.3$

(b) $\delta_1 = -0.45$, $\delta_2 = -0.95$ και $\omega = 0.7$



Διάγραμμα 3(b): Γραφική παράσταση και διάγραμμα ισοϋψών διδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής με τιμές παραμέτρων $\delta_1 = -0.45$, $\delta_2 = -0.95$ και $\omega = 0.7$

Στα Διαγράμματα 3(a) και 3(b), παραπάνω, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση και το διάγραμμα ισοϋψών της διδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής για διάφορες τιμές των παραμέτρων δ_1 , δ_2 και ω . Από τα διαγράμματα αυτά και κυρίως από τα διαγράμματα ισοϋψών, τα οποία σύμφωνα με τον Genton (2004) παρέχουν περισσότερες πληροφορίες από ότι ένα τρισδιάστατο γράφημα, παρατηρείται ότι η μορφή της σ.π.π. της διδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής δεν είναι ελλειπτική και επηρεάζεται αρκετά από την τιμή της παραμέτρου ω . Συγκεκριμένα, μικρές μεταβολές στην τιμή της παραμέτρου ω επιφέρουν ριζική αλλαγή στη μορφή της κατανομής.

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

3.1 Εισαγωγή

Μέχρι τώρα αναφέρθηκαν οι βασικότερες έννοιες και ιδιότητες της πολυδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής. Αντικείμενο του κεφαλαίου αυτού αποτελεί η ανασκόπηση και η παρουσίαση των μεθόδων εκτίμησης των παραμέτρων της πολυδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής και ειδικότερα η παρουσίαση της μεθόδου μέγιστης πιθανοφάνειας για τις παραμέτρους θέσης, κλίμακας και λοξότητας της κατανομής αυτής.

Δυστυχώς δεν έχουν προσδιορισθεί σαφείς και αναλυτικές κλειστές μορφές για τους εκτιμητές των παραμέτρων της πολυδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής, όπως δεν έχουν βρεθεί και για τη μονοδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή. Ωστόσο, στη μονοδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή έχουν αναπτυχθεί διάφορες μέθοδοι εύρεσης των εκτιμητών των παραμέτρων της κατανομής, όπως η μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας και η μέθοδος των ροπών, σε αντίθεση με την πολυδιάστατη περίπτωση όπου έχει αναπτυχθεί μόνο η μέθοδος

μέγιστης πιθανοφάνειας. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τις διάφορες μεθόδους εκτίμησης των παραμέτρων της μονοδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής παραπέμπουμε στη μεταπτυχιακή διατριβή της Κ. Σωκράτους (2009) και στις αναφορές που υπάρχουν σ' αυτή.

Με τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας μπορούν να υπολογιστούν οι εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας (ΕΜΠ) και των τριών παραμέτρων της μονοδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής σε αντίθεση με άλλες μεθόδους, όπως η μέθοδος των ροπών, για τις οποίες έχουν υπολογιστεί κάποιοι από τους εκτιμητές των παραμέτρων. Ενδεικτικά, οι Dunajeva et al. (2003) βρίσκουν με τη μέθοδο των ροπών έναν εκτιμητή για την παράμετρο λοξότητας και υπολογίζουν τη μεροληψία του. Οι Azzalini & Capitanio (1999) επιτυγχάνουν να υπολογίσουν τους ΕΜΠ των παραμέτρων της μονοδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής και παρουσιάζουν τα προβλήματα εκτίμησης που προκύπτουν. Για να αποφύγουν τα προβλήματα που δημιουργούνται προτείνουν μια αναπαραμέτρηση του προβλήματος μεγιστοποίησης οι επιδράσεις της οποίας αποδεικνύονται ιδιαίτερα ευεργετικές.

Κατά τρόπο ανάλογο με τη μονοδιάστατη περίπτωση, δυσκολίες παρουσιάζονται και στην πολυδιάστατη περίπτωση. Οι δυσκολίες αυτές εντοπίζονται στη συμπεριφορά της συνάρτησης πιθανοφάνειας και του από κοινού πίνακα πληροφορίας του Fisher στην περίπτωση που η παράμετρος λοξότητας είναι $\alpha = 0$.

Εκτός από τους Azzalini & Capitanio (1999) αρκετοί ερευνητές πρότειναν μηχανισμούς για την αντιμετώπιση κάποιων προβλημάτων από τα διάφορα που δημιουργούνται στις μεθόδους

που αναπτύχθηκαν για την εκτίμηση των παραμέτρων της μονοδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής, όπως ο Sartori (2006) ο οποίος προτείνει μια διαδικασία δύο φάσεων προκειμένου να υπολογισθεί πεπερασμένος εκτιμητής για την παράμετρο λοξότητας. Όπως προαναφέρθηκε, σε αντίθεση με τη μονοδιάστατη περίπτωση, για την πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή δεν υπάρχει αντίστοιχο πλήθος μεθόδων εκτίμησης. Ωστόσο υπάρχουν σημαντικά αποτελέσματα για επεκτάσεις της πολυδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής. Ο Lin (2009) παρουσιάζει τους ΕΜΠ των παραμέτρων για τα μοντέλα μίξης πολυδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής (multivariate skew normal mixture models), οι Lachos et al. (2007) παρουσιάζουν ΕΜ-αλγόριθμους για την αριθμητική εύρεση ΕΜΠ για το πολυδιάστατο μοντέλο λοξής-παραλλαγμένης κανονικής κατανομής (skew-contaminated normal distributions) της πολυδιάστατης λοξής-κανονικής/ανεξάρτητης κλάσης (multivariate skew-normal/independent class), ενώ οι Flecher et al. (2009) υπολογίζουν τους εκτιμητές των παραμέτρων της πολυδιάστατης κλειστής λοξής-κανονικής κατανομής (closed multivariate skew-normal distribution) χρησιμοποιώντας τις σταθμισμένες ροπές (weighted moments).

3.2 Μέθοδος Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Στην ενότητα αυτή το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στη μεθοδολογία που προτάθηκε από τους Azzalini & Capitanio (1999) για την αντιμετώπιση του προβλήματος της εκτίμησης των παραμέτρων της πολυδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής

χρησιμοποιώντας ως μέθοδο εκτίμησης αυτή της μέγιστης πιθανοφάνειας. Αρχικά, για λόγους πληρότητας παρουσιάζεται συνοπτικά η μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας για τη μονοδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή με κεντρικές παραμέτρους, ακολούθως αναφέρονται τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της αναπαραμέτρησης που προτάθηκε και τέλος περιγράφεται η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε για την εκτίμηση των παραμέτρων της πολυδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής.

Με τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας μπορούν να υπολογιστούν και οι τρεις εκτιμητές των παραμέτρων της μονοδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής χωρίς ωστόσο να μπορούν να αποφευχθούν δύο ειδών προβλήματα. Πρώτον, υπάρχει πάντα ένα σημείο καμπής στο σημείο $\alpha = 0$ για το λογάριθμο της συνάρτησης πιθανοφάνειας και δεύτερον, ο αναμενόμενος πίνακας πληροφορίας του Fisher γίνεται ιδιάζων στο σημείο $\alpha = 0$. Επειδή αντικείμενο μελέτης της ενότητας αυτής αποτελεί η εκτίμηση των παραμέτρων της πολυδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής, η μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας της μονοδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής με τις κύριες παραμέτρους $DP = (\xi, \omega, \alpha)$ δεν παρουσιάζεται και παραπέμπεται ο αναγνώστης στην δημοσίευση των Azzalini & Capitanio (1999).

Ο Azzalini (1985) προκειμένου να αποφύγει το πρόβλημα της μη αντιστρεψιμότητας του πίνακα πληροφορίας του Fisher στο σημείο $\alpha = 0$ προτείνει μια αναπαραμέτρηση του προβλήματος μέσω της οποίας οι κύριες παράμετροι της

μονοδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής μετατρέπονται σε κεντρικές παραμέτρους ως εξής: αν $y \sim SN_1(\xi, \omega^2, \alpha)$ τότε οι κεντρικές παράμετροι του προβλήματος θεωρούνται ότι είναι οι $CP = (\mu, \sigma, \gamma_1)$, όπου $y = \mu + \sigma z_0$, με $z_0 = (z - \mu_z) / \sigma_z$, $\mu_z = E(z)$, $\sigma_z = \sqrt{Var(z)} = \sqrt{1 - \mu_z^2}$ και $z = \omega^{-1}(y - \xi)$. Η κεντρική παράμετρος γ_1 είναι ο γνωστός δείκτης λοξότητας της μονοδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής, ενώ η αντιστοιχία που υπάρχει μεταξύ των άλλων δύο παραμέτρων των συνόλων (ξ, ω, α) και (μ, σ, γ_1) δίνεται από τις σχέσεις $\xi = \mu - \sigma \sigma_z^{-1} \mu_z$ και $\omega = \sigma \sigma_z^{-1}$.

Οι Azzalini & Capitanio (1999) παρατηρούν ότι η αναπαραμέτρηση που περιγράφηκε παραπάνω παρουσιάζει πολλά πλεονεκτήματα πέραν της αποφυγής της μη αντιστρεψιμότητας του πίνακα πληροφορίας του Fisher. Παρατηρούν λοιπόν ότι:

- i. Οι κεντρικές παράμετροι (μ, σ, γ_1) είναι λιγότερο συσχετισμένες μεταξύ τους απ' ό,τι οι κύριες παράμετροι (ξ, ω, α) και ειδικά οι μ και γ_1 . Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να διαπιστωθεί αριθμητικά με τη βοήθεια εκφράσεων που δίνονται στο Παράρτημα της εργασίας των Azzalini & Capitanio (1999).
- ii. Η μορφή της πιθανοφάνειας είναι βελτιωμένη.

- iii. Η περιθώρια κατανομή του ΕΜΠ $\hat{\xi}$ της αρχικής παραμέτρου θέσης ξ δείχνει να είναι δικόρυφη όταν το μέγεθος του τυχαίου δείγματος και η απόλυτη τιμή της παραμέτρου λοξότητας α έχουν σχετικά μικρές τιμές, ενώ η περιθώρια κατανομή του ΕΜΠ $\hat{\mu}$ της νέας παραμέτρου θέσης μ παρουσιάζει τη συνήθη συμπεριφορά.

Τα παραπάνω πλεονεκτήματα των κεντρικών παραμέτρων $CP = (\mu, \sigma, \gamma_1)$ έναντι των κύριων παραμέτρων $DP = (\xi, \omega, \alpha)$ παρατηρούνται από θεωρητική σκοπιά. Ένα ακόμη πλεονέκτημα που μπορεί να αναφερθεί είναι από πρακτικής σκοπιάς και έγκειται στη γρηγορότερη σύγκλιση των αριθμητικών διαδικασιών μεγιστοποίησης για την εύρεση των ΕΜΠ της κατανομής, αποτέλεσμα το οποίο προκύπτει από τη βελτιωμένη μορφή του λογαρίθμου της πιθανοφάνειας. Σε αντιδιαστολή, ένα αρνητικό που καταλογίζεται στην αναπαραμέτρηση που περιγράφηκε παραπάνω είναι η πολυπλοκότητα που δημιουργείται στις αλγεβρικές πράξεις κατά τους υπολογισμούς των ΕΜΠ.

Οι Arellano-Valle & Azzalini (2008) και οι Azzalini & Capitanio (2014) εξετάζουν την επέκταση των κεντρικών παραμέτρων από τη μονοδιάστατη στην πολυδιάστατη περίπτωση. Σε αυτήν την περίπτωση, οι κεντρικές παράμετροι αναπαριστώνται με το συμβολισμό $(\underline{\mu}, \underline{\Sigma}, \gamma_1)$, με τις δύο πρώτες συνιστώσες να δίνονται από τις σχέσεις

$$\underline{\mu} = E(\underline{y}) = \underline{\xi} + \omega \underline{\mu}_z, \quad \Sigma = \text{var}(\underline{y}) = \Omega - \omega \underline{\mu}_z \underline{\mu}_z^T \omega = \omega \Sigma_z \omega,$$

όπου $\underline{z} = \omega^{-1}(\underline{y} - \underline{\xi}) \sim SN_k(0, \bar{\Omega}, \alpha)$ ένα “κανονικοποιημένο”

διάνυσμα τέτοιο ώστε $E(\underline{z}) = \underline{\mu}_z = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \underline{\delta}$ και

$\text{var}(\underline{z}) = \Sigma_z = \bar{\Omega} - \underline{\mu}_z \underline{\mu}_z^T = \bar{\Omega} - \frac{2}{\pi} \underline{\delta} \underline{\delta}^T$, του οποίου η τυποποιημένη

μορφή είναι $\underline{z}_0 = \sigma_z^{-1}(\underline{z} - \underline{\mu}_z)$, όπου $\sigma_z = \text{diag}(\sigma_{z,1}, \dots, \sigma_{z,k})$, με

$\sigma_{z,i} = \left(1 - \frac{2}{\pi} \delta_{z,i}^2\right)^{1/2}$, $i = 1, \dots, k$, να είναι οι τυπικές αποκλίσεις

του Σ_z σε αναλογία με τη μονοδιάστατη περίπτωση. Η συνιστώσα

γ_1 είναι το διάνυσμα των περιθώριων συντελεστών λοξότητας που

προκύπτουν με εφαρμογή της σχέσης $\gamma_1 = \frac{4 - \pi}{2} \frac{\mu_z^3}{\sigma_z^3}$ σε κάθε

συνιστώσα του διανύσματος $\underline{\mu}_z$, όπου μ_z και σ_z η μέση τιμή και

η διακύμανση, αντίστοιχα, της “κανονικοποιημένης” μεταβλητής

$z = (\underline{y} - \underline{\xi}) / \omega$ από την κατανομή $SN(0, 1, \alpha)$ με σ.π.π. που

δίνεται από τον Ορισμό 2.3.1.. Για τις τιμές των μ_z και σ_z

παραπέμπεται ο αναγνώστης στη διατριβή της Σωκράτους (2009).

Οι Arellano-Valle & Azzalini (2008) αποδεικνύουν ότι οι

κεντρικές παράμετροι παρέχουν μια θεμιτή αναπαραμέτρηση της

πολυδιάστατης λοξής-κανονικής οικογένειας κατανομών. Υπό την

υπόθεση ότι η επιλογή των κεντρικών παραμέτρων $(\underline{\mu}, \underline{\Sigma}, \underline{\gamma}_1)$ είναι επιτρεπτή και ότι αντιστοιχούν σε κάποιο σημείο $(\underline{\xi}, \underline{\Omega}, \underline{\alpha})$ των κύριων παραμέτρων του χώρου $DP = (\underline{\xi}, \underline{\omega}, \underline{\alpha})$, για το λογάριθμο της συνάρτησης πιθανοφάνειας ενός τυχαίου δείγματος y_1, \dots, y_n από τη μονοδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή θα ισχύει

$$l_{CP}(\underline{\mu}, \underline{\Sigma}, \underline{\gamma}_1) = l_{DP}(\underline{\xi}, \underline{\Omega}, \underline{\alpha}).$$

Για τις κεντρικές παραμέτρους (μ, σ, γ_1) της μονοδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής οι Azzalini & Capitanio (1999) υπολογίζουν τους ΕΜΠ των παραμέτρων μέσω αριθμητικής επίλυσης των τριών εξισώσεων που προκύπτουν έπειτα από παραγωγή του λογαρίθμου της νέας συνάρτησης πιθανοφάνειας με τις κεντρικές παραμέτρους.

Εν συνεχεία, οι Azzalini & Capitanio (1999, σελ. 17) επιτυγχάνουν να υπολογίσουν τους ΕΜΠ των παραμέτρων της πολυδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής με διαφορετικό τρόπο από αυτόν στη μονοδιάστατη περίπτωση. Συγκεκριμένα, αναφέρουν ότι “σε αυτό το πλαίσιο (της πολυδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής) θα ήταν ιδανικό να αναπαράγουμε την κεντρική αναπαραμέτρηση που εισήχθηκε στη μονοδιάστατη περίπτωση αλλά αυτή η προσέγγιση δημιουργεί δυσκολίες και ακολουθούμε διαφορετική κατεύθυνση για να υπολογίσουμε τους ΕΜΠ”. Αυτή η διαφορετική προσέγγιση που ακολουθούν συνίσταται σε πρώτη φάση στον υπολογισμό των ΕΜΠ της

κατανομής και σε επόμενη φάση στην μετατροπή των παραμέτρων των ΕΜΠ που βρέθηκαν σε κεντρικές παραμέτρους.

Ακολουθώντας τους Azzalini & Capitanio (1999), οι ΕΜΠ της πολυδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής υπολογίζονται μειώνοντας αρχικά τη διάσταση του προβλήματος μεγιστοποίησης και στη συνέχεια με αριθμητική μεγιστοποίηση της συνάρτησης πιθανοφάνειας η οποία προκύπτει για το νέο πρόβλημα. Έτσι, για την εκτίμηση των κύριων (DP) παραμέτρων θέσης, κλίμακας και λοξότητας θεωρούμε ένα πλαίσιο παλινδρόμησης όπου $\underline{y}_i \in \mathbb{R}^k$ η i -οστή συνιστώσα του τυχαίου δείγματος $\underline{y} = (\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n)^T$, με σ.π.π. από την $SN_k(\underline{\xi}_i, \Omega, \alpha)$, για $i = 1, \dots, n$. Έτσι, η σ.π.π. του τυχαίου διανύσματος \underline{y}_i δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} f(\underline{y}_i; \underline{\xi}_i, \Omega, \alpha) &= 2\varphi_k(\underline{y}_i - \underline{\xi}_i; \Omega) \Phi(\alpha^T \omega^{-1}(\underline{y}_i - \underline{\xi}_i)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |\Omega|^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}(\underline{y}_i - \underline{\xi}_i)^T \Omega^{-1}(\underline{y}_i - \underline{\xi}_i)} 2\Phi(\alpha^T \omega^{-1}(\underline{y}_i - \underline{\xi}_i)), \end{aligned}$$

όπου $\omega = \Omega^{1/2}$.

Για το τυχαίο δείγμα $\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n$ η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι:

$$L = L(\underline{\xi}_i, \Omega, \alpha) = \prod_{i=1}^n f(\underline{y}_i)$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |\Omega|^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}(y_i - \xi_i)^T \Omega^{-1} (y_i - \xi_i)} 2\Phi\left(\alpha^T \omega^{-1}(y_i - \xi_i)\right) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} |\Omega|^{-n/2} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - \xi_i)^T \Omega^{-1} (y_i - \xi_i)} \prod_{i=1}^n 2\Phi\left(\alpha^T \omega^{-1}(y_i - \xi_i)\right).
\end{aligned}$$

Βασιζόμενοι στους Azzalini & Capitanio (1999), για την εύρεση των ΕΜΠ $(\hat{\xi}_i, \hat{\Omega}, \hat{\alpha})$, $i=1, \dots, n$, αρκεί να μεγιστοποιηθεί η συνάρτηση πιθανοφάνειας L ως προς ξ_i , Ω και α ή ισοδύναμα, καθώς ο λογάριθμος είναι μονότονη συνάρτηση, αρκεί να μεγιστοποιηθεί η $\log L$, ως προς ξ_i , Ω και α , $i=1, \dots, n$, η οποία είναι:

$$\begin{aligned}
\log L = & -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log |\Omega| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - \xi_i)^T \Omega^{-1} (y_i - \xi_i) + \\
& + \log \left(\prod_{i=1}^n 2\Phi\left(\alpha^T \omega^{-1}(y_i - \xi_i)\right) \right).
\end{aligned}$$

Αν ορισθεί ο πίνακας $V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \xi_i)(y_i - \xi_i)^T$ και επειδή για

δύο τετραγωνικούς πίνακες A και B διάστασης n ισχύει ότι $tr(AB) = tr(BA)$ προκύπτει:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (y_i - \xi_i)^T \Omega^{-1} (y_i - \xi_i) &= \text{tr} \left(\Omega^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \xi_i)(y_i - \xi_i)^T \right) \\ &= \text{tr}(\Omega^{-1} nV) = n \text{tr}(\Omega^{-1} V). \end{aligned}$$

Ακόμη, από γνωστή ιδιότητα του λογαριθμού ισχύει ότι:

$$\log \left(\prod_{i=1}^n 2\Phi \left(\alpha^T \omega^{-1} (y_i - \xi_i) \right) \right) = \sum_{i=1}^n \log \left(2\Phi \left(\alpha^T \omega^{-1} (y_i - \xi_i) \right) \right).$$

Οπότε, η $\log L$ γίνεται:

$$\begin{aligned} \log L &= -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log |\Omega| - \frac{n}{2} \text{tr}(\Omega^{-1} V) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \log \left(2\Phi \left(\alpha^T \omega^{-1} (y_i - \xi_i) \right) \right). \end{aligned}$$

Για ευκολότερους υπολογισμούς ορίζεται η συνάρτηση:

$$\zeta_0(x) = \log(2\Phi(x)), \quad x \in \mathbb{R},$$

και για μεταγενέστερη χρήση ορίζονται οι παράγωγοι της ζ_0 ως εξής:

$$\zeta_m(x) = \frac{d^m}{dx^m} \zeta_0(x), \quad m = 1, 2, \dots$$

Επομένως, προκύπτει προς μεγιστοποίηση η συνάρτηση:

$$\begin{aligned} \log L = & -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log |\Omega| - \frac{n}{2} \text{tr}(\Omega^{-1}V) \\ & + \sum_{i=1}^n \zeta_0(\alpha^T \omega^{-1}(\underline{y}_i - \underline{\xi}_i)). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Η παράμετρος θέσης $\underline{\xi}_i$ έχει θεωρηθεί να είναι διαφορετική για κάθε παρατήρηση \underline{y}_i λαμβάνοντας υπόψη ένα ευρύ πλαίσιο γραμμικών μοντέλων παλινδρόμησης, όπου τα $\underline{\xi}_i$ εκφράζονται ως γραμμικοί συνδυασμοί ενός p - διάστατου συνόλου ανεξάρτητων μεταβλητών \underline{x}_i μέσω της σχέσης

$$\underline{\xi}_i^T = \underline{x}_i^T \mathbf{B}, \quad i = 1, \dots, n,$$

όπου \mathbf{B} είναι ένας $p \times k$ πίνακας άγνωστων παραμέτρων και τα διανύσματα \underline{x}_i έχουν ως πρώτη συνιστώσα τη μονάδα.

Η συνάρτηση $\log L$ θα μορφοποιηθεί έτσι ώστε οι παράμετροι και οι μεταβλητές της να παριστάνονται με μορφή πινάκων και διανυσμάτων. Στο πλαίσιο αυτό, συμβολίζουμε με Y , X και Ξ τους πίνακες με διαστάσεις $n \times k$, $n \times p$ (με $n > p$ και υποθέτοντας

ότι $\text{rank}(X) = p$ και $n \times k$ αντίστοιχα και οι οποίοι ορίζονται ως εξής:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1^T \\ \vdots \\ y_n^T \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1^T \\ \vdots \\ x_n^T \end{pmatrix} \text{ και } \Xi = \begin{pmatrix} \xi_1^T \\ \vdots \\ \xi_n^T \end{pmatrix},$$

δηλαδή οι Y , X και Ξ περιέχουν τα k - διάστατα διανύσματα y_i , τα p - διάστατα διανύσματα x_i και τα k - διάστατα διανύσματα ξ_i αντίστοιχα, οπότε για $y_i - \xi_i = y_i - B^T x_i^T$ και για κάθε $i = 1, \dots, n$ οι μεταβλητές αυτές μπορούν να γραφούν με τη μορφή πίνακα διάστασης $n \times k$ ως εξής

$$U = Y - XB.$$

Επιπλέον, ο συμβολισμός $\zeta_m(x)$ θα παριστά στο εξής το διάνυσμα που δημιουργείται εφαρμόζοντας τη συνάρτηση $\zeta_m(\cdot)$ σε κάθε συνιστώσα του x . Ακόμη, από άποψη υπολογισμών είναι πιο βολικό να παραμετροποιηθεί προσωρινά το πρόβλημα μεγιστοποίησης αντικαθιστώντας την παράμετρο α με $\eta = \omega^{-1}\alpha$ και με αυτό τον τρόπο η παράμετρος η εμφανίζεται μόνο στον τελευταίο όρο της σχέσης (3.1). Η σχέση (3.1) τώρα χωρίς τον τελευταίο όρο είναι ισοδύναμη με το λογάριθμο της συνάρτησης

πιθανοφάνειας μιας κανονικής κατανομής με την παράμετρο Ω να μην εισέρχεται στον τελευταίο όρο της παραμέτρησης $(\text{vec}(\mathbf{B}), \text{vech}(\Omega), \underline{\eta})$ (η οποία είναι καταλληλότερη έκφραση για την παραμέτρηση DP), όπου $\text{vec}(\cdot)$ είναι ο τελεστής που στοιβάξει τις στήλες ενός πίνακα σε ένα διάνυσμα και $\text{vech}(\cdot)$ είναι ο τελεστής που στοιβάξει τις στήλες του κάτω τριγώνου ενός συμμετρικού πίνακα, συμπεριλαμβάνοντας τα στοιχεία της διαγωνίου, σε ένα διάνυσμα. Έτσι, σύμφωνα με τους Azzalini & Capitanio (1999), η παράμετρος $\underline{\eta}$ διαχωρίζει τις παραμέτρους στη σχέση (3.1) με την ακόλουθη έννοια: Για σταθερά \mathbf{B} και $\underline{\eta}$ η μεγιστοποίηση της (3.1) ως προς Ω είναι ισοδύναμη με τη μεγιστοποίηση της αντίστοιχης συνάρτησης για κανονικές μεταβλητές και για σταθερό \mathbf{B} . Οπότε, έχουμε προς μεγιστοποίηση ως προς Ω και για σταθερό \mathbf{B} τη συνάρτηση

$$\log L = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log |\Omega| - \frac{n}{2} \text{tr}(\Omega^{-1}V) + \underline{1}_n^T \zeta_0(U\underline{\eta}), \quad (3.2)$$

όπου $\underline{1}_n$ είναι το n -διάστατο διάνυσμα με συνιστώσες μονάδες

$$\text{και } V = \frac{1}{n} U^T U.$$

Παραγωγίζοντας ως προς Ω την παραπάνω σχέση και λαμβάνοντας υπόψη τους κανόνες παραγωγίσης μεταξύ πινάκων

$$\frac{\partial \log |\det A|}{\partial A} = (A^{-1})^T \quad \text{και} \quad \frac{\partial \text{tr}(AX^{-1}B)}{\partial X} = -(X^{-1}BAX^{-1})^T,$$

προκύπτει

$$\frac{\partial \log L}{\partial \Omega} = -\frac{n}{2}(\Omega^{-1})^T - \frac{n}{2}(-\Omega^{-1}V\Omega^{-1})^T,$$

και γνωρίζοντας ότι οι πίνακες Ω και V είναι συμμετρικοί,

$$\frac{\partial \log L}{\partial \Omega} = -\frac{n}{2}\Omega^{-1} + \frac{n}{2}\Omega^{-1}V\Omega^{-1}.$$

Μηδενίζοντας τη σχέση που προέκυψε και έπειτα από στοιχειώδεις πράξεις προκύπτει ότι

$$\Omega(B) = V(B) = \frac{1}{n}U^T U.$$

Αντικαθιστώντας την ποσότητα $\Omega(B)$ που βρέθηκε στη σχέση (3.2) προκύπτει

$$\begin{aligned} L^*(B, \underline{\eta}) &= -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log |V(B)| - \frac{n}{2} \text{tr}(I_k) + \mathbf{1}_n^T \zeta_0(U\underline{\eta}) \\ &= -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log |V(B)| - \frac{n}{2} k + \mathbf{1}_n^T \zeta_0(U\underline{\eta}). \end{aligned}$$

Με αυτό τον τρόπο επετεύχθη μείωση της διάστασης του

προβλήματος μεγιστοποίησης και για να υπολογιστούν οι εκτιμητές των παραμέτρων B και $\underline{\eta}$ απαιτείται αριθμητική μεγιστοποίηση της συνάρτησης $L^*(B, \underline{\eta})$. Η διαδικασία αυτή μπορεί να επισπευθεί σημαντικά αν εφαρμοσθεί ο αλγόριθμος

quasi-Newton για τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial L^*(B, \underline{\eta})}{\partial B}$ και

$\frac{\partial L^*(B, \underline{\eta})}{\partial \underline{\eta}}$ οι οποίες, ακολουθώντας τους Azzalini & Capitanio

(1999) και μετά από λίγη άλγεβρα η οποία ακολουθεί, υπολογίζονται στις παρακάτω κλειστές μορφές.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L^*(B, \underline{\eta})}{\partial B} &= -\frac{n}{2} \frac{\partial \log |V(B)|}{\partial B} + \frac{\partial \left(\frac{1}{n} \zeta_0(U \underline{\eta}) \right)}{\partial B} \\
 &= -\frac{n}{2} \frac{\partial V(B)}{\partial B} \frac{\partial \log |V(B)|}{\partial V(B)} + \frac{\partial U}{\partial B} \frac{\partial \left(\zeta_0(U \underline{\eta}) \right)}{\partial U} \\
 &= -\frac{n}{2} \frac{\partial \left(\frac{1}{n} U^T U \right)}{\partial B} \left(V^{-1}(B) \right)^T + \frac{\partial (Y - XB)}{\partial B} \zeta_1(U \underline{\eta}) \underline{\eta}^T \\
 &= -\frac{n}{2} \frac{\partial U}{\partial B} \frac{1}{n} \frac{\partial (U^T U)}{\partial U} V^{-1}(B) - X^T \zeta_1(U \underline{\eta}) \underline{\eta}^T \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial (Y - XB)}{\partial B} \mathcal{Z} U V^{-1}(B) - X^T \zeta_1(U \underline{\eta}) \underline{\eta}^T \\
 &= X^T U V^{-1}(B) - X^T \zeta_1(U \underline{\eta}) \underline{\eta}^T,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L^*(\mathbf{B}, \underline{\eta})}{\partial \underline{\eta}} &= \frac{\partial \left(\mathbf{1}_n^T \zeta_0(U\underline{\eta}) \right)}{\partial \underline{\eta}} \\ &= U^T \zeta_1(U\underline{\eta}).\end{aligned}$$

Αφού υπολογίστηκαν οι ΕΜΠ των παραμέτρων \mathbf{B} και $\underline{\eta}$, οι οποίοι μεγιστοποιούν τη νέα συνάρτηση πιθανοφάνειας $L^*(\mathbf{B}, \underline{\eta})$, μπορεί να υπολογιστεί ο ΕΜΠ της παραμέτρου κλίμακας Ω , ο οποίος είναι $\hat{\Omega} = V(\hat{\mathbf{B}})$. Από τα παραπάνω προκύπτει η τιμή του $\hat{\omega}$ και κατ' επέκταση ο ΕΜΠ της παραμέτρου λοξότητας $\hat{\alpha} = \hat{\omega}\hat{\eta}$.

Κατόπιν σύγκλισης, η αριθμητική διαφορίση των μερικών παραγώγων παραπάνω οδηγεί στον αναμενόμενο πίνακα πληροφορίας του Fisher αλλά και στην εισαγωγή κατά προσέγγιση τυπικών σφαλμάτων για τους εκτιμητές των παραμέτρων \mathbf{B} και $\underline{\eta}$.

3.2.1. Εφαρμογές σε πραγματικά δεδομένα

Ένας μεγάλος αριθμός ερευνητών ασχολήθηκε με εφαρμογές πάνω στις λοξές κατανομές, όπως οι Hill & Dixon (1982), οι Azzalini & Capitanio (1999) και ο Genton (2004). Σκοπός της παρούσας διατριβής δεν είναι η εκτενής αναφορά σε εφαρμογές των λοξών κατανομών, ωστόσο παρακάτω δίνεται ένα

παράδειγμα όπου η πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή αποδεικνύεται ότι βρίσκει καλύτερη εφαρμογή από ότι η πολυδιάστατη κανονική κατανομή.

Το παράδειγμα αφορά την παραπάνω υπολογιστική διαδικασία η οποία έχει χρησιμοποιηθεί σε αριθμητικό παράδειγμα από τους Azzalini & Capitanio (1999) προσφέροντας ικανοποιητικά αποτελέσματα και θεωρώντας μη-τετριμμένες τις διαστάσεις των πινάκων B , Y και X . Η αριθμητική αυτή εργασία αφορά ικανοποιητική προσαρμογή της σ.π.π. μιας τετραδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής σε ένα υποσύνολο δεδομένων. Ακολούθως, εξετάζεται η προσαρμογή της σ.π.π. μιας διδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής για δύο μεταβλητές από το ίδιο σύνολο παρατηρήσεων που χρησιμοποιήθηκε για το αριθμητικό παράδειγμα των Azzalini & Capitanio (1999).

Τα δεδομένα (γνωστά ως AIS data) που χρησιμοποιούνται στο αριθμητικό παράδειγμα έχουν συλλεγεί από το Αυστραλιανό Ινστιτούτο Αθλητισμού και έχουν εξετασθεί από τους Cook & Weisberg (1994). Αφορούν διάφορες βιοϊατρικές μετρήσεις οι οποίες καταγράφονται σε γκρουπ $n = 202$ Αυστραλών αθλητών και αθλητριών.

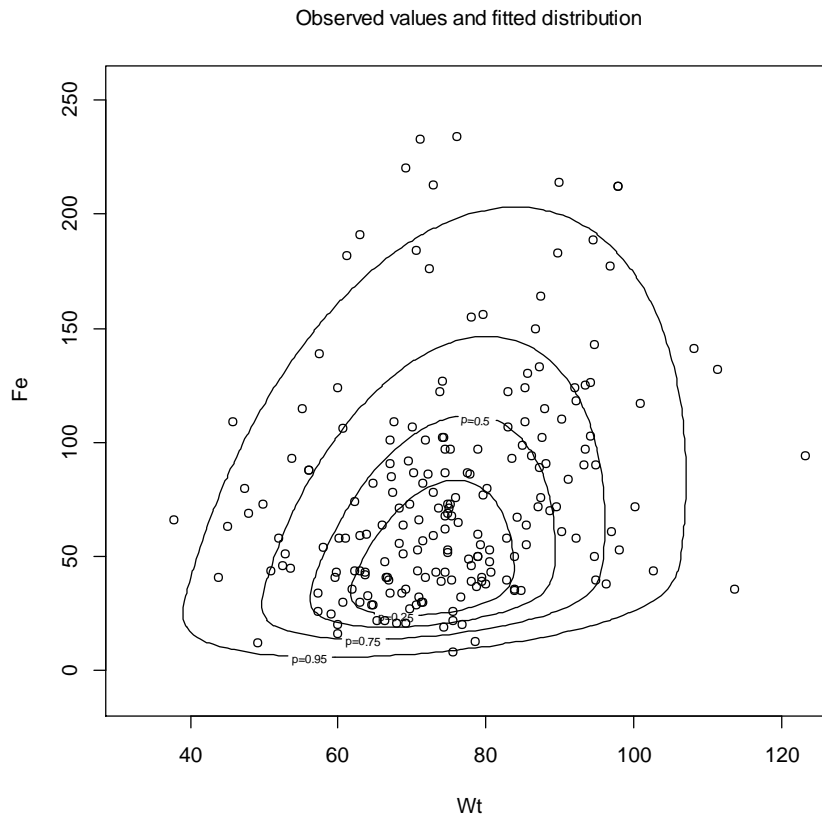
Για το παράδειγμα, λοιπόν, επιλέγεται το ζεύγος των

μεταβλητών (Wt, Fe) να είναι η μεταβλητή απόκρισης, με τα δύο ακρωνύμια να συμβολίζουν τη συγκέντρωση ορού φερριτίνης και το βάρος (σε kg) κάθε αθλητή αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, προσαρμόζεται το ακόλουθο γραμμικό μοντέλο παλινδρόμησης

$$(Wt, Fe) = \beta_0 + \varepsilon,$$

όπου $\varepsilon \sim SN_2(0, \Omega, \alpha)$ και $\beta_0 \in \mathbb{R}^2$, και υπολογίζονται οι εκτιμητές των παραμέτρων β_0 , Ω και α με τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας.

Στη συνέχεια κατασκευάζεται το διάγραμμα διασποράς των υπολοίπων με τις ισοϋψείς καμπύλες που προέκυψαν από την προσαρμογή της διδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής των σφαλμάτων ε . Η εφαρμογή αυτή φαίνεται στο Διάγραμμα 4 στο οποίο επιδεικνύεται μια έντονη λοξότητα τόσο από τα παρατηρούμενα σημεία όσο και από την προσαρμοσμένη πυκνότητα για κάθε μία από τις μεταβλητές (Wt, Fe) . Οι ισοϋψείς καμπύλες φαίνονται να καλύπτουν ικανοποιητικά το διάγραμμα διασποράς με αποτέλεσμα η προσαρμοσμένη διδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή να παρέχει επαρκή αντιπροσώπευση των δεδομένων.

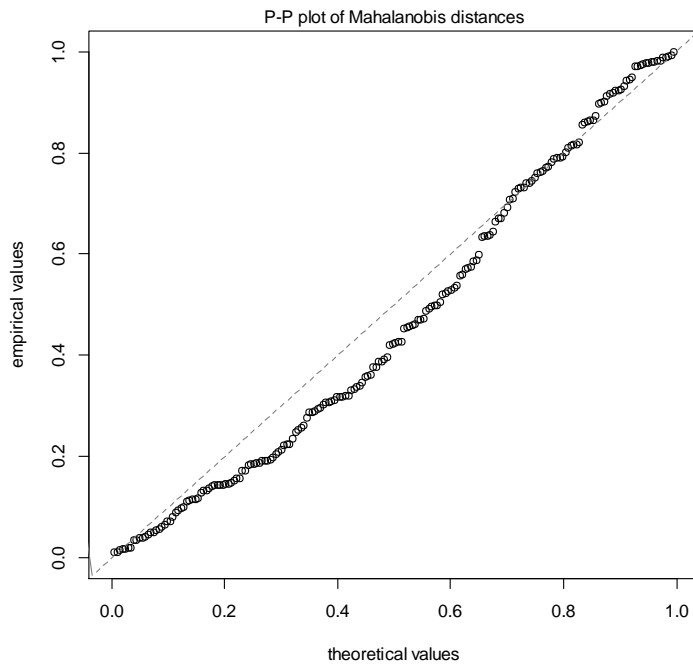


Διάγραμμα 4: Δεδομένα Αυστραλών αθλητών: διάγραμμα διασποράς (Wt,Fe) και προσαρμοσμένη διδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή.

Το παραπάνω συμπέρασμα επιβεβαιώνεται από έναν ακόμη μηχανισμό που στοχεύει στην προσαρμογή ενός μοντέλου παλινδρόμησης και το οποίο είναι το αντίστοιχο διαγνωστικό εργαλείο που χρησιμοποιείται στην πολυδιάστατη κανονική κατανομή (Healy, 1968). Το εργαλείο αυτό βασίζεται στα εμπειρικά ανάλογα των αποστάσεων Mahalanobis, που δίνονται από τη σχέση

$$d_i = (y_i - \hat{\xi}_i)^T \hat{\Omega}^{-1} (y_i - \hat{\xi}_i), i = 1, \dots, n,$$

και έχουν χ_k^2 προσεγγιστική κατανομή, σύμφωνα με την Πρόταση 2.4.16.. Από αυτές τις αποστάσεις d_i κατασκευάζονται το διάγραμμα ποσοστημορίων Q-Q-plots και το διάγραμμα P-P-plots, όμοια με τη μονοδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή, όπως περιγράφεται από τους Azzalini & Capitanio (2014). Συγκεκριμένα, οι αποστάσεις d_i που υπολογίστηκαν ταξινομούνται και απεικονίζονται ως προς τα ποσοστιαία σημεία της χ_k^2 κατανομής. Τα σημεία που προκύπτουν θα πρέπει να βρίσκονται όσο το δυνατόν κοντινότερα στη διχοτόμο του πρώτου τεταρτημορίου.



Διάγραμμα 5: P-P-plot προσαρμοσμένης διδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής.

Η διαγνωστική μέθοδος που περιγράφηκε συμβάλλει στη γενική εικόνα προσαρμογής ενός μοντέλου παλινδρόμησης σε ένα σύνολο δεδομένων. Στο Διάγραμμα 5 κατασκευάστηκε το P-P-plot που αντιστοιχεί στο μοντέλο που περιγράφηκε στο παράδειγμα παραπάνω και φαίνεται η καλή προσαρμογή της διδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής στα δεδομένα.

Σημειώνεται ότι, στην εργασία των Marchenko & Genton (2010) περιγράφονται τα ευέλικτα παραμετρικά μοντέλα της λοξής-κανονικής και Student's t κατανομής, τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ανάλυση μη-κανονικών δεδομένων. Συγκεκριμένα, παρουσιάζεται ένα πακέτο εντολών για την προσαρμογή αυτών των μοντέλων στο στατιστικό πακέτο Stata για μονοδιάστατα και πολυδιάστατα δεδομένα. Επιδεικνύουν την εφαρμογή αυτών των εντολών για τη μονοδιάστατη και την πολυδιάστατη ανάλυση των δεδομένων AIS και των δεδομένων ατμοσφαιρικής κατακρήμνισης (precipitation data) που καταγράφηκαν από το Εθνικό Κέντρο Κλιματικών Δεδομένων των Ηνωμένων Πολιτειών τα έτη 1895-2007 (113 παρατηρήσεις ανά μήνα), εξαγοντας διάφορα συμπεράσματα από τα αποτελέσματα που προέκυψαν, μέρος των οποίων είναι όμοια με τα παραπάνω.

3.3 Από κοινού πληροφορία και πίνακας πληροφορίας Fisher για την πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή

Σύμφωνα με τον Παραιοαννου (2001), στη βιβλιογραφία

υπάρχουν πολλά μέτρα πληροφορίας τα οποία αποτελούν θεμελιώδεις έννοιες στη στατιστική και εκφράζουν την (ψευδο) απόσταση ή απόκλιση μεταξύ δύο ή περισσότερων κατανομών πιθανότητας. Παρόλο που η έννοια της πληροφορίας είναι θεμελιώδους σημασίας στη στατιστική δεν υπάρχει μοναδικός τρόπος ορισμού και μέτρησής της. Εξαρτάται κάθε φορά από το στατιστικό πλαίσιο στο οποίο επικεντρώνεται το ενδιαφέρον των ερευνητών. Έχουν προταθεί διάφορα μέτρα πληροφορίας σε πλήθος εννοιολογικών και στατιστικών προσεγγίσεων. Στο πλαίσιο της θεωρίας της πληροφορίας, ενδεικτικά και μόνο, αναφέρονται το μέτρο πληροφορίας του Fisher, η απόκλιση ή πληροφορία των Kullback-Leibler και η εντροπία του Shannon. Όλα αυτά τα μέτρα πληροφορίας είναι αλληλένδετα, μερικά από αυτά προέρχονται το ένα από το άλλο ή αποτελούν ειδική περίπτωση κάποιου άλλου μέτρου πληροφορίας.

Η εντροπία και ο δείκτης από κοινού πληροφορίας είναι δύο σημαντικές έννοιες οι οποίες αναπτύχθηκαν από το Shannon στο γενικό πλαίσιο της θεωρίας της πληροφορίας. Έχουν μελετηθεί ευρέως για την πολυδιάστατη κανονική κατανομή ενώ τα τελευταία χρόνια η έρευνα έχει επεκταθεί και σε άλλες οικογένειες κατανομών μεταξύ των οποίων βρίσκεται η πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή. Αντικείμενο της υποενότητας αυτής αποτελεί αρχικά ο ορισμός του δείκτη από κοινού πληροφορίας για την πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή. Στη συνέχεια το ενδιαφέρον εστιάζεται στον πίνακα πληροφορίας Fisher για την κατανομή αυτή και γίνεται αναφορά στο πρόβλημα αντιστρεψιμότητάς του, κυρίως στη μονοδιάστατη περίπτωση.

3.3.1. Δείκτης από κοινού πληροφορίας

Ακολούθως, δίνεται ένας γενικός ορισμός για το δείκτη από κοινού πληροφορίας δύο συνεχών τυχαίων μεταβλητών ο οποίος παρουσιάζεται, μεταξύ άλλων, από τους Arellano-Valle et al. (2013) και βασίζεται στον αντίστοιχο ορισμό που έδωσαν ο Kullback (1959) ή οι Cover & Thomas (2006) για δύο διακριτές τυχαίες μεταβλητές.

Ορισμός 3.3.1. Έστω $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ και $\underline{y} \in \mathbb{R}^m$ δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με από κοινού σ.π.π. $f_{\underline{x}, \underline{y}}(\underline{x}, \underline{y})$ και περιθώριες κατανομές $f_{\underline{x}}(\underline{x})$ και $f_{\underline{y}}(\underline{y})$, αντίστοιχα. Τότε ο δείκτης από κοινού πληροφορίας μεταξύ των \underline{x} και \underline{y} ορίζεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} I(\underline{x}; \underline{y}) &= \mathbb{E} \left[\log \left(\frac{f_{\underline{x}, \underline{y}}(\underline{x}, \underline{y})}{f_{\underline{x}}(\underline{x}) f_{\underline{y}}(\underline{y})} \right) \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^m} f_{\underline{x}, \underline{y}}(\underline{x}, \underline{y}) \log \left(\frac{f_{\underline{x}, \underline{y}}(\underline{x}, \underline{y})}{f_{\underline{x}}(\underline{x}) f_{\underline{y}}(\underline{y})} \right) d\underline{x} d\underline{y}. \end{aligned}$$

Ένας άλλος συμβολισμός που έχει αποδοθεί στην δείκτη από κοινού πληροφορίας είναι ο $I_{\underline{x}\underline{y}}$ ο οποίος θα υιοθετηθεί για το υπόλοιπο της παρούσας διατριβής.

Μια σημαντική ιδιότητα της από κοινού πληροφορίας είναι η εξής: $I_{\underline{x}\underline{y}} \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν οι \underline{x} και \underline{y} είναι ανεξάρτητες, αλλιώς ο δείκτης από κοινού πληροφορίας είναι θετικός και αυξάνεται με το μέγεθος της εξάρτησης μεταξύ των συνιστωσών \underline{x} και \underline{y} . Έτσι, σύμφωνα με τους Arellano-Valle et al. (2013) “ο δείκτης από κοινού πληροφορίας παρέχει ένα γενικευμένο μέτρο συσχέτισης μεταξύ των \underline{x} και \underline{y} , το οποίο είναι βολικό για τα μοντέλα στα οποία δεν ορίζεται η συσχέτιση”.

Ακόμη, σύμφωνα με τους Javier & Gupta (2009), ενώ η συσχέτιση μελετά την εξάρτηση μεταξύ ζευγών τυχαίων μεταβλητών η από κοινού πληροφορία δίνει πληροφορία για την εξάρτηση μεταξύ αθροισμάτων τυχαίων μεταβλητών.

Οι Cover & Thomas (2006), στηριζόμενοι στην ευρύτατη βιβλιογραφία που υπάρχει για την αμοιβαία πληροφορία, διατυπώνουν ότι ο δείκτης από κοινού πληροφορίας μπορεί να υπολογιστεί εναλλακτικά με τη βοήθεια της εντροπίας, καθώς τα δύο μέτρα πληροφορίας συνδέονται μεταξύ τους, όπως φαίνεται ακολούθως,

$$\begin{aligned} I_{\underline{x}\underline{y}} &= \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} f_{\underline{x},\underline{y}}(\underline{x},\underline{y}) \log \left(\frac{f_{\underline{x},\underline{y}}(\underline{x},\underline{y})}{f_{\underline{x}}(\underline{x})f_{\underline{y}}(\underline{y})} \right) d\underline{x}d\underline{y} \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} f_{\underline{x},\underline{y}}(\underline{x},\underline{y}) \log \left(\frac{f_{\underline{x}|\underline{y}}(\underline{x}|\underline{y})}{f_{\underline{x}}(\underline{x})} \right) d\underline{x}d\underline{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} f_{\underline{x}, \underline{y}}(\underline{x}, \underline{y}) \log(f_{\underline{x}}(\underline{x})) d\underline{x} d\underline{y} \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} f_{\underline{x}, \underline{y}}(\underline{x}, \underline{y}) \log(f_{\underline{x}|\underline{y}}(\underline{x} | \underline{y})) d\underline{x} d\underline{y} \\
&= - \int_{\mathbb{R}^n} f_{\underline{x}}(\underline{x}) \log(f_{\underline{x}}(\underline{x})) d\underline{x} - \left(- \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} f_{\underline{x}, \underline{y}}(\underline{x}, \underline{y}) \log(f_{\underline{x}|\underline{y}}(\underline{x} | \underline{y})) d\underline{x} d\underline{y} \right) \\
&= H_{\underline{x}} - H_{\underline{x}|\underline{y}}.
\end{aligned}$$

Επομένως, από τη σχέση που προέκυψε διαπιστώνεται ότι ο δείκτης από κοινού πληροφορίας μειώνει την αβεβαιότητα της \underline{x} λόγω της γνώσης της \underline{y} .

Παρατήρηση.

Από την ιδιότητα $I_{\underline{x}\underline{y}} \geq 0$ του δείκτη από κοινού πληροφορίας προκύπτει ότι $0 \leq I_{\underline{x}\underline{y}} = H_{\underline{x}} - H_{\underline{x}|\underline{y}}$ και επομένως $H_{\underline{x}|\underline{y}} \leq H_{\underline{x}}$ με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν οι μεταβλητές \underline{x} και \underline{y} είναι ανεξάρτητες.

Επιπλέον, μια δεύτερη σημαντική ιδιότητα που προκύπτει άμεσα από τον ορισμό της αμοιβαίας πληροφορίας είναι ότι $I_{\underline{x}\underline{y}} = I_{\underline{y}\underline{x}}$, δηλαδή η αμοιβαία πληροφορία είναι συμμετρική συνάρτηση των ορισμάτων της. Έτσι, όση πληροφορία περιέχεται στο \underline{x} για το \underline{y} άλλη τόση πληροφορία περιέχεται στο \underline{y} για το \underline{x} .

Ακόμη, βάσει της σχέσης $H_{x,y} = H_x + H_{y|x}$ του Θεωρήματος 2.4.29. ισχύει

$$I_{xy} = H_x + H_y - H_{xy}.$$

Συνοψίζοντας τα προηγούμενα και με βάση τους Cover & Thomas (2006) και τις αναφορές που υπάρχουν σ' αυτούς, το επόμενο θεώρημα παρουσιάζει τη σχέση της αμοιβαίας πληροφορίας με την εντροπία του Shannon.

Θεώρημα 3.3.2. Έστω $x \in \mathbb{R}^n$ και $y \in \mathbb{R}^m$ δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με από κοινού σ.π.π. $f_{x,y}(x,y)$ και περιθώριες κατανομές $f_x(x)$ και $f_y(y)$, αντίστοιχα. Τότε ισχύουν τα εξής:

- i. $I_{xy} = H_x - H_{x|y} = H_y - H_{y|x}$
- ii. $I_{xx} = H_x - H_{x|x} = H_x.$

Διαθέτοντας πλέον τα κατάλληλα εργαλεία μπορεί να υπολογισθεί η από κοινού πληροφορία για την πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή βασιζόμενοι στην εργασία των Arellano-Valle et al. (2013). Σημειώνεται ότι η από κοινού πληροφορία υπολογίζεται παρακάτω για δύο συνεχή τυχαία διανύσματα. Ωστόσο, δεν προσδίδει κάτι σημαντικό αυτή η επέκταση καθώς μια πολυδιάστατη τυχαία μεταβλητή μπορεί να διασπαστεί σε δύο επιμέρους πολυδιάστατες τυχαίες μεταβλητές.

Έστω $\underline{z} \in \mathbb{R}^k$ μια τυχαία μεταβλητή από την $SN_k(\underline{\xi}, \Omega, \underline{\alpha})$ με σ.π.π. που δίνεται από τη σχέση

$$f(\underline{z}) = 2\phi_k(\underline{z}; \underline{\xi}, \Omega) \Phi(\underline{\alpha}^T(\underline{z} - \underline{\xi})), \quad \underline{z} \in \mathbb{R}^k,$$

όπου $\phi_k(\underline{z}; \underline{\xi}, \Omega) = |\Omega|^{-1/2} \phi_k(\underline{z}_0)$ η σ.π.π. της k - διάστατης $N_k(\underline{\xi}, \Omega)$ κατανομής, $\underline{z}_0 = \Omega^{-1/2}(\underline{z} - \underline{\xi})$, $\phi_k(\underline{z}_0)$ είναι η σ.π.π. της k - διάστατης $N_k(\underline{0}, I_k)$ κατανομής και $\Phi(\cdot)$ η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της μονοδιάστατης τυπικής κανονικής κατανομής. Τότε η σ.π.π. της \underline{z} μπορεί να γραφεί ως εξής

$$f(\underline{z}) = |\Omega|^{-1/2} f(\underline{z}_0), \quad \text{με } f(\underline{z}_0) = 2\phi_k(\underline{z}_0) \Phi(\bar{\alpha}^T \underline{z}_0),$$

όπου $\bar{\alpha} = \Omega^{1/2} \underline{\alpha}$.

Για υπολογιστικούς λόγους, αρχικά παρουσιάζεται η έκφραση του δείκτη από κοινού πληροφορίας δύο κανονικών τυχαίων μεταβλητών $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ και $\underline{y} \in \mathbb{R}^m$. Συγκεκριμένα, έστω

$$\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} \sim N_{n+m} \left(\begin{pmatrix} \underline{\xi}_x \\ \underline{\xi}_y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Omega_{xx} & \Omega_{xy} \\ \Omega_{yx} & \Omega_{yy} \end{pmatrix} \right). \quad \text{Τότε, σύμφωνα με γνωστή}$$

ιδιότητα της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής $\underline{x} \sim N_n(\underline{\xi}_x, \Omega_{xx})$ και $\underline{y} \sim N_m(\underline{\xi}_y, \Omega_{yy})$. Οπότε, ο κανονικός

δείκτης από κοινού πληροφορίας ή δείκτης από κοινού πληροφορίας του Shannon, όπως ονομάζεται από τους Arrelano-Valle et al. (2013), δίνεται από τη σχέση

$$I_{\underline{xy}}^{N_{n+m}} = H_{\underline{x}}^{N_n} + H_{\underline{y}}^{N_m} - H_{\underline{xy}}^{N_{n+m}} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{|\Omega_{\underline{xx}}| |\Omega_{\underline{yy}}|}{|\Omega|} \right), \quad (3.3)$$

όπου

$$\begin{aligned} H_{\underline{x}}^{N_n} &= \frac{1}{2} \log |\Omega_{\underline{xx}}| + \frac{n}{2} (1 + \log(2\pi)), \\ H_{\underline{y}}^{N_m} &= \frac{1}{2} \log |\Omega_{\underline{yy}}| + \frac{m}{2} (1 + \log(2\pi)), \\ H_{\underline{xy}}^{N_{n+m}} &= \frac{1}{2} \log |\Omega| + \frac{n+m}{2} (1 + \log(2\pi)), \end{aligned} \quad (3.4)$$

οι τιμές των περιθώριων και από κοινού εντροπιών των τυχαίων μεταβλητών $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ και $\underline{y} \in \mathbb{R}^m$.

Από την τιμή του δείκτη από κοινού πληροφορίας (3.3) και την τιμή της εντροπίας του Shannon (3.4) για την πολυδιάστατη κανονική κατανομή παρατηρούμε ότι υπάρχει εξάρτηση μόνο από τον πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων Ω . Αυτό σημαίνει ότι ο δείκτης από κοινού πληροφορίας εκφράζει την πολυδιάστατη γραμμική εξάρτηση των \underline{x} και \underline{y} , όπως και οι συντελεστές συσχέτισης.

Από την Πρόταση 2.4.6. σε συνδυασμό με τη σχέση $I_{\underline{x}\underline{y}} = H_{\underline{x}} + H_{\underline{y}} - H_{\underline{x}\underline{y}}$ μπορεί να υπολογιστεί η τιμή του δείκτη από κοινού πληροφορίας της πολυδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής. Έτσι, για δύο τυχαίες μεταβλητές $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ και $\underline{y} \in \mathbb{R}^m$ θεωρούμε ότι

$$\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} \sim SN_{n+m} \left(\begin{pmatrix} \underline{\xi}_x \\ \underline{\xi}_y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Omega_{xx} & \Omega_{xy} \\ \Omega_{yx} & \Omega_{yy} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{\alpha}_x \\ \underline{\alpha}_y \end{pmatrix} \right).$$

Τότε, βάσει της Πρότασης 2.4.6., ισχύει ότι

$$\underline{x} \sim SN_n \left(\underline{\xi}_x, \Omega_{xx}, \underline{\alpha}_{x(y)} \right), \text{ όπου } \underline{\alpha}_{x(y)} = \frac{\underline{\alpha}_x + \Omega_{xx}^{-1} \Omega_{xy} \underline{\alpha}_y}{\sqrt{1 + \underline{\alpha}_y^T \Omega_{yy}^{-1} \Omega_{yx} \underline{\alpha}_x}} \text{ και}$$

$$\Omega_{yy \cdot x} = \Omega_{yy} - \Omega_{yx} \Omega_{xx}^{-1} \Omega_{xy},$$

και

$$\underline{y} \sim SN_m \left(\underline{\xi}_y, \Omega_{yy}, \underline{\alpha}_{y(x)} \right), \text{ όπου } \underline{\alpha}_{y(x)} = \frac{\underline{\alpha}_y + \Omega_{yy}^{-1} \Omega_{yx} \underline{\alpha}_x}{\sqrt{1 + \underline{\alpha}_x^T \Omega_{xx}^{-1} \Omega_{yx} \underline{\alpha}_y}} \text{ και}$$

$$\Omega_{xx \cdot y} = \Omega_{xx} - \Omega_{xy} \Omega_{yy}^{-1} \Omega_{yx}.$$

Από την Πρόταση 2.4.32., όπου υπολογίζεται η εντροπία μιας

πολυδιάστατης λοξής-κανονικής τυχαίας μεταβλητής, και από τη σχέση $I_{\underline{x}\underline{y}} = H_{\underline{x}} + H_{\underline{y}} - H_{\underline{x}\underline{y}}$ προκύπτουν τα ακόλουθα αποτελέσματα για την από κοινού και τις περιθώριες εντροπίες της πολυδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής, τα οποία παρουσιάζονται από τους Arellano-Valle et al. (2013).

Πρόταση 3.3.3. Έστω

$$\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} \sim SN_{n+m} \left(\begin{pmatrix} \underline{\xi}_{\underline{x}} \\ \underline{\xi}_{\underline{y}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Omega_{\underline{x}\underline{x}} & \Omega_{\underline{x}\underline{y}} \\ \Omega_{\underline{y}\underline{x}} & \Omega_{\underline{y}\underline{y}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{\alpha}_{\underline{x}} \\ \underline{\alpha}_{\underline{y}} \end{pmatrix} \right).$$

Τότε,

$$H_{\underline{x}}^{SN_n} = H_{\underline{x}}^{N_n} - E \left(\log \left(2\Phi \left(\left\| \bar{\alpha}_{\underline{x}(\underline{y})} \right\| w_{\underline{x}} \right) \right) \right), \text{ με } w_{\underline{x}} \sim SN_1 \left(\left\| \bar{\alpha}_{\underline{x}(\underline{y})} \right\| \right),$$

$$H_{\underline{y}}^{SN_m} = H_{\underline{y}}^{N_m} - E \left(\log \left(2\Phi \left(\left\| \bar{\alpha}_{\underline{y}(\underline{x})} \right\| w_{\underline{y}} \right) \right) \right), \text{ με } w_{\underline{y}} \sim SN_1 \left(\left\| \bar{\alpha}_{\underline{y}(\underline{x})} \right\| \right),$$

$$H_{\underline{x}\underline{y}}^{SN_{n+m}} = H_{\underline{x}\underline{y}}^{N_{n+m}} - E \left(\log \left(2\Phi \left(\left\| \bar{\alpha}_{\underline{x}\underline{y}} \right\| w_{\underline{x}\underline{y}} \right) \right) \right), \text{ με } w_{\underline{x}\underline{y}} \sim SN_1 \left(\left\| \bar{\alpha}_{\underline{x}\underline{y}} \right\| \right),$$

$$\text{όπου } \left\| \bar{\alpha}_{\underline{x}(\underline{y})} \right\| = \left(\underline{\alpha}_{\underline{x}(\underline{y})}^T \Omega_{\underline{x}\underline{x}} \underline{\alpha}_{\underline{x}(\underline{y})} \right)^{1/2}, \quad \left\| \bar{\alpha}_{\underline{y}(\underline{x})} \right\| = \left(\underline{\alpha}_{\underline{y}(\underline{x})}^T \Omega_{\underline{y}\underline{y}} \underline{\alpha}_{\underline{y}(\underline{x})} \right)^{1/2}$$

$$\text{και } \left\| \bar{\alpha}_{\underline{x}\underline{y}} \right\| = \left(\underline{\alpha}_{\underline{x}(\underline{y})}^T \Omega_{\underline{x}\underline{x}} \underline{\alpha}_{\underline{x}(\underline{y})} + \underline{\alpha}_{\underline{y}(\underline{x})}^T \Omega_{\underline{y}\underline{y}} \underline{\alpha}_{\underline{y}(\underline{x})} + 2 \underline{\alpha}_{\underline{x}(\underline{y})}^T \Omega_{\underline{x}\underline{y}} \underline{\alpha}_{\underline{y}(\underline{x})} \right)^{1/2}.$$

Επομένως, αντικαθιστώντας τις τιμές των εντροπιών για τυχαίες μεταβλητές από την πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή από την

Πρόταση 3.3.3. στη σχέση $I_{\underline{x}\underline{y}} = H_{\underline{x}} + H_{\underline{y}} - H_{\underline{x}\underline{y}}$ προκύπτει ότι

$$I_{\underline{x}\underline{y}}^{SN_{n+m}} = H_{\underline{x}}^{N_n} - E\left(\log\left(2\Phi\left(\left\|\bar{\alpha}_{x(y)}\right\|w_{\underline{x}}\right)\right)\right) + H_{\underline{y}}^{N_m} \\ - E\left(\log\left(2\Phi\left(\left\|\bar{\alpha}_{y(x)}\right\|w_{\underline{y}}\right)\right)\right) - H_{\underline{x}\underline{y}}^{N_{n+m}} + E\left(\log\left(2\Phi\left(\left\|\bar{\alpha}_{\underline{x}\underline{y}}\right\|w_{\underline{x}\underline{y}}\right)\right)\right),$$

ή έπειτα από υπολογισμούς και σύμφωνα με τη σχέση (3.3) ο δείκτης από κοινού πληροφορίας της πολυδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής τελικά δίνεται από τη σχέση

$$I_{\underline{x}\underline{y}}^{SN_{n+m}} = I_{\underline{x}\underline{y}}^{N_{n+m}} + E\left(\log\left(\frac{v_{\underline{x}\underline{y}}}{v_{x(y)}v_{y(x)}}\right)\right),$$

όπου $v_{\underline{x}\underline{y}} = 2\Phi\left(\left\|\bar{\alpha}_{\underline{x}\underline{y}}\right\|w_{\underline{x}\underline{y}}\right)$, $v_{x(y)} = 2\Phi\left(\left\|\bar{\alpha}_{x(y)}\right\|w_{\underline{x}}\right)$ και

$$v_{y(x)} = 2\Phi\left(\left\|\bar{\alpha}_{y(x)}\right\|w_{\underline{y}}\right).$$

Εναλλακτικά, ο δείκτης από κοινού πληροφορίας μιας τυχαίας μεταβλητής από την πολυδιάστατη λοξή-κανονική

κατανομή υπολογίζεται από τους Javier & Gupta (2009) ως εκφράσεις άπειρων σειρών. Επιπλέον, ο δείκτης από κοινού πληροφορίας έχει υπολογιστεί και για την πολυδιάστατη *skew-t* κατανομή με τη μέθοδο που αναπτύχθηκε παραπάνω από τους Arellano-Valle et al. (2013) αλλά και με τη μέθοδο των άπειρων σειρών από τους Javier & Gupta (2009).

Εκτός από το μέτρο της από κοινού πληροφορίας, οι Contreras-Reyes & Arellano-Valle (2012) παρουσιάζουν τα εργαλεία με τα οποία υπολογίζεται η μορφή δύο ακόμη μέτρων απόκλισης, της Kullback-Leibler απόκλισης και της Jeffrey's απόκλισης.

3.3.2. Πρόβλημα μη αντιστρεψιμότητας του πίνακα πληροφορίας Fisher

Σε προηγούμενο εδάφιο διαπιστώθηκαν δύο ειδών προβλήματα στην εκτίμηση των παραμέτρων της μονοδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής με τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας. Τα προβλήματα αυτά εντοπίζονται στη συμπεριφορά της συνάρτησης πιθανοφάνειας και του πίνακα πληροφορίας του Fisher στο σημείο $\alpha = \underline{0}$ και διατηρούνται και στην πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή. Ωστόσο, όπως προαναφέρθηκε σε προηγούμενη ενότητα, το δεύτερο πρόβλημα της μη αντιστρεψιμότητας του πίνακα πληροφορίας του Fisher μπορεί να αποφευχθεί με αναπαραμέτρηση των αρχικών παραμέτρων της κατανομής σε κεντρικές παραμέτρους

παρέχοντας ταυτόχρονα πολλά πλεονεκτήματα, ένα εκ των οποίων είναι η βελτιωμένη μορφή της συνάρτησης πιθανοφάνειας.

Για να μπορεί να γίνει εμφανής αυτή η ανωμαλία του πίνακα πληροφορίας Fisher στο σημείο $\alpha = 0$ παρουσιάζεται παρακάτω ο πίνακας πληροφορίας του Fisher για την παράμετρο $\theta = (\xi, \omega, \alpha)$ της μονοδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής με παραμέτρους θέσης και κλίμακας, ο οποίος υπολογίζεται σε κλειστή μορφή στη μεταπτυχιακή διατριβή της Σωκράτους (2009).

Έστω τυχαίο δείγμα x_1, x_2, \dots, x_n από πληθυσμό με ο.π.π. που δίνεται από τη σχέση

$$f(x, \xi, \omega, \alpha) = \frac{2}{\omega} \phi\left(\frac{x - \xi}{\omega}\right) \Phi\left(\alpha \frac{x - \xi}{\omega}\right), \quad -\infty < x, \xi, \alpha < \infty, \quad \omega > 0. \quad (3.5)$$

Ο πίνακας πληροφορίας του Fisher για την παράμετρο $\theta = (\xi, \omega, \alpha)$ της μονοδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής της μορφής (3.5) υπολογίζεται ότι είναι

$$I_{\alpha} = \frac{1}{\omega^2} \begin{pmatrix} 1 + \alpha^2 c_0 & c + \alpha^2 c_1 & \left(\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{(\alpha^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} - \alpha c_1 \right) \omega \\ c + \alpha^2 c_1 & 2 + \alpha^2 c_2 & -\alpha c_2 \omega \\ \left(\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{(\alpha^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} - \alpha c_1 \right) \omega & -\alpha c_2 \omega & c_2 \omega^2 \end{pmatrix},$$

όπου

$$c = \frac{\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(\alpha^2+1)}} \frac{1+2\alpha^2}{1+\alpha^2},$$

$$c_0 = \frac{1}{\pi\sqrt{\pi(1+2\alpha^2)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{1+2\alpha^2}}x\right) e^{-x^2} dx,$$

$$c_1 = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}(1+2\alpha^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} x\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{1+2\alpha^2}}x\right) e^{-x^2} dx,$$

και

$$c_2 = \frac{2}{\pi\sqrt{\pi}(1+2\alpha^2)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{1+2\alpha^2}}x\right) e^{-x^2} dx.$$

Από τη μορφή του πίνακα πληροφορίας του Fisher παρατηρείται ότι, καθώς το $\alpha \rightarrow 0$, αυτός δεν είναι αντιστρέψιμος και κατά συνέπεια δεν υπάρχει ο πίνακας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων του διανύσματος των ΕΜΠ $(\hat{\xi}, \hat{\omega}, \hat{\alpha})$.

Ανάλογα για την πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή ο δείκτης από κοινού πληροφορίας είναι μη ιδιάζων στο σημείο $\alpha = 0$.

Ο υπολογισμός του πίνακα πληροφορίας Fisher για την περίπτωση της πολυδιάστατης λοξής κανονικής κατανομής είναι εξαιρετικά πολύπλοκος. Μια προσπάθεια υπολογισμού του επιχειρείται στην εργασία των Arellano-Valle & Azzalini (2008).

Για λόγους πληρότητας, ακολούθως παρουσιάζεται ο Εσσιανός πίνακας της πολυδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής, η μορφή του οποίου προσδιορίζεται από τους Arellano-Valle & Azzalini (2008) και με τη βοήθεια αυτού υπολογίζονται ο παρατηρούμενος και ο αναμενόμενος πίνακας πληροφορίας Fisher.

Για μαθηματική ευκολία θεωρείται η αναπαράμετρηση $DP^* = (\underline{\xi}, \Omega, \underline{\eta})$, θέτοντας $\underline{\eta} = \omega^{-1} \underline{\alpha}$ με $\omega = \text{diag}(\omega_{11}, \dots, \omega_{kk})$ και ω_{ii} , $i = 1, \dots, k$, τα στοιχεία του πίνακα Ω . Έτσι, υπολογίζεται ο Εσσιανός πίνακας για την πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή, ο οποίος δίνεται από τον τύπο

$$H_{DP^*} = - \frac{\partial^2 l(DP^*)}{\partial DP^* \partial (DP^*)^T}$$

$$= - \begin{pmatrix} \Omega^{-1} \otimes (X^T X) + (\underline{\eta} \underline{\eta}^T) \otimes C & \cdot & \cdot \\ D_k^T (\Omega^{-1} \otimes (\Omega^{-1} U^T X)) & \frac{n}{2} D_k^T (\Omega^{-1} \otimes N) D_k & \cdot \\ I_k \otimes \underline{u}^T - \underline{\eta}^T \otimes S^T & 0 & U^T Z_2 U \end{pmatrix},$$

όπου D_k είναι ο $k^2 \times (k(k+1)/2)$ Duplication matrix τέτοιος ώστε $vec(M) = D_k vech(M)$ για έναν συμμετρικό πίνακα M , $Z_2 = -diag(\zeta_2(U\eta)) > O_{n \times n}$, $C = X^T Z_2 X$, $\underline{u} = X^T \zeta_1(U\eta)$, $S = X^T Z_2 U$ και $N = \Omega^{-1}(2V - \Omega)\Omega^{-1}$, ενώ οι πίνακες X , U και V ορίζονται στην ενότητα 3.2.. Το άνω τρίγωνο του H_{DP^*} συμπληρώνεται συμμετρικά.

Εκτιμώντας τον Εσσιανό πίνακα H_{DP^*} για τιμές των παραμέτρων τους ΕΜΠ $(\hat{\xi}, \hat{\Omega}, \hat{\eta})$ προκύπτει ο παρατηρούμενος πίνακας πληροφορίας Fisher, ενώ παίρνοντας την αναμενόμενη τιμή του Εσσιανού πίνακα παραπάνω προσδιορίζεται ο τύπος του αναμενόμενου πίνακα πληροφορίας του Fisher.

Κάθε ένας από τους δύο τύπους του πίνακα πληροφορίας του Fisher που υπολογίζονται για τις παραμέτρους $DP^* = (\xi, \Omega, \eta)$ μπορεί να εκφραστεί στις κεντρικές παραμέτρους CP και αντίστροφα με τη βοήθεια Ιακωβιανών πινάκων οι οποίοι επίσης προσδιορίζονται από τους Arellano-Valle & Azzalini (2008).

Στο πακέτο `sn` της στατιστικής γλώσσας προγραμματισμού R που παρουσιάζεται από τον Azzalini (2014), υπάρχουν συναρτήσεις που υπολογίζουν την αναμενόμενη τιμή του πίνακα πληροφορίας του Fisher για τις παραμέτρους ενός τυχαίου

δείγματος από τη μονοδιάστατη ή την πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή εκφρασμένες σε οποιαδήποτε από τις δύο αναπαραμετρήσεις CP ή DP .

ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ ΣΤΗΝ ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΗ ΛΟΞΗ-ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

4.1. Εισαγωγή

Ένα από τα πιο σημαντικά θέματα με τα οποία ασχολούνται πολλοί ερευνητές για περισσότερο από έναν αιώνα είναι η ανεξαρτησία ή ο βαθμός εξάρτησης μεταξύ των συνιστωσών ενός τυχαίου διανύσματος. Σύμφωνα με τους Micheas & Zografos (2006), πολύ συχνά, ο βαθμός εξάρτησης των δεδομένων ή ο ισχυρισμός της ανεξαρτησίας ποσοτικοποιείται με τη χρήση μέτρων τύπου απόστασης μεταξύ της από κοινού κατανομής και του γινομένου των περιθωρίων. Έτσι, στη βιβλιογραφία έχουν προταθεί πολλά μέτρα εξάρτησης τα οποία βασίζονται κυρίως στην απόσταση μεταξύ της από κοινού κατανομής των δεδομένων και του γινομένου των περιθωρίων κατανομών, με την τελευταία κατανομή να εκφράζει την ιδιότητα της ανεξαρτησίας. Για μια κριτική ανασκόπηση στα μέτρα της εξάρτησης παραπέμπουμε τους αναγνώστες στην εργασία των

Micheas & Zografos (2006) και τις αναφορές που υπάρχουν σ' αυτήν.

Μια γενική μεθοδολογία κατασκευής μέτρων στοχαστικής εξάρτησης-ανεξαρτησίας, στην οποία επικεντρώνεται η εργασία των Micheas & Zografos (2006), βασίζεται σε μέτρα τύπου απόστασης μεταξύ της από κοινού κατανομής ενός τυχαίου διανύσματος και της κατανομής των περιθωρίων. Ένα γενικό μέτρο τύπου απόστασης ή απόκλισης μεταξύ κατανομών είναι η φ -απόκλιση η οποία εξαρτάται από μια κυρτή συνάρτηση φ και

η οποία για δύο πυκνότητες f και g ορίζεται $\int g\varphi\left(\frac{f}{g}\right)dx$.

Επιλέγοντας την κυρτή συνάρτηση φ να είναι, $\varphi(u) = u \log u$, f να είναι η από κοινού κατανομή και g να είναι το γινόμενο των περιθωρίων, προκύπτει το μέτρο της από κοινού πληροφορίας, το οποίο αποτελεί ειδική περίπτωση της απόκλισης των Kullback-Leibler (Kullback & Leibler, 1951) και θα χρησιμοποιηθεί για την εξέταση της ανεξαρτησίας για ένα τυχαίο διάνυσμα από την πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή. Για μια ανασκόπηση των μέτρων φ -απόκλισης και της σπουδαιότητάς τους παραπέμπουμε στην εργασία των Micheas & Zografos (2006) και τις αναφορές που υπάρχουν σ' αυτήν.

Στο κεφάλαιο αυτό το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στον έλεγχο της ανεξαρτησίας ή του βαθμού εξάρτησης μεταξύ των συνιστωσών ενός τυχαίου διανύσματος από την διδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή. Για τον έλεγχο της ανεξαρτησίας, όπως

προαναφέρθηκε, θα χρησιμοποιηθεί το μέτρο της από κοινού πληροφορίας I_x . Σύμφωνα με τον Joe (1993), εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό $\delta^* = \left(1 - e^{-2I_x}\right)^{1/2}$, στο μέτρο της από κοινού πληροφορίας, προκύπτει ένα μέτρο εξάρτησης εκφρασμένο στο διάστημα $[0,1]$, το οποίο θα βοηθήσει στην καλύτερη κατανόηση του βαθμού εξάρτησης των συνιστωσών του τυχαίου διανύσματος x από την πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή. Στην ενότητα 3.3.1. αναφέρεται ότι οι συνιστώσες ενός τυχαίου διανύσματος είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν η από κοινού πληροφορία του τυχαίου διανύσματος είναι μηδέν και σε αυτήν την ιδιότητα της από κοινού πληροφορίας θα βασιστεί η διερεύνηση της ανεξαρτησίας μεταξύ των συνιστωσών ενός τυχαίου διανύσματος. Στην επιλογή των τιμών των παραμέτρων της κατανομής συμβάλλει το Πρόσιμα 2.4.14., σύμφωνα με το οποίο πρέπει να ικανοποιούνται ταυτόχρονα δύο συνθήκες ώστε οι συνιστώσες ενός λοξού-κανονικού τυχαίου διανύσματος να είναι ανεξάρτητες. Η πρώτη συνθήκη απαιτεί η παράμετρος κλίμακας να είναι ένας διαγώνιος πίνακας και η δεύτερη συνθήκη απαιτεί η παράμετρος λοξότητας να έχει το πολύ μια συνιστώσα διάφορη του μηδενός. Οπότε, για ένα τυχαίο διάνυσμα από τη διδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή που ικανοποιεί τις δύο αυτές συνθήκες αναμένεται η τιμή της από κοινού πληροφορίας να είναι κοντά στο μηδέν.

Στην ενότητα που ακολουθεί, αρχικά προσδιορίζεται η μορφή της από κοινού πληροφορίας ενός τυχαίου διανύσματος από την πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή και

αντιμετωπίζονται τα προβλήματα που δημιουργούνται κατά τους υπολογισμούς. Στη συνέχεια, περιγράφονται τα βήματα της μελέτης προσομοίωσης που διεξήχθησαν και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν. Συγκεκριμένα, το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στη σύγκριση των τιμών της από κοινού πληροφορίας που προέκυψαν από τυχαία δείγματα που ικανοποιούν τις συνθήκες του Πορίσματος 2.4.14. και από τυχαία δείγματα που δεν τις ικανοποιούν. Τέλος, υπολογίζονται και ερμηνεύονται οι τιμές του μέτρου εξάρτησης δ^* για τις τιμές της από κοινού πληροφορίας που προέκυψαν.

4.2. Monte Carlo προσομοίωση για έλεγχο της ανεξαρτησίας στην πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή

Η παρούσα ενότητα αποσκοπεί στη διερεύνηση της ανεξαρτησίας μεταξύ των συνιστωσών ενός τυχαίου διανύσματος \underline{x} από την πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή. Όπως έχει προαναφερθεί, ο έλεγχος αυτός μπορεί να στηριχτεί στην εξής ιδιότητα της από κοινού πληροφορίας: $I_{\underline{x}} = 0$ αν και μόνο αν οι συνιστώσες του \underline{x} είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Επομένως, αρχικά το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στην εύρεση ενός εκτιμητή της από κοινού πληροφορίας $I_{\underline{x}}$ και εν συνεχεία στην εξέταση της απόκλισής του από την τιμή 0.

Για το σκοπό αυτό, ακολούθως δίνεται ο γενικός ορισμός

της από κοινού πληροφορίας ενός τυχαίου διανύσματος σύμφωνα με τον Kullback (1968). Στη συνέχεια, υπολογίζεται η μορφή αυτής για ένα τυχαίο διάνυσμα από την πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή.

Έστω $\underline{x} = (x_1, \dots, x_k)^T \in \mathbb{R}^k$ ένα συνεχές τυχαίο διάνυσμα με από κοινού σ.π.π. $f(\underline{x})$ και περιθώριες σ.π.π. $f(x_i)$, $i = 1, \dots, k$. Τότε το μέτρο της από κοινού πληροφορίας του \underline{x} ορίζεται ότι είναι

$$I_{\underline{x}} = E_{f(\underline{x})} \left(\log \left(\frac{f(\underline{x})}{\prod_{i=1}^k f(x_i)} \right) \right) = \int_{\mathbb{R}^k} f(\underline{x}) \log \left(\frac{f(\underline{x})}{\prod_{i=1}^k f(x_i)} \right) d\underline{x}, \quad (4.1)$$

όπου $0 \leq I_{\underline{x}} \leq \infty$.

Βάσει του Ορισμού 2.4.26. για την εντροπία του Shannon $H_{\underline{x}}$ ενός τυχαίου διανύσματος \underline{x} , η σχέση (4.1) για την από κοινού πληροφορία $I_{\underline{x}}$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$I_{\underline{x}} = \int_{\mathbb{R}^k} f(\underline{x}) \log \left(\frac{f(\underline{x})}{\prod_{i=1}^k f(x_i)} \right) d\underline{x}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^k} f(\underline{x}) \log(f(\underline{x})) d\underline{x} - \int_{\mathbb{R}^k} f(\underline{x}) \log\left(\prod_{i=1}^k f(x_i)\right) d\underline{x} \\
&= -H_{\underline{x}} - \sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^k} f(\underline{x}) \log(f(x_i)) d\underline{x} \\
&= -H_{\underline{x}} - \sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f(\underline{x}) \log(f(x_i)) dx_1 \cdots dx_k \\
&= -H_{\underline{x}} - \sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}} f(x_i) \log(f(x_i)) dx_i \\
&= -H_{\underline{x}} + \sum_{i=1}^k H_{x_i},
\end{aligned}$$

με H_{x_i} να συμβολίζει την εντροπία Shannon της i -οστής συνιστώσας του τυχαίου διανύσματος \underline{x} .

Για την εύρεση, λοιπόν, της από κοινού πληροφορίας του \underline{x} από την πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή αρκεί να υπολογιστούν η από κοινού και οι περιθώριες εντροπίες $H_{\underline{x}}$ και H_{x_i} , $i = 1, \dots, k$, αντίστοιχα.

Έστω $\underline{x} \sim SN_k(\underline{0}, \Omega, \underline{\alpha})$, με Ω έναν θετικά ορισμένο πίνακα. Τότε η σ.π.π. του τυχαίου διανύσματος \underline{x} δίνεται από τη σχέση

$$f(\underline{x}) = 2\phi_k(\underline{x}, \Omega) \Phi(\underline{\alpha}^T \underline{x}), \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^k, \quad (4.2)$$

όπου $\underline{\alpha}$ είναι ένα k - διάστατο διάνυσμα πραγματικών αριθμών και

$$\phi_k(\underline{x}, \Omega) = (2\pi)^{-k/2} (\det(\Omega))^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \underline{x}^T \Omega^{-1} \underline{x}\right),$$

η σ.π.π. μιας k - διάστατης κανονικής κατανομής με πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων Ω και

$$\Phi(\underline{\alpha}^T \underline{x}) = \int_{-\infty}^{\underline{\alpha}^T \underline{x}} \phi(z) dz,$$

η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της μονοδιάστατης τοπικής κανονικής κατανομής, όπου

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}, \quad -\infty < z < \infty,$$

η σ.π.π. της τοπικής κανονικής κατανομής.

Από την Πρόταση 2.4.6. μπορούν να υπολογιστούν και οι περιθώριες κατανομές των συνιστώσων του \underline{x} σε συνδυασμό με την μεθοδολογία που ακολουθεί, η οποία προτείνεται από τους Javier & Gupta (2009). Η περιθώρια κατανομή της πρώτης συνιστώσας του \underline{x} ακολουθεί επίσης λοξή-κανονική κατανομή. Συγκεκριμένα, $x_1 \sim SN_1(\omega_{11}, \alpha_1)$, όπου ω_{11}^2 είναι το πρώτο

διαγώνιο στοιχείο του πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων Ω και α_1 είναι η παράμετρος λοξότητας η οποία εξαρτάται από την αρχική παράμετρο λοξότητας $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)^T$ μέσω της σχέσης

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_1 - \omega_{11}^2 \Omega_{12} \underline{\alpha}_2}{(1 + \underline{\alpha}_2^T \Omega_{22.1} \underline{\alpha}_2)},$$

όπου $\Omega = (\omega_{ij}^2) = \begin{pmatrix} \omega_{11}^2 & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{pmatrix}$, $\underline{\alpha}_2 = (\alpha_2, \dots, \alpha_k)^T$ και

$$\Omega_{22.1} = \Omega_{22} - \Omega_{21} (\omega_{11})^{-1} \Omega_{12}.$$

Αν η x_i δεν είναι η πρώτη συνιστώσα του τυχαίου διανύσματος \underline{x} τότε ένας κατάλληλος γραμμικός μετασχηματισμός εναλλαγής γραμμής, ο $P_{1,i} \underline{x}$, θα κάνει την x_i την πρώτη συνιστώσα. Ο $P_{1,i}$ είναι ο στοιχειώδης πίνακας μετάθεσης ο οποίος προκύπτει από τον ταυτοτικό πίνακα εναλλάσσοντας την πρώτη με την i -οστή γραμμή αυτού. Η προκύπτουσα σ.π.π. παραμένει αμετάβλητη υπό το μετασχηματισμό, δηλαδή η σ.π.π. (4.2) είναι αναλλοίωτη της μετάθεσης. Το γεγονός αυτό επιτρέπει την επαναλαμβανόμενη χρήση της Πρότασης 2.4.6. με αποτέλεσμα να μπορεί να βρεθεί η περιθώρια κατανομή της i -οστής συνιστώσας x_i , $i = 1, 2, \dots, k$, η οποία είναι

$$f(x_i) = 2\phi_{x_i}(x_i)\Phi(\alpha_i x_i),$$

$$\text{όπου} \quad \phi_{x_i}(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega_{ii}}} e^{-\frac{x_i^2}{2\omega_{ii}}}, \quad -\infty < x_i < \infty,$$

$$\alpha_i = \frac{\alpha_i - \omega_{ii}^2 \Omega_{i2} \alpha_2^{(i)}}{\left(1 + \alpha_2^{(i)\top} \Omega_{22.1}^{(i)} \alpha_2^{(i)}\right)}, \quad P_{i,j} \Omega = \begin{pmatrix} \omega_{ii}^2 & \Omega_{i2} \\ \Omega_{2i} & \Omega_{ii} \end{pmatrix},$$

$$\Omega_{22.1}^{(i)} = \Omega_{ii} - \Omega_{2i} \left(\omega_{ii}^2\right)^{-1} \Omega_{i2} \text{ και } P_{1,i}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)^\top = \left(\alpha_i, \alpha_2^{(i)}\right)^\top.$$

Γνωρίζοντας τη σ.π.π. του τυχαίου διανύσματος \underline{x} και τη σ.π.π. των περιθώριων κατανομών του, μπορούν να υπολογιστούν η από κοινού και οι περιθώριες εντροπίες αυτού. Στην Πρόταση 2.4.32. υπολογίζεται η σχέση που δίνει την από κοινού εντροπία $H_{\underline{x}}$ ενός τυχαίου διανύσματος \underline{x} από την k -διάστατη λοξή-κανονική κατανομή, η οποία είναι

$$H_{\underline{x}}^{SN_k} = H_{\underline{x}}^{N_k} - E\left(\log\left(2\Phi\left(\|\bar{\alpha}\|w\right)\right)\right),$$

όπου $\bar{\alpha} = \Omega^{1/2}\alpha$, $\|\bar{\alpha}\| = \bar{\alpha}^\top \bar{\alpha} = \alpha^\top \Omega \alpha$ και $w \sim SN_1\left(\|\bar{\alpha}\|\right)$, ενώ

$$H_{\underline{x}}^{N_k} = \frac{1}{2} \log|\Omega| + E\left(\log\left(\phi_k\left(x_{0N}\right)\right)\right),$$

όπου $x_{0N} \sim N_k(0, I_k)$, οπότε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\log(\phi_k(x_{0N}))) &= \int_{\mathbb{R}^k} \phi_k(x_{0N}) \log(\phi_k(x_{0N})) dx_{0N} \\
&= \int_{\mathbb{R}^k} \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} e^{-\frac{1}{2}x_{0N}^\top x_{0N}} \log\left(\frac{1}{(2\pi)^{k/2}} e^{-\frac{1}{2}x_{0N}^\top x_{0N}}\right) dx_{0N} \\
&= \log\frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \int_{\mathbb{R}^k} \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} e^{-\frac{1}{2}x_{0N}^\top x_{0N}} dx_{0N} \\
&\quad - \frac{1}{2(2\pi)^{k/2}} \int_{\mathbb{R}^k} x_{0N}^\top x_{0N} e^{-\frac{1}{2}x_{0N}^\top x_{0N}} dx_{0N} \\
&= -\frac{k}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \mathbb{E}(x_{0N}^\top x_{0N}).
\end{aligned}$$

Επειδή, $x_{0N} \sim N_k(0, I_k)$ θα είναι $x_{0N}^\top x_{0N} \sim \chi_k^2$ και έτσι προκύπτει ότι

$$\mathbb{E}(\log(\phi_k(x_{0N}))) = -\frac{k}{2}(\log 2\pi + 1).$$

Ακόμη, ισχύει ότι

$$\mathbb{E}(\log(2\Phi(\|\bar{\alpha}\|w))) = \int_{\mathbb{R}} 2\Phi(\|\bar{\alpha}\|w) \log(2\Phi(\|\bar{\alpha}\|w)) dw,$$

$$\text{όπου } \Phi(\|\bar{\alpha}\|w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\|\bar{\alpha}\|w} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Επομένως, η από κοινού εντροπία του $\underline{x} \sim SN_k(\underline{0}, \Omega, \underline{\alpha})$ δίνεται τελικά από τη σχέση

$$H_{\underline{x}} = \frac{1}{2} \log |\Omega| - \frac{k}{2} (\log 2\pi + 1) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \log \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\|\bar{\alpha}\|^w} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\|\bar{\alpha}\|^w} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) dw.$$

Ωστόσο, ο υπολογισμός του παραπάνω τύπου σε κλειστή μορφή δεν είναι εφικτός.

Στη διατριβή της Σωκράτους (2009) υπολογίζεται η σχέση που δίνει την εντροπία μια τυχαίας μεταβλητής από τη μονοδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή. Η σχέση αυτή για τη συνιστώσα $x_i \sim SN_1(\omega_{ii}, \alpha_i)$, $i = 1, \dots, k$, είναι

$$H_{x_i} = \log \sqrt{2\pi} - \log 2 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x_i^2 e^{-\frac{x_i^2}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\alpha_i x_i} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) dx_i - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x_i^2}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\alpha_i x_i} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) \log \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha_i x_i} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) dx_i,$$

η οποία επίσης δεν υπολογίζεται σε κλειστή μορφή.

Επομένως, ο τύπος του μέτρου της από κοινού πληροφορίας ενός τυχαίου διανύσματος \underline{x} από την πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή υπολογίζεται ότι είναι

$$\begin{aligned}
I_{\underline{x}} = & -\frac{1}{2} \log |\Omega| + \frac{k}{2} (\log 2\pi + 1) \\
& + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \log \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\|\bar{a}\|^w} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\|\bar{a}\|^w} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) dw \\
& + \sum_{i=1}^k \left(\log \sqrt{2\pi} - \log 2 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x_i^2 e^{-\frac{x_i^2}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\alpha_i x_i} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) dx_i \right. \\
& \left. - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x_i^2}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\alpha_i x_i} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) \log \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha_i x_i} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) dx_i \right). \quad (4.3)
\end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση δεν μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά, μπορεί όμως να υπολογιστεί προσεγγιστικά με μια Monte Carlo προσομοίωση. Για την εύρεση ενός Monte Carlo σημειοεκτιμητή και την κατασκευή ενός Monte Carlo διαστήματος εμπιστοσύνης για την από κοινού πληροφορία $I_{\underline{x}}$ η διαδικασία που ακολουθείται είναι η εξής:

Έστω x_1, x_2, \dots, x_n ένα τυχαίο δείγμα από την $SN_k(\underline{0}, \Omega, \underline{\alpha})$. Αρχικά, υπολογίζονται οι εκτιμητές των παραμέτρων της από κοινού κατανομής του τυχαίου δείγματος σύμφωνα με τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας που παρουσιάστηκε στην ενότητα

3.2.. Παρόμοια, υπολογίζονται και οι ΕΜΠ των περιθώριων κατανομών των τυχαίων μεταβλητών x_1, x_2, \dots, x_k . Αντικαθιστώντας τις τιμές των ΕΜΠ που βρέθηκαν στη σχέση (4.3) προκύπτει ένας εκτιμητής για την από κοινού πληροφορία I_x . Ωστόσο, οι ΕΜΠ $\hat{\Omega}$ και $\hat{\alpha}$ των παραμέτρων της k -διάστατης από κοινού λοξής-κανονικής κατανομής καθώς και οι ΕΜΠ $\hat{\alpha}_i$, $i=1, \dots, k$, των μονοδιάστατων λοξών-κανονικών περιθώριων κατανομών δεν μπορούν να υπολογιστούν σε κλειστή μορφή. Για το λόγο αυτό οι ΕΜΠ των παραμέτρων $\hat{\Omega}$, $\hat{\alpha}$ και $\hat{\alpha}_i$ υπολογίζονται αριθμητικά με τη βοήθεια του πακέτου sn της R (Azzalini, 2014) για τις τυχαίες μεταβλητές που ορίστηκαν. Οι αριθμητικές τιμές που προκύπτουν για τους ΕΜΠ $\hat{\Omega}$, $\hat{\alpha}$ και $\hat{\alpha}_i$ αντικαθιστώνται στη σχέση (4.3), η οποία παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}
I_x &= -\frac{1}{2} \log |\hat{\Omega}| + \frac{k}{2} (\log 2\pi + 1) \\
&+ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \log \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\|\hat{\alpha}\|^w} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\|\hat{\alpha}\|^w} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) dw \\
&+ \sum_{i=1}^k \left(\log \sqrt{2\pi} - \log 2 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x_i^2 e^{-\frac{x_i^2}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\hat{\alpha}_i x_i} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) dx_i \right. \\
&\left. - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x_i^2}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\hat{\alpha}_i x_i} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) \log \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\hat{\alpha}_i x_i} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) dx_i \right).
\end{aligned}$$

Ο τύπος της από κοινού πληροφορίας πάλι δεν μπορεί να υπολογιστεί σε κλειστή μορφή. Έτσι, ακολουθούνται τα παρακάτω βήματα, σύμφωνα με τους Micheas & Zografos (2006):

1. Γεννούνται τα τυχαία διανύσματα $\underline{x}^{(j)} = \left(x_1^{(j)}, \dots, x_k^{(j)} \right)^T$, $j=1, \dots, L$, όπου το τυχαίο διάνυσμα $\underline{x}^{(j)}$, $i=1, \dots, k$, έχει σ.π.π. της μορφής (4.2) και L ένας μεγάλος φυσικός αριθμός. Σημειώνεται ότι τα τυχαία διανύσματα $\underline{x}^{(j)}$, $j=1, \dots, L$, δεν γεννούνται υπό την υπόθεση της ανεξαρτησίας καθότι δεν είναι γνωστό αν η συνάρτηση $f(\bullet)$ στην (4.1) είναι η αληθινή από κοινού σ.π.π. του \underline{x} . Βάσει της έκφρασης της $I_{\underline{x}}$ στη σχέση (4.1), ένας εκτιμητής για την από κοινού πληροφορία $I_{\underline{x}}$ υπολογίζεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \hat{I}_{\underline{x}} &= \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \log \left(\frac{f(\underline{x}^{(j)}; \hat{\Omega}, \hat{\alpha})}{\prod_{i=1}^k f(x_i^{(j)}; \hat{\alpha}_i)} \right) \\ &= \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \left(\log f(\underline{x}^{(j)}; \hat{\Omega}, \hat{\alpha}) - \log \left(\prod_{i=1}^k f(x_i^{(j)}; \hat{\alpha}_i) \right) \right) \\ &= \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \left(\log f(\underline{x}^{(j)}; \hat{\Omega}, \hat{\alpha}) - \sum_{i=1}^k \log f(x_i^{(j)}; \hat{\alpha}_i) \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \left(\log \left(2 \left(\det(2\pi\hat{\Omega}) \right)^{-1/2} e^{-1/2\hat{x}^T \hat{\Omega}^{-1/2} \hat{x}} \int_{-\infty}^{\hat{q}^T \hat{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2z^2} dz \right) \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^k \log \left(2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\omega_{ii}} e^{-\frac{x_i^2}{2\omega_{ii}^2}} \int_{-\infty}^{\hat{\alpha}_i x_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2t^2} dt \right) \right).$$

2. Επαναλαμβάνεται το Βήμα 1. για ένα μεγάλο αριθμό φορών, έστω M , οπότε προκύπτουν οι εκτιμητές $\hat{I}_{x,1}, \hat{I}_{x,2}, \dots, \hat{I}_{x,M}$. Αυτές οι τιμές μπορούν να θεωρηθούν ως το τυχαίο δείγμα που προέκυψε από την κατανομή του \hat{I}_x .

3. Χρησιμοποιώντας το τυχαίο δείγμα $\hat{I}_{x,1}, \hat{I}_{x,2}, \dots, \hat{I}_{x,M}$ μπορεί να εφαρμοστεί στατιστική συμπερασματολογία για την από κοινού πληροφορία I_x . Για παράδειγμα, ένας σημειοεκτιμητής της I_x υπολογίζεται από τη σχέση

$$\hat{I}_x = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \hat{I}_{x,i}.$$

Για να βρεθεί ένα $100(1-\alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για την από κοινού πληροφορία I_x , αρχικά διατάσσεται το τυχαίο

δείγμα $\hat{I}_{x,(1)}, \hat{I}_{x,(2)}, \dots, \hat{I}_{x,(M)}$ που προέκυψε και υπολογίζεται το

διάστημα $\left[\hat{I}_{x, \left(\left[\frac{\alpha}{2} M \right] \right)}(x), \hat{I}_{x, \left(\left[\left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) M \right] \right)}(x) \right]$, όπου με $\left[\frac{\alpha}{2} M \right]$ και

$\left[\left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) M \right]$ συμβολίζονται τα ακέραια μέρη των ποσοτήτων $\frac{\alpha}{2} M$

και $\left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) M$, αντίστοιχα. Αν το άνω όριο του διαστήματος είναι πολύ κοντά στο 0, τότε υπάρχει ανεξαρτησία.

Για τις προσομοιώσεις που διεξήχθησαν επιλέχθηκαν οι τιμές $L = 500$ και $M = 1000$ για τυχαία δείγματα μεγέθους 20, 50, 200, 500 και 1000 από τη διδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή και για διάφορες τιμές των παραμέτρων κλίμακας και λοξότητας, ενώ η παράμετρος θέσης επιλέγεται να έχει την τιμή 0. Επίσης, τα διαστήματα εμπιστοσύνης υπολογίζονται για βαθμό εμπιστοσύνης $\alpha = 0.05$.

Όπως προαναφέρθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο, ο έλεγχος της ανεξαρτησίας μεταξύ συνιστωσών μιας πολυδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής μπορεί να βασιστεί στο Πόρισμα 2.4.14.. Τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων συνοψίζονται στους Πίνακες 1-5 που ακολουθούν. Στον Πίνακα 1 οι τιμές των παραμέτρων ικανοποιούν τις συνθήκες του Πορίσματος 2.4.14. οπότε τα τυχαία διανύσματα που γεννιούνται είναι ανεξάρτητα. Στον Πίνακα 3 ικανοποιείται μόνο η πρώτη συνθήκη του

Πορίσματος 2.4.14. οπότε τα τυχαία διανύσματα που γεννιούνται δεν είναι ανεξάρτητα. Όμοια, στον Πίνακα 4 ικανοποιείται μόνο η δεύτερη συνθήκη του Πορίσματος 2.4.14. και τα τυχαία διανύσματα που γεννιούνται δεν είναι ανεξάρτητα. Στον Πίνακα 5 οι τιμές των παραμέτρων δεν ικανοποιούν καμία από τις δύο συνθήκες του Πορίσματος 2.4.14. και επίσης τα τυχαία διανύσματα που γεννιούνται δεν είναι ανεξάρτητα. Στον Πίνακα 2 ικανοποιείται μόνο η πρώτη συνθήκη του Πορίσματος 2.4.14., όπως και στον Πίνακα 3, με τη διαφορά ότι οι τιμές που προέκυψαν παρουσιάζουν μια ιδιόμορφη συμπεριφορά η οποία αναλύεται στα γενικά συμπεράσματα παρακάτω.

Στους Πίνακες 1-6 που ακολουθούν με I_2 συμβολίζεται ο μοναδιαίος 2×2 πίνακας, $\xi_1 = (1,0)^T$, $\xi_2 = (1,1)^T$, $\xi_3 = (1,3)^T$ και

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Πίνακας 1

$SN_2(0, I_2, \xi_1)$

Μέγεθος Δείγματος	Σημειοεκτιμητής \hat{I}_x	Κάτω όριο	Ανω όριο
20	0.01403403	0.001723371	0.02665073
50	0.004323878	0.000223326	0.009893405
200	0.002091946	0.0001238525	0.005436764
500	0.001219081	0.0000430736	0.003244193
1000	0.0008688306	0.00002182501	0.002349373

Πίνακας 2

$$SN_2(0, I_2, c_1)$$

Μέγεθος Δείγματος	Σημειοεκτιμητής \hat{I}_x	Κάτω όριο	Άνω όριο
20	0.02250446	0.004245669	0.04116743
50	0.01969335	0.003980774	0.03441469
200	0.01625395	0.002447651	0.03344587
500	0.02162343	0.004391734	0.0391049
1000	0.03189419	0.0100661	0.05486175

Πίνακας 3

$$SN_2(0, I_2, c_2)$$

Μέγεθος Δείγματος	Σημειοεκτιμητής \hat{I}_x	Κάτω όριο	Άνω όριο
20	0.0171154	0.02338179	0.03336442
50	0.02273163	0.004038091	0.0439891
200	0.03573281	0.01331148	0.06054335
500	0.0581236	0.003340106	0.1021743
1000	0.1075027	0.06402183	0.15651147

Πίνακας 4

$$SN_2(Q, A_1, \xi_1)$$

Μέγεθος Δείγματος	Σημειοεκτιμητής \hat{I}_x	Κάτω όριο	Ανω όριο
20	0.3373405	0.2841497	0.3881644
50	0.639142	0.5683509	0.7050507
200	0.7159388	0.6489994	0.7785243
500	0.7680766	0.6973501	0.8340705
1000	0.8019125	0.7335641	0.866644

Πίνακας 5

$$SN_2(Q, A_1, \xi_2)$$

Μέγεθος Δείγματος	Σημειοεκτιμητής \hat{I}_x	Κάτω όριο	Ανω όριο
20	0.2601914	0.2136987	0.3013399
50	0.3363601	0.2809494	0.3909415
200	0.4736924	0.4149449	0.5327998
500	0.6338843	0.5698171	0.6958846
1000	0.8042125	0.7268518	0.8805045

Από τα αποτελέσματα των Πινάκων 1-5 προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

α) Στον Πίνακα 1 η τιμή του σημειοεκτιμητή μειώνεται καθώς το μέγεθος του τυχαίου δείγματος, από τη διδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή, αυξάνεται. Ανάλογη συμπεριφορά παρουσιάζει και η τιμή του άνω ορίου του διαστήματος εμπιστοσύνης με την τελευταία τιμή αυτού να μην αποκλίνει σημαντικά από το 0. Οπότε, η επιλογή των τιμών των παραμέτρων της κατανομής που ικανοποιούν τις συνθήκες του Πορίσματος 2.4.14. ώστε να ισχύει η ανεξαρτησία μεταξύ των συνιστωσών του τυχαίου διανύσματος επαληθεύεται από τις χαμηλές τιμές του σημειοεκτιμητή της από κοινού πληροφορίας και του άνω ορίου του διαστήματος εμπιστοσύνης αυτού.

β) Στους Πίνακες 3-5, όπου δεν ικανοποιείται τουλάχιστον μία από τις δύο συνθήκες του Πορίσματος 2.4.14., οι τιμές του σημειοεκτιμητή και του άνω ορίου του διαστήματος εμπιστοσύνης αυξάνονται καθώς το μέγεθος του τυχαίου δείγματος αυξάνεται. Αυτό σημαίνει ότι όσο μεγαλώνει το πλήθος των παραγόμενων τυχαίων διανυσμάτων η εξάρτηση μεταξύ των συνιστωσών τους είναι εμφανέστερη.

γ) Στον Πίνακα 2, όπου επιλέγεται η παράμετρος λοξότητας να έχει την τιμή $(1,1)^T$, παρατηρείται μια ιδιόμορφη συμπεριφορά. Οι τιμές του σημειοεκτιμητή και του άνω ορίου του διαστήματος εμπιστοσύνης αρχικά μειώνονται και στη συνέχεια αυξάνονται. Αυτό σημαίνει ότι για μικρά μεγέθη τυχαίων δειγμάτων η

εξάρτηση μεταξύ των συνιστωσών δεν είναι ξεκάθαρη. Δεν παρατηρείται η ίδια συμπεριφορά αν επιλεγεί η παράμετρος λοξότητας να έχει τιμές πολλαπλάσια του διανύσματος $(1,1)^T$. Επίσης, δεν παρατηρείται η ίδια συμπεριφορά αν επιλεγεί ο πίνακας κλίμακας να είναι ο A_1 , δηλαδή μη ικανοποίηση της πρώτης συνθήκης.

δ) Στους Πίνακες 2 και 3, όπου δεν ικανοποιείται η δεύτερη συνθήκη του Πορίσματος 2.4.14., οι τιμές του σημειοεκτιμητή της από κοινού πληροφορίας και του άνω ορίου του διαστήματος εμπιστοσύνης για μέγεθος δείγματος 20 δεν παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές από τις αντίστοιχες τιμές του Πίνακα 1. Οπότε για μικρό μέγεθος δείγματος η μη ικανοποίηση της δεύτερης συνθήκης δεν επηρεάζει την υπόθεση της ανεξαρτησίας των συνιστωσών.

ε) Συγκρίνοντας τις τιμές των Πινάκων 2-3 με τις αντίστοιχες τιμές του Πίνακα 4 παρατηρείται ότι η μη ικανοποίηση της πρώτης συνθήκης επηρεάζει περισσότερο την υπόθεση της ανεξαρτησίας των συνιστωσών από ότι η μη ικανοποίηση της δεύτερης συνθήκης.

στ) Στους Πίνακες 2 και 4 παρατηρείται μικρότερη διαφορά μεταξύ των τιμών του σημειοεκτιμητή και των ορίων του διαστήματος εμπιστοσύνης καθώς το μέγεθος του δείγματος αυξάνεται σε σχέση με τις τιμές των υπόλοιπων πινάκων όπου παρατηρείται μεγαλύτερο εύρος τιμών.

ζ) Στον Πίνακα 5 οι τιμές του σημειοεκτιμητή και του άνω ορίου του διαστήματος εμπιστοσύνης είναι αρκετά μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες τιμές του Πίνακα 1 και αποκλίνουν από το 0 καθώς το μέγεθος του δείγματος αυξάνεται. Οπότε, από την επιλογή των τιμών των παραμέτρων της κατανομής (που δεν ικανοποιούν τις συνθήκες του Πορίσματος 2.4.14.) για τις οποίες προκύπτουν υψηλότερες τιμές για το σημειοεκτιμητή της από κοινού πληροφορίας και για το άνω όριο του διαστήματος εμπιστοσύνης αυτής επαληθεύεται η εξάρτηση των συνιστωσών του τυχαίου διανύσματος.

η) Συγκρίνοντας τους Πινάκες 4 και 5 παρατηρείται ότι οι τιμές του σημειοεκτιμητή και του άνω ορίου του διαστήματος εμπιστοσύνης για μέγεθος δείγματος 1000 συγκλίνουν κοντά στην ίδια τιμή, ενώ για μικρότερα μεγέθη δείγματος παρατηρείται ότι οι τιμές του Πίνακα 4 είναι μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες τιμές του Πίνακα 5. Ωστόσο, όπως προαναφέρθηκε, οι δύο κατανομές τελικά συγκλίνουν στην ίδια τιμή για μέγεθος δείγματος 1000.

θ) Για τις τιμές που καταγράφονται στον Πίνακα 1, όπου υποτίθεται ανεξαρτησία μεταξύ των συνιστωσών των τυχαίων διανυσμάτων, και για τις τιμές των Πινάκων 3-5, όπου υποτίθεται εξάρτηση μεταξύ των συνιστωσών των τυχαίων διανυσμάτων, δεν παρατηρείται στοιχειώδης διαφορά ώστε να εξαχθεί ξεκάθαρο

συμπέρασμα σχετικά με τη συμπεριφορά των συνιστωσών ως προς την ανεξαρτησία και συνιστάται περαιτέρω διερεύνηση.

Στον Πίνακα 6 που ακολουθεί καταγράφονται οι τιμές που προέκυψαν εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό $\delta^* = \left(1 - e^{-2I_x}\right)^{1/2}$ στις τιμές του σημειοεκτιμητή \hat{I}_x της από κοινού πληροφορίας οι οποίες παρουσιάζονται στους Πίνακες 1-5.

Πίνακας 6

Μέγεθος Δείγματος n Μέτρο Εξάρτησης δ^*	20	50	200	500	1000
$SN_2(Q, I_2, \xi_1)$	0.16637	0.09279	0.06462	0.04935	0.04167
$SN_2(Q, I_2, \xi_1)$	0.20979	0.19652	0.17884	0.20573	0.24859
$SN_2(Q, I_2, \xi_2)$	0.18344	0.21082	0.26262	0.33128	0.43984
$SN_2(Q, A_1, \xi_1)$	0.70049	0.8494	0.87243	0.88589	0.8938
$SN_2(Q, A_1, \xi_2)$	0.63695	0.69977	0.78246	0.84767	0.89431

Από τα αποτελέσματα του Πίνακα 6 προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

α) Τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τους Πίνακες 1-5 επιβεβαιώνονται από τα αποτελέσματα του Πίνακα 6.

β) Ο μικρότερος βαθμός εξάρτησης καταγράφεται στην πρώτη κατανομή για μέγεθος δείγματος 1000 με τιμή που προσεγγίζει τον ελάχιστο βαθμό εξάρτησης 0 και ο μεγαλύτερος βαθμός εξάρτησης καταγράφεται στην πέμπτη κατανομή για μέγεθος δείγματος επίσης 1000 με τιμή που προσεγγίζει την μέγιστη τιμή εξάρτησης 1.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Στο Παράρτημα, παρατίθενται οι πηγαίοι κώδικες της R οι οποίοι χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή των διαφόρων γραφικών παραστάσεων του Κεφαλαίου 2, μεταξύ των οποίων η γραφική παράσταση της σ.π.π. της διδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής με το αντίστοιχο διάγραμμα ισοϋψών της καθώς και τα διαγράμματα ισοϋψών και Q-Qplot που προέκυψαν από την προσαρμογή του γραμμικού μοντέλου παλινδρόμησης με μεταβλητές από τα δεδομένα `a1s` του πακέτου `sn` της R για το Κεφάλαιο 3. Επίσης, παρατίθεται ο πηγαίος κώδικας της R που χρησιμοποιήθηκε για τη διεξαγωγή της προσομοίωσης που περιλαμβάνει τον υπολογισμό των σημειοεκτιμητών και των αντίστοιχων διαστημάτων εμπιστοσύνης. Τέλος, σημειώνεται ότι για τους κώδικες του Παραρτήματος χρησιμοποιήθηκαν τα πακέτα `sn` και `rgl`.

Κώδικες στην R:

Κώδικας από το Διάγραμμα 1:

```
#Γραφικές παραστάσεις της συσχέτισης ρ με την παράμετρο δ για  
διάφορες τιμές της παραμέτρου ψ
```

```
library("rgl")  
delta <- seq(-0.999, 0.999, length=51) #δήλωση τιμών παραμέτρου δ  
psi <- c(-1,-0.5,0,0.5,1) #ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου ψ
```



```
#γραφική παράσταση για ψ=-1
```

```
rho1<-function(delta){  
  (psi[1]*(1-delta^2)+delta^2*(1-2/pi))/(1-2*delta^2/pi)  
}
```

```
#γραφική παράσταση για ψ=-0.5
```

```
rho2<-function(delta){  
  (psi[2]*(1-delta^2)+delta^2*(1-2/pi))/(1-2*delta^2/pi)  
}
```

```
#γραφική παράσταση για ψ=0
```

```
rho3<-function(delta){  
  (psi[3]*(1-delta^2)+delta^2*(1-2/pi))/(1-2*delta^2/pi)  
}
```

```
#γραφική παράσταση για ψ=0.5
```

```
rho4<-function(delta){  
  (psi[4]*(1-delta^2)+delta^2*(1-2/pi))/(1-2*delta^2/pi)  
}
```

```
#γραφική παράσταση για ψ=1
```

```
rho5<-function(delta){  
  (psi[5]*(1-delta^2)+delta^2*(1-2/pi))/(1-2*delta^2/pi)  
}
```

```
matplot(delta,cbind(rho1(delta),rho2(delta),rho3(delta),rho4(delta)  
,rho5(delta)),type="l",xlab=expression(paste(delta)),ylab=expressi  
on(rho),cex.lab=1.4,lwd=3,col=1:5,lty=1:5)  
abline(v=-1:1,col="gray90")
```

```
abline(h=-1:1,col="gray90")
```

```
#υπομνήματα
```

```
legend(-0.1,1.13,paste("ψ=1"),cex=1.1,bty="n")
```

```
legend(-0.1,0.65,paste("ψ=0.5"),cex=1.1,bty="n")
```

```
legend(-0.1,0.15,paste("ψ=0"),cex=1.1,bty="n")
```

```
legend(-0.1,-0.35,paste("ψ=-0.5"),cex=1.1,bty="n")
```

```
legend(-0.1,-0.85,paste("ψ=-1"),cex=1.1,bty="n")
```

```
#αφαιρώντας το σύμβολο # (με το οποίο δηλώνονται τα σχόλια)  
από την επόμενη εντολή προστίθεται τίτλος στο Διάγραμμα 1
```

```
#title(font.sub=2,cex.sub=1.6,adj=0.65,sub=bquote("Διάγραμμα 1:  
Σχέση μεταξύ  $\rho$  και  $\delta$  για διάφορες τιμές του  $\psi$ "))
```

Κώδικας για το Διάγραμμα 2:

```
#Γραφικές παραστάσεις της συσχέτισης  $\rho$  με την παράμετρο  $\delta_1$  για  
συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου  $\delta_2$ 
```

```
library("rgl")
```

```
delta1 <- seq(-0.999, 0.999, length=51)#δήλωση τιμών παραμέτρου  $\delta_1$ 
```

```
max.omega<-min.omega<-c(NA)
```

```
for(i in 1:51){
```

```
  d1 <- delta1[i]
```

```
  d2 <- 0.8
```

```
  max.omega[i] <- d1*d2 + sqrt((1-d1^2)*(1-d2^2))
```

```
  min.omega[i] <- d1*d2 - sqrt((1-d1^2)*(1-d2^2))
```

```
}
```

```
print(max.omega)
print(min.omega)

rho.max<-function(delta1){
  (max.omega-(2/pi)*delta1*0.8)/sqrt((1-2*delta1^2/pi)*(1-
2*0.8^2/pi))
  }

rho.min<-function(delta1){
  (min.omega-(2/pi)*delta1*0.8)/sqrt((1-2*delta1^2/pi)*(1-
2*0.8^2/pi))
  }

plot.default(delta1,rho.max(delta1),type="l",col="deeppink",xlab=
expression(paste(delta["1"])),ylab=expression(rho),ylim=c(-
1,1),cex.lab=1.6,lwd=5)
lines(delta1,rho.min(delta1),col="darkblue",xlab="x",ylab="y",lwd
=5)

abline(h=-1:1,v=-1:1,col="gray90")
ekfr<-expression(rho["min"],paste(rho[["max"]]))

#σπόμνημα
legend(-
1,1,ekfr,lty=1:1,col=c("deeppink","darkblue"),adj=c(0,.5),lwd=3,cex
=1.4)
```

Κώδικας για το Διάγραμμα 3(a):

#Γραφική παράσταση διδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής με τιμές παραμέτρων $\delta_1=\delta_2=0.8$ και $\omega=0.3$

```
library("rgl")
xm<--3
xp<-3

x1<-x2<-seq(xm,xp,length=as.integer((xp+abs(xm))*10))

#δήλωση τιμών παραμέτρων
delta<-0.8
w11<-1
w22<-1
w<-0.3
Omega<-matrix(c(w11,w,w,w22),nrow=2)
sunthiki<-w11*w22-omega^2 #συνθήκη θετικής οριστικότητας
πίνακα Ω

if(sunthiki>0){
a<-delta/sqrt((1+w)*(1+w-2*delta^2))

phi<-pnorm(a*(x1+x2),0,1)

#σ.π.π. διδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής
f<-function(x1,x2){
  term1<-1/(pi*sqrt(det(Omega)))
```

```

    term2<--
(1/(2*det(Omega)))*((x1^2)/w11+(x2^2)/w22-2*w*x1*x2)
    term3<-term1*exp(term2)*phi
    return(term3)
  }

z<-outer(x1,x2,f)

nrz<-nrow(z)
ncz<-ncol(z)
colors<-colorRampPalette(c("blue3","deeppink"))
nbcol<-100
color<-colors(nbcol)
zfacet<-z[-1,-1]+z[-1,-ncz]+z[-nrz,-1]+z[-nrz,-ncz]
facetcol<-cut(zfacet,nbcol)

persp(x1,x2,z,theta=0,phi=25,r=10,d=0.5,expand=0.5,col=color[fac
etcol],shade=0.01,xlab="x1",ylab="x2",zlab="",cex.lab=1.6,ticktype
="detailed",adj=0.5)
title(main=bquote("(a)"~bold(delta["1"])~"="~bold(delta["2"])~"=0.
8 και"~bold(omega)~"=0.3"),cex.main=1.6,adj=0)
#contour(x1,x2,z,xlab="x1",ylab="x2",cex.lab=1.6,col="darkslatebl
ue")
}
print(sunthiki)

```

#αφαιρώντας το σύμβολο # από την εντολή contour προκύπτει το αντίστοιχο διάγραμμα ισοϋψών της κατανομής

Κώδικας για το Διάγραμμα 3(b):

#Γραφική παράσταση διδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής με τιμές παραμέτρων $\delta_1=-0.45$, $\delta_2=-0.95$ και $\omega=0.7$

```
library("rgl")
xm<- -3
xp<-3

x1<-x2<-seq(xm,xp,length=as.integer((xp+abs(xm))*10))

#δήλωση τιμών παραμέτρων
delta1<- -0.45
delta2<- -0.95
w11<-1
w22<-1

omega<-0.7
Omega<-matrix(c(w11,omega,omega,w22),nrow=2)
sunthiki<-w11*w22-omega^2 #συνθήκη θετικής οριστικότητας
πίνακα Ω

if(sunthiki>0){
a1<-(delta1-delta2*omega)/sqrt((1-omega^2)*(1-omega^2-
delta1^2-delta2^2+2*delta1*delta2*omega))
a2<-(delta2-delta1*omega)/sqrt((1-omega^2)*(1-omega^2-
delta1^2-delta2^2+2*delta1*delta2*omega))
```

```
phi<-pnorm(a1*x1+a2*x2,0,1)
```

```
#σ.π.π. διδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής
```

```
f<-function(x1,x2){
  term1<-1/(pi*sqrt(det(Omega)))
  term2<--
  (1/(2*det(Omega))*((x1^2)/w11+(x2^2)/w22-2*omega*x1*x2)
  term3<-term1*exp(term2)*phi
  return(term3)
}
```

```
z<-outer(x1,x2,f)
```

```
rz<-nrow(z)
```

```
cz<-ncol(z)
```

```
colors<-colorRampPalette(c("blue3","deeppink","brown2","red"))
```

```
bcol<-100
```

```
color<-colors(bcol)
```

```
zfacet<-z[-1,-1]+z[-1,-cz]+z[-rz,-1]+z[-rz,-cz]
```

```
facetcol<-cut(zfacet,bcol)
```

```
persp(x1,x2,z,theta=0,phi=30,r=10,d=0.5,expand=0.5,col=color[fac
etcol],shade=0.01,xlab="x1",ylab="x2",zlab="",cex.lab=1.4,ticktype
="detailed",adj=0.5)
```

```
title(main=bquote("(b)"~bold(delta["1"])~"=-0.45,
```

```
"~bold(delta["2"])~"=-0.95
```

```
και"~bold(omega)~"=0.7"),cex.main=1.6,adj=0)
```

```
#contour(x1,x2,z,xlab="x1",ylab="x2",cex.lab=1.4,col="darkslatebl  
ue")  
}
```

```
print(sunthiki)
```

#αφαιρώντας το σύμβολο # από την εντολή contour προκύπτει το αντίστοιχο διάγραμμα ισοΐψών της κατανομής

Κώδικας για το Διάγραμμα 4:

```
data(ais,package="sn")  
m30 <- selm(cbind(Wt,Fe) ~ 1, family="SN", data=ais)  
plot(m30, which=2)
```

Κώδικας για το Διάγραμμα 5:

```
data(ais,package="sn")  
m30 <- selm(cbind(Wt,Fe) ~ 1, family="SN", data=ais)  
plot(m30, which=4)
```

Κώδικας Μελέτης Προσομοίωσης:

#προσομοίωση: εύρεση σημειοεκτιμητή για την από κοινού πληροφορία

```
library("sn")  
n<-20 #πλήθος τυχαίων διανυσμάτων διδιάστατης λοξής-  
κανονικής κατανομής
```



```
L<-500 #πλήθος τυχαίων διανυσμάτων με παραμέτρους τους ΕΜΠ
xx<-matrix(c(rep(NA,2*L)),nrow=L)
f<-c(rep(NA,L))
log_f<-c(rep(NA,L))
f1<-c(rep(NA,L))
f2<-c(rep(NA,L))
log_f1<-c(rep(NA,L))
log_f2<-c(rep(NA,L))
sum_log_fi<-c(rep(NA,L))
dif<-c(rep(NA,L))
mle_MI<-c(rep(NA,1000))
a<-NA
q<-0

omeg<-matrix(c(1,0,0,1),nrow=2)
x<-rmsn(n,c(0,0),omeg,c(1,0)) #γέννηση τυχαίων δειγμάτων από
τη διδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή
#print(x)
ss<-selm(x~1,family="SN") #εύρεση ΕΜΠ βάση του μοντέλου
παλινδρόμησης  $x=1+\varepsilon$ 
#print(ss)
#print(summary(ss))
#print(coef(ss,vector=FALSE))
cp<-coef(ss,"CP",vector=TRUE) #κεντρικές παράμετροι
dp<-coef(ss,"DP",vector=TRUE) #κύριες παράμετροι
mle_omega<-matrix(rep(c(dp[3:5]),c(1,2,1)),nrow=2) #ΕΜΠ της
παραμέτρου κλίμακας
mle_alpha<-dp[6:7] #ΕΜΠ της παραμέτρου λοξότητας
```

```
while(q<1000){
  xx<-rmsn(L,c(0,0),mle_omega,mle_alpha) #γέννηση τυχαίων
  δειγμάτων με παραμέτρους τους EMΠ
  f<-dmsn(xx,c(0,0),mle_omega,mle_alpha)
  if(0 %in% f==FALSE){
    log_f<-log(f)
    for(r in 1:L){
      f1[r]<-dsn(xx[r,1],omega=mle_omega[1,1],alpha=mle_alpha[1])
      f2[r]<-dsn(xx[r,2],omega=mle_omega[2,2],alpha=mle_alpha[2])
      if(0 %in% f1==FALSE & 0 %in% f2==FALSE){
        log_f1<-log(f1)
        log_f2<-log(f2)
        sum_log_fi<-log_f1+log_f2
        dif<-log_f-sum_log_fi
        a<-(1/L)*sum(dif)
      }
    }
    else{
      break
    }
  }
  if(is.na(a)==FALSE & a!=Inf & a>=0){
    q<-q+1
    mle_MI[q]<-a
    print(mle_MI[q])
  }
}
MI<-(1/1000)*sum(mle_MI) #σημειοεκτιμητής
MI
```

```
#Εύρεση διαστήματος εμπιστοσύνης για την από κοινού  
πληροφορία  
ep_emp<-0.05 #ορισμός επιπέδου εμπιστοσύνης  
seira<-sort(mle_MI)  
katw_orio<-seira[floor((ep_emp/2)*1000)]  
anw_orio<-seira[floor((1-ep_emp/2)*1000)]  
katw_orio  
anw_orio
```

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή παρουσιάζονται τα σημαντικότερα αποτελέσματα που εισήχθησαν για την πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή, η οποία αποτελεί αντικείμενο μελέτης στη στατιστική βιβλιογραφία τα τελευταία 25 χρόνια. Αυτή η κατανομή είναι σημαντική καθώς επεκτείνει την κλάση της κανονικής κατανομής με την προσθήκη μιας παραμέτρου η οποία ρυθμίζει τη λοξότητα. Ένα από τα κύρια προβλήματα στη στατιστική που απασχολεί πολλούς ερευνητές είναι η ανεξαρτησία μεταξύ των συνιστωσών ενός τυχαίου διανύσματος. Σε αυτό το πρόβλημα επικεντρώνεται η διατριβή αυτή με τη διεξαγωγή μιας Monte Carlo μελέτης προσομοίωσης. Η παρούσα διατριβή αποτελείται από 4 κεφάλαια και τη βιβλιογραφία και ακολούθως παρουσιάζεται μια σύντομη περίληψή της.

Στο Κεφάλαιο 1 γίνεται μια σύντομη ιστορική αναδρομή για την πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή και τις εξελίξεις και επεκτάσεις που έχουν πραγματοποιηθεί από διάφορους ερευνητές τα τελευταία 25 χρόνια. Επιπλέον, παρουσιάζεται ο σκοπός της παρούσας μεταπτυχιακής διατριβής.

Αντικείμενο μελέτης του Κεφαλαίου 2 αποτελεί η παρουσίαση και μελέτη της πολυδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που ορίζεται και εισάγεται στη βιβλιογραφία από τους Azzalini & Dalla Valle (1996). Υιοθετώντας αυτόν τον ορισμό, από τους πολλούς που

έχουν προταθεί για την πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή, παρουσιάζονται δύο από τις διάφορες μεθόδους στοχαστικής αναπαράστασης που έχουν αναπτυχθεί για μια πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή, η μέθοδος του μετασχηματισμού και η μέθοδος της δέσμευσης. Επιπλέον, στο πλαίσιο του ορισμού αυτού, παρατίθενται τα βασικότερα αποτελέσματα που αφορούν τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά της κατανομής αυτής. Συγκεκριμένα, παρουσιάζονται οι εκφράσεις της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής, της χαρακτηριστικής συνάρτησης, των ροπών, των περιθώριων κατανομών και η εντροπία του Shannon, ενώ εξετάζονται οι γραμμικοί μετασχηματισμοί, οι τετραγωνικές μορφές και η ανεξαρτησία των συνιστωσών ενός λοξού-κανονικού τυχαίου διανύσματος. Τέλος, προσδιορίζεται η μορφή της διδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής και κατασκευάζονται η γραφική παράσταση με το αντίστοιχο διάγραμμα ισοϋψών αυτής για διάφορες τιμές των παραμέτρων της.

Στο Κεφάλαιο 3 το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στην εκτίμηση των τριών αγνώστων παραμέτρων της πολυδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής με τη Μέθοδο Μέγιστης Πιθανοφάνειας, καθώς είναι η μόνη μέθοδος εκτίμησης που βρίσκει έως τώρα εφαρμογή για την κατανομή αυτή. Σε αντίθεση με την πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή, το πρόβλημα της εκτίμησης των τριών παραμέτρων της μονοδιάστατης περίπτωσης αντιμετωπίζεται και με άλλες μεθόδους, όπως η μέθοδος των ροπών και της ελάχιστης χ^2 απόστασης, με τη δημιουργία ωστόσο διαφόρων προβλημάτων τα οποία συζητούνται στο

κεφάλαιο αυτό. Από τον προσδιορισμό των Εκτιμητών Μέγιστης Πιθανοφάνειας των αγνώστων παραμέτρων της πολυδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής, όπως και από την αντίστοιχη μέθοδο της μονοδιάστατης περίπτωσης, αναλύονται τα προβλήματα και οι παθογένειες της κατανομής τα οποία δεν μπορούν να αποφευχθούν. Ακολούθως, παρουσιάζονται εφαρμογές σε πραγματικά δεδομένα που αφορούν στην προσαρμογή της πολυδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής. Στη συνέχεια, υπολογίζονται οι εκφράσεις του δείκτη από κοινού πληροφορίας, ο οποίος θα βοηθήσει στη διερεύνηση της ανεξαρτησίας μεταξύ των συνιστωσών ενός λοξού-κανονικού τυχαίου διανύσματος, και του πίνακα πληροφορίας του Fisher για την πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή. Τέλος, δίνεται η έκφραση του πίνακα πληροφορίας Fisher για τη μονοδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή και σχολιάζεται το πρόβλημα αντιστρεψιμότητάς του.

Στο Κεφάλαιο 4 διεξάγεται μια Monte Carlo μελέτη προσομοίωσης για τον έλεγχο της ανεξαρτησίας στην πολυδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή. Ο έλεγχος αυτός βασίζεται στη σύγκριση των τιμών της από κοινού πληροφορίας οι οποίες προκύπτουν για τυχαία δείγματα που ικανοποιούν ταυτόχρονα δύο συνθήκες για την ανεξαρτησία και για τυχαία δείγματα που δεν ικανοποιούν τουλάχιστον μία από τις δύο συνθήκες, οι οποίες προσδιορίζονται σε Πρόρισμα του Κεφαλαίου 2. Αρχικά, παρουσιάζονται τα βήματα της μελέτης προσομοίωσης και συζητώνται τα προβλήματα που δημιουργούνται. Έπειτα,

καταγράφονται και σχολιάζονται τα αποτελέσματα της μελέτης και εξάγονται συμπεράσματα.

Στο Παράρτημα παρατίθενται οι πηγαίοι κώδικες της στατιστικής γλώσσας προγραμματισμού R που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή των γραφικών παραστάσεων και των διαγραμμάτων ισοϋψών της διδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής του Κεφαλαίου 2, του διαγράμματος ισοϋψών και του P-P plot που προέκυψαν από την προσαρμογή της διδιάστατης λοξής-κανονικής κατανομής του Κεφαλαίου 3 και την εξαγωγή των αποτελεσμάτων της μελέτης προσομοίωσης του Κεφαλαίου 4.

Τέλος, τη διατριβή περατώνουν η περίληψή της στα Ελληνικά και στα Αγγλικά και η Βιβλιογραφία που χρησιμοποιήθηκε.

ABSTRACT

In the present dissertation the main results of multivariate skew-normal distribution are presented which has been studied in the statistics literature for almost 25 years. This distribution extends the class of normal distribution by the addition of a shape parameter which regulates skewness. One of the main statistical problems concerning most researchers is the independence among observations of a distribution. In this problem the present dissertation will focus with the performance of a Monte Carlo simulation study. The dissertation consists of 4 chapters, one Appendix and the bibliography. Subsequently, the subject matter of each chapter is presented.

Chapter 1 starts with a sort historical overview of skew-normal distribution and the main developments that have been made are highlighted. Also, the aim of the dissertation is presented.

Chapter 2 object of study is the presentation and study of multivariate skew-normal distributions with probability density function which is defined and introduced in the references by Azzalini & Dalla Valle (1996). Adopting this definition, of the many definitions that have been proposed for multivariate skew-normal distribution, there are presented two different methods of stochastic representation developed for a multivariate-skewed normal distribution, the method of transformation and the conditioning method. Moreover, under this definition, the main

results of the literature are listed concerning the properties and characteristics of this distribution. Specifically, the expressions of the cumulative distribution function, characteristic function, moments of marginal distributions and the Shannon entropy, and linear transformations, quadratic forms and the independence of the components of a skew-normal random vector are investigated. Finally, the form of the bivariate skew-normal distribution is determined and the graph with the corresponding contour plot of this distribution is constructed for various parameter values.

In Chapter 3, the focus is on the estimation of the three unknown parameters of the multivariate skew-normal distribution with the Method of Maximum Likelihood, as it is the only estimation method that is applicable for this distribution. In contrast with the multivariate skew-normal distribution, the estimating problem of the three parameters of univariate case is treated by other methods, such as the method of moments and the minimum distance, where various problems arise and are discussed in this chapter. Since the determination of Maximum Likelihood Estimators of the unknown parameters of multivariate skew-normal distribution, as well as the corresponding method of the univariate case, the problems and pathologies of distribution that cannot be avoided are analyzed. Subsequently, applications on real data relating to the fitting of multivariate skew-normal distribution are presented. Then, the expressions of mutual information index, which will help to conduct an investigation of independence of the components of skew-normal random vector, and the Fisher information matrix for the multivariate skew-

normal distribution are presented. Finally, the expression of the Fisher information matrix for the univariate skew-normal distribution is presented and the problem of its reversibility is discussed.

In Chapter 4, a Monte Carlo simulation study is performed to investigate independence of a multivariate skew-normal distributed random vector. This investigation is based on comparing values of mutual information that arise from random samples which simultaneously satisfy two conditions for independence and random samples which do not satisfy at least one of the two conditions. These conditions are specified in Corollary 2.4.14 of Chapter 2. Initially, the steps of the simulation are introduced and the resulting problems are also encountered. Then, the results of the study are recorded and conclusions are extracted.

In Appendix, the source codes used in the statistical programming language R for the construction of graphs and countour plots of the bivariate skew-normal distribution in Chapter 2 are listed as well as the counter plot and P-P plot obtained from the fitting of bivariate skew-normal distributed data of Chapter 3 and the results obtained from the simulation study of Chapter 4.

Finally, the dissertation concludes with the Bibliography.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Adcock, C. J. (2010). Asset pricing and portfolio selection based on the multivariate extended skew-Student-t distribution. *Annals of Operations Research*, **176**, 221-234.

Adcock, C. J. & Shutes, K. (1999). Portfolio selection based on the multivariate-skew normal distribution. Pages 167-177 of: Skulimowski, A. M. J. (ed.), *Financial Modelling*. Kraków: Progress and Business Publishers. Available in 2001. 142, 158, 186.

Adcock, C.J., Eling, M. & Loperfido, N. (2012). Skewed distributions in finance and actuarial science: A Review. *The European Journal of Finance*, 1-29.

Ahmed, N. & Gokhale, D. (1989). Entropy expressions and their estimators for multivariate distributions. *IEEE Trans. on Inf. Theor.*, **35**, 688-692.

Aigner, D. J., Lovell, C. A. K. & Schmidt, P. (1977). Formulation and estimation of stochastic frontier production function model. *J. Econometrics*, **12**, 21-37.

Arellano-Valle, R. B., Gomez, H. W. & Quintana, F. A. (2004). A new class of skew-normal distributions. *Communications in Statistics: Theory and Methods* **33**(7), 1465-1480.

Arellano-Valle, R. B. & Genton, M. G. (2005). On fundamental skew distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, **96**, 93-116.

Arellano-Valle, R. B. & Azzalini, A. (2006). On the unification of families of skew-normal distributions. *Scandinavian Journal of Statistics*, **33**, 561–574.

Arellano-Valle, R.B., Branco, M.D. & Genton, M.G. (2006). A unified view on skewed distributions arising from selections. *The Canadian Journal of Statistics*, **34**, 581–601.

Arellano-Valle, R.B. & Azzalini, A. (2008). The centred parametrization for the multivariate skew-normal distribution. *Journal of Multivariate Analysis*, **99**, 1362–1382.

Arellano-Valle, R. B. & Genton, M. G. (2010). An invariance property of quadratic forms in random vectors with a selection distribution, with application to sample variogram and covariogram estimators. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **62**, 363–381.

Arellano-Valle, R. B., Contreras-Reyes, J. E. & Genton, M. G. (2013). Shannon entropy and mutual information for multivariate skew-elliptical distributions. *Scandinavian Journal of Statistics*, **40**, 42–62.

Arnold, B. C., Beaver, R. J., Groeneveld, R. A. & Meeker, W. Q. (1993). The nontruncated marginal of a truncated bivariate normal distribution. *Psychometrika*, **58**, 471–478.

Arnold, B. C. & Beaver, R. J. (2000a). Hidden truncation models. *Sankhya Ser, A* **62**, 22–35.

Arnold, B. C. & Beaver, R. J. (2000b). Some skewed multivariate distributions. *Amer. J. Math. Mgmt. Sci.*, **20**, 27–38.

Arnold, B. C. & Beaver, R. J. (2002). Skewed multivariate models related to hidden truncation and/or selective reporting. *Test*, **11**, 7-54.

Azzalini, A. (1985). A class of distributions which include the normal ones. *Scandinavian Journal of Statistics*, **12**, 171-178.

Azzalini, A. (1986). Further results on a class of distributions which includes the normal ones. *Statistica*, **XLVI**, 199-208.

Azzalini, A. & Dalla Valle, A. (1996). The multivariate skew-normal distribution. *Biometrika*, **83**, 715-726.

Azzalini, A. & Capitanio, A. (1999). Statistical applications of the multivariate skew normal distribution. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* **61**, 579-602.

Azzalini, A. & Capitanio, A. (2003). Distributions generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew t distribution. *J. R. Stat. Soc. series B*, **65**, 367-389.

Azzalini, A. (2005). The skew-normal distribution and related multivariate families (with discussion). *Scand. J. Statist.*, **32**, 159-188 (C/R 189-200).

Azzalini, A. (2014). The R 'sn' package: The skew-normal and skew-t distributions (version 1.0-0). URL <http://azzalini.stat.unipd.it/SN>

Azzalini, A., Browne, R. P., Genton, M. G. & McNicholas, P. D. (2014), Comparing two formulations of skew distributions with

special reference to model-based clustering. Arxiv preprint [arXiv:1402.5431](https://arxiv.org/abs/1402.5431)

Azzalini, A. & Capitanio, A. (2014). The Skew-normal and Related Families. Cambridge University Press, IMS Monographs series.

Balakrishnan, N. (2002). Discussion of "skewed multivariate models related to hidden truncation and/or selective reporting". *Test* **11**, 37-39.

Balakrishnan, N., Field, C., Genton, M. G. & Joe, H. (2013). Non-Gaussian Multivariate Statistical Models and their Applications. www.birs.ca/events/2013/5-day-workshops/13w5146

Birnbaum, Z. W. (1950). Effect of linear truncation on a multinormal population. *J. Amer. Stat. Assn.*, **21**, 272-279.

Branco, M. D. & Dey, D. K. (2001). A general class of multivariate skew-elliptical distributions. *J. Multivar. Anal.*, **79**, 99-113.

Contreras-Reyes, J.E. & Arellano-Valle, R.B. (2012). Kullback-Leibler Divergence measure for multivariate skew-normal distributions. *Entropy*, **14**, 1606-1626.

Cook, R. D. & Weisberg, S. (1994). An Introduction to Regression Graphics. Wiley, New York.

Cover, T. & Thomas, J. (1991). Elements of Information Theory. Wiley.

Cover, T. & Thomas, J. (2006). Elements of Information Theory. 2nd Edition, Wiley.

De Helguero, F. (1908). Sulla rappresentazione analitica delle statistiche abnormali, in *Atti del IV Congresso Internazionale dei matematici* (Roma, 6-11 Aprile 1908), (G. Castelnuovo, ed.), vol. **III**, 288-299, Roma, Accademia dei Lincei.

Dominguez-Molina, J.A., Gonzalez Farias, G. & Gupta, A.K. (2003). The multivariate closed skew normal distribution. Technical report 03-12, Department of Mathematics and Statistics, Bowling Green State University.

Dunajeva, O., Kollo, T. & Traat, I. (2003). Bias correction for the shape parameter of the skew normal distributions. *Tatra Mountains Mathematical Publications*, **26**, 281–289.

Edgeworth, F. Y. (1896). The compound law of error. *Philos. Mag. 5th Series*, **41**, 207–215.

Fechner, G. T. (1897). *Kollektivmasslehre*, (G. F. Lipps, ed.), Engelmann, Leipzig.

Flecher, C., P. Naveau & D. Allard (2009). Estimating the closed skew-normal distributions parameters using weighted moments. *Stat. Probab. Lett.*, **79**, 1977–1984.

- Genton, M. G., He, L. & Liu, X. (2001). Moments of skew-normal random vectors and their quadratic forms. *Statistics and Probability Letters*, **51**, 319-325.
- Genton, M. G. (2004). *Skew-Elliptical Distributions and Their Applications: A Journey Beyond Normality* (edited volume). Boca Raton, Florida: Chapman & Hall.
- Genton, M. G. & Loperfido, N. (2005). Generalized skew-elliptical distributions and their quadratic forms. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **57**, 389-401.
- Gupta, A. K., & Kollo, T. (2000). Multivariate skew normal distribution: some properties and density expansions, Dept. of Mathematics and Statistics, Bowling Green State University, Tech. Rep. No. 00-05.
- Gupta, A. K. & Chen, T. (2001). Goodness-of-fit tests for the skew-normal distribution. *Commun. Statist. - Simulation & Computation*, **30**, 907-930.
- Gupta, A. K. & Huang, W.-J. (2002). Quadratic forms in skew normal variates. *J. Math. Anal. Appl.*, **273**, 558-564.
- Gupta, A. K. & Chen, J. T. (2003). On the sample characterization criterion for normal distributions, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **73**, 155-163.
- Gupta, A. K. & Chen, J. T. (2004). A class of multivariate skew-normal models. *Annals of the Institute Statistical Mathematics*, **56**, 305-315.
- Healy, M. J. R. (1968). Multivariate normal plotting. *Appl. Statist.* **17**, 157-161.

Hill, M. & Dixon, W. (1982). Robustness in Real Life: A Study of Clinical Laboratory Data. *Biometrics*, **38**, 377-396.

Javier, W. R. & Gupta, A. K. (2009). Mutual information for certain multivariate distributions. *Far East J. Theor. Stat.*, **29**, 39-51.

Joe, H. (1993). Multivariate dependence measures and data analysis. *Comp. Stat. and Data Analysis*, **16**, 279-297.

Kim, H.-M. & Genton, M. G. (2011). Characteristic functions of scale mixtures of multivariate skew-normal distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, **102**, 1105-1117.

Kollo, T., & Traat, I. (2001). On the Multivariate skew-normal distribution, in *Revista de Estatística, Proceedings of the 23rd European Meeting of Statisticians*, vol. **II**, 231-232, Instituto Nacional de Estatística, Portugal.

Kotz, S. & Vicari, D. (2005). Survey of developments in the theory of continuous skewed distributions. *Metron* **LXIII**, 225-261.

Kullback, S. & Leibler, R. A. (1951). On information and sufficiency. *Ann. Math. Statist.*, **22**, 79-86.

Kullback, S. (1959). *Information Theory and Statistics*. Wiley, New York.

Kullback, S. (1968). *Information Theory and Statistics*. Dover Publications.

Lachos, V. H., Labra, F. V. & Ghosh, P. (2007). Multivariate skew-normal/ independent distributions: properties and inference. Submitted to *Scandinavian Journal of Statistics*.

Lin, T.-I. (2009). Maximum Likelihood Estimation for Multivariate Skew Normal Mixture Models. *J. Multivariate Analysis*, 100, 257 - 265.

Lin, G. D. & Stoyanov, J. (2009). The logarithmic skew-normal distributions are moment-indeterminate. *J. Appl. Probab.*, **46**, 909-916.

Loperfido, N. (2001). Quadratic forms of skew-normal random vectors. *Statist. Probab. Lett.*, **54**, 381-387.

Ma, Y. & Genton, M. G. (2004). Flexible class of skew-symmetric distributions. *Scand. J. Statist.*, **31**, 459-468.

Marchenko, Y. V. & Genton, M. G. (2010). A suite of commands for fitting the skew-normal and skew-*t* distributions. *The Stata Journal.*, **10**, Number 4, pp. 507-539.

Mardia, K. V. (1970). Measures of multivariate skewness and kurtosis with applications. *Biometrika*, **57**, 519-30.

Mardia, K. V. (1974). Applications of some measures of multivariate skewness and kurtosis in testing normality and robustness studies. *Sankhya B* **36**, 115-28.

Martínez-Flórez, G. (2011). Extensões do modelo α -potencial, Tese de doutorado, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo.

Martínez-Flórez, G., Vergara-Crdozo, S. & Gonzalez, L.M. (2013). The Family of Log-Normal Alpha-Power Distributions using Precipitation Data. *Revista Colombiana de Estadística*, v. **36**, no. 1, pp. 43 a 57.

Mameli, V. & Musio, M. (2013). A generalization of the skew-normal distribution: the beta skew-normal. *Commun. Stat.-Theor. M.*, **42** (12), 2229–2244 .

McCullagh, P. (1987). *Tensor methods in statistics*. Chapman & Hall, London.

Micheas, A. & Zografos, K. (2006). Measuring stochastic dependence using ϕ -divergence. *Journal of Multivariate Analysis*, **97**, 765-784.

Muirhead, R.J. (1982). *Aspects of Multivariate Statistical Theory*. John Wiley & Sons. New York.

Mukhopadhyay, S. & Vidakovic, B. (1995). Efficiency of linear Bayes rules for a normal mean: skewed priors class. *The Statistician*, **44**, 389–397.

Nadarajah, S. & Kotz, S. (2003). Skewed distributions generated by the normal kernel. *Statist. Probab. Lett.* **65**, 269–277.

Nadarajah, S. and Kotz, S. (2004). Skewed distribution generated by the Laplace kernel. *Amer. J. Math. and Mngt. Sci.*, **24**, 321-349.

Nadarajah, S. & Kotz, S. (2005). Skewed distributions generated by the Cauchy kernel. *Braz. J. Prob. Stat.*, **19**, 39.

Nelson, L. S. (1964). The sum of values from a normal and a truncated normal distribution. *Technometrics*, **6**, 469–470.

O'Hagan, A. & Leonard, T. (1976). Bayes estimation subject to uncertainty about parameter constraints. *Biometrika*, **63**, 201–203.

Papaiοannou, T. (2001). On distances and measures of information: A case of diversity, In *Probability and Statistical Models with Applications* (Eds., C. A. Charalambides, M. V. Koutras, and N. Balakrishnan), pp. 503-515, Chapman & Hall, New York.

Pearson, K. (1893). Asymmetrical frequency curves. *Nature*, **8**, 615–616, correction: *ibid.*, **49**, 6.

Pewsey, A. (2003). The characteristic functions of the skew-normal and wrapped skew-normal distributions. In XXVII Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa, pages 4383–4386, Lleida (España). SEIO.

Rao, C. R. (1973). Linear statistical inference. 2nd edition. Wiley, New York.

Roberts, C. (1966). A correlation model used in the study of twins. *J. Amer. Stat. Assn.*, **61**, 1184–1190.

Sahu, S. K., Dey, D. K. & Branco, M. D. (2003). A new class of multivariate skew distributions with applications to Bayesian regression models. *Canad. J. Statist.*, **31**, 129–150.

Sartori, N. (2006). Bias prevention of maximum likelihood estimates for scalar skew normal and skew t distributions. *J. Statist. Plann. Inference*, **136**, 4259–4275.

Serfling, R. (2004). Multivariate symmetry and asymmetry. In *Encyclopedia of statistical sciences*, (eds. S.Kotz, N.Balakrishnan, C. B.Read & B.Vidakovic), *volume in press, 2nd edn*. Wiley, New York.

Shannon, C.E. (1948). A mathematical theory of communication. *Bell Syst. Tech. J.*, **27**, 379–423.

Σωκράτους, Κ. (2009). Μονοδιάστατη λοξή-κανονική κατανομή. Μετ. Διατριβή, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

Tukey J.W. (1977). Modern techniques in data analysis. NSF Sponsored Regional Research Conference, Southeastern Massachusetts University, North Dartmouth, Massachusetts.

Weaber R. (2008). Multivariate Skew-Normal Distributions and their Extremal Properties. Master Thesis, Department of Mathematics, Swiss Federal Institute of Technology, ETH Zurich.

Yadegari, I., Gerami, A. & Khaledi, M. J. (2008). A generalization of the Balakrishnan skew-normal distribution. *Statistics and Probability Letters* **78**, 1165-1167.

Zografos, K. & Nadarajah, S. (2005). Expressions for Rényi and Shannon entropies for multivariate distributions. *Statistics and Probability Letters*, **71**, 71-84.

Zografos, K. (2008). On some entropy and divergence type measures of variability and dependence for mixed continuous and discrete variables. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **138**, 3899-3914.

