ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Μεταπτυχιακη Διατριβη

Θεοφανη Ιατρου

Συμπαγεις υπερεπιφανειες με σταθερη μεση καμπυλοτητα r-ταξης

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2015

Η παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα

«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ» (Ανάλυση-Άλγεβρα-Γεωμετρία)

που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την 27 Απριλίου 2015 από την Τριμελή Επιτροπή Εξέτασης:

1. Βλαχος Θεοδωρος, Αναπληρωτής Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων (Επιβλέπων Καθηγητής)
2. Σταματακης Στυλιανος, Αναπληρωτής Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Αριστοτέλειου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης
3. Πεταλιδου Φανη, Λέκτορας του Τμήματος Μαθηματικών του Αριστοτέλειου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

«Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή.»

Θεοφανή Ιατρού

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους αγαπημένους μου γονείς, Αντώνη και Μαρία, που επένδυσαν στο όνειρο μου και μου έδωσαν την ευκαιρία να το πραγματοποιήσω.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω μέσα από την καρδιά μου, τους ανθρώπους που πίστεψαν στην αγάπη μου για το αντικείμενο και το απέδειξαν ενισχύοντάς με, ψυχολογικά και πρακτικά, από την πρώτη στιγμή που εξέφρασα την επιθυμία να συνεχίσω τις σπουδές μου.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ στους συναδέλφους μου Γρηγόρη Κάτσιο, Βάσω Πετρωτού και Κλειώ Παπαδοπούλου για τις ώρες που περάσαμε μαζί.

Ολόθερμες ευχαριστίες και στους φίλους μου: Ειρήνη-Δανάη Βράγκαλη, Μελίνα-Ραφαέλα Ιωαννίδου, Μαρία Ασλανίδου, Μαρία Σφήκα, Θανάση Σφήκα, Κυριάκο Μαυρίδη και Παναγιώτη Τζουβαλέκη για την υποστήριξη και την αγάπη τους. Η βοήθεια τους στα μικρά και τα μεγάλα ζητήματα που προέκυψαν καθ' όλη την διάρκεια αυτής της προσπάθειας, ήταν ανεκτίμητη. Χωρίς αυτούς, η ολοκλήρωση αυτής της εργασίας δεν θα ήταν εφικτή.

Πρόλογος

Ένα από τα βασικά προβλήματα της Κλασσικής Διαφορικής Γεωμετρίας, που απέσπασε σημαντικό ερευνητικό ενδιαφέρον, είναι η μελέτη των επιφανειών του 3-διάστατου Ευκλείδειου χώρου με, είτε σταθερή καμπυλότητα Gauss, είτε σταθερή μέση καμπυλότητα.

Ο H. Liebmann [15] το 1899 απέδειξε ότι οι μόνες συμπαγείς επιφάνειες του 3-διάστατου Ευκλείδειου χώρου με σταθερή καμπυλότητα Gauss είναι οι σφαίρες. Αργότερα, απέδειξε ότι οι σφαίρες είναι οι μόνες αυστηρά κυρτές επιφάνειες (ovaloids) με σταθερή μέση καμπυλότητα. Σημειώνουμε ότι, μια επιφάνεια ονομάζεται αυστηρά κυρτή αν είναι κανονική, συνεκτική και συμπαγής με καμπυλότητα Gauss $K > 0$.

Για υπερεπιφάνειες M^n του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^{n+1}$, αντίστοιχες - της καμπυλότητας Gauss και της μέσης καμπυλότητας - καμπυλότητες είναι οι μέσες καμπυλότητες m-τάξης H_m, $m = 1, \ldots, n$. Αυτές ορί-ζονται μέσω των στοιχειωδών συμμετρικών πολυωνύμων σ_m m-βαθμού των κυρίων καμπυλοτήτων $k_1, \ldots, k_n$ της υπερεπιφάνειας μέσω της σχέσης

$$\binom{n}{m} H_m := \sigma_m(k_1, \ldots, k_n).$$

Για παράδειγμα H_1 είναι η μέση καμπυλότητα της M^n, H_2 είναι η κανονικοποιημένη (normalized) αριθμητική καμπυλότητα και H_n η καμπυλότητα Gauss-Kronecker.

Ο W. Suess [22] το 1952 επέκτεινε το αποτέλεσμα του Liebmann αποδεικνύοντας ότι μια συμπαγής κυρτή υπερεπιφάνεια του Ευκλείδειου χώρου είναι σφαίρα, αν έχει σταθερή καμπυλότητα H_m, για κάποιο $m = 1, \ldots, n$. Ανάλογα ο C. C. Hsiung [10] επέκτεινε το συμπέρασμα του Suess για αστερόσχημες συμπαγείς υπερεπιφάνειες.

Για την απόδειξη των παραπάνω αποτελεσμάτων οι ολοκληρωτικοί τύποι του Minkowski παίζουν σημαντικό ρόλο.

Το 1956 ο A. D. Alexandrov [1] έκανε μια σημαντική τομή στην αντιμετώπιση των προβλημάτων αυτού του είδους. Κάνοντας χρήση της *αρχής του μεγίστου* για ελλειπτικές εξισώσεις απέδειξε ότι:

«Αν M^n είναι συμπαγές πολύπτυγμα και $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ εμφύτευση με σταθερή μέση καμπυλότητα, τότε το $f(M^n)$ είναι σφαίρα.»

Το 1978 ο R. C. Reilly [18] απέδειξε εκ νέου το αποτέλεσμα του Alexandrov συνδυάζοντας τους ολοκληρωτικούς τύπους του Minkowski και κάποιους νέους ενδιαφέροντες υπολογισμούς.

Η περίπτωση όπου $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ είναι εμβάπτιση με σταθερή κάποια μέση καμπυλότητα m-τάξης H_m και το M^n συμπαγές πολύπτυγμα είναι πιο πλούσια.

Το 1951 ο H. Hopf [8] απέδειξε ότι:

«Αν $f : M^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ είναι εμβάπτιση με σταθερή μέση καμπυλότητα και η M^2 είναι ομοιομορφική με τη σφαίρα S^2, τότε η $f(M^2)$ είναι σφαίρα.»

Για $n \geqslant 2$, οι W. Y. Hsiang, Z. H. Teng και W. C. Yu [9] το 1983 κατασκεύασαν εμβαπτίσεις

$$f : M^{2n-1} \simeq S^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

με σταθερή μέση καμπυλότητα.

Οι H. C. Wente [23] και N. Kapouleas [12] το 1986 και 1987, κατασκεύασαν παραδείγματα εμβαπτίσεων $f : M^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με σταθερή μέση καμπυλότητα και γένος 1 ή μεγαλύτερο, αντίστοιχα.

Εκμεταλλευόμενος με μαεστρία τη μέθοδο του Reilly, ο A. Ros $[19, 20]$ απέδειξε τα ακόλουθα δύο θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α: Έστω $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ μια συμπαγής εμφυτευμένη υπερεπιφάνεια με σταθερή μέση καμπυλότητα m-τάξης H_m, $m = 1, \ldots, n$. Τότε το $f(M^n)$ είναι σφαίρα.

Η περίπτωση της H_n ανάγεται στο αποτέλεσμα του Suess, αφού από το Θεώρημα του Hadamard η H_n =σταθ. οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ είναι αυστηρά κυρτή υπερεπιφάνεια.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β: Έστω $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ μια συμπαγής εμφυτευμένη υπερεπιφάνεια με μη αρνητική μέση καμπυλότητα H. Υποθέτουμε ότι $h : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ είναι μια άλλη ισομετρική εμβάπτιση του M^n με διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας H'. Αν $|H'| \leqslant H$, τότε οι f,h είναι γεωμετρικά ισότιμες.

Το θεώρημα Β είναι ένα αποτέλεσμα ακαμψίας συμπαγών υπερεπιφανειών με μη αρνητική μέση καμπυλότητα και είναι γενίκευση του ακόλουθου συμπεράσματος του I. Schur (βλέπε για παράδειγμα [4,σελ.36]).

ΘΕΩΡΗΜΑ 0.0.1. *(Schur) 'Εστωσαν C μια κυρτή κλειστή επίπεδη καμπύλη και $\bar{C}$ μια κλειστή καμπύλη του χώρου ίδιου μήκους, με την C. Υποθέτουμε ότι οι καμπύλες έχουν κοινή παράμετρο το μήκος τόξου s και καμπυλότητες $k(s)$, $\bar{k}(s)$, αντίστοιχα. Αν $\bar{k}(s) \leqslant k(s)$, τότε η $\bar{C}$ είναι γεωμετρικά ισότιμη με την C.*

Αντικείμενο της παρούσας Μεταπτυχιακής Διατριβής είναι οι αποδείξεις των Θεωρημάτων Α και Β.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Προκαταρκτικά

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι η σύντομη παράθεση βασικών εννοιών και των αντίστοιχων συμβολισμών που θα χρησιμοποιηθούν στα δύο επόμενα κεφάλαια. Η παρουσίαση τους βασίζεται στο βιβλίο [13] όπου και παραπέμπουμε για περισσότερες λεπτομέρειες.

1.1 Έννοιες από τη Γεωμετρία Riemann

Έστω M^n ένα διαφορίσιμο πολύπτυγμα διάστασης n και $D(p)$ είναι το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας όλων των διαφορίσιμων συναρτήσεων στο p. Καλούμε **εφαπτόμενο διάνυσμα** (tangent vector) του πολυπτύγματος M^n στο σημείο p μια απεικόνιση $v : D(p) \longrightarrow \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

$$v(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 v(f_1) + \lambda_2 v(f_2),$$

$$v(f_1 f_2) = v(f_1) f_2(p) + f_1(p) v(f_2),$$

για κάθε $f_1, f_2 \in D(p)$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Συμβολίζουμε με T_pM^n, $p \in M^n$, τον **εφαπτόμενο χώρο** (tangent space) του M^n στο p. Πρόκειται για τον διανυσματικό χώρο που αποτελείται από όλα τα εφαπτόμενα διανύσματα του M^n με εφαρμογή στο p. Για χάρτη (U, ϕ) του M^n περί το p με συντεταγμένες $x^1, \ldots, x^n$, τα διανύσματα $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$, $i = 1, \ldots, n$, συνιστούν μία βάση του εφαπτόμενου χώρου T_pM^n.

Μια συνεχής απεικόνιση $f : M^n \longrightarrow \bar{M}^k$ μεταξύ των διαφορίσιμων πολυπτυγμάτων M^n και $\bar{M}^k$ καλείται **διαφορίσιμη** (differentiable), αν για τυχαίους χάρτες (U, ϕ) και $(\bar{U}, \bar{\phi})$ των M^n και $\bar{M}^k$, αντίστοιχα, η απεικόνιση $\bar{\phi} \circ f \circ \phi^{-1}$ είναι διαφορίσιμη απεικόνιση από το ανοιχτό $\phi\big(U \cap f^{-1}(\bar{U})\big)$ του $\mathbb{R}^n$ στο ανοιχτό $\bar{\phi}\big(\bar{U} \cap f(U)\big)$ του $\mathbb{R}^k$.

Έστω $f : M^n \longrightarrow \bar{M}^k$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση. Ονομάζουμε **διαφορικό** (differential) της f στο $p \in M^n$ τη γραμμική απεικόνιση

$$df_p : T_pM^n \longrightarrow T_{f(p)}\bar{M}^k,$$

η οποία ορίζεται ως ακολούθως:

$$df_p(v)(g) := v(g \circ f),$$

για κάθε $v \in T_pM^n$ και g τυχούσα διαφορίσιμη συνάρτηση σε μια περιοχή του $f(p)$.

Έστωσαν $f : M^n \longrightarrow \bar{M}^k$ διαφορίσιμη απεικόνιση και $p \in M^n$. Το σημείο p λέγεται **κρίσιμο σημείο** (critical point) της f αν το διαφορικό df_p δεν είναι επί. Το σημείο $\bar{p} \in \bar{M}^k$ ονομάζεται **κρίσιμη τιμή** (critical value) της f εάν το σύνολο $f^{-1}(\bar{p})$ περιέχει τουλάχιστον ένα κρίσιμο σημείο της f.

Ένα πολύπτυγμα M^n θα λέγεται **προσανατολίσιμο** (orientable) αν υπάρχει άτλας $\{(U_i, \phi_i)\}$ τέτοιος ώστε για κάθε ζεύγος χαρτών (U_i, ϕ_i), (U_j, ϕ_j) του άτλαντα με $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, να ισχύει $det\ d(\phi_i \circ \phi_j^{-1}) > 0$ στο $U_i \cap U_j$. Ένας άτλας αυτού του τύπου ονομάζεται **προσανατολισμός** (orientation) του M^n. Το M^n καλείται **προσανατολισμένο** (oriented) εάν είναι προσανατολίσιμο και έχουμε διαλέξει έναν προσανατολισμό.

Με το όρο **εμβάπτιση** (immersion), καλούμε μια διαφορίσιμη απεικόνιση $f : M^n \longrightarrow \bar{M}^k$ της οποίας το διαφορικό για κάθε $p \in M^n$ είναι ένα προς ένα. Είναι φανερό ότι $n \leqslant k$. Ο αριθμός $k - n$ καλείται **συνδιάσταση** (codimension) της εμβάπτισης f. Εάν επιπλέον, η εμβάπτιση f είναι ομοιομορφισμός επί της εικόνας $f(M^n) \subset \bar{M}^k$, με την επαγόμενη τοπολογία του $\bar{M}^k$, τότε η f ονομάζεται **εμφύτευση** (imbedding) του M^n στο $\bar{M}^k$. Το διαφορίσιμο πολύπτυγμα M^n, θα λέγεται **υποπολύπτυγμα** (submanifold) του $\bar{M}^k$, αν $M^n \subset \bar{M}^k$ και η απεικόνιση έγκλεισης $i : M^n \longrightarrow \bar{M}^k$, $i(p) := p$ είναι εμφύτευση.

Καλούμε διαφορίσιμο **διανυσματικό πεδίο** (vector field) X του M^n, μια αντιστοιχία, η οποία σε κάθε σημείο $p \in M^n$ αντιστοιχεί ένα διάνυσμα $X_p \in T_pM^n$, ώστε η συνάρτηση $Xf : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $(Xf)(p) :=$

$X_p(f)$ να είναι διαφορίσιμη, για κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση f στο M^n.

Στο εξής, θα συμβολίζουμε με $D(M^n)$ το σύνολο των διαφορίσιμων συναρτήσεων $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ και με $\Delta(M^n)$ το σύνολο των διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων του M^n.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1.1.1. Έστωσαν $TM^n = \bigcup\limits_{p\in M^n} T_pM^n$ η **εφαπτόμενη δέσμη** (tangent bundle) του M^n και $\pi : TM^n \longrightarrow M^n$ η κανονική προβολή. Ένα διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο X είναι μια διαφορίσιμη απεικόνιση $X : M^n \longrightarrow TM^n$ που πληροί την $\pi \circ X = Id$, όπου $Id : M^n \longrightarrow M^n$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση.

Η παραγώγιση διανυσματικών πεδίων σε ένα διαφορίσιμο πολύπτυγμα M^n, γίνεται δυνατή εισάγοντας την έννοια της γραμμικής συνοχής.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1.2. *Μια απεικόνιση $\nabla : \Delta(M^n) \times \Delta(M^n) \longrightarrow \Delta(M^n)$, που αντιστοιχεί στα διανυσματικά πεδία X, Y το διανυσματικό πεδίο $\nabla_X Y := \nabla(X,Y)$ και ικανοποιεί τις ιδιότητες*

$$\nabla_{X_1+X_2}Y = \nabla_{X_1}Y + \nabla_{X_2}Y$$

$$\nabla_X(Y_1+Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2,$$

$$\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y,$$

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y,$$

*για κάθε $f \in D(M^n)$ και $X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 \in \Delta(M^n)$, καλείται **γραμμική συνοχή** (linear connection) στο M^n. Το διανυσματικό πεδίο $\nabla_X Y$ ονομάζεται **συναλλοίωτη παράγωγος** (covariant derivative) του Y στη διεύθυνση X ως προς τη γραμμική συνοχή ∇.*

Ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.1.3. *Έστωσαν $X, Y \in \Delta(M^n)$ και $p \in M^n$. Το διάνυσμα $\nabla_X Y(p)$ εξαρτάται μόνο από την τιμή του X στο p, δηλαδή το X_p, και από τις τιμές του Y κατά μήκος μίας οσοδήποτε μικρής καμπύλης που διέρχεται από το p και έχει το X_p ως διάνυσμα ταχύτητας στο p.*

Η ανωτέρω πρόταση μας επιτρέπει να γράφουμε $\nabla_{X_p} Y = \nabla_X Y(p)$.

Μια **μετρική Riemann** (Riemannian metric) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ στο M^n είναι μια αντιστοιχία που σε κάθε σημείο $p \in M^n$ αντιστοιχεί ένα θετικά οριστικό εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ του $T_p M^n$, η οποία είναι διαφορίσιμη με την εξής έννοια: για κάθε ζεύγος $X, Y \in \Delta(M^n)$ η συνάρτηση $\langle X, Y \rangle : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\langle X, Y \rangle(p) := \langle X_p, Y_p \rangle$ είναι διαφορίσιμη. Ένα διαφορίσιμο πολύπτυγμα M^n εφοδιασμένο με μια μετρική Riemann ονομάζεται **πολύπτυγμα Riemann** (Riemannian manifold) και συμβολίζεται με $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{M^n})$ ή $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ αν δεν δημιουργείται σύγχυση.

Ισχύει το ακόλουθο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.1.4. *Κάθε διαφορίσιμο πολύπτυγμα M^n δέχεται τουλάχιστον μια μετρική Riemann.*

Για τη συνέχεια, θεωρούμε ένα πολύπτυγμα Riemann $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Μια γραμμική συνοχή ∇ στο M^n, που πληροί επιπλέον τις ιδιότητες

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle,$$

για κάθε $X, Y, Z \in \Delta(M^n)$, θα καλείται **συνοχή Levi-Civitá** (Levi-Civitá connection), όπου $[X, Y]$ είναι το **γινόμενο Lie** (Lie bracket) των X και Y, που ορίζεται από τη σχέση $[X, Y]f := X(Yf) - Y(Xf)$ για $f \in D(M^n)$.

Ισχύει, επιπλέον, το παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.1.5. *Κάθε πολύπτυγμα Riemann δέχεται μοναδική συνοχή Levi-Civitá.*

Έστωσαν $p_0 \in M^n$ και U ανοιχτό του M^n περί το p_0. Θεωρούμε διανυσματικά πεδία $E_i \in \Delta(U)$, $i = 1, \ldots, n$, τέτοια ώστε να ισχύει $\langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij}$ σε κάθε $p \in U$. Το σύστημα $\{E_1, \ldots, E_n\}$ ονομάζεται

τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο του M^n περί το p_0 και κάθε $X \in \Delta(M^n)$ μπορεί να γραφεί τοπικά στη μορφή

$$X = \sum_{i=1}^{n} \langle X, E_i \rangle E_i,$$

ως προς το πλαίσιο $\{E_1, \ldots, E_n\}$.

Έστω $f : M^n \longrightarrow \bar{M}^k$ μια εμβάπτιση, όπου το $\bar{M}^k$ είναι ένα πολύπτυγμα Riemann με μετρική $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\bar{M}^k}$. Επάγεται, μέσω της f, μια μετρική Riemann στο M^n που ορίζεται ως

$$\langle v, w \rangle := \langle df_p(v), df_p(w) \rangle_{\bar{M}^k} \ ,$$

για κάθε $p \in M^n$ και $v, w \in T_pM^n$, η οποία καλείται **επαγόμενη μετρική μέσω της f** (induced metric through f). Εάν το M^n είναι κι αυτό πολύπτυγμα Riemann με μετρική $\langle \cdot, \cdot \rangle_{M^n}$ και η επαγόμενη μετρική μέσω της f είναι ίδια με την ήδη υπάρχουσα, δηλαδή

$$\langle v, w \rangle_{M^n} := \langle df_p(v), df_p(w) \rangle_{\bar{M}^k} \ ,$$

για κάθε $p \in M^n$ και $v, w \in T_pM^n$, τότε η f καλείται **ισομετρική εμβάπτιση** (isometric immersion). Δυο ισομετρικές εμβαπτίσεις $f, g : M^n \longrightarrow \bar{M}^k$ θα λέμε ότι είναι **γεωμετρικά ισότιμες** (congruent) εάν υπάρχει ισομετρία τ του $\bar{M}^k$, ώστε να ισχύει $g = \tau \circ f$.

Έστω $f : M^n \longrightarrow \bar{M}^k$ μια ισομετρική εμβάπτιση. Για κάθε $p \in M^n$, ο εφαπτόμενος χώρος $T_{f(p)}\bar{M}^k$ αναλύεται σε ορθογώνιο ευθύ άθροισμα

$$T_{f(p)}\bar{M}^k = df_p(T_pM^n) \oplus N_fM(p),$$

όπου με $N_fM(p)$ συμβολίζουμε το **ορθοσυμπλήρωμα** (orthogonal complement) του n-διάστατου υπόχωρου $df_p(T_pM^n)$ του $T_{f(p)}\bar{M}^k$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1.6. *Μια απεικόνιση Z, η οποία σε κάθε $p \in M^n$ αντιστοιχεί ένα διάνυσμα $Z(p) \in T_{f(p)}\bar{M}^k$ καλείται **διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της f** (vector field along f). Όμοια, ονομάζουμε **κάθετο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της f** (normal vector field along f), ένα διανυσματικό πεδίο ξ κατά μήκος της f, τέτοιο ώστε $\xi(p) \in N_fM(p)$, για κάθε σημείο $p \in M^n$.*

Έστωσαν U μια περιοχή του M^n, $\{E_1, \ldots, E_k\}$ ένα ορθομοναδιαίο πλαίσιο του $\bar{M}^k$ στο V με $f(U) \subset V \cap f(M^n)$ και Z διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της f. Το διανυσματικό πεδίο Z εκφράζεται τοπικά ως

$$Z(p) = \sum_{i=1}^{k} z_i(p) E_i\big(f(p)\big),$$

για κάθε $p \in U$ και z_i, $i = 1, \ldots, k$, συναρτήσεις ορισμένες στο U. Το διανυσματικό πεδίο Z καλείται **διαφορίσιμο** διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της f, αν οι συναρτήσεις z_i είναι διαφορίσιμες. Τονίζουμε ότι ο ορισμός της διαφορισιμότητας δεν εξαρτάται από την επιλογή του πλαισίου. Σημειώνουμε, επιπλέον, ότι αν X είναι ένα διανυσματικό πεδίο του M^n, τότε το $df(X)$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της f. Επίσης, αν Y είναι ένα διανυσματικό πεδίο του $\bar{M}^k$, τότε το $Y \circ f$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της f.

Έστωσαν Z διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της f και $\{E_1, \ldots, E_k\}$ τοπικό πλαίσιο του $\bar{M}^k$ περί το $f(p)$ για $p \in M^n$. Ορίζουμε (βλέπε για παράδειγμα [3,σελ.3]), για κάθε $v \in T_pM^n$, τη συναλλοίωτη παράγωγο $\tilde{\nabla}_v Z$ του Z στη διεύθυνση v ως

$$\tilde{\nabla}_v Z := \sum_{i=1}^{k} v(z_i) E_i\big(f(p)\big) + \sum_{i=1}^{k} z_i(p) \bar{\nabla}_{df_p(v)} E_i, \tag{1.1}$$

όπου $\bar{\nabla}$ είναι η συνοχή Levi-Civitá του $\bar{M}^k$ και $Z = \sum_{i=1}^{k} z_i (E_i \circ f)$ η τοπική έκφραση του Z. Για κάθε διανυσματικό πεδίο X του M^n και $p \in M^n$, ορίζουμε

$$(\tilde{\nabla}_X Z)(p) := \tilde{\nabla}_{X(p)} Z.$$

Το διανυσματικό πεδίο $\tilde{\nabla}_X Z$ είναι διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της f και ονομάζεται **συναλλοίωτη παράγωγος** του Z **κατά μήκος της f** στη διεύθυνση X. Η απεικόνιση $\tilde{\nabla}$ καλείται **γραμμική συνοχή κατά μήκος της f**, είναι ανεξάρτητη της επιλογής πλαισίου και ισχύουν οι σχέσεις:

$$\tilde{\nabla}_{X_1+X_2} Z = \tilde{\nabla}_{X_1} Z + \tilde{\nabla}_{X_2} Z,$$
$$\tilde{\nabla}_{gX} Z = g \tilde{\nabla}_X Z,$$
$$\tilde{\nabla}_X (Z_1 + Z_2) = \tilde{\nabla}_X Z_1 + \tilde{\nabla}_X Z_2,$$

$$\widetilde{\nabla}_X(gZ) = X(g)Z + g\widetilde{\nabla}_X Z,$$

$$X\langle Z_1, Z_2\rangle = \langle \widetilde{\nabla}_X Z_1, Z_2\rangle + \langle Z_1, \widetilde{\nabla}_X Z_2\rangle,$$

$$\widetilde{\nabla}_{X_1} df(X_2) - \widetilde{\nabla}_{X_2} df(X_1) = df[X_1, X_2],$$

όπου X, X_1, X_2 είναι διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία του M^n, Z, Z_1, Z_2 διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία κατά μήκος της f και $g \in D(M^n)$.

Εάν ξ είναι ένα κάθετο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της f, συμβολίζουμε με $\nabla^{\perp}_X \xi$, την κάθετη συνιστώσα του διανύσματος $\widetilde{\nabla}_X \xi$, δηλαδή

$$\nabla^{\perp}_X \xi := (\widetilde{\nabla}_X \xi)^{\perp}.$$

Ορίζουμε, επιπλέον, για κάθε $p \in M^n$,

$$\nabla^{\perp}_{X(p)} \xi := (\nabla^{\perp}_X \xi)(p),$$

όπου X είναι διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο του M^n. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η $\nabla^{\perp}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες μιας γραμμικής συνοχής.

Έστωσαν $(M^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_{M^n})$ και $(\bar{M}^k, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\bar{M}^k})$ δυο πολυπτύγματα Riemann με συνοχές Levi-Civitá ∇ και $\bar{\nabla}$, αντίστοιχα. Θεωρούμε μια ισομετρική εμβάπτιση

$$f : (M^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_{M^n}) \longrightarrow (\bar{M}^k, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\bar{M}^k}),$$

και συμβολίζουμε με $\widetilde{\nabla}$ τη γραμμική συνοχή κατά μήκος της f. Η **δεύτερη θεμελιώδης μορφή** (second fundamental form) της f, γνωστή και ως **τύπος του Gauss** (Gauss formula), ορίζεται ως

$$B_f(X,Y) := \widetilde{\nabla}_X df(Y) - df(\nabla_X Y), \tag{1.2}$$

όπου X, Y είναι διανυσματικά πεδία του M^n. Σημειώνουμε ότι, για $X, Y \in \Delta(M^n)$, το $B_f(X,Y)$ είναι κάθετο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της f. Η δεύτερη θεμελιώδης μορφή της f είναι $D(M^n)$-διγραμμική και συμμετρική.

Ο μοναδικός αυτοπροσαρτημένος γραμμικός μετασχηματισμός A_ξ που ορίζεται από τη σχέση

$$\langle A_\xi X, Y\rangle := \langle B_f(X,Y), \xi\rangle, \tag{1.3}$$

όπου ξ είναι κάθετο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της f, λέγεται **τελεστής Weingarten** (Weingarten operator) της f στη διεύθυνση ξ. Ισχύει η σχέση

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = -df(A_\xi X) + \nabla^{\perp}_X \xi,$$

που ονομάζεται **τύπος του Weingarten** (Weingarten formula).

Το διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της f που ορίζεται από τη σχέση

$$\vec{H} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} B_f(E_i, E_i), \tag{1.4}$$

με $\{E_1, \ldots, E_n\}$ τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο του M^n, είναι ανεξάρτητο του πλαισίου και ονομάζεται **διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυ-λότητας** (mean curvature vector field) της f.

Σε ένα πολύπτυγμα Riemann $(M^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_{M^n})$ με συνοχή Levi-Civitá ∇ ο **τανυστής καμπυλότητας** (curvature tensor) R ορίζεται ως

$$R(X,Y)Z := \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, \tag{1.5}$$

όπου $X, Y, Z \in \Delta(M^n)$. Με τη βοήθεια του τανυστή καμπυλότητας θα ορίσουμε διάφορες καμπυλότητες σε κάθε σημείο του M^n, όπως: την καμπυλότητα τομής, την καμπυλότητα Ricci και την αριθμητική καμπυλότητα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1.7. *Έστω σ διδιάστατος γραμμικός υπόχωρος του T_pM^n. Η **καμπυλότητα τομής** (sectional curvature) του M^n στο σημείο p, ως προς το διδιάστατο υπόχωρο σ του T_pM^n, είναι ο αριθμός*

$$K(\sigma) := K(X \wedge Y) = \langle R(X,Y)Y, X\rangle, \tag{1.6}$$

όπου $\{X, Y\}$ είναι ορθομοναδιαία βάση του σ.

Για τη συνέχεια, θεωρούμε ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{E_1, \ldots, E_n\}$ της M^n. Το συμμετρικό τανυστικό πεδίο Q που ορίζεται ως

$$Q(X,Y) := \sum_{i=1}^{n}\langle R(E_i, X)Y, E_i\rangle, \tag{1.7}$$

για $X, Y \in \Delta(M^n)$, καλείται **τανυστής Ricci** (Ricci tensor). Για κάθε $p \in M^n$ και $X \in T_pM^n$ με $|X| = 1$ η ποσότητα

$$Ric(X) := Q(X, X)$$

ονομάζεται **καμπυλότητα Ricci** (Ricci curvature) στο σημείο p και κατά τη διεύθυνση $X \in T_pM^n$. Το ίχνος του Q στο p λέγεται **αρι-θμητική καμπυλότητα** (scalar curvature) του M^n στο p και συμβολίζεται με $\tau(p)$. Επομένως,

$$\tau(p) := \sum_{i=1}^{n} Q(E_i, E_i) = \sum_{i=1}^{n} Ric(E_i). \tag{1.8}$$

Έστωσαν $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ πολύπτυγμα Riemann με συνοχή Levi-Civitá ∇ και $f \in D(M^n)$. Συμβολίζουμε με $gradf$ ή ∇f την **κλίση** (gradient) της f, που ορίζεται ως το μοναδικό διανυσματικό πεδίο του M^n που ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle X, gradf \rangle = df(X) = Xf, \tag{1.9}$$

για κάθε $X \in \Delta(M^n)$.

Καλούμε **απόκλιση** (divergence) ενός διανυσματικού πεδίου $X \in \Delta(M^n)$ τη διαφορίσιμη συνάρτηση

$$divX = trace(Z \longrightarrow \nabla_Z X),$$

με $Z \in \Delta(M^n)$. Ως προς τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{E_1, \dots, E_n\}$ του M^n η απόκλιση του X λαμβάνει την έκφραση

$$divX = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle. \tag{1.10}$$

Ισχύει η σχέση

$$div(fX) = fdivX + Xf, \tag{1.11}$$

για κάθε $f \in D(M^n)$.

Ορίζουμε

$$\Delta f := div(gradf). \tag{1.12}$$

Η συνάρτηση Δf ονομάζεται **Λαπλασιανή** (Laplacian) της f. Ο τελεστής $\Delta : D(M^n) \longrightarrow D(M^n)$ λέγεται **τελεστής Laplace** (Laplacian operator) στο πολύπτυγμα Riemann $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Εύκολα προκύπτει ότι η έκφραση της Λαπλασιανής Δf, ως προς τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{E_1, \ldots, E_n\}$, είναι η

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} gradf, E_i \rangle. \tag{1.13}$$

Για τυχούσα $f \in D(M^n)$, ορίζουμε το τανυστικό πεδίο

$$\nabla^2 f : \Delta(M^n) \times \Delta(M^n) \longrightarrow D(M^n)$$

ως

$$\nabla^2 f(X, Y) := \langle \nabla_X gradf, Y \rangle, \tag{1.14}$$

με $X, Y \in \Delta(M^n)$. Από τον ορισμό της κλίσης της f, λαμβάνουμε άμεσα ότι

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(X, Y) &= X \langle gradf, Y \rangle - \langle gradf, \nabla_X Y \rangle \\ &= X(Yf) - (\nabla_X Y) f. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Το συμμετρικό τανυστικό πεδίο $\nabla^2 f$ καλείται **Εσσιανή** (Hessian) της συναρτήσεως f.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1.1.8. Σύμφωνα με τα παραπάνω, αν $\{E_1, \ldots, E_n\}$ τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο, τότε

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \Big(E_i(E_i f) - (\nabla_{E_i} E_i) f \Big). \tag{1.16}$$

Θα δώσουμε την εκδοχή εννοιών, που αναφέρθηκαν ήδη, στην ειδική περίπτωση των Ευκλείδειων χώρων. Θεωρούμε στον $\mathbb{R}^n$ τον ταυτοτικό χάρτη με συντεταγμένες $x^1, \ldots, x^n$ και τα αντίστοιχα διανυσματικά πεδία $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $i = 1, \ldots, n$. Ο $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο, γίνεται πολύπτυγμα Riemann.

Για $X = (b^1, \dots, b^n) = \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο με $b^i \in D(\mathbb{R}^n)$, ορίζουμε την **κανονική γραμμική συνοχή** στον $\mathbb{R}^n$ ως

$$\bar{\nabla}_Y X = (Yb^1, \dots, Yb^n).$$

Ιδιαίτερα, αν θεωρήσουμε το $\vec{x} = (x^1, \dots, x^n)$ ως εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο του $\mathbb{R}^n$, από τον ορισμό της $\bar{\nabla}$ θα έχουμε

$$\bar{\nabla}_X \vec{x} = (Xx^1, \dots, Xx^n) = (b^1, \dots, b^n) = X. \tag{1.17}$$

Υπολογίζεται άμεσα, ότι η $\bar{\nabla}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες της συνοχής Levi-Civitá.

Οι τύποι της κλίσης, απόκλισης και της Λαπλασιανής μιας διαφορίσιμης συνάρτησης είναι ήδη γνωστοί από την Ανάλυση και έχουν ως εξής:

$$\begin{aligned} gradf &= \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right) \\ divZ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial z^i}{\partial x^i} \\ \Delta f &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^{i2}} \ , \end{aligned}$$

για $Z = (z^1, \dots, z^n)$.

Σημειώνουμε ότι ο τανυστής καμπυλότητας των Ευκλείδειων χώρων με τη συνήθη μετρική είναι ταυτοτικά μηδέν. Συνεπώς, όλες οι καμπυλότητες είναι μηδενικές.

Θα αποδείξουμε, τέλος, το παρακάτω χρήσιμο λήμμα.

ΛΗΜΜΑ 1.1.9. *Έστωσαν $(M^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ένα πολύπτυγμα Riemann και $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ μια ισομετρική εμβάπτιση, όπου ο $\mathbb{R}^{n+k}$ είναι εφοδιασμένος με τη συνήθη μετρική. Ισχύει η ταυτότητα*

$$\Delta f = n\vec{H}, \tag{1.18}$$

όπου Δ ο Λαπλασιανός τελεστής στο M^n με την επαγόμενη μετρική και

$$\Delta f = (\Delta f^1, \dots, \Delta f^{n+k}),$$

όπου $f = (f^1, \dots, f^{n+k})$.

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα σταθερό μοναδιαίο διάνυσμα a του $\mathbb{R}^{n+k}$ και ορίζουμε τη συνάρτηση $f_a : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f_a := \langle f, a\rangle$. Για $X \in \Delta(M^n)$ θα έχουμε

$$Xf_a = \langle df(X), a\rangle,$$

και

$$\begin{aligned} XXf_a &= X\langle df(X), a\rangle \\ &= \langle \widetilde{\nabla}_X df(X), a\rangle. \end{aligned}$$

Συνεπώς, λόγω της (1.15), έχουμε

$$\begin{aligned} \nabla^2 f_a(X,X) &= XXf_a - (\nabla_X X)f_a \\ &= \langle \widetilde{\nabla}_X df(X), a\rangle - \langle df(\nabla_X X), a\rangle \\ &= \langle \widetilde{\nabla}_X df(X) - df(\nabla_X X), a\rangle \\ &= \langle B_f(X,X), a\rangle. \end{aligned}$$

Δηλαδή ισχύει

$$\nabla^2 f_a(X,X) = \langle B_f(X,X), a\rangle. \tag{1.19}$$

Από τη σχέση (1.18) λαμβάνουμε

$$\Delta f_a = \langle n\vec{H}, a\rangle.$$

Άρα, εφόσον $\Delta f = (\Delta f^1, \ldots, \Delta f^{n+k})$ και $f^i = \langle f, e_i\rangle$, $i = 1, \ldots, n+k$, όπου $\{e_i\}_{i=1,\ldots,n+k}$ η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^{n+k}$, θα έχουμε τη ζητούμενη σχέση (1.17). ■

1.2 Έννοιες από τη θεωρία των υπερεπιφανειών

Έστω $f : M^n \longrightarrow \bar{M}^k$ εμβάπτιση μεταξύ των διαφορίσιμων πολυπτυγμάτων M^n και $\bar{M}^k$. Μια εμβάπτιση συνδιάστασης 1 ονομάζεται **υπερεπιφάνεια** (hypersurface). Αυτή η κατηγορία εμβαπτίσεων, και ειδικότερα οι εμφυτευμένες υπερεπιφάνειες του $\mathbb{R}^{n+1}$ με τη συνήθη μετρική θα μας απασχολήσουν ιδιαίτερα.

Στην ενότητα 1.1 δώσαμε τον ορισμό του προσανατολισμένου πολυπτύγματος. Για λόγους ευκολίας στο εξής, όταν έχουμε μια υπερεπιφάνεια $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ όπου το M^n είναι προσανατολισμένο, θα λέμε ότι η υπερεπιφάνεια f είναι προσανατολισμένη, εννοώντας στην πραγματικότητα ότι το M^n είναι προσανατολισμένο. Συνεπώς, στην περίπτωση των υπερεπιφανειών, μπορούμε να εκφράσουμε την παρακάτω ισοδύναμη πρόταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.2.1. *Μια υπερεπιφάνεια $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ καλείται **προσανατολίσιμη** (orientable), αν υπάρχει μοναδιαίο, κάθετο και διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της f.*

Θα λέμε ότι η $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ είναι **προσανατολισμένη** (oriented), αν είναι προσανατολίσιμη και έχουμε επιλέξει ένα διαφορίσιμο και μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της f, το οποίο ονομάζεται και **προσανατολισμός** (orientation) της f.

Καλούμε **σφαιρική απεικόνιση** (spherical mapping) μιας προσανατολισμένης υπερεπιφάνειας $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ με προσανατολισμό N, την απεικόνιση

$$\nu : M^n \longrightarrow S^n \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

η οποία αντιστοιχεί σε κάθε σημείο $p \in M^n$ το σημείο $\nu(p)$ της μοναδιαίας σφαίρας S^n, το οποίο προκύπτει από παράλληλη μεταφορά του κάθετου διανύσματος N_p, ώστε η αρχή του να συμπέσει με το κέντρο της σφαίρας.

Στη συνέχεια, θεωρούμε μια προσανατολισμένη υπερεπιφάνεια $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ με προσανατολισμό N. Στο M^n θεωρούμε την επαγόμενη μετρική μέσω της f. Στον τύπο του Gauss, το B_f συμβολίζεται απλά με B, δηλαδή

$$B(X,Y) = \widetilde{\nabla}_X df(Y) - df(\nabla_X Y).$$

Επιπλέον, η απεικόνιση Weingarten ως προς το N θα συμβολίζεται με A, δηλαδή $A := A_N$. Επομένως

$$\langle AX, Y\rangle = \langle B(X,Y), N\rangle.$$

Έχουμε, λοιπόν, τον τύπο του Weingarten

$$\widetilde{\nabla}_X N := -df(AX), \tag{1.20}$$

και την δεύτερη θεμελιώδη μορφή

$$b_N(X,Y) := \langle B(X,Y), N\rangle.$$

Οι ιδιοτιμές $k_1(p) \geqslant \ldots \geqslant k_n(p)$ του A στο $p \in M^n$ θα ονομάζονται **κύριες καμπυλότητες** (principal curvatures) της υπερεπιφάνειας στο σημείο p ως προς το κάθετο N. Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $e_1, \ldots, e_n$ θα λέγονται **κύριες διευθύνσεις** (principal directions) της υπερεπιφάνειας στο σημείο $p \in M^n$. Αποδεικνύεται $[17, 21]$ ότι οι κύριες καμπυλότητες είναι συνεχείς συναρτήσεις και σχεδόν παντού διαφορίσιμες.

Ένα σημείο $p \in M^n$ για το οποίο ισχύει $k_1(p) = \cdots = k_n(p) = c$ θα λέγεται **ομφαλικό σημείο** (umbilic point) αν $c \neq 0$ ή **ισόπεδο σημείο** (flat point) αν $c = 0$.

Η συνάρτηση

$$H := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i, \tag{1.21}$$

καλείται **μέση καμπυλότητα** (mean curvature) και η συνάρτηση

$$K = k_1 \cdots k_n$$

λέγεται **καμπυλότητα Gauss-Kronecker** (Gauss-Kronecker curvature) της υπερεπιφάνειας $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$.

Θεωρούμε το **στοιχειώδες συμμετρικό πολυώνυμο** m-βαθμού, $m = 1, \ldots, n$, ως προς τις μεταβλητές $x_1, \ldots, x_n$:

$$\sigma_m(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant n} x_{i_1} \cdots x_{i_m}. \tag{1.22}$$

Μέση καμπυλότητα m-τάξης H_m (mean curvature of order m), $m = 1, \ldots, n$, της υπερεπιφάνειας $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ονομάζεται η συνάρτηση που ορίζεται ως

$$H_m = \frac{1}{\binom{n}{m}}\sigma_m(k_1, \ldots, k_n), \tag{1.23}$$

όπου k_i, $i = 1, \ldots, n$, είναι οι κύριες καμπυλότητες. Είναι προφανές ότι $H_1 = H$ και $H_n = K$. Για τεχνικούς λόγους ορίζουμε $H_0 := 1$.

Έστω M^n n-διάστατο υποπολύπτυγμα του $\mathbb{R}^{n+1}$. Το υποπολύπτυγμα M^n ονομάζεται **κυρτό** (convex) όταν, για κάθε $p \in M^n$, κείται εξ' ολοκλήρου σε έναν από τους δυο κλειστούς ημιχώρους που ορίζονται από τον T_pM^n, και **αυστηρά κυρτό** (strictly convex) εάν επιπλέον $T_pM^n \cap M^n = \{p\}$ για κάθε $p \in M^n$.

Ισχύει το ακόλουθο σπουδαίο θεώρημα, γνωστό ως θεώρημα του Hadamard.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.2.2. *(Hadamard) Έστωσαν M^n, $n \geqslant 2$, συμπαγές συνεκτικό πολύπτυγμα, και $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ υπερεπιφάνεια με καμπυλότητα Gauss-Kronecker $K \neq 0$ παντού. Διαλέγοντας κατάλληλο κάθετο διανυσματικό πεδίο N, η σφαιρική απεικόνιση είναι διαφορομορφισμός του M^n με την S^n, η δεύτερη θεμελιώδης μορφή b_N είναι θετικά οριστική παντού, η f είναι εμφύτευση, και το $f(M^n)$ αυστηρά κυρτό.*

Θεωρούμε μια προσανατολισμένη υπερεπιφάνεια $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Το **στοιχείο όγκου** (volume element) συμβολίζεται με dM και ορίζεται ως η n-μορφή που σε κάθε σημείο $p \in M^n$ και σε κάθε διατεταγμένη βάση $\{v_1, \ldots, v_n\}$ του προσανατολισμού του T_pM^n μας δίνει τον όγκο του παραλληλεπιπέδου με ακμές τα $v_1, \ldots, v_n$. Ισχύει, δηλαδή,

$$dM(v_1, \ldots, v_n) = \sqrt{det(\langle v_i, v_j \rangle)}\ . \tag{1.24}$$

Θα αποδείξουμε, τέλος, το παρακάτω χρήσιμο λήμμα.

ΛΗΜΜΑ 1.2.3. *Έστω $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ συμπαγής εμφυτευμένη υπερεπιφάνεια, προσανατολισμένη, ως προς το εσωτερικό κάθετο N της $f(M^n)$. Αν a είναι σημείο της μοναδιαίας σφαίρας $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, τότε υπάρχει $p_0 \in M^n$ ώστε $N(p_0) = -a$.*

Απόδειξη. Έστω a τυχαίο σημείο της S^n. Θεωρούμε ένα υπερεπίπεδο π του $\mathbb{R}^{n+1}$, κάθετο στο a και σε θέση τέτοια ώστε να μην τέμνει το $f(M^n)$. Το $f(M^n)$ βρίσκεται σε μια πλευρά του π.

Θεωρούμε τη διαφορίσιμη συνάρτηση $\phi : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$\phi(p) := \langle f(p), a\rangle.$$

Επειδή το M^n είναι συμπαγές υπάρχει σημείο $p_0 \in M^n$ όπου η ϕ λαμβάνει απόλυτο μέγιστο.

Για $X \in \Delta(M^n)$ θα έχουμε

$$X\phi = \langle df(X), a\rangle,$$
$$(\nabla_X X)\phi = \langle df(\nabla_X X), a\rangle,$$

και

$$XX\phi = \langle \widetilde{\nabla}_X df(X), a\rangle,$$

όπου $\widetilde{\nabla}$ είναι η γραμμική συνοχή κατά μήκος της f. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \nabla^2\phi(X,X) &= XX\phi - (\nabla_X X)\phi \\ &= \langle \widetilde{\nabla}_X df(X) - df(\nabla_X X), \bar{a}\rangle \\ &= \langle B(X,X), a\rangle, \end{aligned}$$

όπου B είναι η δεύτερη θεμελιώδης μορφή της $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$.

Στο p_0 θα έχουμε, για $X \in T_{p_0}M^n$,

$$X\phi = \langle df(X), a\rangle = 0$$

και

$$\nabla^2\phi(X,X) = \langle B(X,X), a\rangle \leqslant 0. \tag{1.25}$$

Άρα, το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο του $f(M^n)$ στο $f(p_0)$ είναι κάθετο στο a, δηλαδή παράλληλο στο π και επιπλέον ισχύει $N(p_0) = -a$. ■

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1.2.4. Ας σημειωθεί ότι η σχέση (1.25) του Λήμματος 1.2.4., στο σημείο $p_0 \in M^n$, γίνεται

$$\langle B(X,X), N\rangle \geqslant 0$$

ή

$$\langle AX, X\rangle \geqslant 0,$$

δηλαδή οι κύριες καμπυλότητες στο p_0 είναι μη αρνητικές.

1.3 Στοιχεία από την Ανάλυση

Στην τελευταία ενότητα αυτού του κεφαλαίου θα παραθέσουμε χωρίς απόδειξη, δύο σημαντικά θεωρήματα της Ανάλυσης, των οποίων τη χρήση θα κάνουμε αρκετές φορές παρακάτω.

Το πρώτο από αυτά είναι το Θεώρημα του Stokes ή Θεώρημα απόκλισης (βλέπε για παράδειγμα [14,σελ.186]).

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.3.1. *(Απόκλισης) Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ φραγμένος τόπος του Ευκλείδειου χώρου, του οποίο το σύνορο είναι μια εμφυτευμένη υπερεπιφάνεια $M^n = \partial\Omega$. Αν N είναι το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο, με φορά προς το εσωτερικό της M^n και $X \in \Delta(\bar{\Omega})$, τότε*

$$\int_\Omega divX d\Omega = -\int_M \langle X, N\rangle dM, \tag{1.26}$$

όπου $d\Omega$ είναι το στοιχείο όγκου στον $\mathbb{R}^{n+1}$.

Το δεύτερο θεώρημα αναφέρεται σε λύση προβλήματος συνοριακών τιμών, γνωστό ως πρόβλημα του Dirichlet (βλέπε για παράδειγμα [11,σελ.252]).

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.3.2. *(Dirichlet) Έστωσαν $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ φραγμένος τόπος του Ευκλείδειου χώρου C^∞-τάξης και $g \in C^\infty(\partial\Omega)$,$f \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Τότε, το πρόβλημα Dirichlet*

$$\begin{aligned} \Delta u &= f \text{ στο } \Omega \\ u &= g \text{ στο } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.27}$$

έχει (μοναδική) λύση $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Τέλος, αναφέρουμε ακόμη ένα χρήσιμο θεώρημα που αφορά διαφορίσιμες απεικονίσεις.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.3.3. *(Sard) Έστω $f : M^n \longrightarrow N^n$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ πολυπτυγμάτων ίδιας διάστασης. Το σύνολο των μη κρίσιμων τιμών της f είναι ένα ανοιχτό και πυκνό υποσύνολο του N^n.*

Κεφάλαιο 2

Τύποι Minkowski και Reilly

Στόχος του παρόντος κεφαλαίου αποτελεί η διατύπωση και η απόδειξη δύο πολύ σημαντικών αποτελεσμάτων, τα οποία έχουν αρκε-τές εφαρμογές. Πρόκειται για τους ολοκληρωτικούς τύπους του Minkowski και τον τύπο του Reilly για συμπαγείς προσανατολισμένες υπερεπιφάνειες των Ευκλείδειων χώρων. Η χρήση ολοκληρωτικών τύπων σαν μέθοδος απόδειξης, ήταν αποδοτική, κυρίως σε χαρακτηρισμούς υπερεπιφανειών. Ο τύπος του Reilly, παρά την πολυπλοκότητά του, βοήθησε στην επίλυση διαφόρων προβλημάτων.

2.1 Παράλληλες υπερεπιφάνειες

Στην προσπάθεια μας να αποδείξουμε τους τύπους του Minkowski, θα χρειαστούμε βασικά στοιχεία από τη θεωρία των παράλληλων υπερεπιφανειών. Θα αφιερώσουμε την παράγραφο αυτή στον ορισμό των παράλληλων υπερεπιφανειών, αλλά και στις σχέσεις που συνδέουν τα χαρακτηριστικά μιας υπερεπιφάνειας με αυτά των παραλλήλων της. Ο $\mathbb{R}^{n+1}$ θεωρείται εφοδιασμένος με τη συνήθη μετρική.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1.1. *Έστω $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ προσανατολισμένη υπερεπιφάνεια με μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο N κατά μήκος της f. Για κάθε $r \in \mathbb{R}$, η απεικόνιση $f_r : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ με τύπο*

$$f_r(p) = f(p) + rN(p),$$

*καλείται **παράλληλη υπερεπιφάνεια** της $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, σε απόσταση r κατά μήκος του κάθετου.*

Απαραίτητο για τη συνέχεια είναι να εξετάσουμε, για ποιά r η $f_r : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ είναι εμβάπτιση, δηλαδή για ποια r είναι πράγματι υπερεπιφάνεια. Είναι προφανές ότι $f_0 = f$ και ότι η f_r είναι διαφορίσιμη.

Κάνοντας χρήση του τύπου του Weingarten, για $X \in \Delta(M^n)$ έχουμε

$$\begin{aligned} df_r(X) &= df(X) + r\widetilde{\nabla}_X N \\ &= df(X) - rdf(AX) \\ &= df(X - rAX). \end{aligned}$$

Αποδείξαμε ότι

$$df_r(X) = \big(df \circ (I - rA)\big)\big(X\big), \tag{2.1}$$

όπου A είναι ο τελεστής Weingarten της f ως προς το N.

Για να είναι η f_r εμβάπτιση θα πρέπει το διαφορικό της να είναι ένα προς ένα. Από τη σχέση (2.1) είναι φανερό ότι, αυτό συμβαίνει μόνο αν το τανυστικό πεδίο $I - rA$ δεν έχει το μηδέν ως ιδιοτιμή ή, ισοδύναμα, αν ο τελεστής Weingarten A δεν έχει το $1/r$ ως ιδιοτιμή. Όμως, οι ιδιοτιμές του A μεταβάλλονται με συνεχή τρόπο καθώς μεταβάλλεται το $p \in M^n$. Άρα, υπάρχει πάντα περιοχή U περί το p και αριθμός $\varepsilon > 0$ ώστε η απεικόνιση $f_r|_U : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ να είναι εμβάπτιση για $|r| < \varepsilon$. Για τα επόμενα, υποθέτουμε ότι η $f_r : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ είναι εμβάπτιση.

Η σχέση (2.1) μας δηλώνει ακόμα, ότι τα εφαπτόμενα υπερεπίπεδα των $f_r(M^n)$ και $f(M^n)$ στα σημεία $f_r(p)$ και $f(p)$, αντίστοιχα, είναι παράλληλα. Άρα, το μοναδιαίο κάθετο N της f, είναι και μοναδιαίο κάθετο της f_r.

Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε τη μέση καμπυλότητα $H(r)$ της παράλληλης υπερεπιφάνειας.

Για την επαγόμενη μετρική $\langle \cdot, \cdot \rangle_r$ της παράλληλης υπερεπιφάνειας σε απόσταση r έχουμε

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle_r &= \langle df_r(X), df_r(Y) \rangle \\ &= \langle df \circ (I - rA)X, df \circ (I - rA)Y \rangle \\ &= \langle (I - rA)X, (I - rA)Y \rangle, \end{aligned}$$

αφού η f είναι ισομετρική εμβάπτιση. Επιπλέον, επειδή οι f_r και f έχουν το ίδιο κάθετο στα αντίστοιχα σημεία, θα έχουμε

$$\begin{aligned} df_r(A_rX) &= -\widetilde{\nabla}^r_X N \\ &= -dN(X) \\ &= df(AX), \end{aligned}$$

όπου A_r είναι ο τελεστής Weingarten της f_r ως προς το N και $\widetilde{\nabla}^r$ η συναλλοίωτη παράγωγος κατά μήκος της f_r. Λαμβάνοντας υπόψη και τη σχέση (2.1) έχουμε

$$df \circ (I - rA)A_rX = df(AX),$$

ή, επειδή η f είναι εμβάπτιση,

$$(I - rA)A_r = A. \tag{2.2}$$

Αν e είναι ιδιοδιάνυσμα του A με αντίστοιχη ιδιοτιμή k, τότε από τη σχέση (2.2) συμπεραίνουμε ότι το e είναι ιδιοδιάνυσμα του A_r με αντίστοιχη ιδιοτιμή $\bar{k} = k/(1 - rk)$. Συνεπώς, αν οι κύριες καμπυλότητες της f είναι $k_1, \ldots, k_n$, τότε οι κύριες καμπυλότητες της f_r είναι οι $\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n$ με $\bar{k}_i = k_i/(1 - rk_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

Θέτουμε $P(r) = (1 - rk_1) \cdots (1 - rk_n)$. Η μέση καμπυλότητα $H(r)$ της f_r δίνεται ως

$$\begin{aligned} H(r) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{1 - rk_i} \\ &= \frac{1}{nP(r)} \Big(k_1 \prod_{i \neq 1} (1 - rk_i) + \ldots + k_n \prod_{i \neq n} (1 - rk_i) \Big) \\ &= -\frac{P'(r)}{nP(r)} \,, \end{aligned}$$

όπου με $P'(r)$ συμβολίζουμε την παράγωγο του $P(r)$ ως προς το r. Επειδή,

$$\begin{aligned} P(r) &= (1 - rk_1) \cdots (1 - rk_n) \\ &= 1 - \sigma_1 r + \sigma_2 r^2 + \ldots + (-1)^n \sigma_n r^n \\ &= 1 - \binom{n}{1} H_1 r + \binom{n}{2} H_2 r^2 + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} H_n r^n \\ &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} H_j r^j, \end{aligned}$$

θα έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
H(r) &= -\frac{P'(r)}{nP(r)} \\
&= -\frac{1}{nP(r)}\Bigg(-\binom{n}{1}H_1 + 2\binom{n}{2}H_2 r \\
&\qquad + \ldots + (-1)^n n\binom{n}{n}H_n r^{n-1}\Bigg).
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

Επιπλέον, θα δώσουμε μία σχέση για το στοιχείο όγκου της παράλληλης υπερεπιφάνειας. Με τη βοήθεια της σχέσης (2.1) συνάγουμε ότι το στοιχείο όγκου dM της $(M^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ και το στοιχείο όγκου dM_r της $(M^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_r)$ συνδέονται με τη σχέση

$$
dM_r = P(r)dM, \tag{2.4}
$$

αφού για τις κύριες διευθύνσεις $e_i, i = 1, \ldots, n$, της f, από τη (2.1) έχουμε

$$
df_r(e_i) = (1 - rk_i)df(e_i).
$$

Πραγματικά, ως προς διατεταγμένη βάση $\{v_1, \ldots, v_n\}$ του T_pM^n, έχουμε

$$
dM(v_1, \ldots, v_n) = \sqrt{\det(\langle v_i, v_j\rangle)}
$$

και

$$
\begin{aligned}
dM_r(v_1 \ldots, v_n) &= \sqrt{\det\big(\langle v_i, v_j\rangle_r\big)} \\
&= \sqrt{\det\big(\langle (I - rA)v_i, (I - rA)v_j\rangle\big)} \\
&= \sqrt{\det\big((1 - rk_i)(1 - rk_j)\langle v_i, v_j\rangle\big)} \\
&= (1 - rk_1)\cdots(1 - rk_n)\sqrt{\det\big(\langle v_i, v_j\rangle\big)} \\
&= P(r)dM(v_1, \ldots, v_n).
\end{aligned}
$$

2.2 Ολοκληρωτικοί τύποι του Minkowski

Το ακόλουθο θεώρημα είναι χρήσιμο για την απόδειξη ενός εκ των κύριων αποτελεσμάτων που θα εξετάσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2.1. *(Ολοκληρωτικοί τύποι του Minkowski) Έστω $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ συμπαγής και προσανατολισμένη υπερεπιφάνεια του $\mathbb{R}^{n+1}$. Ισχύουν οι εξής ολοκληρωτικοί τύποι του Minkowski*

$$\int_M \Big(H_{m-1} + \langle f, N\rangle H_m\Big) dM = 0, \qquad m = 1, \ldots, n, \tag{2.5}$$

όπου N είναι ο προσανατολισμός της f και H_m, $m = 1, \ldots, n$, η μέση καμπυλότητα m-τάξης.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε πρώτα την (2.5) για $m = 1$, δηλαδή, ότι ισχύει η σχέση

$$\int_M \Big(1 + \langle f, N\rangle H\Big) dM = 0. \tag{2.6}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$g = \frac{1}{2}\langle f, f\rangle,$$

και υπολογίζουμε την Εσσιανή της. Για $X \in \Delta(M^n)$ ισχύουν τα ακόλουθα

$$Xg = \langle df(X), f\rangle,$$

και

$$\begin{aligned} XXg &= X\langle df(X), f\rangle \\ &= \langle \widetilde{\nabla}_X df(X), f\rangle + \langle df(X), df(X)\rangle. \end{aligned}$$

Συνεπώς, έχουμε

$$\begin{aligned} \nabla^2 g(X, X) &= XXg - (\nabla_X X)g \\ &= \langle \widetilde{\nabla}_X df(X), f\rangle + \langle df(X), df(X)\rangle - \langle df(\nabla_X X), f\rangle \\ &= \langle B_f(X, X), f\rangle + \langle df(X), df(X)\rangle. \end{aligned}$$

Από την τελευταία σχέση λαμβάνουμε

$$\Delta g = n + trace A\langle f, N\rangle,$$

ή

$$divgradg = n + n\langle f, N\rangle H.$$

Από την τελευταία σχέση και το Θεώρημα 1.3.1 προκύπτει η (2.6).

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε την (2.5) για $m \geqslant 2$ κάνοντας χρήση της (2.6) και των παράλληλων υπερεπιφανειών.

Θεωρούμε την παράλληλη υπερεπιφάνεια $f_r : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ της f, δηλαδή $f_r = f + rN$. Κατά τα γνωστά, είναι συμπαγής και προσανατολισμένη με το ίδιο κάθετο N, για αρκετά μικρό r.

Εφαρμόζουμε τον πρώτο τύπο του Minkowski (2.6) για την f_r και έχουμε

$$\int_M \Big(1 + \langle f_r, N\rangle H(r)\Big) dM_r = 0.$$

Επειδή

$$\int_M \Big(1 + \langle f + rN, N\rangle(-\frac{P'(r)}{nP(r)})\Big) P(r) dM =$$
$$\int_M \Big(1 + \langle f, N\rangle(-\frac{P'(r)}{nP(r)}) + r(-\frac{P'(r)}{nP(r)})\Big) P(r) dM =$$
$$\int_M \Big(P(r) - \frac{P'(r)}{n}\langle f, N\rangle - r\frac{P'(r)}{n}\Big) dM,$$

θα έχουμε

$$\int_M \Big(nP(r) - rP'(r) - \langle f, N\rangle P'(r)\Big) dM = 0. \tag{2.7}$$

Υπολογίζοντας την ολοκληρωτέα ποσότητα βρίσκουμε

$$nP(r) - rP'(r) - \langle f, N\rangle P'(r) =$$
$$\sum_{j=0}^{n} n(-1)^j \binom{n}{j} H_j r^j - \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} j H_j r^j$$
$$-\langle f, N\rangle \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j+1} \binom{n}{j+1} (j+1) H_{j+1} r^j =$$
$$\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \left[\binom{n}{j}(n-j)H_j + \langle f, N\rangle \binom{n}{j+1}(j+1)H_{j+1}\right] r^j =$$
$$\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{n(n-1)\cdots(n-j)}{j!} \Big(H_j + \langle f, N\rangle H_{j+1}\Big) r^j.$$

Οι συντελεστές αυτής της πολυωνυμικής εξίσωσης θα είναι εκ ταυτότητος μηδέν, απ' όπου προκύπτει η (2.5). Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.1. συμπληρώθηκε. ∎

2.3 Τύπος του Reilly

Έστωσαν $(\bar{M}^{n+1}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ πολύπτυγμα Riemann με συνοχή Levi-Civitá $\bar{\nabla}$, τανυστή καμπυλότητας $\bar{R}$ και $f \in C^{\infty}(\bar{M}^{n+1})$. Ισχύει η ταυτότητα, γνωστή ως τύπος του Bochner [2]

$$\overline{div}\Big(\bar{\nabla}_{\bar{\nabla} f}\bar{\nabla} f - (\bar{\Delta} f)\bar{\nabla} f\Big) = \bar{Q}(\bar{\nabla} f, \bar{\nabla} f) + |\bar{\nabla}^2 f|^2 - (\bar{\Delta} f)^2, \tag{2.8}$$

όπου $\overline{div}, \bar{Q}, \bar{\nabla} f, \bar{\nabla}^2 f$ και $\bar{\Delta} f$ είναι η απόκλιση ενός διανυσματικού πεδίου, ο τανυστής Ricci, η κλίση, η Εσσιανή και η Λαπλασιανή της f στο $\bar{M}^{n+1}$, αντίστοιχα, και $|\bar{\nabla}^2 f|^2$ είναι το τετράγωνο του μήκους της Εσσιανής της f. Προφανώς ισχύει

$$\begin{aligned} |\bar{\nabla}^2 f|^2 &= \sum_{i,j=1}^{n+1} (\bar{\nabla}^2 f(E_i, E_j))^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^{n+1} \langle \bar{\nabla}_{E_i}\bar{\nabla} f, E_j\rangle^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} |\bar{\nabla}_{E_i}\bar{\nabla} f|^2. \end{aligned}$$

Θα αποδείξουμε τη σχέση (2.8). Πραγματικά, ως προς τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{E_i\}, i = 1, \ldots, n+1$, του $\bar{M}^{n+1}$ και λαμβάνοντας υπόψη την (1.11), έχουμε

$$\begin{aligned} \overline{div}\Big(\bar{\nabla}_{\bar{\nabla} f}\bar{\nabla} f - (\bar{\Delta} f)\bar{\nabla} f\Big) = &\sum_{i=1}^{n+1} \langle \bar{\nabla}_{E_i}\bar{\nabla}_{\bar{\nabla} f}\bar{\nabla} f, E_i\rangle - (\bar{\Delta} f)^2 \\ &- \langle \overline{grad}(\bar{\Delta} f), \bar{\nabla} f\rangle, \end{aligned}$$

ή, ισοδύναμα, από τον ορισμό του τανυστή καμπυλότητας

$$\begin{aligned}\overline{div}\Big(\bar\nabla_{\bar\nabla f}\bar\nabla f-(\bar\Delta f)\bar\nabla f\Big) &= \sum_{i=1}^{n+1}\langle \bar R(E_i,\bar\nabla f)\bar\nabla f,E_i\rangle \\ &\quad+\sum_{i=1}^{n+1}\langle \bar\nabla_{\bar\nabla f}\bar\nabla_{E_i}\bar\nabla f,E_i\rangle \\ &\quad+\sum_{i=1}^{n+1}\langle \bar\nabla_{[E_i,\bar\nabla f]}\bar\nabla f,E_i\rangle-(\bar\Delta f)^2 \\ &\quad-\langle\overline{grad}(\bar\Delta f),\bar\nabla f\rangle.\end{aligned}$$

Λόγω των ιδιοτήτων της συνοχής Levi-Civitá λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\overline{div}\Big(\bar\nabla_{\bar\nabla f}\bar\nabla f-(\bar\Delta f)\bar\nabla f\Big) &= \bar Q(\bar\nabla f,\bar\nabla f)+\sum_{i=1}^{n+1}\big(\bar\nabla f\langle\bar\nabla_{E_i}\bar\nabla f,E_i\rangle \\ &\quad-\langle\bar\nabla_{E_i}\bar\nabla f,\bar\nabla_{\bar\nabla f}E_i\rangle\big) \\ &\quad+\sum_{i=1}^{n+1}\langle\bar\nabla_{(\bar\nabla_{E_i}\bar\nabla f-\bar\nabla_{\bar\nabla f}E_i)}\bar\nabla f,E_i\rangle-(\bar\Delta f)^2 \\ &\quad-\langle\overline{grad}\bar\Delta f,\bar\nabla f\rangle,\end{aligned}$$

όπου $\bar Q$ ο τανυστής Ricci του $\bar M^{n+1}$.

Αλλά,

$$Z=\sum_{i=1}^{n+1}\langle\bar\nabla_{E_i}\bar\nabla f,\bar\nabla_{\bar\nabla f}E_i\rangle=0.$$

Πραγματικά, επειδή

$$\begin{aligned}\bar\nabla_{E_i}\bar\nabla f &= \sum_{j=1}^{n+1}\langle\bar\nabla_{E_i}\bar\nabla f,E_j\rangle E_j \\ &= \sum_{j=1}^{n+1}\bar\nabla^2 f(E_i,E_j)E_j,\end{aligned}$$

έχουμε ότι

$$Z=\sum_{i,j=1}^{n+1}\bar\nabla^2 f(E_i,E_j)\langle E_j,\bar\nabla_{\bar\nabla f}E_i\rangle.$$

Αλλά, λόγω του ότι $\langle E_i, E_j\rangle = \delta_{ij}$, λαμβάνουμε

$$\langle \bar{\nabla}_{\bar{\nabla} f} E_i, E_j\rangle = -\langle E_i, \bar{\nabla}_{\bar{\nabla} f} E_j\rangle.$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} Z &= -\sum_{i,j=1}^{n+1} \bar{\nabla}^2 f(E_i, E_j)\langle E_i, \bar{\nabla}_{\bar{\nabla} f} E_j\rangle \\ &= -\sum_{j=1}^{n+1}\langle \sum_{i=1}^{n+1} \bar{\nabla}^2 f(E_i, E_j) E_i, \bar{\nabla}_{\bar{\nabla} f} E_j\rangle \\ &= -\sum_{j=1}^{n+1}\langle \bar{\nabla}_{E_j}\bar{\nabla} f, \bar{\nabla}_{\bar{\nabla} f} E_j\rangle \\ &= -Z. \end{aligned}$$

Επομένως $Z = 0$.

Άρα, θα έχουμε

$$\begin{aligned} \overline{div}\Big(\bar{\nabla}_{\bar{\nabla} f}\bar{\nabla} f - (\bar{\Delta} f)\bar{\nabla} f\Big) = \bar{Q}(\bar{\nabla} f, \bar{\nabla} f) &+ \sum_{i=1}^{n+1} \bar{\nabla} f\langle \bar{\nabla}_{E_i}\bar{\nabla} f, E_i\rangle \\ &+ \sum_{i=1}^{n+1}\langle \bar{\nabla}_{\bar{\nabla}_{E_i}\bar{\nabla} f}\bar{\nabla} f, E_i\rangle - (\bar{\Delta} f)^2 \\ &-\langle \overline{grad}\bar{\Delta} f, \bar{\nabla} f\rangle, \end{aligned}$$

Τέλος, λόγω συμμετρικότητας της Εσσιανής προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \overline{div}\Big(\bar{\nabla}_{\bar{\nabla} f}\bar{\nabla} f - (\bar{\Delta} f)\bar{\nabla} f\Big) = \bar{Q}(\bar{\nabla} f, \bar{\nabla} f) &+ \langle \overline{grad}(\bar{\Delta} f), \bar{\nabla} f\rangle \\ &+ \sum_{i=1}^{n+1} |\bar{\nabla}_{E_i}\bar{\nabla} f|^2 - (\bar{\Delta} f)^2 \\ &-\langle \overline{grad}\bar{\Delta} f, \bar{\nabla} f\rangle. \end{aligned}$$

Καταλήγουμε, συνεπώς, στη ζητούμενη σχέση (2.8).

Θεωρούμε ένα συμπαγές υποπολύπτυγμα $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, δηλαδή η έγκλειση $i : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ είναι εμφύτευση, με την επαγόμενη μετρική στο M^n. Σύμφωνα με το Θεώρημα Jordan-Brower στην Τοπολογία [6], το ανοιχτό σύνολο $\mathbb{R}^{n+1} - M^n$ αποτελείται από δύο συνεκτικές συνιστώσες, μία φραγμένη Ω (το «εσωτερικό» του M^n) και μία μη φραγμένη (το «εξωτερικό» του M^n) με κοινό σύνορο $\partial\Omega = M^n$. Επιλέγοντας το μοναδιαίο κάθετο N προς το εσωτερικό, προκύπτει ότι το M^n είναι προσανατολισμένη υπερεπιφάνεια.

Στο εξής, θα συμβολίζουμε με $\bar{\nabla}$ και $\bar{\Delta}$ τη συνοχή και τον Λαπλασιανό τελεστή στο $\bar{\Omega}$, και με ∇ και Δ τη συνοχή και τον Λαπλασιανό τελεστή στο $\partial\bar{\Omega} = M^n$, αντίστοιχα.

Ο τύπος του Bochner λαμβάνει τότε τη μορφή

$$\overline{div}\Big(\bar{\nabla}_{\bar{\nabla} f}\bar{\nabla} f - (\bar{\Delta} f)\bar{\nabla} f\Big) = |\bar{\nabla}^2 f|^2 - (\bar{\Delta} f)^2. \tag{2.9}$$

Αν N είναι το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο της M^n, με φορά προς το εσωτερικό της M^n, ολοκληρώνοντας και εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1.3.1. στο Ω, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Big(|\bar{\nabla}^2 f|^2 - (\bar{\Delta} f)^2\Big) d\Omega &= \int_\Omega \overline{div}\Big(\bar{\nabla}_{\bar{\nabla} f}\bar{\nabla} f - (\bar{\Delta} f)\bar{\nabla} f\Big) d\Omega \\
&= -\int_M \langle \bar{\nabla}_{\bar{\nabla} f}\bar{\nabla} f - (\bar{\Delta} f)\bar{\nabla} f, N\rangle dM \\
&= \int_M \Big(\bar{\nabla}^2 f(\bar{\nabla} f, N) - \bar{\Delta} f\langle \bar{\nabla} f, N\rangle\Big) dM.
\end{aligned}$$

Συμπερασματικά, ισχύει ότι

$$\int_\Omega \Big((\bar{\Delta} f)^2 - |\bar{\nabla}^2 f|^2\Big) d\Omega = \int_M \Big(\bar{\nabla}^2 f(\bar{\nabla} f, N) - \bar{\Delta} f\langle \bar{\nabla} f, N\rangle\Big) dM, \tag{2.10}$$

όπου $d\Omega$ το στοιχείο όγκου στον $\mathbb{R}^{n+1}$ με τη συνήθη μετρική.

Έστω ότι η i είναι η απεικόνιση έγκλεισης της M^n στο $\bar{\Omega}$, θέτοντας $g = f \circ i$ και

$$u = \frac{\partial f}{\partial N} := \langle \bar{\nabla} f, N\rangle,$$

για κάθε $X \in \Delta(M^n)$, έχουμε

$$dg(X) = d(f \circ i)(X) = df \circ di(X) = df(X).$$

Άρα, για κάθε $X \in \Delta(M^n)$ ισχύει

$$\langle \nabla g, X \rangle = \langle \bar{\nabla} f, X \rangle,$$

και συνεπώς κατά μήκος της M^n έχουμε

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} f &= (\bar{\nabla} f)^{\top} + (\bar{\nabla} f)^{\perp} \\ &= \nabla g + \langle \bar{\nabla} f, N \rangle N \\ &= \nabla g + uN, \end{aligned}$$

όπου $(\ )^{\top}$ και $(\ )^{\perp}$ δηλώνει αντίστοιχα την εφαπτομενική και κάθετη συνιστώσα στην M^n.

Βασιζόμενοι στην παραπάνω έκφραση της κλίσης $\bar{\nabla}$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}^2 f(X,Y) &= \langle \bar{\nabla}_X \bar{\nabla} f, Y \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_X \nabla g, Y \rangle + \langle \bar{\nabla}_X (uN), Y \rangle. \end{aligned}$$

Κάνοντας χρήση του τύπου του Gauss και των ιδιοτήτων της γραμμικής συνοχής, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}^2 f(X,Y) &= \langle \nabla_X \nabla g, Y \rangle + \langle u \bar{\nabla}_X N, Y \rangle \\ &\quad + \langle (Xu) N, Y \rangle \\ &= \nabla^2 g(X,Y) + u \langle \bar{\nabla}_X N, Y \rangle. \end{aligned}$$

Όμως, λόγω του τύπου Weingarten $\bar{\nabla}_X N = -AX$ λαμβάνουμε

$$\bar{\nabla}^2 f(X,Y) = \nabla^2 g(X,Y) - u \langle AX, Y \rangle, \tag{2.11}$$

για κάθε $X, Y \in \Delta(M^n)$, όπου A είναι ο τελεστής Weingarten της M^n ως προς το N.

Με παρόμοιους χειρισμούς και λαμβάνοντας υπόψη ότι ο τελεστής Weingarten είναι αυτοπροσαρτημένος, έχουμε

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}^2 f(X,N) &= \langle \bar{\nabla}_X \bar{\nabla} f, N \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_X \nabla g, N \rangle + \langle \bar{\nabla}_X (uN), N \rangle \\ &= \langle B(X, \nabla g), N \rangle + (Xu) \langle N, N \rangle \\ &= \langle AX, \nabla g \rangle + \langle \nabla u, X \rangle \\ &= \langle A \nabla g, X \rangle + \langle \nabla u, X \rangle, \end{aligned}$$

όπου B η δεύτερη θεμελιώδης μορφή της M^n. Έτσι,

$$\bar{\nabla}^2 f(X,N) = \langle A(\nabla g), X\rangle + \langle \nabla u, X\rangle. \tag{2.12}$$

Ισχύει, επιπλέον, η σχέση

$$\bar{\Delta} f = \Delta g - nHu + \bar{\nabla}^2 f(N,N), \tag{2.13}$$

όπου H είναι η μέση καμπυλότητα της M^n. Πραγματικά, συμβολίζοντας με $\overline{div}$ την απόκλιση ενός διανυσματικού πεδίου στο $\bar{\Omega}$, ως προς τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{E_i\}_{i=1,\dots,n}$ και κατά μήκος της M^n, θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\bar{\Delta} f &= \overline{div}(\bar{\nabla} f) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla} f, E_i\rangle + \langle \bar{\nabla}_N \bar{\nabla} f, N\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \bar{\nabla}_{E_i} \nabla g, E_i\rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle \bar{\nabla}_{E_i} (uN), E_i\rangle + \bar{\nabla}^2 f(N,N).
\end{aligned}$$

Με τη βοήθεια του τύπου του Gauss και των ιδιοτήτων της γραμμικής συνοχής, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\bar{\Delta} f &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} \nabla g, E_i\rangle + \sum_{i=1}^{n} u\langle \bar{\nabla}_{E_i} N, E_i\rangle + \bar{\nabla}^2 f(N,N) \\
&= \Delta g - u\sum_{i=1}^{n} \langle AE_i, E_i\rangle + \bar{\nabla}^2 f(N,N) \\
&= \Delta g - nHu + \bar{\nabla}^2 f(N,N).
\end{aligned}$$

Τέλος, από τη σχέση (2.12) θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}^2 f(\bar{\nabla} f, N) &= \bar{\nabla}^2 f(\nabla g + uN, N) \\
&= \bar{\nabla}^2 f(\nabla g, N) + \bar{\nabla}^2 f(uN, N) \\
&= \langle A(\nabla g), \nabla g\rangle + \langle \nabla u, \nabla g\rangle + u\bar{\nabla}^2 f(N,N),
\end{aligned}$$

ή, λόγω της σχέσης (1.11),

$$= div(u\nabla g) - u\Delta g + \langle A(\nabla g), \nabla g\rangle + u\bar{\nabla}^2 g(N,N).$$

Πιο συγκεκριμένα, ισχύει η σχέση

(2.14) $\bar{\nabla}^2 f(\bar{\nabla} f, N) = div(u\Delta g) - u\Delta g + \langle A(\nabla g), \nabla g\rangle + u\bar{\nabla}^2 f(N, N).$

Εφαρμόζουμε τις σχέσεις (2.13) και (2.14) στη σχέση (2.10) και λαμβάνουμε

$$\int_\Omega \Big((\bar{\Delta} f)^2 - |\bar{\nabla}^2 f|^2\Big) d\Omega =$$
$$\int_M \Big(div(u\Delta g) - u\Delta g + \langle A(\nabla g), \nabla g\rangle + u\bar{\nabla}^2 f(N, N)$$
$$-\big(\Delta g - nHu + \bar{\nabla}^2 f(N, N)\big)u\Big) dM =$$
$$\int_M \Big(div(u\Delta g) - 2u\Delta g + nHu^2 + \langle A(\nabla g), \nabla g\rangle\Big) dM =$$
$$\int_M div(u\Delta g) dM + \int_M \Big(- 2(\Delta g)u + nHu^2 + \langle A(\nabla g), \nabla g\rangle\Big) dM.$$

Κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 1.3.1. λαμβάνουμε το ακόλουθο συμπέρασμα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3.1. *(Τύπος του Reilly) Έστω M^n μια συμπαγής εμφυτευμένη υπερεπιφάνεια του $\mathbb{R}^{n+1}$ εφοδιασμένη με την επαγόμενη μετρική. Αν $\bar{\Omega}$ είναι το εσωτερικό της M^n και N είναι το εσωτερικό μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο, για δοθείσα $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$, ισχύει*

$$(2.15) \int_\Omega \Big((\bar{\Delta} f)^2 - |\bar{\nabla}^2 f|^2\Big) d\Omega =$$
$$\int_M \Big(- 2(\Delta g)u + nHu^2 + \langle A(\nabla g), \nabla g\rangle\Big) dM,$$

όπου $g = f|_{M^n}$, $u = \frac{\partial f}{\partial N}$, $\bar{\nabla}$ η συνοχή στον $\mathbb{R}^{n+1}$ και ∇g, Δg η κλίση και η Λαπλασιανή της g στην M^n, αντίστοιχα.

Ολοκληρώνοντας αυτή την παράγραφο, σημειώνουμε ότι, αν $\vec{x}$ είναι το διάνυσμα θέσης στο $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ και $\bar{\Delta}$ ο Λαπλασιανός τελεστής στον $\mathbb{R}^{n+1}$ με τη συνήθη μετρική, τότε

$$\bar{\Delta}\langle \vec{x}, \vec{x}\rangle = 2(n + 1).$$

Επειδή η κλίση της $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$ στο Ω είναι $\bar{\nabla}\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 2\vec{x}$, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1.3.1. στην τελευταία σχέση, λαμβάνουμε άμεσα

$$(n+1)V(\Omega) + \int_M \langle \vec{x}, N \rangle dM = 0, \tag{2.15}$$

όπου $V(\Omega)$ είναι ο όγκος του Ω.

2.4 Ανισότητες Newton και Mac-Laurin

Θα δώσουμε τις σημαντικές ανισότητες Newton και Mac-Laurin, που εμφανίζονται στη θεωρία των υπερβολικών πολυωνύμων. Τα υπερβολικά πολυώνυμα μελετήθηκαν στα πλαίσια της θεωρίας των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.4.1. *Ένα ομογενές πολυώνυμο n μεταβλητών $P(x)$ βαθμού m καλείται* ***a-υπερβολικό****, για $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, αν η εξίσωση $P(x+ta) = 0$ έχει ακριβώς m πραγματικές λύσεις (μετρούμενες με τις πολλαπλότητες των ριζών) για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.4.2. Το στοιχειώδες συμμετρικό πολυώνυμο n-μεταβλητών

$$\sigma_n(x) = x_1 \cdots x_n, \quad x = (x_1, \ldots, x_n)$$

είναι a-υπερβολικό με $a = (1, \ldots, 1)$.

Έστω $P(x)$ ένα a-υπερβολικό πολυώνυμο n-μεταβλητών. Το σύνολο

$\Gamma(P, a) =$ η συνεκτική συνιστώσα του $\{x \in \mathbb{R}^n : P(x) \neq 0\}$
που περιέχει το a,

είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και ονομάζεται **υπερβολικός κώνος του $\boldsymbol{P(x)}$ ως προς $\boldsymbol{a}$**.

Συμβολίζουμε με $\Gamma_m := \Gamma(\sigma_m, a)$ τον υπερβολικό κώνο του σ_m ως προς a, όπου $a = (1, \ldots, 1)$ και σ_m το στοιχειώδες συμμετρικό πολυώνυμο m-βαθμού και n-μεταβλητών. Οι κώνοι Γ_m, $m = 1, \ldots, n$, είναι κώνοι με κορυφή το 0 και ισχύει, όπως αποδείχτηκε στο [5], ότι

$$\Gamma_n \subset \Gamma_{n-1} \subset \ldots \subset \Gamma_1,$$

όπου $\Gamma_n = \mathcal{O}_n$ είναι το πρώτο «ογδοημόριο» (orthant).

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.4.3. *(Ανισότητες Newton & Mac-Laurin)*
(1) *Για τις μέσες τιμές*

$$d_m(x) = \frac{1}{\binom{n}{m}} \sigma_m(x), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

των στοιχειωδών συμμετρικών πολυωνύμων n-μεταβλητών ισχύει η ανισότητα Newton

$$d_m^2(x) \geqslant d_{m-1}(x) d_{m+1}(x), \tag{2.16}$$

όπου $d_0 = 1$.

(2) *Αν ισχύει $d_1(x^0), \ldots, d_m(x^0) > 0$ για κάποιο m με $1 < m \leqslant n$ σε κάποιο σημείο $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$, τότε ισχύει η ανισότητα Mac-Laurin*

$$d_1(x^0) \geqslant d_2(x^0)^{\frac{1}{2}} \geqslant \ldots \geqslant d_m(x^0)^{\frac{1}{m}}. \tag{2.17}$$

Η ισότητα σε κάποιο βήμα ισχύει αν και μόνον αν $x_1^0 = \ldots = x_n^0 \neq 0$.

Απόδειξη. (1) Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0,$$

βαθμού $n \geqslant 2$, με πραγματικούς συντελεστές και πραγματικές ρίζες. Είναι γνωστό, ότι κάθε παράγωγος $\frac{d^k f(t)}{dt^k}$ καθώς και το αντίστροφο πολυώνυμο

$$Inv f(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_{n-1} t + a_n,$$

του $f(t)$ έχουν επίσης πραγματικές ρίζες.

Θεωρούμε για $1 \leqslant k \leqslant n-1$, το πολυώνυμο

$$\frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}}\left[Inv\Big(\frac{d^{k-1}f}{dt^{k-1}}(t)\Big)\right] =$$
$$\frac{(k-1)!(n-k-1)!}{2}a_{k-1}t^2 + k!(n-k)!a_k t + \frac{(k-1)!(n-k-1)!}{2}a_{k+1}.$$

Το πολυώνυμο αυτό έχει πραγματικές λύσεις και συνεπώς η διακρίνουσα του θα είναι μη αρνητική, δηλαδή θα έχουμε

$$a_k^2 \geqslant \Big(\frac{k+1}{k}\Big)\Big(\frac{n-k-1}{n-k}\Big)a_{k-1}a_{k+1}, \tag{2.18}$$

για $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

Αν $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, θεωρούμε το πολυώνυμο $f(t) = \prod_{i=1}^n (t+x_i)$. Από την (2.19) για $a_k = \binom{n}{k}d_k$, λαμβάνουμε την (2.17).

(2) Θέτουμε $d_k(x^0) = d_k$. Εφαρμόζοντας την (2.17) για $k = 1, \ldots, m$, θα προκύψουν οι

$$\begin{aligned} d_1^2 &\geqslant d_0 d_2 \\ d_2^2 &\geqslant d_1 d_3 \\ &\vdots \\ d_{m-1}^2 &\geqslant d_{m-2} d_m \ . \end{aligned} \tag{2.19}$$

Υψώνοντας σε κατάλληλες δυνάμεις και πολλαπλασιάζοντας θα αντλήσουμε τη σχέση

$$d_1^2 d_2^4 \cdots d_m^{2(m-1)} \geqslant (d_0 d_2)(d_1 d_3)^2 \cdots (d_{m-2} d_m)^{m-1}. \tag{2.20}$$

Εφόσον $d_1, \ldots, d_m > 0$ από υπόθεση, απλοποιώντας θα λάβουμε

$$d_{m-1}^m \geqslant d_m^{m-1} \ .$$

Έστω ότι ισχύει η ισότητα για το βήμα $m-1$, δηλαδή έχουμε

$$d_{m-1}^m = d_m^{m-1} \ .$$

Τότε ισχύει η ισότητα στην (2.21), καθώς και σε κάθε μία από τις (2.20). Έτσι λοιπόν, αρκεί να εξετάσουμε την ισότητα για το πρώτο βήμα.

Η σχέση $d_1^2 = d_2$ μας οδηγεί στην

$$\sigma_1^2 = \frac{2n}{n-1}\sigma_2 \,.$$

Επειδή,

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= \sum_{i<j} x_i^0 x_j^0 \\ &= \frac{(\sum_{i=1}^n x_i^0)^2 - \sum_{i=1}^n (x_i^0)^2}{2} \\ &= \frac{\sigma_1^2 - \sum_{i=1}^n (x_i^0)^2}{2} \quad ,\end{aligned}$$

η προηγούμενη σχέση δίνει

$$\sum_{i=1}^n (x_i^0)^2 = \frac{1}{n}\sigma_1^2 = \frac{1}{n}(\sum_{i-1}^n x_i^0)^2,$$

ή, ισοδύναμα,

$$(\sum_{i-1}^n x_i^0)^2 = n\sum_{i=1}^n (x_i^0)^2.$$

Η τελευταία σχέση, λόγω ανισότητας Cauchy-Schwartz, δίνει το ζητούμενο. ■

Συνέπεια αυτής της πρότασης είναι το ακόλουθο

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4.4. *Έστωσαν $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ (M^n συνεκτικό) προσανατολισμένη υπερεπιφάνεια και $p_0 \in M^n$. Αν οι καμπυλότητες $H_1, H_2, \ldots,$ H_m είναι όλες θετικές στο p_0, για κάποιο m με $1 < m \leqslant n$, τότε ισχύει*

$$H_1 \geqslant H_2^{\frac{1}{2}} \geqslant \ldots \geqslant H_m^{\frac{1}{m}},$$

στο p_0. Η ισότητα σε κάποιο βήμα, ισχύει αν και μόνον αν το σημείο p_0 είναι ομφαλικό.

Κεφάλαιο 3

Εφαρμογές του τύπου του Reilly

Το 1956 ο A. D. Alexandrov [1] κάνοντας χρήση της αρχής μεγίστου για ελλειπτικές εξισώσεις απέδειξε ότι:

«Αν M^n είναι συμπαγές πολύπτυγμα και $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ εμφύτευση με σταθερή μέση καμπυλότητα, τότε το $f(M^n)$ είναι σφαίρα.»

Το 1978 ο R. C. Reilly [18] απέδειξε εκ νέου το αποτέλεσμα του Alexandrov συνδυάζοντας τους ολοκληρωτικούς τύπους του Minkowski και κάποιους νέους ενδιαφέροντες υπολογισμούς.

Εκμεταλλευόμενος με μαεστρία τη μέθοδο του Reilly ο A. Ros [$19, 20$] απέδειξε τα ακόλουθα δύο θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α: Έστω $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ μια συμπαγής εμφυτευμένη υπερεπιφάνεια με σταθερή μέση καμπυλότητα m-τάξης H_m, $m = 1, \ldots, n$. Τότε το $f(M^n)$ είναι σφαίρα.

Η περίπτωση της H_n ανάγεται στο αποτέλεσμα του Suess, αφού από το Θεώρημα του Hadamard η $H_n =$σταθ. οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ είναι αυστηρά κυρτή υπερεπιφάνεια.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β: Έστω $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ μια συμπαγής εμφυτευμένη υπερεπιφάνεια με μη αρνητική μέση καμπυλότητα H. Υποθέτουμε ότι $h : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ είναι μια άλλη ισομετρική εμβάπτιση του M^n με διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας H'. Αν $|H'| \leqslant H$, τότε οι f,h είναι συμπίπτουσες.

Το θεώρημα Β είναι ένα αποτέλεσμα ακαμψίας συμπαγών υπερεπιφανειών με μη αρνητική μέση καμπυλότητα και είναι γενίκευση του ακόλουθου συμπεράσματος του I. Schur (βλέπε για παράδειγμα [4,σελ.36]).

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.0.5. *(Schur) Έστωσαν C μια κυρτή κλειστή επίπεδη καμπύλη και $\bar{C}$ μια κλειστή καμπύλη του χώρου ίδιου μήκους, με τη C. Υποθέτουμε ότι οι καμπύλες έχουν κοινή παράμετρο το μήκος τόξου s και καμπυλότητες $k(s)$, $\bar{k}(s)$, αντίστοιχα. Αν $\bar{k}(s) \leqslant k(s)$, τότε η $\bar{C}$ συμπίπτει με την C.*

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε αναλυτικά τις αποδείξεις των Θεωρημάτων Α και Β.

3.1 Απόδειξη του θεωρήματος Α

Θεωρούμε έναν φραγμένο τόπο $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, του οποίου το σύνορο $M^n = \partial\Omega$ είναι διαφορίσιμο και συνεκτικό πολύπτυγμα, και μάλιστα η έγκλειση $i : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ είναι εμφύτευση. Το εσωτερικό της M^n είναι το Ω.

Έστω $G \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$ μια λύση του ακόλουθου προβλήματος Dirichlet

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} G &= 1 \text{ στο } \Omega \\ G &= 0 \text{ στο } M^n = \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.1}$$

όπου $\bar{\Delta}$ είναι ο Λαπλασιανός τελεστής στον $\mathbb{R}^{n+1}$ ως προς τη συνήθη μετρική.

Συμβολίζουμε με $\bar{\nabla} G$ την κλίση της G ως προς τη συνήθη μετρική του $\mathbb{R}^{n+1}$ και με $\bar{\nabla}^2 G$ την Εσσιανή της.

Από τον τύπο (2.15) του Reilly για την G λαμβάνουμε

$$\int_{\Omega} \big(1 - |\bar{\nabla}^2 G|^2\big) d\Omega = \int_M nHu^2 dM,$$

όπου H είναι η μέση καμπυλότητα της υπερεπιφάνειας $M^n = \partial\Omega$, ως προς το εσωτερικό κάθετο N, και $u = \frac{\partial G}{\partial N} := \langle \bar{\nabla} G, N \rangle$.

Η ανισότητα Cauchy-Schwartz

$$(\bar{\Delta} G)^2 \leqslant (n+1)|\bar{\nabla}^2 G|^2, \tag{3.2}$$

δίνει

$$1 \leqslant (n+1)|\bar{\nabla}^2 G|^2,$$

ή

$$|\bar{\nabla}^2 G|^2 \geqslant \frac{1}{n+1} \ ,$$

ή

$$1 - |\bar{\nabla}^2 G|^2 \leqslant \frac{n}{n+1} \ .$$

Για τη λύση G του προβλήματος Dirichlet (3.1) λαμβάνουμε

$$\int_M nHu^2 dM \leqslant \int_\Omega \frac{n}{n+1} d\Omega = \frac{n}{n+1} V(\Omega),$$

ή

$$\int_M Hu^2 dM \leqslant \frac{V(\Omega)}{n+1} \ , \tag{3.3}$$

όπου $V(\Omega)$ είναι ο όγκος του τόπου Ω.

Η ισότητα για την ανισότητα Cauchy-Schwartz σε κάποιο σημείο $p_0 \in \Omega$ ισχύει αν και μόνον αν οι ιδιοτιμές της Εσσιανής $\bar{\nabla}^2 G$ είναι όλες ίδιες στο σημείο αυτό.

Η ισότητα στην (3.3) θα ισχύει αν και μόνον αν σε κάθε σημείο του Ω έχουμε

$$\bar{\nabla}_X \bar{\nabla} G = \frac{1}{n+1} X,$$

ή ισοδύναμα,

$$\bar{\nabla}^2 G(X,Y) = \frac{1}{n+1}\langle X, Y \rangle. \tag{3.4}$$

Πραγματικά, η ισότητα για την Cauchy-Schwartz γνωρίζουμε ότι ισχύει αν και μόνον αν η Εσσιανή έχει ίδιες ιδιοτιμές δηλαδή ισχύει

$$\bar{\nabla}_X \bar{\nabla} G = \lambda X.$$

Όμως $\bar{\Delta} G = 1$ και συνεπώς $1 = (n+1)\lambda$, δηλαδή $\lambda = 1/(n+1)$.

Η σχέση (3.4) εκπεφρασμένη σε καρτεσιανές συντεταγμένες στο Ω γίνεται

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{1}{n+1} \langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle = \frac{1}{n+1} \delta_{ij}.$$

Ολοκληρώνοντας βρίσκουμε

$$G(x^1, \ldots, x^{n+1}) = \frac{1}{2(n+1)} \sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 + \sum_{i=1}^{n+1} a_i x^i + b.$$

Στο σύνορο όμως, $G = 0$ δηλαδή για την M^n λαμβάνουμε

$$\frac{1}{2(n+1)} \sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 + \sum_{i=1}^{n+1} a_i x^i + b = 0.$$

Η αναλυτική εξίσωση της M^n είναι η εξίσωση της σφαίρας στον $\mathbb{R}^{n+1}$.

Ισχύει, συνεπώς, η ακόλουθη πρόταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.1.1. *Έστω Ω φραγμένος τόπος του $\mathbb{R}^{n+1}$, με σύνορο $\partial\Omega = M^n$ μια συμπαγή υπερεπιφάνεια. Για $G \in C^\infty(\bar{\Omega})$, με $\bar{\Delta} G = 1$ στο Ω και $G = 0$ στο $M^n = \partial\Omega$, ισχύει*

$$\int_M H u^2 dM \leqslant \frac{V(\Omega)}{n+1} \,,$$

όπου $u = \frac{\partial G}{\partial N} := \langle \bar{\nabla} G, N \rangle$ και $V(\Omega)$ ο όγκος του Ω. Η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν η $M^n = \partial\Omega$ είναι σφαίρα.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 1.3.1. στον τόπο Ω για την λύση G του προβλήματος Dirichlet (3.1) και λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \int_\Omega \bar{\Delta} G d\Omega \\ &= \int_\Omega \overline{div}(\bar{\nabla} G) d\Omega, \end{aligned}$$

ή

$$V(\Omega) = -\int_M \langle \bar{\nabla} G, N \rangle dM = -\int_M u dM,$$

ή

$$V(\Omega) = -\int_M u dM. \tag{3.5}$$

Από την (3.5) με ανισότητα Cauchy-Schwartz έχουμε

$$\begin{aligned}\big(V(\Omega)\big)^2 &= \left(\int_M u dM\right)^2 \\ &\leqslant \int_M 1 dM \int_M u^2 dM \\ &= A(M) \int_M u^2 dM,\end{aligned}$$

όπου $A(M)$ το εμβαδόν της $M^n = \partial\Omega$. Ισχύει, λοιπόν, η ανισότητα

$$\int_M u^2 dM \geqslant \frac{\big(V(\Omega)\big)^2}{A(M)} \ . \tag{3.6}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι η υπερεπιφάνεια $M^n = \partial\Omega$ έχει θετική σταθερή μέση καμπυλότητα H. Από τις σχέσεις (3.3) και (3.6) λαμβάνουμε

$$\frac{V(\Omega)}{n+1} \geqslant H \int_M u^2 dM \geqslant H \frac{(V(\Omega))^2}{A(M)} \ ,$$

ή

$$H \leqslant \frac{A(M)}{(n+1)V(\Omega)} \ . \tag{3.7}$$

Η ισότητα στην (3.7) ισχύει αν και μόνον αν η M^n είναι σφαίρα αφού θα έχουμε ισότητα στην (3.3).

Παρατηρούμε, τέλος, ότι ο πρώτος τύπος του Minkowski και η σχέση (2.15) αν συνδυαστούν, λαμβάνουμε

$$(n+1)H = \frac{A(M)}{V(\Omega)} \, ,$$

όταν η μέση καμπυλότητα της $M^n = \partial\Omega$ είναι σταθερή.

Ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.1.2. *Έστω M^n μια συμπαγής εμφυτευμένη υπερεπιφάνεια του $\mathbb{R}^{n+1}$, η οποία είναι το σύνορο ενός φραγμένου τόπου Ω, δηλαδή $M^n = \partial\Omega$. Το εσωτερικό της M^n είναι το Ω και έστω $V(\Omega)$ ο όγκος του. Αν η μέση καμπυλότητα H της υπερεπιφάνειας $i : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, ως προς το εσωτερικό μοναδιαίο κάθετο N, είναι παντού θετική, τότε ισχύει*

$$\int_M \frac{1}{H} dM \geqslant (n+1)V(\Omega). \tag{3.8}$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν, η M^n είναι σφαίρα.

Απόδειξη. Η μέση καμπυλότητα είναι θετική (όχι απαραίτητα σταθερή) παντού. Οι σχέσεις (3.3) και (3.5) με την ανισότητα Cauchy-Schwartz δίνουν

$$\begin{aligned}
(V(\Omega))^2 &= \left(\int_M u dM \right)^2 \\
&= \left(\int_M (\sqrt{H}u) \frac{1}{\sqrt{H}} dM \right)^2 \\
&\leqslant \int_M H u^2 dM \int_M \frac{1}{H} dM \\
&\leqslant \frac{V(\Omega)}{n+1} \int_M \frac{1}{H} dM,
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\int_M \frac{1}{H} dM \geqslant (n+1)V(\Omega).$$

Η ισότητα στην τελευταία σχέση θα ισχύει αν και μόνον αν ισχύει η ισότητα στην (3.3), δηλαδή αν και μόνον αν η M^n είναι σφαίρα.

■

ΛΗΜΜΑ 3.1.3. *Αν $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ είναι μια συμπαγής και προσανατολισμένη υπερεπιφάνεια του $\mathbb{R}^{n+1}$ με την επαγόμενη μετρική, τότε υπάρχει σημείο του M^n, όπου οι κύριες καμπυλότητες είναι όλες θετικές, ως προς κατάλληλα επιλεγμένο κάθετο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τη διαφορίσιμη συνάρτηση $G : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$, με τύπο

$$G(p) = \frac{1}{2}\langle f(p), f(p)\rangle.$$

Επειδή το M^n είναι συμπαγές, θα υπάρχει σημείο p_0 του M^n όπου η G λαμβάνει απόλυτο μέγιστο. Άρα, το p_0 είναι κρίσιμο σημείο για την G και για κάθε $v \in T_{p_0}M^n$ ισχύει

$$v(G) = 0.$$

Συνεπώς έχουμε,

$$\langle df(v), f\rangle|_{p_0} = 0.$$

Άρα, το μη μηδενικό διάνυσμα $f(p_0)$ είναι κάθετο στον $df_{p_0}(T_{p_0}M^n)$ του $\mathbb{R}^{n+1}$.

Διαλέγουμε για μοναδιαίο κάθετο της υπερεπιφάνειας στο p_0, το

$$N(p_0) = -\frac{f(p_0)}{|f(p_0)|}\ .$$

Η $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ είναι ισομετρική εμβάπτιση. Άρα, για $X \in \Delta(M^n)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\nabla^2 G(X,X) &= XXG - (\nabla_X X)G\\ &= X\langle df(X), f\rangle - \langle df(\nabla_X X), f\rangle\\ &= \langle \widetilde{\nabla}_X df(X), f\rangle + \langle df(X), df(X)\rangle - \langle df(\nabla_X X), f\rangle\\ &= \langle B_f(X,X), f\rangle + |X|^2,\end{aligned}$$

όπου $\widetilde{\nabla}$ είναι η γραμμική συνοχή κατά μήκος της f.
Επομένως στο p_0 με $N(p_0) = -\frac{f(p_0)}{|f(p_0)|}$, αφού η G έχει μέγιστο, για $v \in T_{p_0}M^n$ με $|v| = 1$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} \nabla^2 G(v,v) &= 1 - |f(p_0)|\langle B_f(v,v), N\rangle|_{p_0} \\ &= 1 - |f(p_0)|\langle Av, v\rangle \\ &\leqslant 0. \end{aligned}$$

Ισχύει, συνεπώς,

$$\langle Av, v\rangle \geqslant \frac{1}{|f(p_0)|} \ ,$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο. ■

Απόδειξη του θεωρήματος Α: Υποθέτουμε ότι η m-μέση καμπυλότητα H_m, $1 \leqslant m \leqslant n$, είναι σταθερή. Λόγω του Λήμματος 3.1.3., υπάρχει σημείο p της M^n, όπου η H_m θα είναι θετική και συνεπώς θα είναι παντού θετική. Επομένως, όλα τα σημεία $(k_1(p), \ldots, k_n(p))$ για κάθε $p \in M^n$ ανήκουν στον κώνο Γ_m. Σε όλα τα σημεία της M^n θα ισχύει $H_1, H_2, \ldots, H_m > 0$, επειδή $\Gamma_m \subset \Gamma_{m-1} \subset \ldots \subset \Gamma_1$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.4.4. θα ισχύει παντού στην M^n

$$H_1 \geqslant H_2^{\frac{1}{2}} \geqslant \ldots \geqslant H_m^{\frac{1}{m}},$$

με ισότητα σε κάποιο βήμα και για κάποιο σημείο, αν και μόνον αν το σημείο είναι ομφαλικό.

Χρησιμοποιώντας τον m-οστό τύπο του Minkowski και τη σχέση (2.15) αποκτούμε την

$$\int_M H_{m-1} dM = (n+1) H_m V(\Omega). \tag{3.9}$$

Η τελευταία σχέση με την βοήθεια της $H_{m-1} \geqslant H_m^{\frac{m-1}{m}}$ μας δίνει

$$\begin{aligned} (n+1)H_m V(\Omega) &= \int_M H_{m-1} dM \\ &\geqslant \int_M H_m^{\frac{m-1}{m}} dM \\ &= H_m^{\frac{m-1}{m}} \int_M dM \\ &= H_m^{\frac{m-1}{m}} A(M), \end{aligned}$$

όπου $A(M)$ είναι το εμβαδόν της M^n. Έχουμε, δηλαδή,

$$(n+1)H_m V(\Omega) \geqslant H_m^{\frac{m-1}{m}} A(M),$$

ή, ισοδύναμα,

$$H_m^{\frac{1}{m}} \geqslant \frac{A(M)}{(n+1)V(\Omega)} \,. \tag{3.10}$$

Από την άλλη πλευρά, λόγω των σχέσεων $H = H_1 \geqslant H_m^{\frac{1}{m}}$ και της (3.8), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}(n+1)V(\Omega) &\leqslant \int_M \frac{1}{H} dM \\ &\leqslant \int_M \frac{1}{H_m^{\frac{1}{m}}} dM \\ &= \frac{A(M)}{H_m^{\frac{1}{m}}} \,.\end{aligned}$$

Ισχύει, δηλαδή, η σχέση

$$H_m^{\frac{1}{m}} \leqslant \frac{A(M)}{(n+1)V(\Omega)} \,. \tag{3.11}$$

Η ισότητα στην (3.11) ισχύει μόνον αν η M^n είναι σφαίρα, λόγω της Πρότασης $3.1.2.$. Η απόδειξη του Θεωρήματος Α ολοκληρώνεται παρατηρώντας ότι οι σχέσεις (3.10) και (3.11) δίνουν την ισότητα

$$H_m^{\frac{1}{m}} = \frac{A(M)}{(n+1)V(\Omega)} \,.$$

3.2 Απόδειξη του θεωρήματος Β

Θεωρούμε τον φραγμένο τόπο $\Omega \subset R^{n+1}$, του οποίου το σύνορο $M^n = \partial\Omega$ είναι συνεκτικό διαφορίσιμο πολύπτυγμα και μάλιστα η έγκλειση $i : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ είναι εμφύτευση. Το εσωτερικό της M^n είναι το Ω.

Έστω $g : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση και $G : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ μια C^∞ λύση του ακόλουθου προβλήματος Dirichlet

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} G &= 0 \text{ στο } \Omega \\ G &= g \text{ στο } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.12}$$

όπου $\bar{\Delta}$ είναι ο τελεστής Laplace στον $\mathbb{R}^{n+1}$.

Για a σταθερό μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^m$ η διαφορίσιμη απεικόνιση $G_a : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$G_a(p) := \langle G(p), a \rangle,$$

είναι λύση του προβλήματος Dirichlet

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} G_a &= 0 \text{ στο } \Omega \\ G_a &= g_a \text{ στο } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.13}$$

όπου $g_a : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση με τύπο

$$g_a(p) := \langle g(p), a \rangle.$$

Εφαρμόζουμε τον τύπο (2.15) του Reilly για τη λύση G_a του ανωτέρω προβλήματος και έχουμε

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \Big((\bar{\Delta} G_a)^2 - |\bar{\nabla}^2 G_a|^2 \Big) d\Omega = \\ &\int_M \Big(-2(\Delta g_a) u_a + nH(u_a)^2 + \langle A(\nabla g_a), \nabla g_a \rangle \Big) dM, \end{aligned} \tag{3.14}$$

όπου $u_a = \frac{\partial G_a}{\partial N} := \langle \bar{\nabla} G_a, N \rangle$, ∇ και Δ η κλίση και ο τελεστής Laplace στην $M^n = \partial\Omega$, A ο τελεστής Weingarten και H η μέση καμπυλότητα της $\partial\Omega$.

Θεωρούμε τη συνήθη βάση $(e_1, \ldots, e_m)$ του $\mathbb{R}^m$ και γράφουμε τη σχέση (3.14) για $a \in \{e_1, \ldots, e_m\}$, θέτοντας $G_i := G_{e_i}$ για $i = 1, \ldots, m$. Αθροίζοντας και λαμβάνοντας υπόψην ότι $\bar{\Delta} G_i = 0$ έχουμε

$$-\int_\Omega \sum_{i=1}^m |\bar{\nabla}^2 G_i|^2 d\Omega = \int_M \sum_{i=1}^m \Big(-2(\Delta g_i) u_i + nH(u_i)^2 + \langle A(\nabla g_i), \nabla g_i \rangle \Big) dM,$$

ή, ισοδύναμα

(3.15)
$$-\int_\Omega \sum_{i=1}^m |\bar\nabla^2 G_i|^2 d\Omega = \int_M \Big(-2\langle \Delta g, U\rangle + nH|U|^2 + \sum_{i=1}^m \langle A(\nabla g_i), \nabla g_i\rangle\Big) dM,$$
όπου
$$g_i = g_{e_i}, \quad i = 1, \ldots, m,$$
$$U = (u_1, \ldots, u_m) = (\frac{\partial G_1}{\partial N}, \ldots, \frac{\partial G_m}{\partial N}) = \frac{\partial G}{\partial N}\ ,$$
και
$$\Delta g = (\Delta g_1, \ldots, \Delta g_m).$$
Σημειώνουμε ότι η έκφραση $\sum_{i=1}^m \langle A(\nabla g_i), \nabla g_i\rangle$ είναι ανεξάρτητη από την επιλογή βάσης του $\mathbb{R}^m$.

Πραγματικά, θέτουμε $g_i = \langle g, e_i\rangle$, $i = 1, \ldots, m$, και θεωρούμε μία άλλη ορθομοναδιαία βάση $(\tilde e_1, \ldots, \tilde e_m)$ του $\mathbb{R}^m$. Ισχύει
$$\tilde e_i = \sum_{j=1}^m b_{ij} e_j,$$
όπου $B = (b_{ij})$ είναι ορθογώνιος πίνακας.

Θέτοντας $\tilde g_i = \langle g, \tilde e_i\rangle$, έχουμε
$$\tilde g_i = \langle g, \sum_{j=1}^m b_{ij} e_j\rangle = \sum_{j=1}^m b_{ij} g_j.$$
Άρα,
$$\nabla \tilde g_i = \sum_{j=1}^m b_{ij} \nabla g_j,$$
και συνεπώς
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m \langle A(\nabla \tilde g_i), \nabla \tilde g_i\rangle &= \sum_{i=1}^m \langle A(\sum_{j=1}^m b_{ij} \nabla g_j), \sum_{k=1}^m b_{ik} \nabla g_k\rangle \\
&= \sum_{i,j,k=1}^m b_{ij} b_{ik} \langle A(\nabla g_j), \nabla g_k\rangle \\
&= \sum_{j,k=1}^m \delta_{jk} \langle A(\nabla g_j), \nabla g_k\rangle \\
&= \sum_{j=1}^m \langle A(\nabla g_j), \nabla g_j\rangle.
\end{aligned}$$

Λόγω αυτού του γεγονότος, θέτουμε

$$\sum_{i=1}^{m} \langle A(\nabla g_i)\nabla g_i\rangle = \langle A(\nabla g), \nabla g\rangle,$$

και έχουμε

$$(3.16)\quad -\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{m} |\bar{\nabla}^2 G_i|^2 d\Omega = \int_M \Big(-2\langle \Delta g, U \rangle + nH|U|^2 + \langle A(\nabla g), \nabla g\rangle \Big) dM.$$

Θεωρούμε ένα συμπαγές πολύπτυγμα M^n και μια εμφύτευση $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, δηλαδή μια εμφυτευμένη υπερεπιφάνεια με την επαγόμενη μετρική. Συμβολίζουμε με $\langle \cdot, \cdot \rangle$ και την επαγόμενη μετρική στο M^n μέσω της f. Το $f(M^n)$ καθίσταται υποπολύπτυγμα του $\mathbb{R}^{n+1}$ ισομετρικό με το $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Σύμφωνα με το θεώρημα Jordan-Brower στην Τοπολογία [6] το ανοιχτό σύνολο $\mathbb{R}^{n+1} - f(M^n)$ αποτελείται από δύο συνεκτικές συνιστώσες, εκ των οποίων η μία φραγμένη (το «εσωτερικό» του $f(M^n)$), και μία μη φραγμένη (το «εξωτερικό» του $f(M^n)$) με κοινό σύνορο το $\partial\Omega = f(M^n)$. Η $f(M^n)$ είναι προσανατολισμένη υπερεπιφάνεια με εσωτερικό κάθετο N.

Έστωσαν $\{e_1, \ldots, e_m\}$ μία ορθομοναδιαία βάση του $\mathbb{R}^m$ και $h : (M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση. Θεωρούμε τις διαφορίσιμες συναρτήσεις $h_i : (M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle) \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, με τύπο

$$h_i(p) = \langle h(p), e_i \rangle,$$

και θέτουμε $\Delta h = (\Delta h_1, \ldots, \Delta h_m)$.

Θα αποδείξουμε την ακόλουθη πρόταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.2.1. *Έστωσαν $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ μια συμπαγής εμφυτευμένη υπερεπιφάνεια του $\mathbb{R}^{n+1}$ με μη αρνητική μέση καμπυλότητα H, ως προς το εσωτερικό κάθετο N και $h : (M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ μία λεία* *απεικόνιση, όπου $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι η επαγόμενη μετρική στο M^n μέσω της f. Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις*

$$|\Delta h| \leqslant nH \tag{3.17}$$

$$\int_M \langle \bar{A}(\nabla h), \nabla h \rangle dM \geqslant n \int_M H dM, \tag{3.18}$$

όπου $\bar{A}$ είναι ο τελεστής Weingarten της υπερεπιφάνειας $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ και $\langle \bar{A}(\nabla h), \nabla h \rangle := \sum_{i=1}^{m} \langle \bar{A}(\nabla h_i), \nabla h_i \rangle$. Τότε οι f και h είναι γεωμετρικά ισότιμες.

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας τη σχέση (3.16) με Ω το εσωτερικό του $f(M^n)$, $\partial\Omega = f(M^n)$, μοναδιαίο κάθετο το N και $g = h \circ f^{-1} : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ λαμβάνουμε

$$-\int_\Omega \sum_{i=1}^{m} |\bar{\nabla}^2 G_i|^2 d\Omega = \int_{\partial\Omega} \Big(-2\langle \Delta g, U \rangle + nH|U|^2 + \langle A(\nabla g), \nabla g \rangle \Big) d\partial\Omega, \tag{3.19}$$

όπου A είναι ο τελεστής Weingarten της $f(M^n)$ και H η μέση καμπυλότητα της f. Υπενθυμίζουμε ότι η $G : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ είναι λύση του προβλήματος Dirichlet (3.12).

Είναι προφανείς οι σχέσεις

$$df \circ \bar{A} = A \circ df,$$

και

$$df(\nabla h_i) = \nabla g_i.$$

Συνεπώς, λαμβάνοντας υπόψην ότι στο M^n έχουμε την επαγόμενη από τον $\mathbb{R}^{n+1}$ μετρική, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\langle A(\nabla g), \nabla g\rangle &= \sum_{i=1}^{m}\langle A(\nabla g_i), \nabla g_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{m}\langle A \circ df(\nabla h_i), df(\nabla h_i)\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{m}\langle df \circ \bar{A}(\nabla h_i), df(\nabla h_i)\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{m}\langle \bar{A}(\nabla h_i), \nabla h_i\rangle \\ &= \langle \bar{A}(\nabla h), \nabla h\rangle.\end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά η $f : (M^n, \langle\cdot,\cdot\rangle) \longrightarrow \partial\Omega = f(M^n)$ είναι ισομετρία και θα έχουμε $\Delta h = \Delta g \circ f$. Συνεπώς για $U = \frac{\partial G}{\partial N}$ λαμβάνουμε

$$\langle \Delta h, U\rangle = \langle \Delta g, U\rangle.$$

Η σχέση (3.19) λαμβάνει τώρα τη μορφή

$$(3.20)\quad -\int_\Omega \sum_{i=1}^{m} |\bar{\nabla}^2 G_i|^2 d\Omega = \int_M \Big(-2\langle \Delta h, U\rangle + nH|U|^2 + \langle \bar{A}(\nabla h), \nabla h\rangle \Big) dM.$$

Με τη βοήθεια της ανισότητας Cauchy-Schwartz

$$\langle \Delta h, U\rangle \leqslant |\Delta h||U|,$$

και των υποθέσεων (3.17), (3.18) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}-\int_\Omega \sum |\bar{\nabla}^2 G_i|^2 d\Omega &\geqslant \int_M \big(-2nH|U| + nH|U|^2 + nH\big) dM \\ &= n\int_M H\big(|U|-1\big)^2 dM \\ &\geqslant 0,\end{aligned}$$

αφού η μέση καμπυλότητα H είναι μη αρνητική.

Η τελευταία σχέση δίνει

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{m} |\bar{\nabla}^2 G_i|^2 d\Omega = 0, \tag{3.21}$$

και

$$\int_M H\big(|U|-1\big)^2 dM = 0. \tag{3.22}$$

Από τη σχέση (3.21) συμπεραίνουμε ότι η Εσσιανή της G είναι μηδέν και άρα η $G : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ έχει τύπο

$$G(x) = L(x) + b,$$

όπου $b \in \mathbb{R}^m$ και $L : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ είναι γραμμική απεικόνιση. Συνεπώς ισχύει $h = Lf + b$, δηλαδή η εικόνα του M^n μέσω της h, περιέχεται σε έναν $(n+1)$-διάστατο υπόχωρο του $\mathbb{R}^m$.

Για να είναι οι f, h γεωμετρικά ισότιμες αρκεί να δείξουμε ότι ο L είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός.

Από την $G(x) = L(x) + b$ έχουμε

$$U = \frac{\partial G}{\partial N} = L\frac{\partial x}{\partial N} = L\bar{\nabla}_N x = LN, \tag{3.23}$$

όπου $\bar{\nabla}$ είναι η κανονική Ευκλείδεια συνοχή.

Στα σημεία $p \in M^n$ για τα οποία $H(p) > 0$, η σχέση (3.22) δίνει $|U| = 1$, δηλαδή $|LN| = 1$.

Θα συμπληρώσουμε την απόδειξη της Πρότασης αφού υπενθυμίσουμε ότι η σφαιρική απεικόνιση $\nu : M^n \longrightarrow S^n$ είναι επί. Σε κάθε σημείο a της σφαίρας αντιστοιχεί σημείο του M^n όπου $H > 0$, ή αντιστοιχεί σημείο όπου όλες οι κύριες καμπυλότητες είναι μηδενικές, δηλαδή αντιστοιχεί ισόπεδο σημείο. Το σύνολο των σημείων της σφαίρας που ανήκουν στη δεύτερη κατηγορία είναι μηδενικού μέτρου στην S^n, αφού είναι υποσύνολο των κρίσιμων τιμών της σφαιρικής απεικόνισης που είναι μηδενικού μέτρου στην S^n από το Θεώρημα του Sard $[6]$.

Άρα, για κάθε $a \in S^n$, λόγω του Λήμματος 1.2.4. ισχύει $|La| = 1$, δηλαδή ο γραμμικός μετασχηματισμός είναι ορθογώνιος και η απόδειξη της Πρότασης 3.2.2. ολοκληρώθηκε. ■

Απόδειξη του θεωρήματος Β: Αν η $h : (M^n, \langle\cdot,\cdot\rangle) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ είναι ισομετρική εμβάπτιση, τότε σύμφωνα με το Λήμμα 1.1.9. ισχύει ότι

$$\Delta h = n\vec{H}.$$

Επιπλέον, αν $\{E_1, \ldots, E_n\}$ είναι ορθομοναδιαία βάση κυρίων διευθύνσεων για την υπερεπιφάνεια $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ και A ο τελεστής Weingarten της, επειδή η $h : (M^n, \langle\cdot,\cdot\rangle) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ είναι ισομετρική εμβάπτιση θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\langle A(\nabla h), \nabla h\rangle &= \sum_{a=1}^{n+m} \langle A(\nabla h_a), \nabla h_a\rangle \\
&= \sum_{a=1}^{n+m} \langle A(\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla h_a, E_i\rangle E_i), \sum_{j=1}^{n} \langle \nabla h_a, E_j\rangle E_j\rangle \\
&= \sum_{a=1}^{n+m} \sum_{i,j=1}^{n} \langle \nabla h_a, E_i\rangle \langle \nabla h_a, E_j\rangle \langle AE_i, E_j\rangle \\
&= \sum_{a=1}^{n+m} \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla h_a, E_i\rangle^2 \langle AE_i, E_i\rangle \\
&= \sum_{a=1}^{n+m} \sum_{i=1}^{n} k_i \langle \nabla h_a, E_i\rangle^2,
\end{aligned}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\begin{aligned}
\langle A(\nabla h), \nabla h\rangle &= \sum_{i=1}^{n} k_i (\sum_{a=1}^{n+m} \langle \nabla h_a, E_i\rangle^2) = \sum_{i=1}^{n} k_i (\sum_{a=1}^{n+m} (E_i(h_a))^2) \\
&= \sum_{i=1}^{n} k_i (\sum_{a=1}^{n+m} \langle dh(E_i), e_a\rangle^2) = \sum_{i=1}^{n} k_i |dh(E_i)|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} k_i = nH,
\end{aligned}$$

αφού $|dh(E_i)| = 1$.

Συμπερασματικά έχουμε,

$$\langle A(\nabla h), \nabla h\rangle = \sum_{i=1}^{n} k_i = nH.$$

Επομένως ικανοποιούνται οι συνθήκες της Πρότασης 3.2.2. που σημαίνει ότι οι f και h είναι γεωμετρικά ισότιμες.

Παράρτημα Α΄

Περίληψη - Abstract

Περίληψη. Στη Διαφορική Γεωμετρία, βασικό πρόβλημα αποτελεί η ταξινόμηση των γεωμετρικών αντικειμένων κάτω από περιορισμούς για την καμπυλότητα. Στην περίπτωση των υπερεπιφανειών των Ευκλείδειων χώρων έχει τεθεί το ερώτημα αν οι σφαίρες είναι οι μόνες συμπαγείς υπερεπιφάνειες των οποίων η μέση καμπυλότητα m-τάξης H_m, για $m = 1, \ldots, n$, είναι σταθερή. Στόχος της παρούσας Μετα-πτυχιακής Διατριβής είναι η παρουσίαση του σχετικού αποτελέσματος, ως μια εφαρμογή του τύπου του Reilly για συμπαγείς προσανατολισμένες υπερεπιφάνειες των Ευκλείδειων χώρων. Ο R. C. Reilly ακολουθώντας μια δική του μέθοδο, απάντησε καταφατικά στο παραπάνω ερώτημα για την περίπτωση όπου $m = 1$. Πρόκειται για μια μέθοδο, που συνδυάζει τους ολοκληρωτικούς τύπους του Minkowski και τον τύπο του Reilly.

Ο A. Ros κάνοντας χρήση της παραπάνω μεθόδου, απέδειξε ότι η M^n, για κάθε m, είναι σφαίρα και το αποτέλεσμα αυτό αποτελεί γενίκευση της απόδειξης του R. C. Reilly, αλλά και αυτής του A. D. Alexandrov.

Σε αυτό το πλαίσιο, ο ίδιος ο A. Ros, έδωσε ένα αποτέλεσμα ακαμψίας για συμπαγείς υπερεπιφάνειες με μη αρνητική μέση καμπυλότητα, το οποίο είναι γενίκευση του συμπεράσματος του I. Schur για κλειστές καμπύλες. Το συμπεριλαμβάνουμε, ως μία ακόμη εφαρμογή του τύπου Reilly.

Abstract. A basic problem in Differential Geometry is to classify geometrical objects in terms of curvature restrictions. In case of Euclidean hypersurfaces, the question whether the spheres are the only compact embedded hypersurfaces with constant curvature H_m of order $m = 1, \ldots, n$, has been raised a long time ago. The aim of this Master Thesis, is to present the answer to the problem that was given by A. Ros, R. C. Reilly, developed a method of his own, in order to give an affirmative response to the above question when $m = 1$. This method is a combination of Minkowski's integral formulas and Reilly's formula.

A. Ros used that method to provide an affirmative answer to the problem, for every m. Ros's result is a generalization of Reilly's and Alexandrov's proof.

Within this framework, A. Ros himself, gave a result concerning the rigidity of compact hypersurfaces with non negative mean curvature, which is a generalization of I. Schur's result on closed surfaces. We include it, as yet another application of Reilly's formula.

Βιβλιογραφία

[1] **A. D. Alexandrov**. Uniqueness theorems for surfaces in the large I. *Vestnik Leningrad Univ., **11** (1956), 5-17*.

[2] **S. Bochner**. Vector fields and Ricci curvature. *Bull. Amer. Math. Soc., **52** (1946), 776-797*.

[3] **J. Cheeger & D. G. Ebin**. Comparison Theorems in Riemannian Geometry. *North-Holland Publishing Company-Amsterdam.Oxford, American Elsevier Publishing Company.Inc.-New York*, 1975.

[4] **S. S. Chern**. Curves and surfaces in Euclidean spaces. *Studies in Global Geometry and Analysis, MAA Studies in Math., **4**, Math. Assoc. Amer.*, 1967.

[5] **L. Garding**. An inequality for hyperbolic polynomials. *J. Math. Mech. **82** (1959), 957-965*.

[6] **V. Guillemin & A. Pollack**. Differential Topology. *Prentice-Hall*, 1974.

[7] **G. H. Hardy, J. E. Littewood & G. Polya**. Inequalities. *Cambridge Math. Libr., Cambridge*, 1934.

[8] **H. Hopf**. Differential Geometry in the large. *Lecture Notes in Math., 1000, Springer-Verlag* 1983.

[9] **W. Y. Hsiang, Z. H. Teng & W. C. Yu**. New examples of constant mean curvatures immersions of (2k-1)-spheres into Euclidean 2k-space. *Ann. of Math., **117** (1983), 609-625*.

[10] **C. C. Hsiung**. Some integral formulas for closed hypersurfaces. *Math. Scand.* ***2*** *(1954), 286-294.*

[11] **J. Jost**. Partial differential equations, 2ed. *Springer*, 2007.

[12] **N. Kapouleas**. Constant mean curvature surfaces in Euclidean three-space. *Bull. AMS,* ***17*** *(1987), 318-320.*

[13] **Δ. Κουτρουφιώτης**. Διαφορική Γεωμετρία. *Πανεπιστήμιον Ιωαννίνων*, 1994.

[14] **S. G. Krantz & . R. Parks**. The geometry of domains in space. *Birkhauser Advanced Texts Basler Lehrbucher, Birkhauser Boston, c/o Springer-Verlag New York Inc.*, 1999.

[15] **H. Liebmann**. Eine neue Eigenschaft der kugel. *Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Gottingen, Math.-Phys. Klasse, (1899), 45-55.*

[16] **S. Montiel & A. Ros**. Compact hypersurfaces: the Alexandrov theorem for higher order mean curvatures, *in Differential Geometry, Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math.,* ***52****, 279-296, (Longman Sci. Tech., Harlow, 1991).*

[17] **K. Nomizu**. Characteristic roots and vectors of a differentiable family of symmetric matrices, *Linear and Multilinear Algebra I, (1973), 159-162.*

[18] **R. C. Reilly**. Applications of the Hessian operator in a riemmanian manifold. *Indiana Univ. Math. J,* ***26****, No.3 (1977), 459-472.*

[19] **A. Ros**. Compact hypersurfaces with constant scalar curvature and a congruence theorem. *J. Differential Geometry* ***27*** *(1988), 215-220.*

[20] **A. Ros**. Compact Hypersurfaces with constant higher order mean curvatures. *Revista Mathematica Iberoamericana,* ***3****,No. 3 & 4*, 1987.

[21] **P. J. Ryan**. Homogeneity and some curvature conditions for hypersurfaces. *Tohoku Math. Journal* ***21*** *(1969), 363-388.*

[22] **W. Suess**. Uber Kennzeichnungen der Kugeln und affinespharen durch Hernn K. P. Grotenmeyer. *Arch. Math.* ***3*** *(1952), 311-313.*

[23] **H. C. Wente**. Counterexample to a conjecture of H. Hopf. *Pacific J. Math.,* ***121*** *(1986), 193-243.*