

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ



ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ, ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
& ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΜΠΑΡΔΑΚΑΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΕΛΕΓΧΟΣ ΜΗ ΕΜΦΩΛΕΥΜΕΝΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ
ΜΙΑ ΚΡΙΤΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ, 2013

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στη Στατιστική και Επιχειρησιακή Έρευνα, που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την 23/05/2013 από την εξεταστική επιτροπή:

Ζωγράφος Κωνσταντίνος, Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Λουκάς Σωτήριος, Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Μπατσίδης Απόστολος, Λέκτορας του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων (Επιβλέπων).

Υπεύθυνη Δήλωση

«Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή»

Υπογραφή

Κωνσταντίνος Μπαρδάκας

Αφιερώνεται
στους γονείς μου Λάμπρο και Δέσποινα
και στον αδερφό μου Γιώργο.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα διατριβή πραγματοποιήθηκε κατά τη διάρκεια του τελευταίου έτους φοίτησής μου στο Τμήμα Μαθηματικών της Σχολής Θετικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων για την απόκτηση μεταπτυχιακού διπλώματος ειδίκευσης στον κλάδο «Στατιστική και Επιχειρησιακή Έρευνα», με μέλη της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής τους κ.κ. Κωνσταντίνο Ζωγράφο και Σωτήριο Λουκά, Καθηγητές του Τμήματος Μαθηματικών της Σχολής Θετικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων και Απόστολο Μπατσίδη, Λέκτορα του Τμήματος Μαθηματικών της Σχολής Θετικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων. Ως θέμα έχει την παρουσίαση των κυριότερων μεθοδολογιών για την αντιμετώπιση του προβλήματος του ελέγχου μη εμφωλευμένων υποθέσεων-μοντέλων, την αποσαφήνισή τους μέσω παραδειγμάτων για την ειδική περίπτωση της λογαριθμοκανονικής έναντι της εκθετικής κατανομής και τη σύγκριση και αξιολόγηση των μεθοδολογιών αυτών μέσω μελέτης προσομοίωσης.

Εκμεταλλεόμενος τη θέση αυτή, επιθυμώ να εκφράσω την ευγνωμοσύνη και τις ευχαριστίες μου σε όσους συνέβαλαν στην πραγματοποίηση αυτής της διατριβής.

Ευχαριστώ θερμά τον Επιβλέποντά μου κ. Απόστολο Μπατσίδη, ο οποίος πρότεινε το θέμα της παρούσας μεταπτυχιακής διατριβής. Η καθοδήγησή του, η ηθική υποστήριξη και το αμέριστο

ενδιαφέρον που επέδειξε, συνέβαλαν καθοριστικά στην περάτωση των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

Θα ήθελα επίσης, να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τους κ.κ. Κωνσταντίνο Ζωγράφο και Σωτήριο Λουκά, για τη συμμετοχή τους στην Τριμελή Συμβουλευτική Επιτροπή, για το χρόνο που αφιέρωσαν για την κρίση της διατριβής καθώς και για τις χρήσιμες και εύστοχες παρατηρήσεις τους.

Ευκρινείς είναι οι ευχαριστίες μου προς όλους τους διδάσκοντες του Τομέα «Πιθανοτήτων, Στατιστικής και Επιχειρησιακής Έρευνας», για την πολύτιμη βοήθειά τους όλα αυτά τα χρόνια, αλλά και προς όλους τους διδάσκοντες του Τμήματος Μαθηματικών της Σχολής Θετικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Ακόμη, ευχαριστώ όλους τους συναδέλφους μου του προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών του Τομέα «Πιθανοτήτων, Στατιστικής και Επιχειρησιακής Έρευνας» του Τμήματος Μαθηματικών της Σχολής Θετικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων για τη συνεργασία μας.

Τέλος, περισσότερο από όλους, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου Λάμπρο και Δέσποινα και τον αδερφό μου Γιώργο που με στήριξαν πνευματικά, συναισθηματικά, ηθικά και οικονομικά

όλα αυτά τα χρόνια. Χωρίς τη βοήθειά τους, την ενθάρρυνσή τους και την προτροπή τους, δε θα τα είχα καταφέρει έως τώρα.

Μπαρδάκας Κωνσταντίνος

Ιωάννινα, Αύγουστος 2013.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή.....	1
1.1 Ορισμός Μη Εμφωλευμένων Μοντέλων.....	4
1.2 Παραδείγματα Μη Εμφωλευμένων Υποθέσεων.....	9
1.3 Περίληψη Διατριβής.....	18

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Μεθοδολογία του Cox (1961, 1962).....	23
2.1 Εισαγωγή.....	24
2.2 Η Μεθοδολογία.....	30
2.3 Ειδική Περίπτωση.....	44

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Μεθοδολογία του Atkinson (1970).....	65
3.1 Εισαγωγή.....	66
3.2 Η Μεθοδολογία.....	69
3.3 Ειδική Περίπτωση.....	79

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Μεθοδολογία των Erpps et. al. (1982).....	85
4.1 Εισαγωγή.....	85
4.2 Η Μεθοδολογία.....	89

4.3 Ειδική Περίπτωση.....	97
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5	
Μεθοδολογία του Vuong (1989).....	115
5.1 Εισαγωγή.....	116
5.2 Η Μεθοδολογία.....	123
5.3 Ειδική Περίπτωση.....	133
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6	
Μεθοδολογία του Clarke (2003).....	137
6.1 Εισαγωγή.....	138
6.2 Η Μεθοδολογία.....	140
6.3 Ειδική Περίπτωση.....	145
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7	
Συγκριτική Μελέτη Προσομοίωσης.....	147
7.1 Εισαγωγή.....	148
7.2 Μελέτη Προσομοίωσης.....	153
7.2.1 Αξιολόγηση της σύγκλισης των ελεγχουσυναρτήσεων.....	153
7.2.1 Αξιολόγηση της απόδοσης.....	164
Αντί επιλόγου.....	178
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α.....	179
A.1 Λογαριθμοκανονική (lognormal) κατανομή.....	179

A.2 Εκθετική (exponential) κατανομή.....	180
A.3 Κανονική (normal) κατανομή.....	187
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β.....	199
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ.....	205
Abstract of the MSc Dissertation.....	207
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	209

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

Η Στατιστική Συμπερασματολογία είναι ο κλάδος της Στατιστικής που έχει ως αντικείμενο την ανάπτυξη μεθοδολογιών που οδηγούν στην εξαγωγή συμπερασμάτων για έναν ή περισσότερους υπό μελέτη πληθυσμούς. Η Στατιστική Συμπερασματολογία χωρίζεται σε δύο μεγάλα μέρη: την Εκτιμητική και τους Ελέγχους Στατιστικών Υποθέσεων. Αντικείμενο της Εκτιμητικής είναι κυρίως η εκτίμηση αγνώστων ποσοτήτων, παραμέτρων είτε σε σημείο είτε σε διάστημα, ενώ του ελέγχου στατιστικών υποθέσεων η ανάπτυξη μεθοδολογιών για την αποδοχή ή μη μιας υπόθεσης. Η διαδικασία για τη λήψη απόφασης για την αποδοχή ή μη της υπό έλεγχο υπόθεσης ονομάζεται στατιστικό τεστ. Στο πλαίσιο αυτό, αναφέρουμε τα τεστ πηλίκου πιθανοφάνειας, τα τεστ σημαντικότητας, τη θεωρία των στατιστικών αποφάσεων, τη θεωρία των κανόνων του Bayes, τα τυχαιοποιημένα και μη τυχαιοποιημένα στατιστικά τεστ και τη θεωρία των Neyman - Pearson.

Η παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή εστιάζει σ' ένα από τα προβλήματα που έχει απασχολήσει τη στατιστική βιβλιογραφία από τη δεκαετία του 60 και τις εργασίες του Cox (βλέπε Cox (1960, 1961)). Ειδικότερα, έστω $X_1, \dots, X_n$ ένα τυχαίο δείγμα (τ.δ.) από κάποιον πληθυσμό με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) ή συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.), έστω $h(\cdot)$, η συναρτησιακή μορφή της οποίας μας είναι άγνωστη. Θέλουμε να εξετάσουμε αν μπορεί να θεωρηθεί ότι το τ.δ. προέρχεται είτε από την οικογένεια κατανομών $H_f = \{f(x, \theta), \theta \in \Theta\}$, είτε από την οικογένεια κατανομών

$H_g = \{g(x, \gamma), \gamma \in \Gamma\}$, όπου οι συναρτησιακές μορφές των f και g μας είναι γνωστές, αλλά εξαρτώνται από έναν πεπερασμένο αριθμό αγνώστων παραμέτρων, που συμβολίζονται με τα διανύσματα θ και γ , αντίστοιχα. Τα σύνολα Θ και Γ απαρτίζουν τον παραμετρικό χώρο, όπου οι αντίστοιχες πυκνότητες $f(x, \theta)$ και $g(x, \gamma)$ είναι καλά ορισμένες. Τέλος, υποθέτουμε ότι κάθε κατανομή η οποία ανήκει στην οικογένεια κατανομών της H_g δεν μπορεί να προκύψει από την H_f , είτε με περιορισμό των παραμέτρων, είτε μέσω μιας οριακής διαδικασίας και αντίστροφα. Υποθέτουμε, δηλαδή, ότι έχουμε, όπως συνήθως αναφέρεται, ξεχωριστές (separate) οικογένειες κατανομών.

Με τον όρο **ξεχωριστές (separate)** εννοούμε ότι καμία εκ των δύο αυτών κατανομών δεν μπορεί να προκύψει ως ειδική ή οριακή περίπτωση της άλλης. Ένας άλλος όρος που χρησιμοποιείται για να περιγράψει την ίδια κατάσταση είναι ο όρος **μη εμφωλευμένα μοντέλα (non-nested models)**. Ένας πιο ακριβής μαθηματικός ορισμός των μη εμφωλευμένων μοντέλων θα δοθεί στην επόμενη ενότητα.

Όταν η μηδενική υπόθεση είναι εμφωλευμένη στην εναλλακτική, για τον έλεγχο της υπόθεσης αν ένα τυχαίο δείγμα μπορεί να θεωρηθεί ότι προέρχεται από μία εκ των δύο κατανομών, μπορούν να χρησιμοποιηθούν κλασσικές διαδικασίες, όπως είναι το τεστ πηλίκου πιθανοφανειών ή αυτές που βασίζονται στους πολλαπλασιαστές Lagrange και το τεστ του Wald. Όμως, αυτές οι μεθοδολογίες παύουν να ισχύουν στην περίπτωση του ελέγχου των μη εμφωλευμένων μοντέλων (βλέπε Loh (1985, σελ. 362)) και για το λόγο αυτό έχουν εισαχθεί εναλλακτικές μεθοδολογίες.

Επιπρόσθετα, έτσι όπως έχει διατυπωθεί το πρόβλημα δεν υπάρχει φυσική μηδενική υπόθεση, καθώς κάθε μία εκ των δύο

υποθέσεων μπορεί να θεωρηθεί ως η μηδενική υπόθεση. Στην πράξη συνηθέστερα, η ανάλυση των μη εμφωλευμένων υποθέσεων πραγματοποιείται λαμβάνοντας ως μηδενική υπόθεση κάθε μία εκ των δύο υποθέσεων εναλλάξ. Έτσι, προκύπτουν τα ακόλουθα πιθανά αποτελέσματα:

- i) απορρίπτουμε την H_f έναντι της H_g και όχι αντίστροφα,
- ii) απορρίπτουμε την H_g έναντι της H_f και όχι αντίστροφα,
- iii) δεν απορρίπτουμε καμία από τις δύο υποθέσεις έναντι στην άλλη, και τέλος
- iv) κάθε μία εκ των δύο υποθέσεων απορρίπτεται έναντι της άλλης.

Τα δύο πρώτα αποτελέσματα είναι οικεία από τα κλασσικά στατιστικά τεστ και είναι άμεσα ερμηνεύσιμα. Το τρίτο αποτέλεσμα εμφανίζεται όταν και τα δύο μοντέλα βρίσκονται εξίσου «κοντά» στην $h(\cdot)$ κι έτσι χαρακτηρίζονται ως ισοδύναμα. Το τέταρτο αποτέλεσμα προτείνει την ύπαρξη ενός τρίτου πιθανού μοντέλου, καθώς και οι δύο οικογένειες κατανομών είναι το ίδιο αναποτελεσματικές στη μοντελοποίηση των δειγματικών δεδομένων. Η ύπαρξη των παραπάνω πιθανών αποτελεσμάτων, όπως αναλυτικά θα σχολιαστεί στην Παρατήρηση 2.1.2, οδηγεί κάποιες φορές σε ασάφειες.

Οι μη εμφωλευμένες υποθέσεις είναι ευρέως χρησιμοποιούμενες σε πολλές πρακτικές εφαρμογές, ιδίως στον τομέα της οικονομίας, αλλά και στη βιομηχανία, στην κοινωνιολογία, στη βιολογία, στην ιατρική (βλέπε Efron (1983)), στη μηχανική (βλέπε Lawless (1982)) και στις πολιτικές επιστήμες. Για μια εκτενή ανασκόπηση των εφαρμογών αυτών παραπέμπουμε στους Pesaran and Weeks (1999) και Pesaran and Ulhoa (2007).

Στη βιβλιογραφία έχουν εισαχθεί και αναπτυχθεί διάφορες μεθοδολογίες αντιμετώπισης του παραπάνω προβλήματος. Σκοπός

της παρούσας μεταπτυχιακής διατριβής είναι να παρατεθούν οι σημαντικότερες και πιο ευρέα χρησιμοποιούμενες σε πρακτικές εφαρμογές. Στο εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο, για τη διευκόλυνση της μελέτης της διατριβής, δίνεται αρχικά μία πιο λεπτομερής περιγραφή του υπό μελέτη προβλήματος καθώς και ένας πιο ακριβής μαθηματικός ορισμός των μη εμφωλευμένων μοντέλων. Έπειτα, ο ορισμός αυτός αποσαφηνίζεται μέσω παραδειγμάτων. Τέλος, το εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο ολοκληρώνεται με μία σύντομη ιστορική αναδρομή, ενώ ταυτόχρονα δίνεται και η περίληψη του περιεχομένου της μεταπτυχιακής διατριβής.

1.1 Ορισμός Μη Εμφωλευμένων Μοντέλων.

Μέχρι στιγμής δεν έχει δοθεί ένας σαφής και λεπτομερής ορισμός των εμφωλευμένων και μη εμφωλευμένων μοντέλων, καθώς έχει αναφερθεί μόνο ότι με τον όρο μη εμφωλευμένα μοντέλα εννοούμε ότι κανένα μοντέλο δεν μπορεί να προκύψει από το άλλο, είτε με περιορισμούς στις παραμέτρους είτε μέσω μιας οριακής διαδικασίας. Στην ενότητα αυτή παρατίθεται ένας μαθηματικός ορισμός των μη εμφωλευμένων μοντέλων, που δόθηκε από τον Pesaran (1987). Ο ορισμός αυτός βασίζεται σε ένα κριτήριο της «εγγύτητας» (closeness) των δύο υπό σύγκριση κατανομών.

Η εγγύτητα δύο κατανομών μπορεί να μετρηθεί με διάφορους τρόπους, υιοθετώντας διαφορετικά μέτρα της απόστασής τους, της απόκλισής τους (divergence measure), τα οποία έχουν εισαχθεί στη βιβλιογραφία. Για μία εκτενή ανασκόπηση και μελέτη της χρήσης των μέτρων απόκλισης στη στατιστική συμπερασματολογία παραπέμπουμε στην πρόσφατη μονογραφία του Pardo (2006).

Ο Pesaran (1987) για τον ορισμό των εμφωλευμένων και μη εμφωλευμένων μοντέλων χρησιμοποίησε ένα κριτήριο της

«εγγύτητας» των δύο κατανομών, ο υπολογισμός του οποίου στηρίζεται στο μέτρο απόκλισης που παρουσιάστηκε και μελετήθηκε από τους Kullback and Leibler (1951) και Kullback (1959).

Ορισμός 1.1.1 Έστω F και G δύο κατανομές, με σ.π. ή σ.π.π. $f(x, \theta)$ και $g(x, \gamma)$, αντίστοιχα. Η Kullback-Leibler απόκλιση της G ως προς την F ορίζεται ως

$$I_{fg}(\theta, \gamma) = E_{\theta} \left[\ln \frac{f(X, \theta)}{g(X, \gamma)} \right], \quad (1.1.1)$$

όπου με $E_{\theta}(\cdot)$ συμβολίζεται η αναμενόμενη τιμή υπό την H_f . ■

Επομένως, για τις υποθέσεις H_f και H_g , στην περίπτωση συνεχών δεδομένων, το μέτρο απόκλισης των Kullback-Leibler της H_g ως προς την H_f γράφεται, υπό την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα υπάρχει, ως

$$I_{fg}(\theta, \gamma) = \int_{R_f} \ln \left[\frac{f(x, \theta)}{g(x, \gamma)} \right] f(x, \theta) dx, \quad (1.1.2)$$

όπου R_f είναι το πεδίο ορισμού της τυχαίας μεταβλητής X υπό την υπόθεση H_f .

Στην επόμενη πρόταση παρουσιάζονται κάποιες βασικές ιδιότητες του μέτρου απόκλισης των Kullback-Leibler, για την απόδειξη των οποίων παραπέμπουμε, μεταξύ άλλων, στους Perasan (1987) και Pardo (2006).

Πρόταση 1.1.1 Έστω F και G δύο κατανομές με σ.π. ή σ.π.π. $f(x, \theta)$ και $g(x, \gamma)$, αντίστοιχα. Το μέτρο απόκλισης των Kullback-Leibler έχει τις εξής ιδιότητες:

- i) $I_{fg}(\theta, \gamma) \geq 0$, με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $f(x, \theta) = g(x, \gamma)$.
- ii) Γενικά, $I_{fg}(\theta, \gamma) \neq I_{gf}(\gamma, \theta)$ και επιπλέον προκύπτει ότι δεν ικανοποιείται απαραίτητα η τριγωνική ανισότητα, $I_{fg} + I_{gh} \geq I_{fh}$, όπου $h(x, \cdot)$ η σ.π.π. ή σ.π. μιας άλλης κατανομής.

Πριν προχωρήσουμε στην παρουσίαση των ορισμών του Pesaran (1987) παρατίθενται κάποιες χρήσιμες έννοιες και συμβολισμοί για την κατανόηση αυτών των ορισμών.

Έστω θ_0 και γ_0 οι πραγματικές τιμές των θ και γ υπό την H_f και H_g , αντίστοιχα. Συμβολίζεται με $\inf_{\gamma \in \Gamma} I_{fg}(\theta_0, \gamma)$ το infimum ως προς γ του $I_{fg}(\theta, \gamma)$, δηλαδή του μέτρου απόκλισης των Kullback-Leibler της H_g ως προς την H_f . Υποθέτουμε ότι η ποσότητα $I_{fg}(\theta_0, \gamma)$ παίρνει μοναδικό ελάχιστο ως προς γ στο σημείο $\gamma_*(\theta_0)$. Τότε, ένα μέτρο της εγγύτητας της H_g ως προς την H_f ορίζεται να είναι το

$$C_{fg}(\theta_0) = I_{fg}[\theta_0, \gamma_*(\theta_0)]. \quad (1.1.3)$$

Παρατήρηση 1.1.1 (Pesaran (1987)) Το σημείο $\gamma_*(\theta_0)$ υπάρχει αν $g(x, \gamma) \neq 0$ για κάθε $x \in R_f$, όπου R_f είναι το πεδίο ορισμού της

τυχαίας μεταβλητής X υπό την H_f . Σε διαφορετική περίπτωση η $I_{fg}(\theta_0, \gamma)$ δεν ορίζεται. ■

Όμοια, υποθέτοντας ότι η $I_{gf}(\gamma_0, \theta)$ παίρνει μοναδικό ελάχιστο ως προς θ στο σημείο $\theta_*(\gamma_0)$, χρησιμοποιούμε ως ένα μέτρο εγγύτητας της H_f ως προς την H_g το

$$C_{gf}(\gamma_0) = I_{gf}[\gamma_0, \theta_*(\gamma_0)]. \quad (1.1.4)$$

Πλέον, είμαστε σε θέση να παραθέσουμε τους ορισμούς των εμφωλευμένων, των ολικά μη εμφωλευμένων και των μερικώς μη εμφωλευμένων μοντέλων, που δόθηκαν από τον Pesaran (1987).

Ορισμός 1.1.2 (Pesaran (1987)) Η υπόθεση H_f είναι **εμφωλευμένη (nested)** στην H_g αν και μόνο αν $C_{fg}(\theta_0) = 0$ για κάθε $\theta_0 \in \Theta$, ενώ η υπόθεση H_g είναι **εμφωλευμένη (nested)** στην H_f αν και μόνο αν $C_{gf}(\gamma_0) = 0$ για κάθε $\gamma_0 \in \Gamma$.

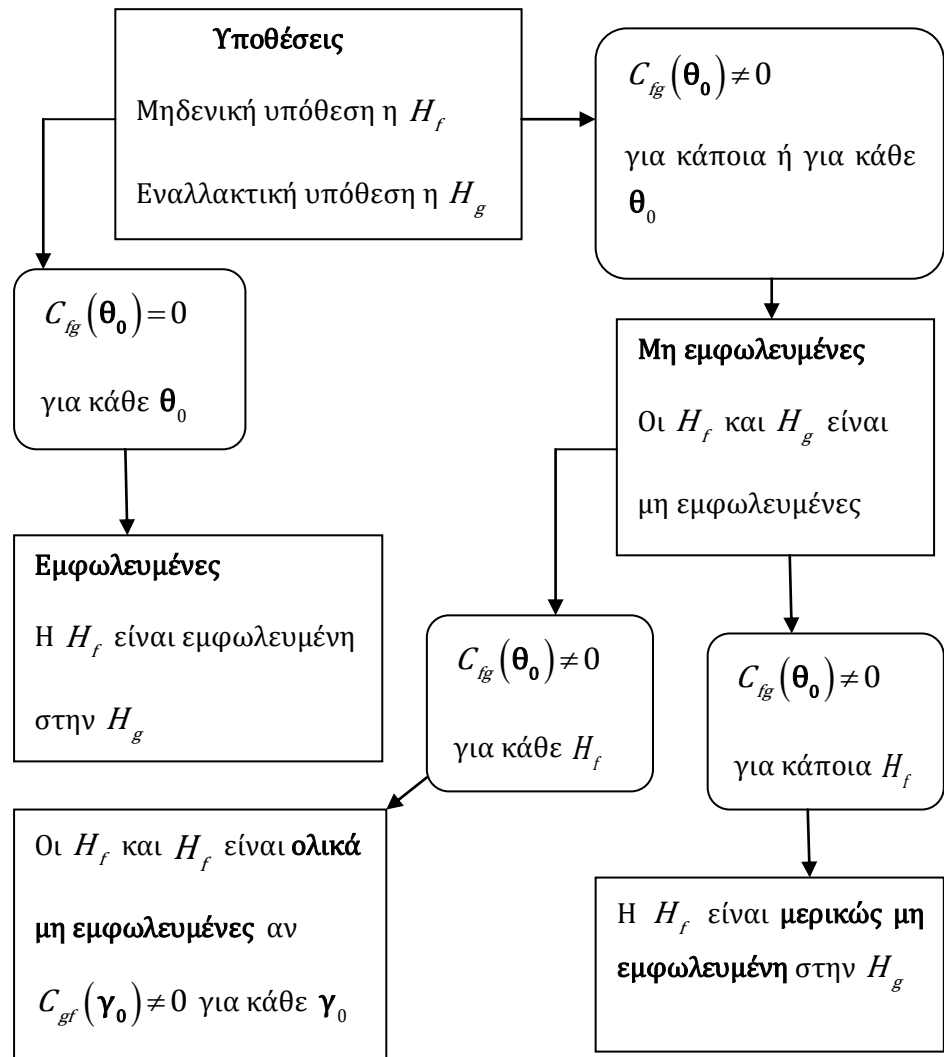
Ορισμός 1.1.3 (Pesaran (1987)) Οι υποθέσεις H_f και H_g είναι **ολικά μη εμφωλευμένες (globally non nested)** αν $C_{fg}(\theta_0) \neq 0$ και $C_{gf}(\gamma_0) \neq 0$ για κάθε $\theta_0 \in \Theta$ και $\gamma_0 \in \Gamma$.

Ορισμός 1.1.4 (Pesaran (1987)) Η υπόθεση H_f είναι **μερικώς μη εμφωλευμένη (partially non nested)** στην H_g αν $C_{fg}(\theta_0) \neq 0$ για

κάποιες τιμές του $\theta_0 \in \Theta$. Η υπόθεση H_g είναι **μερικώς μη εμφωλευμένη (partially non nested)** στην H_f αν $C_{fg}(\gamma_0) \neq 0$ για κάποιες τιμές του $\gamma_0 \in \Gamma$.

Οι παραπάνω ορισμοί συνοψίζονται στο Διάγραμμα 1 που ακολουθεί.

Διάγραμμα 1 Πηγή: McAleer and Pesaran (1986).



Στην επόμενη ενότητα οι παραπάνω ορισμοί θα αποσαφηνιστούν περισσότερο μέσω συγκεκριμένων παραδειγμάτων.

1.2 Παραδείγματα Μη Εμφωλευμένων Υποθέσεων.

Στην ενότητα αυτή χρησιμοποιώντας τους Ορισμούς 1.1.2-1.1.4, θα εξεταστεί αν συγκεκριμένες οικογένειες κατανομών H_f και H_g είναι εμφωλευμένες, μερικώς ή ολικά μη εμφωλευμένες.

Για τη διευκόλυνση στη μελέτη όσων ακολουθούν σε αυτήν την ενότητα, καθώς και στην υπόλοιπη διατριβή, στο Παράρτημα Α έχουν συγκεντρωθεί οι κατανομές και οι ιδιότητές τους, που απαντούν συχνότερα σε όσα ακολουθούν. Επιπλέον, σε όσα

ακολουθούν $\psi(x) = \frac{d\{\ln\Gamma(x)\}}{dx}$, όπου με $\Gamma(x)$ συμβολίζεται η

γνωστή συνάρτηση Γάμμα, με $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$.

Παράδειγμα 1.2.1 Στο παράδειγμα αυτό θα εξεταστεί αν η λογαριθμοκανονική (log-normal) κατανομή με παράμετρο $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ και η εκθετική κατανομή με παράμετρο γ , με σ.π.π. που δίνονται στις σχέσεις (1) και (7), αντίστοιχα, του Παραρτήματος Α, είναι εμφωλευμένες ή όχι.

Βήμα 1^ο Υπολογισμός του $I_{fg}(\boldsymbol{\theta}, \gamma) = E_{\boldsymbol{\theta}}[\ln f(X, \boldsymbol{\theta}) - \ln g(X, \gamma)]$.

Προκύπτει από τις σχέσεις (2) και (8) του Παραρτήματος Α ότι:

$$I_{fg}(\boldsymbol{\theta}, \gamma) = -E_{\boldsymbol{\theta}}(\ln X) - \frac{1}{2} \ln(2\pi\theta_2) - \frac{E_{\boldsymbol{\theta}}(\ln X - \theta_1)^2}{2\theta_2} + \ln \gamma + \frac{E_{\boldsymbol{\theta}}(X)^2}{\gamma}. \quad (1.2.1)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (3) και την Πρόταση 1 του Παραρτήματος Α, είναι:

$$I_{fg}(\boldsymbol{\theta}, \gamma) = -\frac{1}{2} \left[1 + \ln(2\pi\theta_2) \right] - \theta_1 + \ln \gamma + \gamma^{-1} \exp \left[\theta_1 + \frac{1}{2} \theta_2 \right]. \quad (1.2.2)$$

Βήμα 2^ο Εύρεση του $\inf_{\gamma \in \Gamma} I_{fg}(\boldsymbol{\theta}_0, \gamma)$, όπου $\boldsymbol{\theta}_0 = (\theta_{01}, \theta_{02})$ είναι η πραγματική τιμή της παραμέτρου $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$, υπό την H_f .

Για το σκοπό αυτό υπολογίζεται, αρχικά, η πρώτη παράγωγος του $I_{fg}(\boldsymbol{\theta}, \gamma)$, λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (1.2.1) και τίθεται ίση με το μηδέν. Είναι $\frac{\partial I_{fg}(\boldsymbol{\theta}_0, \gamma)}{\partial \gamma} = \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma^2} \exp \left[\theta_{01} + \frac{1}{2} \theta_{02} \right]$ και προκύπτει ότι μηδενίζεται στο σημείο

$$\gamma_*(\boldsymbol{\theta}_0) = \exp \left[\theta_{01} + \frac{1}{2} \theta_{02} \right]. \quad (1.2.3)$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το σημείο $\gamma_*(\boldsymbol{\theta}_0)$ είναι όντως σημείο ελαχίστου.

Βήμα 3^ο Υπολογισμός του $C_{fg}(\boldsymbol{\theta}_0) = I_{fg}(\boldsymbol{\theta}_0, \gamma_*(\boldsymbol{\theta}_0))$.

Με αντικατάσταση στην (1.2.1), λαμβάνοντας υπόψη την (1.2.3) και ότι $\theta_{02} - \ln \theta_{02} \geq 1$ προκύπτει ότι $C_{fg}(\theta_0) \neq 0, \forall \theta_0 \in \Theta$, καθώς

$$C_{fg}(\theta_0) = \frac{1}{2} (1 - \ln(2\pi) + \theta_{02} - \ln \theta_{02}) \geq \frac{1}{2} (1 - \ln(2\pi) + 1) \geq 0.1621.$$

Βήμα 4ο Υπολογισμός του $I_{gf}(\gamma, \theta) = E_{\gamma} [\ln g(X, \gamma) - \ln f(X, \theta)]$.

Είναι

$$I_{gf}(\gamma, \theta) = E_{\gamma} \left[-\ln \gamma - \frac{X}{\gamma} + \ln X + \frac{1}{2} \ln(2\pi\theta_2) + \frac{(\ln X - \theta_1)^2}{2\theta_2} \right]. \quad (1.2.4)$$

Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη τις Προτάσεις 2 και 4 του Παραρτήματος Α, προκύπτει ότι:

$$I_{gf}(\gamma, \theta) = -1 + \psi(1) + \frac{1}{2} \ln(2\pi\theta_2) + \frac{[\psi'(1) + (\ln \gamma + \psi(1) - \theta_1)^2]}{2\theta_2}, \quad (1.2.5)$$

όπου $\psi(1) = -0.5772$ και $\psi'(1) = 1.6449$.

Βήμα 5ο Εύρεση του $\inf_{\theta \in \Theta} I_{gf}(\gamma_0, \theta)$, όπου γ_0 είναι η πραγματική τιμή της παραμέτρου γ υπό την υπόθεση H_g .

Για το σκοπό αυτό υπολογίζονται αρχικά οι πρώτες μερικές παράγωγοι του $I_{gf}(\gamma, \theta)$ ως προς θ_1 και θ_2 , λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (1.2.5). Είναι

$$\frac{\partial I_{gf}(\gamma, \theta)}{\partial \theta_1} = -\frac{1}{\theta_2} (\ln \gamma + \psi(1) - \theta_1), \quad (1.2.6)$$

και

$$\frac{\partial I_{gf}(\gamma, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2} = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi\theta_2} 2\pi - \frac{\psi'(1)}{2\theta_2^2} - \frac{1}{2\theta_2^2} (\ln \gamma + \psi(1) - \theta_1)^2,$$

ή ισοδύναμα,

$$\frac{\partial I_{gf}(\gamma, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2} = \frac{1}{2\theta_2} - \frac{\psi'(1)}{2\theta_2^2}. \quad (1.2.7)$$

Θέτοντας τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial I_{gf}(\gamma_0, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1}$ και $\frac{\partial I_{gf}(\gamma_0, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2}$ ίσες με το μηδέν και επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων που προκύπτει, έχουμε ότι αυτές μηδενίζονται στα σημεία

$$\theta_{1*}(\gamma_0) = \ln \gamma_0 + \psi(1) \quad (1.2.8)$$

και

$$\theta_{2*}(\gamma_0) = \psi'(1). \quad (1.2.9)$$

Εύκολα διαπιστώνεται ότι το σημείο $\boldsymbol{\theta}_*(\gamma_0) = (\theta_{1*}(\gamma_0), \theta_{2*}(\gamma_0))$ είναι όντως σημείο ελαχίστου.

Βήμα 6ο Υπολογισμός του $C_{gf}(\gamma_0) = I_{gf}(\gamma_0, \boldsymbol{\theta}_*(\gamma_0))$.

Με αντικατάσταση στην (1.2.5), λαμβάνοντας υπόψη τις (1.2.8) και (1.2.9),

$$C_{gf}(\gamma_0) = \frac{1}{2} \ln[2\pi\psi'(1)] + \psi(1) - \frac{1}{2} = 0.091 > 0,$$

καθώς $\psi(1) = -0.5772$ και $\psi'(1) = 1.6449$.

Βήμα 7ο Χαρακτηρισμός με βάσει τους Ορισμούς 1.1.2-1.1.4.

Αφού $C_{fg}(\theta_0) \neq 0$ και $C_{gf}(\gamma_0) \neq 0$ για κάθε $\theta_0 \in \Theta$ και $\gamma_0 \in \Gamma$, η λογαριθμοκανονική κατανομή και η εκθετική κατανομή είναι ολικά μη εμφωλευμένες.

Παράδειγμα 1.2.2 Στο παράδειγμα αυτό θα εξεταστεί αν η λογαριθμοκανονική (log-normal) κατανομή με παράμετρο $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ και η κανονική κατανομή με παράμετρο $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, με σ.π.π. που δίνονται στις σχέσεις (1) και (19), αντίστοιχα, του Παραρτήματος Α, είναι εμφωλευμένες ή όχι.

Βήμα 1^ο Υπολογισμός του $I_{fg}(\theta, \gamma) = E_{\theta}[\ln f(X, \theta) - \ln g(X, \gamma)]$.

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (2) και (20) του Παραρτήματος Α, προκύπτει ότι:

$$I_{fg}(\theta, \gamma) = -E_{\theta}(\ln X) - \frac{\ln(2\pi\theta_2)}{2} - \frac{E_{\theta}(\ln X - \theta_1)^2}{2\theta_2} + \frac{\ln(2\pi\gamma_2)}{2} + \frac{E_{\theta}(X - \gamma_1)^2}{2\gamma_2}.$$

Συνδυάζοντας την (3) και την Πρόταση 1 του Παραρτήματος Α, ύστερα από λίγη άλγεβρα, προκύπτει ότι:

$$I_{fg}(\theta, \gamma) = -\theta_1 - \frac{\ln(2\pi\theta_2)}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\ln(2\pi\gamma_2)}{2} + \frac{\left(e^{2\theta_1 + 2\theta_2} - 2\gamma_1 e^{\theta_1 + \frac{1}{2}\theta_2} + \gamma_1^2 \right)}{2\gamma_2}. \quad (1.2.10)$$

Βήμα 2^ο Εύρεση του $\inf_{\gamma \in \Gamma} I_{fg}(\theta_0, \gamma)$, όπου $\theta_0 = (\theta_{01}, \theta_{02})$ είναι η πραγματική τιμή της παραμέτρου $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, υπό την H_f .

Θα ελαχιστοποιήσουμε τη συνάρτηση $I_{fg}(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\gamma})$ ως προς γ_1 και γ_2 . Είναι

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_1} I_{fg}(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\gamma}) = -2e^{\theta_{01} + \frac{1}{2}\theta_{02}} + 2\gamma_1, \quad (1.2.11)$$

και

$$\frac{\partial I_{fg}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_2} = \frac{1}{2\gamma_2} - \frac{1}{4\gamma_2^2} E_{\boldsymbol{\theta}}(X - \gamma_1)^2. \quad (1.2.12)$$

Θέτοντας κάθε μία από αυτές ίσες με το μηδέν και επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων που προκύπτει, ύστερα από λίγη άλγεβρα, έχουμε ότι:

$$\gamma_{*1}(\boldsymbol{\theta}_0) = e^{\theta_{01} + \frac{1}{2}\theta_{02}} \quad (1.2.13)$$

και

$$\gamma_{*2}(\boldsymbol{\theta}_0) = \frac{1}{2} E_{\boldsymbol{\theta}}[X - \gamma_{*1}(\boldsymbol{\theta}_0)]^2 = \frac{e^{2\theta_{01} + \theta_{02}}(e^{\theta_{02}} - 1)}{2}. \quad (1.2.14)$$

Ύστερα από αλγεβρικές πράξεις διαπιστώνεται ότι το σημείο $\boldsymbol{\gamma}_*(\boldsymbol{\theta}_0) = (\gamma_{*1}(\boldsymbol{\theta}_0), \gamma_{*2}(\boldsymbol{\theta}_0))$ είναι πράγματι σημείο ελαχίστου.

Βήμα 4^ο Υπολογισμός του $C_{fg}(\boldsymbol{\theta}_0) = I_{fg}(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\gamma}_*(\boldsymbol{\theta}_0))$.

Με αντικατάσταση στην (1.2.10), λαμβάνοντας υπόψη τις (1.2.13) και (1.2.14), προκύπτει, ύστερα από αλγεβρικές πράξεις, ότι:

$$C_{fg}(\boldsymbol{\theta}_0) = I_{fg}(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\gamma}_*(\boldsymbol{\theta}_0)) = \frac{1}{2} \left[\ln(e^{\theta_{02}} - 1) + \theta_{02} - \ln \theta_{02} - \ln 2 + 1 \right]. \quad (1.2.15)$$

Αποδεικνύεται, εύκολα π.χ. γραφικά, ότι η ποσότητα $C_{fg}(\theta_0)$ είναι διάφορη του μηδενός $\forall \theta_0 \in \Theta$, και μάλιστα $C_{fg}(\theta_0) > 0, \forall \theta_0 \in \Theta$.

Βήμα 5^ο-Βήμα 6^ο Στο παράδειγμα αυτό πρέπει η προσοχή να εστιαστεί στο γεγονός ότι το πεδίο ορισμού της λογαριθμοκανονικής και της κανονικής κατανομής είναι το $(0, +\infty)$ και το $(-\infty, +\infty)$, αντίστοιχα. Επομένως, το πεδίο ορισμού της λογαριθμοκανονικής κατανομής δεν καλύπτει ολόκληρο το πεδίο ορισμού της κανονικής κατανομής. Αυτό έχει ως συνέπεια, το $\theta_*(\gamma_0)$ να μην υπάρχει. Επιπρόσθετα, λαμβάνοντας υπόψη την Πρόταση 1.1.1 i), μπορούμε να θεωρήσουμε την ποσότητα $I_{gf}(\gamma_0, \theta)$ διάφορη του μηδενός, για κάθε $\gamma_0 \in \Gamma$ και $\theta \in \Theta$.

Βήμα 7^ο Αφού $C_{fg}(\theta_0) \neq 0$ και $C_{gf}(\gamma_0) \neq 0$ για κάθε $\theta_0 \in \Theta$ και $\gamma_0 \in \Gamma$, η λογαριθμοκανονική και η κανονική κατανομή είναι ολικά μη εμφωλευμένες.

Παράδειγμα 1.2.3 Στο παράδειγμα αυτό θα εξεταστεί αν η Poisson κατανομή με σ.π.

$$H_f : f(x, \theta) = \frac{e^{-\theta} \theta^x}{x!}, \theta > 0, x = 0, 1, \dots \quad (1.2.16)$$

και η γεωμετρική κατανομή με σ.π.

$$H_g : g(x, \gamma) = (1 - \gamma)^x \gamma, 0 < \gamma \leq 1, x = 1, 2, \dots \quad (1.2.17)$$

είναι εμφωλευμένες ή όχι.

Βήμα 1^ο Υπολογισμός του $I_{fg}(\theta, \gamma) = E_{\theta} [\ln f(X, \theta) - \ln g(X, \gamma)]$.

Εύκολα προκύπτει ότι:

$$I_{fg}(\theta, \gamma) = E_{\theta} [-\theta + X \ln \theta - \ln X! - X \ln(1 - \gamma) - \ln \gamma],$$

ή ισοδύναμα

$$I_{fg}(\theta, \gamma) = -\theta + \theta \ln \theta - I_f(\theta) - \theta \ln(1 - \gamma) - \ln \gamma, \quad (1.2.18)$$

όπου

$$I_f(\theta) = E_{\theta} (\ln X!) = \sum_{x=0}^{\infty} \ln x! \frac{e^{-\theta} \theta^x}{x!}. \quad (1.2.19)$$

Βήμα 2^ο Εύρεση του $\inf_{\gamma \in \Gamma} I_{fg}(\theta_0, \gamma)$, όπου θ_0 είναι η πραγματική τιμή της παραμέτρου θ , υπό την H_f .

Για το σκοπό αυτό υπολογίζεται, αρχικά, η πρώτη παράγωγος του $I_{fg}(\theta_0, \gamma)$ ως προς γ και τίθεται ίση με το μηδέν.

Είναι $\frac{\partial I_{fg}(\theta_0, \gamma)}{\partial \gamma} = \frac{\theta_0}{1 - \gamma} - \frac{1}{\gamma}$ και προκύπτει ότι:

$$\gamma_*(\theta_0) = \frac{1}{1 + \theta_0}, \quad (1.2.20)$$

το οποίο είναι πράγματι σημείο ελαχίστου.

Βήμα 3^ο Υπολογισμός του $C_{fg}(\theta_0) = I_{fg}(\theta_0, \gamma_*(\theta_0))$.

Από τις (1.2.19) και (1.2.20), προκύπτει, μετά από λίγη άλγεβρα, και καθώς η ποσότητα $I_f(\theta_0)$ είναι ένα άθροισμα θετικών όρων που τείνει στο $+\infty$, ότι:

$$C_{fg}(\theta_0) = -\theta_0 - I_f(\theta_0) + (1 + \theta_0) \ln(1 + \theta_0) \neq 0, \forall \theta_0 \in \Theta.$$

Βήμα 4ο Υπολογισμός του $I_{gf}(\gamma, \theta) = E_\gamma [\ln g(X, \gamma) - \ln f(X, \theta)]$.

Είναι, μετά από λίγη άλγεβρα,

$$I_{gf}(\gamma, \theta) = \frac{1-\gamma}{\gamma} \ln(1-\gamma) + \ln \gamma + \theta - \frac{1-\gamma}{\gamma} \ln \theta + I_g(\gamma), \quad (1.2.21)$$

όπου

$$I_g(\gamma) = E_\gamma (\ln X!) = \sum_{X=0}^{\infty} \ln X! (1-\gamma)^X \gamma. \quad (1.2.22)$$

Βήμα 5ο Εύρεση του $\inf_{\theta \in \Theta} I_{gf}(\gamma_0, \theta)$, όπου γ_0 είναι η πραγματική τιμή της παραμέτρου γ , υπό την υπόθεση H_g . Καθώς

$$\frac{\partial I_{gf}(\gamma_0, \theta)}{\partial \theta} = 1 - \frac{1-\gamma_0}{\gamma_0} \frac{1}{\theta}, \text{ προκύπτει ότι:}$$

$$\theta_*(\gamma_0) = \frac{1-\gamma_0}{\gamma_0}, \quad (1.2.23)$$

το οποίο διαπιστώνεται εύκολα ότι είναι όντως σημείο ελαχίστου.

Βήμα 6ο Υπολογισμός του $C_{gf}(\gamma_0) = I_{gf}(\gamma_0, \theta_*(\gamma_0))$.

Από τις (1.2.21) και (1.2.22), λαμβάνοντας υπόψη ότι η ποσότητα $I_g(\gamma_0)$ είναι ένα άθροισμα θετικών όρων που τείνει στο $+\infty$, προκύπτει ότι:

$$C_{gf}(\gamma_0) = I_{gf}\left(\gamma_0, \frac{1-\gamma_0}{\gamma_0}\right) = \frac{1-\gamma_0}{\gamma_0} (1 + \ln \gamma_0) + \ln \gamma_0 + I_g(\gamma_0) \neq 0, \forall \gamma_0 \in \Gamma.$$

Βήμα 7ο Χαρακτηρισμός με βάσει τους Ορισμούς 1.1.2-1.1.4.

Αφού $C_{fg}(\theta_0) \neq 0$ και $C_{gf}(\gamma_0) \neq 0$, για κάθε $\theta_0 \in \Theta$ και $\gamma_0 \in \Gamma$, η Poisson κατανομή και η γεωμετρική κατανομή είναι ολικά μη εμφωλευμένες. ■

Τα προηγούμενα τρία παραδείγματα είχαν ως στόχο να αποσαφηνιστεί ο μαθηματικός ορισμός των μη εμφωλευμένων μοντέλων που δόθηκε από τον Pesaran (1987), με σκοπό την αντικατάσταση του μέχρι τότε απλοϊκού ορισμού, ότι δύο μοντέλα είναι μη εμφωλευμένα αν κανένα εκ των δύο μοντέλων δεν μπορεί να προκύψει από το άλλο, είτε με περιορισμούς στις παραμέτρους είτε μέσω μιας οριακής διαδικασίας.

Παρόλα αυτά, πρέπει να επισημανθεί ότι η ερευνητική δραστηριότητα προϋπήρχε αυτού του ορισμού και ξεκινά τη δεκαετία του 60 με τις εργασίες του Cox (1961, 1962). Στην επόμενη ενότητα δίνεται η περίληψη του περιεχομένου της μεταπτυχιακής διατριβής, ενώ ταυτόχρονα παρατίθενται κάποια ιστορικά στοιχεία.

1.3 Περίληψη Διατριβής

Στη βιβλιογραφία έχουν εμφανιστεί διάφοροι τρόποι αντιμετώπισης του υπό μελέτη προβλήματος ξεκινώντας από τη δεκαετία του 60 και τις πρωτοπόρες εργασίες του Cox (1961, 1962). Οι μεθοδολογίες αυτές, ανάλογα με τη διατύπωση της προς έλεγχο υπόθεσης, ταξινομούνται σε δύο μεγάλες κατηγορίες.

Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει τις προσεγγίσεις, σύμφωνα με τις οποίες μία από τις δύο υποψήφιες κατανομές λαμβάνεται ως μηδενική υπόθεση, έχοντας την άλλη ως εναλλακτική, κι αντίστροφα. Ουσιαστικά πρόκειται, δηλαδή, για μεθόδους στο πλαίσιο του ελέγχου δύο στατιστικών υποθέσεων. Από την άλλη μεριά, η δεύτερη κατηγορία περιλαμβάνει τις

προσεγγίσεις, σύμφωνα με τις οποίες η μηδενική υπόθεση είναι ότι οι δύο κατανομές περιγράφουν το τ.δ. ισοδύναμα κι έχει ως εναλλακτικές ότι μία κατανομή είναι καλύτερη της άλλης. Άρα, η προσέγγιση μοιάζει περισσότερο ως επιλογή του καλύτερου μοντέλου (model selection).

Αντικείμενο αυτής της μεταπτυχιακής διατριβής είναι η κριτική ανασκόπηση και παρουσίαση των κυριότερων μεθόδων στατιστικού ελέγχου καθεμίας εκ των δύο παραπάνω κατηγοριών. Στη συνέχεια, θα δοθεί μια σύντομη περίληψη του περιεχομένου της μεταπτυχιακής διατριβής, δίνοντας παράλληλα και κάποια ιστορικά στοιχεία.

Αντικείμενο μελέτης στο **Κεφάλαιο 2** (Μεθοδολογία του Cox) είναι η τροποποιημένη διαδικασία του πηλίκου των λογαρίθμων των μέγιστων πιθανοφανειών, η οποία παρουσιάστηκε από τον Cox (1961, 1962). Πέρα της πρωτοπόρας μεθοδολογίας ο Cox (1961, 1962) παρέθεσε και κάποιες άλλες ιδέες για την αντιμετώπιση του προβλήματος του ελέγχου των μη εμφωλευμένων μοντέλων. Μία από αυτές ήταν η προσέγγιση του περιεκτικού μοντέλου (comprehensive model approach), η οποία αναπτύχθηκε από τον Atkinson (1970). Η γενική ιδέα της προσέγγισης αυτής είναι τα μη εμφωλευμένα μοντέλα να ελέγχονται χρησιμοποιώντας ένα κατασκευασμένο γενικό μοντέλο, που περιλαμβάνει τα υπό θεώρηση μη εμφωλευμένα μοντέλα ως ειδικές περιπτώσεις. Η μέθοδος αυτή αποτελεί το αντικείμενο μελέτης του **Κεφαλαίου 3** (Μεθοδολογία του Atkinson).

Μία άλλη μεθοδολογία αντιμετώπισης του υπό μελέτη προβλήματος, η οποία ανήκει στην πρώτη κατηγορία που αναφέραμε προωύτερα, είναι αυτή των Erps *et al.* (1982). Η προσέγγισή αυτή, η οποία βασίζεται στην εμπειρική ροπογεννήτρια συνάρτηση, παρουσιάζεται στο **Κεφάλαιο 4** (Μεθοδολογία των Erps, Singleton, Pulley).

Στα Κεφάλαια 5 και 6 θα παρουσιαστούν δύο προσεγγίσεις, σύμφωνα με τις οποίες η μηδενική υπόθεση είναι ότι οι δύο κατανομές περιγράφουν το τ.δ. ισοδύναμα κι έχει ως εναλλακτικές ότι μία εκ των κατανομών είναι καλύτερη της άλλης. Ειδικότερα, αντικείμενο μελέτης του **Κεφαλαίου 5 (Μεθοδολογία του Vuong)** είναι η προσέγγιση του Vuong (1989). Ο Vuong (1989) στηρίχθηκε στο μέτρο εγγύτητας δύο κατανομών, που αναφέραμε στην παράγραφο 1.2 και εστίασε στον έλεγχο της υπόθεσης ότι τα υπό θεώρηση μοντέλα είναι «εξ' ίσου» κοντά στο πραγματικό μοντέλο.

Παρακινούμενος από την εργασία του Vuong (1989), ο Clarke (2003) παρουσίασε μια εναλλακτική προσέγγιση, η οποία ουσιαστικά προέκυψε τροποποιώντας κατάλληλα το προσημικό τεστ. Στο πλαίσιο αυτό, το προσημικό τεστ εφαρμόζεται στις διαφορές των λογαρίθμων των πιθανοφανειών των δύο μη εμφωλευμένων μοντέλων. Η προσέγγιση αυτή παρουσιάζεται στο **Κεφάλαιο 6 (Μεθοδολογία του Clarke)**.

Για την αποσαφήνιση των παραπάνω μεθόδων, σε κάθε κεφάλαιο, αναπτύσσεται η αντίστοιχη θεωρία για τον έλεγχο της υπόθεσης αν ένα τ.δ. μπορεί να θεωρηθεί ότι προέρχεται από τη λογαριθμοκανονική ή την εκθετική κατανομή.

Στο **Κεφάλαιο 7 (Συγκριτική Μελέτη Προσομοίωσης)**, στο πλαίσιο του ελέγχου της λογαριθμοκανονικής έναντι της εκθετικής κατανομής, παρακινούμενοι από προγενέστερες μελέτες, διεξάγουμε μία μελέτη προσομοίωσης για τη σύγκριση και την αξιολόγηση των μεθόδων που παρουσιάστηκαν στα Κεφάλαια 2-6, ενώ ταυτόχρονα παρουσιάζονται και τα αποτελέσματα προγενέστερων μελετών.

Επιπλέον, στο **Παράρτημα Α** συγκεντρώνονται οι ιδιότητες των κατανομών και κάποια ενδιάμεσα αποτελέσματα, που απαντούν συχνότερα σε ολόκληρη τη διατριβή, στο **Παράρτημα Β** δίνονται οι συνθήκες υπό τις οποίες οι μέθοδοι που αναπτύχθηκαν

στα Κεφάλαια 2-6 έχουν ισχύ, ενώ στο **Παράρτημα Γ** δίνονται οι τιμές της αθροιστικής συνάρτησης της διωνυμικής κατανομής με πιθανότητα επιτυχίας $p=0.5$, καθώς είναι χρήσιμες για την υλοποίηση της μεθόδου του Clarke (2003), που παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 6.

Τέλος, η διατριβή ολοκληρώνεται με την περίληψή της στα Αγγλικά (**Abstract of the MSc Dissertation**) και τη **Βιβλιογραφία**.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Μεθοδολογία του Cox (1961, 1962)

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστεί η μεθοδολογία που προτάθηκε από τον Cox (1961, 1962) για την αντιμετώπιση του προβλήματος του ελέγχου των μη εμφωλευμένων μοντέλων. Ο Cox (1961,1962) ήταν από τους πρώτους ερευνητές που ασχολήθηκαν με το πρόβλημα του ελέγχου μη εμφωλευμένων υποθέσεων. Παρήγαγε μια γενική μέθοδο βασισμένη στο πηλίκο μέγιστων πιθανοφανειών, την οποία και παρουσίασε σε δύο εργασίες του (Cox (1961, 1962)). Επιπλέον, όπως θα δούμε και στο επόμενο κεφάλαιο αυτής της μεταπτυχιακής διατριβής, πρότεινε κι άλλες ιδέες αντιμετώπισης του προβλήματος.

Η διάρθρωση του Κεφαλαίου 2 έχεις ως εξής: στην Παράγραφο 2.1 παρατίθενται κάποιες εισαγωγικές έννοιες, ο απαραίτητος συμβολισμός που θα χρησιμοποιηθεί στο κεφάλαιο αυτό, αναφέρονται οι συνθήκες υπό τις οποίες ισχύει η μεθοδολογία του Cox (1961, 1962), καθώς και κάποια χρήσιμα αποτελέσματα για τη διευκόλυνση της μελέτης του υπόλοιπου κεφαλαίου. Στη συνέχεια, στην Παράγραφο 2.2 παρουσιάζεται η μεθοδολογία του Cox (1961, 1962), ενώ στην Παράγραφο 2.3 αποσαφηνίζεται μέσω της μελέτης της ειδικής περίπτωσης του ελέγχου της υπόθεσης αν ένα τυχαίο δείγμα $X_1, \dots, X_n$ μπορεί να θεωρηθεί ότι προέρχεται είτε από την λογαριθμοκανονική είτε από την εκθετική κατανομή.

2.1 Εισαγωγή

Στην παράγραφο αυτή δίνονται κάποιες εισαγωγικές έννοιες και συμβολισμοί, οι συνθήκες υπό τις οποίες ισχύει η μεθοδολογία του Cox (1961,1962), καθώς και κάποια χρήσιμα αποτελέσματα για τη διευκόλυνση της μελέτης του υπόλοιπου κεφαλαίου.

Ο Cox (1961, 1962) αντιμετώπισε το πρόβλημα του ελέγχου των μη εμφωλευμένων μοντέλων, που περιγράφηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, τροποποιώντας τη μέθοδο του πηλίκου μέγιστων πιθανοφανειών. Αν χρησιμοποιήσουμε ως στατιστικό το πηλίκο μέγιστων πιθανοφανειών και θεωρήσουμε ως μηδενική υπόθεση που θέλουμε να ελέγξουμε την H_f με εναλλακτική την H_g ισχυρίζεται ότι είναι λογικό να θεωρήσουμε ως στατιστική συνάρτηση ελέγχου την

$$T_f^C = L_{fg} - E_{\hat{\theta}}(L_{fg}), \quad (2.1.1)$$

όπου

$$L_{fg} = \frac{\sup_{\theta \in \Theta} f(x, \theta)}{\sup_{\gamma \in \Gamma} g(x, \gamma)} = \frac{f(x, \hat{\theta})}{g(x, \hat{\gamma})}, \quad (2.1.2)$$

με $\hat{\theta}$ και $\hat{\gamma}$ να είναι οι Ε.Μ.Π. των παραμέτρων θ και γ υπό τις H_f και H_g , αντίστοιχα. Επιπλέον, με $E_{\hat{\theta}}(\cdot)$ συμβολίζεται η αναμενόμενη τιμή, υπό την H_f , όταν η άγνωστη παράμετρος θ αντικαθίσταται από τον Ε.Μ.Π. $\hat{\theta}$. Ο Cox (1961, 1962) πρότεινε αυτήν τη στατιστική

συνάρτηση, καθώς θεώρησε λογική τη σύγκριση της L_{fg} με τον καλύτερο εκτιμητή της τιμής που αναμένουμε να λάβει υπό την H_f . Επομένως, στατιστικά σημαντικές αρνητικές τιμές του στατιστικού T_f^C οδηγούν στην απόρριψη της H_f , με κατεύθυνση προς την H_g .

Με παρόμοιο τρόπο, αν θεωρηθεί ως μηδενική υπόθεση η H_g με εναλλακτική την H_f η στατιστική συνάρτηση ελέγχου είναι η

$$T_g^C = L_{gf} - E_{\hat{Y}}(L_{gf}), \quad (2.1.3)$$

θέλοντας να συγκριθεί η L_{gf} με τον καλύτερο εκτιμητή της τιμής που αναμένεται να λάβει υπό την H_g . Στατιστικά σημαντικές αρνητικές τιμές του στατιστικού T_g^C οδηγούν στην απόρριψη της H_g , με κατεύθυνση προς την H_f . Τέλος, μια στατιστικά σημαντική αρνητική τιμή του στατιστικού T_f^C (ή του T_g^C) και ταυτόχρονα μια στατιστικά σημαντική θετική τιμή του στατιστικού T_g^C (ή του T_f^C), οδηγεί στην απόρριψη και της H_f και της H_g .

Οι δυνατές αποφάσεις του στατιστικού τεστ του Cox (1961, 1962) συγκεντρώνονται στον Πίνακα 1, που ακολουθεί.

Παρατήρηση 2.1.1 Όταν οι υποθέσεις H_f και H_g είναι εμφωλευμένες, οι δεύτεροι όροι των σχέσεων (2.1.1) και (2.1.3) είναι ίσοι με το μηδέν, ενώ όταν είναι μη εμφωλευμένες πρέπει να υπολογιστούν. Ο υπολογισμός αυτός καθιστά τη μέθοδο του Cox (1961, 1962) να μην είναι πάντοτε εύκολα εφαρμόσιμη, καθώς ακόμα και μια ασυμπτωτικά ισοδύναμη έκφραση, υπό τη μηδενική

υπόθεση, δεν είναι πάντοτε υπολογίσιμη. Σε τέτοιες περιπτώσεις χρησιμοποιούνται είτε τεχνικές προσομοίωσης είτε αριθμητικές μέθοδοι υπολογισμού της αναμενόμενης τιμής (βλέπε Schork (1993) και αναφορές εκεί).

Πίνακας 1 Όλες οι δυνατές αποφάσεις του τεστ του Cox (1961,1962).

Πηγή: Rojas-Rojas *et al.* (2007)

T_g^C	T_f^C		
	στατιστικά σημαντικές αρνητικές τιμές	Μη στατιστικά σημαντικές τιμές	στατιστικά σημαντικές θετικές τιμές
στατιστικά σημαντικές αρνητικές τιμές	Απορρίπτουμε και την H_f και την H_g	Αποδεχόμαστε την H_f	Απορρίπτουμε και την H_f και την H_g
Μη στατιστικά σημαντικές τιμές	Αποδεχόμαστε την H_g	Αποδεχόμαστε και την H_f και την H_g	Πιθανόν αποδεχόμαστε την H_g
στατιστικά σημαντικές θετικές τιμές	Απορρίπτουμε και την H_f και την H_g	Πιθανόν αποδεχόμαστε την H_f	Άτοπο (H_f και H_g απορρίπτονται)

Παρατήρηση 2.1.2 Κάποιοι ερευνητές με βάση τις δυνατές αποφάσεις που δίνονται στον Πίνακα 1 αποφαίνονται ότι τα

αποτελέσματα του στατιστικού τεστ του Cox (1961, 1962), όπως και κάθε άλλου ίδιας φιλοσοφίας, για την επιλογή του καταλληλότερου μεταξύ δύο «ανταγωνιστικών» μοντέλων, δεν είναι πάντοτε σαφή. Ειδικότερα, η πιθανότητα είτε απόρριψης και των δύο μοντέλων, χωρίς μια υπόδειξη για το τι ακολουθεί στην περίπτωση αυτή, οδήγησε σε αρνητικές κριτικές (βλέπε Granger *et al.* (1995)), είτε αποδοχής και των δύο, θεωρείται ως αδυναμία του στατιστικού τεστ. Αυτή θα ήταν όντως αδυναμία αν ο κυρίαρχος σκοπός ήταν η επιλογή ενός εκ των δύο μοντέλων, αλλά όταν και τα δύο δεν περιγράφουν ικανοποιητικά τις δειγματικές παρατηρήσεις είναι προτιμότερο να αναζητηθεί ένα τρίτο με καλύτερη προσαρμογή (βλέπε Perasan and Weeks (1999) και αναφορές εκεί).

Η εύρεση της ασυμπτωτικής κατανομής της T_f^c υπό την H_f , αποτέλεσε το αντικείμενο μελέτης των εργασιών του Cox (1961, 1962) και παρατίθεται στην επόμενη ενότητα. Ο προσδιορισμός αυτής προϋποθέτει ότι ισχύουν κάποιες συνθήκες, γνωστές και ως συνθήκες ομαλότητας. Οι συνθήκες αυτές καθώς δεν δόθηκαν από τον Cox (1961, 1962), ο οποίος απλά έκανε λόγο για την ύπαρξή τους (βλέπε Cox (1961, σελ. 105) και Cox (1962, σελ. 408)), δόθηκαν σε μεταγενέστερη εργασία (βλέπε White (1982)). Οι συνθήκες αυτές για λόγους πληρότητας παρατίθενται στο Παράρτημα Β. Στο σημείο αυτό, θα πρέπει να αναφερθεί ότι ο White (1982) επιπλέον έδωσε μια αναλυτική απόδειξη της στατιστικής συνάρτησης του Cox (1961, 1962). Σε όσα ακολουθούν θα παρουσιαστεί αναλυτικά η αρχική απόδειξη που δόθηκε από τον Cox (1961, 1962).

Στη συνέχεια, πριν παρουσιαστεί η μεθοδολογία του Cox (1961, 1962) δίνεται ο απαραίτητος συμβολισμός που θα χρησιμοποιηθεί. Έστω $X_1, \dots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες

μεταβλητές με σ.π.π. $f(x, \theta)$ υπό την H_f και $g(x, \gamma)$ υπό την H_g . Με $L_f(\theta)$ και $L_g(\gamma)$ συμβολίζονται οι συναρτήσεις πιθανοφάνειας των $f(x, \theta)$ και $g(x, \gamma)$, αντίστοιχα. Για λόγους απλότητας σε όσα ακολουθούν υποθέτουμε ότι οι παράμετροι θ και γ είναι μονοδιάστατες, επομένως ότι $\theta \in \Theta \subseteq R$ και $\gamma \in \Gamma \subseteq R$. Επιπρόσθετα, υποθέτουμε ότι πληρούνται οι συνθήκες ομαλότητας (βλέπε Παράρτημα Β). Συμβολίζονται με $\hat{\theta}$ και $\hat{\gamma}$ οι Ε.Μ.Π. των παραμέτρων θ και γ υπό την H_f και H_g , αντίστοιχα, ενώ, υποθέτουμε ότι όταν η H_f είναι αληθής, ο Ε.Μ.Π. $\hat{\gamma}$ της παραμέτρου γ συγκλίνει κατά πιθανότητα στην γ_θ , όπου θ η αληθής τιμή της παραμέτρου. Τέλος, σε όσα ακολουθούν χρησιμοποιείται ο ακόλουθος συμβολισμός:

$$F_i = \ln f(X_i, \theta), F_{i,\theta} = \frac{\partial \ln f(X_i, \theta)}{\partial \theta}, F_{i,\theta\theta} = \frac{\partial^2 \ln f(X_i, \theta)}{\partial \theta^2}, \quad (2.1.4)$$

και

$$G_i = \ln g(X_i, \gamma_\theta), G_{i,\gamma} = \frac{\partial \ln g(X_i, \gamma_\theta)}{\partial \gamma}. \quad (2.1.5)$$

Όταν παραλείπεται ο δείκτης i στους παραπάνω συμβολισμούς σημαίνει ότι αντικαθίσταται το X_i από το X . Για παράδειγμα,

$$F = \ln f(X, \theta) \text{ και } F_\theta = \frac{\partial \ln f(X, \theta)}{\partial \theta}.$$

Χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς αυτούς και υποθέτοντας ότι μπορούμε να αντιστρέψουμε τη σειρά της παραγωγίσης με την ολοκλήρωση, έχουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

Πρόταση 2.1.1. (Cox (1962)) Ισχύουν τα ακόλουθα:

i) $E_{\theta}(F_{\theta})=0.$

ii) $E_{\theta}(FF_{\theta})=\int \frac{\partial}{\partial \theta}[f(x,\theta)]\ln f(x,\theta)dx=E_{\theta}\left[\ln f(X,\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}\ln f(X,\theta)\right].$

iii) $Cov_{\theta}(F,F_{\theta})=E_{\theta}(FF_{\theta})=\int \frac{\partial}{\partial \theta}[f(x,\theta)\ln f(x,\theta)]dx.$

iv) $E_{\theta}\left[F_{\theta}^2+F(F_{\theta}^2+F_{\theta\theta})\right]=\int \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}[f(x,\theta)\ln f(x,\theta)]dx.$

v) $E_{\theta}\left[L_f''(\theta)\right]=nE_{\theta}\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\ln f(X,\theta)\right]=-I(\theta),$ όπου $I(\theta)$ το μέτρο πληροφορίας του Fisher.

vi) $E_{\theta}(F-G)=\int f(x,\theta)\ln\left[\frac{f(x,\theta)}{g(x,\gamma_{\theta})}\right]dx.$

vii) $E_{\theta}\{F_{\theta}(F-G)\}=\int \frac{\partial}{\partial \theta}\left[f(x,\theta)\ln\left(\frac{f(x,\theta)}{g(x,\gamma_{\theta})}\right)\right]dx.$

Η απόδειξη της παραπάνω πρότασης παρατίθεται στο Παράρτημα Α. ■

Τέλος, χρησιμοποιώντας το νόμο των μεγάλων αριθμών και λαμβάνοντας υπόψη το αποτέλεσμα v) της Πρότασης 2.1.1, προκύπτει το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 2.1.1 Έστω $\hat{\theta}$ ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου θ υπό την υπόθεση H_f . Υπό την πρόσθετη υπόθεση ότι ισχύουν οι συνθήκες ομαλότητας του παραρτήματος Β, αποδεικνύεται ότι:

$$L_f''(\hat{\theta}) \longrightarrow nE_{\theta}[L_f''(\theta)] = -nI(\theta). \quad (2.1.6)$$

Στην επόμενη ενότητα θα παρουσιασθεί η μέθοδος του Cox (1961, 1962). Η μέθοδος αυτή, παρότι γενική, μερικές φορές δεν μπορεί να εφαρμοστεί, είτε λόγω των όσων αναφέρθηκαν στην Παρατήρηση 2.1.1 είτε λόγω ότι δεν ικανοποιούνται οι συνθήκες που δίδονται στο Παράρτημα Β.

2.2 Η Μεθοδολογία

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιαστεί ο τρόπος προσδιορισμού της κατανομής της στατιστικής συνάρτησης T_f^c της σχέσης (2.1.1), στην περίπτωση που το μέγεθος του δείγματος n είναι μεγάλο. Για λόγους απλούστευσης, αρχικά, σε όσα ακολουθούν υποθέτουμε ότι οι παράμετροι θ και γ είναι μονοδιάστατες, επομένως ότι $\theta \in \Theta \subseteq R$ και $\gamma \in \Gamma \subseteq R$. Επιπρόσθετα, θεωρούμε ότι πληρούνται οι συνθήκες του Παραρτήματος Β. Στο πλαίσιο αυτό, αρχικά θα προσδιοριστεί η κατανομή ενός τμήματος της T_f^c , της ποσότητας $L_f(\hat{\theta}) - E_{\hat{\theta}}\{L_f(\hat{\theta})\}$.

Πρόταση 2.2.1 (Cox (1962)) Έστω $X_1, \dots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με σ.π.π. $f(x, \theta)$ υπό την H_f και $g(x, \gamma)$ υπό την H_g , με $\theta \in \Theta \subseteq R$ και $\gamma \in \Gamma \subseteq R$. Υπό την H_f , η σ.σ.

$$L_f(\hat{\theta}) - E_{\hat{\theta}}\{L_f(\hat{\theta})\} \quad (2.2.1)$$

ακολουθεί ασυμπτωτικά κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση

$$n \left(Var_{\theta}(F) - \frac{Cov_{\theta}^2(F, F_{\theta})}{Var_{\theta}(F_{\theta})} \right), \quad (2.2.2)$$

υπό τον όρο ότι αυτή είναι θετική, με F_i , $F_{i,\theta}$ και $F_{i,\theta\theta}$, όπως αυτές ορίστηκαν στην (2.1.4), ενώ με $Cov_{\theta}(F, F_{\theta})$ συμβολίζεται η συνδιακύμανση των F και F_{θ} υπό την H_f .

Απόδειξη (Cox (1962))

Αναπτύσσοντας κατά Taylor τη συνάρτηση $L_f(\theta)$ γύρω από το σημείο $\hat{\theta}$, συνυπολογίζοντας ότι $L'_f(\hat{\theta})=0$, προκύπτει ότι προσεγγιστικά ισχύει ότι:

$$L_f(\theta) = L_f(\hat{\theta}) + \frac{1}{2}(\hat{\theta} - \theta)^2 L''_f(\hat{\theta}), \quad (2.2.3)$$

Επιπλέον, με παρόμοιο τρόπο προκύπτει ότι προσεγγιστικά ισχύει ότι:

$$L'_f(\theta) = L'_f(\hat{\theta}) + (\theta - \hat{\theta}) L''_f(\hat{\theta}). \quad (2.2.4)$$

Από την (2.2.4) έχουμε ότι:

$$\hat{\theta} - \theta = -\frac{L'_f(\theta)}{L''_f(\hat{\theta})}. \quad (2.2.5)$$

Είναι γνωστό (βλέπε Λήμμα 2.1.1.) ότι:

$$L_f''(\hat{\theta}) \rightarrow nE_{\theta} \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f(X, \theta) \right] = -n \text{Var}_{\theta} \left[\frac{\partial \ln f(X, \theta)}{\partial \theta} \right] \quad (2.2.6)$$

και συνδυάζοντας τις (2.2.3) και (2.2.6) προκύπτει ότι:

$$L_f(\hat{\theta}) = L_f(\theta) + \frac{1}{2} n (\hat{\theta} - \theta)^2 \text{Var}_{\theta} \left[\frac{\partial \ln f(X, \theta)}{\partial \theta} \right]. \quad (2.2.7)$$

Ισοδύναμα, λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\text{Var}_{\theta} \left[\frac{\partial \ln f(X, \theta)}{\partial \theta} \right] = E_{\theta} \left[\frac{\partial \ln f(X, \theta)}{\partial \theta} \right]^2 = E_{\theta}(F_{\theta}^2), \quad (2.2.8)$$

και το συμβολισμό (2.1.4), έχουμε ότι:

$$L_f(\hat{\theta}) = \sum_{i=1}^n F_i + \frac{n}{2} (\hat{\theta} - \theta)^2 E_{\theta}(F_{\theta}^2). \quad (2.2.9)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.2.9) και (2.2.7) είναι:

$$\begin{aligned} E_{\theta} \{ L_f(\hat{\theta}) \} &= E_{\theta} \{ L_f(\theta) \} + \frac{1}{2} n E_{\theta} (\hat{\theta} - \theta)^2 \text{Var}_{\theta} \left[\frac{\partial \ln f(X, \theta)}{\partial \theta} \right] \\ &= n \int f(x, \theta) \ln f(x, \theta) dx + \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

οπότε εύκολα προκύπτει ότι:

$$E_{\hat{\theta}} \{ L_f(\hat{\theta}) \} = n \int f(x, \hat{\theta}) \ln f(x, \hat{\theta}) dx + \frac{1}{2}. \quad (2.2.11)$$

Αναπτύσσοντας κατά Taylor τη συνάρτηση $f(x, \hat{\theta}) \ln f(x, \hat{\theta})$ γύρω από το θ προκύπτει ότι:

$$f(X, \hat{\theta}) \ln f(X, \hat{\theta}) = f(x, \theta) \ln f(x, \theta) + (\hat{\theta} - \theta) \frac{\partial [f(x, \theta) \ln f(x, \theta)]}{\partial \theta} + \frac{(\hat{\theta} - \theta)^2}{2} \frac{\partial^2 [f(x, \theta) \ln f(x, \theta)]}{\partial \theta^2}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις iii) και iv) της Πρότασης 2.1.1 και τους συμβολισμούς (2.1.4), προκύπτει ότι:

$$E_{\hat{\theta}} \{L_f(\hat{\theta})\} = nE_{\theta} \{F\} + n(\hat{\theta} - \theta) \text{Cov}_{\theta} \{F, F_{\theta}\} + \frac{1}{2} n(\hat{\theta} - \theta)^2 E_{\theta} [F_{\theta}^2 + F(F_{\theta}^2 + F_{\theta\theta})] + \frac{1}{2}. \quad (2.2.12)$$

Συνδυάζοντας τις (2.2.7) και (2.2.12) είναι:

$$L_f(\hat{\theta}) - E_{\hat{\theta}} \{L_f(\hat{\theta})\} = \sum_{i=1}^n F_i - nE_{\theta} \{F\} - n(\hat{\theta} - \theta) \text{Cov}_{\theta} \{F, F_{\theta}\} - \frac{1}{2} n(\hat{\theta} - \theta)^2 E_{\theta} [F(F_{\theta}^2 + F_{\theta\theta})] - \frac{1}{2}. \quad (2.2.13)$$

Από τις σχέσεις (2.2.5) και (2.2.6) έχουμε ότι:

$$L_f(\hat{\theta}) - E_{\hat{\theta}} \{L_f(\hat{\theta})\} = \sum_{i=1}^n \left\{ F_i - E_{\theta}(F) - \frac{\text{Cov}_{\theta}(F, F_{\theta})}{\text{Var}_{\theta}(F_{\theta})} F_{i,\theta} \right\} - \frac{1}{2} n(\hat{\theta} - \theta)^2 E_{\theta} [F(F_{\theta}^2 + F_{\theta\theta})] - \frac{1}{2}. \quad (2.2.14)$$

Η ποσότητα $\sum_{i=1}^n \left\{ F_i - E_{\theta}(F) - \frac{\text{Cov}_{\theta}(F, F_{\theta})}{\text{Var}_{\theta}(F_{\theta})} F_{i,\theta} \right\}$ που εμφανίζεται στην

πρώτη γραμμή της (2.2.14), διαιρεμένη με το $\sqrt{n}$, συγκλίνει κατά πιθανότητα στο μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι είναι τάξης $\sqrt{n}$ κατά πιθανότητα. Επίσης, η ποσότητα που εμφανίζεται στη δεύτερη γραμμή της σχέσης (2.2.14) συγκλίνει κατά πιθανότητα στο μηδέν,

που σημαίνει ότι είναι τάξης 1 κατά πιθανότητα. Αγνοώντας, στη συνέχεια, τη δεύτερη γραμμή της σχέσης (2.2.14), δηλαδή θεωρώντας μόνο τους όρους οι οποίοι, διαιρεμένοι με το $\sqrt{n}$, συγκλίνουν κατά πιθανότητα στο μηδέν, θεωρούμε μόνο την ποσότητα

$$\sum_{i=1}^n \left\{ F_i - E_{\theta}(F) - \frac{Cov_{\theta}(F, F_{\theta})}{Var_{\theta}(F_{\theta})} F_{i,\theta} \right\}. \quad (2.2.15)$$

Αυτή μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι το άθροισμα των σφαλμάτων ενός μοντέλου γραμμικής παλινδρόμησης με εξαρτημένη μεταβλητή την F και ανεξάρτητη την F_{θ} , ενώ το πηλίκο $\frac{Cov_{\theta}(F, F_{\theta})}{Var_{\theta}(F_{\theta})}$ είναι ο

συντελεστής παλινδρόμησης της F_{θ} , υπό την υπόθεση H_f . Οπότε, η ποσότητα $L_f(\hat{\theta}) - E_{\hat{\theta}}\{L_f(\hat{\theta})\}$, αγνοώντας τους όρους της δεύτερης γραμμής της σχέσης (2.2.14), μπορεί να θεωρηθεί ότι ισούται με το άθροισμα των σφαλμάτων σε αυτό το μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης. Επομένως, προκύπτει ότι η ποσότητα $L_f(\hat{\theta}) - E_{\hat{\theta}}\{L_f(\hat{\theta})\}$ ακολουθεί ασυμπτωτικά κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση

$$n \left[Var_{\theta}(F) - \frac{Cov_{\theta}^2(F, F_{\theta})}{Var_{\theta}(F_{\theta})} \right], \quad (2.2.16)$$

υπό τον όρο ότι η παραπάνω διακύμανση είναι θετική.

Παρατήρηση 2.2.1 α) Είναι αυτονόητο ότι η προσέγγιση της κατανομής της στατιστικής συνάρτησης $L_f(\hat{\theta}) - E_{\hat{\theta}}\{L_f(\hat{\theta})\}$, υπό την

H_f , μπορεί να βελτιωθεί λαμβάνοντας υπόψη τη δεύτερη γραμμή της (2.2.14), δηλαδή τον όρο τάξης 1 κατά πιθανότητα. Επιπλέον, σε αυτή την περίπτωση, η προσέγγιση θα μπορούσε να βελτιωθεί συνεκτιμώντας ότι η μέση τιμή της στατιστικής συνάρτησης δεν είναι μηδέν, αλλά προκύπτει να είναι ίση με

$$-\frac{1}{2} \frac{E_{\theta} \left[F \left(F_{\theta}^2 + F_{\theta\theta} \right) \right]}{E_{\theta} \left(F_{\theta}^2 \right)} - \frac{1}{2}, \quad (2.2.17)$$

λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα της Πρότασης 2.1.1.

β) Επιπλέον, η παράλειψη της δεύτερης γραμμής της (2.2.14) έχει ως αποτέλεσμα ορισμένες φορές η εκτιμώμενη τιμή της ασυμπτωτικής διακύμανσης που προκύπτει να μην είναι θετική. Ειδικότερα, στο συμπέρασμα αυτό κατέληξαν οι Al-Khalidi and Hwang (1991) εφαρμόζοντάς τη μέθοδο του Cox (1961, 1962) για την περίπτωση της κανονικής έναντι της λογαριθμοκανονικής κατανομής, μιας περίπτωσης δηλαδή όπου η απόφαση για απόρριψη ή μη της μηδενικής υπόθεσης εξαρτάται και από το πεδίο ορισμού των δύο τ.μ., χρησιμοποιώντας προσομοιωμένα δεδομένα. ■

Στην επόμενη πρόταση προσδιορίζεται η κατανομή της στατιστικής συνάρτησης που προτάθηκε από τον Cox (1961, 1962) για τον έλεγχο της H_f έναντι της H_g , υπό την H_f . Σε όσα ακολουθούν θα περιοριστούμε στους όρους εκείνους οι οποίοι διαιρεμένοι με το $\sqrt{n}$, συγκλίνουν κατά πιθανότητα στο μηδέν. Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτήν της Πρότασης 2.2.1 και για το λόγο αυτό θα δοθεί εν συντομία.

Πρόταση 2.2.2 (Cox (1962)) Έστω $X_1, \dots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με σ.π.π. $f(x, \theta)$ υπό την H_f και $g(x, \gamma)$ υπό την H_g , με $\theta \in \Theta \subseteq R$ και $\gamma \in \Gamma \subseteq R$. Συμβολίζονται με $\hat{\theta}$ και $\hat{\gamma}$ οι Ε.Μ.Π. των παραμέτρων θ και γ υπό την H_f και H_g , αντίστοιχα. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι για δοθέν θ , ο Ε.Μ.Π. $\hat{\gamma}$ της παραμέτρου γ , συγκλίνει υπό την H_f κατά πιθανότητα στο γ_θ . Η στατιστική συνάρτηση

$$T_f^C = \{L_f(\hat{\theta}) - L_g(\hat{\gamma})\} - E_\theta \{L_f(\hat{\theta}) - L_g(\hat{\gamma})\} \quad (2.2.18)$$

ακολουθεί ασυμπτωτικά, υπό την H_f , κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση

$$n \left[Var_\theta(F - G) - \frac{Cov_\theta^2(F - G, F_\theta)}{Var_\theta(F_\theta)} \right], \quad (2.2.19)$$

υπό τον όρο ότι αυτή είναι θετική, όπου F_i , $F_{i,\theta}$ και G_i οι ποσότητες όπως αυτές ορίστηκαν στις σχέσεις (2.1.4) και (2.1.5).

Σκιαγράφηση Απόδειξης (Cox (1962))

Όμοια με την απόδειξη της Πρότασης 2.2.1 και καθώς περιοριζόμαστε στους όρους εκείνους που διαιρεμένοι με το $\sqrt{n}$ συγκλίνουν κατά πιθανότητα στο μηδέν, επομένως είναι τάξης $\sqrt{n}$, προκύπτει ότι ισχύει προσεγγιστικά:

$$L_f(\hat{\theta}) - L_g(\hat{\gamma}) = L_f(\theta) - L_g(\gamma_\theta). \quad (2.2.20)$$

Επιπρόσθετα, έχουμε ότι:

$$E_{\theta} \left[L_f(\hat{\theta}) - L_g(\hat{\gamma}) \right] = n \int f(x, \theta) \ln \left(\frac{f(x, \theta)}{g(x, \gamma_{\theta})} \right) dx \quad (2.2.21)$$

και

$$\begin{aligned} E_{\hat{\theta}} \left(L_f(\hat{\theta}) - L_g(\hat{\gamma}) \right) &= n \int f(x, \theta) \ln \left(\frac{f(x, \theta)}{g(x, \gamma_{\theta})} \right) dx \\ &+ n(\hat{\theta} - \theta) \int \frac{\partial}{\partial \theta} \left[f(x, \theta) \ln \left(\frac{f(x, \theta)}{g(x, \gamma_{\theta})} \right) \right] dx. \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

Ισοδύναμα, λαμβάνοντας υπόψη την Πρόταση 2.1.1:

$$E_{\hat{\theta}} \left(L_f(\hat{\theta}) - L_g(\hat{\gamma}) \right) = n E_{\theta} (F - G) + n(\hat{\theta} - \theta) E_{\theta} [F_{\theta} (F - G)]. \quad (2.2.23)$$

Από τις σχέσεις (2.2.21)-(2.2.23) έχουμε προσεγγιστικά ότι:

$$T_f^C = \sum_{i=1}^n \left\{ F_i - G_i - E_{\theta} (F - G) - \frac{Cov_{\theta} (F - G, F_{\theta})}{Var_{\theta} (F_{\theta})} F_{i, \theta} \right\}. \quad (2.2.24)$$

Έτσι, η ποσότητα T_f^C μπορεί να θεωρηθεί ότι ισούται με το άθροισμα των σφαλμάτων σε ένα μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης των $F_i - G_i$ με τα $F_{i, \theta}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Άρα, υπό την H_f , η στατιστική συνάρτηση $T_f^C = L_f(\hat{\theta}) - L_g(\hat{\gamma}) - E_{\hat{\theta}} [L_f(\hat{\theta}) - L_g(\hat{\gamma})]$ ακολουθεί, ασυμπτωτικά, κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση:

$$n \left[Var_{\theta} (F - G) - \frac{Cov_{\theta}^2 (F - G, F_{\theta})}{Var_{\theta} (F_{\theta})} \right], \quad (2.2.25)$$

υπό τον όρο ότι αυτή είναι θετική. ■

Όσα προηγήθηκαν θεμελιώθηκαν, υπό την υπόθεση ότι οι διανυσματικές παράμετροι ήταν μονοδιάστατες. Στη συνέχεια, στην πρόταση που ακολουθεί παρουσιάζεται η γενίκευση του αποτελέσματος της Πρότασης 2.1.2 στην περίπτωση που η παράμετρος θ είναι διανυσματική, με $\theta \in \Theta \subseteq R^p$, ενώ η παράμετρος γ μπορεί να είναι είτε διανυσματική είτε όχι. Η απόδειξη αυτής της γενίκευσης βασίζεται στην παρατήρηση ότι σε αυτήν την περίπτωση η στατιστική συνάρτηση T_f^C μπορεί να θεωρηθεί ως το άθροισμα των σφαλμάτων ενός μοντέλου πολλαπλής παλινδρόμησης $Y = Z\beta + \varepsilon$, όπου Y είναι το n -διάστατο διάνυσμα στήλη με

$$Y = (F_1 - G_1 - E_\theta(F - G), \dots, F_n - G_n - E_\theta(F - G))^t, \quad (2.2.26)$$

και Z είναι ο $n \times p$ πίνακας με $Z = (Z_1, \dots, Z_n)^t$ όπου Z_i , $i = 1, \dots, n$, είναι το p -διάστατο διάνυσμα, με συνιστώσες

$$Z_i = \left(\frac{\partial}{\partial \theta_1} [\ln f(X_i, \theta)], \dots, \frac{\partial}{\partial \theta_p} [\ln f(X_i, \theta)] \right), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.2.27)$$

Τότε, υπό τις συνθήκες που δίνονται στο Παράρτημα Β, προκύπτει το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πρόταση 2.2.3 (Cox (1962)) Έστω $X_1, \dots, X_n$ ένα τ.δ. από έναν πληθυσμό με σ.π.π. $f(x, \theta)$, υπό την H_f , και $g(x, \gamma)$ υπό την H_g , με $\theta \in \Theta \subseteq R^p$ και $\gamma \in \Gamma$. Συμβολίζονται με $\hat{\theta}$ και $\hat{\gamma}$ οι Ε.Μ.Π. των παραμέτρων θ και γ υπό την H_f και H_g , αντίστοιχα. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι για δοθέν θ , ο Ε.Μ.Π. $\hat{\gamma}$ της παραμέτρου γ ,

συγκλίνει, υπό την H_f , κατά πιθανότητα στο γ_θ . Υπό την H_f , η στατιστική συνάρτηση

$$T_f^c = \sum_{i=1}^n \left\{ F_i(\hat{\theta}) - G_i(\hat{\gamma}) - E_\theta \left[F(\hat{\theta}) - G(\gamma_\theta) \right] - Z_i (Z'Z)^{-1} Z'Y \right\} \quad (2.2.28)$$

ακολουθεί ασυμπτωτικά, υπό την H_f , κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση:

$$n \left[\text{Var}_\theta (F - G) - Y'Z (Z'Z)^{-1} Z'Y \right], \quad (2.2.29)$$

όπου $Z'Z$ και $Z'Y$ είναι οι $p \times p$ και $p \times 1$ πίνακες με συνιστώσες $(Z'Z)_{jk}$ και $(Z'Y)_j$, $j, k = 1, \dots, p$, που προσδιορίζονται από τις σχέσεις:

$$(Z'Z)_{jk} = \text{Cov}_\theta (F_{\theta_j}, F_{\theta_k}), \quad j, k = 1, \dots, p, \quad (2.2.30)$$

και

$$(Z'Y)_j = \text{Cov}_\theta (F - G, F_{\theta_j}), \quad j = 1, \dots, p, \quad (2.2.31)$$

αντίστοιχα, όπου $F = \ln f(X, \theta)$, $G = \ln g(X, \gamma_\theta)$ και

$$F_{\theta_j} = \frac{\partial \ln f(X, \theta)}{\partial \theta_j}, j = 1, \dots, p. \blacksquare$$

Τέλος, για λόγους πληρότητας, η ενότητα αυτή ολοκληρώνεται με την παράθεση των αντίστοιχων προτάσεων όταν το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στην εύρεση ενός τρόπου ελέγχου έχοντας ως μηδενική υπόθεση την H_g και εναλλακτική την H_f .

Πρόταση 2.2.4 (Cox (1962)) Έστω $X_1, \dots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με σ.π.π. $f(x, \theta)$ υπό την H_f και $g(x, \gamma)$ υπό την H_g , με $\theta \in \Theta \subseteq R$ και $\gamma \in \Gamma \subseteq R$. Συμβολίζονται με $\hat{\theta}$ και $\hat{\gamma}$ οι Ε.Μ.Π. των παραμέτρων θ και γ υπό την H_f και H_g , αντίστοιχα. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι για δοθέν γ , ο Ε.Μ.Π. $\hat{\theta}$ της παραμέτρου θ , συγκλίνει, υπό την H_g , κατά πιθανότητα στο θ_γ . Υπό την H_g , η στατιστική συνάρτηση

$$T_g^C = \left\{ L_g(\hat{\gamma}) - L_f(\hat{\theta}) \right\} - E_{\hat{\gamma}} \left\{ L_g(\hat{\gamma}) - L_f(\hat{\theta}) \right\} \quad (2.2.32)$$

ακολουθεί ασυμπτωτικά, υπό την H_g , κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση

$$n \left[Var_\gamma(G - F) - \frac{Cov_\gamma^2(G - F, G_\gamma)}{Var_\gamma(G_\gamma)} \right], \quad (2.2.33)$$

υπό τον όρο ότι αυτή είναι θετική, όπου G και G_γ , οι ποσότητες όπως αυτές ορίστηκαν στην (2.1.5).

Πρόταση 2.2.5 (Cox (1962)) Έστω $X_1, \dots, X_n$ ένα τ.δ. από έναν πληθυσμό με σ.π.π. $f(x, \theta)$ υπό την H_f και $g(x, \gamma)$ υπό την H_g , με $\theta \in \Theta \subseteq R^p$ και $\gamma \in \Gamma \subseteq R^p$. Συμβολίζονται με $\hat{\theta}$ και $\hat{\gamma}$ οι Ε.Μ.Π. των παραμέτρων θ και γ υπό την H_f και H_g , αντίστοιχα. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι για δοθέν γ , ο Ε.Μ.Π. $\hat{\theta}$ της παραμέτρου θ , συγκλίνει, υπό την H_g , κατά πιθανότητα στο θ_γ . Υπό την H_g , η στατιστική συνάρτηση

$$T_g^C = \sum_{i=1}^n \left\{ G_i(\hat{\gamma}) - F_i(\hat{\theta}) - E_{\gamma} \left[G(\hat{\gamma}) - F(\theta_{\hat{\gamma}}) \right] - W_i (W'W)^{-1} W'R \right\} \quad (2.2.34)$$

ακολουθεί ασυμπτωτικά, υπό την H_g , κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση:

$$n \left\{ Var_{\gamma} (G - F) - R'W (W'W)^{-1} W'R \right\}, \quad (2.2.35)$$

όπου R είναι το n -διάστατο διάνυσμα στήλη

$$R = \left(G_1 - F_1 - E_{\gamma} (G - F), \dots, G_n - F_n - E_{\gamma} (G - F) \right)' \quad (2.2.36)$$

και W είναι ο $n \times p$ πίνακας με $W = (W_1, \dots, W_n)'$ όπου W_i , $i=1, \dots, n$, είναι το p -διάστατο διάνυσμα με συνιστώσες

$$W_i = \left(\frac{\partial}{\partial \gamma_1} [\ln g(X, \gamma)], \dots, \frac{\partial}{\partial \gamma_p} [\ln g(X, \gamma)] \right), \quad (2.2.37)$$

ενώ με $W'W$ και $W'R$ συμβολίζονται οι $p \times p$ και $p \times 1$ πίνακες με συνιστώσες $(W'W)_{jk}$ και $(W'R)_j$, $j, k=1, \dots, p$, που προσδιορίζονται από τις σχέσεις:

$$(W'W)_{jk} = Cov_{\gamma} (G_{\gamma_j}, G_{\gamma_k}), j, k=1, \dots, p, \quad (2.2.38)$$

και

$$(W'R)_j = Cov_{\gamma} (G - F, G_{\gamma_j}), j=1, \dots, p, \quad (2.2.39)$$

αντίστοιχα, όπου $G = \ln f(X, \gamma)$, $F = \ln g(X, \theta_\gamma)$ και

$$G_{\gamma_j} = \frac{\partial \ln g(X, \gamma)}{\partial \gamma_j}, j = 1, \dots, p.$$

Παρατήρηση 2.2.2 Η στατιστική συνάρτηση του Cox (1961, 1962) και η ασυμπτωτική διακύμανσή της, όπως αυτές προσδιορίστηκαν σε καθεμία από τις προτάσεις 2.2.2-2.2.5, εξαρτώνται από τις άγνωστες παραμέτρους θ και γ . Επομένως, στην πράξη, για να εφαρμοστεί η μεθοδολογία αυτή, ο Cox (1961, 1962) πρότεινε ότι οι παράμετροι θ και γ θα πρέπει να αντικατασταθούν από τους αντίστοιχους Ε.Μ.Π. $\hat{\theta}$ και $\hat{\gamma}$. Τέλος, ο Pereira (1977) απέδειξε ότι η σ.σ. του Cox (1961, 1962) συγκλίνει κατά πιθανότητα, υπό τη μηδενική υπόθεση, σε μία αρνητική τιμή. ■

Έπειτα από την πρωτοπόρα εργασία του Cox (1961, 1962) διάφοροι ερευνητές επικέντρωσαν το ενδιαφέρον τους τόσο στη γενίκευση ή στην εφαρμογή της σε ειδικές περιπτώσεις, όσο και στη μελέτη των ιδιοτήτων της προτεινόμενης μεθοδολογίας.

Στο πρώτο πλαίσιο, πέραν των όσων θα αναφερθούν στον επίλογο της μεταπτυχιακής αυτής διατριβής, αξίζει να αναφερθεί σε αυτό το σημείο η προσέγγιση που προτάθηκε από τον Williams (1970 a, b), ο οποίος παρατηρώντας ότι οι συνθήκες για την εγκυρότητα της μεθοδολογίας του Cox (1961, 1962) δεν ισχύουν πάντοτε, πρότεινε την απευθείας προσομοίωση της κατανομής της στατιστικής συνάρτησης του Cox (1961, 1962), υποθέτοντας ότι $\theta = \hat{\theta}$. Έτσι, γέννησε B το πλήθος δείγματα $X_{1k}^*, \dots, X_{nk}^*$, $k = 1, \dots, B$, όπου B ένας αρκετά μεγάλος ακέραιος, από έναν πληθυσμό με

σ.π.π. $f(x^*, \hat{\theta})$. Για κάθε ένα σύνολο δεδομένων υπολόγισε τις τιμές των Ε.Μ.Π. των άγνωστων παραμέτρων, δηλαδή τους $\hat{\theta}^{(B)}$ και $\hat{\gamma}^{(B)}$, και με τη βοήθεια αυτών υπολόγισε την τιμή της στατιστικής συνάρτησης

$$T_n^{(B)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left\{ f(x_{iB}, \hat{\theta}^{(B)}) / g(x_{iB}, \hat{\gamma}^{(B)}) \right\}.$$

Η H_f απορρίπτεται τότε, με επίπεδο σημαντικότητας α , αν η τιμή της T_n χρησιμοποιώντας τα πραγματικά διαθέσιμα δεδομένα είναι μεγαλύτερη από την $[B \cdot \alpha]$ μεγαλύτερη τιμή των $T_n^{(B)}$, όπου με $[\cdot]$ συμβολίζεται το ακέραιο μέρος του αριθμού. Δηλαδή, αν η T_n είναι μεγαλύτερη από το $(1-\alpha)\%$ ποσοστιαίο σημείο των προσομοιωμένων τιμών $T_n^{(B)}$.

Στο πλαίσιο της μελέτης των ιδιοτήτων της διεξήχθησαν τόσο αναλυτικές έρευνες όσο και μελέτες προσομοίωσης. Τα αποτελέσματα των τελευταίων θα αποτελέσουν αντικείμενο μελέτης του Κεφαλαίου 7, ενώ στο σημείο αυτό θα αναφερθούν κάποιες ιδιότητες που έχουν προκύψει με αναλυτικές μελέτες. Ειδικότερα, ο Pereira (1977) απέδειξε, υπό την υπόθεση ότι τα δύο «ανταγωνιστικά» μοντέλα ορίζονται στο ίδιο διάστημα, ότι η πιθανότητα απόρριψης της π.χ. H_f όταν η H_g είναι αληθής τείνει στο 1 καθώς το μέγεθος του δείγματος τείνει στο άπειρο, δηλαδή το τεστ είναι συνεπές. Τέλος, ο Loh (1985), μέσω της θεώρησης μιας ειδικής περίπτωσης, απέδειξε ότι η σ.σ. του Cox (1961, 1962) δε διατηρεί το επίπεδο σημαντικότητας. Περισσότερες ιδιότητες και κριτικές για τη μέθοδο του Cox (1961, 1962) θα δοθούν στο Κεφάλαιο 7.

2.3 Ειδική Περίπτωση

Στην ενότητα αυτή, θα αποσαφηνιστούν οι προτάσεις που δόθηκαν στην προηγούμενη ενότητα, θεωρώντας την ειδική περίπτωση της λογαριθμοκανονικής και της εκθετικής κατανομής, που όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο πρόκειται για μη εμφωλευμένα μοντέλα. Θεωρούμε, δηλαδή, ένα τυχαίο δείγμα $X_1, \dots, X_n$ και θέλουμε να ελέγξουμε αν αυτό το τ.δ. μπορεί να θεωρηθεί ότι προέρχεται από την $\ln N(\theta_1, \theta_2)$ ή από την $\text{Exp}(1/\gamma)$, με σ.π.π. αυτές που δίνονται στις σχέσεις (1) και (7) αντίστοιχα, του Παραρτήματος Α.

Καθώς δεν ξέρουμε ποια από τις δύο κατανομές είναι αυτή που τίθεται στη μηδενική υπόθεση και ποια στην εναλλακτική, στη συνέχεια, εναλλάσσονται οι ρόλοι αυτοί στα δύο παραδείγματα που ακολουθούν και αναπτύσσεται η μεθοδολογία του Cox (1961, 1962).

Ειδικότερα, στο επόμενο παράδειγμα θα ελέγξουμε τη μηδενική υπόθεση ότι τα δεδομένα προέρχονται από την $\ln N(\theta_1, \theta_2)$ έναντι της $\text{Exp}(1/\gamma)$, ενώ το αντίστροφο πρόβλημα θα μελετηθεί στο Παράδειγμα 2.3.2.

Παράδειγμα 2.3.1 Σύμφωνα με τη μεθοδολογία του Cox (1961, 1962) στο παράδειγμα αυτό θα ελέγξουμε τη μηδενική υπόθεση H_f ότι τα δεδομένα προέρχονται από την $\ln N(\theta_1, \theta_2)$ έναντι της εναλλακτικής H_g ότι προέρχονται από την $\text{Exp}(1/\gamma)$. Καθώς η παράμετρος $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ είναι διδιάστατη θα εφαρμοστεί η Πρόταση 2.2.3. Επομένως πρέπει να βρεθεί για αυτήν την περίπτωση η μορφή της

στατιστικής συνάρτησης T_f^C που δίνεται στη σχέση (2.2.28) και η οποία, υπό την H_f , ακολουθεί ασυμπτωτικά κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση που δίνεται στη σχέση (2.2.29).

Βήμα 1ο Προσδιορίζονται οι Ε.Μ.Π. $\hat{\theta}$ και $\hat{\gamma}$ των παραμέτρων θ και γ υπό την με H_f και H_g , αντίστοιχα. Επιπλέον, προσδιορίζουμε για δοθέν θ , το όριο γ_θ , στο οποίο ο Ε.Μ.Π. $\hat{\gamma}$ της παραμέτρου γ , συγκλίνει, υπό την H_f , κατά πιθανότητα.

Οι Ε.Μ.Π. των παραμέτρων $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ και γ είναι (βλέπε Παράρτημα Α)

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i, \quad (2.3.1)$$

$$\hat{\theta}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln X_i - \hat{\theta}_1)^2, \quad (2.3.2)$$

και

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i. \quad (2.3.3)$$

Επιπρόσθετα, καθώς $E_\theta(X) = \exp(\theta_1 + 0.5\theta_2)$, προκύπτει ότι:

$$\gamma_\theta = \exp(\theta_1 + 0.5\theta_2). \quad (2.3.4)$$

Βήμα 2ο Υπολογισμός των $F_i = \ln f(X_i, \theta)$, $G_i = \ln g(X_i, \gamma_\theta)$ και

$$F_{\theta_j} = \frac{\partial \ln f(X, \theta)}{\partial \theta_j}, j=1,2.$$

Οι ποσότητες F_i και G_i προκύπτουν εύκολα από τις σχέσεις (2) και (8) του Παραρτήματος Α. Επίσης, είναι

$$F_{\theta_1} = \frac{\partial \ln f(X, \theta)}{\partial \theta_1} = \frac{\ln X - \theta_1}{\theta_2}, \quad (2.3.5)$$

και

$$F_{\theta_2} = \frac{\partial \ln f(X, \theta)}{\partial \theta_2} = -\frac{1}{2\theta_2} + \frac{(\ln X - \theta_1)^2}{2\theta_2^2}. \quad (2.3.6)$$

Βήμα 3^ο Υπολογισμός της $E_{\theta}(F - G)$.

Είναι, λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα του προηγούμενου βήματος και τις σχέσεις (3), (5) και (6) του Παραρτήματος Α,

$$E_{\theta}(F - G) = -0.5 \ln(2\pi\theta_2) + 0.5\theta_2 + 0.5. \quad (2.3.7)$$

Βήμα 4^ο Υπολογισμός του

$$Z_i = \left(\frac{\partial}{\partial \theta_1} [\ln f(X_i, \theta)], \frac{\partial}{\partial \theta_2} [\ln f(X_i, \theta)] \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Είναι από το Βήμα 2

$$Z_i = \left(\frac{\ln X_i - \theta_1}{\theta_2}, -\frac{1}{2\theta_2} + \frac{(\ln X_i - \theta_1)^2}{2\theta_2^2} \right), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.3.8)$$

Βήμα 5^ο Υπολογισμός του 2×2 πίνακα $Z'Z$ με συνιστώσες $(Z'Z)_{jk} = \text{Cov}_{\theta}(F_{\theta_j}, F_{\theta_k}), \quad j, k = 1, 2$. Είναι δηλαδή

$$Z'Z = \begin{pmatrix} Var_{\theta} F_{\theta_1} & Cov_{\theta}(F_{\theta_1}, F_{\theta_2}) \\ Cov_{\theta}(F_{\theta_1}, F_{\theta_2}) & Var_{\theta} F_{\theta_2} \end{pmatrix}, \quad (2.3.9)$$

όπου τα F_{θ_1} και F_{θ_2} δίνονται στις σχέσεις (2.3.5) και (2.3.6), αντίστοιχα.

Είναι

$$Var_{\theta}(F_{\theta_1}) = \frac{1}{\theta_2^2} Var_{\theta}(\ln X) \stackrel{\ln X \sim N(\theta_1, \theta_2)}{=} \frac{1}{\theta_2}. \quad (2.3.10)$$

Επιπρόσθετα, θέτοντας $V = \frac{\ln X - \theta_1}{\theta_2^{1/2}} \sim N(0,1)$, και λαμβάνοντας

υπόψη την Πρόταση 5 του Παραρτήματος Α, προκύπτει ότι:

$$Var_{\theta}(F_{\theta_2}) = \frac{1}{4\theta_2^2} Var_{\theta}(V^2) = \frac{1}{4\theta_2^2} \left\{ E_{\theta}(V^4) - [E_{\theta}(V^2)]^2 \right\}. \quad (2.3.11)$$

Τέλος,

$$Cov_{\theta}(F_{\theta_1}, F_{\theta_2}) = Cov_{\theta} \left[\frac{\ln X - \theta_1}{\theta_2}, -\frac{1}{2\theta_2} + \frac{(\ln X - \theta_1)^2}{2\theta_2^2} \right],$$

ή ισοδύναμα, λαμβάνοντας υπόψη την Πρόταση 5 i) του Παραρτήματος Α,

$$Cov_{\theta}(F_{\theta_1}, F_{\theta_2}) = \frac{Cov_{\theta}(V, V^2)}{2\theta_2^{3/2}} = \frac{E_{\theta}(V^3) - E_{\theta}(V)E_{\theta}(V^2)}{2\theta_2^{3/2}} = 0. \quad (2.3.12)$$

Άρα, συνοψίζοντας

$$Z'Z = \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\theta_2^2} \end{pmatrix} \quad (2.3.13)$$

και

$$(Z'Z)^{-1} = \begin{pmatrix} \theta_2 & 0 \\ 0 & 2\theta_2^2 \end{pmatrix}. \quad (2.3.14)$$

Βήμα 6^ο Προσδιορισμός του διδιάστατου διανύσματος $(Z'Y)_j$, $j=1,2$, με συνιστώσες $(Z'Y)_j = Cov_{\theta}(F-G, F_{\theta_j})$, $j=1,2$. Επομένως, θα βρεθεί το:

$$Z'Y = \begin{pmatrix} Cov_{\theta}(F-G, F_{\theta_1}) \\ Cov_{\theta}(F-G, F_{\theta_2}) \end{pmatrix} \quad (2.3.15)$$

με F_{θ_1} , F_{θ_2} όπως υπολογίστηκαν στις σχέσεις (2.3.5) και (2.3.6), αντίστοιχα, και

$$F-G = -\ln X - \frac{1}{2}\ln(2\pi\theta_2) - \frac{(\ln X - \theta_1)^2}{2\theta_2} + \ln \gamma_{\theta} + \frac{X}{\gamma_{\theta}}. \quad (2.3.16)$$

Είναι, από τις σχέσεις (2.3.5) και (2.3.16),

$$Cov_{\theta}(F-G, F_{\theta_1}) = -\frac{Var_{\theta}(\ln X)}{\theta_2} - \frac{Cov_{\theta}(V, V^2)}{2\theta_2^{1/2}} + \frac{Cov_{\theta}(V, X)}{\gamma_{\theta}\theta_2^{1/2}}, \quad (2.3.17)$$

όπου $V = \frac{\ln X - \theta_1}{\theta_2^{1/2}} \sim N(0,1)$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι $Var_{\theta}(\ln X) = \theta_2$, $Cov_{\theta}(V, V^2) = 0$ και τη σχέση (22) του Παραρτήματος Α, προκύπτει ότι:

$$Cov_{\theta}(F-G, F_{\theta_1}) = 0. \quad (2.3.18)$$

Επιπλέον,

$$\begin{aligned} Cov_{\theta}(F-G, F_{\theta_2}) &= -\frac{1}{2\theta_2^{1/2}}Cov_{\theta}(V, V^2) - \frac{1}{4\theta_2}Var_{\theta}V^2 \\ &\quad + \frac{1}{2\gamma_{\theta}}Cov_{\theta}(X, V^2), \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

με $V = \frac{\ln X - \theta_1}{\theta_2^{1/2}} \sim N(0,1)$. Είναι γνωστό ότι $Cov_{\theta}(V, V^2) = 0$ και $Var_{\theta}V^2 = 2$ και από την Πρόταση 5 iii) του Παραρτήματος Α έχουμε ότι $Cov_{\theta}(X, V^2) = \gamma_{\theta}\theta_2$. Επομένως,

$$Cov_{\theta}(F-G, F_{\theta_2}) = -\frac{1}{2\theta_2} + \frac{1}{2}. \quad (2.3.20)$$

Συνδυάζοντας τα προηγούμενα:

$$Z'Y = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2\theta_2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (2.3.21)$$

Βήμα 7ο Υπολογισμός της στατιστικής συνάρτησης

$$T_f^C = \sum_{i=1}^n \left\{ F_i(\hat{\theta}) - G_i(\hat{\gamma}) - E_{\theta} \left[F(\hat{\theta}) - G(\gamma_{\hat{\theta}}) \right] - Z_i (Z'Z)^{-1} Z'Y \right\}. \quad (2.3.22)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την Παρατήρηση 2.2.2, οι άγνωστες παράμετροι θ , γ και γ_{θ} αντικαθίστανται από τους Ε.Μ.Π. $\hat{\theta}$, $\hat{\gamma}$ και $\gamma_{\hat{\theta}}$, αντίστοιχα.

Λαμβάνοντας υπόψη το Βήμα 2ο προκύπτει, ύστερα από λίγη άλγεβρα, ότι:

$$\sum_{i=1}^n \left\{ F_i(\hat{\theta}) - G_i(\hat{\gamma}) \right\} = -n\hat{\theta}_1 - \frac{1}{2}n\ln(2\pi\hat{\theta}_2) + \frac{n}{2} + n\ln\hat{\gamma}. \quad (2.3.23)$$

Επιπλέον, λαμβάνοντας υπόψη την (2.3.7),

$$\sum_{i=1}^n E_{\theta} \left[F(\hat{\theta}) - G(\gamma_{\hat{\theta}}) \right] = -\frac{1}{2}n\ln(2\pi\hat{\theta}_2) + \frac{n}{2}\hat{\theta}_2 + \frac{n}{2}. \quad (2.3.24)$$

Είναι, από τις σχέσεις (2.3.8), (2.3.14) και (2.3.21),

$$\left[Z_i (Z'Z)^{-1} Z'Y \right]_{\theta=\hat{\theta}} = \begin{pmatrix} \frac{\ln X_i - \hat{\theta}_1}{\hat{\theta}_2} & -\frac{1}{2\hat{\theta}_2} + \frac{(\ln X_i - \hat{\theta}_1)^2}{2\hat{\theta}_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\theta}_2 & 0 \\ 0 & 2\hat{\theta}_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2\hat{\theta}_2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ή ισοδύναμα μετά από λίγη άλγεβρα

$$\left[Z_i (Z'Z)^{-1} Z'Y \right]_{\theta=\hat{\theta}} = \frac{(\ln X_i - \hat{\theta}_1)^2}{2} - \frac{(\ln X_i - \hat{\theta}_1)^2}{2\hat{\theta}_2} - \frac{\hat{\theta}_2}{2} + \frac{1}{2}. \quad (2.3.25)$$

Άρα,

$$\sum_{i=1}^n \left[Z_i (Z'Z)^{-1} Z_i' Y \right]_{\theta=\hat{\theta}} = \frac{1}{2} n \hat{\theta}_2 - \frac{n}{2} - \frac{1}{2} n \hat{\theta}_2 + \frac{n}{2} = 0. \quad (2.3.26)$$

Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (2.3.23), (2.3.24) και (2.3.26), ύστερα από λίγη άλγεβρα, ο αριθμητής της στατιστικής συνάρτησης γίνεται:

$$n \ln \hat{\gamma} - n \ln \gamma_{\hat{\theta}} = n \ln \frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\hat{\theta}}}. \quad (2.3.27)$$

Βήμα 8ο Τέλος, θα υπολογίσουμε την ασυμπτωτική διακύμανση από τη σχέση (2.2.29).

Είναι

$$Var_{\theta}(F-G) = Var_{\theta} \left[-\ln X - \frac{(\ln X - \theta_1)^2}{2\theta_2} + \frac{X}{\gamma_{\theta}} \right]. \quad (2.3.28)$$

Θέτοντας $V = \frac{\ln X - \theta_1}{\theta_2^{1/2}} \sim N(0,1)$, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} Var_{\theta}(F-G) &= \theta_2 Var_{\theta} V + \frac{Var_{\theta} V^2}{4} + \frac{1}{\gamma_{\theta}^2} Var_{\theta}(X) + \theta_2^{1/2} Cov_{\theta}(V, V^2) \\ &\quad - \frac{2\theta_2^{1/2}}{\gamma_{\theta}} Cov_{\theta}(V, X) - \frac{1}{\gamma_{\theta}} Cov_{\theta}(X, V^2). \end{aligned}$$

Είναι, λαμβάνοντας υπόψη την Πρόταση 5 του Παραρτήματος Α, $Cov_{\theta}(V, V^2) = 0$, $Cov_{\theta}(X, V) = \theta_2^{1/2} \gamma_{\theta}$, $Cov_{\theta}(X, V^2) = \gamma_{\theta} \theta_2$ και

$$Var_{\theta}(X) = \gamma_{\theta}^2 (e^{\theta_2} - 1). \quad (2.3.29)$$

Άρα,

$$Var_{\theta}(F-G) = \theta_2 + \frac{1}{2} + (e^{\theta_2} - 1) - 2\theta_2 - \theta_2 = -\frac{1}{2} + e^{\theta_2} - 2\theta_2, \quad (2.3.30)$$

και με λίγη άλγεβρα

$$Y'Z(Z'Z)^{-1}Z'Y = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2\theta_2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_2 & 0 \\ 0 & 2\theta_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2\theta_2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

ή ισοδύναμα,

$$Y'Z(Z'Z)^{-1}Z'Y = \frac{1}{2} - \theta_2 + \frac{1}{2}\theta_2^2. \quad (2.3.31)$$

Επομένως, συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.3.30) και (2.3.31), η ασυμπτωτική διακύμανση είναι ίση με

$$n \left(-\frac{1}{2} + e^{\theta_2} - 2\theta_2 - \frac{1}{2} + \theta_2 - \frac{1}{2}\theta_2^2 \right) = n \left(e^{\theta_2} - 1 - \theta_2 - \frac{1}{2}\theta_2^2 \right). \quad (2.3.32)$$

Η ασυμπτωτική διακύμανση, όπως δίνεται στη σχέση (2.3.32), περιέχει την άγνωστη παράμετρο θ_2 και δεν μπορεί να υπολογιστεί. Για το λόγο αυτό, στη στατιστική συνάρτηση του Cox (1961, 1962) που δίνεται στο επόμενο βήμα, η άγνωστη παράμετρος θ_2 αντικαθίσταται από τον Ε.Μ.Π. $\hat{\theta}_2$, ο οποίος δόθηκε στη σχέση (2.3.2).

Βήμα 9ο Υπό την H_f , η στατιστική συνάρτηση του Cox (1961, 1962) είναι η

$$T_f^C = \frac{\sqrt{n} \ln \frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\hat{\theta}}}}{\left(e^{\hat{\theta}_2} - 1 - \hat{\theta}_2 - \frac{1}{2} \hat{\theta}_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.3.33)$$

η οποία ακολουθεί ασυμπτωτικά, υπό την H_f , κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση ίση με τη μονάδα.

Όπως έχουμε αναφέρει, στην πράξη η ανάλυση των μη εμφωλευμένων υποθέσεων πραγματοποιείται λαμβάνοντας ως μηδενική υπόθεση κάθε μία εκ των δύο υποθέσεων εναλλάξ. Έτσι, για να διατυπώσουμε τον κανόνα απόφασης στο παράδειγμά μας θα πρέπει πρώτα να αντιστρέψουμε τους ρόλους της μηδενικής και της εναλλακτικής υπόθεσης, έχοντας ως μηδενική υπόθεση την εκθετική και ως εναλλακτική τη λογαριθμοκανονική κατανομή. Αυτό γίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 2.3.2 Σύμφωνα με τη μεθοδολογία του Cox (1961, 1962), θα ελέγχουμε τη μηδενική υπόθεση H_g ότι τα δεδομένα μας προέρχονται από την $\text{Exp}(1/\gamma)$ έναντι της εναλλακτικής H_f ότι προέρχονται από την $\ln N(\theta_1, \theta_2)$. Καθώς η παράμετρος γ είναι μονοδιάστατη θα εφαρμοστεί η Πρόταση 2.2.4.

Βήμα 1^ο Προσδιορίζονται οι Ε.Μ.Π. $\hat{\theta}$ και $\hat{\gamma}$ των παραμέτρων θ και γ υπό την H_f και H_g , αντίστοιχα. Επιπλέον, προσδιορίζουμε για δοθέν γ , το όριο θ_γ , στο οποίο ο Ε.Μ.Π. $\hat{\theta}$ της παραμέτρου θ , συγκλίνει, υπό την H_g , κατά πιθανότητα.

Οι Ε.Μ.Π. των $\hat{\theta}$ και $\hat{\gamma}$ προσδιορίστηκαν στις σχέσεις (2.3.1), (2.3.2) και (2.3.3), αντίστοιχα. Επιπρόσθετα, υπό την H_g , οι Ε.Μ.Π. των $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$ συγκλίνουν στη μέση τιμή και στη διακύμανση, αντίστοιχα, της τυχαίας μεταβλητής $U = \ln X$, όπου η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την $\text{Exp}(1/\gamma)$. Από την Πρόταση 4 ii), vi) του Παραρτήματος Α προκύπτει ότι:

$$\theta_{1\gamma} = \ln \gamma + \psi(1), \quad (2.3.34)$$

και

$$\theta_{2\gamma} = \psi'(1). \quad (2.3.35)$$

Βήμα 2ο Υπολογισμός των $F_i = \ln f(X_i, \theta_\gamma)$, $G_i = \ln g(X_i, \gamma)$ και $G_\gamma = \frac{\partial \ln g(X, \gamma)}{\partial \gamma}$.

Οι ποσότητες F_i και G_i προκύπτουν εύκολα από τις σχέσεις (2) και (8) του Παραρτήματος Α, ενώ

$$G_\gamma = \frac{\partial \ln g(X, \gamma)}{\partial \gamma} = -\frac{1}{\gamma} + \frac{X}{\gamma^2}. \quad (2.3.36)$$

Βήμα 3ο Υπολογισμός της $E_\gamma(G - F)$.

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $E_\gamma(\ln X) = \theta_{1\gamma} = \ln \gamma + \psi(1)$, $E_\gamma(\ln X - \theta_{1\gamma})^2 = \theta_{2\gamma} = \psi'(1)$ και $E_\gamma(X) = \gamma$, προκύπτει ότι:

$$E_\gamma(G - F) = \theta_{1\gamma} + \frac{1}{2} \ln(2\pi\theta_{2\gamma}) - \frac{1}{2} - \ln \gamma. \quad (2.3.37)$$

Βήμα 4ο Υπολογισμός του $W_i = \left(\frac{\partial}{\partial \gamma} \ln g(X_i, \gamma) \right), i = 1, \dots, n.$

Είναι από το Βήμα 2

$$W_i = \left(\frac{X - \gamma}{\gamma^2} \right), i = 1, \dots, n. \quad (2.3.38)$$

Βήμα 5ο Υπολογισμός της $Var_\gamma(G_\gamma)$, που ισοδυναμεί, σε αυτήν την περίπτωση, με τον προσδιορισμό του πίνακα $W'W$ της Πρότασης 2.2.5.

$$Var_\gamma(G_\gamma) = Var_\gamma \left(\frac{X - \gamma}{\gamma^2} \right) = \frac{1}{\gamma^2}. \quad (2.3.39)$$

Βήμα 6ο Προσδιορισμός της $Cov_\gamma(G - F, G_\gamma)$, που ισοδυναμεί, σε αυτήν την περίπτωση, με τον προσδιορισμό του διανύσματος $W'R$, της Πρότασης 2.2.5.

Επομένως, είναι

$$Cov_\gamma(G - F, G_\gamma) = Cov_\gamma \left[\ln X + \frac{(\ln X - \theta_{1\gamma})^2}{2\theta_{2\gamma}} - \frac{X}{\gamma}, \frac{X - \gamma}{\gamma^2} \right],$$

ή ισοδύναμα

$$Cov_\gamma(G - F, G_\gamma) = \frac{Cov_\gamma(\ln X, X)}{\gamma^2} + \frac{Cov_\gamma \left[(\ln X - \theta_{1\gamma})^2, X \right]}{2\theta_{2\gamma}\gamma^2} - \frac{Var_\gamma(X)}{\gamma^3}. \quad (2.3.40)$$

Από τις Προτάσεις 2 και 4 vii) του Παραρτήματος Α είναι $Var_{\gamma}(X) = \gamma^2$ και $Cov_{\gamma}(\ln X, X) = \gamma$. Επίσης,

$$Cov_{\gamma}\left[\left(\ln X - \theta_{1\gamma}\right)^2, X\right] = Cov_{\gamma}\left[\left(\ln X\right)^2, X\right] - 2\theta_{1\gamma}Cov_{\gamma}(\ln X, X).$$

Από την Πρόταση 4 viii) του Παραρτήματος Α είναι

$$Cov_{\gamma}\left[\left(\ln X\right)^2, X\right] = 2\gamma \ln \gamma + 2\gamma\psi(1) - \gamma\left[\psi(1)\right]^2.$$

Άρα,

$$Cov_{\gamma}\left[\left(\ln X - \theta_{1\gamma}\right)^2, X\right] = -\gamma\left[\psi(1)\right]^2. \quad (2.3.41)$$

Επομένως, από τη σχέση (2.3.40), λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, έπειτα από λίγη άλγεβρα, έχουμε ότι:

$$Cov_{\gamma}(G - F, G_{\gamma}) = -\frac{\left[\psi(1)\right]^2}{2\gamma\psi'(1)}. \quad (2.3.42)$$

Βήμα 7ο Υπολογισμός της στατιστικής συνάρτησης

$$T_g^C = \sum_{i=1}^n \left\{ G_i(\hat{\gamma}) - F_i(\hat{\theta}) - E_{\gamma} \left[G(\hat{\gamma}) - F(\theta_{\hat{\gamma}}) \right] - W_i (W'W)^{-1} W'R \right\}. \quad (2.3.43)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την Παρατήρηση 2.2.2, οι άγνωστες παράμετροι θ , γ και θ_{γ} αντικαθίστανται από τους Ε.Μ.Π. $\hat{\theta}$, $\hat{\gamma}$ και $\theta_{\hat{\gamma}}$, αντίστοιχα.

Λαμβάνοντας υπόψη το Βήμα 2ο προκύπτει, ύστερα από λίγη άλγεβρα, ότι:

$$\sum_{i=1}^n \{G_i(\hat{\gamma}) - F_i(\hat{\theta})\} = n\hat{\theta}_1 + \frac{1}{2}n\ln(2\pi\hat{\theta}_2) - \frac{n}{2} - n\ln\hat{\gamma}. \quad (2.3.44)$$

Επιπλέον, λαμβάνοντας υπόψη την (2.3.37)

$$\sum_{i=1}^n E_{\gamma} [G(\hat{\gamma}) - F(\theta_{\hat{\gamma}})] = n\theta_{1\gamma} + \frac{n}{2}\ln(2\pi\theta_{2\gamma}) - \frac{n}{2} - n\ln\hat{\gamma}. \quad (2.3.45)$$

Από τις σχέσεις (2.3.38), (2.3.39) και (2.3.42) προκύπτει ότι:

$$\left[W_i(W'W)^{-1}W'R \right]_{\gamma=\hat{\gamma}} = -\frac{[\psi(1)]^2}{2\hat{\gamma}\psi'(1)}(x_i - \hat{\gamma}). \quad (2.3.46)$$

Οπότε,

$$\sum_{i=1}^n \left[W_i(W'W)^{-1}W'R \right]_{\gamma=\hat{\gamma}} = -\frac{[\psi(1)]^2}{2\hat{\gamma}\psi'(1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\gamma}) = 0. \quad (2.3.47)$$

Άρα, λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (2.3.44), (2.3.45) και (2.3.47), ύστερα από λίγη άλγεβρα, ο αριθμητής της στατιστικής συνάρτησης γίνεται:

$$n \left[\hat{\theta}_1 - \theta_{1\hat{\gamma}} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\hat{\theta}_2}{\theta_{2\hat{\gamma}}}\right) \right], \quad (2.3.48)$$

όπου $\theta_{1\hat{\gamma}} = -0.5772 + \ln\hat{\gamma}$ και $\theta_{2\hat{\gamma}} = 1.6449$.

Βήμα 8ο Τέλος, θα υπολογίσουμε την ασυμπτωτική διακύμανση από τη σχέση (2.3.36).

Είναι

$$R'W(W'W)^{-1}W'R = \left\{ -\frac{[\psi(1)]^2}{2\gamma\psi'(1)} \right\}^2 \gamma^2 = \frac{[\psi(1)]^4}{4[\psi'(1)]^2}. \quad (2.3.49)$$

Επιπροσθέτως,

$$Var_{\gamma}(G-F) = Var_{\gamma} \left[\ln X + \frac{(\ln X - \theta_{1\gamma})^2}{2\theta_{2\gamma}} - \frac{X}{\gamma} \right], \quad (2.3.50)$$

που ισούται με

$$\begin{aligned} Var_{\gamma}(G-F) = & Var_{\gamma}(\ln X) + \frac{Var_{\gamma}(X)}{\gamma^2} + \frac{Var_{\gamma}(\ln X - \theta_{1\gamma})^2}{4\theta_{2\gamma}^2} - \frac{2Cov_{\gamma}(\ln X, X)}{\gamma} \\ & + \frac{Cov_{\gamma}[\ln X, (\ln X - \theta_{1\gamma})^2]}{\theta_{2\gamma}} - \frac{Cov_{\gamma}[X, (\ln X - \theta_{1\gamma})^2]}{\gamma\theta_{2\gamma}}. \end{aligned} \quad (2.3.51)$$

Στη σχέση (2.3.51) θα πρέπει να προσδιοριστεί η ποσότητα $Var_{\gamma}(\ln X - \theta_{1\gamma})^2$, η οποία είναι ίση με:

$$E_{\gamma}(\ln X)^4 - \left[E_{\gamma}(\ln X)^2 \right]^2 + 4\theta_{1\gamma}^2\theta_{2\gamma} - 4\theta_{1\gamma}Cov_{\gamma}[(\ln X)^2, \ln X].$$

Οπότε, από τη σχέση (2.3.51), λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (2.3.41) και τις Προτάσεις 2 και 4 vi), vii) του Παραρτήματος Α προκύπτει, έπειτα από λίγη άλγεβρα, ότι:

$$\begin{aligned}
Var_{\gamma}(G-F) &= \theta_{2\gamma} - 1 + \frac{E_{\gamma}(\ln X)^4 - [E_{\gamma}(\ln X)^2]^2}{4\theta_{2\gamma}^2} \\
&\quad + \frac{\theta_{2\gamma} - \theta_{1\gamma}}{\theta_{2\gamma}^2} Cov_{\gamma}[(\ln X)^2, \ln X] + \frac{\theta_{1\gamma}^2}{\theta_{2\gamma}} - 2\theta_{1\gamma} - \frac{[\psi(1)]^2}{\theta_{2\gamma}}.
\end{aligned}$$

Όμως,

$$Cov_{\gamma}[(\ln X)^2, \ln X] = E_{\gamma}(\ln X)^3 - E_{\gamma}(\ln X)E_{\gamma}(\ln X)^2.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
Var_{\gamma}(G-F) &= \theta_{2\gamma} - 1 + \frac{E_{\gamma}(\ln X)^4 - [E_{\gamma}(\ln X)^2]^2}{4\theta_{2\gamma}^2} \\
&\quad + \frac{\theta_{2\gamma} - \theta_{1\gamma}}{\theta_{2\gamma}^2} [E_{\gamma}(\ln X)^3 - E_{\gamma}(\ln X)E_{\gamma}(\ln X)^2] \\
&\quad + \frac{\theta_{1\gamma}^2}{\theta_{2\gamma}} - 2\theta_{1\gamma} - \frac{[\psi(1)]^2}{\theta_{2\gamma}}. \tag{2.3.52}
\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.3.49), (2.3.52) και λαμβάνοντας υπόψη την Πρόταση 4 ii), iii), iv), v) του Παραρτήματος Α, προκύπτει, έπειτα από λίγη άλγεβρα, ότι η ασυμπτωτική διακύμανση είναι ίση με

$$n \left\{ \psi'(1) - \frac{1}{2} + \frac{\psi''(1)}{\psi'(1)} + \frac{\psi'''(1)}{4[\psi'(1)]^2} \right\} = 0.2834n. \tag{2.3.53}$$

Βήμα 9ο Υπό την H_g , η στατιστική συνάρτηση του Cox (1961, 1962) είναι η

$$T_g^C = \frac{\sqrt{n} \left[\hat{\theta}_1 - \theta_{1\hat{\gamma}} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\hat{\theta}_2}{\theta_{2\hat{\gamma}}} \right) \right]}{0.5323}, \quad (2.3.54)$$

η οποία ακολουθεί ασυμπτωτικά, υπό την H_g , κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση ίση με τη μονάδα. ■

Κανόννας απόφασης (βλέπε Sayyareh *et al* (2010))

- i) Απορρίπτουμε και τις δύο κατανομές αν $|T_f^C| \geq z_\alpha$ και $|T_g^C| \geq z_\alpha$.
- ii) Δεν απορρίπτουμε κάποια από τις δύο κατανομές αν $|T_f^C| < z_\alpha$ και $|T_g^C| < z_\alpha$.
- iii) Αποδεχόμαστε την εκθετική ενώ απορρίπτουμε την λογαριθμοκανονική αν $|T_f^C| \geq z_\alpha$ και $|T_g^C| < z_\alpha$.
- iv) Αποδεχόμαστε την λογαριθμοκανονική ενώ απορρίπτουμε την εκθετική αν $|T_f^C| < z_\alpha$ και $|T_g^C| \geq z_\alpha$.

Πριν ολοκληρωθεί αυτό το κεφάλαιο, θέλουμε να αναφέρουμε ότι ο παραπάνω έλεγχος αποτέλεσε αντικείμενο μελέτης, μεταξύ άλλων, από τον Jackson (1968). Στο πλαίσιο της μελέτης της σύγκλισης της σ.σ. στην κανονική κατανομή, ο Jackson (1968) έγραψε τη στατιστική συνάρτηση της σχέσης (2.3.33) στη μορφή $T_f^C = \sqrt{n}q(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\gamma})$. Έπειτα, προσέγγισε την αναμενόμενη τιμή της στατιστικής συνάρτησης T_f^C υπό τη λογαριθμοκανονική κατανομή (υπόθεση H_f), αναπτύσσοντας κατά Taylor τη συνάρτηση $q(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\gamma})$ γύρω από το σημείο $(\theta_1, \theta_2, \gamma)$ και παίρνοντας

την αναμενόμενη τιμή της επέκτασης αυτής. Έτσι, λοιπόν, προέκυψε η εξής προσέγγιση για την αναμενόμενης τιμή της στατιστικής συνάρτησης T_f^c :

$$E(T_f^c) = -\frac{e^{\theta_2} - 1 - \theta_2}{2\sqrt{n\left(e^{\theta_2} - 1 - \theta_2 - \frac{1}{2}\theta_2^2\right)}}.$$

Όσον αφορά τη διακύμανση της στατιστικής συνάρτησης T_f^c , μια ανάλογη ανάπτυξη, σύμφωνα με τον Jackson (1968), καταλήγει σε μια αρκετά περίπλοκη έκφραση, η οποία συγκλίνει με πολύ αργό ρυθμό.

Με παρόμοιο τρόπο, για την περίπτωση όπου η εκθετική κατανομή συνιστά τη μηδενική υπόθεση, ο Jackson (1968) προσέγγισε την αναμενόμενη τιμή της στατιστικής συνάρτησης T_g^c της σχέσης (2.3.54) υπό την εκθετική κατανομή. Ειδικότερα, αναπτύσσοντας κατά Taylor τη συνάρτηση

$$\rho(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\gamma}) = \hat{\theta}_1 + \frac{1}{2} \ln \hat{\theta}_2 - \ln \hat{\gamma}, \text{ που εμφανίζεται στον παρονομαστή}$$

της σχέσης (2.3.54), γύρω από το σημείο $(\theta_{1,\gamma}, \theta_{2,\gamma}, \gamma)$ και παίρνοντας την αναμενόμενη τιμή της επέκτασης αυτής, προέκυψε η εξής προσέγγιση για την αναμενόμενη τιμή της στατιστικής συνάρτησης T_g^c :

$$E(T_g^c) = -\frac{1}{0.5324\sqrt{n}} \left\{ 0.5 + \frac{\psi'''(1)}{4[\psi'(1)]^2} \right\} = -\frac{2.067}{\sqrt{n}}.$$

Όσον αφορά τη διακύμανση της στατιστικής συνάρτησης T_g^C , μια ανάλογη ανάπτυξη καταλήγει και πάλι σε μια αρκετά περίπλοκη έκφραση, η οποία συγκλίνει με πολύ αργό ρυθμό.

Επιπρόσθετα, ο Jackson (1968) υπολόγισε την ισχύ των στατιστικών συναρτήσεων T_f^C και T_g^C για τον έλεγχο της λογαριθμοκανονικής κατανομής έναντι της εκθετικής κατανομής, υποθέτοντας ότι οι κατανομές τους υπό τις αντίστοιχες εναλλακτικές είναι κανονικές, μια υπόθεση δεσμευτική.

Για να υπολογιστεί η ισχύς της στατιστικής συνάρτησης T_f^C απαιτείται η εύρεση της αναμενόμενης τιμής και της διακύμανσής της υπό την εναλλακτική υπόθεση H_g , δηλαδή όταν τα δεδομένα ακολουθούν εκθετική κατανομή. Ο Jackson (1968) αναπτύσσοντας κατά Taylor τη συνάρτηση $q(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\gamma})$ γύρω από το σημείο $(\theta_{1,\gamma}, \theta_{2,\gamma}, \gamma)$ και παίρνοντας την αναμενόμενη τιμή και τη διακύμανση της επέκτασης αυτής υπό την H_g , βρήκε ότι

$$E(T_f^C | H_g) = \mu_{fg} = -0.2255\sqrt{n} + 1.7221/\sqrt{n} + O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)$$

και

$$Var(T_f^C | H_g) = \sigma_{fg}^2 = 0.1473 + O(n^{-1}).$$

Καθώς, υπό την H_g , η στατιστική συνάρτηση T_f^C είναι αρνητική, και λαμβάνοντας υπόψη τον Πίνακα 1, προκύπτει ότι η περιοχή απόρριψης του δίπλευρου ελέγχου είναι $T_f^C < -z_{\alpha/2}$, με επίπεδο σημαντικότητας α . Επομένως, η ισχύς είναι:

$$\begin{aligned}
\gamma_f \equiv \gamma_f(n) &= P\left(T_f^C < -z_{\alpha/2} \mid T_g^C \sim N(\mu_{f_g}, \sigma_{f_g}^2)\right) \\
&= P\left(Z \leq \frac{-z_{\alpha/2} + 0.2255\sqrt{n} - 1.7221/\sqrt{n}}{\sqrt{0.1473}}\right) \\
&= \Phi\left(-2.6055z_{\alpha/2} + 0.5876\sqrt{n} - 4.487\frac{1}{\sqrt{n}}\right),
\end{aligned}$$

όπου z_α είναι το α εκατοστιαίο σημείο της τυπικής κανονικής.

Με παρόμοιο τρόπο και αναπτύσσοντας κατά Taylor τη συνάρτηση $\rho(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\gamma})$ γύρω από το σημείο $(\theta_1, \theta_2, \gamma_\theta)$, ο Jackson (1968) παίρνοντας την αναμενόμενη τιμή και τη διακύμανση της επέκτασης αυτής κάτω από την H_g , βρήκε ότι

$$E(T_g^C | H_f) = \mu_{gf} = -1.8783\sqrt{n} \left[\frac{1}{2}(\theta_2 - \ln \theta_2) - 0.3283 + \frac{1}{2n}(3 - e^{\theta_2}) \right] + O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)$$

και

$$Var(T_g^C | H_f) = \sigma_{gf}^2 = 3.529 \left(e^{\theta_2} - \frac{1}{2} - 2\theta_2 \right) + O(n^{-1}).$$

Καθώς, υπό την H_f , η στατιστική συνάρτηση T_g^C είναι αρνητική, και λαμβάνοντας υπόψη τον Πίνακα 1, προκύπτει ότι η περιοχή απόρριψης του δίπλευρου ελέγχου είναι $T_g^C < -z_{\alpha/2}$, με επίπεδο σημαντικότητας α . Επομένως, η ισχύς είναι:

$$\begin{aligned}
\gamma_g \equiv \gamma_g(n) &= P\left(T_g^C \leq -z_{\alpha/2} \middle| T_f^C \sim N(\mu_{gf}, \sigma_{gf}^2)\right) \\
&= P\left(Z \leq \frac{-z + 1.8783\sqrt{n} \left[\frac{1}{2}(\theta_2 - \ln \theta_2) - 0.3283 + \frac{1}{2n}(3 - e^{\theta_2}) \right]}{\sqrt{3.529 \left(e^{\theta_2} - \frac{1}{2} - 2\theta_2 \right)}} \right) \\
&= \Phi \left(\frac{-z_{\alpha/2} + 0.9392(\theta_2 - \ln \theta_2 - 0.6566)\sqrt{n}}{\sqrt{3.529 \left(e^{\theta_2} - \frac{1}{2} - 2\theta_2 \right)}} \right).
\end{aligned}$$

Περαιτέρω σχολιασμός των ιδιοτήτων και της συμπεριφοράς της στατιστικής συνάρτησης του Cox (1961, 1962) θα δοθούν στο Κεφάλαιο 7.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Μεθοδολογία του Atkinson (1970)

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάστηκε η μεθοδολογία του Cox (1961, 1962) για την αντιμετώπιση του προβλήματος του ελέγχου των μη εμφωλευμένων μοντέλων, που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 1. Εκτός από αυτήν τη μέθοδο, ο Cox (1961, 1962) παρέθεσε και κάποιες άλλες ιδέες για την αντιμετώπιση του προβλήματος. Μία από αυτές ήταν η προσέγγιση του περιεκτικού μοντέλου (comprehensive model approach). Η προσέγγιση αυτή βασίζεται στο συνδυασμό των δύο μοντέλων σε ένα γενικό μοντέλο, του οποίου τα δύο υποψήφια μοντέλα αποτελούν ειδικές περιπτώσεις. Παρακινούμενος από αυτήν τη σκέψη, ο Atkinson (1970) ανέπτυξε ένα στατιστικό τεστ για τον έλεγχο των μη εμφωλευμένων μοντέλων, το οποίο απέδειξε ότι είναι ασυμπτωτικά ισοδύναμο, υπό τη μηδενική υπόθεση, με το αντίστοιχο του Cox (1961, 1962).

Η μέθοδος αυτή αποτελεί το αντικείμενο μελέτης αυτού του κεφαλαίου. Στο πλαίσιο αυτό, στην Παράγραφο 3.1 παρατίθενται κάποιες εισαγωγικές έννοιες και ο απαραίτητος συμβολισμός που θα χρησιμοποιηθεί. Στη συνέχεια, στην Παράγραφο 3.2 παρουσιάζεται η μεθοδολογία του Atkinson (1970) και αποδεικνύεται ότι οι ελεγχουσυναρτήσεις των Atkinson (1970) και Cox (1961, 1962) είναι ασυμπτωτικά ισοδύναμες, υπό τη μηδενική υπόθεση. Τέλος, στην Παράγραφο 3.3, η μέθοδος αποσαφηνίζεται μέσω της εφαρμογής της για τον έλεγχο της υπόθεσης αν ένα τ.δ. μπορεί να θεωρηθεί ότι προέρχεται είτε από την λογαριθμοκανονική

είτε από την εκθετική κατανομή, μη γνωρίζοντας ποια από τις δύο τίθεται στη μηδενική υπόθεση και ποια στην εναλλακτική.

3.1 Εισαγωγή

Στην παράγραφο αυτή για τη διευκόλυνση της μελέτης του κεφαλαίου, δίνονται κάποιες εισαγωγικές έννοιες και ο απαραίτητος συμβολισμός που θα χρησιμοποιηθεί.

Εκτός από τη μέθοδο που λεπτομερώς παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, ο Cox (1961, 1962) παρέθεσε και κάποιες άλλες ιδέες για την αντιμετώπιση του προβλήματος που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 1. Ειδικότερα, πρότεινε τη θεώρηση ενός γενικού μοντέλου, που κατασκευάζεται έτσι ώστε να συνδυάζει τις δύο κατανομές και από το οποίο προκύπτει καθεμία απ' αυτές ως ειδική περίπτωση.

Στο πλαίσιο αυτό, ο Cox (1961, 1962) πρότεινε την υιοθέτηση του μοντέλου με σ.π.π. που δίνεται από τη σχέση:

$$c_{\lambda}(x) = \frac{[f(x, \theta)]^{\lambda} [g(x, \gamma)]^{1-\lambda}}{\int [f(z, \theta)]^{\lambda} [g(z, \gamma)]^{1-\lambda} dz}, \quad (3.1.1)$$

όπου λ είναι η λεγόμενη παράμετρος μίξης, με $\lambda \in [0, 1]$, και αντιπροσωπεύει το βάρος που αντιστοιχεί στην υπόθεση $f(x, \theta)$. Εύκολα προκύπτει ότι όταν $\lambda = 1$ έχουμε ότι $c_1(x) = f(x, \theta)$, ενώ όταν $\lambda = 0$ έχουμε ότι $c_0(x) = g(x, \gamma)$.

Παρατήρηση 3.1.1 α) Στη σχέση (3.1.1) χρησιμοποιήθηκε μια εκθετική μίξη των $f(x, \theta)$ και $g(x, \gamma)$. Η υιοθέτηση αυτής της μίξης αποτελεί μία αιτία κριτικής αυτής της μεθόδου (βλέπε, μεταξύ άλλων, ενότητα σχολίων στην εργασία του Atkinson (1970) και Perasan (1981)). Εναλλακτικά, έχει προταθεί να χρησιμοποιηθεί μια γραμμική μίξη αυτών (βλέπε σχέση (2) του Atkinson (1970, σελ. 324)), καθώς και ένας συνδυασμός των δύο αυτών μίξεων (βλέπε Perasan (1982)).

β) Όπως επισημαίνει ο Quandt (1972), το ολοκλήρωμα που δίνεται στον παρονομαστή της σχέσης (3.1.1) γενικά δεν είναι άμεσα υπολογίσιμο, παρά μόνο με αριθμητικές μεθόδους. Αυτό συνεπάγεται ότι η μεγιστοποίηση της αντίστοιχης πιθανοφάνειας είναι κάποιες φορές δύσκολη. ■

Από όσα προηγήθηκαν, προκύπτει ότι αντί να ελέγξουμε αν το τ.δ. $X_1, \dots, X_n$ περιγράφεται ικανοποιητικά από την $f(x, \theta)$ έναντι της $g(x, \gamma)$ ή αντίστροφα, θα ελέγξουμε μία κατάλληλα διατυπωμένη υπόθεση για την τιμή της παραμέτρου λ . Επομένως, ο έλεγχος ανάγεται στον έλεγχο μιας ισοδύναμης υπόθεσης για την παράμετρο λ , ενώ οι τιμές των παραμέτρων θ και γ δεν καθορίζονται υπό την προς έλεγχο υπόθεση. Αυτό σημαίνει ότι οι παράμετροι θ και γ είναι ενοχλητικές (nuisance) παράμετροι.

Οι Bartlett (1953) και Neyman (1959), ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, πρότειναν μια ασυμπτωτικά κανονική στατιστική συνάρτηση για τον έλεγχο της τιμής μιας παραμέτρου, στην παρουσία άλλων ενοχλητικών παραμέτρων. Η μέθοδος αυτή ουσιαστικά εφαρμόζεται από τον Atkinson (1970) για το υπό μελέτη πρόβλημα και η εφαρμογή της αποτελεί αντικείμενο μελέτης της επόμενης ενότητας. Για λόγους πληρότητας στη συνέχεια

παρατίθεται η μέθοδος των Bartlett (1953) και Neyman (1959) (βλέπε και Moran (1970)).

Έστω $X_1, \dots, X_n$ ένα τ.δ. από έναν πληθυσμό με σ.π.π. $c_\lambda(x, \Psi)$, όπου $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k)$ και θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση $H_0: \psi_1 = \psi_{10}$. Ο Neyman (1959) πρότεινε να χρησιμοποιηθεί η στατιστική συνάρτηση

$$T_N = \left[\frac{\partial L}{\partial \psi_1} \right]_{\psi_i} - \sum_{j=2}^k \beta_j \left[\frac{\partial L}{\partial \psi_j} \right]_{\psi_i}, \quad (3.1.2)$$

όπου με L συμβολίζεται ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας, $\psi_i, i=2, \dots, k$ είναι οι αληθινές τιμές των ενοχλητικών παραμέτρων, $\left[\frac{\partial L}{\partial \psi_1} \right]_{\psi_i}$ είναι η παράγωγος του λογαρίθμου της συνάρτησης πιθανοφάνειας ως προς ψ_1 , για $\psi_1 = \psi_{10}$, ενώ $\left[\frac{\partial L}{\partial \psi_j} \right]_{\psi_i}$ είναι η παράγωγος του λογαρίθμου της συνάρτησης πιθανοφάνειας ως προς $\psi_j, j=2, \dots, k$, για τις αληθινές τιμές των ενοχλητικών παραμέτρων. Επιπλέον, β_j είναι οι συντελεστές παλινδρόμησης του πρώτου όρου ως προς τους άλλους, όπως εκτιμώνται από τις δεύτερης τάξης παραγώγους. Δηλαδή, οι συντελεστές αυτοί προκύπτουν από την επίλυση των $k-1$ το πλήθος εξισώσεων

$$-E \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \psi_1 \partial \psi_s} - \sum_{j=2}^k \beta_j \frac{\partial^2 L}{\partial \psi_j \partial \psi_s} \right) = 0, s=2, \dots, k. \quad (3.1.3)$$

Είναι προφανές ότι η στατιστική συνάρτηση της σχέσης (3.1.2) δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή ενός στατιστικού τεστ, καθώς εξαρτάται από τις άγνωστες παραμέτρους $\psi_i, i=2, \dots, k$. Παρόλα αυτά, ο Neyman (1959) απέδειξε ότι αν αντικατασταθούν οι άγνωστες παράμετροι $\psi_2, \dots, \psi_k$, από τους τάξης n συνεπείς εκτιμητές, έστω $\hat{\psi}_2, \hat{\psi}_3, \dots, \hat{\psi}_k$, τότε, για μεγάλα μεγέθη δείγματος, η στατιστική συνάρτηση που προκύπτει, έστω T'_N , είναι στοχαστικά ισοδύναμη με τη στατιστική συνάρτηση T_N . Επιπρόσθετα, ο Neyman (1959) απέδειξε ότι η στατιστική συνάρτηση $T'_N \{Var(T'_N)\}^{-1/2}$ ακολουθεί ασυμπτωτικά τυπική κανονική κατανομή.

Η παραπάνω μεθοδολογία εφαρμόστηκε στο πλαίσιο των μη εμφωλευμένων μοντέλων από τον Atkinson (1970). Η μέθοδος αυτή, η οποία ισχύει υπό τις συνθήκες που δίδονται στο Παράρτημα Β, αποτελεί το αντικείμενο μελέτης της επόμενης ενότητας.

3.2 Η Μεθοδολογία

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιαστεί η μεθοδολογία του Atkinson (1970), όπως αυτή προκύπτει με εφαρμογή της μεθόδου που προτάθηκε από τους Bartlett (1953) και Neyman (1959) για τον έλεγχο της υπόθεσης ότι μια παράμετρος είναι ίση με δοθείσα τιμή, όταν υπάρχουν ενοχλητικές παράμετροι. Επιπλέον, θα αποδειχθεί ότι οι ελεγχοσυναρτήσεις των Atkinson (1970) και Cox (1961, 1962) είναι ασυμπτωτικά ισοδύναμες, υπό τη μηδενική υπόθεση.

Για λόγους απλότητας, αρχικά, σε όσα ακολουθούν υποθέτουμε ότι οι παράμετροι θ και γ είναι μονοδιάστατες, δηλαδή ότι $\theta \in \Theta \subseteq R$ και $\gamma \in \Gamma \subseteq R$.

Από όσα προηγήθηκαν στην προηγούμενη ενότητα γίνεται αντιληπτό ότι ο έλεγχος της υπόθεσης αν το τ.δ. $X_1, \dots, X_n$ προέρχεται από την οικογένεια κατανομών H_f , με κατεύθυνση προς την υπόθεση H_g , ανάγεται σε ένα πρόβλημα ελέγχου αν η παράμετρος $\lambda = \psi_1 = 1$ είναι ίση με δοθείσα τιμή, ενώ οι υπόλοιπες παράμετροι $(\psi_2, \psi_3) = (\theta, \gamma)$ είναι ενοχλητικές, υπό την θεώρηση ότι το τ.δ. προέρχεται από έναν πληθυσμό με σ.π.π. όπως ορίστηκε στη σχέση (3.1.1). Στο σημείο αυτό επισημαίνεται ότι ο έλεγχος αυτός δεν είναι ισοδύναμος με τον αρχικό έλεγχο, καθώς η απόρριψη της υπόθεσης $\lambda = 1$ δεν συνεπάγεται την υιοθέτηση του μοντέλου $\lambda = 1$ και για αυτό το λόγο απαιτείται η αντιστροφή των ρόλων των H_f και H_g .

Ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας L για μία παρατήρηση, έστω X_i , είναι

$$L = \lambda \ln f(x_i, \theta) + (1 - \lambda) \ln g(x_i, \gamma) - \ln \int [f(z, \theta)]^\lambda [g(z, \gamma)]^{1-\lambda} dz.$$

Με βάση τη σ.σ. της σχέσης (3.1.2) θα πρέπει, αρχικά, να προσδιοριστούν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial L}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial L}{\partial \theta}$ και $\frac{\partial L}{\partial \gamma}$, κι έπειτα να υπολογιστούν για τις αληθινές τιμές των θ και γ και για $\lambda = 1$. Υποθέτοντας ότι μπορούμε να αντιστρέψουμε τη σειρά της παραγωγίσης με την ολοκλήρωση έχουμε:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{\int \left\{ \left[f(z, \theta) \right]^\lambda \ln f(z, \theta) \left[g(z, \gamma) \right]^{1-\lambda} - \left[f(z, \theta) \right]^\lambda \left[g(z, \gamma) \right]^{1-\lambda} \ln g(z, \gamma) \right\} dz}{\int \left[f(z, \theta) \right]^\lambda \left[g(z, \gamma) \right]^{1-\lambda} dz} + \ln f(x_i, \theta) - \ln g(x_i, \gamma),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\int \lambda \left[f(z, \theta) \right]^{\lambda-1} \frac{\partial}{\partial \theta} f(z, \theta) \left[g(z, \gamma) \right]^{1-\lambda} dz}{\int \left[f(z, \theta) \right]^\lambda \left[g(z, \gamma) \right]^{1-\lambda} dz} + \lambda \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x_i, \theta) + (1-\lambda) \frac{\partial}{\partial \theta} \ln g(x_i, \gamma),$$

και

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma} = - \frac{\lambda \int \left[f(z, \theta) \right]^\lambda (1-\lambda) \left[g(z, \gamma) \right]^{-\lambda} \frac{\partial}{\partial \gamma} g(z, \gamma) dz}{\int \left[f(z, \theta) \right]^\lambda \left[g(z, \gamma) \right]^{1-\lambda} dz} + (1-\lambda) \frac{\partial}{\partial \gamma} \ln g(x_i, \gamma).$$

Υπό την υπόθεση ότι $\lambda=1$ και χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς των (2.1.4) και (2.1.5), προκύπτει ότι:

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \lambda} \right]_{\theta, \gamma} = F_i - G_i - E_\theta (F - G), \quad \left[\frac{\partial L}{\partial \theta} \right]_{\theta, \gamma} = F_{i, \theta} \text{ και } \left[\frac{\partial L}{\partial \gamma} \right]_{\theta, \gamma} = 0.$$

Επιπλέον, για $\lambda=1$, χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς των σχέσεων (2.1.4) και (2.1.5), έπειτα από λίγη άλγεβρα, προκύπτει ότι ο συντελεστής β_2 είναι ίσος με

$$\beta_2 = \frac{E_\theta \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial \theta} \right]}{E_\theta \left[\frac{\partial^2 L}{\partial^2 \theta} \right]} = \frac{Cov_\theta(F-G, F_\theta)}{Var_\theta(F_\theta)}.$$

Άρα,

$$T_N = \sum_{i=1}^n \left\{ F_i - G_i - E_\theta(F-G) - \frac{Cov_\theta(F-G, F_\theta)}{Var_\theta(F_\theta)} F_{i,\theta} \right\},$$

και

$$Var_\theta(T_N) = n \left[Var_\theta(F-G) - \frac{Cov_\theta^2(F-G, F_\theta)}{Var_\theta(F_\theta)} \right].$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, καταλήγουμε στην ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 3.2.1 (Atkinson (1970)) Έστω $X_1, \dots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με σ.π.π. $f(x, \theta)$ υπό την H_f και $g(x, \gamma)$ υπό την H_g , με $\theta \in \Theta \subseteq R$ και $\gamma \in \Gamma \subseteq R$. Η στατιστική συνάρτηση

$$T_f^A = \frac{\sum_{i=1}^n \left\{ F_i - G_i - E_\theta(F-G) - \frac{Cov_\theta(F-G, F_\theta)}{Var_\theta(F_\theta)} F_{i,\theta} \right\}}{\left\{ n \left[Var_\theta(F-G) - \frac{Cov_\theta^2(F-G, F_\theta)}{Var_\theta(F_\theta)} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}} \stackrel{\alpha\sigma\upsilon\mu.}{\underset{H_f}{\sim}} N(0,1), \quad (3.2.1)$$

όπου F_i , $F_{i,\theta}$ και G_i , οι ποσότητες όπως αυτές ορίστηκαν στις σχέσεις (2.1.4) και (2.1.5). ■

Είναι προφανές ότι η στατιστική συνάρτηση T_f^A εξαρτάται από τις άγνωστες παραμέτρους θ και γ κι επομένως, για να χρησιμοποιηθεί στην πράξη, σύμφωνα με τον Neyman (1959), αρκεί να αντικατασταθούν με εκτιμητές που είναι συνεπείς τάξης n .

Στο πλαίσιο αυτό, ο Atkinson (1970) προτείνει την αντικατάσταση της παραμέτρου θ , από τον Ε.Μ.Π. $\hat{\theta}$ ο οποίος, λόγω των συνθηκών του Παραρτήματος Β, ικανοποιεί τη σχέση: $\sum_{i=1}^n F_{i,\hat{\theta}} = 0$.

Όσον αφορά, όμως, την εκτίμηση της παραμέτρου γ , υπό την υπόθεση ότι $\lambda=1$, η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι ανεξάρτητη της γ και δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της Μέγιστης Πιθανοφάνειας. Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό στη βιβλιογραφία ως πρόβλημα του Davies (1977) και αντιμετωπίζεται υπολογίζοντας τον Ε.Μ.Π. της γ , έστω $\hat{\gamma}$, όταν $\lambda=0$, δηλαδή υπό την H_g . Τότε προτείνεται η αντικατάσταση της άγνωστης παραμέτρου γ από την $\gamma_{\hat{\theta}}$, όπου με $\gamma_{\hat{\theta}}$ συμβολίζεται το όριο στο οποίο συγκλίνει, υπό την H_f , ο Ε.Μ.Π. $\hat{\gamma}$. Οπότε, ο αριθμητής της στατιστικής συνάρτησης (3.2.1) γίνεται:

$$T_f^{A'}(\gamma_{\hat{\theta}}) = \sum_{i=1}^n \left\{ F_i(\hat{\theta}) - G_i(\gamma_{\hat{\theta}}) - E_{\hat{\theta}} \left[F(\hat{\theta}) - G(\gamma_{\hat{\theta}}) \right] \right\}. \quad (3.2.2)$$

Παρατήρηση 3.2.1 Σύμφωνα με τις (3.2.1) και (3.2.2) το στατιστικό του Atkinson (1970) για τον έλεγχο μη εμφωλευμένων υποθέσεων είναι πανομοιότυπο με το στατιστικό του Cox (1961,1962).

Συγκεκριμένα, ο αριθμητής του στατιστικού του Cox (1961, 1962) δίνεται από τη σχέση:

$$T_f^{C'}(\hat{\gamma}) = \sum_{i=1}^n \left\{ F_i(\hat{\theta}) - G_i(\hat{\gamma}) - E_{\hat{\theta}} \left[F(\hat{\theta}) - G(\gamma_{\hat{\theta}}) \right] \right\}. \quad (3.2.3)$$

Η διαφοροποίηση έγκειται στο γεγονός ότι υπό την H_f , ο αριθμητής του στατιστικού του Atkinson (1970) έχει αναμενόμενη τιμή ίση με το μηδέν, αν η πραγματική τιμή της παραμέτρου θ είναι γνωστή, ενώ ο αριθμητής του στατιστικού του Cox (1961, 1962) έχει αυτήν την ιδιότητα μόνο ασυμπτωτικά, καθώς ο $\hat{\gamma}$ συγκλίνει κατά πιθανότητα στο γ_{θ} . Επιπλέον, όταν η άγνωστη παράμετρος θ εκτιμάται, κανένα από τα δύο στατιστικά δεν είναι αμερόληπτα, και μάλιστα προκύπτει ότι το ποσό μεροληψίας του στατιστικού του Atkinson (1970) είναι μικρότερο (βλέπε Atkinson (1970), σελ. 335).

Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη παρατήρηση, οι στατιστικές συναρτήσεις των Cox (1961, 1962) και Atkinson (1970) διαφοροποιούνται μόνο ως προς τον τρόπο εκτίμησης της άγνωστης παραμέτρου γ . Ωστόσο, προκύπτει, όπως θα αποδειχθεί στην επόμενη πρόταση, ότι είναι ασυμπτωτικά ισοδύναμες, υπό τη μηδενική υπόθεση.

Θεώρημα 3.2.1 (Atkinson (1970)) Οι στατιστικές συναρτήσεις των Atkinson (1970) και Cox (1961, 1962) είναι ασυμπτωτικά ισοδύναμες, υπό τη μηδενική υπόθεση.

Απόδειξη (Atkinson (1970))

Θεωρούμε τη διαφορά των αριθμητών των δύο στατιστικών συναρτήσεων:

$$T_f^{A'}(\gamma_{\hat{\theta}}) - T_f^{C'}(\hat{\gamma}) = \sum_{i=1}^n \{G_i(\hat{\gamma}) - G_i(\gamma_{\hat{\theta}})\}. \quad (3.2.4)$$

Αναπτύσσοντας κατά Taylor την ποσότητα $G_i(\gamma_{\hat{\theta}})$ γύρω από το $\hat{\gamma}$, η σχέση (3.2.4) γίνεται:

$$T_f^{A'}(\gamma_{\hat{\theta}}) - T_f^{C'}(\hat{\gamma}) = -(\gamma_{\hat{\theta}} - \hat{\gamma}) \sum_{i=1}^n G_i'(\hat{\gamma}) - \frac{1}{2}(\gamma_{\hat{\theta}} - \hat{\gamma})^2 \sum_{i=1}^n G_i''(\hat{\gamma}) + \dots$$

Καθώς $\hat{\gamma}$ είναι ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου γ , λόγω των συνθηκών του

Παραρτήματος Β, ισχύει ότι: $\sum_{i=1}^n G_i(\hat{\gamma}) = 0$. Άρα,

$$T_f^{A'}(\gamma_{\hat{\theta}}) - T_f^{C'}(\hat{\gamma}) = -\frac{1}{2}(\gamma_{\hat{\theta}} - \hat{\gamma})^2 \sum_{i=1}^n G_i''(\hat{\gamma}) + \dots \quad (3.2.5)$$

Είναι γνωστό (βλέπε Λήμμα 2.1.1.) ότι:

$$Var_{\theta}(\hat{\gamma}) = - \left[\sum_{i=1}^n G_i''(\hat{\gamma}) \right]^{-1}. \quad (3.2.6)$$

Επομένως, η ποσότητα $-\frac{1}{2}(\gamma_{\hat{\theta}} - \hat{\gamma})^2 \sum_{i=1}^n G_i''(\hat{\gamma})$ συγκλίνει κατά πιθανότητα στο μηδέν.

Επιπρόσθετα, οι ποσότητες $\frac{1}{\sqrt{n}}T_f^{A'}(\gamma_{\hat{\theta}})$ και $\frac{1}{\sqrt{n}}T_f^{C'}(\hat{\gamma})$ συγκλίνουν κατά πιθανότητα στο μηδέν, είναι δηλαδή τάξης 1 κατά πιθανότητα, οπότε οι δύο στατιστικές συναρτήσεις είναι ασυμπτωτικά ισοδύναμες, υπό τη μηδενική υπόθεση. ■

Παρατήρηση 3.2.2 Ο Pereira (1977, σελ. 111) παρατήρησε ότι παρότι υπό την μηδενική υπόθεση τα δύο στατιστικά τεστ είναι ασυμπτωτικά ισοδύναμα, δεν υπάρχει λόγος να αναμένουμε να έχουν ίδια συμπεριφορά υπό την εναλλακτική υπόθεση. Επιπλέον, ο Pereira (1977) απέδειξε ότι εν αντιθέσει με το τεστ του Cox (1961, 1962), το τεστ του Atkinson (1970) δεν είναι πάντοτε συνεπές και ο Dastoor (1983) δίνει επαρκή και αναγκαία συνθήκη έτσι ώστε να είναι. Τέλος, εν αντιθέσει με το τεστ του Cox (1961, 1962), το τεστ του Atkinson (1970) δεν συγκλίνει κατά πιθανότητα πάντοτε σε μια αρνητική τιμή και για αυτό το λόγο, όπως επισημαίνει ο Dastoor (1983) πρέπει να χρησιμοποιείται δίπλευρος έλεγχος.

Σε όσα προηγήθηκαν, το ενδιαφέρον επικεντρώθηκε στην εύρεση ενός τρόπου ελέγχου έχοντας ως μηδενική υπόθεση την H_f και εναλλακτική την H_g , υπό τις υποθέσεις ότι $X_1, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές και οι άγνωστες παράμετροι θ και γ είναι τέτοιες ώστε $\theta \in \Theta \subseteq R$ και $\gamma \in \Gamma \subseteq R$. Τα αποτελέσματα αυτά είναι δυνατό να γενικευτούν θεωρώντας είτε ότι $X_1, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες άλλα όχι και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, είτε ότι οι άγνωστες παράμετροι είναι διανυσματικές.

Καθώς στη μεταπτυχιακή αυτή διατριβή το ενδιαφέρον επικεντρώνεται μόνο στην περίπτωση που οι $X_1, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, για λόγους πληρότητας παρατίθενται τα αποτελέσματα της δεύτερης γενίκευσης.

Πρόταση 3.2.2 (Atkinson (1970)) Έστω $X_1, \dots, X_n$ ένα τ.δ. από έναν πληθυσμό με σ.π.π. $f(x, \theta)$ υπό την H_f και $g(x, \gamma)$ υπό την H_g , με $\theta \in \Theta \subseteq R^p$ και $\gamma \in \Gamma$. Η στατιστική συνάρτηση

$$T_f^A = \sum_{i=1}^n \left\{ F_i(\hat{\theta}) - G_i(\gamma_{\hat{\theta}}) - E_{\theta} [F(\hat{\theta}) - G(\gamma_{\hat{\theta}})] - Z_i (Z'Z)^{-1} Z'Y \right\} \quad (3.2.7)$$

ακολουθεί, υπό την H_f , ασυμπτωτικά κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση:

$$n \left[\text{Var}_{\theta} (F - G) - Y'Z (Z'Z)^{-1} Z'Y \right], \quad (3.2.8)$$

όπου $Y, Z_i, Z'Z$ και $Z'Y$ οι ποσότητες όπως αυτές ορίστηκαν στις σχέσεις (2.2.30), (2.2.32), (2.2.34) και (2.2.35) αντίστοιχα, με

$$F = \ln f(x, \theta), G = \ln g(x, \gamma_{\theta}) \text{ και } F_{\theta_j} = \frac{\partial \ln f(x, \theta)}{\partial \theta_j}, j = 1, \dots, p. \blacksquare$$

Τέλος, η ενότητα αυτή ολοκληρώνεται με την παράθεση των αντίστοιχων προτάσεων όταν το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στην εύρεση ενός τρόπου ελέγχου έχοντας ως μηδενική υπόθεση την H_g και εναλλακτική την H_f .

Πρόταση 3.2.3 (Atkinson (1970)) Έστω $X_1, \dots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με σ.π.π. $f(x, \theta)$ υπό την H_f και $g(x, \gamma)$ υπό την H_g , με $\theta \in \Theta \subseteq R$ και $\gamma \in \Gamma \subseteq R$. Η στατιστική συνάρτηση

$$T_g^A = \left\{ L_g(\hat{\gamma}) - L_f(\theta_{\hat{\gamma}}) \right\} - E_{\hat{\gamma}} \left\{ L_g(\hat{\gamma}) - L_f(\theta_{\hat{\gamma}}) \right\} \quad (3.2.9)$$

ακολουθεί, υπό την H_g , ασυμπτωτικά κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση

$$n \left[Var_{\gamma}(G - F) - \frac{Cov_{\gamma}^2(G - F, G_{\gamma})}{Var_{\gamma}(G_{\gamma})} \right], \quad (3.2.10)$$

υπό τον όρο ότι αυτή είναι θετική, με F , G και G_{γ} οι ποσότητες όπως αυτές ορίστηκαν στις σχέσεις (2.1.4) και (2.1.5), αντίστοιχα.

Πρόταση 3.2.4 (Atkinson (1970)) Έστω $X_1, \dots, X_n$ ένα τ.δ. από έναν πληθυσμό με σ.π.π. $f(X, \theta)$ υπό την H_f και $g(X, \gamma)$ υπό την H_g , με $\theta \in \Theta$ και $\gamma \in \Gamma \subseteq R^p$. Η στατιστική συνάρτηση

$$T_g^A = \sum_{i=1}^n \left\{ G_i(\hat{\gamma}) - F_i(\theta_{\hat{\gamma}}) - E_{\gamma} \left[G(\hat{\gamma}) - F(\theta_{\hat{\gamma}}) \right] - W_i (W'W)^{-1} W'R \right\} \quad (3.2.11)$$

ακολουθεί, υπό την H_g , ασυμπτωτικά κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση:

$$n\left\{Var_{\gamma}(G-F)-R'W(W'W)^{-1}W'R\right\}, \quad (3.2.12)$$

όπου R , W , $W'W$ και $W'R$ οι ποσότητες όπως αυτές ορίστηκαν στις σχέσεις (2.2.41), (2.2.42), (2.2.43) και (2.2.44), αντίστοιχα, με $G = \ln f(x, \gamma)$, $F = \ln g(x, \theta_{\gamma})$ και $G_{\gamma_j} = \frac{\partial \ln g(x, \gamma)}{\partial \gamma_j}$, $j = 1, \dots, p$.

Παρατήρηση 3.2.3 α) Η στατιστική συνάρτηση του Atkinson (1970) και η ασυμπτωτική διακύμανσή της, όπως αυτές προσδιορίστηκαν σε καθεμία από τις παραπάνω προτάσεις, εξαρτώνται από τις άγνωστες παραμέτρους θ και γ . Είναι προφανές ότι για την εφαρμογή της μεθοδολογίας οι παράμετροι θ και γ αντικαθίστανται από τους εκτιμητές $\hat{\theta}$ και $\hat{\gamma}_{\hat{\theta}}$ (ή $\hat{\theta}_{\hat{\gamma}}$ και $\hat{\gamma}$), αντίστοιχα.

β) Σύμφωνα με τον Atkinson (1970, σελ. 335), όταν εκτιμάται η άγνωστη παράμετρος θ , οι στατιστικές συναρτήσεις των Cox (1961, 1962) και Atkinson (1970), υπό την H_f , δεν είναι αμερόληπτες, με τη σ.σ. του Atkinson (1970) να είναι περισσότερο αμερόληπτη από αυτή του Cox (1961, 1962). Αυτό έχει ως συνέπεια η ασυμπτωτική διακύμανση που δίνεται στη σχέση (3.2.8) να προσεγγίζεται πιο γρήγορα για τη σ.σ. T_f^A από ότι για την T_f^C , καθώς θεωρητικά η διακύμανση αυτή υπολογίστηκε υποθέτοντας ότι και οι δύο σ.σ. είναι αμερόληπτες.

3.3 Ειδική Περίπτωση

Στην ενότητα αυτή θα αποσαφηνιστεί η μεθοδολογία του Atkinson (1970) στην περίπτωση που τα δύο μη εμφωλευμένα

μοντέλα είναι αυτά της λογαριθμοκανονικής και της εκθετικής κατανομής (βλέπε ενότητα 2.3). Καθώς δεν ξέρουμε ποια από τις δύο κατανομές είναι αυτή που τίθεται στη μηδενική υπόθεση και ποια αυτή που τίθεται στην εναλλακτική, στη συνέχεια εναλλάσσονται οι ρόλοι αυτοί στα δύο παραδείγματα που ακολουθούν.

Παράδειγμα 3.3.1 Ακολουθώντας τη μεθοδολογία του Atkinson (1970) στο παράδειγμα αυτό θα ελεγχτεί η μηδενική υπόθεση ότι τα δεδομένα προέρχονται από τη λογαριθμοκανονική κατανομή έναντι της εναλλακτικής ότι προέρχονται από την εκθετική κατανομή.

Βήμα 1^ο – Βήμα 3^ο Όμοια με το Βήμα 1^ο – Βήμα 3^ο της μεθοδολογίας του Cox (1961, 1962), προσδιορίζονται οι Ε.Μ.Π. $\hat{\theta}$ και $\hat{\gamma}$ των παραμέτρων θ και γ υπό την H_f και H_g , αντίστοιχα. Επίσης, προσδιορίζεται για δοθέν θ , το όριο γ_θ , στο οποίο ο Ε.Μ.Π. $\hat{\gamma}$ της παραμέτρου γ , συγκλίνει, υπό την H_f , κατά πιθανότητα. Τέλος, προσδιορίζονται οι ποσότητες $F_i = \ln f(x_i, \theta)$, $G_i = \ln g(x_i, \gamma)$ και η $E_\theta(F - G)$.

Βήμα 4^ο Υπολογισμός του αριθμητή της εκάστοτε στατιστικής συνάρτησης που θα χρησιμοποιηθεί με βάση όσα διατυπώθηκαν στις Προτάσεις 3.2.1 και 3.2.2, ανάλογα με τη διάσταση της παραμέτρου υπό την H_f .

Επομένως, απαιτείται ο υπολογισμός του

$$T_f^{A'}(\gamma) = \sum_{i=1}^n \left\{ F_i(\hat{\theta}) - G_i(\gamma) - E_{\hat{\theta}} \left[F(\hat{\theta}) - G(\gamma_{\hat{\theta}}) \right] \right\}. \quad (3.3.1)$$

Από το βήμα 2^ο της μεθοδολογίας του Cox (1961, 1962), κι έπειτα από λίγη άλγεβρα, προκύπτει ότι:

$$\sum_{i=1}^n \left\{ F_i(\hat{\theta}) - G_i(\gamma_{\hat{\theta}}) \right\} = -n\hat{\theta}_1 - \frac{n}{2} \ln(2\pi\hat{\theta}_2) - \frac{n}{2} + n \ln \gamma_{\hat{\theta}} + n \frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\hat{\theta}}}. \quad (3.3.2)$$

Άρα, συνδυάζοντας τις σχέσεις (3.3.2) και (2.3.29) είναι:

$$T_f^{A'}(\gamma_{\hat{\theta}}) = n \left[-\hat{\theta}_1 - 1 + \ln(e^{\hat{\theta}_1 + 0.5\hat{\theta}_2}) + \frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\hat{\theta}}} - \frac{\hat{\theta}_2}{2} \right] = n \left(\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\hat{\theta}}} - 1 \right). \quad (3.3.3)$$

Βήμα 5^ο Υπολογισμός της ασυμπτωτικής διακύμανσης της στατιστικής συνάρτησης που χρησιμοποιήθηκε στο προηγούμενο βήμα. Αυτή ισούται με αυτή της στατιστικής συνάρτησης του Cox (1961, 1962) και όπως έχει αποδειχθεί στο Παράδειγμα 2.3.1 δίνεται από τη σχέση:

$$n \left(e^{\theta_2} - 1 - \theta_2 - \frac{1}{2} \theta_2^2 \right). \quad (3.3.4)$$

Βήμα 6^ο Προσδιορισμός της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου, λαμβάνοντας υπόψη και την Παρατήρηση 3.2.2 α).

Για τον έλεγχο της υπόθεσης ότι το τυχαίο δείγμα προέρχεται από τη λογαριθμοκανονική κατανομή χρησιμοποιούμε τη στατιστική συνάρτηση:

$$T_f^A = \frac{\sqrt{n} \left(\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\hat{\theta}}} - 1 \right)}{\left\{ e^{\hat{\theta}_2} - 1 - \hat{\theta}_2 - \frac{1}{2} \hat{\theta}_2^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.3.5)$$

η οποία, υπό την H_f , ακολουθεί ασυμπτωτικά τυπική κανονική κατανομή.

Παράδειγμα 3.3.2 Όμοια με το Παράδειγμα 2.3.2, σύμφωνα με τη μεθοδολογία του Atkinson (1970), θα ελέγξουμε τη μηδενική υπόθεση ότι τα δεδομένα μας προέρχονται από την εκθετική κατανομή έναντι της εναλλακτικής ότι προέρχονται από τη λογαριθμοκανονική κατανομή.

Βήμα 1^ο – Βήμα 3^ο Όμοια με το Βήμα 1^ο -3^ο της μεθοδολογίας του Cox (1961, 1962), προσδιορίζονται οι Ε.Μ.Π. $\hat{\theta}$ και $\hat{\gamma}$ των παραμέτρων θ και γ υπό την με H_f και H_g , αντίστοιχα. Επίσης, προσδιορίζεται για δοθέν γ , το όριο θ_γ , στο οποίο ο Ε.Μ.Π. $\hat{\theta}$ της παραμέτρου θ , συγκλίνει, υπό την H_f , κατά πιθανότητα. Τέλος, προσδιορίζονται οι ποσότητες $F_i = \ln f(x_i, \theta)$, $G_i = \ln g(x_i, \gamma)$ και η $E_\gamma(G - F)$.

Βήμα 4^ο Υπολογισμός του αριθμητή της στατιστικής συνάρτησης του Atkinson (1970), που δίνεται από τη σχέση

$$T_g^{A'}(\theta_{\hat{\gamma}}) = \sum_{i=1}^n \left\{ G_i(\hat{\gamma}) - F_i(\theta_{\hat{\gamma}}) - E_{\hat{\gamma}}[G(\hat{\gamma}) - F(\theta_{\hat{\gamma}})] \right\}.$$

Προκύπτει, με λίγη άλγεβρα, από τις σχέσεις (2.3.5), (2.3.6), (2.3.43) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\theta_{2\hat{\gamma}} = \psi'(1)$ και

$$\sum_{i=1}^n (\ln X_i - \hat{\theta}_1) = 0, \text{ ότι:}$$

$$T_g^{A'}(\boldsymbol{\theta}_{\hat{\gamma}}) = n \left\{ \hat{\theta}_1 - \theta_{1\hat{\gamma}} - \frac{1}{2} + \frac{\hat{\theta}_2}{2\psi'(1)} + \frac{(\hat{\theta}_1 - \theta_{1\hat{\gamma}})^2}{2\psi'(1)} \right\}. \quad (3.3.6)$$

Βήμα 5ο Υπολογισμός της ασυμπτωτικής διακύμανσης του

$$T_g^{A'}(\boldsymbol{\theta}_{\hat{\gamma}}) = \sum_{i=1}^n \left\{ G_i(\hat{\gamma}) - F_i(\boldsymbol{\theta}_{\hat{\gamma}}) - E_{\hat{\gamma}}[G(\hat{\gamma}) - F(\boldsymbol{\theta}_{\hat{\gamma}})] \right\}.$$

Η διακύμανση αυτή είναι ίση με αυτή της στατιστικής συνάρτησης του Cox (1961, 1962) και όπως έχει αποδειχθεί στο παράδειγμα 2.3.2 δίνεται από τη σχέση

$$n \left\{ \psi'(1) - \frac{1}{2} + \frac{\psi''(1)}{\psi'(1)} + \frac{\psi'''(1)}{4[\psi'(1)]^2} \right\} = 0.2834n. \quad (3.3.7)$$

Βήμα 6ο Προσδιορισμός της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου.

Για τον έλεγχο της υπόθεσης ότι το τυχαίο δείγμα προέρχεται από την εκθετική κατανομή χρησιμοποιούμε τη στατιστική συνάρτηση

$$T_g^A = \frac{\hat{\theta}_1 - \theta_{1\hat{\gamma}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\psi'(1)} \left\{ \hat{\theta}_2 + (\hat{\theta}_1 - \theta_{1\hat{\gamma}})^2 \right\}}{0.532 / \sqrt{n}}, \quad (3.3.8)$$

η οποία, υπό την H_g , ακολουθεί ασυμπτωτικά τυπική κανονική κατανομή.

Κανόνας απόφασης: Έχοντας, πλέον, λάβει ως μηδενική υπόθεση κάθε μία εκ των δύο υποθέσεων, τη λογαριθμοκανονική και την εκθετική, εναλλάξ, ο κανόνας απόφασης προσδιορίζεται όπως έχει διατυπωθεί στον Πίνακα 1 της ενότητας 2.1 με κατάλληλη αντικατάσταση και λαμβάνοντας υπόψη την Παρατήρηση 3.2.2.

Πιο συγκεκριμένα:

- i) Αν $|T_f^A| \geq z_\alpha$ απορρίπτουμε τη λογαριθμοκανονική κατανομή.
- ii) Αν $|T_f^A| < z_\alpha$ αποδεχόμαστε τη λογαριθμοκανονική κατανομή.
- iii) Αν $|T_g^A| \geq z_\alpha$ απορρίπτουμε την εκθετική κατανομή.
- iv) Αν $|T_g^A| < z_\alpha$ αποδεχόμαστε την εκθετική κατανομή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Μεθοδολογία των Erps *et al.* (1982)

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστεί η μεθοδολογία των Erps *et al.* (1982) για την αντιμετώπιση του προβλήματος του ελέγχου των μη εμφωλευμένων μοντέλων. Η μεθοδολογία αυτή βασίζεται στην εμπειρική ροπογεννήτρια συνάρτηση. Στο πλαίσιο αυτό, στην Παράγραφο 4.1 παρατίθενται κάποιες εισαγωγικές έννοιες και ο απαραίτητος συμβολισμός που θα χρησιμοποιηθεί. Στη συνέχεια, στην Παράγραφο 5.2 παρουσιάζεται η μεθοδολογία των Erps *et al.* (1982), ενώ στην Παράγραφο 5.3 η μέθοδος αποσαφηνίζεται μέσω του ελέγχου της υπόθεσης αν ένα τ.δ μπορεί να θεωρηθεί ότι προέρχεται είτε από την λογαριθμοκανονική είτε από την εκθετική κατανομή.

4.1 Εισαγωγή

Στην ενότητα αυτή, χρησιμοποιώντας το συμβολισμό του δευτέρου κεφαλαίου και υπό της συνθήκες του Παραρτήματος Β, παρατίθενται κάποιες εισαγωγικές έννοιες χρήσιμες για την παρουσίαση της μεθοδολογίας των Erps *et al.* (1982).

Καθώς η μεθοδολογία που προτάθηκε από τον Cox (1961, 1962) είχε διαπιστωθεί με μελέτες προσομοίωσης (βλέπε Pereira (1977) και Κεφάλαιο 7 της μεταπτυχιακής διατριβής) ότι δε δίνει πάντοτε καλά αποτελέσματα, οι Erps *et al.* (1982) πρότειναν μια εναλλακτική μεθοδολογία που στηρίζεται στην εμπειρική ροπογεννήτρια συνάρτηση. Η παρακίνηση τους να προτείνουν μια μεθοδολογία που βασίζεται στην εμπειρική ροπογεννήτρια συνάρτηση προέκυψε κυρίως λόγω του θεωρήματος του μονοσήμαντου των ροπογεννητριών, από το οποίο προκύπτει ότι

υπάρχει μια ένα-προς-ένα αντιστοιχία μεταξύ της ροπογεννήτριας και της κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής.

Στο πλαίσιο αυτό, αν θεωρήσουμε ότι η H_f διαδραματίζει το ρόλο της μηδενικής υπόθεσης, προκύπτει ότι ο έλεγχος της H_f έναντι της H_g είναι ισοδύναμος με τον έλεγχο της

$$H'_f : M_x(t) = M_f(t, \theta) \quad (4.1.1)$$

έναντι της

$$H'_g : M_x(t) = M_g(t, \gamma), \quad (4.1.2)$$

όπου με $M_f(t, \theta)$ και $M_g(t, \gamma)$ συμβολίζονται οι ροπογεννήτριες συναρτήσεις, όταν η τ.μ. ακολουθεί την $f(x, \theta)$ και την $g(x, \gamma)$, αντίστοιχα, υπό την προϋπόθεση ότι οι ροπογεννήτριες αυτές υπάρχουν, ενώ $M_x(t)$ είναι η άγνωστη ροπογεννήτρια της τ.μ. X .

Είναι εύκολα αντιληπτό ότι, καθώς η ποσότητα $M_x(t)$ είναι άγνωστη, για τη διενέργεια του υπό μελέτη ελέγχου θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί ένας εκτιμητής της, ο οποίος εκτιμητής θα ήταν επιθυμητό να έχει κάποιες κάποιες καλές ιδιότητες π.χ. να είναι συνεπής.

Στο επόμενο λήμμα αποδεικνύεται ότι η $M_x(t)$ μπορεί να εκτιμηθεί με συνέπεια (consistently estimated) από την εμπειρική ροπογεννήτρια συνάρτηση που δίνεται από τη σχέση:

$$m(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{tx_j}. \quad (4.1.3)$$

Λήμμα 4.1.1 Η εμπειρική ροπογεννήτρια συνάρτηση $m(t)$ είναι συνεπής εκτιμητής της ροπογεννήτριας συνάρτησης $M_x(t)$.

Απόδειξη

Για την εμπειρική ροπογεννήτρια συνάρτηση ισχύει ότι:

$$E[m(t)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(e^{tx_j}) = M_x(t) \quad (4.1.4)$$

και

$$Var[m(t)] = Var\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{tx_j}\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \left[E(e^{2tx_j}) - E^2(e^{tx_j}) \right],$$

ή ισοδύναμα,

$$Var[m(t)] = \frac{1}{n} [M_x(2t) - M_x^2(t)]. \quad (4.1.5)$$

Από τις σχέσεις (4.1.4) και (4.1.5) συνεπάγεται ότι η εμπειρική ροπογεννήτρια συνάρτηση $m(t)$ είναι συνεπής εκτιμητής της $M_x(t)$, καθώς $E[m(t)] = M_x(t)$ και $Var[m(t)] \rightarrow 0$, καθώς το $n \rightarrow \infty$. ■

Με βάση το παραπάνω λήμμα είναι φυσικό ο στατιστικός έλεγχος της υπό μελέτης μηδενικής υπόθεσης να βασίζεται στην εμπειρική ροπογεννήτρια συνάρτηση $m(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{tx_j}$. Επομένως, το επόμενο βήμα είναι ο προσδιορισμός της κατανομής της $m(t)$. Στο

ακόλουθο λήμμα προσδιορίζεται η ασυμπτωτική κατανομή αυτής της στατιστικής συνάρτησης. Η απόδειξη αυτού του αποτελέσματος προκύπτει άμεσα με εφαρμογή του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος και παραλείπεται.

Λήμμα 4.1.2 (Epps *et al.* (1982)) Η εμπειρική ροπογεννήτρια συνάρτηση ακολουθεί, ασυμπτωτικά κανονική κατανομή με μέση τιμή $M_X(t)$ και διακύμανση $n^{-1}[M_X(2t) - M_X^2(t)]$, για κάθε t τέτοιο ώστε $0 < n^{-1}[M_X(2t) - M_X^2(t)] < \infty$.

Επομένως προκύπτει άμεσα το ακόλουθο Πόρισμα:

Πόρισμα 4.1.1 Υπό την υπόθεση ότι η $M_f(t, \theta)$ ορίζεται, και $0 < M_f(2t, \theta) - M_f^2(t, \theta) < \infty$ η στατιστική συνάρτηση

$$[m(t) - M_f(t, \theta)] \quad (4.1.6)$$

ακολουθεί ασυμπτωτικά, υπό τη μηδενική υπόθεση H_f , κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση

$$\frac{M_f(2t, \theta) - M_f^2(t, \theta)}{n}. \quad (4.1.7)$$

Είναι άμεσα αντιληπτό ότι η στατιστική συνάρτηση του Πορίσματος 4.1.1 (βλέπε σχέση (4.1.6)) δεν μπορεί να εφαρμοστεί στην πράξη, καθώς εξαρτάται από την άγνωστη παράμετρο θ . Για το λόγο αυτό, προτείνεται η αντικατάσταση της άγνωστης παραμέτρου θ από τον Ε.Μ.Π. $\hat{\theta}$. Τότε καταλήγουμε στη στατιστική συνάρτηση $m(t) - M_f(t, \hat{\theta})$, την οποία πρότειναν οι Epps *et al.*

(1982) για την αντιμετώπιση του προβλήματος του ελέγχου των μη εμφωλευμένων μοντέλων. Η εύρεση της κατανομής αυτής της σ.σ. και η κατασκευή ενός κριτηρίου ελέγχου της υπό μελέτη υπόθεσης αποτελούν το αντικείμενο μελέτης της επόμενης ενότητας.

4.2 Η μεθοδολογία

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιαστεί η μεθοδολογία των Erps *et al.* (1982) για την αντιμετώπιση του προβλήματος του ελέγχου των μη εμφωλευμένων μοντέλων. Ειδικότερα, θα παρουσιαστεί η μεθοδολογία ελέγχου των Erps *et al.* (1982) θεωρώντας ότι η μηδενική υπόθεση είναι η $H'_f : M_x(t) = M_f(t, \theta)$ και η εναλλακτική η $H'_g : M_x(t) = M_g(t, \gamma)$.

Με το σκεπτικό που αναπτύχθηκε στην προηγούμενη ενότητα, οι Erps *et al.* (1982) για την αντιμετώπιση του υπό μελέτη προβλήματος κατέληξαν στη στατιστική συνάρτηση $m(t) - M_f(t, \hat{\theta})$. Αντικείμενο μελέτης αυτής της ενότητας είναι, αρχικά, ο προσδιορισμός της ασυμπτωτικής κατανομής αυτής της σ.σ. και έπειτα ο καθορισμός του κανόνα απόφασης.

Στο παραπάνω πλαίσιο, στο επόμενο Θεώρημα προσδιορίζεται η ασυμπτωτική κατανομή της στατιστικής συνάρτησης $m(t) - M_f(t, \hat{\theta})$ υπό τη μηδενική υπόθεση $H'_f : M_x(t) = M_f(t, \theta)$. Η απόδειξη αυτού του αποτελέσματος ακολουθεί ίδια πορεία με αυτή της Πρότασης 2.2.2 του Cox (1961, 1962) και παραλείπεται (βλέπε Erps *et al.* (1982)).

Θεώρημα 4.2.1 (Epps *et al* (1982)) Έστω $X_1, \dots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με σ.π.π. $f(x, \theta)$ και $g(x, \gamma)$ υπό την H_f και H_g , αντίστοιχα, με $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p) \in \Theta \subseteq R^p$ και $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_p) \in \Gamma \subseteq R^p$. Συμβολίζεται με $\hat{\theta}$ ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου θ υπό την H_f . Υπό την προϋπόθεση ότι ισχύουν οι συνθήκες του Παραρτήματος Β, η στατιστική συνάρτηση

$$T_f^E(t) = \sqrt{n} \frac{m(t) - M_f(t, \hat{\theta})}{\sigma_f(t, \hat{\theta})}, \quad (4.2.1)$$

ακολουθεί ασυμπτωτικά, υπό την H_f , τυπική κανονική κατανομή $N(0, 1)$, για κάθε t , τέτοιο ώστε $0 < \sigma_f^2(t, \hat{\theta}) < \infty$, όπου

$$\sigma_f^2(t, \theta) = M_f(2t, \theta) - M_f^2(t, \theta) - \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \delta_f^{ij} \frac{\partial M_f(t, \theta)}{\partial \theta_i} \frac{\partial M_f(t, \theta)}{\partial \theta_j}, \quad (4.2.2)$$

με δ_f^{ij} να είναι το (i, j) -στοιχείο του αντιστρόφου του πίνακα πληροφορίας του Fisher, δηλαδή του

$$-E_{\theta} \left[\frac{\partial^2 \ln f(X, \theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right], \quad i, j = 1, 2, \dots, p. \blacksquare$$

Όπως εύκολα γίνεται αντιληπτό το παραπάνω θεώρημα δύναται να ισχύει για διάφορες τιμές της παραμέτρου t . Είναι ευνόητο ότι θα πρέπει η παράμετρος t να επιλέγεται έτσι ώστε να μεγιστοποιείται η ισχύς του τεστ υπό την προϋπόθεση ότι $0 < \sigma_f^2(t, \hat{\theta}) < \infty$. Για το σκοπό αυτό είναι απαραίτητος ο προσδιορισμός της ασυμπτωτικής κατανομής υπό την εναλλακτική

υπόθεση. Ο προσδιορισμός αυτός επιτυγχάνεται στο ακόλουθο θεώρημα. Η απόδειξη αυτού του αποτελέσματος ακολουθεί ίδια πορεία με αυτή της Πρότασης 2.2.2 του Cox (1961, 1962) και παραλείπεται (βλέπε Erps *et al.* (1982)).

Θεώρημα 4.2.2 (Erps *et al.* (1982)) Υπό τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 4.2.1 και υποθέτοντας, επιπλέον, ότι για δοθέν γ , ο Ε.Μ.Π. $\hat{\theta}$ της παραμέτρου θ , συγκλίνει, υπό την H_g , κατά πιθανότητα στο θ_γ , η στατιστική συνάρτηση της σχέσης (4.2.1) ακολουθεί ασυμπτωτικά, υπό την $H'_g: M_x(t) = M_g(t, \gamma)$, κανονική κατανομή με παραμέτρους θέσης και κλίμακας:

$$\beta_1(t) = \frac{\{M_g(t, \gamma) - M_f(t, \theta_\gamma)\} \sqrt{n}}{\sigma_f(t, \theta_\gamma)}, \quad (4.2.3)$$

και

$$\beta_2(t) = \frac{\sigma_g^2(t, \gamma)}{\sigma_f^2(t, \theta_\gamma)}, \quad (4.2.4)$$

αντίστοιχα, όπου

$$\begin{aligned} n^{-1} \sigma_g^2(t, \gamma) = & n^{-1} \{M_g(2t, \gamma) - M_g^2(t, \gamma)\} - 2 \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \frac{\partial M_f(t, \theta_\gamma)}{\partial \theta_i} \delta_g^{ij} E_\gamma \left[e^{tX} \frac{\partial \ln f(X, \theta_\gamma)}{\partial \theta_j} \right] \\ & + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \frac{\partial M_f(t, \theta_\gamma)}{\partial \theta_i} \frac{\partial M_f(t, \theta_\gamma)}{\partial \theta_j} \delta_g^{il} \delta_g^{jm} E_\gamma \left[\frac{\partial \ln f(X, \theta_\gamma)}{\partial \theta_l} \frac{\partial \ln f(X, \theta_\gamma)}{\partial \theta_m} \right], \end{aligned}$$

με δ_g^{ij} να είναι το (i,j) -στοιχείο του αντιστρόφου του πίνακα

$$-E_{\gamma} \left[\frac{\partial^2 \ln f(X, \theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \Big|_{\theta=\theta_{\gamma}} \right] = -E_{\gamma} \left[\frac{\partial^2 \ln f(X, \theta_{\gamma})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right], i, j = 1, 2, \dots, p. \blacksquare$$

Αφού προσδιορίστηκε η κατανομή της στατιστικής συνάρτησης των Erpps *et al.* (1982) υπό τη μηδενική και την εναλλακτική υπόθεση, θα πρέπει, στη συνέχεια, να κατασκευαστεί η κρίσιμη περιοχή. Ο προσδιορισμός αυτός είναι εφικτός διακρίνοντας δύο περιπτώσεις.

Αρχικά θεωρούμε ότι: $\beta_1(t) = M_g(t, \gamma) - M_f(t, \theta_{\gamma}) > 0$. Σε αυτήν την περίπτωση η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται για μεγάλες θετικές τιμές της στατιστικής συνάρτησης $T_f^E(t)$. Άρα, με επίπεδο σημαντικότητας α , προκύπτει ότι η περιοχή απόρριψης είναι $T_f^E(t) \geq z_{\alpha}$.

Έπειτα, θεωρούμε ότι: $\beta_1(t) = M_g(t, \gamma) - M_f(t, \theta_{\gamma}) < 0$, οπότε σε αυτήν την περίπτωση η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται για μεγάλες αρνητικές τιμές της στατιστικής συνάρτησης $T_f^E(t)$, δηλαδή όταν $T_f^E(t) \leq -z_{\alpha}$.

Επομένως, σε κάθε περίπτωση, η κρίσιμη περιοχή, σε επίπεδο σημαντικότητας α είναι

$$C_{\alpha} = \{ (X_1, \dots, X_n) : \varepsilon T_f^E(t) \geq z_{\alpha} \},$$

όπου με ε συμβολίζεται το πρόσημο του $\beta_1(t)$. Όμως, το πρόσημο αυτό είναι άγνωστο, καθώς εξαρτάται από την άγνωστη παράμετρο

γ . Για να χρησιμοποιηθεί σε πρακτικές εφαρμογές αντικαθίσταται από ένα συνεπή εκτιμητή του, έστω $\hat{\varepsilon}$, που καθορίζεται εκτιμώντας την άγνωστη παράμετρο γ από τον Ε.Μ.Π. $\hat{\gamma}$.

Άρα η κρίσιμη περιοχή είναι:

$$\hat{\varepsilon}T_f^E(t) \geq z_\alpha, \quad (4.2.5)$$

για κάθε t τέτοιο ώστε $0 < \sigma_f^2(t, \hat{\theta}), \beta_2(t) < \infty$. Σε όσα ακολουθούν υποθέτουμε ότι αυτή η προϋπόθεση πληρείται.

Την ίδια κρίσιμη περιοχή προτείνουν και οι Erps *et al.* (1982), βασιζόμενοι στο ακόλουθο σκεπτικό το οποίο δεν περιγράφεται αλλά αφήνεται να εννοηθεί, καθώς λέγεται ότι εφαρμόζεται το Θεμελιώδες Λήμμα των Neyman-Pearson (Erps (2013)).

Η στατιστική συνάρτηση των Erps *et al.* (1982) ακολουθεί ασυμπτωτικά τυπική κανονική κατανομή υπό τη μηδενική υπόθεση και κανονική κατανομή με παραμέτρους θέσης και κλίμακας $\beta_1(t)$ και $\beta_2(t)$ αντίστοιχα, υπό την εναλλακτική. Υπολογίζοντας το πηλίκο του Λήμματος των Neyman-Pearson, οι Erps *et al.* (1982), αγνοώντας τον όρο $\sqrt{\beta_2(t)}$ καταλήγουν ότι η κρίσιμη περιοχή μεγέθους α είναι εκείνη όπου η ποσότητα $0.5[T_f^E(t)]^2[1-\beta_2(t)]-T_f^E(t)\beta_1(t)$ είναι μικρή. Το ζητούμενο προκύπτει λαμβάνοντας υπόψη ότι για μεγάλα n ισχύει ότι $\beta_1(t)=O(n^{1/2})$ και $\beta_2(t)=O(1)$. Επισημαίνεται ότι ο όρος $\sqrt{\beta_2(t)}$ όντας συνάρτηση του t θα μπορούσε να ληφθεί υπόψη στην επιλογή του βέλτιστου t , ώστε να μεγιστοποιείται η ισχύς του τεστ. Ωστόσο, σύμφωνα με τους Erps *et al.* (1982) ο παραπάνω

ισχυρισμός για την κρίσιμη περιοχή παραμένει λογικός για μεγάλα μεγέθη δείγματος.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, προκύπτει ότι η ισχύς του τεστ είναι:

$$\begin{aligned}\gamma &= P\left(\hat{\varepsilon}T_f^E(t) > z_\alpha \middle| H_g\right) \\ &= P\left(\beta_2(t)^{-\frac{1}{2}}\{\hat{\varepsilon}T_f^E(t) - \hat{\varepsilon}\beta_1(t)\} > \beta_2(t)^{-\frac{1}{2}}\{z_\alpha - \hat{\varepsilon}\beta_1(t)\} \middle| H_g\right),\end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\gamma = 1 - \Phi\left[\beta_2(t)^{-\frac{1}{2}}\{z_\alpha - |\beta_1(t)|\}\right] = 1 - \Phi[\pi(\alpha, t)], \quad (4.2.6)$$

όπου $\Phi(\cdot)$ η α.σ.κ. της τυπικής κανονικής κατανομής και

$$\pi(\alpha, t) = \beta_2(t)^{-\frac{1}{2}}\{z_\alpha - |\beta_1(t)|\}. \quad (4.2.7)$$

Επομένως, για προκαθορισμένο επίπεδο σημαντικότητας, η ισχύς γ μπορεί να μεγιστοποιηθεί επιλέγοντας ένα t , έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται ως προς t η συνάρτηση $\pi(\alpha, t)$. Η επιλογή αυτή θα αποσαφηνιστεί στην επόμενη ενότητα μέσω μίας εφαρμογής.

Παρατήρηση 4.2.1 (Epps *et al.* (1982)) Στην πράξη πρέπει να ελαχιστοποιηθεί ως προς t η συνάρτηση $\hat{\pi}(\alpha, t)$, η οποία εξαρτάται από έναν συνεπή εκτιμητή της παραμέτρου θ . Η βέλτιστη αυτή τιμή του t εξαρτάται από το μέγεθος του δείγματος n και από τον Ε.Μ.Π. $\hat{\theta}$, και μπορεί να αποδειχθεί ότι δεν επηρεάζει την ασυμπτωτική

κατανομή της στατιστικής συνάρτησης των Erps *et al.* (1982), αν η συνάρτηση $\pi(\alpha, t)$ παρουσιάζει ελάχιστο για κάθε n .

Αν εναλλάξουμε το ρόλο των H_f και H_g στη μηδενική και εναλλακτική υπόθεση, με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 4.2.3 (Erps *et al.* (1982)) Έστω $X_1, \dots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με σ.π.π. $f(x, \theta)$ και $g(x, \gamma)$ υπό την H_f και H_g , αντίστοιχα, με $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p) \in \Theta \subseteq R^p$ και $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_p) \in \Gamma \subseteq R^p$. Συμβολίζονται με $\hat{\theta}$ και $\hat{\gamma}$ οι Ε.Μ.Π. των παραμέτρων θ και γ υπό την H_f και H_g , αντίστοιχα. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι για δοθέν θ , ο Ε.Μ.Π. $\hat{\gamma}$ της παραμέτρου γ , συγκλίνει, υπό την H_f , κατά πιθανότητα στο γ_θ . Υπό την προϋπόθεση ότι ισχύουν οι υποθέσεις του Παραρτήματος Β, υπό την H_g , η στατιστική συνάρτηση

$$T_g^E(t) = \sqrt{n} \frac{m_x(t) - M_g(t, \hat{\gamma})}{\sigma_g(t, \hat{\gamma})},$$

ακολουθεί ασυμπτωτικά τυπική κανονική κατανομή $N(0, 1)$, για κάθε t , τέτοιο ώστε $0 < \sigma_g^2(t, \hat{\gamma}) < \infty$, όπου

$$\sigma_g^2(t, \gamma) = M_g(2t, \gamma) - M_g^2(t, \gamma) - \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \delta_g^{ij} \frac{\partial M_g(t, \gamma)}{\partial \gamma_i} \frac{\partial M_g(t, \gamma)}{\partial \gamma_j}, \quad (4.2.8)$$

με δ_g^{ij} να είναι το (i,j) -στοιχείο του αντιστρόφου του πίνακα πληροφορίας του Fisher, δηλαδή του $-E_{\gamma} \left[\frac{\partial^2 \ln g(X, \gamma)}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j} \right]$, $i, j = 1, 2, \dots, p$. Επιπρόσθετα, υπό την εναλλακτική υπόθεση H_f , η $T_g^E(t)$ ακολουθεί ασυμπτωτικά κανονική κατανομή με παραμέτρους θέσης και κλίμακας:

$$\beta_1(t) = \frac{\{M_f(t, \theta) - M_g(t, \gamma_{\theta})\} \sqrt{n}}{\sigma_g(t, \gamma_{\theta})} \quad (4.2.9)$$

και

$$\beta_2(t) = \frac{\sigma_f^2(t, \theta)}{\sigma_g^2(t, \gamma_{\theta})} \quad (4.2.10)$$

αντίστοιχα, όπου

$$\begin{aligned} n^{-1} \sigma_f^2(t, \theta) = & n^{-1} \{M_f(2t, \theta) - M_f^2(t, \theta)\} - 2 \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \frac{\partial M_g(t, \gamma_{\theta})}{\partial \gamma_i} \delta_f^{ij} E_{\theta} \left(e^{tx} \frac{\partial \ln g(X, \gamma_{\theta})}{\partial \gamma_j} \right) \\ & + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \frac{\partial M_g(t, \gamma_{\theta})}{\partial \gamma_i} \frac{\partial M_g(t, \gamma_{\theta})}{\partial \gamma_j} \delta_f^{il} \delta_f^{jm} E_{\theta} \left\{ \frac{\partial \ln g(X, \gamma_{\theta})}{\partial \gamma_l} \frac{\partial \ln g(X, \gamma_{\theta})}{\partial \gamma_m} \right\}, \end{aligned}$$

με δ_f^{ij} να είναι το (i,j) -στοιχείο του αντιστρόφου του

$$-E_{\theta} \left[\frac{\partial^2 \ln g(X, \gamma)}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j} \Big|_{\gamma=\gamma_{\theta}} \right] = -E_{\theta} \left[\frac{\partial^2 \ln g(X, \gamma_{\theta})}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j} \right], \quad i, j = 1, 2, \dots, p. \quad \blacksquare$$

Παρατήρηση 4.2.2 Προφανώς η κρίσιμη περιοχή και η επιλογή της παραμέτρου t γίνεται με παρόμοιο τρόπο με αυτόν που αναπτύχθηκε έχοντας την H_f ως μηδενική και την H_g ως εναλλακτική. Η διαδικασία αυτή της επιλογής του βέλτιστου t ίσως ήταν ο λόγος που οδήγησε να μην βρίσκει εφαρμογές σε πρακτικές εφαρμογές η μεθοδολογία αυτή. ■

Η μεθοδολογία των Erps *et al.* (1982) θα αποσαφηνιστεί στην επόμενη ενότητα.

4.3 Ειδική Περίπτωση

Στην ενότητα αυτή θα αποσαφηνιστεί η μεθοδολογία των Erps *et al.* (1982) για την περίπτωση της λογαριθμοκανονικής κατανομής έναντι της εκθετικής κατανομής. Καθώς, η ροπογεννήτρια της λογαριθμοκανονικής κατανομής δεν υπάρχει, και λαμβάνοντας υπόψη ότι η μεθοδολογία των Erps *et al.* (1982) προϋποθέτει την ύπαρξη των ροπογεννητριών των δύο υποψήφιων μοντέλων, θεωρούμε το μετασχηματισμό $Y_i = \ln X_i$, $i = 1, \dots, n$. Κατά αυτόν τον τρόπο, προκύπτει το ισοδύναμο πρόβλημα του ελέγχου αν το τ.δ. $Y_1, \dots, Y_n$ προέρχεται από την κανονική κατανομή $N(\theta_1, \theta_2)$ ή την λογαριθμοεκθετική κατανομή, με σ.π.π. $f(y, \theta)$ και $g(y, \gamma)$ που προσδιορίζονται στις σχέσεις (20) και (9), αντίστοιχα, του Παραρτήματος Α. Οι ροπογεννήτριες συναρτήσεις της κανονικής και της λογαριθμοεκθετικής κατανομής δίνονται στη σχέση (22) και στην Πρόταση 4 i), αντίστοιχα, του Παραρτήματος Α.

Καθώς δεν ξέρουμε ποια από τις δύο κατανομές είναι αυτή που τίθεται στη μηδενική υπόθεση και ποια αυτή που τίθεται στην εναλλακτική, στα δύο παραδείγματα που ακολουθούν,

εναλλάσσονται οι ρόλοι της μηδενικής και της εναλλακτικής υπόθεσης και αναπτύσσεται η μεθοδολογία των Erps *et al.* (1982).

Παράδειγμα 4.3.1 (Erps *et al.* (1982)) Λογαριθμοκανονική έναντι Εκθετικής

Σύμφωνα με τη μεθοδολογία των Erps *et al.* (1982), στο παράδειγμα αυτό θα ελέγξουμε τη μηδενική υπόθεση ότι το τ.δ. προέρχεται από την κανονική κατανομή με παράμετρο $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ έναντι της εναλλακτικής ότι προέρχεται από τη λογαριθμοεκθετική κατανομή με παράμετρο γ .

Βήμα 1^ο Υπολογισμός του Ε.Μ.Π. της παραμέτρου $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$. Ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ έχει υπολογιστεί στο Παράδειγμα 2.3.1 και είναι $\hat{\theta}_1 = \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$, και $\hat{\theta}_2 = S_Y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$, με $Y_i = \ln X_i$.

Βήμα 2^ο Υπολογισμός της $M_f(t, \hat{\theta})$. Είναι

$$M_f(t, \hat{\theta}) = \exp\left(\hat{\theta}_1 t + \frac{1}{2} \hat{\theta}_2 t^2\right) = \exp\left(\bar{Y} t + \frac{1}{2} S_Y^2 t^2\right). \quad (4.3.1)$$

Βήμα 3^ο Υπολογισμός της διαφοράς των ροπογεννητριών $M_f(2t, \theta) - M_f^2(t, \theta)$. Είναι

$$M_f(2t, \theta) - M_f^2(t, \theta) = \exp(2\bar{Y}t + 2S_Y^2 t^2) - \exp(2\bar{Y}t + S_Y^2 t^2). \quad (4.3.2)$$

Βήμα 4ο Υπολογισμός του αντίστροφου του πίνακα πληροφορίας

του Fisher $-E_{\theta} \left[\frac{\partial^2 \ln f(Y, \theta)}{\partial \theta} \right]$ και προσδιορισμός των στοιχείων του

δ_f^{ij} , για $i, j = 1, \dots, p$.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα καθώς η παράμετρος θ είναι διδιάστατη ο πίνακας πληροφορίας του Fisher είναι 2×2 . Από τις σχέσεις (2.3.17) και (2.3.18) του Παραδείγματος 2.3.1 και λαμβάνοντας υπόψη ότι $Y = \ln X$ προκύπτει ότι:

$$\delta_f = \begin{pmatrix} \theta_2 & 0 \\ 0 & 2\theta_2^2 \end{pmatrix}. \quad (4.3.3)$$

Βήμα 5ο Υπολογισμός των $\frac{\partial M_f(t, \theta)}{\partial \theta_i}$ για $i = 1, \dots, p$. Είναι

$$\frac{\partial M_f(t, \theta)}{\partial \theta_1} = \frac{\partial}{\partial \theta_1} \exp \left(\theta_1 t + \frac{1}{2} \theta_2 t^2 \right) = t e^{\theta_1 t + \frac{1}{2} \theta_2 t^2}, \quad (4.3.4)$$

και

$$\frac{\partial M_f(t, \theta)}{\partial \theta_2} = \frac{\partial}{\partial \theta_2} \exp \left(\theta_1 t + \frac{1}{2} \theta_2 t^2 \right) = \frac{1}{2} t^2 e^{\theta_1 t + \frac{1}{2} \theta_2 t^2}. \quad (4.3.5)$$

Βήμα 6ο Υπολογισμός της $\sigma_f^2(t, \hat{\theta})$, όπου

$$\sigma_f^2(t, \theta) = M_f(2t, \theta) - M_f^2(t, \theta) - \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \delta_f^{ij} \frac{\partial M_f(t, \theta)}{\partial \theta_i} \frac{\partial M_f(t, \theta)}{\partial \theta_j}.$$

Επομένως, για το συγκεκριμένο παράδειγμα, λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (4.3.4), (4.3.5) και τα αποτελέσματα των προηγούμενων βημάτων, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}\sigma_f^2(t, \hat{\theta}) = & \exp(2\bar{Y}t + 2S_Y^2 t^2) - \exp(2\bar{Y}t + S_Y^2 t^2) \\ & - S_Y^2 t^2 \exp(2\bar{Y}t + S_Y^2 t^2) - \frac{1}{2} S_Y^4 t^4 \exp(2\bar{Y}t + S_Y^2 t^2),\end{aligned}$$

ή ισοδύναμα,

$$\sigma_f^2(t, \hat{\theta}) = \exp(2t\bar{Y} + t^2 S_Y^2) \left[\exp(t^2 S_Y^2) - \left(1 + t^2 S_Y^2 + t^4 S_Y^4 / 2\right) \right]. \quad (4.3.6)$$

Καθώς πρέπει $0 < \sigma_f^2(t, \hat{\theta}) < \infty$, προκύπτει ότι $t \neq 0$. Σε όσα έπονται η παραπάνω συνθήκη λαμβάνεται υπόψη.

Βήμα 7ο Υπολογισμός της τιμής της στατιστικής συνάρτησης

$$T_f^E(t) = \sqrt{n} \frac{m_Y(t) - M_f(t, \hat{\theta})}{\sigma_f(t, \hat{\theta})}.$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα προκύπτει ότι θα πρέπει να υπολογιστεί η τιμή της στατιστικής συνάρτησης:

$$T_f^E(t) = \sqrt{n} \frac{m_Y(t) - \exp\left(\bar{Y}t + \frac{1}{2} S_Y^2 t^2\right)}{\sigma_f(t, \hat{\theta})},$$

ή ισοδύναμα της

$$T_f^E(t) = \sqrt{n} \frac{m_Y(t) \exp\left(-\bar{Y}t - \frac{1}{2}S_Y^2 t^2\right) - 1}{\left\{ \exp(S_Y^2 t^2) - 1 - S_Y^2 t^2 - \frac{1}{2}t^4 S_Y^4 \right\}^{\frac{1}{2}}}, \quad t \neq 0, \quad (4.3.7)$$

$$\text{όπου } m_Y(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{tY_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^t.$$

Βήμα 8ο Εύρεση του κατά πιθανότητα ορίου του Ε.Μ.Π. της παραμέτρου θ όταν τα δεδομένα προέρχονται από την εναλλακτική κατανομή. Επομένως, θέλουμε να βρούμε, για το συγκεκριμένο παράδειγμα, την κατά πιθανότητα σύγκλιση του $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$, όταν τα δεδομένα προέρχονται από την λογαριθμοεκθετική κατανομή. Κατά αυτόν τον τρόπο θα προσδιοριστεί το διάνυσμα $(\theta_{1\gamma}, \theta_{2\gamma})$.

Από την Πρόταση 4 ii) και vi) του Παραρτήματος Α προκύπτει ότι:

$$\theta_\gamma = (\ln \gamma + \psi(1), \psi'(1)). \quad (4.3.8)$$

Βήμα 9ο Υπολογισμός της $\sigma_f^2(t, \theta_\gamma)$, όπου

$$\sigma_f^2(t, \theta_\gamma) = M_f(2t, \theta_\gamma) - M_f^2(t, \theta_\gamma) - \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \delta_f^{ij} \frac{\partial M_f(t, \theta_\gamma)}{\partial \theta_i} \frac{\partial M_f(t, \theta_\gamma)}{\partial \theta_j}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη τα όσα προηγήθηκαν, έπειτα από λίγη άλγεβρα, προκύπτει ότι:

$$\sigma_f^2(t, \theta_\gamma) = \gamma^{2t} e^{2t\psi(1) + t^2\psi'(1)} \left\{ e^{t^2\psi'(1)} - 1 - t^2\psi'(1) - \frac{1}{2}t^4 [\psi'(1)]^2 \right\}.$$

Βήμα 10^ο Υπολογισμός της

$$\begin{aligned}\sigma_g^2(t, \gamma) = & M_g(2t, \gamma) - M_g^2(t, \gamma) - 2 \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \frac{\partial M_f(t, \theta_\gamma)}{\partial \theta_i} \delta_g^{ij} E_\gamma \left[e^{t\gamma} \frac{\partial \ln f(Y, \theta_\gamma)}{\partial \theta_j} \right] \\ & + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \frac{\partial M_f(t, \theta_\gamma)}{\partial \theta_i} \frac{\partial M_f(t, \theta_\gamma)}{\partial \theta_j} \delta_g^{il} \delta_g^{jm} E_\gamma \left[\frac{\partial \ln f(Y, \theta_\gamma)}{\partial \theta_l} \frac{\partial \ln f(Y, \theta_\gamma)}{\partial \theta_m} \right],\end{aligned}$$

όπου δ_g^{ij} είναι το (i, j) -στοιχείο του αντιστρόφου του πίνακα

$$-E_\gamma \left[\frac{\partial^2 \ln f(Y, \theta_\gamma)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right], \quad i, j = 1, 2, \dots, p.$$

Ο πρώτος όρος της $\sigma_g^2(t, \gamma)$ είναι:

$$M_g(2t, \gamma) - M_g^2(t, \gamma) = \gamma^{2t} \left[\Gamma(2t+1) - \Gamma^2(t+1) \right], \quad (4.3.9)$$

άρα προκύπτει ότι $t > -0.5$. Σε όσα έπονται η παραπάνω συνθήκη λαμβάνεται υπόψη. Για το δεύτερο όρο πρέπει να υπολογιστούν τα δ_g^{ij} . Οπότε, έχουμε:

$$\delta_g = \begin{pmatrix} -E_\gamma \left(-\frac{1}{\theta_{2\gamma}} \right) & -E_\gamma \left(-\frac{Y - \theta_{1\gamma}}{\theta_{2\gamma}^2} \right) \\ -E_\gamma \left(-\frac{Y - \theta_{1\gamma}}{\theta_{2\gamma}^2} \right) & -E_\gamma \left(\frac{1}{2\theta_{2\gamma}^2} - \frac{(Y - \theta_{1\gamma})^2}{\theta_{2\gamma}^3} \right) \end{pmatrix}^{-1},$$

ή ισοδύναμα,

$$\delta_g = \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta_{2\gamma}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2\theta_{2\gamma}^2} + \frac{Var_\gamma(Y)}{\theta_{2\gamma}^3} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta_{2\gamma}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\theta_{2\gamma}^2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \psi'(1) & 0 \\ 0 & 2[\psi'(1)]^2 \end{pmatrix}. \quad (4.3.10)$$

Επιπρόσθετα, έχουμε:

$$\frac{\partial M_f(t, \theta_\gamma)}{\partial \theta_1} = t \exp \left\{ \theta_{1\gamma} t + \frac{1}{2} \theta_{2\gamma} t^2 \right\} = t M_f(t, \theta_\gamma),$$

ή ισοδύναμα,

$$\frac{\partial M_f(t, \theta_\gamma)}{\partial \theta_1} = t \gamma^t \exp \{ t \psi(1) + t^2 \psi'(1) / 2 \}. \quad (4.3.11)$$

και

$$\frac{\partial M_f(t, \theta_\gamma)}{\partial \theta_2} = \frac{1}{2} t^2 \exp \left\{ \theta_{1\gamma} t + \frac{1}{2} \theta_{2\gamma} t^2 \right\} = \frac{1}{2} t^2 M_f(t, \theta_\gamma),$$

ή ισοδύναμα,

$$\frac{\partial M_f(t, \theta_\gamma)}{\partial \theta_2} = \frac{1}{2} t^2 \gamma^t \exp \{ t \psi(1) + t^2 \psi'(1) / 2 \}. \quad (4.3.12)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.3.10), (4.3.11), (4.3.12) και την Πρόταση 6 του Παραρτήματος Α, προκύπτει ότι ο δεύτερος όρος της $\sigma_g^2(t, \gamma)$ είναι:

$$t\gamma^{2t}\Gamma(t+1)e^{t\psi(1)+t^2\psi'(1)/2}\left\{\psi(t+1)-\psi(1)+\frac{t}{2}[\psi(t+1)-\psi(1)]^2+\frac{t}{2}[\zeta(2,t+1)-\psi'(1)]\right\},$$

όπου $\zeta(2,\nu)=\sum_{j=0}^{\infty}(\nu+j)^{-2}$ η zeta συνάρτηση του Hurwitz (βλέπε Gradsteyn (1980)).

Τέλος, συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.3.10), (4.3.11), (4.3.12) και την Πρόταση 7 του Παραρτήματος Α, ο τρίτος όρος της $\sigma_g^2(t,\gamma)$ είναι:

$$t^2\gamma^{2t}\exp\{2t\psi(1)+t^2\psi'(1)\}\left\{\psi'(1)+t\psi''(1)+\frac{t^2}{4}[\psi'''(1)+2(\psi'(1))^2]\right\}.$$

Επομένως, η ποσότητα $\sigma_g^2(t,\gamma)/\gamma^{2t}$ είναι ίση με

$$\begin{aligned} & \Gamma(2t+1)-\Gamma^2(t+1) \\ & -2t\Gamma(t+1)e^{t\psi(1)+t^2\psi'(1)/2}\left\{\psi(t+1)-\psi(1)+\frac{t}{2}[\psi(t+1)-\psi(1)]^2+\frac{t}{2}[\zeta(2,t+1)-\psi'(1)]\right\} \\ & +t^2\exp\{2t\psi(1)+t^2\psi'(1)\}\left\{\psi'(1)+t\psi''(1)+\frac{t^2}{4}[\psi'''(1)+2(\psi'(1))^2]\right\}. \end{aligned}$$

Βήμα 11^ο Υπολογισμός των $\beta_1(t)$ και $\beta_2(t)$, της κρίσιμης περιοχής και του κανόνα απόφασης με βάσει όσα αναπτύχθηκαν στην προηγούμενη ενότητα.

Είναι

$$M_g(t, \gamma) - M_f(t, \theta_\gamma) = \gamma^t \Gamma(t+1) - e^{\theta_1 \gamma^t + \frac{1}{2} \theta_2 \gamma^t} = \gamma^t \left[\Gamma(t+1) - e^{\psi(1)t + \frac{1}{2} \psi'(1)t^2} \right].$$

Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη το αποτέλεσμα του Βήματος 9, προκύπτει ότι:

$$\beta_1(t) = \sqrt{n} \frac{\Gamma(t+1) - e^{\psi(1)t + \frac{1}{2} \psi'(1)t^2}}{\left\{ e^{2t\psi(1) + t^2\psi'(1)} \left[e^{t^2\psi'(1)} - 1 - t^2\psi'(1) - \frac{1}{2}t^4(\psi'(1))^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.3.13)$$

Επιπλέον, λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα των Βημάτων 9 και 10, προκύπτει ότι:

$$\beta_2(t) = \frac{\sigma_g^2(t, \gamma) / \gamma^{2t}}{e^{2t\psi(1) + t^2\psi'(1)} \left\{ e^{t^2\psi'(1)} - 1 - t^2\psi'(1) - \frac{1}{2}t^4[\psi'(1)]^2 \right\}}, \quad (4.3.14)$$

με $\sigma_g^2(t, \gamma) / \gamma^{2t}$ η ποσότητα όπως δίνεται στο Βήμα 10.

Η κρίσιμη περιοχή σε επίπεδο σημαντικότητας α είναι

$$C_\alpha = \left\{ (X_1, \dots, X_n) : \hat{\varepsilon} \left[m_\gamma(t) e^{-\bar{Y}t - \frac{1}{2} S_\gamma^2 t^2} - 1 \right] > z_\alpha \frac{\left\{ \exp(S_\gamma^2 t^2) - 1 - S_\gamma^2 t^2 - \frac{1}{2} t^4 S_\gamma^4 \right\}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{n}} \right\},$$

όπου με $\hat{\varepsilon}$ συμβολίζεται ο εκτιμητής του πρόσημου του $\beta_1(t)$, το οποίο καθορίζεται εκτιμώντας την άγνωστη παράμετρο γ από τον Ε.Μ.Π. $\hat{\gamma}$.

Ο υπολογισμός της συνάρτησης $\pi(\alpha, t)$ προκύπτει από τη σχέση $\pi(\alpha, t) = \beta_2(t)^{-\frac{1}{2}} \left\{ z_\alpha - |\beta_1(t)| \right\}$, λαμβάνοντας υπόψη τις (4.3.13) και (4.3.14).

Παρατήρηση 4.3.1 α) Η συνάρτηση $\pi(\alpha, t)$ για την περίπτωση της λογαριθμοκανονικής έναντι της εκθετικής κατανομής είναι ανεξάρτητη της παραμέτρου γ , καθώς, όπως φαίνεται από τις σχέσεις (4.3.13) και (4.3.14), τα $\beta_1(t)$ και $\beta_2(t)$ δεν εξαρτώνται από αυτή. Επομένως, η τιμή του t που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση $\pi(\alpha, t)$ εξαρτάται μόνο από το επίπεδο σημαντικότητας α και το μέγεθος του δείγματος n (βλέπε Erps *et al.* (1982)). Η ελαχιστοποίηση αυτή δεν είναι εφικτό να πραγματοποιηθεί με αναλυτικό τρόπο, αλλά μόνο με χρήση ενός λογισμικού. Παρόλα αυτά, και σε αυτήν την περίπτωση παρουσιάζονται δυσκολίες, ανάλογα με τη μέθοδο ελαχιστοποίησης, την αρχικοποίηση ή το λογισμικό που θα χρησιμοποιηθεί. Τα προβλήματα αυτά είναι έντονα σε μια μικρή περιοχή του t γύρω από την τιμή 0, διότι εκεί ο παρονομαστής του $\beta_2(t)$ παίρνει τιμές κοντά στο 0. Χρησιμοποιώντας μία ευρητική (heuristic) μέθοδο προέκυψε με χρήση της Matlab και της Octave ότι, για επίπεδο σημαντικότητας 5% και για μεγέθη δείγματος $n=25, 50, 100, 150, 200$, η τιμή του t είναι σε μια περιοχή του 0.05. Αντίθετα, ο Erps (2013), χρησιμοποιώντας τη ρουτίνα grid της Fortran και με βήμα 0.02 για $\alpha=0.05$, αποκτά διαφορετικές τιμές. Για παράδειγμα, είναι:

$(n, t_{optimal})$: (25,-0.1), (50, 0.1), (100, 0.3), (150, 0.35), (200, 0.4) και (1000, 0.6). Το θέμα αυτό χρήζει περαιτέρω διερεύνησης και σε όσα ακολουθούν θεωρήσαμε, για κάθε $n, t_{optimal} = 0.05$.

β) Τα στατιστικά τεστ των Erps *et al.* (1982) και Atkinson (1970) είναι ίδια για $t=1$ στην περίπτωση της λογαριθμοκανονικής κατανομής έναντι της εκθετικής κατανομής, όταν η μηδενική υπόθεση είναι αληθής, εκτός από τους όρους οι οποίοι διαιρεμένοι με το $n^{-1/2}$ συγκλίνουν κατά πιθανότητα στη μονάδα (βλέπε Erps *et al.* (1982)).

Παράδειγμα 4.3.2 (Erps *et al.* (1982)) Εκθετική έναντι Λογαριθμοκανονικής

Ας αντιστρέψουμε τους ρόλους της μηδενικής και της εναλλακτικής υπόθεσης του προηγούμενου παραδείγματος. Επομένως, σύμφωνα με τη μεθοδολογία των Erps *et al.* (1982), θα ελέγξουμε τη μηδενική υπόθεση

$$H_g : M_g(t, \gamma) = \gamma^t \Gamma(t+1), \quad t > -1, \quad (4.3.15)$$

έναντι της εναλλακτικής

$$H_f : M_f(t, \theta) = \exp\left(\theta_1 t + \frac{1}{2} \theta_2 t^2\right), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.3.16)$$

Βήμα 1^ο Αρχικά, υπολογίζεται ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου γ . Είναι

$$\hat{\gamma} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{Y_i}.$$

Βήμα 2ο Υπολογισμός της $M_g(t, \hat{\gamma})$. Είναι $M_g(t, \hat{\gamma}) = \hat{\gamma}^t \Gamma(t+1)$, $t > -1$.

Βήμα 3ο Υπολογισμός της διαφοράς των ροπογεννητριών $M_g(2t, \gamma) - M_g^2(t, \gamma)$. Είναι

$$M_g(2t, \gamma) - M_g^2(t, \gamma) = \gamma^{2t} \Gamma(2t+1) - \gamma^{2t} \Gamma^2(t+1), \quad t > -1 \quad (4.3.17)$$

Βήμα 4ο Υπολογισμός του αντίστροφου του πίνακα πληροφορίας του Fisher $-E_\gamma \left[\frac{\partial^2 \ln g(Y, \gamma)}{\partial \gamma} \right]$ και προσδιορισμός των στοιχείων του δ_g^{ij} , για $i, j = 1, \dots, p$.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα καθώς η παράμετρος γ είναι μονοδιάστατη δεν υπολογίζουμε πίνακα αλλά την

$$-E_\gamma \left(\frac{\partial^2 \ln g(Y, \gamma)}{\partial \gamma^2} \right) = -E_\gamma \left(\frac{\gamma - 2e^\gamma}{\gamma^3} \right) = -E_\gamma \left(\frac{\gamma - 2X}{\gamma^3} \right) = \frac{1}{\gamma^2}.$$

Επομένως, $\delta_g^{11} = \gamma^2$.

Βήμα 5ο Υπολογισμός των $\frac{\partial M_g(t, \gamma)}{\partial \gamma_i}$ για $i = 1, \dots, p$. Είναι $p = 1$ και

$$\frac{\partial M_g(t, \gamma)}{\partial \gamma} = \frac{\partial}{\partial \gamma} [\gamma^t \Gamma(t+1)] = t \gamma^{t-1} \Gamma(t+1). \quad (4.3.18)$$

Βήμα 6ο Υπολογισμός της $\sigma_g^2(t, \gamma)$, όπου

$$\sigma_g^2(t, \gamma) = M_g(2t, \gamma) - M_g^2(t, \gamma) - \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \delta_g^{ij} \frac{\partial M_g(t, \gamma)}{\partial \gamma_i} \frac{\partial M_g(t, \gamma)}{\partial \gamma_j}.$$

Για το συγκεκριμένο παράδειγμα, καθώς $p=1$, λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα των προηγούμενων βημάτων προκύπτει ότι:

$$\sigma_g^2(t, \gamma) = \gamma^{2t} [\Gamma(2t+1) - (1+t^2)\Gamma^2(t+1)], \quad (4.3.19)$$

με $t > -0.05, t \neq 0, 1$.

Βήμα 7ο Υπολογισμός της τιμής της στατιστικής συνάρτησης

$$T_g^E(t) = \sqrt{n} \frac{m_Y(t) - M_g(t, \hat{\gamma})}{\sigma_g(t, \hat{\gamma})}.$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα προκύπτει ότι θα πρέπει να υπολογιστεί η τιμή της στατιστικής συνάρτησης:

$$T_g^E(t) = \sqrt{n} \frac{m_Y(t) - (\bar{X})^t \Gamma(t+1)}{(\bar{X}^t) [\Gamma(2t+1) - (1+t^2)\Gamma^2(t+1)]^{\frac{1}{2}}}, \quad -\frac{1}{2} < t \neq 0, 1, \quad (4.3.20)$$

όπου $m_Y(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{tY_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^t$. Σε όσα έπονται η παραπάνω συνθήκη λαμβάνεται υπόψη.

Βήμα 8ο Εύρεση του κατά πιθανότητα ορίου του Ε.Μ.Π. της παραμέτρου γ όταν τα δεδομένα προέρχονται από την εναλλακτική κατανομή. Είναι

$$\gamma_{\theta} = \exp\left(\theta_1 + \frac{1}{2}\theta_2\right). \quad (4.3.21)$$

Βήμα 9^ο Υπολογισμός της $\sigma_g^2(t, \gamma_\theta)$.

Είναι από τη σχέση (4.3.19)

$$\sigma_g^2(t, \gamma_\theta) = \gamma_\theta^{2t} \left[\Gamma(2t+1) - (1+t^2) \Gamma^2(t+1) \right]. \quad (4.3.22)$$

Βήμα 10^ο Υπολογισμός της

$$\begin{aligned} \sigma_f^2(t, \theta) = & M_f(2t, \theta) - M_f^2(t, \theta) - 2 \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \frac{\partial M_g(t, \gamma_\theta)}{\partial \gamma_i} \delta_f^{ij} E_\theta \left(e^{t\gamma} \frac{\partial \ln g(Y, \gamma_\theta)}{\partial \gamma_j} \right) \\ & + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \frac{\partial M_g(t, \gamma_\theta)}{\partial \gamma_i} \frac{\partial M_g(t, \gamma_\theta)}{\partial \gamma_j} \delta_f^{il} \delta_f^{jm} E_\theta \left\{ \frac{\partial \ln g(Y, \gamma_\theta)}{\partial \gamma_l} \frac{\partial \ln g(Y, \gamma_\theta)}{\partial \gamma_m} \right\}, \end{aligned}$$

όπου δ_f^{ij} είναι το (i, j) -στοιχείο του αντιστρόφου του πίνακα

$$-E_\theta \left[\frac{\partial^2 \ln g(Y, \gamma)}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j} \Big|_{\gamma=\gamma_\theta} \right] = -E_\theta \left[\frac{\partial^2 \ln g(Y, \gamma_\theta)}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j} \right], \quad i, j = 1, 2, \dots, p.$$

Για το παράδειγμά μας προκύπτει, ύστερα από λίγη άλγεβρα, ότι:

$$\begin{aligned} M_f(2t, \theta) - M_f^2(t, \theta) &= e^{2\theta_1 t + 2\theta_2 t^2} - e^{2\theta_1 t + \theta_2 t^2} \\ &= e^{2\theta_1 t + \theta_2 t^2 + \theta_2 t^2 + \theta_2 t - \theta_2 t} - e^{2\theta_1 t + \theta_2 t^2 + \theta_2 t - \theta_2 t} \\ &= \gamma_\theta^{2t} e^{t(t-1)\theta_2} \left(e^{\theta_2 t^2} - 1 \right), \end{aligned}$$

ενώ

$$\delta_f^{-1} = -E_\theta \left[\frac{\partial^2 \ln g(Y, \gamma_\theta)}{\partial \gamma_\theta^2} \right] = -E_\theta \left(\frac{\gamma_\theta - 2X}{\gamma_\theta^3} \right) = \frac{1}{\gamma_\theta^2},$$

διότι, $E_{\theta}(X) = e^{\theta_1 + \frac{1}{2}\theta_2} = \gamma_{\theta}$, όταν $X \sim \ln N(\theta_1, \theta_2)$.

Επίσης,

$$E_{\theta} \left[\frac{\partial \ln g(Y, \gamma_{\theta})}{\partial \gamma_{\theta}} \right]^2 = E_{\theta} \left[\left(\frac{e^Y - \gamma_{\theta}}{\gamma_{\theta}^2} \right)^2 \right] = \frac{Var_{\theta}(e^Y)}{\gamma_{\theta}^4} = \frac{(e^{\theta_2} - 1)e^{2\theta_1 + \theta_2}}{\gamma_{\theta}^4} = \frac{(e^{\theta_2} - 1)}{\gamma_{\theta}^2}.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} E_{\theta} \left[e^{tY} \frac{\partial \ln g(Y, \gamma_{\theta})}{\partial \gamma_{\theta}} \right] &= E_{\theta} \left[e^{tY} \left(\frac{e^Y - \gamma_{\theta}}{\gamma_{\theta}^2} \right) \right] = E_{\theta} \left(\frac{e^{(t+1)Y}}{\gamma_{\theta}^2} - \frac{1}{\gamma_{\theta}} e^{tY} \right) \\ &= \frac{1}{\gamma_{\theta}^2} M_Y(t+1) - \frac{1}{\gamma_{\theta}} M_Y(t), \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα,

$$E_{\theta} \left[e^{tY} \frac{\partial \ln g(Y, \gamma_{\theta})}{\partial \gamma_{\theta}} \right] = \frac{1}{\gamma_{\theta}^2} e^{\theta_1(t+1) + \frac{1}{2}\theta_2(t+1)^2} - \frac{1}{\gamma_{\theta}} e^{\theta_1 t + \frac{1}{2}\theta_2 t^2}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \sigma_f^2(t, \theta) &= \gamma_{\theta}^{2t} e^{t(t-1)\theta_2} (e^{\theta_2 t^2} - 1) - 2t \gamma_{\theta}^{t-1} \Gamma(t+1) \gamma_{\theta}^2 \left[\frac{1}{\gamma_{\theta}^2} e^{\theta_1(t+1) + \frac{1}{2}\theta_2(t+1)^2} - \frac{1}{\gamma_{\theta}} e^{\theta_1 t + \frac{1}{2}\theta_2 t^2} \right] \\ &\quad + t^2 \gamma_{\theta}^{2t-2} \Gamma^2(t+1) \gamma_{\theta}^4 \frac{(e^{\theta_2} - 1)}{\gamma_{\theta}^2}, \end{aligned}$$

κι έπειτα από αλγεβρικές πράξεις, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \sigma_f^2(t, \theta) &= \gamma_{\theta}^{2t} \left\{ e^{t(t-1)\theta_2} (e^{\theta_2 t^2} - 1) - 2t \Gamma(t+1) \left[e^{\frac{1}{2}\theta_2(t+1)t} - e^{\frac{1}{2}\theta_2 t(t-1)} \right] \right. \\ &\quad \left. + t^2 \Gamma^2(t+1) (e^{\theta_2} - 1) \right\}. \end{aligned} \quad (4.3.23)$$

Βήμα 11^ο Υπολογισμός των $\beta_1(t)$ και $\beta_2(t)$, της κρίσιμης περιοχής και του κανόνα απόφασης με βάσει όσα αναπτύχθηκαν στην προηγούμενη ενότητα. Είναι

$$\beta_1(t) = \frac{\left[e^{\theta_1 t + \frac{1}{2}\theta_2 t^2} - \gamma_{\theta}^t \Gamma(t+1) \right] \sqrt{n}}{\gamma_{\theta}^t \left[\Gamma(2t+1) - (1+t^2) \Gamma^2(t+1) \right]^{\frac{1}{2}}},$$

ή ισοδύναμα,

$$\beta_1(t) = \frac{\left[e^{\frac{1}{2}\theta_2 t^2} - e^{\frac{1}{2}\theta_2 t} \Gamma(t+1) \right] \sqrt{n}}{e^{\frac{1}{2}\theta_2 t} \left[\Gamma(2t+1) - (1+t^2) \Gamma^2(t+1) \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (4.3.24)$$

και

$$\beta_2(t) = \frac{\left\{ e^{t(t-1)\theta_2} (e^{\theta_2 t^2} - 1) - 2t \Gamma(t+1) \left[e^{\frac{1}{2}\theta_2(t+1)t} - e^{\frac{1}{2}\theta_2 t(t-1)} \right] + t^2 \Gamma^2(t+1) (e^{\theta_2} - 1) \right\}}{\Gamma(2t+1) - (1+t^2) \Gamma^2(t+1)}. \quad (4.3.25)$$

Η κρίσιμη περιοχή με επίπεδο σημαντικότητας α αποτελείται από εκείνα τα $(X_1, \dots, X_n)$ που είναι τέτοια ώστε:

$$\hat{\varepsilon} \left[m_Y(t) - (\bar{X})^t \Gamma(t+1) \right] > z_{\alpha} \frac{(\bar{X}^t) \left[\Gamma(2t+1) - (1+t^2) \Gamma^2(t+1) \right]^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{n}},$$

όπου με $\hat{\varepsilon}$ συμβολίζεται ο εκτιμητής του προσήμου του $\beta_1(t)$, το οποίο καθορίζεται εκτιμώντας την άγνωστη παράμετρο θ από τον

Ε.Μ.Π. $\hat{\theta}$ και υπό τους περιορισμούς που έχουν διατυπωθεί για την τιμή της t .

Η ποσότητα $\pi(\alpha, t) = \beta_2(t)^{\frac{1}{2}} \{z_\alpha - |\beta_1(t)|\}$ προσδιορίζεται χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αποτελέσματα. Η συνάρτηση $\pi(\alpha, t)$ εξαρτάται μόνο από την παράμετρο θ_2 , καθώς τόσο το $\beta_1(t)$ όσο και το $\beta_2(t)$ εξαρτώνται μόνο από την παράμετρο θ_2 . Επομένως, μπορούμε να εκτιμήσουμε την παράμετρο θ_2 από τη δειγματική διακύμανση $S_Y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$, $i = 1, \dots, n$, που είναι συνεπής εκτιμητής της θ_2 .

Άρα στην πράξη η επιλογή του t για δοθέν επίπεδο σημαντικότητας και μέγεθος δείγματος εξαρτάται από τα διαθέσιμα δεδομένα και δεν μπορεί να προταθεί ένας γενικός τρόπος προσδιορισμού.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Μεθοδολογία του Vuong (1989)

Στη βιβλιογραφία, όπως έχει προηγούμενα αναφερθεί, έχουν εμφανιστεί διάφοροι τρόποι αντιμετώπισης του προβλήματος που διατυπώθηκε στο Κεφάλαιο 1 και ταξινομούνται σε δύο μεγάλες κατηγορίες. Μέχρι στιγμής έχουν παρουσιαστεί μεθοδολογίες σύμφωνα με τις οποίες μία από τις δύο υποψήφιες κατανομές λαμβάνεται ως μηδενική υπόθεση, έχοντας την άλλη ως εναλλακτική, κι αντίστροφα. Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστεί μια μέθοδος, η οποία ανήκει στην κατηγορία εκείνη η οποία περιλαμβάνει τις προσεγγίσεις, σύμφωνα με τις οποίες η μηδενική υπόθεση είναι ότι οι δύο κατανομές περιγράφουν το τ.δ. ισοδύναμα κι έχει ως εναλλακτικές ότι μία κατανομή είναι καλύτερη της άλλης για τη μοντελοποίηση. Επομένως, θα παρουσιαστεί ένας στατιστικός έλεγχος που εντάσσεται στην κατηγορία αυτών της επιλογής του καλύτερου μοντέλου.

Στο πλαίσιο αυτό, στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστεί η μεθοδολογία που προτάθηκε από τον Vuong (1989) για την αντιμετώπιση του προβλήματος του ελέγχου των μη εμφωλευμένων μοντέλων. Ο Vuong (1989), χρησιμοποιώντας το κριτήριο πληροφορίας των Kullback and Leibler (1951), πρότεινε ένα στατιστικό που βασίζεται στο πηλίκο μέγιστων πιθανοφανειών. Η μεθοδολογία αυτή έχει την επιθυμητή ιδιότητα ότι συμπίπτει με την αντίστοιχη των εμφωλευμένων μοντέλων.

Η διάρθρωση του Κεφαλαίου 5 έχει ως εξής. Στην Παράγραφο 5.1 παρατίθενται κάποιες εισαγωγικές έννοιες και ο απαραίτητος συμβολισμός που θα χρησιμοποιηθεί. Στη συνέχεια, στην Παράγραφο 5.2 παρουσιάζεται η μεθοδολογία του Vuong

(1989), ενώ στην Παράγραφο 5.3 η μέθοδος αυτή αποσαφηνίζεται μέσω του ελέγχου της υπόθεσης αν ένα τυχαίο δείγμα $X_1, \dots, X_n$ μπορεί να θεωρηθεί ότι προέρχεται από την λογαριθμοκανονική ή την εκθετική κατανομή.

5.1 Εισαγωγή

Στην παράγραφο αυτή, για τη διευκόλυνση της μελέτης του κεφαλαίου, δίνονται κάποιες εισαγωγικές έννοιες και συμβολισμοί, καθώς και οι συνθήκες υπό τις οποίες ισχύει η μεθοδολογία του Vuong (1989).

Έστω $X_1, \dots, X_n$ ένα τυχαίο δείγμα (τ.δ.) από κάποιο πληθυσμό με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) ή συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) $h(\cdot)$, η συναρτησιακή μορφή της οποίας μας είναι άγνωστη. Θέλουμε να εξετάσουμε αν μπορεί να θεωρηθεί ότι το τ.δ. προέρχεται είτε από την οικογένεια κατανομών $H_f = \{f(x, \theta), \theta \in \Theta\}$ είτε από την οικογένεια κατανομών $H_g = \{g(x, \gamma), \gamma \in \Gamma\}$, υποθέτοντας ότι πρόκειται για μη εμφωλευμένα μοντέλα (βλέπε αναλυτική περιγραφή του προβλήματος στο Κεφάλαιο 1).

Είναι φυσικό ότι θα επιλεγεί η οικογένεια κατανομών εκείνη, που είναι πιο «κοντά» στην άγνωστη αληθινή κατανομή $h(\cdot)$, αν αυτό ισχύει για μία από τις δύο οικογένειες κατανομών. Ένα μέτρο της εγγύτητας δύο κατανομών που έχει εισαχθεί στη βιβλιογραφία είναι το μέτρο απόκλισης των Kullback and Leibler (1951). Σύμφωνα με τον Ορισμό 1.1.1 το μέτρο αυτό δύναται να καθορίσει

και την εγγύτητα μεταξύ των κατανομών $f(x, \theta)$, $g(x, \gamma)$ και της πραγματικής κατανομής. Οι «αποστάσεις» αυτές ορίζονται να είναι:

$$I_{fh} = E_h[\ln h(X)] - E_h[\ln f(X, \theta)], \quad I_{gh} = E_h[\ln h(X)] - E_h[\ln g(X, \gamma)],$$

όπου $E_h(\cdot)$ είναι η αναμενόμενη τιμή ως προς την πραγματική κατανομή $h(\cdot)$.

Είναι προφανές ότι η οικογένεια κατανομών H_f θεωρείται ότι περιγράφει καλύτερα το τ.δ. αν και μόνο αν $\inf_{\theta} I_{fh} < \inf_{\gamma} I_{gh}$, ή ισοδύναμα αν και μόνο αν $\sup_{\theta} E_h[\ln f(X, \theta)] > \sup_{\gamma} E_h[\ln g(X, \gamma)]$.

Επομένως, η καταλληλότητα ενός εκ των δύο πιθανών μοντέλων καθορίζεται, εξαρτάται από την ελάχιστη πιθανή «απόσταση» μεταξύ του μοντέλου και της αληθινής κατανομής. Χαρακτηριστικά ο Vuong (1989) αναφέρει ότι «αν η απόσταση μεταξύ ενός καθορισμένου μοντέλου και της πραγματικής κατανομής ορίζεται ως το ελάχιστο του Κριτηρίου Πληροφορίας των Kullback-Leibler (KLIC) που σχετίζεται με αυτές τις κατανομές, τότε είναι φυσικό να ορίσουμε το «καλύτερο» μοντέλο ανάμεσα από μια συλλογή ανταγωνιστικών μοντέλων να είναι το μοντέλο που είναι πιο κοντά στην πραγματική κατανομή».

Όμως, όπως έχει επισημανθεί στη βιβλιογραφία (βλέπε, μεταξύ άλλων, Sawa (1978)), ο παραπάνω κανόνας δεν είναι άμεσα εφαρμόσιμος, καθώς εξαρτάται πλήρως από την άγνωστη αληθινή κατανομή $h(\cdot)$. Επιπλέον, για τη θεμελίωση ενός πρακτικά εφαρμόσιμου κανόνα για τον καθορισμό του καταλληλότερου

μοντέλου θα πρέπει επιπλέον να αντικατασταθούν οι άγνωστες παράμετροι θ και γ από κατάλληλους εκτιμητές. Για το σκοπό αυτό παρατίθεται ο ακόλουθος ορισμός.

Ορισμός 5.1.1 (Sawa (1978)) Έστω οι οικογένειες κατανομών $H_f = \{f(x, \theta), \theta \in \Theta\}$ και $H_g = \{g(x, \gamma), \gamma \in \Gamma\}$, όπου η συναρτησιακή μορφή των $f(x, \theta)$ και $g(x, \gamma)$ μας είναι γνωστή, αλλά εξαρτάται από έναν πεπερασμένο αριθμό άγνωστων παραμέτρων που συμβολίζονται με θ και γ , αντίστοιχα. Επίσης, τα σύνολα Θ και Γ απαρτίζουν τον παραμετρικό χώρο όπου οι αντίστοιχες πυκνότητες είναι καλά ορισμένες. Οι ποσότητες

$$\theta_* = \arg \max_{\theta \in \Theta} E_h [\ln f(X, \theta)], \quad (5.1.1)$$

και

$$\gamma_* = \arg \max_{\gamma \in \Gamma} E_h [\ln g(X, \gamma)], \quad (5.1.2)$$

ονομάζονται ψευδοαληθείς τιμές των θ και γ , αντίστοιχα. ■

Προκύπτει (βλέπε Sawa (1978)) ότι αν η αληθινή σ.π.π. είναι η $h(\cdot)$ και η $f(x, \theta)$ ικανοποιεί τις συνθήκες ομαλότητας (βλέπε Παράρτημα Β), η ψευδοαληθής τιμή ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση:

$$E_h \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(X, \theta) \right]_{\theta=\theta_*} = 0. \quad (5.1.3)$$

Από τα παραπάνω γίνεται αντιληπτό ότι το τ.δ. προέρχεται από την οικογένεια κατανομών για την οποία η ποσότητα $E_h[\ln f(X, \theta_*)]$ ή $E_h[\ln g(X, \gamma_*)]$ είναι μέγιστη. Επομένως,

i) αν $E_h[\ln f(X, \theta_*)] = E_h[\ln g(X, \gamma_*)]$ ή $E_h\left[\ln \frac{f(X, \theta_*)}{g(X, \gamma_*)}\right] = 0$, τότε

οι δύο κατανομές περιγράφουν ισοδύναμα το τ.δ.,

ii) αν $E_h[\ln f(X, \theta_*)] > E_h[\ln g(X, \gamma_*)]$ ή $E_h\left[\ln \frac{f(X, \theta_*)}{g(X, \gamma_*)}\right] > 0$, τότε

το τ.δ περιγράφεται καλύτερα από την κατανομή H_f , και τέλος,

iii) αν $E_h[\ln f(X, \theta_*)] < E_h[\ln g(X, \gamma_*)]$ ή $E_h\left[\ln \frac{f(X, \theta_*)}{g(X, \gamma_*)}\right] < 0$, τότε

το τ.δ περιγράφεται καλύτερα από την κατανομή H_g .

Με βάση το παραπάνω σκεπτικό, ο Vuong (1989) ανήγαγε το υπό μελέτη πρόβλημα στον έλεγχο της $H_0: E_h\left[\ln \frac{f(X, \theta_*)}{g(X, \gamma_*)}\right] = 0$, έναντι της αντίστοιχης κάθε φορά εναλλακτικής υπόθεσης.

Παρατήρηση 5.1.1 Μια βασική διαφοροποίηση της προσέγγισης του Vuong (1989) από αυτές των Cox (1961, 1962), Atkinson (1970) και Erps *et al.* (1982), που είδαμε σε προηγούμενα κεφάλαια αφορά τη διατύπωση της προς έλεγχο υπόθεσης. Η μηδενική υπόθεση, σύμφωνα με τη μεθοδολογία του Vuong (1989), είναι ότι οι δύο κατανομές περιγράφουν το τ.δ. ισοδύναμα, έχοντας ως εναλλακτικές ότι μία κατανομή είναι καλύτερη της άλλης. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με τη μηδενική υπόθεση των μεθοδολογιών των Cox

(1961, 1962), Atkinson (1970) και Erps *et al.* (1982), σύμφωνα με τις οποίες μία από τις δύο κατανομές λαμβάνεται ως μηδενική υπόθεση, έχοντας την άλλη ως εναλλακτική, κι αντίστροφα.

Είναι εύκολα αντιληπτό ότι η ποσότητα $E_h \left[\ln \frac{f(X, \theta_*)}{g(X, \gamma_*)} \right]$

είναι άγνωστη και για τη διενέργεια του υπό μελέτη ελέγχου θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί ένας εκτιμητής της, ο οποίος θα ήταν επιθυμητό να έχει κάποιες καλές ιδιότητες π.χ. να είναι συνεπής. Στο επόμενο Λήμμα αποδεικνύεται ότι, υπό την προϋπόθεση ότι πληρούνται οι συνθήκες που παρατίθενται στο Παράρτημα Β, η άγνωστη αυτή ποσότητα μπορεί να εκτιμηθεί με συνέπεια από τη

στατιστική συνάρτηση $\frac{1}{n} LR_n(\hat{\theta}_n, \hat{\gamma}_n) = \sum_{i=1}^n \ln \frac{f(X_i, \hat{\theta}_n)}{g(X_i, \hat{\gamma}_n)}$, όπου $\hat{\theta}_n, \hat{\gamma}_n$

οι Ε.Μ.Π. των θ_* και γ_* , αντίστοιχα. Επομένως, η άγνωστη ποσότητα εκτιμάται με συνέπεια από τη δειγματική μέση τιμή του πηλίκου μέγιστων πιθανοφανειών.

Πριν προχωρήσουμε παραθέτουμε κάποια χρήσιμα Λήμματα.

Λήμμα 5.1.1 (Vuong (1983)) Έστω $\{\hat{\theta}_n\}$ είναι μια ακολουθία Ε.Μ.Π.. Τότε

- i) υπό τις υποθέσεις 1-2 του Παραρτήματος Β, για κάθε n , υπάρχει σχεδόν σίγουρα ένας ΕΜΠ $\hat{\theta}_n$.
- ii) Υπό τις υποθέσεις 1-3 του Παραρτήματος Β, ισχύει ότι $\hat{\theta}_n \xrightarrow{\sigma.\beta.} \theta_*$.
- iii) Υπό τις υποθέσεις 1-5 του Παραρτήματος Β, ισχύει ότι $A_n^f(\hat{\theta}_n) \xrightarrow{\sigma.\beta.} A_f(\theta_*)$ και $B_n^f(\hat{\theta}_n) \xrightarrow{\sigma.\beta.} B_f(\theta_*)$.

iv) Υπό τις υποθέσεις 1-6 του Παραρτήματος Β, ισχύει ότι

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_*) \xrightarrow{κ.κ.} N(0, C(\theta_*)),$$

όπου

$$A_n^f(\hat{\theta}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \ln f(X_i, \hat{\theta}_n)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}, \quad A_f(\theta_*) = E_h \left[\frac{\partial^2 \ln f(X, \theta_*)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right],$$

$$B_n^f(\hat{\theta}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln f(X_i, \hat{\theta}_n)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \ln f(X_i, \hat{\theta}_n)}{\partial \theta_j},$$

$$B_f(\theta_*) = E_h \left[\frac{\partial \ln f(X, \theta_*)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \ln f(X, \theta_*)}{\partial \theta_j} \right],$$

$$C(\theta_*) = [A_f(\theta_*)]^{-1} [B_f(\theta_*)] [A_f(\theta_*)]^{-1} \text{ για } i, j = 1, \dots, p.$$

Λήμμα 5.1.2 (Vuong(1989)) Αν ισχύουν οι υποθέσεις 1-3 του Παραρτήματος Β, τότε

$$\frac{1}{n} LR_n(\hat{\theta}_n, \hat{\gamma}_n) \xrightarrow{\sigma.\beta.} E_h \left[\ln \frac{f(X, \theta_*)}{g(X, \gamma_*)} \right], \quad (5.1.4)$$

όπου $LR_n(\hat{\theta}_n, \hat{\gamma}_n) = \sum_{i=1}^n \ln \frac{f(X_i, \hat{\theta}_n)}{g(X_i, \hat{\gamma}_n)}$, με $\hat{\theta}_n$ και $\hat{\gamma}_n$ τους Ε.Μ.Π. των θ_*

και γ_* , αντίστοιχα.

Απόδειξη

Από το i) του Λήμματος 5.2.1, οι Ε.Μ.Π. $\hat{\theta}_n$ και $\hat{\gamma}_n$ των παραμέτρων θ_* και γ_* αντίστοιχα, υπάρχουν σχεδόν σίγουρα, και μάλιστα

σύμφωνα με το ii) του Λήμματος 5.2.1 ισχύει ότι $\hat{\theta}_n \xrightarrow{\sigma.\beta.} \theta_*$ και $\hat{\gamma}_n \xrightarrow{\sigma.\beta.} \gamma_*$. Λαμβάνοντας υπόψη το iii) του Λήμματος 5.2.1 εύκολα προκύπτει ότι:

$$\frac{1}{n} LR_n(\hat{\theta}_n, \hat{\gamma}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{f(X_i, \hat{\theta}_n)}{g(X_i, \hat{\gamma}_n)} \xrightarrow{\sigma.\beta.} E_h \left[\ln \frac{f(X, \theta_*)}{g(X, \gamma_*)} \right]$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■

Με βάση το Λήμμα 5.1.2 είναι φυσικό ο στατιστικός έλεγχος της υπό μελέτης μηδενικής υπόθεσης να βασίζεται στην ποσότητα $LR_n(\hat{\theta}_n, \hat{\gamma}_n)$. Επομένως, θα πρέπει να προσδιοριστεί η κατανομή αυτής της ποσότητας. Ο προσδιορισμός αυτός, υπό τις υποθέσεις που παρατίθενται στο Παράρτημα Β, είναι το αντικείμενο μελέτης του επόμενου κεφαλαίου και οφείλεται στον Vuong (1989). Πριν από αυτόν τον προσδιορισμό, θα αποδειχθεί μια πρόταση η αναγκαιότητα της οποίας θα γίνει αντιληπτή στην επόμενη ενότητα.

Πρόταση 5.1.1 Αν ισχύουν οι υποθέσεις 1-3 και 7 του Παραρτήματος Β, τότε η ποσότητα

$$E_h \left[\ln f(X, \theta_*) \right]^2 + E_h \left[\ln g(X, \gamma_*) \right]^2 - \left\{ E_h \left[\ln f(X, \theta_*) \right] \right\}^2 - \left\{ E_h \left[\ln g(X, \gamma_*) \right] \right\}^2 - 2E_h \left[\ln f(X, \theta_*) \ln g(X, \gamma_*) \right] + 2E_h \left[\ln f(X, \theta_*) \right] E_h \left[\ln g(X, \gamma_*) \right]$$

είναι πεπερασμένη.

Απόδειξη

Οι όροι $E_h[\ln f(X, \theta_*)]^2$ και $E_h[\ln g(X, \gamma_*)]^2$ είναι πεπερασμένοι σύμφωνα με την Υπόθεση 7 του Παραρτήματος Β. Επίσης, οι όροι $\{E_h[\ln f(X, \theta_*)]\}^2$, $\{E_h[\ln g(X, \gamma_*)]\}^2$ και $2E_h[\ln f(X, \theta_*)]E_h[\ln g(X, \gamma_*)]$ $E_h[\ln g(X, \gamma_*)]^2$ είναι πεπερασμένοι σύμφωνα με την Υπόθεση 3 του Παραρτήματος Β. Τέλος, από την ανισότητα Cauchy-Schwarz προκύπτει ότι:

$$E_h[\ln f(X, \theta_*) \ln g(X, \gamma_*)] \leq E_h[\ln f(X, \theta_*)] E_h[\ln g(X, \gamma_*)].$$

Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη και την Υπόθεση 3 του Παραρτήματος Β, ο όρος $E_h[\ln f(X, \theta_*) \ln g(X, \gamma_*)]$ είναι πεπερασμένος και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

5.2 Η Μεθοδολογία

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιαστεί η μεθοδολογία του Vuong (1989) για την αντιμετώπιση του προβλήματος του ελέγχου των μη εμφωλευμένων μοντέλων. Ειδικότερα, θα δοθούν τα απαραίτητα λήμματα και θεωρήματα για την εύρεση της κατανομής, υπό τη μηδενική υπόθεση, της στατιστικής συνάρτησης που προτάθηκε από τον Vuong (1989) για τον εν λόγω έλεγχο. Τέλος, θα δοθεί η κρίσιμη περιοχή του στατιστικού ελέγχου.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στην προηγούμενη ενότητα, ο Vuong (1989) πρότεινε έναν τρόπο ελέγχου της

$$H_0 : E_h \left[\ln \frac{f(X, \theta_*)}{g(X, \gamma_*)} \right] = 0, \text{ δηλαδή της υπόθεσης ότι οι δύο οικογένειες}$$

κατανομών περιγράφουν ισοδύναμα το τ.δ. , έναντι μίας εκ των δύο εναλλακτικών όπως αυτές διατυπώθηκαν. Με βάση όσα αναφέρθηκαν στην προηγούμενη ενότητα ο στατιστικός έλεγχος της υπό μελέτης μηδενικής υπόθεσης βασίζεται στην ποσότητα $LR_n(\hat{\theta}_n, \hat{\gamma}_n)$ η ασυμπτωτική κατανομή της οποίας προσδιορίζεται στο ακόλουθο θεώρημα, λαμβάνοντας υπόψη και την Πρόταση 5.1.1.

Θεώρημα 5.2.1 (Vuong (1989)) Αν ισχύουν οι υποθέσεις 1-3 και 7 του Παραρτήματος Β, τότε

$$n^{-\frac{1}{2}} LR_n(\hat{\theta}_n, \hat{\gamma}_n) - n^{\frac{1}{2}} E_h \left[\ln \frac{f(X, \theta_*)}{g(X, \gamma_*)} \right] \xrightarrow{κ.κ.} N(0, \omega_*^2), \quad (5.2.1)$$

όπου $\omega_*^2 = Var_h \left[\ln \frac{f(X, \theta_*)}{g(X, \gamma_*)} \right]$, ή ισοδύναμα,

$$\omega_*^2 = E_h \left[\ln \frac{f(X, \theta_*)}{g(X, \gamma_*)} \right]^2 - \left\{ E_h \left[\ln \frac{f(X, \theta_*)}{g(X, \gamma_*)} \right] \right\}^2 \quad (5.2.2)$$

με $\omega_*^2 < \infty$ (βλέπε Πρόταση 5.1.1).

Απόδειξη

Έστω $L_n^f(\theta) = \ln \prod_{i=1}^n f(X_i, \theta)$ και $L_n^g(\gamma) = \ln \prod_{i=1}^n g(X_i, \gamma)$. Επιπλέον, έστω θ_* και γ_* οι ψευδοαληθείς τιμές των παραμέτρων θ και γ ,

αντίστοιχα. Αναπτύσσοντας κατά Taylor τις συναρτήσεις $L_n^f(\boldsymbol{\theta}_*)$ και $L_n^g(\boldsymbol{\gamma}_*)$ γύρω από το σημείο $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ και $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_n$, αντίστοιχα, έχουμε ότι:

$$L_n^f(\boldsymbol{\theta}_*) = L_n^f(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) + \frac{n}{2}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_*)' A_f(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_*) + o_p(1), \quad (5.2.3)$$

και

$$L_n^g(\boldsymbol{\gamma}_*) = L_n^g(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_n) + \frac{n}{2}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_n - \boldsymbol{\gamma}_*)' A_g(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_n - \boldsymbol{\gamma}_*) + o_p(1), \quad (5.2.4)$$

όπου ο συμβολισμός $o_p(1)$ δηλώνει τους όρους οι οποίοι συγκλίνουν

κατά πιθανότητα στο μηδέν, ενώ $A_f = E_h \left[\frac{\partial^2 \ln f(X, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}'} \right]$ και

$$A_g = E_h \left[\frac{\partial^2 \ln g(X, \boldsymbol{\gamma})}{\partial \boldsymbol{\gamma} \partial \boldsymbol{\gamma}'} \right], \text{ αντίστοιχα.}$$

Εύκολα προκύπτει ότι:

$$LR_n(\boldsymbol{\theta}_*, \boldsymbol{\gamma}_*) = L_n^f(\boldsymbol{\theta}_*) - L_n^g(\boldsymbol{\gamma}_*), \quad (5.2.5)$$

άρα

$$\begin{aligned} LR_n(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_n) - LR_n(\boldsymbol{\theta}_*, \boldsymbol{\gamma}_*) &= -\frac{n}{2}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_*)' A_f(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_*) \\ &\quad + \frac{n}{2}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_n - \boldsymbol{\gamma}_*)' A_g(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_n - \boldsymbol{\gamma}_*) + o_p(1). \end{aligned}$$

Όμως, ισχύει ότι: $n^{\frac{1}{2}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_*) = O_p(1)$ και $n^{\frac{1}{2}}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_n - \boldsymbol{\gamma}_*) = O_p(1)$, όπου ο

συμβολισμός $O_p(1)$ δηλώνει ότι οι ποσότητες $n^{\frac{1}{2}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_*)$ και

$n^{\frac{1}{2}}(\hat{\gamma}_n - \gamma_*)$ είναι φραγμένες κατά πιθανότητα. Έτσι, άμεσα προκύπτει ότι:

$$n^{\frac{1}{2}}LR_n(\hat{\theta}_n, \hat{\gamma}_n) - n^{\frac{1}{2}}E_h \left[\ln \frac{f(X, \theta_*)}{g(X, \gamma_*)} \right] = n^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{n}LR_n(\theta_*, \gamma_*) - E_h \left[\ln \frac{f(X, \theta_*)}{g(X, \gamma_*)} \right] \right\} + o_p(1).$$

Από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, έχουμε ότι ο όρος $n^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{n}LR_n(\theta_*, \gamma_*) \right\}$ συγκλίνει κατά κατανομή στην $N(0, \omega_*^2)$, όπου

$$\omega_*^2 = E_h \left[\ln \frac{f(X, \theta_*)}{g(X, \gamma_*)} \right]^2 - \left\{ E_h \left[\ln \frac{f(X, \theta_*)}{g(X, \gamma_*)} \right] \right\}^2. \quad (5.2.6)$$

Έπειτα από λίγη άλγεβρα προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \omega_*^2 = & E_h \left[\ln f(X, \theta_*) \right]^2 + E_h \left[\ln g(X, \gamma_*) \right]^2 - \left\{ E_h \left[\ln f(X, \theta_*) \right] \right\}^2 - \left\{ E_h \left[\ln g(X, \gamma_*) \right] \right\}^2 \\ & - 2E_h \left[\ln f(X, \theta_*) \ln g(X, \gamma_*) \right] + 2E_h \left[\ln f(X, \theta_*) \right] E_h \left[\ln g(X, \gamma_*) \right]. \end{aligned}$$

Επομένως, σύμφωνα με την Πρόταση 5.1.1 ισχύει ότι $\omega_*^2 < \infty$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Στο Θεώρημα 5.2.1 αποδείχθηκε ότι αν ισχύουν οι υποθέσεις 1-3 και 7 του Παραρτήματος Β, τότε

$$n^{\frac{1}{2}}LR_n(\hat{\theta}_n, \hat{\gamma}_n) - n^{\frac{1}{2}}E_h \left[\ln \frac{f(X, \theta_*)}{g(X, \gamma_*)} \right] \xrightarrow{\kappa.\kappa.} N(0, \omega_*^2),$$

όπου η διακύμανση ω_*^2 προσδιορίζεται μέσω της σχέσης (5.2.6). Είναι άμεσα αντιληπτό ότι η διακύμανση αυτή δεν μπορεί να υπολογιστεί στην πράξη, καθώς εξαρτάται από την άγνωστη

αληθινή κατανομή $h(\cdot)$. Επομένως, για να μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην πράξη η παραπάνω στατιστική συνάρτηση θα πρέπει η άγνωστη διακύμανση ω_*^2 να εκτιμηθεί κατάλληλα.

Στο πλαίσιο αυτό, δύο τρόποι εκτίμησης της άγνωστης διακύμανσης προτάθηκαν από τον Vuong (1989). Ειδικότερα, ο Vuong (1989) προτείνει ότι η άγνωστη διακύμανση μπορεί να εκτιμηθεί είτε από την ποσότητα

$$\hat{\omega}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\ln \frac{f(X_i, \hat{\theta}_n)}{g(X_i, \hat{\gamma}_n)} \right]^2 - \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{f(X_i, \hat{\theta}_n)}{g(X_i, \hat{\gamma}_n)} \right]^2, \quad (5.2.7)$$

είτε από την ποσότητα

$$\tilde{\omega}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\ln \frac{f(X_i, \hat{\theta}_n)}{g(X_i, \hat{\gamma}_n)} \right]^2 = \hat{\omega}_n^2 + \left(\frac{1}{n} LR_n(\hat{\theta}_n, \hat{\gamma}_n) \right)^2. \quad (5.2.8)$$

Στο ακόλουθο λήμμα αποδεικνύεται ότι οι εκτιμητές αυτοί είναι συνεπείς εκτιμητές της πληθυσμιακής διακύμανσης ω_*^2 , που δόθηκε στη σχέση (5.2.6).

Λήμμα 5.2.1 (Vuong(1989)) Αν ισχύουν οι υποθέσεις 1-3 και 7 του Παραρτήματος Β, τότε

$$\hat{\omega}_n^2 \xrightarrow{\sigma.\beta.} \omega_*^2 \quad (5.2.9)$$

και

$$\tilde{\omega}_n^2 \xrightarrow{\sigma.\beta.} \omega_*^2 + \left\{ E_h \left[\ln \frac{f(X, \theta_*)}{g(X, \gamma_*)} \right] \right\}^2, \quad (5.2.10)$$

όπου $\hat{\omega}_n^2$ και $\tilde{\omega}_n^2$ οι εκτιμητές της άγνωστης διακύμανσης ω_*^2 που δίνονται στις σχέσεις (5.2.7) και (5.2.8), αντίστοιχα.

Απόδειξη

Είναι

$$\hat{\omega}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\ln \frac{f(X_i, \hat{\theta}_n)}{g(X_i, \hat{\gamma}_n)} \right]^2 - \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{f(X_i, \hat{\theta}_n)}{g(X_i, \hat{\gamma}_n)} \right]^2.$$

Από το Λήμμα 5.1.2 ισχύει ότι

$$\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{f(X_i, \hat{\theta}_n)}{g(X_i, \hat{\gamma}_n)} \right]^2 \xrightarrow{\sigma.\beta.} \left\{ E_h \left[\ln \frac{f(X, \theta_*)}{g(X, \gamma_*)} \right] \right\}^2. \quad (5.2.11)$$

Επειδή οι $\hat{\theta}_n$ και $\hat{\gamma}_n$ είναι συνεπείς εκτιμητές των θ_* και γ_* αντίστοιχα, ισχύει ότι

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\ln \frac{f(X_i, \hat{\theta}_n)}{g(X_i, \hat{\gamma}_n)} \right]^2 \xrightarrow{\sigma.\beta.} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\ln \frac{f(X_i, \theta_*)}{g(X_i, \gamma_*)} \right]^2. \quad (5.2.12)$$

Με εφαρμογή του Θεωρήματος του Jennrich (1969), προκύπτει ότι:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\ln \frac{f(X_i, \theta_*)}{g(X_i, \gamma_*)} \right]^2 \xrightarrow{\sigma.\beta.} \int \left[\ln \frac{f(X, \theta_*)}{g(X, \gamma_*)} \right]^2 dH(X) = \int \left[\ln \frac{f(X, \theta_*)}{g(X, \gamma_*)} \right]^2 h(X) dX,$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\ln \frac{f(X_i, \theta_*)}{g(X_i, \gamma_*)} \right]^2 \xrightarrow{\sigma.\beta.} E_h \left[\ln \frac{f(X, \theta_*)}{g(X, \gamma_*)} \right]^2, \quad (5.2.13)$$

για κάθε $(\theta, \gamma) \in \Theta \times \Gamma$.

Επομένως, συνδυάζοντας τις σχέσεις (5.2.11) και (5.2.13) προκύπτει ότι

$$\hat{\omega}_n^2 \xrightarrow{\sigma.\beta.} E_h \left[\ln \frac{f(X, \theta_*)}{g(X, \gamma_*)} \right]^2 - \left\{ E_h \left[\ln \frac{f(X, \theta_*)}{g(X, \gamma_*)} \right] \right\}^2 = \omega_*^2.$$

Καθώς

$$\tilde{\omega}_n^2 = \hat{\omega}_n^2 + \left(\frac{1}{n} LR_n(\hat{\theta}_n, \hat{\gamma}_n) \right)^2,$$

με $\hat{\omega}_n^2 \xrightarrow{\sigma.\beta.} \omega_*^2$, και λαμβάνοντας υπόψη ότι από το Λήμμα 5.2.2 ισχύει ότι:

$$\left(\frac{1}{n} LR_n(\hat{\theta}_n, \hat{\gamma}_n) \right)^2 \xrightarrow{\sigma.\beta.} \left\{ E_h \left[\ln \frac{f(X, \theta_*)}{g(X, \gamma_*)} \right] \right\}^2,$$

έχουμε ότι

$$\tilde{\omega}_n^2 \xrightarrow{\sigma.\beta.} \omega_*^2 + \left\{ E_h \left[\ln \frac{f(X, \theta_*)}{g(X, \gamma_*)} \right] \right\}^2,$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη. ■

Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα του Θεωρήματος 5.2.1 και του Λήμματος 5.2.1 προκύπτουν δύο ουσιαστικά διαφορετικές στατιστικές συναρτήσεις, για τον έλεγχο της υπό μελέτης μηδενικής υπόθεσης, ανάλογα με τον τρόπο εκτίμησης της άγνωστης διακύμανσης ω_*^2 . Αν εκτιμηθεί από την ποσότητα $\hat{\omega}_n^2$, η στατιστική συνάρτηση είναι:

$$T_V^1 = n^{\frac{1}{2}} \frac{LR_n(\hat{\theta}_n, \hat{\gamma}_n)}{\hat{\omega}_n}, \quad (5.2.14)$$

ενώ αν η διακύμανση ω_*^2 εκτιμηθεί από την ποσότητα $\tilde{\omega}_n^2$, η στατιστική συνάρτηση είναι:

$$T_V^2 = n^{\frac{1}{2}} \frac{LR_n(\hat{\theta}_n, \hat{\gamma}_n)}{\tilde{\omega}_n}. \quad (5.2.15)$$

Στο επόμενο Θεώρημα προσδιορίζεται η ασυμπτωτική κατανομή των T_V^1 και T_V^2 .

Θεώρημα 5.2.3 (Vuong (1989)) Αν ισχύουν οι υποθέσεις 1-7 του Παραρτήματος Β, τότε

- i) υπό την μηδενική υπόθεση ότι τα δύο μοντέλα είναι ισοδύναμα, ισχύει ότι:

$$T_V^1 = n^{\frac{1}{2}} \frac{LR_n(\hat{\theta}_n, \hat{\gamma}_n)}{\hat{\omega}_n} \xrightarrow{\kappa.\kappa.} N(0,1) \quad (5.2.16)$$

και

$$T_V^2 = n^{\frac{1}{2}} \frac{LR_n(\hat{\theta}_n, \hat{\gamma}_n)}{\tilde{\omega}_n} \xrightarrow{\kappa.\kappa.} N(0,1). \quad (5.2.17)$$

ii) Υπό την υπόθεση ότι το τ.δ. περιγράφεται πιο ικανοποιητικά από την H_f

$$T_V^1 \xrightarrow{\sigma.\beta.} +\infty \quad (5.2.18)$$

και

$$T_V^2 \xrightarrow{\sigma.\beta.} +\infty. \quad (5.2.19)$$

iii) Υπό την υπόθεση ότι το τ.δ. περιγράφεται πιο ικανοποιητικά από την H_g

$$T_V^1 \xrightarrow{\sigma.\beta.} -\infty \quad (5.2.20)$$

και

$$T_V^2 \xrightarrow{\sigma.\beta.} -\infty. \quad (5.2.21)$$

Απόδειξη

Η απόδειξη του αποτελέσματος i) προκύπτει άμεσα συνδυάζοντας τα αποτελέσματα του Θεωρήματος 5.2.1 και του Λήμματος 5.2.1 και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\omega_*^2 > 0$. Το αποτέλεσμα ii) είναι επίσης προφανές, αφού, υπό την H_f , τα T_V^1 και T_V^2 είναι αθροίσματα

θετικών όρων. Όμοια, υπό την H_g , τα T_V^1 και T_V^2 είναι αθροίσματα αρνητικών όρων, άρα και το αποτέλεσμα iii) είναι προφανές.

Παρατήρηση 5.2.1 Οι λογάριθμοι των πιθανοφανειών που χρησιμοποιούνται στο στατιστικό του Vuong (1989) επηρεάζονται αν ο αριθμός των άγνωστων παραμέτρων των υποθέσεων H_f και H_g που εκτιμούμε είναι διαφορετικός. Έτσι, ο Vuong (1989) προτείνει τη θεώρηση της διορθωμένης στατιστικής συνάρτησης της μορφής:

$$L\tilde{R}_n(\hat{\theta}_n, \hat{\gamma}_n) = LR_n(\hat{\theta}_n, \hat{\gamma}_n) - K_n(\theta, \gamma), \quad (5.2.22)$$

όπου $K_n(\theta, \gamma)$ ένας παράγοντας διόρθωσης. Στο πλαίσιο αυτό, ο Vuong (1989) πρότεινε δύο διαφορετικούς παράγοντες διόρθωσης. Ο πρώτος βασίζεται στο κριτήριο πληροφορίας του Akaike (1973) και είναι

$$K_n^1(\theta, \gamma) = p - q, \quad (5.2.23)$$

ενώ ο δεύτερος βασίζεται στο κριτήριο πληροφορίας του Schwarz (1978) και είναι ο:

$$K_n^2(\theta, \gamma) = \frac{p}{2} \ln n - \frac{q}{2} \ln n, \quad (5.2.24)$$

όπου p και q ο αριθμός των εκτιμώμενων παραμέτρων των H_f και H_g , αντίστοιχα.

Η μέθοδος του Vuong (1989) θα αποσαφηνιστεί μέσω της εφαρμογής της στην επόμενη ενότητα.

Παρατήρηση 5.2.2 α) Ο Vuong (1989) συγκρίνοντας τη μεθοδολογία του με αυτή του Akaike (1973, 1974), για το πρόβλημα της επιλογής του καταλληλότερου μοντέλου, επισήμανε ότι η διαφορά μεταξύ τους έγκειται στο γεγονός ότι η προσέγγισή του είναι στοχαστική. Οι Amemiya (1980) και McAleer and Bera (1983) ισχυρίστηκαν ότι η σημαντικότερη διαφορά μεταξύ του ελέγχου μη εμφωλευμένων υποθέσεων και επιλογής του καταλληλότερου μοντέλου είναι ότι η πρώτη διαδικασία επιτρέπει « ένα στοχαστικό ισχυρισμό σχετικά με την επιλογή μοντέλου», ενώ η δεύτερη όχι. Πλέον, με βάση την προσέγγιση του Vuong (1989), ο ισχυρισμός αυτός καταρρίπτεται. Έτσι, όπως και στον κλασσικό έλεγχο υποθέσεων, τα αποτελέσματα σχετικά με την κατανομή της σ.σ. του Vuong (1989) χρησιμοποιούνται για την ύπαρξη ενδείξεων υπέρ ενός εκ των δύο «ανταγωνιστικών» μοντέλων. Επομένως, δεν είναι απαραίτητη η επιλογή ενός εκ των δύο μοντέλων, αν αυτά είναι ισοδύναμα.

β) Η διαφορά μεταξύ της προσέγγισης του Vuong (1989) και του Cox (1961, 1962) έγκειται στην προς έλεγχο μηδενική υπόθεση. Ειδικότερα, οι προς έλεγχο υποθέσεις των δύο προσεγγίσεων είναι πανομοιότυπες, αν και μόνο αν οι υποθέσεις είναι πλήρως εμφωλευμένες (βλέπε Vuong (1989), σελ 319).

5.3 Ειδική Περίπτωση

Στην ενότητα αυτή αποσαφηνίζεται η μεθοδολογία του Vuong (1989) που αναπτύχθηκε στην προηγούμενη παράγραφο αυτού του κεφαλαίου στην περίπτωση που τα δύο «ανταγωνιστικά» μοντέλα είναι αυτό της λογαριθμοκανονικής και της εκθετικής κατανομής.

Για τη θεωρητική εφαρμογή της μεθοδολογίας του Vuong (1989) σε αυτήν την ειδική περίπτωση ουσιαστικά απαιτείται η υλοποίηση των ακόλουθων βημάτων.

Βήμα 1^ο: Εύρεση των Ε.Μ.Π. $\hat{\theta}_n$ και $\hat{\gamma}_n$. Οι Ε.Μ.Π. $\hat{\theta}_n$ και $\hat{\gamma}_n$ δίνονται στις σχέσεις (2.3.1), (2.3.2) και (2.3.3), αντίστοιχα.

Βήμα 2^ο : Υπολογισμός της $LR_n(\hat{\theta}_n, \hat{\gamma}_n) = \sum_{i=1}^n \ln \frac{f(X_i, \hat{\theta}_n)}{g(X_i, \hat{\gamma}_n)}$.

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (2) και (8) του Παραρτήματος Α, εύκολα προκύπτει ότι:

$$LR_n(\hat{\theta}_n, \hat{\gamma}_n) = \sum_{i=1}^n \ln \frac{f(X_i, \hat{\theta}_n)}{g(X_i, \hat{\gamma}_n)} = -\sum_{i=1}^n \ln X_i - \frac{n}{2} \ln(2\pi\hat{\theta}_{2n}) - \frac{n}{2} + n \ln \hat{\gamma}_n + n,$$

ή ισοδύναμα

$$LR_n(\hat{\theta}_n, \hat{\gamma}_n) = -n\hat{\theta}_{1n} - \frac{1}{2}n \ln(2\pi\hat{\theta}_{2n}) + \frac{n}{2} + n \ln \hat{\gamma}_n. \quad (5.3.1)$$

Επιπρόσθετα μπορούν να βρεθούν τα διορθωμένα στατιστικά χρησιμοποιώντας ως παράγοντα διόρθωσης είτε τον όρο $K_n^1(\theta, \gamma) = p - q = 2 - 1 = 1$, είτε τον όρο

$$K_n^2(\theta, \gamma) = \frac{p}{2} \ln n - \frac{q}{2} \ln n = \frac{2}{2} \ln n - \frac{1}{2} \ln n = \frac{1}{2} \ln n. \text{ Επομένως,}$$

$$L\tilde{R}_n^{AIC}(\hat{\theta}_n, \hat{\gamma}_n) = -n\hat{\theta}_{1n} - \frac{1}{2}n \ln(2\pi\hat{\theta}_{2n}) + \frac{n}{2} + n \ln \hat{\gamma}_n - 1. \quad (5.3.2)$$

και

$$LR_n^{SIC}(\hat{\theta}_n, \hat{\gamma}_n) = -n\hat{\theta}_{1n} - \frac{1}{2}n\ln(2\pi\hat{\theta}_{2n}) + \frac{n}{2} + n\ln\hat{\gamma}_n - \frac{1}{2}\ln n, \quad (5.3.3)$$

αντίστοιχα.

Βήμα 3ο : Υπολογισμός είτε της

$$\hat{\omega}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\ln \frac{f(X_i, \hat{\theta}_n)}{g(X_i, \hat{\gamma}_n)} \right]^2 - \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{f(X_i, \hat{\theta}_n)}{g(X_i, \hat{\gamma}_n)} \right]^2,$$

είτε της

$$\tilde{\omega}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\ln \frac{f(X_i, \hat{\theta}_n)}{g(X_i, \hat{\gamma}_n)} \right]^2 = \hat{\omega}_n^2 + \left[\frac{1}{n} LR_n(\hat{\theta}_n, \hat{\gamma}_n) \right]^2.$$

Είναι λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (2) και (8) του Παραρτήματος Α,

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_n^2 = & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[-\ln X_i - \frac{1}{2} \ln(2\pi\hat{\theta}_{2n}) - \frac{(\ln X_i - \hat{\theta}_{1n})^2}{2\hat{\theta}_{2n}} + \ln \hat{\gamma}_n + \frac{X_i}{\hat{\gamma}_n} \right]^2 \\ & - \frac{1}{n^2} \left[LR_n(\hat{\theta}_n, \hat{\gamma}_n) \right]^2, \end{aligned}$$

και

$$\tilde{\omega}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[-\ln X_i - \frac{1}{2} \ln(2\pi\hat{\theta}_{2n}) - \frac{(\ln X_i - \hat{\theta}_{1n})^2}{2\hat{\theta}_{2n}} + \ln \hat{\gamma}_n + \frac{X_i}{\hat{\gamma}_n} \right]^2.$$

Βήμα 4ο : Υπολογισμός της τιμής είτε της στατιστικής συνάρτησης

$$T_V^1 = n^{\frac{1}{2}} \frac{LR_n(\hat{\theta}_n, \hat{\gamma}_n)}{\hat{\omega}_n}, \quad \text{είτε} \quad \text{της στατιστικής συνάρτησης}$$

$$T_V^2 = n^{\frac{1}{2}} \frac{LR_n(\hat{\theta}_n, \hat{\gamma}_n)}{\tilde{\omega}_n}.$$

Εναλλακτικά, λαμβάνοντας υπόψη την Παρατήρηση 5.2.1, μπορεί να υπολογιστούν οι αντίστοιχες διορθωμένες στατιστικές συναρτήσεις. Έστω $T_V^{i,obs}$ οι παρατηρούμενες αυτές τιμές για $i=1,2$.

Βήμα 5ο Κανόνας απόφασης: Με επίπεδο σημαντικότητας α ισχύουν τα ακόλουθα:

- i) αν $T_V^{i,obs} > z_\alpha$, απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση ότι οι δύο οικογένειες κατανομών περιγράφουν ισοδύναμα το τ.δ. και το τυχαίο δείγμα προέρχεται από την κατανομή H_f ,
- ii) αν $T_V^{i,obs} < -z_\alpha$, απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση ότι οι δύο οικογένειες κατανομών περιγράφουν ισοδύναμα το τ.δ. και το τυχαίο δείγμα προέρχεται από την κατανομή H_g , τέλος
- iii) αν $|T_V^{i,obs}| \leq z_{\alpha/2}$, δεν μπορούμε να διακρίνουμε ποια από τις δύο οικογένειες κατανομών μοντελοποιεί καλύτερα τις δειγματικές παρατηρήσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Μεθοδολογία του Clarke (2003)

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστεί μια ακόμη μεθοδολογία που ανήκει στην κατηγορία αυτών, όπου η μηδενική υπόθεση είναι ότι οι δύο κατανομές περιγράφουν το τ.δ. ισοδύναμα κι έχει ως εναλλακτικές ότι μία κατανομή είναι καλύτερη της άλλης. Ειδικότερα, αντικείμενο μελέτης αυτού του κεφαλαίου αποτελεί η μεθοδολογία που προτάθηκε από τον Clarke (2003) για την αντιμετώπιση του προβλήματος του ελέγχου των μη εμφωλευμένων μοντέλων. Ο Clarke (2003), παρακινούμενος από τον Vuong (1989) εφάρμοσε ένα τροποποιημένο προσημικό τεστ κατά ζεύγη στις διαφορές των λογαρίθμων των πιθανοφανειών δύο μη εμφωλευμένων μοντέλων. Επομένως, η ουσιαστική διαφοροποίηση της μεθοδολογίας του Clarke (2003) σε σχέση με αυτή του Vuong (1989) είναι ότι η αναμενόμενη τιμή που εμφανίζεται στη μηδενική υπόθεση της μεθοδολογίας του Vuong (1989) αντικαθίσταται από τη διάμεσο. Επιπρόσθετα, η μεθοδολογία αυτή, όπως και του Vuong (1989), έχει την επιθυμητή ιδιότητα ότι συμπίπτει με την αντίστοιχη των εμφωλευμένων μοντέλων.

Στο πλαίσιο αυτό, στην Παράγραφο 6.1 παρατίθενται κάποιες εισαγωγικές έννοιες και ο απαραίτητος συμβολισμός που θα χρησιμοποιηθεί. Στην Παράγραφο 6.2 παρουσιάζεται η μεθοδολογία του Clarke (2003), ενώ στην παράγραφο 6.3 η μέθοδος αποσαφηνίζεται μέσω της ειδικής περίπτωσης του ελέγχου της υπόθεσης αν ένα τυχαίο δείγμα μπορεί να θεωρηθεί ότι προέρχεται από την λογαριθμοκανονική ή την εκθετική κατανομή.

6.1 Εισαγωγή

Στην παράγραφο αυτή για τη διευκόλυνση της μελέτης του κεφαλαίου, δίνονται κάποιες εισαγωγικές έννοιες, ο απαραίτητος συμβολισμός που θα χρησιμοποιηθεί στο κεφάλαιο αυτό καθώς και οι συνθήκες, υπό τις οποίες ισχύει η μεθοδολογία του Clarke (2003).

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, αναφέρθηκε ότι ο Vuong (1989) πρότεινε έναν τρόπο ελέγχου της υπόθεσης ότι δύο οικογένειες κατανομών περιγράφουν ισοδύναμα το τ.δ., έναντι της εναλλακτικής ότι το τ.δ. μπορεί να θεωρηθεί ότι περιγράφεται καλύτερα είτε από την H_f είτε από την H_g . Ουσιαστικά, το τεστ του Vuong (1989),

όπως είδαμε, ανάγεται στον έλεγχο της $H_0: E_h \left[\ln \frac{f(X, \theta_*)}{g(X, \gamma_*)} \right] = 0$,

όπου θ_* και γ_* οι ψευδοαληθείς τιμές των παραμέτρων θ και γ , αντίστοιχα. Επομένως, ελέγχει αν η αναμενόμενη τιμή, υπό τη μηδενική υπόθεση, του πηλίκου των λογαρίθμων μέγιστων πιθανοφανειών είναι στατιστικά σημαντικά διάφορη ή όχι του μηδενός.

Παρακινούμενος από την παραπάνω μεθοδολογία, ο Clarke (2003) ανήγαγε το υπό μελέτη πρόβλημα στον έλεγχο αν η διάμεσος, υπό τη μηδενική υπόθεση, του πηλίκου των λογαρίθμων είναι στατιστικά σημαντικά διάφορη του μηδενός ή όχι. Η αιτιολόγηση της ιδέας αυτής έγκειται στο γεγονός ότι αν οι δύο οικογένειες κατανομών περιγράφουν ισοδύναμα το τυχαίο δείγμα, τότε η πιθανότητα το πηλίκο αυτό να είναι θετικό ή αρνητικό είναι ίση με 0.5. Σε διαφορετική περίπτωση, αν η πιθανότητα αυτή είναι μεγαλύτερη (μικρότερη) του 0.5 μπορούμε να πούμε ότι το τυχαίο δείγμα προέρχεται από την οικογένεια κατανομών H_f (H_g , αντίστοιχα).

Από τα παραπάνω γίνεται ουσιαστικά αντιληπτό ότι κατά αυτόν τον τρόπο ο Clarke (2003) ανήγαγε το πρόβλημα στον έλεγχο ότι η διάμεσος ενός πληθυσμού είναι ίση με το μηδέν, υπό την προϋπόθεση ότι:

Υπόθεση 1: οι διαφορές $\ln f(X_i, \theta_*) - \ln g(X_i, \gamma_*)$, $i=1, \dots, n$, είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, και

Υπόθεση 2: καθένα από τα $\ln \frac{f(X_i, \theta_*)}{g(X_i, \gamma_*)}$, $i=1, \dots, n$, προέρχεται από

έναν πληθυσμό με συνεχή αθροιστική συνάρτηση κατανομής.

Στο πλαίσιο αυτό και λαμβάνοντας υπόψη όσα προαναφέρθηκαν, ενδιαφερόμαστε να ελέγξουμε την υπόθεση ότι η

διάμεσος m της άγνωστης κατανομής $\ln \frac{f(X, \theta_*)}{g(X, \gamma_*)}$ είναι ίση με

$m_0=0$, δηλαδή τη μηδενική υπόθεση $H_0: m=0$ έναντι είτε της $H_1: m>0$ είτε της $H_1: m<0$. Κλασσικοί τρόποι αντιμετώπισης του παραπάνου ελέγχου είναι το προσημικό τεστ (sign test) και το τεστ του Wilcoxon (1945).

Το τεστ του Wilcoxon (1945) στηρίζεται στις τάξεις (ranks) των διαφορών των δειγματικών τιμών από την τιμή m_0 , αποκλείοντας από την περαιτέρω ανάλυση τις δειγματικές τιμές που είναι ίσες με m_0 και προϋποθέτει ότι οι διαφορές που προκύπτουν είναι συμμετρικές περί το μηδέν. Καθώς η υπόθεση αυτή δεν επαληθεύεται πάντοτε ο Clarke (2003) τροποποιεί κατάλληλα το προσημικό τεστ, το οποίο προαπαιτεί μόνο ότι τα δεδομένα είναι διατάξιμα (βλέπε, μεταξύ άλλων, Kvam and Vidakovic (2007)). Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικές με αυτές τις μη παραμετρικές

μεθοδολογίες παραπέμπουμε μεταξύ άλλων στους Conover (1999) και Kvam and Vidakovic (2007).

Σε όσα ακολουθούν θα χρησιμοποιηθεί ο ακόλουθος συμβολισμός. Είναι

$$d_i = \ln f(X_i, \hat{\theta}_n) - \ln g(X_i, \hat{\gamma}_n), \quad (6.1.1)$$

με $\hat{\theta}_n$ και $\hat{\gamma}_n$ τους Ε.Μ.Π. των θ_* και γ_* , αντίστοιχα, και

$$T_{CL} = \sum_{i=1}^n I_{(0,+\infty)}(d_i), \quad (6.1.2)$$

δηλαδή T_{CL} είναι το πλήθος των θετικών διαφορών

$$\ln f(X_i, \hat{\theta}_n) - \ln g(X_i, \hat{\gamma}_n) \quad , \quad \text{καθώς με} \quad I_A(d_i) = \begin{cases} 1, & d_i \in A \\ 0, & d_i \notin A \end{cases}$$

συμβολίζεται η γνωστή ως δείκτρια συνάρτηση.

6.2 Η Μεθοδολογία

Στην ενότητα αυτή, αρχικά, θα παρουσιαστεί η μεθοδολογία του Clarke (2003) για την αντιμετώπιση του προβλήματος του ελέγχου των μη εμφωλευμένων μοντέλων. Ο Clarke (2003), όπως έχει ήδη αναφερθεί, παρακινούμενος από τον Vuong (1989), εφαρμόζει ένα τροποποιημένο προσημικό τεστ κατά ζεύγη στις διαφορές των λογαρίθμων των πιθανοφανειών δύο μη εμφωλευμένων μοντέλων για τον έλεγχο της

$$H_0 : P(\ln f(X_i, \theta_*) > \ln g(X_i, \gamma_*)) = 0.5 \quad (6.2.1)$$

ή ισοδύναμα της

$$H_0 : P(\ln f(X_i, \theta_*) - \ln g(X_i, \gamma_*) > 0) = 0.5, \quad (6.2.2)$$

όπου θ_* και γ_* οι ψευδοαληθείς τιμές των παραμέτρων θ και γ , αντίστοιχα.

Στο ακόλουθο θεώρημα παρατίθεται το τροποποιημένο προσημικό τεστ, έτσι όπως αρχικά προτάθηκε από τον Clarke (2003). Τα αποτελέσματα που δίνονται προκύπτουν με άμεση εφαρμογή του προσημικού τεστ.

Θεώρημα 6.2.1 (Clarke (2003)) Υπό την προϋπόθεση ότι ισχύουν οι Υποθέσεις 1 και 2 που διατυπώθηκαν στην προηγούμενη ενότητα, η

στατιστική συνάρτηση $T_{CL} = \sum_{i=1}^n I_{(0,+\infty)}(d_i)$, όπου

$d_i = \ln f(X_i, \hat{\theta}_n) - \ln g(X_i, \hat{\gamma}_n)$, ακολουθεί, υπό τη μηδενική υπόθεση, διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και $p=0.5$, δηλαδή

$$T_{CL} \stackrel{H_0}{\sim} B(n, p=0.5).$$

Απόδειξη

Η απόδειξη ανάγεται στην απόδειξη για την κατανομή της στατιστικής συνάρτησης του προσημικού ελέγχου και παραλείπεται (βλέπε, μεταξύ άλλων, Gibbons (1971), σελ. 168). ■

Επομένως, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 6.2.1 μπορούν να κατασκευαστούν οι κρίσιμες περιοχές τόσο για τους μονόπλευρους ελέγχους όσο και για τους δίπλευρους. Σε όσα ακολουθούν με T_{CL}^{obs}

συμβολίζεται η παρατηρούμενη τιμή της στατιστικής ελεγχουσυνάρτησης T_{CL} .

Έλεγχος ισοδύναμων μοντέλων έναντι της υπόθεσης ότι το τ.δ. μπορεί να θεωρηθεί ότι περιγράφεται καλύτερα από την H_f .

Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται όταν $T_{CL}^{obs} \geq t_{\alpha_1}$, δηλαδή για ακέραιες τιμές μεγαλύτερες ή ίσες του t_{α_1} , όπου το σημείο t_{α_1} είναι τέτοιο ώστε:

$$P(T_{CL} \geq t_{\alpha_1} | H_0 \text{ αληθής}) = P(T_{CL} \geq t_{\alpha_1} | T_{CL} \sim B(n, 0.5)) \leq \alpha. \quad (6.2.3)$$

Δηλαδή, t_{α_1} είναι ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο επαληθεύεται η σχέση

$$\sum_{t=t_{\alpha_1}}^n \binom{n}{t} 0.5^n \leq \alpha. \quad (6.2.4)$$

Τότε,

$$p\text{-τιμή} = P(T_{CL} \geq T_{CL}^{obs} | T_{CL} \sim B(n, 0.5)) = \sum_{i=T_{CL}^{obs}}^n \binom{n}{i} 0.5^n.$$

Έλεγχος ισοδύναμων μοντέλων έναντι της υπόθεσης ότι το τ.δ. μπορεί να θεωρηθεί ότι περιγράφεται καλύτερα από την H_g .

Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται όταν $T_{CL}^{obs} \leq t_{\alpha_2}$, δηλαδή για ακέραιες τιμές μικρότερες ή ίσες του t_{α_2} , όπου t_{α_2} είναι τέτοιο ώστε:

$$P(T_{CL} \leq t_{\alpha_2} | H_0 \text{ αληθής}) = P(T_{CL} \leq t_{\alpha_2} | T_{CL} \sim B(n, 0.5)) \leq \alpha, \quad (6.2.5)$$

δηλαδή t_{α_2} είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος τέτοιος ώστε:

$$\sum_{t=0}^{t_{\alpha_2}} \binom{n}{t} 0.5^n \leq \alpha. \quad (6.2.6)$$

Επίσης,

$$p\text{-τιμή} = P(T_{CL} \leq T_{CL}^{obs} / T_{CL} \sim B(n, 0.5)) = \sum_{i=0}^{T_{CL}^{obs}} \binom{n}{i} 0.5^n.$$

Δίπλευρος έλεγχος

Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται όταν $T_{CL}^{obs} \leq t_{\alpha_3}$ ή $T_{CL}^{obs} \geq t_{\alpha_4}$, δηλαδή για ακέραιες τιμές μικρότερες ή ίσες του t_{α_3} ή για ακέραιες τιμές μεγαλύτερες ή ίσες του t_{α_4} , όπου t_{α_3} και t_{α_4} είναι οι ακέραιοι αριθμοί που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$P(T_{CL} \leq t_{\alpha_3} | H_0 \text{ αληθής}) = P(T_{CL} \leq t_{\alpha_3} | T_{CL} \sim B(n, 0.5)) \leq \alpha / 2, \quad (6.2.7)$$

και

$$P(T_{CL} \geq t_{\alpha_4} | H_0 \text{ αληθής}) = P(T_{CL} \geq t_{\alpha_4} | T_{CL} \sim B(n, 0.5)) \leq \alpha / 2, \quad (6.2.8)$$

αντίστοιχα, δηλαδή t_{α_3} είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος τέτοιος ώστε:

$$\sum_{t=0}^{t_{\alpha_3}} \binom{n}{t} 0.5^n \leq \alpha / 2, \quad (6.2.9)$$

ενώ t_{α_4} είναι ο μικρότερος ακέραιος έτσι ώστε:

$$\sum_{t=t_{\alpha_4}}^n \binom{n}{t} 0.5^n \leq \alpha / 2. \quad (6.2.10)$$

Επίσης, αν $t' = \min\{T_{CL}^{obs}, n - T_{CL}^{obs}\}$, προκύπτει ότι p -τιμή

$$= 2 \sum_{i=0}^{t'} \binom{n}{i} 0.5^n.$$

Για τον πιο εύκολο προσδιορισμό των κρίσιμων σημείων t_{α_i} , $i=1, \dots, 4$, δίνονται οι τιμές της αθροιστικής συνάρτησης της διωνυμικής κατανομής με πιθανότητα επιτυχίας $p=0.5$ στο Παράρτημα Γ.

Είναι προφανές ότι η μεθοδολογία του Clarke (2003) θα έχει ίδιες ιδιότητες με αυτές του προσημικού ελέγχου. Δύο από τις γνωστές ιδιότητες του προσημικού ελέγχου είναι η αμεροληψία και η συνέπεια.

Τέλος, ένας εναλλακτικός τρόπος ελέγχου για μεγάλες τιμές του μεγέθους δείγματος προκύπτει χρησιμοποιώντας την προσεγγιστική κατανομή, υπό τη μηδενική υπόθεση, της στατιστικής συνάρτησης T_{CL} . Αποδεικνύεται, με άμεση εφαρμογή του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος, ότι υπό τη μηδενική υπόθεση και για μεγάλες τιμές του μεγέθους δείγματος n

$$Z = \frac{T_{CL} - 0.5n}{\sqrt{0.25n}} \stackrel{\text{προσ.}}{\sim} N(0,1). \quad (6.2.11)$$

Τότε, η μηδενική υπόθεση ότι τα μοντέλα είναι ισοδύναμα απορρίπτεται έναντι μίας εκ των τριών ακόλουθων εναλλακτικών:

- i) $H_{\alpha} : P(\ln f(X_i, \theta_*) - \ln g(X_i, \gamma_*) > 0) > 0.5,$
- ii) $H_{\alpha} : P(\ln f(X_i, \theta_*) - \ln g(X_i, \gamma_*) > 0) < 0.5$ και

$$\text{iii)} H_\alpha : P(\ln f(X_i, \theta_*) - \ln g(X_i, \gamma_*) > 0) \neq 0.5,$$

αν

$$\text{i)} Z \geq z_\alpha, \text{ ii)} Z \leq -z_\alpha \text{ και iii)} |Z| \geq z_{\alpha/2}, \text{ αντίστοιχα.}$$

Παρατήρηση 6.2.1 α) Όπως και στο στατιστικό του Vuong (1989), οι λογάριθμοι των πιθανοφανειών που χρησιμοποιούνται στο στατιστικό του Clarke (2003) επηρεάζονται αν ο αριθμός των άγνωστων παραμέτρων των H_f και H_g που εκτιμούμε είναι διαφορετικός. Έτσι, χρησιμοποιείται σε τέτοιες περιπτώσεις το διορθωμένο στατιστικό:

$$\tilde{T}_{CL} = T_{CL} - K_n(\theta, \gamma), \quad (6.2.12)$$

όπου $K_n(\theta, \gamma)$ ένας παράγοντας διόρθωσης. Ο παράγοντας διόρθωσης που προτάθηκε από τον Clarke (2003) είναι ο

$$K_n(\theta, \gamma) = \frac{p}{2n} \ln n - \frac{q}{2n} \ln n, \quad (6.2.13)$$

όπου p και q ο αριθμός των εκτιμώμενων παραμέτρων των H_f και H_g , αντίστοιχα.

β) Επισημαίνεται ότι στη σχέση (6.2.11) μπορεί να χρησιμοποιηθεί, κατά τα γνωστά, η διόρθωση συνεχείας.

6.3 Ειδική Περίπτωση

Στην ενότητα αυτή αποσαφηνίζεται η μεθοδολογία του Clarke (2003) στην περίπτωση που τα δύο «ανταγωνιστικά»

μοντέλα είναι αυτό της λογαριθμοκανονικής και της εκθετικής κατανομής.

Βήμα 1ο: Εύρεση των Ε.Μ.Π. $\hat{\theta}_n$ και $\hat{\gamma}_n$. Είναι $\hat{\theta}_{1n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i$,

$$\hat{\theta}_{2n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln X_i - \hat{\theta}_{1n})^2 \text{ και } \hat{\gamma}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Βήμα 2ο: Υπολογισμός των διαφορών $d_i = \ln f(X_i, \hat{\theta}_n) - \ln g(X_i, \hat{\gamma}_n)$, $i = 1, \dots, n$. Εύκολα προκύπτει ότι:

$$d_i = -\ln X_i - \frac{1}{2} \ln(2\pi\hat{\theta}_{2n}) - \frac{(\ln X_i - \hat{\theta}_{1n})^2}{2\hat{\theta}_{2n}} + \ln \hat{\gamma}_n + \frac{X_i}{\hat{\gamma}_n}. \quad (6.3.1)$$

Βήμα 3ο: Υπολογισμός της τιμής της στατιστικής συνάρτησης

$$T_{CL} = \sum_{i=1}^n I_{(0,+\infty)}(d_i).$$

Η στατιστική συνάρτηση είναι

$$T_{CL} = \sum_{i=1}^n I_{(0,+\infty)} \left[-\ln X_i - \frac{1}{2} \ln(2\pi\hat{\theta}_{2n}) - \frac{(\ln X_i - \hat{\theta}_{1n})^2}{2\hat{\theta}_{2n}} + \ln \hat{\gamma}_n + \frac{X_i}{\hat{\gamma}_n} \right], \quad (6.3.2)$$

δηλαδή είναι ο αριθμός των θετικών διαφορών d_i , $i = 1, \dots, n$.

Βήμα 4ο Υπολογισμός της παρατηρούμενης τιμής της σ.σ. της σχέσης (6.3.2) και απόφαση σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στην προηγούμενη ενότητα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Συγκριτική Μελέτη Προσομοίωσης

Στα προηγούμενα κεφάλαια παρουσιάστηκαν και αναπτύχθηκαν οι κυριότερες μελέτες για το πρόβλημα που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 1 και σχετίζεται με την επιλογή ενός εκ των δύο μη εμφωλευμένων μοντέλων. Στο κεφάλαιο αυτό και στο πλαίσιο του ελέγχου της λογαριθμοκανονικής έναντι της εκθετικής κατανομής, παρακινούμενοι από προγενέστερες μελέτες (βλέπε μεταξύ άλλων Jackson (1968)) θα διεξάγουμε μία μελέτη προσομοίωσης για τη σύγκριση και την αξιολόγηση των μεθόδων που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια. Ειδικότερα, το ενδιαφέρον θα επικεντρωθεί α) στο πόσο καλά προσεγγίζονται οι ασυμπτωτικές κατανομές των στατιστικών ελεγχουσυναρτήσεων από την κανονική κατανομή, β) στο εμπειρικό επίπεδο σημαντικότητας και γ) στην ισχύ των μεθόδων που συγκρίνονται.

Η διάρθρωση του Κεφαλαίου 7 έχει ως εξής. Στην ενότητα 7.1 για την καλύτερη μελέτη αυτού του κεφαλαίου θα παραθέσουμε συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα που προέκυψαν στα προηγούμενα κεφάλαια για την ειδική περίπτωση του ελέγχου των μη εμφωλευμένων μοντέλων της λογαριθμοκανονικής και της εκθετικής κατανομής. Στο πλαίσιο αυτό, θα προσδιοριστεί η μορφή της σ.σ. και θα δοθούν οι κανόνες απόφασης. Στην ενότητα 7.2 θα περιγραφεί η μελέτη προσομοίωσης που διεξήχθη και θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα αυτής. Ειδικότερα, το ενδιαφέρον θα επικεντρωθεί στη σύγκριση των στατιστικών συναρτήσεων στην κανονική κατανομή και στην αξιολόγηση της απόδοσής τους ως προς το επίπεδο σημαντικότητας και την ισχύ. Τα αποτελέσματα αυτά θα συγκριθούν και με αποτελέσματα προγενέστερων μελετών προσομοίωσης, τα οποία και θα αναφερθούν.

7.1 Εισαγωγή

Έστω $X_1, \dots, X_n$ ένα τυχαίο δείγμα το οποίο θέλουμε να ελέγξουμε αν μπορεί να θεωρηθεί ότι προέρχεται από την $\ln N(\theta_1, \theta_2)$ ή από την $\text{Exp}(1/\gamma)$, με σ.π.π. αυτές που δίνονται στις σχέσεις (1) και (7) αντίστοιχα, του Παραρτήματος Α. Στην ενότητα αυτή για την καλύτερη μελέτη αυτού του κεφαλαίου θα παραθέσουμε συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα που προκύπτουν για την ειδική περίπτωση του ελέγχου αυτών των μη εμφωλευμένων μοντέλων. Σε όσα ακολουθούν είναι:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_1 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i, \\ \hat{\theta}_2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln X_i - \hat{\theta}_1)^2, \quad \hat{\gamma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \gamma_{\hat{\theta}} = \exp(\hat{\theta}_1 + 0.5\hat{\theta}_2), \\ \theta_{1\hat{\gamma}} &= \ln \hat{\gamma} + \psi(1), \quad \theta_{2\hat{\gamma}} = \psi'(1), \quad Y_i = \ln X_i, \quad i=1, \dots, n, \quad \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i, \\ S_Y^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 \quad \text{και} \quad m_Y(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{tY_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^t.\end{aligned}$$

Cox (1961, 1962): Σύμφωνα με τις σχέσεις (2.3.33) και (2.3.54), προκύπτει ότι υπό τη λογαριθμοκανονική κατανομή,

$$T_f^C = \frac{\sqrt{n} \ln \frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\hat{\theta}}}}{\left\{ \left(e^{\hat{\theta}_2} - 1 - \hat{\theta}_2 - \frac{1}{2} \hat{\theta}_2^2 \right) \right\}^{\frac{1}{2}}} \stackrel{\text{ασυμπ}}{\sim} N(0,1),$$

ενώ, υπό την εκθετική κατανομή,

$$T_g^C = \frac{\sqrt{n} \left[\hat{\theta}_1 - \theta_{1\hat{\gamma}} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\hat{\theta}_2}{\theta_{2\hat{\gamma}}} \right) \right]}{0.5323} \stackrel{\text{ασυμπ}}{\sim} N(0,1).$$

Κανόνας απόφασης (βλέπε Sayyareh *et al* (2010))

- i) Απορρίπτουμε και τις δύο κατανομές αν $|T_f^C| \geq z_\alpha$ και $|T_g^C| \geq z_\alpha$.
- ii) Δεν απορρίπτουμε κάποια από τις δύο κατανομές αν $|T_f^C| < z_\alpha$ και $|T_g^C| < z_\alpha$.
- iii) Αποδεχόμαστε την εκθετική ενώ απορρίπτουμε την λογαριθμοκανονική αν $|T_f^C| \geq z_\alpha$ και $|T_g^C| < z_\alpha$.
- iv) Αποδεχόμαστε την λογαριθμοκανονική ενώ απορρίπτουμε την εκθετική αν $|T_f^C| < z_\alpha$ και $|T_g^C| \geq z_\alpha$.

Atkinson (1970): Σύμφωνα με τις σχέσεις (3.3.5) και (3.3.8) προκύπτει ότι υπό τη λογαριθμοκανονική κατανομή,

$$T_f^A = \frac{\sqrt{n} \left(\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\hat{\theta}}} - 1 \right)}{\left\{ e^{\hat{\theta}_2} - 1 - \hat{\theta}_2 - \frac{1}{2} \hat{\theta}_2^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \stackrel{\text{ασυμπ}}{\sim} N(0,1),$$

ενώ, υπό την εκθετική κατανομή,

$$T_g^A = \frac{\hat{\theta}_1 - \theta_{1\hat{\gamma}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\psi'(1)} \left\{ \hat{\theta}_2 + (\hat{\theta}_1 - \theta_{1\hat{\gamma}})^2 \right\}}{0.5323 / \sqrt{n}} \stackrel{\text{ασυμπ}}{\sim} N(0,1).$$

Κανόννας απόφασης (βλέπε Atkinson (1970))

- i) Αν $|T_f^A| \geq z_\alpha$ απορρίπτουμε τη λογαριθμοκανονική κατανομή.
- ii) Αν $|T_f^A| < z_\alpha$ αποδεχόμαστε τη λογαριθμοκανονική κατανομή.
- iii) Αν $|T_g^A| \geq z_\alpha$ απορρίπτουμε την εκθετική κατανομή.
- iv) Αν $|T_g^A| < z_\alpha$ αποδεχόμαστε την εκθετική κατανομή.

Epps *et al.* (1982): Σύμφωνα με τις σχέσεις (4.3.7) και (4.3.20) προκύπτει ότι, υπό τη λογαριθμοκανονική κατανομή,

$$T_f^E(t) = \sqrt{n} \frac{m_Y(t) \exp\left(-\bar{Y}t - \frac{1}{2}S_Y^2 t^2\right) - 1}{\left\{ \exp(S_Y^2 t^2) - 1 - S_Y^2 t^2 - \frac{1}{2}t^4 S_Y^4 \right\}^{\frac{1}{2}}} \stackrel{\text{ασυμπ}}{\sim} N(0,1),$$

για τιμές του $t \neq 0$, με $\exp(S_Y^2 t^2) - 1 - S_Y^2 t^2 - \frac{1}{2}t^4 S_Y^4 > 0$, ενώ, υπό την εκθετική κατανομή,

$$T_g^E(t) = \sqrt{n} \frac{m_Y(t) - (\bar{X})^t \Gamma(t+1)}{(\bar{X}^t) \left[\Gamma(2t+1) - (1+t^2) \Gamma^2(t+1) \right]^{\frac{1}{2}}} \stackrel{\text{ασυμπ}}{\sim} N(0,1).$$

για $-\frac{1}{2} < t$, με $t \neq 0, 1$. Για την επιλογή του t βλέπε Κεφάλαιο 4.

Κανόννας απόφασης

- i) Απορρίπτεται η λογαριθμοκανονική κατανομή αν $\hat{\varepsilon}_1 T_f^E(t) \geq z_\alpha$.
- ii) Απορρίπτεται η εκθετική κατανομή αν $\hat{\varepsilon}_2 T_g^E(t) \geq z_\alpha$,

όπου με $\hat{\varepsilon}_1$ και $\hat{\varepsilon}_2$ συμβολίζονται οι εκτιμητές των προσήμων των $\beta_1(t)$, όπως αυτά προσδιορίστηκαν στις σχέσεις (4.3.13) και (4.3.24), αντίστοιχα, του Κεφαλαίου 4.

Vuong (1989): Όπως έχει ήδη αναφερθεί στο Κεφάλαιο 5, η ελεγχουσυνάρτηση που προτάθηκε από τον Vuong (1989) δύναται να λάβει διαφορετικές μορφές ανάλογα με τον παράγοντα διόρθωσης που χρησιμοποιείται, καθώς και τον εκτιμητή της διακύμανσης. Σε όσα έπονται θα χρησιμοποιηθούν τα ακόλουθα: υπό την υπόθεση ότι οι δύο μη εμφωλευμένες κατανομές μοντελοποιούν ισοδύναμα το τ.δ. ισχύει ότι:

$$T_\nu^1 = n^{\frac{1}{2}} \frac{-n\hat{\theta}_1 - \frac{1}{2}n\ln(2\pi\hat{\theta}_2) + \frac{n}{2} + n\ln\hat{\gamma} - 1_{\alpha\sigma\mu\pi}}{\hat{\omega}_n} \sim N(0,1),$$

με

$$\hat{\omega}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[-\ln X_i - \frac{1}{2} \ln(2\pi\hat{\theta}_2) - \frac{(\ln X_i - \hat{\theta}_1)^2}{2\hat{\theta}_2} + \ln\hat{\gamma} + \frac{X_i}{\hat{\gamma}} \right]^2 - \frac{1}{n^2} \left[-n\hat{\theta}_1 - \frac{1}{2}n\ln(2\pi\hat{\theta}_2) - \frac{n}{2} + n\ln\hat{\gamma} + n \right]^2.$$

Κανόνας απόφασης (Vuong (1989))

- i) Μοντελοποιεί καλύτερα τα δεδομένα η εκθετική αν $T_V^1 \leq -z_\alpha$
- ii) Μοντελοποιεί καλύτερα τα δεδομένα η λογαριθμοκανονική αν $T_V^1 \geq z_\alpha$.
- iii) Οι δύο κατανομές είναι ισοδύναμες αν $|T_V^1| < z_{\alpha/2}$.

Clarke (2003): Υπό την υπόθεση ότι οι δύο μη εμφωλευμένες κατανομές μοντελοποιούν ισοδύναμα το τ.δ. και χρησιμοποιώντας τη διόρθωση που προτάθηκε από τον Clarke (2003), ισχύει ότι:

$$T_{CL}^{adj} = \sum_{i=1}^n I_{(0,+\infty)} \left[-\ln X_i - \frac{1}{2} \ln(2\pi\hat{\theta}_{2n}) - \frac{(\ln X_i - \hat{\theta}_{1n})^2}{2\hat{\theta}_{2n}} + \ln \hat{\gamma} + \frac{X_i}{\hat{\gamma}} \right]$$

προσ.

$$-0.5 \ln n \sim B(n, 0.5).$$

Κανόνας απόφασης με χρήση της διωνυμικής κατανομής (Clarke (2003)):

- i) Μοντελοποιεί καλύτερα τα δεδομένα η εκθετική αν $F(T_{CL}^{adj,obs}) < \alpha$.
- ii) Μοντελοποιεί καλύτερα τα δεδομένα η λογαριθμοκανονική αν $1 - F(T_{CL}^{adj,obs}) < \alpha$.
- iii) Οι δύο κατανομές είναι ισοδύναμες αν $2 * F(\min\{T_{CL}^{adj,obs}, n - T_{CL}^{adj,obs}\}) > \alpha$,

όπου με $F(T_{CL}^{adj,obs})$, συμβολίζεται η τιμή της α.σ.κ. της $B(n, 0.5)$ στην παρατηρούμενη τιμή της ελεγχουσυνάρτησης.

7.2 Μελέτη προσομοίωσης

Στην ενότητα αυτή παρακινούμενοι, μεταξύ άλλων, από τους Jackson (1968), Atkinson (1970), Pereira (1978), Erps *et al.* (1982) και Sayyareh *et al.* (2010), θα μελετήσουμε χρησιμοποιώντας την περίπτωση του ελέγχου των μη εμφωλευμένων μοντέλων της λογαριθμοκανονικής και της εκθετικής κατανομής τη συμπεριφορά των ελεγχουσυναρτήσεων των Cox (1961, 1962), Atkinson (1970), Erps *et al.* (1982), Vuong (1989) και Clarke (2003). Ειδικότερα, το ενδιαφέρον θα επικεντρωθεί α) στο πόσο καλά προσεγγίζονται οι ασυμπτωτικές κατανομές των στατιστικών ελεγχουσυναρτήσεων των Cox (1961, 1962), Atkinson (1970) και Erps *et al.* (1982) από την κανονική κατανομή, και στην αξιολόγησή όλων των μεθόδων ως προς το β) επίπεδο σημαντικότητας και γ) την ισχύ. Ταυτόχρονα, θα παρουσιαστούν και τα αποτελέσματα προγενέστερων μελετών.

7.2.1 Αξιολόγηση της σύγκλισης των ελεγχουσυναρτήσεων

Στην ενότητα αυτή θα διεξαχθεί μία μελέτη προσομοίωσης για την αξιολόγηση της σύγκλισης των ελεγχουσυναρτήσεων των Cox (1961, 1962), Atkinson (1970) και Erps *et al.* (1982). Η παρακίνηση για τη μελέτη αυτή προήλθε από προγενέστερες μελέτες που είναι διαθέσιμες στη βιβλιογραφία. Ειδικότερα, στο πλαίσιο του ελέγχου των μη εμφωλευμένων μοντέλων της λογαριθμοκανονικής και της εκθετικής κατανομής, ο Jackson (1968) αξιολογεί τη σύγκλιση στην κανονική κατανομή της στατιστικής συνάρτησης του Cox (1961, 1962), ο Atkinson (1970) τη σύγκλιση στην κανονική κατανομή της στατιστικής συνάρτησης που προτάθηκε από τον ίδιο. Αργότερα, ο Pereira (1978) αξιολογεί τη σύγκλιση των στατιστικών συναρτήσεων των Cox (1961, 1962) και Atkinson (1970), ενώ οι Erps *et al.* (1982) διεξήγαγαν παρόμοια μελέτη για τη στατιστική συνάρτηση που πρότειναν.

Όπως ίσως γίνεται αντιληπτό, και όσο είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε, δεν έχουν συγκριθεί οι μέθοδοι των Cox (1961, 1962), Atkinson (1970) και Erps *et al.* (1982). Επιπλέον, οι μελέτες αυτές στηρίζονται σε 500 -1000 προσομοιωμένα δείγματα. Οι δύο παραπάνω λόγοι αποτέλεσαν και το έναυσμα για την πραγματοποίηση μιας πιο εκτενούς μελέτης προσομοίωσης.

Σχεδιασμός της μελέτης προσομοίωσης

Παρόμοια με προγενέστερες μελέτες, θέλοντας να αξιολογήσουμε τη σύγκλιση των ελεγχουσυναρτήσεων των Cox (1961, 1962), Atkinson (1970) και Erps *et al.* (1982) αρχικά προσομοιώνουμε 10.000 δείγματα μεγέθους $n=25,50,100,150,200$ από την λογαριθμοκανονική κατανομή με παραμέτρους $\theta_1=0$ και $\theta_2=0.2,0.5,0.8,1,2,4,5$. Για καθένα συνδυασμό των παραπάνω παραμέτρων υπολογίζονται οι τιμές των T_f^C , T_f^A , και T_f^E , δηλαδή υπολογίζονται 10.000 τιμές αυτών υπό τη μηδενική υπόθεση. Επίσης, υπολογίζονται οι τιμές των T_g^C , T_g^A και T_g^E , δηλαδή υπολογίζονται 10.000 τιμές αυτών υπό την εναλλακτική υπόθεση. Στους Πίνακες 1-6, παρατίθενται τα εμπειρικά αποτελέσματα για την αναμενόμενη τιμή, τη διακύμανση, τη λοξότητα και την κύρτωση αυτών.

Έπειτα, προσομοιώνουμε 10.000 δείγματα μεγέθους $n=25,50,100,150,200$ από την εκθετική κατανομή με παράμετρο 1 και υπολογίζονται οι τιμές των T_g^C , T_g^A , και T_g^E , δηλαδή υπολογίζονται 10.000 τιμές αυτών υπό τη μηδενική υπόθεση. Επίσης, υπολογίζονται οι τιμές των T_f^C , T_f^A , και T_f^E , δηλαδή υπολογίζονται 10.000 τιμές αυτών, υπό την εναλλακτική υπόθεση. Στους Πίνακες 7 και 8 παρατίθενται τα εμπειρικά αποτελέσματα για

την αναμενόμενη τιμή, τη διακύμανση, τη λοξότητα και την κύρτωση αυτών.

Παρουσίαση και ανάλυση των αποτελεσμάτων

n		T_f^c						
		$\theta_z=0.2$	$\theta_z=0.5$	$\theta_z=0.8$	$\theta_z=1$	$\theta_z=2$	$\theta_z=4$	$\theta_z=5$
25	$E_{\theta}(T_f^c)$	-0.0494	-0.0802	-0.1125	-0.1314	-0.1526	-0.1617	-0.1521
	$Var_{\theta}(T_f^c)$	0.7688	0.6673	0.5816	0.5638	0.3648	0.1296	0.0736
	$Skew_{\theta}(T_f^c)$	0.6167	0.9029	0.9808	1.2706	1.4212	1.5328	1.2678
	$Kurt_{\theta}(T_f^c)$	4.4875	5.0810	5.0930	7.4137	7.4655	9.1953	8.0167
50	$E_{\theta}(T_f^c)$	-0.0293	-0.0666	-0.0933	-0.0788	-0.1339	-0.1553	-0.1484
	$Var_{\theta}(T_f^c)$	0.8735	0.8217	0.7544	0.7261	0.4779	0.1726	0.0979
	$Skew_{\theta}(T_f^c)$	0.5665	0.9531	1.3147	1.2270	1.5338	1.5565	1.5212
	$Kurt_{\theta}(T_f^c)$	4.0469	5.7972	8.0449	6.5108	8.1583	8.5147	8.8784
100	$E_{\theta}(T_f^c)$	-0.0257	-0.0294	-0.0528	-0.0771	-0.1015	-0.1517	-0.1450
	$Var_{\theta}(T_f^c)$	0.9337	0.8837	0.8841	0.7727	0.6139	0.2349	0.1380
	$Skew_{\theta}(T_f^c)$	0.5608	0.6962	1.1112	1.0020	1.5138	1.5659	1.9675
	$Kurt_{\theta}(T_f^c)$	4.3334	4.3991	6.4484	5.4148	8.1989	7.7387	12.4426
150	$E_{\theta}(T_f^c)$	-0.0489	-0.0312	-0.0637	-0.0533	-0.1050	-0.1294	-0.1422
	$Var_{\theta}(T_f^c)$	0.9266	0.9598	0.8790	0.8769	0.6516	0.2927	0.1653
	$Skew_{\theta}(T_f^c)$	0.4138	0.8206	0.9039	1.0411	1.4401	1.6174	1.7245
	$Kurt_{\theta}(T_f^c)$	3.7422	5.7372	6.2471	6.2537	8.2776	8.0241	8.9074
200	$E_{\theta}(T_f^c)$	-0.0188	-0.0422	-0.0283	-0.0459	-0.0796	-0.1374	-0.1293
	$Var_{\theta}(T_f^c)$	0.9448	0.9153	0.9293	0.9117	0.7302	0.3155	0.2000
	$Skew_{\theta}(T_f^c)$	0.3447	0.5307	0.8473	0.9747	1.4061	1.8549	1.8734
	$Kurt_{\theta}(T_f^c)$	3.5241	3.8077	5.0507	5.5663	7.7841	10.9474	10.7365

Πίνακας 1 : Κατανομή της T_f^c υπό τη μηδενική υπόθεση

n		T_f^A						
		$\theta_z=0.2$	$\theta_z=0.5$	$\theta_z=0.8$	$\theta_z=1$	$\theta_z=2$	$\theta_z=4$	$\theta_z=5$
25	$E_{\mathbf{e}}(T_f^A)$	-0.0466	-0.0704	-0.0941	-0.1051	-0.0991	-0.0879	-0.0827
	$Var_{\mathbf{e}}(T_f^A)$	0.7713	0.6793	0.6044	0.6110	0.4473	0.2147	0.1161
	$Skew_{\mathbf{e}}(T_f^A)$	0.6456	1.0151	1.2078	1.8463	2.6295	5.8935	5.2382
	$Kurt_{\mathbf{e}}(T_f^A)$	4.5783	5.5265	6.1063	12.3422	18.0458	84.1777	60.1610
50	$E_{\mathbf{e}}(T_f^A)$	-0.0270	-0.0576	-0.0756	-0.0547	-0.0785	-0.0748	-0.1000
	$Var_{\mathbf{e}}(T_f^A)$	0.8757	0.8371	0.7985	0.7771	0.6275	0.2936	0.0003
	$Skew_{\mathbf{e}}(T_f^A)$	0.5867	1.0911	1.7955	1.6252	3.3909	5.3992	0.0216
	$Kurt_{\mathbf{e}}(T_f^A)$	4.1020	6.7031	13.3922	9.4350	30.1339	73.0358	1.0016
100	$E_{\mathbf{e}}(T_f^A)$	-0.0239	-0.0226	-0.0385	-0.0591	-0.0523	-0.0628	-0.0520
	$Var_{\mathbf{e}}(T_f^A)$	0.9354	0.8923	0.9133	0.8020	0.7447	0.5212	0.3961
	$Skew_{\mathbf{e}}(T_f^A)$	0.5770	0.7621	1.3127	1.2186	2.5943	10.8770	9.8913
	$Kurt_{\mathbf{e}}(T_f^A)$	4.3847	4.6625	7.8145	6.4868	17.4989	303.4500	178.2522
150	$E_{\mathbf{e}}(T_f^A)$	-0.0475	-0.0251	-0.0521	-0.0362	-0.0618	-0.0431	-0.0506
	$Var_{\mathbf{e}}(T_f^A)$	0.9276	0.9701	0.8973	0.9121	0.7677	0.5142	0.4402
	$Skew_{\mathbf{e}}(T_f^A)$	0.4256	0.9139	1.0818	1.3093	2.5832	4.9171	12.0861
	$Kurt_{\mathbf{e}}(T_f^A)$	3.7695	6.5076	7.8147	8.2427	20.5335	54.9773	355.5369
200	$E_{\mathbf{e}}(T_f^A)$	-0.0176	-0.0372	-0.0175	-0.0308	-0.0377	-0.0515	-0.0319
	$Var_{\mathbf{e}}(T_f^A)$	0.9455	0.9196	0.9472	0.9397	0.8500	0.7167	0.5713
	$Skew_{\mathbf{e}}(T_f^A)$	0.3539	0.5702	0.9639	1.1598	2.3792	11.7087	11.9756
	$Kurt_{\mathbf{e}}(T_f^A)$	3.5416	3.8958	5.5797	6.7033	18.0195	307.2908	302.0367

Πίνακας 2: Κατανομή της T_f^A υπό τη μηδενική υπόθεση

n		T_f^E						
		$\theta_2=0.2$	$\theta_2=0.5$	$\theta_2=0.8$	$\theta_2=1$	$\theta_2=2$	$\theta_2=4$	$\theta_2=5$
25	$E_{\bullet}(T_f^E)$	0.0005	0.0043	-0.0083	-0.0222	0.0027	0.0009	-0.0169
	$Var_{\bullet}(T_f^E)$	0.8125	0.7856	0.7757	0.8123	0.8268	0.8120	0.7884
	$Skew_{\bullet}(T_f^E)$	0.0300	0.0509	0.0490	0.0833	0.0996	0.1477	0.1622
	$Kurt_{\bullet}(T_f^E)$	3.6148	3.6569	3.3675	3.7566	3.6332	3.8953	3.6968
50	$E_{\bullet}(T_f^E)$	0.0053	-0.0075	-0.0196	0.0120	0.0009	-0.0054	-0.0207
	$Var_{\bullet}(T_f^E)$	0.8943	0.9049	0.8788	0.9044	0.8869	0.9043	0.8878
	$Skew_{\bullet}(T_f^E)$	0.0721	0.0237	0.0983	0.0597	0.0649	0.1226	0.0803
	$Kurt_{\bullet}(T_f^E)$	3.3256	3.5912	3.6267	3.4845	3.4693	3.3745	3.7312
100	$E_{\bullet}(T_f^E)$	0.0013	0.0137	0.0040	0.0002	0.0076	-0.0147	-0.0140
	$Var_{\bullet}(T_f^E)$	0.9359	0.9313	0.9619	0.9248	0.9410	0.9433	0.9493
	$Skew_{\bullet}(T_f^E)$	0.0704	0.0161	0.1083	0.0232	0.0572	0.1116	0.0753
	$Kurt_{\bullet}(T_f^E)$	3.4381	3.1779	3.3037	3.2408	3.3690	3.2375	3.2619
150	$E_{\bullet}(T_f^E)$	-0.0244	0.0012	-0.0100	0.0046	-0.0129	-0.0006	-0.0184
	$Var_{\bullet}(T_f^E)$	0.9457	0.9770	0.9639	0.9671	0.9431	0.9576	0.9702
	$Skew_{\bullet}(T_f^E)$	0.0294	0.0281	-0.0005	0.0432	0.0407	0.0627	0.1079
	$Kurt_{\bullet}(T_f^E)$	3.2319	3.2479	3.1612	3.1304	3.2357	3.2181	3.2349
200	$E_{\bullet}(T_f^E)$	-0.0006	-0.0078	0.0109	-0.0040	0.0049	-0.0113	-0.0078
	$Var_{\bullet}(T_f^E)$	0.9567	0.9456	0.9720	0.9875	0.9794	0.9533	0.9858
	$Skew_{\bullet}(T_f^E)$	0.0053	-0.0400	0.0608	0.0803	0.0038	0.1021	0.1255
	$Kurt_{\bullet}(T_f^E)$	3.1631	3.2498	3.1929	3.1144	3.0707	3.0948	3.1609

Πίνακας 3: Κατανομή της T_f^E υπό τη μηδενική υπόθεση

n		T_{ε}^c						
		$\theta_z=0.2$	$\theta_z=0.5$	$\theta_z=0.8$	$\theta_z=1$	$\theta_z=2$	$\theta_z=4$	$\theta_z=5$
25	$E_{\bullet}(T_{\varepsilon}^c)$	-5.7514	-2.8097	-1.8953	-1.6944	-2.5761	-6.8015	-9.0591
	$Var_{\bullet}(T_{\varepsilon}^c)$	1.2855	0.6658	0.4413	0.5560	3.6190	20.2009	31.4522
	$Skew_{\bullet}(T_{\varepsilon}^c)$	-0.4991	-0.7298	-0.6172	-1.5058	-1.9519	-1.5167	-1.4751
	$Kurt_{\bullet}(T_{\varepsilon}^c)$	3.4363	4.1489	4.3900	11.5475	10.0268	6.7151	6.5989
50	$E_{\bullet}(T_{\varepsilon}^c)$	-7.9073	-3.7548	-2.5362	-2.3454	-3.9234	-10.7670	-14.6236
	$Var_{\bullet}(T_{\varepsilon}^c)$	1.1938	0.5975	0.4447	0.6295	5.4248	30.3966	50.9288
	$Skew_{\bullet}(T_{\varepsilon}^c)$	-0.3678	-0.4940	-1.0898	-1.4424	-2.2420	-1.4191	-1.5052
	$Kurt_{\bullet}(T_{\varepsilon}^c)$	3.2122	3.6898	12.0074	10.5876	15.0307	6.4131	7.8935
100	$E_{\bullet}(T_{\varepsilon}^c)$	-10.9885	-5.1803	-3.5201	-3.2517	-5.8126	-16.3738	-22.3040
	$Var_{\bullet}(T_{\varepsilon}^c)$	1.1604	0.5537	0.4350	0.6280	6.6268	45.4436	74.6708
	$Skew_{\bullet}(T_{\varepsilon}^c)$	-0.2662	-0.3556	-0.5804	-1.0374	-1.5620	-1.6751	-1.5294
	$Kurt_{\bullet}(T_{\varepsilon}^c)$	3.1231	3.2788	4.6618	6.1987	7.9429	9.3641	7.4061
150	$E_{\bullet}(T_{\varepsilon}^c)$	-13.3946	-6.2776	-4.2702	-3.9789	-7.1861	-20.7583	-28.1231
	$Var_{\bullet}(T_{\varepsilon}^c)$	1.1442	0.5495	0.4278	0.7175	7.1672	53.2664	89.2533
	$Skew_{\bullet}(T_{\varepsilon}^c)$	-0.2629	-0.2645	-0.4591	-1.2037	-1.5148	-1.4135	-1.4666
	$Kurt_{\bullet}(T_{\varepsilon}^c)$	3.1264	3.1673	4.6143	8.2041	8.1641	6.7073	7.1821
200	$E_{\bullet}(T_{\varepsilon}^c)$	-15.4371	-7.2210	-4.9299	-4.5861	-8.4073	-24.2054	-33.3524
	$Var_{\bullet}(T_{\varepsilon}^c)$	1.1584	0.5346	0.4443	0.7191	7.9605	58.1300	107.4630
	$Skew_{\bullet}(T_{\varepsilon}^c)$	-0.1829	-0.2274	-0.4641	-0.9941	-1.5337	-1.6606	-1.4844
	$Kurt_{\bullet}(T_{\varepsilon}^c)$	3.0270	3.2050	4.2151	6.0729	8.5974	9.3850	7.2640

Πίνακας 4: Κατανομή της T_{ε}^c υπό την εναλλακτική υπόθεση

n		T_{ε}^A						
		$\theta_2=0.2$	$\theta_2=0.5$	$\theta_2=0.8$	$\theta_2=1$	$\theta_2=2$	$\theta_2=4$	$\theta_2=5$
25	$E_{\bullet}(T_{\varepsilon}^A)$	1.0380	0.2166	-0.4616	-0.8309	-1.7631	0.2297	2.6927
	$Var_{\bullet}(T_{\varepsilon}^A)$	0.0369	0.2169	0.4820	0.6869	1.2951	7.7847	23.4271
	$Skew_{\bullet}(T_{\varepsilon}^A)$	-0.7356	-1.0318	-1.0989	-1.2286	-0.6714	2.3921	2.9014
	$Kurt_{\bullet}(T_{\varepsilon}^A)$	3.8994	4.9907	5.0980	6.0330	3.7172	16.0618	19.4881
50	$E_{\bullet}(T_{\varepsilon}^A)$	1.4487	0.2342	-0.7825	-1.3723	-2.8820	-0.1605	3.7064
	$Var_{\bullet}(T_{\varepsilon}^A)$	0.0385	0.2462	0.5811	0.8651	1.8215	8.3150	31.1700
	$Skew_{\bullet}(T_{\varepsilon}^A)$	-0.5741	-1.0601	-1.2840	-1.1021	-0.7398	2.0187	5.4750
	$Kurt_{\bullet}(T_{\varepsilon}^A)$	3.6094	6.3200	8.3959	5.7060	3.9004	13.3464	114.9662
100	$E_{\bullet}(T_{\varepsilon}^A)$	2.0297	0.2719	-1.2198	-2.0420	-4.4511	-0.6402	4.9607
	$Var_{\bullet}(T_{\varepsilon}^A)$	0.0395	0.2547	0.6484	0.9393	2.4964	10.0685	35.0416
	$Skew_{\bullet}(T_{\varepsilon}^A)$	-0.4107	-0.6470	-0.8555	-0.8916	-0.8542	5.0230	2.9819
	$Kurt_{\bullet}(T_{\varepsilon}^A)$	3.3712	3.9727	4.8845	4.7654	4.4345	109.7644	23.1112
150	$E_{\bullet}(T_{\varepsilon}^A)$	2.4826	0.3114	-1.5181	-2.5762	-5.5805	-1.1289	5.7987
	$Var_{\bullet}(T_{\varepsilon}^A)$	0.0400	0.2659	0.6689	1.0551	2.7757	8.7969	35.6166
	$Skew_{\bullet}(T_{\varepsilon}^A)$	-0.3619	-0.7728	-0.7419	-0.9727	-0.8721	1.4990	2.7940
	$Kurt_{\bullet}(T_{\varepsilon}^A)$	3.4978	5.7352	4.5129	5.6878	4.7058	11.3443	23.0822
200	$E_{\bullet}(T_{\varepsilon}^A)$	5.7987	0.3568	-1.8025	-3.0039	-6.5779	-1.4550	6.6832
	$Var_{\bullet}(T_{\varepsilon}^A)$	35.6166	0.2590	0.7104	1.0756	3.1394	9.3512	38.5938
	$Skew_{\bullet}(T_{\varepsilon}^A)$	2.7940	-0.4737	-0.7795	-0.7940	-0.9168	2.5121	2.9420
	$Kurt_{\bullet}(T_{\varepsilon}^A)$	23.0822	3.6456	4.6454	4.5977	4.8281	33.3277	26.8107

Πίνακας 5: Κατανομή της T_{ε}^A υπό την εναλλακτική υπόθεση

n		T_g^E						
		$\theta_z=0.2$	$\theta_z=0.5$	$\theta_z=0.8$	$\theta_z=1$	$\theta_z=2$	$\theta_z=4$	$\theta_z=5$
25	$E_{\theta}(T_g^E)$	2.9634	0.1772	0.3141	0.5876	-0.7745	4.8303	6.6959
	$Var_{\theta}(T_g^E)$	0.5718	0.6537	2.1187	4.0259	10.9114	12.3370	14.3812
	$Skew_{\theta}(T_g^E)$	-3.5178	3.5819	5.0454	4.3656	0.5090	-0.2068	1.9091
	$Kurt_{\theta}(T_g^E)$	14.0169	17.0268	44.5498	62.6546	3.4769	7.2590	15.9878
50	$E_{\theta}(T_g^E)$	3.1918	0.0000	0.8076	1.3869	-1.8573	7.6764	10.0879
	$Var_{\theta}(T_g^E)$	7.7874	0.0054	11.8596	9.8953	17.1876	9.4787	23.1503
	$Skew_{\theta}(T_g^E)$	-2.1243	0.0492	15.9443	4.1614	0.9593	1.2728	10.1704
	$Kurt_{\theta}(T_g^E)$	5.5790	3.0974	462.089	41.2298	4.0347	12.2636	358.7834
100	$E_{\theta}(T_g^E)$	-5.8068	0.1000	1.6000	2.2487	-2.7095	10.8307	14.1617
	$Var_{\theta}(T_g^E)$	0.0542	0.0173	0.0365	12.5109	28.8424	12.2061	26.5321
	$Skew_{\theta}(T_g^E)$	1.7848	0.0767	0.0353	5.2927	1.0164	4.2571	3.3720
	$Kurt_{\theta}(T_g^E)$	40.8108	6.8211	2.2185	82.5843	2.9344	63.5640	26.2716
150	$E_{\theta}(T_g^E)$	-6.9938	0.5000	1.9000	2.9567	-2.8774	13.0886	17.0789
	$Var_{\theta}(T_g^E)$	0.0586	0.2781	0.0547	12.7203	41.6626	12.3460	28.8632
	$Skew_{\theta}(T_g^E)$	0.2184	0.0657	0.0445	3.1059	0.9616	2.3315	3.1337
	$Kurt_{\theta}(T_g^E)$	3.0818	5.0166	3.0116	26.7206	2.4653	14.5465	25.8170
200	$E_{\theta}(T_g^E)$	-7.9869	0.2115	2.3303	3.4629	-2.9522	14.8347	19.6363
	$Var_{\theta}(T_g^E)$	0.0652	14.5001	27.1373	13.9817	55.6162	13.4181	33.9564
	$Skew_{\theta}(T_g^E)$	0.2202	23.4128	8.6934	3.6584	0.8891	3.3242	3.1606
	$Kurt_{\theta}(T_g^E)$	3.0198	720.1841	134.311	39.1683	2.1893	33.0218	25.6099

Πίνακας 6: Κατανομή της T_g^E υπό την εναλλακτική υπόθεση

n		$\gamma=1$		
		T_{ε}^C	T_{ε}^A	T_{ε}^E
25	$E_{\gamma}(T_{\varepsilon}^{(.)})$	-0.3646	0.0874	-0.1037
	$Var_{\gamma}(T_{\varepsilon}^{(.)})$	0.7240	0.9257	1.1198
	$Skew_{\gamma}(T_{\varepsilon}^{(.)})$	0.4049	2.3276	2.5466
	$Kurt_{\gamma}(T_{\varepsilon}^{(.)})$	3.8168	14.7778	24.7349
50	$E_{\gamma}(T_{\varepsilon}^{(.)})$	-0.2851	0.0429	-0.1712
	$Var_{\gamma}(T_{\varepsilon}^{(.)})$	0.8170	0.9649	1.1350
	$Skew_{\gamma}(T_{\varepsilon}^{(.)})$	0.4601	1.6897	1.5766
	$Kurt_{\gamma}(T_{\varepsilon}^{(.)})$	3.7468	9.7938	12.2027
100	$E_{\gamma}(T_{\varepsilon}^{(.)})$	-0.2220	0.0124	-0.1094
	$Var_{\gamma}(T_{\varepsilon}^{(.)})$	0.8765	0.9893	1.1868
	$Skew_{\gamma}(T_{\varepsilon}^{(.)})$	0.5184	1.4874	2.3016
	$Kurt_{\gamma}(T_{\varepsilon}^{(.)})$	3.8610	9.5850	32.7009
150	$E_{\gamma}(T_{\varepsilon}^{(.)})$	-0.1572	0.0388	-0.0089
	$Var_{\gamma}(T_{\varepsilon}^{(.)})$	0.9296	1.0130	1.1409
	$Skew_{\gamma}(T_{\varepsilon}^{(.)})$	0.4154	1.0678	1.3682
	$Kurt_{\gamma}(T_{\varepsilon}^{(.)})$	3.5597	6.2180	24.1489
200	$E_{\gamma}(T_{\varepsilon}^{(.)})$	-0.1384	0.0353	0.0329
	$Var_{\gamma}(T_{\varepsilon}^{(.)})$	0.9390	1.0022	1.0598
	$Skew_{\gamma}(T_{\varepsilon}^{(.)})$	0.4138	0.9032	0.2839
	$Kurt_{\gamma}(T_{\varepsilon}^{(.)})$	3.4440	4.9326	3.5079

Πίνακας 7: Κατανομή των T_g^C , T_g^A και T_g^E υπό τη μηδενική υπόθεση

n		$\gamma=1$		
		T_f^C	T_f^A	T_f^E
25	$E_\gamma(T_f^{(j)})$	-0.9601	-0.8475	-1.6233
	$Var_\gamma(T_f^{(j)})$	0.1507	0.1160	1.2282
	$Skew_\gamma(T_f^{(j)})$	0.7745	0.8352	-0.6192
	$Kurt_\gamma(T_f^{(j)})$	5.0404	5.9764	3.7443
50	$E_\gamma(T_f^{(j)})$	-1.4561	-1.2892	-2.6302
	$Var_\gamma(T_f^{(j)})$	0.1523	0.1072	1.8250
	$Skew_\gamma(T_f^{(j)})$	0.5684	0.5517	-0.8388
	$Kurt_\gamma(T_f^{(j)})$	4.2655	4.8429	4.5869
100	$E_\gamma(T_f^{(j)})$	-2.1440	-1.9007	-4.0290
	$Var_\gamma(T_f^{(j)})$	0.1424	0.0915	2.4545
	$Skew_\gamma(T_f^{(j)})$	0.2741	0.1952	-1.0200
	$Kurt_\gamma(T_f^{(j)})$	3.5049	3.8105	5.3358
150	$E_\gamma(T_f^{(j)})$	-2.6776	-2.3714	-5.1629
	$Var_\gamma(T_f^{(j)})$	0.1450	0.0896	2.9268
	$Skew_\gamma(T_f^{(j)})$	0.2390	0.1595	-1.0627
	$Kurt_\gamma(T_f^{(j)})$	3.3077	3.4273	6.0217
200	$E_\gamma(T_f^{(j)})$	-3.1152	-2.7600	-6.0562
	$Var_\gamma(T_f^{(j)})$	0.1420	0.0858	3.2161
	$Skew_\gamma(T_f^{(j)})$	0.1536	0.0610	-1.0671
	$Kurt_\gamma(T_f^{(j)})$	3.2658	3.4308	5.6391

Πίνακας 8: Κατανομή των T_f^C , T_f^A και T_f^E υπό την εναλλακτική υπόθεση

Από τους Πίνακες 1-3 προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

α) Οι στατιστικές συναρτήσεις T_f^C , T_f^A , και T_f^E , προσεγγίζουν την κανονική κατανομή με πολύ αργό ρυθμό (βλέπε και Jackson, 1968, Atkinson, 1970)

β) Φαίνεται η σ.σ. των Erps *et al.* (1982) να υπερτερεί σε σχέση με αυτές των Cox (1961, 1962) και Atkinson (1970), ως προς την ταχύτητα σύγκλισης.

γ) Η στατιστική συνάρτηση του Atkinson (1970) σε σύγκριση με αυτή του Cox (1961, 1962) προσεγγίζει καλύτερα την κανονική κατανομή όσον αφορά τη μέση τιμή και τη διακύμανση, ενώ αυτή του Cox (1961, 1962) προσεγγίζει καλύτερα την κανονική κατανομή όσον αφορά τη λοξότητα και την κύρτωση. Το συμπέρασμα αυτό έρχεται σε συμφωνία με τα αποτελέσματα του Atkinson (1970) (βλέπε Atkinson (1970), σελ. 338, Πίνακας 4) και παραπέμπουμε στον Pereira (1977) για μια πρόσθετη ευρετική επεξήγηση.

δ) Για $\theta_2 > 1$ και για μεγάλα μεγέθη δείγματος, π.χ. $n=200$, η προσέγγιση της κανονικής κατανομής από τη στατιστική συνάρτηση του Cox (1961, 1962) είναι κακή. Αντίθετα, η προσέγγιση της κανονικής κατανομής των Erps *et al.* (1982) παραμένει ακριβής μέχρι και για $\theta_2 = 4$, και είναι αρκετά καλή ακόμα και για $\theta_2 = 5$, για μικρά μεγέθη δείγματος. (Erps *et al.* (1982)) .

ε) Γενικότερα, παρατηρείται μια κακή προσέγγιση της κανονικής κατανομής όσο η τιμή της παραμέτρου θ_2 αυξάνεται, παίρνοντας τιμές μεγαλύτερες της μονάδας και για τις τρεις στατιστικές συναρτήσεις, επηρεάζοντας περισσότερο τις T_f^C και T_f^A .

Από τον Πίνακα 4 προκύπτει ότι

στ) η στατιστική συνάρτηση T_g^C έχει αρνητική αναμενόμενη τιμή υπό την H_f ,

ενώ από τον Πίνακα 5 προκύπτει ότι

ζ) για $\theta_2 = 0.2, 0.5$ η στατιστική συνάρτηση T_g^A έχει θετική αναμενόμενη τιμή υπό την H_f , κάτι που έρχεται σε συμφωνία με τα αποτελέσματα του Pereira (1977).

Από τον Πίνακα 7 παρατηρείται

η) μια κακή προσέγγιση της κανονικής κατανομής από τις στατιστικές συναρτήσεις T_g^C , T_g^A , και T_g^E .

Από τα προηγούμενα ίσως γίνεται αντιληπτό ότι η μέθοδος των Erps *et al.* (1982), παρότι πιο περίπλοκη ίσως είναι προτιμότερη για το συγκεκριμένο έλεγχο συγκριτικά με αυτές των Cox (1961, 1962) και Atkinson (1970), με κριτήριο την ταχύτητα σύγκλισης. Όμως ασφαλέστερα συμπεράσματα θα εξαχθούν μετά τη μελέτη προσομοίωσης της επόμενης ενότητας.

7.2.2 Αξιολόγηση της απόδοσης

Στην ενότητα αυτή το ενδιαφέρον θα επικεντρωθεί στην αξιολόγηση της απόδοσης των ελεγχουσυναρτήσεων που παρουσιάστηκαν σε αυτήν τη μεταπτυχιακή διατριβή για την περίπτωση του ελέγχου των μη εμφωλευμένων μοντέλων της λογαριθμοκανονικής και της εκθετικής κατανομής ως προς το επίπεδο σημαντικότητας και την ισχύ. Η παρακίνηση για τη μελέτη αυτή προήλθε από προγενέστερες μελέτες που είναι διαθέσιμες στη βιβλιογραφία. Ειδικότερα, στο πλαίσιο του ελέγχου των μη

εμφωλευμένων μοντέλων της λογαριθμοκανονικής και της εκθετικής κατανομής, ο Jackson (1968) υπολόγισε την ισχύ των στατιστικών συναρτήσεων T_f^C και T_g^C του Cox (1961, 1962), υποθέτοντας ότι οι κατανομές τους υπό τις αντίστοιχες εναλλακτικές υποθέσεις είναι κανονικές. Αργότερα, ο Pereira (1978) μελέτησε την ισχύ και το επίπεδο σημαντικότητας των μεθοδολογιών του Cox (1961, 1962) και του Atkinson (1970) και τις συνέκρινε μεταξύ τους. Οι Erps *et al.* (1982) μελέτησαν το επίπεδο σημαντικότητας και την ισχύ της μεθοδολογίας τους κάνοντας μια σύγκριση με την αντίστοιχη του Cox (1961, 1962), ενώ οι Sayyareh *et al.* (2010), στο πλαίσιο της επιλογής του καταλληλότερου μεταξύ δύο «ανταγωνιστικών μοντέλων», υπολόγισαν τη σχετική συχνότητα των στατιστικών τεστ των Cox (1961, 1962), Vuong (1989) και Clarke (2003) για καθεμία από τις δυνατές αποφάσεις αυτών.

Όπως ίσως γίνεται αντιληπτό, και όσο είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε, δεν έχουν συγκριθεί οι μέθοδοι των Κεφαλαίων 2-6. Επιπλέον, οι προγενέστερες μελέτες στηρίζονται επί το πλείστον σε 500 -1000 προσομοιωμένα δείγματα. Οι δύο παραπάνω λόγοι αποτέλεσαν και το έναυσμα για την πραγματοποίηση μιας πιο εκτενούς μελέτης προσομοίωσης.

Σχεδιασμός της μελέτης προσομοίωσης

Αρχικά προσομοιώνουμε 10.000 δείγματα μεγέθους $n=25,50,100,150,200$ από την λογαριθμοκανονική κατανομή με παραμέτρους $\theta_1=0$ και $\theta_2=0.2,0.5,0.8,1,2,4,5$. Για καθένα συνδυασμό των παραπάνω παραμέτρων υπολογίζονται οι τιμές των $T_f^C, T_f^A, T_f^E, T_g^C, T_g^A, T_g^E, T_V^1$ και T_{CL}^{adj} . Παρόμοια, προσομοιώνουμε 10.000 δείγματα μεγέθους $n=25,50,100,150,200$ από την εκθετική

κατανομή με παράμετρο 1 και υπολογίζονται οι τιμές των παραπάνω στατιστικών συναρτήσεων. Με βάση τις τιμές αυτών και τους κανόνες που συγκεντρωτικά δόθηκαν στη ενότητα 7.1 λαμβάνουμε την αντίστοιχη απόφαση. Τα αποτελέσματα αυτής της μελέτης προσομοίωσης δίδονται στους Πίνακες 9 και 10.

Παρουσίαση και ανάλυση των αποτελεσμάτων

Ειδικότερα, παρακινούμενοι από τους Sayyareh *et al.* (2010), στον Πίνακα 9 παρατίθενται τα αποτελέσματα που αφορούν τη σχετική συχνότητα του στατιστικού τεστ του Cox (1961, 1962) για καθεμία από τις τέσσερις δυνατές αποφάσεις, γεννώντας δείγματα από τη λογαριθμοκανονική και την εκθετική κατανομή, ενώ στον Πίνακα 10 συγκεντρώνονται οι σχετικές συχνότητες των στατιστικών τεστ των Vuong (1989) και Clarke (2003) για καθεμία από τις τρεις δυνατές αποφάσεις, γεννώντας δείγματα από τη λογαριθμοκανονική και την εκθετική κατανομή

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του Πίνακα 9,

α) στην περίπτωση που τα δείγματα γεννώνται από τη λογαριθμοκανονική κατανομή, το στατιστικό τεστ του Cox (1961, 1962) αποδέχεται τη λογαριθμοκανονική και απορρίπτει την εκθετική κατανομή σε αρκετά ικανοποιητικό ποσοστό, για κάθε τιμή της παραμέτρου θ_2 , ιδιαίτερα για μεγέθη δείγματος $n \geq 100$. Το αποτέλεσμα αυτό συμφωνεί με αυτό των Sayyareh *et al.* (2010). Επισημαίνεται ότι για $n=25$ και για τιμές της παραμέτρου $\theta_2=0.8, 1, 2$ παρουσιάζει ένα σημαντικό ποσοστό αποδοχής και των δύο κατανομών της τάξης του 35-50% περίπου.

β) Στην περίπτωση που τα δείγματα γεννώνται από την εκθετική κατανομή, το στατιστικό τεστ του Cox (1961, 1962) αποδέχεται την εκθετική και απορρίπτει τη λογαριθμοκανονική κατανομή σε αρκετά

ικανοποιητικό ποσοστό για μεγέθη δείγματος $n \geq 100$, ενώ για $n=25, 50$ παρουσιάζει μεγαλύτερο ποσοστό αποδοχής και των δύο κατανομών, ακόμα και της τάξης του 90%, όταν $n=25$.

Επιπρόσθετα, από τα αποτελέσματα του Πίνακα 10, προκύπτει ότι

γ) στην περίπτωση που τα δείγματα γεννώνται από τη λογαριθμοκανονική κατανομή, τα στατιστικά τεστ των Vuong (1989) και Clarke (2003) επιλέγουν ως καλύτερη κατανομή να περιγράψει τα δεδομένα τη λογαριθμοκανονική σε αρκετά ικανοποιητικό ποσοστό, όταν το μέγεθος του δείγματος είναι $n \geq 100$. Το συμπέρασμα αυτό έρχεται σε συμφωνία με αυτό των Sayyareh *et al.* (2010, σελ. 80, Πίνακας 2).

δ) Όταν $n=100$ και $\theta_2=2$ τα δύο στατιστικά τεστ εμφανίζουν μεγάλη πιθανότητα ισοδυναμίας των δύο κατανομών, και ιδιαίτερα αυτό του Clarke (2003) της τάξης του 65%. Για μικρότερα μεγέθη δείγματος $n=25, 50$ τα αποτελέσματα δεν είναι τόσο ξεκάθαρα, καθώς για τιμές της παραμέτρου $\theta_2 \geq 0.8$ εμφανίζονται μεγάλες πιθανότητες ισοδυναμίας των δύο κατανομών και από τα δύο στατιστικά τεστ, ενώ για $\theta_2 \leq 0.5$ καλύτερη φαίνεται να είναι η λογαριθμοκανονική κατανομή.

ε) Στην περίπτωση που τα δείγματα γεννώνται από την εκθετική κατανομή, για μικρά μεγέθη δείγματος, το μεγαλύτερο ποσοστό των φορών οι δύο κατανομές προκύπτουν ισοδύναμες και από τα δύο στατιστικά τεστ, ενώ όσο το μέγεθος του δείγματος αυξάνεται η πιθανότητα να επιλεγεί η εκθετική κατανομή μεγαλώνει. Σε γενικές γραμμές μπορούμε να πούμε ότι και τα δύο στατιστικά τεστ επιλέγουν τις περισσότερες φορές το σωστό μοντέλο, όταν το μέγεθος του δείγματος είναι μεγάλο.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι δεν μπορεί να προταθεί κάποιο τεστ εκ των δύο ως καλύτερο.

Παρακινούμενοι από τους Jackson (1968), Pereira (1978) και Erps *et al.* (1982), στον Πίνακα 11 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που αφορούν το εμπειρικό επίπεδο σημαντικότητας των T_f^C , T_f^A , και T_f^E , δηλαδή οι εκτιμώμενες πιθανότητες απόρριψης της λογαριθμικής κατανομής με βάση 10.000 προσομοιωμένες τιμές. Οι τιμές αυτές προήλθαν προσομοιώνοντας δείγματα από τη λογαριθμική κατανομή για διάφορες τιμές της παραμέτρου θ_2 και διάφορα μεγέθη δείγματος. Παρόμοια, στον Πίνακα 12 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που αφορούν το εμπειρικό επίπεδο σημαντικότητας των T_g^C , T_g^A , και T_g^E , δηλαδή οι εκτιμώμενες πιθανότητες απόρριψης της εκθετικής κατανομής με βάση 10.000 προσομοιωμένες τιμές που προήλθαν προσομοιώνοντας δείγματα από την εκθετική κατανομή με παράμετρο 1, για διάφορα μεγέθη δείγματος. Τέλος, στον Πίνακα 13, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που αφορούν την ισχύ των T_g^C , T_g^A , και T_g^E , δηλαδή οι εκτιμώμενες πιθανότητες απόρριψης της εκθετικής κατανομής με βάση 10.000 προσομοιωμένες τιμές που προήλθαν προσομοιώνοντας δείγματα από τη λογαριθμική κατανομή για διάφορες τιμές της παραμέτρου θ_2 και διάφορα μεγέθη δείγματος, ενώ στον Πίνακα 14 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που αφορούν την ισχύ των T_f^C , T_f^A , και T_f^E , δηλαδή οι εκτιμώμενες πιθανότητες απόρριψης της λογαριθμικής κατανομής με βάση 10.000 προσομοιωμένες τιμές που προήλθαν προσομοιώνοντας δείγματα από την εκθετική κατανομή με παράμετρο 1 για διάφορα μεγέθη δείγματος.

Από τους Πίνακες 11-14 προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

α) Λαμβάνοντας ως μηδενική υπόθεση τη λογαριθμοκανονική κατανομή και ως εναλλακτική την εκθετική, σύμφωνα με τον Πίνακα 11, τα εμπειρικά επίπεδα σημαντικότητας είναι περίπου ίδια, όσον αφορά τις μεθοδολογίες των Cox (1961, 1962) και Atkinson (1970), ενώ αυτά των Erps *et al.* (1982) διαφέρουν σε σχέση με των δύο προαναφερθέντων και γίνονται πιο ακριβή όσο το μέγεθος του δείγματος αυξάνεται.

β) Οι εκτιμητές του επιπέδου σημαντικότητας γίνονται πολύ συντηρητικοί για τα στατιστικά τεστ των Erps *et al.* (1982), Cox (1961, 1962) και Atkinson (1970), όσο η τιμή της παραμέτρου θ_2 μεγαλώνει. Επιπλέον, για μικρά μεγέθη δείγματος, τα εμπειρικά επίπεδα σημαντικότητας του στατιστικού τεστ των Erps *et al.* (1982) είναι πιο ακριβή, όταν η παράμετρος θ_2 είναι μεγάλη (όμοια αποτελέσματα με αυτά των Erps *et al.* (1982), σελ. 397, Πίνακας 3).

γ) Αντιστρέφοντας τους ρόλους της μηδενικής και της εναλλακτικής υπόθεσης, με βάση τις πιθανότητες σφάλματος τύπου I που συγκεντρώνονται στον Πίνακα 12, τα εμπειρικά επίπεδα σημαντικότητας των τριών μεθοδολογιών διαφέρουν. Προκύπτει το στατιστικό τεστ των Erps *et al.* (1982) να είναι πιο ακριβές από αυτό του Cox (1961, 1962) όσο το μέγεθος του δείγματος αυξάνεται.

Στο σημείο αυτό και πριν προχωρήσουμε σε αξιολόγηση της απόδοσης των μεθόδων ως προς την ισχύ υπενθυμίζουμε ότι στη στατιστική βιβλιογραφία έχουν εμφανιστεί διάφοροι τρόποι αξιολόγησης της απόδοσης μιας μεθόδου ως προς το επίπεδο σημαντικότητας. Μεταξύ άλλων αναφέρουμε ότι ένα προσομοιωμένο επίπεδο σημαντικότητας, έστω $\hat{\alpha}$, θεωρείτε ότι βρίσκεται κοντά στο πραγματικό, π.χ. $\alpha = 0.05$, αν $\hat{\alpha} \in [0.0357, 0.0695]$ (Dale, 1986).

δ) Όσον αφορά την ισχύ, υπό τη λογαριθμοκανονική κατανομή, σύμφωνα με τον Πίνακα 14, η ισχύς του στατιστικού τεστ των Erps

et al. (1982) είναι μεγαλύτερη από αυτή των στατιστικών τεστ των Cox (1961, 1962) και Atkinson (1970), ιδιαίτερα για μικρά μεγέθη δείγματος. Επιπλέον, όσο το n αυξάνει η ισχύς και των τριών τείνει στη μονάδα. Επομένως, το προτιμότερο στατιστικό τεστ φαίνεται να είναι αυτό των Erpps *et al.* (1982). Συγκρίνοντας την ισχύ των T_f^C και T_f^A , προκύπτει ότι το στατιστικό τεστ T_f^C είναι προτιμότερο του T_f^A , καθώς η ισχύς του είναι μεγαλύτερη όταν τα μεγέθη του δείγματος είναι μικρά, κάτι που έρχεται σε συμφωνία με τα αποτελέσματα του Pereira (1978) (βλέπε Pereira (1978), σελ. 225, Πίνακας 5).

ε) Υπό την εκθετική κατανομή, η ισχύς των στατιστικών συναρτήσεων των Erpps *et al.* (1982), Cox (1961, 1962) και Atkinson (1970) εξαρτάται από την παράμετρο θ_2 . Όπως φαίνεται στον Πίνακα 13, σε γενικές γραμμές η ισχύς τους είναι μεγάλη και προσεγγίζει τη μονάδα αρκετά γρήγορα, καθώς το μέγεθος του δείγματος n αυξάνεται. Για τιμές της παραμέτρου $\theta_2 = 0.5, 0.8, 1$ η στατιστική συνάρτηση του Cox (1961, 1962) έχει πολύ μεγαλύτερη ισχύ από αυτή των Erpps *et al.* (1982) και Atkinson (1970). Τέλος, για μεγάλες τιμές της παραμέτρου θ_2 το στατιστικό τεστ των Erpps *et al.* (1982) είναι προτιμότερο των τριών, κάτι που έρχεται σε συμφωνία με τα αποτελέσματα των Erpps *et al.* (1982) (βλέπε Erpps *et al.* (1982), σελ. 396, Πίνακας 2).

Συνοψίζοντας, φαίνεται ότι η μέθοδος των Erpps *et al.* (1982), παρότι πιο περίπλοκη ίσως είναι προτιμότερη για το συγκεκριμένο έλεγχο συγκριτικά με αυτές των Cox (1961, 1962) και Atkinson (1970), ενώ μεταξύ των Clarke (2003) και Vuong (1989) δεν μπορεί να προταθεί κάποια ως καλύτερη.

Παρατήρηση 7.2.1 α) Ο Pesaran (1984) απέδειξε ότι για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης ότι τα δεδομένα προέρχονται από την

$\ln N(\theta_1, \theta_2)$ έναντι της εναλλακτικής ότι προέρχονται από την $\exp(1/\gamma)$, ότι το στατιστικό τεστ του Cox (1961, 1962) είναι κατά 27% ασυμπτωτικά πιο αποτελεσματικό από αυτό του Atkinson (1970) (βλέπε Pesaran (1984), σελ. 250). Επιπλέον, για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης ότι τα δεδομένα προέρχονται από την $\exp(1/\gamma)$ έναντι της εναλλακτικής ότι προέρχονται από την $\ln N(\theta_1, \theta_2)$, αν $\theta_2 < 9.15$, τότε το στατιστικό τεστ του Cox (1961, 1962) είναι ασυμπτωτικά πιο αποτελεσματικό από αυτό του Atkinson (1970), ενώ αν $\theta_2 > 9.15$ τότε το στατιστικό τεστ του Atkinson (1970) είναι ασυμπτωτικά πιο αποτελεσματικό από αυτό του Cox (1961, 1962) (βλέπε Pesaran (1984), σελ. 250).

β) Ο Clarke (2003) συγκρίνοντας τη μέθοδό του με αυτήν του Vuong (1989) κατέληξε στο συμπέρασμα ότι για μεσόκυρτες κατανομές, όπως είναι η κανονική, το στατιστικό τεστ του Vuong (1989) είναι προτιμότερο, ενώ για λεπτόκυρτες κατανομές, όπως είναι η Laplace, με λεπτότερες ουρές και ψηλότερες κορυφές, προτιμότερο είναι το στατιστικό τεστ του Clarke (2003). Επιπλέον, οι Clarke and Signorino (2010) με βάση μια μελέτη προσομοίωσης συμπεραίνουν ότι το στατιστικό τεστ του Clarke (2003) έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να επιλέξει το λάθος μοντέλο, ενώ αυτό του Vuong (1989) έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να μην επιλέξει κανένα από τα δύο «ανταγωνιστικά» μοντέλα. Βέβαια, σύμφωνα με τους Clarke and Signorino (2010), η μεγαλύτερη ισχύς που παρουσιάζει το στατιστικό τεστ του Clarke (2003) υπερκαλύπτει το μειονέκτημα αυτό.

		Κατανομή							
		λογαριθμοκανονική							εκθετική
n	Απόφαση	$\theta_1 = 0.2$	$\theta_1 = 0.5$	$\theta_1 = 0.8$	$\theta_1 = 1$	$\theta_1 = 2$	$\theta_1 = 4$	$\theta_1 = 5$	$\gamma=1$
25	αποδεχόμαστε τη λογαριθμοκανονική και απορρίπτουμε την εκθετική	0.9444	0.9053	0.6015	0.4645	0.6317	0.9764	0.9764	0.0685
	αποδεχόμαστε την εκθετική και απορρίπτουμε τη λογαριθμοκανονική	0.0000	0.0016	0.0029	0.0034	0.0004	0.0000	0.0000	0.0213
	αποδεχόμαστε και τις δύο	0.0000	0.0481	0.3662	0.5076	0.3542	0.0554	0.0230	0.9078
50	απορρίπτονται και οι δύο	0.0556	0.0450	0.0294	0.0245	0.0137	0.0029	0.0006	0.0024
	αποδεχόμαστε τη λογαριθμοκανονική και απορρίπτουμε την εκθετική	0.9270	0.9381	0.8868	0.7986	0.8782	0.9932	0.9990	0.0562
	αποδεχόμαστε την εκθετική και απορρίπτουμε τη λογαριθμοκανονική	0.0000	0.0001	0.0053	0.0062	0.0005	0.0000	0.0000	0.2941
100	αποδεχόμαστε και τις δύο	0.0000	0.0008	0.0664	0.1524	0.0991	0.0029	0.0001	0.6267
	απορρίπτονται και οι δύο	0.0730	0.0610	0.0415	0.0428	0.0222	0.0039	0.0009	0.0230
	αποδεχόμαστε τη λογαριθμοκανονική και απορρίπτουμε την εκθετική	0.9192	0.9260	0.9353	0.9469	0.9641	0.9923	0.9966	0.0435
150	αποδεχόμαστε την εκθετική και απορρίπτουμε τη λογαριθμοκανονική	0.0000	0.0000	0.0006	0.0034	0.0021	0.0000	0.0000	0.8729
	αποδεχόμαστε και τις δύο	0.0000	0.0000	0.0000	0.0022	0.0039	0.0000	0.0000	0.0481
	απορρίπτονται και οι δύο	0.0808	0.0740	0.0641	0.0475	0.0299	0.0077	0.0034	0.0355
200	αποδεχόμαστε τη λογαριθμοκανονική και απορρίπτουμε την εκθετική	0.9137	0.9178	0.9288	0.9358	0.9647	0.9871	0.9949	0.0067
	αποδεχόμαστε την εκθετική και απορρίπτουμε τη λογαριθμοκανονική	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0000	0.0000	0.9095
	αποδεχόμαστε και τις δύο	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
200	απορρίπτονται και οι δύο	0.0863	0.0822	0.0712	0.0642	0.0350	0.0129	0.0051	0.0838
	αποδεχόμαστε τη λογαριθμοκανονική και απορρίπτουμε την εκθετική	0.9139	0.9182	0.9232	0.9307	0.9561	0.9877	0.9936	0.0003
	αποδεχόμαστε την εκθετική και απορρίπτουμε τη λογαριθμοκανονική	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.9122
200	αποδεχόμαστε και τις δύο	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	απορρίπτονται και οι δύο	0.0861	0.0818	0.0768	0.0693	0.0439	0.0123	0.0064	0.0875

Πίνακας 9: Σχετική συχνότητα του στατιστικού τεστ του Cox (1961, 1962) για καθένα από τις τέσσερις δυνατές αποφάσεις

			Κατανομή							
			λογαριθμοκανονική							εκθετική
n	Απόφαση	$T_{()}$	$\theta_1 = 0.2$	$\theta_1 = 0.5$	$\theta_1 = 0.8$	$\theta_1 = 1$	$\theta_1 = 2$	$\theta_1 = 4$	$\theta_1 = 5$	$\gamma=1$
25	καλύτερη η λογαριθμοκανονική κατανομή	T_v	0.9991	0.7362	0.3273	0.2136	0.2454	0.6740	0.7946	0.0110
		T_{cz}	0.9999	0.8828	0.5040	0.3371	0.1348	0.2547	0.3376	0.0460
	καλύτερη η εκθετική κατανομή	T_v	0.0000	0.0000	0.0058	0.0174	0.0321	0.0035	0.0007	0.4061
		T_{cz}	0.0000	0.0000	0.0005	0.0023	0.0094	0.0029	0.0014	0.2122
	οι δύο κατανομές είναι ισοδύναμες	T_v	0.0033	0.3837	0.7694	0.8536	0.8356	0.4572	0.3095	0.6814
		T_{cz}	0.0001	0.1172	0.4955	0.6606	0.8558	0.7424	0.6610	0.7418
50	καλύτερη η λογαριθμοκανονική κατανομή	T_v	1.0000	0.9494	0.5802	0.4068	0.4451	0.9269	0.9770	0.0046
		T_{cz}	1.0000	0.9968	0.8206	0.5931	0.2714	0.5297	0.6593	0.0288
	καλύτερη η εκθετική κατανομή	T_v	0.0000	0.0000	0.0004	0.0011	0.0056	0.0000	0.0000	0.5053
		T_{cz}	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0040	0.0006	0.0001	0.3516
	οι δύο κατανομές είναι ισοδύναμες	T_v	0.0000	0.0066	0.5393	0.7078	0.7133	0.1429	0.0545	0.6067
		T_{cz}	0.0000	0.0032	0.2587	0.5128	0.8116	0.5692	0.4378	0.7043
100	καλύτερη η λογαριθμοκανονική κατανομή	T_v	1.0000	0.9988	0.8546	0.6718	0.7417	0.9978	1.0000	0.0007
		T_{cz}	1.0000	1.0000	0.9816	0.8591	0.4988	0.8377	0.9237	0.0104
	καλύτερη η εκθετική κατανομή	T_v	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0005	0.0000	0.0000	0.6825
		T_{cz}	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0014	0.0000	0.0001	0.5610
	οι δύο κατανομές είναι ισοδύναμες	T_v	0.0000	0.0034	0.2242	0.4619	0.4149	0.0107	0.0000	0.4343
		T_{cz}	0.0000	0.0000	0.0467	0.2415	0.6615	0.2698	0.1388	0.5539
150	καλύτερη η λογαριθμοκανονική κατανομή	T_v	1.0000	1.0000	0.9513	0.8176	0.8979	0.9999	1.0000	0.0000
		T_{cz}	1.0000	1.0000	0.9972	0.9457	0.6284	0.9403	0.9818	0.0038
	καλύτερη η εκθετική κατανομή	T_v	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.8153
		T_{cz}	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0005	0.0000	0.0000	0.6882
	οι δύο κατανομές είναι ισοδύναμες	T_v	0.0000	0.0000	0.0894	0.2859	0.2253	0.0015	0.0000	0.2888
		T_{cz}	0.0000	0.0000	0.0067	0.0984	0.4956	0.1050	0.0365	0.4000
200	καλύτερη η λογαριθμοκανονική κατανομή	T_v	1.0000	0.9999	0.9870	0.9056	0.9581	1.0000	1.0000	0.0001
		T_{cz}	1.0000	1.0000	0.9995	0.9781	0.7287	0.9775	0.9961	0.0009
	καλύτερη η εκθετική κατανομή	T_v	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.8942
		T_{cz}	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.7660
	οι δύο κατανομές είναι ισοδύναμες	T_v	0.0000	0.0001	0.0313	0.1699	0.1142	0.0000	0.0000	0.1815
		T_{cz}	0.0000	0.0000	0.0011	0.0407	0.3714	0.0390	0.0084	0.3018

Πίνακας 10: Σχετική συχνότητα των στατιστικών τεστ των Vuong (1989) και Clarke (2003) για καθεμία από τις τρεις δυνατές αποφάσεις

Επίπεδο Σημαντικότητας=0.05								
n	$T_f^{(.)}$	$\theta_z=0.2$	$\theta_z=0.5$	$\theta_z=0.8$	$\theta_z=1$	$\theta_z=2$	$\theta_z=4$	$\theta_z=5$
25	T_f^c	0.0556	0.0466	0.0323	0.0279	0.0141	0.0029	0.0006
	T_f^A	0.0557	0.0473	0.0346	0.0307	0.0226	0.0107	0.0060
	T_f^E	0.0341	0.0280	0.0318	0.0350	0.0333	0.0299	0.0304
50	T_f^c	0.0730	0.0611	0.0468	0.0490	0.0227	0.0039	0.0009
	T_f^A	0.0733	0.0610	0.0486	0.0501	0.0328	0.0160	0.0102
	T_f^E	0.0402	0.0401	0.0388	0.0387	0.0391	0.0408	0.0389
100	T_f^c	0.0808	0.0740	0.0647	0.0509	0.0320	0.0077	0.0034
	T_f^A	0.0809	0.0741	0.0645	0.0517	0.0378	0.0209	0.0152
	T_f^E	0.0428	0.0419	0.0419	0.0434	0.0426	0.0433	0.0444
150	T_f^c	0.0863	0.0822	0.0712	0.0642	0.0353	0.0129	0.0051
	T_f^A	0.0858	0.0818	0.0710	0.0639	0.0406	0.0273	0.0173
	T_f^E	0.0480	0.0489	0.0482	0.0468	0.0437	0.0446	0.0433
200	T_f^c	0.0861	0.0818	0.0768	0.0693	0.0439	0.0123	0.0064
	T_f^A	0.0861	0.0814	0.0758	0.0702	0.0475	0.0248	0.0215
	T_f^E	0.0434	0.0476	0.0443	0.0482	0.0468	0.0429	0.0448

Πίνακας 11: Μηδενική υπόθεση: λογαριθμοκανονική κατανομή, εναλλακτική υπόθεση: εκθετική κατανομή

Μονόπλευρος έλεγχος

Επίπεδο Σημαντικότητας=0.05		
n	$T_{\xi}^{(\cdot)}$	$\gamma = 1$
25	T_{ξ}^C	0.0709
	T_{ξ}^A	0.0618
	T_{ξ}^E	0.0834
50	T_{ξ}^C	0.0792
	T_{ξ}^A	0.0714
	T_{ξ}^E	0.0790
100	T_{ξ}^C	0.0790
	T_{ξ}^A	0.0747
	T_{ξ}^E	0.0721
150	T_{ξ}^C	0.0905
	T_{ξ}^A	0.0849
	T_{ξ}^E	0.0701
200	T_{ξ}^C	0.0878
	T_{ξ}^A	0.0852
	T_{ξ}^E	0.0645

Πίνακας 12: Μηδενική υπόθεση: εκθετική κατανομή, εναλλακτική υπόθεση: λογαριθμοκανονική κατανομή

Μονόπλευρος έλεγχος

Συνάρτηση Ισχύος								
n	$T_{\xi}^{(\cdot)}$	$\theta_2 = 0.2$	$\theta_2 = 0.5$	$\theta_2 = 0.8$	$\theta_2 = 1$	$\theta_2 = 2$	$\theta_2 = 4$	$\theta_2 = 5$
25	T_{ξ}^C	1.0000	0.9503	0.6309	0.4890	0.6454	0.9446	0.9770
	T_{ξ}^A	0.0000	0.0030	0.0615	0.1413	0.4900	0.4309	0.5834
	T_{ξ}^E	0.9416	0.0702	0.0941	0.1920	0.7207	0.9849	0.9973
50	T_{ξ}^C	1.0000	0.9991	0.9283	0.8414	0.9004	0.9971	0.9999
	T_{ξ}^A	0.1510	0.0035	0.1188	0.3259	0.8291	0.5091	0.6812
	T_{ξ}^E	0.9907	0.0268	0.1621	0.3340	0.9234	0.9999	1.0000
100	T_{ξ}^C	1.0000	1.0000	0.9994	0.9944	0.9940	1.0000	1.0000
	T_{ξ}^A	0.9617	0.0014	0.2609	0.6265	0.9865	0.5618	0.7727
	T_{ξ}^E	0.9999	0.0238	0.2762	0.5058	0.9934	1.0000	1.0000
150	T_{ξ}^C	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	1.0000	1.0000
	T_{ξ}^A	0.9995	0.0034	0.3977	0.8307	0.9993	0.6108	0.8256
	T_{ξ}^E	1.0000	0.0279	0.3406	0.6250	0.9997	1.0000	1.0000
200	T_{ξ}^C	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	T_{ξ}^A	1.0000	0.0028	0.5347	0.9286	1.0000	0.6323	0.8598
	T_{ξ}^E	1.0000	0.0412	0.4122	0.7097	1.0000	1.0000	1.0000

Πίνακας 13: Μηδενική υπόθεση: εκθετική κατανομή, εναλλακτική υπόθεση: λογαριθμοκανονική κατανομή

Μονόπλευρος έλεγχος

Συνάρτηση Ισχύος		
n	$T_f^{(\cdot)}$	$\gamma = 1$
25	T_f^c	0.0237
	T_f^A	0.0072
	T_f^E	0.4476
50	T_f^c	0.3171
	T_f^A	0.1166
	T_f^E	0.7675
100	T_f^c	0.9084
	T_f^A	0.8179
	T_f^E	0.9705
150	T_f^c	0.9933
	T_f^A	0.9881
	T_f^E	0.9974
200	T_f^c	0.9997
	T_f^A	0.9996
	T_f^E	0.9997

Πίνακας 14: Μηδενική υπόθεση: λογαριθμοκανονική κατανομή, εναλλακτική υπόθεση: εκθετική κατανομή

Μονόπλευρος έλεγχος

Αντί επιλόγου

Στη μεταπτυχιακή αυτή διατριβή το ενδιαφέρον επικεντρώθηκε στο πρόβλημα του στατιστικού ελέγχου δύο μη εμφωλευμένων μοντέλων. Πλήθος ερευνητικών εργασιών έχουν εμφανιστεί στη βιβλιογραφία, έπειτα από τις πρωτοπόρες εργασίες του Cox (1961, 1962). Στο περιορισμένο πλαίσιο μιας μεταπτυχιακής διατριβής το ενδιαφέρον εστιάστηκε στην κριτική ανασκόπηση και συγκριτική μελέτη μέσω προσομοίωσης των κυριότερων μεθόδων. Εκτός από τις μεθοδολογίες που παρουσιάστηκαν στα Κεφάλαια 2-6, αναπτύχθηκαν κατά τη διάρκεια των ετών επιπλέον μεθοδολογίες, για την αντιμετώπιση του προβλήματος των μη εμφωλευμένων υποθέσεων-μοντέλων. Ενδεικτικά, αναφέρονται οι μεθοδολογίες των Dumonceaux *et al.* (1972), Dyer (1973), Fisher and McAleer (1981), Dastoor (1982, 1984), Sawyer (1981, 1982) και Maria-Pia Victoria-Feser (1997). Επιπλέον, υπάρχει εκτενής βιβλιογραφία για ελέγχους μη εμφωλευμένων μοντέλων γραμμικής παλινδρόμησης και σε προβλήματα από το χώρο της οικονομετρίας. Ενδεικτικά αναφέρονται οι εργασίες των McAleer *et al.* (1990), Ramalho and Smith (2002), Otsu and Whang (2005) και Pesaran and Pesaran (1993).

Θεωρούμε ότι το θέμα παραμένει ανοικτό για περαιτέρω έρευνα τόσο ως προς την προσθήκη νέων μεθόδων όσο και ως προς τη συγκριτική μελέτη των υπαρχουσών.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Στο Παράρτημα Α της μεταπτυχιακής διατριβής συγκεντρώνονται οι ιδιότητες των κατανομών και κάποια αποτελέσματα, που απαντούν συχνότερα σε ολόκληρη τη διατριβή. Οι κατανομές αυτές είναι η λογαριθμοκανονική, η εκθετική και η κανονική κατανομή.

A.1 Λογαριθμοκανονική (lognormal) κατανομή

Ορισμός 1 Η τ.μ. X λέγεται λογαριθμοκανονική με παράμετρο $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, $\theta_1 \in R, \theta_2 > 0$, αν οι δυνατές τιμές της είναι $x > 0$ και η σ.π.π. της δίνεται από τη σχέση

$$f(x, \theta) = \frac{\exp\left[-\frac{(\ln x - \theta_1)^2}{2\theta_2}\right]}{x(2\pi\theta_2)^{1/2}}, \quad x > 0, \theta = (\theta_1, \theta_2), \theta_1 \in R, \theta_2 > 0. \quad (1)$$

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $X \sim \ln N(\theta_1, \theta_2)$. ■

Ο λογάριθμος της σ.π.π. της λογαριθμοκανονικής κατανομής δίνεται από τη σχέση

$$\ln f(x, \theta) = -\ln x - \frac{1}{2} \ln(2\pi\theta_2) - \frac{(\ln x - \theta_1)^2}{2\theta_2}, \quad (2)$$

ενώ η ροπογεννήτρια συνάρτησή της δεν υπάρχει σε κλειστή μορφή.

Η αναμενόμενη τιμή και η διακύμανση της λογαριθμοκανονικής κατανομής είναι

$$E_{\theta}(X) = e^{\theta_1 + \frac{1}{2}\theta_2}, \quad (3)$$

και

$$Var_{\theta}(X) = (e^{\theta_2} - 1)e^{2\theta_1 + \theta_2}, \quad (4)$$

αντίστοιχα.

Πρόταση 1 Αν $X \sim \ln N(\theta_1, \theta_2)$ τότε η $Y = \ln X \sim N(\theta_1, \theta_2)$. Επομένως,

$$E_{\theta}(\ln X) = \theta_1, \quad (5)$$

και

$$E_{\theta}[(\ln X - \theta_1)^2] = E_{\theta}[(Y - \theta_1)^2] = Var_{\theta}(Y) = \theta_2.$$

A.2 Εκθετική (exponential) κατανομή

Ορισμός 2 Η τ.μ. X λέγεται εκθετική με παράμετρο γ , $\gamma > 0$, αν οι δυνατές τιμές της είναι $x \geq 0$ και η σ.π.π. της δίνεται από τη σχέση:

$$g(x, \gamma) = \gamma^{-1} e^{-x/\gamma}, \quad x \geq 0, \gamma > 0.$$

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $X \sim \text{Exp}(1/\gamma)$. ■

Ο λογάριθμος της σ.π.π της $X \sim \text{Exp}(1/\gamma)$ δίνεται από τη σχέση

$$\ln g(X, \gamma) = -\ln \gamma - \frac{X}{\gamma}. \quad (8)$$

Πρόταση 2 Έστω η τ.μ. X με $X \sim \text{Exp}(1/\gamma)$. Τότε $E_\gamma(X^t) = \gamma^t \Gamma(t+1)$, για $t > -1$, κι εύκολα προκύπτει ότι $E_\gamma(X) = \gamma$ και $\text{Var}_\gamma(X) = \gamma^2$.

Πρόταση 3 Έστω $X \sim \text{Exp}(1/\gamma)$ και $Y = \ln X$. Τότε η σ.π.π. της Y δίνεται από τη σχέση

$$g(y, \gamma) = \frac{1}{\gamma} e^{y - \frac{1}{\gamma} e^y}, \quad y \in \mathbb{R}, \gamma > 0. \quad (9)$$

Συμβολικά γράφουμε ότι: $Y \sim \ln \text{Exp}(\gamma)$. ■

Έστω τώρα $\psi(x) = \frac{d\{\ln \Gamma(x)\}}{dx}$, με $\Gamma(x)$ να είναι η συνάρτηση Γάμμα. Τότε καθώς $\psi(x) = \frac{d \ln \Gamma(x)}{dx} = \frac{\frac{d\Gamma(x)}{\Gamma(x)}}{\Gamma(x)}$, προκύπτει ότι:

$$\Gamma'(1) = \psi(1). \quad (10)$$

Ακόμη,

$$\frac{d^2}{dx^2} \Gamma(x) = \psi'(x) \Gamma(x) + \psi(x) \Gamma'(x),$$

και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (10) προκύπτει ότι:

$$\Gamma''(1) = \psi'(1) + [\psi(1)]^2. \quad (11)$$

Επιπλέον,

$$\frac{d^3}{dx^3} \Gamma(x) = \psi''(x) \Gamma(x) + 2\psi'(x) \Gamma'(x) + \psi(x) \Gamma''(x).$$

από όπου προκύπτει ότι:

$$\Gamma'''(1) = \psi''(1) + 3\psi'(1)\psi(1) + [\psi(1)]^3. \quad (12)$$

Τέλος, καθώς

$$\frac{d^4}{dx^4} \Gamma(x) = \psi'''(x) \Gamma(x) + 3\psi''(x) \Gamma'(x) + 3\psi'(x) \Gamma''(x) + \psi(x) \Gamma'''(x),$$

και λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω σχέσεις, έπειτα από λίγη άλγεβρα, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(4)}(1) &= \psi'''(1) + 4\psi(1)\psi''(1) + 6\psi'(1)[\psi(1)]^2 \\ &\quad + 3[\psi'(1)]^2 + [\psi(1)]^4. \end{aligned} \quad (13)$$

Επίσης, καθώς

$$\Gamma'(x+1) = \frac{d}{dx} [x\Gamma(x)] = \Gamma(x) + x\Gamma'(x),$$

έχουμε ότι:

$$\Gamma'(2) = \Gamma(2) + 1\Gamma'(1) = 1 + \psi(1).$$

Με παρόμοιο τρόπο προκύπτει ότι:

$$\Gamma''(2) = 2\psi(1) + \psi'(1).$$

Με βάση τα παραπάνω αποδεικνύεται η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 4 Έστω $X \sim \text{Exp}(1/\gamma)$ και $Y = \ln X$. Τότε

i) $M_Y(t) = \gamma^t \Gamma(t+1), \quad t > -1.$

ii) $E_Y(\ln X) = \ln \gamma + \psi(1) = \theta_{1\gamma}.$

iii) $E_Y(\ln X)^2 = (\ln \gamma)^2 + 2\ln \gamma \psi(1) + \psi'(1) + [\psi(1)]^2.$

iv) $E_Y(\ln X)^3 = (\ln \gamma)^3 + 3(\ln \gamma)^2 \psi(1) + 3\ln \gamma \psi'(1) + 3\ln \gamma [\psi(1)]^2$
 $+ \psi''(1) + 3\psi'(1)\psi(1) + [\psi(1)]^3.$

v) $E_Y(\ln X)^4 = (\ln \gamma)^4 + 4(\ln \gamma)^3 \psi(1) + 6(\ln \gamma)^2 \psi'(1)$
 $+ 6(\ln \gamma)^2 [\psi(1)]^2 + 4\ln \gamma \psi''(1) + 12\ln \gamma \psi'(1)\psi(1)$
 $+ 4\ln \gamma [\psi(1)]^3 + \psi'''(1) + 4\psi(1)\psi''(1) + 6\psi'(1)[\psi(1)]^2$
 $+ 3[\psi'(1)]^2 + [\psi(1)]^4.$

vi) $\text{Var}_Y(\ln X) = \psi'(1) = \theta_{2\gamma}.$

vii) $\text{Cov}_Y(Y, X) = \gamma \ln \gamma + \gamma \psi(1) + \gamma - \gamma \theta_{1\gamma} = \gamma.$

viii) $\text{Cov}_Y(Y^2, X) = 2\gamma \ln \gamma + 2\gamma \psi(1) - \gamma [\psi(1)]^2.$

Απόδειξη

i) Εξ ορισμού είναι $M_Y(t) = E(e^{tY}) = E(X^t) = \gamma^t \Gamma(t+1), \quad t > -1.$

ii) Είναι

$$E_{\gamma}(\ln X) = \frac{d}{dt} M_{\gamma}(t) \Big|_{t=0} = \gamma^t \ln \gamma \Gamma(t+1) + \gamma^t \Gamma'(t+1) \Big|_{t=0} = \ln \gamma + \Gamma'(1),$$

και το ζητούμενο προκύπτει από τη σχέση (10).

iii) Είναι

$$E_{\gamma}(\ln X)^2 = \frac{d^2}{dt^2} M_{\gamma}(t) \Big|_{t=0} = \gamma^t (\ln \gamma)^2 \Gamma(t+1) + 2\gamma^t \ln \gamma \Gamma'(t+1) + \gamma^t \Gamma''(t+1) \Big|_{t=0}.$$

Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη την (11) έχουμε:

$$E_{\gamma}(\ln X)^2 = (\ln \gamma)^2 + 2\ln \gamma \psi(1) + \psi'(1) + [\psi(1)]^2. \quad (14)$$

iv) Είναι

$$E_{\gamma}(\ln X)^3 = \gamma^t (\ln \gamma)^3 \Gamma(t+1) + 3\gamma^t (\ln \gamma)^2 \Gamma'(t+1) + 3\gamma^t \ln \gamma \Gamma''(t+1) + \gamma^t \Gamma'''(t+1) \Big|_{t=0},$$

ή ισοδύναμα, μετά από λίγη άλγεβρα και λαμβάνοντας υπόψη τη (12),

$$E_{\gamma}(\ln X)^3 = (\ln \gamma)^3 + 3(\ln \gamma)^2 \psi(1) + 3\ln \gamma \psi'(1) + 3\ln \gamma [\psi(1)]^2 + \psi''(1) + 3\psi'(1)\psi(1) + [\psi(1)]^3.$$

v) Είναι

$$E_{\gamma}(\ln X)^4 = \gamma^t (\ln \gamma)^4 \Gamma(t+1) + 4\gamma^t (\ln \gamma)^3 \Gamma'(t+1) + 6\gamma^t (\ln \gamma)^2 \Gamma''(t+1) + 4\gamma^t \ln \gamma \Gamma'''(t+1) + \gamma^t \Gamma^{(4)}(t+1) \Big|_{t=0},$$

ή ισοδύναμα

$$E_{\gamma}(\ln X)^4 = (\ln \gamma)^4 \Gamma(1) + 4(\ln \gamma)^3 \Gamma'(1) + 6(\ln \gamma)^2 \Gamma''(1) + 4\ln \gamma \Gamma'''(1) + \Gamma^{(4)}(1).$$

Επομένως, από τις σχέσεις (10)-(13)

$$\begin{aligned} E_{\gamma}(\ln X)^4 &= (\ln \gamma)^4 + 4(\ln \gamma)^3 \psi(1) + 6(\ln \gamma)^2 \psi'(1) \\ &\quad + 6(\ln \gamma)^2 [\psi(1)]^2 + 4\ln \gamma \psi''(1) + 12\ln \gamma \psi'(1) \psi(1) \\ &\quad + 4\ln \gamma [\psi(1)]^3 + \psi'''(1) + 4\psi(1) \psi''(1) + 6\psi'(1) [\psi(1)]^2 \\ &\quad + 3[\psi'(1)]^2 + [\psi(1)]^4. \end{aligned} \quad (15)$$

vi) Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα των i) και ii), έπειτα από λίγη άλγεβρα, προκύπτει ότι:

$$Var_{\gamma}(\ln X) = \psi'(1). \quad (16)$$

vii) Είναι

$$Cov_{\gamma}(\ln X, X) = E_{\gamma}(X \ln X) - E_{\gamma}(X) E_{\gamma}(\ln X) = E_{\gamma}(X \ln X) - \gamma \theta_{1\gamma}.$$

Άρα, απαιτείται ο προσδιορισμός της $E_{\gamma}(X \ln X)$. Είναι

$$E_{\gamma}(X \ln X) \stackrel{U=\ln X}{=} E_{\gamma}(U e^U) = \frac{dM_U(t)}{dt} \Big|_{t=1} = \frac{d}{dt} [\gamma^t \Gamma(t+1)] \Big|_{t=1}$$

και ύστερα από λίγη άλγεβρα προκύπτει ότι:

$$E_{\gamma}(X \ln X) = \Gamma(2) \gamma \ln \gamma + \Gamma'(2) \gamma.$$

Επομένως,

$$Cov_{\gamma}(\ln X, X) = \gamma \ln \gamma + \gamma \psi(1) + \gamma - \gamma \ln \gamma - \gamma \psi(1) = \gamma. \quad (17)$$

viii) Επιπλέον, η συνδιακύμανση των τυχαίων μεταβλητών $Y^2 = (\ln X)^2$ και X , με $\ln X \sim N(\theta_{1\gamma}, \theta_{2\gamma})$, υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \text{Cov}_\gamma \left[(\ln X)^2, X \right] &= E_\gamma \left[X (\ln X)^2 \right] - E_\gamma X E_\gamma \left[(\ln X)^2 \right] \\ &= E_\gamma \left[X (\ln X)^2 \right] - \gamma (\theta_{1\gamma}^2 + \theta_{2\gamma}), \end{aligned}$$

άρα απαιτείται ο προσδιορισμός της $E_\gamma \left[X (\ln X)^2 \right]$.

Είναι

$$E_\gamma \left[X (\ln X)^2 \right] \stackrel{U=\ln X}{=} E_\gamma (U^2 e^u) = \frac{d^2 M_U(t)}{dt^2} \Big|_{t=1} = \frac{d^2}{dt^2} \gamma^t \Gamma(t+1) \Big|_{t=1}$$

και ύστερα από λίγη άλγεβρα προκύπτει ότι:

$$E_\gamma \left[X (\ln X)^2 \right] = \gamma (\ln \gamma)^2 \Gamma(2) + 2\gamma \Gamma'(2) \ln \gamma + \gamma \Gamma''(2).$$

Οπότε, έχουμε

$$E_\gamma \left[X (\ln X)^2 \right] = \gamma (\ln \gamma)^2 + 2\gamma \left[\psi(1) + 1 \right] \ln \gamma + \gamma \left[\psi'(1) + 2\psi(1) \right], \quad (18)$$

και το ζητούμενο προκύπτει με λίγη άλγεβρα.

A.3 Κανονική (normal) κατανομή

Ορισμός 3 Η τ.μ. X ακολουθεί κανονική κατανομή με παράμετρο $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, $\theta_1 \in R, \theta_2 > 0$, αν οι δυνατές τιμές της είναι $x \in R$ και η σ.π.π. της δίνεται από τη σχέση

$$f(x, \theta) = (2\pi\theta_2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\theta_2}\right], \quad x \in R, \quad \theta = (\theta_1, \theta_2), \quad \theta_1 \in R, \quad \theta_2 > 0. \quad (19)$$

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $X \sim N(\theta_1, \theta_2)$, όπου $\theta_1 = E_{\theta}(X)$ και $\theta_2 = \text{Var}_{\theta}(X)$. ■

Ο λογάριθμος της σ.π.π. της κανονικής κατανομής δίνεται από τη σχέση

$$\ln f(x, \theta) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi\theta_2) - \frac{1}{2\theta_2} (x - \theta_1)^2, \quad x \in R. \quad (20)$$

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση της κανονικής κατανομής είναι η

$$M_X(t) = \exp\left\{\theta_1 t + \frac{1}{2}\theta_2 t^2\right\}. \quad (21)$$

Πρόταση 5 Έστω $X \sim N(\theta_1, \theta_2)$ και $V = \frac{X - \theta_1}{\theta_2^{1/2}} \sim N(0, 1)$. Τότε αν

$\gamma_{\theta} = e^{\theta_1 + 0.5\theta_2}$, ισχύουν τα ακόλουθα:

- i) $E_{\theta}(V)=0, E_{\theta}(V^2)=1, E_{\theta}(V^3)=0$ και $E_{\theta}(V^4)=3$.
- ii) $Cov_{\theta}(X,V)=\theta_2^{1/2}\gamma_{\theta}$.
- iii) $Cov_{\theta}(X,V^2)=\gamma_{\theta}\theta_2$.

Απόδειξη

- i) Τα δύο πρώτα αποτελέσματα είναι προφανή. Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (21) προκύπτει ότι $M_V(t)=\exp(0.5t^2)$. Επομένως,

$$E_{\theta}(V^3)=M_V'''(t)\Big|_{t=0}=(3t+t^3)\exp(0.5t^2)\Big|_{t=0}=0$$

και

$$E_{\theta}(V^4)=M_V^{(4)}(t)\Big|_{t=0}=(3+6t^2+t^4)\exp(0.5t^2)\Big|_{t=0}=3.$$

- ii) Η συνδιακύμανση των τ.μ. X και V υπολογίζεται ως εξής:

$$Cov_{\theta}(V,X)=E_{\theta}(V \cdot X)-E_{\theta}(V)E_{\theta}(X)=E_{\theta}(V \cdot X),$$

κι επομένως απαιτείται μόνο η εύρεση της $E_{\theta}(V \cdot X)$. Είναι

$$\begin{aligned} E_{\theta}[XV] &= E_{\theta}\left[\exp(\theta_2^{1/2}V + \theta_1)V\right] = \exp(\theta_1)E_{\theta}\left[\exp(\theta_2^{1/2}V)V\right] \\ &= \exp(\theta_1)\left[\frac{dM_V(t)}{dt}\Big|_{t=\theta_2^{1/2}}\right], \end{aligned}$$

διότι $\frac{dM_V(t)}{dt}=E_{\theta}(Ve^{Vt})$. Υστερα από λίγη άλγεβρα, προκύπτει ότι:

$$E_{\theta}(XV) = \exp(\theta_1) \left[\frac{d}{dt} \exp(0.5t^2) \right]_{t=\theta_2^{\frac{1}{2}}} = \theta_2^{\frac{1}{2}} \exp(\theta_1 + 0.5\theta_2) = \theta_2^{\frac{1}{2}} \gamma_{\theta}.$$

Άρα,

$$Cov_{\theta}(X, V) = \theta_2^{1/2} \gamma_{\theta}. \quad (22)$$

iii) Επιπλέον, η συνδιακύμανση των τ.μ. X και V^2 υπολογίζεται ως εξής:

$$Cov_{\theta}(X, V^2) = E_{\theta}(XV^2) - E_{\theta}X E_{\theta}V^2 = E_{\theta}(XV^2) - \gamma_{\theta}.$$

Επομένως, απαιτείται μόνο ο προσδιορισμός της

$$\begin{aligned} E_{\theta}(XV^2) &= E_{\theta} \left[\exp(\theta_2^{1/2}V + \theta_1) V^2 \right] = \exp(\theta_1) E_{\theta} \left[\exp(\theta_2^{1/2}V) V^2 \right] \\ &= \exp(\theta_1) \left[\frac{d^2 M_V(t)}{dt^2} \right]_{t=\theta_2^{1/2}}, \end{aligned}$$

$$\text{διότι } \frac{d^2 M_V(t)}{dt^2} = E_{\theta}(V^2 e^{Vt}).$$

Υστερα από λίγη άλγεβρα, προκύπτει ότι:

$$E_{\theta}(XV^2) = \exp(\theta_1 + 0.5\theta_2)(1 + \theta_2) = \gamma_{\theta}(1 + \theta_2).$$

Άρα,

$$Cov_{\theta}(X, V^2) = \gamma_{\theta} \theta_2. \quad (23)$$

Πρόταση 6 Έστω $X \sim \text{Exp}(1/\gamma)$, με $E_\gamma(\ln X) = \ln \gamma + \psi(1) = \theta_{1\gamma}$ και $\text{Var}_\gamma(\ln X) = \psi'(1) = \theta_{2\gamma}$. Θεωρούμε το μετασχηματισμό $Y = \ln X$ και έστω $f(Y, \theta_\gamma)$ η σ.π.π. της $N(\theta_{1\gamma}, \theta_{2\gamma})$. Τότε

$$E_\gamma \left[e^{tY} \frac{\partial \ln f(Y, \theta_\gamma)}{\partial \theta_1} \right] = \frac{1}{\psi'(1)} \gamma^t \Gamma(t+1) [\psi(t+1) - \psi(1)].$$

και

$$E_\gamma \left[e^{tY} \frac{\partial \ln f(Y, \theta_\gamma)}{\partial \theta_2} \right] = \gamma^t \Gamma(t+1) \left\{ -\frac{1}{2\psi'(1)} + \frac{1}{2[\psi'(1)]^2} [(\psi(t+1) - \psi(1))^2 + \zeta(2, t+1)] \right\},$$

με $E_\gamma[\cdot]$ να συμβολίζεται η αναμενόμενη τιμή όταν $Y \sim \text{Exp}(1/\gamma)$, και όπου $\zeta(2, \nu) = \sum_{j=0}^{\infty} (\nu + j)^{-2}$ η γενικευμένη zeta συνάρτηση του Riemann (βλέπε Gradsteyn (1980)).

Επισημαίνεται ότι $\zeta(2, 1) = \psi'(1) = \zeta(2, t+1)|_{t=0}$.

Απόδειξη

Είναι

$$E_\gamma \left[e^{tY} \frac{\partial \ln f(Y, \theta_\gamma)}{\partial \theta_1} \right] = \frac{1}{\theta_{2\gamma}} E_\gamma [e^{tY} (Y - \theta_{1\gamma})] = \frac{1}{\theta_{2\gamma}} [E_\gamma (X^t \ln X) - \theta_{1\gamma} \gamma^t \Gamma(t+1)],$$

όπου $X = e^Y \sim \text{Exp}(1/\gamma)$. Ισχύει (βλέπε Gradsteyn (1980)) ότι:

$$E_{\gamma}(X^t \ln X) = \int_0^{\infty} \gamma^{-1} x^t (\ln x) e^{-\frac{x}{\gamma}} dx = \gamma^t \Gamma(t+1) [\ln \gamma + \psi(t+1)].$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} E_{\gamma} \left[e^{tY} \frac{\partial \ln f(Y, \boldsymbol{\theta}_{\gamma})}{\partial \theta_1} \right] &= \frac{1}{\theta_{2\gamma}} \gamma^t \Gamma(t+1) [\ln \gamma + \psi(t+1) - \ln \gamma - \psi(1)] \\ &= \frac{1}{\psi'(1)} \gamma^t \Gamma(t+1) [\psi(t+1) - \psi(1)]. \end{aligned}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} E_{\gamma} \left[e^{tY} \frac{\partial \ln f(Y, \boldsymbol{\theta}_{\gamma})}{\partial \theta_2} \right] &= -\frac{E_{\gamma}(e^{tY})}{2\theta_{2\gamma}} + \frac{1}{2\theta_{2\gamma}^2} E_{\gamma} \left[X^t (\ln X - \theta_{1\gamma})^2 \right] \\ &= -\frac{1}{2\theta_{2\gamma}^2} \gamma^t \Gamma(t+1) + \frac{1}{2\theta_{2\gamma}^2} E_{\gamma} \left[X^t (\ln X)^2 - 2\theta_{1\gamma} X^t \ln X + \theta_{1\gamma}^2 X^t \right]. \end{aligned}$$

Έχει βρεθεί ότι: $E_{\gamma}(X^t \ln X) = \gamma^t \Gamma(t+1) [\ln \gamma + \psi(t+1)]$ και $E_{\gamma}(X^t) = E_{\gamma}(e^{tY}) = \gamma^t \Gamma(t+1)$. Επίσης, ισχύει (βλέπε Gradsteyn (1980)) ότι:

$$\begin{aligned} E_{\gamma} \left[X^t (\ln X)^2 \right] &= \gamma^{-1} \int_0^{\infty} x^t (\ln x)^2 e^{-\frac{x}{\gamma}} dx \\ &= \gamma^t \Gamma(t+1) \left\{ [\psi(t+1) + \ln \gamma]^2 + \zeta(2, t+1) \right\}, \end{aligned}$$

Επομένως, συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα, έπειτα από λίγη άλγεβρα, προκύπτει ότι:

$$E_{\gamma} \left[e^{tY} \frac{\partial \ln f(Y, \boldsymbol{\theta}_{\gamma})}{\partial \theta_2} \right] = \gamma^t \Gamma(t+1) \left\{ -\frac{1}{2\psi'(1)} + \frac{1}{2[\psi'(1)]^2} \left[(\psi(t+1) - \psi(1))^2 + \zeta(2, t+1) \right] \right\}.$$

Πρόταση 7 Έστω $X \sim \text{Exp}(1/\gamma)$, με $E_\gamma(\ln X) = \ln \gamma + \psi(1) = \theta_{1\gamma}$, και $\text{Var}_\gamma(\ln X) = \psi'(1) = \theta_{2\gamma}$. Θεωρούμε το μετασχηματισμό $Y = \ln X$ και έστω $f(Y, \theta_\gamma)$ είναι η σ.π.π. της $N(\theta_{1\gamma}, \theta_{2\gamma})$. Τότε, προκύπτει, έπειτα από λίγη άλγεβρα, ότι:

$$\text{i)} \quad E_\gamma \left[\frac{\partial \ln f(Y, \theta_\gamma)}{\partial \theta_1} \right] = E_\gamma \left(\frac{Y - \theta_{1\gamma}}{\theta_{2\gamma}} \right) = 0,$$

$$\text{ii)} \quad E_\gamma \left[\frac{\partial \ln f(Y, \theta_\gamma)}{\partial \theta_2} \right] = E_\gamma \left[-\frac{1}{2\theta_{2\gamma}} + \frac{(Y - \theta_{1\gamma})^2}{2\theta_{2\gamma}^2} \right] = 0,$$

$$\text{iii)} \quad E_\gamma \left[\frac{\partial \ln f(Y, \theta_\gamma)}{\partial \theta_1} \right]^2 = \frac{1}{\theta_{2\gamma}} = \frac{1}{\psi'(1)},$$

$$\text{iv)} \quad E_\gamma \left[\frac{\partial \ln f(Y, \theta_\gamma)}{\partial \theta_1} \frac{\partial \ln f(Y, \theta_\gamma)}{\partial \theta_2} \right] = E_\gamma \left[\frac{(Y - \theta_{1\gamma})^3}{2\theta_{2\gamma}^3} \right] = \frac{1}{2\theta_{2\gamma}^3} E_\gamma (Y - \theta_{1\gamma})^3 = \frac{\psi''(1)}{2[\psi'(1)]^3}.$$

$$\text{v)} \quad E_\gamma \left[\frac{\partial \ln f(Y, \theta_\gamma)}{\partial \theta_2} \right]^2 = \frac{1}{4\theta_{2\gamma}^2} - \frac{E_\gamma (Y - \theta_{1\gamma})^2}{2\theta_{2\gamma}^3} + \frac{E_\gamma (Y - \theta_{1\gamma})^4}{4\theta_{2\gamma}^4}$$

$$= \frac{1}{4\theta_{2\gamma}^2} \left[-1 + \frac{E_\gamma (Y - \theta_{1\gamma})^4}{\theta_{2\gamma}^2} \right] = \frac{\psi'''(1) + 2[\psi'(1)]^2}{4[\psi'(1)]^4},$$

Τέλος, παρατίθεται η απόδειξη της Πρότασης 2.1.1 (βλέπε Cox (1961, 1962)), χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς του Κεφαλαίου 2. Επιπλέον, σε όσα ακολουθούν υποθέτουμε ότι μπορούμε να αντιστρέψουμε τη σειρά της παραγωγίσης με την

ολοκλήρωση, καθώς πληρούνται οι υποθέσεις που δίνονται στο Παράρτημα Β.

Πρόταση 2.1.1. (Cox (1962)) Ισχύουν τα ακόλουθα:

i) $E_{\theta}(F_{\theta})=0.$

ii) $E_{\theta}(FF_{\theta})=\int \frac{\partial}{\partial \theta} [f(x,\theta)] \ln f(x,\theta) dx = E_{\theta} \left[\ln f(X,\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(X,\theta) \right].$

iii) $Cov_{\theta}(F, F_{\theta}) = E_{\theta}(FF_{\theta}) = \int \frac{\partial}{\partial \theta} [f(x,\theta) \ln f(x,\theta)] dx.$

iv) $E_{\theta} \left[F_{\theta}^2 + F(F_{\theta}^2 + F_{\theta\theta}) \right] = \int \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} [f(x,\theta) \ln f(x,\theta)] dx.$

v) $E_{\theta} [L''_{\theta}(\theta)] = n E_{\theta} \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f(X,\theta) \right] = -I(\theta),$ όπου $I(\theta)$ το μέτρο πληροφορίας του Fisher.

vi) $E_{\theta}(F-G) = \int f(x,\theta) \ln \left[\frac{f(x,\theta)}{g(x,\gamma_{\theta})} \right] dx.$

vii) $E_{\theta} \{ F_{\theta}(F-G) \} = \int \frac{\partial}{\partial \theta} \left[f(x,\theta) \ln \left(\frac{f(x,\theta)}{g(x,\gamma_{\theta})} \right) \right] dx.$

Απόδειξη (Cox (1962))

i) Είναι

$$\begin{aligned} E_{\theta}(F_{\theta}) &= \int f(x,\theta) \frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial \theta} dx = \int f(x,\theta) \frac{1}{f(x,\theta)} \frac{\partial f(x,\theta)}{\partial \theta} dx \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta} \int f(x,\theta) dx = 0. \end{aligned}$$

ii) Είναι

$$E_{\theta}(FF_{\theta}) = E_{\theta} \left[\ln f(X, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(X, \theta) \right] = \int \ln f(x, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} [\ln f(x, \theta)] f(x, \theta) dx,$$

και έπειτα από λίγη άλγεβρα,

$$E_{\theta}(FF_{\theta}) = \int \ln f(x, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) dx.$$

Επιπρόσθετα, ύστερα από λίγη άλγεβρα, και λαμβάνοντας υπόψη την προηγούμενη σχέση, ισχύει ότι:

$$E_{\theta} \left[\ln f(X, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(X, \theta) \right] = \int \frac{\partial}{\partial \theta} [f(x, \theta)] \ln f(x, \theta) dx = E_{\theta}(FF_{\theta}).$$

iii) Η πρώτη ισότητα προκύπτει άμεσα από τον ορισμό της συνδιακύμανσης και λαμβάνοντας υπόψη ότι $E_{\theta}(F_{\theta}) = 0$. Για την απόδειξη της δεύτερης ισότητας, έχουμε, ύστερα από λίγη άλγεβρα, ότι:

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial [f(x, \theta) \ln f(x, \theta)]}{\partial \theta} dx &= \int \frac{\partial}{\partial \theta} [f(x, \theta)] \ln f(x, \theta) dx + \int \frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) dx \\ &= \int \frac{\partial}{\partial \theta} [f(x, \theta)] \ln f(x, \theta) dx, \end{aligned}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

iv) Είναι:

$$E_{\theta}(F_{\theta}^2) = \int f(x, \theta) \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x, \theta) \right]^2 dx = \int \frac{1}{f(x, \theta)} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) \right]^2 dx$$

και

$$E_{\theta}(FF_{\theta}^2) = \int f(x, \theta) \ln f(x, \theta) \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x, \theta) \right]^2 dx = \int \frac{\ln f(x, \theta)}{f(x, \theta)} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) \right]^2 dx.$$

Επιπλέον, λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f(x, \theta) = -\frac{1}{f^2(x, \theta)} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) \right]^2 + \frac{1}{f(x, \theta)} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} f(x, \theta),$$

προκύπτει ότι:

$$E_{\theta}(FF_{\theta\theta}) = -\int \frac{1}{f(x, \theta)} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) \right]^2 dx + \int \ln f(x, \theta) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} f(x, \theta) dx.$$

Επομένως,

$$E_{\theta}[F_{\theta}^2 + F(F_{\theta}^2 + F_{\theta\theta})] = \int \frac{\partial^2 [f(x, \theta)]}{\partial \theta^2} \ln f(x, \theta) dx + \int \left[\frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta} \right]^2 \frac{1}{f(x, \theta)} dx.$$

Επιπλέον, καθώς

$$\frac{\partial^2 [f(x, \theta) \ln f(x, \theta)]}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 f(x, \theta)}{\partial \theta^2} \ln f(x, \theta) + \frac{\left[\frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta} \right]^2}{f(x, \theta)} + \frac{\partial^2 f(x, \theta)}{\partial \theta^2},$$

προκύπτει, ύστερα από λίγη άλγεβρα, ότι:

$$\int \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \{f(x, \theta) \ln f(x, \theta)\} dx = \int \frac{\partial^2 [f(x, \theta)]}{\partial \theta^2} \ln f(x, \theta) dx + \int \left[\frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta} \right]^2 \frac{1}{f(x, \theta)} dx,$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη.

v) Είναι εξ ορισμού $L_f''(\theta) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f(x_i, \theta)$, επομένως

$$E_\theta [L_f''(\theta)] = n E_\theta \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f(X, \theta) \right].$$

Επιπλέον, λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f(x, \theta) = \frac{\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} f(x, \theta)}{f(x, \theta)} - \frac{\left[\frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) \right]^2}{f^2(x, \theta)},$$

έχουμε ότι:

$$E_\theta \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f(X, \theta) \right] = \int \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} f(x, \theta) dx - \int \left[\frac{\frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta)}{f(x, \theta)} \right]^2 f(x, \theta) dx,$$

ή ισοδύναμα

$$E_\theta \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f(X, \theta) \right] = -E_\theta \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(X, \theta) \right]^2 = -I(\theta).$$

vi) Είναι

$$\int f(x, \theta) \ln \left(\frac{f(x, \theta)}{g(x, \gamma_\theta)} \right) dx = \int f(x, \theta) \ln f(x, \theta) dx - \int f(x, \theta) \ln g(x, \gamma_\theta) dx,$$

οπότε,

$$\int f(x, \theta) \ln \left(\frac{f(x, \theta)}{g(x, \gamma_\theta)} \right) dx = E_\theta(F - G).$$

vii) Είναι εξ ορισμού

$$E_\theta \{ F_\theta(F - G) \} = \int f(x, \theta) \ln \frac{f(x, \theta)}{g(x, \gamma_\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} [\ln f(x, \theta)] dx,$$

ή ισοδύναμα

$$E_\theta \{ F_\theta(F - G) \} = \int \ln \frac{f(x, \theta)}{g(x, \gamma_\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) dx. \quad (24)$$

Το δεύτερο μέλος της vii) ύστερα από λίγη άλγεβρα προκύπτει ότι είναι ίσο με

$$\int \frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta} \ln \left(\frac{f(x, \theta)}{g(x, \gamma_\theta)} \right) dx + \int \frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta} dx - \int \frac{f(x, \theta)}{g(x, \gamma_\theta)} \frac{\partial g(x, \gamma_\theta)}{\partial \theta} \frac{d\gamma_\theta}{d\theta} dx. \quad (25)$$

Επομένως, συνδυάζοντας τις σχέσεις (24) και (25) προκύπτει ότι:

$$\int \frac{\partial}{\partial \theta} \left[f(x, \theta) \ln \left(\frac{f(x, \theta)}{g(x, \gamma_\theta)} \right) \right] dx = E_\theta \{ F_\theta(F - G) \} - \frac{d\gamma_\theta}{d\theta} E_\theta \{ G_\gamma \}.$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Έστω $X_1, \dots, X_n$ ένα τ.δ. και θέλουμε να ελέγξουμε αν οι παρατηρήσεις αυτές προέρχονται είτε από έναν πληθυσμό με σ.π.π. $H_f = \{f(x, \theta), \theta \in \Theta\}$ είτε από έναν πληθυσμό με σ.π.π. $H_g = \{g(x, \gamma), \gamma \in \Gamma\}$. Στο Παράρτημα Β παρατίθενται οι συνθήκες υπό τις οποίες ισχύουν οι στατιστικές μεθοδολογίες του Cox (1961, 1962), του Atkinson (1970), των Epps *et al.* (1982) και του Vuong (1989) που αναπτύχθηκαν στα Κεφάλαια 2-5, αντίστοιχα.

Σε όσα ακολουθούν θ_0 είναι η αληθινή τιμή της παραμέτρου θ υπό την H_f , $\hat{\theta}_n$ και $\hat{\gamma}_n$ είναι οι Ε.Μ.Π. των παραμέτρων θ και γ υπό την H_f και H_g , αντίστοιχα, ενώ με γ_* συμβολίζουμε την τιμή όπου συγκλίνει ο Ε.Μ.Π. $\hat{\gamma}_n$ της παραμέτρου γ υπό την H_f . Ανάλογοι συμβολισμοί χρησιμοποιούνται υπό την H_g .

Ο προσδιορισμός της ασυμπτωτικής κατανομής των στατιστικών συναρτήσεων των Cox (1961, 1962), Atkinson (1970), Epps *et al.* (1982) και Vuong (1989), υπό την H_f ή την H_g , προϋποθέτει ότι ισχύουν συνθήκες που παρατίθενται στη συνέχεια και οι οποίες δόθηκαν αρχικά από τον White (1982) κι έπειτα από τον Vuong (1989). Επισημαίνεται ότι οι συνθήκες αυτές δίνονται σε όρους της $f(x, \theta)$, αλλά ισχύουν και για την $g(x, \gamma)$, με την αντιστοίχιση να δίνεται εντός παρένθεσης.

Υπόθεση 1 Οι παρατηρήσεις $X_i, i=1,2,\dots,n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με από κοινού α.σ.κ. $H(\cdot)$ σε ένα μετρήσιμο Ευκλείδειο χώρο Ω , με μετρήσιμη Radon-Nikodym σ.π.π., έστω $h(\cdot)$.

Παρατηρούμε ότι καθώς η επιλογή της H_f ή της H_g για μηδενική υπόθεση είναι αυθαίρετη, η συνάρτηση $h(\cdot)$ του ορισμού μπορεί να αντιστοιχεί σε κάποια από τις f ή g .

Υπόθεση 2 Η οικογένεια των α.σ.κ. $F(x, \theta) (G(x, \gamma))$ έχει Radon-Nikodym σ.π.π. $f(x, \theta) (g(x, \gamma))$, η οποία είναι μετρήσιμη στο x για κάθε $\theta \in \Theta (\gamma \in \Gamma)$, ένα συμπαγές υποσύνολο ενός p -διάστατου (q -διάστατου) Ευκλείδειου χώρου, και συνεχής στο $\theta (\gamma)$ για κάθε $x \in \Omega$. Όταν η $H_f (H_g)$ είναι η μηδενική υπόθεση, το πεδίο ορισμού της $f (g)$ δεν εξαρτάται από το $\theta (\gamma)$.

Υπόθεση 3 α) Ισχύει η ανισότητα $|\ln f(x, \theta)| \leq m(x)$ για κάθε $\theta \in \Theta$, όπου η m είναι ολοκληρώσιμη ως προς H και β) η $E[\ln f(X_i, \theta)]$ έχει μοναδικό μέγιστο στο $\theta_* \in \Theta$.

Οι Υποθέσεις 1-3 εξασφαλίζουν την ύπαρξη των $\hat{\theta}_n$ και $\hat{\gamma}_n$, κι επιπλέον ότι οι $\hat{\theta}_n$ και $\hat{\gamma}_n$ συγκλίνουν σχεδόν βέβαια στις ποσότητες θ_* και γ_* που μεγιστοποιούν την αναμενόμενη τιμή του λογαρίθμου της πιθανοφάνειας. (βλέπε White (1982), σελ. 303).

Όταν οι μερικές παράγωγοι υπάρχουν, ορίζονται οι πίνακες:

$$A_n(\boldsymbol{\theta}) = \left\{ n^{-1} \sum_{i=1}^n \partial^2 \ln f(X_i, \boldsymbol{\theta}) / \partial \theta_j \partial \theta_k \right\},$$

και

$$B_n(\boldsymbol{\theta}) = \left\{ n^{-1} \sum_{i=1}^n \partial \ln f(X_i, \boldsymbol{\theta}) / \partial \theta_j \cdot \partial \ln f(X_i, \boldsymbol{\theta}) / \partial \theta_k \right\}.$$

Επιπλέον, αν υπάρχουν και οι αναμενόμενες τιμές, ορίζονται οι πίνακες:

$$A(\boldsymbol{\theta}) = \left\{ E \left(\partial^2 \ln f(X_i, \boldsymbol{\theta}) / \partial \theta_j \partial \theta_k \right) \right\},$$

και

$$B(\boldsymbol{\theta}) = \left\{ E \left(\partial \ln f(X_i, \boldsymbol{\theta}) / \partial \theta_j \cdot \partial \ln f(X_i, \boldsymbol{\theta}) / \partial \theta_k \right) \right\}.$$

Υπο την προϋπόθεση ότι οι αντίστροφοι πίνακες που χρησιμοποιούνται υπάρχουν, είναι:

$$C_n(\boldsymbol{\theta}) = A_n(\boldsymbol{\theta})^{-1} B_n(\boldsymbol{\theta}) A_n(\boldsymbol{\theta})^{-1},$$

και

$$C(\boldsymbol{\theta}) = A(\boldsymbol{\theta})^{-1} B(\boldsymbol{\theta}) A(\boldsymbol{\theta})^{-1}.$$

Η ύπαρξη των παραπάνω εξασφαλίζεται από τις Υποθέσεις 4 και 5, που έπονται.

Υπόθεση 4 Οι συναρτήσεις $\partial \ln f(x, \theta) / \partial \theta_i, i=1,2,\dots,p$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις του x για κάθε $\theta \in \Theta$ και συνεχείς διαφορίσιμες συναρτήσεις του θ για κάθε $x \in \Omega$.

Υπόθεση 5 Οι συναρτήσεις $|\partial^2 \ln f(x, \theta) / \partial \theta_i \partial \theta_j|$ και $|\partial \ln f(x, \theta) \partial \theta_i \cdot \partial \ln f(x, \theta) \partial \theta_j|, i, j=1,\dots,p$ είναι ολοκληρώσιμες ως προς H για κάθε $x \in \Omega$ και για κάθε $\theta \in \Theta$.

Υπόθεση 6 α) Υποθέτουμε ότι το θ_* είναι εσωτερικό σημείο του παραμετρικού χώρου Θ , και **β)** οι πίνακες $A(\theta_*)$ και $B(\theta_*)$ είναι μη ιδιάζοντες.

Οι Υποθέσεις 1-6 εξασφαλίζουν ότι οι $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_*)$ και $\sqrt{n}(\hat{\gamma}_n - \gamma_*)$ ακολουθούν ασυμπτωτικά κανονική κατανομή, με πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων $C(\theta_*)$.

Επιπλέον, για να είναι η διακύμανση της σ.σ. του Cox (1961, 1962) θετική και να μπορεί να βρεθεί συνεπής εκτιμητής της, υποθέτουμε ότι:

Υπόθεση 7 Η συνάρτηση $\left\{ \ln \left[f(x, \theta) / g(x, \gamma) \right] \right\}^2$ είναι ολοκληρώσιμη ως προς H για κάθε $(\theta, \gamma) \in \Theta \times \Gamma$.

Υπόθεση 8 Οι συναρτήσεις:

$\left| \partial \ln \left[f(x, \theta) / g(x, \gamma) \right] f(x, \theta) / \partial \theta_i \right|, \quad \left| \frac{\partial \ln f(x, \theta)}{\partial \theta_i} \ln \frac{f(x, \theta)}{g(x, \gamma)} \right|$ και
 $\left| \partial \ln \left[f(x, \theta) / g(x, \gamma) \right] f(x, \theta) / \partial \theta_i \right|, i=1, \dots, p, j=1, \dots, q,$ είναι
 ολοκληρώσιμες για κάθε $(\theta, \gamma) \in \Theta \times \Gamma$, ως προς H .

Οι Υποθέσεις 1-8 επιτρέπουν να θεμελιωθεί η ασυμπτωτική κανονικότητα των τεστ των Cox (1961, 1962) και Atkinson (1970).

Επιπλέον, για τη μέθοδο των Erps *et al.* (1982) υποθέτουμε ότι η ροπογεννήτρια υπό την $H_f (H_g)$ έχει συνεχή πρώτη και δεύτερη παράγωγο σε μια περιοχή του $\theta (\gamma)$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

Στο παράρτημα αυτό δίνονται οι τιμές της αθροιστικής συνάρτησης της διωνυμικής κατανομής με πιθανότητα επιτυχίας $p=0.5$.

Τιμές της αθροιστικής συνάρτησης της $B(n,0.5)$. Πηγή: Παπαιωάννου, Τ. και Λουκάς, Σ. (2002)

Πίνακας υπολογισμού των $P(X \leq x) \cdot 1000$, όταν $X \sim B(n,0.5)$

Σημείωση: Με * έχουμε συμβολίσει τις τιμές που είναι ίσες ή περίπου ίσες με 1000

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	031	188	500	812	969	*										
6	016	109	344	656	891	984	*									
7	008	062	227	500	773	938	992	*								
8	004	035	145	363	637	855	965	996	*							
9	002	020	090	254	500	746	910	980	998	*						
10	001	011	055	172	377	623	828	945	989	999	*					
11		006	033	113	247	500	726	887	967	994	*	*				
12		003	019	073	194	387	613	806	927	981	997	*	*			
13		002	011	046	133	291	500	709	867	954	989	998	*	*		
14		001	006	029	090	212	395	605	788	910	971	994	999	*	*	
15			004	018	059	151	304	500	696	849	947	982	996	*	*	*
16			002	011	038	105	227	402	598	773	895	962	989	998	*	*
17			001	006	025	072	166	315	500	685	834	928	975	994	999	*
18			001	004	015	048	119	240	407	593	760	881	952	985	996	999
19				002	010	032	084	180	324	500	676	820	916	968	990	998

20	001 006 021 058 132 252 412	588	748	868	942	979	994
21	001 004 013 039 095 192 332	500	668	808	905	961	987
22	002 008 026 067 143 262	416	584	738	857	933	974
23	001 005 017 047 105 202	339	500	661	798	895	953
24	001 003 011 032 076 154	271	419	581	729	846	924
25	002 007 022 054 115	212	345	500	655	788	885

Abstract of the MSc Dissertation

The present dissertation focuses on the problem of testing separate families of distributions, which pioneered by the seminal work by Cox (1961, 1962). Specifically,

let $X_1, \dots, X_n$ be a random sample from a population with probability density function (p.d.f) $h(\cdot)$, with unknown functional form. We want to test if this sample can be considered as a random sample from the family of distribution $H_f = \{f(x, \theta), \theta \in \Theta\}$, or $H_g = \{g(x, \gamma), \gamma \in \Gamma\}$. The functional forms of f and g are known, while θ and γ , are unknown parameters, belonging to parameter spaces Θ and Γ , respectively. Finally, we assume that the two families of distributions are non nested (separated) in the sense that an arbitrary member of one family cannot be obtained as a limit of members of the other. A more precise mathematical definition of non-nested models is given in Chapter 1.

There is a vast literature on the subject of testing separate families. Our aim in this MSc dissertation is to review the most important ones and compare their performance via a Monte Carlo study by considering a specific case.

In this context, in **Chapter 1** the problem under study is presented and a precise definition of non-nested models given by Pesaran (1987) is given. This definition is clarified through examples for specific families of distributions.

In **Chapter 2** the centered likelihood ratio statistic, introduced by Cox (1961, 1962), is presented. Beyond this methodology, Cox (1961, 1962) cited some other ideas for testing separate families.

One of these was the approach of the comprehensive model, which was developed by Atkinson (1970). The general idea of this approach is non nested models to be checked using a generic model, which includes the two non nested models as special cases. This method is the main subject of **Chapter 3**.

A third approach, originally considered by Epps *et al.* (1982), which is based on the sample moment generating function is presented in **Chapter 4**.

In Chapters 5 and 6 two approaches for testing the null hypothesis that the competing models are equally close to the true data generating process against the alternative hypothesis that one model is closer are presented. Specifically, the approaches introduced by Vuong (1989) and Clarke (2003) are presented in **Chapter 5** and **Chapter 6**, respectively.

In order to clarify the above methods, the corresponding theory is developed in every chapter, for the special case of lognormal and exponential families of distributions.

In **Chapter 7**, we perform a Monte Carlo study in order to compare and evaluate the methods that were presented in Chapters 2-6. For this purpose, the case of lognormal and exponential families of distributions is considered.

In addition, in **Appendix A** the properties of the most frequent distributions in this dissertation are aggregated and some useful results are presented. In **Appendix B** the regulation conditions for the methods that were presented in Chapters 2-6 are provided, while in **Appendix C** the values of the cumulative distribution function of binomial distribution with parameters n and $p=0.5$ are given. These values are used in Clarke's (2003) approach that was presented in Chapter 6. Finally, the **Bibliography**, on which the dissertation was based, is provided.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Aguirre-Torres, V., and Gallant, A. R. (1983). The Null and Non-Null Asymptotic Distribution of the Cox Test for Multivariate Nonlinear Regression: Alternatives and a New Distribution-Free Cox Test. *Journal of Econometrics*, **21**, 5-33.

Akaike, H. (1973). Information Theory and an Extension of the Likelihood Ratio Principle. *Proceedings of the Second International Symposium of Information Theory*, ed. by B. N. Petrov and F. Csaki. Budapest: Akademiai Kiado, 257-281.

Akaike, H. (1974). A New Look at the Statistical Model Identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-19**, 716-723.

Al-Khalidi, H. R. and Hwang, L. J. (1991). Some Pitfalls of Separate Families of Hypotheses: Normality vs Lognormality. *Communications in Statistics, Theory and Methods*, **20:8**, 2505-2528.

Amemiya, T. (1980). Selection of Regressors. *International Economic Review*, **21**, 331-354.

Atkinson, A. C. (1970). A Method for Discriminating Between Models. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, **32**, No 3, 323-353.

Bahadur, R. R. (1960). Stochastic Comparison of Tests. *Ann. Math. Statist.* **31**, 276-95.

Bahadur, R. R. (1967). Rates of Convergence of Estimates and Test Statistics. *Ann. Math. Statist.* **38**, 303-24.

Bartlett, M. S. (1953). Approximate Confidence Intervals. *Biometrika*, **40**, No 1/2, 12-19.

Clarke, A. K. (2001). Testing Nonnested Models of International Relations: Reevaluating Realism. *American Journal of Political Science*, **45**, No 3, 724-744.

Clarke, A. K. (2003). A Simple Distribution-Free Test for Nonnested Model Selection. *Department of Political Science*, University of Rochester, NY 14627-0146.

Clarke, A. K. (2007). A Simple Distribution-Free Test for Nonnested Model Selection: *Supplementary Materials*. University of Rochester.

Clarke, A. K. and Signorino S. C. (2010). Discriminating Methods: Tests for Non-nested Discrete Choice Models. *Political Studies*, University of Rochester, **58**, 368-388.

Conover, W. J. (1971). *Practical Nonparametric Statistics*. John Wiley & Sons, Inc., New York.

Cox, D. R. (1961). Tests of Separate Families of Hypotheses. Birkbeck College, University of London.

Cox, D. R. (1962). Further Results on Tests of Separate Families of Hypotheses. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B* (Methodological), **24**, No. 2, 406-424.

Davies, R. B. (1977). Hypothesis Testing when a Nuisance Parameter is Present Only under the Alternative. *Biometrika*, **64(2)**, 247-254.

Efron, B. (1983). Comparing Non-Nested Linear Models. *Technical Report*, **84**, Stanford University.

Epps, T. W., Singleton, K. J. and Pulley, L. B. (1982). A Test of Separate Families of Distributions Based on the Empirical Moment Generating Function. *Biometrika*, **69**, No 2, 391-399.

Feigin, P. D. and Heathcote, C. R. (1976). The Empirical Characteristic Function and the Cramér-von Mises Statistic. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics*, **38**, series A, Pt. 4, 309-325.

Gibbons, J. D. (1971). *Nonparametric Statistical Inference*, International Student Edition. McGraw – Hill Kogahusha Ltd., Tokyo – London.

Gibbons, J. D. and Chakraborti, S. (1992). *Nonparametric Statistical Inference*. 3rd ed. New York: Marcel Dekker, Inc.

Granger, C. W. J., Maxwell, L. K. and White, H. (1995). Comments on Testing Economic Theories and the Use of Model Selection Criteria. *Journal of Econometrics*, **67**, 173-187.

Heathcote, C. R. (1972). A Test of Goodness of Fit for Symmetric Random Variables. *Australian Journal of statistics*, **14** (2), 172-181.

Hollander, M. and Wolfe, D. A. (1973). *Nonparametric Statistical Methods*. John Wiley & Sons, Inc., N.Y.

Irwin, J. O. The Distribution of the Logarithm of Survival Times when the true Law is Exponential.

Jackson, O. A. Y. (1968). Some Results on Tests of Separate Families of Hypotheses. *Biometrika*, **55**, No 2, 355-363.

Jennrich, I. R. (1969). Asymptotic Properties of Non-Linear Least Squares Estimators. University of California, Los Angeles. *The Annals of Mathematical Statistics*, **40**, No 2, 633-643.

Kotz, S. (1973). Normality vs. Lognormality with Applications. *Communications in Statistics*, **A1**(2), 113-132.

Kullback, S. (1959). *Information Theory and Statistics*. New York: Wiley.

Kullback, S. and Leibler, R. A. (1951). On information and Sufficiency. *Annals of Mathematical Statistics*, **22**, 79-86.

Kvam, P. H. and Vidakovic B. (2007). *Nonparametric Statistics with Applications to Science and Engineering*. John Wiley & sons.

Lawless, J. F. (1982). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*. New York: John Wiley.

Lehmann, E. L. (1975). *Nonparametrics: Statistical Methods Based on Ranks*. Holden – Day Inc., N. Y.

Locke, C. and Spurrier, J. D. (1978). On Tests of Uniformity. *Comm. Statist. A* **7**, 241-58.

Loh, W. Y. (1985). A New Method for Testing Separate Families of Hypotheses. *Journal of American Statistical Association*, **80**, No 390, Theory and Methods.

McAleer, M. and Bera, A. (1983). Comment. *Econometric Reviews*, **2**, 121-130.

McAleer, M. and Pesaran, M. H. (1986). Statistical Inference in Non-nested Econometric Models. Department of Statistics, Australian, Canberra, ACT 2601 Australia.

Moran, P. A. P. (1970). On Asymptotically Optimal Tests of Composite Hypotheses. *Biometrika*, **57**, 47-55.

Neyman, J. S. (1959). *Optimal Asymptotic Tests of Composite Statistical Hypotheses*. In Probability and Statistics. The Harald Cramér Volume (ed. U. Grenander). Uppsala, Sweden: Almquist and Wiksell, New York: Wiley.

Noether, G. E. (1967). *Elements of Nonparametric Statistics*. New York: John Wiley and Sons.

Pardo, L. (2006). *Statistical Inference Based on Divergence Measures*. Chapman&Hall, London.

Pereira, B. de B. (1977). A Note on the Consistency and on the Finite Sample Comparisons of Some Tests of Separate Families of Hypotheses. *Biometrika*, **64**, No 1, 109-113.

Pereira, B. de B. (1978). Empirical Comparisons of Some Tests of Separate Families of Hypotheses. *Metrika*, **25**, 219-234. Physica-Verlag, Vienna.

Pesaran, M. H. (1984). Asymptotic Power Comparisons of Tests of Separate Parametric Families by Bahadur's Approach. *Biometrika*, **71**, No 2, 245-252.

Pesaran, M. H. (1987). Global and Partial Non-nested Hypotheses and Asymptotic Local Power. *Econometric Theory*, **3**, 69-97.

Pesaran, M. H. and Weeks, M. (1999). Non-nested Hypothesis Testing: An Overview. Faculty of Economics and Politics. University of Cambridge.

Pesaran, M. H. and Ulloa, M. R. D. (2007). Nonnested Hypotheses. University of Cambridge.

Sayyareh, A., Obeidi, R. and Bar-Hen, A. (2010). Empirical Comparison between Some Model Selection Criteria. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **40**, 72-86.

Shapiro, S. S. and Wilk, M. B. (1972). An analysis of Variance Test for the Exponential Distribution (complete samples). *Technometrics*, **14**, 355-70.

Vuong, H. Q. (1983). Misspecification and Conditional Maximum Likelihood Estimation. *Social Science Working Paper*, **503**. Division of the Humanities and Social Sciences. California Institute of Technology.

Wellington, D. (1984). Tests of Composite Distributional Hypotheses. *Statistical Analysis of Nonferrous Metals Manufacturing Phase II Data*, **1**, by JRB Associates.

White, H. (1982). Regularity Conditions for Cox's Test of Non-nested Hypotheses. *Journal of Econometrics*, **19**, 301-318. North-Holland Publishing Company.

Wilcoxon, F. (1945). Individual Comparisons by Ranking Methods. *Biometrics Bulletin*, **1**, 80-83.

Williams, D. A. (1970a). Discrimination Between Regression Models to Determine the Pattern of Enzyme Synthesis in Synchronous Cell Cultures. *Biometrics*, **28**, 23-32.

Williams, D. A. (1970b). Discussion of a Method for Discriminating Between Models, by A. C. Atkinson. *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B*, **32**, 350.

