

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ COHEN-MACAULAY ΚΑΙ
ΔΑΚΤΥΛΙΟΙ GORENSTEIN

ΚΛΕΙΩ-ΦΑΝΟΥΡΙΑ ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΥ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2014

Η παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή εκπονήθηκε στα πλαίσια του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών, για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα

«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ» (Ανάλυση-Άλγεβρα-Γεωμετρία)

που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, υπό την επίβλεψη του **Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Απόστολου Μπεληγιάννη**.

Εγκρίθηκε την 25 Ιουνίου 2014 από την Τριμελή Επιτροπή Εξέτασης:

1. ΜΠΕΛΗΓΙΑΝΝΗΣ ΑΠΟΣΤΟΛΟΣ, Αναπληρωτής Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
(Επιβλέπων Καθηγητής)
2. ΜΑΡΜΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ, Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
3. ΘΩΜΑ ΑΠΟΣΤΟΛΟΣ, Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

«Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή.»

Κλειώ-Φανουρία Παπαδοπούλου

*Αφιερώνεται στον καθηγητή μου κ. Απόστολο Μπεληγιάννη
και στην αδερφούλα μου Μαριλίου.*

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	1
1 Στοιχεία Θεωρίας Δακτυλίων Και Προτύπων	9
1.1 Πρότυπα, Ομομορφισμοί Και Ακριβείς Ακολουθίες	9
1.2 Θεμελιώδεις Κατασκευές	19
1.2.1 Ευθέα Γινόμενα Και Ευθέα Αθροίσματα	19
1.2.2 Ελεύθερα Πρότυπα Και Τανυστικά Γινόμενα Προτύπων	24
1.2.3 Ευθέα Και Αντίστροφα Όρια	30
1.2.4 Pullbacks Και Pushouts	34
1.3 Δακτύλιοι Και Πρότυπα της Noether	39
2 Στοιχεία Θεωρίας Κατηγοριών	43
2.1 Κατηγορίες	43
2.2 Συναρτητές	50
2.2.1 Ακριβείς Συναρτητές Μεταξύ Κατηγοριών Προτύπων	54
2.2.2 Φυσικοί Μετασχηματισμοί Και Συζυγή Ζεύγη Συναρτητών	56
2.3 Πυρήνες, Συνπυρήνες Και Ειδικές Κατηγορίες	60
2.4 Αβελιανές Κατηγορίες	66
2.4.1 Επεκτάσεις	69
3 Ομολογική Άλγεβρα	75
3.1 Ομολογία	75
3.2 Ενέσιμα, Προβολικά Και Επίπεδα Πρότυπα	83
3.2.1 Ενέσιμα Πρότυπα	83
3.2.2 Προβολικά Πρότυπα	87
3.2.3 Επίπεδα Πρότυπα	90
3.2.4 Ενέσιμες, Προβολικές Και Επίπεδες Αναλύσεις	97
3.3 Οι Συναρτητές Ext Και Tor	101
3.4 Ενέσιμες, Προβολικές Και Επίπεδες Διαστάσεις	111
4 Προσεγγίσεις Προτύπων Και Συστρεπτικά Ζεύγη	115
4.1 Προσεγγίσεις Προτύπων	115
4.2 Ειδικές Προσεγγίσεις Προτύπων	127
4.3 Θεμελιώδη Θεωρήματα	134
4.4 Συστρεπτικά Ζεύγη Και Ελάχιστες Προσεγγίσεις	137
5 Gorenstein Προβολικά Και Gorenstein Ενέσιμα Πρότυπα	145
5.1 Gorenstein Προβολικά Πρότυπα	145
5.2 Gorenstein Ενέσιμα Πρότυπα	159
5.3 Πεπερασμένα Παραγόμενα G-Προβολικά Και Ανακλαστικά Πρότυπα	167
5.3.1 Πεπερασμένα παραγόμενα Gorenstein προβολικά πρότυπα	167
5.3.2 Ανακλαστικά πρότυπα	170

6 Ομολογικές Διαστάσεις Gorenstein	177
6.1 G-Προβολική Και G-Ενέσιμη Διάσταση	177
6.1.1 Συγκρίνοντας με την προβολική και ενέσιμη διάσταση	189
6.1.2 G-προβολικές και G-ενέσιμες προσεγγίσεις προτύπων	190
6.2 Πότε Τα G-Προβολικά Ταυτίζονται Με Τα G-Ενέσιμα Πρότυπα;	193
6.2.1 Δακτύλιοι με πεπερασμένη G-ενέσιμη διάσταση	193
6.2.2 Δακτύλιοι Quasi-Frobenius, G-προβολικά και G-ενέσιμα πρότυπα	195
7 Η Θεωρία Auslander-Buchweitz	201
7.1 Πρότυπα Υπεράνω Δακτυλίων Cohen-Macaulay	201
7.2 Το Βασικό Θεώρημα « Αποσύνθεσης »	204
7.3 Πλαίσια Των Auslander - Buchweitz Και Ενέσιμοι Συνγεννήτορες	217
7.4 Ιδιότητες Ακρίβειας Των Κατηγοριών $\hat{\mathcal{X}}$ Και $\hat{\omega}$	237
7.4.1 Ιδιότητες ακρίβειας της $\hat{\mathcal{X}}$	237
7.4.2 Ιδιότητες ακρίβειας της $\hat{\omega}$	246
7.5 Τα Ζεύγη $(\mathcal{X}, \hat{\omega})$ Και $(\check{\mathcal{F}}, \mathcal{F})$	248
7.5.1 Πλήρη Συστρεπτικά Ζεύγη	248
7.5.2 Η Δυσική Θεωρία	253
7.6 Μια Εφαρμογή Στην Θεωρία Tilting	258
8 Δακτύλιοι Gorenstein Και G-Προσεγγίσεις Προτύπων	261
8.1 Δακτύλιοι Gorenstein	261
8.2 G-Προσεγγίσεις Προτύπων Υπεράνω Δακτυλίων Gorenstein	278
8.2.1 Ελάχιστες Αριστερές G-Ενέσιμες Προσεγγίσεις Προτύπων	278
8.2.2 Ελάχιστες Δεξιές G-Ενέσιμες Προσεγγίσεις Προτύπων	284
8.2.3 Δεξιές G-Προβολικές Προσεγγίσεις Προτύπων	289
A' Ανοιχτά Προβλήματα Και Εικασίες	297
B' Περίληψη - Abstract	299
Βιβλιογραφία	301
Ευρετήριο	301

Εισαγωγή

Στη Μεταθετική Άλγεβρα, ένας *δακτύλιος Gorenstein* (Gorenstein ring), είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος της Noether με πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση, ως πρότυπο υπεράνω του εαυτού του. Οι μεταθετικοί δακτύλιοι Gorenstein εισήχθηκαν από τον A. Grothendieck, ο οποίος τους ονόμασε έτσι, λόγω της σχέσης τους με μια ιδιότητα δυϊκότητας ιδιάζοντων επίπεδων καμπυλών που μελετήθηκαν από τον D. Gorenstein το 1952. Η γενική θεωρία των μεταθετικών δακτυλίων Gorenstein θεμελιώθηκε από τον H. Bass το 1962 στο πρωτοπόρο άρθρο του «On the ubiquity of Gorenstein rings», [12], και έκτοτε αποτελεί βασικό αντικείμενο μελέτης στη Μεταθετική Άλγεβρα και στην Αλγεβρική Γεωμετρία. Ο όρος «ubiquity» θα μπορούσε να αποδοθεί ως η κατάσταση ή η ικανότητα να βρίσκεισαι παντού και ιδιαίτερα την ίδια χρονική στιγμή ή αλλιώς, πανταχού παρουσία.

Ο λόγος για τον οποίο ο Bass δίνει τον χαρακτηρισμό «ubiquity» στους δακτυλίους Gorenstein, οφείλεται στο γεγονός ότι οι δακτύλιοι Gorenstein, εμφανίζονται σε πολλά και διαφορετικά ερευνητικά πλαίσια των σύγχρονων Μαθηματικών, και ιδιαίτερα εμπεριέχουν μια ευρεία κλάση από μεταθετικούς δακτυλίους. Πιο ειδικά, στη Μεταθετική Άλγεβρα είναι γνωστή η ακόλουθη ιεραρχία μεταθετικών δακτυλίων της Noether:

$$\begin{aligned} \text{Κανονικοί} &\subseteq \text{Υπερεπιφάνειες} \subseteq \text{Πλήρεις διατομές} \subseteq \\ &\subseteq \text{Gorenstein} \subseteq \text{Cohen-Macaulay} \end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά, *μη μεταθετικοί δακτύλιοι Gorenstein*, με την έννοια (δεξιών και αριστερών) δακτυλίων της Noether με πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση ως πρότυπο υπεράνω του εαυτού τους, εισήχθηκαν από τον M. Auslander το 1967, βλέπε [6], και σήμερα αποτελούν βασικό αντικείμενο μελέτης στην Ομολογική Άλγεβρα, στη Μεταθετική Άλγεβρα, στη Θεωρία Αναπαραστάσεων, στη Θεωρία Ομάδων, στη Θεωρία Cluster, στη Θεωρία Ιδιομορφιών, στην Αλγεβρική Γεωμετρία, στη Μαθηματική Φυσική, κτλ.

Σ' αυτό το πλαίσιο, κεντρικός στόχος της διατριβής είναι η μελέτη δακτυλίων Gorenstein, όχι απαραίτητα μεταθετικών, καθώς και η μελέτη κατηγοριών προτύπων υπεράνω τέτοιων δακτυλίων.

Γενικά, η πλήρης περιγραφή μιας κατηγορίας προτύπων υπεράνω ενός δακτυλίου Gorenstein, και πόσο μάλλον υπεράνω τυχόντος δακτυλίου, είναι αδύνατη, και ο λόγος είναι ο εξής:

- **Κεντρικό πρόβλημα της Θεωρίας Προτύπων/Αναπαραστάσεων ενός δακτυλίου R :** Αυτό το πρόβλημα αφορά την κατά το δυνατόν πληρέστερη περιγραφή της δομής της κατηγορίας προτύπων υπεράνω ενός δακτυλίου καθώς και των μορφισμών μεταξύ προτύπων. Στην πλήρη γενικότητα αυτό το πρόβλημα είναι αδύνατο, καθώς υπεράνω τυχόντος προσεταιριστικού δακτυλίου με μονάδα R , η κατηγορία $R\text{-Mod}$ των αριστερών R -προτύπων, είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη ώστε να μπορεί να μελετηθεί και να περιγραφεί λεπτομερώς, εκτός ειδικών περιπτώσεων όπως για παράδειγμα όταν ο δακτύλιος R έχει πεπερασμένο τύπο αναπαράστασης. Έτσι, για έναν τυχαίο δακτύλιο με μονάδα R είναι απαραίτητο να περιορίσουμε την μελέτη μας σε ειδικές κλάσεις R -προτύπων.

Η Θεωρία Προσέγγισης Προτύπων αναπτύχθηκε ως ένας τρόπος επίλυσης του προηγούμενου προβλήματος, και διαδραματίζει κυρίαρχο ρόλο στην Θεωρία Δακτυλίων και Προτύπων, στην Σχετική Ομολογική Άλγεβρα και στην Θεωρία Αναπαραστάσεων. Η βασική ιδέα είναι η επιλογή

κατάλληλων κλάσεων προτύπων \mathcal{C} με γνωστή δομή (ανάλογα με το υπό μελέτη πρόβλημα), και έπειτα, η προσέγγιση τυχαίων προτύπων με πρότυπα των κλάσεων \mathcal{C} . Η ύπαρξη τέτοιων προσεγγίσεων επιφέρει σημαντικές συνέπειες για τον υποκείμενο δακτύλιο, και καθιστούν την μελέτη αυτού, ευκολότερη.

Για να μελετήσουμε λοιπόν και να περιγράψουμε όσο το δυνατόν πληρέστερα μια κατηγορία προτύπων υπεράνω ενός δακτυλίου Gorenstein, είναι απαραίτητο να προσεγγίσουμε τα πρότυπα ενός τέτοιου δακτυλίου μέσω ειδικών κλάσεων προτύπων. Οι καταλληλότερες κλάσεις προτύπων για την μελέτη της κατηγορίας προτύπων ενός δακτυλίου Gorenstein, είναι οι κλάσεις των Gorenstein προβολικών, και των Gorenstein ενέσιμων, προτύπων.

Την τελευταία δεκαετία η (ομολογική) μελέτη των Gorenstein προβολικών και των Gorenstein ενέσιμων προτύπων υπεράνω τυχόντος δακτυλίου αναπτύχθηκε ραγδαία και σήμερα είναι γνωστή ως *Ομολογική Άλγεβρα Gorenstein*. Η αντίστοιχη θεωρία αποτελεί το σχετικό ανάλογο της συνήθους Ομολογικής Άλγεβρας και διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην μελέτη δακτυλίων και κατηγοριών προτύπων με άπειρη ομολογική διάσταση, βλέπε [19]. Σημειώνουμε ότι αν ο υπό μελέτη δακτύλιος έχει πεπερασμένη ομολογική διάσταση, τότε η Ομολογική Άλγεβρα Gorenstein συμπίπτει με την συνήθη Ομολογική Άλγεβρα. Αναφέρουμε ότι μέθοδοι και τεχνικές από την Ομολογική Άλγεβρα Gorenstein διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο σε διάφορους ερευνητικούς κλάδους των σύγχρονων Μαθηματικών, αναφέρουμε για παράδειγμα: στην Μεταθετική Άλγεβρα (μελέτη τοπικών δακτυλίων Gorenstein και Cohen-Macaulay), στην Αλγεβρική Γεωμετρία (μελέτη ιδιομορφιών και σχημάτων Gorenstein), στην Θεωρία Αναπαραστάσεων (ταξινόμηση δακτυλίων ως προς τον τύπο των Cohen-Macaulay αναπαραστάσεων, κατηγορίες ιδιομορφιών του Orlov), κτλ. Ας σημειώσουμε ακόμη ότι πολλά αποτελέσματα από την κλασσική Ομολογική Άλγεβρα, γενικεύονται στην Ομολογική Άλγεβρα Gorenstein. Η παρατήρηση αυτή, έδωσε την ώθηση σε διάφορους μαθηματικούς να διατυπώσουν το ακόλουθο μεταθεώρημα:

Μεταθεώρημα [Holm (2004)] : *Δοσμένου ενός αποτελέσματος στην κλασσική Ομολογική Άλγεβρα, υπάρχει αντίστοιχο αποτέλεσμα στην Ομολογική Άλγεβρα Gorenstein.*

Αν και το Μεταθεώρημα πράγματι ισχύει σε πάρα πολλές περιπτώσεις, υπάρχουν κάποια παραδείγματα, τα οποία το καθιστούν μη αληθές στην πλήρη γενικότητά του, π.χ. το αντίστοιχο αποτέλεσμα των Lazard-Gorenson δεν ισχύει στην Ομολογική Άλγεβρα Gorenstein, βλέπε [14].

Θα μπορούσαμε να πούμε λοιπόν ότι ο βασικός στόχος της Ομολογικής Άλγεβρας Gorenstein, είναι να συλλέξει αποτελέσματα από την κλασσική Ομολογική Άλγεβρα, και να εξετάσει αν τα αποτελέσματα αυτά, επεκτείνονται στην Ομολογική Άλγεβρα Gorenstein. Ωστόσο, στην παρούσα διατριβή μελετάμε την Ομολογική Άλγεβρα Gorenstein από μια διαφορετική οπτική γωνία. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιούμε την Ομολογική Άλγεβρα Gorenstein, όταν η κλασσική Ομολογική Άλγεβρα αδυνατεί να μας δώσει χρήσιμες πληροφορίες. Για παράδειγμα, αν υποθέσουμε ότι τα πρότυπα υπεράνω ενός δακτυλίου έχουν άπειρη προβολική διάσταση, τότε η κλασσική Ομολογική Άλγεβρα δεν μας δίνει ουσιαστικές πληροφορίες. Όμως, αν μεταβούμε στην Ομολογική Άλγεβρα Gorenstein, και υποθέσουμε ότι ο δακτύλιος είναι Gorenstein, τότε μπορεί κάθε πρότυπο υπεράνω ενός τέτοιου δακτυλίου να έχει άπειρη προβολική διάσταση, αλλά θα έχει πεπερασμένη G -προβολική διάσταση, όπου η G -προβολική διάσταση είναι το σχετικό ανάλογο της συνήθους προβολικής διάστασης ενός προτύπου. Θα αναφερθούμε λεπτομερέστερα στην συνέχεια, στις έννοιες των Gorenstein προβολικών και των Gorenstein ενέσιμων προτύπων, καθώς και στην έννοια ενός δακτυλίου Gorenstein.

• • •

Το ορόσημο για την ανάπτυξη της Θεωρίας Προσέγγισης Προτύπων, αποτέλεσε η ύπαρξη των ενέσιμων περιβλημάτων (injective hulls). Οι Auslander, Reiten και Smalø, και ανεξάρτητα ο Enochs, εισήγαγαν, περί τα τέλη της δεκαετίας του 70, μια γενική θεωρία δεξιών και αριστερών προσεγγίσεων, ή precovers και preenvelopes, προτύπων. Πριν να επεξηγήσουμε τις έννοιες αυτές, παραθέτουμε την έννοια της «ελαχιστότητας» ομομορφισμών.

Ένας ομομορφισμός προτύπων $f: M \rightarrow N$ καλείται *δεξιά*, αντίστοιχα *αριστερά*, *ελάχιστος*, αν κάθε ενδομορφισμός $\alpha: M \rightarrow M$, αντίστοιχα $\beta: N \rightarrow N$, με την ιδιότητα $f \circ \alpha = f$, αντίστοιχα $\beta \circ f = f$, είναι αυτομορφισμός του M , αντίστοιχα του N . Δηλαδή, ο ομομορφισμός f είναι δεξιά ελάχιστος, αντίστοιχα αριστερά ελάχιστος, αν κάθε ενδομορφισμός α του M , αντίστοιχα β του N , έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N, \\ \alpha \downarrow & \nearrow f & \\ M & & \end{array}, \quad \text{αντίστοιχα} \quad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ & \searrow f & \downarrow \beta \\ & & N \end{array}$$

είναι ένας αυτομορφισμός του M , αντίστοιχα του N .

Έστω R ένας προσεταιριστικός δακτύλιος με μονάδα, και \mathcal{C} μια κλάση από R -πρότυπα. Ένας R -ομομορφισμός $f: C \rightarrow M$ καλείται μια *δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση* (*right \mathcal{C} -approximation*) του M , αν $C \in \mathcal{C}$, και ο επαγόμενος ομομορφισμός αβελιανών ομάδων $\text{Hom}_R(C', C) \rightarrow \text{Hom}_R(C', M)$ είναι επιμορφισμός για κάθε $C' \in \mathcal{C}$.

Τονίζουμε ότι αν υπάρχει μια δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση $f: C \rightarrow M$ του M , τότε το πρότυπο C δεν είναι απαραίτητα μοναδικά καθορισμένο μέχρι ισομορφισμό από το M . Αυτό συμβαίνει όταν ο ομομορφισμός f είναι δεξιά ελάχιστος, και τότε η δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση f του M , καλείται *ελάχιστη δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση* (*minimal right \mathcal{C} -approximation*) του M .

Διϊκά ορίζεται η έννοια μιας αριστερής \mathcal{C} -προσέγγισης (*left \mathcal{C} -approximation*), και μιας ελάχιστης αριστερής \mathcal{C} -προσέγγισης (*minimal left \mathcal{C} -approximation*).

1. Υπεράνω τυχόντος δακτυλίου με μονάδα, κάθε πρότυπο είναι η ομομορφική εικόνα ενός προβολικού (projective) προτύπου, διότι κάθε πρότυπο είναι η ομομορφική εικόνα ενός ελεύθερου (free) προτύπου, και κάθε ελεύθερο πρότυπο είναι ένα προβολικό πρότυπο. Δηλαδή για κάθε πρότυπο M , υπάρχει ένας επιμορφισμός $f: P \rightarrow M$ όπου το πρότυπο P είναι προβολικό, έτσι ώστε κάθε ομομορφισμός $g: Q \rightarrow M$, όπου το πρότυπο Q είναι προβολικό, αναλύεται μέσω ενός μεταθετικού διαγράμματος:

$$\begin{array}{ccccc} & & Q & & \\ & \swarrow \exists h & \downarrow g & & \\ P & \xrightarrow{f} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Με άλλα λόγια, αν R είναι προσεταιριστικός δακτύλιος με μονάδα, και αν $R\text{-Proj}$ είναι η κλάση όλων των προβολικών αριστερών R -προτύπων, τότε κάθε αριστερό R -πρότυπο M δέχεται μια δεξιά $R\text{-Proj}$ -προσέγγιση $f: P \rightarrow M$, η οποία μάλιστα είναι επιμορφισμός. Ωστόσο, το πρότυπο P δεν είναι εν γένει μοναδικά καθορισμένο μέχρι ισομορφισμό από το M . Δηλαδή για έναν τυχαίο δακτύλιο R , κάθε αριστερό R -πρότυπο *δεν* προσεγγίζεται απαραίτητα με ελάχιστο τρόπο από ένα προβολικό αριστερό R -πρότυπο.

Το 1960, ο H. Bass χαρακτήρισε τους δακτυλίους για τους οποίους κάθε αριστερό R -πρότυπο δέχεται μια ελάχιστη δεξιά $R\text{-Proj}$ -προσέγγιση (γνωστή ως *προβολική κάλυψη*), ως αριστερά τέλειους δακτυλίους, (*left perfect rings*).

- *Επομένως, υπεράνω ενός αριστερά τέλειου δακτυλίου R , κάθε αριστερό R -πρότυπο είναι η ομομορφική εικόνα ενός μοναδικά καθορισμένου ελάχιστου προβολικού αριστερού R -προτύπου.*

2. Διϊκά, υπεράνω τυχόντος δακτυλίου με μονάδα, κάθε πρότυπο μπορεί να θεωρηθεί ως υποπρότυπο ενός ενέσιμου (injective) προτύπου. Δηλαδή για κάθε πρότυπο M , υπάρχει ένας μονομορφισμός $f: M \rightarrow E$ όπου το πρότυπο E είναι ενέσιμο, έτσι ώστε κάθε ομομορφισμός $g: M \rightarrow H$, όπου το πρότυπο H είναι ενέσιμο, αναλύεται μέσω ενός μεταθετικού

διαγράμματος:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f} & E \\ & & \downarrow g & \searrow \exists h & \\ & & H & & \end{array}$$

Άρα, αν R είναι προσεταιριστικός δακτύλιος με μονάδα, και αν $R\text{-Inj}$ είναι η κλάση όλων των ενέσιμων αριστερών R -προτύπων, τότε κάθε αριστερό R -πρότυπο M δέχεται μια αριστερή $R\text{-Inj}$ -προσέγγιση $f: M \rightarrow E$, η οποία μάλιστα είναι μονομορφισμός.

Το 1953, οι B. Eckmann και A. Schörf απέδειξαν ότι για τυχόν δακτύλιο R , κάθε αριστερό R -πρότυπο δέχεται μια ελάχιστη αριστερή $R\text{-Inj}$ -προσέγγιση (γνωστή ως *ενέσιμο περίβλημα*).

- *Επομένως, υπεράνω ενός τυχόντος δακτυλίου R , κάθε αριστερό R -πρότυπο είναι υποπρότυπο ενός μοναδικά καθορισμένου ελάχιστου ενέσιμου αριστερού R -πρότυπου.*

Σημειώνουμε ότι η κλάση $R\text{-Proj}$ είναι ελάχιστα αριστερά προσεγγίσιμη, αν και μόνο αν, ο δακτύλιος R είναι αριστερά τέλειος και δεξιά συναφής, [4], ενώ η κλάση $R\text{-Inj}$ είναι ελάχιστα δεξιά προσεγγίσιμη, αν και μόνο αν, ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether, [26].

Κεντρικής σημασίας στην Ομολογιακή Άλγεβρα σε κατηγορίες προτύπων, είναι οι έννοιες των προβολικών και ενέσιμων προτύπων. Χρησιμοποιώντας τις έννοιες αυτές, μπορούμε να ορίσουμε αναλύσεις και διάφορες ομολογικές διαστάσεις για έναν δακτύλιο και για ένα πρότυπο υπεράνω αυτού, και επίσης για ένα δοθέντα προσθετικό συναρτητή, να κατασκευάσουμε παραγόμενους συναρτητές. Οι παραπάνω αναλύσεις, διαστάσεις και παραγόμενοι συναρτητές αποτελούν απαραίτητα εργαλεία μέσω των οποίων μπορούμε να έχουμε ακριβή εκτίμηση για την (ομολογιακή) πολυπλοκότητα δακτυλίων, προτύπων και συναρτητών.

Η Ομολογιακή Άλγεβρα Gorenstein είναι ένα είδος (σχετικής) Ομολογιακής Άλγεβρας, όπου τα προβολικά πρότυπα αντικαθίστανται με τα Gorenstein προβολικά πρότυπα, ή χάριν απλότητας *G-προβολικά πρότυπα*, και τα ενέσιμα πρότυπα, αντικαθίστανται με τα Gorenstein ενέσιμα πρότυπα, ή χάριν απλότητας *G-ενέσιμα πρότυπα*. Τα G -προβολικά και τα G -ενέσιμα πρότυπα, καθώς και οι G -προβολικές και G -ενέσιμες αναλύσεις, διαδραματίζουν πρωταρχικό ρόλο στην Ομολογιακή Άλγεβρα Gorenstein.

Το 1966/67, ο M. Auslander εισήγαγε την έννοια της G -διάστασης πεπερασμένα παραγόμενων προτύπων υπεράνω μεταθετικών δακτυλίων της Noether. Το 1969, ο M. Auslander σε συνεργασία με τον μαθητή του M. Bridger, επέκτειναν τον ορισμό της G -διάστασης, για πεπερασμένα παραγόμενα πρότυπα υπεράνω όχι απαραίτητα μεταθετικών δακτυλίων της Noether. Καλώντας τα πεπερασμένα παραγόμενα πρότυπα G -διάστασης μηδέν, G -προβολικά πρότυπα, ένα βασικό ερώτημα είναι πως μπορούν να ορισθούν τα G -προβολικά πρότυπα, καθώς και τα G -ενέσιμα πρότυπα, όταν αυτά δεν είναι απαραίτητα πεπερασμένα παραγόμενα και/ή ο δακτύλιος δεν είναι απαραίτητα δακτύλιος της Noether.

Το 1995, οι E. Enochs και O. M. Jenda, όρισαν τα Gorenstein ενέσιμα πρότυπα υπεράνω τυχόντος προσεταιριστικού δακτυλίου με μονάδα, και στη συνέχεια, κατά δυϊκό τρόπο όρισαν τα πεπερασμένα παραγόμενα ή μη, Gorenstein προβολικά πρότυπα υπεράνω τυχόντος προσεταιριστικού δακτυλίου με μονάδα. Αποδεικνύεται ότι αυτός ο νέος ορισμός των Gorenstein προβολικών προτύπων υπεράνω ενός δακτυλίου με μονάδα, συμφωνεί με τον ορισμό του Auslander, όταν ο δακτύλιος είναι δακτύλιος της Noether, και τα πρότυπα είναι πεπερασμένα παραγόμενα.

Έστω R ένας προσεταιριστικός δακτύλιος με μονάδα.

1. Μια *πλήρης προβολική ανάλυση*, (*complete projective resolution*), είναι μια ακριβής ακολουθία από προβολικά αριστερά R -πρότυπα

$$\mathfrak{R}: \quad \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{\alpha_2} P_1 \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \xrightarrow{\alpha_0} Q^0 \xrightarrow{\beta^0} Q^1 \xrightarrow{\beta^1} Q^2 \xrightarrow{\beta^2} \cdots$$

τέτοια ώστε το σύμπλοκο αβελιανών ομάδων $\text{Hom}_R(\mathfrak{R}, Q)$, να είναι ακριβές για κάθε προβολικό αριστερό R -πρότυπο Q . Ένα αριστερό R -πρότυπο M καλείται G -προβολικό (G -projective), αν είναι η εικόνα ενός ομομορφισμού σε μια πλήρη προβολική ανάλυση.

Δυσικά, ορίζονται οι *πλήρεις ενέσιμες αναλύσεις* (complete injective resolutions) και τα G -ενέσιμα (G -injective) αριστερά R -πρότυπα.

2. Μια G -προβολική ανάλυση (G -projective resolution) ενός αριστερού R -προτύπου M , είναι μια ακριβής ακολουθία αριστερών R -προτύπων

$$\cdots \longrightarrow G_2 \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

όπου κάθε G_i για $i \geq 0$ είναι G -προβολικό πρότυπο.

Κατά δυϊκό τρόπο ορίζονται οι G -ενέσιμες αναλύσεις, (G -injective resolutions).

Οι έννοιες των G -προβολικών και των G -ενέσιμων αριστερών R -προτύπων επεκτείνουν τις συνήθεις έννοιες των προβολικών, και αντίστοιχα ενέσιμων, αριστερών R -προτύπων. Δηλαδή, αν $R\text{-GProj}$ είναι η κλάση όλων των G -προβολικών αριστερών R -προτύπων, και $R\text{-GInj}$ είναι η κλάση όλων των G -ενέσιμων αριστερών R -προτύπων, τότε

$$R\text{-Proj} \subseteq R\text{-GProj} \quad \& \quad R\text{-Inj} \subseteq R\text{-GInj}.$$

Τονίζουμε ότι για τυχόν δακτύλιο R , οι παραπάνω εγκλεισμοί είναι γνήσιοι, δηλαδή υπάρχουν G -προβολικά αριστερά R -πρότυπα τα οποία δεν είναι προβολικά, και υπάρχουν G -ενέσιμα αριστερά R -πρότυπα τα οποία δεν είναι ενέσιμα. Ωστόσο για έναν δακτύλιο R με πεπερασμένη αριστερή ολική ομολογική διάσταση, ισχύουν και οι αντίστροφοι εγκλεισμοί. Ας σημειώσουμε ακόμη ότι $R\text{-GProj} = R\text{-GInj}$ αν και μόνο αν ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος quasi-Frobenius.

- Επειδή κάθε πρότυπο έχει μια προβολική ανάλυση, και κάθε προβολικό πρότυπο είναι G -προβολικό, έπεται ότι *κάθε πρότυπο υπεράνω τυχόντος δακτυλίου, έχει μια G -προβολική ανάλυση.*
- Ανάλογα, αφού κάθε πρότυπο έχει μια ενέσιμη ανάλυση, και κάθε ενέσιμο πρότυπο είναι G -ενέσιμο, έπεται ότι *κάθε πρότυπο υπεράνω τυχόντος δακτυλίου, έχει μια G -ενέσιμη ανάλυση.*

Έχοντας εξασφαλίσει την ύπαρξη G -προβολικών και G -ενέσιμων αναλύσεων για κάθε πρότυπο, μπορούμε χρησιμοποιώντας τις αναλύσεις αυτές, να ορίσουμε G -προβολικές και G -ενέσιμες διαστάσεις προτύπων, οι οποίες «μετρούν» το πόσο απέχει ένα πρότυπο από το να είναι G -προβολικό και G -ενέσιμο.

Οι κλάσεις των G -προβολικών και των G -ενέσιμων προτύπων είναι εν γένει πιο πολύπλοκες από αυτές των προβολικών και των ενέσιμων προτύπων. Τα αποτελέσματα περί ύπαρξης (ελάχιστων) προσεγγίσεων προτύπων από τις κλάσεις των προβολικών και των ενέσιμων προτύπων, δεν επεκτείνονται απαραίτητα για τις κλάσεις των G -προβολικών και των G -ενέσιμων προτύπων. Για την εύρεση λοιπόν G -προβολικών ή/και G -ενέσιμων προσεγγίσεων προτύπων, χρειάζεται να αναζητήσουμε δακτυλίους υπεράνω των οποίων τα πρότυπα να κατέχουν σημαντικές ομολογιακές ιδιότητες περατότητας. Ένα παράδειγμα τέτοιων δακτυλίων είναι οι δακτύλιοι Gorenstein.

Αν R είναι ένας δακτύλιος Gorenstein, τότε η ενέσιμη διάσταση του R ως αριστερό R -πρότυπο, ταυτίζεται με την ενέσιμη διάσταση του R , ως δεξιό R -πρότυπο. Επιπλέον, στην περίπτωση που ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος Gorenstein, κάθε αριστερό R -πρότυπο έχει πεπερασμένη G -προβολική και G -ενέσιμη διάσταση, και¹

$$R\text{-GProj} = {}^\perp(R\text{-Proj}) \quad \& \quad R\text{-GInj} = (R\text{-Inj})^\perp$$

¹Για μια κλάση R -προτύπων \mathcal{X} υπεράνω ενός δακτυλίου R , ${}^\perp \mathcal{X}$ συμβολίζει την αριστερή ορθογώνια κλάση προτύπων $\{A \in R\text{-Mod} \mid \text{Ext}_R^n(A, X) = 0, \quad n \geq 1 \ \& \ X \in \mathcal{X}\}$ και δυϊκά \mathcal{X}^\perp συμβολίζει την δεξιά ορθογώνια κλάση προτύπων : $\{A \in R\text{-Mod} \mid \text{Ext}_R^n(X, A) = 0, \quad n \geq 1 \ \& \ X \in \mathcal{X}\}$.

Υπεράνω δακτυλίων Gorenstein R , κάθε αριστερό R -πρότυπο δέχεται μια (ελάχιστη) αριστερή R -GInj-προσέγγιση η οποία είναι απαραίτητα μονομορφισμός, και μια (ελάχιστη) δεξιά R -GInj-προσέγγιση. Η κλάση R -GProj όπου R είναι δακτύλιος Gorenstein, είναι λιγότερο ομαλή: κάθε αριστερό R -πρότυπο δέχεται μια δεξιά R -GProj-προσέγγιση, αλλά όχι απαραίτητα μια ελάχιστη δεξιά R -GProj-προσέγγιση.

Συνοψίζουμε τα κυριότερα αποτελέσματα περί ύπαρξης προσεγγίσεων για τις κλάσεις των G -προβολικών και των G -ενέσιμων προτύπων. Έστω R ένας προσεταιριστικός δακτύλιος με μονάδα.

- Αν R είναι δακτύλιος Gorenstein, τότε η κλάση R -GInj των G -ενέσιμων αριστερών R -προτύπων είναι ελάχιστα αριστερά προσεγγίσιμη (enveloping), και ελάχιστα δεξιά προσεγγίσιμη (covering).
- Αν R είναι δακτύλιος Gorenstein, τότε η κλάση R -GProj των G -προβολικών αριστερών R -προτύπων είναι δεξιά προσεγγίσιμη (precovering), αλλά όχι εν γένει ελάχιστα δεξιά προσεγγίσιμη.
- Αν R είναι δεξιά συναφής και αριστερά τέλειος δακτύλιος, έτσι ώστε

$$\sup\{\text{pd}_R I \mid I \in \text{ob}(\mathcal{A}\text{-Inj})\} \leq d \quad \& \quad \sup\{\text{id}_R P \mid P \in \text{ob}(\mathcal{A}\text{-Proj})\} \leq d$$

για κάποιον φυσικό αριθμό d , τότε η κλάση R -GProj είναι ελάχιστα δεξιά προσεγγίσιμη (covering).

- Αν R είναι δακτύλιος Gorenstein και δακτύλιος του Artin, τότε η κλάση R -GProj είναι ελάχιστα δεξιά προσεγγίσιμη, και η κλάση R -GInj είναι ελάχιστα αριστερά προσεγγίσιμη.

Βασικά εργαλεία για την συγγραφή της παρούσας διατριβής, αποτέλεσαν τα άρθρα [36, 38, 39] του H. Holm, το άρθρο [20] των Christensen-Frankild-Holm, το θεμελιώδες άρθρο [9] των Auslander-Buchweitz, και το βιβλίο [27] των Enochs-Jenda.

• • •

Η διατριβή έχει οργανωθεί σε οκτώ Κεφάλαια.

Στο πρώτο Κεφάλαιο, το οποίο έχει εισαγωγικό χαρακτήρα, υπενθυμίζουμε βασικά στοιχεία της Θεωρίας Δακτυλίων και Προτύπων. Ορίζουμε και μελετάμε πρότυπα υπεράνω ενός προσεταιριστικού δακτυλίου με μονάδα, ομομορφισμούς μεταξύ προτύπων, και ακριβείς ακολουθίες προτύπων. Στην συνέχεια, επικεντρωνόμαστε σε ειδικές κατασκευές, οι οποίες είναι εφοδιασμένες με καθολικές ιδιότητες. Πιο ειδικά, μελετάμε ευθέα γινόμενα και ευθέα αθροίσματα μιας οικογένειας προτύπων, ελεύθερα πρότυπα, τανυστικά γινόμενα μεταξύ προτύπων, ευθέα και αντίστροφα όρια οικογενειών προτύπων υπεράνω κατευθυνόμενων συνόλων, καθώς και pullback-pushout διαγράμματα από ομομορφισμούς προτύπων. Κλείνουμε το Κεφάλαιο αυτό, μελετώντας δακτυλίους και πρότυπα της Noether.

Στο δεύτερο Κεφάλαιο αναπτύσσουμε βασικά στοιχεία της Θεωρίας Κατηγοριών. Παρουσιάζουμε την έννοια μιας κατηγορίας, και μελετάμε βασικές ιδιότητες. Επιπλέον, ορίζουμε συναρτητές και αναφερόμαστε σε ακριβείς συναρτητές μεταξύ κατηγοριών προτύπων, σε φυσικούς μετασχηματισμούς, καθώς και σε συζυγή ζεύγη συναρτητών. Στην συνέχεια, εισάγουμε την έννοια του πυρήνα και συμπυρήνα μορφισμών σε μια υποπροσθετική κατηγορία με μηδενικά αντικείμενα, και έπειτα η προσοχή μας στρέφεται σε ειδικές κατηγορίες. Τέλος, επικεντρωνόμαστε σε αβελιανές κατηγορίες, και σε επεκτάσεις ενός αντικειμένου A από ένα αντικείμενο C μιας αβελιανής κατηγορίας \mathcal{C} χωρίς απαραίτητα προβολικά ή ενέσιμα αντικείμενα.

Στο τρίτο Κεφάλαιο παραθέτουμε βασικά στοιχεία της Ομολογικής Άλγεβρας. Αρχικά, μελετάμε την ομολογία συμπλόκων από πρότυπα και αποδεικνύουμε την ύπαρξη μιας μακρά ακριβούς

ακολουθίας μεταξύ διαφορετικών ομολογιών. Στη συνέχεια, αναφερόμαστε στις κεντρικές έννοιες της Ομολογικής Άλγεβρας σε κατηγορίες προτύπων, τα ενέσιμα, προβολικά και επίπεδα πρότυπα, καθώς και σε ενέσιμες, προβολικές και επίπεδες αναλύσεις. Δείχνουμε ότι κάθε πρότυπο έχει μια ενέσιμη, προβολική και επίπεδη ανάλυση. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, για τους προσθετικούς συναρτητές Hom και \otimes , κατασκευάζουμε παραγόμενους συναρτητές, και ορίζουμε ενέσιμες, προβολικές και επίπεδες διαστάσεις.

Στο τέταρτο Κεφάλαιο αναπτύσσουμε βασικά στοιχεία της Θεωρίας Προσεγγίσεων Προτύπων. Εισάγουμε τις έννοιες των δεξιών και αριστερών προσεγγίσεων σε μια αυθαίρετη κλάση προτύπων, καθώς και τις ελαχιστικές εκδοχές τους. Συνεχίζουμε μελετώντας προσεγγίσεις προτύπων μέσω ειδικών κλάσεων, καθώς και μέσω θεμελιωδών αποτελεσμάτων. Ολοκληρώνουμε το κεφάλαιο αυτό, εισάγοντας την έννοια ενός πλήρους και κλειστού συστρεπτικού ζεύγους για μια κατηγορία προτύπων, και αποδεικνύουμε ότι ένα πλήρες και κλειστό συστρεπτικό ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ για μια κατηγορία προτύπων είναι τέλειο, δηλαδή για κάθε πρότυπο υπάρχει μια ελάχιστη δεξιά \mathcal{F} -προσέγγιση και μια ελάχιστη αριστερή \mathcal{C} -προσέγγιση.

Στόχος του πέμπτου Κεφαλαίου, είναι ο ορισμός και η μελέτη των G -προβολικών και των G -ενέσιμων προτύπων υπεράνω ενός προσεταιριστικού δακτυλίου με μονάδα. Οι έννοιες αυτές επεκτείνουν τις συνήθεις έννοιες των προβολικών και των ενέσιμων προτύπων. Η κλάση των G -προβολικών προτύπων κληρονομεί πολλές από τις βασικές ιδιότητες της κλάσης των προβολικών προτύπων. Για παράδειγμα, η κλάση των G -προβολικών προτύπων είναι επιλύουσα (resolving). Ανάλογα, η κλάση των G -ενέσιμων προτύπων κατέχει πολλές από τις ιδιότητες των ενέσιμων προτύπων, όπως για παράδειγμα την ιδιότητα να είναι συνεπιλύουσα (coresolving). Κλείνοντας το κεφάλαιο αυτό, μελετάμε πεπερασμένα παραγόμενα G -προβολικά πρότυπα και ανακλαστικά πρότυπα, με σκοπό να αποδείξουμε ότι η σύγχρονη εκδοχή των G -προβολικών προτύπων με την έννοια των Epochs-Jenda, συμφωνεί με την παλαιότερη εκδοχή των G -προβολικών προτύπων με την έννοια του Auslander, στην περίπτωση που ο υποκείμενος δακτύλιος είναι δακτύλιος της Noether, και τα πρότυπα είναι πεπερασμένα παραγόμενα.

Στο έκτο Κεφάλαιο ορίζουμε και μελετάμε G -ομολογιακές διαστάσεις προτύπων. Εισάγουμε τις έννοιες των G -προβολικών και των G -ενέσιμων αναλύσεων, και αποδεικνύουμε ότι για πρότυπο υπάρχει μια G -προβολική και μια G -ενέσιμη ανάλυση. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό ορίζουμε και μελετάμε G -προβολικές και G -ενέσιμες διαστάσεις προτύπων. Στην συνέχεια, συγκρίνουμε τις διαστάσεις αυτές με τις συνήθεις έννοιες των προβολικών και ενέσιμων διαστάσεων και αποδεικνύουμε θεμελιώδη αποτελέσματα. Τέλος, δείχνουμε ότι οι κλάσεις των G -προβολικών και των G -ενέσιμων προτύπων συμπίπτουν, αν και μόνο αν, ο δακτύλιος είναι δακτύλιος quasi-Frobenius.

Στο έβδομο Κεφάλαιο παρουσιάζουμε βασικά στοιχεία της Θεωρίας των Auslander-Buchweitz, καθώς και τα δυϊκά αποτελέσματα αυτής. Οι Auslander και Buchweitz, εισήγαγαν την έννοια των μέγιστων Cohen-Macaulay προσεγγίσεων με σκοπό να δείξουν ότι η κατηγορία των πεπερασμένα παραγόμενων προτύπων υπεράνω μεταθετικών τοπικών Cohen-Macaulay δακτυλίων οι οποίοι δέχονται ένα dualizing πρότυπο, σχηματίζεται συγκολλώντας την υποκατηγορία των μέγιστων Cohen-Macaulay προτύπων, με την υποκατηγορία των προτύπων με πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση. Τα αποτελέσματα αυτά γενικεύονται και εφαρμόζονται σε μια οποιαδήποτε αβελιανή κατηγορία \mathcal{C} , η οποία δέχεται μια υποκατηγορία \mathcal{X} από «μέγιστα Cohen-Macaulay αντικείμενα». Προκειμένου να εξασφαλίσουμε τα ανάλογα των προηγούμενων αποτελεσμάτων, θεωρούμε μια υποκατηγορία \mathcal{X} μιας αβελιανής κατηγορίας \mathcal{C} και μια πλήρη υποκατηγορία ω της \mathcal{X} , και τις εφοδιάζουμε με συγκεκριμένες ιδιότητες ακρίβειας και περατότητας. Θα καταλήξουμε, ως κεντρικό αποτέλεσμα του κεφαλαίου αυτού, ότι το ζεύγος $(\mathcal{X}, \hat{\omega})$ είναι ένας πλήρες συστρεπτικό ζεύγος στην κατηγορία $\hat{\mathcal{X}}$. Θα καταγράψουμε επίσης και τη δυϊκή θεωρία των πλαισίων Auslander-Buchweitz. Τα αποτελέσματα του παρόντος Κεφαλαίου θα χρησιμοποιηθούν στο Κεφάλαιο 8 για την μελέτη της δομής των G -προβολικών και G -ενέσιμων προσεγγίσεων. Θα κλείσουμε το παρόν Κεφάλαιο με μια εφαρμογή της Θεωρίας των Auslander-Buchweitz στην Θεωρία Tilting. Σημειώνουμε ότι η Θεωρία tilting μας οδηγεί φυσιολογικά στην έννοια των δακτυλίων Gorenstein, τους οποίους θα μελετήσουμε στο επόμενο Κεφάλαιο 8.

Στο όγδοο Κεφάλαιο εισάγουμε την έννοια ενός δακτυλίου Gorenstein, όχι απαραίτητα μεταθετικού. Αρχικά, επικεντρωνόμαστε στις ομολογιακές ιδιότητες που έχουν τα πρότυπα υπεράνω ενός δακτυλίου Gorenstein, και στην συνέχεια μελετάμε προσεγγίσεις προτύπων υπεράνω δακτυλίων Gorenstein, μέσω των κλάσεων των G -προβολικών και των G -ενέσιμων προτύπων. Αποδεικνύουμε ότι υπεράνω δακτυλίων Gorenstein R , κάθε αριστερό R -πρότυπο δέχεται μια (ελάχιστη) αριστερή R - Gl_n -προσέγγιση η οποία είναι απαραίτητα μονομορφισμός, και μια (ελάχιστη) δεξιά R - Gl_n -προσέγγιση. Η κλάση των G -προβολικών προτύπων υπεράνω δακτυλίων Gorenstein, είναι πάντα δεξιά προσεγγίσιμη αλλά όχι εν γένει ελάχιστα δεξιά προσεγγίσιμη. Τέλος, δείχνουμε ότι αν ο R είναι ένας δακτύλιος Gorenstein και δακτύλιος του Artin, τότε η κλάση R - GProj είναι ελάχιστα δεξιά προσεγγίσιμη και η κλάση R - Inj είναι ελάχιστα αριστερά προσεγγίσιμη.

Τέλος, στο Παράρτημα Α' αναλύουμε κάποιες εικασίες και ανοιχτά προβλήματα τα οποία ανακύπτουν από την εκτεθείσα θεωρία και η επίλυση των οποίων θα έχει σημαντικές συνέπειες στην περαιτέρω ανάπτυξη της Ομολογιακής Άλγεβρας Gorenstein, καθώς και άλλων συσχετιζόμενων ερευνητικών περιοχών.

Ευχαριστίες :

Κατά τα πρώτα έτη των προπτυχιακών μου σπουδών στο Πανεπιστήμιο της Κρήτης, το ενδιαφέρον μου εστιασθηκε σε αλγεβρικά μαθήματα. Ωστόσο, στα τελευταία έτη των προπτυχιακών μου σπουδών, την προσοχή μου κέντρισε η Ανάλυση.

Κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών στο Πανεπιστήμιο των Ιωαννίνων, πείστηκα ότι μου αρέσει (περισσότερο) η Άλγεβρα. Καθοριστικός παράγοντας για να το διαπιστώσω αυτό, αποτέλεσε ο καθηγητής μου, και μετέπειτα επιβλέπωντάς μου, κ. Απόστολος Μπεληγιάννης.

Κατά κύριο λόγο λοιπόν, θέλω να ευχαριστήσω πολύ τον επιβλέποντά μου κ. Απόστολο Μπεληγιάννη, για την συνεργασία, την καθοδήγηση και την υποστήριξη του καθ' όλη τη διάρκεια της μεταπτυχιακής μου διατριβής. Επιπλέον, ευχαριστώ πάρα πολύ τον δάσκαλό μου για την επιλογή του θέματος της παρούσας διατριβής, καθώς και για τη μεγάλη υπομονή που έδειξε μαζί μου. Είμαι πραγματικά πολύ τυχερή και χαρούμενη, που ήμουν μαθήτριά του!

Θα ήθελα να εκφράσω επίσης τις ευχαριστίες μου στον κ. Νικόλαο Μαρμαρίδη και στον κ. Απόστολο Θωμά, για την συνεργασία που είχαμε κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών, καθώς και στον κ. Ιωάννη Πλατή για τις πολύτιμες συμβουλές του.

Ευχαριστώ πάρα πολύ την twin sister Λου, για την φροντίδα και για την υποστήριξη της όλα αυτά τα χρόνια, καθώς και για όλες τις σοκολάτες που μου έφερνε καθ' όλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών! Ακόμη, θέλω να ευχαριστήσω πάρα πολύ την υπόλοιπη οικογένειά μου: Νιένια, Μπάμπης, Νόννη, Ρηνούλα και Αποστόλης, και τους φίλους/συναδέλφους μου: Γιάννης, Ελένη, Χριστίνα, Δώρα, Μάκης, Κώστας, Χρήστος (x3), Γρηγόρης, Χριστίνα, Βάσω, Βασίλης, Θεοδωρής, Κλεάνθης, Σταύρος.

Τέλος, ευχαριστώ πολύ τον Πέτρο για την προτροπή και την επιμονή του, όταν τελείωσα τις προπτυχιακές μου σπουδές στην Κρήτη, να συνεχίσω για μεταπτυχιακές σπουδές στα Ιωάννινα.

Κλειώ-Φανουρία Παπαδοπούλου

Ιωάννινα, Ιούνιος 2014

Κεφάλαιο 1

Στοιχεία Θεωρίας Δακτυλίων Και Προτύπων

Στο παρόν κεφάλαιο, το οποίο έχει εισαγωγικό χαρακτήρα, υπενθυμίζουμε βασικά στοιχεία της θεωρίας δακτυλίων και προτύπων. Η αναφορά μας ωστόσο δε θα είναι εκτενής, και για αυτό το λόγο, παραπέμπουμε στη βιβλιογραφία για περισσότερες λεπτομέρειες.

Σύμβαση: Καθ' όλη την έκταση του κεφαλαίου αυτού, συμβολίζουμε με R έναν προσεταιριστικό δακτύλιο με μονάδα, όχι απαραίτητα μεταθετικό.

1.1 Πρότυπα, Ομομορφισμοί Και Ακριβείς Ακολουθίες

Στην παρούσα ενότητα, ορίζουμε και μελετάμε πρότυπα, ομομορφισμούς μεταξύ προτύπων και ακριβείς ακολουθίες προτύπων.

Αρχίζουμε με τον ορισμό ενός αριστερού προτύπου υπεράνω ενός προσεταιριστικού δακτυλίου με μονάδα R . Όπως θα διαπιστώσουμε, ο ακόλουθος ορισμός αποτελεί κάποιου είδους γενίκευση του ορισμού του διανυσματικού χώρου.

Ορισμός 1.1.1. Μια προσθετική αβελιανή ομάδα M καλείται **αριστερό R -πρότυπο**, (**left R -module**), αν υπάρχει απεικόνιση (αριστερή δράση)

$$\begin{aligned} \star : R \times M &\longrightarrow M \\ (r, x) &\longmapsto r \star x \end{aligned}$$

η οποία ικανοποιεί τα ακόλουθα αξιώματα:

1. $r \star (x + y) = r \star x + r \star y$
2. $(r + s) \star x = r \star x + s \star x$
3. $(r \cdot s) \star x = r \star (s \star x)$
4. $1_R \star x = x$

για κάθε $x, y \in M$ και για κάθε $r, s \in R$.

Παρατηρούμε ότι ο χαρακτηρισμός «αριστερό» στον παραπάνω ορισμό, υποδηλώνει το γεγονός ότι τα στοιχεία του δακτυλίου R , εμφανίζονται από τα αριστερά. Συμμετρικά, ορίζονται τα δεξιά R -πρότυπα, μόνο που απαιτούμε τα στοιχεία του R να εμφανίζονται από τα δεξιά.

Ορισμός 1.1.2. Μια προσθετική αβελιανή ομάδα M καλείται **δεξιό R -πρότυπο**, (**right R -module**), αν υπάρχει απεικόνιση (δεξιά δράση)

$$\begin{aligned} * : M \times R &\longrightarrow M \\ (x, r) &\longmapsto x * r \end{aligned}$$

η οποία ικανοποιεί τα ακόλουθα αξιώματα:

1. $(x + y) * r = x * r + y * r$
2. $x * (r + s) = x * r + x * s$
3. $x * (r \cdot s) = (x * r) * s$
4. $x * 1_R = x$

για κάθε $x, y \in M$ και για κάθε $r, s \in R$.

Παρατήρηση 1.1.3. Έχουμε εισάγει λοιπόν, δύο έννοιες R -προτύπων, τα αριστερά και τα δεξιά R -πρότυπα. Σε έναν μη-μεταθετικό δακτύλιο R , οι έννοιες των αριστερών και δεξιών R -προτύπων είναι εν γένει διακριτές. Ωστόσο αυτές ταυτίζονται, όταν ο δακτύλιος R είναι μεταθετικός. Δηλαδή, κάθε αριστερό (δεξιό) R -πρότυπο M , μετατρέπεται σε δεξιό (αριστερό) R -πρότυπο θέτοντας

$$r \star x = x * r, \quad \forall r \in R \text{ \& \ } \forall x \in M$$

όπου \star και $*$ η αριστερή, και αντίστοιχα δεξιά, δράση του R επί του M .

Πριν να παραθέσουμε κάποια παραδείγματα R -προτύπων, ας υπενθυμίσουμε την έννοια του αντίθετου δακτυλίου ενός δακτυλίου.

Ορισμός 1.1.4. Για έναν δακτύλιο R , συμβολίζουμε με R^{op} τον δακτύλιο R με αντίθετη πολλαπλασιαστική δομή. Δηλαδή, ως προσθετική ομάδα $(R^{\text{op}}, +) = (R, +)$ και ο πολλαπλασιασμός (στον R^{op}) δίνεται ως εξής:

$$r \times^{\text{op}} s = s \cdot r$$

Ο δακτύλιος R^{op} καλείται ο **αντίθετος δακτύλιος (opposite ring)** του δακτυλίου R .

Παρατήρηση 1.1.5. Όπως είδαμε στην προηγούμενη παρατήρηση, σε έναν μη μεταθετικό δακτύλιο R , κάθε αριστερό (δεξιό) R -πρότυπο δεν είναι απαραίτητα και δεξιό (αριστερό) R -πρότυπο. Ωστόσο, σε οποιονδήποτε δακτύλιο R , κάθε αριστερό R -πρότυπο M μετατρέπεται σε δεξιό R^{op} -πρότυπο, ορίζοντας δεξιά δράση:

$$\star : M \times R^{\text{op}} \longrightarrow M, \quad (m, r) \longmapsto m \star r := rm$$

όπου rm είναι η (αριστερή) δράση του στοιχείου r του δακτυλίου R , στο στοιχείο m του αριστερού R -προτύπου M . Συμμετρικά, σε οποιονδήποτε δακτύλιο R , κάθε δεξιό R -πρότυπο μετατρέπεται σε αριστερό R^{op} -πρότυπο.

Σύμβαση: Χάριν απλότητας, από τώρα και στο εξής, σημειώνουμε κάθε αριστερή ή δεξιά δράση ενός δακτυλίου R επί ενός αριστερού, αντίστοιχα δεξιού, R -προτύπου M ως εξής:

$$rm \text{ ή } mr, \quad \forall r \in R \text{ \& \ } m \in M$$

Ας περάσουμε ευθύς αμέσως, σε στοιχειώδη παραδείγματα R -προτύπων.

Παράδειγμα 1.1.6. 1. Αν ο δακτύλιος R είναι ένα σώμα K , τότε τα αξιώματα τα οποία καθορίζουν ένα αριστερό R -πρότυπο είναι ακριβώς τα ίδια με εκείνα τα οποία καθορίζουν έναν διανυσματικό χώρο υπεράνω του K . Δηλαδή, οι έννοιες «αριστερά (δεξιά) πρότυπα υπεράνω του K » και «διανυσματικοί χώροι υπεράνω του K » είναι ταυτόσημες.

2. Κάθε προσθετική αβελιανή ομάδα M , μπορεί να θεωρηθεί ως αριστερό \mathbb{Z} -πρότυπο ορίζοντας ως δράση,

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{Z} \times M &\longrightarrow M \\ (n, m) &\longmapsto n \cdot m \end{aligned}$$

$$\text{όπου } n \cdot m := \begin{cases} m + m + \cdots + m & (n\text{-φορές}) & , \text{ αν } n > 0 \\ 0_M & & , \text{ αν } n = 0 \\ (-m) + (-m) + \cdots + (-m) & (-n\text{-φορές}) & , \text{ αν } n < 0 \end{cases}$$

Αντίστροφα, κάθε αριστερό \mathbb{Z} -πρότυπο είναι εξ ορισμού μια (προσθετική) αβελιανή ομάδα. Παρόμοιος ισχυρισμός ισχύει και για τα δεξιά \mathbb{Z} -πρότυπα. Έτσι, τα \mathbb{Z} -πρότυπα (αριστερά και δεξιά) ταυτίζονται με τις αβελιανές ομάδες.

3. Κάθε δακτύλιος R , μπορεί να θεωρηθεί ως αριστερό και δεξιό R -πρότυπο ορίζοντας την ακόλουθη δράση:

$$\cdot : R \times R \longrightarrow R, \quad (r_1, r_2) \longmapsto r_1 \cdot r_2$$

όπου \cdot ο συνήθης πολλαπλασιασμός του δακτυλίου R .

4. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}^+$, θέτουμε

$$R^n = \{(r_1, r_2, \dots, r_n) \mid r_i \in R, 1 \leq i \leq n\}$$

Για κάθε δύο n -άδες (r_1, r_2, \dots, r_n) και (s_1, s_2, \dots, s_n) του R^n , ορίζουμε

$$(r_1, r_2, \dots, r_n) + (s_1, s_2, \dots, s_n) = (r_1 + s_1, r_2 + s_2, \dots, r_n + s_n)$$

Τότε το σύνολο R^n είναι αβελιανή ομάδα με την παραπάνω πράξη. Αν ορίσουμε επιπλέον $\forall r \in R$ και $\forall (r_1, r_2, \dots, r_n) \in R^n$, τη δράση:

$$\cdot : R \times R^n \longrightarrow R^n, \quad (r, (r_1, r_2, \dots, r_n)) \longmapsto r(r_1, r_2, \dots, r_n)$$

όπου $r(r_1, r_2, \dots, r_n) = (r \cdot r_1, r \cdot r_2, \dots, r \cdot r_n)$ και \cdot ο συνήθης πολλαπλασιασμός του R , τότε η (προσθετική) αβελιανή ομάδα R^n μετατρέπεται σε αριστερό R -πρότυπο. Αναλόγως, η αβελιανή ομάδα R^n , αποκτά τη δομή ενός δεξιού R -προτύπου.

5. Για κάθε αβελιανή ομάδα M , θέτουμε

$$\text{End}_{\mathbb{Z}}(M) = \{f : M \longrightarrow M \mid f : \text{ομομορφισμός αβελιανών ομάδων}\}$$

Ορίζουμε στο σύνολο $\text{End}_{\mathbb{Z}}(M)$ τις ακόλουθες πράξεις:

$$+ : \text{End}_{\mathbb{Z}}(M) \times \text{End}_{\mathbb{Z}}(M) \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}}(M), \quad (f, g) \longmapsto f + g$$

όπου $(f + g)(m) = f(m) + g(m)$, $\forall m \in M$, και

$$\circ : \text{End}_{\mathbb{Z}}(M) \times \text{End}_{\mathbb{Z}}(M) \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}}(M), \quad (f, g) \longmapsto f \circ g$$

όπου $(f \circ g)(m) = f(g(m))$, $\forall m \in M$. Τότε οι παραπάνω πράξεις είναι καλά ορισμένες στο σύνολο $\text{End}_{\mathbb{Z}}(M) \times \text{End}_{\mathbb{Z}}(M)$ και με αυτές τις πράξεις το σύνολο $\text{End}_{\mathbb{Z}}(M)$ αποκτά τη δομή δακτυλίου. Επιπλέον, ορίζοντας τη δράση:

$$\cdot : \text{End}_{\mathbb{Z}}(M) \times M \longrightarrow M, \quad (f, m) \longmapsto f \cdot m := f(m)$$

η αβελιανή ομάδα M γίνεται αριστερό $\text{End}_{\mathbb{Z}}(M)$ -πρότυπο. Παρόμοια αποδεικνύεται ότι κάθε αβελιανή ομάδα M είναι ένα δεξιό $\text{End}_{\mathbb{Z}}(M)$ -πρότυπο.

Ορισμός 1.1.7. Αν R και S είναι δύο δακτύλιοι, τότε μια αβελιανή ομάδα M καλείται (R, S) -διπρότυπο (**bimodule**), αν το M είναι ένα αριστερό R -πρότυπο και ένα δεξιό S -πρότυπο, έτσι ώστε:

$$(rm)_s = r(ms), \quad \forall r \in R, \quad \forall s \in S, \quad \forall m \in M$$

Παράδειγμα 1.1.8. Κάθε δακτύλιος R είναι προφανώς ένα (R, R) -διπρότυπο.

Για κάθε μαθηματικό αντικείμενο το οποίο ορίζεται μέσω ενός συνόλου αξιωμάτων, είναι σημαντικό να μελετάμε τα υποσύνολα του αντικειμένου αυτού, που ικανοποιούν τα ίδια αξιώματα. Έτσι, όταν τα μαθηματικά αντικείμενα είναι οι δακτύλιοι και οι ομάδες, τότε η προσοχή μας στρέφεται στα υποσύνολα αυτών, υποδακτύλιοι και υποομάδες, αντίστοιχα. Μέχρι τώρα έχουμε δει τον ορισμό ενός R -πρότυπου καθώς και παραδείγματα R -πρότυπων. Το επόμενο βήμα λοιπόν είναι να αναφερθούμε σε εκείνα τα υποσύνολα ενός R -πρότυπου, τα οποία ικανοποιούν τα ίδια αξιώματα με αυτό. Έτσι,

Ορισμός 1.1.9. Ένα μη κενό υποσύνολο N του M , καλείται ένα **υποπρότυπο (submodule)** του M , αν το σύνολο N αποτελεί (προσθετική) υποομάδα της αβελιανής ομάδας M , και είναι κλειστό ως προς την (αριστερή) δράση του δακτυλίου R στο πρότυπο M . Δηλαδή, $rn \in N$ για κάθε $r \in R$ και για κάθε $n \in N$.

Παρόμοια, ορίζεται ένα υποπρότυπο ενός δεξιού R -πρότυπου.

Παράδειγμα 1.1.10. 1. Είναι προφανές ότι τα υποπρότυπα ενός \mathbb{Z} -πρότυπου, δηλαδή μιας αβελιανής ομάδας, είναι ακριβώς οι (προσθετικές) υποομάδες της υποκείμενης αβελιανής ομάδας. Επίσης, είναι φανερό ότι αν ο δακτύλιος R είναι ένα σώμα K , τότε τα υποπρότυπα ενός αριστερού R -πρότυπου, δηλαδή ενός K -διανυσματικού χώρου, είναι ακριβώς οι υπόχωροι του αντίστοιχου K -διανυσματικού χώρου.

2. Για κάθε μη μηδενικό αριστερό ή δεξιό R -πρότυπο M , τα υποσύνολά του, $\{0_M\}$ και M , αποτελούν υποπρότυπά του. Δηλαδή, κάθε μη μηδενικό R -πρότυπο έχει τουλάχιστον δύο υποπρότυπα. Στην περίπτωση που ένα R -πρότυπο έχει **ακριβώς** δύο υποπρότυπα, καλείται **απλό πρότυπο (simple module)**. Επίσης, ένα υποπρότυπο ενός R -πρότυπου καλείται **γνήσιο**, αν είναι γνήσιο υποσύνολό του.
3. Αν θεωρήσουμε το δακτύλιο R ως αριστερό (δεξιό) R -πρότυπο, τότε τα υποπρότυπά του είναι ακριβώς τα αριστερά (δεξιά) του ιδεώδη.
4. Έστω Δ ένα σύνολο και $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ μια οικογένεια υποπρότυπων ενός αριστερού (δεξιού) R -πρότυπου M . Ορίζουμε:

$$\sum_{\alpha \in \Delta} M_\alpha = \left\{ \sum_{\alpha \in \Delta} m_\alpha \in M \mid m_\alpha \in M_\alpha, \forall \alpha \in \Delta \text{ και } m_\alpha = 0 \text{ σχεδόν παντού} \right\}$$

όπου $m_\alpha = 0$ σχεδόν παντού υποδηλώνει το γεγονός ότι $m_\alpha = 0$, $\forall \alpha \in \Delta$ εκτός από πεπερασμένο πλήθος δεικτών. Τότε το άθροισμα $\sum_{\alpha \in \Delta} M_\alpha$ είναι υποπρότυπο του αριστερού (δεξιού) R -πρότυπου M . Αν το σύνολο Δ είναι πεπερασμένο π.χ. $\Delta = \{1, 2, \dots, n\}$, τότε γράφουμε $\sum_{\alpha \in \Delta} M_\alpha = M_1 + M_2 + \dots + M_n$.

Επιπλέον, αν θεωρήσουμε το υποσύνολο $\cap_{\alpha \in \Delta} M_\alpha$ του M , τότε η τομή αυτή είναι άλλο ένα υποπρότυπο του M .

5. Κάθε υποσύνολο ενός αριστερού ή δεξιού R -πρότυπου, «παράγει» ένα υποπρότυπό του. Συγκεκριμένα, αν το M είναι ένα αριστερό R -πρότυπο, και X οποιοδήποτε υποσύνολο του M , τότε το σύνολο όλων των R -«γραμμικών συνδυασμών» του X :

$$\langle X \rangle = \left\{ \sum_{i \in I} r_i x_i \mid r_i \in R \text{ & } x_i \in X, \forall i \in I \right\}$$

όπου $r_i = 0$, $\forall i \in I$ εκτός από πεπερασμένο πλήθος δεικτών, αποτελεί υποπρότυπό του M και καλείται μάλιστα, το **υποπρότυπο που παράγεται** από το σύνολο X . Στην περίπτωση που το υποσύνολο X του M είναι μονοσύνολο, δηλαδή $X = \{m\}$ για κάποιο $m \in M$, τότε το σύνολο

$$\langle X \rangle = \{rm \mid r \in R\} = Rm$$

καλείται το **κυκλικό υποπρότυπο που παράγεται** από το στοιχείο m . Ας σημειώσουμε ότι αν $m = 0_M$, τότε το σύνολο $\langle X \rangle = Rm$ είναι το μηδενικό υποπρότυπο του M , αφού $Rm = R0_M = 0_M$. Πιο γενικά, ένα αριστερό ή δεξιό R -πρότυπο M καλείται **κυκλικό**, αν υπάρχει κάποιο $m \in M$ τέτοιο ώστε

$$M = \langle m \rangle$$

Για παράδειγμα, ο δακτύλιος R όταν ιδωθεί ως R -πρότυπο είναι κυκλικό αφού $R = \langle 1_R \rangle$.

Ορισμός 1.1.11. Έστω M ένα αριστερό R -πρότυπο. Τότε ένα υποσύνολο S του M , καλείται **σύνολο γεννητόρων** του M , αν $M = \langle S \rangle$. Στην περίπτωση αυτή, λέμε ότι το σύνολο S **παράγει** το αριστερό R -πρότυπο M .

Επιπλέον, αν το σύνολο S είναι πεπερασμένο και παράγει το αριστερό R -πρότυπο M , τότε το M καλείται **πεπερασμένα παραγόμενο, (finitely generated)**.

Ο ορισμός που ακολουθεί, αποτελεί έναν «ομαλό» τρόπο μετάβασης από ένα R -πρότυπο, σε ένα R -πρότυπο. Ο χαρακτηρισμός «ομαλός» υποδηλώνει το γεγονός ότι η παραπάνω μετάβαση σέβεται την αλγεβρική ταυτότητα των αντικειμένων της.

Ορισμός 1.1.12. Μια απεικόνιση μεταξύ δύο αριστερών R -προτύπων $f : M \rightarrow N$ καλείται **R -ομομορφισμός ή R -γραμμική απεικόνιση, (R -homomorphism or R -linear mapping)**, αν ικανοποιούνται τα ακόλουθα αξιώματα $\forall m, m_1, m_2 \in M$ και $\forall r \in R$:

1. $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$ και
2. $f(rm) = rf(m)$

Ανάλογα ορίζεται ένας ομομορφισμός μεταξύ δεξιών R -προτύπων.

Παράδειγμα 1.1.13. 1. Αν $f : M \rightarrow N$ είναι ένας ομομορφισμός μεταξύ των αριστερών (δεξιών) R -προτύπων, M και N , τότε εύκολα διαπιστώνουμε ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- (α) $f(0_M) = 0_N$.
- (β) $f(-m) = -f(m)$, $\forall m \in M$.

Έτσι, από τις παραπάνω σχέσεις και από το πρώτο αξίωμα του ορισμού του ομομορφισμού R -προτύπων, προκύπτει το γεγονός ότι κάθε ομομορφισμός αριστερών (δεξιών) R -προτύπων είναι και ομομορφισμός αβελιανών ομάδων. Επομένως, οι \mathbb{Z} -ομομορφισμοί ταυτίζονται με τους ομομορφισμούς αβελιανών ομάδων.

2. Για κάθε αριστερό (δεξιό) R -πρότυπο M , θεωρούμε την ταυτοτική απεικόνιση:

$$\text{Id}_M : M \rightarrow M, \quad m \mapsto m, \quad \forall m \in M$$

Τότε η Id_M είναι R -ομομορφισμός και ονομάζεται **ταυτοτικός (ομομορφισμός) (identity (homomorphism))** του M .

3. Για κάθε δύο αριστερά (δεξιά) R -πρότυπα M και N , θέτουμε $\text{Hom}_R(M, N)$ να είναι το σύνολο όλων των R -ομομορφισμών από το M στο N . Δηλαδή,

$$\text{Hom}_R(M, N) = \{f : M \rightarrow N \mid f : R\text{-ομομορφισμός}\}$$

Ορίζουμε πρόσθεση στο σύνολο $\text{Hom}_R(M, N) \times \text{Hom}_R(M, N)$ ως εξής:

$$+ : \text{Hom}_R(M, N) \times \text{Hom}_R(M, N) \longrightarrow \text{Hom}_R(M, N), \quad (f, g) \longmapsto f + g$$

όπου $(f + g)(m) := f(m) + g(m)$, $\forall m \in M$. Τότε, η πράξη της πρόσθεσης είναι καλώς ορισμένη στο $\text{Hom}_R(M, N) \times \text{Hom}_R(M, N)$ και έτσι, το σύνολο $\text{Hom}_R(M, N)$ μετατρέπεται σε αβελιανή ομάδα με την παραπάνω πράξη. Επιπλέον, η αβελιανή ομάδα $\text{Hom}_R(M, N)$ μπορεί να μετατραπεί σε δεξιό (αριστερό) R -πρότυπο, ενώ στην ειδική περίπτωση που ο δακτύλιος R είναι μεταθετικός, μπορεί να μετατραπεί σε αριστερό (δεξιό) R -πρότυπο.

4. Έστω $f: M \longrightarrow N$ και $g: N \longrightarrow L$ δύο ομομορφισμοί αριστερών (δεξιών) R -προτύπων. Τότε η σύνθεση

$$g \circ f: M \longrightarrow L, \quad m \longmapsto (g \circ f)(m) := g(f(m)),$$

είναι επίσης ένας ομομορφισμός αριστερών (δεξιών) R -προτύπων. Επιπλέον, αν $f': M \longrightarrow N$ και $h: K \longrightarrow M$ είναι δύο άλλοι ομομορφισμοί αριστερών (δεξιών) R -προτύπων, τότε έχουμε ότι

$$g \circ (f + f') = g \circ f + g \circ f' \quad \& \quad (f + f') \circ h = f \circ h + f' \circ h$$

Παρατήρηση 1.1.14. Έστω R, S δύο δακτύλιοι.

- Αν το M είναι ένα (R, S) -διπρότυπο και το N ένα αριστερό R -πρότυπο, τότε η αβελιανή ομάδα $\text{Hom}_R(M, N)$ είναι ένα αριστερό S -πρότυπο, με αριστερή δράση

$$S \times \text{Hom}_R(M, N) \longrightarrow \text{Hom}_R(M, N), \quad (s, f) \longmapsto sf$$

όπου $sf: M \longrightarrow N$ με $(sf)(m) := f(ms)$.

- Αν το M είναι ένα (R, S) -διπρότυπο και το N ένα δεξιό S -πρότυπο, τότε η αβελιανή ομάδα $\text{Hom}_S(M, N)$ είναι ένα δεξιό R -πρότυπο, με δεξιά δράση

$$\text{Hom}_S(M, N) \times R \longrightarrow \text{Hom}_S(M, N), \quad (f, r) \longmapsto fr$$

όπου $rf: M \longrightarrow N$ με $(rf)(m) := f(rm)$.

- Αν το M είναι ένα αριστερό R -πρότυπο και το N ένα (R, S) -διπρότυπο, τότε η αβελιανή ομάδα $\text{Hom}_R(M, N)$ είναι ένα δεξιό S -πρότυπο, με δεξιά δράση

$$\text{Hom}_R(M, N) \times S \longrightarrow \text{Hom}_R(M, N), \quad (f, s) \longmapsto fs$$

όπου $fs: M \longrightarrow N$ με $(fs)(m) := f(m)s$.

- Αν το M είναι ένα δεξιό S -πρότυπο και το N ένα (R, S) -διπρότυπο, τότε η αβελιανή ομάδα $\text{Hom}_S(M, N)$ είναι ένα αριστερό R -πρότυπο, με αριστερή δράση

$$R \times \text{Hom}_S(M, N) \longrightarrow \text{Hom}_S(M, N), \quad (r, f) \longmapsto rf$$

όπου $rf: M \longrightarrow N$ με $(rf)(m) := rf(m)$.

Πριν περάσουμε στην επόμενη πρόταση, ας σημειώσουμε ότι ένας ομομορφισμός είναι «1-1» ή «επί», ακριβώς όταν είναι «1-1» ή «επί», ως απεικόνιση.

Πρόταση 1.1.15. Έστω $f: M \longrightarrow N$ ένας ομομορφισμός μεταξύ αριστερών (δεξιών) R -προτύπων. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Αν M_1 είναι ένα υποπρότυπο του M , τότε το $f(M_1)$ είναι ένα υποπρότυπο του N .
2. Αν N_1 είναι ένα υποπρότυπο του N , τότε το $f^{-1}(N_1)$ είναι ένα υποπρότυπο του M .

Αν $M_1 = M$, τότε το υποπρότυπο

$$\text{Im } f := f(M)$$

καλείται η **εικόνα (image)** της f , και αν $N_1 = \{0_N\}$, τότε το υποπρότυπο

$$\text{Ker } f := f^{-1}(\{0_N\}) = \{m \in M \mid f(m) = 0\}$$

καλείται ο **πυρήνας (kernel)** της f .

Επιπλέον, ο R -ομομορφισμός $f : M \rightarrow N$ καλείται **ισομορφισμός (isomorphism)**, αν υπάρχει ομομορφισμός $g : N \rightarrow M$, τέτοιος ώστε $f \circ g = \text{Id}_N$ και $g \circ f = \text{Id}_M$, όπου Id_M, Id_N είναι οι ταυτοτικοί ομομορφισμοί των M και N , αντίστοιχα. Σε αυτή την περίπτωση, τα αριστερά (δεξιά) R -πρότυπα M και N καλούνται **ισόμορφα**.

- Σχόλιο 1.1.16.**
1. Ένας R -ομομορφισμός $f : M \rightarrow N$ είναι «1-1», αν και μόνο αν, $\text{Ker } f = 0$.
 2. Ένας R -ομομορφισμός $f : M \rightarrow N$ είναι «επί», αν και μόνο αν, $\text{Im } f = N$.
 3. Ένας R -ομομορφισμός είναι ισομορφισμός, αν και μόνο αν, είναι «1-1» και «επί».

Από τη θεωρία ομάδων γνωρίζουμε ότι για κάθε (προσθετική) ομάδα M και για κάθε κανονική υποομάδα της N , ορίζεται η ομάδα-πηλίκο, M/N , και ένας ομομορφισμός ομάδων (κανονική προβολή) $\pi : M \rightarrow M/N$, $m \mapsto m + N$ για κάθε $m \in M$ με πυρήνα $\text{Ker } \pi = N$. Ειδικότερα, αν M είναι μια (προσθετική) αβελιανή ομάδα, τότε για κάθε υποομάδα της N , μπορούμε να σχηματίσουμε την ομάδα-πηλίκο M/N , η οποία μάλιστα είναι αβελιανή. Έτσι, προκύπτει κατά φυσικό τρόπο το ερώτημα: «αν η αβελιανή ομάδα M και η υποομάδα της N , είναι εφοδιασμένες με επιπρόσθετη αλγεβρική δομή, π.χ. δομή αριστερού R -πρωτύπου, κληρονομείται αυτή η επιπρόσθετη αλγεβρική δομή στην αβελιανή ομάδα πηλίκο M/N ;». Ο ακόλουθος ορισμός δίνει απάντηση στο παραπάνω ερώτημα.

Ορισμός 1.1.17. (Πρότυπο Πηλίκο) Έστω M ένα αριστερό R -πρότυπο και N ένα υποπρότυπο του M . Η αβελιανή ομάδα πηλίκο M/N μετατρέπεται σε αριστερό R -πρότυπο, ορίζοντας ως δράση:

$$: R \times M/N \rightarrow M/N, \quad (r, m + N) \mapsto r(m + N) := rm + N$$

Η ομάδα πηλίκο M/N καλείται το **πρότυπο πηλίκο (quotient module)** του M ως προς το υποπρότυπό του N .

Επιπλέον, η **κανονική προβολή** $\pi : M \rightarrow M/N$, $m \mapsto \pi(m) = m + N$ είναι ένας R -ομομορφισμός με πυρήνα το N .

Παρόμοια ορίζεται το πρότυπο πηλίκο ενός δεξιού R -πρωτύπου ως προς ένα υποπρότυπο του.

Σχόλιο 1.1.18. Για κάθε R -πρότυπο M και για κάθε υποπρότυπό του N , επάγονται δύο R -ομομορφισμοί:

η **κανονική προβολή** $\pi : M \rightarrow M/N$ όπως ορίστηκε παραπάνω και

η **φυσική έγκλειση** $i : N \rightarrow M$ όπου i η προφανής εμφύτευση του υποσυνόλου N στο σύνολο M .

Θεώρημα 1.1.19. Έστω M είναι ένα αριστερό R -πρότυπο. Τότε η απεικόνιση

$$\phi : \text{Hom}_R(R, M) \rightarrow M, \quad f \mapsto \phi(f) = f(1),$$

είναι ένας ισομορφισμός αριστερών R -πρωτύπων.

Απόδειξη. Αρχικά δείχνουμε ότι η απεικόνιση ϕ είναι ομομορφισμός αριστερών R -πρωτύπων. Έχουμε ότι $\phi(f + g) = (f + g)(1) = f(1) + g(1) = \phi(f) + \phi(g)$ και $\phi(rf) = (rf)(1) = f(r) = rf(1) = r\phi(f)$. Επομένως η ϕ είναι ομομορφισμός αριστερών R -πρωτύπων. Αν $f \in \text{Ker } \phi$, τότε $0 = \phi(f) = f(1)$. Όμως,

$$f(r) = f(r1) = rf(1) = r0 = 0,$$

για κάθε $r \in R$, και άρα, $f = 0$. Συνεπώς, η ϕ είναι μονομορφισμός. Αν $x \in M$, τότε ορίζουμε απεικόνιση $f_x: R \rightarrow M$, θέτοντας $f_x(r) = rx$. Η f_x είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων και $\phi(f_x) = f_x(1) = x$. Επομένως, η ϕ είναι επίσης επιμορφισμός, και άρα, ισομορφισμός προτύπων. ■

Τώρα λοιπόν είμαστε σε θέση να παραθέσουμε τα βασικά θεωρήματα ισομορφισμών για πρότυπα. Ας σημειώσουμε όμως πρώτα, ότι για έναν ομομορφισμό αριστερών ή δεξιών R -προτύπων $f: M \rightarrow N$, συμβολίζουμε με $\text{Coker } f$, το πρότυπο πηλίκου $N/\text{Im } f$:

$$\text{Coker } f = N/\text{Im } f$$

Το R -πρότυπο $\text{Coker } f$ καλείται ο **συνπυρήνας (cokernel)** της f . Έτσι, εφόσον έχουμε εισάγει τον παραπάνω συμβολισμό, παρατηρούμε ότι ένας R -ομομορφισμός $f: M \rightarrow N$ είναι «επί», αν και μόνο αν, $\text{Im } f = N$ (σχόλιο 1.1.16), ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν $\text{Coker } f = 0$.

Πρόταση 1.1.20. 1. **(Πρώτο Θεώρημα Ισομορφισμού)** Για κάθε ομομορφισμό $f: M \rightarrow N$, μεταξύ αριστερών ή δεξιών R -προτύπων επάγεται ένας ισομορφισμός R -προτύπων:

$$\tilde{f}: M/\text{Ker } f \rightarrow \text{Im } f, \quad (m + \text{Ker } f) \mapsto \tilde{f}(m + \text{Ker } f) := f(m)$$

2. **(Δεύτερο Θεώρημα Ισομορφισμού)** Αν M_1 και M_2 είναι υποπρότυπα ενός αριστερού ή δεξιού R -προτύπου M , και επιπλέον, το M_1 είναι υποπρότυπο του M_2 , τότε το πρότυπο πηλίκου M_2/M_1 είναι υποπρότυπο του πρότυπου πηλίκου M/M_1 , και επιπρόσθετα, υπάρχει R -ισομορφισμός:

$$f: (M/M_1)/(M_2/M_1) \rightarrow M/M_2, \quad ((m + M_1) + M_2/M_1) \mapsto m + M_2$$

3. **(Τρίτο Θεώρημα Ισομορφισμού)** Αν M_1 και M_2 είναι υποπρότυπα ενός αριστερού ή δεξιού R -προτύπου M , τότε υπάρχει R -ισομορφισμός:

$$f: M_1/(M_1 \cap M_2) \rightarrow (M_1 + M_2)/M_2, \quad (m_1 + (M_1 \cap M_2)) \mapsto m_1 + M_2$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [52, Theorem 2.11, 2.12, 2, 13]. ■

Στην συνέχεια της διατριβής θα δούμε ότι η κλάση όλων των αριστερών (δεξιών) R -προτύπων μαζί με το σύνολο όλων των ομομορφισμών αριστερών (δεξιών) R -προτύπων, συνθέτουν την αβελιανή κατηγορία $R\text{-Mod}$ ($\text{Mod-}R$). Παρακάτω, εισάγουμε τις έννοιες του μονομορφισμού, επιμορφισμού καθώς και εκείνη των ακριβών ακολουθιών, στην κατηγορία $R\text{-Mod}$. Ανάλογος είναι ο ορισμός των παραπάνω εννοιών, στην κατηγορία $\text{Mod-}R$.

Ορισμός 1.1.21. Ένας ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων $f: M \rightarrow N$ καλείται **μονομορφισμός (monomorphism)**, αν για κάθε αριστερό R -πρότυπο K και για κάθε δύο R -ομομορφισμούς $g, h: K \rightarrow M$ με $f \circ g = f \circ h$, έπεται ότι $g = h$.

Ορισμός 1.1.22. Ένας ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων $f: M \rightarrow N$ καλείται **επιμορφισμός (epimorphism)**, αν για κάθε αριστερό R -πρότυπο C και για κάθε δύο R -ομομορφισμούς $g, h: N \rightarrow C$ με $g \circ f = h \circ f$, έπεται ότι $g = h$.

Σχόλιο 1.1.23. Είναι προφανές, ότι η f είναι μονομορφισμός, αν και μόνο αν, είναι «1-1» (ισοδύναμα $\text{Ker } f = 0$), ενώ είναι επιμορφισμός, αν και μόνο αν, είναι «επί» (ισοδύναμα $\text{Coker } f = 0$). Ως συνέπεια αυτού, ένας ομομορφισμός R -προτύπων είναι ισομορφισμός, αν και μόνο αν, είναι συγχρόνως μονομορφισμός και επιμορφισμός. Έτσι, όταν αναφερόμαστε σε ομομορφισμούς προτύπων οι έννοιες μονομορφισμός και «1-1» είναι ισοδύναμες, και αντίστοιχα, οι έννοιες επιμορφισμός και «επί» είναι ισοδύναμες. Ωστόσο, όταν θα μελετήσουμε τυχαίες κατηγορίες, θα διαπιστώσουμε ότι η παραπάνω σύνδεση μπορεί να μην έχει κανένα νόημα (π.χ ένας μορφισμός μεταξύ δύο αντικειμένων, μπορεί να μην είναι καν συνάρτηση με τη συνήθη έννοια).

Πριν περάσουμε στον ορισμό μιας ακριβούς ακολουθίας από R -πρότυπα και R -ομομορφισμούς, ας σημειώσουμε ότι ο όρος «ακριβής ακολουθία», χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά το 1956 από τους Cartan και Eilenberg.

Ορισμός 1.1.24. Μια ακολουθία

$$M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2$$

από αριστερά R -πρότυπα και ομομορφισμούς αριστερών R -πρότυπων, καλείται **ακριβής** (στο M), αν

$$\text{Ker } g = \text{Im } f$$

Μια μακρύτερη σε μήκος ακολουθία:

$$M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \longrightarrow M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n$$

καλείται **ακριβής (exact sequence)**, αν είναι ακριβής σε κάθε M_i , για κάθε $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Παρατήρηση 1.1.25. Μια ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα της μορφής:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$$

είναι ακριβής (στο M), αν και μόνο αν, η f είναι μονομορφισμός ενώ μια ακολουθία της μορφής:

$$M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής (στο N), αν και μόνο αν, η g είναι επιμορφισμός.

Ως απόρροια των παραπάνω, μια ακολουθία της μορφής

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής αν,

- η f είναι μονομορφισμός (ακρίβεια στο M_1)
- $\text{Ker } g = \text{Im } f$ (ακρίβεια στο M)
- η g είναι επιμορφισμός (ακρίβεια στο M_2)

Μια τέτοιου τύπου ακριβή ακολουθία καλείται **σύντομη ακριβής ακολουθία (short exact sequence)**.

Σχόλιο 1.1.26. Αν $f: M \longrightarrow N$ και $g: N \longrightarrow K$ είναι δύο R -ομομορφισμοί, τότε ισχύει η ακόλουθη ισοδυναμία:

$$g \circ f = 0 \iff \text{Im } f \subseteq \text{Ker } g,$$

όπου $0 = 0_{M,K}: M \longrightarrow K$ είναι ο μηδενικός R -ομομορφισμός.

Παράδειγμα 1.1.27. Για κάθε υποπρότυπο N ενός R -προτύπου M , επάγεται η σύντομη ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i_N} M \xrightarrow{\pi_M} M/N \longrightarrow 0$$

όπου i_N η φυσική έγκλειση και π_M η κανονική προβολή. Συνεπώς, για κάθε ομομορφισμό $f: M \longrightarrow N$ αριστερών ή δεξιών R -προτύπων επάγονται οι σύντομες ακριβείς ακολουθίες:

1. $0 \longrightarrow \text{Ker } f \xrightarrow{i_K} M \xrightarrow{\pi_M} M/\text{Ker } f \longrightarrow 0$
2. $0 \longrightarrow \text{Im } f \xrightarrow{i_I} N \xrightarrow{\pi_N} N/\text{Im } f \longrightarrow 0,$

οι οποίες με τη σειρά τους, επάγουν την ακριβή ακολουθία:

$$0 \longrightarrow \text{Ker } f \xrightarrow{i_K} M \xrightarrow{i_I \circ g \circ \pi_M} N \xrightarrow{\pi_N} N | \text{Im } f \longrightarrow 0$$

όπου $g: M | \text{Ker } f \longrightarrow \text{Im } f$ είναι ο ισομορφισμός που δίνεται από το πρώτο θεώρημα ισομορφισμών για R -πρότυπα. Επιπλέον, εύκολα αποδεικνύεται ότι $i_I \circ g \circ \pi_M = f$. Έτσι, κάθε R -ομομορφισμός $f: M \longrightarrow N$ επάγει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα από (σύντομες) ακριβείς ακολουθίες:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ker } f & \xrightarrow{i_K} & M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{\pi_N} & N | \text{Im } f & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow \pi_M & & \uparrow i_I & & & & \\ & & & & M | \text{Ker } f & \xrightarrow{g} & \text{Im } f & & & & \\ & & & & \downarrow & & \uparrow & & & & \\ & & & & 0 & & 0 & & & & \end{array}$$

Στην Ομολογική Άλγεβρα, καλούμαστε συχνά να αντιμετωπίσουμε την ακόλουθη κατάσταση:

Μας δίνονται αντικείμενα από μια αβελιανή κατηγορία, π.χ. από μια κατηγορία προτύπων, και «απεικονίσεις» μεταξύ αυτών (μορφισμοί), τα οποία όλα μαζί συνθέτουν ένα μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές ή στήλες. Μας ζητείται λοιπόν η απόδειξη ορισμένων ιδιοτήτων μιας «απεικόνισης» του διαγράμματος ή η κατασκευή μιας καινούργιας «απεικόνισης» μεταξύ των δοθέντων αντικειμένων.

Στη συνέχεια της διατριβής, θα επεξηγήσουμε αναλυτικά τις έννοιες (αβελιανή) κατηγορία, μορφισμός, καθώς και αυτήν μιας ακριβούς ακολουθίας σε μια αβελιανή κατηγορία. Ωστόσο, ας σημειώσουμε ότι έχουμε ήδη άμεσα αναφερθεί στην έννοια του μορφισμού και στην έννοια μιας ακριβούς ακολουθίας, στις αβελιανές κατηγορίες $R\text{-Mod}$ και $\text{Mod-}R$.

Μια τεχνική αντιμετώπισης της παραπάνω κατάστασης είναι το λεγόμενο “**diagram chasing**”. Το παρακάτω λήμμα είναι από τα πιο σημαντικά στην ιστορία της Ομολογικής Άλγεβρας αφού αποτελεί, όπως θα δούμε, εργαλείο για τη δημιουργία μεγάλων ακριβών ακολουθιών. Η μέθοδος απόδειξής του, έγκειται στη χρήση της εν λόγω τεχνικής.

Λήμμα 1.1.28. (Snake Lemma) Θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα το οποίο αποτελείται από αριστερά R -πρότυπα και R -ομομορφισμούς, καθώς και από ακριβείς γραμμές:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \end{array}$$

Τότε επάγεται ένας R -ομομορφισμός $\Phi: \text{Ker } \gamma \longrightarrow \text{Coker } \alpha$ (**connecting homomorphism**) και μια ακριβής ακολουθία:

$$\text{Ker } \alpha \xrightarrow{f_1} \text{Ker } \beta \xrightarrow{g_1} \text{Ker } \gamma \xrightarrow{\Phi} \text{Coker } \alpha \xrightarrow{f'_2} \text{Coker } \beta \xrightarrow{g'_2} \text{Coker } \gamma$$

Επιπλέον: ο f είναι μονομορφισμός, αν και μόνο αν, ο f_1 είναι μονομορφισμός, και αντίστοιχα, ο g' είναι επιμορφισμός, αν και μόνο αν, είναι και ο g'_2 .

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [16, Lemma 11.1.9]. ■

1.2 Θεμελιώδεις Κατασκευές

Στην ενότητα αυτή, θα ασχοληθούμε με ειδικού τύπου κατασκευές προτύπων, οι οποίες χαρακτηρίζονται μέσω καθολικών ιδιοτήτων. Σημειώνουμε ότι γενικά μια καθολική ιδιότητα παρέχει όλες τις βασικές πληροφορίες που χρειάζεται να γνωρίζουμε για την εκάστοτε κατασκευή, και επιπλέον, ορίζει ένα αντικείμενο, π.χ. ένα πρότυπο, μοναδικά μέχρι έναν φυσικό ισομορφισμό. Ειδικότερα, θα μελετήσουμε το ευθύ γινόμενο (άθροισμα) οικογενειών R -προτύπων, τα ελεύθερα R -πρότυπα, το τανυστικό γινόμενο μεταξύ R -προτύπων, το pullback και το pushout ενός διαγράμματος προτύπων και R -ομομορφισμών, και γενικότερα το ευθύ (αντίστροφο) όριο ενός ευθέος (αντίστροφου) συστήματος R -προτύπων. Κάθε τέτοια κατασκευή είναι εφοδιασμένη με μια καθολική ιδιότητα, γεγονός που καθιστά τη μελέτη της κατασκευής εύκολότερη.

1.2.1 Ευθέα Γινόμενα Και Ευθέα Αθροίσματα

Ξεκινάμε, ορίζοντας το ευθύ γινόμενο μιας οικογένειας R -προτύπων υπεράνω ενός τυχαίου συνόλου δεικτών Δ .

Έστω $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ μια οικογένεια αριστερών R -προτύπων υπεράνω του συνόλου δεικτών Δ . Τότε το καρτεσιανό γινόμενο των R -προτύπων M_α , όπου $\alpha \in \Delta$,

$$\prod_{\alpha \in \Delta} M_\alpha = \{(m_\alpha) \mid m_\alpha \in M_\alpha, \alpha \in \Delta\}$$

αποκτά δομή αριστερού R -προτύπου ορίζοντας πρόσθεση και αριστερή δράση ως εξής:

1. $(m_\alpha) + (m'_\alpha) = (m_\alpha + m'_\alpha)$,
2. $r \cdot (m_\alpha) = (r \cdot m_\alpha), \quad \forall m_\alpha, m'_\alpha \in \prod_{\alpha \in \Delta} M_\alpha, \forall r \in R$.

Για κάθε $\beta \in \Delta$, ορίζουμε ομομορφισμούς αριστερών R -προτύπων:

$$\varpi_\beta: \prod_{\alpha \in \Delta} M_\alpha \longrightarrow M_\beta, \quad \varpi_\beta((m_\alpha)) = m_\beta$$

Σημειώνουμε ότι κάθε ομομορφισμός ϖ_α είναι επιμορφισμός, και ότι η οικογένεια R -ομομορφισμών

$$\{\varpi_\alpha: \prod_{\alpha \in \Delta} M_\alpha \longrightarrow M_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$$

καλείται **οικογένεια κανονικών προβολών**. Επιπλέον, το ζεύγος $(\prod_{\alpha \in \Delta} M_\alpha, \varpi_\alpha)$ καλείται το **ευθύ γινόμενο (direct product)** της οικογένειας $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$, και ικανοποιεί την ακόλουθη καθολική ιδιότητα:

Πρόταση 1.2.1. Έστω $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ μια οικογένεια αριστερών R -προτύπων. Αν N είναι ένα αριστερό R -πρότυπο, και $\{f_\alpha: N \longrightarrow M_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ είναι μια οικογένεια ομομορφισμών αριστερών R -προτύπων, τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων $f: N \longrightarrow \prod_{\alpha \in \Delta} M_\alpha$ έτσι ώστε για κάθε $\alpha \in \Delta$, το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} & & N \\ & \swarrow \exists! f & \downarrow f_\alpha \\ \prod_{\alpha \in \Delta} M_\alpha & \xrightarrow{\varpi_\alpha} & M_\alpha \end{array}$$

να είναι μεταθετικό.

Απόδειξη. Έστω N ένα αριστερό R -πρότυπο και $\{f_\alpha: N \rightarrow M_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ μια οικογένεια ομομορφισμών αριστερών R -προτύπων. Ορίζουμε τον ομομορφισμό αριστερών R -προτύπων:

$$f: N \rightarrow \prod_{\alpha \in \Delta} M_\alpha, \quad x \mapsto (f_\alpha(x)).$$

Τότε προφανώς, ισχύει ότι $f_\alpha = \varpi_\alpha \circ f$ για κάθε $\alpha \in \Delta$. Για να αποδείξουμε ότι ο ομομορφισμός f με την προηγούμενη ιδιότητα είναι μοναδικός, υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων $g: N \rightarrow \prod_{\alpha \in \Delta} M_\alpha$, έτσι ώστε $f_\alpha = \varpi_\alpha \circ g$, $\forall \alpha \in \Delta$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $f = g$. Αν $x \in N$ και $g(x) = (x_\alpha)$, τότε θα έχουμε ότι:

$$f_\alpha(x) = (\varpi_\alpha \circ g)(x) = \varpi_\alpha(g(x)) = \varpi_\alpha((x_\alpha)) = x_\alpha,$$

και κατ' επέκταση, ότι $g(x) = (x_\alpha) = (f_\alpha(x)) = f(x)$. Άρα, έχουμε ότι $f = g$, όπως επιθυμούσαμε. ■

Στην συνέχεια, ορίζουμε το (εξωτερικό) ευθύ άθροισμα μιας οικογένειας αριστερών R -προτύπων υπεράνω ενός συνόλου Δ .

Έστω $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ μια οικογένεια αριστερών R -προτύπων υπεράνω του συνόλου Δ . Θέτουμε

$$\bigoplus_{\alpha \in \Delta} M_\alpha = \left\{ (x_\alpha) \in \prod_{\alpha \in \Delta} M_\alpha \mid x_\alpha = 0 \text{ σχεδόν παντού} \right\},$$

όπου με τη φράση « $x_\alpha = 0$ σχεδόν παντού», εννοούμε $x_\alpha = 0$ για κάθε $\alpha \in \Delta$, εκτός από πεπερασμένο πλήθος δεικτών. Τότε το υποσύνολο $\bigoplus_{\alpha \in \Delta} M_\alpha$ είναι ένα υποπρότυπο του αριστερού R -προτύπου $\prod_{\alpha \in \Delta} M_\alpha$. Μάλιστα, στην περίπτωση που το σύνολο Δ είναι πεπερασμένο, είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι $\bigoplus_{\alpha \in \Delta} M_\alpha = \prod_{\alpha \in \Delta} M_\alpha$.

Για κάθε $\alpha \in \Delta$, ορίζουμε ομομορφισμούς αριστερών R -προτύπων:

$$i_\alpha: M_\alpha \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in \Delta} M_\alpha, \quad i_\alpha(x) = (x_\beta), \quad \text{όπου } x_\beta = \begin{cases} 0 & , \forall \beta \neq \alpha \\ x & , \text{αν } \beta = \alpha \end{cases}$$

Σημειώνουμε ότι κάθε ομομορφισμός i_α είναι μονομορφισμός, και ότι η οικογένεια

$$\{i_\alpha: M_\alpha \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in \Delta} M_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$$

καλείται **οικογένεια κανονικών εγκλεισμών**. Επιπρόσθετα, το ζεύγος $(\bigoplus_{\alpha \in \Delta} M_\alpha, i_\alpha)$ καλείται το **εξωτερικό ευθύ άθροισμα (external direct sum)** της οικογένειας $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$, και ικανοποιεί την ακόλουθη καθολική ιδιότητα:

Πρόταση 1.2.2. Έστω $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ μια οικογένεια αριστερών R -προτύπων. Αν N είναι ένα αριστερό R -πρότυπο, και $\{f_\alpha: M_\alpha \rightarrow N\}_{\alpha \in \Delta}$ μια οικογένεια ομομορφισμών αριστερών R -προτύπων, τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων $f: \bigoplus_{\alpha \in \Delta} M_\alpha \rightarrow N$, έτσι ώστε για κάθε $\alpha \in \Delta$, το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} & M_\alpha & \\ & \swarrow i_\alpha & \downarrow f_\alpha \\ \bigoplus_{\alpha \in \Delta} M_\alpha & \xrightarrow{\exists! f} & N \end{array}$$

να είναι μεταθετικό.

Απόδειξη. Ορίζοντας

$$f: \bigoplus_{\alpha \in \Delta} M_\alpha \rightarrow N, \quad (x_\alpha) \mapsto \sum_{\alpha \in \Delta} f_\alpha(x_\alpha), \quad \forall (x_\alpha) \in \bigoplus_{\alpha \in \Delta} M_\alpha$$

και ακολουθώντας ανάλογη πορεία με την απόδειξη της Πρότασης (1.2.1), έπεται εύκολα το ζητούμενο. ■

Παρατήρηση 1.2.3. Αν $\{f_\alpha: M_\alpha \rightarrow N_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ είναι μία οικογένεια ομομορφισμών αριστερών R -προτύπων, τότε επάγονται οι ακόλουθοι ομομορφισμοί αριστερών R -προτύπων:

$$\prod_{\alpha \in \Delta} f_\alpha: \prod_{\alpha \in \Delta} M_\alpha \rightarrow \prod_{\alpha \in \Delta} N_\alpha, \quad (x_\alpha) \mapsto (f_\alpha(x_\alpha)),$$

και

$$\bigoplus_{\alpha \in \Delta} f_\alpha: \bigoplus_{\alpha \in \Delta} M_\alpha \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in \Delta} N_\alpha, \quad (x_\alpha) \mapsto (f_\alpha(x_\alpha)).$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι, αν οι f_α είναι μονομορφισμοί (επιμορφισμοί, αντίστοιχα, ισομορφισμοί), τότε οι $\prod_{\alpha \in \Delta} f_\alpha$ και $\bigoplus_{\alpha \in \Delta} f_\alpha$, είναι επίσης μονομορφισμοί (επιμορφισμοί, αντίστοιχα, ισομορφισμοί).

Μέχρι τώρα είδαμε ότι για μια δοθείσα οικογένεια $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ από αριστερά R -πρότυπα, μπορούμε να σχηματίσουμε πάντα το (εξωτερικό) ευθύ άθροισμα $\bigoplus_{\alpha \in \Delta} M_\alpha$ των M_α για $\alpha \in \Delta$. Αν υποθέσουμε επιπλέον ότι κάθε M_α για $\alpha \in \Delta$, είναι υποπρότυπο ενός αριστερού R -προτύπου M , τότε μπορούμε να ορίσουμε το εσωτερικό ευθύ άθροισμα της οικογένειας $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ ως εξής:

Ορισμός 1.2.4. Το άθροισμα υποπροτύπων του M :

$$\sum_{\alpha \in \Delta} M_\alpha = \left\{ \sum_{\alpha \in \Delta} m_\alpha \in M \mid m_\alpha \in M_\alpha \text{ \& } m_\alpha = 0 \text{ σχεδόν παντού} \right\},$$

καλείται **ευθύ άθροισμα (direct sum)**, αν και μόνο αν για κάθε $\alpha \in \Delta$, ισχύει ότι:

$$M_\alpha \cap \sum_{\beta \in \Delta, \beta \neq \alpha} M_\beta = \{0\}.$$

Τότε λέμε ότι το άθροισμα $\sum_{\alpha \in \Delta} M_\alpha$ είναι το **εσωτερικό ευθύ άθροισμα (internal direct sum)** της οικογένειας $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$, και γράφουμε $\sum_{\alpha \in \Delta} M_\alpha = \bigoplus_{\alpha \in \Delta} M_\alpha$.

Ορισμός 1.2.5. Ένα υποπρότυπο N ενός R -προτύπου M καλείται **ευθύς προσθετός (direct summand)** του M , αν υπάρχει υποπρότυπο C του M , έτσι ώστε $N \cap C = 0$ και $M = N + C$. Δηλαδή $M = N \oplus C$, όπου με $N \oplus C$ εννοούμε εδώ, το εσωτερικό ευθύ άθροισμα των N και C .

Το ακόλουθο αποτέλεσμα καθορίζει πότε ένα άθροισμα υποπροτύπων ενός αριστερού R -προτύπου M , είναι ευθύ:

Πρόταση 1.2.6. Έστω $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ μια οικογένεια υποπροτύπων του M . Τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

1. Το άθροισμα $\sum_{\alpha \in \Delta} M_\alpha$ είναι ευθύ.
2. Αν $\sum_{\alpha \in \Delta} m_\alpha = \sum_{\alpha \in \Delta} m'_\alpha$, τότε $m_\alpha = m'_\alpha$, $\forall \alpha \in \Delta$.
3. Αν $\sum_{\alpha \in \Delta} m_\alpha = 0$, τότε $m_\alpha = 0$, $\forall \alpha \in \Delta$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [16, Proposition 2.1.10]. ■

Υπάρχει μια στενή σχέση, όπως θα διαπιστώσουμε, ανάμεσα σε εσωτερικά και εξωτερικά ευθέα άθροισματα. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό για το εσωτερικό ευθύ άθροισμα και για το εξωτερικό ευθύ άθροισμα. Ωστόσο, για τις ανάγκες της ακόλουθης πρότασης, σημειώνουμε προσωρινά το εσωτερικό και εξωτερικό ευθύ άθροισμα, με \bigoplus^i και \bigoplus^e , αντίστοιχα.

Πρόταση 1.2.7. Τα ακόλουθα ισχύουν για ένα αριστερό R -πρότυπο M .

1. Αν $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ είναι μια οικογένεια υποπροτύπων του M έτσι ώστε $M = \bigoplus^i M_\alpha$, τότε $M \cong \bigoplus^e M_\alpha$.

2. Αν υπάρχει οικογένεια προτύπων $\{N_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ έτσι ώστε $M \cong \bigoplus^e N_\alpha$, τότε υπάρχει μια οικογένεια $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ από υποπρότυπα του M έτσι ώστε $M = \bigoplus^i M_\alpha$, και $N_\alpha \cong M_\alpha$ για κάθε $\alpha \in \Delta$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [16, Proposition 2.1.11]. ■

Από τώρα και στο εξής, δεν διακρίνουμε το εξωτερικό και εσωτερικό ευθύ άθροισμα, και αναφέρουμε και τα δύο, απλά ως ευθύ άθροισμα.

Έχοντας μελετήσει λοιπόν ευθέα αθροίσματα, μπορούμε τώρα να ορίσουμε διασπάσιμες σύντομες ακριβείς ακολουθίες.

Ορισμός 1.2.8. Έστω $\ell : 0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0$ μια σύντομη ακριβής ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα.

1. Η ℓ καλείται **αριστερά διασπάσιμη, (split on the left)**, αν υπάρχει ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων $f' : M \longrightarrow M_1$ έτσι ώστε $f' \circ f = \text{Id}_{M_1}$.
2. Η ℓ καλείται **δεξιά διασπάσιμη, (split on the right)**, αν υπάρχει ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων $g' : M \longrightarrow M_2$ έτσι ώστε $g \circ g' = \text{Id}_{M_2}$.
3. Η ℓ καλείται **διασπάσιμη (split)**, αν είναι αριστερά και δεξιά διασπάσιμη.

Η ακόλουθη πρόταση μας εξασφαλίζει ότι για να είναι μια σύντομη ακριβής ακολουθία από R -πρότυπα διασπάσιμη, αρκεί να είναι αριστερά ή δεξιά διασπάσιμη.

Πρόταση 1.2.9. Μια σύντομη ακριβής ακολουθία αριστερών R -προτύπων είναι αριστερά διασπάσιμη, αν και μόνο αν, είναι δεξιά διασπάσιμη.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [16, Proposition 3.2.6]. ■

Παράδειγμα 1.2.10. Αν M_1 και M_2 είναι δύο οποιαδήποτε αριστερά R -πρότυπα, τότε επάγονται διασπάσιμες σύντομες ακριβείς ακολουθίες:

$$\ell_1 : 0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i_1} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{\varpi_2} M_2 \longrightarrow 0,$$

όπου $i_1(x) = (x, 0)$ και $\varpi_2(x, y) = y$, και

$$\ell_2 : 0 \longrightarrow M_2 \xrightarrow{i_2} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{\varpi_1} M_1 \longrightarrow 0,$$

όπου $i_2(y) = (0, y)$ και $\varpi_1(x, y) = x$. Πράγματι, είναι εύκολο να δούμε ότι οι προηγούμενες ακολουθίες είναι ακριβείς, και ότι $\varpi_1 \circ i_1 = \text{Id}_{M_1}$ ή ότι $\varpi_2 \circ i_2 = \text{Id}_{M_2}$.

Ευθύς αμέσως, θα διαπιστώσουμε ότι κάθε διασπάσιμη σύντομη ακριβής ακολουθία από R -πρότυπα, είναι ισόμορφη με μια σύντομη ακριβή ακολουθία η οποία είναι της μορφής ℓ_1 ή της μορφής ℓ_2 του Παραδείγματος (1.2.10).

Πρόταση 1.2.11. Έστω $\ell : 0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0$ μια σύντομη ακριβής ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα. Τότε η ℓ είναι διασπάσιμη, αν και μόνο αν, υπάρχει ισομορφισμός αριστερών R -προτύπων $h : M \longrightarrow M_1 \oplus M_2$ έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow h & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{i_1} & M_1 \oplus M_2 & \xrightarrow{\varpi_2} & M_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά, ότι υπάρχει ισομορφισμός $h: M \longrightarrow M_1 \oplus M_2$ έτσι ώστε το προηγούμενο διάγραμμα να είναι μεταθετικό. Θέτοντας

$$f' = \varpi_1 \circ h: M \longrightarrow M_1,$$

έπεται ότι $f' \circ f = \varpi_1 \circ h \circ f = \varpi_1 \circ i_1 = \text{Id}_{M_1}$. Συνεπώς, η ℓ είναι διασπασίμη σύντομη ακριβής ακολουθία, ως αριστερά διασπασίμη. Αντίστροφα, υποθέτουμε τώρα η ℓ είναι μια διασπασίμη σύντομη ακριβής ακολουθία. Τότε υπάρχουν ομομορφισμοί αριστερών R -προτύπων $f': M \longrightarrow M_1$ και $g': M_2 \longrightarrow M$, έτσι ώστε $f' \circ f = \text{Id}_{M_1}$ και $g \circ g' = \text{Id}_{M_2}$. Ορίζουμε ομομορφισμούς αριστερών R -προτύπων:

$$h: M \longrightarrow M_1 \oplus M_2 \quad \& \quad h': M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M,$$

θέτοντας $h(m) = (f'(m), g(m))$ και $h'(x, y) = f(x) + g'(y)$ για κάθε $m \in M$ και για κάθε $(x, y) \in M_1 \oplus M_2$. Χρησιμοποιώντας τον τρόπο που ορίστηκαν οι ομομορφισμοί h, h' καθώς και την απόδειξη της Πρότασης (1.2.9), εύκολα καταλήγουμε στις ισότητες $h \circ h' = \text{Id}_{M_1 \oplus M_2}$ και $h' \circ h = \text{Id}_M$. Επομένως, ο ομομορφισμός h είναι ισομορφισμός με αντίστροφο (ισο)μορφισμό $h^{-1} = h'$. Επιπλέον, αν $x \in M_1$, τότε παίρνουμε ότι:

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = (f'(f(x)), g(f(x))) = ((f' \circ f)(x), (g \circ f)(x)) = (x, 0).$$

Όμως, $(x, 0) = i_1(x)$, και άρα, $(h \circ f)(x) = i_1(x)$. Αν τώρα $m \in M$, τότε προκύπτει ότι:

$$(\varpi_2 \circ h)(m) = \varpi_2(h(m)) = \varpi_2((f'(m), g(m))) = g(m).$$

Έτσι τελικά, έχουμε ότι $h \circ f = i_1$ και ότι $\varpi_2 \circ h = g$, όπως επιθυμούσαμε. ■

Ολοκληρώνουμε την αναφορά μας σε ευθέα γινόμενα και σε ευθέα αθροίσματα, αναλύοντας τη συμπεριφορά τους ως προς ομάδες ομομορφισμών.

Πρόταση 1.2.12. Έστω $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ μία οικογένεια από αριστερά R -πρότυπα. Τότε για κάθε αριστερό R -πρότυπο N , ισχύει ότι:

1. $\text{Hom}_R \left(\bigoplus_{\alpha \in \Delta} M_\alpha, N \right) \cong \prod_{\alpha \in \Delta} \text{Hom}_R(M_\alpha, N).$

2. $\text{Hom}_R \left(N, \prod_{\alpha \in \Delta} M_\alpha \right) \cong \prod_{\alpha \in \Delta} \text{Hom}_R(N, M_\alpha).$

Επιπλέον, για κάθε πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό R -πρότυπο N , ισχύει ότι:

3. $\text{Hom}_R \left(N, \bigoplus_{\alpha \in \Delta} M_\alpha \right) \cong \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \text{Hom}_R(N, M_\alpha).$

Απόδειξη. **1.** Έστω N ένα αριστερό R -πρότυπο. Ορίζουμε ομομορφισμό αβελιανών ομάδων:

$$\Phi: \text{Hom}_R \left(\bigoplus_{\alpha \in \Delta} M_\alpha, N \right) \longrightarrow \prod_{\alpha \in \Delta} \text{Hom}_R(M_\alpha, N), \quad f \longmapsto (f \circ i_\alpha),$$

όπου $i_\alpha: M_\alpha \longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in \Delta} M_\alpha$ είναι η κανονική έγκλειση για κάθε $\alpha \in \Delta$. Έστω τώρα $(f_\alpha) \in \prod_{\alpha \in \Delta} \text{Hom}_R(M_\alpha, N)$, όπου κάθε $f_\alpha: M_\alpha \longrightarrow N$ για $\alpha \in \Delta$, είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων. Τότε από την καθολική ιδιότητα του ευθέος αθροίσματος, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων $f: \bigoplus_{\alpha \in \Delta} M_\alpha \longrightarrow N$, τέτοιος ώστε $f \circ i_\alpha = f_\alpha$ για κάθε $\alpha \in \Delta$. Συνεπώς, παίρνουμε ότι $\Phi(f) = (f \circ i_\alpha) = (f_\alpha)$. Επειδή λοιπόν η επιλογή της ακολουθίας $(f_\alpha) \in \prod_{\alpha \in \Delta} \text{Hom}_R(M_\alpha, N)$ ήταν τυχαία, έπεται ότι ο Φ είναι ένας ισομορφισμός αβελιανών ομάδων, ως ένα προς ένα και επί ομομορφισμός αβελιανών ομάδων.

2. Θεωρούμε ένα αριστερό R -πρότυπο N , και ορίζουμε ομομορφισμό αβελιανών ομάδων:

$$\Psi: \text{Hom}_R \left(N, \prod_{\alpha \in \Delta} M_\alpha \right) \longrightarrow \prod_{\alpha \in \Delta} \text{Hom}_R(N, M_\alpha), \quad g \longmapsto (\varpi_\alpha \circ g),$$

όπου $\varpi_\alpha: \prod_{\alpha \in \Delta} M_\alpha \longrightarrow M_\alpha$ είναι η κανονική προβολή για κάθε $\alpha \in \Delta$. Τότε ακολουθώντας μια ανάλογη πορεία με την απόδειξη του **1.**, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο Ψ είναι ένας ισομορφισμός αβελιανών ομάδων.

3. Έστω N ένα πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό R -πρότυπο. Τότε η οικογένεια ομομορφισμών $M_\alpha \longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in \Delta} M_\alpha$ μεταξύ R -προτύπων, επάγει μια οικογένεια ομομορφισμών

$$\text{Hom}_R(N, i_\alpha): \text{Hom}_R(N, M_\alpha) \longrightarrow \text{Hom}_R(N, \bigoplus_{\alpha \in \Delta} M_\alpha)$$

μεταξύ αβελιανών ομάδων. Από την καθολική ιδιότητα του ευθέος αθροίσματος $\{j_\alpha: \text{Hom}_R(N, M_\alpha) \longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \text{Hom}_R(N, M_\alpha)\}_{\alpha \in \Delta}$ της οικογένειας αβελιανών ομάδων $\{\text{Hom}_R(N, M_\alpha)\}_{\alpha \in \Delta}$, έπεται ότι υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός αβελιανών ομάδων

$$\Xi: \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \text{Hom}_R(N, M_\alpha) \longrightarrow \text{Hom}_R\left(N, \bigoplus_{\alpha \in \Delta} M_\alpha\right),$$

έτσι ώστε: $\Xi \circ j_\alpha = i_\alpha, \forall \alpha \in \Delta$. Προφανώς ο ομομορφισμός Ξ ορίζεται ως εξής. Για τυχόν στοιχείο $\sum_{\alpha \in \Delta} j_\alpha(f_\alpha) = (f_\alpha)_{\alpha \in \Delta} \in \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \text{Hom}_R(N, M_\alpha)$, όπου $f_\alpha = 0, \forall \alpha \in \Delta$ εκτός από πεπερασμένο πλήθος δεικτών, έχουμε:

$$\Xi\left(\sum_{\alpha \in \Delta} j_\alpha(f_\alpha)\right): N \longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in \Delta} M_\alpha, \quad \Xi\left(\sum_{\alpha \in \Delta} j_\alpha(f_\alpha)\right)(x) = \sum_{\alpha \in \Delta} i_\alpha(f_\alpha(x))$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι ο ομομορφισμός Ξ είναι πάντα μονομορφισμός αβελιανών ομάδων. Πράγματι, αν $\Xi(\sum_{\alpha \in \Delta} j_\alpha(f_\alpha)) = 0$, τότε για κάθε $x \in N$, θα έχουμε $\Xi(\sum_{\alpha \in \Delta} j_\alpha(f_\alpha))(x) = 0$, και επομένως $\sum_{\alpha \in \Delta} i_\alpha(f_\alpha(x)) = 0$. Προφανώς τότε, $\forall \alpha \in \Delta: f_\alpha(x) = 0, \forall x \in N$. Αυτό σημαίνει ότι $f_\alpha = 0, \forall \alpha \in \Delta$ και επομένως $\sum_{\alpha \in \Delta} j_\alpha(f_\alpha) = 0$. Άρα ο ομομορφισμός Ξ είναι μονομορφισμός.

Θα δείξουμε ότι αν το R -πρότυπο N είναι πεπερασμένα παραγόμενο, τότε ο ομομορφισμός Ξ είναι επιμορφισμός. Έστω $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ένα σύνολο γεννητόρων του N . Τότε θα έχουμε $N = Rx_1 + Rx_2 + \dots + Rx_n$. Έστω $f: N \longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in \Delta} M_\alpha$ ένας ομομορφισμός προτύπων. Τότε προφανώς, για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, το στοιχείο $f(x_i) \in \bigoplus_{\alpha \in \Gamma_i} M_\alpha$, όπου $\Gamma_i \subseteq \Delta$ είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του Δ . Τότε το σύνολο $\Gamma = \cup_{i=1}^n \Gamma_i$ είναι πεπερασμένο, και επιπλέον θα έχουμε ότι $f(x_i) \in \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} M_\alpha$. Επομένως χρησιμοποιώντας ότι η απεικόνιση f είναι ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων και ότι το σύνολο $\{x_1, \dots, x_n\}$ είναι σύνολο γεννητόρων του N , έπεται ότι $f(N) \subseteq \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} M_\alpha$. Αυτό σημαίνει ότι ο ομομορφισμός f αναλύεται ως $f = \iota_\Gamma \circ g$, όπου $\iota_\Gamma: \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} M_\alpha \longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in \Delta} M_\alpha$ είναι η κανονική έγκλιση, και $g(x) = f(x), \forall x \in N$. Ορίζουμε ομομορφισμούς αριστερών R -προτύπων $f_\alpha: N \longrightarrow M_\alpha, \forall \alpha \in \Delta$, ως εξής. Αν $\alpha \in \Delta \setminus \Gamma$, θέτουμε $f_\alpha = 0$, και αν $\alpha \in \Gamma$, τότε $f_\alpha = \pi_\alpha \circ g$, όπου $\pi_\alpha: \bigoplus_{\alpha \in \Delta} M_\alpha \longrightarrow M_\alpha$. Έτσι αποκτούμε ένα στοιχείο $(f_\alpha)_{\alpha \in \Delta} \in \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \text{Hom}_R(N, M_\alpha)$ και προφανώς εκ κατασκευής θα έχουμε $\Xi(\sum_{\alpha \in \Delta} j_\alpha(f_\alpha)) = f$. Επομένως ο ομομορφισμός αβελιανών ομάδων Ξ είναι επιμορφισμός, και άρα, είναι ισομορφισμός. ■

Σημειώνουμε ότι γενικά ο ομομορφισμός Ξ στο μέρος **3.** της παραπάνω Πρότασης μπορεί να είναι μονομορφισμός, χωρίς το πρότυπο N να είναι πεπερασμένα παραγόμενο.

Συμβολισμοί : Αν $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ είναι μια οικογένεια αριστερών R -προτύπων και $M_\alpha = M$ για κάθε $\alpha \in \Delta$, τότε από τώρα και στο εξής θα χρησιμοποιούμε τους ακόλουθους συμβολισμούς:

$$\bigoplus_{\alpha \in \Delta} M_\alpha := M^{(\Delta)} \quad \& \quad \prod_{\alpha \in \Delta} M_\alpha := M^\Delta$$

1.2.2 Ελεύθερα Πρότυπα Και Τανυστικά Γινόμενα Προτύπων

Συνεχίζουμε μελετώντας ελεύθερα πρότυπα και τανυστικά γινόμενα προτύπων, αναλύοντας τις κυριότερες ιδιότητές τους οι οποίες θα μας χρειασθούν στη συνέχεια.

Ελεύθερα Πρότυπα

Αρχικά, αναφερόμαστε σε ελεύθερα πρότυπα. Όπως θα διαπιστώσουμε στην συνέχεια, τα ελεύθερα πρότυπα είναι τα πιο απλά πρότυπα, αφού προκύπτουν παίρνοντας ευθέα αθροίσματα από κόπες του υποκείμενου δακτυλίου.

Ορισμός 1.2.13. Έστω F ένα αριστερό R -πρότυπο και $X = \{x_i\}_{i \in I}$ ένα υποσύνολο του F . Το σύνολο X καλείται **R -γραμμικά ανεξάρτητο, (linearly independent)**, αν ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή:

$$\sum_{i \in I} r_i x_i = 0, \quad r_i \in R, \quad x_i \in X \implies r_i = 0, \quad \forall i \in I.$$

Ορισμός 1.2.14. Έστω F ένα αριστερό R -πρότυπο και $X = \{x_i\}_{i \in I}$ ένα υποσύνολο του F . Το σύνολο X καλείται **βάση** του F , αν και μόνο αν, το X είναι ένα R -γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο γεννητόρων του F .

Πρόταση 1.2.15. Έστω $X = \{x_i\}_{i \in I}$ ένα υποσύνολο ενός αριστερού R -προτύπου F . Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

1. Το X είναι βάση του F .
2. Κάθε $x \in F$ γράφεται μοναδικά ως $x = \sum_{i \in I} r_i x_i$, όπου $x_i \in X$, $r_i \in R$ και $r_i = 0$ εκτός από πεπερασμένο πλήθος δεικτών.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [16, Proposition 2.2.3]. ■

Είμαστε σε θέση τώρα, να παραθέσουμε τον ορισμό ενός ελεύθερου R -προτύπου.

Ορισμός 1.2.16. Ένα αριστερό R -πρότυπο F ονομάζεται **ελεύθερο, (free)**, αν και μόνο αν, υπάρχει μια βάση για το F .

- Παράδειγμα 1.2.17.**
1. Το μηδενικό R -πρότυπο είναι ελεύθερο με βάση το κενό σύνολο.
 2. Αν $R = K$ όπου K είναι σώμα, τότε κάθε R -πρότυπο, δηλαδή κάθε K -διανυσματικός χώρος, είναι ελεύθερο R -πρότυπο.
 3. Ο δακτύλιος R , ως αριστερό (δεξιό) R -πρότυπο είναι ελεύθερο, αφού το μονοσύνολο $\{1\}$ αποτελεί μία βάση του R .
 4. Το (αριστερό) R -πρότυπο $R^{(n)}$ είναι ελεύθερο με βάση το σύνολο

$$X = \{e_1, e_2, \dots, e_n\},$$

όπου $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ και το 1 βρίσκεται στην i -θέση.

Παρατήρηση 1.2.18. Υπεράνω τυχόντος προσεταιριστικού δακτυλίου, υπάρχουν πρότυπα τα οποία δεν είναι ελεύθερα. Παραδείγματος χάριν, αν θεωρήσουμε τον δακτύλιο των ακεραίων \mathbb{Z} , τότε το \mathbb{Z} -πρότυπο $\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ για κάθε $m > 1$ δεν είναι ελεύθερο. Για να το διαπιστώσουμε, ας υποθέσουμε ότι το \mathbb{Z}_m είναι ελεύθερο \mathbb{Z} -πρότυπο. Τότε υπάρχει μια βάση $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{Z}_m$ για το \mathbb{Z}_m , και έστω $[k]_m \in \mathcal{B}$ ένα στοιχείο της βάσης \mathcal{B} . Επειδή $m \cdot [k]_m = [m \cdot k]_m = [0]_m$, έπεται ότι $m = 0$, λόγω \mathbb{Z} -γραμμικής ανεξαρτησίας, και αυτό είναι άτοπο. Επομένως το \mathbb{Z}_m δεν έχει βάση και άρα το \mathbb{Z}_m δεν είναι ελεύθερο.

Πόρισμα 1.2.19. Ένα αριστερό R -πρότυπο F είναι ελεύθερο, αν και μόνο αν, υπάρχει ένα σύνολο I έτσι ώστε $F \cong R^{(I)}$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το F είναι ένα ελεύθερο αριστερό R -πρότυπο, και έστω $X = \{x_i\}_{i \in I}$ μια βάση του F . Η Πρόταση (1.2.15), μας δίνει ότι κάθε $x \in F$ γράφεται μοναδικά ως $x = \sum_{i \in I} r_i x_i$, όπου $x_i \in X$, $r_i \in R$ και $r_i = 0$ για κάθε $i \in I$ εκτός από πεπερασμένο πλήθος δεικτών. Ορίζουμε λοιπόν απεικόνιση,

$$f: F \longrightarrow R^{(I)}, \quad \sum_{i \in I} r_i x_i \longmapsto (r_i).$$

Τότε προφανώς η απεικόνιση f είναι καλώς ορισμένη, και είναι εύκολο να δούμε ότι η f είναι ένας ισομορφισμός αριστερών R -προτύπων. Συνεπώς, παίρνουμε ότι $F \cong R^{(I)}$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $F \cong R^{(I)}$ για κάποιο σύνολο I , και έστω $f: F \longrightarrow R^{(I)}$ ένας ισομορφισμός αριστερών R -προτύπων. Θεωρούμε το σύνολο $\{r_i\} \subseteq R^{(I)}$ με $r_i = (r'_j)$ όπου

$$r'_j = \begin{cases} 1_R & , \text{αν } i = j \\ 0_R & , \text{αν } i \neq j \end{cases}. \text{ Τότε το σύνολο } B = \{r_i\}_{i \in I} \text{ είναι μια βάση του } R^{(I)}, \text{ δηλαδή το } R^{(I)} \text{ είναι}$$

ελεύθερο. Έτσι, επειδή ο f είναι ισομορφισμός, έπεται ότι το σύνολο $f^{-1}(B)$ είναι μια βάση για το F . Εξ ορισμού λοιπόν, έχουμε ότι το F είναι ελεύθερο. ■

Ας περάσουμε στην καθολική ιδιότητα των ελεύθερων προτύπων.

Πρόταση 1.2.20. Έστω F ένα ελεύθερο αριστερό R -πρότυπο και $X = \{x_i\}_{i \in I}$ μια βάση του F . Έστω επίσης M ένα τυχόν αριστερό R -πρότυπο.

1. Αν $f, g: F \longrightarrow M$ είναι ομομορφισμοί αριστερών R -προτύπων έτσι ώστε $f(x_i) = g(x_i)$ για κάθε $i \in I$, τότε $f = g$.
2. Αν $f: X \longrightarrow M$ είναι μια οποιαδήποτε απεικόνιση, τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων $g: F \longrightarrow M$ έτσι ώστε $g(x_i) = f(x_i)$ για κάθε $i \in I$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [16, Proposition 2.2.5]. ■

Αν και θα επεξηγήσουμε τον όρο «προσέγγιση» αναλυτικά στο Κεφάλαιο 4, ας σημειώσουμε ότι το ακόλουθο αποτέλεσμα, μας δίνει τη δυνατότητα να μπορούμε να προσεγγίσουμε κάθε R -πρότυπο M , μέσω ενός ελεύθερου R -προτύπου F . Ωστόσο, το ελεύθερο R -πρότυπο F , δεν είναι απαραίτητα μοναδικά καθορισμένο μέχρι ισομορφισμό από το R -πρότυπο M .

Πρόταση 1.2.21. Κάθε αριστερό R -πρότυπο M είναι ομομορφική εικόνα ενός ελεύθερου αριστερού R -προτύπου. Επιπλέον, αν το M είναι πεπερασμένα παραγόμενο, τότε το ελεύθερο αριστερό R -πρότυπο μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε να είναι πεπερασμένα παραγόμενο.

Απόδειξη. Έστω M ένα αριστερό R -πρότυπο και $\{x_i\}_{i \in I}$ ένα σύνολο γεννητόρων του M . Τότε το $R^{(I)}$ είναι ένα ελεύθερο αριστερό R -πρότυπο. Ορίζουμε απεικόνιση

$$\phi: R^{(I)} \longrightarrow M,$$

θέτοντας $\phi((r_i)) = \sum_{i \in I} r_i x_i$, για κάθε $(r_i) \in R^{(I)}$. Για κάθε $(r_i), (r'_i) \in R^{(I)}$ και για κάθε $r \in R$, παίρνουμε τις ακόλουθες ισότητες:

$$\begin{aligned} \phi((r_i) + (r'_i)) &= \phi((r_i + r'_i)) = \sum_{i \in I} (r_i + r'_i) x_i \\ &= \sum_{i \in I} r_i x_i + \sum_{i \in I} r'_i x_i \\ &= \phi((r_i)) + \phi((r'_i)) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \phi(r(r_i)) &= \phi((rr_i)) = \sum_{i \in I} (rr_i) x_i \\ &= r \left(\sum_{i \in I} r_i x_i \right) = r \phi((r_i)) \end{aligned}$$

Επομένως, η απεικόνιση ϕ είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων. Αν $x \in M$, τότε το x μπορεί να γραφεί ως $x = \sum_{i \in I} r_i x_i$ όπου $r_i = 0$ εκτός από πεπερασμένο πλήθος δεικτών. Άρα, $(r_i) \in R^{(I)}$, και έτσι, $\phi((r_i)) = \sum_{i \in I} r_i x_i$. Συνεπώς, ο ϕ είναι επιμορφισμός αριστερών R -προτύπων.

Αν το M είναι πεπερασμένα παραγόμενο, τότε το σύνολο I είναι προφανώς πεπερασμένο, και άρα, το ελεύθερο αριστερό R -πρότυπο $R^{(I)}$ είναι επίσης πεπερασμένα παραγόμενο. ■

Ως προφανή συνέπεια της Πρότασης (1.2.21), παίρνουμε ότι:

Πόρισμα 1.2.22. Για κάθε αριστερό R -πρότυπο M , υπάρχει μια ακριβής ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα

$$\cdots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0, \quad (1.1)$$

όπου κάθε F_i για $i \geq 0$, είναι ελεύθερο. Μια ακριβής ακολουθία όπως η (1.1), καλείται μια **ελεύθερη ανάλυση (free resolution)** του M .

Παρατήρηση 1.2.23. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση (1.2.21), και το πρώτο Θεώρημα ισομορφισμών για R -πρότυπα, έπεται ότι κάθε R -πρότυπο είναι πρότυπο πηλίκου ενός ελεύθερου R -προτύπου. Επιπλέον, ένα R -πρότυπο είναι πεπερασμένα παραγόμενο, αν και μόνο αν, είναι ένα πρότυπο πηλίκου του R -προτύπου $R^{(n)}$ για κάποιο φυσικό αριθμό n .

Ολοκληρώνουμε την αναφορά μας σε ελεύθερα πρότυπα, παραθέτοντας την έννοια ενός πεπερασμένα παραστάσιμου προτύπου.

Ορισμός 1.2.24. Ένα αριστερό R -πρότυπο M καλείται **πεπερασμένα παραστάσιμο, (finitety presented)**, αν υπάρχει μια ακριβής ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα

$$F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

όπου τα F_0 και F_1 είναι πεπερασμένα παραγόμενα και ελεύθερα, ή ισοδύναμα, αν υπάρχει μια ακριβής ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

όπου K είναι πεπερασμένα παραγόμενο και F είναι πεπερασμένα παραγόμενο και ελεύθερο.

Παρατήρηση 1.2.25. Προφανώς, κάθε πεπερασμένα παραστάσιμο R -πρότυπο είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Τονίζουμε ότι η αντίστροφη συνεπαγωγή, δεν ισχύει εν γένει. Ωστόσο, αυτή εξασφαλίζεται όταν ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος της Noether, δες Παρατήρηση (1.3.15).

Τανυστικά Γινόμενα

Η προσοχή μας τώρα στρέφεται σε τανυστικά γινόμενα προτύπων. Πριν ορίσουμε το τανυστικό γινόμενο προτύπων, χρειαζόμαστε να εισάγουμε την έννοια της R -ισόρροπης απεικόνισης.

Ορισμός 1.2.26. Έστω M ένα δεξιό R -πρότυπο, N ένα αριστερό R -πρότυπο και G μια αβελιανή ομάδα. Τότε η απεικόνιση $\rho: M \times N \longrightarrow G$ καλείται **R -ισόρροπη (R -balanced)**, αν $\forall x, x' \in M, \forall y, y' \in N, \forall r \in R$, ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

1. $\rho(x + x', y) = \rho(x, y) + \rho(x', y)$,
2. $\rho(x, y + y') = \rho(x, y) + \rho(x, y')$,
3. $\rho(xr, y) = \rho(x, ry)$.

Ορισμός 1.2.27. Έστω M ένα δεξιό R -πρότυπο και N ένα αριστερό R -πρότυπο. Τότε μία αβελιανή ομάδα T μαζί με μία R -ισόρροπη απεικόνιση $\rho: M \times N \rightarrow T$ καλείται ένα **τανυστικό γινόμενο (tensor product)** των M και N , αν για κάθε αβελιανή ομάδα G και για κάθε R -ισόρροπη απεικόνιση $\rho': M \times N \rightarrow G$, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός αβελιανών ομάδων $f: T \rightarrow G$, έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} & M \times N & \\ \rho \swarrow & & \downarrow \rho' \\ T & \xrightarrow{f} & G \end{array}$$

Η απεικόνιση ρ καλείται η **κανονική R -ισόρροπη απεικόνιση (canonical R -balanced map)** από το $M \times N$ στο T .

Πρόταση 1.2.28. Ένα τανυστικό γινόμενο των M_R και ${}_R N$, αν υπάρχει, τότε είναι μοναδικό μέχρι ισομορφισμού αβελιανών ομάδων.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [16, Proposition 2.3.2]. ■

Λόγω της προηγούμενης πρότασης, από τώρα και στο εξής καλούμε ένα τανυστικό γινόμενο των M_R και ${}_R N$, το τανυστικό γινόμενο των M_R και ${}_R N$, και το συμβολίζουμε με $M \otimes_R N$.

Το ακόλουθο θεώρημα μας εξασφαλίζει την ύπαρξη τανυστικών γινομένων προτύπων.

Θεώρημα 1.2.29. Το τανυστικό γινόμενο των M_R και ${}_R N$ υπάρχει.

Απόδειξη. Έστω F η ελεύθερη αβελιανή ομάδα με βάση το σύνολο $M \times N$, δηλαδή

$$F = \left\{ \sum_i m_i(x_i, y_i) \mid m_i \in \mathbb{Z}, (x_i, y_i) \in M \times N \right\} \cong \mathbb{Z}^{(M \times N)}$$

Έστω S η υποομάδα της F η οποία παράγεται από όλα τα στοιχεία της μορφής

$$\{(x + x', y) - (x, y) - (x', y), (x, y + y') - (x, y) - (x, y'), (xr, y) - (x, ry)\}$$

όπου $x, x' \in M, y, y' \in N$ και $r \in R$. Ορίζουμε απεικόνιση

$$\rho: M \times N \rightarrow F/S, \quad \rho(x, y) = (x, y) + S.$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η απεικόνιση ρ είναι R -ισόρροπη. Έστω τώρα G μια αβελιανή ομάδα, και $\rho': M \times N \rightarrow G$ μια οποιαδήποτε R -ισόρροπη απεικόνιση. Επειδή η F είναι ελεύθερη στο $M \times N$, από την καθολική ιδιότητα των ελεύθερων προτύπων, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $h: F \rightarrow G$ που επεκτείνει την ρ' , δηλαδή $h(x, y) = \rho'(x, y)$. Όμως, $S \subset \text{Ker } h$ αφού η ρ' είναι R -ισόρροπη απεικόνιση. Συνεπώς, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός αβελιανών ομάδων

$$\phi: F/S \rightarrow G$$

έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} & M \times N & \\ \rho \swarrow & & \downarrow \rho' \\ F/S & \xrightarrow{\phi} & G \end{array}$$

Άρα, $F/S = M \otimes_R N$. ■

Παρατήρηση 1.2.30. Η ομάδα πηλίκο $F/S = M \otimes_R N$ που κατασκευάστηκε στην απόδειξη του Θεωρήματος (1.2.29), παράγεται από τα σύμπλοκα $(x, y) + S$. Συμβολίζουμε από τώρα και στο εξής, τα σύμπλοκα $(x, y) + S$, με $x \otimes y$. Άρα, η αβελιανή ομάδα $M \otimes_R N$ παράγεται από τα στοιχεία $x \otimes y$. Επειδή $-(x \otimes y) = (-x) \otimes y$, τα στοιχεία της αβελιανής ομάδας $M \otimes_R N$ είναι της μορφής:

$$M \otimes_R N = \left\{ \sum_{i=1}^k n_i(x_i \otimes y_i) \mid n_i \in \mathbb{Z}, x_i \in M, y_i \in N \right\}.$$

Επιπλέον, αν $x, x' \in M, y, y' \in N$ και $r \in R$, τότε

1. $(x + x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y$,
2. $x \otimes (y + y') = x \otimes y + x \otimes y'$,
3. $(xr) \otimes y = x \otimes (ry)$.

Σημειώνουμε ακόμη ότι το $0_M \otimes 0_N$ είναι το ταυτοτικό στοιχείο της πρόσθεσης της αβελιανής ομάδας $M \otimes_R N$, καθώς και ότι $x \otimes 0_N = 0_M \otimes 0_N = 0_{M \otimes_R N}$ για κάθε $x \in M$ και $y \in N$.

Παρατήρηση 1.2.31. Εν γένει, η αβελιανή ομάδα $M \otimes_R N$ δεν είναι ούτε δεξιό, ούτε αριστερό R -πρότυπο. Ωστόσο, αν R, S είναι δακτύλιοι, M είναι ένα (R, S) -διπρότυπο, και N είναι ένα αριστερό S -πρότυπο, τότε η αβελιανή ομάδα $M \otimes_S N$ μετατρέπεται σ' ένα αριστερό R -πρότυπο, θέτοντας

$$r \left(\sum_{i=1}^k n_i(x_i \otimes y_i) \right) = \sum_{i=1}^k n_i(rx_i \otimes y_i),$$

για κάθε $r \in R$ και για κάθε $\sum_{i=1}^k n_i(x_i \otimes y_i) \in M \otimes_S N$.

Ομοίως, αν M είναι ένα δεξιό S -πρότυπο και N είναι ένα (S, R) -διπρότυπο, τότε η αβελιανή ομάδα $M \otimes_S N$ μετατρέπεται σ' ένα δεξιό R -πρότυπο, θέτοντας

$$\left(\sum_{i=1}^k n_i(x_i \otimes y_i) \right) r = \sum_{i=1}^k n_i(x_i \otimes (y_i r))$$

για κάθε $\sum_{i=1}^k n_i(x_i \otimes y_i) \in M \otimes_S N$ και για κάθε $r \in R$.

Στην συνέχεια, αναλύουμε την έννοια του τανυστικού γινομένου ομομορφισμών.

Πρόταση 1.2.32. Έστω $f: M_R \rightarrow M'_R$ και $g: {}_R N \rightarrow {}_R N'$ δύο ομομορφισμοί R -πρωτύπων. Τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός αβελιανών ομάδων

$$h: M \otimes_R N \rightarrow M' \otimes_R N'$$

όπου

$$h \left(\sum_{i=1}^k n_i(x_i \otimes y_i) \right) = \sum_{i=1}^k n_i(f(x_i) \otimes g(y_i))$$

Απόδειξη. Έστω ρ η κανονική R -ισόρροπη απεικόνιση από το $M \times N$ στο $M \otimes_R N$, και ρ' η κανονική R -ισόρροπη απεικόνιση από το $M' \times N'$ στο $M' \otimes_R N'$. Ορίζουμε απεικόνιση

$$h': M \times N \rightarrow M' \otimes_R N'$$

θέτοντας $h' = \rho' \circ (f \times g)$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η ρ' είναι R -ισόρροπη απεικόνιση, εύκολα έπεται ότι η h' είναι επίσης R -ισόρροπη απεικόνιση. Συνεπώς, από την καθολική ιδιότητα

του τανυστικού γινομένου, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός αβελιανών ομάδων $h: M \otimes_R N \rightarrow M' \otimes_R N'$, έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\rho} & M \otimes_R N \\ \downarrow f \times g & \searrow h' & \downarrow \exists! h \\ M' \times N' & \xrightarrow{\rho'} & M' \otimes_R N' \end{array}$$

Έστω τώρα $\sum_{i=1}^k n_i(x_i \otimes y_i) \in M \otimes_R N$. Τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned} h\left(\sum_{i=1}^k n_i(x_i \otimes y_i)\right) &= \sum_{i=1}^k n_i(h(x_i \otimes y_i)) = \sum_{i=1}^k n_i(h(\rho(x_i, y_i))) \\ &= \sum_{i=1}^k n_i h'(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^k n_i(f(x_i) \otimes g(y_i)) \end{aligned}$$

όπως επιθυμούσαμε. ■

Παρατήρηση 1.2.33. Συμβολίζουμε τον ομομορφισμό αβελιανών ομάδων της Πρότασης (1.2.32), $h: M \otimes_R N \rightarrow M' \otimes_R N'$, με $f \otimes g$. Αν

$$f': M'_R \rightarrow M''_R \quad \& \quad g': {}_R N' \rightarrow {}_R N'',$$

είναι δύο ομομορφισμοί R -προτύπων, τότε επάγεται μοναδικός ομομορφισμός αβελιανών ομάδων

$$f' \otimes g': M' \otimes_R N' \rightarrow M'' \otimes_R N'',$$

και η σύνθεση των ομομορφισμών $f \otimes g$ και $f' \otimes g'$, δίνεται ως εξής:

$$(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g).$$

Επιπλέον, σημειώνουμε ότι $\text{Id}_M \otimes \text{Id}_N: M \otimes_R N \rightarrow M \otimes_R N$ είναι ο ταυτοτικός (ομο)μορφισμός στο $M \otimes_R N$, και ότι αν $f: M_R \rightarrow M'_R$, $g: {}_R N \rightarrow {}_R N'$ είναι ισομορφισμοί R -προτύπων, τότε ο ομομορφισμός αβελιανών ομάδων $f \otimes g$ είναι ισομορφισμός, με $(f \otimes g)^{-1} = f^{-1} \otimes g^{-1}$.

Κλείνουμε την σύντομη αναφορά μας σε τανυστικά γινόμενα προτύπων, με τους ακόλουθους ισομορφισμούς.

Πρόταση 1.2.34. 1. $M \otimes_R R \cong M$ για κάθε δεξιό R -πρότυπο M , και $R \otimes_R N \cong N$ για κάθε αριστερό R -πρότυπο N .

2. Αν $\{M_i\}_{i \in I}$ είναι μια οικογένεια δεξιών R -προτύπων, και N είναι ένα αριστερό R -πρότυπο, τότε $(\bigoplus_{i \in I} M_i) \otimes_R N \cong \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_R N)$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [27, Proposition 1.2.21, 1.2.22] ■

1.2.3 Ευθέα Και Αντίστροφα Όρια

Επικεντρωνόμαστε τώρα, σε ευθέα και αντίστροφα όρια οικογενειών από R -πρότυπα υπεράνω κατευθυνόμενων συνόλων.

Ας υπενθυμίσουμε πρώτα, τον ορισμό ενός κατευθυνόμενου συνόλου.

Ορισμός 1.2.35. Ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο I καλείται **κατευθυνόμενο, (directed set)**, αν για κάθε $i, j \in I$, υπάρχει ένα $k \in I$ με $i, j \leq k$.

Ορισμός 1.2.36. Έστω I ένα κατευθυνόμενο σύνολο, και $\{M_i\}_{i \in I}$ μια οικογένεια αριστερών R -προτύπων. Υποθέτουμε ότι για κάθε $i, j \in I$ με $i \leq j$, υπάρχει ένας ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων $f_{ji}: M_i \rightarrow M_j$, έτσι ώστε

1. $f_{ii} = \text{id}_{M_i}$ για κάθε $i \in I$.
2. Αν $i \leq j \leq k$, τότε $f_{kj} \circ f_{ji} = f_{ki}$.

Τότε η οικογένεια $\{M_i, f_{ji}\}$ καλείται ένα **ευθύ σύστημα (direct system)**.

Ορισμός 1.2.37. Έστω I ένα κατευθυνόμενο σύνολο και έστω $\{M_i, f_{ji}\}$ ένα ευθύ σύστημα αριστερών R -προτύπων υπεράνω του I . Το **ευθύ όριο (direct limit)** του ευθέως συστήματος $\{M_i, f_{ji}\}$, είναι ένα αριστερό R -πρότυπο $\varinjlim M_i$ μαζί με μια οικογένεια ομομορφισμών αριστερών R -προτύπων

$$\{a_i: M_i \rightarrow \varinjlim M_i \mid i \in I\}$$

έτσι ώστε $a_j \circ f_{ji} = a_i$ για $i \leq j$, και αν $\{X, k_i\}$ είναι μια άλλη τέτοια οικογένεια, τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων $\theta: \varinjlim M_i \rightarrow X$, τέτοιος ώστε $k_i = \theta \circ a_i$ για κάθε $i \in I$.

Παρατήρηση 1.2.38. Ως έμμεση συνέπεια του Ορισμού (1.2.37), έπεται ότι το ευθύ όριο ενός ευθέως συστήματος από R -πρότυπα, είναι μοναδικό μέχρι ισομορφισμού.

Έχοντας εξασφαλίσει λοιπόν την μοναδικότητα του ευθέως ορίου ενός ευθέως συστήματος από R -πρότυπα, το βασικό ερώτημα που απομένει, είναι η ύπαρξη.

Θεώρημα 1.2.39. Το ευθύ όριο ενός ευθέως συστήματος $\{M_i, f_{ji}\}$ από αριστερά R -πρότυπα υπεράνω ενός κατευθυνόμενου συνόλου I , υπάρχει.

Απόδειξη. Έστω U η ξένη ένωση των M_i για $i \in I$. Ορίζουμε σχέση ρ στο σύνολο U , ως εξής:

$$\forall x_i \in M_i, \forall x_j \in M_j: x_i \rho x_j \iff \exists k \in I \text{ με } k \geq i, j, \text{ έτσι ώστε } f_{ki}(x_i) = f_{kj}(x_j)$$

Τότε η σχέση ρ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο U . Θέτουμε M να είναι το σύνολο όλων των κλάσεων ισοδυναμίας ως προς τη σχέση ισοδυναμίας ρ , και σημειώνουμε με $[x]$ την κλάση ισοδυναμίας του x . Ορίζουμε τώρα για κάθε $r \in R$ και για κάθε $x_i \in M_i, x_j \in M_j$, τις ακόλουθες πράξεις:

1. $r[x_i] = [rx_i]$ και
2. $[x_i] + [x_j] = [f_{ki}(x_i) + f_{kj}(x_j)]$, όπου $k \geq i, j$.

Τότε είναι εύκολο να δούμε ότι με τις προηγούμενες πράξεις, το σύνολο M είναι ένα αριστερό R -πρότυπο. Επιπλέον, ορίζουμε ομομορφισμούς αριστερών R -προτύπων

$$g_i: M_i \rightarrow M, \quad x_i \mapsto [x_i],$$

για κάθε $i \in I$. Ισχυριζόμαστε τώρα ότι η οικογένεια $\{M, g_i\}$ είναι το ευθύ όριο του ευθέως συστήματος $\{M_i, f_{ji}\}$. Για να διαπιστώσουμε τον ισχυρισμό αυτό, έστω $i, j \in I$ με $i \leq j$. Επειδή το σύνολο I είναι κατευθυνόμενο, υπάρχει κάποιο $k \in I$ έτσι ώστε $k \geq i, j$. Τότε $[f_{ji}(x_i)] = [x_i]$ για κάθε $x_i \in M_i$, διότι $f_{kj}(f_{ji}(x_i)) = (f_{kj} \circ f_{ji})(x_i) = f_{ki}(x_i)$. Συνεπώς, παίρνουμε ότι $g_i = g_j \circ f_{ji}$, όταν $i \leq j$. Αν $\{N, h_i\}$ είναι μια άλλη τέτοια οικογένεια, τότε ορίζουμε απεικόνιση

$$\theta: M \rightarrow N, \quad [x] \mapsto h_k(x_k),$$

όπου $x = x_k$ για κάποιο $k \in I$ και για κάποιο $x_k \in M_k$. Εύκολα βλέπουμε ότι η απεικόνιση θ είναι ένας καλώς ορισμένος ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων, έτσι ώστε $\theta \circ g_i = h_i$ για κάθε $i \in I$. Μάλιστα, ο ομομορφισμός θ με την προηγούμενη ιδιότητα είναι μοναδικός, διότι στην

περίπτωση που υπάρχει ομομορφισμός θ' τέτοιος ώστε $\theta' \circ g_i = h_i$ για κάθε $i \in I$, τότε για το τυχόν $[x] \in M$, όπου $x = x_i$ για κάποιο $i \in I$ και για κάποιο $x_i \in M_i$, έχουμε ότι $[x] = [x_i] = g_i(x_i)$, καθώς και ότι

$$\theta'([x]) = \theta'(g_i(x_i)) = (\theta' \circ g_i)(x_i) = h_i(x_i) = (\theta \circ g_i)(x_i) = \theta(g_i(x_i)) = \theta([x]).$$

Άρα, $\varinjlim M_i = M$. ■

Παρατήρηση 1.2.40. Έστω $\{M_i, f_{ji}\}$ ένα ευθύ σύστημα από αριστερά R -πρότυπα υπεράνω ενός κατευθυνόμενου συνόλου I , και $\lambda_i: M_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$ η κανονική έγκλειση για κάθε $i \in I$. Αν S είναι το υποπρότυπο του $\bigoplus_{i \in I} M_i$ που παράγεται από στοιχεία της μορφής $\lambda_j \circ f_{ji}(x_i) - \lambda_i(x_i)$ για $i \leq j$, τότε η απεικόνιση

$$\theta: \varinjlim M_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i / S, \quad [x_i] \mapsto \lambda_i(x_i) + S,$$

είναι ένας καλώς ορισμένος ισομορφισμός αριστερών R -προτύπων, και άρα, κάθε στοιχείο του $\varinjlim M_i$ έχει αντιπρόσωπο ένα στοιχείο της μορφής $\lambda_i(x_i) + S$.

Παράδειγμα 1.2.41. Έστω I ένα κατευθυνόμενο σύνολο, M ένα αριστερό R -πρότυπο και $\{M_i\}_{i \in I}$ μια οικογένεια υποπροτύπων του M τέτοια ώστε για κάθε ζεύγος $i, j \in I$, υπάρχει $k \in I$ με $M_i + M_j \subseteq M_k$. Θέτουμε $i \leq j$ αν $M_i \subseteq M_j$, και έστω $f_{ji}: M_i \rightarrow M_j$ για $i \leq j$, η κανονική έγκλειση. Τότε η οικογένεια $\{M_i, f_{ji}\}$ είναι ένα ευθύ σύστημα αριστερών R -προτύπων, και $\varinjlim M_i = \cup_{i \in I} M_i$. Αν τα M_i για $i \in I$, είναι όλα τα πεπερασμένα παραγόμενα υποπρότυπα του M , τότε η προηγούμενη συνθήκη ικανοποιείται, και τότε $\cup_{i \in I} M_i = M$. Άρα, κάθε (αριστερό) R -πρότυπο είναι το ευθύ όριο των πεπερασμένα παραγόμενων υποπροτύπων του.

Ορισμός 1.2.42. Αν $F := \{M_i, f_{ji}\}$ και $F' := \{M'_i, f'_{ji}\}$ είναι δύο ευθέα συστήματα αριστερών R -προτύπων υπεράνω του ίδιου συνόλου I , τότε ένας **μορφισμός μεταξύ των ευθέων συστημάτων** F και F' ,

$$T: F \rightarrow F',$$

είναι μία οικογένεια ομομορφισμών αριστερών R -προτύπων $T = \{r_i: M_i \rightarrow M'_i\}_{i \in I}$ έτσι ώστε $f'_{ji} \circ r_i = r_j \circ f_{ji}$, όταν $i < j$. Ένας τέτοιος μορφισμός $T: F \rightarrow F'$ επάγει έναν ομομορφισμό αριστερών R -προτύπων

$$\varinjlim r_i: \varinjlim M_i \rightarrow \varinjlim M'_i, \quad [x_i] \mapsto [r_i(x_i)].$$

Η ακόλουθη πρόταση μας εξασφαλίζει ότι ο συναρτητής ευθύ όριο \varinjlim_I από την κατηγορία των ευθέων συστημάτων προτύπων υπεράνω ενός κατευθυνόμενου συνόλου I στην κατηγορία προτύπων, είναι ακριβής. Με άλλα λόγια, ο συναρτητής ευθύ όριο διατηρεί σύντομες ακριβείς ακολουθίες.

Πρόταση 1.2.43. Έστω I ένα κατευθυνόμενο σύνολο και $\{M_i, f_{ji}\}, \{M'_i, f'_{ji}\}, \{M''_i, f''_{ji}\}$ ευθέα συστήματα αριστερών R -προτύπων υπεράνω του συνόλου I . Αν

$$T = \{r_i: \{M_i, f_{ji}\} \rightarrow \{M'_i, f'_{ji}\} \quad \text{και} \quad T' = \{s_i: \{M'_i, f'_{ji}\} \rightarrow \{M''_i, f''_{ji}\}$$

είναι μορφισμοί ευθέων συστημάτων, και αν η ακολουθία

$$0 \rightarrow M_i \xrightarrow{r_i} M'_i \xrightarrow{s_i} M''_i \rightarrow 0,$$

είναι ακριβής για κάθε $i \in I$, τότε η επαγόμενη ακολουθία προτύπων

$$0 \rightarrow \varinjlim M_i \xrightarrow{\varinjlim r_i} \varinjlim M'_i \xrightarrow{\varinjlim s_i} \varinjlim M''_i \rightarrow 0$$

είναι ακριβής.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [51, Proposition 7.100]. ■

Το επόμενο αποτέλεσμα, μας δίνει ότι ο συναρτητής ευθύ όριο διατηρεί τανυστικά γινόμενα.

Πρόταση 1.2.44. *Αν $\{B_i, b_{ji}\}_{i \in I}$ είναι ένα ευθύ σύστημα αριστερών R -προτύπων, και A είναι ένα δεξιό R -πρότυπο, τότε*

$$\varinjlim (A \otimes_R B_i) \cong A \otimes_R (\varinjlim B_i).$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [52, Theorem 5.27]. ■

Για την απόδειξη του επόμενου αποτελέσματος, παραπέμπουμε στο βιβλίο [42].

Πρόταση 1.2.45. *Κάθε πρότυπο A υπεράνω τυχόντος δακτυλίου R είναι το ευθύ όριο ενός ευθέως συστήματος $\{F_i \mid i \in I\}$ πεπερασμένα παραστάσιμων προτύπων:*

$$A = \varinjlim F_i$$

Στην συνέχεια αναλύουμε εν συντομία την έννοια του αντίστροφου ορίου αντίστροφων συστημάτων προτύπων. Όπως θα διαπιστώσουμε, το αντίστροφο όριο είναι η δυϊκή κατασκευή του ευθέως ορίου.

Ορισμός 1.2.46. *Έστω I ένα κατευθυνόμενο σύνολο, και $\{M_i\}_{i \in I}$ μια οικογένεια αριστερών R -προτύπων. Υποθέτουμε ότι για κάθε $i, j \in I$ με $i \leq j$, υπάρχει ένας ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων $f_{ij}: M_j \rightarrow M_i$, έτσι ώστε*

1. $f_{ii} = \text{Id}_{M_i}$ για κάθε $i \in I$, και
2. αν $i \leq j \leq k$, τότε $f_{ij} \circ f_{jk} = f_{ik}$.

Τότε η οικογένεια $\{M_i, f_{ij}\}$ καλείται ένα **αντίστροφο σύστημα, (inverse system)**.

Ορισμός 1.2.47. *Έστω I ένα κατευθυνόμενο σύνολο και έστω $\{M_i, f_{ij}\}$ ένα αντίστροφο σύστημα αριστερών R -προτύπων υπεράνω του I . Το **αντίστροφο όριο (inverse limit)** του αντιστρόφου συστήματος $\{M_i, f_{ij}\}$, είναι ένα αριστερό R -πρότυπο $\varprojlim M_i$ μαζί με μια οικογένεια ομομορφισμών αριστερών R -προτύπων*

$$\{a_i: \varprojlim M_i \rightarrow M_i \mid i \in I\}$$

έτσι ώστε $f_{ij} \circ a_j = a_i$ για κάθε $i \leq j$, και αν $\{X, k_i\}$ είναι μια άληθη τέτοια οικογένεια, τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων $\theta: X \rightarrow \varprojlim M_i$, τέτοιος ώστε $k_i = a_i \circ \theta$.

Ανάλογα με την Παρατήρηση (1.2.38), έχουμε ότι:

Παρατήρηση 1.2.48. Το αντίστροφο όριο ενός αντιστρόφου συστήματος από (αριστερά) R -πρότυπα είναι μοναδικό μέχρι ισομορφισμού.

Συνεχίζουμε με το Θεώρημα ύπαρξης των αντίστροφων ορίων.

Θεώρημα 1.2.49. *Το αντίστροφο όριο ενός αντιστρόφου συστήματος $\{M_i, f_{ij}\}$ από αριστερά R -πρότυπα υπεράνω ενός κατευθυνόμενου συνόλου I , υπάρχει.*

Απόδειξη. Αν $\varpi_i: \prod_{i \in I} M_i \rightarrow M_i$ είναι η κανονική προβολή για κάθε $i \in I$. Θέτουμε

$$L = \{(x_i) \in \prod M_i \mid x_i = f_{ij}(x_j) \text{ όπου } i \leq j\},$$

και $a_i = \varpi|_L: L \rightarrow M_i$, τον περιορισμό της ϖ στο αριστερό R -πρότυπο L . Αν $(x_i) \in L$, και $i \leq j$, τότε

$$f_{ij} \circ a_j((x_i)) = f_{ij}(a_j((x_i))) = f_{ij}(x_j) = x_i = a_i((x_i)).$$

Επομένως, παίρνουμε ότι $f_{ij} \circ a_j = a_i$ για $i \leq j$. Έστω τώρα $\{X, k_i\}$ μια άλλη τέτοια οικογένεια. Ορίζουμε απεικόνιση

$$\theta: X \longrightarrow \prod M_i, \quad x \longmapsto (k_i(x)).$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η απεικόνιση θ είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων, έτσι ώστε $a_i \circ \theta = k_i$ για κάθε $i \in I$. Αν $\phi: X \longrightarrow L$ είναι ένας ακόμη ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων, τέτοιος ώστε $a_i \circ \phi = k_i$ για κάθε $i \in I$, τότε $\phi(x) = (x_i)$ και $k_i(x) = (a_i \circ \phi)(x) = a_i(\phi(x)) = a_i((x_i)) = x_i$ για κάθε $i \in I$. Άρα, έχουμε ότι $\theta(x) = (k_i(x)) = (x_i) = \phi(x)$, και κατ' επέκταση, ότι $\phi = \theta$. Επομένως, $L \cong \varprojlim M_i$. ■

Παράδειγμα 1.2.50. Έστω I ένα κατευθυνόμενο σύνολο, και $\{M_i\}_{i \in I}$ μια οικογένεια υποπροτύπων ενός αριστερού προτύπου M διατεταγμένη με την αντίστροφη έγκλειση, δηλαδή αν $i \leq j$, τότε $M_j \subseteq M_i$. Τότε η οικογένεια $\{M_i\}_{i \in I}$ μαζί με τις αντίστροφες εγκλείσεις, είναι ένα αντίστροφο σύστημα αριστερών R -προτύπων, και $\varprojlim M_i \cong \bigcap_{i \in I} M_i$.

Τέλος, παραθέτουμε τους ακόλουθους ισομορφισμούς αβελιανών ομάδων:

Πρόταση 1.2.51. Αν A είναι ένα αριστερό R -πρότυπο, τότε ισχύουν τα εξής:

1. $\text{Hom}_R(A, \varprojlim M_i) \cong \varprojlim \text{Hom}_R(A, M_i)$,
2. $\text{Hom}_R(\varinjlim M_i, A) \cong \varinjlim \text{Hom}_R(M_i, A)$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [52, Propositions 5.21, 5.26]. ■

Σημειώνουμε ότι σε αντίθεση με την ιδιότητα ακριβείας του συναρτητή ευθύ όριο \varinjlim , ο συναρτητής αντίστροφο όριο \varprojlim δεν είναι ακριβής, αλλά μόνο αριστερά ακριβής.

1.2.4 Pullbacks Και Pushouts

Ολοκληρώνουμε την αναφορά μας σε θεμελιώδεις κατασκευές, με αυτές των pullbacks και των pushouts στην κατηγορία $R\text{-Mod}$. Σημειώνουμε ότι οι έννοιες των pullbacks και των pushouts, γενικεύονται και ορίζονται σε μια οποιαδήποτε κατηγορία, ωστόσο η ύπαρξη αυτών εξαρτάται από τις δομικές ιδιότητες της κατηγορίας.

Ας ξεκινήσουμε με τον ορισμό του pullback.

Ορισμός 1.2.52. Θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα από αριστερά R -πρότυπα και από ομομορφισμούς αριστερών R -προτύπων:

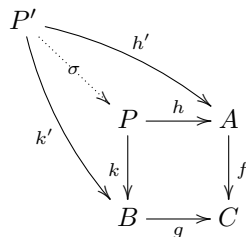
$$\begin{array}{ccc} & A & \\ & \downarrow f & \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array} \quad (1.2)$$

Το **pullback** του προηγούμενου διαγράμματος, είναι μια τριάδα (P, h, k) , όπου το P είναι ένα αριστερό R -πρότυπο, και $h: P \longrightarrow A$, $k: P \longrightarrow B$ είναι ομομορφισμοί αριστερών R -προτύπων, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες δύο συνθήκες:

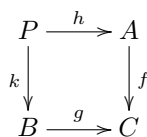
1. Υπάρχει ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{h} & A \\ \downarrow k & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

2. Για οποιοδήποτε αριστερό R -πρότυπο P' και για οποιοσδήποτε ομομορφισμούς αριστερών R -προτύπων $h': P' \rightarrow A, k': P' \rightarrow B$ με $f \circ h' = g \circ k'$, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\sigma: P' \rightarrow P$ έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:



Το διάγραμμα



με την παραπάνω καθολική ιδιότητα, καλείται **pullback διάγραμμα**.

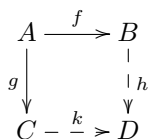
Δυϊκά,

Ορισμός 1.2.53. Θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα από αριστερά R -πρότυπα και από ομομορφισμούς αριστερών R -προτύπων:

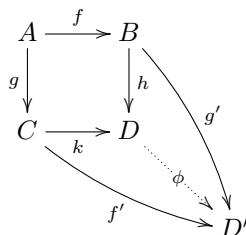
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g \downarrow & & \\ C & & \end{array} \tag{1.3}$$

Το **pushout** του προηγούμενου διαγράμματος, είναι μια τριπλέτα (D, h, k) , όπου το D είναι ένα αριστερό R -πρότυπο, και $h: B \rightarrow D, k: C \rightarrow D$ είναι ομομορφισμοί αριστερών R -προτύπων, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες δύο συνθήκες:

1. Υπάρχει ένα μεταθετικό διάγραμμα



2. Για οποιοδήποτε αριστερό R -πρότυπο D' και για οποιοσδήποτε ομομορφισμούς αριστερών R -προτύπων $g': B \rightarrow D', f': C \rightarrow D'$ με $g' \circ f = f' \circ g$, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\phi: D \rightarrow D'$ έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:



Το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ C & \xrightarrow{k} & D \end{array}$$

με την παραπάνω καθολική ιδιότητα, καλείται **pushout διάγραμμα**.

Παρατήρηση 1.2.54. Ως άμεση συνέπεια των Ορισμών (1.2.52) και (1.2.53), παίρνουμε ότι το pullback, αντίστοιχα το pushout, ενός διαγράμματος από R -πρότυπα και R -ομομορφισμούς, είναι μοναδικό μέχρι ισομορφισμού.

Συνεχίζουμε αποδεικνύοντας την ύπαρξη των pullbacks και των pushouts διαγραμμάτων από R -πρότυπα και R -ομομορφισμούς.

Πρόταση 1.2.55. 1. Το pullback δύο ομομορφισμών αριστερών R -προτύπων

$$f: A \longrightarrow C \quad \& \quad g: B \longrightarrow C$$

στην R -Mod υπάρχει.

2. Το pushout δύο ομομορφισμών αριστερών R -προτύπων

$$f: A \longrightarrow B \quad \& \quad g: A \longrightarrow C$$

στην R -Mod υπάρχει.

Απόδειξη. 1. Ορίζουμε

$$P = \{(b, a) \in B \oplus A \mid g(b) = f(a)\},$$

και έστω $h: P \longrightarrow A$, $(b, a) \longmapsto a$ και $k: P \longrightarrow B$, $(b, a) \longmapsto b$, οι φυσικές προβολές. Αν $(b, a) \in P$, τότε

$$(g \circ k)(b, a) = g(k(b, a)) = g(b) = f(a) = f(h(b, a)) = (f \circ h)(b, a).$$

Επομένως, έπεται ότι $g \circ k = f \circ h$. Αν (P', h', k') είναι μια άλλη τριάδα έτσι ώστε $g \circ k' = f \circ h'$, τότε ορίζουμε απεικόνιση

$$\sigma: P' \longrightarrow P, \quad p' \longmapsto (k'(p'), h'(p')).$$

Η σ είναι καλώς ορισμένη, αφού $g(k'(p')) = f(h'(p'))$ για κάθε $p' \in P'$, και από τον τρόπο που ορίστηκε, είναι προφανώς ένας ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων. Παρατηρώντας ότι:

$$h \circ \sigma(p') = h(\sigma(p')) = h(k'(p'), h'(p')) = h'(p'),$$

και

$$k \circ \sigma(p') = k(\sigma(p')) = k(k'(p'), h'(p')) = k'(p'),$$

για κάθε $p' \in P'$, παίρνουμε ότι $h \circ \sigma = h'$ και $k \circ \sigma = k'$. Για να δείξουμε ότι ο ομομορφισμός σ με την προηγούμενη ιδιότητα είναι μοναδικός, υποθέτουμε υπάρχει ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων $\phi: P' \longrightarrow P$, έτσι ώστε $h \circ \phi = h'$ και $k \circ \phi = k'$. Αν $p' \in P'$, τότε $\phi(p') = (b, a)$ για κάποιο $(b, a) \in P$, και

$$h'(p') = (h \circ \phi)(p') = h(\phi(p')) = h(b, a) = a,$$

$$k(p') = (k \circ \phi)(p') = k(\phi(p')) = k(b, a) = b.$$

Άρα, $\phi = \sigma$. Συνεπώς, το P μαζί με τους ομομορφισμούς h, k είναι το pullback των ομομορφισμών αριστερών R -προτύπων f, g .

2. Έστω $D = (C \oplus B)/K$, όπου K είναι το υποπρότυπο

$$K = \{(g(a), -f(a)) \in C \oplus B \mid a \in A\}$$

του $C \oplus B$. Ορίζουμε ομομορφισμούς αριστερών R -προτύπων

$$h: B \longrightarrow D, b \longmapsto (0, b) + K, \quad \& \quad k: C \longrightarrow D, c \longmapsto (c, 0) + K.$$

Τότε είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι το πρότυπο πηλίκου D , μαζί με τους ομομορφισμούς αριστερών R -προτύπων h, k , είναι το pushout των ομομορφισμών αριστερών R -προτύπων f, g . ■

Κλείνουμε την ενότητα αυτή, μελετώντας τον τρόπο που συνδέονται τα pullbacks και pushouts διαγράμματα με (σύντομες) ακριβείς ακολουθίες στην $R\text{-Mod}$.

Πρόταση 1.2.56. Θεωρούμε το pullback P του διαγράμματος από ομομορφισμούς αριστερών R -προτύπων:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{h} & A \\ \downarrow k & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Αν ο f είναι μονομορφισμός, τότε και ο k είναι μονομορφισμός.
2. Αν ο f είναι επιμορφισμός, τότε και ο k είναι επιμορφισμός.
3. Υποθέτουμε ότι η ακολουθία $A \xrightarrow{f} C \xrightarrow{\epsilon} L$ από αριστερά R -πρότυπα είναι ακριβής. Τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων $\delta: B \longrightarrow L$, έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό με ακριβείς στήλες:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{h} & A \\ \downarrow k & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{g} & C \\ \downarrow \delta & & \downarrow \epsilon \\ L & \xlongequal{\quad} & L \end{array} \tag{1.4}$$

Επιπλέον, αν οι g και ϵ είναι επιμορφισμοί, τότε και ο δ είναι επιμορφισμός.

4. Υποθέτουμε ότι η ακολουθία $E \xrightarrow{\epsilon} A \xrightarrow{f} C$ από αριστερά R -πρότυπα είναι ακριβής. Τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων $l: E \longrightarrow P$, έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό με ακριβείς στήλες:

$$\begin{array}{ccc} E & \xlongequal{\quad} & E \\ \downarrow l & & \downarrow \epsilon \\ P & \xrightarrow{h} & A \\ \downarrow k & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array} \tag{1.5}$$

Επιπλέον, αν ο ϵ είναι μονομορφισμός, τότε και ο l είναι μονομορφισμός.

Απόδειξη. 1. Έστω $(b, a) \in \text{Ker } k$, δηλαδή $(b, a) \in P$ και $k(b, a) = b = 0$. Επειδή το $(b, a) \in P$, εξ ορισμού έχουμε ότι $f(a) = g(b) = g(0) = 0$, και άρα, ότι $a \in \text{Ker } f$. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, καθώς και την υπόθεση ότι ο f είναι μονομορφισμός, έπεται ότι $a = 0$. Επομένως, παίρνουμε ότι $(b, a) = (0, 0)$, και κατ' επέκταση, ότι ο k είναι μονομορφισμός.

2. Έστω $b \in B$. Τότε $g(b) \in C$. Επειδή ο f είναι επιμορφισμός, υπάρχει κάποιο $a \in A$ έτσι ώστε $f(a) = g(b)$. Συνεπώς, $(b, a) \in P$ και $k(b, a) = b$. Άρα, ο k είναι επιμορφισμός.

3. Προφανώς, η σύνθεση $\delta = \epsilon \circ g$ είναι ο μοναδικός ομομορφισμός έτσι ώστε ολόκληρο το διάγραμμα (1.4) να είναι μεταθετικό. Μένει να δείξουμε λοιπόν ότι η ακολουθία $P \xrightarrow{k} B \xrightarrow{\delta} L$ είναι ακριβής. Παρατηρώντας ότι:

$$\delta \circ k = \epsilon \circ g \circ k = \epsilon \circ f \circ h = 0 \circ h = 0,$$

έπεται ότι $\text{Im } k \subseteq \text{Ker } \delta$. Για να πάρουμε τον αντίστροφο εγκλεισμό, θεωρούμε ένα $b \in \text{Ker } \delta$. Τότε $0 = \delta(b) = \epsilon \circ g(b) = \epsilon(g(b))$, και άρα, $g(b) \in \text{Ker } \epsilon = \text{Im } f$. Επομένως, υπάρχει κάποιο $a \in A$ έτσι ώστε $f(a) = g(b)$. Τότε όμως, έχουμε ότι $(b, a) \in P$ και ότι $b = k(b, a) \in \text{Im } k$. Συνεπώς, $\text{Ker } \delta \subseteq \text{Im } k$. Τέλος, είναι προφανές ότι ο δ είναι επιμορφισμός, όταν ο g και ο ϵ είναι επιμορφισμοί.

4. Για κάθε $e \in E$, έχουμε ότι $f(\epsilon(e)) = 0 = g(0)$. Ορίζουμε λοιπόν απεικόνιση

$$l: E \longrightarrow P, \quad e \longmapsto (0, \epsilon(e)).$$

Προφανώς, η απεικόνιση l είναι ένας καλώς ορισμένος ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων, έτσι ώστε $h \circ l = \epsilon$. Δηλαδή ο ομομορφισμός l συνθέτει το μεταθετικό διάγραμμα (1.5). Παρατηρώντας για κάθε $e \in E$ ότι:

$$(k \circ l)(e) = k(l(e)) = k(0, \epsilon(e)) = 0,$$

έπεται ότι $k \circ l = 0$, ή ισοδύναμα, ότι $\text{Im } l \subseteq \text{Ker } k$. Αντίστροφα, αν $(b, a) \in \text{Ker } k$, τότε $(b, a) \in P$ και $0 = k(b, a) = b$. Όμως, $f(a) = g(b)$. Επομένως, παίρνουμε ότι $f(a) = g(0) = 0$, δηλαδή ότι $a \in \text{Ker } f = \text{Im } \epsilon$. Συνεπώς, υπάρχει κάποιο $e \in E$ έτσι ώστε $\epsilon(e) = a$. Έτσι τελικά, έχουμε ότι $(b, a) = (0, \epsilon(e)) = l(e) \in \text{Im } l$, και κατ' επέκταση, ότι $\text{Ker } k \subseteq \text{Im } l$. Άρα, η ακολουθία $E \xrightarrow{l} P \xrightarrow{k} B$ είναι ακριβής. Μάλιστα, είναι εύκολο να δούμε ότι ο l είναι ο μοναδικός ομομορφισμός ο οποίος συνθέτει ένα μεταθετικό και ακριβές διάγραμμα, όπως το διάγραμμα (1.5).

Υποθέτουμε τώρα ότι ο ϵ είναι μονομορφισμός, και θεωρούμε ένα $e \in \text{Ker } l$. Τότε $l(e) = (0, \epsilon(e)) = (0, 0)$, και άρα, $\epsilon(e) = 0$. Δηλαδή, $e \in \text{Ker } \epsilon = 0$. Επομένως, ο l είναι επίσης μονομορφισμός. ■

Πρόταση 1.2.57. *Θεωρούμε το pushout D του διαγράμματος από ομομορφισμούς αριστερών R -προτύπων:*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ C & \xrightarrow{k} & D \end{array}$$

Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Αν ο f είναι μονομορφισμός, τότε και ο k είναι μονομορφισμός.
2. Αν ο f είναι επιμορφισμός, τότε και ο k είναι επιμορφισμός.
3. Υποθέτουμε ότι η ακολουθία $E \xrightarrow{\epsilon} A \xrightarrow{f} B$ από αριστερά R -πρότυπα είναι ακριβής. Τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων $\delta: E \longrightarrow C$, έτσι ώστε το ακόλουθο

διάγραμμα να είναι μεταθετικό με ακριβείς γραμμές:

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\epsilon} & A & \xrightarrow{f} & B \\ \parallel & & \downarrow g & & \downarrow h \\ E & \xrightarrow{\delta} & C & \xrightarrow{k} & D \end{array}$$

Επιπλέον, αν οι g και ϵ είναι μονομορφισμοί, τότε και ο δ είναι μονομορφισμός.

4. Υποθέτουμε ότι η ακολουθία $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\epsilon} L$ από αριστερά R -πρότυπα είναι ακριβής. Τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων $l: D \rightarrow L$, έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό με ακριβείς γραμμές:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{\epsilon} & L \\ \downarrow g & & \downarrow h & & \parallel \\ C & \xrightarrow{k} & D & \xrightarrow{l} & L \end{array}$$

Επιπλέον, αν ο ϵ είναι επιμορφισμός, τότε και ο l είναι επιμορφισμός.

Απόδειξη. Ανάλογα με την απόδειξη της Πρότασης (1.2.56). ■

Παρατήρηση 1.2.58. Εναλλακτικά, το pullback θα μπορούσε να οριστεί ως το αντίστροφο όριο του διαγράμματος (1.2), και το pushout ως το ευθύ όριο του διαγράμματος (1.3).

1.3 Δακτύλιοι Και Πρότυπα της Noether

Στην παρούσα ενότητα, ορίζουμε και μελετάμε δακτυλίους και πρότυπα της Noether. Οι έννοιες αυτές, θα μας είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στην συνέχεια της διατριβής.

Ορισμός 1.3.1. 1. Ένα αριστερό R -πρότυπο M ικανοποιεί **την αύξουσα συνθήκη αλυσίδας, (ascending chain condition)**, αν κάθε αύξουσα αλυσίδα υποπροτύπων του M

$$S_1 \subseteq S_2 \subseteq S_3 \subseteq \dots$$

είναι τελικά σταθερή. Δηλαδή, αν υπάρχει ένας θετικός ακέραιος n τέτοιος ώστε $S_i = S_n$ για κάθε $i \geq n$.

2. Ένα αριστερό R -πρότυπο M ικανοποιεί **την συνθήκη μεγίστου, (maximum condition)**, αν κάθε μη κενή οικογένεια F υποπροτύπων του M έχει ένα μέγιστο στοιχείο, δηλαδή, υπάρχει κάποιο $S_0 \in F$ για το οποίο δεν υπάρχει κάποιο $S \in F$ με $S_0 \subsetneq S$.

Πρόταση 1.3.2. Για κάθε αριστερό R -πρότυπο M , οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

1. Το M ικανοποιεί την αύξουσα συνθήκη αλυσίδας.
2. Το M ικανοποιεί την συνθήκη μεγίστου.
3. Κάθε υποπρότυπο του M είναι πεπερασμένα παραγόμενο.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [52, Proposition 3.15]. ■

Είμαστε έτοιμοι τώρα να εισάγουμε την έννοια ενός προτύπου και ενός δακτυλίου της Noether.

Ορισμός 1.3.3. Ένα αριστερό R -πρότυπο M καλείται **πρότυπο της Noether, (noetherian module)**, αν ικανοποιεί μία από τις ισοδύναμες συνθήκες της Πρότασης (1.3.2).

Ανάλογα ορίζεται ένα δεξιό R -πρότυπο της Noether.

Παράδειγμα 1.3.4. Προφανώς, κάθε πεπερασμένο R -πρότυπο είναι ένα πρότυπο της Noether.

Παρατήρηση 1.3.5. Είναι εύκολο να δούμε ότι αν $f: M \rightarrow N$ είναι ένας ισομορφισμός R -προτύπων, τότε το M είναι πρότυπο της Noether, αν και μόνο αν, το N πρότυπο της Noether. Επιπλέον, είναι φανερό ότι κάθε υποπρότυπο ενός προτύπου της Noether, είναι επίσης ένα πρότυπο της Noether.

Ορισμός 1.3.6. Ένας δακτύλιος R καλείται **αριστερός δακτύλιος της Noether, (left noetherian ring)**, αν ο δακτύλιος R είναι ένα πρότυπο της Noether, ως αριστερό R -πρότυπο.

Ανάλογα ορίζεται ένας δεξιός δακτύλιος της Noether. Επιπλέον, αν R είναι αριστερός και δεξιός δακτύλιος της Noether, τότε ο R καλείται **δακτύλιος της Noether (noetherian ring)**.

Τονίζουμε ξανά ότι ανάλογα αποτελέσματα με αυτά που θα παραθέσουμε στην συνέχεια της παρούσας ενότητας για αριστερά R -πρότυπα, ισχύουν και για δεξιά R -πρότυπα.

Χρησιμοποιώντας τους Ορισμούς (1.3.3) και (1.3.6), έπεται ότι:

Πόρισμα 1.3.7. Ένας δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether, αν και μόνο αν, κάθε αριστερό ιδεώδες του R είναι πεπερασμένα παραγόμενο.

- Παράδειγμα 1.3.8.**
1. Ο δακτύλιος των ακεραίων \mathbb{Z} είναι δακτύλιος της Noether. Πιο γενικά, κάθε περιοχή κύριων ιδεωδών είναι δακτύλιος της Noether.
 2. Κάθε δακτύλιος διαίρεσης D είναι δακτύλιος της Noether, αφού τα μόνα αριστερά ή δεξιά ιδεώδη του D είναι το 0 και ο D .
 3. Κάθε άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος είναι δακτύλιος της Noether. Για παράδειγμα η άλγεβρα των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από ένα σώμα και η άλγεβρα των $n \times n$ άνω τριγωνικών πινάκων με στοιχεία από ένα σώμα είναι δακτύλιοι της Noether.
 4. Έστω \mathbb{K} ένα σώμα, και $R = \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ ο δακτύλιος πολυωνύμων στις n μεταβλητές υπεράνω του \mathbb{K} . Τότε ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος της Noether, όπως προκύπτει από το Θεώρημα βάσης του Hilbert, [22].
 5. Μπορεί κανείς να δει εύκολα ότι αν R είναι ένας δακτύλιος της Noether, τότε για κάθε ιδεώδες I του R , ο δακτύλιος πηλίκου R/I είναι δακτύλιος της Noether. Ιδιαίτερα δακτύλιοι της μορφής $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]/I$, όπου I είναι ένα ιδεώδες, είναι δακτύλιοι της Noether. Δακτύλιοι αυτού του τύπου παίζουν θεμελιώδη ρόλο στην Αλγεβρική Γεωμετρία και τη Μεταθετική Άλγεβρα.

Πρόταση 1.3.9. Έστω $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ μια σύντομη ακριβής ακολουθία αριστερών R -προτύπων. Τότε το M είναι πρότυπο της Noether, αν και μόνο αν, τα M' και M'' είναι πρότυπα της Noether.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [27, Proposition 2.3.7] ■

Παρατήρηση 1.3.10. Η Πρόταση (1.3.9), μας εξασφαλίζει ότι κάθε ομομορφική εικόνα ενός αριστερού προτύπου της Noether, είναι επίσης ένα αριστερό πρότυπο της Noether.

Πρόταση 1.3.11. Για κάθε θετικό ακέραιο n , ένα ευθύ άθροισμα $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ από αριστερά R -πρότυπα είναι αριστερό πρότυπο της Noether, αν και μόνο αν, κάθε M_i είναι αριστερό R -πρότυπο της Noether.

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν θετικό ακέραιο n , και υποθέτουμε ότι το αριστερό R -πρότυπο $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ είναι πρότυπο της Noether. Επειδή κάθε υποπρότυπο ενός προτύπου της Noether είναι πρότυπο της Noether, και αφού κάθε M_i είναι ισόμορφο με ένα υποπρότυπο του $\bigoplus_{i=1}^n M_i$, έπεται ότι κάθε M_i είναι πρότυπο της Noether.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι κάθε M_i για $i = 1, \dots, n$, είναι πρότυπο της Noether, όπου ο n είναι ένας οποιοδήποτε θετικός ακέραιος αριθμός. Θα δείξουμε ότι το $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ είναι πρότυπο της

Noether με χρήση επαγωγής στον θετικό ακέραιο αριθμό n . Αν $n = 1$, τότε προφανώς ισχύει το ζητούμενο. Υποθέτουμε τώρα ότι το αριστερό R -πρότυπο $\bigoplus_{i=1}^m M_i$ είναι πρότυπο της Noether, για κάθε ακέραιο m με $1 \leq m < n$. Τότε θεωρώντας τη σύντομη ακριβή ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα:

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n M_i \longrightarrow M_n \longrightarrow 0,$$

και χρησιμοποιώντας την υπόθεση καθώς και την Πρόταση (1.3.9), παίρνουμε ότι το αριστερό R -πρότυπο $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ είναι πρότυπο της Noether, όπως επιθυμούσαμε. ■

Ως προφανή συνέπεια της Πρότασης (1.3.11), παίρνουμε ότι:

Πόρισμα 1.3.12. Ένας δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether, αν και μόνο αν, το ελεύθερο αριστερό R -πρότυπο $R^{(n)}$ είναι πρότυπο της Noether για κάθε ακέραιο $n \geq 1$.

Η ακόλουθη πρόταση χαρακτηρίζει έναν αριστερό δακτύλιο της Noether.

Πρόταση 1.3.13. Για έναν δακτύλιο R οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

1. Ο R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether.
2. Κάθε πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό R -πρότυπο είναι πρότυπο της Noether.
3. Κάθε υποπρότυπο ενός πεπερασμένα παραγόμενου αριστερού R -προτύπου είναι πεπερασμένα παραγόμενο.

Απόδειξη. (1 \Rightarrow 2): Υποθέτουμε ότι ο R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether. Τότε το Πόρισμα (1.3.12), μας δίνει ότι το ελεύθερο αριστερό R -πρότυπο $R^{(n)}$ είναι πρότυπο της Noether για κάθε ακέραιο $n \geq 1$. Αν M είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό R -πρότυπο, τότε το M είναι η ομομορφική εικόνα ενός $R^{(n)}$ για κάποιον ακέραιο $n \geq 1$. Συνεπώς, χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση (1.3.10), παίρνουμε ότι το M είναι αριστερό R -πρότυπο της Noether.

(2 \Rightarrow 3): Χρησιμοποιώντας την υπόθεση, και το γεγονός ότι κάθε υποπρότυπο ενός αριστερού R -προτύπου της Noether είναι πεπερασμένα παραγόμενο, έπεται τετριμμένα το ζητούμενο.

(3 \Rightarrow 1): Αν ισχύει το 3), τότε επειδή ο δακτύλιος R παράγεται ως αριστερό R -πρότυπο από το μονοσύνολο $\{1_R\}$, έχουμε ότι κάθε αριστερό ιδεώδες του R είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Έτσι, στην περίπτωση που ισχύει το 3), χρησιμοποιώντας το Πόρισμα (1.3.7) οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι ο R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether. ■

Πόρισμα 1.3.14. Αν ο δακτύλιος R είναι ένας αριστερός δακτύλιος της Noether, τότε ένα αριστερό R -πρότυπο M είναι πρότυπο της Noether, αν και μόνο αν, το M είναι πεπερασμένα παραγόμενο.

Απόδειξη. Αν M είναι ένα αριστερό R -πρότυπο της Noether, τότε προφανώς το M είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Αντίστροφα, αν M είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό R -πρότυπο, τότε η ισοδυναμία (1) \iff (2) της Πρότασης (1.3.13), μας δίνει ότι το M είναι πρότυπο της Noether. ■

Παρατήρηση 1.3.15. Αν ο δακτύλιος R είναι ένας αριστερός δακτύλιος της Noether, τότε χρησιμοποιώντας το Πόρισμα (1.3.14), είναι προφανές ότι για κάθε πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό R -πρότυπο M , υπάρχει μια ελεύθερη ανάλυση

$$\dots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

όπου κάθε F_i για $i \geq 0$, είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Ως συνέπεια αυτού, έπεται ότι αν ο R είναι ένας αριστερός δακτύλιος της Noether, τότε κάθε πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό R -πρότυπο είναι επίσης πεπερασμένα παραστάσιμο. Συνεπώς, *υπεράνω ενός αριστερού δακτυλίου της Noether, οι έννοιες «πεπερασμένα παραστάσιμο αριστερό πρότυπο» και «πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό πρότυπο» είναι ισοδύναμες.*

Ορισμός 1.3.16. Ένα αριστερό R -πρότυπο M καλείται **μη αναλύσιμο, (indecomposable)**, αν δεν υπάρχουν μη μηδενικά υποπρότυπα M_1 και M_2 του M , έτσι ώστε $M = M_1 \oplus M_2$. Δηλαδή, το M είναι μη αναλύσιμο, αν οι μόνοι ευθείς προσθετέοι του M είναι το 0 και το M .

Τα ενέσιμα πρότυπα υπεράνω τυχόντος δακτυλίου R δεν έχουν απαραίτητα μη αναλύσιμες αποσυνθέσεις. Ωστόσο, κάθε ενέσιμο πρότυπο υπεράνω ενός δακτυλίου R έχει μια μη αναλύσιμη αποσύνθεση, αν και μόνο αν, ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος της Noether.

Θεώρημα 1.3.17. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για έναν δακτύλιο R .

1. Ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether.
2. Κάθε ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο είναι ένα ευθύ άθροισμα από μη αναλύσιμα (ενέσιμα) πρότυπα.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [2, Theorem 25.6]. ■

Παρατήρηση 1.3.18. Η κλάση ισομορφίας των αντιπροσώπων των μη-αναλύσιμων ενέσιμων προτύπων σχηματίζουν ένα σύνολο, βλέπε [32].

Κεφάλαιο 2

Στοιχεία Θεωρίας Κατηγοριών

Στο παρόν κεφάλαιο αναπτύσσουμε τα στοιχεία από την βασική θεωρία κατηγοριών, τα οποία θα χρειασθούμε στη συνέχεια. Παρουσιάζουμε την έννοια μιας κατηγορίας, η οποία θα αποτελέσει όπως θα δούμε, το απαραίτητο συστατικό για τον ορισμό ενός συναρτητή, και μελετάμε βασικές ιδιότητες. Στη συνέχεια του κεφαλαίου αυτού, επικεντρωνόμαστε στη μελέτη συναρτητών καθώς και των αβελιανών κατηγοριών, οι οποίες αποτελούν το κατάλληλο πλαίσιο για την μελέτη της Ομολογικής Άλγεβρας και των εφαρμογών της.

2.1 Κατηγορίες

Οι κατηγορίες είναι το μαθηματικό εργαλείο που μας επιτρέπει να μελετάμε αντικείμενα, εφοδιασμένα με μια ορισμένη δομή, καθώς και τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να μεταβούμε από ένα αντικείμενο σε ένα άλλο αντικείμενο, διατηρώντας τη σχετική δομή. Σημειώνουμε ότι ο όρος κατηγορία εισήχθη κατά την περίοδο 1942 – 1945, από τους Samuel Eilenberg και Saunders Mac Lane.

Ορισμός 2.1.1. Μια κατηγορία (category) \mathcal{C} αποτελείται από:

1. Μια κλάση $\text{ob}(\mathcal{C})$, από στοιχεία τα οποία καλούνται αντικείμενα.
2. Για κάθε διατεταγμένο ζεύγος (A, B) από αντικείμενα της \mathcal{C} , υπάρχει ένα σύνολο $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, από στοιχεία τα οποία καλούνται μορφισμοί από το A στο B . Συμβολίζουμε έναν μορφισμό f από το A στο B , με $f: A \rightarrow B$.
3. Για κάθε τριάδα A, B, C από αντικείμενα της \mathcal{C} , υπάρχει μια απεικόνιση συνόλων:

$$\circ: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C), \quad (f, g) \mapsto g \circ f,$$

η οποία καλείται σύνθεση, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι τρεις ακόλουθες συνθήκες:

- (i) Για κάθε δύο διατεταγμένα ζεύγη (A, B) και (A', B') από αντικείμενα της \mathcal{C} , ισχύει ότι $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \cap \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A', B') = \emptyset$, στην περίπτωση κατά την οποία $(A, B) \neq (A', B')$.
- (ii) (Προσεταιριστικότητα της σύνθεσης): Για κάθε τετράδα A, B, C, D από αντικείμενα της \mathcal{C} , και για κάθε $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$, $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$, ισχύει ότι:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

- (iii) (Υπαρξη ουδέτερου στοιχείου για την σύνθεση): Για κάθε αντικείμενο A της \mathcal{C} , υπάρχει μορφισμός $1_A \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$, με την ιδιότητα:

$$f \circ 1_A = f \quad \& \quad 1_A \circ g = g$$

για κάθε $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$ και για κάθε $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$.

Σύμβαση: Καθ' όλη την έκταση του κεφαλαίου αυτού, συμβολίζουμε με \mathcal{C} μια τυχαία κατηγορία.

Παρατήρηση 2.1.2. Για κάθε αντικείμενο A της \mathcal{C} , ο μορφοισμός $1_A: A \rightarrow A$, καλείται ο **ταυτοτικός μορφοισμός (identity morphism)** του A , και μάλιστα είναι ο μοναδικός μορφοισμός που πληρεί την ιδιότητα που περιγράψαμε στο τρίτο αξίωμα του ορισμού της κατηγορίας \mathcal{C} . Για να το διαπιστώσουμε αυτό, υποθέτουμε ότι υπάρχει μορφοισμός $1'_A: A \rightarrow A$, τέτοιος ώστε $f \circ 1'_A = f$ και $1'_A \circ g = g$, για κάθε $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$ και για κάθε $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$. Τότε χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των μορφοισμών 1_A και $1'_A$, καταλήγουμε ότι $1_A = 1_A \circ 1'_A = 1'_A$.

Παράδειγμα 2.1.3. 1. Η κατηγορία Set των συνόλων: η κλάση $\text{ob}(\text{Set})$ αποτελείται από όλα τα σύνολα, οι μορφοισμοί είναι οι απεικονίσεις μεταξύ συνόλων, η σύνθεση είναι η προφανής σύνθεση απεικονίσεων.

2. Η κατηγορία Top των τοπολογικών χώρων: η κλάση $\text{ob}(\text{Top})$ αποτελείται από όλους τους τοπολογικούς χώρους, οι μορφοισμοί είναι οι συνεχείς απεικονίσεις μεταξύ τοπολογικών χώρων, η σύνθεση είναι η συνήθης σύνθεση απεικονίσεων.

3. Η κατηγορία ComTop των συμπαγών τοπολογικών χώρων: η κλάση $\text{ob}(\text{ComTop})$, αποτελείται από όλους τους συμπαγείς τοπολογικούς χώρους, οι μορφοισμοί είναι οι συνεχείς απεικονίσεις μεταξύ συμπαγών τοπολογικών χώρων, η σύνθεση είναι η σύνθεση απεικονίσεων.

4. Η κατηγορία Grp των ομάδων: η κλάση $\text{ob}(\text{Grp})$ αποτελείται από όλες τις ομάδες, οι μορφοισμοί είναι οι ομομορφοισμοί ομάδων, η σύνθεση είναι η συνήθης σύνθεση ομομορφοισμών ομάδων.

5. Η κατηγορία Ab των αβελιανών ομάδων: η κλάση $\text{ob}(\text{Ab})$ αποτελείται από όλες τις αβελιανές ομάδες, οι μορφοισμοί είναι οι ομομορφοισμοί (αβελιανών) ομάδων, η σύνθεση είναι η σύνθεση ομομορφοισμών ομάδων.

6. Αν R είναι ένας προσεταιριστικός δακτύλιος με μονάδα, τότε ορίζεται η κατηγορία $R\text{-Mod}$ των αριστερών R -προτύπων: η κλάση $\text{ob}(R\text{-Mod})$ αποτελείται από όλα τα αριστερά R -πρότυπα, οι μορφοισμοί είναι οι ομομορφοισμοί αριστερών R -προτύπων, η σύνθεση είναι η συνήθης σύνθεση ομομορφοισμών αριστερών R -προτύπων.

Παρόμοια ορίζεται η κατηγορία $\text{Mod-}R$ των δεξιών R -προτύπων.

7. Αν (S, \leq) είναι ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο, τότε ορίζεται η κατηγορία \underline{S} : η κλάση $\text{ob}(\underline{S})$ είναι το σύνολο S , και αν x και y είναι δύο οποιοδήποτε στοιχεία του συνόλου S , τότε το σύνολο όλων των μορφοισμών από το x στο y είναι:

$$\text{Hom}_{\underline{S}}(x, y) = \begin{cases} \{\star\} & , \text{αν } x \leq y \\ \emptyset & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Μια κατηγορία, όπως η \underline{S} , όπου η κλάση των αντικειμένων της είναι σύνολο καλείται **μικρή κατηγορία (small category)**.

Σχόλιο 2.1.4. Έναν μορφοισμό σε μια κατηγορία, μπορούμε να τον θεωρούμε διαισθητικά ως μια απεικόνιση. Ωστόσο, το Παράδειγμα (2.1.3) το 7, μας υπογραμμίζει το γεγονός ότι ένας μορφοισμός σε μια αυθαίρετη κατηγορία δεν είναι απαραίτητα απεικόνιση με την συνήθη έννοια.

Ορισμός 2.1.5. Για κάθε κατηγορία \mathcal{C} , υπάρχει η **δυϊκή (dual) κατηγορία** \mathcal{C}^{op} όπου η κλάση αντικειμένων $\text{ob}(\mathcal{C}^{\text{op}})$ ταυτίζεται με την κλάση $\text{ob}(\mathcal{C})$, το σύνολο των μορφοισμών από ένα αντικείμενο C της \mathcal{C}^{op} , σε ένα άλλο αντικείμενο C' της \mathcal{C}^{op} , είναι

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(C, C') = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C', C)$$

και για κάθε μορφοισμό $\beta: C \rightarrow C'$, $\alpha: C' \rightarrow C$, στην \mathcal{C}^{op} , ισχύει ότι $\alpha \star \beta = \beta \circ \alpha$, όπου \star συμβολίζει τη σύνθεση στην \mathcal{C}^{op} , και \circ παριστάνει τη σύνθεση στην \mathcal{C} .

Ορισμός 2.1.6. Μια κατηγορία \mathcal{C}' καλείται **υποκατηγορία (subcategory)** της κατηγορίας \mathcal{C} , αν

1. $\text{ob}(\mathcal{C}') \subseteq \text{ob}(\mathcal{C})$.
2. Για κάθε διατεταγμένους ζεύγος (A, B) από αντικείμενα της \mathcal{C}' , ισχύει ότι

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(A, B) \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B).$$

3. Για κάθε αντικείμενο A της \mathcal{C}' , ο ταυτοτικός μορφισμός 1_A , στην \mathcal{C}' και \mathcal{C} είναι ο ίδιος, και η σύνθεση δύο μορφισμών στην \mathcal{C}' , συμπίπτει με τη σύνθεση των μορφισμών αυτών στην \mathcal{C} .

Αν στον Ορισμό (2.1.6), ισχύει η ισότητα στο δεύτερο αξίωμα, τότε οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 2.1.7. Μια υποκατηγορία \mathcal{C}' της \mathcal{C} , καλείται **πλήρης υποκατηγορία (full subcategory)** της \mathcal{C} , αν $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ για κάθε διατεταγμένους ζεύγος (A, B) από αντικείμενα της κατηγορίας \mathcal{C}' .

Παρατήρηση 2.1.8. Είναι φανερό ότι για μια οποιαδήποτε υποκλάση S της κλάσης $\text{ob}(\mathcal{C})$, υπάρχει μια μοναδική πλήρης υποκατηγορία \mathcal{C}' της \mathcal{C} , τέτοια ώστε $\text{ob}(\mathcal{C}') = S$.

Παράδειγμα 2.1.9. 1. Η κλάση Ab των αβελιανών ομάδων, είναι πλήρης υποκατηγορία της κατηγορίας Grp των ομάδων.

2. Η κλάση ComTop των συμπαγών τοπολογικών χώρων, είναι πλήρης υποκατηγορία της κατηγορίας Top των τοπολογικών χώρων.

3. Αν \mathcal{C} είναι μια κατηγορία, τότε η υποκατηγορία \mathcal{C}' με αντικείμενα τα αντικείμενα της \mathcal{C} και μορφισμούς όλους του ισομορφισμούς μεταξύ αυτών, είναι μια υποκατηγορία της \mathcal{C} η οποία γενικά δεν είναι πλήρης.

Στο Κεφάλαιο 1, μελετώντας αριστερά πρότυπα υπεράνω ενός δακτυλίου R , και (ομο)μορφισμούς μεταξύ αυτών, μελετώντας δηλαδή την κατηγορία $R\text{-Mod}$, αναφέραμε ότι ένας ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων f , είναι μονομορφισμός, αντίστοιχα επιμορφισμός, αν και μόνο αν, ο ομομορφισμός f είναι ως απεικόνιση ένα προς ένα, αντίστοιχα επί. Επιπλέον, σημειώσαμε ότι ένας ομομορφισμός είναι ισομορφισμός, αν και μόνο αν, είναι συγχρόνως μονομορφισμός και επιμορφισμός. Είναι λογικό λοιπόν να αναρωτηθούμε, αν οι έννοιες μονομορφισμός, επιμορφισμός και ισομορφισμός, γενικεύονται σε μια τυχαία κατηγορία, όπου οι μορφισμοί μεταξύ αντικειμένων, δεν είναι υποχρεωτικά απεικονίσεις.

Ορισμός 2.1.10. Ένας μορφισμός $f: A \rightarrow B$ στην \mathcal{C} , καλείται **μονομορφισμός (monomorphism)**, αν για οποιοδήποτε δύο μορφισμούς $g, h: C \rightarrow A$ στην \mathcal{C} με $f \circ g = f \circ h$, τότε έπεται ότι $g = h$.

Δυσίκα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.1.11. Ένας μορφισμός $f: A \rightarrow B$ στην \mathcal{C} , καλείται **επιμορφισμός (epimorphism)**, αν για οποιοδήποτε δύο μορφισμούς $g, h: B \rightarrow C$ στην \mathcal{C} με $g \circ f = h \circ f$, τότε έπεται ότι $g = h$.

Ορισμός 2.1.12. Ένας μορφισμός $f: A \rightarrow B$ στην \mathcal{C} , καλείται **ισομορφισμός (isomorphism)**, αν υπάρχει μορφισμός $g: B \rightarrow A$ στη \mathcal{C} , τέτοιος ώστε $g \circ f = 1_A$, και $f \circ g = 1_B$. Τότε τα αντικείμενα A και B , καλούνται **ισόμορφα**.

Παρατήρηση 2.1.13. Είναι προφανές, ότι αν ο $f: A \rightarrow B$ είναι ένας ισομορφισμός στην \mathcal{C} , και $g: B \rightarrow A$ είναι ένας μορφισμός στη \mathcal{C} , όπως περιγράφηκε στον ορισμό (2.1.12), τότε ο μορφισμός g είναι μοναδικός, και για αυτό το λόγο, σημειώνεται με f^{-1} . Επιπλέον, αν R είναι ένας δακτύλιος, και θεωρήσουμε την κατηγορία $R\text{-Mod}$ των αριστερών R -προτύπων, τότε οι συνήθεις έννοιες ενός μονομορφισμού, επιμορφισμού και ισομορφισμού στη κατηγορία $R\text{-Mod}$, είναι ισοδύναμες, με τις αντίστοιχες έννοιες όπως ορίστηκαν προηγουμένως σε μια αυθαίρετη κατηγορία \mathcal{C} .

Λήμμα 2.1.14. *Αν $f: A \rightarrow B$ είναι ένας ισομορφισμός στην \mathcal{C} , τότε ο μορφισμός f είναι μονομορφισμός και επιμορφισμός στην \mathcal{C} .*

Απόδειξη. Θεωρούμε αρχικά, $g, h: C \rightarrow A$ δύο μορφισμούς στην \mathcal{C} , με την ιδιότητα, $f \circ g = f \circ h$. Επειδή ο μορφισμός f είναι ισομορφισμός στην \mathcal{C} , υπάρχει μοναδικός μορφισμός $f^{-1}: B \rightarrow A$, τέτοιος ώστε $f^{-1} \circ f = 1_A$ και $f \circ f^{-1} = 1_B$. Τότε χρησιμοποιώντας την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης, καθώς και τις ιδιότητες του ταυτοτικού μορφισμού 1_A , προκύπτουν οι ισότητες:

$$f^{-1} \circ (f \circ g) = (f^{-1} \circ f) \circ g = 1_A \circ g = g$$

και

$$f^{-1} \circ (f \circ h) = (f^{-1} \circ f) \circ h = 1_A \circ h = h$$

Όμως η υπόθεση μας δίνει την ισότητα $f \circ g = f \circ h$. Συνεπώς, έπεται ότι $g = h$, και κατ' επέκταση, ότι ο ισομορφισμός f είναι μονομορφισμός στην \mathcal{C} . Αν θεωρήσουμε τώρα δύο μορφισμούς $g', h': B \rightarrow C$ στην \mathcal{C} , με την ιδιότητα $g' \circ f = h' \circ f$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι ο ισομορφισμός f είναι επιμορφισμός στην \mathcal{C} . ■

Τονίζουμε ότι η αντίστροφη συνεπαγωγή του Λήμματος (2.1.14), δεν ισχύει γενικά σε μια τυχαία κατηγορία \mathcal{C} . Ωστόσο, στη συνέχεια του παρόντος κεφαλαίου θα διαπιστώσουμε ότι η συνεπαγωγή αυτή εξασφαλίζεται, όταν η κατηγορία \mathcal{C} είναι αβελιανή.

Ευθύς αμέσως μελετάμε αντικείμενα μιας κατηγορίας \mathcal{C} , τα οποία είναι εφοδιασμένα με μια ιδιαίτερη δομή.

Ορισμός 2.1.15. (Αρχικό αντικείμενο) Ένα αντικείμενο A της \mathcal{C} καλείται **αρχικό, (initial object)**, αν για κάθε αντικείμενο B της \mathcal{C} , υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\alpha: A \rightarrow B$. Δηλαδή, για κάθε αντικείμενο B της \mathcal{C} , το σύνολο $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ είναι μονοσύνολο.

Δυϊκά,

Ορισμός 2.1.16. (Τελικό αντικείμενο) Ένα αντικείμενο A της \mathcal{C} καλείται **τελικό, (terminal object)**, αν για κάθε αντικείμενο B της \mathcal{C} , υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\beta: B \rightarrow A$. Δηλαδή, για κάθε αντικείμενο B της \mathcal{C} , το σύνολο $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ είναι μονοσύνολο.

Στην περίπτωση που ένα αντικείμενο της \mathcal{C} , είναι συγχρόνως αρχικό και τελικό, παίρνουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 2.1.17. (Μηδενικό αντικείμενο) Ένα αντικείμενο A της \mathcal{C} καλείται **μηδενικό, (zero object)**, αν το A είναι συγχρόνως αρχικό και τελικό αντικείμενο.

Έχοντας ορίσει αρχικά, τελικά και μηδενικά αντικείμενα, σε μια τυχαία κατηγορία \mathcal{C} , φυσικά προκύπτουν τα ερωτήματα:

1. Υπάρχουν πάντα αρχικά ή τελικά ή μηδενικά αντικείμενα;
2. Αν υπάρχει αρχικό ή τελικό ή μηδενικό αντικείμενο, τότε είναι μοναδικό;

Σε μια τυχαία κατηγορία, δεν υπάρχουν πάντα αρχικά ή τελικά ή μηδενικά αντικείμενα. Στη συνέχεια θα παραθέσουμε παράδειγμα κατηγορίας, στην οποία υπάρχει αρχικό και τελικό αντικείμενο, αλλά όχι μηδενικό αντικείμενο. Ωστόσο, αν υπάρχει ένα αρχικό ή τελικό ή μηδενικό αντικείμενο στην υποκείμενη κατηγορία, τότε αυτό είναι μοναδικό με την ακόλουθη έννοια:

Πρόταση 2.1.18. Ένα αρχικό ή τελικό ή μηδενικό αντικείμενο στην \mathcal{C} , αν υπάρχει, είναι μοναδικό μέχρι ισομορφισμού.

Απόδειξη. Έστω A και A' δύο αρχικά αντικείμενα στην \mathcal{C} . Εξ ορισμού, υπάρχουν μοναδικοί μορφοισμοί $\phi: A \rightarrow A'$ και $\psi: A' \rightarrow A$ στην \mathcal{C} . Τότε προφανώς, οι συνθέσεις $\psi \circ \phi$ και $\phi \circ \psi$, ανήκουν στα μονοσύνολα $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ και $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A', A')$, αντίστοιχα. Όμως, $1_A \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ και $1_{A'} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A', A')$. Συνεπώς, καταλήγουμε ότι $\psi \circ \phi = 1_A$, και $\phi \circ \psi = 1_{A'}$, αποτέλεσμα το οποίο μας εξασφαλίζει ότι ο μορφοισμός ϕ είναι ένας ισομορφοισμός στην \mathcal{C} , με αντίστροφο μορφοισμό $\phi^{-1} = \psi$. Άρα, τα αρχικά αντικείμενα A και A' στην \mathcal{C} , είναι ισόμορφα. Ανάλογα αποδεικνύεται ότι ένα τελικό ή μηδενικό αντικείμενο στην \mathcal{C} , αν υπάρχει, είναι μοναδικό μέχρι ισομορφοισμού. ■

Παράδειγμα 2.1.19. 1. Στη κατηγορία Set των συνόλων, το μόνο αρχικό αντικείμενο είναι το κενό σύνολο, και τα τελικά αντικείμενα είναι ακριβώς τα μονοσύνολα. Συνεπώς, στη κατηγορία Set των συνόλων, δεν υπάρχουν μηδενικά αντικείμενα.

2. Στη κατηγορία Grp των ομάδων, τα αρχικά, τελικά, και μηδενικά αντικείμενα συμφωνούν, και είναι οι τετριμμένες ομάδες $\{0\}$, όπου με μηδέν σημειώνουμε το ταυτοτικό στοιχείο της εκάστοτε ομάδας. Ανάλογα, αποτελέσματα ισχύουν και για την κατηγορία Ab των αβελιανών ομάδων.

3. Στην κατηγορία $R\text{-Mod}$ των αριστερών R -προτύπων, όπου ο R συμβολίζει έναν δακτύλιο με μονάδα, τα αρχικά, τελικά, και μηδενικά αντικείμενα, είναι ακριβώς τα μηδενικά πρότυπα. Ομοίως, για την κατηγορία $\text{Mod-}R$ των δεξιών R -προτύπων.

Ορισμός 2.1.20. (Μηδενικός μορφοισμός) Έστω ότι η κατηγορία \mathcal{C} έχει μηδενικά αντικείμενα. Τότε για κάθε A, B αντικείμενα της \mathcal{C} , και για κάθε μηδενικό αντικείμενο Z της \mathcal{C} , ένας **μηδενικός μορφοισμός (zero morphism)** από το A στο B , είναι ένας μορφοισμός $0_B^A: A \rightarrow B$, τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{0_B^A} & B \\ \phi_A \downarrow & & \nearrow \phi_B \\ Z & & \end{array}$$

δηλαδή $0_B^A = \phi_B \circ \phi_A$, όπου οι μορφοισμοί ϕ_A και ϕ_B είναι μοναδικοί, αφού το Z είναι ένα μηδενικό αντικείμενο στην \mathcal{C} .

Παρατηρούμε ότι ο ορισμός ενός μηδενικού μορφοισμού, εξαρτάται από την επιλογή των αντικειμένων A, B καθώς και από την επιλογή του μηδενικού αντικειμένου Z . Ωστόσο, θα δούμε ευθύς αμέσως ότι ο ορισμός ενός μηδενικού μορφοισμού, είναι ανεξάρτητος από την επιλογή του μηδενικού αντικειμένου. Άρα, σε μια κατηγορία με μηδενικά αντικείμενα, για κάθε δύο αντικείμενα αυτής, A και B , εξ ορισμού υπάρχει πάντα ένας μηδενικός μορφοισμός από το A στο B , $0_B^A: A \rightarrow B$, και είναι μάλιστα μοναδικός. Έτσι, ένας μηδενικός μορφοισμός από το A στο B , καλείται ο μηδενικός μορφοισμός από το A στο B . Με άλλα λόγια, αν η τυχαία κατηγορία \mathcal{C} έχει μηδενικά αντικείμενα, τότε για κάθε διατεταγμένο ζεύγος (A, B) από αντικείμενα της \mathcal{C} , το σύνολο $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ είναι μη κενό, διότι ο μηδενικός μορφοισμός 0_B^A , είναι στοιχείο του συνόλου $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.

Πρόταση 2.1.21. Έστω ότι η κατηγορία \mathcal{C} έχει μηδενικά αντικείμενα. Τότε για κάθε δύο αντικείμενα A, B της \mathcal{C} , ο μηδενικός μορφοισμός 0_B^A , όπως ορίστηκε στον Ορισμό (2.1.20), είναι ανεξάρτητος από την επιλογή του μηδενικού αντικειμένου Z .

Απόδειξη. Έστω Z και Y δύο μηδενικά αντικείμενα της \mathcal{C} . Τότε χρησιμοποιώντας την Πρόταση (2.1.18), οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι τα μηδενικά αντικείμενα Z και Y είναι ισόμορφα, δηλαδή, υπάρχει ισομορφοισμός $\phi_Y: Z \rightarrow Y$ στην \mathcal{C} . Για την ακρίβεια, ο ισομορφοισμός ϕ_Y είναι μοναδικός, διότι το αντικείμενο Z , (ή το αντικείμενο Y), είναι μηδενικό. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του μηδενικού αντικειμένου, και τον ορισμό του μηδενικού μορφοισμού, συμπεραίνουμε την ύπαρξη μοναδικών μορφοισμών στην \mathcal{C} , $\phi_A: A \rightarrow Z$ και $\phi_B: Z \rightarrow B$,

τέτοιοι ώστε $0_B^A = \phi_B \circ \phi_A$, καθώς και την ύπαρξη μοναδικών μορφισμών $\phi'_A: A \rightarrow Y$ και $\phi'_B: Y \rightarrow B$. Αν θεωρήσουμε τώρα τη σύνθεση $\phi'_B \circ \phi_Y$, τότε προφανώς ο μορφισμός αυτός, είναι στοιχείο του μονοσυνόλου $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, B)$. Όμως, ο μορφισμός ϕ_B είναι επίσης στοιχείο του μονοσυνόλου $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, B)$. Συνεπώς, παίρνουμε ότι $\phi'_B \circ \phi_Y = \phi_B$. Ανάλογα, θεωρώντας τη σύνθεση $\phi_Y \circ \phi_A$, έχουμε ότι ο μορφισμός αυτός, είναι στοιχείο του μονοσυνόλου $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Y)$. Ωστόσο, ο μορφισμός ϕ'_A , είναι επίσης στοιχείο του μονοσυνόλου $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Y)$. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι $\phi_Y \circ \phi_A = \phi'_A$. Αν συνδυάσουμε τις προηγούμενες σχέσεις, τότε προκύπτει ότι

$$0_B^A = \phi_B \circ \phi_A = \phi'_B \circ \phi_Y \circ \phi_A = \phi'_B \circ \phi'_A,$$

αποτέλεσμα το οποίο μας εξασφαλίζει ότι ο ορισμός του μηδενικού μορφισμού 0_B^A , είναι ανεξάρτητος από την επιλογή του μηδενικού αντικείμενου Z . ■

Συνεχίζουμε παραθέτοντας κάποιες βασικές ιδιότητες του μηδενικού μορφισμού, και εξετάζοντας το μηδενικό μορφισμό σε κατηγορίες με μηδενικά αντικείμενα που έχουμε ήδη μελετήσει.

Πρόταση 2.1.22. *Έστω ότι η κατηγορία \mathcal{C} έχει μηδενικά αντικείμενα. Τότε για τυχόντα αντικείμενα A, B, C, D της \mathcal{C} , και για κάθε μορφισμό $f: B \rightarrow C$ στην \mathcal{C} , ισχύουν οι ισότητες:*

- (i) $f \circ 0_B^A = 0_C^A$.
- (ii) $0_D^C \circ f = 0_D^B$.

Απόδειξη. Έστω Z ένα μηδενικό αντικείμενο της \mathcal{C} . Τότε υπάρχουν μοναδικοί μορφισμοί στην \mathcal{C} , $\phi_A: A \rightarrow Z$, $\phi_B: Z \rightarrow B$ και $\phi_C: Z \rightarrow C$, με την ιδιότητα $0_B^A = \phi_B \circ \phi_A$, και $0_C^A = \phi_C \circ \phi_A$. Παρατηρώντας ότι οι μορφισμοί $f \circ \phi_B$ και ϕ_C , είναι στοιχεία του μονοσυνόλου $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, C)$, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι $f \circ \phi_B = \phi_C$. Αν χρησιμοποιήσουμε λοιπόν τις προηγούμενες ισότητες, καθώς και την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης, τότε παίρνουμε ότι

$$f \circ 0_B^A = f \circ (\phi_B \circ \phi_A) = (f \circ \phi_B) \circ \phi_A = \phi_C \circ \phi_A = 0_C^A,$$

δηλαδή ότι ισχύει η συνθήκη (i). Παρόμοια αποδεικνύεται και η συνθήκη (ii), και έτσι, ολοκληρώσαμε την απόδειξη της πρότασης αυτής. ■

Παράδειγμα 2.1.23. 1. Στην κατηγορία Grp των ομάδων, ο μηδενικός μορφισμός από μια ομάδα G , σε μια ομάδα H , είναι ο ομομορφισμός ομάδων $0_H^G: G \rightarrow H$, που απεικονίζει κάθε στοιχείο της ομάδας G , στο ταυτοτικό στοιχείο 0 της ομάδας H . Όμοια αποτελέσματα ισχύουν στην κατηγορία Ab των αβελιανών ομάδων.

- 2. Αν R είναι ένας δακτύλιος, τότε ο μηδενικός μορφισμός στην κατηγορία $R\text{-Mod}$ των αριστερών R -προτύπων, από ένα αριστερό R -πρότυπο M , σε ένα αριστερό R -πρότυπο N , είναι ο μηδενικός ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων, δηλαδή, ο ομομορφισμός $0_N^M: M \rightarrow N$, που απεικονίζει κάθε στοιχείο του M , στο 0 . Ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν στην κατηγορία $\text{Mod-}R$ των δεξιών R -προτύπων.

Σύμβαση: Αν η κατηγορία \mathcal{C} έχει μηδενικά αντικείμενα, από τώρα και στο εξής συμβολίζουμε ένα μηδενικό αντικείμενο της \mathcal{C} , καθώς και έναν μηδενικό μορφισμό στην \mathcal{C} , με 0 .

Παρατήρηση 2.1.24. 1. Ένας μορφισμός $f: B \rightarrow C$ σε μια κατηγορία με μηδενικά αντικείμενα είναι μονομορφισμός, αν $f \circ \alpha = 0$, τότε συνεπάγεται ότι $\alpha = 0$ για κάθε μορφισμό $\alpha: X \rightarrow B$. Δυσικά, ο f είναι επιμορφισμός σε μια κατηγορία με μηδενικά αντικείμενα, αν $\beta \circ f = 0$, τότε συνεπάγεται ότι $\beta = 0$ για κάθε μορφισμό $\beta: C \rightarrow X$.

- 2. Για μια κατηγορία \mathcal{C} με μηδενικά αντικείμενα, ισχύει η ακόλουθη ισοδυναμία:

$$1_C = 0 \iff C = 0, \quad \forall C \in \text{ob}(\mathcal{C}).$$

Ορισμός 2.1.25. Ένα **γινόμενο (product)** μιας οικογένειας $(A_i)_{i \in I}$ από αντικείμενα της \mathcal{C} , είναι ένα αντικείμενο A στη \mathcal{C} , μαζί με μια οικογένεια μορφισμών $\{\pi_i: A \rightarrow A_i\}_{i \in I}$ στην \mathcal{C} , με την ιδιότητα, για κάθε αντικείμενο B στη \mathcal{C} , και για κάθε οικογένεια μορφισμών $\{f_i: B \rightarrow A_i\}_{i \in I}$ στην \mathcal{C} , υπάρχει μοναδικός μορφισμός $f: B \rightarrow A$ στην \mathcal{C} , τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\pi_i} & A_i \\ & \swarrow \exists! f & \uparrow f_i \\ & & B \end{array}$$

Το αντικείμενο A είναι μοναδικό μέχρι ισομορφισμού, και σημειώνεται με $\prod_{i \in I} A_i$.

Δυϊκά,

Ορισμός 2.1.26. Ένα **συνγινόμενο (coproduct)** μιας οικογένειας $(A_i)_{i \in I}$ από αντικείμενα της \mathcal{C} , είναι ένα αντικείμενο A στη \mathcal{C} , μαζί με μια οικογένεια μορφισμών $\{\varepsilon_i: A_i \rightarrow A\}_{i \in I}$ στην \mathcal{C} , με την ιδιότητα, για κάθε αντικείμενο B στην \mathcal{C} , και για κάθε οικογένεια μορφισμών $\{f_i: A_i \rightarrow B\}_{i \in I}$ στη \mathcal{C} , υπάρχει μοναδικός μορφισμός $f: A \rightarrow B$ στην \mathcal{C} , τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{\varepsilon_i} & A \\ f_i \downarrow & \swarrow \exists! f & \\ & & B \end{array}$$

Το αντικείμενο A είναι μοναδικό μέχρι ισομορφισμού, και σημειώνεται με $\coprod A_i$.

Είναι γνωστό ότι αν το σύνολο I είναι πεπερασμένο, τότε το γινόμενο $\prod A_i$ και το συνγινόμενο $\coprod A_i$, αν υπάρχουν, είναι ισόμορφα [55].

- Παράδειγμα 2.1.27.** 1. Στην κατηγορία Ab των αβελιανών ομάδων, τα γινόμενα συμπίπτουν με τα συνήθη γινόμενα αβελιανών ομάδων και τα συνγινόμενα συμπίπτουν με τα συνήθη (εξωτερικά) ευθέα αθροίσματα αβελιανών ομάδων. Γενικότερα:
2. Αν R είναι ένας δακτύλιος, και \mathcal{C} είναι η κατηγορία $R\text{-Mod}$, τότε το γινόμενο μιας οικογένειας $(A_i)_{i \in I}$ από αντικείμενα της \mathcal{C} , είναι το ευθύ γινόμενο των A_i , $\prod_{i \in I} A_i$, ενώ το συνγινόμενο μιας οικογένειας $(A_i)_{i \in I}$ από αντικείμενα της \mathcal{C} , είναι το ευθύ άθροισμα των A_i , $\bigoplus_{i \in I} A_i$.
 3. Αν η κατηγορία \mathcal{C} έχει μηδενικά αντικείμενα, τότε ένα μηδενικό αντικείμενο της \mathcal{C} , είναι ένα γινόμενο και ένα συνγινόμενο μιας κενής οικογένειας από αντικείμενα της \mathcal{C} .

Παρατήρηση 2.1.28. Έστω $(A_i)_{i \in I}$ μια οικογένεια από αντικείμενα της \mathcal{C} όπου $A_i = A$. Θέτουμε A^I το γινόμενο των A_i και $A^{(I)}$ το συνγινόμενο των A_i . Τότε έχουμε έναν *διαγώνιο μορφισμό* $\Delta: A \rightarrow A^I$ έτσι ώστε $\pi \circ \Delta = 1_A$ για κάθε $i \in I$, και *δυϊκά*, έναν *συνδιαγώνιο μορφισμό* $\nabla: A^{(I)} \rightarrow A$ έτσι ώστε $\nabla \circ e_i = 1_A$ για κάθε $i \in I$. Τότε ο μορφισμός Δ είναι υποχρεωτικά μονομορφισμός και ο μορφισμός ∇ είναι υποχρεωτικά επιμορφισμός.

Ορισμός 2.1.29. Μια κατηγορία \mathcal{C} καλείται **υποπροσθετική, (preadditive)**, αν για κάθε δύο αντικείμενα A, B της \mathcal{C} , το σύνολο $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ είναι μια (προσθετική) αβελιανή ομάδα, και η σύνθεση μορφισμών στην \mathcal{C} είναι διγραμμική, δηλαδή, για κάθε $f, f_1, f_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, και για κάθε $g, g_1, g_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$, ισχύει ότι:

$$g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2, \quad \& \quad (g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f.$$

Παράδειγμα 2.1.30. 1. Η κατηγορία Ab είναι υποπροσθετική. Για τυχούσες αβελιανές ομάδες A, B , είναι εύκολο να δούμε ότι το σύνολο $\text{Hom}_{\text{Ab}}(A, B)$ είναι μια αβελιανή ομάδα, μέσω της πράξης:

$$+ : \text{Hom}_{\text{Ab}}(A, B) \times \text{Hom}_{\text{Ab}}(A, B) \longrightarrow \text{Hom}_{\text{Ab}}(A, B), \quad (f, g) \longmapsto f + g,$$

όπου $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ για κάθε $x \in A$. Επιπλέον, η διγραμμικότητα της σύνθεσης, εξασφαλίζεται από τον τρόπο που ορίσαμε την πρόσθεση στα σύνολα των μορφισμών στην Ab , καθώς και από τον ορισμό ενός ομομορφισμού αβελιανών ομάδων.

2. Αν R είναι δακτύλιος, τότε η κατηγορία $R\text{-Mod}$ είναι επίσης υποπροσθετική, αφού το Παράδειγμα (1.1.13), το 3 και το 4, μας δίνει ότι για κάθε αριστερό R -πρότυπο M, N , το σύνολο $\text{Hom}_R(M, N)$ είναι μια προσθετική αβελιανή ομάδα, και ότι η σύνθεση είναι διγραμμική.

Τονίζουμε ότι υπάρχουν κατηγορίες οι οποίες δεν είναι υποπροσθετικές. Παραδείγματος χάριν, η κατηγορία Grp των ομάδων δεν είναι υποπροσθετική κατηγορία, αφού δεν είναι εφικτό να ορίσουμε πρόσθεση στα σύνολα των μορφισμών δύο ομάδων έτσι ώστε να ικανοποιείται ο Ορισμός (2.1.29).

Ορισμός 2.1.31. Μια κατηγορία \mathcal{C} καλείται **προσθετική**, (**additive**), αν ικανοποιούνται τα ακόλουθα αξιώματα:

1. Η κατηγορία \mathcal{C} είναι υποπροσθετική.
2. Η κατηγορία \mathcal{C} έχει μηδενικά αντικείμενα.
3. Η κατηγορία \mathcal{C} έχει πεπερασμένα γινόμενα (και πεπερασμένα συνγινόμενα).

Παρατήρηση 2.1.32. Το πρώτο αξίωμα, ή το δεύτερο αξίωμα του Ορισμού (2.1.31), μας εξασφαλίζει ότι κάθε σύνολο μορφισμών σε μια προσθετική κατηγορία \mathcal{C} είναι μη κενό. Επιπλέον, εύκολα βλέπουμε ότι αν η \mathcal{C} είναι προσθετική κατηγορία, και C, C' είναι δύο οποιαδήποτε αντικείμενα της \mathcal{C} , τότε το ουδέτερο (ως προς την πρόσθεση) στοιχείο της αβελιανής ομάδας $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')$ είναι ο μηδενικός μορφισμός από το C στο C' .

Παράδειγμα 2.1.33. Η κατηγορία $R\text{-Mod}$, όπου R είναι ένας προσεταιριστικός δακτύλιος με μονάδα, καθώς και η κατηγορία Ab είναι προσθετικές.

Συμβολισμός: Αν \mathcal{C} είναι μια προσθετική κατηγορία, τότε το συνγινόμενο μιας οικογένειας $\{A_i\}_{i \in I}$ από αντικείμενα της \mathcal{C} , καλείται *ευθύ άθροισμα* και συμβολίζεται με $\bigoplus_{i \in I} A_i$.

2.2 Συναρτητές

Στην ενότητα αυτή, ορίζουμε και μελετάμε συναλλοίωτους και αντισυναλλοίωτους συναρτητές. Στην θεωρία κατηγοριών, το ανάλογο μιας συνάρτησης μεταξύ δύο συνόλων, είναι ένας συναρτητής μεταξύ δύο κατηγοριών.

Ορισμός 2.2.1. Έστω \mathcal{C} και \mathcal{D} δύο κατηγορίες. Τότε ένας **συναλλοίωτος συναρτητής (covariant functor)** $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ αποιεφείται από τα εξής δεδομένα:

1. Μία απεικόνιση

$$F : \text{ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{ob}(\mathcal{D})$$

$$A \longmapsto F(A).$$

2. Για κάθε δύο αντικείμενα A και B της \mathcal{C} , υπάρχει μια απεικόνιση

$$F_{A,B} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$$

$$f \longmapsto F(f),$$

έτσι ώστε:

- (a) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ για κάθε μορφισμό $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ και για κάθε μορφισμό $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$.
- (b) $F(\text{Id}_A) = \text{Id}_{F(A)}$ για κάθε αντικείμενο A της \mathcal{C} .

Παράδειγμα 2.2.2. 1. **Ταυτοτικοί Συναρτητές (Identity Functors):** Για μια κατηγορία \mathcal{C} , ο ταυτοτικός συναλλοίωτος συναρτητής $\text{Id}_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, ορίζεται ως $\text{Id}_{\mathcal{C}}(A) = A$ για κάθε αντικείμενο A της \mathcal{C} , και αν $f: A \rightarrow B$ είναι ένας μορφισμός στην \mathcal{C} , τότε

$$\text{Id}_{\mathcal{C}}(f): \text{Id}_{\mathcal{C}}(A) = A \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{C}}(B) = B$$

2. **Συναρτητές Φυσικής Έγκλεισης (Embedding Functors):** Αν \mathcal{D} είναι μια υποκατηγορία μιας κατηγορίας \mathcal{C} , τότε ο συναλλοίωτος συναρτητής φυσικής έγκλεισης $i: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ ορίζεται ως $i(D) = D$ και $i(f) = f$ για κάθε αντικείμενο D της \mathcal{D} , και για κάθε μορφισμό f στην \mathcal{D} .
3. **Ο Συναλλοίωτος Συναρτητής $\text{Hom}_R(X, -)$:** Έστω X ένα αριστερό R -πρότυπο. Ορίζουμε

$$\text{Hom}_R(X, -): R\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$$

$$M \mapsto \text{Hom}_R(X, M)$$

Αν $f: M \rightarrow N$ είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων, τότε θέτουμε

$$\text{Hom}_R(X, -)(f) = f_*$$

όπου

$$f_*: \text{Hom}_R(X, M) \rightarrow \text{Hom}_R(X, N)$$

$$h \mapsto f_*(h) = f \circ h.$$

Με αυτό τον τρόπο ορίζεται ένας συναλλοίωτος συναρτητής $\text{Hom}_R(X, -): R\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$.

4. **Οι Συναλλοίωτοι Συναρτητές $- \otimes_R X$ και $X \otimes_R -$:**

- (a) Έστω X ένα αριστερό R -πρότυπο. Ορίζουμε

$$- \otimes_R X: \text{Mod-}R \rightarrow \text{Ab}$$

$$M \mapsto M \otimes_R X$$

Αν $f: M \rightarrow N$ είναι ένας ομομορφισμός δεξιών R -προτύπων, τότε θέτουμε

$$(- \otimes_R X)(f) = f \otimes \text{Id}_X,$$

όπου

$$f \otimes \text{Id}_X: M \otimes_R X \rightarrow N \otimes_R X$$

$$\sum_{i=1}^k n_i(x_i \otimes y_i) \mapsto \sum_{i=1}^k n_i(f(x_i) \otimes y_i).$$

Με αυτό τον τρόπο ορίζεται ένας συναλλοίωτος συναρτητής $- \otimes_R X: \text{Mod-}R \rightarrow \text{Ab}$.

- (b) Έστω X ένα δεξιό R -πρότυπο. Ορίζουμε

$$X \otimes_R -: R\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$$

$$M \mapsto X \otimes_R M$$

Αν $f: M \rightarrow N$ είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων, τότε θέτουμε

$$(X \otimes_R -)(f) = \text{Id}_X \otimes f,$$

όπου

$$\begin{aligned} \text{Id}_X \otimes f: X \otimes_R M &\longrightarrow X \otimes_R N \\ \sum_{i=1}^k n_i(x_i \otimes y_i) &\longmapsto \sum_{i=1}^k n_i(x_i \otimes f(y_i)). \end{aligned}$$

Με αυτό τον τρόπο ορίζεται ένας συναλλοίωτος συναρτητής $X \otimes_R -: R\text{-Mod} \longrightarrow \text{Ab}$.

Στην συνέχεια ορίζουμε την έννοια του αντισυναλλοίωτου συναρτητή. Ένας αντισυναλλοίωτος συναρτητής $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ είναι απλώς ένας συναλλοίωτος συναρτητής $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{D}$, ή ένας συναλλοίωτος συναρτητής $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}^{\text{op}}$. Αναλυτικότερα:

Ορισμός 2.2.3. Έστω \mathcal{C} και \mathcal{D} δύο κατηγορίες. Τότε ένας **αντισυναλλοίωτος συναρτητής (contravariant functor)** $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ αποτελείται από τα εξής δεδομένα:

1. Μία απεικόνιση

$$\begin{aligned} F: \text{ob}(\mathcal{C}) &\longrightarrow \text{ob}(\mathcal{D}) \\ A &\longmapsto F(A). \end{aligned}$$

2. Για κάθε δύο αντικείμενα A και B της \mathcal{C} , υπάρχει μια απεικόνιση

$$\begin{aligned} F_{A,B}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) &\longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(B), F(A)) \\ f &\longmapsto F(f), \end{aligned}$$

έτσι ώστε:

- (a) $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ για κάθε μορφισμό $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ και για κάθε μορφισμό $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$.
- (b) $F(\text{Id}_A) = \text{Id}_{F(A)}$ για κάθε αντικείμενο A της \mathcal{C} .

Παράδειγμα 2.2.4. Ο Αντισυναλλοίωτος Συναρτητής $\text{Hom}_R(-, X)$: Έστω X ένα αριστερό R -πρότυπο. Ορίζουμε

$$\begin{aligned} \text{Hom}_R(-, X): R\text{-Mod} &\longrightarrow \text{Ab} \\ M &\longmapsto \text{Hom}_R(M, X) \end{aligned}$$

Αν $f: M \longrightarrow N$ είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R -πρωτύπων, τότε θέτουμε

$$\text{Hom}_R(-, X)(f) = f^*,$$

όπου

$$\begin{aligned} f^*: \text{Hom}_R(N, X) &\longrightarrow \text{Hom}_R(M, X) \\ h &\longmapsto f^*(h) = h \circ f. \end{aligned}$$

Με αυτό τον τρόπο ορίζεται ένας αντισυναλλοίωτος συναρτητής $\text{Hom}_R(-, X): R\text{-Mod} \longrightarrow \text{Ab}$.

Παρατήρηση 2.2.5. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η σύνθεση $G \circ F$ δύο συναλλοίωτων συναρτητών $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ και $G: \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{A}$, η οποία ορίζεται κατά τον προφανή τρόπο, είναι ένας συναλλοίωτος συναρτητής, ενώ αν τουλάχιστον ένας από τους συναρτητές F και G είναι αντισυναλλοίωτος, τότε η σύνθεση $G \circ F$ είναι ένας αντισυναλλοίωτος συναρτητής.

Πρόταση 2.2.6. Έστω $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ένας συναλλοίωτος ή αντισυναλλοίωτος συναρτητής. Τότε αν f είναι ένας ισομορφισμός στην \mathcal{C} , τότε ο μορφισμός $F(f)$ είναι ένας ισομορφισμός στην \mathcal{D} .

Απόδειξη. Έστω $f: A \longrightarrow B$ ένας ισομορφισμός στην \mathcal{C} . Τότε $f^{-1} \circ f = 1_A$ και $f \circ f^{-1} = 1_B$. Εφαρμόζοντας τον συναλλοίωτο ή αντισυναλλοίωτο συναρτητή F στην προηγούμενες ισότητες, έπεται ότι ο μορφισμός $F(f)$ είναι ισομορφισμός στην \mathcal{D} με $F(f)^{-1} = F(f^{-1})$. ■

Ορισμός 2.2.7. Αν \mathcal{C} και \mathcal{D} είναι δύο (υπο)προσθετικές κατηγορίες, τότε ένας συναλλοιώτος συναρτητής $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ καλείται **προσθετικός, (additive functor)**, αν $F(f + g) = F(f) + F(g)$ για κάθε $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ και για κάθε $A, B \in \text{ob}(\mathcal{C})$. Ισοδύναμα, αν η απεικόνιση

$$F_{A,B}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B)), \quad f \mapsto F(f),$$

είναι ομομορφισμός αβελιανών ομάδων για κάθε $A, B \in \text{ob}(\mathcal{C})$.

Ανάλογα ορίζεται ένας αντισυναλλοιώτος προσθετικός συναρτητής.

Παράδειγμα 2.2.8. Είναι εύκολο να δούμε ότι οι συναρτητές Hom και \otimes σε κάθε μεταβλητή, είναι προσθετικοί συναρτητές.

Ορισμός 2.2.9. Ένας συναλλοιώτος συναρτητής $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ καλείται **πιστός, (faithful)**, αν η απεικόνιση

$$F_{A,B}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B)),$$

είναι «1-1» για κάθε $A, B \in \text{ob}(\mathcal{C})$, ενώ ο F καλείται **πλήρης, (full)**, αν η απεικόνιση $F_{A,B}$ είναι «επί» για κάθε $A, B \in \text{ob}(\mathcal{C})$. Έτσι, αν \mathcal{C}, \mathcal{D} είναι (υπο)προσθετικές κατηγορίες, και $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ είναι ένας προσθετικός συναλλοιώτος συναρτητής, τότε ο F είναι πλήρης και πιστός, αν κάθε ομομορφισμός αβελιανών ομάδων $F_{A,B}$ για $A, B \in \text{ob}(\mathcal{C})$, είναι ένας ισομορφισμός.

Παρόμοιες είναι οι έννοιες ενός πιστού ή πλήρους αντισυναλλοιώτου συναρτητή.

Παράδειγμα 2.2.10. Προφανώς, αν \mathcal{D} είναι μια πλήρης υποκατηγορία μιας κατηγορίας \mathcal{C} , τότε ο συναλλοιώτος συναρτητής έγκλεισης $i: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ είναι πλήρης και πιστός.

Αντίστροφα, αν $i: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ είναι ένας πλήρης και πιστός συναλλοιώτος συναρτητής, τότε $\text{Im}(i) = \{C \in \text{ob}(\mathcal{C}) \mid C \cong i(D), D \in \mathcal{D}\}$ είναι μια πλήρης υποκατηγορία της \mathcal{C} η οποία είναι «ισοδύναμη» με την \mathcal{D} .

Για τις ανάγκες της επόμενης πρότασης, συμβολίζουμε προσωρινά κάθε μηδενικό μορφοισμό με 0 , και κάθε μηδενικό αντικείμενο με $\{0\}$.

Πρόταση 2.2.11. Έστω \mathcal{C} και \mathcal{D} δύο προσθετικές κατηγορίες, και $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ένας προσθετικός συναλλοιώτος ή αντισυναλλοιώτος συναρτητής. Τότε ο F διατηρεί μηδενικούς μορφοισμούς και μηδενικά αντικείμενα.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ είναι ένας προσθετικός συναλλοιώτος συναρτητής. Τότε για οποιαδήποτε δύο αντικείμενα A και B της \mathcal{C} , οι απεικονίσεις

$$F_{A,B}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B)), \quad f \mapsto F(f),$$

είναι ομομορφισμοί αβελιανών ομάδων. Επειδή κάθε ομομορφισμός αβελιανών ομάδων διατηρεί το ταυτοτικό στοιχείο, έπεται ότι για κάθε A και B αντικείμενα της \mathcal{C} , ο μηδενικός μορφοισμός από το A στο B αντιστοιχίζεται μέσω του $F_{A,B}$, στον μηδενικό μορφοισμό από το $F(A)$ στο $F(B)$, δηλαδή, ότι $F(0) = 0$. Έστω τώρα $\{0\}$ ένα μηδενικό αντικείμενο στην \mathcal{C} . Τότε η Παρατήρηση (2.1.24), μας δίνει ότι $1_{\{0\}} = 0: \{0\} \rightarrow \{0\}$. Άρα, $1_{F(\{0\})} = F(1_{\{0\}}) = F(0)$. Όμως από πριν έχουμε ότι $F(0) = 0$. Έτσι τελικά, παίρνουμε ότι $1_{F(\{0\})} = 0$. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, καθώς και την Παρατήρηση (2.1.24) ξανά, συμπεραίνουμε ότι το $F(\{0\})$ είναι ένα μηδενικό αντικείμενο στην \mathcal{D} , δηλαδή, ότι $F(\{0\}) = \{0\}$.

Ανάλογα αποδεικνύεται το ζητούμενο, στην περίπτωση που ο συναρτητής F είναι αντισυναλλοιώτος. ■

Πρόταση 2.2.12. Έστω \mathcal{C} και \mathcal{D} δύο υποπροσθετικές κατηγορίες στις οποίες υπάρχουν πεπερασμένα γινόμενα. Τότε ένας συναρτητής $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ είναι προσθετικός, αν και μόνο αν, διατηρεί πεπερασμένα γινόμενα.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [55, Proposition 3.3, Chapter IV] ■

Ως προφανή συνέπεια της Πρότασης (2.2.12), έχουμε ότι:

Πόρισμα 2.2.13. Αν \mathcal{C} και \mathcal{D} είναι δύο προσθετικές κατηγορίες, τότε ένας συναρτητής $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ είναι προσθετικός, αν και μόνο αν, διατηρεί πεπερασμένα ευθέα αθροίσματα.

2.2.1 Ακριβείς Συναρτητές Μεταξύ Κατηγοριών Προτύπων

Επικεντρωνόμαστε τώρα σε (αριστερά ή δεξιά) ακριβείς συναρτητές μεταξύ κατηγοριών προτύπων. Όπως θα διαπιστώσουμε, συναλλοίωτοι ή αντισυναλλοίωτοι ακριβείς συναρτητές είναι ακριβώς εκείνοι οι συναρτητές που στέλνουν σύντομες ακριβείς ακολουθίες σε σύντομες ακριβείς ακολουθίες.

Έστω R και S δακτύλιοι, και $F: R\text{-Mod} \rightarrow S\text{-Mod}$ ένας προσθετικός συναλλοίωτος συναρτητής.

Ορισμός 2.2.14. Ο συναλλοίωτος συναρτητής $F: R\text{-Mod} \rightarrow S\text{-Mod}$ καλείται **αριστερά ακριβής, (left exact functor)**, αν η ακρίβεια της ακολουθίας αριστερών R -προτύπων

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

συνεπάγεται την ακρίβεια της ακολουθίας αριστερών S -προτύπων

$$0 \longrightarrow F(M') \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(M'')$$

Παρόμοια, ο συναλλοίωτος συναρτητής $F: R\text{-Mod} \rightarrow S\text{-Mod}$ καλείται **δεξιά ακριβής, (right exact functor)**, αν η ακρίβεια της ακολουθίας αριστερών R -προτύπων

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

συνεπάγεται την ακρίβεια της ακολουθίας αριστερών S -προτύπων

$$F(M') \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(M'') \longrightarrow 0$$

Ο συναλλοίωτος συναρτητής $F: R\text{-Mod} \rightarrow S\text{-Mod}$ καλείται **ακριβής, (exact functor)**, αν είναι αριστερά και δεξιά ακριβής. Ισοδύναμα, αν η ακρίβεια της ακολουθίας αριστερών R -προτύπων

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

συνεπάγεται την ακρίβεια της ακολουθίας αριστερών S -προτύπων

$$0 \longrightarrow F(M') \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(M'') \longrightarrow 0$$

Έστω τώρα R και S δακτύλιοι, και $F: R\text{-Mod} \rightarrow S\text{-Mod}$ ένας προσθετικός αντισυναλλοίωτος συναρτητής.

Ορισμός 2.2.15. Ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής $F: R\text{-Mod} \rightarrow S\text{-Mod}$ καλείται **αριστερά ακριβής**, αν η ακρίβεια της ακολουθίας αριστερών R -προτύπων

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

συνεπάγεται την ακρίβεια της ακολουθίας αριστερών S -προτύπων

$$0 \longrightarrow F(M'') \xrightarrow{F(g)} F(M) \xrightarrow{F(f)} F(M')$$

Ανάλογα, ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής $F: R\text{-Mod} \rightarrow S\text{-Mod}$ καλείται **δεξιά ακριβής**, αν η ακρίβεια της ακολουθίας αριστερών R -προτύπων

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

συνεπάγεται την ακρίβεια της ακολουθίας αριστερών S -προτύπων

$$F(M'') \xrightarrow{F(g)} F(M) \xrightarrow{F(f)} F(M') \longrightarrow 0$$

Ο αντισυναλλοιώτος συναρτητής $F: R\text{-Mod} \rightarrow S\text{-Mod}$ καλείται **ακριθής**, αν είναι αριστερά και δεξιά ακριθής. Ισοδύναμα, αν η ακρίβεια της ακολουθίας αριστερών R -προτύπων

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

συνεπάγεται την ακρίβεια της ακολουθίας αριστερών S -προτύπων

$$0 \longrightarrow F(M'') \xrightarrow{F(g)} F(M) \xrightarrow{F(f)} F(M') \longrightarrow 0$$

Παρατήρηση 2.2.16. Αν R είναι ένας δακτύλιος, και

$$\ell: \dots \xrightarrow{\gamma_2} C_1 \xrightarrow{\gamma_1} C_0 \xrightarrow{\gamma_0} M \longrightarrow 0 \quad \& \quad \ell': 0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} D^0 \xrightarrow{\delta^0} D^1 \xrightarrow{\delta^1} \dots$$

είναι δύο ακριβείς ακολουθίες αριστερών R -προτύπων, τότε η *συνκόλληση* των ακριβών ακολουθιών ℓ και ℓ' ,

$$\mathcal{J}: \dots \xrightarrow{\gamma_2} C_1 \xrightarrow{\gamma_1} C_0 \xrightarrow{i \circ \gamma_0} D^0 \xrightarrow{\delta^0} D^1 \xrightarrow{\delta^1} \dots,$$

είναι ακριθής ακολουθία. Επιπλέον, αν $F: R\text{-Mod} \rightarrow S\text{-Mod}$ είναι ένας προσθετικός συναλλοιώτος ή αντισυναλλοιώτος συναρτητής, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

- (i) Αν οι ακολουθίες $F(\ell)$ και $F(\ell')$ είναι ακριβείς, τότε η ακολουθία $F(\mathcal{J})$ είναι επίσης ακριθής.
- (ii) Αν η ακολουθία $F(\mathcal{J})$ είναι ακριθής, και ο συναρτητής F είναι αριστερά ή δεξιά ακριθής, τότε οι ακολουθίες $F(\ell)$ και $F(\ell')$ είναι επίσης ακριβείς.

Πρόταση 2.2.17. Για οποιοδήποτε αριστερό R -πρότυπο X , οι συναρτητές

$$\text{Hom}_R(-, X): R\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab} \quad \text{και} \quad \text{Hom}_R(X, -): R\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$$

είναι αριστερά ακριβείς.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [52, theorems 2.38, 2.40]. ■

Το ακόλουθο παράδειγμα μας εξασφαλίζει ότι ο συναλλοιώτος ή ο αντισυναλλοιώτος συναρτητής Hom δεν είναι εν γένει (δεξιά) ακριθής.

Παράδειγμα 2.2.18. Θεωρούμε τη σύντομη ακριβή ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$\ell: 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_6 \longrightarrow 0,$$

όπου $f(x) = 6x$ για κάθε $x \in \mathbb{Z}$, και g είναι η προβολή, δηλαδή $g(x) = x + 6\mathbb{Z}$ ή $g(x) = [x]$ στην $\mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

1. $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_6, -)$ **Δεν Είναι Δεξιά Ακριθής:** Αν εφαρμόσουμε τον συναλλοιώτο συναρτητή $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_6, -): \text{Ab} \rightarrow \text{Ab}$ στην ℓ , τότε η ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$\ell_*: 0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}) \xrightarrow{f_*} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}) \xrightarrow{g_*} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_6)$$

είναι ακριθής, διότι ο $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_6, -)$ είναι αριστερά ακριθής. Ισχυριζόμαστε ότι η αβελιανή ομάδα $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z})$ είναι η τετριμμένη. Για να το διαπιστώσουμε αυτό, υποθέτουμε ότι υπάρχει $h \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z})$ όπου $h \neq 0$, με σκοπό να καταλήξουμε σε άτοπο. Τότε υπάρχει κάποιο $[x] \in \mathbb{Z}_6$ έτσι ώστε $h([x]) \neq 0$. Συνεπώς, $6h([x]) \neq 0$ στο \mathbb{Z} . Όμως, $6h([x]) = h(6[x]) = h([0]) = 0$, αποτέλεσμα το οποίο αντιφάσκει με το γεγονός ότι $h([x]) \neq 0$. Άρα, $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}) = 0$. Έτσι, αν ο g_* είναι επιμορφισμός, τότε έχουμε ότι $0 = \text{Im } g_* = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_6)$. Όμως, $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_6) \neq 0$ αφού $\mathbb{Z}_6 \neq 0$, και $\text{Id}_{\mathbb{Z}_6} \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_6)$. Επομένως, ο g_* δεν είναι επιμορφισμός, και κατ' επέκταση, ο $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_6, -)$ δεν είναι (δεξιά) ακριθής συναρτητής.

2. $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Z}_6)$ **Δεν Είναι Δεξιά Ακριβής:** Αν εφαρμόσουμε τον αντισυναλλοίωτο συναρτητή $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Z}_6): \text{Ab} \rightarrow \text{Ab}$ στην ℓ , τότε επάγεται η ακριβής ακολουθία αβελιανών ομάδων:

$$\ell^* : 0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_6) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_6) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_6).$$

Αν $\alpha \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_6)$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{Z}$ έχουμε ότι:

$$(f^*(\alpha))(x) = (\alpha \circ f)(x) = \alpha(f(x)) = \alpha(6x) = 6\alpha(x) = 0.$$

Συνεπώς, παίρνουμε ότι $f^*(\alpha) = 0$, και κατ' επέκταση, ότι $f^* = 0$. Αν λοιπόν ο f^* ήταν επιμορφισμός, τότε θα είχαμε ότι $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_6) = 0$. Επειδή όμως $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_6) \cong \mathbb{Z}_6$, έπεται ότι $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_6) \neq 0$. Άρα, ο f^* δεν είναι επιμορφισμός, και έτσι, ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Z}_6)$ δεν είναι (δεξιά) ακριβής.

Εν' αντιθέσει με τον συναρτητή Hom , ο συναρτητής \otimes είναι πάντα δεξιά ακριβής:

Πρόταση 2.2.19. Για οποιοδήποτε αριστερό R -πρότυπο X , ο συναρτητής $- \otimes_R X$ είναι δεξιά ακριβής. Επίσης για οποιοδήποτε δεξιό R -πρότυπο X , ο συναρτητής $X \otimes_R -$ είναι δεξιά ακριβής.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [52, theorem 2.63]. ■

Εν γένει, ο συναρτητής \otimes δεν είναι (αριστερά) ακριβής. Για να το διαπιστώσουμε αυτό, παραθέτουμε το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.2.20. $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_6$ **Δεν Είναι Αριστερά Ακριβής:** Θεωρούμε τη σύντομη ακριβή ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

όπου i είναι η κανονική έγκλειση και π η φυσική προβολή. Τότε η ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{i \otimes \text{Id}_{\mathbb{Z}_6}} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{\pi \otimes \text{Id}_{\mathbb{Z}_6}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_6 \rightarrow 0,$$

είναι ακριβής, διότι ο συναλλοίωτος συναρτητής $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_6$ είναι δεξιά ακριβής. Επειδή για κάθε γεννήτορα $\frac{p}{q} \otimes [n] \in \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_6$, ισχύει ότι

$$\frac{p}{q} \otimes [n] = \frac{p6}{q6} \otimes [n] = \frac{p}{q6} \otimes 6[n] = \frac{p}{q6} \otimes [6n] = \frac{p}{q6} \otimes [0] = 0,$$

έπεται ότι $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_6 = 0$. Συνεπώς, αφού $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_6 \neq 0$, παίρνουμε ότι ο ομομορφισμός αβελιανών ομάδων $i \otimes \text{Id}_{\mathbb{Z}_6}$ δεν είναι μονομορφισμός. Άρα, ο συναλλοίωτος συναρτητής $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_6$ δεν είναι (αριστερά) ακριβής. Συμμετρικά αποδεικνύεται ότι ο συναλλοίωτος συναρτητής $\mathbb{Z}_6 \otimes_{\mathbb{Z}} -$ δεν είναι (αριστερά) ακριβής.

Κλείνουμε την αναφορά μας σε ακριβείς συναρτητές μεταξύ κατηγοριών προτύπων, σημειώνοντας προς το παρόν, ότι υπάρχουν περιπτώσεις όπου οι συναρτητές Hom και \otimes γίνονται ακριβείς. Στο επόμενο κεφάλαιο, έχοντας εισάγει τα κατάλληλα «εργαλεία», θα αναφερθούμε στις περιπτώσεις αυτές.

2.2.2 Φυσικοί Μετασχηματισμοί Και Συζυγή Ζεύγη Συναρτητών

Συνεχίζουμε ορίζοντας φυσικούς μετασχηματισμούς μεταξύ συναρτητών, καθώς και συζυγή ζεύγη συναρτητών.

Ορισμός 2.2.21. Έστω $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ δύο συναβλησίοι συναρτητές. Ένας **φυσικός μετασχηματισμός (natural transformation)** $\eta: F \rightarrow G$, είναι μια οικογένεια μορφισμών στην \mathcal{D} ,

$$\eta = \{\eta_A: F(A) \rightarrow G(A)\}_{A \in \text{ob}(\mathcal{C})}$$

έτσι ώστε για κάθε μορφισμό $f: A \rightarrow B$ στην \mathcal{C} , το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\eta_A} & G(A) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(B) & \xrightarrow{\eta_B} & G(B) \end{array}$$

Παρόμοια ορίζεται ένας φυσικός μετασχηματισμός μεταξύ αντισυναβλησίων συναρτητών.

Ένας φυσικός μετασχηματισμός $\eta: F \rightarrow G$ μεταξύ δύο συναβλησίων ή αντισυναβλησίων συναρτητών καλείται **φυσικός ισομορφισμός ή φυσική ισοδυναμία, (natural isomorphism or natural equivalence)**, αν κάθε η_A είναι ισομορφισμός στην \mathcal{D} για κάθε αντικείμενο A της \mathcal{C} . Στην περίπτωση αυτή, οι F και G καλούνται **φυσικά ισοδύναμοι συναρτητές, (naturally equivalent functors)**.

Παρατήρηση 2.2.22. Αν $F, G, T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ είναι συναλλοίωτοι (αντισυναλλοίωτοι) συναρτητές, και $\eta: F \rightarrow G$ και $\zeta: G \rightarrow T$ είναι φυσικοί μετασχηματισμοί, τότε η σύνθεση $\zeta \circ \eta: F \rightarrow T$ είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός, όπου η κλάση των μορφισμών δίνεται ως

$$\zeta \circ \eta = \{(\zeta \circ \eta)_A\} = \{\zeta_A \circ \eta_A: F(A) \rightarrow T(A)\}$$

για κάθε αντικείμενο A της \mathcal{C} .

Παράδειγμα 2.2.23. Αν $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ είναι ένας συναλλοίωτος (αντισυναλλοίωτος) συναρτητής, τότε ορίζουμε φυσικό μετασχηματισμό $\omega_F: F \rightarrow F$, θέτοντας $(\omega_F)_A: F(A) \rightarrow F(A)$ να είναι ο ταυτοτικός μορφισμός $1_{F(A)}$ για κάθε αντικείμενο A της \mathcal{C} . Ο φυσικός μετασχηματισμός ω_F καλείται ο **ταυτοτικός φυσικός μετασχηματισμός, (identity natural transformation)**.

Παρατήρηση 2.2.24. Είναι εύκολο να δούμε ότι ένας φυσικός μετασχηματισμός $\eta: F \rightarrow G$ είναι φυσικός ισομορφισμός, αν και μόνο αν, υπάρχει φυσικός μετασχηματισμός $\zeta: G \rightarrow F$, έτσι ώστε $\eta \circ \zeta = \omega_G$ και $\zeta \circ \eta = \omega_F$.

Ορισμός 2.2.25. Αν $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ και $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ είναι δύο συναβλησίοι (αντισυναβλησίοι) συναρτητές, έτσι ώστε οι $G \circ F, \text{Id}_{\mathcal{C}}$ και αντίστοιχα, οι $F \circ G, \text{Id}_{\mathcal{D}}$, να είναι φυσικά ισοδύναμοι συναρτητές, τότε οι κατηγορίες \mathcal{C} και \mathcal{D} καλούνται **ισοδύναμες κατηγορίες, (equivalent categories)**.

Σ' αυτή την περίπτωση ο συναρτητής F καλείται **ισοδυναμία κατηγοριών (equivalence of categories)**, και ο συναρτητής G καλείται **ημι-αντίστροφος συναρτητής (quasi-inverse functor)** του F .

Η προσοχή μας τώρα στρέφεται σε συζυγή ζεύγη συναρτητών.

Ορισμός 2.2.26. Έστω $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ και $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ δύο συναβλησίοι συναρτητές. Το διατεταγμένο ζεύγος (F, G) καλείται **συζυγές ζεύγος, (adjoint pair)**, αν για κάθε αντικείμενο C της \mathcal{C} και για κάθε αντικείμενο D της \mathcal{D} , υπάρχουν «1-1» και «επί» απεικονίσεις

$$\eta_{C,D}: \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), D) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(D)),$$

οι οποίες είναι φυσικοί ως προς τα αντικείμενα C και D . Καλούμε την οικογένεια απεικονίσεων $\eta = \{\eta_{C,D}\}_{(C,D) \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}}$ έναν **συζυγή μετασχηματισμό, (adjoint transformation)**. Ένας τέτοιος

μετασχηματισμός καλείται **φυσικός (natural)** ως προς τα αντικείμενα C και D , αν για κάθε μορφισμό $f: C' \rightarrow C$ στην \mathcal{C} , και για κάθε μορφισμό $g: D \rightarrow D'$ στην \mathcal{D} , τα ακόλουθα διαγράμματα είναι μεταθετικά:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), D) & \xrightarrow{(F(f))^*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C'), D) \\ \eta_{C,D} \downarrow & & \downarrow \eta_{C,D} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(D)) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C', G(D)) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), D) & \xrightarrow{g^*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), D') \\ \eta_{C,D} \downarrow & & \downarrow \eta_{C,D'} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(D)) & \xrightarrow{(G(g))^*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(D')) \end{array}$$

Επιπλέον, στην περίπτωση που το ζεύγος συναρτητών (F, G) είναι συζυγές ζεύγος, λήμε ότι ο F είναι ένας **αριστερός συζυγής (left adjoint)** του G , και ότι ο G είναι ένας **δεξιός συζυγής (right adjoint)** του F .

Παρατήρηση 2.2.27. Είναι προφανές ότι αν τα (F, G) και (F', G') είναι συζυγή ζεύγη, τότε το $(F' \circ F, G \circ G')$ είναι επίσης συζυγές ζεύγος, στην περίπτωση βέβαια που η σύνθεση έχει νόημα.

Πρόταση 2.2.28. Έστω (F, G) ένα συζυγές ζεύγος συναλληλοϊωτων συναρτητών, όπου $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ και $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, και $\eta_{C,D}: \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), D) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(D))$ οι «1-1» και «επί» συζυγείς μετασχηματισμοί. Τότε επάγονται φυσικοί μετασχηματισμοί συναρτητών $\delta: \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F$ και $\varepsilon: F \circ G \rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$, όπου

$$\delta = \{\delta_C := \eta_{C, F(C)}(1_{F(C)}): C \rightarrow (G \circ F)(C)\}_{C \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})}$$

και

$$\varepsilon = \{\varepsilon_D := \eta_{G(D), D}^{-1}(1_{G(D)}): (F \circ G)(D) \rightarrow D\}_{D \in \mathrm{ob}(\mathcal{D})}.$$

Απόδειξη. Έστω $f: C \rightarrow C'$ ένας οποιοσδήποτε μορφισμός στην \mathcal{C} . Για να αποδείξουμε ότι ο $\delta: \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F$ είναι φυσικός μετασχηματισμός, αρκεί να δείξουμε ότι

$$(G \circ F)(f) \circ \eta_{C, F(C)}(1_{F(C)}) = \eta_{C', F(C')} (1_{F(C')}) \circ f.$$

Επειδή οι μετασχηματισμοί $\eta_{C,D}$ είναι φυσικοί στο \mathcal{D} , και ο $F(f): F(C) \rightarrow F(C')$ είναι ένας μορφισμός στην \mathcal{D} , επάγεται το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), F(C)) & \xrightarrow{F(f)^*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), F(C')) \\ \eta_{C, F(C)} \downarrow & & \downarrow \eta_{C', F(C')} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, (G \circ F)(D)) & \xrightarrow{(G(F(f)))^*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, (G \circ F)(C')) \end{array}$$

Τότε έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
(G \circ F)(f) \circ \eta_{C,F(C)}(1_{F(C)}) &= ((G \circ F)(f))_* (\eta_{C,F(C)}(1_{F(C)})) \\
&= ((G \circ F)(f))_* \circ \eta_{C,F(C)}(1_{F(C)}) \\
&= (\eta_{C,F(C)} \circ F(f)_*)(1_{F(C)}) \\
&= \eta_{C,F(C')} (F(f)_*(1_{F(C)})) \\
&= \eta_{C,F(C')} (F(f) \circ 1_{F(C)}) \\
&= \eta_{C,F(C')} (F(f)).
\end{aligned}$$

Ανάλογα, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι $\eta_{C,D}$ είναι φυσικές στο C , καθώς και το γεγονός ότι ο $f: C \rightarrow C'$ είναι ένας μορφισμός στην \mathcal{C} , οδηγούμαστε στην ισότητα $\eta_{C',F(C')} (1_{F(C')}) \circ f = (\eta_{C,F(C')} \circ F(f)_*)(1_{F(C')})$, και κατ' επέκταση, στην ισότητα $\eta_{C',F(C')} (1_{F(C')}) \circ f = \eta_{C,F(C')} (F(f))$. Έτσι τελικά, έχουμε ότι $(G \circ F)(f) \circ \eta_{C,F(C)}(1_{F(C)}) = \eta_{C',F(C')} (1_{F(C')}) \circ f$, όπως επιθυμούσαμε. Ανάλογα αποδεικνύεται ότι ο ε είναι φυσικός μετασχηματισμός. ■

Σχόλιο 2.2.29. Οι φυσικοί μετασχηματισμοί δ και ε της Πρότασης (2.2.28), καλούνται η **μονάδα (unit)**, και αντίστοιχα η **συνμονάδα (counit)**, του συζυγούς ζεύγους (F, G) .

Ολοκληρώνουμε την ενότητα αυτή με την ακόλουθη πρόταση, η οποία συνδέει τους συναρτητές $-\otimes_R X$ και $\text{Hom}_S(X, -)$, όπου X είναι ένα (R, S) -διπρότυπο, και η οποία δίνει ένα θεμελιώδες παράδειγμα συζυγούς ζεύγους (προσθετικών) συναρτητών.

Πρόταση 2.2.30. Αν R και S είναι δακτύλιοι και ${}_R X_S$ είναι ένα (R, S) -διπρότυπο, τότε το ζεύγος $(-\otimes_R X, \text{Hom}_S(X, -))$ είναι ένα συζυγές ζεύγος συναρτητών, και ο συζυγής μετασχηματισμός $\eta = \{\eta_{M,N}\}_{(M,N) \in \text{Mod-}R \times \text{Mod-}S}$, ο οποίος επάγει έναν φυσικό ισομορφισμό αβελιανών ομάδων

$$\eta_{M,N}: \text{Hom}_S(M \otimes_R X, N) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_R(M, \text{Hom}_S(X, N)),$$

για κάθε δεξιό R -πρότυπο M , και για κάθε δεξιό S -πρότυπο N , ορίζεται ως: $\eta_{M,N}(f)(m)(x) = f(m \otimes x)$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [16, Proposition 3.4.5]. ■

Παρατήρηση 2.2.31. Σημειώνουμε ότι υπάρχει και άλλη μία σχέση «συζυγίας» μεταξύ των συναρτητών \otimes και Hom . Πιο ειδικά, αν R και S είναι δακτύλιοι και ${}_S X_R$ είναι ένα (R, S) -διπρότυπο, τότε το ζεύγος $(-\otimes_R X, \text{Hom}_S(X, -))$ είναι ένα συζυγές ζεύγος συναρτητών, και για κάθε ${}_R M, {}_S N$, επάγεται ένας φυσικός ισομορφισμός αβελιανών ομάδων

$$\eta_{M,N}: \text{Hom}_S(X \otimes_R M, N) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_R(M, \text{Hom}_S(X, N)).$$

Αν, όπως στην Πρόταση (2.2.28), $\delta: \text{Id}_C \rightarrow G \circ F$ και $\varepsilon: F \circ G \rightarrow \text{Id}_D$ είναι φυσικοί μετασχηματισμοί μεταξύ συναρτητών $F: C \rightarrow D$ και $G: D \rightarrow C$, τότε μπορούμε να ορίσουμε νέους φυσικούς μετασχηματισμούς, ως εξής:

$$F\delta: F \rightarrow FGF, \quad (F\delta)_X = F(\delta_X) \quad \& \quad \varepsilon F: FGF \rightarrow F, \quad (\varepsilon F)_X = \varepsilon_{F(X)}$$

$$\delta G: G \rightarrow GFG, \quad (\delta G)_Y = \delta_{G(Y)} \quad \& \quad G\varepsilon: GFG \rightarrow G, \quad (G\varepsilon)_Y = G(\varepsilon_Y)$$

Το επόμενο βασικό αποτέλεσμα χαρακτηρίζει τα συζυγή ζεύγη.

Πρόταση 2.2.32. Έστω (F, G) ένα συζυγές ζεύγος συναρτητών, όπου $F: C \rightarrow D$ και $G: D \rightarrow C$, και $\eta_{C,D}: \text{Hom}_D(F(C), D) \rightarrow \text{Hom}_C(C, G(D))$ οι «1-1» και «επί» συζυγείς μετασχηματισμοί. Τότε οι επαγόμενοι φυσικοί μετασχηματισμοί συναρτητών $\delta: \text{Id}_C \rightarrow G \circ F$ και $\varepsilon: F \circ G \rightarrow \text{Id}_D$, όπως ορίσθηκαν στην Πρόταση 2.2.28, ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\varepsilon F \circ F\delta = \text{Id}_F: F \rightarrow F \quad \& \quad G\varepsilon \circ \delta G = \text{Id}_G: G \rightarrow G$$

Αντίστροφα αν $\delta: \text{Id}_C \longrightarrow G \circ F$ και $\varepsilon: F \circ G \longrightarrow \text{Id}_D$, είναι φυσικοί μετασχηματισμοί συναρτητών οι οποίοι ικανοποιούν τις παραπάνω σχέσεις, τότε ορίζοντας

$$\eta_{C,D}: \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), D) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(D)), \quad \eta_{C,D} = \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), \varepsilon_D) \circ F_{C,G(D)}$$

αποκτούμε, για κάθε $C \in \mathcal{C}$ και $D \in \mathcal{D}$, μια οικογένεια «1-1» και «επί» απεικονίσεων $\eta_{C,D}$ οι οποίες είναι φυσικές ως προς C και D , με αντίστροφες απεικονίσεις:

$$\zeta_{C,D}: \text{Hom}_{\mathcal{D}}(C, G(D)) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(F(C), D), \quad \zeta_{C,D} = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\delta_X, G(D)) \circ G_{F(C),D}$$

και επομένως το ζεύγος συναρτητών (F, G) είναι συζυγές.

Απόδειξη. Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο βιβλίο [45]. ■

2.3 Πυρήνες, Συνπυρήνες Και Ειδικές Κατηγορίες

Καθ' όλη την έκταση της ενότητας αυτής, συμβολίζουμε με \mathcal{C} μια υποπροσθετική κατηγορία με μηδενικό αντικείμενο.

Έστω $\alpha: B \longrightarrow C$ και $\alpha': B' \longrightarrow C$ δύο μορφισμοί στην \mathcal{C} . Θα γράφουμε

$$\alpha \leq_m \alpha' \iff \exists \gamma: B \longrightarrow B' \text{ έτσι ώστε: } \alpha' \circ \gamma = \alpha$$

Σημειώνουμε ότι αν ο μορφισμός α είναι μονομορφισμός, τότε και ο μορφισμός γ είναι μονομορφισμός. Από τώρα περιοριζόμαστε στην περίπτωση κατά την οποία οι μορφισμοί α και α' είναι μονομορφισμοί. Τότε βλέπουμε εύκολα ότι ορίζοντας:

$$\forall \alpha: B \longrightarrow C, \alpha': B' \longrightarrow C: \alpha \sim_m \alpha' \iff \alpha \leq_m \alpha' \ \& \ \alpha' \leq_m \alpha$$

αποκτούμε μια σχέση ισοδυναμίας στην κλάση $\{B \longrightarrow C \mid B \in \mathcal{C}\}$ όλων των μορφισμών στην \mathcal{C} οι οποίοι καταλήγουν στο C . Με άλλα λόγια θα έχουμε: $\alpha \sim_m \alpha'$ αν και μόνον αν υπάρχουν μορφισμοί $f: B \longrightarrow B'$ και $g: B' \longrightarrow B$ έτσι ώστε: $\alpha' \circ f = \alpha$ και $\alpha \circ g = \alpha'$. Επειδή οι α, α' είναι μονομορφισμοί, οι μορφισμοί f και g είναι μοναδικοί με την παραπάνω ιδιότητα. Ως άμεση συνέπεια, θα έχουμε ότι ο μορφισμός f είναι ισομορφισμός με αντίστροφο τον μορφισμό g .

Ορισμός 2.3.1. Δύο μονομορφισμοί $\alpha: B \longrightarrow C$ και $\alpha': B' \longrightarrow C$ στην \mathcal{C} καλούνται **ισοδύναμοι, (equivalent)**, αν: $\alpha \sim_m \alpha'$, δηλαδή αν υπάρχει ισομορφισμός $\gamma: B \longrightarrow B'$ στην \mathcal{C} έτσι ώστε $\alpha' \circ \gamma = \alpha$.

Μια κλάση ισοδυναμίας, ως προς τη σχέση ισοδυναμίας \sim_m , από μονομορφισμούς οι οποίοι καταλήγουν στο αντικείμενο C της \mathcal{C} , καλείται ένα **υποαντικείμενο (subobject)** του C .

Δυϊκά, έστω $\beta: C \longrightarrow B$ και $\beta': C \longrightarrow B'$ δύο μορφισμοί στην \mathcal{C} . Θα γράφουμε

$$\beta' \leq_e \beta \iff \exists \gamma: B \longrightarrow B' \text{ έτσι ώστε: } \gamma \circ \beta = \beta'$$

Σημειώνουμε ότι αν ο μορφισμός β' είναι επιμορφισμός, τότε και ο μορφισμός γ είναι επιμορφισμός. Από τώρα περιοριζόμαστε στην περίπτωση κατά την οποία οι μορφισμοί β και β' είναι επιμορφισμοί. Τότε βλέπουμε εύκολα ότι ορίζοντας:

$$\forall \beta: C \longrightarrow B, \beta': C \longrightarrow B': \beta \sim_e \beta' \iff \beta \leq_e \beta' \ \& \ \beta' \leq_e \beta$$

αποκτούμε μια σχέση ισοδυναμίας στην κλάση $\{C \longrightarrow B \mid B \in \mathcal{C}\}$ όλων των μορφισμών στην \mathcal{C} οι οποίοι ξεκινούν από το C . Με άλλα λόγια θα έχουμε: $\beta \sim_e \beta'$ αν και μόνον αν υπάρχουν μορφισμοί $f: B \longrightarrow B'$ και $g: B' \longrightarrow B$ έτσι ώστε: $f \circ \beta = \beta'$ και $g \circ \beta' = \beta$. Επειδή οι β, β' είναι επιμορφισμοί, οι μορφισμοί f και g είναι μοναδικοί με την παραπάνω ιδιότητα. Ως άμεση συνέπεια, θα έχουμε ότι ο μορφισμός f είναι ισομορφισμός με αντίστροφο τον μορφισμό g .

Ορισμός 2.3.2. Δύο επιμορφισμοί $\beta: C \rightarrow B$ και $\beta': C \rightarrow B'$ στην \mathcal{C} καλούνται **ισοδύναμοι**, (**equivalent**), αν: $\beta \sim_e \beta'$, δηλαδή αν υπάρχει ισομορφισμός $\gamma: B \rightarrow B'$ στην \mathcal{C} έτσι ώστε $\gamma \circ \beta = \beta'$.

Μια κλάση ισοδυναμίας, ως προς τη σχέση ισοδυναμίας \sim_e , από επιμορφισμούς οι οποίοι ξεκινούν από το αντικείμενο C της \mathcal{C} , καλείται ένα **αντικείμενο πηλίκου (quotient object)** του \mathcal{C} .

Σύμβαση: Χάριν απλότητας, ένα υποαντικείμενο θα ταυτίζεται με έναν μονομορφισμό ο οποίος είναι αντιπρόσωπος της αντίστοιχης κλάσης ισοδυναμίας, και ένα αντικείμενο πηλίκου θα ταυτίζεται με έναν επιμορφισμό ο οποίος είναι αντιπρόσωπος της αντίστοιχης κλάσης ισοδυναμίας.

Ορισμός 2.3.3. Ένας **πυρήνας (kernel)** ενός μορφισμού $\alpha: B \rightarrow C$ στην \mathcal{C} , είναι ένας μορφισμός $k: K \rightarrow B$ στην \mathcal{C} έτσι ώστε

1. $\alpha \circ k = 0$, και
2. για κάθε μορφισμό $\beta: X \rightarrow B$ στην \mathcal{C} τέτοιος ώστε $\alpha \circ \beta = 0$, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\gamma: X \rightarrow K$ έτσι ώστε το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{k} & B & \xrightarrow{\alpha} & C \\ & \swarrow \exists! \gamma & \uparrow \beta & \nearrow 0 & \\ & & X & & \end{array}$$

να είναι μεταθετικό.

Παρατήρηση 2.3.4. Εύκολα βλέπουμε ότι κάθε πυρήνας είναι μονομορφισμός.

Ένας πυρήνας ενός μορφισμού, αν υπάρχει, είναι μοναδικός με την ακόλουθη έννοια:

Πρόταση 2.3.5. Οποιοδήποτε δύο πυρήνες ενός μορφισμού $\alpha: B \rightarrow C$ στην \mathcal{C} , αντιπροσωπεύουν το ίδιο υποαντικείμενο του B .

Απόδειξη. Έστω $k: K \rightarrow B$ και $k': K' \rightarrow B$ δύο πυρήνες του α . Επειδή $\alpha \circ k' = 0$ και $\alpha \circ k = 0$, υπάρχουν μοναδικοί μορφισμοί $\gamma: K' \rightarrow K$ και $\beta: K \rightarrow K'$ στην \mathcal{C} , έτσι ώστε $k \circ \gamma = k'$ και $k' \circ \beta = k$. Έτσι,

$$k \circ \gamma \circ \beta = k' \circ \beta = k = k \circ 1_K \quad \& \quad k' \circ \beta \circ \gamma = k \circ \gamma = k' = k' \circ 1_{K'}.$$

Αφού οι k και k' είναι μονομορφισμοί, έπεται ότι $\gamma \circ \beta = 1_K$ και ότι $\beta \circ \gamma = 1_{K'}$. Συνεπώς, ο μορφισμός β είναι ένας ισομορφισμός στην \mathcal{C} , και άρα, οι μονομορφισμοί k και k' είναι ισοδύναμοι, δηλαδή αντιπροσωπεύουν το ίδιο υποαντικείμενο του B . ■

Λόγω λοιπόν της Πρότασης (2.3.5), ένας πυρήνας ενός μορφισμού $\alpha: B \rightarrow C$ στην \mathcal{C} όταν υπάρχει, είναι μοναδικός μέχρι ισομορφισμό και καλείται ο **πυρήνας** του α , και τότε γράφουμε $K = \text{Ker } \alpha$, $k = \text{ker } \alpha$, για τον πυρήνα $k: K \rightarrow B$ του α .

Πρόταση 2.3.6. Ένας μορφισμός $\alpha: B \rightarrow C$ στην \mathcal{C} είναι μονομορφισμός, αν και μόνο αν, $\text{Ker } \alpha = 0$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\text{Ker } \alpha = 0$, και έστω $f: A \rightarrow B$ ένας μορφισμός στην \mathcal{C} με $\alpha \circ f = 0$. Για να αποδείξουμε ότι ο α είναι μονομορφισμός, αρκεί να δείξουμε ότι $f = 0$. Επειδή $\alpha \circ f = 0$, από την καθολική ιδιότητα του πυρήνα, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\gamma: A \rightarrow 0$ έτσι ώστε $\text{ker } \alpha \circ \gamma = f$. Τότε προφανώς, έχουμε ότι $\gamma = 0$, και άρα, ότι $f = 0$, όπως επιθυμούσαμε.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ο α είναι μονομορφισμός στην \mathcal{C} . Τότε επειδή $\alpha \circ \text{ker } \alpha = 0$, έπεται ότι $\text{ker } \alpha = 0: \text{Ker } \alpha \rightarrow B$. Θεωρούμε τώρα τον μηδενικό μορφισμό $0_B: 0 \rightarrow B$ στην \mathcal{C} . Παρατηρώντας ότι ο 0_B είναι μονομορφισμός, καθώς και ότι $\text{ker } \alpha \circ 0 = 0_B$, παίρνουμε ότι $0_B \leq_m \text{ker } \alpha$. Ομοίως, θεωρώντας τον μηδενικό μορφισμό $0_K: \text{Ker } \alpha \rightarrow 0$ στην \mathcal{C} , έχουμε ότι $\text{ker } \alpha = 0 = 0_B \circ 0_K$, και κατ' επέκταση, ότι $\text{ker } \alpha \leq_m 0_B$. Συνδυάζοντας λοιπόν τα προηγούμενα, προκύπτει ότι τα αντικείμενα $\text{Ker } \alpha$ και 0 είναι ισόμορφα στην \mathcal{C} , και έτσι, ότι $\text{Ker } \alpha = 0$. ■

Στην συνέχεια αναπτύσσουμε τη δυϊκή έννοια του πυρήνα, αυτή του συνπυρήνα.

Ορισμός 2.3.7. Ένας **συνπυρήνας (cokernel)** ενός μορφισμού $\alpha: B \rightarrow C$ στην \mathcal{C} , είναι ένας μορφισμός $p: C \rightarrow D$ στην \mathcal{C} έτσι ώστε

1. $p \circ \alpha = 0$, και
2. για κάθε μορφισμό $\beta: C \rightarrow X$ στην \mathcal{C} τέτοιος ώστε $\beta \circ \alpha = 0$, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\gamma: D \rightarrow X$ έτσι ώστε το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\alpha} & C & \xrightarrow{p} & D \\ & \searrow & \downarrow \beta & \swarrow \exists! \gamma & \\ & 0 & X & & \end{array}$$

να είναι μεταθετικό.

Παρατήρηση 2.3.8. Είναι εύκολο να δούμε ότι κάθε συνπυρήνας είναι επιμορφισμός.

Ένας συνπυρήνας ενός μορφισμού, αν υπάρχει, είναι μοναδικός με την έννοια:

Πρόταση 2.3.9. Οποιοδήποτε δύο συνπυρήνες ενός μορφισμού $\alpha: B \rightarrow C$ στην \mathcal{C} , αντιπροσωπεύουν το ίδιο αντικείμενο πηλίκο του C .

Απόδειξη. Ακολουθώντας μια ανάλογη πορεία με την απόδειξη της Πρότασης (2.3.5), χρησιμοποιώντας ωστόσο το γεγονός ότι κάθε συνπυρήνας είναι επιμορφισμός, παίρνουμε το ζητούμενο. ■

Λόγω της προηγούμενης μοναδικότητας, ένας συνπυρήνας ενός μορφισμού $\alpha: B \rightarrow C$ στην \mathcal{C} , όταν υπάρχει, καλείται ο *συνπυρήνας* του α , και τότε γράφουμε $D = \text{Coker } \alpha$, $p = \text{coker } \alpha$, για τον συνπυρήνα $p: C \rightarrow D$ του α .

Η ακόλουθη πρόταση είναι η δυϊκή εκδοχή της Πρότασης (2.3.6).

Πρόταση 2.3.10. Ένας μορφισμός $\alpha: B \rightarrow C$ στην \mathcal{C} είναι επιμορφισμός, αν και μόνο αν, $\text{Coker } \alpha = 0$.

Απόδειξη. Δυϊκά με την απόδειξη της Πρότασης (2.3.6). ■

Πρόταση 2.3.11. Αν α είναι ο πυρήνας κάποιου μορφισμού στην \mathcal{C} , και αν υπάρχει ο συνπυρήνας του μορφισμού α , τότε $\alpha = \ker(\text{coker } \alpha)$. Δυϊκά, αν β είναι ο συνπυρήνας κάποιου μορφισμού στην \mathcal{C} , και αν υπάρχει ο πυρήνας του μορφισμού β , τότε $\beta = \text{coker}(\ker \beta)$.

Απόδειξη. Έστω $\alpha: B \rightarrow C$ ο πυρήνας του μορφισμού $\gamma: C \rightarrow D$ στην \mathcal{C} . Επειδή $\gamma \circ \alpha = 0$, από την καθολική ιδιότητα του συνπυρήνα, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\phi: \text{Coker } \alpha \rightarrow D$ στην \mathcal{C} έτσι ώστε $\phi \circ \text{coker } \alpha = \gamma$. Αν $\varepsilon: X \rightarrow C$ είναι ένας οποιοσδήποτε μορφισμός στην \mathcal{C} με $\text{coker } \alpha \circ \varepsilon = 0$, τότε έχουμε ότι:

$$\gamma \circ \varepsilon = \phi \circ \text{coker } \alpha \circ \varepsilon = \phi \circ 0 = 0.$$

Συνεπώς, από την καθολική ιδιότητα του πυρήνα, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\psi: X \rightarrow B$ έτσι ώστε $\alpha \circ \psi = \varepsilon$. Άρα, ο μορφισμός α είναι ο πυρήνας του μορφισμού $\text{coker } \alpha$. Παρόμοια προκύπτει και το δεύτερο σκέλος της πρότασης. ■

Παράδειγμα 2.3.12. 1. Στην κατηγορία Ab κάθε μορφισμός έχει πυρήνα και συνπυρήνα. Πιο ειδικά, αν $f: G \rightarrow H$ είναι ένας ομομορφισμός αβελιανών ομάδων, τότε ο πυρήνας του f είναι η υποομάδα $\text{Ker } f$ της G μαζί με την κανονική εισαγωγή $i: \text{Ker } f \rightarrow G$, και ο συνπυρήνας του f είναι η αβελιανή ομάδα $H/\text{Im } f$ μαζί με την φυσική προβολή $\pi: H \rightarrow H/\text{Im } f$.

2. Αν R είναι ένας δακτύλιος, τότε οι πυρήνες και συνπυρήνες (ομομορφισμών στην κατηγορία $R\text{-Mod}$ δίνονται όπως στο Κεφάλαιο 1. Στην κατηγορία αυτή μάλιστα, κάθε μονομορφισμός είναι ο πυρήνας κάποιου μορφισμού, και αντίστοιχα, κάθε επιμορφισμός είναι ο συνπυρήνας κάποιου μορφισμού.

Επικεντρωνόμαστε τώρα σε ειδικές κατηγορίες. Ας ξεκινήσουμε με την έννοια μιας ταυτοδύναμα πλήρους κατηγορίας.

Ορισμός 2.3.13. *Μια προσθετική κατηγορία \mathcal{D} καλείται **ταυτοδύναμα πλήρης, (idempotent complete)**, αν κάθε ταυτοδύναμος ενδομορφισμός στην \mathcal{D} έχει πυρήνα. Δηλαδή, αν $f: A \rightarrow A$ είναι ένας μορφισμός στην \mathcal{D} έτσι ώστε $f^2 = f$, τότε υπάρχει ο πυρήνας του μορφισμού f στην \mathcal{D} .*

Αν και δεν έχουμε εισάγει ακόμη την έννοια μιας αβελιανής κατηγορίας, ας σημειώσουμε ότι κάθε αβελιανή κατηγορία είναι μια ταυτοδύναμα πλήρης κατηγορία, διότι όπως θα δούμε στην συνέχεια, κάθε μορφισμός σε μια αβελιανή κατηγορία έχει πάντα πυρήνα.

Πρόταση 2.3.14. *Έστω \mathcal{D} μια προσθετική και ταυτοδύναμα πλήρης κατηγορία. Αν $f: A \rightarrow B$ και $g: B \rightarrow A$ είναι δύο μορφισμοί στην \mathcal{D} τέτοιοι ώστε $f \circ g = 1_B$, τότε υπάρχει ένα αντικείμενο K της \mathcal{D} έτσι ώστε $A \cong K \oplus B$.*

Απόδειξη. Έστω $f: A \rightarrow B$ και $g: B \rightarrow A$ δύο μορφισμοί στην \mathcal{D} τέτοιοι ώστε $f \circ g = 1_B$. Τότε προφανώς ο μορφισμός f στην \mathcal{D} είναι επιμορφισμός, και ο μορφισμός g στην \mathcal{D} είναι μονομορφισμός. Επιπλέον, ο μορφισμός $g \circ f: A \rightarrow A$ στην \mathcal{D} είναι ταυτοδύναμος, διότι

$$(g \circ f)^2 = (g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ f \circ g \circ f = g \circ 1_B \circ f = g \circ f.$$

Συνεπώς, αφού η κατηγορία \mathcal{D} είναι ταυτοδύναμα πλήρης, υπάρχει ο πυρήνας $\kappa: K \rightarrow A$ του μορφισμού $g \circ f$ στην \mathcal{D} . Παρατηρώντας ότι

$$(g \circ f) \circ (1_A - g \circ f) = (g \circ f) \circ 1_A - (g \circ f)^2 = g \circ f - g \circ f = 0,$$

από την καθολική ιδιότητα του πυρήνα, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\lambda: A \rightarrow K$ στην \mathcal{D} , ο οποίος συνθέτει το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\kappa} & A & \xrightarrow{g \circ f} & A \\ & \swarrow \lambda & \uparrow \gamma & \searrow 0 & \\ & & A & & \end{array} \quad (2.1)$$

όπου $\gamma = 1_A - (g \circ f)$. Στην συνέχεια, θεωρούμε τις συνθέσεις των μορφισμών

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ f \end{pmatrix}: A \rightarrow K \oplus B \quad \& \quad (\kappa \ g): K \oplus B \rightarrow A,$$

στην \mathcal{D} , δηλαδή τους μορφισμούς

$$(\kappa \ g) \circ \begin{pmatrix} \lambda \\ f \end{pmatrix} = \kappa \circ \lambda + g \circ f$$

και

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ f \end{pmatrix} \circ (\kappa \ g) = \begin{pmatrix} \lambda \circ \kappa & \lambda \circ g \\ f \circ \kappa & f \circ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \circ \kappa & \lambda \circ g \\ f \circ \kappa & 1_B \end{pmatrix},$$

στην \mathcal{D} . Η μεταθετικότητα του διαγράμματος (2.1), μας δίνει ότι $\kappa \circ \lambda = 1_A - g \circ f$, και κατ' επέκταση, ότι $g \circ f + \kappa \circ \lambda = 1_A$. Επειδή $g \circ f \circ \kappa = 0$, και αφού ο g είναι μονομορφισμός στην \mathcal{D} , έπεται ότι $f \circ \kappa = 0$. Έτσι,

$$(\kappa \ g) \circ \begin{pmatrix} \lambda \\ f \end{pmatrix} = 1_A,$$

και

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ f \end{pmatrix} \circ (\kappa \quad g) = \begin{pmatrix} \lambda \circ \kappa & \lambda \circ g \\ 0 & 1_B \end{pmatrix}.$$

Αν εφαρμόσουμε τώρα στην ισότητα $g \circ f + \kappa \circ \lambda = 1_A$ τον μονομορφισμό κ από τα δεξιά, τότε εύκολα οδηγούμαστε στην ισότητα $\lambda \circ \kappa = 1_K$. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, και εφαρμόζοντας στην ισότητα $g \circ f + \kappa \circ \lambda = 1_A$ αυτή τη φορά τον μορφισμό λ , προκύπτει ότι

$$\lambda = \lambda \circ g \circ f + \lambda \circ \kappa \circ \lambda = \lambda \circ g \circ f + 1_K \circ \lambda = \lambda \circ g \circ f + \lambda.$$

Επομένως, παίρνουμε ότι $\lambda = \lambda \circ g \circ f + \lambda$, και άρα, ότι $\lambda \circ g \circ f = 0$. Επειδή όμως ο f είναι επιμορφισμός στην \mathcal{D} , έπεται ότι $\lambda \circ g = 0$. Έτσι τελικά, έχουμε ότι

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ f \end{pmatrix} \circ (\kappa \quad g) = \begin{pmatrix} 1_K & 0 \\ 0 & 1_B \end{pmatrix} = 1_{K \oplus B}.$$

Συνεπώς, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο μορφισμός

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ f \end{pmatrix} : A \longrightarrow K \oplus B,$$

είναι ισομορφισμός στην \mathcal{D} , με $\begin{pmatrix} \lambda \\ f \end{pmatrix}^{-1} = (\kappa \quad g)$, δηλαδή ότι $A \cong K \oplus B$ στην \mathcal{D} . ■

Ολοκληρώνουμε την ενότητα αυτή, μελετώντας εν συντομία κατηγορίες πηλικά.

Έστω \mathcal{C} μια κατηγορία. Υποθέτουμε ότι στην κλάση όλων των μορφισμών της \mathcal{C} έχει οριστεί μια σχέση ισοδυναμίας « \sim » η οποία είναι συμβιβαστική με την σύνθεση μορφισμών στην \mathcal{C} όταν αυτή ορίζεται. Δηλαδή υποθέτουμε για κάθε δύο αντικείμενα A, B της \mathcal{C} , έχει οριστεί στο σύνολο μορφισμών $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ μια σχέση ισοδυναμίας \sim , έτσι ώστε, αν $f_1, f_2 : A \longrightarrow B$ είναι μορφισμοί στην \mathcal{C} για τους οποίους ισχύει ότι $f_1 \sim f_2$, τότε:

$$\forall g : B \longrightarrow D \quad \& \quad \forall h : C \longrightarrow A \quad \text{ισχύει ότι} \quad f_1 \circ h \sim f_2 \circ h \quad \& \quad g \circ f_1 \sim g \circ f_2 \quad (*)$$

Με βάση τα παραπάνω δεδομένα, ορίζουμε μια νέα κατηγορία \mathcal{C}/\sim ως εξής. Τα αντικείμενα της \mathcal{C} είναι τα αντικείμενα της \mathcal{C} . Αν A και B είναι αντικείμενα της \mathcal{C}/\sim , δηλαδή αντικείμενα της \mathcal{C} , τότε:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}/\sim}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)/\sim$$

Η σύνθεση μορφισμών επάγεται από την σύνθεση μορφισμών στην \mathcal{C} . Οι σχέσεις (*) πιστοποιούν εύκολα ότι πράγματι έτσι αποκτούμε μια κατηγορία.

Ορισμός 2.3.15. Έστω \mathcal{C} μια κατηγορία και « \sim » μια σχέση ισοδυναμίας στην κλάση μορφισμών της \mathcal{C} η οποία είναι συμβιβαστική με την σύνθεση της \mathcal{C} , δηλαδή ικανοποιεί την (*). Τότε η επαγόμενη κατηγορία \mathcal{C}/\sim καλείται **κατηγορία πηλίκου (quotient category)** της \mathcal{C} ως προς τη δοθείσα σχέση ισοδυναμίας.

Ένα αντικείμενο A της \mathcal{C} θεωρούμε ως αντικείμενο της \mathcal{C}/\sim θα συμβολίζεται συνήθως με \underline{A} , και ένας μορφισμός μεταξύ των αντικειμένων \underline{A} και \underline{B} , δηλαδή η κλάση ισοδυναμίας $[f]_{\sim}$ ενός μορφισμού $f : A \longrightarrow B$ στην \mathcal{C} , θα συμβολίζεται με \underline{f} .

Παρατήρηση 2.3.16. Αν \mathcal{C}/\sim είναι η κατηγορία πηλίκου της κατηγορίας \mathcal{C} ως προς τη σχέση ισοδυναμίας « \sim », τότε ορίζοντας

$$\pi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}/\sim, \quad \pi(A) = \underline{A} \quad \& \quad \pi(f) = \underline{f}$$

αποκτούμε έναν συναλλοίωτο συναρτητή ο οποίος είναι πλήρης και καλείται ο **συναρτητής προβολής, (projection functor)**.

Υποθέτουμε από τώρα μέχρι και το τέλος της παρούσας ενότητας, ότι κάθε πλήρης υποκατηγορία μιας κατηγορίας \mathcal{C} είναι κλειστή σε ισομορφισμούς στην \mathcal{C} .

Επειδή ενδιαφερόμαστε αποκλειστικά για προσθετικές κατηγορίες, υποθέτουμε από τώρα και στο εξής ότι \mathcal{C} είναι μια προσθετική κατηγορία. Μια ειδική περίπτωση κατηγοριών πηλίκο είναι οι ευσταθείς κατηγορίες: Έστω \mathcal{A} μια πλήρης υποκατηγορία της \mathcal{C} . Ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας στην κλάση των μορφισμών της \mathcal{C} ως εξής. Αν C_1 και C_2 είναι αντικείμενα της \mathcal{C} , και $f_1, f_2: C_1 \rightarrow C_2$ είναι μορφισμοί στην \mathcal{C} , τότε ορίζουμε: $f_1 \sim_{\mathcal{A}} f_2$ αν ο μορφισμός $f_1 - f_2: C_1 \rightarrow C_2$ αναλύεται μέσω ενός αντικειμένου το οποίο ανήκει στην υποκατηγορία \mathcal{A} : υπάρχει ένα αντικείμενο $A \in \mathcal{A}$ και μορφισμοί $\alpha: C_1 \rightarrow A$ και $\beta: A \rightarrow C_2$ έτσι ώστε: $f_1 - f_2 = \beta \circ \alpha$.

Εύκολα βλέπουμε ότι πράγματι η σχέση $\sim_{\mathcal{A}}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί της κλάσης των μορφισμών της \mathcal{C} .

Ορισμός 2.3.17. Έστω \mathcal{C} μια προσθετική κατηγορία και \mathcal{A} μια πλήρης υποκατηγορία της \mathcal{C} . Τότε η **ευσταθής κατηγορία (stable category) \mathcal{C}/\mathcal{A}** της \mathcal{C} modulo την υποκατηγορία \mathcal{A} , ορίζεται να είναι η κατηγορία πηλίκο $\mathcal{C}/\sim_{\mathcal{A}}$ και συμβολίζεται με \mathcal{C}/\mathcal{A} :

$$\mathcal{C}/\mathcal{A} = \mathcal{C}/\sim_{\mathcal{A}}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι αν C_1 και C_2 είναι αντικείμενα της \mathcal{C} , τότε το υποσύνολο

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}(C_1, C_2) = \{f: C_1 \rightarrow C_2 \mid f = \beta \circ \alpha, \text{ όπου } A \in \mathcal{A}, \alpha: C_1 \rightarrow A, \beta: A \rightarrow C_2\}$$

είναι μια υποομάδα της αβελιανής ομάδας $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2)$, και επιπλέον

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}(C_1, C_2) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2)/\text{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}(C_1, C_2)$$

Παρατήρηση 2.3.18. Αν \mathcal{A} είναι μια πλήρης υποκατηγορία μιας προσθετικής κατηγορίας \mathcal{C} , τότε η ευσταθής κατηγορία \mathcal{C}/\mathcal{A} της \mathcal{C} modulo την \mathcal{A} , είναι προσθετική κατηγορία. Επιπλέον, η προβολή

$$\pi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/\mathcal{A},$$

όπου $\pi(C) = \underline{C}$ και $\pi(f) = \underline{f}$, είναι ένας προσθετικός και πλήρης συναλλοίωτος συναρτητής με $\pi(\mathcal{A}) = 0$. Μάλιστα, ο προσθετικός συναλλοίωτος συναρτητής π χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα ότι αν $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ είναι ένας προσθετικός συναλλοίωτος (αντισυναλλοίωτος) συναρτητής τέτοιος ώστε $T(\mathcal{A}) = 0$, τότε υπάρχει μοναδικός προσθετικός συναλλοίωτος (αντισυναλλοίωτος) συναρτητής $T': \mathcal{C}/\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}$ έτσι ώστε $T' \circ \pi = T$.

Πράγματι, χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι η \mathcal{C} είναι προσθετική κατηγορία, εύκολα έπεται ότι η ευσταθής κατηγορία \mathcal{C}/\mathcal{A} της \mathcal{C} modulo την \mathcal{A} είναι προσθετική κατηγορία, όπου η πρόσθεση στα σύνολα μορφισμών δίνεται ως:

$$\underline{f} + \underline{g} = \underline{f + g},$$

και τα μηδενικά αντικείμενα της \mathcal{C}/\mathcal{A} είναι ακριβώς τα αντικείμενα της \mathcal{A} . Επιπλέον, από τον τρόπο που ορίστηκε ο συναλλοίωτος συναρτητής π , είναι φανερό ότι ο π είναι προσθετικός και πλήρης με την ιδιότητα ότι $\pi(A) = 0$ για κάθε αντικείμενο A της \mathcal{A} . Σημειώνουμε ότι η ισότητα $\pi(\mathcal{A}) = 0$, προκύπτει από το γεγονός ότι τα μηδενικά αντικείμενα της \mathcal{C}/\mathcal{A} είναι ακριβώς όλα τα αντικείμενα της \mathcal{A} . Έστω τώρα $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ένας προσθετικός συναλλοίωτος (αντισυναλλοίωτος) συναρτητής τέτοιος ώστε $T(\mathcal{A}) = 0$. Ορίζουμε $T': \mathcal{C}/\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}$, θέτοντας $T'(\underline{C}) = T(C)$, και $T'(\underline{f}) = T(f)$. Τότε ο T' είναι προσθετικός συναλλοίωτος συναρτητής έτσι ώστε $T' \circ \pi = T$. Μάλιστα, ο T' με την προηγούμενη ιδιότητα είναι μοναδικός, διότι αν υπήρχε προσθετικός συναλλοίωτος (αντισυναλλοίωτος) συναρτητής $F: \mathcal{C}/\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}$ με $F \circ \pi = T$, τότε

$$F(\underline{C}) = F(\pi(C)) = (F \circ \pi)(C) = T(C) = (T' \circ \pi)(C) = T'(\pi(C)) = T'(\underline{C}),$$

$$F(\underline{f}) = F(\pi(f)) = (F \circ \pi)(f) = T(f) = (T' \circ \pi)(f) = T'(\pi(f)) = T'(\underline{f}),$$

για κάθε αντικείμενο \underline{C} της \mathcal{C}/\mathcal{A} , και για κάθε μορφισμό \underline{f} στην \mathcal{C}/\mathcal{A} .

2.4 Αβελιανές Κατηγορίες

Στην παρούσα ενότητα, μελετάμε αβελιανές κατηγορίες. Οι αβελιανές κατηγορίες όπως θα διαπιστώσουμε, κληρονομούν τις θεμελιώδεις ιδιότητες των αβελιανών ομάδων στην κατηγορία Ab . Δεν είναι άλλωστε τυχαία η ονομασία αυτών. Σημειώνουμε ότι η ιδέα μιας αβελιανής κατηγορίας, καθώς και ο όρος «αβελιανή κατηγορία», εισήχθησαν πρώτη φορά από τον S. MacLane. Ωστόσο, ο σύγχρονος αξιωματικός ορισμός μιας αβελιανής κατηγορίας, δόθηκε από τον A. Grothendieck.

Έστω \mathcal{C} μια υποπροσθετική κατηγορία με μηδενικά αντικείμενα. Υποθέτουμε ότι κάθε μορφισμός στην \mathcal{C} , έχει πυρήνα και συνπυρήνα. Τότε για έναν οποιοδήποτε μορφισμό $\alpha: B \rightarrow C$ στην \mathcal{C} , επάγεται μοναδικός μορφισμός $\bar{\alpha}: \text{Coker}(\ker \alpha) \rightarrow \text{Ker}(\text{coker } \alpha)$ στην \mathcal{C} , έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker } \alpha & \xrightarrow{\ker \alpha} & B & \xrightarrow{\alpha} & C & \xrightarrow{\text{coker } \alpha} & \text{Coker } \alpha & (\dagger) \\ & & \downarrow \lambda & & \uparrow \mu & & \\ & & \text{Coker}(\ker \alpha) & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & \text{Ker}(\text{coker } \alpha) & & \end{array}$$

όπου $\lambda = \text{coker}(\ker \alpha)$ και $\mu = \text{ker}(\text{coker } \alpha)$. Πράγματι, επειδή $\text{coker } \alpha \circ \alpha = 0$, από την καθολική ιδιότητα του πυρήνα υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\beta: B \rightarrow \text{Ker}(\text{coker } \alpha)$ έτσι ώστε $\mu \circ \beta = \alpha$. Τότε έπεται ότι $\mu \circ \beta \circ \ker \alpha = \alpha \circ \ker \alpha = 0$, και άρα ότι $\beta \circ \ker \alpha = 0$, αφού ο μ είναι μονομορφισμός στην \mathcal{C} . Συνεπώς, από την καθολική ιδιότητα του συνπυρήνα, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\bar{\alpha}: \text{Coker}(\ker \alpha) \rightarrow \text{Ker}(\text{coker } \alpha)$ στην \mathcal{C} τέτοιος ώστε $\bar{\alpha} \circ \lambda = \beta$. Έτσι τελικά, έχουμε ότι $\mu \circ \bar{\alpha} \circ \lambda = \mu \circ \beta = \alpha$.

Για παράδειγμα, έστω $\mathcal{C} = \text{Ab}$ η κατηγορία των αβελιανών ομάδων. Τότε προφανώς η \mathcal{C} είναι προσθετική κατηγορία, και κάθε μορφισμός στην \mathcal{C} έχει πυρήνα και συνπυρήνα. Αν $\alpha: B \rightarrow C$ είναι ένας ομομορφισμός αβελιανών ομάδων, τότε $\text{Coker}(\ker \alpha) \cong B/\text{Ker } \alpha$, και $\text{Ker}(\text{coker } \alpha) \cong \text{Im } \alpha$. Έτσι στην κατηγορία $\mathcal{C} = \text{Ab}$, ο επαγόμενος μορφισμός $\bar{\alpha}$ είναι ο ισομορφισμός αβελιανών ομάδων $\bar{\alpha}: B/\text{Ker } \alpha \rightarrow \text{Im } \alpha$, ο οποίος δίνεται από το πρώτο Θεώρημα ισομορφισμών για ομάδες.

Φυσιολογικά λοιπόν οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.4.1. Μια κατηγορία \mathcal{C} καλείται **αβελιανή, (abelian category)**, αν

1. Η \mathcal{C} είναι προσθετική.
2. Κάθε μορφισμός στην \mathcal{C} έχει πυρήνα και συνπυρήνα.
3. Για κάθε μορφισμό $\alpha: B \rightarrow C$ στην \mathcal{C} , ο επαγόμενος μορφισμός

$$\bar{\alpha}: \text{Coker}(\ker \alpha) \rightarrow \text{Ker}(\text{coker } \alpha),$$

είναι ένας ισομορφισμός στην \mathcal{C} .

Παρατήρηση 2.4.2. Το τρίτο αξίωμα του Ορισμού (2.4.1), μπορεί να αντικατασταθεί με το ακόλουθο αξίωμα:

- 3'. Κάθε μορφισμός α στην \mathcal{C} αναλύεται ως $\alpha = \gamma \circ \beta$, όπου γ είναι ο πυρήνας κάποιου μορφισμού στην \mathcal{C} , και ο β είναι ο συνπυρήνας κάποιου μορφισμού στην \mathcal{C} .

Στην πραγματικότητα, είναι προφανές ότι $3 \Rightarrow 3'$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι η κατηγορία \mathcal{C} ικανοποιεί τα αξιώματα 1) και 2) του Ορισμού (2.4.1), καθώς και το αξίωμα 3'). Έστω $\alpha: B \rightarrow C$ ένας μορφισμός στην \mathcal{C} . Η υπόθεση το 3'), μας δίνει μορφισμούς $\beta: B \rightarrow D$, $\gamma: D \rightarrow C$ στην \mathcal{C} έτσι ώστε $\alpha = \gamma \circ \beta$, όπου οι β και γ είναι αντίστοιχα, ο συνπυρήνας και ο πυρήνας κάποιου μορφισμού στην \mathcal{C} . Τότε χρησιμοποιώντας τα αξιώματα 1), 2), και την Πρόταση (2.3.11),

παίρνουμε ότι $\gamma = \ker(\text{coker } \gamma)$ και $\beta = \text{coker}(\ker \beta)$. Επειδή ο γ είναι μονομορφισμός και αφού ο β είναι επιμορφισμός, εύκολα έπεται ότι $\ker \alpha = \ker \beta$, και $\text{coker } \alpha = \text{coker } \gamma$. Συνεπώς, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\text{Coker}(\ker \alpha) = \text{Coker}(\ker \beta) = D = \text{Ker}(\text{coker } \gamma) = \text{Ker}(\text{coker } \alpha)$$

όπως επιθυμούσαμε.

Παράδειγμα 2.4.3. 1. Η κατηγορία Ab είναι αβελιανή.

2. Αν R είναι ένας δακτύλιος με μονάδα, τότε οι κατηγορίες $R\text{-Mod}$ και $\text{Mod-}R$ είναι αβελιανές.

3. Η κατηγορία $R\text{-mod}$ των πεπερασμένα παραγόμενων αριστερών R -προτύπων είναι αβελιανή, αν και μόνο αν, ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether. Ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν και για την κατηγορία $\text{mod-}R$ των πεπερασμένα παραγόμενων δεξιών R -προτύπων.

Πρόταση 2.4.4. Έστω \mathcal{C} μια αβελιανή κατηγορία. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Αν $\alpha: B \rightarrow C$ είναι μονομορφισμός και επιμορφισμός στην \mathcal{C} , τότε ο α είναι ισομορφισμός στην \mathcal{C} .
2. Αν $\alpha: B \rightarrow C$ είναι μονομορφισμός στην \mathcal{C} , τότε $\alpha = \ker(\text{coker } \alpha)$.
3. Αν $\alpha: B \rightarrow C$ είναι επιμορφισμός στην \mathcal{C} , τότε $\alpha = \text{coker}(\ker \alpha)$.

Απόδειξη. 1) Έστω $\alpha: B \rightarrow C$ ένας μονομορφισμός και επιμορφισμός στην \mathcal{C} . Τότε όπως γνωρίζουμε θα έχουμε $\text{Ker } \alpha = 0$ και $\text{Coker } \alpha = 0$, και επομένως στο διάγραμμα (\dagger): ο επιμορφισμός $\lambda = \text{coker}(\ker \alpha)$ είναι μονομορφισμός και ο μονομορφισμός $\mu = \ker(\text{coker } \alpha)$ είναι επιμορφισμός. Επειδή ο λ είναι ο συνπυρήνας του μηδενικού μορφισμού, έπεται ότι υπάρχει μορφισμός $\lambda': \text{Coker}(\ker \alpha) \rightarrow B$ έτσι ώστε $\lambda' \circ \lambda = 1_B$. Τότε $\lambda \circ \lambda' \circ \lambda = \lambda$ και επομένως $\lambda \circ \lambda' = 1_{\text{Coker}(\ker \alpha)}$ διότι ο λ είναι επιμορφισμός. Άρα ο μορφισμός λ ισομορφισμός. Παρόμοια δείχνουμε ότι ο μ είναι ισομορφισμός. Επειδή

$$\alpha = \mu \circ \bar{\alpha} \circ \lambda$$

και οι μορφισμοί $\mu, \bar{\alpha},$ και λ είναι ισομορφισμοί, έπεται ότι ο α είναι ισομορφισμός στην \mathcal{C} .

2) Έστω $\alpha: B \rightarrow C$ ένας μονομορφισμός στην \mathcal{C} . Τότε $\alpha = \mu \circ \bar{\alpha} \circ \lambda$, όπου $\mu = \ker(\text{coker } \alpha)$ και $\bar{\alpha}$ είναι ο επαγόμενος ισομορφισμός. Επειδή ο α είναι μονομορφισμός, έπεται όπως παραπάνω ότι ο λ είναι ισομορφισμός και τότε η σύνθεση $\bar{\alpha} \circ \lambda$ είναι ισομορφισμός. Αυτό σημαίνει ότι οι μορφισμοί α και $\mu = \ker(\text{coker } \alpha)$ είναι ισοδύναμοι μονομορφισμοί και επομένως παριστάνουν το ίδιο υποαντικείμενο $\text{Ker}(\text{coker } \alpha)$ του B . Με άλλα λόγια θα έχουμε $\ker(\text{coker } \alpha) = \alpha$

3) Δυϊκά, με την απόδειξη του 2). ■

Συμβολισμός: Αν \mathcal{C} είναι μια αβελιανή κατηγορία, και $\alpha: B \rightarrow C$ στην \mathcal{C} ένας μορφισμός στην \mathcal{C} .

Ο μορφισμός $\text{coim } \alpha = \text{coker}(\ker \alpha): B \rightarrow \text{Coker}(\ker \alpha)$ καλείται η **συνεικόνα (coimage)** του α και το αντικείμενο $\text{Coim } \alpha := \text{Coker}(\ker \alpha)$ η **συνεικόνα (coimage)** του α .

Παρόμοια ο μορφισμός $\text{im } \alpha = \ker(\text{coker } \alpha): \text{Ker}(\text{coker } \alpha) \rightarrow C$ καλείται η **εικόνα (image)** του α και το αντικείμενο $\text{Im } \alpha := \text{Ker}(\text{coker } \alpha)$ η **εικόνα (image)** του α .

Έτσι με τους παραπάνω συμβολισμούς θα έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker } \alpha & \xrightarrow{\ker \alpha} & B & \xrightarrow{\alpha} & C & \xrightarrow{\text{coker } \alpha} & \text{Coker } \alpha \\ & & \downarrow \text{coim } \alpha & & \uparrow \text{im } \alpha & & \\ & & \text{Coim } \alpha & \xrightarrow{\exists! \bar{\alpha}} & \text{Im } \alpha & & \end{array}$$

Επειδή ο μορφοισμός $\bar{\alpha}: \text{Coim } \alpha \rightarrow \text{Im } \alpha$ είναι ένας φυσικός ισομορφοισμός, ταυτίζουμε την συνεικόνα $\text{Coim } \alpha$ με την εικόνα $\text{Im } \alpha$ του α μέσω του $\bar{\alpha}$, και τότε ο μορφοισμός $\alpha: A \rightarrow B$ αναλύεται μέσω της εικόνας του, όπως στο παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ \alpha' \downarrow & \nearrow \gamma & \\ \text{Im } \alpha & & \end{array}$$

όπου ο $\alpha' = \bar{\alpha} \circ \text{coim } \alpha$ είναι ένας επιμορφοισμός στην \mathcal{C} , και ο $\gamma := \text{im } \alpha$ είναι ένας μονομορφοισμός στην \mathcal{C} . Στην πράξη παραλείπουμε τον ισομορφοισμό $\bar{\alpha}$ και τότε το παραπάνω διάγραμμα παίρνει την μορφή:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ \text{coim } \alpha \downarrow & \nearrow \text{im } \alpha & \\ \text{Im } \alpha & & \end{array}$$

Σύμβαση: Από τώρα και στο εξής εργαζόμαστε με αντιπροσώπους υποαντικείμενων, αντικειμένων ηθικών, πυρήνων, συνπυρήνων, κτλ. Έτσι για παράδειγμα για δύο υποαντικείμενα X και Y ενός αντικείμενου C μιας αβελιανής κατηγορίας \mathcal{C} , θα γράφουμε $X = Y$ και θα εννοούμε ότι τα X και Y είναι ισοδύναμα υποαντικείμενα του C , δηλαδή αν το X αντιπροσωπεύεται από τον μονομορφοισμό $\alpha: X \rightarrow C$ και το Y αντιπροσωπεύεται από τον μονομορφοισμό $\beta: X \rightarrow C$, τότε υπάρχει ισομορφοισμός $\gamma: X \rightarrow Y$ έτσι ώστε: $\beta \circ \gamma = \alpha$.

Σε μια αβελιανή κατηγορία, μπορούμε να ορίσουμε την έννοια μιας ακριβούς ακολουθίας με παρόμοιο τρόπο όπως ορίσαμε την έννοια μια ακριβούς ακολουθίας σε κατηγορίες προτύπων.

Ορισμός 2.4.5. Έστω \mathcal{C} μια αβελιανή κατηγορία. Μια ακολουθία από αντικείμενα και μορφοισμούς στην \mathcal{C} ,

$$\cdots \rightarrow C_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} C_i \xrightarrow{\alpha_i} C_{i+1} \rightarrow \cdots \quad (2.2)$$

καλείται **ακριβής (exact)** στο C_i , αν $\text{Im } \alpha_{i-1} = \text{Ker } \alpha_i$, δηλαδή τα αντικείμενα $\text{Im } \alpha_{i-1}$ και $\text{Ker } \alpha_i$ είναι ισοδύναμα ως υποαντικείμενα του C_i . Η ακολουθία (2.2) καλείται **ακριβής**, αν είναι ακριβής σε κάθε C_i .

Παρατήρηση 2.4.6. Έστω \mathcal{C} μια αβελιανή κατηγορία. Τότε μια ακολουθία

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B$$

είναι ακριβής στην \mathcal{C} , αν και μόνο αν, ο μορφοισμός α είναι μονομορφοισμός στην \mathcal{C} . Παρόμοια, μια ακολουθία

$$B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$$

είναι ακριβής στην \mathcal{C} , αν και μόνο αν, ο μορφοισμός β είναι επιμορφοισμός στην \mathcal{C} . Επιπλέον, μια ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} της μορφής:

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$$

καλείται **σύντομη ακριβής ακολουθία, (short exact sequence)**.

Σημειώνουμε ότι σε μια οποιαδήποτε αβελιανή κατηγορία μπορούμε να εφαρμόσουμε το Snake Lemma, και να ορίσουμε διασπασίμες σύντομες ακριβείς ακολουθίες, παρόμοια με την περίπτωση των προτύπων. Επίσης, για έναν προσθετικό συναρτητή μεταξύ δύο αβελιανών κατηγοριών, μπορούμε να ορίσουμε τις έννοιες ενός (δεξιού ή αριστερού) ακριβούς συναρτητή, ανάλογα με

τον τρόπο που ορίσαμε τις έννοιες αυτές, για έναν προσθετικό συναρτητή μεταξύ δύο κατηγοριών προτύπων. Και στην περίπτωση αυτή, αποδεικνύεται ότι ο συναλλοίωτος ή αντισυναλλοίωτος προσθετικός συναρτητής Hom είναι αριστερά ακριβής. Επιπλέον, ο ορισμός των pullbacks και pushouts διαγραμμμάτων όπως δόθηκε στο Κεφάλαιο 1, γενικεύεται κατά τον προφανή τρόπο σε μια οποιαδήποτε κατηγορία, ωστόσο η ύπαρξη αυτών σε αβελιανές κατηγορίες είναι συνέπεια της ύπαρξης πυρήνων και συνπυρήνων. Τέλος, ας σημειώσουμε ότι τα pullback, pushout διαγράμματα και οι σύντομες ακριβείς ακολουθίες σε μια αβελιανή κατηγορία, συνδέονται όπως και στην περίπτωση των προτύπων. Για περισσότερες λεπτομέρειες, παραπέμπουμε στα βιβλία [54] και [45].

Ορισμός 2.4.7. Έστω \mathcal{C} μια αβελιανή κατηγορία. Ένα αντικείμενο C της \mathcal{C} καλείται **προβολικό αντικείμενο, (projective object)**, αν ο συναλλοίωτος συναρτητής $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, -): \mathcal{C} \rightarrow \text{Ab}$ είναι (δεξιά) ακριβής, και **ενέσιμο αντικείμενο, (injective object)**, αν ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C): \mathcal{C} \rightarrow \text{Ab}$ είναι (δεξιά) ακριβής.

Λέμε ότι η αβελιανή κατηγορία \mathcal{C} έχει **αρκετά προβολικά αντικείμενα, (enough projectives)**, αν κάθε αντικείμενο της \mathcal{C} είναι ένα αντικείμενο πηλίκο ενός προβολικού αντικειμένου. Ανάλογα, λέμε ότι η αβελιανή κατηγορία \mathcal{C} έχει **αρκετά ενέσιμα αντικείμενα, (enough injectives)**, αν κάθε αντικείμενο της \mathcal{C} είναι ένα υποαντικείμενο ενός ενέσιμου αντικειμένου.

Στο επόμενο κεφάλαιο, θα διαπιστώσουμε ότι η αβελιανή κατηγορία $R\text{-Mod}$ έχει αρκετά προβολικά και αρκετά ενέσιμα, όπου στην κατηγορία αυτή, τα προβολικά αντικείμενα είναι τα προβολικά πρότυπα και τα ενέσιμα αντικείμενα είναι τα ενέσιμα πρότυπα. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τις έννοιες ενός προβολικού και ενός ενέσιμου προτύπου, θα κατασκευάσουμε προβολικές και ενέσιμες αναλύσεις, καθώς και παραγόμενους συναρτητές όπως ο $\text{Ext}_R^i(-, -)$. Χάριν πληρότητας, ας σημειώσουμε ότι οι προηγούμενες έννοιες ορίζονται παρόμοια σε μια οποιαδήποτε αβελιανή κατηγορία με προβολικά και ενέσιμα αντικείμενα. Μάλιστα, αν \mathcal{C} είναι μια αβελιανή κατηγορία με προβολικά ή ενέσιμα αντικείμενα, τότε είναι δυνατό να κατασκευάσουμε τον συναρτητή $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(-, -)$.

2.4.1 Επεκτάσεις

Η προσοχή μας τώρα στρέφεται σε επεκτάσεις ενός αντικειμένου A , από ένα αντικείμενο C μιας αβελιανής κατηγορίας \mathcal{C} . Στόχος μας είναι να δείξουμε ότι σε μια αβελιανή κατηγορία \mathcal{C} , χωρίς απαραίτητα προβολικά ή ενέσιμα αντικείμενα, μπορούμε να σχηματίσουμε πάντα τις αβελιανές ομάδες $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(C, A)$ για κάθε $n \geq 0$, και για κάθε δύο αντικείμενα A και C της \mathcal{C} . Δεν υπεισερχόμαστε σε συνολοθεωρητικά προβλήματα του τύπου ότι οι αβελιανές ομάδες $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(C, A)$ ενδέχεται να μην είναι σύνολα αλλά κλάσεις.

Σύμβαση: Από τώρα και στο εξής, συμβολίζουμε με \mathcal{C} μια αβελιανή κατηγορία χωρίς απαραίτητα προβολικά ή ενέσιμα αντικείμενα. Επιπλέον, χάριν απλότητας σημειώνουμε τον ταυτοτικό μορφοισμό κάθε αντικειμένου A της \mathcal{C} , 1_A , με 1 .

Ας ξεκινήσουμε παραθέτοντας παρατηρήσεις και συμβολισμούς.

Όπως και στην ενότητα 2.1, ο μορφοισμός $\Delta: A \rightarrow A \oplus A$ στην \mathcal{C} , δίνεται σε μορφή πίνακα ως $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$, και ο μορφοισμός $\nabla: A \oplus A \rightarrow A$ στην \mathcal{C} , δίνεται σε μορφή πίνακα ως $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$. Αν $\alpha: A \rightarrow B$ και $\alpha': A' \rightarrow B'$ είναι δύο μορφοισμοί στην \mathcal{C} , τότε ο μορφοισμός $\alpha \oplus \alpha': A \oplus A' \rightarrow B \oplus B'$ στην \mathcal{C} , αντιπροσωπεύεται από τον πίνακα $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha' \end{pmatrix}$. Για οποιοσδήποτε δύο σύντομες ακριβείς ακολουθίες στην \mathcal{C}

$$E: 0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0 \quad \& \quad E': 0 \rightarrow A' \rightarrow B' \rightarrow C' \rightarrow 0,$$

η ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} ,

$$0 \rightarrow A \oplus A' \rightarrow B \oplus B' \rightarrow C \oplus C' \rightarrow 0,$$

θα συμβολίζεται με $E \oplus E'$. Επιπλέον, ένας **μορφισμός (morphism)** από την ακολουθία E στην E' , είναι ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\ & & \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' \longrightarrow 0 \end{array}$$

και συμβολίζεται ως (α, β, γ) .

Σταθεροποιούμε τώρα δύο αντικείμενα A και C της \mathcal{C} .

Ορισμός 2.4.8. Μια **επέκταση (extension)** του A από το C είναι μια σύντομη ακριβής ακολουθία της μορφής:

$$E : 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

όπου B είναι ένα αντικείμενο της \mathcal{C} . Αν $E' : 0 \longrightarrow A \longrightarrow B' \longrightarrow C \longrightarrow 0$ είναι μία άλλη επέκταση του A από το C , τότε λέμε ότι η E είναι **ισοδύναμη (equivalent)** με την E' , αν υπάρχει μορφισμός $(1, \beta, 1) : E \longrightarrow E'$.

Χρησιμοποιώντας το Snake Lemma, βλέπουμε ότι ο μορφισμός β του Ορισμού (2.4.8), αν υπάρχει, είναι απαραίτητα ισομορφισμός. Έτσι, έχουμε όντως μια σχέση ισοδυναμίας στην κλάση όλων των επεκτάσεων του αντικειμένου A από το αντικείμενο C της \mathcal{C} .

Συμβολισμός: Αν E και E' είναι δύο ισοδύναμες επεκτάσεις του αντικειμένου A από το αντικείμενο C της \mathcal{C} , τότε γράφουμε $E = E'$.

Παρατήρηση 2.4.9. Αν $E : 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ είναι μια σύντομη ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} , και $\gamma : C' \longrightarrow C$ είναι ένα μορφισμός στην \mathcal{C} , τότε επάγεται ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} \bar{E} : & 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & \bar{B} & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \\ & & & \parallel & & \downarrow \bar{\beta} & & \downarrow \gamma & & \\ E : & 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (2.3)$$

όπου η ακολουθία \bar{E} είναι ακριβής στην \mathcal{C} .

Πράγματι, θεωρώντας το pullback \bar{B} του διαγράμματος

$$\begin{array}{ccc} \bar{B} & \dashrightarrow & C' \\ \downarrow \bar{\beta} & & \downarrow \gamma \\ B & \longrightarrow & C \end{array}$$

και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των pullback διαγραμμάτων, παίρνουμε το μεταθετικό και ακριβές διάγραμμα (2.3).

Η ακολουθία \bar{E} η οποία προκύπτει από την (E) όπως στο μεταθετικό και ακριβές διάγραμμα (2.3), είναι μοναδική μέχρι ισοδυναμίας. Πριν να αποδείξουμε τον ισχυρισμό αυτό, χρειάζομαστε το επόμενο αποτέλεσμα.

Λήμμα 2.4.10. Αν $(\alpha, \beta, \gamma): E' \longrightarrow E$ είναι ένας μορφοισμός μεταξύ δύο σύντομων ακριβών ακολουθιών στην \mathcal{C} , τότε υπάρχει ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccc}
 E' : & 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\mu'} & B' & \xrightarrow{\lambda'} & C' & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \alpha \downarrow & & \beta' \downarrow & & \parallel & & \\
 \bar{E} : & 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\bar{\mu}} & \bar{B} & \xrightarrow{\bar{\lambda}} & C' & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \parallel & & \bar{\beta} \downarrow & & \downarrow \gamma & & \\
 E : & 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\mu} & B & \xrightarrow{\lambda} & C & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

όπου η ακολουθία \bar{E} είναι ακριβής στην \mathcal{C} , και $\bar{\beta} \circ \beta' = \beta$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση (2.4.9), παίρνουμε την ακριβή ακολουθία \bar{E} , όπου το \bar{B} είναι το pullback που σχηματίζεται από τους μορφοισμούς λ και γ . Επειδή $\lambda \circ \beta = \gamma \circ \lambda'$, από την καθολική ιδιότητα των pullbacks, υπάρχει μοναδικός μορφοισμός $\beta': B \longrightarrow \bar{B}$ έτσι ώστε $\bar{\beta} \circ \beta' = \beta$, και $\bar{\lambda} \circ \beta' = \lambda'$. Απομένει να αποδείξουμε ότι $\beta' \circ \mu' = \bar{\mu} \circ \alpha$. Προφανώς, υπάρχει κάποιος μορφοισμός $\alpha': A' \longrightarrow A$ στην \mathcal{C} , έτσι ώστε $\beta' \circ \mu' = \bar{\mu} \circ \alpha'$. Αρκεί να δείξουμε λοιπόν ότι $\alpha' = \alpha$, αφού τότε $\beta' \circ \mu' = \bar{\mu} \circ \alpha' = \bar{\mu} \circ \alpha$. Έχουμε ότι:

$$\mu \circ \alpha = \beta \circ \mu' = \bar{\beta} \circ \beta' \circ \mu' = \bar{\beta} \circ \bar{\mu} \circ \alpha' = \mu \circ \alpha'.$$

Συνεπώς, έπεται ότι $\alpha = \alpha'$, διότι ο μορφοισμός μ είναι μονομορφοισμός στην \mathcal{C} . ■

Πόρισμα 2.4.11. Η ακολουθία \bar{E} στο μεταθετικό και ακριβές διάγραμμα (2.3) είναι μοναδική μέχρι ισοδυναμία επεκτάσεων.

Απόδειξη. Αντικαθιστώντας τον μορφοισμό α στο Λήμμα (2.4.10) με τον ταυτοτικό μορφοισμό 1_A , έπεται το ζητούμενο. ■

Λόγω της προηγούμενης μοναδικότητας της ακολουθίας \bar{E} του διαγράμματος (2.3), από τώρα θα την συμβολίζουμε με $E\gamma$.

Δυσικά, παίρνουμε ότι:

Παρατήρηση 2.4.12. Αν $E : 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ είναι μια σύντομη ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} , και $\alpha: A \longrightarrow A'$ είναι ένα μορφοισμός στην \mathcal{C} , τότε σχηματίζοντας το pushout \bar{B} του διαγράμματος:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & B \\
 \alpha \downarrow & & \downarrow \\
 A' & \dashrightarrow & \bar{B}
 \end{array}$$

επάγεται μια ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} ,

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow \bar{B} \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

έτσι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccc}
 E : & 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \alpha \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\
 \alpha E : & 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & \bar{B} & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

να είναι μεταθετικό. Μάλιστα, η ακριβής ακολουθία αE με την προηγούμενη ιδιότητα είναι μοναδική μέχρι ισοδυναμία επεκτάσεων, αφού αν υπήρχε σύντομη ακριβής ακολουθία E' στην \mathcal{C} , και ένας μορφοισμός $(\alpha, \beta, 1): E \longrightarrow E'$, τότε χρησιμοποιώντας το Λήμμα (2.4.10), θα είχαμε ότι $E' = \alpha E$.

Συχνά, σε ένα μορφισμό μεταξύ δύο σύντομων ακριβών ακολουθιών στην \mathcal{C} , παραλείπουμε να ονομάσουμε τον μεσαίο μορφισμό. Έτσι, αν E είναι μια σύντομη ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} όπως προηγουμένως, και $\gamma: C' \rightarrow C$, $\alpha: A \rightarrow A'$ είναι μορφισμοί στην \mathcal{C} , τότε μπορούμε να γράψουμε $(\alpha, \cdot, 1): E \rightarrow \alpha E$, και $(1, \cdot, \gamma): E\gamma \rightarrow E$. Με άλλα λόγια λοιπόν, το Λήμμα (2.4.10) μας λέει ότι κάθε μορφισμός $(\alpha, \cdot, \gamma): E' \rightarrow E$, παραγοντοποιείται ως

$$E' \xrightarrow{(\alpha, \cdot, 1)} \bar{E} \xrightarrow{(1, \cdot, \gamma)} E$$

Άρα, $\alpha E' = \bar{E} = E\gamma$.

Λήμμα 2.4.13. Έστω $E: 0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ μια σύντομη ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} . Τότε ισχύουν τα ακόλουθα (όταν ορίζονται):

1. $1E = E$ 1*. $E1 = E$.
2. $(\alpha' \circ \alpha)E = \alpha'(E)$ 2*. $E(\gamma \circ \gamma') = (E\gamma)\gamma'$.
3. $(\alpha E)\gamma = \alpha(E\gamma)$.

Απόδειξη. Οι συνθήκες 1) και 2), καθώς και οι δυϊκές αυτών, προκύπτουν τετριμμένα. Για να αποδείξουμε το 3), θεωρούμε την σύνθεση

$$E\gamma \xrightarrow{(1, \cdot, \gamma)} E \xrightarrow{(\alpha, \cdot, 1)} \alpha E$$

Ο μορφισμός $(\alpha, \cdot, 1) \circ (1, \cdot, \gamma) = (\alpha, \cdot, \gamma): E\gamma \rightarrow \alpha E$ στην \mathcal{C} , μπορεί να αναλυθεί σύμφωνα με το Λήμμα (2.4.10), ως:

$$E\gamma \xrightarrow{(\alpha, \cdot, 1)} \bar{E} \xrightarrow{(1, \cdot, \gamma)} \alpha E$$

Έτσι τελικά, έχουμε ότι $\alpha(E\gamma) = \bar{E} = (\alpha E)\gamma$. ■

Λήμμα 2.4.14. Ισχύουν τα ακόλουθα (στην περίπτωση που έχουν νόημα):

- (i) $(\alpha \oplus \alpha')(E \oplus E') = \alpha E \oplus \alpha' E'$.
- (ii) $(\alpha + \alpha')E = \alpha E + \alpha' E$.
- (iii) $\alpha(E + E') = \alpha E + \alpha E'$.
- (i*) $(E \oplus E')(\gamma \oplus \gamma') = E\gamma \oplus E'\gamma'$.
- (ii*) $E(\gamma + \gamma') = E\gamma + E'\gamma'$.
- (iii*) $(E + E')\gamma = E\gamma + E'\gamma$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [45, Lemma 1.4 Chapter VII]. ■

Θέτουμε τώρα $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, A)$, την κλάση όλων των κλάσεων ισοδυναμίας σύντομων ακριβών ακολουθιών στην \mathcal{C} της μορφής:

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0.$$

Θα δείξουμε ότι η $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, A)$ είναι μια προσθετική αβελιανή ομάδα. Για να είμαστε ακριβείς, αυτό που θα δείξουμε είναι ότι η $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, A)$ είναι μια προσθετική «μεγάλη» αβελιανή ομάδα, με την έννοια ότι η συλλογή των στοιχείων της δεν είναι απαραίτητα σύνολο, αλλά κλάση. Προφανώς, σε μια τυχαία αβελιανή κατηγορία \mathcal{C} , η αβελιανή ομάδα $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, A)$ δεν είναι απαραίτητα σύνολο. Από τώρα και στο εξής, αναφέρουμε μια μεγάλη αβελιανή ομάδα απλά, ως αβελιανή ομάδα.

Ορίζουμε πρόσθεση στην κλάση $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, A)$ ως εξής:

$$E + E' = \nabla(E \oplus E')\Delta.$$

Τότε η πράξη της πρόσθεσης είναι καλά ορισμένη, και με την πράξη αυτή, η κλάση $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, A)$ μετατρέπεται σε μια αβελιανή ομάδα, δεξ [45, Theorem 1.5 Chapter VII]. Το ταυτοτικό στοιχείο της αβελιανής ομάδας $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, A)$ είναι οι διασπασίμες σύντομες ακριβείς ακολουθίες,

$$0 : 0 \longrightarrow A \longrightarrow A \oplus C \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

και το αντίστροφο στοιχείο μιας ακολουθίας $E \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, A)$, είναι η ακολουθία $(-1)E$.

Σταθεροποιούμε στην συνέχεια ένα αντικείμενο A της \mathcal{C} . Για ένα δοθέν μορφοισμό $\alpha : X \longrightarrow Y$ στην \mathcal{C} , ορίζουμε απεικόνιση

$$\bar{\alpha} := \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A, \alpha) : \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A, X) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A, Y),$$

θέτοντας $\bar{\alpha}(E) = \alpha E$ για κάθε $E \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A, X)$. Παρόμοια, ορίζουμε απεικόνιση

$$\bar{\bar{\alpha}} := \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\alpha, A) : \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(Y, A) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, A),$$

θέτοντας $\bar{\bar{\alpha}}(E') = E'\alpha$ για κάθε $E' \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(Y, A)$. Τότε οι συνθήκες 1 και 2 του Λήμματος (2.4.13), μας εξασφαλίζουν ότι ορίζοντας $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A, -)(X) = \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A, X)$ και $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A, -)(\alpha) = \bar{\alpha}$, αποκτούμε έναν συναλλοίωτο συναρτητή

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A, -) : \mathcal{C} \longrightarrow \text{Ab}$$

ενώ οι συνθήκες 1* και 2* του Λήμματος (2.4.13), μας εξασφαλίζουν ότι ορίζοντας $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(-, A)(X) = \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, A)$ και $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(-, A)(\alpha) = \bar{\bar{\alpha}}$, αποκτούμε έναν αντισυναλλοίωτο συναρτητή

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(-, A) : \mathcal{C} \longrightarrow \text{Ab}$$

Επιπλέον

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A, -)(B) = \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(-, B)(A)$$

και άρα, έχουμε έναν συναρτητή δύο μεταβλητών $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(-, -)$ ο οποίος είναι προσθετικός, διότι

$$(\alpha + \alpha')E = \alpha E + \alpha' E \quad \& \quad E(\gamma + \gamma') = E\gamma + E\gamma'$$

Παρατήρηση 2.4.15. Αν $E : 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ είναι μια σύντομη ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} , και X είναι ένα αντικείμενο στην \mathcal{C} , τότε χρησιμοποιώντας τα Λήμματα (2.4.13) και (2.4.14), παίρνουμε έναν φυσικό ομομορφοισμό αβελιανών ομάδων

$$\theta : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, C) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, A), \quad \gamma \longmapsto E\gamma.$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας το Λήμμα (2.4.10), είναι φανερό ότι ένα μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' \longrightarrow 0 \end{array}$$

επάγει ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, C) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, C') & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, A') \end{array}$$

Σχόλιο 2.4.16. Ο μορφοισμός θ της Παρατήρησης (2.4.15), καλείται ο **συναλλοίωτος συνδετικός μορφοισμός (covariant connecting morphism)** στο X , σε σχέση με τη δοθείσα σύντομη ακριβή ακολουθία E στην \mathcal{C} . Δυσικά, προκύπτει ο **αντισυναλλοίωτος συνδετικός μορφοισμός (contravariant connecting morphism)**,

$$\theta : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, X), \quad \alpha \longmapsto \alpha E.$$

Πρόταση 2.4.17. Αν $E : 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\lambda} C \longrightarrow 0$ είναι μια σύντομη ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} , και X είναι ένα οποιοδήποτε αντικείμενο στην \mathcal{C} , τότε επάγεται μια ακριβής ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$0 \longrightarrow (X, A) \xrightarrow{\mu_*} (X, B) \xrightarrow{\lambda_*} (X, C) \xrightarrow{\theta} \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, A) \xrightarrow{\bar{\mu}} \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, B) \xrightarrow{\bar{\lambda}} \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, C)$$

και μια ακριβής ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$0 \longrightarrow (C, X) \xrightarrow{\lambda^*} (B, X) \xrightarrow{\mu^*} (A, X) \xrightarrow{\theta'} \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, X) \xrightarrow{\bar{\lambda}} \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(B, X) \xrightarrow{\bar{\mu}} \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A, X)$$

όπου με $(-, -)$ εννοούμε $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -)$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [45, Proposition 2.2 Chapter VII]. ■

Ολοκληρώνουμε το παρόν κεφάλαιο, αναφέροντας ότι σχετικά παρόμοια ορίζονται οι αβελιανές ομάδες $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(C, A)$ για $n > 1$, ως κλάσεις ισοδυναμίας επεκτάσεων μήκους n εφοδιασμένες με κατάλληλη πράξη πρόσθεσης καθώς και ο προσθετικός συναρτητής $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(-, -)$. Τέλος, ας σημειώσουμε ότι δοθείσας μιας σύντομης ακριβής ακολουθίας $E : 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ στην \mathcal{C} , επάγονται με φυσικό τρόπο ακριβείς ακολουθίες αβελιανών ομάδων

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n-1}(X, C) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(X, A) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(X, B) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(X, C) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n+1}(X, A),$$

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n-1}(A, X) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(C, X) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(B, X) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(A, X) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n+1}(C, X),$$

για κάθε $n \geq 1$. Για τις αποδείξεις των αποτελεσμάτων αυτών, καθώς και για περισσότερες λεπτομέρειες, παραπέμπουμε στο [45].

Κεφάλαιο 3

Ομολογική Άλγεβρα

Στον παρόν κεφάλαιο, αναπτύσσουμε βασικά στοιχεία της Ομολογικής Άλγεβρας. Αρχικά, μελετάμε την ομολογία συμπλόκων προτύπων υπεράνω ενός προσεταιριστικού δακτυλίου με μονάδα, και στην συνέχεια, επικεντρωνόμαστε στις κεντρικές έννοιες της Ομολογιακής Άλγεβρας σε κατηγορίες προτύπων: τα προβολικά, ενέσιμα και επίπεδα πρότυπα. Χρησιμοποιώντας τις έννοιες αυτές, ορίζουμε προβολικές, ενέσιμες και επίπεδες αναλύσεις προτύπων, καθώς και παραγόμενους συναρτητές. Τέλος, αναφερόμαστε σε προβολικές, ενέσιμες και επίπεδες διαστάσεις προτύπων, οι οποίες «μετρούν» κατά κάποιον τρόπο, το πόσο απέχει ένα πρότυπο από το να είναι προβολικό, ενέσιμο ή επίπεδο.

Σύμβαση: Καθ' όλη την έκταση του κεφαλαίου αυτού, συμβολίζουμε με R έναν προσεταιριστικό δακτύλιο με μονάδα.

3.1 Ομολογία

Στην παρούσα ενότητα, ορίζουμε και μελετάμε την ομολογία συμπλόκων στην $R\text{-Mod}$. Όπως θα διαπιστώσουμε, η ομολογία «μετρά» το πόσο απέχει το υποκείμενο σύμπλοκο ώστε να είναι ακριβής ακολουθία.

Ας αρχίσουμε με τις έννοιες ενός συμπλόκου και ενός συν-αλυσιδωτού συμπλόκου στην $R\text{-Mod}$.

Ορισμός 3.1.1. Ένα **σύνπλοκο (chain complex)** $C_\bullet = \{C_n, d_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, είναι μια ακολουθία αριστερών R -προτύπων και ομομορφισμών αριστερών R -προτύπων:

$$C_\bullet : \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} C_{n-2} \longrightarrow \cdots$$

έτσι ώστε $d_n \circ d_{n+1} = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, ή ισοδύναμα, $\text{Im } d_{n+1} \subseteq \text{Ker } d_n$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Κάθε ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων d_n για $n \in \mathbb{Z}$, καλείται **διαφορικό, (differential operator)**. Επιπλέον, το σύνπλοκο C_\bullet καλείται ακριβές στο C_n , αν $\text{Im } d_{n+1} = \text{Ker } d_n$, και ακριβές, αν είναι ακριβές σε κάθε C_n για $n \in \mathbb{Z}$.

Παρόμοια,

Ορισμός 3.1.2. Ένα **συν-αλυσιδωτό σύνπλοκο (cochain complex)** $C^\bullet = \{C^n, d^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, είναι μια ακολουθία αριστερών R -προτύπων και ομομορφισμών αριστερών R -προτύπων:

$$C^\bullet : \cdots \longrightarrow C^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} C^n \xrightarrow{d^n} C^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} C^{n+2} \longrightarrow \cdots$$

έτσι ώστε $d^{n+1} \circ d^n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, ή ισοδύναμα, $\text{Im } d^n \subseteq \text{Ker } d^{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Κάθε ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων d^n για $n \in \mathbb{Z}$, καλείται **διαφορικό**. Επιπρόσθετα, το συν-αλυσιδωτό σύμπλοκο \mathbf{C}_\bullet καλείται ακριβές στο C^n , αν $\text{Im } d^{n-1} = \text{Ker } d^n$, και ακριβές, αν είναι ακριβές σε κάθε C^n για $n \in \mathbb{Z}$.

Παρατηρούμε ότι σε ένα σύμπλοκο (chain complex), οι δείκτες μειώνονται από τα αριστερά στα δεξιά, ενώ σε ένα συν-αλυσιδωτό σύμπλοκο (cochain complex), οι δείκτες αυξάνονται από τα αριστερά στα δεξιά. Ένα σύμπλοκο $\mathbf{C}_\bullet = \{C_n, d_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ μπορεί να μετατραπεί σε ένα συν-αλυσιδωτό σύμπλοκο $\mathbf{N}_\bullet = \{N^n, b^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, αν θέσουμε $N^n = C_{-n}$ και $b^n = d_{-n}$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Ανάλογα, κάθε συν-αλυσιδωτό σύμπλοκο μετατρέπεται σε ένα σύμπλοκο, (chain complex). Συνεπώς, η μόνη διαφορά ανάμεσα σε ένα σύμπλοκο και σε ένα συν-αλυσιδωτό σύμπλοκο, είναι ο συμβολισμός.

Η προσοχή μας τώρα στρέφεται σε (chain) σύμπλοκα. Τονίζουμε ότι ανάλογα αποτελέσματα με αυτά που θα παραθέσουμε για σύμπλοκα, ισχύουν για συν-αλυσιδωτά σύμπλοκα.

Παράδειγμα 3.1.3. 1. Προφανώς, κάθε ακριβής ακολουθία είναι ένα (ακριβές) σύμπλοκο.

2. Το μηδενικό σύμπλοκο είναι το σύμπλοκο $(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{d}_\bullet)$ του οποίου κάθε όρος $C_n = \{0\}$ και άρα, κάθε διαφορικό $d_n = 0$.

Παρατήρηση 3.1.4. Αν $\mathbf{C}_\bullet = \{C_n, d_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ είναι ένα σύμπλοκο αριστερών R -προτύπων, και αν $F: R\text{-Mod} \rightarrow S\text{-Mod}$ είναι ένας προσθετικός συναλλοίωτος συναρτητής όπου S δακτύλιος, τότε η επαγόμενη ακολουθία $F(\mathbf{C}_\bullet)$

$$F(\mathbf{C}_\bullet) = \cdots \longrightarrow F(C_{n+1}) \xrightarrow{F(d_{n+1})} F(C_n) \xrightarrow{F(d_n)} F(C_{n-1}) \longrightarrow \cdots$$

είναι ένα σύμπλοκο αριστερών S -προτύπων, διότι για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε ότι

$$F(d_n) \circ F(d_{n+1}) = F(d_n \circ d_{n+1}) = F(0) = 0$$

Ομοίως, αν $\mathbf{C}_\bullet = \{C_n, d_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ είναι ένα σύμπλοκο στην $R\text{-Mod}$, και $F: R\text{-Mod} \rightarrow S\text{-Mod}$ είναι ένας προσθετικός αντισυναλλοίωτος συναρτητής, τότε η επαγόμενη ακολουθία $F(\mathbf{C}_\bullet)$ είναι ένα (συν-αλυσιδωτό) σύμπλοκο στην $S\text{-Mod}$.

Ορισμός 3.1.5. Ένας **μορφισμός μεταξύ δύο συμπλόκων (chain map)** από αριστερά R -πρότυπα

$$\mathbf{f}_\bullet: (\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{d}_\bullet) \longrightarrow (\mathbf{C}'_\bullet, \mathbf{d}'_\bullet),$$

είναι μία οικογένεια $\{f_n: C_n \rightarrow C'_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ομομορφισμών αριστερών R -προτύπων, τέτοια ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{d'_n} & C'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Ο μορφισμός $\mathbf{f}_\bullet = \{f_n: C_n \rightarrow C'_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ καλείται **μονομορφισμός (επιμορφισμός, αντίστοιχα ισομορφισμός)**, αν κάθε f_n για $n \in \mathbb{Z}$, είναι μονομορφισμός (επιμορφισμός, αντίστοιχα ισομορφισμός).

Τα σύμπλοκα στην $R\text{-Mod}$ και οι μορφισμοί μεταξύ αυτών, σχηματίζουν μια προσθετική κατηγορία η οποία θα συμβολίζεται με $\mathcal{C}(R)$. Η σύνθεση δύο μορφισμών συμπλόκων στην $R\text{-Mod}$,

$$\mathbf{f}_\bullet: (\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{d}_\bullet) \longrightarrow (\mathbf{C}'_\bullet, \mathbf{d}'_\bullet) \quad \& \quad \mathbf{g}_\bullet: (\mathbf{C}'_\bullet, \mathbf{d}'_\bullet) \longrightarrow (\mathbf{C}''_\bullet, \mathbf{d}''_\bullet),$$

είναι ο μορφισμός $\mathbf{g}_\bullet \circ \mathbf{f}_\bullet = \{g_n \circ f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, και ο ταυτοτικός μορφισμός στο αντικείμενο \mathbf{C}_\bullet της $\mathcal{C}(R)$, είναι ο μορφισμός $\text{Id}_{\mathbf{C}_\bullet} = \{\text{Id}_{C_n} : C_n \rightarrow C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Επιπλέον, αν $\mathbf{f}_\bullet, \mathbf{g}_\bullet : \mathbf{C}_\bullet \rightarrow \mathbf{C}'_\bullet$ είναι δύο μορφισμοί μεταξύ συμπλόκων στην $R\text{-Mod}$, τότε η πρόσθεση στο σύνολο των μορφισμών $\text{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{C}'_\bullet)$, δίνεται ως ο μορφισμός συμπλόκων $\mathbf{f}_\bullet + \mathbf{g}_\bullet = \{f_n + g_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Ορισμός 3.1.6. Αν $\mathbf{C}_\bullet = \{C_n, d_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ είναι ένα σύμπλοκο στην $R\text{-Mod}$, τότε η n -οστή **ομολογία (homology)** του συμπλόκου $(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{d}_\bullet)$ είναι το πρότυπο ηθικό

$$H_n(\mathbf{C}_\bullet) = \text{Ker } d_n / \text{Im } d_{n+1}$$

Παρατήρηση 3.1.7. Τετριμμένα ισχύει ότι ένα σύμπλοκο \mathbf{C}_\bullet είναι ακριβές, αν και μόνο αν, $H_n(\mathbf{C}_\bullet) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Πρόταση 3.1.8. Αν $\mathbf{f}_\bullet : (\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{d}_\bullet) \rightarrow (\mathbf{C}'_\bullet, \mathbf{d}'_\bullet)$ είναι ένας μορφισμός μεταξύ δύο συμπλόκων στην $R\text{-Mod}$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, επαγεται ένας ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων

$$H_n(\mathbf{f}_\bullet) : H_n(\mathbf{C}_\bullet) \rightarrow H_n(\mathbf{C}'_\bullet), \quad x + \text{Im } d_{n+1} \mapsto f_n(x) + \text{Im } d'_{n+1},$$

για κάθε $x + \text{Im } d_{n+1} \in H_n(\mathbf{C}_\bullet)$.

Απόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccc} C_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1} \\ f_{n+1} \downarrow & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\ C'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{d'_n} & C'_{n-1} \end{array}$$

Χρησιμοποιώντας την μεταθετικότητα του προηγούμενου διαγράμματος, έπεται ότι αν $x \in \text{Ker } d_n$ για κάποιο $n \in \mathbb{Z}$, τότε $f_n(x) \in \text{Ker } d'_n$. Έστω τώρα $x, x' \in \text{Ker } d_n$ με $x + \text{Im } d_{n+1} = x' + \text{Im } d_{n+1}$. Τότε $x - x' \in \text{Im } d_{n+1}$, και άρα, υπάρχει κάποιο $y \in C_{n+1}$ έτσι ώστε $d_{n+1}(y) = x - x'$. Επομένως, παίρνουμε ότι:

$$f_n(x) - f_n(x') = f_n(x - x') = f_n(d_{n+1}(y)) = (f_n \circ d_{n+1})(y) = (d'_{n+1} \circ f_{n+1})(y),$$

και κατ' επέκταση, ότι $f_n(x) - f_n(x') \in \text{Im } d'_{n+1}$. Συνεπώς, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ η απεικόνιση

$$H_n(\mathbf{f}_\bullet) : H_n(\mathbf{C}_\bullet) \rightarrow H_n(\mathbf{C}'_\bullet), \quad x + \text{Im } d_{n+1} \mapsto f_n(x) + \text{Im } d'_{n+1},$$

είναι καλώς ορισμένη. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι κάθε f_n για $n \in \mathbb{Z}$, είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων, εύκολα προκύπτει ότι η απεικόνιση $H_n(\mathbf{f}_\bullet)$ είναι επίσης ένας ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. ■

Πρόταση 3.1.9. Η αντιστοιχία

$$H_n : \mathcal{C}(R) \rightarrow R\text{-Mod}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}_\bullet & \longrightarrow & H_n(\mathbf{C}_\bullet) \\ \mathbf{f}_\bullet \downarrow & & \downarrow H_n(\mathbf{f}_\bullet) \\ \mathbf{C}'_\bullet & \longrightarrow & H_n(\mathbf{C}'_\bullet) \end{array}$$

ορίζει έναν προσθετικό συναληθιόωτο συναρτητή για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Προφανώς, $H_n(\text{Id}_{C_\bullet}) = \text{Id}_{H_n(C_\bullet)}$. Θεωρούμε δύο μορφοισμούς συμπλόκων από αριστερά R -πρότυπα $\mathbf{f}_\bullet: (C_\bullet, d_\bullet) \rightarrow (C'_\bullet, d'_\bullet)$ και $\mathbf{g}_\bullet: (C'_\bullet, d'_\bullet) \rightarrow (C''_\bullet, d''_\bullet)$. Τότε για κάθε $x + \text{Im } d_{n+1} \in H_n(C_\bullet)$, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} H_n(\mathbf{g}_\bullet \circ \mathbf{f}_\bullet)(x + \text{Im } d_{n+1}) &= (g_n \circ f_n)(x) + \text{Im } d''_{n+1} \\ &= g_n(f_n(x)) + \text{Im } d''_{n+1} \\ &= H_n(\mathbf{g}_\bullet)(f_n(x) + \text{Im } d'_{n+1}) \\ &= H_n(\mathbf{g}_\bullet)(H_n(\mathbf{f}_\bullet)(x + \text{Im } d_{n+1})) \\ &= (H_n(\mathbf{g}_\bullet) \circ H_n(\mathbf{f}_\bullet))(x + \text{Im } d_{n+1}) \end{aligned}$$

Άρα, $H_n(\mathbf{g}_\bullet \circ \mathbf{f}_\bullet) = H_n(\mathbf{g}_\bullet) \circ H_n(\mathbf{f}_\bullet)$. Επομένως, ο H_n είναι ένας συναλλοίωτος συναρτητής για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Έστω τώρα $\mathbf{h}_\bullet: (C_\bullet, d_\bullet) \rightarrow (C'_\bullet, d'_\bullet)$ ένας άλλος μορφοισμός συμπλόκων. Τότε για κάθε $x + \text{Im } d_{n+1} \in H_n(C_\bullet)$, παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned} H_n(\mathbf{f}_\bullet + \mathbf{h}_\bullet)(x + \text{Im } d_{n+1}) &= (f_n + h_n)(x) + \text{Im } d'_{n+1} \\ &= f_n(x) + h_n(x) + \text{Im } d'_{n+1} \\ &= (H_n(\mathbf{f}_\bullet) + H_n(\mathbf{h}_\bullet))(x + \text{Im } d_{n+1}). \end{aligned}$$

Έτσι τελικά, έχουμε ότι $H_n(\mathbf{f}_\bullet + \mathbf{h}_\bullet) = H_n(\mathbf{f}_\bullet) + H_n(\mathbf{h}_\bullet)$. ■

Το ακόλουθο αποτέλεσμα, μας εξασφαλίζει ότι οι ακριβείς συναρτητές διατηρούν την ομολογία.

Πρόταση 3.1.10. Έστω R, S δύο δακτύλιοι και $F: R\text{-Mod} \rightarrow S\text{-Mod}$ ένας ακριβής προσθετικός συναλλοίωτος συναρτητής. Τότε για οποιοδήποτε σύμπλοκο $(C_\bullet, d_\bullet) \in \mathcal{C}(R)$ και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ υπάρχει ένας ισομορφοισμός

$$H_n(F(C_\bullet), F(d_\bullet)) \cong F(H_n(C_\bullet, d_\bullet))$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [51, Proposition 10.38]. ■

Μέχρι τώρα είδαμε ότι κάθε μορφοισμός μεταξύ δύο συμπλόκων \mathbf{f} , επάγει έναν R -ομομορφοισμό $H_n(\mathbf{f})$. Το επόμενο βήμα λοιπόν, είναι να εξετάσουμε πότε δύο μορφοισμοί μεταξύ των ίδιων συμπλόκων, επάγουν τον ίδιο R -ομομορφοισμό.

Ορισμός 3.1.11. Έστω $\mathbf{f}_\bullet, \mathbf{g}_\bullet: (C_\bullet, d_\bullet) \rightarrow (C'_\bullet, d'_\bullet)$ δύο μορφοισμοί μεταξύ δύο συμπλόκων από αριστερά R -πρότυπα. Τότε μια **ομοτοπία (homotopy)** \mathbf{s}_\bullet από τον \mathbf{f}_\bullet στον \mathbf{g}_\bullet , είναι μια οικογένεια ομομορφοισμών αριστερών R -προτύπων $\mathbf{s}_\bullet = \{s_n: C_n \rightarrow C'_{n+1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, έτσι ώστε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$

$$f_n - g_n = d'_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n$$

Η ομοτοπία \mathbf{s}_\bullet από τον \mathbf{f}_\bullet στον \mathbf{g}_\bullet , συμβολίζεται με $\mathbf{s}_\bullet: \mathbf{f}_\bullet \rightarrow \mathbf{g}_\bullet$. Στην περίπτωση που υπάρχει μια τέτοια ομοτοπία, οι \mathbf{f}_\bullet και \mathbf{g}_\bullet καλούνται **ομοτοπικοί μορφοισμοί (homotopic chain maps)**, και τότε γράφουμε $\mathbf{f}_\bullet \cong \mathbf{g}_\bullet$.

Δύο σύμπλοκα αριστερών R -προτύπων $(C_\bullet, d_\bullet), (C'_\bullet, d'_\bullet)$ λέμε ότι έχουν τον **ίδιο ομοτοπικό τύπο**, αν υπάρχουν μορφοισμοί $\mathbf{f}_\bullet: (C_\bullet, d_\bullet) \rightarrow (C'_\bullet, d'_\bullet)$ και $\mathbf{g}_\bullet: (C'_\bullet, d'_\bullet) \rightarrow (C_\bullet, d_\bullet)$ έτσι ώστε $\mathbf{g}_\bullet \circ \mathbf{f}_\bullet \cong \text{Id}_{C_\bullet}$ και $\mathbf{f}_\bullet \circ \mathbf{g}_\bullet \cong \text{Id}_{C'_\bullet}$, όπου $\text{Id}_{C_\bullet}, \text{Id}_{C'_\bullet}$ είναι οι ταυτοτικοί μορφοισμοί των συμπλόκων C_\bullet και C'_\bullet , αντίστοιχα.

Πρόταση 3.1.12. Αν $\mathbf{f}_\bullet, \mathbf{g}_\bullet: (C_\bullet, d_\bullet) \rightarrow (C'_\bullet, d'_\bullet)$ είναι δύο ομοτοπικοί μορφοισμοί συμπλόκων στην $R\text{-Mod}$, τότε $H_n(\mathbf{f}_\bullet) = H_n(\mathbf{g}_\bullet)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Επειδή $\mathbf{f}_\bullet \cong \mathbf{g}_\bullet$, υπάρχουν R -ομομορφοισμοί $s_n: C_n \rightarrow C'_{n+1}$ τέτοιοι ώστε $f_n - g_n = d'_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Έτσι, για $n \in \mathbb{Z}$ και για $x \in \text{Ker } d_n$, έχουμε ότι $f_n(x) - g_n(x) = d'_{n+1}(s_n(x)) + s_{n-1}(d_n(x)) = d'_{n+1}(s_n(x))$. Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και για κάθε $x \in \text{Ker } d_n$, παίρνουμε ότι $f_n(x) - g_n(x) \in \text{Im } d'_{n+1}$, ή ισοδύναμα, ότι $f_n(x) + \text{Im } d'_{n+1} = g_n(x) + \text{Im } d'_{n+1}$. Ως συνέπεια αυτού, έπεται ότι $H_n(\mathbf{f}_\bullet)(x + \text{Im } d_{n+1}) = H_n(\mathbf{g}_\bullet)(x + \text{Im } d_{n+1}), \forall x + \text{Im } d_{n+1} \in H_n(C_\bullet)$ και $\forall n \in \mathbb{Z}$, δηλαδή, ότι $H_n(\mathbf{f}_\bullet) = H_n(\mathbf{g}_\bullet)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. ■

Η κατηγορία $\mathcal{C}(R)$ των συμπλόκων αριστερών R -προτύπων, κληρονομεί πολλές από τις ιδιότητες της κατηγορίας $R\text{-Mod}$ των αριστερών R -προτύπων. Για παράδειγμα, στην κατηγορία $\mathcal{C}(R)$ μπορούμε να ορίσουμε ακριβείς ακολουθίες ως εξής:

Ορισμός 3.1.13. Μια ακολουθία από σύμπλοκα και μορφοισμούς συμπλόκων

$$C_{\bullet} \xrightarrow{f_{\bullet}} C'_{\bullet} \xrightarrow{g_{\bullet}} C''_{\bullet}$$

καλείται **ακριβής, (exact sequence of chain complexes)**, αν οι ακολουθίες $C_n \xrightarrow{f_n} C'_n \xrightarrow{g_n} C''_n$ είναι ακριβείς για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Μια ακριβής ακολουθία από σύμπλοκα και μορφοισμούς συμπλόκων της μορφής:

$$0 \longrightarrow (C'_{\bullet}, d'_{\bullet}) \xrightarrow{f_{\bullet}} (C_{\bullet}, d_{\bullet}) \xrightarrow{g_{\bullet}} (C''_{\bullet}, d''_{\bullet}) \longrightarrow 0 \quad (3.1)$$

καλείται **σύντομη ακριβής ακολουθία (short exact sequence of chain complexes)**. Δηλαδή, η ακολουθία συμπλόκων (3.1) είναι σύντομη ακριβής ακολουθία, αν ισχύουν τα ακόλουθα:

- Ο μορφοισμός συμπλόκων f_{\bullet} είναι μονομορφοισμός.
- Ο μορφοισμός συμπλόκων g_{\bullet} είναι επιμορφοισμός
- $\forall n \in \mathbb{Z} : \text{Ker } g_n = \text{Im } f_n$

Έτσι, μια σύντομη ακριβής ακολουθία συμπλόκων όπως η (3.1), μπορεί να ιδωθεί ως το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{f_{n+1}} & C_{n+1} & \xrightarrow{g_{n+1}} & C''_{n+1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow d'_{n+1} & & \downarrow d_{n+1} & & \downarrow d''_{n+1} \\ 0 & \longrightarrow & C'_n & \xrightarrow{f_n} & C_n & \xrightarrow{g_n} & C''_n \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow d'_n & & \downarrow d_n & & \downarrow d''_n \\ 0 & \longrightarrow & C'_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & C_{n-1} & \xrightarrow{g_{n-1}} & C''_{n-1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Θα δείξουμε τώρα ότι δοθείσας μιας σύντομης ακριβούς ακολουθίας συμπλόκων στην $R\text{-Mod}$, επάγεται μια μακρά ακριβής ακολουθία στην ομολογία. Πριν όμως αποδείξουμε το αποτέλεσμα αυτό, χρειαζόμαστε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 3.1.14. Αν $(C_{\bullet}, d_{\bullet})$ είναι ένα σύμπλοκο αριστερών R -προτύπων, τότε κάθε διαφορικό $d_n : C_n \longrightarrow C_{n-1}$ για $n \in \mathbb{Z}$, επάγει έναν ομομορφοισμό $\bar{d}_n : \text{Coker } d_{n+1} \longrightarrow \text{Ker } d_{n-1}$ αριστερών R -προτύπων για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Επιπλέον, $H_n(C_{\bullet}) = \text{Ker } \bar{d}_n$ και $H_{n-1}(C_{\bullet}) = \text{Coker } \bar{d}_n$.

Απόδειξη. Ορίζουμε απεικόνιση

$$\bar{d}_n : \text{Coker } d_{n+1} \longrightarrow \text{Ker } d_{n-1},$$

Θέτοντας $\bar{d}_n(x + \text{Im } d_{n+1}) = d_n(x)$ για κάθε $x + \text{Im } d_{n+1} \in \text{Coker } d_{n+1}$. Εύκολα βλέπουμε ότι η απεικόνιση \bar{d}_n είναι ένας καλώς ορισμένος ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων. Επιπλέον, παρατηρώντας ότι

$$x + \text{Im } d_{n+1} \in \text{Ker } \bar{d}_n \Leftrightarrow \bar{d}_n(x + \text{Im } d_{n+1}) = 0 \Leftrightarrow d_n(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \text{Ker } d_n$$

καθώς και

$$\text{Im } \bar{d}_n = \{\bar{d}_n(x + \text{Im } d_{n+1}) \mid x \in C_n\} = \{d_n(x) \mid x \in C_n\} = \text{Im } d_n \subseteq \text{Ker } d_{n-1},$$

παίρνουμε ότι $\text{Ker } \bar{d}_n = \text{Ker } d_n / \text{Im } d_{n+1} = H_n(\mathbf{C}_\bullet)$, και ότι $\text{Coker } \bar{d}_n = \text{Ker } d_{n-1} / \text{Im } \bar{d}_n = \text{Ker } d_{n-1} / \text{Im } d_n = H_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet)$. ■

Πρόταση 3.1.15. Κάθε σύντομη ακριβής ακολουθία συμπλόκων

$$0 \longrightarrow (\mathbf{C}'_\bullet, \mathbf{d}'_\bullet) \xrightarrow{f_\bullet} (\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{d}_\bullet) \xrightarrow{g_\bullet} (\mathbf{C}''_\bullet, \mathbf{d}''_\bullet) \longrightarrow 0$$

στην $R\text{-Mod}$, επάγει μία ακριβή ακολουθία αριστερών R -προτύπων

$$\dots \xrightarrow{\phi_{n+1}} H_n(\mathbf{C}'_\bullet) \xrightarrow{H_n(f_\bullet)} H_n(\mathbf{C}_\bullet) \xrightarrow{H_n(g_\bullet)} H_n(\mathbf{C}''_\bullet) \xrightarrow{\phi_n} H_{n-1}(\mathbf{C}'_\bullet) \longrightarrow \dots$$

Απόδειξη. Επειδή $0 \longrightarrow (\mathbf{C}'_\bullet, \mathbf{d}'_\bullet) \xrightarrow{f_\bullet} (\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{d}_\bullet) \xrightarrow{g_\bullet} (\mathbf{C}''_\bullet, \mathbf{d}''_\bullet) \longrightarrow 0$ είναι μία σύντομη ακριβής ακολουθία συμπλόκων, τότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές και στήλες:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ker } d'_n & \longrightarrow & \text{Ker } d_n & \longrightarrow & \text{Ker } d''_n \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C'_n & \xrightarrow{f_n} & C_n & \xrightarrow{g_n} & C''_n \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow d'_n & & \downarrow d_n & & \downarrow d''_n \\ 0 & \longrightarrow & C'_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & C_{n-1} & \xrightarrow{g_{n-1}} & C''_{n-1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Coker } d'_n & \longrightarrow & \text{Coker } d_n & \longrightarrow & \text{Coker } d''_n \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας το Λήμμα (3.1.14) παίρνουμε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, το μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές και στήλες:

$$\begin{array}{ccccccc} & & H_n(\mathbf{C}'_\bullet) & \longrightarrow & H_n(\mathbf{C}_\bullet) & \longrightarrow & H_n(\mathbf{C}''_\bullet) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \text{Coker } d'_{n+1} & \longrightarrow & \text{Coker } d_{n+1} & \longrightarrow & \text{Coker } d''_{n+1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \bar{d}_n & & \downarrow \bar{d}_n & & \downarrow \bar{d}''_n \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ker } d'_{n-1} & \longrightarrow & \text{Ker } d_{n-1} & \longrightarrow & \text{Ker } d''_{n-1} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & H_{n-1}(\mathbf{C}'_\bullet) & \longrightarrow & H_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet) & \longrightarrow & H_{n-1}(\mathbf{C}''_\bullet) \end{array}$$

Αν εφαρμόσουμε λοιπόν το Snake Lemma στο προηγούμενο διάγραμμα για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, επαγεται μοναδικός ομομορφισμός $\phi_n: H_n(\mathbf{C}'_\bullet) \rightarrow H_n(\mathbf{C}''_\bullet)$, και μια ακριβής ακολουθία αριστερών R -προτύπων

$$\dots \xrightarrow{\phi_{n+1}} H_n(\mathbf{C}'_\bullet) \xrightarrow{H_n(\mathbf{f}_\bullet)} H_n(\mathbf{C}_\bullet) \xrightarrow{H_n(\mathbf{g}_\bullet)} H_n(\mathbf{C}''_\bullet) \xrightarrow{\phi_n} H_{n-1}(\mathbf{C}'_\bullet) \rightarrow \dots$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. ■

Σχόλιο 3.1.16. Ο ομομορφισμός $\phi_n: H_n(\mathbf{C}''_\bullet) \rightarrow H_{n-1}(\mathbf{C}'_\bullet)$ της Πρότασης (3.1.15), καλείται ο **συνδετικός ομομορφισμός (connecting homomorphism)**, και η ακριβής ακολουθία

$$\dots \xrightarrow{\phi_{n+1}} H_n(\mathbf{C}'_\bullet) \xrightarrow{H_n(\mathbf{f}_\bullet)} H_n(\mathbf{C}_\bullet) \xrightarrow{H_n(\mathbf{g}_\bullet)} H_n(\mathbf{C}''_\bullet) \xrightarrow{\phi_n} H_{n-1}(\mathbf{C}'_\bullet) \rightarrow \dots$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, καλείται **μακρά ακριβής ακολουθία (long exact sequence)** στην ομολογία.

Στην συνέχεια, θα αποδείξουμε ότι δοθέντος ενός μορφισμού f μεταξύ δύο (ακριβών) συμπλόκων αριστερών R -προτύπων, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα καινούργιο (ακριβές) σύμπλοκο $\mathcal{M}(f)$ αριστερών R -προτύπων.

Η ακόλουθη έννοια, θα μας φανεί χρήσιμη.

Ορισμός 3.1.17. Για ένα σύμπλοκο αριστερών R -προτύπων

$$\mathbf{C}_\bullet : \dots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \dots$$

και για ένα ακέραιο $m \in \mathbb{Z}$, ορίζουμε το επαγόμενο m -ιστό **μετατοπισμένο σύμπλοκο, (shifted complex)**:

$$S^m \mathbf{C}_\bullet : \dots \longrightarrow C'_{n+1} \xrightarrow{d'_{n+1}} C'_n \xrightarrow{d'_n} C'_{n-1} \xrightarrow{d'_{n-1}} \dots$$

θέτοντας $C'_n = C_{n-m}$ και $d'_n = (-1)^m d_{n-m}$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Παρατήρηση 3.1.18. Αν $S^m \mathbf{C}_\bullet$ είναι το επαγόμενο m -ιστό μετατοπισμένο σύμπλοκο του \mathbf{C}_\bullet , τότε $H_n(S^m \mathbf{C}_\bullet) = H_{n-m}(\mathbf{C}_\bullet)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Πράγματι, έχουμε ότι

$$H_n(S^m \mathbf{C}_\bullet) = \text{Ker } d'_n / \text{Im } d'_{n+1} = \text{Ker } d_{n-m} / \text{Im } d_{n+1-m} = H_{n-m}(\mathbf{C}_\bullet),$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Ορισμός 3.1.19. Έστω $\mathbf{C}_\bullet = \{C_n, d_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ και $\mathbf{D}_\bullet = \{D_n, d'_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ δύο σύμπλοκα στην $R\text{-Mod}$. Για έναν μορφισμό μεταξύ των συμπλόκων αυτών,

$$\mathbf{f}_\bullet = \{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}} : \mathbf{C}_\bullet \longrightarrow \mathbf{D}_\bullet,$$

μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα καινούργιο σύμπλοκο στην $R\text{-Mod}$,

$$\mathcal{M}(f) : \dots \longrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{\mu_{n+1}} M_n \xrightarrow{\mu_n} M_{n-1} \longrightarrow \dots,$$

θέτοντας $M_n = D_n \oplus C_{n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, και ορίζοντας για κάθε $n \in \mathbb{Z}$,

$$\mu_n : M_n = D_n \oplus C_{n-1} \longrightarrow M_{n-1} = D_{n-1} \oplus C_{n-2},$$

όπου $\mu_n(y, x) = (d'_n + f_{n-1}(x), -d_{n-1}(x))$, για κάθε $(y, x) \in M_n$. Το σύμπλοκο $\mathcal{M}(f)$ καλείται η επαγόμενη **κωνική απεικόνιση (mapping cone)** του f .

Παρατήρηση 3.1.20. Έστω $f_\bullet: (\mathbf{C}_\bullet, d_\bullet) \rightarrow (\mathbf{D}_\bullet, d'_\bullet)$ ένας μορφισμός μεταξύ δύο συμπλόκων στην $R\text{-Mod}$, και $\mathcal{M}(f)$ η επαγόμενη κωνική απεικόνιση. Αν θεωρήσουμε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, τις κανονικές εγκλείσεις και προβολές:

$$i_n: D_n \rightarrow M_n = D_n \oplus C_{n-1} \quad \& \quad \pi_n: M_n = D_n \oplus C_{n-1} \rightarrow C_{n-1},$$

τότε προφανώς, τα διαγράμματα:

$$\begin{array}{ccc} D_n & \xrightarrow{d'_n} & D_{n-1} \\ i_n \downarrow & & \downarrow i_{n-1} \\ M_n & \xrightarrow{\mu_n} & M_{n-1} \end{array} \quad \text{και} \quad \begin{array}{ccc} M_n & \xrightarrow{\mu_n} & M_{n-1} \\ \pi_n \downarrow & & \downarrow \pi_{n-1} \\ C_{n-1} & \xrightarrow{-d_{n-1}} & C_{n-2} \end{array}$$

είναι μεταθετικά για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Συνεπώς, επάγονται μορφισμοί συμπλόκων αριστερών R -προτύπων $i_\bullet = \{i_n\}_{n \in \mathbb{Z}}: \mathbf{D}_\bullet \rightarrow \mathcal{M}(f)$ και $\pi_\bullet = \{\pi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}: \mathcal{M}(f) \rightarrow \mathcal{S}^1 \mathbf{C}_\bullet$, και μια διασπásiμη σύντομη ακριβής ακολουθία συμπλόκων

$$0 \rightarrow \mathbf{D}_\bullet \xrightarrow{i_\bullet} \mathcal{M}(f) \xrightarrow{\pi_\bullet} \mathcal{S}^1 \mathbf{C}_\bullet \rightarrow 0. \quad (3.2)$$

Πρόταση 3.1.21. Έστω $f_\bullet: (\mathbf{C}_\bullet, d_\bullet) \rightarrow (\mathbf{D}_\bullet, d'_\bullet)$ ένας μορφισμός μεταξύ δύο συμπλόκων στην $R\text{-Mod}$. Αν τα \mathbf{C}_\bullet και \mathbf{D}_\bullet είναι ακριβή σύμπλοκα, τότε η επαγόμενη κωνική απεικόνιση $\mathcal{M}(f)$ είναι επίσης ακριβές σύμπλοκο.

Απόδειξη. Η σύντομη ακριβής ακολουθία (3.2) της Παρατήρησης (3.1.20), επάγει μια μακρά ακριβή ακολουθία στην ομολογία

$$\dots \rightarrow H_{n+1}(\mathcal{S}^1 \mathbf{C}_\bullet) \xrightarrow{\phi_{n+1}} H_n(D) \xrightarrow{H_n(i_\bullet)} H_n(\mathcal{M}(f)) \xrightarrow{H_n(\pi_\bullet)} \dots$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Αν λοιπόν τα σύμπλοκα \mathbf{C}_\bullet και \mathbf{D}_\bullet είναι ακριβή, τότε χρησιμοποιώντας τις Παρατηρήσεις (3.1.7) και (3.1.18), παίρνουμε ότι το σύμπλοκο $\mathcal{M}(f)$ είναι επίσης ακριβές. ■

Κλείνουμε την παρούσα ενότητα, με το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πρόταση 3.1.22. Έστω $f_\bullet: (\mathbf{C}_\bullet, d_\bullet) \rightarrow (\mathbf{D}_\bullet, d'_\bullet)$ ένας μορφισμός μεταξύ δύο συμπλόκων στην $R\text{-Mod}$. Τότε για κάθε αριστερό R -πρότυπο M και για κάθε δεξιό R -πρότυπο N , ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Αν τα σύμπλοκα αβελιανών ομάδων $\text{Hom}_R(M, \mathbf{C}_\bullet)$ και $\text{Hom}_R(M, \mathbf{D}_\bullet)$ είναι ακριβή, τότε το σύμπλοκο αβελιανών ομάδων $\text{Hom}_R(M, \mathcal{M}(f))$ είναι επίσης ακριβές.
2. Αν τα σύμπλοκα αβελιανών ομάδων $\text{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, M)$ και $\text{Hom}_R(\mathbf{D}_\bullet, M)$ είναι ακριβή, τότε το σύμπλοκο αβελιανών ομάδων $\text{Hom}_R(\mathcal{M}(f), M)$ είναι επίσης ακριβές.
3. Αν τα σύμπλοκα αβελιανών ομάδων $N \otimes_R \mathbf{C}_\bullet$ και $N \otimes_R \mathbf{D}_\bullet$ είναι ακριβή, τότε το σύμπλοκο αβελιανών ομάδων $N \otimes_R \mathcal{M}(f)$ είναι επίσης ακριβές.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε μόνο το 1), αφού η απόδειξη των 2) και 3) προκύπτει παρόμοια. Υποθέτουμε ότι τα σύμπλοκα αβελιανών ομάδων $\text{Hom}_R(M, \mathbf{C}_\bullet)$ και $\text{Hom}_R(M, \mathbf{D}_\bullet)$ είναι ακριβή. Θεωρούμε ένα αριστερό R -πρότυπο M , και εφαρμόζουμε τον συναλλοίωτο συναρτητή $\text{Hom}_R(M, -)$ στην σύντομη ακριβή ακολουθία (3.2) της Παρατήρησης (3.1.20), η οποία είναι διασπásiμη αν δεν λάβουμε υπ' όψιν τα διαφορικά των συμπλόκων. Τότε επάγεται μια σύντομη ακριβής ακολουθία συμπλόκων (βλέπε Πρόταση (3.3.19) και Θεώρημα (3.3.18))

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(M, \mathbf{D}_\bullet) \rightarrow \text{Hom}_R(M, \mathcal{M}(f)) \rightarrow \text{Hom}_R(M, \mathcal{S}^1 \mathbf{C}_\bullet) \rightarrow 0.$$

Παρατηρώντας ότι $\text{Hom}_R(M, \mathcal{S}^1 \mathbf{C}_\bullet) = \mathcal{S}^1 \text{Hom}_R(M, \mathbf{C}_\bullet)$, και χρησιμοποιώντας την υπόθεση, παίρνουμε ότι το σύμπλοκο αβελιανών ομάδων $\text{Hom}_R(M, \mathcal{S}^1 \mathbf{C}_\bullet)$ είναι ακριβές. Συνεπώς, επειδή και το σύμπλοκο αβελιανών ομάδων $\text{Hom}_R(M, \mathbf{D}_\bullet)$ είναι ακριβές, έπεται ότι το σύμπλοκο αβελιανών ομάδων $\text{Hom}_R(M, \mathcal{M}(f))$ είναι επίσης ακριβές. ■

3.2 Ενέσιμα, Προβολικά Και Επίπεδα Πρότυπα

Στην ενότητα αυτή, ορίζουμε και μελετάμε ενέσιμα, προβολικά και επίπεδα πρότυπα. Τα πρότυπα αυτά, τα οποία προκύπτουν από τον δακτύλιο με σχετικά απλό τρόπο, μας δίνουν την δυνατότητα να περιγράψουμε τυχαία πρότυπα.

3.2.1 Ενέσιμα Πρότυπα

Όπως θα διαπιστώσουμε στην συνέχεια, τα ενέσιμα πρότυπα, είναι ακριβώς τα πρότυπα που καθιστούν τον αντισυναλλοίωτο συναρτητή Hom ακριβή.

Ορισμός 3.2.1. Ένα αριστερό R -πρότυπο E καλείται **ενέσιμο, (injective)**, αν για κάθε μονομορφισμό αριστερών R -προτύπων $i: A \rightarrow B$, και κάθε ομομορφισμό αριστερών R -προτύπων $f: A \rightarrow E$, υπάρχει ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων $g: B \rightarrow E$ έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & A \xrightarrow{i} B \\ & & \downarrow f \quad \swarrow \exists g \\ & & E \end{array}$$

Συμβολίζουμε την κλάση όλων των ενέσιμων αριστερών R -προτύπων με $R\text{-Inj}$.

Παρατήρηση 3.2.2. Είναι εύκολο να δούμε ότι η κλάση $R\text{-Inj}$ είναι κλειστή σε ισομορφισμούς.

Πρόταση 3.2.3. Αν M είναι ένα ενέσιμο υποπρότυπο ενός αριστερού R -προτύπου N , τότε το M είναι ευθύς προσθετός του N .

Απόδειξη. Έστω M ένα ενέσιμο υποπρότυπο ενός αριστερού R -προτύπου N , και $i: M \rightarrow N$ η κανονική έγκλειση. Επειδή το M είναι ενέσιμο, υπάρχει ένας ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων $g: N \rightarrow M$, έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & M \xrightarrow{i} N \\ & & \downarrow \text{Id}_M \quad \swarrow \exists g \\ & & M \end{array}$$

Συνεπώς, ο μονομορφισμός i είναι διασπασίμος, και άρα, υπάρχει κάποιο αριστερό R -πρότυπο K τέτοιο ώστε $N \cong M \oplus K$. Έτσι τελικά, έχουμε ότι το M είναι ευθύς προσθετός του N , όπως επιθυμούσαμε. ■

Το ακόλουθο αποτέλεσμα οφείλεται στον R. Baer, και είναι γνωστό ως κριτήριο του Baer.

Θεώρημα 3.2.4. (Κριτήριο του Baer) Ένα αριστερό R -πρότυπο E είναι ενέσιμο, αν και μόνο αν, κάθε ομομορφισμός $f: I \rightarrow E$, όπου I είναι ένα αριστερό ιδεώδες του R , μπορεί να επεκταθεί στο R .

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & I \xrightarrow{i} R \\ & & \downarrow f \quad \swarrow \exists g \\ & & E \end{array}$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [52, theorem 3.30]. ■

Παράδειγμα 3.2.5. 1. Το μηδενικό πρότυπο είναι κατά τετριμμένο τρόπο ενέσιμο R -πρότυπο.

2. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Baer, καθώς και το γεγονός ότι τα μόνα (αριστερά) ιδεώδη ενός δακτυλίου διαίρεσης D , είναι το 0 και το D , έπεται ότι κάθε διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός δακτυλίου διαίρεσης D , θεωρούμενος ως αριστερό D -πρότυπο, είναι ένα ενέσιμο πρότυπο.
3. Το \mathbb{Q} ως \mathbb{Z} -πρότυπο είναι ενέσιμο, δες Παράδειγμα (3.2.8), και Πρόταση (3.2.9).

Σημειώνουμε ότι υπάρχουν πρότυπα τα οποία δεν είναι ενέσιμα. Παραδείγματος χάριν, το \mathbb{Z} -πρότυπο $2\mathbb{Z}$ δεν είναι ενέσιμο. Για να το δούμε αυτό, ας υποθέσουμε ότι το υποπρότυπο $2\mathbb{Z}$ του \mathbb{Z} είναι ενέσιμο \mathbb{Z} -πρότυπο. Τότε η Πρόταση (3.2.3), μας εξασφαλίζει ότι το $2\mathbb{Z}$ είναι ευθύς προσθετός του \mathbb{Z} . Δηλαδή, υπάρχει κάποιος ακέραιος κ , έτσι ώστε $\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} + \kappa\mathbb{Z}$ και $2\mathbb{Z} \cap \kappa\mathbb{Z} = \{0\}$, αποτέλεσμα το οποίο είναι φυσικά αδύνατο.

Στόχος μας στην συνέχεια, είναι να δείξουμε ότι κάθε πρότυπο εμφυτεύεται σε ένα ενέσιμο πρότυπο. Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό αυτό, χρειάζεται να εισάγουμε την έννοια ενός διαιρετού προτύπου υπεράνω μιας περιοχής κύριων ιδεωδών.

Ορισμός 3.2.6. *Αν R είναι μία περιοχή κύριων ιδεωδών, τότε ένα αριστερό R -πρότυπο M καλείται **διαιρετό, (divisible)**, αν για κάθε $m \in M$ και για κάθε μη μηδενικό $r \in R$, υπάρχει κάποιος $m' \in M$ έτσι ώστε $m = rm'$. Δηλαδή, $M = rM$ για κάθε μη μηδενικό $r \in R$.*

Παρατήρηση 3.2.7. Εύκολα βλέπουμε ότι κάθε ομομορφική εικόνα ενός διαιρετού R -προτύπου, είναι ένα διαιρετό R -πρότυπο. Επίσης, ένα ευθύ άθροισμα διαιρετών R -προτύπων είναι διαιρετό R -πρότυπο, και ένας ευθύς προσθετός ενός διαιρετού R -προτύπου είναι διαιρετό R -πρότυπο.

Παράδειγμα 3.2.8. Το \mathbb{Q} ως \mathbb{Z} -πρότυπο είναι προφανώς διαιρετό.

Η επόμενη πρόταση, μας εξασφαλίζει ότι υπεράνω μιας περιοχής κύριων ιδεωδών, οι έννοιες «ενέσιμα πρότυπα» και «διαιρετά πρότυπα» είναι ισοδύναμες.

Πρόταση 3.2.9. *Έστω R μία περιοχή κύριων ιδεωδών. Τότε ένα αριστερό R -πρότυπο M είναι ενέσιμο, αν και μόνο αν, είναι διαιρετό.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά, ότι το αριστερό R -πρότυπο M είναι ενέσιμο, και έστω $x \in M$ και $r \in R$, $r \neq 0$. Αν $s, s' \in R$, και $sr = s'r$, τότε $(s - s')r = 0$. Έτσι, αφού ο δακτύλιος R είναι περιοχή κύριων ιδεωδών και $r \neq 0$, έπεται ότι $s - s' = 0$, ή ισοδύναμα, ότι $s = s'$. Ορίζουμε λοιπόν απεικόνιση

$$f: \langle r \rangle \longrightarrow M, \quad sr \longmapsto sx,$$

για κάθε $s \in R$. Η απεικόνιση f είναι προφανώς ένας καλώς ορισμένος ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων. Επειδή το M είναι ενέσιμο, και το $\langle r \rangle$ είναι ένα αριστερό ιδεώδες του R , μπορούμε να επεκτείνουμε τον f σε έναν ομομορφισμό αριστερών R -προτύπων $g: R \longrightarrow M$, έτσι ώστε $x = f(r) = g(r) = g(r1) = rg(1)$. Συνεπώς, παίρνουμε ότι το M είναι διαιρετό.

Αντίστροφα, υποθέτουμε τώρα ότι το αριστερό R -πρότυπο M είναι διαιρετό. Έστω I ένα μη μηδενικό αριστερό ιδεώδες του R , και $f: I \longrightarrow M$ ένας ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων. Επειδή ο δακτύλιος R είναι περιοχή κύριων ιδεωδών, υπάρχει κάποιος $s \in R$, $s \neq 0$, έτσι ώστε $I = \langle s \rangle$. Επιπλέον, αφού το M είναι διαιρετό και το $s \neq 0$, υπάρχει κάποιος $x \in M$, τέτοιο ώστε $f(s) = sx$. Ορίζουμε ομομορφισμό αριστερών R -προτύπων $g: R \longrightarrow M$, θέτοντας $g(r) = rx$ για κάθε $r \in R$. Τότε για κάθε $y = r's \in I$, έχουμε ότι

$$g(y) = g(r's) = (r's)x = r'(sx) = r'f(s) = f(r's) = f(y),$$

και άρα, ότι $g|I = f$. Χρησιμοποιώντας λοιπόν το κριτήριο του Baer, συμπεραίνουμε ότι το M είναι ενέσιμο. ■

Πρόταση 3.2.10. *1. Κάθε αβελιανή ομάδα μπορεί να εμφυτευτεί σε μία ενέσιμη αβελιανή ομάδα.*

2. Αν $R \longrightarrow S$ είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων και E ένα ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο, τότε $\text{Hom}_R(S, E)$ είναι ένα ενέσιμο αριστερό S -πρότυπο.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [27, Corollary 3.1.5, Proposition 3.1.6]. ■

Ως συνέπεια της Πρότασης (3.2.10), παίρνουμε ότι:

Πόρισμα 3.2.11. Αν G είναι μία διαιρετή αβελιανή ομάδα, τότε $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, G)$ είναι ένα ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο, για κάθε δακτύλιο R .

Είμαστε σε θέση τώρα να αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.2.12. Κάθε αριστερό R -πρότυπο M μπορεί να εμφυτευθεί σε ένα ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο E .

Απόδειξη. Έστω M ένα αριστερό R -πρότυπο. Αν το M ιδωθεί ως αβελιανή ομάδα, τότε η Πρόταση (3.2.10) μας δίνει μια ενέσιμη αβελιανή ομάδα G , και μια εμφύτευση αβελιανών ομάδων $i: M \longrightarrow G$. Τότε επειδή ο συναλλοίωτος συναρτητής $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, -)$ είναι αριστερά ακριβής, ο επαγόμενος ομομορφισμός $i_*: \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, G)$ είναι μονομορφισμός. Όμως,

$$M \cong \text{Hom}_R(R, M) \subseteq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M).$$

Άρα, χρησιμοποιώντας το Πόρισμα (3.2.11), έχουμε ότι το M εμφυτεύεται ως αβελιανή ομάδα, στο ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, G)$. Επιπλέον, εύκολα βλέπουμε ότι η εμφύτευση αυτή, είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων, και έτσι, έπεται το ζητούμενο. ■

Πρόταση 3.2.13. Ένα αριστερό R -πρότυπο E είναι ενέσιμο, αν και μόνο αν, ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής $\text{Hom}_R(-, E): R\text{-Mod} \longrightarrow \text{Ab}$ είναι ακριβής.

Απόδειξη. Έστω E ένα ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής $\text{Hom}_R(-, E)$ είναι ακριβής. Επειδή ο $\text{Hom}_R(-, E)$ είναι πάντα αριστερά ακριβής, αρκεί να δείξουμε ότι ο $\text{Hom}_R(-, E)$ είναι δεξιά ακριβής. Έστω

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

μια σύντομη ακριβή ακολουθία αριστερών R -προτύπων. Τότε η επαγόμενη ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(N, E) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}_R(M, E) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}_R(L, E),$$

είναι ακριβής, διότι ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής $\text{Hom}_R(-, E)$ είναι αριστερά ακριβής. Επειδή το E είναι ενέσιμο, και αφού ο f είναι μονομορφισμός, για κάθε ομομορφισμό αριστερών R -προτύπων $h: L \longrightarrow E$, υπάρχει ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων $k: M \longrightarrow E$ έτσι ώστε $h = k \circ f = f^*(k)$. Συνεπώς, ο f^* είναι επιμορφισμός, και άρα, ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής $\text{Hom}_R(-, E)$ είναι δεξιά ακριβής.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής $\text{Hom}_R(-, E)$ είναι ακριβής. Έστω $f: L \longrightarrow M$ ένας μονομορφισμός αριστερών R -προτύπων, και $h: L \longrightarrow E$ ένας ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων. Αν εφαρμόσουμε τον αντισυναλλοίωτο συναρτητή $\text{Hom}_R(-, E)$, στην σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{\pi} M/L \longrightarrow 0,$$

τότε η υπόθεση μας εξασφαλίζει ότι η ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(M/L, E) \xrightarrow{\pi^*} \text{Hom}_R(M, E) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}_R(L, E) \longrightarrow 0,$$

είναι ακριβής. Έτσι, αφού $h \in \text{Hom}_R(L, E)$, υπάρχει ομομορφισμός $k \in \text{Hom}_R(M, E)$ έτσι ώστε $h = f^*(k) = k \circ f = h$. Δηλαδή, το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M \\ & & \downarrow h & \searrow \exists k & \downarrow \\ & & E & & \end{array}$$

είναι μεταθετικό. Επομένως, το αριστερό R -πρότυπο M είναι ενέσιμο. ■

Ως προφανή συνέπεια της Πρότασης (3.2.13), παίρνουμε ότι τα ενέσιμα αριστερά R -πρότυπα, είναι ακριβώς τα αριστερά R -πρότυπα E , για τα οποία ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής $\text{Hom}_R(-, E)$ στέλνει μονομορφισμούς σε επιμορφισμούς. Με άλλα λόγια, το αριστερό R -πρότυπο E είναι ενέσιμο, αν και μόνο αν, για κάθε ακριβής ακολουθία $0 \longrightarrow N_1 \xrightarrow{g} N_2$ αριστερών R -προτύπων, η ακολουθία αβελιανών ομάδων $\text{Hom}_R(N_2, E) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}_R(N_1, E) \longrightarrow 0$ είναι ακριβής. Χρησιμοποιούμε τώρα το αποτέλεσμα αυτό, για να αποδείξουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.2.14. *Αν $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ είναι μία οικογένεια αριστερών R -προτύπων, τότε το ευθύ γινόμενο $\prod_{\alpha \in \Delta} M_\alpha$ είναι ενέσιμο, αν και μόνο αν, κάθε M_α για $\alpha \in \Delta$, είναι ενέσιμο.*

Απόδειξη. Έστω $0 \longrightarrow N_1 \xrightarrow{g} N_2$ μια ακριβής ακολουθία αριστερών R -προτύπων. Για κάθε $\alpha \in \Delta$, θεωρούμε τον επαγόμενο ομομορφισμό αβελιανών ομάδων

$$g_\alpha^* : \text{Hom}_R(N_2, M_\alpha) \longrightarrow \text{Hom}_R(N_1, M_\alpha), \quad f \longmapsto f \circ g.$$

Αν το αριστερό R -πρότυπο $\prod_{\alpha \in \Delta} M_\alpha$ είναι ενέσιμο, τότε η επαγόμενη ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$\text{Hom}_R(N_2, \prod_{\alpha \in \Delta} M_\alpha) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}_R(N_1, \prod_{\alpha \in \Delta} M_\alpha) \longrightarrow 0, \quad (3.3)$$

είναι ακριβής. Η Πρόταση (1.2.12), μας δίνει ότι η ακριβής ακολουθία (3.3), είναι ισόμορφη με την ακολουθία

$$\prod_{\alpha \in \Delta} \text{Hom}_R(N_2, M_\alpha) \xrightarrow{\prod g_\alpha^*} \prod_{\alpha \in \Delta} \text{Hom}_R(N_1, M_\alpha) \longrightarrow 0. \quad (3.4)$$

Συνεπώς, έπεται ότι η ακολουθία αβελιανών ομάδων (3.4) είναι επίσης ακριβής. Έτσι, θεωρώντας για κάθε $\alpha \in \Delta$, το μεταθετικό και ακριβές διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\alpha \in \Delta} \text{Hom}_R(N_2, M_\alpha) & \xrightarrow{\prod g_\alpha^*} & \prod_{\alpha \in \Delta} \text{Hom}_R(N_1, M_\alpha) & \longrightarrow & 0 \\ \pi_\alpha \downarrow & & \downarrow \pi'_\alpha & & \\ \text{Hom}_R(N_2, M_\alpha) & \xrightarrow{g_\alpha^*} & \text{Hom}_R(N_1, M_\alpha) & & \end{array}$$

όπου π_α και π'_α είναι οι κανονικές προβολές, παίρνουμε ότι ο ομομορφισμός αβελιανών ομάδων g_α^* είναι επιμορφισμός για κάθε $\alpha \in \Delta$, και άρα, ότι τα αριστερά R -πρότυπα M_α είναι ενέσιμα για κάθε $\alpha \in \Delta$.

Αντίστροφα, αν τα M_α είναι ενέσιμα για κάθε $\alpha \in \Delta$, τότε ο ομομορφισμός αβελιανών ομάδων g_α^* είναι επιμορφισμός για κάθε $\alpha \in \Delta$. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, και την Παρατήρηση (1.2.3), συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία αβελιανών ομάδων (3.4) είναι ακριβής. Επομένως, η ακολουθία αβελιανών ομάδων (3.3) είναι επίσης ακριβής, ως ισόμορφη με την ακριβή ακολουθία (3.4). Έτσι τελικά, έχουμε ότι το ευθύ γινόμενο $\prod_{\alpha \in \Delta} M_\alpha$ είναι ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο. ■

Τετριμμένα, έπεται ότι:

Πόρισμα 3.2.15. Ένα πεπερασμένο ευθύ άθροισμα από ενέσιμα αριστερά R -πρότυπα είναι ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο, και ένας ευθύς προσθετός ενός ενέσιμου αριστερού R -προτύπου είναι ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο.

Τονίζουμε ότι υπεράνω τυχόντος δακτυλίου, ένα άπειρο ευθύ άθροισμα ενέσιμων προτύπων δεν είναι απαραίτητα ενέσιμο πρότυπο. Ωστόσο, αν ο δακτύλιος είναι δακτύλιος της Noether, τότε κάθε ευθύ άθροισμα ενέσιμων προτύπων είναι ενέσιμο πρότυπο. Μάλιστα, ένας δακτύλιος της Noether χαρακτηρίζεται από την προηγούμενη ιδιότητα.

Θεώρημα 3.2.16. Για έναν δακτύλιο R , οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

1. Ο R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether.
2. Κάθε ευθύ όριο ενέσιμων αριστερών R -προτύπων είναι ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο.
3. Κάθε ευθύ άθροισμα ενέσιμων αριστερών R -προτύπων είναι ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [27, Theorem 3.1.17] ■

Πρόταση 3.2.17. Ένα αριστερό R -πρότυπο E είναι ενέσιμο, αν και μόνο αν, κάθε σύντομη ακριβής ακολουθία $0 \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ διασπάται.

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι το αριστερό R -πρότυπο E είναι ενέσιμο, και έστω

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{f} B \rightarrow C \rightarrow 0, \quad (3.5)$$

μια σύντομη ακριβής ακολουθία αριστερών R -προτύπων. Τότε υπάρχει ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων $g: B \rightarrow E$, έτσι ώστε $g \circ f = \text{Id}_E$. Συνεπώς, η σύντομη ακριβής ακολουθία (3.5) είναι διασπασίμη, ως αριστερά διασπασίμη. Υποθέτουμε τώρα ότι κάθε σύντομη ακριβής ακολουθία της μορφής (3.5), διασπάται. Επειδή κάθε πρότυπο εμφυτεύεται σε ένα ενέσιμο πρότυπο, υπάρχει μια σύντομη ακριβής ακολουθία αριστερών R -προτύπων

$$0 \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow C \rightarrow 0,$$

όπου H είναι ενέσιμο. Τότε η υπόθεση μας εξασφαλίζει ότι η προηγούμενη ακολουθία είναι διασπασίμη, και κατ' επέκταση, ότι το E είναι ευθύς προσθετός του H . Επομένως, χρησιμοποιώντας το Πόρισμα (3.2.15), καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το αριστερό R -πρότυπο E είναι ενέσιμο. ■

3.2.2 Προβολικά Πρότυπα

Δυϊκή της κλάσης των ενέσιμων αριστερών R -προτύπων, είναι η κλάση των προβολικών αριστερών R -προτύπων.

Ορισμός 3.2.18. Ένα αριστερό R -πρότυπο P καλείται **προβολικό, (projective)**, αν για κάθε επιμορφισμό αριστερών R -προτύπων $\psi: A \rightarrow B$, και κάθε ομομορφισμό αριστερών R -προτύπων $f: P \rightarrow B$, υπάρχει ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων $g: P \rightarrow A$ έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ g \swarrow & \downarrow f & \\ A & \xrightarrow{\psi} & B \longrightarrow 0 \end{array}$$

Συμβολίζουμε την κλάση όλων των προβολικών αριστερών R -προτύπων με $R\text{-Proj}$.

Παρατήρηση 3.2.19. Εύκολα βλέπουμε ότι η κλάση $R\text{-Proj}$ είναι κλειστή σε ισομορφισμούς.

Πρόταση 3.2.20. Αν P είναι ένα προβολικό αριστερό R -πρότυπο, και $f: N \rightarrow P$ είναι ένας επιμορφισμός αριστερών R -προτύπων, τότε το P είναι ευθύς προσθετός του N .

Απόδειξη. Επειδή το P είναι προβολικό, και ο f είναι επιμορφισμός, υπάρχει ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων $g: P \rightarrow N$, έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \swarrow g & \downarrow \text{Id}_P \\ N & \xrightarrow{\psi} & P \longrightarrow 0 \end{array}$$

Συνεπώς, ο επιμορφισμός f είναι διασπασίμος, και άρα, υπάρχει κάποιο αριστερό R -πρότυπο K τέτοιο ώστε $N \cong K \oplus P$. Δηλαδή, το P είναι ευθύς προσθετός του N . ■

Παράδειγμα 3.2.21. 1. Το μηδενικό πρότυπο είναι τριτημμένα προβολικό πρότυπο.

2. Κάθε ελεύθερο πρότυπο είναι προβολικό πρότυπο, βλέπε Πρόταση (3.2.25).

Πρόταση 3.2.22. Αν $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ είναι μία οικογένεια αριστερών R -προτύπων, τότε το ευθύ άθροισμα $\bigoplus_{\alpha \in \Delta} M_\alpha$ είναι προβολικό, αν και μόνο αν, κάθε M_α για $\alpha \in \Delta$, είναι προβολικό.

Απόδειξη. Δυϊκά, με την απόδειξη της Πρότασης (3.2.14) ■

Ως προφανή συνέπεια της Πρότασης (3.2.22), έχουμε ότι:

Πόρισμα 3.2.23. Ένας ευθύς προσθετός ενός προβολικού αριστερού R -προτύπου είναι προβολικό αριστερό R -πρότυπο.

Λήμμα 3.2.24. Ο δακτύλιος R ως αριστερό (δεξιό) R -πρότυπο είναι προβολικό.

Απόδειξη. Έστω $h: N_2 \rightarrow N_1$ ένας επιμορφισμός αριστερών R -προτύπων, και $f: R \rightarrow N_1$ ένας ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων. Για να αποδείξουμε ότι ο δακτύλιος R είναι προβολικό ως αριστερό R -πρότυπο, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων $g: R \rightarrow N_2$, έτσι ώστε $h \circ g = f$. Αν $f(1_R) = y \in N_1$, τότε αφού ο h είναι επιμορφισμός, υπάρχει κάποιο $x \in N_2$ με $h(x) = y$. Ορίζουμε λοιπόν,

$$g: R \rightarrow N_2, \quad r \mapsto rx.$$

Τότε εύκολα βλέπουμε ότι η g είναι ένας καλώς ορισμένος ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων, και ότι $f = h \circ g$. Ανάλογα αποδεικνύεται ότι ο R είναι προβολικό ως δεξιό R -πρότυπο. ■

Πρόταση 3.2.25. Κάθε ελεύθερο αριστερό R -πρότυπο είναι προβολικό.

Απόδειξη. Αν F είναι ένα ελεύθερο αριστερό R -πρότυπο, τότε υπάρχει κάποιο σύνολο I έτσι ώστε $R^{(I)} \cong F$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα (3.2.24), καθώς και την Πρόταση (3.2.22), παίρνουμε ότι το $R^{(I)}$ είναι προβολικό. Συνεπώς, επειδή η κλάση $R\text{-Proj}$ των προβολικών αριστερών R -προτύπων είναι κλειστή σε ισομορφισμούς, έπεται ότι το F είναι προβολικό. ■

Τονίζουμε ότι υπάρχουν προβολικά πρότυπα τα οποία δεν είναι ελεύθερα. Για να το διαπιστώσουμε αυτό, παραθέτουμε το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.2.26. Θεωρούμε τον δακτύλιο \mathbb{Z}_6 ως \mathbb{Z}_6 -πρότυπο. Τότε προφανώς, ο δακτύλιος \mathbb{Z}_6 είναι προβολικό ως \mathbb{Z}_6 -πρότυπο, και $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$. Συνεπώς, το \mathbb{Z}_2 είναι προβολικό \mathbb{Z}_6 -πρότυπο, ως ευθύς προσθετός του προβολικού \mathbb{Z}_6 -προτύπου \mathbb{Z}_6 . Αν το \mathbb{Z}_2 ήταν ελεύθερο \mathbb{Z}_6 -πρότυπο, τότε το \mathbb{Z}_2 θα είχε τουλάχιστον 6 στοιχεία, πράγμα το οποίο είναι αδύνατο. Έτσι, το \mathbb{Z}_2 είναι προβολικό \mathbb{Z}_6 -πρότυπο, αλλά όχι ελεύθερο \mathbb{Z}_6 -πρότυπο.

Γενικά, η κλάση των ελεύθερων R -προτύπων είναι γνήσια υποκλάση της κλάσης των προβολικών R -προτύπων. Στην συνέχεια θα δούμε ότι υπάρχουν δακτύλιοι υπεράνω των οποίων, οι δύο κλάσεις αυτές συμπίπτουν.

Η επόμενη πρόταση χαρακτηρίζει τα προβολικά πρότυπα.

Πρόταση 3.2.27. *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. Το αριστερό R -πρότυπο P είναι προβολικό.
2. Κάθε σύντομη ακριβής ακολουθία αριστερών R -προτύπων

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow P \longrightarrow 0,$$

διασπάται.

3. Το αριστερό R -πρότυπο P είναι ευθύς προσθετός ενός ελεύθερου αριστερού R -προτύπου.

Απόδειξη. (1 \Rightarrow 2) : Αν το P είναι προβολικό αριστερό R -πρότυπο, τότε θεωρώντας τον ταυτοτικό (ομο)μορφισμό Id_P του P , και χρησιμοποιώντας τον ορισμό του προβολικού προτύπου, παίρνουμε ότι κάθε σύντομη ακριβής ακολουθία που τελειώνει σε P διασπάται.

(2 \Rightarrow 3) : Υποθέτουμε ότι ισχύει το 2). Η Πρόταση (1.2.21), μας δίνει μια σύντομη ακριβή ακολουθία αριστερών R -προτύπων

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow P \longrightarrow 0,$$

όπου F ελεύθερο. Τότε χρησιμοποιώντας την υπόθεση, συμπεραίνουμε ότι η προηγούμενη σύντομη ακριβής ακολουθία είναι διασπασίμη, και κατ' επέκταση, ότι το P είναι ευθύς προσθετός του ελεύθερου αριστερού R -προτύπου F .

(3 \Rightarrow 1) : Αν ισχύει το 3), τότε χρησιμοποιώντας το Πόρισμα (3.2.23) και την Πρόταση (3.2.25), έχουμε ότι το αριστερό R -πρότυπο P είναι προβολικό. ■

Πόρισμα 3.2.28. *Κάθε αριστερό R -πρότυπο είναι η ομομορφική εικόνα ενός προβολικού αριστερού R -προτύπου.*

Απόδειξη. Επειδή κάθε αριστερό R -πρότυπο είναι η ομομορφική εικόνα ενός ελεύθερου αριστερού R -προτύπου, και αφού κάθε ελεύθερο αριστερό R -πρότυπο είναι προβολικό, έπεται ότι κάθε αριστερό R -πρότυπο είναι η ομομορφική εικόνα ενός προβολικού αριστερού R -προτύπου. ■

Νωρίτερα είδαμε ότι τα ενέσιμα πρότυπα είναι ακριβώς τα πρότυπα τα οποία καθιστούν τον αντισυναλλοίωτο συναρτητή Hom ακριβή. Τώρα δείχνουμε ότι τα προβολικά πρότυπα είναι ακριβώς τα πρότυπα τα οποία καθιστούν τον συναλλοίωτο συναρτητή Hom ακριβή.

Πρόταση 3.2.29. *Ένα αριστερό R -πρότυπο P είναι προβολικό, αν και μόνο αν, ο συναλλοίωτος συναρτητής $\text{Hom}_R(P, -) : R\text{-Mod} \longrightarrow \text{Ab}$ είναι ακριβής.*

Απόδειξη. Κατά δυϊκό τρόπο με την απόδειξη της Πρότασης (3.2.13). ■

Η προσοχή μας τώρα στρέφεται σε δακτύλιους υπεράνω των οποίων, τα υποπρότυπα προβολικών προτύπων είναι προβολικά, και οι ομομορφικές εικόνες ενέσιμων προτύπων είναι ενέσιμα.

Ορισμός 3.2.30. *Ένας δακτύλιος R καλείται **αριστερά (δεξιά) κληρονομικός δακτύλιος (hereditary)**, αν κάθε αριστερό (δεξιό) ιδεώδες του R είναι προβολικό πρότυπο. Αν ο R είναι αριστερά και δεξιά κληρονομικός δακτύλιος, τότε ο R καλείται **κληρονομικός δακτύλιος**.*

Παράδειγμα 3.2.31. Αν R είναι ένας δακτύλιος χωρίς διαιρέτες του μηδενός, και αν κάθε αριστερό ιδεώδες του R είναι της μορφής $R\alpha$ για κάποιο $\alpha \in R$, τότε $R\alpha \cong R$ για κάθε $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$. Συνεπώς, κάθε αριστερό ιδεώδες του R είναι προβολικό, και άρα, ο δακτύλιος R είναι αριστερά κληρονομικός δακτύλιος. Ιδιαίτερα, κάθε περιοχή κύριων ιδεωδών είναι κληρονομικός δακτύλιος. Έτσι, ο δακτύλιος των ακεραίων \mathbb{Z} είναι κληρονομικός δακτύλιος.

Τα επόμενα θεωρήματα οφείλονται αντίστοιχα, στους Kaplansky και Cartan-Eilenberg.

Θεώρημα 3.2.32. (Kaplansky) *Αν R είναι ένας αριστερά κληρονομικός δακτύλιος, τότε κάθε υποπρότυπο A ενός ελεύθερου αριστερού R -προτύπου F είναι ισόμορφο με ένα ευθύ άθροισμα αριστερών ιδεωδών του R , και άρα, είναι προβολικό R -πρότυπο.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [52, Theorem 4.13] ■

Θεώρημα 3.2.33. (Cartan-Eilenberg) *Οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες για έναν δακτύλιο R :*

1. *Ο R είναι αριστερά κληρονομικός δακτύλιος.*
2. *Κάθε υποπρότυπο ενός προβολικού αριστερού R -προτύπου είναι προβολικό.*
3. *Κάθε πρότυπο πηλίκο ενός ενέσιμου αριστερού R -προτύπου είναι ενέσιμο.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [52, Theorem 4.19] ■

Όπως προαναφέραμε, οι έννοιες «ελεύθερα πρότυπα» και «προβολικά πρότυπα» είναι εν γένει διακριτές. Αποδεικνύουμε τώρα ότι υπεράνω μιας περιοχής κύριων ιδεωδών, οι έννοιες αυτές είναι ισοδύναμες.

Πρόταση 3.2.34. *Αν ο δακτύλιος R είναι περιοχή κύριων ιδεωδών, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Αν M είναι ένα υποπρότυπο ενός ελεύθερου αριστερού R -προτύπου F , τότε το M είναι ελεύθερο.*
2. *Ένα αριστερό R -πρότυπο M είναι προβολικό, αν και μόνο αν, το M είναι ελεύθερο.*

Απόδειξη. 1) Έστω M ένα υποπρότυπο ενός ελεύθερου αριστερού R -προτύπου F . Αν $M = 0$, τότε τετριμμένα ισχύει το ζητούμενο. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $M \neq 0$. Επειδή κάθε περιοχή κύριων ιδεωδών είναι ένας κληρονομικός δακτύλιος, το Θεώρημα (3.2.32) μας δίνει ότι το M είναι ισόμορφο με ένα ευθύ άθροισμα από αριστερά ιδεώδη του R . Όμως, αφού ο R είναι περιοχή κύριων ιδεωδών, κάθε αριστερό ιδεώδες του R είναι της μορφής $R\alpha$ για κάποιο $\alpha \in R$, και $R\alpha \cong R$ για κάθε $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$. Έτσι τελικά, έχουμε ότι το M είναι ισόμορφο με ένα ευθύ άθροισμα από κόπιες του δακτυλίου R , και κατ' επέκταση, ότι το M είναι ελεύθερο.

2) Αν το M είναι ελεύθερο, τότε η Πρόταση (3.2.25) μας εξασφαλίζει ότι το M είναι προβολικό. Αντίστροφα, αν το M είναι προβολικό, τότε χρησιμοποιώντας την Πρόταση (3.2.27), έπεται ότι το M είναι ένα υποπρότυπο ενός ελεύθερου αριστερού R -προτύπου. Συνεπώς, χρησιμοποιώντας το 1) παίρνουμε ότι το M είναι ελεύθερο. ■

3.2.3 Επίπεδα Πρότυπα

Συνεχίζουμε με τα επίπεδα πρότυπα. Η αναφορά μας σε επίπεδα πρότυπα δε θα είναι εκτενής, μιας και ελάχιστα θα μας απασχολήσουν στην συνέχεια της διατριβής. Για περισσότερες λεπτομέρειες για επίπεδα πρότυπα, συστήνουμε τα βιβλία [16] και [52].

Μέχρι τώρα, είδαμε ότι τα ενέσιμα πρότυπα είναι ακριβώς τα πρότυπα που καθιστούν τον αντισυναλλοίωτο συναρτητή Hom ακριβή, ενώ τα προβολικά πρότυπα είναι ακριβώς τα πρότυπα που καθιστούν τον συναλλοίωτο συναρτητή Hom ακριβή. Τα επίπεδα πρότυπα ορίζονται ως τα πρότυπα τα οποία μετατρέπουν τον δεξιά ακριβή τανυστικό συναρτητή \otimes σε ακριβή.

Ορισμός 3.2.35. *Ένα αριστερό R -πρότυπο M καλείται **επίπεδο, (flat)**, αν ο συναρτητής $-\otimes_R M: \text{Mod-}R \rightarrow \text{Ab}$ είναι ακριβής. Δηλαδή, αν*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{k} C \longrightarrow 0$$

είναι μία σύντομη ακριβής ακολουθία από δεξιά R -πρότυπα, τότε η επαγόμενη ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$0 \longrightarrow A \otimes_R M \xrightarrow{i \otimes \text{Id}_M} B \otimes_R M \xrightarrow{k \otimes \text{Id}_M} C \otimes_R M \longrightarrow 0$$

είναι σύντομη ακριβής ακολουθία.

Συμμετρικά, ορίζεται ένα επίπεδο δεξιό R -πρότυπο.

Παρατήρηση 3.2.36. Επειδή ο συναρτητής $-\otimes_R -$ σε κάθε μεταβλητή είναι πάντα δεξιά ακριβής, μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τα επίπεδα πρότυπα, ως τα πρότυπα για τα οποία ο συναρτητής \otimes διατηρεί μονομορφισμούς.

Πρόταση 3.2.37. Έστω R ένας δακτύλιος.

1. Ο δακτύλιος R είναι ένα επίπεδο αριστερό R -πρότυπο.
2. Το ευθύ άθροισμα $\bigoplus_{\alpha \in \Delta} M_\alpha$ αριστερών R -προτύπων είναι επίπεδο αν και μόνο αν κάθε M_α είναι επίπεδο.
3. Κάθε προβολικό αριστερό R -πρότυπο P είναι επίπεδο.

Απόδειξη. 1) Έστω

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B, \quad (3.6)$$

μια ακριβής ακολουθία δεξιών R -προτύπων. Τότε το πρώτο σκέλος της Πρόταση (1.2.34), μας δίνει ότι η ακολουθία δεξιών προτύπων

$$0 \longrightarrow A \otimes_R R \xrightarrow{i \otimes \text{Id}_R} B \otimes_R R, \quad (3.7)$$

είναι ισόμορφη με την ακριβή ακολουθία (3.6). Συνεπώς, η ακολουθία (3.7) είναι επίσης ακριβής, και άρα, ο δακτύλιος R είναι επίπεδο ως αριστερό R -πρότυπο.

2) Θεωρούμε μια ακριβή ακολουθία δεξιών R -προτύπων, όπως η (3.6). Το δεύτερο σκέλος της Πρόταση (1.2.34), μας εξασφαλίζει ότι οι ακολουθίες αβελιανών ομάδων

$$0 \longrightarrow A \otimes_R (\bigoplus M_\alpha) \xrightarrow{j \otimes \text{Id}_{(\bigoplus M_\alpha)}} B \otimes_R (\bigoplus M_\alpha) \quad (3.8)$$

και

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in \Delta} (A \otimes_R M_\alpha) \xrightarrow{\bigoplus (j \otimes \text{Id}_{M_\alpha})} \bigoplus_{\alpha \in \Delta} (B \otimes_R M_\alpha), \quad (3.9)$$

είναι ισόμορφες. Άρα, η ακολουθία (3.8) είναι ακριβής, αν και μόνο αν, η ακολουθία (3.9) είναι ακριβής. Επομένως το ευθύ άθροισμα $\bigoplus_{\alpha \in \Delta} M_\alpha$ είναι επίπεδο, αν και μόνο αν, κάθε M_α για $\alpha \in \Delta$ είναι επίπεδο.

3) Ισχυριζόμαστε ότι κάθε ελεύθερο αριστερό R -πρότυπο είναι επίπεδο. Για να το διαπιστώσουμε αυτό, έστω F ένα ελεύθερο αριστερό R -πρότυπο. Τότε υπάρχει σύνολο Δ έτσι ώστε $F \cong R^{(\Delta)}$. Χρησιμοποιώντας τα 1) και 2), παίρνουμε ότι το F είναι επίπεδο αριστερό R -πρότυπο, όπως επιθυμούσαμε. Έστω τώρα P ένα οποιοδήποτε προβολικό αριστερό R -πρότυπο. Τότε το P είναι ευθύ προσθετός ενός ελεύθερου προτύπου, και κατ' επέκταση, το P είναι ευθύ προσθετός ενός επίπεδου αριστερού R -προτύπου. Χρησιμοποιώντας λοιπόν ξανά το 2), έχουμε ότι το P είναι ένα επίπεδο αριστερό R -πρότυπο. Επομένως, κάθε προβολικό αριστερό R -πρότυπο είναι επίπεδο. ■

Τονίζουμε ότι υπεράνω τυχόντος δακτυλίου, η κλάση των προβολικών προτύπων είναι γνήσια υποκλάση της κλάσης των επίπεδων προτύπων. Στην συνέχεια, θα παραθέσουμε παράδειγμα ενός επίπεδου προτύπου το οποίο δεν προβολικό πρότυπο.

Έστω R μια ακέραια περιοχή, U το σύνολο των μη-μηδενικών στοιχείων του R και N ένα αριστερό R -πρότυπο. Ορίζουμε ως $U^{-1}N$ το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας των διατεταγμένων

ζευγών (u, n) , $u \in U, n \in N$ κάτω από τη σχέση ισοδυναμίας $(u, n)\sigma(u', n') \Leftrightarrow u'n = un'$ στο N . Δηλαδή, $U^{-1}N = (U \times N)/\sigma$. Τότε το σύνολο $U^{-1}N$ είναι μια αβελιανή ομάδα, όπου η πρόσθεση δίνεται ως $\overline{(u_1, n_1)} + \overline{(u_2, n_2)} = \overline{(u_1u_2, u_2n_1 + u_1n_2)}$, το ταυτοτικό στοιχείο της πρόσθεσης είναι το $e = \overline{(1, 0)}$, και το προσθετικό αντίστροφο κάθε $(u, n) \in U^{-1}N$ είναι το στοιχείο $\overline{(-u, n)} \in U^{-1}N$. Επιπλέον, ορίζοντας δράση

$$R \times U^{-1}N \longrightarrow U^{-1}N, \quad (r, \overline{(u, n)}) \longmapsto r\overline{(u, n)} := \overline{(u, rn)}$$

εύκολα βλέπουμε ότι η αβελιανή ομάδα $U^{-1}N$ είναι ένα αριστερό R -πρότυπο.

Λήμμα 3.2.38. Έστω R μια ακέραια περιοχή με σώμα πηλίκο Q και N ένα αριστερό R -πρότυπο. Τότε

1. Υπάρχει ένας ισομορφισμός αριστερών R -προτύπων $f: Q \otimes_R N \longrightarrow U^{-1}N$.
2. $\frac{1}{d} \otimes n = 0$ στο $Q \otimes_R N$, αν και μόνο αν, $rn = 0$ για κάποιο μη-μηδενικό $r \in R$.

Απόδειξη. 1) Ορίζουμε απεικόνιση

$$h: Q \times N \longrightarrow U^{-1}N, \quad \left(\frac{a}{b}, n\right) \longmapsto \overline{(b, an)}.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι η απεικόνιση h είναι R -ισόρροπη. Συνεπώς, από την καθολική ιδιότητα του τανυστικού γινομένου υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός

$$f: Q \otimes_R N \longrightarrow U^{-1}N \quad \text{τέτοιος ώστε } f\left(\left(\frac{a}{b}\right) \otimes n\right) = h\left(\frac{a}{b}, n\right) = \overline{(b, an)},$$

για κάθε γεννήτορα $\left(\frac{a}{b} \otimes n\right) \in Q \otimes_R N$. Επιπλέον, η απεικόνιση

$$g: U^{-1}N \longrightarrow Q \otimes_R N, \quad \overline{(u, n)} \longmapsto g(\overline{(u, n)}) := \left(\frac{1}{u}\right) \otimes n$$

είναι ένας καλά ορισμένη, αφού αν $\overline{(u_1, n_1)} = \overline{(u_2, n_2)}$, τότε υπάρχει ένα $x \in U$ έτσι ώστε $xu_1n_2 = xu_2n_1$, και άρα,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{u_1}\right) \otimes n_1 &= \left(\left(\frac{1}{u_1}\right)\left(\frac{1}{(xu_2)}\right)\right) \otimes (xu_2n_1) \\ &= \left(\left(\frac{1}{u_1}\right)\left(\frac{1}{(xu_2)}\right)\right) \otimes (xu_1n_2) \\ &= \left(\frac{1}{u_2}\right) \otimes n_2. \end{aligned}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι η g είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων. Παρατηρώντας τώρα ότι

$$f(g(\overline{(u, n)})) = f\left(\left(\frac{1}{u}\right) \otimes n\right) = \overline{(u, 1 \cdot n)} = \overline{(u, n)}$$

και

$$g\left(f\left(\left(\frac{a}{b}\right) \otimes n\right)\right) = g(\overline{(b, an)}) = \left(\frac{1}{b}\right) \otimes an = \left(\frac{a}{b}\right) \otimes n,$$

για κάθε $\overline{(u, n)} \in U^{-1}N$, και για κάθε $\left(\frac{a}{b}, n\right) \in Q \otimes_R N$, έπεται ότι ο f είναι ισομορφισμός με $f^{-1} = g$.

2) Επειδή τα $U^{-1}N$ και $Q \otimes_R N$ είναι ισόμορφα ως αριστερά R -πρότυπα, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{d} \otimes n = 0 &\Leftrightarrow f\left(\left(\frac{1}{d}\right) \otimes n\right) = \overline{(d, n)} = 0 = \overline{(1, 0)} \\ &\Leftrightarrow \text{υπάρχει } r \in R - \{0\} \text{ τέτοιο ώστε } rn = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Όπως και υποσχεθήκαμε νωρίτερα, αποδεικνύουμε τώρα ότι υπάρχουν επίπεδα πρότυπα τα οποία δεν είναι προβολικά.

Παράδειγμα 3.2.39. Θεωρούμε το $M = \mathbb{Q}$ ως αριστερό πρότυπο υπεράνω του δακτυλίου $R = \mathbb{Z}$. Θα δείξουμε ότι το M είναι επίπεδο αριστερό \mathbb{Z} -πρότυπο, αλλά όχι προβολικό \mathbb{Z} -πρότυπο.

Έστω $f: N' \rightarrow N$ ένας μονομορφισμός δεξιών \mathbb{Z} -προτύπων, και

$$f \otimes \text{Id}_{\mathbb{Q}}: N' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \rightarrow N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q},$$

ο επαγόμενος ομομορφισμός αβελιανών. Έστω $\sum_{i=1}^n n'_i \otimes \frac{p_i}{q_i} \in N' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ έτσι ώστε

$$\begin{aligned} 0 &= (f \otimes \text{Id}_{\mathbb{Q}}) \left(\sum_{i=1}^k n'_i \otimes \frac{p_i}{q_i} \right) = \sum_{i=1}^k \left(f(n'_i) \otimes \frac{p_i}{q_i} \right) \\ &= f(n'_1) \otimes \frac{p_1 q_2 \cdots q_k}{q_1 q_2 \cdots q_k} + f(n'_2) \otimes \frac{p_2 q_1 q_3 \cdots q_k}{q_1 q_2 \cdots q_k} + \cdots + f(n'_k) \otimes \frac{p_k q_1 \cdots q_{k-1}}{q_1 q_2 \cdots q_k} \\ &= \left(f(n'_1) p_1 q_2 \cdots q_k + f(n'_2) p_2 q_1 q_3 \cdots q_k + \cdots + f(n'_k) p_k q_1 \cdots q_{k-1} \right) \otimes \frac{1}{q_1 q_2 \cdots q_k} \\ &= \left(\sum_{i=1}^k f(n'_i) p_i q_1 \cdots \hat{q}_i \cdots q_k \right) \otimes \frac{1}{q_1 q_2 \cdots q_k} \end{aligned}$$

Επειδή $p_i q_1 \cdots \hat{q}_i \cdots q_k \in \mathbb{Z}$, και αφού N είναι ένα δεξιό \mathbb{Z} -πρότυπο, έπεται ότι το άθροισμα $\sum_{i=1}^k f(n'_i) p_i q_1 \cdots \hat{q}_i \cdots q_k \in N$. Έτσι, αν εφαρμόσουμε το Λήμμα (3.2.38) για $R = \mathbb{Z}$ και $Q = \mathbb{Q}$, έχουμε ότι

$$0 = \sum_{i=1}^k f(n'_i) p_i q_1 \cdots \hat{q}_i \cdots q_k = f \left(\sum_{i=1}^k n'_i p_i q_1 \cdots \hat{q}_i \cdots q_k \right)$$

Όμως ο f είναι μονομορφισμός, και άρα, $\sum_{i=1}^k n'_i p_i q_1 \cdots \hat{q}_i \cdots q_k = 0$. Επομένως,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^k n'_i p_i q_1 \cdots \hat{q}_i \cdots q_k \otimes \frac{1}{q_1 q_2 \cdots q_k} \\ &= \sum_{i=1}^k n'_i \otimes \frac{p_i}{q_i} \end{aligned}$$

Έτσι τελικά, έχουμε ότι ο $f \otimes \text{Id}_{\mathbb{Q}}$ είναι μονομορφισμός, και κατ' επέκταση, ότι το $M = \mathbb{Q}$ είναι ένα επίπεδο αριστερό \mathbb{Z} -πρότυπο.

Υποθέτουμε ότι το \mathbb{Q} ως \mathbb{Z} -πρότυπο είναι προβολικό, με σκοπό να καταλήξουμε σε άτοπο. Η Πρόταση (3.2.34), μας δίνει ότι υπεράνω μιας περιοχής κύριων ιδεωδών, οι κλάσεις των προβολικών και των ελεύθερων προτύπων συμπίπτουν. Συνεπώς, η υπόθεση μας εξασφαλίζει ότι υπάρχει ένα σύνολο I , όχι απαραίτητα πεπερασμένο, και ένας ισομορφισμός \mathbb{Z} -προτύπων $\phi: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}^{(I)}$. Τότε επειδή το \mathbb{Q} είναι ενέσιμο \mathbb{Z} -πρότυπο, ως διαιρετό \mathbb{Z} -πρότυπο, έπεται ότι το $\mathbb{Z}^{(I)}$ είναι επίσης ενέσιμο \mathbb{Z} -πρότυπο. Έτσι, αφού κάθε ευθύς προσθετός ενός ενέσιμου προτύπου είναι ενέσιμο πρότυπο, παίρνουμε ότι το \mathbb{Z} ως \mathbb{Z} -πρότυπο είναι ενέσιμο, και άρα, διαιρετό, αποτέλεσμα το οποίο είναι φυσικά αδύνατο. Άρα, το επίπεδο \mathbb{Z} -πρότυπο \mathbb{Q} δεν είναι προβολικό \mathbb{Z} -πρότυπο.

Σημειώνουμε προς το παρόν, ότι υπάρχουν δακτύλιοι (οι αριστερά τέλει δακτύλιοι) υπεράνω των οποίων οι κλάσεις των αριστερών προβολικών και επίπεδων προτύπων ταυτίζονται. Έχοντας μελετήσει λοιπόν την σχέση μεταξύ προβολικών και επίπεδων προτύπων, το επόμενο βήμα είναι να εξετάσουμε αν υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ των ενέσιμων και των επίπεδων προτύπων.

Ορισμός 3.2.40. Για ένα αριστερό R -πρότυπο M , το δεξιό R -πρότυπο $M^+ = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ καλείται **πρότυπο χαρακτήρων (character module)** του M .

Παρατήρηση 3.2.41. Το $M^+ = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ είναι ένα δεξιό R -πρότυπο με (δεξιά) δράση

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \times R \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \quad (f, r) \longmapsto fr$$

όπου $fr: M \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad m \longmapsto (fr)(m) := f(rm)$.

Παρόμοια, αν M είναι ένα δεξιό R -πρότυπο, τότε το πρότυπο χαρακτήρων M^+ του M , είναι ένα αριστερό R -πρότυπο με (αριστερή) δράση

$$R \times \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \quad (r, f) \longmapsto rf$$

όπου $rf: M \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad m \longmapsto (rf)(m) := f(mr)$.

Ορισμός 3.2.42. Ένα ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο E καλείται **ενέσιμος συγγεννήτορας (injective cogenerator)** για τα αριστερά R -πρότυπα, αν για κάθε αριστερό R -πρότυπο M και για κάθε $0 \neq x \in M$, υπάρχει $f \in \text{Hom}_R(M, E)$ έτσι ώστε $f(x) \neq 0$, ή ισοδύναμα, αν $\text{Hom}_R(M, E) \neq 0$ για κάθε μη μηδενικό αριστερό R -πρότυπο M .

Με άλλα λόγια, το αριστερό R -πρότυπο E είναι ενέσιμος συγγεννήτορας στην κατηγορία $R\text{-Mod}$, αν και μόνον αν, ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής $\text{Hom}_R(-, E): R\text{-Mod} \longrightarrow \text{Ab}$ είναι πιστός και ακριβής.

Λήμμα 3.2.43. Η αβελιανή ομάδα \mathbb{Q}/\mathbb{Z} είναι ένας ενέσιμος συγγεννήτορας στην κατηγορία Ab των αβελιανών ομάδων.

Απόδειξη. Η αβελιανή ομάδα \mathbb{Q}/\mathbb{Z} είναι ένα διαιρετό αριστερό \mathbb{Z} -πρότυπο, ως ομομορφική εικόνα του διαιρετού \mathbb{Z} -προτύπου \mathbb{Q} . Συνεπώς, από την Πρόταση (3.2.9) έπεται ότι το \mathbb{Q}/\mathbb{Z} είναι ένα ενέσιμο αριστερό \mathbb{Z} -πρότυπο.

Ισχυριζόμαστε τώρα ότι δοθέντων δύο ομομορφισμών αβελιανών ομάδων

$$f: A \longrightarrow B \quad \& \quad g: A \longrightarrow B,$$

με $f \neq g$, υπάρχει ομομορφισμός αβελιανών ομάδων $k: B \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ έτσι ώστε $k \circ f \neq k \circ g$. Για να το διαπιστώσουμε αυτό, έστω f και g δύο διαφορετικοί ομομορφισμοί αβελιανών ομάδων όπως προηγουμένως. Τότε υπάρχει $x \in A$ έτσι ώστε $f(x) \neq g(x)$. Θέτουμε $b = f(x) - g(x) \neq 0$, και θεωρούμε την υποομάδα $\langle b \rangle$ του B που παράγεται από το b . Αν η τάξη του b είναι πεπερασμένη ίση με n , $n \neq 0$, δηλαδή

$$|b| = n = \inf\{m \in \mathbb{N} \mid m \neq 0, mb = 0\} \in \mathbb{N}^*,$$

τότε ορίζουμε απεικόνιση

$$h: \langle b \rangle \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad zb \longmapsto \frac{z}{n} + \mathbb{Z},$$

για κάθε $z \in \mathbb{Z}$. Προφανώς, η απεικόνιση h είναι ένας καλώς ορισμένος ομομορφισμός αβελιανών ομάδων, και $h(b) = \frac{1}{n} + \mathbb{Z} \neq 0$. Αν η τάξη του b είναι άπειρη, δηλαδή $nb \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, τότε ορίζουμε απεικόνιση

$$h: \langle b \rangle \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad zb \longmapsto \frac{z}{2} + \mathbb{Z},$$

για κάθε $z \in \mathbb{Z}$. Η h είναι ξανά ένας καλώς ορισμένος ομομορφισμός αβελιανών ομάδων έτσι ώστε $h(b) = \frac{1}{2} + \mathbb{Z} \neq 0$. Επειδή το \mathbb{Q}/\mathbb{Z} είναι ένα ενέσιμο \mathbb{Z} -πρότυπο, και στις δύο περιπτώσεις που εξετάσαμε, ο ομομορφισμός αβελιανών ομάδων h επεκτείνεται σε έναν ομομορφισμό αβελιανών ομάδων $k: B \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ έτσι ώστε

$$(k \circ f)(x) - (k \circ g)(x) = k(f(x)) - k(g(x)) = k(f(x) - g(x)) = k(b) = h(b) \neq 0.$$

Έτσι τελικά, έχουμε ότι $(k \circ f)(x) \neq (k \circ g)(x)$, και άρα, ότι $k \circ f \neq k \circ g$, όπως επιθυμούσαμε. Αν λοιπόν M είναι μια οποιαδήποτε μη μηδενική αβελιανή ομάδα, τότε θεωρώντας τον ταυτοτικό (ομομορφισμό) του M και τον μηδενικό (ομομορφισμό) από το M στο M ,

$$\text{Id}_M: M \longrightarrow M \quad \& \quad 0: M \longrightarrow M,$$

οδηγούμαστε χρησιμοποιώντας τον προηγούμενο ισχυρισμό, στο συμπέρασμα ότι υπάρχει ομομορφισμός αβελιανών ομάδων $k: M \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, έτσι ώστε

$$k = k \circ \text{Id}_M \neq k \circ 0 = 0.$$

Επομένως, έπεται ότι η αβελιανή ομάδα \mathbb{Q}/\mathbb{Z} είναι ένας ενέσιμος συγγενήτορας στην κατηγορία των αβελιανών ομάδων. ■

Παρατήρηση 3.2.44. Επειδή η αβελιανή ομάδα \mathbb{Q}/\mathbb{Z} είναι ένας ενέσιμος συγγενήτορας στην κατηγορία των αβελιανών ομάδων, έχουμε ότι για κάθε μη μηδενικό αριστερό (δεξιό) R -πρότυπο M , το πρότυπο χαρακτήρων M^+ του M είναι μη μηδενικό δεξιό (αριστερό) R -πρότυπο.

Έχουμε δει ότι ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής $\text{Hom}_R(-, X): R\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$ είναι ακριθής, αν και μόνο αν, το αριστερό R -πρότυπο X είναι ενέσιμο. Δηλαδή, το X είναι ενέσιμο, αν η ακρίβεια της ακολουθίας αριστερών R -προτύπων

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0,$$

συνεπάγεται την ακρίβεια της ακολουθίας αβελιανών ομάδων

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(M'', X) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}_R(M, X) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}_R(M', X) \longrightarrow 0.$$

Η αντίστροφη συνεπαγωγή εξασφαλίζεται, αν εφοδιάσουμε το ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο X με μια επιπλέον συνθήκη. Αποδεικνύεται ότι όταν το αριστερό R -πρότυπο X είναι ένας ενέσιμος συγγενήτορας για τα αριστερά R -πρότυπα, τότε η ακρίβεια της ακολουθίας αβελιανών ομάδων

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(M'', X) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}_R(M, X) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}_R(M', X) \longrightarrow 0$$

είναι ισοδύναμη με την ακρίβεια της ακολουθίας αριστερών R -προτύπων

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0.$$

Για την απόδειξη βλέπε [27, Lemma 3.2.8].

Ως απόρροια των προηγούμενων, και του Λήμματος (3.2.43), παίρνουμε ότι:

Λήμμα 3.2.45. *Μια ακολουθία αριστερών R -προτύπων*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

είναι ακριθής, αν και μόνο αν, η ακολουθία δεξιών R -προτύπων

$$0 \longrightarrow M''^+ \xrightarrow{g^*} M^+ \xrightarrow{f^*} M'^+ \longrightarrow 0$$

είναι ακριθής.

Είμαστε σε θέση τώρα να δούμε πως συνδέονται τα επίπεδα και τα ενέσιμα πρότυπα.

Πρόταση 3.2.46. (Bourbaki-Lambek) *Ένα αριστερό R -πρότυπο M είναι επίπεδο, αν και μόνο αν, το πρότυπο χαρακτήρων του M^+ είναι ένα ενέσιμο δεξιό R -πρότυπο.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το M είναι ένα επίπεδο αριστερό R -πρότυπο. Για να αποδείξουμε ότι το M^+ είναι ένα ενέσιμο δεξιό R -πρότυπο, αρκεί να δείξουμε ότι ο συναρτητής $\text{Hom}_R(-, M^+)$ είναι δεξιά ακριθής. Έστω $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$ μια ακριθής ακολουθία δεξιών R -προτύπων, και

$$f^*: \text{Hom}_R(B, M^+) \longrightarrow \text{Hom}_R(A, M^+),$$

ο επαγόμενος ομομορφισμός αβελιανών ομάδων. Επειδή το M είναι ένα επίπεδο αριστερό R -πρότυπο εφαρμόζοντας τον συναρτητή $-\otimes_R M$ στην ακριβή ακολουθία $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$, προκύπτει η ακριβής ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$0 \longrightarrow A \otimes_R M \xrightarrow{f \otimes \text{Id}_M} B \otimes_R M \longrightarrow 0 \quad (3.10)$$

Επιπλέον, αφού το \mathbb{Q}/\mathbb{Z} είναι ένα ενέσιμο αριστερό \mathbb{Z} -πρότυπο, εφαρμόζοντας τον συναρτητή $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ στην (3.10) επάγεται η ακριβής ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(B \otimes_R M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{(f \otimes \text{Id}_M)^*} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A \otimes_R M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την Πρόταση (2.2.30), παίρνουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(B \otimes_R M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow[\cong]{\eta_{B,M}} & \text{Hom}_R(B, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \\ (f \otimes \text{Id}_M)^* \downarrow & & \downarrow f^* \\ \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A \otimes_R M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow[\cong]{\eta_{A,M}} & \text{Hom}_R(A, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \end{array} \quad (3.11)$$

όπου $\eta_{B,M}$ και $\eta_{A,M}$ είναι ισομορφισμοί. Έτσι τελικά, έχουμε ότι ο ομομορφισμός αβελιανών ομάδων $f^* = \eta_{A,M} \circ (f \otimes \text{Id}_M)^* \circ \eta_{B,M}^{-1}$ είναι επιμορφισμός, και άρα, ότι το M^+ είναι ένα ενέσιμο δεξιό R -πρότυπο.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι το M^+ είναι ένα ενέσιμο δεξιό R -πρότυπο και έστω $f: A \longrightarrow B$ ένας μονομορφισμός δεξιών R -προτύπων. Τότε ο επαγόμενος ομομορφισμός αβελιανών ομάδων $f^*: \text{Hom}_R(B, M^+) \longrightarrow \text{Hom}_R(A, M^+)$, είναι επιμορφισμός. Συνεπώς, από το μεταθετικό διάγραμμα (3.11), έπεται ότι ο ομομορφισμός αβελιανών ομάδων $(f \otimes \text{Id}_M)^* = \eta_{A,M}^{-1} \circ f^* \circ \eta_{B,M}$ είναι επίσης επιμορφισμός. Χρησιμοποιώντας λοιπόν το Λήμμα (3.2.45), παίρνουμε ότι ο ομομορφισμός $f \otimes \text{Id}_M$ είναι μονομορφισμός, και κατ' επέκταση, ότι το M είναι ένα επίπεδο αριστερό R -πρότυπο. ■

Πόρισμα 3.2.47. Για κάθε δακτύλιο R , υπάρχει ένας ενέσιμος συγγενήτορας στην κατηγορία $R\text{-Mod}$ των αριστερών R -προτύπων.

Απόδειξη. Αν ο δακτύλιος R ιδωθεί ως δεξιό R -πρότυπο, τότε ο δακτύλιος R είναι επίπεδο δεξιό R -πρότυπο. Συνεπώς, το πρότυπο χαρακτήρων R^+ του R είναι ένα ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο. Για να αποδείξουμε ότι το R^+ είναι ένας ενέσιμος συγγενήτορας στην κατηγορία $R\text{-Mod}$, αρκεί να δείξουμε ότι $\text{Hom}_R(M, R^+) \neq 0$ για κάθε αριστερό R -πρότυπο M , $M \neq 0$. Χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση (2.2.31), καθώς και την Πρόταση (1.2.34), παίρνουμε ότι

$$\text{Hom}_R(M, R^+) \cong (R \otimes_R M)^+ \cong M^+,$$

για κάθε αριστερό R -πρότυπο M . Η Παρατήρηση (3.2.44), μας δίνει ότι για κάθε μη μηδενικό αριστερό R -πρότυπο M , το πρότυπο χαρακτήρων M^+ είναι επίσης μη μηδενικό. Συνδυάζοντας λοιπόν τα προηγούμενα, έχουμε ότι $\text{Hom}_R(M, R^+) \neq 0$ για κάθε μη μηδενικό αριστερό R -πρότυπο M . Άρα, το R^+ είναι ένας ενέσιμος συγγενήτορας στην κατηγορία $R\text{-Mod}$. ■

Θεώρημα 3.2.48. Έστω R ένας αριστερός δακτύλιος της Noether. Τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες για ένα (R, S) -διπρότυπο E .

1. Το E είναι ένα ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο.
2. Το $\text{Hom}_S(E, E')$ είναι ένα επίπεδο δεξιό R -πρότυπο για κάθε ενέσιμο δεξιό S -πρότυπο E' .
3. Το $\text{Hom}_S(E, E')$ είναι ένα επίπεδο δεξιό R -πρότυπο για κάθε ενέσιμο συγγενήτορα E' για τα δεξιά S -πρότυπα.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [27, Theorem 3.2.16]. ■

Ως προφανή συνέπεια του Θεωρήματος (3.2.48), παίρνουμε ότι:

Πόρισμα 3.2.49. Έστω R ένας αριστερός δακτύλιος της Noether. Τότε ένα αριστερό R -πρότυπο E είναι ενέσιμο, αν και μόνο αν, το πρότυπο χαρακτήρων E^+ είναι επίπεδο δεξιό R -πρότυπο.

Θεώρημα 3.2.50. (Lazard-Gonon) Για κάθε δακτύλιο R , ένα αριστερό R -πρότυπο M είναι επίπεδο, αν και μόνο αν, είναι ένα ευθύ όριο από πεπερασμένα παραγόμενα ελεύθερα (προβολικά) αριστερά R -πρότυπα.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [52, Theorem 5.40]. ■

3.2.4 Ενέσιμες, Προβολικές Και Επίπεδες Αναλύσεις

Ολοκληρώνουμε την παρούσα ενότητα, μελετώντας ενέσιμες, προβολικές και επίπεδες αναλύσεις προτύπων.

Ορισμός 3.2.51. Ένα θετικό σύμπλοκο (positive chain complex) είναι ένα σύμπλοκο \mathbf{M}_\bullet της μορφής:

$$\mathbf{M}_\bullet : \quad \cdots \longrightarrow M_n \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

Το σύμπλοκο

$$\mathbf{M}_A : \quad \cdots \longrightarrow M_n \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_0 \longrightarrow 0$$

όπου το A έχει αφαιρεθεί από το \mathbf{M}_\bullet , καλείται το **deleted σύμπλοκο** του συμπλόκου \mathbf{M}_\bullet . Ομοίως, ένα **θετικό συν-αλυσιδωτό σύμπλοκο (positive cochain complex)** είναι ένα συν-αλυσιδωτό σύμπλοκο \mathbf{M}_\bullet της μορφής:

$$\mathbf{M}_\bullet : \quad 0 \longrightarrow A \longrightarrow M^0 \longrightarrow M^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M^{n-1} \longrightarrow M^n \longrightarrow \cdots .$$

Το συν-αλυσιδωτό σύμπλοκο

$$\mathbf{M}^A : \quad 0 \longrightarrow M^0 \longrightarrow M^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M^{n-1} \longrightarrow M^n \longrightarrow \cdots$$

όπου το A έχει αφαιρεθεί από το \mathbf{M}_\bullet , καλείται το **deleted σύμπλοκο** του συν-αλυσιδωτού συμπλόκου \mathbf{M}_\bullet .

Ορισμός 3.2.52. Μια **προβολική ανάλυση (projective resolution)** ενός αριστερού R -προτύπου A , είναι ένα ακριβές θετικό σύμπλοκο

$$\mathbf{P}_\bullet : \quad \cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow 0,$$

όπου κάθε P_n είναι προβολικό για $n = 0, 1, 2, \dots$. Αν \mathbf{P}_\bullet είναι μία προβολική ανάλυση ενός αριστερού R -προτύπου A , τότε η **deleted προβολική ανάλυση (deleted projective resolution)** του A είναι το **deleted** θετικό σύμπλοκο

$$\mathbf{P}_A : \quad \cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow 0.$$

Διϊκά, μια **ενέσιμη ανάλυση (injective resolution)** ενός αριστερού R -προτύπου A , είναι ένα ακριβές θετικό συν-αλυσιδωτό σύμπλοκο

$$\mathbf{E}_\bullet : \quad 0 \longrightarrow A \longrightarrow E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} \cdots \longrightarrow E^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} E^n \longrightarrow \cdots ,$$

όπου κάθε E^n είναι ενέσιμο για $n = 0, 1, 2, \dots$. Αν \mathbf{E}_\bullet είναι μία ενέσιμη ανάλυση ενός αριστερού R -προτύπου A , τότε η **deleted ενέσιμη ανάλυση (deleted injective resolution)** του A είναι το deleted θετικό συν-αλυσιδωτό σύμπλοκο

$$\mathbf{E}^A : 0 \longrightarrow E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} \dots \longrightarrow E^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} E^n \longrightarrow \dots$$

Τέλος, μια **επίπεδη ανάλυση (flat resolution)** ενός αριστερού R -προτύπου A , είναι ένα ακριβές θετικό σύμπλοκο

$$\mathbf{F}_\bullet : \dots \longrightarrow F_n \xrightarrow{d'_n} F_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{d'_1} F_0 \xrightarrow{d'_0} A \longrightarrow 0,$$

όπου κάθε F_n είναι επίπεδο για $n = 0, 1, 2, \dots$. Αν \mathbf{F}_\bullet είναι μία επίπεδη ανάλυση ενός αριστερού R -προτύπου A , τότε η **deleted επίπεδη ανάλυση (deleted flat resolution)** του A είναι το deleted θετικό σύμπλοκο

$$\mathbf{F}_A : \dots \longrightarrow F_n \xrightarrow{d'_n} F_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{d'_1} F_0 \longrightarrow 0.$$

Πρόταση 3.2.53. Κάθε αριστερό R -πρότυπο A έχει τουλάχιστον μία προβολική, και μία ενέσιμη ανάλυση.

Απόδειξη. Έστω A ένα αριστερό R -πρότυπο. Τότε υπάρχει μια ελεύθερη ανάλυση του A ,

$$\dots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0. \quad (3.12)$$

Επειδή κάθε ελεύθερο πρότυπο είναι προβολικό, έπεται ότι κάθε F_i για $i \geq 0$, είναι ένα προβολικό αριστερό R -πρότυπο. Συνεπώς, η ακριβής ακολουθία (3.12) είναι μια προβολική ανάλυση του A .

Θα κατασκευάσουμε τώρα μια ενέσιμη ανάλυση του A χρησιμοποιώντας επανειλημμένα το αποτέλεσμα ότι κάθε πρότυπο εμφυτεύεται σε ένα ενέσιμο πρότυπο. Για το δοθέν αριστερό R -πρότυπο A , υπάρχει ένα ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο E^0 , και ένας μονομορφισμός αριστερών R -προτύπων $i: A \longrightarrow E^0$. Αν C^0 είναι ο συνπυρήνας του i , και

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E^0 \xrightarrow{\pi^0} C^0 \longrightarrow 0,$$

είναι η επαγόμενη σύντομη ακριβής ακολουθία, τότε υπάρχει ένα ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο E^1 , και ένας μονομορφισμός αριστερών R -προτύπων $i^1: C^0 \longrightarrow E^1$. Θεωρώντας τη σύντομη ακριβή ακολουθία αριστερών R -προτύπων

$$0 \longrightarrow C^0 \xrightarrow{i^1} E^1 \xrightarrow{\pi^1} C^2 \longrightarrow 0,$$

όπου C^2 είναι ο συνπυρήνας του i^1 , και ακολουθώντας μια ανάλογη πορεία με προηγουμένως, παίρνουμε σύντομες ακριβείς ακολουθίες αριστερών R -προτύπων

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow A \xrightarrow{i} E^0 \xrightarrow{\pi^0} C^0 \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow C^0 \xrightarrow{i^1} E^1 \xrightarrow{\pi^1} C^2 \longrightarrow 0 \\ &\vdots \\ 0 &\longrightarrow C^{n-1} \xrightarrow{i^n} E^n \xrightarrow{\pi^n} C^n \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow C^n \xrightarrow{i^{n+1}} E^{n+1} \xrightarrow{\pi^{n+1}} C^{n+1} \longrightarrow 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Συγκολλούμε τώρα τις προηγούμενες σύντομες ακριβείς ακολουθίες, όπως φαίνεται στο ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & E^0 & \xrightarrow{d^0} & E^1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & E^n & \xrightarrow{d^n} & E^{n+1} & \longrightarrow & \dots \\
 & & & & \downarrow \pi_0 & & \nearrow i_1 & & & & \downarrow \pi_n & & \nearrow i_{n+1} & & \\
 & & & & C^0 & & & & & & C^n & & & & \\
 & & & & \downarrow & & & & & & \downarrow & & & & \\
 & & & & 0 & & & & & & 0 & & & & \\
 & & & & \nearrow & & & & & & \nearrow & & & & \\
 & & & & 0 & & & & & & 0 & & & &
 \end{array}$$

Θέτοντας $d^n = i^{n+1} \circ \pi^n$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$. Τότε $\text{Ker } d^{n+1} = C^n = \text{Im } d^n$ για κάθε $n \geq 0$, και $\text{Ker } d^0 = \text{Im } i$. Άρα, η ακολουθία αριστερών R -προτύπων

$$\mathbf{E}_\bullet : \quad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} \dots \longrightarrow E^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} E^n \longrightarrow \dots$$

είναι ακριβής, όπου κάθε E^i για $i \geq 0$ είναι ενέσιμο. Έτσι τελικά, έχουμε ότι η ακριβής ακολουθία \mathbf{E}_\bullet είναι μία ενέσιμη ανάλυση του A . ■

Πόρισμα 3.2.54. Κάθε αριστερό R -πρότυπο A έχει τουλάχιστον μία επίπεδη ανάλυση.

Απόδειξη. Επειδή κάθε προβολικό πρότυπο είναι ένα επίπεδο πρότυπο, έπεται ότι κάθε προβολική ανάλυση ενός προτύπου A είναι επίσης μια επίπεδη ανάλυση του A . Έτσι, χρησιμοποιώντας την Πρόταση (3.2.53), παίρνουμε ότι κάθε αριστερό R -πρότυπο A έχει τουλάχιστον μία επίπεδη ανάλυση. ■

Ας περάσουμε σε κάποια παραδείγματα.

Παράδειγμα 3.2.55. 1. Η ακριβής ακολουθία

$$\dots \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{d_n} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{d_{n-1}} \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{d_0} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0,$$

όπου $d_n([a]) = [2a]$ για κάθε $n \geq 1$ και $d_0([a]) = [a]$, είναι μία προβολική ανάλυση του \mathbb{Z}_2 ως \mathbb{Z}_4 -πρότυπο.

2. Η ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{d^{-1}} \mathbb{Q} \xrightarrow{d^0} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0, \tag{3.13}$$

όπου d^{-1} είναι η κανονική έγκλειση και d^0 η κανονική προβολή, είναι μία ενέσιμη ανάλυση του \mathbb{Z} ως \mathbb{Z} -πρότυπο. Επιπλέον, η ακριβής ακολουθία (3.13), μπορεί να θεωρηθεί ως μία επίπεδη ανάλυση του \mathbb{Q}/\mathbb{Z} ως \mathbb{Z} -πρότυπο, αφού τα \mathbb{Q} και \mathbb{Z} είναι επίπεδα \mathbb{Z} -πρότυπα.

Επισημάναμε νωρίτερα ότι κάθε προβολική ανάλυση είναι μια επίπεδη ανάλυση. Ολοκληρώνουμε την αναφορά μας σε επίπεδες αναλύσεις, τονίζοντας ότι μια επίπεδη ανάλυση δεν είναι απαραίτητα μια προβολική ανάλυση. Για παράδειγμα, η ακολουθία (3.13) του Παραδείγματος (3.2.55), είναι μία επίπεδη ανάλυση του \mathbb{Q}/\mathbb{Z} ως \mathbb{Z} -πρότυπο, αλλά όχι μία προβολική ανάλυση του \mathbb{Q}/\mathbb{Z} ως \mathbb{Z} -πρότυπο, διότι το Παράδειγμα (3.2.39), μας δίνει ότι το \mathbb{Q} ως \mathbb{Z} -πρότυπο δεν είναι προβολικό.

Επικεντρωνόμαστε τώρα σε προβολικές και ενέσιμες αναλύσεις. Αποδείξαμε προηγουμένως ότι κάθε πρότυπο έχει μία προβολική και ενέσιμη ανάλυση. Στην πραγματικότητα, ένα πρότυπο μπορεί να έχει περισσότερες από μία προβολικές ή ενέσιμες αναλύσεις. Στόχος μας στην συνέχεια, είναι να αποδείξουμε ότι κάθε δύο προβολικές (αντίστοιχα ενέσιμες) αναλύσεις ενός προτύπου έχουν τον ίδιο ομοτοπικό τύπο.

Θεώρημα 3.2.56. (Θεώρημα Σύγκρισης) Έστω

$$\mathbf{P}_\bullet : \quad \cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow 0$$

ένα σύμπλοκο στην $R\text{-Mod}$, όπου κάθε P_n για $n \geq 0$ είναι προβολικό, και έστω ότι το σύμπλοκο στην $R\text{-Mod}$

$$\mathbf{Q}_\bullet : \quad \cdots \longrightarrow Q_n \xrightarrow{k_n} Q_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_1 \xrightarrow{k_1} Q_0 \xrightarrow{k_0} B \longrightarrow 0,$$

είναι ακριβές. Τότε για κάθε ομομορφισμό αριστερών R -προτύπων $f: A \longrightarrow B$, ο f επεκτείνεται σε έναν μορφισμό συμπλόκων $\mathbf{f}_\bullet: \mathbf{P}_A \longrightarrow \mathbf{Q}_B$ έτσι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_n & \xrightarrow{d_n} & P_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} & \cdots & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{d_0} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & & & \downarrow f_0 & & \downarrow f & & \\ \cdots & \longrightarrow & Q_n & \xrightarrow{k_n} & Q_{n-1} & \xrightarrow{k_{n-1}} & \cdots & \xrightarrow{k_1} & Q_0 & \xrightarrow{k_0} & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

να είναι μεταθετικό. Επιπλέον, αν ο $f: A \longrightarrow B$ επεκτείνεται και σε έναν άλλον μορφισμό συμπλόκων $\mathbf{f}^*_\bullet: \mathbf{P}_A \longrightarrow \mathbf{Q}_B$ τότε οι μορφισμοί $\mathbf{f}_\bullet, \mathbf{f}^*_\bullet$ είναι ομοιοτικοί, δηλαδή $\mathbf{f}_\bullet \cong \mathbf{f}^*_\bullet$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε την ύπαρξη των f_n με επαγωγή στο $n \geq 0$. Για $n = 0$ θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} & P_0 & \\ f_0 \swarrow & \downarrow f \circ d_0 & \\ Q_0 & \xrightarrow{k_0} & B \longrightarrow 0 \end{array}$$

Επειδή k_0 είναι επιμορφισμός και το P_0 είναι προβολικό, υπάρχει ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων $f_0: P_0 \longrightarrow Q_0$ με $k_0 \circ f_0 = f \circ d_0$. Υποθέτουμε τώρα ότι υπάρχουν ομομορφισμοί αριστερών R -προτύπων f_0, f_1, \dots, f_n έτσι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & P_n & \xrightarrow{d_n} & P_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} & \cdots & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{d_0} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & & & \downarrow f_0 & & \downarrow f & & \\ \cdots & \longrightarrow & Q_{n+1} & \xrightarrow{k_{n+1}} & Q_n & \xrightarrow{k_n} & Q_{n-1} & \xrightarrow{k_{n-1}} & \cdots & \xrightarrow{k_1} & Q_0 & \xrightarrow{k_0} & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

να είναι μεταθετικό. Επειδή $k_n \circ f_n \circ d_{n+1} = f_{n-1} \circ d_n \circ d_{n+1} = 0$, έπεται ότι $\text{Im}(f_n \circ d_{n+1}) \subseteq \text{Ker } k_n$. Όμως, $\text{Im } k_{n+1} = \text{Ker } k_n$, διότι το \mathbf{Q}_\bullet είναι ακριβές σύμπλοκο. Άρα, $\text{Im}(f_n \circ d_{n+1}) \subseteq \text{Im } k_{n+1}$. Έτσι, αφού το P_{n+1} είναι προβολικό αριστερό R -πρότυπο, υπάρχει ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων $f_{n+1}: P_{n+1} \longrightarrow Q_{n+1}$ έτσι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} & P_{n+1} & \\ f_{n+1} \swarrow & \downarrow f_n \circ d_{n+1} & \\ Q_{n+1} & \xrightarrow{k_{n+1}} & \text{Im } k_{n+1} \longrightarrow 0 \end{array}$$

να είναι μεταθετικό. Για την απόδειξη της μοναδικότητας της $\mathbf{f}_\bullet: \mathbf{P}_A \longrightarrow \mathbf{Q}_B$ μέσω ομοτιπίας βλέπε [52, Theorem 6.16]. ■

Χρησιμοποιούμε τώρα το Θεώρημα (3.2.56), για να αποδείξουμε ότι:

Πρόταση 3.2.57. Αν $\mathbf{P}_\bullet, \mathbf{Q}_\bullet$ είναι προβολικές αναλύσεις ενός αριστερού R -προτύπου A , τότε τα σύμπλοκα $\mathbf{P}_A, \mathbf{Q}_A$ έχουν τον ίδιο ομοιοτικό τύπο.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο ταυτοτικός ομομορφισμός $\text{Id}_A: A \rightarrow A$ επεκτείνεται στους μορφοισμούς συμπλόκων $\mathbf{f}_\bullet: \mathbf{P}_A \rightarrow \mathbf{Q}_A$ και $\mathbf{g}_\bullet: \mathbf{Q}_A \rightarrow \mathbf{P}_A$. Τότε θεωρώντας τους ταυτοτικούς μορφοισμούς συμπλόκων στο \mathbf{P}_A και στο \mathbf{Q}_A ,

$$\text{Id}_{\mathbf{P}_A}: \mathbf{P}_A \rightarrow \mathbf{P}_A \quad \& \quad \text{Id}_{\mathbf{Q}_A}: \mathbf{Q}_A \rightarrow \mathbf{Q}_A,$$

συμπεραίνουμε χρησιμοποιώντας το Θεώρημα (3.2.56), ότι $\mathbf{g}_\bullet \circ \mathbf{f}_\bullet \cong \text{Id}_{\mathbf{P}_A}$ και $\mathbf{f}_\bullet \circ \mathbf{g}_\bullet \cong \text{Id}_{\mathbf{Q}_A}$. Άρα, τα σύμπλοκα \mathbf{P}_A και \mathbf{Q}_A έχουν τον ίδιο ομοτοπικό τύπο. ■

Παρατήρηση 3.2.58. Δυσικά ισχύει το θεώρημα σύγκρισης και για ενέσιμες αναλύσεις. Έτσι, έστω

$$\mathbf{E}_\bullet = 0 \rightarrow A \xrightarrow{k^{-1}} E^0 \xrightarrow{k^0} E^1 \xrightarrow{k^1} \dots \rightarrow E^{n-1} \xrightarrow{k^{n-1}} E^n \xrightarrow{k^n} \dots$$

ένα συν-αλυσιδωτό σύμπλοκο στην $R\text{-Mod}$, όπου κάθε E^n για $n \geq 0$ είναι ενέσιμο, και έστω ότι το συν-αλυσιδωτό σύμπλοκο στην $R\text{-Mod}$

$$\mathbf{D}_\bullet = 0 \rightarrow B \xrightarrow{d^{-1}} N^0 \xrightarrow{d^0} N^1 \xrightarrow{d^1} \dots \rightarrow N^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} N^n \xrightarrow{d^n} \dots$$

είναι ακριβές. Τότε για κάθε ομομορφισμό αριστερών R -προτύπων $f: B \rightarrow A$, ο f επεκτείνεται σε έναν μορφοισμό συν-αλυσιδωτών συμπλόκων $\mathbf{f}_\bullet: \mathbf{D}^B \rightarrow \mathbf{E}^A$ έτσι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{d^{-1}} & N^0 & \xrightarrow{d^0} & \dots & \xrightarrow{d^{n-1}} & N^n & \xrightarrow{d^n} & N^{n+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow f & & \downarrow f^0 & & & & \downarrow f^n & & \downarrow f^{n+1} & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{k^{-1}} & E^0 & \xrightarrow{k^0} & \dots & \xrightarrow{k^1} & E^n & \xrightarrow{k^n} & E^{n+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

να είναι μεταθετικό. Επιπλέον, αν ο $f: B \rightarrow A$ επεκτείνεται και σε έναν άλλο μορφοισμό συν-αλυσιδωτών συμπλόκων $\mathbf{f}^*_\bullet: \mathbf{D}^B \rightarrow \mathbf{E}^A$ τότε οι μορφοισμοί $\mathbf{f}_\bullet, \mathbf{f}^*_\bullet$ είναι ομοτοπικοί, δηλαδή $\mathbf{f}_\bullet \cong \mathbf{f}^*_\bullet$.

Έτσι, αν $\mathbf{E}_\bullet, \mathbf{D}_\bullet$ είναι δύο ενέσιμες αναλύσεις ενός αριστερού R -πρότυπου A , τότε τα συν-αλυσιδωτά σύμπλοκα $\mathbf{E}^A, \mathbf{D}^A$ έχουν τον ίδιο ομοτοπικό τύπο.

3.3 Οι Συναρτητές Ext Και Tor

Στην προηγούμενη ενότητα, αποδείξαμε ότι για κάθε πρότυπο υπάρχει μια προβολική και μια ενέσιμη ανάλυση. Χρησιμοποιώντας τώρα το αποτέλεσμα αυτό, για ένα δοθέν προσθετικό συναρτητή μεταξύ κατηγοριών προτύπων, κατασκευάζουμε παραγόμενους συναρτητές οι οποίοι μας πληροφορούν για το πόσο απέχει ο υποκείμενος συναρτητής ώστε να είναι ακριβής. Ειδικότερα, στην παρούσα ενότητα μελετάμε εκείνους τους δεξιά και αριστερά παραγόμενους συναρτητές, που κατασκευάζονται από τους προσθετικούς συναρτητές Hom και \otimes .

Ξεκινάμε με τους αριστερά παραγόμενους συναρτητές που κατασκευάζονται από έναν προσθετικό συναλλοίωτο συναρτητή $F: R\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$.

Ο Συναρτητής $L_n F: R\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$:

Έστω M ένα αριστερό R -πρότυπο και

$$\mathbf{P}_\bullet: \dots \rightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \rightarrow 0,$$

μια προβολική ανάλυση του M . Εφαρμόζοντας τον προσθετικό συναρτητή F στην deleted προβολική ανάλυση του M ,

$$\mathbf{P}_M : \quad \cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow 0,$$

παίρνουμε το σύμπλοκο αβελιανών ομάδων

$$F(\mathbf{P}_M) : \quad \cdots \longrightarrow F(P_n) \xrightarrow{F(d_n)} F(P_{n-1}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow F(P_1) \xrightarrow{F(d_1)} F(P_0) \longrightarrow 0.$$

Σχηματίζουμε τις ομολογικές ομάδες $H_n(F(\mathbf{P}_M))$, και ορίζουμε

$$L_n F : R\text{-Mod} \longrightarrow \text{Ab}$$

$$M \longmapsto L_n F(M) := H_n(F(\mathbf{P}_M)).$$

Έστω N ένα αριστερό R -πρότυπο και \mathbf{Q}_\bullet μία προβολική ανάλυση του N . Αν $f : M \longrightarrow N$ είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων, τότε από το Θεώρημα σύγκρισης, υπάρχει μορφισμός συμπλόκων $\mathbf{f}_\bullet : \mathbf{P}_M \longrightarrow \mathbf{Q}_N$, δηλαδή, υπάρχει ένα μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_n & \xrightarrow{d_n} & P_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} & \cdots & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{d_0} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & & & \downarrow f_0 & & \downarrow f & & \\ \cdots & \longrightarrow & Q_n & \xrightarrow{k_n} & Q_{n-1} & \xrightarrow{k_{n-1}} & \cdots & \xrightarrow{k_1} & Q_0 & \xrightarrow{k_0} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Διαγράφουμε τα M, N και εφαρμόζουμε τον συναρτητή F στο προηγούμενο μεταθετικό διάγραμμα. Τότε έχουμε το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & F(P_n) & \xrightarrow{F(d_n)} & F(P_{n-1}) & \xrightarrow{F(d_{n-1})} & \cdots & \xrightarrow{F(d_1)} & F(P_0) & \xrightarrow{F(d_0)} & 0 \\ & & \downarrow F(f_n) & & \downarrow F(f_{n-1}) & & & & \downarrow F(f_0) & & \\ \cdots & \longrightarrow & F(Q_n) & \xrightarrow{F(k_n)} & F(Q_{n-1}) & \xrightarrow{F(k_{n-1})} & \cdots & \xrightarrow{F(k_1)} & F(Q_0) & \xrightarrow{F(k_0)} & 0 \end{array}$$

όπου η πρώτη και η δεύτερη γραμμή είναι σύμπλοκα στην Ab . Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι ο $F(\mathbf{f}_\bullet) : F(\mathbf{P}_M) \longrightarrow F(\mathbf{P}_N)$ είναι ένας μορφισμός συμπλόκων στην Ab . Έτσι, ο μορφισμός συμπλόκων $F(\mathbf{f}_\bullet)$ επάγει έναν ομομορφισμό ομάδων

$$H_n(F(\mathbf{f}_\bullet)) : H_n(F(\mathbf{P}_M)) \longrightarrow H_n(F(\mathbf{P}_N)).$$

Θέτουμε λοιπόν,

$$L_n F(f) := H_n(F(\mathbf{f}_\bullet)).$$

Πρόταση 3.3.1. *Αν $F : R\text{-Mod} \longrightarrow \text{Ab}$ είναι ένας προσθετικός συναβληώσιμος συναρτητής, τότε ο*

$$L_n F : R\text{-Mod} \longrightarrow \text{Ab}$$

είναι ένας προσθετικός συναβληώσιμος συναρτητής για κάθε ακέραιο $n \geq 0$.

Απόδειξη. Χρειάζεται αρχικά να δείξουμε ότι ο $L_n F$ είναι καλά ορισμένος στους ομομορφισμούς, δηλαδή ότι ο ομομορφισμός ομάδων

$$H_n(F(\mathbf{f}_\bullet)) : H_n(F(\mathbf{P}_M)) \longrightarrow H_n(F(\mathbf{P}_N))$$

δεν εξαρτάται από την επιλογή του μορφισμού \mathbf{f}_\bullet που παράγεται από τον ομομορφισμό f . Έστω ότι ο f επεκτείνεται και σε έναν άλλον μορφισμό $\mathbf{g}_\bullet : \mathbf{P}_M \longrightarrow \mathbf{Q}_N$. Τότε από το Θεώρημα σύγκρισης έχουμε οι μορφισμοί $\mathbf{f}_\bullet, \mathbf{g}_\bullet$ είναι ομοτοπικοί, δηλαδή $\mathbf{f}_\bullet \cong \mathbf{g}_\bullet$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι

και οι μορφισμοί $F(\mathbf{f}_\bullet), F(\mathbf{g}_\bullet)$ είναι επίσης ομοτοπικοί, $F(\mathbf{f}_\bullet) \cong F(\mathbf{g}_\bullet)$ και έτσι, από την Πρόταση (3.1.12) έχουμε ότι $H_n(F(\mathbf{f}_\bullet)) \cong H_n(F(\mathbf{g}_\bullet))$. Ανάλογο επιχείρημα δείχνει ότι το πρότυπο $L_n F(f)(M)$ είναι καλά ορισμένο, $\forall n \geq 0$ και ανεξάρτητο της επιλογής της προβολικής ανάλυσης του M , δεξ και την παρακάτω Πρόταση. Χρησιμοποιώντας τώρα ότι οι F και H_n είναι προσθετικοί συναλλοίωτοι συναρτητές, έπεται ότι ο $L_n F$ είναι επίσης ένας προσθετικός συναλλοίωτος συναρτητής. ■

Ορισμός 3.3.2. Αν $F: R\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$ ένας προσθετικός συναλλοίωτος συναρτητής, τότε ο συναρτητής

$$L_n F: R\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$$

καλείται ο n -ιστός αριστερά παραγόμενος συναρτητής (left derived functor) του F .

Ο συναρτητής $L_n F$ δεν είναι μοναδικός, αφού η κατασκευή του εξαρτάται από τις προβολικές αναλύσεις που θα επιλεγθούν για τα πρότυπα. Αν επιλέξουμε διαφορετικές προβολικές αναλύσεις, τότε παίρνουμε έναν δεύτερο συναρτητή $\bar{L}_n F: R\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$ ο οποίος κατασκευάζεται ακριβώς όπως και ο $L_n F$. Γενικά, οι συναρτητές $L_n F$ και $\bar{L}_n F$ δεν είναι ίσοι. Ωστόσο, θα δείξουμε ευθύς αμέσως ότι αυτοί, είναι φυσικά ισόμορφοι.

Πρόταση 3.3.3. Έστω $F: R\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$ ένας προσθετικός συναλλοίωτος συναρτητής. Τότε οι συναρτητές $L_n F$ και $\bar{L}_n F$ είναι φυσικά ισόμορφοι.

Απόδειξη. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι αν $\mathbf{P}_\bullet, \mathbf{P}'_\bullet$ είναι προβολικές αναλύσεις ενός αριστερού R -προτύπου M , τότε για κάθε $n \geq 0$

$$H_n(F(\mathbf{P}_M)) \cong H_n(F(\mathbf{P}'_M)).$$

Έστω $\mathbf{P}_\bullet, \mathbf{P}'_\bullet$ δύο προβολικές αναλύσεις ενός αριστερού R -προτύπου M . Αν ο ταυτοτικός ομομορφισμός $\text{Id}_M: M \rightarrow M$ επεκτείνεται στους μορφισμούς συμπλόκων $\mathbf{f}_\bullet: \mathbf{P}_M \rightarrow \mathbf{P}'_M$ και $\mathbf{g}_\bullet: \mathbf{P}'_M \rightarrow \mathbf{P}_M$, τότε η Πρόταση (3.2.57) μας δίνει ότι $\mathbf{g}_\bullet \circ \mathbf{f}_\bullet \cong \text{Id}_{\mathbf{P}_M}$ και $\mathbf{f}_\bullet \circ \mathbf{g}_\bullet \cong \text{Id}_{\mathbf{P}'_M}$. Συνεπώς, έπεται ότι

$$F(\mathbf{g}_\bullet \circ \mathbf{f}_\bullet) \cong F(\text{Id}_{\mathbf{P}_M}) \quad \& \quad F(\mathbf{f}_\bullet \circ \mathbf{g}_\bullet) \cong F(\text{Id}_{\mathbf{P}'_M}).$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των συναρτητών H_n και F , παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} H_n(F(\mathbf{g}_\bullet))H_n(F(\mathbf{f}_\bullet)) &= H_n(F(\mathbf{g}_\bullet)F(\mathbf{f}_\bullet)) = H_n(F(\mathbf{g}_\bullet \circ \mathbf{f}_\bullet)) \\ &= H_n(F(\text{Id}_{\mathbf{P}_M})) = H_n(\text{Id}_{F(\mathbf{P}_M)}) \\ &= \text{Id}_{H_n(F(\mathbf{P}_M))} \end{aligned}$$

και ανάλογα, ότι

$$H_n(F(\mathbf{f}_\bullet))H_n(F(\mathbf{g}_\bullet)) = \text{Id}_{H_n(F(\mathbf{P}'_M))}.$$

Έτσι τελικά, έχουμε ότι

$$H_n(F(\mathbf{f}_\bullet)): H_n(F(\mathbf{P}_M)) \rightarrow H_n(F(\mathbf{P}'_M))$$

είναι ένας ισομορφισμός. Έστω $\eta_M = H_n(F(\mathbf{f}_\bullet))$. Τώρα δείχνουμε ότι οι ισομορφισμοί η_M ορίζουν έναν φυσικό ισομορφισμό συναρτητών. Έστω $\mathbf{Q}_N, \mathbf{Q}'_N$ δύο προβολικές αναλύσεις ενός αριστερού R -προτύπου N . Αν $f: M \rightarrow N$ είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων, τότε επάγεται το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} H_n(F(\mathbf{P}_M)) & \xrightarrow{\eta_M} & H_n(F(\mathbf{P}'_M)) \\ \downarrow H_n(F(\mathbf{h}_\bullet)) & & \downarrow H_n(F(\mathbf{k}_\bullet)) \\ H_n(F(\mathbf{Q}_N)) & \xrightarrow{\eta_N} & H_n(F(\mathbf{Q}'_N)) \end{array}$$

όπου $\mathbf{h}_\bullet: \mathbf{P}_M \rightarrow \mathbf{Q}_N$ και $\mathbf{k}_\bullet: \mathbf{P}'_M \rightarrow \mathbf{Q}'_N$ είναι οι μορφισμοί που παράγονται από τον f . Επομένως, έχουμε έναν φυσικό ισομορφισμό $\eta: L_n F \rightarrow \bar{L}_n F$, και άρα, οι $L_n F, \bar{L}_n F$ είναι φυσικά ισόμορφοι συναρτητές. ■

Παρατήρηση 3.3.4. Αν $F: R\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$ είναι ένας προσθετικός αντισυναλλοίωτος συναρτητής, τότε ο συναρτητής

$$L_n F: R\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$$

κατασκευάζεται από ενέσιμες αναλύσεις, και είναι ανεξάρτητος από τις ενέσιμες αναλύσεις που θα επιλεγθούν για τα πρότυπα.

Είμαστε σε θέση τώρα να κατασκευάσουμε τους n -ιστούς αριστερά παραγόμενους συναρτητές που παράγονται από τον συναρτητή \otimes σε κάθε μεταβλητή.

1. **Ο Συναρτητής $\text{Tor}_n^R(-, \mathbf{X})$:** Έστω X ένα αριστερό R -πρότυπο και

$$\mathbf{P}_\bullet: \cdots \rightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \rightarrow 0.$$

μία προβολική ανάλυση ενός δεξιού R -προτύπου M . Εφαρμόζουμε τον συναλλοίωτο συναρτητή $-\otimes_R X: \text{Mod-}R \rightarrow \text{Ab}$ στην deleted προβολική ανάλυση του M . Τότε παίρνουμε το σύμπλοκο αβελιανών ομάδων:

$$\mathbf{P}_M \otimes_R X: \cdots \rightarrow P_n \otimes_R X \xrightarrow{d_n \otimes \text{Id}_X} P_{n-1} \otimes_R X \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \otimes_R X \rightarrow 0.$$

Ορίζουμε,

$$\text{Tor}_n^R(-, X): \text{Mod-}R \rightarrow \text{Ab}$$

$$M \mapsto \text{Tor}_n^R(M, X) := H_n(\mathbf{P}_M \otimes_R X).$$

Έστω N ένα δεξιό R -πρότυπο και \mathbf{Q}_\bullet μία προβολική ανάλυση του N . Αν $f: M \rightarrow N$ είναι ένας ομομορφισμός δεξιών R -προτύπων, τότε από το θεώρημα σύγκρισης, υπάρχει μορφισμός συμπλόκων $\mathbf{f}_\bullet: \mathbf{P}_M \rightarrow \mathbf{Q}_N$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι και $\mathbf{f}_\bullet \otimes_R \text{Id}_X: \mathbf{P}_M \otimes_R X \rightarrow \mathbf{Q}_N \otimes_R X$ είναι επίσης μορφισμός συμπλόκων. Από αυτόν τον μορφισμό επάγεται ένας ομομορφισμός ομάδων

$$H_n(\mathbf{f}_\bullet \otimes \text{Id}_X): H_n(\mathbf{P}_M \otimes_R X) \rightarrow H_n(\mathbf{Q}_N \otimes_R X)$$

Ορίζουμε,

$$\text{Tor}_n^R(f, X) := H_n(\mathbf{f}_\bullet \otimes \text{Id}_X)$$

2. **Ο Συναρτητής $\text{tor}_n^R(M, -)$:**

Έστω M ένα δεξιό R -πρότυπο και θεωρούμε τον συναρτητή $M \otimes_R -: R\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$. Τότε αν X είναι ένα αριστερό R -πρότυπο, ορίζουμε

$$\text{tor}_n^R(M, -): R\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$$

$$X \mapsto \text{tor}_n^R(M, X) := H_n(M \otimes_R \mathbf{P}_X),$$

όπου \mathbf{P}_X είναι μία deleted προβολική ανάλυση του X . Έστω τώρα N ένα αριστερό R -πρότυπο και \mathbf{Q}_\bullet μία προβολική ανάλυση του N . Τότε αν $f: X \rightarrow N$ είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων, ορίζουμε

$$\text{tor}_n^R(M, f) := H_n(\text{Id}_M \otimes \mathbf{f}_\bullet)$$

όπου,

$$H_n(\text{Id}_M \otimes \mathbf{f}_\bullet): H_n(M \otimes_R \mathbf{P}_X) \rightarrow H_n(M \otimes_R \mathbf{Q}_N).$$

Παρατήρηση 3.3.5. Αποδεικνύεται ότι για όλα τα πρότυπα ${}_R X, M_R$

$$\text{tor}_n^R(M, -)(X) = \text{Tor}_n^R(-, X)(M).$$

Επομένως η κοινή τιμή $\text{Tor}_n^R(M, X)$ μπορεί να υπολογιστεί είτε χρησιμοποιώντας προβολικές αναλύσεις του M , είτε προβολικές αναλύσεις του X . Για την απόδειξη βλέπε [52, Theorem 6.32].

Λόγω της προηγούμενης παρατήρησης, από τώρα και στο εξής, γράφουμε Tor_*^R αντί για tor_*^R .

Πόρισμα 3.3.6. Η αβελιανή ομάδα $\text{Tor}_n^R(M, X)$ είναι ανεξάρτητη της επιλογής των προβολικών αναλύσεων των M και X .

Απόδειξη. Ισχύει διότι ο συναρτητής $\text{Tor}_n^R(-, X)$ είναι αριστερά παραγόμενος συναρτητής. ■

Πρόταση 3.3.7. Έστω F ένας προσθετικός συναλλοίωτος συναρτητής. Αν ο F είναι δεξιά ακριβής, τότε $L_0 F(M) \cong F(M)$ για κάθε αριστερό R -πρότυπο M , και αν P είναι ένα προβολικό αριστερό R -πρότυπο, τότε $L_n F(P) = 0$ για $n = 1, 2, 3, \dots$. Ειδικότερα, για κάθε δεξιό R -πρότυπο M και για κάθε αριστερό R -πρότυπο N , ισχύει ότι

$$\text{Tor}_0^R(M, N) \cong M \otimes_R N,$$

και αν P είναι ένα προβολικό δεξιό R -πρότυπο και Q είναι ένα προβολικό αριστερό R -πρότυπο, τότε

$$\text{Tor}_n^R(P, N) = 0 \quad \text{και} \quad \text{Tor}_n^R(M, Q) = 0, \quad \forall n \geq 1.$$

Απόδειξη. Αν \mathbf{P}_\bullet είναι μία προβολική ανάλυση του M , τότε η ακολουθία

$$P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0.$$

είναι προφανώς ακριβής. Επειδή ο συναρτητής F είναι δεξιά ακριβής, η επαγόμενη ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$F(P_1) \xrightarrow{F(d_1)} F(P_0) \xrightarrow{F(d_0)} F(M) \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής. Θεωρώντας την ακολουθία

$$F(P_1) \xrightarrow{F(d_1)} F(P_0) \longrightarrow 0$$

βλέπουμε ότι

$$L_0 F(M) = H_0(F_{\mathbf{P}_M}) = \text{Ker}(F(P_0) \longrightarrow 0) / \text{Im } F(d_1) = F(P_0) / \text{Ker } F(d_0) \cong F(M).$$

Αν P είναι ένα προβολικό αριστερό R -πρότυπο, τότε η ακριβής ακολουθία

$$\mathbf{P}_\bullet : \quad \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow P \xrightarrow{\text{Id}_P} P \longrightarrow 0,$$

είναι μία προβολική ανάλυση του P . Έτσι, επαγεται το σύμπλοκο

$$F(\mathbf{P}_P) := \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow F(P) \longrightarrow 0.$$

Είναι προφανές λοιπόν, ότι $L_n F(P) = 0$, για $n = 1, 2, 3, \dots$. Επιπλέον, έχουμε ότι

$$\text{Tor}_n^R(M, N) = M \otimes_R N, \quad \& \quad \text{Tor}_n^R(P, N) = 0 \quad \& \quad \text{Tor}_n^R(M, Q) = 0, \quad \forall n \geq 1,$$

διότι οι συναρτητές $-\otimes_R N, M \otimes_R -$ είναι δύο συναλλοίωτοι δεξιά ακριβείς προσθετικοί συναρτητές. ■

Λήμμα 3.3.8. (Horse Shoe Lemma) Θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα από αριστερά R -πρότυπα και ομομορφισμούς αριστερών R -προτύπων, όπου η γραμμή του είναι μια σύντομη ακριβής ακολουθία, και οι στήλες του είναι προβολικές αναλύσεις:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & P'_1 & & P''_1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & P'_0 & & P''_0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow \\
 & & 0 & & & & 0
 \end{array}$$

Τότε υπάρχει μια προβολική ανάλυση του A και μορφισμοί συμπλόκων, έτσι ώστε οι τρεις στήλες να δημιουργούν μια ακριβή ακολουθία συμπλόκων.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [57, Lemma 2.2.8]. ■

Παρατήρηση 3.3.9. Ισχύει και η δυϊκή εκδοχή του Λήμματος (3.3.8), όπου οι προβολικές αναλύσεις αντικαθίστανται με ενέσιμες αναλύσεις.

Χρησιμοποιούμε τώρα το Λήμμα (3.3.8), για να διατυπώσουμε το ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα:

Πρόταση 3.3.10. Αν $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ είναι μία σύντομη ακριβής ακολουθία δεξιών R -προτύπων, τότε επάγεται μία μακρά ακριβή ακολουθία για κάθε αριστερό R -πρότυπο B ,

$$\begin{aligned}
 \dots &\longrightarrow \operatorname{Tor}_2^R(A', B) \longrightarrow \operatorname{Tor}_2^R(A, B) \longrightarrow \operatorname{Tor}_2^R(A'', B) \longrightarrow \operatorname{Tor}_1^R(A', B) \longrightarrow \\
 &\longrightarrow \operatorname{Tor}_1^R(A, B) \longrightarrow \operatorname{Tor}_1^R(A'', B) \longrightarrow A' \otimes_R B \longrightarrow A \otimes_R B \longrightarrow A'' \otimes_R B \longrightarrow 0
 \end{aligned}$$

Μία ανάλογη μακρά ακριβή ακολουθία επάγεται και για τον συναρτητή $\operatorname{Tor}_n^R(B, -)$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [52, theorem 6.27, corollary 6.30]. ■

Ας περάσουμε τώρα στους δεξιά παραγόμενους συναρτητές οι οποίοι κατασκευάζονται από έναν προσθετικό συναλλοίωτο συναρτητή $F: R\text{-Mod} \longrightarrow \text{Ab}$.

Ο Συναρτητής $\mathbf{R}^n F: R\text{-Mod} \longrightarrow \text{Ab}$:

Έστω ένα αριστερό R -πρότυπο M και

$$\mathbf{E}_\bullet: \quad 0 \longrightarrow M \xrightarrow{k^{-1}} E^0 \xrightarrow{k^0} E^1 \xrightarrow{k^1} \dots \longrightarrow E^{n-1} \xrightarrow{k^{n-1}} E^n \xrightarrow{k^n} \dots$$

μία ενέσιμη ανάλυση του M . Εφαρμόζοντας τον προσθετικό συναλλοίωτο συναρτητή F στην deleted ενέσιμη ανάλυση του M ,

$$\mathbf{E}^M: \quad 0 \longrightarrow E^0 \xrightarrow{k^0} E^1 \xrightarrow{k^1} \dots \longrightarrow E^{n-1} \xrightarrow{k^{n-1}} E^n \xrightarrow{k^n} \dots,$$

επάγεται το συν-αλυσιδωτό σύμπλοκο αβελιανών ομάδων

$$F(\mathbf{E}^M) : 0 \longrightarrow F(E^0) \xrightarrow{F(k^0)} F(E^1) \xrightarrow{F(k^1)} \dots \longrightarrow F(E^{n-1}) \xrightarrow{F(k^{n-1})} F(E^n) \xrightarrow{F(k^n)} \dots$$

Σχηματίζουμε τις συν-ομολογικές ομάδες $H^n(F(\mathbf{E}^M))$, και ορίζουμε

$$R^n F : R\text{-Mod} \longrightarrow \text{Ab}$$

$$M \longmapsto R^n F(M) := H^n(F(\mathbf{E}^M)).$$

Έστω N ένα αριστερό R -πρότυπο και \mathbf{Q}_\bullet μία ενέσιμη ανάλυση του N . Αν $f : M \longrightarrow N$ είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων, τότε από το δυϊκό θεώρημα σύγκρισης, υπάρχει μορφισμός συν-αλυσιδωτών συμπλόκων $\mathbf{f}_\bullet : \mathbf{E}^M \longrightarrow \mathbf{Q}^N$, δηλαδή υπάρχει ένα μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{k^{-1}} & E^0 & \xrightarrow{k^0} & \dots & \xrightarrow{k^{n-1}} & E^n & \xrightarrow{k^n} & E^{n+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow f & & \downarrow f^0 & & & & \downarrow f^n & & \downarrow f^{n+1} & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{d^{-1}} & D^0 & \xrightarrow{d^0} & \dots & \xrightarrow{d^{n-1}} & D^n & \xrightarrow{d^n} & D^{n+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Διαγράφουμε τα M, N και εφαρμόζουμε τον συναρτητή F στο προηγούμενο μεταθετικό διάγραμμα. Τότε έχουμε το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & F(E^0) & \xrightarrow{F(k^0)} & \dots & \xrightarrow{F(k^{n-1})} & F(E^n) & \xrightarrow{F(k^n)} & F(E^{n+1}) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow F(f^0) & & & & \downarrow F(f^n) & & \downarrow F(f^{n+1}) & & \\ 0 & \longrightarrow & F(D^0) & \xrightarrow{F(d^0)} & \dots & \xrightarrow{F(d^{n-1})} & F(D^n) & \xrightarrow{F(d^n)} & F(D^{n+1}) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

όπου η πρώτη και η δεύτερη γραμμή είναι σύμπλοκα στην Ab . Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι ο $F(\mathbf{f}_\bullet) : F(\mathbf{E}^M) \longrightarrow F(\mathbf{Q}^N)$ είναι ένας μορφισμός συν-αλυσιδωτών συμπλόκων. Έτσι, ο μορφισμός $F(\mathbf{f}_\bullet)$ επάγει έναν ομομορφισμό ομάδων

$$H^n(F(\mathbf{f}_\bullet)) : H^n(F(\mathbf{E}^M)) \longrightarrow H^n(F(\mathbf{Q}^N)).$$

Ορίζουμε,

$$R^n F(f) := H^n(F(\mathbf{f}_\bullet)).$$

Πρόταση 3.3.11. Αν $F : R\text{-Mod} \longrightarrow \text{Ab}$ ένας προσθετικός συναλθλοίωτος συναρτητής, τότε

$$R^n F : R\text{-Mod} \longrightarrow \text{Ab}$$

είναι ένας προσθετικός συναλθλοίωτος συναρτητής για κάθε ακέραιο $n \geq 0$.

Απόδειξη. Παρόμοια με την απόδειξη της Πρότασης (3.3.1). ■

Ορισμός 3.3.12. Αν $F : R\text{-Mod} \longrightarrow \text{Ab}$ είναι ένας προσθετικός συναλθλοίωτος συναρτητής, τότε ο συναρτητής

$$R^n F : R\text{-Mod} \longrightarrow \text{Ab}$$

καλείται ο n -ιστός δεξιά παραγόμενος συναρτητής (**right derived functor**) του F .

Παρατήρηση 3.3.13. Όπως στους αριστερά παραγόμενους συναρτητές, έτσι και στους δεξιά παραγόμενους ο συναρτητής $R^n F$ είναι ανεξάρτητος της επιλογής των ενέσιμων αναλύσεων που εκάστοτε λαμβάνονται.

Παρατήρηση 3.3.14. Αν $F: R\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$ ένας προσθετικός αντισυναλλοίωτος συναρτητής, τότε ο συναρτητής

$$R^n F: R\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$$

κατασκευάζεται από προβολικές αναλύσεις και είναι ανεξάρτητος από την επιλογή των προβολικών αναλύσεων που λαμβάνονται για τα πρότυπα.

Είμαστε έτοιμοι τώρα να κατασκευάσουμε τους n -ιστούς δεξιά παραγόμενους συναρτητές, που παράγονται από τον συναρτητή Hom σε κάθε μεταβλητή.

1. **Ο Συναρτητής $\text{Ext}_R^n(\mathbf{X}, -)$:** Έστω X ένα αριστερό R -πρότυπο και

$$\mathbf{E}_\bullet: 0 \rightarrow M \xrightarrow{k^{-1}} E^0 \xrightarrow{k^0} E^1 \xrightarrow{k^1} \dots \rightarrow E^{n-1} \xrightarrow{k^{n-1}} E^n \xrightarrow{k^n} \dots$$

μία ενέσιμη ανάλυση ενός αριστερού R -προτύπου M . Εφαρμόζουμε τον συναλλοίωτο συναρτητή $\text{Hom}_R(X, -): R\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$ στην deleted ενέσιμη ανάλυση του M . Τότε παίρνουμε το συν-αλυσιδωτό σύμπλοκο αβελιανών ομάδων:

$$\text{Hom}_R(X, \mathbf{E}^M): 0 \rightarrow \text{Hom}_R(X, E^0) \xrightarrow{(k^0)^*} \dots \rightarrow \text{Hom}_R(X, E^n) \xrightarrow{(k^n)^*} \dots$$

Ορίζουμε,

$$\begin{aligned} \text{Ext}_R^n(X, -): R\text{-Mod} &\rightarrow \text{Ab} \\ M &\mapsto \text{Ext}_R^n(X, M) := H^n(\text{Hom}_R(X, \mathbf{E}^M)). \end{aligned}$$

Έστω N ένα αριστερό R -πρότυπο και \mathbf{D}_\bullet μία ενέσιμη ανάλυση του N . Αν $f: M \rightarrow N$ είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων, τότε από το δυϊκό θεώρημα σύγκρισης, υπάρχει μορφισμός συν-αλυσιδωτών συμπλόκων $\mathbf{f}_\bullet: \mathbf{E}^M \rightarrow \mathbf{D}^N$. Εύκολα βλέπουμε ότι ο

$$\text{Hom}_R(X, \mathbf{f}_\bullet): \text{Hom}_R(X, \mathbf{E}^M) \rightarrow \text{Hom}_R(X, \mathbf{D}^N)$$

είναι επίσης ένας μορφισμός συν-αλυσιδωτών συμπλόκων. Έτσι, επάγεται ένας ομομορφισμός ομάδων

$$H^n(\text{Hom}_R(X, \mathbf{f}_\bullet)): H^n(\text{Hom}_R(X, \mathbf{E}^M)) \rightarrow H^n(\text{Hom}_R(X, \mathbf{D}^N)).$$

Ορίζουμε,

$$\text{Ext}_R^n(X, f) := H^n(\text{Hom}_R(X, \mathbf{f}_\bullet)).$$

2. **Ο Συναρτητής $\text{ext}_R^n(-, M)$:** Έστω M ένα αριστερό R -πρότυπο και θεωρούμε τον αντισυναλλοίωτο συναρτητή $\text{Hom}_R(-, M): \text{Mod-}R \rightarrow \text{Ab}$. Αν

$$\mathbf{P}_\bullet: \dots \rightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} X \rightarrow 0,$$

είναι μία προβολική ανάλυση ενός αριστερού R -προτύπου X , τότε επάγεται το συν-αλυσιδωτό σύμπλοκο

$$\text{Hom}_R(\mathbf{P}_X, M): \dots \rightarrow \text{Hom}_R(P_n, M) \xrightarrow{(d_n)^*} \dots \rightarrow \text{Hom}_R(P_0, M) \rightarrow 0.$$

Ορίζουμε,

$$\begin{aligned} \text{ext}_R^n(-, M): \text{Mod-}R &\rightarrow \text{Ab} \\ X &\mapsto \text{ext}_R^n(X, M) := H^n(\text{Hom}_R(\mathbf{P}_X, M)). \end{aligned}$$

Έστω N ένα αριστερό R -πρότυπο και \mathbf{Q}_\bullet μία προβολική ανάλυση του N . Αν $f: X \rightarrow N$ είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων, τότε από το Θεώρημα σύγκρισης, υπάρχει μορφισμός συμπλόκων $\mathbf{f}_\bullet: \mathbf{P}_X \rightarrow \mathbf{Q}_N$. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι ο

$$\text{Hom}_R(\mathbf{f}_\bullet, M): \text{Hom}_R(\mathbf{P}_X, M) \rightarrow \text{Hom}_R(\mathbf{Q}_N, M),$$

είναι επίσης ένας μορφοισμός συν-αλυσιδωτών συμπλόκων. Από αυτόν τον μορφοισμό επάγεται ένας ομομορφοισμός ομάδων

$$H^n(\text{Hom}_R(\mathbf{f}_\bullet, M)) : H^n(\text{Hom}_R(\mathbf{P}_X, M)) \longrightarrow H^n(\text{Hom}_R(\mathbf{Q}_N, M))$$

Ορίζουμε,

$$\text{ext}_R^n(f, M) := H^n(\text{Hom}_R(\mathbf{f}_\bullet, M)).$$

Παρατήρηση 3.3.15. Αποδεικνύεται ότι για όλα τα πρότυπα X, M υπάρχει ένας φυσικός ισομορφοισμός

$$\text{Ext}_R^n(X, -)(M) \cong \text{ext}_R^n(-, M)(X).$$

Επομένως, η κοινή τιμή $\text{Ext}_R^n(X, M)$ μπορεί να υπολογιστεί είτε χρησιμοποιώντας προβολικές αναλύσεις του X , είτε ενέσιμες αναλύσεις του M . Για την απόδειξη βλέπε [52, Theorem 6.32].

Λόγω λοιπόν της προηγούμενης παρατήρησης, από τώρα και στο εξής, γράφουμε Ext_R^n αντί ext_R^n .

Πόρισμα 3.3.16. Η αβελιανή ομάδα $\text{Ext}_R^n(X, M)$ είναι ανεξάρτητη της επιλογής των προβολικών αναλύσεων του X και των ενέσιμων αναλύσεων του M .

Απόδειξη. Προκύπτει από το γεγονός ότι ο συναρτητής $\text{Ext}_R^n(X, -)$ είναι ο δεξιά παραγόμενος συναρτητής του συναρτητή $\text{Hom}_R(X, -)$. ■

Η δυϊκή εκδοχή της Πρότασης (3.3.7), είναι η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.3.17. 1. Έστω $F : R\text{-Mod} \longrightarrow \text{Ab}$ ένας προσθετικός συναβελιανός συναρτητής. Αν ο F είναι αριστερά ακριβής, τότε $R^0 F(M) \cong F(M)$ για κάθε αριστερό R -πρότυπο M , και αν E είναι ένα ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο, τότε $R^n F(E) = 0$ για $n = 1, 2, 3, \dots$. Ειδικότερα, για κάθε αριστερό R -πρότυπο M, N ισχύει ότι

$$\text{Ext}_R^0(M, N) \cong \text{Hom}_R(M, N),$$

και αν E είναι ένα ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο, τότε

$$\text{Ext}_R^n(M, E) = 0, \forall n \geq 1.$$

2. Έστω $F : R\text{-Mod} \longrightarrow \text{Ab}$ ένας προσθετικός αντισυναβελιανός συναρτητής. Αν ο F είναι αριστερά ακριβής, τότε $R^0 F(M) \cong F(M)$, για όλα τα αριστερά R -πρότυπα M , και αν P είναι ένα προβολικό αριστερό R -πρότυπο, τότε $R^n F(P) = 0$ για $n = 1, 2, 3, \dots$. Ειδικότερα, για όλα τα αριστερά R -πρότυπα M, N ισχύει ότι

$$\text{Ext}_R^0(M, N) = \text{Hom}_R(M, N),$$

και αν P είναι ένα προβολικό αριστερό R -πρότυπο, τότε

$$\text{Ext}_R^n(P, N) = 0, \forall n \geq 1.$$

Απόδειξη. Δυϊκά με την απόδειξη της Πρότασης (3.3.7). ■

Θεώρημα 3.3.18. Για οποιαδήποτε δύο αριστερά R -πρότυπα M, N τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

1. Κάθε ακριβής ακολουθία $0 \longrightarrow M \xrightarrow{a} X \xrightarrow{b} N \longrightarrow 0$ είναι διασπάσιμη.
2. $\text{Ext}_R^1(N, M) = 0$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [52, Proposition 7.24, Theorem 7.31]. ■

Ανάλογα με την Πρόταση (3.3.10), έχουμε ότι:

Πρόταση 3.3.19. Αν $0 \rightarrow B' \rightarrow B \rightarrow B'' \rightarrow 0$ είναι μία σύντομη ακριβής ακολουθία αριστερών R -προτύπων, τότε επάγεται μία μακρά ακριβή ακολουθία για κάθε αριστερό R -πρότυπο A ,

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(A, B') \rightarrow \text{Hom}_R(A, B) \rightarrow \text{Hom}_R(A, B'') \rightarrow \text{Ext}_R^1(A, B') \rightarrow \\ \rightarrow \text{Ext}_R^1(A, B) \rightarrow \text{Ext}_R^1(A, B'') \rightarrow \text{Ext}_R^2(A, B') \rightarrow \text{Ext}_R^2(A, B) \rightarrow \dots$$

Μια ανάλογη μακρά ακριβή ακολουθία έχουμε και για τον συναρτητή $\text{Ext}_n^R(-, B)$.

Συνεχίζουμε με τους ακόλουθους ισομορφισμούς.

Λήμμα 3.3.20. Έστω R ένας αριστερός δακτύλιος της Noether, M ένα πεπερασμένο παραγόμενο αριστερό R -πρότυπο, και $\varinjlim N_j$ το ευθύ όριο ενός ευθέως συστήματος από αριστερά R -πρότυπα. Τότε

$$\text{Ext}_R^i(M, \varinjlim N_j) \cong \varinjlim \text{Ext}_R^i(M, N_j),$$

για κάθε $i \geq 0$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [27, Lemma 3.1.16] ■

Θεώρημα 3.3.21. Έστω R και S δακτύλιοι. Αν ο R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether, A είναι πεπερασμένο παρασιτάσιμο αριστερό R -πρότυπο, B είναι ένα (R, S) -διπρότυπο, και C ένας ενέσιμος συγγενήτορας, τότε

$$\text{Tor}_i^R(\text{Hom}_S(B, C), A) \cong \text{Hom}_S(\text{Ext}_R^i(A, B), C),$$

για κάθε $i \geq 0$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [27, Theorem 3.2.13] ■

Ολοκληρώνουμε την παρούσα ενότητα, μελετώντας πως ο συναρτητής $\text{Ext}_R^i(-, -)$ συνδέεται με τα προβολικά και τα ενέσιμα πρότυπα.

Πρόταση 3.3.22. Για ένα αριστερό R -πρότυπο M τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Το M είναι προβολικό.
2. $\text{Ext}_R^i(M, N) = 0$ για κάθε $i \geq 1$ και για κάθε αριστερό R -πρότυπο N .
3. $\text{Ext}_R^1(M, N) = 0$ για κάθε αριστερό R -πρότυπο N .

Απόδειξη. Η συνεπαγωγή $1 \Rightarrow 2$ εξασφαλίζεται χρησιμοποιώντας την Πρόταση (3.3.17), ενώ η συνεπαγωγή $2 \Rightarrow 3$ είναι τετριμμένη. Απομένει λοιπόν να δείξουμε την συνεπαγωγή $3 \Rightarrow 1$.

($3 \Rightarrow 1$): Υποθέτουμε ότι $\text{Ext}_R^1(M, N) = 0$ για κάθε αριστερό R -πρότυπο N , και διαλέγουμε μια σύντομη ακριβή ακολουθία αριστερών R -προτύπων

$$\ell : 0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$$

όπου P είναι προβολικό. Τότε η υπόθεση, καθώς και το Θεώρημα (3.3.18), μας δίνουν ότι η ℓ είναι μια διασπασίμη σύντομη ακριβής ακολουθία. Έτσι τελικά, έχουμε ότι το αριστερό R -πρότυπο M είναι προβολικό, ως ευθύ προσθετός του προβολικού αριστερού R -προτύπου P . ■

Ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει και για ενέσιμα πρότυπα, χρησιμοποιώντας ωστόσο, τον αντισυμβαλλοίωτο συναρτητή Ext .

Τα επίπεδα πρότυπα συνδέονται με τον συναρτητή Tor ως εξής:

Πρόταση 3.3.23. Για ένα αριστερό R -πρότυπο M τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Το M είναι επίπεδο.
2. $\text{Tor}_i^R(N, M) = 0$ για κάθε $i \geq 1$ και για κάθε δεξιό R -πρότυπο N .
3. $\text{Tor}_1^R(N, M) = 0$ για κάθε δεξιό R -πρότυπο N .

Απόδειξη. Η συνεπαγωγή $1 \Rightarrow 2$ εξασφαλίζεται χρησιμοποιώντας την Πρόταση (3.3.7), ενώ η συνεπαγωγή $2 \Rightarrow 3$ είναι τετριμμένη. Για να αποδείξουμε ότι οι προηγούμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες, αρκεί να δείξουμε την συνεπαγωγή $3 \Rightarrow 1$.

($3 \Rightarrow 1$): Υποθέτουμε ότι ισχύει το 3), και έστω

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

μια σύντομη ακριβής ακολουθία δεξιών R -πρωτύπων. Τότε επάγεται μια μακρά ακριβής Tor-ακολουθία, μέρος της οποίας είναι η ακριβής ακολουθία αβελιανών ομάδων:

$$0 = \text{Tor}_1^R(A'', M) \longrightarrow A' \otimes_R M \longrightarrow A \otimes_R M \longrightarrow A'' \otimes_R M \longrightarrow 0$$

όπου η ισότητα $\text{Tor}_1^R(A'', M) = 0$ προέκυψε από την υπόθεση. Επομένως, έχουμε ότι το αριστερό R -πρότυπο M είναι επίπεδο, όπως επιθυμούσαμε. ■

3.4 Ενέσιμες, Προβολικές Και Επίπεδες Διαστάσεις

Στόχος της ενότητας αυτής, είναι ο ορισμός και η μελέτη ενέσιμων, προβολικών και επίπεδων διαστάσεων προτύπων. Όπως προαναφέραμε στην εισαγωγή του παρόντος κεφαλαίου, οι έννοιες αυτές «μετρούν» αντίστοιχα, το πόσο απέχει ένα πρότυπο ώστε να είναι ενέσιμο, προβολικό και επίπεδο.

Αρχικά, η προσοχή μας στρέφεται σε προβολικές και ενέσιμες διαστάσεις.

Το μήκος μίας προβολικής ανάλυσης

$$\cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

ενός αριστερού R -πρωτύπου M , είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε το P_n είναι μη-μηδενικό και κάθε $P_i = 0$ για κάθε $i > n$. Αν δεν υπάρχει τέτοιος φυσικός αριθμός n , τότε ορίζουμε το μήκος της να είναι άπειρο. Ανάλογα, το μήκος μίας ενέσιμης ανάλυσης

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow E^2 \longrightarrow \cdots$$

ενός αριστερού R -πρωτύπου M , είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε το E^n είναι μη-μηδενικό και κάθε $E^i = 0$ για κάθε $i > n$. Αν δεν υπάρχει τέτοιος φυσικός αριθμός n , τότε ορίζουμε το μήκος της να είναι άπειρο.

Ορισμός 3.4.1. Το μήκος τυχούσας προβολικής, αντίστοιχα ενέσιμης, ανάλυσης ενός αριστερού R -πρωτύπου M καλείται **προβολική διάσταση (projective dimension)**, αντίστοιχα **ενέσιμη διάσταση (injective dimension)**, του M , και συμβολίζεται με $\text{pd}_R M$, αντίστοιχα $\text{id}_R M$.

Παρατήρηση 3.4.2. Αν M είναι ένα αριστερό R -πρότυπο και n είναι κάποιος φυσικός αριθμός, τότε $\text{pd}_R M \leq n$, αντίστοιχα $\text{id}_R M \leq n$, αν και μόνο αν, υπάρχει προβολική, αντίστοιχα ενέσιμη, ανάλυση του M μήκους n .

Παράδειγμα 3.4.3. 1. $\text{pd}_R M = 0$, αν και μόνο αν, το M είναι προβολικό αριστερό R -πρότυπο.

2. $\text{id}_R M = 0$, αν και μόνο αν, το M είναι ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο.

3. Αν ο R είναι αριστερά κληρονομικός δακτύλιος, τότε

$$\text{pd}_R M \leq 1 \quad \& \quad \text{id}_R M \leq 1,$$

για κάθε αριστερό R -πρότυπο M , αφού υπεράνω του αριστερά κληρονομικού δακτυλίου R , κάθε υποπρότυπο ενός προβολικού αριστερού R -προτύπου είναι προβολικό, και κάθε πρότυπο πηλίκο ενός ενέσιμου αριστερού R -προτύπου είναι ενέσιμο.

Ορισμός 3.4.4. Αν M είναι ένα αριστερό R -πρότυπο, και

$$\mathbf{P} : \cdots P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0,$$

είναι μια προβολική ανάλυση του M , τότε $\Omega_n(M)$, όπου $\Omega_n(M) := \text{Ker } d_{n-1}$ για $n \geq 2$, και $\Omega_1(M) = \Omega(M) = \text{Ker } d_0$, καλείται η n -**ισοστή συζυγία** του M . Ανάλογα, αν M είναι ένα αριστερό R -πρότυπο, και

$$\mathbf{E} : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} E^n \longrightarrow \cdots$$

είναι μια ενέσιμη ανάλυση του M , τότε $\Sigma^n(M)$, όπου $\Sigma^n(M) := \text{Coker } d^{n-2}$ για $n \geq 2$, και $\Sigma^1(M) = \Sigma(M) = \text{Coker } i$, καλείται η n -**ισοστή συνσυζυγία** του M .

Ορισμός 3.4.5. Δύο αριστερά R -πρότυπα M και N , καλούνται **προβολικά ισοδύναμα, (projectively equivalent)**, αν υπάρχουν προβολικά αριστερά R -πρότυπα P και P' έτσι ώστε:

$$M \oplus P \cong N \oplus P'$$

Τα αριστερά R -πρότυπα καλούνται **ενέσιμα ισοδύναμα, (injectively equivalent)**, αν υπάρχουν ενέσιμα αριστερά R -πρότυπα E και E' έτσι ώστε:

$$M \oplus E \cong N \oplus E'.$$

Πρόταση 3.4.6. (Dimension Shifting) Θεωρούμε δύο προβολικές αναλύσεις ενός αριστερού R -προτύπου M

$$\mathbf{P} : \cdots P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

και

$$\mathbf{Q} : \cdots Q_n \xrightarrow{d'_n} Q_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_1 \xrightarrow{d'_1} Q_0 \xrightarrow{d'_0} M \longrightarrow 0.$$

Αν $\Omega_n(M)$ και $\Omega'_n(M)$ για $n \geq 1$, είναι οι n -ισοστές συζυγίες του M που προκύπτουν από τις προβολικές αναλύσεις \mathbf{P} και \mathbf{Q} αντίστοιχα, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Τα R -πρότυπα $\Omega_n(M)$ και $\Omega'_n(M)$ είναι προβολικά ισοδύναμα για κάθε $n \geq 1$.
2. $\text{Ext}_R^1(\Omega_n(M), N) \cong \text{Ext}_R^1(\Omega'_n(M), N)$ για κάθε αριστερό R -πρότυπο N .
3. $\text{Ext}_R^1(\Omega_n(M), N) \cong \text{Ext}_R^{n+1}(M, N)$ για κάθε αριστερό R -πρότυπο N , και για κάθε $n \geq 1$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [52, Proposition 8.5] ■

Παρατήρηση 3.4.7. Δυϊκά έχουμε ότι αν $\Sigma^n(M)$ και $\bar{\Sigma}^n(M)$ για $n \geq 1$, είναι οι n -ισοστές συνσυζυγίες ενός αριστερού R -προτύπου M που προκύπτουν από δύο επιλεγόμενες ενέσιμες αναλύσεις του M , τότε

1. Τα R -πρότυπα $\Sigma^n(M)$ και $\bar{\Sigma}^n(M)$ είναι ενέσιμα ισοδύναμα για κάθε $n \geq 1$.
2. $\text{Ext}_R^1(N, \Sigma^n(M)) \cong \text{Ext}_R^1(N, \bar{\Sigma}^n(M))$ για κάθε αριστερό R -πρότυπο N .
3. $\text{Ext}_R^1(N, \Sigma^n(M)) \cong \text{Ext}_R^{n+1}(N, M)$ για κάθε αριστερό R -πρότυπο N , και για κάθε $n \geq 1$.

Πρόταση 3.4.8. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για ένα αριστερό R -πρότυπο M .

1. $\text{pd}_R M \leq n$.
2. $\text{Ext}_R^k(M, N) = 0$ για κάθε αριστερό R -πρότυπο N , και για κάθε $k \geq n + 1$.
3. $\text{Ext}_R^{n+1}(M, N) = 0$ για κάθε αριστερό R -πρότυπο N .
4. Υπάρχει μια προβολική ανάλυση του M έτσι ώστε η n -ισοτή συζυγία του M να είναι προβολικό αριστερό R -πρότυπο.
5. Για κάθε προβολική ανάλυση του M , η n -ισοτή συζυγία του M είναι προβολικό αριστερό R -πρότυπο.

Απόδειξη. (1 \Rightarrow 2) : Αν $\text{pd}_R M \leq n$, τότε υπάρχει μια προβολική ανάλυση του M

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

όπου $P_k = 0$ για κάθε $k \geq n + 1$. Συνεπώς, οι επαγόμενοι ομομορφισμοί αβελιανών ομάδων $d_k^* : \text{Hom}_R(P_{k-1}, N) \longrightarrow \text{Hom}_R(P_k, N)$ είναι οι μηδενικοί για οποιοδήποτε αριστερό R -πρότυπο N , και για οποιοδήποτε $k \geq n + 1$. Άρα, $\text{Ext}_R^k(M, N) = 0$ για κάθε αριστερό R -πρότυπο N , και για κάθε $k \geq n + 1$.

(2 \Rightarrow 3) : Τετριμμένα.

(3 \Rightarrow 4) : Υποθέτουμε ότι ισχύει το 3) και διαλέγουμε μια προβολική ανάλυση του M , έστω

$$\mathbf{P} : \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Αν $\Omega_n(M) = \text{Ker}(P_{n-1} \longrightarrow P_{n-2})$ είναι η n -ισοτή συζυγία του M , τότε χρησιμοποιώντας την υπόθεση, καθώς και την Πρόταση (3.4.6), παίρνουμε ότι

$$\text{Ext}_R^1(\Omega_n(M), N) \cong \text{Ext}_R^{n+1}(M, N) = 0,$$

για κάθε αριστερό R -πρότυπο N . Συνεπώς, η n -ισοτή συζυγία $\Omega_n(M)$ του M είναι προβολικό αριστερό R -πρότυπο, και άρα η ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow \Omega_n(M) \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M,$$

είναι η προβολική ανάλυση του M που ζητούσαμε.

(4 \Rightarrow 5) : Υποθέτουμε ότι $\Omega_n(M)$ και $\Omega'_n(M)$ είναι οι n -ισοτές συζυγίες που προκύπτουν από δύο επιλεγόμενες προβολικές αναλύσεις του M . Η Πρόταση (3.4.6), μας δίνει προβολικά αριστερά R -πρότυπα P και P' έτσι ώστε $\Omega_n(M) \oplus P \cong \Omega'_n(M) \oplus P'$. Αν το $\Omega_n(M)$ είναι προβολικό, τότε το $\Omega'_n(M)$ είναι ευθύς προσθετός του προβολικού αριστερού R -προτύπου $\Omega_n(M) \oplus P$, και άρα, είναι επίσης προβολικό.

(5 \Rightarrow 1) : Προφανές. ■

Παρατήρηση 3.4.9. Σημειώνουμε ότι υπάρχει και η δυϊκή εκδοχή της Πρότασης (3.4.8) για ενέσιμες διατάξεις, βλέπε [52, Proposition 8.11]

Ορισμός 3.4.10. Η αριστερή προβολική ολική διάσταση (left projective global dimension) ενός δακτυλίου R , η οποία συμβολίζεται ως l. p. gl. dim(R), ορίζεται ως εξής:

$$\text{l. p. gl. dim}(R) = \sup \{ \text{pd}_R M \mid M \in \text{ob}(R\text{-Mod}) \}.$$

Παρόμοια, η αριστερή ενέσιμη ολική διάσταση (left injective global dimension) ενός δακτυλίου R , η οποία συμβολίζεται ως l. i. gl. dim(R), ορίζεται ως εξής:

$$\text{l. i. gl. dim}(R) = \sup \{ \text{id}_R M \mid M \in \text{ob}(R\text{-Mod}) \}.$$

Πρόταση 3.4.11. Για ένα δακτύλιο R , ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $\text{l. p. gl. dim}(R) \leq n$ αν και μόνο αν, $\text{Ext}_R^{n+1}(A, B) = 0$ για όλα τα αριστερά R -πρότυπα A και B .
2. $\text{l. i. gl. dim}(R) \leq n$ αν και μόνο αν, $\text{Ext}_R^{n+1}(A, B) = 0$ για όλα τα αριστερά R -πρότυπα A και B .

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση (3.4.8), καθώς και την δυϊκή εκδοχή της, έπεται ότι $\text{l. p. gl. dim}(R) \leq n$ ή $\text{l. i. gl. dim}(R) \leq n$, αν και μόνο αν, $\text{Ext}_R^{n+1}(A, B) = 0$ για όλα τα αριστερά R -πρότυπα A και B . ■

Ως έμμεση συνέπεια του Πρότασης (3.4.11), παίρνουμε ότι:

Πόρισμα 3.4.12. Για κάθε δακτύλιο R , ισχύει ότι $\text{l. p. gl. dim}(R) = \text{l. i. gl. dim}(R)$.

Ορισμός 3.4.13. Αν R είναι ένας δακτύλιος, τότε η **αριστερή ολική ομολογική διάσταση (left global homological dimension)** του R , η οποία συμβολίζεται ως $\text{l. gl. dim}(R)$, είναι η κοινή τιμή των $\text{l. p. gl. dim}(R)$ και $\text{l. i. gl. dim}(R)$.

Παράδειγμα 3.4.14. Για έναν αριστερό κληρονομικό δακτύλιο R , ισχύει ότι

$$\text{l. gl. dim}(R) \leq 1,$$

αφού για κάθε αριστερό R -πρότυπο $\text{pd}_R M \leq 1$ (και $\text{id}_R M \leq 1$). Έτσι, για τον δακτύλιο των ακεραίων \mathbb{Z} έχουμε ότι $\text{l. gl. dim}(\mathbb{Z}) \leq 1$.

Επικεντρωνόμαστε τώρα σε επίπεδες διαστάσεις.

Το μήκος μίας επίπεδης ανάλυσης

$$\cdots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

ενός αριστερού R -προτύπου M , είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε το F_n είναι μη-μηδενικό και κάθε $F_i = 0$ για κάθε $i > n$. Αν δεν υπάρχει τέτοιος φυσικός αριθμός n , τότε ορίζουμε το μήκος της να είναι άπειρο.

Ορισμός 3.4.15. Το μήκος τυχούσας επίπεδης ανάλυσης ενός αριστερού R -προτύπου M καλείται **επίπεδη διάσταση (flat dimension)** του M , και συμβολίζεται με $\text{fd}_R M$.

Παρατήρηση 3.4.16. 1. Αν M είναι ένα αριστερό R -πρότυπο και n είναι κάποιος φυσικός αριθμός, τότε $\text{fd}_R M \leq n$, αν και μόνο αν, υπάρχει επίπεδη ανάλυση του M μήκους n .

2. $\text{fd}_R M = 0$, αν και μόνο αν, το M είναι επίπεδο αριστερό R -πρότυπο.

3. $\text{fd}_R M \leq \text{pd}_R M$ για κάθε αριστερό R -πρότυπο M .

Νωρίτερα είδαμε τον τρόπο που ο συναρτητής $\text{Ext}_R^i(-, -)$ «μετρά» προβολικές και ενέσιμες αναλύσεις. Κλείνουμε το παρόν κεφάλαιο μελετώντας τώρα τον τρόπο που ο συναρτητής $\text{Tor}^R(-, -)$ «μετρά» επίπεδες αναλύσεις.

Πρόταση 3.4.17. Οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες για ένα δεξιό R -πρότυπο A .

1. $\text{fd}_R A \leq n$.
2. $\text{Tor}_k^R(A, B) = 0$ για κάθε αριστερό R -πρότυπο B , και για κάθε $k \geq n + 1$.
3. $\text{Tor}_{n+1}^R(A, B) = 0$ για κάθε αριστερό R -πρότυπο B .
4. Για μία οποιαδήποτε επίπεδη ανάλυση του A ,

$$\cdots \longrightarrow F_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} F_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

ο πυρήνας $K_{n-1} := \text{Ker } \alpha_{n-1}$ είναι ένα επίπεδο πρότυπο.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [52, Proposition 8.17] ■

Κεφάλαιο 4

Προσεγγίσεις Προτύπων Και Συστρεπτικά Ζεύγη

Στο παρόν κεφάλαιο, αναπτύσσουμε τη βασική θεωρία προσέγγισης προτύπων υπεράνω προσεταιριστικών δακτυλίων με μονάδα. Εισάγουμε τις έννοιες των δεξιών και αριστερών προσεγγίσεων, καθώς και τις ελάχιστες εκδοχές τους ως προς μία τυχαία κλάση προτύπων, και στην συνέχεια μελετάμε προσεγγίσεις προτύπων μέσω ειδικών κλάσεων προτύπων. Κλείνοντας το κεφάλαιο αυτό, αναφερόμαστε σε συστρεπτικά ζεύγη για κατηγορίες προτύπων, τα οποία διαδραματίζουν κυρίαρχο ρόλο στη μελέτη της θεωρίας προσέγγισης προτύπων.

Σύμβαση: Καθ' όλη την έκταση του κεφαλαίου αυτού, συμβολίζουμε με R έναν προσεταιριστικό δακτύλιο με μονάδα.

4.1 Προσεγγίσεις Προτύπων

Στην παρούσα ενότητα, συμβολίζουμε με \mathcal{C} μια τυχαία κλάση από αριστερά R -πρότυπα η οποία είναι κλειστή σε ισομορφισμούς και σε ευθείς προσθετέους. Πριν αναφερθούμε στις έννοιες των (ελάχιστων) δεξιών και (ελάχιστων) αριστερών προσεγγίσεων από την κλάση \mathcal{C} , ας παραθέσουμε την έννοια της «ελαχιστότητας» ενός R -ομομορφισμού:

Ορισμός 4.1.1. Ένας ομομορφισμός R -προτύπων $f: M \rightarrow N$, καλείται **δεξιά**, αντίστοιχα **αριστερά**, **ελάχιστος (minimal)**, αν κάθε ενδομορφισμός $g: M \rightarrow M$, αντίστοιχα $h: N \rightarrow N$ με την ιδιότητα $f \circ g = f$, αντίστοιχα $h \circ f = f$, είναι αυτομορφισμός του M , αντίστοιχα του N . Δηλαδή, ο ομομορφισμός f είναι δεξιά ελάχιστος, αντίστοιχα αριστερά ελάχιστος, αν κάθε ενδομορφισμός g του M , αντίστοιχα h του N , έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ g \downarrow & \nearrow f & \\ M & & \end{array}, \quad \text{αντίστοιχα} \quad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ & \searrow f & \downarrow h \\ & & N \end{array}$$

είναι ένας αυτομορφισμός του M , αντίστοιχα του N .

Ορισμός 4.1.2. Έστω M ένα αριστερό R -πρότυπο. Τότε ένα ζεύγος (C, f) όπου $C \in \mathcal{C}$ και $f: C \rightarrow M$ είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων, καλείται μια **δεξιά προσέγγιση** του M από την κλάση \mathcal{C} , ή μια **δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση (right \mathcal{C} -approximation)** του M , αν για κάθε ομομορφισμό αριστερών R -προτύπων $g: X \rightarrow M$ όπου $X \in \mathcal{C}$, υπάρχει ένας ομομορφισμός

αριστερών R -προτύπων $\phi : X \rightarrow C$, έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \exists \phi \swarrow & & \downarrow g \\ C & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

να είναι μεταθετικό. Ισοδύναμα, η ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$\mathrm{Hom}_R(X, C) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(X, M) \rightarrow 0,$$

είναι ακριβής για κάθε $X \in \mathcal{C}$. Μια δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση $f : C \rightarrow M$ του M καλείται **ελάχιστη (minimal right approximation)**, αν ο ομομορφισμός f είναι δεξιά ελάχιστος.

Παρατήρηση 4.1.3. Οι δεξιές \mathcal{C} -προσεγγίσεις καλούνται επίσης \mathcal{C} -**precovers**, ενώ οι ελάχιστες δεξιές \mathcal{C} -προσεγγίσεις αναφέρονται και ως \mathcal{C} -**covers**.

Παράδειγμα 4.1.4. Για κάθε κλάση $\mathcal{C} \subseteq R\text{-Mod}$, και για κάθε $C \in \mathcal{C}$, το ζεύγος (C, Id_C) όπου Id_C είναι ο ταυτοτικός μορφομορφισμός του C , είναι μια ελάχιστη δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση του C .

Έχοντας εισάγει τις έννοιες των δεξιών και ελάχιστων δεξιών προσεγγίσεων σε μια αυθαίρετη κλάση R -προτύπων \mathcal{C} , φυσιολογικά προκύπτουν τα ακόλουθα ερωτήματα:

1. Υπάρχει για οποιαδήποτε κλάση \mathcal{C} από R -πρότυπα, και για οποιοδήποτε R -πρότυπο M , μια (ελάχιστη) δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση του M ;
2. Αν υπάρχει μια (ελάχιστη) δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση του M , τότε είναι αυτή μοναδική; Μοναδική υπό ποια έννοια;

Στην επόμενη ενότητα θα δούμε παραδείγματα κλάσεων προτύπων, για τις οποίες η απάντηση του πρώτου ερωτήματος καθίσταται αρνητική. Ας σημειώσουμε ωστόσο τώρα ότι για μια κλάση προτύπων \mathcal{C} , αν υπάρχει μια δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση για κάθε πρότυπο, τότε η κλάση \mathcal{C} καλείται **δεξιά προσεγγίσιμη (contravariantly finite)**, ή ισοδύναμα, **precovering**, και αν υπάρχει μια ελάχιστη δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση για κάθε πρότυπο, τότε η κλάση \mathcal{C} καλείται **ελάχιστα δεξιά προσεγγίσιμη**, ή ισοδύναμα, **covering**. Εν' αντιθέσει με την απάντηση του πρώτου ερωτήματος, η απάντηση του δεύτερου ερωτήματος είναι θετική, στην περίπτωση των ελάχιστων δεξιών \mathcal{C} -προσεγγίσεων ενός R -προτύπου με την εξής έννοια:

Πρόταση 4.1.5. (Μοναδικότητα) Αν $f : C \rightarrow M$ και $f' : C' \rightarrow M$, είναι δύο ελάχιστες δεξιές \mathcal{C} -προσεγγίσεις του M , τότε υπάρχει ένας R -ισομορφισμός $\phi : C \rightarrow C'$, έτσι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ \exists \phi \swarrow & & \downarrow f \\ C' & \xrightarrow{f'} & M \end{array}$$

να είναι μεταθετικό.

Απόδειξη. Έστω $f : C \rightarrow M$ και $f' : C' \rightarrow M$ δύο ελάχιστες δεξιές \mathcal{C} -προσεγγίσεις του M . Τότε προφανώς, οι f και f' είναι δεξιές \mathcal{C} -προσεγγίσεις του M , και συνεπώς, υπάρχουν R -ομομορφισμοί $\phi : C \rightarrow C'$ και $\psi : C' \rightarrow C$, έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ \psi \nearrow & & \downarrow f \\ C' & \xrightarrow{f'} & M \end{array}$$

Δηλαδή, $f' \circ \phi = f$ και $f \circ \psi = f'$. Έτσι, $f \circ (\psi \circ \phi) = (f \circ \psi) \circ \phi = f' \circ \phi = f$ και $f' \circ (\phi \circ \psi) = (f' \circ \phi) \circ \psi = f \circ \psi = f'$. Επειδή οι f και f' είναι δύο ελάχιστες δεξιές \mathcal{C} -προσεγγίσεις του M , συμπεραίνουμε ότι οι ενδομορφισμοί $\psi \circ \phi$ και $\phi \circ \psi$ των C και C' αντίστοιχα, είναι αυτομορφισμοί. Επομένως, η απεικόνιση ϕ είναι ένας R -ισομορφισμός, ως ένα προς ένα και επί R -ομομορφισμός, και επιπλέον, ικανοποιεί τη συνθήκη $f' \circ \phi = f$, η οποία μας εξασφαλίζει την μεταθετικότητα του ζητούμενου διαγράμματος. ■

Σχόλιο 4.1.6. Λόγω της Πρότασης (4.1.5), μια ελάχιστη δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση ενός αριστερού R -προτύπου M , καλείται η ελάχιστη δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση του M . Επιπλέον, αν τονίσουμε ότι για ένα αριστερό R πρότυπο M , μπορεί να υπάρχουν πολλές μη ισόμορφες δεξιές \mathcal{C} -προσεγγίσεις.

Η επόμενη πρόταση μας πληροφορεί για το τρόπο που συνδέεται η ελάχιστη δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση ενός αριστερού R -προτύπου M , αν υπάρχει, με κάθε δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση του M .

Πρόταση 4.1.7. Έστω M ένα αριστερό R πρότυπο. Τότε η ελάχιστη δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση του M , αν υπάρχει, είναι ευθύς προσθετός κάθε δεξιάς \mathcal{C} -προσέγγισης του M .

Απόδειξη. Έστω M ένα αριστερό R -πρότυπο, και $\phi : C \rightarrow M$, η ελάχιστη δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση του M . Θεωρούμε μια τυχαία δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση του M , έστω $\psi : C' \rightarrow M$. Αν $(C, \phi) = (C', \psi)$, τότε τετριμμένα ισχύει το ζητούμενο. Υποθέτουμε λοιπόν, ότι $C \neq C'$. Τότε εξ ορισμού της δεξιάς \mathcal{C} -προσέγγισης του M , υπάρχουν $f : C' \rightarrow C$ και $g : C \rightarrow C'$ R -ομομορφισμοί, έτσι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} & & C \\ & \nearrow f & \downarrow \phi \\ C' & \xrightarrow{g} & M \\ & \searrow \psi & \end{array}$$

να είναι μεταθετικό. Έτσι, $\phi = \psi \circ g = \phi \circ f \circ g$. Επειδή η απεικόνιση ϕ είναι η ελάχιστη δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση του M , έπεται ότι ο ενδομορφισμός $f \circ g$ του C , είναι αυτομορφισμός. Θα δείξουμε ότι ο $f \circ g$ είναι η ελάχιστη δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση του C . Για κάθε R -ομομορφισμό $\alpha : X \rightarrow C$ με $X \in \mathcal{C}$, θέτουμε $h_\alpha = (f \circ g)^{-1} \circ \alpha : X \rightarrow C$. Τότε η απεικόνιση h_α είναι ένας R -ομομορφισμός, ως σύνθεση R -ομομορφισμών, με την ιδιότητα $f \circ g \circ h_\alpha = \alpha$. Ως συνέπεια αυτού, έπεται ότι ο αυτομορφισμός $f \circ g$ είναι μια δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση του C . Επιπλέον, για οποιοδήποτε R -ενδομορφισμό $k : C \rightarrow C$, που ικανοποιεί τη σχέση $f \circ g \circ k = f \circ g$, είναι εμφανές ότι ο k είναι αυτομορφισμός του C . Επομένως, ο αυτομορφισμός $f \circ g$ είναι η ελάχιστη δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση του C . Όμως από το Παράδειγμα (4.1.4), έχουμε ότι ο ταυτοτικός μορφισμός Id_C είναι ελάχιστη δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση του C . Συνεπώς, λόγω της Πρότασης (4.1.5), υπάρχει R -ισομορφισμός $h : C \rightarrow C$, έτσι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} & & C \\ & \nearrow \exists h & \downarrow \text{Id}_C \\ C & \xrightarrow{f \circ g} & C \end{array}$$

να είναι μεταθετικό, δηλαδή $f \circ g \circ h = \text{Id}_C$. Θεωρούμε τώρα, τη σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \rightarrow \text{Ker } f \xrightarrow{i} C' \xrightarrow{f} C \rightarrow 0,$$

όπου i είναι η κανονική έγκλειση. Τότε η παραπάνω ακριβής ακολουθία είναι διασπασίμη, ως δεξιά διασπασίμη, και άρα, $C' \cong \text{Ker } f \oplus C$, δηλαδή ο C είναι ευθύς προσθετός του C' . ■

Παρατήρηση 4.1.8. Έστω X_1 και X_2 δύο αριστερά R -πρότυπα. Θεωρούμε για κάθε $j = 1, 2$, τις κανονικές προβολές $\pi_j : X_1 \oplus X_2 \rightarrow X_j$, και τις φυσικές εγκλείσεις $i_j : X_j \rightarrow X_1 \oplus X_2$. Αν $f : X_1 \oplus X_2 \rightarrow X_1 \oplus X_2$ είναι ένας ενδομορφισμός αριστερών R -προτύπων, τότε ορίζουμε

$$f_{ij} = \pi_i \circ f \circ i_j : X_j \rightarrow X_i, \quad \forall i, j \in \{1, 2\}.$$

Προφανώς, οι απεικονίσεις f_{ij} είναι R -ομομορφισμοί για κάθε $i, j \in \{1, 2\}$. Επιπλέον, αν γράψουμε τα στοιχεία του αριστερού R -προτύπου $X_1 \oplus X_2$, ως στήλες $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ όπου $x_j \in X_j$, τότε ο ενδομορφισμός f μπορεί να εκφραστεί στη μορφή πίνακα ως εξής:

$$f = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$$

Αντίστροφα, αν $f_{ij} : X_j \rightarrow X_i$ είναι οποιοδήποτε R -ομομορφισμοί, τότε ο παραπάνω πίνακας f ορίζει έναν ενδομορφισμό του $X_1 \oplus X_2$ με $\pi_i \circ f \circ i_j = f_{ij}$.

Ας σημειώσουμε ότι αν οι ενδομορφισμοί f και g είναι της μορφής:

$$f = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ 0 & f_{22} \end{pmatrix} \text{ και } g = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

αντίστοιχα, όπου $f_{11}, g_{11} : X_1 \rightarrow X_1$ και $f_{22}, g_{22} : X_2 \rightarrow X_2$ είναι αυτομορφισμοί, τότε οι f και g είναι επίσης αυτομορφισμοί, με αντίστροφους ενδομορφισμούς:

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} f_{11}^{-1} & -f_{11}^{-1}f_{12}f_{22}^{-1} \\ 0 & f_{22}^{-1} \end{pmatrix} \text{ και } g^{-1} = \begin{pmatrix} g_{11}^{-1} & 0 \\ -g_{22}^{-1}g_{21}g_{11}^{-1} & g_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

αντίστοιχα.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα καθορίζει πότε ένα πεπερασμένο ευθύ άθροισμα από (ελάχιστες) δεξιές προσεγγίσεις είναι (ελάχιστη) δεξιά προσέγγιση.

Πρόταση 4.1.9. Υποθέτουμε ότι η κλάση \mathcal{C} είναι κλειστή σε πεπερασμένα ευθέα άθροισματα, και θεωρούμε $\phi_i : X_i \rightarrow M_i$ μια (ελάχιστη) δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση ενός αριστερού R -προτύπου M_i , για $i = 1, 2$. Τότε ο ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων $\phi_1 \oplus \phi_2 : X_1 \oplus X_2 \rightarrow M_1 \oplus M_2$ είναι μια (ελάχιστη) δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση του $M_1 \oplus M_2$.

Απόδειξη. Αρχικά, υποθέτουμε ότι κάθε $\phi_i : X_i \rightarrow M_i$ είναι μια δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση του M_i , για $i = 1, 2$. Εξ ορισμού, η ακολουθία

$$\text{Hom}_R(C, X_i) \xrightarrow{(\phi_i)^*} \text{Hom}_R(C, M_i) \rightarrow 0, \quad (4.1)$$

είναι ακριβής για κάθε $C \in \mathcal{C}$ και για κάθε $i \in \{1, 2\}$. Για κάθε $C \in \mathcal{C}$, θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_R(C, X_1 \oplus X_2) & \xrightarrow{(\phi_1 \oplus \phi_2)^*} & \text{Hom}_R(C, M_1 \oplus M_2) \longrightarrow 0 \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \text{Hom}_R(C, X_1) \oplus \text{Hom}_R(C, X_2) & \xrightarrow{(\phi_1)^* \oplus (\phi_2)^*} & \text{Hom}_R(C, M_1) \oplus \text{Hom}_R(C, M_2) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Τότε, λόγω της ακρίβειας της ακολουθίας (4.1), η δεύτερη γραμμή του παραπάνω διαγράμματος είναι ακριβής ακολουθία για κάθε $C \in \mathcal{C}$, και κατ' επέκταση, λόγω της μεταθετικότητας του διαγράμματος, η πρώτη γραμμή του είναι ακριβής ακολουθία για κάθε $C \in \mathcal{C}$. Συνεπώς, ο ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων $\phi_1 \oplus \phi_2 : X_1 \oplus X_2 \rightarrow M_1 \oplus M_2$ είναι μία δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση του $M_1 \oplus M_2$. Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι κάθε $\phi_i : X_i \rightarrow M_i$ είναι η ελάχιστη δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση του M_i , για $i = 1, 2$. Θέλουμε να δείξουμε ότι ο ομομορφισμός $\phi_1 \oplus \phi_2$ είναι η ελάχιστη δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση του $M_1 \oplus M_2$. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε έναν ενδομορφισμό $f : X_1 \oplus X_2 \rightarrow X_1 \oplus X_2$, έτσι ώστε $\phi_1 \oplus \phi_2 \circ f = \phi_1 \oplus \phi_2$. Γράφοντας τον ενδομορφισμό f στη μορφή πίνακα,

$$f = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix},$$

έχουμε τις ακόλουθες ισότητες $\forall x_1 \in X_1$ και $\forall x_2 \in X_2$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \phi_1(x_1) \\ \phi_2(x_2) \end{pmatrix} &= (\phi_1 \oplus \phi_2)(x_1, x_2) = (\phi_1 \oplus \phi_2 \circ f)(x_1, x_2) \\ &= \begin{pmatrix} (\phi_1 \circ f_{11})(x_1) + (\phi_1 \circ f_{12})(x_2) \\ (\phi_2 \circ f_{21})(x_1) + (\phi_2 \circ f_{22})(x_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι $\phi_1 = \phi_1 \circ f_{11}$, $\phi_2 = \phi_2 \circ f_{22}$ και $\phi_1 \circ f_{12} = 0 = \phi_2 \circ f_{21}$. Όμως, επειδή οι ομομορφισμοί ϕ_1 και ϕ_2 είναι οι ελάχιστες δεξιές \mathcal{C} -προσεγγίσεις των M_1 και M_2 αντίστοιχα, συμπεραίνουμε ότι οι ενδομορφισμοί f_{11} και f_{22} είναι αυτομορφισμοί των X_1 και X_2 , αντίστοιχα. Επιπλέον, παρατηρώντας ότι $\phi_2 \circ (-f_{21} \circ (f_{11})^{-1} \circ f_{12} + f_{22}) = \phi_2$, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι ο ενδομορφισμός $-f_{21} \circ (f_{11})^{-1} \circ f_{12} + f_{22}$, είναι ένας αυτομορφισμός του X_2 . Θεωρούμε τώρα, k, h δύο R -ενδομορφισμούς του $X_1 \oplus X_2$, οι οποίοι γράφονται ως πίνακες στη μορφή:

$$k = \begin{pmatrix} \text{Id}_{X_1} & 0 \\ -f_{21} \circ (f_{11})^{-1} & \text{Id}_{X_2} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad h = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ 0 & -f_{21} \circ (f_{11})^{-1} \circ f_{12} + f_{22} \end{pmatrix}.$$

Τότε η Παρατήρηση (4.1.8), μας δίνει ότι οι ενδομορφισμοί k και h είναι αυτομορφισμοί του $X_1 \oplus X_2$. Είναι γνωστό ότι η σύνθεση δύο ενδομορφισμών, μπορεί να υπολογιστεί πολλαπλασιάζοντας τους αντίστοιχους πίνακες. Έτσι, παρατηρώντας τώρα την ισότητα

$$\begin{pmatrix} \text{Id}_{X_1} & 0 \\ -f_{21} \circ (f_{11})^{-1} & \text{Id}_{X_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ 0 & -f_{21} \circ (f_{11})^{-1} \circ f_{12} + f_{22} \end{pmatrix},$$

συμπεραίνουμε ότι $k \circ f = h$ ή $f = k^{-1} \circ h$, όπου k^{-1} είναι ο αντίστροφος ενδομορφισμός του k . Συνεπώς, ο f είναι ένας αυτομορφισμός του $X_1 \oplus X_2$, ως σύνθεση δύο αυτομορφισμών. Έτσι τελικά, έχουμε ότι ο ομομορφισμός $\phi_1 \oplus \phi_2$ είναι η ελάχιστη δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση του $M_1 \oplus M_2$. ■

Στη συνέχεια αναπτύσσουμε τη δυϊκή έννοια των (ελάχιστων) δεξιών προσεγγίσεων, αυτή των (ελάχιστων) αριστερών προσεγγίσεων.

Ορισμός 4.1.10. Έστω M ένα αριστερό R -προτύπο. Τότε ένα ζεύγος (C, f) όπου $C \in \mathcal{C}$ και $f : M \rightarrow C$ είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων, καλείται μια **αριστερή προσέγγιση** του M από την κλάση \mathcal{C} , ή μια **αριστερή \mathcal{C} -προσέγγιση (left \mathcal{C} -approximation)** του M , αν για κάθε ομομορφισμό αριστερών R -προτύπων $g : M \rightarrow X$ όπου $X \in \mathcal{C}$, υπάρχει ένας ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων $\phi : C \rightarrow X$, έτσι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g} & X \\ f \downarrow & \nearrow \exists \phi & \\ C & & \end{array}$$

να είναι μεταθετικό. Ισοδύναμα, η ακολουθία αβεβηανών ομάδων

$$\text{Hom}_R(C, X) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}_R(M, X) \rightarrow 0,$$

είναι ακριβής για κάθε $X \in \mathcal{C}$. Μια αριστερή \mathcal{C} -προσέγγιση $f : M \rightarrow C$ του M καλείται **ελάχιστη, (minimal left approximation)**, αν ο ομομορφισμός f είναι αριστερά ελάχιστος.

Παρατήρηση 4.1.11. Οι αριστερές \mathcal{C} -προσεγγίσεις καλούνται επίσης, **\mathcal{C} -preenvelopes**, ενώ οι ελάχιστες αριστερές \mathcal{C} -προσεγγίσεις αναφέρονται και ως **\mathcal{C} -envelopes**.

Παράδειγμα 4.1.12. Για κάθε κλάση $\mathcal{C} \subseteq R\text{-Mod}$ και για κάθε $C \in \mathcal{C}$, το ζεύγος (C, Id_C) όπου Id_C ο ταυτοτικός μορφισμός του C , είναι μια ελάχιστη αριστερή \mathcal{C} -προσέγγιση του C .

Ας επισημάνουμε ότι υπάρχουν κλάσεις R -πρότυπων, για τις οποίες η εύρεση μιας (ελάχιστης) αριστερής προσέγγισης για ένα οποιοδήποτε R -πρότυπο, δεν είναι εφικτή. Ωστόσο, για μια κλάση $\mathcal{C} \subseteq R\text{-Mod}$, αν υπάρχει για κάθε αριστερό R -πρότυπο μια αριστερή \mathcal{C} -προσέγγιση, τότε η κλάση \mathcal{C} καλείται **αριστερά προσεγγίσιμη (covariantly finite)**, ή ισοδύναμα, **preenveloping**, και αν υπάρχει για κάθε αριστερό R -πρότυπο μια ελάχιστη αριστερή \mathcal{C} -προσέγγιση, τότε η κλάση \mathcal{C} καλείται **ελάχιστη αριστερά προσεγγίσιμη**, ή ισοδύναμα, **enveloping**.

Η ακόλουθη πρόταση μας εξασφαλίζει ότι μια ελάχιστη αριστερή \mathcal{C} -προσέγγιση, αν υπάρχει είναι μοναδική μέχρι ισομορφισμού, και είναι δυϊκή της Πρότασης (4.1.5).

Πρόταση 4.1.13. (Μοναδικότητα) Αν $f : M \rightarrow C$ και $g : M \rightarrow C'$ είναι δύο ελάχιστες αριστερές \mathcal{C} -προσεγγίσεις του M , τότε υπάρχει ένας R -ισομορφισμός $\phi : C \rightarrow C'$, έτσι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g} & C' \\ f \downarrow & \cong \nearrow & \uparrow \\ C & & \exists \phi \end{array}$$

να είναι μεταθετικό.

Απόδειξη. Δυϊκά με την απόδειξη της Πρότασης (4.1.5). ■

Λόγω της μοναδικότητας των ελάχιστων αριστερών προσεγγίσεων, μια ελάχιστη αριστερή \mathcal{C} -προσέγγιση ενός αριστερού R -πρότυπου M καλείται η ελάχιστη αριστερή \mathcal{C} -προσέγγιση του M . Ας σημειώσουμε, ότι μπορεί να υπάρχουν μη ισομορφες αριστερές \mathcal{C} -προσεγγίσεις του M . Ωστόσο, η ακόλουθη πρόταση μας εξασφαλίζει ότι αν υπάρχει ελάχιστη αριστερή \mathcal{C} -προσέγγιση ενός αριστερού R -πρότυπου M , τότε η «ελαχιστότητα» της, την καθιστά ευθύ προσθετέο κάθε αριστερής \mathcal{C} -προσέγγισης του M :

Πρόταση 4.1.14. Έστω M ένα αριστερό R -πρότυπο. Τότε η ελάχιστη αριστερή \mathcal{C} -προσέγγιση του M , αν υπάρχει, είναι ευθύς προσθετέος κάθε αριστερής \mathcal{C} -προσέγγισης του M .

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης της Πρότασης (4.1.7). ■

Έχουμε δει ότι αν μια κλάση $\mathcal{C} \subseteq R\text{-Mod}$ είναι κλειστή σε πεπερασμένα ευθέα αθροίσματα, τότε το ευθύ άθροισμα από (ελάχιστες) δεξιές \mathcal{C} -προσεγγίσεις είναι επίσης (ελάχιστη) δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση. Αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει και στην περίπτωση των (ελάχιστων) αριστερών \mathcal{C} -προσεγγίσεων.

Πρόταση 4.1.15. Υποθέτουμε ότι η κλάση \mathcal{C} είναι κλειστή σε πεπερασμένα ευθέα αθροίσματα, και θεωρούμε $\phi_i : M_i \rightarrow X_i$ μία (ελάχιστη) αριστερή \mathcal{C} -προσέγγιση ενός αριστερού R -πρότυπου M_i , για $i = 1, 2$. Τότε ο ομομορφισμός αριστερών R -πρότυπων $\phi_1 \oplus \phi_2 : M_1 \oplus M_2 \rightarrow X_1 \oplus X_2$, είναι μια (ελάχιστη) αριστερή \mathcal{C} -προσέγγιση του $M_1 \oplus M_2$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης της Πρότασης (4.1.9). ■

Παρατήρηση 4.1.16. Αν $f : C \rightarrow M$ είναι η ελάχιστη δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση ενός αριστερού R -πρότυπου M , τότε η f δεν είναι απαραίτητα επιμορφισμός. Ωστόσο, αν το πρότυπο M είναι η ομομορφική εικόνα ενός $X \in \mathcal{C}$, τότε κάθε δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση του M είναι επιμορφισμός, και κατ' επέκταση, η ελάχιστη δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση του M , αν υπάρχει, είναι επιμορφισμός. Για παράδειγμα αυτό συμβαίνει όταν η κλάση \mathcal{C} περιέχει όλα τα προβολικά R -πρότυπα.

Δυϊκά, αν $f : M \rightarrow C$ είναι η ελάχιστη αριστερή \mathcal{C} -προσέγγιση ενός αριστερού R -πρότυπου M , τότε η f δεν είναι απαραίτητα μονομορφισμός. Όμως, αν το M μπορεί να εμφυτευθεί σε ένα $X \in \mathcal{C}$, τότε κάθε αριστερή \mathcal{C} -προσέγγιση του M είναι μονομορφισμός, και ως συνέπεια αυτού, η ελάχιστη αριστερή \mathcal{C} -προσέγγιση του M , αν υπάρχει, είναι μονομορφισμός. Για παράδειγμα αυτό συμβαίνει όταν η κλάση \mathcal{C} περιέχει όλα τα ενέσιμα R -πρότυπα.

Πριν παρουσιάσουμε επιπρόσθετες ιδιότητες των (ελάχιστων) δεξιών και (ελάχιστων) αριστερών προσεγγίσεων, χρειαζόμαστε τους ακόλουθους ορισμούς:

Ορισμός 4.1.17. Για κάθε κλάση $\mathcal{C} \subseteq R\text{-Mod}$, επάγονται δύο νέες κλάσεις από R -πρότυπα:

$$\mathcal{C}^\perp = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{C}^{\perp n} \quad \& \quad {}^\perp \mathcal{C} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} {}^n \perp \mathcal{C},$$

όπου για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{C}^{\perp n} = \{M \in R\text{-Mod} \mid \text{Ext}_R^n(C, M) = 0, \forall C \in \mathcal{C}\},$$

και

$${}^n \perp \mathcal{C} = \{N \in R\text{-Mod} \mid \text{Ext}_R^n(N, C) = 0, \forall C \in \mathcal{C}\}.$$

Οι κλάσεις \mathcal{C}^\perp και ${}^\perp \mathcal{C}$ καλούνται η **δεξιά ορθογώνια** και η **αριστερή ορθογώνια** κλάση της \mathcal{C} , αντίστοιχα.

Παρατήρηση 4.1.18. Για κάθε κλάση \mathcal{C} από αριστερά R -πρότυπα ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $\mathcal{C} \subseteq {}^\perp(\mathcal{C}^\perp)$ και $\mathcal{C} \subseteq ({}^\perp \mathcal{C})^\perp$.
2. αν $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$, τότε $\mathcal{C}_2^\perp \subseteq \mathcal{C}_1^\perp$ και ${}^\perp \mathcal{C}_2 \subseteq {}^\perp \mathcal{C}_1$.
3. $\mathcal{C}^\perp = ({}^\perp(\mathcal{C}^\perp))^\perp$ και ${}^\perp \mathcal{C} = ({}^\perp({}^\perp \mathcal{C}))^\perp$.

Υπενθυμίζουμε ότι μια κλάση $\mathcal{C} \subseteq R\text{-Mod}$ είναι **κλειστή στις επεκτάσεις**, αν για κάθε σύντομη ακριβή ακολουθία:

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow X \longrightarrow 0,$$

όπου $X, M \in \mathcal{C}$, το πρότυπο N ανήκει στην κλάση \mathcal{C} .

Είμαστε σε θέση τώρα, να αναφερθούμε σε ιδιότητες των (ελάχιστων) δεξιών και των (ελάχιστων) αριστερών \mathcal{C} -προσεγγίσεων. Ξεκινάμε την αναφορά αυτή, προσθέτοντας στην κλάση \mathcal{C} την ιδιότητα να είναι κλειστή στις επεκτάσεις.

Πρόταση 4.1.19. Υποθέτουμε ότι η κλάση \mathcal{C} είναι κλειστή στις επεκτάσεις, και έστω $f: C \longrightarrow M$ η ελάχιστη δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση ενός αριστερού R -προτύπου M . Τότε ο πυρήνας $\text{Ker } f$ της f ανήκει στην κλάση $\mathcal{C}^{\perp 1}$.

Απόδειξη. Έστω $f: C \longrightarrow M$ η ελάχιστη δεξιά της \mathcal{C} -προσέγγιση του M , και $K = \text{Ker } f$ ο πυρήνας της f . Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\text{Ext}_R^1(C', K) = 0$ για κάθε $C' \in \mathcal{C}$. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε ένα $C' \in \mathcal{C}$ και μια επέκταση

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{j} L \longrightarrow C' \longrightarrow 0, \quad (4.2)$$

του K από το C' . Έστω $i: K \longrightarrow C$ η φυσική έγκλειση, και $f': C \longrightarrow \text{Im } f$, $\alpha: \text{Im } f \longrightarrow M$ ομομορφισμοί αριστερών R -προτύπων με την ιδιότητα $\alpha \circ f' = f$. Θεωρώντας τώρα το pushout P του διαγράμματος

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{i} & C \\ j \downarrow & & \downarrow u \\ L & \xrightarrow{v} & P \end{array}$$

η Πρόταση (1.2.57), μας δίνει μοναδικούς ομομορφισμούς αριστερών R -προτύπων $g': P \longrightarrow C'$ και $g: P \longrightarrow \text{Im } f$, έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό με ακριβείς γραμμές

και στήλες:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{i} & C & \xrightarrow{f'} & \text{Im } f \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow j & & \downarrow u & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{v} & P & \xrightarrow{g} & \text{Im } f \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow g' & & \\
 & & C' & = & C' & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

Επειδή η κλάση \mathcal{C} είναι κλειστή στις επεκτάσεις, και C, C' ανήκουν στην κλάση \mathcal{C} , από τη δεύτερη στήλη του προηγούμενου διαγράμματος, παίρνουμε ότι το πρότυπο P ανήκει στην κλάση \mathcal{C} . Επιπλέον, αφού ο ομομορφισμός $f: C \rightarrow M$ είναι μια δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση του M , ως ελάχιστη δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση του M , υπάρχει ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων $\phi: P \rightarrow C$ έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc}
 & P & \\
 \phi \swarrow & \downarrow \alpha \circ g & \\
 C & \xrightarrow{f} & M
 \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι $f \circ \phi \circ u = \alpha \circ g \circ u = \alpha \circ f' = f$. Ως συνέπεια αυτού και του γεγονότος ότι ο ομομορφισμός f είναι δεξιά ελάχιστος, έπεται ότι ο ενδομορφισμός $\phi \circ u: C \rightarrow C$ είναι ένας αυτομορφισμός του C . Επειδή

$$f \circ (\phi \circ u)^{-1} \circ \phi \circ v = f \circ \phi \circ v = \alpha \circ g \circ v = 0,$$

συμπεραίνουμε ότι $\text{Im}((\phi \circ u)^{-1} \circ \phi \circ v) \subseteq \text{Ker } f = K$. Συνεπώς, ο ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων $(\phi \circ u)^{-1} \circ \phi \circ v: L \rightarrow C$, μπορεί να ιδωθεί ως $(\phi \circ u)^{-1} \circ \phi \circ v: L \rightarrow K$. Έστω τώρα $j: K \rightarrow \text{Im } i$, ο ισομορφισμός ο οποίος επάγεται από το πρώτο Θεώρημα ισομορφισμών για R -πρότυπα, με αντίστροφο R -ισομορφισμό τον j^{-1} . Όμως, $\text{Im } i = \text{Ker } f' = \text{Ker } f = K$. Επομένως, ο $j^{-1}: K \rightarrow K$ είναι ο αντίστροφος R -ισομορφισμός του j . Ορίζουμε ένα R -ομομορφισμό $h: L \rightarrow K$, θέτοντας $h = i^{-1} \circ (\phi \circ u)^{-1} \circ \phi \circ v$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $h \circ j = \text{Id}_K$. Έτσι τελικά, έχουμε ότι η σύντομη ακριβής ακολουθία (4.2) είναι διασπασίμη ως αριστερά διασπασίμη, ή ισοδύναμα χρησιμοποιώντας το Θεώρημα (3.3.18), ότι $\text{Ext}_R^1(C', K) = 0$. Επειδή η επιλογή του $C' \in \mathcal{C}$ ήταν τυχαία, αυτό θα συμβαίνει για κάθε $C' \in \mathcal{C}$, και άρα, $K = \text{Ker } f \in \mathcal{C}^{\perp 1}$. ■

Η δυϊκή εκδοχή της Πρότασης (4.1.19), είναι η πρόταση:

Πρόταση 4.1.20. Υποθέτουμε ότι η κλάση \mathcal{C} είναι κλειστή στις επεκτάσεις και έστω $f: M \rightarrow C$ η ελάχιστη αριστερή \mathcal{C} -προσέγγιση ενός αριστερού R -προτύπου M . Τότε ο συμπυρήνας $\text{Coker } f$ της f ανήκει στην κλάση ${}^{\perp 1}\mathcal{C}$.

Απόδειξη. Παρόμοια με την απόδειξη της Πρότασης (4.1.19). ■

Τα επόμενα αποτελέσματα καθορίζουν πότε μια δεξιά (αριστερή) \mathcal{C} -προσέγγιση είναι ειδική.

Πρόταση 4.1.21. Έστω M ένα αριστερό R -πρότυπο, και $f: C \rightarrow M$ ένας επιμορφισμός με $C \in \mathcal{C}$ και $\text{Ker } f \in \mathcal{C}^{\perp 1}$. Τότε ο R -ομομορφισμός f είναι μια δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση του M . Στην περίπτωση αυτή, η δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση f του M καλείται **ειδική δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση (special right \mathcal{C} -approximation)** του M .

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα στοιχείο X της κλάσης \mathcal{C} . Τότε αφού $K \in \mathcal{C}^{\perp 1}$, έχουμε ότι $\text{Ext}_R^1(X, K) = 0$. Εφαρμόζοντας τον συναλλοίωτο συναρτητή $\text{Hom}_R(X, -)$, στη σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} C \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0,$$

επάγεται μια μακρά ακριβή ακολουθία αβελιανών ομάδων, μέρος της οποίας είναι η ακριβής ακολουθία

$$\text{Hom}_R(X, C) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}_R(X, M) \longrightarrow \text{Ext}_R^1(X, K) = 0.$$

Συνεπώς, ο ομομορφισμός $f : C \longrightarrow M$ είναι μια δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση του M . ■

Δυϊκά,

Πρόταση 4.1.22. Έστω M ένα αριστερό R -πρότυπο, και $f : M \longrightarrow C$ ένας μονομορφισμός με $C \in \mathcal{C}$ και $\text{Coker } f \in {}^{\perp 1}\mathcal{C}$. Τότε ο ομομορφισμός f είναι μία αριστερή \mathcal{C} -προσέγγιση του M . Στην περίπτωση αυτή, η αριστερή \mathcal{C} -προσέγγιση f του M καλείται **ειδική αριστερή \mathcal{C} -προσέγγιση (special left \mathcal{C} -approximation)** του M .

Απόδειξη. Ακολουθώντας μια ανάλογη πορεία με την απόδειξη της Πρότασης (4.1.21), εφαρμόζοντας ωστόσο αυτή τη φορά τον αντισυναλλοίωτο συναρτητή $\text{Hom}_R(-, X)$ όπου $X \in \mathcal{C}$, στη σύντομη ακριβή ακολουθία $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} C \longrightarrow \text{Coker } f \longrightarrow 0$, έπεται το ζητούμενο. ■

Παρατήρηση 4.1.23. Οι ειδικές δεξιές \mathcal{C} -προσεγγίσεις, καλούνται επίσης **ειδικά \mathcal{C} -precovers**, ενώ οι ειδικές αριστερές \mathcal{C} -προσεγγίσεις, αναφέρονται και ως **ειδικά \mathcal{C} -preenvelopes**. Επιπλέον, αν κάθε αριστερό R -πρότυπο έχει μια ειδική δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση, τότε η κλάση \mathcal{C} καλείται **δεξιά ειδικά προσεγγίσιμη (special precovering)**, ενώ αν κάθε αριστερό R -πρότυπο έχει μια ειδική αριστερή \mathcal{C} -προσέγγιση, τότε η κλάση \mathcal{C} καλείται **αριστερά ειδικά προσεγγίσιμη (special preenveloping)**.

Το λήμμα που ακολουθεί είναι γνωστό ως λήμμα του Wakamatsu, και μας δίνει ότι κάτω από ασθενείς σχετικά υποθέσεις στην κλάση \mathcal{C} , οι ελάχιστες δεξιές και ελάχιστες αριστερές \mathcal{C} -προσεγγίσεις είναι ειδικές.

Λήμμα 4.1.24. (Λήμμα του Wakamatsu) Υποθέτουμε ότι η κλάση \mathcal{C} είναι κλειστή στις επεκτάσεις και έστω M ένα αριστερό R -πρότυπο. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Αν $f : C \longrightarrow M$ είναι μια ελάχιστη δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση του M η οποία είναι επιμορφισμός, τότε η f είναι μια ειδική δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση του M .
2. Αν $f : M \longrightarrow C$ είναι μια ελάχιστη αριστερή \mathcal{C} -προσέγγιση του M η οποία είναι μονομορφισμός, τότε η f είναι μια ειδική αριστερή \mathcal{C} -προσέγγιση του M .

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι μια απλή εφαρμογή των Προτάσεων (4.1.19) και (4.1.20). ■

Στο Κεφάλαιο 3, μελετώντας προβολικές και ενέσιμες αναλύσεις, αποδείξαμε ότι για κάθε πρότυπο υπάρχει πάντα μια προβολική και μια ενέσιμη ανάλυση. Το αποτέλεσμα αυτό, μας έδωσε την δυνατότητα να ορίσουμε παραγόμενους συναρτητές, και να μελετήσουμε προβολικές και ενέσιμες διαστάσεις προτύπων. Τώρα εξετάζουμε αν μπορούμε να σχηματίσουμε αναλύσεις από μία τυχαία κλάση προτύπων \mathcal{C} , αντί των κλάσεων των προβολικών και των ενέσιμων προτύπων.

Ορισμός 4.1.25. Μια **αριστερή \mathcal{C} -ανάλυση (left \mathcal{C} -resolution)** ενός αριστερού R -προτύπου M , είναι ένα σύμπλοκο (όχι απαραίτητα ακριβές),

$$\mathfrak{R} : \quad \cdots \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

όπου κάθε $C_i \in \mathcal{C}$, και έτσι ώστε το επαγόμενο σύμπλοκο

$$\text{Hom}_R(C, \mathfrak{R}) : \quad \cdots \longrightarrow \text{Hom}_R(C, C_1) \longrightarrow \text{Hom}_R(C, C_0) \longrightarrow \text{Hom}_R(C, M) \longrightarrow 0,$$

είναι ακριβές για κάθε $C \in \mathcal{C}$.

Μια **δεξιά \mathcal{C} -ανάλυση (right \mathcal{C} -resolution)** ενός αριστερού R -προτύπου M , είναι ένα σύμπλοκο (όχι απαραίτητα ακριβές),

$$\mathcal{J} : \quad 0 \longrightarrow M \longrightarrow C^0 \longrightarrow C^1 \longrightarrow \dots,$$

όπου κάθε $C^i \in \mathcal{C}$, και έτσι ώστε το επαγόμενο σύμπλοκο

$$\mathrm{Hom}_R(\mathcal{J}, C) : \quad \dots \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C^1, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C^0, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, C) \longrightarrow 0,$$

είναι ακριβές για κάθε $C \in \mathcal{C}$.

Παρατήρηση 4.1.26. Είναι εύκολο να δούμε ότι αν $\mathcal{C} = R\text{-Proj}$ είναι η κλάση των προβολικών αριστερών R -προτύπων, τότε μια αριστερή $R\text{-Proj}$ -ανάλυση ενός αριστερού R -προτύπου M , είναι ακριβώς μια προβολική ανάλυση του M , και αν $\mathcal{C} = R\text{-Inj}$ είναι η κλάση των ενέσιμων αριστερών R -προτύπων, τότε μια δεξιά $R\text{-Inj}$ -ανάλυση ενός αριστερού R -προτύπου M , είναι ακριβώς μια ενέσιμη ανάλυση του M .

Στην συνέχεια, μελετάμε εν συντομία αριστερές (δεξιές) \mathcal{C} -αναλύσεις προτύπων.

Ξεκινάμε δείχνοντας ότι η ύπαρξη αριστερών, αντίστοιχα δεξιών, \mathcal{C} -αναλύσεων για κάθε πρότυπο, είναι ισοδύναμη με το γεγονός ότι η κλάση \mathcal{C} είναι δεξιά, αντίστοιχα αριστερά, προσεγγίσιμη.

Πρόταση 4.1.27. Η κλάση \mathcal{C} είναι δεξιά προσεγγίσιμη, αν και μόνο αν, κάθε αριστερό R -πρότυπο έχει μια αριστερή \mathcal{C} -ανάλυση.

Απόδειξη. Έστω ότι κάθε αριστερό R -πρότυπο έχει μια αριστερή \mathcal{C} -ανάλυση. Θεωρούμε M ένα αριστερό R -πρότυπο και

$$\dots \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

μια αριστερή \mathcal{C} -ανάλυση του M . Τότε εξ ορισμού, η ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$\mathrm{Hom}_R(X, C_0) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(X, M) \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής για κάθε $X \in \mathcal{C}$. Επομένως, ο R -ομομορφισμός $C_0 \longrightarrow M$, είναι μία δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση του M , και άρα, η κλάση \mathcal{C} είναι δεξιά προσεγγίσιμη.

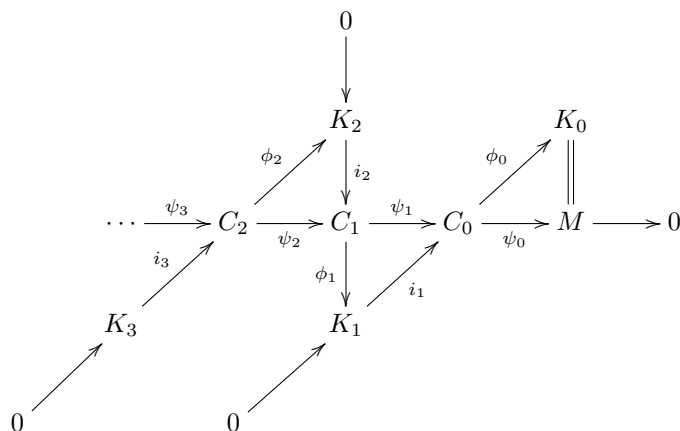
Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η κλάση \mathcal{C} είναι δεξιά προσεγγίσιμη, και έστω M ένα αριστερό R -πρότυπο. Τότε υπάρχει R -ομομορφισμός $\phi_0 : C_0 \longrightarrow M$, έτσι ώστε η ϕ_0 να είναι μια δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση του M . Αν θεωρήσουμε τον πυρήνα της ϕ_0 , $\mathrm{Ker} \phi_0$, τότε συμπεραίνουμε την ύπαρξη μιας δεξιάς \mathcal{C} -προσέγγισης, $\phi_1 : C_1 \longrightarrow \mathrm{Ker} \phi_0$, του $\mathrm{Ker} \phi_0$. Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία, για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$ μπορούμε επαγωγικά να κατασκευάσουμε τις ακριβείς ακολουθίες

$$0 \longrightarrow K_{n+1} \xrightarrow{i_{n+1}} C_n \xrightarrow{\phi_n} K_n, \quad (4.3)$$

όπου $K_0 = M$, $\phi_n : C_n \longrightarrow K_n$ είναι μια δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση του K_n για κάθε $n \geq 0$ και $K_{n+1} = \mathrm{Ker} \phi_n$. Ορίζουμε $\psi_0 = \phi_0 : C_0 \longrightarrow M$ και $\psi_n = i_n \circ \phi_n : C_n \longrightarrow C_{n-1}$ για κάθε $n > 0$. Τότε η ακολουθία αριστερών R -προτύπων

$$(C_\bullet) : \quad \dots \xrightarrow{\psi_3} C_2 \xrightarrow{\psi_2} C_1 \xrightarrow{\psi_1} C_0 \xrightarrow{\psi_0} M \longrightarrow 0,$$

είναι ένα σύμπλοκο στην $R\text{-Mod}$, αφού $\psi_n \circ \psi_{n+1} = i_n \circ \phi_n \circ i_{n+1} \circ \phi_{n+1} = 0$ για κάθε $n \geq 0$. Θεωρούμε τώρα το μεταθετικό διαγράμμα:



του οποίου κάθε στήλη και διαγώνια γραμμή είναι ακριβής ακολουθία. Η ακρίβεια κάθε στήλης και γραμμής του παραπάνω διαγράμματος, είναι απόρροια της ακρίβειας των ακολουθιών (4.3), για $n = 0, 1, 2, \dots$. Αν X είναι ένα οποιοδήποτε στοιχείο της κλάσης \mathcal{C} , τότε εφαρμόζοντας τον συναρτητή $\text{Hom}_R(X, -)$ στην ακολουθία (4.3), επάγονται για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$, οι σύντομες ακριβείς ακολουθίες

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(X, K_{n+1}) \xrightarrow{(i_{n+1})^*} \text{Hom}_R(X, C_n) \xrightarrow{(\phi_n)^*} \text{Hom}_R(X, K_n) \longrightarrow 0.$$

Η ακρίβεια τώρα, των παραπάνω ακολουθιών προκύπτει από το γεγονός ότι ο συναλλοίωτος συναρτητής $\text{Hom}_R(X, -)$ είναι αριστερά ακριβής, καθώς και από την υπόθεση ότι οι $\phi_n: C_n \longrightarrow K_n$ είναι δεξιές \mathcal{C} -προσεγγίσεις των K_n για κάθε $n \geq 0$. Έτσι, εφαρμόζοντας αυτή τη φορά τον συναρτητή $\text{Hom}_R(X, -)$ στο προηγούμενο διάγραμμα, εύκολα διαπιστώνουμε ότι το σύμπλοκο $\text{Hom}_R(X, C_\bullet)$ είναι ακριβές. Συνεπώς, το σύμπλοκο (C_\bullet) είναι μια αριστερή \mathcal{C} -ανάλυση του M . ■

Δυϊκά,

Πρόταση 4.1.28. Η κλάση \mathcal{C} είναι αριστερή προσεγγίσιμη, αν και μόνο αν, κάθε αριστερό R -πρότυπο έχει μια δεξιά \mathcal{C} -ανάλυση.

Απόδειξη. Κατά δυϊκό τρόπο με την απόδειξη της Πρότασης (4.1.27). ■

Παρατήρηση 4.1.29. Αν η κλάση \mathcal{C} είναι ελάχιστη δεξιά προσεγγίσιμη, και M είναι ένα οποιοδήποτε αριστερό R -πρότυπο, τότε η αριστερή \mathcal{C} -ανάλυση του M

$$\mathfrak{R}: \quad \cdots \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

μπορεί να κατασκευαστεί έτσι ώστε οι $C_0 \longrightarrow M$, $C_1 \longrightarrow \text{Ker}(C_0 \longrightarrow M)$, και $C_{i+1} \longrightarrow \text{Ker}(C_i \longrightarrow C_{i+1})$ για $i \geq 1$, να είναι ελάχιστες δεξιές προσεγγίσεις. Στην περίπτωση αυτή, το σύμπλοκο \mathfrak{R} καλείται μια **ελάχιστη αριστερή \mathcal{C} -ανάλυση (minimal left \mathcal{C} -resolution)** του M . Παρόμοια, αν η κλάση \mathcal{C} είναι ελάχιστη αριστερά προσεγγίσιμη, τότε μια **ελάχιστη δεξιά \mathcal{C} -ανάλυση (minimal right \mathcal{C} -resolution)** ενός αριστερού R -προτύπου M , μπορεί να κατασκευαστεί χρησιμοποιώντας ελάχιστες αριστερές \mathcal{C} -προσεγγίσεις.

Κλείνουμε την παρούσα ενότητα με τα ακόλουθα δύο αποτελέσματα. Θα παραλείψουμε τις αποδείξεις αυτών, καθώς προκύπτουν σχετικά παρόμοια με τα αντίστοιχα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 3.

Πρόταση 4.1.30. Έστω $f: M \rightarrow M'$ είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων, και θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_2 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & C_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & & \downarrow f & & \\ \cdots & \longrightarrow & C'_2 & \longrightarrow & C'_1 & \longrightarrow & C'_0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (4.4)$$

όπου η πρώτη γραμμή του είναι ένα σύμπλοκο με κάθε $C_n \in \mathcal{C}$, και η δεύτερη γραμμή του είναι μια αριστερή \mathcal{C} -ανάλυση του M' . Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Υπάρχουν ομομορφισμοί $f_n: C_n \rightarrow C'_n$ για κάθε $n \geq 0$, έτσι ώστε το διάγραμμα (4.4) να είναι μεταθετικό, και άρα ο μορφισμός f επάγει έναν μορφισμό συμπλόκων \mathbf{f}_\bullet .
2. Αν $\{g_n\}_{n \geq 0}$ είναι μια άληθη οικογένεια ομομορφισμών έτσι ώστε το διάγραμμα (4.4) να είναι μεταθετικό, τότε οι επαγόμενοι μορφισμοί συμπλόκων \mathbf{f}_\bullet και \mathbf{g}_\bullet είναι ομοτοπικοί.

Παρατήρηση 4.1.31. Υπάρχει και η δυϊκή εκδοχή της Πρότασης (4.1.30): Έστω $f: N \rightarrow \overline{N}$ ένας ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων, και θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & C^0 & \longrightarrow & C^1 & \longrightarrow & C^2 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f & & \downarrow f^0 & & \downarrow f^1 & & \downarrow f^2 & & \\ 0 & \longrightarrow & \overline{N} & \longrightarrow & \overline{C}^0 & \longrightarrow & \overline{C}^1 & \longrightarrow & \overline{C}^2 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

όπου η πρώτη γραμμή του είναι μια δεξιά \mathcal{C} -ανάλυση του N , και η δεύτερη γραμμή του είναι ένα συν-αλυσιδωτό σύμπλοκο με κάθε $\overline{C}^n \in \mathcal{C}$. Τότε υπάρχει οικογένεια ομομορφισμών αριστερών R -προτύπων $\{f^n: X^n \rightarrow \overline{X}^n\}_{n \geq 0}$ έτσι ώστε το προηγούμενο διάγραμμα να είναι μεταθετικό, και αν $\{g^n\}_{n \geq 0}$ είναι μια άλλη τέτοια οικογένεια, τότε οι επαγόμενοι μορφισμοί συμπλόκων \mathbf{f}_\bullet και \mathbf{g}_\bullet είναι ομοτοπικοί.

Πρόταση 4.1.32. (Horse Shoe Lemma) Υποθέτουμε ότι η κλάση \mathcal{C} είναι κλειστή σε πεπερασμένα ευθέα αθροίσματα, και θεωρούμε ένα σύμπλοκο $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ από αριστερά R -πρότυπα, έτσι ώστε η ακολουθία

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(C, M') \rightarrow \text{Hom}_R(C, M) \rightarrow \text{Hom}_R(C, M'') \rightarrow 0,$$

να είναι ακριβής για κάθε $C \in \mathcal{C}$. Αν

$$\cdots \rightarrow C'_1 \rightarrow C'_0 \rightarrow M' \rightarrow 0 \quad \& \quad \cdots \rightarrow C''_1 \rightarrow C''_0 \rightarrow M'' \rightarrow 0,$$

είναι αριστερές \mathcal{C} -αναλύσεις των M' και M'' αντίστοιχα, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα όπου η δεύτερη στήλη αυτού, είναι μια αριστερή \mathcal{C} -ανάλυση του M :

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C'_1 & \longrightarrow & C'_1 \oplus C''_1 & \longrightarrow & C''_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C'_0 & \longrightarrow & C'_0 \oplus C''_0 & \longrightarrow & C''_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Παρατήρηση 4.1.33. Ισχύει και η δυϊκή εκδοχή της Πρότασης (4.1.32), όπου ο συναρτητής $\text{Hom}_R(C, -)$ αντικαθίσταται με τον αντισυναλλοίωτο συναρτητή $\text{Hom}_R(-, C)$ και οι αριστερές \mathcal{C} -αναλύσεις αντικαθίστανται με δεξιές \mathcal{C} -αναλύσεις.

4.2 Ειδικές Προσεγγίσεις Προτύπων

Σκοπός της παρούσας ενότητας, είναι η μελέτη προσέγγισης προτύπων από τις κλάσεις $R\text{-Inj}$ και $R\text{-Proj}$, όπου η $R\text{-Inj}$ συμβολίζει την κλάση όλων των ενέσιμων αριστερών R -προτύπων, και η $R\text{-Proj}$ παριστάνει την κλάση όλων των προβολικών αριστερών R -προτύπων. Πιο ειδικά, στην ενότητα αυτή θα μας απασχολήσουν τα ερωτήματα:

Για τον τυχόν δακτύλιο με μονάδα R ,

1. είναι η κλάση $R\text{-Inj}$ (ελάχιστα) αριστερά ή (ελάχιστα) δεξιά προσεγγίσιμη;
2. είναι η κλάση $R\text{-Proj}$ (ελάχιστα) δεξιά ή (ελάχιστα) αριστερά προσεγγίσιμη;

Παρατήρηση 4.2.1. Χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση (4.1.16), και τον ορισμό των ενέσιμων R -προτύπων, συμπεραίνουμε ότι μια αριστερή $R\text{-Inj}$ -προσέγγιση ενός αριστερού R -προτύπου M , είναι ένας μονομορφισμός $f: M \rightarrow E$, όπου E είναι ένα ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο. Ως συνέπεια αυτού, και του γεγονότος ότι κάθε R -πρότυπο μπορεί να εμφυτευθεί σε ένα ενέσιμο R -πρότυπο, έπεται ότι η κλάση $R\text{-Inj}$ είναι αριστερά προσεγγίσιμη.

Ανάλογα, χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση (4.1.16), και τον ορισμό των προβολικών R -προτύπων, διαπιστώνουμε ότι μια δεξιά $R\text{-Proj}$ -προσέγγιση ενός αριστερού R -προτύπου M , είναι ένας επιμορφισμός $f: P \rightarrow M$, όπου P είναι ένα προβολικό αριστερό R -πρότυπο. Το αποτέλεσμα αυτό, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι κάθε R -πρότυπο είναι η ομομορφική εικόνα ενός προβολικού R -προτύπου, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η κλάση $R\text{-Proj}$ είναι δεξιά προσεγγίσιμη.

Λόγω της Παρατήρησης (4.2.1), τίθεται το ερώτημα αν η κλάση $R\text{-Inj}$ είναι ελάχιστα αριστερά προσεγγίσιμη και αντίστοιχα, αν η κλάση $R\text{-Proj}$ είναι ελάχιστα δεξιά προσεγγίσιμη. Πριν να δώσουμε την απάντηση στο ερώτημα αυτό, χρειαζόμαστε τους ακόλουθους ορισμούς:

Ορισμός 4.2.2. Έστω M ένα αριστερό R -πρότυπο και N ένα υποπρότυπο του M . Τότε το N καλείται **ουσιώδης (essential)** υποπρότυπο του M , αν για κάθε K υποπρότυπο του M έτσι ώστε $K \cap N = 0$, τότε $K = 0$.

Ο ακόλουθος ορισμός οφείλεται στους Eckmann-Schopf.

Ορισμός 4.2.3. Ένα ενέσιμο περίβλημα ή **injective hull** ενός αριστερού R -προτύπου M , είναι ένα ζεύγος (E, i) , όπου E είναι ένα ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο, και $i: M \rightarrow E$ είναι ένας μονομορφισμός, έτσι ώστε η εικόνα $\text{Im } i$, είναι ουσιώδης υποπρότυπο του E .

Παρατήρηση 4.2.4. Για κάθε αριστερό R -πρότυπο M , υπάρχει πάντα ένα ενέσιμο περίβλημα $i: M \rightarrow E$ του M . Στην περίπτωση αυτή, το E καθορίζεται μοναδικά από το M μέχρι ισομορφισμού, και τότε συνήθως, γράφουμε $E = E_R(M)$. Το αποτέλεσμα αυτό, οφείλεται στους Eckmann και Schopf, και για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στο [17, Chapter 3].

Στην επόμενη ενότητα έχοντας εισάγει κατάλληλα εργαλεία, θα αποδείξουμε το Θεώρημα των Eckmann-Schopf, για το οποίο προηγουμένως έγινε λόγος, χρησιμοποιώντας ωστόσο, μια διαφορετική προσέγγιση από εκείνη των Eckmann-Schopf.

Η επόμενη πρόταση, συνδέει την ελάχιστη αριστερή $R\text{-Inj}$ -προσέγγιση ενός R -προτύπου M , με ένα ενέσιμο περίβλημα του M .

Πρόταση 4.2.5. Έστω E ένα ενέσιμο R -πρότυπο και $i: M \rightarrow E$ ένας ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων. Τότε ο R -ομομορφισμός i είναι η ελάχιστη αριστερή $R\text{-Inj}$ -προσέγγιση του M , αν και μόνο αν, ο i είναι ένα ενέσιμο περίβλημα του M .

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο ομομορφισμός $i: M \rightarrow E$ είναι η ελάχιστη αριστερή R -Inj-προσέγγιση του M . Τότε η Παρατήρηση (4.1.16), μας δίνει ότι ο i είναι μονομορφισμός. Για να αποδείξουμε λοιπόν ότι ο R -ομομορφισμός i , είναι ένα ενέσιμο περίβλημα του M , αρκεί να δείξουμε ότι η εικόνα $\text{Im } i$ είναι ουσιώδες υποπρότυπο του E . Έτσι, θεωρούμε ένα υποπρότυπο K του E , με την ιδιότητα $K \cap \text{Im } i = 0$. Τότε προφανώς $K + \text{Im } i = K \oplus \text{Im } i$, δηλαδή, κάθε στοιχείο x του R -πρότυπου $K + \text{Im } i$, γράφεται στη μορφή $x = k + i(m)$ για ένα μοναδικό $k \in K$ και για ένα μοναδικό $m \in M$. Ορίζουμε

$$f: K + \text{Im } i \rightarrow E, \quad k + i(m) \mapsto i(m), \quad \forall k \in K \text{ \& \& } \forall m \in M.$$

Λόγω της μοναδικότητας της γραφής κάθε στοιχείου του $K + \text{Im } i$, και του τρόπου που ορίστηκε η απεικόνιση f , οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η f είναι ένας καλώς ορισμένος R -ομομορφισμός. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι $f(K) = 0$. Έστω τώρα $j: K + \text{Im } i \rightarrow E$, η φυσική έγκλειση του υποπρότυπου $K + \text{Im } i$ στο R -πρότυπο E . Επειδή το αριστερό R -πρότυπο E είναι ενέσιμο, υπάρχει ένας ομομορφισμός αριστερών R -πρότυπων $f': E \rightarrow E$ έτσι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & K + \text{Im } i & \xrightarrow{j} & E \\ & & \downarrow f & \searrow f' & \\ & & E & & \end{array}$$

να είναι μεταθετικό. Εύκολα προκύπτει ότι $f' \circ i = i$. Συνεπώς, αφού ο ομομορφισμός $i: M \rightarrow E$ είναι η ελάχιστη αριστερή R -Inj-προσέγγιση του M , έπεται ότι ο ενδομορφισμός $f': E \rightarrow E$ είναι ένας αυτομορφισμός του E . Όμως, αν $k \in K$, τότε $0 = f(k) = (f' \circ j)(k) = f'(j(k))$, δηλαδή $j(k) \in \text{Ker } f' = 0$. Έτσι τελικά, για κάθε $k \in K$ έχουμε ότι $k \in \text{Ker } j = 0$, και άρα, ότι $K = 0$. Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι η εικόνα $\text{Im } i$ είναι ουσιώδες υποπρότυπο του E , όπως επιθυμούσαμε.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ο ομομορφισμός $i: M \rightarrow E$ είναι ένα ενέσιμο περίβλημα του M . Δηλαδή, ο i είναι μονομορφισμός, και η εικόνα $\text{Im } i$ είναι ουσιώδες υποπρότυπο του E . Τότε η Παρατήρηση (4.2.1), μας εξασφαλίζει ότι ο ομομορφισμός i είναι μια αριστερή R -Inj-προσέγγιση του M . Για να αποδείξουμε ότι ο i είναι η ελάχιστη αριστερή R -Inj-προσέγγιση του M , χρειάζεται να δείξουμε ότι ο i είναι αριστερά ελάχιστος. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε έναν ενδομορφισμό $f: E \rightarrow E$, με την ιδιότητα $f \circ i = i$. Έστω $e \in \text{Ker } f$, δηλαδή $f(e) = 0$. Θεωρούμε τώρα το υποπρότυπο $\text{Im } i \cap Re$ του E , και ένα τυχαίο στοιχείο x αυτού. Τότε $x = i(m) = re$, για κάποιο $m \in M$ και $r \in R$ και επιπλέον,

$$x = i(m) = f \circ i(m) = f(re) = rf(e) = 0.$$

Άρα, $\text{Im } i \cap Re = 0$. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, καθώς και την υπόθεση ότι η εικόνα $\text{Im } i$ είναι ουσιώδες υποπρότυπο του E , οδηγούμαστε στην ισότητα $Re = 0$. Τότε έχουμε ότι $0 = 1_{Re} = e$, και κατ' επέκταση, ότι ο ενδομορφισμός f είναι μονομορφισμός. Έτσι, το πρώτο Θεώρημα ισομορφισμών για R -πρότυπα, μας δίνει ότι $E \cong f(E)$. Επειδή η κλάση R -Inj είναι κλειστή σε ισομορφισμούς, παίρνουμε ότι το αριστερό R -πρότυπο $f(E)$ είναι ενέσιμο. Συνεπώς, από την Πρόταση (3.2.3), υπάρχει ένα υποπρότυπο K του E , έτσι ώστε $E = K + f(E)$ και $K \cap f(E) = 0$. Παρατηρώντας ότι

$$K \cap \text{Im } i = K \cap i(M) = K \cap (f \circ i)(M) \subseteq K \cap f(E) = 0,$$

και χρησιμοποιώντας ξανά την υπόθεση ότι η εικόνα $\text{Im } i$ είναι ουσιώδες υποπρότυπο του E , έπεται ότι $K = 0$. Επομένως, προκύπτει ότι

$$E = K + f(E) = 0 + f(E) = f(E),$$

δηλαδή, ότι ο μονομορφισμός f του E είναι και επιμορφισμός. Άρα, ο ομομορφισμός i είναι αριστερά ελάχιστος. ■

Είμαστε σε θέση τώρα, να απαντήσουμε το πρώτο σκέλος του προηγούμενου ερωτήματος.

Πόρισμα 4.2.6. Η κλάση $R\text{-Inj}$ είναι ελάχιστη αριστερά προσεγγίσιμη (enveloping).

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι μια απλή εφαρμογή της Παρατήρησης (4.2.4) και της Πρότασης (4.2.5). ■

Σε αντιδιαστολή με την κλάση $R\text{-Inj}$, η κλάση $R\text{-Proj}$ είναι λιγότερο ομαλή. Όπως θα δούμε στην συνέχεια, η κλάση $R\text{-Proj}$ γενικά, δεν είναι ελάχιστη δεξιά προσεγγίσιμη. Για την απόδειξη του ισχυρισμού αυτού, χρειαζόμαστε τον ακόλουθο ορισμό, ο οποίος εισήχθη από τον Bass.

Ορισμός 4.2.7. Έστω M ένα αριστερό R -πρότυπο και N ένα υποπρότυπο του M . Τότε το N καλείται **μικρό (small ή superfluous)** υποπρότυπο του M , αν για κάθε K υποπρότυπο του M έτσι ώστε $K + N = M$, τότε $K = M$.

Ο Bass όρισε και μελέτησε τις προβολικές κάλυψεις, κατά δυϊκό τρόπο με τα ενέσιμα περιβλήματα.

Ορισμός 4.2.8. Μια **προβολική κάλυψη** του αριστερού R -προτύπου M ορίζεται να είναι ένα ζεύγος (P, π) , όπου P είναι ένα προβολικό αριστερό R -πρότυπο και $\pi : P \rightarrow M$ είναι ένας επιμορφισμός, έτσι ώστε ο πυρήνας $\text{Ker } \pi$ είναι μικρό υποπρότυπο του P .

Η ακόλουθη πρόταση είναι δυϊκή της Πρότασης (4.2.5), και συνδέει την ελάχιστη δεξιά $R\text{-Proj}$ -προσέγγιση ενός R -προτύπου M , με μια (Bass) προβολική κάλυψη του M .

Πρόταση 4.2.9. Έστω P ένα προβολικό R -πρότυπο και $\pi : P \rightarrow M$ ένας ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων. Τότε ο R -ομομορφισμός π είναι η ελάχιστη δεξιά $R\text{-Proj}$ -προσέγγιση του M , αν και μόνο αν, ο π είναι μια προβολική κάλυψη του M .

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο ομομορφισμός $\pi : P \rightarrow M$ είναι η ελάχιστη δεξιά $R\text{-Proj}$ -προσέγγιση του M . Τότε η Παρατήρηση (4.1.16), μας δίνει ότι η π είναι επιμορφισμός. Για να αποδείξουμε ότι η π είναι μια προβολική κάλυψη του M , αρκεί να δείξουμε ότι ο πυρήνας $\text{Ker } \pi$ είναι μικρό υποπρότυπο του P . Έστω λοιπόν ένα υποπρότυπο L του P , με την ιδιότητα $\text{Ker } \pi + L = P$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $L = P$. Θεωρούμε τη φυσική έγκλειση $i_L : L \rightarrow P$ του υποπρότυπου L του P , και τον R -ομομορφισμό $\pi|_L : L \rightarrow M$ έτσι ώστε $\pi \circ i_L = \pi|_L$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι ο περιορισμός $\pi|_L$ της π , είναι επίσης επιμορφισμός. Συνεπώς, επειδή το P είναι ένα προβολικό R -πρότυπο, υπάρχει R -ομομορφισμός $f : P \rightarrow L$ έτσι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ f \swarrow & \downarrow \pi & \\ L & \xrightarrow{\pi|_L} & M \longrightarrow 0 \end{array}$$

να είναι μεταθετικό. Έτσι, λόγω της ισότητας $\pi \circ i_L = \pi|_L$, και λόγω της μεταθετικότητας του προηγούμενου διαγράμματος, επάγεται το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα :

$$\begin{array}{ccccc} P & \xrightarrow{f} & L & \xrightarrow{i_L} & P \\ & \searrow \pi & \downarrow \pi|_L & \swarrow \pi & \\ & & M & & \end{array}$$

από το οποίο έχουμε ότι $\pi \circ i_L \circ f = \pi$. Επομένως, επειδή η π είναι η ελάχιστη δεξιά $R\text{-Proj}$ -προσέγγιση του M , συμπεραίνουμε ότι ο ενδομορφισμός $i_L \circ f : P \rightarrow P$ είναι ένας αυτομορφισμός του P . Συνεπώς, ο μονομορφισμός i_L είναι και επιμορφισμός. Άρα, η $i_L : L \rightarrow P$ είναι ένας R -ισομορφισμός, και κατ' επέκταση, $L = P$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η $\pi : P \rightarrow M$ είναι μια προβολική κάλυψη του M . Δηλαδή, η π είναι επιμορφισμός και ο πυρήνας $\text{Ker } \pi$ είναι μικρό υποπρότυπο του P . Τότε η Παρατήρηση (4.2.1), μας εξασφαλίζει ότι η π είναι μια δεξιά R -Proj-προσέγγιση του M . Θεωρούμε έναν τυχαίο ενδομορφισμό $f : P \rightarrow P$ με την ιδιότητα $\pi \circ f = \pi$, με σκοπό να αποδείξουμε ότι ο ομομορφισμός π είναι δεξιά ελάχιστος. Παρατηρούμε ότι αν $x \in P$, τότε το x μπορεί να γραφεί ως $x = x - f(x) + f(x)$, με το στοιχείο $x - f(x)$ να ανήκει στον πυρήνα $\text{Ker } \pi$. Δηλαδή, κάθε στοιχείο του R -πρότυπου P ανήκει στο υποπρότυπο $\text{Ker } \pi + f(P)$ του P . Ως συνέπεια αυτού, έπεται ότι $P = \text{Ker } \pi + f(P)$, και επιπρόσθετα, αφού ο πυρήνας $\text{Ker } \pi$ είναι μικρό υποπρότυπο του P , προκύπτει ότι $P = f(P)$, δηλαδή, ότι ο f είναι επιμορφισμός. Θεωρούμε τώρα τη σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \rightarrow \text{Ker } f \rightarrow P \xrightarrow{f} P \rightarrow 0,$$

η οποία σύμφωνα με την Πρόταση (3.2.27), είναι διασπασίμη. Επομένως, υπάρχει ενδομορφισμός $g : P \rightarrow P$, ο οποίος πληρεί την ιδιότητα $f \circ g = \text{Id}_P$. Προφανώς ο g είναι μονομορφισμός. Παρατηρούμε ότι αν $x \in P$, τότε το x μπορεί να γραφεί ως $x = x - (g \circ f)(x) + (g \circ f)(x)$, με το στοιχείο $x - (g \circ f)(x)$ να ανήκει στον πυρήνα $\text{Ker } f$. Δηλαδή, κάθε στοιχείο του P ανήκει στο υποπρότυπο $\text{Ker } f + g(P)$ του P , και συνεπώς, καταλήγουμε ότι $P = \text{Ker } f + g(P)$. Η ισότητα $\pi \circ f = \pi$ επάγει το γεγονός ότι $\text{Ker } f \subseteq \text{Ker } \pi$. Επιπλέον, εύκολα αποδεικνύεται ότι ο πυρήνας $\text{Ker } f$ είναι μικρό υποπρότυπο του P . Έτσι τελικά, έχουμε ότι $g(P) = P$, δηλαδή ο μονομορφισμός g είναι και επιμορφισμός. Άρα, ο g είναι ένας αυτομορφισμός του P , έτσι ώστε $f \circ g = \text{Id}_P$ ή $f = \text{Id}_P \circ g^{-1}$. Επομένως, ο ενδομορφισμός f του P είναι αυτομορφισμός, και κατ' επέκταση, ο ομομορφισμός π είναι δεξιά ελάχιστος. Εξ ορισμού λοιπόν, έπεται ότι ο ομομορφισμός π είναι η ελάχιστη δεξιά R -Proj-προσέγγιση του M . ■

Ο Bass απέδειξε το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο χαρακτηρίζει τους δακτυλίους R για τους οποίους η κλάση R -Proj είναι ελάχιστη δεξιά προσεγγίσιμη.

Θεώρημα 4.2.10. Για έναν δακτύλιο R οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

1. Κάθε αριστερό R -πρότυπο έχει μια προβολική κάλυψη.
2. Κάθε επίπεδο αριστερό R -πρότυπο είναι προβολικό.
3. Κάθε ευθύ όριο από προβολικά αριστερά R -πρότυπα είναι επίσης προβολικό.
4. Ο R ικανοποιεί τη φθίνουσα συνθήκη αλυσίδας για κύρια δεξιά ιδεώδη.

Αν ο δακτύλιος R ικανοποιεί τις παραπάνω ισοδύναμες συνθήκες, τότε καλείται **αριστερά τέλειος (left perfect)**.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [2, Theorem 28.4]. ■

Συνοψίζουμε τα προηγούμενα αποτελέσματα ως εξής:

- Υπεράνω τυχόντος δακτυλίου R , κάθε αριστερό R -πρότυπο είναι υποπρότυπο ενός μοναδικά καθορισμένου ελάχιστου ενέσιμου αριστερού R -πρότυπου.
- Υπεράνω ενός αριστερά τέλειου δακτυλίου R , κάθε αριστερό R -πρότυπο είναι η ομομορφική εικόνα ενός μοναδικά καθορισμένου ελάχιστου προβολικού αριστερού R -πρότυπου.

Αν R είναι ένας αριστερά τέλειος δακτύλιος, και R -Flat είναι η κλάση όλων των επίπεδων αριστερών R -πρότυπων, τότε το Θεώρημα (4.2.10), μας εξασφαλίζει ότι η κλάση R -Flat είναι ελάχιστα δεξιά προσεγγίσιμη. Με βάση το αποτέλεσμα αυτό, και μετά την μελέτη ειδικών περιπτώσεων δακτυλίων υπεράνω των οποίων κάθε πρότυπο μπορεί να προσεγγισθεί με ελάχιστο τρόπο από ένα μοναδικά καθορισμένο επίπεδο πρότυπο, ο E. Enochs το 1981, διατύπωσε στο [26] την εικασία της επίπεδης κάλυψης: υπεράνω τυχόντος δακτυλίου R , κάθε πρότυπο έχει ελάχιστη δεξιά R -Flat-προσέγγιση. Σημειώνουμε, αν και δε θα μας απασχολήσει στην συνέχεια της διατριβής,

ότι το 2001, η εικασία αποδείχθηκε πλήρως, ταυτόχρονα και ανεξάρτητα, από τους L. Bican, R. El. Bashir και E. Enochs, δεξ [15].

Επικεντρωνόμαστε τώρα σε (ελάχιστες) δεξιές R -Inj-προσεγγίσεις και σε (ελάχιστες) αριστερές R -Proj-προσεγγίσεις προτύπων. Γενικά, η κλάση R -Inj δεν είναι (ελάχιστα) δεξιά προσεγγίσιμη, και η κλάση R -Proj δεν είναι (ελάχιστα) αριστερά προσεγγίσιμη. Έτσι, η προσοχή μας στρέφεται στην αναζήτηση δακτυλίων R , υπεράνω των οποίων η κλάση R -Inj είναι ελάχιστα δεξιά προσεγγίσιμη, και η κλάση R -Proj είναι ελάχιστα αριστερά προσεγγίσιμη. Με άλλα λόγια, εξετάζουμε τα ερωτήματα:

1. Για ποιους δακτυλίους R , η κλάση R -Inj είναι (ελάχιστα) δεξιά προσεγγίσιμη;
2. Για ποιους δακτυλίους R , η κλάση R -Proj είναι (ελάχιστα) αριστερά προσεγγίσιμη;

Υπενθυμίζουμε ότι σύμφωνα με το Θεώρημα (1.3.17) του Κεφαλαίου 1, ένας δακτύλιος της Noether χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι κάθε ενέσιμο πρότυπο υπεράνω αυτού, γράφεται ως ένα ευθύ άθροισμα από μη αναλύσιμα ενέσιμα πρότυπα. Επιπλέον, όπως προκύπτει από την Παρατήρηση (1.3.18), η κλάση ισομορφίας των αντιπροσώπων των μη αναλύσιμων ενέσιμων προτύπων σχηματίζει ένα σύνολο.

Πρόταση 4.2.11. *Για έναν δακτύλιο R , οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

1. Ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether.
2. Η κλάση R -Inj των ενέσιμων αριστερών R -προτύπων είναι δεξιά προσεγγίσιμη.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether, και έστω $X = \{E_i, \mid i \in I\}$ το σύνολο των αντιπροσώπων των κλάσεων ισομορφίας των μη-αναλύσιμων ενέσιμων αριστερών R -προτύπων. Τότε κάθε ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο γράφεται ως ένα ευθύ άθροισμα προτύπων από την οικογένεια των $E_i \in X$. Επομένως, για ένα αριστερό R -πρότυπο M , ένας ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων $\phi: E \rightarrow M$ όπου E είναι ένα ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο, θα είναι μια δεξιά R -Inj-προσέγγιση του M , αν για κάθε ομομορφισμό αριστερών R -προτύπων $\phi_i: E_i \rightarrow M$ για $i \in I$ και για $E_i \in X$, υπάρχει ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων $\kappa_i: E_i \rightarrow E$ για $i \in I$, έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} & E_i & \\ \exists \kappa_i \swarrow & & \downarrow \forall \phi_i \\ E & \xrightarrow{\phi} & M \end{array}$$

να είναι μεταθετικό. Για $E_i \in X$, θέτουμε $Y_i = \text{Hom}_R(E_i, M)$ για κάθε $i \in I$, και θεωρούμε το ευθύ άθροισμα από Y_i κόπτες του E_i , $E_i^{(Y_i)}$. Για κάθε $i \in I$, ορίζουμε ομομορφισμό αριστερών R -προτύπων

$$g_i: E_i^{(Y_i)} \rightarrow M, \quad (e_{\phi_i}^i)_{\phi_i \in Y_i} \mapsto \sum_{\phi_i \in Y_i} \phi_i(e_{\phi_i}^i).$$

Τότε κάθε ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων $\phi_i: E_i \rightarrow M$ για $i \in I$, παραγοντοποιείται ως το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} & E_i & \\ \exists \kappa_i \swarrow & & \downarrow \forall \phi_i \\ E_i^{(Y_i)} & \xrightarrow{g_i} & M \end{array}$$

όπου ο ομομορφισμός κ_i για $i \in I$, απεικονίζει το E_i στην ϕ_i συνιστώσα του $E_i^{(Y_i)}$. Θέτουμε $E = \bigoplus_{E_i \in X} E_i^{(Y_i)}$, και έστω $\{\lambda_{E_i}: E_i^{(Y_i)} \rightarrow E\}_{E_i \in X}$ η οικογένεια των κανονικών εγκλεισεων. Τότε, επειδή ο R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether, έπεται ότι το R -πρότυπο E είναι ενέσιμο.

Από την καθολική ιδιότητα του ευθέος αθροίσματος, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων $\phi: E \longrightarrow M$, έτσι ώστε το διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} E_i^{(Y_i)} & \xrightarrow{\lambda_{E_i}} & E \\ \forall g_i \downarrow & \swarrow \exists! \phi & \\ & & M \end{array}$$

Αν $\phi_i: E_i \longrightarrow M$ για $i \in I$ είναι ένας οποιοσδήποτε ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων, τότε θέτοντας $\rho_i = \lambda_{E_i} \circ \kappa_i$ για κάθε $E_i \in X$, επαγεται το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} & & E_i \\ \exists \rho_i \swarrow & & \downarrow \forall \phi_i \\ E & \xrightarrow{\phi} & M \end{array}$$

Συνεπώς, ο ομομορφισμός ϕ είναι μια δεξιά R -Inj-προσέγγιση του M , και άρα, η κλάση R -Inj είναι δεξιά προσεγγίσιμη.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι κάθε αριστερό R -πρότυπο έχει μια δεξιά R -Inj-προσέγγιση. Για να αποδείξουμε ότι ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether, αρκεί να δείξουμε ότι το ευθύ άθροισμα από ενέσιμα αριστερά R -πρότυπα, είναι επίσης ένα ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο. Έστω λοιπόν $(E_i)_{i \in I}$ μία οικογένεια από ενέσιμα αριστερά R -πρότυπα. Η υπόθεση μας δίνει μια δεξιά R -Inj-προσέγγιση $\phi: E \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} E_i$ του $\bigoplus_{i \in I} E_i$. Επειδή κάθε E_i για $i \in I$ είναι ενέσιμο, και ϕ είναι μια R -Inj-προσέγγιση του $\bigoplus_{i \in I} E_i$, υπάρχει ένας ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων $f_i: E_i \longrightarrow E$ για $i \in I$, έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} & & E_i \\ \exists f_i \swarrow & & \downarrow k_i \\ E & \xrightarrow{\phi} & \bigoplus_{i \in I} E_i \end{array}$$

όπου k_i είναι η κανονική έγκλειση για κάθε $i \in I$. Τότε από την καθολική ιδιότητα του ευθέος αθροίσματος, για κάθε $i \in I$, παίρνουμε το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} E_i & \xrightarrow{k_i} & \bigoplus E_i \\ f_i \downarrow & \swarrow \exists! \mu & \\ E & & \end{array}$$

Η μεταθετικότητα των δύο προηγούμενων διαγραμμάτων, μας εξασφαλίζει ότι ο μ είναι ο μοναδικός ομομορφισμός τέτοιος ώστε

$$f_i = \mu \circ k_i = \mu \circ \phi \circ f_i,$$

για κάθε $i \in I$. Επομένως, έπεται ότι $\mu \circ \phi = \text{Id}_E$, και κατ' επέκταση, ότι ο μ είναι διασπασίμος επιμορφισμός. Άρα, το αριστερό R -πρότυπο $\bigoplus E_i$ είναι ενέσιμο, ως ευθύ προσθετός του ενέσιμου αριστερού R -προτύπου E . ■

Μια ισχυρότερη εκδοχή της Πρότασης (4.2.11), είναι το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 4.2.12. *Ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether, αν και μόνο αν, η κλάση R -Inj των ενέσιμων αριστερών R -προτύπων είναι ελάχιστη δεξιά προσεγγίσιμη.*

Απόδειξη. Αν ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether, τότε το Θεώρημα (3.2.16) μας εξασφαλίζει ότι η κλάση $R\text{-Inj}$ είναι κλειστή στα ευθέα όρια. Επιπλέον, η Πρόταση (4.2.11) μας δίνει ότι η κλάση $R\text{-Inj}$ είναι δεξιά προσεγγίσιμη. Συνεπώς, έπεται ότι η κλάση $R\text{-Inj}$ είναι ελάχιστα δεξιά προσεγγίσιμη, δεξ *Θεώρημα* (4.3.7). Αν η κλάση $R\text{-Inj}$ είναι ελάχιστα δεξιά προσεγγίσιμη, τότε προφανώς είναι και δεξιά προσεγγίσιμη. Χρησιμοποιώντας λοιπόν την Πρόταση (4.2.11), παίρνουμε ότι ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether. ■

Πριν χαρακτηρίσουμε τους δακτυλίους για τους οποίους η κλάση των προβολικών προτύπων είναι ελάχιστα αριστερά προσεγγίσιμη, χρειαζόμαστε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 4.2.13. Ένας δακτύλιος R καλείται **αριστερά συναφής (left coherent)**, αν κάθε πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό ιδεώδες του R είναι πεπερασμένα παραστάσιμο.

Ανάλογα ορίζεται ένας δακτύλιος **δεξιά συναφής (right coherent)**.

Παρατήρηση 4.2.14. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι υπεράνω ενός αριστερού δακτυλίου της Noether R , οι έννοιες «πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό R -πρότυπο» και «πεπερασμένα παραστάσιμο αριστερό R -πρότυπο» είναι ισοδύναμες, έπεται ότι κάθε αριστερός δακτύλιος της Noether είναι αριστερά συναφής.

Πρόταση 4.2.15. Η κλάση $R\text{-Proj}$ των προβολικών αριστερών R -προτύπων είναι (ελάχιστα) αριστερά προσεγγίσιμη, αν και μόνο αν, ο δακτύλιος R είναι αριστερά τέλειος και δεξιά συναφής.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [5, Proposition 3.5]. ■

Ορισμός 4.2.16. Ένας δακτύλιος R καλείται **αριστερός (δεξιός) δακτύλιος του Artin (left (right) artinian ring)**, αν κάθε φθίνουσα αλυσίδα αριστερών (δεξιών) ιδεωδών του R σταματά.

Καλούμε έναν αριστερό και δεξιό δακτύλιο δακτύλιο του Artin, δακτύλιο του Artin.

Για τους δακτυλίους του Artin ισχύει το ακόλουθο Θεώρημα, το οποίο προκύπτει από τα Θεωρήματα (4.2.10), (4.2.11), (4.2.12), και ένα αποτέλεσμα του Stenstrom [55, Proposition VIII.5.1].

Θεώρημα 4.2.17. Ένας δακτύλιος R είναι δεξιός δακτύλιος του Artin αν και μόνον αν η κλάση $R\text{-Proj}$ των προβολικών αριστερών R -προτύπων είναι (ελάχιστα) αριστερά προσεγγίσιμη και η κλάση $\text{Inj-}R$ των ενέσιμων δεξιών R -προτύπων είναι (ελάχιστα) δεξιά προσεγγίσιμη.

Επομένως ο δακτύλιος R είναι (δεξιός και αριστερός) δακτύλιος του Artin αν και μόνον αν οι κλάσεις προτύπων

$$R\text{-Proj}, \quad R\text{-Inj}, \quad \text{Proj-}R, \quad \text{Inj-}R$$

είναι (ελάχιστα) δεξιά και αριστερά προσεγγίσιμες.

Ως συνέπεια έχουμε το ακόλουθο Πόρισμα του Chase [18, Theorem 3.4].

Πόρισμα 4.2.18. Αν R είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος, τότε η κλάση $R\text{-Proj}$ είναι (ελάχιστα) αριστερά προσεγγίσιμη, αν και μόνο αν, ο R είναι δακτύλιος του Artin.

Συνοψίζοντας, στην παρούσα ενότητα είδαμε ότι:

- Η κλάση $R\text{-Inj}$ των ενέσιμων αριστερών R -προτύπων είναι ελάχιστη αριστερά προσεγγίσιμη (enveloping).
- Η κλάση $R\text{-Inj}$ των ενέσιμων αριστερών R -προτύπων είναι ελάχιστα δεξιά προσεγγίσιμη (covering), αν και μόνο αν, ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether.
- Η κλάση $R\text{-Proj}$ των προβολικών αριστερών R -προτύπων είναι δεξιά προσεγγίσιμη (precovering).
- Η κλάση $R\text{-Proj}$ των προβολικών αριστερών R -προτύπων είναι ελάχιστα δεξιά προσεγγίσιμη (covering), αν και μόνο αν, ο δακτύλιος R είναι αριστερά τέλειος.

- Η κλάση $R\text{-Proj}$ των προβολικών αριστερών R -προτύπων είναι ελάχιστα αριστερά προσεγγίσιμη (enveloping), αν και μόνο αν, ο δακτύλιος R είναι αριστερά τέλειος και δεξιά συναφής.
- Για έναν μεταθετικό δακτύλιο R , η κλάση $R\text{-Proj}$ των προβολικών αριστερών R -προτύπων είναι ελάχιστα αριστερά προσεγγίσιμη (enveloping), αν και μόνο αν, ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος του Artin.
- Ο δακτύλιος R είναι (δεξιός και αριστερός) δακτύλιος του Artin αν και μόνον αν οι κλάσεις προτύπων $R\text{-Proj}$, $R\text{-Inj}$, $\text{Proj-}R$ και $\text{Inj-}R$ είναι (ελάχιστα) δεξιά και αριστερά προσεγγίσιμες.

4.3 Θεμελιώδη Θεωρήματα

Θεωρώντας έναν προσηταιριστικό δακτύλιο με μονάδα R , και μια κλάση αριστερών R -προτύπων \mathcal{C} , ένα ενδιαφέρον ερώτημα το οποίο ανακύπτει, είναι αν η κλάση αυτή, είναι ελάχιστα αριστερά ή ελάχιστα δεξιά προσεγγίσιμη. Όπως έχουμε ήδη διαπιστώσει, η ύπαρξη ελάχιστων αριστερών ή ελάχιστων δεξιών \mathcal{C} -προσεγγίσεων εξαρτάται από τη δομή της κλάσης \mathcal{C} . Στην ενότητα αυτή, διατυπώνουμε ικανές συνθήκες οι οποίες μας εξασφαλίζουν την ύπαρξη ελάχιστων προσεγγίσεων, χρησιμοποιώντας την έννοια του Ext-γεννήτορα ως βασικό εργαλείο.

Από τώρα και στο εξής, συμβολίζουμε με \mathcal{C} μια κλάση από αριστερά R -πρότυπα.

Ορισμός 4.3.1. Έστω M ένα αριστερό R -πρότυπο. Μία επέκταση

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow G \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

με $C \in \mathcal{C}$ καλείται **Ext-γεννήτορας** για την κλάση επεκτάσεων $\text{Ext}(\mathcal{C}, M)$, αν για κάθε επέκταση

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow G' \longrightarrow C' \longrightarrow 0$$

με $C' \in \mathcal{C}$, υπάρχουν R -ομομορφισμοί $f: G' \longrightarrow G$ και $g: C' \longrightarrow C$, έτσι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow f & & \downarrow g & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & G & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

να είναι μεταθετικό.

Επιπλέον, ένας Ext-γεννήτορας για την κλάση επεκτάσεων $\text{Ext}(\mathcal{C}, M)$ καλείται **ελάχιστος**, αν κάθε μεταθετικό διάγραμμα της μορφής:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & G & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow f & & \downarrow g & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & G & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

μπορεί να συμπληρωθεί μόνο από αυτομορφισμούς.

Παρατήρηση 4.3.2. Αν $0 \longrightarrow M \longrightarrow G \longrightarrow C \longrightarrow 0$ είναι ένας Ext-γεννήτορας για την κλάση επεκτάσεων $\text{Ext}(\mathcal{C}, M)$ και

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & G & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow f & & \downarrow g & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

είναι ένα μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές και $C' \in \mathcal{C}$, τότε η δεύτερη γραμμή του προηγούμενου διαγράμματος είναι επίσης ένας Ext-γεννήτορας για την κλάση επεκτάσεων $\text{Ext}(\mathcal{C}, M)$.

Παράδειγμα 4.3.3. Αν $\mathcal{M} = R\text{-Mod}$ είναι η κατηγορία των αριστερών R -προτύπων, και M είναι ένα αριστερό R -πρότυπο, τότε οποιαδήποτε σύντομη ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

όπου E είναι ένα ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο, επάγει έναν Ext-γεννήτορας για την κλάση επεκτάσεων $\text{Ext}(\mathcal{M}, M)$. Στην περίπτωση στην οποία ο R -ομομορφισμός $M \longrightarrow E$ είναι η ελάχιστη αριστερή ενέσιμη προσέγγιση του M , τότε ο Ext-γεννήτορας $0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow C \longrightarrow 0$ είναι ελάχιστος για την κλάση επεκτάσεων $\text{Ext}(\mathcal{M}, M)$.

Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε πότε υπάρχει ένας Ext-γεννήτορας και πότε ένας ελάχιστος Ext-γεννήτορας, για μια δοθείσα κλάση \mathcal{J} από R -πρότυπα και για ένα δοθέν R -πρότυπο M . Ο λόγος, όπως θα διαπιστώσουμε και στη συνέχεια, είναι ότι η ύπαρξη ενός Ext-γεννήτορα για την κλάση επεκτάσεων $\text{Ext}(\mathcal{J}, M)$ συνδέεται με την ύπαρξη μιας αριστερής $\mathcal{J}^{\perp 1}$ -προσέγγισης του M , ενώ η ύπαρξη ενός ελάχιστου Ext-γεννήτορα για την κλάση επεκτάσεων $\text{Ext}(\mathcal{J}, M)$ συνδέεται με την ύπαρξη μιας ελάχιστης αριστερής $\mathcal{J}^{\perp 1}$ -προσέγγισης του M .

Πρόταση 4.3.4. Υποθέτουμε ότι η κλάση \mathcal{C} είναι κλειστή στις επεκτάσεις, και ότι η επέκταση $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ είναι ένας ελάχιστος Ext-γεννήτορας για την κλάση επεκτάσεων $\text{Ext}(\mathcal{C}, M)$. Τότε $B \in \mathcal{C}^{\perp 1}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα τυχαίο στοιχείο C' της κλάσης \mathcal{C} , με σκοπό να αποδείξουμε ότι το R -πρότυπο B είναι στοιχείο της κλάσης $\mathcal{C}^{\perp 1}$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $\text{Ext}_R^1(C', B) = 0$, ή ισοδύναμα, ότι κάθε επέκταση

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{k} X \xrightarrow{h} C' \longrightarrow 0, \quad (4.5)$$

του B από το C' , διασπάται. Θεωρώντας τώρα το pushout P του διαγράμματος:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\beta} & C \\ \downarrow k & & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{\rho} & P \end{array}$$

οδηγούμαστε, χρησιμοποιώντας την Πρόταση (1.2.57), στην ύπαρξη μοναδικών R -ομομορφισμών, $j : M \longrightarrow X$ και $\delta : P \longrightarrow C'$, έτσι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow k & & \downarrow \pi \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{j} & X & \xrightarrow{\rho} & P \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow h & & \downarrow \delta \\ & & & & C' & = & C' \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 0 & & 0 \end{array}$$

να είναι μεταθετικό με ακριβείς γραμμές και στήλες. Επειδή η κλάση \mathcal{C} είναι κλειστή στις επεκτάσεις και C, C' ανήκουν στην \mathcal{C} , από τη δεύτερη γραμμή του προηγούμενου διαγράμματος, συμπεραίνουμε ότι το πρότυπο P ανήκει επίσης στην κλάση \mathcal{C} . Επιπλέον, αφού η επέκταση

$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ είναι ένας (ελάχιστος) Ext-γεννήτορας για την κλάση επεκτάσεων $\text{Ext}(\mathcal{C}, M)$, υπάρχουν R -ομομορφισμοί, $g : X \longrightarrow B$ και $l : P \longrightarrow C$, οι οποίοι συμπληρώνουν το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & X & \longrightarrow & P \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow g & & \downarrow l \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \end{array}$$

Ως συνέπεια της ελαχιστότητας του Ext-γεννήτορα, έπεται ότι οι ενδομορφισμοί $g \circ k$ και $l \circ \pi$ είναι αυτομορφισμοί των B και C , αντίστοιχα. Συνεπώς, η ακριβής ακολουθία (4.5) είναι διασπάσιμη, ως αριστερά διασπάσιμη. ■

Όταν υπάρχουν Ext-γεννήτορες για μια κλάση από R -πρότυπα και για ένα R -πρότυπο, τότε η προσοχή μας στρέφεται στην προσπάθεια εύρεσης ενός ελάχιστου Ext-γεννήτορα. Το θεώρημα που ακολουθεί, μας εξασφαλίζει ότι αν η υποκειμένη κλάση προτύπων είναι κλειστή σε ευθέα όρια, και υπάρχει Ext-γεννήτορας, τότε υπάρχει επίσης ελάχιστος Ext-γεννήτορας.

Θεώρημα 4.3.5. *Υποθέτουμε ότι η κλάση \mathcal{C} είναι κλειστή σε ευθέα όρια. Τότε για οποιοδήποτε αριστερό R -πρότυπο M , αν υπάρχει ένας Ext-γεννήτορας για την κλάση επεκτάσεων $\text{Ext}(\mathcal{C}, M)$, τότε υπάρχει και ένας ελάχιστος Ext-γεννήτορας για την κλάση επεκτάσεων $\text{Ext}(\mathcal{C}, M)$.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [59, Theorem 2.2.2] ■

Προηγουμένως, είδαμε ότι η ιδιότητα μια κλάση \mathcal{C} να είναι κλειστή σε ευθέα όρια, είναι χρήσιμη στην εύρεση ελάχιστων Ext-γεννητόρων. Τώρα θα διαπιστώσουμε ότι η ιδιότητα αυτή, είναι επίσης χρήσιμη στην εύρεση ελάχιστων αριστερών προσεγγίσεων. Το ακόλουθο θεώρημα πιστοποιεί το γεγονός αυτό, και αναφέρεται στην σύνδεση που υφίσταται ανάμεσα σε ελάχιστους Ext-γεννήτορες και σε ελάχιστες αριστερές προσεγγίσεις.

Θεώρημα 4.3.6. *Υποθέτουμε ότι η κλάση \mathcal{C} είναι κλειστή στις επεκτάσεις, καθώς και σε ευθέα όρια. Αν για οποιοδήποτε αριστερό R -πρότυπο M , υπάρχει Ext-γεννήτορας για την κλάση επεκτάσεων $\text{Ext}(\mathcal{C}, M)$, τότε υπάρχει ελάχιστη αριστερή προσέγγιση του M από την κλάση $\mathcal{C}^{\perp 1}$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα αριστερό R -πρότυπο M . Επειδή υπάρχει ένας Ext-γεννήτορας για την κλάση επεκτάσεων $\text{Ext}(\mathcal{C}, M)$, από το Θεώρημα (4.3.5) έπεται ότι υπάρχει ένας ελάχιστος Ext-γεννήτορας για την κλάση επεκτάσεων $\text{Ext}(\mathcal{C}, M)$:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} B \xrightarrow{k} C \longrightarrow 0, \quad (4.6)$$

Τότε η Πρόταση (4.3.4) μας δίνει ότι στην ακριβή ακολουθία (4.6) το πρότυπο B είναι στοιχείο της κλάσης $\mathcal{C}^{\perp 1}$. Θα δείξουμε ότι ο R -ομομορφισμός $i : M \longrightarrow B$ είναι η ελάχιστη αριστερή $\mathcal{C}^{\perp 1}$ -προσέγγιση του M . Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε ένα στοιχείο E της κλάσης $\mathcal{C}^{\perp 1}$. Εφαρμόζοντας τώρα, τον αντισυναλλοίωτο συναρτητή $\text{Hom}_R(-, E)$ στην ακολουθία (4.6), επάγεται μια μακρά ακριβής ακολουθία αβελιανών ομάδων, μέρος της οποίας είναι η ακριβής ακολουθία:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(C, E) \xrightarrow{k^*} \text{Hom}_R(B, E) \xrightarrow{i^*} \text{Hom}_R(M, E) \longrightarrow \text{Ext}_R^1(C, E).$$

Επειδή $C \in \mathcal{C}$ και $E \in \mathcal{C}^{\perp 1}$, έπεται ότι $\text{Ext}_R^1(C, E) = 0$. Συνεπώς, ο R -ομομορφισμός i είναι μια αριστερή προσέγγιση του M από την κλάση $\mathcal{C}^{\perp 1}$. Επιπλέον, αφού η ακολουθία (4.6) είναι ένας ελάχιστος Ext-γεννήτορας για την κλάση επεκτάσεων $\text{Ext}(\mathcal{C}, M)$, συμπεραίνουμε ότι ο R -ομομορφισμός $i : M \longrightarrow B$ είναι η $\mathcal{C}^{\perp 1}$ -ελάχιστη αριστερή προσέγγιση του M . ■

Θεώρημα 4.3.7. *Υποθέτουμε ότι η κλάση \mathcal{C} είναι κλειστή σε ευθέα όρια και θεωρούμε M ένα αριστερό R -πρότυπο. Αν υπάρχει μια δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση του M , τότε υπάρχει ελάχιστη δεξιά \mathcal{C} -προσέγγιση του M .*

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται κατά παρόμοιο τρόπο με την απόδειξη του Θεωρήματος (4.3.5). ■

Στην προηγούμενη ενότητα αποδείξαμε ότι η κλάση $R\text{-Inj}$ των ενέσιμων αριστερών R -προτύπων, είναι ελάχιστη αριστερά προσεγγίσιμη για κάθε δακτύλιο με μονάδα R . Για την απόδειξη αυτού, βασιστήκαμε στο Θεώρημα των Eckmann-Schopf, καθώς και στην πρόταση εκείνη, η οποία μας εξασφάλιζε ότι η ύπαρξη ενός Eckmann-Schopf ενέσιμου περιβλήματος είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη μιας ελάχιστης αριστερής $R\text{-Inj}$ -προσέγγισης. Κλείνοντας την παρούσα ενότητα, αποδεικνύουμε εκ νέου ότι η κλάση $R\text{-Inj}$ είναι ελάχιστη αριστερά προσεγγίσιμη, χρησιμοποιώντας αυτή τη φορά τα προηγούμενα θεμελιώδη αποτελέσματα. Έτσι, λόγω της Πρότασης (4.2.5), η απόδειξη της ακόλουθης πρότασης είναι μια εναλλακτική απόδειξη του Θεωρήματος των Eckmann και Schopf.

Πρόταση 4.3.8. *Η κλάση $R\text{-Inj}$ των ενέσιμων αριστερών R -προτύπων, είναι ελάχιστη αριστερά προσεγγίσιμη.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την κατηγορία $R\text{-Mod}$ των αριστερών R -προτύπων. Τότε λόγω της ισοδυναμίας

$$M \in R\text{-Inj} \iff \text{Ext}_R^1(N, M) = 0, \quad \forall N \in R\text{-Mod},$$

συμπεραίνουμε ότι $R\text{-Inj} = R\text{-Mod}^{\perp 1}$. Για κάθε αριστερό R -πρότυπο M , διαλέγουμε μια σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

όπου $E \in R\text{-Inj}$ και $C \in R\text{-Mod}$. Η ύπαρξη μιας ακολουθίας με την συγκεκριμένη μορφή, είναι συνέπεια του Θεωρήματος (3.2.12). Το Παράδειγμα (4.3.3), μας δίνει ότι η προηγούμενη ακριβής ακολουθία επάγει έναν Ext-γεννήτορα για την κλάση επεκτάσεων $\text{Ext}(R\text{-Mod}, M)$. Συνεπώς, αν θέσουμε $\mathcal{C} = R\text{-Mod}$ στο Θεώρημα (4.3.6), τότε ικανοποιούνται οι υποθέσεις αυτού, και άρα, έπεται ότι η κλάση $R\text{-Inj}$ είναι ελάχιστη αριστερά προσεγγίσιμη. ■

4.4 Συστρεπτικά Ζεύγη Και Ελάχιστες Προσεγγίσεις

Στην παρούσα ενότητα, αρχικά παρουσιάζουμε την έννοια του συστρεπτικού ζεύγους ή της συστρεπτικής θεωρίας για κατηγορίες προτύπων υπεράνω προσεταιριστικών δακτυλίων με μονάδα, και μελετάμε βασικές ιδιότητες. Ας σημειώσουμε ότι ο όρος «συστρεπτικό ζεύγος» εισήχθη το 1979 από τον Luigi Salce, στα πλαίσια της κατηγορίας των αβελιανών ομάδων. Στη συνέχεια της ενότητας αυτής, επικεντρωνόμαστε σε προσεγγίσεις προτύπων, οι οποίες επάγονται από την ύπαρξη συστρεπτικών ζευγών για κατηγορίες προτύπων υπεράνω προσεταιριστικών δακτυλίων με μονάδα.

Υπενθυμίζουμε ότι με R συμβολίζουμε έναν προσεταιριστικό δακτύλιο με μονάδα.

Ορισμός 4.4.1. Έστω \mathcal{F} και \mathcal{C} δύο κλάσεις από αριστερά R -πρότυπα. Το ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ καλείται **συστρεπτικό ζεύγος (cotorsion pair)** για την κατηγορία $R\text{-Mod}$ των αριστερών R -προτύπων, αν $\mathcal{F}^{\perp 1} = \mathcal{C}$ και ${}^{\perp 1}\mathcal{C} = \mathcal{F}$.

Σχόλιο 4.4.2. Αν $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ είναι ένα συστρεπτικό ζεύγος για την κατηγορία $R\text{-Mod}$, τότε η κλάση $\mathcal{K} = \mathcal{F} \cap \mathcal{C}$ καλείται ο **πυρήνας** του συστρεπτικού ζεύγους $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$, και επιπλέον, κάθε στοιχείο K του πυρήνα ικανοποιεί τη σχέση $\text{Ext}_R^1(K, K) = 0$.

Από τώρα και στο εξής με \mathcal{F} και \mathcal{C} συμβολίζουμε δύο κλάσεις από αριστερά R -πρότυπα, και καλούμε, χάριν απλότητας, το συστρεπτικό ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ για την κατηγορία $R\text{-Mod}$ απλά, συστρεπτικό ζεύγος.

Ορισμός 4.4.3. Μια κλάση προτύπων \mathcal{D} λέμε ότι **παράγει (generate)** το συστρεπτικό ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$, αν ${}^{\perp 1}\mathcal{D} = \mathcal{F}$, ενώ μία κλάση προτύπων \mathcal{G} λέμε ότι **συμπαράγει (cogenerate)** το συστρεπτικό ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$, αν $\mathcal{G}^{\perp 1} = \mathcal{C}$.

Παρατήρηση 4.4.4. Αν η κλάση \mathcal{D} παράγει το συστρεπτικό ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$, τότε $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$, αφού χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση (4.1.18) και τον ορισμό του συστρεπτικού ζεύγους, παίρνουμε ότι $\mathcal{D} \subseteq ({}^{\perp}\mathcal{D})^{\perp} = \mathcal{F}^{\perp} = \mathcal{C}$. Ομοίως, αν η κλάση \mathcal{G} συμπαράγει το συστρεπτικό ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$, τότε $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Συνεπώς, αν το ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ είναι συστρεπτικό ζεύγος, τότε το ζεύγος αυτό, συμπαράγεται και παράγεται πάντα από τις κλάσεις \mathcal{F} και \mathcal{C} , αντίστοιχα. Ωστόσο ως αναφέρουμε, χωρίς περαιτέρω ανάλυση, ότι είναι σημαντικό να μελετάμε πότε ένα συστρεπτικό ζεύγος συμπαράγεται από ένα σύνολο R -προτύπων, καθώς η ύπαρξη ενός συνόλου R -προτύπων έτσι ώστε το σύνολο αυτό να συμπαράγει ένα συστρεπτικό ζεύγος, επάγει την ύπαρξη δεξιών και αριστερών προσεγγίσεων.

Πριν περάσουμε σε παραδείγματα συστρεπτικών ζευγών, ως παραθέσουμε τον ακόλουθο χρήσιμο ορισμό:

Ορισμός 4.4.5. Ένα αριστερό R -πρότυπο C καλείται **συστρεπτικό πρότυπο (cotorsion module)**, αν ικανοποιεί τη σχέση

$$\text{Ext}_R^1(M, C) = 0,$$

για κάθε επίπεδο αριστερό R -πρότυπο M .

Με άλλα λόγια, αν $R\text{-Flat}$ είναι η κλάση όλων των επίπεδων αριστερών R -προτύπων, τότε ένα αριστερό R -πρότυπο C είναι συστρεπτικό πρότυπο, όταν $C \in (R\text{-Flat})^{\perp}$.

Παράδειγμα 4.4.6. 1. Αν συμβολίσουμε με \mathcal{C} μια οποιαδήποτε κλάση από αριστερά R -πρότυπα, τότε η Παρατήρηση (4.1.18), μας δίνει ότι τα ζεύγη

$$({}^{\perp}(\mathcal{C}^{\perp}), \mathcal{C}^{\perp}) \quad \& \quad ({}^{\perp}\mathcal{C}, ({}^{\perp}\mathcal{C})^{\perp}),$$

είναι συστρεπτικά ζεύγη. Τα ζεύγη αυτά, καλούνται τα συστρεπτικά ζεύγη που συμπαράγονται και παράγονται αντίστοιχα, από την κλάση \mathcal{C} .

2. Αν συμβολίσουμε με $R\text{-Proj}$ την κλάση των προβολικών αριστερών R -προτύπων, και με $R\text{-Inj}$ την κλάση των ενέσιμων αριστερών R -προτύπων, τότε τα ζεύγη

$$(R\text{-Proj}, R\text{-Mod}) \quad \& \quad (R\text{-Mod}, R\text{-Inj}),$$

είναι συστρεπτικά ζεύγη, και καλούνται μάλιστα, **τετριμμένα**. Πράγματι, η απόδειξη του ισχυρισμού αυτού έγκειται στις ακόλουθες δύο ισοδυναμίες:

$$(\alpha) \quad M \in R\text{-Proj} \iff \text{Ext}_R^1(M, N) = 0, \quad \forall N \in R\text{-Mod}.$$

$$(\beta) \quad M \in R\text{-Inj} \iff \text{Ext}_R^1(N, M) = 0, \quad \forall N \in R\text{-Mod}.$$

Επιπλέον, ως σημειώσουμε ότι το συστρεπτικό ζεύγος $(R\text{-Mod}, R\text{-Inj})$ συμπαράγεται από το σύνολο

$$\mathcal{J} = \{R/I \in R\text{-Mod} \mid I \text{ είναι ένα αριστερό ιδεώδες του } R\},$$

και παράγεται από την κλάση $R\text{-Inj}$.

3. Αν συμβολίσουμε με $R\text{-Flat}$ την κλάση των επίπεδων αριστερών R -προτύπων, και με $R\text{-Cotor}$ την κλάση των συστρεπτικών αριστερών R -προτύπων, τότε το ζεύγος

$$(R\text{-Flat}, R\text{-Cotor}),$$

είναι συστρεπτικό ζεύγος, και καλείται μάλιστα, **το συστρεπτικό ζεύγος του Enochs**. Για την απόδειξη του αποτελέσματος αυτού, βλέπε [27, Lemma 7.1.4].

Στην συνέχεια, παρουσιάζουμε βασικές ιδιότητες ενός συστρεπτικού ζεύγους για την κατηγορία των αριστερών R -προτύπων.

Πρόταση 4.4.7. Έστω $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ ένα συστρεπτικό ζεύγος. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Οι κλάσεις \mathcal{F} και \mathcal{C} είναι κλειστές στις επεκτάσεις και στους ευθείς προσθετέους.
2. Η κλάση των προβολικών αριστερών R -προτύπων περιέχεται στην κλάση \mathcal{F} , ενώ η κλάση των ενέσιμων αριστερών R -προτύπων περιέχεται στην κλάση \mathcal{C} .
3. Η κλάση \mathcal{F} είναι κλειστή σε τυχαία ευθέα αθροίσματα, ενώ η κλάση \mathcal{C} είναι κλειστή σε τυχαία ευθέα γινόμενα.
4. Αν το συστρεπτικό ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ παράγεται από ένα σύνολο X , τότε το $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ παράγεται από το R -πρότυπο $\prod_{M \in X} M$. Αναλόγως, αν το συστρεπτικό ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ συμπαράγεται από ένα σύνολο X , τότε το $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ συμπαράγεται από το R -πρότυπο $\bigoplus_{M \in X} M$.

Απόδειξη. Η απόδειξη των 1), 2) και 4) είναι ιδιαίτερα απλή, και για αυτό το λόγο την παραλείπουμε. Το 3) προκύπτει χρησιμοποιώντας τους φυσικούς R -ισομορφισμούς:

$$\prod_{i \in I} \text{Ext}_R^1(F_i, N) \cong \text{Ext}_R^1\left(\bigoplus_{i \in I} F_i, N\right) \quad \& \quad \text{Ext}_R^1\left(M, \prod_{i \in I} C_i\right) \cong \prod_{i \in I} \text{Ext}_R^1(M, C_i).$$

Για την απόδειξη των προηγούμενων ισομορφισμών, βλέπε [16]. ■

Η προσοχή μας τώρα στρέφεται σε προσεγγίσεις προτύπων οι οποίες επάγονται από συστρεπτικά ζεύγη. Ως άμεση συνέπεια του Λήμματος του Wakamatsu, παίρνουμε ότι:

Πόρισμα 4.4.8. Έστω $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ ένα συστρεπτικό ζεύγος (για την κατηγορία $R\text{-Mod}$).

1. Αν η κλάση \mathcal{F} είναι ελάχιστη δεξιά προσεγγίσιμη, τότε η \mathcal{F} είναι δεξιά ειδικά προσεγγίσιμη.
2. Αν η κλάση \mathcal{C} είναι ελάχιστη αριστερά προσεγγίσιμη, τότε η \mathcal{C} είναι αριστερά ειδικά προσεγγίσιμη.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η κλάση \mathcal{F} είναι ελάχιστα δεξιά προσεγγίσιμη, και έστω M ένα αριστερό R -πρότυπο. Τότε εξ ορισμού, υπάρχει ελάχιστη δεξιά \mathcal{F} -προσέγγιση $f: F \rightarrow M$ του M . Η Πρόταση (4.4.7), μας εξασφαλίζει ότι η κλάση \mathcal{F} είναι κλειστή στις επεκτάσεις, και ότι η \mathcal{F} περιέχει όλα τα προβολικά αριστερά R -πρότυπα. Συνεπώς, η Παρατήρηση (4.1.16) μας δίνει ότι η f είναι επιμορφισμός. Έτσι τελικά, χρησιμοποιώντας το Λήμμα του Wakamatsu, έχουμε ότι η ελάχιστη δεξιά \mathcal{F} -προσέγγιση f του M , είναι ειδική. Άρα, έπεται ότι η κλάση \mathcal{F} είναι δεξιά ειδικά προσεγγίσιμη. Παρόμοια αποδεικνύεται και το δεύτερο σκέλος του λήμματος. ■

Το επόμενο λήμμα είναι γνωστό ως Λήμμα του Salce, και πιστοποιεί το γεγονός ότι η κλάση \mathcal{F} είναι ειδικά δεξιά προσεγγίσιμη, αν και μόνο αν, η κλάση \mathcal{C} είναι ειδικά αριστερά προσεγγίσιμη, όταν το ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ είναι συστρεπτικό για την κατηγορία $R\text{-Mod}$.

Λήμμα 4.4.9. (Λήμμα του Salce) Έστω $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ ένα συστρεπτικό ζεύγος. Τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

1. Κάθε αριστερό R -πρότυπο έχει μια ειδική δεξιά \mathcal{F} -προσέγγιση.
2. Κάθε αριστερό R -πρότυπο έχει μια ειδική αριστερή \mathcal{C} -προσέγγιση.

Στην περίπτωση αυτή, το συστρεπτικό ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ καλείται **πλήρες συστρεπτικό ζεύγος (complete cotorsion pair)**.

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε ότι οι παραπάνω συνθήκες είναι ισοδύναμες, αρκεί να δείξουμε τις συνεπαγωγές $1 \Rightarrow 2$ και $2 \Rightarrow 1$.

($1 \Rightarrow 2$) Υποθέτουμε ότι κάθε αριστερό R -πρότυπο έχει μια ειδική δεξιά \mathcal{F} -προσέγγιση, και έστω M ένα αριστερό R -πρότυπο. Διαλέγουμε μία σύντομη ακριβή ακολουθία αριστερών R -προτύπων

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} D \longrightarrow 0,$$

όπου το E είναι ενέσιμο. Τότε η υπόθεση μας δίνει μια ειδική δεξιά \mathcal{F} -προσέγγιση ρ του D ,

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{j} F \xrightarrow{\rho} D \longrightarrow 0,$$

όπου $F \in \mathcal{F}$ και $C \in \mathcal{F}^{\perp 1} = \mathcal{C}$. Θεωρούμε τώρα το pullback P του διαγράμματος:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\beta} & E \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \pi \\ F & \xrightarrow{\rho} & D \end{array} .$$

Τότε χρησιμοποιώντας την Πρόταση (1.2.56), παίρνουμε μοναδικούς ομομορφισμούς αριστερών R -προτύπων $\delta : M \longrightarrow P$ και $\alpha : C \longrightarrow P$, έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό με ακριβείς γραμμές και στήλες:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & M & \xlongequal{\quad} & M & & \\ & & \downarrow \delta & & \downarrow i & & \\ 0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{\alpha} & P & \xrightarrow{\beta} & E \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \gamma & & \downarrow \pi \\ 0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{j} & F & \xrightarrow{\rho} & D \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 0 & & 0 \end{array}$$

Η Πρόταση (4.4.7), μας εξασφαλίζει ότι η κλάση \mathcal{C} είναι κλειστή στις επεκτάσεις, και ότι το ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο E είναι στοιχείο της κλάσης \mathcal{C} . Συνεπώς, επειδή το R -πρότυπο C ανήκει και αυτό με τη σειρά του στην κλάση \mathcal{C} , συμπεραίνουμε από την πρώτη στήλη του παραπάνω διαγράμματος, ότι το R -πρότυπο P ανήκει στην κλάση \mathcal{C} . Έτσι, η ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\delta} P \xrightarrow{\gamma} F \longrightarrow 0,$$

είναι μια ειδική αριστερή \mathcal{C} -προσέγγιση του M .

2 \Rightarrow 1) Κατά δυϊκό τρόπο με την απόδειξη του (1 \Rightarrow 2). ■

Παράδειγμα 4.4.10. Τα τετριμμένα συστρεπτικά ζεύγη

$$(R\text{-Proj}, R\text{-Mod}) \quad \& \quad (R\text{-Mod}, R\text{-Inj}),$$

είναι πλήρη. Η απόδειξη του ισχυρισμού αυτού, βασίζεται στο γεγονός ότι κάθε R -πρότυπο είναι η επιμορφική εικόνα κάποιου προβολικού R -προτύπου, καθώς και στο αποτέλεσμα ότι κάθε R -πρότυπο εμψυτεύεται σε ένα ενέσιμο R -πρότυπο.

Πριν διατυπώσουμε πότε ένα συστρεπτικό ζεύγος για την κατηγορία των αριστερών R -προτύπων καλείται κληρονομικό (hereditary), χρειάζεται να εισάγουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 4.4.11. Έστω R δακτύλιος και \mathcal{D} μια κλάση από R -πρότυπα.

1. Η κλάση \mathcal{D} καλείται **projectively resolving (προβολικά επιλύουσα)**, αν ισχύουν οι ακόλουθες τρεις συνθήκες:

- (α') Η κλάση \mathcal{D} είναι κλειστή στις επεκτάσεις.
 (β') Η κλάση των προβολικών R -προτύπων περιέχεται στην κλάση \mathcal{D} .
 (γ') Για κάθε σύντομη ακριβή ακολουθία από R -πρότυπα

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow D \longrightarrow 0,$$

όπου D και N είναι στοιχεία της κλάσης \mathcal{D} , τότε το R -πρότυπο M είναι επίσης στοιχείο της κλάσης \mathcal{D} .

Επιπλέον, αν η \mathcal{D} είναι *projectively resolving* και κλειστή σε ευθείς προσθετέους, τότε η \mathcal{D} καλείται **resolving (επιλύουσα)**.

2. Η κλάση \mathcal{D} καλείται **injectively coresolving (ενέσιμα συνεπιλύουσα)**, αν ισχύουν οι ακόλουθες τρεις συνθήκες:

- (α') Η κλάση \mathcal{D} είναι κλειστή στις επεκτάσεις.
 (β') Η κλάση των ενεσίμων R -προτύπων περιέχεται στην κλάση \mathcal{D} .
 (γ') Για κάθε σύντομη ακριβή ακολουθία από R -πρότυπα

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow D \longrightarrow 0,$$

όπου M και N είναι στοιχεία της κλάσης \mathcal{D} , τότε το R -πρότυπο D είναι επίσης στοιχείο της κλάσης \mathcal{D} .

Επιπρόσθετα, αν η \mathcal{D} είναι *injectively coresolving* και κλειστή σε ευθείς προσθετέους, τότε η \mathcal{D} καλείται **coresolving (συνεπιλύουσα)**.

Παράδειγμα 4.4.12. Ας σημειώσουμε ότι έχουμε γνωρίσει κλάσεις R -προτύπων, οι οποίες είναι resolving ή coresolving. Μάλιστα, οι τρεις πιο γνωστές κλάσεις R -προτύπων, ικανοποιούν μια από αυτές τις δύο ιδιότητες. Συγκεκριμένα, οι κλάσεις των προβολικών και των επίπεδων R -προτύπων είναι resolving, ενώ η κλάση των ενεσίμων R -προτύπων είναι coresolving.

Το λήμμα που ακολουθεί δείχνει ότι τα συστρεπτικά ζεύγη μας εφοδιάζουν με resolving και coresolving κλάσεις προτύπων.

Λήμμα 4.4.13. Έστω $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ ένα συστρεπτικό ζεύγος στην κατηγορία $R\text{-Mod}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Η κλάση \mathcal{F} είναι resolving.
2. Η κλάση \mathcal{C} είναι coresolving.
3. $\text{Ext}_R^i(F, C) = 0$, $\forall i > 0$, & $\forall F \in \mathcal{F}$, $\forall C \in \mathcal{C}$.

Στην περίπτωση αυτή, το συστρεπτικό ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ καλείται **κληρονομικό (hereditary)**.

Απόδειξη. (1 \Rightarrow 3) Έστω ότι η κλάση \mathcal{F} είναι resolving, και F, C δύο αριστερά R -πρότυπα έτσι ώστε $F \in \mathcal{F}$ και $C \in \mathcal{C}$. Αν $i = 1$, τότε εξ ορισμού έχουμε ότι $\text{Ext}_R^1(F, C) = 0$. Διαλέγουμε τώρα μια σύντομη ακριβή ακολουθία αριστερών R -προτύπων

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow F \longrightarrow 0,$$

όπου P είναι προβολικό. Η ύπαρξη μιας τέτοιας ακριβής ακολουθίας προκύπτει από το Πρόσχημα (3.2.28). Η υπόθεση μας εξασφαλίζει ότι $K \in \mathcal{F} = {}^{\perp 1}\mathcal{C}$, και άρα, ότι $\text{Ext}_R^1(K, C) = 0$. Εφαρμόζοντας τον αντισυναλλοίωτο συναρτητή $\text{Hom}_R(-, C)$ στην προηγούμενη σύντομη ακριβή ακολουθία

αριστερών R -προτύπων, επάγεται μια μακρά ακριβής ακολουθία αβελιανών ομάδων, μέρος της οποίας είναι η ακριβής ακολουθία:

$$0 = \text{Ext}_R^1(K, C) \longrightarrow \text{Ext}_R^2(F, C) \longrightarrow \text{Ext}^2(P, C).$$

Επειδή το R -πρότυπο P είναι προβολικό, έχουμε ότι $\text{Ext}^2(P, C) = 0$. Συνεπώς, από την προηγούμενη ακριβή ακολουθία αβελιανών ομάδων, έπεται ότι $\text{Ext}_R^2(F, C) = 0$. Συνεχίζοντας επαγωγικά, οδηγούμαστε στο 3).

(1 \Rightarrow 2) Υποθέτουμε ότι η κλάση \mathcal{F} είναι resolving, και έστω $F \in \mathcal{F}$. Επειδή το ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ είναι συστρεπτικό ζεύγος, η Πρόταση (4.4.7) μας δίνει ότι η κλάση \mathcal{C} είναι κλειστή σε επεκτάσεις και σε ευθείς προσθετέους, καθώς και ότι η \mathcal{C} περιέχει την κλάση των ενέσιμων R -προτύπων. Θεωρούμε μια σύντομη ακριβή ακολουθία στην $R\text{-Mod}$

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

όπου $M, N \in \mathcal{C} = \mathcal{F}^{\perp 1}$. Τότε προφανώς, $\text{Ext}_R^1(F, M) = 0 = \text{Ext}_R^1(F, N)$. Εφαρμόζοντας τώρα τον συναλλοίωτο συναρτητή $\text{Hom}_R(F, -)$ στην παραπάνω σύντομη ακριβή ακολουθία, επάγεται η ακριβής ακολουθία:

$$0 = \text{Ext}_R^1(F, N) \longrightarrow \text{Ext}_R^2(F, A) \longrightarrow \text{Ext}_R^2(F, M) = 0.$$

Σημειώνουμε ότι η ισότητα $\text{Ext}_R^2(F, M) = 0$ προέκυψε χρησιμοποιώντας την συνεπαγωγή (1 \Rightarrow 3). Επομένως, από την προηγούμενη ακριβή ακολουθία, έπεται ότι $\text{Ext}_R^2(F, A) = 0$. Έτσι τελικά, έχουμε ότι $\text{Ext}_R^2(F, A) = 0$ για κάθε στοιχείο F της κλάσης \mathcal{F} , ή ισοδύναμα, ότι $A \in \mathcal{F}^{\perp 1} = \mathcal{C}$. Άρα, η κλάση \mathcal{C} είναι coresolving.

(2 \Rightarrow 3) Ομοίως με την απόδειξη του (1 \Rightarrow 3).

(3 \Rightarrow 1) Υποθέτουμε ότι ισχύει το 3) και θεωρούμε μια σύντομη ακριβή ακολουθία αριστερών R -προτύπων

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

όπου $N, A \in \mathcal{F} = {}^{\perp 1}\mathcal{C}$. Για κάθε $C \in \mathcal{C}$ επάγονται οι ακριβείς ακολουθίες:

$$\text{Ext}_R^1(N, C) \longrightarrow \text{Ext}_R^1(M, C) \longrightarrow \text{Ext}^2(A, C).$$

Όμως, αφού τα N και A είναι στοιχεία της κλάσης \mathcal{F} , χρησιμοποιώντας την υπόθεση συμπεραίνουμε ότι $\text{Ext}_R^1(N, C) = 0 = \text{Ext}^2(A, C)$, για κάθε στοιχείο C της κλάσης \mathcal{C} . Συνεπώς, παίρνουμε ότι $\text{Ext}_R^1(M, C) = 0$ για κάθε $C \in \mathcal{C}$, ή ισοδύναμα, ότι $M \in {}^{\perp 1}\mathcal{C}$. Επειδή λοιπόν η κλάση $\mathcal{F} = {}^{\perp 1}\mathcal{C}$ είναι κλειστή σε επεκτάσεις και σε ευθείς προσθετέους, και επιπλέον, η \mathcal{F} περιέχει όλα τα προβολικά R -πρότυπα, καταλήγουμε στο ζητούμενο ότι η κλάση \mathcal{F} είναι resolving. ■

Όπως έχουμε ήδη δει, η ύπαρξη πλήρων συστρεπτικών ζευγών για κατηγορίες προτύπων υπεράνω προσεταιριστικών δακτυλίων με μονάδα, οδηγεί κατά φυσικό τρόπο, στην ύπαρξη δεξιών και αριστερών προσεγγίσεων προτύπων υπεράνω των υποκείμενων δακτυλίων. Ωστόσο, σε ορισμένες περιπτώσεις οι προσεγγίσεις αυτές είναι ελάχιστες, και τότε, τα συστρεπτικά ζεύγη είναι τέλεια με την ακόλουθη έννοια:

Ορισμός 4.4.14. Ένα συστρεπτικό ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ για την κατηγορία $R\text{-Mod}$ καλείται **τέλειο συστρεπτικό ζεύγος (perfect cotorsion pair)**, αν η κλάση \mathcal{F} είναι δεξιά ελάχιστα προσεγγίσιμη, και η κλάση \mathcal{C} είναι αριστερά ελάχιστα προσεγγίσιμη.

Σχόλιο 4.4.15. Ο όρος «τέλειο» στον προηγούμενο ορισμό, προέρχεται από το Θεώρημα του Bass, το οποίο χαρακτηρίζει ως τέλειο έναν δακτύλιο R , με την ιδιότητα ότι η κλάση των προβολικών R -προτύπων είναι ελάχιστα δεξιά προσεγγίσιμη, ή ισοδύναμα ότι το συστρεπτικό ζεύγος $(R\text{-Proj}, R\text{-Mod})$ είναι τέλειο. Επιπλέον, ως τονίσουμε ότι ο ορισμός ενός τέλειου συστρεπτικού ζεύγους απαιτεί να ικανοποιούνται δύο συνθήκες, εν' αντιδιαστολή με τον ορισμό ενός πλήρους συστρεπτικού ζεύγους.

Παράδειγμα 4.4.16. Στην προηγούμενη ενότητα, είδαμε ότι για οποιονδήποτε δακτύλιο με μονάδα R , η κλάση $R\text{-Inj}$ των ενέσιμων αριστερών R -προτύπων είναι ελάχιστα αριστερά προσεγγίσιμη. Επιπλέον, το Παράδειγμα (4.1.4) μας εξασφαλίζει για τυχόν δακτύλιο με μονάδα R , ότι η κλάση $R\text{-Mod}$ των αριστερών R -προτύπων είναι ελάχιστα δεξιά προσεγγίσιμη. Συνεπώς, το πλήρες συστρεπτικό ζεύγος

$$(R\text{-Mod}, R\text{-Inj}),$$

είναι τέλειο.

Παρατήρηση 4.4.17. Ως συνέπεια του Πορίσματος (4.4.8), παίρνουμε ότι κάθε τέλειο συστρεπτικό ζεύγος είναι πλήρες.

Φυσικό επακόλουθο των παραπάνω, είναι τα ακόλουθα ερωτήματα: Για έναν προσεταιριστικό δακτύλιο με μονάδα R ,

1. είναι το συστρεπτικό ζεύγος $(R\text{-Proj}, R\text{-Mod})$, τέλειο;
2. είναι κάθε πλήρες συστρεπτικό ζεύγος (για την κατηγορία $R\text{-Mod}$), τέλειο;

Στην ενότητα 4.2, είδαμε ότι η κλάση $R\text{-Proj}$ των προβολικών αριστερών R -προτύπων είναι ελάχιστη δεξιά προσεγγίσιμη, αν και μόνο αν, ο δακτύλιος R είναι αριστερά τέλειος. Επομένως, υπεράνω τυχόντος δακτυλίου R , το συστρεπτικό ζεύγος $(R\text{-Proj}, R\text{-Mod})$ δεν είναι τέλειο. Ωστόσο, το Παράδειγμα (4.4.10), μας δίνει ότι για οποιονδήποτε δακτύλιο με μονάδα R , το ζεύγος $(R\text{-Proj}, R\text{-Mod})$ είναι πλήρες συστρεπτικό ζεύγος. Συνεπώς, η απάντηση του δεύτερου ερωτήματος είναι επίσης αρνητική.

Ευθύς αμέσως, αναφερόμαστε στην έννοια ενός κλειστού συστρεπτικού ζεύγους για την κατηγορία $R\text{-Mod}$, και στη συνέχεια, παραθέτουμε παραδείγματα κλειστών συστρεπτικών ζευγών για την κατηγορία $R\text{-Mod}$.

Ορισμός 4.4.18. Ένα συστρεπτικό ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ καλείται **κλειστό (closed)**, αν η κλάση \mathcal{F} είναι κλειστή σε ευθεία όρια. Δηλαδή, αν $\mathcal{F} = \varinjlim \mathcal{F}$.

Παράδειγμα 4.4.19. 1. Το συστρεπτικό ζεύγος $(R\text{-Mod}, R\text{-Inj})$ είναι κατά προφανή τρόπο κλειστό.

2. Το συστρεπτικό ζεύγος του Enochs

$$(R\text{-Flat}, R\text{-Cotor}),$$

είναι κλειστό. Πράγματι, αν θεωρήσουμε ένα ευθύ σύστημα $(F_i, f_{ji})_{i \in I}$ επίπεδων αριστερών R -προτύπων υπεράνω ενός κατευθυνόμενου συνόλου I , τότε λόγω των σχέσεων:

$$0 = \varinjlim \text{Tor}_n^R(M, F_i) \cong \text{Tor}_n^R(M, \varinjlim F_i), \quad \forall n > 0 \quad \& \quad \forall M \in \text{Mod-}R,$$

προκύπτει ότι το όριο $\varinjlim F_i$ είναι επίσης επίπεδο R -πρότυπο.

3. Αν ο δακτύλιος R είναι αριστερά τέλειος, τότε (και μόνον τότε) το συστρεπτικό ζεύγος

$$(R\text{-Proj}, R\text{-Mod}),$$

είναι κλειστό, σύμφωνα με το θεώρημα του Bass.

Προηγουμένως, αναφερθήκαμε στη σχέση που υφίσταται ανάμεσα σε τέλεια και πλήρη συστρεπτικά ζεύγη, και είδαμε ότι κάθε τέλειο συστρεπτικό ζεύγος είναι πλήρες. Έτσι, ανακύπτει το ερώτημα, αν υπάρχει κάποιου είδους σχέση ανάμεσα σε τέλεια και σε κλειστά συστρεπτικά ζεύγη. Το ακόλουθο πόρισμα απαντάει εν μέρει, στο ερώτημα αυτό:

Πόρισμα 4.4.20. Κάθε πλήρες και κλειστό συστρεπτικό ζεύγος για την κατηγορία $R\text{-Mod}$, είναι τέλειο.

Απόδειξη. Θεωρούμε $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ ένα πλήρες και κλειστό συστρεπτικό ζεύγος για την κατηγορία $R\text{-Mod}$. Επειδή η κλάση \mathcal{F} είναι (ειδικά) δεξιά προσεγγίσιμη και κλειστή σε ευθεία όρια, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα (4.3.7), οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η κλάση \mathcal{F} είναι ελάχιστα δεξιά προσεγγίσιμη. Έστω τώρα M ένα αριστερό R -πρότυπο. Τότε η υπόθεση μας δίνει μια σύντομη ακριβή ακολουθία αριστερών R -προτύπων

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} C \longrightarrow \text{Coker } f \longrightarrow 0,$$

όπου $C \in \mathcal{C}$ και $\text{Coker } f \in {}^{\perp}\mathcal{C} = \mathcal{F}$. Προφανώς, η προηγούμενη επέκταση είναι ένας Ext-γεννήτορας για την κλάση επεκτάσεων $\text{Ext}(\mathcal{F}, M)$. Αν θέσουμε τώρα $\mathcal{C} = \mathcal{F}$, στο Θεώρημα (4.3.6), τότε υπάρχει ελάχιστη αριστερή $\mathcal{F}^{\perp 1}$ -προσέγγιση του M . Όμως, $\mathcal{F}^{\perp 1} = \mathcal{C}$. Συνεπώς, υπάρχει ελάχιστη αριστερή \mathcal{C} -προσέγγιση για το τυχαίο αριστερό R -πρότυπο M . Έτσι τελικά, έχουμε ότι η κλάση \mathcal{C} είναι ελάχιστα αριστερά προσεγγίσιμη. Συνδυάζοντας λοιπόν τα προηγούμενα, έπεται ότι το συστρεπτικό ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ στην κατηγορία $R\text{-Mod}$, είναι τέλειο. ■

Σχόλιο 4.4.21. Ας τονίσουμε ότι δεν είναι γνωστό αν υπάρχει κάποια επιπλέον σχέση ανάμεσα σε τέλεια και κλειστά συστρεπτικά ζεύγη. Δηλαδή, τα προβλήματα :

1. Είναι κάθε τέλειο συστρεπτικό ζεύγος, κλειστό;
2. Είναι κάθε κλειστό συστρεπτικό ζεύγος, τέλειο;

είναι ακόμη, ανοιχτά.

Ανακεφαλαιώνοντας, συνοψίζουμε τα προηγούμενα αποτελέσματα. Είδαμε λοιπόν, ότι :

- Το συστρεπτικό ζεύγος $(R\text{-Mod}, R\text{-Inj})$ είναι κληρονομικό, κλειστό, πλήρες και τέλειο.
- Το συστρεπτικό ζεύγος $(R\text{-Proj}, R\text{-Mod})$ είναι κληρονομικό, πλήρες και γενικά, όχι κλειστό, όχι τέλειο.
- Το συστρεπτικό ζεύγος $(R\text{-Proj}, R\text{-Mod})$ είναι κληρονομικό, κλειστό, πλήρες και τέλειο, αν και μόνο αν, ο δακτύλιος R είναι αριστερά τέλειος.
- Το συστρεπτικό ζεύγος $(R\text{-Flat}, R\text{-Cotor})$ είναι κληρονομικό και κλειστό.

Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι το συστρεπτικό ζεύγος $(R\text{-Flat}, R\text{-Cotor})$, έχει περισσότερη αλγεβρική δομή από αυτή που προαναφέραμε. Ο Edgar Enochs, χρησιμοποιώντας ένα αποτέλεσμα των Eklof και Trlifaj περί μηδενισμού του Ext, απέδειξε ότι το κλειστό συστρεπτικό ζεύγος $(R\text{-Flat}, R\text{-Cotor})$ είναι πλήρες, και άρα, ως συνέπεια του Πορίσματος (4.4.20), τέλειο.

Κεφάλαιο 5

Gorenstein Προβολικά Και Gorenstein Ενέσιμα Πρότυπα

Το 1966/67, ο M. Auslander εισήγαγε την έννοια της G -κλάσης προτύπων, $G(A)$, για ένα μεταθετικό δακτύλιο της Noether A . Η κλάση $G(A)$ αποτελείται από όλα τα πεπερασμένα παραγόμενα A -πρότυπα M , τα οποία ικανοποιούν τις ακόλουθες δύο συνθήκες:

1. $\text{Ext}_A^i(M, A) = \text{Ext}_A^i(\text{Hom}_A(M, A), A) = 0$ για κάθε $i > 0$,
2. Ο φυσικός ομομορφισμός $M \rightarrow \text{Hom}_A(\text{Hom}_A(M, A), A)$ είναι ένας ισομορφισμός.

Χρησιμοποιώντας αναλύσεις από πρότυπα της κλάσης $G(A)$, ο Auslander όρισε για κάθε πεπερασμένο παραγόμενο A -πρότυπο M , την έννοια της G -διάστασης, $G\text{-dim}_A M$. Το 1969, ο Auslander σε συνεργασία με τον μαθητή του M. Bridger, επέκτειναν τον ορισμό της G -διάστασης, για πεπερασμένα παραγόμενα πρότυπα υπεράνω όχι απαραίτητα μεταθετικών δακτυλίων της Noether. Αν καλέσουμε τα πρότυπα της G -κλάσης του Auslander, *πεπερασμένα παραγόμενα Gorenstein προβολικά*, τότε φυσιολογικά προκύπτουν τα ερωτήματα:

- Πως μπορούν ορισθούν τα Gorenstein προβολικά πρότυπα, τα οποία δεν είναι απαραίτητα πεπερασμένα παραγόμενα και/ή ο δακτύλιος δεν είναι απαραίτητα δακτύλιος της Noether;
- Μπορεί να ορισθεί, κατ' αναλογία, η έννοια των Gorenstein ενέσιμων προτύπων;

Το 1995, οι E. Enochs και O. M. Jenda, όρισαν τα Gorenstein ενέσιμα πρότυπα υπεράνω τυχόντος προσεταιριστικού δακτυλίου με μονάδα, και στη συνέχεια, κατά δυϊκό τρόπο όρισαν τα πεπερασμένα παραγόμενα ή μη, Gorenstein προβολικά πρότυπα υπεράνω τυχόντος προσεταιριστικού δακτυλίου με μονάδα. Ο ορισμός αυτός των Gorenstein προβολικών προτύπων υπεράνω ενός προσεταιριστικού δακτυλίου με μονάδα, συμφωνεί με τον ορισμό του Auslander, όταν ο δακτύλιος είναι δακτύλιος της Noether, και τα πρότυπα είναι πεπερασμένα παραγόμενα.

Σκοπός του παρόντος κεφαλαίου, είναι ο ορισμός και η μελέτη των Gorenstein προβολικών και των Gorenstein ενέσιμων προτύπων υπεράνω ενός τυχαίου προσεταιριστικού δακτυλίου με μονάδα. Οι έννοιες αυτές, όπως θα δούμε, γενικεύουν τις συνήθεις έννοιες των προβολικών και των ενέσιμων προτύπων.

Σύμβαση: Καθ' όλη την έκταση του κεφαλαίου αυτού, με R συμβολίζουμε έναν προσεταιριστικό δακτύλιο με μονάδα.

5.1 Gorenstein Προβολικά Πρότυπα

Στην ενότητα αυτή, εισάγουμε την κλάση των Gorenstein προβολικών R -προτύπων, και μελετάμε βασικές ιδιότητες αυτών των προτύπων. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, η κλάση των Gorenstein

προβολικών R -προτύπων, περιέχει τη κλάση των προβολικών R -προτύπων, και κληρονομεί πολλές από τις βασικές ιδιότητες της κλάσης των προβολικών R -προτύπων.

Ορισμός 5.1.1. 1. Μια **πλήρης προβολική ανάλυση, (complete projective resolution)**, είναι μια ακριβής ακολουθία από προβολικά αριστερά R -πρότυπα

$$\mathfrak{R} : \dots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{\alpha_2} P_1 \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \xrightarrow{\alpha_0} Q^0 \xrightarrow{\beta^0} Q^1 \xrightarrow{\beta^1} Q^2 \xrightarrow{\beta^2} \dots, \quad (5.1)$$

τέτοια ώστε το σύμπλοκο αβελιανών ομάδων $\text{Hom}_R(\mathfrak{R}, Q)$, να είναι ακριβές για κάθε προβολικό αριστερό R -πρότυπο Q .

2. Ένα αριστερό R -πρότυπο M καλείται **Gorenstein προβολικό, (Gorenstein projective)**, αν υπάρχει πλήρης προβολική ανάλυση \mathfrak{R} , με $M \cong \text{Im } \alpha_0 = \text{Ker } \beta^0$.

Παρόμοιος είναι ο ορισμός των Gorenstein προβολικών δεξιών R -προτύπων.

Παράδειγμα 5.1.2. (Tate resolution) Το πρώτο παράδειγμα μιας πλήρους προβολικής ανάλυσης δόθηκε από τον Tate το 1952, και ήταν του \mathbb{Z} ως $\mathbb{Z}G$ -πρότυπου, όπου G είναι μια πεπερασμένη (πολλαπλασιαστική) ομάδα και $\mathbb{Z}G$ είναι ο αντίστοιχος ομάδα δακτύλιος.

Πιο ειδικά, επειδή το \mathbb{Z} ως $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο είναι πεπερασμένα παραγόμενο και ο ομάδα δακτύλιος $\mathbb{Z}G$ είναι δακτύλιος της Noether, υπάρχει μια ακριβής ακολουθία $\mathbb{Z}G$ -προτύπων:

$$\ell : \dots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

όπου κάθε F_i για $i \geq 0$, είναι πεπερασμένα παραγόμενο και ελεύθερο. Θεωρώντας την ακριβή ακολουθία $\mathbb{Z}G$ -προτύπων ℓ , ως μια ακριβή ακολουθία αβελιανών ομάδων, και εφαρμόζοντας στην συνέχεια τον αντισυναλλοίωτο συναρτητή $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Z})$ στην ακολουθία αυτή, επάγεται η ακριβής ακολουθία $\mathbb{Z}G$ -προτύπων:

$$\ell' : 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow F^0 \longrightarrow F^1 \longrightarrow F^2 \longrightarrow \dots$$

όπου $\mathbb{Z} \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ και $F^i = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(F_i, \mathbb{Z})$ για κάθε $i \geq 0$. Τονίζουμε ότι η ακρίβεια του συμπλόκου ℓ' προκύπτει από το γεγονός ότι η ακριβής ακολουθία ℓ είναι διασπασίμη, όταν ιδωθεί ως ακολουθία αβελιανών ομάδων. Επιπλέον, αξ σημειώσουμε ότι επειδή ο ομάδα δακτύλιος $\mathbb{Z}G$ είναι εκ κατασκευής το ελεύθερο \mathbb{Z} -πρότυπο με βάση τα στοιχεία της ομάδα G , και αφού τα F_i για $i \geq 0$ είναι πεπερασμένα παραγόμενα και ελεύθερα $\mathbb{Z}G$ -πρότυπα, έχουμε ότι κάθε F^i για $i \geq 0$, είναι επίσης πεπερασμένα παραγόμενο και ελεύθερο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο. Η συγκόλληση τώρα των ακριβών ακολουθιών ℓ και ℓ' , είναι η ακριβής ακολουθία $\mathbb{Z}G$ -προτύπων:

$$\mathfrak{R} : \dots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow F^0 \longrightarrow F^1 \longrightarrow F^2 \longrightarrow \dots$$

η οποία είναι εύκολο να δούμε ότι παραμένει ακριβής, μετά την εφαρμογή του αντισυναλλοίωτου συναρτητή $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(-, Q)$ για κάθε προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο Q . Άρα, η ακριβής ακολουθία $\mathbb{Z}G$ -προτύπων \mathfrak{R} είναι μια πλήρης προβολική ανάλυση.

Σημειώνουμε ότι η ύπαρξη πλήρων προβολικών αναλύσεων $\mathbb{Z}G$ -προτύπων, οδήγησε στην **Tate συνομολογία πεπερασμένων ομάδων**, η οποία έκτοτε γενικεύτηκε και πλέον αφορά ευρύτερες κλάσεις δακτυλίων και προτύπων.

Σύμβαση: Χάριν απλότητας, από τώρα και στο εξής, καλούμε κάθε Gorenstein προβολικό αριστερό (δεξιό) R -πρότυπο, **G-προβολικό** αριστερό (δεξιό) R -πρότυπο.

Η προσοχή μας τώρα, στρέφεται σε G -προβολικά αριστερά R -πρότυπα. Τονίζουμε ότι ανάλογα αποτελέσματα με τα αποτελέσματα που θα παραθέσουμε στη συνέχεια της παρούσας ενότητας, για G -προβολικά αριστερά R -πρότυπα, ισχύουν και για G -προβολικά δεξιά R -πρότυπα.

Παρατήρηση 5.1.3. Λόγω συμμετρίας, σε μια πλήρη προβολική ανάλυση όπως παραδείγματος χάριν η (5.1), κάθε εικόνα $\text{Im } \alpha_n, \text{Im } \beta^n$, είναι G-προβολικό αριστερό R -πρότυπο, και συνεπώς λόγω ακρίβειας, κάθε πυρήνας $\text{Ker } \alpha_n, \text{Ker } \beta^n$ και κάθε συνπυρήνας $\text{Coker } \alpha_n, \text{Coker } \beta^n$, είναι G-προβολικά αριστερά R -πρότυπα. Επιπλέον, αν M είναι ένα G-προβολικό αριστερό R -πρότυπο, τότε για κάθε φυσικό αριθμό n , ($n \in \mathbb{N}_0$), υπάρχουν σύντομες ακριβείς ακολουθίες

$$1. 0 \longrightarrow G \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \quad \text{και}$$

$$2. 0 \longrightarrow M \longrightarrow Q^0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q^n \longrightarrow G' \longrightarrow 0,$$

όπου P_i, Q^i είναι προβολικά αριστερά R -πρότυπα για κάθε $i = 0, \dots, n$ και G, G' είναι G-προβολικά αριστερά R -πρότυπα.

Ας περάσουμε σε βασικά παραδείγματα G-προβολικών προτύπων.

Παράδειγμα 5.1.4. 1. Maximal Cohen-Macaulay Πρότυπα

Αν R είναι ένας μεταθετικός τοπικός δακτύλιος Gorenstein, τότε τα πεπερασμένα παραγόμενα G-προβολικά πρότυπα συμπίπτουν με τα *maximal Cohen-Macaulay πρότυπα*:

$$R\text{-GProj} = \{M \in \text{ob}(R\text{-mod}) \mid \text{depth}_R(M) = \text{Dim}(R)\}$$

2. Προβολικά Πρότυπα

Κάθε προβολικό αριστερό R -πρότυπο είναι G-προβολικό αριστερό R -πρότυπο, αφού για κάθε προβολικό αριστερό R -πρότυπο P , η ακολουθία

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{\text{Id}_P} P \longrightarrow 0,$$

όπου Id_P είναι ο ταυτοτικός μορφισμός του P , είναι μια πλήρης προβολική ανάλυση. Συνεπώς, αν συμβολίσουμε με $R\text{-Proj}$ την κλάση των προβολικών αριστερών R -προτύπων, και με $R\text{-GProj}$ την κλάση των G-προβολικών αριστερών R -προτύπων, τότε ισχύει ο εγκλεισμός:

$$R\text{-Proj} \subseteq R\text{-GProj}$$

Τονίζουμε ότι ο προηγούμενος εγκλεισμός είναι γνήσιος, δηλαδή υπάρχουν G-προβολικά R -πρότυπα τα οποία δεν είναι προβολικά R -πρότυπα. Από το κεφάλαιο 3, γνωρίζουμε ότι αν η αριστερή ομολογική διάσταση του δακτυλίου R είναι ίση με άπειρο, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα αριστερό R -πρότυπο με προβολική (ενέσιμη) διάσταση ίση με άπειρο. Επιπλέον, στο επόμενο κεφάλαιο, θα έχουμε την ευκαιρία να διαπιστώσουμε ότι αν ο R είναι δακτύλιος quasi-Frobenius, τότε κάθε αριστερό R -πρότυπο είναι G-προβολικό. Συνδυάζοντας λοιπόν τα αποτελέσματα αυτά, παίρνουμε ότι αν ο R είναι δακτύλιος quasi-Frobenius με άπειρη αριστερή ολική ομολογική διάσταση, τότε κάθε αριστερό R -πρότυπο είναι G-προβολικό, ενώ υπάρχει τουλάχιστον ένα αριστερό R -πρότυπο, το οποίο δεν είναι προβολικό. Δηλαδή, για έναν οποιοδήποτε δακτύλιο quasi-Frobenius R , με άπειρη αριστερή ολική ομολογική διάσταση, ισχύουν οι σχέσεις:

$$R\text{-Mod} = R\text{-GProj} \quad \& \quad R\text{-Proj} \subset R\text{-GProj}$$

Ένα παράδειγμα ενός δακτυλίου quasi-Frobenius με άπειρη (αριστερή) ολική ομολογική διάσταση, είναι ο δακτύλιος \mathbb{Z}_4 . Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στη συζήτηση μετά το Παράδειγμα 6.2.8.

Εφόσον λοιπόν η κλάση των προβολικών προτύπων είναι γενικά γνήσια υποκλάση της κλάσης των G-προβολικών προτύπων, ενδιαφέρον παρουσιάζει το εξής ερώτημα:

Πρόβλημα: Για ποιούς δακτυλίους R ισχύει ότι $R\text{-GProj} = R\text{-Proj}$;

Είμαστε σε θέση τώρα, να αναφερθούμε σε βασικές ιδιότητες των G-προβολικών R -προτύπων. Ξεκινάμε την αναφορά αυτή, δείχνοντας ότι το ευθύ άθροισμα από G-προβολικά R -πρότυπα, είναι επίσης G-προβολικό R -πρότυπο.

Πρόταση 5.1.5. Η κλάση των G -προβολικών αριστερών R -προτύπων, $R\text{-GProj}$, είναι κλειστή σε τυχαία ευθέα αθροίσματα.

Απόδειξη. Θεωρούμε Λ ένα οποιοδήποτε μη κενό σύνολο, και έστω $(M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ μια οικογένεια από G -προβολικά αριστερά R -πρότυπα. Θέτουμε $M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$, με σκοπό να δείξουμε ότι το M είναι G -προβολικό αριστερό R -πρότυπο. Εξ ορισμού των G -προβολικών R -προτύπων, για κάθε $\lambda \in \Lambda$, υπάρχει μια πλήρης προβολική ανάλυση

$$\mathfrak{R}_\lambda : \quad \dots \longrightarrow P_2^\lambda \xrightarrow{\alpha_2^\lambda} P_1^\lambda \xrightarrow{\alpha_1^\lambda} P_0^\lambda \xrightarrow{\alpha_0^\lambda} Q_\lambda^0 \xrightarrow{\beta_\lambda^0} Q_\lambda^1 \xrightarrow{\beta_\lambda^1} Q_\lambda^2 \xrightarrow{\beta_\lambda^2} \dots,$$

με $M_\lambda \cong \text{Im } \alpha_0^\lambda = \text{Ker } \beta_\lambda^0$. Δηλαδή, για κάθε $\lambda \in \Lambda$, οι ακολουθίες \mathfrak{R}_λ είναι ακριβείς ακολουθίες από προβολικά αριστερά R -πρότυπα, και επιπλέον, για κάθε προβολικό αριστερό R -πρότυπο Q , τα σύμπλοκα αβελιανών ομάδων $\text{Hom}_R(\mathfrak{R}_\lambda, Q)$ είναι ακριβή. Στη συνέχεια, θεωρούμε το ευθύ άθροισμα των ακολουθιών \mathfrak{R}_λ , και θέτουμε $\mathfrak{R} = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{R}_\lambda$, δηλαδή, η ακολουθία \mathfrak{R} είναι της μορφής:

$$\mathfrak{R} : \quad \dots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{\alpha_2} P_1 \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \xrightarrow{\alpha_0} Q^0 \xrightarrow{\beta^0} Q^1 \xrightarrow{\beta^1} Q^2 \xrightarrow{\beta^2} \dots,$$

όπου $P_i = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} P_i^\lambda$, $Q^i = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} Q_\lambda^i$, $\alpha_i = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \alpha_i^\lambda$ και $\beta^i = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \beta_\lambda^i$, για κάθε $i \geq 0$. Λόγω της ακρίβειας των ακολουθιών \mathfrak{R}_λ για $\lambda \in \Lambda$, και λόγω του γεγονότος ότι η κλάση των προβολικών R -προτύπων είναι κλειστή σε τυχαία ευθέα αθροίσματα, συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία \mathfrak{R} είναι μια ακριβής ακολουθία από προβολικά αριστερά R -πρότυπα. Γνωρίζουμε ότι για μια οποιοδήποτε οικογένεια (αριστερών) R -προτύπων υπεράνω ενός μη κενού συνόλου Δ , $(N_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$, και για ένα οποιοδήποτε (αριστερό) R -πρότυπο L , υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός αβελιανών ομάδων:

$$\phi : \text{Hom}_R\left(\bigoplus_{\alpha \in \Delta} N_\alpha, L\right) \longrightarrow \prod_{\alpha \in \Delta} \text{Hom}_R(N_\alpha, L), \quad f \longmapsto (f \circ i_\alpha)_{\alpha \in \Delta},$$

όπου ο μονομορφισμός $i_\alpha : N_\alpha \longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in \Delta} N_\alpha$, δίνεται από το τύπο $i_\alpha(x) = (x_\beta)$, με $x_\beta = 0$ για κάθε $\beta \neq \alpha$, και $x_\beta = x$ για $\beta = \alpha$. Αν θεωρήσουμε λοιπόν ένα οποιοδήποτε αριστερό R -πρότυπο L , τότε είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι:

$$\text{Hom}_R(\mathfrak{R}, L) = \text{Hom}_R\left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{R}_\lambda, L\right) \cong \prod_{\lambda \in \Lambda} \text{Hom}_R(\mathfrak{R}_\lambda, L). \quad (5.2)$$

Από την υπόθεση, έχουμε ότι τα σύμπλοκα αβελιανών ομάδων $\text{Hom}_R(\mathfrak{R}_\lambda, Q)$ είναι ακριβή, όταν το Q είναι ένα προβολικό αριστερό R -πρότυπο. Έτσι, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι το σύμπλοκο αβελιανών ομάδων $\prod_{\lambda \in \Lambda} \text{Hom}_R(\mathfrak{R}_\lambda, Q)$, είναι ακριβές για κάθε προβολικό αριστερό R -πρότυπο Q . Το αποτέλεσμα αυτό, καθώς και η σχέση (5.2), μας δίνουν ότι το σύμπλοκο αβελιανών ομάδων $\text{Hom}_R(\mathfrak{R}, Q)$, είναι επίσης ακριβές για κάθε προβολικό αριστερό R -πρότυπο Q . Συνεπώς, η ακριβής ακολουθία \mathfrak{R} είναι μια πλήρης προβολική ανάλυση. Επιπλέον, παρατηρώντας ότι:

$$\text{Im } \alpha_0 = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \text{Im } \alpha_0^\lambda \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = M,$$

καταλήγουμε ότι το αριστερό R -πρότυπο M είναι G -προβολικό, όπως επιθυμούσαμε. ■

Λήμμα 5.1.6. Αν \mathfrak{R} είναι μια πλήρης προβολική ανάλυση, τότε το σύμπλοκο αβελιανών ομάδων $\text{Hom}_R(\mathfrak{R}, L)$, είναι ακριβές για κάθε αριστερό R -πρότυπο L με πεπερασμένη προβολική διάσταση. Επιπλέον, αν M είναι ένα G -προβολικό αριστερό R -πρότυπο, τότε $\text{Ext}_R^i(M, L) = 0$ για κάθε $i > 0$ και για κάθε αριστερό R -πρότυπο L με πεπερασμένη προβολική ή ενέσιμη διάσταση.

Απόδειξη. Έστω

$$\mathfrak{R} : \quad \dots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{\alpha_2} P_1 \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \xrightarrow{\alpha_0} Q^0 \xrightarrow{\beta^0} Q^1 \xrightarrow{\beta^1} Q^2 \xrightarrow{\beta^2} \dots,$$

μια πλήρης προβολική ανάλυση. Θεωρούμε ένα αριστερό R -πρότυπο L με πεπερασμένη προβολική διάσταση, και θέτουμε $\ell = \text{pd}_R L < \infty$. Θα αποδείξουμε ότι το σύμπλοκο αβελιανών ομάδων

$\text{Hom}_R(\mathfrak{R}, L)$ είναι ακριβές, με χρήση επαγωγής στο φυσικό αριθμό ℓ . Αν $\ell = 0$, τότε το L είναι ένα προβολικό αριστερό R -πρότυπο, και εξ ορισμού λοιπόν έχουμε ότι το σύμπλοκο $\text{Hom}_R(\mathfrak{R}, L)$ είναι ακριβές. Έστω τώρα, $\ell > 0$. Υποθέτουμε ότι το σύμπλοκο $\text{Hom}_R(\mathfrak{R}, L)$ είναι ακριβές για κάθε αριστερό R -πρότυπο L , με $\text{pd}_R L = 0, \dots, \ell - 1$. Στη συνέχεια, διαλέγουμε μια σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} Q \xrightarrow{f} L \longrightarrow 0, \quad (5.3)$$

όπου Q είναι ένα προβολικό αριστερό R -πρότυπο. Η ύπαρξη μιας ακολουθίας όπως η (5.3), βασίζεται στο γεγονός ότι κάθε R -πρότυπο είναι η ομομορφική εικόνα ενός προβολικού R -πρότυπου. Λόγω των ανισοτήτων

$$0 < \ell = \text{pd}_R L < \infty,$$

και της ακρίβειας της ακολουθίας (5.3), συμπεραίνουμε ότι $\text{pd}_R K = \ell - 1$. Θεωρούμε τώρα, το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & (5.4) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & \text{Hom}_R(Q^0, K) & \xrightarrow{(\alpha_0^K)^*} & \text{Hom}_R(P_0, K) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow i_*^0 & & \downarrow (i_0)_* & & \\ \cdots & \longrightarrow & \text{Hom}_R(Q^0, Q) & \xrightarrow{(\alpha_0^Q)^*} & \text{Hom}_R(P_0, Q) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f_*^0 & & \downarrow (f_0)_* & & \\ \cdots & \longrightarrow & \text{Hom}_R(Q^0, L) & \xrightarrow{(\alpha_0^L)^*} & \text{Hom}_R(P_0, L) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

όπου η πρώτη, δεύτερη και τρίτη γραμμή του διαγράμματος (5.4), παριστάνουν τα σύμπλοκα αβελιανών ομάδων $\text{Hom}_R(\mathfrak{R}, K)$, $\text{Hom}_R(\mathfrak{R}, Q)$ και $\text{Hom}_R(\mathfrak{R}, L)$, αντίστοιχα. Είναι γνωστό από το Κεφάλαιο 3, ότι ένα R -πρότυπο M είναι προβολικό, αν και μόνο αν, ο συναρτητής $\text{Hom}_R(M, -)$ είναι ακριβής. Έτσι, επειδή για κάθε $i \geq 0$, τα P_i, Q^i είναι προβολικά R -πρότυπα, έχουμε ότι κάθε στήλη του διαγράμματος (5.4), είναι μια σύντομη ακριβής ακολουθία. Επομένως, το διάγραμμα (5.4) μπορεί να ιδωθεί ως μια σύντομη ακριβής ακολουθία από σύμπλοκα αβελιανών ομάδων:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(\mathfrak{R}, K) \longrightarrow \text{Hom}_R(\mathfrak{R}, Q) \longrightarrow \text{Hom}_R(\mathfrak{R}, L) \longrightarrow 0. \quad (5.5)$$

Η επαγωγική υπόθεση, μας δίνει ότι τα σύμπλοκα αβελιανών ομάδων $\text{Hom}_R(\mathfrak{R}, K)$ και $\text{Hom}_R(\mathfrak{R}, Q)$ είναι ακριβή. Συνεπώς, από την ακριβή ακολουθία (5.5), και την επαγόμενη μεγάλη ακριβή ακολουθία στην ομολογία οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι το σύμπλοκο αβελιανών ομάδων $\text{Hom}_R(\mathfrak{R}, L)$, είναι επίσης ακριβές.

Για την απόδειξη του τελευταίου σκέλους του λήμματος, υποθέτουμε ότι το M είναι ένα G -προβολικό αριστερό R -πρότυπο, και θεωρούμε αρχικά, ένα αριστερό R -πρότυπο L με $\text{pd}_R L < \infty$. Διαλέγουμε μια πλήρη προβολική ανάλυση,

$$\mathfrak{R} : \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{\alpha_2} P_1 \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \xrightarrow{\alpha_0} Q^0 \xrightarrow{\beta^0} Q^1 \xrightarrow{\beta^1} Q^2 \xrightarrow{\beta^2} \cdots,$$

τέτοια ώστε $\text{Ker } \beta^0 = \text{Im } \alpha_0 \cong M$. Από το πρώτο σκέλος του λήμματος, έχουμε ότι το σύμπλοκο αβελιανών ομάδων $\text{Hom}_R(\mathfrak{R}, L)$ είναι ακριβές. Στη συνέχεια, σημειώνουμε με $\phi: \text{Im } \alpha_0 \longrightarrow M$, τον ισομορφισμό που καθιστά τα R -πρότυπα $\text{Im } \alpha_0, M$ ισόμορφα, και με $i: \text{Im } \alpha_0 \longrightarrow Q^0$, την κανονική έγκλειση του υποπρότυπου $\text{Im } \alpha_0$, στο R -πρότυπο Q^0 . Θεωρώντας τον ομομορφισμό

αριστερών R -προτύπων $\alpha'_0: P_0 \rightarrow \text{Im } \alpha_0$, με την ιδιότητα $i \circ \alpha'_0 = \alpha_0$, εύκολα βλέπουμε ότι η ακολουθία

$$\cdots \rightarrow P_2 \xrightarrow{\alpha_2} P_1 \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \xrightarrow{\phi \circ \alpha'_0} M \rightarrow 0, \quad (5.6)$$

είναι ακριβής, και κάθε P_i για $i = 0, 1, \dots$, είναι φυσικά ένα προβολικό αριστερό R -πρότυπο. Άρα, η ακολουθία (5.6) είναι στην πραγματικότητα μια προβολική ανάλυση του M . Αν εφαρμόσουμε τώρα τον αντισυναλλοίωτο συναρτητή $\text{Hom}_R(-, L)$, στην ακολουθία (5.6), τότε η επαγόμενη ακολουθία αβελιανών ομάδων είναι ακριβής ακολουθία, αφού το σύμπλοκο $\text{Hom}_R(\mathfrak{R}, L)$ είναι ακριβές, και ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής $\text{Hom}_R(-, L)$ είναι αριστερά ακριβής. Επομένως, για κάθε $i > 0$ προκύπτει ότι $\text{Ext}_R^i(M, L) = 0$, όπως ζητούσαμε. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του λήμματος αυτού, μένει ακόμη να δείξουμε ότι $\text{Ext}_R^i(M, I) = 0$, για κάθε $i > 0$ και για κάθε αριστερό R -πρότυπο I με πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση. Θεωρούμε λοιπόν, ένα αριστερό R -πρότυπο I με $\text{id}_R I < \infty$, και έστω $\text{id}_R I = n$ για κάποιον φυσικό αριθμό n . Επειδή το αριστερό R -πρότυπο M είναι G -προβολικό, από την Παρατήρηση (5.1.3), υπάρχει μια ακριβής ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα

$$0 \rightarrow M \rightarrow Q^0 \rightarrow Q^1 \rightarrow \cdots \rightarrow Q^{n-1} \rightarrow C^n \rightarrow 0, \quad (5.7)$$

όπου κάθε Q^i για $i = 0, \dots, n-1$, είναι προβολικό και C^n είναι G -προβολικό. Συνεπώς, η ακριβής ακολουθία (5.7), μπορεί να θεωρηθεί ως μια επιμέρους προβολική ανάλυση του C^n . Εφαρμόζοντας το Dimension Shifting για προβολικές αναλύσεις, στην ακριβή ακολουθία (5.7), παίρνουμε ότι:

$$\text{Ext}_R^{i+n}(C^n, N) \cong \text{Ext}_R^i(M, N), \quad (5.8)$$

για κάθε $i > 0$ και για κάθε αριστερό R -πρότυπο N . Η υπόθεση ότι $\text{id}_R I = n$, μας δίνει την ισότητα $\text{Ext}_R^\kappa(-, I) = 0$ για κάθε $\kappa > n$. Επομένως, από τη σχέση (5.8), οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι $\text{Ext}_R^{i+n}(C^n, I) = 0$ για κάθε $i > 0$, και κατ'επέκταση, ότι $\text{Ext}_R^i(M, I) = 0$ για κάθε $i > 0$. Εφόσον η επιλογή του αριστερού R -προτύπου I με $\text{id}_R I < \infty$ ήταν τυχαία, καταλήγουμε ότι $\text{Ext}_R^i(M, I) = 0$ για κάθε $i > 0$ και για κάθε αριστερό R -πρότυπο I με πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση. ■

Στο Κεφάλαιο 3, είχαμε διαπιστώσει ότι τα προβολικά R -πρότυπα είναι ακριβώς τα R -πρότυπα, προβολικής διάστασης ίσης με μηδέν. Έτσι, λόγω του Παραδείγματος (5.1.4), τίθεται το ερώτημα, με τι ισούται η προβολική διάσταση ενός G -προβολικού R -προτύπου. Η πρόταση που ακολουθεί, απαντάει στο ερώτημα αυτό, και μας εξασφαλίζει ότι κάθε G -προβολικό R -πρότυπο με πεπερασμένη προβολική διάσταση, είναι ένα προβολικό R -πρότυπο.

Πρόταση 5.1.7. *Η προβολική διάσταση ενός G -προβολικού αριστερού R -προτύπου, είναι ή ίση με μηδέν, ή άπειρο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε M ένα G -προβολικό αριστερό R -πρότυπο με προβολική διάσταση ίση με n . Υποθέτουμε ότι $0 < \text{pd}_R M = n < \infty$, με σκοπό να καταλήξουμε σε άτοπο. Εξ ορισμού λοιπόν υπάρχει μια προβολική ανάλυση του M ελάχιστου μήκους n , έστω

$$\ell: 0 \rightarrow P_n \xrightarrow{\alpha_n} P_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \rightarrow 0.$$

Επειδή η ακολουθία ℓ είναι ακριβής, μπορούμε να την «σπάσουμε» σε σύντομες ακριβείς ακολουθίες για κάθε $j = 0, 1, \dots, n-1$,

$$\ell_j: 0 \rightarrow K_j \rightarrow P_j \rightarrow K_{j-1} \rightarrow 0,$$

όπου $K_{-1} = M$, $K_{n-1} = P_n$ και $K_j = \text{Ker } \alpha_j = \text{Im } \alpha_{j+1}$, για κάθε j που ανήκει στο σύνολο $\{0, 1, \dots, n-2\}$. Χρησιμοποιώντας το Dimension Shifting για προβολικές αναλύσεις, οδηγούμαστε στη σχέση:

$$\text{Ext}_R^n(M, P_n) \cong \text{Ext}_R^1(K_{n-2}, P_n). \quad (5.9)$$

Η υπόθεση τώρα ότι $n > 0$, καθώς και το Λήμμα (5.1.6), μας δίνουν την ισότητα $\text{Ext}_R^n(M, P_n) = 0$. Ως συνέπεια αυτού, και της σχέσης (5.9), έπονται οι ακόλουθες ισότητες:

$$0 = \text{Ext}_R^1(K_{n-2}, P_n) = \text{Ext}_R^1(\text{Ker } \alpha_{n-2}, P_n) = \text{Ext}_R^1(\text{Im } \alpha_{n-1}, P_n). \quad (5.10)$$

Αν θεωρήσουμε την ακριβή ακολουθία ℓ_j για $j = n - 1$,

$$\ell_{n-1}: \quad 0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{\alpha_n} P_{n-1} \longrightarrow \text{Im } \alpha_{n-1} \longrightarrow 0$$

και χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (5.10), τότε συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία ℓ_{n-1} είναι μια διασπασίμη σύντομη ακριβής ακολουθία. Επομένως, παίρνουμε ότι $P_{n-1} \cong P_n \oplus \text{Im } \alpha_{n-1}$, και επιπρόσθετα, ότι το πρότυπο $\text{Im } \alpha_{n-1}$ είναι ένα προβολικό αριστερό R -πρότυπο, ως ευθύς προσθετός του προβολικού R -προτύπου P_{n-1} . Θεωρώντας λοιπόν την ακριβή ακολουθία

$$\mathcal{J}: \quad 0 \longrightarrow \text{Im } \alpha_{n-1} \xrightarrow{i} P_{n-2} \xrightarrow{\alpha_{n-2}} P_{n-3} \xrightarrow{\alpha_{n-3}} \dots \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0$$

όπου i είναι η κανονική έγκλειση, έπεται ότι η \mathcal{J} είναι μια προβολική ανάλυση του M μήκους $n - 1$, δηλαδή, ότι $\text{pd}_R M \leq n - 1$. Το αποτέλεσμα όμως αυτό, αντιφάσκει με την ελαχιστότητα του n , αφού $n > n - 1$. Άρα, ή $\text{pd}_R M = 0$ ή $\text{pd}_R M = \infty$. ■

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, επισημάναμε ότι η ύπαρξη μιας αριστερής προβολικής προσέγγισης για κάθε R -πρότυπο M , είναι εν γένει αδύνατη, σε αντιδιαστολή με την ύπαρξη μιας δεξιάς προβολικής προσέγγισης για κάθε R -πρότυπο M . Ωστόσο, όπως θα δούμε ευθύς αμέσως, η εύρεση μιας αριστερής προβολικής προσέγγισης για κάθε G -προβολικό R -πρότυπο M , είναι πάντα εφικτή.

Πρόταση 5.1.8. *Για κάθε αριστερό R -πρότυπο M , οι ακόλουθες δύο συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

1. Το M είναι ένα G -προβολικό αριστερό R -πρότυπο.
2. Υπάρχει μία ακριβής δεξιά R -Proj-ανάλυση του M , και $\text{Ext}_R^i(M, Q) = 0$ για κάθε $i > 0$ και για κάθε προβολικό αριστερό R -πρότυπο Q .

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα αριστερό R -πρότυπο M . Υποθέτουμε αρχικά, ότι το M είναι G -προβολικό. Από το Λήμμα (5.1.6), γνωρίζουμε ότι $\text{Ext}_R^i(M, L) = 0$ για κάθε $i > 0$ και για κάθε αριστερό R -πρότυπο L με πεπερασμένη προβολική διάσταση. Συνεπώς, έχουμε ότι $\text{Ext}_R^i(M, Q) = 0$ για κάθε $i > 0$ και για κάθε προβολικό αριστερό R -πρότυπο Q . Στη συνέχεια, διαλέγουμε μια πλήρη προβολική ανάλυση

$$\mathfrak{R}: \quad \dots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{\alpha_2} P_1 \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \xrightarrow{\alpha_0} Q^0 \xrightarrow{\beta^0} Q^1 \xrightarrow{\beta^1} Q^2 \xrightarrow{\beta^2} \dots$$

με $\text{Ker } \beta^0 = \text{Im } \alpha_0 \cong M$, και θεωρούμε την επαγόμενη ακριβή ακολουθία

$$\mathcal{J}: \quad 0 \longrightarrow M \longrightarrow Q^0 \xrightarrow{\beta^0} Q^1 \xrightarrow{\beta^1} Q^2 \xrightarrow{\beta^2} \dots$$

Για οποιοδήποτε προβολικό αριστερό R -πρότυπο Q , το σύμπλοκο αβελιανών ομάδων $\text{Hom}_R(\mathfrak{R}, Q)$ είναι φυσικά ακριβές. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, και το γεγονός ότι για ένα οποιοδήποτε (αριστερό) R -πρότυπο Q , ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής $\text{Hom}_R(-, Q)$ είναι αριστερά ακριβής, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι το σύμπλοκο αβελιανών ομάδων $\text{Hom}_R(\mathcal{J}, Q)$, είναι ακριβές για κάθε προβολικό αριστερό R -πρότυπο Q . Επομένως, η ακριβής ακολουθία \mathcal{J} είναι μια δεξιά R -Proj-ανάλυση του M .

Αντίστροφα, υποθέτουμε τώρα το 2) και διαλέγουμε μια προβολική ανάλυση του M ,

$$\dots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0. \quad (5.11)$$

Για οποιοδήποτε προβολικό αριστερό R -πρότυπο Q , αν εφαρμόσουμε τον αντισυναλλοίωτο συναρτητή $\text{Hom}_R(-, Q)$, στην ακριβή ακολουθία (5.11), τότε η επαγόμενη ακολουθία αβελιανών ομάδων

θα είναι ακριβής, αφού ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής $\text{Hom}_R(-, Q)$ είναι αριστερά ακριβής, και $\text{Ext}_R^i(M, Q) = 0$ για κάθε $i > 0$. Από την υπόθεση, υπάρχει μια ακριβής δεξιά R -Proj-ανάλυση του M , έστω

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow Q^0 \longrightarrow Q^1 \longrightarrow Q^2 \longrightarrow \dots \quad (5.12)$$

Η συγκόλληση τώρα των ακριβών ακολουθιών (5.11) και (5.12) στη θέση M , είναι η ακριβής ακολουθία από προβολικά αριστερά R -πρότυπα,

$$\mathfrak{R} : \quad \dots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow Q^0 \longrightarrow Q^1 \longrightarrow Q^2 \longrightarrow \dots ,$$

με την ιδιότητα, όπως μας πιστοποιεί η Παρατήρηση (2.2.16), ότι για κάθε προβολικό αριστερό R -πρότυπο Q , το σύμπλοκο αβελιανών ομάδων $\text{Hom}_R(\mathfrak{R}, Q)$ είναι ακριβές. Συνεπώς, έπεται ότι η ακολουθία \mathfrak{R} είναι μια πλήρης προβολική ανάλυση. Παρατηρώντας ότι $M \cong \text{Im}(P_0 \longrightarrow Q^0)$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το M είναι ένα G -προβολικό αριστερό R -πρότυπο, όπως επιθυμούσαμε. ■

Παρατήρηση 5.1.9. Είναι προφανές από την απόδειξη της Πρότασης (5.1.8), ότι κάθε προβολική ανάλυση ενός G -προβολικού R -προτύπου είναι $\text{Hom}_R(-, R\text{-Proj})$ -ακριβής. Δηλαδή, αν M είναι ένα G -προβολικό R -πρότυπο, και \mathcal{J} μια οποιαδήποτε προβολική ανάλυση του M , τότε το σύμπλοκο αβελιανών ομάδων $\text{Hom}_R(\mathcal{J}, Q)$ είναι ακριβές για κάθε προβολικό R -πρότυπο Q . Επιπλέον, είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι, αν M είναι ένα G -προβολικό R -πρότυπο, τότε κάθε συζυγία του M , είναι επίσης G -προβολικό R -πρότυπο.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα, μας παρέχει την δυνατότητα να μπορούμε πάντα να υποθέτουμε, ότι τα πρότυπα που εμφανίζονται σε μια πλήρη προβολική ανάλυση, είναι ελεύθερα.

Πρόταση 5.1.10. Ένα αριστερό R -πρότυπο M είναι G -προβολικό, αν και μόνο αν, υπάρχει μια πλήρης προβολική ανάλυση

$$\mathcal{D} : \quad \dots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\phi_2} F_1 \xrightarrow{\phi_1} F_0 \xrightarrow{\phi_0} L^0 \xrightarrow{\lambda^0} L^1 \xrightarrow{\lambda^1} L^2 \xrightarrow{\lambda^2} \dots , \quad (5.13)$$

όπου F_n και L^n είναι ελεύθερα αριστερά R -πρότυπα για κάθε $n \geq 0$, έτσι ώστε $M \cong \text{Im } \phi_0 = \text{Ker } \lambda^0$.

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα αριστερό R -πρότυπο M και υποθέτουμε αρχικά, ότι η ακολουθία (5.13) είναι μια πλήρης προβολική ανάλυση από ελεύθερα αριστερά R -πρότυπα, με την ιδιότητα ότι $M \cong \text{Im } \phi_0 = \text{Ker } \lambda^0$. Τότε προφανώς, το M είναι ένα G -προβολικό αριστερό R -πρότυπο, αφού τα F_n και L^n για $n \geq 0$, είναι προβολικά αριστερά R -πρότυπα, ως ελεύθερα. Για την αντίστροφη κατεύθυνση, υποθέτουμε τώρα ότι το M είναι ένα G -προβολικό αριστερό R -πρότυπο, και διαλέγουμε μια ελεύθερη ανάλυση του M , έστω

$$\dots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0. \quad (5.14)$$

Επειδή κάθε ελεύθερο R -πρότυπο είναι ένα προβολικό R -πρότυπο, συμπεραίνουμε ότι η ακριβής ακολουθία (5.14) είναι μια προβολική ανάλυση του M . Έτσι, αν θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε προβολικό αριστερό R -πρότυπο Q , και εφαρμόσουμε τον αντισυναλλοίωτο συναρτητή $\text{Hom}_R(-, Q)$, στην ακολουθία (5.14), τότε από την Παρατήρηση (5.1.9), η ακολουθία που προκύπτει είναι ακριβής. Επιπλέον, από την Πρόταση (5.1.8), υπάρχει μια ακριβής δεξιά R -Proj-ανάλυση του M , έστω

$$\mathcal{J} : \quad 0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} Q^0 \xrightarrow{\beta^0} Q^1 \xrightarrow{\beta^1} Q^2 \xrightarrow{\beta^2} \dots$$

Γνωρίζουμε ότι κάθε προβολικό R -πρότυπο είναι ευθύς προσθετός ενός ελεύθερου R -προτύπου, και επιπλέον, ότι κάθε ευθύς προσθετός ενός προβολικού R -προτύπου είναι ένα προβολικό R -πρότυπο. Επειδή το αριστερό R -πρότυπο Q^0 που εμφανίζεται στην ακολουθία \mathcal{J} , είναι προβολικό, υπάρχει ένα προβολικό αριστερό R -πρότυπο P^0 , και ένα ελεύθερο αριστερό R -πρότυπο L^0 , τέτοια ώστε $L^0 = Q^0 \oplus P^0$. Αν θεωρήσουμε τώρα το αριστερό R -πρότυπο $Q^1 \oplus P^0$, τότε το πρότυπο αυτό

είναι προβολικό, διότι η κλάση των προβολικών αριστερών R -προτύπων, $R\text{-Proj}$, είναι κλειστή σε τυχαία ευθέα άθροισματα. Συνεπώς, υπάρχει ένα προβολικό αριστερό R -πρότυπο P^1 , καθώς και ένα ελεύθερο αριστερό R -πρότυπο L^1 , τέτοια ώστε $L^1 = Q^1 \oplus P^0 \oplus P^1$. Επαγωγικά λοιπόν, κατασκευάζουμε ελεύθερα αριστερά R -πρότυπα L^0, L^1, \dots , τέτοια ώστε $L^0 = Q^0 \oplus P^0$ και $L^n = Q^n \oplus P^{n-1} \oplus P^n$ για $n > 0$, όπου κάθε P^i για $i = 0, 1, \dots$, είναι ένα προβολικό αριστερό R -πρότυπο. Στη συνέχεια, θεωρούμε την ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow L^0 \longrightarrow L^1 \longrightarrow L^2 \longrightarrow \dots \quad (5.15)$$

η οποία προέκυψε σχηματίζοντας το ευθύ άθροισμα των ακριβών ακολουθιών:

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow M \xrightarrow{i} Q^0 \xrightarrow{\beta^0} Q^1 \xrightarrow{\beta^1} Q^2 \xrightarrow{\beta^2} \dots \\ 0 &\longrightarrow 0 \longrightarrow P^0 \xrightarrow{\text{Id}_{P^0}} P^0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \\ 0 &\longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow P^1 \xrightarrow{\text{Id}_{P^1}} P^1 \longrightarrow \dots \\ 0 &\longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow P^2 \xrightarrow{\text{Id}_{P^2}} \dots \\ 0 &\longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Η ακρίβεια της ακολουθίας (5.15), οφείλεται στο αποτέλεσμα ότι το (άπειρο) ευθύ άθροισμα ακριβών ακολουθιών είναι μια ακριβής ακολουθία. Παρατηρούμε ότι η εφαρμογή του αντισυναλλοιώτου συναρτητή $\text{Hom}_R(-, Q)$ όπου Q είναι ένα προβολικό αριστερό R -πρότυπο, σε κάθε παραπάνω ακριβή ακολουθία, έχει ως αποτέλεσμα, οι επαγόμενες ακολουθίες αβελιανών ομάδων να είναι ακριβείς. Συνεπώς, αν εφαρμόσουμε τώρα τον αντισυναλλοίωτο συναρτητή $\text{Hom}_R(-, Q)$, στην ακολουθία (5.15), τότε η ακολουθία που προκύπτει είναι ακριβής, όταν το Q είναι ένα προβολικό αριστερό R -πρότυπο. Έτσι, συγκολλώντας τις ακριβείς ακολουθίες (5.14) και (5.15), παίρνουμε τη ζητούμενη πλήρη προβολική ανάλυση \mathcal{D} , η οποία αποτελείται από ελεύθερα αριστερά R -πρότυπα, με την ιδιότητα $M \cong \text{Im}(F_0 \longrightarrow L^0)$. ■

Στη συνέχεια, μελετάμε το τρόπο με τον οποίο συμπεριφέρονται τα G -προβολικά R -πρότυπα, σε (σύντομες) ακριβείς ακολουθίες. Αρχίζουμε τη μελέτη αυτή, με το ακόλουθο αποτέλεσμα, το οποίο οφείλεται στους Foxby, Martsinkovsky και Holm:

Θεώρημα 5.1.11. *Η κλάση των G -προβολικών αριστερών R -προτύπων, $R\text{-GProj}$, είναι resolving.*

Απόδειξη. Από το Παράδειγμα (5.1.4), γνωρίζουμε ότι η κλάση των προβολικών αριστερών R -προτύπων, $R\text{-Proj}$, περιέχεται στην κλάση των G -προβολικών αριστερών R -προτύπων, $R\text{-GProj}$. Θεωρούμε τώρα μια σύντομη ακριβή ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα,

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0. \quad (5.16)$$

Υποθέτουμε αρχικά, ότι τα αριστερά R -πρότυπα M' και M'' είναι G -προβολικά, με σκοπό να δείξουμε ότι το αριστερό R -πρότυπο M είναι G -προβολικό. Αν για οποιοδήποτε προβολικό αριστερό R -πρότυπο Q , εφαρμόσουμε τον αντισυναλλοίωτο συναρτητή $\text{Hom}_R(-, Q)$ στη σύντομη ακριβή ακολουθία (5.16), τότε επάγεται μια μακρά ακριβής ακολουθία στη συνομολογία, μέρος της οποίας είναι η ακριβής ακολουθία

$$\text{Ext}_R^i(M'', Q) \longrightarrow \text{Ext}_R^i(M, Q) \longrightarrow \text{Ext}_R^i(M', Q), \quad (5.17)$$

για κάθε $i \geq 0$. Από την υπόθεση και από την Πρόταση (5.1.8), έχουμε ότι $\text{Ext}_R^i(M'', Q) = 0 = \text{Ext}_R^i(M', Q)$ για κάθε $i > 0$. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, από την ακριβή ακολουθία (5.17), συμπεραίνουμε ότι $\text{Ext}_R^i(M, Q) = 0$ για κάθε $i > 0$. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας πάλι την Πρόταση (5.1.8), οδηγούμαστε στην ύπαρξη ακριβών δεξιών $R\text{-Proj}$ -αναλύσεων

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow P^0 \longrightarrow P^1 \longrightarrow \dots \quad \text{και} \quad 0 \longrightarrow M'' \longrightarrow Q^0 \longrightarrow Q^1 \longrightarrow \dots,$$

των G -προβολικών αριστερών προτύπων, M' και M'' , αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι η εφαρμογή του αντισυναλλοίωτου συναρτητή $\text{Hom}_R(-, Q)$ στη σύντομη ακριβή ακολουθία (5.16), έχει ως αποτέλεσμα μια σύντομη ακριβή ακολουθία από αβελιανές ομάδες, στην περίπτωση κατά την οποία το Q είναι ένα προβολικό αριστερό R -πρότυπο. Επειδή τώρα η κλάση των προβολικών αριστερών R -προτύπων είναι κλειστή σε τυχαία ευθέα αθροίσματα, η Παρατήρηση (4.1.33), μας δίνει την ύπαρξη R -ομομορφισμών, τέτοιων ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό, και η μεσαία στήλη του διαγράμματος αυτού, να είναι μια δεξιά R -Proj-ανάλυση του M :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & & & (5.18) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 0 & \longrightarrow & P^0 & \longrightarrow & P^0 \oplus Q^0 & \longrightarrow & Q^0 & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 0 & \longrightarrow & P^1 & \longrightarrow & P^1 \oplus Q^1 & \longrightarrow & Q^1 & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & &
 \end{array}$$

Ως συνέπεια της ακρίβειας της πρώτης και τρίτης στήλης του μεταθετικού διαγράμματος (5.18), έπεται η ακρίβεια της μεσαίας στήλης του. Δηλαδή, η μεσαία στήλη του διαγράμματος (5.18), είναι μια ακριβής δεξιά R -Proj-ανάλυση του M . Το αποτέλεσμα αυτό, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι το M ανήκει στην κλάση ${}^\perp(R\text{-Proj})$, μας οδηγεί σύμφωνα με την Πρόταση (5.1.8), στο συμπέρασμα ότι το αριστερό R -πρότυπο M είναι ένα G -προβολικό R -πρότυπο. Επομένως, προκύπτει ότι η κλάση $R\text{-GProj}$ είναι κλειστή στις επεκτάσεις.

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι τα πρότυπα M και M'' είναι G -προβολικά αριστερά R -πρότυπα, με σκοπό αυτή τη φορά να αποδείξουμε ότι το πρότυπο M' είναι ένα G -προβολικό αριστερό R -πρότυπο. Επειδή το M είναι G -προβολικό, από την Παρατήρηση (5.1.3), υπάρχει μια σύντομη ακριβής ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} Q \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

όπου Q είναι προβολικό και C είναι G -προβολικό. Θεωρούμε τώρα το pushout P του διαγράμματος:

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{g} & M'' \\
 \downarrow i & & \downarrow v \\
 Q & \xrightarrow{u} & P
 \end{array}$$

Τότε από την Πρόταση (1.2.57), συμπεραίνουμε την ύπαρξη μοναδικών ομομορφισμών αριστερών R -προτύπων, $h: P \longrightarrow C$ και $h': M' \longrightarrow Q$, με την ιδιότητα οι ομομορφισμοί αυτοί, να συνθέτουν

το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές και στήλες:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow i & & \downarrow v & & \\
 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{h'} & Q & \xrightarrow{u} & P & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow h & & \\
 & & & & C & \xlongequal{\quad} & C & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
 \end{array} \tag{5.19}$$

Προηγουμένως αποδείξαμε ότι η κλάση $R\text{-GProj}$, είναι κλειστή στις επεκτάσεις. Χρησιμοποιώντας τώρα το αποτέλεσμα αυτό, καθώς και το γεγονός ότι τα αριστερά R -πρότυπα M'' και C είναι G -προβολικά, οδηγούμαστε από τη τρίτη στήλη του μεταθετικού διαγράμματος (5.19), στο συμπέρασμα ότι το αριστερό R -πρότυπο P είναι επίσης G -προβολικό. Έτσι, η Παρατήρηση (5.1.9), μας δίνει ότι κάθε συζυγία του G -προβολικού αριστερού R -πρωτύπου P , είναι επίσης ένα G -προβολικό αριστερό R -πρότυπο. Συνεπώς, επειδή το αριστερό R -πρότυπο Q είναι προβολικό, και η δεύτερη γραμμή του διαγράμματος (5.19) είναι μια σύντομη ακριβής ακολουθία, παίρνουμε ότι το αριστερό R -πρότυπο M' είναι G -προβολικό. Άρα, έπεται ότι η κλάση $R\text{-GProj}$ είναι κλειστή σε πυρήνες επιμορφισμών αριστερών R -πρωτύπων.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη της πρότασης αυτής, μένει ακόμη να αποδείξουμε ότι η κλάση των G -προβολικών αριστερών R -πρωτύπων $R\text{-GProj}$, είναι κλειστή σε ευθείς προσθετέους. Για την απόδειξη αυτού, θα βασιστούμε στην κλασική τεχνική του Eilenberg, γνωστή ως Eilenberg's swindle. Υποθέτουμε λοιπόν ότι το αριστερό R -πρότυπο Y , είναι ευθύς προσθετέος ενός $X \in R\text{-GProj}$, με σκοπό να δείξουμε ότι $Y \in R\text{-GProj}$. Γράφουμε $X = Y \oplus Z$ για κάποιο αριστερό R -πρότυπο Z , και ορίζουμε $W = Y \oplus Z \oplus Y \oplus Z \oplus \dots$. Δηλαδή, το W είναι ισόμορφο με (άπειρες) ευθείς κόπες του G -προβολικού αριστερού R -πρωτύπου X . Είναι φανερό ότι η κλάση $R\text{-GProj}$ είναι κλειστή σε ισομορφισμούς. Έτσι, χρησιμοποιώντας την Πρόταση (5.1.5), οδηγούμαστε από την υπόθεση, στο συμπέρασμα ότι $W \in R\text{-GProj}$. Παρατηρώντας τώρα ότι $W \cong Y \oplus W$, συμπεραίνουμε ότι $Y \oplus W \in R\text{-GProj}$. Στη συνέχεια, θεωρούμε τη διασπασίμη σύντομη ακριβή ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα:

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{i_Y} Y \oplus W \xrightarrow{\pi_W} W \longrightarrow 0, \tag{5.20}$$

όπου i_Y και π_W είναι οι προφανείς εγκλεισμοί και προβολές, αντίστοιχα. Προηγουμένως, αποδείξαμε ότι η κλάση $R\text{-GProj}$ είναι κλειστή σε πυρήνες επιμορφισμών αριστερών R -πρωτύπων. Επομένως, επειδή τα αριστερά R -πρότυπα $Y \oplus W$ και W , είναι στοιχεία της κλάσης $R\text{-GProj}$, και η ακολουθία (5.20) είναι σύντομη ακριβής ακολουθία, έπεται ότι το αριστερό R -πρότυπο Y είναι επίσης στοιχείο της κλάσης $R\text{-GProj}$. Συνεπώς, καταλήγουμε ότι η κλάση $R\text{-GProj}$ είναι κλειστή σε αυθαίρετους ευθείς προσθετέους. ■

Παρατήρηση 5.1.12. Αν θεωρήσουμε οποιαδήποτε ακριβή ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow K \longrightarrow G_m \longrightarrow \dots \longrightarrow G_0 \longrightarrow 0, \tag{5.21}$$

όπου τα αριστερά R -πρότυπα G_0, \dots, G_m είναι G -προβολικά, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$L \in R\text{-GProj} \iff K \in R\text{-GProj}.$$

Πράγματι, αν «σπάσουμε» την ακολουθία (5.21) σε σύντομες ακριβείς ακολουθίες, και εφαρμόσουμε το Θεώρημα (5.1.11), τότε θα προκύψει η ζητούμενη ισοδυναμία.

Οι M. Auslander και M. Bridger, θεωρώντας μια αβελιανή κατηγορία Γ με αρκετά προβολικά αντικείμενα, και μια οποιαδήποτε πλήρη υποκατηγορία Λ της Γ η οποία είναι resolving, απέδειξαν την ακόλουθη ιδιότητα: Αν

$$0 \longrightarrow X_n \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

και

$$0 \longrightarrow Y_n \longrightarrow Y_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

είναι δύο ακριβείς ακολουθίες στη Γ , όπου X_i και Y_i για $0 \leq i \leq n-1$, ανήκουν στη Λ , τότε $X_n \in \Lambda$, αν και μόνο αν, $Y_n \in \Lambda$, δες [8]. Στο σημείο αυτό, παραθέτουμε την απόδειξη του προηγούμενου αποτελέσματος, στην περίπτωση που η αβελιανή κατηγορία Γ , είναι η κατηγορία των αριστερών R -προτύπων $R\text{-Mod}$, και η πλήρης υποκατηγορία Λ της Γ η οποία είναι resolving, είναι η κλάση των G -προβολικών αριστερών R -προτύπων $R\text{-GProj}$.

Πρόταση 5.1.13. Έστω M ένα οποιοδήποτε αριστερό R -πρότυπο και θεωρούμε δύο ακριβείς ακολουθίες

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow K_n \xrightarrow{g_n} G_{n-1} \xrightarrow{g_{n-1}} \cdots \xrightarrow{g_1} G_0 \xrightarrow{g_0} M \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow K'_n \xrightarrow{g'_n} G'_{n-1} \xrightarrow{g'_{n-1}} \cdots \xrightarrow{g'_1} G'_0 \xrightarrow{g'_0} M \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

όπου G_i και G'_i είναι G -προβολικά αριστερά R -πρότυπα, για κάθε $i \geq 0$. Τότε K_n είναι G -προβολικό αριστερό R -πρότυπο, αν και μόνο αν, K'_n είναι G -προβολικό αριστερό R -πρότυπο.

Απόδειξη. Έστω

$$\ell: \quad 0 \longrightarrow L_n \xrightarrow{\alpha_n} P_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0,$$

μια επιμέρους προβολική ανάλυση του αριστερού R -προτύπου M . Δηλαδή, η ακολουθία ℓ είναι ακριβής, και κάθε P_i για $i = 0, \dots, n-1$, είναι ένα προβολικό αριστερό R -πρότυπο. Τότε χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Σύγκρισης, παίρνουμε ομομορφισμούς αριστερών R -προτύπων $f_i: P_i \longrightarrow G_i$ για $i = 0, \dots, n-1$, έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccccccc} P_{n-1} & \xrightarrow{\alpha_{n-1}} & P_{n-2} & \xrightarrow{\alpha_{n-2}} & \cdots & \xrightarrow{\alpha_1} & P_0 & \xrightarrow{\alpha_0} & M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow f_{n-1} & & \downarrow f_{n-2} & & & & \downarrow f_0 & & \parallel & & \\ G_{n-1} & \xrightarrow{g_{n-1}} & G_{n-2} & \xrightarrow{g_{n-2}} & \cdots & \xrightarrow{g_1} & G_0 & \xrightarrow{g_0} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Η μεταθετικότητα του παραπάνω διαγράμματος, μας δίνει την ύπαρξη ενός ομομορφισμού αριστερών R -προτύπων $f_n: L_n \longrightarrow K_n$, με την ιδιότητα το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L_n & \xrightarrow{\alpha_n} & P_{n-1} & \xrightarrow{\alpha_{n-1}} & \cdots & \xrightarrow{\alpha_1} & P_0 & \xrightarrow{\alpha_0} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & & & \downarrow f_0 & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & K_n & \xrightarrow{g_n} & G_{n-1} & \xrightarrow{g_{n-1}} & \cdots & \xrightarrow{g_1} & G_0 & \xrightarrow{g_0} & M & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (5.22)$$

να είναι μεταθετικό. Μάλιστα, ο ομομορφισμός f_n είναι ο μοναδικός ομομορφισμός που πληρεί αυτή την ιδιότητα, αφού ο ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων g_n είναι μονομορφισμός. Θεωρώντας τώρα το διάγραμμα (5.22) ως έναν μορφοισμό ανάμεσα σε ακριβή σύμπλοκα, και χρησιμοποιώντας την Πρόταση (3.1.21), συμπεραίνουμε ότι η επαγόμενη κωνική απεικόνιση:

$$\mathcal{M}: \quad 0 \longrightarrow L_n \xrightarrow{\mu_{n+1}} K_n \oplus P_{n-1} \xrightarrow{\mu_n} \cdots \xrightarrow{\mu_1} G_0 \oplus M \xrightarrow{\mu_0} M \longrightarrow 0,$$

είναι ακριβής. Έστω $i: M \longrightarrow G_0 \oplus M$ και $\pi: G_0 \oplus M \longrightarrow G_0$, η φυσική έγκλειση και η κανονική προβολή, αντίστοιχα. Ορίζουμε $\rho = \pi \circ \mu_1: G_1 \oplus P_0 \longrightarrow G_0$. Τότε λόγω των ισοτήτων, $\rho \circ \mu_2 = \pi \circ \mu_1 \circ \mu_2 = 0$, παίρνουμε ότι η ακολουθία

$$\mathfrak{R}: \quad 0 \longrightarrow L_n \xrightarrow{\mu_{n+1}} K_n \oplus P_{n-1} \xrightarrow{\mu_n} \cdots \xrightarrow{\mu_2} G_1 \oplus P_0 \xrightarrow{\rho} G_0 \longrightarrow 0,$$

είναι ένα σύμπλοκο στην κατηγορία των αριστερών R -προτύπων $R\text{-Mod}$. Παρατηρώντας τώρα, ότι $\mu_0 \circ i = \text{Id}_M$, οδηγούμαστε σε μια σύντομη ακριβή ακολουθία συμπλόκων από αριστερά R -πρότυπα:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & L_n & \xlongequal{\quad} & L_n \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \mu_{n+1} & & \downarrow \mu_{n+1} \\
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & K_n \oplus P_{n-1} & \xlongequal{\quad} & K_n \oplus P_{n-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \mu_n & & \downarrow \mu_n \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow \mu_2 & & \downarrow \mu_2 \\
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & G_1 \oplus P_0 & \xlongequal{\quad} & G_1 \oplus P_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \mu_1 & & \downarrow \rho \\
 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{i} & G_0 \oplus M & \xrightarrow{\pi} & G_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \mu_0 & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & M & \xlongequal{\quad} & M & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array} \tag{5.23}$$

Σημειώνοντας με \mathcal{K} το ακριβές σύμπλοκο $0 \longrightarrow M \xrightarrow{=} M \longrightarrow 0$, μπορούμε να γράψουμε το διάγραμμα (5.23), ως την ακριβή ακολουθία συμπλόκων:

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathfrak{R} \longrightarrow 0.$$

Ως συνέπεια της ακρίβειας των συμπλόκων \mathcal{K} και \mathcal{M} , έπεται η ακρίβεια του συμπλόκου \mathfrak{R} . Από το Παράδειγμα (5.1.4), γνωρίζουμε ότι κάθε προβολικό αριστερό R -πρότυπο είναι ένα G -προβολικό αριστερό R -πρότυπο. Έτσι, αν εφαρμόσουμε την Παρατήρηση (5.1.12) στην ακριβή ακολουθία \mathfrak{R} , τότε προκύπτει ότι το L_n είναι G -προβολικό R -πρότυπο, αν και μόνο αν, το $K_n \oplus P_{n-1}$ είναι G -προβολικό R -πρότυπο. Επιπλέον, από το Θεώρημα (5.1.11), έχουμε ότι η κλάση $R\text{-GProj}$ είναι κλειστή σε αυθαίρετους ευθείς προσθετέους. Συνεπώς, χρησιμοποιώντας ξανά το Παράδειγμα (5.1.4), συμπεραίνουμε ότι το $K_n \oplus P_{n-1}$ είναι G -προβολικό R -πρότυπο, αν και μόνο αν, το K_n είναι G -προβολικό R -πρότυπο. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα αυτά, έχουμε ότι το L_n είναι G -προβολικό R -πρότυπο, αν και μόνο αν, το K_n είναι G -προβολικό R -πρότυπο. Αν ακολουθήσουμε μια παρόμοια διαδικασία με πριν, τότε θα μας δώσει ότι το L_n είναι G -προβολικό R -πρότυπο, αν και μόνο αν, το K'_n είναι G -προβολικό R -πρότυπο. Επομένως, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το K_n είναι G -προβολικό R -πρότυπο, αν και μόνο αν, το K'_n είναι G -προβολικό R -πρότυπο, όπως επιθυμούσαμε. ■

Κλείνουμε την ενότητα αυτή, με την ακόλουθη πρόταση η οποία ολοκληρώνει τη μελέτη των G -προβολικών R -προτύπων σε σύντομες ακριβείς ακολουθίες. Αξίζει να σημειώσουμε, ότι η απόδειξη της ακόλουθης πρότασης θα μπορούσε να είναι πολύ πιο σύντομη, βλέπε [38], έχοντας εισάγει ωστόσο την έννοια των G -προβολικών διαστάσεων, θέμα το οποίο πραγματεύεται το επόμενο κεφάλαιο.

Πρόταση 5.1.14. Έστω $0 \longrightarrow G' \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ μια σύντομη ακριβής ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα, όπου G', G είναι G -προβολικά R -πρότυπα και $\text{Ext}_R^1(M, Q) = 0$ για κάθε προβολικό αριστερό R -πρότυπο Q . Τότε το αριστερό R -πρότυπο M είναι G -προβολικό R -πρότυπο.

Απόδειξη. Επειδή το αριστερό R -πρότυπο G είναι G -προβολικό, από την Παρατήρηση (5.1.3), υπάρχει μια σύντομη ακριβής ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{i} X \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

όπου X είναι προβολικό και C είναι G -προβολικό. Σημειώνουμε ότι ο μονομορφισμός i , είναι μια αριστερή προβολική προσέγγιση του G , διότι το αριστερό R -πρότυπο C είναι G -προβολικό, και $\text{Ext}_R^1(C, L) = 0$ για κάθε προβολικό αριστερό R -πρότυπο L , σύμφωνα με το Λήμμα (5.1.6). Θεωρούμε τώρα το pushout P του διαγράμματος:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{g} & M \\ i \downarrow & & \downarrow v \\ X & \xrightarrow{u} & P \end{array} .$$

Τότε η Πρόταση (1.2.57), μας δίνει μοναδικούς ομομορφισμούς $h: P \longrightarrow C, h': G' \longrightarrow X$ αριστερών R -προτύπων, έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό με ακριβείς γραμμές και στήλες:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & & 0 & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & 0 & & 0 & & \\ 0 & \longrightarrow & G' & \xrightarrow{f} & G & \xrightarrow{g} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow i & & \downarrow v & & \\ 0 & \longrightarrow & G' & \xrightarrow{h'} & X & \xrightarrow{u} & P & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow h & & \\ & & & & C & \xlongequal{\quad} & C & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & 0 & & 0 & & \end{array} \quad (5.24)$$

Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε ότι το αριστερό R -πρότυπο P είναι G -προβολικό, και έτσι, θα έχουμε ολοκληρώσει την απόδειξη της πρότασης αυτής, αφού τότε χρησιμοποιώντας το Θεώρημα (5.1.11), από την τρίτη στήλη του διαγράμματος (5.24), θα πάρουμε ότι το αριστερό R -πρότυπο M είναι G -προβολικό.

Αν εφαρμόσουμε τον αντισυναλλοίωτο συναρτητή $\text{Hom}_R(-, Q)$ όπου Q είναι ένα τυχαίο προβολικό αριστερό R -πρότυπο, στη τρίτη στήλη του διαγράμματος (5.24), τότε χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι $\text{Ext}_R^1(M, Q) = 0$ για κάθε προβολικό αριστερό R -πρότυπο Q , καθώς και το Λήμμα (5.1.6), συμπεραίνουμε ότι $\text{Ext}_R^1(P, Q) = 0$ για κάθε προβολικό αριστερό R -πρότυπο Q . Συνεπώς, ο μονομορφισμός h' , είναι μια αριστερή προβολική προσέγγιση του G' . Επειδή τώρα, το αριστερό R -πρότυπο G' είναι G -προβολικό, από την Παρατήρηση (5.1.3), υπάρχει μια σύντομη ακριβής ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα

$$0 \longrightarrow G' \xrightarrow{j} X' \longrightarrow C' \longrightarrow 0,$$

όπου X' είναι προβολικό και C' είναι G -προβολικό. Σημειώνουμε ξανά, ότι ο μονομορφισμός j είναι μια αριστερή προβολική προσέγγιση του G' , διότι το αριστερό R -πρότυπο C' είναι G -προβολικό, και $\text{Ext}_R^1(C', L) = 0$ για κάθε προβολικό αριστερό R -πρότυπο L . Επομένως, αφού

οι μονομορφισμοί h' και j , είναι δύο αριστερές προβολικές προσεγγίσεις του G' , υπάρχουν ομομορφισμοί $\alpha: X \rightarrow X'$ και $\beta: X' \rightarrow X$, τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} G' & \xrightarrow{h'} & X \\ \downarrow j & \searrow \beta & \nearrow \alpha \\ X' & & \end{array}$$

Η μεταθετικότητα του προηγούμενου διαγράμματος, μας δίνει ομομορφισμούς $\alpha': P \rightarrow C'$ και $\beta': C' \rightarrow P$, με την ιδιότητα, οι ομομορφισμοί αυτοί να συνθέτουν το μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & G' & \xrightarrow{h'} & X & \longrightarrow & P & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \begin{array}{c} \uparrow \beta \\ \downarrow \alpha \end{array} & & \begin{array}{c} \uparrow \beta' \\ \downarrow \alpha' \end{array} & & \\ 0 & \longrightarrow & G' & \xrightarrow{j} & X' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τώρα το Λήμμα του Schanuel [52] για αριστερές προσεγγίσεις, τότε παίρνουμε ότι $P \oplus X' \cong X \oplus C'$. Παρατηρώντας ότι το αριστερό R -πρότυπο $X \oplus C'$ είναι G -προβολικό, ως ευθύ άθροισμα του προβολικού R -προτύπου X , και του G -προβολικού R -προτύπου C' , οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι το αριστερό R -πρότυπο $P \oplus X'$ είναι επίσης G -προβολικό, αφού η κλάση $R\text{-GProj}$ είναι κλειστή σε ισομορφισμούς. Επομένως, καταλήγουμε ότι το αριστερό R -πρότυπο P είναι G -προβολικό, ως ευθύς προσθετός του G -προβολικού R -προτύπου $P \oplus X'$. ■

Ας επισημάνουμε ότι οι E. Enochs και O.M. Jenda, απέδειξαν την Πρόταση (5.1.14) χρησιμοποιώντας εντελώς διαφορετικές μεθόδους, στην περίπτωση που ο δακτύλιος R είναι αριστερά συναφής, και τα πρότυπα που εμφανίζονται στην ακριβή ακολουθία $0 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow M \rightarrow 0$, είναι δεξιά παραστάσιμα R -πρότυπα, βλέπε [27, Theorem 10.2.8].

5.2 Gorenstein Ενέσιμα Πρότυπα

Σκοπός της παρούσας ενότητας, είναι η μελέτη της δυϊκής έννοιας των Gorenstein προβολικών R -προτύπων, αυτής των Gorenstein ενέσιμων R -προτύπων. Αρχικά, παραθέτουμε τον ορισμό των Gorenstein ενέσιμων R -προτύπων και στη συνέχεια, αποδεικνύουμε θεμελιώδη αποτελέσματα για Gorenstein ενέσιμα R -πρότυπα, μπιμύμενοι, όπου είναι εφικτό, τις αποδείξεις των βασικών αποτελεσμάτων για Gorenstein προβολικά R -πρότυπα.

Ορισμός 5.2.1. 1. Μια **πλήρης ενέσιμη ανάλυση, (complete injective resolution)**, είναι μια ακριβής ακολουθία από ενέσιμα αριστερά R -πρότυπα

$$\Upsilon: \dots \rightarrow I_2 \xrightarrow{i_2} I_1 \xrightarrow{i_1} I_0 \xrightarrow{i_0} E^0 \xrightarrow{\varepsilon^0} E^1 \xrightarrow{\varepsilon^1} E^2 \xrightarrow{\varepsilon^2} \dots, \quad (5.25)$$

τέτοια ώστε το σύμπλοκο αβελιανών ομάδων $\text{Hom}_R(I, \Upsilon)$, να είναι ακριβές για κάθε ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο I .

2. Ένα αριστερό R -πρότυπο M καλείται **Gorenstein ενέσιμο, (Gorenstein injective)**, αν υπάρχει πλήρης ενέσιμη ανάλυση Υ , με $M \cong \text{Im } i_0 = \text{Ker } \varepsilon^0$.

Ανάλογος είναι ο ορισμός των Gorenstein ενέσιμων δεξιών R -προτύπων.

Σύμβαση: Χάριν απλότητας, από τώρα και στο εξής, καλούμε κάθε Gorenstein ενέσιμο αριστερό (δεξιό) R -πρότυπο, **G-ενέσιμο** αριστερό (δεξιό) R -πρότυπο.

Επικεντρωνόμαστε τώρα σε G -ενέσιμα αριστερά R -πρότυπα. Τονίζουμε ξανά, ότι παρόμοια αποτελέσματα με τα αποτελέσματα που θα παραθέσουμε στη συνέχεια της ενότητας αυτής, για G -ενέσιμα αριστερά R -πρότυπα, ισχύουν και για G -ενέσιμα δεξιά R -πρότυπα.

Παρατήρηση 5.2.2. Λόγω συμμετρίας, σε μια πλήρη ενέσιμη ανάλυση, όπως παραδείγματος χάριν η (5.25), κάθε εικόνα $\text{Im } \iota_n, \text{Im } \varepsilon^n$ είναι G -ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο, και συνεπώς, κάθε πυρήνας $\text{Ker } \iota_n, \text{Ker } \varepsilon^n$ και κάθε συνπυρήνας $\text{Coker } \iota_n, \text{Coker } \varepsilon^n$, είναι G -ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο. Επιπλέον, αν M είναι ένα G -ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο, τότε για κάθε φυσικό αριθμό n , ($n \in \mathbb{N}_0$), υπάρχουν σύντομες ακριβείς ακολουθίες

1. $0 \longrightarrow H \longrightarrow I_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ και
2. $0 \longrightarrow M \longrightarrow E^0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^n \longrightarrow H' \longrightarrow 0$,

όπου I_i, E^i είναι ενέσιμα αριστερά R -πρότυπα για κάθε $i = 0, \dots, n$ και H, H' είναι G -ενέσιμα αριστερά R -πρότυπα.

Παράδειγμα 5.2.3. Κάθε ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο είναι G -ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο, αφού για κάθε ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο I , η ακολουθία

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\text{Id}_I} I \longrightarrow 0$$

όπου Id_I είναι ο ταυτοτικός μορφισμός του I , είναι μια πλήρης ενέσιμη ανάλυση. Επομένως, αν συμβολίσουμε με $R\text{-Inj}$ την κλάση των ενέσιμων αριστερών R -προτύπων, και με $R\text{-GInj}$ την κλάση των G -ενέσιμων αριστερών R -προτύπων, τότε ισχύει ο εγκλεισμός:

$$R\text{-Inj} \subseteq R\text{-GInj}$$

Επισημαίνουμε ότι ο παραπάνω εγκλεισμός είναι γνήσιος. Για παράδειγμα, στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε ότι αν ο R είναι δακτύλιος quasi-Frobenius με αριστερή ομολογική διάσταση ίση με άπειρο, τότε κάθε αριστερό R -πρότυπο είναι G -ενέσιμο, ενώ υπάρχει τουλάχιστον ένα αριστερό R -πρότυπο το οποίο δεν είναι ενέσιμο. Με άλλα λόγια, για έναν δακτύλιο quasi-Frobenius R , με άπειρη αριστερή ομολογική διάσταση, ισχύουν οι σχέσεις:

$$R\text{-Mod} = R\text{-GInj} \quad \& \quad R\text{-Inj} \subset R\text{-GInj}.$$

Επειδή λοιπόν οι κλάσεις $R\text{-Inj}$ και $R\text{-GInj}$ είναι εν γένει διακριτές, είναι φυσιολογικό να αναρωτηθούμε τι ιδιότητες έχει ο δακτύλιος R , όταν αυτές ταυτίζονται.

Στη συνέχεια, περιγράφουμε βασικές ιδιότητες των G -ενέσιμων R -προτύπων. Όπως θα διαπιστώσουμε, τα G -ενέσιμα R -πρότυπα έχουν πολλές κοινές ιδιότητες με αυτές των ενέσιμων R -προτύπων. Ξεκινάμε την περιγραφή αυτή, αναφέροντας ότι το ευθύ γινόμενο από G -ενέσιμα R -πρότυπα, είναι επίσης G -ενέσιμο R -πρότυπο.

Πρόταση 5.2.4. Η κλάση των G -ενέσιμων αριστερών R -προτύπων, $R\text{-GInj}$, είναι κλειστή σε τυχαία ευθέα γινόμενα.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό των G -ενέσιμων αριστερών R -προτύπων, το γεγονός ότι η κλάση των ενέσιμων αριστερών R -προτύπων $R\text{-Inj}$, είναι κλειστή σε τυχαία ευθέα γινόμενα, καθώς και το αποτέλεσμα ότι (άπειρα) ευθέα γινόμενα ακριβών ακολουθιών είναι μια ακριβής ακολουθία, εύκολα καταλήγουμε στο ζητούμενο συμπέρασμα. ■

Λήμμα 5.2.5. Αν Υ είναι μια πλήρης ενέσιμη ανάλυση, τότε το σύμπλοκο αβελιανών ομάδων $\text{Hom}_R(L, \Upsilon)$ είναι ακριβές για κάθε αριστερό R -πρότυπο L με πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση. Επιπρόσθετα, αν M είναι ένα G -ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο, τότε $\text{Ext}_R^i(L, M) = 0$ για κάθε $i > 0$ και για κάθε αριστερό R -πρότυπο L με πεπερασμένη ενέσιμη ή προβολική διάσταση.

Απόδειξη. Η απόδειξη του πρώτου σκέλους του Λήμματος, προκύπτει με χρήση επαγωγής στο $\ell = \text{id}_R L < \infty$. Για την απόδειξη του δεύτερου σκέλους του λήμματος, χρησιμοποιούμε το πρώτο σκέλος του λήμματος και μιμούμαστε την απόδειξη του Λήμματος (5.1.6). ■

Η ακόλουθη πρόταση μας εξασφαλίζει ότι η ενέσιμη διάσταση ενός G -ενέσιμου R -προτύπου, αν είναι πεπερασμένη, τότε αυτή είναι ίση υποχρεωτικά με μηδέν. Δηλαδή, κάθε G -ενέσιμο R -πρότυπο με πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση, είναι ένα ενέσιμο R -πρότυπο.

Πρόταση 5.2.6. *Η ενέσιμη διάσταση ενός G -ενέσιμου αριστερού R -προτύπου, είναι ή ίση με μηδέν, ή άπειρο.*

Απόδειξη. Η απόδειξη της πρότασης αυτής προκύπτει με απαγωγή σε άτοπο. Θεωρούμε δηλαδή ένα G -ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο M ενέσιμης διάστασης ίσης με n , και υποθέτουμε τις γνήσιες ανισότητες, $0 < \text{id}_R M = n < \infty$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση, και το Λήμμα (5.2.5), οδηγούμαστε με χρήση του Dimension Shifting για ενέσιμες αναλύσεις, στο συμπέρασμα ότι $n = \text{id}_R M \leq n - 1$. Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι ή $\text{id}_R M = 0$, ή $\text{id}_R M = \infty$. ■

Στην προηγούμενη ενότητα, η Πρόταση (5.1.8), μας πιστοποιούσε ότι κάθε G -προβολικό R -πρότυπο έχει μια αριστερή προβολική προσέγγιση. Η επόμενη τώρα πρόταση, μας εξασφαλίζει ότι η εύρεση μιας δεξιάς ενέσιμης προσέγγισης για κάθε G -ενέσιμο R -πρότυπο, είναι πάντα εφικτή, εν' αντιθέσει με την εύρεση μιας δεξιάς ενέσιμης προσέγγισης για ένα τυχαίο R -πρότυπο (βλέπε Κεφάλαιο 4).

Πρόταση 5.2.7. *Για κάθε αριστερό R -πρότυπο M , οι ακόλουθες δύο συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

1. Το M είναι ένα G -ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο.
2. Υπάρχει μία ακριβή αριστερή R - Inj -ανάλυση του M , και $\text{Ext}_R^i(I, M) = 0$ για κάθε $i > 0$ και για κάθε ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο I .

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης της Πρότασης (5.1.8). ■

Παρατήρηση 5.2.8. Κάθε ενέσιμη ανάλυση ενός G -ενέσιμου R -προτύπου, είναι $\text{Hom}_R(R\text{-Inj}, -)$ -ακριβής. Δηλαδή, αν M είναι ένα G -ενέσιμο R -πρότυπο, και \mathcal{D} μια οποιαδήποτε ενέσιμη ανάλυση του M , τότε το σύμπλοκο αβελιανών ομάδων $\text{Hom}_R(I, \mathcal{D})$ είναι ακριβές για κάθε ενέσιμο R -πρότυπο I . Πράγματι, το αποτέλεσμα αυτό, απορρέει από την Πρόταση (5.2.7), και από το γεγονός ότι ο συναρτητής $\text{Hom}_R(I, -)$ είναι αριστερά ακριβής για οποιοδήποτε R -πρότυπο I . Επιπλέον, χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, και την Πρόταση (5.2.7) ξανά, εύκολα βλέπουμε ότι κάθε συνσυζυγία ενός G -ενέσιμου R -προτύπου, είναι επίσης ένα G -ενέσιμο R -πρότυπο.

Στην ενότητα (5.1), επισημάναμε τον τρόπο με τον οποίο συμπεριφέρονται τα G -προβολικά R -πρότυπα σε (σύντομες) ακριβείς ακολουθίες. Έχοντας εισάγει τώρα τη δυϊκή έννοια των G -προβολικών R -προτύπων, τα G -ενέσιμα R -πρότυπα, και έχοντας αναφέρει βασικά αποτελέσματα, φυσικό επακόλουθο λοιπόν είναι να μελετήσουμε πως συμπεριφέρονται τα G -ενέσιμα R -πρότυπα σε (σύντομες) ακριβείς ακολουθίες. Ξεκινάμε τη μελέτη αυτή, με την ακόλουθη δυϊκή εκδοχή του αποτελέσματος (5.1.11):

Θεώρημα 5.2.9. *Η κλάση των G -ενέσιμων αριστερών R -προτύπων, $R\text{-GInj}$, είναι coresolving.*

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι η κλάση των G -ενέσιμων αριστερών R -προτύπων $R\text{-GInj}$, είναι coresolving, χρειάζεται να αποδείξουμε τις ακόλουθες τέσσερις συνθήκες:

1. Η κλάση $R\text{-GInj}$ περιέχει την κλάση των ενέσιμων αριστερών R -προτύπων, $R\text{-Inj}$.
2. Η κλάση $R\text{-GInj}$ είναι κλειστή στις επεκτάσεις.
3. Η κλάση $R\text{-GInj}$ είναι κλειστή σε συνπυρήνες μονομορφισμών αριστερών R -προτύπων.

4. Η κλάση $R\text{-Glnj}$ είναι κλειστή σε ευθείς προσθετέους.

Η πρώτη συνθήκη εξασφαλίζεται από το Παράδειγμα (5.2.3). Η δεύτερη και τρίτη συνθήκη, προκύπτει κατά δυϊκό τρόπο με την απόδειξη του Θεωρήματος (5.1.11). Τέλος, για να δείξουμε ότι η κλάση $R\text{-Glnj}$ είναι κλειστή σε ευθείς προσθετέους, υποθέτουμε ότι το αριστερό R -πρότυπο Y , είναι ευθύς προσθετέος ενός G -ενέσιμου αριστερού R -πρότυπου X . Θα δείξουμε ότι το Y είναι στοιχείο της κλάσης $R\text{-Glnj}$, βασιζόμενοι όπως και στο Θεώρημα (5.1.11), στη τεχνική του Eilenberg (Eilenberg's swindle). Γράφουμε $X = Y \oplus Z$ για κάποιο αριστερό R -πρότυπο Z , και ορίζουμε $W = Y \times Z \times Y \times Z \times \dots$, όπου \times συμβολίζει το ευθύ γινόμενο. Είναι εμφανές ότι η κλάση $R\text{-Glnj}$ είναι κλειστή σε ισομορφισμούς. Έτσι, παρατηρώντας ότι $W \cong X \times X \times \dots$, και χρησιμοποιώντας την Πρόταση (5.2.4), συμπεραίνουμε από την υπόθεση, ότι το $W \in R\text{-Glnj}$. Επιπλέον, εύκολα βλέπουμε ότι $W \cong Y \oplus W$. Συνεπώς, παίρνουμε ότι $Y \oplus W \in R\text{-Glnj}$, ή ότι $W \oplus Y \in R\text{-Glnj}$. Στη συνέχεια, θεωρούμε τη διασπασίμη σύντομη ακριβή ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα

$$0 \longrightarrow W \xrightarrow{i_W} W \oplus Y \xrightarrow{\pi_Y} Y \longrightarrow 0, \quad (5.26)$$

όπου i_W και π_Y είναι οι προφανείς εγκλεισμοί και προβολές, αντίστοιχα. Έχοντας δείξει λοιπόν, ότι η κλάση $R\text{-Glnj}$ είναι κλειστή σε συνπυρήνες μονομορφισμών αριστερών R -πρότυπων, έχουμε ότι το αριστερό R -πρότυπο Y είναι στοιχείο της κλάσης $R\text{-Glnj}$, αφού τα αριστερά R -πρότυπα $W \oplus Y$ και W είναι στοιχεία της κλάσης $R\text{-Glnj}$, και η ακολουθία (5.26) είναι σύντομη ακριβής ακολουθία. ■

Δυϊκή της Παρατήρησης (5.1.12), είναι η ακόλουθη παρατήρηση:

Παρατήρηση 5.2.10. Αν θεωρήσουμε οποιαδήποτε ακριβή ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα

$$0 \longrightarrow H^0 \longrightarrow \dots \longrightarrow H^m \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow 0, \quad (5.27)$$

όπου τα αριστερά R -πρότυπα H^0, \dots, H^m είναι G -ενέσιμα, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$K \in R\text{-Glnj} \iff L \in R\text{-Glnj}.$$

Ο ισχυρισμός αυτός, προκύπτει αν «σπάσουμε» την ακολουθία (5.27) σε σύντομες ακριβείς ακολουθίες, και εφαρμόσουμε το Θεώρημα (5.2.9).

Πρόταση 5.2.11. Έστω M ένα οποιοδήποτε αριστερό R -πρότυπο και θεωρούμε δύο ακριβείς ακολουθίες

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow M \longrightarrow H^0 \longrightarrow \dots \longrightarrow H^{n-1} \longrightarrow C^n \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow M \longrightarrow \bar{H}^0 \longrightarrow \dots \longrightarrow \bar{H}^{n-1} \longrightarrow \bar{C}^n \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

όπου H^i και \bar{H}^i είναι G -ενέσιμα αριστερά R -πρότυπα, για κάθε $i \geq 0$. Τότε C^n είναι G -ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο, αν και μόνο αν, \bar{C}^n είναι G -ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο.

Απόδειξη. Διαλέγουμε μια ακριβή ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα

$$\mathcal{K}: \quad 0 \longrightarrow M \longrightarrow E^0 \longrightarrow \dots \longrightarrow E^{n-1} \longrightarrow L^n \longrightarrow 0,$$

όπου E^0, \dots, E^{n-1} είναι G -ενέσιμα αριστερά R -πρότυπα. Η ύπαρξη μιας ακολουθίας όπως η \mathcal{K} , οφείλεται στο αποτέλεσμα ότι για κάθε R -πρότυπο, υπάρχει μια ενέσιμη ανάλυση. Λόγω συμμετρίας, αρκεί να αποδείξουμε ότι C^n είναι G -ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο, αν και μόνο αν, L^n είναι G -ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο. Για την απόδειξη τώρα αυτού, ακολουθούμε μια ανάλογη πορεία με αυτή της απόδειξης της Πρότασης (5.1.13), χρησιμοποιώντας ωστόσο, τον ορισμό των ενέσιμων R -πρότυπων, καθώς και την Παρατήρηση (5.2.10). ■

Στη συνέχεια, παραθέτουμε τη δυϊκή εκδοχή της Πρότασης (5.1.14). Ας σημειώσουμε ότι οι E. Enochs και O.M.G. Jenda, απέδειξαν την ακόλουθη πρόταση, στην περίπτωση που ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether, δες [27, Theorem 10.1.4].

Πρόταση 5.2.12. Έστω $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} H \xrightarrow{g} H' \longrightarrow 0$ μια σύντομη ακριβή ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα, όπου H, H' είναι G -ενέσιμα R -πρότυπα και $\text{Ext}_R^1(I, M) = 0$ για κάθε ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο I . Τότε το M είναι G -ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο.

Απόδειξη. Δυϊκά με την απόδειξη της Πρότασης (5.1.14). ■

Υπενθυμίζουμε στο σημείο αυτό, ότι η κλάση $R\text{-Inj}$ των ενέσιμων αριστερών R -πρωτύπων, είναι (ελάχιστα) δεξιά προσεγγίσιμη, αν και μόνο αν, ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether. Το αποτέλεσμα αυτό, θα μας χρειαστεί στη συνέχεια της παρούσας ενότητας, όπου θα μελετήσουμε ελάχιστες δεξιές $R\text{-Inj}$ -προσεγγίσεις G -ενέσιμων αριστερών R -πρωτύπων, όταν ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether. Πριν περάσουμε στη μελέτη αυτή, χρειάζεται να εισάγουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 5.2.13. Ένα αριστερό R -πρότυπο καλείται **reduced**, αν το μόνο ενέσιμο υποπρότυπό του είναι το μηδενικό. Δηλαδή, αν M είναι ένα reduced αριστερό R -πρότυπο, και E είναι ένα ενέσιμο αριστερό υποπρότυπο του M , τότε $E = 0$.

Παράδειγμα 5.2.14. Ισοδύναμα ένα πρότυπο είναι reduced αν δεν έχει (μη-μηδενικό) ενέσιμο ευθύ αθροιστέο. Προφανώς, το μηδενικό αριστερό R -πρότυπο και κάθε μη-ενέσιμο μη-αναλύσιμο πρότυπο είναι reduced.

Πρόταση 5.2.15. Υποθέτουμε ότι ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether. Αν M είναι ένα reduced G -ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο, τότε η ελάχιστη δεξιά $R\text{-Inj}$ -προσέγγιση του M , $\phi: E \longrightarrow M$, είναι επιμορφισμός και ο πυρήνας $K = \text{Ker } \phi$ είναι ένα reduced G -ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο. Επιπλέον, ο μονομορφισμός $i: K \longrightarrow E$ είναι η ελάχιστη αριστερή $R\text{-Inj}$ -προσέγγιση του K .

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το M είναι ένα reduced G -ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο, και έστω $\phi: E \longrightarrow M$, η ελάχιστη δεξιά $R\text{-Inj}$ -προσέγγιση του M με πυρήνα K . Η Πρόταση (5.2.7), μας δίνει μία ακριβή αριστερή $R\text{-Inj}$ -ανάλυση του M , έστω

$$\dots \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha_1} E_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0.$$

Δηλαδή, το M είναι η ομομορφική εικόνα του ενέσιμου αριστερού R -πρωτύπου E_0 . Έτσι, από την Παρατήρηση (4.1.16), συμπεραίνουμε ότι ο R -ομομορφισμός ϕ είναι επιμορφισμός. Θεωρούμε τώρα τη σύντομη ακριβή ακολουθία

$$\ell_1: 0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\phi} M \longrightarrow 0,$$

όπου i είναι η κανονική εμφύτευση. Προφανώς, ο ομομορφισμός ϕ είναι μια δεξιά $R\text{-Inj}$ -προσέγγιση του M , ως ελάχιστη δεξιά $R\text{-Inj}$ -προσέγγιση, και εξ ορισμού λοιπόν, έχουμε για κάθε ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο E' , την ακρίβεια της ακολουθίας:

$$\text{Hom}_R(E', E) \xrightarrow{\phi_*} \text{Hom}_R(E', M) \longrightarrow 0.$$

Το αποτέλεσμα αυτό, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι η ακολουθία ℓ_1 είναι ακριβής, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι

$$\text{Ext}_R^1(E', K) = 0, \quad \forall E' \in R\text{-Inj}. \quad (5.28)$$

Έτσι, λόγω της σχέσης (5.28), από την υπόθεση και το Θεώρημα (5.2.12), καταλήγουμε ότι ο πυρήνας K είναι ένα G -ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο. Για να αποδείξουμε τώρα, ότι το R -πρότυπο K είναι reduced, υποθέτουμε ότι το αριστερό R -πρότυπο E' είναι ένα ενέσιμο υποπρότυπο του K . Θέλουμε να δείξουμε ότι $E' = 0$. Από την Πρόταση (3.2.3), υπάρχει ένα αριστερό R -πρότυπο

E'' , τέτοιο ώστε $K = E' \oplus E''$. Σημειώνουμε με $j: E' \rightarrow E' \oplus E''$, τη φυσική έγκλειση, και με $\pi: E' \oplus E'' \rightarrow E''$, την κανονική προβολή. Θεωρούμε τώρα το pushout X του διαγράμματος:

$$\begin{array}{ccc} E' \oplus E'' & \xrightarrow{i} & E \\ \pi \downarrow & & \downarrow v \\ E'' & \xrightarrow{u} & X \end{array} .$$

Τότε χρησιμοποιώντας την Πρόταση (1.2.57), οδηγούμαστε στην ύπαρξη μοναδικών ομομορφισμών, $\kappa: E' \rightarrow E$ και $\beta: X \rightarrow M$, έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό με ακριβείς γραμμές και στήλες:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & E' & \xlongequal{\quad} & E' & & \\ & & \downarrow j & & \downarrow \kappa & & \\ 0 & \longrightarrow & E' \oplus E'' & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{\phi} & M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \pi & & \downarrow v & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & E'' & \xrightarrow{u} & X & \xrightarrow{\beta} & M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array} \quad (5.29)$$

Παρατηρούμε ότι η πρώτη στήλη του μεταθετικού διαγράμματος (5.29), είναι μια διασπásiμη σύντομη ακριβή ακολουθία. Έτσι, από τη μεταθετικότητα του διαγράμματος (5.29), είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η δεύτερη στήλη του, είναι επίσης μια διασπásiμη σύντομη ακριβή ακολουθία. Σημειώνουμε λοιπόν, με $\lambda: E \rightarrow E'$ τον ομομορφισμό αριστερών R -προτύπων με την ιδιότητα, $\lambda \circ \kappa = \text{Id}_{E'}$. Στη συνέχεια, θεωρούμε τον ομομορφισμό αριστερών R -προτύπων $\text{Id}_E - (\kappa \circ \lambda): E \rightarrow E$. Συνθέτοντας την ελάχιστη δεξιά R - Inj -προσέγγιση ϕ του M , με τον προηγούμενο ενδομορφισμό, παίρνουμε από τη μεταθετικότητα του διαγράμματος (5.29), καθώς και από την ακρίβεια της πρώτης γραμμής αυτού, την ισότητα $\phi \circ (\text{Id}_E - (\kappa \circ \lambda)) = \phi$. Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι ο ενδομορφισμός $\text{Id}_E - (\kappa \circ \lambda)$ είναι ένας αυτομορφισμός του E , διότι ο επιμορφισμός ϕ είναι δεξιά ελάχιστος. Παρατηρώντας τώρα, ότι:

$$\begin{aligned} (\text{Id}_E - (\kappa \circ \lambda)) \circ \kappa &= (\text{Id}_E \circ \kappa) - (\kappa \circ \lambda \circ \kappa) \\ &= \kappa - (\kappa \circ \text{Id}_{E'}) \\ &= \kappa - \kappa = 0, \end{aligned}$$

έπεται ότι $\text{Im } \kappa \subseteq \text{Ker}(\text{Id}_E - (\kappa \circ \lambda)) = 0$. Άρα, καταλήγουμε ότι $\text{Im } \kappa = 0$, αποτέλεσμα το οποίο μας δίνει την ισότητα $E' = 0$, όπως επιθυμούσαμε.

Για την απόδειξη του τελευταίου σκέλους της πρότασης, αρκεί σύμφωνα με την Πρόταση (4.2.5), να δείξουμε ότι ο μονομορφισμός i είναι ένα Eckmann-Schopf ενέσιμο περίβλημα του K , δηλαδή ότι το αριστερό R -πρότυπο $\text{Im } i = K$ είναι ουσιώδες υποπρότυπο του E . Θεωρούμε αρχικά, ένα ενέσιμο αριστερό υποπρότυπο H του E , με την ιδιότητα $K \cap H = 0$. Τότε από το τρίτο Θεώρημα ισομορφισμών για R -πρότυπα, επάγονται οι σχέσεις:

$$H \cong H/0 = H/(H \cap K) \cong (H + K)/K.$$

Θέτοντας τώρα $A = (H + K)/K$, λόγω των παραπάνω σχέσεων, έχουμε ότι το ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο H είναι ισόμορφο με το υποπρότυπο A του αριστερου R -προτύπου E/K . Συνεπώς,

επειδή η κλάση των ενέσιμων αριστερών R -πρότυπων $R\text{-Inj}$, είναι κλειστή σε ισομορφισμούς, συμπεραίνουμε ότι το A είναι ένα ενέσιμο υποπρότυπο του E/K . Επιπλέον, χρησιμοποιώντας το πρώτο Θεώρημα ισομορφισμών για R -πρότυπα, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι τα αριστερά R -πρότυπα E/K και M , είναι ισόμορφα. Στη συνέχεια, σημειώνουμε με $\phi': E/K \rightarrow M$, τον ισομορφισμό που καθιστά τα πρότυπα E/K και M ισόμορφα, και με $\phi'|_A$, τον περιορισμό της απεικόνισης ϕ' στο υποπρότυπο A του προτύπου E/K . Έστω $j: \phi'|_A(A) \rightarrow M$, η εμφύτευση του υποπρότυπου $\phi'|_A(A)$ στο πρότυπο M , και $k: A \rightarrow \phi'|_A(A)$, ο ομομορφισμός αριστερών R -πρότυπων με την ιδιότητα $j \circ k = \phi'|_A$. Τότε προφανώς, ο ομομορφισμός k είναι ισομορφισμός, και έτσι, έπεται ότι το αριστερό R -πρότυπο $\phi'|_A(A)$, είναι ένα ενέσιμο υποπρότυπο του M . Επιπλέον, λόγω μεταβατικότητας, παίρνουμε ότι τα πρότυπα H , A και $\phi'|_A(A)$ είναι ισόμορφα μεταξύ τους. Τα αποτελέσματα αυτά, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι το αριστερό R -πρότυπο M είναι reduced, μας δίνουν την ισότητα $H = 0$. Επομένως, επειδή η επιλογή του ενέσιμου υποπρότυπου H του E ήταν τυχαία, καταλήγουμε ότι για κάθε ενέσιμο υποπρότυπο L του E , ισχύει η συνεπαγωγή:

$$K \cap L = 0 \implies L = 0 \quad (5.30)$$

Θεωρούμε τώρα τυχόν υποπρότυπο X του E έτσι ώστε $K \cap X = 0$, και έστω $j': X \rightarrow E$, η κανονική εμφύτευση. Θα δείξουμε ότι $X = 0$, αποτέλεσμα το οποίο θα ολοκληρώσει την απόδειξη της πρότασης αυτής. Γνωρίζουμε ότι για οποιονδήποτε δακτύλιο R , η κλάση των ενέσιμων αριστερών R -πρότυπων $R\text{-Inj}$, είναι ελάχιστη αριστερά προσεγγίσιμη. Σημειώνουμε λοιπόν με $i': X \rightarrow E(X)$, την ελάχιστη αριστερή $R\text{-Inj}$ -προσέγγιση του X . Από τον ορισμό των ενέσιμων R -πρότυπων, υπάρχουν ομομορφισμοί $\alpha: E \rightarrow E(X)$ και $\beta: E(X) \rightarrow E$, έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j'} & E \\ \downarrow i' & \searrow \beta & \nearrow \alpha \\ E(X) & & \end{array}$$

Λόγω της μεταθετικότητας του παραπάνω διαγράμματος, καθώς και του γεγονότος ότι ο ομομορφισμός i' είναι αριστερά ελάχιστος, συμπεραίνουμε ότι ο ενδομορφισμός $\alpha \circ \beta: E(X) \rightarrow E(X)$, είναι ένας αυτομορφισμός του $E(X)$. Έτσι, έχουμε ότι ο ομομορφισμός α είναι επιμορφισμός, και ο ομομορφισμός β είναι μονομορφισμός. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι ο μονομορφισμός β είναι διασπασίμος. Συνεπώς, υπάρχει κάποιο αριστερό R -πρότυπο D , τέτοιο ώστε $E = E(X) \oplus D$. Η Πρόταση τώρα (4.2.5), μας δίνει ότι η εισαγωγή i' είναι ουσιώδης. Παρατηρώντας ότι

$$0 = K \cap X \cap E(X) = K \cap E(X) \cap X,$$

και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το X είναι ουσιώδες υποπρότυπο του $E(X)$, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι το υποπρότυπο $K \cap E(X)$ του $E(X)$ είναι το μηδενικό, δηλαδή $K \cap E(X) = 0$. Άρα, από τη σχέση (5.30), προκύπτει ότι $E(X) = 0$. Ως αποτέλεσμα της ισότητας αυτής, έπεται η ισότητα $X = 0$. ■

Το ακόλουθο πόρισμα, δίνει πληροφορίες για την ενέσιμη και προβολική διάσταση ενός μη μηδενικού reduced G -ενέσιμου (αριστερού) προτύπου, υπεράνω ενός (αριστερού) δακτυλίου της Noether. Πιο ειδικά, το πόρισμα αυτό, μας επιβεβαιώνει το γεγονός ότι υπάρχουν G -ενέσιμα πρότυπα, τα οποία δεν είναι ενέσιμα, πιστοποιώντας ότι κάθε μη μηδενικό reduced G -ενέσιμο πρότυπο υπεράνω ενός δακτυλίου της Noether, δεν είναι ποτέ ενέσιμο.

Πόρισμα 5.2.16. *Υποθέτουμε ότι ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether. Αν M είναι ένα μη μηδενικό reduced G -ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο, τότε η ενέσιμη και προβολική διάσταση του M είναι άπειρη.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το M είναι ένα μη μηδενικό reduced G -ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο. Τότε από την Πρόταση (5.2.6), γνωρίζουμε ότι η ενέσιμη διάσταση του M , $\text{id}_R M$, είναι ή ίση

με μηδέν, ή είναι άπειρη. Αν $\text{id}_R M = 0$, τότε το M είναι ένα ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο. Όμως, από την υπόθεση έχουμε ότι το πρότυπο M είναι reduced. Συνεπώς, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι $M = 0$, αποτέλεσμα το οποίο αντιτίθεται φυσικά στην αρχική μας υπόθεση. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι $\text{id}_R M = \infty$.

Για να αποδείξουμε τώρα, ότι η προβολική διάσταση του M , $\text{pd}_R M$, είναι άπειρη, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $i \geq 0$, υπάρχει κάποιο αριστερό R -πρότυπο N , έτσι ώστε $\text{Ext}_R^{i+1}(M, N) \neq 0$. Έστω λοιπόν $i \geq 0$. Τότε αφού ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether, μπορούμε να κατασκευάσουμε χρησιμοποιώντας την υπόθεση και την Πρόταση (5.2.15), μια ακριβή ακολουθία

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & E_{i+1} & \xrightarrow{\alpha_i} & E_i & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha_1} E_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \pi_{i+1} & \nearrow j_{i+1} & & & \downarrow \pi_1 \nearrow j_1 \\ & & K_{i+1} & & & & K_1 \\ & \nearrow & \downarrow & & \nearrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

όπου $K_0 = M$, $K_\ell = \text{Ker } \alpha_{\ell-1}$ για κάθε $\ell \geq 1$, E_ℓ είναι ενέσιμα R -πρότυπα για κάθε $\ell \geq 0$, και K_ℓ είναι G -ενέσιμα reduced R -πρότυπα για κάθε $\ell \geq 1$, με την ιδιότητα ότι ο ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων α_0 , να είναι η ελάχιστη δεξιά R -Inj-προσέγγιση του M , ενώ οι ομομορφισμοί π_ℓ και j_ℓ , να είναι οι ελάχιστες δεξιές, αντίστοιχα, αριστερές, R -Inj-προσεγγίσεις των K_ℓ , για κάθε $\ell \geq 1$. Στη συνέχεια, θεωρούμε την επαγόμενη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow K_{i+1} \xrightarrow{j_{i+1}} E_i \xrightarrow{\alpha_i} E_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} \cdots \xrightarrow{\alpha_2} E_1 \xrightarrow{\pi_1} K_1 \longrightarrow 0. \quad (5.31)$$

Τότε η ακολουθία (5.31) είναι ουσιαστικά μια επιμέρους ενέσιμη ανάλυση του αριστερού R -προτύπου K_{i+1} για κάθε $i \geq 0$. Χρησιμοποιώντας τώρα το Dimension Shifting για ενέσιμες αναλύσεις, έχουμε ότι

$$\text{Ext}_R^{i+1}(M, K_{i+1}) \cong \text{Ext}_R^1(M, K_1), \quad \forall i \geq 0. \quad (5.32)$$

Αν $\text{Ext}_R^1(M, K_1) = 0$, τότε θεωρώντας την σύντομη ακριβή ακολουθία

$$\mathcal{D}: \quad 0 \longrightarrow K_1 \xrightarrow{\pi_1} E_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0,$$

συμπεραίνουμε από το Θεώρημα (3.3.18), ότι η ακολουθία \mathcal{D} , είναι μια διασπασίμη σύντομη ακριβής ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα. Έτσι, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι $E_0 \cong K_1 \oplus M$. Ως αποτέλεσμα αυτού, έπεται ότι το M είναι ένα ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο, αφού το M είναι ευθύς προσθετός του ενέσιμου αριστερού R -προτύπου E_0 . Συνεπώς, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το πρότυπο M είναι reduced, οδηγούμαστε στην ισότητα $M = 0$. Η ισότητα όμως αυτή, αντιφάσκει με το γεγονός ότι το πρότυπο M είναι μη μηδενικό. Επομένως, παίρνουμε ότι $\text{Ext}_R^1(M, K_1) \neq 0$. Άρα, λόγω της σχέσης (5.32), καταλήγουμε ότι $\text{Ext}_R^{i+1}(M, K_{i+1}) \neq 0$ για κάθε $i \geq 0$, ή ισοδύναμα, ότι $\text{pd}_R M = \infty$. ■

Στο Κεφάλαιο 3, επισημάναμε ότι οι κλάσεις προτύπων για τις οποίες γνωρίζουμε αρκετές πληροφορίες, είναι οι κλάσεις των προβολικών, των ενέσιμων, και των επίπεδων προτύπων, διότι οι κλάσεις αυτές, προκύπτουν από τον υποκείμενο δακτύλιο με χρήση απλών σχετικά κατασκευών. Στο παρόν κεφάλαιο, μέχρι τώρα, ορίσαμε τις έννοιες των G -προβολικών και G -ενέσιμων R -προτύπων μέσω πλήρων προβολικών, και αντίστοιχα πλήρων ενέσιμων, αναλύσεων, και είδαμε ότι οι έννοιες αυτές, επεκτείνουν τις συνήθεις έννοιες των προβολικών και αντίστοιχα των ενέσιμων, R -προτύπων. Φυσιολογικά λοιπόν ανακύπτουν τα ερωτήματα:

1. Υπάρχει η έννοια των Gorenstein επίπεδων R -προτύπων, χάριν απλότητας, G -επίπεδων R -προτύπων;

2. Αν ορίζονται τα G-επίπεδα R -πρότυπα, τότε πως συνδέονται τα επίπεδα και τα G-επίπεδα R -πρότυπα;

Στο σημείο αυτό, χάριν πληρότητας, παραθέτουμε την έννοια των πλήρων επίπεδων αναλύσεων, καθώς και την έννοια των G-επίπεδων R -προτύπων. Σημειώνουμε ότι η έννοια των G-επίπεδων προτύπων υπεράνω τυχόντος προσεταιριστικού δακτυλίου, εισήχθη από τους Enochs, Jenda και Torrecillas. Για περισσότερες λεπτομέρειες για G-επίπεδα πρότυπα, βλέπε [27, Chapter 10].

Ορισμός 5.2.17. 1. Μια **πλήρης επίπεδη ανάλυση, (complete flat resolution)**, είναι μια ακριβής ακολουθία από επίπεδα αριστερά R -πρότυπα

$$\mathcal{T} : \quad \dots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} F^0 \xrightarrow{g^0} F^1 \xrightarrow{g^1} F^2 \xrightarrow{g^2} \dots ,$$

τέτοια ώστε το σύμπλοκο αβελιανών ομάδων $I \otimes_R \mathcal{T}$, να είναι ακριβές για κάθε ενέσιμο δεξιό R -πρότυπο I .

2. Ένα αριστερό R -πρότυπο M καλείται **G-επίπεδο, (G-flat)**, αν υπάρχει πλήρης επίπεδη ανάλυση \mathcal{T} με $M \cong \text{Im } f_0 = \text{Ker } g^0$.

Ανάλογα ορίζονται τα δεξιά G-επίπεδα R -πρότυπα.

Παράδειγμα 5.2.18. Κάθε επίπεδο R -πρότυπο είναι ένα G-επίπεδο R -πρότυπο, αφού για κάθε επίπεδο R -πρότυπο F , η ακολουθία

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{\text{Id}_F} F \longrightarrow 0,$$

είναι μια πλήρης επίπεδη ανάλυση. Συνεπώς, η έννοια των G-επίπεδων R -προτύπων, γενικεύει τη συνήθη έννοια των επίπεδων R -προτύπων.

Κλείνουμε την παρούσα ενότητα, τονίζοντας ότι κάποια από τα βασικά αποτελέσματα που αποδείξαμε μέχρι τώρα, για G-προβολικά ή για G-ενέσιμα R -πρότυπα, δεν ισχύουν απαραίτητα για G-επίπεδα R -πρότυπα. Ο λόγος είναι ότι τα G-επίπεδα R -πρότυπα ορίστηκαν μέσω του συναρτητή $-\otimes_R -$, και άρα η μελέτη αυτών, απαιτεί μια διαφορετική προσέγγιση από τη μελέτη των G-προβολικών ή G-ενέσιμων R -προτύπων, τα οποία ορίστηκαν μέσω του συναρτητή $\text{Hom}_R(-, -)$.

5.3 Πεπερασμένα Παραγόμενα G-Προβολικά Και Ανακλαστικά Πρότυπα

Στην εισαγωγή του παρόντος κεφαλαίου, αναφερθήκαμε στη G-κλάση προτύπων $G(A)$ του Auslander, και καλέσαμε τα στοιχεία της κλάσης αυτής, (πεπερασμένα παραγόμενα) Gorenstein προβολικά A -πρότυπα. Σκοπός της ενότητας αυτής, είναι να αποδείξουμε ότι τα Gorenstein προβολικά A -πρότυπα με την έννοια των Enochs και Jenda, συμπίπτουν με τα Gorenstein προβολικά A -πρότυπα με την έννοια Auslander, στην περίπτωση κατά την οποία ο δακτύλιος A είναι δακτύλιος της Noether, και τα πρότυπα είναι πεπερασμένα παραγόμενα.

Το βοηθητικό εργαλείο όπως θα δούμε για την απόδειξη του αποτελέσματος αυτού, θα είναι η μελέτη των Gorenstein προβολικών και ανακλαστικών προτύπων υπεράνω ενός προσεταιριστικού δακτυλίου με μονάδα, ενώ το κλειδί στην απόδειξη αυτή, θα είναι το Θεώρημα (5.3.8) το οποίο θα παραθέσουμε στη συνέχεια της παρούσας ενότητας.

Υπενθυμίζουμε ότι με R , συμβολίζουμε έναν προσεταιριστικό δακτύλιο με μονάδα.

5.3.1 Πεπερασμένα παραγόμενα Gorenstein προβολικά πρότυπα

Ευθύς αμέσως, μελετάμε πεπερασμένα παραγόμενα G-προβολικά R -πρότυπα, και αποδεικνύουμε βασικές τους ιδιότητες.

Λήμμα 5.3.1. Υποθέτουμε ότι το αριστερό R -πρότυπο M είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο υποπρότυπο ενός ελεύθερου αριστερού R -προτύπου L . Τότε υπάρχουν ελεύθερα υποπρότυπα L' και L'' του L , τέτοια ώστε το αριστερό R -πρότυπο L' να είναι πεπερασμένα παραγόμενο με $M \subseteq L'$, και $L = L' \oplus L''$ (εσωτερικό ευθύ άθροισμα). Επιπλέον, $L/M \cong (L'/M) \oplus L''$.

Απόδειξη. Θεωρούμε M ένα πεπερασμένα παραγόμενο υποπρότυπο του ελεύθερου αριστερού R -προτύπου L , και έστω $S = \{m_1, \dots, m_r\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων του αριστερού R -προτύπου M . Δηλαδή, το M γράφεται ως $M = Rm_1 + \dots + Rm_r$. Επειδή το αριστερό R -πρότυπο L είναι ελεύθερο, υπάρχει ένα σύνολο δεικτών I , τέτοιο ώστε:

$$L = R^{(I)} = \bigoplus_{i \in I} R_i,$$

όπου $R_i = {}_R R$ για κάθε $i \in I$. Τότε προφανώς, κάθε m_j για $j = 1, \dots, r$, είναι στοιχείο του $L = R^{(I)}$. Γράφουμε λοιπόν,

$$m_1 = (0, \dots, r_{i_1}, \dots, r_{i_\kappa}, \dots, 0, \dots, 0 \dots),$$

$$m_2 = (0, \dots, r_{l_1}, \dots, r_{l_\nu}, \dots, 0, \dots, 0 \dots),$$

$$\vdots$$

$$m_r = (0, \dots, r_{n_1}, \dots, r_{n_\mu}, \dots, 0, \dots, 0 \dots).$$

Αν θέσουμε $\Delta := \{i_1, \dots, i_\kappa\} \cup \{l_1, \dots, l_\nu\} \cup \dots \cup \{n_1, \dots, n_\mu\}$, τότε έχουμε ότι το σύνολο Δ είναι πεπερασμένο υποσύνολο του I , και άρα, ότι το S είναι υποσύνολο του πεπερασμένα παραγόμενου και ελεύθερου αριστερού R -προτύπου $R^{(\Delta)}$. Συνεπώς, $M \subseteq R^{(\Delta)}$. Θεωρώντας στη συνέχεια το συμπλήρωμα $\Lambda = I \setminus \Delta$ του Δ στο I , εύκολα βλέπουμε ότι $R^{(I)} = R^{(\Delta)} \oplus R^{(\Lambda)}$. Επομένως, αν θέσουμε τώρα $L' = R^{(\Delta)}$, και $L'' = R^{(\Lambda)}$, τότε καταλήγουμε στο ζητούμενο συμπέρασμα.

Για να αποδείξουμε το τελευταίο σκέλος του λήμματος, θεωρούμε την κανονική εμφύτευση $i: L'' \rightarrow L$, και την φυσική προβολή $\pi: L \rightarrow L''$. Παρατηρούμε ότι $M \subseteq L' = \text{Ker } \pi$. Η σχέση αυτή, μας δίνει την σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \rightarrow L' \rightarrow L \xrightarrow{\pi} L'' \rightarrow 0,$$

η οποία με τη σειρά της, μας επάγει τη σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \rightarrow L'/M \rightarrow L/M \xrightarrow{\pi'} L'' \rightarrow 0, \quad (5.33)$$

όπου ο ομομορφισμός π' ορίζεται από τον τύπο $\pi'(x + M) = \pi(x)$, για κάθε $x + M \in L/M$. Επειδή το πρότυπο L'' είναι ελεύθερο, συμπεραίνουμε, χρησιμοποιώντας την Πρόταση (3.2.27), ότι η ακολουθία (5.33) είναι διασπάσιμη σύντομη ακριβής ακολουθία. Επομένως, έχουμε ότι $L/M \cong (L'/M) \oplus L''$, όπως επιθυμούσαμε. ■

Λήμμα 5.3.2. Έστω G ένα πεπερασμένα παραγόμενο G -προβολικό αριστερό R -πρότυπο. Τότε υπάρχει μια σύντομη ακριβής ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα $0 \rightarrow G \rightarrow L' \rightarrow G' \rightarrow 0$, όπου L' είναι πεπερασμένα παραγόμενο και ελεύθερο, και G' είναι πεπερασμένα παραγόμενο και G -προβολικό.

Απόδειξη. Από την Παρατήρηση (5.1.3), υπάρχει μια σύντομη ακριβής ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα

$$0 \rightarrow G \rightarrow Q \rightarrow C \rightarrow 0, \quad (5.34)$$

όπου Q είναι προβολικό και C είναι G -προβολικό. Διαλέγουμε ένα προβολικό αριστερό R -πρότυπο P τέτοιο ώστε το αριστερό R -πρότυπο $L = Q \oplus P$, να είναι ελεύθερο. Στη συνέχεια, θεωρούμε τη σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow P \xrightarrow{\text{Id}_P} P \rightarrow 0 \quad (5.35)$$

Σχηματίζοντας το ευθύ άθροισμα των ακριβών ακολουθιών (5.34) και (5.35), προκύπτει η σύντομη ακριβής ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα

$$\mathcal{J}: \quad 0 \longrightarrow G \longrightarrow L \longrightarrow C' \longrightarrow 0,$$

όπου $C' = C \oplus P$. Τότε το C' είναι ένα G -προβολικό αριστερό R -πρότυπο, ως ευθύ άθροισμα των G -προβολικών αριστερών R -προτύπων C και P . Ορίζοντας τώρα $M = \text{Im}(G \longrightarrow L) \subseteq L$, έχουμε προφανώς ότι $M \cong G$. Έτσι, επειδή το G είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο G -προβολικό αριστερό R -πρότυπο, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι το M είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο (G -προβολικό) υποπρότυπο του ελεύθερου αριστερού R -προτύπου L . Συνεπώς, το Λήμμα (5.3.1), μας δίνει ελεύθερα υποπρότυπα L', L'' του L , τέτοια ώστε το L' να είναι πεπερασμένα παραγόμενο με $M \subseteq L'$ και $L/M \cong (L'/M) \oplus L''$. Από το πρώτο Θεώρημα ισομορφισμών για R -πρότυπα, καθώς και από την ακρίβεια της ακολουθίας \mathcal{J} , συμπεραίνουμε ότι $C' \cong L'/M$. Συνδυάζοντας λοιπόν τις παραπάνω σχέσεις, και θέτοντας $G' = L'/M$, παίρνουμε ότι $C' \cong G' \oplus L''$. Χρησιμοποιώντας τώρα το γεγονός ότι η κλάση των G -προβολικών αριστερών R -προτύπων $R\text{-GProj}$, είναι κλειστή σε ευθείς προσθετέους, καθώς και το αποτέλεσμα ότι το πρότυπο C' είναι G -προβολικό, έχουμε ότι το πρότυπο G' είναι επίσης G -προβολικό. Επιπλέον, επειδή το L' είναι πεπερασμένα παραγόμενο R -πρότυπο, προκύπτει ότι το πρότυπο G' είναι επίσης πεπερασμένα παραγόμενο. Αν θεωρήσουμε τη σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow L' \longrightarrow G' \longrightarrow 0,$$

όπου $G' = L'/M$, τότε λόγω της σχέσης $M \cong G$, επάγεται η σύντομη ακριβής ακολουθία

$$\mathcal{D}: \quad 0 \longrightarrow G \longrightarrow L' \longrightarrow G' \longrightarrow 0,$$

όπου L' είναι πεπερασμένα παραγόμενο και ελεύθερο, και G' είναι πεπερασμένα παραγόμενο και G -προβολικό. Επομένως, η ακολουθία \mathcal{D} είναι η ακολουθία που ζητούσαμε. ■

Παρατήρηση 5.3.3. Θεωρούμε ένα σύμπλοκο από αριστερά R -πρότυπα,

$$\ell: \quad \cdots \longrightarrow C_{n+1} \longrightarrow C_n \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

όπου τα C_n είναι πεπερασμένα παραγόμενα. Αν το σύμπλοκο δεξιών R -προτύπων $\text{Hom}_R(\ell, R)$ είναι ακριβές, τότε το σύμπλοκο αβελιανών ομάδων $\text{Hom}_R(\ell, Q)$ είναι επίσης ακριβές για κάθε προβολικό αριστερό R -πρότυπο Q . Πράγματι, αν Q είναι ένα οποιοδήποτε προβολικό αριστερό R -πρότυπο, τότε γνωρίζουμε ότι υπάρχει κάποιο σύνολο Λ , καθώς και ένα προβολικό αριστερό R -πρότυπο P με την ιδιότητα $P \oplus Q \cong R^{(\Lambda)}$. Τότε χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι κάθε C_n είναι πεπερασμένα παραγόμενο, και το γεγονός ότι κάθε συναρτητής διατηρεί ισομορφισμούς, η Πρόταση (1.2.12) μας δίνει τους ακόλουθους ισομορφισμούς συμπλόκων:

$$\text{Hom}_R(\ell, P) \oplus \text{Hom}_R(\ell, Q) \cong \text{Hom}_R(\ell, P \oplus Q) \cong \text{Hom}_R(\ell, R^{(\Lambda)})$$

Επειδή το R -πρότυπο C_k είναι πεπερασμένα παραγόμενο, $\forall k \in \mathbb{Z}$, από την Πρόταση (1.2.12), έπεται ότι θα έχουμε ισομορφισμούς $\text{Hom}_R(C_n, R^{(\Lambda)}) \cong \text{Hom}_R(C_n, R)^{(\Lambda)}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, και επομένως το σύμπλοκο $\text{Hom}_R(\ell, R^{(\Lambda)})$ είναι το εξής:

$$\cdots \longrightarrow \text{Hom}_R(C_{n-1}, R^{(\Lambda)}) \longrightarrow \text{Hom}_R(C_n, R^{(\Lambda)}) \longrightarrow \text{Hom}_R(C_{n+1}, R^{(\Lambda)}) \longrightarrow \cdots$$

Το παραπάνω σύμπλοκο είναι προφανώς ισόμορφο με το ευθύ άθροισμα $\text{Hom}_R(\ell, R)^{(\Lambda)}$ των συμπλόκων $\text{Hom}_R(\ell, R)$:

$$\cdots \longrightarrow \text{Hom}_R(C_{n-1}, R)^{(\Lambda)} \longrightarrow \text{Hom}_R(C_n, R)^{(\Lambda)} \longrightarrow \text{Hom}_R(C_{n+1}, R)^{(\Lambda)} \longrightarrow \cdots$$

Επειδή από την υπόθεση το σύμπλοκο $\text{Hom}_R(\ell, R)$ είναι ακριβές, και επειδή το ευθύ άθροισμα ακριβών ακολουθιών είναι ακριβής ακολουθία, έπεται ότι το σύμπλοκο $\text{Hom}_R(\ell, R)^{(\Lambda)}$ είναι επίσης, ακριβές. Έτσι, επειδή ευθύς αθροιστέος μιας ακριβούς ακολουθίας είναι ακριβής ακολουθία, λόγω των παραπάνω ισομορφισμών, συμπεραίνουμε ότι το σύμπλοκο $\text{Hom}_R(\ell, Q)$, είναι ακριβές.

5.3.2 Ανακλαστικά πρότυπα

Στη συνέχεια, αναπτύσσουμε τη βασική θεωρία ανακλαστικών R -προτύπων, η οποία θα μας είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στη συνέχεια της παρούσας ενότητας.

Θεωρούμε M ένα αριστερό R -πρότυπο, και θέτουμε $M^* = \text{Hom}_R(M, R)$. Τότε το M^* είναι ένα δεξιό R -πρότυπο με δράση,

$$M^* \times R \longrightarrow M^*, \quad (f, r) \longmapsto fr,$$

όπου $(fr)(x) = f(x)r$, για κάθε $f \in M^*$, $r \in R$, και για κάθε $x \in M$. Ανάλογα, αν θέσουμε

$$M^{**} = \text{Hom}_R(M^*, R) = \text{Hom}_R(\text{Hom}_R(M, R), R),$$

τότε το M^{**} είναι ένα αριστερό R -πρότυπο με δράση,

$$R \times M^{**} \longrightarrow M^{**}, \quad (r, f) \longmapsto rf,$$

όπου $(rf)(g) = rf(g)$, για κάθε $r \in R$, $f \in M^{**}$, και για κάθε $g \in M^*$. Αν τώρα, $x \in M$ και θεωρήσουμε την απεικόνιση $\hat{x}: M^* \longrightarrow R$, τέτοια ώστε $\hat{x}(g) = g(x)$ για κάθε $g \in M^*$, τότε είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η απεικόνιση \hat{x} είναι ένας ομομορφισμός δεξιών R -προτύπων, ή ισοδύναμα, ότι $\hat{x} \in M^{**}$. Ορίζουμε

$$\varepsilon_M: M \longrightarrow M^{**},$$

θέτοντας $\varepsilon_M(x) = \hat{x}$ για κάθε $x \in M$. Τότε προφανώς, η απεικόνιση ε_M είναι καλά ορισμένη. Επιπλέον, εύκολα αποδεικνύονται οι ισότητες, $\widehat{x+y} = \widehat{x} + \widehat{y}$ και $\widehat{rx} = r\widehat{x}$. Συνεπώς, η απεικόνιση ε_M είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων. Στη συνέχεια, θεωρούμε ένα αριστερό R -πρότυπο N , καθώς και έναν ομομορφισμό αριστερών R -προτύπων $h: M \longrightarrow N$. Τότε εφαρμόζοντας τον αντισυναλλοίωτο συναρτητή $\text{Hom}_R(-, R)$ όπου ο δακτύλιος R έχει ιδωθεί ως αριστερό R -πρότυπο, στον ομομορφισμό h , παίρνουμε τον ομομορφισμό δεξιών R -προτύπων,

$$h^*: N^* \longrightarrow M^*,$$

όπου $h^*(k) = k \circ h$, για κάθε $k \in N^*$. Εφαρμόζοντας ξανά, τον αντισυναλλοίωτο συναρτητή $\text{Hom}_R(-, R)$ όπου ο δακτύλιος R έχει ιδωθεί αυτή τη φορά ως δεξιό R -πρότυπο, στον ομομορφισμό h^* , παίρνουμε τον ομομορφισμό αριστερών R -προτύπων,

$$h^{**}: M^{**} \longrightarrow N^{**},$$

όπου $h^{**}(k) = k \circ h^*$, για κάθε $k \in M^{**}$. Έτσι λοιπόν, η παραπάνω κατάσταση μπορεί να περιγραφεί με το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varepsilon_M} & M^{**} \\ h \downarrow & & \downarrow h^{**} \\ N & \xrightarrow{\varepsilon_N} & N^{**} \end{array} .$$

Αν $x \in M$, τότε θεωρώντας ένα οποιοδήποτε στοιχείο g του N^* , προκύπτουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

$$\begin{aligned} (h^{**}(\hat{x}))(g) &= (\hat{x} \circ h^*)(g) &= \hat{x}(h^*(g)) \\ &= \hat{x}(g \circ h) \\ &= (g \circ h)(x) \\ &= g(h(x)) \\ &= \widehat{h(x)}(g) \end{aligned}$$

Επομένως, παίρνουμε ότι $h^{**}(\hat{x}) = \widehat{h(x)}$. Άρα, λόγω των προηγούμενων σχέσεων, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι $(h^{**} \circ \varepsilon_M)(x) = (\varepsilon_N \circ h)(x)$ για κάθε $x \in M$. Συνεπώς, προκύπτει ότι το

προηγούμενο διάγραμμα είναι μεταθετικό, και έτσι, καταλήγουμε ότι ο ομομορφισμός ε_M είναι φυσικός στο M . Σημειώνουμε ότι αν ξεκινούσαμε με ένα δεξιό R -πρότυπο L , τότε παρόμοιες παρατηρήσεις με πριν, θα ίσχυαν για το L , όπου τώρα το L^* θα είναι ένα αριστερό R -πρότυπο και το L^{**} θα είναι ένα δεξιό R -πρότυπο.

Αν M είναι ένα αριστερό R -πρότυπο, τότε το δεξιό R -πρότυπο M^* καλείται το **δυϊκό (dual)** του M , ενώ το αριστερό R -πρότυπο M^{**} καλείται το **διπλά δυϊκό (double dual)** του M . Επιπλέον, ο αριστερά ακριβής αντισυναλλοίωτος συναρτητής $(-)^* = \text{Hom}_R(-, R)$ συχνά αναφέρεται ως ο **συναρτητής R -δυϊκότητας (duality functor)**, ενώ ο φυσικός ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων ε_M καλείται η **κανονική απεικόνιση (canonical map)** από το M στο M^{**} .

Αν ο ομομορφισμός ε_M είναι μονομορφισμός, τότε το M καλείται **torsionless**, και αν ε_M είναι ισομορφισμός, τότε το M καλείται **ανακλαστικό (reflexive)**.

Παρατήρηση 5.3.4. Αν M είναι ένα αριστερό (δεξιό) R -πρότυπο, τότε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} M^* & \xlongequal{\quad} & M^* \\ \varepsilon_{M^*} \downarrow & \nearrow (\varepsilon_M)^* & \\ M^{***} & & \end{array} \quad (5.36)$$

είναι μεταθετικό. Επιπλέον, αν το M είναι ανακλαστικό, τότε το δεξιό (αριστερό) R -πρότυπο M^* είναι επίσης, ανακλαστικό. Πράγματι, για κάθε $g \in M^*$ εύκολα προκύπτει η ισότητα $((\varepsilon_M)^* \circ \varepsilon_{M^*})(g) = \text{Id}_{M^*}(g)$. Υποθέτοντας τώρα ότι το M είναι ανακλαστικό, αφού κάθε συναρτητής διατηρεί ισομορφισμούς, έχουμε ότι ο ομομορφισμός δεξιών (αριστερών) R -προτύπων $\text{Hom}_R(\varepsilon_M, R) = (\varepsilon_M)^*$, είναι ένας ισομορφισμός. Έτσι, έχοντας δείξει τη μεταθετικότητα του διαγράμματος (5.36), συμπεραίνουμε ότι ο ομομορφισμός δεξιών (αριστερών) R -προτύπων ε_{M^*} , είναι επίσης ισομορφισμός με $(\varepsilon_{M^*})^{-1} = (\varepsilon_M)^*$.

Λήμμα 5.3.5. Κάθε πεπερασμένα παραγόμενο ελεύθερο αριστερό ή δεξιό R -πρότυπο είναι ανακλαστικό.

Απόδειξη. Θεωρούμε αρχικά, ένα πεπερασμένα παραγόμενο και ελεύθερο αριστερό R -πρότυπο F . Τότε έχουμε ότι $F \cong ({}_R R)^{(n)}$ για κάποιο θετικό ακέραιος n , και άρα, ότι:

$$F^* \cong \text{Hom}_R(({}_R R)^{(n)}, R) = \text{Hom}_R(R^{(n)}, R) \cong (\text{Hom}_R(R, R))^{(n)} \cong ({}_R R)^{(n)}.$$

Επομένως, παίρνουμε ότι το δεξιό R -πρότυπο F^* είναι ελεύθερο και πεπερασμένα παραγόμενο, και ότι $F^{**} \cong (({}_R R)^{(n)})^* = \text{Hom}_R(({}_R R)^{(n)}, R)$. Όμως,

$$F^{**} \cong \text{Hom}_R(({}_R R)^{(n)}, R) = \text{Hom}_R(R^{(n)}, R) \cong (\text{Hom}_R(R, R))^n \cong ({}_R R)^{(n)}.$$

Ο συνδυασμός λοιπόν των δύο προηγούμενων σχέσεων, μας δίνει ότι $F \cong F^{**}$. Επιπλέον, εύκολα βλέπουμε ότι ο ισομορφισμός που καθιστά τα πρότυπα F και F^{**} ισόμορφα, είναι ο ομομορφισμός ε_F . Συνεπώς, το αριστερό R -πρότυπο F είναι ανακλαστικό, όπως επιθυμούσαμε. Ομοίως, αποδεικνύεται ότι αν το F είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο και ελεύθερο δεξιό R -πρότυπο, τότε το F είναι ανακλαστικό. ■

Σχόλιο 5.3.6. Σημειώνουμε ότι από την απόδειξη του Λήμματος (5.3.5), έχουμε ότι αν F είναι ένα οποιοδήποτε πεπερασμένα παραγόμενο και ελεύθερο αριστερό (δεξιό) R -πρότυπο, τότε το διπλό του F , F^* , είναι πεπερασμένα παραγόμενο και ελεύθερο δεξιό (αριστερό) R -πρότυπο.

Πόρισμα 5.3.7. Ένα οποιοδήποτε πεπερασμένα παραγόμενο και προβολικό αριστερό ή δεξιό R -πρότυπο είναι ανακλαστικό.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το πόρισμα αυτό, θεωρώντας ένα τυχαίο πεπερασμένα παραγόμενο και προβολικό αριστερό R -πρότυπο. Συμμετρικά, θα προκύψει η απόδειξη για ένα οποιοδήποτε πεπερασμένα παραγόμενο και προβολικό δεξιό R -πρότυπο. Θεωρούμε λοιπόν ένα πεπερασμένα

παραγόμενο και προβολικό αριστερό R -πρότυπο P . Τότε υπάρχει κάποιος θετικός ακέραιος n , και ένα αριστερό R -πρότυπο Q , τέτοια ώστε ${}_R R^{(n)} = P \oplus Q$. Επειδή το αριστερό R -πρότυπο $R^{(n)}$ είναι ελεύθερο, το Λήμμα (5.3.5), μας δίνει ότι το $R^{(n)}$ είναι ανακλαστικό, δηλαδή, ότι ο φυσικός ομομορφισμός $\varepsilon_{R^{(n)}}$, είναι ισομορφισμός. Παρατηρώντας τώρα ότι:

$$\varepsilon_{R^{(n)}} \cong \varepsilon_{P \oplus Q} \cong \varepsilon_P \oplus \varepsilon_Q,$$

συμπεραίνουμε ότι ο ομομορφισμός ε_P είναι ισομορφισμός, και άρα, ότι το προβολικό αριστερό R -πρότυπο P , είναι ανακλαστικό, όπως ζητούσαμε. ■

Είμαστε έτοιμοι τώρα, να αποδείξουμε το θεώρημα για το οποίο έγινε λόγος στην εισαγωγή της ενότητας αυτής.

Θεώρημα 5.3.8. *Για έναν δακτύλιο της Noether A , και για ένα πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό A -πρότυπο M , οι ακόλουθες τέσσερις συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

1. Το M είναι G -προβολικό.
2. Υπάρχει πλήρης προβολική ανάλυση

$$\mathcal{D}: \quad \cdots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow L^0 \longrightarrow L^1 \longrightarrow L^2 \longrightarrow \cdots,$$

όπου F_n και L^n είναι πεπερασμένα παραγόμενα και ελεύθερα για κάθε $n \geq 0$, τέτοια ώστε $M \cong \text{Im}(F_0 \longrightarrow L^0)$.

3. Υπάρχει πλήρης προβολική ανάλυση

$$\mathcal{R}: \quad \cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow Q^0 \longrightarrow Q^1 \longrightarrow Q^2 \longrightarrow \cdots,$$

όπου P_n και Q^n είναι πεπερασμένα παραγόμενα και προβολικά για κάθε $n \geq 0$, τέτοια ώστε $M \cong \text{Im}(P_0 \longrightarrow Q^0)$.

4. Το M ικανοποιεί τις τρεις ακόλουθες συνθήκες:

(α') $\text{Ext}_A^i(M, A) = 0$, για κάθε $i > 0$.

(β') $\text{Ext}_A^i(\text{Hom}_A(M, A), A) = 0$, για κάθε $i > 0$.

(γ') Ο φυσικός ομομορφισμός $\varepsilon_M: M \longrightarrow \text{Hom}_A(\text{Hom}_A(M, A), A)$, είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε τις συνεπαγωγές $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$, καθώς και την ισοδυναμία $2 \Leftrightarrow 4$. Οι συνεπαγωγές $2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$ είναι προφανείς, και έτσι, αποδεικνύουμε μόνο τις υπόλοιπες τρεις συνεπαγωγές, $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 4 \Rightarrow 2$.

(1 \Rightarrow 2): Υποθέτουμε ότι το M είναι πεπερασμένα παραγόμενο και G -προβολικό αριστερό A -πρότυπο. Από την Παρατήρηση (2.2.16), η κατασκευή της ακολουθίας \mathcal{D} είναι ισοδύναμη με την κατασκευή των ακριβών ακολουθιών

$$\mathcal{N}: \quad \cdots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0, \quad (5.37)$$

$$\mathcal{J}: \quad 0 \longrightarrow M \longrightarrow L^0 \longrightarrow L^1 \longrightarrow L^2 \longrightarrow \cdots, \quad (5.38)$$

όπου τα F_n και L^n , για $n \geq 0$, είναι πεπερασμένα παραγόμενα και ελεύθερα, με την ιδιότητα τα σύμπλοκα αβελιανών ομάδων $\text{Hom}_A(\mathcal{N}, Q)$ και $\text{Hom}_A(\mathcal{J}, Q)$, είναι ακριβή για κάθε προβολικό αριστερό A -πρότυπο Q . Για την κατασκευή της \mathcal{N} , διαλέγουμε απλά, μια ελεύθερη ανάλυση του M αποτελούμενη από πεπερασμένα παραγόμενα A -πρότυπα, και θέτουμε με \mathcal{N} , την ακολουθία που επιλέξαμε. Η επιλογή αυτή, καθίσταται δυνατή, επειδή ο δακτύλιος A είναι (αριστερός) δακτύλιος της Noether, και το πρότυπο M είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Τότε προφανώς, η ακολουθία \mathcal{N} είναι μια προβολική ανάλυση του M . Συνεπώς, η Παρατήρηση (5.1.9), μας δίνει ότι το σύμπλοκο $\text{Hom}_A(\mathcal{N}, Q)$ είναι ακριβές για κάθε προβολικό αριστερό A -πρότυπο Q .

Για να πάρουμε την \mathcal{J} , θέτουμε $G^0 = M$, και χρησιμοποιούμε το Λήμμα (5.3.2), για να κατασκευάσουμε για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$ σύντομες ακριβείς ακολουθίες από αριστερά A -πρότυπα,

$$\mathcal{J}^n : \quad 0 \longrightarrow G^n \longrightarrow L^n \longrightarrow G^{n+1} \longrightarrow 0,$$

όπου L^n είναι πεπερασμένα παραγόμενο και ελεύθερο, και G^n είναι πεπερασμένα παραγόμενο και G -προβολικό για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$. Παρατηρούμε ότι τα σύμπλοκα $\text{Hom}_A(\mathcal{J}^n, Q)$ είναι ακριβή για κάθε προβολικό αριστερό A -πρότυπο Q , αφού τα G^{n+1} για $n = 0, 1, 2, \dots$ είναι G -προβολικά, και $\text{Ext}_A^i(G^{n+1}, Q) = 0$ για κάθε $i > 0$. Έτσι, συγκολλώντας τις ακολουθίες $\mathcal{J}^0, \mathcal{J}^1, \mathcal{J}^2, \dots$ προκύπτει η ζητούμενη ακολουθία \mathcal{J} .

(2 \Rightarrow 4): Υποθέτουμε ότι ισχύει το 2). Υπάρχουν λοιπόν, δύο ακριβείς ακολουθίες \mathcal{N} όπως η (5.37), και \mathcal{J} όπως η (5.38), όπου κάθε F_n και L^n είναι πεπερασμένα παραγόμενο και ελεύθερο αριστερό A -πρότυπο, και τέτοιες ώστε τα σύμπλοκα αβελιανών ομάδων $\text{Hom}_A(\mathcal{N}, Q)$ και $\text{Hom}_A(\mathcal{J}, Q)$ είναι ακριβή για κάθε προβολικό αριστερό A -πρότυπο Q . Θέλουμε να δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες (α') , (β') και (γ') . Τότε προφανώς, η ακολουθία \mathcal{N} είναι μια προβολική ανάλυση του M . Επιπλέον, επειδή ο δακτύλιος A είναι ένα προβολικό αριστερό A -πρότυπο, έχουμε ότι τα σύμπλοκα δεξιών A -προτύπων $\text{Hom}_A(\mathcal{N}, A)$ και $\text{Hom}_A(\mathcal{J}, A)$, είναι ακριβή. Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι $\text{Ext}_A^i(M, A) = 0$ για κάθε $i > 0$, ή ισοδύναμα, ότι ισχύει η συνθήκη (α') . Θέτουμε $\mathcal{J}^* = \text{Hom}_A(\mathcal{J}, A)$, δηλαδή, η ακριβής ακολουθία \mathcal{J}^* από δεξιά A -πρότυπα είναι της μορφής,

$$\mathcal{J}^* : \quad \dots \longrightarrow (L^2)^* \longrightarrow (L^1)^* \longrightarrow (L^0)^* \longrightarrow M^* \longrightarrow 0,$$

όπου $(L^n)^* = \text{Hom}_A(L^n, A)$ και $M^* = \text{Hom}_A(M, A)$. Επειδή τώρα τα L^n είναι πεπερασμένα παραγόμενα ελεύθερα αριστερά A -πρότυπα, προκύπτει από το Σχόλιο (5.3.6), ότι τα $(L^n)^*$ είναι επίσης πεπερασμένα παραγόμενα ελεύθερα δεξιά A -πρότυπα. Επομένως, η ακολουθία \mathcal{J}^* είναι μια προβολική ανάλυση του $M^* = \text{Hom}_A(M, A)$. Στη συνέχεια, θεωρούμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & L^0 & \longrightarrow & L^1 & \longrightarrow & \dots \\ & & \varepsilon_M \downarrow & & \varepsilon_{L^0} \downarrow & & \varepsilon_{L^1} \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & M^{**} & \longrightarrow & (L^0)^{**} & \longrightarrow & (L^1)^{**} & \longrightarrow & \dots \end{array} \quad (5.39)$$

όπου η πρώτη γραμμή του διαγράμματος (5.39) είναι η ακριβής ακολουθία \mathcal{J} , ενώ η δεύτερη γραμμή του, είναι το σύμπλοκο $\mathcal{J}^{**} = \text{Hom}_A(\mathcal{J}^*, A)$. Από το Λήμμα (5.3.5), προκύπτει ότι οι φυσικοί ομομορφισμοί ε_{L^n} είναι ισομορφισμοί. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, καθώς και τη μεταθετικότητα του διαγράμματος (5.39), εύκολα οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι ο φυσικός ομομορφισμός ε_M είναι επίσης ισομορφισμός. Έτσι λοιπόν αποδείξαμε ότι ικανοποιείται η συνθήκη (γ) . Χρησιμοποιώντας τώρα τη συνθήκη (γ) , από το μεταθετικό διάγραμμα (5.39), συμπεραίνουμε ότι οι ακολουθίες \mathcal{J} και $\mathcal{J}^{**} = \text{Hom}_A(\mathcal{J}^*, A)$, είναι ισόμορφες. Έτσι, λόγω της ακρίβειας της ακολουθίας \mathcal{J} , έπεται η ακρίβεια της ακολουθίας \mathcal{J}^{**} . Το αποτέλεσμα αυτό, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι η ακολουθία \mathcal{J}^* είναι μια προβολική ανάλυση του $M^* = \text{Hom}_A(M, A)$, μας δίνει ότι $\text{Ext}_A^i(\text{Hom}_A(M, A), A) = 0$ για κάθε $i > 0$. Άρα, ισχύει και η συνθήκη (β) .

(4 \Rightarrow 2): Υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες (α') , (β') και (γ') . Θέλουμε να κατασκευάσουμε δύο ακριβείς ακολουθίες \mathcal{N} όπως η (5.37), και \mathcal{J} όπως η (5.38), όπου κάθε F_n και L^n είναι πεπερασμένα παραγόμενο και ελεύθερο αριστερό A -πρότυπο, και τέτοιες ώστε τα σύμπλοκα αβελιανών ομάδων, $\text{Hom}_A(\mathcal{N}, Q)$ και $\text{Hom}_A(\mathcal{J}, Q)$, να είναι ακριβή για κάθε προβολικό αριστερό A -πρότυπο Q . Από την Παρατήρηση (5.3.3), αρκεί να δείξουμε την ακρίβεια των συμπλόκων δεξιών A -προτύπων, $\text{Hom}_A(\mathcal{N}, A)$ και $\text{Hom}_A(\mathcal{J}, A)$.

Για την κατασκευή της \mathcal{N} , διαλέγουμε απλά, μια ελεύθερη ανάλυση του M αποτελούμενη από πεπερασμένα παραγόμενα A -πρότυπα, και θέτουμε με \mathcal{N} , την ακολουθία που επιλέξαμε. Τότε επειδή $\text{Ext}_A^i(M, A) = 0$ για κάθε $i > 0$, και ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής $\text{Hom}_A(-, A)$ είναι αριστερά ακριβής, έπεται ότι το σύμπλοκο $\text{Hom}_A(\mathcal{N}, A)$ είναι ακριβές, όπως επιθυμούσαμε.

Για την κατασκευή της \mathcal{J} , ισχυριζόμαστε αρχικά, ότι το $M^* = \text{Hom}_A(M, A)$ είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο δεξιό A -πρότυπο. Για την απόδειξη του ισχυρισμού αυτού, θεωρούμε μια

σύντομη ακριβή ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα,

$$\ell : 0 \longrightarrow K \longrightarrow {}_A A^{(n)} \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

όπου n είναι ένας θετικός ακέραιος, $A^{(n)}$ είναι ελεύθερο και πεπερασμένα παραγόμενο, και K είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Η ύπαρξη μιας ακολουθίας όπως η ℓ , οφείλεται στο γεγονός ότι το αριστερό A -πρότυπο M είναι πεπερασμένα παραγόμενο, και ο δακτύλιος A είναι (αριστερός) δακτύλιος της Noether. Αν εφαρμόσουμε τον αντισυναλλοίωτο συναρτητή $\text{Hom}_A(-, A)$ όπου ο δακτύλιος A έχει ιδωθεί ως αριστερό A -πρότυπο, στη σύντομη ακριβή ακολουθία ℓ , τότε προκύπτει η ακριβής ακολουθία από δεξιά R -πρότυπα:

$$\ell^* : 0 \longrightarrow \text{Hom}_A(M, A) \longrightarrow \text{Hom}_A(A^{(n)}, A) \longrightarrow \text{Hom}_A(K, A).$$

Παρατηρώντας ότι $\text{Hom}_A(A^{(n)}, A) \cong (\text{Hom}_A(A, A))^{(n)} \cong A^{(n)}$, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η ακριβής ακολουθία ℓ^* , είναι ισόμορφη με την ακολουθία:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(M, A) \xrightarrow{\kappa} A^{(n)} \longrightarrow \text{Hom}_A(K, A).$$

Συνεπώς, έπεται ότι η προηγούμενη ακολουθία είναι ακριβής. Χρησιμοποιώντας τώρα το αποτέλεσμα ότι υπεράνω ενός δακτυλίου της Noether, ένα πρότυπο X είναι πεπερασμένα παραγόμενο, αν και μόνο αν, το X είναι ένα πρότυπο της Noether, παίρνουμε ότι το υποπρότυπο $\text{Im } \kappa$ του $A^{(n)}$, είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Επομένως, καταλήγουμε ότι το δεξιό A -πρότυπο $M^* = \text{Hom}_A(M, A)$ είναι επίσης πεπερασμένα παραγόμενο, ως ισόμορφο με το δεξιό A -πρότυπο $\text{Im } \kappa$. Έτσι, αφού ο δακτύλιος A είναι (δεξιός) δακτύλιος της Noether, μπορούμε να διαλέξουμε μια ελεύθερη ανάλυση του M^* αποτελούμενη από πεπερασμένα παραγόμενα δεξιά A -πρότυπα,

$$\mathcal{J}' : \dots \longrightarrow L'_2 \longrightarrow L'_1 \longrightarrow L'_0 \xrightarrow{\phi} M^* \longrightarrow 0. \quad (5.40)$$

Τότε επειδή $\text{Ext}_A^i(M^*, A) = 0$ για κάθε $i > 0$, και ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής $\text{Hom}_A(-, A)$ είναι αριστερά ακριβής, έπεται ότι το σύμπλοκο αριστερών A -προτύπων $(\mathcal{J}')^* = \text{Hom}_A(\mathcal{J}', A)$, είναι ακριβές. Δηλαδή, η ακριβής ακολουθία $(\mathcal{J}')^*$ είναι της μορφής,

$$0 \longrightarrow M^{**} \xrightarrow{\phi^*} (L'_0)^* \longrightarrow (L'_1)^* \longrightarrow (L'_2)^* \longrightarrow \dots, \quad (5.41)$$

όπου $M^{**} = \text{Hom}_A(M^*, A)$, και $(L'_n)^* = \text{Hom}_A(L'_n, A)$ για κάθε $n \geq 0$. Ορίζοντας τώρα $L^n = (L'_n)^*$ για κάθε $n \geq 0$, από το Σχόλιο (5.3.6), έχουμε ότι τα L^n για $n = 0, 1, \dots$, είναι πεπερασμένα παραγόμενα και ελεύθερα αριστερά A -πρότυπα. Επιπλέον, λόγω της υπόθεσης ότι ο ομομορφισμός $\varepsilon_M : M \longrightarrow M^{**}$ είναι ένας ισομορφισμός, παίρνουμε την ακριβή ακολουθία:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varepsilon_M} L^0 \longrightarrow L^1 \longrightarrow L^2 \longrightarrow \dots. \quad (5.42)$$

Ισχυριζόμαστε αυτή τη φορά, ότι η ακολουθία (5.42) είναι η ζητούμενη ακολουθία \mathcal{J} . Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό αυτό, αρκεί να εξακριβώσουμε την ακρίβεια του συμπλόκου $\text{Hom}_A(\mathcal{J}, A)$, όπου \mathcal{J} έχουμε ονομάσει τώρα την ακολουθία (5.42). Αφού ο ομομορφισμός ε_M είναι φυσικός στο M , επάγεται το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} L'_0 & \xrightarrow{\phi} & M^* \\ \varepsilon_{L'_0} \downarrow & & \downarrow \varepsilon_{M^*} \\ (L'_0)^{**} & \xrightarrow{\phi^{**}} & M^{***} \end{array} \quad (5.43)$$

Επειδή το M είναι ανακλαστικό, από την Παρατήρηση (5.3.4), οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι το M^* είναι ανακλαστικό με $(\varepsilon_{M^*})^{-1} = (\varepsilon_M)^*$. Έτσι, το διάγραμμα (5.43) μας δίνει την ισότητα,

$(\varepsilon_M)^* \phi^{**} \varepsilon_{L'_0} = \phi$. Συνεπώς, αν θεωρήσουμε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & L'_2 & \longrightarrow & L'_1 & \longrightarrow & L'_0 \xrightarrow{\phi} M^* \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \varepsilon_{L'_2} & & \downarrow \varepsilon_{L'_1} & & \downarrow \varepsilon_{L'_0} \parallel \\
 \cdots & \longrightarrow & (L_2)^* & \longrightarrow & (L_1)^* & \longrightarrow & (L_0)^* \xrightarrow{(\varepsilon_M)^* \phi^{**}} M^* \longrightarrow 0
 \end{array} \tag{5.44}$$

τότε αυτό είναι μεταθετικό, και κάθε ομομορφισμός $\varepsilon_{L'_n}$ για $n = 0, 1, \dots$, είναι ένας ισομορφισμός σύμφωνα με το Λήμμα (5.3.5), διότι τα L'_n είναι πεπερασμένα παραγόμενα και ελεύθερα δεξιά A -πρότυπα. Συνεπώς, επειδή η πρώτη γραμμή του διαγράμματος (5.44) είναι ακριβής, συμπεραίνουμε ότι και η δεύτερη γραμμή αυτού, είναι επίσης ακριβής. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε την ισότητα $(\varepsilon_M)^* \phi^{**} = (\phi^* \varepsilon_M)^*$. Η ισότητα αυτή, μας εξασφαλίζει ότι η δεύτερη γραμμή του διαγράμματος (5.44), παριστάνει ουσιαστικά το σύμπλοκο $\text{Hom}_A(\mathcal{J}, A)$. Ως απόρροια των παραπάνω λοιπόν, έπεται ότι το σύμπλοκο $\text{Hom}_A(\mathcal{J}, A)$ είναι ακριβές. ■

Όπως προείπαμε, το ζητούμενο της ενότητας αυτής, είναι να εξηγήσουμε τον λόγο που η σύγχρονη εκδοχή (Enochs-Jenda) του ορισμού των πεπερασμένα παραγόμενων G -προβολικών προτύπων υπεράνω ενός δακτυλίου της Noether A , συμφωνεί με την παλαιότερη εκδοχή (Auslander) του ορισμού των G -προβολικών προτύπων υπεράνω του δακτυλίου της Noether A . Πριν να αιτιολογήσουμε την ταύτιση αυτή, παραθέτουμε τον ορισμό της G -κλάσης προτύπων του Auslander, $G(A)$, όπως ο ίδιος την διατύπωσε στο [6], σελ.55:

“DÉFINITION.- Soit A un anneau noethérien. On appellera $G(A)$ la classe des A -modules réflexifs tels que, pour tout $i \geq 1$ on ait

$$\text{Ext}_A^i(M, A) = \text{Ext}_A^i(M^*, A) = 0.”$$

Ο Auslander αναφέρει ότι κάθε δακτύλιος που εμφανίζεται στο [6], (σελίδα 4), είναι μεταθετικός και κάθε πρότυπο είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Έτσι, στον προηγούμενο ορισμό, το πρότυπο M είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι ο Auslander ορίζει την κλάση $G(A)$ να αποτελείται από όλα τα πεπερασμένα παραγόμενα A -πρότυπα, τα οποία ικανοποιούν τις συνθήκες (α') , (β') και (γ') , της τέταρτης συνθήκης του Θεωρήματος (5.3.8). Έτσι, από την ισοδυναμία $1 \Leftrightarrow 4$ του Θεωρήματος (5.3.8), βλέπουμε ότι η κλάση $G(A)$ αποτελείται από όλα τα πεπερασμένα παραγόμενα G -προβολικά A -πρότυπα. Δηλαδή, έχουμε ότι ο ορισμός των G -προβολικών προτύπων με την έννοια των Enochs-Jenda, επεκτείνει τον ορισμό των G -προβολικών προτύπων με την έννοια του Auslander, όπως και ζητούσαμε.

Στο επόμενο κεφάλαιο, θα εισάγουμε την έννοια της G -προβολικής διάστασης ενός προτύπου υπεράνω ενός προσεταιριστικού δακτυλίου με μονάδα. Ολοκληρώνουμε την παρούσα ενότητα, σημειώνοντας ότι η έννοια της G -προβολικής διάστασης γενικεύει την (κλασσική) G -διάσταση του Auslander, για την οποία έγινε αναφορά στην εισαγωγή του παρόντος κεφαλαίου, με την έννοια ότι οι διαστάσεις αυτές ταυτίζονται, όταν ο δακτύλιος είναι δακτύλιος της Noether, και τα πρότυπα είναι πεπερασμένα παραγόμενα.

Κεφάλαιο 6

Ομολογικές Διαστάσεις Gorenstein

Κεντρική ιδέα της Ομολογικής Άλγεβρας σε κατηγορίες προτύπων, είναι η αντικατάσταση ενός προτύπου από την προβολική ή ενέσιμη ανάλυσή του. Κατά αυτόν τον τρόπο, για έναν δοθέντα προσθετικό συναρτητή μεταξύ κατηγοριών προτύπων μπορούμε να ορίσουμε παραγόμενους συναρτητές, οι οποίοι μας πληροφορούν για το πόσο απέχει ο υποκείμενος συναρτητής από το να είναι ακριβής. Οι έννοιες των προβολικών (ενέσιμων) προτύπων, και των προβολικών (ενέσιμων) αναλύσεων, διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην Ομολογική Άλγεβρα σε κατηγορίες προτύπων, και μας οδηγούν στις έννοιες των προβολικών ή ενέσιμων διαστάσεων οι οποίες μετρούν πόσο απέχει ένα πρότυπο από το να είναι προβολικό ή ενέσιμο.

Η Σχετική Ομολογική Άλγεβρα εισήχθη από τους Hochschild, Butler-Horrocks, Eilenberg-Moore και άλλους, βλέπε το βιβλίο ορόσημο [23] των Eilenberg και Moore, ως επέκταση της Ομολογικής Άλγεβρας σε κατηγορίες προτύπων αλλά και σε γενικότερες κατηγορίες. Η βασική ιδέα της Σχετικής Ομολογικής Άλγεβρας είναι η προσέγγιση προτύπων ή αντικειμένων μέσω αναλύσεων από πρότυπα ή αντικείμενα τα οποία δεν είναι κατ' ανάγκην προβολικά ή ενέσιμα. Η ύπαρξη τέτοιων αναλύσεων οδηγεί στην έννοια των (αριστερά ή δεξιά) σχετικά παραγόμενων συναρτητών, και στην έννοια των σχετικών ομολογικών διαστάσεων. Έτσι καταλυτικής σημασίας στη Σχετική Ομολογική Άλγεβρα αποτελούν οι έννοιες των (ελάχιστων) δεξιών και (ελάχιστων) αριστερών προσεγγίσεων.

Η Ομολογική Άλγεβρα Gorenstein είναι ένα είδος Σχετικής Ομολογικής Άλγεβρας, όπου οι κλάσεις των προβολικών και ενέσιμων προτύπων, αντικαθίστανται από τις κλάσεις των G -προβολικών και των G -ενέσιμων προτύπων, αντίστοιχα. Οι έννοιες των G -προβολικών (G -ενέσιμων) προτύπων, καθώς και των Gorenstein προβολικών (Gorenstein ενέσιμων) αναλύσεων, χάριν απλότητας, G -προβολικών (G -ενέσιμων) αναλύσεων, παίζουν κεντρικό ρόλο στη Ομολογική Άλγεβρα Gorenstein.

Στο παρόν κεφάλαιο, αναπτύσσουμε βασικά στοιχεία της Ομολογικής Άλγεβρας Gorenstein. Εισάγουμε τις έννοιες των G -προβολικών και G -ενέσιμων αναλύσεων, και χρησιμοποιώντας τις αναλύσεις αυτές, ορίζουμε και μελετάμε τις έννοιες των Gorenstein προβολικών και Gorenstein ενέσιμων διαστάσεων, χάριν απλότητας, G -προβολικών και G -ενέσιμων διαστάσεων, αντίστοιχα.

Σύμβαση: Καθ' όλη την έκταση του κεφαλαίου αυτού, συμβολίζουμε με R , έναν προσεταιριστικό δακτύλιο με μονάδα.

6.1 G -Προβολική Και G -Ενέσιμη Διάσταση

Στην ενότητα αυτή, ορίζουμε τις έννοιες των G -προβολικών και G -ενέσιμων διαστάσεων, και μελετάμε το τρόπο με τον οποίο συνδέονται οι διαστάσεις αυτές, με τον συναρτητή $\text{Ext}_R^i(-, -)$.

Ορισμός 6.1.1. Μια G -προβολική ανάλυση (**G -projective resolution**) ενός αριστερού R -προτύπου

M , είναι μια ακριβής ακολουθία

$$\cdots \longrightarrow G_2 \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0, \quad (6.1)$$

όπου κάθε G_i για $i = 0, 1, \dots$, είναι G -προβολικό αριστερό R -πρότυπο. Το μήκος μιας G -προβολικής ανάλυσης του M , όπως η (6.1), είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός n , τέτοιος ώστε $G_n \neq 0$, και $G_i = 0$ για κάθε $i \geq n + 1$. Αν δεν υπάρχει τέτοιος φυσικός αριθμός n , ορίζουμε το μήκος της, να είναι άπειρο.

Αναλόγως, ορίζεται μια G -προβολική ανάλυση ενός δεξιού R -πρωτύπου N , καθώς και το μήκος τυχούσας G -προβολικής ανάλυσης του N .

Παρόμοια, έχουμε τον ορισμό μιας G -ενέσιμης ανάλυσης ενός R -πρωτύπου:

Ορισμός 6.1.2. Μια G -ενέσιμη ανάλυση (**G -injective resolution**) ενός αριστερού R -πρωτύπου M , είναι μια ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow H^0 \longrightarrow H^1 \longrightarrow H^2 \longrightarrow \cdots, \quad (6.2)$$

όπου κάθε H^i για $i = 0, 1, \dots$, είναι G -ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο. Το μήκος μιας G -ενέσιμης ανάλυσης του M , όπως η (6.2), είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός n , τέτοιος ώστε $H^n \neq 0$, και $H^i = 0$ για κάθε $i \geq n + 1$. Αν δεν υπάρχει τέτοιος φυσικός αριθμός n , ορίζουμε το μήκος της, να είναι άπειρο.

Ομοίως, ορίζεται μια G -ενέσιμη ανάλυση ενός δεξιού R -πρωτύπου N , καθώς και το μήκος τυχούσας G -ενέσιμης ανάλυσης του N .

Παρατήρηση 6.1.3. Οι έννοιες των G -προβολικών αναλύσεων και των αριστερών R -GProj-αναλύσεων ενός αριστερού R -πρωτύπου M , όπου R -GProj παριστάνει την κλάση των G -προβολικών αριστερών R -πρωτύπων, δεν είναι ταυτόσημες. Συμμετρικά, οι έννοιες των G -ενέσιμων αναλύσεων και των δεξιών R -GIHj-αναλύσεων ενός αριστερού R -πρωτύπου M , όπου R -GIHj συμβολίζει την κλάση των G -ενέσιμων αριστερών R -πρωτύπων, είναι διακριτές. Ωστόσο, επειδή κάθε προβολικό (ενέσιμο) R -πρότυπο είναι G -προβολικό (G -ενέσιμο) R -πρότυπο, προκύπτει ότι:

- Για κάθε αριστερό R -πρότυπο υπάρχει πάντα μια G -προβολική ανάλυση, και μια G -ενέσιμη ανάλυση.
- Κάθε αριστερή R -GProj-ανάλυση ενός αριστερού R -πρωτύπου M , είναι επίσης μια G -προβολική ανάλυση του M , ενώ κάθε δεξιά R -GIHj-ανάλυση ενός αριστερού R -πρωτύπου M , είναι επίσης μια G -ενέσιμη ανάλυση του M .

Παρόμοια αποτελέσματα με τα παραπάνω, ισχύουν και για δεξιά R -πρότυπα.

Φυσικό επακόλουθο της ύπαρξης μιας G -προβολικής και μιας G -ενέσιμης ανάλυσης για κάθε (αριστερό ή δεξιό) R -πρότυπο, είναι να ορίσουμε μέσω των αναλύσεων αυτών, τις έννοιες των G -προβολικών και G -ενέσιμων διαστάσεων ενός (αριστερού ή δεξιού) R -πρωτύπου.

Ορισμός 6.1.4. Για ένα (αριστερό ή δεξιό) R -πρότυπο M , η G -προβολική διάσταση (**G -projective resolution**), $\text{Gpd}_R M$, ορίζεται ως εξής:

1. Αν $M = 0$, τότε $\text{Gpd}_R M = -\infty$.
2. Αν $M \neq 0$ και δεν υπάρχει G -προβολική ανάλυση του M πεπερασμένου μήκους, τότε $\text{Gpd}_R M = \infty$.
3. Αν $M \neq 0$ και υπάρχει μια G -προβολική ανάλυση του M πεπερασμένου μήκους, τότε $\text{Gpd}_R M$ είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός n ($n \in \mathbb{N}_0$), τέτοιος ώστε να υπάρχει μια G -προβολική ανάλυση του M μήκους n .

Ισοδύναμα, αν $M \neq 0$ και $n \in \mathbb{N}_0$, τότε $\text{Gpd}_R M \leq n$, αν και μόνο αν, υπάρχει μια G-προβολική ανάλυση του M μήκους n .

Ανάλογα,

Ορισμός 6.1.5. Για ένα (αριστερό ή δεξιό) R -πρότυπο M , η G-ενέσιμη διάσταση (G-injective resolution), $\text{Gid}_R M$, ορίζεται ως εξής:

1. Αν $M = 0$, τότε $\text{Gid}_R M = -\infty$.
2. Αν $M \neq 0$ και δεν υπάρχει G-ενέσιμη ανάλυση του M πεπερασμένου μήκους, τότε $\text{Gid}_R M = \infty$.
3. Αν $M \neq 0$ και υπάρχει μια G-ενέσιμη ανάλυση του M πεπερασμένου μήκους, τότε $\text{Gid}_R M$ είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός n ($n \in \mathbb{N}_0$), τέτοιος ώστε να υπάρχει μια G-ενέσιμη ανάλυση του M μήκους n .

Ισοδύναμα, αν $M \neq 0$ και $n \in \mathbb{N}_0$, τότε $\text{Gid}_R M \leq n$, αν και μόνο αν, υπάρχει μια G-ενέσιμη ανάλυση του M μήκους n .

Στη συνέχεια, επικεντρωνόμαστε σε αριστερά R -πρότυπα, και αναφερόμαστε σε βασικά αποτελέσματα για G-προβολικές και G-ενέσιμες διαστάσεις. Τονίζουμε, ότι ανάλογα αποτελέσματα με αυτά που θα παραθέσουμε στη συνέχεια του παρόντος κεφαλαίου για αριστερά R -πρότυπα, ισχύουν και για δεξιά R -πρότυπα.

Παρατήρηση 6.1.6. Για κάθε αριστερό R -πρότυπο M , ισχύουν οι ανισότητες:

$$\text{Gpd}_R M \leq \text{pd}_R M \quad \& \quad \text{Gid}_R M \leq \text{id}_R M.$$

Πράγματι, οι παραπάνω σχέσεις επάγονται από το γεγονός ότι κάθε προβολικό αριστερό R -πρότυπο είναι G-προβολικό, και από το αποτέλεσμα ότι κάθε ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο είναι G-ενέσιμο. Στη συνέχεια της ενότητας αυτής, θα έχουμε την ευκαιρία να διαπιστώσουμε ότι οι ισότητες των δύο προηγούμενων ανισοτήτων, ισχύουν όταν η προβολική, και αντίστοιχα η ενέσιμη, ανάλυση του M είναι πεπερασμένη. Αν συμβολίσουμε λοιπόν με $R\text{-Proj}^{<\infty}$, την κλάση όλων των αριστερών R -προτύπων με πεπερασμένη προβολική διάσταση, με $R\text{-Inj}^{<\infty}$, την κλάση όλων των αριστερών R -προτύπων με πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση, με $R\text{-GProj}^{<\infty}$, την κλάση όλων των αριστερών R -προτύπων με πεπερασμένη G-προβολική διάσταση, και με $R\text{-GInj}^{<\infty}$, την κλάση όλων των αριστερών R -προτύπων με πεπερασμένη G-ενέσιμη διάσταση, τότε ισχύουν οι εγκλεισμοί:

$$R\text{-Proj}^{<\infty} \subseteq R\text{-GProj}^{<\infty} \quad \& \quad R\text{-Inj}^{<\infty} \subseteq R\text{-GInj}^{<\infty}.$$

Στο Κεφάλαιο 5, αποδείξαμε ότι η προβολική διάσταση ενός G-προβολικού R -προτύπου, και αντίστοιχα, η ενέσιμη διάσταση ενός G-ενέσιμου R -προτύπου, είναι ή ίσες με μηδέν, ή άπειρο. Κατά φυσικό τρόπο λοιπόν, προκύπτουν τα ερωτήματα:

1. Ποιά η G-προβολική διάσταση ενός G-προβολικού R -προτύπου;
2. Ποιά η G-ενέσιμη διάσταση ενός G-ενέσιμου R -προτύπου;

Οι επόμενες δύο προτάσεις, μας δίνουν την απάντηση στα παραπάνω ερωτήματα, και μάλιστα, μας πληροφορούν ότι τα G-προβολικά R -πρότυπα, είναι ακριβώς τα R -πρότυπα G-προβολικής διάστασης μικρότερης ή ίσης του μηδενός, καθώς και ότι τα G-ενέσιμα R -πρότυπα, είναι ακριβώς τα R -πρότυπα G-ενέσιμης διάστασης μικρότερης ή ίσης του μηδενός.

Πρόταση 6.1.7. Για ένα αριστερό R -πρότυπο M , ισχύει η ισοδυναμία:

$$M \in R\text{-GProj} \iff \text{Gpd}_R M = \begin{cases} -\infty, & \text{αν } M = 0 \\ 0, & \text{αν } M \neq 0. \end{cases}$$

Απόδειξη. Έστω M ένα τυχαίο αριστερό R -πρότυπο. Τότε είτε $M = 0$, είτε $M \neq 0$. Υποθέτουμε αρχικά, ότι το M είναι G -προβολικό. Αν $M = 0$, τότε το πρότυπο M είναι G -προβολικό, ως προβολικό, και εξ ορισμού έχουμε ότι $\text{Grd}_R M = -\infty$. Αν $M \neq 0$, τότε $\text{Grd}_R M \geq 0$ (πιθανότητα, $\text{Grd}_R M = \infty$). Θεωρώντας τώρα την ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\text{Id}_M} M \longrightarrow 0, \quad (6.3)$$

συμπεραίνουμε από την υπόθεση, ότι η ακολουθία (6.3) είναι μια G -προβολική ανάλυση του M μήκους 0. Συνεπώς, έπεται ότι $\text{Grd}_R M = 0$.

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι $\text{Grd}_R M = -\infty$, όταν $M = 0$ καθώς και ότι $\text{Grd}_R M = 0$, όταν $M \neq 0$. Θέλουμε να δείξουμε ότι το αριστερό R -πρότυπο M είναι G -προβολικό. Αν $M = 0$, τότε το M είναι προφανώς G -προβολικό. Αν $M \neq 0$, τότε η υπόθεση μας δίνει την ισότητα, $\text{Grd}_R M = 0$. Έτσι, οδηγούμαστε στην ύπαρξη μιας G -προβολικής ανάλυσης του M ελάχιστου μήκους 0, έστω

$$\mathcal{J}: \quad 0 \longrightarrow G \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Λόγω της ακρίβειας της ακολουθίας \mathcal{J} , έχουμε έναν ισομορφισμό $G \cong M$ και επομένως, αφού η κλάση $R\text{-GProj}$ είναι κλειστή σε ισομορφισμούς, παίρνουμε ότι το M είναι G -προβολικό, όπως επιθυμούσαμε. ■

Πρόταση 6.1.8. *Για ένα αριστερό R -πρότυπο M , ισχύει η ισοδυναμία:*

$$M \in R\text{-GInj} \iff \text{Gid}_R M = \begin{cases} -\infty, & \text{αν } M = 0 \\ 0, & \text{αν } M \neq 0. \end{cases}$$

Απόδειξη. Κατά δυϊκό τρόπο με την απόδειξη της Πρότασης (6.1.7). ■

Λήμμα 6.1.9. *Έστω $0 \longrightarrow K_n \longrightarrow G_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow G_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$, μια ακριβής ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα, όπου κάθε G_i για $i = 0, \dots, n-1$, είναι G -προβολικό. Τότε $\text{Ext}_R^i(K_n, L) \cong \text{Ext}_R^{i+n}(M, L)$ για κάθε $i > 0$, και για κάθε αριστερό R -πρότυπο L με πεπερασμένη προβολική διάσταση.*

Απόδειξη. Αν $n = 0$, τότε η δοθείσα ακριβής ακολουθία είναι ακριβώς η ακριβής ακολουθία $0 \longrightarrow K_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$, και κατά αυτόν τον τρόπο, τα αριστερά R -πρότυπα K_0 και M , καθίστανται ισομορφα. Συνεπώς, αφού κάθε (αντι)συναλλοίωτος συναρτητής διατηρεί ισομορφισμούς, παίρνουμε το ζητούμενο. Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι $n > 0$, και «σπάμε» τη δοθείσα ακριβή ακολουθία σε σύντομες ακριβείς ακολουθίες για κάθε $j = 1, \dots, n$:

$$0 \longrightarrow K_j \longrightarrow G_{j-1} \longrightarrow K_{j-1} \longrightarrow 0, \quad (6.4)$$

όπου $K_0 = M$. Θεωρούμε τώρα, ένα αριστερό R -πρότυπο L με πεπερασμένη προβολική διάσταση, και εφαρμόζουμε τον αντισυναλλοίωτο συναρτητή $\text{Hom}_R(-, L)$ στην (6.4). Τότε επάγεται μια μακρά ακριβής ακολουθία στη συνολογία, μέρος της οποίας είναι η ακριβής ακολουθία

$$\begin{aligned} \text{Ext}_R^{i+n-j}(G_{j-1}, L) &\longrightarrow \text{Ext}_R^{i+n-j}(K_j, L) \xrightarrow{\Phi^{i+n-j}} \text{Ext}_R^{i+n-j+1}(K_{j-1}, L) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \text{Ext}_R^{i+n-j+1}(G_{j-1}, L), \end{aligned}$$

για κάθε $i \geq 0$ και για κάθε $j = 1, \dots, n$, όπου Φ^{i+n-j} είναι ο ομομορφισμός σύνδεσης (connecting homomorphism). Από το Κεφάλαιο 5, γνωρίζουμε ότι για κάθε G -προβολικό R -πρότυπο G , και για κάθε R -πρότυπο με πεπερασμένη προβολική διάσταση L , ισχύει ότι $\text{Ext}_R^i(G, L) = 0$ για $i = 1, 2, \dots$. Έτσι, αφού κάθε G_{j-1} για $i = 1, \dots, n$, είναι G -προβολικό αριστερό R -πρότυπο, παίρνουμε ότι $\text{Ext}_R^{i+n-j}(G_{j-1}, L) = \text{Ext}_R^{i+n-j+1}(G_{j-1}, L) = 0$ για κάθε $i > 0$ και για κάθε $j \in \{1, \dots, n\}$. Επομένως, ο ομομορφισμός σύνδεσης Φ^{i+n-j} , είναι ένας ισομορφισμός για κάθε $i > 0$ και για κάθε $j \in \{1, \dots, n\}$, δηλαδή,

$$\text{Ext}_R^{i+n-j+1}(K_{j-1}, L) \cong \text{Ext}_R^{i+n-j}(K_j, L),$$

για $i > 0$ και για $j = 1, \dots, n$. Συνθέτοντας τους ισομορφισμούς αυτούς, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $\text{Ext}_R^i(K_n, L) \cong \text{Ext}_R^{i+n}(K_0, L) = \text{Ext}_R^{i+n}(M, L)$, όπως επιθυμούσαμε. ■

Δυϊκά,

Λήμμα 6.1.10. Έστω $0 \longrightarrow M \longrightarrow H^0 \longrightarrow \dots \longrightarrow H^{n-1} \longrightarrow C^n \longrightarrow 0$, μια ακριβής ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα, όπου κάθε H^i για $i = 0, \dots, n-1$, είναι G -ενέσιμο. Τότε $\text{Ext}_R^i(L, C^n) \cong \text{Ext}_R^{i+n}(L, M)$ για κάθε $i > 0$, και για κάθε αριστερό R -πρότυπο L με πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση.

Απόδειξη. Ανάλογα, με την απόδειξη του Λήμματος (6.1.9). ■

Η ακόλουθη πρόταση, μας δίνει τη δυνατότητα να μπορούμε πάντα να υποθέτουμε, ότι τα πρότυπα που εμφανίζονται σε μια G -προβολική ανάλυση ενός πεπερασμένου παραγόμενου προτύπου υπεράνω ενός προσεταιριστικού δακτυλίου της Noether, είναι πεπερασμένα παραγόμενα.

Πρόταση 6.1.11. Υποθέτουμε ότι ο δακτύλιος S είναι αριστερός δακτύλιος της Noether, και έστω M ένα πεπερασμένο παραγόμενο αριστερό S -πρότυπο. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Αν $\text{Grd}_S M = \infty$, τότε υπάρχει μια G -προβολική ανάλυση του M άπειρου μήκους, αποτελούμενη από πεπερασμένα παραγόμενα αριστερά S -πρότυπα.
2. Αν $m \in \mathbb{N}_0$ και $\text{Grd}_S M \leq m$, τότε υπάρχει μια G -προβολική ανάλυση του M πεπερασμένου μήκους m , αποτελούμενη από πεπερασμένα παραγόμενα αριστερά S -πρότυπα.

Απόδειξη. 1) Αν $\text{Grd}_S M = \infty$, τότε έπεται ότι $M \neq 0$, καθώς και ότι δεν υπάρχει πεπερασμένου μήκους G -προβολική ανάλυση του M . Συνεπώς, αφού η κλάση των προβολικών αριστερών S -προτύπων περιέχεται στην κλάση των G -προβολικών αριστερών S -προτύπων, συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει πεπερασμένου μήκους προβολική ανάλυση του M . Επειδή ο δακτύλιος S είναι αριστερός δακτύλιος της Noether, και το αριστερό S -πρότυπο M είναι πεπερασμένα παραγόμενο, μπορούμε να διαλέξουμε μια ακριβή ακολουθία άπειρου μήκους της μορφής:

$$\mathcal{J}: \quad \dots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

όπου κάθε P_i για $i = 0, 1, \dots$, είναι πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό αριστερό S -πρότυπο. Τότε η ακριβής ακολουθία \mathcal{J} , είναι προφανώς μια G -προβολική ανάλυση του M άπειρου μήκους, αποτελούμενη από πεπερασμένα παραγόμενα αριστερά S -πρότυπα.

2) Έστω $m \in \mathbb{N}_0$ και $\text{Grd}_S M \leq m$. Αν το πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό S -πρότυπο M είναι το μηδενικό, ($\text{Grd}_S M = -\infty$), τότε το $M = 0$ είναι G -προβολικό, και η ακολουθία $0 \longrightarrow M \longrightarrow M \longrightarrow 0$, είναι προφανώς μια G -προβολική ανάλυση του M αποτελούμενη από πεπερασμένα παραγόμενα αριστερά S -πρότυπα. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $M \neq 0$, δηλαδή, ότι $0 \leq \text{Grd}_S M \leq m$. Εξ ορισμού, υπάρχει μια G -προβολική ανάλυση του M μήκους m , έστω

$$0 \longrightarrow G'_m \longrightarrow G'_{m-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow G'_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0. \quad (6.5)$$

Η ακολουθία (6.5) ωστόσο, δεν είναι η G -προβολική ανάλυση του M μήκους m που ψάχναμε, αφού κάθε G'_i που εμφανίζεται στην ακριβή ακολουθία (6.5), δεν είναι απαραίτητα πεπερασμένα παραγόμενο. Στη συνέχεια, διαλέγουμε μια ακριβή ακολουθία από αριστερά S -πρότυπα

$$0 \longrightarrow K_m \longrightarrow G_{m-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow G_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0, \quad (6.6)$$

όπου K_m είναι πεπερασμένα παραγόμενο, και κάθε G_i για $i = 0, \dots, m-1$, είναι πεπερασμένα παραγόμενο G -προβολικό. Η ύπαρξη μιας ακριβής ακολουθίας όπως η (6.6), προκύπτει από την υπόθεση ότι το M είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό πρότυπο υπεράνω του αριστερού δακτυλίου της Noether S , καθώς και από το αποτέλεσμα ότι κάθε προβολικό αριστερό S -πρότυπο, είναι επίσης ένα G -προβολικό αριστερό S -πρότυπο. Συγκρίνοντας τώρα, τις ακριβείς ακολουθίες (6.5) και (6.6), από την Πρόταση (5.1.13), συμπεραίνουμε ότι το πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό S -πρότυπο K_m , είναι G -προβολικό. Έτσι, η ακολουθία (6.6), είναι η ζητούμενη G -προβολική ανάλυση του M μήκους m . ■

Πρόταση 6.1.12. *Αν M είναι ένα αριστερό R -πρότυπο, τότε το M είναι G -προβολικό, αν και μόνο αν, $\text{Gpd}_R M < \infty$ και $\text{Ext}_R^i(M, Q) = 0$ για κάθε $i > 0$ και για κάθε προβολικό αριστερό R -πρότυπο Q .*

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα τυχαίο αριστερό R -πρότυπο M . Τότε είτε $M = 0$, είτε $M \neq 0$. Αν $M = 0$, τότε τετριμμένα έχουμε ότι το M είναι G -προβολικό με $\text{Gpd}_R M = -\infty < \infty$, και επιπλέον, ότι $\text{Ext}_R^i(M, -) = 0$ για κάθε $i \geq 0$, αφού κάθε προσθετικός (αντι)συναλλοίωτος συναρτητής $T: R\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$, ικανοποιεί τη σχέση $T(0) = 0$, όπου με 0 σημειώνουμε συγχρόνως, τα μηδενικά αντικείμενα (στην περίπτωση μας, πρότυπα) των κατηγοριών $R\text{-Mod}$ και Ab . Έστω λοιπόν, $M \neq 0$. Υποθέτουμε αρχικά, ότι το M είναι G -προβολικό. Τότε η Πρόταση (6.1.7), μας δίνει τη σχέση $\text{Gpd}_R M = 0 < \infty$, και το Λήμμα (5.1.6), μας εξασφαλίζει ότι $\text{Ext}_R^i(M, Q) = 0$ για κάθε $i > 0$ και για κάθε προβολικό αριστερό R -πρότυπο Q .

Αντίστροφα, υποθέτουμε τώρα, ότι $\text{Gpd}_R M < \infty$ και $\text{Ext}_R^i(M, Q) = 0$ για κάθε $i > 0$ και για κάθε προβολικό αριστερό R -πρότυπο Q . Θέλουμε να δείξουμε ότι το μη μηδενικό αριστερό R -πρότυπο M , είναι G -προβολικό. Έστω $\text{Gpd}_R M \leq n$ για κάποιον φυσικό αριθμό n . Τότε εξ ορισμού, υπάρχει μια G -προβολική ανάλυση του M μήκους n :

$$0 \longrightarrow G_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow G_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0. \quad (6.7)$$

Επειδή η ακολουθία (6.7) είναι ακριβής, μπορούμε να τη «σπάσουμε» σε σύντομες ακριβείς ακολουθίες για κάθε $j = 1, \dots, n$

$$\mathcal{J}_j: \quad 0 \longrightarrow K_j \longrightarrow G_{j-1} \longrightarrow K_{j-1} \longrightarrow 0,$$

όπου $K_n = G_n$ και $K_0 = M$. Παρατηρούμε ότι από την υπόθεση και το Λήμμα (6.1.9), προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\text{Ext}_R^1(K_{j-1}, Q) \cong \text{Ext}_R^j(M, Q) = 0,$$

για κάθε $j \in \{1, \dots, n\}$, και για κάθε προβολικό αριστερό R -πρότυπο Q . Συνεπώς, αν εφαρμόσουμε τώρα την Πρόταση (5.1.14), στη σύντομη ακριβή ακολουθία \mathcal{J}_n ,

$$0 \longrightarrow G_n \longrightarrow G_{n-1} \longrightarrow K_{n-1} \longrightarrow 0,$$

τότε συμπεραίνουμε ότι το αριστερό R -πρότυπο K_{n-1} είναι G -προβολικό. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, και εφαρμόζοντας ξανά την Πρόταση (5.1.14), στη σύντομη ακριβή ακολουθία \mathcal{J}_{n-1} , οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι το αριστερό R -πρότυπο K_{n-2} είναι επίσης G -προβολικό. Έτσι λοιπόν η εφαρμογή αυτή τη φορά της Πρότασης (5.1.14), στις σύντομες ακριβείς ακολουθίες $\mathcal{J}_{n-2}, \dots, \mathcal{J}_0$, μας δίνει ότι τα αριστερά R -πρότυπα K_{n-3}, \dots, K_0 (με αυτή τη σειρά) είναι επίσης G -προβολικά. Άρα, ιδιαίτερα έχουμε ότι το αριστερό R -πρότυπο $K_0 = M$ είναι G -προβολικό. ■

Ανάλογα,

Πρόταση 6.1.13. *Αν M είναι ένα αριστερό R -πρότυπο, τότε το M είναι G -ενέσιμο, αν και μόνο αν, $\text{Gid}_R M < \infty$ και $\text{Ext}_R^i(I, M) = 0$ για κάθε $i > 0$ και για κάθε ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο I .*

Απόδειξη. Δυϊκά, με την απόδειξη της Πρότασης (6.1.12). ■

Πρόταση 6.1.14. *Έστω $0 \longrightarrow K \longrightarrow G \longrightarrow M \longrightarrow 0$ μια σύντομη ακριβής ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα, όπου G είναι G -προβολικό. Αν M είναι G -προβολικό, τότε το αριστερό R -πρότυπο K είναι επίσης G -προβολικό. Αλλιώς, $\text{Gpd}_R M > 0$, και τότε $\text{Gpd}_R K = \text{Gpd}_R M - 1$.*

Απόδειξη. Αν M είναι G -προβολικό, τότε παίρνουμε ότι το αριστερό R -πρότυπο K είναι επίσης G -προβολικό, αφού η κλάση $R\text{-GProj}$ των G -προβολικών αριστερών R -προτύπων, είναι resolving. Υποθέτουμε λοιπόν τώρα ότι το M δεν είναι G -προβολικό, δηλαδή, ότι $M \neq 0$ και ότι $\text{Gpd}_R M > 0$, και θέτουμε $n = \text{Gpd}_R M$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\text{Gpd}_R K = \text{Gpd}_R M - 1$. Αν $K = 0$, ή ισοδύναμα, $\text{Gpd}_R K = -\infty$, τότε από τη δοθείσα ακριβή ακολουθία, και από το πρώτο Θεώρημα

ισομορφισμών για R -πρότυπα, έχουμε ότι $G \cong M$. Έτσι, επειδή η κλάση $R\text{-GProj}$ είναι κλειστή σε ισομορφισμούς, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι το αριστερό R -πρότυπο M είναι G -προβολικό, αποτέλεσμα το οποίο αντιτίθεται φυσικά στην υπόθεση ότι το M δεν είναι G -προβολικό. Άρα, $K \neq 0$, ή ισοδύναμα, $\text{Grd}_R K \geq 0$. Στη συνέχεια, διακρίνουμε περιπτώσεις για το n , όπου $n = \text{Grd}_R M > 0$.

Αν $n = \infty$, τότε έπεται ότι $\text{Grd}_R K = \infty$, διότι στην περίπτωση κατά την οποία $\text{Grd}_R K < \infty$, αφού $K \neq 0$, θα υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός m , και μία ακριβής ακολουθία αριστερών R -προτύπων $0 \rightarrow G'_m \rightarrow \dots \rightarrow G'_0 \rightarrow K \rightarrow 0$, όπου κάθε G'_i για $i = 0, \dots, m$, θα είναι G -προβολικό. Η συγκόλληση όμως, της ακριβούς ακολουθίας αυτής, με τη δοθείσα σύντομη ακριβή ακολουθία $0 \rightarrow K \rightarrow G \rightarrow M \rightarrow 0$, στη θέση K , θα μας δώσει την ακριβή ακολουθία:

$$0 \rightarrow G'_m \rightarrow \dots \rightarrow G'_0 \rightarrow G \rightarrow M \rightarrow 0, \quad (6.8)$$

όπου G και G'_i για $i = 0, \dots, m$, θα είναι G -προβολικά αριστερά R -πρότυπα. Δηλαδή η ακριβής ακολουθία (6.8), θα είναι μια G -προβολική ανάλυση του M πεπερασμένου μήκους $m + 1$, αποτέλεσμα το οποίο αντιφάσκει με την υπόθεση ότι $\text{Grd}_R M = n = \infty$.

Αν $0 < n < \infty$, τότε υπάρχει μια G -προβολική ανάλυση του M ελάχιστου μήκους n , έστω

$$0 \rightarrow G_n \rightarrow G_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0. \quad (6.9)$$

Διαλέγουμε μια ακριβή ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα

$$0 \rightarrow K'' \rightarrow G''_{n-2} \rightarrow \dots \rightarrow G''_0 \rightarrow K \rightarrow 0, \quad (6.10)$$

όπου κάθε G''_i για $i = 0, \dots, n-2$, είναι G -προβολικό. Η συγκόλληση τώρα των ακριβών ακολουθιών (6.10), και $0 \rightarrow K \rightarrow G \rightarrow M \rightarrow 0$, στη θέση K , είναι η ακριβής ακολουθία:

$$0 \rightarrow K'' \rightarrow G''_{n-2} \rightarrow \dots \rightarrow G''_0 \rightarrow G \rightarrow M \rightarrow 0. \quad (6.11)$$

Συγκρίνοντας τις ακολουθίες (6.9) και (6.11), από την Πρόταση (5.1.13), συμπεραίνουμε ότι το αριστερό R -πρότυπο K'' είναι G -προβολικό. Επομένως, η ακολουθία (6.10) είναι μια G -προβολική ανάλυση του μη μηδενικού αριστερού R -προτύπου K , πεπερασμένου μήκους $n-1$. Οπότε έχουμε ότι $\text{Grd}_R K \leq n-1$. Στην πραγματικότητα, ισχύει ότι $\text{Grd}_R K = n-1$, γιατί σε διαφορετική περίπτωση, δηλαδή, αν $\text{Grd}_R K > n-1$, τότε προφανώς $n-1 > 0$, αφού $\text{Grd}_R K \geq 0$, και υπάρχει μια G -προβολική ανάλυση του K μήκους $n-2$, έστω

$$0 \rightarrow \bar{G}_{n-2} \rightarrow \dots \rightarrow \bar{G}_0 \rightarrow K \rightarrow 0. \quad (6.12)$$

Συγκολλώντας την ακριβή ακολουθία (6.12), με τη δοθείσα σύντομη ακριβή ακολουθία $0 \rightarrow K \rightarrow G \rightarrow M \rightarrow 0$, προκύπτει η ακριβής ακολουθία:

$$0 \rightarrow \bar{G}_{n-2} \rightarrow \dots \rightarrow \bar{G}_0 \rightarrow G \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Άρα, η προηγούμενη ακριβής ακολουθία, είναι μια G -προβολική ανάλυση του M πεπερασμένου μήκους $n-1$. Συνεπώς, έπεται ότι $\text{Grd}_R M \leq n-1$, γεγονός το οποίο αντιτίθεται φυσικά, στην ελαχιστότητα του $n = \text{Grd}_R M < \infty$.

Επομένως, κάθε μία από τις δύο περιπτώσεις που εξετάσαμε, (ή $n = \infty$, ή $0 < n < \infty$), μας έδωσαν τη ζητούμενη ισότητα:

$$\text{Grd}_R K = n-1 = \text{Grd}_R M - 1. \quad \blacksquare$$

Πρόταση 6.1.15. Αν $(M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ είναι μια οικογένεια αριστερών R -προτύπων υπεράνω ενός μη κενού συνόλου Λ , τότε ισχύει η ισότητα:

$$\text{Grd}_R \left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \right) = \sup \{ \text{Grd}_R M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \}.$$

Απόδειξη. Έστω $(M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ μια τυχαία οικογένεια αριστερών R -προτύπων υπεράνω ενός μη κενού συνόλου Λ . Αν για κάθε $\lambda \in \Lambda$ ισχύει ότι $M_\lambda = 0$, τότε κατά τετριμμένο τρόπο προκύπτει η ζητούμενη ισότητα. Υποθέτουμε λοιπόν, ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\lambda \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $M_\lambda \neq 0$. Θέτουμε

$$\Delta = \{\text{Gpd}_R M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}.$$

Τότε ή $\sup \Delta = \infty$, ή $0 \leq \sup \Delta < \infty$. Αν $\sup \Delta = \infty$, τότε προφανώς $\text{Gpd}_R(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda) \leq \infty$. Αν $\sup \Delta = m$ για κάποιο φυσικό αριθμό m , τότε για κάθε $\lambda \in \Lambda$, υπάρχει μια G -προβολική ανάλυση του M_λ μήκους m :

$$\mathfrak{R}_\lambda : \quad 0 \longrightarrow G_m^\lambda \longrightarrow \cdots \longrightarrow G_0^\lambda \longrightarrow M_\lambda \longrightarrow 0.$$

Θεωρώντας το ευθύ άθροισμα των ακολουθιών \mathfrak{R}_λ , δηλαδή την ακριβή ακολουθία

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{R}_\lambda : \quad 0 \longrightarrow \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_m^\lambda \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_0^\lambda \longrightarrow \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \longrightarrow 0,$$

συμπεραίνουμε ότι η ακριβής ακολουθία $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{R}_\lambda$, είναι μια G -προβολική ανάλυση του $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ πεπερασμένου μήκους m , διότι η κλάση των G -προβολικών αριστερών R -προτύπων $R\text{-GProj}$, είναι κλειστή σε τυχαία ευθέα άθροισματα. Έτσι, έπεται ότι $\text{Gpd}_R(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda) \leq m$. Επομένως, σε κάθε περίπτωση παίρνουμε ότι $\text{Gpd}_R(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda) \leq \sup \Delta$. Για να αποδείξουμε τώρα την αντίστροφη ανίσωση, αρκεί να αποδείξουμε ότι αν M' είναι ένας οποιοδήποτε ευθύ προσθετός ενός μη μηδενικού αριστερού R -πρότυπου M , τότε υποχρεωτικά, $\text{Gpd}_R M' \leq \text{Gpd}_R M$. Θα αποδείξουμε τη συνεπαγωγή αυτή, με χρήση επαγωγής στο φυσικό αριθμό n , όπου $\text{Gpd}_R M = n$. Σημειώνουμε ότι αν $\text{Gpd}_R M = \infty$, τότε προφανώς κάθε ευθύ προσθετός M' του M , ικανοποιεί τη σχέση $\text{Gpd}_R M' \leq \infty$. Γράφουμε λοιπόν $M = M' \oplus M''$ για κάποιο αριστερό R -πρότυπο M'' . Αν $n = 0$, τότε το μη μηδενικό αριστερό R -πρότυπο M είναι G -προβολικό. Συνεπώς, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι το αριστερό R -πρότυπο M' είναι επίσης G -προβολικό, ως ευθύ προσθετός του G -προβολικού αριστερού R -πρότυπου M . Ισοδύναμα, ότι $\text{Gpd}_R M' \leq 0 = n = \text{Gpd}_R M$. Έστω τώρα, $\text{Gpd}_R M = n > 0$. Υποθέτουμε ότι για κάθε μη μηδενικό αριστερό R -πρότυπο L με $\text{Gpd}_R L \leq n - 1$, και για κάθε ευθύ προσθετό L' του L , ισχύει ότι $\text{Gpd}_R L' \leq \text{Gpd}_R L$. Στη συνέχεια, διαλέγουμε δύο ακριβείς ακολουθίες από αριστερά R -πρότυπα της μορφής:

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow G' \longrightarrow M' \longrightarrow 0 \quad \& \quad 0 \longrightarrow K'' \longrightarrow G'' \longrightarrow M'' \longrightarrow 0,$$

όπου G' και G'' είναι G -προβολικά. Θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα, του οποίου κάθε στήλη είναι μια σύντομη ακριβής ακολουθία, και κάθε γραμμή είναι μια διασπασίμη σύντομη ακριβής ακολουθία:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & & & (6.13) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & K' & \longrightarrow & K' \oplus K'' & \longrightarrow & K'' & \longrightarrow & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & G' \oplus G'' & \longrightarrow & G'' & \longrightarrow & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & & & \end{array}$$

Αν εφαρμόσουμε την Πρόταση (6.1.14) στη δεύτερη στήλη του διαγράμματος (6.13), τότε παίρνουμε ότι η G -προβολική διάσταση του μη μηδενικού αριστερού R -πρότυπου $K' \oplus K''$ είναι ίση με $n - 1$, αφού έχουμε ότι $\text{Gpd}_R M = n > 0$, καθώς και ότι το αριστερό R -πρότυπο $G' \oplus G''$ είναι G -προβολικό, ως ευθύ άθροισμα G -προβολικών R -προτύπων G' και G'' . Χρησιμοποιώντας τώρα

την επαγωγική υπόθεση, συμπεραίνουμε ότι $\text{Gpd}_R K' \leq n - 1$. Συνεπώς, από τη πρώτη στήλη του διαγράμματος (6.13), καταλήγουμε ότι $\text{Gpd}_R M' \leq n$, όπως επιθυμούσαμε. ■

Η ακόλουθη πρόταση είναι η δυϊκή εκδοχή της Πρότασης (6.1.14).

Πρόταση 6.1.16. Έστω $0 \rightarrow M \rightarrow H \rightarrow C \rightarrow 0$ να είναι μια σύντομη ακριβής ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα, όπου H είναι G -ενέσιμο. Αν M είναι G -ενέσιμο, τότε το αριστερό R -πρότυπο C είναι επίσης G -ενέσιμο. Αλλιώς, $\text{Gid}_R M > 0$, και τότε $\text{Gid}_R C = \text{Gpd}_R M - 1$.

Απόδειξη. Αν M είναι G -ενέσιμο, τότε χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η κλάση $R\text{-Glnj}$ των G -ενέσιμων αριστερών R -προτύπων, είναι coresolving, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι το αριστερό R -πρότυπο C , είναι επίσης G -ενέσιμο. Αν M όχι G -ενέσιμο, ισοδύναμα, $\text{Gid}_R M > 0$, τότε ακολουθώντας μια παρόμοια πορεία με την απόδειξη της Πρότασης (6.1.14), παίρνουμε τη ζητούμενη ισότητα. ■

Στο Κεφάλαιο 3, μελετήσαμε τον τρόπο με τον οποίο ο συναρτητής $\text{Ext}_R^i(-, -)$, μπορεί να μετρήσει την προβολική και ενέσιμη διάσταση ενός R -προτύπου. Στη συνέχεια, αναφερόμαστε στη σχέση ανάμεσα στο συναρτητή $\text{Ext}_R^i(-, -)$ και στις G -προβολικές και G -ενέσιμες διαστάσεις. Συγκεκριμένα, εξετάζουμε αν ο συναρτητής $\text{Ext}_R^i(-, -)$, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ώστε να «μετρά» την G -προβολική και G -ενέσιμη διάσταση ενός R -προτύπου, κατά ένα παρόμοιο τρόπο με το πως ο συναρτητής αυτός, «μετρά» τις συνήθεις έννοιες των προβολικών και ενέσιμων διαστάσεων ενός R -προτύπου.

Θεώρημα 6.1.17. Για ένα αριστερό R -πρότυπο M με $\text{Gpd}_R M < \infty$, και για έναν φυσικό αριθμό n , οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

1. $\text{Gpd}_R M \leq n$.
2. $\text{Ext}_R^i(M, L) = 0$ για κάθε $i > n$, και για κάθε αριστερό R -πρότυπο L με πεπερασμένη προβολική διάσταση.
3. $\text{Ext}_R^i(M, Q) = 0$ για κάθε $i > n$, και για κάθε προβολικό αριστερό R -πρότυπο Q .
4. Κάθε n -ιστή $R\text{-GProj}$ -συζυγία του M είναι G -προβολικό αριστερό R -πρότυπο.
5. Κάθε n -ιστή $R\text{-Proj}$ -συζυγία του M είναι G -προβολικό αριστερό R -πρότυπο.

Επιπλέον, η G -προβολική διάσταση του M μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$\begin{aligned} \text{Gpd}_R M &= \sup\{i \in \mathbb{N}_0 \mid \exists R\text{-}L \text{ με } \text{pd}_R L < \infty : \text{Ext}_R^i(M, L) \neq 0\} \\ &= \sup\{i \in \mathbb{N}_0 \mid \exists Q \in R\text{-Proj} : \text{Ext}_R^i(M, Q) \neq 0\}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα αριστερό R -πρότυπο M με $\text{Gpd}_R M < \infty$, και έστω n κάποιος φυσικός αριθμός. Αν $M = 0$, ισοδύναμα, $\text{Gpd}_R M = -\infty$, τότε οι παραπάνω συνθήκες είναι ισοδύναμες κατά προφανή τρόπο. Υποθέτουμε λοιπόν, ότι $M \neq 0$, δηλαδή, ότι $0 \leq \text{Gpd}_R M < \infty$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της G -προβολικής διάστασης ενός R -προτύπου, καθώς και το αποτέλεσμα ότι κάθε προβολικό R -πρότυπο είναι G -προβολικό R -πρότυπο, εύκολα προκύπτουν οι συνεπαγωγές $5 \Rightarrow 1$, $4 \Rightarrow 5$ και $2 \Rightarrow 3$. Θα δείξουμε τώρα, τις σχέσεις $1 \Rightarrow 2$ και $3 \Rightarrow 4$.

($1 \Rightarrow 2$): Υποθέτουμε ότι $\text{Gpd}_R M \leq n$. Εξ ορισμού υπάρχει μια G -προβολική ανάλυση του μη μηδενικού αριστερού R -προτύπου M πεπερασμένου μήκους n , έστω

$$0 \rightarrow G_n \rightarrow \cdots \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Χρησιμοποιώντας τα Λήμματα (5.1.6) και (6.1.9), έχουμε ότι

$$0 = \text{Ext}_R^{i-n}(G_n, L) \cong \text{Ext}_R^i(M, L),$$

για κάθε $i > n$, και για κάθε αριστερό R -πρότυπο L με πεπερασμένη προβολική διάσταση, όπως και ζητούσαμε.

(3 \Rightarrow 4): Υποθέτουμε ότι ισχύει το 3), και διαλέγουμε μια ακριβή ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα

$$0 \longrightarrow K_n \longrightarrow G_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow G_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0, \quad (6.15)$$

όπου κάθε G_i για $i = 0, \dots, n-1$, είναι G -προβολικό. Δηλαδή, η ακριβής ακολουθία (6.15), είναι μια επιμέρους G -προβολική ανάλυση του M . Θέλουμε να αποδείξουμε ότι η n -ιστή R - GProj -συζυγία του M , K_n , είναι G -προβολικό αριστερό R -πρότυπο. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση και το Λήμμα (6.1.9), παίρνουμε ότι:

$$0 = \text{Ext}_R^{i+n}(M, Q) \cong \text{Ext}_R^i(K_n, Q), \quad (6.16)$$

για κάθε $i > 0$ και για κάθε προβολικό αριστερό R -πρότυπο Q (ακόμη, για κάθε αριστερό R -πρότυπο Q με $\text{pd}_R Q < \infty$). Στη συνέχεια, «σπάμε» την ακριβή ακολουθία (6.15) σε σύντομες ακριβείς ακολουθίες για κάθε $j = 1, \dots, n$:

$$0 \longrightarrow K_j \longrightarrow G_{j-1} \longrightarrow K_{j-1} \longrightarrow 0, \quad (6.17)$$

όπου $K_0 = M$. Αν εφαρμόσουμε τώρα την Πρόταση (6.1.14), στις σύντομες ακριβείς ακολουθίες (6.17) για κάθε $j = 1, \dots, n$, τότε οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι $\text{Gpd}_R K_n < \infty$, διότι έχουμε ότι $\text{Gpd}_R M < \infty$. Στην πραγματικότητα, η Πρόταση (6.1.14) μας δίνει ότι το αριστερό R -πρότυπο K_n είναι G -προβολικό, όταν $\text{Gpd}_R M \leq n$ και ότι $\text{Gpd}_R K_n = \text{Gpd}_R M - n$, όταν $\text{Gpd}_R M > n$. Συνεπώς, λόγω της σχέσης (6.16), και του αποτελέσματος ότι $\text{Gpd}_R K_n < \infty$, από την Πρόταση (6.1.12), έπεται ότι το αριστερό R -πρότυπο K_n είναι G -προβολικό.

Άρα, $1 \iff 2 \iff 3 \iff 4 \iff 5$. Για να αποδείξουμε τώρα τον πρώτο τύπο της σχέσης (6.14), θέτουμε

$$\Lambda = \{i \in \mathbb{N}_0 \mid \exists {}_R L \text{ με } \text{pd}_R L < \infty : \text{Ext}_R^i(M, L) \neq 0\}.$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις για το αριστερό R -πρότυπο M , όπου $\text{Gpd}_R M < \infty$:

Αν $M = 0$, ισοδύναμα, $\text{Gpd}_R M = -\infty$, τότε υποχρεωτικά το σύνολο Λ είναι το κενό σύνολο, αφού για κάθε $i \in \mathbb{N}_0$ και για κάθε αριστερό R -πρότυπο L , ισχύει ότι $\text{Ext}_R^i(0, L) = 0$. Συνεπώς, παίρνουμε ότι $\sup \Lambda = \sup \emptyset = -\infty = \text{Gpd}_R M$.

Αν $M \neq 0$, δηλαδή, $0 \leq \text{Gpd}_R M < \infty$, τότε το σύνολο Λ είναι μη κενό. Για να διαπιστώσουμε τον ισχυρισμό αυτό, υποθέτουμε ότι το σύνολο Λ είναι το κενό. Τότε έπεται ότι $\text{Ext}_R^i(M, L) = 0$ για κάθε $i \in \mathbb{N}_0$ και για κάθε αριστερό R -πρότυπο L με πεπερασμένη προβολική διάσταση, (άρα και για κάθε προβολικό αριστερό R -πρότυπο). Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, καθώς και την υπόθεση ότι $\text{Gpd}_R M < \infty$, από την Πρόταση (6.1.12), οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι το μη μηδενικό αριστερό R -πρότυπο M είναι G -προβολικό, με την ιδιότητα $\text{Ext}_R^0(M, L) = 0$ για κάθε αριστερό R -πρότυπο L με πεπερασμένη προβολική διάσταση. Ωστόσο, για κάθε αριστερό R -πρότυπο L , γνωρίζουμε ότι οι αβελιανές ομάδες $\text{Ext}_R^0(M, L)$ και $\text{Hom}_R(M, L)$, είναι ισόμορφες. Έτσι, προκύπτει η ισότητα:

$$\text{Hom}_R(M, L) = 0, \quad \forall {}_R L \text{ με } \text{pd}_R L < \infty. \quad (6.18)$$

Επιπλέον, επειδή το M είναι G -προβολικό, η Πρόταση (5.1.8) μας δίνει μια ακριβή δεξιά R - Proj -ανάλυση του M , έστω

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} Q^0 \xrightarrow{\alpha^0} Q^1 \xrightarrow{\alpha^1} \dots$$

Τότε από τη σχέση (6.18), συμπεραίνουμε ότι ο μονομορφισμός f είναι ο μηδενικός, και κατ'επέκταση ότι $0 = \text{Ker } f = M$. Το αποτέλεσμα όμως αυτό, αντιφάσκει με το γεγονός ότι $M \neq 0$, και άρα καταλήγουμε ότι $\Lambda \neq \emptyset$. Έστω τώρα $\text{Gpd}_R M = m$ για κάποιον φυσικό αριθμό m . Η ισοδυναμία $1 \iff 2$ που αποδείξαμε προηγουμένως για έναν οποιοδήποτε φυσικό αριθμό n , μας εξασφαλίζει ότι:

$$\text{Ext}_R^i(M, L) = 0, \quad \forall i > m \ \& \ \forall {}_R L \text{ με } \text{pd}_R L < \infty.$$

Κάθε λοιπόν φυσικός αριθμός i με την ιδιότητα $i > m$, δεν είναι στοιχείο του συνόλου Λ . Συνεπώς, αν θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε στοιχείο x του Λ , τότε αναγκαστικά ισχύει ότι $x \leq m$, δηλαδή ο φυσικός αριθμός m είναι ένα άνω φράγμα του συνόλου Λ . Είναι γνωστό ότι για ένα οποιοδήποτε μη κενό σύνολο πραγματικών αριθμών A , το οποίο φράσσεται από τα δεξιά, (ισοδύναμα, υπάρχει άνω φράγμα του συνόλου A), υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός l με $\sup A = l$. Έτσι, λόγω των παραπάνω, οδηγούμαστε στην ύπαρξη ενός πραγματικού (για την ακρίβεια, φυσικού) αριθμού l , έτσι ώστε $\sup \Lambda = l$. Από τον ορισμό του supremum ενός συνόλου, το οποίο ορίζεται ως το ελάχιστο άνω φράγμα, έπεται ότι $\sup \Lambda = l \leq m = \text{Gpd}_R M < \infty$. Στην πραγματικότητα, ισχύει η ισότητα, διότι αν υποθέσουμε τη γνήσια ανίσωση $l < m$, και θεωρήσουμε έναν οποιοδήποτε φυσικό αριθμό i με $i > l$, τότε προφανώς ο i δεν είναι στοιχείο του συνόλου Λ . Δηλαδή, δεν υπάρχει κάποιο αριστερό R -πρότυπο L με πεπερασμένη προβολική διάσταση, τέτοιο ώστε $\text{Ext}_R^i(M, L) \neq 0$. Επειδή η επιλογή του φυσικού αριθμού i , όπου $i > l$ ήταν τυχαία, συμπεραίνουμε ότι $\text{Ext}_R^i(M, L) = 0$, για κάθε $i > l$ και για κάθε αριστερό R -πρότυπο L με πεπερασμένη προβολική διάσταση. Από την ισοδυναμία όμως, $1 \Leftrightarrow 2$ για κάθε φυσικό αριθμό n , οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι $m = \text{Gpd}_R M \leq l$, αποτέλεσμα το οποίο αντιτίθεται στην υπόθεση ότι $l < m$.

Οπότε, είτε $M = 0$, είτε $M \neq 0$, ισχύει ότι $\text{Gpd}_R M = \sup \Lambda$, όπως επιθυμούσαμε. Παρόμοια, αποδεικνύεται και ο δεύτερος τύπος της σχέσης (6.14). ■

Ως προφανή συνέπεια του Θεωρήματος (6.1.17), έχουμε ότι :

Πόρισμα 6.1.18. *Αν M είναι ένα οποιοδήποτε μη μηδενικό αριστερό R -πρότυπο και n είναι ένας φυσικός αριθμός τέτοιος ώστε $\text{Gpd}_R M = n$, τότε ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:*

1. $\text{Ext}_R^i(M, L) = 0$, για κάθε $i > n$ και για κάθε αριστερό R -πρότυπο L με πεπερασμένη προβολική διάσταση.
2. $\text{Ext}_R^n(M, L) \neq 0$, για κάποιο αριστερό R -πρότυπο L με πεπερασμένη προβολική διάσταση.

Παρατήρηση 6.1.19. Από το Πόρισμα (6.1.18), είναι φανερό ότι για ένα μη μηδενικό αριστερό R -πρότυπο M με πεπερασμένη G -προβολική διάσταση, η σχέση (6.14) του Θεωρήματος (6.1.17), μπορεί να αντικατασταθεί ως εξής :

$$\begin{aligned} \text{Gpd}_R M &= \max\{i \in \mathbb{N}_0 \mid \exists_R L \text{ με } \text{pd}_R L < \infty : \text{Ext}_R^i(M, L) \neq 0\} \\ &= \max\{i \in \mathbb{N}_0 \mid \exists Q \in R\text{-Proj} : \text{Ext}_R^i(M, Q) \neq 0\}. \end{aligned}$$

Το ακόλουθο θεώρημα είναι η δυϊκή εκδοχή του Θεωρήματος (6.1.17).

Θεώρημα 6.1.20. *Για ένα αριστερό R -πρότυπο M με $\text{Gid}_R M < \infty$, και για έναν φυσικό αριθμό n , οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

1. $\text{Gid}_R M \leq n$.
2. $\text{Ext}_R^i(L, M) = 0$ για κάθε $i > n$, και για κάθε αριστερό R -πρότυπο L με πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση.
3. $\text{Ext}_R^i(I, M) = 0$ για κάθε $i > n$, και για κάθε ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο I .
4. Κάθε n -ιστή $R\text{-Glnj}$ -συνσυσζυγία του M είναι G -ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο.
5. Κάθε n -ιστή $R\text{-Inj}$ -συνσυσζυγία του M είναι G -ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο.

Επιπλέον, η G -ενέσιμη διάσταση του M μπορεί να υπολογιστεί ως εξής :

$$\begin{aligned} \text{Gid}_R M &= \sup\{i \in \mathbb{N}_0 \mid \exists_R L \text{ με } \text{id}_R L < \infty : \text{Ext}_R^i(L, M) \neq 0\} \\ &= \sup\{i \in \mathbb{N}_0 \mid \exists I \in R\text{-Inj} : \text{Ext}_R^i(I, M) \neq 0\}. \end{aligned} \tag{6.19}$$

Απόδειξη. Παρόμοια με την απόδειξη του Θεωρήματος (6.1.17). ■

Τετριμμένα έπεται ότι :

Πόρισμα 6.1.21. Αν M είναι ένα οποιοδήποτε μη μηδενικό αριστερό R -πρότυπο και n είναι ένας φυσικός αριθμός τέτοιος ώστε $\text{Gid}_R M = n$, τότε ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες :

1. $\text{Ext}_R^i(L, M) = 0$, για κάθε $i > n$ και για κάθε αριστερό R -πρότυπο L με πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση.
2. $\text{Ext}_R^n(L, M) \neq 0$, για κάποιο αριστερό R -πρότυπο L με πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση.

Παρατήρηση 6.1.22. Αν θεωρήσουμε ένα μη μηδενικό αριστερό R -πρότυπο M με πεπερασμένη G -ενέσιμη διάσταση, τότε από το Πόρισμα (6.1.21), έπεται ότι η σχέση (6.19) που εμφανίζεται στο Θεώρημα (6.1.20), μπορεί να αντικατασταθεί ως εξής :

$$\begin{aligned} \text{Gid}_R M &= \max\{i \in \mathbb{N}_0 \mid \exists_R L \text{ με } \text{id}_R L < \infty : \text{Ext}_R^i(L, M) \neq 0\} \\ &= \max\{i \in \mathbb{N}_0 \mid \exists I \in R\text{-Inj} : \text{Ext}_R^i(I, M) \neq 0\}. \end{aligned}$$

Χάριν πληρότητας, στο σημείο αυτό, παραθέτουμε τον ορισμό μιας Gorenstein επίπεδης ανάλυσης, εν' συντομία, G -επίπεδης ανάλυσης, ενός R -προτύπου, καθώς και τον ορισμό της Gorenstein επίπεδης διάστασης, εν' συντομία G -επίπεδης διάστασης, ενός R -προτύπου.

Ορισμός 6.1.23. Μια G -επίπεδη ανάλυση (**G-flat resolution**) ενός αριστερού R -προτύπου M , είναι μια ακριβής ακολουθία

$$\cdots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0, \quad (6.20)$$

όπου κάθε F_i για $i = 0, 1, \dots$, είναι G -επίπεδο αριστερό R -πρότυπο. Το μήκος μιας G -επίπεδης ανάλυσης του M , όπως η (6.20), είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός n , τέτοιος ώστε $F_n \neq 0$, και $F_i = 0$ για κάθε $i \geq n + 1$. Αν δεν υπάρχει τέτοιος φυσικός αριθμός n , ορίζουμε το μήκος της, να είναι άπειρο.

Ανάλογα, ορίζεται μια G -επίπεδη ανάλυση ενός δεξιού R -προτύπου.

Στο Κεφάλαιο 5, αναφέραμε ότι κάθε επίπεδο R -πρότυπο είναι επίσης ένα G -επίπεδο R -πρότυπο. Επειδή λοιπόν, για κάθε R -πρότυπο υπάρχει πάντα μια επίπεδη ανάλυση, συμπεραίνουμε ότι για ένα οποιοδήποτε R -πρότυπο υπάρχει πάντα μια G -επίπεδη ανάλυση. Έτσι, χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, φυσιολογικά οδηγούμαστε στον παρακάτω ορισμό :

Ορισμός 6.1.24. Για ένα (αριστερό ή δεξιό) R -πρότυπο M , η G -επίπεδη διάσταση (**G-flat resolution**), $\text{Gfd}_R M$, ορίζεται ως εξής :

1. Αν $M = 0$, τότε $\text{Gfd}_R M = -\infty$.
2. Αν $M \neq 0$ και δεν υπάρχει G -επίπεδη ανάλυση του M πεπερασμένου μήκους, τότε $\text{Gfd}_R M = \infty$.
3. Αν $M \neq 0$ και υπάρχει μια G -επίπεδη ανάλυση του M πεπερασμένου μήκους, τότε $\text{Gfd}_R M$ είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός n ($n \in \mathbb{N}_0$), τέτοιος ώστε να υπάρχει μια G -επίπεδη ανάλυση του M μήκους n .

Ισοδύναμα, αν $M \neq 0$ και $n \in \mathbb{N}_0$, τότε $\text{Gfd}_R M \leq n$, αν και μόνο αν, υπάρχει μια G -επίπεδη ανάλυση του M μήκους n .

Κλείνουμε τη σύντομη αναφορά σε G -επίπεδες διαστάσεις, σημειώνοντας ότι ο συναρτητής $\text{Tor}_i^R(-, -)$ μπορεί να «μετρήσει» τη G -επίπεδη διάσταση ενός αριστερού (δεξιού) R -προτύπου κατά ένα παρόμοιο τρόπο με το πως ο συναρτητής αυτός, «μετρά» τη συνήθη επίπεδη διάσταση ενός αριστερού (δεξιού) R -προτύπου, στην περίπτωση όμως που ο δακτύλιος R είναι δεξιά (αριστερά) συναφής.

6.1.1 Συγκρίνοντας με την προβολική και ενέσιμη διάσταση

Συνεχίζουμε μελετώντας το πόσο διαφέρει η συνήθης προβολική (ενέσιμη) διάσταση, από τη G-προβολική (G-ενέσιμη) διάσταση.

Λήμμα 6.1.25. *Αν M είναι ένα αριστερό R -πρότυπο, τότε το M είναι προβολικό, αν και μόνο αν, $\text{pd}_R M < \infty$ και $\text{Ext}_R^i(M, Q) = 0$ για κάθε $i > 0$ και για κάθε προβολικό αριστερό R -πρότυπο Q .*

Απόδειξη. Έστω M ένα αριστερό R -πρότυπο. Υποθέτουμε αρχικά, ότι το πρότυπο M είναι προβολικό. Τότε προφανώς $\text{pd}_R M = 0 < \infty$, και $\text{Ext}_R^i(M, -) = 0$ για κάθε $i \geq 0$. Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι $\text{pd}_R M < \infty$ και $\text{Ext}_R^i(M, Q) = 0$ για κάθε $i > 0$ και για κάθε προβολικό αριστερό R -πρότυπο Q . Θέλουμε να δείξουμε ότι το πρότυπο M είναι προβολικό. Αν $M = 0$, τότε τετριμμένα ικανοποιείται η υπόθεση, και το μηδενικό πρότυπο M είναι φυσικά προβολικό, όπως ζητούσαμε. Έστω λοιπόν, $M \neq 0$. Επειδή $\text{pd}_R M < \infty$, υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός n , και μια ακριβής ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0, \quad (6.21)$$

όπου κάθε P_i , για $i = 0, \dots, n$, είναι προβολικό. «Σπάμε» την ακριβή ακολουθία (6.21), σε σύντομες ακριβείς ακολουθίες για κάθε $j = 1, \dots, n$:

$$0 \longrightarrow K_j \longrightarrow P_{j-1} \longrightarrow K_{j-1} \longrightarrow 0, \quad (6.22)$$

όπου $K_0 = M$ και $K_n = P_n$. Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε με χρήση φθίνουσας επαγωγής στο $j \in \{0, \dots, n\}$, ότι το αριστερό R -πρότυπο K_j είναι προβολικό. Κατά αυτόν το τρόπο, η απόδειξη της πρότασης αυτής θα έχει ολοκληρωθεί, αφού ιδιαίτερα θα έχουμε ότι το πρότυπο $K_0 = M$ είναι προβολικό. Για $j = n$, το πρότυπο $K_n = P_n$ είναι προβολικό. Υποθέτουμε τώρα ότι $j > 0$, και ότι K_j είναι προβολικό. Θεωρώντας την ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow K_{j-1} \longrightarrow P_{j-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0, \quad (6.23)$$

και εφαρμόζοντας στην ακολουθία (6.23), το Dimension Shifting για προβολικές αναλύσεις, παίρνουμε ότι $\text{Ext}_R^1(K_{j-1}, -) \cong \text{Ext}_R^j(M, -)$. Το αποτέλεσμα αυτό, και η υπόθεση μας δίνουν ότι $\text{Ext}_R^1(K_{j-1}, K_j) \cong \text{Ext}_R^j(M, K_j) = 0$, διότι το αριστερό R -πρότυπο K_j είναι προβολικό. Συνεπώς, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η σύντομη ακριβής ακολουθία (6.22) είναι διασπάσιμη, και κατ' επέκταση ότι το αριστερό R -πρότυπο K_{j-1} είναι ευθύς προσθετός του προβολικού αριστερού R -προτύπου P_{n-1} . Άρα, αφού η κλάση των προβολικών αριστερών R -προτύπων είναι κλειστή σε ευθείς προσθετούς, έχουμε ότι το K_{j-1} είναι προβολικό, όπως επιθυμούσαμε. ■

Δυϊκά,

Λήμμα 6.1.26. *Αν M είναι ένα αριστερό R -πρότυπο, τότε το M είναι ενέσιμο, αν και μόνο αν, $\text{id}_R M < \infty$ και $\text{Ext}_R^i(I, M) = 0$ για κάθε $i > 0$ και για κάθε ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο I .*

Απόδειξη. Ομοίως, με την απόδειξη του Λήμματος (6.1.25). ■

Από την Παρατήρηση (6.1.6), γνωρίζουμε ότι για κάθε αριστερό R -πρότυπο M , ισχύει ότι $\text{Gpd}_R M \leq \text{pd}_R M$ και ότι $\text{Gid}_R M \leq \text{id}_R M$. Ευθύς αμέσως, διατυπώνουμε ικανές συνθήκες, οι οποίες μας εξασφαλίζουν ότι η G-προβολική και η G-ενέσιμη διάσταση του M , είναι ίση με την προβολική, και αντίστοιχα ενέσιμη, διάσταση του M , όταν το αριστερό R -πρότυπο M είναι μη μηδενικό.

Θεώρημα 6.1.27. *Αν M είναι ένα μη μηδενικό αριστερό R -πρότυπο με πεπερασμένη προβολική διάσταση, τότε $\text{Gpd}_R M = \text{pd}_R M$. Συνεπώς, αν συμβολίσουμε με $R\text{-Proj}^{<\infty}$, την κλάση όλων των αριστερών R -προτύπων με πεπερασμένη προβολική διάσταση, τότε ισχύει η ισότητα*

$$R\text{-GProj} \cap R\text{-Proj}^{<\infty} = R\text{-Proj}$$

Απόδειξη. Έστω M ένα μη μηδενικό αριστερό R -πρότυπο με πεπερασμένη προβολική διάσταση. Ορίζοντας $\text{Gpd}_R M = n$, η Παρατήρηση (6.1.6) και η υπόθεση, μας δίνει ότι $n \leq \text{pd}_R M < \infty$. Στη συνέχεια, διαλέγουμε μια ακριβή ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα

$$0 \longrightarrow K_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0, \quad (6.24)$$

όπου κάθε P_i για $i = 0, \dots, n-1$, είναι προβολικό. Η ισοδυναμία $1 \Leftrightarrow 5$ του Θεωρήματος (6.1.17), μας εξασφαλίζει ότι το αριστερό R -πρότυπο K_n είναι G -προβολικό. Επομένως, παίρνουμε ότι $\text{Ext}_R^i(K_n, Q) = 0$ για κάθε $i > 0$ και για κάθε προβολικό αριστερό R -πρότυπο Q . Η υπόθεση τώρα ότι $\text{pd}_R M < \infty$, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $\text{pd}_R K_n < \infty$. Συνεπώς, από το Λήμμα (6.1.25), συμπεραίνουμε ότι το G -προβολικό αριστερό R -πρότυπο K_n , είναι στην πραγματικότητα, προβολικό. Άρα, η ακριβής ακολουθία (6.24) είναι μια προβολική ανάλυση του M πεπερασμένου μήκους n . Έτσι τελικά, έχουμε ότι $\text{pd}_R M \leq n$, όπως επιθυμούσαμε.

Τέλος, η ισότητα $R\text{-GProj} \cap R\text{-Proj}^{<\infty} = R\text{-Proj}$, είναι άμεση συνέπεια της παραπάνω ανάλυσης και του γεγονότος ότι κάθε προβολικό R -πρότυπο είναι G -προβολικό. ■

Θεώρημα 6.1.28. *Αν M είναι ένα μη μηδενικό αριστερό R -πρότυπο με πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση, τότε $\text{Gid}_R M = \text{id}_R M$. Συνεπώς, αν συμβολίσουμε με $R\text{-Inj}^{<\infty}$, την κλάση όλων των αριστερών R -προτύπων με πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση, τότε ισχύει η ισότητα*

$$R\text{-GInj} \cap R\text{-Inj}^{<\infty} = R\text{-Inj}.$$

Απόδειξη. Κατά δυϊκό τρόπο με την απόδειξη του Θεωρήματος (6.1.27). ■

6.1.2 G -προβολικές και G -ενέσιμες προσεγγίσεις προτύπων

Ολοκληρώνουμε την παρούσα ενότητα αποδεικνύοντας ότι για ένα οποιοδήποτε αριστερό R -πρότυπο με πεπερασμένη G -προβολική διάσταση, υπάρχει πάντα μια δεξιά G -προβολική προσέγγιση, δηλαδή μια δεξιά $R\text{-GProj}$ -προσέγγιση, και ότι για ένα τυχαίο αριστερό R -πρότυπο με πεπερασμένη G -ενέσιμη διάσταση, υπάρχει πάντα μια αριστερή G -ενέσιμη προσέγγιση, δηλαδή μια αριστερή $R\text{-GInj}$ -προσέγγιση.

Πρόταση 6.1.29. *Έστω M ένα αριστερό R -πρότυπο με $n = \text{Gpd}_R M < \infty$. Τότε το M δέχεται μια δεξιά G -προβολική προσέγγιση $\phi: G \longrightarrow M$ η οποία είναι επιμορφισμός, έτσι ώστε αν $K = \text{Ker } \phi$, τότε $K = 0$ όταν το M είναι G -προβολικό, και $\text{pd}_R K = \text{Gpd}_R K = n - 1$, όταν το M δεν είναι G -προβολικό. Επιπλέον, αν $M \neq 0$, τότε το πρότυπο M δέχεται μια (ακριβή) αριστερή $R\text{-GProj}$ -ανάλυση πεπερασμένου μήκους n .*

Απόδειξη. Αν το αριστερό R -πρότυπο M είναι G -προβολικό, τότε ο ισομορφισμός $\text{Id}_M: M \longrightarrow M$ είναι προφανώς μια δεξιά G -προβολική προσέγγιση του M , με πυρήνα $\text{Ker } \text{Id}_M = 0$.

Υποθέτουμε τώρα ότι το M δεν είναι G -προβολικό. Δηλαδή, $M \neq 0$ και $0 < n = \text{Gpd}_R M < \infty$. Προκειμένου να αποδείξουμε το πρώτο σκέλος της πρότασης αυτής, αρκεί να κατασκευάσουμε μια δεξιά G -προβολική προσέγγιση $\phi: G \longrightarrow M$, η οποία είναι επιμορφισμός, τέτοια ώστε ο πυρήνας $K = \text{Ker } \phi$ να ικανοποιεί τη σχέση $\text{pd}_R K \leq n - 1$, διότι εφαρμόζοντας τότε την Πρόταση (6.1.14), στην σύντομη ακριβή ακολουθία $0 \longrightarrow K \longrightarrow G \longrightarrow M \longrightarrow 0$, παίρνουμε την αντίστροφη ανίσωση $n - 1 = \text{Gpd}_R K \leq \text{pd}_R K$. Διαλέγουμε μια ακριβή ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα

$$0 \longrightarrow K' \xrightarrow{i} P_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0,$$

όπου P_0, \dots, P_{n-1} είναι προβολικά. Τότε η ισοδυναμία $1 \Leftrightarrow 5$ του Θεωρήματος (6.1.17), μας δίνει ότι το αριστερό R -πρότυπο K' είναι G -προβολικό. Εξ ορισμού λοιπόν, υπάρχει μια πλήρης προβολική ανάλυση

$$\mathfrak{R}: \quad \cdots \longrightarrow P'_2 \xrightarrow{\delta_2} P'_1 \xrightarrow{\delta_1} P'_0 \xrightarrow{\delta_0} Q^0 \xrightarrow{\beta^0} Q^1 \xrightarrow{\beta^1} Q^2 \xrightarrow{\beta^2} \cdots,$$

τέτοια ώστε $K' \cong \text{Ker } \beta^0 = \text{Im } \delta_0$. Θεωρώντας την επαγόμενη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow K' \xrightarrow{i'} Q^0 \xrightarrow{\beta^0} Q^1 \xrightarrow{\beta^1} Q^2 \xrightarrow{\beta^2} \dots, \quad (6.25)$$

έχουμε ότι η ακριβής ακολουθία (6.25), είναι μια δεξιά R -Proj-ανάλυση του K' , αφού το σύμπλοκο αβελιανών ομάδων $\text{Hom}_R(\mathfrak{R}, Q)$ είναι ακριβές για κάθε προβολικό αριστερό R -πρότυπο Q , και ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής $\text{Hom}_R(-, Q)$ είναι αριστερά ακριβής για ένα οποιοδήποτε αριστερό R -πρότυπο Q . Επιπλέον, θέτοντας $G = \text{Im } \beta_{n-1}$, από την Παρατήρηση (5.1.3) έπεται ότι το αριστερό R -πρότυπο G είναι G -προβολικό. Αν θεωρήσουμε τώρα τον ταυτοτικό (ομομορφισμό) $\text{Id}_{K'}: K' \longrightarrow K'$, τότε χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση (4.1.31), οδηγούμαστε στην ύπαρξη ομομορφισμών αριστερών R -προτύπων $f_i: Q^i \longrightarrow P_{n-1-i}$ για $i = 0, \dots, n-1$, τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 0 & \longrightarrow & K' & \xrightarrow{i'} & Q^0 & \xrightarrow{\beta^0} & Q^1 & \xrightarrow{\beta^1} & \dots & \xrightarrow{\beta^{n-3}} & Q^{n-2} & \xrightarrow{\beta^{n-2}} & Q^{n-1} \\ & & \downarrow \text{Id}_{K'} & & \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 & & & & \downarrow f_{n-2} & & \downarrow f_{n-1} \\ 0 & \longrightarrow & K' & \xrightarrow{i} & P_{n-1} & \xrightarrow{\alpha_{n-1}} & P_{n-2} & \xrightarrow{\alpha_{n-1}} & \dots & \xrightarrow{\alpha_2} & P_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & P_0 \end{array}$$

Έστω $j: G \longrightarrow Q^n$, η κανονική έγκλειση και $\bar{\beta}^{n-1}: Q^{n-1} \longrightarrow G$, ο επιμορφισμός αριστερών R -προτύπων με την ιδιότητα $j \circ \bar{\beta}^{n-1} = \beta^{n-1}$. Ορίζουμε

$$g: G \longrightarrow M, \quad x \longmapsto g(x) = (\alpha_0 \circ f_{n-1})(q),$$

όπου $x = \bar{\beta}^{n-1}(q)$. Εύκολα βλέπουμε ότι η απεικόνιση g είναι ένας καλά ορισμένος ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων, και ότι το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 0 & \longrightarrow & K' & \xrightarrow{i'} & Q^0 & \xrightarrow{\beta^0} & Q^1 & \xrightarrow{\beta^1} & \dots & \xrightarrow{\beta^{n-2}} & Q^{n-1} & \xrightarrow{\bar{\beta}^{n-1}} & G & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \text{Id}_{K'} & & \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 & & & & \downarrow f_{n-1} & & \downarrow g \\ 0 & \longrightarrow & K' & \xrightarrow{i} & P_{n-1} & \xrightarrow{\alpha_{n-1}} & P_{n-2} & \xrightarrow{\alpha_{n-1}} & \dots & \xrightarrow{\alpha_1} & P_0 & \xrightarrow{\alpha_0} & M & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (6.26)$$

είναι μεταθετικό. Μάλιστα, ο ομομορφισμός g είναι ο μοναδικός ομομορφισμός έτσι ώστε το διάγραμμα (6.26) να είναι μεταθετικό. Θεωρώντας το διάγραμμα (6.26) ως έναν μορφισμό ανάμεσα σε ακριβή σύμπλοκα, και χρησιμοποιώντας την Πρόταση (3.1.21), συμπεραίνουμε ότι η επαγόμενη κωνική απεικόνιση

$$\mathcal{M}: \quad 0 \longrightarrow K' \xrightarrow{\mu_{n+1}} K' \oplus Q^0 \xrightarrow{\mu_n} P_{n-1} \oplus Q^1 \xrightarrow{\mu_{n-1}} \dots \xrightarrow{\mu_1} P_0 \oplus G \xrightarrow{\mu_0} M \longrightarrow 0,$$

είναι ακριβής. Στη συνέχεια, ορίζουμε ομομορφισμό αριστερών R -προτύπων

$$\rho: Q^0 \longrightarrow P_{n-1} \oplus Q^1,$$

θέτοντας $\rho(x) = \mu_n(0, x)$ για κάθε $x \in Q^0$, και θεωρούμε την ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα:

$$\mathcal{J}: \quad 0 \longrightarrow Q^0 \xrightarrow{\rho} P_{n-1} \oplus Q^1 \xrightarrow{\mu_{n-1}} \dots \xrightarrow{\mu_1} P_0 \oplus G \xrightarrow{\mu_0} M \longrightarrow 0.$$

Τότε η ακολουθία \mathcal{J} είναι προφανώς ένα σύμπλοκο στην κατηγορία $R\text{-Mod}$ των αριστερών R -προτύπων, διότι η επαγόμενη κωνική απεικόνιση \mathcal{M} είναι ακριβής, και $\mu_{n-1} \circ \rho = 0$. Αν θέσουμε με \mathcal{N} , το ακριβές σύμπλοκο $0 \longrightarrow K' \xrightarrow{=} K' \longrightarrow 0$, τότε είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η ακολουθία συμπλόκων

$$0 \longrightarrow \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow 0, \quad (6.27)$$

είναι ακριβής, δηλαδή, ότι το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό με ακριβείς γραμμές και στήλες:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & K' & \xlongequal{\quad} & K' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow^{\mu_{n+1}} & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & Q^0 & \longrightarrow & K' \oplus Q^0 & \longrightarrow & K' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow^{\rho} & & \downarrow^{\mu_n} & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & P_{n-1} \oplus Q^1 & \xlongequal{\quad} & P_{n-1} \oplus Q^1 & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow^{\mu_{n-1}} & & \downarrow^{\mu_{n-1}} & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow^{\mu_1} & & \downarrow^{\mu_1} & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & P_0 \oplus G & \xlongequal{\quad} & P_0 \oplus G & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow^{\mu_0} & & \downarrow^{\mu_0} & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & M & \xlongequal{\quad} & M & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Έτσι, επειδή τα σύμπλοκα \mathcal{M} και \mathcal{N} που εμφανίζονται στη σύντομη ακριβή ακολουθία (6.27) είναι ακριβή, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι το σύμπλοκο αριστερών R -προτύπων \mathcal{J} , είναι επίσης ακριβές. Παρατηρούμε ότι το αριστερό R -πρότυπο $P_0 \oplus G$ είναι G -προβολικό, ως ευθύ άθροισμα των G -προβολικών R -προτύπων P_0 και G , καθώς και ότι ο πυρήνας $K = \text{Ker } \mu_0$ ικανοποιεί την ανίσωση $\text{pd}_R K \leq n - 1$, διότι η ακολουθία

$$0 \longrightarrow Q^0 \longrightarrow P_{n-1} \oplus Q^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \oplus Q^{n-1} \longrightarrow K \longrightarrow 0,$$

είναι μια προβολική ανάλυση του K πεπερασμένου μήκους $n - 1$. Χρησιμοποιώντας λοιπόν το γεγονός ότι $\text{pd}_R K < \infty$, και το Λήμμα (5.1.6), παίρνουμε την ισότητα $\text{Ext}_R^1(G', K) = 0$ για κάθε G -προβολικό αριστερό R -πρότυπο G' . Επομένως, αν θεωρήσουμε τη σύντομη ακριβή ακολουθία $0 \longrightarrow K \longrightarrow P_0 \oplus G \xrightarrow{\mu_0} M \longrightarrow 0$, τότε καταλήγουμε στο ζητούμενο συμπέρασμα ότι ο επιμορφισμός μ_0 είναι μια δεξιά G -προβολική προσέγγιση του M . Τέλος, το δεύτερο σκέλος της πρότασης αυτής, προκύπτει επαγωγικά, χρησιμοποιώντας το πρώτο σκέλος που αποδείξαμε προηγουμένως n -φορές. ■

Πρόταση 6.1.30. Έστω M ένα αριστερό R -πρότυπο με $n = \text{Gid}_R M < \infty$. Τότε το M δέχεται μια αριστερή G -ενέσιμη προσέγγιση $\psi: M \longrightarrow H$, η οποία είναι μονομορφισμός, έτσι ώστε αν $C = \text{Coker } \psi$, τότε $C = 0$ όταν το πρότυπο M είναι G -ενέσιμο, και $\text{id}_R C = \text{Gid}_R C = n - 1$ όταν το M δεν είναι G -ενέσιμο. Επιπρόσθετα, αν $M \neq 0$, τότε το πρότυπο M δέχεται μια (ακριβή) δεξιά R - Glnj -ανάλυση πεπερασμένου μήκους n .

Απόδειξη. Κατά δυϊκό τρόπο με την απόδειξη της Πρότασης (6.1.29). ■

6.2 Πότε Τα G-Προβολικά Ταυτίζονται Με Τα G-Ενέσιμα Πρότυπα ;

Ένα R -πρότυπο M καλείται *ημιαπλό*, (*semisimple module*), αν το M συμπίπτει με το ευθύ άθροισμα απλών υποπροτύπων του. Ανάλογα ένας δακτύλιος R καλείται *ημιαπλός*, (*semisimple ring*), αν είναι ημιαπλό ως R -πρότυπο. Είναι γνωστό ότι οι κλάσεις των προβολικών και των ενέσιμων R -προτύπων ταυτίζονται, όταν ο δακτύλιος R είναι ημιαπλός. Μάλιστα, ένας ημιαπλός δακτύλιος χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι κάθε πρότυπο υπεράνω αυτού, είναι προβολικό και ενέσιμο, δες [16]. Ανακύπτουν λοιπόν τα ερωτήματα :

- Υπάρχουν δακτύλιοι υπεράνω των οποίων, οι κλάσεις των G-προβολικών και των G-ενέσιμων προτύπων, ταυτίζονται ;
- Υπάρχουν δακτύλιοι υπεράνω των οποίων, κάθε πρότυπο είναι G-προβολικό και G-ενέσιμο ;

Σκοπός της παρούσας ενότητας, είναι η απόδειξη της ύπαρξης ενός δακτυλίου υπεράνω του οποίου οι κλάσεις των G-προβολικών και G-ενέσιμων προτύπων να συμπίπτουν. Βοηθητικό εργαλείο στην απόδειξη αυτή, είναι η μελέτη προτύπων με πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση.

Υπενθυμίζουμε ότι με R , συμβολίζουμε ένα προσεταιριστικό δακτύλιο με μονάδα.

6.2.1 Δακτύλιοι με πεπερασμένη G-ενέσιμη διάσταση

Στο κεφάλαιο 8 της παρούσας διατριβής, θα ασχοληθούμε με δακτυλίους Gorenstein. Ένας δακτύλιος Gorenstein ορίζεται ως ένας αριστερός και δεξιός δακτύλιος της Noether, ο οποίος έχει πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση, όταν ιδωθεί ως αριστερό ή ως δεξιό πρότυπο υπεράνω του εαυτού του. Θα μπορούσαμε λοιπόν να πούμε, ότι η ενέσιμη διάσταση ενός δακτυλίου καθορίζει το αν ο δακτύλιος αυτός, είναι δακτύλιος Gorenstein. Έτσι γεννάται το ερώτημα τι πληροφορίες μπορούμε να αντλήσουμε για έναν δακτύλιο, όταν γνωρίζουμε τη G-ενέσιμη διάσταση αυτού. Στόχος μας τώρα, είναι να αποδείξουμε ότι κάθε προσεταιριστικός δακτύλιος με μονάδα, ο οποίος έχει πεπερασμένη G-ενέσιμη διάσταση, έχει επίσης πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση.

Θεώρημα 6.2.1. *Αν M είναι ένα μη μηδενικό αριστερό ή δεξιό R -πρότυπο με πεπερασμένη προβολική διάσταση, τότε $\text{Gid}_R M = \text{id}_R M$.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε τη ζητούμενη ισότητα στην περίπτωση που το M είναι ένα αριστερό R -πρότυπο. Συμμετρικά θα προκύψει η ισότητα αν θεωρήσουμε το M ως δεξιό R -πρότυπο. Θεωρούμε λοιπόν, ένα μη μηδενικό αριστερό R -πρότυπο M με πεπερασμένη προβολική διάσταση. Η Παρατήρηση (6.1.6), μας δίνει ότι $\text{Gid}_R M \leq \text{id}_R M$. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε την αντίστροφη ανίσωση, $\text{id}_R M \leq \text{Gid}_R M$, και έτσι η απόδειξη του θεωρήματος αυτού θα έχει ολοκληρωθεί. Αν $\text{Gid}_R M = \infty$, τότε προφανώς $\text{id}_R M \leq \infty$. Έστω τώρα, $0 \leq \text{Gid}_R M < \infty$. Υποθέτουμε αρχικά, ότι το μη μηδενικό αριστερό R -πρότυπο M είναι G-ενέσιμο. Ισοδύναμα, ότι $\text{Gid}_R M = 0$. Τότε από την Παρατήρηση (5.2.2), υπάρχει μια σύντομη ακριβής ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0 \quad (6.28)$$

όπου E είναι ενέσιμο και M' είναι G-ενέσιμο. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι $\text{pd}_R M < \infty$, καθώς και το Λήμμα (5.2.5), οδηγούμαστε στην ισότητα $\text{Ext}_R^1(M, M') = 0$, διότι το M' είναι G-ενέσιμο. Συνεπώς, η σύντομη ακριβής ακολουθία (6.28) είναι διασπάλσιμη, και άρα, έπεται ότι το M είναι ευθύς προσθετός του ενέσιμου αριστερού R -προτύπου E . Έτσι, αφού η κλάση των ενέσιμων αριστερών R -προτύπων είναι κλειστή σε ευθείς προσθετέους, παίρνουμε ότι το M είναι ενέσιμο, ισοδύναμα, ότι $\text{id}_R M = 0$.

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι το μη μηδενικό αριστερό R -πρότυπο M δεν είναι G-ενέσιμο. Δηλαδή ότι $0 < \text{Gid}_R M < \infty$. Από την Πρόταση (6.1.30), υπάρχει μια σύντομη ακριβής ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\phi} H \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

όπου H είναι G -ενέσιμο και $\text{id}_R C = \text{Gid}_R M - 1$. Επειδή το αριστερό R -πρότυπο H είναι G -ενέσιμο, η Παρατήρηση (5.2.2), μας δίνει μια σύντομη ακριβή ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα

$$0 \longrightarrow H' \longrightarrow I \xrightarrow{\kappa} H \longrightarrow 0$$

όπου I είναι ενέσιμο και H' είναι G -ενέσιμο. Θεωρούμε το pullback P του διαγράμματος:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{u} & M \\ \downarrow v & & \downarrow \phi \\ I & \xrightarrow{\kappa} & H \end{array}$$

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση (1.2.56), οδηγούμαστε στην ύπαρξη μοναδικών ομομορφισμών αριστερών R -προτύπων $f: H' \rightarrow P$ και $g: I \rightarrow C$, οι οποίοι συνθέτουν το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές και στήλες:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & 0 & & 0 & & & (6.29) \\ & & & \downarrow & & \downarrow & & & \\ 0 & \longrightarrow & H' & \xrightarrow{f} & P & \xrightarrow{u} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow v & & \downarrow \phi & & \\ 0 & \longrightarrow & H' & \longrightarrow & I & \xrightarrow{\kappa} & H & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow g & & \downarrow & & \\ & & & & C & \xlongequal{\quad} & C & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Έστω τώρα $\text{Gid}_R M = m > 0$. Τότε λόγω της σχέσης $\text{id}_R C = \text{Gid}_R M - 1$, συμπεραίνουμε την ύπαρξη μιας ενέσιμης ανάλυσης του C πεπερασμένου μήκους $m - 1$, έστω:

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow E^0 \longrightarrow \dots \longrightarrow E^{m-1} \longrightarrow 0$$

Η συγκόλληση της παραπάνω ακριβής ακολουθία, με τη σύντομη ακριβή ακολουθία $0 \rightarrow P \rightarrow I \rightarrow C \rightarrow 0$, είναι η ακριβής ακολουθία:

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow I \longrightarrow E^0 \longrightarrow \dots \longrightarrow E^{m-1} \longrightarrow 0 \quad (6.30)$$

Αφού το πρότυπο I είναι ενέσιμο, έπεται ότι η ακολουθία (6.30) είναι μια ενέσιμη ανάλυση του P μήκους m . Συνεπώς, έχουμε ότι $\text{id}_R P \leq m = \text{Gid}_R M$. Για να αποδείξουμε λοιπόν, τη ζητούμενη ανίσωση $\text{id}_R M \leq \text{Gid}_R M$, αρκεί να δείξουμε ότι $\text{id}_R M \leq \text{id}_R P$. Επειδή τώρα το H' είναι G -ενέσιμο, και η προβολική διάσταση του M είναι πεπερασμένη, από το Λήμμα (5.2.5), παίρνουμε ιδιαίτερα ότι $\text{Ext}_R^1(M, H') = 0$. Το αποτέλεσμα όμως αυτό, μας εξασφαλίζει ότι η πρώτη γραμμή του διαγράμματος (6.29), είναι μια διασπασίμη σύντομη ακριβής ακολουθία, ή ισοδύναμα, ότι $P \cong H \oplus M$. Επομένως, καταλήγουμε στο επιθυμητό συμπέρασμα ότι $\text{id}_R M \leq \text{id}_R P$, διότι το M είναι ευθύς προσθετός του P . ■

Πόρισμα 6.2.2. *Αν η G -ενέσιμη ανάλυση του δακτυλίου R είναι πεπερασμένη, τότε η ενέσιμη διάσταση του δακτυλίου R είναι επίσης πεπερασμένη.*

Απόδειξη. Αν θεωρήσουμε το δακτύλιο R ως αριστερό R -πρότυπο, τότε προφανώς έχουμε ότι ο δακτύλιος R είναι ένα προβολικό αριστερό R -πρότυπο, ή ισοδύναμα, ότι $\text{pd}_R R = 0$. Συνεπώς, η υπόθεση ότι $\text{Gid}_R R < \infty$, και το Θεώρημα (6.2.1), μας δίνουν ότι $\text{Gid}_R R = \text{id}_R R < \infty$. Ανάλογα,

Θεωρώντας το δακτύλιο R ως δεξιό R -πρότυπο, παίρνουμε ότι ο δακτύλιος R είναι ένα προβολικό δεξιό R -πρότυπο, ή ισοδύναμα, ότι $\text{pd}_R R_R = 0$. Επομένως, χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι $\text{Gid } R_R < \infty$ και το Θεώρημα (6.2.1), αυτή τη φορά για δεξιά R -πρότυπα, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι $\text{Gid } R_R = \text{id } R_R < \infty$, όπως επιθυμούσαμε. ■

Το ακόλουθο θεώρημα είναι η δυϊκή εκδοχή του Θεωρήματος (6.2.1).

Θεώρημα 6.2.3. *Αν M είναι ένα μη μηδενικό αριστερό ή δεξιό R -πρότυπο με πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση, τότε $\text{Gpd}_R M = \text{pd}_R M$.*

Απόδειξη. Ομοίως με την απόδειξη του Θεωρήματος (6.2.1). ■

6.2.2 Δακτύλιοι Quasi-Frobenius, G-προβολικά και G-ενέσιμα πρότυπα

Ολοκληρώνουμε την ενότητα αυτή, αποδεικνύοντας ότι ένας δακτύλιος quasi-Frobenius, χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι οι κλάσεις των G-προβολικών και των G-ενέσιμων R -προτύπων συμπίπτουν. Έτσι, η προσοχή μας αρχικά στρέφεται, στον ορισμό και στη μελέτη δακτυλίων quasi-Frobenius. Σημειώνουμε ότι οι δακτύλιοι quasi-Frobenius εισήχθηκαν από τον T. Nakayama το 1939.

Ορισμός 6.2.4. (Nakayama) *Ένας δακτύλιος R καλείται δακτύλιος quasi-Frobenius (QF), όταν ο R είναι (αριστερός και δεξιός) δακτύλιος της Noether, και όταν ο R ιδωθεί είτε ως αριστερό είτε ως δεξιό R -πρότυπο, είναι ενέσιμο.*

Σημειώνουμε ότι πολλές φορές στη βιβλιογραφία, ένας δακτύλιος quasi-Frobenius μπορεί να ορίζεται με έναν διαφορετικό τρόπο από αυτόν, του ορισμού (6.2.4). Παραδείγματος χάριν, ένας δακτύλιος quasi-Frobenius μπορεί να εμφανίζεται ως ένας αριστερός δακτύλιος της Noether, όπου όταν ιδωθεί ως δεξιό πρότυπο υπεράνω του εαυτού του, είναι ενέσιμο. Ωστόσο, όλοι οι ορισμοί που συναντάμε στη βιβλιογραφία για δακτυλίους quasi-Frobenius, είναι φυσικά ισοδύναμοι μεταξύ τους, όπως προκύπτει από το ακόλουθο βασικό Θεώρημα.

Θεώρημα 6.2.5. *Για έναν προσεταιριστικό δακτύλιο με μονάδα R , οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

1. *Ο R είναι δακτύλιος quasi-Frobenius (QF).*
2. *Ο R είναι αριστερός ή δεξιός δακτύλιος του Artin, και όταν ιδωθεί ως αριστερό ή ως δεξιό R -πρότυπο είναι ενέσιμο.*
3. *Ο R είναι αριστερός ή δεξιός δακτύλιος της Noether, και όταν ιδωθεί ως αριστερό ή ως δεξιό R -πρότυπο είναι ενέσιμο.*
4. *Ο R ικανοποιεί την αύξουσα συνθήκη αθυσίδας για αριστερούς ή δεξιούς μηδενιστές (annihilators), και όταν ιδωθεί ως αριστερό ή ως δεξιό R -πρότυπο είναι ενέσιμο.*
5. *Ο R είναι δεξιός και αριστερός δακτύλιος της Noether, $rl(T) = T$ για κάθε δεξιό ιδεώδες T , και $lr(L) = L$ για κάθε αριστερό ιδεώδες L .*

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [46, Theorem 1.50] ■

Το ακόλουθο αποτέλεσμα, το οποίο οφείλεται στους Faith και Walker, μας εξασφαλίζει ότι κάθε πρότυπο υπεράνω ενός δακτυλίου quasi-Frobenius, είναι υποπρότυπο κάποιου προβολικού προτύπου.

Θεώρημα 6.2.6. (Faith-Walker) *Ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος quasi-Frobenius, αν και μόνο αν, κάθε ενέσιμο δεξιό (αριστερό) R -πρότυπο είναι προβολικό.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [31, Theorem 2.4.12] ■

Αναλυτικότερα οι Faith-Walker απέδειξαν το ακόλουθο θεμελιώδες αποτέλεσμα, άμεση συνέπεια του οποίου είναι ότι κάθε πρότυπο υπεράνω ενός δακτυλίου quasi-Frobenius, είναι ομομορφική εικόνα ενός ενέσιμου προτύπου.

Θεώρημα 6.2.7. *Οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες για έναν δακτύλιο R :*

1. *Ο R είναι δακτύλιος quasi-Frobenius (QF).*
2. *Κάθε ενέσιμο δεξιό (αριστερό) R -πρότυπο είναι προβολικό.*
3. *Κάθε προβολικό δεξιό (αριστερό) R -πρότυπο είναι ενέσιμο.*
4. *Ο R ικανοποιεί την αύξουσα συνθήκη αλυσίδας για δεξιούς μηδενιστές, και όταν ιδωθεί ως δεξιό R -πρότυπο είναι ενέσιμο.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [31, Theorem 2.4.20] ■

Είμαστε σε θέση τώρα, να παραθέσουμε παραδείγματα δακτυλίων quasi-Frobenius.

Παράδειγμα 6.2.8. 1. Κάθε ημιαπλός δακτύλιος είναι προφανώς, δακτύλιος quasi-Frobenius.

Πράγματι αυτό προκύπτει από το Θεώρημα των Faith-Walker, διότι κάθε πρότυπο υπεράνω ενός ημιαπλού δακτυλίου είναι προβολικό και ενέσιμο.

2. Έστω R μια (μεταθετική) περιοχή κυρίων ιδεώδων, για παράδειγμα $R = \mathbb{Z}$ ή $R = k[x]$, όπου k είναι ένα σώμα. Αν I είναι ένα μη-μηδενικό ιδεώδες του R , τότε ο δακτύλιος πηλίκου R/I είναι δακτύλιος quasi-Frobenius. Αυτό προκύπτει διότι κάθε περιοχή κυρίων ιδεώδων R είναι δακτύλιος της Noether, άρα και ο δακτύλιος R/I είναι δακτύλιος της Noether, και επιπρόσθετα το R/I -πρότυπο R/I είναι ενέσιμο, βλέπε [44].

3. Έστω k ένα σώμα και G μια πεπερασμένη ομάδα. Τότε η ομάδα-άλγεβρα kG είναι δακτύλιος quasi-Frobenius, βλέπε [44].

Τονίζουμε ότι η αντίστροφη κατεύθυνση στο μέρος 1. του Παραδείγματος (6.2.8), δεν ισχύει εν γένει. Δηλαδή, ένας δακτύλιος quasi-Frobenius δεν είναι απαραίτητα, ημιαπλός. Για παράδειγμα σύμφωνα με το 2. του Παραδείγματος (6.2.8), ο δακτύλιος $\mathbb{Z}_4 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ είναι δακτύλιος quasi-Frobenius, αλλά δεν είναι ημιαπλός διότι το \mathbb{Z}_4 -πρότυπο \mathbb{Z}_2 δεν είναι προβολικό (ακριβέστερα έχει άπειρη προβολική διάσταση). Σημειώνουμε ότι η ομάδα-άλγεβρα kG μιας πεπερασμένης ομάδας G είναι σύμφωνα με το 3. του Παραδείγματος (6.2.8) δακτύλιος quasi-Frobenius, αλλά όπως προκύπτει από το Θεώρημα του Maschke, βλέπε [44], η kG είναι ημιαπλός δακτύλιος αν και μόνον αν η χαρακτηριστική του k δεν διαιρεί την τάξη της ομάδας G .

Ωστόσο, όπως μας επιβεβαιώνει η ακόλουθη πρόταση, οι έννοιες «δακτύλιος quasi-Frobenius» και «ημιαπλός δακτύλιος» είναι ισοδύναμες, στην περίπτωση που ο δακτύλιος έχει πεπερασμένη αριστερή ή δεξιά ολική ομολογική διάσταση.

Πρόταση 6.2.9. *Αν ο R είναι δακτύλιος quasi-Frobenius, τότε η αριστερή και η δεξιά ολική ομολογική διάσταση του R είναι ή ίση με μηδέν ή άπειρο.*

Απόδειξη. Έστω R ένας δακτύλιος quasi-Frobenius. Τότε η αριστερή, αντίστοιχα η δεξιά, ομολογική διάσταση του R , είναι είτε πεπερασμένη, είτε άπειρη. Αν η αριστερή ομολογική διάσταση του R είναι άπειρη, τότε ισχύει τετριμμένα το ζητούμενο. Υποθέτουμε λοιπόν ότι η αριστερή ομολογική διάσταση του R είναι πεπερασμένη. Συνεπώς, υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός n , έτσι ώστε για κάθε αριστερό R -πρότυπο να υπάρχει μια προβολική ανάλυση μήκους n . Θεωρούμε τώρα ένα αριστερό R -πρότυπο M , και διαλέγουμε μια προβολική ανάλυση του M μήκους n :

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0. \quad (6.31)$$

Στη συνέχεια, «σπάμε» την ακριβή ακολουθία (6.31), σε σύντομες ακριβείς ακολουθίες για κάθε $j = 1, \dots, n$:

$$0 \longrightarrow K_j \longrightarrow P_{j-1} \longrightarrow K_{j-1} \longrightarrow 0, \quad (6.32)$$

όπου $K_0 = M$ και $K_n = P_n$. Η υπόθεση και η ισοδυναμία $1 \Leftrightarrow 3$ του Θεωρήματος (6.2.7), μας δίνουν ότι κάθε προβολικό (αριστερό) R -πρότυπο είναι ενέσιμο. Επομένως, κάθε P_j για $j = 0, \dots, n$, είναι ενέσιμο. Γνωρίζουμε ότι ένα R -πρότυπο E είναι ενέσιμο, αν και μόνο αν, κάθε σύντομη ακριβής ακολουθία της μορφής:

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow 0,$$

διασπάται. Έτσι, αν θεωρήσουμε τη σύντομη ακριβή ακολουθία (6.32) για $j = n$, τότε οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η ακολουθία αυτή είναι διασπασίμη, και επιπρόσθετα, ότι το αριστερό R -πρότυπο K_{n-1} είναι ενέσιμο, ως ευθύς προσθετός του ενέσιμου αριστερού R -προτύπου P_{n-1} . Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, συμπεραίνουμε ότι η σύντομη ακριβής ακολουθία (6.32) για $j = n-1$, είναι διασπασίμη, και επιπλέον, ότι το αριστερό R -πρότυπο K_{n-2} είναι ενέσιμο, ως ευθύς προσθετός του ενέσιμου αριστερού R -προτύπου P_{n-2} . Επαγωγικά λοιπόν, καταλήγουμε ότι το αριστερό R -πρότυπο M είναι ενέσιμο. Επειδή τώρα η επιλογή του M ήταν τυχαία, παίρνουμε ότι η αριστερή ολική ομολογική διάσταση του R είναι ίση με μηδέν, όπως επιθυμούσαμε. Ομοίως αποδεικνύεται ότι η δεξιά ολική ομολογική διάσταση του R είναι ή ίση με μηδέν ή άπειρο, και έτσι, η απόδειξη της πρότασης αυτής έχει ολοκληρωθεί. ■

Όπως υποσχθήκαμε στην εισαγωγή της ενότητας αυτής, αποδεικνύουμε τώρα ότι οι δακτύλιοι quasi-Frobenius, είναι ακριβώς οι δακτύλιοι υπεράνω των οποίων οι κλάσεις των G-προβολικών και των G-ενέσιμων προτύπων ταυτίζονται.

Πρόταση 6.2.10. *Ο R είναι δακτύλιος quasi-Frobenius, αν και μόνο αν,*

$$R\text{-GProj} = R\text{-GInj}.$$

Απόδειξη. (\implies): Υποθέτουμε ότι ο R είναι δακτύλιος quasi-Frobenius. Θα αποδείξουμε στην συνέχεια ότι κάθε αριστερό R -πρότυπο είναι G-προβολικό και G-ενέσιμο. Έστω λοιπόν M ένα αριστερό R -πρότυπο. Διαλέγουμε μια προβολική και μια ενέσιμη ανάλυση του M , έστω

$$\dots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0, \quad (6.33)$$

και αντίστοιχα,

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow E^2 \longrightarrow \dots. \quad (6.34)$$

Η συγκόλληση των ακριβών ακολουθιών (6.33) και (6.34), είναι η ακριβής ακολουθία:

$$\dots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \xrightarrow{i \circ f} E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow E^2 \longrightarrow \dots. \quad (6.35)$$

Η υπόθεση τώρα ότι ο R είναι δακτύλιος quasi-Frobenius, είναι ισοδύναμη με το γεγονός ότι η κλάση των προβολικών R -προτύπων, ταυτίζεται με την κλάση των ενέσιμων R -προτύπων. Συνεπώς, η ακριβής ακολουθία (6.35), μπορεί να ιδωθεί ως μια ακριβής ακολουθία είτε από προβολικά είτε από ενέσιμα αριστερά R -πρότυπα.

Θεωρούμε αρχικά, την ακολουθία (6.35), ως μια ακριβή ακολουθία αποτελούμενη από προβολικά αριστερά R -πρότυπα. Για ένα οποιοδήποτε ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο I , αν εφαρμόσουμε τον αντισυναλλοίωτο συναρτητή $\text{Hom}_R(-, I)$, στις ακριβείς ακολουθίες (6.33) και (6.34), τότε οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι οι ακολουθίες αυτές, είναι $\text{Hom}_R(-, R\text{-Inj})$ -ακριβείς. Το αποτέλεσμα αυτό, προκύπτει «σπάζοντας» τις ακριβείς ακολουθίες (6.33) και (6.34) σε σύντομες ακριβείς ακολουθίες, και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής $\text{Hom}_R(-, I)$ είναι ακριβής, αν και μόνο αν, το πρότυπο I είναι ενέσιμο. Χρησιμοποιώντας λοιπόν την Παρατήρηση (2.2.16), παίρνουμε ότι η ακριβής ακολουθία (6.35), είναι επίσης $\text{Hom}_R(-, R\text{-Inj})$ -ακριβής. Ως συνέπεια αυτού, έπεται ότι η ακριβής ακολουθία (6.35) είναι $\text{Hom}_R(-, R\text{-Proj})$ -ακριβής, διότι ο R είναι δακτύλιος quasi-Frobenius. Επομένως, η ακολουθία (6.35) είναι ουσιαστικά, μια πλήρης προβολική ανάλυση. Παρατηρώντας τώρα ότι $\text{Im}(i \circ f) = \text{Im } i \cong M$, καταλήγουμε ότι το αριστερό R -πρότυπο M , είναι G-προβολικό.

Στη συνέχεια, θεωρούμε την ακριβή ακολουθία (6.35), ως μια ακριβή ακολουθία αποτελούμενη από ενέσιμα αριστερά R -πρότυπα. Η εφαρμογή του συναρτητή $\text{Hom}_R(P, -)$ όπου P είναι ένα οποιοδήποτε προβολικό αριστερό R -πρότυπο, στις ακριβείς ακολουθίες (6.33) και (6.34), μας δίνει ότι οι ακολουθίες αυτές, είναι $\text{Hom}_R(R\text{-Proj}, -)$ -ακριβείς. Για να διαπιστώσουμε τον ισχυρισμό αυτό, αρκεί να «σπάσουμε» τις ακριβείς ακολουθίες (6.33) και (6.34) σε σύντομες ακριβείς ακολουθίες, και να χρησιμοποιήσουμε αυτή τη φορά, το γεγονός ότι ο συναρτητής $\text{Hom}_R(P, -)$ είναι ακριβής, αν και μόνο αν, το πρότυπο P είναι προβολικό. Έτσι, χρησιμοποιώντας ξανά την Παρατήρηση (2.2.16), έχουμε ότι η ακριβής ακολουθία (6.35), είναι επίσης $\text{Hom}_R(R\text{-Proj}, -)$ -ακριβής. Το αποτέλεσμα αυτό, καθώς και η υπόθεση, μας δίνουν ότι η ακριβής ακολουθία (6.35), είναι $\text{Hom}_R(R\text{-Inj}, -)$ -ακριβής. Συνεπώς, η ακολουθία (6.35) είναι μια πλήρης ενέσιμη ανάλυση, με την ιδιότητα $M \cong \text{Im}(i \circ f)$, και άρα, εξ ορισμού, το αριστερό R -πρότυπο M είναι G -ενέσιμο.

Έτσι τελικά, έχουμε ότι το αυθαίρετο αριστερό R -πρότυπο M είναι συγχρόνως G -προβολικό και G -ενέσιμο. Επομένως, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι υπεράνω του δακτυλίου R , κάθε αριστερό R -πρότυπο είναι G -προβολικό και G -ενέσιμο, και άρα, ότι $R\text{-GProj} = R\text{-GInj}$.

(\Leftarrow): Υποθέτουμε τώρα ότι $R\text{-GProj} = R\text{-GInj}$. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι ο R είναι δακτύλιος quasi-Frobenius. Αρκεί λοιπόν, σύμφωνα με το Θεώρημα των Faith-Walker, να δείξουμε ότι η κλάση των ενέσιμων αριστερών R -προτύπων $R\text{-Inj}$, περιέχεται στην κλάση των προβολικών αριστερών R -προτύπων $R\text{-Proj}$. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε ένα αυθαίρετο ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο M . Τότε είτε $M = 0$, είτε $M \neq 0$. Αν $M = 0$, τότε το αριστερό R -πρότυπο M είναι φυσικά, προβολικό. Υποθέτουμε λοιπόν ότι το ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο M είναι μη μηδενικό. Προφανώς, το M είναι G -ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο, ως ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο. Συνεπώς, η υπόθεση μας δίνει ότι το M είναι επίσης G -προβολικό. Επιπλέον, το Θεώρημα (6.2.3), μας εξασφαλίζει την ισότητα $\text{Gpd}_R M = \text{pd}_R M$. Συνδυάζοντας λοιπόν τα προηγούμενα, παίρνουμε ότι $0 = \text{Gpd}_R M = \text{pd}_R M$, και κατ' επέκταση, ότι το M είναι προβολικό. Επειδή η επιλογή του ενέσιμου αριστερού R -προτύπου M ήταν τυχαία, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι $R\text{-Inj} \subseteq R\text{-Proj}$, όπως επιθυμούσαμε. ■

Πόρισμα 6.2.11. *Ο R είναι δακτύλιος quasi-Frobenius, αν και μόνο αν, κάθε αριστερό R -πρότυπο είναι G -προβολικό και G -ενέσιμο.*

Απόδειξη. Αν ο R είναι δακτύλιος quasi-Frobenius, τότε η απόδειξη της Πρότασης (6.2.10), μας εξασφαλίζει ότι κάθε αριστερό R -πρότυπο είναι G -προβολικό και G -ενέσιμο. Αντίστροφα, αν κάθε αριστερό R -πρότυπο είναι G -προβολικό και G -ενέσιμο, τότε $R\text{-GProj} = R\text{-GInj}$. Άρα, χρησιμοποιώντας ξανά την Πρόταση (6.2.10), παίρνουμε ότι ο R είναι δακτύλιος quasi-Frobenius. ■

Συνοψίζοντας, στο παρόν κεφάλαιο είδαμε ότι:

- Αν η αριστερή (δεξιά) ομολογική διάσταση του δακτυλίου R είναι πεπερασμένη, τότε οι κλάσεις των G -προβολικών αριστερών (δεξιών) R -προτύπων, και των προβολικών αριστερών (δεξιών) R -προτύπων, ταυτίζονται και αντίστοιχα, οι κλάσεις των G -ενέσιμων αριστερών (δεξιών) R -προτύπων, και των ενέσιμων αριστερών (δεξιών) R -προτύπων, συμπίπτουν.
- Για κάθε R -πρότυπο M με πεπερασμένη G -προβολική διάσταση, υπάρχει πάντα μια δεξιά G -προβολική προσέγγιση του M , η οποία είναι επιμορφισμός.
- Για κάθε R -πρότυπο M με πεπερασμένη G -ενέσιμη διάσταση, υπάρχει πάντα μια αριστερή G -ενέσιμη προσέγγιση του M , η οποία είναι μονομορφισμός.
- Αν ο δακτύλιος R έχει πεπερασμένη G -ενέσιμη διάσταση, τότε έχει επίσης, πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση.
- Ο R είναι δακτύλιος quasi-Frobenius, αν και μόνο αν, $R\text{-GProj} = R\text{-GInj}$.
- Ο R είναι δακτύλιος quasi-Frobenius, αν και μόνο αν, κάθε αριστερό R -πρότυπο είναι G -προβολικό και G -ενέσιμο.

Κλείνουμε το παρόν κεφάλαιο, παραθέτοντας το ακόλουθο ανοιχτό ερώτημα :

Ανοιχτό Πρόβλημα: Αν οι κλάσεις των G -προβολικών και προβολικών αριστερών (δεξιών) R -προτύπων ταυτίζονται, ή οι κλάσεις των G -ενέσιμων και ενέσιμων αριστερών (δεξιών) R -προτύπων συμπίπτουν, τότε η αριστερή (δεξιά) ομολογική διάσταση του δακτυλίου είναι πεπερασμένη ;

Σημειώνουμε ότι το προηγούμενο πρόβλημα, έχει θετική απάντηση στην περίπτωση που ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος Gorenstein. Με άλλα λόγια, αν ο R είναι δακτύλιος Gorenstein, τότε $R\text{-Gl}n_j = R\text{-ln}_j$ ή $R\text{-GProj} = R\text{-Proj}$, αν και μόνο αν, η αριστερή ομολογική διάσταση του R είναι πεπερασμένη, δεξ Πόρισμα (8.2.4) και (8.2.19).

Κεφάλαιο 7

Η Θεωρία Auslander-Buchweitz

Δοθέντος ενός προσηταιριστικού δακτυλίου με μονάδα R , ένα βασικό ερώτημα στην Ομολογική Άλγεβρα Gorenstein, είναι πότε η κλάση $R\text{-GProj}$ των G -προβολικών αριστερών R -πρότυπων είναι (ελάχιστα) δεξιά προσεγγίσιμη. Ισοδύναμα, πότε κάθε αριστερό R -πρότυπο δέχεται μια (ελάχιστη) αριστερή $R\text{-GProj}$ -ανάλυση. Στο παρόν κεφάλαιο, παρουσιάζουμε βασικά στοιχεία της θεωρίας των M. Auslander και R.O. Buchweitz, βασιζόμενοι στο άρθρο τους «*The homological theory of maximal Cohen-Macaulay approximations*», βλέπε [9]. Η θεωρία των Auslander-Buchweitz, θα αποτελέσει όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, το απαραίτητο εργαλείο για την απάντηση του προηγούμενου ερωτήματος.

7.1 Πρότυπα Υπεράνω Δακτυλίων Cohen-Macaulay

Στα πλαίσια μιας αβελιανής κατηγορίας, η οποία είναι εφοδιασμένη με μια υποκατηγορία από «μέγιστα Cohen-Macaulay αντικείμενα», οι Auslander και Buchweitz στο άρθρο [9], αποδεικνύουν ως ειδική περίπτωση γενικότερων αποτελεσμάτων, το εξής:

- Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος της Noether, ο οποίος είναι δακτύλιος Cohen-Macaulay και διαθέτει ένα δυϊκοποιούν (dualizing) πρότυπο. Τότε για κάθε πεπερασμένα παραγόμενο R -πρότυπο, υπάρχει μια δεξιά μέγιστη προσέγγιση Cohen-Macaulay η οποία είναι επιμορφισμός. Δυϊκά, για κάθε πεπερασμένα παραγόμενο R -πρότυπο, υπάρχει μια αριστερή προσέγγιση του από πεπερασμένα παραγόμενα πρότυπα με πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση, η οποία είναι μονομορφισμός.

Στόχος μας στην παρούσα ενότητα, είναι να περιγράψουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα στην κλασική περίπτωση ενός μεταθετικού τοπικού δακτυλίου της Noether R , με μέγιστο ιδεώδες \mathfrak{m} και σώμα πηλίκου $k = R/\mathfrak{m}$. Η ειδική περίπτωση αυτή θα αποτελέσει μοντέλο για τα αποτελέσματα του παρόντος Κεφαλαίου και του Κεφαλαίου 8. Πριν περάσουμε ωστόσο στην περιγραφή αυτή, χρειαζόμαστε τον εξής ορισμό:

Ορισμός 7.1.1. Το ω είναι dualizing πρότυπο για έναν τοπικό δακτύλιο (R, \mathfrak{m}, k) , αν και μόνο αν, ισχύουν οι ακόλουθες τρεις συνθήκες:

1. Το R -πρότυπο ω είναι πεπερασμένα παραγόμενο με πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση.
2. Για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό $i \neq 0$, ισχύει ότι $\text{Ext}_R^i(\omega, \omega) = 0$.
3. Ο φυσικός ομομορφισμός δακτυλίων

$$\mu_\omega : R \longrightarrow \text{Hom}_R(\omega, \omega),$$

ο οποίος δίνεται μέσω της δράσης του δακτυλίου R στο R -πρότυπο ω , είναι ένας ισομορφισμός.

Έστω R ένας τοπικός δακτύλιος της Noether με μέγιστο ιδεώδες \mathfrak{m} και σώμα πηλίκου $k = R/\mathfrak{m}$. Υποθέτουμε ότι ο δακτύλιος R διαθέτει ένα dualizing πρότυπο ω . Τότε είναι γνωστό ότι ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος Cohen-Macaulay, και μάλιστα, το ω καθορίζεται μοναδικά μέχρι ισομορφισμού. Επιπλέον, τα πεπερασμένα παραγόμενα R -πρότυπα M τα οποία είναι μέγιστα Cohen-Macaulay πρότυπα, με την έννοια ότι $\text{depth}_{\mathfrak{m}} M = \dim R$, μπορούν να χαρακτηριστούν ομολογιακά, ως εκείνα τα πρότυπα τα οποία ικανοποιούν τη συνθήκη $\text{Ext}_R^i(M, \omega) = 0$ για κάθε $i \neq 0$. Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με δακτυλίους Cohen-Macaulay, και μέγιστα Cohen-Macaulay πρότυπα, παραπέμπουμε στα βιβλία [17, Chapter 3] και [24, Chapter 21].

Είμαστε έτοιμοι τώρα να παραθέσουμε το βασικό αποτέλεσμα της ενότητας αυτής.

Θεώρημα 7.1.2. (Ύπαρξη «αποσύνθεσης») Έστω (R, \mathfrak{m}, k) ένας μεταθετικός, τοπικός δακτύλιος της Noether με dualizing πρότυπο ω . Για κάθε πεπερασμένα παραγόμενο R -πρότυπο N , υπάρχουν πεπερασμένα παραγόμενα R -πρότυπα M_N και I^N και ένας R -ομομορφισμός

$$d_N: M_N \longrightarrow I^N,$$

τέτοιος ώστε

1. $\text{Im } d_N \cong N$.
2. Το M_N είναι μέγιστο Cohen-Macaulay πρότυπο, και το $I_N := \text{Ker } d_N$ είναι ένα R -πρότυπο με πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση.
3. Το I^N είναι ένα R -πρότυπο με πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση, και το $M^N := \text{Coker } d_N$ είναι μέγιστο Cohen-Macaulay πρότυπο.
4. Υπάρχει ένας φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε ο ομομορφισμός d_N να παραγοντοποιείται ως η σύνθεση ενός μονομορφισμού j και ενός επιμορφισμού p ως εξής:

$$d_N = p \circ j: M_N \longrightarrow I^N, \quad \text{όπου} \quad j: M_N \longrightarrow \omega^{\oplus n} \quad \& \quad p: \omega^{\oplus n} \longrightarrow I^N,$$

αντίστοιχα.

Αν η σύνθεση των R -ομομορφισμών,

$$d_N = p \circ j: M_N \xrightarrow{\pi_N} N \xrightarrow{i^N} I^N$$

παριστάνει την παραγοντοποίηση του R -ομομορφισμού d_N μέσω της εικόνας του N όπως παραπάνω, τότε οι προηγούμενες συνθήκες μας δίνουν το ακόλουθο μεταθετικό και ακριβές διάγραμμα από R -πρότυπα:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & I_N & \xlongequal{\quad} & I_N & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & M_N & \xrightarrow{j} & \omega^{\oplus n} & \longrightarrow & M^N \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \pi_N & \searrow d_N & \downarrow p & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i^N} & I^N & \longrightarrow & M^N \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Έχοντας εξασφαλίσει τώρα για κάθε πεπερασμένα παραγόμενο R -πρότυπο N , την ύπαρξη ενός R -ομομορφισμού $d_N: M_N \longrightarrow I^N$, όπως του Θεωρήματος (7.1.2), το επόμενο βήμα είναι να εξετάσουμε την μοναδικότητα αυτού.

Θεώρημα 7.1.3. (Ουσιώδης Μοναδικότητα)

1. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας δεύτερος R -ομομορφισμός $d'_N : M'_N \rightarrow \bar{I}^N$, ο οποίος ικανοποιεί το Θεώρημα (7.1.2) για το ίδιο πεπερασμένα παραγόμενο R -πρότυπο N . Αν η σύνθεση των R -ομομορφισμών,

$$M'_N \xrightarrow{\pi'_N} N \xrightarrow{j^N} \bar{I}^N,$$

παριστάνει την παραγοντοποίηση του R -ομομορφισμού d'_N μέσω της εικόνας του N , όπως στο Θεώρημα 7.1.2, τότε υπάρχουν R -πρότυπα P, P' και Q, Q' , όπου καθένα από αυτά, είναι πεπερασμένα ευθέα αδροίσματα από κόμπιες του ω , και R -ισομομορφισμοί μ, κ έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccccc} M'_N \oplus P & \xrightarrow{\pi'_N \oplus 0} & N & \xrightarrow{j^N \oplus 0} & \bar{I}^N \oplus Q \\ \downarrow \mu \cong & & \parallel & & \downarrow \cong \kappa \\ M_N \oplus P' & \xrightarrow{\pi_N \oplus 0} & N & \xrightarrow{i^N \oplus 0} & I^N \oplus Q' \end{array}$$

2. Αν $f : M \rightarrow N$ είναι ένας οποιοσδήποτε ομομορφισμός από ένα μέγιστο Cohen-Macaulay R -πρότυπο M στο N , τότε υπάρχει ένας R -ομομορφισμός $\nu : M \rightarrow M_N$, τέτοιος ώστε το διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} M_N & \xrightarrow{\pi_N} & N \\ & \swarrow \nu & \uparrow f \\ & & M \end{array}$$

Διότι, αν $g : N \rightarrow L$ είναι ένας οποιοσδήποτε ομομορφισμός από το N σε ένα R -πρότυπο L με πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση, τότε υπάρχει ένας R -ομομορφισμός $\rho : I^N \rightarrow L$, ο οποίος συνθέτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{i^N} & I^N \\ \downarrow g & & \swarrow \rho \\ L & & \end{array}$$

Επομένως υπεράνω δακτυλίων Cohen-Macaulay οι οποίοι διαθέτουν dualizing πρότυπο, κάθε πεπερασμένα παραγόμενο πρότυπο μπορεί να προσεγγισθεί, με ουσιαστικά μοναδικό τρόπο, από ένα πρότυπο το οποίο είναι μέγιστο Cohen-Macaulay, και από ένα πρότυπο με πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση.

Το δεύτερο σκέλος του Θεωρήματος (7.1.3), μας προτρέπει να καλέσουμε την ακριβή ακολουθία από R -πρότυπα,

$$0 \rightarrow I_N \rightarrow M_N \xrightarrow{\pi_N} N \rightarrow 0,$$

για **μέγιστη Cohen-Macaulay προσέγγιση (maximal Cohen-Macaulay approximation)** του N , και την ακριβή ακολουθία από R -πρότυπα,

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{i^N} I^N \rightarrow M^N \rightarrow 0,$$

ένα **κάλυμμα πεπερασμένης ενέσιμης διάστασης (hull of finite injective dimension)** του N .

Σημειώνουμε ότι ο Auslander πρώτος απέδειξε μια ισοδύναμη εκδοχή του Θεωρήματος (7.1.2), ωστόσο για την κατηγορία των προσθετικών συναρτητών στην $R\text{-mod}$, δες [7], όπου το αποτέλεσμα θα μπορούσε να εκφραστεί, λέγοντας ότι η κατηγορία των μέγιστων Cohen-Macaulay προτύπων είναι «coherently (co)finite».

Κλείνουμε την παρούσα ενότητα, τονίζοντας ότι τα προηγούμενα αποτελέσματα, γενικεύονται και επεκτείνονται σε μια οποιαδήποτε αβελιανή κατηγορία, η οποία δέχεται μια υποκατηγορία από «μέγιστα Cohen-Macaulay αντικείμενα». Στην συνέχεια του κεφαλαίου αυτού, θεωρώντας μια αβελιανή κατηγορία \mathcal{C} και μια υποκατηγορία \mathcal{X} από «μέγιστα Cohen-Macaulay αντικείμενα» της \mathcal{C} , θα αποδείξουμε τα ανάλογα αποτελέσματα των Θεωρημάτων (7.1.2) και (7.1.3). Αυτός είναι και ο λόγος που παραλείψαμε τις αποδείξεις αυτών.

7.2 Το Βασικό Θεώρημα « Αποσύνθεσης »

Σκοπός μας στην ενότητα αυτή, είναι να αποδείξουμε το βασικό θεώρημα αποσύνθεσης στα πλαίσια μιας αβελιανής κατηγορίας \mathcal{C} , η οποία δέχεται μια υποκατηγορία \mathcal{X} από «μέγιστα Cohen-Macaulay αντικείμενα». Αρχικά, εφοδιάζουμε την κατηγορία \mathcal{X} με συγκεκριμένες ιδιότητες, ώστε να εξασφαλίσουμε τα ανάλογα αποτελέσματα των Θεωρημάτων (7.1.2) και (7.1.3), όπως και υποσχεθήκαμε στην προηγούμενη ενότητα. Πριν όμως από αυτό, παραθέτουμε ορισμούς και συμβολισμούς.

Σύμβαση: Καθ' όλη την έκταση του παρόντος κεφαλαίου, με \mathcal{C} συμβολίζουμε μια αβελιανή κατηγορία. Λέγοντας ότι η \mathcal{A} είναι μια υποκατηγορία της \mathcal{C} , θα εννοούμε πάντα ότι η \mathcal{A} είναι μια πλήρης και προσθετική υποκατηγορία της \mathcal{C} , η οποία είναι κλειστή σε ισομορφισμούς και σε πεπερασμένα ευθέα αθροίσματα στην \mathcal{C} .

Ορισμός 7.2.1. Αν C είναι ένα αντικείμενο της \mathcal{C} , και \mathcal{A} είναι μια υποκατηγορία της \mathcal{C} , τότε ο ελάχιστος φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε να υπάρχει μια ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C}

$$0 \longrightarrow A_n \longrightarrow A_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_0 \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

όπου κάθε A_i για $i = 0, \dots, n$, είναι αντικείμενο της \mathcal{A} , καλείται η **διάσταση \mathcal{A} -ανάλυσης (\mathcal{A} -resolution dimension)** του C . Αν δεν υπάρχει τέτοιος φυσικός αριθμός n , τότε ορίζουμε την διάσταση \mathcal{A} -ανάλυσης του C να είναι ίση με άπειρο.

Για κάθε αντικείμενο C της \mathcal{C} , και για κάθε υποκατηγορία \mathcal{A} της \mathcal{C} , συμβολίζουμε την διάσταση \mathcal{A} -ανάλυσης του C , με $\mathcal{A}\text{-res. dim } C$. Επιπλέον, η υποκατηγορία της \mathcal{C} που αποτελείται από όλα τα αντικείμενα C της \mathcal{C} , τέτοια ώστε $\mathcal{A}\text{-res. dim } C < \infty$ θα συμβολίζεται με $\hat{\mathcal{A}}$.

Ορισμός 7.2.2. Αν \mathcal{A} είναι μια υποκατηγορία της \mathcal{C} , και \mathcal{B} είναι μια υποκατηγορία της \mathcal{A} , τότε η \mathcal{B} καλείται **συνγεννήτορας (cogenerator)** για την \mathcal{A} , αν για κάθε αντικείμενο A της \mathcal{A} υπάρχει μια σύντομη ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} ,

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow A' \longrightarrow 0,$$

όπου το B είναι αντικείμενο της \mathcal{B} και το A' είναι αντικείμενο της \mathcal{A} .

Υπενθυμίζουμε από το Κεφάλαιο 2, ότι αν \mathcal{A} είναι μια υποκατηγορία της \mathcal{C} , τότε η ευσταθής κατηγορία \mathcal{C}/\mathcal{A} της \mathcal{C} ως προς την υποκατηγορία \mathcal{A} , έχει ως αντικείμενα τα αντικείμενα της \mathcal{C} , και τα σύνολα των μορφισμών στην \mathcal{C}/\mathcal{A} είναι οι ομάδες πηλίκο:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}(C_1, C_2) := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2) / \text{Hom}_{\mathcal{C}, \mathcal{A}}(C_1, C_2),$$

όπου $\text{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}(C_1, C_2)$ είναι η υποομάδα της $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2)$ που αποτελείται από τους μορφισμούς στην \mathcal{C} , οι οποίοι παραγοντοποιούνται μέσω ενός αντικείμενου της \mathcal{A} . Αν C είναι ένα αντικείμενο της \mathcal{C} , τότε συμβολίζουμε με \underline{C} το αντικείμενο C το οποίο θεωρείται τώρα ως αντικείμενο της \mathcal{C}/\mathcal{A} , και αν $f: C \rightarrow D$ είναι ένας μορφισμός στην \mathcal{C} , τότε συμβολίζουμε με $\underline{f}: \underline{C} \rightarrow \underline{D}$ την κλάση του f στην ομάδα πηλίκο $\text{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}(C, D)$. Τότε η φυσική προβολή

$$\pi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/\mathcal{A},$$

όπου $\pi(C) = \underline{C}$ και $\pi(f) = \underline{f}$, είναι ένας προσθετικός συναλλοίωτος συναρτητής με $\pi(\mathcal{A}) = 0$. Επιπλέον, ο προσθετικός συναλλοίωτος συναρτητής π χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα ότι αν $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ είναι ένας προσθετικός συναλλοίωτος (αντισυναλλοίωτος) συναρτητής τέτοιος ώστε $T(\mathcal{A}) = 0$, τότε υπάρχει μοναδικός προσθετικός συναλλοίωτος (αντισυναλλοίωτος) συναρτητής $T': \mathcal{C}/\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}$, τέτοιος ώστε $T' \circ \pi = T$. Τέλος, σημειώνουμε ότι για μια υποκατηγορία \mathcal{A} της \mathcal{C} , συμβολίζουμε με $\text{Add } \mathcal{A}$ την υποκατηγορία της \mathcal{C} , η οποία αποτελείται από όλα τα αντικείμενα C της \mathcal{C} τα οποία είναι ισόμορφα με έναν ευθύ προσθετέο στην \mathcal{C} ενός αντικείμενου της \mathcal{A} .

Ορισμός 7.2.3. Μια υποκατηγορία \mathcal{A} της \mathcal{C} καλείται **προσθετικά κλειστή** ή **Karoubian**, (**additively closed**), αν η \mathcal{A} είναι κλειστή στους ευθείς προσθετέους στην \mathcal{C} , ή ισοδύναμα, αν κάθε ταυτοδύναμος μορφισμός στην \mathcal{A} έχει εικόνα στην \mathcal{A} .

Παρατήρηση 7.2.4. Προφανώς, η \mathcal{A} είναι προσθετικά κλειστή υποκατηγορία της \mathcal{C} , αν και μόνο αν, $\mathcal{A} = \text{Add } \mathcal{A}$.

Σύμβαση: Καθ' όλη την έκταση του κεφαλαίου αυτού, συμβολίζουμε με \mathcal{X} μια προσθετικά κλειστή υποκατηγορία της \mathcal{C} η οποία είναι κλειστή στις επεκτάσεις. Χρησιμοποιώντας την ορολογία του D. Quillen, [49], υποθέτουμε δηλαδή ότι η \mathcal{X} είναι μια Karoubian ακριβής υποκατηγορία της \mathcal{C} . Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η ω είναι μια προσθετικά κλειστή υποκατηγορία της \mathcal{X} , η οποία αποτελεί έναν συγγενήτορα για την \mathcal{X} .

Με αυτές τις υποθέσεις λοιπόν, στην συνέχεια θα μελετήσουμε τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται οι κατηγορίες \mathcal{X} , ω , $\hat{\mathcal{X}}$, και $\hat{\omega}$.

Λήμμα 7.2.5. Έστω

$$0 \rightarrow K \rightarrow X \rightarrow C \rightarrow 0 \quad \& \quad 0 \rightarrow K \rightarrow Y^K \rightarrow X^K \rightarrow 0$$

δύο σύντομες ακριβείς ακολουθίες στην \mathcal{C} , όπου $X, X^K \in \text{ob}(\mathcal{X})$ και $Y^K \in \text{ob}(\hat{\omega})$. Τότε υπάρχει σύντομη ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} ,

$$0 \rightarrow Y^K \rightarrow U \rightarrow C \rightarrow 0,$$

με $Y^K \in \text{ob}(\hat{\omega})$ και $U \in \text{ob}(\mathcal{X})$.

Απόδειξη. Θεωρούμε το pushout U του διαγράμματος

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y^K & \dashrightarrow & U. \end{array}$$

Τότε από τις ιδιότητες των pushout-διαγραμμάτων, υπάρχουν μοναδικοί μορφισμοί $f: U \rightarrow C$ και $g: U \rightarrow X^K$ στην \mathcal{C} , οι οποίοι συνθέτουν το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές και στήλες στην \mathcal{C} :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & X & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & Y^K & \longrightarrow & U & \xrightarrow{f} & C \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow g & & \\
 & & X^K & \xlongequal{\quad} & X^K & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array} \tag{7.1}$$

Επειδή η κατηγορία \mathcal{X} είναι κλειστή στις επεκτάσεις, και τα αντικείμενα X, X^K ανήκουν στην κλάση $\text{ob}(\mathcal{X})$, από τη δεύτερη στήλη του διαγράμματος (7.1), συμπεραίνουμε ότι το αντικείμενο U της \mathcal{C} , ανήκει επίσης στην κλάση $\text{ob}(\mathcal{X})$. Επιπλέον, από την υπόθεση έχουμε ότι το αντικείμενο Y^K ανήκει στην κλάση $\text{ob}(\hat{\omega})$. Συνεπώς, η σύντομη ακριβής ακολουθία $0 \rightarrow Y^K \rightarrow U \rightarrow C \rightarrow 0$ στην \mathcal{C} , είναι η ακολουθία που ζητούσαμε. ■

Λήμμα 7.2.6. Έστω

$$0 \rightarrow Y_C \rightarrow X_C \rightarrow C \rightarrow 0 \quad \& \quad 0 \rightarrow X_C \rightarrow W \rightarrow X \rightarrow 0,$$

δύο σύντομες ακριβείς ακολουθίες στην \mathcal{C} , όπου $X_C, X \in \text{ob}(\mathcal{X})$, $Y_C \in \text{ob}(\hat{\omega})$ και $W \in \text{ob}(\omega)$. Τότε υπάρχει σύντομη ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} ,

$$0 \rightarrow C \rightarrow Z \rightarrow X \rightarrow 0$$

με $Z \in \text{ob}(\hat{\omega})$ και $X \in \text{ob}(\mathcal{X})$.

Απόδειξη. Θεωρούμε το pushout Z του διαγράμματος

$$\begin{array}{ccc}
 X_C & \longrightarrow & W \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C & \dashrightarrow & Z.
 \end{array}$$

Τότε υπάρχουν μοναδικοί μορφισμοί $f: Y_C \rightarrow W$ και $g: Z \rightarrow X$ στην \mathcal{C} , έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό με ακριβείς γραμμές και στήλες στην \mathcal{C} :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & Y_C & \xlongequal{\quad} & Y_C & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow f & & \\
 0 & \longrightarrow & X_C & \longrightarrow & W & \longrightarrow & X \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & Z & \xrightarrow{g} & X \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array} \tag{7.2}$$

Επειδή το Y_C είναι αντικείμενο της $\hat{\omega}$, υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός m με $\omega\text{-res. dim } Y_C = m$. Εξ ορισμού λοιπόν, υπάρχει μια ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} ελάχιστου μήκους m ,

$$0 \longrightarrow W_m \longrightarrow \cdots \longrightarrow W_0 \longrightarrow Y_C \longrightarrow 0, \quad (7.3)$$

όπου κάθε W_i για $0 \leq i \leq m$, είναι αντικείμενο της ω . Η συγκόλληση τώρα της ακριβούς ακολουθίας (7.3), με τη δεύτερη στήλη του διαγράμματος (7.2), δηλαδή, με τη σύντομη ακριβή ακολουθία $0 \longrightarrow Y_C \xrightarrow{f} W \longrightarrow Z \longrightarrow 0$, είναι η ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} :

$$0 \longrightarrow W_m \longrightarrow \cdots \longrightarrow W_0 \longrightarrow W \longrightarrow Z \longrightarrow 0,$$

όπου $W_0, \dots, W_m \in \text{ob}(\omega)$ και $W \in \text{ob}(\omega)$. Συνεπώς, έπεται ότι $\omega\text{-res. dim } Z \leq m + 1$, και κατ' επέκταση, ότι το αντικείμενο Z της \mathcal{C} είναι επίσης αντικείμενο της $\hat{\omega}$. Άρα, η δεύτερη γραμμή του διαγράμματος (7.2), δηλαδή, η σύντομη ακριβής ακολουθία $0 \longrightarrow C \longrightarrow Z \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0$ στην \mathcal{C} , είναι η ακολουθία που ψάχναμε, αφού η υπόθεση μας δίνει ότι το X είναι αντικείμενο της \mathcal{X} . ■

Κάθε αποτέλεσμα που θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια του παρόντος κεφαλαίου, εξαρτάται από το επόμενο αποτέλεσμα, το οποίο χαρακτηρίζεται ως το βασικό θεώρημα «αποσύνθεσης»:

Θεώρημα 7.2.7. (Βασικό Θεώρημα «Αποσύνθεσης») Για κάθε αντικείμενο C της $\hat{\mathcal{X}}$, υπάρχουν ακριβείς ακολουθίες στην \mathcal{C} ,

$$0 \longrightarrow Y_C \longrightarrow X_C \longrightarrow C \longrightarrow 0 \quad (7.4)$$

και

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow Y^C \longrightarrow X^C \longrightarrow 0, \quad (7.5)$$

με $Y_C, Y^C \in \text{ob}(\hat{\omega})$ και $X_C, X^C \in \text{ob}(\mathcal{X})$.

Απόδειξη. Έστω C ένα αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$. Θα δείξουμε ότι υπάρχουν ακριβείς ακολουθίες στην \mathcal{C} , όπως η (7.4) και η (7.5), με χρήση επαγωγής στο φυσικό αριθμό n , όπου $n = \mathcal{X}\text{-res. dim } C$. Εξ ορισμού, υπάρχει ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} ελάχιστου μήκους n , έστω

$$0 \longrightarrow X_n \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{d_0} X_0 \longrightarrow C \longrightarrow 0, \quad (7.6)$$

όπου $X_0, \dots, X_n \in \text{ob}(\mathcal{X})$. Αν $n = 0$, τότε η ακριβής ακολουθία (7.6), είναι η ακριβής ακολουθία $0 \longrightarrow X_0 \longrightarrow C \longrightarrow 0$. Συνεπώς, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι το αντικείμενο X_0 της \mathcal{X} είναι ισόμορφο στην \mathcal{C} , με το αντικείμενο C της $\hat{\mathcal{X}}$. Επειδή η \mathcal{X} είναι κλειστή σε ισομορφισμούς, έπεται ότι το αντικείμενο C της $\hat{\mathcal{X}}$, είναι επίσης αντικείμενο της \mathcal{X} . Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, καθώς και το γεγονός ότι η πλήρης υποκατηγορία ω της \mathcal{X} είναι συγγενήτορας για την \mathcal{X} , συμπεραίνουμε την ύπαρξη μιας σύντομης ακριβούς ακολουθίας στην \mathcal{C} της μορφής:

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow W \longrightarrow X \longrightarrow 0, \quad (7.7)$$

όπου $W \in \text{ob}(\omega)$ και $X \in \text{ob}(\mathcal{X})$. Έτσι, αφού η κατηγορία ω είναι πλήρης υποκατηγορία της $\hat{\omega}$, έχουμε ότι $W \in \text{ob}(\hat{\omega})$. Άρα, η ακολουθία (7.7) είναι μια από τις ζητούμενες ακολουθίες. Χρησιμοποιώντας ξανά το αποτέλεσμα ότι το αντικείμενο C της $\hat{\mathcal{X}}$ είναι αντικείμενο ουσιαστικά της \mathcal{X} , καθώς και το γεγονός ότι η κατηγορία ω είναι προσθετική, καταλήγουμε ότι η δεύτερη ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} την οποία αναζητούμε είναι η εξής:

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow C \xrightarrow{1_C} C \longrightarrow 0.$$

Έστω τώρα $n > 0$. Υποθέτουμε ότι για κάθε αντικείμενο L της $\hat{\mathcal{X}}$ με $0 \leq \mathcal{X}\text{-res. dim } L \leq n - 1$, υπάρχουν ακριβείς ακολουθίες στην \mathcal{C} :

$$0 \longrightarrow Y_L \longrightarrow X_L \longrightarrow L \longrightarrow 0 \quad \& \quad 0 \longrightarrow L \longrightarrow Y^L \longrightarrow X^L \longrightarrow 0,$$

όπου $Y_L, Y^L \in \text{ob}(\hat{\omega})$ και $X_L, X^L \in \text{ob}(\mathcal{X})$. Θέτοντας $K = \text{Im } d_0$, επάγονται οι ακριβείς ακολουθίες στην \mathcal{C} :

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow X_0 \longrightarrow C \longrightarrow 0 \quad \& \quad 0 \longrightarrow X_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_1 \longrightarrow K \longrightarrow 0,$$

όπου τα X_0, X_1, \dots, X_n είναι αντικείμενα της \mathcal{X} . Συνεπώς, έχουμε ότι $K \in \text{ob}(\hat{\mathcal{X}})$, και μάλιστα ότι \mathcal{X} -res. dim $K \leq n-1$. Χρησιμοποιώντας λοιπόν την επαγωγική υπόθεση, παίρνουμε ιδιαίτερα μια σύντομη ακριβή ακολουθία στην \mathcal{C} , $0 \longrightarrow K \longrightarrow Y^K \longrightarrow X^K \longrightarrow 0$, όπου Y^K είναι αντικείμενο της $\hat{\omega}$ και X^K είναι αντικείμενο της \mathcal{X} . Επιπλέον, το Λήμμα (7.2.5), μας δίνει μια σύντομη ακριβή ακολουθία στην \mathcal{C} :

$$0 \longrightarrow Y^K \longrightarrow U \longrightarrow C \longrightarrow 0 \tag{7.8}$$

όπου $Y^K \in \text{ob}(\hat{\omega})$ και $U \in \text{ob}(\mathcal{X})$. Έτσι, η ακολουθία (7.8) είναι μία από τις ζητούμενες ακολουθίες. Επειδή το U είναι αντικείμενο της \mathcal{X} , και η κατηγορία ω είναι συγγενήτορας για τη \mathcal{X} , υπάρχει σύντομη ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C}

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow W' \longrightarrow X' \longrightarrow 0, \tag{7.9}$$

όπου $W' \in \text{ob}(\omega)$ και $X' \in \text{ob}(\mathcal{X})$. Αν εφαρμόσουμε στη συνέχεια το Λήμμα (7.2.6) για τις ακριβείς ακολουθίες (7.8) και (7.9), τότε προκύπτει μια σύντομη ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C}

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow Z \longrightarrow X' \longrightarrow 0,$$

όπου $Z \in \text{ob}(\hat{\omega})$ και $X' \in \text{ob}(\mathcal{X})$. Επομένως, η προηγούμενη ακριβής ακολουθία είναι η δεύτερη ακολουθία που ζητούσαμε, κάτι το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος. ■

Σχόλιο 7.2.8. Χάρην απλότητας, καλούμε μια σύντομη ακριβή ακολουθία στην \mathcal{C}

$$0 \longrightarrow Y_C \longrightarrow X_C \xrightarrow{\pi_C} C \longrightarrow 0,$$

όπου $X_C \in \text{ob}(\mathcal{X})$ και $Y_C \in \text{ob}(\hat{\omega})$ μια \mathcal{X} -**προσέγγιση** (\mathcal{X} -**approximation**) του C . Δυσικά, καλούμε μια σύντομη ακριβή ακολουθία στη \mathcal{C}

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{i^C} Y^C \longrightarrow X^C \longrightarrow 0,$$

όπου $Y^C \in \text{ob}(\hat{\omega})$ και $X^C \in \text{ob}(\mathcal{X})$ ένα $\hat{\omega}$ -**κάλυμμα** ($\hat{\omega}$ -**hull**) του C .

Σύμβαση: Από τώρα και στο εξής υποθέτουμε ότι η πλήρης υποκατηγορία \mathcal{X} της \mathcal{C} , έχει την ιδιότητα: η \mathcal{X} είναι κλειστή σε πυρήνες επιμορφισμών στην \mathcal{C} , δηλαδή: αν $0 \longrightarrow X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow 0$ είναι μια σύντομη ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} με X_1 και X_2 ανήκουν στην κλάση $\text{ob}(\mathcal{X})$, τότε X_0 ανήκει επίσης στην κλάση $\text{ob}(\mathcal{X})$. Χρησιμοποιώντας την ορολογία του Quillen, η ιδιότητα αυτή μπορεί να εκφραστεί ως εξής: ένας επιμορφισμός στην ακριβή κατηγορία \mathcal{X} καλείται **αποδεκτός** (admissible), αν ο πυρήνας του ανήκει στην \mathcal{X} . Έτσι η παραπάνω συνθήκη είναι ισοδύναμη με τον ισχυρισμό ότι στην ακριβή κατηγορία \mathcal{X} , όλοι οι επιμορφισμοί στην \mathcal{C} μεταξύ αντικειμένων της \mathcal{X} , είναι αποδεκτοί. Έτσι, λαμβάνοντας υπόψιν το γεγονός ότι η κατηγορία \mathcal{X} είναι κλειστή στις επεκτάσεις, καθ' όλη την έκταση του κεφαλαίου αυτού, υποθέτουμε ότι η κατηγορία \mathcal{X} έχει την ιδιότητα αν $0 \longrightarrow X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow 0$ είναι μια σύντομη ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} όπου το X_2 ανήκει στην κλάση $\text{ob}(\mathcal{X})$, τότε το X_0 ανήκει στην κλάση $\text{ob}(\mathcal{X})$, αν και μόνο αν, το X_1 ανήκει στην κλάση $\text{ob}(\mathcal{X})$.

Ως συνέπεια της επιπρόσθετης υπόθεσης στην \mathcal{X} , οδηγούμαστε στο ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 7.2.9. Θεωρούμε ένα αντικείμενο C της \mathcal{C} , και υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα $\hat{\omega}$ -κάλυμμα $0 \longrightarrow C \longrightarrow Y^C \longrightarrow X^C \longrightarrow 0$ του C . Τότε υπάρχει επίσης μια \mathcal{X} -προσέγγιση

$$0 \longrightarrow Y_C \longrightarrow X_C \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

του C . Επιπλέον, αν το αντικείμενο Y^C της $\hat{\omega}$ δεν είναι αντικείμενο της ω , τότε το αντικείμενο Y_C της $\hat{\omega}$ μπορεί να διαλεχτεί κατά τέτοιο τρόπο, ώστε ω -res. dim $Y_C < \omega$ -res. dim Y^C .

Απόδειξη. Εφόσον το Y^C είναι αντικείμενο της $\hat{\omega}$, υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε $\omega\text{-res. dim } Y^C = n$. Δηλαδή, υπάρχει ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} ελάχιστου μήκους n :

$$0 \longrightarrow W_n \longrightarrow \dots \longrightarrow W_1 \xrightarrow{d_0} W_0 \longrightarrow Y^C \longrightarrow 0,$$

όπου κάθε W_i για $i = 0, \dots, n$, είναι αντικείμενο της ω . Αν θέσουμε $K = \text{Im } d_0$, τότε επάγονται οι ακριβείς ακολουθίες στη \mathcal{C} :

$$0 \longrightarrow W_n \longrightarrow \dots \longrightarrow W_1 \longrightarrow K \longrightarrow 0 \quad \& \quad 0 \longrightarrow K \longrightarrow W_0 \longrightarrow Y^C \longrightarrow 0.$$

Συνεπώς, παίρνουμε ότι $\omega\text{-res. dim } K \leq n - 1$, και κατ' επέκταση, ότι $K \in \hat{\omega}$. Στη συνέχεια, θεωρούμε το pullback L του διαγράμματος:

$$\begin{array}{ccc} L & \dashrightarrow & W_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & Y^C. \end{array}$$

Τότε από τις ιδιότητες των pullback-διαγραμμάτων, επάγεται το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές και στήλες στην \mathcal{C} :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & K & \xlongequal{\quad} & K & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & W_0 & \dashrightarrow & X^C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & Y^C & \longrightarrow & X^C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array} \tag{7.10}$$

Επειδή η ω είναι πλήρης υποκατηγορία της \mathcal{X} , κάθε αντικείμενο της ω είναι επίσης αντικείμενο της \mathcal{X} . Άρα, το αντικείμενο W_0 της ω είναι αντικείμενο της \mathcal{X} . Επιπλέον, η υπόθεση μας δίνει ότι το X^C είναι επίσης αντικείμενο της \mathcal{X} . Έτσι, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι κάθε επιμορφισμός από την \mathcal{C} στην \mathcal{X} είναι αποδεκτός, οδηγούμαστε από την πρώτη γραμμή του διαγράμματος (7.10), στο συμπέρασμα ότι το L είναι αντικείμενο της \mathcal{X} . Επομένως, θέτοντας τώρα $Y_C = K$ και $X_C = L$, η πρώτη στήλη του διαγράμματος (7.10), δηλαδή η σύντομη ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C}

$$0 \longrightarrow Y_C \longrightarrow X_C \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

είναι μια \mathcal{X} -προσέγγιση του C , διότι $Y_C \in \text{ob}(\hat{\omega})$ και $X_C \in \text{ob}(\mathcal{X})$. Τέλος, αν υποθέσουμε ότι $n > 0$ όπου $n = \omega\text{-res. dim } Y^C$, δηλαδή, ότι το αντικείμενο Y^C της $\hat{\omega}$ δεν είναι αντικείμενο της ω , τότε προκύπτει ότι

$$\omega\text{-res. dim } Y_C = \omega\text{-res. dim } K \leq n - 1 < n = \omega\text{-res. dim } Y^C,$$

όπως επιθυμούσαμε. ■

Η ακόλουθη πρόταση μας χαρακτηρίζει τα αντικείμενα της $\hat{\mathcal{X}}$:

Πρόταση 7.2.10. Για ένα αντικείμενο C της \mathcal{C} οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

1. $C \in \text{ob}(\hat{\mathcal{X}})$.
2. Υπάρχει μια \mathcal{X} -προσέγγιση $0 \rightarrow Y_C \rightarrow X_C \rightarrow C \rightarrow 0$ του C .
3. Υπάρχει ένα $\hat{\omega}$ -κάθλιμμα $0 \rightarrow C \rightarrow Y^C \rightarrow X^C \rightarrow 0$ του C .

Απόδειξη. Έστω C ένα αντικείμενο της \mathcal{C} . Θέλουμε να αποδείξουμε ότι οι παραπάνω συνθήκες είναι ισοδύναμες. Το Θεώρημα (7.2.7), μας εξασφαλίζει ότι αν ισχύει η συνθήκη 1), τότε ισχύουν επίσης οι συνθήκες 2) και 3), ενώ το Λήμμα (7.2.9), μας δίνει ότι αν ισχύει η συνθήκη 3), τότε ισχύει και η συνθήκη 2). Αρκεί να δείξουμε λοιπόν, την συνεπαγωγή $2 \Rightarrow 1$. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε $0 \rightarrow Y_C \rightarrow X_C \rightarrow C \rightarrow 0$ μια \mathcal{X} -προσέγγιση του C . Τότε αφού $Y_C \in \text{ob}(\hat{\omega})$, υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός n και μια ακριβής ακολουθία ελάχιστου μήκους n στην \mathcal{C} , έστω

$$0 \rightarrow W_n \rightarrow \dots \rightarrow W_0 \rightarrow Y_C \rightarrow 0, \quad (7.11)$$

όπου κάθε W_i για $i = 0, \dots, n$, είναι αντικείμενο της ω . Συνεπώς, έπεται ότι κάθε W_i για $i = 0, \dots, n$, είναι επίσης αντικείμενο της \mathcal{X} , διότι η ω είναι πλήρης υποκατηγορία της \mathcal{X} . Η συγκόλληση τώρα της ακριβούς ακολουθίας (7.11) στην \mathcal{C} , με την \mathcal{X} -προσέγγιση του C , είναι η ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} :

$$0 \rightarrow W_n \rightarrow \dots \rightarrow W_0 \rightarrow X_C \rightarrow C \rightarrow 0, \quad (7.12)$$

όπου από την υπόθεση το X_C είναι αντικείμενο της \mathcal{X} . Επομένως, από την ακριβή ακολουθία (7.12), οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι $\mathcal{X}\text{-res. dim } C \leq n + 1$, και κατ'επέκταση, ότι το C είναι αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$, όπως επιθυμούσαμε. ■

Στη συνέχεια, θα δώσουμε ένα παράδειγμα για τις κατηγορίες \mathcal{C} , \mathcal{X} και ω , οι οποίες πληρούν τις γενικές μας υποθέσεις, με σκοπό να εφαρμόσουμε τη θεωρία που έχουμε εισάγει μέχρι στιγμής.

• • • • •

Παράδειγμα 7.2.11. Στο σημείο αυτό θα κάνουμε μια μεγάλη παρένθεση για να δούμε πως εφαρμόζονται τα μέχρι τώρα αποτελέσματα στην περίπτωση πεπερασμένα παραγόμενων προτύπων υπεράνω ενός δακτυλίου της Noether:

– Πεπερασμένα παραγόμενα πρότυπα υπεράνω δακτυλίων της Noether

Έστω R ένας προσηταιριστικός δακτύλιος με μονάδα. Υποθέτουμε ότι ο δακτύλιος R είναι αριστερός και δεξιός δακτύλιος της Noether, και ο R όταν ιδωθεί ως δεξιό R -πρότυπο, έχει πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση ίση με d . Θέτουμε $\mathcal{C} = R\text{-mod}$, την κατηγορία των πεπερασμένα παραγόμενων αριστερών R -προτύπων. Τότε η υπόθεση ότι ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether, μας εξασφαλίζει ότι η κατηγορία \mathcal{C} είναι αβελιανή. Έστω \mathcal{X} η μοναδική πλήρης υποκατηγορία της \mathcal{C} , η οποία αποτελείται από όλα τα πεπερασμένα παραγόμενα αριστερά R -πρότυπα M , που ικανοποιούν την ισότητα, $\text{Ext}_R^i(M, R) = 0$ για κάθε $i \neq 0$, και ω η πλήρης υποκατηγορία της \mathcal{X} , η οποία αποτελείται από όλα τα πεπερασμένα παραγόμενα και προβολικά αριστερά R -πρότυπα. Προκειμένου να εφαρμόσουμε τη θεωρία που έχουμε αναπτύξει μέχρι τώρα, χρειάζεται να εξασφαλίσουμε ότι οι κατηγορίες \mathcal{X} και ω , ικανοποιούν τις γενικές μας υποθέσεις.

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι κάθε συναρτητής διατηρεί ισομορφισμούς, καθώς ότι κάθε προσθετικός συναρτητής διατηρεί πεπερασμένα ευθέα αθροίσματα, συμπεραίνουμε ότι η πλήρης υποκατηγορία \mathcal{X} της \mathcal{C} , είναι κλειστή σε ισομορφισμούς, καθώς και σε ευθείς προσθετέους στην \mathcal{C} . Αν $(M_j)_{j=1}^n$ είναι μια τυχαία οικογένεια από αντικείμενα της \mathcal{X} , τότε το ευθύ άθροισμα των M_j για $j = 1, \dots, n$, δηλαδή το αντικείμενο $\bigoplus_{j=1}^n M_j$ της \mathcal{C} , είναι επίσης αντικείμενο της \mathcal{X} , αφού για κάθε $i > 0$ ισχύει ότι:

$$0 = \bigoplus_{j=1}^n \text{Ext}_R^i(M_j, R) \cong \text{Ext}_R^i(\bigoplus_{j=1}^n M_j, R).$$

Επιπλέον, εύκολα διαπιστώνουμε ότι η \mathcal{X} είναι κλειστή στις επεκτάσεις, και ότι κάθε επιμορφισμός στην \mathcal{C} μεταξύ αντικειμένων της \mathcal{X} είναι αποδεκτός, δηλαδή ο πυρήνας του ανήκει στην \mathcal{X} . Τέλος, η πλήρης υποκατηγορία \mathcal{X} της \mathcal{C} , είναι προφανώς προσθετική με μηδενικό αντικείμενο το μηδενικό πρότυπο. Άρα η κατηγορία \mathcal{X} πληρεί τις γενικές μας υποθέσεις.

Η πλήρης υποκατηγορία ω της \mathcal{X} , είναι κατά τριτομμένο τρόπο κλειστή σε (πεπερασμένα) ευθέα αθροίσματα, σε ευθείς προσθετέους και σε ισομορφισμούς στην \mathcal{X} , ενώ είναι προσθετική με μηδενικό αντικείμενο το μηδενικό πρότυπο. Απομένει λοιπόν να δείξουμε ότι η ω είναι συγγενήτορας για την \mathcal{X} , δηλαδή, ότι για κάθε πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό R -πρότυπο M που ικανοποιεί τη σχέση $\text{Ext}_R^i(M, R) = 0$ για κάθε $i \neq 0$, υπάρχει μια σύντομη ακριβής ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα:

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow Q \longrightarrow X \longrightarrow 0,$$

όπου Q είναι πεπερασμένα παραγόμενο και προβολικό, και X είναι πεπερασμένα παραγόμενο με την ιδιότητα ότι $\text{Ext}_R^i(X, R) = 0$ για κάθε $i \neq 0$. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε ένα πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό R -πρότυπο M που ικανοποιεί τη σχέση $\text{Ext}_R^i(M, R) = 0$ για κάθε $i \neq 0$. Επειδή ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether, και το αριστερό R -πρότυπο M είναι πεπερασμένα παραγόμενο, μπορούμε να διαλέξουμε μια ακριβή ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα

$$\ell: \quad \dots \xrightarrow{d_j} P_j \xrightarrow{d_{j-1}} \dots \xrightarrow{d_1} P_1 \xrightarrow{d_0} P_0 \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0,$$

όπου κάθε P_j είναι πεπερασμένα παραγόμενο και προβολικό. Στη συνέχεια, «σπάμε» την ακριβή ακολουθία ℓ σε σύντομες ακριβείς ακολουθίες για κάθε $m \geq 1$,

$$\ell_m: \quad 0 \longrightarrow K_m \longrightarrow P_{m-1} \longrightarrow K_{m-1} \longrightarrow 0,$$

όπου $K_0 = M$, $K_1 = \text{Ker } f$ και $K_m = \text{Ker } d_{m-2}$ για κάθε $m \geq 2$. Αν εφαρμόσουμε τώρα τον αντισυναλλοίωτο συναρτητή $\text{Hom}_R(-, R)$, όπου ο δακτύλιος R έχει ιδωθεί ως αριστερό R -πρότυπο, στη σύντομη ακριβή ακολουθία ℓ_1 , τότε η επαγόμενη ακολουθία από δεξιά R -πρότυπα:

$$\ell_1^*: \quad 0 \longrightarrow M^* \longrightarrow P_0^* \longrightarrow K_1^* \longrightarrow 0,$$

είναι ακριβής, διότι από την υπόθεση έχουμε ότι $\text{Ext}_R^i(M, R) = 0$ για κάθε $i \neq 0$. Επιπλέον, η εφαρμογή του αντισυναλλοίωτου συναρτητή $\text{Hom}_R(-, R)$ στη σύντομη ακριβή ακολουθία ℓ_1 , μας δίνει ότι $\text{Ext}_R^i(K_1, R) = 0$ για κάθε $i > 0$. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, και εφαρμόζοντας ξανά τον αντισυναλλοίωτο συναρτητή $\text{Hom}_R(-, R)$ στη σύντομη ακριβή ακολουθία ℓ_2 , οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η ακολουθία από δεξιά R -πρότυπα:

$$\ell_2^*: \quad 0 \longrightarrow K_1^* \longrightarrow P_1^* \longrightarrow K_2^* \longrightarrow 0,$$

είναι ακριβής, και επιπρόσθετα ότι $\text{Ext}_R^i(K_2, R) = 0$ για κάθε $i > 0$. Επαγωγικά λοιπόν, καταλήγουμε ότι για κάθε $m \geq 1$, η ακολουθία ℓ_m^* είναι μια σύντομη ακριβής ακολουθία από δεξιά R -πρότυπα. Δηλαδή, το σύμπλοκο

$$\ell^*: \quad 0 \longrightarrow M^* \xrightarrow{f^*} P_0^* \xrightarrow{d_0^*} P_1^* \longrightarrow \dots \longrightarrow P_j^* \xrightarrow{d_j^*} \dots,$$

είναι ακριβής στην κατηγορία $\text{Mod-}R$ των δεξιών R -πρότυπων. Έτσι, μπορούμε να «σπάσουμε» την ακριβή ακολουθία ℓ^* σε σύντομες ακριβείς ακολουθίες για κάθε $m \geq 1$,

$$\ell_m^*: \quad 0 \longrightarrow K_{m-1}^* \longrightarrow P_{m-1}^* \longrightarrow K_m^* \longrightarrow 0,$$

όπου $K_0^* = M^*$ και $K_m^* = \text{Ker } d_m^*$ για κάθε $m \geq 0$. Ισχυριζόμαστε τώρα ότι το δεξιό R -πρότυπο M^* είναι πεπερασμένα παραγόμενο, καθώς και ότι για $m \geq 0$, τα δεξιά R -πρότυπα P_m^* είναι πεπερασμένα παραγόμενα και προβολικά. Για να διαπιστώσουμε τον ισχυρισμό αυτό, χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε την υπόθεση ότι ο δακτύλιος R είναι δεξιός δακτύλιος της Noether. Επειδή

λοιπόν το αριστερό R -πρότυπο M είναι πεπερασμένα παραγόμενο, υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός n , και μια ακριβής ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα :

$$\mathcal{J} : R^{(n)} \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Αν εφαρμόσουμε τον αντισυναλλοίωτο συναρτητή $\text{Hom}_R(-, R)$, όπου ο δακτύλιος R έχει ιδωθεί ως αριστερό R -πρότυπο, στην ακριβή ακολουθία \mathcal{J} , τότε η επαγόμενη ακολουθία από δεξιά R -πρότυπα :

$$\mathcal{J}^* : 0 \longrightarrow M^* \longrightarrow (R^{(n)})^*,$$

είναι ακριβής, διότι ο $\text{Hom}_R(-, R)$ είναι αριστερά ακριβής. Όμως, η ακριβής ακολουθία \mathcal{J}^* είναι ισόμορφη με την ακριβή ακολουθία :

$$\mathcal{K} : 0 \longrightarrow M^* \longrightarrow R^{(n)},$$

αφού $(R^{(n)})^* = \text{Hom}_R(R^{(n)}, R) \cong (\text{Hom}_R(R, R))^{(n)} \cong R_R^{(n)}$. Συνεπώς, αφού το δεξιό R -πρότυπο $R^{(n)}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο, και ο δακτύλιος R είναι δεξιός δακτύλιος της Noether, έπεται ότι το δεξιό R -πρότυπο $R^{(n)}$ είναι ένα πρότυπο της Noether. Άρα, το δεξιό R -πρότυπο M^* είναι πεπερασμένα παραγόμενο, ως ισόμορφο με το πεπερασμένα παραγόμενο δεξιό R -πρότυπο $\text{Im}(M^* \longrightarrow R^{(n)})$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι για κάθε $m \geq 0$ τα δεξιά R -πρότυπα P_m^* είναι επίσης πεπερασμένα παραγόμενα. Εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι κάθε αριστερό R -πρότυπο P_m , για $m \geq 0$, είναι πεπερασμένα παραγόμενο και προβολικό, θα δείξουμε ότι κάθε δεξιό R -πρότυπο P_m^* για $m \geq 0$ είναι επίσης προβολικό. Έτσι, αφού κάθε P_m για $m \geq 0$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο και προβολικό, υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός n_m και κάποιο αριστερό R -πρότυπο Q_m , (για την ακρίβεια, το πρότυπο Q_m θα είναι προβολικό), τέτοιο ώστε $R^{(n_m)} \cong Q_m \oplus P_m$ για κάθε $m \geq 0$. Χρησιμοποιώντας στην συνέχεια το γεγονός ότι κάθε (αντι)συναλλοίωτος συναρτητής διατηρεί ισομορφισμούς, και ότι κάθε προσθετικός (αντι)συναλλοίωτος συναρτητής διατηρεί πεπερασμένα ευθέα αθροίσματα, προκύπτει ότι :

$$R_R^{(n_m)} \cong Q_m^* \oplus P_m^*,$$

για κάθε $m \geq 0$. Επομένως, έπεται ότι κάθε δεξιό R -πρότυπο P_m^* για $m \geq 0$ είναι προβολικό, ως ευθύ προσθετός του προβολικού δεξιού R -προτύπου $R^{(n_m)}$ για $m \geq 0$. Για να καταλήξουμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα, δηλαδή ότι η κατηγορία ω είναι συνγεννήτορας για την κατηγορία \mathcal{X} , χρειαζόμαστε τις ακόλουθες τρεις συνθήκες :

1. Για κάθε $m \geq 0$, τα δεξιά R -πρότυπα $K_m^* = \text{Ker } d_m^*$ ικανοποιούν τη σχέση $\text{Ext}_R^i(K_m^*, R) = 0$ για κάθε $i \neq 0$.
2. Το πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό R -πρότυπο M είναι ανακλαστικό.
3. Αν $0 \longrightarrow L \longrightarrow Q \xrightarrow{p} M^* \longrightarrow 0$ είναι μια ακριβής ακολουθία από δεξιά R -πρότυπα, όπου Q είναι πεπερασμένα παραγόμενο και προβολικό, τότε το αριστερό R -πρότυπο L^* ικανοποιεί την ισότητα $\text{Ext}_R^i(L^*, R) = 0$ για κάθε $i \neq 0$.

Υποθέτουμε τώρα ότι ισχύουν οι συνθήκες 1), 2) και 3), τις οποίες θα αποδείξουμε στο Λήμμα (7.2.12) που ακολουθεί. Επειδή λοιπόν ο δακτύλιος R είναι δεξιός δακτύλιος της Noether, και το δεξιό R -πρότυπο M^* είναι πεπερασμένα παραγόμενο, υπάρχει μια σύντομη ακριβής ακολουθία από δεξιά R -πρότυπα,

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow Q \xrightarrow{p} M^* \longrightarrow 0, \quad (7.13)$$

όπου L είναι πεπερασμένα παραγόμενο και Q είναι πεπερασμένα παραγόμενο και προβολικό. Τότε το αριστερό R -πρότυπο L^* είναι πεπερασμένα παραγόμενο, και το αριστερό R -πρότυπο Q^* είναι πεπερασμένα παραγόμενο και προβολικό. Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει, όπως και πριν, χρησιμοποιώντας ωστόσο το γεγονός ότι ο δακτύλιος R είναι αυτή τη φορά, αριστερός δακτύλιος της Noether, καθώς και ότι το δεξιό R -πρότυπο L είναι πεπερασμένα παραγόμενο, ενώ το δεξιό

R -πρότυπο Q είναι πεπερασμένα παραγόμενο και προβολικό. Έτσι, αν εφαρμόσουμε τη συνθήκη 3) στην ακριβή ακολουθία (7.13), τότε παίρνουμε ότι το αριστερό R -πρότυπο L^* είναι αντικείμενο της \mathcal{X} . Επιπλέον, αν εφαρμόσουμε τον αντισυναλλοίωτο συναρτητή $\text{Hom}_R(-, R)$, όπου ο δακτύλιος R έχει ιδωθεί ως δεξιό R -πρότυπο στη σύντομη ακριβή ακολουθία (7.13), τότε η επαγόμενη ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα,

$$0 \longrightarrow M^{**} \xrightarrow{p^*} Q^* \longrightarrow L^* \longrightarrow 0, \quad (7.14)$$

είναι ακριβής, αφού η συνθήκη 1) μας δίνει ιδιαίτερα ότι $\text{Ext}_R^1(M^*, R) = 0$. Χρησιμοποιώντας τέλος τη συνθήκη 2), δηλαδή, το γεγονός ότι ο φυσικός ομομορφισμός $\varepsilon_M: M \longrightarrow M^{**}$ είναι ισομορφισμός, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η ακριβής ακολουθία (7.14), είναι ισόμορφη με την ακριβή ακολουθία αριστερών R -πρότυπων:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{p^* \circ \varepsilon_M} Q^* \longrightarrow L^* \longrightarrow 0. \quad (7.15)$$

όπου λόγω των παραπάνω, το Q^* είναι αντικείμενο της ω και το L^* είναι αντικείμενο της \mathcal{X} . Συνεπώς, από τη σύντομη ακριβή ακολουθία (7.15), συμπεραίνουμε ότι η κατηγορία ω είναι συγγενήτορας για την κατηγορία \mathcal{X} , όπως επιθυμούσαμε.

Όπως υποσχεθήκαμε, αποδεικνύουμε τώρα τις τρεις συνθήκες τις οποίες χρησιμοποιήσαμε παραπάνω.

Λήμμα 7.2.12. *Διατηρώντας τους παραπάνω συμβολισμούς και υποθέσεις, για το τυχαίο αντικείμενο M της κατηγορίας \mathcal{X} ισχύουν οι τρεις ακόλουθες συνθήκες:*

1. Για κάθε $m \geq 0$, τα δεξιά R -πρότυπα $K_m^* = \text{Ker } d_m^*$ ικανοποιούν τη σχέση $\text{Ext}_R^i(K_m^*, R) = 0$ για κάθε $i \neq 0$.
2. Το πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό R -πρότυπο M είναι ανακλαστικό.
3. Αν $0 \longrightarrow L \longrightarrow Q \xrightarrow{p} M^* \longrightarrow 0$ είναι μια ακριβής ακολουθία από δεξιά R -πρότυπα, όπου Q είναι πεπερασμένα παραγόμενο και προβολικό, τότε το αριστερό R -πρότυπο L^* ικανοποιεί την ισότητα $\text{Ext}_R^i(L^*, R) = 0$ για κάθε $i \neq 0$.

Απόδειξη. 1) Επειδή κάθε δεξιό R -πρότυπο P_m^* για $m \geq 0$ είναι προβολικό, παίρνουμε ότι $\text{Ext}_R^i(P_m^*, R) = 0$, για κάθε $i > 0$ και για κάθε $m \geq 0$. Επιπλέον, επειδή ο συναρτητής $\text{Ext}_R^i(-, -)$ υπολογίζεται μέσω προβολικών ή ενέσιμων αναλύσεων, οι οποίες είναι θετικά (ακριβή) σύμπλοκα, έχουμε ότι $\text{Ext}_R^i(P_m^*, R) = 0$ για κάθε $i \neq 0$. Συνεπώς, για κάθε $m \geq 0$ υπάρχουν φυσικοί ισομορφισμοί:

$$\text{Ext}_R^i(K_m^*, R) \cong \text{Ext}_R^{i+1}(K_{m+1}^*, R),$$

για κάθε $i > 0$. Δηλαδή, για $m \geq 0$ και για έναν οποιοδήποτε φυσικό αριθμό n , οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι:

$$\text{Ext}_R^i(K_{m-n}^*, R) \cong \text{Ext}_R^{i+n}(K_m^*, R), \quad (7.16)$$

για κάθε $i > 0$. Η υπόθεση τώρα ότι ο δακτύλιος R έχει ως δεξιό R -πρότυπο πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση ίση με d , μας δίνει την ισότητα $\text{Ext}_R^\kappa(-, R) = 0$ για κάθε $\kappa > d$. Έτσι, αν διαλέξουμε έναν φυσικό αριθμό n ώστε $n \geq d$, τότε για κάθε $m \geq 0$ έπεται ότι $\text{Ext}_R^{i+n}(K_m^*, R) = 0$ για $i > 0$. Έτσι, χρησιμοποιώντας τη σχέση (7.16), συμπεραίνουμε ότι $\text{Ext}_R^i(K_{m-n}^*, R) = 0$ για κάθε $i > 0$ και για κάθε $m \geq 0$. Επομένως, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $\text{Ext}_R^i(K_m^*, R) = 0$ για κάθε $i > 0$ και για κάθε $m \geq 0$, αποτέλεσμα το οποίο, μας εξασφαλίζει την ισότητα $\text{Ext}_R^i(K_m^*, R) = 0$ για κάθε $i \neq 0$ και για κάθε $m \geq 0$.

2) Θέτουμε $D(M) = \text{Coker } d_0^*$. Τότε η ακρίβεια του συμπλόκου ℓ^* , μας επάγει την ακρίβεια της ακολουθίας από δεξιά R -πρότυπα:

$$0 \longrightarrow M^* \xrightarrow{f^*} P_0^* \xrightarrow{d_0^*} P_1^* \xrightarrow{\rho} D(M) \longrightarrow 0, \quad (7.17)$$

όπου P_0^*, P_1^* είναι πεπερασμένα παραγόμενα και προβολικά. Μπορούμε λοιπόν να «πάσουμε» την ακριβή ακολουθία (7.17), στις εξής δύο σύντομες ακριβείς ακολουθίες:

$$\mathfrak{R}_1: \quad 0 \longrightarrow M^* \xrightarrow{f^*} P_0^* \xrightarrow{\pi} L \longrightarrow 0$$

και

$$\mathfrak{R}_2: \quad 0 \longrightarrow L \xrightarrow{i} P_1^* \xrightarrow{\rho} D(M) \longrightarrow 0,$$

όπου $L = \text{Ker } \rho = \text{Im } d_0^*$, και $i \circ \pi = d_0^*$. Επειδή το δεξιό R -πρότυπο P_1^* είναι προβολικό, έπεται ότι $\text{Ext}_R^i(L, R) \cong \text{Ext}_R^{i+1}(D(M), R)$ για κάθε $i > 0$. Αν εφαρμόσουμε στη συνέχεια τον αντισυναλλοίωτο συναρτητή $\text{Hom}_R(-, R)$, όπου ο δακτύλιος R έχει ιδωθεί ως δεξιό R -πρότυπο, στις σύντομες ακριβείς ακολουθίες \mathfrak{R}_1 και \mathfrak{R}_2 , τότε παίρνουμε αντίστοιχα, τις ακριβείς ακολουθίες από αριστερά R -πρότυπα:

$$\mathfrak{R}_1^*: \quad 0 \longrightarrow L^* \xrightarrow{\pi^*} P_0^{**} \xrightarrow{f^{**}} M^{**} \longrightarrow \text{Ext}_R^1(L, R) \longrightarrow \text{Ext}_R^1(P_0^*, R),$$

και

$$\mathfrak{R}_2^*: \quad 0 \longrightarrow D(M)^* \xrightarrow{\rho^*} P_1^{**} \xrightarrow{i^*} L^* \xrightarrow{\Phi} \text{Ext}_R^1(D(M), R) \longrightarrow \text{Ext}_R^1(P_1^*, R).$$

Όμως, αφού τα δεξιά R -πρότυπα P_0^* και P_1^* είναι προβολικά, οι ακριβείς ακολουθίες \mathfrak{R}_1^* και \mathfrak{R}_2^* , είναι στην πραγματικότητα οι ακριβείς ακολουθίες:

$$\mathfrak{R}_1^*: \quad 0 \longrightarrow L^* \xrightarrow{\pi^*} P_0^{**} \xrightarrow{f^{**}} M^{**} \longrightarrow \text{Ext}_R^1(L, R) \longrightarrow 0,$$

και

$$\mathfrak{R}_2^*: \quad 0 \longrightarrow D(M)^* \xrightarrow{\rho^*} P_1^{**} \xrightarrow{i^*} L^* \xrightarrow{\Phi} \text{Ext}_R^1(D(M), R) \longrightarrow 0,$$

αντίστοιχα. Η ισότητα $i \circ \pi = d_0^*$, καθώς και η ακρίβεια της ακολουθίας \mathfrak{R}_2^* , μας εξασφαλίζουν ότι το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό με ακριβείς γραμμές:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & D(M)^* & \xrightarrow{\rho^*} & P_1^{**} & \xrightarrow{i^*} & L^* & & (7.18) \\ & & \parallel & & \parallel & & \downarrow \pi^* & & \\ 0 & \longrightarrow & D(M)^* & \xrightarrow{\rho^*} & P_1^{**} & \xrightarrow{d_0^{**}} & P_0^{**} & & \end{array}$$

διότι $\pi^* \circ i^* = (i \circ \pi)^* = (d_0^*)^* = d_0^{**}$. Σημειώνουμε ότι ο ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων π^* είναι μονομορφισμός, αφού η ακολουθία \mathfrak{R}_1^* είναι ακριβής. Χρησιμοποιώντας τώρα το Πόρισμα (5.3.7), συμπεραίνουμε ότι τα πεπερασμένα παραγόμενα και προβολικά αριστερά R -πρότυπα P_0 και P_1 , είναι ανακλαστικά, δηλαδή, οι φυσικοί ομομορφισμοί $\varepsilon_{P_i}: P_i \longrightarrow P_i^{**}$ για $i = 0, 1$, είναι ισομορφισμοί. Συνεπώς, η δεύτερη γραμμή του διαγράμματος (7.18), είναι ισόμορφη με την ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα:

$$0 \longrightarrow D(M)^* \xrightarrow{\alpha} P_1 \xrightarrow{d_0} P_0,$$

και άρα, το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & D(M)^* & \xrightarrow{\rho^*} & P_1^{**} & \xrightarrow{d_0^{**}} & P_0^{**} & & (7.19) \\ & & \parallel & & \downarrow \varepsilon_{P_1}^{-1} & & \downarrow \varepsilon_{P_0}^{-1} & & \\ 0 & \longrightarrow & D(M)^* & \xrightarrow{\alpha} & P_1 & \xrightarrow{d_0} & P_0 & & \end{array}$$

είναι μεταθετικό με ακριβείς γραμμές. Παρατηρώντας ότι $\text{Coker } d_0 \cong M$, και θέτοντας $g = f \circ \varepsilon_{P_0}^{-1}$, έχουμε ότι ο ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων $g: P_0^{**} \longrightarrow M$ είναι επιμορφισμός,

ως σύνθεση του επιμορφισμού f και του ισομορφισμού $\varepsilon_{P_0}^{-1}$, και επιπρόσθετα, από το μεταθετικό διάγραμμα (7.19), ότι το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & D(M)^* & \xrightarrow{\rho^*} & P_1^{**} & \xrightarrow{d_0^{**}} & P_0^{**} & \xrightarrow{g} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \varepsilon_{P_1}^{-1} & & \downarrow \varepsilon_{P_0}^{-1} & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & D(M)^* & \xrightarrow{\alpha} & P_1 & \xrightarrow{d_0} & P_0 & \xrightarrow{f} & M & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (7.20)$$

είναι μεταθετικό με ακριβείς γραμμές. Συνδυάζοντας λοιπόν τα παραπάνω, συμπεραίνουμε την ύπαρξη ενός ομομορφισμού αριστερών R -προτύπων,

$$h: \text{Ext}_R^1(D(M), R) \longrightarrow M,$$

με την ιδιότητα, $h \circ \Phi = g \circ \pi^*$. Συνεπώς, έπεται ότι το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό με ακριβείς γραμμές και στήλες:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & 0 & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ & & & 0 & & \text{Ker } h & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & D(M)^* & \xrightarrow{\rho^*} & P_1^{**} & \xrightarrow{i^*} & L^* & \xrightarrow{\Phi} & \text{Ext}_R^1(D(M), R) & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \downarrow \pi^* & & \downarrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & D(M)^* & \xrightarrow{\rho^*} & P_1^{**} & \xrightarrow{d_0^{**}} & P_0^{**} & \xrightarrow{g} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & \downarrow f^{**} & & \downarrow & & \\ & & & & & & M^{**} & & \text{Coker } h & & \\ & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & & & \text{Ext}_R^1(L, R) & & 0 & & \\ & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & & & 0 & & 0 & & \end{array} \quad (7.21)$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι ο ομομορφισμός h , είναι ο μοναδικός ομομορφισμός με την ιδιότητα το διάγραμμα (7.21) να είναι μεταθετικό. Παρατηρώντας στη συνέχεια ότι:

$$\text{Coker } \rho^* \cong \text{Im } i^* = \text{Ker } \Phi, \quad \& \quad \text{Coker } \rho^* \cong \text{Im } d_0^{**} = \text{Ker } g,$$

οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι $\text{Im } i^* \cong \text{Im } d_0^{**}$. Ως συνέπεια αυτού, από το μεταθετικό διάγραμμα (7.21), συμπεραίνουμε ότι το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό με ακριβείς γραμμές:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Im } i^* & \longrightarrow & L^* & \xrightarrow{\Phi} & \text{Ext}_R^1(D(M), R) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \pi^* & & \downarrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Im } d_0^{**} & \longrightarrow & P_0^{**} & \xrightarrow{g} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Αν εφαρμόσουμε λοιπόν το “Snake Lemma” στο προηγούμενο διάγραμμα, τότε προκύπτει ότι $\text{Ker } h = 0$, καθώς και ότι $\text{Coker } \pi^* \cong \text{Coker } h$. Όμως,

$$\text{Coker } \pi^* = P_0^{**} / \text{Im } \pi^* = P_0^{**} / \text{Ker } f^{**} \cong \text{Im } f^{**}.$$

Άρα, παίρνουμε ότι $\text{Coker } h \cong \text{Im } f^{**}$, και κατ' επέκταση, ότι η ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα

$$0 \longrightarrow \text{Ext}_R^1(D(M), R) \xrightarrow{h} M \xrightarrow{\lambda} \text{Im } f^{**} \longrightarrow 0, \quad (7.22)$$

είναι ακριβής. Η συγκόλληση τώρα της ακριβούς ακολουθίας (7.22), με την ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \text{Im } f^{**} \xrightarrow{i'} M^{**} \longrightarrow \text{Ext}_R^1(L, R) \longrightarrow 0,$$

όπου i' παριστάνει τη φυσική έγκλειση, είναι η ακριβής ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα :

$$0 \longrightarrow \text{Ext}_R^1(D(M), R) \xrightarrow{h} M \xrightarrow{i' \circ \lambda} M^{**} \longrightarrow \text{Ext}_R^1(L, R) \longrightarrow 0.$$

Εύκολα προκύπτει ότι $i' \circ \lambda = \varepsilon_M$. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, καθώς και το γεγονός ότι $\text{Ext}_R^1(L, R) \cong \text{Ext}_R^2(D(M), R)$, καταλήγουμε ότι η ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα

$$0 \longrightarrow \text{Ext}_R^1(D(M), R) \xrightarrow{h} M \xrightarrow{\varepsilon_M} M^{**} \longrightarrow \text{Ext}_R^2(D(M), R) \longrightarrow 0, \quad (7.23)$$

είναι ακριβής. Ωστόσο, αν παρατηρήσουμε ότι,

$$D(M) = \text{Coker } d_0^* \cong \text{Im } d_1^* = \text{Ker } d_2^*,$$

και χρησιμοποιήσουμε τη συνθήκη 1) που αποδείξαμε προηγουμένως, τότε προφανώς έπονται οι ισότητες:

$$\text{Ext}_R^1(D(M), R) = 0 = \text{Ext}_R^2(D(M), R).$$

Επομένως, από την ακριβή ακολουθία (7.23), καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο φυσικός ομομορφισμός αριστερών R -πρότυπων $\varepsilon_M: M \longrightarrow M^{**}$, είναι ισομορφισμός, δηλαδή, ότι το πεπερασμένο παραγόμενο αριστερό R -πρότυπο M είναι ανακλαστικό, όπως επιθυμούσαμε.

3) Η συνθήκη 1) που αποδείξαμε προηγουμένως, μας δίνει ιδιαίτερα ότι

$$\text{Ext}_R^1(M^*, R) = \text{Ext}_R^1(K_0^*, R) = 0,$$

και η συνθήκη 2) μας εξασφαλίζει ότι ο φυσικός ομομορφισμός $\varepsilon_M: M \longrightarrow M^{**}$, είναι ισομορφισμός. Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα,

$$0 \longrightarrow M^{**} \xrightarrow{p^*} Q^* \longrightarrow L^* \longrightarrow 0, \quad (7.24)$$

είναι ακριβής, και ότι το αριστερό R -πρότυπο M^{**} είναι αντικείμενο της κατηγορίας \mathcal{X} , ως ισόμορφο με το αντικείμενο M της \mathcal{X} . Επιπλέον, από το Παράδειγμα (7.2.1 1), έχουμε ότι το αριστερό R -πρότυπο Q^* είναι πεπερασμένα παραγόμενο και προβολικό. Υπενθυμίζουμε ότι το αποτέλεσμα αυτό, προέκυψε χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το δεξιό R -πρότυπο Q είναι πεπερασμένα παραγόμενο και προβολικό, καθώς και την υπόθεση ότι ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether. Αν εφαρμόσουμε λοιπόν τον αντισυναλλοίωτο συναρτητή $\text{Hom}_R(-, R)$, όπου ο δακτύλιος R έχει ιδωθεί ως αριστερό R -πρότυπο, στη σύντομη ακριβή ακολουθία (7.24), τότε οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι:

$$0 = \text{Ext}_R^i(M^{**}, R) \cong \text{Ext}_R^{i+1}(L^*, R), \quad \forall i > 1,$$

αφού το M^{**} είναι αντικείμενο της \mathcal{X} , και το Q^* είναι αντικείμενο της ω . Επομένως, έπεται η ισότητα $\text{Ext}_R^i(L^*, R) = 0$, για κάθε $i > 1$. Έτσι, προκειμένου να εξασφαλίσουμε τη συνθήκη 3), αρκεί να δείξουμε ότι $\text{Ext}_R^1(L^*, R) = 0$, ή ισοδύναμα, ότι η ακολουθία από δεξιά R -πρότυπα:

$$0 \longrightarrow L^{**} \longrightarrow Q^{**} \xrightarrow{p^{**}} M^{***} \longrightarrow 0, \quad (7.25)$$

είναι ακριβής. Επειδή το δεξιό R -πρότυπο Q είναι πεπερασμένα παραγόμενο και προβολικό, και αφού το αριστερό R -πρότυπο M είναι ανακλαστικό, χρησιμοποιώντας το Πόρισμα (5.3.7),

καθώς και την Παρατήρηση (5.3.4), παίρνουμε ότι τα δεξιά R -πρότυπα Q και M^* είναι ανακλαστικά. Χρησιμοποιώντας τέλος, το γεγονός ότι για κάθε (δεξιό) R -πρότυπο N , ο ομομορφισμός $\varepsilon_N: N \rightarrow N^{**}$ είναι φυσικός στο N , καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό με ακριβείς γραμμές:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & Q & \xrightarrow{p} & M^* & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varepsilon_L & & \cong \downarrow \varepsilon_Q & & \cong \downarrow \varepsilon_{M^*} & & \\ 0 & \longrightarrow & L^{**} & \longrightarrow & Q^{**} & \xrightarrow{p^{**}} & M^{***} & & \end{array} \quad (7.26)$$

Σημειώνουμε ότι η ακρίβεια των γραμμών του διαγράμματος (7.26), προκύπτει από την υπόθεσή, καθώς και από το γεγονός ότι ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής $\text{Hom}_R(-, R)$ είναι αριστερά ακριβής. Έτσι, αφού $\varepsilon_{M^*} \circ p = p^{**} \circ \varepsilon_Q$, έπεται ότι $p^{**} = \varepsilon_{M^*} \circ p \circ \varepsilon_Q^{-1}$, και κατ' επέκταση, ότι ο ομομορφισμός δεξιών R -προτύπων p^{**} είναι επιμορφισμός. Άρα, η ακολουθία (7.25) είναι ακριβής, όπως επιθυμούσαμε. ■

• • • • •

Ολοκληρώνουμε την παρούσα ενότητα, παραθέτοντας μια εφαρμογή του Θεωρήματος (7.2.7), στην περίπτωση που έχουμε συγκεκριμενοποιήσει τις κατηγορίες \mathcal{C} , \mathcal{X} και ω .

Θεώρημα 7.2.13. Έστω R ένας προσειριστικός δακτύλιος με μονάδα. Υποθέτουμε ότι ο δακτύλιος R είναι αριστερός και δεξιός δακτύλιος της Noether, όπου όταν ιδωθεί ως δεξιό R -πρότυπο, να έχει πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση. Τότε για κάθε πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό R -πρότυπο N που ικανοποιεί την ισότητα $\text{Ext}_R^i(N, R) = 0$ για κάθε επαρκώς μεγάλο i , υπάρχουν πεπερασμένα παραγόμενα αριστερά R -πρότυπα με πεπερασμένη προβολική διάσταση Y_N και Y^N , καθώς και πεπερασμένα παραγόμενα αριστερά R -πρότυπα X_N και X^N με την ιδιότητα $\text{Ext}_R^i(X_N, R) = \text{Ext}_R^i(X^N, R)$ για κάθε $i \neq 0$, έτσι ώστε οι ακολουθίες

$$0 \longrightarrow Y_N \longrightarrow X_N \longrightarrow N \longrightarrow 0 \quad \& \quad 0 \longrightarrow N \longrightarrow Y^N \longrightarrow X^N \longrightarrow 0$$

είναι ακριβείς.

Απόδειξη. Παρατηρώντας ότι η $\hat{\mathcal{X}}$ αποτελείται από όλα τα πεπερασμένα παραγόμενα αριστερά R -πρότυπα N που ικανοποιούν την ισότητα $\text{Ext}_R^i(N, R) = 0$ για όλα τα επαρκώς μεγάλα i , καθώς και ότι $\hat{\omega}$ είναι η κατηγορία των πεπερασμένα παραγόμενων και προβολικών αριστερών R -προτύπων, παίρνουμε από το Θεώρημα (7.2.7) το ζητούμενο. ■

7.3 Πλαίσια Των Auslander - Buchweitz Και Ενέσιμοι Συνγεννήτορες

Στην προηγούμενη ενότητα, θεωρώντας ένα ζεύγος (\mathcal{X}, ω) από πλήρεις υποκατηγορίες της αβελιανής κατηγορίας \mathcal{C} , οι οποίες είναι εφοδιασμένες με ορισμένες ιδιότητες, αποδείξαμε την ύπαρξη \mathcal{X} -προσεγγίσεων και $\hat{\omega}$ -καλυμμάτων. Το επόμενο βήμα λοιπόν, είναι για ένα τέτοιο ζεύγος (\mathcal{X}, ω) , να μελετήσουμε την μοναδικότητα των \mathcal{X} -προσεγγίσεων και των $\hat{\omega}$ -καλυμμάτων.

Αν θεωρήσουμε ένα αντικείμενο C της $\hat{\mathcal{X}}$, και δύο \mathcal{X} -προσεγγίσεις του C :

$$0 \longrightarrow Y_C \longrightarrow X_C \longrightarrow C \longrightarrow 0 \quad \& \quad 0 \longrightarrow Y'_C \longrightarrow X'_C \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

τότε το ελάχιστο που θα περιμέναμε, είναι αυτές οι \mathcal{X} -προσεγγίσεις του C να συγκρίνονται, με την έννοια ότι, υπάρχει μορφισμός $\phi: X_C \rightarrow X'_C$ στην \mathcal{C} , τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να

είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Y_C & \longrightarrow & X_C & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \phi & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & Y'_C & \longrightarrow & X'_C & \longrightarrow & C \longrightarrow 0. \end{array}$$

Σημειώνουμε ότι η ύπαρξη του μορφισμού ϕ στην \mathcal{C} , μας δίνει έναν μοναδικό μορφισμό $Y_C \rightarrow Y'_C$ στην \mathcal{C} , με την ιδιότητα το προηγούμενο διάγραμμα να είναι μεταθετικό. Επιπλέον, η ύπαρξη ενός μορφισμού στην \mathcal{C} , όπως ο μορφισμός ϕ , εξασφαλίζεται υποθέτοντας ότι $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X_C, Y'_C) = 0$. Έτσι, προκειμένου να μπορούμε να συγκρίνουμε δύο \mathcal{X} -προσεγγίσεις ενός αντικείμενου της κατηγορίας \mathcal{X} , αρκεί να έχουμε ότι $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, Y) = 0$ για κάθε αντικείμενο X της \mathcal{X} , και για κάθε αντικείμενο Y της $\hat{\omega}$. Στόχος μας στην παρούσα ενότητα, είναι η μελέτη της συνθήκης αυτής, καθώς και των συνεπειών της. Ωστόσο, πριν περάσουμε στη μελέτη αυτή, χρειάζεται να εισάγουμε πρώτα ορισμούς και συμβολισμούς.

Υπενθυμίζουμε ότι για μια οποιαδήποτε αβελιανή κατηγορία \mathcal{D} χωρίς απαραίτητα προβολικά ή ενέσιμα αντικείμενα, μπορούμε για κάθε $i \geq 0$ και για οποιαδήποτε δύο αντικείμενα D και D' της \mathcal{D} , να ορίσουμε τις αβελιανές ομάδες $\text{Ext}_{\mathcal{D}}^i(D, D')$, βλέπε [45]. Συνεπώς, επειδή έχουμε υποθέσει ότι η κατηγορία \mathcal{C} είναι αβελιανή, μπορούμε για κάθε δύο αντικείμενα A και C της \mathcal{C} , να ορίσουμε την A -ενέσιμη διάσταση του C , ή ισοδύναμα, την C -προβολική διάσταση του A , ως εξής:

Ορισμός 7.3.1. Έστω A και C δύο αντικείμενα της \mathcal{C} . Αν υπάρχει φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(A, C) = 0$ για κάθε $i > n$, τότε ο ελάχιστος τέτοιος φυσικός αριθμός n καλείται η **A -ενέσιμη διάσταση του C** , (**A -injective dimension of C**), ή **ισοδύναμα**, η **C -προβολική διάσταση του A** , (**C -projective dimension of A**). Αν δεν υπάρχει τέτοιος φυσικός αριθμός n , ορίζουμε την A -ενέσιμη διάσταση του C , ή ισοδύναμα, την C -προβολική διάσταση του A , να είναι ίση με άπειρο.

Για οποιαδήποτε αντικείμενα A και C της \mathcal{C} , συμβολίζουμε την A -ενέσιμη διάσταση του C με $A\text{-inj. dim } C$, και την A -προβολική διάσταση του C με $A\text{-proj. dim } C$.

Παρατήρηση 7.3.2. Αν A και C είναι δύο αντικείμενα της \mathcal{C} , τέτοια ώστε η A -ενέσιμη διάσταση του C , ή ισοδύναμα, η C -προβολική διάσταση του A , να είναι πεπερασμένη ίση με n , τότε $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(A, C) \neq 0$. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(A, C) = 0$, τότε έπεται ότι $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(A, C) = 0$ για κάθε $i > n - 1$, διότι η υπόθεση μας δίνει την ισότητα $A\text{-inj. dim } C = C\text{-proj. dim } A = n$. Το αποτέλεσμα όμως αυτό, αντιτίθεται στην ελαχιστότητα του φυσικού αριθμού n , αφού $n > n - 1$.

Ορισμός 7.3.3. Αν \mathcal{B} είναι μια υποκατηγορία της \mathcal{C} , τότε για κάθε αντικείμενο A της \mathcal{C} , ορίζουμε

$$A\text{-inj. dim } \mathcal{B} = \max\{A\text{-inj. dim } B \mid B \in \text{ob}(\mathcal{B})\}.$$

Διϊκά, για κάθε αντικείμενο C της \mathcal{C} , ορίζουμε

$$C\text{-proj. dim } \mathcal{B} = \max\{C\text{-proj. dim } B \mid B \in \text{ob}(\mathcal{B})\}.$$

Παρατήρηση 7.3.4. Αν \mathcal{B} είναι μια υποκατηγορία της \mathcal{C} , και A είναι ένα αντικείμενο της \mathcal{C} , τότε ισχύει ότι:

$$A\text{-inj. dim } \mathcal{B} = \mathcal{B}\text{-proj. dim } A.$$

Για να το διαπιστώσουμε, υποθέτουμε αρχικά, ότι $A\text{-inj. dim } \mathcal{B} = \infty$. Τότε εξ ορισμού, υπάρχει κάποιο αντικείμενο B_1 της \mathcal{B} , τέτοιο ώστε

$$\infty = A\text{-inj. dim } B_1 = B_1\text{-proj. dim } A.$$

Συνεπώς, παίρνουμε ότι $\mathcal{B}\text{-proj. dim } A = \infty = A\text{-inj. dim } \mathcal{B}$. Υποθέτουμε τώρα ότι υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε $A\text{-inj. dim } \mathcal{B} = n$. Δηλαδή ότι υπάρχει κάποιο αντικείμενο B' της \mathcal{B} με $A\text{-inj. dim } B' = n$, και ότι για οποιοδήποτε αντικείμενο B της \mathcal{B} ισχύει ότι

A -inj. dim $B \leq n$. Ισοδύναμα, ότι υπάρχει κάποιο αντικείμενο B' της \mathcal{B} με B' -proj. dim $A = n$, και ότι για οποιοδήποτε αντικείμενο B της \mathcal{B} ισχύει ότι B -proj. dim $A \leq n$. Επομένως, έχουμε ότι B -proj. dim $A = n = A$ -inj. dim B .

Ορισμός 7.3.5. Αν \mathcal{A} και \mathcal{B} είναι δύο υποκατηγορίες της \mathcal{C} , τότε ορίζουμε

$$A\text{-inj. dim } \mathcal{B} = \max\{A\text{-inj. dim } B \mid A \in \text{ob}(\mathcal{A}) \ \& \ B \in \text{ob}(\mathcal{B})\}.$$

Δυϊκά, ορίζουμε

$$A\text{-proj. dim } \mathcal{B} = \max\{A\text{-proj. dim } B \mid A \in \text{ob}(\mathcal{A}) \ \& \ B \in \text{ob}(\mathcal{B})\}.$$

Παρατήρηση 7.3.6. Αν \mathcal{A} και \mathcal{B} είναι δύο υποκατηγορίες της \mathcal{C} , τότε ισχύει ότι:

$$A\text{-inj. dim } \mathcal{B} = \mathcal{B}\text{-proj. dim } \mathcal{A}.$$

Πράγματι, η Παρατήρηση (7.3.4) μας εξασφαλίζει την προηγούμενη ισότητα.

Σχόλιο 7.3.7. Αν \mathcal{A} και \mathcal{B} είναι δύο υποκατηγορίες της \mathcal{C} , τέτοιες ώστε

$$A\text{-inj. dim } \mathcal{B} = 0 = \mathcal{B}\text{-proj. dim } \mathcal{A},$$

τότε ακολουθώντας τον J.L. Verdier, [56], λέμε ότι η κατηγορία \mathcal{A} είναι **αριστερά ορθογώνια (left orthogonal)** στην κατηγορία \mathcal{B} , και ότι η κατηγορία \mathcal{B} είναι **δεξιά ορθογώνια (right orthogonal)** στην κατηγορία \mathcal{A} . Επιπλέον, αν η κατηγορία \mathcal{A} αποτελείται ακριβώς από εκείνα τα αντικείμενα A της \mathcal{C} , τέτοια ώστε $A\text{-inj. dim } \mathcal{B} = 0$, τότε η κατηγορία \mathcal{A} καλείται το **αριστερό ορθογώνιο συμπλήρωμα (left orthogonal complement)** της κατηγορίας \mathcal{B} στην \mathcal{C} , και συμβολίζεται με $\mathcal{A} = {}^\perp \mathcal{B}$. Δυϊκά, αν η κατηγορία \mathcal{B} αποτελείται ακριβώς από όλα τα αντικείμενα B της \mathcal{C} , τέτοια ώστε $A\text{-inj. dim } B = 0$, τότε η κατηγορία \mathcal{B} καλείται το **δεξιό ορθογώνιο συμπλήρωμα (right orthogonal complement)** της κατηγορίας \mathcal{A} στην \mathcal{C} , και συμβολίζεται με $\mathcal{B} = \mathcal{A}^\perp$.

Παρατήρηση 7.3.8. 1. Για οποιαδήποτε υποκατηγορία \mathcal{A} της \mathcal{C} , ισχύουν οι εγκλεισμοί:

$$\mathcal{A} \subseteq {}^\perp(\mathcal{A})^\perp, \ \& \ \mathcal{A} \subseteq ({}^\perp \mathcal{A})^\perp.$$

2. Αν \mathcal{B}' είναι μια υποκατηγορία της \mathcal{B} στην \mathcal{C} , τότε το αριστερό (δεξιό) ορθογώνιο συμπλήρωμα της \mathcal{B} στην \mathcal{C} , περιέχεται στο αριστερό (δεξιό) ορθογώνιο συμπλήρωμα της \mathcal{B}' στη \mathcal{C} .
3. Το αριστερό ορθογώνιο συμπλήρωμα της \mathcal{C} στην \mathcal{C} , ${}^\perp \mathcal{C}$, αποτελείται ακριβώς από όλα τα προβολικά αντικείμενα, αν υπάρχουν, της \mathcal{C} . Δυϊκά, το δεξιό ορθογώνιο συμπλήρωμα της \mathcal{C} στην \mathcal{C} , \mathcal{C}^\perp , αποτελείται ακριβώς από όλα τα ενέσιμα αντικείμενα, αν υπάρχουν, της \mathcal{C} .
4. Αν \mathcal{A} είναι μια υποκατηγορία της \mathcal{C} , τότε το αριστερό ορθογώνιο συμπλήρωμα της \mathcal{A} στην \mathcal{C} , είναι μια ακριβής και προσθετικά κλειστή υποκατηγορία της \mathcal{C} , όπου κάθε επιμορφισμός σ αυτήν, είναι αποδεκτός. Επίσης, το δεξιό ορθογώνιο συμπλήρωμα της \mathcal{A} στην \mathcal{C} , είναι μια ακριβής και προσθετικά κλειστή υποκατηγορία της \mathcal{C} , όπου κάθε μονομορφισμός σ αυτήν, είναι αποδεκτός.

Ολοκληρώνουμε την παράθεση ορισμών, αναφέροντας την έννοια του ενέσιμου συνγεννήτορα.

Ορισμός 7.3.9. Αν \mathcal{D} είναι μια αβελιανή κατηγορία, και \mathcal{A} είναι μια ακριβής και προσθετικά κλειστή υποκατηγορία της \mathcal{D} , η οποία είναι κλειστή σε ισομορφισμούς, τότε η πλήρης υποκατηγορία \mathcal{B} της \mathcal{A} καλείται **ενέσιμος συνγεννήτορας (injective cogenerator)** για την \mathcal{A} , αν η \mathcal{B} είναι συνγεννήτορας για την \mathcal{A} , με την ιδιότητα $A\text{-inj. dim } \mathcal{B} = 0$, ή ισοδύναμα, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}^\perp$. Επιπλέον, αν υπάρχει συνγεννήτορας για την \mathcal{A} που περιέχεται στη τομή $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}^\perp$, θα λέμε ότι η ακριβής κατηγορία \mathcal{A} έχει **αρκετά σχετικά ενέσιμα αντικείμενα, (enough relatively injective objects)**.

Επιστρέφουμε τώρα στις υποκατηγορίες \mathcal{X} και ω της \mathcal{C} , όπως στην προηγούμενη ενότητα, και υποθέτουμε ότι:

- Από τώρα και στο εξής, η ω είναι ενέσιμος συγγενήτορας για τη \mathcal{X} . Σ' αυτή την περίπτωση η τριάδα $(\mathcal{C}, \mathcal{X}, \omega)$ καλείται **πλαίσιο των Auslander-Buchweitz (Auslander-Buchweitz context)**.

Η προσοχή μας στη συνέχεια στρέφεται στις επιπτώσεις που επιφέρει η επιπρόσθετη αυτή υπόθεση, στις \mathcal{X} -προσεγγίσεις και στα $\hat{\omega}$ -καλύμματα.

Η ακόλουθη πρόταση συνδέει κάποιες από τις διαστάσεις που έχουμε ήδη εισάγει για ένα αντικείμενο της \mathcal{X} . Τονίζουμε ότι οι σχέσεις αυτές, δεν απαιτούν ότι κάθε επιμορφισμός από την \mathcal{C} μεταξύ αντικειμένων της \mathcal{X} είναι αποδεκτός.

Πρόταση 7.3.10. *Αν C είναι ένα αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$, τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες για έναν οποιονδήποτε φυσικό αριθμό n :*

1. \mathcal{X} -res. dim $C \leq n$,
2. C -inj. dim $\omega \leq n$,
3. C -inj. dim $\hat{\omega} \leq n$,
4. $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n+1}(C, Y) = 0$ για κάθε αντικείμενο Y της $\hat{\omega}$.

Απόδειξη. Έστω C ένα αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$. Θα δείξουμε ότι οι παραπάνω συνθήκες είναι ισοδύναμες με χρήση επαγωγής στο φυσικό αριθμό n .

1. Αρχικά, θα αποδείξουμε ότι οι συνθήκες αυτές είναι ισοδύναμες για $n = 0$. Η συνεπαγωγή $3 \Rightarrow 4$ είναι τετριμμένη για $n = 0$, και για αυτό το λόγο, αποδεικνύουμε για $n = 0$ τις υπόλοιπες τρεις συνεπαγωγές.

(1 \Rightarrow 2): Υποθέτουμε ότι \mathcal{X} -res. dim $C = 0$. Τότε προφανώς το αντικείμενο C της $\hat{\mathcal{X}}$ είναι επίσης αντικείμενο της \mathcal{X} . Συνεπώς, επειδή η ω είναι ενέσιμος συγγενήτορας για τη \mathcal{X} , έπεται ότι $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(C, W) = 0$ για κάθε $i > 0$ και για κάθε W αντικείμενο της ω . Το αποτέλεσμα όμως αυτό, μας εξασφαλίζει την ισότητα C -inj. dim $\omega = 0$. Για να το διαπιστώσουμε, υποθέτουμε ότι $\ell = C$ -inj. dim $\omega > 0$. Εξ ορισμού λοιπόν, υπάρχει κάποιο αντικείμενο W' της ω τέτοιο ώστε C -inj. dim $W' = \ell$. Δηλαδή, υπάρχει κάποιο αντικείμενο W' της ω έτσι ώστε $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^{\ell}(C, W') = 0$ για κάθε $i > \ell$, και $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^{\ell}(C, W') \neq 0$. Τότε η υπόθεση ότι $\ell > 0$, καθώς και το αποτέλεσμα ότι $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(C, W) = 0$ για κάθε $i > 0$ και για κάθε W αντικείμενο της ω , μας δίνουν την ισότητα $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^{\ell}(C, W') = 0$, η οποία φυσικά απορρίπτεται. Άρα, C -inj. dim $\omega = 0$, δηλαδή ισχύει το 2).

(2 \Rightarrow 3): Υποθέτουμε ότι C -inj. dim $\omega = 0$. Για να αποδείξουμε ότι C -inj. dim $\hat{\omega} = 0$, αρκεί να δείξουμε ότι $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(C, Y) = 0$, για κάθε $i > 0$ και για κάθε Y αντικείμενο της $\hat{\omega}$. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε ένα αντικείμενο Y της $\hat{\omega}$. Εξ ορισμού, υπάρχει φυσικός αριθμός m , και μια ακριβής ακολουθία ελάχιστου μήκους m στη \mathcal{C} ,

$$\ell : 0 \longrightarrow W_m \longrightarrow \cdots \longrightarrow W_0 \longrightarrow Y \longrightarrow 0,$$

όπου $W_0, \dots, W_m \in \text{ob}(\omega)$. Επειδή η ακολουθία ℓ είναι ακριβής στη \mathcal{C} , μπορούμε να την «σπάσουμε» σε σύντομες ακριβείς ακολουθίες στη \mathcal{C} για κάθε $j = 1, \dots, m$,

$$\ell_j : 0 \longrightarrow K_j \longrightarrow W_{j-1} \longrightarrow K_{j-1} \longrightarrow 0,$$

όπου $K_0 = Y$ και $K_m = W_m$. Αν εφαρμόσουμε τώρα τον συναρτητή $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, -)$ στην σύντομη ακριβή ακολουθία ℓ_m , τότε η επαγόμενη ακολουθία αβελιανών ομάδων:

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(C, W_{m-1}) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(C, K_{m-1}) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{i+1}(C, W_m), \quad (7.27)$$

είναι ακριβής για κάθε $i \geq 0$. Όμως, η υπόθεση μας δίνει ότι $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(C, W_{m-1}) = 0$, και $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(C, W_m) = 0$ για κάθε $i > 0$. Συνεπώς, από την ακριβή ακολουθία (7.27) έπεται ότι $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(C, K_{m-1}) = 0$ για κάθε $i > 0$. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, και εφαρμόζοντας ξανά τον συναρτητή $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, -)$ αυτή τη φορά, στην σύντομη ακριβή ακολουθία ℓ_{m-1} , οδηγούμαστε από την υπόθεση στην ισότητα $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(C, K_{m-2}) = 0$ για κάθε $i > 0$. Επαγωγικά λοιπόν, χρησιμοποιώντας την υπόθεση καταλήγουμε στο συμπέρασμα $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(C, Y) = 0$ για κάθε $i > 0$, όπως επιθυμούσαμε.

(4 \Rightarrow 1): Υποθέτουμε ότι $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, Y) = 0$ για κάθε αντικείμενο Y της $\hat{\omega}$. Αφού το C είναι αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα (7.2.7), συμπεραίνουμε την ύπαρξη μιας \mathcal{X} -προσέγγισης του C :

$$0 \longrightarrow Y_C \longrightarrow X_C \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

Όμως, η υπόθεση μας εξασφαλίζει ότι η προηγούμενη σύντομη ακριβής ακολουθία στη \mathcal{C} είναι διασπασίμη. Συνεπώς, το αντικείμενο C της $\hat{\mathcal{X}}$ είναι ευθύς προσθετός του αντικειμένου X_C της \mathcal{X} . Έτσι, επειδή η κατηγορία \mathcal{X} είναι προσθετικά κλειστή, παίρνουμε ότι το αντικείμενο C της \mathcal{X} είναι ουσιαστικά αντικείμενο της \mathcal{X} . Θεωρώντας λοιπόν την ακριβή ακολουθία στη \mathcal{C} :

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow C \xrightarrow{1_C} C \longrightarrow 0,$$

όπου 1_C είναι ο ταυτοτικός μορφισμός του αντικειμένου C της \mathcal{X} , οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι \mathcal{X} -res. dim $C = 0$, δηλαδή ότι ισχύει το 1).

2. Έστω τώρα $n > 0$. Υποθέτουμε ότι για κάθε L αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$, οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες για έναν οποιονδήποτε φυσικό αριθμό m με $0 \leq m \leq n - 1$:

- i) \mathcal{X} -res. dim $L \leq m$,
- ii) L -inj. dim $\omega \leq m$,
- iii) L -inj. dim $\hat{\omega} \leq m$,
- iv) $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^{m+1}(L, Y) = 0$ για κάθε αντικείμενο Y της $\hat{\omega}$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι οι συνθήκες 1), 2), 3) και 4) είναι ισοδύναμες για $n > 0$. Η συνεπαγωγή ξανά $3 \Rightarrow 4$ είναι προφανής, και έτσι, αποδεικνύουμε τις υπόλοιπες τρεις συνεπαγωγές για $n > 0$.

(1 \Rightarrow 2): Υποθέτουμε ότι \mathcal{X} -res. dim $C \leq n$. Τότε υπάρχει ακριβής ακολουθία μήκους n στην \mathcal{C} , έστω

$$0 \longrightarrow X_n \xrightarrow{\alpha_n} \dots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{\alpha_1} X_0 \xrightarrow{\alpha_0} C \longrightarrow 0, \quad (7.28)$$

όπου $X_i \in \text{ob}(\mathcal{X})$ για κάθε $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Αν θεωρήσουμε τώρα την επαγόμενη ακριβή ακολουθία στη \mathcal{C} :

$$0 \longrightarrow X_n \xrightarrow{\alpha_n} \dots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{\alpha'_1} \text{Im } \alpha_1 \longrightarrow 0,$$

τότε έπεται ότι \mathcal{X} -res. dim $\text{Im } \alpha_1 \leq n - 1$. Συνεπώς, χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση, παίρνουμε ότι $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\text{Im } \alpha_1, W) = 0$ για κάθε αντικείμενο W της ω , και για κάθε $i > n - 1$. Η ακριβής ακολουθία (7.28), μας εξασφαλίζει ότι η ακολουθία

$$0 \longrightarrow \text{Im } \alpha_1 \longrightarrow X_0 \xrightarrow{\alpha_0} C \longrightarrow 0, \quad (7.29)$$

είναι ακριβής στην \mathcal{C} . Εφαρμόζοντας στη συνέχεια τον αντισυναλλοίωτο συναρτητή $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, W)$ όπου W είναι ένα αυθαίρετο αντικείμενο της ω , στη σύντομη ακριβή ακολουθία (7.29), επάγεται η ακριβής ακολουθία αβελιανών ομάδων:

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\text{Im } \alpha_1, W) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{i+1}(C, W) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{i+1}(X_0, W) \quad (7.30)$$

για κάθε $i \geq 0$. Επειδή το X_0 είναι αντικείμενο της \mathcal{X} , και το W είναι αντικείμενο της ω , χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η κατηγορία ω είναι ενέσιμος συνγεννήτορας για την κατηγορία

\mathcal{X} , συμπεραίνουμε ότι $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(X_0, W) = 0$ για κάθε $i > 0$. Συνδυάζοντας λοιπόν τα παραπάνω, οδηγούμαστε από την ακριβή ακολουθία (7.30), στο συμπέρασμα ότι $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(C, W) = 0$ για κάθε $i > n$. Επομένως, αφού η επιλογή του αντικείμενου W της ω ήταν τυχαία, συμπεραίνουμε ότι $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(C, W) = 0$ για κάθε $i > n$ και για κάθε αντικείμενο W της ω . Άρα, \mathcal{C} -inj. $\dim \omega \leq n$.

(2 \Rightarrow 3): Ομοίως με την απόδειξη της συνεπαγωγής (2 \Rightarrow 3) για $n = 0$.

(4 \Rightarrow 1): Υποθέτουμε ότι $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n+1}(C, Y) = 0$ για κάθε αντικείμενο Y της $\hat{\omega}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι \mathcal{X} -res. $\dim C \leq n$. Αφού το C είναι αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$, από το Θεώρημα (7.2.7), υπάρχει μια \mathcal{X} -προσέγγιση του C :

$$0 \longrightarrow Y_C \longrightarrow X_C \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

Για κάθε αντικείμενο Y της $\hat{\omega}$, αν εφαρμόσουμε τον αντισυναλλοίωτο συναρτητή $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y)$ στην προηγούμενη σύντομη ακριβή ακολουθία στην \mathcal{C} , τότε η επαγόμενη ακολουθία αβελιανών ομάδων:

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(X_C, Y) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(Y_C, Y) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n+1}(C, Y) = 0, \quad (7.31)$$

είναι ακριβής. Όμως, επειδή το X_C είναι αντικείμενο της \mathcal{X} , (και κατ' επέκταση, αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$), έπεται ότι \mathcal{X} -res. $\dim X_C = 0$. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, καθώς και την επαγωγική υπόθεση, παίρνουμε την ισότητα X_C -inj. $\dim \hat{\omega} = 0$. Επομένως, αφού $n > 0$ έπεται ότι $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(X_C, Y) = 0$ για κάθε αντικείμενο Y της $\hat{\omega}$. Η ισότητα αυτή, και η ακριβής ακολουθία (7.31), μας δίνουν ότι $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(Y_C, Y) = 0$ για κάθε αντικείμενο Y της $\hat{\omega}$. Έτσι, εφόσον το αντικείμενο Y της $\hat{\omega}$, είναι επίσης αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$, χρησιμοποιώντας και πάλι την επαγωγική υπόθεση, συμπεραίνουμε ότι \mathcal{X} -res. $\dim Y_C \leq n - 1$. Συνεπώς, υπάρχει ακριβής ακολουθία μήκους $n - 1$ στην \mathcal{C} :

$$0 \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_0 \longrightarrow Y_C \longrightarrow 0, \quad (7.32)$$

όπου κάθε X_i για $i = 0, \dots, n - 1$, είναι αντικείμενο της \mathcal{X} . Η συγκόλληση τώρα της ακριβής ακολουθίας (7.32) στην \mathcal{C} , με την \mathcal{X} -προσέγγιση του C , είναι η ακριβής ακολουθία μήκους n στη \mathcal{C} :

$$0 \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_0 \longrightarrow X_C \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

όπου $X_C \in \text{ob}(\mathcal{X})$ και $X_i \in \text{ob}(\mathcal{X})$ για κάθε $0 \leq i \leq n - 1$. Άρα, \mathcal{X} -res. $\dim C \leq n$. ■

Ως έμμεση συνέπεια της Πρότασης (7.3.10), έχουμε ότι η κατηγορία \mathcal{X} είναι αριστερά ορθογώνια στη κατηγορία $\hat{\omega}$, και ότι η κατηγορία $\hat{\omega}$ είναι δεξιά ορθογώνια στην κατηγορία \mathcal{X} :

Πόρισμα 7.3.11. \mathcal{X} -inj. $\dim \hat{\omega} = 0$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\text{ob}(\mathcal{X}) \subseteq \text{ob}(\hat{\mathcal{X}})$, από την Πρόταση (7.3.10) προκύπτει κατά προφανή τρόπο η ζητούμενη ισότητα. ■

Το Πόρισμα (7.3.11), επάγει σημαντικές ιδιότητες των \mathcal{X} -προσεγγίσεων και των $\hat{\omega}$ -καλυμμάτων. Αρχικά, μελετάμε τις ιδιότητες των \mathcal{X} -προσεγγίσεων, και στην συνέχεια, εξετάζουμε τις ιδιότητες των $\hat{\omega}$ -καλυμμάτων. Σκοπός μας, είναι να δείξουμε ότι για ένα αντικείμενο C της $\hat{\mathcal{X}}$, μια \mathcal{X} -προσέγγιση του C και ένα $\hat{\omega}$ -κάλυμμα του C είναι μοναδικά, όπου εδώ η μοναδικότητα νοείται ως προς μια κατάλληλη σχέση ισοδυναμίας.

Θεώρημα 7.3.12. Αν $0 \longrightarrow Y_C \longrightarrow X_C \xrightarrow{\pi_C} C \longrightarrow 0$ είναι μια \mathcal{X} -προσέγγιση ενός αντικείμενου C της υποκατηγορίας $\hat{\mathcal{X}}$, τότε για κάθε αντικείμενο X της \mathcal{X} ισχύει ότι:

1. Η επαγόμενη ακολουθία αβελιανών ομάδων,

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y_C) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X_C) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, C) \longrightarrow 0,$$

είναι ακριβής.

2. Ο μορφοισμός π_C επάγει ισομορφισμούς αβελιανών ομάδων:

$$\text{Ext}_C^i(X, \pi_C): \text{Ext}_C^i(X, X_C) \longrightarrow \text{Ext}_C^i(X, C),$$

για κάθε $i > 0$.

Απόδειξη. Για οποιοδήποτε αντικείμενο X της \mathcal{X} , η ακολουθία αβελιανών ομάδων:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_C(X, Y_C) \longrightarrow \text{Hom}_C(X, X_C) \longrightarrow \text{Hom}_C(X, C),$$

είναι ακριβής, διότι ο συναλλοίωτος συναρτητής $\text{Hom}_C(X, -): \mathcal{C} \longrightarrow \text{Ab}$ είναι αριστερά ακριβής. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το Y_C είναι αντικείμενο της $\hat{\omega}$, καθώς και το Πρόσημα (7.3.11), παίρνουμε ότι $\text{Ext}_C^i(X, Y_C) = 0$, για κάθε $i > 0$. Συνεπώς, έπεται ότι η ακολουθία

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_C(X, Y_C) \longrightarrow \text{Hom}_C(X, X_C) \longrightarrow \text{Hom}_C(X, C) \longrightarrow 0,$$

είναι ακριβής στην Ab , και επιπλέον, ότι οι ομομορφισμοί αβελιανών ομάδων

$$\text{Ext}_C^i(X, \pi_C): \text{Ext}_C^i(X, X_C) \longrightarrow \text{Ext}_C^i(X, C),$$

είναι ισομορφισμοί για κάθε $i > 0$. ■

Σχόλιο 7.3.13. Η σύντομη ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} ,

$$0 \longrightarrow Y_C \longrightarrow X_C \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

όπου $Y_C \in \text{ob}(\hat{\omega})$ και $X_C \in \text{ob}(\mathcal{X})$, καλείται μια \mathcal{X} -προσέγγιση του C λόγω ακριβώς του γεγονότος ότι η ακολουθία αβελιανών ομάδων:

$$\text{Hom}_C(X, X_C) \longrightarrow \text{Hom}_C(X, C) \longrightarrow 0,$$

είναι ακριβής για κάθε αντικείμενο X της \mathcal{X} .

Ορισμός 7.3.14. Δύο μορφοισμοί $f: B \longrightarrow C$ και $f': B' \longrightarrow C$ στην \mathcal{C} , καλούνται **ισοδύναμοι (equivalent)**, αν υπάρχουν μορφοισμοί $g: B \longrightarrow B'$ και $h: B' \longrightarrow B$ στην \mathcal{C} , τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} & & B' \\ & \nearrow g & \downarrow f' \\ B & & C \\ & \searrow h & \uparrow f \end{array}$$

δηλαδή, $f' \circ g = f$ και $f \circ h = f'$. Επιπλέον, δύο ακριβείς ακολουθίες

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{j} B \xrightarrow{f} C \quad \& \quad 0 \longrightarrow A' \xrightarrow{j'} B' \xrightarrow{f'} C$$

στην \mathcal{C} , καλούνται **(δεξιά) ισοδύναμες (right equivalent)**, αν οι μορφοισμοί f και f' στην \mathcal{C} είναι ισοδύναμοι. Δηλαδή, υπάρχουν μορφοισμοί στην \mathcal{C} οι οποίοι συνθέτουν το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{j'} & B' & \xrightarrow{f'} & C \\ & & \downarrow \gamma & & \downarrow h & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{j} & B & \xrightarrow{f} & C \\ & & \downarrow \gamma & & \downarrow g & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{j'} & B' & \xrightarrow{f'} & C. \end{array} \tag{7.33}$$

Παρατήρηση 7.3.15. Αν οι ακριβείς ακολουθίες στην \mathcal{C} ,

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{j} B \xrightarrow{f} C \quad \& \quad 0 \longrightarrow A' \xrightarrow{j'} B' \xrightarrow{f'} C,$$

είναι (δεξιά) ισοδύναμες, δηλαδή υπάρχει ένα μεταθετικό διάγραμμα όπως το μεταθετικό διάγραμμα (7.33), τότε ο μορφισμός $1_{B'} - (g \circ h): B' \longrightarrow B'$ στην \mathcal{C} , παραγοντοποιείται μέσω του αντικειμένου A' της \mathcal{C} , και ανάλογα, ο μορφισμός $1_B - (h \circ g): B \longrightarrow B$ στην \mathcal{C} , παραγοντοποιείται μέσω του αντικειμένου A της \mathcal{C} . Επομένως, ο μορφισμός $\underline{h}: B' \longrightarrow B$ είναι ισομορφισμός στην $\mathcal{C}/\text{Add}\{A, A'\}$, με $\underline{h}^{-1} = \underline{g}$.

Πράγματι, αν χρησιμοποιήσουμε την υπόθεση, και θεωρήσουμε την σύνθεση του μορφισμού f' με τον μορφισμό $\beta := 1_{B'} - (g \circ h)$, τότε έπεται ότι $f' \circ \beta = 0$, ή ότι $\text{im } \beta \leq_m \ker f' = j'$. Συνεπώς, υπάρχει μορφισμός $\lambda: \text{Im } \beta \longrightarrow A'$ στην \mathcal{C} , τέτοιος ώστε το διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} \text{Im } \beta & \xrightarrow{\text{im } \beta} & B' \\ & \searrow \lambda & \uparrow j' \\ & & A'. \end{array} \quad (7.34)$$

Επειδή η κατηγορία \mathcal{C} είναι αβελιανή, και το διάγραμμα (7.34) είναι μεταθετικό, συμπεραίνουμε ότι ο μορφισμός β στην \mathcal{C} , αναλύεται μέσω της εικόνας του ως το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} B' & \xrightarrow{\beta} & B' \\ \alpha \downarrow & & \nearrow j' \circ \lambda \\ \text{Im } \beta & & \end{array}$$

όπου α είναι ένας επιμορφισμός στην \mathcal{C} . Θέτοντας λοιπόν $\gamma = \lambda \circ \alpha: B' \longrightarrow A'$, παίρνουμε ότι $j' \circ \gamma = \beta$, δηλαδή, ότι το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} B' & \xrightarrow{\beta} & B' \\ \gamma \downarrow & & \nearrow j' \\ A' & & \end{array}$$

είναι μεταθετικό. Άρα, ο μορφισμός $\beta = 1_{B'} - (g \circ h)$ στην \mathcal{C} , παραγοντοποιείται μέσω του αντικειμένου A' . Ομοίως αποδεικνύεται ότι ο μορφισμός $1_B - (h \circ g)$ στην \mathcal{C} , παραγοντοποιείται μέσω του αντικειμένου A . Επομένως, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο μορφισμός $\underline{h}: B' \longrightarrow B$ είναι ισομορφισμός στην $\mathcal{C}/\text{Add}\{A, A'\}$, με αντίστροφο (ισομορφισμό) $\underline{h}^{-1} = \underline{g}: B \longrightarrow B'$, διότι:

$$\underline{g} \circ \underline{h} = \underline{g \circ h} = \underline{1_{B'}} \quad \& \quad \underline{h} \circ \underline{g} = \underline{h \circ g} = \underline{1_B}.$$

Ως απόρροια του Θεωρήματος (7.3.12), παίρνουμε μια ασθενούς είδους μοναδικότητα για τις \mathcal{X} -προσεγγίσεις, με την έννοια:

Πόρισμα 7.3.16. Μια \mathcal{X} -προσέγγιση ενός αντικειμένου C της $\widehat{\mathcal{X}}$ είναι μοναδική μέχρι ισοδυναμίας. Δηλαδή, δύο οποιεσδήποτε \mathcal{X} -προσεγγίσεις του C , είναι (δεξιά) ισοδύναμες ακριβείς ακολουθίες.

Απόδειξη. Έστω C ένα αντικείμενο της \mathcal{X} , και

$$0 \longrightarrow Y_C \longrightarrow X_C \xrightarrow{\pi_C} C \longrightarrow 0 \quad \& \quad 0 \longrightarrow Y'_C \longrightarrow X'_C \xrightarrow{\pi'_C} C \longrightarrow 0,$$

δύο \mathcal{X} -προσεγγίσεις του C . Το Θεώρημα (7.3.12), μας δίνει ιδιαίτερα ότι οι ακολουθίες:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X'_C, X_C) \xrightarrow{(\pi_C)^*} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X'_C, C) \longrightarrow 0$$

και

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_C, X'_C) \xrightarrow{(\pi'_C)^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_C, C) \longrightarrow 0,$$

είναι ακριβείς στην Ab , αφού τα X_C, X'_C είναι αντικείμενα της \mathcal{X} . Συνεπώς, υπάρχουν μορφοισμοί $h: X'_C \rightarrow X_C$ και $g: X_C \rightarrow X'_C$ στην \mathcal{C} , τέτοιοι ώστε $\pi_C \circ h = \pi'_C$ και $\pi'_C \circ g = \pi_C$. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι οι μορφοισμοί h και g στην \mathcal{C} , επάγουν μοναδικούς μορφοισμούς $\alpha: Y'_C \rightarrow Y_C$ και $\beta: Y_C \rightarrow Y'_C$ στη \mathcal{C} , τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Y'_C & \longrightarrow & X'_C & \xrightarrow{\pi'_C} & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow h & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & Y_C & \longrightarrow & X_C & \xrightarrow{\pi_C} & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \beta & & \downarrow g & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & Y'_C & \longrightarrow & X'_C & \xrightarrow{\pi'_C} & C \longrightarrow 0. \end{array}$$

Επομένως, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι δύο αυτές \mathcal{X} -προσεγγίσεις του C είναι ισοδύναμες ακριβείς ακολουθίες, όπως επιθυμούσαμε. ■

Παρόμοια αποτελέσματα με αυτά που προαναφέραμε για \mathcal{X} -προσεγγίσεις, υπάρχουν και για $\widehat{\omega}$ -κάλυμματα. Έτσι, η προσοχή μας τώρα στρέφεται στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων αυτών.

Θεώρημα 7.3.17. *Αν $0 \rightarrow C \xrightarrow{i^C} Y^C \rightarrow X^C \rightarrow 0$ είναι ένα $\widehat{\omega}$ -κάλυμμα ενός αντικείμενου C της \mathcal{X} , τότε για κάθε αντικείμενο Y της $\widehat{\omega}$ ισχύει ότι:*

1. Η επαγόμενη ακολουθία αβελιανών ομάδων,

$$0 \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X^C, Y) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y^C, Y) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, Y) \rightarrow 0,$$

είναι ακριβής.

2. Ο μορφοισμός i^C επάγει ισομορφισμούς αβελιανών ομάδων:

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^i(i^C, Y): \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^i(Y^C, Y) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^i(C, Y),$$

για κάθε $i > 0$.

Απόδειξη. Επειδή το X^C είναι αντικείμενο της \mathcal{X} , και αφού \mathcal{X} -inj. $\dim \widehat{\omega} = 0$, παίρνουμε ότι $\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^i(X^C, Y) = 0$ για κάθε $i > 0$ και για κάθε αντικείμενο Y της $\widehat{\omega}$. Συνεπώς, αν θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε αντικείμενο Y της $\widehat{\omega}$, και χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y)$ είναι αριστερά ακριβής, τότε έχουμε ότι η ακολουθία αβελιανών ομάδων:

$$0 \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X^C, Y) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y^C, Y) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, Y) \rightarrow 0,$$

είναι ακριβής, και επιπρόσθετα, ότι οι ομομορφοισμοί αβελιανών ομάδων:

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^i(i^C, Y): \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^i(Y^C, Y) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^i(C, Y),$$

είναι ισομορφοισμοί για κάθε $i > 0$. ■

Σχόλιο 7.3.18. Η σύντομη ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} ,

$$0 \rightarrow C \rightarrow Y^C \rightarrow X^C \rightarrow 0,$$

όπου $Y^C \in \mathrm{ob}(\widehat{\omega})$ και $X^C \in \mathrm{ob}(\mathcal{X})$, καλείται ένα $\widehat{\omega}$ -κάλυμμα του C λόγω ακριβώς του γεγονότος ότι η ακολουθία αβελιανών ομάδων:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y^C, Y) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, Y) \rightarrow 0,$$

είναι ακριβής για κάθε αντικείμενο Y της $\widehat{\omega}$.

Ορισμός 7.3.19. Δύο μορφοισμοί $f: C \rightarrow D$ και $f': C \rightarrow D'$ στην \mathcal{C} , καλούνται **ισοδύναμοι (equivalent)**, αν υπάρχουν μορφοισμοί $g: D \rightarrow D'$ και $h: D' \rightarrow D$ στην \mathcal{C} , τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\quad} & D \\ f' \downarrow & \nearrow h & \\ & & D' \\ & \nwarrow g & \end{array}$$

δηλαδή, $g \circ f = f'$ και $h \circ f' = f$. Επιπλέον, δύο ακριβείς ακολουθίες

$$C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{p} E \rightarrow 0 \quad \& \quad C \xrightarrow{f'} D' \xrightarrow{p'} E' \rightarrow 0$$

στην \mathcal{C} , καλούνται **(αριστερά) ισοδύναμες (left equivalent)**, αν οι μορφοισμοί f και f' στην \mathcal{C} είναι ισοδύναμοι. Δηλαδή, υπάρχουν μορφοισμοί στην \mathcal{C} οι οποίοι συνθέτουν το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccc} C & \xrightarrow{f} & D & \xrightarrow{p} & E & \longrightarrow & 0 \\ \parallel & & \downarrow g & & \downarrow & & \\ C & \xrightarrow{f'} & D' & \xrightarrow{p'} & E' & \longrightarrow & 0 \\ \parallel & & \downarrow h & & \downarrow & & \\ C & \xrightarrow{f} & D & \xrightarrow{p} & E & \longrightarrow & 0. \end{array} \tag{7.35}$$

Παρατήρηση 7.3.20. Αν οι ακριβείς ακολουθίες στην \mathcal{C} ,

$$C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{p} E \rightarrow 0 \quad \& \quad C \xrightarrow{f'} D' \xrightarrow{p'} E' \rightarrow 0,$$

είναι (αριστερά) ισοδύναμες, δηλαδή υπάρχει ένα μεταθετικό διάγραμμα όπως το μεταθετικό διάγραμμα (7.35), τότε ο μορφοισμός $1_D - (h \circ g): D \rightarrow D$ στην \mathcal{C} , παραγοντοποιείται μέσω του αντικειμένου E της \mathcal{C} , και ανάλογα, ο μορφοισμός $1_{D'} - (g \circ h): D' \rightarrow D'$ στην \mathcal{C} , παραγοντοποιείται μέσω του αντικειμένου E' της \mathcal{C} . Επομένως, ο μορφοισμός $\underline{g}: D \rightarrow D'$ είναι ισομορφοισμός στην $\mathcal{C}/\text{Add}\{E, E'\}$, με $\underline{g}^{-1} = \underline{h}$.

Πράγματι, χρησιμοποιώντας την υπόθεση, και θεωρώντας τη σύνθεση στην \mathcal{C} του μορφοισμού $\delta := 1_D - (h \circ g)$ με τον μορφοισμό f , έπεται ότι $\delta \circ f = 0$, ή ότι $\text{coim } \delta \leq_e \text{coker } f = p$. Συνεπώς, υπάρχει μορφοισμός $\mu: E \rightarrow \text{Coim } \delta$ στην \mathcal{C} , τέτοιος ώστε το διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\text{coim } \delta} & \text{Coim } \delta \\ p \downarrow & \nearrow \mu & \\ E & & \end{array} \tag{7.36}$$

Επειδή η κατηγορία \mathcal{C} είναι αβελιανή, και το διάγραμμα (7.36) είναι μεταθετικό, συμπεραίνουμε ότι ο μορφοισμός δ στην \mathcal{C} , αναλύεται μέσω του μεταθετικού διαγράμματος:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\delta} & D \\ \mu \circ p \downarrow & & \uparrow \text{im } \delta \\ \text{Coim } \delta & \xrightarrow[\cong]{\hat{\delta}} & \text{Im } \delta. \end{array}$$

Θέτοντας λοιπόν $\gamma = \text{im } \delta \circ \hat{\delta} \circ \mu: E \rightarrow D$, παίρνουμε ότι $\gamma \circ p = \delta$, δηλαδή, ότι το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\delta} & D \\ p \downarrow & \nearrow \gamma & \\ E & & \end{array}$$

είναι μεταθετικό. Άρα, ο μορφισμός $\delta = 1_D - (h \circ g)$ στην \mathcal{C} , παραγοντοποιείται μέσω του αντικειμένου E . Ομοίως αποδεικνύεται ότι ο μορφισμός $1_{D'} - (g \circ h)$ στην \mathcal{C} , παραγοντοποιείται μέσω του αντικειμένου E' . Έτσι τελικά, έχουμε ότι ο μορφισμός $\underline{g}: D \rightarrow D'$ είναι ισομορφισμός στην $\mathcal{C}/\text{Add}\{E, E'\}$, με αντίστροφο (ισο)μορφισμό $\underline{g}^{-1} = \underline{h}: D' \rightarrow D$, διότι $\underline{g} \circ \underline{h} = \underline{g \circ h} = \underline{1_{D'}}$ και $\underline{h} \circ \underline{g} = \underline{h \circ g} = \underline{1_D}$.

Ως συνέπεια του Θεωρήματος (7.3.17), έπεται ότι ένα $\hat{\omega}$ -κάλυμμα ενός αντικειμένου της $\hat{\mathcal{X}}$, είναι μοναδικό με την ακόλουθη έννοια:

Πόρισμα 7.3.21. Ένα $\hat{\omega}$ -κάλυμμα ενός αντικειμένου C της $\hat{\mathcal{X}}$ είναι μοναδικό μέχρι ισοδυναμίας. Δηλαδή, δύο οποιαδήποτε $\hat{\omega}$ -καλύμματα του C , είναι (αριστερά) ισοδύναμες ακριβείς ακολουθίες.

Απόδειξη. Έστω C ένα αντικείμενο της \mathcal{X} , και

$$0 \rightarrow C \xrightarrow{i^C} Y^C \rightarrow X^C \rightarrow 0 \quad \& \quad 0 \rightarrow C \xrightarrow{j^C} Y_1^C \rightarrow X_1^C \rightarrow 0,$$

δύο $\hat{\omega}$ -καλύμματα του C . Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα (7.3.17), παίρνουμε ιδιαίτερα ότι οι ακολουθίες:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y^C, Y_1^C) \xrightarrow{(i^C)^*} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, Y_1^C) \rightarrow 0$$

και

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y_1^C, Y^C) \xrightarrow{(j^C)^*} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, Y^C) \rightarrow 0,$$

είναι ακριβείς στην Ab , αφού τα Y^C, Y_1^C είναι αντικείμενα της $\hat{\omega}$. Συνεπώς, υπάρχουν μορφισμοί $h: Y^C \rightarrow Y_1^C$ και $g: Y_1^C \rightarrow Y^C$ στην \mathcal{C} , τέτοιοι ώστε $h \circ i^C = j^C$ και $g \circ j^C = i^C$. Επομένως οι μορφισμοί i^C και j^C στην \mathcal{C} είναι ισοδύναμοι, και κατ' επέκταση, ότι τα δύο αυτά $\hat{\omega}$ -καλύμματα του C είναι (αριστερά) ισοδύναμες ακριβείς ακολουθίες. ■

Τα αποτελέσματα μοναδικότητας που παρουσιάσαμε για \mathcal{X} -προσεγγίσεις και για $\hat{\omega}$ -καλύμματα, δύναται να περιγραφούν διαφορετικά, λέγοντας ότι μια \mathcal{X} -προσέγγιση ενός αντικειμένου της $\hat{\mathcal{X}}$ είναι μοναδική «modulo ω », και αντίστοιχα, ένα $\hat{\omega}$ -κάλυμμα ενός αντικειμένου της $\hat{\mathcal{X}}$ είναι μοναδικό «modulo ω ». Η δυνατότητα αυτή, βασίζεται στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

Λήμμα 7.3.22. Για έναν μορφισμό $f: X \rightarrow C$ στην \mathcal{C} , όπου το X είναι αντικείμενο της \mathcal{X} και C είναι αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$, οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

1. Ο μορφισμός f παραγοντοποιείται μέσω ενός αντικειμένου της $\hat{\omega}$.
2. Ο μορφισμός f παραγοντοποιείται μέσω ενός αντικειμένου της ω .

Απόδειξη. Η συνεπαγωγή $2 \Rightarrow 1$ είναι ταυτολογία, αφού κάθε αντικείμενο της ω , είναι επίσης αντικείμενο της $\hat{\omega}$. Απομένει λοιπόν να δείξουμε την συνεπαγωγή $1 \Rightarrow 2$. Για το σκοπό αυτό, υποθέτουμε ότι ο μορφισμός f στην \mathcal{C} παραγοντοποιείται μέσω ενός αντικειμένου της $\hat{\omega}$. Δηλαδή υπάρχει ένα αντικείμενο Y της $\hat{\omega}$, και μορφισμοί $h: X \rightarrow Y$ και $g: Y \rightarrow C$ στην \mathcal{C} , τέτοιοι ώστε $f = g \circ h$. Εξ ορισμού της $\hat{\omega}$, υπάρχει μια σύντομη ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} ,

$$0 \rightarrow K \rightarrow W \xrightarrow{\alpha} Y \rightarrow 0,$$

όπου $W \in \text{ob}(\omega)$ και $K \in \text{ob}(\hat{\omega})$. Θεωρούμε το pullback P του διαγράμματος:

$$\begin{array}{ccc}
 P & \xrightarrow{u} & X \\
 \downarrow v & & \downarrow h \\
 W & \xrightarrow{\alpha} & Y.
 \end{array}$$

Τότε υπάρχει μοναδικός μορφοισμός $\beta: K \rightarrow P$ στην \mathcal{C} , τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό με ακριβείς γραμμές στη \mathcal{C} :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{\beta} & P & \xrightarrow{u} & X \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow v & & \downarrow h \\
 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & W & \xrightarrow{\alpha} & Y \longrightarrow 0
 \end{array} \quad (7.37)$$

Επειδή το K είναι αντικείμενο της $\hat{\omega}$ και το X αντικείμενο της \mathcal{X} , χρησιμοποιώντας το Πόρισμα (7.3.11), παίρνουμε ιδιαίτερα ότι $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, K) = 0$. Το αποτέλεσμα αυτό, μας εξασφαλίζει ότι η πρώτη γραμμή του διαγράμματος (7.37) είναι μια διασπασίμη σύντομη ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} . Συνεπώς, υπάρχει (μονο)μορφοισμός $u': X \rightarrow P$ στην \mathcal{C} , με την ιδιότητα $u \circ u' = 1_X$. Θέτοντας τώρα $\gamma = v \circ u'$, συμπεραίνουμε ότι ο μορφοισμός h στην \mathcal{C} παραγοντοποιείται μέσω του αντικειμένου W της ω , διότι

$$\alpha \circ \gamma = \alpha \circ v \circ u' = h \circ u \circ u' = h \circ 1_X = h.$$

Επομένως, αφού $f = g \circ h$, έπεται ότι ο μορφοισμός f στην \mathcal{C} , παραγοντοποιείται επίσης μέσω του αντικειμένου W της ω , όπως επιθυμούσαμε. ■

Σχόλιο 7.3.23. Αν \mathcal{C} είναι ένα αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$, και

$$0 \longrightarrow Y_C \longrightarrow X_C \xrightarrow{\pi_C} C \longrightarrow 0 \quad \& \quad 0 \longrightarrow Y'_C \longrightarrow X'_C \xrightarrow{\pi'_C} C \longrightarrow 0,$$

είναι δύο \mathcal{X} -προσεγγίσεις του C , τότε το Πόρισμα (7.3.16) μας δίνει μορφοισμούς στην \mathcal{C} , οι οποίοι συνθέτουν το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & Y'_C & \longrightarrow & X'_C & \xrightarrow{\pi'_C} & C \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \alpha & & \downarrow h & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & Y_C & \longrightarrow & X_C & \xrightarrow{\pi_C} & C \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \beta & & \downarrow g & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & Y'_C & \longrightarrow & X'_C & \xrightarrow{\pi'_C} & C \longrightarrow 0.
 \end{array}$$

Επιπλέον, η Παρατήρηση (7.3.15), μας εξασφαλίζει ότι οι μορφοισμοί στην αβελιανή κατηγορία \mathcal{C} , $1_{X'_C} - (g \circ h): X'_C \rightarrow X'_C$ και $1_{X_C} - (h \circ g): X_C \rightarrow X_C$, παραγοντοποιούνται αντίστοιχα, μέσω των αντικειμένων Y'_C και Y_C της $\hat{\omega}$. Έτσι, χρησιμοποιώντας το Λήμμα (7.3.22), συμπεραίνουμε ότι οι μορφοισμοί $1_{X'_C} - (g \circ h)$ και $1_{X_C} - (h \circ g)$ στην \mathcal{C} παραγοντοποιούνται αντίστοιχα, μέσω κάποιων αντικειμένων W' και W της ω .

Ανάλογα, αν \mathcal{C} είναι ένα αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$, και

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{i^C} Y^C \xrightarrow{p} X^C \longrightarrow 0 \quad \& \quad 0 \longrightarrow C \xrightarrow{j^C} Y_1^C \xrightarrow{p_1} X_1^C \longrightarrow 0,$$

είναι δύο $\hat{\omega}$ -καλύμματα του C , τότε το Πόρισμα (7.3.21) μας δίνει μορφοισμούς στην \mathcal{C} , οι οποίοι συνθέτουν το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{i^C} & Y^C & \xrightarrow{p} & X^C \longrightarrow 0 \\
& & \parallel & & \downarrow h' & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{j^C} & Y_1^C & \xrightarrow{p_1} & X_1^C \longrightarrow 0 \\
& & \parallel & & \downarrow g' & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & Y^C & \xrightarrow{p} & X^C \longrightarrow 0.
\end{array}$$

Επιπρόσθετα, η Παρατήρηση (7.3.20), μας εξασφαλίζει ότι οι μορφισμοί στην αβελιανή κατηγορία \mathcal{C} , $1_{Y^C} - (g' \circ h')$: $Y^C \rightarrow Y^C$ και $1_{Y_1^C} - (h' \circ g')$: $Y_1^C \rightarrow Y_1^C$, παραγοντοποιούνται αντίστοιχα, μέσω των αντικειμένων X^C και X_1^C της \mathcal{X} . Δηλαδή, υπάρχουν μορφισμοί γ : $X^C \rightarrow Y^C$ και δ : $X_1^C \rightarrow Y_1^C$ στην \mathcal{C} , τέτοιοι ώστε $\gamma \circ p = 1_{Y^C} - (g' \circ h')$ και $\delta \circ p_1 = 1_{Y_1^C} - (h' \circ g')$. Ωστόσο, οι μορφισμοί γ και δ στην \mathcal{C} , παραγοντοποιούνται αντίστοιχα, μέσω των αντικειμένων Y^C και Y_1^C της $\hat{\omega}$, διότι $1_{Y^C} \circ \gamma = \gamma$ και $1_{Y_1^C} \circ \delta = \delta$. Συνεπώς, επειδή τα αντικείμενα Y^C και Y_1^C της $\hat{\omega}$ είναι επίσης αντικείμενα της $\hat{\mathcal{X}}$, χρησιμοποιώντας ξανά το Λήμμα (7.3.22), οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι οι μορφισμοί γ και δ στην \mathcal{C} , παραγοντοποιούνται αντίστοιχα, μέσω κάποιων αντικειμένων Y και Y_1 της ω . Έτσι, έπεται ότι οι μορφισμοί $1_{Y^C} - (g' \circ h')$ και $1_{Y_1^C} - (h' \circ g')$ στην \mathcal{C} , παραγοντοποιούνται αντίστοιχα, μέσω των αντικειμένων Y και Y_1 της ω .

Για αυτό το λόγο λοιπόν, λέμε ότι μια \mathcal{X} -προσέγγιση ενός αντικειμένου της $\hat{\mathcal{X}}$ είναι μοναδική «modulo ω », καθώς και ότι ένα $\hat{\omega}$ -κάλυμμα ενός αντικειμένου της $\hat{\mathcal{X}}$ είναι μοναδικό «modulo ω ».

Με άλλα λόγια δύο \mathcal{X} -προσέγγισεις ενός αντικειμένου της $\hat{\mathcal{X}}$ είναι ισόμορφα αντικείμενα της ευσταθούς κατηγορίας $\hat{\mathcal{X}}/\omega$, και δύο $\hat{\omega}$ -καλύμματα ενός αντικειμένου της $\hat{\mathcal{X}}$ είναι ισόμορφα αντικείμενα της ευσταθούς κατηγορίας $\hat{\omega}/\omega$.

Παρατήρηση 7.3.24. Θεωρούμε δύο αντικείμενα C και D της $\hat{\mathcal{X}}$, και έναν μορφισμό $f: C \rightarrow D$ στην $\hat{\mathcal{X}}$. Αν διαλέξουμε μια \mathcal{X} -προσέγγιση του C και μια \mathcal{X} -προσέγγιση του D , έστω αντίστοιχα,

$$0 \rightarrow Y_C \rightarrow X_C \xrightarrow{\pi_C} C \rightarrow 0 \quad \& \quad 0 \rightarrow Y_D \rightarrow X_D \xrightarrow{\pi_D} D \rightarrow 0,$$

τότε χρησιμοποιώντας το Θεώρημα (7.3.12), συμπεραίνουμε την ύπαρξη ενός μορφισμού στην \mathcal{X} , $f_*: X_C \rightarrow X_D$ με την ιδιότητα $f \circ \pi_C = \pi_D \circ f_*$. Ο μορφισμός f_* επάγει έναν μοναδικό μορφισμό $\alpha: Y_C \rightarrow Y_D$ στην $\hat{\omega}$, τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & Y_C & \longrightarrow & X_C & \xrightarrow{\pi_C} & C \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \alpha & & \downarrow f_* & & \downarrow f \\
0 & \longrightarrow & Y_D & \longrightarrow & X_D & \xrightarrow{\pi_D} & D \longrightarrow 0.
\end{array}$$

Έστω τώρα E ένα άλλο αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$, και $g: D \rightarrow E$ ένας μορφισμός στην $\hat{\mathcal{X}}$. Αν διαλέξουμε μια \mathcal{X} -προσέγγιση του E , έστω

$$0 \rightarrow Y_E \rightarrow X_E \xrightarrow{\pi_E} E \rightarrow 0,$$

τότε χρησιμοποιώντας και πάλι το Θεώρημα (7.3.12), παίρνουμε έναν μορφισμό $g_*: X_D \rightarrow X_E$ στην \mathcal{X} , με την ιδιότητα $g \circ \pi_D = \pi_E \circ g_*$. Ο μορφισμός g_* μας εξασφαλίζει έναν μοναδικό μορφισμό $\beta: Y_D \rightarrow Y_E$ στην $\hat{\omega}$, ο οποίος συνθέτει το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & Y_D & \longrightarrow & X_D & \xrightarrow{\pi_D} & D \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \beta & & \downarrow g_* & & \downarrow g \\
0 & \longrightarrow & Y_E & \longrightarrow & X_E & \xrightarrow{\pi_E} & E \longrightarrow 0.
\end{array}$$

Έτσι, θεωρώντας τη σύνθεση $g \circ f: C \rightarrow E$ στην $\widehat{\mathcal{X}}$, και ακολουθώντας μια ανάλογη πορεία όπως προηγουμένως, επάγεται το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Y_C & \longrightarrow & X_C & \xrightarrow{\pi_C} & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \gamma & & \downarrow (g \circ f)_* & & \downarrow g \circ f \\ 0 & \longrightarrow & Y_E & \longrightarrow & X_E & \xrightarrow{\pi_E} & E \longrightarrow 0. \end{array}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την μεταθετικότητα των προηγούμενων διαγραμμάτων, είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι ο μορφισμός $(g_* \circ f_*) - (g \circ f)_*: X_C \rightarrow X_E$ στην \mathcal{X} , παραγοντοποιείται μέσω του αντικειμένου Y_E της $\widehat{\omega}$. Συνεπώς, από το Λήμμα (7.3.22), έπεται ότι ο μορφισμός $(g_* \circ f_*) - (g \circ f)_*$ στην \mathcal{X} , παραγοντοποιείται μέσω ενός αντικειμένου της ω . Το αποτέλεσμα όμως αυτό, μας δίνει ότι ο μορφισμός $(g_* \circ f_*) - (g \circ f)_*$ στην \mathcal{X} , είναι ο μηδενικός μορφισμός στην πλήρη υποκατηγορία \mathcal{X}/ω της \mathcal{C}/ω , δηλαδή $(g_* \circ f_*) = (g \circ f)_*$ στην ευσταθή κατηγορία $\widehat{\mathcal{X}}/\omega$.

Ομοίως, αν διαλέξουμε $\widehat{\omega}$ -καλύμματα των αντικειμένων C, D και E της $\widehat{\mathcal{X}}$, τότε χρησιμοποιώντας το Θεώρημα (7.3.17), συμπεραίνουμε την ύπαρξη μορφισμών στην $\widehat{\omega}$ και στην \mathcal{X} , οι οποίοι συνθέτουν το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{i^C} & Y^C & \xrightarrow{p} & X^C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow f^* & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & D & \xrightarrow{i^D} & Y^D & \xrightarrow{p'} & X^D \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow g & & \downarrow g^* & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & E & \xrightarrow{i^E} & Y^E & \xrightarrow{p''} & X^E \longrightarrow 0. \end{array}$$

Σημειώνουμε ότι η πρώτη, δεύτερη και τρίτη γραμμή του παραπάνω διαγράμματος, παριστάνουν τα επιλεγόμενα $\widehat{\omega}$ -καλύμματα των αντικειμένων C, D και E της $\widehat{\mathcal{X}}$, αντίστοιχα. Θεωρώντας στη συνέχεια τη σύνθεση $g \circ f: C \rightarrow E$ στην $\widehat{\mathcal{X}}$, και χρησιμοποιώντας ξανά το Θεώρημα (7.3.17), επάγονται μορφισμοί στην $\widehat{\omega}$ και στην \mathcal{X} , τέτοιοι ώστε το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{i^C} & Y^C & \xrightarrow{p} & X^C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow g \circ f & & \downarrow (g \circ f)^* & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & E & \xrightarrow{i^E} & Y^E & \xrightarrow{p''} & X^E \longrightarrow 0 \end{array}$$

να είναι μεταθετικό. Χρησιμοποιώντας τη μεταθετικότητα των δύο προηγούμενων διαγραμμάτων, εύκολα βλέπουμε ότι υπάρχει μορφισμός $\delta: X^C \rightarrow Y^E$ στην \mathcal{C} , έτσι ώστε $\delta \circ p = (g^* \circ f^*) - (g \circ f)^*$. Όμως, το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} X^C & \xrightarrow{\delta} & Y^E \\ & \searrow \delta & \uparrow 1_{Y^E} \\ & & Y^E \end{array}$$

μας εξασφαλίζει ότι ο μορφισμός δ παραγοντοποιείται μέσω του αντικειμένου Y^E της $\widehat{\omega}$. Συνεπώς, χρησιμοποιώντας το Λήμμα (7.3.22), συμπεραίνουμε ότι ο μορφισμός δ στην \mathcal{C} παραγοντοποιείται μέσω ενός αντικειμένου W της ω , και άρα, ότι ο μορφισμός $(g^* \circ f^*) - (g \circ f)^*: Y^C \rightarrow Y^E$ στην $\widehat{\omega}$, παραγοντοποιείται επίσης μέσω του αντικειμένου W της ω . Έτσι τελικά, έχουμε ότι ο μορφισμός $(g^* \circ f^*) - (g \circ f)^*$ στην $\widehat{\omega}$, είναι ο μηδενικός μορφισμός στην πλήρη υποκατηγορία $\widehat{\omega}/\omega$ της \mathcal{C}/ω , δηλαδή $(g^* \circ f^*) = (g \circ f)^*$ στην ευσταθή κατηγορία $\widehat{\omega}/\omega$.

Ως απόρροια των παραπάνω λοιπόν, ορίζονται συναλλοίωτοι συναρτητές:

$$T: \widehat{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}/\omega, \quad C \mapsto X_C,$$

και

$$T': \hat{\mathcal{X}} \longrightarrow \hat{\omega}/\omega, \quad C \longmapsto Y^C,$$

όπου X_C είναι η επιλεγόμενη \mathcal{X} -προσέγγιση του αντικείμενου C της $\hat{\mathcal{X}}$, και Y^C είναι το επιλεγόμενο $\hat{\omega}$ -κάλυμμα του αντικείμενου C της $\hat{\mathcal{X}}$. Επιπλέον, αν $f: C \longrightarrow D$ είναι ένας μορφισμός στην $\hat{\mathcal{X}}$, τότε θέτουμε $T(f) = f_*: X_C \longrightarrow X_D$, και $T'(f) = f^*: Y^C \longrightarrow Y^D$.

Οι συναλλοίωτοι συναρτητές T και T' , όπως ορίστηκαν προηγουμένως, ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$T(\omega) = 0 \quad \& \quad T'(\omega) = 0,$$

όπου με 0 παριστάνουμε συγχρόνως τα μηδενικά αντικείμενα των κατηγοριών \mathcal{X}/ω και $\hat{\omega}/\omega$, δηλαδή, τα αντικείμενα ακριβώς της ω . Ισοδύναμα, για κάθε αντικείμενο W της ω , τυχούσα \mathcal{X} -προσέγγιση X_W και τυχόν $\hat{\omega}$ -κάλυμμα Y^W , του W είναι στην πραγματικότητα, αντικείμενα της ω . Για να διαπιστώσουμε τον ισχυρισμό αυτό, θεωρούμε ένα τυχαίο αντικείμενο W της ω , και έστω

$$0 \longrightarrow Y_W \longrightarrow X_W \xrightarrow{\pi_W} W \longrightarrow 0 \quad \& \quad 0 \longrightarrow W \xrightarrow{i^W} Y^W \longrightarrow X^W \longrightarrow 0,$$

μια \mathcal{X} -προσέγγιση και αντίστοιχα, ένα $\hat{\omega}$ -κάλυμμα του W . Προφανώς, οι ακριβείς ακολουθίες

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow W \xrightarrow{1_W} W \longrightarrow 0 \quad \& \quad 0 \longrightarrow W \xrightarrow{1_W} W \longrightarrow 0 \longrightarrow 0,$$

στην \mathcal{C} μπορούν να θεωρηθούν αντίστοιχα, ως μια \mathcal{X} -προσέγγιση και ως ένα $\hat{\omega}$ -κάλυμμα του W . Επομένως, χρησιμοποιώντας τα Πορίσματα (7.3.16) και (7.3.21), οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι οι μορφισμοί π_W και 1_W στην \mathcal{C} είναι ισοδύναμοι, καθώς και ότι οι μορφισμοί i^W και 1_W στην \mathcal{C} είναι ισοδύναμοι. Συνεπώς, αν χρησιμοποιήσουμε τις Παρατηρήσεις τώρα (7.3.15) και (7.3.20), τότε έπεται ότι το αντικείμενο X_W της \mathcal{X} είναι ισόμορφο στην \mathcal{X}/ω , με το αντικείμενο W της ω , και αντίστοιχα, ότι το αντικείμενο Y^W της $\hat{\omega}$ είναι ισόμορφο στην $\hat{\omega}/\omega$, με το αντικείμενο W της ω . Επειδή λοιπόν, το W είναι συγχρόνως μηδενικό αντικείμενο των κατηγοριών \mathcal{X}/ω και $\hat{\omega}/\omega$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι τα X_W και Y^W είναι στην πραγματικότητα αντικείμενα της ω , όπως επιθυμούσαμε.

Θα χρησιμοποιήσουμε την Παρατήρηση (7.3.24), για να αποδείξουμε το ακόλουθο βασικό

Θεώρημα 7.3.25. Έστω $\iota: \hat{\omega} \longrightarrow \hat{\mathcal{X}}$ και $j: \mathcal{X} \longrightarrow \hat{\mathcal{X}}$, οι συναλλοίωτοι φυσικοί συναρτητές έγκλεισης. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Ο επαγόμενος συναλλοίωτος συναρτητής $j_!: \mathcal{X}/\omega \longrightarrow \hat{\mathcal{X}}/\omega$ είναι πλήρης και πιστός, και δέχεται έναν δεξιό συζυγή $j^!: \hat{\mathcal{X}}/\omega \longrightarrow \mathcal{X}/\omega$, ο οποίος αντιστοιχίζει κάθε αντικείμενο C της $\hat{\mathcal{X}}$ στην επιλεγόμενη \mathcal{X} -προσέγγιση X_C του C . Επιπλέον, ο μορφισμός σύζευξης

$$(j_! \circ j^!)(C) \longrightarrow C,$$

δίνεται από την κλάση των μορφισμών $\pi_C: X_C \longrightarrow C$ στην αβελιανή ομάδα $\text{Hom}_{\hat{\mathcal{X}}/\omega}(X_C, C)$.

2. Ο επαγόμενος συναλλοίωτος συναρτητής $\iota_*: \hat{\omega}/\omega \longrightarrow \hat{\mathcal{X}}/\omega$ είναι πλήρης και πιστός, και δέχεται έναν αριστερό συζυγή $\iota^*: \hat{\mathcal{X}}/\omega \longrightarrow \hat{\omega}/\omega$, ο οποίος αντιστοιχίζει κάθε αντικείμενο C της $\hat{\mathcal{X}}$ στο επιλεγόμενο $\hat{\omega}$ -κάλυμμα Y^C του C . Επιπλέον, ο μορφισμός σύζευξης

$$C \longrightarrow (\iota_* \circ \iota^*)(C),$$

δίνεται από την κλάση των μορφισμών $i^C: C \longrightarrow Y^C$ στην αβελιανή ομάδα $\text{Hom}_{\hat{\mathcal{X}}/\omega}(C, Y^C)$.

3. $j^! \circ \iota_* = 0$ και $\iota^* \circ j_! = 0$.

4. Η σύνθεση των μορφισμών σύζευξης:

$$j_! \circ j^! \xrightarrow{\pi} \text{Id}_{\hat{\mathcal{X}}/\omega} \xrightarrow{i} \iota_* \circ \iota^*$$

είναι ο μηδενικός μορφισμός στην $\hat{\mathcal{X}}/\omega$.

Απόδειξη. 1) Ο συναλλοίωτος φυσικός συναρτητής έγκλεισης j επάγει τον συναλλοίωτο συναρτητή $j_! : \mathcal{X}/\omega \rightarrow \hat{\mathcal{X}}/\omega$, ο οποίος αντιστοιχίζει κάθε αντικείμενο \underline{X} της \mathcal{X}/ω , στο αντικείμενο \underline{X} της $\hat{\mathcal{X}}/\omega$, και κάθε μορφισμό $\underline{f} : \underline{X} \rightarrow \underline{X}'$ στη \mathcal{X}/ω , στον μορφισμό \underline{f} στη $\hat{\mathcal{X}}/\omega$. Θεωρώντας για κάθε δύο αντικείμενα \underline{X} και \underline{X}' της \mathcal{X}/ω τον ομομορφισμό αβελιανών ομάδων:

$$(j_!)_{\underline{X}, \underline{X}'} : \text{Hom}_{\mathcal{X}/\omega}(\underline{X}, \underline{X}') \rightarrow \text{Hom}_{\hat{\mathcal{X}}/\omega}(\underline{X}, \underline{X}'), \quad \underline{f} \mapsto \underline{f},$$

είναι φανερό ότι ο ομομορφισμός αβελιανών ομάδων $(j_!)_{\underline{X}, \underline{X}'}$ είναι ισομορφισμός, ή ισοδύναμα, ότι ο συναλλοίωτος συναρτητής $j_!$ είναι πλήρης και πιστός. Αν θεωρήσουμε τώρα την προβολή,

$$\varpi : \hat{\mathcal{X}} \rightarrow \hat{\mathcal{X}}/\omega,$$

και τον συναλλοίωτο συναρτητή της Παρατήρησης (7.3.24),

$$T : \hat{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}/\omega,$$

ο οποίος πληρεί τη σχέση, $T(W) = 0$ για κάθε αντικείμενο W της ω , τότε χρησιμοποιώντας την καθολική ιδιότητα των κατηγοριών πηλίκα, παίρνουμε έναν μοναδικό συναλλοίωτο συναρτητή

$$j^! : \hat{\mathcal{X}}/\omega \rightarrow \mathcal{X}/\omega,$$

με την ιδιότητα, $j^! \circ \varpi = T$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι ο συναλλοίωτος συναρτητής $j^!$ με την προηγούμενη ιδιότητα, είναι ακριβώς ο συναρτητής ο οποίος αντιστοιχίζει κάθε αντικείμενο C της $\hat{\mathcal{X}}$ στην επιλεγόμενη \mathcal{X} -προσέγγιση X_C του C , και κάθε μορφισμό $\underline{f} : C \rightarrow D$ στην $\hat{\mathcal{X}}/\omega$, στον μορφισμό $\underline{f}_* : X_C \rightarrow X_D$ στην \mathcal{X}/ω . Για να δείξουμε ότι ο συναλλοίωτος συναρτητής $j^!$ είναι δεξιός συζυγής του συναλλοίωτου συναρτητή $j_!$, χρειάζεται για κάθε αντικείμενο X της \mathcal{X}/ω , και για κάθε αντικείμενο C της $\hat{\mathcal{X}}/\omega$, να κατασκευάσουμε φυσικούς ισομορφισμούς αβελιανών ομάδων:

$$: \text{Hom}_{\mathcal{X}/\omega}(X, j^!(C)) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\hat{\mathcal{X}}/\omega}(j_!(X), C),$$

όπου $j^!(C) = X_C$ και $j_!(X) = X$. Αν X και C είναι αντικείμενα αντίστοιχα, της \mathcal{X}/ω και της $\hat{\mathcal{X}}/\omega$, και

$$0 \rightarrow Y_C \xrightarrow{\kappa_C} X_C \xrightarrow{\pi_C} C \rightarrow 0 \quad (7.38)$$

είναι μια \mathcal{X} -προσέγγιση του C , τότε χρησιμοποιώντας το Θεώρημα (7.3.12), συμπεραίνουμε ότι η επαγόμενη ακολουθία αβελιανών ομάδων:

$$\text{Hom}_{\mathcal{X}}(X, X_C) \xrightarrow{(\pi_C)_*} \text{Hom}_{\hat{\mathcal{X}}}(X, C) \rightarrow 0, \quad (7.39)$$

είναι ακριβής. Έτσι, για κάθε αντικείμενο X της \mathcal{X}/ω και για κάθε αντικείμενο C της $\hat{\mathcal{X}}/\omega$, ορίζουμε απεικονίσεις:

$$\phi_{X,C} : \text{Hom}_{\mathcal{X}/\omega}(X, X_C) \rightarrow \text{Hom}_{\hat{\mathcal{X}}/\omega}(X, C), \quad \underline{f} \mapsto \underline{\pi_C} \circ \underline{f} = (\pi_C)_*(\underline{f}),$$

όπου $\underline{f} : X \rightarrow X_C$ είναι ένας μορφισμός στην \mathcal{X} . Στη συνέχεια, σταθεροποιώντας ένα αντικείμενο X της \mathcal{X}/ω και ένα αντικείμενο C της $\hat{\mathcal{X}}/\omega$, και διαλέγοντας μια \mathcal{X} -προσέγγιση του C όπως η (7.38), θα αποδείξουμε ότι οι απεικονίσεις $\phi_{X,C}$ είναι φυσικοί ισομορφισμοί αβελιανών ομάδων για κάθε αντικείμενο X της \mathcal{X}/ω και για κάθε αντικείμενο C της $\hat{\mathcal{X}}/\omega$. Έστω λοιπόν $\underline{f}, \underline{g} : X \rightarrow X_C$ δύο μορφισμοί στη \mathcal{X}/ω . Παρατηρώντας ότι

$$\underline{\pi_C} \circ (\underline{f} + \underline{g}) = (\underline{\pi_C} \circ \underline{f}) + (\underline{\pi_C} \circ \underline{g}) = \underline{\pi_C} \circ \underline{f} + \underline{\pi_C} \circ \underline{g},$$

συμπεραίνουμε ότι η απεικόνιση $\phi_{X,C}$ είναι ένας ομομορφισμός αβελιανών ομάδων. Επιπλέον, αν θεωρήσουμε έναν μορφισμό $\underline{h} : X \rightarrow C$ στην $\hat{\mathcal{X}}/\omega$, όπου $h : X \rightarrow C$ είναι ένας μορφισμός

στην $\widehat{\mathcal{X}}$, τότε αφού η ακολουθία αβελιανών ομάδων (7.39) είναι ακριβής, υπάρχει ένας μορφισμός $f: X \rightarrow X_C$ στην \mathcal{X} τέτοιος ώστε $(\pi_C)_*(f) = h$. Συνεπώς, παίρνουμε ότι

$$\phi_{X,C}(f) = (\pi_C)_*(f) = h,$$

και κατ' επέκταση, ότι ο ομομορφισμός αβελιανών ομάδων $\phi_{X,C}$ είναι επιμορφισμός. Για να δείξουμε ότι ο επιμορφισμός αβελιανών ομάδων $\phi_{X,C}$ είναι μονομορφισμός, θεωρούμε έναν μορφισμό $\underline{f}: X \rightarrow X_C$ στην \mathcal{X}/ω με την ιδιότητα ότι $\phi_{X,C}(\underline{f}) = 0_{\text{Hom}_{\widehat{\mathcal{X}}/\omega}(X,C)}$, ή ισοδύναμα, ότι $\pi_C \circ \underline{f} = 0_{\text{Hom}_{\widehat{\mathcal{X}}/\omega}(X,C)}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\underline{f} = 0_{\text{Hom}_{\mathcal{X}/\omega}(X,X_C)}$, ή ισοδύναμα, ότι ο μορφισμός $f: X \rightarrow X_C$ στην \mathcal{X} παραγοντοποιείται μέσω ενός αντικειμένου της ω . Επειδή λοιπόν, $\pi_C \circ \underline{f} = 0_{\text{Hom}_{\widehat{\mathcal{X}}/\omega}(X,C)}$, υπάρχει ένα αντικείμενο W της ω , και μορφισμοί $h: X \rightarrow W$, $g: W \rightarrow C$ στην \mathcal{C} , τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Y_C & \xrightarrow{\kappa_C} & X_C & \xrightarrow{\pi_C} & C \longrightarrow 0 \\ & & & & \uparrow f & & \uparrow g \\ & & & & X & \xrightarrow{h} & W \end{array}$$

Θεωρώντας τώρα το αντικείμενο W της ω ως αντικείμενο της \mathcal{X} , και χρησιμοποιώντας ξανά το Θεώρημα (7.3.12), οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X_C) \xrightarrow{(\pi_C)_*} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, C) \longrightarrow 0,$$

είναι ακριβής. Συνεπώς, υπάρχει μορφισμός $g': W \rightarrow X_C$ στην \mathcal{C} , τέτοιος ώστε $(\pi_C)_*(g') = g$, ή ισοδύναμα, $\pi_C \circ g' = g$. Παρατηρώντας ότι:

$$\pi_C \circ g' \circ h = g \circ h = \pi_C \circ f,$$

και θέτοντας $\alpha = f - (g' \circ h)$, παίρνουμε ότι $\pi_C \circ \alpha = 0$, ή ισοδύναμα, ότι $\text{im } \alpha \leq_m \ker \pi_C = \kappa_C$. Επομένως, υπάρχει μορφισμός $\lambda: \text{Im } \alpha \rightarrow Y_C$ στην \mathcal{C} , τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} \text{Im } \alpha & \xrightarrow{\text{im } \alpha} & X_C \\ & \searrow \lambda & \uparrow \kappa_C \\ & & Y_C \end{array} \tag{7.40}$$

Έτσι, επειδή η κατηγορία \mathcal{C} είναι αβελιανή, και το διάγραμμα (7.40) είναι μεταθετικό, συμπεραίνουμε ότι ο μορφισμός α στη \mathcal{C} αναλύεται μέσω της εικόνας του, ως το μεταθετικό διαγράμμα:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & X_C \\ \beta \downarrow & \nearrow \kappa_C \circ \lambda & \\ \text{Im } \alpha & & \end{array}$$

όπου β είναι ένας επιμορφισμός στην \mathcal{C} . Θέτοντας λοιπόν, $\gamma = \lambda \circ \beta: X \rightarrow Y_C$, έχουμε ότι $\kappa_C \circ \gamma = \alpha$, δηλαδή, ότι το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & X_C \\ \gamma \downarrow & \nearrow \kappa_C & \\ Y_C & & \end{array}$$

είναι μεταθετικό. Άρα, ο μορφισμός $\alpha = f - (g' \circ h)$ στην \mathcal{C} , παραγοντοποιείται μέσω του αντικειμένου Y_C της $\widehat{\omega}$, και κατ' επέκταση από το Λήμμα (7.3.22), μέσω ενός αντικειμένου της ω .

Το αποτέλεσμα όμως αυτό, μας εξασφαλίζει ότι ο μορφοισμός $f = (g' \circ h): X \rightarrow X_C$ στην \mathcal{X} είναι ο μηδενικός μορφοισμός στην \mathcal{X}/ω , ή ισοδύναμα, ότι $\underline{g'} \circ \underline{h} = \underline{f}$ στην \mathcal{X}/ω . Παρατηρώντας ότι ο μορφοισμός $g' \circ h$ στην \mathcal{X} παραγοντοποιείται εξ ορισμού μέσω του αντικείμενου W της ω , έπεται ότι

$$\underline{f} = \underline{g'} \circ \underline{h} = 0_{\text{Hom}_{\mathcal{X}/\omega}(X, X_C)},$$

και κατ' επέκταση, ότι ο επιμορφοισμός $\phi_{X,C}$ είναι μονομορφοισμός. Συνεπώς, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για κάθε αντικείμενο X της \mathcal{X}/ω και για κάθε αντικείμενο C της $\hat{\mathcal{X}}/\omega$, οι ομομορφοισμοί αβελιανών ομάδων $\phi_{X,C}$ είναι ισομορφοισμοί. Προκειμένου λοιπόν να αποδείξουμε ότι ο συναλλοίωτος συναρτητής $j^!$ είναι δεξιός συζυγής του συναλλοίωτου συναρτητή $j_!$, μένει ακόμη να δείξουμε ότι οι ισομορφοισμοί αβελιανών ομάδων $\phi_{X,C}$, είναι φυσικοί στο X και στο C . Το αποτέλεσμα ωστόσο αυτό, προκύπτει κατά προφανή τρόπο χρησιμοποιώντας τον τρόπο με τον οποίο ορίστηκαν οι απεικονίσεις $\phi_{X,C}$.

Έχοντας εξασφαλίσει τώρα ότι το ζεύγος συναλλοίωτων συναρτητών $(j_!, j^!)$ είναι συζυγές, από το Κεφάλαιο 2 γνωρίζουμε ότι για κάθε αντικείμενο C της $\hat{\mathcal{X}}/\omega$, οι φυσικοί ισομορφοισμοί αβελιανών ομάδων:

$$\phi_{j^!(C), C}: \text{Hom}_{\mathcal{X}/\omega}(j^!(C), j^!(C)) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\hat{\mathcal{X}}/\omega}(j_!(j^!(C)), C),$$

ορίζουν ένα φυσικό μετασχηματισμό $\eta: j_! \circ j^! \rightarrow \text{Id}_{\hat{\mathcal{X}}/\omega}$. Υπενθυμίζουμε ότι ο φυσικός μετασχηματισμός η ορίζεται ως η κλάση των μορφοισμών:

$$\{\underline{\eta}_C = \phi_{j^!(C), C}(\underline{1}_{j^!(C)}): (j_! \circ j^!)(C) \rightarrow \text{Id}_{\hat{\mathcal{X}}/\omega}(C)\},$$

για κάθε αντικείμενο C της $\hat{\mathcal{X}}/\omega$, με την ιδιότητα ότι αν $\underline{f}: C \rightarrow D$ είναι ένας μορφοισμός στην $\hat{\mathcal{X}}/\omega$, όπου $f: C \rightarrow D$ είναι ένας μορφοισμός στην $\hat{\mathcal{X}}$, τότε το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} (j_! \circ j^!)(C) & \xrightarrow{\underline{\eta}_C} & C \\ \downarrow (j_! \circ j^!)(\underline{f}) & & \downarrow \underline{f} \\ (j_! \circ j^!)(D) & \xrightarrow{\underline{\eta}_D} & D. \end{array} \quad (7.41)$$

είναι μεταθετικό. Παρατηρώντας για κάθε αντικείμενο C της $\hat{\mathcal{X}}/\omega$ τις ισότητες,

$$\underline{\eta}_C = \phi_{j^!(C), C}(\underline{1}_{j^!(C)}) = \underline{\pi}_C \circ \underline{1}_{X_C} = \underline{\pi}_C,$$

συμπεραίνουμε ότι ο φυσικός μετασχηματισμός $\eta = \{\underline{\eta}_C: X_C \rightarrow C\}$ όπου C είναι ένα αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}/\omega$, είναι η κλάση των μορφοισμών:

$$\pi = \{\underline{\pi}_C: X_C \rightarrow C\},$$

για κάθε αντικείμενο C της $\hat{\mathcal{X}}/\omega$, όπως επιθυμούσαμε.

2) Ανάλογα, με την απόδειξη του πρώτου σκέλους.

3) Θεωρούμε την σύνθεση των συναλλοίωτων συναρτητών $j^!$ και ι_* , δηλαδή, τον συναλλοίωτο συναρτητή

$$j^! \circ \iota_*: \hat{\omega}/\omega \rightarrow \mathcal{X}/\omega,$$

ο οποίος αντιστοιχίζει κάθε αντικείμενο Y της $\hat{\omega}/\omega$ στην επιλεγόμενη $\hat{\mathcal{X}}$ -προσέγγιση X_Y του Y , και κάθε μορφοισμό $\underline{f}: Y \rightarrow Y'$ στην $\hat{\omega}/\omega$ όπου $f: Y \rightarrow Y'$ είναι ένας μορφοισμός στην $\hat{\omega}$, στον μορφοισμό $\underline{f}_*: X_Y \rightarrow X_{Y'}$ στην \mathcal{X}/ω . Θέλουμε να δείξουμε ότι ο συναλλοίωτος συναρτητής $j^! \circ \iota_*$

είναι ο μηδενικός συναρτητής, δηλαδή, ο συναρτητής ο οποίος αντιστοιχίζει κάθε αντικείμενο Y της $\widehat{\omega}/\omega$, σε ένα μηδενικό αντικείμενο της \mathcal{X}/ω , και άρα υποχρεωτικά, κάθε μορφισμό $\underline{f}: Y \rightarrow Y'$ στην $\widehat{\omega}/\omega$, στον αντίστοιχο μηδενικό μορφισμό στην \mathcal{X}/ω . Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε ένα αντικείμενο Y της $\widehat{\omega}/\omega$, και έστω

$$0 \longrightarrow Y_Y \longrightarrow X_Y \xrightarrow{\pi_Y} Y \longrightarrow 0, \quad (7.42)$$

μια \mathcal{X} -προσέγγιση του Y . Επειδή το Y είναι αντικείμενο της $\widehat{\omega}/\omega$, υπάρχει μια σύντομη ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} ,

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow W \longrightarrow Y \longrightarrow 0, \quad (7.43)$$

όπου $K \in \text{ob}(\widehat{\omega})$ και $W \in \text{ob}(\omega)$. Ωστόσο, η ακριβής ακολουθία (7.43) στην \mathcal{C} , μπορεί να ιδωθεί ως μια \mathcal{X} -προσέγγιση του Y , αφού η ω είναι πλήρης υποκατηγορία της \mathcal{X} . Συνεπώς, χρησιμοποιώντας το Πρόσιμα (7.3.16), και την Παρατήρηση (7.3.15), παίρνουμε ότι οι ακολουθίες (7.42) και (7.43), είναι (δεξιά) ισοδύναμες ακριβείς ακολουθίες, και επιπλέον, ότι το αντικείμενο W της ω είναι ισόμορφο στην \mathcal{X}/ω , με το αντικείμενο $X_Y = (j^! \circ \iota_*)(Y)$ της \mathcal{X} . Έτσι, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι τα μηδενικά αντικείμενα της \mathcal{X}/ω , είναι ακριβώς όλα τα αντικείμενα της ω , συμπεραίνουμε ότι $j^! \circ \iota_* = 0$, όπως επιθυμούσαμε.

Στη συνέχεια, θεωρούμε τον συναλλοίωτο συναρτητή

$$\iota^* \circ j_!: \mathcal{X}/\omega \longrightarrow \widehat{\omega}/\omega,$$

ο οποίος αντιστοιχίζει κάθε αντικείμενο X της \mathcal{X}/ω στο επιλεγόμενο $\widehat{\omega}$ -κάλυμμα Y^X του X , και κάθε μορφισμό $\underline{f}: X \rightarrow X'$ στην \mathcal{X}/ω όπου $f: X \rightarrow X'$ είναι ένας μορφισμός στην \mathcal{X} , στον μορφισμό $\underline{f}^*: Y^X \rightarrow Y^{X'}$ στην $\widehat{\omega}/\omega$. Έχοντας εξασφαλίσει τώρα ότι τα ζεύγη συναλλοίωτων συναρτητών $(j_!, j^!)$ και (ι^*, ι_*) είναι συζυγή ζεύγη, η Παρατήρηση (2.2.27) μας δίνει ότι το ζεύγος συναλλοίωτων συναρτητών $(\iota^* \circ j_!, j^! \circ \iota_*)$ είναι επίσης συζυγές ζεύγος. Συνεπώς, για κάθε αντικείμενο X της \mathcal{X}/ω και για κάθε αντικείμενο Y της $\widehat{\omega}/\omega$, υπάρχουν φυσικοί ισομορφισμοί αβελιανών ομάδων:

$$\psi_{X,Y}: \text{Hom}_{\widehat{\omega}/\omega}((\iota^* \circ j_!)(X), Y) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{X}/\omega}(X, (j^! \circ \iota_*)(Y)).$$

Χρησιμοποιώντας τώρα το αποτέλεσμα ότι ο συναλλοίωτος συναρτητής $j^! \circ \iota_*$ είναι ο μηδενικός συναρτητής, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι για κάθε αντικείμενο Y της $\widehat{\omega}/\omega$, οι αβελιανές ομάδες $\text{Hom}_{\mathcal{X}/\omega}(X, (j^! \circ \iota_*)(Y))$ είναι οι τετριμμένες. Έτσι, αφού οι φυσικοί ομομορφισμοί αβελιανών ομάδων $\psi_{X,Y}$ είναι ισομορφισμοί, έπεται ότι

$$\text{Hom}_{\widehat{\omega}/\omega}((\iota^* \circ j_!)(X), Y) = 0_{\text{Hom}_{\widehat{\omega}/\omega}((\iota^* \circ j_!)(X), Y)},$$

για κάθε αντικείμενο X της \mathcal{X}/ω και για κάθε αντικείμενο Y της $\widehat{\omega}/\omega$. Συνεπώς, για κάθε αντικείμενο X της \mathcal{X}/ω , παίρνουμε ότι:

$$\text{Hom}_{\widehat{\omega}/\omega}((\iota^* \circ j_!)(X), (\iota^* \circ j_!)(X)) = 0_{\text{Hom}_{\widehat{\omega}/\omega}((\iota^* \circ j_!)(X), (\iota^* \circ j_!)(X))}.$$

Αν θεωρήσουμε στη συνέχεια για κάθε αντικείμενο X της \mathcal{X}/ω , τον ταυτοτικό μορφισμό

$$\underline{1}_{(\iota^* \circ j_!)(X)}: (\iota^* \circ j_!)(X) \longrightarrow (\iota^* \circ j_!)(X),$$

στην $\widehat{\omega}/\omega$, τότε χρησιμοποιώντας την προηγούμενη σχέση, καθώς και το γεγονός ότι η κατηγορία $\widehat{\omega}/\omega$ είναι προσθετική, οδηγούμαστε για κάθε αντικείμενο X της \mathcal{X}/ω , στο συμπέρασμα ότι:

$$\underline{1}_{(\iota^* \circ j_!)(X)} = 0_{\text{Hom}_{\widehat{\omega}/\omega}((\iota^* \circ j_!)(X), (\iota^* \circ j_!)(X))} = \underline{0},$$

όπου $\underline{0}$ είναι ο μηδενικός μορφισμός στην $\widehat{\omega}/\omega$. Το αποτέλεσμα όμως αυτό, καθώς και η Παρατήρηση (2.1.24), μας εξασφαλίζουν ότι για κάθε αντικείμενο X της \mathcal{X}/ω , τα αντικείμενα $(\iota^* \circ j_!)(X)$ είναι μηδενικά αντικείμενα της $\widehat{\omega}/\omega$. Επομένως, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο συναλλοίωτος συναρτητής $\iota^* \circ j_!$ είναι ο μηδενικός συναρτητής, όπως ζητούσαμε.

4) Θεωρούμε τη σύνθεση των μορφοισμών σύζευξης i και π , δηλαδή, τον φυσικό μετασχηματισμό

$$i \circ \pi = \{ \underline{i^C} \circ \underline{\pi_C} = \underline{i^C} \circ \pi_C : X_C \longrightarrow Y^C \}$$

για κάθε αντικείμενο C της $\hat{\mathcal{X}}/\omega$. Για κάθε αντικείμενο C της της $\hat{\mathcal{X}}$, (ή ισοδύναμα, της $\hat{\mathcal{X}}/\omega$), ο μορφοισμός $\underline{i^C} \circ \pi_C : X_C \longrightarrow Y^C$ στην $\hat{\mathcal{X}}$, παραγοντοποιείται μέσω του αντικειμένου Y^C της $\hat{\omega}$, ως το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} X_C & \xrightarrow{i^C \circ \pi_C} & Y^C \\ & \searrow i^C \circ \pi_C & \downarrow 1_{Y^C} \\ & & Y^C. \end{array}$$

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας το Λήμμα (7.3.22), συμπεραίνουμε ότι για κάθε αντικείμενο C της $\hat{\mathcal{X}}$, ο μορφοισμός $\underline{i^C} \circ \pi_C$ παραγοντοποιείται μέσω ενός αντικειμένου της ω , δηλαδή, για κάθε αντικείμενο C της $\hat{\mathcal{X}}$, υπάρχει ένα μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} X_C & \xrightarrow{\pi_C} & C \\ \downarrow & & \downarrow i^C \\ W & \dashrightarrow & Y^C \end{array}$$

όπου $W \in \text{ob}(\omega)$. Επομένως, για κάθε αντικείμενο C της προσθετικής κατηγορίας $\hat{\mathcal{X}}/\omega$, έχουμε ότι

$$\underline{i^C} \circ \pi_C : X_C \longrightarrow Y^C = 0_{\text{Hom}_{\hat{\mathcal{X}}/\omega}(X_C, Y^C)},$$

ή ισοδύναμα, ότι για κάθε αντικείμενο C της προσθετικής κατηγορίας $\hat{\mathcal{X}}/\omega$, οι επαγόμενοι μορφοισμοί $\underline{i^C} \circ \pi_C$ είναι οι μηδενικοί μορφοισμοί στην $\hat{\mathcal{X}}/\omega$ από το X_C στο Y^C . Άρα, η σύνθεση των μορφοισμών σύζευξης

$$j_! \circ j^! \xrightarrow{\pi} \text{Id}_{\hat{\mathcal{X}}/\omega} \xrightarrow{i} \iota_* \circ \iota^*,$$

είναι ο μηδενικός μορφοισμός στην $\hat{\mathcal{X}}/\omega$. ■

Είμαστε σε θέση πλέον να καταλάβουμε τον λόγο που το Θεώρημα (7.2.7), χαρακτηρίζεται ως το βασικό θεώρημα «αποσύνθεσης». Οι συνθήκες 3) και 4) του Θεωρήματος (7.3.25), μας εξασφαλίζουν ότι κάθε αντικείμενο C της $\hat{\mathcal{X}}$ «αποσυντίθεται», τουλάχιστον στην \mathcal{X}/ω , στην επιλεγόμενη \mathcal{X} -προσέγγιση X_C του C , και στο επιλεγόμενο $\hat{\omega}$ -κάλυμμα Y^C του C .

Στην προηγούμενη ενότητα, προκειμένου να εφαρμόσουμε την θεωρία που είχαμε αναπτύξει, δώσαμε ένα παράδειγμα για τις κατηγορίες \mathcal{X} και ω , όπου η ω αποτελούσε έναν συγγενήτορα για την \mathcal{X} . Στην παρούσα ενότητα, εισάγαμε την έννοια του ενέσιμου συγγενήτορα, και χρησιμοποιώντας την έννοια αυτή, αποδείξαμε θεμελιώδη αποτελέσματα. Ολοκληρώνουμε λοιπόν την παρούσα ενότητα, παραθέτοντας ένα παράδειγμα για τις κατηγορίες \mathcal{X} και ω , όπου η ω είναι πλέον ένας ενέσιμος συγγενήτορας για την \mathcal{X} .

Παράδειγμα 7.3.26. Αν διατηρήσουμε τους συμβολισμούς του Παραδείγματος (7.2.11) για τις κατηγορίες \mathcal{C} , \mathcal{X} και ω , τότε έχουμε ότι η ω είναι στην πραγματικότητα ένας ενέσιμος συγγενήτορας για την \mathcal{X} . Ο ισχυρισμός αυτός, προκύπτει παρατηρώντας ότι $\mathcal{X} = {}^\perp \omega$, και χρησιμοποιώντας το πρώτο σκέλος της Παρατήρησης (7.3.8). Επιπλέον, στην περίπτωση αυτή, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι κάθε αβελιανή κατηγορία είναι ταυτοδύναμα πλήρης, καθώς και την Πρόταση (2.3.14), έπεται ότι η ευσταθής κατηγορία \mathcal{X}/ω της \mathcal{X} modulo ω , είναι η κατηγορία των μέγιστων Cohen-Macaulay αριστερών R -προτύπων, με την έννοια ότι, $\text{Ext}_R^i(M, R) = 0$, για $i \neq 0$, modulo ευσταθή ισοδυναμία. Δηλαδή, αν τα πεπερασμένα παραγόμενα αριστερά R -πρότυπα M και M'

είναι αντικείμενα της \mathcal{X} , τότε το M είναι ισόμορφο με το M' στην \mathcal{X}/ω , αν και μόνο αν, υπάρχουν πεπερασμένα παραγόμενα και προβολικά αριστερά R -πρότυπα P και P' , έτσι ώστε το $M \oplus P'$ είναι ισόμορφο με το $M' \oplus P$ στην $\mathcal{C} = R\text{-mod}$.

7.4 Ιδιότητες Ακρίβειας Των Κατηγοριών $\hat{\mathcal{X}}$ Και $\hat{\omega}$

Στην ενότητα αυτή, διατηρούμε τη γενική μας υπόθεση ότι:

- η \mathcal{X} είναι ακριβής και προσθετικά κλειστή υποκατηγορία της \mathcal{C} , με την ιδιότητα ότι κάθε επιμορφισμός από την \mathcal{C} στην \mathcal{X} είναι αποδεκτός, καθώς και ότι η ω είναι ενέσιμος συγγενήτορας για την \mathcal{X} .

Αρχικά, αποδεικνύουμε ότι η πλήρης υποκατηγορία $\hat{\mathcal{X}}$ της \mathcal{C} είναι προσθετικά κλειστή, με την ιδιότητα ότι αν

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

είναι μια σύντομη ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} , όπου δύο από τα A, B και C είναι αντικείμενα της $\hat{\mathcal{X}}$, τότε και το τρίτο είναι αντικείμενο επίσης της $\hat{\mathcal{X}}$. Στη συνέχεια, βασιζόμενοι στο αποτέλεσμα αυτό, δείχνουμε ότι η $\hat{\omega}$ είναι μια ακριβής και προσθετικά κλειστή υποκατηγορία της \mathcal{C} , με την ιδιότητα ότι αν

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

είναι μια σύντομη ακριβή ακολουθία στην \mathcal{C} , όπου τα A και B είναι αντικείμενα της $\hat{\omega}$, τότε το C είναι επίσης αντικείμενο της $\hat{\omega}$. Η ιδιότητα αυτή, θα μπορούσαμε να την εκφράσουμε αλλιώς, λέγοντας ότι κάθε μονομορφισμός από την \mathcal{C} στην $\hat{\omega}$ είναι αποδεκτός.

7.4.1 Ιδιότητες ακρίβειας της $\hat{\mathcal{X}}$.

Ξεκινάμε με το ακόλουθο αποτέλεσμα, το οποίο μας εξασφαλίζει ότι η $\hat{\mathcal{X}}$ είναι ακριβής κατηγορία.

Λήμμα 7.4.1. Η πλήρης υποκατηγορία $\hat{\mathcal{X}}$ της \mathcal{C} είναι κλειστή στις επεκτάσεις.

Απόδειξη. Θεωρούμε μια σύντομη ακριβή ακολουθία στην \mathcal{C}

$$E' : \quad 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

όπου τα A και C είναι αντικείμενα της $\hat{\mathcal{X}}$. Θα δείξουμε ότι το αντικείμενο B της \mathcal{C} είναι αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$, με χρήση επαγωγής στο φυσικό αριθμό n , όπου $n = \mathcal{X}\text{-res. dim } C$. Αν $n = 0$, τότε έπεται ότι το αντικείμενο C της $\hat{\mathcal{X}}$, είναι επίσης αντικείμενο της \mathcal{X} . Επειδή το A είναι αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$, υπάρχει μια \mathcal{X} -προσέγγιση του A , έστω

$$0 \longrightarrow Y_A \longrightarrow X_A \xrightarrow{\pi_A} A \longrightarrow 0. \quad (7.44)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα το Θεώρημα (7.3.12), καθώς και το αποτέλεσμα ότι το C είναι αντικείμενο της \mathcal{X} , παίρνουμε ιδιαίτερα ότι ο επαγόμενος ομομορφισμός αβελιανών ομάδων:

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, \pi_A) : \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, X_A) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, A),$$

είναι ισομορφισμός.

Υπενθυμίζουμε από το Κεφάλαιο 2, τον τρόπο με τον οποίο ορίζεται ο επαγόμενος ομομορφισμός αβελιανών ομάδων $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, \pi_A)$. Αν

$$E : \quad 0 \longrightarrow X_A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

είναι μια σύντομη ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} , τότε θεωρώντας το pushout P του διαγράμματος:

$$\begin{array}{ccc} X_A & \longrightarrow & B \\ \pi_A \downarrow & & \downarrow \\ A & \dashrightarrow & P \end{array}$$

επάγεται μια σύντομη ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} ,

$$\pi_A E : 0 \longrightarrow A \longrightarrow P \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

τέτοια ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X_A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \pi_A & & \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & P & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Σημειώνουμε ότι η ακριβής ακολουθία $\pi_A E$ στην \mathcal{C} με την προηγούμενη ιδιότητα, είναι μοναδική μέχρι ισοδυναμίας. Δηλαδή, αν υπάρχει σύντομη ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C}

$$\bar{E} : 0 \longrightarrow A \longrightarrow K \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

και ένα μεταθετικό διάγραμμα της μορφής:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X_A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \pi_A & & \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & K & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

τότε υπάρχει μορφισμός $\beta: P \longrightarrow K$ στην \mathcal{C} , (για την ακρίβεια, ο μορφισμός β θα είναι υποχρεωτικά ισομορφισμός), τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & P & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \beta & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & K & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Στην περίπτωση αυτή, λέμε ότι οι ακριβείς ακολουθίες $\pi_A E$ και \bar{E} στην \mathcal{C} είναι ισοδύναμες, και τότε γράφουμε $\pi_A E = \bar{E}$. Για τη δοθείσα λοιπόν σύντομη ακριβή ακολουθία (7.44) στην \mathcal{C} , ορίζουμε τον ομομορφισμό αβελιανών ομάδων:

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, \pi_A) : \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, X_A) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, A),$$

θέτοντας $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, \pi_A)(E) = \pi_A E$, για κάθε $E \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, X_A)$.

Έτσι, αφού ο επαγόμενος ομομορφισμός αβελιανών ομάδων $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, \pi_A)$ είναι ισομορφισμός, και η ακολουθία E' είναι στοιχείο της αβελιανής ομάδας $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, A)$, υπάρχει μοναδική σύντομη ακριβής ακολουθία

$$E : 0 \longrightarrow X_A \longrightarrow Z \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

στην \mathcal{C} , τέτοια ώστε $\pi_A E = \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, \pi_A)(E) = E'$. Συνεπώς, υπάρχει ένα μεταθετικό διάγραμμα

με ακριβείς γραμμές και στήλες στη \mathcal{C} :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & Y_A & \xlongequal{\quad} & Y_A & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & X_A & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \pi_A & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array} \tag{7.45}$$

Επειδή τα X_A και C είναι αντικείμενα της \mathcal{X} , και αφού η \mathcal{X} είναι κλειστή στις επεκτάσεις, οδηγούμαστε από την πρώτη γραμμή του διαγράμματος (7.45), στο συμπέρασμα ότι το Z είναι αντικείμενο επίσης της \mathcal{X} . Έτσι, θεωρώντας το αντικείμενο Y_A της $\hat{\omega}$ ως αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$, από τη δεύτερη στήλη του διαγράμματος (7.45), συμπεραίνουμε ότι το B είναι αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$.

Έστω τώρα $n > 0$. Υποθέτουμε ότι για κάθε αντικείμενο L της $\hat{\mathcal{X}}$ έτσι ώστε $\mathcal{X}\text{-res. dim } L \leq n-1$, και για κάθε σύντομη ακριβή ακολουθία:

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

στην \mathcal{C} όπου το M είναι αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$, ισχύει ότι το N είναι επίσης αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$. Η υπόθεση ότι $\mathcal{X}\text{-res. dim } C = n > 0$, μας εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας σύντομης ακριβούς ακολουθίας στην \mathcal{C} ,

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow X_0 \xrightarrow{\gamma} C \longrightarrow 0,$$

όπου $X_0 \in \text{ob}(\mathcal{X})$ και $\mathcal{X}\text{-res. dim } L = n-1$, και κατ' επέκταση, την ύπαρξη ενός μεταθετικού διαγράμματος με ακριβείς γραμμές στην \mathcal{C} :

$$\begin{array}{ccccccc}
 E'\gamma: & 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & P & \longrightarrow & X_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \parallel & & \downarrow p & & \downarrow \gamma & & \\
 E': & 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

όπου από τις ιδιότητες των pullback-διαγραμμάτων προκύπτει ότι ο μορφοισμός p στην \mathcal{C} , είναι επιμορφοισμός. Χρησιμοποιώντας στη συνέχεια το Θεώρημα (7.3.12), συμπεραίνουμε ότι ο επαγόμενος ομομορφοισμός αβελιανών ομάδων:

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X_0, \pi_A): \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X_0, X_A) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X_0, A),$$

είναι ισομορφοισμός, διότι το X_0 είναι αντικείμενο της \mathcal{X} . Επομένως, αφού η ακολουθία $E'\gamma$ είναι στοιχείο της αβελιανής ομάδας $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X_0, A)$, υπάρχει μοναδική σύντομη ακριβής ακολουθία

$$\underline{E}: \quad 0 \longrightarrow X_A \longrightarrow V \longrightarrow X_0 \longrightarrow 0$$

στην \mathcal{C} , τέτοια ώστε $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X_0, \pi_A)(\underline{E}) = E'\gamma$, ή ισοδύναμα, υπάρχει ένα μεταθετικό διάγραμμα με

ακριβείς γραμμές στην \mathcal{C} :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \underline{E} : & 0 & \longrightarrow & X_A & \longrightarrow & V & \longrightarrow & X_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow \pi_A & & \downarrow \alpha & & \parallel & & \\
 \pi_A \underline{E} : & 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & U & \longrightarrow & X_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \parallel & & \cong \downarrow p' & & \parallel & & \\
 E' \gamma : & 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & P & \longrightarrow & X_0 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

όπου από τις ιδιότητες των pushout-διαγραμμάτων προκύπτει ότι ο μορφισμός α στην \mathcal{C} , είναι επιμορφισμός. Συνδυάζοντας λοιπόν τα προηγούμενα αποτελέσματα, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό με ακριβείς γραμμές και στήλες στην \mathcal{C} :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \underline{E} : & 0 & \longrightarrow & X_A & \longrightarrow & V & \longrightarrow & X_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow \pi_A & & \downarrow \delta & & \downarrow \gamma & & \\
 E' : & 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & 0 & & 0 & & 0 & &
 \end{array} \tag{7.46}$$

όπου $\delta = p \circ p' \circ \alpha$. Αν εφαρμόσουμε τώρα το Snake Lemma στο μεταθετικό διάγραμμα (7.46), και χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι ένας μορφισμός $f: M \rightarrow N$ στην \mathcal{C} είναι επιμορφισμός, αν και μόνο αν, $\text{Coker } f = 0$, τότε επάγεται μια σύντομη ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C}

$$0 \longrightarrow Y_A \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow 0,$$

η οποία συνθέτει το μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές και στήλες στην \mathcal{C} :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & Y_A & \longrightarrow & K & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 0 & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 0 & \longrightarrow & X_A & \longrightarrow & V & \longrightarrow & X_0 & \longrightarrow & 0 & \\
 & & \downarrow \pi_A & & \downarrow \delta & & \downarrow \gamma & & & \\
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & &
 \end{array} \tag{7.47}$$

όπου $\delta = p \circ p' \circ \alpha$. Επειδή τα X_A και X_0 είναι αντικείμενα της \mathcal{X} , και αφού η \mathcal{X} είναι κλειστή στις επεκτάσεις, από τη δεύτερη γραμμή του διαγράμματος (7.47), παίρνουμε ότι το V είναι επίσης αντικείμενο της \mathcal{X} . Επιπλέον, θεωρώντας το αντικείμενο Y_A της $\hat{\omega}$ ως αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$, και χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση, από την πρώτη γραμμή του διαγράμματος (7.47), έπεται ότι το K είναι αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$. Συνεπώς, από τη δεύτερη στήλη του διαγράμματος (7.47), καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το B είναι επίσης αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$, όπως επιθυμούσαμε. ■

Χρησιμοποιούμε τώρα το γεγονός ότι η $\hat{\mathcal{X}}$ είναι κλειστή στις επεκτάσεις, για να αποδείξουμε το επόμενο αποτέλεσμα.

Λήμμα 7.4.2. Έστω $0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ μια σύντομη ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} , όπου το X είναι αντικείμενο της \mathcal{X} . Τότε το K είναι αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$, αν και μόνο αν, το C είναι αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$.

Απόδειξη. Αν το K είναι αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$, τότε αφού το X είναι αντικείμενο της \mathcal{X} , έπεται ότι

$$\mathcal{X}\text{-res. dim } C \leq \mathcal{X}\text{-res. dim } K + 1 < \infty,$$

και κατ' επέκταση, ότι το C είναι αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$. Υποθέτουμε λοιπόν τώρα, ότι το C είναι αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$, και έστω

$$0 \longrightarrow Y_C \xrightarrow{j_C} X_C \xrightarrow{\pi_C} C \longrightarrow 0,$$

μια \mathcal{X} -προσέγγιση του C . Χρησιμοποιώντας την υπόθεση καθώς και το Θεώρημα (7.3.12), συμπεραίνουμε ότι ο ομομορφισμός αβελιανών ομάδων:

$$(\pi_C)_*: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X_C) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, C),$$

είναι επιμορφισμός. Συνεπώς, υπάρχει μορφισμός $h: X \longrightarrow X_C$ στην \mathcal{X} , έτσι ώστε $(\pi_C)_*(h) = g$, ή ισοδύναμα, $\pi_C \circ h = g$. Ο μορφισμός h στην \mathcal{X} με την προηγούμενη ιδιότητα, μας εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός μοναδικού μορφισμού $h': K \longrightarrow Y_C$ στην \mathcal{C} , ο οποίος επάγει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές στην \mathcal{C} :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{f} & X & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow h' & & \downarrow h & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & Y_C & \xrightarrow{j_C} & X_C & \xrightarrow{\pi_C} & C & \longrightarrow & 0. \end{array} \quad (7.48)$$

Επειδή το Y_C είναι αντικείμενο της $\hat{\omega}$, υπάρχει ένα αντικείμενο W της ω , και ένας επιμορφισμός $\kappa: W \longrightarrow Y_C$ στην $\hat{\omega}$. Σχηματίζοντας το ευθύ άθροισμα της πρώτης και αντίστοιχα, της δεύτερης γραμμής του μεταθετικού διαγράμματος (7.48), με την ακριβή ακολουθία στην \mathcal{C}

$$0 \longrightarrow W \xrightarrow{1_W} W \longrightarrow 0 \longrightarrow 0,$$

επάγεται το μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές στην \mathcal{C} :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K \oplus W & \xrightarrow{f \oplus 1_W} & X \oplus W & \xrightarrow{(g \ 0)} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \delta & & \downarrow \gamma & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & Y_C \oplus W & \xrightarrow{j_C \oplus 1_W} & X_C \oplus W & \xrightarrow{(\pi_C \ 0)} & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

όπου $\delta = \begin{pmatrix} h' & \kappa \\ 0 & 1_W \end{pmatrix}$ και $\gamma = \begin{pmatrix} h & j_C \circ \kappa \\ 0 & 1_W \end{pmatrix}$. Αν θεωρήσουμε στη συνέχεια τις φυσικές προβολές

$$\alpha := (1_{Y_C} \ 0): Y_C \oplus W \longrightarrow Y_C \quad \& \quad \beta := (1_{X_C} \ 0): X_C \oplus W \longrightarrow X_C,$$

τότε οδηγούμαστε στο μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές στην \mathcal{C} :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Y_C \oplus W & \xrightarrow{j_C \oplus 1_W} & X_C \oplus W & \xrightarrow{(\pi_C \ 0)} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & Y_C & \xrightarrow{j_C} & X_C & \xrightarrow{\pi_C} & C & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Ως απόρροια των παραπάνω λοιπόν, έπεται ότι το διάγραμμα :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & K \oplus W & \xrightarrow{f \oplus 1_W} & X \oplus W & \xrightarrow{(g \ 0)} & C \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \alpha \circ \delta & & \downarrow \beta \circ \gamma & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & Y_C & \xrightarrow{j_C} & X_C & \xrightarrow{\pi_C} & C \longrightarrow 0
 \end{array} \quad (7.49)$$

είναι μεταθετικό με ακριβείς γραμμές στην \mathcal{C} . Η εφαρμογή τώρα του Snake Lemma στο μεταθετικό διάγραμμα (7.49), μας δίνει ότι $V := \text{Ker}(\alpha \circ \delta) \cong \text{Ker}(\beta \circ \gamma)$, και κατ' επέκταση, ότι το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό με ακριβείς γραμμές και στήλες στην \mathcal{C} :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & V & \xlongequal{\quad} & V & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & K \oplus W & \xrightarrow{f \oplus 1_W} & X \oplus W & \xrightarrow{(g \ 0)} & C \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \alpha \circ \delta & & \downarrow \beta \circ \gamma & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & Y_C & \xrightarrow{j_C} & X_C & \xrightarrow{\pi_C} & C \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array} \quad (7.50)$$

Η γενική μας υπόθεση ότι κάθε επιμορφισμός από την \mathcal{C} στην \mathcal{X} είναι αποδεκτός, μας εξασφαλίζει ότι το V είναι αντικείμενο της \mathcal{X} , διότι το $X \oplus W$ μπορεί να θεωρηθεί ως αντικείμενο της \mathcal{X} , το X_C είναι αντικείμενο της \mathcal{X} , και η δεύτερη στήλη του μεταθετικού διαγράμματος (7.50) είναι μια σύντομη ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} . Αν θεωρήσουμε τώρα το αντικείμενο V της \mathcal{X} ως αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$, καθώς και το αντικείμενο Y_C της $\hat{\mathcal{C}}$ ως αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$, τότε χρησιμοποιώντας το Λήμμα (7.4.1), οδηγούμαστε από την πρώτη στήλη του μεταθετικού διαγράμματος (7.50), στο συμπέρασμα ότι το αντικείμενο $K \oplus W$ της \mathcal{C} , είναι επίσης αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$. Επομένως, υπάρχει μια \mathcal{X} -προσέγγιση του $K \oplus W$, έστω

$$0 \longrightarrow Y_{K \oplus W} \longrightarrow X_{K \oplus W} \xrightarrow{\pi_{K \oplus W}} K \oplus W \longrightarrow 0.$$

Θεωρώντας στη συνέχεια την κανονική εισαγωγή

$$i := \begin{pmatrix} 0 \\ 1_W \end{pmatrix} : W \longrightarrow K \oplus W,$$

και σχηματίζοντας το pullback Z του διαγράμματος:

$$\begin{array}{ccc} Z & \dashrightarrow & X_{K \oplus W} \\ \downarrow & & \downarrow \pi_{K \oplus W} \\ W & \xrightarrow{i} & K \oplus W \end{array}$$

επάγεται το μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές και στήλες στην \mathcal{C} :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & (7.51) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & Y_{K \oplus W} & \equiv & Y_{K \oplus W} & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X_{K \oplus W} & \dashrightarrow & K \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \pi_{K \oplus W} & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & W & \xrightarrow{i} & K \oplus W & \xrightarrow{\varpi} & K \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

όπου $\varpi = (1_K \ 0)$ είναι η φυσική προβολή. Επειδή τα $Y_{K \oplus W}$ και W μπορούν να θεωρηθούν αντικείμενα της $\hat{\mathcal{X}}$, και αφού η $\hat{\mathcal{X}}$ είναι κλειστή στις επεκτάσεις, από την πρώτη στήλη του μεταθετικού διαγράμματος (7.51), παίρνουμε ότι το Z είναι αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, καθώς και το γεγονός ότι το $X_{K \oplus W}$ είναι αντικείμενο της \mathcal{X} , καταλήγουμε από την πρώτη γραμμή του μεταθετικού διαγράμματος (7.51), στο συμπέρασμα ότι το K είναι αντικείμενο της \mathcal{X} , όπως επιθυμούσαμε. ■

Πρόταση 7.4.3. *Αν \mathcal{C} είναι ένα αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$, τότε για κάθε φυσικό αριθμό n οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

1. \mathcal{X} -res. dim $\mathcal{C} \leq n$.
2. Αν $0 \rightarrow U \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow X_0 \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0$ είναι μια ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} , όπου κάθε X_i για $i = 0, \dots, n-1$ είναι αντικείμενο της \mathcal{X} , τότε το U είναι επίσης αντικείμενο της \mathcal{X} .

Απόδειξη. Η συνεπαγωγή $2 \Rightarrow 1$ εξασφαλίζεται χρησιμοποιώντας τον ορισμό της διάστασης \mathcal{X} -ανάλυσης του αντικειμένου \mathcal{C} της $\hat{\mathcal{X}}$. Για να αποδείξουμε λοιπόν ότι οι παραπάνω συνθήκες είναι ισοδύναμες, αρκεί να δείξουμε την συνεπαγωγή $1 \Rightarrow 2$. Για το σκοπό αυτό, υποθέτουμε ότι ισχύει το 1), και θεωρούμε μια ακριβή ακολουθία στην \mathcal{C}

$$0 \rightarrow U \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow X_0 \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0, \tag{7.52}$$

όπου κάθε X_i για $i = 0, \dots, n-1$, είναι αντικείμενο της \mathcal{X} . Αν $n = 0$, τότε προφανώς το \mathcal{C} είναι αντικείμενο της \mathcal{X} , και η ακριβής ακολουθία (7.52) είναι στην πραγματικότητα η ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} :

$$0 \rightarrow U \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0.$$

Συνεπώς, έπεται ότι το U είναι αντικείμενο της \mathcal{X} ως ισόμορφο με το αντικείμενο \mathcal{C} της \mathcal{X} . Έτσι, υποθέτουμε τώρα ότι $n > 0$. Επειδή η ακολουθία (7.52) είναι ακριβής στην \mathcal{C} , μπορούμε να την «σπάσουμε» σε σύντομες ακριβείς ακολουθίες στην \mathcal{C} για κάθε $j = 1, \dots, n$,

$$\ell_j : \quad 0 \rightarrow K_j \rightarrow X_{j-1} \rightarrow K_{j-1} \rightarrow 0,$$

όπου $K_0 = C$ και $K_n = U$. Αν εφαρμόσουμε το Λήμμα (7.4.2) στη σύντομη ακριβή ακολουθία ℓ_1 , τότε έχουμε ότι το K_1 είναι αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, και εφαρμόζοντας ξανά το Λήμμα (7.4.2), αυτή τη φορά στη σύντομη ακριβή ακολουθία ℓ_2 , παίρνουμε ότι το K_2 είναι επίσης αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$. Επαγωγικά λοιπόν οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι το U είναι αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$. Στη συνέχεια, θεωρούμε ένα τυχαίο αντικείμενο W της $\hat{\omega}$, και εφαρμόζουμε τον αντισυναλλοίωτο συναρτητή $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, W)$ σε κάθε σύντομη ακριβή ακολουθία ℓ_j για $j = 1, \dots, n$. Τότε χρησιμοποιώντας το Πόρισμα (7.3.11), έπεται ότι

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(K_j, W) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{i+1}(K_{j-1}, W),$$

για κάθε $i > 0$ και για κάθε $1 \leq j \leq n$. Επομένως, προκύπτει ότι:

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(U, W) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^2(K_{n-1}, W) \cong \dots \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(K_1, W) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n+1}(C, W),$$

για κάθε αντικείμενο W της $\hat{\omega}$, και κατ' επέκταση, ότι $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(U, W) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n+1}(C, W)$ για κάθε αντικείμενο W της $\hat{\omega}$. Αν χρησιμοποιήσουμε τώρα την υπόθεση ότι \mathcal{X} -res. $\dim C \leq n$, καθώς και την Πρόταση (7.3.10), τότε οδηγούμαστε στη σχέση, C -inj. $\dim \hat{\omega} \leq n$. Εξ ορισμού λοιπόν, έχουμε ότι $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(C, W) = 0$ για κάθε $i > n$ και για κάθε αντικείμενο W της $\hat{\omega}$. Το αποτέλεσμα ωστόσο αυτό, μας δίνει ότι $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n+1}(C, W) = 0$ για κάθε αντικείμενο W της $\hat{\omega}$, και άρα, ότι $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(U, W) = 0$ για κάθε αντικείμενο W της $\hat{\omega}$. Συνεπώς, χρησιμοποιώντας και πάλι την Πρόταση (7.3.10), συμπεραίνουμε ότι \mathcal{X} -res. $\dim U = 0$, ή ισοδύναμα, ότι το αντικείμενο U της $\hat{\mathcal{X}}$ είναι στην πραγματικότητα αντικείμενο της \mathcal{X} , όπως επιθυμούσαμε. ■

Στη συνέχεια, βασιζόμενοι στην Πρόταση (7.4.3), αποδεικνύουμε ότι η $\hat{\mathcal{X}}$ είναι κλειστή σε ευθείς προσθετούς στην \mathcal{C} .

Πρόταση 7.4.4. Η πλήρης υποκατηγορία $\hat{\mathcal{X}}$ της \mathcal{C} είναι προσθετικά κλειστή. Ισοδύναμα,

$$\hat{\mathcal{X}} = \text{Add } \hat{\mathcal{X}}.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το αντικείμενο C_1 της \mathcal{C} είναι ευθύς προσθετός ενός αντικειμένου C της $\hat{\mathcal{X}}$, και γράφουμε $C = C_1 \oplus C_2$ για κάποιο αντικείμενο C_2 της \mathcal{C} . Θα δείξουμε ότι το C_1 είναι αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$, με χρήση επαγωγής στο φυσικό αριθμό n , όπου $n = \mathcal{X}$ -res. $\dim C$. Αν $n = 0$, ή ισοδύναμα, αν το C είναι αντικείμενο της \mathcal{X} , τότε έπεται ότι τα C_1 και C_2 είναι αντικείμενα της \mathcal{X} , διότι η \mathcal{X} είναι προσθετικά κλειστή. Έστω τώρα $n > 0$. Υποθέτουμε ότι για κάθε αντικείμενο $L = L_1 \oplus L_2$ της $\hat{\mathcal{X}}$ όπου τα L_1 και L_2 είναι αντικείμενα της \mathcal{C} , με \mathcal{X} -res. $\dim L \leq n - 1$, ισχύει ότι τα L_1 και L_2 είναι επίσης αντικείμενα της $\hat{\mathcal{X}}$. Επειδή το C είναι αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$, υπάρχει κάποιο αντικείμενο X της \mathcal{X} , και ένας επιμορφισμός $\phi: X \rightarrow C$ στην $\hat{\mathcal{X}}$. Αν θεωρήσουμε τώρα τις φυσικές προβολές

$$\alpha := (1_{C_1} \ 0): C \rightarrow C_1 \quad \& \quad \beta := (0 \ 1_{C_2}): C \rightarrow C_2,$$

τότε θέτοντας $K_1 = \text{Ker}(\alpha \circ \phi)$ και $K_2 = \text{Ker}(\beta \circ \phi)$, επάγονται οι σύντομες ακριβείς ακολουθίες στην \mathcal{C} :

$$0 \rightarrow K_1 \rightarrow X \xrightarrow{\alpha \circ \phi} C_1 \rightarrow 0 \quad \& \quad 0 \rightarrow K_2 \rightarrow X \xrightarrow{\beta \circ \phi} C_2 \rightarrow 0. \quad (7.53)$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε το ευθύ άθροισμα των προηγούμενων ακριβών ακολουθιών στην \mathcal{C} , δηλαδή, τη σύντομη ακριβή ακολουθία στην \mathcal{C} :

$$0 \rightarrow K_1 \oplus K_2 \rightarrow X \oplus X \xrightarrow{\gamma} C \rightarrow 0, \quad (7.54)$$

όπου $\gamma = (\alpha \circ \phi) \oplus (\beta \circ \phi)$. Επειδή το $X \oplus X$ είναι αντικείμενο της \mathcal{X} , και αφού το C είναι αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$, χρησιμοποιώντας το Λήμμα (7.4.2), συμπεραίνουμε από τη σύντομη ακριβή ακολουθία (7.54) ότι το $K_1 \oplus K_2$ είναι αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$. Ισχυριζόμαστε ότι \mathcal{X} -res. $\dim(K_1 \oplus K_2) \leq n - 1$.

Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό αυτόν, θα χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση (7.4.3). Θεωρούμε λοιπόν μια ακριβή ακολουθία στην \mathcal{C}

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow X_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_0 \longrightarrow K_1 \oplus K_2 \longrightarrow 0, \quad (7.55)$$

όπου κάθε X_i για $i = 0, \dots, n-2$, είναι αντικείμενο της \mathcal{X} . Η συγκόλληση της ακριβούς ακολουθίας (7.55) με την ακριβή ακολουθία (7.54) στην \mathcal{C} , είναι η ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} :

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow X_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_0 \longrightarrow X \oplus X \longrightarrow C \longrightarrow 0. \quad (7.56)$$

Χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι \mathcal{X} -res. dim $C = n$, και την Πρόταση (7.4.3), οδηγούμαστε από την ακριβή ακολουθία (7.56) στην \mathcal{C} , στο συμπέρασμα ότι το U είναι αντικείμενο της \mathcal{X} . Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, καθώς και την Πρόταση (7.4.3) ξανά, συμπεραίνουμε από την ακριβή ακολουθία (7.55) στην \mathcal{C} , ότι \mathcal{X} -res. dim $C \leq n-1$. Έτσι, η επαγωγική υπόθεση μας δίνει ότι τα K_1 και K_2 είναι αντικείμενα της $\hat{\mathcal{X}}$. Συνεπώς, αν εφαρμόσουμε το Λήμμα (7.4.2) στις ακριβείς ακολουθίες (7.53) στην \mathcal{C} , τότε παίρνουμε ότι τα C_1 και C_2 είναι επίσης αντικείμενα $\hat{\mathcal{X}}$, όπως ζητούσαμε. ■

Είμαστε έτοιμοι τώρα να αποδείξουμε τα αποτελέσματα που υποσχεθήκαμε για την κατηγορία $\hat{\mathcal{X}}$.

Πρόταση 7.4.5. Έστω $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ μια σύντομη ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} . Τότε αν δύο από τα A, B και C είναι αντικείμενα της $\hat{\mathcal{X}}$, τότε και το τρίτο είναι επίσης αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$.

Απόδειξη. Εφόσον το Λήμμα (7.4.1) μας εξασφαλίζει ότι η $\hat{\mathcal{X}}$ είναι κλειστή στις επεκτάσεις, αρκεί να δείξουμε ότι αν το B είναι αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$, τότε το A είναι αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$, αν και μόνο αν, το C είναι αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι το B είναι αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$, και έστω

$$0 \longrightarrow Y_B \longrightarrow X_B \xrightarrow{\pi_B} B \longrightarrow 0, \quad (7.57)$$

μια \mathcal{X} -προσέγγιση του B . Θεωρώντας στη συνέχεια το pullback L του διαγράμματος:

$$\begin{array}{ccc} L & \dashrightarrow & X_B \\ \downarrow & & \downarrow \pi_B \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

επάγεται το μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές και στήλες στην \mathcal{C} :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & Y_B & \xlongequal{\quad} & Y_B & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & X_B & \dashrightarrow & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \pi_B & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array} \quad (7.58)$$

Υποθέτουμε αρχικά, ότι το A είναι αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$. Τότε αφού η $\hat{\mathcal{X}}$ είναι κλειστή στις επεκτάσεις, και τα Y_B και A είναι αντικείμενα της $\hat{\mathcal{X}}$, συμπεραίνουμε από την πρώτη στήλη του

μεταθετικού διαγράμματος (7.58), ότι το L είναι επίσης αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, καθώς και το Λήμμα (7.4.2), οδηγούμαστε από την πρώτη γραμμή του μεταθετικού διαγράμματος (7.58), στο συμπέρασμα ότι το C είναι αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$, όπως επιθυμούσαμε.

Υποθέτουμε τώρα ότι το C είναι αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$, με σκοπό να δείξουμε ότι το A είναι επίσης αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι κάθε επιμορφισμός από την \mathcal{C} στην \mathcal{X} είναι αποδεκτός, από την πρώτη γραμμή του μεταθετικού διαγράμματος (7.58), παίρνουμε ότι το L είναι αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$. Προηγουμένως αποδείξαμε ότι αν

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow D \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

είναι μια σύντομη ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} , όπου K και D είναι αντικείμενα της $\hat{\mathcal{X}}$, τότε το E είναι επίσης αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$. Συνεπώς, επειδή τα L και Y_B είναι αντικείμενα της $\hat{\mathcal{X}}$, καταλήγουμε από την πρώτη στήλη του μεταθετικού διαγράμματος (7.58), στο ζητούμενο ότι το A είναι αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$. ■

7.4.2 Ιδιότητες ακρίβειας της $\hat{\omega}$.

Στη συνέχεια, επικεντρωνόμαστε στην $\hat{\omega}$. Ξεκινάμε με το ακόλουθο λήμμα, το οποίο μας εξασφαλίζει ότι $\omega = \mathcal{X} \cap \hat{\omega}$.

Λήμμα 7.4.6. *Για ένα αντικείμενο X της \mathcal{X} οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

1. Το X είναι αντικείμενο της ω .
2. Το X είναι αντικείμενο της $\hat{\omega}$.
3. \mathcal{X} -inj. dim $X = 0$.

Απόδειξη. Η συνεπαγωγή $1 \Rightarrow 2$ είναι τετριμμένη, και η συνεπαγωγή $2 \Rightarrow 3$ προκύπτει χρησιμοποιώντας το Πόρισμα (7.3.11). Απομένει λοιπόν να δείξουμε την συνεπαγωγή $3 \Rightarrow 1$. Υποθέτουμε ότι \mathcal{X} -inj. dim $X = 0$. Επειδή το X είναι αντικείμενο της \mathcal{X} , και αφού η ω είναι (ενέσιμος) συγγενήτορας για την \mathcal{X} , υπάρχει μια ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C}

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow W \longrightarrow X' \longrightarrow 0,$$

όπου το W είναι αντικείμενο της ω και το X' είναι αντικείμενο της \mathcal{X} . Η υπόθεση τώρα ότι \mathcal{X} -inj. dim $X = 0$, μας δίνει ιδιαίτερα ότι $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X', X) = 0$, ή ισοδύναμα, ότι η προηγούμενη σύντομη ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} είναι διασπασίμη. Επομένως, έπεται ότι $W \cong X \oplus X'$, και κατ' επέκταση, ότι το X είναι αντικείμενο της ω , αφού η ω είναι κλειστή στους ισομορφισμούς και στους ευθείς προσθετέους στην \mathcal{C} . ■

Το ακόλουθο αποτέλεσμα, μας δίνει ότι $\hat{\omega} = \mathcal{X}^\perp \cap \hat{\mathcal{X}}$ στην \mathcal{C} , χαρακτηρίζοντας μας έτσι την $\hat{\omega}$, ως μια υποκατηγορία της $\hat{\mathcal{X}}$.

Πρόταση 7.4.7. *Για ένα αντικείμενο C της $\hat{\mathcal{X}}$ οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

1. Το C είναι αντικείμενο της $\hat{\omega}$.
2. \mathcal{X} -inj. dim $C = 0$, δηλαδή, $C \in \text{ob}(\mathcal{X}^\perp \cap \hat{\mathcal{X}})$.
3. Αν $0 \longrightarrow Y_C \longrightarrow X_C \xrightarrow{\pi_C} C \longrightarrow 0$ είναι μια οποιαδήποτε \mathcal{X} -προσέγγιση του C , τότε το X_C είναι αντικείμενο της ω .

Απόδειξη. Η συνεπαγωγή $3 \Rightarrow 1$ είναι προφανής, και η συνεπαγωγή $1 \Rightarrow 2$ προκύπτει χρησιμοποιώντας το Πόρισμα (7.3.11). Απομένει λοιπόν να δείξουμε την συνεπαγωγή $2 \Rightarrow 3$. Υποθέτουμε ότι \mathcal{X} -inj. dim $C = 0$, και έστω

$$0 \longrightarrow Y_C \longrightarrow X_C \xrightarrow{\pi_C} C \longrightarrow 0,$$

μια \mathcal{X} -προσέγγιση του C . Τότε επειδή το Y_C είναι αντικείμενο της $\hat{\omega}$, και αφού \mathcal{X} -inj. $\dim \hat{\omega} = 0$, έπεται ότι \mathcal{X} -inj. $\dim Y_C = 0$. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, καθώς και την υπόθεση, συμπεραίνουμε ότι \mathcal{X} -inj. $\dim X_C = 0$. Συνεπώς, χρησιμοποιώντας τώρα το Λήμμα (7.4.6), οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι το X_C είναι αντικείμενο της $\hat{\omega}$, όπως επιθυμούσαμε. ■

Όπως υποσχθήκαμε στην αρχή της παρούσας ενότητας, αποδεικνύουμε τώρα ότι η $\hat{\omega}$ είναι μια ακριβής και προσθετικά κλειστή υποκατηγορία της \mathcal{C} , με την ιδιότητα ότι κάθε μονομορφισμός στην \mathcal{C} μεταξύ αντικειμένων της $\hat{\omega}$ είναι αποδεκτός. Σημειώνουμε ότι ένας μονομορφισμός στην \mathcal{C} μεταξύ αντικειμένων της $\hat{\omega}$ είναι **αποδεκτός (admissible)**, αν ο συνπυρήνας του ανήκει στην $\hat{\omega}$.

Πρόταση 7.4.8. Η πλήρης υποκατηγορία $\hat{\omega}$ της \mathcal{C} είναι προσθετικά κλειστή, με την ιδιότητα ότι αν

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

είναι μια σύντομη ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} , τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Αν τα A και C είναι αντικείμενα της $\hat{\omega}$, τότε το B είναι αντικείμενο της $\hat{\omega}$.
2. Αν τα A και B είναι αντικείμενα της $\hat{\omega}$, τότε το C είναι αντικείμενο της $\hat{\omega}$.

Απόδειξη. Οι Προτάσεις (7.4.4) και (7.4.5), μας εξασφαλίζουν ότι η πλήρης υποκατηγορία $\hat{\mathcal{X}}$ της \mathcal{C} είναι προσθετικά κλειστή, με την ιδιότητα ότι αν

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

είναι μια σύντομη ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} , τότε αν οποιαδήποτε δύο από τα A, B και C είναι αντικείμενα της \mathcal{X} , τότε και το τρίτο είναι επίσης αντικείμενο της \mathcal{X} . Επιπλέον, το τέταρτο σκέλος της Παρατήρησης (7.3.8), μας δίνει ότι το δεξιό ορθογώνιο συμπλήρωμα της \mathcal{X} , \mathcal{X}^\perp , είναι μια ακριβής και προσθετικά κλειστή υποκατηγορία της \mathcal{C} , όπου κάθε μονομορφισμός σ αυτήν είναι αποδεκτός. Επομένως, οι κατηγορίες \mathcal{X} και \mathcal{X}^\perp , ικανοποιούν κάθε αποτέλεσμα που θέλουμε να αποδείξουμε για την $\hat{\omega}$. Ωστόσο, από την Πρόταση (7.4.7), γνωρίζουμε ότι $\hat{\omega} = \mathcal{X}^\perp \cap \hat{\mathcal{X}}$ στην \mathcal{C} . Άρα, έπεται ότι η $\hat{\omega}$ είναι μια ακριβής και προσθετικά κλειστή υποκατηγορία της \mathcal{C} , με την ιδιότητα ότι κάθε μονομορφισμός στην \mathcal{C} μεταξύ αντικειμένων της $\hat{\omega}$ είναι αποδεκτός. ■

Συνοψίζουμε τα προηγούμενα αποτελέσματα ως εξής:

Θεώρημα 7.4.9. Έστω \mathcal{X} μια ακριβής και προσθετικά κλειστή υποκατηγορία της αβελιανής κατηγορίας \mathcal{C} , η οποία διαθέτει έναν ενέσιμο συγγενήτορα ω . Υποθέτουμε ότι κάθε επιμορφισμός στην \mathcal{C} μεταξύ αντικειμένων της \mathcal{X} είναι αποδεκτός. Τότε υπάρχει ένα διάγραμμα από ακριβείς και προσθετικά κλειστές υποκατηγορίες της \mathcal{C} :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{X} & \longrightarrow & \hat{\mathcal{X}} & \longrightarrow & C \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \omega & \longrightarrow & \hat{\omega} & \longrightarrow & \mathcal{X}^\perp \end{array}$$

τέτιοιο ώστε

1. κάθε τετράγωνο είναι καρτεσιανό, δηλαδή, $\hat{\omega} = \mathcal{X}^\perp \cap \hat{\mathcal{X}}$ και $\omega = \mathcal{X} \cap \mathcal{X}^\perp$,
2. κάθε μονομορφισμός ή επιμορφισμός στην $\hat{\mathcal{X}}$ είναι αποδεκτός,
3. κάθε μονομορφισμός στην $\hat{\omega}$ και στην \mathcal{X}^\perp είναι αποδεκτός.

Επιπλέον, ο ενέσιμος συγγενήτορας ω για την \mathcal{X} είναι μοναδικός, και είναι ακριβώς η κατηγορία $\omega = \mathcal{X} \cap \mathcal{X}^\perp$.

7.5 Τα Ζεύγη $(\mathcal{X}, \widehat{\omega})$ Και $(\check{\sigma}, \mathcal{F})$

Στην παρούσα ενότητα, εισάγουμε την έννοια του (πλήρους) συστρεπτικού ζεύγους σε μια πλήρη υποκατηγορία μιας αβελιανής κατηγορίας, και αποδεικνύουμε ότι το ζεύγος $(\mathcal{X}, \widehat{\omega})$ είναι πλήρες συστρεπτικό ζεύγος στην $\widehat{\mathcal{X}}$, όπου οι κατηγορίες \mathcal{X} και ω ικανοποιούν και πάλι, τις γενικές μας υποθέσεις. Στην συνέχεια, θεωρώντας δύο πλήρεις υποκατηγορίες \mathcal{F} και σ της \mathcal{C} , οι οποίες πληρούν συγκεκριμένες ιδιότητες, αναπτύσσουμε τα δυϊκά αποτελέσματα της θεωρίας των Auslander-Buchweitz, με στόχο να δείξουμε ότι το ζεύγος $(\check{\sigma}, \mathcal{F})$ είναι πλήρες συστρεπτικό ζεύγος στην $\check{\mathcal{F}}$.

7.5.1 Πλήρη Συστρεπτικά Ζεύγη

Στο Κεφάλαιο 4, παρουσιάσαμε την έννοια του (πλήρους) συστρεπτικού ζεύγους ή της συστρεπτικής θεωρίας για κατηγορίες προτύπων υπεράνω προσεταιριστικών δακτυλίων με μονάδα. Ως γενίκευση της έννοιας αυτής, εισάγουμε στην συνέχεια την έννοια του (πλήρους) συστρεπτικού ζεύγους για δύο πλήρεις υποκατηγορίες μιας αβελιανής κατηγορίας, οι οποίες είναι κλειστές σε ισομορφισμούς και σε ευθείς προσθετέους. Ωστόσο, χρειαζόμαστε πρώτα τους εξής συμβολισμούς:

Αν \mathcal{D} είναι μια αβελιανή κατηγορία, τότε για μια υποκατηγορία \mathcal{V} της \mathcal{D} συμβολίζουμε με

$$\mathcal{V}^\perp := \{X \in \text{ob}(\mathcal{D}) \mid \text{Ext}_{\mathcal{D}}^i(V, X) = 0, \forall i > 0, \forall V \in \text{ob}(\mathcal{V})\},$$

την **δεξιά Ext-ορθογώνια (right Ext-orthogonal)** υποκατηγορία της \mathcal{V} , και με

$${}^\perp\mathcal{V} := \{X \in \text{ob}(\mathcal{D}) \mid \text{Ext}_{\mathcal{D}}^i(X, V) = 0, \forall i > 0, \forall V \in \text{ob}(\mathcal{V})\},$$

την **αριστερή Ext-ορθογώνια (left Ext-orthogonal)** υποκατηγορία της \mathcal{V} .

Ορισμός 7.5.1. Ένα ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{Y})$ από πλήρεις υποκατηγορίες μιας αβελιανής κατηγορίας \mathcal{D} οι οποίες είναι κλειστές σε ισομορφισμούς και σε ευθείς προσθετέους στην \mathcal{D} , καλείται **συστρεπτικό ζεύγος (cotorsion pair)**, αν $\mathcal{F}^\perp = \mathcal{Y}$ και ${}^\perp\mathcal{Y} = \mathcal{F}$.

Σχόλιο 7.5.2. Έστω $(\mathcal{F}, \mathcal{Y})$ ένα ζεύγος από πλήρεις υποκατηγορίες μιας αβελιανής κατηγορίας \mathcal{D} , οι οποίες είναι κλειστές σε ισομορφισμούς και σε ευθείς προσθετέους στην \mathcal{D} . Αν \mathcal{U} είναι μια πλήρης υποκατηγορία της \mathcal{D} τέτοια ώστε οι \mathcal{F} και \mathcal{Y} να είναι πλήρεις υποκατηγορίες της \mathcal{U} , τότε το ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{Y})$ είναι συστρεπτικό ζεύγος στην \mathcal{U} , αν

$$\mathcal{F}^\perp := \{X \in \text{ob}(\mathcal{U}) \mid \text{Ext}_{\mathcal{D}}^i(F, X) = 0, \forall i > 0, \forall F \in \text{ob}(\mathcal{F})\} = \mathcal{Y},$$

και

$${}^\perp\mathcal{Y} := \{X \in \text{ob}(\mathcal{U}) \mid \text{Ext}_{\mathcal{D}}^i(X, Y) = 0, \forall i > 0, \forall Y \in \text{ob}(\mathcal{Y})\} = \mathcal{F}.$$

Στο σημείο αυτό, αναφερόμαστε εν' συντομία σε προσεγγίσεις αντικειμένων από μια πλήρη υποκατηγορία μιας αβελιανής κατηγορίας, η οποία είναι κλειστή σε ισομορφισμούς και ευθείς προσθετέους, γενικεύοντας έτσι, την αντίστοιχη θεωρία του Κεφαλαίου 4.

Αν \mathcal{U} είναι μια πλήρης υποκατηγορία μιας αβελιανής κατηγορίας \mathcal{D} , η οποία είναι κλειστή σε ισομορφισμούς και ευθείς προσθετέους στην \mathcal{D} , και X είναι ένα αντικείμενο της \mathcal{D} , τότε μια **δεξιά \mathcal{U} -προσέγγιση** του X , είναι ένας μορφισμός $f: U_X \rightarrow X$ στην \mathcal{D} , όπου το U_X είναι αντικείμενο της \mathcal{U} , έτσι ώστε η επαγόμενη ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(U, U_X) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(U, X) \rightarrow 0$$

είναι ακριβής για κάθε U αντικείμενο της \mathcal{U} . Κατά δυϊκό τρόπο, ορίζεται μια **αριστερή \mathcal{U} -προσέγγιση** του X . Επιπλέον, καλούμε μια δεξιά \mathcal{U} -προσέγγιση $f: U_X \rightarrow X$, αντίστοιχα αριστερή \mathcal{U} -προσέγγιση $g: X \rightarrow U^X$, του X **ειδική**, αν $\text{Ext}_{\mathcal{D}}^1(\mathcal{U}, \text{Ker } f) = 0$, αντίστοιχα

$\text{Ext}_{\mathcal{D}}^1(\text{Coker } g, \mathcal{U}) = 0$. Σημαντικά παραδείγματα ειδικών προσεγγίσεων είναι οι ελάχιστες προσεγγίσεις. Ένας μορφοισμός $f: X \rightarrow Y$ στην \mathcal{D} καλείται **δεξιά**, αντίστοιχα **αριστερά**, **ελάχιστος**, αν κάθε μορφοισμός $g: X \rightarrow X$, αντίστοιχα $h: Y \rightarrow Y$, στην \mathcal{D} με την ιδιότητα $f \circ g = f$, αντίστοιχα $h \circ f = f$, είναι ισομορφισμός στην \mathcal{D} . Μια **ελάχιστη** δεξιά, αντίστοιχα αριστερή, προσέγγιση είναι μια δεξιά, αντίστοιχα αριστερή, προσέγγιση η οποία ως μορφοισμός είναι δεξιά, αντίστοιχα αριστερά, ελάχιστος. Μάλιστα, οι ελάχιστες προσεγγίσεις είναι μοναδικές μέχρι ισομορφισμού. Σημειώνουμε επίσης, ότι οι ελάχιστες προσεγγίσεις θεωρούνται παραδείγματα ειδικών προσεγγίσεων λόγω του ακόλουθου λήμματος, το οποίο αποτελεί μια επέκταση του Λήμματος (4.1.24) σε γενικότερα πλαίσια:

Λήμμα 7.5.3. (Λήμμα του Wakamatsu) *Αν \mathcal{U} είναι μια ακριβής υποκατηγορία μιας αβελιανής κατηγορίας \mathcal{D} η οποία είναι κλειστή σε ισομορφισμούς και σε ευθείς προσθετούς στην \mathcal{D} , τότε κάθε ελάχιστη δεξιά, αντίστοιχα αριστερή, \mathcal{U} -προσέγγιση είναι ειδική.*

Απόδειξη. Έστω A ένα αντικείμενο της \mathcal{D} , και $f: U_A \rightarrow A$ μια ελάχιστη δεξιά \mathcal{U} -προσέγγιση του A . Επειδή η κατηγορία \mathcal{D} είναι αβελιανή, ο μορφοισμός f στην \mathcal{D} μπορεί να αναλυθεί ως το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} U_A & \xrightarrow{f} & A \\ \varepsilon \downarrow & \nearrow i & \\ B & & \end{array}$$

όπου $B := \text{Im } f$ και ε είναι ένας επιμορφοισμός στην \mathcal{C} . Θέτοντας $\kappa_A: K_A \rightarrow U_A$ να είναι ο πυρήνας του μορφοισμού f , θα έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές και στήλες στην \mathcal{D} :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 0 & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & K_A & & \\ & & & & \downarrow \kappa_A & & \\ 0 & \longrightarrow & K_A & \xrightarrow{\kappa_A} & U_A & \xrightarrow{f} & A \\ & & & & \downarrow \varepsilon & & \uparrow i \\ & & & & B & \xlongequal{\quad} & B \\ & & & & \downarrow & & \uparrow \\ & & & & 0 & & 0 \end{array}$$

Ισχυριζόμαστε ότι ο μορφοισμός ε στην \mathcal{D} , είναι η ελάχιστη δεξιά \mathcal{U} -προσέγγιση του B . Για να διαπιστώσουμε τον ισχυρισμό αυτό, θεωρούμε αρχικά έναν μορφοισμό $\zeta: U \rightarrow B$ στην \mathcal{D} , όπου το U είναι ένα αντικείμενο της \mathcal{U} . Τότε χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι ο μορφοισμός f είναι μια (ελάχιστη) δεξιά \mathcal{U} -προσέγγιση του A , παίρνουμε έναν μορφοισμό $\mu: U \rightarrow U_A$ στην \mathcal{D} , τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{i \circ \zeta} & A \\ \mu \searrow & & \uparrow f \\ & & U_A \end{array} \tag{7.59}$$

Επειδή το διάγραμμα (7.59) είναι μεταθετικό, και $f = i \circ \varepsilon$, έπεται ότι $i \circ \varepsilon \circ \mu = i \circ \zeta$. Όμως, ο μορφοισμός i στην \mathcal{D} είναι μονομορφοισμός. Έτσι τελικά, έχουμε ότι $\varepsilon \circ \mu = \zeta$, και κατ' επέκταση, ότι ο μορφοισμός ε είναι μια δεξιά \mathcal{U} -προσέγγιση του B . Για να εξασφαλίσουμε τώρα ότι ο μορφοισμός

ε είναι δεξιά ελάχιστος, θεωρούμε έναν μορφισμό $\alpha: U_A \rightarrow U_A$ στην \mathcal{U} , έτσι ώστε $\varepsilon \circ \alpha = \varepsilon$. Παρατηρώντας ότι $f \circ \alpha = i \circ \varepsilon \circ \alpha = i \circ \varepsilon = f$, και χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι ο μορφισμός f είναι δεξιά ελάχιστος, συμπεραίνουμε ότι ο μορφισμός α είναι ισομορφισμός στην \mathcal{U} . Έτσι, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι ο μορφισμός ε στην \mathcal{D} είναι η ελάχιστη δεξιά \mathcal{U} -προσέγγιση του B , όπως επιθυμούσαμε. Για να αποδείξουμε ότι η η ελάχιστη δεξιά \mathcal{U} -προσέγγιση f του A είναι ειδική, χρειάζεται να δείξουμε ότι $\text{Ext}_{\mathcal{D}}^1(U, K_A) = 0$, για κάθε αντικείμενο U της \mathcal{U} . Έστω λοιπόν U ένα αντικείμενο της \mathcal{U} , και

$$0 \rightarrow K_A \xrightarrow{\gamma} M \xrightarrow{\beta} U \rightarrow 0,$$

μια σύντομη ακριβής ακολουθία στην \mathcal{D} . Θεωρώντας στην συνέχεια του pushout P του διαγράμματος:

$$\begin{array}{ccc} K_A & \xrightarrow{\gamma} & M \\ \kappa_A \downarrow & & \downarrow v \\ U_A & \xrightarrow{u} & P \end{array}$$

επάγεται το μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές και στήλες στην \mathcal{D} :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & & & (7.60) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & K_A & \xrightarrow{\gamma} & M & \longrightarrow & U & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \kappa_A & & \downarrow v & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & U_A & \xrightarrow{u} & P & \xrightarrow{h_1} & U & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow h_2 & & & & \\ & & B & \xlongequal{\quad} & B & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & 0 & & & & \end{array}$$

Επειδή η \mathcal{U} είναι κλειστή στις επεκτάσεις, και τα U, U_A είναι αντικείμενα της \mathcal{U} , από τη δεύτερη γραμμή του διαγράμματος (7.60), παίρνουμε ότι το P είναι επίσης αντικείμενο της \mathcal{U} . Συνεπώς, αφού ο μορφισμός ε είναι μια δεξιά \mathcal{U} -προσέγγιση του B , υπάρχει μορφισμός $g: P \rightarrow U_A$ στην \mathcal{U} , ο οποίος συνθέτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{h_2} & B \\ & \searrow g & \uparrow \varepsilon \\ & & U_A \end{array}$$

Επιπλέον, η μεταθετικότητα του προηγούμενου διαγράμματος, καθώς και του διαγράμματος (7.60), μας εξασφαλίζουν ότι το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} U_A & \xrightarrow{\varepsilon} & B \\ & \searrow g \circ u & \uparrow \varepsilon \\ & & U_A \end{array}$$

είναι μεταθετικό. Ως συνέπεια αυτού, έπεται ότι ο μορφισμός $g \circ u$ στην \mathcal{U} είναι ισομορφισμός, διότι ο μορφισμός ε στην \mathcal{D} είναι δεξιά ελάχιστος. Αν θέσουμε τώρα $\delta = (g \circ u)^{-1}: U_A \rightarrow U_A$,

τότε λόγω των ακόλουθων ισοτήτων,

$$\delta \circ g \circ u = (g \circ u)^{-1} \circ g \circ u = 1_{U_A},$$

συμπεραίνουμε ότι ο μονομορφισμός u στην \mathcal{U} είναι διασπásiμος, ή ισοδύναμα, ότι η δεύτερη γραμμή του διαγράμματος (7.60) είναι μια διασπásiμη σύντομη ακριβής ακολουθία. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, από το μεταθετικό διάγραμμα (7.60) εύκολα διαπιστώνουμε ότι και η πρώτη γραμμή αυτού, είναι επίσης μια διασπásiμη σύντομη ακριβής ακολουθία. Επομένως, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $\text{Ext}_{\mathcal{D}}^1(U, K_A) = 0$, και κατ' επέκταση, ότι η ελάχιστη δεξιά \mathcal{U} -προσέγγιση f του A είναι ειδική. Κατά δυϊκό τρόπο προκύπτει ότι μια οποιαδήποτε ελάχιστη αριστερή \mathcal{U} -προσέγγιση είναι ειδική. ■

Κλείνουμε τη σύντομη αναφορά σε προσεγγίσεις αντικειμένων μιας αβελιανής κατηγορίας, παραθέτοντας την έννοια του πλήρους συστρεπτικού ζεύγους.

Ορισμός 7.5.4. Έστω \mathcal{F} και \mathcal{Y} δύο πλήρεις υποκατηγορίες μιας αβελιανής κατηγορίας \mathcal{D} , οι οποίες είναι κλειστές σε ισομορφισμούς και σε ευθείς προσθετέους στην \mathcal{D} . Τότε το ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{Y})$ καλείται **πλήρες συστρεπτικό ζεύγος, (complete cotorsion pair)**, αν το ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{Y})$ είναι συστρεπτικό ζεύγος, και για κάθε αντικείμενο A της \mathcal{D} , υπάρχουν ακριβείς ακολουθίες

$$0 \longrightarrow Y_A \longrightarrow F_A \longrightarrow A \longrightarrow 0 \quad \& \quad 0 \longrightarrow A \longrightarrow Y^A \longrightarrow F^A \longrightarrow 0,$$

στην \mathcal{D} , όπου $Y_A, Y^A \in \text{ob}(\mathcal{Y})$ και $F_A, F^A \in \text{ob}(\mathcal{F})$.

Παρατήρηση 7.5.5. Ένα ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{Y})$ από πλήρεις υποκατηγορίες μιας αβελιανής κατηγορίας \mathcal{D} , οι οποίες είναι κλειστές σε ισομορφισμούς και σε ευθείς προσθετέους στην \mathcal{D} , είναι πλήρες συστρεπτικό ζεύγος, αν και μόνο αν, ισχύουν οι ακόλουθες δύο συνθήκες:

1. $\text{Ext}_{\mathcal{D}}^i(\mathcal{F}, \mathcal{Y}) = 0$ για κάθε $i > 0$.
2. Για κάθε αντικείμενο A της \mathcal{D} υπάρχουν ακριβείς ακολουθίες

$$0 \longrightarrow Y_A \longrightarrow F_A \longrightarrow A \longrightarrow 0 \quad \& \quad 0 \longrightarrow A \longrightarrow Y^A \longrightarrow F^A \longrightarrow 0,$$

στην \mathcal{D} , όπου $Y_A, Y^A \in \text{ob}(\mathcal{Y})$ και $F_A, F^A \in \text{ob}(\mathcal{F})$.

Πράγματι, αν το ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{Y})$ είναι πλήρες συστρεπτικό ζεύγος, τότε προφανώς ισχύουν και οι δύο προηγούμενες συνθήκες. Για την αντίστροφη κατεύθυνση, υποθέτουμε τώρα ότι ισχύουν οι συνθήκες 1) και 2). Η συνθήκη 1), μας εξασφαλίζει τους εγκλεισμούς

$$\mathcal{F} \subseteq {}^\perp\mathcal{Y} \quad \& \quad \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{F}^\perp.$$

Έστω A ένα αντικείμενο της \mathcal{F}^\perp . Εξ ορισμού, έχουμε ότι $\text{Ext}_{\mathcal{D}}^1(F, A) = 0$ για κάθε αντικείμενο F της \mathcal{F} . Η συνθήκη 2), μας δίνει ιδιαίτερα μια ακριβή ακολουθία στην \mathcal{D}

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow Y^A \longrightarrow F^A \longrightarrow 0,$$

όπου το Y^A είναι αντικείμενο της \mathcal{Y} , και το F^A είναι αντικείμενο της \mathcal{F} . Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι η προηγούμενη ακριβής ακολουθία στην \mathcal{D} είναι διασπásiμη, και κατ' επέκταση, ότι το A είναι ευθύς προσθετέος του αντικειμένου Y^A της \mathcal{Y} . Έτσι, αφού η κατηγορία \mathcal{Y} είναι κλειστή σε ισομορφισμούς και σε ευθείς προσθετέους στην \mathcal{D} , έπεται ότι το αντικείμενο A της \mathcal{F}^\perp , είναι επίσης αντικείμενο της \mathcal{Y} . Ομοίως, αν θεωρήσουμε ένα αντικείμενο B της ${}^\perp\mathcal{Y}$, και χρησιμοποιήσουμε το 2), τότε θα οδηγηθούμε στο συμπέρασμα ότι το B είναι αντικείμενο της \mathcal{F} . Συνδυάζοντας λοιπόν τα προηγούμενα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $\mathcal{F}^\perp = \mathcal{Y}$ και ${}^\perp\mathcal{Y} = \mathcal{F}$. Το αποτέλεσμα αυτό, καθώς και η συνθήκη 2), επάγουν ότι το $(\mathcal{F}, \mathcal{Y})$ είναι ένα πλήρες συστρεπτικό ζεύγος στην \mathcal{D} .

Σχόλιο 7.5.6. Έστω $(\mathcal{F}, \mathcal{Y})$ ένα ζεύγος από πλήρεις υποκατηγορίες μιας αβελιανής κατηγορίας \mathcal{D} , οι οποίες είναι κλειστές σε ισομορφισμούς και σε ευθείς προσθετέους στην \mathcal{D} . Αν \mathcal{U} είναι μια πλήρης υποκατηγορία της \mathcal{D} τέτοια ώστε οι \mathcal{F} και \mathcal{Y} να είναι πλήρεις υποκατηγορίες της \mathcal{U} , τότε το ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{Y})$ είναι πλήρες συστρεπτικό ζεύγος στην \mathcal{U} , αν το $(\mathcal{F}, \mathcal{Y})$ είναι συστρεπτικό ζεύγος στην \mathcal{U} , και για κάθε αντικείμενο A της \mathcal{U} , υπάρχουν ακριβείς ακολουθίες

$$0 \longrightarrow Y_A \longrightarrow F_A \longrightarrow A \longrightarrow 0 \quad \& \quad 0 \longrightarrow A \longrightarrow Y^A \longrightarrow F^A \longrightarrow 0,$$

στην \mathcal{D} , όπου $Y_A, Y^A \in \text{ob}(\mathcal{Y})$ και $F_A, F^A \in \text{ob}(\mathcal{F})$. Ισοδύναμα, το ζεύγος $(\mathcal{F}, \mathcal{Y})$ είναι πλήρες συστρεπτικό ζεύγος στην \mathcal{U} , αν ισχύουν οι ακόλουθες τρεις συνθήκες:

1. $\text{Ext}_{\mathcal{D}}^i(\mathcal{F}, \mathcal{Y}) = 0$ για κάθε $i > 0$.
2. Για κάθε αντικείμενο A της \mathcal{U} υπάρχουν ακριβείς ακολουθίες

$$0 \longrightarrow Y_A \longrightarrow F_A \longrightarrow A \longrightarrow 0 \quad \& \quad 0 \longrightarrow A \longrightarrow Y^A \longrightarrow F^A \longrightarrow 0$$

στην \mathcal{D} , όπου $Y_A, Y^A \in \text{ob}(\mathcal{Y})$ και $F_A, F^A \in \text{ob}(\mathcal{F})$.

Έχοντας εξασφαλίσει από την προηγούμενη ενότητα, ότι η $\hat{\omega}$ είναι μια πλήρης υποκατηγορία της $\hat{\mathcal{X}}$, κλειστή σε ισομορφισμούς και σε ευθείς προσθετέους στην \mathcal{C} , αποδεικνύουμε τώρα ότι για κάθε αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$, υπάρχει πάντα μια ειδική δεξιά \mathcal{X} -προσέγγιση και μια ειδική αριστερή $\hat{\omega}$ -προσέγγιση.

Πόρισμα 7.5.7. Το ζεύγος $(\mathcal{X}, \hat{\omega})$ είναι πλήρες συστρεπτικό ζεύγος στην $\hat{\mathcal{X}}$.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα (7.2.7), γνωρίζουμε ότι για κάθε αντικείμενο C της $\hat{\mathcal{X}}$ υπάρχουν ακριβείς ακολουθίες

$$0 \longrightarrow Y_C \longrightarrow X_C \longrightarrow C \longrightarrow 0 \quad \& \quad 0 \longrightarrow C \longrightarrow Y^C \longrightarrow X^C \longrightarrow 0,$$

στην \mathcal{C} , όπου $Y_C, Y^C \in \text{ob}(\hat{\omega})$ και $X_C, X^C \in \text{ob}(\mathcal{X})$. Η \mathcal{X} είναι προφανώς μια πλήρης υποκατηγορία της $\hat{\mathcal{X}}$. Επιπλέον, η Πρόταση (7.4.7) μας δίνει ότι η $\hat{\omega}$, είναι ακριβώς η τομή των κατηγοριών \mathcal{X}^\perp και $\hat{\mathcal{X}}$ στην \mathcal{C} . Συνεπώς, έπεται ότι η $\hat{\omega}$ είναι επίσης μια πλήρης υποκατηγορία της \mathcal{X} . Για να αποδείξουμε λοιπόν ότι το ζεύγος $(\mathcal{X}, \hat{\omega})$ είναι πλήρες συστρεπτικό ζεύγος στην $\hat{\mathcal{X}}$, αρκεί να δείξουμε τις ισότητες:

$$\mathcal{X}^\perp = \{C \in \text{ob}(\hat{\mathcal{X}}) \mid \text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(X, C) = 0, \forall i > 0, \forall X \in \text{ob}(\mathcal{X})\} = \hat{\omega}$$

και

$${}^\perp\hat{\omega} = \{C \in \text{ob}(\hat{\mathcal{X}}) \mid \text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(C, W) = 0, \forall i > 0, \forall W \in \text{ob}(\hat{\omega})\} = \mathcal{X}.$$

Χρησιμοποιώντας το Πόρισμα (7.3.11), επάγονται οι εγκλεισμοί, $\hat{\omega} \subseteq \mathcal{X}^\perp$ και $\mathcal{X} \subseteq {}^\perp\hat{\omega}$. Θεωρούμε αρχικά ένα αντικείμενο C της \mathcal{X}^\perp , όπου η \mathcal{X}^\perp θεωρείται ως μια πλήρη υποκατηγορία της $\hat{\mathcal{X}}$. Επειδή το C είναι αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$, υπάρχει ένα $\hat{\omega}$ -κάλυμμα του C , έστω

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow Y^C \longrightarrow X^C \longrightarrow 0.$$

Τότε εξ ορισμού της \mathcal{X}^\perp , έχουμε ότι $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X^C, C) = 0$. Το αποτέλεσμα αυτό, μας εξασφαλίζει ότι η προηγούμενη ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} είναι διασπάσιμη, και κατ' επέκταση, ότι το C είναι ευθύς προσθετέος του αντικειμένου Y^C της $\hat{\omega}$. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι το αντικείμενο C της \mathcal{X}^\perp , είναι επίσης αντικείμενο της $\hat{\omega}$, διότι η $\hat{\omega}$ είναι κλειστή σε ισομορφισμούς και σε ευθείς προσθετέους στην \mathcal{C} . Άρα, προκύπτει ότι $\mathcal{X}^\perp \subseteq \hat{\omega}$. Θεωρούμε τώρα ένα αντικείμενο D της ${}^\perp\hat{\omega}$, όπου η ${}^\perp\hat{\omega}$ θεωρείται ως μια πλήρη υποκατηγορία της $\hat{\mathcal{X}}$. Αφού το D είναι αντικείμενο της $\hat{\mathcal{X}}$, υπάρχει μια \mathcal{X} -προσέγγιση του D , έστω

$$0 \longrightarrow Y_D \longrightarrow X_D \longrightarrow D \longrightarrow 0.$$

Τότε εξ ορισμού της ${}^{\perp}\widehat{\omega}$, παίρνουμε ότι $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(D, Y_D) = 0$, ή ισοδύναμα, ότι η επιλεγόμενη \mathcal{X} -προσέγγιση του D είναι μια διασπασίμη σύντομη ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} . Συνεπώς, έπεται ότι το D είναι ευθύς προσθετός του αντικείμενου X_D της \mathcal{X} . Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, καθώς και το γεγονός ότι η \mathcal{X} είναι κλειστή σε ισομορφισμούς και σε ευθείς προσθετέους στην \mathcal{C} , οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι το αντικείμενο D της ${}^{\perp}\widehat{\omega}$, είναι επίσης αντικείμενο της \mathcal{X} . Έτσι, έχουμε ότι ${}^{\perp}\widehat{\omega} \subseteq \mathcal{X}$. Ο συνδυασμός λοιπόν των προηγούμενων αποτελεσμάτων, μας δίνει τις ζητούμενες ισότητες, $\mathcal{X}^{\perp} = \widehat{\omega}$ και ${}^{\perp}\widehat{\omega} = \mathcal{X}$. ■

7.5.2 Η Δυϊκή Θεωρία

Στην συνέχεια, αναπτύσσουμε τα δυϊκά αποτελέσματα που προκύπτουν από την θεωρία των Auslander και Buchweitz. Πριν αναφερθούμε στα αποτελέσματα αυτά, χρειάζεται να εισάγουμε κάποιους ορισμούς και συμβολισμούς. Όπως και πριν, η \mathcal{C} συμβολίζει μια αβελιανή κατηγορία.

Ορισμός 7.5.8. Αν C είναι ένα αντικείμενο της \mathcal{C} , και \mathcal{A} είναι μια υποκατηγορία της \mathcal{C} , τότε ο ελάχιστος φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε να υπάρχει μια ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C}

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow A_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_{n-1} \longrightarrow A_n \longrightarrow 0,$$

όπου κάθε A_i για $i = 0, \dots, n$, είναι αντικείμενο της \mathcal{A} , καλείται η **διάσταση \mathcal{A} -συνανάλυσης (\mathcal{A} -coresolution dimension)** του C . Αν δεν υπάρχει τέτοιος φυσικός αριθμός n , τότε ορίζουμε την διάσταση \mathcal{A} -συνανάλυσης του C να είναι ίση με άπειρο.

Για κάθε αντικείμενο C της \mathcal{C} , και για κάθε υποκατηγορία \mathcal{A} της \mathcal{C} , συμβολίζουμε την διάσταση \mathcal{A} -ανάλυσης του C , με \mathcal{A} -cores. dim C . Επιπλέον, η υποκατηγορία της \mathcal{C} που αποτελείται από όλα τα αντικείμενα C της \mathcal{C} , τέτοια ώστε \mathcal{A} -cores. dim $C < \infty$ θα συμβολίζεται με $\check{\mathcal{A}}$.

Ορισμός 7.5.9. Αν \mathcal{A} είναι μια υποκατηγορία της \mathcal{C} , και \mathcal{B} είναι μια υποκατηγορία της \mathcal{A} , τότε η \mathcal{B} καλείται **γεννήτορας (generator)** για την \mathcal{A} , αν για κάθε αντικείμενο A της \mathcal{A} υπάρχει μια σύντομη ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} ,

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

όπου το A' είναι αντικείμενο της \mathcal{A} και το B είναι αντικείμενο της \mathcal{B} .

Σύμβαση: Καθ' όλη την έκταση της ενότητας αυτής, συμβολίζουμε με \mathcal{F} μια προσθετικά κλειστή υποκατηγορία της \mathcal{C} , η οποία είναι κλειστή στις επεκτάσεις. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η σ είναι μια προσθετικά κλειστή υποκατηγορία της \mathcal{F} , η οποία αποτελεί έναν γεννήτορα για την \mathcal{F} .

Είμαστε σε θέση τώρα να παρουσιάσουμε τα δυϊκά αποτελέσματα της θεωρίας των Auslander-Buchweitz. Θα παραλείψουμε ωστόσο τις αποδείξεις αυτών, καθώς προκύπτουν κατά δυϊκό τρόπο με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που αποδείξαμε στις προηγούμενες ενότητες.

Αρχίζουμε με την δυϊκή εκδοχή του Θεωρήματος (7.2.7):

Θεώρημα 7.5.10. Για κάθε αντικείμενο Y της $\check{\mathcal{F}}$, υπάρχουν ακριβείς ακολουθίες στη \mathcal{C} ,

$$0 \longrightarrow F_Y \longrightarrow W_Y \longrightarrow Y \longrightarrow 0 \quad \& \quad 0 \longrightarrow Y \longrightarrow F^Y \longrightarrow W^Y \longrightarrow 0,$$

με $F_Y, F^Y \in \text{ob}(\mathcal{F})$ και $W_Y, W^Y \in \text{ob}(\check{\sigma})$.

Σχόλιο 7.5.11. Χάριν απλότητας, καλούμε μια σύντομη ακριβή ακολουθία στην \mathcal{C}

$$0 \longrightarrow F_Y \longrightarrow W_Y \longrightarrow Y \longrightarrow 0,$$

όπου $F_Y \in \text{ob}(\mathcal{F})$ και $W_Y \in \text{ob}(\check{\sigma})$ μια $\check{\sigma}$ -**προσέγγιση ($\check{\sigma}$ -approximation)** του Y . Δυϊκά, καλούμε μια σύντομη ακριβή ακολουθία στη \mathcal{C}

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow F^Y \longrightarrow W^Y \longrightarrow 0,$$

όπου $F^Y \in \text{ob}(\mathcal{F})$ και $W^Y \in \text{ob}(\check{\sigma})$ ένα \mathcal{F} -**κάλυμμα (\mathcal{F} -hull)** του Y .

Σύμβαση: Από τώρα και στο εξής υποθέτουμε ότι όλοι οι μονομορφισμοί στην \mathcal{C} μεταξύ αντικειμένων της \mathcal{F} είναι αποδεκτοί (admissible), δηλαδή ο συνδυασμός τους ανήκει στην \mathcal{F} . Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη την θεώρηση μας ότι η \mathcal{F} είναι κλειστή στις επεκτάσεις, καθ' όλη την έκταση της ενότητας αυτής, υποθέτουμε ότι η \mathcal{F} έχει την ιδιότητα ότι αν

$$0 \longrightarrow F_0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_2 \longrightarrow 0,$$

είναι μια σύντομη ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} όπου το F_0 ανήκει στην κλάση $\text{ob}(\mathcal{F})$, τότε το F_1 ανήκει στην κλάση $\text{ob}(\mathcal{F})$, αν και μόνο αν, το F_2 ανήκει στην κλάση $\text{ob}(\mathcal{F})$.

Ως συνέπεια της επιπρόσθετης υπόθεσης στη \mathcal{F} , έπεται ότι:

Λήμμα 7.5.12. *Θεωρούμε ένα αντικείμενο Y της \mathcal{C} , και υποθέτουμε ότι υπάρχει μια $\check{\sigma}$ -προσέγγιση $0 \longrightarrow F_Y \longrightarrow W_Y \longrightarrow Y \longrightarrow 0$ του Y . Τότε υπάρχει επίσης ένα \mathcal{F} -κάλυμμα*

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow F^Y \longrightarrow W^Y \longrightarrow 0,$$

του Y . Επιπλέον, αν το αντικείμενο F^Y της W_Y δεν είναι αντικείμενο της σ , τότε το αντικείμενο W^Y της $\check{\sigma}$ μπορεί να διαλεγεί κατά τέτοιο τρόπο, ώστε $\sigma\text{-cores. dim } W^Y < \sigma\text{-cores. dim } W^Y$.

Η ακόλουθη πρόταση μας χαρακτηρίζει τα αντικείμενα της $\check{\mathcal{F}}$:

Πρόταση 7.5.13. *Για ένα αντικείμενο Y της \mathcal{C} οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

1. $Y \in \text{ob}(\check{\mathcal{F}})$.
2. Υπάρχει μια $\check{\sigma}$ -προσέγγιση $0 \longrightarrow F_Y \longrightarrow W_Y \longrightarrow Y \longrightarrow 0$ του Y .
3. Υπάρχει ένα \mathcal{F} -κάλυμμα $0 \longrightarrow Y \longrightarrow F^Y \longrightarrow W^Y \longrightarrow 0$ του Y .

Ορίζουμε τώρα τη δυϊκή έννοια του ενέσιμου συνγεννήτορα, αυτή του προβολικού γεννήτορα.

Ορισμός 7.5.14. *Αν \mathcal{D} είναι μια αβελιανή κατηγορία, και \mathcal{A} είναι μια ακριβής και προσθετικά κλειστή υποκατηγορία της \mathcal{D} , η οποία είναι κλειστή σε ισομορφισμούς, τότε η πλήρης υποκατηγορία \mathcal{B} της \mathcal{A} καλείται **προβολικός γεννήτορας (projective generator)** για την \mathcal{A} , αν η \mathcal{B} είναι γεννήτορας για την \mathcal{A} , με την ιδιότητα $\mathcal{A}\text{-proj. dim } \mathcal{B} = 0$, ή ισοδύναμα, $\mathcal{B} \subseteq {}^\perp \mathcal{A}$. Επιπλέον, αν υπάρχει γεννήτορας για την \mathcal{A} που περιέχεται στη τομή $\mathcal{A} \cap {}^\perp \mathcal{A}$, λέμε επίσης ότι η ακριβής κατηγορία \mathcal{A} έχει **αρκετά σχετικά προβολικά αντικείμενα, (enough relatively projective objects)**.*

Διατηρούμε τις γενικές μας υποθέσεις για τις υποκατηγορίες \mathcal{F} και σ της \mathcal{C} , και υποθέτουμε ότι:

- Από τώρα και στο εξής, η σ είναι προβολικός γεννήτορας για τη \mathcal{F} . Σ' αυτή την περίπτωση η τριάδα $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \sigma)$ καλείται **δυϊκό πλαίσιο των Auslander-Buchweitz (dual Auslander-Buchweitz context)**.

Επικεντρωνόμαστε στην συνέχεια, στις επιπτώσεις που επιφέρει η επιπρόσθετη αυτή υπόθεση, στις $\check{\sigma}$ -προσεγγίσεις και στα \mathcal{F} -καλύμματα.

Ξεκινάμε, παραθέτοντας τις ακόλουθες σχέσεις ανάμεσα σε κάποιες από τις διαστάσεις που έχουμε ήδη ορίσει για ένα αντικείμενο της $\check{\mathcal{F}}$. Σημειώνουμε ότι οι σχέσεις αυτές, δεν απαιτούν ότι κάθε μονομορφισμός από την \mathcal{C} μεταξύ αντικειμένων της \mathcal{F} είναι αποδεκτός.

Πρόταση 7.5.15. *Αν Y είναι ένα αντικείμενο της $\check{\mathcal{F}}$, τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες για έναν οποιονδήποτε φυσικό αριθμό n :*

1. $\mathcal{F}\text{-cores. dim } Y \leq n$,

2. Y -proj. dim $\sigma \leq n$,
3. Y -proj. dim $\check{\sigma} \leq n$,
4. $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n+1}(K, Y) = 0$ για κάθε αντικείμενο K της $\check{\sigma}$.

Ως προφανή συνέπεια της Πρότασης (7.5.15), έχουμε ότι η κατηγορία $\check{\sigma}$ είναι αριστερά ορθογώνια στην κατηγορία \mathcal{F} , και ότι η κατηγορία \mathcal{F} είναι δεξιά ορθογώνια στην κατηγορία $\check{\sigma}$:

Πόρισμα 7.5.16. \mathcal{F} -proj. dim $\check{\sigma} = 0$.

Το Πόρισμα (7.5.16), μας δίνει τις ακόλουθες σημαντικές ιδιότητες των $\check{\sigma}$ -προσεγγίσεων και των \mathcal{F} -καλυμμάτων.

Θεώρημα 7.5.17. Αν $0 \rightarrow F_Y \rightarrow W_Y \xrightarrow{\varpi_Y} Y \rightarrow 0$ είναι μια $\check{\sigma}$ -προσέγγιση ενός αντικειμένου Y της υποκατηγορίας $\check{\mathcal{F}}$, τότε για κάθε αντικείμενο W της $\check{\sigma}$ ισχύει ότι:

1. Η επαγόμενη ακολουθία αβελιανών ομάδων,

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, F_Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, W_Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Y) \rightarrow 0,$$

είναι ακριβής.

2. Ο μορφισμός ϖ_Y επάγει ισομορφισμούς αβελιανών ομάδων:

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(W, \varpi_Y) : \text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(W, W_Y) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(W, Y),$$

για κάθε $i > 0$.

Σχόλιο 7.5.18. Η σύντομη ακριβής ακολουθία στην \mathcal{C} ,

$$0 \rightarrow F_Y \rightarrow W_Y \rightarrow Y \rightarrow 0$$

όπου $F_Y \in \text{ob}(\mathcal{F})$ και $W_Y \in \text{ob}(\check{\sigma})$, καλείται μια $\check{\sigma}$ -προσέγγιση του Y λόγω ακριβώς του γεγονότος ότι η ακολουθία αβελιανών ομάδων:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, W_Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Y) \rightarrow 0,$$

είναι ακριβής για κάθε αντικείμενο W της $\check{\sigma}$.

Ως έμμεση συνέπεια του Θεωρήματος (7.5.17), παίρνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα μοναδικότητας.

Πόρισμα 7.5.19. Μια $\check{\sigma}$ -προσέγγιση ενός αντικειμένου Y της $\check{\mathcal{F}}$ είναι μοναδική μέχρι ισοδυναμίας. Δηλαδή, δύο οποιεσδήποτε $\check{\sigma}$ -προσεγγίσεις του Y , είναι (δεξιά) ισοδύναμες ακριβείς ακολουθίες.

Υπάρχουν επίσης ανάλογα αποτελέσματα για \mathcal{F} -καλύμματα ενός αντικειμένου της $\check{\mathcal{F}}$. Ευθύς αμέσως, αναφέρουμε τα αποτελέσματα αυτά.

Θεώρημα 7.5.20. Αν $0 \rightarrow Y \xrightarrow{\kappa^Y} F^Y \rightarrow W^Y \rightarrow 0$ είναι ένα \mathcal{F} -κάλυμμα ενός αντικειμένου Y της υποκατηγορίας $\check{\mathcal{F}}$, τότε για κάθε αντικείμενο F της \mathcal{F} ισχύει ότι:

1. Η επαγόμενη ακολουθία αβελιανών ομάδων,

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W^Y, F) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(F^Y, F) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, F) \rightarrow 0,$$

είναι ακριβής.

2. Ο μορφοισμός κ^Y επάγει ισομορφισμούς αβελιανών ομάδων:

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\kappa^Y, F) : \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^i(F^Y, F) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^i(Y, F),$$

για κάθε $i > 0$.

Σχόλιο 7.5.21. Η σύντομη ακριβής ακολουθία στη \mathcal{C} ,

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow F^Y \longrightarrow W^Y \longrightarrow 0,$$

όπου $F^Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{F})$ και $W^Y \in \mathrm{ob}(\check{\sigma})$, καλείται ένα \mathcal{F} -κάλυμμα του Y λόγω ακριβώς του γεγονότος ότι η ακολουθία αβελιανών ομάδων:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F^Y, F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, F) \longrightarrow 0,$$

είναι ακριβής για κάθε αντικείμενο F της \mathcal{F} .

Ως συνέπεια του Θεωρήματος (7.5.20), έπεται ότι ένα \mathcal{F} -κάλυμμα ενός αντικειμένου της $\check{\mathcal{F}}$, είναι μοναδικό με την ακόλουθη έννοια:

Πόρισμα 7.5.22. Ένα \mathcal{F} -κάλυμμα ενός αντικειμένου Y της $\check{\mathcal{F}}$ είναι μοναδικό μέχρι ισοδυναμίας. Δηλαδή, δύο οποιαδήποτε \mathcal{F} -καλύμματα του Y , είναι (αριστερά) ισοδύναμες ακριβείς ακολουθίες.

Όπως και στην ενότητα 7.3, τα αποτελέσματα μοναδικότητας που αναφέραμε για $\check{\sigma}$ -προσεγγίσεις και για \mathcal{F} -καλύμματα, μπορούμε να τα περιγράψουμε με διαφορετικό τρόπο, θεωρώντας τώρα την κατάσταση αυτή «modulo σ ». Η δυνατότητα αυτή, προκύπτει από το εξής αποτέλεσμα:

Λήμμα 7.5.23. Για έναν μορφοισμό $f: Y \longrightarrow F$ στην \mathcal{C} , όπου το Y είναι αντικείμενο της $\check{\mathcal{F}}$ και F είναι αντικείμενο της \mathcal{F} , οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

1. Ο μορφοισμός f παραγοντοποιείται μέσω ενός αντικειμένου της $\check{\sigma}$.
2. Ο μορφοισμός f παραγοντοποιείται μέσω ενός αντικειμένου της σ .

Στην Παρατήρηση (7.3.24), χρησιμοποιώντας την σχέση $\mathcal{X} - \mathrm{inj}, \dim \hat{\omega} = 0$, καθώς και τα αποτελέσματα μοναδικότητας για \mathcal{X} -προσεγγίσεις και για $\hat{\omega}$ -καλύμματα, ορίσαμε τους συναλλοίωτους συναρτητές:

$$T: \hat{\mathcal{X}} \longrightarrow \mathcal{X}/\omega, \quad C \longmapsto X_C,$$

και

$$T': \hat{\mathcal{X}} \longrightarrow \hat{\omega}/\omega, \quad C \longmapsto Y^C,$$

όπου X_C είναι η επιλεγόμενη \mathcal{X} -προσέγγιση του αντικειμένου C της $\hat{\mathcal{X}}$, και Y^C είναι το επιλεγόμενο $\hat{\omega}$ -κάλυμμα, του αντικειμένου C της $\hat{\mathcal{X}}$. Επιπλέον, αν $f: C \longrightarrow D$ είναι ένας μορφοισμός στην $\hat{\mathcal{X}}$, τότε $T(f) = f_*: X_C \longrightarrow X_D$, και $T'(f) = f^*: Y^C \longrightarrow Y^D$.

Χρησιμοποιώντας τώρα την σχέση $\mathcal{F} - \mathrm{proj}, \dim \check{\sigma} = 0$, καθώς και τα αποτελέσματα μοναδικότητας για $\check{\sigma}$ -προσεγγίσεις και για \mathcal{F} -καλύμματα, παίρνουμε συναλλοίωτους συναρτητές:

$$\mathcal{G}: \check{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathcal{F}/\sigma, \quad Y \longmapsto F^Y,$$

και

$$\mathcal{G}': \check{\mathcal{F}} \longrightarrow \check{\sigma}/\sigma, \quad Y \longmapsto W_Y,$$

όπου F^Y είναι το επιλεγόμενο \mathcal{F} -κάλυμμα του αντικειμένου Y της $\check{\mathcal{F}}$ και W_Y είναι η επιλεγόμενη $\check{\sigma}$ -προσέγγιση του αντικειμένου Y της $\check{\mathcal{F}}$. Επιπλέον, αν $f: Y \longrightarrow D$ είναι ένας μορφοισμός στη $\check{\mathcal{F}}$, τότε υπάρχουν άρσεις (liftings) $\mathcal{G}(f) := f^*: F^Y \longrightarrow F^D$ και $\mathcal{G}'(f) := f_*: W_Y \longrightarrow W_D$ του f στην \mathcal{F} και στην $\check{\sigma}$.

Οι συναλλοίωτοι συναρτητές \mathcal{G} και \mathcal{G}' , όπως ορίστηκαν προηγουμένως, ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\mathcal{G}(W) = 0 \quad \& \quad \mathcal{G}'(W) = 0,$$

για κάθε αντικείμενο W της σ , όπου με 0 παριστάνουμε συγχρόνως τα μηδενικά αντικείμενα των κατηγοριών \mathcal{F}/σ και $\check{\sigma}/\sigma$, δηλαδή, τα αντικείμενα ακριβώς της σ .

Είμαστε έτοιμοι λοιπόν, να παραθέσουμε τη δυϊκή εκδοχή του Θεωρήματος (7.3.25).

Θεώρημα 7.5.24. Έστω $\iota: \check{\sigma} \rightarrow \check{\mathcal{F}}$ και $j: \mathcal{F} \rightarrow \check{\mathcal{F}}$, οι συναλλοίωτοι φυσικοί συναρτητές εγκλεισης. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Ο επαγόμενος συναλλοίωτος συναρτητής $j_!: \mathcal{F}/\sigma \rightarrow \check{\mathcal{F}}/\sigma$ είναι πλήρης και πιστός, και δέχεται έναν αριστερό συζυγή $j^!: \check{\mathcal{F}}/\sigma \rightarrow \mathcal{F}/\sigma$, ο οποίος αντιστοιχίζει κάθε αντικείμενο Y της $\check{\mathcal{F}}$ στο επιλεγόμενο \mathcal{F} -κάλυμμα F^Y του Y . Επιπλέον, ο μορφισμός σύζευξης $Y \rightarrow (j_! \circ j^!)(Y)$, δίνεται από την κλάση των μορφισμών $\kappa^Y: Y \rightarrow F^Y$ στην αβελιανή ομάδα $\text{Hom}_{\check{\mathcal{F}}/\sigma}(Y, F^Y)$.
2. Ο επαγόμενος συναλλοίωτος συναρτητής $\iota_*: \check{\sigma}/\sigma \rightarrow \check{\mathcal{F}}/\sigma$ είναι πλήρης και πιστός, και δέχεται έναν δεξιό συζυγή $\iota^*: \check{\mathcal{F}}/\sigma \rightarrow \check{\sigma}/\sigma$, ο οποίος αντιστοιχίζει κάθε αντικείμενο Y της $\check{\mathcal{F}}$ στην επιλεγόμενη $\check{\sigma}$ -προσέγγιση W_Y του Y . Επιπλέον, ο μορφισμός σύζευξης $(\iota_* \circ \iota^*)(Y) \rightarrow Y$, δίνεται από την κλάση των μορφισμών $\varpi_Y: W_Y \rightarrow Y$ στην αβελιανή ομάδα $\text{Hom}_{\check{\mathcal{F}}/\sigma}(W_Y, Y)$.
3. $j^! \circ \iota_* = 0$ και $\iota^* \circ j_! = 0$.
4. Η σύνθεση των μορφισμών σύζευξης:

$$\iota_* \circ \iota^* \xrightarrow{\varpi} \text{Id}_{\check{\mathcal{F}}/\sigma} \xrightarrow{\kappa} j_! \circ j^!$$

είναι ο μηδενικός μορφισμός στην $\check{\mathcal{F}}/\sigma$.

Σχόλιο 7.5.25. Οι συνθήκες 3) και 4) του Θεωρήματος (7.5.24), μας εξασφαλίζουν ότι για οποιοδήποτε αντικείμενο Y της $\check{\mathcal{F}}$, υπάρχει ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} W_Y & \xrightarrow{\varpi_Y} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \kappa^Y \\ Q & \dashrightarrow & F^Y \end{array}$$

όπου το Q είναι αντικείμενο της σ . Δηλαδή, κάθε αντικείμενο Y της $\check{\mathcal{F}}$ «αποσυντίθεται», τουλάχιστον στην $\check{\mathcal{F}}/\sigma$, στην επιλεγόμενη $\check{\sigma}$ -προσέγγιση W_Y του Y , και στο επιλεγόμενο \mathcal{F} -κάλυμμα F^Y του Y .

Στην ενότητα 7.4, μελετώντας ιδιότητες ακρίβειας των κατηγοριών $\hat{\mathcal{X}}$ και $\hat{\omega}$, αποδείξαμε ιδιαίτερα ότι η $\hat{\omega}$ είναι μια πλήρης υποκατηγορία της $\hat{\mathcal{X}}$, κλειστή σε ισομορφισμούς και σε ευθείς προσθετέους στην \mathcal{C} . Τονίζουμε ότι υπάρχουν δυϊκά αποτελέσματα ακρίβειας για τις κατηγορίες \mathcal{F} και $\check{\sigma}$, για παράδειγμα ας σημειώσουμε ότι κατά δυϊκό τρόπο προκύπτει ότι η $\check{\sigma}$ είναι μια πλήρης υποκατηγορία της $\check{\mathcal{F}}$, κλειστή σε ισομορφισμούς και σε ευθείς προσθετέους στην \mathcal{C} . Η διατύπωση και η απόδειξη αυτών των δυϊκών αποτελεσμάτων είναι απολύτως ανάλογη και αφήνεται στον αναγνώστη.

Ολοκληρώνουμε την παρούσα ενότητα, δείχνοντας ότι το ζεύγος $(\check{\sigma}, \mathcal{F})$ είναι πλήρες συστρεπτικό ζεύγος στην $\check{\mathcal{F}}$, όπως και υποσχεθήκαμε στην εισαγωγή της ενότητας αυτής.

Πόρισμα 7.5.26. Το ζεύγος $(\check{\sigma}, \mathcal{F})$ είναι πλήρες συστρεπτικό ζεύγος στην $\check{\mathcal{F}}$.

Απόδειξη. Δυϊκά, με την απόδειξη του Πορίσματος (7.5.7). ■

7.6 Μια Εφαρμογή Στην Θεωρία Tilting

Όπως θα δούμε στο επόμενο Κεφάλαιο 8, η εκτεθείσα θεωρία των Auslander-Buchweitz έχει εφαρμογές στην θεωρία προσεγγίσεων προτύπων με Gorenstein-προβολικά και Gorenstein-ενέσιμα πρότυπα. Στην παρούσα ενότητα θα δούμε εν συντομία μια άλλη ενδιαφέρουσα εφαρμογή της θεωρίας των Auslander-Buchweitz στην Θεωρία προτύπων tilting και cotilting. Σημειώνουμε ότι η θεωρία tilting και cotilting υπεράνω τυχόντος δακτυλίου γενικεύει την θεωρία Morita περί ισοδυναμιών και δυσκολιών μεταξύ κατηγοριών προτύπων, και έχει ευρείες εφαρμογές στην Ομολογική Άλγεβρα, στην Θεωρία Αναπαραστάσεων στην οποία διαδραματίζει κυρίαρχο ρόλο, και στην Αλγεβρική Γεωμετρία. Για περισσότερες λεπτομέρειες αναφορικά με την Θεωρία tilting σε διάφορα ερευνητικά πλαίσια, παραπέμπουμε στον συλλογικό τόμο [3].

Έστω R ένας δακτύλιος (προσεταιριστικός με μονάδα). Υπενθυμίζουμε ότι, για ένα αριστερό R -πρότυπο T , $\text{Add } T$ συμβολίζει την πλήρη υποκατηγορία της $R\text{-Mod}$ η οποία αποτελείται από όλα τα αριστερά R -πρότυπα X τα οποία είναι ευθείς αθροιστές (εν γένει άπειρων) ευθέων αθροισμάτων από αντίγραφα του T . Επίσης αν I είναι ένα σύνολο δεικτών, τότε $T^{(I)}$ συμβολίζει το ευθύ άθροισμα των προτύπων T_i , όπου $T_i = T, \forall i \in I$.

Ορισμός 7.6.1. Ένα αριστερό R -πρότυπο T καλείται **tilting** αν:

1. $\text{pd}_R T < \infty$.
2. $\text{Ext}_R^k(T, T^{(I)}) = 0$, για κάθε $k \geq 1$, και για κάθε σύνολο δεικτών I .
3. Υπάρχει μια ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow T^0 \longrightarrow T^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow T^{m-1} \longrightarrow T^m \longrightarrow 0$$

όπου $T^i \in \text{Add } T, \forall i = 0, 1, \dots, m$.

Ένα tilting πρότυπο T καλείται **n -tilting** (ή πρότυπο tilting προβολικής διάστασης n), αν $\text{pd}_R T = n$.

Το επόμενο Θεώρημα πιστοποιεί την ύπαρξη αριστερών T^\perp -προσεγγίσεων και δεξιών $\widetilde{\text{Add } T}$ -προσεγγίσεων προτύπων, αν T είναι ένα πρότυπο tilting.

Θεώρημα 7.6.2. Έστω T ένα αριστερό πρότυπο n -tilting υπεράνω ενός δακτυλίου R . Τότε το ζεύγος

$$\left(\widetilde{\text{Add } T}, T^\perp \right)$$

είναι ένα πλήρες συστρεπτικό ζεύγος στην κατηγορία $R\text{-Mod}$ και $\widetilde{T}^\perp = R\text{-Mod}$.

Απόδειξη. Θα δώσουμε μια σκιαγράφηση της απόδειξης του Θεωρήματος σε μια σειρά βημάτων. Οι λεπτομέρειες αφήνονται στον ενδιαφερόμενο αναγνώστη.

1. Η υποκατηγορία T^\perp είναι μια συνεπιλύουσα (coresolving) και προσθετικά κλειστή υποκατηγορία της $R\text{-Mod}$ η οποία είναι κλειστή σε ισομορφισμούς και άπειρα ευθέα γινόμενα.
2. Η υποκατηγορία $\text{Add } T$ είναι ένας προβολικός γεννήτορας της T^\perp , και η υποκατηγορία T^\perp έχει αρκετά (σχετικά) προβολικά αντικείμενα.
3. Σύμφωνα με το Πρόσχημα (7.5.26), θα έχουμε ένα πλήρες συστρεπτικό ζεύγος $(\widetilde{\text{Add } T}, T^\perp)$ στην υποκατηγορία \widetilde{T}^\perp .
4. Επειδή $\text{pd}_R T = n < \infty$, έπεται ότι για κάθε αριστερό R -πρότυπο M , η n -οστή συνσυσζυγία του Σ^n ανήκει στην T^\perp , και άρα ως συνέπεια έπεται ότι $\widetilde{T}^\perp = R\text{-Mod}$.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βήματα, έπεται ότι η τριάδα

$$\left(R\text{-Mod}, T^\perp, \text{Add } T \right)$$

είναι ένα δυϊκό πλαίσιο των Auslander-Buchweitz στην $R\text{-Mod}$. Επομένως προκύπτει άμεσα η ύπαρξη συστρεπτικού ζεύγους $(\widehat{\text{Add } T}, T^\perp)$ στην $R\text{-Mod}$ έτσι ώστε $\widehat{T^\perp} = R\text{-Mod}$. ■

Δυϊκά, για ένα αριστερό R -πρότυπο T , $\text{Prod } T$ συμβολίζει την πλήρη υποκατηγορία της $R\text{-Mod}$ η οποία αποτελείται από όλα τα αριστερά R -πρότυπα X τα οποία είναι ευθείς αθροιστέοι (εν γένει άπειρων) ευθέων γινομένων από αντίγραφα του T . Επίσης αν I είναι ένα σύνολο δεικτών, τότε T^I συμβολίζει το ευθύ γινόμενο των προτύπων T_i , όπου $T_i = T$, $\forall i \in I$.

Ορισμός 7.6.3. Ένα αριστερό R -πρότυπο T καλείται **cotilting** αν:

1. $\text{id}_R T < \infty$.
2. $\text{Ext}_R^k(T^I, T) = 0$, για κάθε $k \geq 1$, και για κάθε σύνολο δεικτών I .
3. Αν E είναι ένας ενέσιμος συγγενήτορας της $R\text{-Mod}$, τότε υπάρχει μια ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow T^m \longrightarrow T^{m-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow T^1 \longrightarrow T^0 \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

όπου $T^i \in \text{Prod } T$, $\forall i = 0, 1, \dots, m$.

Ένα cotilting πρότυπο T καλείται **n -cotilting** (ή πρότυπο cotilting ενέσιμης διάστασης n), αν $\text{id}_R T = n$.

Το επόμενο Θεώρημα πιστοποιεί την ύπαρξη αριστερών ${}^\perp T$ -προσεγγίσεων και δεξιών $\widehat{\text{Prod } T}$ -προσεγγίσεων προτύπων, αν T είναι ένα πρότυπο cotilting.

Θεώρημα 7.6.4. Έστω T ένα αριστερό πρότυπο n -cotilting υπεράνω ενός δακτυλίου R . Τότε το ζεύγος

$$\left({}^\perp T, \widehat{\text{Prod } T} \right)$$

είναι ένα πλήρες συστρεπτικό ζεύγος στην κατηγορία $R\text{-Mod}$ και $\widehat{{}^\perp T} = R\text{-Mod}$.

Απόδειξη. Θα δώσουμε μια σκιαγράφηση της απόδειξης του Θεωρήματος σε μια σειρά βημάτων. Οι λεπτομέρειες αφήνονται στον ενδιαφερόμενο αναγνώστη.

1. Η υποκατηγορία ${}^\perp T$ είναι μια επιλύουσα (resolving) και προσθετικά κλειστή υποκατηγορία της $R\text{-Mod}$ η οποία είναι κλειστή σε ισομορφισμούς και άπειρα ευθέα αθροίσματα.
2. Η υποκατηγορία $\text{Prod } T$ είναι ένας ενέσιμος συγγενήτορας της ${}^\perp T$, και η υποκατηγορία ${}^\perp T$ έχει αρκετά (σχετικά) ενέσιμα αντικείμενα.
3. Σύμφωνα με το Πρόρισμα (7.5.7), θα έχουμε ένα πλήρες συστρεπτικό ζεύγος $({}^\perp T, \widehat{\text{Prod } T})$ στην υποκατηγορία $\widehat{{}^\perp T}$.
4. Επειδή $\text{id}_R T = n < \infty$, έπεται ότι για κάθε αριστερό R -πρότυπο M , η n -οστή συζυγία του Ω^n ανήκει στην ${}^\perp T$, και άρα ως συνέπεια έπεται ότι $\widehat{{}^\perp T} = R\text{-Mod}$.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βήματα, έπεται ότι η τριάδα

$$\left(R\text{-Mod}, {}^\perp T, \text{Prod } T \right)$$

είναι ένα πλαίσιο των Auslander-Buchweitz στην $R\text{-Mod}$. Επομένως προκύπτει άμεσα η ύπαρξη συστρεπτικού ζεύγους $({}^\perp T, \widehat{\text{Prod } T})$ στην $R\text{-Mod}$ έτσι ώστε $\widehat{{}^\perp T} = R\text{-Mod}$. ■

Από τα παραπάνω προκύπτει εύλογα το ακόλουθο:

Πρόβλημα: Πότε για έναν δακτύλιο R , το αριστερό R -πρότυπο R είναι πρότυπο tilting ή cotilting; Δυσικά, πότε για έναν ενέσιμο συγγεννήτορα E της κατηγορίας $R\text{-Mod}$, το αριστερό R -πρότυπο E είναι πρότυπο tilting ή cotilting;

Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι πάντα το αριστερό πρότυπο R είναι tilting και το αριστερό πρότυπο E είναι cotilting.

Το πρόβλημα του πότε το αριστερό πρότυπο R είναι cotilting και το αριστερό πρότυπο E είναι tilting, μας οδηγεί στους δακτυλίους Gorenstein τους οποίους θα μελετήσουμε στο επόμενο Κεφάλαιο 8.

Κεφάλαιο 8

Δακτύλιοι Gorenstein Και G-Προσεγγίσεις Προτύπων

Στην μεταθετική Άλγεβρα, ένας *δακτύλιος Gorenstein*, (*Gorenstein ring*), είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος της Noether με πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση, ως πρότυπο υπεράνω του εαυτού του. Οι μεταθετικοί δακτύλιοι Gorenstein εισήχθηκαν από τον A. Grothendieck, ο οποίος τους ονόμασε έτσι, λόγω της σχέσης τους με μια ιδιότητα δυϊκότητας ιδαιζόντων επίπεδων καμπυλών που μελετήθηκαν από τον D. Gorenstein το 1952. Η γενική θεωρία των μεταθετικών δακτυλίων Gorenstein θεμελιώθηκε από τον Bass στο πρωτοπόρο άρθρο του [12], και έκτοτε αποτελεί βασικό αντικείμενο μελέτης της Μεταθετικής Άλγεβρας και της Αλγεβρικής Γεωμετρίας. Από την άλλη πλευρά *μη μεταθετικοί δακτύλιοι Gorenstein*, με την έννοια (δεξιών και αριστερών) δακτυλίων της Noether με πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση ως πρότυπο υπεράνω του εαυτού τους, εισήχθηκαν από τον M. Auslander το 1965, και σήμερα αποτελούν βασικό αντικείμενο μελέτης στην Ομολογική Άλγεβρα, τη Θεωρία Αναπαραστάσεων, τη Θεωρία Ιδιομορφιών, τη Μαθηματική Φυσική, κτλ.

Στο παρόν κεφάλαιο, μελετάμε δακτυλίους Gorenstein, όχι απαραίτητα μεταθετικούς, καθώς και προσεγγίσεις προτύπων υπεράνω τέτοιων δακτυλίων.

Σύμβαση: Καθ' όλη την έκταση του κεφαλαίου αυτού, με R συμβολίζουμε έναν προσεταιριστικό δακτύλιο με μονάδα.

8.1 Δακτύλιοι Gorenstein

Στην ενότητα αυτή, εισάγουμε την έννοια ενός δακτυλίου Iwanaga-Gorenstein, ή χάριν απλότητας δακτυλίου Gorenstein, και αποδεικνύουμε βασικές ιδιότητες τις οποίες ικανοποιεί ένας τέτοιος δακτύλιος. Όπως θα διαπιστώσουμε, τα πρότυπα υπεράνω τέτοιων δακτυλίων, έχουν σημαντικές ομολογιακές ιδιότητες.

Ορισμός 8.1.1. Ένας δακτύλιος R καλείται **δακτύλιος Iwanaga-Gorenstein**, ή απλά, **δακτύλιος Gorenstein**, αν ο R είναι αριστερός και δεξιός δακτύλιος της Noether, όπου όταν ιδωθεί είτε ως αριστερό, είτε ως δεξιό, πρότυπο υπεράνω του εαυτού του να έχει πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση.

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι ο δακτύλιος R ικανοποιεί τις συνθήκες του Ορισμού (8.1.1), μόνο από την μία πλευρά.

Πρόταση 8.1.2. Αν R είναι ένας αριστερός (δεξιός) δακτύλιος της Noether με ενέσιμη διάσταση ως αριστερό (δεξιό) R -πρότυπο πεπερασμένη, ίση με n , τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Η ενέσιμη διάσταση κάθε επίπεδου αριστερού (δεξιού) R -προτύπου είναι μικρότερη ή ίση του n .

2. Αν η επίπεδη διάσταση ενός αριστερού (δεξιού) R -πρότυπου είναι πεπερασμένη, τότε η προβολική διάσταση αυτού είναι μικρότερη ή ίση του n .

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε την πρόταση αυτή από τα αριστερά. Υποθέτουμε ότι ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether με πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση ως αριστερό R -πρότυπο ίση με n .

1) Θεωρούμε ένα επίπεδο αριστερό R -πρότυπο F , με σκοπό να αποδείξουμε ότι $\text{id}_R F \leq n$. Από το Θεώρημα (3.2.50), γνωρίζουμε ότι το F είναι το ευθύ όριο από πεπερασμένα παραγόμενα και προβολικά αριστερά R -πρότυπα. Γράφουμε λοιπόν $F = \varinjlim P_i$, όπου $((P_i), (f_{ji}))$ είναι ένα ευθύ σύστημα από πεπερασμένα παραγόμενα και προβολικά αριστερά R -πρότυπα υπεράνω ενός κατευθυνόμενου συνόλου I . Ισχυριζόμαστε ότι για ένα οποιοδήποτε ευθύ σύστημα $((N_\alpha), (g_{\beta\alpha}))$ από αριστερά R -πρότυπα υπεράνω ενός κατευθυνόμενου συνόλου Δ , ισχύει ότι

$$\text{id}_R \varinjlim N_\alpha \leq \sup\{\text{id}_R N_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}. \quad (8.1)$$

Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό αυτόν, χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε την υπόθεση ότι ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether. Έστω λοιπόν $((N_\alpha), (g_{\beta\alpha}))$, ένα ευθύ σύστημα από αριστερά R -πρότυπα υπεράνω ενός κατευθυνόμενου συνόλου Δ . Αν $\sup\{\text{id}_R N_\alpha \mid \alpha \in \Delta\} = \infty$, τότε προφανώς ισχύει η σχέση (8.1). Έτσι, υποθέτουμε τώρα ότι υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός m , έτσι ώστε $\sup\{\text{id}_R N_\alpha \mid \alpha \in \Delta\} = m$. Εξ ορισμού, για κάθε $\alpha \in \Delta$ έχουμε ότι $\text{Ext}_R^i(M, N_\alpha) = 0$, για κάθε $i > m$ και για κάθε αριστερό R -πρότυπο M . Επειδή ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether, για κάθε πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό R -πρότυπο M , χρησιμοποιώντας το Λήμμα (3.3.20) παίρνουμε ότι:

$$\text{Ext}_R^i(M, \varinjlim N_\alpha) \cong \varinjlim \text{Ext}_R^i(M, N_\alpha),$$

για κάθε $i \geq 0$. Συνεπώς, έπεται ότι $\text{Ext}_R^i(M, \varinjlim N_\alpha) = 0$ για κάθε $i > m$ και για κάθε πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό R -πρότυπο M , διότι

$$\varinjlim \text{Ext}_R^i(M, N_\alpha) = 0,$$

για κάθε $i > m$ και για κάθε πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό R -πρότυπο M . Αν I είναι ένα οποιοδήποτε αριστερό ιδεώδες του R , τότε προφανώς το πρότυπο πηλίκο R/I είναι πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό R -πρότυπο. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι

$$\text{Ext}_R^i(R/I, \varinjlim N_\alpha) = 0, \quad (8.2)$$

για κάθε $i > m$ και για κάθε αριστερό ιδεώδες I του R . Στην συνέχεια, διαλέγουμε μια ενέσιμη ανάλυση του $\varinjlim N_\alpha$, έστω

$$0 \longrightarrow \varinjlim N_\alpha \longrightarrow E^0 \longrightarrow \dots \longrightarrow E^{m-1} \xrightarrow{\gamma^{m-1}} E^m \longrightarrow \dots$$

Τότε χρησιμοποιώντας το Dimension Shifting για ενέσιμες αναλύσεις, καθώς και την σχέση (8.2), οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι

$$0 = \text{Ext}_R^{m+1}(R/I, \varinjlim N_\alpha) \cong \text{Ext}_R^1(R/I, C),$$

για κάθε αριστερό ιδεώδες I του R όπου $C := \text{Im } \gamma^{m-1}$. Ως συνέπεια αυτού, έπεται ότι

$$\text{Ext}_R^1(R/I, C) = 0, \quad (8.3)$$

για κάθε αριστερό ιδεώδες I του R . Αν για κάθε αριστερό ιδεώδες I του R , θεωρήσουμε τη σύντομη ακριβή ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0,$$

και εφαρμόσουμε σ' αυτήν τον αντισυναλλοίωτο συναρτητή $\text{Hom}_R(-, C)$, τότε η ισότητα (8.3), μας εξασφαλίζει ότι η ακολουθία από αβελιανές ομάδες

$$\text{Hom}_R(R, C) \longrightarrow \text{Hom}_R(I, C) \longrightarrow 0,$$

είναι ακριβής. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, καθώς και το κριτήριο του Baer, προκύπτει ότι το αριστερό R -πρότυπο C είναι ενέσιμο. Επομένως, η ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα

$$0 \longrightarrow \varinjlim N_\alpha \longrightarrow E^0 \longrightarrow \dots \longrightarrow E^{m-1} \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

είναι μια ενέσιμη ανάλυση του $\varinjlim N_\alpha$ πεπερασμένου μήκους m . Έτσι τελικά, έχουμε ότι

$$\text{id}_R \varinjlim N_\alpha \leq m = \sup\{\text{id}_R N_\alpha \mid \alpha \in \Delta\},$$

όπως ζητούσαμε.

Ο ισχυρισμός που μόλις αποδείξαμε, μας δίνει ότι

$$\text{id}_R F = \text{id}_R \varinjlim P_i \leq \sup\{\text{id}_R P_i \mid i \in I\}.$$

Για να αποδείξουμε λοιπόν ότι $\text{id}_R F \leq n$, αρκεί να δείξουμε ότι $\text{id}_R P_i \leq n$ για κάθε $i \in I$. Επειδή κάθε P_i για $i \in I$, είναι ένα προβολικό αριστερό R -πρότυπο, υπάρχει ένα σύνολο Δ_i και ένα (προβολικό) αριστερό R -πρότυπο Q_i , έτσι ώστε $R^{(\Delta_i)} \cong P_i \oplus Q_i$ για κάθε $i \in I$. Επιπλέον, αφού η ενέσιμη διάσταση του δακτυλίου R ως αριστερό R -πρότυπο είναι πεπερασμένη, ίση με n , υπάρχει μια ακριβής ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα ελάχιστου μήκους n :

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow H^0 \longrightarrow \dots \longrightarrow H^{n-1} \longrightarrow H^n \longrightarrow 0,$$

όπου κάθε H^j για $j \in \{0, \dots, n\}$ είναι ενέσιμο. Χρησιμοποιώντας τώρα το γεγονός ότι ευθέα αθροίσματα ακριβών ακολουθιών είναι μια ακριβής ακολουθία, έπεται ότι η ακολουθία αριστερών R -προτύπων

$$0 \longrightarrow R^{(\Delta_i)} \longrightarrow (H^0)^{(\Delta_i)} \longrightarrow \dots \longrightarrow (H^{n-1})^{(\Delta_i)} \longrightarrow (H^n)^{(\Delta_i)} \longrightarrow 0, \quad (8.4)$$

είναι ακριβής για κάθε $i \in I$. Συνεπώς, η ακολουθία αριστερών R -προτύπων

$$0 \longrightarrow P_i \oplus Q_i \xrightarrow{\phi^i} (H^0)^{(\Delta_i)} \longrightarrow \dots \longrightarrow (H^{n-1})^{(\Delta_i)} \longrightarrow (H^n)^{(\Delta_i)} \longrightarrow 0,$$

είναι επίσης ακριβής για κάθε $i \in I$, ως ισόμορφη με την ακριβή ακολουθία (8.4). Η υπόθεση ότι ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether, μας εξασφαλίζει ότι κάθε $(H^j)^{(\Delta_i)}$ για $j \in \{0, \dots, n\}$ και για $i \in I$, είναι ένα ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο. Επομένως, έπεται ότι $\text{id}_R(P_i \oplus Q_i) \leq n$ για $i \in I$, και άρα, ότι $\text{id}_R P_i \leq n$ για κάθε $i \in I$, όπως επιθυμούσαμε.

2) Θεωρούμε ένα αριστερό R -πρότυπο M με πεπερασμένη επίπεδη διάσταση, με σκοπό να δείξουμε ότι $\text{pd}_R M \leq n$. Υποθέτουμε ότι $\text{fd}_R M = m$ για κάποιον φυσικό αριθμό m , και διαλέγουμε μια προβολική ανάλυση του M :

$$\dots \longrightarrow P_m \xrightarrow{\alpha_m} P_{m-1} \xrightarrow{\alpha_{m-1}} \dots \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0. \quad (8.5)$$

Η ακριβής ακολουθία (8.5), μπορεί να θεωρηθεί φυσικά ως μια επίπεδη ανάλυση του M . Έτσι, χρησιμοποιώντας το Dimension Shifting για επίπεδες αναλύσεις, συμπεραίνουμε ότι:

$$\text{Tor}_1^R(A, K_m) \cong \text{Tor}_{m+1}^R(A, M), \quad m \geq 0 \quad \& \quad \forall A_R, \quad (8.6)$$

όπου $K_0 = M$ και $K_m = \text{Ker } \alpha_{m-1} = \text{Im } \alpha_m$ για $m \geq 1$. Ωστόσο, η υπόθεση ότι $\text{fd}_R M = m < \infty$, μας δίνει την ισότητα

$$\text{Tor}_\kappa^R(A, M) = 0, \quad \forall \kappa > m \quad \& \quad \forall A_R. \quad (8.7)$$

Συνδυάζοντας λοιπόν τις σχέσεις (8.6) και (8.7), προκύπτει ότι $\text{Tor}_1^R(A, K_m) = 0$ για κάθε δεξιό R -πρότυπο A , ή ισοδύναμα, ότι το αριστερό R -πρότυπο K_m είναι επίπεδο. Αν χρησιμοποιήσουμε τώρα το 1), τότε έχουμε ότι $\text{id}_R K_m \leq n$, και κατ' επέκταση, ότι $\text{Ext}_R^i(-, K_m) = 0$ για κάθε $i > n$. Στην συνέχεια, διακρίνουμε περιπτώσεις για τον φυσικό αριθμό m .

Αν $m > n$, τότε έπεται ότι $\text{Ext}_R^m(M, K_m) = 0$. Χρησιμοποιώντας τώρα το αποτέλεσμα αυτό, καθώς και το Dimension Shifting για προβολικές αναλύσεις, παίρνουμε ότι $\text{Ext}_R^1(K_{m-1}, K_m) = 0$. Συνεπώς, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η ακριβής ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα

$$0 \longrightarrow K_m \longrightarrow P_{m-1} \longrightarrow K_{m-1} \longrightarrow 0,$$

είναι διασπάλσιμη, και κατ' επέκταση, ότι το αριστερό R -πρότυπο K_{m-1} είναι προβολικό, ως ευθύς προσθετός του προβολικού αριστερού R -προτύπου P_{m-1} . Έτσι, η επαγόμενη ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow K_{m-1} \longrightarrow P_{m-2} \xrightarrow{\alpha_{m-2}} \cdots \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0,$$

είναι μια προβολική ανάλυση του M μήκους $m - 1$. Άρα, $\text{pd}_R M \leq m - 1$. Αν $m - 1 = n$, τότε τετριμμένα ισχύει το ζητούμενο. Αλλιώς, δηλαδή αν $m - 1 > n$, τότε επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη διαδικασία, αντικαθιστώντας το K_m με το K_{m-1} . Έτσι τελικά, θα καταλήξουμε ότι $\text{pd}_R M \leq n$, όπως επιθυμούσαμε.

Αν $m \leq n$, τότε ισχυριζόμαστε ξανά ότι $\text{pd}_R M \leq n$. Για να διαπιστώσουμε τον ισχυρισμό αυτόν, υποθέτουμε ότι $m \leq n$, καθώς και ότι $\text{pd}_R M > n$, με σκοπό να καταλήξουμε σε άτοπο. Αν θέσουμε $d = \text{pd}_R M$, (πιθανότητα, $d = \infty$), τότε υπάρχει φυσικός αριθμός d' τέτοιος ώστε $n < d' < d$. Διαλέγοντας μια προβολική ανάλυση του M ,

$$\ell : \quad \cdots \longrightarrow P'_{d'} \xrightarrow{\beta_{d'}} P'_{d'-1} \xrightarrow{\beta_{d'-1}} \cdots \longrightarrow P'_0 \xrightarrow{\beta_0} M \longrightarrow 0,$$

και εφαρμόζοντας στη συνέχεια το Dimension Shifting για επίπεδες αναλύσεις στην προηγούμενη ακριβή ακολουθία, οδηγούμαστε στην σχέση

$$\text{Tor}_1^R(A, K'_{d'}) \cong \text{Tor}_{d'+1}^R(A, M) = 0, \quad \forall A_R,$$

όπου $K'_{d'} = \text{Ker } \beta_{d'-1} = \text{Im } \beta_{d'}$. Σημειώνουμε ότι η ισότητα $\text{Tor}_{d'+1}^R(A, M) = 0$ για κάθε δεξιό R -πρότυπο A , προέκυψε από την υπόθεση ότι $\text{fd}_R M = m$ καθώς και από την επιλογή του φυσικού αριθμού d' . Επομένως, έπεται ότι $\text{Tor}_1^R(A, K'_{d'}) = 0$ για κάθε δεξιό R -πρότυπο A , ή ισοδύναμα, ότι το αριστερό R -πρότυπο $K'_{d'}$ είναι επίπεδο. Χρησιμοποιώντας λοιπόν ξανά το 1), συμπεραίνουμε ότι $\text{id}_R K'_{d'} \leq n$. Η εφαρμογή τώρα του Dimension Shifting για προβολικές αναλύσεις, στην ακριβή ακολουθία ℓ , μας δίνει ιδιαίτερα ότι:

$$\text{Ext}_R^1(K'_{d'-1}, K'_{d'}) \cong \text{Ext}_R^{d'}(M, K'_{d'}),$$

όπου $K'_{d'-1} = \text{Ker } \beta_{d'-2}$. Όμως, επειδή $d' > n$ και $\text{id}_R K'_{d'} \leq n$, παίρνουμε ότι $\text{Ext}_R^{d'}(M, K'_{d'}) = 0$, και επιπρόσθετα, ότι $\text{Ext}_R^1(K'_{d'-1}, K'_{d'}) = 0$. Το αποτέλεσμα αυτό, μας εξασφαλίζει ότι η σύντομη ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow K'_{d'} \longrightarrow P'_{d'-1} \longrightarrow K'_{d'-1} \longrightarrow 0,$$

είναι διασπάλσιμη, και κατ' επέκταση, ότι το αριστερό R -πρότυπο $K'_{d'-1}$ είναι προβολικό, ως ευθύς προσθετός του προβολικού αριστερού R -προτύπου $P'_{d'-1}$. Επομένως, έχουμε ότι η επαγόμενη ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow K'_{d'-1} \longrightarrow P'_{d'-2} \xrightarrow{\beta_{d'-2}} \cdots \longrightarrow P'_0 \xrightarrow{\beta_0} M \longrightarrow 0,$$

είναι μια προβολική ανάλυση του M πεπερασμένου μήκους $d' - 1$, και άρα, ότι $\text{pd}_R M \leq d' - 1$. Το αποτέλεσμα ωστόσο αυτό, αντιφάσκει με το γεγονός ότι $d = \text{pd}_R M$. Αν υποθέσουμε λοιπόν ότι $m \leq n$, τότε υποχρεωτικά ισχύει ότι $\text{pd}_R M \leq n$.

Ομοίως προκύπτει η απόδειξη των 1) και 2), στην περίπτωση που υποθέσουμε ότι ο δακτύλιος R είναι δεξιός δακτύλιος της Noether με πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση ως δεξιό R -πρότυπο. ■

Ως προφανή συνέπεια της Πρότασης (8.1.2), παίρνουμε ότι:

Πόρισμα 8.1.3. Έστω R ένας αριστερός (δεξιός) δακτύλιος της Noether με ενέσιμη διάσταση ως αριστερό (δεξιό) R -πρότυπο πεπερασμένη, ίση με n . Τότε για κάθε επίπεδο αριστερό (δεξιό) πρότυπο F , ισχύει ότι $\text{pd}_R F \leq n$.

Πριν μελετήσουμε τι ιδιότητες έχουν τα πρότυπα υπεράνω ενός δακτυλίου Gorenstein, χρειάζεται να εισάγουμε τις ακόλουθες έννοιες:

Ορισμός 8.1.4. Ένα υποπρότυπο T ενός αριστερού R -προτύπου N καλείται **καθαρό υποπρότυπο, (pure submodule)**, αν η ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$0 \longrightarrow A \otimes T \longrightarrow A \otimes N,$$

είναι ακριβής για κάθε δεξιό R -πρότυπο A , ή ισοδύναμα, δες [42, Theorem 6.4], αν η ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$\text{Hom}_R(B, N) \longrightarrow \text{Hom}_R(B, N/T) \longrightarrow 0,$$

είναι ακριβής για κάθε πεπερασμένα παραστάσιμο αριστερό R -πρότυπο B . Επιπλέον, μια σύντομη ακριβής ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow N \longrightarrow N/T \longrightarrow 0,$$

καλείται **καθαρά ακριβής ακολουθία, (pure exact sequence)**, αν το T είναι καθαρό υποπρότυπο του N .

Ανάλογα ορίζεται ένα καθαρό υποπρότυπο ενός δεξιού R -προτύπου.

Ορισμός 8.1.5. Ένα αριστερό (δεξιό) R -πρότυπο M καλείται **καθαρά ενέσιμο, (pure injective)**, αν για κάθε καθαρά ακριβή ακολουθία $0 \longrightarrow T \longrightarrow N$ αριστερών (δεξιών) R -προτύπων, η επαγόμενη ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$\text{Hom}_R(N, M) \longrightarrow \text{Hom}_R(T, M) \longrightarrow 0,$$

είναι ακριβής.

Παράδειγμα 8.1.6. Κάθε ενέσιμο R -πρότυπο E είναι καθαρά ενέσιμο, διότι ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής $\text{Hom}_R(-, E)$ είναι ακριβής.

Παρατήρηση 8.1.7. Κάθε αριστερό (δεξιό) R -πρότυπο M , μπορεί να θεωρηθεί ως υποπρότυπο του αριστερού (δεξιού) R -προτύπου M^{++} . Πιο ειδικά, ο ομομορφισμός αριστερών (δεξιών) R -προτύπων:

$$\phi: M \longrightarrow M^{++} = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),$$

όπου $(\phi(m))(g) = g(m)$ για κάθε στοιχείο m του M και για κάθε ομομορφισμό $g: M \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ αβελιανών ομάδων, είναι μονομορφισμός.

Πράγματι, αν M είναι ένα αριστερό R -πρότυπο έτσι ώστε $M = 0$, τότε προφανώς $M^{++} = 0$, και άρα, τριτομμένα ισχύει το ζητούμενο. Υποθέτουμε λοιπόν, ότι $M \neq 0$ και θεωρούμε ένα $m \in M$ τέτοιο ώστε $\phi(m) = 0: M^+ \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Τότε για κάθε ομομορφισμό αβελιανών ομάδων $g: M \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, παίρνουμε ότι $(\phi(m))(g) = 0$, ή ισοδύναμα, ότι $g(m) = 0$. Αν $m \neq 0$, τότε επειδή το $M \neq 0$, και αφού το \mathbb{Q}/\mathbb{Z} είναι ένας ενέσιμος συνγεννήτορας για τα \mathbb{Z} -πρότυπα, υπάρχει ένας ομομορφισμός αβελιανών ομάδων $f: M \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, τέτοιος ώστε $f(m) \neq 0$. Το αποτέλεσμα όμως αυτό, αντιτίθεται φυσικά στο γεγονός ότι $f(m) = 0$. Επομένως, έπεται ότι $m = 0$, και κατ' επέκταση, ότι ο ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων ϕ είναι μονομορφισμός. Ομοίως, αποδεικνύεται ότι ο ϕ είναι μονομορφισμός, στην περίπτωση που το M είναι ένα δεξιό R -πρότυπο.

Από το Κεφάλαιο 3, γνωρίζουμε ότι αν M είναι ένα επίπεδο R -πρότυπο, τότε το πρότυπο χαρακτήρων M^+ είναι ένα ενέσιμο R -πρότυπο, ενώ αν ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος της Noether, και M είναι ένα ενέσιμο R -πρότυπο, τότε το πρότυπο χαρακτήρων M^+ είναι ένα επίπεδο R -πρότυπο. Για την ακρίβεια, στο Κεφάλαιο 3 αποδείξαμε και τις αντίστροφες συνεπαγωγές. Τώρα, χωρίς καμία περαιτέρω προϋπόθεση, δείχνουμε ότι για κάθε R -πρότυπο M , το πρότυπο χαρακτήρων M^+ είναι ένα καθαρά ενέσιμο R -πρότυπο.

Πρόταση 8.1.8. *Για κάθε αριστερό (δεξιό) R -πρότυπο M , το πρότυπο χαρακτήρων M^+ είναι ένα καθαρά ενέσιμο δεξιό (αριστερό) R -πρότυπο.*

Απόδειξη. Έστω M ένα αριστερό R -πρότυπο και

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow N \longrightarrow N/T \longrightarrow 0,$$

μία καθαρά ακριβής ακολουθία δεξιών R -προτύπων. Για να αποδείξουμε ότι το πρότυπο χαρακτήρων του M , $M^+ = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, είναι ένα καθαρά ενέσιμο δεξιό R -πρότυπο, χρειάζεται να δείξουμε ότι η ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$\text{Hom}_R(N, M^+) \longrightarrow \text{Hom}_R(T, M^+) \longrightarrow 0, \quad (8.8)$$

είναι ακριβής. Η Πρόταση (2.2.30), μας δίνει ότι:

$$\text{Hom}_R(N, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N \otimes_R M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = (N \otimes_R M)^+$$

και

$$\text{Hom}_R(T, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(T \otimes_R M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = (T \otimes_R M)^+.$$

Για να αποδείξουμε λοιπόν, ότι η ακολουθία αβελιανών ομάδων (8.8) είναι ακριβής, αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$(N \otimes_R M)^+ \longrightarrow (T \otimes_R M)^+ \longrightarrow 0,$$

είναι ακριβής. Επειδή η ακολουθία $0 \longrightarrow T \longrightarrow N \longrightarrow N/T \longrightarrow 0$ είναι καθαρά ακριβής, εξ ορισμού έχουμε ότι η ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$0 \longrightarrow T \otimes_R M \longrightarrow N \otimes_R M \longrightarrow N/T \otimes_R M \longrightarrow 0, \quad (8.9)$$

είναι ακριβής για κάθε αριστερό R -πρότυπο M . Επιπλέον, αφού το \mathbb{Q}/\mathbb{Z} είναι ένα ενέσιμο \mathbb{Z} -πρότυπο, παίρνουμε ότι ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ είναι ακριβής. Συνεπώς, αν εφαρμόσουμε τον $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ στην ακριβή ακολουθία (8.9), τότε η επαγόμενη ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$0 \longrightarrow (N/T \otimes_R M)^+ \longrightarrow (N \otimes_R M)^+ \longrightarrow (T \otimes_R M)^+ \longrightarrow 0,$$

είναι επίσης ακριβής. Επομένως, έπεται ότι το δεξιό R -πρότυπο M^+ είναι καθαρά ενέσιμο. Αναλόγως αποδεικνύεται ότι για κάθε δεξιό R -πρότυπο M , το πρότυπο χαρακτήρων M^+ είναι ένα καθαρά ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο. ■

Η Παρατήρηση (8.1.7), καθώς και η Πρόταση (8.1.8), μας εξασφαλίζουν ότι κάθε R -πρότυπο M είναι ένα υποπρότυπο του καθαρά ενέσιμου R -προτύπου M^{++} . Στην πραγματικότητα, ισχύει ότι κάθε R -πρότυπο είναι ένα καθαρό υποπρότυπο ενός καθαρά ενέσιμου R -προτύπου:

Πρόταση 8.1.9. *Κάθε αριστερό (δεξιό) R -πρότυπο M είναι ένα καθαρό υποπρότυπο του αριστερού (δεξιού) R -προτύπου M^{++} .*

Απόδειξη. Έστω M ένα αριστερό R -πρότυπο, και $\phi: M \rightarrow M^{++}$ η κανονική εισαγωγή, όπως περιγράφηκε στην Παρατήρηση (8.1.7). Θέλουμε να αποδείξουμε ότι η ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$0 \longrightarrow A \otimes_R M \xrightarrow{1_A \otimes \phi} A \otimes_R M^{++},$$

είναι ακριβής για κάθε δεξιό R -πρότυπο A , ή ισοδύναμα, από το Λήμμα (3.2.45), ότι η ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A \otimes_R M^{++}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{(1_A \otimes \phi)^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A \otimes_R M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow 0, \quad (8.10)$$

είναι ακριβής για κάθε δεξιό R -πρότυπο A . Αν εφαρμόσουμε τον αντισυναλλοίωτο ακριβή συνάρτητή $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, στον μονομορφισμό ϕ , τότε ο επαγόμενος ομομορφισμός δεξιών R -πρωτύπων:

$$\phi^*: M^{+++} \rightarrow M^+,$$

είναι επιμορφισμός. Στην συνέχεια, θεωρούμε την κανονική έγκλειση του υποπρωτύπου M^+ , στο δεξιό R -πρότυπο M^{+++} ,

$$\psi: M^+ \rightarrow M^{+++},$$

όπου $(\psi(f))(h) = h(f)$ για κάθε $f \in M^+$ και για κάθε $h \in M^{+++}$. Τότε για κάθε $f \in M^+$ και για κάθε $m \in M$, επάγονται οι ακόλουθες ισότητες:

$$\begin{aligned} [(\phi^* \circ \psi)(f)](m) &= [\phi^*(\psi(f))](m) \\ &= (\psi(f) \circ \phi)(m) \\ &= (\psi(f))(\phi(m)) \\ &= (\phi(m))(f) \\ &= f(m). \end{aligned}$$

Συνεπώς, έχουμε ότι $(\phi^* \circ \psi)(f) = f$ για κάθε $f \in M^+$, και κατ' επέκταση, ότι $\phi^* \circ \psi = \mathrm{Id}_{M^+}$. Επομένως, παίρνουμε ότι ο επιμορφισμός ϕ^* είναι διασπασίμος, και άρα, ότι το M^+ είναι ευθύς προσθετός του M^{+++} . Υπάρχει λοιπόν, ένα δεξιό R -πρότυπο L έτσι ώστε $M^{+++} \cong L \oplus M^+$. Για κάθε δεξιό R -πρότυπο A , θεωρούμε το μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_R(A, M^{+++}) & \xrightarrow{(\phi^*)_*} & \mathrm{Hom}_R(A, M^+) \\ \downarrow \cong & & \parallel \\ \mathrm{Hom}_R(A, L \oplus M^+) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(A, M^+) \\ \downarrow \cong & & \parallel \\ \mathrm{Hom}_R(A, L) \oplus \mathrm{Hom}_R(A, M^+) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(A, M^+) \longrightarrow 0 \end{array} \quad (8.11)$$

όπου $(\phi^*)_* = \mathrm{Hom}_R(A, \phi^*)$ για κάθε δεξιό R -πρότυπο A . Επειδή το διάγραμμα (8.11) είναι μεταθετικό και ακριβές, έπεται ότι ο ομομορφισμός αβελιανών ομάδων $(\phi^*)_*$ είναι επιμορφισμός για κάθε δεξιό R -πρότυπο A , δηλαδή, ότι η ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$\mathrm{Hom}_R(A, M^{+++}) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(A, \phi^*)} \mathrm{Hom}_R(A, M^+) \longrightarrow 0, \quad (8.12)$$

είναι ακριβής για κάθε δεξιό R -πρότυπο A . Έτσι, χρησιμοποιώντας τώρα την Πρόταση (2.2.30), συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία αβελιανών ομάδων (8.10) είναι επίσης ακριβής για κάθε δεξιό R -πρότυπο A , ως ισόμορφη με την ακριβή ακολουθία (8.12) για κάθε δεξιό R -πρότυπο A . Παρόμοια αποδεικνύεται και η δεξιά εκδοχή της πρότασης. ■

Είμαστε έτοιμοι τώρα να διατυπώσουμε και αποδείξουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα :

Λήμμα 8.1.10. *Αν M είναι ένα καθαρό υποπρότυπο ενός αριστερού R -προτύπου N , τότε*

$$\text{fd}_R M \leq \text{fd}_R N.$$

Απόδειξη. Έστω M ένα καθαρό υποπρότυπο του αριστερού R -προτύπου N , και $i: M \rightarrow N$ η φυσική έγκλειση. Αν $\text{fd}_R N = \infty$, τότε τετριμμένα ισχύει το ζητούμενο. Έτσι, υποθέτουμε τώρα ότι $\text{fd}_R N = n$ για κάποιον φυσικό αριθμό n . Θέλουμε να δείξουμε ότι $\text{fd}_R M \leq n$, ή ισοδύναμα, ότι $\text{Tor}_{n+1}^R(G, M) = 0$ για κάθε δεξιό R -πρότυπο G . Για τον σκοπό αυτό, θεωρούμε ένα δεξιό R -πρότυπο G , και διαλέγουμε μια ακριβή ακολουθία από δεξιά R -πρότυπα

$$\ell: \quad 0 \longrightarrow S \xrightarrow{i_n} P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow G \longrightarrow 0,$$

όπου κάθε P_j για $j = 0, \dots, n$, είναι προβολικό. Επειδή η ακολουθία ℓ είναι ακριβής, μπορούμε να την «σπάσουμε» σε σύντομες ακριβείς ακολουθίες για κάθε $j = 0, \dots, n$,

$$\ell_j: \quad 0 \longrightarrow K_j \longrightarrow P_j \longrightarrow K_{j-1} \longrightarrow 0,$$

όπου $K_{-1} = G$ και $K_n = S$. Αν εφαρμόσουμε στη σύντομη ακριβή ακολουθία ℓ_n τον συναρτητή $-\otimes_R L$, όπου L είναι ένα τυχόν αριστερό R -πρότυπο, τότε επάγεται η ακριβής ακολουθία αβελιανών ομάδων,

$$0 = \text{Tor}_1^R(P_n, L) \longrightarrow \text{Tor}_1^R(K_{n-1}, L) \longrightarrow S \otimes_R L \xrightarrow{i_n \otimes 1_L} P_n \otimes_R L, \quad (8.13)$$

όπου η ισότητα $\text{Tor}_1^R(P_n, L) = 0$ για κάθε αριστερό R -πρότυπο L , οφείλεται στο γεγονός ότι το πρότυπο P_n είναι προβολικό. Θεωρώντας τώρα την ακριβή ακολουθία ℓ ως μια επιμέρους επίπεδη ανάλυση του G , και χρησιμοποιώντας το Dimension Shifting για επίπεδες αναλύσεις, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι :

$$\text{Tor}_{n+1}^R(G, L) \cong \text{Tor}_1^R(K_{n-1}, L), \quad (8.14)$$

για κάθε αριστερό R -πρότυπο L . Έτσι, για το αριστερό R -πρότυπο N , παίρνουμε ότι

$$0 = \text{Tor}_{n+1}^R(G, N) \cong \text{Tor}_1^R(K_{n-1}, N),$$

όπου η ισότητα $\text{Tor}_{n+1}^R(G, N) = 0$, προέκυψε λόγω της υπόθεσης ότι $\text{fd}_R N = n$. Συνεπώς, έπεται ότι $\text{Tor}_1^R(K_{n-1}, N) = 0$, και κατ' επέκταση, ότι ο ομομορφισμός αβελιανών ομάδων $i_n \otimes 1_N$ είναι μονομορφισμός. Στην συνέχεια, θεωρούμε το μεταθετικό και ακριβές διάγραμμα :

$$\begin{array}{ccc} S \otimes_R M & \xrightarrow{i_n \otimes 1_M} & P_n \otimes_R M \\ \downarrow 1_S \otimes i & & \downarrow 1_{P_n} \otimes i \\ 0 & \longrightarrow & S \otimes_R N \xrightarrow{i_n \otimes 1_N} P_n \otimes_R N \end{array} \quad (8.15)$$

Επειδή το M είναι καθαρό υποπρότυπο του N , οι ομομορφισμοί αβελιανών ομάδων $1_S \otimes i$ και $1_{P_n} \otimes i$ είναι μονομορφισμοί. Επομένως, από το μεταθετικό και ακριβές διάγραμμα (8.15), προκύπτει ότι ο ομομορφισμός αβελιανών ομάδων $i_n \otimes 1_M$ είναι επίσης μονομορφισμός. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, από την ακριβή ακολουθία (8.13) για $L = M$, συμπεραίνουμε ότι $\text{Tor}_1^R(K_{n-1}, M) = 0$. Η ισότητα αυτή, καθώς και η σχέση (8.14), μας εξασφαλίζουν ότι $\text{Tor}_1^R(G, M) = 0$. Άρα, παίρνουμε ότι $\text{Tor}_1^R(G, M) = 0$ για κάθε δεξιό R -πρότυπο G , όπως επιθυμούσαμε. ■

Σημειώνουμε ότι ισχύει και η δεξιά εκδοχή του Λήμματος (8.1.10). Στην συνέχεια, επικεντρωνόμαστε σε αριστερά R -πρότυπα και αποδεικνύουμε κάποια βασικά αποτελέσματα τα οποία θα μας χρειασθούν στη συνέχεια. Τονίζουμε ότι ανάλογα αποτελέσματα με αυτά που θα παρουσιάσουμε καθ' όλη την έκταση του παρόντος κεφαλαίου για αριστερά R -πρότυπα, ισχύουν και για δεξιά R -πρότυπα.

Λήμμα 8.1.11. *Υποθέτουμε ότι ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether. Αν M είναι ένα καθαρό υποπρότυπο ενός αριστερού R -προτύπου N , τότε $\text{id}_R M \leq \text{id}_R N$.*

Απόδειξη. Έστω M ένα καθαρό υποπρότυπο ενός αριστερού R -προτύπου N , και

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} N \xrightarrow{\pi} N/M \longrightarrow 0,$$

η επαγόμενη καθαρά ακριβής ακολουθία. Εξ ορισμού, για κάθε πεπερασμένα παραστάσιμο αριστερό R -πρότυπο B , η ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$\text{Hom}_R(B, N) \xrightarrow{\pi_*^B} \text{Hom}_R(B, N/M) \longrightarrow 0, \quad (8.16)$$

όπου $\pi_*^B = \text{Hom}_R(B, \pi)$, είναι ακριβής. Αν $\text{id}_R N = \infty$, τότε τετριμμένα ισχύει το ζητούμενο. Υποθέτουμε λοιπόν τώρα, ότι $\text{id}_R N = n$ για κάποιον φυσικό αριθμό n . Τότε προφανώς, έχουμε ότι $\text{Ext}_R^{n+1}(R/I, N) = 0$ για κάθε αριστερό ιδεώδες I του R . Έστω I ένα οποιοδήποτε αριστερό ιδεώδες του R . Τότε επειδή ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether, και το πρότυπο πηλίκου R/I είναι πεπερασμένα παραγόμενο, υπάρχει μια ακριβής ακολουθία αριστερών R -προτύπων

$$\ell: \quad 0 \longrightarrow S \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow R/I \longrightarrow 0,$$

όπου S είναι πεπερασμένα παραγόμενο, και P_0, \dots, P_n είναι πεπερασμένα παραγόμενα και προβολικά. Στην συνέχεια, «σπάμε» την ακριβή ακολουθία ℓ σε σύντομες ακριβείς ακολουθίες για κάθε $j = 0, \dots, n$,

$$\ell_j: \quad 0 \longrightarrow K_j \longrightarrow P_j \longrightarrow K_{j-1} \longrightarrow 0,$$

όπου $K_{-1} = R/I$ και $K_n = S$. Εφαρμόζοντας τον αντισυναλλοίωτο συναρτητή $\text{Hom}_R(-, N)$ στη σύντομη ακριβή ακολουθία ℓ_n , επάγεται μια μακρά ακριβής ακολουθία στην συνομολογία, μέρος της οποίας είναι η ακριβής ακολουθία:

$$\text{Hom}_R(P_n, N) \longrightarrow \text{Hom}_R(S, N) \longrightarrow \text{Ext}_R^1(K_{n-1}, N).$$

Ωστόσο, αν θεωρήσουμε την ακριβή ακολουθία ℓ ως μια επιμέρους προβολική ανάλυση του R/I , τότε χρησιμοποιώντας το Dimension Shifting για προβολικές αναλύσεις, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι

$$\text{Ext}_R^1(K_{n-1}, N) \cong \text{Ext}_R^{n+1}(R/I, N) = 0.$$

Συνεπώς, έπεται ότι $\text{Ext}_R^1(K_{n-1}, N) = 0$, και κατ' επέκταση, ότι η ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$\text{Hom}_R(P_n, N) \longrightarrow \text{Hom}_R(S, N) \longrightarrow 0,$$

είναι ακριβής. Από το Κεφάλαιο 1, γνωρίζουμε ότι οι έννοιες «πεπερασμένα παραστάσιμο R -πρότυπο» και «πεπερασμένα παραγόμενο R -πρότυπο» είναι ισοδύναμες, όταν ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος της Noether. Έτσι, χρησιμοποιώντας την σχέση (8.16), καθώς και το γεγονός ότι τα P_n, S είναι πεπερασμένα παραγόμενα αριστερά πρότυπα υπεράνω του αριστερού δακτυλίου της

Noether R , παίρνουμε το μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές και στήλες:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & (8.17) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & (K_{n-1}, M) & \longrightarrow & (P_n, M) & \longrightarrow & (S, M) & & \\
 & & \downarrow \kappa_1 & & \downarrow \kappa_2 & & \downarrow \kappa_3 & & \\
 0 & \longrightarrow & (K_{n-1}, N) & \longrightarrow & (P_n, N) & \longrightarrow & (S, N) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \pi_*^{K_{n-1}} & & \downarrow \pi_*^{P_n} & & \downarrow \pi_*^S & & \\
 0 & \longrightarrow & (K_{n-1}, N/M) & \longrightarrow & (P_n, N/M) & \longrightarrow & (S, N/M) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

όπου $(-, -) = \text{Hom}_R(-, -)$ και $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ είναι αντίστοιχα, οι ομομορφισμοί αβελιανών ομάδων $\text{Hom}_R(K_{n-1}, i)$, $\text{Hom}_R(P_n, i)$ και $\text{Hom}_R(S, i)$. Εφαρμόζοντας τώρα το Snake Lemma, στο μεταθετικό διάγραμμα που σχηματίζουν η δεύτερη και τρίτη γραμμή του διαγράμματος (8.17), επάγεται η σύντομη ακριβής ακολουθία αβελιανών ομάδων:

$$0 \longrightarrow \text{Im } \kappa_1 \longrightarrow \text{Im } \kappa_2 \longrightarrow \text{Im } \kappa_3 \longrightarrow 0. \quad (8.18)$$

Το πρώτο Θεώρημα ισομορφισμών για \mathbb{Z} -πρότυπα, μας εξασφαλίζει ότι η σύντομη ακριβής ακολουθία (8.18) είναι ισόμορφη με την ακολουθία αβελιανών ομάδων:

$$0 \longrightarrow (K_{n-1}, M) \longrightarrow (P_n, M) \longrightarrow (S, M) \longrightarrow 0. \quad (8.19)$$

Συνεπώς, έπεται ότι η ακολουθία αβελιανών ομάδων (8.19) είναι επίσης ακριβής, και άρα, ότι $\text{Ext}_R^1(K_{n-1}, M) = 0$. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, καθώς και το Dimension Shifting για προβολικές αναλύσεις, οδηγούμαστε στην ισότητα $\text{Ext}_R^{n+1}(R/I, M) = 0$. Επομένως, επειδή η επιλογή του αριστερού ιδεώδους I του R ήταν τυχαία, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $\text{Ext}_R^{n+1}(R/I, M) = 0$ για κάθε αριστερό ιδεώδες I του R . Αν διαλέξουμε λοιπόν μια ενέσιμη ανάλυση του M , έστω

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E^0 \longrightarrow \dots \longrightarrow E^{n-1} \xrightarrow{\alpha^{n-1}} E^n \longrightarrow \dots$$

και εφαρμόσουμε σ' αυτήν, το Dimension Shifting για ενέσιμες αναλύσεις, τότε παίρνουμε ότι

$$0 = \text{Ext}_R^{n+1}(R/I, M) \cong \text{Ext}_R^1(R/I, \text{Im } \alpha^{n-1}),$$

για κάθε αριστερό ιδεώδες I του R . Έτσι τελικά, έχουμε ότι

$$\text{Ext}_R^1(R/I, \text{Im } \alpha^{n-1}) = 0, \quad (8.20)$$

για κάθε αριστερό ιδεώδες I του R . Άρα, όπως και στην απόδειξη του πρώτου σκέλους της Πρότασης (8.1.2), προκύπτει ότι το αριστερό R -πρότυπο $\text{Im } \alpha^{n-1}$ είναι ενέσιμο. Έτσι, η ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E^0 \longrightarrow \dots \longrightarrow E^{n-1} \longrightarrow \text{Im } \alpha^{n-1} \longrightarrow 0,$$

είναι μια ενέσιμη ανάλυση του M μήκους n . Επομένως, έπεται ότι $\text{id}_R M \leq n$, όπως επιθυμούσαμε. ■

Χρησιμοποιούμε τώρα τα Λήμματα (8.1.10) και (8.1.11), για να αποδείξουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πρόταση 8.1.12. Έστω R ένας αριστερός και δεξιός δακτύλιος της Noether με πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση ως αριστερό R -πρότυπο ίση με n . Τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

1. $\text{id}_R R_R < \infty$.
2. $\text{fd}_R E < \infty$ για κάθε ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο E .
3. $\text{fd}_R E \leq n$ για κάθε ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο E .

Απόδειξη. (1 \Rightarrow 2) : Υποθέτουμε ότι η ενέσιμη διάσταση του δακτυλίου R ως δεξιό R -πρότυπο είναι πεπερασμένη, και θεωρούμε ένα ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο E . Τότε επειδή ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether, έπεται ότι το πρότυπο χαρακτήρων E^+ είναι ένα επίπεδο δεξιό R -πρότυπο. Συνεπώς, χρησιμοποιώντας την υπόθεση, καθώς και την Πρόταση (8.1.2), συμπεραίνουμε ότι η ενέσιμη διάσταση του E^+ είναι πεπερασμένη. Έστω λοιπόν ότι $\text{id}_R E^+ = m$ για κάποιον φυσικό αριθμό m , και

$$\ell : 0 \longrightarrow E^+ \longrightarrow E^0 \longrightarrow \dots \longrightarrow E^{m-1} \longrightarrow E^m \longrightarrow 0,$$

μια ενέσιμη ανάλυση του E^+ ελάχιστου μήκους m . Στην συνέχεια, «σπάμε» την ακριβή ακολουθία ℓ σε σύντομες ακριβείς ακολουθίες για κάθε $j = 0, \dots, m-1$,

$$\ell^j : 0 \longrightarrow C^j \longrightarrow E^j \longrightarrow C^{j+1} \longrightarrow 0,$$

όπου $C^0 = E^+$ και $C^m = E^m$. Εφαρμόζοντας τον αντισυναλλοίωτο και ακριβή συναρτητή $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ σε κάθε ακολουθία ℓ^j για $j = 0, \dots, m-1$, επάγονται σύντομες ακριβείς ακολουθίες από αριστερά R -πρότυπα:

$$(\ell^j)^+ : 0 \longrightarrow (C^{j+1})^+ \longrightarrow (E^j)^+ \longrightarrow (C^j)^+ \longrightarrow 0,$$

για κάθε $j = 0, \dots, m-1$. Επομένως, το σύμπλοκο αριστερών R -προτύπων

$$\ell^+ : 0 \longrightarrow (E^m)^+ \longrightarrow (E^{m-1})^+ \longrightarrow \dots \longrightarrow (E^0)^+ \longrightarrow E^{++} \longrightarrow 0,$$

είναι ακριβές. Χρησιμοποιώντας ξανά την υπόθεση ότι ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether, καθώς και το γεγονός ότι κάθε E^j για $j = 0, \dots, m$, είναι ένα ενέσιμο δεξιό R -πρότυπο, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι κάθε $(E^j)^+$ για $j = 0, \dots, m$, είναι ένα επίπεδο αριστερό R -πρότυπο. Το αποτέλεσμα αυτό, μας εξασφαλίζει ότι η ακριβής ακολουθία ℓ^+ είναι μια επίπεδη ανάλυση του E^{++} πεπερασμένου μήκους m , και κατ' επέκταση, ότι η επίπεδη διάσταση του E^{++} είναι πεπερασμένη. Όμως, από την Πρόταση (8.1.9) γνωρίζουμε ότι το E είναι ένα καθαρό υποπρότυπο του E^{++} . Έτσι, χρησιμοποιώντας το Λήμμα (8.1.10), παίρνουμε ότι $\text{fd}_R E \leq \text{fd}_R E^{++} < \infty$, όπως επιθυμούσαμε.

(2 \Rightarrow 1) : Υποθέτουμε ότι ισχύει το 2). Αν θεωρήσουμε τον δακτύλιο R ως δεξιό R -πρότυπο, τότε το πρότυπο χαρακτήρων R^+ είναι ένα ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο, διότι ο δακτύλιος R ως δεξιό R -πρότυπο είναι επίπεδο. Έτσι, η υπόθεση μας δίνει ότι η επίπεδη διάσταση του ${}_R R^+$ είναι πεπερασμένη. Έστω λοιπόν $\text{fd}_R R^+ = \kappa$ για κάποιον φυσικό αριθμό κ , και έστω

$$0 \longrightarrow F_\kappa \longrightarrow F_{\kappa-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow F_0 \longrightarrow {}_R R^+ \longrightarrow 0, \quad (8.21)$$

μια επίπεδη ανάλυση του ${}_R R^+$ ελάχιστου μήκους κ . Τότε το σύμπλοκο δεξιών R -προτύπων

$$0 \longrightarrow R_R^{++} \longrightarrow (F_0)^+ \longrightarrow \dots \longrightarrow (F_{\kappa-1})^+ \longrightarrow (F_\kappa)^+ \longrightarrow 0, \quad (8.22)$$

είναι ακριβές. Για να το διαπιστώσουμε αυτό, αρκεί να «σπάσουμε» την ακριβή ακολουθία (8.21) σε σύντομες ακριβείς ακολουθίες, και να εφαρμόσουμε σ' αυτές, τον αντισυναλλοίωτο και ακριβή συναρτητή $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Επιπλέον, κάθε $(F_j)^+$ για $0 \leq j \leq \kappa$, είναι ένα ενέσιμο δεξιό R -πρότυπο, αφού κάθε F_j για $0 \leq j \leq \kappa$, είναι ένα επίπεδο αριστερό R -πρότυπο. Άρα, η ακριβής ακολουθία (8.22) είναι μια ενέσιμη ανάλυση του R_R^{++} πεπερασμένου μήκους κ . Επομένως, έπεται

ότι η ενέσιμη διάσταση του R_R^{++} είναι πεπερασμένη. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, καθώς και το γεγονός ότι ο δακτύλιος R ως δεξιό R -πρότυπο είναι καθαρό υποπρότυπο του R_R^{++} , οδηγούμαστε χρησιμοποιώντας το Λήμμα (8.1.11), στο ζητούμενο ότι $\text{id}_R R_R \leq \text{id}_R R_R^{++} < \infty$.

(3 \Rightarrow 2) : Προφανές.

(2 \Rightarrow 3) : Αν υποθέσουμε ότι ισχύει το 2), τότε προφανώς ικανοποιούνται οι υποθέσεις της Πρότασης (8.1.2), και άρα, για κάθε ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο E , έχουμε ότι $\text{pd}_R E \leq n$. Όμως, για οποιοδήποτε (αριστερό) R -πρότυπο M , ισχύει ότι $\text{fd}_R M \leq \text{pd}_R M$. Συνεπώς, παίρνουμε ότι $\text{fd}_R E \leq n$ για κάθε ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο E , δηλαδή, ότι ικανοποιείται το 3). ■

Από προσεκτική μελέτη της απόδειξης της παραπάνω Πρότασης, προκύπτει ότι:

$$\text{id}_R R_R = \sup\{\text{fd}_R E \mid E \in R\text{-Inj}\}$$

Είναι γνωστό ότι για κάθε δακτύλιο R , η αριστερή **ασθενής ολική ομολογική διάσταση** του R ,

$$\text{l. w. gl. dim}(R) = \sup\{\text{fd}_R M \mid M \in R\text{-Mod}\},$$

συμπίπτει με την δεξιά εκδοχή της, και η κοινή τιμή αυτών, καλείται η ασθενής ολική διάσταση του R , βλέπε [16, Proposition 12.2.2]. Επιπλέον, για ένα οποιοδήποτε αριστερό ή δεξιό R -πρότυπο M , ισχύει ότι $\text{fd}_R M \leq \text{pd}_R M$. Επομένως, για έναν οποιονδήποτε δακτύλιο R , αν η αριστερή ή η δεξιά ολική ομολογική διάσταση του R είναι πεπερασμένη, τότε η ασθενής ολική διάσταση του R είναι επίσης πεπερασμένη. Η αντίστροφη συνεπαγωγή, δεν ισχύει εν γένει. Από ένα κλασσικό αποτέλεσμα του Auslander, βλέπε [52], για ένα δακτύλιο της Noether, η (αριστερή ή δεξιά) ολική ομολογική διάσταση του R συμπίπτει με την ασθενή ολική ομολογική διάσταση του R . Το ακόλουθο αποτέλεσμα δείχνει ότι για δακτύλιους Gorenstein, ισχύει κάτι γενικότερο:

Πρόταση 8.1.13. Έστω R ένας δακτύλιος Gorenstein. Τότε για κάθε αριστερό R -πρότυπο M , οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

1. $\text{id}_R M < \infty$.
2. $\text{pd}_R M < \infty$.
3. $\text{fd}_R M < \infty$.

Απόδειξη. Η συνεπαγωγή (2 \Rightarrow 3) είναι τετριμμένη, ενώ, η συνεπαγωγή (3 \Rightarrow 2) προκύπτει χρησιμοποιώντας την υπόθεση και την Πρόταση (8.1.2). Άρα, για να αποδείξουμε ότι οι παραπάνω συνθήκες είναι ισοδύναμες, αρκεί να δείξουμε τις συνεπαγωγές (1 \Rightarrow 3) και (3 \Rightarrow 1).

(3 \Rightarrow 1) : Έστω M ένα αριστερό R -πρότυπο με πεπερασμένη επίπεδη διάσταση. Τότε υπάρχει ένας φυσικός αριθμός m , και μια ακριβής ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα ελάχιστου μήκους m :

$$\ell : \quad 0 \longrightarrow F_m \longrightarrow F_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

όπου κάθε F_j για $j = 0, \dots, m$, είναι ένα επίπεδο R -πρότυπο. Επειδή ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος Gorenstein, και τα αριστερά R -πρότυπα F_j είναι επίπεδα, για κάθε $0 \leq j \leq m$, η Πρόταση (8.1.2) μας δίνει ότι η ενέσιμη διάσταση κάθε F_j , για $0 \leq j \leq m$, είναι πεπερασμένη. Στην συνέχεια, «σπάμε» την ακριβή ακολουθία ℓ σε σύντομες ακριβείς ακολουθίες για κάθε $j = 1, \dots, m$,

$$\ell_j : \quad 0 \longrightarrow K_j \longrightarrow F_{j-1} \longrightarrow K_{j-1} \longrightarrow 0,$$

όπου $K_0 = M$ και $K_m = F_m$. Έστω $\text{id}_R F_m = \kappa_1$ και $\text{id}_R F_{m-1} = \kappa_2$, για κάποιους φυσικούς αριθμούς κ_1 και κ_2 . Εφαρμόζοντας τώρα για κάθε αριστερό R -πρότυπο A , τον συναλλοίωτο συναρτητή $\text{Hom}_R(A, -)$ στη σύντομη ακριβή ακολουθία ℓ_m , επάγεται η ακριβής ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$\text{Ext}_R^i(A, F_{m-1}) \longrightarrow \text{Ext}_R^i(A, K_{m-1}) \longrightarrow \text{Ext}_R^{i+1}(A, F_m), \quad (8.23)$$

για κάθε $i \geq 0$ και για κάθε αριστερό R -πρότυπο A . Θέτοντας λοιπόν,

$$\kappa = \max\{\kappa_1, \kappa_2\} < \infty,$$

έχουμε ότι $\text{Ext}_R^i(A, F_{m-1}) = 0 = \text{Ext}_R^{i+1}(A, F_m)$, για κάθε $i > \kappa$ και για κάθε αριστερό R -πρότυπο A . Συνεπώς, από την ακριβή ακολουθία (8.23), έπεται ότι $\text{Ext}_R^i(A, K_{m-1}) = 0$ για κάθε $i > \kappa$ και για κάθε αριστερό R -πρότυπο A , ή ισοδύναμα, ότι $\text{id}_R K_{m-1} \leq \kappa$. Το αποτέλεσμα αυτό, μας εξασφαλίζει ότι

$$\gamma := \max\{\text{id}_R F_{m-2}, \text{id}_R K_{m-1}\} < \infty$$

Έτσι, εφαρμόζοντας για κάθε αριστερό R -πρότυπο A , τον συναλλοίωτο συναρτητή $\text{Hom}_R(A, -)$ αυτή τη φορά, στη σύντομη ακριβή ακολουθία ℓ_m , παίρνουμε ιδιαίτερα την ακριβή ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$0 = \text{Ext}_R^i(A, F_{m-2}) \longrightarrow \text{Ext}_R^i(A, K_{m-2}) \longrightarrow \text{Ext}_R^{i+1}(A, K_{m-1}) = 0, \quad (8.24)$$

για κάθε $i > \gamma$ και για κάθε αριστερό R -πρότυπο A . Επομένως, από την ακριβή ακολουθία (8.24), συμπεραίνουμε ότι $\text{Ext}_R^i(A, K_{m-2}) = 0$ για κάθε $i > \gamma$ και για κάθε αριστερό R -πρότυπο A , ή ισοδύναμα ότι $\text{id}_R K_{m-2} \leq \gamma$. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, επαγωγικά οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι $\text{id}_R M < \infty$, όπως επιθυμούσαμε.

(1 \Rightarrow 3) : Έστω M ένα αριστερό R -πρότυπο με πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση. Τότε υπάρχει ένας φυσικός αριθμός n , και μια ακριβής ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα ελάχιστου μήκους n :

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E^0 \longrightarrow \dots \longrightarrow E^{n-1} \longrightarrow E^n \longrightarrow 0,$$

όπου κάθε E^j για $j = 0, \dots, n$, είναι ένα ενέσιμο R -πρότυπο. Επειδή ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ είναι ακριβής, έπεται ότι το σύμπλοκο από δεξιά R -πρότυπα

$$0 \longrightarrow (E^n)^+ \longrightarrow (E^{n-1})^+ \longrightarrow \dots \longrightarrow (E^0)^+ \longrightarrow M^+ \longrightarrow 0, \quad (8.25)$$

είναι ακριβές. Επειδή ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether, ως δακτύλιος Gorenstein, και αφού τα αριστερά R -πρότυπα E^j είναι ενέσιμα για κάθε $j = 0, \dots, n$, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι τα δεξιά R -πρότυπα $(E^j)^+$ είναι επίπεδα για κάθε $j = 0, \dots, n$. Άρα, από την ακριβή ακολουθία (8.25), συμπεραίνουμε ότι η επίπεδη διάσταση του M^+ είναι πεπερασμένη. Χρησιμοποιώντας τώρα την συνεπαγωγή (3 \Rightarrow 1) που αποδείξαμε προηγουμένως, ωστόσο από τα δεξιά, παίρνουμε ότι η ενέσιμη διάσταση του M^+ είναι επίσης πεπερασμένη. Έστω λοιπόν $\text{id}_R M^+ = m$ για κάποιον φυσικό αριθμό m , και

$$0 \longrightarrow M^+ \longrightarrow H^0 \longrightarrow \dots \longrightarrow H^{m-1} \longrightarrow H^m \longrightarrow 0,$$

μια ενέσιμη ανάλυση του M ελάχιστους μήκους m . Τότε το επαγόμενο σύμπλοκο αριστερών R -προτύπων:

$$0 \longrightarrow (H^m)^+ \longrightarrow (H^{m-1})^+ \longrightarrow \dots \longrightarrow (H^0)^+ \longrightarrow M^{++} \longrightarrow 0 \quad (8.26)$$

είναι ακριβές, διότι ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ είναι ακριβής. Χρησιμοποιώντας ξανά το γεγονός ότι ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether, καθώς και ότι τα αριστερά R -πρότυπα H^j είναι ενέσιμα για κάθε $j = 0, \dots, m$, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι τα δεξιά R -πρότυπα $(H^j)^+$ είναι επίπεδα για κάθε $j = 0, \dots, m$. Συνεπώς, από την ακριβή ακολουθία (8.26), έπεται ότι η επίπεδη διάσταση του M^{++} είναι πεπερασμένη. Το αποτέλεσμα αυτό, καθώς και το Λήμμα (8.1.10), μας εξασφαλίζουν ότι η επίπεδη διάσταση του M είναι επίσης πεπερασμένη, και μάλιστα, ότι η επίπεδη διάσταση του M είναι μικρότερη ή ίση της επίπεδης διάστασης του M^{++} . ■

Το ακόλουθο κλασικό αποτέλεσμα του Zaks πιστοποιεί ότι αν ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος Gorenstein, τότε η ενέσιμη διάσταση του R ως αριστερό R -πρότυπο, συμπίπτει με την ενέσιμη διάσταση του R ως δεξιό R -πρότυπο.

Πρόταση 8.1.14 (Zaks [60]). Έστω R ένας αριστερός και δεξιός δακτύλιος της Noether. Αν η ενέσιμη διάσταση του R ως αριστερό R -πρότυπο είναι πεπερασμένη ίση με m , και η ενέσιμη διάσταση του R ως δεξιό R -πρότυπο είναι πεπερασμένη ίση με n , τότε $m = n$.

Απόδειξη. Επειδή $\text{id}_R R = n$, υπάρχει ένα δεξιό R -πρότυπο M τέτοιο ώστε $\text{Ext}_R^n(M, R) \neq 0$. Γνωρίζουμε ότι κάθε (δεξιό) R -πρότυπο είναι το ευθύ όριο των πεπερασμένα παραγόμενων υποπρότυπων του. Έτσι, γράφουμε $M = \varinjlim M_i$ όπου κάθε M_i είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο υποπρότυπο του M . Όμως,

$$0 \neq \text{Ext}_R^n(M, R) = \text{Ext}_R^n(\varinjlim M_i, R) \cong \varprojlim \text{Ext}_R^n(M_i, R),$$

και άρα, $\varprojlim \text{Ext}_R^n(M_i, R) \neq 0$. Συνεπώς, υπάρχει κάποιο πεπερασμένα παραγόμενο υποπρότυπο M_j του M , έτσι ώστε $\text{Ext}_R^n(M_j, R) \neq 0$. Μπορούμε να υποθέσουμε λοιπόν, ότι το δεξιό R -πρότυπο M με την ιδιότητα ότι $\text{Ext}_R^n(M, R) \neq 0$, είναι πεπερασμένα παραγόμενο, αφού σε διαφορετική περίπτωση, το πρότυπο M μπορεί να αντικατασταθεί με το πεπερασμένα παραγόμενο υποπρότυπο M_j του M . Το Πρόσχημα (3.2.47), μας δίνει ότι το πρότυπο χαρακτήρων ${}_R R^+$ είναι ένας ενέσιμος συνγεννήτορας για τα αριστερά R -πρότυπα. Έτσι, αφού το αριστερό R -πρότυπο $\text{Ext}_R^n(M, R)$ είναι μη μηδενικό, έπεται ότι

$$\text{Hom}_R(\text{Ext}_R^n(M, R), R^+) \neq 0.$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την υπόθεση ότι ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether, καθώς και το γεγονός ότι το δεξιό R -πρότυπο M είναι πεπερασμένα παραγόμενο, τα Θεωρήματα (3.3.21) και (1.1.19), μας δίνουν τους ακόλουθους ισομορφισμούς αβελιανών ομάδων:

$$\text{Hom}_R(\text{Ext}_R^n(M, R), R^+) \cong \text{Tor}_n^R(M, \text{Hom}_R(R, R^+)) \cong \text{Tor}_n^R(M, R^+).$$

Συνδυάζοντας λοιπόν τα παραπάνω, προκύπτει ότι $\text{Tor}_n^R(M, R^+) \neq 0$. Επομένως, ισχύει ότι $\text{fd}_R R^+ \geq n$ γιατί αλλιώς, δηλαδή αν $\text{fd}_R R^+ < n$, τότε θα έχουμε ότι $\text{Tor}_n^R(M, R^+) = 0$, αποτέλεσμα το οποίο είναι φυσικά αδύνατο. Ωστόσο, η Πρόταση (8.1.2) μας εξασφαλίζει την ανίσωση $\text{fd}_R R^+ \leq \text{id}_R R = m$, όπου ο δακτύλιος R έχει ιδωθεί ως αριστερό R -πρότυπο. Άρα, παίρνουμε ότι $n \leq m$. Για να την αντίστροφη ανίσωση, αρκεί να χρησιμοποιήσουμε την υπόθεση ότι $\text{id}_R R = m$, και να ακολουθήσουμε μια ανάλογη πορεία με προηγούμενος. Έτσι τελικά, θα καταλήξουμε στην ισότητα, $m = n$. ■

Ορισμός 8.1.15. Ένας δακτύλιος Gorenstein με πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση ως αριστερό R -πρότυπο το ποσό n , και άρα, υποχρεωτικά με ενέσιμη διάσταση ως δεξιό R -πρότυπο το ποσό n , καλείται **δακτύλιος n -Gorenstein**, (**n -Gorenstein ring**).

Παρατήρηση 8.1.16. Προφανώς, ένας δακτύλιος είναι 0-Gorenstein αν και μόνον αν είναι ένας δακτύλιος quasi-Frobenius.

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε το ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα. Υπενθυμίζουμε ότι $R\text{-Proj}^{<\infty}$, αντίστοιχα $R\text{-Proj}^{\leq n}$, συμβολίζει την κλάση αριστερών R -πρωτύπων με πεπερασμένη προβολική διάσταση, αντίστοιχα με προβολική διάσταση $\leq n$, $R\text{-Flat}^{<\infty}$, αντίστοιχα $R\text{-Flat}^{\leq n}$, συμβολίζει την κλάση αριστερών R -πρωτύπων με πεπερασμένη επίπεδη διάσταση, αντίστοιχα με επίπεδη διάσταση $\leq n$, και τέλος $R\text{-Inj}^{<\infty}$, αντίστοιχα $R\text{-Inj}^{\leq n}$, συμβολίζει την κλάση αριστερών R -πρωτύπων με πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση, αντίστοιχα με ενέσιμη διάσταση $\leq n$.

Θεώρημα 8.1.17. Αν ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος n -Gorenstein, τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες για ένα οποιοδήποτε αριστερό R -πρότυπο M .

1. $\text{id}_R M < \infty$.
2. $\text{pd}_R M < \infty$.
3. $\text{fd}_R M < \infty$.

4. $\text{id}_R M \leq n$.
5. $\text{pd}_R M \leq n$.
6. $\text{fd}_R M \leq n$.

Ιδιαίτερα:

$$R\text{-Proj}^{<\infty} = R\text{-Proj}^{\leq n} = R\text{-Flat}^{<\infty} = R\text{-Flat}^{\leq n} = R\text{-Inj}^{<\infty} = R\text{-Inj}^{\leq n}$$

Απόδειξη. Η Πρόταση (8.1.13), μας δίνει ότι οι συνθήκες 1), 2) και 3) είναι ισοδύναμες, ενώ η Πρόταση (8.1.2), μας εξασφαλίζει ότι οι συνθήκες 3), 5) και 6) είναι ισοδύναμες. Επιπλέον, η συνεπαγωγή (4 \Rightarrow 1) είναι τετριμμένη. Για να αποδείξουμε λοιπόν ότι οι παραπάνω συνθήκες είναι ισοδύναμες, αρκεί να δείξουμε την συνεπαγωγή (1 \Rightarrow 4).

Έστω M ένα αριστερό R -πρότυπο με $\text{id}_R M = m$ για κάποιον φυσικό αριθμό m . Θέλουμε να δείξουμε ότι $m \leq n$. Επειδή ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether, και το M είναι ένα καθαρό υποπρότυπο του M^{++} , αρκεί να αποδείξουμε σύμφωνα με το Λήμμα (8.1.11), ότι $\text{id}_R M^{++} \leq n$. Διαλέγουμε μια ενέσιμη ανάλυση του M ελάχιστου μήκους m , έστω

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E^0 \longrightarrow \dots \longrightarrow E^{m-1} \longrightarrow E^m \longrightarrow 0.$$

Τότε το σύμπλοκο από δεξιά R -πρότυπα

$$0 \longrightarrow (E^m)^+ \longrightarrow (E^{m-1})^+ \longrightarrow \dots \longrightarrow (E^0)^+ \longrightarrow M^+ \longrightarrow 0, \quad (8.27)$$

είναι ακριβής, διότι ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ είναι ακριβής. Επιπλέον, αφού ο R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether, και τα E^0, \dots, E^m είναι ενέσιμα αριστερά R -πρότυπα, έπεται ότι κάθε $(E^j)^+$ για $0 \leq j \leq m$, είναι ένα επίπεδο δεξιό R -πρότυπο. Έτσι, από την ακριβή ακολουθία (8.27), οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι $\text{fd}_R M^+ \leq m$. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, καθώς και την συνεπαγωγή (3 \Rightarrow 6) από τα δεξιά, έχουμε ότι $\text{fd}_R M^+ \leq n$. Επομένως, υπάρχει μια επίπεδη ανάλυση του M^+ μήκους n , έστω

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M^+ \longrightarrow 0.$$

Τότε η επαγόμενη ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα

$$0 \longrightarrow M^{++} \longrightarrow (F_0)^+ \longrightarrow \dots \longrightarrow (F_{n-1})^+ \longrightarrow (F_n)^+ \longrightarrow 0, \quad (8.28)$$

είναι ακριβής, όπου κάθε $(F_j)^+$ για $0 \leq j \leq n$, είναι ενέσιμο. Το αποτέλεσμα αυτό, προκύπτει χρησιμοποιώντας ξανά το γεγονός ότι ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ είναι ακριβής, καθώς και ότι κάθε F_j για $0 \leq j \leq n$, είναι ένα επίπεδο δεξιό R -πρότυπο. Έτσι, από την ακριβή ακολουθία (8.28), καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $\text{id}_R M^{++} \leq n$, όπως επιθυμούσαμε. ■

Θεώρημα 8.1.18. *Για έναν αριστερό και δεξιό δακτύλιο της Noether R , οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

1. Ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος n -Gorenstein.
2. Η ενέσιμη διάσταση κάθε αριστερού και δεξιού επίπεδου R -πρωτύπου είναι το πολύ n .
3. Η ενέσιμη διάσταση κάθε αριστερού και δεξιού προβολικού R -πρωτύπου είναι το πολύ n .
4. Η επίπεδη διάσταση κάθε αριστερού και δεξιού ενέσιμου R -πρωτύπου είναι το πολύ n .
5. Η προβολική διάσταση κάθε αριστερού και δεξιού ενέσιμου R -πρωτύπου είναι το πολύ n .
6. Αν $\dots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ είναι μια προβολική ανάλυση ενός αριστερού (δεξιού) R -πρωτύπου M , τότε το σύμπλοκο $\dots \longrightarrow P_{n+1} \longrightarrow P_n$ είναι μια δεξιά R -Flat-ανάλυση.

7. Αν $0 \longrightarrow M \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow \dots$ είναι μια ενέσιμη ανάλυση ενός αριστερού (δεξιού) R -προτύπου M , τότε το σύμπλοκο $E^n \longrightarrow E^{n+1} \longrightarrow \dots$ είναι μια αριστερή $R \operatorname{Inj}$ -ανάλυση.

Απόδειξη. Έστω R ένας αριστερός και δεξιός δακτύλιος της Noether. Οι συνεπαγωγές $(2 \Rightarrow 3)$ και $(5 \Rightarrow 4)$ είναι τετριμμένες, ενώ οι συνεπαγωγές $(1 \Rightarrow 2)$ και $(1 \Rightarrow 4)$, είναι προφανείς συνέπειες των Προτάσεων (8.1.2) και (8.1.12), αντίστοιχα. Στην συνέχεια, αποδεικνύουμε τις υπόλοιπες συνεπαγωγές.

$(3 \Rightarrow 1)$: Έστω ότι ισχύει το 3). Τότε επειδή ο δακτύλιος R είναι προβολικό αριστερό και δεξιό R -πρότυπο, παίρνουμε ότι :

$$\operatorname{id}_R R \leq n \quad \& \quad \operatorname{id}_R R_R \leq n.$$

Όμως, η υπόθεση ότι ο δακτύλιος R είναι αριστερός και δεξιός δακτύλιος της Noether, καθώς και η Πρόταση (8.1.14), μας εξασφαλίζουν ότι $\operatorname{id}_R R = \operatorname{id}_R R_R$. Συνεπώς, έπεται ότι ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος n -Gorenstein.

$(4 \Rightarrow 1)$: Υποθέτουμε ότι ισχύει το 4). Επειδή ο R είναι (αριστερός και δεξιός) δακτύλιος της Noether, έχουμε ότι :

$$\operatorname{id}_R R_R = \sup\{\operatorname{fd}_R E \mid E \in R\operatorname{Inj}\} \quad \& \quad \operatorname{id}_R R = \sup\{\operatorname{fd}_R H \mid H \in \operatorname{Inj}R\} \quad (8.29)$$

Χρησιμοποιώντας την υπόθεση, καθώς και τη σχέση (8.29), έπεται από το αποτέλεσμα του Zaks ότι :

$$\operatorname{id}_R R = \operatorname{id}_R R_R \leq n$$

Άρα, ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος n -Gorenstein.

$(4 \Rightarrow 5)$: Υποθέτουμε ότι η επίπεδη διάσταση κάθε αριστερού και δεξιού ενέσιμου R -προτύπου είναι το πολύ n . Έστω E ένα οποιοδήποτε ενέσιμο αριστερό ή δεξιό R -πρότυπο, και

$$\dots \longrightarrow P_n \xrightarrow{\alpha_n} P_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \dots \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \xrightarrow{\alpha_0} E \longrightarrow 0,$$

μια προβολική ανάλυση του E . Θέλουμε να δείξουμε ότι $\operatorname{pd}_R E \leq n$. Η υπόθεση μας εξασφαλίζει ότι το R -πρότυπο $F_n := \operatorname{Ker} \alpha_{n-1}$, είναι επίπεδο. Συνεπώς, χρησιμοποιώντας την συνεπαγωγή $(4 \Rightarrow 1)$ που αποδείξαμε προηγουμένως, καθώς και το Θεώρημα (8.1.17), οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η προβολική διάσταση του F_n είναι πεπερασμένη. Το αποτέλεσμα όμως αυτό, μας δίνει ότι η προβολική διάσταση του E είναι επίσης πεπερασμένη. Έτσι, χρησιμοποιώντας ξανά το Θεώρημα (8.1.17), συμπεραίνουμε ότι $\operatorname{pd}_R E \leq n$, όπως επιθυμούσαμε.

$(2 \Rightarrow 6)$: Έστω ότι ισχύει το 2), και έστω

$$\ell : \quad \dots \longrightarrow P_{n+1} \longrightarrow P_n \longrightarrow \dots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

μια προβολική ανάλυση ενός αριστερού (δεξιού) R -προτύπου M . «Σπάμε» την ακριβή ακολουθία ℓ σε σύντομες ακριβείς ακολουθίες για κάθε $j \geq 1$,

$$\ell_j : \quad 0 \longrightarrow K_j \longrightarrow P_{j-1} \longrightarrow K_{j-1} \longrightarrow 0,$$

όπου $K_0 = M$. Τότε χρησιμοποιώντας την υπόθεση, και το Dimension Shifting για προβολικές αναλύσεις, συμπεραίνουμε ότι

$$0 = \operatorname{Ext}_R^{j+1}(M, F) \cong \operatorname{Ext}_R^1(K_j, F),$$

για κάθε $j \geq n$ και για κάθε επίπεδο αριστερό (δεξιό) R -πρότυπο F . Συνεπώς, έπεται η ισότητα $\operatorname{Ext}_R^1(K_j, F) = 0$ για κάθε $j \geq n$ και για κάθε επίπεδο αριστερό (δεξιό) R -πρότυπο F . Έτσι, αν για ένα οποιοδήποτε επίπεδο αριστερό (δεξιό) R -πρότυπο F , εφαρμόσουμε τον αντισυναλλοίωτο συναρτητή $\operatorname{Hom}_R(-, F)$ στις σύντομες ακριβείς ακολουθίες $\ell_{n+1}, \ell_{n+2}, \dots$, τότε οι ακολουθίες αβελιανών ομάδων :

$$(\ell_j)^* : \quad 0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(K_{j-1}, F) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(P_{j-1}, F) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(K_j, F) \longrightarrow 0,$$

είναι ακριβείς για κάθε $j \geq n + 1$, και για κάθε επίπεδο αριστερό (δεξιό) R -πρότυπο F . Η συγκόλληση λοιπόν των σύντομων ακριβών ακολουθιών $(\ell_j)^*$ για $j \geq n + 1$, μας δίνει το ακριβές σύμπλοκο αβελιανών ομάδων:

$$\mathrm{Hom}_R(P_n, F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_{n+1}, F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_{n+2}, F) \longrightarrow \cdots$$

για κάθε επίπεδο αριστερό (δεξιό) R -πρότυπο F . Άρα, το σύμπλοκο από αριστερά (δεξιά) R -πρότυπα

$$\cdots \longrightarrow P_{n+2} \longrightarrow P_{n+1} \longrightarrow P_n,$$

είναι μια δεξιά R -Flat-ανάλυση.

(6 \Rightarrow 2) : Υποθέτουμε ότι ισχύει το 6), και θεωρούμε ένα οποιοδήποτε επίπεδο αριστερό R -πρότυπο F . Θέλουμε να δείξουμε ότι $\mathrm{id}_R F \leq n$, ή ισοδύναμα, ότι $\mathrm{Ext}_R^i(M, F) = 0$ για κάθε $i \geq n + 1$ και για κάθε αριστερό R -πρότυπο M . Για τον σκοπό αυτό, θεωρούμε ένα αριστερό R -πρότυπο M και έστω

$$\cdots \longrightarrow P_{n+1} \xrightarrow{\beta_{n+1}} P_n \xrightarrow{\beta_n} \cdots \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\beta_0} M \longrightarrow 0,$$

μια προβολική ανάλυση του M . Τότε θέτοντας $K_i = \mathrm{Ker} \beta_{i-1}$ για $i \geq 1$, η υπόθεση μας εξασφαλίζει ότι οι επαγόμενες ακολουθίες αβελιανών ομάδων:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(K_{i-1}, F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_{i-1}, F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(K_i, F) \longrightarrow 0,$$

είναι σύντομες ακριβείς ακολουθίες για κάθε $i \geq n + 1$. Συνεπώς, έπεται ότι $\mathrm{Ext}_R^1(K_{i-1}, F) = 0$ για κάθε $i \geq n + 1$. Όμως, χρησιμοποιώντας το Dimension Shifting για προβολικές αναλύσεις, έχουμε ότι:

$$\mathrm{Ext}_R^i(M, F) \cong \mathrm{Ext}_R^1(K_{i-1}, F),$$

για κάθε $i \geq 1$, όπου $K_0 = M$. Έτσι τελικά, παίρνουμε ότι

$$\mathrm{Ext}_R^i(M, F) = 0,$$

για κάθε $i \geq n + 1$ και για κάθε αριστερό R -πρότυπο M , όπως επιθυμούσαμε. Ομοίως, αν θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε επίπεδο δεξιό R -πρότυπο F' , και ακολουθήσουμε μια παρόμοια πορεία όπως προηγουμένως, θα οδηγηθούμε στο συμπέρασμα ότι $\mathrm{Ext}_R^i(N, F') = 0$ για κάθε $i \geq n + 1$ και για κάθε δεξιό R -πρότυπο N , αποτέλεσμα το οποίο μας δίνει ότι $\mathrm{id}_R F' \leq n$.

(5 \iff 7) : Η ισοδυναμία των συνθηκών 5) και 7), προκύπτει κατά δύσκολο τρόπο με την ισοδυναμία των συνθηκών 2) και 6), χρησιμοποιώντας ωστόσο ότι για οποιοδήποτε ενέσιμο αριστερό ή δεξιό R -πρότυπο E , η προβολική διάσταση του E είναι το πολύ n , αν και μόνο αν, $\mathrm{Ext}_R^i(E, M) = 0$ για κάθε $i \geq n + 1$. ■

Το αποτέλεσμα που ακολουθεί, καθορίζει πότε ένας αριστερός και δεξιός δακτύλιος της Noether, είναι ένας δακτύλιος 0-Gorenstein:

Πόρισμα 8.1.19. Έστω R ένας αριστερός και δεξιός δακτύλιος της Noether. Τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

1. Ο δακτύλιος R είναι quasi-Frobenius.
2. Ο δακτύλιος R είναι 0-Gorenstein.
3. Ο δακτύλιος R είναι ενέσιμος ως αριστερό και δεξιό R -πρότυπο.
4. Κάθε ενέσιμο δεξιό και αριστερό R -πρότυπο είναι προβολικό.
5. Κάθε προβολικό δεξιό και αριστερό R -πρότυπο είναι ενέσιμο.

Απόδειξη. Η ισοδυναμία των παραπάνω συνθηκών, προκύπτει χρησιμοποιώντας την ισοδυναμία των συνθηκών 1), 3) και 5) του Θεωρήματος (8.1.18) για $n = 0$. ■

Από το Κεφάλαιο 6, γνωρίζουμε ότι ένας δακτύλιος R είναι quasi-Frobenius, αν και μόνο αν, οι κλάσεις των G -προβολικών αριστερών (δεξιών) R -προτύπων και των G -ενέσιμων αριστερών (δεξιών) R -προτύπων, ταυτίζονται. Επιπλέον, από το παραπάνω Πρόσιμα ή την Παρατήρηση (8.1.16), έχουμε ότι οι δακτύλιοι 0-Gorenstein συμπίπτουν με του δακτυλίους quasi-Frobenius. Ολοκληρώνουμε λοιπόν την παρούσα ενότητα, σημειώνοντας ότι υπεράνω ενός δακτυλίου 0-Gorenstein R , οι κλάσεις των G -προβολικών αριστερών (δεξιών) R -προτύπων και των G -ενέσιμων αριστερών (δεξιών) R -προτύπων, συμπίπτουν.

8.2 G-Προσεγγίσεις Προτύπων Υπεράνω Δακτυλίων Gorenstein

Στην παρούσα ενότητα, συμβολίζουμε με $R\text{-GProj}$ την κλάση των G -προβολικών αριστερών R -προτύπων, και με $R\text{-GInj}$ την κλάση των G -ενέσιμων αριστερών R -προτύπων, όπου ο R παριστάνει ξανά έναν προσεταιριστικό δακτύλιο με μονάδα. Σκοπός της ενότητας αυτής, είναι η μελέτη προσεγγίσεων προτύπων από τις κλάσεις $R\text{-GProj}$ και $R\text{-GInj}$. Όπως θα διαπιστώσουμε, οι δακτύλιοι n -Gorenstein αποτελούν το καταλληλότερο πλαίσιο για την εύρεση τέτοιων προσεγγίσεων.

Τονίζουμε ξανά, ότι αντίστοιχα αποτελέσματα με αυτά που θα παραθέσουμε στην συνέχεια της ενότητας αυτής για αριστερά R -πρότυπα, ισχύουν και για δεξιά R -πρότυπα.

8.2.1 Ελάχιστες Αριστερές G-Ενέσιμες Προσεγγίσεις Προτύπων

Επικεντρωνόμαστε τώρα σε G -ενέσιμες προσεγγίσεις R -προτύπων, δηλαδή σε προσεγγίσεις προτύπων από την κλάση $R\text{-GInj}$. Στόχος μας είναι να αποδείξουμε ότι υπεράνω δακτυλίων n -Gorenstein, η κλάση των G -ενέσιμων προτύπων είναι ελάχιστα αριστερά προσεγγίσιμη, (enveloping).

Στο Κεφάλαιο 7, θεωρώντας ένα ζεύγος (σ, \mathcal{F}) από πλήρεις υποκατηγορίες μιας αβελιανής κατηγορίας \mathcal{C} οι οποίες είναι εφοδιασμένες με συγκεκριμένες ιδιότητες, αποδείξαμε ότι το ζεύγος $(\check{\sigma}, \mathcal{F})$ είναι ένα πλήρες συστρεπτικό ζεύγος στην \mathcal{F} , όπου για μια οποιαδήποτε πλήρη υποκατηγορία \mathcal{A} της \mathcal{C} , η $\check{\mathcal{A}}$ συμβόλιζε την πλήρη υποκατηγορία της \mathcal{C} που αποτελούνταν από όλα τα αντικείμενα C της \mathcal{C} έτσι ώστε $\mathcal{A}\text{-cores. dim } C < \infty$.

Αν R είναι ένας προσεταιριστικός δακτύλιος με μονάδα, και $R\text{-Mod}$ είναι η αβελιανή κατηγορία των αριστερών R -προτύπων, τότε η πλήρης coresolving υποκατηγορία $R\text{-GInj}$ της $R\text{-Mod}$, ικανοποιεί τις γενικές υποθέσεις του Κεφαλαίου 7 για την κατηγορία \mathcal{F} . Επιπλέον, η πλήρης υποκατηγορία $R\text{-Inj}$ των ενέσιμων αριστερών R -προτύπων της $R\text{-GInj}$, είναι προφανώς προσθετική και κλειστή σε ισομορφισμούς, σε ευθείς προσθετέους, καθώς και σε πεπερασμένα ευθέα αθροίσματα στην $R\text{-Mod}$. Αν M τώρα είναι ένα G -ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο, τότε η Παρατήρηση (5.2.2), μας δίνει μια σύντομη ακριβή ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow I_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

όπου το H είναι G -ενέσιμο και το I_0 είναι ενέσιμο. Συνεπώς, έπεται ότι η $R\text{-Inj}$ είναι ένας γεννήτορας για την $R\text{-GInj}$. Στην πραγματικότητα, το Λήμμα (5.2.5) μας εξασφαλίζει ότι η $R\text{-Inj}$ είναι ένας προβολικός γεννήτορας για την $R\text{-GInj}$. Άρα, η κατηγορία $R\text{-Inj}$ πληρεί τις γενικές υποθέσεις του Κεφαλαίου 7 για την κατηγορία σ . Παρατηρώντας λοιπόν ότι:

$$\widetilde{R\text{-GInj}} = \{ {}_R M \mid \text{Gid}_R M < \infty \} \quad \& \quad \widetilde{R\text{-Inj}} = R\text{-Inj}^{<\infty} = \{ {}_R M \mid \text{id}_R M < \infty \},$$

έχουμε ότι για κάθε προσεταιριστικό δακτύλιο με μονάδα R , το ζεύγος $(R\text{-Inj}^{<\infty}, R\text{-GInj})$ είναι ένα πλήρες συστρεπτικό ζεύγος στην $\overline{R\text{-GInj}}$, δηλαδή, για κάθε αριστερό R -πρότυπο με πεπερασμένη G -ενέσιμη διάσταση, υπάρχει πάντα μια ειδική δεξιά προσέγγιση από αριστερά R -πρότυπα με πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση, και μια ειδική αριστερή G -ενέσιμη προσέγγιση. Φυσιολογικά γεννάται λοιπόν το ερώτημα περί χαρακτηρισμού των δακτυλίων R για τους οποίους ισχύει ότι $R\text{-Mod} = \overline{R\text{-GInj}}$.

Θεώρημα 8.2.1. Έστω R ένας δακτύλιος n -Gorenstein. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $R\text{-GInj} = (R\text{-Inj})^\perp$.

2. $R\text{-Mod} = \overline{R\text{-GInj}}$.

Απόδειξη. 1) Για οποιονδήποτε δακτύλιο R , ισχύει ότι $R\text{-GInj} \subseteq (R\text{-Inj})^\perp$. Αρκεί να δείξουμε λοιπόν ότι $(R\text{-Inj})^\perp \subseteq R\text{-GInj}$. Έστω $R\text{-Inj}^{\leq n}$ η κλάση που αποτελείται από όλα τα αριστερά R -πρότυπα A , για τα οποία υπάρχει ακριβής ακολουθία

$$\ell: I^{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow I^1 \longrightarrow I^0 \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

όπου κάθε I^k για $0 \leq k \leq n-1$, είναι ενέσιμο. Θα δείξουμε στην συνέχεια ότι $(R\text{-Inj})^\perp = R\text{-Inj}^{\leq n}$. Αν $A \in R\text{-Inj}^{\leq n}$, τότε υπάρχει ακριβής ακολουθία όπως η ℓ , όπου κάθε I^k για $0 \leq k \leq n-1$, είναι ενέσιμο. Θεωρώντας την ακριβή ακολουθία αριστερών R -προτύπων

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow I^{n-1} \longrightarrow I^{n-2} \longrightarrow \dots \longrightarrow I^1 \longrightarrow I^0 \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

όπου $B = \text{Ker}(I^{n-1} \longrightarrow I^{n-2})$, έπεται ότι $A = \Sigma^n(B)$. Τότε για κάθε $i \geq 1$ και για κάθε ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο I , έχουμε ότι:

$$\text{Ext}_R^i(I, A) = \text{Ext}_R^i(I, \Sigma^n(B)) \cong \text{Ext}_R^{i+n}(I, B) = 0,$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από την υπόθεση ότι ο R είναι δακτύλιος n -Gorenstein, καθώς και από το γεγονός ότι $\text{pd}_R I \leq n$ για κάθε ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο I . Επομένως, $A \in (R\text{-Inj})^\perp$ και άρα, $R\text{-Inj}^{\leq n} \subseteq (R\text{-Inj})^\perp$. Έστω τώρα $A \in (R\text{-Inj})^\perp$. Θεωρούμε μια σύντομη ακριβή ακολουθία αριστερών R -προτύπων

$$0 \longrightarrow \Omega(A) \longrightarrow P \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

όπου P προβολικό. Επειδή ο R είναι δακτύλιος n -Gorenstein, και το P είναι προβολικό αριστερό R -πρότυπο, υπάρχει ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{i} I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow I^n \longrightarrow 0,$$

όπου κάθε I^k για $0 \leq k \leq n$, είναι ενέσιμο, και προφανώς το πρότυπο $\Sigma(P) = \text{Coker } i$ έχει πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση. Θεωρούμε το pushout διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & I^0 & \longrightarrow & \Sigma(P) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & X & \longrightarrow & \Sigma(P) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Αν συμβολίσουμε με $R\text{-Inj}^{<\infty}$ την κλάση όλων των αριστερών R -προτύπων με πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση, τότε εύκολα βλέπουμε ότι $\text{Ext}_R^i(R\text{-Inj}^{<\infty}, (R\text{-Inj})^\perp) = 0$ για κάθε $i \geq 1$. Έτσι, αφού $A \in (R\text{-Inj})^\perp$ και $\Sigma(P) \in R\text{-Inj}^{<\infty}$, παίρνουμε ιδιαίτερα ότι $\text{Ext}_R^1(\Sigma(P), A) = 0$, και κατ' επέκταση, ότι η δεύτερη γραμμή του προηγούμενου διαγράμματος είναι διασπάσιμη σύντομη

ακριβής ακολουθία. Συνεπώς, ο επιμορφισμός $P \longrightarrow A$ αναλύεται μέσω του I^0 ως το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & I^0 \\ \downarrow & \searrow & \\ A & & \end{array}$$

και άρα, ο ομομορφισμός $I^0 \longrightarrow A$ είναι επίσης επιμορφισμός. Επομένως, επειδή ο R είναι (αριστερός) δακτύλιος της Noether, ως δακτύλιος n -Gorenstein, και το A είναι η ομομορφική εικόνα του ενέσιμου αριστερού R -πρότυπου I^0 , υπάρχει μια σύντομη ακριβής ακολουθία αριστερών R -πρότυπων

$$0 \longrightarrow A^1 \longrightarrow E^0 \longrightarrow A \longrightarrow 0, \quad (8.30)$$

όπου $E^0 \longrightarrow A$ είναι μια δεξιά R -Inj-προσέγγιση του A . Τότε προφανώς ισχύει ότι $\text{Ext}_R^1(I, A^1) = 0$ για κάθε ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο I . Επιπλέον, αν για οποιοδήποτε ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο I , εφαρμόσουμε τον συναλλοίωτο συναρτητή $\text{Hom}_R(I, -)$ στη σύντομη ακριβή ακολουθία (8.30), τότε επάγεται η ακριβής ακολουθία

$$0 = \text{Ext}_R^i(I, A) \longrightarrow \text{Ext}_R^{i+1}(I, A^1) \longrightarrow \text{Ext}_R^{i+1}(I, E^0) = 0, \quad (8.31)$$

για κάθε $i \geq 1$, όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει από την υπόθεση ότι το A είναι στοιχείο της $(R\text{-Inj})^\perp$, ενώ η δεύτερη, από το γεγονός ότι το E^0 είναι ένα ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο. Άρα, από την ακριβή ακολουθία (8.31), συμπεραίνουμε ότι $\text{Ext}_R^i(I, A^1) = 0$ για κάθε $i \geq 2$ και για κάθε ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο I . Ο συνδυασμός λοιπόν των προηγούμενων αποτελεσμάτων, μας δίνει ότι το $A^1 \in (R\text{-Inj})^\perp$. Στην συνέχεια, εφαρμόζουμε την προηγούμενη διαδικασία, αντικαθιστώντας το A με το A^1 . Έτσι τελικά, οδηγούμαστε σε μια ακριβή ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα

$$\dots \longrightarrow E^1 \longrightarrow E^0 \longrightarrow A \longrightarrow 0, \quad (8.32)$$

όπου κάθε E^i για $i = 0, 1, \dots$, είναι ενέσιμο, η οποία παραμένει ακριβής μετά την εφαρμογή του συναλλοίωτου συναρτητή $\text{Hom}_R(I, -)$ για οποιοδήποτε ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο I . Δηλαδή, η ακολουθία (8.32) είναι μια ακριβής αριστερή R -Inj-ανάλυση του $A \in (R\text{-Inj})^\perp$. Επομένως, χρησιμοποιώντας την Πρόταση (5.2.7), παίρνουμε ότι το A είναι G -ενέσιμο, και επιπρόσθετα, έχουμε ότι $A \in R\text{-Inj}^{\leq n}$. Επειδή η επιλογή του $A \in (R\text{-Inj})^\perp$ ήταν τυχαία, συμπεραίνουμε ότι

$$(R\text{-Inj})^\perp \subseteq R\text{-Inj}^{\leq n} \quad \& \quad (R\text{-Inj})^\perp \subseteq R\text{-GInj}.$$

Συνδυάζοντας λοιπόν όλα τα προηγούμενα αποτελέσματα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $(R\text{-Inj})^\perp = R\text{-Inj}^{\leq n} = R\text{-GInj}$, όπως επιθυμούσαμε.

2) Έστω A ένα αριστερό R -πρότυπο, και

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow I^{n-1} \longrightarrow I^n \longrightarrow \dots$$

για ενέσιμη ανάλυση του A . Τότε για κάθε $i \geq 1$, και για κάθε ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο I , παίρνουμε ότι

$$\text{Ext}_R^i(I, \Sigma^n(A)) \cong \text{Ext}^{i+n}(I, A) = 0,$$

διότι ο R είναι δακτύλιος n -Gorenstein, και $\text{pd}_R I \leq n$ για κάθε ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο I . Άρα, $\Sigma^n(A) \in (R\text{-Inj})^\perp$, και τότε από το 1), $\Sigma^n(A) \in R\text{-GInj}$. Συνεπώς, η ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow I^0 \longrightarrow \dots \longrightarrow I^{n-1} \longrightarrow \Sigma^n(A) \longrightarrow 0,$$

είναι μια G -ενέσιμη ανάλυση του A πεπερασμένου μήκους n , και έτσι, $A \in \text{ob}(\overline{R\text{-GInj}})$. Επομένως, $R\text{-Mod} = \overline{R\text{-GInj}}$. ■

Παρατήρηση 8.2.2. Το Θεώρημα (8.2.1), γενικεύεται (και αποδεικνύεται παρόμοια) για μια οποιαδήποτε αβελιανή κατηγορία \mathcal{A} με αρκετά προβολικά και ενέσιμα αντικείμενα, η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες για κάποιο φυσικό αριθμό n :

1. $\sup\{\text{pd}_R I \mid I \in \text{ob}(\mathcal{A}\text{-Inj})\} \leq n$.
2. $\sup\{\text{id}_R P \mid P \in \text{ob}(\mathcal{A}\text{-Proj})\} \leq n$.
3. Η πλήρης υποκατηγορία $\mathcal{A}\text{-Inj}$ της \mathcal{A} , είναι δεξιά προσεγγίσιμη (contravariantly finite) στην \mathcal{A} .

Οι παραπάνω συνθήκες ικανοποιούνται από την αβελιανή κατηγορία $R\text{-Mod}$, όπου R είναι ένας δακτύλιος n -Gorenstein.

Έχοντας εξασφαλίσει λοιπόν την ισότητα $R\text{-Mod} = \overline{R\text{-GInj}}$, στην περίπτωση που ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος n -Gorenstein, έπεται ότι υπεράνω ενός δακτυλίου n -Gorenstein R , το ζεύγος $(R\text{-Inj}^{<\infty}, R\text{-GInj})$ είναι ένα πλήρες συστρεπτικό ζεύγος στην κατηγορία των αριστερών R -προτύπων. Ωστόσο, για κάθε δακτύλιο n -Gorenstein R , το Θεώρημα (8.1.17) μας δίνει ότι η κατηγορία όλων των αριστερών R -προτύπων με πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση $R\text{-Inj}^{<\infty}$, συμπίπτει με την κατηγορία όλων των αριστερών R -προτύπων με πεπερασμένη προβολική διάσταση :

$$R\text{-Proj}^{<\infty} = \{ {}_R M \mid \text{pd}_R M < \infty \}.$$

Συνεπώς, αν ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος n -Gorenstein, τότε κάθε αριστερό R -πρότυπο δέχεται μια ειδική δεξιά προσέγγιση από αριστερά R -πρότυπα με πεπερασμένη προβολική διάσταση η οποία είναι απαραίτητα επιμορφισμός, αφού κάθε R -πρότυπο είναι η ομομορφική εικόνα ενός προβολικού R -προτύπου, και μια ειδική αριστερή G -ενέσιμη προσέγγιση η οποία είναι υποχρεωτικά μονομορφισμός, διότι κάθε R -πρότυπο εμψυτεύεται σε ένα ενέσιμο R -πρότυπο.

Πρόταση 8.2.3. *Αν ο R είναι ένας δακτύλιος n -Gorenstein, τότε κάθε i -ισοτή $R\text{-Inj}$ -συνσυσζυγία $\Sigma^i(M)$, είναι ένα G -ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο για κάθε $i \geq n$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη του Θεωρήματος (8.2.1), μας δίνει ότι κάθε n -ισοτή $R\text{-Inj}$ -συνσυσζυγία $\Sigma^n(M)$ ενός αριστερού R -προτύπου M , είναι ένα G -ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, καθώς και το Θεώρημα (5.2.9), έπεται ότι κάθε i -ισοτή $R\text{-Inj}$ -συνσυσζυγία ενός αριστερού R -προτύπου M , είναι ένα G -ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο για κάθε $i \geq n$. ■

Πόρισμα 8.2.4. *Έστω R ένας δακτύλιος n -Gorenstein. Τότε για κάθε αριστερό R -πρότυπο M , ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:*

1. $\text{Gid}_R M \leq n$.
2. *Αν $M \neq 0$, τότε $\text{Gid}_R M = \text{id}_R M$, αν και μόνο αν, $\text{id}_R M < \infty$.*

Απόδειξη. Το 1) προκύπτει χρησιμοποιώντας την Πρόταση (8.2.3), καθώς και το γεγονός ότι $R\text{-Inj} \subseteq R\text{-GInj}$. Για το 2), θεωρούμε ένα οποιοδήποτε μη μηδενικό αριστερό R -πρότυπο M . Αν $\text{id}_R M < \infty$, τότε το Θεώρημα (6.1.28), μας εξασφαλίζει ότι $\text{Gid}_R M = \text{id}_R M$. Αντίστροφα, αν $\text{Gid}_R M = \text{id}_R M$, τότε χρησιμοποιώντας το 1), παίρνουμε ότι $\text{id}_R M < \infty$. ■

Στο Κεφάλαιο 6, μελετώντας G -ενέσιμες διαστάσεις προτύπων υπεράνω τυχόντος προσεταιριστικού δακτυλίου με μονάδα, αποδείξαμε θεμελιώδη αποτελέσματα για πρότυπα με πεπερασμένη G -ενέσιμη διάσταση. Επειδή κάθε πρότυπο υπεράνω ενός δακτυλίου n -Gorenstein έχει πεπερασμένη G -ενέσιμη διάσταση και μάλιστα μικρότερη ή ίση του n , τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 6 για πρότυπα με πεπερασμένη G -ενέσιμη διάσταση, επεκτείνονται προφανώς για κάθε πρότυπο υπεράνω ενός δακτυλίου n -Gorenstein.

Ως γενίκευση της Πρότασης (6.1.30), παίρνουμε ότι :

Θεώρημα 8.2.5. *Αν ο R είναι δακτύλιος n -Gorenstein, τότε για κάθε αριστερό R -πρότυπο M , υπάρχει μια αριστερή G -ενέσιμη προσέγγιση $f: M \rightarrow H$ του M η οποία είναι μονομορφισμός, έτσι ώστε $\text{Coker } f = 0$ για $n = 0$, και $\text{id}_R \text{Coker } f \leq n - 1$ για $n \geq 1$.*

Απόδειξη. Έστω R ένας δακτύλιος n -Gorenstein. Αν $n = 0$, δηλαδή, αν ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος 0-Gorenstein, τότε κάθε αριστερό R -πρότυπο M είναι G -ενέσιμο (και G -προβολικό). Θεωρώντας λοιπόν για κάθε αριστερό R -πρότυπο M , τον ταυτοτικό (ομομορφισμό) $\text{Id}_M: M \xrightarrow{\cong} M$ του M , κατά προφανή τρόπο ισχύει το ζητούμενο. Υποθέτουμε τώρα ότι $n > 0$. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση (8.2.3), και ακολουθώντας μια ανάλογη πορεία με την απόδειξη της της Πρότασης (6.1.30), παίρνουμε για το τυχόν αριστερό R -πρότυπο M , μια αριστερή G -ενέσιμη προσέγγιση $f: M \rightarrow H$ του M η οποία είναι μονομορφισμός, έτσι ώστε $\text{id}_R \text{Coker } f \leq n - 1$. ■

Πόρισμα 8.2.6. *Υποθέτουμε ότι ο R είναι δακτύλιος n -Gorenstein, και έστω $f: M \rightarrow H$ μια αριστερή G -ενέσιμη προσέγγιση ενός αριστερού R -πρωτύπου M . Τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

1. $\text{id}_R M < \infty$.
2. Το αριστερό R -πρότυπο H είναι ενέσιμο.
3. Ο ομομορφισμός $f: M \rightarrow H$ είναι μια αριστερή R -Inj-προσέγγιση του M .

Απόδειξη. Θεωρούμε τη σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f} H \rightarrow \text{Coker } f \rightarrow 0, \quad (8.33)$$

όπου $\text{id}_R \text{Coker } f \leq n - 1$. Οι συνεπαγωγές $(3 \Rightarrow 2)$ και $(2 \Rightarrow 1)$ είναι προφανείς. Για να αποδείξουμε λοιπόν ότι οι παραπάνω συνθήκες είναι ισοδύναμες, αρκεί να δείξουμε την συνεπαγωγή $(1 \Rightarrow 3)$.

Υποθέτουμε ότι η ενέσιμη διάσταση του M είναι πεπερασμένη. Τότε χρησιμοποιώντας το Horseshoe Lemma για ενέσιμες αναλύσεις, συμπεραίνουμε ότι η ενέσιμη διάσταση του H είναι επίσης πεπερασμένη. Ως συνέπεια αυτού, και της Πρότασης (5.2.6), έπεται ότι το G -ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο H είναι ενέσιμο. Χρησιμοποιώντας τώρα το γεγονός ότι μια αριστερή R -Inj-προσέγγιση ενός αριστερού R -πρωτύπου N , είναι ακριβώς ένας μονομορφισμός $g: N \rightarrow E$ όπου το E είναι ένα ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι ο μονομορφισμός f είναι μια αριστερή R -Inj-προσέγγιση του M , όπως επιθυμούσαμε. ■

Πρόταση 8.2.7. *Αν R είναι ένας δακτύλιος n -Gorenstein, τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες για κάθε αριστερό R -πρότυπο M :*

1. Το M είναι G -ενέσιμο.
2. $\text{Ext}_R^i(L, M) = 0$, για κάθε $i > 0$ και για κάθε αριστερό R -πρότυπο L με πεπερασμένη προβολική διάσταση.
3. $\text{Ext}_R^1(L, M) = 0$, για κάθε αριστερό R -πρότυπο L με πεπερασμένη προβολική διάσταση.
4. $\text{Ext}_R^i(E, M) = 0$, για κάθε $i > 0$ και για κάθε ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο E .

Απόδειξη. Έστω R ένας δακτύλιος n -Gorenstein. Η συνεπαγωγή $1 \Rightarrow 2$ και η ισοδυναμία $1 \Leftrightarrow 4$ προκύπτουν χρησιμοποιώντας το Λήμμα (5.2.5) και το Θεώρημα (8.2.1), αντίστοιχα. Επιπλέον, η συνεπαγωγή $2 \Rightarrow 3$ είναι τετριμμένη. Απομένει λοιπόν να αποδείξουμε την συνεπαγωγή $3 \Rightarrow 1$.

Θεωρούμε ένα αριστερό R -πρότυπο M , και υποθέτουμε ότι ισχύει το 3). Επειδή ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος n -Gorenstein, υπάρχει μια σύντομη ακριβής ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα

$$0 \rightarrow M \rightarrow H \rightarrow L \rightarrow 0,$$

όπου H είναι G-ενέσιμο και $\text{id}_R L < \infty$. Συνεπώς, το Θεώρημα (8.1.17) μας δίνει ότι $\text{pd}_R L < \infty$. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, και την υπόθεση, έπεται ότι το M είναι ευθύς προσθετέος του G-ενέσιμου αριστερού R -προτύπου H . Επομένως, αφού η $R\text{-Glnj}$ είναι μια coresolving υποκατηγορία της $R\text{-Mod}$, παίρνουμε ότι το M είναι G-ενέσιμο, δηλαδή, ότι ικανοποιείται το 1). ■

Από την παραπάνω πρόταση έπεται ότι:

$$(R\text{-Proj}^{<\infty})^\perp = (R\text{-Inj}^{<\infty})^\perp = R\text{-Glnj} = (R\text{-Inj})^\perp$$

Στην συνέχεια, εξετάζουμε αν κάθε (αριστερό) πρότυπο υπεράνω ενός δακτυλίου n -Gorenstein, μπορεί να προσεγγισθεί με ελάχιστο τρόπο από ένα (αριστερό) G-ενέσιμο πρότυπο.

Λήμμα 8.2.8. *Αν R είναι ένας δακτύλιος n -Gorenstein, και $R\text{-Inj}^{<\infty}$ είναι η κατηγορία που αποτελείται από τα αριστερά R -πρότυπα με πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση, τότε η $R\text{-Inj}^{<\infty}$ είναι κλειστή στα ευθέα όρια.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος n -Gorenstein, και έστω (L_i, f_{ji}) ένα ευθύ σύστημα από αριστερά R -πρότυπα με πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση υπεράνω ενός κατευθυνόμενου συνόλου I . Θέλουμε να δείξουμε ότι το ευθύ όριο των L_i για $i \in I$, είναι αντικείμενο της $R\text{-Inj}^{<\infty}$. Το Θεώρημα (8.1.17), μας δίνει ότι $\text{id}_R L_i \leq n$ για κάθε $i \in I$. Χρησιμοποιώντας τώρα το αποτέλεσμα αυτό, καθώς και το γεγονός ότι ο R είναι ένας αριστερός δακτύλιος της Noether, οδηγούμαστε στις ακόλουθες σχέσεις:

$$\text{id}_R \varinjlim L_i \leq \sup\{\text{id}_R L_i \mid i \in I\} \leq n.$$

Συνεπώς, έχουμε ότι $\varinjlim L_i \in R\text{-Inj}^{<\infty}$, όπως επιθυμούσαμε. ■

Ως συνέπεια του Λήμματος (8.2.8), έπεται ότι:

Θεώρημα 8.2.9. *Αν R είναι ένας δακτύλιος n -Gorenstein, τότε το πλήρες συστρεπτικό ζεύγος $(R\text{-Inj}^{<\infty}, R\text{-Glnj})$ είναι τέλειω στην $R\text{-Mod}$.*

Απόδειξη. Το Λήμμα (8.2.8) μας εξασφαλίζει ότι για έναν δακτύλιο n -Gorenstein R , το πλήρες συστρεπτικό ζεύγος $(R\text{-Inj}^{<\infty}, R\text{-Glnj})$ για την κατηγορία των αριστερών R -προτύπων, είναι κλειστό. Συνεπώς, χρησιμοποιώντας το Πρόρισμα (4.4.20) έπεται το ζητούμενο. ■

Πόρισμα 8.2.10. *Υποθέτουμε ότι ο R είναι δακτύλιος n -Gorenstein, και έστω $f: M \rightarrow H$ η ελάχιστη αριστερή G-ενέσιμη προσέγγιση ενός αριστερού R -προτύπου M . Τότε η ενέσιμη διάσταση του M είναι πεπερασμένη, αν και μόνο αν, ο ομομορφισμός $f: M \rightarrow H$ είναι η ελάχιστη αριστερή $R\text{-Inj}$ -προσέγγιση του M .*

Απόδειξη. Η ζητούμενη ισοδυναμία προκύπτει χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι ο ομομορφισμός f είναι η ελάχιστη αριστερή G-ενέσιμη προσέγγιση του M , καθώς και το Πρόρισμα (8.2.6). ■

Υπενθυμίζουμε από το Κεφάλαιο 4, ότι μια κλάση \mathcal{X} από R -πρότυπα είναι (ελάχιστα) αριστερά προσεγγίσιμη, αν και μόνο αν, για κάθε R -πρότυπο υπάρχει μια (ελάχιστη) δεξιά \mathcal{X} -ανάλυση. Έτσι, αν ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος n -Gorenstein, τότε η κλάση $R\text{-Glnj}$ είναι ελάχιστα αριστερά προσεγγίσιμη, και άρα, κάθε αριστερό R -πρότυπο δέχεται μια ελάχιστη δεξιά $R\text{-Glnj}$ -ανάλυση. Μάλιστα, κάθε τέτοια ελάχιστη δεξιά $R\text{-Glnj}$ -ανάλυση είναι ακριβής, και μπορεί να θεωρηθεί φυσικά, ως μια G-ενέσιμη ανάλυση. Τονίζουμε ωστόσο ότι οι έννοιες αυτές είναι εν γένει διακριτές.

Ολοκληρώνουμε τη μελέτη ελάχιστων αριστερών G-ενέσιμων προσεγγίσεων προτύπων υπεράνω δακτυλίων n -Gorenstein, με το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 8.2.11. Έστω R ένας δακτύλιος n -Gorenstein, και

$$\ell : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} H^0 \xrightarrow{\alpha^0} H^1 \xrightarrow{\alpha^1} \dots \longrightarrow H^n \xrightarrow{\alpha^n} \dots$$

μια (ακριβής) ελάχιστη δεξιά R -Glnj-ανάλυση ενός αριστερού R -προτύπου M . Τότε κάθε H^i είναι ενέσιμο για κάθε $i \geq 1$, και $H^i = 0$ για κάθε $i > n$.

Απόδειξη. Επειδή η ℓ είναι μια ακριβής ελάχιστη δεξιά R -Glnj-ανάλυση του M , μπορούμε να την «σπάσουμε» σε σύντομες ακριβείς ακολουθίες για κάθε $j \geq 1$

$$\ell^j : 0 \longrightarrow C^{j-1} \longrightarrow H^{j-1} \longrightarrow C^j \longrightarrow 0,$$

όπου $C^0 = M$, και $C^{j-1} \longrightarrow H^{j-1}$ είναι η ελάχιστη αριστερή G -ενέσιμη προσέγγιση του C^{j-1} για κάθε $j \geq 1$. Τότε το Θεώρημα (8.2.5), μας εξασφαλίζει ότι $\text{id}_R C^j \leq n - 1$ για κάθε $j \geq 1$. Χρησιμοποιώντας λοιπόν το Πόρισμα (8.2.10), παίρνουμε ότι κάθε H^j για $j \geq 1$, είναι ενέσιμο. Επειδή ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος n -Gorenstein, έχουμε ότι $\text{Gid}_R M \leq n$. Έτσι, θεωρώντας τώρα την ℓ ως μια G -ενέσιμη ανάλυση του M , το Θεώρημα (6.1.20) μας δίνει ότι το C^n είναι G -ενέσιμο. Στην πραγματικότητα, το C^n είναι ενέσιμο, αφού η ενέσιμη διάσταση του C^n είναι πεπερασμένη. Συνεπώς, έπεται ότι η ℓ^n είναι διασπασίμη, και κατ' επέκταση, ότι το C^{n+1} είναι ενέσιμο ως ευθύς προσθετός του ενέσιμου αριστερού R -προτύπου H^n . Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, επαγωγικά οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι $H^j \cong C^j \oplus C^{j+1}$ για κάθε $j \geq n$, όπου κάθε C^j για $j \geq n$, είναι ενέσιμο. Επομένως, τριτομμένα προκύπτει ότι κάθε μονομορφισμός

$$C^j \longrightarrow C^j \oplus C^{j+1},$$

είναι η ελάχιστη G -ενέσιμη προσέγγιση του C^j για κάθε $j \geq n$. Αν θεωρήσουμε τώρα τον ταυτοτικό μορφισμό $\text{Id} : C^j \longrightarrow C^j$ του C^j για κάθε $j \geq n$, τότε χρησιμοποιώντας την Πρόταση (4.1.13), παίρνουμε ότι:

$$C^j \cong C^j \oplus C^{j+1},$$

για κάθε $j \geq n$, και άρα, ότι $C^{j+1} = 0$ για κάθε $j \geq n$. Συνδυάζοντας λοιπόν τα προηγούμενα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $H^i = 0$ για κάθε $i > n$, όπως επιθυμούσαμε. ■

8.2.2 Ελάχιστες Δεξιές G -Ενέσιμες Προσεγγίσεις Προτύπων

Τώρα αποδεικνύουμε ότι υπεράνω ενός δακτυλίου n -Gorenstein R , η κλάση R -Glnj είναι ελάχιστα δεξιά προσεγγίσιμη, (covering).

Ξεκινάμε, δείχνοντας ότι κάθε πρότυπο υπεράνω ενός δακτυλίου n -Gorenstein, δέχεται μια δεξιά G -ενέσιμη προσέγγιση. Ας υπενθυμίσουμε όμως πρώτα, ότι υπεράνω ενός (αριστερού) δακτυλίου της Noether, η κλάση των ενέσιμων (αριστερών) προτύπων είναι ελάχιστα δεξιά προσεγγίσιμη, και άρα, κάθε (αριστερό) πρότυπο υπεράνω ενός (αριστερού) δακτυλίου της Noether, δέχεται μια αριστερή ενέσιμη ανάλυση.

Θεώρημα 8.2.12. Αν R είναι ένας δακτύλιος n -Gorenstein, τότε η R -Glnj είναι δεξιά προσεγγίσιμη.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο R είναι ένας δακτύλιος n -Gorenstein, και θεωρούμε ένα αριστερό R -πρότυπο M . Διαλέγουμε μια αριστερή R -Inj-ανάλυση του M , έστω

$$\dots \longrightarrow E_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \dots \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha_1} E_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0,$$

και θέτουμε $K = \text{Ker } \alpha_{n-1}$. Έστω τώρα

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\gamma} E^0 \xrightarrow{\gamma^0} E^1 \xrightarrow{\gamma^1} \dots \longrightarrow E^{n-1} \xrightarrow{\gamma^{n-1}} \dots$$

μια ενέσιμη ανάλυση του K . Τότε η Πρόταση (8.2.3), μας δίνει ότι η n -ιοστή συνσυσζυγία $\Sigma^n(K)$ του K , είναι ένα G -ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο. Θεωρώντας ένα οποιοδήποτε G -ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο G , η Πρόταση (5.2.7) μας εξασφαλίζει μια ακριβή αριστερή R -Inj-ανάλυση του G :

$$\cdots \longrightarrow H_{n-1} \xrightarrow{\beta_{n-1}} \cdots \longrightarrow H_1 \xrightarrow{\beta_1} H_0 \xrightarrow{\beta_0} G \longrightarrow 0. \quad (8.34)$$

Έτσι, αν $f: G \longrightarrow M$ είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων, τότε χρησιμοποιώντας την Πρόταση (4.1.30), επάγονται ομομορφισμοί αριστερών R -προτύπων, οι οποίοι συνθέτουν το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_{n-1} & \xrightarrow{\beta_{n-1}} & H_{n-2} & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow H^0 \xrightarrow{\beta_0} G \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f_{n-1} & & \downarrow f_{n-2} & & \downarrow f_0 & \downarrow f \\ \cdots & \longrightarrow & E_{n-1} & \xrightarrow{\alpha_{n-1}} & E_{n-2} & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow E_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0 \end{array}$$

Θέτοντας τώρα $L = \text{Ker } \beta_{n-1}$, υπάρχει ένας (μοναδικός) ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων $g: L \longrightarrow K$, έτσι ώστε ολόκληρο το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{i_L} & H_{n-1} & \xrightarrow{\beta_{n-1}} & \cdots \longrightarrow H^0 \xrightarrow{\beta_0} G \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow g & & \downarrow f_{n-1} & & \downarrow f_0 & \downarrow f \\ 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{i_K} & E_{n-1} & \xrightarrow{\alpha_{n-1}} & \cdots \longrightarrow E_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0 \end{array} \quad (8.35)$$

να είναι μεταθετικό, όπου i_L και i_K είναι κανονικές εγκλεισεις. Επειδή τα E^i για $i = 0, \dots, n-1$, είναι ενέσιμα αριστερά R -πρότυπα, και αφού η ακολουθία (8.34) είναι ακριβής, χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση (3.2.58), συμπεραίνουμε την ύπαρξη ομομορφισμών αριστερών R -προτύπων $g_i: H_{n-i-1} \longrightarrow E^i$ για $i = 0, \dots, n-1$, έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό με ακριβείς γραμμές:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{i_L} & H_{n-1} & \xrightarrow{\beta_{n-1}} & H_{n-2} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & H^1 & \xrightarrow{\beta_1} & H^0 \\ & & \downarrow g & & \downarrow g_0 & & \downarrow g_1 & & & & \downarrow g_{n-2} & & \downarrow g_{n-1} \\ 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{\gamma} & E^0 & \xrightarrow{\gamma^0} & E^1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & E^{n-2} & \xrightarrow{\gamma^{n-2}} & E^{n-1} \end{array}$$

Στην συνέχεια, θέτουμε $\pi: E^{n-1} \longrightarrow \Sigma^n(K)$ να είναι η φυσική προβολή, και ορίζουμε απεικόνιση

$$g_n: G \longrightarrow \Sigma^n(K), \quad g \longmapsto (\pi \circ g_{n-1})(x),$$

όπου $g = \beta_0(x)$ για κάποιο $x \in H_0$. Εύκολα βλέπουμε ότι η απεικόνιση g_n είναι ένας καλά ορισμένος ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων, ο οποίος συμπληρώνει το ακόλουθο μεταθετικό και ακριβές διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{i_L} & H_{n-1} & \xrightarrow{\beta_{n-1}} & \cdots \longrightarrow H^0 \xrightarrow{\beta_0} G \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow g & & \downarrow g_0 & & \downarrow g_{n-1} & \downarrow g_n \\ 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{\gamma} & E^0 & \xrightarrow{\gamma^0} & \cdots \longrightarrow E^{n-1} \xrightarrow{\pi} \Sigma^n(K) \longrightarrow 0 \end{array} \quad (8.36)$$

Χρησιμοποιώντας ξανά την Παρατήρηση (3.2.58), παίρνουμε ομομορφισμούς αριστερών R -προτύπων

$h_i: E^i \rightarrow E_{n-i-1}$ για κάθε $i = 0, \dots, n-1$, τέτοιοι ώστε το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{\gamma} & E^0 & \xrightarrow{\gamma^0} & E^1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & E^{n-2} & \xrightarrow{\gamma^{n-2}} & E^{n-1} \\ & & \parallel & & \downarrow h_0 & & \downarrow h_1 & & & & \downarrow h_{n-2} & & \downarrow h_{n-1} \\ 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{i_K} & E_{n-1} & \xrightarrow{\alpha_{n-1}} & E_{n-2} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & E_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & E_0 \end{array}$$

να είναι μεταθετικό. Ορίζοντας τώρα

$$h_n: \Sigma^n(K) \rightarrow M, \quad c \mapsto (\alpha_0 \circ h_{n-1})(y),$$

όπου $c = \pi(y)$ για κάποιο $y \in E^{n-1}$, εύκολα διαπιστώνουμε ότι η απεικόνιση h_n είναι ένας καλώς ορισμένος ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων, και ότι το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{\gamma} & E^0 & \xrightarrow{\gamma^0} & \dots & \longrightarrow & E^{n-1} & \xrightarrow{\pi} & \Sigma^n(K) & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow h_0 & & & & \downarrow h_{n-1} & & \downarrow h_n \\ 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{i_K} & E_{n-1} & \xrightarrow{\alpha_{n-1}} & \dots & \longrightarrow & E_0 & \xrightarrow{\alpha_0} & M & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (8.37)$$

Συνδυάζοντας λοιπόν τα μεταθετικά διαγράμματα (8.35), (8.36) και (8.37), οδηγούμαστε στο ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{i_L} & H_{n-1} & \xrightarrow{\beta_{n-1}} & \dots & \longrightarrow & H_0 & \xrightarrow{\beta_0} & G & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow g & & \downarrow f_{n-1} & & & & \downarrow f_0 & & \downarrow f \\ 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{i_K} & E_{n-1} & \xrightarrow{\alpha_{n-1}} & \dots & \longrightarrow & E_0 & \xrightarrow{\alpha_0} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow g & & \uparrow h_0 \circ g_0 & & \uparrow h_{n-1} \circ g_{n-1} & & \uparrow & & \uparrow h_n \circ g_n \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{i_L} & H_{n-1} & \xrightarrow{\beta_{n-1}} & \dots & \longrightarrow & H_0 & \xrightarrow{\beta_0} & G & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Συνεπώς, λόγω ύπαρξης ομοιοτιπίας μεταξύ των παραπάνω μορφοισμών συμπλόκων, υπάρχει ομομορφισμός $\phi^{-1}: G \rightarrow E^0$ αριστερών R -προτύπων, έτσι ώστε $\alpha_0 \circ \phi^{-1} = f - h_n \circ g_n$. Στην συνέχεια, θεωρούμε τους ομομορφισμούς αριστερών R -προτύπων:

$$\psi := (h_n \quad \alpha_0) : \Sigma^n(K) \oplus E_0 \rightarrow M \quad \& \quad \rho := \begin{pmatrix} g_n \\ \phi^{-1} \end{pmatrix} : G \rightarrow \Sigma^n(K) \oplus E_0.$$

Επειδή το πρότυπο $\Sigma^n(K)$ είναι G -ενέσιμο, και το E_0 είναι ενέσιμο, έπεται ότι το αριστερό R -πρότυπο $\Sigma^n(K) \oplus E_0$ είναι G -ενέσιμο. Παρατηρώντας ότι:

$$\begin{aligned} \psi \circ \rho &= h_n \circ g_n + \alpha_0 \circ \phi^{-1} \\ &= h_n \circ g_n + f - h_n \circ g_n \\ &= f \end{aligned}$$

οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι ο ομομορφισμός $\psi: \Sigma^n(K) \oplus E_0 \rightarrow M$, είναι μια G -ενέσιμη προσέγγιση του M . Άρα, αφού λοιπόν η επιλογή του αριστερού R -προτύπου M ήταν τυχαία, καταλήγουμε στο ζητούμενο ότι η R -Glnj είναι δεξιά προσεγγίσιμη. ■

Πόρισμα 8.2.13. Έστω R ένας δακτύλιος n -Gorenstein. Τότε ο δακτύλιος R είναι G -ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο, αν και μόνο αν, κάθε δεξιά G -ενέσιμη προσέγγιση ενός αριστερού R -προτύπου είναι επιμορφισμός.

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι ο δακτύλιος R είναι G -ενέσιμο ως αριστερό R -πρότυπο. Εξ ορισμού, έχουμε ότι $\text{id}_R R = \text{id } R_R \leq n$. Συνεπώς, χρησιμοποιώντας την Πρόταση (5.2.6), παίρνουμε ότι $\text{id}_R R = 0$. Άρα, ο δακτύλιος R είναι ενέσιμο ως αριστερό και δεξιό R -πρότυπο. Η ισοδυναμία $(1 \Leftrightarrow 3)$ του Πορίσματος (8.1.19), μας δίνει ιδιαίτερα ότι κάθε προβολικό αριστερό R -πρότυπο είναι ενέσιμο, και κατ' επέκταση, G -ενέσιμο. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, καθώς και το γεγονός ότι κάθε αριστερό R -πρότυπο είναι η ομομορφική εικόνα ενός προβολικού αριστερού R -προτύπου, έπεται ότι κάθε δεξιά G -ενέσιμη προσέγγιση ενός αριστερού R -προτύπου, είναι επιμορφισμός. Αντίστροφα, υποθέτουμε τώρα ότι κάθε δεξιά G -ενέσιμη προσέγγιση ενός αριστερού R -προτύπου είναι επιμορφισμός, και έστω $f: G \rightarrow {}_R R$ μια δεξιά G -ενέσιμη προσέγγιση του δακτύλιου R ως αριστερό R -πρότυπο. Τότε επειδή ο f είναι επιμορφισμός, και ο δακτύλιος R είναι προβολικό αριστερό R -πρότυπο, υπάρχει ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων $g: {}_R R \rightarrow G$, έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} & & R \\ & \swarrow g & \downarrow \text{id}_R \\ G & \xrightarrow{f} & R \longrightarrow 0 \end{array}$$

Επομένως, συμπεραίνουμε ότι ο επιμορφισμός f είναι διασπασίμος, και κατ' επέκταση, ότι ο δακτύλιος R είναι G -ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο, ως ευθύ προσθετός του G -ενέσιμου αριστερού R -προτύπου G . ■

Λήμμα 8.2.14. Έστω R ένας δακτύλιος n -Gorenstein. Τότε κάθε ευθύ όριο από G -ενέσιμα αριστερά R -πρότυπα, είναι G -ενέσιμο.

Απόδειξη. Έστω $(\{G_\alpha\}, \{f_{\beta\alpha}\})_{\alpha \in \Delta}$ ένα ευθύ σύστημα G -ενέσιμων αριστερών R -προτύπων υπεράνω ενός κατευθυνόμενου συνόλου Δ , και $G = \varinjlim G_\alpha$. Επειδή ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος της Noether, ως δακτύλιος n -Gorenstein, υπάρχει ένα σύνολο από μη αναλύσιμα ενέσιμα R -πρότυπα έτσι ώστε κάθε ενέσιμο R -πρότυπο να είναι το ευθύ άθροισμα από πρότυπα, όπου καθένα από αυτά είναι ισόμορφο με ένα στοιχείο του συνόλου αυτού, βλέπε [31]. Έστω λοιπόν X το σύνολο των αντιπροσώπων των κλάσεων ισομορφίας των μη αναλύσιμων ενέσιμων αριστερών R -προτύπων. Ορίζουμε συναλλοίωτο συναρτητή $F: R\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod}$, θέτοντας για κάθε αριστερό R -πρότυπο M ,

$$F(M) = \bigoplus_{E \in X} E^{(Y_E^M)}, \quad \text{όπου } Y_E^M := \text{Hom}_R(E, M).$$

Αν $f: M \rightarrow N$ είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων, τότε

$$F(f) := \bigoplus_E \phi_E^{MN}: F(M) = \bigoplus_{E \in X} E^{(Y_E^M)} \rightarrow F(N) = \bigoplus_{E \in X} E^{(Y_E^N)},$$

όπου για κάθε $E \in X$, ο ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων

$$\phi_E^{MN}: E^{(Y_E^M)} \rightarrow E^{(Y_E^N)},$$

δίνεται από τον τύπο $\phi_E^{MN}(x_\psi)_{\psi \in Y_E^M} = (x_{f \circ \psi})_{\psi \in Y_E^M}$. Τότε επάγεται ένας φυσικός μετασχηματισμός

$$\mu: F \rightarrow \text{Id}_{R\text{-Mod}},$$

όπου για κάθε $M \in R\text{-Mod}$, $\mu_M: F(M) \rightarrow M$ είναι μια δεξιά R -Inj-προσέγγιση του M , δες την απόδειξη της Πρότασης (4.2.11). Αφού κάθε G_α για $\alpha \in \Delta$ είναι G -ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο, έπεται ότι κάθε δεξιά R -Inj-προσέγγιση μ_{G_α} του G_α για $\alpha \in \Delta$, είναι επιμορφισμός. Συνεπώς, αν $K_\alpha^1 = \text{Ker } \mu_{G_\alpha}$ για $\alpha \in \Delta$, τότε παίρνουμε ότι $\text{Ext}_R^1(I, K_\alpha^1) = 0$ για κάθε ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο I και για κάθε $\alpha \in \Delta$. Το αποτέλεσμα αυτό, και η Πρόταση (5.2.12), μας εξασφαλίζουν ότι ο πυρήνας K_α^1 είναι G -ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο για κάθε $\alpha \in \Delta$, και κατ' επέκταση, ότι η

δεξιά R -Inj-προσέγγιση $\mu_{K_\alpha^1}$ του K_α^1 είναι επιμορφισμός για κάθε $\alpha \in \Delta$. Για $\alpha \leq \beta$, θεωρούμε το μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K_\alpha^1 & \xrightarrow{i_\alpha} & F(G_\alpha) & \xrightarrow{\mu_{G_\alpha}} & G_\alpha & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \exists! k_{\beta\alpha}^1 & & \downarrow F(f_{\beta\alpha}) & & \downarrow f_{\beta\alpha} & & \\ 0 & \longrightarrow & K_\beta^1 & \xrightarrow{i_\beta} & F(G_\beta) & \xrightarrow{\mu_{G_\beta}} & G_\beta & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

το οποίο μας επάγει για $\alpha \leq \beta$, το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K_\alpha^2 & \xrightarrow{i_\alpha^2} & F(K_\alpha^1) & \xrightarrow{\mu_{K_\alpha^1}} & K_\alpha^1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \exists! k_{\beta\alpha}^2 & & \downarrow F(k_{\beta\alpha}^1) & & \downarrow k_{\beta\alpha}^1 & & \\ 0 & \longrightarrow & K_\beta^2 & \xrightarrow{i_\beta^2} & F(K_\beta^1) & \xrightarrow{\mu_{K_\beta^1}} & K_\beta^1 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

όπου όπως και πριν, παίρνουμε ότι κάθε K_α^2 για $\alpha \in \Delta$, είναι G -ενέσιμο αριστερό R -πρότυπο. Άρα, κάθε δεξιά R -Inj-προσέγγιση $\mu_{K_\alpha^2}$ του K_α^2 για $\alpha \in \Delta$, είναι επιμορφισμός. Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία, οδηγούμαστε για $\alpha \leq \beta$ στο μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές:

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & F(K_\alpha^2) & \longrightarrow & F(K_\alpha^1) & \longrightarrow & F(G_\alpha) & \longrightarrow & G_\alpha & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow F(k_{\beta\alpha}^2) & & \downarrow F(k_{\beta\alpha}^1) & & \downarrow F(f_{\beta\alpha}) & & \downarrow f_{\beta\alpha} & & \\ \dots & \longrightarrow & F(K_\beta^2) & \longrightarrow & F(K_\beta^1) & \longrightarrow & F(G_\beta) & \longrightarrow & G_\beta & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Σημειώνουμε ότι κάθε γραμμή του προηγούμενου διαγράμματος, είναι μια ακριβής δεξιά R -Inj-προσέγγιση του G_α για κάθε $\alpha \in \Delta$. Με άλλα λόγια λοιπόν, από το δοθέν ευθύ σύστημα G -ενέσιμων αριστερών R -προτύπων $(\{G_\alpha\}, \{f_{\beta\alpha}\})_{\alpha \in \Delta}$ έχουμε κατασκευάσει ευθέα συστήματα ενέσιμων αριστερών R -προτύπων, $(\{F(G_\alpha)\}, \{F(f_{\beta\alpha})\})_{\alpha \in \Delta}$ και $(\{F(K_\alpha^i)\}, \{F(k_{\beta\alpha}^i)\})_{\alpha \in \Delta}$ για κάθε $i \geq 1$. Χρησιμοποιώντας τώρα το γεγονός ότι ο συναρτητής \varinjlim είναι ακριβής, βλέπε Πρόταση (1.2.43), καθώς και το αποτέλεσμα ότι υπεράνος ενός δακτύλιου της Noether κάθε ευθύ όριο ενέσιμων προτύπων είναι ενέσιμο πρότυπο, βλέπε Θεώρημα (3.2.16), επάγεται η ακριβής ακολουθία αριστερών R -προτύπων

$$\dots \longrightarrow \varinjlim F(K_\alpha^2) \longrightarrow \varinjlim F(K_\alpha^1) \longrightarrow \varinjlim F(G_\alpha) \longrightarrow G \longrightarrow 0,$$

όπου τα πρότυπα $\varinjlim F(K_\alpha^i)$ για $i \geq 1$, και $\varinjlim F(G_\alpha)$ είναι ενέσιμα. Αν θεωρήσουμε την επαγόμενη ακριβή ακολουθία αριστερών R -προτύπων

$$0 \longrightarrow L_n \longrightarrow \varinjlim F(K_\alpha^{n-1}) \longrightarrow \dots \longrightarrow \varinjlim F(K_\alpha^1) \longrightarrow \varinjlim F(G_\alpha) \longrightarrow G \longrightarrow 0,$$

τότε η ακολουθία αυτή, μπορεί να ιδωθεί ως μια επιμέρους ενέσιμη ανάλυση του L_n έτσι ώστε $\Sigma^n(L_n) = G$. Έτσι, χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι ο R είναι δακτύλιος n -Gorenstein, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το αριστερό R -πρότυπο $G = \varinjlim G_\alpha$ είναι G -ενέσιμο. ■

Ως συνέπεια του Θεωρήματος (8.2.12) και του Λήμματος (8.2.14), παίρνουμε ότι:

Θεώρημα 8.2.15. *Αν R είναι ένας δακτύλιος n -Gorenstein, τότε η R -GInj είναι ελάχιστα δεξιά προσεγγίσιμη.*

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα (4.3.7) για $\mathcal{C} = R$ -GInj, έπεται το ζητούμενο. ■

8.2.3 Δεξιές G-Προβολικές Προσεγγίσεις Προτύπων

Η προσοχή μας τώρα στρέφεται σε G-προβολικές προσεγγίσεις R -προτύπων, δηλαδή σε προσεγγίσεις προτύπων από την κλάση $R\text{-GProj}$. Πιο ειδικά, στην συνέχεια εξετάζουμε αν η κλάση των G-προβολικών προτύπων υπεράνω δακτυλίων n -Gorenstein, είναι (ελάχιστα) δεξιά προσεγγίσιμη.

Από την θεωρία των Auslander-Buchweitz που αναπτύξαμε στο Κεφάλαιο 7, έχουμε ότι το ζεύγος $(\mathcal{X}, \widehat{\omega})$ είναι ένα πλήρες συστρεπτικό ζεύγος στην $\widehat{\mathcal{X}}$. Υπενθυμίζουμε ότι οι \mathcal{X} και ω ήταν δύο πλήρεις υποκατηγορίες μιας αβελιανής κατηγορίας \mathcal{C} οι οποίες ικανοποιούσαν συγκεκριμένες ιδιότητες, και για μια οποιαδήποτε πλήρη υποκατηγορία \mathcal{A} της \mathcal{C} , η $\widehat{\mathcal{A}}$ συμβόλιζε την πλήρη υποκατηγορία της \mathcal{C} που αποτελούνταν από τα αντικείμενα C της \mathcal{C} έτσι ώστε $\mathcal{A}\text{-res. dim } C < \infty$.

Έστω R ένας προσηταιριστικός δακτύλιος με μονάδα, και $R\text{-Mod}$ η αβελιανή κατηγορία των αριστερών R -προτύπων. Η πλήρης resolving υποκατηγορία $R\text{-GProj}$ της $R\text{-Mod}$, πληρεί προφανώς τις γενικές υποθέσεις του Κεφαλαίου 7 για την κατηγορία \mathcal{X} . Η πλήρης τώρα υποκατηγορία $R\text{-Proj}$ των προβολικών αριστερών R -προτύπων της $R\text{-GProj}$, είναι προσθετική και κλειστή σε ισομορφισμούς, σε ευθείς προσθετέους, καθώς και σε τυχαία ευθέα αθροίσματα στην $R\text{-Mod}$. Για να εφαρμόσουμε λοιπόν την θεωρία των Auslander-Buchweitz για το ζεύγος $(R\text{-GProj}, R\text{-Proj})$, αρκεί να αποδείξουμε ότι η $R\text{-Proj}$ είναι ένας ενέσιμος συγγενήτορας για την $R\text{-GProj}$. Αρχικά, η Παρατήρηση (5.1.3) μας δίνει για κάθε G-προβολικό αριστερό R -πρότυπο M , μια σύντομη ακριβή ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow P_0 \longrightarrow G \longrightarrow 0,$$

όπου το P_0 είναι προβολικό και το G είναι G-προβολικό. Άρα, η $R\text{-Proj}$ είναι ένας συγγενήτορας για την $R\text{-GProj}$. Επιπλέον, το Λήμμα (5.1.6) μας εξασφαλίζει ότι η $R\text{-Proj}$ αποτελεί έναν ενέσιμο συγγενήτορα για την $R\text{-GProj}$. Επομένως, η κατηγορία $R\text{-Proj}$ ικανοποιεί τις γενικές υποθέσεις του Κεφαλαίου 7 για την κατηγορία ω . Παρατηρώντας τώρα ότι:

$$\widehat{R\text{-GProj}} = \{ {}_R M \mid \text{Gpd}_R M < \infty \} \quad \& \quad \widehat{\mathcal{L}} := \widehat{R\text{-Proj}} = R\text{-Proj}^{<\infty} = \{ {}_R M \mid \text{pd}_R M < \infty \}$$

έχουμε ότι για κάθε προσηταιριστικό δακτύλιο με μονάδα R , το ζεύγος $(R\text{-GProj}, R\text{-Proj}^{<\infty})$ είναι ένα πλήρες συστρεπτικό ζεύγος στην $\widehat{R\text{-GProj}}$.

Νωρίτερα είδαμε ότι αν ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος n -Gorenstein, τότε $\widehat{R\text{-GInj}} = R\text{-Mod}$. Φυσιολογικά λοιπόν προκύπτει το ερώτημα αν υπεράνω ενός δακτυλίου n -Gorenstein R , ισχύει ότι $R\text{-Mod} = \widehat{R\text{-GProj}}$.

Λήμμα 8.2.16. Έστω R ένας δακτύλιος n -Gorenstein. Τότε η κλάση $\mathcal{L} := R\text{-Inj}^{<\infty}$ που αποτελείται από όλα τα αριστερά R -πρότυπα με πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση, είναι αριστερά προσεγγίσιμη (preenveloping).

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [27, Lemma 10.2.13] ■

Το Λήμμα (8.2.16), μας εξασφαλίζει ότι υπεράνω ενός δακτυλίου n -Gorenstein R , κάθε αριστερό R -πρότυπο δέχεται μια αριστερή \mathcal{L} -προσέγγιση, όπου $\mathcal{L} = R\text{-Inj}^{<\infty}$. Μάλιστα, κάθε τέτοια προσέγγιση είναι απαραίτητα μονομορφισμός, διότι η κλάση \mathcal{L} των αριστερών R -προτύπων με πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση, περιέχει όλα τα ενέσιμα αριστερά R -πρότυπα. Χρησιμοποιώντας τώρα το αποτέλεσμα αυτό, αποδεικνύουμε ότι η πλήρης υποκατηγορία των G-προβολικών προτύπων είναι ακριβώς η αριστερή Ext-ορθογώνια υποκατηγορία των προβολικών προτύπων.

Θεώρημα 8.2.17. Αν R είναι ένας δακτύλιος n -Gorenstein, τότε

$$R\text{-GProj} = {}^\perp(R\text{-Proj}).$$

Απόδειξη. Προφανώς, ισχύει ότι $R\text{-GProj} \subseteq {}^\perp(R\text{-Proj})$. Για την αντίστροφη κατεύθυνση, θεωρούμε ένα $M \in {}^\perp(R\text{-Proj})$, και έστω $f: M \rightarrow L$ μια αριστερή \mathcal{L} -προσέγγιση του M , η οποία είναι μονομορφισμός. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι το αριστερό R -πρότυπο M είναι G -προβολικό. Διαλέγουμε μια σύντομη ακριβή ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα

$$0 \rightarrow K \rightarrow P_0 \xrightarrow{\delta} L \rightarrow 0, \quad (8.38)$$

όπου το P_0 είναι προβολικό. Τότε επειδή ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος n -Gorenstein, και το $L \in \mathcal{L}$, έπεται ότι η προβολική διάσταση του L είναι πεπερασμένη. Έτσι, από την ακριβή ακολουθία (8.38), συμπεραίνουμε ότι η προβολική διάσταση του K είναι επίσης πεπερασμένη. Υπάρχει λοιπόν ένας φυσικός αριθμός m , και μια προβολική ανάλυση του K ελάχιστου μήκους m :

$$\ell: \quad 0 \rightarrow Q_m \rightarrow Q_{m-1} \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_0 \rightarrow K \rightarrow 0.$$

«Σπάζοντας» την ακριβή ακολουθία ℓ σε σύντομες ακριβείς ακολουθίες για κάθε $j = 0, \dots, m-1$,

$$\ell_j: \quad 0 \rightarrow K_{j+1} \rightarrow Q_j \rightarrow K_j \rightarrow 0,$$

όπου $K_0 = K$ και $K_m = Q_m$, και εφαρμόζοντας στην συνέχεια τον συναλλοίωτο συναρτητή $\text{Hom}_R(M, -)$ στις ακριβείς ακολουθίες $\ell_{m-1}, \ell_{m-2}, \dots, \ell_0$, (με αυτή τη σειρά), οδηγούμαστε χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι το M είναι αντικείμενο της ${}^\perp(R\text{-Proj})$, επαγωγικά στο συμπέρασμα ότι $\text{Ext}_R^i(M, K) = 0$ για κάθε $i \geq 1$. Η ισότητα αυτή για $i = 1$, μας εξασφαλίζει ότι η επαγόμενη ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$\text{Hom}_R(M, P_0) \xrightarrow{\delta_*} \text{Hom}_R(M, L) \rightarrow 0,$$

είναι ακριβής. Συνεπώς, υπάρχει ένας ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων $g: M \rightarrow P_0$, έτσι ώστε $\delta_*(g) = f$, ή ισοδύναμα, $\delta \circ g = f$. Προφανώς, ο g είναι μονομορφισμός, αφού ο f είναι μονομορφισμός. Ισχυριζόμαστε τώρα ότι ο μονομορφισμός g είναι επίσης μια αριστερή \mathcal{L} -προσέγγιση του M . Για να διαπιστώσουμε τον ισχυρισμό αυτόν, χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι ο f είναι μια αριστερή \mathcal{L} -προσέγγιση του M . Αρχικά, το Θεώρημα (8.1.17) μας δίνει ότι το $P_0 \in \mathcal{L}$, διότι ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος n -Gorenstein, και το P_0 είναι ένα προβολικό αριστερό R -πρότυπο. Θεωρούμε ένα αντικείμενο L' της \mathcal{L} , και έναν ομομορφισμό αριστερών R -προτύπων $h: M \rightarrow L'$. Επειδή ο f είναι μια αριστερή \mathcal{L} -προσέγγιση του M , υπάρχει ένας ομομορφισμός αριστερών R -προτύπων $\rho: L \rightarrow L'$ έτσι ώστε $f^*(\rho) = h$, ή $\rho \circ f = h$. Όμως, $\delta \circ g = f$. Έτσι τελικά, έχουμε ότι $\rho \circ \delta \circ g = h$, και κατ' επέκταση, ότι $g^*(\rho \circ \delta) = h$. Επομένως, έπεται ότι η ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$\text{Hom}_R(P_0, L') \xrightarrow{g^*} \text{Hom}_R(M, L') \rightarrow 0,$$

είναι ακριβής για κάθε $L' \in \mathcal{L}$, και άρα εξ ορισμού, ότι ο μονομορφισμός g είναι επίσης μια αριστερή \mathcal{L} -προσέγγιση του M . Αν θεωρήσουμε λοιπόν τη σύντομη ακριβή ακολουθία

$$\mathcal{J}: \quad 0 \rightarrow M \xrightarrow{g} P_0 \rightarrow C \rightarrow 0,$$

όπου $C = \text{Coker } g$, τότε προφανώς ισχύει ότι $\text{Ext}_R^1(C, L') = 0$ για κάθε $L' \in \mathcal{L}$. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, καθώς και το Θεώρημα (8.1.17) ξανά, έχουμε ότι $\text{Ext}_R^1(C, P) = 0$ για κάθε προβολικό αριστερό R -πρότυπο P . Επιπλέον, αν για οποιοδήποτε προβολικό αριστερό R -πρότυπο P , εφαρμόσουμε τον αντισυναλλοίωτο συναρτητή $\text{Hom}_R(-, P)$ στην σύντομη ακριβή ακολουθία \mathcal{J} , τότε επάγεται η ακριβής ακολουθία

$$0 = \text{Ext}_R^i(M, P) \rightarrow \text{Ext}_R^{i+1}(C, P) \rightarrow \text{Ext}_R^{i+1}(P_0, P) = 0, \quad (8.39)$$

για κάθε $i \geq 1$, όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει από την υπόθεση ότι το M είναι αντικείμενο της ${}^\perp(R\text{-Proj})$, ενώ η δεύτερη, από το γεγονός ότι το P_0 είναι ένα προβολικό αριστερό R -πρότυπο.

Άρα, από την ακριβή ακολουθία (8.39), συμπεραίνουμε ότι $\text{Ext}_R^i(C, P) = 0$ για κάθε $i \geq 2$ και για κάθε προβολικό αριστερό R -πρότυπο P . Ο συνδυασμός λοιπόν των προηγούμενων αποτελεσμάτων, μας δίνει ότι $C \in {}^\perp(R\text{-Proj})$. Στην συνέχεια, εφαρμόζουμε την προηγούμενη διαδικασία, αντικαθιστώντας το M με το C . Έτσι τελικά, οδηγούμαστε σε μια ακριβή ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{g} P_0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_2 \longrightarrow \cdots, \quad (8.40)$$

όπου κάθε P_i για $i = 0, 1, \dots$, είναι προβολικό, η οποία παραμένει ακριβής μετά την εφαρμογή του αντισυναλλοίωτου συναρτητή $\text{Hom}_R(-, P)$ για οποιοδήποτε προβολικό αριστερό R -πρότυπο P . Δηλαδή, η ακολουθία (8.40) είναι μια ακριβής δεξιά $R\text{-Proj}$ -ανάλυση του αντικειμένου M της ${}^\perp(R\text{-Proj})$. Επομένως, χρησιμοποιώντας την Πρόταση (5.1.8), καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το M είναι G -προβολικό, όπως επιθυμούσαμε. ■

Πρόταση 8.2.18. *Αν ο R είναι ένας δακτύλιος n -Gorenstein, και M είναι ένα αριστερό R -πρότυπο, τότε κάθε i -ιοστή $R\text{-Proj}$ -συζυγία του M , $\Omega_i(M)$, είναι ένα G -προβολικό αριστερό R -πρότυπο για κάθε $i \geq n$.*

Απόδειξη. Έστω R ένας δακτύλιος n -Gorenstein, και

$$\cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

μια προβολική ανάλυση ενός αριστερού R -πρότυπου M . Τότε για κάθε $i \geq 1$, και για κάθε προβολικό αριστερό R -πρότυπο P , παίρνουμε ότι

$$\text{Ext}_R^i(\Omega_n, P) \cong \text{Ext}^{i+n}(M, P) = 0,$$

διότι ο R είναι δακτύλιος n -Gorenstein, και $\text{id}_R P \leq n$ για κάθε προβολικό αριστερό R -πρότυπο P . Άρα, $\Omega_n(M) \in {}^\perp(R\text{-Proj})$. Όμως, ${}^\perp(R\text{-Proj}) = R\text{-GProj}$. Έτσι τελικά, έχουμε ότι η n -ιοστή $R\text{-Proj}$ -συζυγία $\Omega_n(M)$ του M , είναι ένα G -προβολικό αριστερό R -πρότυπο. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, καθώς και το γεγονός ότι η $R\text{-GProj}$ είναι resolving υποκατηγορία της $R\text{-Mod}$, έπεται ότι κάθε i -ιοστή $R\text{-Proj}$ -συζυγία του M , $\Omega_i(M)$, είναι ένα G -προβολικό αριστερό R -πρότυπο για κάθε $i \geq n$. ■

Ως συνέπεια της Πρότασης (8.2.18), παίρνουμε ότι:

Πόρισμα 8.2.19. *Έστω R ένας δακτύλιος n -Gorenstein. Τότε για κάθε αριστερό R -πρότυπο M , ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:*

1. $\text{Gpd}_R M \leq n$.
2. Αν $M \neq 0$, τότε $\text{Gpd}_R M = \text{pd}_R M$, αν και μόνο αν, $\text{pd}_R M < \infty$.

Απόδειξη. 1) Έστω M ένα αριστερό R -πρότυπο, και

$$\cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

μια προβολική ανάλυση του M . Τότε η Πρόταση (8.2.18), μας δίνει ότι η n -ιοστή $R\text{-Proj}$ -συζυγία $\Omega_n(M)$ του M , είναι ένα G -προβολικό αριστερό R -πρότυπο. Συνεπώς, η ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow \Omega_n(M) \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow P_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

είναι μια G -προβολική ανάλυση του M μήκους n , διότι $\Omega_n(M) \in R\text{-GProj}$ και $R\text{-Proj} \subseteq R\text{-GProj}$. Άρα, $\text{Gpd}_R M \leq n$.

2) Έστω M ένα οποιοδήποτε μη μηδενικό αριστερό R -πρότυπο M . Αν $\text{pd}_R M < \infty$, τότε το Θεώρημα (6.1.27), μας εξασφαλίζει ότι $\text{Gpd}_R M = \text{pd}_R M$. Για την αντίστροφη συνεπαγωγή, υποθέτουμε ότι $\text{Gpd}_R M = \text{pd}_R M$. Τότε χρησιμοποιώντας το 1), παίρνουμε ότι $\text{pd}_R M < \infty$. ■

Το Πόρισμα (8.2.19), μας εξασφαλίζει ότι αν ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος n -Gorenstein, τότε $R\text{-Mod} = R\text{-GProj}$, και μάλιστα, $\text{Gpd}_R M \leq n$ για κάθε αριστερό R -πρότυπο M . Εφαρμόζοντας λοιπόν την θεωρία των Auslander-Buchweitz, έχουμε ότι το ζεύγος $(R\text{-GProj}, R\text{-Proj}^{<\infty})$ είναι ένα πλήρες συστρεπτικό ζεύγος στην κατηγορία των αριστερών R -προτύπων, όταν ο R είναι δακτύλιος n -Gorenstein. Δηλαδή, στην περίπτωση που ο R είναι δακτύλιος n -Gorenstein, κάθε αριστερό R -πρότυπο δέχεται μια ειδική δεξιά G -προβολική προσέγγιση, και μια ειδική αριστερή προσέγγιση από αριστερά R -πρότυπα με πεπερασμένη προβολική διάσταση. Σημειώνουμε ότι υπεράνω ενός οποιουδήποτε δακτυλίου, κάθε δεξιά G -προβολική προσέγγιση, αν υπάρχει, είναι απαραίτητα επιμορφισμός, αφού κάθε πρότυπο είναι η ομομορφική εικόνα ενός προβολικού προτύπου και κάθε προβολικό πρότυπο είναι G -προβολικό. Έτσι, για έναν δακτύλιο n -Gorenstein, κάθε (ειδική) δεξιά G -προβολική προσέγγιση είναι επιμορφισμός, και κάθε (ειδική) αριστερή προσέγγιση από αριστερά R -πρότυπα με πεπερασμένη προβολική διάσταση είναι πάντα μονομορφισμός. Συνεπώς, αν R είναι ένας δακτύλιος n -Gorenstein, τότε για κάθε αριστερό R -πρότυπο, υπάρχει μια ακριβής αριστερή $R\text{-GProj}$ -ανάλυση, και μια ακριβής δεξιά ανάλυση από αριστερά R -πρότυπα με πεπερασμένη προβολική διάσταση. Ας σημειώσουμε ακόμη ότι κάθε αποτέλεσμα του Κεφαλαίου 6 για πρότυπα με πεπερασμένη G -προβολική διάσταση, γενικεύεται για κάθε πρότυπο υπεράνω ενός δακτυλίου n -Gorenstein.

Το ακόλουθο Θεώρημα είναι η δυϊκή εκδοχή του Θεωρήματος (8.2.5).

Θεώρημα 8.2.20. *Αν ο R είναι δακτύλιος n -Gorenstein, τότε για κάθε αριστερό R -πρότυπο M , υπάρχει μια δεξιά G -προβολική προσέγγιση $f: G \rightarrow M$ του M η οποία είναι επιμορφισμός, έτσι ώστε $\text{Ker } f = 0$ για $n = 0$, και $\text{pd}_R \text{Ker } f \leq n - 1$ για $n \geq 1$.*

Απόδειξη. Δυϊκά, με την απόδειξη του Θεωρήματος (8.2.5). ■

Παρατήρηση 8.2.21. *Αν ο R είναι δακτύλιος n -Gorenstein, και M είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό R -πρότυπο, τότε μπορούμε να διαλέξουμε μια δεξιά G -προβολική προσέγγιση $f: G \rightarrow M$ του M , όπου το G είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο και G -προβολικό αριστερό R -πρότυπο. Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση αυτή, ο πυρήνας $\text{Ker } f$ είναι επίσης πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό R -πρότυπο, αφού ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether, και το G είναι πεπερασμένα παραγόμενο.*

Πόρισμα 8.2.22. *Υποθέτουμε ότι ο R είναι δακτύλιος n -Gorenstein, και έστω $f: G \rightarrow M$ μια δεξιά G -προβολική προσέγγιση ενός αριστερού R -προτύπου M . Τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

1. $\text{pd}_R M < \infty$.
2. Το G -προβολικό αριστερό R -πρότυπο G είναι προβολικό.
3. Ο ομομορφισμός $f: G \rightarrow M$ είναι μια δεξιά $R\text{-Proj}$ -προσέγγιση του M .

Απόδειξη. Θεωρούμε τη σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \rightarrow \text{Ker } f \rightarrow G \xrightarrow{f} M \rightarrow 0,$$

όπου $\text{pd}_R \text{Ker } f \leq n - 1$. Οι συνεπαγωγές $(3 \Rightarrow 2)$ και $(2 \Rightarrow 1)$ είναι προφανείς. Η συνεπαγωγή $(1 \Rightarrow 3)$ προκύπτει κατά δυϊκό τρόπο με την απόδειξη του Πορίσματος (8.2.6), χρησιμοποιώντας ωστόσο το Horseshoe Lemma για προβολικές αναλύσεις, την Πρόταση (5.1.7), καθώς και την Παρατήρηση (4.2.1). ■

Πρόταση 8.2.23. *Αν R είναι ένας δακτύλιος n -Gorenstein, τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες για κάθε αριστερό R -πρότυπο M :*

1. Το M είναι G -προβολικό.

2. $\text{Ext}_R^i(M, L) = 0$, για κάθε $i > 0$ και για κάθε αριστερό R -πρότυπο L με πεπερασμένη προβολική διάσταση.
3. $\text{Ext}_R^1(M, L) = 0$, για κάθε αριστερό R -πρότυπο L με πεπερασμένη προβολική διάσταση.
4. $\text{Ext}_R^i(M, P) = 0$, για κάθε $i > 0$ και για κάθε προβολικό αριστερό R -πρότυπο P .

Επιπλέον, αν το M είναι πεπερασμένα παραγόμενο, τότε οι προηγούμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες με:

5. $\text{Ext}_R^i(M, L) = 0$ για κάθε $i > 0$ και για κάθε πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό R -πρότυπο L με πεπερασμένη προβολική διάσταση.
6. $\text{Ext}_R^1(M, L) = 0$ για κάθε $i > 0$ και για κάθε πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό R -πρότυπο L με πεπερασμένη προβολική διάσταση.

Απόδειξη. Έστω R ένας δακτύλιος n -Gorenstein, και M ένα αριστερό R -πρότυπο. Η συνεπαγωγή $(1 \Rightarrow 2)$ προκύπτει χρησιμοποιώντας το Λήμμα (5.1.6), ενώ η ισοδυναμία $(1 \Leftrightarrow 4)$, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα (8.2.17). Επιπλέον, η συνεπαγωγή $(2 \Rightarrow 3)$ είναι τετριμμένη.

$(3 \Rightarrow 1)$: Υποθέτουμε ότι ισχύει το 3). Επειδή ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος n -Gorenstein, υπάρχει μια σύντομη ακριβής ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow G \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

όπου G είναι G -προβολικό και $\text{pd}_R L < \infty$. Έτσι, χρησιμοποιώντας την υπόθεση, παίρνουμε ότι η προηγούμενη σύντομη ακριβής ακολουθία είναι διασπασίμη. Συνεπώς, το M είναι G -προβολικό, ως ευθύ προσθετός του G -προβολικού αριστερού R -πρότυπου G .

Άρα, $1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 4$. Υποθέτουμε τώρα ότι το M είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Οι συνεπαγωγές $(5 \Rightarrow 6)$ και $(2 \Rightarrow 5)$ είναι προφανείς. Για να αποδείξουμε λοιπόν ότι οι παραπάνω συνθήκες είναι ισοδύναμες, αρκεί να δείξουμε την συνεπαγωγή $(6 \Rightarrow 1)$.

$(6 \Rightarrow 1)$: Έστω ότι ισχύει το 6). Επειδή ο R είναι δακτύλιος n -Gorenstein, και το M είναι πεπερασμένα παραγόμενο, μπορούμε να διαλέξουμε μια σύντομη ακριβή ακολουθία από αριστερά R -πρότυπα

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow G' \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

όπου G' είναι πεπερασμένα παραγόμενο και G -προβολικό, και K είναι πεπερασμένα παραγόμενο με πεπερασμένη προβολική διάσταση. Τότε η υπόθεση μας εξασφαλίζει ότι η προηγούμενη σύντομη ακριβής ακολουθία είναι διασπασίμη, και άρα, ότι το M είναι ευθύ προσθετός του G -προβολικού αριστερού R -πρότυπου G' . Επομένως, έπεται ότι το M είναι G -προβολικό, αφού η R -GProj είναι κλειστή σε ευθείς προσθετέους στην R -Mod. ■

Από την παραπάνω πρόταση έπεται ότι:

$${}^\perp(R\text{-Proj}^{<\infty}) = {}^\perp(R\text{-Inj}^{<\infty}) = R\text{-GProj} = {}^\perp(R\text{-Proj})$$

Έχοντας αποδείξει την ύπαρξη δεξιών G -προβολικών προσεγγίσεων για κάθε (αριστερό) πρότυπο υπεράνω ενός δακτυλίου n -Gorenstein, το επόμενο βήμα είναι να εξετάσουμε την ύπαρξη ελάχιστων δεξιών G -προβολικών προσεγγίσεων υπεράνω δακτυλίων n -Gorenstein.

Εν γένει, υπεράνω δακτυλίων n -Gorenstein, η κλάση των G -προβολικών προτύπων δεν είναι ελάχιστα δεξιά προσεγγίσιμη. Για να διαπιστώσουμε τον ισχυρισμό αυτόν, παραθέτουμε το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 8.2.24. Θεωρούμε τον δακτύλιο των ακεραίων \mathbb{Z} . Τότε ο δακτύλιος \mathbb{Z} είναι ένα παράδειγμα δακτυλίου 1-Gorenstein, όπου η κλάση των G -προβολικών \mathbb{Z} -προτύπων δεν είναι ελάχιστα δεξιά προσεγγίσιμη.

Αρχικά, ο \mathbb{Z} ως περιοχή κύριων ιδεωδών, είναι δακτύλιος της Noether. Θεωρούμε τώρα τη σύντομη ακριβή ακολουθία από \mathbb{Z} -πρότυπα

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0. \quad (8.41)$$

Επειδή οι έννοιες «δαιρετά πρότυπα» και «ενέσιμα πρότυπα» υπεράνω μιας περιοχής κύριων ιδεωδών είναι ισοδύναμες, έχουμε ότι τα \mathbb{Z} -πρότυπα \mathbb{Q} και \mathbb{Q}/\mathbb{Z} , είναι ενέσιμα ως δαιρετά. Συνεπώς, από τη σύντομη ακριβή ακολουθία (8.41), συμπεραίνουμε ότι $\text{id}_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \leq 1$. Στην πραγματικότητα, ισχύει η ισότητα στην προηγούμενη ανίσωση, αφού αλλιώς, δηλαδή αν $\text{id}_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} = 0$, τότε ο δακτύλιος \mathbb{Z} θα είναι ενέσιμο \mathbb{Z} -πρότυπο, και άρα, δαιρετό \mathbb{Z} -πρότυπο, αποτέλεσμα το οποίο είναι αδύνατο φυσικά. Επομένως, ο δακτύλιος \mathbb{Z} είναι δακτύλιος 1-Gorenstein. Από το Κεφάλαιο 3, γνωρίζουμε ότι κάθε περιοχή κύριων ιδεωδών είναι ένας κληρονομικός δακτύλιος, καθώς και ότι η ολική ομολογική διάσταση ενός κληρονομικού δακτυλίου, είναι μικρότερη ή ίση του 1. Άρα, αφού ο δακτύλιος \mathbb{Z} είναι περιοχή κύριων ιδεωδών, έπεται ότι $\text{gl. dim } \mathbb{Z} \leq 1$. Για την ακρίβεια, η ολική ομολογική του \mathbb{Z} είναι ακριβώς ίση με 1, διότι αν $\text{gl. dim } \mathbb{Z} = 0$, τότε ο δακτύλιος \mathbb{Z} θα είναι ενέσιμο \mathbb{Z} -πρότυπο, το οποίο είναι αδύνατο. Συνεπώς, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι τα G-προβολικά \mathbb{Z} -πρότυπα, είναι ακριβώς τα προβολικά \mathbb{Z} -πρότυπα. Χάριν πληρότητας, ας σημειώσουμε ότι η κλάση των προβολικών \mathbb{Z} -προτύπων, συμπίπτει με την κλάση των ελεύθερων \mathbb{Z} -προτύπων, δες Πρόταση (3.2.34). Έτσι, υπεράνω του δακτυλίου 1-Gorenstein \mathbb{Z} , μια δεξιά G-προβολική προσέγγιση είναι ακριβώς μια δεξιά προβολική προσέγγιση. Αν λοιπόν για κάθε \mathbb{Z} -πρότυπο, υπήρχε ελάχιστη δεξιά G-προβολική προσέγγιση, δηλαδή, ελάχιστη δεξιά προβολική προσέγγιση, τότε ο δακτύλιος \mathbb{Z} θα ήταν τέλειος, (perfect ring). Ωστόσο, το Θεώρημα (4.2.10) μας εξασφαλίζει ότι υπεράνω ενός τέλειου δακτυλίου, κάθε επίπεδο πρότυπο είναι προβολικό. Άρα, αν ο δακτύλιος \mathbb{Z} ήταν τέλειος, τότε κάθε επίπεδο \mathbb{Z} -πρότυπο, θα ήταν προβολικό. Όμως, το Παράδειγμα (3.2.39) μας εξασφαλίζει ότι το \mathbb{Q} ως \mathbb{Z} -πρότυπο, είναι επίπεδο αλλά όχι προβολικό. Επομένως, η κλάση των G-προβολικών \mathbb{Z} -προτύπων δεν είναι ελάχιστα δεξιά προσεγγίσιμη.

Φυσιολογικά λοιπόν η προσοχή μας τώρα στρέφεται στην αναζήτηση δακτυλίων υπεράνω των οποίων κάθε πρότυπο μπορεί να προσεγγισθεί με ελάχιστο τρόπο από ένα G-προβολικό πρότυπο.

Θεώρημα 8.2.25. Έστω \mathcal{A} μια αβελιανή κατηγορία με αρκετά προβολικά και ενέσιμα αντικείμενα, και έστω d κάποιος φυσικός αριθμός. Υποθέτουμε ότι:

1. $\sup\{\text{pd}_{\mathcal{A}} I \mid I \in \text{ob}(\text{Inj-}\mathcal{A})\} \leq d$.
2. $\sup\{\text{id}_{\mathcal{A}} P \mid P \in \text{ob}(\text{Proj-}\mathcal{A})\} \leq d$.
3. Η πλήρης υποκατηγορία $\text{Proj-}\mathcal{A}$ της \mathcal{A} , είναι αριστερά προσεγγίσιμη στην \mathcal{A} .

Τότε

1. ${}^{\perp}(\text{Proj-}\mathcal{A}) = \text{GProj-}\mathcal{A}$.
2. $\widehat{\text{GProj-}\mathcal{A}} = \mathcal{A}$.

Απόδειξη. Κατά δυϊκό τρόπο με την απόδειξη του Θεωρήματος (8.2.1), αντικαθιστώντας ωστόσο, την αβελιανή κατηγορία $R\text{-Mod}$ όπου R είναι δακτύλιος n -Gorenstein, με την αβελιανή κατηγορία \mathcal{A} η οποία πληρεί τις προηγούμενες υποθέσεις. ■

Παρατήρηση 8.2.26. Έστω R δακτύλιος με μονάδα, και υποθέτουμε ότι:

- (i) $\sup\{\text{pd}_R I \mid I \in \text{ob}(R\text{-Inj})\} \leq d$.
- (ii) $\sup\{\text{id}_R P \mid P \in \text{ob}(R\text{-Proj})\} \leq d$.

Αν R είναι δεξιά συναφής και αριστερά τέλειος, τότε από το Κεφάλαιο 4, γνωρίζουμε ότι η $R\text{-Proj}$ είναι αριστερά προσεγγίσιμη. Εφαρμόζοντας λοιπόν το Θεώρημα (8.2.25), παίρνουμε ότι

$${}^{\perp}(R\text{-Proj}) = R\text{-GProj} \quad \& \quad \widehat{R\text{-GProj}} = R\text{-Mod}.$$

Έτσι, από την θεωρία των Auslander-Buchweitz προκύπτει ότι το ζεύγος $(R\text{-GProj}, R\text{-Proj}^{<\infty})$ είναι πλήρες συστρεπτικό ζεύγος στην $R\text{-Mod}$. Επιπλέον, αν ο δακτύλιος R είναι δεξιά συναφής και αριστερά τέλειος, τότε ο R ως αριστερό R -πρότυπο είναι καθαρά ενέσιμο, βλέπε [42], και άρα, ${}^{\perp}R\text{-Proj} = {}^{\perp}R$, και επιπρόσθετα, η $R\text{-GProj}$ είναι κλειστή στα ευθέα όρια. Συνεπώς, το συστρεπτικό ζεύγος $(R\text{-GProj}, R\text{-Proj}^{<\infty})$ είναι τέλειο, ως πλήρες και κλειστό συστρεπτικό ζεύγος. Με άλλα λόγια, αν ο R είναι δεξιά συναφής και αριστερά τέλειος δακτύλιος και ικανοποιεί τις συνθήκες (i) και (ii), τότε η κλάση $R\text{-GProj}$ είναι ελάχιστα δεξιά προσεγγίσιμη (covering), και η κλάση $R\text{-Proj}^{<\infty}$ είναι ελάχιστα αριστερά προσεγγίσιμη (enveloping).

Πόρισμα 8.2.27. Έστω R ένας δακτύλιος n -Gorenstein. Υποθέτουμε ότι ο R είναι ένας (αριστερός και δεξιός) δακτύλιος του Artin. Τότε:

1. $\widehat{R\text{-GProj}} = R\text{-Mod} = \widehat{R\text{-GInj}}$.
2. Τα ζεύγη $(R\text{-GProj}, R\text{-Proj}^{<\infty})$ και $(R\text{-Inj}^{<\infty}, R\text{-GInj})$ είναι τέλεια στην κατηγορία $R\text{-Mod}$.

Απόδειξη. Επειδή ο R είναι δακτύλιος n -Gorenstein, έπεται ότι $\text{Gpd}_R M \leq n$ και $\text{Gid}_R M \leq n$ για κάθε αριστερό R -πρότυπο M , καθώς και ότι:

$$\sup\{\text{pd}_R I \mid I \in \text{ob}(R\text{-Inj})\} \leq n \quad \& \quad \sup\{\text{id}_R P \mid P \in \text{ob}(R\text{-Proj})\} \leq n.$$

Επιπλέον, έχουμε ότι το ζεύγος $(R\text{-Inj}^{<\infty}, R\text{-GInj})$ είναι τέλειο συστρεπτικό ζεύγος στην $R\text{-Mod}$, και το ζεύγος $(R\text{-GProj}, R\text{-Proj}^{<\infty})$ είναι πλήρες συστρεπτικό ζεύγος στην $R\text{-Mod}$. Μένει να δείξουμε λοιπόν ότι το πλήρες συστρεπτικό ζεύγος $(R\text{-GProj}, R\text{-Proj}^{<\infty})$ είναι τέλειο στην $R\text{-Mod}$. Η υπόθεση ότι ο δακτύλιος n -Gorenstein R , είναι δακτύλιος του Artin, μας δίνει ιδιαίτερα ότι ο R είναι δεξιά συναφής και αριστερά τέλειος δακτύλιος. Έτσι χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση (8.2.26), παίρνουμε ότι το συστρεπτικό ζεύγος $(R\text{-GProj}, R\text{-Proj}^{<\infty})$ είναι τέλειο στην $R\text{-Mod}$, όπως επιθυμούσαμε. ■

Ολοκληρώνουμε το παρόν κεφάλαιο, συνοψίζοντας τα αποτελέσματα της ενότητας αυτής. Είδαμε ότι:

- Αν R είναι δακτύλιος n -Gorenstein, τότε $\widehat{R\text{-GProj}} = R\text{-Mod} = \widehat{R\text{-GInj}}$, και ιδιαίτερα,

$$\text{Gpd}_R M \leq n \quad \& \quad \text{Gid}_R M \leq n,$$

για κάθε αριστερό R -πρότυπο M .

- Αν R είναι δακτύλιος n -Gorenstein, τότε η κλάση $R\text{-GInj}$ των G -ενέσιμων αριστερών R -προτύπων είναι ελάχιστα αριστερά προσεγγίσιμη (enveloping), και ελάχιστα δεξιά προσεγγίσιμη (covering).
- Αν R είναι δακτύλιος n -Gorenstein, τότε η κλάση $R\text{-GProj}$ των G -προβολικών αριστερών R -προτύπων είναι δεξιά προσεγγίσιμη (precovering), αλλά όχι εν γένει ελάχιστα δεξιά προσεγγίσιμη.
- Αν R είναι δεξιά συναφής και αριστερά τέλειος, έτσι ώστε

$$\sup\{\text{pd}_R I \mid I \in \text{ob}(R\text{-Inj})\} \leq d \quad \& \quad \sup\{\text{id}_R P \mid P \in \text{ob}(R\text{-Proj})\} \leq d,$$

για κάποιον φυσικό αριθμό d , τότε η κλάση $R\text{-GProj}$ είναι ελάχιστα δεξιά προσεγγίσιμη (covering).

- Αν R είναι δακτύλιος Gorenstein και δακτύλιος του Artin, τότε η κλάση $R\text{-GProj}$ είναι ελάχιστα δεξιά προσεγγίσιμη, και η κλάση $R\text{-GInj}$ είναι ελάχιστα αριστερά προσεγγίσιμη.

Παράρτημα Α'

Ανοιχτά Προβλήματα Και Εικασίες

Στο παρόν παράρτημα, παραθέτουμε και αναλύουμε εν συντομία κάποια ανοιχτά προβλήματα και εικασίες τα οποία ανακύπτουν από την εκτεθείσα θεωρία και η επίλυση των οποίων θα έχει σημαντικές συνέπειες στην περαιτέρω ανάπτυξη της Ομολογικής Άλγεβρας Gorenstein σε κατηγορίες προτύπων υπεράνω δακτυλίων οι οποίοι δεν είναι απαραίτητα Gorenstein, καθώς και άλλων συσχετιζόμενων ερευνητικών περιοχών.

1. Για ποιους δακτυλίους R , η κλάση $R\text{-GProj}$ είναι (ελάχιστα) δεξιά προσεγγίσιμη;
 - Είδαμε στο Κεφάλαιο 8 ότι αν ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος του Artin, ή γενικότερα αριστερά τέλειος και δεξιά συναφής, και ικανοποιεί την ιδιότητα Gorenstein, τότε η κλάση $R\text{-GProj}$ είναι (ελάχιστα) δεξιά προσεγγίσιμη. Είναι ενδιαφέρον να γνωρίζουμε αν για κάθε δακτύλιο R η κλάση $R\text{-GProj}$ είναι (ελάχιστα) δεξιά προσεγγίσιμη. Θετική απάντηση σ' αυτό το πρόβλημα οδηγεί στην περαιτέρω ανάπτυξη της Ομολογικής Άλγεβρας Gorenstein σε κατηγορίες προτύπων υπεράνω τυχόντος δακτυλίου.
2. Για ποιους δακτυλίους R , ισχύει ότι $R\text{-GProj} = R\text{-Proj}$;
 - Αν ο δακτύλιος R έχει πεπερασμένη αριστερή ολική ομολογική διάσταση, τότε όπως είδαμε ισχύει η ισότητα $R\text{-GProj} = R\text{-Proj}$. Με βάση κάποια παραδείγματα από την Μεταθετική Άλγεβρα (δακτύλιοι Golod), προκύπτει ότι υπάρχουν δακτύλιοι R άπειρης αριστερής ομολογικής διάστασης για τους οποίους ισχύει ότι $R\text{-GProj} = R\text{-Proj}$. Αυτοί οι δακτύλιοι προφανώς έχουν πεπερασμένη ολική ομολογική διάσταση αν επιπλέον είναι δακτύλιοι Gorenstein. Είναι ενδιαφέρον να γνωρίζουμε την δομή δακτυλίων, άπειρης ομολογικής διάστασης, για τους οποίους ισχύει η ισότητα $R\text{-GProj} = R\text{-Proj}$, καθώς τότε η Ομολογική Άλγεβρα Gorenstein συμπίπτει με συνήθη Ομολογική Άλγεβρα.
3. **Gorenstein Symmetry Conjecture:** Αν ο R είναι δακτύλιος της Noether με $\text{id}_R R < \infty$, τότε $\text{id}_R R_R < \infty$; Με άλλα λόγια, αν R είναι ένας δακτύλιος της Noether με πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση από τη μία πλευρά, τότε είναι ο R δακτύλιος Gorenstein;
 - Το πρόβλημα παραμένει ανοιχτό ακόμα και στην ειδική περίπτωση κατά την οποία ο δακτύλιος R είναι μια άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός (άλγεβρικά κλειστού) σώματος. Το ενδιαφέρον για την ισχύ της συνεπαγωγής

$$\text{id}_R R < \infty \implies \text{id}_R R_R < \infty$$

προκύπτει μέσα από διασυνδέσεις με την θεωρία τριγώνων των Auslander-Reiten σε παραγόμενες κατηγορίες προτύπων, καθώς και με άλλες εικασίες ομολογικής φύσης στην Θεωρία Αναπαραστάσεων Αλγεβρών και Ομάδων.

Παράρτημα Β΄

Περίληψη - Abstract

Περίληψη. Ο κεντρικός στόχος της παρούσης Διατριβής είναι η παρουσίαση και ανάλυση σε βάθος των κύριων αποτελεσμάτων της σχετικής ομολογικής θεωρίας υπεράνω ενός δακτυλίου η οποία βασίζεται στις κλάσεις των Gorenstein-προβολικών και Gorenstein-ενέσιμων προτύπων, και η οποία είναι γνωστή στις μέρες μας ως *Ομολογική Άλγεβρα Gorenstein*, καθώς και η μελέτη της δομής της κατηγορίας προτύπων υπεράνω ενός δακτυλίου ο οποίος ικανοποιεί την ιδιότητα Gorenstein.

Σ' αυτό το πλαίσιο, παρουσιάζουμε τα κύρια στοιχεία της θεωρίας προσεγγίσεων προτύπων και συστρεπτικών ζευγών, και αναπτύσσουμε τη βασική θεωρία σχετικών αναλύσεων και ομολογικών διαστάσεων προτύπων με βάση τις κλάσεις των Gorenstein-προβολικών και Gorenstein-ενέσιμων προτύπων. Το ενδιαφέρον μας εστιάζεται στο πρόβλημα ύπαρξης και μοναδικότητας (ελάχιστης) προσέγγισης προτύπων με Gorenstein-προβολικά και Gorenstein-ενέσιμα πρότυπα υπεράνω δακτυλίων οι οποίοι ικανοποιούν διάφορες ομολογικές συνθήκες περατότητας. Ένα από τα βασικά εργαλεία τα οποία χρησιμοποιούμε για την αντιμετώπιση του κεντρικού προβλήματος είναι η θεωρία προσέγγισης μέγιστων αντικειμένων Cohen-Macaulay σε μια αβελιανή κατηγορία η οποία αναπτύχθηκε από τους Auslander-Buchweitz. Τα κεντρικά αποτελέσματα της διατριβής, μεταξύ άλλων, πιστοποιούν την ύπαρξη ελάχιστων τέτοιων προσεγγίσεων προτύπων υπεράνω δακτυλίων Gorenstein.

Abstract. The principal aim of this thesis is to present an in depth analysis of the main results of a relative homological theory over a ring based on Gorenstein-projective and Gorenstein-injective modules, and which nowadays is known as *Homological Algebra Gorenstein*, as well as the study of the structure of the module category of a ring which satisfies the Gorenstein condition.

In this context, we present the main elements of the approximation theory of modules and cotorsion pairs and we develop the basic theory of relative resolutions and homological dimensions of modules based on the classes of Gorenstein-projective and Gorenstein-injective modules. We will focus mainly on the problem of existence and uniqueness of minimal left and right Gorenstein-projective and Gorenstein-injective approximations of modules over rings satisfying various homological finiteness conditions. One of the key tools we use to address the main problem is the approximation theory of maximal Cohen-Macaulay objects in an abelian category developed by Auslander-Buchweitz. The main results of this thesis, among other things, show the existence of such minimal approximations of modules over rings satisfying the Gorenstein condition.

Ευρετήριο

- $(R\text{-GProj}, R\text{-Proj}^{<\infty})$, 292
- $(\mathcal{X}, \hat{\omega})$, 252
- $(\check{\mathcal{F}}, \mathcal{F})$, 257
- $(R\text{-Inj}^{<\infty}, R\text{-GInj})$, 283
- A -inj. dim C , 218
- A -inj. dim \mathcal{B} , 218
- A -proj. dim C , 218
- C -proj. dim \mathcal{B} , 218
- $L_n F$, 101
- $R\text{-GInj}$, 160, 197, 288
- $R\text{-GProj}$, 147, 197
- $R\text{-Inj}$, 83
- $R\text{-Mod}$, 16, 44
- $R\text{-Proj}$, 88
- $R^n F$, 106
- Ab, 44
- Add \mathcal{A} , 205
- \mathcal{A} -cores. dim C , 253
- \mathcal{A} -inj. dim \mathcal{B} , 219
- \mathcal{A} -proj. dim \mathcal{B} , 219
- \mathcal{A} -res. dim C , 204
- $\text{Gid}_R M$, 179
- $\text{Gpd}_R M$, 178
- $\text{Mod-}R$, 16, 44
- $\Omega_n(M)$, 112, 291
- $\Sigma^n(M)$, 112, 281
- $\mathcal{C}(R)$, 76
- $\text{fd}_R M$, 114
- $\text{id}_R M$, 111
- l. gl. dim(R), 114
- $\text{pd}_R M$, 111
- $\check{\mathcal{A}}$, 253
- $\hat{\mathcal{A}}$, 204
- n -ιοστή συνσυζυγία ενός προτύπου, 112
- n -ιοστή συζυγία ενός προτύπου, 112
- Ext_R^n , 108
- Tor_n^R , 104
- ext_R^n , 108
- tor_n^R , 104
- Όριο
 - αντίστροφο, 33
 - ευθύ, 31
- Dimension Shifting, 112
- Horse Shoe Lemma, 106, 126
- Snake Lemma, 18
- coresolving, 141
- resolving, 141
- Ακριβής Ακολουθία
 - καθαρά, 265
 - μακρά, 81, 106, 110
 - προτύπων, 17
 - σε μια αβελιανή κατηγορία, 68
 - συμπλόκων, 79
- Ανάλυση
 - G-ενέσιμη, 178
 - G-επίπεδη, 188
 - G-προβολική, 177
 - (ελάχιστη) δεξιά $R\text{-GInj}$, 283
 - Tate, 146
 - αριστερή, 123
 - αριστερή $R\text{-GProj}$, 292
 - δεξιά, 124
 - ελάχιστη αριστερή, 125
 - ελάχιστη δεξιά, 125
 - ελεύθερη, 27, 41
 - ενέσιμη, 97
 - επίπεδη, 98
 - πλήρης ενέσιμη, 159
 - πλήρης επίπεδη, 167
 - πλήρης προβολική, 146
 - προβολική, 97
- Αντικείμενο, 43
 - αρχικό, 46
 - ενέσιμο, 69
 - μηδενικό, 46
 - πηλίκιο, 61
 - προβολικό, 69
 - τελικό, 46
- Απεικόνιση
 - R -γραμμική, 13
 - R -ισόρροπη, 27
 - κανονική R -ισόρροπη, 28
 - κωνική, 81
- Βάση, 25
- Βασικό Θεώρημα «Αποσύνθεσης», 207, 236

- Δακτύλιος
 0-Gorenstein, 274, 277
 1-Gorenstein, 294
 n -Gorenstein, 274
 Cohen-Macaulay, 201
 Gorenstein, 193, 261
 Iwanaga-Gorenstein, 261
 quasi-Frobenius, 147, 160, 195
 αντίθετος, 10
 αριστερά συναφής, 133
 αριστερά τέλειος, 130, 295
 δεξιά συναφής, 133, 295
 ημιαπλός, 193
 κληρονομικός, 89
 της Noether, 40, 42
 του Artin, 133, 195, 295
- Διάγραμμα
 pullback, 35
 pushout, 36
- Διάσταση
 G-ενέσιμη, 179
 G-επίπεδη, 188
 G-προβολική, 178
 αριστερή ολική ομολογική, 114, 198
 δεξιά ολική ομολογική, 196
 ενέσιμη, 111, 161
 επίπεδη, 114
 προβολική, 111, 150
- Διαφορικό, 75, 76
- Διπρότυπο, 12
- Εικόνα
 ενός μορφισμού σε μια αβελιανή κατηγορία, 67
 ενός ομομορφισμού προτύπων, 15
 ενέσιμο περίβλημα, 127
- Επέκταση, 70
- Επιμορφισμός
 αποδεκτός, 208
 σε κατηγορίες προτύπων, 16
 σε μια αυθαίρετη κατηγορία, 45
- Ευθύ Άθροισμα, 22, 50
 εσωτερικό, 21
 εξωτερικό, 20
- Ευθύ γινόμενο, 19
- Ευθύ Προσθετέος, 21
- Φυσική Ισοδυναμία, 57
- Φυσικός Ισομορφισμός, 57
- Φυσικός Μετασχηματισμός, 57
 ταυτοτικός, 57
- Γεννήτορας, 253
 προβολικός, 254
- Γινόμενο, 49
- Ισοδύναμες Επεκτάσεις, 70
- Ισοδύναμοι Μορφισμοί, 223, 226
- Ισοδυναμία κατηγοριών, 57
- Ισομορφισμός
 προτύπων, 15
 σε μια αυθαίρετη κατηγορία, 45
- Θεώρημα
 Lazard-Govorov, 97
 σύγκρισης, 100
 των Bourbaki-Lambek, 95
 των Faith-Walker, 195
- Θεώρημα Ισομορφισμών Για Πρότυπα
 δεύτερο, 16
 πρώτο, 16
 τρίτο, 16
- Κάλυμμα
 πεπερασμένης ενέσιμης διάστασης, 203
- Κατηγορία, 43
 αβελιανή, 66
 αριστερά ορθογώνια, 219
 δεξιά ορθογώνια, 219
 δυϊκή, 44
 ευσταθής, 65
 μικρή, 44
 πηλίκο, 64
 προσθετική, 50
 ταυτοδύναμα πλήρης, 63
 υποπροσθετική, 49
- Κατηγορίες
 ισοδύναμες, 57
- Κλάση
 (pre)enveloping, 120
 (pre)covering, 116
 αριστερά ορθογώνια, 121
 αριστερά προσεγγίσιμη, 120
 δεξιά ορθογώνια, 121
 δεξιά προσεγγίσιμη, 116
 ειδικά αριστερά προσεγγίσιμη, 123
 ειδικά δεξιά προσεγγίσιμη, 123
 ελάχιστα αριστερά προσεγγίσιμη, 120
 ελάχιστα δεξιά προσεγγίσιμη, 116
 επιλύουσα, 141
 συνεπιλύουσα, 141
- Κριτήριο του Baer, 83
- Λήμμα
 του Salce, 139
 του Wakamatsu, 123, 249

- Μονομορφισμός
 αποδεκτός, 247
 σε κατηγορίες προτύπων, 16
 σε μια αυθαίρετη κατηγορία, 45
- Μορφισμός, 43
 αριστερά ελάχιστος, 249
 δεξιά ελάχιστος, 249
 επεκτάσεων, 70
 ευθέων συστημάτων, 32
 μηδενικός, 47
 συμπλόκων, 76
 συνδετικός, 73
 ταυτοτικός, 44
- Οικογένεια
 κανονικών εγκλεισεων, 20
 κανονικών προβολών, 19
- Ομολογία Συμπλόκου, 77
- Ομομορφισμός
 αριστερά ελάχιστος, 115
 δεξιά ελάχιστος, 115
 προτύπων, 13
 συνδετικός, 81
 ταυτοτικός, 13
- Ομοτοπία, 78
- Ομοτοπικοί Μορφισμοί, 78
- Ορθογώνιο Συμπλήρωμα
 αριστερό, 219
 δεξιό, 219
- Πλαίσιο των Auslander-Buchweitz, 220
 Δυϊκό, 254
- Πρότυπο
 G-ενέσιμο, 159
 G-προβολικό, 146
 n -cotilting, 259
 n -tilting, 258
 cotilting, 259
 dualizing, 201
 maximal Cohen-Macaulay, 147, 202
 reduced, 163
 tilting, 258
 ανακλαστικό, 171
 αριστερό, 9
 δεξιό, 10
 διαιρετό, 84
 ελεύθερο, 25
 ενέσιμο, 83
 επίπεδο, 90
 ημιαπλό, 193
 καθαρά ενέσιμο, 265
 κυκλικό, 13
 μη αναλύσιμο, 42
 πεπερασμένα παραγόμενο, 13
 πεπερασμένα παραστάσιμο, 27
 πηλίκο, 15
 προβολικό, 87
 χαρακτήρων, 93
 συστρεπικό, 138
 της Noether, 39
- Προβολική κάλυψη, 129
- Προσέγγιση
 αριστερή, 119, 248
 αριστερή G-ενέσιμη, 192, 282
 δεξιά, 115, 248
 δεξιά G-ενέσιμη, 286
 δεξιά G-προβολική, 190, 292
 ειδική δεξιά, 122
 ειδική αριστερή, 123, 248, 249
 ελάχιστη αριστερή, 119
 ελάχιστη δεξιά, 116
 μέγιστη Cohen-Macaulay, 203
- Πυρήνας
 ενός μορφισμού αντικειμένων, 61
 ενός ομομορφισμού προτύπων, 15
- Σύμπλοκο, 75
 m -ιστό μετατοπισμένο, 81
 deleted, 97
 ακριβές, 75
 θετικό, 97
 θετικό συν-αλυσιδωτό, 97
 συν-αλυσιδωτό, 75
- Σύνολο
 R -γραμμικά ανεξάρτητο, 25
 γεννητόρων, 13
 κατευθυνόμενο, 30
- Σύντομη Ακριβής Ακολουθία
 αριστερά διασπάσιμη, 22
 δεξιά διασπάσιμη, 22
 διασπάσιμη, 22
 προτύπων, 17
 σε μια αβελιανή κατηγορία, 68
 συμπλόκων, 79
- Σύστημα
 αντίστροφο, 33
 ευθύ, 31
- Συναρτητής
 n -ιστός αριστερά παραγόμενος, 103
 n -ιστός δεξιά παραγόμενος, 107
 ακριβής, 54, 55
 αντισυναλλοιώτος, 52
 αριστερά ακριβής, 54
 δεξιά ακριβής, 54
 φυσικής εγκλεισης, 51
 ημι-αντίστροφος, 57

- πιστός, 53
- πλήρης, 53
- προβολής, 64
- προσθετικός, 53
- συναλλοιώτος, 50
- ταυτοτικός, 51
- Συνεικόνα
 - ενός μορφισμού σε μια αβελιανή κατηγορία, 67
- Συνγεννήτορας, 204
 - ενέσιμος, 94, 219
- Συνγινόμενο, 49
- Συνπυρήνας
 - ενός μορφισμού αντικειμένων, 62
 - ενός ομομορφισμού προτύπων, 16
- Συστρεπτικό Ζεύγος
 - για μια κατηγορία προτύπων, 137
 - κλειστό, 143
 - κληρονομικό, 141
 - πλήρες, 139, 251
 - σε μια αβελιανή κατηγορία, 248
 - σε μια υποκατηγορία μιας αβελιανής κατηγορίας, 248
 - τέλειο, 142
 - του Epochs, 138
- Συζυγές Ζεύγος Συναρτητών, 57
- Συζυγής
 - αριστερός, 58
 - δεξιός, 58
- Τανυστικό Γινόμενο
 - ομομορφισμών, 29
 - προτύπων, 28
- Υποαντικείμενο, 60
- Υποκατηγορία, 45
 - karoubian, 205
 - αριστερή Ext-ορθογώνια, 248
 - δεξιά Ext-ορθογώνια, 248
 - πλήρης, 45
 - προσθετικά κλειστή, 205
- Υποπρότυπο, 12
 - καθαρό, 265
 - μικρό, 129
 - ουσιώδες, 127

Βιβλιογραφία

- [1] **S. Aldrich, E. Enochs, O. Jenda, L. Oyonarte.** *Envelopes and covers by modules of finite injective and projective dimensions.* J. Algebra, Vol. **242**, (2001), no.2, 447–459.
- [2] **F.W. Anderson and K.R. Fuller.** RINGS AND CATEGORIES OF MODULES. *Springer-Verlag Graduate Texts in Mathematics*, Vol. **13**, 1974.
- [3] **L. Angeleri Hugel, D. Happel, and H. Krause, eds..** *Handbook of tilting theory.* London Mathematical Society Lecture Note Series 332, Cambridge University Press, (2007).
- [4] **J. Asensio Mayor and J. Martinez Hernandez.** *Flat envelopes in commutative rings.* Israel J. Math., Vol. **62**, (1988), no.1, 123–128.
- [5] **J. Asensio Mayor and J. Martinez Hernandez.** *On Flat and projective envelopes.* J.Algebra, Vol. **160**, (1993), 434–440.
- [6] **M. Auslander.** *Anneaux de Gorenstein et torsion en algèbre commutative.* Séminaire d’algebre commutative 1966/1967, notes by M. Mangeney, C. Peskine and L. Szpiro, Ecole Normale Supérieure de Jeunes Filles, Paris, (1967).
- [7] **M. Auslander.** *Isolated singularities and existence of almost split sequences.* In Representation Theory II, Lectures notes **1178**, (1986), 194–241, Springer Verlag, New York.
- [8] **M. Auslander and M. Bridger.** *Stable Module Theory.* Mem. of the AMS **94**, AMS Providence (1969).
- [9] **M. Auslander and R.O. Buchweitz.** *Maximal Cohen-Macaulay Approximations.* Societe Mathematique de France, (1989) no.38, 5–37.
- [10] **M. Auslander, I. Reiten, and S. Smaloe.** REPRESENTATION THEORY OF ARTIN ALGEBRAS. *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, Vol. **36**, Cambridge University Press, Cambridge, (1997), xiv+425 pp.
- [11] **H. Bass.** *Finitistic dimension and a homological characterization of semi-primary rings.* Trans.Amer.Math.Soc, Vol. **95**, (1960), 466–488.
- [12] **H. Bass.** *On the ubiquity of Gorenstein rings.* Mathematische Zeitschrift, Vol. **82**, (1963), 8–28.
- [13] **R. El Bashir.** *Covers and directed colimits.* Algebr. Represent. Theory, Vol. **9**, (2006), 423–430.
- [14] **A. Beligiannis and H. Krause** THICK SUBCATEGORIES AND VIRTUALLY GORENSTEIN ALGEBRAS. *Illinois Journal of Mathematics*, Vol. **52**, No. 2, (2008), 551–562.
- [15] **L. Bican, R. El Bashir, and E. Enochs.** *All modules have flat covers.* Bull.London Math.Soc. Vol. **33**, (2001), 385–390.

- [16] **P. Bland**. RINGS AND THEIR MODULES. *De Gruyter*, 2011.
- [17] **W. Bruns, and J. Herzog**. *Cohen-Macaulay rings*. *Cambridge studies in advanced mathematics* **39**, Cambridge University Press, 1996.
- [18] **S. Chase**. *Direct product of modules*. *Transactions of the American Mathematical Society*, **97** (1960), 457-473.
- [19] **L. W. Christensen, H.-B. Foxby, and H. Holm**. *Beyond totally reflexive modules and back, in "Commutative Algebra: Noetherian and non-Noetherian perspectives"*. *Springer-Verlag*, (2011), 101-143.
- [20] **L. W. Christensen, A. Frankild, and H. Holm**. *On Gorenstein projective, injective and flat dimensions*. *J. Algebra*, **302** (2006), 231-279.
- [21] **S. Crivei, M. Prest, B. Torrecillas**. *Covers in finitely accessible categories*. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **138** (2010), 1213-1221.
- [22] **D. Dummit and R. Foote**. ABSTRACT ALGEBRA. *Third Edition, John Wiley and Sons, Inc*, 2004.
- [23] **S. Eilenberg and J. C. Moore**. *Foundations of Relative Homological Algebra*. *Amer. Math. Soc. Mem.* 55, Providence, R.I., (1965)
- [24] **D. Eisenbud**. *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*. *Graduate Texts in Mathematics*, **150**, Springer-Verlag, 1995.
- [25] **P. Eklof and J. Trlifaj**. *How to make Ext vanish*. *Bull. London Math. Soc.* Vol. **33**, (2001), 41-51.
- [26] **E. Enochs**. *Injective and flat covers, envelopes and resolvents*. *Israel J. Math.*, Vol. **39**, (1981), no.3, 189-209.
- [27] **E. Enochs and O.M.G. Jenda**. RELATIVE HOMOLOGICAL ALGEBRA. *De Gruyter Expositions in Mathematics*, Vol. **30**, 2000.
- [28] **E. Enochs, R. Belshoff and J. Xu**. *The existence of flat covers*. *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. **122**, (1994), no.4, 985-991.
- [29] **E. Enochs, S. Estrada and A. Iacob**. *Gorenstein injective precovers, covers, and envelopes*. arXiv:1301.5694v1 (math.AC), (2013).
- [30] **E. Enochs and L. Oyonarte**. *Flat covers and cotorsion envelopes of sheaves*. *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. **130**, (2001), no.5, 1285-1292.
- [31] **Carl Faith**. ALGEBRA II: RING THEORY. *Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York*, Vol. **191**, (1976).
- [32] **P. Gabriel**. *Objects injectifs dans les Categories abeliennes*. *Sem. Dubreil*, 1958/59.
- [33] **R. Göbel and S. Shelah**. *Cotorsion theories and splitters*. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **354** (2000), 5357-5379.
- [34] **R. Göbel and J. Trlifaj**. APPROXIMATIONS AND ENDOMORPHISM ALGEBRAS OF MODULES. *De Gruyter Expositions in Mathematics*, Vol. **41**, 2006.
- [35] **H. Holm**. *Gorenstein projective, injective and flat modules*. *MSc thesis, Dept. of Math. Sciences, Univ. of Copenhagen*, 2000.
- [36] **H. Holm**. *Gorenstein derived functors*. *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. **132**, 2004, 1913-1923.

- [37] **H. Holm.** *Gorenstein homological algebra.* PhD thesis, Dept. of Math. Sciences, Univ. of Copenhagen, 2004. ISBN: 87-7834-587-1
- [38] **H. Holm.** *Gorenstein homological dimensions.* *J.Pure Appl. Algebra*, Vol. **189**, 2004, 167-193.
- [39] **H. Holm.** *Rings with finite Gorenstein injective dimension.* *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. **132**, 2004, 1279-1283.
- [40] **H. Iwanaga.** On rings with finite self-injective dimension. *Comm. Algebra*, Vol. **7**, (1979), no.4, 393-414.
- [41] **H. Iwanaga.** On rings with finite self-injective dimension II. *Tsukuba J. Math.*, Vol. **4**, (1980), no.1, 107-113.
- [42] **C.U. Jensen and H. Lenzing.** MODEL THEORETIC ALGEBRA. *Gordon and Breach, Algebra, Logic and Applications*, Vol. **2**, 1989.
- [43] **H. Krause and M. Saorin.** *On minimal approximations of modules.* *Contemp.Math*, Vol. **229**, 1998, 227-236.
- [44] **T.Y. Lam.** LECTURES ON MODULES AND RINGS. *Springer Graduate Texts in Mathematics*, 1999.
- [45] **B. Mitchell.** *Theory of Categories.* *Academic Press, INC. (London) LTD* 1965, 65-22761.
- [46] **W. K. Nicholson and M. F. Yousif.** QUASI-FROBENIUS RINGS. *Cambridge University Press, Cambridge Tracts in Mathematics*, Vol. **158**, 2003.
- [47] **N. Popescu.** ABELIAN CATEGORIES WITH APPLICATIONS TO RINGS AND MODULES. *Academic Press*, Vol. **3**, 1973.
- [48] **M. Prest.** MODEL THEORY AND MODULES. *London Mathematical Society, Lecture Notes Series, Cambridge University Press, Cambridge.*, Vol. **130**, 1988.
- [49] **D. Quillen.** HIGHER ALGEBRAIC K-THEORY I. *In Algebraic K-theory I*, Lecture Notes **341**, Springer Verlag, New York, 1973.
- [50] **J. Rada, M. Saorin.** *Rings characterized by (pre)envelopes and (pre)covers of their modules.* *Comm. Algebra*, **26** (1998), 899-912.
- [51] **J. Rotman.** ADVANCED MODERN ALGEBRA, SECOND EDITION. *Prentice Hall*, 2003.
- [52] **J. Rotman.** AN INTRODUCTION TO HOMOLOGICAL ALGEBRA. *Second Edition, Springer, USA*, 2004.
- [53] **W. Rump.** *Flat covers in abelian and in non-abelian categories.* *Advances in Mathematics*, **225** (2010), 1589-1615.
- [54] **J.P. Serre.** *Geometrie algebrique et geometrie analytique.* *Ann.Inst.Fourier*, **6** (1956), 669-719.
- [55] **B. Stenstrom.** RINGS OF QUOTIENTS. AN INTRODUCTION TO METHODS OF RING THEORY. *Springer-Verlag*, Vol. **217**, 1975.
- [56] **J.L. Verdier.** *Seminaire de Geometrie Algebrique IV and 4^{1/2}.* *Springer Lectures Notes in Math*, **269**, **270**, **305** and **569**, Springer Verlag, New York, (1970).
- [57] **C. Weibel.** AN INTRODUCTION TO HOMOLOGICAL ALGEBRA. *Cambridge studies in advanced mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, UK*, 2004.

- [58] **J. Xu.** *The existence of flat covers over noetherian rings of finite Krull dimension.* *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. **123**, (1995).
- [59] **J. Xu.** FLAT COVERS OF MODULES. *Springer-Verlag Lecture Notes in Mathematics 1634, Berlin*, 1996.
- [60] **A. Zaks.** *Injective dimension of semi-primary rings.* *Journal of Algebra*, Vol. **13**, (1969), 73–86.