

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ, ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ
ΕΡΕΥΝΑΣ**

ΑΧΙΛΛΕΑΣ ΠΑΠΑΤΣΙΜΠΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

**ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΕΣ MARSHALL-OLKIN
ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ**

ΜΙΑ ΚΡΙΤΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ, 2014

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στη

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΚΑΙ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την 19/06/2014 από την εξεταστική επιτροπή:

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ	ΒΑΘΜΙΑΔΑ	ΥΠΟΓΡΑΦΗ
Σωτήριος Λουκάς (Επιβλέπων)	Καθηγητής	
Κωνσταντίνος Ζωγράφος	Καθηγητής	
Απόστολος Μπατσίδης	Λέκτορας	

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

"Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή."

Αχιλλέας Παπασίμπας

Μαθηματικός

*Στους γονείς μου,
Γιώργο και Ειρήνη.*

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε στα πλαίσια του μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών του τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων στον τομέα Στατιστικής και Επιχειρησιακής έρευνας. Στο σημείο αυτό θα ήθελα να απευθύνω τις θερμές μου ευχαριστίες σε όλους όσους συνέβαλαν στην ολοκλήρωση αυτής της διατριβής.

Πρωτίστως, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Σωτήριο Λουκά, Καθηγητή του τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, για την επίβλεψη της διατριβής, την βοήθεια και την καθοδήγηση του.

Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Απόστολο Μπασιόδη, Λέκτορα του τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, για τις ωφέλιμες συμβουλές του, την στήριξη του και τις παρατηρήσεις του πάνω στην εργασία μου. Η συνεισφορά του υπήρξε πραγματικά πολύτιμη.

Ευχαριστώ ακόμη τον κ. Βασίλη Παππά, Διδάκτορα του τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, για τις ουσιώδεις παρεμβάσεις του, τις παρατηρήσεις του και τις συμβουλές του για την ολοκλήρωση της διατριβής.

Θερμές ευχαριστίες οφείλω ακόμη και στους υπόλοιπους διδάσκοντες του τομέα Πιθανοτήτων Στατιστικής και Επιχειρησιακής έρευνας του τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων για την στήριξη τους και την συνεργασία τους.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου Γιώργο και Ειρήνη για την ηθική και ψυχολογική υποστήριξη τους και τους αδερφούς μου Χρήστο και Γιάννη για την συμπαράσταση που μου πρόσφεραν.

Ιωάννινα, Ιούνιος 2014

Αχιλλέας Παπασιόμπας

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Σελ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ 1

- 1.1 Χρήσιμες έννοιες 2
 - 1.1.1 Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας..... 2
 - 1.1.2 Συνάρτηση επιβίωσης 3
 - 1.1.3 Συνάρτηση κινδύνου 4
 - 1.1.4 Μίξη (Compounding)..... 8
 - 1.1.5 Στοχαστικές διατάξεις 9
 - 1.1.6 Ασυμπτωτικές κατανομές των δειγματικών ακραίων..... 10
 - 1.1.7 Στατιστικές κατανομές..... 13
 - 1.1.8 Συναρτήσεις σχετικής πιθανότητας (odds functions) 22

- 1.2 Σκοπός της μεταπτυχιακής διατριβής και η περίληψή της..... 24

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. Ο MARSHALL-OLKIN ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ.... 27

- 2.1 Ο Marshall-Olkin μετασχηματισμός 27
- 2.2 Η σ.π.π. και η συνάρτηση κινδύνου της νέας επεκταμένης οικογένειας 29
- 2.3 Ιδιότητες και χαρακτηριστικά 32
- 2.4 Εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας και Στατιστική Συμπερασματολογία..... 44

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ MARSHALL-OLKIN ΕΠΕΚΤΑΜΕΝΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ..... 47

- 3.1 Η Marshall-Olkin επεκταμένη Εκθετική κατανομή..... 48
 - 3.1.1 Η κατανομή..... 48
 - 3.1.2 Χαρακτηριστικά..... 52

3.1.3	Στοχαστική αναπαράσταση	59
3.1.4	Εντροπία Rényi.....	63
3.1.5	Στατιστική Συμπερασματολογία.....	65
3.2	Η Marshall-Olkin επεκταμένη κατανομή Weibull	67
3.2.1	Η κατανομή.....	68
3.2.2	Χαρακτηριστικά.....	74
3.2.3	Στοχαστική αναπαράσταση	81
3.2.4	Εντροπία Rényi.....	83
3.2.5	Εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας	85
3.3	Η Marshall-Olkin επεκταμένη κατανομή Pareto.....	88
3.3.1	Η κατανομή.....	88
3.3.2	Χαρακτηριστικά.....	96
3.3.3	Στοχαστική αναπαράσταση και στοχαστικές διατάξεις.....	101
3.3.4	Εντροπία Rényi.....	102
3.3.5	Στατιστική Συμπερασματολογία	105
3.4	Η Marshall-Olkin επεκταμένη κατανομή Lomax.....	108
3.4.1	Η κατανομή.....	109
3.4.2	Χαρακτηριστικά.....	114
3.4.3	Στοχαστική αναπαράσταση	118
3.4.4	Εντροπία Rényi.....	119
3.4.5	Εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας και πίνακας πληροφορίας	121
3.5	Η Marshall-Olkin επεκταμένη κατανομή γραμμικού ρυθμού αποτυχίας.....	123
3.5.1	Η κατανομή.....	123
3.5.2	Χαρακτηριστικά.....	129

3.5.3	Στοχαστική αναπαράσταση	132
3.5.4	Εντροπία Rényi.....	133
3.5.5	Εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας και πίνακας πληροφορίας	136
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ		139
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ ΤΟΥ MARSHALL-OLKIN ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ		145
5.1	Marshall-Olkin οικογένεια κατανομών που βασίζεται σε πιθανογεννήτριες συναρτήσεις.....	145
5.2	Επεκταμένες κατανομές με βάση τη χαρακτηριστική συνάρτηση.....	153
5.3	Marshall-Olkin επεκταμένη οικογένεια κατανομών όταν η προστιθέμενη παράμετρος είναι τυχαία μεταβλητή	157
5.4	Προσθήκη μιας παραμέτρου στην Marshall-Olkin οικογένεια κατανομών	162
5.4.1	Η Marshall-Olkin Semi-Burr κατανομή	163
5.4.2	Η Marshall-Olkin Burr κατανομή.....	164
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ		169
ΠΕΡΙΛΗΨΗ		171
ABSTRACT OF MSC DISSERTATION		173
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ		175

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η εισαγωγή νέων κατανομών με την ελπίδα ότι οι νέες κατανομές θα μοντελοποιούν κάποια τυχαία φαινόμενα καλύτερα από τις υπάρχουσες κατανομές, είναι συνήθης στη Στατιστική και στις Πιθανότητες. Στο πλαίσιο αυτό, τις τελευταίες δεκαετίες έχουν εμφανιστεί διάφοροι τρόποι ορισμού νέων κατανομών από υπάρχουσες είτε εφαρμόζοντας κάποιο μετασχηματισμό είτε με την εισαγωγή νέων παραμέτρων. Για παράδειγμα η οικογένεια των Weibull κατανομών, η οποία περιέχει την εκθετική κατανομή ως ειδική περίπτωση, εισήχθη από τον Weibull (1951) και κατασκευάζεται παίρνοντας δυνάμεις τυχαίων μεταβλητών που κατανέμονται εκθετικά.

Ξεχωριστή θέση ανάμεσα στις μεθόδους εισαγωγής μιας νέας παραμέτρου σε υπάρχουσα κατανομή με σκοπό την επέκτασή της κατέχει ο μηχανισμός που προτάθηκε από τους Marshall and Olkin (1997). Ο τρόπος αυτός είναι πλέον ένας καθιερωμένος μηχανισμός για την απόκτηση πιο ευέλικτων νέων οικογενειών κατανομών και η οικογένεια κατανομών που προκύπτει είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως Marshall-Olkin επεκταμένη οικογένεια κατανομών (Marshall-Olkin extended family of distributions). Η νέα οικογένεια κατανομών, όπως θα δούμε αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο, έχει, μεταξύ άλλων, την ιδιότητα να περιλαμβάνει την αρχική κατανομή ως ειδική περίπτωση και επιπλέον αν η μέθοδος εφαρμοστεί δύο φορές σε μία οικογένεια κατανομών, τότε τίποτα καινούργιο δεν προκύπτει τη δεύτερη φορά εφαρμογής.

Έπειτα από την πρωτοπόρα εργασία των Marshall and Olkin (1997), πολλοί ήταν αυτοί που ασχολήθηκαν και συνεχίζουν να ασχολούνται με τον ορισμό και τη μελέτη νέων κατανομών που προκύπτουν από ήδη υπάρχουσες, εφαρμόζοντας την ιδέα των Marshall and Olkin (1997). Ενδεικτικά αναφέρουμε τον Ghitany (2005) που όρισε και μελέτησε την

Marshall Olkin επεκταμένη κατανομή Pareto (Marshall-Olkin extended Pareto distribution) και τους Ghitany *et al.* (2007) που όρισαν και μελέτησαν την Marshall Olkin επεκταμένη κατανομή Lomax (Marshall-Olkin extended Lomax distribution). Κύριο γνώρισμα των κατανομών που προκύπτουν είναι το γεγονός ότι είναι χρήσιμες στη μοντελοποίηση δεδομένων αφού διαθέτουν περισσότερη προσαρμοστικότητα.

Σκοπός αυτής της μεταπτυχιακής διατριβής είναι η παρουσίαση του Marshall and Olkin (1997) μηχανισμού εισαγωγής μίας νέας παραμέτρου σε υπάρχουσα κατανομή καθώς και η μελέτη των ιδιοτήτων και των χαρακτηριστικών των κυριοτέρων και δημοφιλέστερων νέων κατανομών που έχουν προκύψει κατά αυτόν τον τρόπο. Στο πλαίσιο αυτό, στο εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο για τη διευκόλυνση της μελέτης της διατριβής θα δοθούν κάποιες χρήσιμες έννοιες. Τέλος, θα δοθεί ο σκοπός και η περίληψη της διατριβής.

1.1 Χρήσιμες έννοιες

Στην ενότητα αυτή θα δοθούν κάποιες βασικές έννοιες που θα χρησιμοποιηθούν στα υπόλοιπα κεφάλαια αυτής της μεταπτυχιακής διατριβής. Ακόμη, θα παρουσιασθούν οι κατανομές οι οποίες θα επεκταθούν μέσω του Marshall and Olkin (1997) μηχανισμού εισαγωγής μίας νέας παραμέτρου.

1.1.1 Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

Στην ενότητα αυτή θα δοθεί ο ορισμός της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) του χρόνου επιβίωσης T .

Ορισμός 1.1.1.1

Ως **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** ή **συνάρτηση πυκνότητας (probability density function ή density function)** του χρόνου επιβίωσης T , ορίζεται το όριο:

$$f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t)}{\Delta t}, \quad t \geq 0.$$

Για μικρό Δt , η ποσότητα $f(t)\Delta t$ εκφράζει προσεγγιστικά την πιθανότητα «θανάτου-αποτυχίας» στο διάστημα $[t, t + \Delta t]$. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας κατανομών χρόνων ζωής, έχει τις εξής ιδιότητες:

$$f(t) \geq 0, \text{ για κάθε } t \geq 0 \text{ και } \int_0^{\infty} f(t)dt = 1.$$

Άμεσα συνδεδεμένη με τη σ.π.π. είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.) ο ορισμός της οποίας είναι ο ακόλουθος στην περίπτωση της τ.μ. T που παριστάνει το χρόνο ζωής.

Ορισμός 1.1.1.2

Η **συνάρτηση κατανομής** ή **αθροιστική συνάρτηση κατανομής (cumulative distribution function)** της τ.μ. T συμβολίζεται με F_T και είναι μια πραγματική συνάρτηση που ορίζεται ως:

$$F_T(t) = P(T \leq t), \quad t \geq 0.$$

1.1.2 Συνάρτηση επιβίωσης

Στην ενότητα αυτή θα δοθεί ο ορισμός της συνάρτησης επιβίωσης και κάποιες ιδιότητες αυτής.

Ορισμός 1.1.2.1

Έστω T ο χρόνος επιβίωσης μιας συνεχούς, μη αρνητικής τυχαίας μεταβλητής. Η **συνάρτηση επιβίωσης (survival ή reliability function)** $S(t)$ ορίζεται ως η πιθανότητα ένα άτομο να επιβιώσει μέχρι τη χρονική στιγμή t . Δηλαδή:

$$S(t) = P(T > t) = \int_t^{\infty} f(x)dx = 1 - F(t), \quad t \geq 0,$$

όπου $f(t)$ και $F(t)$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και η αθροιστική συνάρτηση κατανομής, αντίστοιχα.

Ακόμη ισχύει ότι:

$$f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t) - S(t + \Delta t)}{\Delta t} = -S'(t).$$

Από τις ιδιότητες της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής, προκύπτει ότι η συνάρτηση επιβίωσης S είναι φθίνουσα, μη αρνητική και συνεχής με

$$S(0) = 1 \text{ και } \lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0 \text{ (ή } S(\infty) = 0).$$

1.1.3 Συνάρτηση κινδύνου

Η έννοια του ρυθμού αποτυχίας (failure rate) στη μηχανική (επίσης γνωστή ως ρυθμός κινδύνου στην ιατρική επιστήμη και ισχύ θνησιμότητας στην αναλογιστική επιστήμη) είναι κεντρικής σημασίας στη σύγχρονη θεωρία αξιοπιστίας. Στην ενότητα αυτή δίνεται ο ορισμός της συνάρτησης κινδύνου, κάποιες ιδιότητες της, καθώς και η σημασία της. Τέλος, δίνονται κάποιοι ορισμοί σχετικά με αυτή.

Ορισμός 1.1.3.1

Η **συνάρτηση κινδύνου (hazard function ή failure rate) $h(t)$** , (γνωστή και ως ρυθμός θνησιμότητας), εκφράζει τον στιγμιαίο ρυθμό «θανάτου» ή «αποτυχίας» τη χρονική στιγμή t , δοθέντος ότι το άτομο έχει επιβιώσει μέχρι το χρόνο t και δίνεται από τη σχέση:

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t / T \geq t)}{\Delta t} = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}, \quad t \geq 0,$$

ή εναλλακτικά:

$$h(t) = -\frac{d \log \bar{F}(t)}{dt}, \quad t \geq 0, \quad (1.1.3.1)$$

όπου με $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$ συμβολίζεται η συνάρτηση επιβίωσης.

Κατά προσέγγιση, $h(t)\Delta t$ είναι η πιθανότητα θανάτου στο διάστημα $[t, t + \Delta t)$, δοθέντος ότι το άτομο επιβιώνει πέρα της χρονικής στιγμής t . Η συνάρτηση κινδύνου για μια συνεχή κατανομή χρόνου ζωής, έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

$$h(t) \geq 0, \text{ για κάθε } t \geq 0 \text{ και } \int_0^{\infty} h(t) dt = \infty.$$

Η συνάρτηση κινδύνου αποτελεί ένα αντιπροσωπευτικό μέτρο περιγραφής της ικανότητας επιβίωσης ενός πληθυσμού. Περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται ο στιγμιαίος ρυθμός «θανάτου-αποτυχίας» στο χρόνο και συνεπώς μπορεί να συνεισφέρει στην επιλογή του κατάλληλου μοντέλου για την περιγραφή χρόνων ζωής.

Εξαιρουμένων των περιπτώσεων που η υπόθεση της σταθερής συνάρτησης κινδύνου είναι ρεαλιστική, η επιβίωση περιγράφεται με κατανομές των οποίων η αντίστοιχη συνάρτηση κινδύνου είναι αύξουσα, φθίνουσα, κυπελοειδούς μορφής (bathtub shaped) ή μονοκόρυφη.

Κλασικό παράδειγμα κατανομής με σταθερή συνάρτηση κινδύνου είναι η εκθετική κατανομή η οποία παρουσιάζει μεγάλο εύρος εφαρμογών στη μοντελοποίηση χρόνων ζωής. Συχνά όμως το ενδιαφέρον εστιάζεται σε μια περίοδο συνολικής διάρκειας ζωής, στην οποία επέρχεται γήρανση ή φθορά χρήσης. Αυτός είναι και ο λόγος που δικαιολογεί μερικώς τη μεγάλη δημοτικότητα των κατανομών χρόνων ζωής με αύξουσα συνάρτηση κινδύνου (increasing hazard rate). Ακόμη, χρησιμοποιούνται μοντέλα με φθίνουσα συνάρτηση κινδύνου για την περιγραφή του χρόνου ζωής μηχανικών εξαρτημάτων τα οποία βελτιώνουν τη λειτουργία τους με την πάροδο του χρόνου. Εφαρμογές, με φθίνουσα συνάρτηση κινδύνου εντοπίζονται και σε ιατρικά δεδομένα ίασης συγκεκριμένων ασθενειών. Τα μοντέλα με μονοκόρυφη συνάρτηση κινδύνου χρησιμοποιούνται κυρίως στην περίπτωση όπου παρατηρείται μεγάλη συχνότητα «αποτυχιών» κοντά στη χρονική αφετηρία της διάρκειας ζωής του υπό μελέτη αντικειμένου. Εφαρμογές αυτής της μορφής της συνάρτησης κινδύνου εντοπίζονται σε ιατρικά δεδομένα και σε δεδομένα τηλεπικοινωνιών. Λιγότερο χρησιμοποιούμενα στην πράξη είναι τα μοντέλα με μη μονότονη συνάρτηση κινδύνου, με εξαίρεση αυτά με συνάρτηση κινδύνου κυπελλοειδούς σχήματος. Αυτά τα μοντέλα έχουν καμπύλες κινδύνου με επίπεδα μεσαία τμήματα και οι αντίστοιχες πυκνότητες έχουν μια θετική αντι-κορυφή (δηλαδή την αντίθετη κορυφή της κορυφής μιας κατανομής). Ένα παράδειγμα μιας συνάρτησης κινδύνου κυπελλοειδούς σχήματος είναι η ανθρώπινη θνησιμότητα με έναν υψηλό ρυθμό νεογνικής θνησιμότητας (η οποία κυρίως οφείλεται σε κληρονομικές ανεπάρκειες), που μειώνεται ραγδαία, φτάνοντας κάποια χρονική στιγμή σε μια κατώτατη τιμή, όπου και παραμένει σχεδόν σταθερή για κάποιο χρονικό διάστημα. Έπειτα η ανθρώπινη θνησιμότητα διατηρείται σε αυτό το επίπεδο για αρκετά χρόνια πριν αυξηθεί ξανά λόγω γήρανσης (Cordeiro and Lemonte, 2013).

Στη συνέχεια θα δοθούν οι ορισμοί των IHR (increasing hazard rate), DHR (decreasing hazard rate), IHRA (increasing hazard rate average), DHRA (decreasing hazard rate average), NBU (new better than used), NWU (new worse than used), NBUE (new better than used in expectation), NWUE (new worse than used in expectation). Οι μαθηματικοί ορισμοί των

παραπάνω ιδιοτήτων μπορούν να βρεθούν μεταξύ άλλων στους Barlow and Proschan (1975).

Σε όσα ακολουθούν θα συμβολίζεται με \bar{F} η συνάρτηση επιβίωσης της τ.μ. T που παριστάνει το χρόνο ζωής, με $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$, όπου F είναι η α.σ.κ.

Ορισμός 1.1.3.2

Μια κατανομή ανάλυσης επιβίωσης F χαρακτηρίζεται ως **IHR (DHR)** αν η συνάρτηση $\bar{F}(x|t) = \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)}$ είναι φθίνουσα (αύξουσα, αντίστοιχα) στο $0 < t < \infty$ για κάθε $x \geq 0$.

Ορισμός 1.1.3.3

Μια κατανομή ανάλυσης επιβίωσης F είναι **IHRA (DHRA)** αν η συνάρτηση $-\frac{1}{t} \log \bar{F}(t)$ είναι αύξουσα (φθίνουσα, αντίστοιχα) στο $t \geq 0$.

Ορισμός 1.1.3.4

Μια κατανομή ανάλυσης επιβίωσης F είναι **NBU (NWU)** αν $\bar{F}(x+y) \leq \bar{F}(x)\bar{F}(y)$ ($\bar{F}(x+y) \geq \bar{F}(x)\bar{F}(y)$, αντίστοιχα), για $x \geq 0, y \geq 0$.

Ορισμός 1.1.3.5

Μια κατανομή ανάλυσης επιβίωσης F είναι **NBUE** (**NWUE**) αν έχει πεπερασμένη μέση τιμή και ισχύει $\int_t^{\infty} \bar{F}(x)dx \leq \mu \bar{F}(t)$ ($\int_t^{\infty} \bar{F}(x)dx \geq \mu \bar{F}(t)$, αντίστοιχα), για $t \geq 0$, όπου $\mu = \int_0^{\infty} \bar{F}(t)dt$.

Παρατηρήσεις (*Barlow and Proschan, 1975*)

- (i) Ισχύει $\bar{F}(x+y) = \bar{F}(x)\bar{F}(y)$ στον ορισμό 1.1.3.4 αν και μόνο αν η κατανομή F είναι η εκθετική.
- (ii) Ισχύουν οι ακόλουθες αλυσίδες των συνεπαγωγών:

$$\begin{aligned} DHR &\Rightarrow DHRA \Rightarrow NWU \Rightarrow NWUE \\ IHR &\Rightarrow IHRA \Rightarrow NBU \Rightarrow NBUE. \end{aligned}$$

1.1.4 Μίξη (*Compounding*)

Ορισμός 1.1.4.1

Έστω $\bar{G}(x|\theta)$, $-\infty < x < \infty$, $-\infty < \theta < \infty$ η δεσμευμένη συνάρτηση επιβίωσης μιας συνεχούς τ.μ. X , δοθέντος μια συνεχούς τ.μ. Θ . Έστω ότι η Θ ακολουθεί μια κατανομή με σ.π.π. $m(\theta)$. Τότε μια κατανομή με συνάρτηση επιβίωσης:

$$\bar{G}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{G}(x|\theta)m(\theta)d\theta, \quad -\infty < x < \infty,$$

λέγεται **μικτή κατανομή (compound distribution)** με πυκνότητα μίξης $m(\theta)$.

Οι μικτές κατανομές παρέχουν ένα εργαλείο για την απόκτηση νέων οικογενειών κατανομών από ήδη υπάρχουσες κατανομές. Αντιπροσωπεύουν ετερογενή μοντέλα όπου τα άτομα των πληθυσμών έχουν διαφορετικούς κινδύνους.

1.1.5 Στοχαστικές διατάξεις

Η στοχαστική διάταξη θετικών, συνεχών τ.μ. είναι ένα σημαντικό εργαλείο για να συγκρίνουμε τη συμπεριφορά τους. Στη συνέχεια παρατίθενται κάποιοι χρήσιμοι ορισμοί (Shaked and Shanthikumar, 1994).

Ορισμός 1.1.5.1

Μια τ.μ. X λέγεται ότι είναι μικρότερη από μια τ.μ. Y στη **στοχαστική διάταξη (stochastic order)** και γράφουμε ότι $X \leq_{st} Y$, αν $\bar{F}_X(x) \leq \bar{F}_Y(x)$ για κάθε x .

Ορισμός 1.1.5.2

Μια τ.μ. X λέγεται ότι είναι μικρότερη από μια τ.μ. Y στη **διάταξη ποσοστού κινδύνου (hazard rate order)** και γράφουμε ότι $X \leq_{hr} Y$, αν $h_Y(x) \leq h_X(x)$ για κάθε x .

Ορισμός 1.1.5.3

Μια τ.μ. X λέγεται ότι είναι μικρότερη από μια τ.μ. Y στη **διάταξη πηλίκου πιθανοφάνειας (likelihood ratio order)** και γράφουμε ότι $X \leq_{lr} Y$, αν η συνάρτηση $\frac{f_X(x)}{f_Y(x)}$ είναι φθίνουσα στο x .

Ακόμη ισχύει η ακόλουθη ισοδυναμία (Ross, 1996):

$$X \leq_{lr} Y \Rightarrow X \leq_{hr} Y \Rightarrow X \leq_{st} Y.$$

Η γήρανση (ageing) είναι ένα πολύ σημαντικό φαινόμενο που είναι μια έμφυτη ιδιότητα ενός ατόμου. Οι Jiang *et al.* (2003) ανέπτυξαν ένα ποσοτικό μέτρο που λέγεται **ένταση γήρανσης (ageing intensity)** για να επαληθεύσουν την ιδιότητα γήρανσης ενός συστήματος. Ο παρακάτω ορισμός οφείλεται στους Nanda *et al.*, (2007).

Ορισμός 1.1.5.4

Μια τ.μ. X λέγεται ότι είναι μικρότερη από μια άλλη τ.μ. X^* σε διάταξη έντασης γήρανσης (AI), αν για κάθε $x \geq 0$ ισχύει:

$$\frac{1}{h_F(x)} \int_0^x h_F(u) du \leq \frac{1}{h^*(x)} \int_0^x h^*(u) du,$$

όπου $h_F(x)$ και $h^*(x)$ είναι οι συναρτήσεις κινδύνου που αντιστοιχούν στις τ.μ. X και X^* αντίστοιχα. Τότε γράφουμε $X \leq_{AI} X^*$.

1.1.6 Ασυμπτωτικές κατανομές των δειγματικών ακραίων

Η θεωρία των ακραίων τιμών (extreme value theory) πρωτίστως ασχολείται με την κατανομή του ελάχιστου και μέγιστου διατεταγμένου στατιστικού, $X_{(1)}$ και $X_{(n)}$, αντίστοιχα. Καθώς πολλές φορές η σ.π. των $X_{(1)}$ και $X_{(n)}$ δεν έχει απλή και εύκολα διαχειρίσιμη μορφή, το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στην εύρεση της ασυμπτωτικής κατανομής. Το σημείο κλειδί που κάνει τις ασυμπτωτικές κατανομές των $X_{(1)}$ και $X_{(n)}$ ενδιαφέρουσες είναι ότι για κάποιες σταθερές $a_n, b_n > 0$, c_n και $d_n > 0$, οι

ποσότητες $(X_{(n)} - a_n)/b_n$ και $(X_{(1)} - c_n)/d_n$ γίνονται ολοένα και πιο ανεξάρτητες από το μέγεθος n του τ.δ.

Στα θεωρήματα που ακολουθούν συνοψίζονται τα αποτελέσματα που αφορούν την ασυμπτωτική κατανομή του ελαχίστου και μεγίστου διατεταγμένου στατιστικού, $X_{(1)}$ και $X_{(n)}$, αντίστοιχα. Εμφανίστηκαν για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία από τον Fréchet (1927), αλλά τυποποιήθηκαν από τον Gnedenko (1943).

Στη συνέχεια παρατίθενται μόνο τα αποτελέσματα που θα χρειαστούν στη διατριβή αυτή.

Θεώρημα 1.1.6.1 (Gnedenko, 1943 και Arnold et al., 1992)

Ισχύει ότι:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{X_{(1)} \leq a_n^* + b_n^* t\} = 1 - e^{-t^c}, \quad t > 0, c > 0, \quad (1.1.6.1)$$

όπου $a_n^* = F^{-1}(0)$ και $b_n^* = F^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) - F^{-1}(0)$ αν και μόνον η τιμή $F^{-1}(0)$ είναι πεπερασμένη και, για κάθε $t > 0$ και $c > 0$, ισχύει:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{F(F^{-1}(0) + \varepsilon t)}{F(F^{-1}(0) + \varepsilon)} = t^c. \quad (1.1.6.2)$$

Θεώρημα 1.1.6.2 (Gnedenko, 1943 και Arnold et al., 1992)

Ισχύει ότι:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{X_{(n)} \leq b_n t\} = e^{-t^{-k}}, \quad t > 0, k > 0, \quad (1.1.6.3)$$

όπου $b_n = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ αν και μόνον αν $F^{-1}(1) = \infty$ και υπάρχει μια σταθερά $k > 0$ τέτοια ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(xt)}{\bar{F}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F(xt)}{1 - F(x)} = t^{-k}. \quad (1.1.6.4)$$

Θεώρημα 1.1.6.3 (Gnedenko, 1943 και Arnold et al., 1992)

Ισχύει ότι:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{X_{(n)} \leq a_n + b_n t\} = e^{-e^{-t}}, \quad -\infty < t < \infty, \quad (1.1.6.5)$$

όπου $a_n = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ και $b_n = \frac{1}{nf(a_n)}$ αν

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{\bar{F}(x)}{f(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{1 - F(x)}{f(x)} \right) = 0.$$

Τέλος, το παρακάτω Θεώρημα προσδιορίζει τις οριακές κατανομές των $\frac{X_{(i)} - a_n^*}{b_n^*}$ και $\frac{X_{(n-i+1)} - a_n}{b_n}$.

Θεώρημα 1.1.6.4 (Arnold et al., 1992)

Έστω $G^*(t)$ και $G(t)$, οι οριακές κατανομές των $\frac{(X_{(1)} - a_n^*)}{b_n^*}$ και $\frac{(X_{(n)} - a_n)}{b_n}$ αντίστοιχα. Τότε, για κάθε πεπερασμένο $i > 1$, οι οριακές κατανομές των $\frac{X_{(i)} - a_n^*}{b_n^*}$ και $\frac{X_{(n-i+1)} - a_n}{b_n}$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{X_{(i)} \leq a_n^* + b_n^* t\} = 1 - \sum_{j=0}^{i-1} [1 - G^*(t)] \frac{\{-\log[1 - G^*(t)]\}^j}{j!},$$

και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{X_{(n-i+1)} \leq a_n + b_n t\} = \sum_{j=0}^{i-1} G(t) \frac{\{-\log G(t)\}^j}{j!},$$

αντίστοιχα.

Παρατήρηση (Gnedenko, 1943 και Arnold et al., 1992)

Όταν η ασυμπτωτική κατανομή είναι αυτή της σχέσης (1.1.6.1) λέμε ότι είναι τύπου Weibull, ενώ λέμε ότι είναι τύπου Fréchet στην περίπτωση της σχέσης (1.1.6.3). Τέλος, η οριακή κατανομή της σχέσης (1.1.6.5) λέμε ότι είναι τύπου ακραίων τιμών (extreme value).

1.1.7 Στατιστικές κατανομές

Στην ενότητα αυτή περιγράφονται οι κατανομές, οι Marshall-Olkin γενικευμένες μορφές των οποίων αποτελούν αντικείμενο μελέτης των κεφαλαίων 3 και 5.

Η Εκθετική κατανομή

Η εκθετική κατανομή διαδραματίζει έναν κεντρικό ρόλο στην ανάλυση χρόνων ζωής ή δεδομένων επιβίωσης. Χρησιμοποιήθηκε αρχικά στην αξιοπιστία για τη μελέτη του χρόνου ζωής ηλεκτρονικών εξαρτημάτων και σε μια πιο περιορισμένη έκταση στις ιατρικές επιστήμες. Ακόμη, η εκθετική κατανομή χαρακτηρίζεται από σταθερή συνάρτηση κινδύνου και αυτό οφείλεται στην ιδιότητα «έλλειψης μνήμης» ή αμνησίας που την χαρακτηρίζει (Cox and Oakes, 1984 και Marshall and Olkin, 1994). Συγκεκριμένα ισχύει:

$$P(X > x+t | X > x) = P(X > t) \text{ για κάθε } x, t \geq 0,$$

αν η τ.μ. X έχει εκθετική κατανομή.

Επίσης, η οικογένεια των εκθετικών κατανομών είναι κλειστή κάτω από τον σχηματισμό ελαχίστων, δηλαδή αν X και Y είναι δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με εκθετικές κατανομές, τότε το ελάχιστο $\min(X, Y)$ ακολουθεί εκθετική κατανομή. Αυτή η ιδιότητα είναι η αντανάκλαση του γεγονότος ότι οι εκθετικές κατανομές είναι κατανομές ακραίων τιμών για ελάχιστα.

Η οικογένεια των εκθετικών κατανομών έχει άλλη μια χρήσιμη ιδιότητα: Αν X_1, X_2, \dots είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών από εκθετική κατανομή και αν η τ.μ. N ακολουθεί γεωμετρική κατανομή στο σύνολο $\{1, 2, \dots\}$, τότε το άθροισμα $X_1 + X_2 + \dots + X_N$ ακολουθεί εκθετική κατανομή (Marshall and Olkin, 1994).

Λέμε ότι η τ.μ. X ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο λ και γράφουμε $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ αν έχει σ.π.π. και συνάρτηση επιβίωσης

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x, \lambda > 0 \quad (1.1.7.1)$$

και

$$\bar{F}(x) = e^{-\lambda x}, \quad x, \lambda > 0, \quad (1.1.7.2)$$

αντίστοιχα.

Εύκολα προκύπτει ότι η συνάρτηση κινδύνου της εκθετικής κατανομής είναι σταθερή και δίνεται από τη σχέση:

$$h(x) = \lambda > 0. \quad (1.1.7.3)$$

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής είναι:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x, \lambda > 0, \quad (1.1.7.4)$$

ενώ η συνάρτηση υπολογισμού των εκατοστιαίων σημείων (quantile function) είναι:

$$F^{-1}(q) = \frac{1}{\lambda} \log\left(\frac{1}{1-q}\right), \quad 0 \leq q \leq 1, \quad \lambda > 0. \quad (1.1.7.5)$$

Η κατανομή Weibull

Η κατανομή Weibull, έχοντας την εκθετική και την Rayleigh κατανομή ως ειδικά υπο-μοντέλα, είναι μια πολύ δημοφιλής κατανομή που χρησιμοποιήθηκε εκτενώς τις περασμένες δεκαετίες για τη μοντελοποίηση δεδομένων στην αξιοπιστία, στη μηχανική, στις βιολογικές μελέτες, στην υδρολογία και στη μετεωρολογία. Χαρακτηρίζεται από μη σταθερή συνάρτηση κινδύνου και αποτελεί μια από τις σημαντικότερες κατανομές στην ανάλυση επιβίωσης καθώς είναι κατάλληλη για την περιγραφή χρόνων ζωής (Cordeiro and Lemonte, 2012 και Johnson *et al.*, 1994).

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Weibull δίνεται από τη σχέση:

$$f(x) = \beta \lambda (\lambda x)^{\beta-1} e^{-(\lambda x)^\beta}, \quad x > 0, \quad \beta, \lambda > 0, \quad (1.1.7.6)$$

Τότε συμβολίζουμε $X \sim Weib(\beta, \lambda)$. Η εκθετική κατανομή αποτελεί ειδική περίπτωση της κατανομής Weibull για $\beta=1$. Οι συναρτήσεις επιβίωσης και κινδύνου δίνονται από τις σχέσεις:

$$\bar{F}(x) = e^{-(\lambda x)^\beta}, \quad x > 0, \beta, \lambda > 0, \quad (1.1.7.7)$$

και

$$h(x) = \beta \lambda^\beta x^{\beta-1}, \quad x > 0, \beta, \lambda > 0, \quad (1.1.7.8)$$

αντίστοιχα με $x > 0, \beta, \lambda > 0$.

Εύκολα προκύπτει ότι η συνάρτηση κινδύνου είναι αύξουσα (φθίνουσα) αν $\beta > 1$ ($\beta < 1$) και σταθερή αν $\beta = 1$, δηλαδή σταθερή στην περίπτωση της εκθετικής κατανομής.

Τέλος, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής και η συνάρτηση υπολογισμού των εκατοστιαίων σημείων δίνονται, από τις σχέσεις:

$$F(x) = 1 - e^{-(\lambda x)^\beta}, \quad x > 0, \beta, \lambda > 0 \quad (1.1.7.9)$$

και

$$F^{-1}(q) = \frac{1}{\lambda} \left\{ \log \left(\frac{1}{1-q} \right) \right\}^{\frac{1}{\beta}}, \quad 0 \leq q \leq 1, \beta, \lambda > 0, \quad (1.1.7.10)$$

αντίστοιχα.

Η κατανομή Weibull συνδέεται με την εκθετική κατανομή ως εξής (βλ. για παράδειγμα Marshall and Olkin, 1997).

Θεώρημα 1.1.7.1

Αν η τ.μ. X ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο 1, τότε η τ.μ. $\frac{X^{\frac{1}{\beta}}}{\lambda}$ ακολουθεί κατανομή Weibull με παραμέτρους β και λ .

Η κατανομή Pareto τύπου I

Η κατανομή Pareto τύπου I εισήχθη από τον Pareto (1897), για να περιγράψει αρχικά την κατανομή του εισοδήματος ενός πληθυσμού. Η κατανομή αυτή είναι ελαστική και αποτελεσματική σε πολλούς εφαρμοσμένους τομείς, όπως στις ασφαλιστικές επιστήμες, στην υδρολογία, στην αξιοπιστία και στην ανάλυση επιβίωσης (Johnson *et al.*, 1994). Ακόμη, η κατανομή Pareto βρίσκει εφαρμογές στην αστρονομία, για την περιγραφή του μεγέθους των μετεωριτών και στην αρχιτεκτονική για τον προσδιορισμό μεγεθών ανθρώπινων οικισμών (λίγες πόλεις και πολλά χωριά).

Η σ.π.π. της κατανομής Pareto τύπου I δίνεται από τη σχέση:

$$f(x) = \frac{\gamma\beta^\gamma}{x^{\gamma+1}}, \quad x \geq \beta, \quad \beta, \gamma > 0, \quad (1.1.7.11)$$

ενώ η συνάρτηση επιβίωσης είναι:

$$\bar{F}(x) = \left(\frac{x}{\beta}\right)^{-\gamma}, \quad x \geq \beta, \quad \beta, \gamma > 0, \quad (1.1.7.12)$$

Συμβολίζουμε μια τ.μ. X που ακολουθεί κατανομή Pareto τύπου I ως $X \sim P(\beta, \gamma)$. Η συνάρτηση κινδύνου της $X \sim P(\beta, \gamma)$ δίνεται από τη σχέση:

$$h(x) = \frac{\gamma}{x}, \quad x \geq \beta, \quad \beta, \gamma > 0,$$

ενώ η α.σ.κ. είναι:

$$F(x) = 1 - \left(\frac{x}{\beta}\right)^{-\gamma}, \quad x \geq \beta, \beta, \gamma > 0.$$

Τέλος, η συνάρτηση υπολογισμού των εκατοστιαίων σημείων είναι:

$$F^{-1}(q) = \beta \left(\frac{1}{1-q}\right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad 0 \leq q \leq 1, \beta, \gamma > 0. \quad (1.1.7.13)$$

Η κατανομή Lomax

Η κατανομή Lomax (ή κατανομή Pareto τύπου II) είναι μια κατανομή που βρίσκει εφαρμογές στις βιολογικές επιστήμες, στις επιχειρήσεις και στην οικονομική επιστήμη. Ο Lomax (1954) χρησιμοποίησε την κατανομή για να αναλύσει δεδομένα επιχειρηματικής αποτυχίας, ενώ οι Myhre and Saunders (1982) την εφάρμοσαν σε δεξιά λογοκριμμένα δεδομένα.

Η σ.π.π. της κατανομής Lomax δίνεται από τη σχέση:

$$f(x) = \frac{\beta\gamma}{(1+\beta x)^{\gamma+1}}, \quad x \geq 0, \beta, \gamma > 0. \quad (1.1.7.14)$$

Τότε, συμβολίζουμε $X \sim \text{Lomax}(\beta, \gamma)$. Επιπρόσθετα, οι συναρτήσεις επιβίωσης και κινδύνου δίνονται από τις σχέσεις:

$$\bar{F}(x) = (1+\beta x)^{-\gamma}, \quad x \geq 0, \beta, \gamma > 0, \quad (1.1.7.15)$$

και

$$h(x) = \frac{\beta\gamma}{1+\beta x}, \quad x \geq 0, \beta, \gamma > 0,$$

αντίστοιχα.

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής και η συνάρτηση υπολογισμού των εκατοστιαίων σημείων είναι:

$$F(x) = 1 - (1 + \beta x)^{-\gamma}, \quad x \geq 0, \beta, \gamma > 0,$$

και

$$F^{-1}(q) = \frac{1}{\beta} \left\{ \left(\frac{1}{1-q} \right)^{\frac{1}{\gamma}} - 1 \right\}, \quad 0 \leq q \leq 1, \beta, \gamma > 0, \quad (1.1.7.16)$$

αντίστοιχα.

Η γραμμική κατανομή ρυθμού αποτυχίας

Η γραμμική κατανομή ρυθμού αποτυχίας (linear failure-rate distribution) (Kodlin, 1967), γνωστή και ως γραμμική εκθετική κατανομή, έχει σ.π.π.

$$f(x) = (\beta + \gamma x) e^{-\left(\beta x + \frac{\gamma}{2} x^2\right)}, \quad x > 0, \beta, \gamma > 0 \quad (1.1.7.17)$$

και συνάρτηση επιβίωσης:

$$\bar{F}(x) = e^{-\left(\beta x + \frac{\gamma}{2} x^2\right)}, \quad x > 0, \beta, \gamma > 0. \quad (1.1.7.18)$$

Συμβολίζουμε: $X \sim LFR(\beta, \gamma)$.

Η συνάρτηση κινδύνου και η α.σ.κ. είναι:

$$h(x) = \beta + \gamma x, \quad x > 0, \beta, \gamma > 0,$$

και

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\beta x + \frac{\gamma}{2} x^2\right)}, \quad x > 0, \beta, \gamma > 0,$$

αντίστοιχα.

Τέλος, η συνάρτηση υπολογισμού των εκατοστιαίων σημείων είναι:

$$F^{-1}(q) = \frac{\beta}{\gamma} \left\{ \sqrt{1 + \frac{2\gamma}{\beta^2} \log\left(\frac{1}{1-q}\right)} - 1 \right\}, \quad 0 \leq q \leq 1, \quad (1.1.7.19)$$

όπου $\beta, \gamma > 0$.

Η κατανομή semi Pareto

Κάποιες φορές ένας αριθμός δεδομένων που συναντούμε στην πράξη μπορεί να επιδεικνύει κάποιες περιοδικές κινήσεις και να έχει μερικά τοπικά μέγιστα. Για να μοντελοποιήσουμε τέτοιες καταστάσεις, η κατανομή Pareto δείχνει να είναι ανεπαρκής οπότε προτάθηκε η επονομαζόμενη κατανομή semi Pareto, η οποία περιέχει ως ειδική περίπτωση την κατανομή Pareto και παρουσιάζει περιοδικές κινήσεις (Jayakumar and Mathew, 2008).

Η σ.π.π. της κατανομής semi Pareto δίνεται από τη σχέση:

$$f(x) = \frac{\psi'(x)}{(1+\psi(x))^2}, \quad x > 0, \quad (1.1.7.20)$$

όπου η $\psi(x)$ ικανοποιεί την εξίσωση:

$$p\psi(x) = \psi\left(p^{\frac{1}{\beta}}x\right), \quad \beta > 0, \quad 0 < p < 1. \quad (1.1.7.21)$$

Η λύση της εξίσωσης (1.1.7.21) είναι η $\psi(x) = x^\beta r(x)$ όπου η $r(x)$ είναι μια περιοδική συνάρτηση στο $\ln(x)$ με περιοδικότητα $-\frac{2\pi\beta}{\ln p}$.

Τότε συμβολίζουμε $X \sim SP(\beta)$. Επιπρόσθετα, οι συναρτήσεις επιβίωσης και κινδύνου δίνονται από τις σχέσεις:

$$\bar{F}(x) = \frac{1}{1 + \psi(x)}, \quad (1.1.7.22)$$

και

$$h(x) = \frac{\psi'(x)}{1 + \psi(x)},$$

αντίστοιχα για $x > 0$.

Ακόμη, η α.σ.κ. και η συνάρτηση υπολογισμού των εκατοστιαίων σημείων είναι:

$$F(x) = \frac{\psi(x)}{1 + \psi(x)}, \quad x > 0,$$

και

$$F^{-1}(q) = \psi^{-1}\left(\frac{q}{1-q}\right), \quad 0 \leq q \leq 1,$$

αντίστοιχα.

Η κατανομή Pareto τύπου III

Η κατανομή Pareto τύπου III έχει σ.π.π. (Jayakumar and Mathew, 2008):

$$f(x) = \beta x^{\beta-1} (1+x^\beta)^{-2}, \quad x > 0, \beta > 0, \quad (1.1.7.23)$$

και συνάρτηση επιβίωσης:

$$\bar{F}(x) = \frac{1}{1+x^\beta}, \quad x > 0, \beta > 0. \quad (1.1.7.24)$$

Συμβολίζουμε: $X \sim P(\beta)$.

Η συνάρτηση κινδύνου και η α.σ.κ. είναι:

$$h(x) = \frac{\beta x^{\beta-1}}{1+x^\beta}, \quad x > 0, \beta > 0,$$

και

$$F(x) = \frac{x^\beta}{1+x^\beta}, \quad x > 0, \beta > 0,$$

αντίστοιχα.

Τέλος, η συνάρτηση υπολογισμού των εκατοστιαίων σημείων είναι:

$$F^{-1}(q) = \left(\frac{q}{1-q} \right)^{\frac{1}{\beta}}, \quad 0 \leq q \leq 1, \beta > 0.$$

1.1.8 Συναρτήσεις σχετικής πιθανότητας (odds functions)

Έστω X μια τ.μ. με μια απόλυτα συνεχή συνάρτηση κατανομής $F(x)$ με πεδίο ορισμού (a, b) , όπου το a μπορεί να είναι $-\infty$ και το b μπορεί να είναι $+\infty$. Συμβολίζουμε ακόμη με $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ τη συνάρτηση επιβίωσης της τ.μ. X .

Η **συνάρτηση σχετικής πιθανότητας (odds function)** της τ.μ. X δίνεται από τη σχέση (Sankaran and Jayakumar, 2008):

$$\lambda_F(x) = \frac{F(x)}{\bar{F}(x)}.$$

Όταν η τ.μ. X αντιπροσωπεύει τον χρόνο ζωής και ορίζεται στο $(0, \infty)$, η συνάρτηση σχετικής πιθανότητας είναι το πηλίκο της πιθανότητας ότι η αποτυχία μιας μονάδας θα προκύψει πριν τη χρονική στιγμή x , ως προς την πιθανότητα ότι η μονάδα θα επιβιώσει περισσότερο από x .

Εύκολα, προκύπτει ότι η $\lambda_F(x)$ καθορίζει μοναδικά την κατανομή μέσω της σχέσης:

$$\bar{F}(x) = \frac{1}{1 + \lambda_F(x)}. \quad (1.1.8.1)$$

Επιπλέον, $\lambda_F(0) = 0$, $\lambda_F(\infty) = \infty$ και η $\lambda_F(x)$ είναι μη φθίνουσα στο x .

Τέλος, λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (1.1.3.1) αν $h_F(x)$ είναι η συνάρτηση κινδύνου τότε:

$$h_F(x) = \frac{1}{1 + \lambda_F(x)} \frac{d\lambda_F(x)}{dx}.$$

Ορισμός 1.1.8.1

Για την τ.μ. X μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση σχετικής πιθανότητας της X ως (Sankaran and Jayakumar, 2008):

$$\beta_F(x) = \frac{\bar{F}(x)}{F(x)}. \quad (1.1.8.2)$$

Εδώ, η (1.1.8.2) μετρά το πηλίκο της πιθανότητας ότι η μονάδα θα επιβιώσει πέρα της χρονικής στιγμής x ως προς την πιθανότητα ότι θα αποτύχει πριν την x .

Εύκολα προκύπτει ότι:

$$\beta_F(x) = \frac{1}{\lambda_F(x)},$$

και

$$F(x) = \frac{1}{1 + \beta_F(x)}.$$

Η (1.1.8.2) συνδέεται με την **αντίστροφη συνάρτηση κινδύνου** (Block *et al.*, 1998) η οποία ορίζεται ως:

$$m_F(x) = \frac{d \log F(x)}{dx}.$$

Εύκολα προκύπτει ότι:

$$m_F(x) = \frac{1}{1 + \beta_F(x)} \frac{d\beta_F(x)}{dx}.$$

1.2 Σκοπός της μεταπτυχιακής διατριβής και η περίληψή της

Αντικείμενο αυτής της μεταπτυχιακής διατριβής είναι η κριτική παρουσίαση του Marshall and Olkin (1997) μηχανισμού εισαγωγής μίας νέας παραμέτρου σε υπάρχουσα κατανομή, η μελέτη των ιδιοτήτων και των χαρακτηριστικών αυτής της οικογένειας κατανομών καθώς και των κυριότερων και δημοφιλέστερων νέων κατανομών που έχουν προκύψει κατά αυτόν τον τρόπο. Στη συνέχεια, θα δοθεί μια σύντομη περίληψη του περιεχομένου της μεταπτυχιακής διατριβής.

Αντικείμενο μελέτης στο **Κεφάλαιο 2** είναι ο Marshall-Olkin μετασχηματισμός και οι ιδιότητές του. Αρχικά ορίζεται ο Marshall-Olkin μηχανισμός εισαγωγής μιας παραμέτρου σε μια οικογένεια κατανομών και έπειτα παρουσιάζεται η σ.π.π. και η συνάρτηση κινδύνου της νέας οικογένειας. Επίσης, παρατίθενται κάποιες ιδιότητες των νέων κατανομών που προκύπτουν από τον εν λόγω μετασχηματισμό με σημαντικότερη την ιδιότητα της ακραίας γεωμετρικής σταθερότητας που αναφέρθηκε από τους Marshall and Olkin (1997). Έπειτα, μελετώνται κάποια χαρακτηριστικά της νέας οικογένειας κατανομών όπως η αξιοπιστία, η εντροπία Rényi και η συνάρτηση υπολογισμού των εκατοστιαίων σημείων. Τέλος, γίνεται αναφορά στην εκτίμηση των παραμέτρων με τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας για τον Marshall-Olkin μετασχηματισμό και το στατιστικό

τρόπο ελέγχου της αναγκαιότητας της εισαγωγής της προστιθέμενης παραμέτρου.

Στο **Κεφάλαιο 3** το ενδιαφέρον επικεντρώνεται σε κάποιες ειδικές περιπτώσεις Marshall-Olkin κατανομών. Ειδικότερα, παρουσιάζονται οι ακόλουθες επεκταμένες κατανομές: Marshall-Olkin επεκταμένη εκθετική (MOEE), Marshall-Olkin επεκταμένη Weibull (MOEW), Marshall-Olkin επεκταμένη Pareto (MOEP), Marshall-Olkin επεκταμένη Lomax (MOEL), Marshall-Olkin επεκταμένη κατανομή γραμμικού ρυθμού αποτυχίας (ELFR). Οι κατανομές αυτές μελετήθηκαν από τους Marshall and Olkin (1997), Ghitany *et al.* (2005), Ghitany (2005), Ghitany *et al.* (2007) και Ghitany and Kotz (2007), αντίστοιχα.

Στο **Κεφάλαιο 4** θα προσαρμοστούν ενδεικτικά κάποιες κατανομές που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 3 σε πραγματικά σύνολα δεδομένων. Η προσαρμογή γίνεται με τη χρήση της γλώσσας προγραμματισμού στατιστικών εφαρμογών R. Τέλος, παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης επιβίωσης κάθε κατανομής για κάθε σύνολο δεδομένων ξεχωριστά.

Στο **Κεφάλαιο 5** παρουσιάζονται κάποιες μονοδιάστατες επεκτάσεις του Marshall-Olkin μετασχηματισμού όπως η επέκταση κατανομών με βάση πιθανογεννήτριες συναρτήσεις. Παρουσιάζεται στη συνέχεια, η Marshall-Olkin οικογένεια κατανομών που βασίζεται σε χαρακτηριστικές συναρτήσεις. Κυριότερα παραδείγματα κατανομών που προκύπτουν με βάση αυτή την επέκταση είναι η Marshall-Olkin ασύμμετρη κατανομή Laplace (Jayakumar and Kuttykrishnan, 2006) και η Marshall-Olkin Mittag-Leffler κατανομή (Jose and Uma, 2009). Επιπρόσθετα, ερευνάται και η περίπτωση όπου η παράμετρος που εισάγεται είναι τυχαία μεταβλητή και παρουσιάζεται και η ειδική περίπτωση εισαγωγής μιας παραμέτρου στην Marshall-Olkin οικογένεια κατανομών.

Να σημειωθεί ότι έχουν εισαχθεί στη βιβλιογραφία τόσο διδιάστατες όσο και πολυδιάστατες Marshall-Olkin κατανομές. Η κριτική ανασκόπηση

και η παρουσίαση αυτών δεν αποτελεί αντικείμενο μελέτης της παρούσας διατριβής.

Στο **Παράρτημα** δίνονται τα δύο σύνολα δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν στο Κεφάλαιο 4. Τέλος, η διατριβή ολοκληρώνεται με την περίληψή της στην Ελληνική και την Αγγλική γλώσσα (Abstract of MSc Dissertation) και τη Βιβλιογραφία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ο MARSHALL OLKIN ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται αναλυτικά η μέθοδος εισαγωγής μίας νέας παραμέτρου σε υπάρχουσα κατανομή που προτάθηκε από τους Marshall and Olkin (1997). Κατόπιν, παρουσιάζονται κάποια αποτελέσματα σχετικά με τη νέα κατανομή όπως η νέα μορφή που παίρνουν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) και η συνάρτηση κινδύνου καθώς και κάποιες ιδιότητες της νέας επεκταμένης οικογένειας. Επίσης σχολιάζεται η χρήση του Marshall Olkin μετασχηματισμού ως μηχανισμού λοξότητας. Τέλος, υπολογίζονται η αξιοπιστία, η συνάρτηση υπολογισμού των εκατοστιαίων σημείων και η διάμεσος, καθώς και η εντροπία Rényi για τις νέες Marshall Olkin επεκταμένες κατανομές.

2.1 Ο Marshall-Olkin μετασχηματισμός

Έστω X μία συνεχής τ.μ. με συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}(x)$, σ.π.π. f , α.σ.κ. $F(x) = 1 - \bar{F}(x)$ και συνάρτηση κινδύνου h_F . Οι Marshall and Olkin (1997) ορίζουν μια νέα οικογένεια κατανομών, γνωστή και ως Marshall-Olkin μετασχηματισμός, με **συνάρτηση επιβίωσης**, έστω $\bar{G}(x)$, προσθέτοντας μία νέα παράμετρο a , με $0 < a < \infty$ και $\bar{a} = 1 - a$. Ειδικότερα, η νέα οικογένεια κατανομών έχει συνάρτηση επιβίωσης, η οποία μπορεί να κατασκευαστεί με βάση τη σχέση:

$$\bar{G}(x; a) = \frac{a\bar{F}(x)}{1 - \bar{a}\bar{F}(x)} = \frac{a\bar{F}(x)}{1 - \bar{a}[1 - F(x)]} = \frac{a\bar{F}(x)}{F(x) + a\bar{F}(x)}, \quad (2.1.1)$$

όπου $-\infty < x < \infty$, $0 < a < \infty$, $\bar{a} = 1 - a$ και $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$.

Η **αθροιστική συνάρτηση κατανομής** προκύπτει εύκολα ότι είναι:

$$G(x; a) = \frac{F(x)}{F(x) + a\bar{F}(x)}, \quad (2.1.2)$$

όπου $-\infty < x < \infty$, $0 < a < \infty$ και $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$.

Ιδιότητα 1

Η νέα οικογένεια κατανομών περιλαμβάνει την αρχική κατανομή ως ειδική περίπτωση, καθώς για $a = 1$ εύκολα προκύπτει ότι $\bar{G} = \bar{F}$.

Ιδιότητα 2

Αν ο Marshall-Olkin μετασχηματισμός εφαρμοστεί δύο φορές σε μία οικογένεια κατανομών, τότε τίποτα καινούργιο δεν προκύπτει τη δεύτερη φορά εφαρμογής. Ειδικότερα, έστω $\bar{F}(x)$ η αρχική συνάρτηση επιβίωσης και $\bar{G}(x)$ η συνάρτηση επιβίωσης που προκύπτει από τη σχέση (2.1.1). Εφαρμόζοντας τη σχέση (2.1.1), έχοντας ως αρχική τη $\bar{G}(x)$, προκύπτει η νέα συνάρτηση επιβίωσης, έστω $\bar{G}_1(x)$, με:

$$\bar{G}_1(x) = \frac{a\bar{G}(x)}{1 - a\bar{G}(x)} = \frac{a \frac{a\bar{F}(x)}{1 - a\bar{F}(x)}}{1 - a \frac{a\bar{F}(x)}{1 - a\bar{F}(x)}} = \frac{a^2\bar{F}(x)}{1 - (1 - a^2)\bar{F}(x)},$$

ή αλλιώς

$$\bar{G}_1(x) = \frac{\gamma\bar{F}(x)}{1 - (1 - \gamma)\bar{F}(x)},$$

με $\gamma = a^2$.

Επομένως δεν αποκτούμε νέα κατανομή αλλά έχουμε μόνο αλλαγή της προστιθέμενης παραμέτρου.

Ιδιότητα 3

Η α.σ.κ. $G(\cdot; a)$ που δίνεται από την (2.1.2) είναι **στοχαστικά αύξουσα (stochastically increasing)** στο a . Πράγματι, αν $0 < a_1 \leq a_2$ τότε για σταθεροποιημένο x ισχύει ότι:

$$0 \leq a_1 \bar{F}(x) \leq a_2 \bar{F}(x),$$

και

$$0 \leq F(x) + a_1 \bar{F}(x) \leq F(x) + a_2 \bar{F}(x).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα προκύπτει ότι $\bar{G}(x; a_1) \leq \bar{G}(x; a_2)$, για $a_1, a_2 > 0$ και $-\infty < x < \infty$.

2.2 Η σ.π.π. και η συνάρτηση κινδύνου της νέας επεκταμένης οικογένειας

Η νέα κατανομή G έχει **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** g που δίνεται από τη σχέση (βλέπε Marshall and Olkin, 1997):

$$g(x; a) = \frac{af(x)}{[1 - \bar{a}\bar{F}(x)]^2}, \quad (2.2.1)$$

όπου $-\infty < x < \infty$, $0 < a < \infty$, $\bar{a} = 1 - a$.

Επιπλέον, από τις σχέσεις (2.1.1) και (2.2.1) προκύπτει ότι η **συνάρτηση κινδύνου**, έστω $h(x; a)$, της νέας κατανομής, δίνεται από τη σχέση:

$$h(x; a) = \frac{g(x; a)}{\bar{G}(x; a)} = \frac{h_F(x)}{[1 - \bar{a}\bar{F}(x)]}, \quad (2.2.2)$$

όπου $-\infty < x < \infty$, $0 < a < \infty$, $\bar{a} = 1 - a$ και $h_F(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)}$ είναι η συνάρτηση κινδύνου της αρχικής κατανομής με συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}(x)$.

Από τη σχέση (2.2.2) άμεσα προκύπτει ότι η συνάρτηση κινδύνου $h(x; a)$ της νέας οικογένειας ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x; a) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h_F(x)}{a} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} h(x; a) = \lim_{x \rightarrow \infty} h_F(x).$$

Επιπρόσθετα, λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (2.2.2) προκύπτει ότι:

$$\frac{h(x; a)}{h_F(x)} = \frac{1}{F(x) + a\bar{F}(x)}. \quad (2.2.3)$$

Η συνάρτηση αυτή είναι αύξουσα συνάρτηση στο x , για $a \geq 1$, ενώ είναι φθίνουσα συνάρτηση στο x , για $0 < a \leq 1$.

Στο Θεώρημα που ακολουθεί δίνονται κάποιες ανισότητες που ικανοποιούνται από τις συναρτήσεις κινδύνου $h(x; a)$ και $h_F(x)$, καθώς επίσης και από τις συναρτήσεις επιβίωσης $\bar{G}(x, a)$ και $\bar{F}(x)$.

Θεώρημα 2.2.1 (Marshall and Olkin, 1997)

Αν $\bar{F}(x)$ και $h_F(x)$ είναι η συνάρτηση επιβίωσης και κινδύνου αντίστοιχα της αρχικής κατανομής και $\bar{G}(x, a)$ και $h(x; a)$ οι αντίστοιχες συναρτήσεις που προκύπτουν με το μετασχηματισμό (2.1.1), τότε:

$$\frac{h_F(x)}{a} \leq h(x; a) \leq h_F(x), \quad \text{με } -\infty < x < \infty \text{ και } a \geq 1, \quad (2.2.4)$$

και

$$h_F(x) \leq h(x; a) \leq \frac{h_F(x)}{a}, \quad \text{με } -\infty < x < \infty \text{ και } 0 < a \leq 1, \quad (2.2.5)$$

ενώ

$$\bar{F}(x) \leq \bar{G}(x, a) \leq \bar{F}^{\frac{1}{a}}(x), \quad \text{με } -\infty < x < \infty \text{ και } a \geq 1,$$

και

$$\bar{F}^{\frac{1}{a}}(x) \leq \bar{G}(x, a) \leq \bar{F}(x), \quad \text{με } -\infty < x < \infty \text{ και } 0 < a \leq 1.$$

Ιδιότητα 4

Παρακινούμενοι από την Ιδιότητα 2, οι Economou and Caroni (2007) απέδειξαν ότι οι Marshall-Olkin κατανομές έχουν την **ιδιότητα ανάλογων πιθανοτήτων (proportional odds property)**. Η ιδιότητα αυτή μελετήθηκε ανεξάρτητα και από τους Sankaran and Jayakumar (2008).

Θεώρημα 2.2.2 (Sankaran and Jayakumar, 2008)

Έστω $\lambda_F(x)$ και $\lambda_G(x)$ οι συναρτήσεις σχετικής πιθανότητας που αντιστοιχούν στις συναρτήσεις επιβίωσης $\bar{F}(x)$ και $\bar{G}(x)$ της σχέσης (2.1.1) αντίστοιχα. Τότε $\lambda_G(x) = \frac{1}{a} \lambda_F(x)$, και αντίστροφα.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι η $\lambda_G(x) = \frac{1}{a} \lambda_F(x)$ ισχύει. Τότε χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.1.8.1) έχουμε:

$$F(x) = \frac{\lambda_F(x)}{1 + \lambda_F(x)},$$

και συνεπώς

$$\frac{F(x)}{\bar{F}(x)} = \lambda_F(x) = \lambda_G(x)a = \frac{G(x)}{\bar{G}(x)}a.$$

Μπορούμε διαφορετικά να γράψουμε:

$$\bar{G}(x)(1 - \bar{F}(x)) = (1 - \bar{G}(x))\bar{F}(x)a,$$

το οποίο μας δίνει τη σχέση (2.1.1). Εύκολα, αποδεικνύεται και το αντίστροφο.

2.3 Ιδιότητες και χαρακτηριστικά

Το ενδιαφέρον στην ενότητα αυτή επικεντρώνεται στην κριτική παρουσίαση κάποιων ιδιοτήτων και χαρακτηριστικών της νέας οικογένειας κατανομών της σχέσης (2.1.1).

Ιδιότητα 5. Διατήρηση της ύπαρξης των ροπών ίδιας τάξης

Πρόσφατα οι Rubio and Steel (2012) απέδειξαν το ακόλουθο Θεώρημα σχετικά με την ύπαρξη των ροπών της νέας κατανομής που προκύπτει εφαρμόζοντας τον Marshall-Olkin μετασχηματισμό.

Θεώρημα 2.3.1 (Rubio and Steel, 2012)

Οι ροπές της κατανομής που προκύπτει εφαρμόζοντας τον Marshall-Olkin μετασχηματισμό της σχέσης (2.1.1) υπάρχουν για ακριβώς την ίδια τάξη με αυτές της αρχικής κατανομής με α.σ.κ. F .

Απόδειξη

Για την απόδειξη του Θεωρήματος θα θεωρήσουμε δύο περιπτώσεις για την παράμετρο a .

1^η περίπτωση Αν $a < 1$ τότε συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.2.3) και (2.2.5) προκύπτει ότι:

$$\frac{1}{F(x) + a(1 - F(x))} < \frac{1}{a},$$

ή ισοδύναμα ύστερα από λίγη άλγεβρα:

$$\frac{a}{[F(x) + a(1 - F(x))]^2} < \frac{1}{a}.$$

Ακόμη, καθώς $0 < F(x) + a(1 - F(x)) < 1$ προκύπτει εύκολα ότι:

$$a < \frac{a}{[F(x) + a(1 - F(x))]^2},$$

Άρα:

$$a < \frac{a}{[F(x) + a(1 - F(x))]^2} < \frac{1}{a}. \quad (2.3.1)$$

2^η περίπτωση Αν $a > 1$ τότε συνδυάζοντας τις (2.2.3) και (2.2.4), με παρόμοιο σκεπτικό όπως πριν, έχουμε ότι:

$$\frac{1}{a} < \frac{a}{[F(x) + a(1 - F(x))]^2}.$$

Επιπλέον αφού $F(x) + a(1 - F(x)) > 1$, προκύπτει ότι:

$$\frac{a}{[F(x) + a(1 - F(x))]^2} < a.$$

Επομένως, έχουμε ότι:

$$\frac{1}{a} < \frac{a}{[F(x) + a(1 - F(x))]^2} < a. \quad (2.3.2)$$

Συνδυάζοντας τις ανισότητες (2.3.1) και (2.3.2) έχουμε ότι:

$$\min\left\{\frac{1}{a}, a\right\} < K(x; a) < \max\left\{\frac{1}{a}, a\right\},$$

όπου

$$K(x; a) = \frac{a}{[F(x) + a(1 - F(x))]^2}.$$

Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (2.2.1), ισχύει ότι $g(x; a) = K(x; a)f(x)$ και έτσι οι ροπές του μετασχηματισμού (2.1.1) υπάρχουν και είναι της ίδιας τάξης με αυτές της αρχικής κατανομής F .

Από το προηγούμενο Θεώρημα προκύπτει το συμπέρασμα (βλ. Rubio and Steel, 2012) ότι ο μετασχηματισμός Marshall-Olkin δημιουργεί μια νέα κατανομή με ακριβώς την ίδια συμπεριφορά στις ουρές όπως η αρχική.

Επιπλέον, οι Rubio and Steel (2012) ερεύνησαν περαιτέρω τη χρήση του Marshall-Olkin μετασχηματισμού ως μηχανισμού λοξότητας. Αρχικά παρατήρησαν, ότι άμεσα από την σχέση (2.2.1) προκύπτει ότι $g(x; a) = g\left(-x; \frac{1}{a}\right)$. Η ισότητα αυτή σημαίνει ότι τα συνήθη μέτρα της λοξότητας θα αλλάζουν πρόσημο αντιστρέφοντας την παράμετρο a . Έτσι, επιφανειακά και μόνο, η παράμετρος a μπορεί να παίξει τον ρόλο μιας

παραμέτρου λοξότητας. Οι Rubio and Steel (2012) με μια μελέτη κατέληξαν ότι η χρήση του μετασχηματισμού Marshall-Olkin ως γενικού μηχανισμού για την επαγωγή λοξότητας σε μονοκόρυφες συμμετρικές πυκνότητες δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Μπορεί μόνο να φιλοξενήσει σημαντική λοξότητα όταν εφαρμόζεται σε πολύ λεπτοκυρτές (leptokurtic) κατανομές, και μπορεί εύκολα να οδηγήσει σε προβλήματα με δικόρυφες (bimodal) κατανομές όπως θα ερμηνευθεί πιο κάτω. Η μόνη περίπτωση που βρήκαν ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην πράξη είναι όταν ο μετασχηματισμός εφαρμόζεται σε t κατανομές με Cauchy ουρές. Δεν συνίσταται λοιπόν η χρήση του σε οποιαδήποτε άλλη κατάσταση, συμπεριλαμβανομένης της γενικευμένης κανονικής κατανομής (Generalized Normal distribution) που ορίστηκε από τους García *et al.* (2010).

Οι Rubio and Steel (2012) επιπρόσθετα συμπεραίνουν ότι ο Marshall-Olkin μετασχηματισμός μπορεί να ερμηνευθεί ως μηχανισμός λοξότητας, μόνο όταν εφαρμόζεται σε πολύ λεπτοκυρτές κατανομές. Αυτό μπορούμε να το δούμε από τον λόγο της ισότητας

$$K(x; \theta, a) = \frac{g(x; \theta, a)}{f(x; \theta)},$$

που αποδείχθηκε στο Θεώρημα 2.3.1. Αν θεωρήσουμε την $K(x; \theta, a)$ ως συνάρτηση του x , για δοθέν (θ, a) , το παραπάνω πηλίκο είναι πάντα μεταξύ $\frac{1}{a}$ και a . Όμως, αυτό που έχει μεγαλύτερη σημασία για τις ιδιότητες λοξότητας του μετασχηματισμού είναι τι συμβαίνει γύρω από την κορυφή της $f(x; \theta)$. Αν η συνάρτηση κατανομής $F(x; \theta)$ αυξάνεται πολύ αργά σε σχέση με το x σε αυτήν την περιοχή, τότε ο λόγος $K(x; \theta, a)$ επίσης θα μεταβληθεί αργά και ο μετασχηματισμός Marshall-Olkin θα είναι σε θέση να φιλοξενήσει μια λογική ποσότητα λοξότητας. Ακόμη, αν η $F(x; \theta)$ είναι πιο απότομα αύξουσα, η $K(x; \theta, a)$ θα αρχίσει να συμπεριφέρεται ως μια συνάρτηση βήματος, με βασική συνέπεια μια

αλλαγή στην κορυφή, επηρεάζοντας επιπροσθέτως ελάχιστα το σχήμα της κατανομής. Έτσι, μπορούμε να αναμένουμε ότι ο μετασχηματισμός Marshall-Olkin μπορεί μόνο να ερμηνευθεί ως μηχανισμός λοξότητας, αν μετασχηματίζει εξαιρετικά λεπτοκυρτές κατανομές (με ένα πολύ μικρό ποσοστό μάζας γύρω από την κορυφή). Ωστόσο, οι Rubio and Steel (2012) επισημαίνουν ότι για κάποιες κατανομές ο μετασχηματισμός μπορεί να οδηγήσει σε δικόρυφες (bimodal) κατανομές, γεγονός που μπορεί να οδηγήσει σε μη ορθή μοντελοποίηση.

Ιδιότητα 6. Ακραία γεωμετρική σταθερότητα (geometric-extreme stability)

Μια ακόμη ιδιότητα της οικογένειας κατανομών της σχέσης (2.1.1) είναι αυτή της **ακραίας γεωμετρικής σταθερότητας (geometric-extreme stability)**. Στη συνέχεια δίνεται ο ορισμός της έννοιας αυτής.

Ορισμός 2.3.1 (Marshall and Olkin, 1997)

Έστω X_1, X_2, \dots μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. με κατανομή που ανήκει στην οικογένεια κατανομών (2.1.1), έστω \mathcal{F} , και N μια άλλη ανεξάρτητη τ.μ. που ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας:

$$P(N = n) = (1 - p)^{n-1} p, \quad n = 1, 2, \dots, \quad 0 < p < 1.$$

Η \mathcal{F} θα λέγεται **ελάχιστα γεωμετρικά σταθερή (geometric-minimum stable)** αν η κατανομή της τ.μ. $U = \min(X_1, \dots, X_N) \in \mathcal{F}$, ενώ θα λέγεται **μέγιστα γεωμετρικά σταθερή (geometric-maximum stable)** αν η κατανομή της τ.μ. $V = \max(X_1, \dots, X_N) \in \mathcal{F}$. Αν η \mathcal{F} είναι τόσο ελάχιστα γεωμετρικά σταθερή όσο και μέγιστα γεωμετρικά σταθερή, θα λέμε ότι είναι **ακραία γεωμετρικά σταθερή**.

Η συνάρτηση επιβίωσης της τ.μ. $U = \min(X_1, \dots, X_N)$, έστω $\bar{G}_1(x)$, είναι:

$$\bar{G}_1(x) = P(U > x) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{F}^n(x) P(N = n),$$

ή έπειτα από λίγη άλγεβρα:

$$\bar{G}_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{F}^n(x) (1-p)^{n-1} p = \frac{p \bar{F}(x)}{1 - (1-p) \bar{F}(x)}, \quad (2.3.3)$$

με $-\infty < x < \infty$. Εύκολα προκύπτει ότι η αντίστοιχη α.σ.κ. είναι η:

$$G_1(x) = \frac{F(x)}{1 - (1-p) \bar{F}(x)}.$$

Άμεσα προκύπτει ότι η συνάρτηση επιβίωσης της τ.μ. $U = \min(X_1, \dots, X_N)$ που δόθηκε στη σχέση (2.3.3) μπορεί να προκύψει από την (2.1.1) θέτοντας $a = p$, με $0 < a \leq 1$.

Επιπρόσθετα, με παρόμοιο σκεπτικό, προκύπτει ότι η α.σ.κ. της τ.μ. $V = \max(X_1, \dots, X_N)$, έστω $H(x)$, είναι:

$$H(x) = P(V \leq x) = \sum_{n=1}^{\infty} F^n(x) P(N = n),$$

ή έπειτα από λίγη άλγεβρα:

$$H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F^n(x) (1-p)^{n-1} p = \frac{p F(x)}{1 - (1-p) F(x)},$$

με $-\infty < x < \infty$. Εύκολα προκύπτει ότι η αντίστοιχη συνάρτηση επιβίωσης είναι η:

$$\bar{H}(x) = \frac{\bar{F}(x)}{p + (1-p)\bar{F}(x)}, \text{ με } -\infty < x < \infty, \quad (2.3.4)$$

και είναι άμεσα αντιληπτό ότι μπορεί να προκύψει από την (2.1.1) θέτοντας $a = \frac{1}{p}$, με $a \geq 1$.

Ιδιότητα 7

Οι Bakarat *et al.* (2009) έδειξαν ότι οι ασυμπτωτικές κατανομές των μέγιστων και ελάχιστων διατεταγμένων στατιστικών (βλ. ενότητα 1.1.6) του μετασχηματισμού Marshall-Olkin (2.1.1) και της αρχικής κατανομής F είναι του ίδιου τύπου (με διαφορετικές τιμές των σταθερών a_n, b_n).

Αξιοπιστία (Gupta *et al.*, 2010)

Οι Gupta *et al.* (2010) ανέφεραν κάποια αποτελέσματα για την Marshall-Olkin οικογένεια κατανομών στο πλαίσιο της μοντελοποίησης της αξιοπιστίας και της ανάλυσης επιβίωσης.

Το πρόβλημα προκύπτει στο πλαίσιο της αξιοπιστίας (reliability) μιας συνιστώσας από τυχαία ισχύ (random strength), X , κάτω από μια τυχαία ένταση (random stress) Y . Η συνιστώσα αποτυγχάνει οποιαδήποτε στιγμή αν $X < Y$. Έτσι, το μέτρο της αξιοπιστίας της συνιστώσας είναι $R = P(X > Y)$. Για παράδειγμα, αν η τ.μ. Y είναι η απόκριση μιας ομάδας ελέγχου και η τ.μ. X αναφέρεται σε μια ομάδα δοκιμασίας, τότε R είναι ένα μέτρο της επίδρασης της δοκιμασίας.

Υποθέτουμε ότι X και Y είναι δύο ανεξάρτητες τ.μ. με συναρτήσεις επιβίωσης:

$$\bar{G}_1(x; a_1) = \frac{a_1 \bar{F}(x)}{1 - (1 - a_1) \bar{F}(x)} \quad \text{και} \quad \bar{G}_2(y; a_2) = \frac{a_2 \bar{F}(y)}{1 - (1 - a_2) \bar{F}(y)},$$

αντίστοιχα, όπου $\bar{F}(\cdot)$ είναι μια δοθείσα συνάρτηση επιβίωσης. Τότε:

$$\begin{aligned} R = P(X > Y) &= \int_0^{\infty} P(X > Y | Y = y) \cdot g_2(y) dy \\ &= \int_0^{\infty} \frac{a_1 \bar{F}(y)}{1 - \bar{a}_1 \bar{F}(y)} \cdot \frac{a_2 f(y)}{[1 - \bar{a}_2 \bar{F}(y)]^2} dy, \end{aligned}$$

όπου $\bar{a}_1 = 1 - a_1$ και $\bar{a}_2 = 1 - a_2$. Θέτοντας $u = \bar{F}(y)$ προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} R &= a_1 a_2 \int_0^1 \frac{u}{(1 - \bar{a}_1 u)(1 - \bar{a}_2 u)^2} du \\ &= \frac{a_1 a_2}{(\bar{a}_1 - \bar{a}_2)^2} \int_0^1 \left[\frac{\bar{a}_1}{1 - \bar{a}_1 u} - \frac{\bar{a}_2}{1 - \bar{a}_2 u} - \frac{\bar{a}_1 - \bar{a}_2}{(1 - \bar{a}_2 u)^2} \right] du \\ &= \frac{a_1 a_2}{(a_1 - a_2)^2} \left[-\ln(1 - \bar{a}_1) + \ln(1 - \bar{a}_2) + \frac{a_1 - a_2}{a_2} \right], \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα μετά από λίγη άλγεβρα:

$$R = \frac{\frac{a_1}{a_2}}{\left(\frac{a_1}{a_2} - 1\right)^2} \left[-\ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) + \frac{a_1}{a_2} - 1 \right]. \quad (2.3.5)$$

Παρατηρήσεις (Gupta et al., 2010)

- (i) Από τη σχέση (2.3.5) προκύπτει ότι το μέτρο της αξιοπιστίας R εξαρτάται μόνο από τις τιμές των παραμέτρων a_1 και a_2 .

- (ii) Εύκολα προκύπτει εφαρμόζοντας δύο φορές τον κανόνα L'Hospital ότι:

$$\lim_{a_1 \rightarrow a_2} P(X > Y) = \lim_{a_1 \rightarrow a_2} \frac{\frac{a_1}{a_2}}{\left(\frac{a_1}{a_2} - 1\right)^2} \left[-\ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) + \frac{a_1}{a_2} - 1 \right] = \frac{1}{2}.$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι αναμενόμενο, αφού, σε αυτήν την περίπτωση, οι τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. και υπάρχει 50% πιθανότητα η τ.μ. X να είναι μεγαλύτερη από την Y .

- (iii) Η σχέση (2.3.5) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα στη μορφή

$$R = \frac{a}{(a-1)^2} [-\ln(a) + a - 1], \text{ με } a = \frac{a_1}{a_2}.$$

Τότε προκύπτει ότι:

$$\frac{dR}{da} = \frac{2(1-a) + (1+a)\ln(a)}{(1-a)^3} \leq 0,$$

αφού είτε:

$$2(1-a) + (1+a)\ln(a) \leq 0, \text{ για } 0 < a \leq 1,$$

είτε

$$2(1-a) + (1+a)\ln(a) > 0, \text{ για } a > 1.$$

Συνεπώς, η R είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς $a = \frac{a_1}{a_2}$. Επίσης, για σταθερό $a_2(a_1)$ η R είναι μια φθίνουσα (αύξουσα) συνάρτηση στο $a_1(a_2)$.

Συνάρτηση υπολογισμού εκατοστιαίων σημείων

Υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει η αντίστροφη της α.σ.κ. F της αρχικής κατανομής η συνάρτηση υπολογισμού των εκατοστιαίων σημείων της κατανομής με συνάρτηση επιβίωσης $\bar{G}(x)$ προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$x_q = F^{-1}\left(\frac{qa}{1-q(1-a)}\right), \quad 0 \leq q \leq 1. \quad (2.3.6)$$

Η σχέση (2.3.6) μας δίνει ένα τρόπο προσομοίωσης μίας τ.μ. που ακολουθεί Marshall-Olkin κατανομή. Ειδικότερα, αν $U \sim U(0,1)$ τότε η

$$X = F^{-1}\left(\frac{Ua}{1-U(1-a)}\right),$$

ακολουθεί την κατανομή με συνάρτηση επιβίωσης αυτή της σχέσης (2.1.1).

Ακόμη, για $q = 0.5$ προκύπτει ότι η διάμεσος της τ.μ. με α.σ.κ. (2.1.2) δίνεται από τη σχέση:

$$x_{0.5} = F^{-1}\left(\frac{a}{1+a}\right), \quad (2.3.7)$$

όπου F^{-1} είναι η αντίστροφη της αρχικής α.σ.κ.

Εντροπία Rényi

Η εντροπία μιας τυχαίας μεταβλητής είναι ένα μέτρο της αβέβαιης μεταβλητότητας αυτής και έχει χρησιμοποιηθεί σε διάφορες καταστάσεις στις επιστήμες και τη μηχανική. Η εντροπία του Rényi (1961) ορίζεται ως:

$$I_R(\delta) = (1-\delta)^{-1} \log\left(\int_{-\infty}^{\infty} g^\delta(x) dx\right),$$

όπου $\delta > 0$ και $\delta \neq 1$.

Οι Barreto-Souza *et al.* (2013) υπολόγισαν την εντροπία Rényi για την Marshall-Olkin οικογένεια κατανομών.

Θεώρημα 2.3.2 (Barreto-Souza *et al.*, 2013)

- (i) Για $a \in (0,1)$ η εντροπία Rényi μιας τ.μ. X από την Marshall-Olkin οικογένεια κατανομών είναι:

$$I_R(\delta) = (1-\delta)^{-1} \log \left(\sum_{j=0}^{\infty} e_j \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^\delta [1-F(x)]^j dx \right), \quad (2.3.8)$$

όπου

$$e_j = e_j(a) = \frac{a^\delta (1-a)^j \Gamma(2\delta + j)}{\Gamma(2\delta) j!}. \quad (2.3.9)$$

- (ii) Για $a > 1$ η εντροπία Rényi μιας τ.μ. X από την Marshall-Olkin οικογένεια κατανομών είναι:

$$I_R(\delta) = (1-\delta)^{-1} \log \left(\sum_{j=0}^{\infty} h_j \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^\delta F(x)^j dx \right), \quad (2.3.10)$$

όπου

$$h_j = h_j(a) = \frac{(a-1)^j \Gamma(2\delta + j)}{a^{\delta+j} \Gamma(2\delta) j!}. \quad (2.3.11)$$

Απόδειξη

- (i) Για $a \in (0,1)$ χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.2.1) και το αποτέλεσμα:

$$(1-z)^{-\rho} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\rho+j)}{\Gamma(\rho)j!} z^j,$$

με $|z| < 1$ και $\rho > 0$ έχουμε:

$$g(x)^\delta = \frac{a^\delta f(x)^\delta}{\Gamma(2\delta)} \sum_{k=0}^{\infty} (1-a)^k \Gamma(2\delta+k) \frac{[1-F(x)]^k}{k!}.$$

Άρα, η εντροπία Rényi της τ.μ. X για $a \in (0,1)$ είναι:

$$I_R(\delta) = (1-\delta)^{-1} \log \left(\sum_{j=0}^{\infty} e_j \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^\delta [1-F(x)]^j dx \right),$$

με

$$e_j = e_j(a) = \frac{a^\delta (1-a)^j \Gamma(2\delta+j)}{\Gamma(2\delta)j!}.$$

(ii) Για $a > 1$ έχουμε:

$$g(x)^\delta = \frac{f(x)^\delta}{a^\delta \Gamma(2\delta)} \sum_{k=0}^{\infty} (a-1)^k \Gamma(2\delta+k) \frac{F(x)^k}{k!}.$$

Άρα η εντροπία Rényi της τ.μ. X είναι σε αυτήν την περίπτωση:

$$I_R(\delta) = (1-\delta)^{-1} \log \left(\sum_{j=0}^{\infty} h_j \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^\delta F(x)^j dx \right),$$

όπου

$$h_j = h_j(a) = \frac{(a-1)^j \Gamma(2\delta+j)}{a^{\delta+j} \Gamma(2\delta)j!}.$$

Ακόμη, οι Cordeiro and Lemonte (2013) έδωσαν μια ισοδύναμη έκφραση για την εντροπία Rényi της Marshall-Olkin οικογένειας για την περίπτωση όπου $a \in (0,1)$, η οποία παρατίθενται στο Θεώρημα που ακολουθεί.

Θεώρημα 2.3.3 (Cordeiro and Lemonte, 2013)

Για $a \in (0,1)$ η εντροπία Rényi μιας τ.μ. X από την Marshall-Olkin οικογένεια κατανομών είναι:

$$I_R(\delta) = (1-\delta)^{-1} \log \left(\sum_{j=0}^{\infty} e_j \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^\delta F(x)^j dx \right), \quad (2.3.12)$$

όπου

$$e_j = e_j(a) = \frac{a^\delta}{\Gamma(2\delta)} \sum_{k=j}^{\infty} \binom{k}{j} \frac{(-1)^j (1-a)^k \Gamma(2\delta+k)}{k!}. \quad (2.3.13)$$

2.4 Εκτιμητές Μέγιστης Πιθανοφάνειας και Στατιστική Συμπερασματολογία

Έστω X_1, X_2, \dots, X_n τ.δ. από την (2.2.1). Τότε ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας του δείγματος είναι:

$$l(a, \theta) = n \log(a) + \sum_{i=1}^n \log(f(x_i)) - 2 \sum_{i=1}^n \log(1 - (1-a)\bar{F}(x_i)),$$

όπου f και \bar{F} είναι, αντίστοιχα, η σ.π.π. και η συνάρτηση επιβίωσης της αρχικής κατανομής και θ είναι το διάνυσμα των αρχικών παραμέτρων.

Η Caroni (2010), στο πλαίσιο της δειγματοληψίας με τύπου II λογοκριμμένα δεδομένα, προτείνει τρόπους ελέγχου της αναγκαιότητας της

εισαγωγής της νέας παραμέτρου a . Δηλαδή προτείνει τρόπους ελέγχου της υπόθεσης $H_0 : a = 1$ έναντι της εναλλακτικής $H_a : a \neq 1$. Ανάλογα με την τιμή του a η επεκταμένη κατανομή μπορεί να έχει μια ενδιαφέρουσα συνάρτηση κινδύνου που είναι αρκετά διαφορετική από τη συνάρτηση κινδύνου της αρχικής κατανομής και συνεπώς μπορεί να μοντελοποιεί καταστάσεις που οι απλές κατανομές δεν μπορούν. Ειδικότερα, αν X_1, X_2, \dots, X_n είναι ένα τ.δ. όπως περιγράφηκε παραπάνω, τότε η υπόθεση $H_0 : a = a_0$, με a_0 δοθέν σημείο στο εσωτερικό του παραμετρικού χώρου, ελέγχεται σύμφωνα με την κλασική θεωρία των τεστ πηλίκου πιθανοφανειών χρησιμοποιώντας τη στατιστική συνάρτηση:

$$L_1 = -2 \left\{ l(a_0, \hat{\theta}_0) - l(\hat{a}, \hat{\theta}) \right\},$$

όπου $\hat{\theta}_0$ είναι ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας (Ε.Μ.Π.) της θ υπό την H_0 , δηλαδή αν $a_0 = 1$, οπότε $\hat{\theta}_0$ είναι ο Ε.Μ.Π. των παραμέτρων της αρχικής κατανομής, ενώ $(\hat{a}, \hat{\theta})$ είναι το διάνυσμα των Ε.Μ.Π. της Marshall-Olkin επεκταμένης κατανομής. Προφανώς, υπό την H_0 , η L_1 ακολουθεί ασυμπτωτικά χ -τετράγωνο κατανομή με 1 βαθμό ελευθερίας, χ_1^2 . Η κρίσιμη περιοχή απόρριψης της H_0 είναι $L_1 \geq \chi_{1,1-\alpha}^2$.

Παρατήρηση

Η Caroni (2010) είχε προτείνει και δύο άλλους τρόπους ελέγχου της $H_0 : a = a_0$. Ειδικότερα ένα τύπου Wald τεστ και ένα τύπου score τεστ. Όμως, τα αποτελέσματα προσομοίωσης που παρουσιάστηκαν από την Caroni (2010) δείχνουν ξεκάθαρα ότι μόνο το τεστ πηλίκου πιθανοφάνειας είναι επαρκώς ακριβές για τον έλεγχο της παραμέτρου a στις επεκτάσεις των εκθετικών και Weibull κατανομών και συνεπώς συνίσταται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ MARSHALL-OLKIN ΕΠΕΚΤΑΜΕΝΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Εισαγωγή

Οι Marshall-Olkin επεκταμένες κατανομές αποτελούν ένα χρήσιμο εργαλείο μεταξύ άλλων στην ανάλυση επιβίωσης, λόγω της ευελιξίας που παρέχουν στην προσαρμογή συνόλων δεδομένων. Έτσι, σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετηθούν ειδικές περιπτώσεις Marshall-Olkin επεκταμένων κατανομών που προκύπτουν με εφαρμογή του Marshall-Olkin μετασχηματισμού σε κάποιες βασικές συνεχείς κατανομές. Είναι άμεσο ότι οι νέες επεκταμένες κατανομές δίνουν μια ευρύτερη ποικιλία συμπεριφοράς από τις βασικές κατανομές από τις οποίες παράγονται.

Τα τελευταία χρόνια πολλές νέες Marshall-Olkin (M.O.) επεκταμένες κατανομές έχουν παρουσιαστεί στη βιβλιογραφία. Ενδεικτικά αναφέρονται: M.O. επεκταμένη εκθετική κατανομή (Marshall and Olkin, 1997, Alice and Jose, 1999), η M.O. επεκταμένη Weibull κατανομή (Marshall and Olkin, 1997, Ghitany *et al.*, 2005, Zhang and Xie, 2007, Cordeiro and Lemonte, 2013), η M.O. επεκταμένη Pareto κατανομή (Ghitany, 2005), η M.O. Lomax κατανομή (Ghitany *et al.*, 2007), η M.O. επεκταμένη κατανομή γραμμικού ρυθμού αποτυχίας (Marshall-Olkin extended linear failure-rate distribution) (Ghitany and Kotz, 2007) και η M.O. κατανομή Fréchet (Krishna *et al.*, 2013). Τέλος, ο Gómez - Déniz (2010) παρουσίασε μια νέα γενίκευση της γεωμετρικής κατανομής χρησιμοποιώντας το μοντέλο των Marshall-Olkin.

Αντικείμενο αυτού του κεφαλαίου είναι η κριτική παρουσίαση και μελέτη των κυριότερων M.O. επεκταμένων κατανομών.

3.1 Η Marshall-Olkin επεκταμένη Εκθετική κατανομή (MOEE)

Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιαστεί και θα μελετηθεί η Marshall-Olkin επεκταμένη εκθετική κατανομή που προτάθηκε από τους Marshall and Olkin (1997).

3.1.1 Η κατανομή

Η συνάρτηση επιβίωσης της **Marshall-Olkin επεκταμένης εκθετικής κατανομής (Marshall-Olkin extended exponential distribution)** προκύπτει από τη σχέση (2.1.1) με αρχική συνάρτηση επιβίωσης αυτή της εκθετικής κατανομής που προσδιορίστηκε στη σχέση (1.1.7.2). Ειδικότερα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 3.1.1.1 (Marshall and Olkin, 1997)

Η τ.μ. X ακολουθεί τη Marshall-Olkin επεκταμένη εκθετική κατανομή με παραμέτρους a και λ αν η **συνάρτηση επιβίωσης** δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{G}(x; a, \lambda) = \frac{ae^{-\lambda x}}{1 - \bar{a}e^{-\lambda x}} = \frac{a}{e^{\lambda x} - \bar{a}}, \quad (3.1.1.1)$$

όπου $x > 0$, $\lambda > 0$, $a > 0$ και $\bar{a} = 1 - a$. Προφανώς, αν $a = 1$ τότε προκύπτει η συνάρτηση επιβίωσης της εκθετικής κατανομής με παράμετρο λ , δηλαδή η σχέση (1.1.7.2).

Θα συμβολίζουμε μια συνεχή τ.μ. X που ακολουθεί Marshall-Olkin επεκταμένη εκθετική κατανομή με παραμέτρους a και λ και συνάρτηση επιβίωσης (3.1.1.1) ως: $X \sim MOEE(a, \lambda)$.

Λαμβάνοντας υπόψη τον παραπάνω ορισμό και με εφαρμογή των σχέσεων (1.1.7.1) και (1.1.7.2) στη (2.2.1) εύκολα προσδιορίζονται στο Θεώρημα που ακολουθεί η α.σ.κ. και η σ.π.π. της $MOEE(a, \lambda)$.

Θεώρημα 3.1.1.1 (Marshall and Olkin, 1997)

Έστω X μια τ.μ. που ακολουθεί την $MOEE(a, \lambda)$. Τότε η **αθροιστική συνάρτηση κατανομής** και η **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)** της τ.μ. X είναι:

$$G(x; a, \lambda) = \frac{e^{\lambda x} - 1}{e^{\lambda x} - \bar{a}}, \quad (3.1.1.2)$$

και

$$g(x; a, \lambda) = \frac{a\lambda e^{-\lambda x}}{(1 - \bar{a}e^{-\lambda x})^2} = \frac{a\lambda e^{\lambda x}}{(e^{\lambda x} - \bar{a})^2}, \quad (3.1.1.3)$$

αντίστοιχα, όπου $x > 0$, $\lambda > 0$, $a > 0$ και $\bar{a} = 1 - a$.

Σχήμα και κορυφότητα της σ.π.π. της $MOEE(a, \lambda)$.

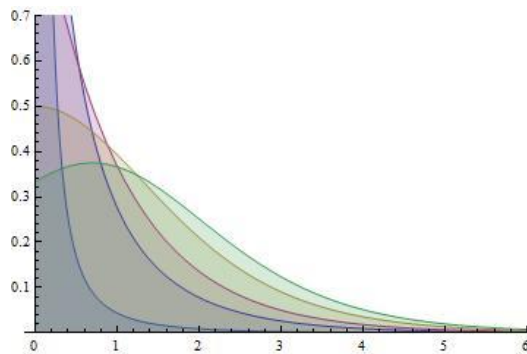
Στο Θεώρημα που ακολουθεί δίνονται απλές συνθήκες κάτω από τις οποίες η σ.π.π. της $MOEE(a, \lambda)$ που δόθηκε στη σχέση (3.1.1.3) είναι φθίνουσα ή μονοκόρυφη.

Θεώρημα 3.1.1.2 (Marshall and Olkin, 1997)

Η σ.π.π. της $MOEE(a, \lambda)$ που δόθηκε στη σχέση (3.1.1.3) είναι για $a \leq 1$ φθίνουσα και για $a \geq 1$ μονοκόρυφη, με **κορυφή** που δίνεται από τη σχέση:

$$\text{mode}(X) = \begin{cases} 0, & \text{για } a \leq 2, \\ \frac{1}{\lambda} \log(a-1), & \text{για } a \geq 2. \end{cases}$$

Στο σχήμα που ακολουθεί δίνεται η γραφική παράσταση αυτής της σ.π.π. για ειδικές τιμές των παραμέτρων και για $x \in (0,6)$. Ειδικότερα, παρατηρούμε ότι για τιμές των παραμέτρων $a=0.5, 0.05, 1$ και $\lambda=1$ η σ.π.π. της MOEE είναι φθίνουσα όπως αναμένεται από το Θεώρημα 3.1.1.2. Για τις τιμές των παραμέτρων $a=1, 2, 3$, $\lambda=1$ η σ.π.π. είναι μονοκόρυφη.



Εικόνα 1: Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της MOEE για $a=0.5$ (γαλάζια γραμμή), $a=1$ (ροζ γραμμή), $a=2$ (καφέ γραμμή), $a=3$ (πράσινη γραμμή), $a=0.05$ (μωβ γραμμή) και $\lambda=1$.

Παρατήρηση (Marshall and Olkin, 1997)

Η συνάρτηση $\log g(\cdot; a, \lambda)$ είναι κυρτή για $0 < a \leq 1$ και κοίλη για $a \geq 1$.

Σχήμα της συνάρτησης κινδύνου της $MOEE(a, \lambda)$.

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (1.1.7.2), (1.1.7.3) και (2.2.2), άμεσα προκύπτει ότι η **συνάρτηση κινδύνου** της $MOEE(a, \lambda)$ κατανομής είναι:

$$h(x; a, \lambda) = \frac{\lambda}{1 - \bar{a}e^{-\lambda x}} = \frac{\lambda e^{\lambda x}}{e^{\lambda x} - \bar{a}}, \quad (3.1.1.4)$$

όπου $x > 0$, $\lambda > 0$, $a > 0$ και $\bar{a} = 1 - a$.

Στο Θεώρημα που ακολουθεί δίνονται απλές συνθήκες κάτω από τις οποίες η συνάρτηση κινδύνου της $MOEE(a, \lambda)$ που δόθηκε στη σχέση (3.1.1.4) είναι αύξουσα ή φθίνουσα. Οι συνθήκες αυτές προκύπτουν από το Θεώρημα 2.2.1, λαμβάνοντας υπόψη ότι $h_F(x) = \lambda$ και $\bar{F}(x) = e^{-\lambda x}$, δηλαδή τις σχέσεις (1.1.7.3) και (1.1.7.2) αντίστοιχα.

Θεώρημα 3.1.1.3 (Marshall and Olkin, 1997)

Η συνάρτηση κινδύνου της $MOEE(a, \lambda)$ που δόθηκε στη σχέση (3.3.1.4) είναι φθίνουσα στο x για $0 < a \leq 1$ και αύξουσα στο x για $a \geq 1$. Ισχύει ότι:

$$\frac{\lambda}{a} \leq h(x; a, \lambda) \leq \lambda, \text{ με } -\infty < x < \infty \text{ και } a \geq 1,$$

ενώ

$$\lambda \leq h(x; a, \lambda) \leq \frac{\lambda}{a}, \text{ με } -\infty < x < \infty \text{ και } 0 \leq a \leq 1.$$

Επιπρόσθετα,

$$e^{-\lambda x} \leq \bar{G}(x; a, \lambda) \leq e^{-\frac{\lambda x}{a}}, \text{ με } -\infty < x < \infty \text{ και } a \geq 1, \quad (3.1.1.5)$$

και

$$e^{-\frac{\lambda x}{a}} \leq \bar{G}(x; a, \lambda) \leq e^{-\lambda x}, \text{ με } -\infty < x < \infty \text{ και } 0 \leq a \leq 1. \quad (3.1.1.6)$$

3.1.2 Χαρακτηριστικά

Οι ιδιότητες της MOEE κατανομής έχουν μελετηθεί από τους Marshall and Olkin (1997) και Alice and Jose (1999). Αντικείμενο αυτής της παραγράφου είναι η κριτική παρουσίαση, ανασκόπηση και μελέτη αυτών των ιδιοτήτων. Στο πλαίσιο αυτό, δίνονται εκφράσεις για τις ροπές, τον μετασχηματισμό Laplace της σ.π.π. της MOEE, τη συνάρτηση υπολογισμού των εκατοστιαίων σημείων και τη διάμεσο. Ακόμη προσδιορίζονται οι κατανομές των ελάχιστων και μέγιστων διατεταγμένων στατιστικών.

Ροπές

Θεώρημα 3.1.2.1 (Marshall and Olkin, 1997)

Έστω X μια τ.μ. που ακολουθεί την $MOEE(a, \lambda)$. Τότε οι ροπές r τάξης της MOEE κατανομής δίνονται από τη σχέση:

$$E(X^r) = \frac{ra}{\lambda^r} \int_0^1 \left\{ \frac{(-\log y)^{r-1}}{1 - \bar{a}y} \right\} dy,$$

ή εκφρασμένες ως απειροσειρά όταν $|\bar{a}| \leq 1$:

$$E(X^r) = \frac{ra}{\lambda^r} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\bar{a}^j \Gamma(r)}{(j+1)^r},$$

όπου $\bar{a} = 1 - a$.

Απόδειξη

Από τις ανισότητες (3.1.1.5) και (3.1.1.6) παρατηρούμε ότι η G έχει πεπερασμένες ροπές όλων των θετικών τάξεων. Η ύπαρξη αυτή ήταν αναμενόμενη λόγω του Θεωρήματος 2.3.1 σύμφωνα με το οποίο οι ροπές

της ΜΟΕΕ υπάρχουν για ακριβώς την ίδια τάξη με αυτές της αρχικής κατανομής. Οι r -ροπές λοιπόν υπολογίζονται ως εξής:

$$E(X^r) = r \int_0^{\infty} \bar{G}(x; a, \lambda) x^{r-1} dx = r \int_0^{\infty} \frac{a}{e^{\lambda x} - \bar{a}} x^{r-1} dx.$$

Θέτοντας $y = e^{-\lambda x}$ θα είναι:

$$E(X^r) = \frac{ra}{\lambda^r} \int_0^1 \left\{ \frac{(-\log y)^{r-1}}{1 - \bar{a}y} \right\} dy.$$

Όταν $|\bar{a}| \leq 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} E(X^r) &= \frac{ra}{\lambda^r} \int_0^{\infty} x^{r-1} e^{-x} \sum_{j=0}^{\infty} \bar{a}^j e^{-jx} dx \\ &= \frac{ra}{\lambda^r} \sum_{j=0}^{\infty} \bar{a}^j \int_0^{\infty} \frac{x^{r-1} e^{-x(j+1)}}{\Gamma(r) \frac{1}{(j+1)^r}} dx \cdot \Gamma(r) \frac{1}{(j+1)^r} \\ &= \frac{ra}{\lambda^r} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\bar{a}^j \Gamma(r)}{(j+1)^r}, \end{aligned}$$

καθώς $\int_0^{\infty} \frac{x^{r-1} e^{-x(j+1)}}{\Gamma(r) \frac{1}{(j+1)^r}} dx = 1.$

Άμεσα προκύπτει ότι αν η τ.μ. X έχει ΜΟΕΕ κατανομή, τότε η **μέση τιμή** της είναι:

$$E(X) = \frac{a}{\lambda} \int_0^1 \frac{1}{1 - \bar{a}y} dy = -\frac{a}{\lambda \bar{a}} \log(1 - \bar{a}) = -\frac{a}{\lambda \bar{a}} \log a,$$

όπου $\bar{a} = 1 - a$.

Μετασχηματισμός Laplace

Θεώρημα 3.1.2.2 (Marshall and Olkin, 1997)

Ο μετασχηματισμός Laplace της σ.π.π. (3.1.1.3) είναι:

$$E(e^{-s\lambda x}) = \int_0^1 \frac{ay^s}{(1-\bar{a}y)^2} dy,$$

ή αν εκφραστεί ως απειροσειρά όταν $|\bar{a}| \leq 1$:

$$E(e^{-s\lambda x}) = a \sum_{j=0}^{\infty} \bar{a}^j (j+1) \frac{1}{s+j+1},$$

όπου $\bar{a} = 1 - a$.

Απόδειξη

Ο μετασχηματισμός Laplace της (3.1.1.3) είναι:

$$E(e^{-s\lambda x}) = \int_0^{\infty} e^{-s\lambda x} \frac{a\lambda e^{-\lambda x}}{(1-\bar{a}e^{-\lambda x})^2} dx.$$

Με χρήση, ξανά, του μετασχηματισμού $y = e^{-\lambda x}$ παίρνουμε:

$$E(e^{-s\lambda x}) = \int_0^1 \frac{ay^s}{(1-\bar{a}y)^2} dy.$$

Τώρα, όταν $|\bar{a}| \leq 1$ η παραπάνω σχέση μπορεί να εκφραστεί ως απειροσειρά ως εξής:

$$\begin{aligned}
E(e^{-s\lambda x}) &= a \int_0^1 y^s \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) y^j \bar{a}^j dy \\
&= a \int_0^1 \sum_{j=0}^{\infty} y^{s+j} (j+1) \bar{a}^j dy \\
&= a \sum_{j=0}^{\infty} \bar{a}^j (j+1) \int_0^1 y^{s+j} dy \\
&= a \sum_{j=0}^{\infty} \bar{a}^j (j+1) \frac{1}{s+j+1}.
\end{aligned}$$

Συνάρτηση υπολογισμού των εκατοστιαίων σημείων

Στην παράγραφο αυτή θα προσδιοριστεί η συνάρτηση υπολογισμού των εκατοστιαίων σημείων της MOEE κατανομής και ως απόρροια αυτής η διάμεσος.

Θεώρημα 3.1.2.3 (Marshall and Olkin, 1997)

Έστω X μια τ.μ. που ακολουθεί την $MOEE(a, \lambda)$. Η αντίστροφη συνάρτηση της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τ.μ. X δίνεται από τη σχέση:

$$G^{-1}(q) = \frac{1}{\lambda} \log \left(1 + \frac{aq}{1-q} \right), \quad 0 \leq q \leq 1. \quad (3.1.2.1)$$

Απόδειξη

Το αποτέλεσμα προκύπτει χρησιμοποιώντας την αντίστροφη της α.σ.κ. της εκθετικής κατανομής που δίνεται από τη σχέση (1.1.7.5) και την (2.3.6)

$$G^{-1}(q) = \frac{1}{\lambda} \log \left(1 + \frac{aq}{1-q} \right), \quad 0 \leq q \leq 1.$$

Η **διάμεσος** της MOEE κατανομής προκύπτει με απλή εφαρμογή για $q = 0.5$ στη σχέση (3.1.2.1):

$$M = \text{median}(X) = \frac{\log(1+a)}{\lambda}$$

Εύκολα ακόμη παρατηρούμε ότι για $a=1$ έχουμε τη διάμεσο της εκθετικής κατανομής, που είναι $\frac{\log(2)}{\lambda}$.

Επιπρόσθετα, σύμφωνα με το παραπάνω Θεώρημα και τη σχέση (3.1.2.1), αν κάποιος θέλει να δημιουργήσει ένα τ.δ. X_1, \dots, X_n από τη MOEE με παραμέτρους a και λ αρκεί να δημιουργήσει ένα τ.δ. U_1, \dots, U_n από την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0,1]$, και να υπολογίσει τις τιμές:

$$X_i = \frac{1}{\lambda} \log \left(1 + \frac{aU_i}{1-U_i} \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Παρατηρήσεις (Marshall and Olkin, 1997)

- (i) Οι συναρτήσεις $\text{mode}(X)$, $\text{median}(X)$ και $E(X)$ είναι αύξουσες στο a και φθίνουσες στο λ .
- (ii) Ισχύει η ανισότητα:

$$\text{mode}(X) \leq \text{median}(X) \leq \frac{a}{\lambda} \leq E(X),$$

παρατηρώντας και ότι:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\text{mode}(X)}{E(X)} = 1.$$

Κατανομή ελάχιστου και μεγίστου

Θα αναφέρουμε τώρα δύο θεωρήματα που προσδιορίζουν τις συναρτήσεις επιβίωσης και κατανομής των $U_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ και $V_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ όταν X_1, X_2, \dots, X_n είναι τυχαίο δείγμα από την ΜΟΕΕ.

Θεώρημα 3.1.2.4 (Alice and Jose, 1999)

Αν X_1, X_2, \dots, X_n είναι τ.δ. από την ΜΟΕΕ κατανομή με συνάρτηση επιβίωσης $\bar{G}(x)$, τότε η τ.μ. $U_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ έχει συνάρτηση επιβίωσης:

$$\bar{G}_{U_n}(x) = \left(1 + \frac{1}{a}(e^{\lambda x} - 1)\right)^{-n} = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{a}(e^{\lambda x} - 1)}\right)^n,$$

και α.σ.κ.

$$G_{U_n}(x) = 1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{a}(e^{\lambda x} - 1)}\right)^n.$$

Απόδειξη

Η συνάρτηση επιβίωσης της ΜΟΕΕ γράφεται ως:

$$\bar{G}(x) = \frac{a}{e^{\lambda x} - \bar{a}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{a}(e^{\lambda x} - 1)}.$$

Έτσι όταν X_1, X_2, \dots, X_n είναι τυχαίο δείγμα από την ΜΟΕΕ κατανομή, η κατανομή της τ.μ. $U_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ είναι:

$$G_{U_n}(x) = 1 - [1 - G(x)]^n.$$

Επομένως η συνάρτηση επιβίωσης $\bar{G}_{U_n}(x)$ είναι:

$$\bar{G}_{U_n}(x) = [1 - G(x)]^n = (\bar{G}(x))^n = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{a}(e^{\lambda x} - 1)} \right)^n,$$

ενώ η συνάρτηση κατανομής:

$$G_{U_n}(x) = 1 - \bar{G}_{U_n}(x) = 1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{a}(e^{\lambda x} - 1)} \right)^n.$$

Θεώρημα 3.1.2.5 (Alice and Jose, 1999)

Αν X_1, X_2, \dots, X_n είναι τυχαίο δείγμα από την ΜΟΕΕ κατανομή με συνάρτηση επιβίωσης $\bar{G}(x)$, τότε η τ.μ. $V_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ έχει συνάρτηση επιβίωσης:

$$\bar{G}_{V_n}(x) = 1 - \left(1 + \frac{1}{a}(e^{\lambda x} - 1) \right)^{-n} = 1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{a}(e^{\lambda x} - 1)} \right)^n,$$

και α.σ.κ.

$$G_{V_n}(x) = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{a}(e^{\lambda x} - 1)} \right)^n.$$

Απόδειξη

Όταν X_1, X_2, \dots, X_n είναι τυχαίο δείγμα από την MOEE κατανομή, η κατανομή του $V_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ είναι:

$$G_{V_n}(x) = P(V_n \leq x) = G^n(x).$$

Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (3.1.1.2) η συνάρτηση επιβίωσης $\bar{G}_{V_n}(x)$ είναι:

$$\bar{G}_{V_n}(x) = 1 - G_{V_n}(x) = 1 - G^n(x) = 1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{a}(e^{\lambda x} - 1)} \right)^n,$$

ενώ η α.σ.κ.

$$G_{V_n}(x) = 1 - \bar{G}_{V_n}(x) = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{a}(e^{\lambda x} - 1)} \right)^n.$$

3.1.3 Στοχαστική αναπαράσταση

Όπως είδαμε στην ενότητα 2.3, οι Marshall-Olkin κατανομές έχουν μια ιδιότητα ακραίας γεωμετρικής σταθερότητας. Το επόμενο Θεώρημα αναφέρει ότι η κατανομή του ελαχίστου ενός τυχαίου δείγματος από MOEE κατανομή έχει κατανομή ξανά MOEE.

Θεώρημα 3.1.3.1 (Alice and Jose, 1999)

Έστω $\{X_i, i \geq 1\}$ μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. με συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}(x)$ και N είναι μια τ.μ. που ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p , δηλαδή

$$P(N = n) = pq^{n-1}, n = 1, 2, \dots, 0 < p < 1, q = 1 - p,$$

η οποία είναι ανεξάρτητη της $\{X_i\}$ για κάθε $i \geq 1$. Έστω $U_N = \min\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$. Τότε η $\{U_N\}$ κατανέμεται ως MOEE αν και μόνο αν η ακολουθία $\{X_i\}$ κατανέμεται ως εκθετική.

Απόδειξη

Αντικαθιστώντας τη συνάρτηση επιβίωσης της εκθετικής κατανομής (1.1.7.2) στη σχέση (2.3.3) προκύπτει το ζητούμενο. Ακολουθώντας την αντίστροφη διαδικασία αποδεικνύεται και το αντίστροφο.

Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει και για το $V_N = \max\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$.

Ακόμη, η MOEE κατανομή μπορεί να προκύψει ως μίξη μιας εκθετικής κατανομής με μια Gompertz κατανομή που έχει δεσμευμένη συνάρτηση επιβίωσης $\bar{G}(x|\theta)$.

Θεώρημα 3.1.3.2 (Marshall and Olkin, 2007)

Έστω ότι η δεσμευμένη συνάρτηση επιβίωσης μιας συνεχούς τ.μ. X δοθέντος ότι $\Theta = \theta$, εκφράζεται ως:

$$\bar{G}(x|\theta) = \exp\left[-\theta(e^{\lambda x} - 1)\right], \quad x \geq 0, \quad \theta, \lambda > 0.$$

Έστω επίσης ότι η παράμετρος θ έχει μια εκθετική κατανομή, με σ.π.π.

$$m(\theta) = ae^{-a\theta}, \quad a > 0, \quad \theta > 0.$$

Τότε η τ.μ. X έχει $MOEE(a, \lambda)$ κατανομή.

Απόδειξη

Για κάθε $x \geq 0$, $a, \lambda > 0$, η μη δεσμευμένη συνάρτηση επιβίωσης της X δίνεται από:

$$\begin{aligned} \bar{G}(x) &= \int_0^{\infty} \bar{G}(x|\theta) m(\theta) d\theta \\ &= a \int_0^{\infty} \exp\{-\theta[e^{\lambda x} - 1 + a]\} d\theta = \frac{ae^{-\lambda x}}{1 - \bar{a}e^{-\lambda x}}, \end{aligned}$$

όπου $\bar{a} = 1 - a$.

Έτσι παρατηρούμε ότι η $\bar{G}(x)$ είναι η συνάρτηση επιβίωσης της $MOEE(a, \lambda)$ κατανομής οπότε η τ.μ. X έχει $MOEE(a, \lambda)$ κατανομή.

Συνδυασμός της MOEE με την Εκθετική-Γεωμετρική κατανομή

Η Εκθετική-Γεωμετρική κατανομή, η οποία μελετήθηκε αναλυτικά από τους Adamidis and Loukas (1998), είναι μια κατανομή φθίνοντος ρυθμού αποτυχίας (decreasing failure rate) και προσαρμόζει καλά πραγματικά δεδομένα επιβίωσης. Θα προσπαθήσουμε να συνδυάσουμε αυτήν την κατανομή με την MOEE που ορίσαμε προηγουμένως.

Θεώρημα 3.1.3.3 (Adamidis and Loukas, 1998)

Υποθέτουμε ότι $\{Y_i\}_{i=1}^Z$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από έναν πληθυσμό με σ.π.π. $f(y; \beta) = \beta e^{-\beta y}$, με $y \geq 0$, $\beta \in R^+$ και Z μια γεωμετρική τ.μ. με συνάρτηση πιθανότητας $P(z; p) = (1-p)p^{z-1}$ για $z \in N - \{0\}$ με $p \in (0,1)$. Έστω $X = \min(\{Y_i\}_{i=1}^Z)$. Τότε λέμε ότι η τ.μ. X , ακολουθεί την Εκθετική-Γεωμετρική κατανομή με παραμέτρους $\theta = (\beta, \gamma) \in R^+ \times R^+$ με $\gamma = 1-p$ και σ.π.π.

$$f(x; \theta) = \frac{\beta(1-p)e^{-\beta x}}{(1-pe^{-\beta x})^2}.$$

Ακόμη, η συνάρτηση επιβίωσης δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{F}(x; \theta) = \frac{(1-p)e^{-\beta x}}{1-pe^{-\beta x}},$$

ενώ η συνάρτηση κινδύνου είναι:

$$h(x; \theta) = \frac{f(x; \theta)}{\bar{F}(x; \theta)} = \frac{\beta}{1-pe^{-\beta x}}.$$

Παρατηρούμε, έτσι, ότι η συνάρτηση επιβίωσης της Εκθετικής-Γεωμετρικής κατανομής είναι ουσιαστικά η συνάρτηση επιβίωσης της MOEE αρκεί να θέσουμε ως $a = 1-p$ και $\bar{a} = 1-(1-p) = p$. Η ίδια παρατήρηση ισχύει φυσικά και για την πυκνότητα, τη συνάρτηση κινδύνου και όλα τα άλλα χαρακτηριστικά (δηλ. ροπές, διάμεσος, συνάρτηση κατανομής κτλ.) που διέπουν την Εκθετική-Γεωμετρική κατανομή.

Κατά συνέπεια, το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι η Εκθετική-Γεωμετρική κατανομή των Adamidis and Loukas (1998), είναι στην πραγματικότητα η MOEE κατανομή με $a \in (0,1)$.

3.1.4 Εντροπία Rényi

Στην παράγραφο αυτή θα προσδιοριστεί η εντροπία Rényi για την περίπτωση της MOEE κατανομής, βασιζόμενοι στον τρόπο ορισμού της εντροπίας στην ενότητα 2.3. Το παρακάτω Θεώρημα, όσο είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε, δεν υπάρχει στη βασική βιβλιογραφία για την MOEE κατανομή.

Θεώρημα 3.1.4.1

Για $a \in (0,1)$ η εντροπία του Rényi της τ.μ. $X \sim MOEE(a, \lambda)$ δίνεται από τη σχέση:

$$I_R(\delta) = (1-\delta)^{-1} \left\{ (\delta-1) \log \lambda + \log \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{e_j}{\delta+j} \right] \right\},$$

όπου $e_j = e_j(a)$ είναι οι ποσότητες που προσδιορίστηκαν στη σχέση (2.3.9).

Επιπλέον, για $a > 1$ η εντροπία του Rényi της τ.μ. $X \sim MOEE(a, \lambda)$ δίνεται από τη σχέση:

$$I_R(\delta) = (1-\delta)^{-1} \left\{ (\delta-1) \log \lambda + \log \left[\sum_{j=0}^{\infty} h_j B(\delta, j+1) \right] \right\},$$

όπου $h_j = h_j(a)$ είναι οι ποσότητες που προσδιορίστηκαν στη σχέση (2.3.11).

Απόδειξη

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (2.3.8) και ότι:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(x)^{\delta} [1-F(x)]^j dx &= \int_0^{\infty} \lambda^{\delta} e^{-\lambda \delta x} e^{-\lambda j x} dx \\ &= \lambda^{\delta} \int_0^{\infty} e^{-\lambda(\delta+j)x} dx \\ &= \frac{\lambda^{\delta-1}}{\delta+j}, \end{aligned}$$

προκύπτει ότι για $a \in (0,1)$

$$\begin{aligned} I_R(\delta) &= (1-\delta)^{-1} \log \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} e_j \frac{\lambda^{\delta-1}}{\delta+j} \right\} \\ &= (1-\delta)^{-1} \left\{ (\delta-1) \log \lambda + \log \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{e_j}{\delta+j} \right] \right\}, \end{aligned}$$

με $e_j = e_j(a)$ να δίνεται από τη σχέση (2.3.9).

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (2.3.10) και ότι:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(x)^{\delta} F(x)^j dx &= \lambda^{\delta} \int_0^{\infty} e^{-\lambda \delta x} (1-e^{-\lambda x})^j dx \\ &= \frac{\lambda^{\delta}}{\lambda} \int_0^1 y^{\delta-1} (1-y)^j dy \\ &= \lambda^{\delta-1} B(\delta, j+1), \end{aligned}$$

όπου $B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$ είναι η Βήτα συνάρτηση με παραμέτρους α και β , προκύπτει ότι για $a > 1$

$$I_R(\delta) = (1-\delta)^{-1} \left\{ (\delta-1) \log \lambda + \log \left[\sum_{j=0}^{\infty} h_j B(\delta, j+1) \right] \right\},$$

με $h_j = h_j(a)$ να δίνεται από τη σχέση (2.3.11).

3.1.5 Στατιστική Συμπερασματολογία

Θα εκτιμήσουμε τις παραμέτρους του μοντέλου χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας. Έστω λοιπόν ένα τυχαίο δείγμα $y_{obs} = (t_i; i=1, \dots, n)$ μεγέθους n από την (3.1.1.3). Ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας $L(\theta; y_{obs})$ δίνεται από τη σχέση:

$$\log L(\theta; y_{obs}) = l(\theta; y_{obs}) = n \log(a\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^n t_i - 2 \sum_{i=1}^n \log(1 - \bar{a}e^{-\lambda t_i}).$$

Παραγωγίζοντας ως προς τις παραμέτρους $\theta = (a, \lambda)$ προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial l}{\partial a} = \frac{n}{a} - 2 \sum_{i=1}^n \frac{e^{-\lambda t_i}}{1 - \bar{a}e^{-\lambda t_i}},$$

και

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n t_i - 2\bar{a} \sum_{i=1}^n \frac{t_i e^{-\lambda t_i}}{1 - \bar{a}e^{-\lambda t_i}},$$

με $\bar{a} = 1 - a$.

Επιλύοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων $\frac{\partial l}{\partial a} = 0$ και $\frac{\partial l}{\partial \lambda} = 0$ προκύπτουν οι εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας $\hat{\theta} = (\hat{a}, \hat{\lambda})$ των παραμέτρων $\theta = (a, \lambda)$. Για να λυθεί το παραπάνω σύστημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί κάποια μέθοδος αριθμητικής ανάλυσης, όπως για παράδειγμα η Newton-Raphson ή η μέθοδος scoring.

Η κατανομή των εκτιμητών μέγιστης πιθανοφάνειας, $\hat{\theta}$, σύμφωνα με τις ασυμπτωτικές ιδιότητες των εκτιμητών αυτών, είναι προσεγγιστικά η διδιάστατη κανονική με μέση τιμή θ και πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων τον αντίστροφο του πίνακα πληροφορίας του Fisher $I(\theta)$, ο οποίος υπολογίζεται από τη σχέση $I(\theta) = E(J(\theta))$ (βλέπε Lawless, 2003), όπου $J(\theta)$ είναι ο συμμετρικός δεύτερης τάξης παρατηρούμενος πίνακας πληροφορίας, ενώ η αναμενόμενη τιμή λαμβάνεται ως προς την κατανομή της τ.μ. X .

Τα στοιχεία του πίνακα $J(\theta): J_{ij} = -\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$, όπου $i, j = 1, 2$, δίνονται αναλυτικά από τις σχέσεις:

$$J_{11} = \frac{n}{a^2} - 2 \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{e^{-\lambda t_i}}{1 - \bar{a} e^{-\lambda t_i}} \right\}^2,$$

$$J_{12} = -2 \sum_{i=1}^n \frac{t_i e^{-\lambda t_i}}{(1 - \bar{a} e^{-\lambda t_i})^2},$$

και

$$J_{22} = \frac{n}{\lambda^2} - 2\bar{a} \sum_{i=1}^n \frac{t_i^2 e^{-\lambda t_i}}{(1 - \bar{a} e^{-\lambda t_i})^2},$$

με $\bar{a} = 1 - a$.

Τέλος, ο παραπάνω πίνακας $J(\theta)$ είναι ένας συνεπής εκτιμητής του $I(\theta)$ και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή ασυμπτωτικών διαστημάτων εμπιστοσύνης για τις άγνωστες παραμέτρους.

3.2 Η Marshall-Olkin επεκταμένη κατανομή Weibull (MOEW)

Όπως έχει αναφερθεί στο Κεφάλαιο 1, η κατανομή Weibull, έχοντας την εκθετική και την Rayleigh κατανομή ως ειδικά υπο-μοντέλα, είναι μια πολύ δημοφιλής κατανομή που χρησιμοποιήθηκε εκτενώς τις περασμένες δεκαετίες για την μοντελοποίηση δεδομένων σε διάφορες επιστημονικές περιοχές.

Όταν μοντελοποιούνται μονότονες συναρτήσεις κινδύνου, η κατανομή Weibull μπορεί να είναι μια αρχική επιλογή εξαιτίας των αρνητικά και θετικά ασυμμέτρων σχημάτων της πυκνότητας. Όμως, η κατανομή Weibull δεν παρέχει μια λογική παραμετρική προσαρμογή για τη μοντελοποίηση φαινομένων με μη-μονότονες συναρτήσεις κινδύνου, όπως είναι για παράδειγμα οι συναρτήσεις κινδύνου κυπελλοειδούς (bathtub) σχήματος ή οι μονοκόρυφες συναρτήσεις κινδύνου που είναι συνηθισμένες στη βιβλιογραφία και στις βιολογικές επιστήμες. Η ανάγκη για επεκταμένες μορφές της κατανομής Weibull προκύπτει γενικά σε πολλούς εφαρμοσμένους τομείς. Κατά την διάρκεια των τελευταίων δύο δεκαετιών, αρκετά νέα μοντέλα έχουν προταθεί που είτε παράγονται από την κατανομή Weibull είτε σχετίζονται με κάποιο τρόπο με αυτή.

Στην ενότητα αυτή θα μελετηθεί η επέκταση της κατανομής Weibull, η τρι-παραμετρική Marshall-Olkin επεκταμένη κατανομή Weibull, που προτάθηκε αρχικά από τους Marshall and Olkin (1997). Αυτή η κατανομή, όπως θα δούμε, έχει αύξουσα, φθίνουσα καθώς και σταθερή συνάρτηση κινδύνου, υποδεικνύοντας την ικανότητα της να μοντελοποιεί

διαφορετικούς τύπους υδρολογικών και οικονομικών δεδομένων, καθώς και δεδομένων αξιοπιστίας με έναν καλύτερο τρόπο (Cordeiro and Lemonte, 2013).

3.2.1 Η κατανομή

Η συνάρτηση επιβίωσης της Marshall-Olkin Weibull κατανομής προκύπτει από τη σχέση (2.1.1) έχοντας ως αρχική συνάρτηση επιβίωσης αυτή της Weibull κατανομής που προσδιορίστηκε στη σχέση (1.1.7.7). Ειδικότερα, ο ορισμός της **Marshall-Olkin επεκταμένης κατανομής Weibull (Marshall-Olkin extended Weibull distribution)** είναι ο ακόλουθος.

Ορισμός 3.2.1.1 (Marshall and Olkin, 1997)

Η τ.μ. X ακολουθεί τη Marshall-Olkin επεκταμένη κατανομή Weibull με παραμέτρους a, β και λ αν η **συνάρτηση επιβίωσης** δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{G}(x; a, \beta, \lambda) = \frac{ae^{-(\lambda x)^\beta}}{1 - \bar{a}e^{-(\lambda x)^\beta}} = \frac{a}{e^{(\lambda x)^\beta} - \bar{a}}, \quad (3.2.1.1)$$

όπου $x > 0, a > 0, \beta > 0, \lambda > 0$ και $\bar{a} = 1 - a$. Προφανώς, αν $a = 1$ τότε προκύπτει η συνάρτηση επιβίωσης της αρχικής κατανομής Weibull με παραμέτρους β, λ που δόθηκε στη σχέση (1.1.7.7).

Θα συμβολίζουμε μια συνεχή τ.μ. X που ακολουθεί Marshall-Olkin επεκταμένη κατανομή Weibull με παραμέτρους a, β και λ και συνάρτηση επιβίωσης (3.2.1.1) ως: $X \sim MOEW(a, \beta, \lambda)$.

Λαμβάνοντας υπόψη τον παραπάνω ορισμό και με εφαρμογή των σχέσεων (1.1.7.6) και (1.1.7.7) στη (2.2.1) εύκολα προσδιορίζονται στο Θεώρημα που ακολουθεί η α.σ.κ. και η σ.π.π. της $MOEW(a, \beta, \lambda)$.

Θεώρημα 3.2.1.1 (Marshall and Olkin, 1997)

Έστω X μια τ.μ. που ακολουθεί την $MOEW(a, \beta, \lambda)$. Τότε η **αθροιστική συνάρτηση κατανομής** και η **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)** της τ.μ. X είναι:

$$G(x; a, \beta, \lambda) = \frac{1 - e^{-(\lambda x)^\beta}}{1 - \bar{a}e^{-(\lambda x)^\beta}}, \quad (3.2.1.2)$$

και

$$g(x; a, \beta, \lambda) = \frac{a\beta\lambda(\lambda x)^{\beta-1} e^{-(\lambda x)^\beta}}{\left[1 - \bar{a}e^{-(\lambda x)^\beta}\right]^2}, \quad (3.2.1.3)$$

αντίστοιχα, όπου $x > 0$, $a > 0$, $\beta > 0$, $\lambda > 0$ και $\bar{a} = 1 - a$.

Σχήμα της σ.π.π. της $MOEW(a, \beta, \lambda)$.

Στο Θεώρημα που ακολουθεί δίνονται απλές συνθήκες κάτω από τις οποίες η σ.π.π. της $MOEW(a, \beta, \lambda)$ που δόθηκε στη σχέση (3.2.1.3) είναι φθίνουσα, μονοκόρυφη ή φθίνουσα-αύξουσα-φθίνουσα.

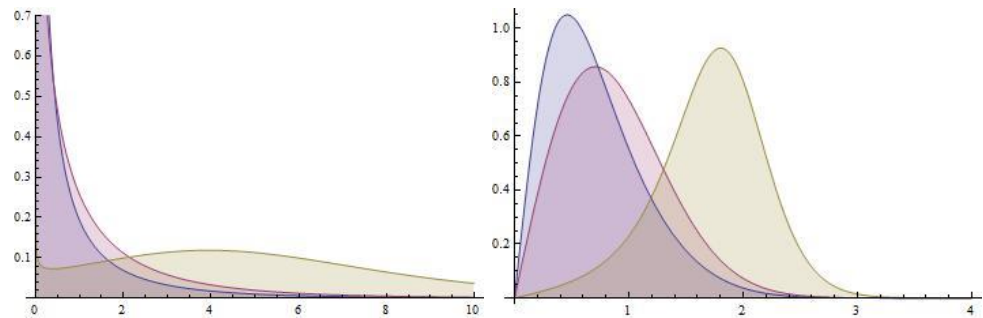
Θεώρημα 3.2.1.2 (Zhang and Xie, 2007)

Η σ.π.π. της $MOEW(a, \beta, \lambda)$ που δόθηκε στη σχέση (3.2.1.3) είναι:

- (i) Φθίνουσα αν $a \leq 1$ και $\beta \leq 1$.
- (ii) Μονοκόρυφη αν $a \leq 1$ και $\beta > 1$ ή $a > 1$ και $\beta > 1$.
- (iii) Φθίνουσα-αύξουσα-φθίνουσα αν $a > 1$ και $\beta < 1$.

Στο σχήμα που ακολουθεί δίνεται η γραφική παράσταση της σ.π.π. της $MOEW$ για ειδικές τιμές των παραμέτρων. Ειδικότερα, παρατηρούμε ότι

για τιμές των παραμέτρων $a = 0.5, 1$, $\beta = 0.7$ και $\lambda = 1$ η σ.π.π. της MOEW είναι φθίνουσα όπως επαληθεύεται και από το (i) του Θεωρήματος 3.2.1.2. Για τις τιμές των παραμέτρων $a = 0.5, 1$, $\beta = 2$ και $\lambda = 1$ η σ.π.π. της MOEW είναι μονοκόρυφη όπως επαληθεύεται από το (ii). Ακόμη, για επιλογές των παραμέτρων $a = 20$, $\beta = 0.7$ και $\lambda = 1$ η σ.π.π. είναι φθίνουσα-αύξουσα-φθίνουσα σύμφωνα με το (iii) του Θεωρήματος, ενώ για $a = 20$, $\beta = 2$ και $\lambda = 1$ η σ.π.π. είναι μονοκόρυφη.



Εικόνα 2: Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της MOEW (α) για, $a = 0.5$ (γαλάζια γραμμή), $a = 1$ (ροζ γραμμή), $a = 20$ (καφέ γραμμή), $\beta = 0.7$ και $\lambda = 1$ και (β) για $a = 0.5$ (γαλάζια γραμμή), $a = 1$ (ροζ γραμμή), $a = 20$ (καφέ γραμμή), $\beta = 2$ και $\lambda = 1$.

Σχήμα της συνάρτησης κινδύνου της MOEW (a, β, λ).

Με αντικατάσταση των σχέσεων (1.1.7.7) και (1.1.7.8) στη σχέση (2.2.2) άμεσα προκύπτει ότι η **συνάρτηση κινδύνου** της MOEW (a, β, λ) κατανομής είναι:

$$h(x; a, \beta, \lambda) = \frac{\lambda \beta (\lambda x)^{\beta-1}}{1 - \bar{a} e^{-(\lambda x)^\beta}}, \quad (3.2.1.4)$$

όπου $x > 0$, $a > 0$, $\beta > 0$, $\lambda > 0$ και $\bar{a} = 1 - a$.

Στο Θεώρημα που ακολουθεί δίνονται απλές συνθήκες κάτω από τις οποίες η συνάρτηση κινδύνου της $MOEW(a, \beta, \lambda)$ που δόθηκε στη σχέση (3.2.1.4) είναι φθίνουσα, αύξουσα, αύξουσα-φθίνουσα-αύξουσα ή φθίνουσα-αύξουσα-φθίνουσα.

Θεώρημα 3.2.1.3 (Ghitany et al., 2005)

Έστω $h(x)$ η συνάρτηση κινδύνου της κατανομής $MOEW(a, \beta, \lambda)$. Τότε:

- (i) Για $a \leq 1, \beta \leq 1$, η $h(x)$ είναι φθίνουσα.
- (ii) Για $a \geq 1, \beta \geq 1$, η $h(x)$ είναι αύξουσα.
- (iii) Για $a \leq 1, \beta > 1$ τέτοια ώστε $\Delta(a, \beta) = \beta - 1 - \bar{a}\beta e^{-\frac{1}{\beta}} \geq 0$, όπου $\bar{a} = 1 - a$, η $h(x)$ είναι αύξουσα. Διαφορετικά, η $h(x)$ είναι αύξουσα-φθίνουσα-αύξουσα.
- (iv) Για $a \geq 1, \beta < 1$ τέτοια ώστε $\Delta(a, \beta) = \beta - 1 - \bar{a}\beta e^{-\frac{1}{\beta}} \leq 0$, όπου $\bar{a} = 1 - a$, η $h(x)$ είναι φθίνουσα. Διαφορετικά, η $h(x)$ είναι φθίνουσα-αύξουσα-φθίνουσα.

Απόδειξη

Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης κινδύνου ως προς x είναι:

$$h'(x) = \frac{\beta\lambda^2 (\lambda x)^{\beta-2} \left\{ (\beta-1) \left(1 - \bar{a}e^{-(\lambda x)^\beta} \right) - \beta\bar{a} (\lambda x)^\beta e^{-(\lambda x)^\beta} \right\}}{\left[1 - \bar{a}e^{-(\lambda x)^\beta} \right]^2},$$

ή πιο απλά

$$h'(x) = \frac{\beta \lambda^2 (\lambda x)^{\beta-2}}{\left[1 - \bar{a} e^{-(\lambda x)^\beta}\right]^2} \varphi\left((\lambda x)^\beta\right), \quad x > 0,$$

όπου:

$$\varphi(y) = (\beta - 1)(1 - \bar{a} e^{-y}) - \beta \bar{a} y e^{-y}, \quad y = (\lambda x)^\beta > 0.$$

- (i) Παρατηρούμε ότι για $a \leq 1, \beta \leq 1$ είναι $\varphi(y) < 0$ και συνεπώς $h'(x) \leq 0$. Άρα η $h(x)$ είναι φθίνουσα για $x > 0$.
- (ii) Παρατηρούμε ότι για $a \geq 1, \beta \geq 1$ είναι $\varphi(y) > 0$ και συνεπώς $h'(x) \geq 0$. Άρα η $h(x)$ είναι αύξουσα για $x > 0$.
- (iii) Για $a \leq 1, \beta > 1$ η πρώτη παράγωγος της $\varphi(y)$ ως προς y είναι:

$$\varphi'(y) = \bar{a}(\beta y - 1)e^{-y}, \quad y > 0.$$

Μηδενίζοντας την πρώτη παράγωγο $\varphi'(y)$ βρίσκουμε ότι η $\varphi(y)$ έχει μοναδικό κρίσιμο σημείο $y^* = \frac{1}{\beta}$.

Η δεύτερη παράγωγος της $\varphi(y)$ ως προς y είναι:

$$\varphi''(y) = \bar{a}[\beta - \beta y + 1]e^{-y}, \quad y > 0.$$

Άρα αφού $\varphi''(y^*) \geq 0$, η $\varphi(y)$ έχει ένα απόλυτο ελάχιστο στο y^* .

Η απόλυτη ελάχιστη τιμή της $\varphi(y)$ δίνεται από την σχέση:

$$\varphi(y^*) = \Delta(a, \beta) = \beta - 1 - \bar{a} \beta e^{-\frac{1}{\beta}}.$$

Παρατηρούμε ακόμη ότι, για $\beta > 1$ ισχύουν:

$$\varphi(0) = (\beta - 1)a \geq 0 \text{ και } \varphi(\infty) = \beta - 1 > 0 .$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για το πρόσημο της $\varphi(y^*)$:

✓ Αν $\varphi(y^*) = \Delta(a, \beta) \geq 0$ τότε $\varphi(y) \geq 0$ για κάθε $y > 0$.

Συνεπώς, $h'(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$, δηλαδή η $h(x)$ είναι αύξουσα για $x > 0$.

✓ Αν $\varphi(y^*) = \Delta(a, \beta) < 0$ τότε η $\varphi(y)$ έχει ακριβώς δύο ρίζες,

τις $x_1 = \frac{1}{\lambda} y_1^{\frac{1}{a}}$ και $x_2 = \frac{1}{\lambda} y_2^{\frac{1}{a}}$, με $x_1 < x_2$. Αφού για $\beta > 1$

ισχύουν $h(0) = 0$, $h(\infty) = \infty$ και $h(x) > 0$, το x_1 (αντίστοιχα το x_2) πρέπει να είναι ένα σημείο τοπικού μεγίστου (ελαχίστου) για την $h(x)$, δηλαδή η $h(x)$ είναι αύξουσα στο διάστημα $(0, x_1]$, φθίνουσα στο $(x_1, x_2]$ και αύξουσα στο (x_2, ∞) .

(iv) Αποδεικνύεται παρόμοια με το (iii).

Παρατηρήσεις (Ghitany et al., 2005)

Από το προηγούμενο Θεώρημα και τη σχέση (3.2.1.4) προκύπτουν τα ακόλουθα:

(i) Για κάθε $a, \lambda > 0$, έχουμε:

$$h(0) = \begin{cases} \infty & \text{για } 0 < \beta < 1 \\ \frac{\lambda}{a} & \text{για } \beta = 1 \\ 0 & \text{για } \beta > 1 \end{cases} \quad \text{και} \quad h(\infty) = \begin{cases} 0 & \text{για } 0 < \beta < 1 \\ \lambda & \text{για } \beta = 1 \\ \infty & \text{για } \beta > 1 \end{cases}$$

- (ii) Για $a = 1$, η $h(x)$ είναι: φθίνουσα (αύξουσα) αν $\beta < 1$ ($\beta > 1$) και σταθερή αν $\beta = 1$.

Προκύπτουν δηλαδή τα γνωστά αποτελέσματα για την κατανομή Weibull.

- (iii) Για $a \neq 1$, η $h(x)$ μπορεί ακόμη να επιδεικνύει μονότονη συμπεριφορά, ανάλογα με τις τιμές των a και β .
- (iv) Οι μονότονες ιδιότητες της συνάρτησης κινδύνου που αναφέραμε συνεπάγονται και άλλες ιδιότητες οι οποίες δόθηκαν στην ενότητα 1.1.

3.2.2 Χαρακτηριστικά

Οι ιδιότητες της MOEW κατανομής έχουν μελετηθεί από τους Marshall and Olkin (1997), Ghitany *et al.* (2005), Zhang and Xie (2007) και Cordeiro and Lemonte (2013). Αντικείμενο αυτής της παραγράφου είναι η κριτική παρουσίαση, ανασκόπηση και μελέτη αυτών των ιδιοτήτων. Στο πλαίσιο αυτό, δίνονται εκφράσεις για τη ροπογεννήτρια, τις ροπές, τη συνάρτηση υπολογισμού των εκατοστιαίων σημείων, τη διάμεσο και τη χαρακτηριστική συνάρτηση καθώς και εκφράσεις για την σ.π.π. του i -οστού διατεταγμένου στατιστικού από την MOEW κατανομή.

Ροπογεννήτρια συνάρτηση

Στην παράγραφο αυτή προσδιορίζεται η ροπογεννήτρια συνάρτηση της MOEW.

Θεώρημα 3.2.2.1 (Cordeiro and Lemonte, 2013)

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. $X \sim MOEW(a, \beta, \lambda)$ είναι:

(i) Για $a \in (0,1)$:

$$M(t) = \lambda^\beta \beta \sum_{j=0}^{\infty} w_j (j+1) M_j(t),$$

όπου $w_j = a\bar{a}^j = a(1-a)^j$, και

$$M_j(t) = \int_0^{\infty} x^{\beta-1} \exp\{tx - (j+1)(\lambda x)^\beta\} dx.$$

(ii) Για $a > 1$:

$$M(t) = \lambda^\beta \beta \sum_{j=0}^{\infty} u_j (j+1) M_j(t),$$

όπου $u_j = u_j(a) = [(j+1)a]^{-1} \sum_{k=j}^{\infty} (-1)^j (k+1) \binom{k}{j} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^k$.

Απόδειξη

(i) Από τον ορισμό της ροπογεννήτριας συνάρτησης και τη σχέση (3.2.1.3) έχουμε:

$$M(t) = E[\exp(tX)] = \int_0^{\infty} e^{tx} g(x) dx = \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{a\beta\lambda(\lambda x)^{\beta-1} e^{-(\lambda x)^\beta}}{\left[1 - a\bar{a}e^{-(\lambda x)^\beta}\right]^2} dx.$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση:

$$(1-z)^{-\rho} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\rho+j)}{\Gamma(\rho)j!} z^j,$$

για $|z| < 1$ και $\rho > 0$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
M(t) &= \int_0^{\infty} e^{tx} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2+j)}{\Gamma(2)j!} \bar{a}^j a e^{-j(\lambda x)^\beta} \beta \lambda (\lambda x)^{\beta-1} e^{-(\lambda x)^\beta} dx \\
&= \lambda^\beta \beta \int_0^{\infty} e^{tx} \sum_{j=0}^{\infty} \bar{a}^j a (j+1) x^{\beta-1} e^{-(j+1)(\lambda x)^\beta} dx,
\end{aligned}$$

ή ύστερα από λίγη άλγεβρα:

$$\begin{aligned}
M(t) &= \lambda^\beta \beta \sum_{j=0}^{\infty} w_j (j+1) \int_0^{\infty} x^{\beta-1} \exp\{tx - (j+1)(\lambda x)^\beta\} dx \\
&= \lambda^\beta \beta \sum_{j=0}^{\infty} w_j (j+1) M_j(t),
\end{aligned}$$

όπου $w_j = a\bar{a}^j = a(1-a)^j$, και

$$M_j(t) = \int_0^{\infty} x^{\beta-1} \exp\{tx - (j+1)(\lambda x)^\beta\} dx.$$

- (ii) Προκύπτει με παρόμοιο τρόπο με την αντικατάσταση u_j αντί για w_j (βλ. Cordeiro and Lemonte, 2013).

Παρατήρηση

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα $M_j(t)$ θα μπορούσε να υπολογιστεί με χρήση μεθόδων αριθμητικής ολοκλήρωσης.

Σε αντιστοιχία με το Θεώρημα 1.1.7.1, ισχύει το παρακάτω Θεώρημα για μια τ.μ. από MOEW κατανομή.

Θεώρημα 3.2.2.2 (Marshall and Olkin, 1997)

Αν η τ.μ. $X \sim MOEE(a,1)$ τότε η τ.μ. $\frac{X^{\frac{1}{\beta}}}{\lambda}$ ακολουθεί $MOEW(a, \beta, \lambda)$.

Κατά συνέπεια, οι ροπές της $MOEW$ κατανομής μπορούν να ληφθούν από μη ακέραιες ροπές της $MOEE$ κατανομής.

Ροπές**Θεώρημα 3.2.2.3 (Marshall and Olkin, 1997)**

Έστω X μια τ.μ. που ακολουθεί την $MOEW(a, \beta, \lambda)$. Τότε οι **ροπές** r τάξης της $MOEW$ κατανομής είναι για $a \in (0,1)$:

$$E(X^r) = \frac{r}{\beta} \Gamma\left(\frac{r}{\beta}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{w_j}{(j+1)^{\frac{r}{\beta}}},$$

όπου $w_j = a\bar{a}^j = a(1-a)^j$.

Απόδειξη

Για $a \in (0,1)$ οι ροπές r τάξης υπολογίζονται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} E(X^r) &= \frac{ra}{\beta} \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \bar{a}^j x^{\frac{r}{\beta}-1} e^{-x(j+1)} dx \\ &= \frac{ra}{\beta} \sum_{j=0}^{\infty} \bar{a}^j \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{r}{\beta}-1} e^{-x(j+1)}}{\left(\frac{1}{j+1}\right)^{\frac{r}{\beta}} \Gamma\left(\frac{r}{\beta}\right)} dx \cdot \left(\frac{1}{j+1}\right)^{\frac{r}{\beta}} \Gamma\left(\frac{r}{\beta}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{r}{\beta} \Gamma\left(\frac{r}{\beta}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a \bar{a}^j}{(j+1)^{\frac{r}{\beta}}} \\
&= \frac{r}{\beta} \Gamma\left(\frac{r}{\beta}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{w_j}{(j+1)^{\frac{r}{\beta}}},
\end{aligned}$$

$$\text{αφού } \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{r}{\beta}-1} e^{-x(j+1)}}{\left(\frac{1}{j+1}\right)^{\frac{r}{\beta}} \Gamma\left(\frac{r}{\beta}\right)} dx = 1 \text{ ως σ.π.π. της } \textit{Gamma}\left(\frac{r}{\beta}, \frac{1}{j+1}\right).$$

Θεώρημα 3.2.2.4 (Cordeiro and Lemonte, 2013)

Αν X μια τ.μ. που ακολουθεί την $MOEW(a, \beta, \lambda)$, τότε οι **ροπές** r τάξης της $MOEW$ κατανομής είναι για $a > 1$:

$$E(X^r) = \frac{r}{\beta} \Gamma\left(\frac{r}{\beta}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_j}{(j+1)^{\frac{r}{\beta}}},$$

$$\text{όπου } u_j = u_j(a) = [(j+1)a]^{-1} \sum_{k=j}^{\infty} (-1)^j (k+1) \binom{k}{j} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^k.$$

Απόδειξη

Προκύπτει με παρόμοιο τρόπο από την απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.2.3 με την αντικατάσταση u_j αντί για w_j .

Συνάρτηση υπολογισμού των εκατοστιαίων σημείων

Στην παράγραφο αυτή θα δοθεί η συνάρτηση υπολογισμού των εκατοστιαίων σημείων της MOEW κατανομής και ως απόρροια αυτής η διάμεσος.

Θεώρημα 3.2.2.5 (Cordeiro and Lemonte, 2013)

Έστω X μια τ.μ. που ακολουθεί την $MOEW(a, \beta, \lambda)$. Η αντίστροφη συνάρτηση της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τ.μ. X δίνεται από τη σχέση:

$$G^{-1}(q) = \frac{1}{\lambda} \left\{ \log \left(\frac{1 - \bar{a}q}{1 - q} \right) \right\}^{\frac{1}{\beta}}, \quad (3.2.2.1)$$

όπου $\bar{a} = 1 - a$.

Απόδειξη

Χρησιμοποιώντας την αντίστροφη της α.σ.κ. της κατανομής Weibull που προσδιορίστηκε στη σχέση (1.1.7.10) και την (2.3.6) προκύπτει ότι:

$$G^{-1}(q) = \frac{1}{\lambda} \left\{ \log \left(\frac{1 - (1 - a)q}{1 - q} \right) \right\}^{\frac{1}{\beta}}, \quad 0 \leq q \leq 1.$$

Η **διάμεσος** της MOEW προκύπτει από τη σχέση (3.2.2.1) με απλή εφαρμογή για $q = 0.5$ και είναι:

$$M = \text{median}(X) = \frac{\{\log(1 + a)\}^{\frac{1}{\beta}}}{\lambda}.$$

Εύκολα ακόμη παρατηρούμε ότι για $a=1$ έχουμε τη διάμεσο της κατανομής Weibull, που είναι $\frac{\{\log(2)\}^{\frac{1}{\beta}}}{\lambda}$.

Επιπρόσθετα, σύμφωνα με το παραπάνω Θεώρημα και τη σχέση (3.2.2.1), αν κάποιος θέλει να δημιουργήσει ένα τ.δ. X_1, \dots, X_n από τη MOEW με παραμέτρους a, β και λ αρκεί να χρησιμοποιήσει τη σχέση:

$$X_i = \frac{1}{\lambda} \left\{ \log \left(\frac{1 - \bar{a}U_i}{1 - U_i} \right) \right\}^{\frac{1}{\beta}}, \quad 0 \leq U_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad \bar{a} = 1 - a,$$

όπου U_1, \dots, U_n τ.δ. από την $U(0,1)$.

Διατεταγμένα στατιστικά

Θα αποκτήσουμε τώρα μια χρήσιμη μικτή αναπαράσταση για την σ.π.π. του i -οστού διατεταγμένου στατιστικού $X_{(i)}$, έστω $g_{(i)}(x)$, σε ένα τ.δ. μεγέθους n από την MOEW (a, β, λ) κατανομή.

Η σ.π.π. του $X_{(i)}$ μπορεί να γραφεί ως:

$$g_{(i)}(x) = an! f(x) \sum_{l=0}^{n-i} \frac{(-1)^l}{(i-1)!(n-i)!} \frac{F(x)^{l+i-1}}{\{1 - \bar{a}\bar{F}(x)\}^{l+i-1}}, \quad x > 0. \quad (3.2.2.2)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1.1.7.6), (1.1.7.7), (1.7.7.9) στη σχέση (3.2.2.2) και μετά από λίγη άλγεβρα, έχουμε το παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα 3.2.2.6 (Cordeiro and Lemonte, 2013)

Για τη σ.π.π. (3.2.2.2) του $X_{(i)}$ ισχύουν τα ακόλουθα.

(i) Όταν $a \in (0,1)$

$$g_{(i)}(x) = \beta \lambda^\beta \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-i} \sum_{k=0}^j \sum_{m=0}^{j+l-k+i-1} u_{j,l,k,m} (m+1)^\beta x^{\beta-1} e^{-(m+1)^\beta (\lambda x)^\beta},$$

όπου

$$u_{j,l,k,m} = u_{j,l,k,m}(a) = \frac{an!(-1)^{l+j-k+m} (1-a)^j \binom{j}{k} \binom{l+i+j}{j} \binom{j+l-k+i-1}{m}}{(i-1)!(n-i)!(m+1)}$$

(ii) Όταν $a > 1$ είναι:

$$g_{(i)}(x) = \beta \lambda^\beta \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-i} \sum_{k=0}^{j+l+i-1} c_{j,l,k} (k+1)^\beta x^{\beta-1} e^{-(k+1)^\beta (\lambda x)^\beta},$$

όπου

$$c_{j,l,k} = c_{j,l,k}(a) = \frac{n!(-1)^{l+k} (a-1)^j \binom{l+i+j}{j} \binom{j+l+i-1}{k}}{a^{l+j+i} (i-1)!(n-i)!(k+1)},$$

με

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-i} \sum_{k=0}^j \sum_{m=0}^{j+l-k+i-1} u_{j,l,k,m} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-i} \sum_{k=0}^{j+l+i-1} c_{j,l,k} = 1,$$

για δοθέντα i και n .

3.2.3 Στοχαστική αναπαράσταση

Η ΜΟΕW κατανομή μπορεί να προκύψει ως μια μικτή κατανομή σύμφωνα με το παρακάτω Θεώρημα:

Θεώρημα 3.2.3.1 (Ghitany et al., 2005)

Υποθέτουμε ότι η δεσμευμένη συνάρτηση επιβίωσης μιας συνεχούς τ.μ. X δοθέντος $\Theta = \theta$ δίνεται από:

$$\bar{G}(x|\theta) = \exp\left\{\theta\left[1 - e^{-(\lambda x)^\beta}\right]\right\}, \quad x, \theta > 0, \beta, \lambda > 0. \quad (3.2.3.1)$$

Έστω ότι η τ.μ. θ έχει μια εκθετική κατανομή με σ.π.π.

$$m(\theta) = ae^{-a\theta}, \quad \theta > 0, a > 0.$$

Τότε η μικτή κατανομή της X είναι η $MOEW(a, \beta, \lambda)$ κατανομή.

Απόδειξη

Για κάθε $x > 0, a, \beta, \lambda > 0$, η συνάρτηση επιβίωσης της X δίνεται από:

$$\begin{aligned} \bar{G}(x) &= \int_0^\infty \bar{G}(x|\theta) m(\theta) d\theta \\ &= a \int_0^\infty \exp\left\{-\theta\left[e^{-(\lambda x)^\beta} - \bar{a}\right]\right\} d\theta = \frac{ae^{-(\lambda x)^\beta}}{1 - \bar{a}e^{-(\lambda x)^\beta}}, \end{aligned}$$

όπου $\bar{a} = 1 - a$.

Έτσι παρατηρούμε ότι η $\bar{G}(x)$ είναι η συνάρτηση επιβίωσης της $MOEW(a, \beta, \lambda)$ κατανομής, οπότε η X ακολουθεί $MOEW(a, \beta, \lambda)$ κατανομή.

Παρατηρήσεις (Ghitany et al., 2005)

- (i) Όταν $\beta = 1$ η εξίσωση (3.2.3.1) είναι, για σταθερό θ , η συνάρτηση επιβίωσης της Gompertz κατανομής (Gompertz, 1825).

- (ii) Όταν $\lambda = 1$ η εξίσωση (3.2.3.1) είναι (για σταθερό θ) η συνάρτηση επιβίωσης της κατανομής που θεωρήθηκε από τον Chen (2000).
- (iii) Η μίξη της Gompertz κατανομής και της κατανομής του Chen (2000) με μια εκθετική κατανομή μίξης για την τ.μ. θ , θα οδηγήσει σε μια ορισμένη μορφή της MOEW κατανομής (που όταν $a = \beta = 1$ περιέχει ως ειδική περίπτωση την εκθετική κατανομή, ενώ όταν $a = 1$ και $\beta > 0$ περιέχει την κατανομή Weibull).

3.2.4 Εντροπία Rényi

Θα παρουσιαστεί στην παράγραφο αυτή η εντροπία Rényi για την περίπτωση της MOEW κατανομής, με βάση τον τρόπο ορισμού της εντροπίας στην ενότητα 2.3.

Θεώρημα 3.2.4.1 (Cordeiro and Lemonte, 2013)

Για $0 < a < 1$ η εντροπία του Rényi της τ.μ. $X \sim MOEW(a, \beta, \lambda)$ δίνεται από τη σχέση:

$$I_R(\delta) = (1 - \delta)^{-1} \left\{ (\delta - 1) \log(\beta\lambda) + \right. \\ \left. + \log \left[\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^j e_j \Gamma \left(1 + (\delta - 1) \left(1 - \frac{1}{\beta} \right) \right) \frac{(-1)^s \binom{j}{s}}{(\delta + s)^{1 + (\delta - 1) \left(1 - \frac{1}{\beta} \right)}} \right] \right\},$$

όπου $e_j = e_j(a)$ οι ποσότητες που προσδιορίστηκαν στη σχέση (2.3.13).

Επιπλέον, για $a > 1$ η εντροπία του Rényi της τ.μ. $X \sim MOEW(a, \beta, \lambda)$ δίνεται από τη σχέση:

$$I_R(\delta) = (1-\delta)^{-1} \{(\delta-1)\log(\beta\lambda) +$$

$$+ \log \left[\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^j h_j \Gamma \left(1 + (\delta-1) \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \right) \frac{(-1)^s \binom{j}{s}}{(\delta+s)^{1+(\delta-1)(1-\frac{1}{\beta})}} \right] \},$$

όπου $h_j = h_j(a)$ οι ποσότητες που προσδιορίστηκαν στη σχέση (2.3.11).

Απόδειξη

Λαμβάνοντας υπόψη την (2.3.12) και ότι:

$$\int_0^{\infty} f(x)^{\delta} F(x)^j dx = \beta^{\delta} \lambda^{\beta\delta} \int_0^{\infty} x^{\delta(\beta-1)} e^{-\delta(\lambda x)^{\beta}} \left[1 - e^{-(\lambda x)^{\beta}} \right]^j dx$$

$$= (\beta\lambda)^{\delta-1} \Gamma \left(1 + (\delta-1) \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \right) \sum_{s=0}^j \frac{(-1)^s \binom{j}{s}}{(\delta+s)^{1+(\delta-1)(1-\frac{1}{\beta})}},$$

όταν $(\delta-1)(\beta-1) > -1$, προκύπτει για $0 < a < 1$ η σχέση

$$I_R(\delta) = (1-\delta)^{-1} \{(\delta-1)\log(\beta\lambda) +$$

$$+ \log \left[\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^j e_j \Gamma \left(1 + (\delta-1) \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \right) \frac{(-1)^s \binom{j}{s}}{(\delta+s)^{1+(\delta-1)(1-\frac{1}{\beta})}} \right] \},$$

με $e_j = e_j(a)$ να δίνονται από τη σχέση (2.3.13).

Λαμβάνοντας υπόψη την (2.3.10) και ότι:

$$\int_0^{\infty} f(x)^{\delta} F(x)^j dx = (\beta\lambda)^{\delta-1} \Gamma\left(1 + (\delta-1)\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\right) \sum_{s=0}^j \frac{(-1)^s \binom{j}{s}}{(\delta+s)^{1+(\delta-1)\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)}},$$

όταν $(\delta-1)(\beta-1) > -1$, προκύπτει για $a > 1$ η σχέση:

$$I_R(\delta) = (1-\delta)^{-1} \left\{ (\delta-1) \log(\beta\lambda) + \right. \\ \left. + \log \left[\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^j h_j \Gamma\left(1 + (\delta-1)\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\right) \frac{(-1)^s \binom{j}{s}}{(\delta+s)^{1+(\delta-1)\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)}} \right] \right\},$$

όπου $h_j = h_j(a)$ οι ποσότητες που προσδιορίστηκαν στη σχέση (2.3.11).

3.2.5 Εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας

Θα εκτιμήσουμε τις παραμέτρους του μοντέλου με την μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας. Θεωρώντας ένα τ.δ. $y_{obs} = (t_i; i=1, \dots, n)$ μεγέθους n από την (3.2.1.3), ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας $L(\theta; y_{obs})$ δίνεται από τη σχέση:

$$\log L(\theta; y_{obs}) = l(\theta; y_{obs}) = n \log(a\beta\lambda^{\beta}) + (\beta-1) \sum_{i=1}^n \log(t_i) - \lambda^{\beta} \sum_{i=1}^n t_i^{\beta} \\ - 2 \sum_{i=1}^n \log\left(1 - \bar{a} e^{-(\lambda t_i)^{\beta}}\right).$$

Παίρνοντας τις μερικές παραγώγους της $l(\theta; y_{obs})$ ως προς τις παραμέτρους a, β και λ έχουμε:

$$\frac{\partial l}{\partial a} = \frac{n}{a} - 2 \sum_{i=1}^n \dot{u}_i,$$

$$\frac{\partial l}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} + n \log \lambda + \sum_{i=1}^n \log(t_i) - \lambda^\beta \sum_{i=1}^n t_i^\beta \log(\lambda t_i) - 2\bar{a} \lambda^\beta \sum_{i=1}^n t_i^\beta \dot{u}_i \log(\lambda t_i),$$

και

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda} = \frac{n\beta}{\lambda} - \beta \lambda^{\beta-1} \sum_{i=1}^n t_i^\beta - 2\bar{a} \beta \lambda^{\beta-1} \sum_{i=1}^n t_i^\beta \dot{u}_i,$$

$$\text{όπου } \dot{u}_i = \frac{e^{-(\lambda t_i)^\beta}}{1 - \bar{a} e^{-(\lambda t_i)^\beta}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Θέτοντας $\frac{\partial l}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial l}{\partial \beta} = 0$, $\frac{\partial l}{\partial \lambda} = 0$ και λύνοντας αυτές τις εξισώσεις

παίρνουμε τους εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας $\hat{\theta} = (\hat{a}, \hat{\beta}, \hat{\lambda})$ των παραμέτρων $\theta = (a, \beta, \lambda)$. Αυτές οι εξισώσεις δε μπορούν να λυθούν αναλυτικά και μπορεί να χρησιμοποιηθεί στατιστικό λογισμικό για την αριθμητική επίλυσή τους χρησιμοποιώντας επαναληπτικές μεθόδους όπως ο αλγόριθμος Newton-Raphson.

Η κανονική προσέγγιση των εκτιμητών μέγιστης πιθανοφάνειας των παραμέτρων $\theta = (a, \beta, \lambda)$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή ασυμπτωτικών διαστημάτων εμπιστοσύνης και για έλεγχο υποθέσεων στις παραμέτρους a, β και λ . Κάτω από συνθήκες που πληρούνται για τις παραμέτρους στο εσωτερικό του παραμετρικού χώρου, έχουμε ότι: $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \sim N_3(0, I_\theta^{-1})$ προσεγγιστικά, όπου I_θ^{-1} είναι ο μοναδιαίος αντίστροφος πίνακας πληροφορίας του Fisher. Η ασυμπτωτική συμπεριφορά ισχύει αν ο $I_\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} J_n(\theta)$, όπου $J_n(\theta)$ είναι ο παρατηρούμενος πίνακας πληροφορίας, αντικαθίσταται από τον μέσο

δειγματικό πίνακα πληροφορίας στο $\hat{\theta}$, δηλαδή $n^{-1}J_n(\hat{\theta})$ (Cordeiro and Lemonte, 2013).

Ο πίνακας πληροφορίας του Fisher είναι $I(\theta) = E(J(\theta))$, όπου $J(\theta)$ είναι ο παρατηρούμενος πίνακας πληροφορίας με στοιχεία $J_{ij} = -\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$, $i, j = 1, 2, 3$.

Παραγωγίζοντας επιμέρους τις σχέσεις $\frac{\partial l}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial l}{\partial \beta} = 0$ και $\frac{\partial l}{\partial \lambda} = 0$ προκύπτουν τα στοιχεία του παρατηρούμενου, συμμετρικού, πίνακα πληροφορίας $J(\theta)$ τα οποία δίνονται από τις σχέσεις:

$$J_{11} = \frac{n}{a^2} - 2 \sum_{i=1}^n \dot{u}_i^2,$$

$$J_{12} = -2\lambda^\beta \sum_{i=1}^n \dot{u}_i t_i^\beta (1 + \bar{a} \dot{u}_i) \log(\lambda t_i),$$

$$J_{13} = -2\beta \lambda^{\beta-1} \sum_{i=1}^n \dot{u}_i t_i^\beta (1 + \bar{a} \dot{u}_i),$$

$$J_{22} = \frac{n}{\beta^2} + \frac{1}{\beta} \lambda^\beta \sum_{i=1}^n t_i^\beta [\beta \log(\beta t_i) \log(\lambda t_i) + 1]$$

$$-2\bar{a} \lambda^\beta \sum_{i=1}^n t_i^\beta [\log(\lambda t_i)]^2 \left\{ \dot{u}_i \left((\lambda t_i)^\beta - 1 \right) + \frac{\bar{a} e^{-2(\lambda t_i)^\beta}}{\left(1 - \bar{a} e^{-(\lambda t_i)^\beta} \right)^2} \right\},$$

$$J_{23} = -\frac{n}{\lambda} + \frac{\beta \lambda^\beta}{\lambda} \sum_{i=1}^n t_i^\beta \log(\beta t_i) - \dot{u}_i + \frac{\bar{a} e^{-2(\lambda t_i)^\beta}}{\left(1 - \bar{a} e^{-(\lambda t_i)^\beta} \right)^2},$$

$$+2\bar{a}\lambda^{\beta-1}\sum_{i=1}^n t_i^\beta \left\{ -\beta \log(\lambda t_i) \left[\dot{u}_i (\lambda t_i)^\beta - \dot{u}_i - \frac{\bar{a}e^{-2(\lambda t_i)^\beta}}{\left(1 - \bar{a}e^{-(\lambda t_i)^\beta}\right)^2} \right] \right\}$$

και

$$J_{33} = \frac{n\beta}{\lambda^2} + \beta(\beta-1)\lambda^{\beta-2}\sum_{i=1}^n t_i^\beta - 2\bar{a}\beta^2\lambda^{2(\beta-1)}\sum_{i=1}^n \dot{u}_i t_i^{2\beta} (1 + \bar{a}\dot{u}_i) \\ + 2\bar{a}\beta(\beta-1)\lambda^{\beta-2}\sum_{i=1}^n t_i^\beta,$$

$$\text{όπου } \bar{a} = 1 - a \text{ και } \dot{u}_i = \frac{e^{-(\lambda t_i)^\beta}}{1 - \bar{a}e^{-(\lambda t_i)^\beta}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

3.3 Η Marshall-Olkin επεκταμένη κατανομή Pareto (MOEP)

Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιαστεί και θα μελετηθεί η Marshall-Olkin επεκταμένη κατανομή Pareto, η οποία εισήχθη στη βιβλιογραφία και μελετήθηκε αναλυτικά από τον Ghitany (2005).

3.3.1 Η κατανομή

Η συνάρτηση επιβίωσης της **Marshall-Olkin επεκταμένης κατανομής Pareto (Marshall-Olkin extended Pareto distribution)** προκύπτει από τη σχέση (2.1.1) με αρχική συνάρτηση επιβίωσης αυτή της κατανομής Pareto τύπου I που προσδιορίστηκε στη σχέση (1.1.7.12). Ειδικότερα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 3.3.1.1 (Ghitany, 2005)

Η τ.μ. X ακολουθεί τη Marshall-Olkin επεκταμένη κατανομή Pareto με παραμέτρους a, β και γ αν η **συνάρτηση επιβίωσης** δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{G}(x; a, \beta, \gamma) = \frac{a \left(\frac{x}{\beta}\right)^{-\gamma}}{1 - \bar{a} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{-\gamma}} = \frac{a}{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\gamma} - \bar{a}}, \quad (3.3.1.1)$$

όπου $x > \beta$, $a, \beta, \gamma > 0$ και $\bar{a} = 1 - a$. Προφανώς, αν $a = 1$ τότε προκύπτει η συνάρτηση επιβίωσης της αρχικής κατανομής Pareto τύπου I με παραμέτρους β, γ (βλ. σχέση (1.1.7.12)).

Θα συμβολίζουμε μια συνεχή τ.μ. X που ακολουθεί Marshall-Olkin επεκταμένη κατανομή Pareto με παραμέτρους a, β και γ και συνάρτηση επιβίωσης (3.3.1.1) ως: $X \sim MOEP(a, \beta, \gamma)$.

Λαμβάνοντας υπόψη τον παραπάνω ορισμό και με εφαρμογή των σχέσεων (1.1.7.11) και (1.1.7.12) στην (2.2.1) εύκολα προσδιορίζονται στο Θεώρημα που ακολουθεί η α.σ.κ. και η σ.π.π. της $MOEP(a, \beta, \gamma)$.

Θεώρημα 3.3.1.1 (Ghitany, 2005)

Έστω X μια τ.μ. που ακολουθεί την $MOEP(a, \beta, \gamma)$. Τότε η **αθροιστική συνάρτηση κατανομής** και η **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)** της τ.μ. X είναι:

$$G(x; a, \beta, \gamma) = 1 - \bar{G}(x; a, \beta, \gamma) = \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^\gamma - 1}{\left(\frac{x}{\beta}\right)^\gamma - \bar{a}}, \quad (3.3.1.2)$$

και

$$g(x; a, \beta, \gamma) = \frac{a\gamma}{\beta} \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\gamma-1}}{\left[\left(\frac{x}{\beta}\right)^\gamma - \bar{a}\right]^2}, \quad (3.3.1.3)$$

αντίστοιχα, όπου $x > \beta$, $a, \beta, \gamma > 0$ και $\bar{a} = 1 - a$.

Σχήμα και κορυφότητα της σ.π.π. της $MOEP(a, \beta, \gamma)$.

Στο Θεώρημα που ακολουθεί δίνονται απλές συνθήκες κάτω από τις οποίες η σ.π.π. της $MOEP(a, \beta, \gamma)$, που δόθηκε στη σχέση (3.3.1.3) είναι φθίνουσα ή μονοκόρυφη.

Θεώρημα 3.3.1.2 (Ghitany, 2005)

Η σ.π.π. της $MOEP(a, \beta, \gamma)$ που δόθηκε στη σχέση (3.3.1.3) είναι φθίνουσα (μονοκόρυφη) αν:

$$a + (2 - a)\gamma \geq 0 \quad (a + (2 - a)\gamma < 0),$$

ανεξάρτητα από τις τιμές της παραμέτρου β . Επιπρόσθετα, η **κορυφή** της ΜΟΕΡ κατανομής δίνεται από τη σχέση:

$$\text{mode}(X) = \begin{cases} \beta, & \text{αν } a + (2 - a)\gamma \geq 0, \\ \beta \left[\frac{(1 - a)(1 - \gamma)}{1 + \gamma} \right]^{\frac{1}{\gamma}}, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Απόδειξη

Η πρώτη παράγωγος της σ.π.π. ως προς x είναι:

$$g'(x) = -\frac{a\gamma \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\gamma-2} \left\{ (1 + \gamma) \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\gamma} - (1 - a)(1 - \gamma) \right\}}{\beta^2 \left[\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\gamma} - \bar{a} \right]^3}, \quad x > \beta,$$

ή πιο απλά

$$g'(x) = -\frac{a\gamma \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\gamma-2}}{\beta^2 \left[\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\gamma} - \bar{a} \right]^3} \xi \left(\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\gamma} \right), \quad x > \beta,$$

όπου $\xi(y) = (1 + \gamma)y - (1 - a)(1 - \gamma)$, με $y = \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\gamma} > 1$, καθώς $x > \beta$ και $\gamma > 0$.

Αφού $\xi'(y) = \gamma + 1 > 0$, η $\xi(y)$ είναι αυστηρά αύξουσα συνάρτηση στο y , με $\xi(1) = a + (2-a)\gamma$ και $\xi(\infty) = \infty$.

Αν $\xi(1) \geq 0$, τότε $\xi(y) \geq 0$, για κάθε $y > 1$, και συνεπώς $g'(x) \leq 0$ για κάθε $x > \beta$, δηλαδή η $g(x)$ είναι αυστηρά φθίνουσα.

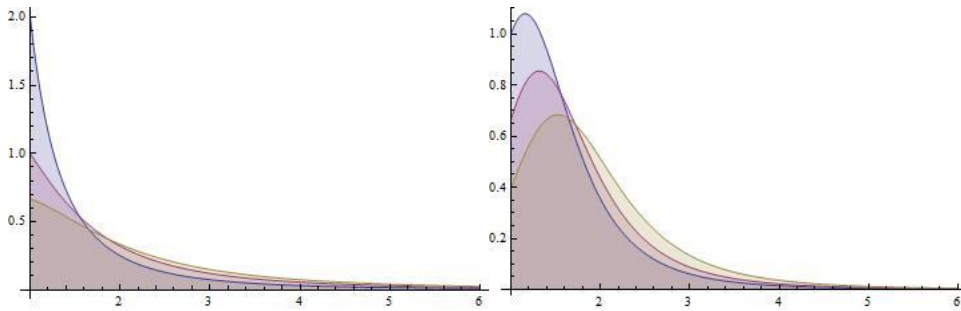
Διαφορετικά, δηλαδή αν $\xi(1) < 0$, καθώς $\xi(\infty) = \infty$ και $\xi(y)$ αυστηρά αύξουσα συνάρτηση, προκύπτει ότι η $\xi(y)$ έχει μοναδική ρίζα στο σημείο $y_f = \frac{(1-a)(1-\gamma)}{1+\gamma} > 1$, το οποίο σημείο y_f προκύπτει εύκολα επιλύοντας

την εξίσωση $\xi(y) = 0$. Καθώς ο μετασχηματισμός $y = \left(\frac{x}{\beta}\right)^\gamma$ είναι 1-1 μετασχηματισμός, συνεπάγεται ότι η $g(x)$ έχει ένα μοναδικό κρίσιμο σημείο στο $x_f = \beta y_f^{\frac{1}{\gamma}}$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι $g(\beta) = \frac{\gamma}{a\beta}$ και $g(\infty) = 0$, προκύπτει ότι το σημείο x_f είναι σημείο απόλυτου μεγίστου για την $g(x)$.

Από τα παραπάνω η κορυφή της MOEP κατανομής προκύπτει εύκολα λαμβάνοντας υπόψη ότι:

$$mode(X) = \begin{cases} g(\beta), & \text{αν } a + (2-a)\gamma \geq 0, \\ g(x_f), & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Στο σχήμα που ακολουθεί δίνεται η γραφική παράσταση της σ.π.π. της MOEP για ειδικές τιμές των παραμέτρων και για $x \in (1,6)$. Ειδικότερα, παρατηρούμε ότι για τιμές των παραμέτρων $a = 1, 2, 3$, $\beta = 1$ και $\gamma = 2$ η σ.π.π. της MOEP είναι φθίνουσα, όπως επαληθεύεται και από τη σχέση $a + (2-a)\gamma > 0$ του Θεωρήματος 3.3.1.2. Για τις τιμές των παραμέτρων του σχήματος (β) επαληθεύεται η σχέση $a + (2-a)\gamma < 0$, οπότε η σ.π.π. είναι μονοκόρυφη.



Εικόνα 3: Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της ΜΟΕΡ (α) για $a=1$ (γαλάζια γραμμή), $a=2$ (ροζ γραμμή), $a=3$ (καφέ γραμμή), $\beta=1$ και $\gamma=2$ και (β) για $a=4$ (γαλάζια γραμμή), $a=6$ (ροζ γραμμή), $a=10$ (καφέ γραμμή), $\beta=1$ και $\gamma=4$.

Παρατηρήσεις (Ghitany, 2005)

Από το προηγούμενο Θεώρημα προκύπτουν τα ακόλουθα:

- (i) Όταν $0 < a \leq 2$ η σ.π.π. της ΜΟΕΡ είναι φθίνουσα, για κάθε τιμή των $\beta, \gamma > 0$, καθώς τότε ικανοποιείται πάντοτε η συνθήκη $a + (2 - a)\gamma \geq 0$. Επομένως και η αρχική κατανομή Pareto τύπου I έχει φθίνουσα σ.π.π.
- (ii) Όταν $a > 2$, η σ.π.π. της ΜΟΕΡ μπορεί να επιδεικνύει φθίνουσα συμπεριφορά, για τιμές των a, γ τέτοιες ώστε να ισχύει η απλή συνθήκη $a + (2 - a)\gamma \geq 0$.
- (iii) Όταν $0 < \gamma \leq 1$, η σ.π.π. της ΜΟΕΡ είναι φθίνουσα για κάθε τιμή των $a, \beta > 0$.

Σχήμα και κορυφότητα της συνάρτησης κινδύνου της $MOEP(a, \beta, \gamma)$.

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (3.3.1.1) και (3.3.1.3) άμεσα προκύπτει ότι η **συνάρτηση κινδύνου της $MOEP(a, \beta, \gamma)$** κατανομής είναι:

$$h(x; a, \beta, \gamma) = \frac{g(a, \beta, \gamma)}{\bar{G}(x; a, \beta, \gamma)} = \frac{\frac{\gamma}{\beta}}{\frac{x}{\beta} \left[1 - \bar{a} \left(\frac{x}{\beta} \right)^{-\gamma} \right]} = \frac{\frac{\gamma}{\beta}}{\frac{x}{\beta} - \bar{a} \left(\frac{x}{\beta} \right)^{-\gamma+1}}, \quad (3.3.1.4)$$

όπου $x > \beta$, $a, \beta, \gamma > 0$ και $\bar{a} = 1 - a$.

Στο Θεώρημα που ακολουθεί δίνονται απλές συνθήκες κάτω από τις οποίες η συνάρτηση κινδύνου της $MOEP(a, \beta, \gamma)$, που δόθηκε στη σχέση (3.3.1.4) είναι φθίνουσα ή μονοκόρυφη. Η απόδειξη ακολουθεί ανάλογη πορεία με αυτή του Θεωρήματος 3.3.1.2 και παραλείπεται.

Θεώρημα 3.3.1.3 (Ghitany, 2005)

Η συνάρτηση κινδύνου της $MOEP(a, \beta, \gamma)$, που δόθηκε στη σχέση (3.3.1.4) είναι φθίνουσα (μονοκόρυφη) αν:

$$a + (1 - a)\gamma \geq 0 \quad (a + (1 - a)\gamma < 0),$$

ανεξάρτητα από τις τιμές της παραμέτρου β . Επιπρόσθετα, η μέγιστη τιμή της συνάρτησης κινδύνου της $MOEP$ κατανομής είναι:

$$\max h = \begin{cases} \frac{\gamma}{a\beta}, & \text{αν } a + (1 - a)\gamma \geq 0, \\ h(x_h), & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

όπου $x_h = \beta[(1-a)(1-\gamma)]^{\frac{1}{\gamma}}$. Ειδικότερα η (3.3.1.4) έχει το απόλυτο μέγιστό της στο σημείο x_h για $a+(1-a)\gamma < 0$.

Παρατηρήσεις (Ghitany, 2005)

Από το προηγούμενο Θεώρημα προκύπτουν τα ακόλουθα:

- (i) Όταν $0 < a \leq 1$, η συνάρτηση κινδύνου της MOEP είναι φθίνουσα, για κάθε τιμή των $\beta, \gamma > 0$, καθώς τότε ικανοποιείται πάντοτε η συνθήκη $a+(1-a)\gamma \geq 0$. Επομένως και η αρχική κατανομή Pareto τύπου I έχει φθίνουσα συνάρτηση κινδύνου.
- (ii) Όταν $a > 1$, η συνάρτηση κινδύνου της MOEP μπορεί να επιδεικνύει φθίνουσα συμπεριφορά, για τιμές των a, γ τέτοιες ώστε να ισχύει η απλή συνθήκη $a+(1-a)\gamma \geq 0$. Η φθίνουσα συνάρτηση κινδύνου συνεπάγεται και άλλες ιδιότητες οι οποίες δόθηκαν στην ενότητα 1.1.
- (iii) Όταν ισχύει η σχέση $a+(1-a)\gamma \geq 0$, είναι προφανές ότι ικανοποιείται και η σχέση $a+(2-a)\gamma \geq 0$. Επομένως, εξάγεται το συμπέρασμα ότι όταν η συνάρτηση κινδύνου της MOEP κατανομής είναι φθίνουσα τότε και η σ.π.π. είναι φθίνουσα. Το αντίστροφο δεν ισχύει απαραίτητα καθώς υπάρχουν επιλογές των παραμέτρων π.χ. ($a=3, \gamma=2$) για τις οποίες ικανοποιείται η σχέση $a+(2-a)\gamma \geq 0$, ενώ $a+(1-a)\gamma < 0$ και επομένως η MOEP έχει φθίνουσα σ.π.π. αλλά μονοκόρυφη συνάρτηση κινδύνου.
- (iv) Με παρόμοιο σκεπτικό, όταν ισχύει η σχέση $a+(2-a)\gamma < 0$, είναι προφανές ότι ικανοποιείται και η σχέση $a+(1-a)\gamma < 0$. Επομένως, εξάγεται το συμπέρασμα ότι όταν η σ.π.π. της MOEP κατανομής είναι μονοκόρυφη τότε και η συνάρτηση κινδύνου είναι

μονοκόρυφη. Το αντίστροφο δεν ισχύει απαραίτητα καθώς υπάρχουν επιλογές των παραμέτρων π.χ. ($a=2, \gamma=3$) για τις οποίες ικανοποιείται η ανισότητα $a+(1-a)\gamma < 0$, ενώ $a+(2-a)\gamma > 0$ και επομένως η MOEP έχει μονοκόρυφη συνάρτηση κινδύνου αλλά φθίνουσα σ.π.π.

3.3.2 Χαρακτηριστικά

Οι ιδιότητες της MOEP κατανομής έχουν μελετηθεί από τον Ghitany (2005). Αντικείμενο αυτής της παραγράφου είναι η κριτική παρουσίαση, ανασκόπηση και μελέτη αυτών των ιδιοτήτων. Στο πλαίσιο αυτό, δίνονται εκφράσεις για τις ροπές, τη συνάρτηση υπολογισμού των εκατοστιαίων σημείων και τη διάμεσο καθώς και για τις ασυμπτωτικές κατανομές του ελάχιστου και μέγιστου διατεταγμένου στατιστικού.

Ροπές

Θεώρημα 3.3.2.1 (Ghitany, 2005)

Έστω X μια τ.μ. που ακολουθεί την $MOEP(a, \beta, \gamma)$. Τότε για $r < \gamma$, οι ροπές r τάξης της MOEP κατανομής δίνονται από τη σχέση:

$$E(X^r) = a\beta^r \int_1^{\infty} \frac{z^{\frac{r}{\gamma}}}{(z-\bar{a})^2} dz,$$

όπου $\bar{a} = 1 - a$.

Απόδειξη

Χρησιμοποιώντας τη σ.π.π. της MOEP κατανομής (3.3.1.3) οι ροπές r τάξης είναι:

$$E(X^r) = \int_{\beta}^{\infty} x^r g(x; a, \beta, \gamma) dx = \frac{a\gamma}{\beta} \int_{\beta}^{\infty} x^r \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\gamma-1}}{\left[\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\gamma} - \bar{a}\right]^2} dx.$$

Κάνοντας την αντικατάσταση $z = \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\gamma}$ έχουμε:

$$E(X^r) = \frac{a}{\beta} \int_1^{\infty} \frac{z^{\frac{r-1}{\gamma}} z^{\frac{1}{\gamma}} \beta^{r+1}}{(z - \bar{a})^2} dz = a\beta^r \int_1^{\infty} \frac{z^{\frac{r}{\gamma}}}{(z - \bar{a})^2} dz,$$

με $r < \gamma$.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι για $a \neq 1$, $\beta > 0$, $r < \gamma$, οι ροπές r τάξης δεν μπορούν να εκφραστούν σε μια απλή κλειστή μορφή σε όρους r, a, β, γ και πρέπει να υπολογιστούν με κάποια μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης. Όταν $a = 1$ αποκτούμε τις ροπές r τάξης της κατανομής Pareto τύπου I:

$$E(X^r) = \beta^r \frac{\gamma}{\gamma - r}, \quad r < \gamma.$$

Ακόμη, παρατηρούμε ότι επιβεβαιώνεται το Θεώρημα 2.3.1 που αναφέρει την ύπαρξη ροπών της ίδιας τάξης.

Συνάρτηση υπολογισμού των εκατοστιαίων σημείων

Στη συνέχεια θα δοθεί η συνάρτηση υπολογισμού των εκατοστιαίων σημείων της MOEP κατανομής και θα δοθεί, ως απόρροια αυτής, η διάμεσος. Το αποτέλεσμα προκύπτει συνδυάζοντας τις σχέσεις (1.1.7.13) και (2.3.6).

Θεώρημα 3.3.2.2 (Ghitany, 2005)

Έστω X μια τ.μ. που ακολουθεί την $MOEP(a, \beta, \gamma)$. Η αντίστροφη συνάρτηση της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τ.μ. X δίνεται από τη σχέση:

$$G^{-1}(q) = \beta \left(1 + \frac{qa}{1-q} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad 0 \leq q \leq 1. \quad (3.3.2.1)$$

Η **διάμεσος** της $MOEP$ κατανομής προκύπτει με απλή εφαρμογή για $q = 0.5$ στη σχέση (3.3.2.1):

$$M = \text{median}(X) = \beta(1+a)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Εύκολα ακόμη παρατηρούμε ότι για $a=1$ έχουμε τη διάμεσο της κατανομής Pareto τύπου I, που είναι $\beta 2^{\frac{1}{\gamma}}$.

Επιπρόσθετα, σύμφωνα με το παραπάνω Θεώρημα και τη σχέση (3.3.2.1), αν κάποιος θέλει να δημιουργήσει ένα τ.δ. X_1, \dots, X_n από τη $MOEP$ με παραμέτρους a, β και γ αρκεί να δημιουργήσει ένα τ.δ. U_1, \dots, U_n από την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0,1]$, και να υπολογίσει τις τιμές:

$$X_i = \beta \left(1 + \frac{U_i a}{1-U_i} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad 0 \leq U_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Διατεταγμένες στατιστικές συναρτήσεις

Έστω τώρα X_1, \dots, X_n τ.δ. από έναν πληθυσμό που ακολουθεί την $MOEP$ κατανομή με σ.π.π. που δίνεται από τη σχέση (3.3.1.3). Εφαρμόζοντας τα θεωρήματα 1.1.6.1 και 1.1.6.2 μπορούν να

προσδιοριστούν οι ασυμπτωτικές κατανομές των ελάχιστων και μέγιστων διατεταγμένων στατιστικών.

Θεώρημα 3.3.2.3 (Ghitany, 2005)

Έστω $X_{(1)}$ και $X_{(n)}$, αντίστοιχα, το ελάχιστο και το μέγιστο διατεταγμένο στατιστικό από την $MOEP(a, \beta, \gamma)$ κατανομή. Τότε:

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P\{X_{(1)} \leq a_n^* + b_n^* t\} = 1 - \exp[-t], \quad t > 0,$$

$$\text{όπου } a_n^* = \beta \text{ και } b_n^* = \beta \left[\left(1 + \frac{a}{n-1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} - 1 \right].$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P\{X_{(n)} \leq b_n t\} = \exp[-t^{-\gamma}], \quad t > 0,$$

$$\text{με } b_n = \beta [1 + (n-1)a]^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Απόδειξη

- (i) Το αποτέλεσμα προκύπτει ως εφαρμογή του Θεωρήματος 1.1.6.1. Για την $MOEP$ κατανομή παρατηρούμε, χρησιμοποιώντας και τη σχέση (3.3.2.1), ότι $G^{-1}(0) = \beta > 0$. Ακόμη, από τη σχέση (1.1.6.2) μετά από λίγη άλγεβρα και χρησιμοποιώντας μια φορά τον κανόνα L'Hospital (καθώς καταλήγουμε στην απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$) έχουμε:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{G(\beta + \varepsilon t)}{G(\beta + \varepsilon)} = t,$$

καθώς και $g(\beta) = \frac{\gamma}{a\beta}$. Τώρα, χρησιμοποιώντας ξανά τη σχέση

(3.3.2.1) παίρνουμε:

$$a_n^* = G^{-1}(0) = \beta \text{ και } b_n^* = G^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) - G^{-1}(0) = \beta \left[\left(1 + \frac{a}{n-1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} - 1 \right].$$

Από την (1.1.6.1) προκύπτει λοιπόν το ζητούμενο.

- (ii) Το αποτέλεσμα προκύπτει ως εφαρμογή του Θεωρήματος 1.1.6.2. Για την ΜΟΕΡ κατανομή έχουμε $G^{-1}(1) = \infty$ από τη σχέση (3.3.2.1),

και

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{G}(xt)}{\bar{G}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{a}{\left(\frac{xt}{\beta}\right)^\gamma - \bar{a}}}{\frac{a}{\left(\frac{x}{\beta}\right)^\gamma - \bar{a}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^\gamma - \bar{a} \frac{0}{0}}{\left(\frac{xt}{\beta}\right)^\gamma - \bar{a}} = t^{-\gamma}.$$

Από τη σχέση (3.3.2.1) έχουμε:

$$b_n = G^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \beta \left(1 + \frac{\frac{n-1}{n}a}{1 - \frac{n-1}{n}}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \beta(1 + (n-1)a)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Τελικά, από την (1.1.6.3) προκύπτει το ζητούμενο.

3.3.3 Στοχαστική αναπαράσταση και στοχαστικές διατάξεις

Η MOEP κατανομή μπορεί να προκύψει ως μια μικτή κατανομή σύμφωνα με το παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα 3.3.3.1 (Ghitany, 2005)

Έστω ότι η δεσμευμένη συνάρτηση επιβίωσης μιας συνεχούς τ.μ. X δοθέντος $\Theta = \theta$ εκφράζεται ως:

$$\bar{G}(x|\theta) = \exp\left\{-\left[\left(\frac{x}{\beta}\right)^\gamma - 1\right]\theta\right\}, \quad x > \beta, \quad \theta > 0, \quad \beta, \gamma > 0. \quad (3.3.3.1)$$

Έστω ότι η Θ ακολουθεί εκθετική κατανομή με σ.π.π.

$$m(\theta) = ae^{-a\theta}, \quad \theta > 0, \quad a > 0.$$

Τότε η μικτή κατανομή της X είναι η $MOEP(a, \beta, \gamma)$ κατανομή.

Το παραπάνω Θεώρημα παρέχει λοιπόν έναν άλλο τρόπο για να ερμηνεύσουμε την MOEP κατανομή μαζί με την ιδιότητα ακραίας γεωμετρικής σταθερότητας που δίνεται από τους Marshall and Olkin (1997) και ισχύει φυσικά και για την περίπτωση της MOEP κατανομής.

Οι MOEP κατανομές διατάσσονται σε σχέση με το ισχυρότερο «πηλίκιο πιθανοφάνειας» (που ορίστηκε στο κεφάλαιο 1) σύμφωνα με το παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα 3.3.3.2 (Ghitany, 2005)

Έστω $X \sim MOEP(a_1, \beta, \gamma)$ και $Y \sim MOEP(a_2, \beta, \gamma)$. Αν $a_1 < a_2$, τότε:

$$X \leq_{lr} Y \quad (X \leq_{hr} Y, X \leq_{st} Y).$$

Απόδειξη

Έστω $g_X(x)$ και $g_Y(x)$ οι σ.π.π. των τ.μ. X και Y αντίστοιχα. Αρχικά παρατηρούμε ότι το πηλίκο $\frac{g_X(x)}{g_Y(x)}$ είναι:

$$\frac{g_X(x)}{g_Y(x)} = \frac{a_1 \left[\left(\frac{x}{\beta} \right)^\gamma - \bar{a}_2 \right]^2}{a_2 \left[\left(\frac{x}{\beta} \right)^\gamma - \bar{a}_1 \right]}, \quad x > \beta,$$

με $\bar{a}_1 = 1 - a_1$ και $\bar{a}_2 = 1 - a_2$.

Αφού, για $a_1 < a_2$ ισχύει:

$$\frac{d}{dx} \frac{g_X(x)}{g_Y(x)} = \frac{2a_1(a_1 - a_2)\gamma}{a_2\beta} \frac{\left(\frac{x}{\beta} \right)^\gamma - \bar{a}_2}{\left[\left(\frac{x}{\beta} \right)^\gamma - \bar{a}_1 \right]^3} \left(\frac{x}{\beta} \right)^{\gamma-1} < 0,$$

η $\frac{g_X(x)}{g_Y(x)}$ είναι φθίνουσα συνάρτηση στο x . Δηλαδή $X \leq_{lr} Y$. Οι υπόλοιποι ισχυρισμοί προκύπτουν από την συνεπαγωγή (βλ. ενότητα 1.1):

$$X \leq_{lr} Y \Rightarrow X \leq_{hr} Y \Rightarrow X \leq_{st} Y.$$

3.3.4 Εντροπία Rényi

Στην παράγραφο αυτή θα προσδιοριστεί η εντροπία Rényi για την περίπτωση της MOEP κατανομής, βασιζόμενοι στον τρόπο ορισμού της εντροπίας στην ενότητα 2.3. Το παρακάτω Θεώρημα, όσο είμαστε σε θέση

να γνωρίζουμε, δεν υπάρχει στη βασική βιβλιογραφία για την MOEP κατανομή.

Θεώρημα 3.3.4.1

Για $a \in (0,1)$ η εντροπία του Rényi της τ.μ. $X \sim MOEP(a, \beta, \gamma)$ δίνεται από τη σχέση:

$$I_R(\delta) = (1-\delta)^{-1} \left\{ [2\delta \log \gamma - (\delta-1) \log \beta] + \log \left[\sum_{j=0}^{\infty} e_j \frac{1}{\delta-1+\gamma(\delta+j)} \right] \right\},$$

όπου $e_j = e_j(a)$ είναι οι ποσότητες που προσδιορίστηκαν στη σχέση (2.3.9).

Επιπλέον, για $a > 1$ η εντροπία του Rényi της τ.μ. $X \sim MOEP(a, \beta, \gamma)$ δίνεται από τη σχέση:

$$I_R(\delta) = (1-\delta)^{-1} \left\{ (\delta-1) [\log \gamma - \log \beta] + \log \left[\sum_{j=0}^{\infty} h_j \mathcal{B} \left[\frac{(\gamma+1)(\delta-1)}{\gamma} + 1, j+1 \right] \right] \right\},$$

όπου $h_j = h_j(a)$ είναι οι ποσότητες που προσδιορίστηκαν στη σχέση (2.3.11).

Απόδειξη

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (2.3.8) και ότι:

$$\int_{\beta}^{\infty} f(x)^{\delta} [1-F(x)]^j dx = \gamma^{\delta} \int_{\beta}^{\infty} \frac{1}{x^{\delta}} \left(\frac{x}{\beta} \right)^{-\gamma\delta} \left(\frac{x}{\beta} \right)^{-\gamma j} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{x}{\beta}\right)^{-\gamma} \\
&= \gamma^\delta \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{\delta-1} \int_0^1 y^{\frac{\delta-1+\gamma(\delta+j-1)}{\gamma}} dy \\
&= \frac{\gamma^{2\delta-1}}{\beta^{\delta-1}} \frac{\gamma}{\delta-1+\gamma(\delta+j)},
\end{aligned}$$

προκύπτει η σχέση για $a \in (0,1)$

$$I_R(\delta) = (1-\delta)^{-1} \left\{ [2\delta \log \gamma - (\delta-1) \log \beta] + \log \left[\sum_{j=0}^{\infty} e_j \frac{1}{\delta-1+\gamma(\delta+j)} \right] \right\},$$

με $e_j = e_j(a)$ να δίνεται από τη σχέση (2.3.9).

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (2.3.10) και ότι:

$$\begin{aligned}
\int_{\beta}^{\infty} f(x)^\delta F(x)^j dx &= \int_{\beta}^{\infty} \left(\frac{\gamma\beta^\gamma}{x^{\gamma+1}}\right)^\delta \left[1 - \left(\frac{x}{\beta}\right)^{-\gamma}\right]^j dx \\
&= \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^\delta \int_{\beta}^{\infty} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{-\delta(\gamma+1)} \left[1 - \left(\frac{x}{\beta}\right)^{-\gamma}\right]^j dx \\
&= \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{\delta} \int_0^1 y^{\frac{(\gamma+1)(\delta-1)}{\gamma}} [1-y]^j dy \\
&= \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{\delta-1} B\left[\frac{(\gamma+1)(\delta-1)}{\gamma} + 1, j+1\right],
\end{aligned}$$

όπου $B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$ είναι η Βήτα συνάρτηση με παραμέτρους

α και β , προκύπτει για $a > 1$:

$$I_R(\delta) = (1-\delta)^{-1} \{(\delta-1)[\log \gamma - \log \beta] + \log \left[\sum_{j=0}^{\infty} h_j \mathcal{B} \left[\frac{(\gamma+1)(\delta-1)}{\gamma} + 1, j+1 \right] \right] \},$$

με $h_j = h_j(a)$ να δίνεται από τη σχέση (2.3.11).

3.3.5 Στατιστική Συμπερασματολογία

Θεωρούμε ένα τυχαίο δείγμα n παρατηρήσεων $y_{obs} = (t_i; i=1, \dots, n)$ από την MOEP κατανομή. Τότε η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι:

$$L(\theta; y_{obs}) = \left(\frac{a\gamma}{\beta} \right)^n \prod_{i=1}^n \frac{\left(\frac{t_i}{\beta} \right)^{\gamma-1}}{\left[\left(\frac{t_i}{\beta} \right)^{\gamma} - \bar{a} \right]^2}.$$

Ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας $L(\theta; y_{obs})$ είναι:

$$\log L(\theta; y_{obs}) = l(\theta; y_{obs}) = n \log \left(\frac{a\gamma}{\beta} \right) + \sum_{i=1}^n \left\{ (\gamma-1) \log \left(\frac{t_i}{\beta} \right) - 2 \log \left[\left(\frac{t_i}{\beta} \right)^{\gamma} - \bar{a} \right] \right\}.$$

Παραγωγίζοντας ως προς τις παραμέτρους $\theta = (a, \beta, \gamma)$ προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\frac{\partial l}{\partial a} = \frac{n}{a} - \sum_{i=1}^n \frac{2}{\left(\frac{t_i}{\beta} \right)^{\gamma} - \bar{a}},$$

$$\frac{\partial l}{\partial \beta} = \frac{\gamma}{\beta} \left[2 \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\gamma}{\left[\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\gamma - \bar{a}\right]} - n \right],$$

και

$$\frac{\partial l}{\partial \gamma} = \frac{n}{\gamma} + \sum_{i=1}^n \left[1 - \frac{2\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\gamma}{\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\gamma - \bar{a}} \right] \log\left(\frac{t_i}{\beta}\right),$$

όπου $\bar{a} = 1 - a$.

Ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου β είναι $\hat{\beta} = t_{(1)}$, δηλαδή το ελάχιστο διατεταγμένο στατιστικό. Οι εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας $\hat{a}, \hat{\gamma}$ των παραμέτρων a και γ προκύπτουν από την λύση των δύο εξισώσεων $\frac{\partial l(a, t_{(1)}, \gamma)}{\partial a} = 0$ και $\frac{\partial l(a, t_{(1)}, \gamma)}{\partial \gamma} = 0$, δηλαδή, από την επίλυση:

$$\frac{n}{a} - \sum_{i=1}^n \frac{2}{u_i^\gamma - \bar{a}} = 0,$$

και

$$\frac{n}{\gamma} + \sum_{i=1}^n \left[1 - \frac{2u_i^\gamma}{u_i^\gamma - \bar{a}} \right] \log(u_i) = 0,$$

όπου $u_i = \frac{t_i}{t_{(1)}} = \frac{t_i}{\hat{\beta}}$ με $\bar{a} = 1 - a$ (Ghitany, 2005).

Σύμφωνα με γνωστές ιδιότητες των εκτιμητών μέγιστης πιθανοφάνειας η ασυμπτωτική κατανομή του $\hat{\theta} = (\hat{a}, \hat{\beta}, \hat{\gamma})$ είναι προσεγγιστικά η τρισδιάστατη κανονική με μέση τιμή $\theta = (a, \beta, \gamma)$ και πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων τον αντίστροφο του πίνακα πληροφορίας του Fisher $I(\theta)$, με στοιχεία: $I_{ij} = E(J(\theta))$, $i, j = 1, 2, 3$, όπου $J(\theta)$ είναι ο παρατηρούμενος πίνακας πληροφορίας με στοιχεία $J_{ij} = -\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$, $i, j = 1, 2, 3$.

Παραγωγίζοντας επιμέρους τις σχέσεις $\frac{\partial l}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial l}{\partial \beta} = 0$ και $\frac{\partial l}{\partial \gamma} = 0$, προκύπτουν τα στοιχεία του παρατηρούμενου, συμμετρικού, πίνακα πληροφορίας $J(\theta)$ τα οποία δίνονται από τις σχέσεις:

$$J_{11} = \frac{n}{a^2} - \sum_{i=1}^n \frac{2}{\left[\left(\frac{t_i}{\beta} \right)^\gamma - \bar{a} \right]^2},$$

$$J_{12} = \frac{2\gamma}{\beta} \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{t_i}{\beta} \right)^\gamma}{\left[\left(\frac{t_i}{\beta} \right)^\gamma - \bar{a} \right]^2},$$

$$J_{13} = -2 \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{t_i}{\beta} \right)^\gamma \log \left(\frac{t_i}{\beta} \right)}{\left[\left(\frac{t_i}{\beta} \right)^\gamma - \bar{a} \right]^2},$$

$$J_{22} = -\frac{\gamma}{\beta^2} \left\{ n - 2 \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\gamma \left[\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\gamma - \bar{a}(\gamma+1) \right]}{\left[\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\gamma - \bar{a} \right]^2} \right\},$$

$$J_{23} = \frac{2(1-a)\gamma}{\beta} \sum_{i=1}^n \frac{\left\{ \left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\gamma \log\left(\frac{t_i}{\beta}\right) - (a-1)^2 + \left(\frac{t_i}{\beta}\right)^{2\gamma} \right\}}{\left[\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\gamma - \bar{a} \right]^2},$$

και

$$J_{33} = \frac{n}{\gamma^2} + 2\bar{a} \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\gamma \log^2\left(\frac{t_i}{\beta}\right)}{\left[\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\gamma - \bar{a} \right]^2},$$

όπου $\bar{a} = 1 - a$.

3.4 Η Marshall-Olkin επεκταμένη κατανομή Lomax (MOEL)

Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιαστεί και θα μελετηθεί η Marshall-Olkin επεκταμένη κατανομή Lomax, η οποία εισήχθη στη βιβλιογραφία και μελετήθηκε αναλυτικά από τους Ghitany *et al.* (2007).

3.4.1 Η κατανομή

Η συνάρτηση επιβίωσης της Marshall-Olkin Lomax κατανομής προκύπτει από τη σχέση (2.1.1) έχοντας ως αρχική συνάρτηση επιβίωσης αυτή της Lomax κατανομής που προσδιορίστηκε στη σχέση (1.1.7.15). Ειδικότερα, ο ορισμός της **Marshall-Olkin επεκταμένης κατανομής Lomax (Marshall-Olkin extended Lomax distribution)** είναι ο ακόλουθος.

Ορισμός 3.4.1.1 (Ghitany et al., 2007)

Η τ.μ. X ακολουθεί τη Marshall-Olkin επεκταμένη κατανομή Lomax με παραμέτρους a, β και γ αν η **συνάρτηση επιβίωσης** δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{G}(x; a, \beta, \gamma) = \frac{a(1 + \beta x)^{-\gamma}}{1 - \bar{a}(1 + \beta x)^{-\gamma}} = \frac{a}{(1 + \beta x)^{\gamma} - \bar{a}}, \quad (3.4.1.1)$$

όπου $x > 0$, $a, \beta, \gamma > 0$ και $\bar{a} = 1 - a$. Αν $a = 1$ προκύπτει η συνάρτηση επιβίωσης της αρχικής κατανομής Lomax με παραμέτρους β, γ που δόθηκε στη σχέση (1.1.7.15).

Θα συμβολίζουμε μια συνεχή τ.μ. X που ακολουθεί Marshall-Olkin επεκταμένη κατανομή Lomax με παραμέτρους a, β και γ και συνάρτηση επιβίωσης (3.4.1.1) ως: $X \sim MOEL(a, \beta, \gamma)$.

Λαμβάνοντας υπόψη τον παραπάνω ορισμό και με εφαρμογή των σχέσεων (1.1.7.14) και (1.1.7.15) στην (2.2.1) εύκολα προσδιορίζονται στο Θεώρημα που ακολουθεί η α.σ.κ. και η σ.π.π. της $MOEL(a, \beta, \gamma)$.

Θεώρημα 3.4.1.1 (Ghitany et al., 2007)

Έστω X μια τ.μ. που ακολουθεί την $MOEL(a, \beta, \gamma)$. Τότε η **αθροιστική συνάρτηση κατανομής** και η **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)** της τ.μ. X είναι:

$$G(x; a, \beta, \gamma) = 1 - \bar{G}(x; a, \beta, \gamma) = \frac{(1 + \beta x)^\gamma - 1}{(1 + \beta x)^\gamma - \bar{a}}, \quad (3.4.1.2)$$

και

$$g(x; a, \beta, \gamma) = a\beta\gamma \frac{(1 + \beta x)^{\gamma-1}}{[(1 + \beta x)^\gamma - \bar{a}]^2}, \quad (3.4.1.3)$$

αντίστοιχα, όπου $x > 0$, $a, \beta, \gamma > 0$ και $\bar{a} = 1 - a$.

Σχήμα και κορυφότητα της σ.π.π. της $MOEL(a, \beta, \gamma)$.

Στο Θεώρημα που ακολουθεί δίνονται απλές συνθήκες κάτω από τις οποίες η σ.π.π. της $MOEL(a, \beta, \gamma)$, που δόθηκε στη σχέση (3.4.1.3) είναι φθίνουσα ή μονοκόρυφη. Η απόδειξη του παρακάτω Θεωρήματος ακολουθεί τα ίδια βήματα με την απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.1.2 που δόθηκε στην προηγούμενη ενότητα και παραλείπεται.

Θεώρημα 3.4.1.2 (Ghitany et al., 2007)

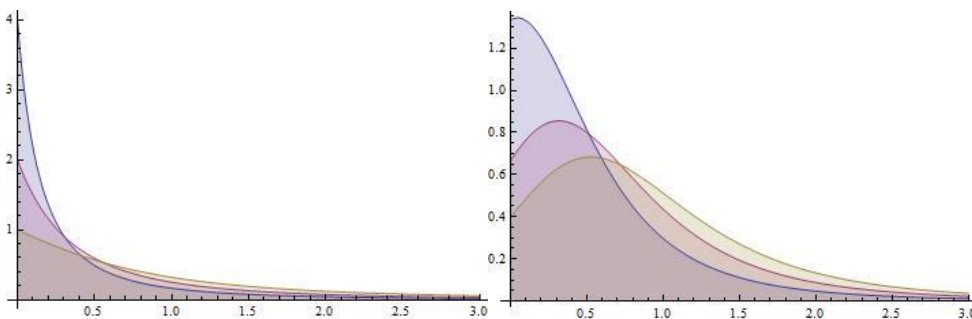
Η σ.π.π. της $MOEL(a, \beta, \gamma)$, που δόθηκε στη σχέση (3.4.1.3) είναι φθίνουσα (μονοκόρυφη) αν:

$$a + (2 - a)\gamma \geq 0 \quad (a + (2 - a)\gamma < 0),$$

ανεξάρτητα από τις τιμές της παραμέτρου β . Επιπρόσθετα, η **κορυφή** της MOEL κατανομής δίνεται από τη σχέση:

$$\text{mode}(X) = \begin{cases} 0, & \text{αν } a + (2 - a)\gamma \geq 0, \\ \frac{1}{\beta} \left[\left(\frac{(1-a)(1-\gamma)}{1+\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma}} - 1 \right], & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Στο σχήμα που ακολουθεί δίνεται η γραφική παράσταση αυτής της σ.π.π. για ειδικές τιμές των παραμέτρων και για $x \in (0, 3)$. Ειδικότερα, παρατηρούμε ότι για τιμές των παραμέτρων $a = 0.5, 1, 2$, $\beta = 1$ και $\gamma = 2$ η σ.π.π. της MOEL είναι φθίνουσα όπως επαληθεύεται και από τη σχέση $a + (2 - a)\gamma > 0$ του Θεωρήματος 3.4.1.2. Για τις τιμές των παραμέτρων του σχήματος (β) ικανοποιείται η σχέση $a + (2 - a)\gamma < 0$, οπότε η σ.π.π. είναι μονοκόρυφη.



Εικόνα 4: Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της MOEL (α) για $a = 0.5$ (γαλάζια γραμμή), $a = 1$ (ροζ γραμμή), $a = 2$ (καφέ γραμμή), $\beta = 1$ και $\gamma = 2$ και (β) για $a = 3$ (γαλάζια γραμμή), $a = 6$ (ροζ γραμμή), $a = 10$ (καφέ γραμμή), $\beta = 1$ και $\gamma = 4$.

Παρατηρήσεις (*Ghitany et al., 2007*)

Από το προηγούμενο Θεώρημα προκύπτουν τα ακόλουθα:

- (i) Όταν $a \in (0, 2]$, η (3.4.1.3) είναι φθίνουσα στο $x > 0$, για κάθε τιμή των $\beta, \gamma > 0$. Συγκεκριμένα, όταν $a = 1$, στην ειδική περίπτωση της κατανομής Lomax, η (3.4.1.3) είναι φθίνουσα στο x , για κάθε $\beta, \gamma > 0$.
- (ii) Όταν $a > 2$, η (3.4.1.3) μπορεί ακόμη να επιδεικνύει φθίνουσα συμπεριφορά, για τιμές των a, γ τέτοιες ώστε $a + (2 - a)\gamma \geq 0$.
- (iii) Όταν $\gamma \in (0, 1]$, η (3.4.1.3) είναι φθίνουσα στο $x > 0$ για κάθε τιμή των $a, \beta > 0$.

Σχήμα και κορυφότητα της συνάρτησης κινδύνου της $MOEL(a, \beta, \gamma)$.

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (3.4.1.1) και (3.4.1.3) άμεσα προκύπτει ότι η **συνάρτηση κινδύνου** της $MOEL(a, \beta, \gamma)$ κατανομής είναι:

$$h(x; a, \beta, \gamma) = \frac{g(x; a, \beta, \gamma)}{\bar{G}(x; a, \beta, \gamma)} = \frac{\beta\gamma}{(1 + \beta x) - \bar{a}(1 + \beta x)^{1-\gamma}}, \quad (3.4.1.4)$$

όπου $x > 0$, $a, \beta, \gamma > 0$ και $\bar{a} = 1 - a$.

Στο Θεώρημα που ακολουθεί δίνονται απλές συνθήκες κάτω από τις οποίες η συνάρτηση κινδύνου της $MOEL(a, \beta, \gamma)$, που δόθηκε στη σχέση (3.4.1.4) είναι φθίνουσα ή μονοκόρυφη. Η απόδειξη ακολουθεί ανάλογη πορεία με αυτή του Θεωρήματος 3.3.1.2 και παραλείπεται.

Θεώρημα 3.4.1.3 (Ghitany et al., 2007)

Η συνάρτηση κινδύνου της $MOEL(a, \beta, \gamma)$, που δόθηκε στη σχέση (3.4.1.4) είναι φθίνουσα (μονοκόρυφη) αν:

$$a + (1-a)\gamma \geq 0 \quad (a + (1-a)\gamma < 0),$$

ανεξάρτητα από τις τιμές της παραμέτρου β . Επιπρόσθετα, η μέγιστη τιμή της συνάρτησης κινδύνου της $MOEL$ κατανομής είναι:

$$\max h = \begin{cases} \frac{\beta\gamma}{a}, & \text{αν } a + (1-a)\gamma \geq 0, \\ h(x_h), & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

όπου $x_h = \frac{1}{\beta} \left\{ \left[(1-a)(1-\gamma) \right]^{\frac{1}{\gamma}} - 1 \right\}$. Ειδικότερα, η (3.4.1.4) έχει το απόλυτο μέγιστο της στο σημείο x_h για a, γ τέτοια ώστε $a + (1-a)\gamma < 0$.

Παρατηρήσεις (Ghitany et al., 2007)

Από το προηγούμενο Θεώρημα προκύπτουν τα ακόλουθα:

- (i) Όταν $0 < a \leq 1$, η συνάρτηση κινδύνου της $MOEL$ είναι φθίνουσα, για κάθε τιμή των $\beta, \gamma > 0$, καθώς τότε ικανοποιείται πάντοτε η συνθήκη $a + (1-a)\gamma \geq 0$. Επομένως και η αρχική κατανομή Lomax έχει φθίνουσα συνάρτηση κινδύνου.
- (ii) Όταν $a > 1$, η συνάρτηση κινδύνου της $MOEL$ μπορεί να επιδεικνύει φθίνουσα συμπεριφορά, για τιμές των a, γ τέτοιες ώστε να ισχύει η απλή συνθήκη $a + (1-a)\gamma \geq 0$. Η φθίνουσα συνάρτηση κινδύνου συνεπάγεται και άλλες ιδιότητες οι οποίες δόθηκαν στην ενότητα 1.1.

- (iii) Όταν ισχύει η σχέση $a+(1-a)\gamma \geq 0$, είναι προφανές ότι ικανοποιείται και η σχέση $a+(2-a)\gamma \geq 0$. Επομένως, εξάγεται το συμπέρασμα ότι όταν η συνάρτηση κινδύνου της MOEL κατανομής είναι φθίνουσα τότε και η σ.π.π. είναι φθίνουσα. Το αντίστροφο δεν ισχύει απαραίτητα καθώς υπάρχουν επιλογές των παραμέτρων π.χ. ($a=3, \gamma=2$) για τις οποίες $a+(2-a)\gamma \geq 0$, ενώ $a+(1-a)\gamma < 0$ και επομένως η MOEL έχει φθίνουσα σ.π.π. αλλά μονοκόρυφη συνάρτηση κινδύνου.
- (iv) Με παρόμοιο σκεπτικό, όταν ισχύει η σχέση $a+(2-a)\gamma < 0$, είναι προφανές ότι ικανοποιείται και η σχέση $a+(1-a)\gamma < 0$. Επομένως, εξάγεται το συμπέρασμα ότι όταν η σ.π.π. της MOEL κατανομής είναι μονοκόρυφη τότε και η συνάρτηση κινδύνου είναι μονοκόρυφη. Το αντίστροφο δεν ισχύει απαραίτητα καθώς υπάρχουν επιλογές των παραμέτρων π.χ. ($a=2, \gamma=3$) για τις οποίες $a+(1-a)\gamma < 0$, ενώ $a+(2-a)\gamma > 0$. Επομένως η MOEL έχει μονοκόρυφη συνάρτηση κινδύνου αλλά φθίνουσα σ.π.π.

3.4.2 Χαρακτηριστικά

Οι ιδιότητες της MOEL κατανομής έχουν μελετηθεί από τους Ghitany *et al.* (2007). Αντικείμενο αυτής της παραγράφου είναι η κριτική παρουσίαση, ανασκόπηση και μελέτη αυτών των ιδιοτήτων. Στο πλαίσιο αυτό, δίνονται εκφράσεις για τις ροπές, τη συνάρτηση υπολογισμού των εκατοστιαίων σημείων και τη διάμεσο καθώς και για τις ασυμπτωτικές κατανομές του μέγιστου και ελάχιστου διατεταγμένου στατιστικού.

Ροπές

Θεώρημα 3.4.2.1 (Ghitany et al., 2007)

Έστω X μια τ.μ. που ακολουθεί την $MOEL(a, \beta, \gamma)$. Τότε για $\gamma > r$ οι ροπές r τάξης της MOEL κατανομής δίνονται από τη σχέση:

$$E(X^r) = \frac{ra}{\beta^r \gamma} \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r-1}{i} (-1)^{r-1-i} \int_1^{\infty} \frac{y^{\frac{i+1}{\gamma}-1}}{y-\bar{a}} dy,$$

όπου $\bar{a} = 1 - a$.

Απόδειξη

Οι ροπές r τάξης της MOEL κατανομής είναι:

$$E(X^r) = r \int_0^{\infty} x^{r-1} \bar{G}(x; a, \beta, \gamma) dx = ra \int_0^{\infty} x^{r-1} \frac{1}{(1+\beta x)^\gamma - \bar{a}} dx.$$

Κάνοντας την αντικατάσταση $y = (1 + \beta x)^\gamma$ έχουμε:

$$E(X^r) = \frac{ra}{\beta^r \gamma} \int_1^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{y^{\frac{1}{\gamma}} - 1}\right)^{r-1} y^{\frac{1}{\gamma}-1}}{y-\bar{a}} dy = \frac{ra}{\beta^r \gamma} \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r-1}{i} (-1)^{r-1-i} \int_1^{\infty} \frac{y^{\frac{i+1}{\gamma}-1}}{y-\bar{a}} dy,$$

με $\gamma > r$.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι για $a \neq 1$, $\beta > 0$, $r < \gamma$, οι ροπές $E(X^r)$ δεν μπορούν να εκφραστούν σε μια απλή κλειστή μορφή σε όρους r, a, β, γ και πρέπει να υπολογιστούν με χρήση κάποιας αριθμητικής μεθόδου. Όταν $a = 1$ προκύπτουν οι ροπές r τάξης της κατανομής Lomax:

$$E(X^r) = \frac{r}{\beta^r} \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r-1}{i} \frac{(-1)^{r-1-i}}{\gamma-1-i}, \quad r < \gamma.$$

Ακόμη, παρατηρούμε ότι επιβεβαιώνεται το Θεώρημα 2.3.1 που αναφέρει την ύπαρξη ροπών της ίδιας τάξης.

Συνάρτηση υπολογισμού των εκατοστιαίων σημείων

Στη συνέχεια θα δοθεί η συνάρτηση υπολογισμού των εκατοστιαίων σημείων της MOEL κατανομής και ως απόρροια αυτής, η διάμεσος. Το αποτέλεσμα προκύπτει συνδυάζοντας τις σχέσεις (1.1.7.16) και (2.3.6).

Θεώρημα 3.4.2.2 (Ghitany et al., 2007)

Έστω X μια τ.μ. που ακολουθεί την $MOEL(a, \beta, \gamma)$. Η αντίστροφη συνάρτηση της α.σ.κ. της τ.μ. X δίνεται από τη σχέση:

$$G^{-1}(q) = \frac{1}{\beta} \left\{ \left(1 + \frac{qa}{1-q} \right)^{\frac{1}{\gamma}} - 1 \right\}, \quad 0 \leq q \leq 1. \quad (3.4.2.1)$$

Η **διάμεσος** της MOEL κατανομής προκύπτει με απλή εφαρμογή για $q = 0.5$ στη σχέση (3.4.2.1):

$$M = \text{median}(X) = \frac{1}{\beta} \left[(1+a)^{\frac{1}{\gamma}} - 1 \right].$$

Εύκολα ακόμη παρατηρούμε ότι για $a=1$ έχουμε τη διάμεσο της κατανομής Lomax, που είναι $\frac{1}{\beta} \left(2^{\frac{1}{\gamma}} - 1 \right)$.

Επιπρόσθετα, σύμφωνα με το παραπάνω Θεώρημα και τη σχέση (3.4.2.1), αν κάποιος θέλει να δημιουργήσει ένα τ.δ. X_1, \dots, X_n από τη

MOEL με παραμέτρους a, β και γ αρκεί να δημιουργήσει ένα τ.δ. U_1, \dots, U_n από την $U(0,1)$ και να υπολογίσει τις τιμές:

$$X_i = \frac{1}{\beta} \left\{ \left(1 + \frac{U_i a}{1 - U_i} \right)^{\frac{1}{\gamma}} - 1 \right\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Διατεταγμένες στατιστικές συναρτήσεις

Έστω τώρα X_1, \dots, X_n τ.δ. από έναν πληθυσμό που ακολουθεί την MOEL κατανομή με σ.π.π. που δίνεται από τη σχέση (3.4.1.3). Εφαρμόζοντας τα θεωρήματα 1.1.6.1 και 1.1.6.2 μπορούν να προσδιοριστούν οι ασυμπτωτικές κατανομές των ελάχιστων και μέγιστων διατεταγμένων στατιστικών συναρτήσεων.

Θεώρημα 3.4.2.3 (Ghitany et al., 2007)

Έστω $X_{(1)}$ και $X_{(n)}$, αντίστοιχα, τα μικρότερα και τα μεγαλύτερα διατεταγμένα στατιστικά από την $MOEL(a, \beta, \gamma)$ κατανομή. Τότε:

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P\{X_{(1)} \leq b_n^* t\} = 1 - \exp[-t], \quad t > 0,$$

$$\text{όπου } b_n^* = \frac{1}{\beta} \left[\left(1 + \frac{a}{n-1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} - 1 \right].$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P\{X_{(n)} \leq b_n t\} = \exp[-t^{-\gamma}], \quad t > 0, \text{ όπου}$$

$$b_n = \frac{1}{\beta} \left\{ [1 + (n-1)a]^{\frac{1}{\gamma}} - 1 \right\}.$$

Επιπρόσθετα, μπορούμε να προσδιορίσουμε τις οριακές κατανομές των διατεταγμένων στατιστικών $X_{(i)}$, $X_{(n-i+1)}$, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.1.6.4.

Θεώρημα 3.4.2.4 (Ghitany et al., 2007)

Οι οριακές κατανομές του i -οστού και $n-i+1$ -οστού διατεταγμένου στατιστικού από την MOEL κατανομή είναι για κάθε πεπερασμένο $i > 1$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{X_{(i)} \leq b_n^* t\} = 1 - \sum_{j=0}^{i-1} [\exp[-t]] \frac{t^j}{j!} = 1 - P(Y < i),$$

και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{X_{(n-i+1)} \leq b_n t\} = \sum_{j=0}^{i-1} \exp[-t^{-\gamma}] \frac{t^{-\gamma j}}{j!} = P(Z < i),$$

αντίστοιχα, με $t, \gamma > 0$ όπου οι τ.μ. Y και Z ακολουθούν κατανομές Poisson με μέσες τιμές t και $t^{-\gamma}$, αντίστοιχα.

Απόδειξη

Από το Θεώρημα 3.4.2.3, οι $G^*(t) = 1 - \exp[-t]$ και $G(t) = \exp[-t^{-\gamma}]$ είναι οι οριακές κατανομές των $\frac{(X_{(1)} - a_n^*)}{b_n^*}$ και $\frac{(X_{(n)} - a_n)}{b_n}$ αντίστοιχα. Το αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα με απλή αντικατάσταση των G^* και G στο Θεώρημα 1.1.6.4.

3.4.3 Στοχαστική αναπαράσταση

Η MOEL κατανομή μπορεί να προκύψει ως μια μικτή κατανομή σύμφωνα με το παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα 3.4.3.1 (Ghitany et al., 2007)

Έστω ότι η δεσμευμένη συνάρτηση επιβίωσης μιας συνεχούς τ.μ. X δοθέντος $\Theta = \theta$ εκφράζεται ως:

$$\bar{G}(x|\theta) = \exp\left\{-\left[(1+\beta x)^\gamma - 1\right]\theta\right\}, \quad x, \theta > 0, \beta, \gamma > 0.$$

Έστω ότι η Θ έχει μια εκθετική κατανομή με σ.π.π.

$$m(\theta) = ae^{-a\theta}, \quad \theta > 0, a > 0.$$

Τότε η μικτή κατανομή της X είναι η $MOEL(a, \beta, \gamma)$ κατανομή.

Το παραπάνω Θεώρημα παρέχει λοιπόν έναν άλλο τρόπο για να ερμηνεύσουμε την $MOEL$ κατανομή μαζί με την ιδιότητα ακραίας γεωμετρικής σταθερότητας που δίνεται από τους Marshall and Olkin (1997).

3.4.4 Εντροπία Rényi

Θα παρουσιαστεί στην παράγραφο αυτή η εντροπία Rényi για την περίπτωση της $MOEL$ κατανομής, με βάση τον τρόπο ορισμού της εντροπίας στην ενότητα 2.3. Το παρακάτω Θεώρημα, όσο είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε, δεν υπάρχει στη βασική βιβλιογραφία για την $MOEL$ κατανομή.

Θεώρημα 3.4.4.1

Για $0 < a < 1$ η εντροπία του Rényi της τ.μ. $X \sim MOEL(a, \beta, \gamma)$ δίνεται από τη σχέση:

$$I_R(\delta) = (1-\delta)^{-1} \left\{ (\delta-1) \log(\beta\gamma) + \log \left[\sum_{j=0}^{\infty} e_j B \left(\frac{\delta(\gamma+1)-1}{\gamma}, j+1 \right) \right] \right\},$$

όπου $e_j = e_j(a)$ οι ποσότητες που προσδιορίστηκαν στη σχέση (2.3.13).

Επιπλέον, για $a > 1$ η εντροπία του Rényi της τ.μ. $X \sim MOEL(a, \beta, \gamma)$ δίνεται από τη σχέση:

$$I_R(\delta) = (1-\delta)^{-1} \left\{ (\delta-1) \log(\beta\gamma) + \log \left[\sum_{j=0}^{\infty} h_j B \left(\frac{\delta(\gamma+1)-1}{\gamma}, j+1 \right) \right] \right\},$$

όπου $h_j = h_j(a)$ οι ποσότητες που προσδιορίστηκαν στη σχέση (2.3.11).

Απόδειξη

Λαμβάνοντας υπόψη την (2.3.12) και ότι:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(x)^\delta F(x)^j dx &= \beta^\delta \gamma^\delta \int_0^{\infty} (1+\beta x)^{-\delta(\gamma+1)} \left[1 - (1+\beta x)^{-\gamma} \right]^j dx \\ &= \beta^\delta \gamma^\delta \frac{1}{\beta\gamma} \int_0^1 y^{\frac{(\gamma+1)(\delta-1)}{\gamma}} (1-y)^j dy \\ &= (\beta\gamma)^{\delta-1} B \left(\frac{\delta(\gamma+1)-1}{\gamma}, j+1 \right), \end{aligned}$$

όπου $B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$ είναι η Βήτα συνάρτηση με παραμέτρους

α και β , προκύπτει για $0 < a < 1$ η σχέση:

$$I_R(\delta) = (1-\delta)^{-1} \left\{ (\delta-1) \log(\beta\gamma) + \log \left[\sum_{j=0}^{\infty} e_j B \left(\frac{\delta(\gamma+1)-1}{\gamma}, j+1 \right) \right] \right\},$$

με $e_j = e_j(a)$ να δίνονται από τη σχέση (2.3.13).

Λαμβάνοντας υπόψη την (2.3.10) και ότι:

$$\int_0^{\infty} f(x)^{\delta} F(x)^j dx = (\beta\gamma)^{\delta-1} B\left(\frac{\delta(\gamma+1)-1}{\gamma}, j+1\right),$$

προκύπτει για $a > 1$ η σχέση:

$$I_R(\delta) = (1-\delta)^{-1} \left\{ (\delta-1) \log(\beta\gamma) + \log \left[\sum_{j=0}^{\infty} h_j B\left(\frac{\delta(\gamma+1)-1}{\gamma}, j+1\right) \right] \right\},$$

όπου $h_j = h_j(a)$ οι ποσότητες που προσδιορίστηκαν στη σχέση (2.3.11).

3.4.5 Εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας και πίνακας πληροφορίας

Ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας $L(\theta; y_{obs})$ που βασίζεται σε ένα τ.δ. μεγέθους n , $y_{obs} = (t_i; i=1, \dots, n)$ που ακολουθεί MOEL κατανομή είναι της μορφής:

$$\begin{aligned} \log L(\theta; y_{obs}) = l(\theta; y_{obs}) &= n[\log(a\beta\gamma)] + (\gamma-1) \sum_{i=1}^n \log(1 + \beta t_i) \\ &\quad - 2 \sum_{i=1}^n \log \left[(1 + \beta t_i)^{\gamma} - \bar{a} \right]. \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας ως προς τις παραμέτρους $\theta = (a, \beta, \gamma)$ προκύπτουν οι εξισώσεις μέγιστης πιθανοφάνειας:

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial a} &= \frac{n}{a} - \sum_{i=1}^n \frac{2}{(1 + \beta t_i)^{\gamma} - \bar{a}}, \\ \frac{\partial l}{\partial \beta} &= \frac{n}{\beta} + (\gamma-1) \sum_{i=1}^n \frac{t_i}{1 + \beta t_i} - 2\gamma \sum_{i=1}^n \frac{t_i (1 + \beta t_i)^{\gamma-1}}{(1 + \beta t_i)^{\gamma} - \bar{a}}, \end{aligned}$$

και

$$\frac{\partial l}{\partial \gamma} = \frac{n}{\gamma} + \sum_{i=1}^n \log(1 + \beta t_i) - 2 \sum_{i=1}^n \frac{(1 + \beta t_i)^\gamma \log(1 + \beta t_i)}{(1 + \beta t_i)^\gamma - \bar{a}}.$$

Οι εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας $\hat{\theta} = (\hat{a}, \hat{\beta}, \hat{\gamma})$ των παραμέτρων $\theta = (a, \beta, \gamma)$ προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος των τριών μη γραμμικών εξισώσεων: $\frac{\partial l}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial l}{\partial \beta} = 0$, $\frac{\partial l}{\partial \gamma} = 0$.

Η λύση του παραπάνω συστήματος είναι δυνατό να επιτευχθεί μόνο με τη χρήση κάποιας επαναληπτικής αριθμητικής μεθόδου όπως οι μέθοδοι Newton-Raphson και quasi-Newton.

Ο πίνακας πληροφορίας του Fisher είναι $I(\theta) = E(J(\theta))$, όπου $J(\theta)$ είναι ο παρατηρούμενος πίνακας πληροφορίας με στοιχεία $J_{ij} = -\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$, $i, j = 1, 2, 3$.

Παραγωγίζοντας επιμέρους τις σχέσεις $\frac{\partial l}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial l}{\partial \beta} = 0$ και $\frac{\partial l}{\partial \gamma} = 0$ προκύπτουν τα στοιχεία του παρατηρούμενου πίνακα πληροφορίας $J(\theta)$ τα οποία δίνονται από τις σχέσεις:

$$J_{11} = \frac{n}{a^2} - \sum_{i=1}^n \frac{2}{\left[(1 + \beta t_i)^\gamma - \bar{a} \right]^2},$$

$$J_{12} = -2\gamma \sum_{i=1}^n \frac{t_i (1 + \beta t_i)^{\gamma-1}}{\left[(1 + \beta t_i)^\gamma - \bar{a} \right]^2},$$

$$J_{13} = -2 \sum_{i=1}^n \frac{(1 + \beta t_i)^\gamma \log(1 + \beta t_i)}{[(1 + \beta t_i)^\gamma - \bar{a}]^2},$$

$$J_{22} = \frac{n}{\beta^2} + (\gamma - 1) \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{1 + \beta t_i} \right)^2 - 2\gamma \sum_{i=1}^n \frac{(1 + \beta t_i)^{\gamma-2} [\bar{a}(\gamma - 1) + (1 + \beta t_i)^\gamma] t_i^2}{[(1 + \beta t_i)^\gamma - \bar{a}]^2},$$

$$J_{23} = - \sum_{i=1}^n \frac{t_i}{1 + \beta t_i} + 2 \sum_{i=1}^n \frac{t_i (1 + \beta t_i)^{\gamma-1} \{ -\bar{a} [\gamma \log(1 + \beta t_i) + 1] + (1 + \beta t_i)^\gamma \}}{[(1 + \beta t_i)^\gamma - \bar{a}]^2},$$

και

$$J_{33} = \frac{n}{\gamma^2} - 2\bar{a} \sum_{i=1}^n \frac{(1 + \beta t_i)^\gamma \log^2(1 + \beta t_i)}{[(1 + \beta t_i)^\gamma - \bar{a}]^2},$$

όπου $\bar{a} = 1 - a$.

3.5 Η Marshall-Olkin επεκταμένη κατανομή γραμμικού ρυθμού αποτυχίας (ELFR)

Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιαστεί και θα μελετηθεί η Marshall-Olkin επεκταμένη κατανομή γραμμικού ρυθμού αποτυχίας, η οποία εισήχθη στη βιβλιογραφία και μελετήθηκε αναλυτικά από τους Ghitany and Kotz (2007).

3.5.1 Η κατανομή

Η συνάρτηση επιβίωσης της **Marshall-Olkin επεκταμένης κατανομής γραμμικού ρυθμού αποτυχίας (Marshall-Olkin extended linear failure-rate distribution)** προκύπτει από τη σχέση (2.1.1) με αρχική συνάρτηση

επιβίωσης αυτή της κατανομής γραμμικού ρυθμού αποτυχίας που προσδιορίστηκε στη σχέση (1.1.7.18). Ειδικότερα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 3.5.1.1 (*Ghitany and Kotz, 2007*)

Η τ.μ. X ακολουθεί τη Marshall-Olkin επεκταμένη κατανομή γραμμικού ρυθμού αποτυχίας με παραμέτρους a, β και γ αν η **συνάρτηση επιβίωσης** δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{G}(x; a, \beta, \gamma) = \frac{ae^{-\left(\beta x + \frac{\gamma}{2}x^2\right)}}{1 - \bar{a}e^{-\left(\beta x + \frac{\gamma}{2}x^2\right)}}, \quad (3.5.1.1)$$

όπου $x > 0$, $a, \beta, \gamma > 0$ και $\bar{a} = 1 - a$. Προφανώς, αν $a = 1$ τότε προκύπτει η συνάρτηση επιβίωσης της αρχικής κατανομής γραμμικού ρυθμού αποτυχίας με παραμέτρους β, γ που δόθηκε στη σχέση (1.1.7.18).

Θα συμβολίζουμε μια συνεχή τ.μ. X που ακολουθεί Marshall-Olkin επεκταμένη κατανομή γραμμικού ρυθμού αποτυχίας με παραμέτρους a, β και γ και συνάρτηση επιβίωσης (3.5.1.1) ως: $X \sim ELFR(a, \beta, \gamma)$.

Λαμβάνοντας υπόψη τον παραπάνω ορισμό και με εφαρμογή των σχέσεων (1.1.7.17) και (1.1.7.18) στην (2.2.1) εύκολα προσδιορίζονται στο Θεώρημα που ακολουθεί η α.σ.κ. και η σ.π.π. της $ELFR(a, \beta, \gamma)$.

Θεώρημα 3.5.1.1 (Ghitany and Kotz, 2007)

Έστω X μια τ.μ. που ακολουθεί την $ELFR(a, \beta, \gamma)$. Τότε η **αθροιστική συνάρτηση κατανομής** και η **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** της τ.μ. X είναι:

$$G(x; a, \beta, \gamma) = \frac{1 - e^{-\left(\beta x + \frac{\gamma}{2} x^2\right)}}{1 - \bar{a} e^{-\left(\beta x + \frac{\gamma}{2} x^2\right)}}, \quad (3.5.1.2)$$

και

$$g(x; a, \beta, \gamma) = \frac{a(\beta + \gamma x) e^{-\left(\beta x + \frac{\gamma}{2} x^2\right)}}{\left[1 - \bar{a} e^{-\left(\beta x + \frac{\gamma}{2} x^2\right)}\right]^2}, \quad (3.5.1.3)$$

αντίστοιχα, όπου $x > 0$, $a, \beta, \gamma > 0$ και $\bar{a} = 1 - a$.

Σχήμα της σ.π.π. της $ELFR(a, \beta, \gamma)$.

Στο Θεώρημα που ακολουθεί δίνονται απλές συνθήκες κάτω από τις οποίες η σ.π.π. της $ELFR(a, \beta, \gamma)$, που δόθηκε στη σχέση (3.5.1.3) είναι φθίνουσα ή μονοκόρυφη.

Θεώρημα 3.5.1.2 (Ghitany and Kotz, 2007)

Η σ.π.π. της $ELFR(a, \beta, \gamma)$, που δόθηκε στη σχέση (3.5.1.3), είναι φθίνουσα (μονοκόρυφη) αν:

$$(a - 2)\beta^2 + a\gamma \leq 0 \quad ((a - 2)\beta^2 + a\gamma > 0).$$

Απόδειξη

Η πρώτη παράγωγος της (3.5.1.3) ως προς x είναι:

$$g'(x) = \frac{e^{-2\left(\beta x + \frac{\gamma}{2}x^2\right)} \psi\left(\beta x + \frac{\gamma}{2}x^2\right)}{\left[1 - \bar{a}e^{-\left(\beta x + \frac{\gamma}{2}x^2\right)}\right]^3}, \quad x > 0,$$

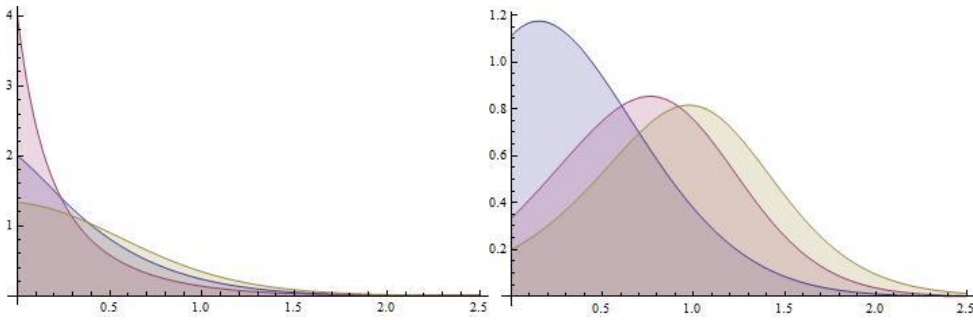
όπου

$$\psi(z) = (\gamma - \beta^2 - 2\gamma z)e^z - \bar{a}(\gamma + \beta^2 + 2\gamma z), \quad z = \beta x + \frac{\gamma}{2}x^2 > 0.$$

Όταν ισχύει $\psi(0) = (a-2)\beta^2 + a\gamma \leq 0$, η συνάρτηση $\psi(z)$ δεν έχει ρίζα στο $(0, \infty)$, δηλαδή η $g(x)$ δεν έχει κρίσιμο σημείο. Αντίθετα, όταν ισχύει $\psi(0) = (a-2)\beta^2 + a\gamma > 0$, η συνάρτηση $\psi(z)$ έχει μία ρίζα στο $(0, \infty)$, δηλαδή η $g(x)$ έχει ένα κρίσιμο σημείο.

Αφού η $g(x)$ είναι μη αρνητική και ισχύει $g(0) = \frac{\beta}{a}$ και $g(\infty) = 0$, η $g(x)$ είναι φθίνουσα (μονοκόρυφη) ενώ ισχύει $\psi(0) \leq 0$ ($\psi(0) > 0$).

Στο σχήμα που ακολουθεί δίνεται η γραφική παράσταση αυτής της σ.π.π. για ειδικές τιμές των παραμέτρων και για $x \in (0, 2.5)$. Ειδικότερα, παρατηρούμε ότι για τιμές των παραμέτρων $(a, \beta, \gamma) = (0.5, 1, 2)$, $(0.5, 2, 1)$, $(1.5, 2, 1)$, η σ.π.π. της ELFR είναι φθίνουσα καθώς ικανοποιείται η σχέση $(a-2)\beta^2 + a\gamma \leq 0$, του Θεωρήματος 3.5.1.2. Για τις τιμές των παραμέτρων του σχήματος (β) επαληθεύεται η σχέση $(a-2)\beta^2 + a\gamma > 0$, οπότε η σ.π.π. είναι μονοκόρυφη.



Εικόνα 5: Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της ELFR (α) για $(a, \beta, \gamma) = (0.5, 1, 2)$ (γαλάζια γραμμή), $(0.5, 2, 1)$ (ροζ γραμμή), $(1.5, 2, 1)$ (καφέ γραμμή) και (β) $(a, \beta, \gamma) = (0.9, 1, 2)$ (γαλάζια γραμμή), $(3, 1, 2)$ (ροζ γραμμή), $(10, 2, 1)$ (καφέ γραμμή).

Παρατηρήσεις (*Ghitany and Kotz, 2007*)

Από το προηγούμενο Θεώρημα προκύπτουν τα ακόλουθα:

- (i) Όταν $a \geq 2$, η (3.5.1.3) είναι μονοκόρυφη για κάθε $\beta, \gamma > 0$. Διαφορετικά, μπορεί ακόμη να επιδεικνύει φθίνουσα ή μονοκόρυφη συμπεριφορά σύμφωνα με τις συνθήκες του Θεωρήματος 3.5.1.2.
- (ii) Για $\gamma \rightarrow 0$, δηλαδή για την ειδική περίπτωση της επεκταμένης εκθετικής κατανομής, η (3.5.1.3) είναι φθίνουσα αν $0 < a \leq 2$ ή μονοκόρυφη αν $a > 2$. Το αποτέλεσμα αυτό συμφωνεί με αυτό των Marshall and Olkin (1997).
- (iii) Καθώς $\beta \rightarrow 0$, δηλαδή για την ειδική περίπτωση της επεκταμένης κατανομής Rayleigh, η (3.5.1.3) είναι μονοκόρυφη όπως αποδείχτηκε από τους Ghitany *et al.* (2005).

Σχήμα της συνάρτησης κινδύνου της $ELFR(a, \beta, \gamma)$.

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (3.5.1.1) και (3.5.1.3) άμεσα προκύπτει ότι η **συνάρτηση κινδύνου** της $ELFR(a, \beta, \gamma)$ κατανομής είναι:

$$h(x; a, \beta, \gamma) = \frac{g(x; a, \beta, \gamma)}{\bar{G}(x; a, \beta, \gamma)} = \frac{\beta + \gamma x}{1 - \bar{a} e^{-\left(\beta x + \frac{\gamma}{2} x^2\right)}}, \quad (3.5.1.4)$$

όπου $x > 0$, $a, \beta, \gamma > 0$ και $\bar{a} = 1 - a$.

Στο Θεώρημα που ακολουθεί δίνονται απλές συνθήκες κάτω από τις οποίες η συνάρτηση κινδύνου της $ELFR(a, \beta, \gamma)$ που δόθηκε στη σχέση (3.5.1.4) είναι αύξουσα, κυπελλοειδής ή αύξουσα-φθίνουσα-αύξουσα. Η απόδειξη ακολουθεί ανάλογη πορεία με αυτή του Θεωρήματος 3.5.1.2 και παραλείπεται.

Θεώρημα 3.5.1.3 (Ghitany and Kotz, 2007)

Έστω $\xi(y) = \gamma e^y - \bar{a}(\beta^2 + \gamma + 2\gamma y)$, $y > 0$. Αν $X \sim ELFR(a, \beta, \gamma)$, τότε η τ.μ. X έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) Αύξουσα συνάρτηση κινδύνου αν:

$$\checkmark \quad 0 < a < \frac{1}{2}, \quad \xi(\ln(2\bar{a})) \geq 0 \quad \text{ή}$$

$$\checkmark \quad \frac{1}{2} \leq a < 1, \quad \xi(0) \geq 0 \quad \text{ή}$$

$$\checkmark \quad a \geq 1, \quad \beta, \gamma > 0.$$

(ii) Φθίνουσα-αύξουσα (κυπελλοειδής) συνάρτηση κινδύνου αν:

$$\checkmark \quad 0 < a < \frac{1}{2}, \quad \xi(0) \leq 0, \quad \xi(\ln(2\bar{a})) < 0.$$

$$\checkmark \quad \frac{1}{2} \leq a < 1, \quad \xi(0) < 0.$$

(iii) Αύξουσα-φθίνουσα-αύξουσα συνάρτηση κινδύνου αν:

$$0 < a < \frac{1}{2}, \quad \xi(0) > 0, \quad \xi(\ln(2\bar{a})) < 0.$$

Παρατηρήσεις (*Ghitany and Kotz, 2007*)

Από το προηγούμενο Θεώρημα προκύπτουν τα ακόλουθα:

- (i) Όταν $a = 1$ (δηλαδή γραμμική κατανομή ρυθμού αποτυχίας), η (3.5.1.4) είναι αύξουσα για κάθε τιμή των $\beta, \gamma > 0$. Διαφορετικά, η (3.5.1.4) μπορεί ακόμη να επιδεικνύει αύξουσα συμπεριφορά, όταν οι τιμές των a, β και γ ικανοποιούν τις συνθήκες που δόθηκαν στο (i).
- (ii) Η αύξουσα συνάρτηση κινδύνου της κατανομής ELFR συνεπάγεται και άλλες ιδιότητες οι οποίες δόθηκαν στην ενότητα 1.1.

3.5.2 Χαρακτηριστικά

Οι ιδιότητες της ELFR κατανομής έχουν μελετηθεί από τους Ghitany and Kotz (2007). Αντικείμενο αυτής της παραγράφου είναι η κριτική παρουσίαση, ανασκόπηση και μελέτη αυτών των ιδιοτήτων. Στο πλαίσιο αυτό, δίνονται εκφράσεις για τις ροπές, τη συνάρτηση υπολογισμού των εκατοστιαίων σημείων και τη διάμεσο καθώς και για τις ασυμπτωτικές κατανομές του ελάχιστου και μέγιστου διατεταγμένου στατιστικού.

Ροπές

Θεώρημα 3.5.2.1 (Ghitany and Kotz, 2007)

Έστω X μια τ.μ. που ακολουθεί την $ELFR(a, \beta, \gamma)$. Τότε οι ροπές r τάξης της ELFR κατανομής δίνονται από τη σχέση:

$$E(X^r) = r \int_0^{\infty} x^{r-1} \bar{G}(x; a, \beta, \gamma) dx = ra \int_0^{\infty} \frac{x^{r-1}}{e^{\beta x + \frac{\gamma}{2} x^2} - \bar{a}} dx.$$

Γενικά, το παραπάνω ολοκλήρωμα δεν μπορεί να δοθεί ρητά σε όρους r, a, β και γ . Έτσι, ακόμα και η πρώτη ροπή $E(X)$ πρέπει να υπολογιστεί αριθμητικά. Ακόμη, για σταθερά r, β , και γ , η $E(X^r)$ είναι μια αύξουσα συνάρτηση στο a .

Συνάρτηση υπολογισμού των εκατοστιαίων σημείων

Στη συνέχεια θα δοθεί η συνάρτηση υπολογισμού των εκατοστιαίων σημείων της ELFR κατανομής και ως απόρροια αυτής, η διάμεσος. Το αποτέλεσμα προκύπτει συνδυάζοντας τις σχέσεις (1.1.7.19) και (2.3.6).

Θεώρημα 3.5.2.2 (Ghitany and Kotz, 2007)

Έστω X μια τ.μ. που ακολουθεί την $ELFR(a, \beta, \gamma)$. Η αντίστροφη συνάρτηση της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τ.μ. X δίνεται από τη σχέση:

$$G^{-1}(q) = \frac{\beta}{\gamma} \left\{ \sqrt{1 + \frac{2\gamma}{\beta^2} \log \left(1 + \frac{aq}{1-q} \right)} - 1 \right\}, \quad 0 \leq q \leq 1. \quad (3.5.2.1)$$

Η **διάμεσος** της ELFR κατανομής προκύπτει με απλή εφαρμογή για $q = 0.5$ από τη σχέση (3.5.2.1):

$$M = \text{median}(X) = \frac{\beta}{\gamma} \left\{ \sqrt{1 + \frac{2\gamma}{\beta^2} \log(a+1)} - 1 \right\}.$$

Εύκολα ακόμη παρατηρούμε ότι για $a=1$ έχουμε τη διάμεσο της κατανομής γραμμικού ρυθμού αποτυχίας, που είναι $\frac{\beta}{\gamma} \left\{ \sqrt{1 + \frac{2\gamma}{\beta^2} \log(2)} - 1 \right\}$

Επιπρόσθετα, σύμφωνα με το παραπάνω Θεώρημα και τη σχέση (3.5.2.1), αν κάποιος θέλει να δημιουργήσει ένα τ.δ. X_1, \dots, X_n από τη ELFR με παραμέτρους a, β και γ αρκεί να δημιουργήσει ένα τ.δ. U_1, \dots, U_n από την $U(0,1)$, και να υπολογίσει τις τιμές:

$$X_i = \frac{\beta}{\gamma} \left\{ \sqrt{1 + \frac{2\gamma}{\beta^2} \log\left(1 + \frac{aU_i}{1-U_i}\right)} - 1 \right\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Διατεταγμένες στατιστικές συναρτήσεις

Έστω τώρα X_1, \dots, X_n τ.δ. από έναν πληθυσμό που ακολουθεί την ELFR κατανομή με σ.π.π. που δίνεται από την σχέση (3.5.1.3). Εφαρμόζοντας τα θεωρήματα 1.1.6.1 και 1.1.6.3 μπορούν να προσδιοριστούν οι ασυμπτωτικές κατανομές των ελάχιστων και μέγιστων διατεταγμένων στατιστικών.

Θεώρημα 3.5.2.3 (Ghitany and Kotz, 2007)

Έστω $X_{(1)}$ και $X_{(n)}$, αντίστοιχα, τα μικρότερα και τα μεγαλύτερα διατεταγμένα στατιστικά από την $ELFR(a, \beta, \gamma)$ κατανομή. Τότε:

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P\{X_{(1)} \leq b_n^* x\} = 1 - \exp[-x], \quad x > 0,$$

$$\text{όπου } b_n^* = \frac{\beta}{\gamma} \left\{ \sqrt{1 + \frac{2\gamma}{\beta^2} \log\left(1 + \frac{a}{n-1}\right)} - 1 \right\}.$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P\{X_{(n)} \leq a_n + b_n t\} = \exp[-e^{-t}], \quad -\infty < t < \infty,$$

$$\text{όπου } a_n = \frac{\beta}{\gamma} \left\{ \sqrt{1 + \frac{2\gamma}{\beta^2} [\log(a) + \log(n-1)]} - 1 \right\}, \quad b_n = \frac{1}{ng(a_n)} \quad \text{και η}$$

$$g(\cdot) \text{ δίνεται από την σχέση (3.5.1.3).}$$

3.5.3 Στοχαστική αναπαράσταση

Η ELFR κατανομή μπορεί να προκύψει ως μια μικτή κατανομή σύμφωνα με το παρακάτω Θεώρημα:

Θεώρημα 3.5.3.1 (Ghitany and Kotz, 2007)

Έστω ότι η δεσμευμένη συνάρτηση επιβίωσης μιας συνεχούς τ.μ. X δοθέντος $\Theta = \theta$ εκφράζεται ως:

$$\bar{G}(x|\theta) = \exp\left\{-\left(e^{\beta x + \frac{\gamma}{2}x^2} - 1\right)\theta\right\}, \quad x, \theta > 0, \quad \beta, \gamma > 0.$$

Έστω ότι η Θ έχει μια εκθετική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας:

$$m(\theta) = ae^{-a\theta}, \quad \theta > 0, \quad a > 0.$$

Τότε η μικτή κατανομή της X είναι η $ELFR(a, \beta, \gamma)$ κατανομή.

Το παραπάνω Θεώρημα παρέχει λοιπόν έναν άλλο τρόπο για να ερμηνεύσουμε την ELFR κατανομή επιπροσθέτως με την ιδιότητα ακραίας

γεωμετρικής σταθερότητας που προτείνεται από τους Marshall and Olkin (1997).

Οι ELFR κατανομές διατάσσονται σε σχέση με το ισχυρότερο «πηλίκιο πιθανοφάνειας», που ορίστηκε στο κεφάλαιο 1, σύμφωνα με το παρακάτω Θεώρημα. Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτή του Θεωρήματος 3.3.3.2 και παραλείπεται.

Θεώρημα 3.5.3.2 (Ghitany and Kotz, 2007)

Έστω $X \sim ELFR(a_1, \beta, \gamma)$ και $Y \sim ELFR(a_2, \beta, \gamma)$. Αν $a_1 < a_2$, τότε:

$$X \leq_{lr} Y \quad (X \leq_{hr} Y, X \leq_{st} Y).$$

3.5.4 Εντροπία Rényi

Στην παράγραφο αυτή θα προσδιοριστεί η εντροπία Rényi για την περίπτωση της ELFR κατανομής, βασιζόμενοι στον τρόπο ορισμού της εντροπίας στην ενότητα 2.3. Το παρακάτω Θεώρημα, όσο είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε, δεν υπάρχει στη βασική βιβλιογραφία για την ELFR κατανομή.

Θεώρημα 3.5.4.1

Για $a \in (0,1)$ η εντροπία του Rényi της τ.μ. $X \sim ELFR(a, \beta, \gamma)$ δίνεται από τη σχέση:

$$I_R(\delta) = (1-\delta)^{-1} \left\{ \log \left[\sum_{j=0}^{\infty} e_j \frac{\Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}, \frac{j+\delta}{2\gamma} \beta^2\right) e^{\frac{\beta^2}{2\gamma}(j+\delta)}}{\left[\frac{j+\delta}{2\gamma}\right]^{\frac{\delta+1}{2}}} \right] - \log(2\gamma) \right\},$$

όπου $\Gamma(a, x) = \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$ είναι η ατελής γάμμα συνάρτηση και $e_j = e_j(a)$

είναι οι ποσότητες που προσδιορίστηκαν στη σχέση (2.3.9).

Επιπλέον, για $a > 1$ η εντροπία του Rényi της τ.μ. $X \sim ELFR(a, \beta, \gamma)$ δίνεται από τη σχέση:

$$I_R(\delta) = (1-\delta)^{-1} \log \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} h_j \int_0^{\infty} (\beta + \gamma x)^\delta e^{-j\left(\beta x + \frac{\gamma}{2} x^2\right)} \left[1 - e^{-\left(\beta x + \frac{\gamma}{2} x^2\right)} \right]^j dx \right\},$$

όπου $h_j = h_j(a)$ είναι οι ποσότητες που προσδιορίστηκαν στη σχέση (2.3.11).

Απόδειξη

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (2.3.8) και ότι:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(x)^\delta [1-F(x)]^j dx &= \int_0^{\infty} (\beta + \gamma x)^\delta e^{-(j+\delta)\left(\beta x + \frac{\gamma}{2} x^2\right)} dx \\ &= \frac{1}{\gamma} e^{\frac{\beta^2}{2\gamma}(j+\delta)} \int_{\beta}^{\infty} y^\delta e^{-\frac{(j+\delta)y^2}{2\gamma}} dy \\ &= \frac{1}{\gamma} e^{\frac{\beta^2}{2\gamma}(j+\delta)} \frac{\Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}, \frac{j+\delta}{2\gamma} \beta^2\right)}{2 \left[\frac{j+\delta}{2\gamma}\right]^{\frac{\delta+1}{2}}}, \end{aligned}$$

προκύπτει η σχέση για $a \in (0,1)$

$$I_R(\delta) = (1-\delta)^{-1} \left\{ \log \left[\sum_{j=0}^{\infty} e_j \frac{\Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}, \frac{j+\delta}{2\gamma} \beta^2\right) e^{\frac{\beta^2}{2\gamma}(j+\delta)}}{\left[\frac{j+\delta}{2\gamma}\right]^{\frac{\delta+1}{2}}} \right] - \log(2\gamma) \right\},$$

όπου $\Gamma(\alpha, x) = \int_x^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ είναι η ατελής γάμμα συνάρτηση ενώ οι ποσότητες $e_j = e_j(a)$ δόθηκαν στη σχέση (2.3.9).

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (2.3.10) και ότι:

$$\int_0^{\infty} f(x)^{\delta} F(x)^j dx = \int_0^{\infty} (\beta + \gamma x)^{\delta} e^{-j\left(\beta x + \frac{\gamma}{2}x^2\right)} \left[1 - e^{-\left(\beta x + \frac{\gamma}{2}x^2\right)} \right]^j dx,$$

προκύπτει για $a > 1$:

$$I_R(\delta) = (1-\delta)^{-1} \log \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} h_j \int_0^{\infty} (\beta + \gamma x)^{\delta} e^{-j\left(\beta x + \frac{\gamma}{2}x^2\right)} \left[1 - e^{-\left(\beta x + \frac{\gamma}{2}x^2\right)} \right]^j dx \right\},$$

με $h_j = h_j(a)$ να δίνεται από τη σχέση (2.3.11).

Παρατήρηση

Το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\infty} (\beta + \gamma x)^{\delta} e^{-j\left(\beta x + \frac{\gamma}{2}x^2\right)} \left[1 - e^{-\left(\beta x + \frac{\gamma}{2}x^2\right)} \right]^j dx,$$

δε μπορεί να γραφεί σε κλειστή μορφή.

3.5.5 Εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας και πίνακας πληροφορίας

Για ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n , $y_{obs} = (t_i; i=1, \dots, n)$ από ELFR κατανομή η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι:

$$L(\theta; y_{obs}) = \prod_{i=1}^n \frac{a(\beta + \gamma t_i) e^{-\left(\beta t_i + \frac{\gamma}{2} t_i^2\right)}}{\left[1 - \bar{a} e^{-\left(\beta t_i + \frac{\gamma}{2} t_i^2\right)}\right]^2}.$$

Ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας $L(\theta; y_{obs})$ είναι τότε:

$$\begin{aligned} \log L(\theta; y_{obs}) = l(\theta; y_{obs}) &= n \log a + \sum_{i=1}^n \log(\beta + \gamma t_i) - \beta \sum_{i=1}^n t_i - \frac{\gamma}{2} \sum_{i=1}^n t_i^2 \\ &\quad - 2 \sum_{i=1}^n \log \left[1 - \bar{a} e^{-\left(\beta t_i + \frac{\gamma}{2} t_i^2\right)} \right]. \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας ως προς τις παραμέτρους $\theta = (a, \beta, \gamma)$ προκύπτουν οι εξισώσεις μέγιστης πιθανοφάνειας:

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial a} &= \frac{n}{a} - 2 \sum_{i=1}^n \frac{e^{-\left(\beta t_i + \frac{\gamma}{2} t_i^2\right)}}{1 - \bar{a} e^{-\left(\beta t_i + \frac{\gamma}{2} t_i^2\right)}}, \\ \frac{\partial l}{\partial \beta} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\beta + \gamma t_i} - \sum_{i=1}^n t_i - 2 \bar{a} \sum_{i=1}^n \frac{t_i e^{-\left(\beta t_i + \frac{\gamma}{2} t_i^2\right)}}{1 - \bar{a} e^{-\left(\beta t_i + \frac{\gamma}{2} t_i^2\right)}}, \end{aligned}$$

και

$$\frac{\partial l}{\partial \gamma} = \sum_{i=1}^n \frac{t_i}{\beta + \gamma t_i} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n t_i^2 - \bar{a} \sum_{i=1}^n \frac{t_i^2 e^{-\left(\beta t_i + \frac{\gamma}{2} t_i^2\right)}}{1 - \bar{a} e^{-\left(\beta t_i + \frac{\gamma}{2} t_i^2\right)}}.$$

Οι εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας $\hat{\theta} = (\hat{a}, \hat{\beta}, \hat{\gamma})$ των παραμέτρων $\theta = (a, \beta, \gamma)$ προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος των τριών εξισώσεων: $\frac{\partial l}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial l}{\partial \beta} = 0$, $\frac{\partial l}{\partial \gamma} = 0$.

Ο πίνακας πληροφορίας του Fisher είναι $I(\theta) = E(J(\theta))$, όπου $J(\theta)$ είναι ο παρατηρούμενος πίνακας πληροφορίας με στοιχεία $J_{ij} = -\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$, $i, j = 1, 2, 3$.

Παραγωγίζοντας επιμέρους τις σχέσεις $\frac{\partial l}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial l}{\partial \beta} = 0$ και $\frac{\partial l}{\partial \gamma} = 0$, προκύπτουν τα στοιχεία του παρατηρούμενου πίνακα πληροφορίας $J(\theta)$ τα οποία δίνονται από τις σχέσεις:

$$J_{11} = \frac{n}{a^2} - 2 \sum_{i=1}^n \frac{e^{-2\left(\beta t_i + \frac{\gamma}{2} t_i^2\right)}}{\left[1 - \bar{a} e^{-\left(\beta t_i + \frac{\gamma}{2} t_i^2\right)}\right]^2},$$

$$J_{12} = -2 \sum_{i=1}^n \frac{t_i e^{-\left(\beta t_i + \frac{\gamma}{2} t_i^2\right)}}{\left[1 - \bar{a} e^{-\left(\beta t_i + \frac{\gamma}{2} t_i^2\right)}\right]^2},$$

$$J_{13} = - \sum_{i=1}^n \frac{t_i^2 e^{-\left(\beta t_i + \frac{\gamma}{2} t_i^2\right)}}{\left[1 - \bar{a} e^{-\left(\beta t_i + \frac{\gamma}{2} t_i^2\right)}\right]^2},$$

$$J_{22} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(\beta + \gamma t_i)^2} - 2\bar{a} \sum_{i=1}^n \frac{t_i^2 e^{-\left(\beta t_i + \frac{\gamma}{2} t_i^2\right)}}{\left[1 - \bar{a} e^{-\left(\beta t_i + \frac{\gamma}{2} t_i^2\right)}\right]^2},$$

$$J_{23} = \sum_{i=1}^n \frac{t_i}{(\beta + \gamma t_i)^2} - \bar{a} \sum_{i=1}^n \frac{t_i^3 e^{-\left(\beta t_i + \frac{\gamma}{2} t_i^2\right)}}{\left[1 - \bar{a} e^{-\left(\beta t_i + \frac{\gamma}{2} t_i^2\right)}\right]^2},$$

και

$$J_{33} = \sum_{i=1}^n \frac{t_i^2}{(\beta + \gamma t_i)^2} - \frac{\bar{a}}{2} \sum_{i=1}^n \frac{t_i^4 e^{-\left(\beta t_i + \frac{\gamma}{2} t_i^2\right)}}{\left[1 - \bar{a} e^{-\left(\beta t_i + \frac{\gamma}{2} t_i^2\right)}\right]^2},$$

όπου $\bar{a} = 1 - a$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Το ενδιαφέρον σε αυτό το κεφάλαιο επικεντρώνεται στην προσαρμογή κάποιων εκ των κατανομών που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Ειδικότερα, η προσαρμογή των γενικευμένων MOEE, MOEW, MOEP και MOEL κατανομών ελέγχεται σε δύο σύνολα πραγματικών δεδομένων. Το πρώτο σύνολο δεδομένων αποτελείται από 213 παρατηρήσεις που αφορούν τον αριθμό των διαδοχικών αποτυχιών του συστήματος κλιματισμού του κάθε μέλους της από ένα στόλο από 13 αεροσκάφη (Proshan, 1963, Dahiya and Gurland, 1972 και Adamidis and Loukas, 1998). Το δεύτερο σύνολο δεδομένων αποτελείται από 72 παρατηρήσεις χρόνων επιβίωσης πειραματόζων που εμβολιάστηκαν με διάφορες δόσεις βακτηρίων της φυματίωσης (Bjerkedal, 1960).

Στα δεδομένα αυτά, χρησιμοποιώντας τη γλώσσα προγραμματισμού R, προσαρμόστηκαν τα μοντέλα **MOEE**, **MOEW**, **MOEP**, **MOEL**, **EXP**, **WEIB**, **P** και **LOMAX**.

Για κάθε μία από τις παραπάνω κατανομές εκτιμήθηκαν οι άγνωστες παράμετροι με τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας, ενώ υπολογίζοντας τους εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας, χρησιμοποιήθηκε το τεστ καλής προσαρμογής των Kolmogorov-Smirnov (K-S) για τον έλεγχο της προσαρμοστικότητας κάθε μιας από τις κατανομές. Οι εκτιμητές, ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας (LL), το κριτήριο AIC (Akaike Information Criterion), η τιμή του στατιστικού του K-S τεστ καθώς και η αντίστοιχη κρίσιμη τιμή (p-value) για τον έλεγχο της υπόθεσης αν είναι απαραίτητη η προσθήκη της νέας παραμέτρου a (βλ. σχέση (2.1.1)) στην αρχική κατανομή περιέχονται στους πίνακες 4.1 και 4.2. Το κριτήριο AIC, το οποίο εισήχθη στη βιβλιογραφία από τον Akaike (1969), υπολογίζεται από τη σχέση $AIC = 2k - 2LL$ όπου k είναι ο αριθμός των άγνωστων παραμέτρων του μοντέλου. Για την επιλογή μοντέλου, το προτιμώμενο μοντέλο είναι αυτό με τη μικρότερη τιμή του AIC.

Πίνακας 4.1 Εκτιμητές παραμέτρων, τιμές λογαρίθμου συνάρτησης πιθανοφάνειας, κριτηρίου AIC, στατιστικού K-S και στατιστικού πληθικού πιθανοφανεϊών καθώς και κρίσιμες τιμές από την προσαρμογή των συγκρινόμενων κατανομών πιθανότητας για το πρώτο σύνολο δεδομένων.

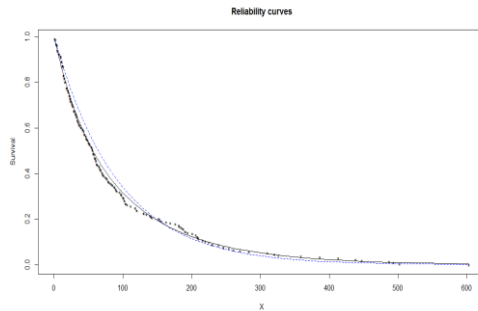
Κατανομή	Εκτιμητές παραμέτρων	LL	AIC	K-S (p-value)	LL ratio test
MOEE	$(\hat{\alpha}, \hat{\lambda}) = (0.5849, 0.0082)$	-1175.873	2355.746	0.0498 (0.6674)	$H_0: a = 1$
EXP	$\hat{\lambda} = 0.0108$	-1178.703	2359.405	0.0706 (0.2389)	5.66 (0.0174)
MOEW	$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda}) = (0.2531, 1.1905, 0.0052)$	-1174.1355	2354.271	0.0369 (0.9339)	$H_0: a = 1$
WEIB	$(\hat{\beta}, \hat{\lambda}) = (0.9238, 0.0112)$	-1177.524	2359.048	0.0509 (0.6397)	6.777 (0.0092)
MOEP	$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}) = (279.5297, 0.9799, 1.417)$	-1179.676	2365.352	0.0468 (0.7398)	$H_0: a = 1$
P	$(\hat{\beta}, \hat{\gamma}) = (1, 0.2563)$	-1333.983	2671.966	0.3699 ($p < 0.001$)	308.614 ($p < 0.001$)
MOEL	$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}) = (1.90034, 0.008, 2.85335)$	-1177.1725	2360.345	0.0417 (0.8526)	$H_0: a = 1$
LOMAX	$(\hat{\beta}, \hat{\gamma}) = (0.007, 2.39214)$	-1179.9945	2363.989	0.0734 (0.2014)	5.644 (0.0175)

Πίνακας 4.2 Εκτιμητές παραμέτρων, τιμές λογαρίθμου συνάρτησης πιθανοφάνειας, κριτηρίου AIC, στατιστικού K-S και στατιστικού πληθικού πιθανοφανεϊών καθώς και κρίσιμες τιμές από την προσαρμογή των συγκρινόμενων κατανομών πιθανότητας για το δεύτερο σύνολο δεδομένων.

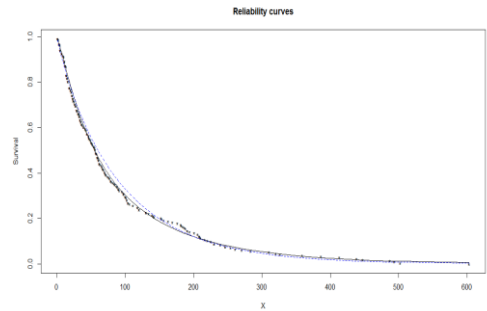
Κατανομή	Εκτιμητές παραμέτρων	LL	AIC	K-S (p-value)	LL ratio test
MOEE	$(\hat{\alpha}, \hat{\lambda}) = (3.1178, 0.0174)$	-399.3762	802.7524	0.1262 (0.2013)	$H_0: a = 1$
EXP	$\hat{\lambda} = 0.01$	-403.44215	808.8843	0.211 (0.00328)	8.1319 (0.004)
MOEW	$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda}) = (141.521, 0.4288, 0.5463)$	-395.3366	796.6732	0.1225 (0.2299)	$H_0: a = 1$
WEIB	$(\hat{\beta}, \hat{\lambda}) = (1.505, 0.0088)$	-397.5787	799.1574	0.1659 (0.03796)	4.4842 (0.0342)
MOEP	$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}) = (230.8138, 8.8582, 2.541)$	-389.6516	785.3032	0.0833 (0.6998)	$H_0: a = 1$
P	$(\hat{\beta}, \hat{\gamma}) = (12, 0.5378)$	-429.4494	862.8988	0.3511 ($p < 0.001$)	79.5956 ($p < 0.001$)
MOEL	$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}) = (18.4012, 0.0184, 3.4209)$	-394.1942	794.3884	0.1325 (0.1594)	$H_0: a = 1$
LOMAX	$(\hat{\beta}, \hat{\gamma}) = (0.0025, 4.7086)$	-406.7627	817.5254	0.2431 ($p < 0.001$)	25.137 ($p < 0.001$)

Για το πρώτο σύνολο δεδομένων (αριθμός διαδοχικών αποτυχιών του συστήματος κλιματισμού του κάθε μέλους της από ένα στόλο από 13 αεροσκάφη) οι καμπύλες επιβίωσης των κατανομών: (i) MOEE και EXP, (ii) MOEW και WEIB, (iii) MOEP και P και (iv) MOEL και LOMAX, αντίστοιχα, δίνονται παρακάτω:

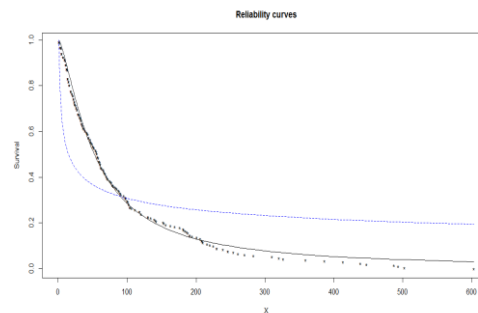
(i)



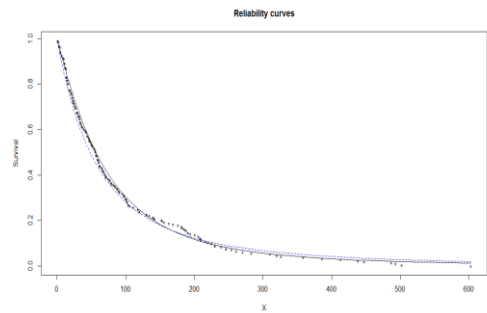
(ii)



(iii)



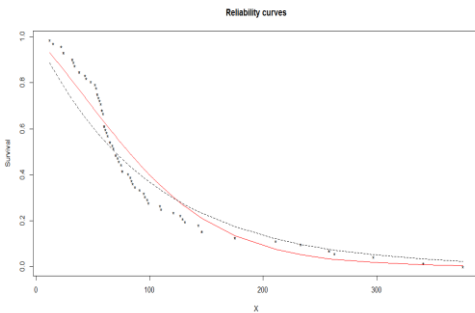
(iv)



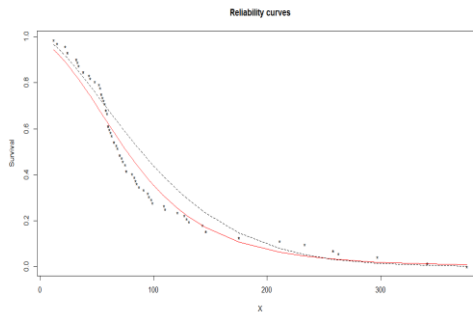
Σε κάθε γραφική παράσταση η συνεχής γραμμή αντιστοιχεί στις καμπύλες επιβίωσης των επεκταμένων μοντέλων MOEE, MOEW, MOEP και MOEL, ενώ η μπλέ διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στις αντίστοιχες των αρχικών μοντέλων EXP, WEIB, P και LOMAX.

Για το δεύτερο σύνολο δεδομένων (αριθμός χρόνων επιβίωσης πειραματόζωων που εμβολιάστηκαν με διάφορες δόσεις βακτηρίων της φυματίωσης) οι καμπύλες επιβίωσης των κατανομών: (i) MOEE και EXP, (ii) MOEW και WEIB, (iii) MOEP και P και (iv) MOEL και LOMAX, αντίστοιχα, δίνονται παρακάτω:

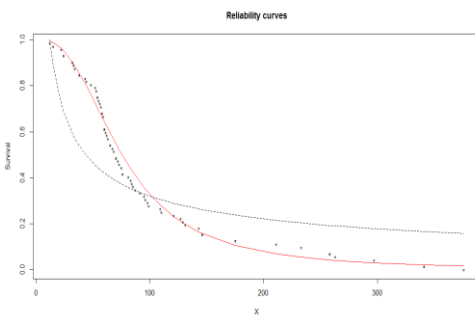
(i)



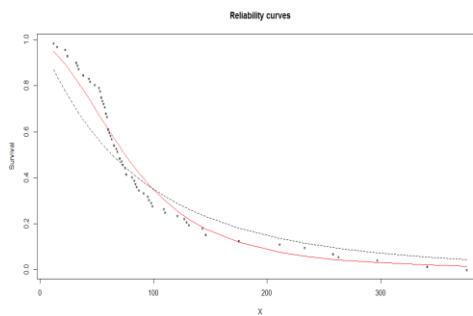
(ii)



(iii)



(iv)



Η συνεχής κόκκινη γραμμή αντιστοιχεί στις καμπύλες επιβίωσης των επεκταμένων μοντέλων MOEE, MOEW, MOEP και MOEL, ενώ η διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στις αντίστοιχες καμπύλες των αρχικών μοντέλων EXP, WEIB, P και LOMAX.

Σκοπός των νέων επεκταμένων κατανομών είναι η βελτιστοποίηση της ευελιξίας της αρχικής κατανομής και η καλύτερη προσαρμογή της. Γίνεται

φανερó ότι, για τα δύο σύνολα δεδομένων, οι νέες επεκταμένες κατανομές προσαρμόζουν καλύτερα τα δεδομένα από ότι οι αρχικές κατανομές. Συγκεκριμένα, οι στατιστικές και οι γραφικές μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν αποδεικνύουν ότι οι κατανομές MOEE, MOEW, MOEP και MOEL έχουν καλύτερη προσαρμογή από τις κατανομές EXP, WEIB, P και LOMAX αντίστοιχα, για τα δύο σύνολα δεδομένων. Για το πρώτο σύνολο δεδομένων, η καλύτερη προσαρμογή επιτυγχάνεται από την MOEW κατανομή, ενώ για το δεύτερο σύνολο δεδομένων από την MOEP κατανομή. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι οι τιμή του κριτηρίου AIC για την MOEW (αντίστοιχα, MOEP) κατανομή είναι μικρότερη από τις αντίστοιχες τιμές των υπόλοιπων κατανομών καθώς και από το γεγονός ότι η καμπύλη επιβίωσης της MOEW (αντίστοιχα, MOEP) κατανομής βρίσκεται πιο κοντά στα δεδομένα από τις αντίστοιχες καμπύλες επιβίωσης των υπόλοιπων κατανομών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ ΤΟΥ MARSHALL-OLKIN ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ

Εισαγωγή

Αντικείμενο αυτού του κεφαλαίου είναι η συνοπτική παρουσίαση των σημαντικότερων επεκτάσεων του Marshall-Olkin μετασχηματισμού που έχουν επισημανθεί στη βιβλιογραφία για τη δημιουργία νέων μονοδιάστατων κατανομών. Ειδικότερα θα παρουσιαστούν οι ιδέες των Jayakumar and Kuttykrishnan (2006), Jayakumar and Mathew (2008), Jose and Uma (2009), Aly and Benkherouf (2011) και Nanda and Das (2012).

5.1 Marshall-Olkin οικογένεια κατανομών που βασίζεται σε πιθανογεννήτριες συναρτήσεις

Οι Aly and Benkherouf (2011) εξέτασαν μια μέθοδο παραγωγής νέων οικογενειών κατανομών με χρήση πιθανογεννητριών συναρτήσεων. Οι οικογένειες κατανομών που παράγονται περιλαμβάνουν τη γνωστή Marshall-Olkin οικογένεια κατανομών και μπορούν να θεωρηθούν ως μίξη δύο διακριτών κατανομών ή μίξη μιας διακριτής κατανομής με μια απόλυτα συνεχή κατανομή.

Έστω $\varphi(\cdot; a)$ η πιθανογεννήτρια συνάρτηση μιας θετικής τ.μ. με ακέραιες τιμές και έστω $\varphi^{-1}(\cdot; a)$ η αντίστροφη της. Για κάθε συνάρτηση κατανομής $F(\cdot)$, οι Aly and Benkherouf (2011) όρισαν δύο μονο-παραμετρικές οικογένειες συναρτήσεων επιβίωσης οι οποίες δίνονται από τις σχέσεις:

$$\bar{G}(x; a) = \varphi(\bar{F}(x); a), \quad (5.1.1)$$

και

$$\bar{H}(x; a) = \varphi^{-1}(\bar{F}(x); a). \quad (5.1.2)$$

Πόρισμα 5.1.1 (Aly and Benkherouf, 2011)

Αν $\varphi_1(s; a) = \frac{as}{1-(1-a)s}$ είναι η πιθανογεννήτρια της γεωμετρικής κατανομής με παράμετρο a τότε:

$$\varphi_1^{-1}(s; a) = \frac{\frac{1}{a}s}{1-(1-\frac{1}{a})s} = \varphi_1\left(s; \frac{1}{a}\right).$$

Επιπλέον, προκύπτει ότι η συνάρτηση επιβίωσης της Marshall Olkin οικογένειας που δόθηκε στη σχέση (2.1.1), δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{G}(x; a) = \begin{cases} \varphi_1(\bar{F}(x); a), & 0 < a < 1 \\ \varphi_1^{-1}(\bar{F}(x); \frac{1}{a}), & a > 1. \end{cases}$$

Αυτό σημαίνει ότι για την ειδική περίπτωση όπου $\varphi(\cdot) = \varphi_1(\cdot)$ η Marshall-Olkin οικογένεια κατανομών της σχέσης (2.1.1) συνδυάζει τις οικογένειες των σχέσεων (5.1.1) και (5.1.2).

Παρατηρήσεις (Aly and Benkherouf, 2011)

- (i) Αν θεωρήσουμε ότι η $\varphi(\cdot)$ της σχέσης (5.1.1) ικανοποιεί τη σχέση $\varphi(\varphi(\cdot; a_2); a_1) = \varphi(\cdot; a_1 a_2)$, τότε η οικογένεια (5.1.1) ικανοποιεί την ιδιότητα σταθερότητας, δηλαδή ισχύει ότι:

$$\frac{a_2 \frac{a_1 \bar{F}(x)}{1 - (1 - a_1) \bar{F}(x)}}{1 - (1 - a_2) \frac{a_1 \bar{F}(x)}{1 - (1 - a_1) \bar{F}(x)}}}{1 - (1 - a_2) \frac{a_1 \bar{F}(x)}{1 - (1 - a_1) \bar{F}(x)}} = \frac{a_1 a_2 \bar{F}(x)}{1 - (1 - a_1 a_2) \bar{F}(x)}.$$

και επομένως τίποτε νέο δεν προκύπτει.

- (ii) Αν επιπλέον η $\varphi(\cdot)$ της σχέσης (5.1.1) ικανοποιεί την $\varphi(s;1) = s$ τότε η οικογένεια (5.1.2) ικανοποιεί την $\bar{H}(x;a) = \varphi\left(\bar{F}(x); \frac{1}{a}\right)$.

Θεώρημα 5.1.1 (Aly and Benkherouf, 2011)

Έστω X_1, X_2, \dots μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. με συνάρτηση επιβίωσης \bar{F} και πιθανογεννήτρια συνάρτηση φ και έστω N μια τ.μ. η οποία λαμβάνει ακέραιες τιμές και ανεξάρτητη των X_i . Τότε η συνάρτηση επιβίωσης \bar{G} της τ.μ. $X = \min\{X_1, \dots, X_N\}$ είναι η $\bar{G}(x) = \varphi(\bar{F}(x))$.

Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος προκύπτει από το γεγονός ότι η οικογένεια (5.1.1) ικανοποιεί την ιδιότητα σταθερότητας (βλ. προηγούμενη παρατήρηση, σκέλος (i)).

Παρατήρηση (Aly and Benkherouf, 2011)

Ειδική μελέτη διεξήχθη από τους Aly and Benkherouf, (2011) για την ειδική περίπτωση που η πιθανογεννήτρια συνάρτηση είναι αυτή της Harris (1948) κατανομής, δηλαδή όταν:

$$\varphi(s; a, k) = \left\{ \frac{as^k}{1 - (1-a)s^k} \right\}^{\frac{1}{k}}, \quad k > 0, \quad 0 < a < 1.$$

Είναι προφανές ότι για $k = 1$ προκύπτει η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της γεωμετρικής κατανομής, ενώ πληρείται η σχέση:

$$\varphi^{-1}(s; a, k) = \varphi\left(s; \frac{1}{a}, k\right).$$

Γενικές ιδιότητες

Συνεχής περίπτωση

Θεωρούμε ότι οι F, G και H είναι απόλυτα συνεχείς με αντίστοιχες σ.π.π. f, g και h . Χάριν συντομίας, σε όσα έπονται θα γράφουμε $\varphi(\cdot)$ αντί για $\varphi(\cdot; a)$ (αντίστοιχα $\varphi^{-1}(\cdot)$ αντί για $\varphi^{-1}(\cdot; a)$).

Ορισμός 5.1.1 (Aly and Benkherouf, 2011)

Για κάθε απόλυτα συνεχή κατανομή $L(\cdot)$, με σ.π.π. $l(\cdot)$, η **συνάρτηση ρυθμού αποτυχίας** ορίζεται ως $R_L(t) = \frac{l(t)}{L(t)}$.

Από τις σχέσεις (5.1.1) και (5.1.2) εύκολα προκύπτει ότι:

$$R_G(t) = \Psi(\bar{F}(t))R_F(t) \quad \text{και} \quad R_H(t) = \frac{R_F(t)}{\Psi(\varphi^{-1}(\bar{F}(t)))},$$

όπου $\Psi(s) = \frac{s\varphi'(s)}{\varphi(s)}$ είναι μια μη φθίνουσα συνάρτηση στο s .

Λήμμα 5.1.1 (Aly and Benkherouf, 2011)

Ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} R_G(x) = \mu \lim_{x \rightarrow -\infty} R_F(x) \text{ και } \lim_{x \rightarrow \infty} R_G(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} R_F(x).$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} R_H(x) = \mu^{-1} \lim_{x \rightarrow -\infty} R_F(x) \text{ και } \lim_{x \rightarrow \infty} R_H(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} R_F(x).$$

όπου $\mu = \varphi'(1)$.

Λήμμα 5.1.2 (Aly and Benkherouf, 2011)

Αν η F έχει μια φθίνουσα συνάρτηση ρυθμού αποτυχίας, τότε η G έχει επίσης φθίνουσα συνάρτηση ρυθμού αποτυχίας. Αν η F έχει μια αύξουσα συνάρτηση ρυθμού αποτυχίας, τότε η H έχει αύξουσα συνάρτηση ρυθμού αποτυχίας.

Το παρακάτω λήμμα γενικεύει τις εξισώσεις (5.1.1) και (5.1.2) των Marshall and Olkin (1997).

Λήμμα 5.1.3 (Aly and Benkherouf, 2011)

Ισχύει ότι:

- (i) $R_F(x) \leq R_G(x) \leq \mu R_F(x)$, και
- (ii) $\mu^{-1} R_F(x) \leq R_H(x) \leq R_F(x)$ όπου $\mu = \varphi'(1)$.

Ακόμη, αποδεικνύεται ότι αν η F έχει πεπερασμένες ροπές όλων των τάξεων, τότε οι G και H έχουν πεπερασμένες θετικές ροπές όλων των τάξεων.

Θεώρημα 5.1.2 (Aly and Benkherouf, 2011)

Αν X είναι μια τ.μ. από την οικογένεια (5.1.1) και Y μια τ.μ. από την οικογένεια (5.1.2), οι ροπές r -τάξης είναι:

$$E(X^r) = r \int_0^1 (F^{-1}(y))^{r-1} \varphi(1-y) dF^{-1}(y),$$

και

$$E(Y^r) = r \int_0^1 (F^{-1}(y))^{r-1} \varphi^{-1}(1-y) dF^{-1}(y),$$

αντίστοιχα.

Στο Θεώρημα που ακολουθεί προσδιορίζονται οι συναρτήσεις υπολογισμού των εκατοστιαίων σημείων G και H συναρτήσει των F , φ και φ^{-1} .

Θεώρημα 5.1.3 (Aly and Benkherouf, 2011)

Οι συναρτήσεις υπολογισμού των εκατοστιαίων σημείων των G και H δίνονται από τις σχέσεις:

$$G^{-1}(y) = F^{-1}(1 - \varphi^{-1}(1-y)),$$

και

$$H^{-1}(y) = F^{-1}(1 - \varphi(1-y)),$$

αντίστοιχα.

Έστω $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ τα διατεταγμένα στατιστικά ενός τυχαίου δείγματος από έναν πληθυσμό με α.σ.κ. την $G(\cdot)$ της εξίσωσης (5.1.1). Τα επόμενα δύο θεωρήματα αναφέρονται στις οριακές κατανομές των δειγματικών ακραίων που παράγονται από την $G(\cdot)$.

Θεώρημα 5.1.4 (Aly and Benkherouf, 2011)

Έστω ότι η $F(\cdot)$ είναι τέτοια ώστε $F(0) = 0$ και για κάποιο $c > 0$ ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(xt)}{F(x)} = t^c \quad \text{για κάθε } t > 0.$$

Τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{X_{(1)} \leq b_n^* t\} = 1 - \exp[-t^c], \quad t > 0,$$

και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{X_{(i)} \leq b_n^* t\} = 1 - \sum_{j=0}^{i-1} \frac{t^{cj} e^{-t^c}}{j!}, \quad t > 0,$$

$$\text{όπου } b_n^* = G^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = F^{-1}\left(1 - \varphi^{-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)\right).$$

Θεώρημα 5.1.5 (Aly and Benkherouf, 2011)

Έστω ότι $\varphi(s) = \sum_{k=l}^{\infty} s^k a_k$, όπου $l \geq 1$ και $a_l > 0$ και η $F(\cdot)$ ικανοποιεί τις $F(0) = 0$, $F^{-1}(1) = \infty$. Επιπλέον υποθέτουμε ότι για κάποιο $k > 0$ ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(xt)}{\bar{F}(x)} = t^{-k}, \text{ για κάθε } t > 0.$$

Τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{X_{(n)} \leq b_n t\} = \exp[-t^{-k}], \quad t > 0,$$

και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{X_{(n-i+1)} \leq b_n t\} = \sum_{j=0}^{i-1} \frac{t^{-kj} e^{-t^{-k}}}{j!}, \quad t > 0,$$

$$\text{όπου } b_n = G^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = F^{-1}\left(1 - \varphi^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Παρατήρηση (Aly and Benkherouf, 2011)

Τα θεωρήματα 5.1.4 και 5.1.5 έχουν παράλληλες εκδοχές και για τα διατεταγμένα στατιστικά $Y_{(1)}, Y_{(2)}, \dots, Y_{(n)}$ ενός τυχαίου δείγματος από την $H(\cdot)$ της σχέσης (5.1.2).

Τέλος, όταν ισχύουν οι εξισώσεις (5.1.1) και (5.1.2) τότε ισχύει το Λήμμα 5.1.3 και τα θεωρήματα 5.1.4 και 5.1.5 έχουν γενική ισχύ και δεν χρειάζεται να υπάρχει συγκεκριμένη μορφή της φ .

Διακριτή περίπτωση

Θεωρούμε ότι W είναι μια τ.μ. που παίρνει ακέραιες τιμές, τέτοια ώστε:

$$p_m = P\{W = m\} \text{ και } P_m = P\{W \geq m\}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Κατά παρόμοιο τρόπο με τις εξισώσεις (5.1.1) και (5.1.2) ορίζουμε:

$$Q_m = P\{X \geq m\} = \varphi(P_m) \text{ και } S_m = P\{Y \geq m\} = \varphi^{-1}(P_m).$$

Έστω $R_Z(m)$ είναι η συνάρτηση ρυθμού αποτυχίας μιας τ.μ. Z με ακέραιες τιμές. Οι **συναρτήσεις ρυθμού αποτυχίας** μιας τ.μ. X από την οικογένεια (5.1.1) και μιας τ.μ. Y από την οικογένεια (5.1.2) είναι:

$$R_X(m) = \frac{Q_m - Q_{m+1}}{Q_m} \text{ και } R_Y(m) = \frac{S_m - S_{m+1}}{S_m},$$

αντίστοιχα.

Λήμμα 5.1.4 (Aly and Benkherouf, 2011)

Έστω ότι $\varphi(s) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i s^i$ για κάποιο $l \geq 1$ τέτοιο ώστε $a_l > 0$. Τότε, για κάθε $m \geq 0$ ισχύει:

$$a_l P_m^{l-1} \leq Q_m \leq P_m \text{ και } P_m \leq S_m \leq \left(\frac{1}{a_l} P_m \right)^{l-1}.$$

5.2 Επεκταμένες κατανομές με βάση τη χαρακτηριστική συνάρτηση

Οι Jayakumar and Kuttykrishnan (2006) πρότειναν μια μέθοδο δημιουργίας νέων κατανομών στηριζόμενοι στην ιδέα των Marshall and Olkin (1997) και αντικαθιστώντας τη συνάρτηση επιβίωσης από την χαρακτηριστική συνάρτηση. Ειδικότερα, αν $\varphi(t)$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της αρχικής κατανομής, η χαρακτηριστική συνάρτηση $\psi(t)$ της νέας κατανομής δίνεται από τη σχέση:

$$\psi(t) = \frac{a\varphi(t)}{1 - (1-a)\varphi(t)}, \quad (5.2.1)$$

με $a > 0$.

Εν συνεχεία αναφέρουμε δύο παραδείγματα Marshall-Olkin επεκταμένων κατανομών που προκύπτουν από τη σχέση (5.2.1) με κατάλληλη επιλογή της χαρακτηριστικής συνάρτησης $\varphi(t)$.

Marshall-Olkin ασύμμετρη κατανομή Laplace (MOAL)

Η Marshall-Olkin ασύμμετρη κατανομή Laplace μελετήθηκε από τους Jayakumar and Kuttykrishnan (2006). Η χαρακτηριστική συνάρτηση της Marshall-Olkin ασύμμετρης κατανομής Laplace προκύπτει από τη σχέση (5.2.1) έχοντας ως αρχική χαρακτηριστική συνάρτηση αυτή της ασύμμετρης κατανομής Laplace που δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi(t) = \frac{1}{1 + \sigma^2 t^2 - i\mu t}, \quad \sigma > 0, \quad -\infty < \mu < +\infty.$$

Ειδικότερα, ο ορισμός της *Marshall-Olkin ασύμμετρης κατανομής Laplace (Marshall-Olkin Asymmetric Laplace distribution)* είναι ο ακόλουθος.

Ορισμός 5.2.1 (Jayakumar and Kuttykrishnan, 2006)

Η τ.μ. X ακολουθεί την *Marshall-Olkin ασύμμετρη κατανομή Laplace* με παραμέτρους a, μ και σ αν η χαρακτηριστική συνάρτηση δίνεται από τη σχέση:

$$\psi(t) = \left[1 + \frac{1}{a} (\sigma^2 t - i\mu t) \right]^{-1}, \quad a > 0, \quad \sigma > 0, \quad -\infty < \mu < +\infty. \quad (5.2.2)$$

Ακόμη, αν $a=1$ τότε προκύπτει η χαρακτηριστική συνάρτηση της αρχικής ασύμμετρης κατανομής Laplace με παραμέτρους μ και σ .

Θα συμβολίζουμε μια απόλυτα συνεχή τ.μ. X που ακολουθεί Marshall-Olkin ασύμμετρη κατανομή Laplace με παραμέτρους a, μ και σ και χαρακτηριστική συνάρτηση (5.2.2) ως: $X \sim MOAL(a, \mu, \sigma)$.

Θεώρημα 5.2.1 (Jayakumar and Kuttykrishnan, 2006)

Έστω X μια τ.μ. από $MOAL(a, \mu, \sigma)$ κατανομή. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της είναι τότε:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{a}}{\sigma} \frac{\kappa}{1+\kappa^2} \exp\left(-\frac{\kappa\sqrt{a}}{\sigma}x\right), & \text{αν } x \geq 0, \\ \frac{\sqrt{a}}{\sigma} \frac{\kappa}{1+\kappa^2} \exp\left(\frac{\sqrt{a}}{\kappa\sigma}x\right), & \text{αν } x < 0, \end{cases}$$

$$\text{όπου } \kappa = \frac{2\sigma\sqrt{a}}{\mu + \sqrt{4\sigma^2 a + \mu^2}}.$$

Η κατανομή επίσης είναι μονοκόρυφη με κορυφή που ισούται με μηδέν.

Θεώρημα 5.2.2 (Jayakumar and Kuttykrishnan, 2006)

Έστω X μια τ.μ. που ακολουθεί την $MOAL(a, \mu, \sigma)$. Τότε οι ροπές r τάξης της $MOAL$ κατανομής δίνονται από τη σχέση:

$$E(X^r) = r! \left(\frac{\sigma}{\kappa\sqrt{a}}\right)^r \frac{1 + (-1)^r \kappa^{2(n+1)}}{1 + \kappa^2},$$

$$\text{όπου } \kappa = \frac{2\sigma\sqrt{a}}{\mu + \sqrt{4\sigma^2 a + \mu^2}}.$$

Marshall-Olkin Mittag-Leffler κατανομή (MOML)

Οι Jose and Uma (2009) εισήγαγαν την Marshall-Olkin Mittag-Leffler κατανομή ως ειδική περίπτωση της (5.2.1) θεωρώντας τη χαρακτηριστική συνάρτηση της Mittag-Leffler κατανομής που δίνεται στη σχέση:

$$\varphi(s) = \frac{1}{1+s^\beta}, \quad s > 0, \quad 0 < \beta \leq 1,$$

Ορισμός 5.2.2 (Jose and Uma, 2009)

Η τ.μ. X ακολουθεί τη Marshall-Olkin Mittag-Leffler κατανομή με παραμέτρους a και β αν η χαρακτηριστική της συνάρτηση δίνεται από τη σχέση:

$$\psi(s) = \frac{a}{a+s^\beta}, \quad a > 0, \quad 0 < \beta \leq 1. \quad (5.2.3)$$

Προφανώς, αν $a=1$ τότε προκύπτει η χαρακτηριστική συνάρτηση της Mittag-Leffler κατανομής με παράμετρο β . Θα συμβολίζουμε μια συνεχή τ.μ. X που ακολουθεί Marshall-Olkin Mittag-Leffler κατανομή με παραμέτρους a και β και χαρακτηριστική συνάρτηση (5.2.3) ως: $X \sim MOML(a, \beta)$.

Ακόμη οι Jose and Uma (2009) απέδειξαν ότι η MOML κατανομή είναι κλειστή κάτω από γεωμετρική σύνθεση, σύμφωνα με το παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα 5.2.3 (Jose and Uma, 2009)

Αν X_1, X_2, \dots, X_N είναι τυχαίο δείγμα από $MOML(a, \beta)$ κατανομή και N είναι μια τ.μ. που ακολουθεί γεωμετρική κατανομή:

$$P(N = n) = (1 - p)^{n-1} p, \quad n = 1, 2, \dots, \quad 0 < p < 1,$$

ανεξάρτητη των X_1, X_2, \dots, X_N , τότε το άθροισμα των τ.μ. $X_1 + X_2 + \dots + X_N$ ακολουθεί $MOML(p\alpha, \beta)$ κατανομή.

5.3 Marshall-Olkin επεκταμένη οικογένεια κατανομών όταν η προστιθέμενη παράμετρος είναι τυχαία μεταβλητή

Είναι γνωστό (Nanda and Das, 2012) ότι σε πολλές πρακτικές περιπτώσεις η προστιθέμενη παράμετρος, έστω θ , σε μια οικογένεια κατανομών δεν είναι σταθερή λόγω διάφορων αιτιών και η εμφάνιση της ετερογένειας είναι κάποιες φορές απρόβλεπτη και ανεξήγητη. Η ετερογένεια αυτή μερικές φορές δεν πρέπει να αγνοείται. Πιο συγκεκριμένα υποθέτουμε ότι μια συνιστώσα βρίσκεται κάτω από διαφορετικά επίπεδα λειτουργικού περιβάλλοντος π.χ. θερμοκρασία, πλάτος δονήσεων κτλ. (βλ. Gaver, 1963) ή ότι ένα σύστημα εγκαθίσταται σε ένα λειτουργικό περιβάλλον που περιέχει διάφορες συμμεταβλητές που η παρουσία τους μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου (Singpurwalla, 1995). Σε αυτές τις περιπτώσεις η παράμετρος θ δεν μπορεί είναι σταθερά, αλλά τυχαία μεταβλητή που μεταβάλλεται ανάλογα με το περιβάλλον ακολουθώντας μια βασική κατανομή. Σημειώνουμε ακόμη ότι με $[X | A]$ θα συμβολίζουμε, παρακάτω, μια τ.μ. που έχει την ίδια κατανομή με τη δεσμευμένη κατανομή της X δοθέντος ότι το γεγονός A συνέβη.

Έστω Θ μια συνεχής τ.μ. με συνάρτηση κατανομής M και σ.π.π. m όταν αυτή υπάρχει. Τότε, για $\Theta = \theta$, το μοντέλο των Marshall and Olkin:

$$\bar{G}(x; \theta) = \frac{\theta \bar{F}(x)}{1 - \bar{\theta} \bar{F}(x)}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < \theta < \infty,$$

όπου $\bar{\theta} = 1 - \theta$, μπορεί να γραφεί ως:

$$\bar{F}^*(x|\theta) = \frac{\theta \bar{F}(x)}{1 - \theta \bar{F}(x)}, \quad (5.3.1)$$

για κάθε $\theta > 0$ όπου F είναι η α.σ.κ. της τ.μ. X .

Σε όσα ακολουθούν θεωρούμε την Θ συνεχή τ.μ. Η αντίστοιχη **μη δεσμευμένη συνάρτηση επιβίωσης** είναι:

$$\bar{F}^*(x) = \int_0^{\infty} \bar{F}^*(x|\theta) m(\theta) d\theta. \quad (5.3.2)$$

Συμβολίζουμε ως X^* την τ.μ. που έχει συνάρτηση επιβίωσης την (5.3.2). Προκύπτει ότι η **δεσμευμένη σ.π.π.** που αντιστοιχεί στην (5.3.1) είναι η:

$$f^*(x|\theta) = \frac{\theta}{(1 - \theta \bar{F}(x))^2} f(x),$$

όπου $f(x)$ είναι η σ.π.π. της τ.μ. X .

Η αντίστοιχη **μη δεσμευμένη σ.π.π.** δίνεται από τη σχέση:

$$f^*(x) = \int_0^{\infty} f^*(x|\theta) m(\theta) d\theta = E \left[\frac{\Theta}{(1 - \Theta \bar{F}(x))^2} \right] f(x).$$

όπου $\bar{\Theta} = 1 - \Theta$ ενώ η **δεσμευμένη συνάρτηση κινδύνου** προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$h^*(x|\theta) = \frac{h_F(x)}{1 - \theta \bar{F}(x)},$$

όπου $h_F(x)$ είναι η συνάρτηση κινδύνου της τ.μ. X .

Τέλος, η **συνάρτηση κινδύνου της μη δεσμευμένης τ.μ. X^*** δίνεται από:

$$\begin{aligned}
h^*(x) &= \frac{f^*(x)}{\bar{F}^*(x)} = \int_0^{\infty} h^*(x/\theta) \psi(\theta | X^* > x) d\theta \\
&= h_F(x) \int_0^{\infty} \frac{1}{1 - \bar{\Theta} \bar{F}(x)} \psi(\theta | X^* > x) d\theta \\
&= h_F(x) E \left[\frac{1}{1 - \bar{\Theta} \bar{F}(x)} \mid X^* > x \right]
\end{aligned}$$

όπου $\psi(\theta | X^* > x) = \frac{\bar{F}^*(x|\theta)m(\theta)}{\bar{F}^*(x)}$ είναι η σ.π.π. της $[\Theta | X^* > x]$.

Οι Nanda *et al.* (2007) μελέτησαν σχέσεις στοχαστικής διάταξης των τ.μ. X και X^* .

Έχοντας ορίσει σε προηγούμενο κεφάλαιο τη διάταξη πηλίκου πιθανοφάνειας καθώς και τη διάταξη ποσοστού κινδύνου, στο κεφάλαιο αυτό θα δοθούν κάποιες επιπρόσθετες στοχαστικές διατάξεις.

Ορισμός 5.3.1 (Nanda and Das, 2012)

Μια τ.μ. X λέμε ότι είναι μεγαλύτερη από μια άλλη τ.μ. X^* σε **άνω διάταξη πηλίκου πιθανοφάνειας (up likelihood ratio ordering)**, αν για κάθε $x \geq 0$ η $\frac{f(x+t)}{f^*(x)}$ είναι αύξουσα στο x , όπου f και f^* είναι οι σ.π.π. των X και X^* αντίστοιχα. Τότε γράφουμε $X \geq_{LR\uparrow} X^*$.

Ορισμός 5.3.2 (Nanda and Das, 2012)

Μια τ.μ. X λέμε ότι είναι μεγαλύτερη από μια άλλη τ.μ. X^* σε **κάτω διάταξη πηλίκου πιθανοφάνειας (down likelihood ratio ordering)**, αν για

κάθε $t \geq 0$ η $\frac{f(x)}{f^*(x+t)}$ είναι αύξουσα στο x , όπου f και f^* είναι οι σ.π.π. των X και X^* αντίστοιχα. Τότε γράφουμε $X \geq_{LR\downarrow} X^*$.

Ορισμός 5.3.3 (Nanda and Das, 2012)

Μια τ.μ. X λέμε ότι είναι μεγαλύτερη από μια άλλη τ.μ. X^* σε **άνω διάταξη ποσοστού κινδύνου (up hazard rate order)**, αν $X - x \leq_{HR} X^*$ για κάθε $x \geq 0$ ή ισοδύναμα αν η $\frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}^*(x)}$ είναι φθίνουσα στο x , όπου \bar{F} και \bar{F}^* είναι οι συναρτήσεις επιβίωσης των τ.μ. X και X^* αντίστοιχα. Τότε γράφουμε $X \leq_{HR\uparrow} X^*$.

Ορισμός 5.3.4 (Nanda and Das, 2012)

Μια τ.μ. X λέμε ότι είναι μικρότερη από μια άλλη τ.μ. X^* σε **κάτω διάταξη ποσοστού κινδύνου (down hazard rate order)**, αν $X \leq_{HR} [X^* - x | X^* > x]$ για κάθε $x \geq 0$ ή ισοδύναμα αν η $\frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}^*(x+t)}$ είναι φθίνουσα στο x , για κάθε $t \geq 0$, όπου \bar{F} και \bar{F}^* είναι οι συναρτήσεις επιβίωσης των τ.μ. X και X^* αντίστοιχα. Τότε γράφουμε $X \leq_{HR\downarrow} X^*$.

Οι σχέσεις μεταξύ των παραπάνω στοχαστικών διατάξεων συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα και επομένως μπορούν να προκύψουν αποτελέσματα και για την περίπτωση όπου η Θ είναι σταθερά.

Πίνακας 5.1 Κάποια αποτελέσματα στοχαστικών διατάξεων.

Στοχαστικές διατάξεις	$P(\mathbf{0} < \Theta \leq 1) = 1$	$P(\Theta \geq 1) = 1$
Ένταση γήρανσης (AI)	$X \leq_{AI} X^*$	$X \not\leq_{AI} X^*$
Πηλίκιο πιθανοφάνειας	$X \geq_{LR} X^*$	$X \leq_{LR} X^*$
Άνω ηλικίο πιθανοφάνειας	$X \geq_{LR\uparrow} X^*$ όταν η X είναι DLR (decreasing likelihood ratio)	$X \leq_{LR\uparrow} X^*$ όταν η X είναι ILR (increasing likelihood ratio)
Κάτω ηλικίο πιθανοφάνειας	$X \geq_{LR\downarrow} X^*$ όταν η X είναι ILR	$X \leq_{LR\downarrow} X^*$ όταν η X είναι DLR
Άνω ποσοστό κινδύνου	$X \geq_{HR\uparrow} X^*$ όταν η X είναι DHR	$X \leq_{HR\uparrow} X^*$ όταν η X είναι IHR
Κάτω ποσοστό κινδύνου	$X \geq_{HR\downarrow} X^*$ όταν η X είναι IHR	$X \leq_{HR\downarrow} X^*$ όταν η X είναι DHR

Σημειώνουμε ότι παρόλο που δεν υπάρχει AI διάταξη μεταξύ των τ.μ. X και X^* όταν $P(\Theta \geq 1) = 1$ παρατηρούμε ότι η X κυριαρχείται από την X^* σε AI διάταξη για μια εκφυλισμένη τ.μ. Θ , δηλαδή στην περίπτωση σταθεράς.

5.4 Προσθήκη μιας παραμέτρου στην Marshall-Olkin οικογένεια κατανομών

Οι Jayakumar and Mathew (2008) πρότειναν μια μέθοδο για την προσθήκη μιας παραμέτρου στην Marshall-Olkin οικογένεια κατανομών. Αυτή η μέθοδος μπορεί να θεωρηθεί ως μια γενίκευση της μεθόδου που προτάθηκε από τους Marshall and Olkin (1997). Ξεκινώντας με μια συνάρτηση επιβίωσης \bar{F} και με μια σ.π.π. f , η **δι-παραμετρική οικογένεια συναρτήσεων επιβίωσης** είναι η εξής:

$$\bar{G}(x; a, \gamma) = \left[\frac{a\bar{F}(x)}{1 - a\bar{F}(x)} \right]^\gamma, \quad (5.4.1)$$

με $-\infty < x < \infty$, $0 < a < \infty$, $0 < \gamma < \infty$ και $\bar{a} = 1 - a$.

Όταν $a = 1$ παίρνουμε $\bar{G}(x; 1, \gamma) = [\bar{F}(x)]^\gamma$ και συγκεκριμένα όταν $a = \gamma = 1$, παίρνουμε $\bar{G}(x; 1, 1) = \bar{F}(x)$, ενώ όταν μόνο $\gamma = 1$ προκύπτει η Marshall-Olkin οικογένεια.

Η **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** της νέας οικογένειας είναι:

$$g(x; a, \gamma) = \gamma \left[\frac{a\bar{F}(x)}{1 - a\bar{F}(x)} \right]^{\gamma-1} \frac{af(x)}{[1 - a\bar{F}(x)]^2}, \quad (5.4.2)$$

όπου \bar{F} και f είναι αντίστοιχα η συνάρτηση επιβίωσης και η σ.π.π. της αρχικής οικογένειας κατανομών.

Η **συνάρτηση κινδύνου** της νέας οικογένειας είναι:

$$h(x; a, \gamma) = \frac{g(x; a, \gamma)}{\bar{G}(x; a, \gamma)} = \frac{\gamma f(x)}{\bar{F}(x)[1 - a\bar{F}(x)]}. \quad (5.4.3)$$

Στις επόμενες υποενότητες παρουσιάζονται κατανομές που εισήχθησαν στη βιβλιογραφία ως ειδική περίπτωση της (5.4.1).

5.4.1 Η Marshall-Olkin Semi-Burr κατανομή

Η συνάρτηση επιβίωσης της Marshall-Olkin Semi-Burr κατανομής προκύπτει από τη σχέση (5.4.1) έχοντας ως αρχική συνάρτηση επιβίωσης αυτή της semi Pareto κατανομής που προσδιορίστηκε στη σχέση (1.1.7.22). Ειδικότερα, ο ορισμός της **Marshall-Olkin Semi-Burr κατανομής (Marshall-Olkin Semi-Burr distribution)** είναι ο ακόλουθος.

Ορισμός 5.4.1.1 (Jayakumar and Mathew, 2008)

Η τ.μ. X ακολουθεί τη Marshall-Olkin Semi-Burr κατανομή με παραμέτρους a, β και γ αν η **συνάρτηση επιβίωσης** δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{G}(x; a, \beta, \gamma) = \left(\frac{a}{a + \psi(x)} \right)^\gamma = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{a}\psi(x)} \right)^\gamma, \quad a, \beta, \gamma > 0, \quad (5.4.1.1)$$

όπου η $\psi(x)$ ικανοποιεί την εξίσωση (1.1.7.21).

Θα συμβολίζουμε μια συνεχή τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί Marshall-Olkin Semi-Burr κατανομή με παραμέτρους a, β και γ και συνάρτηση επιβίωσης (5.4.1.1) ως: $X \sim MOSB(a, \beta, \gamma)$.

Λαμβάνοντας υπόψη τον παραπάνω ορισμό και με εφαρμογή των σχέσεων (1.1.7.20) και (1.1.7.22) στην (5.4.2) εύκολα προσδιορίζονται στο Θεώρημα που ακολουθεί η α.σ.κ. και η σ.π.π. της $MOSB(a, \beta, \gamma)$.

Θεώρημα 5.4.1.1 (Jayakumar and Mathew, 2008)

Έστω X μια τ.μ. που ακολουθεί την $MOSB(a, \beta, \gamma)$. Τότε η **αθροιστική συνάρτηση κατανομής** και η **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** της τ.μ. X είναι:

$$G(x; a, \beta, \gamma) = 1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{a} \psi(x)} \right)^\gamma,$$

και

$$g(x; a, \beta, \gamma) = \frac{\gamma}{a} \left(\frac{a}{a + \psi(x)} \right)^{\gamma+1} \psi'(x),$$

αντίστοιχα όπου $x > 0$, $a, \beta, \gamma > 0$.

Η **συνάρτηση κινδύνου** της $MOSB(a, \beta, \gamma)$ είναι:

$$h(x; a, \beta, \gamma) = \frac{g(x; a, \gamma)}{\bar{G}(x; a, \gamma)} = \frac{\gamma}{a} \left(\frac{a}{a + \psi(x)} \right) \psi'(x),$$

όπου $x > 0$, $a, \beta, \gamma > 0$.

5.4.2 Η Marshall-Olkin Burr κατανομή

Ως μια ειδική περίπτωση της Marshall-Olkin Semi-Burr κατανομής, οι Jayakumar and Mathew (2008) εισήγαγαν και μελέτησαν την Marshall-Olkin Burr κατανομή.

Η συνάρτηση επιβίωσης της **Marshall-Olkin Burr κατανομής (Marshall-Olkin Burr distribution)** προκύπτει από τη σχέση (5.4.1) με αρχική συνάρτηση επιβίωσης αυτής της κατανομής Pareto τύπου III που προσδιορίστηκε στη σχέση (1.1.7.24). Ειδικότερα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 5.4.2.1 (Jayakumar and Mathew, 2008)

Η τ.μ. X ακολουθεί τη **Marshall-Olkin Burr κατανομή (Marshall-Olkin Burr distribution)** με παραμέτρους a, β και γ αν η **συνάρτηση επιβίωσης** δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{G}(x; a, \beta, \gamma) = \left(\frac{a}{a + x^\beta} \right)^\gamma = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{a} x^\beta} \right)^\gamma, \quad (5.4.2.1)$$

με $x > 0$ και $a, \beta, \gamma > 0$.

Θα συμβολίζουμε μια συνεχή τ.μ. X που ακολουθεί Marshall-Olkin Burr κατανομή με παραμέτρους a, β και γ και συνάρτηση επιβίωσης (5.4.2.1) ως: $X \sim MOB(a, \beta, \gamma)$.

Λαμβάνοντας υπόψη τον παραπάνω ορισμό και με εφαρμογή των σχέσεων (1.1.7.23) και (1.1.7.24) στην (5.4.2) εύκολα προσδιορίζονται στο Θεώρημα που ακολουθεί η α.σ.κ. και η σ.π.π. της $MOB(a, \beta, \gamma)$.

Θεώρημα 5.4.2.1 (Jayakumar and Mathew, 2008)

Έστω X μια τ.μ. που ακολουθεί την $MOB(a, \beta, \gamma)$. Τότε η **αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.)** και η **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)** της τ.μ. X είναι:

$$G(x; a, \beta, \gamma) = 1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{a} x^\beta} \right)^\gamma,$$

και

$$g(x; a, \beta, \gamma) = \frac{\gamma\beta}{a} \left(\frac{a}{a+x^\beta} \right)^{\gamma+1} x^{\beta-1},$$

αντίστοιχα, όπου $x > 0$, $a, \beta, \gamma > 0$.

Η συνάρτηση κινδύνου είναι:

$$h(x; a, \beta, \gamma) = \frac{g(x; a, \beta, \gamma)}{\bar{G}(x; a, \beta, \gamma)} = \frac{\gamma\beta x^{\beta-1}}{a+x^\beta}, \quad (5.4.2.2)$$

όπου $x > 0$, $a, \beta, \gamma > 0$.

Παρατήρηση (Jayakumar and Mathew, 2008)

Για $\beta < 1$, η συνάρτηση κινδύνου (5.4.2.2) έχει μέγιστο στο σημείο $x=0$ και είναι φθίνουσα για κάθε $x > 0$. Για $\beta > 1$, η συνάρτηση κινδύνου αρχικά είναι αύξουσα και έχει μέγιστο στο σημείο $x = (a(\beta-1))^{\frac{1}{\beta}}$ και έπειτα είναι φθίνουσα για κάθε $x > (a(\beta-1))^{\frac{1}{\beta}}$.

Στη συνέχεια οι Jayakumar and Mathew (2008) ανέφεραν κάποια χαρακτηριστικά της MOB κατανομής:

Οι ροπές r τάξης είναι:

$$E(X^r) = \frac{a^{\frac{r}{\beta}} \Gamma\left(\gamma - \frac{r}{\beta}\right) \Gamma\left(1 + \frac{r}{\beta}\right)}{\Gamma(\gamma)}.$$

Η μέση τιμή και η διακύμανση είναι:

$$E(X) = \frac{a^{\frac{1}{\beta}} \Gamma\left(\gamma - \frac{1}{\beta}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}{\Gamma(\gamma)},$$

και

$$\text{Var}(X) = \frac{a^{\frac{2}{\beta}} \left(\Gamma\left(\frac{\gamma\beta - 2}{\beta}\right) \Gamma\left(\frac{\beta + 2}{\beta}\right) \Gamma(\gamma) - \Gamma\left(\frac{\gamma\beta - 1}{\beta}\right)^2 \Gamma\left(\frac{\beta + 1}{\beta}\right)^2 \right)}{\Gamma(\gamma)^2},$$

αντίστοιχα.

Η κορυφή είναι:

$$\text{mode}(X) = \begin{cases} \left[a \frac{\beta - 1}{\gamma\beta + 1} \right]^{\frac{1}{\beta}}, & \beta > 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Η συνάρτηση υπολογισμού των εκατοστιαίων σημείων είναι:

$$G^{-1}(q) = a^{\frac{1}{\beta}} \left[(1 - q)^{-\frac{1}{\gamma}} - 1 \right]^{\frac{1}{\beta}},$$

από όπου εύκολα προκύπτει ότι η διάμεσος είναι η:

$$M = a^{\frac{1}{\beta}} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} - 1 \right]^{\frac{1}{\beta}}.$$

Επιπλέον έχουν υπολογιστεί ο συντελεστής λοξότητας και ο συντελεστής κύρτωσης που δίνονται από τις σχέσεις:

$$\beta_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma\beta-3}{\beta}\right)^2 \Gamma\left(\frac{\beta+3}{\beta}\right)^2 \Gamma(\gamma)}{\Gamma\left(\frac{\gamma\beta-2}{\beta}\right)^3 \Gamma\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right)^3} \quad \text{και} \quad \beta_2 = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma\beta-4}{\beta}\right) \Gamma\left(\frac{\beta+4}{\beta}\right) \Gamma(\gamma)}{\Gamma\left(\frac{\gamma\beta-2}{\beta}\right)^2 \Gamma\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right)^2},$$

αντίστοιχα.

Για ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n , $y_{obs} = (t_i; i=1, \dots, n)$ από MOB κατανομή ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας $L(\theta; y_{obs})$ είναι:

$$\begin{aligned} \log L(\theta; y_{obs}) = l(\theta; y_{obs}) &= n \log(\gamma\beta) + n\gamma \log(a) - (\gamma+1) \sum_{i=1}^n \log(a+t_i^\beta) \\ &\quad + (\beta-1) \sum_{i=1}^n \log(t_i). \end{aligned}$$

Οι εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας των παραμέτρων της MOB κατανομής προκύπτουν επιλύοντας αριθμητικά τις ακόλουθες τρεις εξισώσεις:

$$\frac{\partial l}{\partial a} = \frac{n\gamma}{a} - (\gamma+1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{a+t_i^\beta} = 0,$$

$$\frac{\partial l}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} - (\gamma+1) \sum_{i=1}^n \frac{\beta t_i^\beta \log(t_i)}{a+t_i^\beta} + \sum_{i=1}^n \log(t_i) = 0,$$

και

$$\frac{\partial l}{\partial \gamma} = \frac{n}{\gamma} + n \log(a) - \sum_{i=1}^n \log(a+t_i^\beta) = 0.$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Στο Παράρτημα παρατίθενται τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν στο Κεφάλαιο 4.

Πίνακας 1. Παρατηρήσεις σχετικά με τον αριθμό των διαδοχικών αποτυχιών του συστήματος κλιματισμού από ένα στόλο 13 αεροσκαφών (Adamidis and Loukas, 1998, Proschan, 1963, Dahiya and Gurland, 1972).

194, 413, 90, 74, 55, 23, 97, 50, 359, 50, 130, 487, 102, 15, 14, 10, 57, 320, 261, 51, 44, 9, 254, 493, 18, 209, 41, 58, 60, 48, 56, 87, 11, 102, 12, 5, 100, 14, 29, 37, 186, 29, 104, 7, 4, 72, 270, 283, 7, 57, 33, 100, 61, 502, 220, 120, 141, 22, 603, 35, 98, 54, 181, 65, 49, 12, 239, 14, 18, 39, 3, 12, 5, 32, 9, 14, 70, 47, 62, 142, 3, 104, 85, 67, 169, 24, 21, 246, 47, 68, 15, 2, 91, 59, 447, 56, 29, 176, 225, 77, 191, 438, 43, 134, 184, 20, 386, 182, 71, 80, 188, 230, 152, 36, 79, 59, 33, 246, 1, 79, 3, 27, 201, 84, 27, 21, 16, 88, 130, 14, 118, 44, 15, 42, 106, 46, 230, 59, 153, 104, 20, 206, 5, 66, 34, 29, 26, 35, 5, 82, 5, 61, 31, 118, 326, 12, 54, 36, 34, 18, 25, 120, 31, 22, 18, 156, 11, 216, 139, 67, 310, 3, 46, 210, 57, 76, 14, 111, 97, 62, 26, 71, 39, 30, 7, 44, 11, 63, 23, 22, 23, 14, 18, 13, 34, 62, 11, 191, 14, 16, 18, 130, 90, 163, 208, 1, 24, 70, 16, 101, 52, 208, 95.

Πίνακας 2. Παρατηρήσεις σχετικά με τους χρόνους επιβίωσης πειραματόζωων που εμβολιάστηκαν με διάφορες δόσεις βακτηρίων της φυματίωσης (Bjerkedal, 1960).

12, 15, 22, 24, 24, 32, 32, 33, 34, 38, 38, 43, 44, 48, 52, 53, 54, 54, 55, 56, 57, 58, 58, 59, 60, 60, 60, 60, 61, 62, 63, 65, 65, 67, 68, 70, 70, 72, 73, 75, 76, 76, 81, 83, 84, 85, 87, 91, 95, 96, 98, 99, 109, 110, 121, 127, 129, 131, 143, 146, 146, 175, 175, 211, 233, 258, 258, 263, 297, 341, 341, 376.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΕΣ MARSHALL-OLKIN ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΜΙΑ ΚΡΙΤΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Η εισαγωγή νέων κατανομών με την ελπίδα ότι οι νέες κατανομές θα μοντελοποιούν κάποια τυχαία φαινόμενα καλύτερα από τις υπάρχουσες κατανομές, είναι συνήθης στη στατιστική και στις πιθανότητες. Στο πλαίσιο αυτό, τις τελευταίες δεκαετίες έχουν εμφανιστεί διάφοροι τρόποι ορισμού νέων κατανομών από υπάρχουσες είτε εφαρμόζοντας κάποιο μετασχηματισμό είτε με την εισαγωγή νέων παραμέτρων. Στόχος της παρούσας μεταπτυχιακής διατριβής είναι ο λεπτομερής προσδιορισμός των χαρακτηριστικών των μονοδιάστατων Marshall-Olkin κατανομών (π.χ. ροπές, εντροπία, πίνακας πληροφορίας του Fisher) καθώς και των ιδιοτήτων τους σχετικά με τη συνάρτηση επιβίωσης.

Στο **Κεφάλαιο 1**, παρουσιάζονται κάποιες βασικές συναρτήσεις των μοντέλων επιβίωσης και η σημασία της συνάρτησης κινδύνου. Επιπλέον, παρουσιάζονται κάποιες έννοιες που θα χρησιμοποιηθούν στα επόμενα κεφάλαια όπως η μίξη (compounding), οι στοχαστικές διατάξεις, οι ασυμπτωτικές κατανομές των δειγματικών ακραίων και οι συναρτήσεις σχετικής πιθανότητας (odds functions). Ακόμη, αναφέρονται και οι κατανομές που θα γενικευτούν στη συνέχεια με εφαρμογή του Marshall-Olkin μετασχηματισμού.

Στο **Κεφάλαιο 2**, ορίζεται ο Marshall-Olkin μετασχηματισμός και μελετώνται κάποιες ιδιότητές του. Παρουσιάζονται η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και η συνάρτηση κινδύνου της νέας επεκταμένης οικογένειας. Επίσης, αναφέρονται κάποιες ιδιότητες των νέων κατανομών που προκύπτουν από τον εν λόγω μετασχηματισμό με σημαντικότερη την ιδιότητα της ακραίας γεωμετρικής σταθερότητας που αναφέρθηκε από τους Marshall and Olkin (1997). Επιπρόσθετα, μελετώνται κάποια

χαρακτηριστικά της Marshall-Olkin οικογένειας όπως η αξιοπιστία, η εντροπία Rényi, η διάμεσος και η συνάρτηση υπολογισμού των εκατοστιαίων σημείων. Τέλος, αναφέρεται η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας για τον Marshall-Olkin μετασχηματισμό και ο στατιστικός τρόπος ελέγχου της αναγκαιότητας της εισαγωγής της προστιθέμενης παραμέτρου.

Στο **Κεφάλαιο 3** μελετώνται κάποιες ειδικές περιπτώσεις Marshall-Olkin κατανομών. Συγκεκριμένα παρουσιάζονται και μελετώνται οι ακόλουθες πέντε επεκταμένες κατανομές: Marshall-Olkin επεκταμένη εκθετική, Marshall-Olkin επεκταμένη Weibull, Marshall-Olkin επεκταμένη Pareto, Marshall-Olkin επεκταμένη Lomax και Marshall-Olkin επεκταμένη κατανομή γραμμικού ρυθμού αποτυχίας. Οι κατανομές αυτές μελετήθηκαν από τους Marshall and Olkin (1997), Ghitany *et al.* (2005), Ghitany (2005), Ghitany *et al.* (2007) και Ghitany and Kotz (2007), αντίστοιχα.

Στο **Κεφάλαιο 4** προσαρμόζονται κάποιες κατανομές του Κεφαλαίου 3 σε δύο πραγματικά σύνολα δεδομένων.

Το **Κεφάλαιο 5** ασχολείται με κάποιες μονοδιάστατες επεκτάσεις του Marshall-Olkin μετασχηματισμού όπως η επέκταση κατανομών με βάση πιθανογεννήτριες συναρτήσεις. Επιπλέον παρουσιάζεται η Marshall-Olkin οικογένεια κατανομών που βασίζεται σε χαρακτηριστικές συναρτήσεις. Κάποια παραδείγματα κατανομών που προκύπτουν με βάση αυτή την επέκταση είναι η Marshall-Olkin ασύμμετρη κατανομή Laplace (Jayakumar and Kuttykrishnan, 2006) και η Marshall-Olkin Mittag-Leffler κατανομή (Jose and Uma, 2009). Τέλος, μελετάται και η περίπτωση όπου η παράμετρος που εισάγεται είναι τυχαία μεταβλητή (Nanda *et al.*, 2007) και παρουσιάζεται και η ειδική περίπτωση εισαγωγής μιας παραμέτρου στην Marshall-Olkin οικογένεια κατανομών (Jayakumar and Mathew, 2008).

ABSTRACT OF MSc DISSERTATION

UNIVARIATE MARSHALL-OLKIN DISTRIBUTIONS

A CRITICAL REVIEW

Survival analysis is identical to meaning analysis of the period preceding the recording of an event. It is primarily used in biomedical sciences, where the focus is on the observation of life or patients or laboratory animals. The analysis of the time leading up to an event record has also been widely used in the social & engineering sciences, where the focus is on events such as job change, marriage, birth of children failure of machinery or electronics and so on.

It is easily understood that the description and modeling of life is the main issue in many aspects of human life and activity. Therefore, the methodologies developed in survival analysis are a valuable tool for researchers in various disciplines such as engineering, economics, medicine and other life sciences.

Probability distributions are used in survival analysis for modeling data, because they offer insight into the nature of various parameters and functions, particularly the failure rate (or hazard) function. Throughout the last decades, a considerable amount of research was devoted to the creation of lifetime models with more than the classical increasing and decreasing hazard rates. This MSc dissertation reviews and addresses issues related to continuous probability distributions of Marshall-Olkin univariate family that have direct application in survival analysis and is organized as follows.

Chapter 1 provides the terminology and basic concepts of continuous distributions of lifetimes and describes the various characteristic functions and properties that they have. Special attention is given to the hazard function and its importance in the description of the survivability of a

population. Additionally, ways to produce lifetime distributions, the analytical methodology for their study, and the most characteristic distributions with fixed, unimodal or concave hazard functions, are presented in the same chapter.

In **Chapter 2**, the Marshall-Olkin transformation and some of its properties are given. Additionally, some features of the Marshall-Olkin family as: probability density function, hazard function, reliability, Rényi entropy, median and quantile function are presented.

In **Chapter 3** special cases of the Marshall-Olkin distributions are studied. Namely, five extended distributions are defined; Marshall-Olkin extended exponential, Marshall-Olkin extended Weibull, Marshall-Olkin extended Pareto, Marshall-Olkin extended Lomax and Marshall-Olkin extended linear failure-rate distribution. These distributions were initially proposed in Marshall and Olkin (1997), Ghitany *et al.* (2005), Ghitany (2005), Ghitany *et al.* (2007) and Ghitany and Kotz (2007), respectively.

Chapter 4 examines the usefulness and applicability of some of the aforementioned models to two real datasets.

In **Chapter 5** some further extensions of univariate distributions related to the Marshall-Olkin transformation are presented.

By completing, a summary of the dissertation in English language and the literature that was used throughout this critical review development are given.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Adamidis, K., Loukas, S. (1998). A lifetime distribution with decreasing failure rate. *Statistics and Probability Letters*, 39, 35-42.

Akaike, H. (1969) Fitting autoregressive models for prediction, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 21, pp. 243–247.

Alice, Thomas, Jose, K.K. (1999). On Marshall-Olkin Generalized Exponential Distribution and its Applications, *Second Annual Conference of the Society of Statistics and Computer Applications held at St. Thomas College*. Pala, Kerala.

Aly, E. and Benkherouf, L. (2011). A new family of distributions based on probability generating functions. *Sankhya B - Applied and Interdisciplinary Statistics*, 73(1), 70-80.

Arnold, B.C., Balakrishnan, N., Nagaraja, H.N. (1992). *First Course in Order Statistics*. New York: John Wiley.

Barakat, H. M., Ghitany, M. E. and Al-Hussaini E. K. (2009). Asymptotic Distributions of Order Statistics and Record Values Under the Marshall-Olkin Parametrization Operation, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 38, 13, 2267-2273.

Barlow, R.E., Proschan, F. (1975). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*. New York: Holt, Rinehart and Winston. Reprinted (1981): Silver Spring, Maryland: To Begin With.

Barreto-Souza, Wagner, Lemonte, Artur J., Cordeiro, Gauss M. (2013). General results for the Marshall and Olkin's family of distributions. *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, 85(1), 3-21.

Bjerkedal, T. (1960). Acquisition of resistance in guinea pigs infected with different doses of virulent tubercle bacilli. *American Journal of Hygiene* 72, 130–148.

- Block, HW, Savits, TH, Singh H. (1998). The reversed hazard rate function. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 12, 69-90.
- Caroni C. (2010). Testing for the Marshall-Olkin extended form of the Weibull distribution. *Statistical Papers*, 51, 325-336.
- Chen, Z. (2000). A new two-parameter lifetime distribution with bathtub shape or increasing failure rate function. *Statistics and Probability Letters*, 49, 155-161.
- Cordeiro, G.M. and Lemonte, A.J. (2012). On the Marshall-Olkin extended Weibull distribution. *Statistical Papers*, 54, 333-353.
- Cox, D.R., Oakes, D. (1984). *Analysis of Survival Data*. London: Chapman and Hall.
- Dahiya, R.C. and Gurland, J. (1972). Goodness of t-tests for gamma and exponential distributions. *Technometrics*, 14, 791-801.
- Economou P., Caroni, C. (2007). Parametric Proportional Odds Frailty Models, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 36, 6, 1295-1307.
- Fréchet, M. (1927). *Sur la loi de probabilité de l'écart maximum*. Ann. Soc. Polon. Math. 6, 93.
- García, V.J., Gómez-Déniz, E., Vazquez-Polo, F.J., (2010). A new skew generalization of the normal distribution: properties and applications. *Computational Statistics and Data Analysis*, 54, 2021-2034.
- Gaver, D.P., (1963). Random hazard in reliability problems. *Technometrics*, 5(2), 211-226.
- Ghitany, M.E. (2005). Marshall-Olkin extended Pareto distribution and its Application. *International Journal of Applied Mathematics*, 18, No.1, 17-31.

- Ghitany, M.E., Al-Hussaini, E.K., Al-Jarallah, R.A. (2005). Marshall-Olkin extended Weibull distribution and its application to censored data. *Journal of Applied Statistics*, 32, 10, 1025-1034.
- Ghitany, M.E., Al-Awadhi, F.A., Alkhalfan, L.A. (2007). Marshall-Olkin Extended Lomax Distribution and Its Application to Censored Data, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 36, 10, 1855-1866.
- Ghitany, M.E., Kotz, Samuel (2007). Reliability properties of Extended linear failure-rate distributions. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 21, 441-450.
- Gnedenko, B.V. (1943). *Sur la distribution limite du terme maximum d'une serie aleatoire*, *Annals of Mathematics*, 44, 423-453.
- Gómez-Déniz, E. (2010). Another generalization of the geometric distribution. *Test*, 19, 399-415.
- Gompertz, B. (1825). On the nature of the function expressive of the law of human mortality and on the new mode of determining the value of life contingencies. *Philosophical Transactions of the Royal Statistical Society*, 115, 513-585.
- Gupta, Ramesh C., Ghitany, M.E., Al-Mutairi, D.K. (2010). Estimation of reliability from Marshall-Olkin extended Lomax distributions, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 80, 8, 937-947.
- Harris, T.E. (1948). Branching processes. *Annals of Mathematical Statistics* 19, 474-494.
- Jayakumar, K. and Kuttykrishnan, A. P. (2006). Time series model using Asymmetric Laplace distribution. *Statistics and Probability letters*, 76, 813-820.
- Jayakumar, K. and Mathew, T. (2008). On a generalization to Marshall-Olkin scheme and its application to Burr type XII distribution. *Statistical Papers*, 49, 421-439.

- Jiang, R., Ji, P., Xiao, X., (2003). Aging property of univariate failure rate models. *Reliability Engineering and System Safety*, 79, 113-116.
- Johnson, N.L., Kotz, S., Balakrishnan, N. (1994). *Continuous Univariate Distributions*, 1, 2nd edition New York: Wiley.
- Jose, K.K., Uma, P. (2009). On Marshall-Olkin Mittag-Leffler distributions and processes. *Far East Journal of Theoretical Statistics*, 28,189-199.
- Kodlin, D. (1967). A new response time distribution. *Biometrics*, 2, 227-239.
- Krishna, E., Jose, K.K., Alice, T., Ristić, M. (2013). The Marshall-Olkin Fréchet Distribution. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 42, 22, 4091-4107.
- Lawless, J.F. (2003). *Statistical Models and Methods for Life Time Data*, 2nd Edition, John Wiley and Sons, New York.
- Lomax, K.S. (1954). Business failures: another example of the analysis of failure data, *Journal of the American Statistical Association*, 45, 21-29.
- Mann, N.R. and Singpurwalla, N.D. (2006). *Life Testing*. Encyclopedia of Statistical Sciences.
- Marshall, A.W. and Olkin, I. (1994). New families of life distributions with extreme stability, *Technical Report No. 305*, Stanford University.
- Marshall, A.W. and Olkin, I. (1997). A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and Weibull families. *Biometrika*, 84, 641-652.
- Marshall, A.W. and Olkin, I. (2007). *Life Distributions. Structure of Nonparametric, Semiparametric and Parametric Families*. Springer, New York.

- Myhre, J. and Saunders, S. (1982). Screen testing and conditional probability of survival. In: Crowley, J., Johnson, R.A., eds. *Survival Analysis*. Lecture Notes-Monograph Series. Institute of Mathematical Statistics, 2, pp. 166-178.
- Nanda, A.K., Bhattacharjee, S., Alam, S.S. (2007). Properties of aging intensity function. *Statistics and Probability Letters*, 77, 365-373.
- Nanda, A. and Das S. (2012). Stochastic orders of the Marshall-Olkin extended distribution. *Stat. Probability Letters*, 82, 295-302.
- Proschan, F. (1963). Theoretical explanation of observed decreasing failure rate. *Technometrics*, 5, 375-383.
- Rényi, Alfréd (1961). "On measures of information and entropy". *Proceedings of the fourth Berkeley Symposium on Mathematics, Statistics and Probability 1960*. pp. 547-561.
- Ross, S.M. (1996). *Stochastic processes*. 2nd ed., New York: Wiley.
- Rubio, F.J. and Steel, M.F.J. (2012). On the Marshall-Olkin transformation as a skewing mechanism. *Computational Statistics and Data Analysis*, 56, 2251-2257, 2012.
- Sankaran, P.G. and Jayakumar, K. (2008). On proportional odds models. *Statistical Papers*, 49, 779-789.
- Shaked, M., Shanthikumar, J.G (1994). *Stochastic Orders and Their Applications*, Academic Press, New York.
- Singpurwalla, N.D. (1995). Survival in dynamic environments. *Statistical Science*, 10(1), 86-103.
- Weibull, W. (1951). A statistical distribution of wide applicability. *J. Appl. Mech.*, 18, 293-7.

Zhang, Tieling and Xie, Min (2007). Failure Data Analysis with Extended Weibull Distribution. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 36, 3, 579-592.

