



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ



ΕΛΕΝΗ ΜΠΟΥΣΙΟΥ

ΥΠΑΡΞΗ ΚΑΙ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΟΔΕΤΟΝΤΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ ΣΕ
ΑΛΤΣΙΔΕΣ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Ιωάννινα, 2014

*Αφιερώνεται
στους γονείς μου,
Ευάγγελο και Αγνή,
και στον αδερφό μου,
Κωνσταντίνο.*

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΝΑΛΥΣΗ-ΑΛΓΕΒΡΑ-ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ)

που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την 21/01/2014 από την εξεταστική επιτροπή:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
Ιωάννης Γιαννούλης (Επιβλέπων)	Επίκουρος Καθηγητής	
Ανδρέας Τόλιας	Επίκουρος Καθηγητής	
Παναγιώτης Τσαμάτος	Καθηγητής	

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

“Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή.”

ΕΛΕΝΗ ΜΠΟΥΣΙΟΥ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με την ολοκλήρωση της μεταπτυχιακής διατριβής μου θα ήθελα να ευχαριστήσω όσους συνέβαλαν στην επιτυχή εκπόνησή της.

Αρχικά, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον επιβλέποντά μου, Επίκουρο Καθηγητή κ. Ιωάννη Γιαννούλη για την εξαιρετικά πολύτιμη βοήθειά του καθ'ολη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών. Ειδικότερα, τον ευχαριστώ για την άψογη συνεργασία μας σε επιστημονικό επίπεδο, καθώς και για την υποστήριξη και καθοδήγησή του.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής, τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Ανδρέα Τόλια και τον Καθηγητή κ. Παναγιώτη Τσαμάτο για τις σημαντικές παρατηρήσεις και διορθώσεις τους.

Ακόμα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους μου για την ιδιαίτερη στήριξη και συμπαράστασή τους καθ'ολη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Τέλος, θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στην οικογένειά μου για την στήριξή της όλα αυτά τα χρόνια.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Θεωρούμε μία αλυσίδα άπειρα αριθμήσιμων το πλήθος σωματιδίων μοναδιαίας μάζας. Η δυναμική συμπεριφορά των σωματιδίων περιγράφεται από το ακόλουθο σύστημα συζευγμένων συνήθων διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης:

$$\ddot{q}_n(t) = V'(q_{n-1}(t) - q_n(t)) - V'(q_n(t) - q_{n+1}(t)), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

όπου $q_n(t) \in \mathbb{R}$ είναι η μετατόπιση του n -οστού σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t \in \mathbb{R}$ κατά μήκος του άξονα της αλυσίδας και η τελεία (') δηλώνει διαφόριση ως προς το χρόνο. Το δυναμικό V της δύναμης αλληλεπίδρασης μεταξύ των γειτονικών σωματιδίων είναι μία κυρτή και λεία συνάρτηση.

Για το παραπάνω σύστημα θα αποδείξουμε την ύπαρξη λείων λύσεων της μορφής οδεύοντος κύματος

$$q_n(t) = q(\omega t - \kappa n) + \beta t - \alpha n,$$

όπου $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία περιοδική συνάρτηση τέτοια ώστε $q(z) = q(z + 1) \quad \forall z \in \mathbb{R}$, δηλαδή η περίοδος είναι κανονικοποιημένη και ίση με 1, $\omega \in \mathbb{R}$ είναι η συχνότητα κύματος, $\kappa \in (0, \frac{1}{2}]$ είναι ο κυματαριθμός, $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι η μέση απόσταση των σωματιδίων και $\beta \in \mathbb{R}$ είναι μία αυθαίρετη παράμετρος. Παρουσιάζουμε δύο αποδείξεις. Στην πρώτη θα χρησιμοποιήσουμε τη Μέθοδο Λογισμού Μεταβολών της Συναρτησιακής Ανάλυσης και στη δεύτερη θα στηριχθούμε σε τοπολογικές μεθόδους, συγκεκριμένα στο δείκτη σταθερού σημείου.

Έπειτα, στηριζόμενοι σε τεχνικές διατάραξης, θα περιγράψουμε τη μορφή των οδεύοντων κυμάτων και θα βρούμε την ασθενώς μη-γραμμική σχέση διασποράς για κύματα μικρού πλάτους. Τέλος, για κύματα μεγάλου πλάτους, θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο Whitham προκειμένου να βρούμε τις εξισώσεις διαμόρφωσης για τις παραμέτρους κύματος α , β , κ και ω ως συναρτήσεις των μακροσκοπικών μεταβλητών του χώρου και του χρόνου $X = \epsilon n$, $T = \epsilon t$, $0 < \epsilon \ll 1$. Μέσω της θεωρίας διαμόρφωσης μεταβαίνουμε από το μικροσκοπικό σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων (1) σε ένα μακροσκοπικό σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων, το οποίο περιγράφει τη δυναμική των παραμέτρων.

Η εργασία κλείνει με την παρουσίαση μιας εφαρμογής, του κρουστικού προβλήματος για αλυσίδες σωματιδίων, η οποία αποτέλεσε ένα από τα κίνητρα για την προηγούμενη ανάλυση.

Η εργασία στηρίζεται στο μεγαλύτερό της μέρος στην πρωτότυπη εργασία των Filip και Βενακίδη [11].

ABSTRACT

We consider a chain of countably infinite particles of unit mass. The dynamics of the particles is described by the following system of coupled ordinary differential equations

$$\ddot{q}_n(t) = V'(q_{n-1}(t) - q_n(t)) - V'(q_n(t) - q_{n+1}(t)), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

where $q_n(t) \in \mathbb{R}$ is the displacement of the n -th particle along the chain axis at time $t \in \mathbb{R}$, and where the dot ($\dot{}$) denotes derivation with respect to time. The potential V of the interaction force between neighboring particles is a smooth and convex function.

For this system we show the existence of smooth solutions of the form of *traveling waves*

$$q_n(t) = q(\omega t - \kappa n) + \beta t - \alpha n,$$

where $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is a periodic function such that $q(z) = q(z + 1) \forall z \in \mathbb{R}$, i.e., the period is normalized and equal to 1, $\omega \in \mathbb{R}$ is the frequency of the wave, $\kappa \in (0, \frac{1}{2}]$ is the wave number, $\alpha \in \mathbb{R}$ is the mean distance between particles, and $\beta \in \mathbb{R}$ is an arbitrary constant. We present two proofs: the first one uses the Calculus of Variations of Functional Analysis, while the second one is based on topological methods, more precisely on the fixed point index.

Subsequently, we describe with the help of perturbation techniques the form of the traveling waves and the weakly-nonlinear dispersion relation for waves of small amplitude. Finally, for waves of arbitrary amplitude, we apply Whitham's method in order to derive the modulation equations for the wave parameters α, β, κ and ω as functions of the macroscopic variables of space and time $X = \epsilon n$, $T = \epsilon t$, $0 < \epsilon \ll 1$. By use of modulation theory we pass from the microscopic system of ordinary differential equations (2) to a macroscopic system of partial differential equations which describes the dynamics of the wave parameters.

This work is completed with the presentation of an application, the shock problem for particle chains, which constituted one of the motivations for the previous analysis.

The thesis relies on its biggest part on the original work of Filip and Venakides [11].

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη	i
Abstract	ii
1 Εισαγωγή	3
2 Ύπαρξη οδευόντων κυμάτων σε αλυσίδες σωματιδίων	7
2.1 Μέθοδος λογισμού μεταβολών	9
2.2 Μέθοδος δείκτη σταθερού σημείου	28
3 Μη-γραμμική διόρθωση οδευόντων κυμάτων μικρού πλάτους	45
4 Διαμορφωμένα οδεύοντα κύματα	59
4.1 Οι εξισώσεις διαμόρφωσης του Whitham	59
4.2 Οι εξισώσεις διαμόρφωσης για αυτοόμοια μεταβλητή	69
4.3 Οι παράμετροι διαμόρφωσης ως συναρτήσεις του πλάτους κύματος . . .	72
5 Εφαρμογή: Το κρουστικό πρόβλημα σε αλυσίδες σωματιδίων	75
Βιβλιογραφία	79

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή πραγματεύεται τη διάδοση οδεύοντων κυμάτων σε ένα διακριτό, μη-γραμμικό μονοδιάστατο μέσο. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιούμε ως μοντέλο μία αλυσίδα άπειρα αριθμήσιμων το πλήθος πανομοιότυπων σωματιδίων μοναδιαίας μάζας, η δυναμική συμπεριφορά του οποίου δίνεται από ένα άπειρα αριθμήσιμο σύστημα συζευγμένων συνήθων διαφορικών εξισώσεων, το οποίο υπαγορεύεται από τον δεύτερο νόμο κίνησης του Newton. Αν $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι το δυναμικό, τα σωματίδια κινούνται σύμφωνα με τις αλληλεπιδράσεις του πλησιέστερου γείτονα υπό την επίδραση του δυναμικού και η αλυσίδα σωματιδίων έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\ddot{q}_n(t) = V'(q_{n-1}(t) - q_n(t)) - V'(q_n(t) - q_{n+1}(t)), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.1)$$

Εδώ $q_n(t) \in \mathbb{R}$ είναι η μετατόπιση του n -οστού σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t \in \mathbb{R}$ κατά μήκος του άξονα της αλυσίδας και η τελεία (') δηλώνει διαφόριση ως προς το χρόνο. Υποθέτουμε στην εργασία αυτή ότι το δυναμικό V της δύναμης αλληλεπίδρασης μεταξύ γειτονικών σωματιδίων είναι μια κυρτή και λεία συνάρτηση, δηλαδή $V \in C^\infty(\mathbb{R})$ και $V''(\alpha) > 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Για ειδικές περιπτώσεις δυναμικού, το παραπάνω σύστημα είναι γνωστό ως πλήρως ολοκληρώσιμο (βλ. Κεφάλαιο 5). Για παράδειγμα, εκτός από το αρμονικό δυναμικό $V(x) = \frac{x^2}{2}$ που οδηγεί σε ένα γραμμικό σύστημα, το δυναμικό Toda $V(x) = e^{-x} + x - 1$ καθιστά την (1.1) ολοκληρώσιμο σύστημα, δηλαδή, τελείως γενικά, ένα σύστημα ειδικής μορφής για την μελέτη του οποίου μπορούν να χρησιμοποιηθούν ειδικά προσαρμοσμένες σε αυτό τεχνικές. Εδώ, η μόνη μας απαίτηση είναι το δυναμικό να είναι μια κυρτή και λεία συνάρτηση. Ενώ η υπόθεση ότι είναι λεία συνάρτηση είναι τεχνική, η κυρτότητα είναι θεμελιώδης, καθώς συνεπάγεται ότι όσο η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων αυξάνεται, τόσο η δύναμη που ασκείται σε αυτά τα εξαναγκάζει περισσότερο στο να πλησιάσουν το ένα το άλλο. Αυτό αποτελεί γενίκευση των ιδιοτήτων του (γραμμικού) νόμου του Hooke, σύμφωνα με τον οποίο η δύναμη που ασκείται για την συμπίεση ή την επιμήκυνση κατά μια απόσταση x ενός ελατηρίου είναι γραμμική ως προς την απόσταση και οδηγεί στην ευστάθεια των λύσεων του συστήματος.

Για το σύστημα Σ.Δ.Ε. (1.1) θα αποδείξουμε καταρχήν στο Κεφάλαιο 2 την ύπαρξη λείων και περιοδικών λύσεων οδεύοντος κύματος της μορφής:

$$q_n(t) = q(\omega t - kn) + \beta t - \alpha n,$$

όπου $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιοδική συνάρτηση τέτοια ώστε $q(z) = q(z+1) \quad \forall z \in \mathbb{R}$ (δηλαδή η περίοδος είναι κανονικοποιημένη και ίση με 1), $\omega \in \mathbb{R}$ είναι η συχνότητα κύματος,

Κεφάλαιο 1

$\kappa \in (0, \frac{1}{2}]$ είναι ο κυματαριθμός, ο οποίος είναι αντιστρόφως ανάλογος του μήκους κύματος, $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι η μέση απόσταση των σωματιδίων και $\beta \in \mathbb{R}$ είναι μια σταθερά που μπορεί να επιλεγεί ως αυθαίρετη παράμετρος και η οποία δηλώνει ότι η αλυσίδα μεταφέρεται ως έχει με ταχύτητα β . Στο Κεφάλαιο 2 θα ασχοληθούμε με την αυστηρά μαθηματική απόδειξη μιας τριπαραμετρικής οικογένειας λύσεων με παραμέτρους (α, κ, ω) σε δύο διαφορετικούς χώρους συναρτήσεων και με δύο διαφορετικές μεθόδους. Πιο συγκεκριμένα, στην πρώτη ενότητα χρησιμοποιούμε τη Μέθοδο Λογισμού Μεταβολών της Συναρτησιακής Ανάλυσης και στη δεύτερη στηρίζομαστε σε τοπολογικές μεθόδους και συγκεκριμένα στο δείκτη σταθερού σημείου. Σημειώνουμε ότι η μέθοδος του δείκτη σταθερού σημείου μας παρέχει περισσότερες πληροφορίες αναφορικά με τη μορφή των λύσεων, δηλαδή σχετικά με τη μορφή του κύματος.

Η ύπαρξη κυμάτων ειδικής μορφής έχει μελετηθεί και αλλού. Πιο συγκεκριμένα, οι Friesecke και Wattis στην εργασία τους [12], απέδειξαν το 1994 την ύπαρξη σολιτονοειδών κυμάτων (solitary waves) όπου $\kappa = 0$, δηλαδή το μήκος του κύματος είναι άπειρο. Επίσης, μία κατασκευαστική απόδειξη ύπαρξης οδευόντων κυμάτων μικρού πλάτους (ή ισοδύναμα μικρής ενέργειας) μη-ολοκληρώσιμης αλυσίδας παρουσιάστηκε το 1995 από τους Deift, Kriecherbauer και Βενακίδη [5]. Η γενική περίπτωση ύπαρξης οδευόντων κυμάτων μελετήθηκε στην εργασία [11] των Filip και Βενακίδη, τα αποτελέσματα της οποίας παρουσιάζει η παρούσα διατριβή. Ακόμα, στο [13] ο Herrmann ενοποίησε το 2010 τις εργασίες [11] και [12], απλοποίησε σε σημαντικό βαθμό τις αποδείξεις τους, και εξειδίκευσε τα σχετικά αποτελέσματα.

Στο Κεφάλαιο 3, εφαρμόζουμε τεχνικές διαταραχών (perturbation methods) ή αλλιώς τη μέθοδο πολλαπλών κλιμάκων, προκειμένου να περιγράψουμε τη μορφή των οδευόντων κυμάτων μικρού πλάτους και τη σχέση διασποράς ως μη γραμμικές διορθώσεις των αντίστοιχων του γραμμικοποιημένου προβλήματος. Οι μέθοδοι διαταραχών ουσιαστικά είναι απλώς μία εφαρμογή του Θεωρήματος του Taylor σε πιο πολύπλοκα συστήματα.

Η μέθοδος των διαταραχών που παρουσιάζουμε στο Κεφάλαιο 3 δίνει μια ικανοποιητική περιγραφή των λύσεων μη γραμμικών εξισώσεων για κύματα διασποράς¹, όπως είναι η (1.1), όταν το πλάτος του κύματος είναι μικρό, καθώς οι λύσεις του μη γραμμικού προβλήματος βρίσκονται κοντά στις λύσεις του γραμμικοποιημένου προβλήματος. Για τον λόγο αυτό τα αντίστοιχα μη γραμμικά προβλήματα, ονομάζονται — ως προσεγγίσεις γραμμικών προβλημάτων — *ασθενώς μη γραμμικά* (weakly nonlinear). Αν θέλουμε να πούμε κάτι για τα πλήρως μη γραμμικά (fully nonlinear) προβλήματα, οι μέθοδοι διαταραχών δεν επαρκούν.

Στο Κεφάλαιο 4 εισάγουμε μια νέα έννοια, αυτή του *διαμορφωμένου οδεύοντος κύματος* (modulated traveling wave). Η θεωρία των διαμορφωμένων οδευόντων κυμάτων προάχθηκε κυρίως από τον G. B. Whitham τη δεκαετία του 60 και είναι η κατάλληλη θεωρία για την περιγραφή πλήρως μη γραμμικών εξισώσεων κυμάτων διασποράς, όπου δηλαδή δεν θεωρούμε τις μη γραμμικές λύσεις ως προσεγγίσεις του γραμμικοποιημένου προβλήματος. Η θεωρία χρησιμοποιεί ως εργαλείο τον Λογισμό Μεταβολών, όπως

¹Κύματα διασποράς είναι αυτά όπου η ταχύτητα φάσης $\frac{\omega(\kappa)}{\kappa}$ διαφέρει από την ταχύτητα ομάδας $\omega'(\kappa)$.

Κεφάλαιο 1

αυτός εισήχθη καταρχήν στην Κλασική Μηχανική και του οποίου το αντίστοιχο στη Συναρτησιακή Ανάλυση είναι η εύρεση σημείων ακροτάτων ενός μη γραμμικού συναρτησοειδούς σε έναν κατάλληλο χώρο Banach. Η ιδέα είναι ότι έχοντας ένα (περιοδικό) οδεύον κύμα μιας μη γραμμικής εξίσωσης με κάποιες παραμέτρους, τότε αν αυτές οι παράμετροι μεταβληθούν *μακροσκοπικά στο χώρο και στο χρόνο* θα έχουμε πάλι μια λύση της μη γραμμικής εξίσωσης κύματος, η οποία θα προσεγγίζει το οδεύον κύμα. Με τον όρο «μακροσκοπικά» εννοούμε ότι οι κλίμακες στις οποίες συντελούνται οι μεταβολές των παραμέτρων είναι πολύ μεγαλύτερες από την κλίμακα μιας περιόδου. Στην περίπτωση μας αυτό εκφράζεται εισάγοντας τις μακροσκοπικές μεταβλητές του χώρου και του χρόνου

$$X = \epsilon n, \quad T = \epsilon t, \quad \text{όπου } 0 < \epsilon \ll 1.$$

Επομένως, μέσω της θεωρίας διαμόρφωσης μεταβαίνουμε από ένα μικροσκοπικό σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων σε ένα μακροσκοπικό σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων. Πλέον τα διαμορφωμένα οδεύοντα κύματα είναι προσεγγιστικές λύσεις του (1.1) και είναι της μορφής:

$$q_n(t) = \frac{1}{\epsilon} \Psi(X, T) + \tilde{q} \left(\frac{1}{\epsilon} \Theta(X, T) \right) + O(\epsilon),$$

όπου η $\tilde{q}$ είναι μία περιοδική συνάρτηση με κανονικοποιημένη περίοδο ίση με 1 και οι λείες συναρτήσεις Ψ και Θ είναι η διαμορφωμένη θέση και φάση αντίστοιχα. Οι παράμετροι των διαμορφωμένων κυμάτων είναι πεδία που εξαρτώνται από τις μεταβλητές (X, T) και καθορίζονται από τις συναρτήσεις Ψ και Θ μέσω των σχέσεων:

$$\omega(X, T) = \Theta_T(X, T), \quad \kappa(X, T) = -\Theta_X(X, T),$$

$$\beta(X, T) = \Psi_T(X, T), \quad \alpha(X, T) = -\Psi_X(X, T).$$

Προκειμένου να βρούμε τις εξισώσεις διαμόρφωσης εφαρμόζουμε τη μέθοδο Whitham, η οποία όπως είπαμε είναι ουσιαστικά μια μέθοδος Λογισμού Μεταβολών, και αποδεικνύουμε ότι αυτές δίνονται από το παρακάτω συντηρητικό σύστημα:

$$M \partial_X \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \kappa \\ \omega \end{pmatrix} + N \partial_T \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \kappa \\ \omega \end{pmatrix} = 0,$$

όπου οι πίνακες

$$M = \begin{pmatrix} V''(\alpha) - F_{\alpha\alpha} & 0 & -F_{\alpha\kappa} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -F_{\alpha\kappa} & 0 & -F_{\kappa\kappa} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{\omega\omega} \end{pmatrix}$$

και

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & F_{\alpha\omega} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ F_{\alpha\omega} & 0 & 2F_{\omega\kappa} & F_{\omega\omega} \\ 0 & 0 & F_{\omega\omega} & 0 \end{pmatrix}$$

Κεφάλαιο 1

είναι πραγματικοί και συμμετρικοί. Οι εξισώσεις διαμόρφωσης περιγράφουν την μακροσκοπική εξέλιξη των παραμέτρων οδευόντων κυμάτων $(\omega, \kappa, \beta, \alpha)$. Ωστόσο μέχρι σήμερα η θεωρία διαμόρφωσης για αλυσίδες σωματιδίων δεν είναι πλήρως κατανοημένη και παραμένουν πολλά ανοικτά ερωτήματα, τα οποία αποτελούν ισχυρό κίνητρο για αριθμητικά πειράματα. Το βασικότερο ανοικτό ερώτημα είναι η έλλειψη αυστηρής μαθηματικής τεκμηρίωσης για γενικά κυρτά και λεία δυναμικά V . Για αυστηρές δικαιολογήσεις ειδικών δυναμικών, βλ. [7], [8], [9] και [13].

Τέλος, το Κεφάλαιο 5 δίνει μια εφαρμογή όλων των προηγούμενων. Το κεφάλαιο αυτό θα μπορούσε να είναι και το πρώτο στη σειρά καθώς η συγκεκριμένη εφαρμογή, το χροστικό πρόβλημα (shock-problem) για την αλυσίδα σωματιδίων (1.1), αποτέλεσε και το κίνητρο για την εργασία [11] της Anne-Marie Filip και του Στέφανου Βενακίδη, στην οποία στηρίζεται η παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή. Στο πρόβλημα αυτό στόχος είναι η περιγραφή της χρονικά ασυμπτωτικής συμπεριφοράς ($t \rightarrow \infty$) των κυμάτων της αλυσίδας (1.1), όταν αυτή πιέζεται από ένα έμβολο (όπως περίπου πιέζει ένα έμβολο το υγρό μέσα σε μια σύριγγα). Μετά από αρκετές σχετικές προγενέστερες εργασίες που αναλύουν το πρόβλημα για ένα συγκεκριμένο V , το οποίο καθιστά την αλυσίδα ένα ολοκληρώσιμο σύστημα, και πληθώρα αριθμητικών πειραμάτων, οι συγγραφείς θέλησαν να αναλύσουν το συγκεκριμένο πρόβλημα για γενικές αλυσίδες, όπου υποθέτουν μόνο ότι το V είναι κυρτό. Η ανάλυση της ειδικής περίπτωσης δείχνει ότι η καλύτερη περιγραφή των κυμάτων δίνεται ασυμπτωτικά στην κρίσιμη περιοχή του χροστικού κύματος από ένα διαμορφωμένο οδεύον κύμα. Για το λόγο αυτό απέδειξαν καταρχήν την ύπαρξη οδευόντων κυμάτων (Κεφάλαιο 2 της παρούσας εργασίας), μελέτησαν την μορφή των λύσεων για κύματα μικρού πλάτους (Κεφάλαιο 3) και εξήγαγαν τις εξισώσεις διαμόρφωσης του Whitham (Κεφάλαιο 4). Στο χροστικό πρόβλημα και για $t \rightarrow \infty$ οι λύσεις έχουν αυτοομοία (self-similar) συμπεριφορά, δηλαδή εξαρτώνται από την μεταβλητή $\xi = \frac{x}{t} = \frac{X}{T}$. Συνεπώς, αυτό που ενδιαφέρει είναι οι εξισώσεις του Whitham σε αυτήν την περίπτωση (Κεφάλαιο 4). Τις εξισώσεις αυτές οι συγκεκριμένοι συγγραφείς τις ανέλυσαν αριθμητικά, και χρησιμοποιούν τα αποτελέσματα αυτής της ανάλυσης για να ερμηνεύσουν την διαφορετική συμπεριφορά της αλυσίδας για διαφορετικές ταχύτητες του εμβόλου. Παρόλα αυτά, στη γενική του μορφή, το χροστικό πρόβλημα παραμένει ακόμα από αναλυτικής άποψης σε πολλά σημεία ανοικτό. Μια λεπτομερής περιγραφή του προβλήματος, της πορείας των αποτελεσμάτων, τουλάχιστον μέχρι την εργασία [11], αλλά και του κινήτρου για την μελέτη αλυσίδων σωματιδίων γενικότερα, θα βρει ο αναγνώστης στην εισαγωγή του Κεφαλαίου 5, το οποίο και ολοκληρώνει την παρούσα εργασία.

Θα θέλαμε να κλείσουμε τη μικρή αυτή εισαγωγή, αναφέροντας ότι για δυναμικά

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 + \alpha\frac{1}{3}x^3 + \beta\frac{1}{4}x^4, \quad \alpha, \beta > 0,$$

η αλυσίδα σωματιδίων (1.1) ονομάζεται αλυσίδα των Fermi-Pasta-Ulam (FPU chain) — ή όπως προτάθηκε από κάποιον (βλ. [10]) αλυσίδα Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou — και μελετήθηκε αριθμητικά από τους ονομαζόμενους το 1955 στο Los Alamos National Laboratory στο Νέο Μεξικό των Η.Π.Α., οδηγώντας σε απρόσμενα αποτελέσματα, τα οποία είχαν μια σημαντικότερη συνεισφορά στη θεωρία των μη γραμμικών κυμάτων. Για μια εκλαϊκευμένη και ενδιαφέρουσα αφήγηση παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [17].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΥΠΑΡΞΗ ΟΔΕΥΟΝΤΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ ΣΕ ΑΛΥΣΙΔΕΣ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ

Θεωρούμε μία αλυσίδα άπειρα αριθμήσιμων το πλήθος σωματιδίων μοναδιαίας μάζας γειτονικά σωματίδια της οποίας αλληλεπιδρούν μεταξύ τους σύμφωνα με τον Νόμο του Hooke. Η δυναμική συμπεριφορά των σωματιδίων υπαγορεύεται από τον δεύτερο νόμο του Newton και περιγράφεται μαθηματικά από το ακόλουθο άπειρα αριθμήσιμο σύστημα συζευγμένων συνήθων διαφορικών εξισώσεων:

$$\ddot{q}_n(t) = V'(q_{n-1}(t) - q_n(t)) - V'(q_n(t) - q_{n+1}(t)), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.1)$$

όπου $q_n(t) \in \mathbb{R}$ είναι η μετατόπιση του n -οστού σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t \in \mathbb{R}$ κατά μήκος του άξονα της αλυσίδας και η τελεία (') δηλώνει διαφορίση ως προς το χρόνο. Υποθέτουμε ότι το δυναμικό V της δύναμης αλληλεπίδρασης μεταξύ γειτονικών σωματιδίων είναι μια κυρτή και λεία συνάρτηση. Για το Σ.Δ.Ε. (2.1) θα αποδείξουμε την ύπαρξη λείων και περιοδικών λύσεων οδεύοντος κύματος της μορφής:

$$q_n(t) = q(\omega t - \kappa n) + \beta t - \alpha n, \quad (2.2)$$

όπου $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιοδική συνάρτηση τέτοια ώστε $q(z) = q(z + 1) \quad \forall z \in \mathbb{R}$ (δηλαδή η περίοδος είναι κανονικοποιημένη και ίση με 1), $\omega \in \mathbb{R}$ είναι η συχνότητα κύματος, $\kappa \in (0, \frac{1}{2}]$ είναι ο κυματαριθμός, ο οποίος είναι αντιστρόφως ανάλογος του μήκους κύματος, $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι η μέση απόσταση των σωματιδίων και $\beta \in \mathbb{R}$ είναι μία αυθαίρετη παράμετρος.

Αντικαθιστώντας τον τύπο (2.2) στην εξίσωση (2.1) και θέτοντας $z = \omega t - \kappa n$ προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} q_{n-1}(t) &= q(\omega t - \kappa n + \kappa) + \beta t - \alpha n + \alpha, \\ q_{n+1}(t) &= q(\omega t - \kappa n - \kappa) + \beta t - \alpha n - \alpha, \\ q_{n-1}(t) - q_n(t) &= q(\omega t - \kappa n + \kappa) - q(\omega t - \kappa n) + \alpha \\ &= q(z + \kappa) - q(z) + \alpha, \\ q_n(t) - q_{n+1}(t) &= q(\omega t - \kappa n) - q(\omega t - \kappa n - \kappa) + \alpha \\ &= q(z) - q(z - \kappa) + \alpha. \end{aligned}$$

Επομένως για λύσεις της μορφής (2.2) η (2.1) γίνεται

$$\omega^2 q''(z) = V'(q(z + \kappa) - q(z) + \alpha) - V'(q(z) - q(z - \kappa) + \alpha), \quad (2.3)$$

Κεφάλαιο 2

η οποία θέτοντας $r(z) := q'(z)$ γράφεται ισοδύναμα

$$\omega^2 r'(z) = V' \left[\left(\alpha + \int_z^{z+\kappa} r(z') dz' \right) \right] - V' \left[\left(\alpha + \int_{z-\kappa}^z r(z') dz' \right) \right]. \quad (2.4)$$

Για λόγους απλοποίησης της τελευταίας θέτουμε $g(z) = V' \left(\alpha + \int_{z-\frac{\kappa}{2}}^{z+\frac{\kappa}{2}} r(z') dz' \right)$ και η (2.4) παίρνει τη μορφή:

$$\omega^2 r'(z) = g \left(z + \frac{\kappa}{2} \right) - g \left(z - \frac{\kappa}{2} \right). \quad (2.5)$$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (2.5) ως προς z προκύπτει ότι:

$$\omega^2 r(z) = C(r) + \int_{z-\frac{\kappa}{2}}^{z+\frac{\kappa}{2}} g(z') dz', \quad (2.6)$$

δηλαδή αναπτυγμένα

$$\omega^2 r(z) = C(r) + \int_{z-\frac{\kappa}{2}}^{z+\frac{\kappa}{2}} V' \left(\alpha + \int_{z'-\frac{\kappa}{2}}^{z'+\frac{\kappa}{2}} r(z'') dz'' \right) dz', \quad (2.7)$$

όπου η σταθερά ολοκλήρωσης ισούται με:

$$C(r) = - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{z-\frac{\kappa}{2}}^{z+\frac{\kappa}{2}} V' \left(\alpha + \int_{z'-\frac{\kappa}{2}}^{z'+\frac{\kappa}{2}} r(z'') dz'' \right) dz' dz \quad (2.8)$$

και έχει επιλεγεί έτσι ώστε η συνάρτηση r να έχει μέση τιμή 0 στο διάστημα μίας περιόδου, όπως προκύπτει αν ολοκληρώσουμε την εξίσωση (2.7).

Προκειμένου να έχουμε μία πιο συμπαγή μορφή της εξίσωσης (2.7), θα ορίσουμε τους παρακάτω τελεστές, των οποίων τα πεδία ορισμού και τιμών θα προσδιοριστούν στη συνέχεια ανάλογα με την μέθοδο που θα χρησιμοποιήσουμε:

$$Ar(z) := \int_{z-\frac{\kappa}{2}}^{z+\frac{\kappa}{2}} r(z') dz' \quad (2.9)$$

και

$$Tr(z) := C(r) + AV'(\alpha + Ar(z)) \quad (2.10)$$

με

$$C(r) := - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} AV'(\alpha + Ar(z)) dz,$$

όπου στα επόμενα προϋποθέτουμε ότι $\kappa \in (0, \frac{1}{2}]$.

Παρατήρηση 2.0.1. Οι τελεστές A και T που ορίσαμε παραπάνω εξαρτώνται από τον κυματαριθμό κ .

Άρα ως τώρα και σε καθαρά υπολογιστικό επίπεδο (formally), δηλαδή χωρίς αυστηρή δικαιολόγηση και εξέταση του καλά ορισμένου των παραπάνω μαθηματικών αντικειμένων, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 2.0.2. Για λύσεις της μορφής (2.2) το Σ.Δ.Ε. (2.1) είναι ισοδύναμο με το μη-γραμμικό πρόβλημα ιδιοτιμών

$$Tr = \omega^2 r, \quad (2.11)$$

όπου T είναι ο τελεστής που δίνεται από τη σχέση (2.10).

Τονίζουμε ότι η εξίσωση (2.11) προέκυψε εισάγοντας τους συμβολισμούς (2.9) και (2.10) στην εξίσωση (2.7).

Στο υπόλοιπο του Κεφαλαίου 2 θα ασχοληθούμε με την (μαθηματικά αυστηρή) απόδειξη της ύπαρξης μιας τριπαραμετρικής οικογένειας λύσεων με παραμέτρους (α, κ, ω) σε δύο διαφορετικούς χώρους συναρτήσεων και με δύο διαφορετικές μεθόδους. Πιο συγκεκριμένα στην Ενότητα 2.1 θα χρησιμοποιήσουμε την Μέθοδο Λογισμού Μεταβολών της Συναρτησιακής Ανάλυσης και ο χώρος των λύσεων είναι ο

$$\mathcal{R} := \left\{ r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : r|_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \in L^2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), r(z) = r(z+1), \right. \\ \left. r(z) = r(-z) \text{ σ.π.}, \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} r(z) dz = 0 \right\},$$

όπου με “σ.π.” εννοούμε “σχεδόν παντού ως προς το μέτρο Lebesgue”, και όπου όλα τα ολοκληρώματα εδώ και στα επόμενα νοούνται κατά Lebesgue.

Στην Ενότητα 2.2, θα χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες του δείκτη σταθερού σημείου και ο χώρος θα είναι ο

$$X := \left\{ r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : r|_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \in L^1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), r(z) = r(z+1), \right. \\ \left. r(z) = r(-z) \text{ σ.π.}, \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} r(z) dz = 0 \right\}.$$

Να σημειωθεί ότι ο χώρος X περιέχει περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τη μορφή των λύσεων.

2.1 Μέθοδος λογισμού μεταβολών

Ο $\mathcal{R}$, εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle r, h \rangle := \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} r(z)h(z)dz, \quad r, h \in \mathcal{R},$$

είναι χώρος Hilbert ως κλειστός υπόχωρος του

$$L^2 := L^2_{per}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left\{ r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : r|_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \in L^2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), r(z) = r(z+1) \text{ σ.π.} \right\},$$

ο οποίος είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον χώρο $L^2((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$.¹ Η κλειστότητα προκύπτει ως εξής: Αν $(r_n) \subset \mathcal{R}$ με $r_n \rightarrow r \in L^2$, τότε υπάρχει μια υπακολουθία (r_{k_n}) με $r_{k_n} \rightarrow r$ σχεδόν παντού στο $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (βλ. π.χ. [24, Προτάσεις 8.15 και 11.19]). Συνεπώς, αν οι r_n είναι άρτιες, τότε και η r θα είναι άρτια. Επίσης, σύμφωνα με την ανισότητα Hölder (ή Cauchy-Schwarz),

$$\left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} r(z) dz \right| = \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} r(z) dz - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} r_n(z) dz \right| \leq \|r_n - r\|_2 \rightarrow 0,$$

όπου $\|r\|_2 = \sqrt{\langle r, r \rangle}$ η νόρμα των χώρων L^2 και $\mathcal{R}$.

Θεώρημα 2.1.1. Για οποιαδήποτε τριάδα α, κ, s παραμέτρων του κύματος με $0 < \kappa < \frac{1}{2}$, $\kappa \notin \mathbb{Q}$, και $0 < s < \infty$ υπάρχει μία 1-περιοδική και λεία συνάρτηση στη σφαίρα $\Sigma_s = \{r \in \mathcal{R} : \|r\|_2 = s\}$ και ένας αριθμός $\omega^2 > 0$ που ικανοποιεί την εξίσωση (2.11), δηλαδή το μη-γραμμικό πρόβλημα ιδιοτιμών $Tr = \omega^2 r$, όπου ο τελεστής T ορίστηκε παραπάνω από τη σχέση (2.10). Το πρόβλημα (2.11) είναι ισοδύναμο του αρχικού μας προβλήματος (2.1), με $r = q'$.

Η απόδειξη του παραπάνω Θεωρήματος 2.1.1 θα δοθεί σταδιακά χρησιμοποιώντας τα παρακάτω λήμματα. Αναφέρουμε καταρχήν κάποιες ιδιότητες του τελεστή A , όπως αυτός ορίστηκε μέσω της (2.9).

Λήμμα 2.1.2. Ο τελεστής $A : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ είναι γραμμικός, συμπαγής, αυτοσυζυγής με $A(\mathcal{R}) \subset C(\mathbb{R})$ και ικανοποιεί τη σχέση:

$$|Ar(z)| \leq \sqrt{\kappa} \|r\|_2, \quad \forall z \in \mathbb{R}, \quad \forall r \in \mathcal{R}.$$

Απόδειξη. Καταρχήν θα δείξουμε ότι ο $A : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ είναι καλά ορισμένος.

Για κάθε $r \in L^2$ και για κάθε $z \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$$\begin{aligned} |Ar(z)| &= \left| \int_{z-\frac{\kappa}{2}}^{z+\frac{\kappa}{2}} 1 \cdot r(z') dz' \right| \\ &\leq \left(\int_{z-\frac{\kappa}{2}}^{z+\frac{\kappa}{2}} |r(z')|^2 dz' \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{z-\frac{\kappa}{2}}^{z+\frac{\kappa}{2}} 1^2 dz' \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(όπου χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Hölder)

$$\begin{aligned} &\leq \|r\|_2 \left([z']_{z-\frac{\kappa}{2}}^{z+\frac{\kappa}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{\kappa} \|r\|_2, \end{aligned}$$

από το οποίο προκύπτει ότι $(Ar)|_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \in L^2((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$, αφού

$$\|Ar\|_2^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (Ar(z))^2 dz \leq \kappa \|r\|_2^2. \quad (2.12)$$

¹Εδώ βέβαια ταυτίζουμε κάθε συνάρτηση του χώρου αυτού με την κλάση ισοδυναμίας των συναρτήσεων που είναι σχεδόν παντού ίσες με αυτή.

Ανάλογα προκύπτει και η συνέχεια της Ar για $r \in L^2$, αφού για κάθε $z_1 \geq z_2$ με $|z_1 - z_2| < 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
 |Ar(z_1) - Ar(z_2)| &= \left| \int_{z_1 - \frac{\kappa}{2}}^{z_1 + \frac{\kappa}{2}} r(\zeta) d\zeta - \int_{z_2 - \frac{\kappa}{2}}^{z_2 + \frac{\kappa}{2}} r(\zeta) d\zeta \right| \\
 &= \left| \int_{z_2 + \frac{\kappa}{2}}^{z_1 + \frac{\kappa}{2}} r(\zeta) d\zeta - \int_{z_2 - \frac{\kappa}{2}}^{z_1 - \frac{\kappa}{2}} r(\zeta) d\zeta \right| \\
 &\leq \int_{z_2 + \frac{\kappa}{2}}^{z_1 + \frac{\kappa}{2}} |r(\zeta) d\zeta| + \int_{z_2 - \frac{\kappa}{2}}^{z_1 - \frac{\kappa}{2}} |r(\zeta) d\zeta| \\
 &\leq 2\sqrt{|z_1 - z_2|} \|r\|_2.
 \end{aligned}$$

Επίσης, για κάθε άρτια $r \in L^2$ η Ar είναι 1-περιοδική και άρτια, αφού για κάθε $z \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
 Ar(z+1) &= \int_{z+1-\frac{\kappa}{2}}^{z+1+\frac{\kappa}{2}} r(\zeta) d\zeta \\
 &= \int_{z-\frac{\kappa}{2}}^{z+\frac{\kappa}{2}} r(\zeta' + 1) d\zeta' \\
 &= Ar(z),
 \end{aligned}$$

όπου θέσαμε $\zeta' := \zeta - 1$, και επίσης

$$\begin{aligned}
 Ar(-z) &= \int_{-z-\frac{\kappa}{2}}^{-z+\frac{\kappa}{2}} r(\zeta) d\zeta \\
 &= - \int_{z+\frac{\kappa}{2}}^{z-\frac{\kappa}{2}} r(-\zeta') d\zeta' \\
 &= \int_{z-\frac{\kappa}{2}}^{z+\frac{\kappa}{2}} r(\zeta') d\zeta' \\
 &= Ar(z),
 \end{aligned}$$

όπου θέσαμε $\zeta' := -\zeta$.

Ο $A : L^2 \rightarrow L^2$ όμως είναι και γραμμικός,² και άρα, σύμφωνα με τα προηγούμενα, ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής. Πράγματι, έστω $r, q \in L^2$ τότε $\forall z \in \mathbb{R}$

²Για λόγους απλούστευσης χρησιμοποιούμε καταχρηστικά το ίδιο σύμβολο για τον τελεστή $A : L^2 \rightarrow L^2$, που ορίζεται μέσω της (2.9), όπως και για τον περιορισμό του $A : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, τον οποίο θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα.

$$\begin{aligned}
A(r+q)(z) &= \int_{z-\frac{\kappa}{2}}^{z+\frac{\kappa}{2}} (r+q)(z') dz' \\
&= \int_{z-\frac{\kappa}{2}}^{z+\frac{\kappa}{2}} (r(z') + q(z')) dz' \\
&= \int_{z-\frac{\kappa}{2}}^{z+\frac{\kappa}{2}} r(z') dz' + \int_{z-\frac{\kappa}{2}}^{z+\frac{\kappa}{2}} q(z') dz' \\
&= Ar(z) + Aq(z).
\end{aligned}$$

Επίσης, έστω $r \in L^2$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε $\forall z \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
A(\lambda r)(z) &= \int_{z-\frac{\kappa}{2}}^{z+\frac{\kappa}{2}} (\lambda r)(z') dz' \\
&= \int_{z-\frac{\kappa}{2}}^{z+\frac{\kappa}{2}} \lambda r(z') dz' \\
&= \lambda \int_{z-\frac{\kappa}{2}}^{z+\frac{\kappa}{2}} r(z') dz' \\
&= \lambda Ar(z).
\end{aligned}$$

Άρα ο τελεστής A είναι γραμμικός.

Συνεχίζουμε δείχνοντας ότι ο φραγμένος γραμμικός τελεστής $A : L^2 \rightarrow L^2$ είναι και συμπαγής, δηλαδή ότι κάθε φραγμένη ακολουθία $(r_n) \subset L^2$ έχει μια υπακολουθία (r_{k_n}) , τέτοια ώστε η (Ar_{k_n}) να συγκλίνει μέσα στο L^2 όταν $n \rightarrow \infty$. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε το Θεώρημα Arzela-Ascoli στην ακόλουθη μορφή (βλ. [18, Θεώρημα 7.25]):

Θεώρημα 2.1.3. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}$ συμπαγές και $\{f_n\}$ μια ακολουθία συνεχών συναρτησεων από το Ω στο $\mathbb{R}$. Αν η ακολουθία f_n είναι:

1. ομοιόμορφα φραγμένη, δηλαδή $\exists M > 0$ σταθερά ώστε $\|f_n\|_\infty \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$
2. ομοιόμορφα ισοσυνεχής (δηλαδή $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$, ώστε αν $|x - y| < \delta$ τότε $|f_n(x) - f_n(y)| \leq \epsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$), τότε η ακολουθία $\{f_n\}$ έχει μία ομοιόμορφα συγκλίνουσα υπακολουθία στο Ω .

Στην περίπτωσή μας, έστω $(r_n) \subset L^2$ φραγμένη, δηλαδή $\exists C > 0 : \|r_n\|_2 \leq C$, τότε από τα προηγούμενα και την ανισότητα

$$|Ar(z)| \leq \sqrt{\kappa} \|r\|_2,$$

προκύπτει ότι η $(Ar_n) \subset C(\mathbb{R})$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη και ισοσυνεχής, αφού

$$\sup_n |Ar_n(z) - Ar_n(y)| \leq 2\sqrt{|z - y|} \|r\|_2 \leq 2|z - y|^{\frac{1}{2}} C \rightarrow 0,$$

όταν $|z - y| \rightarrow 0$. Δηλαδή η (Ar_n) είναι ισοσυνεχής.

Συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα Arzela-Ascoli, υπάρχει υπακολουθία (r_{k_n}) , τέτοια ώστε η (Ar_{k_n}) να συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, και άρα και μέσα στο L^2 , αφού

$$\|Ar_{k_n} - Ar_{k_m}\|_2 \leq \|Ar_{k_n} - Ar_{k_m}\|_\infty, \quad (2.13)$$

όπου $\|\rho\|_\infty := \max \{|\rho(z)| : z \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\}$ για $\rho \in C([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$.

Η συμπίεση του $A : L^2 \rightarrow L^2$ συνεπάγεται και τη συμπίεση του περιορισμού του $A : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, αφού ο $\mathcal{R}$ είναι κλειστός υπόχωρος του L^2 .

Δείχνουμε τώρα ότι ο τελεστής $A : L^2 \rightarrow L^2$ είναι αυτοσυζυγής, δηλαδή συμμετρικός. Αυτό προκύπτει από την περιοδικότητα των συναρτήσεων του χώρου L^2 . Πιο συγκεκριμένα, έστω $r, \rho \in L^2$. Τότε

$$\langle Ar, \rho \rangle = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{z-\frac{\kappa}{2}}^{z+\frac{\kappa}{2}} r(z') dz' \rho(z) dz = \int_{D_1} r(z) \rho(z') d(z, z'),$$

όπου $D_1 := \{(z, z') \in \mathbb{R}^2 : z' \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), |z' - z| < \frac{\kappa}{2}\}$, και

$$\langle r, A\rho \rangle = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} r(z) \int_{z-\frac{\kappa}{2}}^{z+\frac{\kappa}{2}} \rho(z') dz' dz = \int_{D_2} r(z) \rho(z') d(z, z'),$$

όπου $D_2 := \{(z, z') \in \mathbb{R}^2 : z \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), |z' - z| < \frac{\kappa}{2}\}$. Όμως,

$$D_1 = D \cup A \cup [-(1, 1) + B] \text{ και } D_2 = D \cup B \cup [-(1, 1) + A],$$

όπου

$$\begin{aligned} D &:= D_1 \cap ([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]) = D_2 \cap ([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]), \\ A &:= \{(z, z') \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} < z < \frac{1+\kappa}{2}, z - \frac{\kappa}{2} < z' < \frac{1}{2}\}, \\ B &:= \{(z, z') \in \mathbb{R}^2 : \frac{1-\kappa}{2} < z < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < z' < z + \frac{\kappa}{2}\}, \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \int_{-(1,1)+A} r(z) \rho(z') d(z, z') &= \int_A r(z) \rho(z') d(z, z'), \\ \int_{-(1,1)+B} r(z) \rho(z') d(z, z') &= \int_B r(z) \rho(z') d(z, z'). \end{aligned}$$

Από τα προηγούμενα προκύπτει: $\langle Ar, \rho \rangle = \langle r, A\rho \rangle$.

Τέλος, η συμμετρία του $A : L^2 \rightarrow L^2$ συνεπάγεται και ότι $A(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$, αφού

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} Ar(z) dz &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} Ar(z) 1 dz \\ &= \langle Ar, 1 \rangle \\ &= \langle r, A1 \rangle \\ &= \kappa \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} r(z) dz \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Από τις προηγούμενες ιδιότητες του τελεστή A προκύπτουν οι ακόλουθες για τον τελεστή T .

Πόρισμα 2.1.4. *Ο τελεστής $T : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ που ορίστηκε τυπικά μέσω της (2.10) είναι καλά ορισμένος.*

Απόδειξη. Αφού $Ar \in \mathcal{R} \cap C(\mathbb{R})$ και $V \in C^\infty(\mathbb{R})$, η συνάρτηση $AV'(\alpha + Ar)$ είναι καλά ορισμένη, συνεχής, περιοδική και άρτια στο $\mathbb{R}$ για κάθε $r \in \mathcal{R}$, και αφού το ολοκλήρωμα της Tr στο $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ έχει από κατασκευή μέση τιμή μηδέν, προκύπτει ότι $Tr \in \mathcal{R}$ για κάθε $r \in \mathcal{R}$. $\square$

Λήμμα 2.1.5. *Η εικόνα της κλειστής μπάλας $\bar{B}_s = \{r \in \mathcal{R} : \|r\|_2 \leq s\}$ μέσω του τελεστή T που ορίζεται από τη σχέση (2.10) είναι φραγμένη $\forall s \geq 0$.*

Απόδειξη. Έστω $r \in \bar{B}_s$. Από το Λήμμα 2.1.2, $\forall r \in \mathcal{R}$ με $\|r\|_2 = s < \infty$, έχουμε $|Ar(z)| \leq \sqrt{\kappa}\|r\|_2 \leq \sqrt{\kappa}s$, $\forall z \in \mathbb{R}$. Αφού το δυναμικό V είναι μία κυρτή και λεία συνάρτηση, η παράγωγος V' είναι αύξουσα συνάρτηση. Οπότε, προκύπτει:

$$\kappa V'(\alpha - \sqrt{\kappa}s) \leq AV'(\alpha + Ar(z)) = \int_{z-\frac{\kappa}{2}}^{z+\frac{\kappa}{2}} V'(\alpha + Ar(\zeta))d\zeta \leq \kappa V'(\alpha + \sqrt{\kappa}s)$$

και

$$-\kappa V'(\alpha + \sqrt{\kappa}s) \leq C(r) = - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} AV'(\alpha + Ar(z))dz \leq -\kappa V'(\alpha - \sqrt{\kappa}s).$$

Επομένως,

$$\kappa(V'(\alpha - \sqrt{\kappa}s) - V'(\alpha + \sqrt{\kappa}s)) \leq Tr(z) \leq \kappa(V'(\alpha + \sqrt{\kappa}s) - V'(\alpha - \sqrt{\kappa}s)),$$

όπου ο τελεστής T δίνεται από τη σχέση (2.10). Οπότε,

$$\begin{aligned} |Tr(z)| &\leq C_1(\alpha, \kappa, s) \quad \forall z \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \|Tr\|_2 &\leq C_1(\alpha, \kappa, s), \end{aligned}$$

όπου το $C_1(\alpha, \kappa, s)$ είναι μία σταθερά που εξαρτάται από τις παραμέτρους α, κ, s . Επομένως το $T(\bar{B}_s)$ είναι φραγμένο $\forall s \geq 0$. $\square$

Η ιδέα του Λογισμού Μεταβολών είναι η εύρεση λύσεων εξισώσεων ως σημείων ακροτάτων συναρτησοειδών.

Στην περίπτωση μας, ορίζουμε το συναρτησοειδές

$$U_\alpha : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{με τύπο}$$

$$U_\alpha(r) := \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} V(\alpha + Ar(z))dz$$

Το συναρτησοειδές αυτό είναι καλά ορισμένο αφού $Ar \in C(\mathbb{R})$ και $V \in C^\infty(\mathbb{R})$. Επίσης είναι εν γένει μη-γραμμικό λόγω της μη-γραμμικότητας της συνάρτησης V .

Θεώρημα 2.1.6. Το συναρτησοειδές U_α έχει παράγωγο Fréchet τον τελεστή $T : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, δηλαδή $Tr = \nabla U_\alpha(r) \in \mathcal{R} \ \forall r \in \mathcal{R}$. Ειδικότερα ισχύει

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{U_\alpha(r + th) - U_\alpha(r)}{t} = \langle Tr, h \rangle, \quad r \in \mathcal{R}, \quad (2.14)$$

και η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη ως προς $h \in \mathcal{R}$ με $\|h\|_2 = 1$.

Απόδειξη. Έστω $r, h \in \mathcal{R}$ με $\|h\|_2 = 1$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Taylor για να αναπτύξουμε τη συνάρτηση V γύρω από το σημείο $\alpha + Ar(z)$ και παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} \frac{U_\alpha(r + th) - U_\alpha(r)}{t} &= \frac{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [V(\alpha + Ar(z) + tAh(z)) - V(\alpha + Ar(z))] dz}{t} \\ &= \frac{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} V'(\alpha + Ar(z)) tAh(z) dz}{t} \\ &\quad + \frac{t}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} V''(\alpha + Ar(z) + \tau tAh(z)) (Ah(z))^2 dz, \end{aligned}$$

όπου $0 < |\tau| < |t|$. Σημειώνουμε ότι $|Ah(z)| \leq \sqrt{\kappa}$, όπου $\sqrt{\kappa}$ σταθερά, ανεξάρτητη του $h \in \mathcal{R}$, $\|h\|_2 = 1$. Για $0 < |\tau| < |t| < 1$ προκύπτει ότι:

$$\left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} V''(\alpha + Ar(z) + \tau tAh(z)) (Ah(z))^2 dz \right| \leq \kappa \max\{V''(\alpha + \rho) : |\rho| \leq \sqrt{\kappa}(1 + \|r\|_2)\},$$

εφόσον $(Ar(z) + \tau tAh(z)) \leq \sqrt{\kappa}(\|r\|_2 + 1)$ και $(Ah(z))^2 \leq \kappa$. Συνεπώς

$$\sup_{h \in \Sigma_1} \left| \frac{U_\alpha(r + th) - U_\alpha(r)}{t} - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} V'(\alpha + Ar(z)) Ah(z) dz \right| \rightarrow 0 \text{ για } t \rightarrow 0,$$

όπου $\Sigma_1 := \{h \in \mathcal{R} : \|h\|_2 = 1\}$, δηλαδή

$$\left| \frac{U_\alpha(r + th) - U_\alpha(r)}{t} - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} V'(\alpha + Ar(z)) Ah(z) dz \right| \rightarrow 0 \text{ για } t \rightarrow 0$$

ομοιόμορφα ως προς $h \in \Sigma_1$. Εξάλλου,

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} V'(\alpha + Ar(z)) Ah(z) dz &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} AV'(\alpha + Ar(z)) h(z) dz \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} Tr(z) h(z) dz - C(r) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h(z) dz \\ &= \langle Tr, h \rangle, \end{aligned}$$

εφόσον ο τελεστής $A : L^2 \rightarrow L^2$ είναι αυτοσυζυγής και $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h(z) dz = 0$.

Το Tr είναι η παράγωγος Fréchet του U_α στο r , δηλαδή $Tr = \nabla U_\alpha(r)$. Πράγματι, υπενθυμίζουμε ότι η παράγωγος Fréchet του $U_\alpha : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ στο $r \in \mathcal{R}$, όπου $\mathcal{R}$ χώρος Banach, είναι ο τελεστής $\nabla U_\alpha(r) \in \mathcal{R}^*$ για τον οποίο ισχύει

$$\frac{U_\alpha(r+h) - U_\alpha(r) - \nabla U_\alpha(r)(h)}{\|h\|} \rightarrow 0, \text{ όταν } \|h\| \rightarrow 0.$$

Ειδικότερα σε χώρους Hilbert ισχύει το Θεώρημα Αναπαράστασης Riesz:

Θεώρημα 2.1.7. *Η $F : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^*$ με $F(r)(\rho) := \langle \rho, r \rangle \forall r, \rho \in \mathcal{R}$, όπου $\mathcal{R}$ χώρος Hilbert, είναι ισομετρία, δηλαδή η F είναι γραμμική, 1-1 και επί, με $\|F(r)\| = \|r\| \forall r \in \mathcal{R}$.*

Συνεπώς, ταυτίζοντας το $F(r) := \nabla U_\alpha(r) \in \mathcal{R}^*$ με το $r := \nabla U_\alpha(r) \in \mathcal{R}$ έχουμε

$$\frac{U_\alpha(r+h) - U_\alpha(r) - \langle h, \nabla U_\alpha(r) \rangle}{\|h\|} \rightarrow 0, \text{ όταν } \|h\| \rightarrow 0.$$

Δηλαδή,

$$\frac{U_\alpha(r+h) - U_\alpha(r) - \langle \nabla U_\alpha(r), h \rangle}{\|h\|} \rightarrow 0, \text{ όταν } \|h\| \rightarrow 0,$$

ή, ισοδύναμα,

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall r \in \mathcal{R}, \|h\| \in (0, \delta) :$$

$$\frac{|U_\alpha(r + \|h\| \frac{h}{\|h\|}) - U_\alpha(r) - \langle \nabla U_\alpha(r), \|h\| \frac{h}{\|h\|} \rangle|}{\|h\|} < \epsilon. \quad (2.15)$$

Όμως σύμφωνα με την εξίσωση (2.14) έχουμε

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t \in \mathbb{R}, |t| \in (0, \delta) \forall \tilde{h} \in \mathcal{R}, \|\tilde{h}\| = 1 :$$

$$\frac{|U_\alpha(r + t\tilde{h}) - U_\alpha(r) - \langle Tr, t\tilde{h} \rangle|}{t} < \epsilon,$$

το οποίο από την (2.15) συνεπάγεται ότι το Tr είναι η παράγωγος Fréchet του U_α στο r , δηλαδή $Tr = \nabla U_\alpha(r)$. $\square$

Στα επόμενα θα χρησιμοποιούμε συχνά τον συμβολισμό $\nabla U_\alpha(r)$ για τον τελεστή T .

Αφού ταυτίσαμε τον τελεστή T με την παράγωγο Fréchet ∇U_α του συναρτησοειδούς U_α , στόχος μας είναι στα επόμενα, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του συναρτησοειδούς, να δείξουμε ότι κάθε σημείο ολικού μεγίστου αυτού είναι λύση της εξίσωσης (2.11).

Έτσι στα επόμενα συλλέγουμε υπό τη μορφή λημμάτων κάποιες ιδιότητες του συναρτησοειδούς και της παραγώγου του, τις οποίες κατόπιν συνθέτουμε για την απόδειξη του προαναφερθέντος αποτελέσματος.

Λήμμα 2.1.8. *Έστω r^* ένα σημείο τοπικού ακροτάτου του συναρτησοειδούς U_α στο $\mathcal{R}$. Τότε το r^* είναι ένα κρίσιμο σημείο του U_α στο $\mathcal{R}$, δηλαδή*

$$\nabla U_\alpha(r^*) = 0.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το r^* είναι ένα τοπικό ελάχιστο του συναρτησοειδούς U_α στο $\mathcal{R}$. Τότε υπάρχει μία περιοχή $V_{r^*} \subset \mathcal{R}$ του r^* τέτοια ώστε:

$$U_\alpha(r^*) \leq U_\alpha(r) \quad \forall r \in V_{r^*}. \quad (2.16)$$

Η σχέση (2.16) είναι απλά ο ορισμός του τοπικού ελαχίστου. Έστω $h \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$. Τότε υπάρχει $\tilde{\alpha} > 0$ τέτοιο ώστε $r^* + th \in V_{r^*}$, $\forall t \in (-\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha})$. Επομένως από τη σχέση (2.16) προκύπτει ότι:

$$U_\alpha(r^*) \leq U_\alpha(r^* + th) \quad \forall t \in (-\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}),$$

εφόσον η ανισότητα (2.16) ισχύει $\forall r \in V_{r^*}$ και έχουμε ότι $r^* + th \in V_{r^*}$. Συγκεκριμένα, $\forall t \in (0, \tilde{\alpha})$

$$U_\alpha(r^*) \leq U_\alpha(r^* + th),$$

ή

$$\frac{U_\alpha(r^* + th) - U_\alpha(r^*)}{t} \geq 0.$$

Από το Θεώρημα 2.1.6, $\forall h \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$ και $t \in (0, \tilde{\alpha})$ έχουμε ότι:

$$\langle \nabla U_\alpha(r^*), h \rangle = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in (0, \tilde{\alpha})}} \frac{U_\alpha(r^* + th) - U_\alpha(r^*)}{t}. \quad (2.17)$$

Αφού $\langle \nabla U_\alpha(r^*), 0 \rangle = 0$, ισχύει δηλαδή ότι

$$\langle \nabla U_\alpha(r^*), h \rangle \geq 0 \quad \forall h \in \mathcal{R}.$$

Θέτοντας $h = -\nabla U_\alpha(r^*)$ στη σχέση (2.17), έχουμε:

$$\begin{aligned} & \langle \nabla U_\alpha(r^*), -\nabla U_\alpha(r^*) \rangle \geq 0 \\ \Rightarrow & -\langle \nabla U_\alpha(r^*), \nabla U_\alpha(r^*) \rangle \geq 0 \\ \Rightarrow & \langle \nabla U_\alpha(r^*), \nabla U_\alpha(r^*) \rangle \leq 0 \\ \Rightarrow & \|\nabla U_\alpha(r^*)\|_2^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Επομένως $\nabla U_\alpha(r^*) = 0$. Δηλαδή το r^* είναι κρίσιμο σημείο του $U_\alpha(r)$. Αν το r^* είναι τοπικό μέγιστο, τότε υπάρχει περιοχή $V_{r^*} \subset \mathcal{R}$ του r^* τέτοια ώστε

$$U_\alpha(r) \leq U_\alpha(r^*) \quad \forall r \in V_{r^*},$$

και έπεται ότι αλλάζει η φορά όλων των ανισοτήτων. □

Λήμμα 2.1.9. *Ο τελεστής $A : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ έχει τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα*

$$u_n := \frac{1}{\pi n} \sin(\pi n \kappa), \quad e_n(z) := \sqrt{2} \cos(2\pi n z), \quad z \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

και ο πυρήνας του για $\kappa \notin \mathbb{Q}$ είναι ο τετριμμένος.

Απόδειξη. Όπως είναι γνωστό από τη θεωρία των σειρών Fourier (βλ. π.χ. [18, Κεφάλαιο 8]) ο χώρος των 1-περιοδικών, άρτιων $L^2(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ -συναρτήσεων έχει την ορθοκανονική βάση e_n , $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, όπου $e_0(z) = 1$ και $e_n(z) = \sqrt{2} \cos(2\pi n z) \forall n \geq 1$, $\forall z \in \mathbb{R}$, και ο υπόχωρός του, $\mathcal{R}$, των συναρτήσεων που επιπλέον έχουν μέση τιμή 0, έχει την ορθοκανονική βάση e_n , $n \in \mathbb{N}$. Ένας απλός υπολογισμός αποδεικνύει ότι $Ae_n = u_n e_n$, $n \in \mathbb{N}$, αφού

$$\begin{aligned} (Ae_n)(z) &= \int_{z-\frac{k}{2}}^{z+\frac{k}{2}} \sqrt{2} \cos(2\pi n \zeta) d\zeta \\ &= \sqrt{2} \frac{1}{2\pi n} \left[\sin\left(2\pi n\left(z + \frac{k}{2}\right)\right) - \sin\left(2\pi n\left(z - \frac{k}{2}\right)\right) \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2\pi n} \left(\sin(2\pi n z) \cos(\pi n k) + \cos(2\pi n z) \sin(\pi n k) \right. \\ &\quad \left. - \sin(2\pi n z) \cos(\pi n k) + \cos(2\pi n z) \sin(\pi n k) \right) \\ &= \frac{1}{\pi n} \sin(\pi n k) \sqrt{2} \cos(2\pi n z) \end{aligned}$$

Άρα $Ae_n = u_n e_n$, όπου $u_n = \frac{1}{\pi n} \sin(\pi n k) \forall n \in \mathbb{N}$.

Από τα προηγούμενα και τη συνέχεια του $A : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ προκύπτει ότι ο πυρήνας του είναι ο

$$\text{Ker } A = \overline{\text{span}\{e_n : u_n = 0, n \in \mathbb{N}\}}$$

και είναι τετριμμένος όταν $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \neq 0$, δηλαδή $\forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{Z} : nk \neq m$, δηλαδή $k \notin \mathbb{Q}$. $\square$

Λήμμα 2.1.10. Αν το r^* είναι κρίσιμη τιμή του συναρτησοειδούς U_α , δηλαδή $\nabla U_\alpha(r^*) = 0$, τότε $r^* = 0$, αν $k \notin \mathbb{Q}$.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 2.1.6 ξέρουμε ότι $Tr = \nabla U_\alpha(r)$, δηλαδή $\nabla U_\alpha(r) = C(r) + AV'(\alpha + Ar)$. Επομένως, για $r = r^*$ έχουμε

$$\nabla U_\alpha(r^*) = AV'(\alpha + Ar^*) + C(r^*).$$

Αν το r^* είναι κρίσιμη τιμή του συναρτησοειδούς U_α στο $\mathcal{R}$, τότε:

$$\begin{aligned} \nabla U_\alpha(r^*) &= 0 \\ \Leftrightarrow AV'(\alpha + Ar^*) &= -C(r^*). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Από το Λήμμα 2.1.9 και αφού η $-C(r^*)$ είναι σταθερά συνεπάγεται ότι

$$V'(\alpha + Ar^*) \equiv C_2, \tag{2.19}$$

όπου C_2 είναι σταθερά.

Αφού η V' ως μονότονη είναι $1 - 1$, η σχέση (2.19) ισχύει αν και μόνο αν $Ar^* \equiv C_3$, όπου η C_3 είναι σταθερά. Οπότε πάλι από το Λήμμα 2.1.9 έχουμε ότι

$$r^* \equiv C_4, \quad z \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \quad (2.20)$$

όπου η C_4 είναι σταθερά, και αφού $r^* \in \mathcal{R}$, έχει μέση τιμή 0 στο διάστημα μίας περιόδου.

Ολοκληρώνοντας τη σχέση (2.20) έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} r^*(z) dz &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} C_4 dz \\ \Rightarrow 0 &= C_4 [z]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow 0 &= C_4. \end{aligned}$$

Επομένως η συνάρτηση r^* είναι η μηδενική $\forall z \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. $\square$

Παρατήρηση 2.1.11. Η προϋπόθεση $\kappa \notin \mathbb{Q}$ στο Λήμμα 2.1.10 είναι αναγκαία σύμφωνα με το Λήμμα 2.1.9 και προστέθηκε στο Λήμμα 2.8 του πρωτοτύπου [11] για να διατηρηθεί το περιεχόμενο του συμπεράσματος, δηλαδή ότι ο πυρήνας του $T : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ είναι ο τετριμμένος, στο οποίο στηρίζεται η απόδειξη. Παρ' όλα αυτά, ο περιορισμός σε άρρητες τιμές του κυματαινικού κ δεν είναι απαραίτητος, αν χρησιμοποιηθεί η μέθοδος λογισμού μεταβολών σε μια γενικότερη μορφή που οδηγεί στο ίδιο αποτέλεσμα όπως εδώ και για ρητές τιμές του κ , βλ. [13].

Λήμμα 2.1.12. Ο τελεστής $T = \nabla U_\alpha : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ είναι μονότονος και συμπαγής.

Απόδειξη. 1. Για να δείξουμε ότι ο $T = \nabla U_\alpha$ είναι μονότονος τελεστής, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\langle \nabla U_\alpha(r_1) - \nabla U_\alpha(r_2), r_1 - r_2 \rangle \geq 0, \quad \forall r_1, r_2 \in \mathcal{R}. \quad (2.21)$$

Εφόσον $r_1, r_2 \in \mathcal{R}$, που είναι διανυσματικός χώρος, θα ισχύει και $r_1 - r_2 \in \mathcal{R}$. Επομένως $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (r_1(z) - r_2(z)) dz = 0$. Δηλαδή η διαφορά των συναρτήσεων έχει μέση τιμή 0 στο διάστημα μιας περιόδου. Οπότε η σχέση (2.21) γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [C(r_1) + AV'(\alpha + Ar_1(z)) - C(r_2) - AV'(\alpha + Ar_2(z))](r_1(z) - r_2(z)) dz \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [AV'(\alpha + Ar_1(z)) - AV'(\alpha + Ar_2(z))](r_1(z) - r_2(z)) dz \geq 0,$$

ή, επειδή ο A είναι γραμμικός και αυτοσυζυγής τελεστής,

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [V'(\alpha + Ar_1(z)) - V'(\alpha + Ar_2(z))](Ar_1(z) - Ar_2(z)) dz \geq 0.$$

Το δυναμικό V είναι κυρτή συνάρτηση, επομένως η παράγωγος του V' είναι αύξουσα. Οπότε, $\forall r_1, r_2 \in \mathcal{R}$, έπεται ότι οι ποσότητες $V'(\alpha + Ar_1(z)) - V'(\alpha + Ar_2(z))$ και $Ar_1(z) - Ar_2(z)$ θα έχουν το ίδιο πρόσημο στο διάστημα μιας περιόδου. Άρα ισχύει ότι:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [V'(\alpha + Ar_1(z)) - V'(\alpha + Ar_2(z))](Ar_1(z) - Ar_2(z))dz \geq 0.$$

Δηλαδή,

$$\langle \nabla U_\alpha(r_1) - \nabla U_\alpha(r_2), r_1 - r_2 \rangle \geq 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathcal{R},$$

που σημαίνει ότι ο τελεστής T είναι μονότονος.

2. Θα δείξουμε τώρα ότι ο τελεστής $T = \nabla U_\alpha : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ είναι συμπαγής, δηλαδή ότι είναι συνεχής και ότι κάθε φραγμένη ακολουθία $(r_n) \subset \mathcal{R}$ έχει μία υποακολουθία (r_{k_n}) έτσι ώστε η (Tr_{k_n}) να συγκλίνει. Πρώτα δείχνουμε ότι ο T είναι συνεχής τελεστής. Πράγματι, για $r_1, r_2 \in \mathcal{R}$ έχουμε από τον ορισμό (1.8) του $C(r)$, την γραμμικότητα του $A : L^2 \rightarrow L^2$ και τις ανισότητες (2.12), (2.13)

$$\begin{aligned} \|C(r_1) - C(r_2)\|_2 &\leq \|A [V'(\alpha + Ar_1) - V'(\alpha + Ar_2)]\|_\infty \\ &\leq \sqrt{\kappa} \|V'(\alpha + Ar_1) - V'(\alpha + Ar_2)\|_2 \end{aligned}$$

και

$$\|AV'(\alpha + Ar_1) - AV'(\alpha + Ar_2)\|_2 \leq \|A [V'(\alpha + Ar_1) - V'(\alpha + Ar_2)]\|_\infty,$$

που από τον ορισμό (2.10) του $T : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ συνεπάγεται

$$\|Tr_1 - Tr_2\|_2 \leq 2\sqrt{\kappa} \|V'(\alpha + Ar_1) - V'(\alpha + Ar_2)\|_2.$$

Όμως, αφού $V \in C^2(\mathbb{R})$, έχουμε από το Θεώρημα Μέσης Τιμής και την ανισότητα (2.12)

$$\|V'(\alpha + Ar_1) - V'(\alpha + Ar_2)\|_2 \leq M(r_1, r_2) \|Ar_1 - Ar_2\|_2,$$

όπου $M(r_1, r_2) := \max\{|V''(x)| : x \in [\alpha - \sqrt{\kappa}(\|r_1\|_2 + \|r_2\|_2), \alpha + \sqrt{\kappa}(\|r_1\|_2 + \|r_2\|_2)]\}$, και συνεπώς από την ανισότητα (2.13)

$$\|Tr_1 - Tr_2\|_2 \leq 2\kappa M(r_1, r_2) \|r_1 - r_2\|_2,$$

που (αφού η $M : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ είναι τοπικά φραγμένη) συνεπάγεται τη συνέχεια του $T : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ καθώς και την Lipschitz-συνέχεια των περιορισμών του T σε φραγμένα υποσύνολα του $\mathcal{R}$, αφού

$$\|Tr_1 - Tr_2\|_2 \leq 2\sqrt{\kappa} M_s \|Ar_1 - Ar_2\|_2 \leq 2\kappa M_s \|r_1 - r_2\|_2, \quad (2.22)$$

για $\|r_1\|_2, \|r_2\|_2 \leq s$, όπου $M_s := \max\{|V''(x)| : x \in [\alpha - 2s\sqrt{\kappa}, \alpha + 2s\sqrt{\kappa}]\}$.

(Επειδή $T(0) = 0$, από την τελευταία ανισότητα προκύπτει και ότι η εικόνα της κλειστής μπάλας $\bar{B}_s := \{r \in \mathcal{R} : \|r\|_2 \leq s\}$, $s > 0$, υπό τον T είναι φραγμένη.)

Τέλος, η συμπίεση του T προκύπτει από την συμπίεση του A . Πράγματι, αν $(r_n) \subset \bar{B}_s$ για κάποιο $s > 0$, υπάρχει υπακολουθία $(r_{k_n}) \subset (r_n)$ τέτοια ώστε η $(Ar_{k_n}) \subset \mathcal{R}$ να συγχλίνει, δηλ. είναι ακολουθία Cauchy. Από την πρώτη ανισότητα της (2.22) προκύπτει ότι και η (Tr_{k_n}) είναι ακολουθία Cauchy στο χώρο Hilbert $\mathcal{R}$, δηλαδή συγχλίνει.

□

Λήμμα 2.1.13. *Το συναρτησοειδές U_α είναι συνεχές στο $\mathcal{R}$ ως προς την ασθενή τοπολογία, δηλαδή $U_\alpha(r_n) \rightarrow U_\alpha(r)$ όταν $r_n \rightarrow r$ ασθενώς, δηλαδή όταν $\langle r_n, \rho \rangle \rightarrow \langle r, \rho \rangle$ για κάθε $\rho \in \mathcal{R}$.*

Απόδειξη. Έστω $r_n \rightarrow r$ ασθενώς στο χώρο Hilbert $\mathcal{R}$. Αφού η ακολουθία των φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών $T_n(\rho) := \langle r_n, \rho \rangle$, $\rho \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$, με $\|T_n\| = \|r_n\|_2$ (προκύπτει από την ανισότητα Cauchy-Schwarz) είναι κατά σημείο $\rho \in \mathcal{R}$ φραγμένη (ως συγχλίνουσα), είναι και ομοιόμορφα φραγμένη (Αρχή Ομοιόμορφου Φράγματος, βλ. [22, Θεώρημα 7.1]), δηλ. η ακολουθία $(\|T_n\|) = (\|r_n\|_2)$ είναι φραγμένη. Έστω τώρα ότι δεν ισχύει $U_\alpha(r_n) \rightarrow U_\alpha(r)$, δηλαδή υπάρχει ένα $\epsilon > 0$ και μια υπακολουθία $(r_{k_n}) \subset (r_n)$ με

$$|U_\alpha(r_{k_n}) - U_\alpha(r)| \geq \epsilon.$$

Θέτοντας $f(t) := U_\alpha(r + t(r_{k_n} - r))$, $t \in \mathbb{R}$, έχουμε από το Θεώρημα Μέσης Τιμής και το Θεώρημα 2.1.6

$$\begin{aligned} U_\alpha(r_{k_n}) - U_\alpha(r) &= f(1) - f(0) = f'(t_{k_n}) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t_{k_n} + t) - f(t_{k_n})}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U_\alpha(r + t_{k_n}(r_{k_n} - r) + t(r_{k_n} - r)) - U_\alpha(r + t_{k_n}(r_{k_n} - r))}{t} \\ &= \langle \nabla U_\alpha(r + t_{k_n}(r_{k_n} - r)), r_{k_n} - r \rangle, \quad t_{k_n} \in (0, 1). \end{aligned}$$

Επίσης, έχουμε

$$\begin{aligned} \|r + t_{k_n}(r_{k_n} - r)\|_2 &\leq \|r\|_2 + \|t_{k_n}(r_{k_n} - r)\|_2 \\ &\leq \|r\|_2 + \|r_{k_n} - r\|_2 |t_{k_n}|, \end{aligned}$$

όπου το $\|r\|_2$ είναι σταθερό, το $|t_{k_n}|$ είναι φραγμένο και $\|r_{k_n} - r\|_2 \rightarrow 0$. Επομένως το $\|r + t_{k_n}(r_{k_n} - r)\|_2$ είναι φραγμένο. Από το Λήμμα 2.1.12, έχουμε ότι ο $\nabla U_\alpha = T$ είναι συμπαγής τελεστής. Οπότε $\exists r^* \in \mathcal{R}$ και μια υπακολουθία (k_m) της (k_n) ώστε:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\nabla U_\alpha(r + t_{k_m}(r_{k_m} - r)) - r^*\|_2 = 0.$$

Δηλαδή,

$$\nabla U_\alpha(r + t_{k_m}(r_{k_m} - r)) \rightarrow r^*$$

ισχυρώς στον $\mathcal{R}$ και γράφουμε:

$$\begin{aligned} \langle \nabla U_\alpha(r + t_{k_m}(r_{k_m} - r)), r_{k_m} - r \rangle &= \langle \nabla U_\alpha(r + t_{k_m}(r_{k_m} - r)) + r^* - r^*, r_{k_m} - r \rangle \\ &= \langle r^*, r_{k_m} - r \rangle \\ &\quad + \langle \nabla U_\alpha(r + t_{k_m}(r_{k_m} - r)) - r^*, r_{k_m} - r \rangle \end{aligned}$$

Όμως, καθώς $m \rightarrow \infty$ προκύπτει ότι $\langle r^*, r_{k_m} - r \rangle \rightarrow 0$, εφόσον $r_{k_m} \rightarrow r$ ασθενώς, αφού (r_{k_m}) είναι υπακολουθία της (r_{k_n}) . Επίσης

$$\begin{aligned} |\langle \nabla U_\alpha(r + t_{k_m}(r_{k_m} - r)), r_{k_m} - r \rangle| &\leq \|\nabla U_\alpha(r + t_{k_m}(r_{k_m} - r))\|_2 \|r_{k_m} - r\|_2 \\ &\leq C \|\nabla U_\alpha(r + t_{k_m}(r_{k_m} - r))\|_2 \rightarrow 0, \end{aligned}$$

όπου η πρώτη ανισότητα προέκυψε από την ανισότητα Cauchy-Schwarz και η δεύτερη από το ότι η (r_{k_m}) είναι φραγμένη. Επομένως,

$$U_\alpha(r_{k_m}) - U_\alpha(r) = \langle \nabla U_\alpha(r + t_{k_m}(r_{k_m} - r)) - r^*, r_{k_m} - r \rangle \rightarrow 0.$$

Δηλαδή, $\lim_{k \rightarrow \infty} U_\alpha(r_{k_m}) = U_\alpha(r)$ που οδηγεί σε αντίφαση με τη σχέση

$$|U_\alpha(r_{k_n}) - U_\alpha(r)| \geq \epsilon.$$

Άρα το συναρτησοειδές U_α είναι συνεχές στο $\mathcal{R}$ ως προς την ασθενή τοπολογία. □

Λήμμα 2.1.14. 1. Το συναρτησοειδές U_α λαμβάνει το μέγιστό του όταν περιορίζεται στην κλειστή μπάλα $\bar{B}_s = \{r \in \mathcal{R} : \|r\|_2 \leq s\}$.

2. Το ολικό μέγιστο του συναρτησοειδούς U_α βρίσκεται στη σφαίρα $\Sigma_s = \{r \in \mathcal{R} : \|r\|_2 = s\}$.

Απόδειξη. 1. Ορίσαμε το συναρτησοειδές $U_\alpha : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$U_\alpha(r) := \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} V(\alpha + Ar(z)) dz$$

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση δυναμικού V είναι συνεχής και μάλιστα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} |V(\alpha + Ar(z))| &\leq C_2(\alpha, \kappa, s) \\ &:= \max\{|V(x)| : x \in [\alpha - \sqrt{\kappa}s, \alpha + \sqrt{\kappa}s]\} \quad \forall z \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \end{aligned}$$

εφόσον $|Ar(z)| \leq \sqrt{\kappa}\|r\|_2 \leq \sqrt{\kappa}s, \forall z \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Επομένως:

$$\begin{aligned} |U_\alpha(r)| &= \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} V(\alpha + Ar(z)) dz \right| \\ &\leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |V(\alpha + Ar(z))| dz \\ &\leq C_2(\alpha, \kappa, s) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dz \\ &\leq C_2(\alpha, \kappa, s), \end{aligned}$$

όπου $C_2(\alpha, \kappa, s)$ μια σταθερά που εξαρτάται από τις παραμέτρους α, κ, s και προφανώς ανήκει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Επομένως το συναρτησοειδές U_α είναι φραγμένο στην $\bar{B}_s$ και άρα η εικόνα της υπό το U_α έχει ελάχιστο άνω φράγμα, έστω d .

Άρα, $\forall r \in \bar{B}_s$ ισχύει $U_\alpha(r) \leq d$. Επίσης $\exists (r_n)$ ακολουθία στην $\bar{B}_s$ τέτοια ώστε $\lim_{n \rightarrow \infty} U_\alpha(r_n) = d$. Ως γνωστόν η κλειστή μπάλα $\bar{B}_s$ είναι συμπαγής ως προς την ασθενή τοπολογία, αφού ο $\mathcal{R}$, ως χώρος Hilbert, είναι ανακλαστικός (βλ. π.χ. [2, Θεώρημα 3.16]). Συνεπώς $\exists (r_{n_j})$ υπακολουθία της (r_n) στην $\bar{B}_s$, η οποία συγκλίνει ασθενώς σε κάποιο $\tilde{r} \in \bar{B}_s$. Οπότε $\lim_{j \rightarrow \infty} U_\alpha(r_{n_j}) = d$. Ακόμα, από την συνέχεια του U_α ως προς την ασθενή τοπολογία που αποδείχθηκε στο Λήμμα 2.1.13, έχουμε ότι:

$$U_\alpha(\tilde{r}) = \lim_{j \rightarrow \infty} U_\alpha(r_{n_j}) = d.$$

Τότε $U_\alpha(\tilde{r}) = d$ και $\forall r \in \bar{B}_s$ ισχύει $U_\alpha(r) \leq d$, δηλαδή το U_α έχει ολικό μέγιστο στην $\bar{B}_s$ στο σημείο $\tilde{r} \in \bar{B}_s$.

2. Σύμφωνα με τα Λήμματα 2.1.8 και 2.1.10, ξέρουμε ότι το μοναδικό πιθανό σημείο τοπικού ακροτάτου του U_α στο εσωτερικό της κλειστής μπάλας $\bar{B}_s$ είναι το $r = 0$. Θα δείξουμε ότι $\forall \epsilon > 0$ υπάρχει ένα στοιχείο $r_1 \in \mathcal{R}$ με $\|r_1\|_2 > 0$ τέτοιο ώστε $U_\alpha(r_1) > U_\alpha(0)$, που σημαίνει ότι το $r = 0$ δεν είναι σημείο τοπικού μεγίστου για το U_α το οποίο υπάρχει σύμφωνα με το 1 του παρόντος Λήμματος. Επομένως το U_α λαμβάνει μέγιστο στο $\bar{B}_s$ και άρα αυτό θα βρίσκεται στο σύνορο της κλειστής μπάλας και όχι στο εσωτερικό της. Έστω $r_1 = \sqrt{2}\epsilon \cos(2\pi \cdot) \in \mathcal{R}$ όπου

$$\begin{aligned} \|r_1\|_2 &= \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} r_1^2(z) dz \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [\sqrt{2}\epsilon \cos(2\pi z)]^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2}\epsilon \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos^2(2\pi z) dz \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2}\epsilon \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1 + \cos(4\pi z)}{2} dz \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2}\epsilon \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos 4\pi z dz \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2}\epsilon \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} 0 \right) \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

όπου $\epsilon > 0$ ένας μικρός πραγματικός αριθμός. Άρα $\|r_1\|_2 > 0$. Εφαρμόζουμε τον τύπο του Taylor για το $V(\alpha + Ar_1(z))$, γύρω από το σημείο α :

$$U_\alpha(r_1) - U_\alpha(0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} V(\alpha + Ar_1(z)) dz - V(\alpha) \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned}
&= V'(\alpha) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} Ar_1(z) dz \\
&\quad + \frac{V''(\alpha)}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (Ar_1(z))^2 dz \\
&\quad + \frac{1}{6} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} V'''(\alpha + \tau Ar_1(z)) (Ar_1(z))^3 dz,
\end{aligned}$$

όπου $0 < \tau < 1$.

Παρατηρούμε ότι:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} Ar_1(z) dz = 0.$$

Έπειτα, $V''(\alpha) > 0$ μιας και η V είναι λεία και κυρτή, και

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (Ar_1(z))^2 dz = \epsilon^2 \frac{\sin^2(\pi\kappa)}{\pi} > 0 \text{ για } \kappa \in (0, \frac{1}{2})$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
A \cos(2\pi z) &= \int_{z-\frac{\kappa}{2}}^{z+\frac{\kappa}{2}} \cos(2\pi z') dz' \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi z - \pi\kappa}^{2\pi z + \pi\kappa} \cos x dx \\
&= \frac{1}{2\pi} (\sin(2\pi z + \pi\kappa)) - (\sin(2\pi z - \pi\kappa))
\end{aligned}$$

Ξέρουμε από τους τριγωνομετρικούς τύπους ότι ισχύει:

$$\begin{aligned}
\sin(2\pi z \pm \pi\kappa) &= \sin 2\pi z \cos \pi\kappa \pm \cos 2\pi z \sin \pi\kappa \\
\Rightarrow \sin(2\pi z + \pi\kappa) - \sin(2\pi z - \pi\kappa) &= 2 \cos 2\pi z \sin \pi\kappa
\end{aligned}$$

και άρα

$$A \cos(2\pi z) = \frac{\sin \pi\kappa}{\pi} \cos 2\pi z$$

από το οποίο προκύπτει

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} A \cos(2\pi z) dz &= 0, \\
\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (A \cos(2\pi z))^2 dz &= \frac{\sin^2 \pi\kappa}{\pi} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos^2(2\pi z) dz \\
&= \frac{\sin^2 \pi\kappa}{2\pi},
\end{aligned}$$

όπου $\frac{\sin^2 \pi \kappa}{\pi} > 0 \Leftrightarrow \kappa \notin \mathbb{Z}$, το οποίο ισχύει για $\kappa \in (0, \frac{1}{2})$.

Συνεπώς ο πρώτος όρος του αναπτύγματος (2.23) εξαφανίζεται και ο δεύτερος όρος είναι θετικός και της τάξης $O(\epsilon^2)$.

Τέλος, από το Λήμμα 2.1.2, ξέρουμε ότι:

$$\begin{aligned} |Ar_1(z)| &\leq \sqrt{\kappa} \|r_1\|_2 \\ &\leq \sqrt{\kappa} \epsilon, \end{aligned}$$

όπου $\sqrt{\kappa}$ είναι σταθερά. Επίσης η συνάρτηση δυναμικού V είναι λεία και άρα το V''' είναι συνεχής συνάρτηση. Οπότε ο τελευταίος όρος της εξίσωσης (2.23), δηλαδή ο

$$\frac{1}{6} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} V'''(\alpha + \tau Ar_1(z)) (Ar_1(z))^3 dz$$

είναι φραγμένος και μάλιστα της τάξης $O(\epsilon^3)$ για $\epsilon \rightarrow 0$, αφού $\exists C > 0$ έτσι ώστε $\forall \epsilon \in (0, \epsilon_0]$:

$$\frac{|\frac{1}{6} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} V'''(\alpha + \tau \epsilon) \epsilon^3 dz|}{\epsilon^3} \leq C.$$

Επομένως

$$U_\alpha(r_1) - U_\alpha(0) = \epsilon^2 \left(\frac{V''(\alpha) \sin^2(\pi \kappa)}{2\pi} - \epsilon C \right) > 0$$

για αρκούντως μικρά ϵ , δηλαδή ισχύει ότι $U_\alpha(r_1) > U_\alpha(0)$. Οπότε το $r = 0$ δεν είναι το μέγιστο του συναρτησοειδούς $U_\alpha(r)$.

□

Λήμμα 2.1.15. Το ολικό μέγιστο του συναρτησοειδούς $U_\alpha(r)$ στη σφαίρα $\Sigma_s = \{r \in \mathcal{R} : \|r\|_2 = s\}$, $s > 0$ ικανοποιεί την εξίσωση (2.11), $Tr = \omega^2 r$.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 2.1.14 έχουμε ότι το συναρτησοειδές U_α λαμβάνει το ολικό του μέγιστο στο σύνορο της κλειστής μπάλας $\bar{B}_s$, δηλαδή στη σφαίρα $\Sigma_s = \{r \in \mathcal{R} : \|r\|_2 = s\}$. Έστω $U_\alpha(\tilde{r}) = \max_{\Sigma_s} U_\alpha(r)$. Θα δείξουμε ότι το $\tilde{r}$ λύνει το μη-γραμμικό πρόβλημα ιδιοτιμών $Tr = \omega^2 r$. Ορίζουμε ως $\mathcal{R}_1$ τον μονοδιάστατο υπόχωρο του $\mathcal{R}$ που παράγεται από το $\tilde{r}$. Ο $\mathcal{R}_1$ είναι κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{R}$. Ως $\mathcal{R}_2$ ορίζουμε τον ορθοσυμπληρωματικό υπόχωρο του $\mathcal{R}_1$ στον $\mathcal{R}$. Δηλαδή,

$$\mathcal{R}_2 := \{r \in \mathcal{R} : \langle r, \tilde{r} \rangle = 0\}$$

με τον οποίο ισχύει $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2$. Δηλαδή κάθε στοιχείο του $\mathcal{R}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως άθροισμα στοιχείων του $\mathcal{R}_1$ και $\mathcal{R}_2$. Επιλέγουμε ένα τυχαίο διάνυσμα $h \in \mathcal{R}_2$ με $\|h\|_2 = s$ (άρα $h \in \Sigma_s$) και θεωρούμε την οικογένεια διανυσμάτων:

$$r = (1 + m\epsilon)\tilde{r} + \epsilon h$$

όπου $m, \epsilon \in \mathbb{R}$, η οποία ανήκει στον γραμμικό υπόχωρο του $\mathcal{R}$ που παράγεται από τα ορθογώνια διανύσματα $\tilde{r}, h$. Προκειμένου να ανήκει το r στην σφαίρα, δηλαδή να ισχύει $r \in \Sigma_s$, όπου $\|r\|_2 = s$ θα πρέπει:

$$\|r\|_2^2 = \|(1 + m\epsilon)\tilde{r} + \epsilon h\|_2^2$$

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα, καθώς τα διανύσματα $\tilde{r}$ και h είναι ορθογώνια. Οπότε, θα προκύψει:

$$\|r\|_2^2 = \|(1 + m\epsilon)\tilde{r}\|_2^2 + \|\epsilon h\|_2^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow s^2 &= (1 + m\epsilon)^2 \|\tilde{r}\|_2^2 + \epsilon^2 \|h\|_2^2 \\ &= (1 + m\epsilon)^2 s^2 + \epsilon^2 s^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 1 &= (1 + m\epsilon)^2 + \epsilon^2 \\ &= 1 + 2m\epsilon + m^2\epsilon^2 + \epsilon^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \epsilon(2m + m^2\epsilon + \epsilon) = 0$$

Επομένως για $\epsilon \neq 0$ έχουμε την εξής δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς m :

$$m^2\epsilon + 2m + \epsilon = 0.$$

Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα:

$$\begin{aligned} \Delta &= 4 - 4\epsilon^2 \\ &= 4(1 - \epsilon^2) > 0 \end{aligned}$$

για $\epsilon^2 \in (0, 1)$. Οπότε προκύπτουν δυο πραγματικές άνισες λύσεις:

$$m_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \epsilon^2}}{\epsilon}.$$

Επιλέγουμε $m = \frac{-1 + \sqrt{1 - \epsilon^2}}{\epsilon}$. Πολλαπλασιάζοντας με την συζυγή παράσταση του αριθμητή θα έχουμε:

$$\begin{aligned} m &= \frac{(-1 + \sqrt{1 - \epsilon^2})(-1 - \sqrt{1 - \epsilon^2})}{\epsilon(-1 - \sqrt{1 - \epsilon^2})} \\ &= \frac{\epsilon^2}{\epsilon(-1 - \sqrt{1 - \epsilon^2})} \\ &= \frac{-\epsilon}{(1 + \sqrt{1 - \epsilon^2})}, \end{aligned}$$

από το οποίο βλέπουμε ότι $m \rightarrow 0$, καθώς $\epsilon \rightarrow 0$, και για τέτοια m και $r = (1 + m\epsilon)\tilde{r} + \epsilon h$, όπου $r \in \Sigma_s$ έχουμε την παρακάτω σχέση, εφόσον το συναρτησοειδές U_α έχει Fréchet παράγωγο:

$$U_\alpha(r) - U_\alpha(\tilde{r}) = \langle \nabla U_\alpha(\tilde{r}), m\epsilon\tilde{r} + \epsilon h \rangle + R(\tilde{r}, m\epsilon\tilde{r} + \epsilon h),$$

όπου το υπόλοιπο R ικανοποιεί:

$$\left| \frac{R(\tilde{r}, m\epsilon\tilde{r} + \epsilon h)}{\epsilon} \right| = \frac{|R(\tilde{r}, m\epsilon\tilde{r} + \epsilon h)|}{\|m\epsilon\tilde{r} + \epsilon h\|_2} \|m\tilde{r} + h\|_2 \rightarrow 0 \text{ για } \epsilon \rightarrow 0, \quad (2.24)$$

αφού σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1.7:

$$\begin{aligned} \frac{U_\alpha(\tilde{r} + m\epsilon\tilde{r} + \epsilon h) - U_\alpha(\tilde{r})}{\|m\epsilon\tilde{r} + \epsilon h\|} - \frac{\langle \nabla U_\alpha(\tilde{r}), m\epsilon\tilde{r} + \epsilon h \rangle}{\|m\epsilon\tilde{r} + \epsilon h\|} &= \frac{R(\tilde{r}, m\epsilon\tilde{r} + \epsilon h)}{\|m\epsilon\tilde{r} + \epsilon h\|} \\ &= o(1) \text{ για } \epsilon \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

και αφού $m \rightarrow 0$ για $\epsilon \rightarrow 0$. Ισοδύναμα, η (2.24) γράφεται με χρήση των συμβόλων Landau

$$R(\tilde{r}, m\epsilon\tilde{r} + \epsilon h) = o(\epsilon) \text{ για } \epsilon \rightarrow 0.$$

Από το $m \rightarrow 0$ για $\epsilon \rightarrow 0$ προκύπτει και ότι

$$\langle \nabla \tilde{U}_\alpha(\tilde{r}), m\epsilon\tilde{r} \rangle = o(\epsilon) \text{ για } \epsilon \rightarrow 0$$

και επομένως έχουμε συνολικά

$$U_\alpha(r) - U_\alpha(\tilde{r}) = \epsilon \langle \nabla U_\alpha(\tilde{r}), h \rangle + o(\epsilon), \text{ για } \epsilon \rightarrow 0. \quad (2.26)$$

Αλλά το $\tilde{r}$ είναι σημείο ολικού ακροτάτου του συναρτησοειδούς U_α στην κλειστή μπάλα $\bar{B}_s$, οπότε σε καμία περιοχή του $\tilde{r}$ το αριστερό μέλος της εξίσωσης (2.26), δηλαδή η διαφορά $U_\alpha(r) - U_\alpha(\tilde{r})$ δεν αλλάζει πρόσημο για $\epsilon \in (-\delta, \delta)$ για δ αρκούντως μικρό. Όμως αυτό είναι δυνατό μόνο αν:

$$\langle \nabla U_\alpha(\tilde{r}), h \rangle = 0 \quad \forall h \in \mathcal{R}_2.$$

Άρα το $\nabla U_\alpha(\tilde{r}) \perp h$ και εφόσον αυτό ισχύει $\forall h \in \mathcal{R}_2$, θα έχουμε ότι $\nabla U_\alpha(\tilde{r}) \perp \mathcal{R}_2$. Οπότε $\nabla U_\alpha(\tilde{r}) \in \mathcal{R}_1$. Ο $\mathcal{R}_1$ είναι μονοδιάστατος υπόχωρος του $\mathcal{R}$, ο οποίος παράγεται από το διάνυσμα $\tilde{r}$. Συνεπώς το ∇U_α γράφεται σαν πολλαπλάσιο του διανύσματος $\tilde{r}$. Δηλαδή υπάρχει πραγματικός αριθμός ω^2 τέτοιος ώστε:

$$\nabla U_\alpha(\tilde{r}) = \omega^2 \tilde{r}. \quad (2.27)$$

Από τη σχέση (2.27) έχουμε:

$$\begin{aligned} \langle \nabla U_\alpha(\tilde{r}), \tilde{r} \rangle &= \langle \omega^2 \tilde{r}, \tilde{r} \rangle \\ \Rightarrow \langle \nabla U_\alpha(\tilde{r}), \tilde{r} \rangle &= \omega^2 \langle \tilde{r}, \tilde{r} \rangle \\ \Rightarrow \langle \nabla U_\alpha(\tilde{r}), \tilde{r} \rangle &= \omega^2 \|\tilde{r}\|_2^2 \\ \Rightarrow \langle \nabla U_\alpha(\tilde{r}), \tilde{r} \rangle &= \omega^2 s^2 \\ \Rightarrow \omega^2 &= \frac{1}{s^2} \langle \nabla U_\alpha(\tilde{r}), \tilde{r} \rangle \end{aligned}$$

Εφόσον το ∇U_α είναι μονότονος τελεστής, το οποίο συνεπάγεται $\langle \nabla U_\alpha(r), r \rangle \geq 0 \quad \forall r \in \mathcal{R}$, και σύμφωνα με το Λήμμα 2.1.10 ξέρουμε ότι $\nabla U_\alpha(\tilde{r}) \neq 0$, προκύπτει ότι $\langle \nabla U_\alpha(\tilde{r}), \tilde{r} \rangle > 0$, αφού αν ήταν ίσο με το μηδέν, τότε $\omega^2 = 0$ και άρα από την (2.27) $\nabla U_\alpha(\tilde{r}) = 0$. Επομένως $\omega^2 > 0$. $\square$

Λήμμα 2.1.16. (Κανονικότητα της λύσης) Για λείο δυναμικό V η λύση $r \in \mathcal{R}$ της (2.11) είναι λεία και το ολοκλήρωμά της είναι μια λύση της μορφής (2.2) της (2.1).

Απόδειξη. Όπως είδαμε στο Λήμμα 2.1.2, αφού $r \in \mathcal{R}$, έχουμε $Ar \in C(\mathbb{R})$, και από τη συνέχεια της V' προκύπτει ότι η $V'(\alpha + Ar)$ είναι συνεχής. Άρα, από τον ορισμό του A , το αριστερό μέλος της (2.11), $Tr = C(r) + AV'(\alpha + Ar)$, είναι $C^1(\mathbb{R})$, και συνεπώς από το δεξιό μέλος της (2.11) έχουμε ότι η $r \in C^1(\mathbb{R})$. Από αυτό προκύπτει $Ar \in C^2(\mathbb{R})$, το οποίο, αν $V \in C^3(\mathbb{R})$, δίνει ανάλογα με πριν $Tr \in C^3(\mathbb{R})$, δηλαδή $r \in C^3(\mathbb{R})$. Συνεχίζοντας έτσι επαγωγικά έχουμε $r \in C^\infty(\mathbb{R})$, αν $V \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Επίσης, αφού η $r \in \mathcal{R}$ είναι 1-περιοδική και άρτια με μέση τιμή μηδέν, το ολοκλήρωμά της, q , θα είναι μια 1-περιοδική, περιττή και λεία συνάρτηση που με την αντιστοίχιση (2.2), όπου το ω δίνεται από την (2.11), επιλύει την (2.1). $\square$

Παρατήρηση 2.1.17. Το Λήμμα κανονικότητας της λύσης 2.1.16 έχει ως αποτέλεσμα την αυστηρή δικαιολόγηση της εξαγωγής της (2.11) από την (2.1) για λύσεις της μορφής (2.2), αφού δικαιολογούνται τώρα όλες οι πράξεις που οδήγησαν στην (2.11), και μέσω της (επιτρεπτής πια) αντιστροφής των πράξεων αυτών αποδεικνύεται και η ισοδυναμία των δύο εξισώσεων.

2.2 Μέθοδος δείκτη σταθερού σημείου

Θεωρούμε το χώρο

$$X := \left\{ r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : r|_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \in L^1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), r(z) = r(z+1), \right. \\ \left. r(z) = r(-z) \text{ σ.π.}, \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} r(z) dz = 0 \right\},$$

εφοδιασμένο με την νόρμα

$$\|r\|_1 := \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |r(z)| dz, \quad r \in X.$$

Ο X είναι χώρος Banach ως κλειστός υπόχωρος του

$$L^1 := L^1_{per}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left\{ r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : r|_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \in L^1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), r(z) = r(z+1) \text{ σ.π.} \right\},$$

ο οποίος είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον χώρο $L^1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.³ Η κλειστότητα προκύπτει όπως και στην ανάλογη περίπτωση της προηγούμενης παραγράφου, όπου δείξαμε ότι ο $\mathcal{R}$ είναι κλειστός υπόχωρος του L^2 , αντικαθιστώντας την L^2 -νόρμα εκεί με την L^1 -νόρμα εδώ.

Ορισμός 2.2.1. Έστω X χώρος Banach. Λέγοντας κώνο $K \subset X$, εννοούμε ένα μη-κενό, κλειστό και κυρτό σύνολο τέτοιο ώστε $\lambda K \subset K \forall \lambda \geq 0$ και $K \cap (-K) = \{0\}$.

³Και εδώ βέβαια ταυτίζουμε κάθε συνάρτηση του χώρου αυτού με την κλάση ισοδυναμίας των συναρτήσεων που είναι σχεδόν παντού ίσες με αυτή.

Ορίζουμε το σύνολο:

$$K := \left\{ r \in X : r \text{ φθίνουσα στο } [0, \tfrac{1}{2}], \text{ δηλαδή} \right. \\ \left. r(z_1) \leq r(z_2) \text{ για σχεδόν όλα τα } 0 \leq z_1 \leq z_2 \leq \tfrac{1}{2} \right\} \subseteq X \quad (2.28)$$

Λήμμα 2.2.2. Το σύνολο K είναι κώνος.

Απόδειξη. Αρχικά σημειώνουμε ότι το K είναι μη-κενό, αφού περιέχει τη μηδενική συνάρτηση.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι το σύνολο $K \subseteq X$ είναι κυρτό. $\forall r, p \in K$ και $\forall t \in [0, 1]$ θα δείξουμε ότι $tr + (1-t)p \in K$. Αν $t = 0$ τότε $tr + (1-t)p = p \in K$. Αν $t = 1$ τότε $tr + (1-t)p = r \in K$. Αν $t \in (0, 1)$ τότε $tr + (1-t)p \in K$. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι το άθροισμα δύο μονότονων συναρτήσεων και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός μιας μονότονης συνάρτησης με ένα μη αρνητικό αριθμό διατηρούν τη μονοτονία. Άρα $tr + (1-t)p \in K$ σε κάθε περίπτωση, και το σύνολο K είναι κυρτό.

Η διατήρηση της μονοτονίας μετά από πολλαπλασιασμό μιας μονότονης συνάρτησης με έναν μη αρνητικό αριθμό αποδεικνύει άμεσα και ότι

$$\lambda K = \{ \lambda r \in X : r \text{ φθίνουσα στο } [0, \tfrac{1}{2}], \lambda \geq 0 \} \subset K$$

Τώρα

$$-K = \{ -r \in X : r \text{ φθίνουσα στο } [0, \tfrac{1}{2}] \}$$

Έστω $r \in K \cap (-K)$ τότε $r \in K$ και $r \in (-K)$. Δηλαδή έχουμε ότι για σχεδόν όλα τα $0 \leq z_1 \leq z_2 \leq \frac{1}{2}$ ισχύει $r(z_1) \geq r(z_2)$ και $r(z_1) \leq r(z_2)$, δηλαδή $r(z_1) = r(z_2)$.

Άρα $r(z) = C \in \mathbb{R}$ σχεδόν παντού στο $[0, \frac{1}{2}]$ λόγω της αρτιότητας της r σχεδόν παντού στο $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Αυτό συνεπάγεται

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} r(z) dz = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} C dz = 0$$

Επομένως $K \cap (-K) = \{0\}$, εφόσον η τομή περιέχει μόνο την μηδενική συνάρτηση.

Η κλειστότητα προκύπτει κατ' αναλογία με την κλειστότητα του X στον L^1 και του R στον L^2 : Έστω ότι $(r_n) \subset K$ και $r \in X$ με $\|r_n - r\|_1 \rightarrow 0$. Τότε υπάρχει μια υπακολουθία $(r_{k_n}) \subset (r_n)$ έτσι ώστε $r_{k_n} \rightarrow r$ σχεδόν παντού στο $[0, \frac{1}{2}]$. Τότε, αφού για σχεδόν όλα τα $0 \leq z_1 \leq z_2 \leq \frac{1}{2}$ ισχύει $r_{k_n}(z_1) \geq r_{k_n}(z_2) \forall n \in \mathbb{N}$, αυτό θα ισχύει και για το κατά σημείο όριο της υπακολουθίας (όπου αυτό είναι το r), δηλ. $r(z_1) \geq r(z_2)$, και συνεπώς $r \in K$. Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι το υποσύνολο K του X , που ορίστηκε στη σχέση (2.28) είναι κώνος. $\square$

Έστω

$$\bar{B}_s = \{ r \in X : \|r\|_1 \leq s \}$$

η κλειστή μπάλα στο X με ακτίνα s . Στα επόμενα θα αποδείξουμε το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 2.2.3. Για κάθε $0 < s < \infty$ ο μη-γραμμικός τελεστής T έχει τουλάχιστον ένα ιδιοδιάνυσμα στο $K \cap \partial B_s$ που αντιστοιχεί σε μια θετική ιδιοτιμή, δηλαδή υπάρχουν $r \in K \cap \partial B_s$ και $\omega^2 > 0$ τέτοια ώστε $Tr = \omega^2 r$, όπου $r = q'$ και q η λύση της (2.3).

Το παραπάνω θεώρημα βεβαιώνει την ύπαρξη λύσεων του μη-γραμμικού προβλήματος ιδιοτιμών (2.11). Οι τελεστές $A, T : X \rightarrow X$ ορίζονται όπως και στην ενότητα 2.1, δηλαδή:

$$Ar(z) := \int_{z-\frac{\kappa}{2}}^{z+\frac{\kappa}{2}} r(z') dz'$$

και

$$Tr(z) := C(r) + AV'(\alpha + Ar(z))$$

με

$$C(r) := - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} AV'(\alpha + Ar(z)) dz,$$

όπου η σταθερά ολοκλήρωσης έχει επιλεγεί έτσι ώστε, το Tr να έχει μηδενική μέση τιμή στο διάστημα μιας περιόδου.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.3 θα δοθεί και εδώ μέσω μίας σειράς λημμάτων. Ξεκινάμε με κάποια λήμματα σχετικά με τις ιδιότητες των τελεστών A και T που θα μας χρειαστούν στη συνέχεια.

Λήμμα 2.2.4. Ο τελεστής $A : X \rightarrow X$ είναι γραμμικός, συμπαγής με $A(X) \subset C(\mathbb{R})$ και ικανοποιεί τη σχέση:

$$|Ar(z)| \leq \|r\|_1 \quad \forall z \in \mathbb{R}, \quad \forall r \in X.$$

Απόδειξη. Η διατήρηση της αρτιότητας και της 1-περιοδικότητας του ορίσματος $r \in X$ υπό τον τελεστή A , καθώς και η γραμμικότητά του, προκύπτουν όπως στο Λήμμα 2.1.2. Επίσης, η διατήρηση της μηδενικής μέσης τιμής προκύπτει όπως στην απόδειξη της συμμετρικότητας του $A : L^2 \rightarrow L^2$ στο Λήμμα 2.1.2 αν θέσουμε $\rho = 1$. Συνεχίζοντας, για κάθε $r \in X$, έχουμε $\forall z \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$:

$$\begin{aligned} |Ar(z)| &= \left| \int_{z-\frac{\kappa}{2}}^{z+\frac{\kappa}{2}} r(z') dz' \right| \\ &\leq \int_{z-\frac{\kappa}{2}}^{z+\frac{\kappa}{2}} |r(z')| dz' \\ &\leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |r(z')| dz' \\ &\leq \|r\|_1 \end{aligned}$$

και άρα $\|Ar\|_\infty \leq \|r\|_1$ που συνεπάγεται και

$$\|Ar\|_1 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |(Ar)(z)| dz \leq \|Ar\|_\infty \leq \|r\|_1.$$

Συνεπώς, ο $A : X \rightarrow X$ είναι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής.

Η συνέχεια του Ar για $r \in L^1$ προκύπτει από τις ιδιότητες του ολοκληρώματος Lebesgue, αφού για $0 < z_1 - z_2 < \kappa$ (βλ. π.χ. και την αντίστοιχη απόδειξη στο Λήμμα 2.1.2)

$$|Ar(z_1) - Ar(z_2)| \leq \int_{z_2 + \frac{\kappa}{2}}^{z_1 + \frac{\kappa}{2}} |r(z')| dz' + \int_{z_2 - \frac{\kappa}{2}}^{z_1 - \frac{\kappa}{2}} |r(z')| dz' \quad (2.29)$$

και (βλ. [24, Άσκηση 6 – 10])

$$\int_A |f| d\mu \rightarrow 0 \quad \text{όταν } \mu(A) \rightarrow 0 \text{ για } f \in L^1(\mu),$$

όπου εδώ μ είναι το μέτρο Lebesgue στο $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Για την απόδειξη της συμπίεσης του $A : X \rightarrow X$ χρησιμοποιούμε το Θεώρημα Kolmogorov-M.Riesz (ή αλλιώς Fréchet-Kolmogorov) (βλ. [2, Θεώρημα IV. 25]) σύμφωνα με το οποίο η φραγμένη ακολουθία

$$\|Ar_n\|_1 \leq \|Ar_n\|_\infty \leq \|r_n\|_1 \leq C$$

έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία, αν

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|Ar_n(\cdot + h) - Ar_n\|_1 \rightarrow 0 \quad \text{όταν } h \rightarrow 0.$$

Αυτό όμως ισχύει εδώ, αφού σύμφωνα με την (2.29) για $0 < h < \kappa$

$$\begin{aligned} \|Ar_n(\cdot + h) - Ar_n\|_1 &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |Ar_n(z + h) - Ar_n(z)| dz \\ &\leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{z + \frac{\kappa}{2}}^{z + \frac{\kappa}{2} + h} |r_n(z')| dz' dz + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{z - \frac{\kappa}{2}}^{z - \frac{\kappa}{2} + h} |r_n(z')| dz' dz \end{aligned}$$

και από το Θεώρημα του Fubini (βλ. [24, Θεώρημα 9.12]) έχουμε για $-\frac{1}{2} \leq z \leq z + h \leq \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_z^{z+h} |r(z')| dz' dz &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \chi_{[z, z+h]}(z') |r(z')| dz' dz \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \chi_{[z, z+h]}(z') dz |r(z')| dz' \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{z'-h}^{z'} dz |r(z')| dz' = h \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |r(z')| dz' = h \|r\|_1 \end{aligned}$$

και άρα

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|Ar_n(\cdot + h) - Ar_n\|_1 \leq 2hC.$$

□

Λήμμα 2.2.5. *Ο τελεστής T διατηρεί τον κώνο, δηλαδή $T : K \rightarrow K$.*

Απόδειξη. Κατ'αρχήν, ο τελεστής $T : X \rightarrow X$ είναι καλά ορισμένος, καθώς:

1.

$$\begin{aligned} Tr(z+1) &= C(r) + AV'(\alpha + Ar(z+1)) \\ &= C(r) + AV'(\alpha + Ar(z)) \\ &= Tr(z) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} Tr(-z) &= C(r) + AV'(\alpha + Ar(-z)) \\ &= C(r) + AV'(\alpha + Ar(z)) \\ &= Tr(z) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} Tr(z)dz &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [C(r) + AV'(\alpha + Ar(z))]dz, \\ &= 0, \end{aligned}$$

καθώς η σταθερά $C(r)$ έχει επιλεγεί ώστε το Tr να έχει μέση τιμή 0 στο διάστημα μιας περιόδου.

4.

$$\begin{aligned} \|Tr\|_1 &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |C(r) + AV'(\alpha + Ar(z))|dz \\ &\leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (|C(r)| + |AV'(\alpha + Ar(z))|)dz \\ &\leq |C(r)| + \|V'(\alpha + Ar)\|_1, \end{aligned}$$

αφού $Ar \in C(\mathbb{R}) \cap L^1$, $V \in C^\infty(\mathbb{R})$ και άρα $V'(\alpha + Ar) \in C(\mathbb{R}) \cap L^1$.

Θα δείξουμε τώρα ότι ο T διατηρεί τη μονοτονία. Εφόσον το δυναμικό V είναι κυρτή συνάρτηση, γνωρίζουμε ότι η παράγωγος συνάρτηση V' είναι αύξουσα. Συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι $A : K \rightarrow K$. Έστω $r \in K$ και $z_1, z_2 \in [0, \frac{1}{2}]$ με $z_1 \leq z_2$. Εφόσον η συνάρτηση r είναι φθίνουσα στο διάστημα $[0, \frac{1}{2}]$ για $z_1 \leq z_2$ με $z_1, z_2 \in [0, \frac{1}{2}]$ και $\kappa \in (0, \frac{1}{2})$, έχουμε

$$\begin{aligned} Ar(z_2) - Ar(z_1) &= \int_{z_2 - \frac{\kappa}{2}}^{z_2 + \frac{\kappa}{2}} r(\zeta)d\zeta - \int_{z_1 - \frac{\kappa}{2}}^{z_1 + \frac{\kappa}{2}} r(\zeta)d\zeta \\ &= \int_{z_1 + \frac{\kappa}{2}}^{z_2 + \frac{\kappa}{2}} r(\zeta)d\zeta + \int_{z_2 - \frac{\kappa}{2}}^{z_1 + \frac{\kappa}{2}} r(\zeta)d\zeta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{z_1 - \frac{\kappa}{2}}^{z_2 - \frac{\kappa}{2}} r(\zeta) d\zeta - \int_{z_2 - \frac{\kappa}{2}}^{z_1 + \frac{\kappa}{2}} r(\zeta) d\zeta \\
& = \int_{z_1}^{z_2} \left[r\left(\zeta + \frac{\kappa}{2}\right) - r\left(\zeta - \frac{\kappa}{2}\right) \right] d\zeta \leq 0,
\end{aligned}$$

αφού

$$r\left(\zeta + \frac{\kappa}{2}\right) - r\left(\zeta - \frac{\kappa}{2}\right) \leq 0 \quad \forall \zeta \in \left[\frac{\kappa}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\kappa}{2}\right] \quad \mu\epsilon \quad \frac{1}{2} - \frac{\kappa}{2} \geq \frac{1}{4} \geq \frac{\kappa}{2}$$

και

$$\begin{aligned}
\alpha\nu \quad \zeta \in \left[0, \frac{\kappa}{2}\right] & \Leftrightarrow \zeta - \frac{\kappa}{2} \in \left[-\frac{\kappa}{2}, 0\right] \\
& \Leftrightarrow \frac{\kappa}{2} - \zeta \in \left[0, \frac{\kappa}{2}\right] \\
& \Leftrightarrow \zeta + \frac{\kappa}{2} \in \left[\frac{\kappa}{2}, \kappa\right] \subset \left[\frac{\kappa}{2}, \frac{1}{2}\right],
\end{aligned}$$

$$\text{τότε} \quad r\left(\zeta + \frac{\kappa}{2}\right) - r\left(\zeta - \frac{\kappa}{2}\right) = r\left(\zeta + \frac{\kappa}{2}\right) - r\left(\frac{\kappa}{2} - \zeta\right) \leq 0,$$

ενώ

$$\begin{aligned}
\alpha\nu \quad \zeta \in \left[\frac{1}{2} - \frac{\kappa}{2}, \frac{1}{2}\right] & \Leftrightarrow \zeta - \frac{\kappa}{2} \in \left[\frac{1}{2} - \kappa, \frac{1}{2} - \frac{\kappa}{2}\right] \subset \left[0, \frac{1}{2} - \frac{\kappa}{2}\right] \\
& \Leftrightarrow \zeta + \frac{\kappa}{2} \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\kappa}{2}\right] \\
& \Leftrightarrow -\zeta - \frac{\kappa}{2} \in \left[-\frac{1}{2} - \frac{\kappa}{2}, -\frac{1}{2}\right] \\
& \Leftrightarrow 1 - \zeta - \frac{\kappa}{2} \in \left[\frac{1}{2} - \frac{\kappa}{2}, \frac{1}{2}\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{τότε} \quad r\left(\zeta + \frac{\kappa}{2}\right) & = r\left(\frac{1}{2} + \zeta + \frac{\kappa}{2} - \frac{1}{2}\right) = r\left(\frac{1}{2} - \zeta - \frac{\kappa}{2} + \frac{1}{2}\right) = r\left(1 - \zeta - \frac{\kappa}{2}\right) \\
& \Rightarrow r\left(\zeta + \frac{\kappa}{2}\right) - r\left(\zeta - \frac{\kappa}{2}\right) = r\left(1 - \zeta - \frac{\kappa}{2}\right) - r\left(\zeta - \frac{\kappa}{2}\right) \leq 0
\end{aligned}$$

και άρα, συνολικά,

$$\forall \zeta \in \left[0, \frac{1}{2}\right] : r\left(\zeta + \frac{\kappa}{2}\right) - r\left(\zeta - \frac{\kappa}{2}\right) \leq 0.$$

Συνεπώς ο τελεστής A , και άρα και ο T διατηρούν την μονοτονία, και συνολικά, ο τελεστής T διατηρεί τον κώνο.

□

Λήμμα 2.2.6. *Ο τελεστής $T : K \cap \bar{B}_s \rightarrow K$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

1. *Ο T είναι συμπαγής.*
2. *$T(0) = 0$*
3. *$\inf_{r \in K \cap \partial B_s} \|Tr\|_1 > 0$*

Απόδειξη. 1. Προκειμένου να δείξουμε ότι ο τελεστής $T : K \cap \bar{B}_s \subset K \rightarrow K$ είναι συμπαγής, αρκεί να δείξουμε ότι είναι συνεχής και απεικονίζει φραγμένα σύνολα σε σχετικά συμπαγή, σύμφωνα με τον ορισμό της συμπαγείας μη γραμμικών τελεστών (βλ. π.χ. [6, 8.1]). Η συνέχεια του T έπεται από τη συνέχεια του τελεστή A και του δυναμικού V στο $K \cap \bar{B}_s$ καθώς (κατ' αναλογία με την απόδειξη της συνέχειας του $T : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ στο Λήμμα 2.1.12) με χρήση των ιδιοτήτων του $A : X \rightarrow X$ που δίνονται στο Λήμμα 2.2.4 έχουμε

$$\begin{aligned} \|C(r_1) - C(r_2)\|_1 &\leq \|A[V'(\alpha + Ar_1) - V'(\alpha + Ar_2)]\|_\infty \\ &\leq \|V'(\alpha + Ar_1) - V'(\alpha + Ar_2)\|_1 \end{aligned}$$

και

$$\|AV'(\alpha + Ar_1) - AV'(\alpha + Ar_2)\|_1 \leq \|A[V'(\alpha + Ar_1) - V'(\alpha + Ar_2)]\|_\infty,$$

που από τον ορισμό (2.10) του $T : X \rightarrow X$ συνεπάγεται

$$\|Tr_1 - Tr_2\|_1 \leq 2\|V'(\alpha + Ar_1) - V'(\alpha + Ar_2)\|_1.$$

Όμως, αφού $V \in C^2(\mathbb{R})$, έχουμε από το Θεώρημα Μέσης Τιμής

$$\|V'(\alpha + Ar_1) - V'(\alpha + Ar_2)\|_1 \leq \widetilde{M}_s \|Ar_1 - Ar_2\|_\infty \leq \widetilde{M}_s \|r_1 - r_2\|_1$$

για $\|r_1\|_1, \|r_2\|_1 \leq s$, όπου $\widetilde{M}_s := \max\{|V''(x)| : x \in [\alpha - s, \alpha + s]\}$.

Μένει να δείξουμε ότι ο T απεικονίζει κάθε φραγμένη ακολουθία (r_n) σε ένα σχετικά συμπαγές σύνολο. Έστω $(r_n) \subset K \cap \bar{B}_s$. Από το Λήμμα 2.2.4, έπεται ότι:

$$|Ar_n| \leq \|r_n\|_1$$

Εφόσον η ακολουθία (r_n) είναι φραγμένη και η V' συνεχής, έπεται ότι η ακολουθία $(V'(\alpha + Ar_n))$ θα είναι φραγμένη στο σύνολο $K \cap \bar{B}_s$. Στο Λήμμα 2.2.4, αποδείξαμε επίσης ότι ο τελεστής A είναι συμπαγής, δηλαδή απεικονίζει φραγμένα σύνολα σε σχετικά συμπαγή. Επομένως, το σύνολο $(AV'(\alpha + Ar_n))$ είναι σχετικά συμπαγές στο L^1 , δηλ. υπάρχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία $(AV'(\alpha + Ar_{k_n})) \subset L^1$, για την οποία συγκλίνει προφανώς και η αντίστοιχη ακολουθία των σταθερών $C(r_{k_n})$, αφού

$$\begin{aligned} \|C(r_{k_n}) - C(r_{k_m})\|_1 &= |C(r_{k_n}) - C(r_{k_m})| \\ &\leq \|AV'(\alpha + Ar_{k_n}) - AV'(\alpha + Ar_{k_m})\|_1, \end{aligned}$$

από το οποίο προκύπτει ότι ο τελεστής T είναι συμπαγής στο $K \cap \bar{B}_s$.

2. Ξέρουμε ότι ο τελεστής A είναι γραμμικός, άρα $A(0) = 0$. Από τον ορισμό του τελεστή T έπεται ότι:

$$\begin{aligned} T(0) &= C(0) + AV'(\alpha + A(0)) \\ &= C(0) + AV'(\alpha). \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} T(0) &= - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{z-\frac{\kappa}{2}}^{z+\frac{\kappa}{2}} [V'(\alpha + A(0))] dz' + AV'(\alpha) \\ &= - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{z-\frac{\kappa}{2}}^{z+\frac{\kappa}{2}} V'(\alpha) dz' + \int_{z-\frac{\kappa}{2}}^{z+\frac{\kappa}{2}} V'(\alpha) dz' \\ &= -V'(\alpha) [z']_{z-\frac{\kappa}{2}}^{z+\frac{\kappa}{2}} + V'(\alpha) [z']_{z-\frac{\kappa}{2}}^{z+\frac{\kappa}{2}} \\ &= -V'(\alpha)\kappa + V'(\alpha)\kappa \\ &= 0, \end{aligned}$$

όπου $Ar(z) := \int_{z-\frac{\kappa}{2}}^{z+\frac{\kappa}{2}} r(z') dz'$ και η σταθερά $C(r)$ έχει επιλεγεί έτσι ώστε, το Tr να έχει μέση τιμή 0 στο διάστημα μίας περιόδου.

3. Κατ'αρχήν η ύπαρξη του infimum εξασφαλίζεται από το Αξίωμα της Πληρότητας του $\mathbb{R}$, από το οποίο προκύπτει ότι κάθε μη-κενό υποσύνολο των πραγματικών αριθμών που είναι κάτω φραγμένο έχει μέγιστο κάτω φράγμα.

Το σύνολο $\{\|Tr\|_1 : r \in K \cap \partial B_s\} = \{\|Tr\|_1 : r \in K, \|r\|_1 = s\}$, επομένως έχει infimum μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός. Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι είναι γνήσια μεγαλύτερο του μηδενός. Η απόδειξη περιλαμβάνει δύο βήματα.

Βήμα 1

Θα δείξουμε ότι υπάρχει σταθερά $C^* > 0$ ανεξάρτητη του r και τέτοια ώστε $\|Ar\|_1 \geq C^* \|r\|_1$, $\forall r \in K$ με $0 < \|r\|_1 = s < \infty$.

Εφόσον η συνάρτηση r είναι άρτια, έχει μέση τιμή 0 στο $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ και είναι φθίνουσα στο $[0, \frac{1}{2}]$, υπάρχει $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ με $r(z) \geq 0$ σ.π. στο $[0, \delta]$ και $r(z) \leq 0$ σ.π. στο $[\delta, \frac{1}{2}]$. Για το σημείο αυτό ισχύει

$$\int_{-\delta}^{\delta} |r(z)| dz = \frac{\|r\|_1}{2}, \quad (2.30)$$

αφού

$$\begin{aligned} \|r\|_1 &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |r(z)| dz \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} r(z) dz - \int_{[-\frac{1}{2}, -\delta] \cup [\delta, \frac{1}{2}]} r(z) dz, \end{aligned} \quad (2.31)$$

όπου

$$\int_{-\delta}^{\delta} r(z) dz + \int_{[-\frac{1}{2}, -\delta] \cup [\delta, \frac{1}{2}]} r(z) dz = 0.$$

Ανάλογα με τη θέση του δ διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις, για τις οποίες υπενθυμίζουμε ότι $\kappa \in (0, \frac{1}{2})$:

Περίπτωση 1: $\delta \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \wedge \delta \geq \frac{3\kappa}{4}$.

Θέτουμε $a := \frac{\kappa}{4} \in (0, \frac{1}{2})$ με $\frac{a}{\delta} < 1$.

Αφού r, Ar άρτιες και φθίνουσες στο $[0, \frac{1}{2}]$ με $r(z) \geq 0$ σ.π. στο $[-\delta, \delta]$, έχουμε $\forall z \in [0, a]$

$$\begin{aligned} Ar(z) &\geq Ar(a) = Ar(-a) = \int_{-a-\frac{\kappa}{2}}^{-a+\frac{\kappa}{2}} r(z) dz \geq 2 \int_0^a r(z) dz \\ &= 2 \frac{a}{\delta} \int_0^\delta r\left(\frac{a}{\delta}\zeta\right) d\zeta \geq 2 \frac{a}{\delta} \int_0^\delta r(\zeta) d\zeta \end{aligned}$$

και συνεπώς, με χρήση της (2.30) και αφού $\frac{1}{\delta} > 2$,

$$\|Ar\|_1 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |Ar(z)| dz \geq \int_{-a}^a |Ar(z)| dz \geq 2 \int_0^a Ar(z) dz \geq \frac{a^2}{\delta} \|r\|_1 > 2a^2 \|r\|_1$$

με $a = \frac{\kappa}{4} > 0$.

Περίπτωση 2: $\delta \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \wedge \delta \leq \frac{3\kappa}{4}$.

Θέτουμε $a := \delta - \frac{\kappa}{2} \in [\frac{1}{4} - \frac{\kappa}{2}, \frac{\kappa}{4}] \subset (0, \frac{1}{2})$ με $\kappa - \delta \in (\frac{\kappa}{4}, \delta)$ και $\frac{\kappa}{4\delta} \in [\frac{a}{\delta}, 1)$.

Με τις προαναφερθείσες ιδιότητες των r και Ar , και αυτό το a , έχουμε τώρα $\forall z \in [0, a]$

$$\begin{aligned} Ar(z) &\geq Ar(a) = \int_{\delta-\kappa}^\delta r(z) dz \geq 2 \int_0^{\kappa-\delta} r(z) dz \geq 2 \int_0^{\frac{\kappa}{4}} r(z) dz \\ &= 2 \frac{\kappa}{4\delta} \int_0^\delta r\left(\frac{\kappa}{4\delta}\zeta\right) d\zeta \geq 2 \frac{\kappa}{4\delta} \int_0^\delta r(\zeta) d\zeta \geq 2 \frac{a}{\delta} \int_0^\delta r(\zeta) d\zeta \end{aligned}$$

και συνεπώς, όπως και πριν,

$$\|Ar\|_1 > 2a^2 \|r\|_1 \quad \text{με } a \geq \frac{1}{4} - \frac{\kappa}{2} > 0.$$

Περίπτωση 3: $\delta \in (0, \frac{1}{4}]$.

Θέτουμε $a := \min\{\frac{\kappa}{4}, \frac{1}{2} - \delta - \frac{\kappa}{2}\} \in [\min\{\frac{\kappa}{4}, \frac{1}{4} - \frac{\kappa}{2}\}, \frac{\kappa}{4}] \subset (0, \frac{1}{2})$.

Αφού Ar φθίνουσα στο $[0, \frac{1}{2}]$, έχουμε $\forall z \in [\frac{1}{2} - a, \frac{1}{2}]$: $Ar(z) \leq Ar(\frac{1}{2} - a)$. Όμως, λόγω της περιοδικότητας και της αρτιότητας της r , ισχύει $r(z) \leq 0$ στο $[\delta, 1 - \delta]$, και από τον ορισμό του a , και στην περίπτωση που εξετάζουμε, έχουμε $[\frac{1}{2} - a - \frac{\kappa}{2}, \frac{1}{2} - a + \frac{\kappa}{2}] \subset [\delta, \frac{3}{4}] \subset [\delta, 1 - \delta]$, που συνεπάγεται

$$Ar\left(\frac{1}{2} - a\right) = \int_{\frac{1}{2}-a-\frac{\kappa}{2}}^{\frac{1}{2}-a+\frac{\kappa}{2}} r(z) dz \leq 0.$$

Από τις ίδιες ιδιότητες του r προκύπτει $r\left(\frac{1}{2} - \zeta\right) = r\left(-\frac{1}{2} + \zeta\right) = r\left(\frac{1}{2} + \zeta\right)$ $\forall \zeta \in \mathbb{R}$. Επίσης, η r είναι φθίνουσα στο $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ και ισχύει

$$1 \geq \frac{\frac{\kappa}{2} - a}{\frac{1}{2} - \delta} = \frac{\kappa - 2a}{1 - 2\delta} \geq \frac{2a}{1 - 2\delta} > 0.$$

Από τις ιδιότητες αυτές προκύπτει $\forall z \in \left[\frac{1}{2} - a, \frac{1}{2}\right]$

$$\begin{aligned} |Ar(z)| &= -Ar(z) \geq -Ar\left(\frac{1}{2} - a\right) = \int_{\frac{1}{2} - (\frac{\kappa}{2} + a)}^{\frac{1}{2} + (\frac{\kappa}{2} - a)} (-r)(z) dz \\ &= \int_{-(\frac{\kappa}{2} + a)}^{\frac{\kappa}{2} - a} (-r)\left(\frac{1}{2} + \zeta\right) d\zeta \\ &\geq \int_{-(\frac{\kappa}{2} - a)}^{\frac{\kappa}{2} - a} (-r)\left(\frac{1}{2} + \zeta\right) d\zeta \\ &= 2 \int_{-(\frac{\kappa}{2} - a)}^0 (-r)\left(\frac{1}{2} + \zeta\right) d\zeta \\ &= 2 \frac{\frac{\kappa}{2} - a}{\frac{1}{2} - \delta} \int_{-(\frac{1}{2} - \delta)}^0 (-r)\left(\frac{1}{2} + \frac{\frac{\kappa}{2} - a}{\frac{1}{2} - \delta} \zeta'\right) d\zeta' \\ &\geq 2 \frac{\frac{\kappa}{2} - a}{\frac{1}{2} - \delta} \int_{-(\frac{1}{2} - \delta)}^0 (-r)\left(\frac{1}{2} + \zeta'\right) d\zeta' \\ &= 2 \frac{\kappa - 2a}{1 - 2\delta} \int_{-(\frac{1}{2} - \delta)}^0 (-r)\left(\frac{1}{2} + \zeta'\right) d\zeta' \\ &\geq 2 \frac{2a}{1 - 2\delta} \int_{-(\frac{1}{2} - \delta)}^0 (-r)\left(\frac{1}{2} + \zeta'\right) d\zeta' \\ &= 2 \frac{2a}{1 - 2\delta} \int_{\delta}^{\frac{1}{2}} (-r)(z) dz \\ &= \frac{a}{1 - 2\delta} \|r\|_1 \geq a \|r\|_1, \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από τις (2.30) και (2.31), σε συνδυασμό με την αρτιότητα του r , και η τελευταία ανισότητα από το $\delta \in \left(0, \frac{1}{4}\right]$. Συνεπώς, αφού η Ar είναι άρτια, έχουμε

$$\begin{aligned} \|Ar\|_1 &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |Ar(z)| dz = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} |Ar(z)| dz \geq 2 \int_{\frac{1}{2} - a}^{\frac{1}{2}} |Ar(z)| dz \geq 2a^2 \|r\|_1 \\ &\text{με } a \geq \tilde{a} := \min \left\{ \frac{\kappa}{4}, \frac{1}{4} - \frac{\kappa}{2} \right\} > 0. \end{aligned}$$

Έτσι, έχουμε συνολικά από τις Περιπτώσεις 1 έως 3, ότι για κάθε σταθερό $\kappa \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ υπάρχει $C^* := 2\tilde{a}^2 > 0$, ανεξάρτητο του $r \in K$, έτσι ώστε

$$\|Ar\|_1 \geq C^* \|r\|_1 \quad \forall r \in K.$$

Βήμα 2

Εφόσον η συνάρτηση V' είναι αύξουσα και $Ar \in K$ έπεται ότι

$$V'(\alpha + Ar) + \frac{C(r)}{\kappa} \in K,$$

όπου $C(r) = -\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} AV'(\alpha + Ar(z))dz$. Από το πρώτο βήμα της απόδειξης εξασφαλίσαμε την ύπαρξη μιας σταθεράς $C^* > 0$ τέτοιας ώστε:

$$\begin{aligned} \|Tr\|_1 &= \|A[V'(\alpha + Ar) + \frac{C(r)}{\kappa}]\|_1 \\ &\geq C^* \|V'(\alpha + Ar) + \frac{C(r)}{\kappa}\|_1 \quad \forall r \in K \cap \partial B_s. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Θα δείξουμε ότι υπάρχει σταθερά $\tilde{C} > 0$, ανεξάρτητη του r , τέτοια ώστε

$$\|V'(\alpha + Ar) + \frac{C(r)}{\kappa}\|_1 \geq \tilde{C} \quad \forall r \in K \cap \partial B_s. \quad (2.33)$$

Έστω ότι δεν υπάρχει τέτοιο $\tilde{C}$. Τότε υπάρχει ακολουθία (r_n) στο σύνολο $K \cap \partial B_s \subset X$ με

$$\|V'(\alpha + Ar_n) + \frac{C(r_n)}{\kappa}\|_1 \rightarrow 0,$$

όπου $C(r_n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} AV'(\alpha + Ar_n)dz$. Ο τελεστής $A : X \rightarrow X$ είναι συμπαγής, επομένως υπάρχει συγκλίνουσα ακολουθία $Ar_n \rightarrow y$ στο X , δηλ. ισχύει $\|Ar_n - y\|_1 \rightarrow 0$ με $y \in X$, και συνεπώς, αφού $\|Ar_n\|_\infty \leq \|Ar_n\|_1$ και $Ar_n \in C([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$, ισχύει και $y \in C([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$. Μάλιστα, αφού η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη (και άρα και κατά σημείο) στο $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ και ισχύει $Ar_n \in K$, θα ισχύει και $y \in K$. Τέλος, αφού $\|Ar_n\|_1 \geq C^*s$, θα ισχύει και $\|y\|_1 \geq C^*s > 0$. Από την ομοιόμορφη σύγκλιση των συνεχών συναρτήσεων Ar_n στη συνεχή συνάρτηση y προκύπτει όμως και ότι

$$\|V'(\alpha + Ar_n) + \frac{C(r_n)}{\kappa}\|_1 \rightarrow \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |-C + V'(\alpha + y(x))|dx = 0,$$

όπου $C = \frac{1}{\kappa} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} AV'(\alpha + y(x))dx$, και άρα έχουμε

$$V'(\alpha + y(x)) = C \quad \forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}].$$

Όμως, αφού y συνεχής και φθίνουσα στο $[0, \frac{1}{2}]$ με $\|y\|_1 > 0$, θα ισχύει $y(0) > y(\frac{1}{2})$, και άρα, αφού η $V' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι (ως γνησίως κυρτή) γνησίως αύξουσα,

$$V'(\alpha + y(0)) > V'(\alpha + y(\frac{1}{2})),$$

το οποίο οδηγεί σε άτοπο. Επομένως υπάρχει σταθερά $\tilde{C} > 0$, ανεξάρτητη του r , έτσι ώστε να ισχύει η (2.33), και συνεπώς, σε συνδυασμό με την (2.32), υπάρχει σταθερά $\hat{C} := C^*\tilde{C} > 0$, ανεξάρτητη του r , έτσι ώστε

$$\|Tr\|_1 \geq \hat{C} > 0 \quad \forall r \in K \cap \partial B_s,$$

που ισοδυναμεί με το ότι

$$\inf_{r \in K \cap \partial B_s} \|Tr\|_1 > 0.$$

□

Μετά από την απόδειξη κάποιων ιδιοτήτων του τελεστή T στα Λήμματα 2.2.5 και 2.2.6 (για την απόδειξη των οποίων χρειάστηκε το Λήμμα 2.2.4 που δίνει κάποιες ιδιότητες του τελεστή A μέσω του οποίου ορίζεται ο T) θα τις χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε το Θεώρημα 2.2.3 με χρήση του δείκτη σταθερού σημείου σε κώνους. Προφανώς, πριν τον χρησιμοποιήσουμε θα πρέπει να τον ορίσουμε και να αναφέρουμε τις ιδιότητές του που θα χρειαστούμε.

Ορισμός 2.2.7. Έστω

$$M := \{(T, U, K) : K \text{ κώνος στον χώρο Banach } X, U \text{ φραγμένο και ανοικτό στο } K, \\ T : \bar{U} \rightarrow K \text{ συμπαγής με } Tx \neq x \text{ στο } \partial U\}.$$

Τότε ορίζεται μια συνάρτηση $i : M \rightarrow \mathbb{Z}$, ο **δείκτης σταθερού σημείου της T στο U ως προς το K** , η οποία, μεταξύ άλλων, έχει και τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. (ιδιότητα κανονικοποίησης) $i(T, U, K) = 1$, αν $T(\bar{U}) = \{x_0\}$, όπου $x_0 \in U$,
2. (ιδιότητα ομοτοπικά αναλλοίωτου) ο $i(H(t, \cdot), U, K)$ είναι ανεξάρτητος του $t \in [0, 1]$, αν ο $H : [0, 1] \times \bar{U} \rightarrow K$ είναι συμπαγής και ισχύει $H(t, x) \neq x \forall (t, x) \in [0, 1] \times \partial U$,
3. (ιδιότητα λύσης) Αν $i(T, U, K) \neq 0$, τότε $\exists x \in U : Tx = x$.

Παρατήρηση 2.2.8. Η συνάρτηση $i : M \rightarrow \mathbb{Z}$ είναι μοναδική, αν ζητηθούν αξιωματικά κάποιες επιπλέον ιδιότητές της, τις οποίες όμως δεν χρειαζόμαστε στην εφαρμογή μας. Επίσης ορίζεται και για γενικότερα υποσύνολα K και ο ορισμός της στηρίζεται στην έννοια του τοπολογικού βαθμού Leray-Schauder για συμπαγείς τελεστές σε απειροδιάστατους χώρους, ο οποίος με τη σειρά του αποτελεί γενίκευση του (κλασικού) τοπολογικού βαθμού συνεχών συναρτήσεων σε χώρους πεπερασμένης διάστασης. Ο ορισμός που χρησιμοποιούμε είναι ο δόκιμος, επειδή ενδιαφερόμαστε για σταθερά σημεία του τελεστή T , διάφορα του τετριμμένου (βλ. Λήμμα 2.2.6 (2)). Για την γενικότερη θεωρία του τοπολογικού βαθμού παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [6], και ειδικότερα, αναφορικά με τον ορισμό του δείκτη σταθερού σημείου σε κώνους, στις Παραγράφους 20.1 και 20.2.

Εκτός των πιο πάνω ιδιοτήτων του δείκτη σταθερού σημείου, θα χρειαστούμε και τα ακόλουθα αποτελέσματα:

Λήμμα 2.2.9. Έστω K κώνος στον διαχωρίσιμο χώρο Banach X και $C \subset K$ συμπαγής με $0 \notin C$. Τότε $0 \notin \overline{\text{con}}(C)$.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές $x^* \in X^*$ στον δυϊκό χώρο X^* του X με $x^*(x) > 0 \ \forall x \in K \setminus \{0\}$, βλ. [6, Proposition 19.3 (c)]. Συνεπώς, υπάρχει $(x_n) \subset C \subset K$ με $x^*(x_n) \rightarrow \alpha := \inf\{x^*(x) : x \in C\} \geq 0$, και αφού $C \subset K$ συμπαγές και $x^* : X \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχές, υπάρχει υπακολουθία $(x_{k_n}) \subset (x_n)$ με $x_{k_n} \rightarrow x_0 \in C$ και $x^*(x_{k_n}) \rightarrow x^*(x_0) = \alpha > 0$, αφού $0 \notin C \subset K$. Έτσι έχουμε $x^*(x) \geq \alpha > 0 \ \forall x \in C$ και συνεπώς

$$x^*(x) \geq \alpha > 0 \quad \forall x \in \text{conv}(C) := \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N}, x_i \in C, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\},$$

αφού $x^* : X \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμικός και άρα

$$x^*\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x^*(x_i) \geq \alpha \sum_{i=1}^n \lambda_i = \alpha \quad \forall x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in \text{conv}(C).$$

Από την συνέχεια του $x^* : X \rightarrow \mathbb{R}$ προκύπτει έτσι και ότι $x^*(x) \geq \alpha > 0 \ \forall x \in \overline{\text{conv}}(C)$, που συνεπάγεται $0 \notin \overline{\text{conv}}(C)$. $\square$

Παρατήρηση 2.2.10. Στην περίπτωση μας, ο χώρος X του Λήμματος 2.2.9 είναι διαχωρίσιμος ως υπόχωρος του L^1 , ο οποίος είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον διαχωρίσιμο χώρο $L^1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Θεώρημα 2.2.11. Έστω X γραμμικός χώρος με νόρμα, $A \subset X$ κλειστό και $F : A \rightarrow X$ συνεχές. Τότε ο F έχει συνεχή επέκταση $\tilde{F} : X \rightarrow X$ με $\tilde{F}(X) \subset \text{conv}(F(A))$.

Απόδειξη. Βλ. [6, Theorem 7.2.] $\square$

Λήμμα 2.2.12. Έστω X χώρος Banach. Αν το $F \subset X$ είναι σχετικά συμπαγές, τότε και η κυρτή του θήκη, $\text{conv}(F)$, είναι σχετικά συμπαγής.

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι το $F \subset X$ ονομάζεται σχετικά συμπαγές, αν κάθε ακολουθία $(x_n) \subset F$ έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία στο X και ότι η κυρτή θήκη του $F \subset X$ ορίζεται ως η τομή όλων των κυρτών υποσυνόλων του X που περιέχουν το F . Για την απόδειξη του λήμματος παραπέμπουμε στο [6, Proposition 7.2 (a) και (d)]. $\square$

Είμαστε έτοιμοι τώρα να αποδείξουμε το Θεώρημα 2.2.3. Για τον σκοπό αυτό θα υπολογίσουμε καταρχήν (Λήμμα 2.2.13) με τη βοήθεια των ιδιοτήτων του δείκτη σταθερού σημείου και των Λημμάτων 2.2.9, 2.2.12 και του Θεωρήματος Συνεχούς Επέκτασης 2.2.11 τον δείκτη σταθερού σημείου για τελεστές που έχουν τις ιδιότητες του Λήμματος 2.2.6, όταν ισχύει και μια επιπλέον ιδιότητα. Το αποτέλεσμα αυτό, χρησιμοποιούμενο κατάλληλα, οδηγεί σε ένα τελευταίο βήμα (Λήμμα 2.2.14) στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.3, δηλ. στην απόδειξη της ύπαρξης μη τετριμμένων λύσεων $r \in K$ του προβλήματος ιδιοτιμών $Tr = \omega^2 r$ με $\omega^2 > 0$.

Σημειώνουμε ότι το Λήμμα 2.2.13, όπως παρουσιάζεται και αποδεικνύεται εδώ, είναι συνδυασμός των Λημμάτων 2.18 και 2.19 του πρωτοτύπου [11], των οποίων η απόδειξη δεν ήταν πλήρης. Η απόδειξη του Λήμματος 2.2.13 χρησιμοποιεί ιδέες του [6, Theorem 20.2.].

Λήμμα 2.2.13. Έστω $T : K \cap \bar{B}_s \rightarrow K$ συμπαγής τελεστής με

1. $\inf_{r \in K \cap \partial B_s} \|Tr\|_1 > 0$,
2. $Tr \neq \mu r, \forall r \in K \cap \partial B_s$ και $\forall \mu \in (0, 1]$.

Τότε

$$i(T, K \cap B_s, K) = 0.$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι ο τελεστής $T : K \cap \bar{B}_s \rightarrow K$ είναι συμπαγής, δηλαδή είναι συνεχής και απεικονίζει φραγμένα σύνολα σε σχετικά συμπαγή. Ορίζουμε το σύνολο $F := T(K \cap \partial B_s)$, δηλαδή την εικόνα του συνόλου $K \cap \partial B_s$ μέσω του τελεστή T .

Αφού το ∂B_s είναι φραγμένο και $K \cap \partial B_s \subset K \subset \bar{B}_s$, προκύπτει ότι η εικόνα του συνόλου $K \cap \partial B_s$, F , είναι σχετικά συμπαγής. Συνεπώς το $\bar{F}$ είναι συμπαγές σύνολο. Από το Λήμμα 2.2.5 έχουμε ότι ο T διατηρεί τον κώνο, όπου ο κώνος K είναι ένα μη-κενό, κυρτό και κλειστό σύνολο. Οπότε,

$$\begin{aligned} K \cap \partial B_s &\subset K \\ \Rightarrow F = T(K \cap \partial B_s) &\subset T(K) \subset K \\ \Rightarrow \bar{F} &\subset \bar{K} = K \end{aligned}$$

Από την υπόθεση 1 έχουμε ότι $\inf_{r \in K \cap \partial B_s} \|Tr\|_1 > 0$, οπότε το $0 \notin \bar{F}$, και σύμφωνα με το Λήμμα 2.2.9 προκύπτει ότι $0 \notin \text{conv}(\bar{F})$. Εφόσον το σύνολο $K \cap \partial B_s$ είναι κλειστό και $T|_{K \cap \partial B_s}$ είναι συνεχής, από το Θεώρημα Συνεχών Επεκτάσεων 2.2.11 έχουμε ότι ο τελεστής $T : K \cap \partial B_s \rightarrow K$ έχει μία συνεχή επέκταση $\tilde{T} : X \rightarrow X$ του T τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned} \tilde{T}(X) &\subset \text{conv}(T(K \cap \partial B_s)) \\ &= \text{conv}(F) \\ &\subset \overline{\text{conv}(\bar{F})} \end{aligned}$$

με $\tilde{T}|_{K \cap \partial B_s} = T|_{K \cap \partial B_s}$.

Εφόσον το σύνολο $F := T(K \cap \partial B_s)$ είναι σχετικά συμπαγές έπεται ότι η κυρτή θήκη $\text{conv}(F)$ είναι σχετικά συμπαγής, σύμφωνα με το Λήμμα 2.2.12. Ορίζουμε τον τελεστή $\tilde{T} := \tilde{T}|_{K \cap \partial B_s}$, ο οποίος είναι συμπαγής, δηλαδή είναι συνεχής και απεικονίζει φραγμένα σύνολα σε σχετικά συμπαγή, εφόσον $\tilde{T}|_{K \cap \partial B_s} = T|_{K \cap \partial B_s}$ και το σύνολο $\text{conv}(F)$ είναι σχετικά συμπαγές. Επίσης δείξαμε ότι $0 \notin \overline{\text{conv}(\bar{F})}$, και άρα, αφού $\tilde{T}(X) \subset \text{conv}(F) \subset \overline{\text{conv}(\bar{F})}$, προκύπτει ότι

$$\inf \{ \|\tilde{T}r\|_1 : r \in X \} =: \gamma > 0.$$

Τώρα, για $\nu \geq 1$ από το 2 της υπόθεσης έχουμε ότι:

$$((1-t)T + t\nu\tilde{T}r) = (1+t(\nu-1))Tr \neq r, \forall t \in [0, 1] \text{ και } \forall r \in K \cap \partial B_s.$$

Οπότε, από την ιδιότητα του ομοτοπικά αναλλοίωτου του δείκτη σταθερού σημείου (βλ. τον Ορισμό 2.2.7, 2) , έχουμε ότι:

$$i(T, K \cap B_s, K) = i(\nu \bar{T}, K \cap B_s, K).$$

Επίσης από την ιδιότητα της λύσης του δείκτη σταθερού σημείου (βλ. Ορισμό 2.2.7, 3) γνωρίζουμε ότι αν $i(\nu \bar{T}, K \cap B_s, K) \neq 0$ τότε ο τελεστής $\nu \bar{T}$ έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο, δηλαδή:

$$r = \nu \bar{T}r \text{ για κάποιο } r \in K \cap B_s.$$

Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή,

$$\begin{aligned} \|r\|_1 &= \|\nu \bar{T}r\|_1 \\ \Rightarrow \|r\|_1 &= \nu \|\bar{T}r\|_1 \\ \Rightarrow \nu &= \frac{\|r\|_1}{\|\bar{T}r\|_1} \leq \frac{s}{\gamma} \end{aligned}$$

Επομένως καταλήγουμε στο:

$$i(T, K \cap B_s, K) = i(\nu \bar{T}, K \cap B_s, K) = 0 \text{ για } \nu > \max\{1, \frac{s}{\gamma}\}.$$

□

Λήμμα 2.2.14. Υπάρχει $\tilde{r} \in K \cap \partial B_s$ και $\omega^2 > 0$ τέτοιο ώστε:

$$T\tilde{r} = \omega^2 \tilde{r}.$$

Απόδειξη. Από το Λήμμα 2.2.6 (3) ξέρουμε ότι:

$$b := \inf_{r \in K \cap \partial B_s} \|Tr\|_1 > 0.$$

Επιλέγουμε έναν αριθμό $a > \frac{s}{b}$. Προφανώς $a > 0$. Ορίζουμε τον συμπαγή τελεστή $aT : K \cap \bar{B}_s \rightarrow K$. (Ο aT είναι συμπαγής σύμφωνα με το Λήμμα 2.2.6 (1).) Ο τελεστής aT ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος 2.2.13:

1.

$$\begin{aligned} \inf_{r \in K \cap \partial B_s} \|aTr\|_1 &= a \inf_{r \in K \cap \partial B_s} \|Tr\|_1 \\ &= ab > 0. \end{aligned}$$

2. $aTr \neq \mu r, \forall r \in K \cap \partial B_s$ και $\forall \mu \in (0, 1]$. Πράγματι αν υπήρχαν $r_1 \in K \cap \partial B_s$ και $\lambda_1 \in (0, 1]$ τέτοια ώστε $aTr_1 = \lambda_1 r_1$, τότε:

$$\begin{aligned} \|aTr_1\|_1 &= \|\lambda_1 r_1\|_1 \\ \Rightarrow a\|Tr_1\|_1 &= \lambda_1 \|r_1\|_1 \\ \Rightarrow \lambda_1 \|r_1\|_1 &> \frac{s}{b} b = s = \|r_1\|_1. \end{aligned}$$

Δηλαδή, $\lambda_1 > 1$. Άτοπο.

Οπότε από το Λήμμα 2.2.13, έχουμε ότι:

$$i(aT, K \cap B_s, K) = 0. \quad (2.34)$$

Έστω τώρα $H : [0, 1] \times K \cap \bar{B}_s \rightarrow K$ συμπαγής με $H(t, r) = taTr$. (Η απλούστερη ομοτοπία ως προς τον τελεστή aT). Αν $H(t, r) \neq r \ \forall r \in K \cap \partial B_s$ και $\forall t \in [0, 1]$, τότε από το ομοτοπικά αναλλοίωτο και από την ιδιότητα της κανονικότητας (βλ. Ορισμός 2.2.7, 1) του δείκτη σταθερού σημείου έχουμε ότι:

$$i(aT, K \cap B_s, K) = i(0, K \cap B_s, K) = 1.$$

Άτοπο από τη σχέση (2.34).

Επομένως, υπάρχει $\tilde{r} \in K \cap \partial B_s$ και $\tilde{t} \in [0, 1]$ τέτοια ώστε $H(\tilde{t}, \tilde{r}) = \tilde{r}$, δηλαδή:

$$\tilde{t}aT\tilde{r} = \tilde{r}.$$

Αφού $\|\tilde{r}\| = s > 0$, έχουμε $\tilde{t} \neq 0$, οπότε $T\tilde{r} = \frac{1}{\tilde{t}a}\tilde{r}$ και θέτοντας $\omega^2 = \frac{1}{\tilde{t}a} > 0$ έχουμε το ζητούμενο

$$T\tilde{r} = \omega^2\tilde{r}.$$

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΔΙΟΡΘΩΣΗ ΟΔΕΥΟΝΤΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ ΜΙΚΡΟΥ ΠΛΑΤΟΥΣ

Μελετώντας τη λύση (ω^2, r) του μη-γραμμικού προβλήματος ιδιοτιμών (2.11), εισάγουμε μία νέα παράμετρο $s = \|r\|_2$, την παράμετρο του πλάτους, η οποία είναι ένα μέτρο της ενέργειας του κύματος. Σε αυτό το κεφάλαιο θεωρούμε ότι το s είναι μικρό, δηλαδή μελετάμε την ασθενώς μη-γραμμική περίπτωση. Περιγράφουμε τη μορφή των κυμάτων και εξάγουμε την διόρθωση πρώτης τάξης στη γραμμική εξίσωση διασποράς. Προκειμένου να κατανοήσουμε τη φύση των λύσεων για μικρές τιμές του s , γραμμικοποιούμε την εξίσωση (2.11),

$$\omega^2 r = Tr$$

με $Tr(z) := C(r) + AV'(\alpha + Ar(z))$ γύρω από το $s = 0$. Θα δούμε ότι το ανάπτυγμα Taylor μας δίνει σε πρώτη τάξη τη γραμμικοποιημένη εξίσωση της (2.1), δηλαδή την

$$\omega^2 r = V''(\alpha) A^2 r, \quad (3.1)$$

της οποίας οι λύσεις είναι:

$$\tilde{\omega}^2(\alpha, \kappa) = V''(\alpha) \frac{1}{\pi^2} \sin^2 \pi \kappa, \quad \tilde{r} = s\sqrt{2} \cos 2\pi z, \quad (3.2)$$

όπου $\tilde{\omega}$ είναι η γραμμική σχέση διασποράς. Πιο συγκεκριμένα θα αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.0.15. *Η λύση $\{\omega^2(s), r(s)\}$ του μη-γραμμικού προβλήματος ιδιοτιμών (2.11), δηλαδή του*

$$\omega^2 r = Tr$$

ικανοποιεί για $s = \|r\|_2 \rightarrow 0$ τις σχέσεις:

$$r(s) = e_1 s + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s^3 + O(s^4), \quad (3.3)$$

$$\omega^2(s) = \tilde{\omega}^2 + \Omega_2 s^2 + \Omega_3 s^3 + O(s^4), \quad (3.4)$$

όπου το $\tilde{\omega}$ δίνεται από την γραμμική σχέση διασποράς:

$$\tilde{\omega}^2(\alpha, \kappa) = V''(\alpha) \frac{1}{\pi^2} \sin^2(\pi \kappa)$$

Κεφάλαιο 3

και

$$\begin{aligned}
 e_1 &= \sqrt{2} \cos 2\pi z, \\
 \Omega_2 &= \frac{\sin^4 \kappa\pi}{4\pi^4} \left[\frac{(V'''(\alpha))^2}{V''(\alpha)} \cot^2 \kappa\pi + V''''(\alpha) \right], \\
 \alpha_2(z) &= \frac{\cot \kappa\pi}{2\pi} \frac{V'''(\alpha)}{V''(\alpha)} \cos 4\pi z, \\
 \alpha_3(z) &= \left(\frac{\cot \kappa\pi}{4\pi} \frac{V'''(\alpha)}{V''(\alpha)} \right)^2 \sqrt{2} \cos 2\pi z \\
 &\quad + \frac{1 + 2 \cos 2\kappa\pi}{32\pi^2(2 + \cos 2\kappa\pi)} \left[3 \left(\frac{V'''(\alpha)}{V''(\alpha)} \right)^2 \cot^2 \kappa\pi \right. \\
 &\quad \left. + \frac{V^{(4)}(\alpha)}{V''(\alpha)} \right] \sqrt{2} \cos 6\pi z.
 \end{aligned}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε τον τύπο του Taylor για να αναπτύξουμε τις συναρτήσεις $\omega^2(s)$ και $r(s)$ γύρω από το σημείο $s = 0$. Επομένως προκύπτει:

$$\omega^2(s) = \omega^2(0) + \frac{(\omega^2(0))'}{1!}s + \frac{(\omega^2(0))''}{2!}s^2 + \frac{(\omega^2(0))'''}{3!}s^3 + O(s^4) \quad \text{για } s \rightarrow 0$$

Θέτουμε

$$\begin{aligned}
 \omega^2(0) &=: \Omega_0 \\
 &=: \tilde{\omega}^2, \\
 \frac{(\omega^2(0))'}{1!} &=: \Omega_1, \\
 \frac{(\omega^2(0))''}{2!} &=: \Omega_2, \\
 \frac{(\omega^2(0))'''}{3!} &=: \Omega_3,
 \end{aligned}$$

κ.ο.κ. που συνεπάγεται

$$\omega^2(s) = \Omega_0 + \Omega_1 s + \Omega_2 s^2 + \Omega_3 s^3 + O(s^4) \quad \text{για } s \rightarrow 0 \quad (3.5)$$

Ομοίως και για τη συνάρτηση r σε κάθε σημείο της $z \in \mathbb{R}$:

$$r(s) = r(0) + \frac{(r^2(0))'}{1!}s + \frac{(r^2(0))''}{2!}s^2 + \frac{(r^2(0))'''}{3!}s^3 + O(s^4) \quad \text{για } s \rightarrow 0$$

Θέτουμε

$$\begin{aligned}
 r(0) &=: \alpha_0, \\
 (r(0))' &=: \alpha_1, \\
 \frac{(r^2(0))''}{2!} &=: \alpha_2, \\
 \frac{(r^2(0))'''}{3!} &=: \alpha_3,
 \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 3

κ.ο.κ. που συνεπάγεται

$$r(s) = \alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s^3 + O(s^4) \quad \text{για } s \rightarrow 0. \quad (3.6)$$

Όμως $\langle r(s), r(s) \rangle = \|r(s)\|_2^2 = s^2$ και συνεπώς αντικαθιστώντας σε αυτήν το $r(s)$ με τη μορφή (3.6) έχουμε

$$\begin{aligned} & \langle \alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s^3 + O(s^4), \alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s^3 + O(s^4) \rangle = \\ & \|\alpha_0\|_2^2 + 2\langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle s + (\|\alpha_1\|_2^2 + 2\langle \alpha_0, \alpha_2 \rangle) s^2 + (2\langle \alpha_0, \alpha_3 \rangle + 2\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle) s^3 + O(s^4) \end{aligned}$$

από την οποία προκύπτει

$$\alpha_0 = 0, \quad \|\alpha_1\|_2 = 1, \quad \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = 0 \quad (3.7)$$

και συνεπώς

$$r(s) = \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s^3 + O(s^4). \quad (3.8)$$

Θα υπολογίσουμε τους συντελεστές $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$, αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.5) και (3.8) στις εξισώσεις:

$$\omega^2 s^2 = \langle AV'(\alpha + Ar), r \rangle \quad (3.9)$$

$$\omega^2 r(z) = Tr(z) = C(r) + AV'(\alpha + Ar(z)), \forall z \in \mathbb{R} \quad (3.10)$$

και εξισώνοντας τους συντελεστές των όρων $s^n, n \in \mathbb{N}_0$ ίδιου βαθμού.

Η εξίσωση (3.9) προκύπτει από τις εξισώσεις (2.10) και (2.11) παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο με r , δηλαδή

$$\begin{aligned} \omega^2 r &= C(r) + AV'(\alpha + Ar) \\ \Rightarrow \langle \omega^2 r, r \rangle &= \langle C(r) + AV'(\alpha + Ar), r \rangle \\ \Rightarrow \omega^2 \langle r, r \rangle &= \langle C(r), r \rangle + \langle AV'(\alpha + Ar), r \rangle \\ \Rightarrow \omega^2 \|r\|_2^2 &= \langle AV'(\alpha + Ar), r \rangle \\ \Rightarrow \omega^2 s^2 &= \langle AV'(\alpha + Ar), r \rangle \end{aligned}$$

όπου $\langle C(r), r \rangle = 0$, αφού $C(r) \in \mathbb{R}$ και $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} r(z) dz = 0$.

Στην ενότητα 2.1 αποδείξαμε ότι:

$$\begin{aligned} |Ar(z)| &\leq \sqrt{\kappa} \|r\|_2 \\ &= \sqrt{\kappa} s \quad \text{για όλα τα } z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ξέρουμε ότι το s είναι μικρό και η συνάρτηση δυναμικού V είναι λεία. Επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα Taylor, αναπτύσσοντας τη συνάρτηση $V'(\alpha + Ar)$ γύρω από το σημείο α , έχουμε:

$$\begin{aligned} V'(\alpha + Ar) &= V'(\alpha) + \frac{V''(\alpha)}{1!} Ar + \frac{V'''(\alpha)}{2!} (Ar)^2 + \frac{V^{(4)}(\alpha)}{3!} (Ar)^3 \\ &\quad + \frac{V^{(5)}(\alpha)}{4!} (Ar)^4 + R(\alpha, Ar), \end{aligned} \quad (3.11)$$

Κεφάλαιο 3

όπου

$$R(\alpha, Ar) := \frac{V^{(6)}(\alpha + \tau Ar)}{5!} (Ar)^5 \quad \mu\epsilon \quad \tau \in (0, 1) \quad \kappa\alpha\iota$$

$$|R(\alpha, Ar)| \leq \max\{|V^{(6)}(x)| : x \in [\alpha - 2s\sqrt{\kappa}, \alpha + 2s\sqrt{\kappa}]\} \frac{\kappa^{\frac{5}{2}}}{5!} s^5 \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

Αντικαθιστώντας στην (3.11) την (3.8) έχουμε από την γραμμικότητα του τελεστή A :

$$V'(\alpha + Ar) = V'(\alpha) + V''(\alpha)A\alpha_1 s + O(s^2)$$

και άρα

$$AV'(\alpha + Ar) = AV'(\alpha) + V''(\alpha)A^2\alpha_1 s + O(s^2)$$

και

$$\begin{aligned} C(r) &= -AV'(\alpha) + V''(\alpha) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} A^2\alpha_1 dz s + O(s^2) \\ &= -AV'(\alpha) + O(s^2), \end{aligned}$$

αφού $\alpha_1 \in \mathcal{R} \Rightarrow A\alpha_1 \in \mathcal{R} \Rightarrow A^2\alpha_1 \in \mathcal{R}$ με $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \rho dz = 0 \quad \forall \rho \in \mathcal{R}$. Συνεπώς, αντικαθιστώντας την (3.5) με $\Omega_0 = \tilde{\omega}^2$ και την (3.8) στην (3.10) έχουμε

$$\tilde{\omega}^2\alpha_1 s + O(s^2) = V''(\alpha)A^2\alpha_1 s + O(s^2).$$

Αυτό σημαίνει ότι η γραμμικοποιημένη εξίσωση (linearized equation) $\omega^2 r = Tr$ γύρω από το $s = \|r\|_2 = 0$ είναι η

$$\tilde{\omega}^2\alpha_1 = V''(\alpha)A^2\alpha_1. \quad (3.12)$$

Όπως είδαμε στο Λήμμα 2.1.9 κάθε $\alpha_1 \in \mathcal{R}$ μπορεί να αναπτυχθεί ως προς την ορθοκανονική βάση $\{e_j, j \in \mathbb{N}\}$ του χώρου Hilbert $\mathcal{R}$, δηλαδή

$$\alpha_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{1j} e_j \quad \forall \alpha_1 \in \mathcal{R}, \quad (3.13)$$

όπου $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in \mathbb{N}$. Επίσης, όπως είδαμε στο Λήμμα 2.1.9 ο A είναι γραμμικός με $Ae_j = u_j e_j, j \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, η (3.12) ισοδυναμεί με την

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{1j} (\tilde{\omega}^2 - V''(\alpha)u_j^2) e_j = 0,$$

δηλαδή με

$$\alpha_{1j} (\tilde{\omega}^2 - V''(\alpha)u_j^2) = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (3.14)$$

Επιλέγοντας $\alpha_{11} = 1$ βρίσκουμε ότι η βασική αρμονική e_1 επιλύει την (3.12) αν και μόνο αν ικανοποιείται η γραμμική σχέση διασποράς $\tilde{\omega}^2 = V''(\alpha)u_1^2$. Για γενικά (generic), $\kappa \in (0, \frac{1}{2})$, δηλαδή τέτοια για τα οποία ικανοποιείται η συνθήκη μη συντονισμού (nonresonance condition)

$$u_1^2 \neq u_j^2 \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Κεφάλαιο 3

ή ισοδύναμα

$$j^2 \sin^2(\pi\kappa) \neq \sin^2(\pi j\kappa) \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad (3.15)$$

προκύπτει τότε αναγκαία από τις (3.14) ότι $\alpha_{1j} = 0 \quad \forall j \geq 2$ και άρα $\alpha_1 = e_1$. Έτσι έχουμε υπολογίσει τους πρώτους όρους των αναπτυγμάτων (3.3) και (3.4) και συνεχίζουμε με τον υπολογισμό των υπολοίπων.

Αντικαθιστώντας τις (3.5) και (3.11) στην (3.9) προκύπτει:

$$\begin{aligned} (\Omega_0 + \Omega_1 s + \Omega_2 s^2 + \Omega_3 s^3 + O(s^4))s^2 &= \langle AV'(\alpha + Ar), r \rangle \\ &= \langle A(V'(\alpha) + \frac{V''(\alpha)}{1!}Ar + \frac{V'''(\alpha)}{2!}(Ar)^2 \\ &\quad + \frac{V^{(4)}(\alpha)}{3!}(Ar)^3 + \frac{V^{(5)}(\alpha)}{4!}(Ar)^4 \\ &\quad + O(s^5), r \rangle. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Αφού ο $A : L^2 \rightarrow L^2$ είναι αυτοσυζυγής, από το Λήμμα 2.1.2, η εξίσωση (3.16) γίνεται:

$$\begin{aligned} (\Omega_0 + \Omega_1 s + \Omega_2 s^2 + \Omega_3 s^3 + O(s^4))s^2 &= \langle V'(\alpha) + \frac{V''(\alpha)}{1!}Ar + \frac{V'''(\alpha)}{2!}(Ar)^2 \\ &\quad + \frac{V^{(4)}(\alpha)}{3!}(Ar)^3 + \frac{V^{(5)}(\alpha)}{4!}(Ar)^4 \\ &\quad + O(s^5), Ar \rangle. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Κάνοντας τις πράξεις προκύπτει:

$$\begin{aligned} \Omega_0 s^2 + \Omega_1 s^3 + \Omega_2 s^4 + \Omega_3 s^5 + O(s^6) &= \langle V'(\alpha), Ar \rangle \\ &\quad + V''(\alpha) \langle Ar, Ar \rangle \\ &\quad + \frac{V'''(\alpha)}{2} \langle (Ar)^2, Ar \rangle \\ &\quad + \frac{V^{(4)}(\alpha)}{3!} \langle (Ar)^3, Ar \rangle \\ &\quad + \frac{V^{(5)}(\alpha)}{4!} \langle (Ar)^4, Ar \rangle \\ &\quad + O(s^6). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε το κάθε εσωτερικό γινόμενο της εξίσωσης (3.18) ξεχωριστά. Γνωρίζουμε ότι $\langle V'(\alpha), Ar \rangle = 0$, εφόσον $V'(\alpha) \equiv \text{σταθερό}$ και $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} Ar(z)dz = 0$, και ότι $Ae_n = u_n e_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Επίσης υπενθυμίζουμε ότι ισχύει

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in \mathbb{N} \quad (3.19)$$

και ότι $\langle f, g \rangle = \langle fg, 1 \rangle \quad \forall f, g \in \mathcal{R}$.

Κεφάλαιο 3

Για τον πρώτο όρο έχουμε

$$\begin{aligned}
\langle Ar, Ar \rangle &= \left\langle A \left(se_1 + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s^3 + \alpha_4 s^4 + O(s^5) \right), \right. \\
&\quad \left. A \left(se_1 + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s^3 + \alpha_4 s^4 + O(s^5) \right) \right\rangle \\
&= \left\langle sAe_1 + s^2 A\alpha_2 + s^3 A\alpha_3 + s^4 A\alpha_4 + O(s^5), \right. \\
&\quad \left. sAe_1 + s^2 A\alpha_2 + s^3 A\alpha_3 + s^4 A\alpha_4 + O(s^5) \right\rangle \\
&= s^2 u_1^2 \langle e_1, e_1 \rangle + s^3 2u_1 \langle e_1, A\alpha_2 \rangle + s^4 2u_1 \langle e_1, A\alpha_3 \rangle + s^4 \langle A\alpha_2, A\alpha_2 \rangle \\
&\quad + s^5 2u_1 \langle e_1, A\alpha_4 \rangle + s^5 2 \langle A\alpha_2, A\alpha_3 \rangle + O(s^6) \\
&= s^2 u_1^2 + s^3 2\alpha_{21} u_1^2 + s^4 \left(2\alpha_{31} u_1^2 + \sum \alpha_{2j}^2 u_j^2 \right) \\
&\quad + s^5 2 \left(\alpha_{41} u_1^2 + \sum \alpha_{2j} \alpha_{3j} u_j^2 \right) + O(s^6), \tag{3.20}
\end{aligned}$$

Για τον δεύτερο όρο έχουμε

$$\begin{aligned}
\langle (Ar)^2, Ar \rangle &= \left\langle \left(su_1 e_1 + s^2 A\alpha_2 + s^3 A\alpha_3 + O(s^4) \right)^2, \right. \\
&\quad \left. su_1 e_1 + s^2 A\alpha_2 + s^3 A\alpha_3 + O(s^4) \right\rangle \\
&= \left\langle s^2 u_1^2 e_1^2 + s^3 2u_1 e_1 A\alpha_2 + s^4 2u_1 e_1 A\alpha_3 + s^4 (A\alpha_2)^2 + O(s^5), \right. \\
&\quad \left. su_1 e_1 + s^2 A\alpha_2 + s^3 A\alpha_3 + O(s^4) \right\rangle \\
&= s^3 u_1^3 \langle e_1^2, e_1 \rangle + s^4 3u_1^2 \langle e_1^2, A\alpha_2 \rangle \\
&\quad + s^5 3u_1^2 \langle e_1^2, A\alpha_3 \rangle + s^5 2u_1 \langle e_1 A\alpha_2, A\alpha_2 \rangle + O(s^6) \\
&= s^4 u_1^2 \frac{3}{\sqrt{2}} \alpha_{22} u_2 \\
&\quad + s^5 u_1^2 \frac{3}{\sqrt{2}} \alpha_{32} u_2 + s^5 2u_1 \sum_{j,i} \alpha_{2j} u_j \alpha_{2i} u_i \langle e_1 e_j, e_i \rangle + O(s^6) \\
&= s^4 u_1^2 \frac{3}{\sqrt{2}} \alpha_{22} u_2 + s^5 u_1^2 \frac{3}{\sqrt{2}} \alpha_{32} u_2 + s^5 2u_1 \sum \alpha_{21} u_1 \alpha_{2i} u_i \langle e_1^2, e_i \rangle \\
&\quad + s^5 2\sqrt{2} u_1^2 u_2 \alpha_{21} \alpha_{22} \\
&\quad + s^5 \sqrt{2} u_1 \sum_{j \geq 2} \alpha_{2j} u_j (\alpha_{2(j+1)} u_{j+1} + \alpha_{2(j-1)} u_{j-1}) \\
&\quad + s^5 \sqrt{2} u_1 \alpha_{22} u_2 (\alpha_{23} u_3 + \alpha_{21} u_1) \\
&\quad + s^5 \sqrt{2} u_1^2 u_2 \alpha_{22} \alpha_{21} + s^5 \sqrt{2} u_1 u_2 u_3 \alpha_{22} \alpha_{23} \\
&\quad + s^5 \sqrt{2} u_1 \sum_{j \geq 3} \alpha_{2j} u_j (\alpha_{2(j+1)} u_{j+1} + \alpha_{2(j-1)} u_{j-1}) + O(s^6), \tag{3.21}
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποίησαμε ότι για $e_j(z) = \sqrt{2} \cos(2\pi jz)$, $j \in \mathbb{N}$, ισχύει

$$\langle e_1^2, e_1 \rangle = \left\langle 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} e_2, e_1 \right\rangle = 0, \quad \langle e_1^2, e_2 \rangle = \left\langle 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} e_2, e_2 \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Κεφάλαιο 3

και

$$\langle e_1^2, e_j \rangle = \left\langle 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, e_j \right\rangle = 0, \quad j \geq 3,$$

και ότι

$$2 \cos(2\pi z) \cos(2\pi jz) = \cos(2\pi(j+1)z) + \cos(2\pi(j-1)z), \quad j \in \mathbb{N}, \quad z \in \mathbb{R},$$

ή, ισοδύναμα,

$$e_1 e_j = \frac{e_{j+1} + e_{j-1}}{\sqrt{2}}, \quad j \in \mathbb{N},$$

από το οποίο προκύπτει

$$\langle e_1 e_j, e_{j+1} \rangle = \langle e_1 e_j, e_{j-1} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \langle e_1 e_j, e_i \rangle = 0, \quad i \neq j+1, j-1, \quad i, j \in \mathbb{N}.$$

Για τον τρίτο όρο έχουμε

$$\begin{aligned} \langle (Ar)^3, Ar \rangle &= \left\langle (su_1 e_1 + s^2 A\alpha_2 + O(s^3))^3, su_1 e_1 + s^2 A\alpha_2 + O(s^3) \right\rangle \\ &= \langle s^3 u_1^3 e_1^3 + s^4 3u_1^2 e_1^2 A\alpha_2 + O(s^5), su_1 e_1 + s^2 A\alpha_2 + O(s^3) \rangle \\ &= s^4 u_1^4 \langle e_1^3, e_1 \rangle + s^5 u_1^3 \langle e_1^2 A\alpha_2, e_1 \rangle + s^5 3u_1^3 \langle e_1^2 A\alpha_2, e_1 \rangle + O(s^6) \\ &= s^4 u_1^4 \langle e_1^3, e_1 \rangle + s^5 4u_1^3 \langle e_1^3, A\alpha_2 \rangle + O(s^6) \\ &= s^4 u_1^4 \frac{3}{2} + s^5 4u_1^3 \sum \alpha_{2j} u_j \langle e_1^3, e_j \rangle + O(s^6) \\ &= s^4 u_1^4 \frac{3}{2} + s^5 4u_1^3 \alpha_{21} u_1 \frac{3}{2} + s^5 4u_1^3 \alpha_{23} u_3 \frac{1}{2} + O(s^6) \\ &= s^4 u_1^4 \frac{3}{2} + s^5 6u_1^4 \alpha_{21} + s^5 2u_1^3 \alpha_{23} u_3 + O(s^6), \end{aligned} \tag{3.22}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι

$$\begin{aligned} \langle e_1^3, e_1 \rangle &= \left\langle e_1 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 \right), e_1 \right\rangle = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}, \\ \langle e_1^3, e_2 \rangle &= \left\langle e_1 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 \right), e_2 \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle e_1, e_2^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle e_1, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_4 \right\rangle = 0, \end{aligned}$$

$$\langle e_1^3, e_j \rangle = \left\langle \frac{1}{2}(3e_1 + e_3), e_j \right\rangle = \frac{3}{2} \langle e_1, e_j \rangle + \frac{1}{2} \langle e_3, e_j \rangle, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Για τον τέταρτο όρο έχουμε,

$$\begin{aligned} \langle (Ar)^4, Ar \rangle &= \left\langle (su_1 e_1 + O(s^2))^4, su_1 e_1 + O(s^2) \right\rangle \\ &= \langle s^4 u_1^4 e_1^4 + O(s^5), su_1 e_1 + O(s^2) \rangle \\ &= s^5 u_1^5 \langle e_1^4, e_1 \rangle + O(s^6) \\ &= O(s^6), \end{aligned} \tag{3.23}$$

Κεφάλαιο 3

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι

$$e_1^4 = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2\right)^2 = 1 + \sqrt{2}e_2 + \frac{1}{2}e_2^2 = 1 + \sqrt{2}e_2 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_4\right) = \frac{3}{2} + \sqrt{2}e_2 + \frac{1}{2\sqrt{2}}e_4.$$

Αντικαθιστώντας τα αναπτύγματα (3.20)–(3.23) στην εξίσωση (3.18) (όπου $\langle V'(\alpha), Ar \rangle = 0$) προκύπτει:

$$\begin{aligned} & \Omega_0 s^2 + \Omega_1 s^3 + \Omega_2 s^4 + \Omega_3 s^5 + O(s^6) \\ &= V''(\alpha) \left(s^2 u_1^2 + s^3 2\alpha_{21} u_1^2 + s^4 \left(2\alpha_{31} u_1^2 + \sum \alpha_{2j}^2 u_j^2 \right) \right. \\ & \quad \left. + s^5 2 \left(\alpha_{41} u_1^2 + \sum \alpha_{2j} \alpha_{3j} u_j^2 \right) + O(s^6) \right) \\ & \quad + \frac{V'''(\alpha)}{2} \left(s^4 u_1^2 \frac{3}{\sqrt{2}} \alpha_{22} u_2 + s^5 \left(u_1^2 \frac{3}{\sqrt{2}} \alpha_{32} u_2 + 2\sqrt{2} u_1^2 u_2 \alpha_{21} \alpha_{22} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \sqrt{2} u_1 u_2 u_3 \alpha_{22} \alpha_{23} + \sqrt{2} u_1 \sum_{j \geq 3} \alpha_{2j} u_j \left(\alpha_{2(j+1)} u_{j+1} + \alpha_{2(j-1)} u_{j-1} \right) \right) + O(s^6) \right) \\ & \quad + \frac{V^{(4)}(\alpha)}{6} \left(s^4 u_1^4 \frac{3}{2} + s^5 \left(6u_1^4 \alpha_{21} + 2u_1^3 \alpha_{23} u_3 \right) + O(s^6) \right) \\ & \quad + O(s^6) \\ &= \left(V''(\alpha) u_1^2 \right) s^2 + \left(2V''(\alpha) \alpha_{21} u_1^2 \right) s^3 \\ & \quad + \left(V''(\alpha) \left(2\alpha_{31} u_1^2 + \sum \alpha_{2j}^2 u_j^2 \right) + u_1^2 \frac{3V'''(\alpha)}{2\sqrt{2}} \alpha_{22} u_2 + \frac{V^{(4)}(\alpha)}{4} u_1^4 \right) s^4 \\ & \quad + \left(2V''(\alpha) \left(\alpha_{41} u_1^2 + \sum \alpha_{2j} \alpha_{3j} u_j^2 \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{V'''(\alpha)}{2} \left(u_1^2 \frac{3}{\sqrt{2}} \alpha_{32} u_2 + 2\sqrt{2} u_1^2 u_2 \alpha_{21} \alpha_{22} + \sqrt{2} u_1 u_2 u_3 \alpha_{22} \alpha_{23} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \sqrt{2} u_1 \sum_{j \geq 3} \alpha_{2j} u_j \left(\alpha_{2(j+1)} u_{j+1} + \alpha_{2(j-1)} u_{j-1} \right) \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{V^{(4)}(\alpha)}{6} \left(6u_1^4 \alpha_{21} + 2u_1^3 \alpha_{23} u_3 \right) \right) s^5 \\ & \quad + O(s^6). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Συγκρίνοντας τους συντελεστές ίδιας τάξης s^n , $n = 2, \dots, 5$, στην εξίσωση (3.24), προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις για τους συντελεστές Ω_j , $j = 0, \dots, 3$:

$$\Omega_0 = V''(\alpha) u_1^2, \tag{3.25}$$

$$\Omega_1 = 2V''(\alpha) \alpha_{21} u_1^2, \tag{3.26}$$

$$\Omega_2 = V''(\alpha) \left(2\alpha_{31} u_1^2 + \sum \alpha_{2j}^2 u_j^2 \right) + u_1^2 \frac{3V'''(\alpha)}{2\sqrt{2}} \alpha_{22} u_2 + \frac{V^{(4)}(\alpha)}{4} u_1^4, \tag{3.27}$$

$$\Omega_3 = 2V''(\alpha) \left(\alpha_{41} u_1^2 + \sum \alpha_{2j} \alpha_{3j} u_j^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{V'''(\alpha)}{2} \left(u_1^2 \frac{3}{\sqrt{2}} \alpha_{32} u_2 + 2\sqrt{2} u_1^2 u_2 \alpha_{21} \alpha_{22} + \sqrt{2} u_1 u_2 u_3 \alpha_{22} \alpha_{23} \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{2} u_1 \sum_{j \geq 3} \alpha_{2j} u_j (\alpha_{2(j+1)} u_{j+1} + \alpha_{2(j-1)} u_{j-1}) \right) \\
& + \frac{V^{(4)}(\alpha)}{6} (6u_1^4 \alpha_{21} + 2u_1^3 \alpha_{23} u_3). \tag{3.28}
\end{aligned}$$

Οι εξισώσεις αυτές προσδιορίζουν πλήρως τα Ω_j , $j = 0, \dots, 3$, αν είναι γνωστοί οι συντελεστές α_{ij} , οι οποίοι εξάλλου απαιτούνται για τον προσδιορισμό των συναρτήσεων α_2 και α_3 της (3.3). Σημειώνουμε ότι η πρώτη εξίσωση είναι η γραμμική σχέση διασποράς την οποία είχαμε ήδη βρει,

$$\Omega_0 = \tilde{\omega}^2 = V''(\alpha) u_1^2 = V''(\alpha) \frac{1}{\pi^2} \sin^2(\pi \kappa).$$

Για τον υπολογισμό των συντελεστών Fourier α_{2j}, α_{3j} , $j \in \mathbb{N}$, που εμφανίζονται στους συντελεστές Ω_2, Ω_3 και απαιτούνται για τον υπολογισμό των α_2, α_3 της (3.3), καθώς και τον υπολογισμό του συντελεστή α_{41} , παρατηρούμε καταρχήν ότι, αφού $\alpha_1 = e_1$, έχουμε από την τρίτη ισότητα της (3.7)

$$0 = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = \langle e_1, \sum \alpha_{2j} e_j \rangle = \alpha_{21}, \tag{3.29}$$

το οποίο μέσω της (3.26) δίνει άμεσα

$$\Omega_1 = 0. \tag{3.30}$$

Για τον υπολογισμό των υπόλοιπων συντελεστών αναπτύσσουμε — κατά αναλογία με τη μέθοδο που ακολουθήσαμε για την εξίσωση (3.9) — την εξίσωση (3.10) ως προς s γύρω από το $s = 0$, αντικαθιστώντας σε αυτήν τα αναπτύγματα (3.5) και (3.8) και χρησιμοποιώντας τα αναπτύγματα (3.13). Έτσι έχουμε στα αριστερά της (3.10)

$$\begin{aligned}
\omega^2(s) r(s) &= \left(\Omega_0 + \Omega_1 s + \Omega_2 s^2 + \Omega_3 s^3 + O(s^4) \right) \\
& \quad \left(s e_1 + s^2 \sum \alpha_{2j} e_j + s^3 \sum \alpha_{3j} e_j + O(s^4) \right) \\
&= s \Omega_0 e_1 + s^2 \left(\Omega_0 \sum \alpha_{2j} e_j + \Omega_1 e_1 \right) \\
& \quad + s^3 \left(\Omega_0 \sum \alpha_{3j} e_j + \Omega_1 \sum \alpha_{2j} e_j + \Omega_2 e_1 \right) \\
& \quad + O(s^4), \tag{3.31}
\end{aligned}$$

ενώ από την (3.11), χρησιμοποιώντας και ότι $A e_j = u_j e_j$, $j \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\begin{aligned}
V'(\alpha + A r(s)) &= V'(\alpha) + V''(\alpha) \left(s u_1 e_1 + s^2 \sum \alpha_{2j} u_j e_j \right. \\
& \quad \left. + s^3 \sum \alpha_{3j} u_j e_j + O(s^4) \right) \\
& \quad + \frac{V'''(\alpha)}{2} \left(s u_1 e_1 + s^2 \sum \alpha_{2j} u_j e_j + O(s^3) \right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{V^{(4)}(\alpha)}{6} (su_1e_1 + O(s^2))^3 \\
& + O(s^4) \\
& = V'(\alpha) + V''(\alpha) \left(su_1e_1 + s^2 \sum \alpha_{2j}u_je_j \right. \\
& \quad \left. + s^3 \sum \alpha_{3j}u_je_j + O(s^4) \right) \\
& \quad + \frac{V'''(\alpha)}{2} \left(s^2u_1^2e_1^2 + s^32u_1e_1 \sum \alpha_{2j}u_je_j + O(s^4) \right) \\
& \quad + \frac{V^{(4)}(\alpha)}{6} (s^3u_1^3e_1^3 + O(s^4)) \\
& \quad + O(s^4) \\
& = V'(\alpha) + sV''(\alpha)u_1e_1 + s^2 \left(V''(\alpha) \sum \alpha_{2j}u_je_j \right. \\
& \quad \left. + \frac{V'''(\alpha)}{2}u_1^2e_1^2 \right) + s^3 \left(V''(\alpha) \sum \alpha_{3j}u_je_j \right. \\
& \quad \left. + V'''(\alpha)u_1e_1 \sum \alpha_{2j}u_je_j + \frac{V^{(4)}(\alpha)}{6}u_1^3e_1^3 \right) \\
& \quad + O(s^4),
\end{aligned}$$

από την οποία προκύπτει με την γραμμικότητα του A και τις

$$\begin{aligned}
A(e_1^2) &= A \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 \right) = \kappa + \frac{1}{\sqrt{2}}u_2e_2, \\
A(e_1e_j) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u_{j+1}e_{j+1} + u_{j-1}e_{j-1}), \quad j \geq 2, \\
A(e_1^3) &= \frac{1}{2}(3u_1e_1 + u_3e_3)
\end{aligned}$$

το ανάπτυγμα

$$\begin{aligned}
AV'(\alpha + Ar(s)) &= \kappa V'(\alpha) + sV''(\alpha)u_1^2e_1 \\
& \quad + s^2 \left(V''(\alpha) \sum \alpha_{2j}u_j^2e_j + \frac{V'''(\alpha)}{2}u_1^2 \left(\kappa + \frac{1}{\sqrt{2}}u_2e_2 \right) \right) \\
& \quad + s^3 \left(V''(\alpha) \sum \alpha_{3j}u_j^2e_j + V'''(\alpha)u_1^2\alpha_{21} \left(\kappa + \frac{1}{\sqrt{2}}u_2e_2 \right) \right. \\
& \quad \left. + V'''(\alpha)u_1 \sum_{j \geq 2} \alpha_{2j}u_j \frac{1}{\sqrt{2}}(u_{j+1}e_{j+1} + u_{j-1}e_{j-1}) \right. \\
& \quad \left. + \frac{V^{(4)}(\alpha)}{12}u_1^3(3u_1e_1 + u_3e_3) \right) + O(s^4).
\end{aligned}$$

Συνεπώς, αφού $e_j \in \mathcal{R} \quad \forall j \in \mathbb{N}$, ολοκληρώνοντας πάνω από μια περίοδο έχουμε

$$C(r(s)) = -\kappa V'(\alpha) - s^2 \frac{V'''(\alpha)}{2}u_1^2\kappa - s^3 V'''(\alpha)u_1^2\alpha_{21}\kappa + O(s^4),$$

Κεφάλαιο 3

που συνεπάγεται τελικά

$$\begin{aligned}
Tr(s) = & sV''(\alpha)u_1^2e_1 + s^2\left(V''(\alpha)\sum\alpha_{2j}u_j^2e_j + \frac{V'''(\alpha)}{2\sqrt{2}}u_1^2u_2e_2\right) \\
& + s^3\left(V''(\alpha)\sum\alpha_{3j}u_j^2e_j + V'''(\alpha)u_1^2\alpha_{21}\frac{1}{\sqrt{2}}u_2e_2\right. \\
& + V'''(\alpha)u_1\sum_{j\geq 2}\alpha_{2j}u_j\frac{1}{\sqrt{2}}(u_{j+1}e_{j+1} + u_{j-1}e_{j-1}) + \frac{V^{(4)}(\alpha)}{12}u_1^3(3u_1e_1 + u_3e_3)\Big) \\
& + O(s^4).
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Από τη σύγκριση των συντελεστών τάξης s^n , $n = 1, 2, 3$, των αναπτυγμάτων (3.31) και (3.32), τα οποία είναι ίσα σύμφωνα με την (3.10), προκύπτει μια δεύτερη ομάδα εξισώσεων, οι οποίες πρέπει να ισχύουν παράλληλα με τις (3.25) – (3.28), και είναι οι

$$\Omega_0e_1 = V''(\alpha)u_1^2e_1, \tag{3.33}$$

$$\Omega_0\sum\alpha_{2j}e_j + \Omega_1e_1 = V''(\alpha)\sum\alpha_{2j}u_j^2e_j + \frac{V'''(\alpha)}{2\sqrt{2}}u_1^2u_2e_2, \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_0\sum\alpha_{3j}e_j + \Omega_1\sum\alpha_{2j}e_j + \Omega_2e_1 = & V''(\alpha)\sum\alpha_{3j}u_j^2e_j \\
& + V'''(\alpha)u_1^2\alpha_{21}\frac{1}{\sqrt{2}}u_2e_2 \\
& + V'''(\alpha)u_1\sum_{j\geq 2}\alpha_{2j}u_j\frac{1}{\sqrt{2}}(u_{j+1}e_{j+1} + u_{j-1}e_{j-1}) \\
& + \frac{V^{(4)}(\alpha)}{12}u_1^3(3u_1e_1 + u_3e_3).
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Η πρώτη εξίσωση ισοδυναμεί με την (3.25) και είναι η γραμμική σχέση διασποράς. Οι υπόλοιπες δύο, σε συνδυασμό με την (3.29) και τις (3.25) – (3.28), προσδιορίζουν τους συντελεστές α_{2j} και α_{3j} . Έτσι με την (3.29), δηλαδή $\alpha_{21} = 0$, η (3.34) ισοδυναμεί με την

$$\Omega_0\sum_{j\geq 2}\alpha_{2j}e_j + \Omega_1e_1 = V''(\alpha)\sum_{j\geq 2}\alpha_{2j}u_j^2e_j + \frac{V'''(\alpha)}{2\sqrt{2}}u_1^2u_2e_2,$$

η οποία, αν πάρουμε το εσωτερικό γινόμενο της με το e_1 , επιβεβαιώνει την (3.30),

$$\Omega_1 = 0,$$

ενώ, αν πάρουμε το εσωτερικό γινόμενο της με το e_2 και χρησιμοποιώντας την (3.33) (ή, ισοδύναμα, την (3.25)), δίνει

$$V''(\alpha)u_1^2\alpha_{22} = V''(\alpha)\alpha_{22}u_2^2 + \frac{V'''(\alpha)}{2\sqrt{2}}u_1^2u_2,$$

δηλαδή

$$\alpha_{22} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{V'''(\alpha)}{V''(\alpha)}\frac{u_1^2u_2}{u_1^2 - u_2^2}, \tag{3.36}$$

Κεφάλαιο 3

υπό τη συνθήκη μη συντονισμού (nonresonance condition) (3.15) και εφόσον $V''(\alpha) \neq 0$, το οποίο προφανώς ισχύει για γνήσια κυρτά δυναμικά V .

Σχηματίζοντας αντίστοιχα τα εσωτερικά γινόμενα της (3.34) με τα e_i , $i \geq 3$, αυτή μας δίνει

$$\Omega_0 \alpha_{2i} = V''(\alpha) \alpha_{2i} u_i^2, \quad i \geq 3,$$

δηλαδή, με την (3.33) και $V''(\alpha) \neq 0$,

$$u_1^2 \alpha_{2i} = \alpha_{2i} u_i^2, \quad i \geq 3,$$

από το οποίο, υπό την (3.15), προκύπτει

$$\alpha_{2i} = 0 \quad \forall \quad i \geq 3 \quad (3.37)$$

Αντικαθιστώντας τα μέχρι τώρα αποτελέσματά μας, δηλαδή $\alpha_{21} = 0$ (βλ. (3.29)), $\alpha_{2j} = 0 \quad \forall \quad j \geq 3$ (βλ. (3.37)), $\Omega_1 = 0$ (βλ. (3.30)), και έχοντας υπόψη τους τύπους (3.25) του Ω_0 και (3.36) του α_{22} , οι εξισώσεις (3.27), (3.28) και (3.35) γίνονται

$$\Omega_2 = V''(\alpha) (2\alpha_{31} u_1^2 + \alpha_{22}^2 u_2^2) + \frac{3V'''(\alpha)}{2\sqrt{2}} \alpha_{22} u_1^2 u_2 + \frac{V^{(4)}(\alpha)}{4} u_1^4, \quad (3.38)$$

$$\Omega_3 = 2V''(\alpha) (\alpha_{41} u_1^2 + \alpha_{22} \alpha_{32} u_2^2) + \frac{3V'''(\alpha)}{2\sqrt{2}} \alpha_{32} u_1^2 u_2, \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \Omega_2 e_1 &= V''(\alpha) \sum \alpha_{3j} (u_j^2 - u_1^2) e_j + \frac{V'''(\alpha)}{\sqrt{2}} \alpha_{22} u_1 u_2 (u_3 e_3 + u_1 e_1) \\ &\quad + \frac{V^{(4)}(\alpha)}{12} u_1^3 (3u_1 e_1 + u_3 e_3). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Όμως ισχύει επίσης και το ανάπτυγμα

$$\begin{aligned} s^2 &= \|r(s)\|_2^2 = \langle r(s), r(s) \rangle \\ &= \langle e_1 s + \alpha_{22} e_2 s^2 + \alpha_3 s^3 + \alpha_4 s^4 + O(s^5), e_1 s + \alpha_{22} e_2 s^2 + \alpha_3 s^3 + \alpha_4 s^4 + O(s^5) \rangle \\ &= s^2 + (2\langle e_1, \alpha_3 \rangle + \alpha_{22}^2) s^4 + (2\langle e_1, \alpha_4 \rangle + 2\alpha_{22} \langle e_2, \alpha_3 \rangle) s^5 \\ &= s^2 + (2\alpha_{31} + \alpha_{22}^2) s^4 + (2\alpha_{41} + 2\alpha_{22} \alpha_{32}) s^5 + O(s^6) \end{aligned}$$

που δίνει

$$\alpha_{31} = -\frac{\alpha_{22}^2}{2} \quad \text{και} \quad \alpha_{41} = -\alpha_{22} \alpha_{32}. \quad (3.41)$$

Έτσι, το Ω_2 είναι τώρα πλήρως προσδιορισμένο από την (3.38) ως

$$\Omega_2 = -V''(\alpha) \alpha_{22}^2 (u_1^2 - u_2^2) + \frac{3V'''(\alpha)}{2\sqrt{2}} \alpha_{22} u_1^2 u_2 + \frac{V^{(4)}(\alpha)}{4} u_1^4,$$

που με χρήση του τύπου (3.36) της α_{22} παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= \frac{V'''(\alpha)}{\sqrt{2}} \alpha_{22} u_1^2 u_2 + \frac{V^{(4)}(\alpha)}{4} u_1^4 \\ &= \frac{1}{4} u_1^4 \left(\frac{(V'''(\alpha))^2}{V''(\alpha)} \frac{u_2^2}{u_1^2 - u_2^2} + V^{(4)}(\alpha) \right). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Κεφάλαιο 3

Ο τύπος αυτός επιβεβαιώνεται προφανώς και από το εσωτερικό γινόμενο της (3.40) με το e_1 . Το εσωτερικό γινόμενο της (3.40) με e_2 δίνει

$$0 = V''(\alpha)\alpha_{32}(u_2^2 - u_1^2)$$

το οποίο υπό την συνθήκη μη συντονισμού (3.15) και εφόσον $V''(\alpha) \neq 0$ σημαίνει ότι

$$\alpha_{32} = 0,$$

το οποίο σύμφωνα με την δεύτερη ισότητα στην (3.41) και την (3.39) συνεπάγεται

$$\Omega_3 = 0. \quad (3.43)$$

Το εσωτερικό γινόμενο της (3.40) με e_3 δίνει

$$0 = V''(\alpha)\alpha_{33}(u_3^2 - u_1^2) + \frac{V'''(\alpha)}{\sqrt{2}}\alpha_{22}u_1u_2u_3 + \frac{V^{(4)}(\alpha)}{12}u_1^3u_3.$$

δηλαδή υπό την συνθήκη μη συντονισμού (3.15) για $i = 3$ και εφόσον $V''(\alpha) \neq 0$, και χρησιμοποιώντας τον τύπο (3.36) του α_{22}

$$\begin{aligned} V''(\alpha)\alpha_{33}(u_1^2 - u_3^2) &= \frac{V'''(\alpha)}{\sqrt{2}}\alpha_{22}u_1u_2u_3 + \frac{V^{(4)}(\alpha)}{12}u_1^3u_3 \cdot \alpha_{33} \\ &= \frac{1}{12} \frac{u_1^3u_3}{u_1^2 - u_3^2} \left(3 \left(\frac{V'''(\alpha)}{V''(\alpha)} \right)^2 \frac{u_2^2}{u_1^2 - u_2^2} + \frac{V^{(4)}(\alpha)}{V''(\alpha)} \right). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Τέλος, το εσωτερικό γινόμενο της (3.40) με e_i , $i \geq 4$, δίνει

$$0 = V''(\alpha)\alpha_{3i}(u_i^2 - u_1^2)$$

που, υπό τις συνθήκες μη συντονισμού (3.15) για $i \geq 4$ και εφόσον $V''(\alpha) \neq 0$, συνεπάγεται

$$\alpha_{3i} = 0 \quad \forall i \geq 4.$$

Συνοψίζοντας, έχουμε το αποτέλεσμα ότι

Υπό τη συνθήκη μη συντονισμού (3.15) και εφόσον $V''(\alpha) \neq 0$, το ανάπτυγμα (3.5) του $\omega^2(s)$ έχει τους συντελεστές $\tilde{\omega}^2 = \Omega_0$ και Ω_2 , όπως αυτοί δίνονται από τις (3.25) και (3.42), αντίστοιχα, ενώ $\Omega_3 = 0$, βλ. (3.43), ενώ το ανάπτυγμα (3.8) του $r(s)$ έχει εκτός του συντελεστή πρώτης (δηλαδή γραμμικής) τάξης $\alpha_1 = e_1$, τους συντελεστές $\alpha_2 = \alpha_{22}e_2$ και $\alpha_3 = \alpha_{33}e_3$, όπου τα α_{22} και α_{33} δίνονται από τους τύπους (3.36) και (3.44), αντίστοιχα. Σε όλα τα παραπάνω χρησιμοποιούμε τους τύπους $e_j(z) = \sqrt{2}\cos(2\pi jz)$ και $u_j = \frac{1}{\pi j}\sin(\pi j\kappa)$, $j \in \mathbb{N}$, όπου $\kappa \in (0, \frac{1}{2})$ ο κυματαριθμός.

Τέλος, αντικαθιστώντας στην εξίσωση (3.42) τα u_1, u_2 προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα

$$\Omega_2 = \frac{\sin^4 \kappa \pi}{4\pi^4} \left[\frac{(V'''(\alpha))^2}{V''(\alpha)} \cot^2 \kappa \pi + V^{(4)}(\alpha) \right].$$

Κεφάλαιο 3

Ομοίως αντικαθιστώντας τα u_1, u_2, u_3 στις εξισώσεις $\alpha_2(z) = \alpha_{22}e_2$ και $\alpha_3(z) = \alpha_{31}e_1 + \alpha_{33}e_3$ προκύπτουν τα ζητούμενα,

$$\begin{aligned}\alpha_2(z) &= \frac{\cot \kappa \pi}{2\pi} \frac{V'''(\alpha)}{V''(\alpha)} \cos 4\pi z, \\ \alpha_3(z) &= \left(\frac{\cot \kappa \pi}{4\pi} \frac{V'''(\alpha)}{V''(\alpha)} \right)^2 \sqrt{2} \cos 2\pi z \\ &\quad + \frac{1 + 2 \cos 2\kappa\pi}{32\pi^2(2 + \cos 2\kappa\pi)} \left[3 \left(\frac{V'''(\alpha)}{V''(\alpha)} \right)^2 \cot^2 \kappa\pi + \frac{V^{(4)}(\alpha)}{V''(\alpha)} \right] \sqrt{2} \cos 6\pi z.\end{aligned}$$

□

Ειδική περίπτωση: Για το εκθετικό δυναμικό (Toda chain) $V(x) = e^x$, η σχέση διασποράς για δοθέντα α και κ είναι:

$$\omega^2(s) = \tilde{\omega}^2 + \Omega_2 s^2 + O(s^4),$$

όπου

$$\tilde{\omega}^2(\alpha, \kappa) = V''(\alpha) \frac{1}{\pi^2} \sin^2 \pi \kappa.$$

Άρα για το εκθετικό δυναμικό έχουμε:

$$\tilde{\omega}^2 = e^\alpha \frac{\sin^2 \kappa \pi}{\pi^2}.$$

Ο συντελεστής Ω_2 με βάση το προηγούμενο Θεώρημα ισούται με:

$$\Omega_2 = \frac{\sin^4 \kappa \pi}{4\pi^4} \left[\frac{(V'''(\alpha))^2}{V''(\alpha)} \cot^2 \kappa \pi + V^{(4)}(\alpha) \right].$$

Επομένως έχουμε:

$$\begin{aligned}\Omega_2 &= \frac{\sin^4 \kappa \pi}{4\pi^4} \left[\frac{e^{2\alpha} \cos^2 \kappa \pi}{e^\alpha \sin^2 \kappa \pi} + e^\alpha \right] \\ &= e^\alpha \frac{\sin^4 \kappa \pi}{4\pi^4} + e^\alpha \frac{\sin^2 \kappa \pi}{4\pi^4} \cos^2 \kappa \pi \\ &= e^\alpha \frac{\sin^2 \kappa \pi}{4\pi^4} (\sin^2 \kappa \pi + \cos^2 \kappa \pi) \\ &= e^\alpha \frac{\sin^2 \kappa \pi}{4\pi^4}.\end{aligned}$$

Οπότε,

$$\omega^2(s) = \frac{e^\alpha}{\pi^2} \sin^2 \kappa \pi \left(1 + \frac{1}{4\pi^2} s^2 + O(s^4) \right).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΔΙΑΜΟΡΦΩΜΕΝΑ ΟΔΕΥΟΝΤΑ ΚΥΜΑΤΑ

4.1 Οι εξισώσεις διαμόρφωσης του Whitham

Ορισμός 4.1.1. Μία διαμορφωμένη λύση οδεύοντος κύματος του συστήματος Σ.Δ.Ε. (2.1) είναι μία λύση της μορφής:

$$q_n(t) = \frac{1}{\epsilon} \Psi(X, T) + \tilde{q} \left(\frac{1}{\epsilon} \Theta(X, T) \right) + O(\epsilon), \quad (4.1)$$

όπου $\tilde{q}$ είναι μία περιοδική συνάρτηση με κανονικοποιημένη περίοδο ίση με 1, το ϵ είναι μία μικρή παράμετρος με $0 < \epsilon \ll 1$, $X = \epsilon n$, $T = \epsilon n$ είναι οι μακροσκοπικές μεταβλητές στο χώρο και στο χρόνο, αντίστοιχα, και Θ , Ψ είναι δύο λείες συναρτήσεις των μεταβλητών X και T με πρώτο όρο γραμμικό ως προς X, T , δηλαδή

$$\Psi(X, T) = O(\|(X, T)\|),$$

$$\Theta(X, T) = O(\|(X, T)\|).$$

Τα οδεύοντα κύματα

$$q_n(t) = \beta t - \alpha n + q(\omega t - \kappa n)$$

που επιλύουν την (2.1), και την ύπαρξη των οποίων αποδείξαμε στο Κεφάλαιο 2 για κάθε ανεξάρτητη τετράδα παραμέτρων $(\alpha, \beta, \kappa, \omega)$ είναι η ειδική περίπτωση των διαμορφωμένων οδευόντων κυμάτων, όπου

$$\Psi(X, T) = \beta T - \alpha X, \quad \Theta(X, T) = \omega T - \kappa X, \quad \tilde{q} = q \quad O(\epsilon) = 0, \quad (4.2)$$

το οποίο συνεπάγεται ότι οι μερικές παράγωγοι των συναρτήσεων διαμόρφωσης Ψ και Θ ως προς τις μακροσκοπικές μεταβλητές του χώρου, X , και του χρόνου, T ,

$$\begin{aligned} \Psi_X(X, T) &= -\alpha, & \Psi_T(X, T) &= \beta, \\ \Theta_X(X, T) &= -\kappa, & \Theta_T(X, T) &= \omega, \end{aligned}$$

δίνουν τις παραμέτρους του οδεύοντος κύματος (4.2). Στην ειδική περίπτωση του οδεύοντος κύματος οι παράμετροι αυτοί, δηλαδή οι μερικές παράγωγοι των Ψ και Θ , είναι σταθερές ως προς τον μακροσκοπικό χώρο και χρόνο, δηλαδή ως προς τις μεταβλητές X και T .

Ο *Gerald Beresford Whitham* (γεν. 1927) θεμελίωσε ουσιαστικά στη δεκαετία του 60 τη *Θεωρία Διαμορφωμένων Κυμάτων Διασποράς* (*modulated dispersive waves*) [20], [21], η οποία, σε γενικές γραμμές και αναφορικά με την περίπτωση μας, εικάζει ότι κάθε λύση της (2.1) μπορεί να εκφραστεί προσεγγιστικά ως ένα διαμορφωμένο οδεύον κύμα, δηλαδή ως μια λύση της μορφής (4.1), της οποίας οι μερικές παράγωγοι των συναρτήσεων διαμόρφωσης Ψ και Θ ,

$$\begin{aligned}\Psi_X(X, T) &=: -\alpha(X, T), & \Psi_T(X, T) &=: \beta(X, T), \\ \Theta_X(X, T) &=: -\kappa(X, T), & \Theta_T(X, T) &=: \omega(X, T),\end{aligned}$$

μπορούν να θεωρηθούν ως — ανεξάρτητες μεταξύ τους — παράμετροι ενός *διαμορφωμένου* (*modulated*) οδεύοντος κύματος, οι οποίες *στη γενική περίπτωση εξαρτώνται μακροσκοπικά από το χώρο και το χρόνο*.

Ως συνήθως, κάθε παραδοχή (*ansatz*) σχετικά με τη μορφή της λύσης ενός συστήματος εξισώσεων οδηγεί σε κάποιες αναγκαίες συνθήκες τις οποίες πρέπει να πληρούν οι παράμετροι που καθορίζουν τη μορφή αυτή. Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε ακριβώς με την εξαγωγή των αναγκαιών αυτών συνθηκών που πρέπει να πληρούν οι συναρτήσεις διαμόρφωσης Ψ και Θ ούτως ώστε η (4.1) να είναι προσεγγιστικά, δηλαδή στο όριο όπου $\epsilon \rightarrow 0$, λύση της (2.1). Θα αποδειχθεί ότι οι αναγκαίες αυτές συνθήκες είναι ένα πεπλεγμένο σύστημα μη γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων μεταφοράς για τις παραμέτρους $(\alpha, \beta, \kappa, \omega)$ ως προς τις μακροσκοπικές τους μεταβλητές X και T (βλ. (4.15)). Το σύστημα αυτό — και κάθε αντίστοιχο που προκύπτει μέσω διαμόρφωσης — αποτελείται από τις *εξισώσεις διαμόρφωσης του Whitham*. Όπως θα δούμε η εξαγωγή των εξισώσεων αυτών είναι από μαθηματική άποψη σχετικά απλή και στηρίζεται στην εφαρμογή της Αρχής του Hamilton ή στη Μέθοδο του Λογισμού Μεταβολών. Τονίζουμε, ότι η σχετική ευκολία της εξαγωγής των εξισώσεων Whitham δεν προκύπτει από τα ειδικά χαρακτηριστικά της πρότυπης εξίσωσης (2.1) που εξετάζουμε εδώ, αλλά από την ιδιότητά τους να είναι αναγκαίες συνθήκες μιας παραδοχής.

Η δυσκολία στη Θεωρία Διαμόρφωσης, από μαθηματική άποψη, βρίσκεται στην *αυστηρή δικαιολόγηση* των εξισώσεων αυτών, η οποία ουσιαστικά αποτελείται από την απόδειξη ότι *πραγματικά υπάρχουν λύσεις της πρότυπης εξίσωσης (2.1) που έχουν — προσεγγιστικά — τη μορφή της συγκεκριμένης παραδοχής (4.1)*. Αυτό είναι για τη γενική μορφή της μη γραμμικής εξίσωσης (2.1), δηλαδή για γενικά λεία κυρτά υπερ-αρμονικά δυναμικά V , και γενικές λύσεις της μορφής (4.1) ακόμα ένα άλυτο πρόβλημα, παρ'όλες τις επιβεβαιώσεις που παρέχουν πάρα πολλές αριθμητικές προσομοιώσεις για μια τεράστια πληθώρα ειδικών και τελείως διαφορετικών περιπτώσεων. Η αυστηρή δικαιολόγηση έχει επιτευχθεί είτε για δυναμικά V ειδικής μορφής που παρέχουν περισσότερες πληροφορίες για την πρότυπη και άρα και για τις παραγόμενες εξισώσεις, όπως π.χ. για το αρμονικό δυναμικό, που κάνει την (2.1) γραμμική, ή το δυναμικό Toda, που καθιστά την (2.1) ολοκληρώσιμη, είτε για ειδικές λύσεις, όπως π.χ. λύσεις μικρού πλάτους, που επιτρέπουν τη χρήση άλλων τεχνικών (ουσιαστικά γενικεύσεις του αναπτύγματος Taylor), όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 3. Η ανάλυση των εξισώσεων Whitham παρουσιάζει και από πλευράς της Θεωρίας των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων προς το παρόν σχεδόν ανυπέρβλητες δυσκολίες καθότι (α) πρόκειται για σύστημα εξισώσεων, δηλαδή έχει διανυσματικές λύσεις, (β) κάθε εξίσωση είναι μη γραμμική εξίσωση μεταφοράς με λύσεις που παρουσιάζουν χρούσεις (*shocks*) και (γ) οι εξισώσεις είναι μη

γραμμικά πεπλεγμένες. Στη παρούσα εργασία δεν θα αναφέρουμε τίποτα ούτε σχετικά με τις ιδιότητες των εξισώσεων Whitham ούτε σχετικά με την αυστηρή δικαιολόγησή τους ως προσεγγιστικές (ή οριακές) εξισώσεις της πρότυπης εξίσωσης (2.1), για τα οποία θέματα παραπέμπουμε στις εργασίες [7], [8] και [9], αλλά θα αρκεστούμε στην εξαγωγή τους (derivation) από την (2.1).

Αναπτύσσοντας τις συναρτήσεις Θ και Ψ κατά Taylor γύρω από το σημείο (X_0, T_0) , με $X - X_0 = \epsilon(n - n_0)$ και $T - T_0 = \epsilon(t - t_0)$ προκύπτει:

$$\begin{aligned} \Psi(X, T) &= \Psi(X_0, T_0) + (X - X_0)\Psi_X(X_0, T_0) + (T - T_0)\Psi_T(X_0, T_0) \\ &\quad + O(\|(X - X_0, T - T_0)\|^2) \end{aligned} \quad (4.3)$$

και

$$\begin{aligned} \Theta(X, T) &= \Theta(X_0, T_0) + (X - X_0)\Theta_X(X_0, T_0) + (T - T_0)\Theta_T(X_0, T_0) \\ &\quad + O(\|(X - X_0, T - T_0)\|^2) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.3) και (4.4) στην εξίσωση (4.1) θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} q_n(t) &= \frac{1}{\epsilon} \left[\Psi(X_0, T_0) + (X - X_0)\Psi_X(X_0, T_0) + (T - T_0)\Psi_T(X_0, T_0) \right. \\ &\quad \left. + O(\|(X - X_0, T - T_0)\|^2) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{q} \left(\frac{1}{\epsilon} \left(\Theta(X_0, T_0) + (X - X_0)\Theta_X(X_0, T_0) + (T - T_0)\Theta_T(X_0, T_0) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + O(\|(X - X_0, T - T_0)\|^2) \right) \right] + O(\epsilon) \\ &= \frac{1}{\epsilon} X \Psi_X(X_0, T_0) + \frac{1}{\epsilon} T \Psi_T(X_0, T_0) + q \left(\Theta_0(X_0, T_0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\epsilon} X \Theta_X(X_0, T_0) + \frac{1}{\epsilon} T \Theta_T(X_0, T_0) \right) + O(\epsilon), \end{aligned} \quad (4.5)$$

όπου

$$\begin{aligned} q(z) &:= \Psi_0(X_0, T_0) + \tilde{q}(\Theta_0(X_0, T_0) + z), \quad z \in \mathbb{R}, \\ \Psi_0(X_0, T_0) &:= \frac{1}{\epsilon} \left(\Psi(X_0, T_0) - X_0 \Psi_X(X_0, T_0) - T_0 \Psi_T(X_0, T_0) \right. \\ &\quad \left. + O(\|(X - X_0, T - T_0)\|^2) \right), \\ \Theta_0(X_0, T_0) &:= \frac{1}{\epsilon} \left(\Theta(X_0, T_0) - X_0 \Theta_X(X_0, T_0) - T_0 \Theta_T(X_0, T_0) \right. \\ &\quad \left. + O(\|(X - X_0, T - T_0)\|^2) \right) \end{aligned}$$

με $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 1-περιοδική.

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις $X - X_0 = \epsilon(n - n_0)$ και $T - T_0 = \epsilon(t - t_0)$ στην εξίσωση (4.5) προκύπτει:

$$q_n(t) = \Psi_X(X_0, T_0)n + \Psi_T(X_0, T_0)t + q \left(\Theta_X(X_0, T_0)n + \Theta_T(X_0, T_0)t \right) + O(\epsilon) \quad (4.6)$$

και ισχύει

$$\Psi_0(X_0, T_0) = O(1) \quad \text{για } \epsilon \rightarrow 0 \quad \text{και} \quad \Theta_0(X_0, T_0) = O(1) \quad \text{για } \epsilon \rightarrow 0.$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (4.6) είναι της μορφής:

$$q_n(t) = \beta t - \alpha n + q(\omega t - \kappa n) + O(\epsilon) \quad (4.7)$$

με

$$\omega(X, T) = \Theta_T(X, T), \quad \kappa(X, T) = -\Theta_X(X, T) \quad (4.8)$$

$$\beta(X, T) = \Psi_T(X, T), \quad \alpha(X, T) = -\Psi_X(X, T) \quad (4.9)$$

Προκειμένου να βρούμε τις εξισώσεις διαμόρφωσης που περιγράφουν πώς οι παράμετροι $(\alpha, \beta, \kappa, \omega)$ πρέπει να εξελίσσονται ώστε η εξίσωση (4.7) να επαληθεύει το Σ.Δ.Ε. (2.1), θα χρησιμοποιήσουμε ένα επιχείρημα του Λογισμού Μεταβολών, το οποίο, όπως προαναφέραμε, οφείλεται στον Whitham. Αρχικά θα εισάγουμε κάποιες βασικές έννοιες του Λογισμού Μεταβολών όπως αυτός εφαρμόζεται στην Κλασική Μηχανική, στην απλούστερη περίπτωση. Για περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [23].

Ορισμός 4.1.2. Η δράση S ενός συστήματος το οποίο βρισκόταν αρχικά στην κατάσταση A και περιήλθε στην κατάσταση B , είναι ένα φυσικό μέγεθος το οποίο ορίζεται ως εξής:

$$S \equiv \int_A^B L(\alpha_i, \dot{\alpha}_i, \ddot{\alpha}_i, \dots, t) dt$$

όπου L είναι η συνάρτηση του *Lagrange* του συστήματος και α_i μέγεθος που περιγράφει το σύστημα.

Η Αρχή της Ελάχιστης Δράσης ή Αρχή του Hamilton είναι μια αρχή της φυσικής βάσει της οποίας τα φυσικά συστήματα συμπεριφέρονται έτσι ώστε η δράση να στασιμοποιείται. Αυτή είναι μία αρχή η οποία φαίνεται να έχει γενική ισχύ στη φυσική και εφαρμόζεται σε διάφορα φυσικά συστήματα. Αρχικά, εφαρμόστηκε σε κλασικά μηχανικά συστήματα. Η στασιμοποίηση έγκειται στη μεταβολή της δράσης κατά τάξη ϵ^2 ή μεγαλύτερης, όταν το μέγεθος α_i αλλάζει κατά τάξη ϵ ως:

$$\tilde{\alpha}_i = \alpha_i + \epsilon n_i$$

Το n_i είναι μια συνεχής συνάρτηση που δείχνει τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται το μέγεθος α_i και το ϵ δείχνει το μέγεθος της μεταβολής αυτής και για την οποία πρέπει να ισχύει:

$$n_i(A) = n_i(B) = 0,$$

απαιτείται δηλαδή από το μέγεθος $\tilde{\alpha}_i$ να έχει ακριβώς την ίδια τιμή με το α_i στις καταστάσεις A και B της αρχής και του τέλους αντίστοιχα. Η εφαρμογή της Αρχής του Hamilton σε ένα κλασικό μηχανικό σύστημα μας οδηγεί στις εξισώσεις Euler-Lagrange, που είναι οι εξισώσεις που πρέπει να ικανοποιούνται ώστε να ελαχιστοποιείται η δράση και είναι ισοδύναμες με τον δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα. Η συνάρτηση Lagrange σε

αυτή την περίπτωση θα είναι της μορφής $L = L(q(t), \dot{q}(t), t)$, όπου q είναι οι θέσεις του συστήματος και η δράση εξ' ορισμού θα είναι ίση με:

$$S(q) = \int_{t_A}^{t_B} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt.$$

Υποθέτουμε ότι η $q(t)$ είναι η τροχιά που ελαχιστοποιεί τη δράση και $\tilde{q}(t) = q(t) + \epsilon n(t)$ μια παρέκκλιση αυτής της τροχιάς. Η μεταβολή της δράσης θα είναι:

$$\begin{aligned} \Delta S &= S(\tilde{q}) - S(q) \\ &= \int_{t_A}^{t_B} L(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t) dt - \int_{t_A}^{t_B} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt \\ &= \int_{t_A}^{t_B} L(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t) - L(q(t), \dot{q}(t), t) dt. \end{aligned}$$

Το ανάπτυγμα της $L(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t)$ κατά Taylor δίνει:

$$L(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t) = L(q(t), \dot{q}(t), t) + \epsilon \left(\frac{\partial L}{\partial q} n + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{n} \right) + O(\epsilon^2).$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \Delta S &= \epsilon \int_{t_A}^{t_B} \left(\frac{\partial L}{\partial q} n + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{n} \right) dt + O(\epsilon^2) \\ &= \epsilon \int_{t_A}^{t_B} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) n dt + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Βάσει της Αρχής του Hamilton πρέπει να μηδενιστεί ο όρος τάξης ϵ , δηλαδή πρέπει πάντοτε να ισχύει:

$$\int_{t_A}^{t_B} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) n dt = 0,$$

και εφόσον η συνάρτηση n είναι τυχαία, οδηγούμαστε στην εξίσωση Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

Στην περίπτωση μας η κανονικοποιημένη δράση ενός μεγάλου κομματιού της αλυσίδας σωματιδίων (2.1), $\frac{N_1}{\epsilon} \leq n \leq \frac{N_2}{\epsilon}$, στο διάστημα $\frac{T_1}{\epsilon} \leq t \leq \frac{T_2}{\epsilon}$, με $N_1 < N_2$ και $T_1 < T_2$ δίνεται από το:

$$A = C \epsilon^2 \int_{\frac{T_1}{\epsilon}}^{\frac{T_2}{\epsilon}} \sum_{n=n_1}^{n_2} \left(\frac{1}{2} \dot{q}_n(t)^2 - V(q_{n-1} - q_n) \right) dt, \quad (4.10)$$

όπου η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι η συνάρτηση Lagrange για την (2.1) (με q_n όπου q στην προηγούμενη παρουσίαση) και $C = \frac{1}{T_2 - T_1} \frac{1}{N_2 - N_1}$ έτσι ώστε $C \epsilon^2 = \frac{1}{\frac{T_2 - T_1}{\epsilon}} \frac{1}{\frac{N_2 - N_1}{\epsilon}}$ και τα $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ είναι τέτοια ώστε

$$n_1 - 1 < \frac{N_1}{\epsilon} \leq n_1, \quad n_2 \leq \frac{N_2}{\epsilon} < n_2 + 1.$$

Εναλλάσσοντας τη σειρά άθροισης και ολοκλήρωσης και διαμερίζοντας το πεδίο του ολοκληρώματος προκύπτει ότι:

$$A = C\epsilon^2 \sum_{n=n_1}^{n_2} \sum_{i=1}^m \left[\int_{t_i}^{t_i+2\delta_i} \left(\frac{1}{2} \dot{q}_n(t)^2 - V(q_{n-1} - q_n) \right) dt \right] + O(\epsilon), \quad (4.11)$$

όπου $2\delta_i := \frac{1}{\omega(\epsilon n, \epsilon t_i)}$ και $m \in \mathbb{N}$, το οποίο προκύπτει από την ακόλουθη διαδικασία διαμέρισης του $\left[\frac{T_1}{\epsilon}, \frac{T_2}{\epsilon}\right]$:

Η συνάρτηση $\omega(\epsilon n, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ εκφράζει τη συχνότητα του κύματος της μορφής (4.7) στο σημείο του χώρου με τη μακροσκοπική μεταβλητή $\epsilon n \in \mathbb{R}$ και για μακροσκοπικούς χρόνους $T \in \mathbb{R}$. Οι τιμές της θεωρούνται πάντα θετικές και η συνάρτηση είναι λεία και άρα και συνεχής. Συνεπώς,

$$\omega(\epsilon n, T) \in [\mu, M] \subset (0, \infty) \quad \forall T \in [T_1, T_2],$$

όπου $\mu := \min\{\omega(\epsilon n, T) : T \in [T_1, T_2]\}$, $M := \max\{\omega(\epsilon n, T) : T \in [T_1, T_2]\}$. Τα σημεία της διαμέρισης μπορούν να επιλεγούν επαγωγικά ως εξής:

$$t_1 := \frac{T_1}{\epsilon}, \quad t_{i+1} := t_i + 2\delta_i \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad \text{όπου } t_{m+1} \leq \frac{T_2}{\epsilon} < t_{m+1} + 2\delta_{m+1}.$$

Η ακολουθία των t_i , $i = 1, 2, \dots$ είναι γνησίως αύξουσα και μη φραγμένη, αφού

$$t_{i+1} - t_i = 2\delta_i = \frac{1}{\omega(\epsilon n, \epsilon t_i)} \geq \frac{1}{M} > 0,$$

και συνεπώς προκύπτει μια διαμέριση

$$\bigcup_{i=1}^m [t_i, t_{i+1}] \cup \left[t_{m+1}, \frac{T_2}{\epsilon} \right] = \left[\frac{T_1}{\epsilon}, \frac{T_2}{\epsilon} \right].$$

Επίσης ισχύει

$$\begin{aligned} & \left| \int_{T_1/\epsilon}^{T_2/\epsilon} f(t) dt - \sum_{i=1}^m \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t) dt \right| = \left| \int_{t_{m+1}}^{T_2/\epsilon} f(t) dt \right| = \frac{1}{\epsilon} \left| \int_{\epsilon t_{m+1}}^{T_2} f(T/\epsilon) dT \right| \\ & \leq c \frac{1}{\epsilon} (T_2 - \epsilon t_{m+1}) < c 2\delta_{m+1} \leq \frac{c}{\mu}, \quad \text{όπου } c := \max\{|f(T/\epsilon)| : T \in [\epsilon t_{m+1}, T_2]\}. \end{aligned}$$

Αν ως f θεωρήσουμε την ολοκληρωτέα συνάρτηση μέσα στην παρένθεση της δράσης (4.11), όπου η q_n δίνεται από την (4.7) με τις παραμέτρους $\alpha, \beta, \kappa, \omega$ των (4.8) και (4.9), που εξαρτώνται μόνο από τις μακροσκοπικές μεταβλητές $(X, T) \in [N_1, N_2] \times [T_1, T_2]$ και θεωρούνται λείες, και γνωρίζοντας ότι η q είναι 1-περιοδική και οι q και V είναι λείες, προκύπτει ότι για αυτό το f η σταθερά c της πιο πάνω εκτίμησης σφάλματος είναι ανεξάρτητη από το $\epsilon > 0$ και μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε να ισχύει ομοιόμορφα για $(X, T) \in [N_1, N_2] \times [T_1, T_2]$, δηλαδή, ειδικότερα, για κάθε $\epsilon n \in [N_1, N_2]$. Συνεπώς, το σφάλμα μεταξύ του A , όπως δίνεται στην (4.10) και του αθροίσματος στην (4.11) είναι της τάξης

$$C\epsilon \left(\epsilon \sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{c}{\mu} \right) = C\epsilon \frac{c}{\mu} \epsilon (n_2 - n_1 + 1) \leq C\epsilon \frac{c}{\mu} (N_2 - N_1 + \epsilon) = O(\epsilon),$$

όπως σημειώνεται στην (4.11). Εισάγοντας τη συνάρτηση (4.7) στη σχέση (4.11), υπολογίζουμε το κάθε ολοκλήρωμα, προσεγγίζοντας τις αργά μεταβαλλόμενες παραμέτρους του κύματος με τις σταθερές τιμές

$$\alpha_i = \alpha(\epsilon n, \epsilon t_i), \quad \beta_i = \beta(\epsilon n, \epsilon t_i), \quad \kappa_i = \kappa(\epsilon n, \epsilon t_i), \quad \omega_i = \omega(\epsilon n, \epsilon t_i).$$

Το σφάλμα που προκύπτει είναι της τάξης $O(\epsilon)$ σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής (ή γενικότερα το Θεώρημα του Taylor), αφού

$$g(\epsilon t) - g(\epsilon t_i) = g'(\epsilon t_i + \tau(t)\epsilon(t - t_i))\epsilon(t - t_i), \quad \tau(t) \in (0, 1), \quad \forall t \in (t_i, t_{i+1})$$

και συνεπώς

$$|g(\epsilon t) - g(\epsilon t_i)| \leq c_1 \epsilon 2\delta_i \quad \forall t \in (t_i, t_{i+1}),$$

όπου $c_1 := \max\{g'(T) : T \in [T_1, T_2]\}$. Θεωρώντας ως g τις παραμετρικές συναρτήσεις $\alpha, \beta, \kappa, \omega$, και χρησιμοποιώντας την 1-περιοδικότητα της q και την λειότητα όλων των εμπλεκόμενων συναρτήσεων, προκύπτει με συλλογισμούς, όπως αυτούς μετά την (4.11), ότι το σφάλμα που προκύπτει σε σχέση με το A της (4.11) είναι πάλι της τάξης $O(\epsilon)$ και συνεπώς η τελευταία γίνεται

$$A = C\epsilon^2 \sum_{n=n_1}^{n_2} \sum_{i=1}^m I(n, i) + O(\epsilon), \quad (4.12)$$

με

$$I(n, i) = \int_{t_i}^{t_i+2\delta_i} \left(\frac{1}{2}(\omega_i q'(\omega_i t - \kappa_i n) + \beta_i)^2 - V(q(\omega_i t - \kappa_i(n-1)) - q(\omega_i t - \kappa_i n) + \alpha_i) \right) dt.$$

Όμως,

$$\begin{aligned} I(n, i) &= \frac{1}{\omega_i} \int_{\omega_i t_i - n\kappa_i}^{\omega_i(t_i+2\delta_i) - n\kappa_i} \left(\frac{1}{2}(\omega_i q'(z) + \beta_i)^2 - V(q(z + \kappa_i)) - q(z) + \alpha_i \right) dz \\ &= \frac{1}{\omega_i} \int_{\text{περίοδος του } q} \left(\frac{1}{2}(\omega_i q'(z) + \beta_i)^2 - V(q(z + \kappa_i)) - q(z) + \alpha_i \right) dz \\ &= \frac{1}{\omega_i} \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(\omega_i q'(z) + \beta_i)^2 - V(q(z + \kappa_i)) - q(z) + \alpha_i \right) dz \\ &= \frac{1}{\omega_i} \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(\omega_i^2 r^2(z) + \beta_i^2 + 2\omega_i r(z)\beta_i) - V(\alpha_i + \int_z^{z+\kappa_i} r(z')dz') \right) dz \\ &= \frac{1}{\omega_i} \left(\frac{1}{2}\omega_i^2 s^2 + \frac{1}{2}\beta_i^2 - \int_0^1 V(\alpha_i + \int_z^{z+\kappa_i} r(z')dz') dz \right), \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη μεταβλητή φάσης $z = \omega_i t - \kappa_i n$, το ότι $2\omega_i \delta_i = 1$, την 1-περιοδικότητα του q , και το ότι $r(z) = q'(z)$, $\int_0^1 r^2(z)dz = s^2$ και $\int_0^1 r(z)dz = 0$, όπου s είναι το πλάτος κύματος. Έτσι, εισάγοντας τη συνάρτηση

$$G(\alpha, \beta, \kappa, \omega) = \frac{1}{2}\omega^2 s^2 + \frac{1}{2}\beta^2 - \int_0^1 V\left(\alpha + \int_z^{z+\kappa} r(z')dz'\right) dz \quad (4.13)$$

η (4.12) γράφεται ως

$$A = C\epsilon^2 \sum_{n=n_1}^{n_2} \sum_{i=1}^m \frac{1}{\omega_i} G(\alpha_i, \beta_i, \kappa_i, \omega_i) + O(\epsilon). \quad (4.14)$$

Παρατηρώντας τώρα ότι οι παραμετρικές συναρτήσεις $\alpha, \beta, \kappa, \omega$ και άρα και η συνάρτηση $G(\alpha, \beta, \kappa, \omega)$ εξαρτώνται μόνο από τις μακροσκοπικές μεταβλητές $X = \epsilon n$ και $T = \epsilon t$, μπορούμε να θεωρήσουμε το διπλό άθροισμα στην (4.14) ως ένα άθροισμα Riemann του διπλού ολοκληρώματος ως προς X και T της $G(\alpha, \beta, \kappa, \omega)$ με διαμέριση του πεδίου ολοκλήρωσης $[N_1, N_2] \times [T_1, T_2]$ σε ορθογώνια μήκους πλευρών

$$\Delta X = \epsilon(n+1) - \epsilon n = \epsilon, \quad \Delta T = \epsilon t_{i+1} - \epsilon t_i = \epsilon 2\delta_i = \frac{\epsilon}{\omega_i}.$$

Έτσι, στο όριο $\epsilon \rightarrow 0$, η δράση A της (4.10), που αντιστοιχεί στην διακριτή ως προς το χώρο ($n \in \mathbb{N}$) και συνεχή ως προς το χρόνο ($t \in \mathbb{R}$) εξίσωση (2.1), συγκλίνει στο διπλό ολοκλήρωμα μιας συνεχούς συνάρτησης του μακροσκοπικού χώρου ($X \in \mathbb{R}$) και χρόνου ($T \in \mathbb{R}$),

$$A \longrightarrow \frac{1}{(N_2 - N_1)(T_2 - T_1)} \int_{N_1}^{N_2} \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{1}{2} \beta^2 - V(\alpha) + F(\alpha, \kappa, \omega) \right) dT dX$$

όταν $\epsilon \rightarrow 0$.

Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε την Αρχή Ελάχιστης Δράσης ή Αρχή του Hamilton. Οι εξισώσεις Euler-Lagrange θα μας δώσουν τις διαμορφωμένες εξισώσεις (modulation equations).

Θεώρημα 4.1.3. Οι εξισώσεις διαμόρφωσης για τις παραμέτρους $(\alpha, \beta, \kappa, \omega)$ του διαμορφωμένου κύματος (4.7), (4.8) και (4.9) είναι οι:

$$M \partial_X \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \kappa \\ \omega \end{pmatrix} + N \partial_T \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \kappa \\ \omega \end{pmatrix} = 0, \quad (4.15)$$

όπου οι πίνακες

$$M = \begin{pmatrix} V''(\alpha) - F_{\alpha\alpha} & 0 & -F_{\alpha\kappa} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -F_{\alpha\kappa} & 0 & -F_{\kappa\kappa} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{\omega\omega} \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

και

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & F_{\alpha\omega} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ F_{\alpha\omega} & 0 & 2F_{\kappa\omega} & F_{\omega\omega} \\ 0 & 0 & F_{\omega\omega} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

είναι πραγματικοί και συμμετρικοί, η συνάρτηση F δίνεται από την

$$F(\alpha, \kappa, \omega) = \frac{\omega^2 s^2}{2} + V(\alpha) - \int_0^1 V \left(\alpha + \int_z^{z+\kappa} r(z') dz' \right) dz, \quad (4.18)$$

και χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς $F_{\kappa\kappa} = \frac{\partial^2 F}{\partial^2 \kappa}$, $F_{\kappa\omega} = \frac{\partial^2 F}{\partial \kappa \partial \omega}$, ...

Απόδειξη. Η Αρχή του Hamilton γενικεύεται και στην περίπτωση εξάρτησης της συνάρτησης Lagrange από την μεταβλητή του χώρου. Οι εξισώσεις διαμόρφωσης του Whitham δεν είναι τίποτα άλλο από τις εξισώσεις Euler-Lagrange, που αντιστοιχούν στο πρόβλημα του Λογισμού Μεταβολών, όπου θέλουμε να βρούμε τα στάσιμα σημεία (Ψ, Θ) της δράσης $\mathcal{A}[\Psi, \Theta]$, δηλαδή απαιτούμε

$$\delta \mathcal{A}[\Psi, \Theta] = \delta \int \int G(\alpha, \beta, \kappa, \omega) dX dT = \delta \int \int G(-\Psi_X, \Psi_T, -\Theta_X, \Theta_T) dX dT = 0.$$

Ως γενίκευση αυτών που εκθέσαμε προηγουμένως, στην περίπτωση περισσότερων εξαρτημένων μεταβλητών μόνο από το χρόνο, η μέθοδος εξαγωγής των συναρτήσεων Euler-Lagrange είναι η εξής: Θεωρούμε μικρές μεταβολές $\delta\Psi$, $\delta\Theta$ των συναρτήσεων Ψ, Θ των (X, T) , όπου το μέγεθός τους μετρείται ως προς τη νόρμα

$$\|\delta\Theta\| = \max\{\|\delta\Theta\|_\infty, \|(\delta\Theta)_X\|_\infty, \|(\delta\Theta)_T\|_\infty\}$$

και ανάλογα για το $\delta\Psi$. Έτσι έχουμε για την μεταβολή του Θ εφαρμόζοντας το Θεώρημα Taylor

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[\Psi, \Theta + \delta\Theta] - \mathcal{A}[\Psi, \Theta] &= \int \int [G(-\Psi_X, \Psi_T, -\Theta_X - (\delta\Theta)_X, \Theta_T + (\delta\Theta)_T) \\ &\quad - G(-\Psi_X, \Psi_T, -\Theta_X, \Theta_T)] dX dT \\ &= \int \int [-G_\kappa(\delta\Theta)_X + G_\omega(\delta\Theta)_T] dX dT + O(\|\delta\Theta\|^2) \\ &= \int \int \left[\frac{\partial}{\partial X} G_\kappa - \frac{\partial}{\partial T} G_\omega \right] \delta\Theta dX dT + O(\|\delta\Theta\|^2), \end{aligned}$$

όπου για την τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε παραγοντική ολοκλήρωση ως προς X και T , θεωρώντας ότι το $\delta\Theta$ μηδενίζεται στα άκρα του πεδίου ολοκλήρωσης. Η απαίτηση $\delta\mathcal{A}=0$ ισοδυναμεί με την απαίτηση το τελευταίο ολοκλήρωμα να μηδενίζεται για κάθε $\delta\Theta$, και από αυτό προκύπτει η εξίσωση για την

$$\Theta\text{-μεταβολή: } \frac{\partial G_\omega}{\partial T} - \frac{\partial G_\kappa}{\partial X} = 0. \quad (4.19)$$

Με την ανάλογη διαδικασία για την μεταβολή του Ψ προκύπτει και η εξίσωση για την

$$\Psi\text{-μεταβολή: } \frac{\partial G_\beta}{\partial T} - \frac{\partial G_\alpha}{\partial X} = 0. \quad (4.20)$$

Απαλείφοντας τις συναρτήσεις Θ και Ψ στις σχέσεις (4.8) και (4.9) προκύπτει:

$$\frac{\partial \omega}{\partial X} = \Theta_{TX}(X, T),$$

$$\frac{\partial \kappa}{\partial T} = -\Theta_{XT}(X, T),$$

και

$$\frac{\partial \beta}{\partial X} = \Psi_{TX}(X, T),$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial T} = -\Psi_{XT}(X, T).$$

Επομένως προκύπτουν οι εξισώσεις συνοχής (consistency equations):

$$\frac{\partial \omega}{\partial X} + \frac{\partial \kappa}{\partial T} = 0, \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial X} + \frac{\partial \alpha}{\partial T} = 0. \quad (4.22)$$

Με τη συνάρτηση F η G γράφεται

$$G(\alpha, \beta, \kappa, \omega) = \frac{1}{2}\beta^2 - V(\alpha) + F(\alpha, \kappa, \omega), \quad (4.23)$$

από την οποία προκύπτουν οι σχέσεις

$$G_\alpha = F_\alpha - V'(\alpha), \quad G_\beta = \beta, \quad G_\kappa = F_\kappa, \quad G_\omega = F_\omega.$$

Συνεπώς οι (4.19) και (4.20) γράφονται,

$$\frac{\partial F_\omega}{\partial T} - \frac{\partial F_\kappa}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial \beta}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial X}(F_\alpha - V'(\alpha)) = 0.$$

Στη συνέχεια εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας προκύπτει:

$$F_{\omega\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial T} + F_{\omega\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial T} + F_{\omega\omega} \frac{\partial \omega}{\partial T} - F_{\kappa\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial X} - F_{\kappa\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial X} - F_{\kappa\omega} \frac{\partial \omega}{\partial X} = 0, \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial T} - (F_{\alpha\alpha} - V''(\alpha)) \frac{\partial \alpha}{\partial X} - F_{\alpha\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial X} - F_{\alpha\omega} \frac{\partial \omega}{\partial X} = 0. \quad (4.25)$$

Οι εξισώσεις (4.25), (4.22), (4.24) και (4.21) γραμμένες με αυτή τη σειρά ως γραμμές πίνακα δίνουν

$$\begin{pmatrix} V''(\alpha) - F_{\alpha\alpha} & 0 & -F_{\alpha\kappa} & -F_{\alpha\omega} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -F_{\alpha\kappa} & 0 & -F_{\kappa\kappa} & -F_{\kappa\omega} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \partial_X \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \kappa \\ \omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ F_{\alpha\omega} & 0 & F_{\omega\kappa} & F_{\omega\omega} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_T \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \kappa \\ \omega \end{pmatrix} = 0.$$

Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση $\frac{\partial \omega}{\partial X} + \frac{\partial \kappa}{\partial T} = 0$ με $F_{\omega\omega}$ και το παραπάνω σύστημα γίνεται:

$$\begin{pmatrix} V''(\alpha) - F_{\alpha\alpha} & 0 & -F_{\alpha\kappa} & -F_{\alpha\omega} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -F_{\alpha\kappa} & 0 & -F_{\kappa\kappa} & -F_{\kappa\omega} \\ 0 & 0 & 0 & F_{\omega\omega} \end{pmatrix} \partial_X \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \kappa \\ \omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ F_{\alpha\omega} & 0 & F_{\omega\kappa} & F_{\omega\omega} \\ 0 & 0 & F_{\omega\omega} & 0 \end{pmatrix} \partial_T \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \kappa \\ \omega \end{pmatrix} = 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (4.21) με $-F_{\alpha\omega}$ και $-F_{\kappa\omega}$ έχουμε:

$$-F_{\alpha\omega} \partial_X \omega = F_{\alpha\omega} \partial_T \kappa, \quad -F_{\kappa\omega} \partial_X \omega = F_{\kappa\omega} \partial_T \kappa$$

και αντικαθιστώντας στο προηγούμενο σύστημα στην πρώτη και τρίτη γραμμή, αντίστοιχα, προκύπτει:

$$\begin{pmatrix} V''(\alpha) - F_{\alpha\alpha} & 0 & -F_{\alpha\kappa} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -F_{\alpha\kappa} & 0 & -F_{\kappa\kappa} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{\omega\omega} \end{pmatrix} \partial_X \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \kappa \\ \omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & F_{\alpha\omega} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ F_{\alpha\omega} & 0 & 2F_{\kappa\omega} & F_{\omega\omega} \\ 0 & 0 & F_{\omega\omega} & 0 \end{pmatrix} \partial_T \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \kappa \\ \omega \end{pmatrix} = 0.$$

□

4.2 Οι εξισώσεις διαμόρφωσης για αυτοόμοια μεταβλητή

Στο κρουστικό πρόβλημα (shock problem) που αναφέραμε στην εισαγωγή, η κατάσταση της αλυσίδας εξαρτάται μόνο από μία αυτοόμοια (*self-similar*) μεταβλητή $\xi = \frac{X}{T}$, δηλαδή

$$\alpha(X, T) = \alpha\left(\frac{X}{T}\right) = \alpha(\xi) \quad (4.26)$$

και αντίστοιχα για τις υπόλοιπες μακροσκοπικές παραμέτρους β, κ, ω . Έτσι σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας, οι μερικές παράγωγοι ως προς X και T της α παίρνουν την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} \partial_X \alpha &= \frac{\partial \alpha}{\partial X} = \frac{d\alpha}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial X} = \frac{d\alpha}{d\xi} \frac{\partial \left(\frac{X}{T}\right)}{\partial X} = \frac{1}{T} \frac{d\alpha}{d\xi}, \\ \partial_T \alpha &= \frac{\partial \alpha}{\partial T} = \frac{d\alpha}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial T} = \frac{d\alpha}{d\xi} \frac{\partial \left(\frac{X}{T}\right)}{\partial T} = -\frac{X}{T^2} \frac{d\alpha}{d\xi} = -\frac{1}{T} \left(\frac{X}{T}\right) \frac{d\alpha}{d\xi} = -\frac{\xi}{T} \frac{d\alpha}{d\xi}. \end{aligned}$$

Άρα γενικώς,

$$\partial_T = -\frac{\xi}{T} \frac{d}{d\xi}, \quad \partial_X = \frac{1}{T} \frac{d}{d\xi}. \quad (4.27)$$

Συνεπώς, ως προς την καινούργια μεταβλητή ξ , οι εξισώσεις διαμόρφωσης (4.15) παίρνουν τη μορφή:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} V''(\alpha) - F_{\alpha\alpha} & 0 & -F_{\alpha\kappa} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -F_{\alpha\kappa} & 0 & -F_{\kappa\kappa} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{\omega\omega} \end{pmatrix} \frac{1}{T} \frac{d}{d\xi} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \kappa \\ \omega \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & 1 & F_{\alpha\omega} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ F_{\alpha\omega} & 0 & 2F_{\kappa\omega} & F_{\omega\omega} \\ 0 & 0 & F_{\omega\omega} & 0 \end{pmatrix} \left(-\frac{\xi}{T}\right) \frac{d}{d\xi} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \kappa \\ \omega \end{pmatrix} = 0, \end{aligned}$$

ή, ισοδύναμα, πολλαπλασιάζοντας με T , συμπεριλαμβάνοντας στον δεύτερο πίνακα τη μεταβλητή $-\xi$ και αθροίζοντας τους δύο πίνακες,

$$\begin{pmatrix} V''(\alpha) - F_{\alpha\alpha} & -\xi & -F_{\alpha\kappa} - \xi F_{\alpha\omega} & 0 \\ -\xi & 1 & 0 & 0 \\ -F_{\alpha\kappa} - \xi F_{\alpha\omega} & 0 & -F_{\kappa\kappa} - \xi 2F_{\kappa\omega} & -\xi F_{\omega\omega} \\ 0 & 0 & -\xi F_{\omega\omega} & F_{\omega\omega} \end{pmatrix} \frac{d}{d\xi} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \kappa \\ \omega \end{pmatrix} = 0.$$

Διαιρώντας την τέταρτη γραμμή με $F_{\omega\omega} \neq 0$ και αλλάζοντας τη σειρά των δύο πρώτων και των δύο τελευταίων γραμμών του πίνακα, το σύστημα γράφεται

$$\begin{pmatrix} -\xi & 1 & 0 & 0 \\ V''(\alpha) - F_{\alpha\alpha} & -\xi & -F_{\alpha\kappa} - \xi F_{\alpha\omega} & 0 \\ 0 & 0 & -\xi & 1 \\ -F_{\alpha\kappa} - \xi F_{\alpha\omega} & 0 & -F_{\kappa\kappa} - \xi 2F_{\kappa\omega} & -\xi F_{\omega\omega} \end{pmatrix} \frac{d}{d\xi} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \kappa \\ \omega \end{pmatrix} = 0.$$

Αφαιρώντας την τρίτη γραμμή πολλαπλασιασμένη με $F_{\alpha\omega}$ από τη δεύτερη και πολλαπλασιασμένη με $2F_{\kappa\omega}$ από την τέταρτη, και αφαιρώντας την πρώτη γραμμή πολλαπλασιασμένη με $F_{\alpha\omega}$ από την τέταρτη, το σύστημα παίρνει τη μορφή

$$\begin{pmatrix} -\xi & 1 & 0 & 0 \\ V''(\alpha) - F_{\alpha\alpha} & -\xi & -F_{\alpha\kappa} & -F_{\alpha\omega} \\ 0 & 0 & -\xi & 1 \\ -F_{\alpha\kappa} & -F_{\alpha\omega} & -F_{\kappa\kappa} & -\xi F_{\omega\omega} - 2F_{\kappa\omega} \end{pmatrix} \frac{d}{d\xi} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \kappa \\ \omega \end{pmatrix} = 0.$$

Έτσι, διαιρώντας την τελευταία γραμμή με $F_{\omega\omega} \neq 0$, οι εξισώσεις διαμόρφωσης (4.15) στην περίπτωση αυτοόμοιων μεταβλητών $\xi = \frac{X}{T}$, γράφονται τελικά:

$$(L^* - \xi I) \begin{pmatrix} \alpha_\xi \\ \beta_\xi \\ \kappa_\xi \\ \omega_\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

όπου I είναι ο ταυτοτικός πίνακας και

$$L^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ V''(\alpha) - F_{\alpha\alpha} & 0 & -F_{\alpha\kappa} & -F_{\alpha\omega} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{F_{\alpha\kappa}}{F_{\omega\omega}} & -\frac{F_{\alpha\omega}}{F_{\omega\omega}} & -\frac{F_{\kappa\kappa}}{F_{\omega\omega}} & -2\frac{F_{\kappa\omega}}{F_{\omega\omega}} \end{pmatrix}. \quad (4.29)$$

Τονίζουμε ότι $F_{\omega\omega} = s^2 \neq 0$ για κάθε στοιχείο $r \in \mathcal{R}$ με την ιδιότητα $\int_0^1 r^2(z) dz = s^2 > 0$, δηλαδή για κάθε μη τετριμμένη (δηλ. μη-σταθερή) 1-περιοδική συνάρτηση q στην (4.7), αφού $q' = r$.

Αν ο πίνακας $(L^* - \xi I)$ είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή αν ισχύει ότι $\det(L^* - \xi I) \neq 0$, τότε το ομογενές σύστημα (4.28) έχει μοναδική λύση, την μηδενική. Επομένως $\alpha_\xi = \beta_\xi = \kappa_\xi = \omega_\xi = 0$, δηλαδή οι παράμετροι κύματος είναι σταθερές ως προς

τη μεταβλητή ξ . Προκειμένου να έχουμε λύσεις του συστήματος (4.28) πέρα από τη μηδενική, απαιτείται $\det(L^* - \xi I) = 0$. Όμως

$$\begin{aligned}
\det(L^* - \xi I) &= \begin{vmatrix} -\xi & 1 & 0 & 0 \\ V''(\alpha) - F_{\alpha\alpha} & -\xi & -F_{\alpha\kappa} & -F_{\alpha\omega} \\ 0 & 0 & -\xi & 1 \\ -\frac{F_{\alpha\kappa}}{F_{\omega\omega}} & -\frac{F_{\alpha\omega}}{F_{\omega\omega}} & -\frac{F_{\kappa\kappa}}{F_{\omega\omega}} & -\xi - \frac{2F_{\kappa\omega}}{F_{\omega\omega}} \end{vmatrix} \\
&= (-\xi) \begin{vmatrix} -\xi & -F_{\alpha\kappa} & -F_{\alpha\omega} \\ 0 & -\xi & 1 \\ -\frac{F_{\alpha\omega}}{F_{\omega\omega}} & -\frac{F_{\kappa\kappa}}{F_{\omega\omega}} & -\xi - \frac{2F_{\kappa\omega}}{F_{\omega\omega}} \end{vmatrix} \\
&\quad - \begin{vmatrix} V''(\alpha) - F_{\alpha\alpha} & -F_{\alpha\kappa} & -F_{\alpha\omega} \\ 0 & -\xi & 1 \\ -\frac{F_{\alpha\kappa}}{F_{\omega\omega}} & -\frac{F_{\kappa\kappa}}{F_{\omega\omega}} & -\xi - \frac{2F_{\kappa\omega}}{F_{\omega\omega}} \end{vmatrix} \\
&= (-\xi) \left((-\xi) \begin{vmatrix} -\xi & -F_{\alpha\omega} \\ -\frac{F_{\alpha\omega}}{F_{\omega\omega}} & -\xi - \frac{2F_{\kappa\omega}}{F_{\omega\omega}} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\xi & -F_{\alpha\kappa} \\ -\frac{F_{\alpha\omega}}{F_{\omega\omega}} & -\frac{F_{\kappa\kappa}}{F_{\omega\omega}} \end{vmatrix} \right) \\
&\quad - \left((-\xi) \begin{vmatrix} V''(\alpha) - F_{\alpha\alpha} & -F_{\alpha\omega} \\ -\frac{F_{\alpha\kappa}}{F_{\omega\omega}} & -\xi - \frac{2F_{\kappa\omega}}{F_{\omega\omega}} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} V''(\alpha) - F_{\alpha\alpha} & -F_{\alpha\kappa} \\ -\frac{F_{\alpha\omega}}{F_{\omega\omega}} & -\frac{F_{\kappa\kappa}}{F_{\omega\omega}} \end{vmatrix} \right) \\
&= \xi^2 \left(\xi^2 + \xi \frac{2F_{\kappa\omega}}{F_{\omega\omega}} - \frac{F_{\alpha\omega}^2}{F_{\omega\omega}} \right) + \xi \left(\xi \frac{F_{\kappa\kappa}}{F_{\omega\omega}} - \frac{F_{\alpha\kappa} F_{\alpha\omega}}{F_{\omega\omega}} \right) \\
&\quad + \xi \left((F_{\alpha\alpha} - V''(\alpha)) \xi + (F_{\alpha\alpha} - V''(\alpha)) \frac{2F_{\kappa\omega}}{F_{\omega\omega}} - \frac{F_{\alpha\omega} F_{\alpha\kappa}}{F_{\omega\omega}} \right) \\
&\quad + (F_{\alpha\alpha} - V''(\alpha)) \frac{F_{\kappa\kappa}}{F_{\omega\omega}} - \frac{F_{\alpha\kappa}^2}{F_{\omega\omega}} \frac{2F_{\kappa\omega}}{F_{\omega\omega}} \frac{F_{\kappa\kappa}}{F_{\omega\omega}} \\
&= \xi^4 + \xi^3 \frac{2F_{\kappa\omega}}{F_{\omega\omega}} + \xi^2 \frac{1}{F_{\omega\omega}} ((F_{\alpha\alpha} - V''(\alpha)) F_{\omega\omega} - F_{\alpha\omega}^2 + F_{\kappa\kappa}) \\
&\quad + \xi \frac{2}{F_{\omega\omega}} ((F_{\alpha\alpha} - V''(\alpha)) F_{\kappa\omega} - F_{\alpha\kappa} F_{\alpha\omega}) \\
&\quad + \frac{1}{F_{\omega\omega}} ((F_{\alpha\alpha} - V''(\alpha)) F_{\kappa\kappa} - F_{\alpha\kappa}^2).
\end{aligned}$$

Συνεπώς, για να ισχύει $\det(L^* - \xi I) = 0$, δηλαδή για να υπάρχουν μη σταθερές παραμετρικές συναρτήσεις $\alpha, \beta, \kappa, \omega$ της αυτοόμοιας μεταβλητής $\xi = \frac{X}{T}$ στο διαμορφωμένο οδεύον κύμα (4.7), θα πρέπει η αυτοόμοια μεταβλητή ξ να επιλύει το πολυώνυμο τέταρτου βαθμού ως προς το ξ

$$\begin{aligned}
P_{(\alpha, \kappa, \omega)}(\xi) &:= F_{\omega\omega} \xi^4 + \xi^3 2F_{\kappa\omega} + \xi^2 ((F_{\alpha\alpha} - V''(\alpha)) F_{\omega\omega} - F_{\alpha\omega}^2 + F_{\kappa\kappa}) \\
&\quad + 2\xi ((F_{\alpha\alpha} - V''(\alpha)) F_{\kappa\omega} - F_{\alpha\kappa} F_{\alpha\omega}) + (F_{\alpha\alpha} - V''(\alpha)) F_{\kappa\kappa} - F_{\alpha\kappa}^2 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.30}$$

με $F_{\omega\omega} = s^2 > 0$.

4.3 Οι παράμετροι διαμόρφωσης ως συναρτήσεις του πλάτους κύματος

Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, οι εξισώσεις διαμόρφωσης (4.15), στην περίπτωση που οι μακροσκοπικές (δηλαδή εξαρτώμενες από τις μακροσκοπικές μεταβλητές X και T) παραμετρικές συναρτήσεις $\alpha, \beta, \kappa, \omega$ του διαμορφωμένου κύματος (4.7) εξαρτώνται από την αυτοόμοια μεταβλητή $\xi = \frac{X}{T}$, παίρνουν την μορφή του προβλήματος ιδιοτιμών (4.28), δηλαδή

$$(L^*(\alpha(\xi), \kappa(\xi), \omega(\xi)) - \xi I) \begin{pmatrix} \alpha'(\xi) \\ \beta'(\xi) \\ \kappa'(\xi) \\ \omega'(\xi) \end{pmatrix} = 0, \quad (4.31)$$

όπου ως ιδιοτιμές μας ενδιαφέρουν μόνο οι ρίζες του πολωνύμου τέταρτου βαθμού (4.30), ούτως ώστε να υπάρχουν μη μηδενικά ιδιοδιανύσματα z .

Ο πίνακας L^* εξαρτάται ρητά (*explicitly*) μόνο από τα α, κ, ω . Συνεπώς, το ίδιο ισχύει και για τις ρίζες $\xi_0(\alpha, \kappa, \omega)$ του πολωνύμου (4.30), $P_{(\alpha, \kappa, \omega)}(\xi_0(\alpha, \kappa, \omega)) = 0$ και για κάθε τέτοια ιδιοτιμή μπορούμε να επιλέξουμε ένα μη μηδενικό ιδιοδιάνυσμα $z(\alpha, \kappa, \omega, \xi_0(\alpha, \kappa, \omega))$. Έτσι, θεωρητικά η επίλυση του προβλήματος ιδιοτιμών (4.28) ως προς τις συναρτήσεις $(\alpha, \beta, \kappa, \omega)$ του ξ , αντιστοιχεί στην επίλυση του συστήματος διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{d}{d\xi} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \kappa \\ \omega \end{pmatrix} (\xi) = z(\alpha(\xi), \kappa(\xi), \omega(\xi), \xi_0(\alpha(\xi), \kappa(\xi), \omega(\xi))). \quad (4.32)$$

Από την άλλη, θεωρώντας το συναρτησοειδές F της (4.18), παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} F_{\alpha\alpha}(\alpha, \kappa, \omega) &= f_1(\alpha, \kappa), & F_{\alpha\kappa}(\alpha, \kappa, \omega) &= f_2(\alpha, \kappa), & F_{\kappa\kappa}(\alpha, \kappa, \omega) &= f_3(\alpha, \kappa), \\ F_{\alpha\omega}(\alpha, \kappa, \omega) &= F_{\kappa\omega}(\alpha, \kappa, \omega) = 0, & F_{\omega\omega}(\alpha, \kappa, \omega) &= s^2 \end{aligned}$$

για κάποιες συναρτήσεις f_i , $i = 1, 2, 3$. Συνεπώς, στην πραγματικότητα τα στοιχεία, οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα L^* είναι συναρτήσεις των (α, κ, s) . Επίσης, όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 3, Θεώρημα 3.0.15, ισχύει η σχέση διασποράς

$$\omega = \frac{1}{s} \sqrt{\langle Tr, r \rangle} =: \Omega(\alpha, \kappa, s) \quad (4.33)$$

(βλ. για το τελευταίο τον ορισμό του T μέσω των (2.9) και (2.10)) και συνεπώς και η συχνότητα ω είναι συνάρτηση των α, κ, s , ανεξάρτητη του β .

Έτσι, αφού οι συναρτήσεις $\alpha, \beta, \kappa, \omega$ πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση (4.31) με $\xi = \xi_1(\alpha, \kappa, s)$ και $\omega = \Omega(\alpha, \kappa, s)$, μπορούμε να εξάγουμε από την (4.31), την εξάρτηση των α, κ, β από την ανεξάρτητη μεταβλητή s . Πιο συγκεκριμένα, ισχύει:

Λήμμα 4.3.1. Η εξέλιξη των παραμέτρων κύματος α, β και κ ως συναρτήσεις του s δίνεται από το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \kappa \end{pmatrix} = \frac{1}{-\frac{\omega_\alpha}{\omega_s} z_1 - \frac{\omega_\kappa}{\omega_s} z_3 + \frac{1}{\omega_s} z_4} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \quad (4.34)$$

όπου $z = [z_1, z_2, z_3, z_4]^\top$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα L^* που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\xi = \xi_1(\alpha, \kappa, s)$ και $\omega_\alpha = \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}$, $\omega_\kappa = \frac{\partial \Omega}{\partial \kappa}$, $\omega_s = \frac{\partial \Omega}{\partial s}$, όπου $\omega = \Omega(\alpha, \kappa, s)$ είναι η (μη-γραμμική) σχέση διασποράς.

Απόδειξη. Έστω $v = [\alpha, \beta, \kappa, \omega]^\top$ και $y = [\alpha, \beta, \kappa, s]^\top$. Τότε από τον κανόνα της αλυσίδας προκύπτει

$$\frac{dv}{ds} = J \frac{dy}{ds}, \quad (4.35)$$

όπου J είναι ο πίνακας

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \omega_\alpha & 0 & \omega_\kappa & \omega_s \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

με

$$\det J = \omega_s \neq 0 \quad \text{για} \quad s > 0$$

σύμφωνα με την (4.33). Έστω τώρα $z = [z_1, z_2, z_3, z_4]^\top$ ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα L^* που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\xi = \xi_1(\alpha, \kappa, s)$. Από το μη-γραμμικό πρόβλημα ιδιοτιμών (4.31) προσδιορίζεται το ιδιοδιάνυσμα $\frac{dv}{d\xi}$ μέχρι έναν συντελεστή c ,

$$\frac{dv}{d\xi} = cz. \quad (4.37)$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας στη σχέση (4.37) προκύπτει

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\xi} &= \frac{dv}{ds} \frac{ds}{d\xi} \\ &= J \frac{dy}{ds} \frac{ds}{d\xi} \\ &= cz. \end{aligned}$$

Βρίσκουμε τον αντίστροφο του πίνακα J ,

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\omega_\alpha}{\omega_s} & 0 & -\frac{\omega_\kappa}{\omega_s} & \frac{1}{\omega_s} \end{pmatrix}.$$

Οπότε,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{ds} \frac{ds}{d\xi} &= J^{-1} J \frac{dy}{ds} \frac{ds}{d\xi} \\ &= J^{-1} cz \\ &= c\tilde{z}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

Κεφάλαιο 4 4.3. Οι παράμετροι διαμόρφωσης ως συναρτήσεις του πλάτους κύματος

όπου $\tilde{z} = [\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3, \tilde{z}_4]^\top = J^{-1}z$, δηλαδή

$$\tilde{z} = \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \tilde{z}_3 \\ \tilde{z}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\omega_\alpha}{\omega_s} & 0 & -\frac{\omega_\kappa}{\omega_s} & \frac{1}{\omega_s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ -\frac{\omega_\alpha}{\omega_s}z_1 - \frac{\omega_\kappa}{\omega_s}z_3 + \frac{1}{\omega_s}z_4 \end{pmatrix}. \quad (4.39)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (4.39) στην εξίσωση (4.38) προκύπτει από την τέταρτη γραμμή:

$$\frac{ds}{d\xi} = c\tilde{z}_4,$$

δηλαδή

$$c = \frac{ds}{d\xi} \frac{1}{\tilde{z}_4}.$$

Επομένως η εξίσωση (4.38) γίνεται:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\tilde{z}}{\tilde{z}_4},$$

οι τρεις πρώτες γραμμές της οποίας δίνουν το σύστημα (4.34). □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: ΤΟ ΚΡΟΥΣΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΕ ΑΛΥΣΙΔΕΣ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ

Ένα βασικό κίνητρο για τη μελέτη αλυσίδων σωματιδίων είναι το ότι αυτές είναι μονοδιάστατη μορφή ενός ατομικού κρυστάλλου. Στα πλαίσια της επιστήμης υλικών και της μηχανικής ένα βασικό ερώτημα αφορά την κατανόηση των μηχανικών (στατικών ή δυναμικών) ιδιοτήτων κρυστάλλων, καθώς τα περισσότερα στερεά έχουν αυτή τη δομή. Βέβαια, ο τελικός στόχος είναι η κατανόηση των ιδιοτήτων τρισδιάστατων κρυστάλλων. Όμως, καθώς από τη μία οι δυνάμεις μεταξύ των ατόμων είναι στη φύση συνήθως μη-γραμμικές συναρτήσεις των χωρικών μεταβλητών, που συχνά έχουν και ιδιάζοντα σημεία (π.χ. οι δυνάμεις Coulomb), και από την άλλη τα μοντέλα κρυστάλλων είναι πολυδιάστατα πεπλεγμένα (μη γραμμικά) συστήματα ενός τεράστιου αριθμού εξαρτημένων μεταβλητών του χρόνου, είναι λογικό ότι ιδίως όταν στόχος είναι η μαθηματικά αυστηρή περιγραφή των φαινομένων που παρουσιάζονται σε αυτά, να επιδιώκεται, ως ένα πρώτο βήμα, καταρχήν η ακριβής κατανόησή τους σε μια απλούστερη περίπτωση. Ιστορικά, σε πρώτη φάση, η απλούστευση έγινε μελετώντας τα γραμμικοποιημένα προβλήματα. Σε κάποιες περιπτώσεις όμως, όταν ο χαρακτήρας του προβλήματος είναι αμιγώς μη γραμμικός, όπως π.χ. στη περίπτωση κρουστικών κυμάτων, η γραμμικοποίηση του προβλήματος δεν προσφέρει κάτι ουσιαστικό. Έτσι, σε δεύτερη φάση, διατηρείται η μη γραμμική μορφή του συστήματος, αλλά απλουστεύεται ο αριθμός των χωρικών διαστάσεων. Έτσι προκύπτει το μη γραμμικό πεπλεγμένο σύστημα της (μονοδιάστατης) αλυσίδας.

Ένα από τα χαρακτηριστικά μη γραμμικά δυναμικά προβλήματα της μηχανικής είναι η εξάπλωση κρουστικών κυμάτων (shock waves) (π.χ. λόγω κάποιας έκρηξης) στο χώρο. Η μελέτη αυτού του προβλήματος στη περίπτωση της αλυσίδας σωματιδίων (2.1) αποτέλεσε και το κίνητρο της εργασίας [11] της Anne-Marie Filip και του Στέφανου Βενακίδη στην οποία βασίζεται στο μεγαλύτερο της μέρος και η παρούσα εργασία. Το πρόβλημα τίθεται ως εξής:

Κρουστικό πρόβλημα 5.0.2. Έστω ότι δίνεται η αλυσίδα σωματιδίων (2.1)

$$\ddot{q}_n(t) = V'(q_{n-1}(t) - q_n(t)) - V'(q_n(t) - q_{n+1}(t)), \quad t > 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

με αρχικές (Α.Σ.) και συνοριακές (Σ.Σ.) συνθήκες

$$\text{Α.Σ.: } q_n(0) = nd \ (d > 0) \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ και } \dot{q}_n(0) = 0 \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N},$$

$$\text{Σ.Σ.: } \dot{q}_0(t) = a \ (a > 0) \text{ για κάθε } t \geq 0.$$

Κεφάλαιο 5

Ποια είναι η δυναμική της μετατόπισης $q_n(t)$ των σωματιδίων $n \in \mathbb{N}$ τη χρονική στιγμή $t > 0$ από τη θέση ηρεμίας τους $q_n(0)$ και ιδίως όταν $t \gg 1$ και οριακά $t \rightarrow \infty$;

Το πρόβλημα αυτό μοντελοποιεί τη δυναμική της αλυσίδας (2.1) που προκύπτει από ένα έμβολο που σπρώχνει με σταθερή ταχύτητα $a > 0$ προς τα δεξιά στον άξονα του χρόνου ($t > 0$) το πρώτο σωματίδιο ($n = 0$) μιας αλυσίδας άπειρα αριθμήσιμου το πλήθος σωματιδίων ($n \in \mathbb{N}$), που στον αρχικό χρόνο $t = 0$ έχουν ίση απόσταση $d > 0$ μεταξύ τους και δεν κινούνται. Λόγω των δυνάμεων που αλληλεπιδρούν μεταξύ των σωματιδίων, η κίνηση του πρώτου από αυτά θέτει σε κίνηση και τα υπόλοιπα. Επειδή το δυναμικό V των δυνάμεων αλληλεπίδρασης θεωρείται λείο, κυρτό και υπεραρμονικό, δηλαδή έχει τη μορφή

$$V(x - x_0) = c \frac{(x - x_0)^2}{2} + O(|x - x_0|^3), \quad c > 0, \quad \forall x, x_0 \in \mathbb{R},$$

τα σωματίδια αλληλεπιδρούν μέσω μη γραμμικών ταλαντωτών. Συνεπώς, η κίνησή τους σε ένα σύστημα αναφοράς που κινείται με την ταχύτητα του εμβόλου, έχει τη μορφή μη γραμμικών ταλαντώσεων. Αυτό που παρουσιάζει ενδιαφέρον είναι μια πιο ακριβής περιγραφή των ταλαντώσεων αυτών σε συνάρτηση με το χρόνο, δηλαδή η περιγραφή της δυναμικής συμπεριφοράς της λύσης του προβλήματος, που είναι ένα κρουστικό κύμα.

Όπως είναι φυσικό, όταν θέλουμε να μελετήσουμε ένα πεπλεγμένο πρόβλημα, θεωρούμε πρώτα κάποια συγκεκριμένα παραδείγματα των παραμέτρων του, τα οποία διευκολύνουν τους υπολογισμούς, αλλά ταυτόχρονα διατηρούν τα ειδικά χαρακτηριστικά του προβλήματος. Το ρόλο αυτό αναλαμβάνουν σε μη γραμμικά δυναμικά συστήματα πολλές φορές τα λεγόμενα ολοκληρώσιμα συστήματα, τα οποία θα μπορούσε να πει κανείς ότι χαρακτηρίζονται από την ύπαρξη ενός μέγιστου αριθμού αναλλοιώτων της κίνησης, δηλαδή κάποιων μεγεθών, τα οποία παραμένουν σταθερά ως προς τον χρόνο. Το γνωστότερο παράδειγμα είναι η διατήρηση της συνολικής ενέργειας (κινητικής και δυναμικής) σε συντηρητικά δυναμικά συστήματα. Σε δυναμικά προβλήματα πεπερασμένης διάστασης η σχετική θεωρία είναι σε γενικές γραμμές γνωστή, βλ. π.χ. [1]. Σε προβλήματα άπειρης διάστασης (αριθμήσιμα, όπως στην περίπτωση μας, ή υπεραριθμήσιμα, όπως στη περίπτωση των μερικών διαφορικών εξισώσεων) υπάρχει ακόμα μια πληθώρα ανοικτών προβλημάτων. Σε κάθε περίπτωση, αν κάποιο σύστημα είναι ολοκληρώσιμο, η σαφέστερη διάρθρωση των λύσεων του επιτρέπει την εφαρμογή ειδικών τεχνικών που επιτρέπουν την εξεύρεση ή μελέτη των λύσεων του αναλυτικά ή αριθμητικά. Στην περίπτωση του προβλήματος της αλυσίδας (2.1) αυτό συμβαίνει όταν έχουμε το δυναμικό Toda, $V(x) = e^{-x} + x - 1$.

Από την άλλη, από την εμφάνιση γρήγορων υπολογιστών και μετά, μια μεγάλη συνεισφορά στη μελέτη πολυδιάστατων συστημάτων προκύπτει είτε από την αριθμητική επίλυσή τους είτε από την διεξαγωγή αριθμητικών πειραμάτων, τα οποία οδηγούν πολλές φορές στην ανακάλυψη καινούριων φαινομένων ή ακόμα και τέτοιων που δεν ερμηνεύονται από την μέχρι τότε γνωστή θεωρία. Για την αλυσίδα (2.1), η οποία αποτελεί γενίκευση της γνωστής αλυσίδας Fermi-Pasta-Ulam (FPU) παραπέμπουμε στις ενδιαφέρουσες (όχι μόνο για το συγκεκριμένο πρόβλημα) εκλαϊκευμένες εξιστορήσεις [17], [3].

Έτσι, για το κρουστικό πρόβλημα της αλυσίδας που αναφέραμε πιο πάνω, μέσω της αριθμητικής μελέτης του προβλήματος για διάφορα δυναμικά στο [15], διαπιστώθηκε το 1978 η ύπαρξη μιας κρίσιμης τιμής a_{crit} της ταχύτητας του εμβόλου με την ιδιότητα ότι, στο συγκινούμενο με το q_0 σύστημα αναφοράς, τα σωματίδια “πίσω” από το q_0 ηρεμούν για ταχύτητες $a < a_{\text{crit}}$ ενώ για ταχύτητες $a > a_{\text{crit}}$ παρουσιάζουν όλα μια δυϊκή ταλάντωση (binary oscillation), περιοδική στο χρόνο και 2-περιοδική στο χώρο. Λίγο αργότερα, το 1981, οι Holian, Flaschka και McLaughlin [14], χρησιμοποιώντας την ολοκληρωσιμότητα του συστήματος για το δυναμικό Toda, υπολόγισαν αναλυτικά την κρίσιμη τιμή $a_{\text{crit}} = 1$ καθώς και την ταχύτητα του κρουστικού κύματος.

Στη συνέχεια οι Βενακίδης, Deift και Oba [19] μελέτησαν το 1991 τη χρονικά ασυμπτωτική, δηλαδή για $t \rightarrow \infty$, συμπεριφορά των λύσεων του κρουστικού προβλήματος για το δυναμικό Toda στην περίπτωση $a > 1 = a_{\text{crit}}$. Τα αποτελέσματά τους επιβεβαίωσαν και εξειδίκευσαν τις προηγούμενες παρατηρήσεις. Πιο συγκεκριμένα, υπολόγισαν εκτός από την ταχύτητα του κύματος N_{max} και μια δεύτερη ταχύτητα N_{min} , και απέδειξαν αναλυτικά την ύπαρξη τριών ασυμπτωτικών περιοχών της αλυσίδας για $t \rightarrow \infty$ και στο συγκινούμενο σύστημα αναφοράς:

- για $0 < n < N_{\text{min}}t$ τα σωματίδια εκτελούν δυϊκές ταλαντώσεις για $n \gg 1$, ενώ για μικρά n η δυϊκότητα παύει να ισχύει
- για $N_{\text{min}}t < n < N_{\text{max}}t$ η κίνηση της αλυσίδας περιγράφεται από ένα διαμορφωμένο κύμα
- για $n > N_{\text{max}}t$ η μετατόπιση των σωματιδίων είναι εκθετικά μικρή, καθώς τα σωματίδια δεν έχουν επηρεαστεί ακόμα από το κρουστικό κύμα.

Την ίδια χρονιά ο Καμβύσης [16] μελετά για το ίδιο δυναμικό την περίπτωση $a < 1 = a_{\text{crit}}$ και αποδεικνύει αναλυτικά ότι για $t \rightarrow \infty$ και στο συγκινούμενο σύστημα αναφοράς η ταλάντωση των σωματιδίων πίσω από το κρουστικό κύμα εξασθενεί προς μια αλυσίδα σε ηρεμία. Τέλος, το 1996 οι Deift, Καμβύσης, Kriecherbauer και Zhou επιλύουν αναλυτικά το πρόβλημα της διαστολής (rarefaction problem), όπου $a < 0$, για το δυναμικό Toda, [4]. Για περισσότερες αναφορές σχετικά με συναφή προβλήματα σε αλυσίδες Toda παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [11].

Όπως είδαμε, οι παραπάνω εργασίες αφορούσαν όλες το δυναμικό Toda. Ο λόγος ήταν ότι για το δυναμικό αυτό η αντίστοιχη αλυσίδα είναι ένα ολοκληρώσιμο σύστημα, δηλαδή ένα σύστημα του οποίου η δομή μπορεί να αναλυθεί πιο λεπτομερειακά. Για τέτοια συστήματα έχουν δημιουργηθεί ειδικές τεχνικές για τη μελέτη και επίλυσή τους, οι οποίες στηρίζονται και εκμεταλλεύονται ακριβώς τις ειδικότερες πληροφορίες που έχουμε για αυτά. Για γενικά δυναμικά V , π.χ. όταν γνωρίζουμε μόνο ότι το V είναι λείο, υπεραρμονικό και κυρτό, δεν ισχύει απαραίτητα ότι η αντίστοιχη αλυσίδα είναι ολοκληρώσιμη και συνεπώς οι παραπάνω αναλυτικές τεχνικές δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Απ’ την άλλη, αριθμητικά πειράματα οδηγούν στην εικασία ότι στο κρουστικό πρόβλημα η συμπεριφορά γενικών αλυσίδων είναι παρόμοια με αυτήν των ολοκληρώσιμων. Δυστυχώς, λόγω της έλλειψης κατάλληλων τεχνικών αυτό δεν έχει αποδειχθεί αυστηρά ούτε στις μέρες μας.

Η εργασία [11] των Filip και Βενακίδη, πάνω στην οποία στηρίζεται η παρούσα διατριβή, αποτέλεσε ένα πρώτο βήμα στην προσπάθεια απόδειξης των εικασιών αυτών. Το πιο στέρεο μέρος της εργασίας αποτελούν η απόδειξη της ύπαρξης οδευόντων κυμάτων (Κεφάλαιο 2 της παρούσας εργασίας) και η εξαγωγή των εξισώσεων διαμόρφωσης του Whitham (Κεφάλαιο 4, (4.15)), οι λύσεις των οποίων είναι τα λεγόμενα διαμορφωμένα οδεύοντα κύματα, δηλαδή μακροσκοπικές (παρά)μορφώσεις οδευόντων κυμάτων, και άρα προϋποθέτουν την ύπαρξη των τελευταίων.

Σκοπός των συγγραφέων ήταν να χρησιμοποιήσουν τις εξισώσεις αυτές για να μελετήσουν τη χρονικά ασυμπτωτική ($t \rightarrow \infty$) συμπεριφορά των λύσεων του χρουστικού προβλήματος στην περιοχή μετάβασης $N_{\min} < \frac{n}{t} < N_{\max}$, όπου, στηριζόμενοι στα αριθμητικά και αναλυτικά ευρήματα σε αλυσίδες Toda που εκθέσαμε πιο πάνω, είχαζαν ότι το χρουστικό κύμα έχει τη μορφή διαμορφωμένου οδεύοντος κύματος. Για το λόγο αυτό εξήγαγαν από τις εξισώσεις Whitham στην περίπτωση αυτοόμοιων μεταβλητών $\xi = \frac{N}{T} = \frac{n}{t}$ το μη γραμμικό πρόβλημα ιδιοτιμών (4.28), για το οποίο, όπως αναφέρουν, ανέπτυξαν μια αριθμητική μέθοδο επίλυσής του με τη βοήθεια της ισοδύναμης μορφής (4.34), χωρίς όμως να παρουσιάζουν αναλυτικά τη μέθοδό τους.

Την αριθμητική αυτή μέθοδο την δοκιμάζουν σε αλυσίδες Toda. Πιο συγκεκριμένα, από την εργασία [19] παίρνουν τις αρχικές τιμές $\alpha_0, \beta_0 = 0, \kappa_0 = \frac{1}{2}, \omega_0$ και $\xi_0 = N_{\min}$ και υπολογίζουν αριθμητικά μέσω της σχέσης διασποράς (4.33) την αρχική τιμή s_0 ([19, Sec. 4]). Έπειτα, με χρήση της αριθμητικής τους μεθόδου, προφανώς χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (4.28) και (4.34), υπολογίζουν τον κλάδο ξ των ιδιοτιμών με αρχική τιμή ξ_0 καθώς και τα α, β, κ , ως συναρτήσεις του s . Τα αποτελέσματα των υπολογισμών τους τα αναπαριστούν γραφικά, [19, Sec. 6.3], και διαπιστώνουν ότι για $s \rightarrow \infty$, όπου το $s = \|r\|_2$ αντιστοιχεί στο πλάτος του κύματος, το ξ τείνει στο $N_{\max}$, η τιμή του οποίου είναι γνωστή και αυτή από την εργασία [19], και ότι τα α, β, κ είναι φθίνουσες συναρτήσεις του s . Ειδικότερα, εικάζουν ότι η τιμή του κυματάριθμου κ τείνει στο 0 όταν $s \rightarrow \infty$.

Τέλος, βασιζόμενοι στα αριθμητικά τους ευρήματα, προτείνουν μια ερμηνεία για την διαφορετική συμπεριφορά των σωματιδίων “πίσω” από το χρουστικό κύμα για ταχύτητες $a > 0$ του εμβόλου μικρότερες ή μεγαλύτερες της κρίσιμης τιμής $a_{\text{crit}} > 0$, το συμπέρασμα της οποίας είναι ότι η διαφορετική αυτή συμπεριφορά οφείλεται κυρίως στη διακριτότητα του συστήματος. Για περισσότερες λεπτομέρειες και τις σχετικές γραφικές αναπαραστάσεις παραπέμπουμε τον αναγνώστη στην πρωτότυπη εργασία [11].

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] ARNOLD, I. V. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, 1989.
- [2] BREZIS, H. *Συναρτησιακή Ανάλυση, Θεωρία και εφαρμογές*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., 1997.
- [3] DAUXOIS, T. Fermi, Pasta, Ulam, and, a mysterious lady. *American Institute of Physics* (2008), 55–57.
- [4] DEIFT, P., KAMVISSIS, S., KRIECHERBAUER, T., ZHOU, X. The Toda rarefaction problem. *Comm. Pure Appl. Math.* 49, 1 (1996), 35–83.
- [5] DEIFT, P., KRIECHERBAUER, T., VENAKIDES, S. Forced lattice vibrations. 1,2 *Comm. Math. Phys.* 48, 11 (1995), 1187–129, 1251–1298.
- [6] DEIMLING, K. *Nonlinear Functional Analysis*. Dover Publications, Inc., 2010.
- [7] DREYER, W., HERRMANN, M. Numerical experiments on the modulation theory for the nonlinear atomic chain. *Physica* 237 (2008), 255–282.
- [8] DREYER, W., HERRMANN, M. AND MIELKE, A. Micro-macro transition in the atomic chain via Whitham’s modulation equation. *Institute of Physics* 19 (2006), 471–500.
- [9] DREYER, W., HERRMANN, M. AND RADEMACHER, J. *Pulses, traveling waves and modulation theory in oscillator chains. In Analysis, modeling and simulation of multiscale problems*. Springer, 2006.
- [10] FERMI, E., PASTA, J. R. AND ULAM, S. Studies of nonlinear problems I. *Report LA-1940 Los Alamos: Los Alamos Scientific Laboratory* (1955).
- [11] FILIP, A.-M. AND VENAKIDES, S. Existence and Modulation of Traveling Waves in Particle Chains. *Comm. Pure Appl. Math. LII* (1999), 693–735.
- [12] FRIESECKE, G., WATTIS, J. A. D. Existence theorem for solitary waves on lattices. *Comm. Math. Phys.* 161, 2 (1994), 391–418.

- [13] HERRMANN, M. Unimodal wavetrains and solitons in convex Fermi-Pasta-Ulam chains. *Proceeding of Royal Society of Edinburgh* 104A (2010), 753–785.
- [14] HOLIAN, B. L., FLASCHKA, H., McLAUGHLIN, D. W. Shock waves in the Toda shock lattice: analysis. *Phys. Rev. A* 24, 5 (1981), 2595–2623.
- [15] HOLIAN, B. L., STRAUB, G. K. Molecular dynamics of shock waves in one-dimensional chains. *Phys. Rev. B* 18 (1978), 1593.
- [16] KAMVISSIS, S. *On the long time behavior of the doubly infinite Toda chain under shock initial data*. Doctoral dissertation, New York University, 1991.
- [17] PORTER, A. M., ZABUSKY, J. N., HU, B. AND CAMPBELL, K. D. Fermi, Pasta, Ulam and the Birth of Experimental Mathematics. *American Scientist* 97 (2009), 214–221.
- [18] RUDIN, W. *Αρχές Μαθηματικής Αναλύσεως*. Leader Books, 2000.
- [19] VENAKIDES, S., DEIFT, P., OBA, R. The Toda shock problem. *Comm. Pure Appl. Math.* 44, 8-9 (1991), 1171–1242.
- [20] WHITHAM, G. B. Non-linear dispersive waves. *Proc. Roy. Soc. Ser. A* 283 (1965), 238–261.
- [21] WHITHAM, G. B. *Linear and nonlinear waves*. Wiley-Interscience, 1974.
- [22] ΑΡΓΥΡΟΣ, Σ. *Σημειώσεις Παραδόσεων Συναρτησιακής Ανάλυσης*. Ε.Μ.Π., 2004.
- [23] ΙΩΑΝΝΟΥ, Π., ΑΠΟΣΤΟΛΑΤΟΣ, Θ. *Στοιχεία θεωρητικής Μηχανικής*. Leader Books, 2004.
- [24] ΚΟΥΜΟΥΛΛΗΣ, Γ., ΝΕΓΡΕΠΟΝΤΗΣ, Σ. *Θεωρία Μέτρου. Συμμετρία*, 2005.