ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΤΟΡΙΚΑ ΙΔΕΩΔΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ ΣΤΗ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΜΕΤΑΘΕΤΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΤΑΤΑΚΗΣ Κ. ΧΡΗΣΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2011

Η παρούσα Διδακτορική Διατριβή εκπονήθηκε στα πλαίσια του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών, για την απόκτηση του Διδακτορικού Διπλώματος Ειδίκευσης στα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, υπό την επίβλεψη του **Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Απόστολου Θωμά**.

Επταμελής Επιτροπή Κρίσης

Θωμά Απόστολος, Αναπληρωτής Καθηγητής
του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
(Επιβλέπων Καθηγητής)

Αθανασιάδης Χρήστος, Καθηγητής
του Τμήματος Μαθηματικών του Εθνικού Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών
(Μέλος τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής)

Χαραλάμπους Χαρά, Καθηγήτρια
του Τμήματος Μαθηματικών του Αριστοτέλειου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης
(Μέλος τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής)

Κεχαγιάς Επαμεινώνδας, Αναπληρωτής Καθηγητής
του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Κουβιδάκης Αλέξης, Αναπληρωτής Καθηγητής
του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης

Μπεληγιάννης Απόστολος, Αναπληρωτής Καθηγητής
του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Πρασίδης Ευστράτιος, Καθηγητής
του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου

Αφιερώνεται στη μητέρα μου Μαρία και στον πατέρα μου Κωνσταντίνο, το όνειρο του οποίου κληρονόμησα και πραγματοποίησα· τα μαθηματικά

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Τα τορικά ιδεώδη είναι τα ιδεώδη που ορίζουν τις τορικές ποικιλότητες, μια μεγάλη κατηγορία των αλγεβρικών ποικιλοτήτων. Οι τορικές ποικιλότητες διαδραματίζουν κεντρικό ρόλο στην ανάπτυξη των μαθηματικών τα τελευταία χρόνια. Η μελέτη τους αρχίζει από τον Hochster στο άρθρο του [20]. Στη συνέχεια στην εξάπλωση αυτών, σημαντικό ρόλο έπαιξε μια σειρά διαλέξεων του Fulton, βλέπε [13] και για περισσότερες πληροφορίες στο βιβλίο αυτού, βλέπε [14]. Οι τορικές ποικιλότητες εισέρχονται με φυσικό τρόπο σε πολλές περιοχές των μαθηματικών όπως Τορική Γεωμετρία, Αλγεβρική Γεωμετρία, Αλγεβρική Στατιστική, Ακέραιος προγραμματισμός, Θεωρία Γραφημάτων, Υπολογιστική Άλγεβρα, Υπεργεωμετρικές Διαφορικές Εξισώσεις, Δυναμικά Συστήματα και πολλές άλλες.

Ιδιαίτερη σημασία για τη κατανόηση ενός τορικού ιδεώδους, έχει η μελέτη ορισμένων υποσυνόλων αυτού, όπως τα ελαχιστοτικά σύνολα γεννητόρων του ιδεώδους, το σύνολο των αναντικατάστατων γεννητόρων αυτών, το σύνολο των πρωταρχικών στοιχείων αυτού, η λεγόμενη βάση Graver $Gr_{\mathcal{A}}$, το σύνολο των κυκλωμάτων του $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ και το σύνολο της καθολικής βάσης Gröbner, $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$. Τα σύνολα αυτά γνωρίζουμε ότι σχετίζονται μεταξύ τους. Ο Bernd Sturmfels στο [39] έχει αποδείξει μια σχέση εγκλεισμού που συνδέει τα $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}, \mathcal{U}_{\mathcal{A}}, Gr_{\mathcal{A}}$:

$$\mathcal{C}_{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{A}} \subseteq Gr_{\mathcal{A}}.$$

Γνωστό είναι επιπλέον ότι το σύνολο των αναντικατάστατων γεννητόρων του ιδεώδους είναι υποσύνολο του ελαχιστοτικού συνόλου γεννητόρων οι οποίοι με τη σειρά τους περιέχονται στη βάση Graver αυτού. Γενικά είναι πολύ λίγες οι κατηγορίες τορικών ιδεωδών για τις οποίες γνωρίζουμε αυτά τα σύνολα.

Το ενδιαφέρον της παρούσας διατριβής στρέφεται γύρω από τα τορικά ιδεώδη γραφημάτων. Σε κάθε γράφημα G αντιστοιχίζεται ένα συγκεκριμένο τορικό ιδεώδες I_G, αλγεβρικές ιδιοτήτες του οποίου σχετίζονται με ιδιότητες του γραφήματος. Τα κυριότερα αποτελέσματα της διατριβής είναι:

(i) Πλήρης καθορισμός της βάσης Graver ενός τορικού ιδεώδους γραφήματος G, Θεώρημα 2.2.5. Στη μελέτη αυτού του προβλήματος, το αποτέλεσμα που υπήρχε ήταν των Hibi, Ohsugi στο άρθρο τους [29], οι οποίοι είχαν δώσει μια ικανή συνθήκη χαρακτηρισμού των στοιχείων της βάσης αυτής. Η βάση Graver βοηθάει στη καλύτερη κατανόηση του ιδεώδους, καθώς πολλά σύνολα που μας δίνουν πληροφορίες για αυτό, περιέχονται μέσα στη βάση αυτή, όπως είδαμε παραπάνω και θα δούμε αναλυτικότερα στο δεύτερο κεφάλαιο.

(ii) Πλήρης καθορισμός των ελαχιστοτικών συνόλων γεννητόρων ενός τορικού ιδεώδους γραφήματος, Θεώρημα 2.3.21. Στη κατεύθυνση αυτή ήταν γνωστή η μορφή των γεννητόρων μόνο για κάποιες συγκεκριμένες κατηγορίες γραφημάτων, όπως τα διμερή.

(iii) Πλήρης καθορισμός της μορφής των αναντικατάστατων γεννητόρων του τορικού ιδεώδους γραφήματος. Και σε αυτό το πρόβλημα, οι Hibi, Ohsugi είχαν δώσει απάντηση για δύο συγκεκριμένες κατηγορίες γραφημάτων, τα χορδικά αδύναμα γραφήματα και τα γραφήματα που ικανοποιούν τη συνθήκη περιττών κύκλων βλέπε [29]. Την έννοια των αναντικατάστατων διωνύμων, την είχαν εισάγει οι ίδιοι ώστε να προσεγγίσουν ένα πρόβλημα της Αλγεβρικής Στατιστικής, για το πότε ένα τορικό ιδεώδες έχει μοναδικό ελαχιστοτικό σύνολο γεννητόρων, βλέπε [42].

(iv) Πλήρης καθορισμός της καθολικής βάσης Gröbner $\mathcal{U}_A$ τορικού ιδεώδους γραφήματος. Γενικά είναι ελάχιστες οι περιπτώσεις ιδεωδών, στις οποίες γνωρίζουμε την αντίστοιχη καθολική βάση Gröbner αυτών. Συγκεκριμένα στη περίπτωση των τορικών ιδεωδών γραφημάτων, οι J. De Loera, B. Sturmfels και R. Thomas στο άρθρο τους [9], υπολόγισαν τη καθολική βάση Gröbner για γραφήματα το πολύ οκτώ κορυφών. Το Θεώρημα 3.2.9 καθορίζει πλήρως τα στοιχεία του $\mathcal{U}_A$ για τυχαίο γράφημα με οποιοδήποτε πλήθος κορυφών.

(v) Βελτίωση των φραγμάτων των μέγιστων βαθμών των στοιχείων της βάσης Graver του ιδεώδους και των στοιχείων της καθολικής βάσης Gröbner. Στο άρθρο τους [9], οι J. De Loera, B. Sturmfels και R. Thomas απέδειξαν ότι ο μέγιστος αυτός βαθμός, έστω d_n, φράσσεται από τη σχέση:

$$n-2 \leq d_n \leq \binom{n}{2}.$$

Το Θεώρημα 3.3.1 μας πληροφορεί ότι ο d_n παίρνει πάντα τη τιμή $n-2$, όπου n το πλήθος των κορυφών του γραφήματος.

(vi) Κλείνουμε με μια εφαρμογή όλων των παραπάνω σε μια εικασία του B. Sturmfels. Συγκεκριμένα ο B. Sturmfels σε μια διάλεξή του στη Santa Cruz ([40, Ιούλιος 1995]), διατύπωσε μια εικασία η οποία σχετίζεται με τους βαθμούς των στοιχείων της βάσης Graver τορικών ιδεωδών, την True circuit conjecture, βλέπε [40], [21]. Η εικασία αυτή παρέμενε ανοικτή από το 1995. Με τη βοήθεια των θεωρημάτων καθορισμού της βάσης Graver και των κυκλωμάτων τορικού ιδεώδους γραφήματος, δίνουμε μια οικογένεια άπειρων παραδειγμάτων, απαντώντας αρνητικά στην εικασία αυτή.

Συγκεκριμένα, η παρούσα διατριβή αποτελείται από τρία κεφάλαια.

Στο πρώτο κεφάλαιο αναφέρουμε ορισμένα βασικά στοιχεία γύρω από τη θεωρία των τορικών ιδεωδών. Θα δώσουμε τις βασικές έννοιες από τη θεωρία γραφημάτων, τις οποίες χρειαζόμαστε και θα περάσουμε αμέσως στον ορισμό του τορικού ιδεώδους πεπερασμένου γραφήματος I_G, αντιστοιχίζοντας σε κάθε γράφημα G ένα τορικό ιδεώδες.

Στο δεύτερο κεφάλαιο θα προσδιορίσουμε πλήρως τη βάση Graver του I_G, δηλαδή των σύνολο των πρωταρχικών στοιχείων του ιδεώδους. Οι Ohsugi, Hibi στο [29], ορίζοντας τη βάση Graver του ιδεώδους, ταυτόχρονα δώσανε και ικανές συνθήκες περιγραφής αυτής. Όπως είπαμε προηγουμένως, το ενδιαφέρον αρχικά στρέφεται στον προσδιορισμό της $Gr_{\mathcal{A}}$ μέσω ικανών και αναγκαίων συνθηκών. Επιπλέον μέσω ενός προβλήματος που ενδιέφερε την Αλγεβρική Στατιστική, οι Ohsugi, Hibi εισήγαγαν για πρώτη φορά την έννοια του αναντικατάστατου διωνύμου για ένα τορικό ιδεώδες. Ταυτόχρονα δώσανε πλήρη περιγραφή αυτών των στοιχείων για τα τορικά ιδεώδη δύο κατηγοριών γραφημάτων, των χορδικά αδύναμων και αυτών που ικανοποιούν τη συνθήκη περιττών κύκλων. Προχωράμε στη θεωρία μας, καθορίζοντας πλήρως τα αναντικατάστατα διωνύμα του I_G, για τυχαίο γράφημα G. Κλείνουμε το κεφάλαιο αυτό ορίζοντας τα θεμελιώδη στοιχείου του I_G, για τα οποία αποδεικνύουμε ικανή και αναγκαία συνθήκη καθορισμού τους.

Στο τρίτο κεφάλαιο της διατριβής, θα ξεκινήσουμε με κάποιες βασικές έννοιες από τη θεωρία των βάσεων Gröbner τορικών ιδεωδών. Ορίζουμε το καθαρό μπλοκ και το μεικτό γράφημα G. Διατυπώνουμε ένα θεώρημα το οποίο προσδιορίζει τη καθολική βάση Gröbner του τορικού ιδεώδους I_G, δηλαδή το σύνολο $\mathcal{U}_G$ για το ιδεώδες, Θεώρημα 3.2.9. Επιπλέον δίνουμε καλύτερα φράγματα για τους βαθμούς των στοιχείων των συνόλων αυτών, βελτιώνοντας τα ήδη υπάρχοντα των J. De Loera, B. Sturmfels και R. Thomas. Κλείνουμε το κεφάλαιο αυτό μελετώντας την εικασία True circuit, που είχε τεθεί από τον B. Sturmfels το 1995. Μέσω των παραπάνω αποτελεσμάτων δίνουμε μια οικογένεια άπειρων παραδειγμάτων, με τα οποία απαντούμε αρνητικά στην εικασία αυτή.

Ευχαριστίες

Η πορεία σε ένα διδακτορικό είναι μεγάλη και δύσκολη. Τόσο δύσκολη που είναι βέβαιο ότι μόνος μου δε θα κατάφερνα να την ολοκληρώσω. Μεγάλη μου επιθυμία και υποχρέωση είναι να ευχαριστήσω όλους εκείνους που με στήριξαν, ο καθένας με τον δικό του μοναδικό τρόπο και για την εκπόνηση της παρούσας διδακτορικής διατριβής, αλλά και για όλο αυτό το πανέμορφο ταξίδι μου στα μαθηματικά, αυτά τα έντεκα χρόνια των σπουδών μου.

Πάνω από όλους, οφείλω να ευχαριστήσω τους γονείς μου. Δεν υπήρχε άλλος τρόπος να φτάσω ως το τέρμα και τίποτα δε θα είχε νόημα αν δε τους είχα δίπλα μου, να μοιράζομαι κάθε στιγμή μου μαζί τους. Δείχνοντας απέραντη υπομονή, δύναμη και αγάπη, ήταν πάντα εδώ. Στηρίζανε κάθε απόφασή μου με οποιασδήποτε μορφής κόστους για εκείνους, κάτι που συνέβαλε καθοριστικά στην επίτευξη κάθε μου στόχου. Ταυτόχρονα δίπλα μου κάθε στιγμή του ταξιδιού μου, ήταν και είναι τα αδέρφια μου Παναγιώτης και Άγγελος και η νύφη μου και αδερφή μου Γιάννα στους οποίους και οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ.

Ευγνωμοσύνη και ευχαριστώ, οφείλω στον επιβλέποντα καθηγητή μου, Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Απόστολο Θωμά. Η επίβλεψή του και η αδιάκοπη καθοδήγησή του όλα αυτά τα χρόνια, συνέβαλαν καθοριστικά στην ολοκλήρωση των σπουδών μου. Πέρα από τα μαθηματικά ευχαριστώ τον δάσκαλό μου κ. Απόστολο, για το κίνητρο που μου έδινε όλα αυτά τα χρόνια για συνεχή μάθηση είτε τυπική είτε άτυπη και για το ήθος και τις αξίες που είχα τη τύχη να διδαχθώ δίπλα του. Τέλος τον ευχαριστώ για κάθε γνώση που μου πρόσφερε αλλά και για το αληθινό ενδιαφέρον του και τη στήριξή του σε κάθε δυσκολία που εμφανιζόταν μπροστά μου.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω προς τον Καθηγητή κ. Χ.Αθανασιάδη του Εθνικού Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών και Καθηγήτρια κ. Χ. Χαραλάμπους του Αριστοτέλειου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης που συμπληρώνουν τη 3μελή συμβουλευτική επιτροπή για κάθε παρατήρηση και επισήμανση προς τη βελτιοποίηση της διατριβής, όπως επίσης και τα υπόλοιπα μέλη της 7μελους επιτροπής κρίσης Αν.Καθ. Ε.Κεχαγιά, Αν.Καθ. Α.Κουβιδάκη, Αν.Καθ. Α.Μπεληγιάννη και Καθηγητή Ε.Πρασίδη για κάθε παρατήρησή τους. Επίσης ένα πολύ μεγάλο ευχαριστώ οφείλω στον συνοδοιπόρο σε αυτό το κοινό μας ταξίδι τα τελευταία χρόνια Υπ. Δρ. Χ. Ψαρουδάκη για τη στήριξή του σε κάθε εύκολη και δύσκολη στιγμή, καθώς επίσης τον Λέκτορα Κ. Μαυρίδη και τον Δρ. Ι. Μίχο για τη φιλία τους και κάθε βοήθειά τους.

Παράλληλα θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους φίλους μου στη Μυτιλήνη για τη συμπαράστασή τους καθ'ολη τη διάρκεια των διδακτορικού μου, τον κουνιάδο μου, συνάδελφο και φίλο μου Γιώργο Παπαριστείδη για κάθε στήριξή του και για όλες τις όμορφες μαθηματικές συζητήσεις μας και τέλος τον καλό μου φίλο Κώστα Ζαφειρόπουλο, φοιτητή του τμήματος Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων για τη φιλία και τη παρέα του όλα τα χρόνια του διδακτορικού μου.

Όσο τυπικό κι αν είναι ορισμένες φορές το κομμάτι αυτό των ευχαριστιών, τόσο αληθινό είναι επίσης. Κατά τη διάρκεια ενός διδακτορικού, είναι πολλές οι στιγμές που οι ψυχικές δυνάμεις σου σε εγκαταλείπουν. Είναι πολλές οι στιγμές που μένεις μόνος και σε κυριεύει η απογοήτευση. Μεγάλη μου ανάγκη, είναι να ευχαριστήσω τον άνθρωπο εκείνο που δεν άφησε καμία στιγμή όλα αυτά τα χρόνια, να ζήσω οποιοδήποτε από όλα αυτά τα συναισθήματα και που αποτελεί τη μόνιμη αστείρευτη πηγή δύναμής μου. Η σύντροφος της ζωής μου, Μαρία Παπαριστείδη, ήταν και είναι πάντα δίπλα μου και είναι ο μοναδικός λόγος που ποτέ μου σε αυτό το ταξίδι δεν εγκατέλειψα και κατάφερα να φτάσω ως το τέλος του. Σε ευχαριστώ.

Χρήστος Κ. Τατάκης

Ιωάννινα, Σεπτέμβριος 2011

Κεφάλαιο 1

Προκαταρκτικά

1.1 Τορικά ιδεώδη

Τα τορικά ιδεώδη είναι διωνυμικά ιδεώδη τα οποία παίζουν κεντρικό ρόλο στη συνδυαστική μεταθετική άλγεβρα, ένα κλάδο που τη τελευταία δεκαετία γνωρίζει ραγδαία εξέλιξη και έχει συμβάλλει καθοριστικά στην αντιμετώπιση πολλών προβλημάτων από διάφορες περιοχές των μαθηματικών, όπως για παράδειγμα: Άλγεβρα, Υπολογιστική Άλγεβρα, Αλγεβρική Γεωμετρία, Αλγεβρική Στατιστική, Ακέραιος Προγραμματισμός, Γεωμετρικός σχεδιασμός, Δυναμικά συστήματα, Διαφορικές Εξισώσεις, περισσότερες πληροφορίες [1],[10],[11],[19],[38],[23],[51].

Αρχικά θα δώσουμε τις βασικές έννοιες των τορικών ιδεωδών και στη συνέχεια θα συσχετίσουμε αυτά με τη θεωρία γραφημάτων. Σε κάθε γράφημα θα ορίσουμε και το αντίστοιχο τορικό ιδεώδες.

Ένα *μονώνυμο* στον $\mathbb{K}[\mathbf{x}] := \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ είναι ένα γινόμενο της μορφής $\mathbf{x}^{\mathbf{u}} = x_1^{u_1} x_2^{u_2} \cdots x_n^{u_n}$, όπου $\mathbb{K}$ τυχαίο σώμα και $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{N}^n$. Η διαφορά δύο μονωνύμων ορίζεται ως *διώνυμο*.

Μελετούμε μια ειδική κατηγορία ιδεωδών στον πολυωνυμικό δακτύλιο $\mathbb{K}[\mathbf{x}] := \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Σταθεροποιούμε ένα σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\} \in \mathbb{Z}^d \subset \mathbb{Q}^d$. Κάθε διάνυσμα $\mathbf{a}_i$ ορίζει ένα μονώνυμο $\mathbf{t}^{\mathbf{a}_i}$ στον πολυωνυμικό δακτύλιο Laurent $\mathbb{K}[\mathbf{t}^{\pm 1}] := \mathbb{K}[t_1, \ldots, t_d, t_1^{-1}, \ldots, t_d^{-1}]$ (όπου επιτρέπουμε πλέον στο διάνυσμα να περιέχει και αρνητικές συνιστώσες). Θεωρούμε τον ομομορφισμό ημιομάδων

$$\pi : \mathbb{N}^n \to \mathbb{Z}^d, \mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n) \mapsto \pi(\mathbf{u}) = u_1\mathbf{a_1} + \ldots + u_n\mathbf{a_n}.$$

Η εικόνα της π, είναι η ημιομάδα

$$\mathbb{N}\mathcal{A} = \{\lambda_1\mathbf{a_1} + \ldots + \lambda_n\mathbf{a_n} : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{N}\}$$

και όπως θα δούμε παρακάτω η εικόνα του μονωνύμου μέσω της απεικόνισης αυτής, ταυτίζεται με τον βαθμό του αντίστοιχου μονωνύμου $\mathbf{x}^{\mathbf{u}}$. Επιπλέον υποθέτουμε ότι η ημιομάδα $\mathbb{N}\mathcal{A}$ είναι θετικό μονοειδές. Με τον όρο *θετικό μονοειδές* ορίζουμε την ημιομάδα στην οποία το μοναδικό στοιχείο το οποίο έχει και το αντίθετό του είναι το μηδενικό. Η απεικόνιση π επάγει τον ομομορφισμό:

$$\hat{\pi} : \mathbb{K}[\mathbf{x}] \to \mathbb{K}[\mathbf{t}^{\pm 1}], x_i \mapsto \mathbf{t}^{\mathbf{a_i}}.$$

Ορισμός 1.1.1. *(τορικό ιδεώδες - toric ideal)*
Το τορικό ιδεώδες του συνόλου $\mathcal{A}$ ορίζεται ως ο πυρήνας της απεικόνισης $\hat{\pi}$ και συμβολίζεται με $I_{\mathcal{A}}$.

Δεδομένου ενός συνόλου $\mathcal{A}$, μπορούμε να υπολογίσουμε το τορικό ιδεώδες υπεράνω αυτού όπως στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.1.2. Θεωρούμε το σύνολο:

$$\mathcal{A} = \{(2,1,0),(1,2,0),(0,2,1),(0,1,2),(1,0,2),(2,0,1)\}.$$

Για το σύνολο αυτό, η $\hat{\pi} : \mathbb{K}[\mathbf{x}] \to \mathbb{K}[\mathbf{t}] = \mathbb{K}[t_1,t_2,t_3]$ ορίζεται ως εξής:

$$\hat{\pi}(x_1) = t_1^2t_2, \hat{\pi}(x_2) = t_1t_2^2, \hat{\pi}(x_3) = t_2^2t_3, \hat{\pi}(x_4) = t_2t_3^2, \hat{\pi}(x_5) = t_1t_3^2, \hat{\pi}(x_6) = t_1^2t_3.$$

Ο πυρήνας του παραπάνω ομομορφισμού, αποτελεί το τορικό ιδεώδες $I_{\mathcal{A}}$ του συνόλου $\mathcal{A}$. Ο υπολογισμός αυτού γίνεται ως εξής:

Αρχικά δίνουμε τα διώνυμα

$$x_1 - t_1^2t_2, x_2 - t_1t_2^2, x_3 - t_2^2t_3, x_4 - t_2t_3^2, x_5 - t_1t_3^2, x_6 - t_1^2t_3,$$

τα οποία βρίσκονται στον δακτύλιο $\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_6,t_1,t_2,t_3]$. Στη συνέχεια, απαλείφοντας τις μεταβλητές t_i εφαρμόζοντας διάταξη απαλοιφής, υπολογίζουμε μια βάση Gröbner (βλέπε [1] και τρίτο κεφάλαιο) για το ιδεώδες και μέσω του υπολογιστικού προγράμματος CoCoA, βρίσκουμε ότι αυτό αποτελείται από τα ακόλουθα 9 διώνυμα:

$$I_{\mathcal{A}} = \langle x_2x_5 - x_3x_6, x_1x_4 - x_3x_6, x_1x_3^2 - x_2^2x_4, x_2x_4^2 - x_3^2x_5, x_1^2x_3 - x_2^2x_6, x_1^2x_5 - x_2x_6^2,$$

$$x_3x_5^2 - x_4^2x_6, x_1x_5^2 - x_4x_6^2, x_1x_3x_5 - x_2x_4x_6\rangle.$$

Μια διαφορετική περιγραφή του $I_{\mathcal{A}}$, ακολουθεί στο παρακάτω λήμμα και αποδεικνύεται στο [39]:

Λήμμα 1.1.3 (Sturmfels). *Το τορικό ιδεώδες $I_{\mathcal{A}}$, παράγεται (ως $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος) από το σύνολο των διωνύμων*

$$\{\mathbf{x^u} - \mathbf{x^v} : \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{N}^n \text{ όπου } \pi(\mathbf{u}) = \pi(\mathbf{v})\}.$$

Έχοντας σταθεροποιήσει ένα σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n\} \in \mathbb{Z}^d \subset \mathbb{Q}^d$, εισάγουμε βαθμολόγηση στον πολυωνυμικό δακτύλιο $\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]$ θέτοντας $\deg_{\mathcal{A}}(x_i) = \mathbf{a_i}$ για $i = 1,\ldots,n$.

Ορισμός 1.1.4. *($\mathcal{A}$-βαθμός μονωνύμου - $\mathcal{A}$-degree of a monomial)*
Ορίζουμε $\mathcal{A}$-βαθμό του μονωνύμου $\mathbf{x^u} := x_1^{u_1}\cdots x_n^{u_n}$ ως :

$$\deg_{\mathcal{A}}(\mathbf{x^u}) := u_1\mathbf{a_1} + \ldots + u_n\mathbf{a_n} \in \mathbb{N}\mathcal{A},$$

όπου $\mathbf{u} = (u_1,\ldots,u_n) \in \mathbb{N}^n$.

Παρατηρώντας ότι $\deg_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}^{\mathbf{u}}) = \pi(\mathbf{u})$, το τορικό ιδεώδες $I_{\mathcal{A}}$ παράγεται από τα διώνυμα $\mathbf{x}^{\mathbf{u}} - \mathbf{x}^{\mathbf{v}}$ τέτοια ώστε $\deg_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}^{\mathbf{u}}) = \deg_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}^{\mathbf{v}})$. Σύμφωνα με το προηγούμενο Λήμμα, έχουμε ότι:

$$I_{\mathcal{A}} = \langle \mathbf{x}^{\mathbf{u}} - \mathbf{x}^{\mathbf{v}} : \deg_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}^{\mathbf{u}}) = \deg_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}^{\mathbf{v}}) \rangle.$$

Για τα διώνυμα που ανήκουν στο $I_{\mathcal{A}}$ ορίζουμε (βλέπε [39]):

$$\deg_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}^{\mathbf{u}} - \mathbf{x}^{\mathbf{v}}) := \deg_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}^{\mathbf{u}}).$$

Στην ημιομάδα $\mathbb{N}\mathcal{A}$, ορίζουμε τη παρακάτω μερική διάταξη:

$$\mathbf{c} \geq \mathbf{d} \iff \text{ υπάρχει } \mathbf{e} \in \mathbb{N}\mathcal{A} \text{ τέτοιο ώστε } : \mathbf{c} = \mathbf{d} + \mathbf{e}.$$

Η διάταξη αυτή παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στη θεωρία μας, καθώς βάσει αυτής ορίζεται η έννοια του ελαχιστοτικού διωνυμικού $\mathcal{A}$-βαθμού.

Ορισμός 1.1.5. *(ελαχιστοτικός διωνυμικός $\mathcal{A}$-βαθμός - minimal binomial $\mathcal{A}$-degree)*
Για $I_{\mathcal{A}} \neq 0$, τα ελαχιστοτικά στοιχεία του συνόλου

$$\{\deg_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}^{\mathbf{u}}) \mid \mathbf{x}^{\mathbf{u}} - \mathbf{x}^{\mathbf{v}} \in I_{\mathcal{A}}\} \subset \mathbb{N}\mathcal{A}$$

υπεράνω της διάταξης που ορίσαμε, καλούνται ελαχιστοτικοί διωνυμικοί $\mathcal{A}$-βαθμοί.

Ένας χρήσιμος ορισμός για τη συνέχεια, με τη βοήθεια του οποίου θα ορίσουμε τα κυκλώματα σε ένα τορικό ιδεώδες, είναι αυτός του φορέα ενός διανύσματος.

Ορισμός 1.1.6. *(φορέας διανύσματος - vector support)*
Ο φορέας supp$(\mathbf{u})$ ενός διανύσματος $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{Q}^n$, ορίζεται ως το σύνολο :

$$\{i \in \{1, \ldots, n\} : u_i \neq 0\}.$$

Ισοδύναμα θα μπορούσαμε να ορίσουμε τον φορέα ενός διανύσματος $\mathbf{u}$, ως υποσύνολο του συνόλου $\mathcal{A}$, μια αντιστοιχία πολύ χρήσιμη όπως θα δούμε στο τελευταίο κεφάλαιο της διατριβής μας, στη μελέτη της εικασίας True circuit. Δηλαδή

$$\textbf{supp}(\mathbf{u}) = \mathbf{a_i} \ : \ u_i \neq 0.$$

Για περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε στο τρίτο κεφάλαιο. Αντίστοιχα ορίζεται και ο *φορέας διωνύμου*, ως το σύνολο των μεταβλητών που εμφανίζονται στο διώνυμο αυτό.

Δοθέντος $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{Z}^n$, θα συμβολίζουμε με

$$\mathbf{u}^+ = (u_1^+, \ldots, u_n^+), \mathbf{u}^- = (u_1^-, \ldots, u_n^-)$$

τα διανύσματα με συντεταγμένες $u_i^+ = \max\{0, u_i\}$ και $u_i^- = \max\{0, -u_i\}$ αντίστοιχα. Προφανώς, για κάθε $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n$ έχουμε ότι

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- \text{ και } \textbf{supp}(\mathbf{u}^+) \cap \textbf{supp}(\mathbf{u}^-) = \emptyset.$$

Ένα παράδειγμα στο οποίο μπορούμε να δούμε μια απλή εφαρμογή των παραπάνω συμβολισμών, είναι το ακόλουθο.

Παράδειγμα 1.1.7. Έστω το διάνυσμα $\mathbf{u} = (3, 0, -1, 2, 0, -6)$. Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, έχουμε ότι $\mathbf{u}^+ = (3, 0, 0, 2, 0, 0)$ και $\mathbf{u}^- = (0, 0, 1, 0, 0, 6)$. Ακόμη

$$\mathrm{supp}(\mathbf{u}) = \{1, 3, 4, 6\}, \text{ ενώ}$$

$$\mathrm{supp}(\mathbf{u}^+) = \{1, 4\} \text{ και } \mathrm{supp}(\mathbf{u}^-) = \{3, 6\}.$$

Παρατηρούμε ότι $\mathrm{supp}(\mathbf{u}^+) \cap \mathrm{supp}(\mathbf{u}^-) = \emptyset$.

Σε αυτό το σημείο θα ορίσουμε μια πολύ βασική έννοια (των κυκλωμάτων), η οποία και θα μας απασχολήσει σε μεγάλο βαθμό στο τρίτο κεφάλαιο.

Ορισμός 1.1.8. *(κύκλωμα - circuit)*
Ένα διώνυμο $\mathbf{x}^{\mathbf{u}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{u}^-} \in I_{\mathcal{A}}$ με μ.κ.δ.$(\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-) = 1$ καλείται κύκλωμα, εάν ο φορέας του, είναι ελαχιστοτικός ως προς τη σχέση υποσυνόλου. Δηλαδή δεν υπάρχει κάποιο άλλο διώνυμο της μορφής $\mathbf{x}^{\mathbf{v}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{v}^-} \in I_{\mathcal{A}}$, ο φορέας του οποίου να είναι γνήσιο υποσύνολο του φορέα του $\mathbf{x}^{\mathbf{u}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{u}^-}$.

Το σύνολο όλων των κυκλωμάτων ενός τορικού ιδεώδους $I_{\mathcal{A}}$ υπεράνω ενός συνόλου $\mathcal{A}$, συμβολίζεται με $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$.

Παραδείγματα και εφαρμογές των κυκλωμάτων, θα δούμε παρακάτω.

1.2 Στοιχεία από τη θεωρία γραφημάτων

Σε αυτή την ενότητα, θα διατυπώσουμε ορισμένα στοιχεία από τη θεωρία γραφημάτων, των οποίων γίνεται εκτενής χρήση στη συνέχεια. Το ενδιαφέρον στη παρούσα διατριβή, επικεντρώνεται στα τορικά ιδεώδη πεπερασμένων γραφημάτων, στην εύρεση συστήματος γεννητόρων για αυτά και στη μελέτη των γεννητόρων αυτών. Θα δούμε ότι υπάρχει μια αντιστοιχία μεταξύ γραφημάτων και τορικών ιδεωδών, έτσι ώστε οι αλγεβρικές ιδιότητες των τορικών ιδεωδών αντιστοιχούν σε ιδιότητες των γραφημάτων και αντίστροφα.

Ο πρώτος ορισμός με τον οποίο θα ξεκινήσουμε είναι ο ορισμός ενός γραφήματος G.

Ορισμός 1.2.1. *(γράφημα - graph)*
Ένα γράφημα G είναι ένα σύνολο σημείων, που ονομάζονται κορυφές,V(G), και ένα σύνολο ακμών E(G) μεταξύ των κορυφών του γραφήματος. Κάθε στοιχείο του E(G) αντιστοιχείται μονοσήμαντα σε ένα συγκεκριμένο ζεύγος στοιχείων του συνόλου V(G).

Μια ακμή της οποίας το αρχικό σημείο ταυτίζεται με το τελικό καλείται *θηλειά* (*loop*). Όταν δύο ή περισσότερες ακμές έχουν κοινή αρχή και κοινό τέλος θα λέγονται *δεσμός* (*link*). Το G είναι *απλό(simple)* γράφημα εάν δε περιέχει θηλειές και δεσμούς.

Ένα γράφημα H για το οποίο $V(H) \subseteq V(G)$ και $E(H) \subseteq E(G)$ καλείται *υπογράφημα* του G.

Ορισμός 1.2.2. *(βαθμός κορυφής - degree of a vertex)*
Ο βαθμός $\deg_G(v)$ μιας κορυφής υ ενός γραφήματος G, ορίζεται ως ο αριθμός των ακμών του G οι οποίες διέρχονται από τη κορυφή αυτή, όπου κάθε θηλειά καταμετρείται δύο φορές.

Για την ανάπτυξη της θεωρίας σε όλα τα επόμενα κεφάλαια, θα θεωρούμε πάντα απλά γραφήματα. Στις περιπτώσεις όπου το γράφημα δεν είναι απλό, θα το αναφέρουμε αναλυτικά. Η έννοια του επαγόμενου γραφήματος που ακολουθεί, είναι σημαντική κυρίως στο δεύτερο κεφάλαιο της διατριβής.

Ορισμός 1.2.3. *(επαγόμενο υπογράφημα - induced subgraph)*
Έστω W υποσύνολο του συνόλου κορυφών $V(G)$ του γραφήματος G. Το επαγόμενο υπογράφημα του G υπεράνω του W, είναι το υπογράφημα του G, του οποίου το σύνολο κορυφών είναι το W και το σύνολο ακμών του το

$$\{\{v_1, v_2\} \in E(G) | \text{ όπου } v_1, v_2 \in W\}.$$

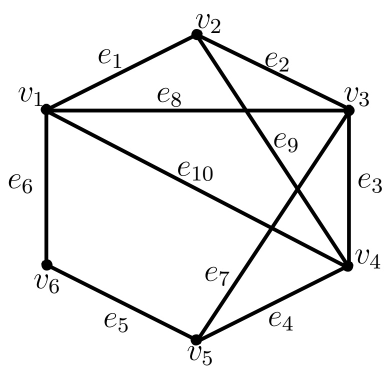
Το γράφημα αυτό το συμβολίζουμε με G_W.

Βασικές έννοιες σε ένα γράφημα είναι αυτές της περιπλάνησης, του μονοπατιού και του κύκλου. Μια *περιπλάνηση (walk)* w σε ένα γράφημα G είναι μια πεπερασμένη μη-μηδενική ακολουθία $v_0e_1v_1e_2 \ldots e_lv_l$, όπου τα $v_i \in V(G), i = 0, \ldots, l$ και $e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \in E(G), i = 1, \ldots, l$. Όταν η αρχική κορυφή της περιπλάνησης ταυτίζεται με τη τελική, τότε αυτή θα καλείται *κλειστή περιπλάνηση*. Με $-w$ θα συμβολίζουμε τη περιπλάνηση $v_le_lv_{l-1}e_{l-1} \ldots e_1v_0$. Το πλήθος των ακμών μιας περιπλάνησης ορίζουν το *μήκος* αυτής. Μια περιπλάνηση θα καλείται *άρτια* αν είναι άρτιου μήκους (αντίστοιχα ο ορισμός της *περιττής*). Όταν τα $v_i \in V(G), i = 0, \ldots, l$ της περιπλάνησης w είναι διακεκριμένα, τότε η w καλείται *μονοπάτι (path)*. Όταν οι ακμές $e_i \in E(G), i = 1, \ldots, l$ της περιπλάνησης w είναι διακεκριμένες, τότε αυτή καλείται *διαδρομή (trail)*. Ένα μονοπάτι στο οποίο το αρχικό σημείο ταυτίζεται με το τελικό, καλείται *κύκλος (cycle)*. Πολλές φορές για πρακτικούς λόγους θα συμβολίζουμε τη περιπλάνησή μας με $(v_1, \ldots, v_n)$ ή και με $(e_1, \ldots, e_n)$. Τέλος ορίζουμε με *υποπεριπλάνηση (subwalk)* $w' = (e'_1, \ldots, e'_k)$ μιας περιπλάνησης $w = (e_1, \ldots, e_s)$ ενός γραφήματος G, μια περιπλάνηση του G τέτοια ώστε

$$e'_1 \cdots e'_k \mid e_1 \cdots e_s$$

Αν w είναι μια περιπλάνηση του γραφήματος G, με G_w θα συμβολίζουμε το επαγόμενο υπογράφημα του G, το οποίο έχει ως σύνολο κορυφών τις κορυφές που περιέχονται στη περιπλάνηση w.

Παράδειγμα 1.2.4. Ας δούμε ένα παράδειγμα επαγόμενου υπογραφήματος. Θεωρούμε το γράφημα G με $V(G) = \{v_1, \ldots, v_6\}$ και $E(G) = \{e_1, \ldots, e_9, e_{10}\}$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



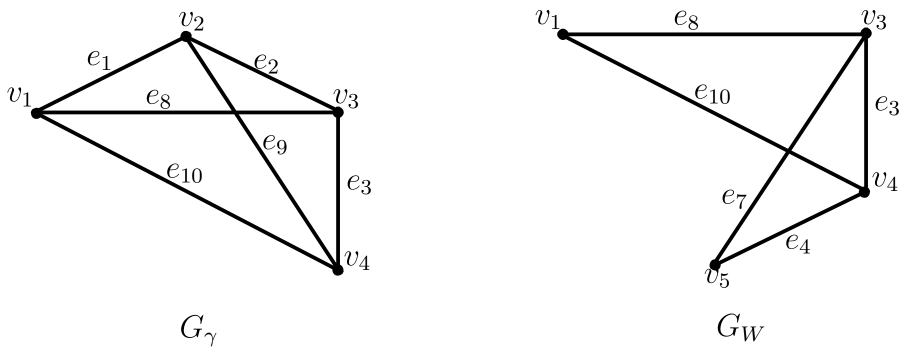
Έστω

$$W = \{v_1, v_3, v_4, v_5\} \subset V(G).$$

Το επαγόμενο υπογράφημα G_W του G, αποτελείται από τις τέσσερις αυτές κορυφές, καθώς επίσης και όλες εκείνες τις ακμές που προέρχονται από τις κορυφές αυτές και είναι ακμές και στο γράφημα G (βλέπε σχήμα). Ομοίως, αν γ είναι η άρτια κλειστή περιπλάνηση

$$\gamma = (e_1, e_2, e_3, e_{10}),$$

τότε το αντίστοιχο G_γ αυτής έχει ως σύνολο κορυφών τις κορυφές $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ και ακμές αυτές που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Επαγόμενα υπογραφήματα G_W και G_γ

Μια κατηγορία γραφημάτων η οποία έχει πολύ σπουδαίες ιδιότητες και βάσει της οποίας θα δώσουμε ορισμένες απαντήσεις σε κάποια από τα ερωτήματα που μας απασχόλησαν, είναι η κατηγορία των πλήρων γραφημάτων.

Ορισμός 1.2.5. *(πλήρες γράφημα - complete graph)*
Ένα απλό γράφημα G στο οποίο για κάθε ζεύγος διακεκριμένων κορυφών του υπάρχει ακμή που τις συνδέει, καλείται πλήρες γράφημα.

Κλείνοντας την ενότητα των ορισμών σε γραφήματα, απαραίτητες έννοιες για τη συνέχεια της θεωρίας μας και μάλιστα από τις πιο χαρακτηριστικές στη θεωρία γραφημάτων είναι αυτές της συνεκτικότητας, των συνεκτικών γραφημάτων, καθώς και ο ορισμός του δέντρου. Τα συνεκτικά γραφήματα έχουν πολλές εφαρμογές και η χρήση τους σε αποδείξεις στη θεωρία γραφημάτων είναι ευρεία. Πολλές φορές μάλιστα η μελέτη ενός προβλήματος σε ένα γράφημα G, ανάγεται σε πρόβλημα στις συνεκτικές συνιστώσες αυτού, κάτι που απλοποιεί αρκετά τους υπολογισμούς μας.

Δύο κορυφές $\{u\}, \{v\}$ ενός γραφήματος καλούνται *συνδεδεμένες (connected)* αν υπάρχει μονοπάτι στο G με αρχικό και τελικό σημείο τις κορυφές $\{u\}, \{v\}$ αντίστοιχα. Η συνδετικότητα είναι σχέση ισοδυναμίας του συνόλου των κορυφών του γραφήματος. Συνεπώς διαμερίζεται το σύνολο $V(G)$ σε μη κενά υποσύνολα $V_1, V_2, \ldots, V_n$ τέτοια ώστε, αν δύο κορυφές είναι συνδεδεμένες μέσω μονοπατιού, τότε υποχρεωτικά αυτές ανήκουν στο ίδιο σύνολο V_i και αντίστροφα. Τα υπογραφήματα $G(V_1), \ldots, G(V_n)$ καλούνται *συνιστώσες (components)* του G.

Ορισμός 1.2.6. *(συνεκτικό γράφημα - connected graph)*
Εαν το γράφημα G έχει ακριβώς μια συνιστώσα, τότε το G καλείται συνεκτικό. Σε κάθε άλλη περίπτωση, αυτό καλείται μη-συνεκτικό.

Ορισμός 1.2.7. *(δέντρο - tree)*
Ένα δέντρο είναι ένα συνεκτικό γράφημα το οποίο δε περιέχει κύκλο.

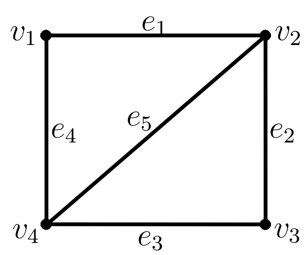
Από τον ορισμό της διαδρομής σε ένα γράφημα, προκύπτει και ο ορισμός της διαδρομής Euler, μια έννοια η οποία συνέβαλλε στη λύση ενός γνωστού προβλήματος της θεωρίας γραφημάτων· το πρόβλημα των γεφυρών του Königsberg. Με το πρόβλημα αυτό ξεκίνησε η ανάπτυξη του κλάδου της θεωρίας γραφημάτων. Μια κλειστή διαδρομή w σε ένα γράφημα G, καλείται *διαδρομή Euler* (Euler trail) εάν η w διέρχεται από κάθε ακμή του γραφήματος. Ένα συνεκτικό γράφημα G καλείται *γράφημα Euler* (Eulerian graph) αν υπάρχει μέσα σε αυτό, μια τέτοια διαδρομή. Ένα θεώρημα χαρακτηρισμού τέτοιων γραφημάτων είναι το παρακάτω:

Θεώρημα 1.2.8 (Euler, 1736). *Ένα συνεκτικό γράφημα G είναι γράφημα Euler αν και μόνο αν κάθε κορυφή του έχει άρτιο βαθμό.*

Ένα παράδειγμα για τις παραπάνω έννοιες είναι το ακόλουθο:

Παράδειγμα 1.2.9. Έστω το συνεκτικό γράφημα

$$G: \quad V(G) = \{v_1, \dots, v_4\} \text{ και } E(G) = \{e_1, \dots, e_5\}:$$



Στο γράφημα αυτό, ένα παράδειγμα περιπλάνησης είναι:

$$w = (v_1, e_1, v_2, e_5, v_4, e_4, v_1, e_1, v_2).$$

Η περιπλάνηση αυτή δεν αποτελεί μονοπάτι (καθώς επαναλαμβάνεται η κορυφή v_1), αλλά δεν είναι και διαδρομή μιας και η ακμή e_1 εμφανίζεται δύο φορές. Το μήκος της w είναι ίσο με τέσσερα. Ένα μονοπάτι είναι το:

$$p = (v_1, e_1, v_2, e_5, v_4, e_3, v_3),$$

ενώ μια διαδρομή αυτού που δεν είναι μονοπάτι είναι το:

$$t = (v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_5, v_2, e_1, v_1).$$

Ένας από τους κύκλους που υπάρχουν στο γράφημά μας είναι ο:

$$c = (v_1, e_1, v_2, e_5, v_4, e_4, v_1).$$

Τέλος είναι προφανές από το Θεώρημα 1.2.8 ότι το παραπάνω γράφημα δεν είναι γράφημα Euler, καθώς για παράδειγμα η κορυφή v_2 έχει βαθμό τρία (περιττό).

Οι έννοιες που θα ορίσουμε στη συνέχεια είναι οι έννοιες της ακμής και κορυφής αποκοπής σε ένα γράφημα.

Με τον συμβολισμό G $-\{e\}$, θα θεωρούμε το γράφημα G από το οποίο έχουμε αφαιρέσει την ακμή e.

Ορισμός 1.2.10. *(ακμή αποκοπής - cut edge)*
Μια ακμή αποκοπής e ενός γραφήματος G, είναι μια ακμή του G τέτοια ώστε το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του γραφήματος G $-\{e\}$ *είναι μεγαλύτερο του αντίστοιχου πλήθους του G.*

Αντίστοιχα ορίζουμε και την κορυφή αποκοπής. Με τον συμβολισμό G$-\{v\}$, θα θεωρούμε το γράφημα G από το οποίο έχουμε αφαιρέσει την κορυφή v (αφαιρώντας ταυτόχρονα όλες τις ακμές του γραφήματος, οι οποίες έχουν τη v ως κορυφή τους).

Ορισμός 1.2.11. *(κορυφή αποκοπής - cut vertex)*
Μια κορυφή αποκοπής υ ενός γραφήματος G, είναι μια κορυφή του G τέτοια ώστε το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του γραφήματος G $-\{v\}$ *είναι μεγαλύτερο του αντίστοιχου πλήθους του G.*

Τέλος ένα συνεκτικό γράφημα θα λέγεται *δισυνεκτικό* (biconnected graph), όταν αυτό δε περιέχει κορυφές αποκοπής. Ένα μεγιστοτικό ως προς τη σχέση υποσυνόλου δισυνεκτικό γράφημα G, καλείται *μπλοκ* (block). Κάθε γράφημα είναι ένωση των μπλοκ του. Όπως θα δούμε η έννοια του μπλοκ ενός γραφήματος, παίζει καθοριστικό ρόλο στη θεωρία μας στα επόμενα κεφάλαια.

1.3 Τορικό Ιδεώδες πεπερασμένου γραφήματος (I_G)

Παρακάτω θα συνδέσουμε τη θεωρία των τορικών ιδεωδών με τα πεπερασμένα γραφήματα, ορίζοντας τα τορικά ιδεώδη πεπερασμένων γραφημάτων.

Ας είναι G ένα απλό πεπερασμένο συνεκτικό γράφημα, με σύνολο κορυφών $V(G) = \{v_1, \ldots, v_d\}$ και σύνολο ακμών $E(G) = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Συμβολίζουμε με $\mathbb{K}[\mathbf{t}] = \mathbb{K}[t_1, \ldots, t_d]$ τον πολυωνυμικό δακτύλιο d μεταβλητών υπεράνω ενός τυχαίου σώματος $\mathbb{K}$.

Ας είναι $e = \{i, j\}$ ακμή του γραφήματος G η οποία συνδέει τις κορυφές $i, j \in V(G)$. Θα συμβολίζουμε με $\mathbf{t}^e$ το ελεύθερο τετραγώνου μονώνυμο $t_i t_j$ το οποίο ανήκει στον $\mathbb{K}[\mathbf{t}]$. Ορίζουμε με $\mathbb{K}[G]$ την υποάλγεβρα του $\mathbb{K}[\mathbf{t}]$ η οποία παράγεται από τα $\mathbf{t}^{e_1}, \mathbf{t}^{e_2}, \ldots, \mathbf{t}^{e_n}$ υπεράνω του $\mathbb{K}$. Η άλγεβρα $\mathbb{K}[G]$ καλείται *άλγεβρα ακμών* του γραφήματος G. Έστω $\mathbb{K}[\mathbf{e}] = \mathbb{K}[e_1, \ldots, e_n]$ ο πολυωνυμικός δακτύλιος n μεταβλητών υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$ και έστω ο ομομορφισμός $\hat{\pi}$ ο οποίος ορίζεται:

$$\hat{\pi} : \mathbb{K}[\mathbf{e}] \to \mathbb{K}[G] \text{ όπου } \hat{\pi}(e_i) = \mathbf{t}^{e_i}, \ \forall\ 1 \leq i \leq n.$$

Ορισμός 1.3.1. *(τορικό ιδεώδες γραφήματος - toric ideal of a graph)*
Το τορικό ιδεώδες του γραφήματος G*, είναι ο πυρήνας της απεικόνισης* $\hat{\pi}$ *και θα συμβολίζεται με* I_G.

Όπως είδαμε ο ορισμός του τορικού ιδεώδους ενός γραφήματος G, δε διαφέρει σε τίποτα από τον γενικό ορισμό ενός τορικού ιδεώδους. Έτσι και το I_G ορίζεται υπεράνω ενός συνόλου διανυσμάτων $\mathcal{A}$. Θεωρούμε την ελεύθερη αβελιανή ομάδα $\mathbb{Z}^d$, με βάση το σύνολο των κορυφών του γραφήματος G. Αντιστοιχούμε σε κάθε ακμή $e = \{v_i, v_j\} \in E(G)$ το στοιχείο $\alpha_e = v_i + v_j \in \mathbb{Z}^d$, όπου

$$v_i = (0, \ldots, 0, \overbrace{1}^{i-\text{θέση}}, 0, \ldots, 0).$$

Είναι φανερό ότι το τορικό ιδεώδες I_G του γραφήματος G, είναι το τορικό ιδεώδες $I_{\mathcal{A}_G}$ στον πολυωνυμικό δακτύλιο $\mathbb{K}[e_1, \ldots, e_n]$, όπου $\mathcal{A}_G = \{\alpha_e \mid e \in E(G)\} \subset \mathbb{Z}^d$.

Στη προσπάθειά μας να καταλάβουμε το τορικό ιδεώδες I_G, θα εισάγουμε κάποιες επιπλέον έννοιες από τη θεωρία γραφημάτων.

Θα δώσουμε τους ορισμούς της χορδής σε ένα γράφημα, όπως και αυτές του περιττού και άρτιου κύκλου. Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε τη Πρόταση 1.3.2, με την οποία έχουμε πλήρη περιγραφή του ιδεώδους. Θυμίζουμε ότι σε ένα γράφημα G, μια περιπλάνηση μήκους q η οποία συνδέει τις κορυφές $v_1, v_{q+1} \in V(G)$, είναι μια πεπερασμένη ακολουθία

$$w = (\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_q, v_{q+1}\}),$$

όπου κάθε $\{v_k, v_{k+1}\} \in E(G),\ k \in \{1, \ldots, q\}$. Τέλος θυμίζουμε ότι κύκλος είναι μια κλειστή περιπλάνηση

$$C = (\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_q, v_1\})$$

με $v_i \neq v_j$ για κάθε i, j με $1 \leq i < j \leq q$.

Θυμίζουμε ότι ο στόχος μας είναι να περιγράψουμε το τορικό ιδεώδες I_G. Ο Villarreal το 1995 στο άρθρο του [47], απέδειξε ότι αυτό επιτυγχάνεται με τη βοήθεια των άρτιων κλειστών περιπλανήσεων ενός γραφήματος, Πρόταση 1.3.2.

Δοθέντος μιας άρτιας κλειστής περιπλάνησης $\gamma = (e_1, e_2, \ldots, e_{2k})$ ενός γραφήματος G όπου $e_i \in E(G),\ i = 1, \ldots, 2k$, συμβολίζουμε με B_γ το διώνυμο:

$$B_\gamma = \prod_{j=1}^{k} e_{2j-1} - \prod_{j=1}^{k} e_{2j}$$

το οποίο ανήκει στο I_G. Για διευκόλυνσή μας θα γράφουμε:

$$B_\gamma = E_\gamma^{(+)} - E_\gamma^{(-)},$$

όπου

$$E_\gamma^{(+)} = \prod_{j=1}^{k} e_{2j-1} \text{ και } E_\gamma^{(-)} = \prod_{j=1}^{k} e_{2j}.$$

Πρόταση 1.3.2 (Villarreal, 1995)**.** *Το τορικό ιδεώδες I_G παράγεται από τα διώνυμα B_γ, όπου γ είναι μια άρτια κλειστή περιπλάνηση του G.*

Ο λόγος της απαίτησης η γ να αποτελεί άρτια και κλειστή περιπλάνηση, είναι για να εξασφαλίσουμε την ισότητα των βαθμών στους όρους των διωνύμων, βλέπε Λήμμα 1.1.3.

Ας προσπαθήσουμε να καταλάβουμε καλύτερα τη βαθμολόγηση στον συγκεκριμένο δακτύλιο. Όπως είδαμε προηγουμένως μπορούμε να θεωρήσουμε με $\mathcal{A}$, το σύνολο διανυσμάτων της μορφής:

$$(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0),$$

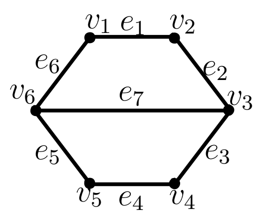
αντιστοιχίζοντας ένα διάνυσμα σε κάθε ακμή $e=\{v_i,v_j\}$, όπου οι μονάδες που βρίσκονται στην i και j θέση, αντιστοιχούν στις κορυφές v_i, v_j αντίστοιχα. Αντίστροφα σε κάθε τέτοιο σύνολο διανυσμάτων, αντιστοιχεί και ένα γράφημα. Θυμίζουμε ότι για να συγκρίνουμε δύο βαθμούς $\mathbf{b},\mathbf{c}$, βάσει της διάταξης που ορίσαμε, αρκεί να βρούμε ένα τρίτο διάνυσμα $\mathbf{d}$ στο σύνολο $\mathbb{N}\mathcal{A}$, για το οποίο να ισχύει μια ισότητα της μορφής $\mathbf{b}=\mathbf{c}+\mathbf{d}$. Ακριβώς η ίδια διαδικασία εφαρμόζεται και εδώ, δουλεύοντας αυτή τη φορά υπεράνω του συνόλου $\mathcal{A}$. Για να ξεκαθαρίσουμε όλη αυτή τη διαδικασία, δίνουμε το ακόλουθο παράδειγμα με δύο περιπτώσεις. Στη πρώτη περίπτωση οι βαθμοί που εξετάζουμε δεν είναι συγκρίσιμοι, ενώ στη δεύτερη είναι.

Παράδειγμα 1.3.3. Έστω σύνολο διανυσμάτων:

$$\mathcal{A}=\{(1,1,0,0,0,0),(0,1,1,0,0,0),(0,0,1,1,0,0),(0,0,0,1,1,0),$$

$$(0,0,0,0,1,1),(1,0,0,0,0,1),(0,0,1,0,0,1)\}.$$

Θεωρούμε το γράφημα G_1 με $V(G_1)=\{v_1,\ldots,v_6\}$ και $E(G_1)=\{e_1,\ldots,e_7\}$.



Ας πάρουμε σε αυτό τις περιπλανήσεις:

$$\gamma_1=(e_1,e_2,e_7,e_6)$$

και

$$\gamma_2=(e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6).$$

Τα διώνυμα που προκύπτουν είναι:

$$B_{\gamma_1}=e_1e_7-e_2e_6$$

και

$$B_{\gamma_2}=e_1e_3e_5-e_2e_4e_6.$$

Οι αντίστοιχοι βαθμοί είναι:

$$\deg(B_{\gamma_1})=\deg(E_{\gamma_1}^{(+)})=\deg(e_1)+\deg(e_7)=(v_1+v_2)+(v_3+v_6)=(1,1,1,0,0,1)$$

και ομοίως βρίσκουμε:

$$\deg(B_{\gamma_2}) = (v_1 + v_2) + (v_3 + v_4) + (v_5 + v_6) = (1, 1, 1, 1, 1, 1).$$

Παρατηρούμε ότι $\deg(B_{\gamma_1}) < \deg(B_{\gamma_2})$ καθώς

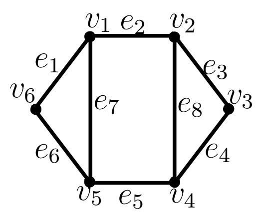
$$\deg(B_{\gamma_2}) = \deg(B_{\gamma_1}) + \overbrace{(v_4 + v_5)}^{(0,0,0,1,1,0)}$$

και οι κορυφές v_4, v_5 αντιστοιχούν σε ακμή του γραφήματος (δηλαδή το διάνυσμα $(0, 0, 0, 1, 1, 0)$ αντιστοιχεί σε βαθμό ακμής). Ισοδύναμα

$$\exists\ \mathbf{b} = (0, 0, 0, 1, 1, 0) \in \mathbb{N}\mathcal{A} :\ \deg(B_{\gamma_2}) = \deg(B_{\gamma_1}) + \mathbf{b}.$$

Προφανώς αν δεν υπήρχε τέτοιο διάνυσμα (ισοδύναμα αυτό που έμενε υπόλοιπο στο $\deg(B_{\gamma_2})$ δεν αντιστοιχούσε σε ακμές του γραφήματος), τότε δε θα μπορούσαμε να συγκρίνουμε τους δύο αυτούς βαθμούς. Μια τέτοια περίπτωση βλέπουμε στο επόμενο γράφημα.

Έστω γράφημα G_2 με $V(G_2) = \{v_1, \ldots, v_6\}$ και $E(G_2) = \{e_1, \ldots, e_8\}$ (όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα).



Θεωρούμε τις περιπλανήσεις:

$$\gamma_1 = (e_2, e_8, e_5, e_7)$$

και

$$\gamma_2 = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6).$$

Υπολογίζοντας τα αντίστοιχα διώνυμα B_γ, έχουμε:

$$B_{\gamma_1} = e_2 e_5 - e_7 e_8$$

και

$$B_{\gamma_2} = e_1 e_3 e_5 - e_2 e_4 e_6.$$

Οι βαθμοί των διωνύμων αυτών είναι:

$$\begin{aligned}\deg(B_{\gamma_1}) &= \deg(E_{\gamma_1}^{(+)}) = \deg(e_2) + \deg(e_5) \\ &= (v_1 + v_2) + (v_4 + v_5) \\ &= (1, 1, 0, 0, 0, 0) + (0, 0, 0, 1, 1, 0) = (1, 1, 0, 1, 1, 0).\end{aligned}$$

Ομοίως:

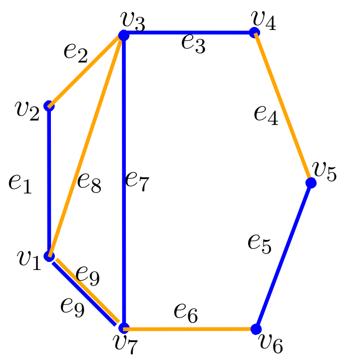
$$\begin{aligned}\deg(B_{\gamma_2}) &= \deg(e_1)+\deg(e_3)+\deg(e_5)\\ &= (v_1+v_2)+(v_3+v_4)+(v_5+v_6)\\ &= (1,1,0,0,0,0)+(0,0,1,1,0,0)+(0,0,0,0,1,1)=(1,1,1,1,1,1).\end{aligned}$$

Αν και η πρώτη εντύπωση που αρχικά έχουμε είναι ότι $\deg(B_{\gamma_1}) < \deg(B_{\gamma_2})$, κάτι τέτοιο δεν ισχύει καθώς δεν υπάρχει διάνυσμα $\mathbf{b} \in \mathbb{N}\mathcal{A}$ για το οποίο $\deg(B_{\gamma_2}) = \deg(B_{\gamma_1}) + \mathbf{b}$. Ο λόγος είναι ότι οι κορυφές που περισσεύουν στον βαθμό του B_{γ_2}, δηλαδή οι v_3, v_6 δεν αντιστοιχούν σε ακμή του γραφήματος (και συνεπώς σε διάνυσμα του $\mathbb{N}\mathcal{A}$). Συνεπώς δεν ορίζεται σύγκριση μεταξύ των δύο αυτών διωνύμων και μάλιστα τα $B_{\gamma_1}, B_{\gamma_2}$ είναι ελαχιστοτικού βαθμού.

Τα επόμενα παραδείγματα αποσαφηνίζουν τις παραπάνω έννοιες.

Παράδειγμα 1.3.4. Έστω γράφημα G το γράφημα του παρακάτω σχήματος και θεωρούμε την άρτια κλειστή περιπλάνηση αυτού:

$$\gamma = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_9).$$



Η γ έχει μήκος 10 και:

$$B_\gamma = E_\gamma^{(+)} - E_\gamma^{(-)} = e_1e_3e_5e_7e_9 - e_2e_4e_6e_8e_9,$$

όπου $E_\gamma^{(+)} = e_1e_3e_5e_7e_9$ και $E_\gamma^{(-)} = e_2e_4e_6e_8e_9$. Σύμφωνα με τη Πρόταση 1.3.2 έχουμε ότι $B_\gamma \in I_G$. Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned}\deg_{\mathcal{A}}(E_\gamma^{(+)}) &= \deg_{\mathcal{A}}(e_1e_3e_5e_7e_9)\\ &= \deg(e_1)+\deg(e_3)+\deg(e_5)+\deg(e_7)+\deg(e_9)\\ &= (v_1+v_2)+(v_3+v_4)+(v_5+v_6)+(v_7+v_3)+(v_7+v_1)\\ &= 2v_1+2v_3+2v_7+v_4+v_5+v_6.\end{aligned}$$

Ομοίως:

$$\begin{aligned}\deg_{\mathcal{A}}(E_\gamma^{(-)}) &= \deg_{\mathcal{A}}(e_2e_4e_6e_8e_9)\\ &= \deg(e_2)+\deg(e_4)+\deg(e_6)+\deg(e_8)+\deg(e_9)\\ &= (v_2+v_3)+(v_4+v_5)+(v_6+v_7)+(v_3+v_1)+(v_7+v_1)\\ &= 2v_1+2v_3+2v_7+v_4+v_5+v_6.\end{aligned}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

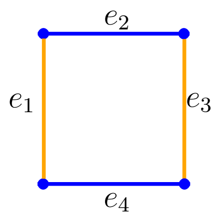
$$\deg_{\mathcal{A}}(E_\gamma^{(+)}) = \deg_{\mathcal{A}}(E_\gamma^{(-)}) \Rightarrow e_1e_3e_5e_7e_9 - e_2e_4e_6e_8e_9 \in I_G$$

και άρα εξ ορισμού $B_\gamma \in I_G$. Όπως θα δούμε παρακάτω, το διώνυμο αυτό δεν αποτελεί ελαχιστοτικό γεννήτορα του ιδεώδους (ο λόγος όπως θα δούμε είναι ότι εμφανίζεται κοινός παράγοντας στους όρους του).

Για να γίνει ακόμη πιο κατανοητή η έννοια και η κατασκευή του ιδεώδους, παρακάτω παρουσιάζουμε αρκετά παραδείγματα σχετικά με αυτή.

Παράδειγμα 1.3.5. Στο παράδειγμα αυτό θα δούμε μια περίπτωση όπου το I_G είναι κύριο ιδεώδες και μια κατά την οποία το I_G είναι το μηδενικό ιδεώδες.

(i) Το απλούστερο παράδειγμα τορικού ιδεώδους γραφήματος είναι όταν το γράφημα είναι τετράγωνο, στο οποίο το αντίστοιχο ιδεώδες I_G είναι κύριο.



Παράδειγμα όπου το I_G είναι κύριο ιδεώδες

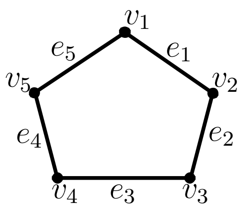
Μια προφανής άρτια κλειστή περιπλάνηση αυτού είναι η

$$\gamma = (e_1, e_2, e_3, e_4).$$

Το I_G είναι κύριο ιδεώδες, βλέπε Θεώρημα 2.3.21 και:

$$I_G = \langle e_1e_3 - e_2e_4 \rangle.$$

(ii) Θεωρούμε το ακόλουθο γράφημα G, με $V(G) = \{v_1, \ldots, v_5\}$ και $E(G) = \{e_1, \ldots, e_5\}$.



Στο γράφημα αυτό το ιδεώδες I_G είναι το μηδενικό. Πράγματι υπάρχουν άπειρες άρτιες κλειστές περιπλανήσεις, αλλά όλων αυτών τα αντίστοιχα διώνυμα είναι τα μηδενικά. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την άρτια κλειστή περιπλάνηση

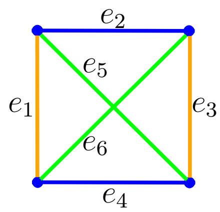
$$\gamma = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5).$$

Το αντίστοιχο διώνυμο είναι:

$$B_\gamma = e_1e_3e_5e_2e_4 - e_2e_4e_1e_3e_5 = 0.$$

Στο επόμενο παράδειγμα, βλέπουμε ένα πιο σύνθετο γράφημα στο οποίο περιέχονται αρκετές άρτιες κλειστές περιπλανήσεις. Θα παρατηρήσουμε ότι κάποιες από αυτές δεν αντιστοιχούν σε ελαχιστοτικούς γεννήτορες, ενώ κάποιες άλλες εμφανίζονται σε κάποιο ελαχιστοτικό σύνολο γεννητόρων, αλλά όχι σε όλα.

Παράδειγμα 1.3.6. Ας δούμε τη περίπτωση του πλήρους γραφήματος K_4.



Παράδειγμα I_{K_4}

Στη περίπτωση αυτή, το I_{K_4} παράγεται από τρία διώνυμα (προσδιορίζονται στο γράφημα με διαφορετικό χρώμα) με:

$$I_{K_4} = \langle e_1e_3 - e_2e_4, e_1e_3 - e_5e_6, e_2e_4 - e_5e_6 \rangle.$$

Το $e_1e_3 - e_2e_4$ προέρχεται από τη περιπλάνηση $\gamma_1 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, το $e_1e_3 - e_5e_6$ προέρχεται από τη περιπλάνηση $\gamma_2 = (e_1, e_5, e_3, e_6)$ και τέλος το $e_2e_4 - e_5e_6$ προέρχεται από τη περιπλάνηση $\gamma_3 = (e_2, e_5, e_4, e_6)$. Κανένα από αυτά όμως δεν είναι αναντικατάστατο, καθώς εύκολα παρατηρούμε ότι οποιαδήποτε δύο κι αν επιλέξουμε, αυτά γεννούν το ιδεώδες και αποτελούν σε κάθε περίπτωση ένα ελαχιστοτικό σύνολο γεννητόρων για αυτό. Πράγματι:

$$e_1e_3 - e_2e_4 = (e_1e_3 - e_5e_6) - (e_2e_4 - e_5e_6),$$

$$e_1e_3 - e_5e_6 = (e_1e_3 - e_2e_4) - (e_2e_4 - e_5e_6),$$

$$e_2e_4 - e_5e_6 = (e_1e_3 - e_2e_4) - (e_1e_3 - e_5e_6).$$

Επιλέγοντας για παράδειγμα τα δύο πρώτα, ένα σύνολο γεννητόρων για το ιδεώδες μας, είναι:

$$I_{K_4} = \langle e_1e_3 - e_2e_4, e_1e_3 - e_5e_6 \rangle,$$

το οποίο είναι και ελαχιστοτικό γιατί:

$$e_1e_3 - e_2e_4 \notin \langle e_1e_3 - e_5e_6 \rangle$$

και αντίστοιχα

$$e_1e_3 - e_5e_6 \notin \langle e_1e_3 - e_2e_4 \rangle.$$

Όμοια και για τα άλλα δύο σύνολα.

Ας δούμε την περίπτωση στην οποία επιλέγουμε μια μεγαλύτερη άρτια κλειστή περιπλάνηση από τις παραπάνω. Έστω λοιπόν αυτή, η:

$$\gamma = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_6, e_2, e_5, e_4).$$

Το αντίστοιχο B_γ είναι:

$$B_\gamma = e_1e_5e_3e_6 - e_2^2e_4^2.$$

Σύμφωνα με τη Πρόταση 1.3.2 συμπεραίνουμε ότι $B_\gamma \in I_{K_4}$. Επιπλέον παρατηρούμε ότι:

$$B_\gamma = e_1e_5e_3e_6 - e_2^2e_4^2 = (e_1e_3 - e_2e_4)e_5e_6 + (e_5e_6 - e_2e_4)e_2e_4.$$

Αμέσως μετά θα δώσουμε τον ορισμό της πρωταρχικής άρτιας κλειστής περιπλάνησης και θα δούμε ότι για να εκφράσουμε το αντίστοιχο ιδεώδες του γραφήματος, αρκεί να δούμε μόνο αυτές τις περιπλανήσεις. Η συγκεκριμένη γ που επιλέξαμε δεν είναι πρωταρχική και για αυτό το αντίστοιχο B_γ εκφράστηκε ως συνδυασμός άλλων διωνύμων του I_{K_4}.

Κεφάλαιο 2

Βάση Graver, Ελαχιστοτικοί και Αναντικατάστατοι γεννήτορες του I_G

2.1 Εισαγωγή

Σε ένα τορικό ιδεώδες, υπάρχουν ορισμένα από τα διώνυμά του, τα οποία είναι ιδιαιτέρως σημαντικά. Τα πρώτα από αυτά που θα μελετήσουμε είναι τα λεγόμενα πρωταρχικά διώνυμα, το σύνολο των οποίων όπως θα δούμε συνιστούν τη βάση Graver του ιδεώδους. Η βάση Graver είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για το ιδεώδες καθώς πολλά σημαντικά υποσύνολα των διωνύμων του ιδεώδους ανήκουν στη βάση αυτή, όπως το σύνολο των κυκλωμάτων, οι ανάγωγες βάσεις Gröbner, η καθολική βάση Gröbner και το σύνολο των ελαχιστοτικών συνόλων γεννητόρων του ιδεώδους. Οι ελαχιστοτικοί γεννήτορες του ιδεώδους, αλλά και κατά επέκταση ποιοι από αυτούς είναι αναντικατάστατοι αποτελούν ένα από τα ερωτήματα που απασχολεί την Αλγεβρική Στατιστική, ένα κλάδο ο οποίος αναπτύχθηκε ιδιαίτερα τα τελευταία χρόνια. Η ανάγκη εύρεσης των αναντικατάστατων διωνύμων του ιδεώδους, προκύπτει από το ερώτημα πότε υπάρχει μοναδικό ελαχιστοτικό σύνολο γεννητόρων για το τορικό ιδεώδες, βλέπε [2],[6]. Ο προσδιορισμός αυτών των συνόλων, γίνεται στις παρακάτω ενότητες του κεφαλαίου αυτού. Αρχικά καθορίζουμε τη βάση Graver ιδεώδους πεπερασμένου γραφήματος, στη συνέχεια το σύνολο των ελαχιστοτικών γεννητόρων αυτού, κατόπιν το σύνολο των αναντικατάστατων διωνύμων και κλείνουμε με το σύνολο των θεμελιωδών διωνύμων του I_G.

Ξεκινάμε με τον ορισμό του πρωταρχικού διωνύμου και της βάσης Graver ενός ιδεώδους.

Ορισμός 2.1.1. *(πρωταρχικό διώνυμο - primitive binomial)*
Ένα διώνυμο $\mathbf{x}^{\mathbf{u}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{u}^-} \in I_A$ *καλείται πρωταρχικό, εάν δεν υπάρχει άλλο διώνυμο της μορφής* $\mathbf{x}^{\mathbf{v}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{v}^-} \in I_A$ *τέτοιο ώστε:* $\mathbf{x}^{\mathbf{v}+}|\mathbf{x}^{\mathbf{u}^+}$ *και* $\mathbf{x}^{\mathbf{v}-}|\mathbf{x}^{\mathbf{u}^-}$.

Παρατηρούμε ότι κάθε πρωταρχικό διώνυμο είναι και ανάγωγο, βλέπε [39].

Ορισμός 2.1.2. *(βάση Graver - Graver Basis)*
Το σύνολο όλων των πρωταρχικών διωνύμων ενός τορικού ιδεώδους I_A *καλείται βάση Graver αυτού και θα συμβολίζεται με* Gr_A.

Θεωρούμε ένα γράφημα G. Οι περιπλανήσεις που αντιστοιχούν σε πρωταρχικά διώνυμα, χαρακτηρίζονται από τον επόμενο ορισμό:

Ορισμός 2.1.3. *(πρωταρχική άρτια κλειστή περιπλάνηση - primitive even closed walk)*
Θα λέμε ότι μια άρτια κλειστή περιπλάνηση $\gamma = (e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_{2q}})$ ενός γραφήματος G είναι πρωταρχική, εάν δεν υπάρχει άρτια κλειστή περιπλάνηση στο G του τύπου $(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_{2p}})$ με $1 \leq p < q$ τέτοια ώστε $j_{2k-1} \in \{i_1, i_3, \ldots, i_{2q-1}\}$ και $j_{2k} \in \{i_2, i_4, \ldots, i_{2q}\}$, με $j_{2k-1} \neq j_{2l} \ : \ \forall k \ : \ 1 \leq k \leq p, \ \forall l \ : \ 1 \leq l \leq p$.

Προκύπτει ότι μια άρτια κλειστή περιπλάνηση γ είναι πρωταρχική αν το αντίστοιχο διώνυμο B_γ είναι πρωταρχικό.

Ένας από τους σκοπούς μας στο κεφάλαιο αυτό, είναι να καθορίσουμε τα πρωταρχικά διώνυμα τορικών ιδεωδών γραφημάτων. Τα πρωταρχικά διώνυμα μας ενδιαφέρουν γιατί όπως βλέπουμε στο παρακάτω Θεώρημα, αυτά είναι τα στοιχεία που παράγουν το ιδεώδες ενός γραφήματος.

Θεώρημα 2.1.4 (Villarreal, 1995)**.** *Το τορικό ιδεώδες I_G του γραφήματος G παράγεται από τα διώνυμα B_γ, όπου γ είναι πρωταρχική άρτια κλειστή περιπλάνηση του G.*

Οι H. Ohsugi και T. Hibi το 1999 στο άρθρο τους [29], διατύπωσαν ένα θεώρημα, Θεώρημα 2.1.5, μέσω του οποίου έχουμε μια αναγκαία συνθήκη περιγραφής της μορφής των πρωταρχικών περιπλανήσεων σε ένα γράφημα.

Θεώρημα 2.1.5 (Ohsugi, Hibi, 1999)**.** *Μια πρωταρχική άρτια κλειστή περιπλάνηση γ ενός γραφήματος G έχει μια από τις παρακάτω μορφές:*

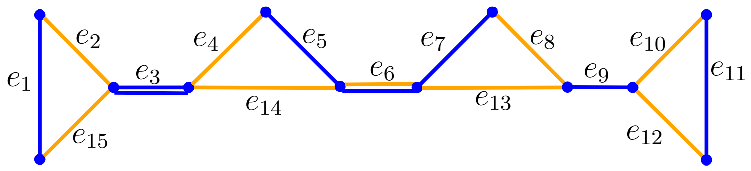
(i) *γ είναι ένας άρτιος κύκλος του G,*

(ii) *$\gamma = (C_1, C_2)$, όπου C_1 και C_2 είναι περιττοί κύκλοι του G οι οποίοι έχουν ακριβώς μια κοινή κορυφή,*

(iii) *$\gamma = (C_1, \gamma_1, C_2, \gamma_2)$, όπου C_1 και C_2 είναι περιττοί κύκλοι του G οι οποίοι δεν έχουν κοινή κορυφή και γ_1, γ_2 περιπλανήσεις του G οι οποίες έχουν αρχή μια κορυφή $v_1 \in C_1$ και τέλος μια κορυφή $v_2 \in C_2$.*

Βάσει λοιπόν του προηγούμενου θεωρήματος, έχουμε μια περιγραφή των δυνατών πρωταρχικών άρτιων κλειστών περιπλανήσεων ενός γραφήματος και με χρήση του Θεωρήματος 2.1.4 προκύπτει ένα πιθανό σύνολο γεννητόρων για το I_G. Να παρατηρήσουμε σε αυτό το σημείο, ότι το Θεώρημα 2.1.5 δεν δίνει ικανή και αναγκαία συνθήκη για τον καθορισμό των πρωταρχικών άρτιων κλειστών περιπλανήσεων ενός γραφήματος, όπως φαίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 2.1.6. Θεωρούμε το παρακάτω γράφημα G.



Παράδειγμα μη πρωταρχικής περιπλάνησης γ

Στο γράφημα αυτό θεωρούμε την άρτια κλειστή περιπλάνηση:

$$\gamma = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_9, e_{13}, e_6, e_{14}, e_3, e_{15}).$$

Η γ είναι της μορφής (iii) της Θεωρήματος 2.1.5. Οι δύο περιττοί κύκλοι χωρίς κοινή κορυφή είναι:

$$C_1 = (e_1, e_2, e_{15})$$

και

$$C_2 = (e_{10}, e_{11}, e_{12}).$$

Αντίστοιχα θεωρούμε τις περιπλανήσεις γ_1, γ_2 με κοινή αρχή κορυφή του C_1 και κοινό τέλος κορυφή του C_2:

$$\gamma_1 = (e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9)$$

και

$$\gamma_2 = (e_9, e_{13}, e_6, e_{14}, e_3).$$

Παρατηρούμε ότι η γ δεν είναι πρωταρχική περιπλάνηση, καθώς υπάρχει η περιπλάνηση

$$\gamma_3 = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_{14}, e_3, e_{15})$$

με την οποία δε πληρούνται οι συνθήκες του ορισμού της πρωταρχικής περιπλάνησης. Είδαμε λοιπόν ότι η περιπλάνηση γ έχει μια από τις μορφές του Θεωρήματος 2.1.5 αλλά δεν αποτελεί πρωταρχική περιπλάνηση.

Καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα βέβαια, βλέποντας το πρόβλημα μέσω των πρωταρχικών διωνύμων. Εδώ:

$$B_\gamma = e_1 e_3^2 e_5 e_7 e_9^2 e_{11} e_6 - e_2 e_4 e_6 e_8 e_{10} e_{12} e_{13} e_{14} e_{15}.$$

Επίσης:

$$B_{\gamma_3} = e_1 e_3^2 e_5 - e_2 e_4 e_{14} e_{15}.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$E_{\gamma_3}^+ \mid E_\gamma^+ \text{ και } E_{\gamma_3}^- \mid E_\gamma^-.$$

Από τον Ορισμό 2.1.1 έπεται ότι το B_γ δεν είναι πρωταρχικό.

2.2 Βάση Graver τορικού ιδεώδους γραφήματος G

Έστω $w = (e_{i_1}, \ldots, e_{i_{2k}})$ άρτια πρωταρχική περιπλάνηση. Καθώς το διώνυμο B_w είναι ανάγωγο, έπεται ότι υπάρχει διαμέριση των ακμών της w σε δύο σύνολα, τα

$$w^+ = \{e_{i_j} : \ j \text{ περιττός}\} \text{ και } w^- = \{e_{i_j} : \ j \text{ άρτιος}\}.$$

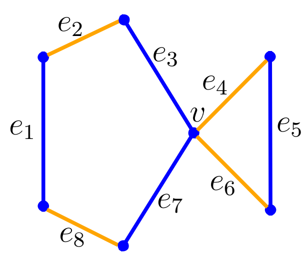
Οι ακμές του w^+ θα λέγονται *περιττές*, ενώ αντίστοιχα αυτές του w^- *άρτιες*. Δύο ακμές από τις οποίες η μία είναι περιττή και η άλλη άρτια, θα λέμε ότι ανήκουν σε διαφορετική διαμέριση. Να σημειώσουμε εδώ, ότι για μια άρτια κλειστή περιπλάνηση, ο χαρακτηρισμός της ακμής σε άρτια/περιττή εξαρτάται αποκλειστικά από τον τρόπο με τον οποίο έχουμε ξεκινήσει να μετράμε στο γράφημα, χωρίς όμως αυτός να επηρρεάζει τα στοιχεία του ιδεώδους. Συνεπώς δεν είναι τόσο σημαντικό να ορίζουμε πότε μια ακμή είναι άρτια ή περιττή, όσο ο διαχωρισμός των ακμών σε αυτά τα δύο σύνολα. Επιπλέον θα συμβολίζουμε με $\mathbf{w}$ το υπογράφημα του γραφήματος G, με κορυφές τις κορυφές της περιπλάνησης w και σύνολο ακμών τις ακμές της w. Ένας από τους πιο βασικούς ορισμούς για αυτά που ακολουθούν, είναι αυτός της κορυφής εισροής ενός μπλοκ ενός γραφήματος. Ο ρόλος των κορυφών εισροής είναι καθοριστικός για τον καθορισμό των πρωταρχικών περιπλανήσεων.

Ορισμός 2.2.1. *(κορυφή εισροής ενός μπλοκ- sink of a block)*
Κορυφή εισροής ενός μπλοκ B ενός γραφήματος $\mathbf{w}$, είναι μια κοινή κορυφή δύο περιττών ή δύο άρτιων ακμών της περιπλάνησης w, οι οποίες ανήκουν στο μπλοκ B.

Για τη καλύτερη κατανόηση του ορισμού αυτού, δίνουμε στο παρακάτω παράδειγμα διάφορες μορφές κορυφών εισροής καθώς και περιπτώσεις κορυφών που δεν είναι κορυφές εισροής.

Παράδειγμα 2.2.2. (i) Εάν $\{e\}$ είναι ακμή αποκοπής μιας άρτιας πρωταρχικής περιπλάνησης w, τότε (λόγω και του ότι το B_w θα είναι ανάγωγο) η e θα εμφανίζεται τουλάχιστον δύο φορές στη w και θα ανήκει είτε στο w^+ είτε στο w^-. Άρα κάθε κορυφή της θα είναι κορυφή εισροής.

(ii) Ας θεωρήσουμε το παρακάτω γράφημα G.

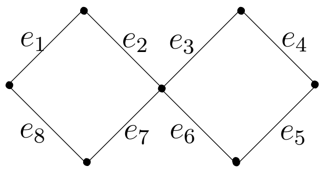


Τα μπλοκ του γραφήματος G είναι:

$$B_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_7, e_8\} \text{ και } B_2 = \{e_4, e_5, e_6\}.$$

Στο γράφημα αυτό θεωρώντας τη περιπλάνηση $w = (e_1, \ldots, e_8)$, έχουμε ότι $w^+ = \{e_1, e_3, e_5, e_7\}$ ενώ $w^- = \{e_2, e_4, e_6, e_8\}$. Παρατηρούμε ότι η w έχει μόνο μια κορυφή αποκοπής· τη κορυφή v. Η κορυφή v βρίσκεται σε δύο μπλοκ αυτής και είναι κορυφή εισροής και των δύο καθώς για το μεν πρώτο είναι κοινή κορυφή των ακμών e_3, e_7 του w^+, ενώ για το δεύτερο των e_4, e_6 του w^-.

(iii) Θεωρούμε το παρακάτω γράφημα G:



Έστω η περιπλάνηση $w = (e_1, \ldots, e_8)$. Παρατηρούμε ότι $\mathbf{w} = G$ και το $\mathbf{w}$ έχει ακριβώς δύο μπλοκ, τα

$$B_1 = \{e_1, e_2, e_7, e_8\} \text{ και } B_2 = \{e_3, e_4, e_5, e_6\}.$$

Η μοναδική κορυφή αποκοπής που υπάρχει, δεν είναι κορυφή εισροής κάποιου από τα δύο μπλοκ. Στη προκειμένη περίπτωση $w^+ = \{e_1, e_3, e_5, e_7\}$ και $w^- = \{e_2, e_4, e_6, e_8\}$. Παρατηρούμε όμως ότι η κορυφή αποκοπής, είναι κοινή κορυφή των e_2, e_7 για το πρώτο μπλοκ και των e_3, e_6 για το δεύτερο, οι οποίες ανήκουν σε διαφορετικά σύνολα αντίστοιχα.

Παρατήρηση 2.2.3. Ο χαρακτηρισμός *κορυφή εισροής*, δεν εξαρτάται από το γράφημα $\mathbf{w}$, αλλά από τη περιπλάνηση w. Για παράδειγμα, το γράφημα $\mathbf{w}$ του Παραδείγματος 2.2.2 περίπτωση (iii). Στο γράφημα αυτό, θεωρώντας τη περιπλάνηση $w_1 = (e_1, e_2, e_7, e_8)$ δεν υπάρχει κορυφή αυτής η οποία να είναι κορυφή εισροής. Τα αντίστοιχα σύνολα για αυτή είναι $w_1^+ = \{e_1, e_7\}$ και $w_1^- = \{e_2, e_8\}$. Κάθε κορυφή της w_1 είναι κοινή κορυφή μιας άρτιας και μιας περιττής ακμής. Αν θεωρήσουμε τη περιπλάνηση $w_2 = (e_1, e_2, e_7, e_8, e_1, e_2, e_7, e_8)$ τότε κάθε κορυφή της w_2 είναι κορυφή εισροής καθώς κάθε κορυφή είναι κοινή κορυφή δύο άρτιων (και δύο περιττών) ακμών της w_2. Στη συγκεκριμένη περίπτωση οι δύο άρτιες (αντίστοιχα περιττές) ακμές, είναι η ίδια ακμή. Βλέπουμε λοιπόν, ότι μελετώντας το ίδιο γράφημα $\mathbf{w}$, με τον τρόπο τον οποίο θα πάρουμε τη περιπλάνηση w, έχουμε περιπτώσεις όπου κορυφές μπορεί να είναι κορυφές εισροής μπορεί και όχι.

Είμαστε σε θέση πλέον να προχωρήσουμε στο κεντρικό θεώρημα της ενότητας αυτής. Πριν από αυτό θα αποδείξουμε ένα τεχνικό λήμμα, το οποίο είναι χρήσιμο για την απόδειξη του βασικού θεωρήματος που θα ακολουθήσει.

Λήμμα 2.2.4. *Έστω γράφημα G και $w = (e_1, \ldots, e_k)$ μια κλειστή περιπλάνηση του G. Εάν B είναι ένα μπλοκ του $\mathbf{w}$, τότε υπάρχει μια κλειστή υποπεριπλάνηση $w_B = (e_{j_1}, \ldots, e_{j_q})$ της w τέτοια ώστε $\mathbf{w}_B = B$, όπου $e_{j_1}, \ldots, e_{j_q}$ ακμές της w που ανήκουν στο μπλοκ B και $j_1 < j_2 < \ldots < j_q$.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το ζητούμενο με μαθηματική επαγωγή στον αριθμό των κορυφών του $\mathbf{w}$. Χωρίς βλάβη γενικότητας (διαφορετικά απαριθμούμε διαφορετικά τις ακμές), υποθέτουμε ότι $e_1 = (x_1, x_k)$ ακμή του B και ότι

$$w = (x_k, e_1, x_1, e_2, \ldots, e_k, x_k).$$

Στη περίπτωση που **w**$= B$, παίρνοντας $w_B = w$ έχουμε το ζητούμενο. Υποθέτουμε ότι **w**$\neq B$ και ορίζουμε

$$r = \min\{i \mid x_i \notin B\} \text{ και } s = \min\{i \mid x_i \in B \text{ με } i > r\}.$$

Αρχικά παρατηρούμε ότι τα σύνολα $\{i \mid x_i \notin B\}$ και $\{i \mid x_i \in B \text{ με } i > r\}$ είναι μη κενά. Αυτό γιατί για το μεν πρώτο γνωρίζουμε ότι **w**$\neq B$, ενώ για το δεύτερο γνωρίζουμε ότι η κορυφή x_k ανήκει σε αυτό. Υποθέτουμε ότι $x_{r-1} \neq x_s$. Τότε το υπογράφημα του **w** που επάγεται από τις κορυφές $V(B) \cup \{x_r, x_{r+1}, \ldots, x_{s-1}\}$ είναι ένα δισυνεκτικό υπογράφημα του **w** και περιέχει το B. Αυτό όμως αντιβαίνει στην υπόθεση ότι το B είναι ένα μπλοκ του **w** και άρα $x_{r-1} = x_s$. Ορίζουμε τη περιπλάνηση

$$w' = (x_k, e_1, x_1, \ldots, e_{r-1}, x_{r-1} = x_s, e_{s+1}, \ldots, e_k, x_k).$$

Η w' είναι υποπεριπλάνηση της w με λιγότερες κορυφές από αυτή και το B είναι ένα μπλοκ της w'. Συνεπώς από την επαγωγική υπόθεση, η $w_B = (e_1 = e_{j_1}, \ldots, e_{j_q})$ είναι μια κλειστή υποπεριπλάνηση της w' και άρα και της w, τέτοια ώστε $\mathbf{w}_B = B$, όπου $e_{j_1}, \ldots, e_{j_q}$ ακμές της w', άρα και της w, που ανήκουν στο μπλοκ B και $j_1 < j_2 < \ldots < j_q$. □

Το επόμενο είναι το κεντρικό θεώρημα αυτής της ενότητας, στο οποίο χαρακτηρίζουμε πλήρως τις πρωταρχικές περιπλανήσεις τυχαίου γραφήματος G, γενικεύοντας τον παλαιότερο χαρακτηρισμό των Ohsugi, Hibi, Θεώρημα 2.1.5.

Θεώρημα 2.2.5. *Έστω G γράφημα και w άρτια κλειστή περιπλάνηση του G. Η w είναι πρωταρχική αν και μόνον αν:*

(i) *κάθε μπλοκ του* **w** *είναι κύκλος ή ακμή αποκοπής,*

(ii) *κάθε πολλαπλή ακμή της w είναι διπλή ακμή αυτής και ακμή αποκοπής του* **w** *και*

(iii) *κάθε κορυφή αποκοπής του* **w** *ανήκει σε ακριβώς δύο μπλοκ και είναι κορυφή εισροής και των δύο.*

Απόδειξη. Έστω $w = (e_{i_1}, \ldots, e_{i_{2s}})$ άρτια κλειστή πρωταρχική περιπλάνηση. Για να αποδείξουμε τη πρώτη συνθήκη, υποθέτουμε ότι B είναι μπλοκ του **w** το οποίο δεν είναι ακμή αποκοπής. Θα αποδείξουμε ότι το B είναι κύκλος. Υποθέτουμε αντίθετα ότι δεν είναι κύκλος. Έστω $w_B = (e_{i_{j_1}}, \ldots, e_{i_{j_q}})$ υποπεριπλάνηση της w, τέτοια ώστε το γράφημα $\mathbf{w}_B$ είναι το μπλοκ B, όπου $e_{i_{j_1}}, \ldots, e_{i_{j_q}}$ είναι όλες οι ακμές της w που ανήκουν στο μπλοκ B και $j_1 < j_2 < \ldots < j_q$. Από το Λήμμα 2.2.4, η $\mathbf{w}_B$ είναι κλειστή περιπλάνηση. Καθώς το B δεν είναι κύκλος, υπάρχει τουλάχιστον μια κορυφή στη περιπλάνηση w_B, η οποία εμφανίζεται δύο φορές σε αυτή. Εάν υπήρχε μόνο μια τέτοια κορυφή, τότε αυτή θα ήταν κορυφή αποκοπής του B, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με τη δισυνεκτικότητα του μπλοκ B. Άρα υπάρχουν τουλάχιστον δύο κορυφές a, b του B, που εμφανίζονται δύο φορές στη περιπλάνηση w_B. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις για τη w_B. Είτε $w_B = (a, \xi_1, b, \xi_2, b, \xi_3, a, \xi_4)$ είτε $w_B = (a, \xi_1, b, \xi_2, a, \xi_3, b, \xi_4)$. Στη πρώτη περίπτωση κάποια κορυφή της ξ_2, είναι και κορυφή κάποιας από τις περιπλανήσεις ξ_1, ξ_3, ξ_4, διαφορετικά η κορυφή b θα ήταν κορυφή αποκοπής του B, κάτι που αντιβαίνει στο γεγονός ότι το B είναι μπλοκ. Άρα πάντα υπάρχουν κορυφές v, u του μπλοκ B και περιπλανήσεις $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ τέτοιες ώστε $w_B = (v, \zeta_1, u, \zeta_2, v, \zeta_3, u, \zeta_4)$. Συνεπώς η w μπορεί να γραφεί στη μορφή $w = (v, w_1, u, w_2, v, w_3, u, w_4)$, όπου w_1, w_2, w_3, w_4 είναι υποπεριπλανήσεις της w. Η περιπλάνηση w είναι πρωταρχική, άρα η κλειστή περιπλάνηση (v, w_1, u, w_2, v) είναι περιττή, ένα από τα μήκη των w_1, w_2 είναι ίδιου είδους (άρτιου/περιττού) με το αντίστοιχο του w_3 και η πρώτη ακμή του w_1 και η τελευταία ακμή του w_2 ανήκουν στο w^+. Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω, είτε η $\sigma_1 = (v, w_1, u, -w_3, v)$ είτε η $\sigma_2 = (v, w_3, u, w_2, v)$ είναι κλειστή άρτια υποπεριπλάνηση της w τέτοια ώστε:

είτε $E^+(\sigma_1) \mid E^+(w)$ και $E^-(\sigma_1) \mid E^-(w)$ είτε $E^+(\sigma_2) \mid E^-(w)$ και $E^-(\sigma_2) \mid E^+(w)$.

Και στις δύο περιπτώσεις έχουμε άτοπο, στο γεγονός ότι η w είναι πρωταρχική. Άρα κάθε μπλοκ του $\mathbf{w}$ είναι κύκλος ή ακμή αποκοπής.

Για να αποδείξουμε τη δεύτερη συνθήκη, υποθέτουμε ότι $e = (u, v)$ είναι μια πολλαπλή ακμή της w. Καθώς η w είναι πρωταρχική, συμπεραίνουμε ότι όποτε η e εμφανίζεται σε αυτή, τότε αυτή θα βρίσκεται ή στο w^+ ή στο w^-. Υπάρχουν δύο τρόποι για την e να εμφανίζεται στην w. Είτε με αρχική κορυφή τη u ως $(\ldots, u, e, v, \ldots)$ είτε αντίστροφα με αρχική κορυφή τη v ως $(\ldots, v, e, u, \ldots)$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

<u>1η περίπτωση</u>: Έστω ότι η e εμφανίζεται με τον ίδιο τρόπο τουλάχιστον δύο φορές. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $(\ldots, u, e, v, \ldots)$. Τότε η περιπλάνηση w μπορεί να γραφεί στη μορφή $w = (u, e, v, w_1, u, e, v, \ldots)$. Καθώς η w είναι πρωταρχική και η e εμφανίστηκε ως πρώτη ακμή αυτής, όλες τις φορές που η e εμφανίζεται, θα βρίσκεται στο w^+. Συνεπώς η περιπλάνηση w_1 είναι περιττή και άρα η $\xi = (u, e, v, w_1, u)$ είναι άρτια κλειστή περιπλάνηση με $E^+(\xi) \mid E^+(w)$ και $E^-(\xi) \mid E^-(w)$. Αυτό είναι άτοπο, καθώς η w είναι πρωταρχική.

<u>2η περίπτωση</u>: Η e εμφανίζεται ακριβώς δύο φορές στη w και με τους δύο διαφορετικούς τρόπους και άρα η w παίρνει τη μορφή $w = (u, e, v, w_1, v, e, u, w_2, u)$, όπου w_1, w_2 υποπεριπλανήσεις της w. Όπως προηγουμένως οι περιπλανήσεις w_1, w_2 είναι περιττές και άρα οι πρώτες και οι τελευταίες ακμές αυτών, ανήκουν στο w^-. Έστω αντίθετα, ότι η e δεν είναι ακμή αποκοπής του $\mathbf{w}$. Τότε οι w_1, w_2 έχουν τουλάχιστον μια κοινή κορυφή y. Ξαναγράφουμε τη w, αυτή τη φορά στη μορφή

$$w = (u, e, v, w_1', y, w_1'', v, e, u, w_2', y, w_2'', u).$$

Καθώς η w_2 είναι περιττή περιπλάνηση, μια από τις w_2', w_2'' είναι περιττή και η άλλη άρτια. Συνεπώς είτε η περιπλάνηση $(u, e, v, w_1', y, w_2'', u)$ ή η $(u, e, v, w_1', y, -w_2', u)$ είναι άρτια κλειστή περιπλάνηση τέτοια ώστε $E^+(\xi) \mid E^+(w)$ και $E^-(\xi) \mid E^-(w)$, το οποίο είναι άτοπο καθώς η w είναι πρωταρχική. Συμπεραίνουμε ότι η e είναι διπλή ακμή της περιπλάνησης w και ακμή αποκοπής του $\mathbf{w}$.

Μένει να αποδείξουμε τη τρίτη συνθήκη. Έστω v κορυφή αποκοπής του $\mathbf{w}$. Έπεται ότι η v ανήκει σε τουλάχιστον δύο μπλοκ του $\mathbf{w}$. Καθώς v κορυφή αποκοπής της περιπλάνησης w, τότε η $w = (v, e_1, \ldots, e_s, v, e_{s+1}, \ldots, e_t, v, \ldots)$, όπου οι e_1, e_s βρίσκονται στο ίδιο μπλοκ και

$$\{e_i \mid 1 \le i \le s\} \cap \{e_i \mid s+1 \le i \le t\} = \emptyset.$$

Συμπεραίνουμε ότι $e_1, e_s \in w^+$ αφού διαφορετικά η $(v, e_1, \ldots, e_s, v)$ είναι άρτια κλειστή υποπεριπλάνηση της w, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με το ότι η w είναι πρωταρχική. Άρα η κορυφή v είναι κορυφή εισροής και η υποπεριπλάνηση $(v, e_1, \ldots, e_s, v)$ είναι περιττή. Με τον ίδιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι η υποπεριπλάνηση $(v, e_{s+1}, \ldots, e_t, v)$ είναι περιττή και οι ακμές $e_{s+1}, e_t \in w^-$. Τότε η $w' = (v, e_1, \ldots, e_s, v, e_{s+1}, \ldots, e_t, v)$ είναι άρτια υποπεριπλάνηση της w τέτοια ώστε $E^+(w') \mid E^+(w)$ και $E^-(w') \mid E^-(w)$ και καθώς η w είναι πρωταρχική, έπεται ότι $w = w'$. Συμπεραίνουμε ότι η v ανήκει σε ακριβώς δύο μπλοκ του $\mathbf{w}$ και είναι κορυφής εισροής και των δύο.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η w είναι μια άρτια κλειστή περιπλάνηση, που ικανοποιεί τις τρεις συνθήκες του Θεωρήματός μας. Ισχυριζόμαστε αρχικά ότι $B_w \neq 0$. Έστω αντίθετα ότι είναι το μηδενικό διώνυμο. Τότε $E^+(w) = E^-(w)$, κάτι που σημαίνει ότι κάθε ακμή του w είναι πολλαπλή ακμή της περιπλάνησης w. Έστω $e = \{u, v\}$ μια ακμή της w. Από τη συνθήκη (ii), γνωρίζουμε ότι αυτή είναι ακμή αποκοπής του $\mathbf{w}$. Άρα το σύνολο $\{e\}$ είναι μπλοκ του $\mathbf{w}$ και κάθε μια από τις κορυφές του, είναι κορυφή αποκοπής του. Έστω u μια από αυτές. Τότε από τη συνθήκη (iii) του θεωρήματος, η u ανήκει σε ακριβώς δύο μπλοκ του γραφήματος και είναι κορυφή εισροής και των δύο. Το ένα από τα δύο αυτά μπλοκ είναι το $\{e\}$. Από τον ορισμό της κορυφής εισροής, γνωρίζουμε ότι η u ως κορυφή εισροής του μπλοκ B, είναι κοινή κορυφή δύο περιττών ή δύο άρτιων ακμών της περιπλάνησης w, οι οποίες ανήκουν στο B. Αλλά το $\{e\}$ αποτελείται από μόνο μια ακμή. Άρα το e^2 διαρεί ένα από τα $E^+(w), E^-(w)$ και συνεπώς και τα δύο καθώς $E^+(w) = E^-(w)$. Έπεται ότι η e εμφανίζεται τουλάχιστον τέσσερις φορές στη περιπλάνηση w. Αυτό όμως είναι αδύνατο λόγω της συνθήκης (ii), όπου κάθε πολλαπλή ακμή της w είναι διπλή ακμή αυτής. Ο ισχυρισμός αποδείχτηκε πλήρως και άρα $B_w \neq 0$.

Υποθέτουμε αντίθετα ότι η w δεν είναι πρωταρχική και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Καθώς $B_w \neq 0$, υπάρχει πρωταρχική υποπεριπλάνηση w' της w, μικροτέρου μήκους από τη w, τέτοια ώστε

$$E^+(w') \mid E^+(w) \text{ και } E^-(w') \mid E^-(w).$$

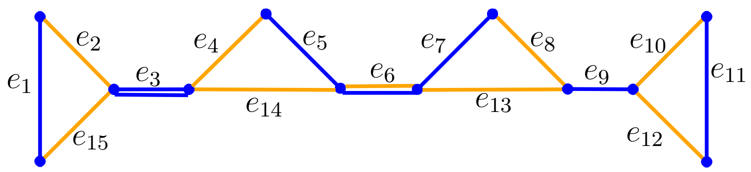
Από το πρώτο κομμάτι της απόδειξης, γνωρίζουμε ότι η w' ικανοποιεί τις τρεις συνθήκες της υπόθεσης. Ισχυριζόμαστε ότι τα γραφήματα $\mathbf{w}$,$\mathbf{w}'$ έχουν ακριβώς τα ίδια μπλοκ. Έστω $B_{w'}$ μπλοκ της περιπλάνησης $\mathbf{w}'$. Τότε υπάρχει ένα μπλοκ B_w της $\mathbf{w}$, τέτοιο ώστε $B_{w'} \subset B_w$. Από τη πρώτη συνθήκη, το $B_{w'}$ είναι ακμή αποκοπής ή κύκλος. Εάν $B_{w'} = \{e\}$, όπου e ακμή αποκοπής του $\mathbf{w}'$, τότε η e είναι διπλή ακμή της w'. Καθώς $E^+(w') \mid E^+(w)$ και $E^-(w') \mid E^-(w)$, η e είναι πολλαπλή ακμή της w, άρα από τη δεύτερη συνθήκη, ακμή αποκοπής του $\mathbf{w}$ και συνεπώς αποτελεί μπλοκ του $\mathbf{w}$. Στη περίπτωση όπου το $B_{w'}$ είναι κύκλος του $\mathbf{w}'$, προφανώς το B_w είναι ο ίδιος κύκλος και άρα $B_{w'} = B_w$. Συνεπώς κάθε μπλοκ του $\mathbf{w}'$ είναι και μπλοκ του $\mathbf{w}$. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα μπλοκ του $\mathbf{w}$, το οποίο δεν είναι μπλοκ του $\mathbf{w}'$. Καθώς το $\mathbf{w}$ είναι συνεκτικό, υπάρχει τουλάχιστον ένα μπλοκ του $\mathbf{w}$ που δεν είναι μπλοκ για το $\mathbf{w}'$ και ταυτόχρονα έχει τουλάχιστον ένα σημείο επαφής με το γράφημα $\mathbf{w}'$. Καθώς όμως $E^+(w') \mid E^+(w)$ και $E^-(w') \mid E^-(w)$, αυτή η κορυφή είναι κορυφή εισροής και των δύο. Η περιπλάνηση w' είναι πρωταρχική κι άρα η κορυφή εισροής αυτή, ανήκει σε ακριβώς δύο μπλοκ του $\mathbf{w}'$. Συνεπώς αυτό θα ανήκει σε τουλάχιστον τρία μπλοκ του $\mathbf{w}$, λόγω του ότι κάθε μπλοκ του $\mathbf{w}'$ είναι και μπλοκ του $\mathbf{w}$. Καταλήξαμε σε άτοπο λόγω της τρίτης συνθήκης των υποθέσεων. Άρα τα γραφήματα $\mathbf{w}$ και $\mathbf{w}'$ ταυτίζονται.

Έπεται ότι κάθε απλή ακμή της περιπλάνησης w είναι και απλή ακμή της w' και κάθε διπλή ακμή (ακμή αποκοπής) της w' είναι και διπλή της w. Άρα

$$E^+(w') = E^+(w) \text{ και } E^-(w') = E^-(w),$$

ισοδύναμα οι περιπλανήσεις w, w' έχουν το ίδιο μήκος, το οποίο είναι άτοπο. Άρα η w είναι πρωταρχική και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Παράδειγμα 2.2.6. Επανερχόμαστε στο Παράδειγμα 2.1.6 και στο γράφημα G:



Παράδειγμα μη πρωταρχικής περιπλάνησης γ

Στο γράφημα αυτό είχαμε θεωρήσει την άρτια κλειστή περιπλάνηση:

$$\gamma = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_9, e_{13}, e_6, e_{14}, e_3, e_{15})$$

και είχαμε αποδείξει ότι η γ δεν είναι πρωταρχική. Βάσει του θεωρήματος που μόλις αποδείξαμε, αμέσως συμπεραίνουμε ότι η γ δεν είναι πρωταρχική. Ας πάρουμε για παράδειγμα τις κορυφές της ακμής e_6. Η μια ανήκει στα μπλοκ $\{e_4, e_5, e_{14}\}$ και $\{e_6\}$ του γραφήματος $\mathbf{w}$, ενώ η άλλη στα μπλοκ $\{e_6\}$ και $\{e_7, e_8, e_{13}\}$. Οι κορυφές που αντιστοιχούν στην ακμή e_6, δεν είναι κορυφές εισροής κάποιου από τα παραπάνω μπλοκ του γραφήματος με αποτέλεσμα να μη πληρείται η **(iii)** συνθήκη του Θεωρήματος 2.2.5. Δε συμβαίνει το ίδιο αν πάρουμε για παράδειγμα τη περιπλάνηση $w = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_{14}, e_3, e_{15}\}$. Τα μπλοκ του $\mathbf{w}$ είναι τα $B_1 = \{e_1, e_2, e_{15}\}$, $B_2 = \{e_3\}$ και $B_3 = \{e_4, e_5, e_{14}\}$. Τα B_1, B_3 είναι κύκλοι ενώ το B_2 είναι ακμή αποκοπής. Η μοναδική πολλαπλή ακμή της w είναι η e_3, η οποία είναι διπλή ακμή για τη w και ακμή αποκοπής του $\mathbf{w}$ και τέλος οι δύο κορυφές αποκοπής του $\mathbf{w}$, οι κορυφές της ακμής e_3, ανήκουν σε ακριβώς δύο μπλοκ του $\mathbf{w}$, τα B_1, B_3 και είναι κορυφές εισροής και των δύο. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.5 συμπεραίνουμε ότι η w είναι πρωταρχική.

Να σημειώσουμε εδώ ότι το παραπάνω θεώρημα, χαρακτηρίζει πλήρως τα στοιχεία της βάσης Graver ενός τορικού ιδεώδους οποιουδήποτε γραφήματος G. Στο τρίτο κεφάλαιο, θα δούμε άμεσες εφαρμογές αυτού του θεωρήματος. Θα κλείσουμε την ενότητα αυτή, με ένα πόρισμα μέσω του οποίου περιγράφουμε πλήρως το γράφημα $\mathbf{w}$ για μια πρωταρχική περιπλάνηση w.

Πόρισμα 2.2.7. *Έστω G γράφημα και W συνεκτικό υπογράφημα του G. Το υπογράφημα W, είναι το γράφημα $\mathbf{w}$ μιας πρωταρχικής περιπλάνησης w αν και μόνον αν:*

(i) *το W είναι ένας άρτιος κύκλος του G ή*

(ii) *το W δεν είναι δισυνεκτικό γράφημα και*

(α') κάθε μπλοκ του W είναι κύκλος ή ακμή αποκοπής και

(β') κάθε κορυφή αποκοπής του W, ανήκει σε ακριβώς δύο μπλοκ και χωρίζει το γράφημα σε δύο μέρη, όπου ο συνολικός αριθμός των ακμών των κυκλικών μπλοκ σε κάθε μέρος είναι περιττός.

Απόδειξη. Έστω ότι W είναι το γράφημα $\mathbf{w}$ μιας πρωταρχικής περιπλάνησης w. Τότε το πόρισμα έπεται άμεσα από το Θεώρημα 2.2.5.

Αντίστροφα, υποθέτοντας ότι W' είναι ένα γράφημα το οποίο προέρχεται από το W, αντικαθιστώντας κάθε ακμή αποκοπής με δύο ακμές, τότε το γράφημα W' είναι γράφημα Euler, καθώς είναι συνεκτικό και κάθε κορυφή του έχει βαθμό δύο ή τέσσερα, βλέπε Θεώρημα 1.2.8. Κάθε κλειστή διαδρομή Euler w' του γραφήματος W', δίνει μια άρτια κλειστή περιπλάνηση w του W, στην οποία κάθε απλή ακμή του W' είναι απλή ακμή της περιπλάνησης w και κάθε πολλαπλή ακμή του W' είναι διπλή ακμή της w και ακμή αποκοπής του $W = \mathbf{w}$. Το ζητούμενο έπεται από το Θεώρημα 2.2.5. □

2.3 Ελαχιστοτικοί και αναντικατάστατοι γεννήτορες του I_G

Στην ενότητα αυτή, θα χαρακτηρίσουμε πλήρως τις περιπλανήσεις w ενός γραφήματος G για τις οποίες το αντίστοιχο διώνυμο B_w ανήκει σε κάποιο ελαχιστοτικό σύστημα γεννητόρων του I_G. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1.4 είναι δεδομένο ότι το B_w πρέπει να είναι πρωταρχικό, αλλά αυτό δεν είναι η μοναδική μας απαίτηση. Η w όμως πρέπει να πληρεί κι άλλες ιδιότητες, η πρώτη από τις οποίες έχει να κάνει με το γράφημα $\mathbf{w}$ και η δεύτερη με το επαγόμενο γράφημα G_w της w, βλέπε Πρόταση 2.3.6 και Θεώρημα 2.3.21. Στη συνέχεια αποδεικνύουμε το Θεώρημα 2.3.26, στο οποίο χαρακτηρίζουμε πλήρως τους αναντικατάστατους γεννήτορες ενός συστήματος γεννητόρων τορικού ιδεώδους τυχαίου γραφήματος G. Αποτελέσματα προς αυτή τη κατεύθυνση, υπήρχαν από τους Ohsugi και Hibi στο [30], για μια συγκεκριμένη κατηγορία γραφημάτων. Κλείνουμε την ενότητα ορίζοντας και προσδιορίζοντας τα θεμελιώδη στοιχεία ενός I_G για τυχαίο γράφημα G και παρατηρώντας την ισχύ των παραπάνω θεωρημάτων για τη περίπτωση των μη απλών γραφημάτων.

Θα ξεκινήσουμε δίνοντας κάποιους βασικούς ορισμούς.

Έστω $I_{\mathcal{A}} \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_m]$ το τορικό ιδεώδες του συνόλου $\mathcal{A}$.

Ορισμός 2.3.1. *(ελαχιστοτικό σύνολο γεννητόρων- minimal generating set)*
Έστω $\{B_1, \ldots, B_m\}$ ένα σύνολο γεννητόρων του τορικού ιδεώδους $I_{\mathcal{A}}$. Αυτό θα καλείται ελαχιστοτικό, αν δεν υπάρχει γνήσιο υποσύνολο αυτού, το οποίο να παράγει το $I_{\mathcal{A}}$.

Το παρακάτω παράδειγμα θα αποσαφηνίσει τον ορισμό του ελαχιστοτικού συνόλου γεννητόρων.

Παράδειγμα 2.3.2. Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{A} = \{2, 1, 1\} \subset \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]$ και ορίζουμε

$$\deg(x_1) = 2, \deg(x_2) = 1, \deg(x_3) = 1.$$

Υπολογίζουμε το $I_\mathcal{A}$ και βρίσκουμε ότι

$$I_\mathcal{A} = \langle x_2 - x_3, x_1 - x_2^2, x_1 - x_3^2, x_1 - x_2x_3 \rangle.$$

Το σύνολο γεννητόρων

$$\{x_2 - x_3, x_1 - x_2^2, x_1 - x_3^2, x_1 - x_2x_3\}$$

δεν είναι ελαχιστοτικό καθώς παρατηρούμε ότι:

$$x_1 - x_2^2 = (x_1 - x_2x_3) - x_2(x_2 - x_3) \text{ και } x_1 - x_3^2 = (x_1 - x_2x_3) + x_3(x_2 - x_3).$$

Ένα ελαχιστοτικό σύνολο γεννητόρων του $I_\mathcal{A}$ είναι το σύνολο

$$\{x_2 - x_3, x_1 - x_2x_3\}.$$

Πράγματι:

$$I_\mathcal{A} = \langle x_2 - x_3, x_1 - x_2x_3 \rangle,$$

παρατηρώντας ότι $x_2 - x_3 \notin \langle x_1 - x_2x_3 \rangle$ και $x_1 - x_2x_3 \notin \langle x_2 - x_3 \rangle$. Για το $I_\mathcal{A}$ βλέπουμε ότι δεν υπάρχει γεννήτορας ο οποίος να είναι αναντικατάστατος, δηλαδή να ανήκει σε κάθε ελαχιστοτικό σύστημα γεννητόρων του ιδεώδους.

Ορισμός 2.3.3. *(ελαχιστοτικό διώνυμο - minimal binomial)*
Ένα διώνυμο $B \in I_\mathcal{A}$ καλείται ελαχιστοτικό εάν αυτό ανήκει σε ένα ελαχιστοτικό σύστημα γεννητόρων του $I_\mathcal{A}$.

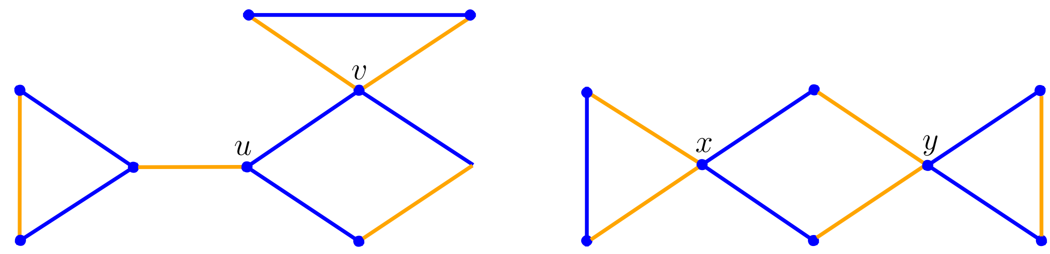
Βάσει του παραπάνω ορισμού, όλα τα διώνυμα του προηγούμενου παραδείγματος είναι ελαχιστοτικά. Οι αντίστοιχοι ορισμοί των τορικών ιδεωδών υπεράνω γραφημάτων, δε διαφέρουν σε τίποτα από τους παραπάνω γενικούς, καθώς το μόνο που αλλάζει είναι το σύνολο $\mathcal{A}$ ως προς το οποίο υπολογίζεται το ιδεώδες.

Μια πολύ βασική έννοια, για τη θεωρία που ακολουθεί, είναι αυτή της ισχυρής πρωταρχικής περιπλάνησης w σε ένα γράφημα G.

Ορισμός 2.3.4. *(ισχυρά πρωταρχική περιπλάνηση - strongly primitive walk)*
Καλούμε ισχυρά πρωταρχική περιπλάνηση ενός γραφήματος, μια πρωταρχική περιπλάνηση η οποία δεν έχει δύο κορυφές εισροής σε απόσταση ένα σε οποιοδήποτε κυκλικό μπλοκ του γραφήματος, δηλαδή δεν υπάρχει ακμή του γραφήματος η οποία να συνδέει τις κορυφές αυτές.

Ένα παράδειγμα υπεράνω της έννοιας αυτής για τη καλύτερη κατανόησή της, είναι το ακόλουθο:

Παράδειγμα 2.3.5. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε δύο διαφορετικές περιπλανήσεις. Από το Θεώρημα 2.2.5 εύκολα συμπεραίνουμε ότι και οι δύο αυτές περιπλανήσεις είναι πρωταρχικές.



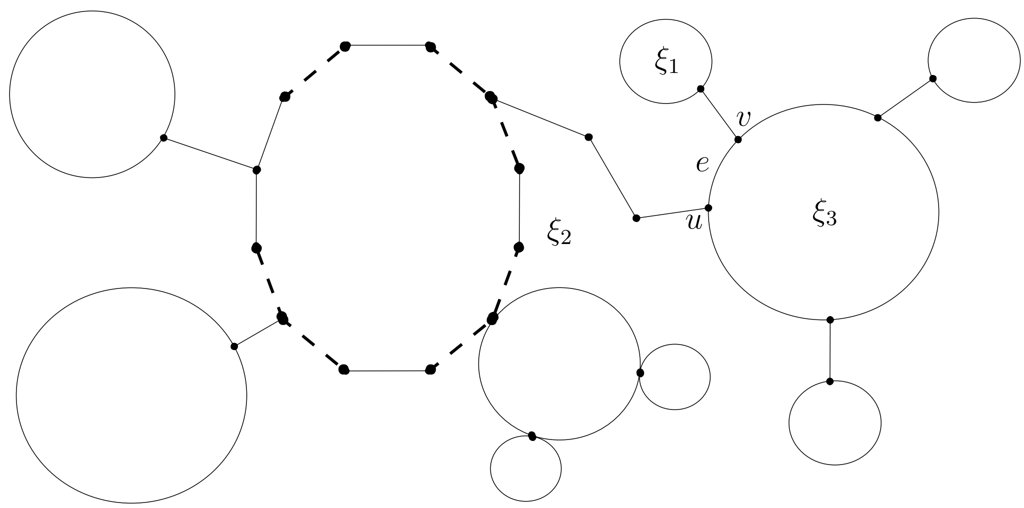
Μη ισχυρά πρωταρχική Ισχυρά πρωταρχική

Η περιπλάνηση που αντίστοιχει στο πρώτο γράφημα δεν είναι ισχυρά πρωταρχική, αφού η απόσταση μεταξύ των δύο κορυφών εισροής της u και v είναι ένα. Οι κορυφές εισροής x, y της δεύτερης περιπλάνησης έχουν απόσταση δύο και εξ ορισμού η περιπλάνηση αυτή είναι ισχυρά πρωταρχική.

Βάσει του παραπάνω ορισμού, αποδεικνύουμε παρακάτω μια χρήσιμη ιδιότητα των ελαχιστοτικών διωνύμων ενός τορικού ιδεώδους I_G, η οποία απλουστεύει αρκετά το κεντρικό θεώρημα της ενότητας αυτής.

Πρόταση 2.3.6. *Έστω w άρτια κλειστή περιπλάνηση τέτοια ώστε το διώνυμο B_w είναι ελαχιστοτικός γεννήτορας του I_G. Τότε η w είναι ισχυρά πρωταρχική περιπλάνηση.*

Απόδειξη. Καθώς το διώνυμο B_w είναι ελαχιστοτικός γεννήτορας έπεται ότι η w είναι πρωταρχική περιπλάνηση. Μένει να αποδείξουμε ότι είναι και ισχυρά πρωταρχική.



Υποθέτουμε αντίθετα ότι δεν είναι είναι ισχυρά πρωταρχική. Έπεται ότι υπάρχουν δύο κορυφές εισροής, έστω οι u, v οι οποίες έχουν απόσταση ένα. Έστω με $u, v \in B$, όπου B τυχαίο μπλοκ του γραφήματος. Ας είναι $e = \{u, v\}$ η ακμή ανάμεσά τους. Τότε η w μπορεί να γραφεί:

$$w = (v, \xi_1, v, e, u, \xi_2, u, \xi_3, v),$$

για κάποιες περιπλανήσεις ξ_1, ξ_2, ξ_3, όπου τουλάχιστον η πρώτη και η τελευταία ακμή της ξ_3 βρίσκονται στο μπλοκ B. Οι ξ_1, ξ_2 είναι κλειστές περιπλανήσεις και καθώς η w είναι πρωταρχική, υποχρεωτικά αυτές είναι περιττές. Συνεπώς και η ξ_3 είναι περιττή και άρα η πρώτη και η τελευταία ακμή της ξ_3, όπως και η e, ανήκουν στο w^-. Καθώς οι u, v είναι κορυφές εισροής, οι κλειστές περιπλανήσεις $w_1 = (\xi_1, e, \xi_2, e)$ και $w_2 = (e, \xi_3)$ είναι άρτιες και το διώνυμο:

$$B_w = B_{w_1}\frac{E^+(w_2)}{e} + B_{w_2}\frac{E^-(w_1)}{e},$$

είναι μη ελαχιστοτικός γεννήτορας, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την αρχική μας υπόθεση. Σημειώνουμε ότι

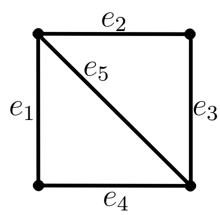
$$\frac{E^+(w_2)}{e} \neq 1 \neq \frac{E^-(w_1)}{e},$$

διαφορετικά η περιπλάνηση w_1 ή η w_2 έχει μήκος δύο, το οποίο είναι αδύνατο καθώς το γράφημα δεν έχει πολλαπλές ακμές. $\square$

Στη προηγούμενη ενότητα, είδαμε ότι η ιδιότητα μιας περιπλάνησης w να είναι πρωταρχική, εξαρτάται μόνο από το γράφημα $\mathbf{w}$. Αυτό δε συμβαίνει στο χαρακτηρισμό της w να είναι ελαχιστοτική ή αναντικατάστατη, κάτι που εξαρτάται από το επαγόμενο γράφημα G_w. Πριν προχωρήσουμε στα αντίστοιχα θεωρήματα ας δούμε ορισμένες έννοιες που χρειαζόμαστε ακόμη.

Μια ακμή e ενός γραφήματος G, καλείται *χορδή της περιπλάνησης* w, εάν οι κορυφές της e ανήκουν στο $V(\mathbf{w})$ ενώ $e \notin E(\mathbf{w})$. Διαφορετικά, μια ακμή είναι χορδή μιας περιπλάνησης w, εάν αυτή ανήκει στο $E(G_w)$ αλλά όχι στο $E(\mathbf{w})$.

Παράδειγμα 2.3.7. Έστω G το παρακάτω γράφημα:



Παράδειγμα χορδής περιπλάνησης

Θεωρούμε τη περιπλάνηση $w = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Παρατηρούμε ότι οι κορυφές της ακμής e_5 ανήκουν στο σύνολο $V(\mathbf{w})$, ενώ $e_5 \notin E(\mathbf{w})$. Συμπεραίνουμε ότι η e_5 είναι χορδή της w.

Στη συνέχεια, θα χωρίσουμε τις χορδές σε διάφορες κατηγορίες, οι οποίες παίζουν σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της θεωρίας μας.

Θεωρούμε την άρτια κλειστή περιπλάνηση:

$$w = ((v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{2k}, v_1),),$$

και $e = \{v_i, v_j\}$ μια χορδή αυτής. Παρατηρούμε ότι η e *χωρίζει* την w σε δύο περιπλανήσεις:

$$w_1 = (e_1, \ldots, e_{i-1}, e, e_j, \ldots, e_{2k})$$

και

$$w_2 = (e_i, \ldots, e_{j-1}, e),$$

όπου $e_s = (v_s, v_{s+1}),\ 1 \leq s \leq 2k$ και $e_{2k} = (v_{2k}, v_1)$. Οι w_1, w_2 είτε είναι ταυτόχρονα άρτιες ή ταυτόχρονα περιττές.

Οι H. Ohsugi και T. Hibi στο άρθρο τους [29], διαμερίσανε τις χορδές ενός άρτιου κύκλου, σε περιττές χορδές, εάν αυτές ¨χωρίζουνε¨ τον κύκλο σε δύο περιττούς κύκλους και σε άρτιες χορδές εάν τον χωρίζουνε σε δύο άρτιους κύκλους. Παρατηρώντας γενικά τις πρωταρχικές άρτιες περιπλανήσεις, για μια τυχαία τέτοια, έστω w, μπορεί να υπάρχει χορδή f η οποία χωρίζει τη w σε δύο άρτιες περιπλανήσεις, αλλά ταυτόχρονα να υπάρχει κάποια διαφορετική πρωταρχική περιπλάνηση w', τέτοια ώστε $\mathbf{w} = \mathbf{w}'$, $B_w = B_{w'}$ και η f να χωρίζει την w' σε δύο περιττές περιπλανήσεις. Για τον λόγο αυτό, θα διαφοροποιηθούμε από τον ορισμό των H. Ohsugi και T. Hibi και θα ορίσουμε τις *γέφυρες*, τις *άρτιες* χορδές και τις *περιττές* χορδές της w.

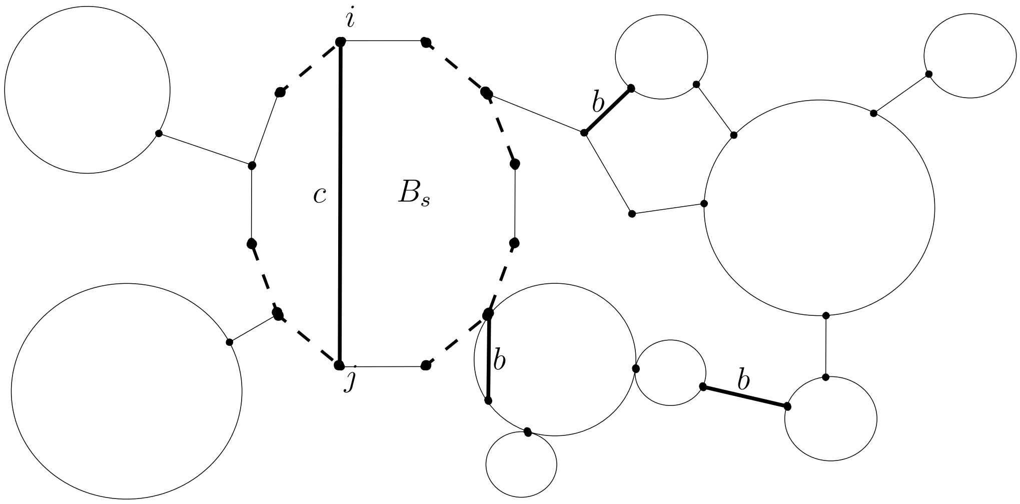
Ορισμός 2.3.8. *(γέφυρα - bridge)*
Έστω w πρωταρχική περιπλάνηση και $e = (v_1, v_2)$ χορδή της w. Η e θα καλείται γέφυρα, εάν υπάρχουν δύο διαφορετικά μπλοκ B_1, B_2 του $\mathbf{w}$ τέτοια ώστε $v_1 \in B_1$ και $v_2 \in B_2$.

Μια χορδή για να χαρακτηριστεί άρτια ή περιττή, βασική προϋπόθεση είναι ότι δεν είναι γέφυρα.

Ορισμός 2.3.9. *(άρτια/περιττή χορδή περιπλάνησης - even/odd chord of a walk)*
Έστω w πρωταρχική περιπλάνηση και $e = (v_1, v_2)$ χορδή της w. Η e θα λέγεται άρτια χορδή (αντίστοιχα περιττή), αν δεν είναι γέφυρα και χωρίζει την w σε δύο άρτιες κλειστές (αντίστοιχα περιττές) περιπλανήσεις.

Για τη καλύτερη κατανόηση των παραπάνω ορισμών, δίνουμε το παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.3.10. Θεωρούμε το παρακάτω γράφημα G:



Στο γράφημα αυτό παρατηρούμε τρεις χορδές οι οποίες είναι γέφυρες του w και σημειώνονται με b, ενώ υπάρχει μια η οποία είναι άρτια, η c. Να παρατηρήσουμε σε αυτό το σημείο, ότι οι κορυφές μιας γέφυρας, μπορεί να ανήκουν στο ίδιο μπλοκ, όπως για παράδειγμα αυτό συμβαίνει σε μια από τις τρεις γέφυρες του παραπάνω σχήματος.

Ο επόμενος ορισμός, γενικεύει τον αντίστοιχο ορισμό των αποτελεσματικώς διασταυρούμενων ακμών, που είχαν δώσει οι H. Ohsugi και T. Hibi στο άρθρο τους [30], για τυχαίο κύκλο του γραφήματος. Παρακάτω ορίζουμε τις *αποτελεσματικώς διασταυρώμενες ακμές* για τυχαία άρτια κλειστή πρωταρχική περιπλάνηση w.

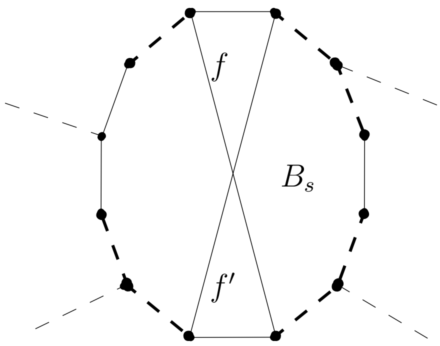
Ορισμός 2.3.11. *(αποτελεσματικώς διασταυρώμενες ακμές - cross effectively edges)*
Έστω $w = ((v_{i_1}, v_{i_2}), (v_{i_2}, v_{i_3}), \ldots, (v_{i_{2q}}, v_{i_1}))$ άρτια κλειστή πρωταρχική περιπλάνηση και έστω $e_1 = (v_{i_s}, v_{i_j}), e_2 = (v_{i_{s'}}, v_{i_{j'}})$ δύο περιττές χορδές αυτής με $1 \leq s < j \leq 2q$ και $1 \leq s' < j' \leq 2q$. Θα λέμε ότι οι e, e' είναι αποτελεσματικώς διασταυρώμενες ακμές στη w, εάν ο αριθμός $s - s'$ είναι περιττός και είτε $s < s' < j < j'$ είτε $s' < s < j' < j$.

Σημειώνουμε ότι αν οι e, e' είναι αποτελεσματικώς διασταυρώμενες τότε εξ ορισμού δεν είναι γέφυρες και οι αριθμοί $j - s$ και $j' - s'$ είναι άρτιοι. Επιπλέον, καθώς ο $s - s'$ είναι περιττός αριθμός, έπεται ότι και οι αριθμοί $j - s', j' - j, j' - s$ είναι περιττοί. Παρατηρούμε ακόμα ότι οι κορυφές των e και e' βρίσκονται στο ίδιο κυκλικό μπλοκ του $\mathbf{w}$. Στη συνέχεια δίνουμε έναν ορισμό, απαραίτητο για το θεώρημα χαρακτηρισμού των αναντικατάστατων γεννητόρων ενός συστήματος γεννητόρων τορικού ιδεώδους γραφήματος αλλά και το αντίστοιχο των ελαχιστοτικών γεννητόρων του ιδεώδους.

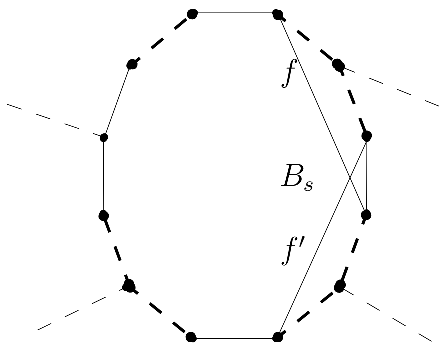
Ορισμός 2.3.12. *Ορίζουμε F_4 μιας άρτιας κλειστής περιπλάνησης w, έναν κύκλο (e, f, e', f') μήκους τέσσερα, ο οποίος αποτελείται από δύο ακμές e, e' της περιπλάνησης w οι οποίες είναι είτε περιττές είτε άρτιες ταυτόχρονα και δύο περιττές χορδές f, f' αποτελεσματικώς διασταυρώμενες στην w.*

Ακολουθεί ένα παράδειγμα, στο οποίο φαίνονται οι έννοιες των F_4 και των αποτελεσματικώς διασταυρούμενων ακμών. Να σημειώσουμε εδώ ότι όλες οι χορδές στο παράδειγμα αυτό είναι περιττές.

Παράδειγμα 2.3.13. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε δύο κυκλικά μπλοκ μιας πρωταρχικής περιπλάνησης, σε κάθε ένα από τα οποία υπάρχουν δύο περιττές χορδές αποτελεσματικώς διασταυρώμενες.



F_4



Αποτελ. Διασταυρ. Ακμές

Στο πρώτο μπλοκ, σχηματίζουν ένα F_4 ενώ στο δεύτερο όχι.

Συνδυάζοντας τους Ορισμούς 2.3.9 και 2.3.11, παρατηρούμε ότι δύο περιττές χορδές $f = (v_i, v_j)$ και $f' = (v_{i'}, v_{j'})$ είναι μέρος ενός F_4 εάν είτε $i' - j = \pm 1$ και $j' - i = \pm 1$ ή $i - i' = \pm 1$ και $j' - j = \pm 1$.

Προκύπτει ο παρακάτω ορισμός:

Ορισμός 2.3.14. *(ισχυρά αποτελεσματικώς διασταυρώμενες ακμές - cross strongly effectively edges)*
Έστω w άρτια κλειστή πρωταρχική περιπλάνηση και έστω e, e' δύο περιττές χορδές αυτής. Θα λέμε ότι οι e, e' είναι ισχυρά αποτελεσματικώς διασταυρώμενες ακμές στη w, εάν είναι αποτελεσματικώς διασταυρώμενες και δεν συμμετέχουν σε κάποιο F_4 της w.

Για παράδειγμα οι ακμές στο δεύτερο σχήμα είναι ισχυρά αποτελεσματικώς διασταυρώμενες, ενώ στο πρώτο δεν είναι καθώς από μόνες τους σχηματίζουν ένα F_4.

Προχωρώντας προς το στόχο μας, ο οποίος είναι ο πλήρης χαρακτηρισμός των ελαχιστοτικών γεννητόρων του I_G, διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε ορισμένες πολύ χρήσιμες προτάσεις. Η επόμενη αφορά μια πολύ σημαντική ιδιότητα των ελαχιστοτικών διωνύμων.

Πρόταση 2.3.15. *Έστω w μια πρωταρχική περιπλάνηση ενός γραφήματος G. Εάν το B_w είναι ελαχιστοτικό διώνυμο του I_G, τότε όλες οι χορδές της w είναι περιττές και δεν υπάρχουν δύο από αυτές που να είναι ισχυρά αποτελεσματικώς διασταυρώμενες.*

Απόδειξη. Έστω γράφημα G και έστω $w = (e_1, e_2, \dots, e_{2s})$ μια πρωταρχική περιπλάνηση αυτού. Εάν το B_w είναι ελαχιστοτικό διώνυμο, από τη Πρόταση 2.3.6 έπεται ότι η w είναι ισχυρά πρωταρχική. Θα αποδείξουμε αρχικά ότι η w μπορεί να έχει μόνο περιττές χορδές. Υποθέτουμε αντίθετα ότι $e = (v_1, v_{2l})$ είναι μια άρτια χορδή της w και έστω $w_1 = (e_1, e_2, \dots, e_{2l-1}, e), w_2 = (e, e_{2l}, \dots, e_{2s})$ οι αντίστοιχες δύο άρτιες περιπλανήσεις που χωρίζει η e την w. Παρατηρούμε ότι

$$B_w = B_{w_1}\frac{E^+(w_2)}{e} + B_{w_2}\frac{E^-(w_1)}{e}$$

και άρα το B_w δεν είναι ελαχιστοτικό, το οποίο αντιβαίνει στην υπόθεσή μας. Σημειώνουμε ότι

$$\frac{E^+(w_2)}{e} \neq 1 \neq \frac{E^-(w_1)}{e},$$

καθώς το G δεν έχει πολλαπλές ακμές. Θα αποδείξουμε ότι η w δεν έχει γέφυρες. Έστω αντίθετα ότι $e = (v_1, v_2)$ είναι μια γέφυρα της w. Καθώς οι κορυφές v_1, v_2 ανήκουν σε διαφορετικά μπλοκ, υπάρχει τουλάχιστον μια κορυφή αποκοπής v, τέτοια ώστε η περιπλάνηση w να γράφεται:

$$w = (v, w_1, v_1, w_2, v, w_3, v_2, w_4, v),$$

όπου w_1, w_2, w_3, w_4 είναι υποπεριπλανήσεις της w. Σημειώνουμε εδώ ότι αν $v = v_1$ ή $v = v_2$ μια από τις περιπλανήσεις w_1, w_4 είναι κενές. Τότε οι κλειστές περιπλανήσεις (v, w_1, v_1, w_2, v) και (v, w_3, v_2, w_4, v) είναι περιττές, διαφορετικά το B_w δεν είναι πρωταρχικό. Άρα μια από τις w_1, w_2 είναι περιττή περιπλάνηση και η άλλη άρτια. Ομοίως για τις w_3, w_4. Παρατηρούμε ακόμη, ότι οι τέσσερις περιπλανήσεις

$$(v, w_1, v_1, w_2, v, w_3, v_2, w_4, v), (v, w_1, v_1, w_2, v, -w_4, v_2, -w_3, v),$$

$$(v, -w_2, v_1, -w_1, v, w_3, v_2, w_4, v) \text{ και } (v, -w_2, v_1, -w_1, v, -w_4, v_2, -w_3, v)$$

δίνουν το ίδιο διώνυμο. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι w_1, w_3 είναι περιττές και οι w_2, w_4 είναι άρτιες. Τότε οι κλειστές περιπλανήσεις $\zeta_1 = (w_2, w_3, e)$ και $\zeta_2 = (w_4, w_1, e)$ είναι άρτιες και το διώνυμο

$$B_w = B_{\zeta_2}\frac{E^-(\zeta_1)}{e} - B_{\zeta_1}\frac{E^+(\zeta_2)}{e},$$

είναι μη ελαχιστοτικό, το οποίο είναι άτοπο. Σημειώνουμε ότι

$$\frac{E^+(\zeta_2)}{e} \neq 1 \neq \frac{E^-(\zeta_1)}{e},$$

καθώς το G δεν έχει πολλαπλές ακμές. Συνεπώς όλες οι χορδές της w είναι περιττές. Μένει να αποδείξουμε, ότι δεν υπάρχουν δύο περιττές χορδές ισχυρά αποτελεσματικώς διασταυρώμενες.

Υποθέτουμε αντίθετα ότι $f = \{v_1, v_2\}$ και $f' = \{u_1, u_2\}$ είναι δύο ισχυρά αποτελεσματικώς διασταυρώμενες χορδές της w. Η w έχει τη μορφή:

$$w = (v_1, w_1, u_1, w_2, v_2, w_3, u_2, w_4, v_1).$$

Επιπλέον οι περιπλανήσεις $\xi_1 = (w_1, f', -w_3, f)$ και $\xi_2 = (w_2, f, -w_4, f')$ είναι άρτιες, καθώς οι περιπλανήσεις

$$(w_1, w_2, f), (w_2, w_3, f'), (w_3, w_4, f) \text{ και } (w_4, w_1, f')$$

είναι περιττές. Τότε όμως το διώνυμο

$$B_w = B_{\xi_1}\frac{E^-(\xi_2)}{ff'} - B_{\xi_2}\frac{E^-(\xi_1)}{ff'},$$

είναι μη ελαχιστοτικό, το οποίο είναι άτοπο. Σημειώνουμε ότι καθώς οι f, f' δε συμμετέχουν σε κάποιο F_4, έχουμε ότι

$$\frac{E^-(\xi_2)}{ff'} \neq 1 \neq \frac{E^-(\xi_1)}{ff'}.$$

□

Πλησιάζουμε στον αρχικό μας στόχο, που είναι να δώσουμε ικανές και αναγκαίες συνθήκες για τον χαρακτηρισμό των ελαχιστοτικών γεννητόρων ενός τορικού ιδεώδους γραφήματος. Ένας ορισμός χρήσιμος τεχνικά για τις αποδείξεις των προτάσεων που ακολουθούν, είναι αυτός των F_4 ισοδύναμων πρωταρχικών περιπλανήσεων.

Ορισμός 2.3.16. *Δύο πρωταρχικές περιπλανήσεις w, w' θα λέμε ότι διαφέρουν κατά $F_4 = \xi = (e_1, f_1, e_2, f_2)$, εάν $w = (w_1, e_1, w_2, e_2)$ και $w' = (w_1, f_1, -w_2, f_2)$, όπου οι w_1, w_2 είναι περιττές περιπλανήσεις.*

Ορισμός 2.3.17. *Δύο πρωταρχικές περιπλανήσεις w, w' θα λέγονται F_4 ισοδύναμες, εάν είτε $w = w'$ είτε υπάρχει μια ακολουθία περιπλανήσεων $w_1 = w, w_2, \dots, w_{n-1}, w_n = w'$ τέτοια ώστε οι w_i, w_{i+1} να διαφέρουν κατά F_4, για κάθε i, $1 \leq i \leq n-1$.*

Παρατηρούμε εδώ, ότι αν οι w, w' είναι F_4 ισοδύναμες, τότε τα επαγόμενα γραφήματα G_w και $G_{w'}$ είναι ίσα. Θα συμβολίζουμε με L_w τη κλάση ισοδυναμίας των περιπλανήσεων w υπεράνω της σχέσης F_4 ισοδύναμες.

Λήμμα 2.3.18. *Έστω w, w' πρωταρχικές F_4 ισοδύναμες περιπλανήσεις. Το B_w είναι ελαχιστοτικό αν και μόνο αν το $B_{w'}$ είναι ελαχιστοτικό.*

Απόδειξη. Έστω $w = (w_1, e_1, w_2, e_2)$ και $w' = (w_1, f_1, -w_2, f_2)$ άρτιες κλειστές F_4 ισοδύναμες περιπλανήσεις, όπου F_4 είναι ο κύκλος $\xi = (e_1, f_1, e_2, f_2)$. Τα αντίστοιχα διώνυμα αυτών είναι:

$$B_w = E^+(w_1)E^+(w_2) - e_1e_2E^-(w_1)E^-(w_2)$$

και

$$B_{w'} = E^+(w_1)E^+(w_2) - f_1f_2E^-(w_1)E^-(w_2).$$

Παρατηρούμε ότι:

$$B_w = B_{w'} - \frac{E^-(w)}{e_1e_2}B_\xi$$

και έπεται το συμπέρασμα. □

Βλέποντας τα παραπάνω, παρατηρούμε ότι είναι πιθανό μια περιττή χορδή μιας πρωταρχικής περιπλάνησης w, κάποιες φορές να αποτελεί άρτια χορδή κάποιας άλλης πρωταρχικής περιπλάνησης w', όπου οι w', w είναι F_4 ισοδύναμες. Σε αυτή τη περίπτωση σύμφωνα με τη Πρόταση 2.3.15 και το Λήμμα 2.3.18 έπεται ότι οι $B_w, B_{w'}$ δεν είναι ελαχιστοτικοί. Ο παρακάτω ορισμός και πρόταση, ξεκαθαρίζουν αυτή τη περίπτωση. Αρχικά παρατηρούμε ότι ένα F_4, έστω αυτό (e_1, f_1, e_2, f_2), διαμερίζει τις κορυφές του $\mathbf{w}$ σε δύο μέρη, $V(\mathbf{w_1})$ και $V(\mathbf{w_2})$, καθώς οι ακμές e_1, e_2 ανήκουν στο ίδιο μπλοκ του $w = (w_1, e_1, w_2, e_2)$.

Ορισμός 2.3.19. *Έστω $w = (w_1, e_1, w_2, e_2)$ πρωταρχική περιπλάνηση και $f = (u, v)$ μια περιττή χορδή αυτής. Θα λέμε ότι η f διασταυρώνεται με ένα F_4 της μορφής (e_1, f_1, e_2, f_2), εάν $u \in V(\mathbf{w_1})$, $v \in V(\mathbf{w_2})$ και η f είναι διαφορετική από τις f_1, f_2.*

Μέσω του παραπάνω ορισμού, βλέπουμε ότι αν ένα διώνυμο είναι ελαχιστοτικό, τότε η αντίστοιχη περιπλάνηση w, δεν έχει περιττές χορδές με αυτή την ιδιότητα. Έτσι έχουμε τη παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 2.3.20. *Έστω w πρωταρχική περιπλάνηση. Εάν ο B_w είναι ελαχιστοτικός γεννήτορας, τότε η w δεν έχει περιττές χορδές που διασταυρώνονται με κάποιο F_4.*

Απόδειξη. Έστω B_w ελαχιστοτικός γεννήτορας. Υποθέτουμε αντίθετα ότι υπάρχει περιττή χορδή $e = \{v_1, v_2\}$ της $w = (w_1, e_1, w_2, e_2)$, η οποία διασταυρώνεται με ένα F_4, (e_1, f_1, e_2, f_2) της w. Παρατηρούμε ότι η w μπορεί να γραφεί:

$$w = (w_1', v_1, w_1'', e_1, w_2', v_2, w_2'', e_2).$$

Η χορδή f είναι περιττή και άρα οι περιπλανήσεις (f, w_2'', e_2, w_1') και (f, w_1'', e_1, w_2') είναι περιττές. Επίσης, καθώς ο κύκλος (e_1, f_1, e_2, f_2) είναι F_4, οι περιπλανήσεις w_1, w_2 είναι περιττές. Άρα οι $(w_1'', f_1, -w_2'', f)$ και $(w_1', f, -w_2', f_2)$ είναι άρτιες περιπλανήσεις και εξ ορισμού η f είναι άρτια χορδή της περιπλάνησης $w' = (w_1, f_1, -w_2, f_2)$. Σημειώνουμε εδώ, ότι η f δεν αποτελεί γέφυρα της w' καθώς δεν είναι γέφυρα της w. Από τη Πρόταση 2.3.15 έχουμε ότι το διώνυμο $B_{w'}$ δεν είναι ελαχιστοτικός γεννήτορας και από το Λήμμα 2.3.18 έπεται ότι και το B_w δεν είναι, κάτι που αντιβαίνει στην αρχική μας υπόθεση. □

Γενικά, για μια πρωταρχική περιπλάνηση w, όλες οι περιπλανήσεις που ανήκουν στη κλάση ισοδυναμίας L_w είναι πρωταρχικές. Ένα F_4 μιας πρωταρχικής περιπλάνησης w, αποτελεί F_4 οποιασδήποτε από τις περιπλανήσεις που βρίσκονται στην L_w, παρόλο που κάποιες φορές οι χορδές και οι ακμές ενός F_4, αλλάζουν ρόλο και είδος. Επίσης, μια γέφυρα της w, είναι γέφυρα για οποιαδήποτε περιπλάνηση βρίσκεται στη κλάση ισοδυναμίας L_w και οι περιττές χορδές (αντίστοιχα άρτιες) της w, συνεχίζουν να αποτελούν περιττές χορδές (αντίστοιχα άρτιες) για οποιαδήποτε περιπλάνηση της L_w, εκτός κ αν διασταυρώνονται με ένα F_4. Εάν συμβαίνει αυτό, αυτές ανήκουν σε διαφορετική διαμέριση κι αυτό εξαρτάται από τον αριθμό των F_4 που διασταυρώνονται.

Το παρακάτω θεώρημα είναι το βασικό αποτέλεσμα αυτής της ενότητας, στο οποίο χαρακτηρίζουμε πλήρως τα στοιχεία ενός ελαχιστοτικού συστήματος γεννητόρων ενός τορικού ιδεώδους γραφήματος G.

Θεώρημα 2.3.21. *Έστω w άρτια κλειστή περιπλάνηση. Ο B_w είναι ελαχιστοτικός γεννήτορας, εάν και μόνο εάν:*

(i) *η w είναι ισχυρά πρωταρχική,*

(ii) *όλες οι χορδές της είναι περιττές,*

(iii) *δεν υπάρχουν δύο από αυτές που να είναι ισχυρά αποτελεσματικώς διασταυρώμενες και καμία από αυτές δεν διασταυρώνεται με κάποιο F_4 της w.*

Απόδειξη. Η μια κατεύθυνση έπεται αμέσως από τις Προτάσεις 2.3.15 και 2.3.20.

Αντίστροφα, έστω w ισχυρά πρωταρχική περιπλάνηση, τέτοια ώστε όλες οι χορδές της είναι περιττές, δεν υπάρχουν δύο από αυτές που να είναι αποτελεσματικώς διασταυρώμενες και καμία από αυτές δεν διασταυρώνεται με κάποιο F_4 της w. Υποθέτουμε αντίθετα ότι ο B_w δεν είναι ελαχιστοτικός γεννήτορας. Εξόρισμού, υπάρχει ελαχιστοτική περιπλάνηση δ τέτοια ώστε $E^+(\delta)|E^+(w)$ με $E^+(\delta) \neq E^+(w)$ και συνεπώς οι ακμές της δ^+ είναι και ακμές της w^+. Επίσης, ισχύει:

$$\deg_{A_G}(E^-(\delta)) = \deg_{A_G}(E^+(\delta)) < \deg_{A_G}(E^+(w)) = \deg_{A_G}(E^-(w)).$$

Η παραπάνω σχέση μας πληροφορεί ότι οι κορυφές της δ^- ανήκουν στο $\mathbf{w}$ και άρα οι ακμές της δ^- είναι ακμές ή χορδές της w, δηλαδή περιττές χορδές λόγω της αρχικής μας υπόθεσης.

Ισχυριζόμαστε ότι κάθε τέτοια περιπλάνηση δ, είναι ένα F_4 της w. Έστω αντίθετα ότι δεν είναι. Ανάμεσα σε όλες αυτές τις περιπλανήσεις δ οι οποίες δεν είναι ένα F_4 της w και $E^+(\delta)|E^+(w)$ με $E^+(\delta) \neq E^+(w)$, επιλέγουμε μια γ τέτοια ώστε η γ να έχει τις λιγότερες δυνατές χορδές της w. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1η περίπτωση: Η περιπλάνηση γ δεν περιέχει χορδές της w. Συνεπώς, όλες οι ακμές της γ^- είναι ακμές της w. Άρα $\gamma^+ \subset w^+$, $\gamma^- \subset w$ και καθώς η w είναι πρωταρχική, υπάρχει τουλάχιστον μια ακμή $e \in \gamma^- \cap w^+$. Συμπεραίνουμε ότι $\gamma = (\ldots, e_1, e, e_2, \ldots)$, όπου $e_1, e, e_2 \in w^+$. Παρατηρούμε σε αυτό το σημείο, ότι αν υπάρχουν δύο μπλοκ με μια κορυφή αποκοπής κοινό τους σημείο, τότε οι διαδοχικές ακμές στα δύο αυτά διαφορετικά μπλοκ ανήκουν σε διαφορετική διαμέριση. Συνεπώς οι ακμές e_1, e, e_2 ανήκουν στο ίδιο μπλοκ της w, το οποίο είναι κύκλος και άρα οι δύο κορυφές ανάμεσά τους είναι κορυφές εισροής της w. Αυτό είναι αδύνατο, καθώς η w είναι ισχυρά πρωταρχική, βλέπε Πρόταση 2.3.6. Σημειώνουμε εδώ, ότι αν δύο από τις e_1, e, e_2 είναι η ίδια ακμή, τότε αυτή θα αποτελεί διπλή ακμή της w και άρα ακμή αποκοπής του $\mathbf{w}$, δλδ οι ακμές e_1, e, e_2 θα ανήκουν σε δύο διαφορετικά μπλοκ, το οποίο είναι αδύνατο.

2η περίπτωση: Η γ περιέχει τουλάχιστον μια χορδή της w (άρα και η γ^-). Τότε,

$$\gamma = (w_1, f_1, w_2, f_2, \ldots, w_s, f_s),$$

όπου $w_1, \ldots, w_s$ είναι υποπεριπλανήσεις της w και $f_1, \ldots, f_s$ περιττές της χορδές που ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος και s το μικρότερο δυνατό. Οι δύο κορυφές μιας περιττής χορδής f της περιπλάνησης w, βρίσκονται στο ίδιο κυκλικό μπλοκ και άρα η κάθε f διαμερίζει την w σε δύο μέρη, τα $w^+(f)$ και $w^-(f)$. Προφανώς, υπάρχει τουλάχιστον μια χορδή f_i τέτοια ώστε το $w^+(f_i)$ να μη περιέχει άλλη χορδή. Η τελευταία ακμή της w_i και η πρώτη της w_{i+1} ανήκουν στο $\gamma^+ \subset w^+$ και καθώς η χορδή f_i είναι περιττή, μια από τις δύο αυτές ακμές είναι στο $w^+(f_i)$ και η άλλη στο $w^-(f_i)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι η πρώτη ακμή της w_{i+1} είναι στο $w^+(f_i)$. Η περιπλάνηση γ είναι κλειστή και καμία από τις κορυφές της f_i δεν είναι κορυφή αποκοπής της γ καθώς η f_i δεν είναι γέφυρα της w. Συνεπώς υπάρχει χορδή, της οποίας η μια κορυφή βρίσκεται στο $w^+(f_i)$ και η άλλη στο $w^-(f_i)$. Αυτή η χορδή, είναι υποχρεωτικά η f_{i+1}, καθώς γνωρίζουμε ότι το $w^+(f_i)$ δεν περιέχει κάποια χορδή. Έστω $f_i = (v_{i_s}, v_{i_j})$ και $f_{i+1} = (v_{i_{s'}}, v_{i_{j'}})$. Από προηγουμένως, γνωρίζουμε ότι η πρώτη και η τελευταία ακμή της w_{i+1} ανήκουν στη $\gamma^+ \subset w^+$ και άρα το πλήθος των ακμών της w_{i+1}, που ισοδυναμεί με $s' - j$ είναι περιττό. Ταυτόχρονα όμως, από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι οι f_i, f_{i+1} δεν είναι αποτελεσματικώς διασταυρώμενες, εκτός κι αν διασταυρώνονται με ένα F_4 και άρα

$$\text{είτε } \mid s' - s \mid = \mid j' - j \mid = 1 \text{ ή } \mid s' - j \mid = \mid j' - s \mid = 1.$$

Στη πρώτη περίπτωση, υπάρχει μια ελαχιστοτική περιπλάνηση

$$\gamma' = (w_1, f_1, \ldots, w_i, e_{i_{s-1}}, -w_{i+1}, e_{i_{j-1}}, w_{i+2}, \ldots)$$

με δύο λιγότερες χορδές, το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την επιλογή του πλήθους των χορδών της γ. Άρα ισχύει μόνο η δεύτερη περίπτωση, στην οποία η γ είναι ένα F_4, το $(e_{i_s}, f_i, e_{i_{s'}}, f_{i+1})$. Συνεπώς ο ισχυρισμός μας αποδείχτηκε, δηλαδή εάν υπάρχει περιπλάνηση δ τέτοια ώστε $E^+(\delta) | E^+(w)$ με $E^+(\delta) \neq E^+(w)$, τότε η δ αποτελεί ένα F_4 της w.

Σημειώνουμε εδώ, ότι αν οι συνθήκες του θεωρήματος ικανοποιούνται για μια περιπλάνηση w, τότε αυτές ικανοποιούνται για οποιαδήποτε περιπλάνηση που ανήκει στο L_w. Σταθεροποιούμε ένα ελαχιστοτικό σύνολο γεννητόρων $\{B_{w_1}, \ldots, B_{w_t}\}$ του I_G, όπου $w_1, \ldots, w_t$ άρτιες περιπλανήσεις του G. Για τυχαία $w' \in L_w$, ορίζουμε τον αριθμό

$$r(w') = \min\{\sum_{l=1}^{t} \mid g_l \mid : \ B_{w'} = \sum_{l=1}^{t} g_l B_{w_l}\},$$

όπου $\mid g_l \mid$ είναι το πλήθος των μονωνύμων του g_l. Επιλέγουμε μια περιπλάνηση $v \in L_w$ τέτοια ώστε ο $r(v)$ να είναι ο ελάχιστος δυνατός. Ισχυριζόμαστε ότι ο B_v είναι ένας από τους ελαχιστοτικούς γεννήτορες του συνόλου $\{B_{w_1}, \ldots, B_{w_t}\}$. Υποθέτουμε αντίθετα, ότι δεν είναι και άρα αυτός μπορεί να γραφεί

$$B_v = E^+(v) - E^-(v) = \sum_{r=1}^{q} g_{i_r} B_{w_{i_r}}.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $E^+(w_{i_1}) \mid E^+(v)$ και ο όρος $\frac{E^+(v)}{E^+(w_{i_1})} \neq 1$ είναι ένα μονώνυμο του g_1. Τότε υποχρεωτικά η w_{i_1} είναι υποχρεωτικά ένα F_4, (e_1, f_1, e_2, f_2) της περιπλάνησης $v = (v_1, e_1, v_2, e_2)$, όπου $e_1 e_2 = E^+(w_{i_1}) \mid E^+(v)$. Θεωρώντας την $v' = (f_1, -v_1, f_2, v_2)$, τότε $v' \in L_w$ και

$$\begin{aligned} B_{v'} &= E^+(v') - E^-(v') = \frac{E^+(v)}{e_1 e_2} f_1 f_2 - E^-(v) \\ &= (g_{i_1} - \frac{E^+(v)}{e_1 e_2}) B_{w_{i_1}} + \sum_{r=2}^{q} g_{i_r} B_{w_{i_r}}. \end{aligned}$$

Αλλά τότε, $r(v') < r(v)$ το οποίο είναι αδύνατο, λόγω της επιλογής της v. Να παρατηρήσουμε σε αυτό το σημείο, ότι οι συντελεστές των μονωνύμων των g_i είναι ± 1, για περισσότερες πληροφορίες γύρω από το πως παράγονται τα τορικά ιδεώδη βλέπε [6, 10, 39].

Έπεται ότι ο B_v είναι ελαχιστοτικός. Από το Λήμμα 2.3.18 έπεται ότι ο B_w είναι ελαχιστοτικός, το οποίο είναι άτοπο στην υπόθεση ότι ο B_w δεν είναι ένας από τους γεννήτορες του ελαχιστοτικού συνόλου γεννητόρων $\{B_{w_1}, \ldots, B_{w_t}\}$ του I_G. □

Παρατήρηση 2.3.22. Στο παραπάνω θεώρημα, στις περιπτώσεις που η περιπλάνηση w έχει περισσότερα από ένα F_4, δύο από αυτά δε μπορεί να έχουν κοινή ακμή και δε μπορούν να διασταυρώνονται, καθώς σε κάθε περίπτωση θα είχαμε μια περιττή χορδή της w που διασταυρώνεται με ένα F_4.

Παρατήρηση 2.3.23. Το παραπάνω θεώρημα βοήθησε στο να βρεθούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες, για το πότε ένα ιδεώδες γραφήματος είναι πλήρους διατομής. Το πρόβλημα αυτό παρέμενε ανοικτό από το 1996. Για περισσότερες πληροφορίες βλέπε [44].

Στο [30] οι H. Ohsugi και T. Hibi εισήγαγαν την έννοια του αναντικατάστατου διωνύμου για να μελετήσουν ένα πρόβλημα της Αλγεβρικής Στατιστικής, βλ. [42], γύρω από τη μοναδικότητα ή όχι ενός ελαχιστοτικού συστήματος γεννητόρων ενός τορικού ιδεώδους. Σε αυτή τους τη προσπάθεια, ορίσαν τα αναντικατάστατα διώνυμα ενός τορικού ιδεώδους ενός γραφήματος G, τύπου B_w, όπου ο w είναι κύκλος του G. Ταυτόχρονα δώσανε έναν πλήρη χαρακτηρισμό των αναντικατάστατων γεννητόρων του I_G στις περιπτώσεις όπου το G είναι γράφημα, του οποίου το συμπληρωματικό του γράφημα είναι *χορδικά αδύναμο* (weakly chordal) ή το G ικανοποιεί τη *συνθήκη περιττών κύκλων* (odd cycle condition). Ένα συνεκτικό γράφημα λέγεται χορδικά αδύναμο, εάν κάθε κύκλος του μήκους τέσσερα έχει χορδή. Επίσης θα λέμε ότι ένα γράφημα ικανοποιεί τη συνθήκη περιττών κύκλων εάν για κάθε δύο ξένους (ως προς τις κορυφές) περιττούς κύκλους του γραφήματος, υπάρχει γέφυρα ανάμεσά τους. Στο θεώρημα που ακολουθεί, δίνουμε πλήρη χαρακτηρισμό των αναντικατάστατων γεννητόρων ενός τορικού ιδεώδους γραφήματος G, για οποιοδήποτε απλό γράφημα G. Στη παρατήρηση γενικεύουμε αυτό, ακόμη και για τη περίπτωση μη-απλού γραφήματος.

Ορισμός 2.3.24. *(αναντικατάστατο διώνυμο - indispensable binomial)*
Θα καλούμε ένα διώνυμο $B = \mathbf{x}^{\mathbf{u}} - \mathbf{x}^{\mathbf{v}} \in I_{\mathcal{A}}$ αναντικατάστατο εάν κάθε ελαχιστοτικό σύστημα διωνυμικών γεννητόρων του $I_{\mathcal{A}}$ περιέχει το B ή το $-B$.

Θα αποσαφηνίσουμε τον ορισμό στο παράδειγμα που ακολουθεί:

Παράδειγμα 2.3.25. (i) Θεωρούμε το σύνολο:

$$\mathcal{A} = \{1, 1, 3\}.$$

Για το σύνολο αυτό η $\hat{\pi} : \mathbb{K}[\mathbf{x}] \to \mathbb{K}[\mathbf{t}] = \mathbb{K}[t_1]$ ορίζεται ως εξής:

$$\hat{\pi}(x_1) = t_1, \hat{\pi}(x_2) = t_1, \hat{\pi}(x_3) = t_1^3.$$

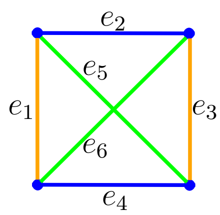
Όπως έχουμε δει ο πυρήνας του παραπάνω ομομορφισμού, εξ ορισμού αποτελεί το τορικό ιδεώδες του συνόλου $\mathcal{A}$.

Το $I_{\mathcal{A}}$ έχει δύο δυνατά ελαχιστοτικά σύνολα γεννητόρων (βλέπε Ορισμό 2.3.1):

$$I_{\mathcal{A}} = \langle x_1 - x_2, x_1^3 - x_3 \rangle \text{ ή } I_{\mathcal{A}} = \langle x_1 - x_2, x_2^3 - x_3 \rangle.$$

Παρατηρούμε ότι μόνο το $x_1 - x_2$ είναι αναντικατάστατο διώνυμο του $I_{\mathcal{A}}$.

(ii) Έστω G το K_4, δηλαδή το πλήρες γράφημα τεσσάρων κορυφών.



Παράδειγμα I_{K_4}

Στη περίπτωση αυτή, το I_{K_4} παράγεται από τρία διώνυμα (προσδιορίζονται στο γράφημα με διαφορετικό χρώμα) με:

$$I_{K_4} = \langle e_1e_3 - e_2e_4, e_1e_3 - e_5e_6, e_2e_4 - e_5e_6 \rangle.$$

Το

$$B_{\gamma_1} = e_1e_3 - e_2e_4$$

προέρχεται από τη περιπλάνηση $\gamma_1 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, το

$$B_{\gamma_2} = e_1e_3 - e_5e_6$$

προέρχεται από τη περιπλάνηση $\gamma_2 = (e_1, e_5, e_3, e_6)$ και τέλος το

$$B_{\gamma_3} = e_2e_4 - e_5e_6$$

προέρχεται από τη περιπλάνηση $\gamma_3 = (e_2, e_5, e_4, e_6)$. Κανένα από αυτά όμως δεν είναι αναντικατάστατο, καθώς εύκολα παρατηρούμε ότι οποιαδήποτε δύο κι αν επιλέξουμε, αυτά γεννούν το ιδεώδες και αποτελούν σε κάθε περίπτωση ένα ελαχιστοτικό σύνολο γεννητόρων για αυτό. Πράγματι:

$$e_1e_3 - e_2e_4 = (e_1e_3 - e_5e_6) - (e_2e_4 - e_5e_6),$$

$$e_1e_3 - e_5e_6 = (e_1e_3 - e_2e_4) - (e_2e_4 - e_5e_6),$$

$$e_2e_4 - e_5e_6 = (e_1e_3 - e_2e_4) - (e_1e_3 - e_5e_6).$$

Επιλέγοντας για παράδειγμα τα δύο πρώτα, ένα σύνολο γεννητόρων για το ιδεώδες μας, είναι:

$$I_{K_4} = \langle e_1e_3 - e_2e_4, e_1e_3 - e_5e_6 \rangle,$$

το οποίο είναι και ελαχιστοτικό γιατί:

$$e_1e_3 - e_2e_4 \notin \langle e_1e_3 - e_5e_6 \rangle$$

και αντίστοιχα

$$e_1e_3 - e_5e_6 \notin \langle e_1e_3 - e_2e_4 \rangle.$$

Όμοια και για τα άλλα δύο σύνολα. Έχουμε λοιπόν συνολικά, τρια ελαχιστοτικά σύνολα γεννητόρων, οι γεννήτορες των οποίων δεν είναι αναντικατάστατοι.

Είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το θεώρημά, το οποίο προσδιορίζει τους αναντικατάστατους γεννήτορες για ένα τορικό ιδεώδες ενός τυχαίου γραφήματος G.

Θεώρημα 2.3.26. *Έστω w άρτια κλειστή περιπλάνηση γραφήματος G. Ο B_w είναι αναντικατάστατος γεννήτορας του I_G αν και μόνο αν:*

(i) *η w είναι ισχυρά πρωταρχική περιπλάνηση,*

(ii) *όλες οι χορδές της είναι περιττές και δεν υπάρχουν δύο από αυτές που να είναι αποτελεσματικώς διασταυρώμενες.*

Απόδειξη. Από το Λήμμα 2.3.18, εάν η w έχει ένα F_4, τότε ο B_w δεν είναι αναντικατάστατος γεννήτορας, καθώς θα μπορεί να αντικατασταθεί από κάποιο $B_{w'}$. Συνεπώς η w δεν περιέχει F_4 και το συμπέρασμα έπεται από το Θεώρημα 2.3.21.

Αντίστροφα, έστω w ισχυρά πρωταρχική περιπλάνηση, όλες οι χορδές της οποίας είναι περιττές και δεν υπάρχουν δύο εξ αυτών αποτελεσματικώς διασταυρώμενες. Υποθέτουμε αντίθετα, ότι B_w δεν είναι αναντικατάστατο διώνυμο. Συνεπώς υπάρχει ελαχιστοτική περιπλάνηση $\delta \neq w$, τέτοια ώστε $E^+(\delta) \mid E^+(w)$ και άρα οι ακμές της δ^+ είναι και ακμές της w^+. Επίσης, ισχύει:

$$\deg_{A_G}(E^-(\delta)) = \deg_{A_G}(E^+(\delta)) \leq \deg_{A_G}(E^+(w)) = \deg_{A_G}(E^-(w)).$$

Από τη παραπάνω σχέση, συμπεραίνουμε ότι οι κορυφές της δ^- βρίσκονται στο $\mathbf{w}$ και άρα οι ακμές της δ^- είναι ακμές ή χορδές της w και πιο συγκεκριμένα περιττές χορδές, λόγω της υπόθεσής μας. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

<u>1η περίπτωση:</u> Η περιπλάνηση δ δε περιέχει χορδές της w. Σε αυτή τη περίπτωση, η απόδειξη είναι ακριβώς ίδια με το αντίστοιχο κομμάτι της απόδειξης του Θεωρήματος 2.3.21.

<u>2η περίπτωση:</u> Η περιπλάνηση δ περιέχει τουλάχιστον μια χορδή της w (άρα και η δ^-). Τότε

$$\delta = (w_1, f_1, w_2, f_2, \ldots, w_s, f_s),$$

όπου $w_1, \ldots, w_s$ είναι υποπεριπλανήσεις της w και $f_1, \ldots, f_s$ είναι περιττές χορδές αυτής που ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος. Προφανώς, υπάρχει τουλάχιστον μια χορδή f_i από αυτές, τέτοια ώστε το κομμάτι $w^+(f_i)$ δε περιέχει κάποια χορδή. Η τελευταία ακμή της w_i και η πρώτη ακμή της w_{i+1} βρίσκονται στη $\delta^+ \subset w^+$. Η χορδή f_i είναι περιττή και άρα μια από τις δύο αυτές ακμές βρίσκεται στο $w^+(f_i)$ και η άλλη στο $w^-(f_i)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι η πρώτη ακμή της w_{i+1} ανήκει στο $w^+(f_i)$. Η περιπλάνηση δ είναι κλειστή και δεν υπάρχει κορυφή της f_i η οποία να είναι κορυφή αποκοπής της δ, καθώς η f_i δεν είναι γέφυρα της w. Άρα υπάρχει χορδή της w, η οποία έχει μια κορυφή της στο $w^+(f_i)$ και την άλλη στο $w^-(f_i)$. Υποχρεωτικά αυτή η χορδή είναι η f_{i+1} καθώς το $w^+(f_i)$ δε περιέχει κάποια χορδή. Έστω $f_i = \{v_{i_s}, v_{i_j}\}$ και $f_{i+1} = \{v_{i_{s'}}, v_{i_{j'}}\}$. Καθώς η πρώτη και η τελευταία ακμή της w_{i+1} ανήκει στη $\delta^+ \subset w^+$, έπεται ότι ο αριθμός $(s' - j)$ των ακμών της περιπλάνησης w_{i+1} είναι περιττός. Συνεπώς οι f_i, f_{i+1} είναι αποτελεσματικώς διασταυρώμενες, το οποίο είναι άτοπο. Άρα το B_w είναι αναντικατάστατο διώνυμο και ανήκει σε κάθε ελαχιστοτικό σύνολο γεννητόρων του I_G και το ζητούμενο αποδείχτηκε. □

Παράδειγμα 2.3.27. Ας επιστρέψουμε στο παράδειγμα του I_{K_4} το οποίο είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα κι ας αναλύσουμε τους λόγους για τους οποίους κανένας ελαχιστοτικός γεννήτορας του ιδεώδους δεν είναι αναντικατάστατος. Ο f_{γ_1} λόγω της ύπαρξης των αποτελεσματικώς διασταυρώμενων ακμών και οι $f_{\gamma_2}, f_{\gamma_3}$ λόγω της ύπαρξης των χορδών.

Στη προσπάθεια να απαντήσουμε για τη μοναδικότητα ή όχι, του ελαχιστοτικού συστήματος γεννητόρων ενός τορικού ιδεώδους γραφήματος G, αρκεί να συνδυάσουμε τα προηγούμενα αποτελέσματα και πιο συγκεκριμένα, το Λήμμα 2.3.18 και τα Θεωρήματα 2.3.21, 2.3.26. Παρατηρούμε, ότι εάν ο B_w είναι αναντικατάστατος γεννήτορας τότε η w δεν περιέχει F_4 και αν ο B_w είναι ελαχιστοτικός αλλά όχι αναντικατάστατος, τότε η αντίστοιχη περιπλάνηση περιέχει τουλάχιστον ένα F_4. Επιπλέον, εάν κανένας ελαχιστοτικός γεννήτορας δε περιέχει κάποιο F_4, τότε το τορικό ιδεώδες παράγεται από αναντικατάστατα διώνυμα και άρα το I_G έχει μοναδικό ελαχιστοτικό σύστημα γεννητόρων και αντιστρόφως. Το επόμενο πόρισμα απορρέει άμεσα από τον παραπάνω συλλογισμό:

Πόρισμα 2.3.28. *Έστω G γράφημα το οποίο δε περιέχει κύκλους μήκους τέσσερα. Το τορικό ιδεώδες I_G έχει μοναδικό ελαχιστοτικό σύστημα γεννητόρων.*

Πριν προχωρήσουμε στον καθορισμό των θεμελιωδών στοιχείων του I_G και σε ένα παράδειγμα με το οποίο περιγράφουμε όλες αυτές τις έννοιες, θα διατυπώσουμε και το θεώρημα καθορισμού των κυκλωμάτων ενός τορικού ιδεώδους γραφήματος G. Ο R. Villarreal το 1995, στο άρθρο του [46, Πρόταση 4.2], έδωσε ικανές και αναγκαίες συνθήκες χαρακτηρισμού των κυκλωμάτων του I_G όπως βλέπουμε και στο παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 2.3.29 (Villarreal, 1995)**.** *Έστω G πεπερασμένο συνεκτικό γράφημα. Το διώνυμο $B \in I_G$ είναι κύκλωμα αν και μόνον αν $B = B_w$ όπου*

(i) *w είναι άρτιος κύκλος ή*

(ii) *η w αποτελείται από δύο περιττούς κύκλους που τέμνονται σε μια κορυφή ή*

(iii) *η w αποτελείται από δύο περιττούς κύκλους που συνδέονται με ένα μονοπάτι.*

Κλείνοντας την ενότητα αυτή, θα δώσουμε ικανή και αναγκαία συνθήκη χαρακτηρίζοντας πλήρως τα θεμελιώδη διώνυμα. Πριν από αυτό διατυπώνουμε τον αντίστοιχο ορισμό.

Ορισμός 2.3.30. *(θεμελιώδης περιπλάνηση- fundamental walk)*
Μια άρτια κλειστή περιπλάνηση w, ενός γραφήματος G, καλείται θεμελιώδης εάν για κάθε άρτια κλειστή περιπλάνηση w' του επαγόμενου γραφήματος G_w, έχουμε ότι $B_{w'} \in \langle B_w \rangle$.

Ένα διώνυμο B_w είναι θεμελιώδες εάν και μόνο εάν η αντίστοιχη περιπλάνηση w είναι θεμελιώδης, βλέπε [30]. Οι Ohsugi, Hibi στο άρθρο τους [30, Λήμμα 4.2] αποδεικνύουν ότι τα θεμελιώδη διώνυμα είναι κυκλώματα και αναντικατάστατα στοιχεία του ιδεώδους χωρίς όμως να συμβαίνει και το αντίστροφο. Ταυτόχρονα δώσανε πλήρη χαρακτηρισμό των θεμελιωδών διωνύμων, στη περίπτωση που η w είναι κύκλος. Με το παρακάτω θεώρημα χαρακτηρίζουμε αυτά τα διώνυμα, στη γενική περίπτωση τυχαίας περιπλάνησης w:

Θεώρημα 2.3.31. *Έστω w άρτια κλειστή περιπλάνηση γραφήματος G. Το B_w είναι θεμελιώδες διώνυμο του I_G αν και μόνο αν:*

(i) *η w είναι κύκλος χωρίς άρτιες χορδές, ο οποίος περιέχει το πολύ μια περιττή χορδή ή*

(ii) *η w είναι μη κυκλικό κύκλωμα που δε περιέχει χορδές.*

Απόδειξη. Έστω w άρτια κλειστή περιπλάνηση, τέτοια ώστε το διώνυμο B_w είναι θεμελιώδες. Από [30, Θεώρημα 1.1] γνωρίζουμε ότι το B_w είναι κύκλωμα και μάλιστα είναι αναντικατάστατο διώνυμο. Καθώς το B_w είναι κύκλωμα, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3.29 υπάρχουν τρεις περιπτώσεις για αυτό. Εάν η w είναι κύκλος, το αποτέλεσμα έπεται από [30, Λήμμα 4.2]. Στις άλλες δύο περιπτώσεις, η w είναι ένα κύκλωμα που δε περιέχει άρτιες χορδές και γέφυρες, καθώς το B_w είναι αναντικατάστατο. Υποθέτουμε τώρα, ότι η w έχει περιττή χορδή, η οποία υποχρεωτικά θα ανήκει σε έναν από τους δύο περιττούς κύκλους του κυκλώματος w. Γνωρίζουμε ότι κάθε χορδή ενός περιττού κύκλου, χωρίζει τον κύκλο σε δύο νέους, έναν άρτιο και ένα περιττό. Ο άρτιος κύκλος, δίνει ένα διώνυμο στο I_{G_w} το οποίο δεν ανήκει στο $\langle B_w \rangle$. Αυτό είναι αδύνατο, καθώς το B_w είναι θεμελιώδες.

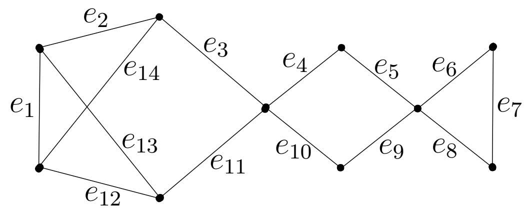
Αντίστροφα, εάν η w είναι κύκλος χωρίς άρτιες χορδές και με το πολύ μια περιττή χορδή, το συμπέρασμα έπεται από το [30, Λήμμα 4.2]. Έστω τώρα ότι η w είναι ένα μη κυκλικό κύκλωμα που δε περιέχει χορδές. Τότε το επαγόμενο γράφημα G_w αποτελείται από δύο περιττούς κύκλους, οι οποίοι τέμνονται σε ακριβώς μια κορυφή ή αυτό αποτελείται από δύο ξένους περιττούς κύκλους, οι οποίοι ενώνονται με ένα μονοπάτι. Σε κάθε περίπτωση και από το Θεώρημα 2.3.21, έχουμε ότι ο B_w είναι ο μόνος ελαχιστοτικός γεννήτορας του I_{G_w} και άρα είναι θεμελιώδες. ☐

Παράδειγμα 2.3.32. (i) Στο Παράδειγμα 2.3.25, στη περίπτωση (ii) βάσει του παραπάνω θεωρήματος, κανένα διώνυμο δεν είναι θεμελιώδες.

(ii) Αν θεωρήσουμε ένα διμερές γράφημα G, τότε το αντίστοιχο τορικό ιδεώδες I_G παράγεται από τα θεμελιώδη διώνυμά του. Ισοδύναμα στη περίπτωση των διμερών γραφημάτων, κάθε διώνυμο είναι αναντικατάστατο αν και μόνο αν είναι θεμελιώδες.

Ένα παράδειγμα όλων αυτών των εννοιών, αλλά και των θεωρήματων τα οποία αποδείξαμε σε αυτή την ενότητα είναι αυτό που ακολουθεί. Σε αυτό φαίνεται άμεσα η αναγκαιότητα των συνθηκών των θεωρημάτων, αλλά και η ευκολία με την οποία πλέον μπορούμε να σχηματίσουμε ιδεώδη, τα οποία πληρούν συγκεκριμένες ιδιότητες τις οποίες θέλουμε.

Παράδειγμα 2.3.33. Ένα από τα πιο απλά γραφήματα, στα οποία φαίνεται η σχέση μεταξύ των θεμελιωδών, των πρωταρχικών, των αναντικατάστατων, των ελαχιστοτικών διωνύμων, αλλά και των κυκλωμάτων ενός τορικού ιδεώδους γραφήματος G, είναι αυτό που ακολουθεί. Θεωρούμε το παρακάτω γράφημα G με δέκα κορυφές και με σύνολο ακμών $E(G) = \{e_1, \ldots, e_{14}\}$.



Η βάση Graver, του συνόλου των πρωταρχικών διωνύμων, του αντίστοιχου I_G αποτελείται από τα παρακάτω 28 διώνυμα:

$$\begin{aligned}
&B_1 = e_2e_{12} - e_{13}e_{14},\ B_2 = e_2e_{11} - e_3e_{13},\ B_3 = e_3e_{12} - e_{11}e_{14},\\
&B_4 = e_4e_9 - e_5e_{10},\ B_5 = e_{14}e_2e_4^2e_6e_8 - e_1e_3^2e_5^2e_7,\ B_6 = e_{14}e_2e_{10}^2e_6e_8 - e_1e_3^2e_9^2e_7,\\
&B_7 = e_{13}e_{12}e_4^2e_6e_8 - e_1e_{11}^2e_5^2e_7,\ B_8 = e_{13}e_{12}e_{10}^2e_6e_8 - e_1e_{11}^2e_9^2e_7,\\
&B_9 = e_{14}e_2e_4e_6e_8e_{10} - e_1e_3^2e_5e_7e_9, B_{10} = e_{13}e_{12}e_4e_6e_8e_{10} - e_1e_{11}^2e_5e_7e_9,\\
&B_{11} = e_3e_1e_{11}e_5^2e_7 - e_2e_{12}e_4^2e_6e_8, B_{12} = e_3e_1e_{11}e_9^2e_7 - e_2e_{12}e_{10}^2e_6e_8,\\
&B_{13} = e_3e_1e_{11}e_5e_9e_7 - e_2e_{12}e_4e_{10}e_6e_8, B_{14} = e_3e_1e_{11}e_5^2e_7 - e_{14}e_{13}e_4^2e_6e_8,\\
&B_{15} = e_3e_1e_{11}e_9^2e_7 - e_{14}e_{13}e_{10}^2e_6e_8, B_{16} = e_3e_1e_{11}e_5e_9e_7 - e_{14}e_{13}e_4e_{10}e_6e_8,\\
&B_{17} = e_{14}e_1e_{11}^2e_9^2e_7 - e_2e_{12}^2e_{10}^2e_6e_8, B_{18} = e_{14}e_1e_{11}^2e_5^2e_7 - e_2e_{12}^2e_4^2e_6e_8,\\
&B_{19} = e_{14}e_1e_{11}^2e_9e_5e_7 - e_2e_{12}^2e_4e_{10}e_6e_8, B_{20} = e_{13}e_1e_3^2e_9^2e_7 - e_{12}e_2^2e_{10}^2e_6e_8\\
&B_{21} = e_{13}e_1e_3^2e_5^2e_7 - e_{12}e_2^2e_4^2e_6e_8, B_{22} = e_{13}e_1e_3^2e_9e_5e_7 - e_{12}e_2^2e_4e_{10}e_6e_8,\\
&B_{23} = e_1e_2e_{11}^2e_5^2e_7 - e_{14}e_{13}^2e_4^2e_6e_8, B_{24} = e_1e_2e_{11}^2e_9^2e_7 - e_{14}e_{13}^2e_{10}^2e_6e_8,\\
&B_{25} = e_1e_2e_{11}^2e_9e_7e_5 - e_{14}e_{13}^2e_{10}e_6e_8e_4, B_{26} = e_1e_{12}e_3^2e_5^2e_7 - e_{13}e_{14}^2e_4^2e_8e_6,\\
&B_{27} = e_1e_{12}e_3^2e_9^2e_7 - e_{13}e_{14}^2e_{10}^2e_8e_6, B_{28} = e_1e_{12}e_3^2e_9e_5e_7 - e_{13}e_{14}^2e_{10}e_8e_6e_4.
\end{aligned}$$

Τα πρώτα οκτώ από αυτά είναι θεμελιώδη. Τα πρώτα δέκα είναι αναντικατάστατα, ενώ τα πρώτα δεκαέξι είναι ελαχιστοτικοί γεννήτορες. Παρατηρούμε εδώ, ότι ο αριθμός των ελαχιστοτικών γεννητόρων $\mu(I_G)$ είναι 13 και υπάρχουν 8 διαφορετικά ελαχιστοτικά συστήματα γεννητόρων (με ακρίβεια μη μηδενικών σταθερών). Ο λόγος για τον οποία τα διώνυμα $B_{11}, \ldots, B_{16}$ δεν είναι αναντικατάστατα, είναι η ύπαρξη του F_4, $(e_2, e_{13}, e_{12}, e_{14})$ και η συμμετοχή αυτού στα συγκεκριμένα διώνυμα. Επιπλέον, ο λόγος για τον οποίο τα τελευταία δώδεκα πρωταρχικά στοιχεία δεν είναι ελαχιστοτικά, είναι η ύπαρξη των διαφόρων χορδών στις αντίστοιχες περιπλανήσεις w. Τέλος, όλα τα διώνυμα είναι κυκλώματα, εκτός από τα $B_9, B_{10}, B_{13}, B_{16}, B_{19}, B_{22}, B_{25}, B_{28}$.

Κλείνουμε την ενότητα αυτή και το κεφάλαιό μας, με μια παρατήρηση που αφορά τη γενίκευση των αποτελεσμάτων που αναφέραμε προηγουμένως στη περίπτωση των μη απλών γραφημάτων, καθώς οι πολλαπλές ακμές παίζουνε πολύ μικρό ρόλο για κάποια από τα αποτελέσματα.

Παρατήρηση 2.3.34. Για την απλότητα των ισχυρισμών των θεωρημάτων μας, αλλά και για την απλούστευση των αποδείξεών τους, στη θεωρία που αναπτύξαμε προηγουμένως θεωρήσαμε ότι όλα τα γραφήματά μας είναι απλά. Σημειώνουμε ότι τα περισσότερα αποτελέσματα ισχύουν, με πολύ μικρές παραλλαγές ακόμα και στη περίπτωση όπου το γράφημά μας έχει θηλειές ή πολλαπλές ακμές. Το Θεώρημα 2.2.5, των πρωταρχικών περιπλανήσεων ισχύει, απλά να σημειώσουμε ότι μπορεί να έχουμε κύκλους με μια ακμή (κύκλους θηλειά) και κύκλους με δύο ακμές, η να έχουμε μια πολλαπλή ακμή μεταξύ δύο κορυφών. Το ίδιο ισχύει και για τη Πρόταση 2.3.6, με τη διαφορά ότι για την απόδειξη αυτής, ο ορισμός της ισχυρά πρωταρχικής περιπλάνησης πρέπει να αλλάξει στον ακόλουθο: μια πρωταρχική περιπλάνηση, η οποία δεν έχει δύο κορυφές εισροής σε απόσταση ένα σε ένα οποιοδήποτε κυκλικό μπλοκ μήκους μεγαλύτερο του τρία. Άρα μια ισχυρά πρωταρχική περιπλάνηση μπορεί να έχει ένα κυκλικό μπλοκ μήκους δύο. Επίσης, η ιδιότητα των περιπλανήσεων να αντιστοιχούν σε ελαχιστοτικά διώνυμα, εξαρτάται από το επαγόμενο γράφημα κι έτσι μπορεί να υπάρχουν χορδές οι οποίες είναι θηλειές ή πολλαπλές ακμές. Σε αυτή τη περίπτωση στο αντίστοιχο Θεώρημα 2.3.21, το οποίο περιγράφει τους ελαχιστοτικούς γεννήτορες του I_G, επιτρέπονται χορδές που είναι πολλαπλές ακμές και θηλειές, όπου η κορυφή της θηλειάς δεν είναι κορυφή αποκοπής του $\mathbf{w}$. Τέλος, το Θεώρημα 2.3.26 των αναντικατάστατων γεννητόρων του I_G, οι χορδές οι οποίες είναι πολλαπλές ακμές δεν επιτρέπονται, σε αντίθεση με χορδές οι οποίες είναι θηλειές και τέτοιες ώστε οι κορυφές των θηλειών δεν είναι κορυφές αποκοπής του γραφήματος $\mathbf{w}$.

Κεφάλαιο 3

Καθολική βάση Gröbner του I_G και η εικασία True Circuit

3.1 Εισαγωγή

Η θεωρία των βάσεων Gröbner έχει τεράστιο ενδιαφέρον, κυρίως λόγω των υπολογιστικών εφαρμογών που έχει σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών, της επιστήμης των υπολογιστών και των πολυτεχνικών επιστημών. Εισήχθησαν το 1965 από τον B. Buchberger, μαθητή του W. Gröbner στη διδακτορική διατριβή του πρώτου, βλέπε [4].

Ο σκοπός αυτού του κεφαλαίου, είναι να καθορίσουμε πλήρως τη καθολική βάση Gröbner ενός τορικού ιδεώδους γραφήματος. Την έννοια της καθολικής βάσης Gröbner ενός ιδεώδους μελέτησαν οι V. Weispfenning ([50]) και N. Schwartz ([35]). Η καθολική βάση Gröbner ενός ιδεώδους είναι η ένωση των αναγώγων βάσεων Gröbner ως προς όλες τις μονωνυμικές διατάξεις και έχει την ιδιότητα να είναι βάση Gröbner του ιδεώδους ως προς κάθε μονωνυμική διάταξη, κάτι που δε συμβαίνει γενικά για μια οποιαδήποτε βάση. Αν και δε φαίνεται αμέσως, η καθολική βάση Gröbner είναι πεπερασμένο υποσύνολο του I. Στη πρώτη ενότητα του κεφαλαίου αυτού, θα δώσουμε τους βασικούς ορισμούς των βάσεων Gröbner που χρειαζόμαστε στη συνέχεια. Στη δεύτερη ενότητα θα δώσουμε το κεντρικό θεώρημα του κεφαλαίου, το οποίο περιγράφει πλήρως τα στοιχεία της καθολικής βάσης Gröbner του I_G. Τέλος θα δούμε ορισμένες εφαρμογές της καθολικής βάσης Gröbner του τορικού ιδεώδους γραφήματος σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου. Θα παρουσιάσουμε νέα, βελτιωμένα φράγματα βαθμών, για τα στοιχεία του συνόλου της βάσης Graver και της καθολικής βάσης Gröbner του ιδεώδους. Θα κλείσουμε το κεφάλαιο αυτό, παρουσιάζοντας μια οικογένεια παραδειγμάτων, με τη βοήθεια των οποίων απαντούμε αρνητικά στην εικασία True circuit που είχε τεθεί από τον Sturmfels το 1995.

Θα ξεκινήσουμε με τους βασικούς ορισμούς από τη θεωρία των βάσεων Gröbner, που είναι απαραίτητοι για τη συνέχεια της θεωρίας στις επόμενες ενότητες.

Εισάγουμε την έννοια της διάταξης στον πολυωνυμικό δακτύλιο $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, η οποία είναι απαραίτητη για τους ορισμούς των βασικών στοιχείων των βάσεων Gröbner. Οι μονωνυμικές διατάξεις είναι σημαντικό εργαλείο στην υπολογιστική άλγεβρα και όπως θα δούμε στη συνέχεια συνδέονται άμεσα με τη θεωρία μας.

Ορισμός 3.1.1. *(μερική διάταξη - partial order)*
Μια μερική διάταξη σε ένα σύνολο S είναι μια σχέση $\prec$ με τις εξής ιδιότητες:

(i) *δεν ισχύει η σχέση $\mathbf{x} \prec \mathbf{x}$ για οποιοδήποτε $\mathbf{x} \in S$ και*

(ii) *αν $\mathbf{x}_1 \prec \mathbf{x}_2$ και $\mathbf{x}_2 \prec \mathbf{x}_3$ τότε $\mathbf{x}_1 \prec \mathbf{x}_3$, $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \in S$.*

Ορισμός 3.1.2. *(ολική διάταξη - total order)*
Μια μερική διάταξη $\prec$ σε ένα σύνολο S καλείται ολική διάταξη αν για οποιαδήποτε $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S$, ισχύει ακριβώς μια από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\mathbf{x}_1 \prec \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 \succ \mathbf{x}_2.$$

Συμβολίζουμε με $\mathbb{T}^n$ το σύνολο των μονωνύμων του $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.

Ορισμός 3.1.3. *(μονωνυμική διάταξη - term order)*
Μια μονωνυμική διάταξη στον $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ είναι μια ολική διάταξη $\prec$ υπεράνω του $\mathbb{T}^n$ με τις εξής ιδιότητες:

(i) $1 \prec \mathbf{x}^{\mathbf{u}}$, $\forall \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in \mathbb{T}^n$ *και* $\mathbf{x}^{\mathbf{u}} \neq 1$,

(ii) *αν $\mathbf{x}^{\mathbf{u_1}} \prec \mathbf{x}^{\mathbf{u_2}} \Rightarrow \mathbf{x}^{\mathbf{u}}\mathbf{x}^{\mathbf{u_1}} \prec \mathbf{x}^{\mathbf{u}}\mathbf{x}^{\mathbf{u_2}}$ για κάθε μονώνυμο $\mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in \mathbb{T}^n$.*

Αποδεικνύεται ότι στον πολυωνυμικό δακτύλιο $\mathbb{K}[x]$ έχουμε μόνο μια μονωνυμική διάταξη υπεράνου του $\mathbb{T}^1$, ενώ για $n > 1$ υπάρχουν άπειρες μονωνυμικές διατάξεις στον $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ (βλέπε [1]). Παρακάτω παρουσιάζουμε παράδειγμα μιας εξ αυτών, γνωστής ως λεξικογραφικής διάταξης.

Παράδειγμα 3.1.4. Η λεξικογραφική διάταξη $\succ_{lex}$ στον $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ με $x_1 > x_2 > \ldots > x_n$ ορίζεται ως $\mathbf{x}^{\mathbf{a_1}} \succ_{lex} \mathbf{x}^{\mathbf{a_2}}$ αν και μόνο αν η πρώτη μη μηδενική συντεταγμένη του $\mathbf{a_1} - \mathbf{a_2}$ είναι θετική. Ας δούμε μια εφαρμογή αυτής στον $\mathbb{K}[x_1, x_2]$ με $x_1 > x_2$. Η διάταξη των μονωνύμων σε αυτή τη περίπτωση είναι:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & \prec_{lex} & x_2 & \prec_{lex} & x_2^2 & \prec_{lex} & \cdots & \prec_{lex} & x_2^k & \prec_{lex} & \cdots \\
x_1 & \prec_{lex} & x_1x_2 & \prec_{lex} & x_1x_2^2 & \prec_{lex} & \cdots & \prec_{lex} & x_1x_2^k & \prec_{lex} & \cdots \\
x_1^2 & \prec_{lex} & x_1^2x_2 & \prec_{lex} & x_1^2x_2^2 & \prec_{lex} & \cdots & \prec_{lex} & x_1^2x_2^k & \prec_{lex} & \cdots \\
 & & & & & & \cdots & & & & \\
x_1^m & \prec_{lex} & x_1^mx_2 & \prec_{lex} & x_1^mx_2^2 & \prec_{lex} & \cdots & \prec_{lex} & x_1^mx_2^k & \prec_{lex} & \cdots
\end{array}$$

Ένα ακόμη παράδειγμα μονωνυμικής διάταξης, βλέπουμε παρακάτω. Πρόκειται για τη διάταξη απαλοιφής, της οποίας η συμβολή είναι καθοριστική για το κεντρικό θεώρημα της επόμενης ενότητας.

Παράδειγμα 3.1.5. Θεωρούμε δύο σύνολα μεταβλητών $\{x_1, \ldots, x_n\}$ και $\{y_1, \ldots, y_m\}$ στον πολυωνυμικό δακτύλιο $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$. Υποθέτουμε ότι στα μονώνυμα των x_i μεταβλητών και στα μονώνυμα των y_j έχουμε τις μονωνυμικές διατάξεις $\prec_x$ και $\prec_y$ αντίστοιχα. Ορίζουμε *διάταξη απαλοιφής* - elimination order τη μονωνυμική διάταξη $<$ στα μονώνυμα στις x_i, y_j μεταβλητές ως εξής: Έστω X_1, X_2 μονώνυμα υπεράνω των x_i μεταβλητών και Y_1, Y_2 αντίστοιχα των y_j. Ορίζουμε:

$$X_1Y_1 < X_2Y_2 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X_1 <_x X_2, \\ \text{ή αν } X_1 = X_2 \Longrightarrow Y_1 <_y Y_2 \} \end{array} \right.$$

Έστω ότι βρισκόμαστε στον πολυωνυμικό δακτύλιο $\mathbb{K}[x]$, τον οποίο έχουμε εφοδιάσει με μια μονωνυμική διάταξη $\succ$. Για ένα μη μηδενικό πολυώνυμο $f \in \mathbb{K}[x]$ ορίζουμε ως αρχικό όρο του f και τον συμβολίζουμε με lt(f), τον όρο αυτού με τον μεγαλύτερο βαθμό. Επιπλέον αν

$$\text{lt(f)} = c \cdot x^a,$$

τότε ορίζουμε με:

$$\text{lc(f)} = c \text{ και } \text{lm(f)} = x^a$$

και τα αποκαλούμε αρχικό συντελεστή και αρχικό μονώνυμο του πολυωνύμου f αντίστοιχα. Για παράδειγμα αν πάρουμε το $f(x) = 2x^3 - x + 2$ ως προς τη συνηθισμένη διάταξη όρων στον πολυωνυμικό δακτύλιο $\mathbb{K}[x]$ έχουμε ότι $\text{lt}(f) = 2x^3$, $\text{lm}(f) = x^3$ και $\text{lc}(f) = 2$. Οι παραπάνω έννοιες γενικεύονται στον πολυωνυμικό δακτύλιο n μεταβλητών.

Στη συνέχεια δίνουμε τους ορισμούς της βάσης Gröbner, της ανάγωγης βάσης Gröbner αλλά και της καθολικής βάσης Gröbner ενός ιδεώδους.

Ορισμός 3.1.6. *(βάση Gröbner - Gröbner Basis)*
Ένα σύνολο μη μηδενικών πολυωνύμων $G = \{g_1, \ldots, g_t\} \subseteq I$ του πολυωνυμικού δακτυλίου $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, θα λέγεται βάση Gröbner του I ως προς την $\succ$, αν

$$\forall f \in I,\ f \neq 0,\ \exists i \in \{1, \ldots, t\} :\ \mathit{lm}(g_i) \mid \mathit{lm}(f).$$

Ορισμός 3.1.7. *(ανάγωγη βάση Gröbner - reduced Gröbner Basis)*
Μια βάση Gröbner $G = \{g_1, \ldots, g_t\} \subseteq I$ ως προς την $\succ$, λέγεται ανάγωγη, αν $\mathit{lc}(g_i) = 1$ και δεν υπάρχει όρος του g_i που να είναι πολλαπλάσιο αρχικού όρου κάποιου g_j για $j \neq i$ και για κάθε $i \in \{1, \ldots, t\}$.

Ένα παράδειγμα μιας ανάγωγης βάσης Gröbner για ένα τορικό ιδεώδες είναι το ακόλουθο.

Παράδειγμα 3.1.8. Θα προσδιορίσουμε την ανάγωγη βάση Gröbner του ιδεώδους

$$I = \langle x^2y + z, xz + y \rangle \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z],$$

ως προς τη $\prec_{\text{lex}}$ με $x < y < z$. Από τη θεωρία εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι η G είναι μια βάση Gröbner του I, όπου:

$$G = \langle f_1 = z + x^2y, f_2 = zx + y, f_3 = x^3y - y \rangle.$$

Παρατηρούμε ότι όλοι οι συντελεστές των αρχικών όρων είναι μονάδα και επιπλέον

$$\text{lt}(f_1) = z \mid xz = \text{lt}(f_2).$$

Άρα αφαιρούμε το f_2 από τη G και το σύνολο $G' = \langle z + x^2y, x^3y - y \rangle$ είναι μια βάση Gröbner του I. Επιπλέον:

$$\text{lt}(z + x^2y) = z \text{ και } \text{lt}(x^3y - y) = x^3y.$$

Παρατηρούμε ότι οι αρχικοί όροι των πολυωνύμων της G' δε διαιρούν κάποιον όρο διαφορετικού πολυωνύμου του G' και άρα η βάση αυτή είναι ανάγωγη. Συνεπώς η ζητούμενη ανάγωγη βάση είναι η:

$$G' = \langle z + x^2y, x^3y - y \rangle.$$

Ο ορισμός της ανάγωγης βάσης μας οδηγεί στον αντίστοιχο της καθολικής βάσης Gröbner.

Ορισμός 3.1.9. *(καθολική βάση Gröbner - Universal Gröbner Basis)*
Η καθολική βάση Gröbner ενός τορικού ιδεώδους I είναι η ένωση όλων των αναγώγων βάσεων Gröbner του I, ως προς οποιαδήποτε μονωνυμική διάταξη και συμβολίζεται με $\mathcal{U}_A$.

Παρατήρηση 3.1.10. Ένα σύνολο πολυωνύμων $G = \{g_1, \ldots, g_t\} \subseteq I$ του πολυωνυμικού δακτυλίου $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, είναι καθολική βάση Gröbner του I, αν είναι βάση Gröbner αυτού, ως προς οποιαδήποτε μονωνυμική διάταξη.

3.2 Καθολική βάση Gröbner του I_G

Ο B. Sturmfels στο βιβλίο του [39], αναφέρει τη σχέση μεταξύ του συνόλου των κυκλωμάτων, της βάσης Graver, αλλά και της καθολικής βάσης Gröbner ενός τορικού ιδεώδους I_A:

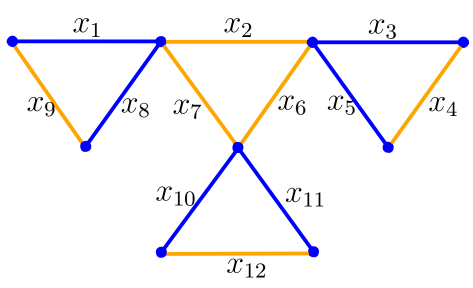
Πρόταση 3.2.1. *Για τυχαίο τορικό ιδεώδες I_A, έχουμε ότι $\mathcal{C}_A \subseteq \mathcal{U}_A \subseteq Gr_A$.*

Σε αυτή την ενότητα, θα χαρακτηρίσουμε τα στοιχεία της καθολικής βάσης Gröbner, ενός τορικού ιδεώδους γραφήματος. Γνωρίζουμε ότι τα διώνυμα της $\mathcal{U}_A$, ανήκουν στη βάση Graver του ιδεώδους και άρα περιγράφονται πλήρως από το Θεώρημα 2.2.5. Επομένως αν $w = \{e_{i_1}, e_{i_2} \ldots, e_{i_{2q}}\}$ μια άρτια κλειστή πρωταρχική περιπλάνηση ενός γραφήματος G και $B_w \in \mathcal{U}_G$, τότε τα μπλοκ του γραφήματος $\mathbf{w}$ είναι είτε είτε κύκλοι είτε ακμές αποκοπής.

Έστω G το γράφημα του παρακάτω σχήματος και w η περιπλάνηση αυτού όπου $G = \mathbf{w}$. Παρατηρούμε ότι το αντίστοιχο διώνυμο

$$B_w = x_1x_8x_3x_5x_{11}x_{10} - x_9x_2x_4x_6x_{12}x_7$$

είναι βαθμού έξι, ανήκει στη βάση Graver του I_G αλλά δεν ανήκει στη καθολική βάση Gröbner του ιδεώδους.



Το γεγονός ότι το B_w είναι πρωταρχικό διώνυμο, έπεται άμεσα από το Θεώρημα 2.3.21. Θα αποδείξουμε ότι αυτό δεν ανήκει στη καθολική βάση Gröbner. Έστω αντίθετα ότι ανήκει. Εξ ορισμού, θα ανήκει σε κάποια ανάγωγη βάση Gröbner του I_G, ως προς κάποια μονωνυμική διάταξη. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις για τους όρους του B_w ως προς τη διάταξή τους:

είτε $x_1x_3x_5x_8x_{10}x_{11} > x_2x_4x_6x_7x_9x_{12}$ είτε $x_1x_3x_5x_8x_{10}x_{11} < x_2x_4x_6x_7x_9x_{12}$.

Θα εξετάσουμε ξεχωριστά τη κάθε περίπτωση.

(i) Έστω $x_1x_3x_5x_8x_{10}x_{11} > x_2x_4x_6x_7x_9x_{12}$. Αρχικά παρατηρούμε ότι:

$$x_1x_8x_{10}x_{11} < x_7^2x_9x_{12} \tag{1}$$

$$x_1x_8x_3x_5 < x_2^2x_4x_9 \tag{2}$$

$$x_3x_5x_{10}x_{11} < x_6^2x_4x_{12} \tag{3}$$

Αν δε συνέβαινε κάποια από τις παραπάνω σχέσεις, θα υπήρχε διώνυμο, ο αρχικός όρος του οποίου να διαιρούσε τον αρχικό όρο του B_w κάτι που αντιβαίνει στην υπόθεσή μας, ότι το διώνυμο ανήκει σε ανάγωγη βάση Gröbner του ιδεώδους.

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (1),(2),(3) έχουμε ότι:

$$(x_1x_3x_5x_8x_{10}x_{11})^2 < (x_2x_4x_6x_7x_9x_{12})^2$$

το οποίο αντίκειται στην αρχική μας υπόθεση.

(ii) Έστω $x_1x_3x_5x_8x_{10}x_{11} < x_2x_4x_6x_7x_9x_{12}$. Λαμβάνοντας υπόψιν διαφορετικές περιπλανήσεις και κάνοντας τον ίδιο συλλογισμό με παραπάνω, παρατηρούμε ότι:

$$x_2x_7x_9 < x_1x_6x_8 \tag{4}$$

$$x_2x_4x_6 < x_3x_5x_7 \tag{5}$$

$$x_6x_7x_{12} < x_2x_{10}x_{11} \tag{6}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις σχέσεις (4),(5),(6) και απλοποιώντας ταυτόχρονα τους κοινούς παράγοντες, έχουμε ότι:

$$x_1x_3x_5x_8x_{10}x_{11} > x_2x_4x_6x_7x_9x_{12},$$

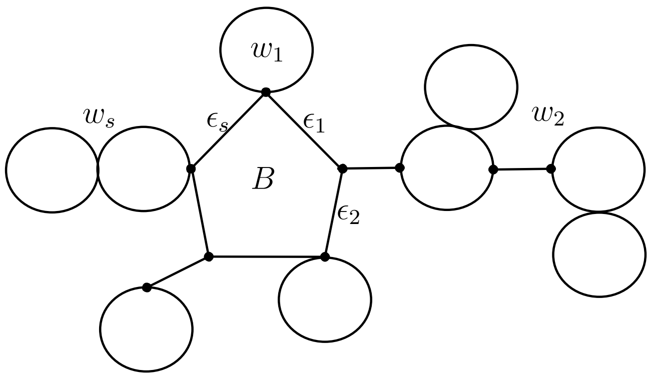
το οποίο είναι αδύνατο.

Σε κάθε περίπτωση καταλήξαμε σε άτοπο και άρα το B_w δεν ανήκει σε κάποια ανάγωγη βάση Gröbner του I_G. Συνεπώς δεν ανήκει στη καθολική βάση Gröbner του ιδεώδους, όπως αρχικά ισχυριστήκαμε.

Το γράφημα της παραπάνω περιπλάνησης, βρίσκεται μέσα στο K_9, αλλά και προφανώς σε οποιοδήποτε πλήρες γράφημα με περισσότερες από εννέα κορυφές. Η ύπαρξη λοιπόν της περιπλάνησης w, μας δίνει τη πληροφορία ότι για $n \geq 9$ έχουμε $\mathcal{U}_{K_n} \neq Gr_{K_n}$, όπου K_n το πλήρες γράφημα n κορυφών. Οι De Loera, B. Sturmfels και R. Thomas στο άρθρο τους [9], απέδειξαν ότι

$$\mathcal{C}_{K_n} = \mathcal{U}_{K_n} = Gr_{K_n}, \text{ για } n \leq 7 \text{ και } \mathcal{C}_{K_n} \neq \mathcal{U}_{K_n} = Gr_{K_n},\ n = 8.$$

Όπως θα δούμε παρακάτω το διώνυμο B_w δεν ανήκει στη καθολική βάση Gröbner του I_G γιατί η w περιέχει το *καθαρό κυκλικό μπλοκ* $B_1 = \{x_2, x_6, x_7\}$, όλες οι ακμές του οποίου βρίσκονται είτε στο $\mathbf{w}^+$ είτε στο $\mathbf{w}^-$.



Σχήμα 3.1: Περιπλάνηση **w** που περιέχει καθαρό κυκλικό μπλοκ

Ορισμός 3.2.2. *(καθαρό κυκλικό μπλοκ - pure cyclic block)*
Ένα κυκλικό μπλοκ B μιας πρωταρχικής περιπλάνησης w, θα λέγεται καθαρό, εάν όλες οι ακμές του B ανήκουν είτε στο $\mathbf{w}^+$ είτε στο $\mathbf{w}^-$.

Παρατήρηση 3.2.3. Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, ένα κυκλικό μπλοκ της πρωταρχικής περιπλάνησης w είναι καθαρό αν και μόνο αν κάθε κορυφή αυτού είναι κορυφή αποκοπής του γραφήματος $\mathbf{w}$. Αυτή η παρατήρηση δίνει ένα πιο εύχρηστο κριτήριο για έλεγχο το πότε ένα μπλοκ είναι καθαρό ή όχι.

Στη Πρόταση 3.2.4 θα δούμε ότι όποτε μια περιπλάνηση w ενός γραφήματος G έχει ένα καθαρό κυκλικό μπλοκ, το αντίστοιχο διώνυμο B_w δεν ανήκει στη καθολική βάση Gröbner του I_G, ενώ στο Θεώρημα 3.2.9 θα αποδείξουμε και το αντίστροφο, δηλαδή όποτε το B_w ανήκει στη βάση Graver του I_G ενώ δεν ανήκει στη καθολική βάση Gröbner του ιδεώδους, τότε η περιπλάνηση w περιέχει τουλάχιστον ένα καθαρό κυκλικό μπλοκ.

Πρόταση 3.2.4. *Έστω w άρτια πρωταρχική περιπλάνηση ενός γραφήματος G. Αν η w έχει ένα καθαρό κυκλικό μπλοκ, τότε το διώνυμο B_w δεν ανήκει στη καθολική βάση Gröbner του I_G.*

Απόδειξη. Έστω w άρτια πρωταρχική περιπλάνηση, τέτοια ώστε να περιέχει ένα καθαρό κυκλικό μπλοκ $B = (\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_s)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_s$ ανήκουν στο $\mathbf{w}^-$. Τότε η περιπλάνηση w έχει τη μορφή:

$$w = (w_1, \epsilon_1, w_2, \epsilon_2, \ldots, w_s, \epsilon_s),$$

όπου οι w_i είναι υποπεριπλανήσεις της w περιττού μήκους, βλέπε σχήμα 3.1.

Για μια υποπεριπλάνηση w_i θα συμβολίζουμε με

$$E^+(w_i) = \prod_{e_{i_{2k-1}} \in w_i} e_{i_{2k-1}},\ E^-(w_i) = \prod_{e_{i_{2k}} \in w_i} e_{i_{2k}}.$$

Τότε

$$B_w = E^+(w_1)E^+(w_2)\cdots E^+(w_s) - \epsilon_1 \cdots \epsilon_s E^-(w_1)E^-(w_2)\cdots E^-(w_s).$$

Θεωρούμε τις άρτιες περιπλανήσεις $(w_i, \epsilon_i, w_{i+1}, \epsilon_i)$ και τα αντίστοιχα διώνυμα αυτών

$$F_i = E^+(w_i)E^+(w_{i+1}) - \epsilon_i^2 E^-(w_i)E^-(w_{i+1}) \in I_G,$$

όπου $1 \leq i \leq s-1$ και

$$F_s = E^+(w_s)E^+(w_1) - \epsilon_s^2 E^-(w_s)E^-(w_1) \in I_G.$$

Θυμίζουμε ότι, για να ανήκει ένα στοιχείο στη καθολική βάση Gröbner ενός ιδεώδους, πρέπει να είναι στοιχείο μιας ανάγωγης βάσης Gröbner ως προς κάποια μονωνυμική διάταξη $<$. Υποθέτουμε αντίθετα ότι το διώνυμο B_w ανήκει σε μια ανάγωγη βάση Gröbner του I_G ως προς τυχαία μονωνυμική διάταξη $<$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1η περίπτωση:

$$E^+(w_1)E^+(w_2)\cdots E^+(w_s) > \epsilon_1\epsilon_2 \cdots \epsilon_s E^-(w_1)E^-(w_2)\cdots E^-(w_s).$$

Αρχικά παρατηρούμε ότι:

$$E^+(w_i)E^+(w_{i+1}) < \epsilon_i^2 E^-(w_i)E^-(w_{i+1}),\ \forall i. \tag{1}$$

Αν δεν ίσχυε η (1), τότε υπάρχει i για το οποίο

$$E^+(w_i)E^+(w_{i+1}) > \epsilon_i^2 E^-(w_i)E^-(w_{i+1}). \tag{2}$$

Επίσης

$$E^+(w_i)E^+(w_{i+1}) \mid E^+(w_1)E^+(w_2)\cdots E^+(w_s) \text{ και } F_i \in I_G. \tag{3}$$

Συνδυάζοντας τις (2),(3) έχουμε ότι

$$\mathrm{lt}(F_i) \mid \mathrm{lt}(B_w),$$

το οποίο είναι αδύνατο καθώς το B_w είναι στοιχείο της ανάγωγης βάσης Gröbner του I_G. Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη για τα διάφορα i τις σχέσεις (1), έχουμε ότι

$$(E^+(w_1)E^+(w_2)\cdots E^+(w_s))^2 < (\epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_s E^-(w_1)E^-(w_2)\cdots E^-(w_s))^2,$$

το οποίο είναι αδύνατο λόγω της αρχικής μας υπόθεσης.

2η περίπτωση:

$$E^+(w_1)E^+(w_2)\cdots E^+(w_s) < \epsilon_1\epsilon_2 \cdots \epsilon_s E^-(w_1)E^-(w_2)\cdots E^-(w_s).$$

Προφανώς ο αριθμός s είναι περιττός, καθώς στην αντίθετη περίπτωση όπου $s = 2k$ το διώνυμο $f = \epsilon_1\epsilon_3\cdots\epsilon_{2k-1} - \epsilon_2\epsilon_4\cdots\epsilon_{2k}$ ανήκει στο I_G και τα δύο μονώνυμα του f διαιρούν το $\epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_{2k}E^-(w_1)E^-(w_2)\cdots E^-(w_s)$ και συνεπώς όποιος κι αν είναι ο αρχικός όρος του f θα έχει την ίδια ιδιότητα. Αυτό όμως είναι αδύνατο καθώς το

B_w ανήκει στην ανάγωγη βάση Gröbner του I_G. Συνεπώς $s = 2k+1$. Θεωρούμε τα διώνυμα

$$f_i = E^+(w_i)\epsilon_{i+1}\epsilon_{i+3}\cdots\epsilon_{i+2k-1} - E^-(w_i)\epsilon_i\epsilon_{i+2}\cdots\epsilon_{i+2k} \in I_G,$$

όπου

$$\epsilon_j = \epsilon_l \text{ και } j \equiv l \mod (2k+1).$$

Όπως και προηγουμένως

$$E^+(w_i)\epsilon_{i+1}\epsilon_{i+3}\cdots\epsilon_{i+2k-1} > E^-(w_i)\epsilon_i\epsilon_{i+2}\cdots\epsilon_{i+2k},\ \forall i. \tag{4}$$

καθώς σε αντίθετη περίπτωση,

$$E^-(w_i)\epsilon_i\epsilon_{i+2}\cdots\epsilon_{i+2k} \mid \epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_{2k}E^-(w_1)E^-(w_2)\cdots E^-(w_s),$$

έχουμε άτοπο στο γεγονός ότι το B_w ανήκει στην ανάγωγη βάση Gröbner του I_G. Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις σχέσεις (4) για τα διάφορα i και απλοποιώντας ταυτόχρονα τους κοινούς παράγοντες, έχουμε ότι

$$E^+(w_1)E^+(w_2)\cdots E^+(w_s) > \epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_s E^-(w_1)E^-(w_2)\cdots E^-(w_s),$$

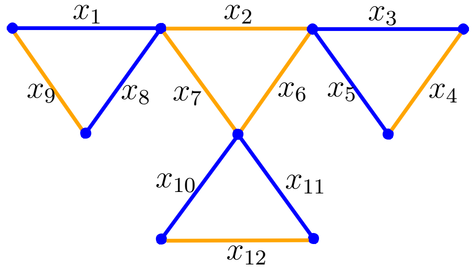
το οποίο είναι αδύνατο λόγω της αρχικής μας υπόθεσης.

Σε κάθε περίπτωση καταλήξαμε σε άτοπο και άρα το B_w δεν ανήκει σε ανάγωγη βάση Gröbner I_G ως προς οποιαδήποτε μονωνυμική διάταξη. Συνεπώς δεν ανήκει και στη καθολική βάση Gröbner του I_G και το ζητούμενο αποδείχτηκε πλήρως. □

Ένας βασικός ορισμός για τη συνέχεια, είναι αυτός της μεικτής πρωταρχικής περιπλάνησης.

Ορισμός 3.2.5. *(μεικτή πρωταρχική περιπλάνηση - mixed primitive walk)*
Μια πρωταρχική περιπλάνηση w καλείται μεικτή, εάν δεν υπάρχει σε αυτή καθαρό κυκλικό μπλοκ.

Παράδειγμα 3.2.6. Έστω η w στο γράφημα που είχαμε δει στην αρχή της παρούσας ενότητας:



Η περιπλάνηση αυτή δεν είναι μεικτή λόγω της ύπαρξης του μπλοκ $B_1 = \{x_2, x_6, x_7\}$, το οποίο εξ ορισμού είναι καθαρό.

Το επόμενο θεώρημα είναι το βασικό αποτέλεσμα του κεφαλαίου, στο οποίο περιγράφονται τα στοιχεία της καθολικής βάσης Gröbner ενός τορικού ιδεώδους I_G, τυχαίου γραφήματος G. Θυμίζουμε, ότι σκοπός μας είναι να βρούμε ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ανήκει ένα πρωταρχικό διώνυμο, στη καθολική βάση Gröbner του αντίστοιχου τορικού ιδεώδους. Στη προσπάθεια αυτή, σταθεροποιώντας μια μεικτή πρωταρχική περιπλάνηση w, θα ορίσουμε μια μονωνυμική διάταξη $<_w$, η οποία εξαρτάται από το γράφημα $\mathbf{w}$ και θα αποδείξουμε ότι το B_w ανήκει στην ανάγωγη βάση Gröbner, ως προς τη $<_w$. Για να το πετύχουμε αυτό, από τον ορισμό της ανάγωγης βάσης Gröbner, θα δείξουμε ότι όποτε ένα μονώνυμο ενός διωνύμου $B_w \in I_G$, διαιρεί ένα από τα $E^+(w), E^-(w)$, τότε το άλλο μονώνυμο του B_w είναι μεγαλύτερο ως προς τη $<_w$ και δε διαιρεί κάποιο από τα $E^+(w)$ και $E^-(w)$.

Έστω w μεικτή πρωταρχική περιπλάνηση. Ορίζουμε μονωνυμική διάταξη $<_w$ στον δακτύλιο $\mathbb{K}[e_1, \ldots, e_n]$, να είναι μια διάταξη απαλοιφής έτσι ώστε οι μεταβλητές που δεν ανήκουν στο γράφημα $\mathbf{w}$, να είναι μεγαλύτερες των μεταβλητών που είναι ακμές στο $\mathbf{w}$. Διατάσσουμε το πρώτο σύνολο των μεταβλητών ως προς οποιαδήποτε μονωνυμική διάταξη και το δεύτερο σύνολο ως εξής: Έστω $B_1, \ldots, B_{s_0}$ τυχαία αρίθμηση των κυκλικών μπλοκ του γραφήματος $\mathbf{w}$. Με t_i^+ θα συμβολίζουμε το πλήθος των ακμών του $\mathbf{w}^+ \cap B_i$ και με t_i^- το αντίστοιχο πλήθος των ακμών του $\mathbf{w}^- \cap B_i$. Ορίζουμε με $W = (w_{ij})$ τον $s_0 \times m$ πίνακα:

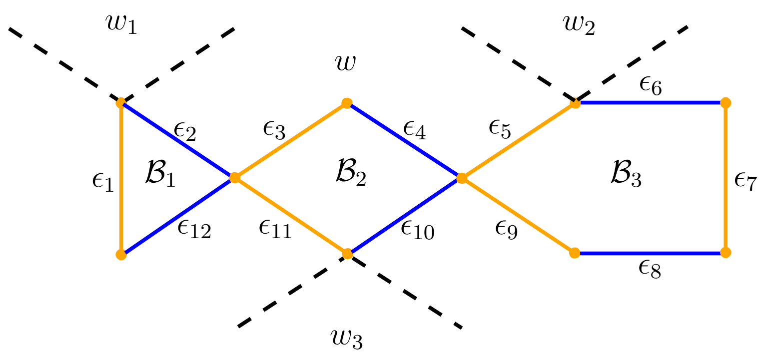
$$w_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{εάν } e_j \notin B_i, \\ t_i^-, & \text{εάν } e_j \in B_i \cap \mathbf{w}^+, \\ t_i^+, & \text{εάν } e_j \in B_i \cap \mathbf{w}^-, \end{cases}$$

όπου m είναι το πλήθος των ακμών του $\mathbf{w}$. Σημειώνουμε ότι κάθε στήλη του πίνακα, έχει το πολύ ένα μη-μηδενικό στοιχείο, καθώς κάθε ακμή ανήκει σε ακριβώς ένα μπλοκ του $\mathbf{w}$. Σε αυτό το σημείο, θα ορίσουμε τη μονωνυμική διάταξη που θέλουμε για τυχαία πρωταρχική περιπλάνηση w.

Ορισμός 3.2.7. *Ορίζουμε με $[u]$ το διάνυσμα u, όπως γράφεται ως διάνυσμα στήλη του πίνακα. Θα λέμε ότι $e^{\mathbf{u}} <_w e^{\mathbf{v}}$ αν και μόνον αν η πρώτη μη μηδενική συντεταγμένη του $W[u-v]$ είναι αρνητική. Διαφορετικά αν $W[u-v] = \mathbf{0}$, τότε διατάσσουμε τις μεταβλητές μας ως προς τη λεξικογραφική διάταξη.*

Στο επόμενο παράδειγμα, υπολογίζουμε τα στοιχεία αυτά και τον αντίστοιχο πίνακα όπως τον ορίσαμε.

Παράδειγμα 3.2.8. Θεωρούμε το γράφημα G που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Έστω $\mathbf{w} = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{12})$ υπογράφημα αυτού και w η αντίστοιχη περιπλάνηση. Οι ακμές του $\mathbf{w}^+$ είναι αυτές με το πορτοκαλί χρώμα, ενώ εκείνες με το μπλε είναι του $\mathbf{w}^-$.



Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.5, έπεται ότι η w είναι πρωταρχική. Έχουμε ότι:

$$\mathbf{w}^+ \cap \mathcal{B}_1 = \{\epsilon_1\} \text{ και } \mathbf{w}^- \cap \mathcal{B}_1 = \{\epsilon_2, \epsilon_{12}\} \Longrightarrow t_1^+ = 1,\ t_1^- = 2,$$

$$\mathbf{w}^+ \cap \mathcal{B}_2 = \{\epsilon_3, \epsilon_4\} \text{ και } \mathbf{w}^- \cap \mathcal{B}_2 = \{\epsilon_{10}, \epsilon_{11}\} \Longrightarrow t_2^+ = 2,\ t_2^- = 2,$$

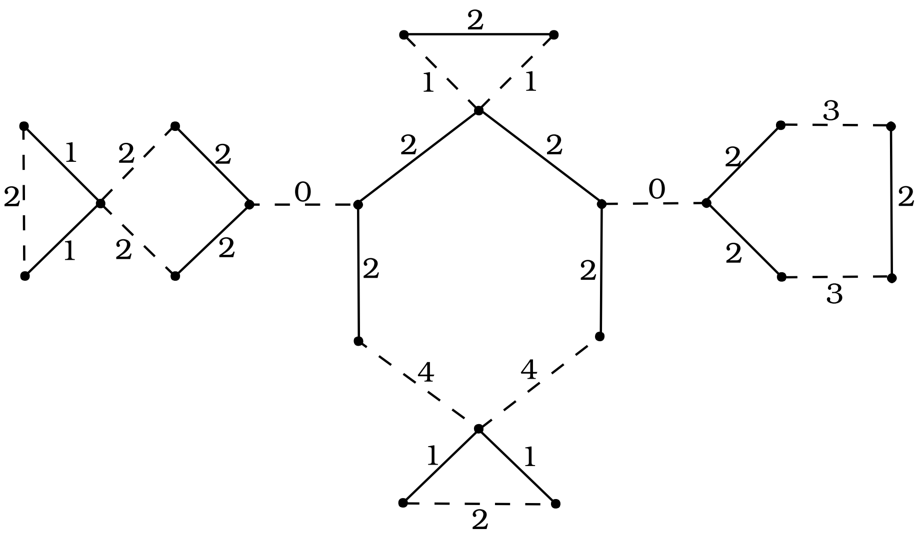
$$\mathbf{w}^+ \cap \mathcal{B}_3 = \{\epsilon_5, \epsilon_7, \epsilon_9\} \text{ και } \mathbf{w}^- \cap \mathcal{B}_3 = \{\epsilon_6, \epsilon_8\} \Longrightarrow t_3^+ = 2,\ t_3^- = 3.$$

Συνεπώς ο αντίστοιχος πίνακας $W = (w_{ij})$, είναι διάστασης 3×12, με τις σειρές να είναι αντιπροσωπεύουν τα μπλοκ του $\mathbf{w}$, δηλαδή τα $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ και τις στήλες τις ακμές αυτού, δηλαδή τις $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{12}$. Συγκεντρώνοντας αυτά, έχουμε ότι:

$$W = (w_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι $\epsilon_5 <_w \epsilon_6$ καθώς η πρώτη μη μηδενική συνιστώσα του αντίστοιχου $W[u - v] = (0, 0, -1)$ είναι αρνητική.

Παρατηρούμε, ότι για τη περιπλάνησή μας w, έχουμε ότι $W[w^+ - w^-] = \mathbf{0}$. Το παρακάτω σχήμα δείχνει μια μεικτή πρωταρχική περιπλάνηση w, μαζί με τους αντίστοιχους βαθμούς w_{ij}.



Είμαστε πλέον σε θέση, να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το βασικό θεώρημα του κεφαλαίου, στο οποίο όπως είπαμε δίνουμε ικανή και αναγκαία συνθήκη ύπαρξης στοιχείου, στη καθολική βάση Gröbner ενός ιδεώδους γραφήματος G.

Θεώρημα 3.2.9. *Έστω w πρωταρχική περιπλάνηση ενός γραφήματος G. Το διώνυμο B_w ανήκει στη καθολική βάση Gröbner του I_G εάν και μόνον εάν η w είναι μεικτή.*

Απόδειξη. Εάν η w δεν είναι μεικτή περιπλάνηση, τότε εξ ορισμού περιέχει ένα καθαρό μπλοκ και από τη Πρόταση 3.2.4 έπεται το ζητούμενο.

Αντίστροφα, έστω w μια μεικτή πρωταρχική περιπλάνηση. Θα αποδείξουμε ότι το B_w ανήκει στην ανάγωγη βάση Gröbner του I_G, ως προς τη μονωνυμική διάταξη $<_w$ που ορίσαμε προηγουμένως. Από τον ορισμό της ανάγωγης βάσης, είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι, αν υπάρχει πρωταρχικό διώνυμο B_z τέτοιο ώστε $E^+(z) \mid E^+(w)$, τότε υποχρεωτικά $E^-(z) >_w E^+(z)$. Θεωρούμε ένα τέτοιο B_z για το οποίο $E^-(z) \nmid E^-(w)$ καθώς η w είναι πρωταρχική και $E^-(z) \nmid E^+(w)$, καθώς η w μεικτή. Επιπλέον παρατηρούμε ότι $\mathbf{z} \subset \mathbf{w}$. Στην αντίθετη περίπτωση όπου $\mathbf{z} \not\subseteq \mathbf{w}$, καθώς $\mathbf{z}^+ \subset \mathbf{w}^+$, θα υπάρχει ακμή του $\mathbf{z}^-$ που δε θα είναι ακμή του $\mathbf{w}$. Από τον ορισμό της μονωνυμικής διάταξης $<_w$, έπεται ότι $E^-(z) >_w E^+(z)$ και το ζητούμενο αποδείχτηκε, βλέπε επίσης [39, Πρόταση 4.13].

Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα i, τέτοιο ώστε

$$B_i \cap \mathbf{z} \neq \emptyset \text{ και } B_i \cap \mathbf{z}^+ \subsetneq B_i \cap \mathbf{w}^+. \tag{1}$$

Υποθέτουμε αντίθετα ότι για κάθε i, θα ισχύει είτε $B_i \cap \mathbf{z} = \emptyset$ ή $B_i \cap \mathbf{z}^+ = B_i \cap \mathbf{w}^+$, (το υποσύνολο ισχύει πάντα καθώς από υπόθεση γνωρίζουμε ότι $E^+(z) \mid E^+(w)$). Ας είναι B_i κυκλικό μπλοκ, τέτοιο ώστε $B_i \cap \mathbf{z}^+ = B_i \cap \mathbf{w}^+$. Συμπεραίνουμε ότι

$$B_i \cap \mathbf{z}^- = B_i \cap \mathbf{w}^-. \tag{2}$$

Αν δεν ισχύει κάτι τέτοιο, τότε το B_i δεν είναι μπλοκ του $\mathbf{z}$ και άρα κάθε ακμή $e \in B_i \cap \mathbf{z}^+$ είναι ακμή αποκοπής του γραφήματος $\mathbf{z}$ και άρα διπλή ακμή της z, βλέπε Θεώρημα 2.2.5. Επίσης το B_i είναι κυκλικό μπλοκ του $\mathbf{w}$ και άρα κάθε ακμή του B_i είναι απλή ακμή της w. Άρα $e^2 \mid E^+(z)$ και $e^2 \nmid E^+(w)$, το οποίο είναι αδύνατο καθώς $E^+(z) \mid E^+(w)$ και συνεπώς ο ισχυρισμός μας (2) αποδείχτηκε. Από (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι:

$$\text{είτε } B_i \cap \mathbf{z} = B_i \text{ ή } B_i \cap \mathbf{z} = \emptyset.$$

Το παραπάνω ισχύει και για μπλοκ τα οποία είναι ακμές αποκοπής. Προφανώς υπάρχει τουλάχιστον ένα μπλοκ του $\mathbf{w}$ τέτοιο ώστε $B_i \cap \mathbf{z} = \emptyset$ και τουλάχιστον ένα μπλοκ τέτοιο ώστε $B_i \cap \mathbf{z} = B_i$, καθώς $z \neq w$. Επιπλέον γνωρίζοντας ότι το γράφημα $\mathbf{w}$ είναι συνεκτικό, ως γράφημα περιπλάνησης, υπάρχουν δύο διαδοχικά μπλοκ του B_i, B_j τέτοια ώστε $B_i \cap \mathbf{z} = B_i$ και $B_j \cap \mathbf{z} = \emptyset$. Έστω v η κοινή κορυφή αποκοπής των B_i, B_j. Τότε όμως, το $2v$ εμφανίζεται σε ακριβώς έναν από τους βαθμούς $\deg_A(E^+(z)), \deg_A(E^-(z))$ και συνεπώς $B_z \notin I_G$, το οποίο είναι αδύνατο. Συνεπώς ο ισχυρισμός μας (1) αποδείχτηκε πλήρως.

Ας είναι i ο μικρότερος ακέραιος τέτοιος ώστε $B_i \cap \mathbf{z} \neq \emptyset$ και $B_i \cap \mathbf{z}^+ \subsetneq B_i \cap \mathbf{w}^+$. Παρατηρούμε αρχική ότι οι πρώτες $i-1$ συνιστώσες του $W[z^+ - z^-]$ είναι μηδέν. Πράγματι, έστω w_j η j-στήλη του W. Στη περίπτωση που $B_j \cap \mathbf{z} \neq \emptyset$, έχουμε ότι $w_j[z^+] = 0 = w_j[z^-]$. Στην άλλη περίπτωση όπου $B_j \cap \mathbf{z}^+ \subsetneq B_j \cap \mathbf{w}^+$, όπως στην απόδειξη της Πρότασης 3.2.4, έχουμε επίσης ότι $B_j \cap \mathbf{z}^- \subsetneq B_j \cap \mathbf{w}^-$ και άρα $w_j[z^+] = t_j^- t_j^+ = w_j[z^-]$ όπως το θέλαμε.

Για το μπλοκ B_i έχουμε δύο περιπτώσεις: είτε $B_i \cap \mathbf{z} \neq B_i$ ή $B_i \cap \mathbf{z} = B_i$.

<u>1η περίπτωση</u>: $B_i \cap \mathbf{z} \neq B_i$ και έστω $e \in B_i \cap \mathbf{z}$. Τότε η e είναι ακμή αποκοπής και ανήκει στο $\mathbf{z}^-$, διαφορετικά η e είναι διπλή ακμή της z και απλή της w αντιβαίνοντας στο ότι $E^+(z) \mid E^+(w)$. Άρα κάθε ακμή του $B_i \cap \mathbf{z}$ είναι στο $\mathbf{z}^-$ και άρα $w_i[z^+] = 0$ και $w_i[z^-] > 0$. Άρα $E^-(z) >_w E^+(z)$ και το ζητούμενο αποδείχτηκε.

<u>2η περίπτωση</u>: $B_i \cap \mathbf{z} = B_i$. Έπεται ότι $B_i \cap \mathbf{z}^- = B_i \setminus (B_i \cap \mathbf{z}^+)$ και καθώς $B_i \cap \mathbf{z}^+ \subsetneq B_i \cap \mathbf{w}^+$ έχουμε ότι $w_i[z^+] = t_i^- t_i^+ = w_i[z^-]$. Άρα $E^-(z) >_w E^+(z)$ και το ζητούμενο αποδείχτηκε και σε αυτή τη περίπτωση.

Συμπεραίνουμε ότι το B_w ανήκει στην ανάγωγη βάση Gröbner ως προς τη διάταξη $<_w$ που ορίσαμε προηγουμένως και άρα και στη καθολική βάση Gröbner του I_G και το ζητούμενο αποδείχτηκε πλήρως. □

3.3 Όρια βαθμών στοιχείων της καθολικής βάσης Gröbner

Το πλήθος των στοιχείων μιας καθολικής βάσης Gröbner συνήθως είναι πολύ μεγάλο. Για παράδειγμα στο [9] οι J. De Loera, B. Sturmfels και R. Thomas υπολόγισαν ότι το πλήθος των στοιχείων της καθολικής βάσης Gröbner του I_{K_8} είναι 45570, όπου K_8 το πλήρες γράφημα οκτώ κορυφών. Μια εκτίμηση για το μέγεθος της καθολικής βάσης Gröbner, μπορεί να δοθεί από τα όρια των βαθμών των στοιχείων αυτής. Έστω d_n ο μεγαλύτερος βαθμός διωνύμου, στοιχείου της καθολικής βάσης Gröbner του I_{K_n}. Στο άρθρο τους [9], οι J. De Loera, B. Sturmfels και R. Thomas απέδειξαν, ότι ο βαθμός αυτός, φράσσεται από τη σχέση:

$$n-2 \leq d_n \leq \binom{n}{2},\ n \geq 4.$$

Παρακάτω στο κεντρικό θεώρημα της ενότητας αυτής, αποδεικνύουμε ότι ο d_n παίρνει πάντα τη τιμή $n-2$.

Θεώρημα 3.3.1. *Ο μεγαλύτερος βαθμός d_n, ενός διωνύμου στη βάση Graver του I_{K_n} (και συνεπώς και στη καθολική βάση Gröbner αυτού) είναι $d_n = n-2$, $\forall n \geq 4$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 2.2.5, γνωρίζουμε ότι τα μπλοκ ενός γραφήματος μιας πρωταρχικής περιπλάνησης, είναι κύκλοι ή ακμές αποκοπής. Τα κυκλικά μπλοκ είναι τουλάχιστον δύο, εκτός της περίπτωσης όπου η περιπλάνηση είναι από μόνη της κύκλος. Έστω w λοιπόν μια πρωταρχική περιπλάνηση και υποθέτουμε ότι αυτή έχει s_0 κυκλικά μπλοκ και s_1 ακμές αποκοπής. Δηλαδή $s = s_0 + s_1$ είναι το συνολικό πλήθος των μπλοκ του $\mathbf{w}$. Από το Θεώρημα 2.2.5, γνωρίζουμε ότι υπάρχουν ακριβώς $s-1$ κορυφές αποκοπής, κάθε μια εκ των οποίων ανήκει σε ακριβώς δύο μπλοκ. Ας είναι $B_1, \ldots, B_{s_0}$ τα κυκλικά μπλοκ του γραφήματος και έστω t_i ο αντίστοιχος αριθμός των ακμών (άρα και κορυφών) του. Προφανώς, ο συνολικός αριθμός των κορυφών του $\mathbf{w}$ είναι:

$$t_1 + \cdots + t_{s_0} + 2s_1 - (s-1) \leq n, \tag{1}$$

έχοντας υπολογίσει ότι οι κορυφές αποκοπής μετρούνται διπλά, βλέπε [34, Θεώρημα 3.1.]. Από τη σχέση (1) και λαμβάνοντας υπόψιν ότι οι ακμές των κύκλων εμφανίζονται μόνο μια φορά στη περιπλάνηση w και οι ακμές αποκοπής είναι διπλές ακμές της w, έπεται ότι:

$$2\deg(B_w) = t_1 + \cdots + t_{s_0} + 2s_1 \leq n + s - 1. \tag{2}$$

Συνεπώς, όπως φαίνεται στη σχέση (2), ο d_n παίρνει τη μέγιστη τιμή του, όταν ο αριθμός των μπλοκ του $\mathbf{w}$ είναι όσο μεγαλύτερος γίνεται και η ισότητα επιτυγχάνεται όταν η περιπλάνηση w, διέρχεται από όλες τις κορυφές του γραφήματος. Αντικαθιστώντας στη (2) το ότι $s = s_0 + s_1$, άμεσα παίρνουμε ότι:

$$s + (t_1 - 2) + \cdots + (t_{s_0} - 2) \leq n - 1. \tag{3}$$

Σημειώνουμε εδώ ότι

$$(t_1 - 2) + \cdots + (t_{s_0} - 2) \geq 2, \tag{4}$$

καθώς τα κυκλικά μπλοκ έχουν τουλάχιστον τρεις κορυφές και η w έχει τουλάχιστον δύο κυκλικά μπλοκ, εκτός κι αν αυτή είναι κύκλος. Σε αυτή τη περίπτωση, υπάρχει ακριβώς ένα μπλοκ και ο βαθμός είναι μικρός, $\deg(B_w) \leq \frac{n}{2}$. Από τις (3),(4) έχουμε ότι

$$s \leq n - 3. \tag{5}$$

Συνδυάζοντας τις (2),(5) έχουμε ότι:

$$2\deg(B_w) \leq n + s - 1 \leq n + (n-3) - 1 = 2(n-2) \iff \deg(B_w) \leq n - 2.$$

Παρατηρούμε εδώ ότι τη μέγιστη τιμή $s = n - 3$ της σχέσης (5), την έχουμε από ένα κύκλωμα το οποίο αποτελείται από δύο περιττούς κύκλους τριών κορυφών και $n - 5$ ακμών αποκοπής, το μονοπάτι μεταξύ αυτών. Αυτό έχει τον μέγιστο δυνατό βαθμό:

$$\frac{n + (n - 3) - 1}{2} = n - 2.$$

□

Από το παραπάνω θεώρημα, έπονται δύο συμπεράσματα για ένα τυχαίο γράφημα. Καθώς ένα οποιοδήποτε γράφημα G m κορυφών, αποτελεί υπογράφημα του K_m, άμεσο είναι το επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα 3.3.2. *Έστω G γράφημα n κορυφών με $n \geq 4$. Ο μεγαλύτερος βαθμός d_n ενός στοιχείου της βάσης Graver του I_G (και άρα και της καθολικής βάσης Gröbner αυτού) είναι $d_n \leq n - 2$.*

Παρατήρηση 3.3.3. Το παραπάνω φράγμα του $n - 2$, αφορά τα τορικά ιδεώδη των πλήρων γραφημάτων K_n. Να παρατηρήσουμε σε αυτό το σημείο, ότι μέσω και της απόδειξης του Θεωρήματος 3.3.1, ο μέγιστος βαθμός $n - 2$ λαμβάνεται μόνο σε περίπτωση που έχουμε κύκλωμα το οποίο αποτελείται από δύο κύκλους μήκους 3, οι οποίοι συνδέονται με $n - 5$ ακμές αποκοπής. Η παρατήρηση αυτή, ουσιαστικά μας δίνει μια πλήρη περιγραφή όλων των γραφημάτων με $n > 4$ κορυφές, τα οποία δέχονται αυτόν τον μέγιστο βαθμό, όπως διατυπώνουμε στο επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα 3.3.4. *Ο μέγιστος βαθμός ενός στοιχείου της βάσης Graver και κατέπέκταση της καθολικής βάσης Gröbner) του I_G είναι $n - 2$ αν και μόνον αν το γράφημα G περιέχει κύκλωμα, το οποίο αποτελείται από δύο κυκλικά μπλοκ τριών κορυφών το καθένα, τα οποία ενώνονται με $n - 5$ ακμές αποκοπής.*

3.4 Η εικασία True Circuit

Η πλήρη γνώση των κυκλωμάτων, Θεώρημα 2.3.29, των στοιχείων της βάσης Graver, Θεώρημα 2.2.5, των ελαχιστοτικών συστημάτων γεννητόρων, Θεώρημα 2.3.21 και των στοιχείων της καθολικής βάσης Gröbner, Θεώρημα 3.2.9, ενός τορικού ιδεώδους γραφήματος G μας επιτρέπει να εξάγουμε οικογένειες παραδειγμάτων τορικών ιδεωδών με συγκεκριμένες ιδιότητες. Για παράδειγμα, μπορούμε πολύ εύκολα να κατασκευάσουμε γραφήματα, τέτοια ώστε η καθολική βάση Gröbner του αντίστοιχου τορικού ιδεώδους να είναι ίση με τη βάση Graver αυτού. Από το Θεώρημα 3.2.9 είτε προσθέτοντας καθαρά μπλοκ στις περιπλανήσεις που αντιστοιχούν σε στοιχεία της βάσης Graver ή αντικαθιστώντας μια ακμή (ακμές αντίστοιχα) καθαρού μπλοκ με μεγαλύτερο πλήθος ακμών (η έννοια του υποδιαιρετικού γραφήματος). Για άλλα τορικά ιδεώδη με αυτή την ιδιότητα, μπορούμε να πάρουμε επιπλέον πληροφορίες από τη δουλειά των T. Bogart, R. Hemmecke και S. Petrovic στο [3].

Ο B. Sturmfels σε μια διάλεξή του στη Santa Cruz ([40, Ιούλιος 1995]), διατύπωσε μια εικασία σύμφωνα με την οποία ανάμεσα στους βαθμούς των στοιχείων της βάσης Graver ενός τορικού ιδεώδους, τα κυκλώματα είναι αυτά που λαμβάνουν τον μεγαλύτερο βαθμό. Λίγο αργότερα, οι S. Hosten και R. Thomas, βλέπε [21, 40], δώσανε ένα παράδειγμα τορικού ιδεώδους, ο μεγαλύτερος βαθμός των στοιχείων της βάσεως Graver αυτού ήταν 16, ενώ ο αντίστοιχος βαθμός των κυκλωμάτων του ήταν 15, απαντώντας έτσι αρνητικά στην αρχική διατύπωση της εικασίας του Sturmfels. Αυτή η εξέλιξη, οδήγησε τον Sturmfels να αλλάξει την εικασία, στη παρακάτω [40, Εικασία 4.8], γνωστή ως εικασία True circuit η οποία και παρέμενε ανοικτή από το 1995.

Η Εικασία True circuit (Sturmfels, 1995):
Για οποιοδήποτε στοιχείο B_w της βάσης Graver $Gr_{\mathcal{A}}$ του αντίστοιχου τορικού ιδεώδους ισχύει:

$$\deg(B_w) \leq \max\{\textbf{true degree(c)},\ \forall c \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}\}.$$

Πριν προχωρήσουμε στην εικασία, θα δούμε τις έννοιες που περιέχονται σε αυτή. Στο [40] ο Sturmfels όρισε τον true degree ενός κυκλώματος ως εξής:

Θεωρούμε τυχαίο κύκλωμα $c \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ και έστω supp(c) ο φορέας αυτού, θεωρώντας τον ως υποσύνολο του συνόλου $\mathcal{A}$. Για παράδειγμα, αν $c = e_1e_5 - e_3e_7$ είναι ένα κύκλωμα στον πολυωνυμικό δακτύλιο $\mathbb{K}[e_1, \ldots, e_{10}]$, δε βλέπουμε τον φορέα του c ως το σύνολο $\{1, 3, 5, 7\}$, αλλά ως το σύνολο των διανυσμάτων $\{a_1, a_3, a_5, a_7\} \subset \mathcal{A}$, όπου a_i τα αντίστοιχα των ακμών διανύσματα στο σύνολο $\mathcal{A}$.

Ορισμός 3.4.1. *(δείκτης κυκλώματος - index of a circuit)*
Με index(c) θα συμβολίζουμε τον δείκτη του κυκλώματος c και ορίζεται να είναι ο πεπερασμένος δείκτης

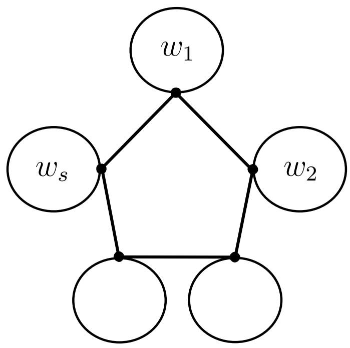
$$[\mathbb{R}(supp(c)) \cap \mathbb{Z}\mathcal{A} : \mathbb{Z}(supp(c))].$$

Ορισμός 3.4.2. *(true degree κυκλώματος)*
Ο true degree ενός κυκλώματος c, ορίζεται ως το γινόμενο:

$$\textit{true degree(c)} = \deg(c) \cdot index(c).$$

Υπάρχουν πάρα πολλά παραδείγματα οικογενειών τορικών ιδεωδών, των οποίων τα κυκλώματα λαμβάνουν τον μέγιστο βαθμό, βλέπε για παράδειγμα [33]. Αυτό ισχύει και για οικογένειες τορικών ιδεωδών γραφημάτων, όπως για παράδειγμα από το Θεώρημα 3.3.1, το διώνυμο με τον μέγιστο βαθμό στο I_{K_n} είναι κύκλωμα. Στη γενική όμως περίπτωση, η εικασία του Sturmfels δεν είναι αληθής. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε παραδείγματα τορικών ιδεωδών, στα οποία οι true degree των κυκλωμάτων, είναι αυστηρά μικρότεροι από τον βαθμό κάποιων στοιχείων της βάσης Graver. Όπως θα δούμε, μπορούμε να βρούμε άπειρα τέτοια παραδείγματα.

Θεωρούμε το γράφημα G το οποίο αποτελείται από ένα κύκλο μήκους s και s περιττούς κύκλους μήκους l ο καθένας, κάθε ένας από τους οποίους τέμνεται σε μια κορυφή του αρχικού μας κύκλου, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Ας είναι w η άρτια κλειστή περιπλάνηση η οποία διέρχεται από κάθε ακμή του γραφήματος G. Το μήκος της w είναι

$$l \cdot s + s = s(l+1),$$

το οποίο όμως είναι άρτιο καθώς οι s, l είναι περιττοί. Από το Θεώρημα 2.2.5 το B_w είναι στοιχείο της βάσης Graver του ιδεώδους και έχει βαθμό $\frac{s(l+1)}{2}$. Στο γράφημα αυτό υπάρχουν πάρα πολλά κυκλώματα, βλέπε Θεώρημα 2.3.29. Το μεγαλύτερο από αυτά, αποτελείται από δύο περιττούς κύκλους που ενώνονται με ένα μονοπάτι μήκους $s-1$. Ο βαθμός αυτού είναι ίσος με

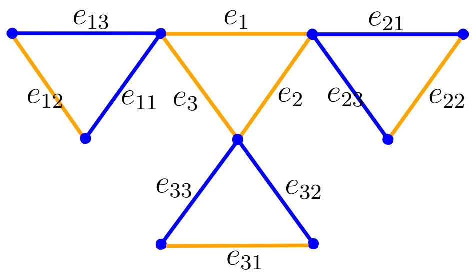
$$\frac{(2 \cdot l + 2(s-1))}{2} = l + s - 1.$$

Σημειώνουμε εδώ ότι οι $s, l > 2$, ως μήκοι κύκλων, κάτι που συνεπάγει αμέσως ότι $\frac{s(l+1)}{2} > l + s - 1$ ή ισοδύναμα ότι υπάρχει B_w στοιχείο της βάσης Graver του ιδεώδους, με βαθμό μεγαλύτερο από τον βαθμό οποιουδήποτε κυκλώματος του I_G. Η διαφορά των βαθμών, μπορεί να γίνει όσο μεγάλη επιθυμούμε, δεδομένου ότι οι επιλογές των l, s είναι ελεύθερες. Με τυπικούς αλλά μακροσκελείς υπολογισμούς (όπως θα δούμε σε παράδειγμα παρακάτω), αποδεικνύεται ότι ο index(c)=1. Έπεται ότι:

$$\text{true degree(c)} = \deg(c).$$

Συνεπώς έχουμε μια ολόκληρη οικογένεια τορικών ιδεωδών, άπειρων παραδειγμάτων (λόγω της ελευθερίας των επιλογών στα l, s), μέσω των οποίων αποδεικνύουμε τη μη ισχύ της εικασίας του Sturmfels.

Παράδειγμα 3.4.3. Σε αυτό το παράδειγμα, θα δώσουμε ένα από τα αντιπαραδείγματα της εικασίας στα οποία αναφερθήκαμε προηγουμένως. Ας θεωρήσουμε το παρακάτω γράφημα.



Σύμφωνα με τη προηγούμενη παρατήρηση, ο βαθμός του B_w είναι αυστηρά μεγαλύτερος από τον βαθμό του μεγαλύτερου κυκλώματος που εμφανίζεται σε αυτό το γράφημα. Θα αποδείξουμε ότι ο δείκτης index(c)=1 για κάθε κύκλωμα του αντίστοιχου I_G, από όπου θα συμπεράνουμε ότι:

$$\text{true degree(c)} = \deg(c).$$

Ας πάρουμε αρχικά το κύκλωμα

$$c_1 = \{e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_1, e_{21}, e_{22}, e_{23}\} \subset \mathcal{A}.$$

Είναι προφανές ότι ισχύει

$$\mathbb{Z}(\text{supp}(c_1)) \subseteq \mathbb{R}(\text{supp}(c_1)) \cap \mathbb{Z}\mathcal{A}.$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει κι ο αντίστροφος εγκλεισμός. Έστω $\mathbf{r}$ τυχόν στοιχείο του συνόλου $\mathbb{R}(\text{supp}(c_1)) \cap \mathbb{Z}\mathcal{A}$. Θα δείξουμε ότι αυτό ανήκει στο σύνολο $\mathbb{Z}(\text{supp}(c_1))$. Ισοδύναμα για το c_1, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{13}e_{13} + r_1e_1 + r_{21}e_{21} + r_{22}e_{22} + r_{23}e_{23} = \\ &= z_{11}e_{11} + z_{12}e_{12} + z_{13}e_{13} + z_1e_1 + z_{21}e_{21} + z_{22}e_{22} + z_{23}e_{23} + z_2e_2 + \\ &+ z_{31}e_{31} + z_{32}e_{32} + z_{33}e_{33} + z_3e_3, \end{aligned} \tag{3.1}$$

όπου $r_{ij}, r_k \in \mathbb{R}$ και $z_{ij}, z_k \in \mathbb{Z}$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι το $\mathbf{r}$ γράφεται ως ακέραιος γραμμικός συνδυασμός των $e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_1, e_{21}, e_{22}, e_{23}$, τα οποία ανήκουν στο $\text{supp}(c_1)$. Από τη σχέση 3.1, έπεται ότι:

$$x_{11}e_{11} + x_{12}e_{12} + x_{13}e_{13} + x_1e_1 + x_{21}e_{21} + x_{22}e_{22} + x_{23}e_{23} = \mathbf{0}, \tag{1}$$

όπου

$$x_{ij} = r_{ij} - z_{ij} \text{ και } x_i = r_i - z_i.$$

Να παρατηρήσουμε εδώ, ότι κάθε κορυφή του γραφήματος μας δίνει και κάποια πληροφορία. Επιπλέον, θέτοντας για ευκολία στους υπολογισμούς μας

$$x_{11} = a_1, x_{21} = a_2, x_{31} = a_3,$$

από όπου παίρνουμε ότι $x_{13} = a_1 = -x_{12}, x_{23} = a_2 = -x_{22}, x_{33} = a_3 = -x_{32}$ και σε συνδυασμό με τις σχέσεις 3.1, (1), έχουμε ότι:

$$2a_1 + x_1 + x_3 = 0, 2a_2 + x_1 + x_2 = 0, 2a_3 + x_2 + x_3 = 0, \text{ όπου } x_3 \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Παίρνουμε τη σχέση του αρχικού μας κυκλώματος: $e_{11} - e_{12} + e_{13} - 2e_1 + e_{21} - e_{22} + e_{23} = 0$ και πολλαπλασιάζοντάς τη με a_1, έχουμε:

$$a_1e_{11} - a_1e_{12} + a_1e_{13} - 2a_1e_1 + a_1e_{21} - a_1e_{22} + a_1e_{23} = \mathbf{0}. \quad (3)$$

Αφαιρώντας τη σχέση (3) από το πρώτο μέλος της 3.1, ουσιαστικά αφαιρούμε από το $\mathbf{r}$ το $\mathbf{0}$ κάτι που δε το μεταβάλλει:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (r_{11} - a_1)e_{11} + (r_{12} + a_1)e_{12} + (r_{13} - a_1)e_{13} + (r_1 + 2a_1)e_1 + \\ &+ (r_{21} - a_1)e_{21} + (r_{22} + a_1)e_{22} + (r_{23} - a_1)e_{23}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι συντελεστές της σχέσης (3.2) είναι ακέραιοι. Πραγματικά, έχουμε:

- $(r_{11} - a_1) = x_{11} + z_{11} - a_1 \overbrace{=}^{x_{11}=a_1} z_{11} \in \mathbb{Z}$,
- $(r_{12} + a_1) = x_{12} + z_{12} + a_1 \overbrace{=}^{x_{12}=-a_1} z_{12} \in \mathbb{Z}$,
- $(r_{13} - a_1) = x_{13} + z_{13} - a_1 \overbrace{=}^{x_{13}=a_1} z_{13} \in \mathbb{Z}$,
- $(r_1 + 2a_1) = x_1 + z_1 + 2a_1 \overbrace{=}^{2} z_1 - x_3 \in \mathbb{Z}$, καθώς $x_3 \in \mathbb{Z}$,
- $(r_{21} - a_1) = x_{21} + z_{21} - a_1 \overbrace{=}^{x_{21}=a_2} (a_2 - a_1) + z_{21}$,
- $(r_{22} + a_1) = x_{22} + z_{22} - a_1 \overbrace{=}^{x_{22}=-a_2} -(a_2 - a_1) + z_{22}$,
- $(r_{23} - a_1) = x_{23} + z_{23} - a_1 \overbrace{=}^{x_{23}=a_2} (a_2 - a_1) + z_{23}$.

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη, μένει να δειχθεί ότι $a_2 - a_1 \in \mathbb{Z}$.

Αν επιστρέψουμε στις σχέσεις (2) και αφαιρέσουμε τις πρώτες δύο κατά μέλη, προκύπτουν:

$$2(a_1 - a_2) + x_3 - x_2 = 0, \quad (4)$$

$$2a_3 + x_2 + x_3 = 0. \quad (5)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (4),(5) έχουμε ότι:

$$a_2 - a_1 + a_3 + x_3 = \mathbf{0}.$$

Η τελευταία σχέση μας πληροφορεί ότι η διαφορά $a_2 - a_1$ είναι ακέραιος, αφού τα x_3, a_3 είναι ακέραιοι. Ισοδύναμα το $\mathbf{r}$, γράφεται ως ακέραιος γραμμικός συνδυασμός των $e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_1, e_{21}, e_{22}, e_{23}$ και άρα index$(c_1) = 1$ όπως το θέλαμε.

Προφανώς δεν αλλάζει τίποτα στην απόδειξη στη περίπτωση όπου πάρουμε κάποιο άλλο κύκλωμα του γραφήματος το οποίο να αποτελείται από δύο περιττούς κύκλους που συνδέονται με κάποια ακμή, καθώς το μόνο που μεταβάλλεται είναι τα ονόματα των μεταβλητών μας. Έτσι έχουμε ένα αντιπαράδειγμα της εικασίας του Sturmfels απαντώντας σε αυτή αρνητικά.

Παρατήρηση 3.4.4. Στα προηγούμενα παραδείγματα το B_w ήταν στοιχείο της βάσης Graver του ιδεώδους, αλλά όχι της καθολικής βάσης Gröbner αυτού, καθώς η w περιείχε καθαρό μπλοκ, βλέπε Θεώρημα 3.2.9. Μια μικρή παραλλαγή της w μας δίνει μια οικογένεια παραδειγμάτων γραφημάτων, τα οποία έχουν ένα στοιχείο στη καθολική βάση Gröbner του ιδεώδους, του οποίου ο βαθμός είναι αυστηρά μεγαλύτερος από τον βαθμό οποιουδήποτε κυκλώματος του I_G. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε το γράφημα G, το οποίο αποτελείται από ένα κύκλο μήκους s και $s-2$ περιττούς κύκλους μήκους l ο καθένας, οι οποίοι ενώνονται σε μια κορυφή (διαφορετική ο καθένας) του αρχικού κύκλου. Έστω w' η περιπλάνηση που διέρχεται από κάθε ακμή του γραφήματος G. Η w' είναι μεικτή και συνεπώς το $B_{w'}$ ανήκει στη καθολική βάση Gröbner του ιδεώδους και ο βαθμός του $B_{w'}$ είναι μεγαλύτερος από τον βαθμό οποιουδήποτε κυκλώματος, για μεγάλα l, s.

Βιβλιογραφία

[1] W. Adams kai P.Loustaunau, An introduction to Grobner Bases, Graduate Studies in Mathematics Vol.3 A.M.S. (1991).

[2] S. Aoki, A. Takemura, R. Yoshida, Indispensable monomials of toric ideals and Markov bases, J. Symbolic Comput. 43 (2008) 490–507.

[3] T. Bogart, R. Hemmecke kai S. Petrovic, Equality of Graver bases and universal Gröbner bases of colored partition identitie, arXiv:1004.0840v2.

[4] B. Buchberger, Ein Algorithms zum Auffinden der Basiselemente des Restklassenringes nach einem nulldimensionalen Polynomideal, Ph.D. Thesis, Inst. University of Innsbruck, Innsbruck, Austria, 1965.

[5] G. Carrá Ferro, D. Ferrarello, Ideals and graphs, Gröbner bases and decision procedures in graphs, Discrete Math. 308 (2008) 287–298.

[6] H. Charalambous, A. Katsabekis and A. Thoma, Minimal systems of binomial generators and the insispensable complex of a toric ideal, Proc. Amer. Math. Soc., 135 (2007) 3443-3451.

[7] H. Charalambous, A. Thoma, On simple A-multigraded minimal resolutions, Contemp. Math. 502 (2009) 33–44.

[8] A. Corso, U. Nagel, Monomial and toric ideals associated to Ferrers graphs, Trans. Amer. Math. Soc. 361 (2009) 1371–1395.

[9] J. De Loera, B. Sturmfels and R. Thomas, Gröbner bases and tiangulations of the second hypersimplex, Combinatorica 15 (3) (1995), 409-424.

[10] P. Diaconis and B. Sturmfels, Algebraic algorithms for sampling from conditional distributions, Annals of Stat. 26(1) (1998) 363-397.

[11] D. Eisenbud, Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry, GTM Vol. 150 Springer-Verlag (1995).

[12] D. Eisenbud, B. Sturmfels, Binomial ideals, Duke Math. J. 84 (1996) 1–45.

[13] W. Fulton, William H. Roever Lectures in Geometry and Algebraic Geometry Conference, Washington University, MI, USA (1989).

[14] W. Fulton, Introduction to toric varieties, Annals of Math. Studies, Vol. 131, Princeton University Press, 1993.

[15] I. Gitler, E. Reyes, R. Villarreal, Blowup algebras of ideals of vertex covers of bipartite graphs, Contemp. Math. 376 (2005) 273–279.

[16] I. Gitler, E. Reyes, R. Villarreal, Ring graphs and complete intersections toric ideals, Discrete Math. 310 (2010) 430–441.

[17] J. Herzog, T. Hibi, Distributive lattices, bipartite graphs and Alexander dualtity, J. Algebraic Combin. 22 (2005) 289–302.

[18] J. Herzog, T. Hibi, F. Hreinsdottir, T. Kahle, J. Rauh, Binomial edge ideals and conditional independence statements, Adv. Appl. Math. 45 (2010) 317–333.

[19] T. Hibi, Algebraic combinatorics on convex polytopes, Carslaw Publications (1992).

[20] M. Hochster, Rings of invariants of tori, Cohen-Macaulay rings generated by monomials and polytopes, Annals of Math. 96 (1972), 318–337.

[21] S. Hosten, Degrees of Gröbner bases of integer programs, PhD thesis, Cornell University, 1997.

[22] M. Katzman, Bipartite graphs whose edge algebras are complete intersections, J. Algebra 220 (1999) 519–530.

[23] E. Miller, B. Sturmfels, Combinatorial Commutative Algebra, Graduate Texts in Mathematics 227 Springer Verlag, New York 2005.

[24] U. Nagel, S. Petrovic, Properties of cut ideals associated to ring graphs, J. Commut. Algebra 1 (2009) 547–565.

[25] H. Ohsugi, A geometric definition of combinatorial pure subrings, Comment. Math. Univ. St. Pauli 56 (2007) 27–44.

[26] H. Ohsugi, J. Herzog, T. Hibi, Combinatorial pure subrings, Osaka J. Math. 37 (2000) 745–757.

[27] H. Ohsugi, T. Hibi, Normal polytopes arising from finite graphs, J. Algebra 207 (1998) 409–426.

[28] H. Ohsugi, T. Hibi, Koszul bipartite graphs, Adv. Appl. Math. 22 (1999) 25–28.

[29] H. Ohsugi and T. Hibi, Toric ideals generated by quadratic binomials, J. Algebra 218 (1999) 509-527.

[30] H. Ohsugi and T. Hibi, Indispensable binomials of finite graphs, J. Algebra Appl. 4 (2005) 421-434.

[31] H. Ohsugi. T. Hibi, Toric ideals arising from contingency tables, Commutative algebra and combinatorics, 91–115, Ramanujan Math. Soc. Lect. Notes Ser., 4, Ramanujan Math. Soc., Mysore, 2007.

[32] I. Peeva. B. Sturmfels, Generic lattice ideals, J. Amer. Math. Soc. 11 (1998) 363–373.

[33] S. Petrovic, On the universal Gröbner bases of varieties of minimal degree, Math. Res. Lett. 15 (2008) 1211-1223.

[34] E. Reyes, Ch. Tatakis and A. Thoma, Minimal generators of toric ideals of graphs, Adv. Appl. Math., to appear.

[35] N. Schwartz, Stability of Gröbner bases, J. Pure Appl. Algebra 53 (1998) 171-186.

[36] A. Simis, W. Vasconcelos, R. Villarreal, On the ideal theory of graphs, J. Algebra 167 (1994) 389–416.

[37] A. Simis, W. Vasconcelos, R. Villarreal, The integral closure of subrings associated to graphs, J. Algebra 199 (1998) 281–289.

[38] R. Stanley, Combinatorics and Commutative Algebra (second edition), Progress in Mathematics Vol.41 (1996).

[39] B. Sturmfels, Gröbner Bases and Convex Polytopes, University Lecture Series No.8, American Mathematical Society Providence, RI. (1995).

[40] B. Sturmfels, Equations defining toric varieties, Algebraic Geometry, Santa Cruz 1995, American Mathematical Society Providence, RI. (1997) 437-449.

[41] B. Sturmfels, S. Sullivant, Toric geometry of cuts and splits, Michigan Math. J. 57 (2008) 689–709.

[42] A. Takemura and S. Aoki, Some characterizations of minimal Markov basis for sampling from discrete conditional distributions, Ann. Inst. Statist. Math. 56 (1) (2004) 1-17.

[43] Ch. Tatakis and A. Thoma, On the Universal Gröbner bases of toric ideals of graphs, J. Comb. Theory, Series A 118 (2011) 1540-1548.

[44] Ch. Tatakis and A. Thoma, On complete intersection toric ideals of graphs, preprint.

[45] C. E. Valencia, R. Villarreal, Explicit representations of the edge cone of a graph, Int. J. Contemp. Math. Sci. 1 2006 53–66.

[46] R. Villarreal, Cohen-Macaulay graphs, Manuscripta Math. 66 (1990) 277–293.

[47] R. Villarreal, Rees algebras of edge ideals, Comm. Algebra 23 (1995) 3513-3524.

[48] R. Villarreal, On the equations of the edge cone of a graph and some applications, Manuscripta Math. 97 (1998) 309–317.

[49] R. Villarreal, Monomial Algebras, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics 238, Marcel Dekker, Inc., New York, 2001.

[50] V. Weispfenning, Constructing universal Gröbner Bases, in: Proceedings AAEEC 5, Menorca, in: Springer Lecture Notes in Comput. Sci. 356 (1987) 408-417.

[51] G. M. Ziegler, Lectures on Polytopes, Springer-Verlag (1994).

Ευρετήριο