ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ, ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
& ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ Ι. ΖΟΡΜΠΑ

ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΠΟΛΥΒΑΘΜΙΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ ΜΕ ΕΜΦΑΣΗ ΣΕ ΑΠΟΚΛΙΝΟΝΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ, ΜΑΙΟΣ 2010

Η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών για την εκπόνηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στη Στατιστική και Επιχειρησιακή Έρευνα που απονέμει το τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την 23 Απριλίου 2010 από την εξεταστική Επιτροπή:

Κ. Σκούρη (Επιβλέπουσα), Λέκτορας

Χ. Λάγκαρης (Μέλος), Αναπληρωτής Καθηγητής

Σ. Παπαχρήστος (Μέλος), Καθηγητής

Ευχαριστίες

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω την επιβλέπουσα καθηγήτρια μου κ. Κωνσταντίνα Σκούρη για τις πολύτιμες συμβουλές, την υπομονή και την συμπαράσταση της κατά την διάρκεια της εκπόνησης της μεταπτυχιακής μου διατριβής.

Ευχαριστώ από τα βάθη της καρδιάς μου τους γονείς μου (Γιάννη και Ευθαλία) και τον αδερφό μου Τάσο που με στήριξαν και με στηρίζουν ηθικά αλλά και οικονομικά σε όλη την διάρκεια των σπουδών μου. Το μεγαλύτερο κομμάτι της ολοκλήρωσης των σπουδών μου οφείλεται σε αυτούς.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους συναδέλφους μου στο μεταπτυχιακό για την συμπαράσταση αλλά και για τα ευχάριστα διαλείμματα. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την Κατερίνα για την κατανόηση, την υποστήριξη και την υπομονή της κατά την περίοδο συγγραφής αυτής της διατριβής, καθώς επίσης και όλους τους φίλους που έκανα στα Γιάννενα για την ευχάριστη παρέα τους.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή

Κατά την διάρκεια των τελευταίων ετών, η μελέτη της λειτουργίας της εφοδιαστικής αλυσίδας (*supply chain*) αποτελεί προτεραιότητα στον χώρο της διοίκησης. Κύριο χαρακτηριστικό μιας εφοδιαστικής αλυσίδας είναι η διαχείριση σχετικά μεγάλου αριθμού υλικών και προϊόντων που, σε, διάφορες μορφές, αποθεματοποιούνται σε διάφορα σημεία αποθεματοποίησης. Ο από κοινού (συντονισμένος) έλεγχος των αποθεμάτων αυτών, προϋπόθεση για την αποτελεσματική λειτουργία της εφοδιαστικής αλυσίδας, έχει πλέον μετεξελιχθεί σε μια ιδιαίτερα γόνιμη ερευνητική περιοχή, γνωστή ως πολυβάθμιος έλεγχος αποθεμάτων (multi-echelon inventory control). Επιπλέον, έχει αυξηθεί η δυνατότητα για αποτελεσματικό και αποδοτικό έλεγχο στην διαχείριση των πολυβάθμιων συστημάτων εξαιτίας τόσο της σημαντικής έρευνας που πραγματοποιείται στον χώρο, όσο και της εισαγωγής τεχνολογιών πληροφορικής και επικοινωνιών (ΤΠΕ) για τον συντονισμό στην διαχείριση της εφοδιαστικής αλυσίδας. Λόγω μάλιστα του μεγάλου όγκου των ερευνητικών αποτελεσμάτων, ανασκοπήσεις των σχετικών εργασιών δημοσιεύονται τακτικά (Federgruen [22], van Houtoum et al. [44], de Kok και Fransoo [14], Axsater [2]).

Για τον αποτελεσματικό έλεγχο των αποθεμάτων μιας οποιασδήποτε εφοδιαστικής αλυσίδας απαιτείται η λήψη δύο κεντρικών αποφάσεων. Πρώτον, ο καθορισμός της πολιτικής διαχείρισης για κάθε μεμονωμένο σημείο αποθεματοποίησης. Δεύτερον, ο καθορισμός των παραμέτρων της επιλεχθείσας πολιτικής (ή πολιτικών) με στόχο την βελτιστοποίηση κάποιου προκαθορισμένου κριτηρίου απόδοσης του συστήματος. Σχετικά με τη πρώτη απόφαση, στην πράξη χρησιμοποιούνται σήμερα οι λεγόμενες πολιτικές περιοδικής επιθεώρησης. Με βάση αυτές τις πολιτικές το ύψος του αποθέματος επιθεωρείται σε προκαθορισμένα χρονικά διαστήματα Τ (περίοδος επιθεώρησης) και στον βαθμό που αυτό βρίσκεται κάτω από ένα προκαθορισμένο σημείο αναπαραγγελίας (s ή S) εκδίδεται μια εντολή παραγγελίας. Πλήρης παρουσίαση όλων των υφιστάμενων πολιτικών περιοδικής επιθεώρησης δίνεται από τους Silver et al. [40]. Το ενδιαφέρον με αυτού του τύπου πολιτικές είναι ότι υλοποιούνται αυτομάτως από τα τυποποιημένα λογισμικά διαχείρισης αποθεμάτων της εφοδιαστικής αλυσίδας που διατίθενται στο εμπόριο, γνωστά ως συστήματα Material Requirements Planning (MRP). Σχετικά με την δεύτερη κεντρική απόφαση, το πλέον διαδεδομένο κριτήριο απόδοσης του συστήματος αποτελεί το συνολικό κόστος λειτουργίας (είτε για πεπερασμένο είτε για άπειρο χρονικό ορίζοντα προγραμματισμού).

Ως βάση για την σύγχρονη έρευνα σχετικά με τα αποθέματα πολλαπλών βαθμίδων με πολιτικές ελέγχου περιοδικής επιθεώρησης μπορεί να θεωρηθεί η εργασία των Clark και Scarf [12]. Χρησιμοποιώντας δυναμικό προγραμματισμό παρουσίασαν μια σε βάθος ανάλυση συστημάτων γραμμικής μορφής (αλληλουχία Ν σημείων αποθεματοποίησης στη σειρά) υπό συνθήκες τυχαίας ζήτησης με κριτήριο την ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους λειτουργίας του συστήματος για ένα πεπερασμένο ορίζοντα προγραμματισμού. Πέρα από τον ορισμό εννοιών (όπως το απόθεμα βαθμίδας και το κόστος βαθμίδας) που σήμερα θεωρούνται κεντρικές στον χώρο, οι Clark και Scarf καταρχήν απέδειξαν ότι η χρήση απλών πολιτικών περιοδικής επιθεώρησης (S,T) για κάθε σημείο αποθεματοποίησης αποτελεί τον βέλτιστο μηχανισμό ελέγχου. Στην συνέχεια έδειξαν πως η ελαχιστοποίηση της N-διάστατης συνάρτησης κόστους του προβλήματος μπορεί να μετασχηματιστεί σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα ελαχιστοποίησης N μονοδιάστατων συναρτήσεων που μπορεί να επιλυθεί σταδιακά, υπολογίζοντας έτσι τα βέλτιστα σημεία παραγγελίας όλων των σημείων αποθεματοποίησης. Ο αλγόριθμος αυτός (γνωστός ως Clark και Scarf decomposition) αποτέλεσε και την βάση για όλες σχεδόν τις μείζονες εξελίξεις στο χώρο.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον αλλά και δυσκολία επίλυσης παρουσιάζουν τα πολυβάθμια συστήματα αποθεμάτων αποκλίνουσας μορφής, όπου μια κεντρική αποθήκη ανεφοδιάζει κάποιες τελικές αποθήκες. Για σειριακά και συγκλίνοντα συστήματα ο επιμερισμός του συνολικού αποθέματος στις επιμέρους αποθήκες περιγράφεται απολύτως απ' την παράμετρο, *απόθεμα βαθμίδας* στην οποία βασίζεται ο αλγόριθμος των Clark και Scarf [12]. Σε αποκλίνοντα συστήματα η συνθήκη αυτή παύει να ισχύει λόγω των ανεξάρτητων αποφάσεων που απαιτούνται για τον επιμερισμό του κεντρικού αποθέματος σε μεμονωμένες τελικές αποθήκες. Εντούτοις υποθέτοντας ότι, παρά τον επιμερισμό, τα τελικά αποθέματα εξαρτώνται αποκλειστικά από το απόθεμα της κεντρικής αποθήκης, τότε η προσέγγιση των Clark και Scarf [12] συνεχίζει να ισχύει. Η υπόθεση αυτή, γνωστή ως *υπόθεση των ισοσταθμισμένων αποθεμάτων* (*balanced inventories*), είναι κοινή στην ανάλυση των συστημάτων αποκλίνουσας μορφής και αναγκαστικά οδηγεί σε λύσεις που η ποιότητα τους εξαρτάται από τον βαθμό ικανοποίησης της υπόθεσης αυτής. Εντούτοις, όπως διαπιστώνεται σε αρκετές εργασίες, η συγκεκριμένη υπόθεση παρουσιάζεται ιδιαίτερα εύρωστη σε βαθμό που να επηρεάζει ελάχιστα την ποιότητα της λύσης (Eppen και Schrage [21], van Donselaar και Wijngaard [46], Bollapragada et. al. [7], Axsater [2], Lagodimos και Koukoumialos [33]).

Το βασικό πρόβλημα με τον υπολογισμό της βέλτιστης πολιτικής επιμερισμού είναι ότι η συναρτησιακή της μορφή εξαρτάται άμεσα από το διαθέσιμο κεντρικό απόθεμα. Συνεπώς, για τον υπολογισμό της, απαιτείται η διερεύνηση μεγάλου αριθμού περιπτώσεων, γεγονός που καθιστά πρακτικά ανέφικτο τον υπολογισμό αυτό ακόμη και για τις σημερινές δυνατότητες των Η/Υ. Υπάρχει εντούτοις μια ενδιαφέρουσα εξαίρεση, η περίπτωση που όλα τα τελικά αποθέματα έχουν πανομοιότυπα στοιχεία κόστους και η ζήτηση που αντιμετωπίζουν περιγράφεται από την κανονική κατανομή. Στην περίπτωση αυτή, η βέλτιστη πολιτική επιμερισμού λαμβάνει μια απλή μορφή, γνωστή ως *πολιτική δίκαιου επιμερισμού* (Fair Share Rationing (FS)), γεγονός που απλοποιεί σημαντικά τους υπολογισμούς (Clark και Scarf [12], Eppen και Schrage [21], Bollapragada et al. [7]). Η μορφή αυτής της πολιτικής αποτέλεσε την βάση για την δημιουργία ανάλογων απλών, αλλά προσεγγιστικών πολιτικών επιμερισμού, που επιτρέπουν όμως πρακτικά τον αποτελεσματικό έλεγχο συστημάτων αποκλίνουσας μορφής (van der Heijden [48], Diks και de Kok [18]).

Η παρούσα διατριβή δομείται ως εξής:

Στο επόμενο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι δομές πολυβάθμιων συστημάτων αποθεμάτων, πολιτικές διαχείρισης πολυβάθμιων συστημάτων οι οποίες στηρίζονται στο απόθεμα αποθήκης και στο απόθεμα βαθμίδας, μέθοδοι καθορισμού των ποσοτήτων παραγγελίας, των αποθεμάτων ασφαλείας και των σημείων αναπαραγγελίας σε συστήματα συγκλίνουσας μορφής. Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι πολιτικές επιμερισμού σε αποκλίνοντα πολυβάθμια συστήματα αποθεμάτων καθώς και μοντέλα τα οποία αναπτύσσονται κάτω από συγκεκριμένες πολιτικές επιμερισμού.

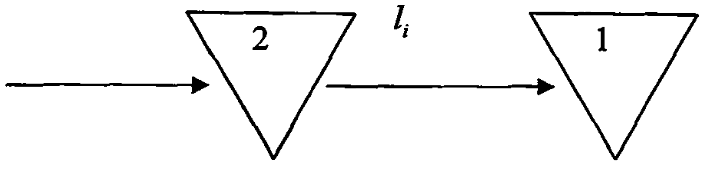
Σημειώνεται τέλος ότι τα μοντέλα που παρουσιάζονται στην παρούσα διατριβή αλλά και στη βιβλιογραφία γενικότερα, για λόγους ευκολίας, αφορούν διβάθμια συστήματα, ωστόσο είναι δυνατή η επέκταση τους σε περισσότερα από δύο επίπεδα.

Κεφάλαιο 2

Πολυβάθμια Συστήματα Αποθεμάτων (Multi-Echelon Inventory Systems)

Τα πολυβάθμια συστήματα διαχείρισης των αποθεμάτων (*multi-echelon inventory systems*) εμφανίζονται στην εφοδιαστική αλυσίδα, τόσο στην διανομή όσο και στην παραγωγή. Για παράδειγμα στο Σχήμα 2.1, παρουσιάζεται ένα σύστημα δύο αποθηκών, στο οποίο, ο τελικός καταναλωτής προμηθεύεται το προϊόν από την αποθήκη 1, η αποθήκη 1 ανεφοδιάζεται από την αποθήκη 2 και η αποθήκη 2 ανεφοδιάζεται από τον εξωτερικό προμηθευτή.

Έτσι σε ένα σύστημα διανομής (*distribution system*), η αποθήκη (*installation*) 1 μπορεί να είναι μια τελική αποθήκη λιανικής πώλησης, ενώ η 2 να είναι η κεντρική αποθήκη. Σ' αυτή την περίπτωση ο *χρόνος απόκρισης* (*lead time*), l_i, στην αποθήκη 1, είναι ο χρόνος μεταφοράς.



Σχήμα 2.1 . Ένα σύστημα αποθεμάτων με 2 αποθήκες

Στην περίπτωση ενός συστήματος παραγωγής, η αποθήκη 1 είναι η αποθήκη του τελικού προϊόντος, ενώ η αποθήκη 2 είναι η αποθήκη κάποιου υποπροϊόντος (*subassembly*), το οποίο χρησιμοποιείται για να παραχθεί το τελικό προϊόν. Σε μια τέτοια περίπτωση, οι αποθήκες περιλαμβάνουν διαφορετικά προϊόντα. Στην περίπτωση των συστημάτων παραγωγής, ο *χρόνος απόκρισης* στην αποθήκη 1 είναι ο χρόνος παραγωγής (πιθανόν οι δύο αποθήκες να συστεγάζονται). Και στις δύο καταστάσεις η αποθήκη 1 μπορεί να θεωρείται ως πελάτης για την αποθήκη 2.

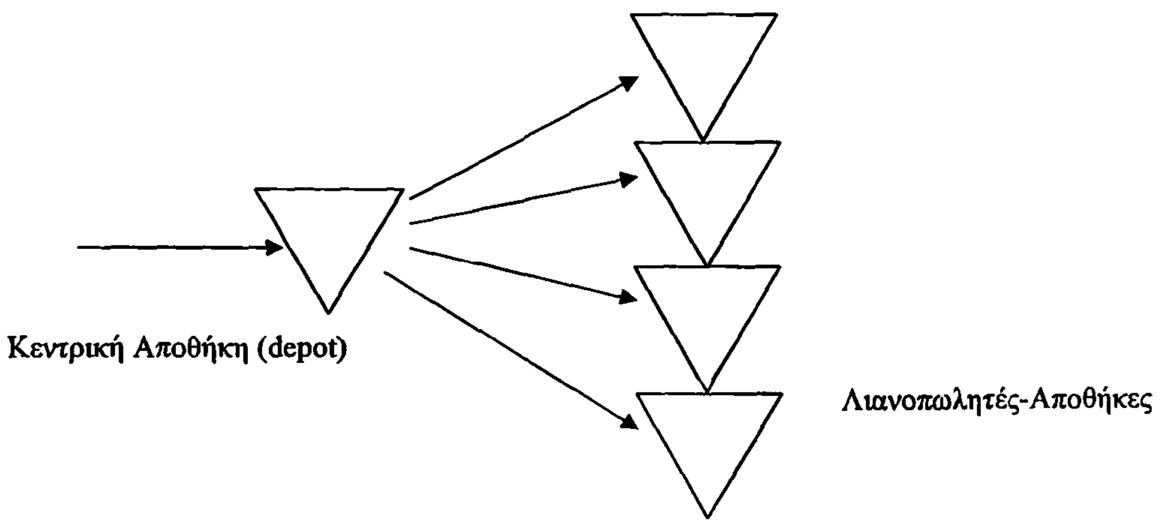
Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστούν, αρχικά, οι τύποι των πολυβάθμιων συστημάτων αποθεμάτων. Στη συνέχεια θα καταγραφούν και θα συγκριθούν βασικές πολιτικές διαχείρισης αυτών. Τέλος, θα παρουσιαστεί ο καθορισμός της βέλτιστης διαχείρισης (υπό την έννοια της ελαχιστοποίησης του κόστους) πολυβάθμιων *σειριακών συστημάτων*. Στις παραγράφους 2.3.1.1 και 2.3.1.2 θα περιγραφούν και θα αναλυθούν οι installation και echelon stock (r,Q) πολιτικές. Στην παράγραφο 2.3.2 θα συγκριθούν αυτές οι πολιτικές. Στη συνέχεια στην παράγραφο 2.4 θα συζητηθούν οι KANBAN πολιτικές. Τα συστήματα παραγγελίας είναι όλα αρκετά απλά, αλλά ανεξάρτητα από το ποιο σύστημα θα επιλεγεί, είναι δύσκολος ο καθορισμός των κατάλληλων παραμέτρων ελέγχου, όπως οι ποσότητες παραγγελίας (*order quantities*) και τα αποθέματα ασφαλείας (*safety stocks*). Ο καθορισμός αυτός θα γίνει στην παράγραφο 2.5.

2.1 Διάφορες Δομές Πολυβάθμιων Συστημάτων των Αποθεμάτων

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιαστούν οι εναλλακτικές δομές που εμφανίζονται σε πολυβάθμια συστήματα διαχείρισης αποθεμάτων.

2.1.1 Πολυβάθμια Συστήματα Αποθεμάτων στην διανομή

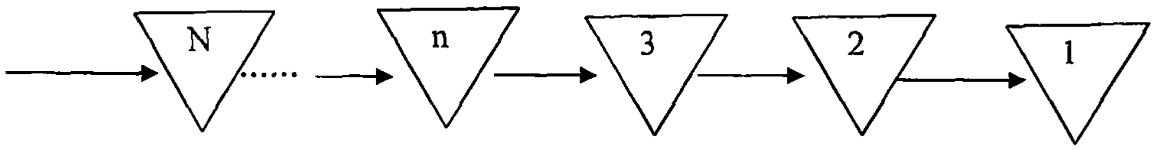
Σ' ένα απλό σύστημα διαμονής, κάθε αποθήκη έχει το πολύ μια αμέσως προηγούμενη. Γενικά, τέτοια συστήματα ονομάζονται αποκλίνοντα συστήματα (*divergent systems*). Το Σχήμα 2.2 δείχνει ένα τέτοιο σύστημα με δύο επίπεδα: μία κεντρική αποθήκη (*depot*) κι έναν αριθμό τελικών αποθηκών-λιανοπωλητών (*installations-retailers*). Σ' ένα αποκλίνον πολυβάθμιο σύστημα μια αποθήκη προμηθεύεται από την προηγούμενη της και η κεντρική αποθήκη προμηθεύει μια ή περισσότερες.



Σχήμα 2.2 . Διβάθμιο σύστημα διανομής αποθεμάτων

Σ' ένα τέτοιο σύστημα, μόνο οι τελικές αποθήκες αντιμετωπίζουν την ζήτηση των πελατών. Συνεπώς τα αποθέματα των τελικών αποθηκών χρησιμεύουν στην επίτευξη υψηλού επιπέδου εξυπηρέτησης στις τοπικές αγορές. Η κεντρική αποθήκη προμηθεύει με εμπορεύματα όλες τις αποθήκες, ενώ η ίδια προμηθεύεται από έναν εξωτερικό προμηθευτή, ο οποίος μπορεί να έχει άπειρη χωρητικότητα αποθεμάτων. Ο *χρόνος απόκρισης* από τον εξωτερικό προμηθευτή ως την κεντρική αποθήκη δηλώνεται με, L, ενώ ο *χρόνος απόκρισης* από την κεντρική αποθήκη ως την τελική αποθήκη i, δηλώνεται με, l_i. Περισσότερο απόθεμα στην κεντρική αποθήκη συνεπάγεται μικρότερους και λιγότερο μεταβλητούς (πιο σταθερούς) *χρόνους απόκρισης* για τις αποθήκες και μπορεί να οδηγήσει σε μείωση των αποθεμάτων τους. Η καλύτερη κατανομή του αποθέματος ολόκληρου του συστήματος θα εξαρτάται από : την δομή του συστήματος, την ζήτηση, τους *χρόνους απόκρισης* και το κόστος. Έτσι, υπάρχουν καταστάσεις όπου απαιτείται σχετικά μεγάλο απόθεμα στην κεντρική αποθήκη, συνήθως όμως η βέλτιστη λύση οδηγεί σε χαμηλό απόθεμα.

Στην ειδική περίπτωση, που κάθε αποθήκη έχει το πολύ μία αμέσως επόμενη αποθήκη, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.3, το σύστημα λέγεται *σειριακό* (*serial system*).

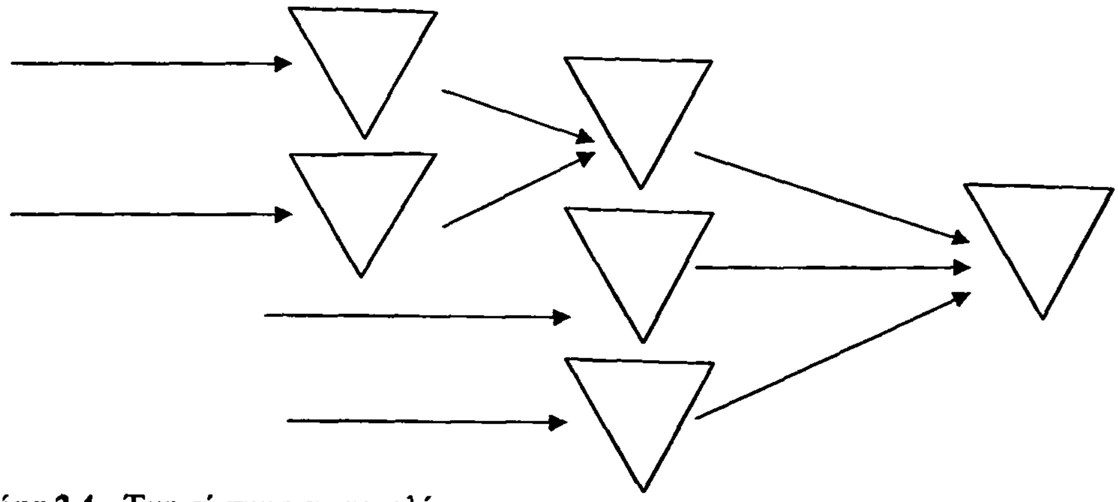


Σχήμα 2.3 . Σειριακό σύστημα αποθεμάτων με N αποθήκες

2.1.2 Πολυβάθμια Συστήματα Αποθεμάτων στην παραγωγή

Στην παραγωγή τα πολυβάθμια συστήματα αποθεμάτων, ενδέχεται να έχουν μια δομή όπως το Σχήμα 2.2. Τέτοιου είδους συστήματα εμφανίζονται σε βιομηχανίες μεταποίησης, συχνά στο τέλος της γραμμής παραγωγής. Έτσι, η κεντρική αποθήκη στο Σχήμα 2.2, μπορεί να αντιστοιχεί στην αποθήκη κάποιου βασικού υποπροϊόντος που χρησιμοποιείται για την παραγωγή ενός αριθμού από διαφορετικά προϊόντα. Οι αποθήκες από αυτά τα τελικά προϊόντα (*final products*) αντιστοιχούν στις αποθήκες των λιανοπωλητών στο Σχήμα 2.2.

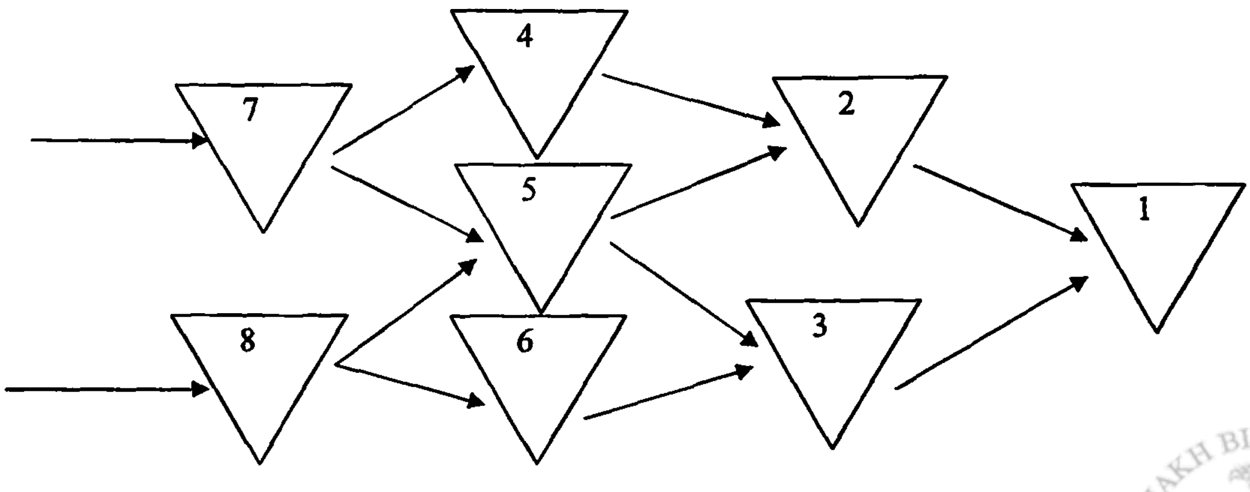
Επίσης συχνά, στην παραγωγή υπάρχουν συστήματα αποθήκευσης προϊόντων με πολλές αποθήκες στην αρχή της γραμμής παραγωγής και λιγότερες στην μετέπειτα παραγωγική διαδικασία, παρατηρείται επομένως μια συγκλίνουσα δομή (*convergent flow*). Αν κάθε αποθήκη έχει το πολύ μία αμέσως επόμενη, όπως στο Σχήμα 2.4, τότε προκύπτει ένα *σύστημα συναρμολόγησης* (*assembly system*). Σημειώνεται ότι ένα *σειριακό σύστημα* είναι ειδική περίπτωση ενός *συστήματος συναρμολόγησης*.



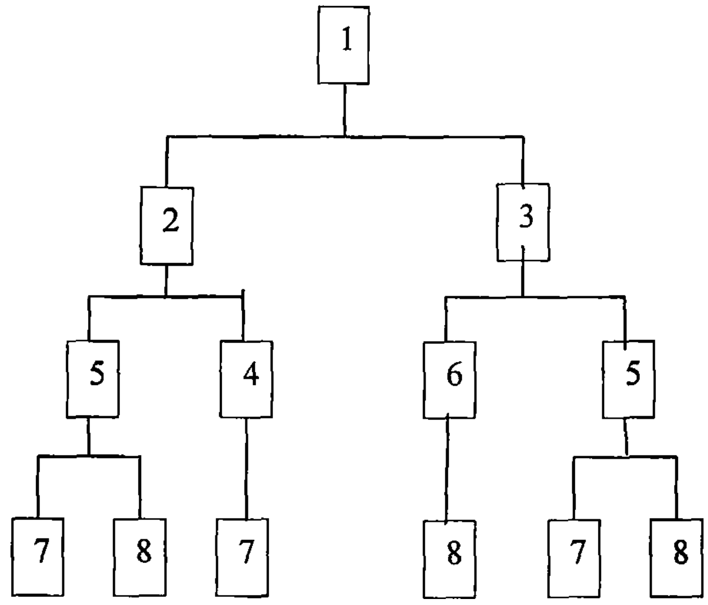
Σχήμα 2.4 . Ένα *σύστημα συναρμολόγησης*

Διάφοροι λόγοι καθιστούν αναγκαία την διατήρηση αποθεμάτων στην αρχή της παραγωγικής διαδικασίας σε ένα *σύστημα συναρμολόγησης*. Το κόστος διατήρησης αποθεμάτων πρώτων υλών στην αρχή της γραμμής παραγωγής είναι μικρότερο εκείνου των υποπροϊόντων και των τελικών προϊόντων στο τέλος της γραμμής. Ωστόσο, μερικές φορές το υψηλό *κόστος εκκίνησης/παραγγελίας* (*setup-fixed cost*) στα αρχικά στάδια της παραγωγής, οδηγεί στην παραγωγή μεγάλων ποσοτήτων παραγγελίας (*batch quantities*).

Γενικά, είναι θεωρητικά ευκολότερος ο χειρισμός των *σειριακών συστημάτων* από το χειρισμό άλλων τύπων πολυβάθμιων συστημάτων. Ωστόσο, μερικά αποτελέσματα για *σειριακά συστήματα* μπορούν να γενικευτούν σε *απλά συστήματα διανομής ή συστήματα συναρμολόγησης*. Συχνά, στην παραγωγή απαιτούνται πιο γενικά συστήματα αποθεμάτων, των οποίων ο χειρισμός είναι πιο δύσκολος. Το Σχήμα 2.5 δείχνει ένα τέτοιο σύστημα όπου μια αποθήκη μπορεί να έχει πολλές επόμενες, όπως επίσης και πολλές προηγούμενες.



Σχήμα 2.5 . Ένα γενικό πολυβάθμιο σύστημα αποθεμάτων



Σχήμα 2.6 Κατάλογος υλικών (Bill of material) αντίστοιχος με το σύστημα αποθεμάτων στο Σχήμα 2.5

Για ένα συγκεκριμένο πολυβάθμιο σύστημα αποθεμάτων στην παραγωγή υπάρχει ένα ισοδύναμος κατάλογος υλικών (*bill of material) ή δομή προϊόντος* (*product structure*). Στο Σχήμα 2.5, το απόθεμα της αποθήκης 1 μπορεί να αντιστοιχεί στο απόθεμα ενός τελικού προϊόντος, που παράγεται από τα προϊόντα 2 και 3. Το προϊόν 2 παράγεται από τα προϊόντα 4 και 5 κ.ο.κ. Ο πλήρης κατάλογος υλικών που αντιστοιχεί στο Σχήμα 2.5 φαίνεται στο Σχήμα 2.6.

Στην παραγωγή είναι συνηθισμένο να απαιτούνται περισσότερες από μία μονάδες ενός προϊόντος για την παραγωγή κάποιου άλλου προϊόντος. Για παράδειγμα, το προϊόν 1 απαιτεί δύο μονάδες απ' το υποπροϊόν 2 και τρεις μονάδες από το υποπροϊόν 3. Στα *σειριακά* και στα *συστήματα συναρμολόγησης* αυτό δεν προσθέτει πολυπλοκότητα. Επειδή ένα προϊόν μπορεί να είναι μέρος ενός άλλου προϊόντος, είναι πάντα δυνατός ο εκ νέου ορισμός των απαιτούμενων μονάδων από ένα προϊόν χαμηλότερου επιπέδου. Έτσι, αν για παράδειγμα, ένα προϊόν απαιτεί δύο μονάδες από κάποιο άλλο προϊόν, ορίζονται οι δύο μονάδες αυτού του προϊόντος να είναι η καινούρια μονάδα (το νέο προϊόν). Αλλά προφανώς δεν είναι πάντα εφικτή η αντιμετώπιση ενός γενικού συστήματος, με αυτό τον τρόπο. Εξετάζοντας ξανά το Σχήμα 2.6, το προϊόν 2 απαιτεί δύο μονάδες του προϊόντος 5, ενώ το προϊόν 3 απαιτεί τρεις μονάδες του ίδιου προϊόντος.

2.2 Ορισμοί

Στη συνέχεια δίνονται κάποιοι χρήσιμοι ορισμοί.

2.2.1 Διαθέσιμο απόθεμα (Stock on hand): είναι ο αριθμός των μονάδων προϊόντος που είναι άμεσα διαθέσιμο προς πώληση, η ποσότητα αυτή δεν μπορεί να είναι αρνητική.

2.2.2 Επίπεδο Αποθέματος (Net stock ή net inventory): είναι το διαθέσιμο απόθεμα μειωμένο κατά το μέγεθος της υπερβάλλουσας ζήτησης, (*stock on hand - backorders*). Η υπερβάλλουσα ζήτηση είναι πιθανό να εμφανιστεί (προσωρινά) μόνο όταν το διαθέσιμο απόθεμα είναι μηδενικό, οπότε εξαιτίας της ζήτησης που δεν έχει ικανοποιηθεί, το επίπεδο αποθέματος γίνεται αρνητικό.

2.2.3 Θέση του αποθέματος (Inventory position): (stock on hand + on order - backorders) είναι το επίπεδο αποθέματος αυξημένο κατά την ποσότητα παραγγελίας η οποία δεν έχει ακόμη παραληφθεί. Το επίπεδο αποθέματος θα πρέπει να είναι μη αρνητικό, ώστε να μην υπάρχει περίπτωση να μην ικανοποιηθεί η ζήτηση μετά την παραλαβή της αναμενόμενης παραγγελίας.

2.2.4 Απόθεμα ασφαλείας (Safety ή buffer stock): η ποσότητα αποθέματος που διατηρείται επιπλέον από την αναμενόμενη ζήτηση. Η διατήρηση αποθεμάτων ασφαλείας εξασφαλίζει την ομαλή λειτουργία της παραγωγικής διαδικασίας σε περίπτωση προβλημάτων που δημιουργούνται όταν οι προμηθευτές δεν παραδίδουν την απαιτούμενη ποσότητα στην προκαθορισμένη ημερομηνία σε αποδεκτή ποιότητα ή όταν τα παρασκευασμένα προϊόντα έχουν υποστεί ζημιές ή απαιτούν περαιτέρω διορθώσεις. Δηλώνεται ως το μέσο επίπεδο αποθέματος ακριβώς πριν την άφιξη της παραγγελίας.

2.3 Πολιτικές διαχείρισης πολυβάθμιων συστημάτων των αποθεμάτων

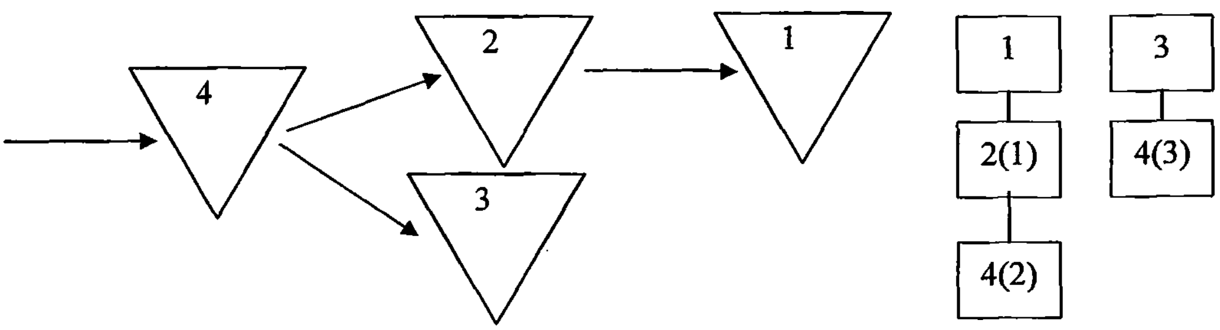
Είναι αναμενόμενο ο καθορισμός της βέλτιστης πολιτικής σε ένα πολυβάθμιο σύστημα διαχείρισης αποθεμάτων να είναι αρκετά δύσκολος. Η απόφαση για μεταφορά μιας ποσότητας προϊόντος από μια αποθήκη σε μια άλλη ίσως εξαρτάται από το απόθεμα που υπάρχει στις αποθήκες του συστήματος. Συχνά η αντιμετώπιση ενός συστήματος ολιστικά (λήψη αποφάσεων κεντρικά) μπορεί να έχει μειονεκτήματα αφού μια τέτοια αντιμετώπιση απαιτεί τη συγκέντρωση δεδομένων η οποία οδηγεί σε *πρόσθετο κόστος* παρά την εξέλιξη των τεχνολογιών της πληροφορικής και επικοινωνιών (ΤΠΕ). Επιπλέον εξ' ολοκλήρου γενικές ολιστικές πολιτικές είναι δύσκολο να παραχθούν. Επομένως, είναι πιο βολικό να περιοριστεί ο βαθμός συγκέντρωσης της πολιτικής διαχείρισης και να χρησιμοποιηθούν σχετικά απλοί τοπικοί κανόνες διαχείρισης που είναι όμοιοι με πολιτικές που χρησιμοποιούνται σε συστήματα ενός επιπέδου (*single-echelon systems*). Έτσι, στα πολυβάθμια συστήματα διαχείρισης αποθεμάτων συνηθίζεται η εφαρμογή απλών πολιτικών σημείου αναπαραγγελίας (*reorder point policies*). Άρα, καθορισμός της βέλτιστης πολιτικής συνήθως σημαίνει ότι γίνεται προσπάθεια να συντονιστούν απλοί κανόνες απόφασης με τον καλύτερο δυνατό τρόπο. Ένα πρόβλημα τότε είναι η εύρεση σημείων αναπαραγγελίας για τις διάφορες αποθήκες, που θα δώσουν έναν ικανοποιητικό έλεγχο ολόκληρου του συστήματος. Η ανάγκη για αποκέντρωση των αποφάσεων είναι γενικά μεγαλύτερη σ' ένα σύστημα διανομής παρά σε ένα σύστημα παραγωγής.

Η διαχείριση των πολυβάθμιων συστημάτων των αποθεμάτων γίνεται με χρήση δύο πολιτικών οι οποίες στηρίζονται στις έννοιες του αποθέματος αποθήκης (*installation stock*) και του αποθέματος βαθμίδας (*echelon stock*) οπότε ονομάζονται *installation stock* και *echelon stock* πολιτικές αντίστοιχα.

Το απόθεμα αποθήκης (*installation stock*) αναφέρεται στο απόθεμα κάθε αποθήκης ξεχωριστά επομένως η *θέση του αποθέματος* αποθήκης (*installation inventory position*) ορίζεται ως το άθροισμα του διαθέσιμου αποθέματος (*stock on hand*) αυξημένο κατά τις προγραμματισμένες παραγγελίες σ' αυτή την αποθήκη, μείον τις εκκρεμείς παραγγελίες (*backorders*).

Κεντρικό ρόλο στην ανάλυση των πολυβάθμιων συστημάτων των αποθεμάτων κατέχει η έννοια του *αποθέματος βαθμίδας* (*echelon stock*), που εισήγαγε ο Clark [11]. Η *θέση του αποθέματος βαθμίδας* στην κεντρική αποθήκη ορίζεται ως το άθροισμα της *θέσης του αποθέματος* της κεντρικής αποθήκης + το άθροισμα των *θέσεων των αποθεμάτων* των αποθηκών του πιο κάτω επιπέδου. Για αποθήκες που δεν έχουν πιο κάτω επίπεδο (όπως οι αποθήκες στο Σχήμα 2.2 και η αποθήκη 1 στο Σχήμα 2.3) ισχύει ότι η ***θέση του αποθέματος βαθμίδας = θέση του αποθέματος της αποθήκης***. Η *θέση του αποθέματος βαθμίδας* στην κεντρική αποθήκη στο Σχήμα 2.2 είναι το άθροισμα των *θέσεων των αποθεμάτων* της κεντρικής αποθήκης και των λιανοπωλητών. Ομοίως, η *θέση του αποθέματος βαθμίδας* των **Ν** αποθηκών στο Σχήμα 2.3, είναι το άθροισμα των *θέσεων των αποθεμάτων* των 1,2,3,..,Ν αποθηκών.

Έστω ένα σύστημα αποθεμάτων και το αντίστοιχο *bill of material* ενός προϊόντος στο Σχήμα 2.7.



Σχήμα 2.7. Σύστημα αποθεμάτων και αντίστοιχες δομές προϊόντων

Ο αριθμός μέσα στην παρένθεση χρησιμοποιείται για να δηλώσει τον αριθμό των μονάδων που απαιτούνται για την παραγωγή του προϊόντος στο πιο πάνω επίπεδο. Για παράδειγμα, το προϊόν 2 απαιτεί 2 μονάδες του προϊόντος 4, ενώ το προϊόν 3 απαιτεί 3 μονάδες του προϊόντος 4. Εξετάζεται η αποθήκη του προϊόντος 4. Αν η *θέση του αποθέματος* είναι χαμηλή, αυτό αποτελεί ένδειξη για αναπλήρωση του αποθέματος της. Όμως, αν οι αποθήκες των προϊόντων 1, 2, 3 έχουν πολύ υψηλό απόθεμα, τότε δεν υπάρχει άμεση ανάγκη για περισσότερες μονάδες του προϊόντος 4 και επομένως, δεν είναι απαραίτητη η αναπλήρωση αποθέματος για το εν λόγω προϊόν. Συνεπώς η ιδέα για χρήση του *αποθέματος βαθμίδας* είναι να ληφθεί υπ' όψη και το απόθεμα του προϊόντος της πιο κάτω αποθήκης. Αυτό σημαίνει ότι προστίθενται επίσης οι μονάδες του προϊόντος 4 που περιλαμβάνονται στις *θέσεις των αποθεμάτων* των προϊόντων 1, 2 και 3 όταν λαμβάνεται απόφαση για την αναπλήρωση του αποθέματος του προϊόντος 4. Όμως, αυτή η τακτική δεν δουλεύει πάντα καλά αφού αν για παράδειγμα το απόθεμα του προϊόντος 3 είναι πολύ υψηλό, ενώ τα αποθέματα των προϊόντων 1 και 2 είναι πολύ χαμηλά, το *απόθεμα βαθμίδας* του προϊόντος 4 τότε ίσως είναι πολύ υψηλό και δεν πραγματοποιείται καμία αναπλήρωση, αν και απαιτείται η αναπλήρωση του αποθέματος στις αποθήκες 1 και 2. Στο επόμενο παράδειγμα διευκρινίζεται περισσότερο η έννοια του *αποθέματος βαθμίδας*.

Παράδειγμα 2.1

Έστω το σύστημα αποθεμάτων στο Σχήμα 2.7. Τα προϊόντα 1 και 3 δεν έχουν πιο κάτω αποθήκη. Επομένως, σ' αυτά τα προϊόντα οι *θέσεις των αποθεμάτων βαθμίδας* είναι ίσες με τις *θέσεις των αποθεμάτων αποθήκης*. Εξετάζεται το προϊόν 2. Επειδή κάθε μονάδα του προϊόντος 1 απαιτεί μία μονάδα του προϊόντος 2, η *θέση του αποθέματος βαθμίδας* του προϊόντος 2 προέκυψε ως άθροισμα της *θέσης του αποθέματος* στην αποθήκη 2 και του αποθέματος που εμπεριέχεται στη *θέση του αποθέματος βαθμίδας* του προϊόντος 1 (2+5=7 μονάδες). Το προϊόν 4 απαιτείται για την παραγωγή των προϊόντων 1,2 και 3. Κάθε μονάδα των προϊόντων 1 και 2 απαιτεί 2 μονάδες του προϊόντος 4 και κάθε μονάδα του προϊόντος 3 απαιτεί 3 μονάδες του προϊόντος 4. Συνεπώς, η *θέση του αποθέματος βαθμίδας* του προϊόντος 4 είναι 5+3*3+2*2+2*5=28. Εναλλακτικά, μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι *θέσεις των αποθεμάτων βαθμίδας* των προϊόντων 2 και 3 και να προκύψει το ίδιο αποτελέσματα : 5+2*7+3*3=28 .

Πίνακας 2.1 . Η *θέση του αποθέματος* στην αποθήκη και η *θέση του αποθέματος βαθμίδας* για το πολυβάθμιο σύστημα του Σχήματος 2.7.

Προϊόντα	*θέση του αποθέματος στην αποθήκη*	*θέση του αποθέματος βαθμίδας*
1	**5**	**5**
2	**2**	**7**
3	**3**	**3**
4	**5**	**28**

Σημειώνεται, ότι αν ο αριθμός των μονάδων που απαιτούνται σ' ένα προϊόν πιο πάνω επίπεδου είναι πάντα 1, η *θέση του αποθέματος βαθμίδας* προκύπτει απλά ως το άθροισμα της *θέσης του αποθέματος στην αποθήκη* + το άθροισμα των *θέσεων των αποθεμάτων* των προϊόντων των πιο κάτω αποθηκών. Αυτή είναι η περίπτωση για ένα σύστημα διανομής, όπου όλες οι αποθήκες περιλαμβάνουν το ίδιο απόθεμα. Επίσης, υπενθυμίζεται ότι μπορεί πάντα να προκύπτει αυτή η κατάσταση όταν αντιμετωπίζονται *σειριακά* ή *συστήματα συναρμολόγησης* με κατάλληλη αλλαγή των μονάδων.

2.3.1 Πολιτικές διαχείρισης πολυβάθμιων συστημάτων οι οποίες στηρίζονται στο απόθεμα αποθήκης και στο απόθεμα βαθμίδας (Installation stock και echelon stock πολιτικές).

Κατά τη διαχείριση πολυβάθμιων συστημάτων με πολιτικές οι οποίες στηρίζονται στο απόθεμα αποθήκης (installation stock πολιτικές) η ποσότητα παραγγελίας εξαρτάται από το απόθεμα της αποθήκης, που πραγματοποιεί την παραγγελία. Προφανώς πρόκειται για πολιτικές διαχείρισης του συστήματος αποκεντρωτικά, με πλεονέκτημα ότι δεν απαιτείται καμιά πληροφορία για την κατάσταση του αποθέματος σε άλλες αποθήκες. Ωστόσο, εξαιτίας της έλλειψης πληροφοριών για ολόκληρο το σύστημα, η αποτελεσματικότητα-αποδοτικότητα αυτών των πολιτικών όσον αφορά το κόστος, περιορίζεται. Για παράδειγμα, η υπερβολική ζήτηση σε μια αποθήκη, ίσως δεν αναγνωρίζεται σε ένα πιο πάνω επίπεδο, λόγω της καθυστέρησης στη μετάδοση των πληροφοριών (*bullwhip effect*).
Οι πολιτικές διαχείρισης οι οποίες στηρίζονται στο *απόθεμα αποθήκης* (*installation stock* πολιτικές) και στο *απόθεμα βαθμίδας* (*echelon stock* πολιτικές) οδηγούν σε μια πιο ενοποιημένη διαχείριση πολυβάθμιων συστημάτων αφού οι αποφάσεις για παραγγελία βασίζονται στη πλήρη γνώση του αποθέματος χαμηλότερων επιπέδων, απαιτώντας πληροφορίες για το πώς τα προϊόντα αποθεματοποιούνται μέσα στο σύστημα.

2.3.1.1 Πολιτικές διαχείρισης οι οποίες στηρίζονται στο απόθεμα αποθήκης

Ένας συνήθης τρόπος διαχείρισης ενός πολυβάθμιου συστήματος αποθεμάτων είναι η εφαρμογή σε κάθε αποθήκη μιας **(r,Q)** πολιτικής, όπου r είναι το σημείο αναπαραγγελίας και Q είναι η ποσότητα παραγγελίας ή μιας *S* πολιτικής. Όπως προαναφέρθηκε κάθε αποθήκη ελέγχει τις *θέσεις των αποθεμάτων* της. Όταν η *θέση του αποθέματος* είναι μικρότερη ή ίση με r, τότε μια ποσότητα μεγέθους Q παραγγέλλεται, έτσι ώστε η νέα *θέση* του *αποθέματος* να είναι αυστηρά μεγαλύτερη από r και μικρότερη ή ίση με r+Q.

Ώστε να ισχύει η σχέση : **r < θέση του αποθέματος ≤ r+ Q**

Στην περίπτωση της συνεχούς επιθεώρησης και συνεχούς ή μοναδιαίας ζήτησης, τα σημεία αναπαραγγελίας θα ταυτίζονται ακριβώς όταν πραγματοποιείται η παραγγελία, τότε αυτή η **(r,Q)** πολιτική είναι ισοδύναμη με μια (s,S) πολιτική με s=r και S=r+Q. Μια *base stock* πολιτική ή *order-up-to-S* ή *S* πολιτική, σημαίνει ότι πάντα γίνεται παραγγελία μέχρι η *θέση του αποθέματος* να φτάσει στο επιθυμητό επίπεδο *S*. Στην περίπτωση της ακέραιας διακριτής ζήτησης, μια τέτοια πολιτική είναι μια ειδική περίπτωση μιας **(r,Q)** πολιτικής, με r=S-1 και Q=1 και μιας **(s,S)** πολιτικής με s=S-1. Αυτή η πολιτική συχνά δηλώνεται ως **(S-1,S)** πολιτική.

Οι **(r,Q)** πολιτικές χρησιμοποιούνται συχνά στη διαχείριση των πολυβάθμιων συστημάτων, που σημαίνει ότι κάθε αποθήκη εφαρμόζει μια τέτοια πολιτική παρόλο που τα σημεία αναπαραγγελίας και οι ποσότητες παραγγελίας είναι τυπικά διαφορετικά για τις αποθήκες. Όταν αντιμετωπίζονται πολυβάθμια συστήματα αποθεμάτων, η πολιτική συνήθως δηλώνεται ως *installation stock* **(r,Q)** πολιτική και r είναι το *installation stock σημείο αναπαραγγελίας*.

Η *βέλτιστη πολιτική* για ένα σύστημα ενός επιπέδου είναι γενικά του τύπου **(s,S)**. Ωστόσο, αυτή η πολιτική δεν συνηθίζεται να εφαρμόζεται σε πολυβάθμια συστήματα και οι αποθήκες χρησιμοποιούν τις κάπως πιο απλές **(r,Q)** πολιτικές.

Επίσης, στα πολυβάθμια συστήματα αποθεμάτων συνηθίζεται να εφαρμόζονται KANBAN πολιτικές. Μια KANBAN πολιτική μπορεί να ερμηνευθεί ως μια *installation stock* **(r,Q)** πολιτική με κάποιους συγκεκριμένους περιορισμούς, όπου κατά τον ορισμό της *θέσης του αποθέματος* δεν αφαιρείται ο αριθμός των εκκρεμών παραγγελιών.

2.3.1.2 Πολιτικές διαχείρισης οι οποίες στηρίζονται στο απόθεμα βαθμίδας

Αρχικά οι Clark και Scarf [12] χρησιμοποιώντας την έννοια του αποθέματος βαθμίδας προσδιόρισαν την βέλτιστη από τις *echelon order-up-to* πολιτικές σε ένα *σειριακό σύστημα*, στο οποίο δεν υπάρχει καθόλου *κόστος εκκίνησης/παραγγελίας* στην κεντρική αποθήκη. Αργότερα, οι Chen και Zheng [10] μελέτησαν ένα *σειριακό σύστημα*, όπου σε όλες τις αποθήκες λαμβάνεται υπόψη το *κόστος εκκίνησης*. Έτσι, πρότειναν κάθε αποθήκη να ελέγχεται από μια *echelon stock* **(s,nQ)** πολιτική. Τα αποτελέσματά τους εφαρμόζονται και σε συστήματα συνεχούς επιθεώρησης με compound Poisson ζήτηση και σε περιοδικά συστήματα επιθεώρησης με ανεξάρτητη ομοιόμορφα κατανεμημένη ζήτηση. Στη βιβλιογραφία είναι περιορισμένα τα αποτελέσματα για συνεχούς επιθεώρησης *echelon stock πολιτικές* στα πολυβάθμια συστήματα (van Donselaar [47]). Αντιμετωπίζονται προβλήματα διαχείρισης πολυβάθμιων συστημάτων περιοδικής επιθεώρησης με *echelon stock πολιτικές*. Μια *echelon stock* **(r,Q)** πολιτική λειτουργεί ακριβώς όπως μια *installation stock* **(r,Q)** πολιτική, με μόνη διαφορά, ότι εξετάζεται η *θέση του αποθέματος βαθμίδας* αντί της *θέσης του αποθέματος μιας αποθήκης*. Κανονικά η *θέση του αποθέματος βαθμίδας* είναι μεγαλύτερη από την *θέση του αποθέματος αποθήκης*. Αυτό συνεπάγεται ότι ένα *echelon stock σημείο αναπαραγγελίας* είναι γενικά μεγαλύτερο από ένα *installation stock σημείο αναπαραγγελίας*. Η βασική ιδέα μιας *echelon stock reorder point* πολιτικής είναι, ότι η ανάγκη για ανεφοδιασμό μιας αποθήκης δεν επιτυγχάνεται μόνο από το απόθεμα στην αποθήκη, αλλά πρέπει να ληφθεί υπόψη και το απόθεμα των αποθηκών του πιο κάτω επιπέδου.

2.3.2 Σύγκριση των installation και των echelon stock (r,Q) πολιτικών

Στην ενότητα αυτή θα εξεταστεί η σχέση ανάμεσα στις *installation stock* και στις *echelon stock* **(r,Q)** πολιτικές. Έστω το *σειριακό σύστημα* αποθεμάτων του Σχήματος 2.3. Η αποθήκη 1 είναι η αποθήκη του τελικού προϊόντος που αντιμετωπίζει τη ζήτηση του πελάτη. Η αποθήκη Ν αποτελεί την αποθήκη των πρώτων υλών, που αποκτήθηκαν από έναν εξωτερικό προμηθευτή. Όταν παράγεται το προϊόν n, $(1 \le n \le N-1)$, απαιτείται μια μονάδα του προϊόντος n+1. Υποτίθεται ότι οι ποσότητες παραγγελίας δίνονται.

Q_n είναι η ποσότητα παραγγελίας στην αποθήκη n.

Επίσης, υπάρχει μια πρόσθετη υπόθεση ότι η ποσότητα παραγγελίας στην αποθήκη n είναι ένα ακέραιο πολλαπλάσιο της ποσότητας παραγγελίας στην αποθήκη n-1 (είναι βολικό να οριστεί ότι $Q_0=1$) :

$$Q_n = j_n Q_{n-1} \tag{2.1}$$

όπου j_n είναι ένας θετικός ακέραιος. Αυτή η υπόθεση, η οποία είναι συνηθισμένη στην βιβλιογραφία, είναι λογική αν η πολιτική επιμερισμού (*rationing policy*) στις αποθήκες μπορεί να ικανοποιεί ολόκληρη ή καθόλου μια παραγγελία, επειδή το απόθεμα της αποθήκης n, θα πρέπει πάντα να αποτελείται από έναν ακέραιο αριθμό της αμέσως πιο κάτω αποθήκης, μεγέθους, Q_{n-1}.

Στη συνέχεια εισάγεται ο εξής συμβολισμός :

IP_n^i : η *θέση του αποθέματος* στην τελική αποθήκη n ,

$IP_n^e = IP_n^i + IP_{n-1}^i + IP_{n-2}^i + \dots\dots + IP_1^i$: η *θέση του αποθέματος βαθμίδας* στην τελική αποθήκη n ,

r_n^i : το *installation stock σημείο αναπαραγγελίας* στην τελική αποθήκη n ,

r_n^e : το *echelon stock σημείο αναπαραγγελίας* στην τελική αποθήκη n ,

d : η ζήτηση ανά χρονική μονάδα για κάθε τελική αποθήκη ,

μ : η μέση τιμή της ζήτησης ανά περίοδο ,

σ : η τυπική απόκλιση της ζήτησης ανά περίοδο ,

A_i : το *κόστος παραγγελίας* για την τελική αποθήκη i ,

e_i : *το κόστος διατήρησης βαθμίδας (echelon holding cost)* ανά μονάδα προϊόντος και περίοδο στην τελική αποθήκη i , με $e_1 = h_1 - h_2$ και $e_2 = h_2$,

h_i : το *κόστος διατήρησης* ανά μονάδα προϊόντος και περίοδο στην τελική αποθήκη i , με $h_1 = e_1 + e_2$ και $h_2 = e_2$,

b_1 : το *κόστος έλλειψης* ανά μονάδα προϊόντος και ανά περίοδο ,

S_i : η *echelon stock order-up-to* θέση στην τελική αποθήκη i ,

Υποτίθεται ότι το σύστημα ξεκινάει με *αρχικές θέσεις αποθεμάτων* IP_n^{i0} και IP_n^{e0} ικανοποιώντας τις σχέσεις :

$$r_n^i < IP_n^{i0} \le r_n^i + Q_n \quad \text{και} \quad r_n^e < IP_n^{e0} \le r_n^e + Q_n \tag{2.2}$$

Σημειώνεται ότι αυτές οι συνθήκες ικανοποιούνται πάντα, όταν καθεμιά τελική αποθήκη παραγγείλει τουλάχιστον μια φορά.

Αρχικές Παρατηρήσεις

Installation stock πολιτική: Αν η αποθήκη n παραγγείλει, τότε οι n-1, n-2,...,1 αποθήκες πρέπει να παραγγείλουν την ίδια στιγμή. Ομοίως, αν η αποθήκη n δεν παραγγείλει, δεν θα έχει παραγγείλει νωρίτερα η αποθήκη n-1 κ.ο.κ. Σε μια τέτοια περίπτωση λέμε ότι μια *installation stock* πολιτική είναι πάντα *nested.*

Echelon stock πολιτική: Αν η αποθήκη n-1 παραγγείλει τότε η *θέση του αποθέματος* της θα αυξηθεί κατά την ποσότητα που παρήγγειλε, αλλά την ίδια στιγμή η *θέση του αποθέματος* της αποθήκης n θα μειωθεί κατά την ίδια ποσότητα. Αυτό σημαίνει ότι η *θέση του αποθέματος βαθμίδας* στην αποθήκη n θα παραμείνει αμετάβλητη (η IP_n^e δεν επηρεάζεται από τις παραγγελίες στις αποθήκες 1,2,3,.., n-1). Η *θέση του αποθέματος βαθμίδας* θα μειωθεί μόνο εξαιτίας της τελικής ζήτησης στην αποθήκη 1 και από τις παραγγελίες για ανεφοδιασμό στην αποθήκη n. Άρα μια *echelon stock* πολιτική δεν είναι απαραίτητα πάντα *nested.*

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποτίθεται ότι $IP_n^{i0} - r_n^i$ να είναι ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του Q_{n-1} :

$$IP_n^{i0} - r_n^i = k_n Q_{n-1} \tag{2.3}$$

όπου $0 \leq k_n \leq j_n$ είναι ένας ακέραιος. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, όλοι οι ανεφοδιασμοί καθώς επίσης και ολόκληρη η ζήτηση στην αποθήκη n είναι ακέραια πολλαπλάσια του Q_{n-1} λόγω της σχέσης (2.1). Επομένως, αν επιλεγεί ένα εναλλακτικό *σημείο αναπαραγγελίας*, που να ικανοποιεί την (2.3) δηλαδή, $r_n^{i'} = r_n^i + y$, όπου $1 \leq y < Q_{n-1}$, αυτό δεν θα επηρεάζει τις στιγμές των μελλοντικών παραγγελιών. Η μόνη διαφορά είναι ότι η *θέση του αποθέματος* όταν γίνει η παραγγελία, θα είναι y μονάδες πιο κάτω απ' το *σημείο αναπαραγγελίας*, επειδή αυτό είναι y μονάδες υψηλότερο.

Συνθήκες Ισοδυναμίας

Στη συνέχεια θα εξεταστούν οι περιπτώσεις στις οποίες μια *installation stock* πολιτική είναι ισοδύναμη με μια *echelon stock* πολιτική. Υποτίθεται ότι τα αρχικά αποθέματα δίνονται. Ο όρος "ισοδύναμες πολιτικές" σημαίνει ότι οι *θέσεις των αποθεμάτων* (ή οι *θέσεις των αποθεμάτων βαθμίδας*) είναι ίσες μεταξύ των 2 πολιτικών σε όλες τις στιγμές και για όλες τις ακολουθίες ζήτησης. Ανεξάρτητα από την δομή κόστους, συνεπάγεται ότι το κόστος είναι ίδιο μεταξύ αυτών των πολιτικών. Εξετάζεται πρώτα μια *installation stock* πολιτική ικανοποιώντας την (2.3). Αρχικά υποτίθεται μοναδιαία ζήτηση. Αυτό πρέπει να συμβεί κάποια στιγμή που όλες οι αποθήκες θα παραγγείλουν ταυτοχρόνως. Μετά την παραγγελία, όλες οι *θέσεις των αποθεμάτων* είναι στο μέγιστο επίπεδό τους δηλαδή :

$$IP_n^i = r_n^i + Q_n \tag{2.4}$$

Αλλά για μια ισοδύναμη *echelon stock* πολιτική, πρέπει να ισχύει :

$$IP_n^e = \sum_{k=1}^{n} IP_n^k = r_n^e + Q_n = \sum_{k=1}^{n} (r_k^i + Q_k) \tag{2.5}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.4) και (2.5) προκύπτει ότι :

$$r_1^e = r_1^i \quad , \quad r_n^e = r_n^i + \sum_{k=1}^{n-1} (r_k^i + Q_k) \tag{2.6}$$

ή ισοδύναμα

$$r_1^i = r_1^e \quad , \quad r_n^i = r_n^e - r_{n-1}^e - Q_{n-1} \tag{2.7}$$

Οι συνθήκες (2.6) και (2.7) δεν είναι μόνο αναγκαίες αλλά και ικανές, έτσι διατυπώνεται η ακόλουθη πρόταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.1

Μια *installation stock reorder point* πολιτική μπορεί πάντα να αντικατασταθεί από μια ισοδύναμη *echelon stock reorder point* πολιτική.

Απόδειξη :

Υποτίθεται ότι δίνεται μια *installation stock* πολιτική. Εξετάζεται η αποθήκη n. Υπενθυμίζεται ότι μια *installation stock* πολιτική είναι *nested*. Επιπλέον, λόγω της συνθήκης ότι $IP_n^{i0} - r_n^i$ είναι ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του Q_{n-1}, τα *σημεία αναπαραγγελίας* ταυτίζονται ακριβώς, όταν πραγματοποιείται μια παραγγελία. Υποτίθεται ότι η αποθήκη n παραγγέλλει. Η *θέση του αποθέματος βαθμίδας* λίγο μετά την παραγγελία πρέπει να είναι :

$$IP_n^e = \sum_{k=1}^{n} (r_k^i + Q_k)$$

Λίγο πριν την παραγγελία, η *θέση του αποθέματος βαθμίδας* στην αποθήκη n είναι Q_n μονάδες χαμηλότερη. Τότε γίνεται σαφές ότι οι παραγγελίες θα πραγματοποιούνται ακριβώς τις ίδιες στιγμές. Συνεπώς, η *installation stock* πολιτική στην αποθήκη n, μπορεί να αντικατασταθεί με μια *echelon stock* πολιτική με *σημεία αναπαραγγελίας* :

$$r_n^e = r_n^i + \sum_{k=1}^{n-1} (r_k^i + Q_k) \tag{2.6}$$

Αυτό ισχύει για κάθε αποθήκη.

Αν η συνθήκη ότι $IP_n^{i0} - r_n^i$ είναι ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του Q_{n-1}, δεν ικανοποιείται, πρέπει να γίνει αλλαγή με ένα ισοδύναμο r_n^i που να ικανοποιεί την συνθήκη. Μετά απ' αυτό η (2.6) μπορεί να εφαρμοστεί για να προκύψει η *echelon stock* πολιτική.

Κάτω από τις ίδιες υποθέσεις αποδεικνύεται και η Πρόταση 2.2.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.2

Μια *echelon stock reorder point* πολιτική, η οποία είναι *nested*, μπορεί πάντα να αντικατασταθεί από μια ισοδύναμη *installation stock reorder point* πολιτική.

Απόδειξη:

Έστω ότι δίνεται μια *nested echelon stock* πολιτική. Στην αποθήκη 1, δεν υπάρχει διαφορά ανάμεσα σε μια *echelon stock* και σε μια *installation stock* πολιτική, αφού οι παραγγελίες θα πραγματοποιούνται τις ίδιες στιγμές. Συνεπώς, $r_1^i = r_1^e$. Έστω μια παραγγελία στην αποθήκη n >1 με *echelon stock* πολιτική. Λόγω της μοναδιαίας ζήτησης, όλες οι αποθήκες θα έχουν ακριβώς τα ίδια *σημεία αναπαραγγελίας*, όταν παραγγέλλουν. Επειδή η πολιτική είναι *nested*, είναι γνωστό ότι αν η αποθήκη n παραγγείλει, οι αποθήκες 1,2,3,...,n-1 θα παραγγείλουν επίσης. Αμέσως μετά την παραγγελία, η *θέση του αποθέματος* στην αποθήκη n είναι :

$$IP_n^i = r_n^i + Q_n = IP_n^e - IP_{n-1}^e = r_n^e + Q_n - r_{n-1}^e - Q_{n-1}$$

Συνεπώς, μια *installation stock* πολιτική με *σημεία αναπαραγγελίας* :

$$r_1^i = r_1^e \quad , \quad r_n^i = r_n^e - r_{n-1}^e - Q_{n-1} \quad , \quad n>1 \tag{2.7}$$

θα πραγματοποιεί παραγγελίες στις ίδιες στιγμές όπως η *echelon stock* πολιτική. Παρατηρείται ότι οι σχέσεις (2.6) και (2.7) είναι ισοδύναμες. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

Σημειώνεται ότι οι Προτάσεις 2.1 και 2.2 ισχύουν για όλους τους τύπους ζήτησης και για περιοδική επιθεώρηση κι επιπλέον μπορούν να επεκταθούν σε *συστήματα συναρμολόγησης* (Axsater, S., Rosling, K. [3]).

Παράδειγμα 2.2

Έστω ένα *σειριακό σύστημα* με N=3 αποθήκες και ποσότητες παραγγελίας $Q_1 = 5$, $Q_2 = 10$, $Q_3 = 20$. Οι *αρχικές θέσεις των αποθεμάτων* είναι : $IP_1^{i0} = 10$, $IP_2^{i0} = 20$ και $IP_3^{i0} = 30$. Η ζήτηση για το προϊόν 1 είναι μια μονάδα ανά μονάδα χρόνου. Εξετάζεται πρώτα μια *installation stock* πολιτική με *σημεία αναπαραγγελίας* : $r_1^i = 5$, $r_2^i = 10$ και $r_3^i = 10$. Σημειώνεται ότι οι υποθέσεις, ότι τα Q_n καθώς επίσης και τα $IP_n^{i0} - r_n^i$ είναι πολλαπλάσια του Q_{n-1}, ικανοποιούνται. Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι η αποθήκη 1 θα παραγγείλει τις στιγμές 5, 10, 15,... Η ζήτηση στην αποθήκη 2 είναι συνεπώς 5 μονάδες σε καθεμιά απ' αυτές τις στιγμές. Αυτό σημαίνει ότι η αποθήκη 2 θα παραγγείλει τις στιγμές 10, 20, 30,... Η ζήτηση για 10 μονάδες στην αποθήκη 3 σε αυτές τις στιγμές, θα οδηγήσει σε παραγγελίες τις στιγμές 20, 40, 60,... Χρησιμοποιώντας την (2.6) προκύπτει η ισοδύναμη *echelon stock* πολιτική με *σημεία αναπαραγγελίας* :

$$r_1^e = r_1^i = 5,$$

$$r_2^e = r_2^i + r_1^i + Q_1 = 10 + 5 + 5 = 20$$

$$r_3^e = r_3^i + \left(r_2^i + Q_2 + r_1^i + Q_1\right) = 10 + (10 + 10 + 5 + 5) = 40.$$

Είναι γνωστό ότι όταν εξετάζεται το *απόθεμα βαθμίδας*, οι *θέσεις των αποθεμάτων* σε όλες τις αποθήκες μειώνονται κατά μια μονάδα προϊόντος κάθε μονάδα χρόνου, από την τελική ζήτηση και όχι από τις εσωτερικές παραγγελίες του συστήματος. Οι *αρχικές θέσεις των αποθεμάτων* είναι :

$$IP_1^{e0} = 10 \ , \ IP_2^{e0} = IP_2^{i0} + IP_1^{e0} = 20 + 10 = 30 \ \text{ και } \ IP_3^{e0} = IP_3^{i0} + IP_2^{e0} = 30 + 30 = 60$$

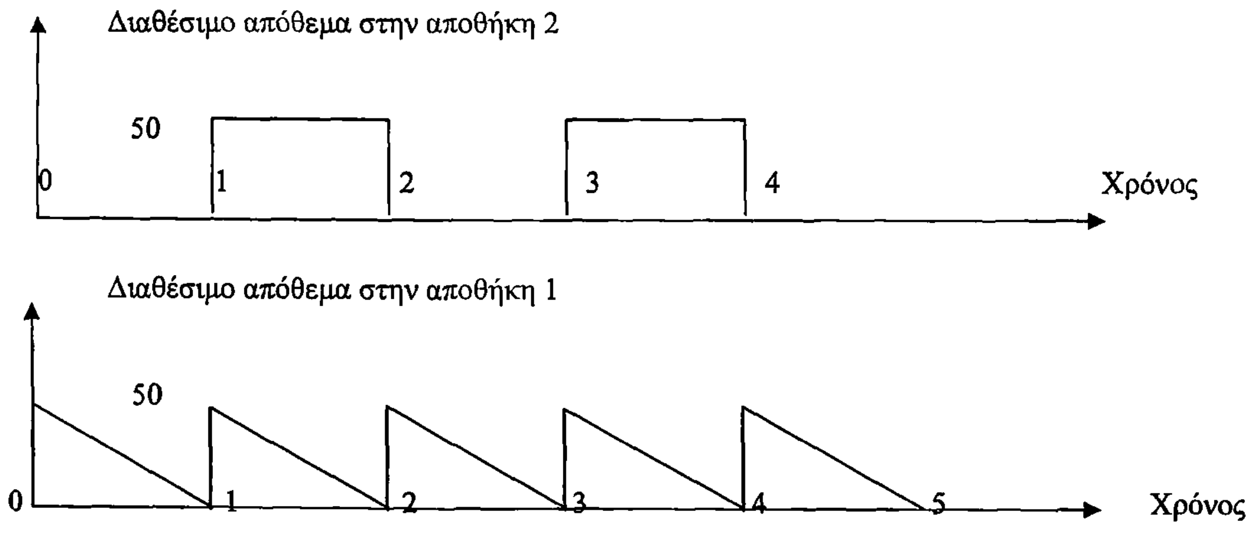
Εύκολα επαληθεύεται ότι οι παραγγελίες θα τοποθετηθούν τις ίδιες στιγμές όπως με την *installation stock* πολιτική. Υποτίθεται τότε ότι αλλάζει η *echelon stock reorder point* πολιτική στην αποθήκη 3, με $r_3^e = 42$. Αυτό δεν θα αλλάξει τις παραγγελίες στις αποθήκες 1 και 2, αλλά οι παραγγελίες στην αποθήκη 3 θα πραγματοποιηθούν 2 χρονικές μονάδες νωρίτερα, δηλαδή τις στιγμές 18,38,58,... Υπενθυμίζεται ότι το *απόθεμα βαθμίδας* μειώνεται κατά 1 μονάδα τη στιγμή. Η *echelon stock* πολιτική που προκύπτει δεν είναι *nested* και είναι αδύνατο να προκύψει ο ίδιος έλεγχος με μια *installation stock* πολιτική.

Οι Προτάσεις 2.1 και 2.2 δείχνουν ότι σε κάθε *σειριακό σύστημα* αποθεμάτων, μια *installation stock* πολιτική είναι απλά μια ειδική περίπτωση μιας *echelon stock* πολιτικής. Επίσης, αυτό ισχύει για *συστήματα συναρμολόγησης*. Υπενθυμίζεται ότι αυτά τα αποτελέσματα εξαρτώνται από την σχέση (2.1). Ένα πλεονέκτημα μιας *installation stock* πολιτικής είναι ότι χρειάζονται μόνο τοπικές πληροφορίες για τον καθορισμό των παραμέτρων ελέγχου του συστήματος. Για να εφαρμοστεί μια *echelon stock* πολιτική χρειάζονται η *θέση του αποθέματος* της αποθήκης και οι *θέσεις των αποθεμάτων* όλων των πιο κάτω αποθηκών. Μια εναλλακτική προσέγγιση είναι η καταγραφή πληροφοριών για την *αρχική θέση του αποθέματος βαθμίδας* και η στενή παρακολούθηση της τελική ζήτησης, όμως στην πράξη είναι συνήθως δύσκολο, να προσδιοριστεί το *απόθεμα βαθμίδας* από αυτές τις πληροφορίες, εξαιτίας διάφορων μεταβολών στις *θέσεις των αποθεμάτων*, λόγω ζημιάς και μικρής διάρκειας ζωής των προϊόντων. Η μεγαλύτερη γενίκευση μιας *echelon stock* πολιτικής μπορεί να είναι ένα πλεονέκτημα σε συγκεκριμένες καταστάσεις. Αυτό θα διευκρινιστεί με ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.3

Έστω ένα *διβάθμιο σειριακό σύστημα* (Σχήμα 2.1) και ποσότητες παραγγελίας, $Q_1 = 50$ και $Q_2 = 100$. Υποτίθεται ότι η τελική ζήτηση στην αποθήκη 1 είναι σταθερή και συνεχής και ίση με d=50 μονάδες προϊόντος ανά μονάδα χρόνου. Ο *χρόνος απόκρισης* στην αποθήκη 1 (αποκλείοντας πιθανές καθυστερήσεις στην αποθήκη 2) είναι 1 μονάδα χρόνου, ενώ ο *χρόνος απόκρισης* στην αποθήκη 2 είναι 0.5 χρονικές μονάδες. Στην αποθήκη 1 δεν επιτρέπονται εκκρεμείς παραγγελίες και το *κόστος διατήρησης* είναι υψηλότερο από αυτό στην αποθήκη 2. Ο βέλτιστος έλεγχος του συστήματος απεικονίζεται στο Σχήμα 2.8.

Για παράδειγμα, θεωρούνται οι 2 ποσότητες που διανέμονται στην αποθήκη 1 τις στιγμές 2 και 3. Αυτές οι 2 ποσότητες παραγγέλθηκαν από την αποθήκη 1 τις στιγμές 1 και 2. Η διανομή αυτών των 100 μονάδων στην κεντρική αποθήκη πραγματοποιήθηκε ακριβώς την στιγμή 1. Αμέσως μετά τη διανομή, 50 μονάδες διανέμονται στην αποθήκη 1. Επειδή ο *χρόνος απόκρισης* στην αποθήκη 2, είναι 0.5 χρονικές μονάδες, η αντίστοιχη παραγγελία πραγματοποιείται τη στιγμή 0.5. Αλλά αυτό ποτέ δεν μπορεί να επιτευχθεί από μια *installation stock* **(r,Q)** πολιτική επειδή αυτή είναι *nested*. Η αποθήκη 2 μπορεί να παραγγείλει μόνο όταν η αποθήκη 1 παραγγέλνει, δηλαδή τις στιγμές 0,1,2,.., παρόλο που θα ήταν επιθυμητό οι παραγγελίες στην αποθήκη 2 να πραγματοποιούνταν τις στιγμές 0.5,2.5,.. επειδή ο *χρόνος απόκρισης* είναι 0.5. Τότε αν χρησιμοποιείται μια *installation stock* πολιτική, υπάρχουν δύο δυνατότητες. Η παραγγελία για την αποθήκη 2 μπορεί να γίνει είτε πολύ νωρίς, είτε πολύ αργά. Αν η παραγγελία πραγματοποιηθεί πολύ αργά, πρέπει να αυξηθεί το σημείο αναπαραγγελίας στην αποθήκη 1 ώστε να αποφευχθούν οι εκκρεμείς παραγγελίες. Σε κάθε περίπτωση προκύπτει *πρόσθετο κόστος*. Βέλτιστος έλεγχος μπορεί να επιτευχθεί από μια *echelon stock* πολιτική με $r_1^e = 50$ και $r_2^e = 75$. Λίγο πριν την στιγμή 0.5, η *θέση του αποθέματος* στην αποθήκη 2, είναι 0 και στην αποθήκη 1, είναι 75 επειδή μια ποσότητα είναι ήδη σε διανομή προς την αποθήκη 1.



Σχήμα 2.8 . Ανάπτυξη των αποθεμάτων στην βέλτιστη λύση

Αν όλες οι ποσότητες είναι $Q_n = 1$, η **(r,Q)** πολιτική μεταπίπτει στην S πολιτική. Αλλά μια *echelon stock S* πολιτική καθώς επίσης και μια *installation stock S* πολιτική είναι πάντα *nested*. Ως συνέπεια των Προτάσεων 2.1 και 2.2 είναι ότι, οι *echelon stock S* πολιτικές είναι ισοδύναμες με τις *installation stock S* πολιτικές, όταν ικανοποιούν την συνθήκη, $S_n^e = \sum_{j=1}^{n} S_j^i$. Μπορεί να αποδειχτεί ότι αυτή η ισοδυναμία ισχύει σε γενικά πολυβάθμια συστήματα αποθεμάτων.

Η κυριαρχία των *echelon stock* πολιτικών για *σειριακά* και *συστήματα συναρμολόγησης* δεν μεταφέρεται στα συστήματα διανομής. Για τέτοια συστήματα μια *installation stock* πολιτική ίσως εφαρμόζεται καλύτερα σε συγκεκριμένες περιπτώσεις, αλλά μπορεί να ισχύει και το αντίθετο. Δηλαδή για συστήματα διανομής, η καλύτερη *echelon stock reorder point* πολιτική ίσως υπερτερεί της καλύτερης *installation stock* πολιτικής, αλλά ίσως συμβαίνει και το αντίθετο. Γενικά, οι διαφορές είναι σχετικά μικρές, αλλά σε ειδικές περιπτώσεις ίσως συμβαίνουν πολύ μεγαλύτερες.

Σημείωση :

Έχει αποδειχτεί ότι κάθε *installation stock* πολιτική μπορεί να αντικατασταθεί από μια ισοδύναμη *echelon stock* πολιτική. Ωστόσο, μια *echelon stock* πολιτική που δεν είναι *nested* δεν μπορεί να αντικατασταθεί από μια ισοδύναμη *installation stock* πολιτική. Τότε τίθεται το ενδιαφέρον ερώτημα, αν υπάρχουν καθόλου πλεονεκτήματα που να σχετίζονται με *nonnested echelon stock* πολιτικές. Η απάντηση είναι ότι υπάρχουν και θα διευκρινιστούν τα πλεονεκτήματα με ένα απλό παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.4

Υπάρχουν 2 αποθήκες με μεγάλες ποσότητες $Q_2 > Q_1$, ικανοποιώντας την (2.1). Η ζήτηση στην αποθήκη 1 είναι 1 μονάδα προϊόντος, στην αρχή κάθε χρονικής περιόδου. Αν η αποθήκη 2 έχει διαθέσιμο απόθεμα, ο *χρόνος απόκρισης* όταν παραγγείλει από την αποθήκη 1 είναι, l_1 περίοδοι. Ο *χρόνος απόκρισης* όταν παραγγείλει από την αποθήκη 2 είναι, l_2 περίοδοι. Υποτίθεται ότι ο l_2 εκφράζεται ως : $l_2 = mQ_1 + t_2$, όπου $0 < t_2 < Q_1$ και m είναι μη αρνητικός ακέραιος. Αυτό σημαίνει προφανώς ότι ο l_2 δεν είναι ένα πολλαπλάσιο του χρονικού κύκλου στην αποθήκη 1. Για απλότητα, υποτίθεται ότι Q_1, Q_2, l_1, l_2 και t_2 είναι όλοι ακέραιοι. Το *κόστος διατήρησης* ανά μονάδα και περίοδο στην αποθήκες 1 και 2 είναι h_1 και h_2 αντίστοιχα, με $h_1 > h_2$. Οι ελλείψεις δεν επιτρέπονται. Θεωρείται μια ποσότητα Q_2 που παραγγέλλεται από την αποθήκη 2. Υποτίθεται ότι αυτή η ποσότητα θα πρέπει να καλύψει την ζήτηση στην αποθήκη 1 στις περιόδους $t, t+1, ..., t+Q_2-1$, δηλαδή η ζήτηση την περίοδο t-1 καλύφθηκε από την προηγούμενη ποσότητα. Για να ελαχιστοποιηθεί το *κόστος διατήρησης* στην αποθήκη 2 θα πρέπει να γίνει η παραγγελία την περίοδο $t - l_1 - l_2$ και για την αποθήκη 1 θα πρέπει να παραγγελθούν $j_2 = Q_2/Q_1$ υποπαρτίδες (subbatches) μεγέθους Q_1 στις περιόδους, $t - l_1, t - l_1 + Q_1, ..., t - l_1 + (j_2 - 1)Q_1$. Αυτό σημαίνει ότι μια παραγγελία στην αποθήκη 2 συμβαίνει t_2 περιόδους πριν την επόμενη παραγγελία στην αποθήκη 1, δηλαδή η *βέλτιστη πολιτική* είναι *nonnested*. Μια τέτοια συμπεριφορά προκύπτει εύκολα με μια *echelon stock* πολιτική με *σημεία αναπαραγγελίας* : $r_1^e = l_1 - 1$ και $r_2^e = l_1 + l_2 - 1$ και για παράδειγμα, οι *αρχικές θέσεις των αποθεμάτων* που αντιστοιχούν στην κατάσταση, όταν η αποθήκη 2 έχει παραγγείλει είναι :

$$IP_1^e = l_1 - 1 + t_2 \quad , \quad IP_2^e = l_1 + l_2 - 1 + Q_2$$

ή ισοδύναμα $IP_1^i = l_1 - 1 + t_2 \quad , \quad IP_2^i = l_2 + Q_2 - t_2 = Q_2 + mQ_1$

Επειδή η *echelon stock* πολιτική είναι *nonnested*, είναι αδύνατο να αντικατασταθεί με μια ισοδύναμη *installation stock* πολιτική. Αν πρέπει να χρησιμοποιηθεί μια *installation stock* πολιτική, η αποθήκη 2 πρέπει να παραγγείλει είτε πολύ νωρίς $(r_2^i = mQ_1)$, είτε πολύ αργά $(r_2^i = (m-1)Q_1)$ συγκριτικά με την ιδανική *echelon stock* πολιτική. Στην 1η περίπτωση, δεν χρειάζεται να αλλάξει η πολιτική στην αποθήκη 1 δηλαδή, χρησιμοποιείται $r_1^i = l_1 - 1$. Αυτό σημαίνει ότι λαμβάνεται το ίδιο *κόστος διατήρησης* στην αποθήκη 1 αλλά, βέβαια, υψηλότερο *κόστος διατήρησης* στην αποθήκη 2. Στην 2η περίπτωση, πρέπει να αυξηθεί το *σημείο αναπαραγγελίας* στην αποθήκη 1, σε $r_1^i = l_1 - 1 + t_2$ επειδή κάθε j_2-οστή παραγγελία θα έχει ένα *χρόνο απόκρισης* $l_1 + t_2$ αντί για l_1. Αυτό σημαίνει ότι κάθε j_2-οστή παραγγελία διανέμεται αμέσως στην αποθήκη 1, αλλά οι άλλες παραγγελίες θα φτάσουν πολύ νωρίτερα. Το ολικό σύστημα αποθεμάτων θα είναι ακριβώς το ίδιο με την ιδανική περίπτωση, αλλά θα έχει περισσότερο απόθεμα στην αποθήκη 1 και λιγότερο στην αποθήκη 2. Επίσης σ' αυτήν την περίπτωση, επειδή $h_1 > h_2$, το *συνολικό κόστος διατήρησης* θα αυξηθεί.

2.4 KANBAN Πολιτικές

Το σύστημα KANBAN είναι σύστημα προμήθειας μερών και προϊόντων ακριβώς εκείνη τη στιγμή που χρειάζονται στην παραγωγική διαδικασία, έτσι ώστε τα μέρη και τα προϊόντα να χρησιμοποιούνται αμέσως. Ο όρος KANBAN, που σημαίνει “κάρτα” στα Ιαπωνικά, αναφέρεται στις κάρτες που χρησιμοποιούνται για να ελέγχουν την ροή της παραγωγής σε ένα εργοστάσιο. Κάθε κάρτα αναγράφει έναν κωδικό αριθμό, τον κωδικό του αντικειμένου, περιγραφή του προϊόντος, το κέντρο εργασίας που χρησιμοποιείται η κάρτα και το πλήθος των προϊόντων στο κυτίο μεταφοράς. Η πιο απλή μορφή ενός συστήματος KANBAN χρησιμοποιεί μια κάρτα η οποία τοποθετείται σε κάθε κυτίο μεταφοράς προϊόντων που έχουν παραχθεί. Το κυτίο περιέχει ένα συγκεκριμένο ποσοστό των ημερήσιων αναγκών για το προϊόν αυτό. Όταν το προϊόν του κυτίου χρησιμοποιηθεί και το κυτίο αδειάσει, τότε η κάρτα μεταφέρεται από το άδειο κυτίο σε ένα σημείο παραλαβής και το κυτίο τοποθετείται στον αποθηκευτικό χώρο. Η κάρτα δείχνει την ανάγκη να παραχθεί ένα νέο κυτίο με το προϊόν αυτό. Όταν το κυτίο ξαναγεμίσει, η κάρτα επανατοποθετείται μέχρι να αδειάσει και ο κύκλος ξεκινάει ξανά όταν ο χρήστης παραλάβει το κυτίο με την κάρτα. Οι κανόνες λειτουργίας για το σύστημα KANBAN με μια κάρτα είναι απλές κι έχουν σχεδιαστεί έτσι ώστε να διευκολύνουν την ροή των προϊόντων και ταυτόχρονα να διατηρούν τον έλεγχο στο επίπεδο των αποθεμάτων. Συνοψίζονται ως εξής:

1. Κάθε κυτίο θα πρέπει να έχει μια κάρτα.
2. Πάντα η γραμμή συναρμολόγησης προμηθεύεται προϊόντα από την κατασκευαστική μονάδα. Η κατασκευαστική μονάδα ποτέ δεν προωθεί προϊόντα στην γραμμή συναρμολόγησης γιατί είναι πιθανό να προμηθεύει προϊόντα τα οποία δε χρειάζονται ακόμα για την παραγωγή.
3. Κυτία προϊόντων δεν θα πρέπει να μετακινούνται από την αποθήκη χωρίς να έχει τοποθετηθεί κάρτα KANBAN στο σημείο παραλαβής.
4. Ένα κυτίο πρέπει πάντα να γεμίζει με το προδιαγεγραμμένο πλήθος εξαρτημάτων.
5. Μόνο μη ελαττωματικά εξαρτήματα θα μεταφέρονται στη γραμμή συναρμολόγησης έτσι ώστε να γίνεται η καλύτερη χρήση προϊόντων και εργατικού δυναμικού.
6. Η συνολική παραγωγή δεν θα πρέπει να υπερβαίνει το συνολικό πόσο που έχει καθοριστεί στις κάρτες KANBAN του συστήματος.

Η Toyota χρησιμοποιεί ένα σύστημα με δυο κάρτες, την κάρτα μεταφοράς και την κάρτα εντολής παραγωγής. Η κάρτα μεταφοράς δείχνει το προϊόν και την ποσότητα κομματιών που πρέπει να ζητήσει μια θέση εργασίας από την προηγούμενη για να εκτελέσει τις επεξεργασίες που της αντιστοιχούν. Η κάρτα εντολής παραγωγής δείχνει το προϊόν, την ποσότητα που θα παραχθεί, τα προϊόντα που απαιτούνται και που θα βρεθούν, καθώς και το πού θα αποθηκευτεί το παραγόμενο προϊόν. Ένα κυτίο δεν μπορεί να μεταφερθεί στο επόμενο κέντρο εργασίας αν δεν έχει εξουσιοδοτηθεί από την παραλαβή μιας κάρτας μεταφοράς. Επίσης, ένα κυτίο δεν μπορεί να παραχθεί αν δεν έχει εξουσιοδοτηθεί από μια κάρτα εντολής παραγωγής.

Μια μονάδα κατασκευής ετοιμάζει ένα εξάρτημα και στη συνεχεία το αποθηκεύει σε κυτία που είναι τοποθετημένα δίπλα στην κατασκευαστική μονάδα και δίπλα στη γραμμή συναρμολόγησης. Τα κυτία δίπλα στην γραμμή συναρμολόγησης έχουν από μια κάρτα μεταφοράς, ενώ τα κυτία δίπλα στην κατασκευαστική μονάδα έχουν από μια κάρτα εντολής παραγωγής. Όταν η γραμμή συναρμολόγησης παίρνει το εξάρτημα από ένα γεμάτο κυτίο, τότε ένας εργαζόμενος βγάζει την κάρτα μεταφοράς από το κυτίο και την πηγαίνει στον αποθηκευτικό χώρο της κατασκευαστικής μονάδας. Στην κατασκευαστική μονάδα, ο εργαζόμενος βρίσκει ένα κυτίο με το εξάρτημα, βγάζει την κάρτα εντολής παραγωγής και τοποθετεί την κάρτα μεταφοράς. Η τοποθέτηση της κάρτας αυτής στο κυτίο εξουσιοδοτεί την μεταφορά του κυτίου στη γραμμή συναρμολόγησης. Η διαθέσιμη κάρτα εντολής παραγωγής τοποθετείται σε ένα άδειο κυτίο από την κατασκευαστική μονάδα. Για την εφαρμογή ενός συστήματος ελέγχου αποθεμάτων KANBAN, απαιτείται ο καθορισμός του αριθμού των καρτών KANBAN που θα χρειαστούν. Σε ένα σύστημα δύο καρτών θα πρέπει να καθοριστεί ο αριθμός των καρτών εντολής παραγωγής και ο αριθμός των καρτών μεταφοράς. Οι κάρτες KANBAN αντιπροσωπεύουν τον αριθμό των κυτίων με εξαρτήματα που μεταφέρονται από τον παραγωγό στο χρήστη και αντίστροφα. Συνεπώς, ο αριθμός των κυτίων ελέγχει την ποσότητα του (work-in-progress) αποθέματος στο σύστημα παραγωγής. Βασικό στοιχείο για τον καθορισμό του αριθμού των κυτίων είναι να εκτιμηθεί με ακρίβεια ο *χρόνος απόκρισης* που απαιτείται για να παραχθεί ένα κυτίο εξαρτημάτων. Αυτός ο χρόνος είναι συνάρτηση του χρόνου της παραγωγικής διαδικασίας του κυτίου, του χρόνου αναμονής κατά τη διάρκεια της παραγωγικής διαδικασίας και του χρόνου που απαιτείται για την μεταφορά του εξαρτήματος στον χρήστη. Ο αριθμός των KANBAN θα πρέπει να καλύπτει την διάρκεια του *χρόνου απόκρισης* συν ένα επιπλέον ποσό ως απόθεμα ασφαλείας. Συνεπώς, ο αριθμός κυτίων είναι ο εξής:

$$k = \frac{dL(SS+1)}{c} ,$$

d : είναι η αναμενόμενη ημερήσια ζήτηση για το εξάρτημα ,

L : είναι ο *χρόνος απόκρισης* για την εκπλήρωση μιας εντολής (σε ίδιες μονάδες όπως η ζήτηση) ,

SS : είναι το απόθεμα ασφαλείας που εκφράζεται ως ποσοστό της ζήτησης κατά τη διάρκεια του *χρόνου απόκρισης* ,

c : είναι η χωρητικότητα του κυτίου στο συγκεκριμένο εξάρτημα.

Το KANBAN σύστημα δίνει τη δυνατότητα ελέγχου της ροής των προϊόντων σε ένα παραγωγικό σύστημα μέσω μιας απλής και κατανοητής διαδικασίας. Η διοίκηση μπορεί να μειώσει το απόθεμα ενός εξαρτήματος, μειώνοντας απλά τον αριθμό των καρτών στο σύστημα. Σύμφωνα με μια KANBAN πολιτική τα προϊόντα παράγονται σε μεγάλες ποσότητες Q_n. Οι πολιτικές KANBAN είναι συγκεκριμένες για κάθε προϊόν και ο αριθμός των KANBAN για το προϊόν n είναι σταθερός, K_n. Επομένως, το διαθέσιμο απόθεμα και αυτό σε παραγγελία του προϊόντος n είναι πάντα ανάμεσα :

$K_nQ_n \leq$ διαθέσιμο απόθεμα + απόθεμα σε παραγγελία $\leq (K_n - 1)Q_n + 1$

Όταν όλα τα κυτία στην αποθήκη είναι άδεια δεν υπάρχει καμιά απ' τις KANBAN ώστε να συνδεθεί με αυτά, οι ανικανοποίητες απαιτήσεις (backlogged requirements) δεν μπορούν να πραγματοποιήσουν μια καινούρια παραγγελία μέχρι να φτάσει ένα γεμάτο κυτίο. Συνεπώς, μια KANBAN πολιτική όπως περιγράφεται, είναι ένα συγκεκριμένο είδος από μια *installation stock* (r_n^i, Q_n) πολιτική όπου :

1) το σημείο αναπαραγγελίας, r_n^i, του προϊόντος n είναι ένα ακέραιο πολλαπλάσιο μεγέθους Q_n,

2) οι εκκρεμείς παραγγελίες δεν αφαιρούνται από τον ορισμό της *θέσης του αποθέματος αποθήκης.*

Το 1^o σημείο μπορεί να χαλαρώσει με κάποια προσπάθεια αφαιρώντας-αποσύροντας την KANBAN πολιτική, όταν υπάρχουν a_n $(0 \leq a_n < Q_n)$ μονάδες που έχουν μείνει στο κυτίο, αντί του όταν δεν υπάρχει καμία $(a_n = 0)$.

Το 2^o σημείο κάνει τις KANBAN πολιτικές ισοδύναμες με τις (r_n^i, Q_n) πολιτικές, όπου το σημείο αναπαραγγελίας περιστασιακά μειώνεται (όταν υπάρχει *backlog*). Αυτή η απόκλιση από μια παραδοσιακή *installation stock* πολιτική θα πρέπει λογικά να είναι ένα μειονέκτημα για κανονικές δομές κόστους. Πραγματικά, ο Veinott [54] απέδειξε την βελτιστοποίηση των **(r,Q)** πολιτικών για συστήματα ενός επιπέδου λαμβάνοντας σαν δεδομένο δομές κόστους και σταθερό Q. Συμπεραίνεται ότι οι KANBAN πολιτικές είναι έμφυτες-συνυπάρχουν με τις *installation stock* πολιτικές με κάποιους συγκεκριμένους περιορισμούς. Επομένως, τέτοιες πολιτικές είναι επίσης υποδεέστερες από τις *echelon stock* πολιτικές.

2.5 Καθορισμός Ποσοτήτων Παραγγελίας (υπό προσδιοριστική ζήτηση)

Στην ενότητα αυτή αντιμετωπίζεται το πρόβλημα καθορισμού των ποσοτήτων παραγγελίας για ένα πολυβάθμιο σύστημα διαχείρισης αποθεμάτων. Σημειώνεται ότι αυτό το πρόβλημα λύνεται ανεξάρτητα από το ποιο σύστημα παραγγελίας χρησιμοποιείται.

Προφανώς, όταν καθορίζονται οι ποσότητες παραγγελίας για ένα πολυβάθμιο σύστημα αποθεμάτων, δεν είναι βέλτιστο να αντιμετωπιστεί κάθε αποθήκη ξεχωριστά. Παρόλα αυτά είναι πολύ συνηθισμένο στην πράξη επειδή είναι πιο εύκολο. Η επιλογή της ποσότητας παραγγελίας σε μια συγκεκριμένη αποθήκη θα επηρεάσει κυρίως την δομή της ζήτησης στην αποθήκη του αμέσως πιο πάνω επιπέδου. Αυτή η εξάρτηση κάνει τον προσδιορισμό των ποσοτήτων παραγγελίας περισσότερο περίπλοκο. Γενικά, αυτό θα οδηγήσει σε ποσότητες παραγγελίας που είναι πολύ μικρές. Όταν αντιμετωπίζονται ποσότητες παραγγελίας για πολυβάθμια συστήματα θα υποτίθεται, ότι η ζήτηση του πελάτη είναι γνωστή και προσδιοριστική, όπως γίνεται στην περίπτωση των συστημάτων ενός επιπέδου. Στην περίπτωση της στοχαστικής ζήτησης είναι λογικό να αντικαθίσταται η στοχαστική ζήτηση με την μέση τιμή της και να χρησιμοποιείται ένα προσδιοριστικό μοντέλο όταν καθορίζονται οι ποσότητες παραγγελίας. Ωστόσο, λαμβάνεται υπόψη η στοχαστική ζήτηση, όταν σε ένα δεύτερο βήμα προσδιορίζονται τα *αποθέματα ασφαλείας* (*safety stocks*) και τα *σημεία αναπαραγγελίας*. Επιπλέον, υποτίθεται ότι όλοι οι *χρόνοι απόκρισης* είναι μηδέν. Υπενθυμίζεται ότι για ένα σύστημα ενός επιπέδου με σταθερό *χρόνο απόκρισης*, μπορεί να χρησιμοποιηθεί αυτή η υπόθεση χωρίς καμιά βλάβη της γενικότητας. Στην περίπτωση ενός θετικού *χρόνου απόκρισης* L, πρέπει να παραγγείλει L χρονικές μονάδες νωρίτερα. Όταν αντιμετωπίζονται πολυβάθμια συστήματα, η διαχείριση είναι συχνά όμοια στα *σειριακά* και στα *συστήματα συναρμολόγησης*, δηλαδή μπορούν να καθοριστούν οι ποσότητες παραγγελίας για *χρόνους απόκρισης* μηδέν και ακόμη να χρησιμοποιηθούν τα αποτελέσματα για θετικούς *χρόνους απόκρισης*. Ωστόσο, για συστήματα διανομής (Σχήματα 2.2,2.3) και γενικά συστήματα (Σχήμα 2.5) οι θετικοί *χρόνοι απόκρισης* ίσως είναι πολύ δύσκολο να αντιμετωπιστούν.

2.5.1 Ένα απλό σειριακό σύστημα με σταθερή ζήτηση

Έστω ξανά το απλό *σειριακό σύστημα* του Σχήματος 2.1. Υποτίθεται ότι οι *χρόνοι απόκρισης* είναι μηδέν. Η ζήτηση, d, για το προϊόν 1 είναι σταθερή και συνεχής. Τα δύο προϊόντα έχουν *κόστος παραγγελίας* A_1 και A_2, όπως επίσης και *κόστος διατήρησης* h_1 και h_2 αντίστοιχα. Όλη η παραγγελία παραλαμβάνεται την ίδια στιγμή. Δεν επιτρέπονται εκκρεμείς παραγγελίες. Πρέπει να καθοριστούν οι βέλτιστες ποσότητες παραγγελίας Q_1 και Q_2. Σημειώνεται ότι εκτός από τα δύο επίπεδα, οι υποθέσεις είναι παρόμοιες με το κλασσικό μοντέλο οικονομικής ποσότητας παραγγελίας.

Παράδειγμα 2.5

Έστω οι παράμετροι του προβλήματος είναι: d=8, A_1=20, A_2=80, h_1=5 και h_2=4. Το προϊόν 1 αντιμετωπίζει σταθερή, συνεχής ζήτηση και το κόστος έχει ως εξής:

$$C_1 = h_1 \frac{Q_1}{2} + A_1 \frac{d}{Q_1} \tag{2.8}$$

Πρώτα, πρέπει να καθοριστούν οι βέλτιστες ποσότητες παραγγελίας Q_1 και Q_2.

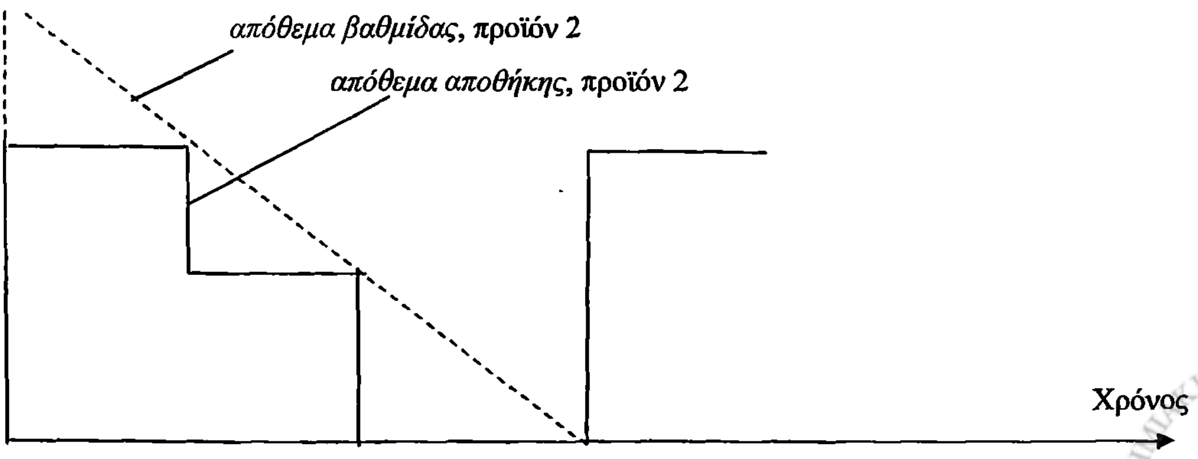
Μια προσέγγιση για να λυθεί το πρόβλημα είναι να εφαρμοστεί το πρόβλημα του κλασσικού μοντέλου της οικονομικής ποσότητας παραγγελίας για το προϊόν 1 (να ελαχιστοποιηθεί η (2.8)). Έτσι

$$Q_1 = \sqrt{\frac{2A_1 d}{h_1}} = \sqrt{\frac{2*20*8}{5}} = \sqrt{64} = 8$$

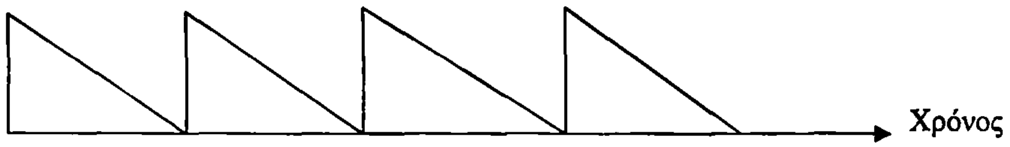
με κόστος $C_1 = h_1 \frac{Q_1}{2} + A_1 \frac{d}{Q_1} = 5*\frac{8}{2} + 20*\frac{8}{8} = 20 + 20 = 40$. Τότε η ζήτηση του προϊόντος 2 είναι διακριτή και μη συνεχής, δηλαδή 8 μονάδες κάθε όγδοη χρονική μονάδα. Δοθέντος ένα σταθερό Q_1, πρέπει πάντα να επιλέγεται Q_2 ως πολλαπλάσιο του Q_1,

$$Q_2 = kQ_1 \tag{2.9}$$

όπου k είναι ένας θετικός ακέραιος.



απόθεμα αποθήκης = απόθεμα βαθμίδας, προϊόν 1



Σχήμα 2.9 . Απεικονίζει τη συμπεριφορά των επιπέδων αποθέματος για k=3

Επειδή οι *χρόνοι απόκρισης* είναι 0, δεν υπάρχει διαφορά ανάμεσα στα *επίπεδα αποθέματος* και στις *θέσεις των αποθεμάτων.* Επίσης, το Σχήμα 2.9 απεικονίζει το *απόθεμα της αποθήκης* και το *απόθεμα βαθμίδας.* Το *απόθεμα βαθμίδας* του προϊόντος 2 είναι, το άθροισμα αποθεμάτων και των δύο αποθηκών. Για το προϊόν 1, η *θέση του αποθέματος βαθμίδας* είναι ίση με την *θέση αποθέματος* στην αποθήκη, επειδή δεν υπάρχει αποθήκη πιο κάτω επιπέδου. Το κόστος για το προϊόν 2 είναι :

$$C_2 = h_2 \frac{(k-1)Q_1}{2} + A_2 \frac{d}{kQ_1} \tag{2.10}$$

επειδή το μέσο απόθεμα της αποθήκης του προϊόντος 2 είναι $\frac{(k-1)Q_1}{2}$. Το C_2 είναι προφανώς κυρτό ως προς k. Αν αγνοηθεί ο περιορισμός ότι το k πρέπει να είναι ένας ακέραιος τότε προκύπτει :

$$\frac{\partial C_2}{\partial k} = \frac{h_2 Q_1}{2} - \frac{A_2 d}{k^2 Q_1} = 0 \Rightarrow k^2 = \frac{2A_2 d}{h_2 Q_1^2} \Rightarrow k^* = \frac{1}{Q_1}\sqrt{\frac{2A_2 d}{h_2}}$$

Αν $k^* < 1$, τότε ως βέλτιστο επιλέγεται $k = 1$. Αν τότε ως k^* επιλέγεται, ότι $k^* > 1$. Έστω k′ να είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος, μικρότερος ή ίσος με το k^*, για τον οποίο $k' \le k^* < k' + 1$. Είναι εύκολο να δειχτεί, ότι επιλέγεται ως βέλτιστο $k = k'$, αν $\frac{k^*}{k'} \le \frac{(k'+1)}{k^*}$. Αλλιώς, $k = k' + 1$ είναι βέλτιστο. Στο παράδειγμα προκύπτει $k^* \approx 2.24$ και ως βέλτιστο λαμβάνεται $k = 2$ οπότε :

$$C_2 = 4 * \frac{(2-1)*8}{2} + 80 * \frac{8}{2*8} = 16 + 40 = 56$$

και επομένως το συνολικό κόστος ανά μονάδα χρόνου είναι $C = C_1 + C_2 = 40 + 56 = 96$. Όπως θα αποδειχτεί παρακάτω αυτή δεν είναι *βέλτιστη λύση.* Επειδή το μέγεθος της ποσότητας για το προϊόν 1 θα επηρεάσει την ζήτηση για το προϊόν 2, δεν είναι εφικτό να βελτιστοποιηθεί το προϊόν 1 ξεχωριστά, χωρίς να εξεταστούν οι συνέπειες για το προϊόν 2. Στη συνέχεια δίνεται η *βέλτιστη λύση.* Σε ένα διβάθμιο *σειριακό σύστημα* πρέπει να ικανοποιείται η (2.9) για να προκύψει η *βέλτιστη λύση.* Το συνολικό κόστος προκύπτει προσθέτοντας τις σχέσεις (2.8) και (2.10) :

$$C = C_1 + C_2 = (h_1 + (k-1)h_2)\frac{Q_1}{2} + (A_1 + \frac{A_2}{k})\frac{d}{Q_1} \tag{2.11}$$

Εναλλακτικά, μπορεί να αναπαρασταθεί το κόστος σε σχέση με το *απόθεμα βαθμίδας*. Επειδή το *απόθεμα βαθμίδας* του προϊόντος 2 περιλαμβάνει το απόθεμα του προϊόντος 1, το *κόστος διατήρησης* για το προϊόν 1 θα πρέπει να αναπαριστά μόνο την αξία που προστίθεται (value added), όταν παράγεται το προϊόν 1 από το προϊόν 2. Αυτό σημαίνει ότι θα χρησιμοποιηθεί το *κόστος διατήρησης βαθμίδας*, $e_1 = h_1 - h_2$ και $e_2 = h_2$. Έτσι προκύπτουν :

$$C_1^e = e_1\frac{Q_1}{2} + A_1\frac{d}{Q_1} \tag{2.12}$$

και

$$C_2^e = e_2\frac{kQ_1}{2} + A_2\frac{d}{kQ_1} \tag{2.13}$$

Οι εκφράσεις κόστους (2.12) και (2.13) δεν είναι ίδιες με τις εκφράσεις κόστους (2.8) και (2.10) αλλά εύκολα φαίνεται ότι το συνολικό κόστος :

$$C = C_1^e + C_2^e = (e_1 + ke_2)\frac{Q_1}{2} + (A_1 + \frac{A_2}{k})\frac{d}{Q_1} \tag{2.14}$$

είναι ίδιο, δηλαδή οι εκφράσεις κόστους (2.11) και (2.14) είναι ισοδύναμες όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.9. Οι εκφράσεις των σχέσεων (2.12)-(2.14) αντιμετωπίζονται ευκολότερα, επειδή οι δομές των (2.12) και (2.13) είναι ακριβώς ίδιες. Για γνωστό k το βέλτιστο Q_1 προκύπτει από την (2.14) θέτοντας την παράγωγο ίση με 0.

$$\frac{\partial C}{\partial Q_1} = 0 \Rightarrow Q_1 = \sqrt{\frac{2(A_1 + \frac{A_2}{k})d}{e_1 + ke_2}} \tag{2.15}$$

Αντικαθιστώντας την (2.15) στην (2.14), προκύπτει το *βέλτιστο κόστος* για ένα γνωστό k, ως εξής :

$$C = (e_1 + ke_2)\frac{\sqrt{\dfrac{2\left(A_1 + \dfrac{A_2}{k}\right)d}{e_1 + ke_2}}}{2} + \left(A_1 + \frac{A_2}{k}\right)\frac{d}{\sqrt{\dfrac{2\left(A_1 + \dfrac{A_2}{k}\right)d}{e_1 + ke_2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2(e_1+ke_2)^2\left(A_1+\frac{A_2}{k}\right)d}{\frac{e_1+ke_2}{4}}} + \sqrt{\frac{\left(A_1+\frac{A_2}{k}\right)^2 d^2}{\frac{2\left(A_1+\frac{A_2}{k}\right)d}{e_1+ke_2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(e_1+ke_2)\left(A_1+\frac{A_2}{k}\right)d}{2}} + \sqrt{\frac{(e_1+ke_2)\left(A_1+\frac{A_2}{k}\right)d}{2}} = 2\sqrt{\frac{(e_1+ke_2)\left(A_1+\frac{A_2}{k}\right)d}{2}} =$$

$$= \sqrt{4\frac{(e_1+ke_2)\left(A_1+\frac{A_2}{k}\right)d}{2}} = \sqrt{2(e_1+ke_2)\left(A_1+\frac{A_2}{k}\right)d}$$

Άρα $C(k) = \sqrt{2(A_1+\frac{A_2}{k})d(e_1+ke_2)}$ (2.16)

Εύκολα φαίνεται ότι :

$$C^2(k) = 2d(A_1e_1 + A_2e_2 + A_1e_2k + \frac{A_2e_1}{k}) \tag{2.17}$$

είναι κυρτή συνάρτηση του k. Η βελτιστοποίηση της (2.17) ως προς το k είναι όμοια με την βελτιστοποίηση της (2.10) και αφού πρώτα αγνοηθεί ότι k είναι ένας ακέραιος, προκύπτει :

$\frac{\partial C^2(k)}{\partial k} = 0 \Rightarrow A_1e_2 - \frac{A_2e_1}{k^2} = 0 \Rightarrow k^2 = \frac{A_2e_1}{A_1e_2}$. Άρα το βέλτιστο k είναι :

$$k^* = \sqrt{\frac{A_2e_1}{A_1e_2}} \tag{2.18}$$

Αν $k^*<1$, είναι βέλτιστο να επιλεχθεί $k=1$. Υποτίθεται ότι $k^*>1$. Έστω k' να είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος, μικρότερος ή ίσος με k^*, δηλαδή $k' \le k^* < k'+1$. Είναι βέλτιστο να επιλεγεί $k=k'$, αν $\frac{k^*}{k'} \le \frac{(k'+1)}{k^*}$. Αλλιώς, $k=k'+1$ είναι βέλτιστο. Αν $\frac{A_1}{e_1} \ge \frac{A_2}{e_2}$, προκύπτει $k=1$. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί το ίδιο μέγεθος παραγγελίας για τα δύο προϊόντα και συνεπώς, κάθε στιγμή που παράγεται μια ποσότητα του προϊόντος 2, η ποσότητα θα πρέπει αμέσως να χρησιμοποιηθεί για την παραγωγή του προϊόντος 1. Αυτό υποδηλώνει ότι δεν απαιτείται καθόλου απόθεμα του προϊόντος 2 και ότι το διβάθμιο *σειριακό σύστημα* μπορεί να αντικατασταθεί από ένα σύστημα ενός επιπέδου. Επίσης, μπορεί να δειχτεί ότι η συνθήκη $\frac{A_1}{e_1} \ge \frac{A_2}{e_2}$ είναι ικανή στην περίπτωση της προσδιοριστικής μεταβλητής, με τον χρόνο, ζήτησης (*time-varying demand*) (Axsater και Nuttle [4]).

Παράδειγμα 2.6

Έστω ξανά το προηγούμενο παράδειγμα τότε $e_1 = h_1 - h_2 = 1$ και $e_2 = h_2 = 4$. Από την (2.18) προκύπτει $k^* = 1$, το οποίο είναι η *βέλτιστη τιμή* του k. Εφαρμόζοντας τις (2.15) και (2.16) προκύπτουν $Q_1^* \approx 17.89$, $Q_2^* = kQ_1^* = Q_1^* \approx 17.89$ και $C^* \approx 89.44$, δηλαδή περίπου 7% χαμηλότερο από το κόστος που προέκυψε στο παράδειγμα 2.5. Η ποσότητα παραγγελίας του προϊόντος 1 αυξήθηκε κατά περισσότερο από 100% (ήταν $Q_1 = 8$). Σημειώνεται ότι οι (2.15) και (2.16) είναι απαραίτητα ισοδύναμες με τις αντίστοιχες εκφράσεις για το κλασσικό μοντέλο οικονομικής ποσότητας παραγγελίας. Η μόνη διαφορά είναι ότι το *κόστος παραγγελίας* A αντικαθίσταται με :

$$A_1' = A_1 + \frac{A_2}{k} \tag{2.19}$$

και το *κόστος διατήρησης* με :

$$h_1' = e_1 + ke_2 \tag{2.20}$$

Επίσης, σημειώνεται ότι δεν είναι σαφές πώς το "πραγματικό" *κόστος διατήρησης* θα προσδιορίζεται σε διαφορετικές καταστάσεις. Υποτίθεται ότι υπάρχει πληθώρα αποθεμάτων του προϊόντος 2. Αν παραχθεί μια μονάδα του προϊόντος 1, το *κόστος διατήρησης* ανά μονάδα χρόνου για το προϊόν 1 αυξάνεται κατά h_1, αλλά επειδή το απόθεμα του προϊόντος 2 μειώνεται κατά 1 μονάδα, το *κόστος διατήρησης* ανά μονάδα χρόνου για το προϊόν 2 μειώνεται κατά h_2. Επομένως, η αύξηση στο *κόστος διατήρησης* αντιστοιχεί στην τιμή που προστίθεται αντί για την συνολική τιμή. Το *πρόσθετο κόστος διατήρησης* είναι το *κόστος διατήρησης βαθμίδας*, $e_1 = h_1 - h_2$. Απ' την άλλη μεριά, αν χρειαστεί να ανεφοδιαστεί η αποθήκη του προϊόντος 2 ώστε να παραχθεί το προϊόν 1, το *κόστος διατήρησης* αυξάνεται σύμφωνα με το κανονικό ποσοστό *κόστους διατήρησης*, h_1. Όταν παράγεται μια μονάδα του προϊόντος 1, η μέση τιμή του *πρόσθετου κόστους* θα είναι κάπου ανάμεσα στο e_1 και στο h_1.

2.6 Η 98% προσέγγιση του Roundy

Ακόμα κι αν η ζήτηση του πελάτη είναι σταθερή, τα πολυβάθμια προβλήματα lot sizing ίσως είναι πολύ δύσκολο να λυθούν. Οι *βέλτιστες λύσεις* είναι μερικές φορές εκπληκτικά περίπλοκες. Για παράδειγμα, η *βέλτιστη λύση* για ένα *σειριακό σύστημα* με σταθερή ζήτηση μπορεί να σημαίνει ποσότητες παραγγελίας που ποικίλουν στο χρόνο (Williams [55]). Ωστόσο, ο Roundy [37],[38] έδειξε ότι συχνά χρησιμοποιούνται απλές προσεγγίσεις με *κόστος απόδοσης* το πολύ 2% πιο πάνω από το *βέλτιστο κόστος*. Στη συνέχεια, θα περιγραφεί το πώς η τεχνική Roundy εφαρμόζεται σε *σειριακά συστήματα*, καθώς επίσης σε *συστήματα συναρμολόγησης* και διανομής.

Έστω ένα *σειριακό σύστημα* με N επίπεδα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.3. Η τελική ζήτηση στην αποθήκη 1 είναι σταθερή και συνεχής. Επιβάλλονται *κόστος παραγγελίας* και *κόστος διατήρησης βαθμίδας* σε όλα τα επίπεδα. Επίσης, οι ελλείψεις δεν επιτρέπονται. Όταν παράγεται μία μονάδα του προϊόντος i-1, απαιτείται μία μονάδα του προϊόντος i, ως υποπροϊόν (i=2,3,.....N). Οι *χρόνοι απόκρισης* αγνοούνται. Εύκολα φαίνεται ότι μια *βέλτιστη λύση* είναι *nested,* δηλαδή, μια παραγγελία στο επίπεδο i θα πρέπει να καλύψει ακριβώς έναν ακέραιο αριθμό παραγγελιών στο επίπεδο i-1. Ωστόσο, όπως φαίνεται στο παράδειγμα 2.7, οι βέλτιστες ποσότητες παραγγελίας δεν είναι απαραίτητα σταθερές προς το χρόνο. Πρώτον, η προσέγγιση του Roundy εννοεί ότι οι ποσότητες παραγγελίας περιορίζονται ώστε να είναι σταθερές στο χρόνο για διαφορετικά προϊόντα. Επιπλέον, η ποσότητα παραγγελίας για το προϊόν i, περιορίζεται στο να είναι μια δύναμη του 2 επί την ποσότητα παραγγελίας για το προϊόν i-1 δηλαδή,

$$Q_i = 2^{k_i} Q_{i-1} \quad , \quad i=2,3,\ldots,N \qquad (2.21)$$

Όπου k_i είναι μη αρνητικός ακέραιος. Έτσι συνεπάγεται ότι η λύση είναι *nested.* Σκοπός είναι να ελαχιστοποιηθεί το *συνολικό κόστος διατήρησης* και *παραγγελίας*. Σε αναλογία με τις σχέσεις (2.12)-(2.14) προκύπτει :

$$\min_{Q_1 Q_2 \ldots Q_N} \sum_{i=1}^{N} (e_i \frac{Q_i}{2} + A_i \frac{d}{Q_i}) \qquad (2.22)$$

υπό τους περιορισμούς ότι οι ποσότητες παραγγελίας είναι μη αρνητικές και ικανοποιούν την (2.21). Αυτό που είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον στην λύση του Roundy είναι ότι το κόστος είναι το πολύ 2% υψηλότερο από το *βέλτιστο κόστος*, χωρίς τους περιορισμούς (2.21). Η προσέγγιση του Roundy πρέπει πρώτα να χαλαρώσει τους περιορισμούς (2.21) και αντί αυτών να χρησιμοποιηθούν οι πιο χαλαροί περιορισμοί :

$$Q_i \geq Q_{i-1} \quad , \quad i=2,3,\ldots,N \qquad (2.23)$$

Σημειώνεται ότι η (2.21) συνεπάγεται την (2.23), ενώ το αντίθετο δεν ισχύει. Επομένως, χρησιμοποιώντας την (2.23) θα προκύψει ένα κατώτερο όριο για το κόστος, όταν χρησιμοποιούνται οι περιορισμοί (2.21). Η αντικειμενική συνάρτηση της (2.22) είναι κυρτή και οι περιορισμοί (2.23) είναι γραμμικοί. Η μοναδική λύση του χαλαρωμένου προβλήματος μπορεί να προκύψει από την χαλάρωση Lagrange :

$$\max_{\lambda_2,\lambda_3,\ldots,\lambda_N}\min_{Q_1,Q_2,\ldots,Q_N}\sum_{i=1}^{N}\left(e_i\frac{Q_i}{2}+A_i\frac{d}{Q_i}\right)+\sum_{i=2}^{N}\lambda_i(Q_{i-1}-Q_i) \tag{2.24}$$

Επίσης, οι πολλαπλασιαστές λ_i περιορίζονται ώστε να είναι μη αρνητικοί. Υποτίθεται ότι έχουν καθοριστεί οι βέλτιστοι πολλαπλασιαστές. Ορίζονται :

$$\begin{aligned} e_1' &= e_1 + 2\lambda_2 \ , \\ e_2' &= e_2 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 \ , \\ &\ \ \vdots \\ e_{N-1}' &= e_{N-1} - 2\lambda_{N-1} + 2\lambda_N \ , \\ e_N' &= e_N - 2\lambda_N \ , \end{aligned} \tag{2.25}$$

Είναι δυνατόν να δειχτεί ότι η *βέλτιστη λύση* του χαλαρωμένου προβλήματος πρέπει να δώσει $e_i' > 0$. Επιπλέον, το *βέλτιστο κόστος* για το χαλαρωμένο πρόβλημα προκύπτει από την λύση της :

$$\min_{Q_1,Q_2,\ldots,Q_N}\sum_{i=1}^{N}\left(e_i'\frac{Q_i}{2}+A_i\frac{d}{Q_i}\right) \tag{2.26}$$

χωρίς καθόλου περιορισμούς στις ποσότητες παραγγελίας, δηλαδή, ένα πρόβλημα με ανεξάρτητα αντικείμενα, *κόστος παραγγελίας*, A_i και *κόστος διατήρησης βαθμίδας*, e_i'. Στη συνέχεια συγκρίνονται το *κόστος διατήρησης*, e_i με το *κόστος διατήρησης βαθμίδας*, e_i' (από την (2.25)). Υπενθυμίζεται ότι οι πολλαπλασιαστές είναι μη αρνητικοί. Πρώτα, εξετάζεται η επίδραση του λ_2. Το ποσοστό του *κόστους διατήρησης βαθμίδας* στο επίπεδο 2 μειώνεται κατά $2\lambda_2$, ενώ στο επίπεδο 1 αυξάνεται κατά $2\lambda_2$. Πιο γενικά, η επίδραση του λ_i , είναι ότι το ποσοστό του *κόστους διατήρησης βαθμίδας* στο επίπεδο i, μειώνεται κατά $2\lambda_i$, ενώ στο επίπεδο i-1, αυξάνεται κατά $2\lambda_i$. Αυτό που είναι ενδιαφέρον για το γνήσιο πρόβλημα είναι ότι συνεπάγεται ότι η (2.26) παρέχει ένα κατώτερο όριο για το *βέλτιστο κόστος*, όπου οι ποσότητες παραγγελίας μπορούν να καθοριστούν με κάθε τρόπο. Για παράδειγμα, αυτές μπορούν να ποικίλουν στο χρόνο. Ακόμη το *απόθεμα βαθμίδας* στο επίπεδο i-1 είναι πάντα μικρότερο ή ίσο από το *απόθεμα βαθμίδας* στο επίπεδο i. Επομένως, η μετατροπή από το *κόστος διατήρησης βαθμίδας*, e_i, στο *κόστος διατήρησης βαθμίδας*, e_i', δεν αυξάνει το κόστος για τη *βέλτιστη λύση*. Επιπλέον, δοθέντος του *κόστους διατήρησης βαθμίδας* e_i' από την (2.26) παρέχει ένα κατώτερο όριο για το κόστος, επειδή δεν υπάρχουν περιορισμοί σε όλες τις ποσότητες παραγγελίας. Υποτίθεται ότι έχει λυθεί το χαλαρωμένο πρόβλημα.

Μπορεί τώρα να προσαρμοστεί αυτή η λύση στρογγυλεύοντας τις ποσότητες παραγγελίας, έτσι ώστε :

$$Q_i = 2^{m_i} q \tag{2.27}$$

Είναι γνωστό ότι αν το q δίνεται, η μέγιστη αύξηση του κόστους είναι το πολύ 6% κι επίσης αν μπορεί να προσαρμοστεί το q, ώστε να ληφθεί μια καλύτερη προσέγγιση της αύξησης του κόστους, είναι το πολύ 2%. Από την (2.27) και λόγω της (2.23), θα είναι $m_i \geq m_{i-1}$ και συνεπώς, οι ποσότητες παραγγελίας που προκύπτουν πρέπει να ικανοποιούν την (2.21). Έτσι έχει προκύψει η λύση του προβλήματος του Roundy. Προέκυψαν εφικτές, σταθερές ποσότητες παραγγελίας και η αύξηση του κόστους συγκριτικά με την *βέλτιστη λύση*, είναι το πολύ 2%, επειδή αυτή είναι το πολύ 2% συγκριτικά με το κατώτερο όριο της (2.26). Είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί η χαλάρωση Lagrange για αριθμητικό προσδιορισμό της λύσης του Roundy, αλλά γενικά είναι πιο απλό να χρησιμοποιηθεί η ακόλουθη τεχνική. Θεωρείται το χαλαρωμένο πρόβλημα. Χωρίς τους περιορισμούς (2.23) θα είναι βέλτιστο να χρησιμοποιηθούν $Q_i{*} = \left(\frac{2A_i d}{e_i}\right)^{\frac{1}{2}}$, για όλα τα i. Συνεπώς, αν $\frac{A_i}{e_i}$ αυξάνεται με i, βρίσκεται η *βέλτιστη λύση*, επειδή οι ποσότητες παραγγελίας, που προκύπτουν, ικανοποιούν την (2.23). Υποτίθεται ότι για κάποιο i, $\frac{A_i}{e_i} < \frac{A_{i-1}}{e_{i-1}}$ ή ισοδύναμα ότι $Q_i^* < Q_{i-1}^*$. Επίσης, υποτίθεται ότι στη *βέλτιστη λύση* του χαλαρωμένου προβλήματος : $Q_i > Q_{i-1}$. Αυτό συνεπάγεται ότι $Q_i \leq Q_i^*$, επειδή αλλιώς θα μειωθεί το Q_i και ομοίως ότι $Q_{i-1} \geq Q_{i-1}^*$, επειδή αλλιώς θα αυξηθεί το Q_{i-1}. Αλλά αυτό σημαίνει ότι $Q_i < Q_{i-1}$, το οποίο είναι μια αντίφαση. Συνεπώς, $Q_i = Q_{i-1}$ στην *βέλτιστη λύση* του χαλαρωμένου προβλήματος. Αυτό σημαίνει ότι μπορούν να συναθροιστούν τα δύο προϊόντα i-1 και i, σε ένα προϊόν με *κόστος παραγγελίας*, $A_{i-1} + A_i$ και *κόστος διατήρησης βαθμίδας*, $e_{i-1} + e_i$. Στη συνέχεια, θεωρείται το πρόβλημα που προκύπτει, με N-1 προϊόντα. Αν $\frac{A_i}{e_i} < \frac{A_{i-1}}{e_{i-1}}$ για κάποιο i, μπορούν να συναθροιστούν τα δύο προϊόντα, αλλιώς προκύπτει η *βέλτιστη λύση* για το χαλαρωμένο πρόβλημα από το κλασσικό μοντέλο της οικονομικής ποσότητας παραγγελίας.

Παράδειγμα 2.7

Θεωρείται ένα *σειριακό σύστημα* με N=4 αποθήκες. Η σταθερή, συνεχής ζήτηση για το προϊόν 1 είναι d=1. Το *κόστος παραγγελίας* και το *κόστος διατήρησης βαθμίδας* δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 2.2. Κόστος παραγγελίας και κόστος διατήρησης βαθμίδας

προϊόν	Κόστος παραγγελίας	Κόστος διατήρησης βαθμίδας
1	50	40
2	20	100
3	3	1
4	125	10

Πρώτα λύνεται το χαλαρωμένο πρόβλημα, δηλαδή ελαχιστοποιείται το κόστος στην (2.22) σε σχέση με την (2.23): Πρώτα εξετάζονται τα προϊόντα 1 και 2. Σημειώνεται, ότι $\frac{A_1}{e_1}=\frac{5}{4}>\frac{A_2}{e_2}=\frac{2}{10}$. Αυτό σημαίνει ότι $Q_1=Q_2$ στη *βέλτιστη λύση* και τα προϊόντα 1 και 2 μπορούν να συναθροιστούν σε ένα μοναδικό προϊόν με *κόστος παραγγελίας*, $A_1+A_2=50+20=70$ και με *κόστος διατήρησης βαθμίδας*, $e_1+e_2=100+40=140$. Τώρα, φαίνεται ότι :

$$\frac{A_4}{e_4}=12.5\geq\frac{A_3}{e_3}=3\geq\frac{A_1+A_2}{e_1+e_2}=0.5$$

Επομένως, οι περιορισμοί (2.23) δεν θα εφαρμόζονται για τα υπόλοιπα 3 προϊόντα : τα προϊόντα 1 και 2 μαζί, το προϊόν 3 και το προϊόν 4. Βελτιστοποιώντας κάθε ποσότητα παραγγελίας ξεχωριστά, προκύπτει η *βέλτιστη λύση* του χαλαρωμένου προβλήματος :

$$Q_1=Q_2=\left(2d\left(\frac{A_1+A_2}{e_1+e_2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}=1^{\frac{1}{2}}=1 \quad \text{και} \quad Q_3=\sqrt{\frac{2dA_3}{e_3}}=6^{\frac{1}{2}} \quad \text{και} \quad Q_4=\sqrt{\frac{2dA_4}{e_4}}=25^{\frac{1}{2}}=5$$

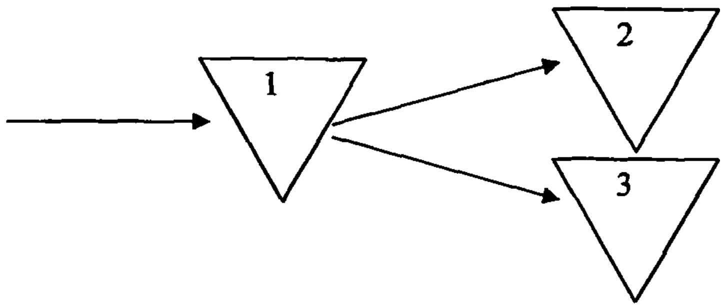
Τα αντίστοιχα στοιχεία κόστους ανά μονάδα χρόνου είναι :

$$C_{1+2}=(2d(A_1+A_2)(e_1+e_2))^{\frac{1}{2}}=140\,,\ C_3=6^{\frac{1}{2}}\,,\ C_4=(2dA_4e_4)^{\frac{1}{2}}=(2*1*125*10)^{\frac{1}{2}}=50.$$

Το συνολικό χαλαρωμένο κόστος είναι : $C_{rel}=C_{1+2}+C_3+C_4 \Rightarrow C_{rel}=140+50+6^{\frac{1}{2}}=192.45$

(Οι αντίστοιχοι πολλαπλασιαστές Lagrange στην (2.25) είναι $\lambda_2=30$, $\lambda_3=0$ και $\lambda_4=0$. Αυτό σημαίνει ότι $e_1^{'}=40+60=100$ και $e_2^{'}=100-60=40$. Οι λόγοι $\frac{A_1}{e_1^{'}}=\frac{50}{100}=0.5$ και $\frac{A_2}{e_2^{'}}=\frac{20}{40}=0.5$ είναι τότε και οι δύο ίσοι με 0.5, οι οποίοι συνεπάγονται ίσες ποσότητες παραγγελίας όταν βελτιστοποιείται η (2.26)). Έπειτα, στρογγυλεύονται οι ποσότητες παραγγελίας ώστε να προκύψει η εφικτή λύση του Roundy. Πρώτον, για απλότητα, τίθεται q=1 στην (2.27). Τότε προκύπτουν στρογγυλεμένες ποσότητες παραγγελίας, $Q_1 = Q_2 = 1$, $Q_3 = 2$ και $Q_4 = 4$. Αυτό δίνει το κόστος $C = 193.75$, δηλαδή 0.68% πιο πάνω από το χαλαρωμένο κόστος και 6% πιο κάτω από το εγγυημένο. Αυτό αποδεικνύει ότι μια *βέλτιστη λύση* στην (2.27) είναι q=1.0626. Όταν χρησιμοποιείται αυτό το q, είναι βέλτιστο να χρησιμοποιούνται τα ίδια πολλαπλάσια, δηλαδή, $Q_1 = Q_2 = q$, $Q_3 = 2q$ και $Q_4 = 4q$. Το αντίστοιχο κόστος είναι 193.39, δηλαδή, 0.49% πιο πάνω από το χαλαρωμένο κόστος συγκριτικά με το εγγυημένο 2%. Ωστόσο, σημειώνεται ότι αυτή δεν είναι η *βέλτιστη λύση*. Μια εφικτή λύση είναι να χρησιμοποιηθούν $Q_1 = Q_2 = 1$, $Q_4 = 5$ και να προκύψουν $Q_3 = 2$ και $Q_3 = 3$ κάθε $2^η$ στιγμή. Η μη στάσιμη λύση δίνει κόστος $C = 192.5$, δηλαδή, μόνο 0.026% πιο πάνω από το χαλαρωμένο κόστος.

Η αντίστοιχη λύση για ένα *σύστημα συναρμολόγησης* είναι ίδια. Ωστόσο, για ένα σύστημα διανομής, η λύση είναι διαφορετική. Γενικά, ένα σύστημα διανομής, δεν είναι δυνατό να διατηρεί σταθερές ποσότητες παραγγελίας. Αντί αυτού, οι χρονικοί κύκλοι διατηρούνται σταθεροί και πρέπει να εκφραστούν ως δυνάμεις του δύο, κάποιας βασικής περιόδου. Σε ένα σύστημα διανομής με σταθερή ζήτηση όπως αυτό στο Σχήμα 2.10, φαίνεται ότι οι σταθεροί χρονικοί κύκλοι μπορούν να δώσουν *time-varying* ποσότητες παραγγελίας.



Σχήμα 2.10. Ένα απλό σύστημα διανομής

Υποτίθεται ότι η ζήτηση του πελάτη στις αποθήκες 2 και 3 είναι 2 μονάδες ανά μονάδα χρόνου, και οι χρονικοί κύκλοι είναι $T_1 = 1$, $T_2 = 1/2$ και $T_3 = 2$. Οι ποσότητες στις αποθήκες 2,3 είναι σταθερές και ίσες με 1 και 4, αντίστοιχα. Αλλά οι ποσότητες στην αποθήκη 1 είναι 2 και 6 κάθε $2^η$ στιγμή.

2.7 Μοντέλο προσδιοριστικής μεταβλητής, με τον χρόνο, ζήτησης (Deterministic Time-varying Demand Models)

Στη συνέχεια εξετάζεται το απλό *σειριακό σύστημα* του Σχήματος 2.1 υποθέτοντας ότι η ζήτηση μεταβάλλεται με το χρόνο από περίοδο σε περίοδο. Οι ελλείψεις δεν επιτρέπονται και οι *χρόνοι απόκρισης* είναι μηδέν. Τέλος η ζήτηση του πελάτη συμβαίνει στην αρχή της περιόδου, αμέσως μετά από μια πιθανή διανομή.

Παράδειγμα 2.8

Έστω ότι το *κόστος παραγγελίας* είναι $A_1 = 20$ και $A_2 = 80$ και το *κόστος διατήρησης* ανά μονάδα προϊόντος και μονάδα χρόνου είναι $h_1 = 5$ και $h_2 = 4$. Ο χρονικός ορίζοντας είναι τεσσάρων χρονικών περιόδων με ζήτηση για το προϊόν 1 ίση με $d_1 = 3$, $d_2 = 6$, $d_3 = 5$ και $d_4 = 2$.

Όπως στο παράδειγμα 2.5, πρώτα λύνεται το πρόβλημα σε σειρά και αγνοείται η πολυβάθμια δομή του. Αυτή είναι μια συνηθισμένη προσέγγιση στη πράξη. Η αρχή γίνεται με το τελευταίο προϊόν, το προϊόν 1, για το οποίο είναι γνωστή η ζήτηση. Αφού καθοριστούν οι ποσότητες παραγγελίας για το προϊόν 1, γίνεται γνωστή και η ζήτηση για το προϊόν 2, (οι παραγγελίες από την αποθήκη 1) και επίσης μπορούν να καθοριστούν οι ποσότητες παραγγελίας για το προϊόν της. Είναι εύκολο να προσδιοριστεί η βέλτιστη λύση για το προϊόν 1, όταν αγνοηθεί το προϊόν 2, εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο Wagner-Whitin με *κόστος παραγγελίας* $A_1 = 20$ και *κόστος διατήρησης* $h_1 = 5$. Επειδή υπάρχουν μόνο τέσσερεις περίοδοι, είναι εύκολο να προκύψει η *βέλτιστη λύση* εξετάζοντας όλες τις εναλλακτικές εφικτές λύσεις. Πρώτον, σημειώνεται ότι εξαιτίας του υψηλού *κόστους διατήρησης* η ζήτηση στις περιόδους 1-3 θα πρέπει να καλύπτεται από ξεχωριστές διανομές. Δοθέντος αυτού φαίνεται ότι η παραγγελία στην περίοδο 3 θα πρέπει επίσης να καλύπτει τη ζήτηση στην περίοδο 4. Συνεπώς, η *βέλτιστη λύση* για το προϊόν 1 είναι να υπάρχουν 3 παραγγελίες. Η 1η παραγγελία έχει μέγεθος 3 και καλύπτει την ζήτηση της περιόδου 1. Η 2η παραγγελία έχει μέγεθος 6 και καλύπτει την ζήτηση της περιόδου 2 και η 3η παραγγελία έχει μέγεθος 7 και καλύπτει την ζήτηση των περιόδων 3 και 4. Επίσης, εύκολα φαίνεται ότι το κόστος C_1 για το προϊόν 1, είναι: $C_1 = 3*20 + 2*5 = 70$ που αντιστοιχούν στο άθροισμα του κόστους παραγγελίας (3 παραγγελίες) και του κόστους διατήρησης κατά την διάρκεια της περιόδου 3 για τη ζήτηση στη περίοδο 4. Η βέλτιστη πολιτική παραγγελιών για το προϊόν 1 συνεπάγεται ότι η ζήτηση για το προϊόν 2 κατά τη διάρκεια του ορίζοντα σχεδιασμού είναι 3 μονάδες την περίοδο 1, 6 μονάδες την περίοδο 2, 7 μονάδες την περίοδο 3 και μηδενική ζήτηση για την περίοδο 4. Δοθείσης αυτής της ζήτησης εύκολα προκύπτει ότι η βέλτιστη πολιτική παραγγελιών για το προϊόν 2, είναι να γίνει την περίοδο 1 μια παραγγελίας μεγέθους 16.

Το κόστος για το προϊόν 2 προκύπτει ως εξής :

$C_2 = 80 + 6*4 + 2*7*4 = 160$

και το συνολικό κόστος για το διβάθμιο σύστημα είναι : $C = C_1 + C_2 = 70 + 160 = 230$.

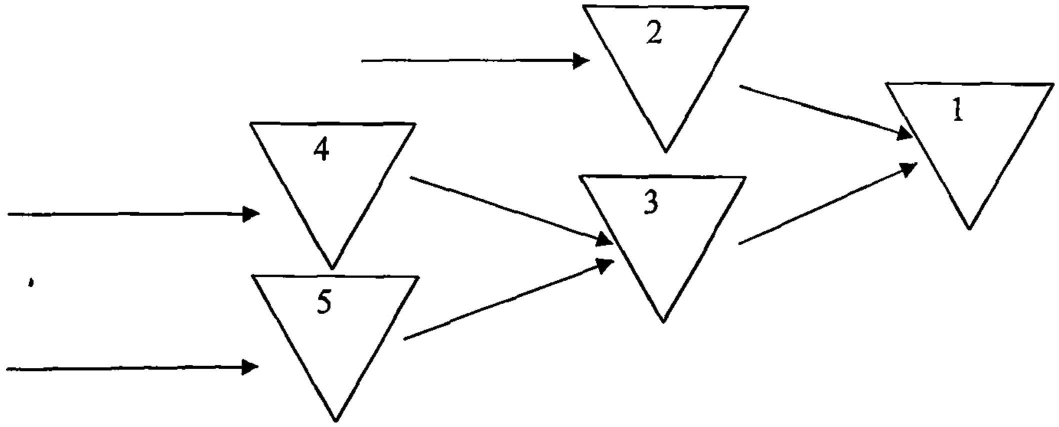
Η λύση που προέκυψε δεν είναι *βέλτιστη*. Ελαχιστοποιείται το κόστος διαχείρισης του αποθέματος για το προϊόν 1 χωρίς να εξετάζονται οι συνέπειες για το προϊόν 2. Είναι εύκολο να βρεθεί μια καλύτερη λύση. Επιλέγεται μια ποσότητα μεγέθους 16 και για τα δύο προϊόντα, 1 και 2. Τότε προκύπτουν οι εξής εκφράσεις για το κόστος διαχείρισης του αποθέματος των δύο προϊόντων:

$C_1 = 20 + 6*5 + 2*5*5 + 3*2*5 = 130$, $C_2 = 80$ και $C = C_1 + C_2 = 210$

Όπως αναμενόταν αυτή η λύση συνεπάγεται επιπλέον *κόστος* για τη διαχείριση του αποθέματος του προϊόντος 1. Αλλά η μείωση του αντίστοιχου κόστους για το προϊόν 2 είναι μεγαλύτερη. Είναι δυνατόν να αποδειχτεί ότι αυτή είναι η *βέλτιστη λύση*. Μια απλή προσεγγιστική μέθοδος η οποία έχει προταθεί από τους Blackburn και Millen [6], χρησιμοποιεί τις τροποποιημένες εκφράσεις (2.19) και (2.20) για το κόστος παραγγελίας και διατήρησης αντίστοιχα οι οποίες δίνουν τη βέλτιστη λύση στη περίπτωση σταθερής ζήτησης. Αυτό σημαίνει ότι το πρόβλημα με ζήτηση μεταβλητή από περίοδο σε περίοδο λύνεται επίσης με μια διαδοχική διαδικασία όπως στο παράδειγμα 2.8, αλλά με τροποποιημένες τις παραμέτρους κόστους. Πράγματι στο παράδειγμα 2.6 προσδιορίστηκε το βέλτιστο $k = 1$. Από τις (2.19) και (2.20) προκύπτουν : $A_1' = A_1 + A_2 = 100$ και $h_1' = e_1 + e_2 = 5$. Αν χρησιμοποιηθούν αυτές οι τροποποιημένες παράμετροι κόστους και λυθεί το πρόβλημα για το προϊόν 1 με το αλγόριθμο Wagner-Whitin, προκύπτει ως βέλτιστη λύση η τοποθέτηση μιας παραγγελίας μεγέθους 16 μονάδων την 1η περίοδο. Το προϊόν 2 δεν έχει αποθήκη πιο πάνω επιπέδου, γι' αυτό χρησιμοποιούνται οι αρχικές παράμετροι κόστους $A_2 = 80$ και $h_2 = 4$.

Παράδειγμα 2.9

Στη συνέχεια, θα λυθεί το πρόβλημα στο παράδειγμα 2.8 εφαρμόζοντας την προτεινόμενη τεχνική. Υπενθυμίζεται ότι $A_1 = 20$, $A_2 = 80$, $h_1 = 5$, $h_2 = 4$. Η ζήτηση των πελατών για το προϊόν 1 είναι $d_1 = 3$, $d_2 = 6$, $d_3 = 5$, $d_4 = 2$. Στο παράδειγμα 2.6 προσδιορίστηκε το βέλτιστο $k = 1$. Από τις (2.19) και (2.20) προκύπτουν : $A_1' = A_1 + A_2 = 100$ και $h_1' = e_1 + e_2 = 5$. Αν χρησιμοποιηθούν αυτές οι τροποποιημένες παράμετροι κόστους και λυθεί το πρόβλημα για το προϊόν 1 με τον αλγόριθμο Wagner-Whitin, προκύπτει η *βέλτιστη λύση*, δηλαδή μια ποσότητα μεγέθους 16 στην περίοδο 1. Το προϊόν 2 δεν έχει αποθήκη πιο πάνω επιπέδου, γι' αυτό χρησιμοποιούνται οι παράμετροι $A_2 = 80$ και $h_2 = 4$. Επειδή υπάρχει μοναδική ζήτηση στην περίοδο 1 είναι προφανές ότι θα υπάρχει και μοναδική παραγγελία. Στη συνέχεια θεωρείται ένα γενικό *σύστημα συναρμολόγησης*.



Σχήμα 2.11. Σύστημα συναρμολόγησης

Υπενθυμίζεται ότι σε ένα *σύστημα συναρμολόγησης*, κάθε αποθήκη έχει το πολύ μια αμέσως επόμενη αποθήκη. Επίσης, χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποτίθεται ότι απαιτείται μια μονάδα από κάθε προϊόν, όταν παράγεται μια μονάδα από ένα υποπροϊόν. Ο προσδιορισμός των ποσοτήτων παραγγελίας σε ένα *σύστημα συναρμολόγησης* είναι πιο δύσκολος από ότι σε ένα *σειριακό σύστημα* (Afentakis et al. [1], Rosling [35]. Είναι επίσης δυνατόν να γενικευτεί η προσεγγιστική τεχνική των Blackburn και Millen [6] για *συστήματα συναρμολόγησης*. Έστω :

s(j) = (ο δείκτης) η αποθήκη, η οποία είναι μια αμέσως επόμενη της αποθήκης j ,

p(j) = το σύνολο των αποθηκών, οι οποίες είναι αμέσως προηγούμενες της αποθήκης j.

Για παράδειγμα, στο Σχήμα 2.11, λαμβάνεται $s(4)=3$ και $p(3)=\{4,5\}$.

Το *κόστος διατήρησης βαθμίδας* προκύπτει ως :

$$e_j = h_j - \sum_{i\in p(j)} h_i \tag{2.28}$$

Το τροποποιημένο *κόστος παραγγελίας* και *διατήρησης* προκύπτει ως εξής :

$$A_j' = A_j + \frac{\sum_{i\in p(j)} A_i'}{k_i} \tag{2.29}$$

$$h_j' = e_j + \sum_{i\in p(j)} h_i' k_i \tag{2.30}$$

Στις (2.29) και (2.30) το k_i είναι ο εκτιμώμενος λόγος ποσότητα παραγγελίας για το προϊόν i προς ποσότητα παραγγελίας για το επόμενό του, προϊόν j.

Οι Blackburn και Millen [6] υπολόγισαν τον λόγο k_j στρογγυλεύοντας την ποσότητα

$$k_j^* = \sqrt{\frac{A_j' e_{s(j)}}{A_{s(j)} h_j'}} \tag{2.31}$$

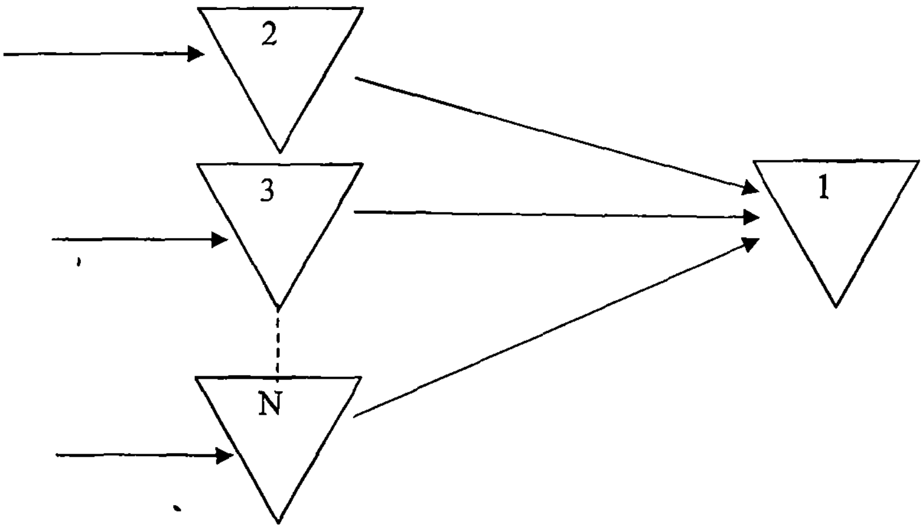
ώστε να είναι ένας θετικός ακέραιος. Σημειώνεται ότι οι (2.29)-(2.31) εμφανίζονται ως γενικεύσεις των (2.18)-(2.20).

Έστω το *σύστημα συναρμολόγησης* του Σχήματος 2.11. Ο Πίνακας 2.3 διευκρινίζει πώς προκύπτουν το τροποποιημένο *κόστος διατήρησης* και *παραγγελίας*. Το κόστος h_i και A_i δίνονται. Προκύπτει το *κόστος διατήρησης βαθμίδας* από την (2.28) ξεκινώντας με τα προϊόντα 2, 4 και 5 τα οποία δεν έχουν προηγούμενα. Εξετάζονται ξανά τα προϊόντα 2, 4 και 5. Γι' αυτά τα προϊόντα ισχύουν, $A_j' = A_j$ και $h_j' = e_j$. Επίσης, λαμβάνονται οι λόγοι k_j γι' αυτά τα προϊόντα από την (2.31) (στρογγυλεύοντας σε ακέραιους). Έπειτα εξετάζεται το προϊόν 3. Προκύπτουν οι A_3' και h_3' από τις (2.29) και (2.30). Σύμφωνα μ' αυτές προσδιορίζεται το k_3. Τελικά, προκύπτουν τα h_1' και A_1'.

Πίνακας 2.3. Καθορισμός του τροποποιημένου κόστους παραγγελίας και διατήρησης

προϊόντα	A_j	h_j	e_j	A_j'	h_j'	k_j
1	1800	5	1	11600	8	-
2	1800	1	1	1800	1	1
3	3200	3	1	16000	3	2
4	6400	1	1	6400	1	1
5	6400	1	1	6400	1	1

Ο Graves [26] πρότεινε μια διαφορετική προσεγγιστική τεχνική. Κάποιες φορές είναι δυνατόν να απλοποιηθεί το πρόβλημα προσδιορισμού της ποσότητας παραγγελίας (lot sizing), δείχνοντας αρχικά ότι κάποια προϊόντα θα πρέπει πάντα να παράγονται σε ίσες ποσότητες παρτίδας (batch sizes). Ένα γενικό *σύστημα συναρμολόγησης* περιλαμβάνει έναν αριθμό από υποσυστήματα 2 επιπέδων.



Σχήμα **2.12** . Διβάθμιο *υποσύστημα συναρμολόγησης*

Υποτίθεται ότι οι αποθήκες στο Σχήμα 2.12, έχουν *κόστος παραγγελίας*, A_i και *κόστος διατήρησης βαθμίδας*, e_i . Είναι δυνατόν να αποδειχτεί ότι όλες οι αποθήκες θα πρέπει να χρησιμοποιούν τις ίδιες ποσότητες παραγγελίας, αν η ακόλουθη συνθήκη ικανοποιείται (Axsater και Nuttle [4]).

$$\frac{\sum_{j \neq i} A_j}{\sum_{j \neq i} e_j} \geq \frac{A_i}{e_i} \quad , \quad i = 2,3,.....,N \tag{2.32}$$

Σημειώνεται ότι η συνθήκη είναι ικανή, αλλά όχι αναγκαία. Υπενθυμίζεται ότι έχει ήδη καταγραφεί μια ειδική περίπτωση αυτής της συνθήκης σε σχέση με την (2.18). Αν πάντα χρησιμοποιούνται οι ίδιες ποσότητες παραγγελίας στο υποσύστημα του Σχήματος 2.12, χρειάζεται απόθεμα μόνο από το προϊόν 1. Αυτό σημαίνει ότι το υποσύστημα μπορεί να αντικατασταθεί από ένα προϊόν με *κόστος παραγγελίας*, $A_1 + A_2 + ... + A_N$ και *κόστος διατήρησης βαθμίδας*, $e_1 + e_2 + ... + e_N$.

2.8 Καθορισμός αποθεμάτων ασφαλείας και σημείων αναπαραγγελίας (υπό στοχαστική ζήτηση)

Οι μέθοδοι για τον καθορισμό των αποθεμάτων ασφαλείας και των σημείων αναπαραγγελίας που εφαρμόζονται σε ένα σύστημα ενός επιπέδου δεν μπορούν να εφαρμοστούν απευθείας σε ένα πολυβάθμιο σύστημα διαχείρισης αποθεμάτων. Ο λόγος είναι ότι οι αποθήκες του συστήματος δεν μπορούν να αντιμετωπιστούν ξεχωριστά. Ένα βασικό πρόβλημα στα πολυβάθμια συστήματα αποθεμάτων, είναι η εύρεση της καλύτερης ισορροπίας των αποθεμάτων των πιο πάνω και πιο κάτω επιπέδων. Είναι φανερό ότι οι αποθήκες στα διάφορα επίπεδα, σχετίζονται μεταξύ τους. Για παράδειγμα, αν υπάρχει μεγάλο απόθεμα ασφαλείας από ένα τελικό προϊόν είναι δυνατόν να υπάρξουν κάποιες καθυστερήσεις στην παραγωγή και συνεπώς, ίσως είναι εφικτό να υπάρχουν σχετικά χαμηλά αποθέματα ασφαλείας στις πρώτες ύλες και τα ενδιάμεσα προϊόντα. Έστω ένα διβάθμιο αποκλίνον σύστημα με μια κεντρική αποθήκη κι έναν αριθμό από τελικές αποθήκες. Αν υπάρχει μεγάλο απόθεμα στην κεντρική αποθήκη, οι παραγγελίες από τις τελικές αποθήκες πολύ σπάνια καθυστερούν και ίσως είναι δυνατόν να μειωθούν τα αποθέματα ασφαλείας σε αυτές. Γενικά, σε ένα πολυβάθμιο σύστημα είναι πολύ δύσκολο να κατανεμηθούν βέλτιστα τα αποθέματα ασφαλείας, οπότε συχνά οδηγούμαστε σε μια εύλογη «2η καλύτερη» λύση. Στην επόμενη παράγραφο, θα γίνει αναφορά στα *αποθέματα ασφαλείας* και τους *χρόνους ασφαλείας* σε πολυβάθμια συστήματα αποθεμάτων.

2.8.1 Αποθέματα ασφαλείας και χρόνοι ασφαλείας σε πολυβάθμια συστήματα αποθεμάτων

Ο επιμερισμός των αποθεμάτων ασφαλείας σε ένα πολυβάθμιο σύστημα αποθεμάτων απαιτεί απαντήσεις σε δύο ερωτήματα. Πρώτον, πόσο είναι το συνολικό απόθεμα ασφαλείας του συστήματος, που απαιτείται και δεύτερον πώς θα επιμεριστεί το απόθεμα στις τελικές αποθήκες. Αυτός ο επιμερισμός επηρεάζεται από ποικίλους παράγοντες, όπως είναι η δομή του συστήματος. Σε ένα αποκλίνον σύστημα διανομής (Σχήμα 2.2) υπάρχουν λίγες αποθήκες στην αρχή της παραγωγικής διαδικασίας συγκριτικά με ένα *σύστημα συναρμολόγησης* (Σχήμα 2.4). Γενικά, είναι ευνοϊκότερο να διανέμονται αποθέματα ασφαλείας, όπου υπάρχουν λίγα προϊόντα με υψηλή και σχετικά σταθερή ζήτηση. Αυτό αποδεικνύει ότι θα ήταν πιο λογικό το απόθεμα ασφαλείας να διατηρείται στην αρχή της γραμμής παραγωγής του προϊόντος σε ένα σύστημα διανομής παρά σε ένα *σύστημα συναρμολόγησης*. Ωστόσο, υπάρχουν κι άλλοι παράγοντες, οι οποίοι ίσως αποδεικνύουν άλλη κατανομή των αποθεμάτων ασφαλείας. Το *κόστος διατήρησης* είναι συχνά αρκετά χαμηλό στην αρχή της παραγωγικής διαδικασίας. Αυτό σημαίνει ότι σ' ένα *σύστημα συναρμολόγησης* μπορεί ακόμη να είναι μια καλή πολιτική, ώστε να υπάρχουν σχετικά μεγάλα αποθέματα ασφαλείας από διάφορα προϊόντα. Επίσης, ο επιμερισμός των αποθεμάτων ασφαλείας επηρεάζεται από τους *χρόνους απόκρισης*. Έτσι στο διβάθμιο αποκλίνον σύστημα διανομής του Σχήματος 2.2, αν ο *χρόνος απόκρισης* της κεντρικής αποθήκης είναι πολύ μεγάλος συγκριτικά με τους *χρόνους απόκρισης* των τελικών αποθηκών, τότε θα πρέπει να διατηρείται στην κεντρική αποθήκη πολύ απόθεμα. Επίσης, σημειώνεται ότι μπορεί να βελτιωθεί η εξυπηρέτηση με διάφορους τρόπους. Μερικές φορές, ένας *χρόνος ασφαλείας* είναι μια καλύτερη εναλλακτική λύση από ένα απόθεμα ασφαλείας. Αυτή η περίπτωση είναι για ένα προϊόν, το οποίο χρησιμοποιείται μόνο λίγες φορές το χρόνο, όταν παράγεται ένα προϊόν σε αποθήκη πιο πάνω επιπέδου. Αν χρησιμοποιείται ένας *χρόνος ασφαλείας* σε ένα MRP (Material Requirements Planning) σύστημα θα αποθηκεύεται μόνο το προϊόν κατά την διάρκεια μιας μικρής περιόδου προτού αυτό χρειαστεί στην παραγωγή, όπου τα *αποθέματα ασφαλείας* και οι *χρόνοι ασφαλείας* υπάρχουν σε μεγάλο βαθμό εξαιτίας των μη σταθερών *χρόνων απόκρισης*. Ένα ερώτημα που προκύπτει πάντα είναι, αν είναι δυνατόν να ελεγχθούν οι *χρόνοι απόκρισης* και επομένως να αποφευχθούν τα μεγάλα *αποθέματα ασφαλείας*. Για να πραγματοποιηθεί αυτό είναι συχνά απαραίτητη η δυνατότητα περισσότερης ή περισσότερο ευέλικτης παραγωγής, έτσι ώστε οι καθυστερήσεις στην παραγωγή, εξαιτίας διαφόρων γεγονότων, να μην είναι πολύ μεγάλες. Η *χωρητικότητα ασφαλείας* (*safety capacity*) μπορεί να είναι μια εναλλακτική λύση στα *αποθέματα ασφαλείας*. Ωστόσο, πάντα θα παραμένει κάποια αβεβαιότητα τόσο στους *χρόνους απόκρισης* όσο και στη ζήτηση για τα τελικά προϊόντα.

2.9 Το μοντέλο των Clark και Scarf

Η καλύτερη, γνωστή τεχνική για τον καθορισμό των αποθεμάτων ασφαλείας σ' ένα πολυβάθμιο *σειριακό σύστημα* αποθεμάτων, παρουσιάστηκε από τους Clark και Scarf [12]. Η μέθοδός τους, η οποία είναι ακριβής για *σειριακά συστήματα*, μοιάζει με τεχνική ανάλυσης. Στο πρώτο βήμα, θεωρείται η αποθήκη του πιο κάτω επιπέδου, η οποία αντιμετωπίζει την ζήτηση του πελάτη. Οι ελλείψεις, στην αποθήκη του αμέσως πιο πάνω επιπέδου, προκαλούν στοχαστικές καθυστερήσεις, οι οποίες θα επιφέρουν *πρόσθετο κόστος*. Όταν πρέπει να προσδιοριστεί μια *βέλτιστη πολιτική* για την αποθήκη του πιο πάνω επιπέδου, το *πρόσθετο κόστος* εκτιμάται και προστίθεται ως *κόστος έλλειψης*. Επίσης, η προσέγγιση των Clark και Scarf [12] μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παραχθούν προσεγγιστικές λύσεις για αποκλίνοντα συστήματα διανομής αποθεμάτων. Η προσέγγιση αυτή χρησιμοποιεί την *υπόθεση των ισοσταθμισμένων αποθεμάτων* (*balance assumption*), η οποία σημαίνει απαραίτητα ότι μια αποθήκη πιο πάνω επιπέδου επιτρέπεται να πραγματοποιεί αρνητικές διανομές στις πιο κάτω αποθήκες. Αυτό συνεπάγεται ότι το συνολικό απόθεμα στις πιο κάτω αποθήκες, μπορεί πάντα να είναι βέλτιστα κατανεμημένο μεταξύ των αποθηκών. Ένα αποτέλεσμα αυτής της προσεγγιστικής υπόθεσης, είναι το λίγο απόθεμα του πιο πάνω επιπέδου, επειδή δεν είναι απαραίτητο για μια πιο πάνω αποθήκη να προστατεύει από μελλοντικές δυσαρμονίες (imbalances) ανάμεσα στις πιο κάτω αποθήκες. Η *υπόθεση των ισοσταθμισμένων αποθεμάτων* έχει αναλυθεί εκτενώς στην βιβλιογραφία και φαίνεται ότι δίνει καλές προσεγγίσεις σε πολλές καταστάσεις (Eppen και Schrage [21], Federgruen και Zipkin [23],[24], Federgruen [22], van Houtoum et al. [44] , Verrijdt και de Kok [53].

Στη συνέχεια, θα περιγραφεί η τεχνική για το απλό *διβάθμιο σειριακό σύστημα* του Σχήματος 2.1. Θεωρώντας περιοδική επιθεώρηση του αποθέματος και επιπλέον ότι οι δύο αποθήκες χρησιμοποιούν *echelon stock order-up-to S* πολιτικές. Η αποθήκη 1 ανεφοδιάζεται από την αποθήκη 2, ενώ αυτή ανεφοδιάζεται από έναν εξωτερικό προμηθευτή, που έχει άπειρο απόθεμα. Πολλές από τις βασικές υποθέσεις είναι ίδιες με το μοντέλο ενός επιπέδου. Οι *χρόνοι απόκρισης* είναι ακέραιοι αριθμοί των περιόδων και ότι η συνεχής ζήτηση της περιόδου στην αποθήκη 1, περιγράφεται από την κανονική κατανομή και είναι ανεξάρτητη από περίοδο σε περίοδο. Η υπερβάλλουσα ζήτηση ικανοποιείται με καθυστέρηση.

Όλα τα γεγονότα συμβαίνουν στην αρχή της περιόδου με την ακόλουθη σειρά:

1. Η αποθήκη 2 παραγγέλλει.
2. Ο εξωτερικός προμηθευτής αποστέλλει την παραγγελία στην αποθήκη 2.
3. Η αποθήκη 1 παραγγέλλει από την αποθήκη 2.
4. Η αποθήκη 2 αποστέλλει την παραγγελία στην αποθήκη 1.
5. Η ζήτηση ανά περίοδο συμβαίνει στην αποθήκη 1.
6. Γίνεται εκτίμηση του *κόστους διατήρησης* και *έλλειψης*.

Σημειώνεται ότι εξετάζονται οι *echelon stock* πολιτικές και ότι για απλότητα οι *order-up-to θέσεις των αποθεμάτων* δηλώνονται με S_1 και S_2 αντί για S_1^e και S_2^e αντίστοιχα. Επειδή η αποθήκη 2 εφαρμόζει μια *echelon stock* S_2 πολιτική, η *θέση του αποθέματος βαθμίδας*, αφού παραγγείλει σε αυθαίρετο χρόνο t, είναι πάντα S_2. Επειδή ο εξωτερικός προμηθευτής έχει άπειρο απόθεμα, το απόθεμα που παραγγέλλεται, αποστέλλεται αμέσως στην αποθήκη 2. Το *επίπεδο αποθέματος βαθμίδας* (*echelon stock inventory level*) στην αποθήκη 2, την περίοδο $t+l_2$, αμέσως μετά την παραλαβή της παραγγελίας, είναι IL_2^e. Το IL_2^e εκφράζεται ως : $IL_2^e = S_2 - D(l_2)$, δηλαδή S_2 μείον την ζήτηση κατά την διάρκεια των l_2 περιόδων $t, t+1, ..., t+l_2-1$. Σημειώνεται, ότι η ζήτηση της περιόδου $t+l_2$ δεν έχει συμβεί σ' αυτό το επίπεδο. Η ζήτηση $D(l_2)$ έχει μέση τιμή, $\mu_2' = l_2\mu$ και τυπική απόκλιση, $\sigma_2' = \sqrt{l_2}\sigma$. Όταν η αποθήκη 1 παραγγείλει, η *θέση του αποθέματος* της αυξάνεται μέχρι να φτάσει στο επιθυμητό επίπεδο, S_1. (Υπενθυμίζεται ότι, επειδή η αποθήκη 1 δεν έχει αποθήκη πιο κάτω επιπέδου, ισχύει ότι: *θέση του αποθέματος της αποθήκης = θέση του αποθέματος βαθμίδας*). Αυτό είναι δυνατόν, παρόλο που ένα μέρος της παραγγελίας θα ικανοποιηθεί με καθυστέρηση στην αποθήκη 2, λόγω μη διαθέσιμου αποθέματος. Δηλώνεται με:

$\hat{S}_1$ = η (realized) πραγματική θέση του αποθέματος μετά την παραγγελία.

Το *επίπεδο αποθέματος* στην αποθήκη 2, λίγο μετά την παραγγελία από την αποθήκη 1, είναι :

$$IL_2^l = IL_2^e - S_1 = S_2 - D(l_2) - S_1$$

Αυτή είναι η κατάσταση του αποθέματος στην αποθήκη 2 κατά την διάρκεια ολόκληρης της περιόδου. Έπειτα, εξετάζεται η αποθήκη 1. Μετά την παραγγελία στην περίοδο $t+l_2$, η *θέση του αποθέματος* είναι S_1 και οι ελλείψεις στην αποθήκη 2 είναι, $(IL_2^{'})^- = (S_2 - D(l_2) - S_1)^-$. (Υπενθυμίζεται ότι $x^+ = \max(x,0)$, $x^- = \max(-x,0)$ και $x^+ - x^- = x$). Η πραγματική *θέση του αποθέματος* μετά την παραγγελία δηλώνεται είτε με το επίπεδο αποθέματος που θέλει να φτάσει η αποθήκη 1, είτε με όσο μπορεί να της δώσει η αποθήκη 2 είναι:

$$\hat{S}_1 = S_1 - (S_2 - D(l_2) - S_1)^- = \min(S_1, S_2 - D(l_2)) \quad (2.33)$$

Το *μέσο κόστος διατήρησης* ανά περίοδο στην αποθήκη 2 εκφράζεται ως :

$$C_2(S_1,S_2) = h_2 E(S_2 - D(l_2) - S_1)^+ = h_2(S_2 - \mu_2^{'} - S_1) + h_2 E(S_2 - D(l_2) - S_1)^- =$$

$$= h_2(S_2 - \mu_2^{'}) - h_2 E(\hat{S}_1)$$

$$\text{Άρα } C_2(S_1,S_2) = h_2(S_2 - \mu_2^{'}) - h_2 E(\hat{S}_1) \quad (2.34)$$

Το *επίπεδο αποθέματος* στην αποθήκη 1 μετά την ζήτηση στην περίοδο $t + l_1 + l_2$, είναι :

$IL_1(t + l_1 + l_2) = \hat{S}_1 - D(l_1 + 1)$ όπου $D(l_1 + 1)$ η ζήτηση στις περιόδους $t + l_2, t + l_2 + 1, \ldots, t + l_2 + l_1$.

Σημειώνεται ότι η $\hat{S}_1$ είναι ανεξάρτητη απ' αυτή την ζήτηση, η οποία έχει μέση τιμή, $\mu_1^{''} = (l_1 + 1)\mu$ και τυπική απόκλιση, $\sigma_1^{''} = \sqrt{(l_1 + 1)}\sigma$.

Συνεπώς, το μέσο κόστος περιόδου στην αποθήκη 1 προκύπτει ως :

$$C_1(S_1,S_2) = h_1 E((\hat{S}_1 - D(l_1+1))^+) + b_1 E((\hat{S}_1 - D(l_1+1))^-) =$$

$$= h_1(E(\hat{S}_1) - \mu_1^{''}) + (h_1 + b_1)E((\hat{S}_1 - D(l_1+1))^-)$$

$$\text{Άρα } C_1(S_1,S_2) = h_1(E(\hat{S}_1) - \mu_1^{''}) + (h_1 + b_1)E((\hat{S}_1 - D(l_1+1))^-) \quad (2.35)$$

Ο τελευταίος όρος στην (2.34), $-h_2 E(\hat{S}_1)$, μεταφέρεται στο επίπεδο 1, επειδή εξαρτάται αποκλειστικά από το $\hat{S}_1$. Άρα προκύπτει :

$$\tilde{C}_2(S_2) = h_2(S_2 - \mu_2^{'}) \quad (2.36)$$

$$\text{και } \tilde{C}_1(S_1,S_2) = e_1 E(\hat{S}_1) - h_1\mu_1^{''} + (h_1 + b_1)E((\hat{S}_1 - D(l_1+1))^-) \quad (2.37)$$

Αυτή η ανακατανομή, δεν επηρεάζει το συνολικό κόστος. Επειδή ο μεταφερόμενος όρος είναι αρνητικός, το κόστος $\tilde{C}_1(S_1,S_2)$ μπορεί να γίνει επίσης, αρνητικό. Σημειώνεται ότι η (2.36) είναι ανεξάρτητη του S_1. Το κόστος (2.37) στο επίπεδο 1, θα εξαρτάται από το S_2, λόγω του $\hat{S}_1$, το οποίο είναι στοχαστική μεταβλητή, αλλά αποδεικνύεται ότι το βέλτιστο S_1 είναι ανεξάρτητο του S_2. Αυτό φαίνεται, αν προς στιγμή αγνοηθεί ότι η $\hat{S}_1$, είναι στοχαστική μεταβλητή και εξαρτάται από τα S_1 και

S_2. Απλά υποτίθεται ότι μπορεί να επιλέγει οποιαδήποτε τιμή για το $\hat{S}_1$. Αυτό σημαίνει ότι η (2.37) μπορεί να αντικατασταθεί από την :

$$\hat{C}_1(\hat{S}_1) = e_1\hat{S}_1 - h_1\mu_1^{''} + (h_1+b_1)E((\hat{S}_1 - D(l_1+1))^- =$$

$$= e_1\hat{S}_1 - h_1\mu_1^{''} + (h_1+b_1)\int_{\hat{S}_1}^{\infty}(u-\hat{S}_1)\frac{1}{\sigma_1^{''}}\phi\left(\frac{u-\mu_1^{''}}{\sigma_1^{''}}\right)du =$$

$$= e_1\hat{S}_1 - h_1\mu_1^{''} + (h_1+b_1)\sigma_1^{''}\int_{\frac{\hat{S}_1-\mu_1^{''}}{\sigma_1^{''}}}^{\infty}\left(v - \frac{\hat{S}_1-\mu_1^{''}}{\sigma_1^{''}}\right)\phi(v)dv = e_1\hat{S}_1 - h_1\mu_1^{''} + (h_1+b_1)\sigma_1^{''}G\left(\frac{\hat{S}_1-\mu_1^{''}}{\sigma_1^{''}}\right)$$

$$\text{Άρα } \hat{C}_1(\hat{S}_1) = e_1\hat{S}_1 - h_1\mu_1^{''} + (h_1+b_1)\sigma_1^{''}G\left(\frac{\hat{S}_1-\mu_1^{''}}{\sigma_1^{''}}\right) \tag{2.38}$$

(αφού τίθεται $v = \frac{u-\mu_1^{''}}{\sigma_1^{''}} \Rightarrow dv = \frac{1}{\sigma_1^{''}}du \Rightarrow \sigma_1^{''}dv = du$ και για $u = S_1 \Rightarrow v = \frac{S_1-\mu_1^{''}}{\sigma_1^{''}}$, ενώ για $u = \infty \Rightarrow v = \infty$)

Υπενθυμίζεται ότι όπου, $G(v) = \int_z^{\infty}(x-v)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx$ (unit Normal Loss Function) είναι κυρτή και ότι $G'(v) = \Phi(v) - 1$. Τότε εύκολα, από τη συνθήκη πρώτης τάξης για ελάχιστο προκύπτει η *βέλτιστη λύση* της $\hat{S}_1$:

$$\frac{d\hat{C}_1(\hat{S}_1)}{d\hat{S}_1} = e_1 + (h_1+b_1)\left(\Phi\left(\frac{\hat{S}_1-\mu_1^{''}}{\sigma_1^{''}}\right) - 1\right) = 0 \tag{2.39}$$

$$\Phi\left(\frac{\hat{S}_1-\mu_1^{''}}{\sigma_1^{''}}\right) = \frac{-e_1}{h_1+b_1} + 1 = \frac{b_1+h_1-e_1}{h_1+b_1} = \frac{h_1+b_1-h_1+h_2}{h_1+b_1} = \frac{b_1+h_2}{h_1+b_1} = \frac{e_2+b_1}{h_1+b_1}, \quad \text{ή ισοδύναμα}$$

$$\Phi\left(\frac{\hat{S}_1-\mu_1^{''}}{\sigma_1^{''}}\right) = \frac{e_2+b_1}{h_1+b_1} \tag{2.40}$$

Σημειώνεται ότι το πρόβλημα βελτιστοποίησης που προκύπτει (σχέση (2.38)) είναι ουσιαστικά το αντίστοιχο του διλλήματος του εφημεριδοπώλη (newsboy problem). Στη συνέχεια εξετάζεται η (2.33). Αν $S_2 - D(l_2) \geq \hat{S}_1^*$, τότε προκύπτει ως *βέλτιστη λύση* $S_1 = \hat{S}_1^*$, αν $S_2 - D(l_2) < \hat{S}_1^*$, τότε προκύπτει ως *βέλτιστη δυνατή λύση* $\hat{S}_1 = S_2 - D(l_2)$, λόγω της κυρτότητας της (2.38). Ακόμη, $S_1 = \hat{S}_1^*$ δίνει την *βέλτιστη λύση*. Συνεπώς, συμπεραίνεται ότι $S_1^* = \hat{S}_1^*$ είναι το βέλτιστο *order-up-to* επίπεδο στην αποθήκη 1 και ότι η λύση είναι εύκολο να προκύψει από την (2.40).

Σημειώνεται ότι αν $e_1 = 0$, ή ισοδύναμα, αν $h_1 = e_2$, η (2.40) συνεπάγεται ότι $S_1^* = \hat{S}_1^* \to \infty$. Αυτό σημαίνει ότι η αποθήκη 2 δεν θα διατηρήσει καθόλου απόθεμα. Για να γίνει κατανοητό, σημειώνεται ότι σε ένα *σειριακό σύστημα*, όλη η ζήτηση συμβαίνει στην αποθήκη 1. Αν δεν υπάρχει διαφορά στο *κόστος διατήρησης*, μπορεί να μεταφερθεί όλο το απόθεμα στην αποθήκη 1. Σε ένα αποκλίνον σύστημα διανομής, αυτή η συνθήκη παύει να ισχύει. Μπορεί να είναι καλύτερο να διατηρείται απόθεμα στην αποθήκη πιο πάνω επιπέδου, επειδή το απόθεμα είναι ακόμη δυνατόν, να επιμεριστεί σε αποθήκες πιο κάτω επιπέδου.

Στη συνέχεια, απομένει να προσδιοριστεί η *βέλτιστη λύση* S_2. Εξετάζεται το συνολικό κόστος, υποθέτοντας ότι χρησιμοποιείται το βέλτιστο S_1^*, αλλά το κόστος επειδή εξαρτάται μόνο από το S_2 δηλώνεται ως, $\hat{C}_2(S_2)$. Αυτό το κόστος προκύπτει από τις σχέσεις (2.33), (2.36) και (2.38). Αν $D(l_2) \le S_2 - S_1^*$, προκύπτει $\hat{S}_1 = S_1^*$, αλλιώς αν $\hat{S}_1 = S_2 - D(l_2)$ προκύπτει:

$$\hat{C}_2(S_2) = h_2(S_2 - \mu_2') + \hat{C}_1(S_1^*) + \int_{S_2 - S_1^*}^{\infty} \left[\hat{C}_1(S_2 - u) - \hat{C}_1(S_1^*)\right] \frac{1}{\sigma_2'} \phi\left(\frac{u - \mu_2'}{\sigma_2'}\right) du \tag{2.41}$$

Ο τελευταίος όρος στην (2.41) εμφανίζεται ως το *κόστος έλλειψης* στην αποθήκη 2 που προκαλείται απ' την ανικανότητα της, να διανέμει αμέσως στην αποθήκη 1. Εύκολα επαληθεύεται ότι το κόστος $\hat{C}_2(S_2)$ είναι κυρτό, το οποίο σημαίνει ότι αρκεί να βρεθεί τοπικό ελάχιστο.

Παράδειγμα 2.11

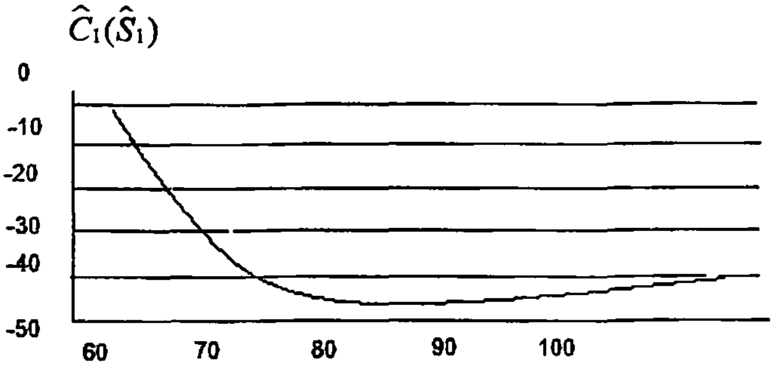
Έστω ένα διβάθμιο αποκλίνον σύστημα με τα εξής δεδομένα: $l_1 = l_2 = 5$, μ=10, σ=5, $e_1 = 0.5$, $e_2 = 1$ και $b_1 = 10$. Το πρώτο βήμα είναι να προσδιοριστεί το $\hat{C}_1(\hat{S}_1)$ σύμφωνα με την (2.38). Όμως, $\mu_1'' = (l_1 + 1)\mu = 6*10 = 60$ και $\sigma_1'' = (l_1+1)^{1/2}\sigma = 6^{1/2}*5 = 12.25$. Από την (2.40) προκύπτει : $\Phi\left(\frac{\hat{S}_1 - \mu_1''}{\sigma_1''}\right) = \frac{e_2 + b_1}{h_1 + b_1} = \frac{1+10}{1+0.5+10} = \frac{11}{11.5} = 0.956 \Rightarrow \Phi(z) = 0.956$ (από πίνακες z=1.71). Άρα : $z = \frac{\hat{S}_1 - \mu_1''}{\sigma_1''} \Rightarrow \hat{S}_1 = z\sigma_1'' + \mu_1'' = 1.71*12.25 + 60 = 81$.

Άρα το βέλτιστο $S_1^* = \hat{S}_1^*$=81.0. Το αντίστοιχο κόστος είναι :

$$\widehat{C}_1(\widehat{S}_1)=e_1\widehat{S}_1-h_1\mu_1^{''}+(h_1+b_1)\sigma_1^{''}G\left(\frac{\widehat{S}_1-\mu_1^{''}}{\sigma_1^{''}}\right)=0.5*81-1.5*60+(1.5+10)*12.25*0.0178=$$

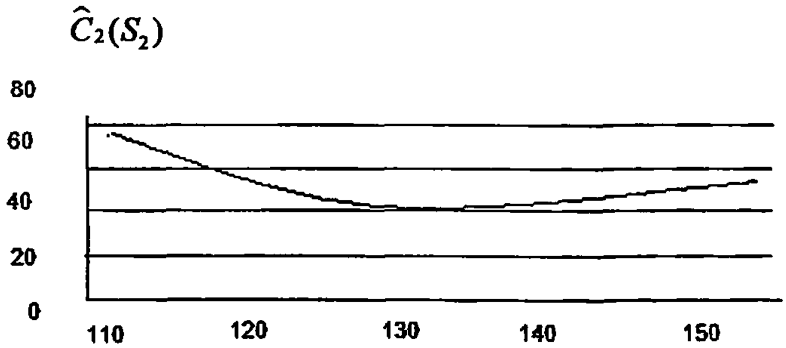
$$=40.5-90+11.5*12.25*0.0178=-49.5+140.875*0.0178=-47.0$$

$$\left(\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ G\left(\frac{\widehat{S}_1-\mu_1^{''}}{\sigma_1^{''}}\right)=G\left(\frac{81-60}{12.25}\right)=G(1.71)=0.0178\right),$$



Σχήμα 2.13. Γραφική παράσταση του $\widehat{C}_1$ ως συνάρτηση του $\widehat{S}_1$.

Στο επόμενο βήμα, προσδιορίζεται το συνολικό κόστος $\widehat{C}_2(S_2)$ από την (2.41), στο Σχήμα 2.14 δίνεται η γραφική του παράσταση συναρτήσει του S_2.



Σχήμα 2.14. Το συνολικό κόστος ως συνάρτηση του S_2.

Το βέλτιστο *echelon stock order-up-to* επίπεδο είναι $S_2^* = 129.7$, με συνολικό κόστος $\widehat{C}_2 = 39.4$. Σημειώνεται ότι το συνολικό κόστος είναι σχετικά σταθερό και δεν αυξάνει σημαντικά για χαμηλές τιμές του S_2. Αυτή η κατάσταση είναι τυπική για πολυβάθμια συστήματα αποθεμάτων. Επιπλέον, γενικά, τα βέλτιστα αποθέματα του πιο πάνω επιπέδου είναι εκπληκτικά χαμηλά. Η μέση τιμή του *βέλτιστου επιπέδου αποθέματος* στην αποθήκη 2 είναι :

$E(IL_2^i) = E(IL_2^e - S_1) = E(S_2 - D(l_2) - S_1) = S_2^* - \mu_2' - S_1^* = 129.7 - 50 - 81.0 = -1.3$.

Η παραπάνω τεχνική είναι εύκολο να γενικευτεί σε περισσότερα από δύο επίπεδα. Το *πρόσθετο κόστος* στην αποθήκη 2, λόγω του ανεπαρκούς αποθέματος, χρησιμοποιείται ως *κόστος έλλειψης* στην αποθήκη 3 κ.ο.κ. Επίσης, είναι εύκολο να γενικευτεί με μια πολιτική στην αποθήκη του πιο πάνω επιπέδου (στην συγκεκριμένη περίπτωση, στην αποθήκη 2). Οι *echelon stock* πολιτικές χρησιμοποιούνται επειδή απλοποιούν την διαδικασία. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, κάτω από γενικές συνθήκες οι *echelon stock* *S* πολιτικές μπορούν να αντικατασταθούν με ισοδύναμες *installation stock* *S* πολιτικές. Οι αντίστοιχες *θέσεις των αποθεμάτων* είναι: $S_2^i = S_2^e - S_1^e = S_2 - S_1$ και $S_1^i = S_1^e = S_1$.

Ωστόσο, ξεκινώντας με *αρχικές θέσεις των αποθεμάτων βαθμίδας* μεγαλύτερες απ' τις βέλτιστες order-up-to θέσεις, η *echelon stock* πολιτική θα δώσει *βέλτιστο* ενώ η *installation stock* πολιτική πιθανά όχι.

Η βέλτιστη λύση προκύπτει εύκολα για σύστημα δύο επιπέδων και για ζήτηση που ακολουθεί κανονική κατανομή. Ωστόσο, στη γενική περίπτωση, οι υπολογισμοί που απαιτούνται για την εύρεση της βέλτιστης λύσης μπορεί να είναι πολύ χρονοβόροι έτσι οι Van Houtoum και Zijm [43] ανέπτυξαν μια προσεγγιστική τεχνική. Επίσης, μπορεί να δειχτεί ότι η παραπάνω μπορεί να χρησιμοποιηθεί για *συστήματα συναρμολόγησης*. Ο Rosling [36] απέδειξε ότι ένα *σύστημα συναρμολόγησης* μπορεί να αντικατασταθεί από ένα ισοδύναμο *σειριακό σύστημα*.

2.9.1 Γενίκευση σε (r,Q) πολιτικές

Στη συνέχεια επεκτείνονται τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας θεωρώντας τις πιο γενικές *echelon stock* **(r,Q)** πολιτικές. Έστω ξανά ένα με περιοδικής επιθεώρησης, διβάθμιο *σειριακό σύστημα* (Σχήμα 2.1). Όλα τα γεγονότα συμβαίνουν στην αρχή της περιόδου με την σειρά που περιγράφηκε στην προηγούμενη ενότητα. Η ζήτηση ανά περίοδο ακολουθεί κανονική κατανομή. Έστω ότι :

$F_i(x)$: η αθροιστική συνάρτηση κατανομής του *επιπέδου αποθέματος* στην αποθήκη i ,

$f_i(x)$: η συνάρτηση πιθανότητας πυκνότητας του *επιπέδου αποθέματος* στην αποθήκη i .

Υποτίθεται ότι το Q_2 και το αρχικό απόθεμα στην αποθήκη 2, είναι ακέραια πολλαπλάσια του Q_1. Αυτό σημαίνει ότι το *επίπεδο αποθέματος* στην αποθήκη 2, είναι ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του Q_1 σε όλες τις στιγμές. Υπενθυμίζεται ότι, δοθέντος αυτών των υποθέσεων, η κλάση των *echelon stock reorder point* πολιτικών περιλαμβάνει την κλάση των *installation stock reorder point* πολιτικών, ως υποσύνολο. Επιπλέον, ο Chen [8] έδειξε ότι οι *echelon stock* **(r,Q)** πολιτικές είναι *βέλτιστες* για *σειριακά συστήματα*, κάτω από αρκετά γενικές συνθήκες.

Στη συνέχεια θα παραχθούν οι κατανομές των πιθανοτήτων των *επιπέδων αποθεμάτων βαθμίδας*. Η διαδικασία που ακολουθείται προτάθηκε από τους Chen και Zheng [10]. Σημειώνεται ότι η κατάσταση του *αποθέματος βαθμίδας* στην αποθήκη 2 ταυτίζεται με την κατάσταση του αποθέματος κάποιου συστήματος ενός επιπέδου. Έστω μια αυθαίρετη περίοδος t. Η *θέση του αποθέματος βαθμίδας* στην περίοδο t, αμέσως μετά την παραγγελία είναι, $IP_2^e(t)$, είναι σε σταθερή κατάσταση και ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα (r_2, r_2+Q_2) (Hadley και Whitin [28]). Το *επίπεδο αποθέματος βαθμίδας* στην περίοδο $t+l_2$ μετά την ζήτηση της περιόδου, $IL_2^e(t+l_2)$, προέκυψε αφαιρώντας από την $IP_2^e(t)$, την ζήτηση στις περιόδους $t, t+1, \ldots, t+l_2$, συνεπώς την ζήτηση κατά την διάρκεια των l_2+1 περιόδων, $D(l_2+1)$:

$$IL_2^e(t+l_2) = IP_2^e(t) - D(l_2+1) \tag{2.42}$$

Η ζήτηση κατά την διάρκεια l_2+1 περιόδων έχει μέση τιμή, $\mu_2^{''} = (l_2+1)\mu$ και τυπική απόκλιση, $\sigma_2^{''} = \sqrt{(l_2+1)}\sigma$. Έτσι προκύπτει ότι:

$$F_2(x) = P(IL_2^e \le x) = \frac{\sigma_2^{''}}{Q}\left[G\left(\frac{r_2 - x - \mu_2^{''}}{\sigma_2^{''}}\right) - G\left(\frac{r_2 + Q_2 - x - \mu_2^{''}}{\sigma_2^{''}}\right)\right] \tag{2.43}$$

Η αποθήκη 1 παραγγέλλει από την αποθήκη 2 πριν τη ζήτηση στην περίοδο $t+l_2$. Επομένως, δίνεται προσοχή στην κατανομή του *επιπέδου αποθέματος* σ' αυτό το χρονικό σημείο.

IL_2^{e-} : είναι το *επίπεδο αποθέματος* και

$F_2^-(x)$: η αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής.

Η μόνη διαφορά συγκριτικά με την (2.43) είναι ότι τα $\mu_2^{''}$ και $\sigma_2^{''}$ αντικαθίστανται με $\mu_2^{'} = l_2\mu$ και $\sigma_2^{'} = \sqrt{l_2}\sigma$ και προκύπτει :

$$F_2^-(x) = \frac{\sigma_2^{'}}{Q}\left[G\left(\frac{r_2 - x - \mu_2^{'}}{\sigma_2^{'}}\right) - G\left(\frac{r_2 + Q_2 - x - \mu_2^{'}}{\sigma_2^{'}}\right)\right] \tag{2.44}$$

Η αντίστοιχη πιθανότητα πυκνότητας είναι (υπενθυμίζεται ότι $G^{'}(x) = \Phi(x) - 1$) :

$$f_2^-(x) = \frac{1}{Q}\left[\Phi\left(\frac{r_2 + Q_2 - x - \mu_2^{'}}{\sigma_2^{'}}\right) - \Phi\left(\frac{r_2 - x - \mu_2^{'}}{\sigma_2^{'}}\right)\right] \tag{2.45}$$

Η *θέση του αποθέματος* στην αποθήκη 1, IP_1, μετά την επιθεώρηση με δυνατότητα να παραγγείλει είναι πάντα στο διάστημα $(r_1, r_1+Q_1]$. Συνεπώς, αν $IL_2^{e-} \le r_1$, είναι γνωστό ότι δεν υπάρχει απόθεμα στην αποθήκη 2 μετά την επιθεώρηση της *θέσης του αποθέματος* στην αποθήκη 1. Όλο το απόθεμα που περιλαμβάνεται στο IL_2^{e-} είναι σε παραγγελία ή είναι ήδη στην αποθήκη 1. Η άλλη δυνατότητα είναι, $IL_2^{e-} > r_1$. Υπενθυμίζεται ότι το *επίπεδο αποθέματος* στην αποθήκη 2 μετά την επιθεώρηση της αποθήκης 1, είναι πάντα ένα πολλαπλάσιο του Q_1, δηλαδή jQ_1. Είναι δηλαδή $jQ_1 = IL_2^{e-} - IP_1 > r_1 - (r_1 + Q_1) = -Q_1$, επειδή $IP_1 \le r_1 + Q_1$. Αλλά αυτό σημαίνει ότι $j \ge 0$. Συνεπώς, δεν υπάρχουν εκκρεμείς παραγγελίες στην αποθήκη 2 και όλο το απόθεμα που περιλαμβάνεται στην IP_1, είναι σε παραγγελία ή είναι ήδη στην αποθήκη 1. Σημειώνεται ότι δοθέντος του IL_2^{e-}, προκύπτει μοναδική λύση για το IP_1 από τις συνθήκες $IP_1 = IL_2^{e-} - jQ_1$ και $r_1 < IP_1 \le r_1 + Q_1$, επειδή η 2η συνθήκη προσδιορίζει το j μοναδικά. Το j που προκύπτει, δηλώνεται με, $\hat{j}$. Συμπεραίνεται ότι το απόθεμα που είναι σε μεταφορά ή είναι ήδη στην αποθήκη 1 εκφράζεται :

$$O(IL_2^{e-}) = \begin{cases} IL_2^{e-}, & IL_2^{e-} \le r_1 \\ IL_2^{e-} - \hat{j}Q_1, & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases} \tag{2.46}$$

Στη συνέχεια, μελετάται το *επίπεδο του αποθέματος* στην αποθήκη 1, IL_1, μετά την ζήτηση στην περίοδο, $t + l_1 + l_2$. Το IL_1 προκύπτει ως το $O(IL_2^{e-})$ μείον τη ζήτηση στις περιόδους $t + l_2, t + l_2 + 1, \dots, t + l_1 + l_2$, δηλαδή, τη ζήτηση κατά την διάρκεια $l_1 + 1$ περιόδων, $D(l_1 + 1)$: $IL_1 = O(IL_2^{e-}) - D(l_1 + 1)$. Αυτή η ζήτηση έχει μέση τιμή, $\mu_1'' = (l_1 + 1)\mu$ και τυπική απόκλιση, $\sigma_1'' = \sqrt{(l_1 + 1)}\sigma$. Είναι επίσης γνωστή η συνάρτηση πυκνότητας από την (2.45). Συνεπώς, η συνάρτηση κατανομής για το *επίπεδο αποθέματος* στην αποθήκη 1, $F_1(x)$, είναι :

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{r_2 + Q_2} f_2^-(u)\left[1 - \Phi\left(\frac{O(u) - x - \mu_1''}{\sigma_1''}\right)\right] du \tag{2.47}$$

Είναι απλό, η διαδικασία να επεκταθεί σε περισσότερο από δύο επίπεδα. Οι αριθμητικοί υπολογισμοί είναι ευκολότεροι στην περίπτωση μιας διακριτής κατανομής ζήτησης.

Κεφάλαιο 3

Πολιτικές Επιμερισμού σε Πολυβάθμια Αποκλίνοντα Συστήματα Διαχείρισης Αποθεμάτων

Ο επιμερισμός του αποθέματος σε ένα πολυβάθμιο αποκλίνον σύστημα μπορεί να θεωρηθεί ως υποπερίπτωση του αποκαλούμενου προβλήματος κατανομής (allocation problem), όπου ένα σημείο αποθεματοποίησης κατανέμει απόθεμα σε αποθήκες κατώτερου επιπέδου. Όμως στο γενικό πρόβλημα κατανομής με πολλούς κύκλους παραγγελίας δεν είναι απαραίτητη η κατανομή όλου του διαθέσιμου αποθέματος και συνεπώς οι ποσότητες κατανομής (και οι αντίστοιχες χρονικές στιγμές) είναι επίσης μεταβλητές απόφασης (Jonsson and Silver, [30], McGavin et al., 1993, Cao and Silver, 2005). Αντίθετα, σύμφωνα με τις πολιτικές επιμερισμού που θα παρουσιαστούν σε αυτό το κεφάλαιο όλο το επίπεδο αποθέματος βαθμίδας (echelon net inventory) της κεντρικής αποθήκης επιμερίζεται και μετά τον επιμερισμό οι στόχοι που έχουν τεθεί για το επίπεδο αποθέματος των τελικών αποθηκών επιτυγχάνονται πάντα (υπόθεση των ισοσταθμισμένων αποθεμάτων).

Η πρώτη πολιτική επιμερισμού που παρουσιάστηκε είναι πολιτική δίκαιου επιμερισμού (*Fair Share* **FS**) η οποία σκοπεύει στην εξισορρόπηση των πιθανοτήτων έλλειψης στις τελικές αποθήκες. Οι Clark και Scarf [12] χρησιμοποιώντας την **FS** και ένα αποπληθωρισμένο κόστος (discounted cost objective) με γραμμικό *κόστος διατήρησης* και *έλλειψης*, επέκτειναν την διαδικασία εύρεσης των βέλτιστων *order-up-to επιπέδων* από *σειριακά πολυβάθμια συστήματα* σε συστήματα όπου η πολυβάθμια δομή είναι αποκλίνουσα. Οι Eppen και Schrage [21] μελέτησαν ένα διβάθμιο αποκλίνον σύστημα διαχείρισης αποθεμάτων, όπου η κεντρική αποθήκη δεν διατηρεί απόθεμα. Κάτω από την **FS** πολιτική, μοντελοποίησαν τα αποθέματα του συστήματος και το μέσο κόστος, κάτω από διαφορετικές πολιτικές διαχείρισης. Η **FS** αποτελεί βέλτιστη πολιτική επιμερισμού των αποθεμάτων για την *order-up-to S* πολιτική και τη δομή του κόστους των Clark και Scarf. Μια βασική υπόθεση του μοντέλου των Clark και Scarf είναι ότι οι τελικές αποθήκες αντιμετωπίζουν ζήτηση που περιγράφεται από κανονική κατανομή με ίδιες παραμέτρους και ίσους *χρόνους απόκρισης*. Χαλαρώνοντας αυτή την υπόθεση, οι Bollapragada et al. [7] επανέλαβαν την ίδια ανάλυση και έδειξαν ότι τα αποτελέσματα συνεχίζουν να ισχύουν. Επίσης, υπάρχουν ακόμη δύο μοντέλα διαχείρισης αποθεμάτων για διβάθμια αποκλίνοντα συστήματα κάτω από την *order-up-to S* πολιτική με **FS** επιμερισμό, στα οποία όμως επιτρέπεται στην κεντρική αποθήκη να διατηρεί αποθέματα. Είναι εκείνα των van Donselaar και Wignjaard [45], που δίνουν ένα ακριβές αναλυτικό μοντέλο για την πιθανότητα έλλειψης στην περίπτωση των αποθηκών που εξετάζει το μοντέλο των Eppen και Schrage [21]. O Lagodimos [31] επέτρεψε μη όμοιες αποθήκες και επέκτεινε το μοντέλο των Bollapragada et al.[7] και έδωσε ακριβείς εκφράσεις και προσεγγίσεις για τρία γνωστά μέτρα εξυπηρέτησης.

Μια σημαντική ιδιότητα της **FS** είναι η ελαχιστοποίηση των εκκρεμών παραγγελιών, όταν η ζήτηση ακολουθεί κανονική κατανομή (Jonsson και Silver [30]). Ωστόσο, επιβάλλοντας ίδια πιθανότητα έλλειψης σε όλες τις τελικές αποθήκες, η **FS** περιορίζει τις επιλογές διαχείρισης του συστήματος. Αυτό παρακίνησε τον De Kok [13] να προτείνει την Πολιτική Αναλογικού Επιμερισμού (*Appropriate Share* (**AS**)) και την ειδική περίπτωση αυτής την Πολιτική Συνεπούς Αναλογικού Επιμερισμού (*Consistent Appropriate Share* (**CAS**)). Η **AS** πολιτική επιμερισμού σκοπεύει να διατηρήσει σταθερό το ποσοστό,

$$\frac{\text{προβαλλόμενο επίπεδο αποθέματος σε κάθε αποθήκη i}}{\text{προβαλλόμενο επίπεδο αποθέματος του συστήματος}},$$

όπου

προβαλλόμενο επίπεδο αποθέματος (*projected net inventory*) = *θέση του αποθέματος* στην αποθήκη i - *αναμενόμενη ζήτηση* κατά την διάρκεια του *χρόνου απόκρισης*.

Η **CAS** μπορεί να θεωρηθεί ως ειδική περίπτωση της **AS** αφού δίνει συγκεκριμένη έκφραση στο παραπάνω ποσοστό. Στην ουσία, η **CAS** είναι μια γενίκευση της **FS**, της οποίας τα *ποσοστά επιμερισμού* προσδιορίζονται αποτελεσματικά από την ζήτηση κατά την διάρκεια του *χρόνου απόκρισης* στις τελικές αποθήκες (De Kok et al. [15]). O De Kok μελέτησε την **CAS** για διβάθμια αποκλίνοντα συστήματα διαχείρισης αποθεμάτων, όπου η κεντρική αποθήκη δεν διατηρεί απόθεμα και έδωσε ακριβείς και ευρετικούς (heuristics) αλγόριθμους καθορισμού των παραμέτρων ελέγχου του συστήματος όταν πρέπει να επιτευχθούν συγκεκριμένα επίπεδα εξυπηρέτησης (**fill rate**). Οι De Kok et al. [15] μελέτησαν ένα μοντέλο στο οποίο η κεντρική αποθήκη διατηρεί απόθεμα και με χρήση ευρετικών αλγόριθμων, υπολόγισαν τα *ποσοστά επιμερισμού* στα πλαίσια ενός προβλήματος ελαχιστοποίησης του κόστους λειτουργίας του συστήματος κάτω από περιορισμούς για τα **fill rate**. Οι Verrijdt και De Kok [53] βελτίωσαν αυτούς τους ευρετικούς αλγόριθμους, ενώ οι Verrijdt και de Kok [52] επέκτειναν την ανάλυση σε γενικά πολυβάθμια αποκλίνοντα συστήματα με αποθέματα μόνο στις τελικές αποθήκες. Ωστόσο, τα μειονεκτήματα της **CAS**, περιορίζουν την δυνατότητα εφαρμογής της. Όπως έχει φανεί με χρήση προσομοίωσης (Verrijdt και De Kok [53], van der Heijden et al. [50]) η **CAS** μπορεί να προκαλέσει δυσαρμονίες, που προκύπτουν με αποκλίσεις από την απαιτούμενη απόδοση. Ειδικά, όταν τα επίπεδα εξυπηρέτησης είναι μικρά ίσως προκύψουν υπολογιστικά προβλήματα, λόγω των αρνητικών τιμών των *προβαλλόμενων επιπέδων αποθέματος*.

Ο van der Heijden πρότεινε την Πολιτική Εξισορρόπησης του Αποθέματος (*Balanced Stock* (**BS**)) με στόχο τον καθορισμό των *ποσοστών επιμερισμού*, έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί το μέτρο της μέσης δυσαρμονίας. Παρουσίασε μια υπολογιστική διαδικασία, η οποία είναι ακριβής για διβάθμια αποκλίνοντα συστήματα, χωρίς απόθεμα στην κεντρική αποθήκη, όταν η ζήτηση περιγράφεται από την κανονική κατανομή. Αργότερα, οι van der Heijden et al. [50] πρότειναν ευρετικές λύσεις κλειστής μορφής για τον προσδιορισμό των *ποσοστών επιμερισμού* της **BS**, ενώ μια ακριβής λύση δόθηκε από τους De Kok και Fransoo [14]. Επιπλέον, με την εξαιρετική απόδοση ισορροπίας της, η **BS**, μπορεί εύκολα να τροποποιηθεί για τον έλεγχο οποιουδήποτε πολυβάθμιου συστήματος (van der Heijden et al. [50]). Θεωρώντας τέτοια συστήματα και χρησιμοποιώντας την **BS**, ο van der Heijden [49] πρότεινε μια ευρετική μέθοδο για τον καθορισμό των order-up-to επιπέδων, με στόχο την ελαχιστοποίηση του *κόστους διατήρησης*, υπό τον περιορισμό επίτευξης συγκεκριμένων επιπέδων εξυπηρέτησης (**fill rates**) στις τελικές αποθήκες.

Τέλος, ο Lagodimos [31] πρότεινε την Πολιτική Επιμερισμού με Προτεραιότητα (*Priority Rationing*) (**PR**). Χρησιμοποιώντας μια λίστα προτεραιότητας, η **PR** απαιτεί την πλήρη ικανοποίηση των παραγγελιών των αποθηκών, με τη σειρά που καταγράφηκαν μέχρι το διαθέσιμο απόθεμα να εξαντληθεί. Επίσης, χρησιμοποιώντας την **PR** σε διβάθμια αποκλίνοντα συστήματα, παρήγαγε αναλυτικές εκφράσεις για τα μέτρα εξυπηρέτησης, τα οποία ισχύουν κάτω από την *υπόθεση της διαθεσιμότητας* (*availability assumption*). Άλλα αποτελέσματα που αφορούν την **PR** πολιτική είναι εκείνα των Lagodimos και Anderson [32] (βέλτιστη τοποθέτηση των αποθεμάτων ασφαλείας στα MRP συστήματα) και Zhang [56] (εφαρμογή ενός μοντέλου μοναδικής περιόδου) αν και είναι εύκολο να χρησιμοποιηθούν και να επεκταθούν σε γενικά αποκλίνοντα συστήματα.

Τέλος, επισημαίνεται ότι τα μοντέλα για τις **FS** και **PR** προϋποθέτουν ότι η ζήτηση περιγράφεται από κανονική κατανομή, ενώ τα μοντέλα που αφορούν τις **CAS** και **BS**, η ζήτηση ακολουθεί Erlang ή Gamma κατανομές. Επιπλέον, κατά την χρήση των **FS** και **PR** συνήθως προκύπτουν λεπτομερή και αναλυτικά μοντέλα, κατά την χρήση των **CAS** και **BS** απαιτούνται είτε αριθμητικές, είτε ειδικές προσεγγιστικές τεχνικές (όπως η προσέγγιση του **fill rate** από μια Gamma κατανομή).

Στις επόμενες ενότητες περιγράφονται χαρακτηριστικά μοντέλα διαχείρισης αποθεμάτων κάτω από τις προαναφερθείσες πολιτικές επιμερισμού.

3.1 Πολιτική Δίκαιου Επιμερισμού (Fair Share)

3.1.1 Ολιστικές πολιτικές παραγγελίας σε ένα πολυβάθμιο σύστημα με όμοιες αποθήκες

Οι Eppen και Schrage (ES) [21], αρχικά, θεώρησαν ένα σύστημα διανομής που περιλαμβάνει έναν προμηθευτή, μια κεντρική αποθήκη και Ν τελικές αποθήκες με ροή προϊόντων από τον προμηθευτή προς την κεντρική αποθήκη και έπειτα στις τελικές αποθήκες. Η ζήτηση στις τελικές αποθήκες ακολουθεί κανονική κατανομή και είναι ανεξάρτητη απ' τη μια αποθήκη στην άλλη. Το *κόστος διατήρησης* και *έλλειψης* είναι το ίδιο στις τελικές αποθήκες. Οι εκκρεμείς παραγγελίες ικανοποιούνται με καθυστέρηση. Το σύστημα επιθεωρείται περιοδικά και η κεντρική αποθήκη δεν διατηρεί αποθέματα. Υπάρχουν 2 φυσικές ερμηνείες γι' αυτή την υπόθεση :

α) τα προϊόντα διανέμονται από τον προμηθευτή στην κεντρική αποθήκη, όπου οι παραγγελίες επιμερίζονται σε μικρότερες και έπειτα διανέμονται στις αποθήκες μετά από *χρόνο απόκρισης*, l_i.

β) τα προϊόντα επιμερίζονται αμέσως από τον προμηθευτή στις τελικές αποθήκες. Η κεντρική αποθήκη λειτουργεί ως κέντρο συντονισμού των παραγγελιών. Ο χρόνος παραγωγής στον προμηθευτή είναι ο *χρόνος απόκρισης*, L. Υπό την υπόθεση ότι η παραγγελία είναι αρκετά μεγάλη, έτσι ώστε να μπορούν να επιτευχθούν *ίσες πιθανότητες έλλειψης* σε κάθε αποθήκη, οι **ES** παρήγαγαν κατά προσέγγιση βέλτιστες πολιτικές και το κόστος αυτών, όταν :

1) στην κεντρική αποθήκη εφαρμόζεται μια *order-up-to S* πολιτική, υποθέτοντας ότι δεν υπάρχει σταθερό *κόστος παραγγελίας*. Άρα η κεντρική αποθήκη παραγγέλνει από τον προμηθευτή και εφαρμόζεται μια (S,T) πολιτική επιμερισμού στις τελικές αποθήκες.
2) στην κεντρική αποθήκη εφαρμόζεται μια (S,T) πολιτική, υποθέτοντας ότι υπάρχει σταθερό *κόστος παραγγελίας* σ' αυτήν. Άρα η κεντρική αποθήκη παραγγέλνει και επιμερίζει σε κάθε Τ περιόδους.

Η (S,T) είναι μια πολιτική στην οποία κάθε Τ περιόδους, η *θέση του αποθέματος* του συστήματος αυξάνεται μέχρι το απόθεμα να φτάσει στο S.

Συμβολισμός

Ο συμβολισμός που θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια είναι :

d_{ij} : είναι μια ανεξάρτητη, στάσιμη τυχαία μεταβλητή που περιγράφει την ζήτηση στην αποθήκη i, την περίοδο j, και ακολουθεί κανονική κατανομή, επιπλέον d_{ij} ανεξάρτητη της d_{kj} με $i \neq k$,

μ_i : η μέση τιμή της ζήτησης ανά περίοδο στην αποθήκη i, με $E(d_{ij}) = \mu_i$

σ_i : η τυπική απόκλιση της ζήτησης ανά περίοδο στην αποθήκη i, με $Var(d_{ij}) = \sigma_i^2$

h : το *κόστος διατήρησης* ανά μονάδα ανά περίοδο (είναι το ίδιο για την κεντρική αποθήκη και για όλες τις αποθήκες), p : *κόστος έλλειψης (penalty cost)* ανά μονάδα ζήτησης, που ικανοποιείται με καθυστέρηση ανά περίοδο σε κάθε αποθήκη ,

K : *σταθερό κόστος παραγγελίας* των αποθεμάτων απ' τον προμηθευτή προς την κεντρική αποθήκη,

C : το συνολικό μέσο κόστος ανά περίοδο,

I_{it} : το διαθέσιμο απόθεμα αυξημένο κατά το απόθεμα που ήδη έχει εισχωρήσει στην αποθήκη i στην αρχή της περιόδου t.

Φ(.) : είναι η αθροιστική συνάρτηση της τυπικής κανονικής κατανομής

Η Υπόθεση Επιμερισμού (Allocation Assumption ή Balance Assumption)

Σε κάθε περίοδο διανομής t, η κεντρική αποθήκη λαμβάνει αρκετή ποσότητα από τον προμηθευτή, έτσι ώστε να επιμερίσει σε κάθε αποθήκη τόσες ποσότητες προϊόντων ώστε να εξασφαλίσει ότι η *πιθανότητα έλλειψης* στην περίοδο t+l+T-1 είναι η ίδια σε όλες τις αποθήκες. Θεωρείται το μοντέλο που παραγγέλλει σε κάθε περίοδο (order-every-period-model) για T=1. Στην αρχή της περιόδου t, η κεντρική αποθήκη θα παραγγείλει, $\sum_{i=1}^{N} d_{i,t-1}$. Αυτή η παραγγελία φτάνει στην κεντρική αποθήκη μετά από *χρόνο απόκρισης,* L και επιμερίζεται στις αποθήκες. Ο επιμερισμός αυτός έχει σκοπό να επαναφέρει τις αποθήκες σε μια *κατάσταση ισοπίθανης έλλειψης (equal fractile position).* Υποτίθεται ότι οι αποθήκες ήταν σε αυτή την κατάσταση στην αρχή της περιόδου t+L-1. Στην αποθήκη i, η συνθήκη διαταράσσεται από την ζήτηση, $d_{i,t+L-1}$. Όμως τίθεται το ερώτημα, αν η παραγγελία $\sum_{i=1}^{N} d_{i,t-1}$ είναι αρκετή, ώστε να "επιδιορθώσει" την ζημιά που προήλθε από την ζήτηση, $d_{i,t+L-1}$, (i=1,2,…,N) ώστε να επαναφέρει το σύστημα σε μια *κατάσταση ισοπίθανης έλλειψης*. Σημειώνεται ότι οι $d_{i,t-1}$ και $d_{i,t+L-1}$ είναι ανεξάρτητες παρατηρήσεις από την ίδια κατανομή.

Λήμμα 3.1

Αν το σύστημα ήταν σε μια κατάσταση *ίσης πιθανότητας έλλειψης* στην αρχή της περιόδου, μπορεί να επανέρθει σε αυτή την κατάσταση αν :

$$\sum_{i=1}^{N} d_{i,t-1} \geq \max_{j=1,\dots,N} \left\{ \sum_{i\neq j} d_{i,t+L-1} + d_{j,t+L-1}\left(1-\frac{\sum \sigma_i}{\sigma_j}\right) \right\} \tag{3.1}$$

Απόδειξη:

Επειδή η ζήτηση d_{it} ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή, μ_i και διασπορά, σ_i^2, έπεται ότι πριν γίνει η παραγγελία θα ισχύει:

$$I_{i,t+L-1} = l\mu_i + k_1\sqrt{l}\sigma_i \quad , \quad \text{i=1,...,N} \tag{3.2}$$

Τότε συμβαίνει η ζήτηση $d_{i,t+L-1}$. Η παραγγελία που πραγματοποιήθηκε την στιγμή t φτάνει και ισούται με $\sum_{i=1}^{N} d_{i,t-1}$ και a_i μονάδες διανέμονται στην αποθήκη i .

Επομένως, το απόθεμα αφού παραγγείλει θα είναι :

$$I_{i,t+L} = l\mu_i + k_1\sqrt{l}\sigma_i - d_{i,t+L-1} + a_i \tag{3.3}$$

Μια *κατάσταση ίσης πιθανότητας έλλειψης* μπορεί να επιτευχθεί αν βρεθεί ένα σύνολο από a_i έτσι ώστε :

$$\sum_{i=1}^{N} a_i = \sum_{i=1}^{N} d_{i,t-1} \quad \text{και} \quad a_i \geq 0 \ , \quad \text{i=1,...,N,} \qquad \text{και}$$

$$I_{i,t+L} = l\mu_i + k_2\sqrt{l}\sigma_i \ , \qquad \text{i=1,...,N}$$

Εξισώνοντας την (3.3) με την παραπάνω σχέση προκύπτει :

$$a_i = (k_2 - k_1)\sqrt{l}\sigma_i + d_{i,t+L-1} \tag{3.4}$$

στη συνέχεια αθροίζεται η (3.4) και γίνεται :

$$\sum_{i=1}^{N} a_i = \sum_{i=1}^{N} d_{i,t-1} = (k_2 - k_1)\sqrt{l}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i + \sum_{i=1}^{N} d_{i,t+L-1} \tag{3.5}$$

Λύνοντας για $(k_2 - k_1)$ την (3.5) και αντικαθιστώντας στην (3.4), το a_i γίνεται :

$$a_i = \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} d_{i,t-1} - \sum_{i=1}^{N} d_{i,t+L-1}\right)}{\sqrt{l}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i}\sqrt{l}\sigma_i + d_{i,t+L-1} \tag{3.6}$$

Σημειώνεται ότι αν $a_j \geq 0$, τότε από την (3.6) προκύπτει :

$$\sum_{i=1}^{N} d_{i,t-1} \geq \sum_{i=1}^{N} d_{i,t+L-1} - \frac{\sum_{i=1}^{N}\sigma_i}{\sigma_i} d_{i,t+L-1} \tag{3.7}$$

Όλα τα $a_j \geq 0$, αν $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} d_{i,t-1} \geq \max_{j=1,\dots,N}\left\{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} d_{i,t+L-1} + d_{j,t+L-1}\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{N}\sigma_i}{\sigma_j}\right)\right\}$ (3.8)

Το Λήμμα 3.1 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσεγγίσει την πιθανότητα, ότι η Υπόθεση Επιμερισμού ικανοποιείται σε μια δεδομένη περίοδο. Σημειώνεται ότι :

$$P\left[\left\{\sum_{i=1}^{N} d_{i,t-1} - \sum_{i=1}^{N} d_{i,t+L-1} - d_{j,t+L-1}\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{N}\sigma_i}{\sigma_j}\right)\right\} \geq 0\right] \qquad \forall j = 1,\dots,N$$

$$\geq 1 - \sum_{j=1}^{N} P\left[\left\{\sum_{i=1}^{N} d_{i,t-1} - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{N} d_{i,t+L-1} - d_{j,t+L-1}\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{N}\sigma_i}{\sigma_j}\right)\right\} < 0\right] \tag{3.9}$$

από την ανισότητα του Bonferroni.

Αν $\mu_i = \mu$ και $\sigma_i = \sigma$, τότε :

$$\sum_{i=1}^{N} d_{i,t-1} - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{N} d_{i,t+L-1} - d_{j,t+L-1}\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{N}\sigma_i}{\sigma_j}\right) \tag{3.10}$$

ακολουθεί κανονική κατανομή με αναμενόμενη τιμή, Nμ και τυπική απόκλιση, Nσ. Σ' αυτή την περίπτωση η ανισότητα του Bonferroni υποδηλώνει ότι :

$$\text{P(ισοπίθανης έλλειψης σε όλες τις αποθήκες)} \geq 1 - \mathrm{N}\Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right).$$

Στον Πίνακα 3.1 έχει υπολογιστεί αυτό το κάτω φράγμα $1 - \mathrm{N}\Phi\left(\frac{-\mu}{\sigma}\right)$ για διάφορους συνδυασμούς των παραμέτρων *N*, *μ*, *σ*. Στη συνέχεια με χρήση προσομοίωσης ελέγχθηκε η καταλληλότητα του παραπάνω φράγματος ως προσέγγισης της *πιθανότητας ισοπίθανης έλλειψης* σε όλες τις αποθήκες. Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.2

Πίνακας 3.1

	μ/σ				
N	**0.50**	**1.00**	**1.50**	**2.00**	**2.50**
2	0.38	0.68	0.87	0.95	0.99
3	0.07	0.52	0.80	0.93	0.98
4	0	0.37	0.73	0.91	0.98
5	0	0.21	0.67	0.89	0.97
6	0	0.05	0.60	0.86	0.96
7	0	0	0.53	0.84	0.96
8	0	0	0.47	0.82	0.95

Πίνακας 3.2

N	0.500	1.000	1.500	2.000	2.500	εκθετική ζήτηση μ/σ=1
2	0.326	0.663	0.858	0.952	0.988	0.704
3	0.201	0.547	0.798	0.930	0.981	0.635
4	0.114	0.431	0.733	0.901	0.973	0.594
5	0.076	0.365	0.686	0.883	0.965	0.588
6	0.046	0.299	0.632	0.864	0.961	0.565
7	0.028	0.245	0.591	0.841	0.955	0.560
8	0.016	0.204	0.543	0.820	0.946	0.552

Από τους δύο πίνακες προκύπτει ότι η προσέγγιση είναι αρκετά καλή. Επίσης δείχνουν ότι αν το $\frac{\mu}{\sigma}$ είναι μεγάλο, τότε η Υπόθεση Επιμερισμού ικανοποιείται με υψηλή πιθανότητα. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας την εκθετική κατανομή με $\frac{\mu}{\sigma}=1$ οι αντίστοιχες *πιθανότητες ισοπίθανης έλλειψης* σε όλες τις αποθήκες αυξάνονται. Όλα τα αποτελέσματα που αναφέρονται στην Υπόθεση Επιμερισμού έχουν προκύψει για το *order-every period* μοντέλο (T=1). Ωστόσο, με μια κατάλληλη μετατροπή στις τιμές των μ και σ, ισχύουν τα ίδια αποτελέσματα για κάθε T, παρατηρώντας ότι κάθε διάστημα παραγγελίας είναι μια περίοδος, τότε προκύπτει η ίδια ακριβώς ανάλυση. Προφανώς, οι παράμετροι της ζήτησης στο διάστημα παραγγελίας είναι Τμ, $\sqrt{T}\sigma$. Επομένως, ο λόγος της μέσης τιμής της ζήτησης προς την τυπική απόκλιση, αυξάνει ανάλογα με την $\sqrt{T}$. Καθώς το K αυξάνεται, αυξάνει και το T. Άρα όταν το K είναι αρκετά μεγάλο, τότε η πιθανότητα ότι η Υπόθεση Επιμερισμού ισχύει, είναι επίσης μεγάλη.

Το μοντέλο order-every-period

Το μοντέλο που μελετάται σε αυτή την ενότητα είναι κατάλληλο όταν το *σταθερό κόστος παραγγελίας/ εκκίνησης*, K, είναι σχετικά μικρό σε σχέση με το *κόστος διατήρησης*, h. Σ' αυτή την περίπτωση, η κεντρική αποθήκη και κάθε αποθήκη πραγματοποιούν μια παραγγελία κάθε περίοδο. Επίσης, σε κάθε περίοδο στην κεντρική αποθήκη και στις τελικές αποθήκες συμβαίνουν τα ακόλουθα γεγονότα και με την εξής σειρά:

1. Η κατάσταση του συστήματος παρατηρείται και τοποθετούνται οποιεσδήποτε παραγγελίες.
2. Οποιαδήποτε προγραμματισμένη παραγγελία που έχει προγραμματιστεί να φτάσει αυτή την περίοδο, φτάνει.

3. Πραγματοποιείται η ζήτηση.
4. Τα είδη κόστους που επιβάλλονται στο σύστημα είναι το *κόστος διατήρησης* για το υπερβολικό απόθεμα και το *κόστος έλλειψης* για τις εκκρεμείς παραγγελίες.

Η υπερβάλλουσα ζήτηση ικανοποιείται με καθυστέρηση.

Η κεντρική αποθήκη παραγγέλλει μια ποσότητα στον προμηθευτή στην αρχή κάθε περιόδου, έτσι ώστε να φέρει το συνολικό απόθεμα του συστήματος σε ένα επίπεδο S. Τα ερωτήματα, επομένως, που προκύπτουν είναι:

α) Ποια θα πρέπει να είναι η τιμή του S;

β) Πώς πρέπει να διανεμηθεί το απόθεμα στις αποθήκες, όταν είναι διαθέσιμο στην κεντρική αποθήκη;

Υποτίθεται ότι στην αρχή της περιόδου 1 πραγματοποιείται μια παραγγελία, ώστε να επαναφέρει το συνολικό απόθεμα του συστήματος στο επίπεδο S. Ο συμβολισμός που θα χρησιμοποιηθεί είναι :

V : η συνολική ζήτηση του συστήματος κατά την διάρκεια των L πρώτων περιόδων, $V = \sum_{t=1}^{L}\sum_{j=1}^{N} d_{jt}$

W_i : η συνολική ζήτηση στην αποθήκη i, από την $L+1$ μέχρι και την $L+l$ περίοδο, $W_i = \sum_{t=L+1}^{L+l} d_{it}$

Στην αρχή της περιόδου $L+1$ υπάρχουν S-V μονάδες προϊόντος στο σύστημα. Αν η ζήτηση, d_{it}, ακολουθεί κανονική κατανομή και είναι ανεξάρτητη από περίοδο σε περίοδο και x_i είναι η ποσότητα που διανέμεται στην αποθήκη i, τότε το διαθέσιμο απόθεμα στην αποθήκη i, στο τέλος της περιόδου $L+l$, έχει μέση τιμή, $x_i-(l+1)\mu_i$ και τυπική απόκλιση, $\sigma_i\sqrt{l+1}$. Σημειώνεται ότι το x_i είναι το άθροισμα της ποσότητας που είναι ήδη στην αποθήκη i και της ποσότητας που έχει επιμεριστεί σ' αυτή. Από την Υπόθεση του Επιμερισμού και το γεγονός ότι η ζήτηση ακολουθεί κανονική κατανομή προκύπτει ότι ο επιμερισμός στην περίοδο $L+1$ θα πρέπει να είναι τέτοιος ώστε να υπάρχει μια σταθερά, ν, ώστε να ισχύει :

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i=1}^{N}[(l+1)\mu_i + \nu\,\sigma_i\sqrt{l+1}] = S-V \qquad \text{ή}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i=1}^{N}(l+1)\mu_i + \nu\,\sqrt{l+1}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i = S-V \tag{3.11}$$

Λύνοντας ως προς ν και αντικαθιστώντας στο x_j, προκύπτει :

$$x_j = (l+1)\mu_j + \frac{\left(S-V-\sum_{k=1}^{N}(l+1)\mu_k\right)\sigma_j}{\sum_{i=1}^{N}\sigma_i} \tag{3.12}$$

Επομένως, αν το απόθεμα του συστήματος αυξηθεί ως το S και χρησιμοποιηθεί η πολιτική του *δίκαιου επιμερισμού*, το *επίπεδο αποθέματος*, S_j, στο τέλος της περιόδου $L+l$ στην αποθήκη j, θα είναι :

$$S_j = (l+1)\mu_j + \frac{(S - V - \sum_{k=1}^{N}(l+1)\mu_k)\sigma_j}{\sum_{i=1}^{N}\sigma_i} - W_j \tag{3.13}$$

Επομένως, υπό αυτή την πολιτική το αναμενόμενο κόστος μιας περιόδου στην αποθήκη j, είναι

$$\int_0^{\infty} hx dF_{s_j}(x) - \int_{-\infty}^{0} px dF_{s_j}(x) \tag{3.14}$$

Όταν $S_j = s - \xi_j$, (όπου s είναι μια σταθερά) η έκφραση γράφεται :

$$\int_0^{s} h(s-x) dG(x) + \int_s^{\infty} p(x-s) dG(x) \tag{3.15}$$

Όπου $G_i(.)$ είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής του ξ_j. Σημειώνεται ότι :

$$S_j = (l+1)\mu_j + \frac{(S - \sum_{k=1}^{N}(l+1)\mu_k)\sigma_j}{\sum_{k=1}^{N}\sigma_k} - \left(W_j + V\frac{\sigma_j}{\sum_{k=1}^{N}\sigma_k} \right) \tag{3.16}$$

Επομένως, θέτοντας :

$$s = (l+1)\mu_j + \frac{(S - \sum_{k=1}^{N}(l+1)\mu_k)\sigma_j}{\sum_{k=1}^{N}\sigma_k} \tag{3.17}$$

$$\xi_j = W_j + V\frac{\sigma_j}{\sum_{k=1}^{N}\sigma_k} \tag{3.18}$$

φαίνεται ότι η έκφραση (3.15) αναπαριστά το αναμενόμενο κόστος μιας περιόδου στην αποθήκη j, έκφραση που είναι αντίστοιχη με εκείνη από το γνωστό πρόβλημα του εφημεριδοπώλη (Axsater [2]). Οπότε η *βέλτιστη τιμή* για το s δίνεται από την έκφραση :

$$G_j(s) = \frac{p}{p+h} \tag{3.19}$$

Όταν η ζήτηση στην αποθήκη j, έχει κανονική κατανομή με παραμέτρους (μ_j, σ_j), τότε ξ_j είναι επίσης κανονική κατανομή :

$$\hat{\mu}_j = (l+1)\mu_j + \frac{\sigma_j}{\sum_{k=1}^{N}\sigma_k} L \sum_{k=1}^{N}\mu_k \tag{3.20}$$

$$\hat{\sigma}_j = \left[(l+1)\sigma_j^2 + \left(\frac{\sigma_j}{\sum_{k=1}^{N}\sigma_k} \right)^2 L \sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2 \right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.21}$$

Επομένως, $G_j(s) = \Phi(z)$ και προκύπτει :

$$z = \frac{\left(\frac{\sigma_j}{\sum_{k=1}^{N}\sigma_k} \right) \left[S - (L+l+1)\sum_{k=1}^{N}\mu_k \right]}{\sigma_j \left[\frac{L\sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2}{\left(\sum_{k=1}^{N}\sigma_k \right)^2} + (l+1) \right]^{1/2}} \tag{3.22}$$

ή
$$z = \frac{S - (L+l+1)\sum_{k=1}^{N}\mu_k}{\left[L\sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2 + (l+1)\left(\sum_{k=1}^{N}\sigma_k \right)^2 \right]^{1/2}} \tag{3.23}$$

Είναι σαφές ότι το z είναι ανεξάρτητο του j. Επομένως, η *βέλτιστη τιμή* του S είναι όμοια για όλες τις αποθήκες j και προσδιορίζεται από τη σχέση :

$$\Phi(z) = \frac{p}{p + h}$$

Παρακάτω, συγκρίνεται αυτό το αποτέλεσμα με αντίστοιχο αποτέλεσμα που προκύπτει από το γνωστό πρόβλημα του εφημεριδοπώλη (Axsater [2]). Στο πρόβλημα του εφημεριδοπώλη,

$$z = \frac{S - \mu}{\sigma}$$

όπου μ και σ είναι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση, αντίστοιχα, της ζήτησης κατά τη διάρκεια της περιόδου.

Στο σύστημα κεντρικής αποθήκης-αποθηκών (depot-warehouse), το *κόστος έλλειψης* και *διατήρησης* επιβάλλονται στις αποθήκες, $L+l+1$ περιόδους, αφού πραγματοποιηθεί η παραγγελία. Η συνολική ζήτηση του συστήματος σε αυτές τις $L+l+1$ περιόδους είναι μια κανονική τυχαία μεταβλητή, με μέση τιμή,

$$(L+l+1)\sum_{i=1}^{N}\mu_i$$

και τυπική απόκλιση,

$$\left[(L+l+1)\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Επομένως, αν όλη η ζήτηση συνέβαινε σε μια αποθήκη (centralized demand), η τιμή του z θα ήταν:

$$z=\frac{S-(L+l+1)\sum_{i=1}^{N}\mu_i}{\left[(L+l+1)\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

Απ' την άλλη μεριά, αν κάθε αποθήκη λειτουργούσε ξεχωριστά (decentralized demand) τότε :

$$z=\frac{S_i-(L+l+1)\mu_i}{(L+l+1)^{\frac{1}{2}}\sigma_i}$$

όπου S_i είναι το *order-up-to* επίπεδο για την αποθήκη i.

Στη συνέχεια, συγκρίνεται το *order-up-to* επίπεδο που προκύπτει για καθεμία από τις παραπάνω περιπτώσεις:

<u>Σύστημα της κεντρικής αποθήκης (Depot system)</u>:

$$S=(L+l+1)\sum_{k=1}^{N}\mu_k+z\left[L\sum_{k=1}^{N}\sigma_\kappa^2+(l+1)\left(\sum_{k=1}^{N}\sigma_k\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

<u>Σύστημα σωρευμένης ζήτησης (centralized demand):</u>

$$S=(L+l+1)\sum_{k=1}^{N}\mu_k+z\left[(L+l+1)\sum_{k=1}^{N}\sigma_\kappa^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

<u>Σύστημα αποκεντρωμένης ζήτησης (Decentralized demand)</u>:

$$S=\sum_{i=1}^{N}S_i=(L+l+1)\sum_{k=1}^{N}\mu_k+z\left[(L+l+1)^{\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{N}\sigma_\kappa\right]$$

Χρησιμοποιώντας την έκφραση κόστους που κατέληξε ο Eppen [20], το *αναμενόμενο συνολικό κόστος* για το σύστημα είναι:

$$C=hl\sum_{j=1}^{N}\mu_j+h\sum_{j=1}^{N}\hat{\sigma}_j z+(p+h)\sum_{j=1}^{N}\hat{\sigma}_j G(z)$$

όπου

$$G(z) = \int_z^{\infty}(x-z)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx \quad \text{(unit Normal Loss Function)}$$

Ο πρώτος όρος είναι το *κόστος διατήρησης* του αποθέματος, που βρίσκεται σε μετακίνηση από την κεντρική αποθήκη προς τις αποθήκες. Σημειώνεται ότι αυτή η ποσότητα δεν εξαρτάται από το S ή από την απόφαση για διανομή. Λόγω της *order-up-to* πολιτικής, η κεντρική αποθήκη θα παραγγείλει την απαιτούμενη ποσότητα στην προηγούμενη περίοδο, ανεξαρτήτως της τιμής του S.

Αν όλες οι αποθήκες έχουν την ίδια τυπική απόκλιση, σ, τότε: $\hat{\sigma}_j = \sigma\sqrt{\frac{L}{N}+l+1}$ και το *αναμενόμενο συνολικό κόστος* ανά περίοδο γράφεται ως :

$$C = hl\sum_{j=1}^{N}\mu_j + (hz + (p+h)G(z))N\sigma\sqrt{\frac{L}{N}+l+1}$$

Προφανώς, το κόστος που συνδέεται με το απόθεμα, που βρίσκεται σε μετακίνηση, αυξάνεται γραμμικά με την μέση συνολική ζήτηση και επομένως γραμμικά με τον αριθμό των αποθηκών, αν αυτές είναι όμοιες.

Πολιτικές παραγγελίας υπό σταθερό κόστος εκκίνησης/παραγγελίας

Στην προηγούμενη παράγραφο το *κόστος παραγγελίας* θεωρήθηκε αμελητέο. Αν το *κόστος παραγγελίας* δεν είναι αμελητέο τότε δεν είναι βέλτιστη (από πλευράς κόστους) η τοποθέτηση παραγγελίας κάθε περίοδο. Έστω, ότι το *κόστος παραγγελίας* επιβάλλεται στην κεντρική αποθήκη, η οποία παραγγέλνει με μια πολιτική (S,T) που ενδεχομένως δεν είναι η βέλτιστη για το σύστημα, χρησιμοποιείται όμως γιατί είναι μια πολιτική που εφαρμόζεται εύκολα. Έτσι στόχος είναι ο προσδιορισμός των βέλτιστων τιμών S και T και του επιμερισμού της παραγγελίας στις τελικές αποθήκες. Όταν μια παραγγελία φτάσει στην κεντρική αποθήκη την περίοδο l επιμερίζεται, έτσι ώστε να φέρει το *επίπεδο αποθέματος* της αποθήκης i, στο S_i. Το *κόστος διατήρησης* και *έλλειψης* στις περιόδους l+1,…,l+T επηρεάζονται απ' αυτόν τον επιμερισμό.

Ορίζεται :

$$F_{it}(x) = P\left\{\sum_{j=1}^{t} d_{ij} \le x\right\} \tag{3.24}$$

Η περιθώρια μεταβλητή του κόστους στην μοναδιαία αύξηση του S_i για την αποθήκη i , είναι :

$$\sum_{t=l+1}^{l+T}\left\{hF_{it}(S_i) - p\left[1-F_{it}(S_i)\right]\right\} = \sum_{t=l+1}^{l+T}\left\{(h+p)F_{it}(S_i)\right\} - Tp \tag{3.25}$$

Θεωρώντας ότι το μοναδιαίο *κόστος έλλειψης* και *διατήρησης* είναι ίσο σε όλες τις αποθήκες προκύπτει :

$$\sum_{t=l+1}^{l+T} F_{it}(S_i) = \sum_{t=l+1}^{l+T} F_{jt}(S_j) \quad \forall i, j \tag{3.26}$$

Επειδή $\sum_{t=l+1}^{l+T} F_{it}(S_i)$ είναι μη φθίνουσα συνάρτηση του S_i για κάθε αποθήκη, είναι θεωρητικά εύκολο να υπολογιστούν τα S_i έτσι ώστε να οδηγούν στον βέλτιστο επιμερισμό. Επιπλέον, η Υπόθεση του Επιμερισμού εγγυάται ότι η παραγγελία θα πρέπει να είναι αρκετά μεγάλη, ώστε να επιτευχθεί αυτός ο στόχος. Στη συνέχεια και για λόγους εύκολης υλοποίησης του επιμερισμού προτείνεται ένα επιμερισμός της μορφής:

$$S_i = (l+T)\mu_i + \nu\sigma_i$$

Ένας τέτοιος επιμερισμός είναι βέλτιστος, αν $\frac{\mu_i}{\sigma_i} = \alpha$, (όπου α είναι μια σταθερά ανεξάρτητη του i).

Αυτό προκύπτει απ' το γεγονός ότι σ' αυτή την περίπτωση,

$$F_{it}(S_i) = \Phi\left(\frac{l+T-t}{\sqrt{t}}a + \frac{\upsilon}{\sqrt{t}}\right) \tag{3.27}$$

Τώρα $\forall t$, η συνάρτηση $F_{it}(S_i)$ δεν εξαρτάται από την αποθήκη i. Είναι συνάρτηση μόνο του υ. Επομένως, επιλέγοντας υ, η συνθήκη στην ισότητα (3.26), ικανοποιείται. Ο επιμερισμός, $S_i = (l+T)\mu_i + \upsilon\sigma_i$ είναι μια καλή προσέγγιση, αν ο λόγος $\frac{\mu_i}{\sigma_i}$ είναι σχετικά μεγάλος (≥ 2).

Σημειώνεται ότι :

$$F_{it}(S_i) = \Phi\left(\frac{l+T-t}{\sqrt{t}}\left(\frac{\mu_i}{\sigma_i}\right) + \frac{\upsilon}{\sqrt{t}}\right) \tag{3.28}$$

Θέτοντας t = l+T συνεπάγεται ότι $F_{it}(S_i) = \Phi\left(\frac{\upsilon}{\sqrt{t}}\right)$, η οποία είναι η πιθανότητα ικανοποίησης της ζήτησης στην τελευταία περίοδο, πριν φτάσει η επόμενη παραγγελία. Θα πρέπει να επιλεγεί ένα αρκετά μεγάλο υ, ώστε η πιθανότητα να είναι μεγάλη, ίσως 0.90 ή μεγαλύτερη.

Για t < l+T, η τιμή του ορίσματος της συνάρτησης αυξάνει στο $F_{it}(S_i) \cong 1$. Επιπλέον, στην ουρά της κατανομής, ακόμη και σχετικά μεγάλες διαφορές στην τιμή των ορισμάτων μεταξύ διαφορετικών αποθηκών θα απέφερε μικρές διαφορές στην τιμή της συνάρτησης. Επομένως, ένας επιμερισμός της μορφής $S_i = (l+T)\mu_i + \upsilon\sigma_i$ προσεγγίζει την ισότητα (3.26). Με έναν επιμερισμό αυτού του τύπου, το *επίπεδο του αποθέματος* στην αποθήκη j, λίγο πριν πραγματοποιηθεί ο επόμενος επιμερισμός στην αποθήκη j, είναι:

$$S_j = (l+T)\mu_j + \frac{\sigma_j}{\sum_{k=1}^{N}\sigma_k}\left(S - V - \sum_{i=1}^{N}(l+T)\mu_i\right) - W_j \tag{3.29}$$

$$\text{όπου } V = \sum_{t=1}^{L}\sum_{j=1}^{N} d_{jt} \quad \text{και} \quad W_j = \sum_{t=L+1}^{L+l+T} d_{jt}$$

Επειδή οι τυχαίες μεταβλητές που περιγράφουν τη ζήτηση σε κάθε αποθήκη θεωρούνται ανεξάρτητες ισόνομες από περίοδο σε περίοδο και επίσης είναι ασυσχέτιστες από αποθήκη σε αποθήκη, συνεπάγεται ότι :

$$E(V) = L\sum_{j=1}^{N}\mu_j ,$$

$$E(W_j) = (l+T)\mu_j ,$$

$$\sigma_V^2 = L\sum_{j=1}^{N}\sigma_j^2 ,$$

$$\sigma_{W_j}^2 = (l+T)\sigma_j^2 .$$

Στη συνέχεια ορίζεται :

$$\hat{\mu}_j = \frac{\sigma_j}{\sum_{k=1}^{N}\sigma_k}(L+l+T)\sum_{i=1}^{N}\mu_i \tag{3.30}$$

Το τελικό απόθεμα στην αποθήκη j, έχει μέση τιμή,

$$\frac{\sigma_j S}{\sum_{i=1}^{N}\sigma_i} - \hat{\mu}_j$$

και τυπική απόκλιση,

$$\hat{\sigma}_j = \sqrt{\left[\left(\frac{\sigma_j}{\sum_{i=1}^{N}\sigma_i}\right)^2 L\sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2 + (l+T)\sigma_j^2\right]} .$$

Υποθέτοντας ότι οι ελλείψεις συμβαίνουν μόνο στην τελευταία περίοδο πριν από μια διανομή, το *αναμενόμενο κόστος* ανά κύκλο T περιόδων στην αποθήκη j, γράφεται ως:

$$Th\left\{\frac{\sigma_j S}{\sum_{i=1}^{N}\sigma_i-\hat{\mu}_j}\right\}+\frac{1}{2}hT(T-1)\mu_j+(h+p)\hat{\sigma}_j G\left(\frac{\left[\dfrac{\sigma_j S}{\sum_{i=1}^{N}\sigma_i-\hat{\mu}_j}\right]}{\hat{\sigma}_j}\right) \tag{3.31}$$

Σημειώνεται ότι το $\dfrac{\left(\sigma_j S\sum_{i=1}^{N}\sigma_i-\hat{\mu}_j\right)}{\hat{\sigma}_j}$ γράφεται ως :

$$z=\frac{\dfrac{\left[S-(L+l+T)\sum_{i=1}^{N}\mu_i\right]}{\sum_{i=1}^{N}\sigma_i}}{\sqrt{\left(\dfrac{L\sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2}{\left(\sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2\right)^2}+l+T\right)}} \tag{3.32}$$

το οποίο είναι ανεξάρτητο του j .

Αθροίζοντας ως προς j, το κόστος για έναν κύκλο, T , είναι :

$$Th\left\{S-(L+l+T)\sum_{i=1}^{N}\mu_i\right\}+\frac{1}{2}hT(T-1)\sum_{i=1}^{N}\mu_i+(h+p)\sum_{j=1}^{N}\hat{\sigma}_j G(z)+K \tag{3.33}$$

Κρατώντας το T σταθερό και παίρνοντας την πρώτη παράγωγο αυτής της έκφρασης ως προς S, προκύπτει η οριακή μεταβολή του κόστος στη μοναδιαία αύξηση του S. Επειδή $G'(z)=-\left[1-\Phi(z)\right]$, η έκφραση για την μεταβολή αυτή είναι :

$$Th-(h+p)(1-\Phi(z))$$

Λύνοντας ως προς Φ(z) και εξισώνοντας με μηδέν γίνεται :

$$\Phi(z)=\frac{p-(T-1)h}{p+h}$$

Το *ολικό αναμενόμενο κόστος* του συστήματος ανά περίοδο μπορεί να γραφεί ως :

$$C=hl\sum_{j=1}^{N}\mu_j+\frac{\left[Th\sum_{j=1}^{N}\hat{\sigma}_j z+\frac{1}{2}hT(T-1)\sum_{j=1}^{N}\mu_j+(h+p)\sum_{j=1}^{N}\hat{\sigma}_j G(z)+K\right]}{T} \tag{3.34}$$

Αν τα βέλτιστα z και T δηλώνονται με z^* και T^*, τότε προκύπτει κατά προσέγγιση ότι :

$$T^* \cong \sqrt{\left(\frac{2\left[K+(h+p)\sum_j \hat{\sigma}_j G(z^*)\right]}{h\sum_j \mu_j}\right)} \tag{3.35}$$

Το *αναμενόμενο κόστος* ανά περίοδο της *βέλτιστης πολιτικής*, προσθέτοντας το *κόστος μεταφοράς* των αποθεμάτων από την κεντρική αποθήκη προς τις τελικές αποθήκες, είναι κατά προσέγγιση :

$$hl\sum_{j=1}^{N}\mu_j + \sqrt{\left(2h\sum_{j=1}^{N}\mu_j\left[K+(h+p)\sum_j \hat{\sigma}_j G(z^*)\right]\right)} + h\left[\sum_{j=1}^{N}\left(\hat{\sigma}_j z - \frac{\mu_j}{2}\right)\right] \tag{3.36}$$

Με αντικατάσταση του T^* στον αριθμητή της σχέσης (3.32) , η *βέλτιστη τιμή* του συστήματος για την order-up-to quantity S, γράφεται κατά προσέγγιση ως :

$$S^* = \sqrt{\left(\frac{2\left[K+(h+p)\sum_{j=1}^{N}\hat{\sigma}_j G(z^*)\right]\sum_{i=1}^{N}\mu_i}{h}\right)} + (L+l)\sum_{j=1}^{N}\mu_j + z^*\sum_{j=1}^{N}\sigma_j\sqrt{\left(\frac{L\sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2}{(\sum_{k=1}^{N}\sigma_k)^2} + l + T^*\right)} \tag{3.37}$$

Το άθροισμα των δύο τελευταίων όρων μπορεί να θεωρηθεί ως ένα σημείο αναπαραγγελίας του συστήματος. Ο τελευταίος όρος μπορεί να θεωρηθεί ως ένα απόθεμα ασφαλείας του συστήματος, ενώ ο πρώτος όρος θεωρείται ως η αναμενόμενη ποσότητα παραγγελίας.

3.1.2 Ολιστικές πολιτικές παραγγελίας και επιμερισμού σε ένα διβάθμιο σύστημα με μη όμοιες αποθήκες

Στη συνέχεια οι Bollapragada, Akella και Srinivasan [7] επέκτειναν την εργασία των **ES** [21], υποθέτοντας ότι το *κόστος έλλειψης* και *διατήρησης* στις τελικές αποθήκες, δεν είναι το ίδιο. Οι Bollapragada et al. [7] επεκτείνοντας την προσέγγισή των **ES** πρώτα περιέγραψαν την βέλτιστη πολιτική επιμερισμού και έπειτα, προτείνοντας δυο προσεγγίσεις για την πολιτική επιμερισμού, παρήγαγαν κλειστή έκφραση για το *order-up-to S* επίπεδο. Οι Bollapragada et al. [7] θεώρησαν ένα διβάθμιο αποκλίνον σύστημα διαχείρισης αποθεμάτων ίδιο με εκείνο των **ES**. Στην κεντρική αποθήκη, οι αποφάσεις παραγγελίας και επιμερισμού των εμπορευμάτων λαμβάνονται, έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί το *αναμενόμενο μέσο κόστος* που προκύπτει σε όλες τις αποθήκες, σε άπειρο ορίζοντα σχεδιασμού.

Οι υποθέσεις του μοντέλου των Bollapragada et al. [7] είναι ίδιες με εκείνου των ES [21] ενώ δίνονται ο συμβολισμός που θα χρησιμοποιηθεί είναι.

Συμβολισμός

d_i : είναι μια ανεξάρτητη τυχαία μεταβλητή που περιγράφει την ζήτηση στην αποθήκη i και ακολουθεί κανονική κατανομή ,

p_i : είναι το *κόστος έλλειψης* ανά μονάδα προϊόντος και ανά περίοδο ,

h_i : είναι το *κόστος διατήρησης* ανά μονάδα προϊόντος και ανά περίοδο ,

w : η ποσότητα που φτάνει στην κεντρική αποθήκη στην αρχή γνωστής περιόδου ,

z_i : το διαθέσιμο απόθεμα συν αυτό που είναι σε μεταφορά προς την αποθήκη i ,

W_i : η συνολική ζήτηση στην αποθήκη i για $l+1$ χρονικές περιόδους ,

u_i : είναι η ποσότητα που διανέμεται στην αποθήκη i ,

Ανάλυση του προβλήματος

Η ποσότητα, u_i , που διανέμεται στην αποθήκη i , μπορεί να προσδιοριστεί από την λύση του παρακάτω προβλήματος.

$$\min_{u_i,\ldots,u_N} \sum_{i=1}^{N} \left\{ h_i E\left(z_i + u_i - W_i\right)^+ + p_i E\left(W_i - z_i - u_i\right)^+ \right\} \tag{3.38}$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\sum_{i=1}^{N} u_i = w \tag{3.39}$$

$$u_i \geq 0 \ , \ \text{i=1,2,...,N} \tag{3.40}$$

Το πρόβλημα επιμερισμού που περιγράφεται παραπάνω είναι κυρτό και συνεπώς, η *βέλτιστη λύση* προκύπτει, επιλύοντας τις συνθήκες πρώτης τάξης των Kuhn-Tucker. Επομένως, η *βέλτιστη πολιτική* επιμερισμού που προκύπτει, περιγράφεται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$u_i + z_i = (l+1)\mu_i + \sqrt{l+1}\ \Phi^{-1}\left(\frac{p_i + \lambda + \lambda_i}{p_i + h_i}\right)\sigma_i \ , \quad \text{με i=1,2,..., N} \tag{3.41}$$

$$\sum_{i=1}^{N} u_i = w \tag{3.42}$$

$$\lambda_i \geq 0 \ , \ u_i \geq 0 \ , \ \lambda_i u_i \geq 0 \ , \ \text{i=1,2,...,N} \tag{3.43}$$

όπου

λ : είναι ο πολλαπλασιαστής Lagrange που σχετίζεται με τον περιορισμό (3.39) ,

λ_i : είναι οι πολλαπλασιαστές που σχετίζονται με τους μη αρνητικούς περιορισμούς (3.40) , Ένα σύστημα λέγεται ότι βρίσκεται σε ισορροπία μετά από τον επιμερισμό αν $\lambda_i = 0$, για όλα τα i.

Στη συνέχεια γίνονται δύο προσεγγίσεις για την πολιτική επιμερισμού, ώστε να προκύψει μια κλειστής μορφής έκφραση για το *order-up-to S* επίπεδο:

1) Έστω πρώτα, ότι σε κάθε περίοδο η κεντρική αποθήκη λαμβάνει αρκετή ποσότητα από τον προμηθευτή τόση που το σύστημα μπορεί να έρθει σε ισορροπία μετά τον επιμερισμό. Αυτή είναι η υπόθεση των **ES** [21] και ουσιαστικά οδηγεί στην χαλάρωση των περιορισμών (3.40).

2) Στην πολιτική επιμερισμού δίνεται γραμμική μορφή, αντικαθιστώντας το $\Phi^{-1}\left(\dfrac{p_i+\lambda+\lambda_i}{p_i+h_i}\right)$ στην ισότητα (3.41), με av_i, όπου v_i είναι συντελεστής ασφαλείας (*safety factor*) που δίνεται ως $v_i = \Phi^{-1}\left(\dfrac{p_i}{p_i+h_i}\right)$

Επομένως, μετά από τις δύο προσεγγίσεις, η πολιτική οδηγεί στην αύξηση του επιπέδου αποθέματος στην αποθήκη i, στο x_i:

$$x_i = (l+1)\mu_i + \alpha v_i \sigma_i \sqrt{l+1} \tag{3.44}$$

Προσδιορισμός των order-up-to επιπέδων

Στην ενότητα παράγεται μια έκφραση κλειστής μορφής για το *order-up-to S* επίπεδο, κάτω από την *πολιτική του δίκαιου επιμερισμού*, υπό την υπόθεση των *ισοσταθμισμένων αποθεμάτων*.

Έστω:

V : η συνολική ζήτηση του συστήματος κατά την διάρκεια L+1 περιόδων, $V = \sum_{k=t}^{t+L}\sum_{j=1}^{N} d_{jk}$.

Υπενθυμίζοντας ότι όταν μια παραγγελία πραγματοποιείται στην αρχή της περιόδου t, φτάνει L περιόδους αργότερα, το συνολικό διαθέσιμο απόθεμα της κεντρικής αποθήκης αυξημένο κατά τα αποθέματα που αποτελούν παραγγελίες που έχουν γίνει αλλά δεν έχουν φτάσει ακόμα (*pipeline stock*) στις τελικές αποθήκες είναι, S-V. Η υπόθεση Επιμερισμού συνεπάγεται ότι οι S-V μονάδες στο σύστημα διανέμονται, ώστε να επιτευχθεί μια *πολιτική δίκαιου επιμερισμού*. Συνεπώς:

$$S - V = \sum_{j=1}^{N} x_i \tag{3.45}$$

Αντικαθιστώντας την (3.44) στην (3.45), προκύπτει:

$$S - V = \sum_{j=1}^{N}(l+1)\mu_j + a\sum_{j=1}^{N}\sqrt{l+1}v_j\sigma_j \tag{3.46}$$

Λύνοντας ως προς a έχουμε:

$$a = \frac{S - V - \sum_{j=1}^{N}(l+1)\mu_j}{\sqrt{l+1}\sum_{j=1}^{N}v_j\sigma_j} \tag{3.47}$$

Αντικαθιστώντας το a στην (3.44) προκύπτει :

$$x_i = (l+1)\mu_i + \frac{(S - V - \sum_{j=1}^{N}(l+1)\mu_i)v_i\sigma_i}{\sum_{j=1}^{N}v_j\sigma_j} \tag{3.48}$$

Στο τέλος της l περιόδου μετά τον επιμερισμό, το *επίπεδο αποθέματος* στην αποθήκη i, θα είναι :

$$S_i = x_i - W_i \Rightarrow S_i = (l+1)\mu_i + \frac{(S - V - \sum_{j=1}^{N}(l+1)\mu_j)v_i\sigma_i}{\sum_{j=1}^{N}v_j\sigma_j} - W_i \tag{3.49}$$

Επομένως το *αναμενόμενο κόστος* στην αποθήκη i , την περίοδο $t + L + l$ είναι :

$$\int_0^{\infty} h_i x dF_{s_i}(x) - \int_{-\infty}^{0} p_i x dF_{s_i}(x) \tag{3.50}$$

Όταν $S_i = s - \xi_i$ (όπου s είναι μια σταθερά), η έκφραση γράφεται ως :

$$\int_0^{u} h_i(s-x)dG_i(x) + \int_u^{\infty} p_i(x-s)dG_i(x) \tag{3.51}$$

όπου $G_i(.)$, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής του ξ_i . Σημειώνεται ότι το S_i γράφεται ως :

$$S_i = (l+1)\mu_i + \frac{\left(S - \sum_{j=1}^{N}(l+1)\mu_j\right)v_i\sigma_i}{\sum_{j=1}^{N}v_j\sigma_j} - \left(W_i + V\frac{v_i\sigma_i}{\sum_{j=1}^{N}v_j\sigma_j}\right) \tag{3.52}$$

Επομένως , θέτοντας :

$$s = (l+1)\mu_i + \frac{\left(S - \sum_{j=1}^{N}(l+1)\mu_j\right)v_i\sigma_i}{\sum_{j=1}^{N}v_j\sigma_j} \tag{3.53}$$

$$\xi_i = W_i + V\frac{v_i\sigma_i}{\sum_{j=1}^{N}v_j\sigma_j} \tag{3.54}$$

προκύπτει ότι $S_i = s - \xi_i$ και συνεπώς, η έκφραση (3.51) αναπαριστά το *αναμενόμενο κόστος* μιας περιόδου στην αποθήκη i. Από τις γνωστές συνθήκες του διλλήματος του εφημεριδοπώλη η *βέλτιστη τιμή* για το s δίνεται από την έκφραση :

$$G_i(s) = \frac{p_i}{p_i + h_i} \tag{3.55}$$

Το ξ_i ως γραμμικός συνδυασμός κανονικών τυχαίων μεταβλητών, ακολουθεί κανονική κατανομή με παραμέτρους $\hat{\mu}_i$ και $\hat{\sigma}_i^2$:

$$\hat{\mu}_i = (l+1)\mu_i + \frac{v_i \sigma_i}{\sum_{j=1}^{N} v_j \sigma_j} L \sum_{j=1}^{N} \mu_j \tag{3.56}$$

$$\hat{\sigma}_i^2 = (l+1)\sigma_i^2 + \frac{v_i^2 \sigma_i^2}{(\sum_{j=1}^{N} v_j \sigma_j)^2} L \sum_{j=1}^{N} \sigma_j^2 \tag{3.57}$$

Επομένως, $G_i(s) = \Phi(z)$, όπου $\Phi(.)$ είναι η αθροιστική συνάρτηση της τυπικής κανονικής κατανομής και τυποποιείται με $\hat{\mu}_i$ και $\hat{\sigma}_i^2$ και προκύπτει :

$$z = \frac{\left(\frac{v_i \sigma_i}{\sum_{j=1}^{N} v_j \sigma_j}\right)\left[S - \sum_{j=1}^{N}(L+l+1)\mu_j\right]}{v_i \sigma_i \left[\frac{L\sum_{j=1}^{N}\sigma_j^2}{(\sum_{j=1}^{N}\sigma_j)^2} + (l+1)\right]^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow z = \frac{S - \sum_{j=1}^{N}(L+l+1)\mu_j}{\sqrt{L\sum_{j=1}^{N}\sigma_j^2 + (l+1)\frac{(\sum_{j=1}^{N} v_j \sigma_j)^2}{v_i^2}}} \tag{3.58}$$

Η *βέλτιστη τιμή*, S, που ελαχιστοποιεί το *αναμενόμενο κόστος* στην αποθήκη i, δίνεται απ' την σχέση :

$$G_i(s) = \Phi(z) \Rightarrow z = \Phi^{-1}(G_i(s)) \Rightarrow z = \Phi^{-1}\left(\frac{p_i}{p_i + h_i}\right) = v_i$$

Η τιμή της *order-up-to quantity*, που ελαχιστοποιεί το *αναμενόμενο κόστος* στην αποθήκη i, είναι:

$$S = \sum_{j=1}^{N}(L+l+1)\mu_j + \sqrt{L v_i^2 \sum_{j=1}^{N}\sigma_j^2 + (l+1)(\sum_{j=1}^{N} v_j \sigma_j)^2} \tag{3.59}$$

Η διαδικασία της πολιτικής επιμερισμού ως τώρα είναι παρόμοια με αυτή των **ES** [21]. Η έκφραση για το *order-up-to* επίπεδο στην (3.59), εξαρτάται από την αποθήκη i. Συνεπώς, το S στην (3.59) θα δηλώνεται με S_i.

Σημειώνεται ότι μια *order-up-to* πολιτική με *order-up-to* επίπεδο, S_i και η πολιτική επιμερισμού που περιγράφηκε παραπάνω, ελαχιστοποιεί το *αναμενόμενο κόστος* στην αποθήκη i. Όμως, χρειάζεται ένα απλό *order-up-to S* επίπεδο για όλο το σύστημα. Θεωρώντας τα S_i που προέκυψαν παραπάνω θα παραχθεί μια έκφραση για το *order-up-to S* επίπεδο, που είναι ανεξάρτητη της αποθήκης i κι έτσι η πολιτική επιμερισμού τροποποιείται, ώστε να ελαχιστοποιεί το άθροισμα του επιμέρους κόστους σε όλες τις αποθήκες. Αυτό γίνεται υπό την προϋπόθεση ότι η μέση τιμή της ποσότητας του προϊόντος που φτάνει σε κάθε αποθήκη i κάτω από την νέα πολιτική, παραμένει η ίδια με πριν. Έτσι, το S_i γράφεται ως εξής :

$$S_i = M + \Gamma_i \tag{3.60}$$

$$\text{όπου } \mathrm{M} = \sum_{j=1}^{N}(L+l+1)\mu_j \tag{3.61}$$

$$\text{και } \Gamma_i = \sqrt{Lv_i^2\sum_{j=1}^{N}\sigma_j^2 + (l+1)(\sum_{j=1}^{N}v_j\sigma_j)^2} \tag{3.62}$$

M είναι η μέση τιμή της συνολικής ζήτησης σε όλες τις αποθήκες σε L+l+1 περιόδους (ποσότητα ανεξάρτητη της αποθήκης). Γ_i είναι το *επίπεδο του αποθέματος ασφαλείας* (*net safety stock*) για όλο το *χρόνο απόκρισης* που απαιτείται για να ελαχιστοποιηθεί το *αναμενόμενο κόστος* στην αποθήκη i, κάτω από την *πολιτική του δίκαιου επιμερισμού* (ποσότητα που εξαρτάται από την αποθήκη). Σημειώνεται ότι κάτω από την συγκεκριμένη πολιτική επιμερισμού το *επίπεδο του αποθέματος ασφαλείας* Γ_i, ελαχιστοποιεί το συνολικό αναμενόμενο κόστος για την αποθήκη i είναι $r_i\Gamma_i$, όπου r_i :

$$r_i = \frac{v_i\sigma_i}{\sum_{j=1}^{N}v_j\sigma_j} \tag{3.63}$$

Αν το απόθεμα ασφαλείας που φτάνει σε κάθε αποθήκη i είναι $r_i\Gamma_i$, τότε το *αναμενόμενο κόστος* σ' όλες τις αποθήκες ελαχιστοποιείται. Για να επιβεβαιωθεί αυτό το *order-up-to* επίπεδο πρέπει να είναι :

$$S = M + \sum_{i=1}^{N}r_i\Gamma_i = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}}r_iS_i \tag{3.64}$$

Η πολιτική επιμερισμού πρέπει να τροποποιηθεί έτσι ώστε η μέση τιμή ενός αποθέματος ασφαλείας του $r_i\Gamma_i$, να φτάνει στην αποθήκη i , σε L+l+1 περιόδους. Άρα το απόθεμα ασφαλείας θα πρέπει να επιμεριστεί στις αποθήκες έτσι ώστε, $r_1\Gamma_1$: $r_2\Gamma_2$:..: $r_N\Gamma_N$.

Διαφορετικά ο επιμερισμός πρέπει να γίνει έτσι ώστε το απόθεμα στην αποθήκη i, να είναι :

$$x_i = (l+1)\mu_i + \alpha r_i\Gamma_i \tag{3.65}$$

Η τιμή του a, προσδιορίζεται από το διαθέσιμο απόθεμα για επιμερισμό. Αυτό οδηγεί σε μια νέα πολιτική επιμερισμού, η οποία θα περιγραφεί στη συνέχεια. Δοθέντος των αποθεμάτων που αποτελούν παραγγελίες που έχουν γίνει αλλά δεν έχουν παραληφθεί ακόμα από τις επιμέρους αποθήκες, z_i, της ποσότητας που διατίθεται προς διανομή, w, οι ποσότητες επιμερισμού, u_i, καθορίζονται από τις παρακάτω σχέσεις :

$$u_i + z_i = (l+1)\mu_i + (a-\lambda_i)r_i\Gamma_i \quad \text{με} \quad i=1,2,\dots,N \tag{3.66}$$

$$\sum_{i=1}^{N} u_i = w \tag{3.67}$$

$$u_i \geq 0, \quad \lambda_i \geq 0, \quad u_i\lambda_i = 0, \quad \text{με} \quad i=1,2,\dots,N \tag{3.68}$$

Η πολιτική επιμερισμού που περιγράφηκε παραπάνω είναι πιο απλή και εύκολη να εφαρμοστεί, όταν συγκριθεί με την *βέλτιστη πολιτική επιμερισμού* που περιγράφηκε από τις σχέσεις (3.41) – (3.43).

Τέλος, συνοψίζοντας μια γενική διαδικασία για να αντιμετωπιστούν μη όμοιες αποθήκες είναι η εξής: Προσδιορίζεται το *order-up-to* επίπεδο, S_i, που ελαχιστοποιεί το *αναμενόμενο κόστος* σε μια αποθήκη i, όπως έκαναν οι **ES** [21]. Στη συνέχεια χρησιμοποιούνται τα S_i για να προκύψει το *order-up-to S* επίπεδο, για όλο το σύστημα και τροποποιείται η πολιτική επιμερισμού ώστε να εξασφαλιστεί ότι η ποσότητα που θα φτάσει σε μια συγκεκριμένη αποθήκη, θα είναι ίδια με πριν.

3.2 Πολιτική Αναλογικού Επιμερισμού (Appropriate Share) - Πολιτική Συνεπούς Αναλογικού Επιμερισμού (Consistent Appropriate Share)

Σ' αυτή την ενότητα παρουσιάζονται μοντέλα διαχείρισης πολυβάθμιων συστημάτων αποθεμάτων κάτω από την Appropriate Share (**AS**) και κυρίως την Consistent Appropriate Share (**CAS**) πολιτική επιμερισμού η τελευταία, όπως έχει ήδη αναφερθεί, μπορεί να θεωρηθεί ως ειδική περίπτωση της **AS**.

Με στόχο να οριστεί αυστηρά η **AS** ορίζεται η ποσότητα, *προβαλλόμενο επίπεδο αποθέματος στην αποθήκη i στο τέλος της περιόδου* $t + l_i + 1$, U_t^i ως:

U_t^i = *θέση του αποθέματος στην αποθήκη i - αναμενόμενη ζήτηση* κατά την διάρκεια του *χρόνου απόκρισης* = $I_1^i(t) - (l_i + 1)\mu_i$

Το U_t^i δίνει την καλύτερη δυνατή εκτίμηση το *επίπεδο αποθέματος* στο τέλος της περιόδου $t + l_i + 1$ αν αυτό θεωρηθεί γνωστό στην αρχή της περιόδου t. Σημειώνεται ότι σε περιπτώσεις όπου το απόθεμα της αποθήκης i φτάνει το *order-up-to* επίπεδο ($I_1^i(t) = S_1^i$), το U_t^i ταυτίζεται με το *προγραμματισμένο απόθεμα ασφάλειας* (*planned safety stock*), SS^i, στην αποθήκη i. Επομένως, ισχύει ότι αν $I_1^i(t) = S_1^i$, τότε :

$$U_t^i = S_1^i - (l_i + 1)\mu_i \equiv SS^i \Rightarrow U_t^i \equiv SS^i$$

Έτσι η **AS** πολιτική επιμερίζει το διαθέσιμο απόθεμα της κεντρικής αποθήκης σύμφωνα με τη σχέση

$$\frac{U_t^i}{U_t} = f_i \tag{3.69}$$

όπου $U_t = \sum_{k=1}^{N} U_t^k$ = άθροισμα των *προβαλλόμενων επιπέδων αποθέματος* όλων των τελικών αποθηκών και $\sum_{j=1}^{N} f_j = 1$

Σκοπός της είναι να διασφαλίσει ότι σε μια αποθήκη μπορεί να επιτευχθεί ένα προκαθορισμένο επίπεδο εξυπηρέτησης.

Στη συνέχεια, αν οριστεί ως z_t^i η θετική ποσότητα αποθέματος που επιμερίζεται από την **AS** πολιτική σε κάθε τελική αποθήκη i έτσι ώστε να ικανοποιείται η (3.69). Εύκολα αποδεικνύεται ότι :

$$z_t^i = I_1^i(t) - (I_1^i(t-1) - d_{t-1,t}^i)$$

Τα f_i είναι άγνωστα έτσι χρησιμοποιώντας την **AS** πολιτική προκύπτουν 2N+1 μεταβλητές απόφασης οι: $S_0, \{S_1^j\}$ και $\{f_j\}$, οι οποίες θα πρέπει να προσδιοριστούν. Έτσι στη συνέχεια προτάθηκε η **CAS** ως ειδική περίπτωση της **AS** και με την εφαρμογή της οποίας οι μεταβλητές απόφασης μειώνονται σημαντικά. Σύμφωνα με την **CAS** τα f_i ορίζονται ως εξής:

$$f_i = \frac{S_1^i - (l_i + 1)\mu_i}{S_1 - \sum_{j=1}^{N}(l_j + 1)\mu_j} \tag{3.70}$$

όπου $S_1 = \sum_{j=1}^{N} S_1^j$.

Από την παραπάνω σχέση οι μεταβλητές που πρέπει τώρα να προσδιοριστούν είναι N+2: S_0, S_1 και $\{f_j\}$). Επιπλέον, από την **CAS** προκύπτει η **FS** πολιτική, όταν η ζήτηση ακολουθεί κανονική κατανομή και όταν σκοπός είναι να επιτευχθούν *ίσες πιθανότητες έλλειψης*. Σ' αυτή την περίπτωση εύκολα φαίνεται ότι το *ποσοστό επιμερισμού* για κάθε τελική αποθήκη i , γίνεται:

$$f_i = \frac{\sigma_i}{\sum_{j=1}^{N}\sigma_j}$$

όπως απαιτείται από την **FS** πολιτική επιμερισμού. Υπογραμμίζεται ότι η **AS** πολιτική είναι πιο γενική, επειδή ισχύει για κάθε κατανομή ζήτησης και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για κάθε επιθυμητό επίπεδο εξυπηρέτησης.

3.2.1 Επιμερισμός αποθεμάτων σε ένα διβάθμιο σύστημα διανομής κάτω από περιορισμούς επιπέδων εξυπηρέτησης

Οι De Kok, Lagodimos και Seidel [15] μελέτησαν ένα διθάθμιο αποκλίνον σύστημα αποθεμάτων περιοδικής επιθεώρησης με στοχαστική ζήτηση στο οποίο εφαρμόζονται *echelon order-up-to S* πολιτικές με στόχο την εύρεση των βέλτιστων S_0, S_1 και $\{f_j\}$ κάτω από περιορισμούς για τα επίπεδα εξυπηρέτησης **(fill rates)** στις τελικές αποθήκες. Ανέπτυξαν εκφράσεις για το συνολικό κόστος λειτουργίας του συστήματος και για τα διάφορα μέτρα εξυπηρέτησης και ανέπτυξαν ευρετικούς αλγορίθμους για τον υπολογισμό των επιπέδων εξυπηρέτησης και των μεταβλητών απόφασης. Στη συνέχεια συγκεντρώνεται τόσο ο συμβολισμός που έχει ήδη χρησιμοποιηθεί στην προηγούμενη παράγραφο καθώς και εκείνος που θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια καθώς και οι υποθέσεις κάτω από τις οποίες αναπτύσσεται το μοντέλο.

Συμβολισμός

d_i : η ζήτηση στην τελική αποθήκη i σε μια αυθαίρετη περίοδο ,

$d^i_{t,t+k}$: η ζήτηση στην τελική αποθήκη i στο (t,t+k] ,

D : η συνολική ζήτηση σε όλες τις αποθήκες σε μια αυθαίρετη περίοδο ,

$D_{t,t+k}$: η συνολική ζήτηση του συστήματος στο (t,t+k] ,

SS^i : το *προγραμματισμένο απόθεμα ασφαλείας* (*planned safety stock*) στην τελική αποθήκη i ,

SS^0 : το *προγραμματισμένο απόθεμα ασφαλείας* (*planned safety stock*) στην κεντρική αποθήκη ,

SS : το απόθεμα ασφάλειας ολόκληρου του συστήματος, $SS = SS^0 + \sum_{k=1}^{N} SS^k$,

S_0 : το *echelon order-up-to* επίπεδο στην κεντρική αποθήκη ,

S_1^i : το *order-up-to* επίπεδο στην τελική αποθήκη i ,

S_1 : η ποσότητα $S_1 = \sum_{j=1}^{N} S_1^j$,

Δ : η ποσότητα $\Delta = S_0 - S_1 = S_0 - \sum_{j=1}^{N} S_1^j$, αναπαριστά την διαφορά ανάμεσα στο *echelon order-up-to* επίπεδο στην κεντρική αποθήκη και στο άθροισμα των *order-up-to* επιπέδων του πιο κάτω επιπέδου.

$I_1^i(t)$: η *θέση του αποθέματος* της τελικής αποθήκης i , αφού παραγγείλει την στιγμή t ,

$I_1(t)$: το άθροισμα $\sum_{k=1}^{n} I_1^k(t)$, είναι η *θέση του αποθέματος βαθμίδας* μιας τελικής αποθήκης i ,

$I_0(t)$: η *θέση του αποθέματος βαθμίδας* της κεντρικής αποθήκης ,

R : η μέση τιμή της συνολικής ζήτησης στον *χρόνο απόκρισης* της κεντρικής αποθήκης, $R = L\sum_{k=1}^{N} \mu_k$,

z_t^i : η ποσότητα που διανέμεται στην τελική αποθήκη i , στην αρχή της περιόδου t ,

β_i^* : το επιθυμητό *fill rate* για την τελική αποθήκη i ,

Υποθέσεις

1. Οι τελικές αποθήκες αντιμετωπίζουν τη ζήτηση και η υπερβάλλουσα ζήτηση ικανοποιείται με καθυστέρηση.
2. Δεν επιτρέπονται μεταφορές μεταξύ των τελικών αποθηκών.

Σημειώνεται επίσης, ότι όλα τα αποτελέσματα εφαρμόζονται σε συστήματα που χρησιμοποιούν *nested* (S,T) πολιτικές και στα δύο επίπεδα, αν οι *χρόνοι απόκρισης* είναι ακέραια πολλαπλάσια της περιόδου επιθεώρησης, T.

Οι De Kok et al. [15] χρησιμοποίησαν την *γενικευμένη υπόθεση των ισοσταθμισμένων αποθεμάτων* (Generalised Balanced Inventories (**GBI**)), η οποία υποδηλώνει ότι δυσαρμονίες των αποθεμάτων δεν θα συμβαίνουν ποτέ. Στην πραγματικότητα η **GBI** γενικεύει την γνωστή υπόθεση των *ισοσταθμισμένων αποθεμάτων* (Balanced Inventories (**BI**)) που συνδέεται με την **FS** πολιτική.

Δυναμική του συστήματος

Αρχικά δίνεται το επόμενο αποτέλεσμα που θα βοηθήσει στον υπολογισμό του συνολικού κόστους λειτουργίας του συστήματος και των επιπέδων εξυπηρέτησης:

Πρόταση (Lagodimos [31]) :

Το άθροισμα των *θέσεων των αποθεμάτων* των αποθηκών του πιο πάνω επιπέδου αμέσως μετά την παραγγελίας της *t* περιόδου, δίνεται από τη σχέση:

$$I_1(t) = \min(S_0 - D_{t-L,t}, S_1) \qquad (3.71)$$

Επομένως, το άθροισμα του *αποθέματος βαθμίδας* του πιο πάνω επιπέδου προσδιορίζεται πλήρως από το άθροισμα των αποθεμάτων του συστήματος (L χρονικές περιόδους νωρίτερα) κι απ' την συνολική ζήτηση του συστήματος στο [t-L,t). Ωστόσο, για να προσδιοριστεί το απόθεμα κάθε αποθήκης ξεχωριστά, λαμβάνεται υπόψη η πολιτική επιμερισμού. Ομοίως με τον De Kok [13], οι De Kok et al. [15] εισήγαγαν την ακόλουθη υπόθεση :

Γενικευμένη Υπόθεση Ισοσταθμισμένων Αποθεμάτων (Generalised Balanced Inventories (GBI)): $P\left\{z_t^i \geq 0\right\}=1$, $t \geq 0$, $i=1,2,\ldots,N$.

Η Γενικευμένη Υπόθεση Ισοσταθμισμένων Αποθεμάτων επιτρέπει την έκφραση του αποθέματος κάθε τελικής αποθήκης ως συνάρτηση του αθροίσματος μόνο των αποθεμάτων των αποθηκών του πιο πάνω επιπέδου. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.69),(3.70) και (3.71) προκύπτει:

$$I_1^i(t)=f_i\left\{S_1-(D_{t-L,t}-(S_0-S_1))^+-\sum_{j=1}^{N}(l_j+1)\mu_j\right\}+(l_i+1)\mu_i \qquad (3.72)$$

Όπου $x^+=\max(x,0)$. Μια άλλη χρήσιμη έκφραση για το $I_1^i(t)$ προκύπτει εισάγοντας την ποσότητα, $\Delta=S_0-S_1$. Αντικαθιστώντας το Δ στην (3.72), το $I_1^i(t)$ γράφεται ως :

$$I_1^i(t)=c_i-f_i(D_{t-L,t}-\Delta)^+ \qquad (3.73)$$

$$\text{όπου } c_i=f_i\left(S_1-\sum_{j=1}^{N}(l_j+1)\mu_j\right)+(l_i+1)\mu_i$$

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις ιδιαίτερου ενδιαφέροντος. Πρώτον, αν το S_0 γίνει πολύ μεγάλο σε σχέση με το S_1 (δηλαδή $\Delta=\infty$), το διβάθμιο αποκλίνον σύστημα αναλύεται σε N ανεξάρτητα συστήματα ενός επιπέδου. Δεύτερον, αν $S_0=S_1$ (δηλαδή Δ=0), η κεντρική αποθήκη δεν διατηρεί καθόλου αποθέματα και το σύστημα ταυτίζεται με το διβάθμιο αποκλίνον σύστημα που μελέτησε ο De Kok [13], στο οποίο η κεντρική αποθήκη δεν διατηρεί αποθέματα, (αυτό συνεπάγεται απευθείας από την (3.71)).

Υπολογισμός επιπέδων εξυπηρέτησης

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται εκφράσεις για τα γνωστά μέτρα εξυπηρέτησης και προτείνονται ευρετικοί αλγόριθμοι για το προσδιορισμό τον μεταβλητών απόφασης σε τρόπο ώστε να ικανοποιούνται οι στόχοι για συγκεκριμένα επίπεδα εξυπηρέτησης σε κάθε τελική αποθήκη. Ενώ η ανάλυση ισχύει για κάθε κατανομή ζήτησης, πολλά αποτελέσματα χρησιμοποιούν την υπόθεση ότι η ζήτηση στις τελικές αποθήκες κατά τη διάρκεια του *χρόνου απόκρισης*, περιγράφεται από μια Mixed Erlang (ME) κατανομή. Οι λόγοι για την επιλογή αυτής της κατανομής είναι ότι μπορεί εύκολα να προσαρμοστεί σε οποιοδήποτε συνδυασμό μέσης τιμής και διασποράς τυχαίων μεταβλητών και επιπλέον με τη χρήση της προκύπτουν υπολογιστικά διαχειρίσιμα αποτελέσματα.

Γενικά μοντέλα εξυπηρέτησης

Ο ρυθμός κάλυψης, **β**, **(fill rate)** ορίζεται ως το ποσοστό της ζήτησης που ικανοποιείται άμεσα από το διαθέσιμό απόθεμα και είναι ένα από τα μέτρα εξυπηρέτησης πελατών που χρησιμοποιούνται στην πράξη. Επειδή αυτό εκτιμάει αποτελεσματικά την ποσότητα έλλειψης στο σύστημα, συχνά εκτιμάται αντί του *κόστους έλλειψης*. Γενικά:

$$\beta_i = 1 - \frac{E[(d^i_{t,t+l_i+1} - I^i_1(t))^+] - E[(d^i_{t,t+l_i} - I^i_1(t))^+)]}{\mu_i}$$

Για το σύστημα που λειτουργεί κάτω από την **CAS** πολιτική επιμερισμού, με αντικατάσταση της (3.73) στην παραπάνω σχέση, προκύπτει η ακόλουθη έκφραση για το **fill rate** σε κάθε τελική αποθήκη i:

$$\beta_i = 1 - \frac{E[(f_i(D_{t-L,t} - \Delta)^+ + d^i_{t,t+l_i+1} - c_i)^+] - E[(f_i(D_{t-L,t} - \Delta)^+ + d^i_{t,t+l_i} - c_i)^+)]}{\mu_i} \tag{3.74}$$

όπου c_i δίνεται από την (3.73). Σημειώνεται ότι κάθε όρος στον αριθμητή της (3.74) έχει τη μορφή $E[((X-\Delta)^+ + Y - c)^+]$.

Αν οι μεταβλητές X και Y ακολουθούν την **ΜΕ** κατανομή, οι όροι αυτοί μπορούν να εκτιμηθούν εύκολα. Στη συνέχεια δίνεται το αποτέλεσμα για την περίπτωση όπου X και Y ακολουθούν μια γνήσια Erlang κατανομή. Αν X και Y ακολουθούν μια $E_{k,m}$ και μια $E_{1,\upsilon}$ κατανομή αντίστοιχα. Μπορεί να δειχθεί ότι :

$$E[((X-\Delta)^+ + Y - c)^+] = \left(1 - \sum_{j=0}^{k-1} e^{-\mu\Delta} \frac{(\mu\Delta)^i}{i!}\right) \sum_{j=0}^{l-1} \frac{(l-j)}{\nu} e^{-\nu c} \frac{(\nu c)^j}{j!} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(k-i)}{\mu} e^{-\mu(\Delta+c)} \frac{[(\Delta+c)\mu]^i}{i!} - \frac{l}{\nu} \sum_{i=0}^{k-1} e^{-\mu(\Delta+c)} \frac{[(\Delta+c)\mu]^i}{i!} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{l-1} \sum_{n=0}^{j} \frac{(l-j)e^{-\nu(c+\Delta)}(-1)^n \mu^k \nu^n}{\nu(\mu-\nu)^{n+k}} \binom{n+k-1}{k-1} \frac{[\nu(c+\Delta)]^{j-n}}{(j-n)!} *$$

$$* \left(\sum_{m=0}^{n+k-1} e^{-(\mu-\nu)\Delta} \frac{[(\mu-\nu)\Delta]^m}{m!} - \sum_{m=0}^{n+k-1} e^{-(\mu-\nu)(c+\Delta)} \frac{[(\mu-\nu)(c+\Delta)]^m}{m!} \right),$$

Ευρετικοί αλγόριθμοι

Με βάση την προηγούμενη ανάλυση, ο προσδιορισμός των μεταβλητών απόφασης ώστε να εξασφαλιστούν συγκεκριμένα επίπεδα εξυπηρέτησης **(fill rates)** σε όλες τις τελικές αποθήκες, αντιστοιχεί στη λύση του ακόλουθου συστήματος των N+1 μη γραμμικών εξισώσεων με N+2 αγνώστους, Δ και $\{f_i\}$:

$$f(S_1+\Delta,S_1,f_i)=\beta_i^* \ , \ \ i=1,2,\ldots,N \tag{3.75}$$

με $\sum_{j=1}^{N} f_j =1$, όπου $f(S_1+\Delta,S_1,f_i)$ είναι το δεξί μέλος της (3.74) και β^* είναι το προκαθορισμένο **fill rate** με $0\le\beta_i^*\le 1$. Είναι προφανές ότι το παραπάνω σύστημα έχει άπειρο αριθμό λύσεων. Ωστόσο, δοθέντος μιας τιμής του Δ, το σύστημα έχει μοναδική λύση. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τρεις αλγόριθμοι οι οποίοι παρέχουν ακριβείς και γρήγορες λύσεις σ' αυτό το πρόβλημα. Αυτές αποτελούν προσαρμογές των προηγούμενων αλγόριθμων στο παρόν σύστημα, που αναπτύχθηκαν για διβάθμια συστήματα χωρίς αποθέματα στην κεντρική αποθήκη. Όλοι οι ευρετικοί αλγόριθμοι χρησιμοποιούν την λύση για το πρόβλημα, όταν Δ τείνει στο άπειρο. Σ' αυτή την περίπτωση, το πρόβλημα αναλύεται στη λύση N ανεξάρτητων εξισώσεων (με έναν άγνωστο, το S_1^i) της μορφής :

$$\beta_i^* = 1-\frac{E[(d^i_{t,t+l_i+1}-S_1^i)^+]-E[(d^i_{t,t+l_i}-S_1^i)^+]}{\mu_i} \tag{3.76}$$

Ευρετικός Αλγόριθμος 1

Ο ευρετικός αλγόριθμος που θα παρουσιαστεί είναι μια προσαρμογή του ευρετικού αλγόριθμου που εισήγαγε ο De Kok [13] και αργότερα βελτιώθηκε από τους Verrijdt και De Kok [51], για ένα διβάθμιο αποκλίνον σύστημα, χωρίς αποθέματα στην κεντρική αποθήκη.

<u>Βήμα 1</u> : Επέλεξε το S_1 ως $S_1=\sum_{i=1}^{N} S_1^i$, όπου όλα τα S_1^i υπολογίζονται χρησιμοποιώντας την (3.76).

<u>Βήμα 2</u> : Υπολόγισε τα f_i για αυτό το S_1 από την $f(S_1+\Delta,S_1,f_i)=\beta_i^*$.

<u>Βήμα 3</u> : Αν $\sum_{j=1}^{N} f_j =1$, τότε Τέλος, αλλιώς

Αν $\sum_{j=1}^{N} f_j >1$, τότε αύξησε το S_1,

Αν $\sum_{j=1}^{N} f_j <1$, τότε μείωσε το S_1, .

<u>Τέλος</u> : Χρησιμοποίησε το S_1 ως προσέγγιση για την λύση της (3.75).

Ευρετικός Αλγόριθμος 2

Αυτός ο ευρετικός αλγόριθμος προτάθηκε απ' τον De Kok [13] και βασίζεται στον καθορισμό των $\{f_i\}$, που προέκυψε θεωρώντας ότι το σύστημα αποτελείται από N ανεξάρτητα συστήματα ενός επιπέδου. Αυτές οι τιμές των $\{f_i\}$ χρησιμοποιούνται σε όλους τους υπολογισμούς. Η αιτιολογία για την χρήση αυτών των τιμών οφείλεται στο γεγονός ότι αυτές είναι ακριβείς για $\Delta=\infty$. Ωστόσο, αποτελέσματα προσομοίωσης έχουν αποδείξει ότι αυτά τα $\{f_i\}$ δεν είναι ευαίσθητα ως προς Δ και L.

<u>Βήμα 1</u>: Υπολόγισε τα $\{f_i\}$, χρησιμοποιώντας την (3.76) και μετά την (3.70).

<u>Βήμα 2</u>: Υπολόγισε τα S_1^i από την $f(S_1+\Delta, S_1, f_i)=\beta_i^*$.

<u>Βήμα 3</u>: Υπολόγισε το S_1 από $S_1=\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{j=1}^{N} S_1^j$.

Ο επόμενος ευρετικός αλγόριθμος είναι πανομοιότυπος με τον ευρετικό αλγόριθμο 2, εκτός απ' το ότι υποτίθεται ότι οι μεταβλητές στον αριθμητή της (3.74) ακολουθούν ΜΕ ή Gamma κατανομή. Σημειώνεται ότι το $f_i(D_{t-L,t}-\Delta)^+$ στην (3.74) έχει θετική πιθανότητα γύρω από το μηδέν και έτσι ίσως δεν ακολουθεί την ΜΕ κατανομή. Ωστόσο, αν προσθέσουμε τη μεταβλητή με $d^i_{t,t+l_i+1}$ ή $d^i_{t,t+l_i}$ (για να προκύψει ο αριθμητής της (3.74)), η μεταβλητή που προκύπτει παίρνει τιμές θετικές έτσι υποθέτουμε ότι $f_i(D_{t-L,t}-\Delta)^+ + d^i_{t,t+l_i+1}$ και $f_i(D_{t-L,t}-\Delta)^+ + d^i_{t,t+l_i}$ ακολουθούν ΜΕ κατανομή. Η υλοποίηση του αλγορίθμου απαιτεί τον υπολογισμό των ροπών 2^{ης} τάξης των $f_i(D_{t-L,t}-\Delta)^+ + d^i_{t,t+l_i+1}$ και $f_i(D_{t-L,t}-\Delta)^+ + d^i_{t,t+l_i}$. Έτσι πριν την παρουσίαση του θα γίνει ο υπολογισμός ροπών 2^{ης} τάξης των $f_i(D_{t-L,t}-\Delta)^+ + d^i_{t,t+l_i+1}$ και $f_i(D_{t-L,t}-\Delta)^+ + d^i_{t,t+l_i}$ με χρήση της μεθοδολογίας των Verrijdt και De Kok [51]. Έστω, επομένως ότι X και X+Y ακολουθούν Gamma κατανομή. Ορίζουμε τη συνάρτηση β(x):

$$\beta(x)=1-\frac{E[(X+Y-x)^+]-E[(X-x)^+]}{E[Y]} \tag{3.77}$$

Σημειώνεται ότι η β(x) είναι αυστηρά αύξουσα στο x και β(0)=0 και $\beta(\infty)=1$. Επομένως, η β(x) μπορεί να θεωρηθεί ως η αθροιστική συνάρτηση κάποιας τυχαίας μεταβλητής, X_β άρα: $\beta(x)=P\{X_\beta \le x\}$. Αν υποθέσουμε ότι η X_β ακολουθεί κατανομή Gamma(α, μ) τότε λύνοντας την εξίσωση $\beta(x)=\beta^*$ προκύπτει $x=\Gamma^{-1}_{\alpha,\mu}(\beta^*)$. Οι παράμετροι α κα μ της Gamma κατανομής εκτιμώνται από τις ροπές 2ης τάξης της X_β .

$$\alpha = \frac{\mathrm{E}^2[X_\beta]}{\sigma^2(X_\beta)} \ , \quad \mu = \frac{\alpha}{\mathrm{E}[X_\beta]}$$

$$\mathrm{E}[X_\beta] = \frac{\mathrm{E}[(\mathrm{X}+\mathrm{Y})^2] - \mathrm{E}[\mathrm{X}^2]}{2\mathrm{E}[\mathrm{Y}]} \ , \quad \mathrm{E}[X_\beta^2] = \frac{\mathrm{E}[(\mathrm{X}+\mathrm{Y})^3] - \mathrm{E}[\mathrm{X}^3]}{3\mathrm{E}[\mathrm{Y}]}$$

Δοθέντος ότι οι X και Y ακολουθούν Gamma κατανομή, εύκολα υπολογίζονται τα $\mathrm{E}[X_\beta]$ και $\mathrm{E}[X_\beta^2]$.

Έτσι προκύπτει ο ευρετικός αλγόριθμος 3.

Ευρετικός Αλγόριθμος 3

<u>Βήμα 1</u>: Υπολόγισε τα f_i από την (3.76) και την (3.70) .

<u>Βήμα 2</u>: Υπολόγισε τα S_1^i από την $f(S_1 + \Delta, S_1, f_i) = \beta_i^*$, χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία των Verrijdt και De Kok [51].

<u>Βήμα 3</u>: Υπολόγισε το S_1 από $S_1 = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{j=1}^{N} S_1^j$.

Οι παραπάνω ευρετικοί αλγόριθμοι έχουν ελεγχθεί με τη βοήθεια εκτεταμένης προσομοίωσης (Seidel [39] De Kok et al. [15]) και τα αποτελέσματα είναι γενικά ικανοποιητικά.

Βέλτιστος επιμερισμός των αποθεμάτων (Optimal stock allocation)

Σ' αυτή την παράγραφο γίνεται ο καθορισμός των μεταβλητών απόφασης κάτω από περιορισμούς ως προς τα επίπεδα εξυπηρέτησης και έπειτα προτείνεται μια εμπειρική τεχνική για τον επιμερισμό των αποθεμάτων μέσα στο σύστημα. Αρχικά θα υπολογιστεί το κόστος λειτουργίας του συστήματος. Επειδή εφαρμόζονται *order-up-to S* πολιτικές και το *κόστος έλλειψης* αντικαθίσταται από τους περιορισμούς στο επίπεδο εξυπηρέτησης, στο κόστος περιλαμβάνεται μόνο το *κόστος διατήρησης*, το οποίο μπορεί να διαφέρει σε κάθε επίπεδο. Έτσι :

h_0 : το *κόστος διατήρησης* στην κεντρική αποθήκη ανά μονάδα διαθέσιμου αποθέματος, στην αρχή της περιόδου επιθεώρησης,

h_i : το *κόστος διατήρησης* στην τελική αποθήκη i ανά μονάδα διαθέσιμου αποθέματος στην αρχή της περιόδου επιθεώρησης, Σημειώνεται ότι το διαθέσιμο απόθεμα στην κεντρική αποθήκη παραμένει σταθερό κατά την διάρκεια μιας περιόδου επιθεώρησης, ενώ το διαθέσιμο απόθεμα στις τελικές αποθήκες μειώνεται κατά την διάρκεια μιας περιόδου επιθεώρησης. Όμως, επειδή υπάρχουν πληροφορίες μόνο για την ζήτηση ανά περίοδο επιθεώρησης, το *κόστος διατήρησης* για κάθε διαθέσιμο προϊόν υπολογίζεται στην αρχή της περιόδου επιθεώρησης. Έστω X_t και X_t^i είναι το διαθέσιμο απόθεμα στην κεντρική αποθήκη αμέσως μετά από έναν επιμερισμό και στην τελική αποθήκη i αμέσως μετά από μια λήψη παραγγελίας, αντίστοιχα. Παραλείποντας το δείκτη *t*, το πρόβλημα βελτιστοποίησης που προκύπτει είναι:

$$\underset{\Delta}{Min}\left\{h_0 E[X] + \sum_{j=1}^{N} h_j E[X^j]\right\} \tag{3.78}$$

υπό τους περιορισμούς : $f(S_1+\Delta, S_1, f_i) = \beta_i^*$, $\forall i$

Απαιτούνται εκφράσεις για τα $E[X] = E[X_t]$ και $E[X^j] = E[X_t^j]$, οι οποίες μπορούν να προκύψουν απευθείας από την δυναμική του συστήματος, οπότε από τις (3.71) και (3.73) συνεπάγεται ότι:

$$E[X_{t+l_i}^i] = E[(I_1(t) - D_{t,t+l_i})^+] = E[(c_i - f_i(D_{t-L,t} - \Delta)^+ - D_{t,t+l_i}^i)^+]$$

$$E[X_t] = (\Delta - D_{t-L,t})^+$$

Επειδή ευρετικοί αλγόριθμοι που παρουσιαστήκαν παραπάνω μπορούν να εφαρμοστούν για κάθε Δ, ώστε να ικανοποιούνται οι περιορισμοί των επιπέδων εξυπηρέτησης, για τη λύση της (3.78), απαιτείται μόνο η εύρεση του Δ^*, ώστε να προκύψει το ελάχιστο συνολικό κόστος. Σημειώνεται ότι η αντικειμενική συνάρτηση δεν είναι κυρτή. Ωστόσο, επειδή οι παραπάνω ευρετικοί αλγόριθμοι είναι αρκετά γρήγοροι, μπορεί να εφαρμοστεί μια οποιαδήποτε κάθε διαδικασία ελαχιστοποίησης για συναρτήσεις μιας μεταβλητής για τον προσδιορισμό όλων των τοπικών ελαχίστων.

Ένα άλλο ενδιαφέρον πρόβλημα, που σχετίζεται στενά με το παραπάνω, είναι ο επιμερισμός των αποθεμάτων ασφαλείας, που προήλθαν από την *βέλτιστη λύση*. Χρησιμοποιώντας τον τυπικό ορισμό των αποθεμάτων ασφαλείας σε πολυβάθμια συστήματα αποθεμάτων, για κάθε τιμή των S_0, S_1 και $\{f_i\}$, μπορούν να καθοριστούν τα αντίστοιχα αποθέματα ασφάλειας στην κεντρική αποθήκη και στις τελικές αποθήκες, λύνοντας τις εξισώσεις (Lagodimos [31]) :

$$SS^i = S_1^i - (l_i + 1)\mu_i$$

$$SS^0 + \sum_{j=1}^{N} SS^j = S_0 - \sum_{j=1}^{N}(L + l_j + 1)\mu_j = SS$$

3.2.2 Διαχείριση ενός αποκλίνοντος διβάθμιου συστήματος με μεταφορτώσεις

Στη συνέχεια οι Diks και De Kok [16] επέκτειναν το μοντέλο των De Kok et al. [15] επιτρέποντας την μεταφορά αποθέματος μεταξύ των τελικών αποθηκών, σε κάθε περίοδο επιθεώρησης. Τα χρονικά διαστήματα που απαιτούνται για μεταφορά θεωρούνται αμελητέα σε σχέση με τους χρόνους απόκρισης στις τελικές αποθήκες (άρα θα θεωρούνται μηδέν).
Στη συνέχεια δίνεται ο συμβολισμός που θα χρησιμοποιηθεί για την ανάπτυξη του μοντέλου.

Συμβολισμός

$D^{n}_{t,t+k}$: η ζήτηση της αποθήκης n στο [t,t+k),

$D_{t,t+k}$: η συνολική ζήτηση του συστήματος στο [t,t+k),

μ_n : η μέση τιμή της ζήτησης στην αποθήκη n κατά την διάρκεια μιας περιόδου,

σ_n : η τυπική απόκλιση της ζήτησης στην αποθήκη n κατά την διάρκεια μιας περιόδου,

S_n : το *order-up-to* επίπεδο της αποθήκης n,

X_t : διαθέσιμο απόθεμα στην κεντρική αποθήκη την στιγμή t, λίγο μετά την άφιξη της παραγγελίας,

I^n_t : η *θέση του αποθέματος* της αποθήκης n, την στιγμή t, λίγο πριν τον επιμερισμό,

$\hat{I}^n_t$: η *θέση του αποθέματος* της αποθήκης n, την στιγμή t, αμέσως μετά τον επιμερισμό,

J^n_t : το *επίπεδο αποθέματος* της αποθήκης n την στιγμή t, λίγο πριν την εξισορρόπηση,

$\hat{J}^n_t$: το *επίπεδο αποθέματος* της αποθήκης n την στιγμή t, αμέσως μετά την εξισορρόπηση,

U^d_t : το ***προβαλλόμενο επίπεδο αποθέματος*** ολόκληρου του συστήματος στην κεντρική αποθήκη τη στιγμή t+l+1,

U^r_t : το ***προβαλλόμενο επίπεδο αποθέματος*** ολόκληρου του συστήματος στις αποθήκες τη στιγμή t+1,

f^d_n : το ***ποσοστό επιμερισμού*** της αποθήκης n απ' τον επιμερισμό στην κεντρική αποθήκη,

f^r_n : το ***ποσοστό επιμερισμού*** της αποθήκης n απ' την εξισορρόπηση στις αποθήκες,

T_n : το αναμενόμενο απόθεμα που μεταφέρεται από την αποθήκη n κάθε περίοδο,

T : το συνολικό αναμενόμενο απόθεμα που μεταφορτώνεται ανάμεσα στις αποθήκες κάθε περίοδο,

$$d_0 = \sum_{n=1}^{N} \mu_n , \quad \sigma = S_0 - \Delta - d_0 .$$

Περιγραφή Μοντέλου

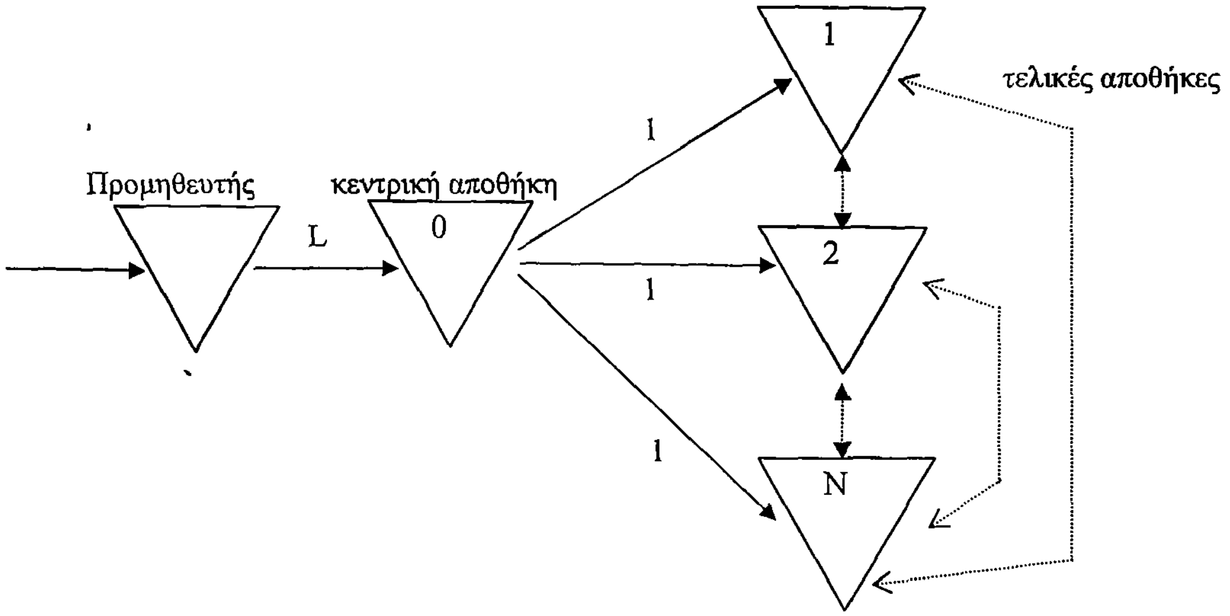
Έστω ένα διβάθμιο αποκλίνον σύστημα αποθεμάτων, που περιλαμβάνει μια κεντρική αποθήκη και N τελικές αποθήκες. Κάθε τελική αποθήκη αντιμετωπίζει εξωτερική ζήτηση, η οποία είναι ανεξάρτητη από την ζήτηση στις άλλες αποθήκες. Η υπερβάλλουσα ζήτηση ικανοποιείται με καθυστέρηση όταν φτάσει η επόμενη παραγγελία. Επομένως, η αποθήκη χρησιμοποιεί την ακόλουθη πολιτική παραγγελίας, έτσι ώστε να διατηρήσει τις εκκρεμείς παραγγελίες, μεταξύ κάποιων ορίων: στο τέλος κάθε περιόδου επιθεώρησης της αποθήκης n (n=1,2,...,N) πραγματοποιείται μια παραγγελία στην κεντρική αποθήκη για να επαναφέρει την *θέση του αποθέματος* της στο επίπεδο S_n. Αυτή η παραγγελία φτάνει μετά από θετικό, προσδιοριστικό *χρόνο απόκρισης*, *l* περιόδων. Σημειώνεται ότι όλες οι τελικές αποθήκες έχουν ίσους *χρόνους απόκρισης*. Μετά την άφιξη της παραγγελίας πραγματοποιείται μια πλήρης εξισορρόπηση (complete rebalancing) του *επιπέδου αποθέματος* όλων των αποθηκών με μεταφόρτωση (χρόνος μεταφόρτωσης μηδέν). Η πολιτική εξισορρόπησης (rebalancing policy), που χρησιμοποιείται αντιστοιχεί στην **CAS** πολιτική επιμερισμού των De Kok et al. [15] Αμέσως μετά την εξισορρόπηση όλες οι τελικές αποθήκες τοποθετούν μια παραγγελία στην κεντρική αποθήκη ώστε να αυξήσουν τις *θέσεις των αποθεμάτων* τους μέχρι τα ***order-up-to*** επίπεδα τους.

Εκτός των τελικών αποθηκών και στην κεντρική αποθήκη το επίπεδο του αποθέματος επιθεωρείται περιοδικά. Η διάρκεια της περιόδου επιθεώρησης στην κεντρική αποθήκη και στις τελικές αποθήκες είναι ίδια και οι στιγμές επιθεώρησης ταυτίζονται. Στο τέλος κάθε περιόδου επιθεώρησης η κεντρική αποθήκη πραγματοποιεί μια παραγγελία σε έναν εξωτερικό προμηθευτή, ώστε να φέρει την *θέση του αποθέματος βαθμίδας* της στο ***order-up-to*** επίπεδο, S_0. Αυτή η παραγγελία φτάνει μετά από *χρόνο απόκρισης*, L περιόδων. Αφού ληφθεί η παραγγελία, διακρίνονται δύο περιπτώσεις:

1. Το διαθέσιμο απόθεμα στην κεντρική αποθήκη είναι αρκετά μεγάλο ώστε να αυξήσει τις *θέσεις αποθεμάτων* των N αποθηκών και το υπόλοιπο διατηρείται στην κεντρική αποθήκη.
2. Το διαθέσιμο απόθεμα στην κεντρική αποθήκη δεν είναι αρκετό για να ικανοποιήσει τη ζήτηση όλων των αποθηκών. Όταν προκύψει μια έλλειψη, υποτίθεται ότι οι εκκρεμείς παραγγελίες, χάνονται. Χρησιμοποιείται η **CAS** πολιτική για να επιμερίσει το διαθέσιμο απόθεμα στις αποθήκες. Ο επιμερισμός των αποθεμάτων στην κεντρική αποθήκη συμβαίνει μετά την εξισορρόπηση των αποθεμάτων στις τελικές αποθήκες.

Όπως προαναφέρθηκε, η κεντρική αποθήκη πραγματοποιεί μια παραγγελία σε έναν εξωτερικό προμηθευτή στο τέλος μιας περιόδου επιθεώρησης, ο οποίος έχει άπειρη χωρητικότητα. Γι' αυτό το λόγο η *θέση του αποθέματος βαθμίδας* μπορεί να αυξάνεται στο S_0 και η κεντρική αποθήκη ποτέ δε θα έχει έλλειψη.

Τα *order-up-to* επίπεδα, S_0 και S_n, καθορίζονται με τέτοιο τρόπο ώστε η κακή εξυπηρέτηση (ο αριθμός των εκκρεμών παραγγελιών ανά περίοδο επιθεώρησης) κάθε πελάτη να είναι αποδεκτή. Αυτό επιτυγχάνεται, εξασφαλίζοντας ότι η αποθήκη n λαμβάνει ένα επιθυμητό επίπεδο εξυπηρέτησης, β_n^*.



Σχήμα 3.1 . Σύστημα διανομής αποθεμάτων

Πολιτική επιμερισμού των αποθεμάτων στην κεντρική αποθήκη

Στο τέλος μιας αυθαίρετης περιόδου επιθεώρησης, η κεντρική αποθήκη αυξάνει την *θέση του αποθέματος βαθμίδας* της, στο S_0. Επειδή ο *χρόνος απόκρισης* της κεντρικής αποθήκης ισούται με L περιόδους, αυτή η παραγγελία φτάνει στο τέλος της περιόδου L. Έτσι το διαθέσιμο απόθεμα στην κεντρική αποθήκη μετά την άφιξη της παραγγελίας είναι :

$$X_L = S_0 - D_{0,L} - \sum_{n=1}^{N} I_L^n \tag{3.79}$$

Αν μετά την άφιξη της παραγγελίας όλες οι τελικές αποθήκες θέλουν να αυξήσουν τις *θέσεις των αποθεμάτων* τους μέχρι το *order-up-to* επίπεδο τους πρέπει να ισχύει:

$$X_L \geq \sum_{n=1}^{N} (S_n - I_L^n) \tag{3.80}$$

Χρησιμοποιώντας τις (3.79) και (3.80) προκύπτει:

$$\Delta \geq D_{0,L} \tag{3.81}$$

Όταν Δ=0, η κεντρική αποθήκη εξυπηρετεί ως "συντονιστής". Αυτό σημαίνει ότι όταν το απόθεμα φτάνει στην κεντρική αποθήκη, αμέσως επιμερίζεται στις τελικές αποθήκες. Ενώ όταν Δ=∞, το υπό μελέτη σύστημα αποθεμάτων αναλύεται σε N συστήματα ενός επιπέδου, που δουλεύουν παράλληλα.

Για να οριστεί κατάλληλα η πολιτική επιμερισμού, εισάγεται το U_t^d, το οποίο αναφέρεται ως το *προβαλλόμενο επίπεδο αποθέματος* ολόκληρου του συστήματος στο τέλος της περιόδου $t+l+1$, λίγο πριν μια παραγγελία φτάσει στις τελικές αποθήκες. Επίσης, το U_t^d αναπαριστά την καλύτερη εκτίμηση για το άθροισμα των *προβαλλόμενων επιπέδων αποθέματος* όλων των αποθηκών στο τέλος της περιόδου $t+l+1$, δοθέντος της *θέσης του αποθέματος* των τελικών αποθηκών στο τέλος της περιόδου t. Αν η συνθήκη (3.81) ισχύει, όλες οι αποθήκες μπορούν να αυξήσουν την *θέση των αποθεμάτων* τους μέχρι τα *order up to* επίπεδα τους, την περίοδο t=L. Επομένως, το *προβαλλόμενο επίπεδο αποθέματος* ολόκληρου του συστήματος στο t=L, ισούται με το *προγραμματισμένο αθροιστικό απόθεμα ασφαλείας* (*planned cumulative safety stock*) των αποθηκών,

$$U_L^d = \sum_{n=1}^{N}\left(S_n - (l+1)\mu_n\right) \tag{3.82}$$

Αλλά επειδή η κεντρική αποθήκη έχει πεπερασμένη χωρητικότητα, η συνθήκη (3.81) δεν ισχύει πάντα. Σ' αυτή την περίπτωση, η κεντρική αποθήκη δεν μπορεί να ικανοποιήσει την ζήτηση των αποθηκών και συνεπώς το *προβαλλόμενο επίπεδο αποθέματος* ολόκληρου του συστήματος δεν συμπίπτει με το *προγραμματισμένο αθροιστικό απόθεμα ασφαλείας*. Επειδή η έλλειψη στην κεντρική αποθήκη ισούται με $D_{0,L} - \Delta$, ισχύει η ακόλουθη ισότητα :

$$U_L^d = \sum_{n=1}^{N}(S_n - (l+1)\mu_n) - (D_{0,L} - \Delta) \tag{3.83}$$

Συνδυάζοντας τις (3.82) και (3.83) σ' έναν γενικό τύπο προκύπτει :

$$U_L^d = S_0 - \Delta - (D_{0,L} - \Delta)^+ - (l+1)d_0 \tag{3.84}$$

Όπου $x^+ = \max\{0, x\}$. Σημειώνεται ότι εξαιτίας της πεπερασμένης χωρητικότητας της κεντρικής αποθήκης, το *προβαλλόμενο επίπεδο αποθέματος* ολόκληρου του συστήματος εξαρτάται απ' τον χρόνο.

Αυτή η πολιτική μειώνει δραστικά τον αριθμό των μεταβλητών απόφασης, επειδή επιμερίζει το απόθεμα της κεντρικής αποθήκης, σύμφωνα με την **AS** πολιτική, αλλά επιλέγει τα *ποσοστά επιμερισμού* f_n^d ώστε :

$$f_n^d = \frac{\hat{I}_L^n - (l+1)\mu_n}{\sum_{i=1}^{N}(\hat{I}_L^i - (l+1)\mu_i)} \tag{3.85}$$

Είναι φανερό ότι πρέπει να ισχύει, $\sum_{n=1}^{N} f_n^d = 1$. Έπειτα, παράγεται μια έκφραση για την *θέση του* *αποθέματος* της αποθήκης n, μετά τον επιμερισμό, $\hat{I}_L^n$. Όπως προαναφέρθηκε, αν ισχύει η συνθήκη (3.81), όλες οι αποθήκες μπορούν να αυξήσουν τις *θέσεις των αποθεμάτων* τους μέχρι τα *order-up-to* επίπεδά τους. Αλλιώς, το διαθέσιμο απόθεμα της κεντρικής αποθήκης θα επιμεριστεί στις αποθήκες.

Επομένως,
$$\sum_{n=1}^{N} \hat{I}_L^n = \begin{cases} S_0 - D_0^L, & \Delta < D_{0,L} \\ \sum_{n=1}^{N} S_n, & \Delta \geq D_{0,L} \end{cases} \tag{3.86}$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.84)-(3.86), προκύπτει:

$$\hat{I}_L^n = (l+1)\mu_n + f_n^d U_L^d \tag{3.87}$$

Η έκφραση σημαίνει ότι η *θέση του αποθέματος* της αποθήκης n ισούται με την αναμενόμενη ζήτηση στην αποθήκη n, κατά την διάρκεια του $l+1$ αυξημένη κατά ένα ποσοστό του *προβαλλόμενου επιπέδου αποθέματος* ολόκληρου του συστήματος.

Αν η κεντρική αποθήκη χρησιμοποιεί την **CAS** πολιτική, το απόθεμα της δεν επιμερίζεται με συνέπεια στις τελικές αποθήκες. Για να διευκρινιστεί αυτή η ασυνέπεια, ας θεωρήσουμε μια αποθήκη με μεγάλο *ποσοστό επιμερισμού*. Όταν το U_L^d είναι θετικό, αυτή η αποθήκη "επωφελείται" επειδή λαμβάνει μεγάλο μέρος του *προβαλλόμενου επιπέδου αποθέματος* ολόκληρου του συστήματος. Ωστόσο, όταν το U_L^d είναι αρνητικό, αυτή η αποθήκη οδηγείται στη λήψη μεγάλου μέρους του αρνητικού U_L^d. Για να αντιμετωπιστεί αυτό το πρόβλημα, εισάγεται ένα *ποσοστό επιμερισμού*, q_n^d, για το αρνητικό U_L^d. Από τα παραπάνω είναι σαφές ότι πρέπει να ισχύει η ακόλουθη συνθήκη για να προκύψει μια συνεπής πολιτική επιμερισμού.

Συνθήκη 3.1

Αν για κάθε $n \in \{1, ..., N\}$ ορίζονται q_n^d ως συνάρτηση των f_n^d, τότε αυτή η συνάρτηση πρέπει να είναι μονότονη φθίνουσα στα f_n^d.

Επιπλέον, είναι σαφές ότι για το q_n^d, πρέπει να ισχύει $\sum_{n=1}^{N} q_n^d = 1$. Από την Συνθήκη 3.1, αμέσως έπεται ότι $\hat{I}_L^n$ πρέπει να προσαρμοστεί για να εξασφαλίσει ότι ένα αυξανόμενο f_n^d συνεπάγεται ένα αυξανόμενο επίπεδο εξυπηρέτησης του πελάτη,

$$\hat{I}_L^n = (l+1)\mu_n + f_n^d (U_L^d)^+ - q_n^d (-U_L^d)^+ \tag{3.88}$$

Πολιτική Εξισορρόπησης

Σε προηγούμενη παράγραφο παρουσιάστηκε, πώς τα αποθέματα που διανέμονται από τον προμηθευτή στην κεντρική αποθήκη, επιμερίζονται στις τελικές αποθήκες. Μετά τον επιμερισμό στο χρόνο t=L, τα αποθέματα φτάνουν στις τελικές αποθήκες μετά από l περιόδους. Κατά την διάρκεια αυτών των περιόδων, η αποθήκη n αντιμετωπίζει την ζήτηση του πελάτη, $D^n_{L,L+l}$ και το *συνολικό επίπεδο αποθέματος* εξισορροπείται $l-1$ φορές. Επομένως, το *επίπεδο αποθέματος* της αποθήκης n, μετά την άφιξη της παραγγελίας τη στιγμή $t = L+l$ προκύπτει ως :

$$J^n_{L+l} = \hat{I}^n_L - D^n_{L,L+l} + \sum_{t=L+1}^{L+l-1} (\hat{J}^n_t - J^n_t) \tag{3.89}$$

Σημειώνεται ότι όταν $l \geq 2$ το *επίπεδο αποθέματος* J^n_{L+l} εξαρτάται απ' όλη την ιστορία του συστήματος. Ωστόσο, όταν ο *χρόνος απόκρισης* ισούται με την περίοδο επιθεώρησης, $l=1$, το J^n_{L+l} εξαρτάται μόνο από τα $\hat{I}^n_L$ και $D^n_{L,L+l}$. Κάθε στιγμή μετά την άφιξη των παραγγελιών στις αποθήκες πραγματοποιείται μια πλήρης εξισορρόπηση του *συνολικού επιπέδου αποθέματος* από στιγμιαίες μεταφορές. Αυτό συμβαίνει, χρησιμοποιώντας μια CAS πολιτική επιμερισμού. Είναι γνωστό απ' την (3.84) ότι η *θέση του αποθέματος* όλων των αποθηκών μαζί, μετά τον επιμερισμό των αποθεμάτων στην κεντρική αποθήκη, ισούται με:

$$S_0 - \Delta - (D_{0,L} - \Delta)^+$$

Μετά από l περιόδους οι παραγγελίες φτάνουν στις αποθήκες. Κατά την διάρκεια αυτής της περιόδου η συνολική ζήτηση στις αποθήκες, ισούται με $D_{L,L+l}$. Έτσι το *επίπεδο αποθέματος* σ' όλες τις αποθήκες, μετά την άφιξη των παραγγελιών, ισούται με :

$$S_0 - \Delta - (D_{0,L} - \Delta)^+ - D_{L,L+l}$$

Έστω ότι με U^r_t δηλώνεται το *προβαλλόμενο επίπεδο αποθέματος* ολόκληρου του συστήματος, την στιγμή t+1 και αναπαριστά την καλύτερη εκτίμηση για το άθροισμα των *προβαλλόμενων επιπέδων αποθέματος* όλων των αποθηκών στο τέλος της περιόδου t+1, δοθέντος της *θέσης των αποθεμάτων* των αποθηκών στο τέλος της περιόδου t.

$$U^r_{L+l} = S_0 - \Delta - (D_{0,L} - \Delta)^+ - D_{L,L+l} - d_0 \tag{3.90}$$

Έτσι τώρα τα αποθέματα επιμερίζονται αμέσως με τέτοιο τρόπο που μετά την εξισορρόπηση του *επιπέδου αποθέματος* της αποθήκης n, προκύπτει :

$$\hat{J}^n_{L+l} = \mu_n + f^r_n (U^r_{L+l})^+ - q^r_n (-U^r_{L+l})^+ \tag{3.91}$$

Αυτή η έκφραση είναι ίδια με αυτή στη (3.88). Το *επίπεδο αποθέματος* μετά την εξισορρόπηση ισούται με την *αναμενόμενη ζήτηση* της αποθήκης n που πρέπει να ικανοποιηθεί πριν φτάσει μια νέα παραγγελία + το ποσοστό του U^r_{L+l}. Συνεχίζει να υπάρχει διάκριση ανάμεσα σε θετικό ή αρνητικό U^r_{L+l}. Αν το U^r_{L+l} είναι θετικό, η αποθήκη n λαμβάνει ποσοστό f^r_n, αλλιώς λαμβάνει ποσοστό q^r_n. Χρησιμοποιώντας ένα ανάλογο σκεπτικό, όπως προηγουμένως, πρέπει να ισχύει η παρακάτω συνθήκη.

Συνθήκη 3.2

Αν για κάθε $n \in \{1,....,N\}$ ορίζονται q^r_n ως συνάρτηση των f^r_n, τότε αυτή η συνάρτηση πρέπει να είναι μονότονη φθίνουσα στα f^r_n.

Επιλέγοντας τα f^r_n και q^r_n, είναι δυνατή η ξεχωριστή αντιμετώπιση των διαφόρων αποθηκών. Ο λόγος της επιλεκτικής αντιμετώπισης της αποθήκης n, με τη επιλογή σχετικά μεγάλου f^d_n, οφείλεται στα χαρακτηριστικά της αποθήκης n, (πχ. μπορεί να είναι ένας μεγάλος πελάτης που απαιτεί υψηλό επίπεδο εξυπηρέτησης ή η ζήτηση της είναι πολύ απρόβλεπτη). Επομένως ένα από τα σημαντικά θέματα που προκύπτει είναι το πώς εκφράζονται αυτές οι διαφορές ανάμεσα στις αποθήκες σε σχέση με τα *ποσοστά επιμερισμού* και θα αντιμετωπιστεί στην επόμενη ενότητα.

Εύκολα φαίνεται ότι η *αναμενόμενη έλλειψη* της αποθήκης n, στο χρονικό διάστημα $[L+l, L+l+1)$ ισούται με:

$$E(D^n_{L+l,L+l+1})^+ - \hat{J}^n_{L+l} - E(-\hat{J}^n_{L+l})^+ \tag{3.92}$$

Η έκφραση (3.92) αναπαριστά την *αναμενόμενη έλλειψη* στην αποθήκη n, ακριβώς πριν μια νέα παραγγελία φτάσει στο t=L+l+1 μείον την *αναμενόμενη έλλειψη* στην αποθήκη n, αμέσως μετά την εξισορρόπηση τη στιγμή $t = L + l$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του επιπέδου εξυπηρέτησης για την αποθήκη n, β^*_n προκύπτει :

$$\beta^*_n = 1 - \frac{E(D^n_{L+l,L+l+1} - \hat{J}^n_{L+l})^+ - E(-\hat{J}^n_{L+l})^+}{\mu_n} \quad , \quad i=1,2,...,N \tag{3.93}$$

Καθορισμός των παραμέτρων ελέγχου

Σε αυτή την ενότητα περιγράφεται πώς μπορούν να υπολογιστούν οι παράμετροι ελέγχου της πολιτικής εξισορρόπησης και της πολιτικής επιμερισμού των αποθεμάτων στην κεντρική αποθήκη. Στην πραγματικότητα οι παράμετροι ελέγχου $S_0, \{f^d_n\}$ και $\{q^r_n\}$ καθορίζονται από τις εξισώσεις (3.93). Όμως οι εξισώσεις αυτές αποτελούνται από N εξισώσεις, ενώ υπάρχουν 2N+1 άγνωστοι,

$\{f_n^r\}$, $\{q_n^r\}$ και το *order-up-to* επίπεδο, S_0. Για να μειωθεί αυτός ο αριθμός των άγνωστων παραμέτρων, επιλέγονται τα $\{q_n^r\}$ με τον ακόλουθο τρόπο ώστε η Συνθήκη 3.2 να ισχύει:

$$q_n^r = \frac{1-f_n^r}{N-1} \tag{3.94}$$

Επίσης, επειδή ισχύει $\sum_{n=1}^{N} f_n^r = 1$, ο αριθμός των εξισώσεων ισούται με τον αριθμό των άγνωστων παραμέτρων. Επομένως, το f_n^r ορίζεται αναμφίβολα ως συνάρτηση των β_n^* και S_0.

Τελικά, οι παράμετροι ελέγχου $\{f_n^r\}$ και S_0 μπορούν να καθοριστούν χρησιμοποιώντας τον ευρετικό αλγόριθμο των De Kok et al. [15]. Από τον αλγόριθμο αυτό προκύπτουν καλές προσεγγίσεις για το S_0 και τα *ποσοστά επιμερισμού* $\{f_n^r\}$ και $\{q_n^r\}$, έτσι ώστε κάθε αποθήκη να λαμβάνει επίπεδο εξυπηρέτησης, β_n^*. Επισημαίνεται ότι από τις (3.91) και (3.93) το επίπεδο εξυπηρέτησης που επιτυγχάνεται από την αποθήκη n, είναι ανεξάρτητο του f_n^d. Αυτό μπορεί να γίνει κατανοητό θεωρώντας ένα σύστημα διανομής, όπου το απόθεμα επιμερίζεται ανεπιτυχώς στις τελικές αποθήκες, σε σχέση με τα επιθυμητά επίπεδα εξυπηρέτησης των αποθηκών. Τότε η πολιτική εξισορρόπησης αναδιανέμει μεγάλη ποσότητα αποθέματος κάθε περίοδο για να πετύχει τα επιθυμητά επίπεδα εξυπηρέτησης. Επομένως, το μειονέκτημα της "κακής" πολιτικής επιμερισμού των αποθεμάτων στην κεντρική αποθήκη, είναι η μεγάλη ποσότητα η οποία πρέπει να μεταφορτωθεί σε κάθε περίοδο. Επομένως, στη συνέχεια θα προσδιοριστούν τα $\{f_n^d\}$ και $\{q_n^d\}$, έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό αναμενόμενο απόθεμα που μεταφορτώνεται κάθε περίοδο, το οποίο δηλώνεται με T. Αυτό αντιστοιχεί στην ελαχιστοποίηση του *αναμενόμενου κόστους μεταφόρτωσης* κάθε περίοδο, όταν το *κόστος μεταφοράς* των αποθεμάτων από την μια αποθήκη στην άλλη, είναι ίσο. Το μέγεθος του T μπορεί επίσης να ερμηνευθεί ως οι συνολικές αναμενόμενες μεταφορτώσεις απ' όλες τις αποθήκες. Επομένως,

$$T = \sum_{n=1}^{N} T_n \tag{3.95}$$

όπου T_n ισούται με το αναμενόμενο απόθεμα που μεταφορτώθηκε από την αποθήκη n σε κάποια άλλη, κάθε περίοδο:

$$T_n = E(J_{L+l}^n - \hat{J}_{L+l}^n)^+ \tag{3.96}$$

Για να εκτιμηθεί το T_n, η ανάλυση περιορίζεται στην περίπτωση όπου $l=1$, διαφορετικά το T_n δεν είναι εύκολο να υπολογιστεί αφού το J^n_{L+l} εξαρτάται απ' ολόκληρη την ιστορία του συστήματος. Υπό αυτή την συνθήκη, κάθε αποθήκη έχει ακριβώς μία εκκρεμή παραγγελία στην κεντρική αποθήκη οποιαδήποτε στιγμή. Χρησιμοποιώντας, την (3.84) και τις (3.88)-(3.91), η (3.96) γράφεται :

$$\begin{aligned} T_n = E[\mu_n - D^n_{L,L+1} + f^d_n(\sigma-(D_{0,L}-\Delta)^+ - d_0)^+ - q^d_n((D_{0,L}-\Delta)^+ + d_0 - \sigma)^+ - \\ - f^r_n(\sigma-(D_{0,L}-\Delta)^+ - D_{L,L+1})^+ + q^r_n((D_{0,L}-\Delta)^+ + D_{L,L+1} - \sigma)^+]^+ \end{aligned}$$

Για να γίνουν οι εύκολοι οι υπολογισμοί γίνεται η εξής υπόθεση, $f^d_n = q^d_n$ και $f^r_n = q^r_n$. Υπό αυτή την υπόθεση, οι Συνθήκες 3.1 και 3.2 δεν ισχύουν και με χρήση προσομοίωσης φαίνεται ότι το μέγεθος του T διαφέρει σημαντικά όταν χρησιμοποιείται αυτή η υπόθεση. Παρόλα αυτά, το $\{q^d_n\}$, για το οποίο το T ελαχιστοποιείται, προσεγγίζεται καλά εφαρμόζοντας αυτή την υπόθεση. Επομένως, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $x^+ - (-x)^+ = x$, προκύπτει :

$$T_n = E(X_n + Y_n - Z_n - K_n)^+ \tag{3.97}$$

$$\text{με} \quad X_n = (f^r_n - f^d_n)(D_{0,L}-\Delta)^+ \ , \quad Y_n = f^r_n \sum_{i \neq n} D^i_{L,L+1} \ ,$$

$$Z_n = (1-f^r_n)D^n_{L,L+1} \ , \quad K_n = (f^r_n - f^d_n)\sigma + f^d_n d_0 - \mu_n \ .$$

Έτσι, όταν δίνεται το f^d_n, μπορεί να υπολογιστεί το ολικό αναμενόμενο απόθεμα που μεταφορτώνεται, T, σε κάθε περίοδο. Ένα επιπλέον ερώτημα είναι για ποια f^d_n ελαχιστοποιείται το T. Αυτό το πρόβλημα αντιστοιχεί στο επονομαζόμενο ως *resource allocation problem* (Ibaraki και Katoh,1988).

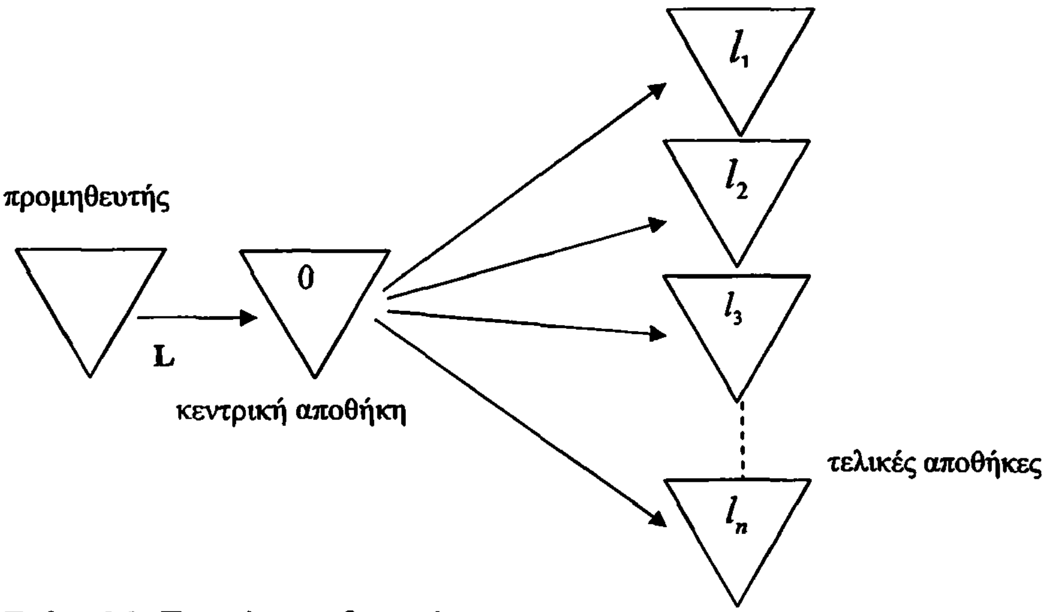
$$\min T(f^d_1,\dots,f^d_N)$$

Υπό τους περιορισμούς : $\sum_{n=1}^{N} f^d_n = 1$, $0 \le f^d_n \le 1$ για n=1,..,N.

Έχει αποδειχθεί Disks and De Kok [13] ότι η $T(f^d_1,\dots,f^d_N)$ είναι κυρτή συνάρτηση των $(f^d_1,\dots,f^d_N)$ και συνεπώς το παραπάνω πρόβλημα έχει μοναδική λύση.

3.3 Πολιτική της εξισορρόπησης του αποθέματος (Balanced Stock Πολιτική Επιμερισμού)

Για να περιγραφεί η Balanced Stock Πολιτική Επιμερισμού θεωρείται το μοντέλο του Σχήματος 3.2. Ο μηχανισμός ελέγχου έχει ως εξής: Κάθε T χρονικές μονάδες γίνεται μια παραγγελία από την κεντρική αποθήκη (με *χρόνο απόκρισης* L) που φέρνει τη *θέση του αποθέματος βαθμίδας* της κεντρικής αποθήκης στο επίπεδο, S_0 η παραγγελία αυτή επιμερίζεται σε N τελικές αποθήκες.



Σχήμα 3.2 . Ένα σύστημα διανομής

Η απόφαση επιμερισμού βασίζεται στα εξής :

- Μέγεθος της ποσότητας παραγγελίας, Q ,
- Στις *θέσεις των αποθεμάτων* των τελικών αποθηκών λίγο πριν τον επιμερισμό, I_i,
- Τα order-up-to επίπεδα, S_i^* (i=1,2,..,N), στις τελικές αποθήκες τα οποία αθροίζουν στο order-up-to επίπεδο της κεντρικής αποθήκης , $S_0 = \sum S_i^*$ και
- Ένα σύνολο από N *ποσοστά επιμερισμού*, f_i (1,2,..,N) τα οποία αθροίζουν στο 1.

Έτσι οι f_i, S_i^*, S_0 είναι οι παράμετροι ελέγχου.

Η πολιτική επιμερισμού έχει ως εξής: η αποθήκη i λαμβάνει μια ποσότητα, η οποία αυξάνει την *θέση του αποθέματος* της από το επίπεδο I_i πριν τον επιμερισμό στο επίπεδο, S_i , μετά τον επιμερισμό και ορίζεται:

$$S_i = S_i^* - f_i\left\{S_0 - \left(Q + \sum_{j=1}^{N} I_j\right)\right\} \tag{3.98}$$

Επομένως, η αποθήκη i λαμβάνει μια ποσότητα $S_i - I_i$, η οποία είναι μια τυχαία μεταβλητή, επειδή οι *θέσεις των αποθεμάτων* πριν και μετά τον επιμερισμό, I_i και S_i, είναι τυχαίες μεταβλητές. Η πολιτική επιμερισμού (3.98) ερμηνεύεται ως εξής: Υποτίθεται ότι δεν υπάρχει ζήτηση κατά την διάρκεια του *χρόνου απόκρισης*, L. Ο ορισμός του order-up-to επιπέδου της κεντρικής αποθήκης, S_0, δηλώνει ότι σ' αυτή την περίπτωση το άθροισμα των τοπικών *θέσεων των αποθεμάτων* μετά τον επιμερισμό θα πρέπει να ισούται με S_0. Τότε οι *θέσεις των αποθεμάτων* στις τελικές αποθήκες μετά τον επιμερισμό φτάνουν στο υψηλότερο δυνατό επίπεδό τους, S_i^*. Έτσι αν συνολική ζήτηση για όλες τις τελικές αποθήκες κατά την διάρκεια του *χρόνου απόκρισης*, L , V_L, είναι μηδέν ($V_L = 0$) προκύπτει ότι :

$$\sum_{i=1}^{N} S_i = \sum_{i=1}^{N} S_i^* = S_0$$

Γενικά, αυτές οι μέγιστες *θέσεις των αποθεμάτων* S_i^* προσεγγίζονται σπάνια, αφού υπάρχει ζήτηση κατά την διάρκεια του *χρόνου απόκρισης*, L, οπότε απαιτείται επιμερισμός των αποθεμάτων. Η συνολική ποσότητα που θα επιμεριστεί θα ισούται με την συνολική ζήτηση κατά την διάρκεια της προηγούμενης περιόδου L. Αν θεωρηθεί ότι όλες οι προηγούμενες παραγγελίες για ανεφοδιασμό έχουν παραδοθεί, αυτή η ποσότητα θα ισούται με:

$$V_L = S_0 - (Q + \sum_{j=1}^{N} I_j)$$

Οι ποσότητες που επιμερίζονται ισούνται με $S_i - I_i$. Σημειώνεται ότι η *θέση του αποθέματος* μετά τον επιμερισμό, S_i, δηλώνεται ισοδύναμα με :

$$S_i = S_i^* - f_i V_L \tag{3.99}$$

Είναι χρήσιμο να συγκριθεί αυτός ο μηχανισμός ελέγχου με την **CAS** πολιτική επιμερισμού όπως εισήχθηκε από τον De Kok [13]. Το προς επιμερισμό απόθεμα της κεντρικής αποθήκης σύμφωνα με την **CAS** επιμερίζεται ως εξής:

$$S_i = \nu_i + p_i^* \left\{ S_0 - V_L - \sum_{j=1}^{N} \nu_j \right\} \tag{3.100}$$

όπου $\nu_i = \mu_i(l_i + T)$. Αν τ_i είναι η τυπική απόκλιση της ζήτησης στην τελική αποθήκη i στο $l_i + T$, υπολογίζονται οι *παράγοντες ασφαλείας* k_i, έτσι ώστε τα επιθυμητά επίπεδα εξυπηρέτησης, β_i, να προκύψουν από τα order-up-to επίπεδα , $S_i^L = \nu_i + k_i \tau_i$. Τα *ποσοστά επιμερισμού*, p_i ισούνται με:

$$p_i = \frac{k_i \tau_i}{\sum_{j=1}^{N} k_j \tau_j} \tag{3.101}$$

Αυτή είναι η βασική **CAS** πολιτική επιμερισμού. Αν συγκριθούν οι σχέσεις (3.99) και (3.100), φαίνεται ότι η **CAS** πολιτική επιμερισμού είναι μια ειδική περίπτωση της **BS** πολιτικής, συγκεκριμένα, όταν επιλέγουν οι παράμετροι ελέγχου f_i και S_i^* ως:

$$f_i = p_i \,, \quad S_i^* = v_i + p_i \left\{ S_0 - \sum_{j=1}^{N} v_j \right\} \tag{3.102}$$

Επειδή η **CAS** πολιτική επιμερισμού έχει N+1 παραμέτρους $\{p_i, S_0\}$ και η πολιτική (3.99) έχει 2N παραμέτρους $\{f_i, S_i^*\}$ με $S_0 = \sum_{i=1}^{N} S_i^*$, η τελευταία περιγραφή είναι πιο γενική. Χρησιμοποιώντας την ισοδυναμία (3.102) με τα *ποσοστά επιμερισμού* (3.101), μπορεί να φανεί ένα μειονέκτημα της **CAS** πολιτικής επιμερισμού: πότε μπορεί να προκύψει ένα μεγάλο *ποσοστό επιμερισμού,* p_i (=*ποσοστά επιμερισμού,* f_i). Η απάντηση είναι αν υπάρχει ένα σχετικά υψηλό επίπεδο αποθέματος ασφαλείας στις τελικές αποθήκες, άρα αν:

- Αντιμετωπίζουν υψηλή μεταβλητότητα στη ζήτηση (υψηλό τ_i) και / ή
- Απαιτούν υψηλό επιθυμητό επίπεδο εξυπηρέτησης (υψηλό β_i, άρα υψηλή τιμή για τον *παράγοντα ασφαλείας* k_i).

Άρα αποθήκες που αντιμετωπίζουν "δύσκολη" ζήτηση λαμβάνουν υψηλά *ποσοστά επιμερισμού.* Αυτό έχει ως συνέπεια, η **CAS** πολιτική επιμερισμού να προκαλεί υψηλή μεταβλητότητα στον εφοδιασμό: όσο μεγαλύτερα είναι τα *ποσοστά επιμερισμού,* f_i, τόσο περισσότερο επηρεάζεται η αναπλήρωση του αποθέματος σε μια τοπική αποθήκη i από τη μεταβλητότητα της συνολικής ζήτησης κατά τη διάρκεια του *χρόνου απόκρισης* L. Με άλλα λόγια, παρουσιάζεται μεταβλητότητα στις τελικές αποθήκες, την οποία δυσκολεύονται να διαχειριστούν.

Στη συνέχεια εφαρμόζεται η **BS** πολιτική επιμερισμού σε ένα διβάθμιο αποκλίνον σύστημα με περιοδική επιθεώρηση.

3.3.1 Επιμερισμός αποθεμάτων σε ένα πολυβάθμιο αποκλίνον σύστημα με εφαρμογή της Balanced Stock

Ο van der Heijden [48] μελέτησε αρχικά ένα διβάθμιο σύστημα αποθεμάτων περιοδικής επιθεώρησης, όπου η κεντρική αποθήκη δεν διατηρεί αποθέματα, αλλά και κάποιες επεκτάσεις του (>2 επιπέδων, όπου η κεντρική αποθήκη διατηρεί αποθέματα), εφαρμόζοντας την Balanced Stock πολιτική επιμερισμού. Το πρόβλημα του υπολογισμού αυτών των παραμέτρων ελέγχου του προβλήματος, αντιμετωπίζεται με την ανάλυση του σε δύο υποπροβλήματα. Πρώτον, καθορίζονται τα *ποσοστά επιμερισμού* έτσι ώστε η αναμενόμενη δυσαρμονία του συστήματος να ελαχιστοποιείται. Έπειτα, τα order-up-to επίπεδα υπολογίζονται έτσι ώστε να επιτευχθούν τα επιθυμητά επίπεδα εξυπηρέτησης. Τα αριθμητικά παραδείγματα υποδεικνύουν ότι η **BS** πολιτική επιμερισμού είναι ακριβής και λιγότερο ευαίσθητη σε σφάλματα επί των εκτιμήσεων των παραμέτρων του μοντέλου από την **CAS** πολιτική επιμερισμού.

Αρχικά δίνεται ο επιπλέον συμβολισμός καθώς και υποθέσεις που θα χρησιμοποιηθούν για την ανάπτυξη του μοντέλου

Συμβολισμός

T : η περίοδος επιθεώρησης ,

d_i : η ζήτηση ανά περίοδο στην τελική αποθήκη i , με μέση τιμή, μ_i και τυπική απόκλιση, σ_i ,

d_{i,l_i} : η ζήτηση στην τελική αποθήκη i , κατά την διάρκεια του *χρόνου απόκρισης* στη διανομή, l_i , με μέση τιμή, $\xi_i = \mu_i l_i$ και τυπική απόκλιση, $\omega_i = \sigma_i \sqrt{l_i}$,

d_{i,l_i+T} : η ζήτηση στην τελική αποθήκη i κατά την διάρκεια του *χρόνου απόκρισης* στη διανομή συν την περίοδο επιθεώρησης, $l_i + T$, με μέση τιμή, $v_i = \mu_i(l_i + T)$ και τυπική απόκλιση $\tau_i = \sigma_i \sqrt{l_i + T}$,

V_L : η συνολική ζήτηση για όλες τις τελικές αποθήκες κατά την διάρκεια του *χρόνου απόκρισης*, L, με μέση τιμή, $v_0 = L\sum_{i=1}^{N} \mu_i$ και τυπική απόκλιση, $\tau_0 = (L\sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2)^{1/2}$,

Ω_i : η δυσαρμονία (μη-ισορροπία) που προκύπτει στην αποθήκη i ,

Ω_0 : η ολική δυσαρμονία (μη-ισορροπία) του συστήματος ,

ψ_i : το μέσο διαθέσιμο απόθεμα στην τελική αποθήκη i ,

Υποθέσεις

1. Η ζήτηση του πελάτη συμβαίνει μόνο στις τελικές αποθήκες
2. Η ζήτηση ανά περίοδο περιγράφεται από μια τυχαία μεταβλητή η οποία είναι στάσιμη ανεξάρτητη από περίοδο σε περίοδο και από αποθήκη σε αποθήκη.
3. Η υπερβάλλουσα ζήτηση ικανοποιείται με καθυστέρηση.
4. Επιτρέπεται η μερική διανομή/ικανοποίηση των παραγγελιών των τελικών αποθηκών.
5. Όλοι οι *χρόνοι απόκρισης* είναι σταθεροί.
6. Οποιαδήποτε ποσότητα μπορεί να παραγγελθεί και να παραδοθεί και επιτρέπεται οποιαδήποτε πολιτική επιμερισμού των αποθεμάτων στις τελικές αποθήκες (για όσο οι ποσότητες παραγγελίας είναι μη αρνητικές).
7. Δεν υπάρχουν περιορισμοί χωρητικότητας στην παραγωγή, αποθήκευση ή στη μεταφορά.

Επιπλέον, θα χρησιμοποιηθεί η γενικευμένη υπόθεση ισορροπίας για την προσέγγιση των *order-up-to* επιπέδων:

Γενικευμένη υπόθεση ισοσταθμισμένων αποθεμάτων: είναι ο επιμερισμός στον οποίο εφαρμόζοντας την πολιτική (3.98), προκύπτουν μόνο μη αρνητικές ποσότητες προς επιμερισμό.

Καθορισμός των παραμέτρων ελέγχου όταν υπάρχει έλλειψη κεντρικού αποθέματος

Στη συνέχεια θα δοθούν εκφράσεις για τον υπολογισμό των παραμέτρων ελέγχου του συστήματος και των μέτρων απόδοσης. Πρώτα, θα περιγραφεί η διαδικασία υπολογισμού των μέγιστων order-up-to επιπέδων, S_i^*, υποθέτοντας ότι τα *ποσοστά επιμερισμού*, f_i είναι γνωστά. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται μια προσεγγιστική έκφραση για την μέση δυσαρμονία. Έπειτα δίνεται μια μέθοδος για τον καθορισμό των *ποσοστών επιμερισμού*, f_i, που ελαχιστοποιούν αυτή την προσεγγιστική έκφραση για την μέση δυσαρμονία του συστήματος. Και τέλος όταν όλοι οι παράμετροι ελέγχου είναι γνωστοί θα υπολογιστεί το μέσο διαθέσιμο απόθεμα.

Μέγιστα order-up-to επίπεδα S_i^*

Αν τα *ποσοστά επιμερισμού*, f_i είναι γνωστά, ο υπολογισμός των μέγιστων order-up-to επιπέδων, S_i^*, είναι μια απλή επέκταση ενός μοντέλου αποθεμάτων ενός επιπέδου (S_i,T). Είναι γνωστό ότι για το μοντέλο αυτό η ακόλουθη εξίσωση θα πρέπει να λυθεί για S_i:

$$\frac{E[(d_{i,l_i+T}-S_i)^+]-E[(d_{i,l_i}-S_i)^+]}{T\mu_i}=1-\beta_i \qquad (3.103)$$

Ο παρονομαστής ισούται με την αναμενόμενη ζήτηση σε έναν κύκλο ανεφοδιασμού. Ο αριθμητής ισούται με τη διαφορά ανάμεσα στην αναμενόμενη έλλειψη στο τέλος και στην αρχή ενός κύκλου αναπλήρωσης.

Στο διβάθμιο σύστημα που μελετάται, το S_i, είναι τυχαία μεταβλητή που ορίζεται από την έκφραση (3.99). Η *γενικευμένη υπόθεση ισοσταθμισμένων αποθεμάτων* δηλώνει ότι αυτή η *θέση του αποθέματος* μπορεί να επιτυγχάνεται πάντα. Επομένως, αν αντικατασταθεί η (3.99) στην (3.103) προκύπτουν τα μέγιστα order-up-to επίπεδα S_i^* από την έκφραση:

$$\frac{E[(d_{i,l_i+T}+f_iV_L-S_i^*)^+]-E[(d_{i,l_i}+f_iV_L-S_i^*)^+]}{T\mu_i}=1-\beta_i \tag{3.104}$$

Αυτή η έκφραση ισχύει για γενικές κατανομές ζήτησης και *χρόνων απόκρισης*. Για να λυθεί η εξίσωση αριθμητικά, βολεύει η χρήση κάποιων απλών προσεγγίσεων για στοχαστικές συνιστώσες και στους δύο όρους του αριθμητή, $X_{1i}=d_{i,l_i+T}+f_iV_L$ και $X_{2i}=d_{i,l_i}+f_iV_L$. Επειδή αυτές είναι τυχαίες μεταβλητές στο διάστημα $[0,\infty)$ μια κλάση κατανομών που χρησιμοποιείται συχνά, είναι η κλάση των mixtures Erlang με την ίδια παράμετρο κλίμακας λ, και ορίζεται:

$$h_{r,p,\lambda}(x)=p\frac{\lambda^{r-1}x^{r-2}e^{-\lambda x}}{(r-2)!}+(1-p)\frac{\lambda^r x^{r-1}e^{-\lambda x}}{(r-1)!} \tag{3.105}$$

με την αντίστοιχη αθροιστική συνάρτηση $H_{r,p,\lambda}(x)$ που ορίζεται ως:

$$1-H_{r,p,\lambda}(x)=\sum_{i=0}^{r-2}\frac{(\lambda x)^i e^{-\lambda x}}{i!}+(1-p)\frac{(\lambda x)^{r-1}e^{-\lambda x}}{(r-1)!} \tag{3.106}$$

Επειδή τα d_{i,l_i+T} και V_L είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, είναι γνωστό ότι η μέση τιμή και η διακύμανση του $X_{1i}=d_{i,l_i+T}+f_iV_L$ η μέση τιμή και η διακύμανση είναι $E[X_{1i}]=\nu_i+f_i\nu_0$ και $Var[X_{1i}]=\tau_i^2+(f_i\tau_0)^2$, αντίστοιχα. Για το $X_{2i}=d_{i,l_i}+f_iV_L$ η μέση τιμή και η διακύμανση είναι $E[X_{2i}]=\xi_i+f_i\nu_0$ και $Var[X_{2i}]=\omega_i^2+(f_i\tau_0)^2$, αντίστοιχα.

Έπειτα, προσεγγίζονται οι κατανομές των X_{1i} και X_{2i} με Mixed Erlang που έχουν τις ίδιες τις ροπές πρώτης και δεύτερης τάξης. Από το $c^2[X]=\frac{Var[X]}{E^2[X]}$, προσδιορίζονται οι παράμετροι της Mixed Erlang **(ME)** ως εξής (Tijms, 1994):

$$p=\frac{rc^2[X]-\sqrt{r(1+c^2[X])-r^2c^2[X]}}{1+c^2[X]} \tag{3.107}$$

$$\lambda = \frac{r-p}{E\,[X]} \tag{3.108}$$

Όπου r επιλέγεται τέτοιο ώστε : $r^{-1} \le c^2[X] < (r-1)^{-1}$. Από τις ισότητες (3.106)-(3.108) προκύπτει :

$$E[(X-S)^+] = \left(\frac{r}{\lambda}\right)\left[1 - H_{r+1,p,\lambda}(S)\right] - S\left[1 - H_{r,p,\lambda}(S)\right] \tag{3.109}$$

Έτσι προέκυψε μια προσέγγιση για τον υπολογισμό της (3.104) οπότε μπορούν να προκύψουν αριθμητικά τα S_i^*. Υπενθυμίζεται ότι μόλις υπολογιστούν όλα τα μέγιστα *order-up-to* επίπεδα S_i^*, το *order-up-to* επίπεδο της κεντρικής αποθήκης, S_0 υπολογίζεται αθροίζοντας τα S_i^* :

$$S_0 = \sum_{i=1}^{N} S_i^* \tag{3.110}$$

Από τα παραπάνω αποτελέσματα, φαίνεται ότι τα μέγιστα *order-up-to* επίπεδα S_i^* μπορούν να προσδιοριστούν ώστε να επιτυγχάνονται τα επίπεδα εξυπηρέτησης, β_i που απαιτούνται, για οποιοδήποτε σύνολο *ποσοστών επιμερισμού*, f_i που αθροίζουν στη μονάδα, όταν ισχύει η *γενικευμένη υπόθεση ισορροπίας*. Αναμένεται ότι οι προσεγγίσεις είναι περισσότερο ακριβείς όσο λιγότερο παραβιάζεται η *γενικευμένη υπόθεση ισοσταθμισμένων αποθεμάτων*. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με την σωστή επιλογή των f_i που θα γίνει σε επόμενη ενότητα.

Δυσαρμονία (Imbalance)

Οι πολιτικές επιμερισμού που έχουν παρουσιαστεί μπορούν να προκαλέσουν μια αρνητική ποσότητα προς επιμερισμό σε μία ή περισσότερες αποθήκες. Αυτό συμβαίνει αν κάποια τοπική *θέση αποθέματος* λίγο πριν τον επιμερισμό των αποθεμάτων, ξεπερνά την επιθυμητή *θέση του αποθέματος* μετά τον επιμερισμό, ώστε $I_i > S_i$. Τότε οι άλλες αποθήκες δεν λαμβάνουν την ποσότητα που επιθυμούν και που βασίζεται στην πολιτική επιμερισμού, έτσι δημιουργείται μια κατάσταση δυσαρμονίας. Η ποσότητα δυσαρμονίας που προκαλείται από την τελική αποθήκη i εκτιμάται ως :

$$\Omega_i = \max\{I_i - S_i, 0\} = (I_i - S_i)^+ \tag{3.111}$$

$$\text{ή} \quad \Omega_i = (-Q_i)^+$$

Έτσι η Ω_i είναι μια τυχαία μεταβλητή με κατανομή που εξαρτάται από την κατανομή της *θέσης του αποθέματος* πριν τον επιμερισμό, I_i και την επιθυμητή *θέση του αποθέματος* μετά τον επιμερισμό, S_i. Η ολική δυσαρμονία του συστήματος, Ω_0 προκύπτει αθροίζοντας όλα τα Ω_i, $\Omega_0 = \sum_{i=1}^{N}\Omega_i$.

Αυτός ο ορισμός αναφέρεται στην περίπτωση όπου η κεντρική αποθήκη δεν διατηρεί αποθέματα. Αν η κεντρική αποθήκη διατηρεί αποθέματα, η δυσαρμονία μπορεί να αποφευχθεί με τον ανεφοδιασμό των τελικών αποθηκών που ζημιώνονται από την κεντρική αποθήκη.

Σημειώνεται ότι αυτός ο ορισμός που εισήχθηκε από τον De Kok [13], είναι διαφορετικός εκείνου του Zipkin [57], ο οποίος εκτίμησε την δυσαρμονία του συστήματος ως την σταθμική διακύμανση των τυποποιημένων αποθεμάτων των τελικών αποθηκών. Ο λόγος αυτής της επιλογής είναι ότι ο ορισμός του De Kok είναι διαισθητικά λογικός και πιο βολικός για τον προσδιορισμό μιας πολιτικής επιμερισμού.

Στην περίπτωση της δυσαρμονίας, υπάρχει υπερβολικό απόθεμα σε μία ή σε περισσότερες τελικές αποθήκες στο σύστημα. Άρα γίνεται προσπάθεια να ελαχιστοποιηθεί η δυσαρμονία. Κύριος στόχος είναι να καθοριστούν οι μεταβλητές απόφασης f_i ,S_i^* ώστε τα β_i να επιτυγχάνονται με την ελάχιστη αναμενόμενη δυσαρμονία $E[\Omega_0]$, δοθέντος της περιόδου επιθεώρησης, T, των χαρακτηριστικών της ζήτησης (μ_i, σ_i) και του *χρόνου απόκρισης* (L, l_i).

Σύμφωνα με τους Verrijdt και De Kok [53], μια προσεγγιστική έκφραση για την δυσαρμονία προκύπτει ως εξής: Έστω μια παραγγελία που φτάνει στην κεντρική αποθήκη σε κάποια αυθαίρετη χρονική στιγμή t. Υποθέτοντας ότι δεν υπάρχει δυσαρμονία, οι τοπικές *θέσεις των αποθεμάτων* μετά τον επιμερισμό τη στιγμή t, που δηλώνονται με $S_i(t)$ δίνονται από την (3.99) :

$$S_i(t) = S_i^* - f_i V_L[t-L, t] \tag{3.112}$$

Σ' αυτή την έκφραση το χρονικό διάστημα προστίθεται στο V_L για να ξεχωρίσει αυτή την τυχαία μεταβλητή, από την ζήτηση κατά την διάρκεια του *χρόνου απόκρισης* L. Η επόμενη παραγγελία φτάνει στην κεντρική αποθήκη τη στιγμή t+T. Η *θέση του αποθέματος* στην τελική αποθήκη λίγο πριν τον επιμερισμό αυτής της παραγγελίας τη στιγμή t+T, $I_i(t+T)$, ισούται με:

$$I_i(t+T) = S_i^* - f_i V_L[t-L, t] - d_i[t, t+T] \tag{3.113}$$

Σύμφωνα με την πολιτική επιμερισμού, οι *θέσεις των αποθεμάτων* πρέπει να αυξηθούν στα επίπεδα:

$$S_i(t+T) = S_i^* - f_i V_L[t+T-L, t+T] \tag{3.114}$$

Όπως προαναφέρθηκε, η δυσαρμονία που προκλήθηκε από την αποθήκη i, ισούται με την διαφορά ανάμεσα στην *θέση του αποθέματος* στην αποθήκη i πριν και μετά τον επιμερισμό, όταν αυτή η διαφορά είναι θετική: $\Omega_i = (I_i - S_i)^+$ αγνοώντας την παράμετρο t+T για ευκολία. Ορίζουμε το $Y_i = I_i - S_i$ και αφαιρώντας κατά μέλη τις (3.113) και (3.114), προκύπτει :

$$Y_i = f_i V_L[t+T-L, t+T] - f_i V_L[t-L, t] - d_i[t, t+T] \tag{3.115}$$

Για να υπολογιστεί η μέση δυσαρμονία $E[\Omega_i] = E[Y_i^+]$, εφαρμόζεται μια προσέγγιση που χρησιμοποιεί τις ροπές 2ης τάξης για το Y_i. Επειδή Y_i έχει μια συνάρτηση πιθανότητας πυκνότητας στο διάστημα $(-\infty,\infty)$ προσεγγίζεται από την κανονική κατανομή. Δοθείσης της μέσης τιμής μ_{Y_i} και της τυπικής απόκλιση σ_{Y_i} του Y_i, μπορεί να προσεγγιστεί $E[\Omega_i] = E[Y_i^+]$ με :

$$E[Y_i^+] = \sigma_{Y_i}\phi\left(\frac{\mu_{Y_i}}{\sigma_{Y_i}}\right) + \mu_{Y_i}\Phi\left(\frac{\mu_{Y_i}}{\sigma_{Y_i}}\right) \qquad (3.116)$$

Όπου φ(.) και Φ(.) υπενθυμίζεται ότι δηλώνουν την συνάρτηση πιθανότητας πυκνότητας και την αθροιστική συνάρτηση της τυπικής κανονικής κατανομής, αντίστοιχα. Η (3.116) προέκυψε χρησιμοποιώντας ότι το Y_i γράφεται ως: $\mathrm{Y}_i = \sigma_{Y_i}\mathrm{X} + \mu_{Y_i}$ (όπου Χ είναι μια τυπική κανονικά κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή) και χρησιμοποιώντας τη σχέση $\int_{-x}^{x} y\phi(y)dy = \phi(-x) = \phi(x)$. Στη συνέχεια, το πρόβλημα είναι ο υπολογισμός της μέσης τιμής και της διακύμανσης του Y_i. Από την (3.115) προκύπτει :

$$E[Y_i] = \mu_{Y_i} = -T\mu_i \qquad (3.117)$$

Για να υπολογιστεί το $Var[Y_i]$, είναι βολικό να διαιρεθεί το χρονικό διάστημα σε τέσσερα μέρη και να αθροιστεί η ζήτηση ανά διάστημα, έτσι ώστε οι στοχαστικές μεταβλητές που θα προκύψουν να είναι ανεξάρτητες. Ορίζοντας, $M = \min(T, L)$, χρησιμοποιούνται τα ακόλουθα χρονικά διαστήματα:

- $[t-L, t-L+M]$ με ζήτηση $-f_iV[.]$,
- $[t-L+M, t]$ με ζήτηση $-f_iV[.] + f_iV[.] = 0$,
- $[t, t+T-M]$ με ζήτηση $-d_i[.]$,
- $[t+T-M, t+T]$ με ζήτηση $-(1-f_i)d_i[.] + f_i\sum_{j\neq i} d_j[.]$

Χρησιμοποιώντας αυτή τη διαμέριση, προκύπτει ότι :

$$\sigma_{Y_i}^2 = Var[Y_i] = [T - 2f_iM]\sigma_i^2 + 2f_i^2M\sum_{j=1}^{N}\sigma_j^2 \qquad (3.118)$$

Ποσοστά Επιμερισμού, f_i

Πρέπει να καθοριστούν τα *ποσοστά επιμερισμού* f_i, έτσι ώστε η μέση τιμή της δυσαρμονίας του συστήματος, $E[\Omega_0] = \sum_{i=1}^{N} E[\mathrm{Y}_i^+]$, να ελαχιστοποιείται. Εξαιτίας αυτού του στόχου, η πολιτική επιμερισμού των αποθεμάτων αναφέρεται ως Balanced Stock. Συνεχίζεται η προσέγγιση του της κατανομής του Y_i από την Κανονική κατανομή με μέση τιμή και διακύμανση όπως δίνονται στις (3.117) και (3.118). Επειδή $E[Y_i] = \mu_{Y_i} = -T\mu_i$ δεν εξαρτάται από το f_i, εξετάζεται η επιρροή μόνο του σ_{Y_i} στο $E[\Omega_0] = \sum_{i=1}^{N} E[Y_i^+]$. Παραγωγίζοντας την (3.116) προκύπτει :

$$\frac{dE[\Omega_0]}{d\sigma_{Y_i}} = \frac{dE[Y_i]^+}{d\sigma_{Y_i}} = \phi\left(\frac{\mu_{Y_i}}{\sigma_{Y_i}}\right) \tag{3.119}$$

Επομένως, η μέση δυσαρμονία είναι αυστηρά αύξουσα στο σ_{Y_i}, έτσι πρέπει να ελαχιστοποιηθεί το σ_{Y_i} (ή $Var[Y_i]$) ως προς f_i. Θέτοντας την παράγωγο της (3.118) ως προς f_i, ίση με το μηδέν, προκύπτει :

$$\frac{dVar[Y_i]}{df_i} = 0 \Rightarrow -2M\sigma_i^2 + 4f_i M\sum_{j=1}^{N}\sigma_j^2 = 0 \Rightarrow f_i^* = \frac{\sigma_i^2}{2\sum_{j=1}^{N}\sigma_j^2} \tag{3.120}$$

Δυστυχώς, αυτά τα βέλτιστα *ποσοστά επιμερισμού* f_i^* δεν αθροίζουν στο 1, αλλά στο $\frac{1}{2}$. Επειδή ελαχιστοποιείται μια προσεγγιστική έκφραση για την αναμενόμενη δυσαρμονία, δεν εξασφαλίζεται ότι οι παράμετροι επιμερισμού αθροίζουν στη μονάδα. Άρα αυτά τα ποσοστά πρέπει να αυξηθούν. Μια λογική επιλογή είναι να αυξηθούν τα ποσοστά, f_i^*, έτσι ώστε η ολική επιρροή από την μέση δυσαρμονία να είναι η ελάχιστη. Μια μέθοδος είναι να εφαρμοστεί η τεχνική του πολλαπλασιαστή Lagrange, ελαχιστοποιώντας την $E[\Omega_0] - \lambda(\sum f_i - 1)$ ως προς το f_i. Ωστόσο, προκύπτει μια δύσκολη έκφραση. Επειδή είναι δύσκολο να προκύψει μια σαφής έκφραση για το f_i, προτείνεται η ακόλουθη αριθμητική διαδικασία.

Πρώτα υπολογίζεται η παράγωγος του $E[\Omega_i] = E[Y_i^+]$ ως προς το f_i, που βασίζεται στην προσέγγιση της κατανομής του Y_i από την Κανονική (σημειώνεται ότι $E[\Omega_j]$ δεν εξαρτάται από το f_i για $j \neq i$). Από τις (3.118)- (3.120) προκύπτει:

$$\frac{dE[\Omega_i]}{df_i} = \frac{M\phi\left(\frac{\mu_{Y_i}}{\sigma_{Y_i}}\right)}{\sigma_{Y_i}}\left[2f_i\sum_{j=1}^{N}\sigma_j^2 - \sigma_i^2\right] \tag{3.121}$$

Σημειώνεται ότι σ_{Y_i} εξαρτάται από το f_i, έτσι πρέπει να λυθεί η (3.121) αριθμητικά για να υπολογιστούν τα f_i δοθείσης κάποιας τιμής της παραγώγου. Δεύτερον, προσδιορίζεται η τιμή της παραγώγου (3.121) για την οποία $\sum_{i=1}^{N} f_i = 1$. Επειδή οι παράγωγοι είναι ίσες για όλα τα i και όχι μεγαλύτερες απ' ότι χρειάζεται για να προκύψει $\sum_{i=1}^{N} f_i = 1$, η (προσεγγιστική) συνολική αναμενόμενη δυσαρμονία αυξάνεται όσο το δυνατόν λιγότερο.

Διαθέσιμο απόθεμα

Όπως ακριβώς, για τα μέγιστα order-up-to επίπεδα, S_i^*, οι εκφράσεις για το μέσο διαθέσιμο απόθεμα ανά τελική αποθήκη, ψ_i είναι επεκτάσεις του μοντέλου ενός επιπέδου (S,T). Υπολογίζοντας την μέση τιμή του αναμενόμενου διαθέσιμου αποθέματος στην αρχή και στο τέλος του κύκλου ανεφοδιασμού, προκύπτει:

$$\psi_i = \frac{1}{2}\{E[S_i - d_{i,l_i} + \text{την έλλειψη στην αρχή του κύκλου}] +$$
$$+ E[S_i - d_{i,l_i+T} + \text{την έλλειψη στο τέλος του κύκλου}]\}$$

Επίσης, η διαφορά με το μοντέλο ενός επιπέδου (S,T) είναι ότι το S_i, που είναι μια τυχαία μεταβλητή, που απορρέει από την (3.99). Αντικαθιστώντας αυτή, προκύπτει :

$$\psi_i \approx S_i^* - f_i v_0 - l_i \mu_i + \frac{1}{2}\{-T\mu_i + E[(d_{i,l_i} + f_i V_L - S_i^*)^+] + E[(d_{i,l_i+T} + f_i V_L - S_i^*)^+]\} \qquad (3.122)$$

Όπως προηγουμένως, οι μέσες τιμές $E[(.)^+]$ μπορούν να εκτιμηθούν χρησιμοποιώντας μια Mixed Erlang προσέγγιση για $X_{1i} = d_{i,l_i+T} + f_i V_L$ και $X_{2i} = d_{i,l_i} + f_i V_L$ από τις (3.107) και (3.108) αντίστοιχα. Βέβαια, η μέση τιμή των pipeline stock ανάμεσα στην κεντρική αποθήκη και στις τελικές αποθήκες υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τον τύπο του Little, $\sum_{i=1}^{N} l_i \mu_i$.

Το παραπάνω μοντέλο επεκτάθηκε από τους van der Heijden, Diks, de Kok [50] σε γενικά N-βάθμια συστήματα, όπου η κεντρική αποθήκη και κάποιες ενδιάμεσες αποθήκες διατηρούν αποθέματα.

3.4 Πολιτική επιμερισμού με προτεραιότητα (*priority rationing*)

Η πολιτική επιμερισμού με προτεραιότητα (*priority rationing*) (**PR**), προτάθηκε από τον Lagodimos [31] και μοιάζει πολύ με τις πολιτικές επιμερισμού των αποθεμάτων, που χρησιμοποιούνται στην πράξη. Σύμφωνα με αυτή την πολιτική δημιουργείται μια λίστα με τις τελικές αποθήκες στις οποίες το διαθέσιμο απόθεμα επιμερίζεται με την σειρά που καταγράφηκαν στη λίστα. Προτείνονται δύο συγκεκριμένοι κανόνες για τον προσδιορισμό της λίστας επιμερισμού:

1) **RAN** : αναθέτει προτεραιότητες με τυχαία σειρά

2) MIN : αναθέτει προτεραιότητες με βάση το μέγεθος παραγγελίας

Ο **RAN** κανόνας χρησιμοποιείται πιο συχνά στην πράξη. Ο **MIN** κανόνας είναι μια επέκταση του κανόνα του Baker (1984) και έχει την ιδιότητα της ελαχιστοποίησης του αριθμού των ανικανοποίητων τελικών αποθηκών. Η **PR** πολιτική επιμερισμού μπορεί να θεωρηθεί ως μια αποκεντρωτική πολιτική (Silver και Peterson [40]), επειδή όλες οι αποφάσεις για επιμερισμό των αποθεμάτων προσδιορίζονται αποτελεσματικά από τις παραγγελίες που πραγματοποιούνται από κάθε αποθήκη ξεχωριστά. Σημειώνεται ότι οι **FS** και **AS** είναι ολιστικές πολιτικές, επειδή οι αποφάσεις για επιμερισμό, βασίζονται στο απόθεμα ολόκληρου του συστήματος. Όπως και σε άλλες πολιτικές επιμερισμού έτσι και στην **PR**, είναι εξαιρετικά δύσκολο να μοντελοποιηθούν ακριβώς όλα τα αποθέματα για κάθε τελική αποθήκη ξεχωριστά. Συνεπώς, εισάγεται η *υπόθεση της διαθεσιμότητας* (*availability assumption*), η οποία υποδηλώνει ότι στην περίπτωση του επιμερισμού των αποθεμάτων, το πολύ μια τελική αποθήκη δεν θα ικανοποιηθεί πλήρως (και αυτή είναι η τελευταία στην λίστα διανομής). Η *υπόθεση της διαθεσιμότητας* είναι ενορατική όταν είναι επιθυμητό το σύστημα να μη βρίσκεται συχνά χωρίς απόθεμα, και επιπλέον επιτρέπει τη μοντελοποίηση των αποθεμάτων των τελικών αποθηκών. Αν η τελευταία αποθήκη στην λίστα διανομής, δηλώνεται με μια τυχαία μεταβλητή z, έστω η αποθήκη i σε κάποια περίοδο $t+l_i$, από την *υπόθεση της διαθεσιμότητας*, αν η αποθήκη i δεν είναι τελευταία στη λίστα, τότε $I_1^i(t-l_i)=S_1^i$, για όλα τα $i \neq z$. Επομένως, αν η αποθήκη i είναι τελευταία στη λίστα, τότε $I_1^i(t-l_i)=\hat{I}_1(t-l_i)-S_1+S_1^i$, για i=z. Συνεπώς, χρησιμοποιώντας την έκφραση $I_1(t-l_i)=\min[I_0(t-\hat{L}_i)-Y_0^i,S_1]$ και κάνοντας αναδιάταξη, προκύπτει (Lagodimos [31]) :

$$I_1^i(t-l_i)=\begin{cases} S_1^i \ , & \mathrm{i}\neq \mathrm{z} \\ \min\left[I_0(t-\hat{L}_i)-\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} S_1^j-Y_0^i,S_1^i\right], & \mathrm{i=z}\end{cases} \tag{3.123}$$

Όπου $\hat{L}_i$ είναι ο χρόνος απόκρισης βαθμίδας και με το άθροισμα των χρόνων απόκρισης απ' τον προμηθευτή ως την τελική αποθήκη.

Είναι σαφές, όταν όλες οι τελικές αποθήκες έχουν πάντα τις ίδιες πιθανότητες να βρίσκονται σε οποιαδήποτε θέση στη λίστα διανομής, τότε $z\sim U(1,n)$.

3.4.1 Διαχείριση ενός συστήματος πολλών αποθηκών εφαρμόζοντας την πολιτική επιμερισμού με προτεραιότητα

Ο Zhang [56], εφαρμόζοντας την πολιτική επιμερισμού με προτεραιότητα (PR), όπου η λίστα προτεραιότητας προκύπτει τυχαία (RAN), μελέτησε ένα πρόβλημα διαχείρισης ενός πολυβάθμιου αποκλίνοντος συστήματος αποθεμάτων, με στοχαστική ζήτηση όταν τα προϊόντα έχουν συγκεκριμένο χρόνο ζωής (perishable). Για αυτό το σύστημα να ληφθούν δύο θεμελιώδεις αποφάσεις :

1) πόσο προϊόν πρέπει να αγοραστεί ,
2) πώς να επιμεριστεί το διαθέσιμο απόθεμα, όταν είναι λιγότερο από την συνολική ζήτηση.

Ανάπτυξη μοντέλου και συμβολισμός

Έστω ένα μοντέλο μιας περιόδου στο οποίο η κεντρική αποθήκη διανέμει ένα ευπαθές προϊόν σε πολλές αποθήκες. Στην αρχή μιας περιόδου, η κεντρική αποθήκη αγοράζει q μονάδες του προϊόντος και το προϊόν επιμερίζεται αμέσως. Τότε συμβαίνει η ζήτηση από τις Ν αποθήκες, ξ_i, i=1,2...,N είναι τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $(0,\infty)$ που παριστάνει τη ζήτηση στην αποθήκη i πιθανά οι ξ_i και ξ_j είναι συσχετισμένες. Όταν η συνολική ζήτηση είναι λιγότερη από q, η ζήτηση της κάθε αποθήκης ικανοποιείται. Σε περίπτωση έλλειψης, τα διαθέσιμα αποθέματα επιμερίζονται σύμφωνα με μια λίστα προτεραιότητας, η οποία αποτελείται από τις παραγγελίες όλων των αποθηκών. Πρώτα, ικανοποιείται η ζήτηση της αποθήκης που βρίσκεται πρώτη στην λίστα προτεραιότητας έπειτα της δεύτερης κ.ο.κ . Στο τέλος της περιόδου, δεν δημιουργείται *πρόσθετο κόστος* απ' το απόθεμα που απομένει. Σε κάθε περίοδο όταν συμβεί έλλειψη, δημιουργείται μια λίστα προτεραιότητας ανεξάρτητα από την εμφάνιση της ζήτησης. Συνεπώς, η πολιτική επιμερισμού των αποθεμάτων προσδιορίζεται από το πώς μια λίστα προτεραιότητας επιλέγεται σε περίπτωση έλλειψης. Επειδή υπάρχουν Ν αποθήκες, υπάρχουν Ν! λίστες προτεραιότητας. Γι' αυτό η πολιτική επιμερισμού χαρακτηρίζεται από ένα Ν!-διάστατο διάνυσμα $\vec{\beta}=\{\beta_{1,\ldots\ldots}\beta_{N!}\}$, στο οποίο β_i είναι η πιθανότητα ότι η λίστα προτεραιότητας i χρησιμοποιείται.

Για γνωστή ποσότητα παραγγελίας q και διάνυσμα $\vec{\beta}$, ορίζεται το επίπεδο εξυπηρέτησης της αποθήκης i, $sl_i(q,\vec{\beta})$, ως η πιθανότητα ότι η ζήτηση της i-οστής αποθήκης ικανοποιείται πλήρως, από το διαθέσιμο απόθεμα. Άρα στη συνέχεια υιοθετείται το μέτρο εξυπηρέτησης α . Έστω α_i είναι το επίπεδο εξυπηρέτησης που απαιτείται από την αποθήκη i. Το πρόβλημα είναι να αποφασιστεί η πολιτική επιμερισμού (άρα το διάνυσμα $\vec{\beta}$) στην περίπτωση της έλλειψης και η ελάχιστη ποσότητα παραγγελίας, q, έτσι ώστε το επίπεδο εξυπηρέτησης για κάθε αποθήκη να ικανοποιείται.

Το πρόβλημα δύο αποθηκών

Η ανάλυση ξεκινάει με το πρόβλημα των δύο αποθηκών. Έστω ότι υπάρχουν δύο αποθήκες με επίπεδο εξυπηρέτησης, α_i, i=1,2. Σ' αυτή την περίπτωση, υπάρχουν 2 πιθανές λίστες προτεραιότητας: $\{1,2\}$ ή $\{2,1\}$. Έστω β είναι η πιθανότητα ότι η $\{1,2\}$ χρησιμοποιείται ως λίστα προτεραιότητας σε περίπτωση έλλειψης. Έτσι όταν $\xi_1+\xi_2>q$, η πιθανότητα ότι η ζήτηση της αποθήκης 1, ικανοποιείται πρώτα, είναι β και η πιθανότητα ότι η ζήτηση της αποθήκης 2 ικανοποιείται πρώτα, είναι 1-β. Επομένως, υπάρχουν 2 σενάρια στα οποία η ζήτηση της αποθήκης 1 ικανοποιείται πλήρως από το διαθέσιμο απόθεμα.

Ένα σενάριο είναι, όταν $\xi_1+\xi_2\le q$ και το άλλο όταν $\xi_1+\xi_2>q$, αλλά η αποθήκη 1 επιλέγεται ως η αποθήκη με την προτεραιότητα (με πιθανότητα β) και η ζήτηση από την αποθήκη 1, ξ_1, είναι μικρότερη από q. Επομένως, το επίπεδο εξυπηρέτησης για την αποθήκη 1 δίνεται από :

$$sl_1(q,\beta)=P\left[\xi_1+\xi_2\le q\right]+\beta P\left[\xi_1+\xi_2>q,\xi_1\le q\right] \tag{3.127}$$

Επειδή $P\left[\xi_1+\xi_2>q,\xi_1\le q\right]+P\left[\xi_1+\xi_2\le q,\xi_1\le q\right]=P\left[\xi_1\le q\right]$

και

$P\left[\xi_1+\xi_2\le q,\xi_1\le q\right]=P\left[\xi_1+\xi_2\le q\right]$,

η (3.127) μπορεί να γραφεί ως :

$$sl_1(q,\beta)=P\left[\xi_1+\xi_2\le q\right]+\beta\left(P\left[\xi_1\le q\right]-P\left[\xi_1+\xi_2\le q,\xi_1\le q\right]\right)=$$

$$=P\left[\xi_1+\xi_2\le q\right]+\beta\left(P\left[\xi_1\le q\right]-P\left[\xi_1+\xi_2\le q\right]\right)=$$

$$=\beta P\left[\xi_1\le q\right]+(1-\beta)P\left[\xi_1+\xi_2\le q\right]$$

$$\text{Άρα}\quad sl_1(q,\beta)=\beta P\left[\xi_1\le q\right]+(1-\beta)P\left[\xi_1+\xi_2\le q\right] \tag{3.128}$$

Σημειώνεται ότι η (3.128) μπορεί να προκύψει, υποθέτοντας ότι η τυχαία επιλογή της λίστας προτεραιότητας, πραγματοποιείται πριν η ζήτηση γίνει γνωστή. Με πιθανότητα β, η αποθήκη 1 επιλέγεται ως η αποθήκη με προτεραιότητα, σε αυτή την περίπτωση η *πιθανότητα μη έλλειψης* (*non-stock-out*) είναι $P\left[\xi_1\le q\right]$. Με πιθανότητα 1-β, η αποθήκη 1 δεν επιλέγεται ως η αποθήκη με προτεραιότητα, όπου η *πιθανότητα μη έλλειψης* είναι $P\left[\xi_1+\xi_2\le q\right]$. Το επίπεδο εξυπηρέτησης στην αποθήκη 1 είναι τότε ο σταθμισμένος μέσος όρος της $P\left[\xi_1\le q\right]$ και της $P\left[\xi_1+\xi_2\le q\right]$. Επισημαίνεται ότι η τυχαία επιλογή για τον καθορισμό της λίστας προτεραιότητας, είναι ανεξάρτητη της ζήτησης. Συνεπώς, είτε η τυχαία επιλογή πραγματοποιείται πριν γνωστοποιηθεί η ζήτηση, είτε όχι, το επίπεδο εξυπηρέτησης δεν επηρεάζεται σε καμιά αποθήκη. Ομοίως με την (3.128) το επίπεδο εξυπηρέτησης για την αποθήκη 2 γράφεται ως εξής :

$$sl_2(q,\beta)=(1-\beta)P\left[\xi_2 \le q\right]+\beta P\left[\xi_1+\xi_2 \le q\right]$$

Το πρόβλημα δύο αποθηκών μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Min q

Υπό τους περιορισμούς :

$$\beta P\left[\xi_1 \le q\right]+(1-\beta)P\left[\xi_1+\xi_2 \le q\right] \ge \alpha_1 ,$$

$$(1-\beta)P\left[\xi_2 \le q\right]+\beta P\left[\xi_1+\xi_2 \le q\right] \ge \alpha_2 ,$$

Σημειώνεται ότι για γνωστό β, το $sl_i(q,\beta)$ αυξάνεται με το q. Επομένως, αν το β είναι γνωστό, μπορεί να βρεθεί το μικρότερο q, έτσι ώστε το $sl_i(q,\beta) \ge a_i$, για i=1,2. Έστω $q_i = \min\left\{q \middle| sl_i(q,\beta) \ge a_i\right\}$. Η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας για το πρόβλημα δύο αποθηκών ικανοποιεί την $q(\beta)=\max(q_1,q_2)$. Τώρα το πρόβλημα καταλήγει στην εύρεση του β έτσι ώστε το $q(\beta)$ να ελαχιστοποιείται. Μπορεί να αποδειχθεί η επόμενη πρόταση

Πρόταση 3.1 : η $q(\beta)$ είναι αυστηρά σχεδόν κυρτή (quasiconvex) συνάρτηση στο β.

Απόδειξη:

Έστω $q_i = q(\beta_i)$ για i=1,2 και $q_1 \ne q_2$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποτίθεται ότι $q_1 < q_2$. Τότε από τον ορισμό του q_i,

$$\beta_1 P[\xi_1 \le q_1]+(1-\beta_1)P\left[\xi_1+\xi_2 \le q_1\right] \ge a_1 \qquad \textbf{(3.129)}$$

$$(1-\beta_1)P[\xi_2 \le q_1]+\beta_1 P\left[\xi_1+\xi_2 \le q_1\right] \ge a_2 \qquad \textbf{(3.130)}$$

και

$$\beta_2 P[\xi_1 \le q_2]+(1-\beta_2)P\left[\xi_1+\xi_2 \le q_2\right] \ge a_1 \qquad \textbf{(3.131)}$$

$$(1-\beta_2)P[\xi_2 \le q_2]+\beta_2 P\left[\xi_1+\xi_2 \le q_2\right] \ge a_2 \qquad \textbf{(3.132)}$$

Επειδή οι κατανομές των ξ_1 και $\xi_1+\xi_2$ είναι συνεχείς και $q_1 < q_2$ από τις (3.129) και (3.130), είναι γνωστό ότι :

$$\beta_1 P[\xi_1 \le q_2]+(1-\beta_1)P\left[\xi_1+\xi_2 \le q_2\right] > a_1 \qquad \textbf{(3.133)}$$

$$(1-\beta_1)P[\xi_2 \le q_2]+\beta_1 P\left[\xi_1+\xi_2 \le q_2\right] > a_2 \qquad \textbf{(3.134)}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (3.133) με $\theta \in (0,1)$ και την (3.131) με (1-θ) και προσθέτοντας τις δύο σχέσεις που προκύπτουν:

$$\left[\theta\beta_1 + (1-\theta)\beta_2\right]P\left[\xi_1 \le q_2\right] + \left[\theta(1-\beta_1) + (1-\theta)(1-\beta_2)\right]P\left[\xi_1 + \xi_2 \le q_2\right] > a_1 \qquad (3.135)$$

Ομοίως, πολλαπλασιάζοντας την (3.134) με θ και την (3.132) με (1-θ) και προσθέτοντας τις δύο σχέσεις που προκύπτουν, γίνεται :

$$\left[\theta(1-\beta_1) + (1-\theta)(1-\beta_2)\right]P\left[\xi_2 \le q_2\right] + \left[\theta\beta_1 + (1-\theta)\beta_2\right]P\left[\xi_1 + \xi_2 \le q_2\right] > a_2 \qquad (3.136)$$

Σημειώνεται ότι : $\left[\theta\beta_1 + (1-\theta)\beta_2\right] + \left[\theta(1-\beta_1) + (1-\theta)(1-\beta_2)\right] = 1$.

Έστω $\beta_0 = \theta\beta_1 + (1-\theta)\beta_2$.

Από την (3.135) προκύπτει :

$$\beta_0 P\left[\xi_1 \le q_2\right] + (1-\beta_0)P\left[\xi_1 + \xi_2 \le q_2\right] > a_1$$

και από την (3.136) προκύπτει :

$$(1-\beta_0)P\left[\xi_2 \le q_2\right] + \beta_0 P\left[\xi_1 + \xi_2 \le q_2\right] > a_2$$

Επομένως, $sl_i(q_2, \beta_0) > a_i$ για i=1,2. Άρα $q(\beta_0) < q_2$, επειδή $q(\beta_0)$ είναι η μικρότερη ποσότητα παραγγελίας q έτσι ώστε $sl_i(q, \beta_0) \ge a_i$. Έτσι το $q(\beta)$ είναι μια αυστηρά σχεδόν κυρτή (quasiconvex) συνάρτηση.

Η Πρόταση 3.1 εξασφαλίζει ότι ένα τοπικό ελάχιστο του $q(\beta)$ είναι και ολικό ελάχιστο.

Πρόβλημα Πολλών αποθηκών

Υπάρχουν Ν! πιθανές λίστες προτεραιότητας για ένα πρόβλημα Ν αποθηκών, οι οποίες εξαρτώνται από το πώς οι αποθήκες κατατάσσονται στη λίστα. Επομένως, επεκτείνοντας το προηγούμενο αποτέλεσμα σε ένα πρόβλημα Ν αποθηκών, που προϋποθέτει τον προσδιορισμό πιθανοτήτων για όλες τις Ν! πιθανές λίστες προτεραιότητας. Ακόμα κι αν βρεθούν αυτές οι πιθανότητες, μια τέτοια πολιτική είναι δύσκολο να εφαρμοστεί. Για παράδειγμα, όταν υπάρχουν 5 αποθήκες, σε περίπτωση έλλειψης πρέπει να επιλεγεί μια λίστα προτεραιότητας από τις 120 πιθανές λίστες. Για να αναπτυχθεί ένας απλός τρόπος καθορισμού μιας λίστας προτεραιότητας, εφαρμόζεται η *υπόθεση της διαθεσιμότητας (availability assumption)* όπως προτάθηκε από τον Lagodimos [31]

Αριθμητική προσομοίωση για κανονικές και Gamma κατανομές ζήτησης, έδειξε ότι η υπόθεση είναι ακριβής όταν $N \le 6$. Η τυχαία επιλογή που βασίζεται σ' αυτή την υπόθεση, χρησιμοποιείται μόνο για να αποφασίσει ποια αποθήκη θα πρέπει να μπει στην τελευταία θέση της λίστας προτεραιότητας. Έστω $\gamma_i > 0$ είναι η πιθανότητα ότι η αποθήκη i επιλέγεται ώστε να είναι η τελευταία στη λίστα προτεραιότητας για i=1,..,N. Τότε η πολιτική επιμερισμού των αποθεμάτων προσδιορίζεται από το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (\gamma_1,\dots\dots,\gamma_N)$ με $\sum_{i=1}^{N}\gamma_i = 1$ και $\gamma_i \in (0,1)$ και ορίζεται ως εξής: Όταν το q είναι μικρότερο από την συνολική ζήτηση, η ζήτηση της αποθήκης i ικανοποιείται τελευταία με πιθανότητα γ_i. Το επίπεδο εξυπηρέτησης στην αποθήκη i, που βασίζεται στην παραπάνω πολιτική επιμερισμού και την *υπόθεση διαθεσιμότητας*, για γνωστά q και $\vec{\gamma}$, είναι κατά προσέγγιση :

$$sl_i(q,\vec{\gamma}) = \gamma_i P\left[\sum_{i=1}^{N}\xi_i \le q\right] + (1-\gamma_i) \qquad (3.137)$$

Ο πρώτος όρος στο 2° μέλος είναι η πιθανότητα, η αποθήκη i να λάβει πλήρη παραγγελία αν επιλεγεί ως αποθήκη χωρίς προτεραιότητα (με πιθανότητα γ_i). Ο δεύτερος όρος είναι η πιθανότητα η αποθήκη i να μην επιλέγει ως αποθήκη χωρίς προτεραιότητα. Ξεκάθαρα φαίνεται ότι η (3.137) είναι μια προσέγγιση του επιπέδου εξυπηρέτησης της αποθήκης i, επειδή ίσως υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες η παραγγελία της αποθήκης i δεν ικανοποιείται πλήρως, ακόμη κι όταν αυτή δεν επιλέγει ως αποθήκη χωρίς προτεραιότητα. Λαμβάνοντας υπ' όψη την (3.137), διατυπώνεται το πρόβλημα πολλών αποθηκών ως (Πρόβλημα q) :

Min q

Υπό τους περιορισμούς :

$$\gamma_i P\left[\sum_{i=1}^{n}\xi_i \le q\right] + (1-\gamma_i) \ge a_i$$

$$\sum_{i=1}^{n}\gamma_i = 1\,, \qquad 0 < \gamma_i < 1 \qquad (3.138)$$

Από την (3.138) προκύπτει: $P\left[\sum_{i=1}^{N}\xi_i \le q\right] \ge \dfrac{-1+\gamma_i+a_i}{\gamma_i}$ για i=1,….,N.

Επομένως, $q \ge \Phi^{-1}\left(1-\dfrac{(1-\alpha_i)}{\gamma_i}\right)$, υπενθυμίζεται ότι Φ είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής των $\sum_{i=1}^{n}\xi_i$. Έτσι για γνωστό $\vec{\gamma}$, η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας ικανοποιεί την:

$$q(\vec{\gamma}) = \max_i\left\{\Phi^{-1}(1-\frac{1-a_i}{\gamma_i})\right\} \qquad (3.139)$$

Για να βρεθεί η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας q, χρειάζεται να βρεθεί το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ έτσι ώστε το $q(\vec{\gamma})$ να ελαχιστοποιείται. Επειδή η $\Phi^{-1}(.)$ είναι μια μονότονη αύξουσα συνάρτηση, η ελαχιστοποίηση της $\max\limits_i \left\{ \Phi^{-1}\left(1-(1-\frac{(1-a_i)}{\gamma_i} \right) \right\}$, ισοδυναμεί με την ελαχιστοποίηση της $\max\limits_i \left(1-(1-\frac{(1-a_i)}{\gamma_i} \right)$. Επομένως, το πρόβλημα πολλών αποθηκών μετατρέπεται στο ακόλουθο πρόβλημα (Πρόβλημα γ) :

$$\textbf{Min} \max_i \frac{a_i-1}{\gamma_i}$$

Υπό τους περιορισμούς : $\sum\limits_{i=1}^{N} \gamma_i = 1, \quad 0 \le \gamma_i \le 1$.

Ισχύει η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 3.2 :

Η βέλτιστη λύση στο πρόβλημα γ ικανοποιεί την $\gamma_i^{*} = \dfrac{1-a_i}{\sum\limits_{i=1}^{N}(1-a_i)}$ (3.140) , για i=1,...,N και η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι ίση με $-\sum\limits_{i=1}^{N}(1-a_i)$.

Απόδειξη :

Έστω $y = \max\limits_i \dfrac{1-a_i}{\gamma_i}$. Το πρόβλημα γ αναδιατυπώνεται ως εξής :

Min y

Υπό τους περιορισμούς :

$$\frac{a_i-1}{\gamma_i} \le y \tag{3.141}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \gamma_i = 1 , \quad 0 < \gamma_i < 1 \tag{3.142}$$

Προκύπτει ότι :

$\gamma_i{}' = \dfrac{1-a_i}{\sum\limits_{i=1}^{N}(1-a_i)}$, το $y = -\sum\limits_{i=1}^{N}(a_i-1)$ είναι μια εφικτή λύση στο παραπάνω πρόβλημα. Για να δειχτεί ότι μια εφικτή λύση είναι πράγματι η βέλτιστη λύση, χρειάζεται να δειχτεί ότι: $y \ge -\sum\limits_{i=1}^{N}(1-a_i)$ είναι αληθής για όλες τις εφικτές λύσεις. Επειδή $a_i < 1$ και $\gamma_i > 0$, είναι γνωστό ότι $y < 0$ από τον ορισμό του y . Από την (3.141), $\gamma_i \geq \frac{a_i - 1}{y}$, για όλα τα i. Μαζί με την (3.142) προκύπτει : $\sum_{i=1}^{N} \frac{a_i - 1}{y} \geq 1$. Συνεπάγεται $y \geq \sum_{i=1}^{N} (a_i - 1)$, επειδή $y < 0$. Έτσι, $\gamma_i = \frac{1 - a_i}{\sum_{i=1}^{N}(1 - a_i)}$, $y = -\sum_{i=1}^{N}(a_i - 1)$ είναι η βέλτιστη λύση στο πρόβλημα γ.

Παρατήρηση 3.1

Από την (3.140) φαίνεται ότι ένα υψηλότερο a_i συνεπάγεται ένα χαμηλότερο γ_i. Επομένως, μια αποθήκη που απαιτεί υψηλότερο επίπεδο εξυπηρέτησης, είναι λιγότερο πιθανόν να επιλεγεί ως αποθήκη χωρίς προτεραιότητα.

Παρατήρηση 3.2

Αν όλες οι αποθήκες απαιτούν το ίδιο επίπεδο εξυπηρέτησης, τότε $\gamma_i = 1/N$.

Συνδυάζοντας την (3.139) και (3.140) προκύπτει :

Πρόταση 3.3

Η βέλτιστη λύση στο Πρόβλημα q ικανοποιεί την :

$$q^* = \Phi^{-1}\left[1 - \sum_{i=1}^{N}(1 - a_i)\right] \tag{3.143}$$

Από την (3.143), φαίνεται ότι η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας προσδιορίζεται από $\Phi^{-1}(.)$, είναι η κατανομή της συνολικής ζήτησης και $\sum_{i=1}^{N} a_i$, είναι το συνολικό επίπεδο εξυπηρέτησης που απαιτείται. Η τιμή $1 - \sum_{i=1}^{N}(1 - a_i)$ μπορεί να θεωρηθεί ως ο λόγος που προκύπτει στο πρόβλημα του εφημεριδοπώλη. Ένα μεγαλύτερο $\sum_{i=1}^{N} a_i$, συνεπάγεται υψηλότερη τιμή του q. Ως αποτέλεσμα αυτού, όταν N=1, η (3.143) γίνεται $q^* = \Phi^{-1}(a_i)$, είναι ο τύπος για το πρόβλημα εφημεριδοπώλη. Η q^* εξαρτάται από τα a_i μόνο μέσω του αθροίσματός τους.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Afentakis, P., B. Gavish, U.S. Karmarkar, 1984, "Computationally Efficient Optimal Solutions to the Lot-Sizing Problem in Multi-Stage Assembly Systems", *Management Science*, 30, pp.222-239.

[2] Axsater, S., 2003, "Supply Chain Operations : Serial and Distribution Systems"
In : de Kok, A.G., Graves, S.C. (Eds.) *Supply Chain Management : Design, Coordination and Operation*. Elsevier, Amsterdam, pp. 525-556.

[3] Axsater, S., Rosling, K., 1993, "Notes: Installation vs Echelon Stock Policies for Multilevel Inventory Control", *Management Science*, 39, pp. 1274-1280.

[4] Axsater, S., H.L.W. Nuttle, 1987, "Combining Items for Lot Sizing in Multi-Level Assembly Systems", *International Journal Of Production Research*, 25, pp.795-807.

[5] Bandinelli, R.D., Schwarz, 1988, "Backorders Optimization in a One-Warehouse N-Identical Retailers Distribution System", *Naval Research Logistics*, 35, pp.427-440.

[6] Blackburn, J.D., R.A. Millen, 1982, "Improved Heuristics for Multi-Echelon Requirements Planning Systems", *Management Science*, 28, pp. 44-56.

[7] Bollapragada, S., Akella, R., Srinivasan, R., 1999, "Centralized Ordering and Allocation Policies in a Two-Echelon System with Non-Identical Warehouses", *European Journal of Operational Research*, 106, pp. 74-81.

[8] Chen, F.,1997, "Optimal Policies for Multi-Echelon Inventory Problems with Batch Ordering", Operations Research, 48, pp.376-389.

[9] Chen, F., R.Samroengraja, 1998, "Information and Incentives in Supply Chain Management : The Stationary Beer Game", Graduate School of Business, Columbia University.

[10] Chen, F., Zheng, Y.S., 1994, "Evaluating Echelon Stock (R,nQ) Policies in Serial Production/Inventory Systems with Stochastic Demand", *Management Science*, 40, pp. 1262-1275.

[11] Clark, A., 1958, "A Dynamic, Single-Item, Multi-Echelon Inventory Model", Report, Rand Corporation, Santa Monica, CA.

[12] Clark, A.J., Scarf, H., 1960, "Optimal Policies for a Multi-Echelon Inventory Problem", *Management Science*, 6, pp.475-490.

[13] De Kok, A.G., 1990, "Hierarchical Production Planning for Consumer Goods", *European Journal of Operational Research*, 45, pp.55-69.

[14] De Kok, A.G., Fransoo, J.C.,2003, "Planning Supply Chain Operations : Definition and Comparison of Planning Concepts".
In : De Kok, A.G., Graves, S.C. (Eds.), "Supply Chain Management : Design, Coordination and Operation. Elsevier", Amsterdam, pp. 597-675.

[15] De Kok, A.G., Lagodimos, A.G, Seidel, H.P, 1994, "Stock Allocation in a Two-Echelon Distribution Network under Service Constraints", Research Report DBK/LBS/94-03, Department of Industrial Engineering and Management Science, Eindhoven University of Technology, Netherlands.

[16] Diks, E.B., De Kok, A.G., 1996, "Controlling a Divergent Two-Echelon Network with Transshipments Using the Consistent Appropriate Share Rationing Policy". *International Journal of Production Economics*, 45, pp. 369-379 .

[17] Diks, E.B., De Kok, A.G., 1998, "Optimal control of a divergent N-echelon inventory system", *European Journal of operational Research*, 111, pp. 75-97.

[18] Diks, E.B., De Kok, A.G., 1999, "Computational Results for the Control of a Divergent N-Echelon Inventory System", *International Journal of Production Economics*, 59, pp. 327-336.

[19] Diks, E.B., De Kok, A.G., Lagodimos, A.G., 1996. "Multi-echelon Systems : A service measure perspective", *European Journal of Operational Research*, 95, pp.241-263.

[20] Eppen, G., 1979, "Effects of Centralization on Expected Costs in a Multi-Location Newsboy Problem", Management Science, 25, pp.498-501.

[21] Eppen, G., and Schrage, L., 1981, "Centralized Ordering Policies in a Multi-Warehouse System with Lead Times and Random Demand"
In : L.B. Schwartz, (Ed.), *Multi-Level Production/Inventory Control Systems : Theory and Practice*, North-Holland, Amsterdam, pp. 51-68.

[22] Federgruen, A., 1993, "Centralized Planning Models for Multi-Echelon Inventory Systems under Uncertainty" , In S.C. Graves, Rinnooy Kan, A.H.G., Zipkin, P.H., (Eds.), *Handbooks in Operations Research and Management Science*, 4, Elsevier (North_Holland), Amsterdam, Chapter 3, 133-173.

[23] Federgruen. A., P.H. Zipkin, 1984a, "Approximations of Dynamic Multilocation Production and Inventory Problems", *Management Science*, 30, pp.69-84.

[24] Federgruen. A., P.H. Zipkin, 1984b, "Computational Issues in a Infinite-Horizon Multi-Echelon Inventory Model", *Operations Research*, 32, pp. 818-836.

[25] Forrester, J.W., 1961, "Industrial Dynamics", *MIT Press*, Cambridge.

[26] Graves, S.C., 1981, "Multi-Stage Lot-Sizing : An Iterative Procedure", in L.B. .Schwarz Ed. "Multi-Level Production /Inventory Control Systems : Theory and Practice", North Holland, Amsterdam, pp.95-110.

[27] Hausman, W.H., N.K. Erkip,1994, "Multi-echelon vs. Single-Echelon Inventory Control Policies for Low-demand Items", *Management Science*, 33, pp. 1302-1316.

[28] Hadley G., T. Whitin, 1963, "Analysis of Inventory Systems", *Prentice-Hall*, Englewood Cliffs, NJ.

[29] Inderfurth, K., 1994, "Safety Stocks in Multistage Divergent Inventory Systems: A review", *International Journal of Production Economics*, 35, pp.321-329.

[30] Johnsson H., Silver, E.A., 1987 "Analysis of a Two-Echelon Inventory Control System with Complete Redistribution", *Management Science*, 33, pp.215-227.

[31] Lagodimos A.G., 1992, "Multi-Echelon Service Models for Inventory Systems under Different Rationing Policies", *International Journal of Production Research*, 30, pp. 939-958.

[32] Lagodimos, A.G., Anderson, E.J., 1993, "Optimal Positioning of Safety Stocks in MRP", *International Journal of Production Research*, 31, pp.1797-1813.

[33] Lagodimos, A.G., S. Koukoumialos, 2008, "Service Performance of Two-Echelon Supply Chains under Linear Rationing", *International Journal of Production Economics*, 112, pp.869-884.

[34] Muckstadt, J.A., L.J.Thomas. 1980, "Are Multi-Echelon Inventory Models Worth Implementing in Systems with Low-Demand-Rate Items?", *Management Science*, 26, pp.483-494.

[35] Rosling, K., 1986, "Optimal Lot-Sizing for Dynamic Assembly Systems", in S. Axsater et al. Eds. "Multi-Stage Production Planning and Inventory Control", *Springer Berlin Heidelberg*, pp.119-131.

[36] Rosling, K., 1989, "Optimal Inventory Policies for Assembly Systems under Random Demands", *Operations Research*, 37, pp.565-579

[37] Roundy, R. 1985 "98%-Effective Integer-Ratio Lot-Sizing for One-Warehouse Multi-Retailer Systems", *Management Science*, 31, pp. 1416-1430.

[38] Roundy, R. 1986, "98%-Effective Integer-Ratio Lot-Sizing Rule for a Multi-Product Multi-Stage Production /Inventory System", *Mathematics of Operations Research*, 11, pp. 699-729.

[39] Seidel, H.P., 1990, "A Multi-Echelon Inventory Model for a Distribution System with one Central Depot and N Local Warehouses", M.S. Dissertation, Catholic University of Brabant, The Netherlands.

[40] Silver, E.A, Peterson, R., 1985, "Decisions Systems for Inventory Management and Production Planning ", 2nd Edition, Wiley, New York.

[41] Sterman, J. 1989, "Modeling Managerial Behavior : Misperceptions of Feedback in a Dynamic Decision Making Experiment" *Management Science*, 35 pp.321-339.

[42] Swaminathan, J.M, R.Srinivasan, 1999, "Managing Individual Customer Service Constraints under Stochastic Demand", Operation Research, 24, pp.115-125.

[43] van Houtum, G.J., W.H.M Zijm, 1991, "Computational Procedures for Stochastic Multi-Echelon Production Systems", *International Journal of Production Economics*, 23, pp.223-237.

[44] van Houtum, G.J., K. Inderfurth, W.H.M. Zijm, 1996 "Materials Coordination in Stochastic Multi-Echelon Systems", *European Journal of Operational Research*, 95 pp. 1-23.

[45] van Donselaar, K., Wijngaard, J., 1986, "Practical Applications of the Echelon Approach in a System with Divergent Product Structure", *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, 266, pp.182-196.

[46] van Donselaar, K., Wijngaard, J., 1987, "Commonality and Safety Stocks", *Engineering Costs and Production Economics*, 12, pp. 197-204.

[47] van Donselaar, K., 1990. "Integral Stock Norms in Divergent Systems with Lot-Sizes", *European Journal of Operational Research*, 45, pp. 70-84.

[48] van der Heijden, M.C., 1997, "Supply Rationing in Multi-Echelon Divergent Systems", *European Journal of Operational Research*, 101, pp.532-549.

[49] van der Heijden, M.C., 2000, "Near Cost-Optimal Inventory Control Policies for Divergent Networks under Fill Rate Constraints", *International Journal of Production Economics*, 63, pp.161-179.

[50] van der Heijden, M.C., Diks, E.B., de Kok., A.G., 1997, "Stock Allocation in General Multi-Echelon Distribution Systems with (R,S) order-up-to Policies ", *International Journal of Production Economics*, 49, pp.157-174.

[51] Verrijdt, J.H.C.M., de Kok, A.G., 1993, "Distribution Planning for a Divergent Two-Echelon Network without Intermediate Stocks under Service Restrictions", *European Journal of Operational Resesarch*.

[52] Verrijdt, J.H.C.M., de Kok, A.G., 1995, "Distribution Planning for a Divergent N-Echelon Network without Intermediate Stocks under Service Restrictions", *International Journal of Production Economics*, 38, pp. 225-243.

[53] Verrijdt, J.H.C.M., A.G. De Kok., 1996, "Distribution Planning for Divergent Depotless Two-Echelon Network under Service Constraints", *European Journal of Operational Research*, 89, pp. 341-354.

[54] Veinott , J.H.C.M., 1965, "Optimal policy in a dynamic single product non-stationary inventory model with several demand classes", *Operations Research*, 13, pp. 776-778.

[55] Williams, J.F. 1982, "On the Optimality of Integer Lot Size Ratios in Economic Lot Size Determination in Multi-Stage Assembly systems", *Management Science*, 28, pp.1341-1349.

[56] Zhang, J., 2003, "Managing Multi-Customer Service Level Requirements with a Simple Rationing Policy", Operations Research Letters, 31, pp.477-482.

[57] Zipkin, P., 1984, "On the Imbalance of Inventories in Multi-Echelon Systems", *Mathematics of Operations Research*, 9, pp. 445-475.