ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΣΥΜΠΑΓΕΙΣ ΕΛΑΧΙΣΤΙΚΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΓΕΝΟΥΣ ΜΗΔΕΝ ΣΤΗΝ n-ΔΙΑΣΤΑΤΗ ΣΦΑΙΡΑ

ΛΑΜΠΡΙΝΗ ΖΟΥΡΚΑ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2008

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε τη Δευτέρα, 30-06-2008, από την εξεταστική επιτροπή:

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ	ΒΑΘΜΙΔΑ	ΥΠΟΓΡΑΦΗ
Θεόδωρος Βλάχος (Επιβλέπων Καθηγητής)	Αναπληρωτής Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων	
Χρήστος Μπαϊκούσης	Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων	
Θωμάς Χασάνης	Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων	

Εισαγωγή

Μια ισομετρική εμβάπτιση ενός πολυπτύγματος Riemann σε ένα πολύπτυγμα Riemann λέγεται ελαχιστική αν το διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας είναι το μηδενικό ή ισοδύναμα αν το ίχνος της δεύτερης θεμελιώδους μορφής της ισομετρικής εμβάπτισης είναι ταυτοτικά μηδέν. Από τον τύπο της πρώτης μεταβολής του εμβαδού γνωρίζουμε πως οι ισομετρικές ελαχιστικές εμβαπτίσεις είναι ακριβώς τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης του εμβαδού. Επομένως, φυσικό επακόλουθο είναι πως οι ελαχιστικές ισομετρικές εμβαπτίσεις αποτελούν ανώτερης διάστασης γενίκευση των γεωδαισιακών καμπυλών και απαρτίζουν μια σημαντική οικογένεια ισομετρικών εμβαπτίσεων.

Στην παρούσα εργασία ασχολούμαστε με ελαχιστικές επιφάνειες στην S^n, δηλαδή ισομετρικές ελαχιστικές εμβαπτίσεις από ένα προσανατολισμένο, συνεκτικό, διδιάστατο πολύπτυγμα Riemann στην n-διάστατη μοναδιαία σφαίρα

$$S^n = \{(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n+1}^2 = 1\},$$

η οποία είναι εφοδιασμένη με τη συνήθη μετρική Riemann $\langle , \rangle$ και ως γνωστόν έχει σταθερή καμπυλότητα τομής 1. Παρόλη την ομορφιά που έχει από μόνη της η μελέτη ελαχιστικών επιφανειών στη σφαίρα, έχει αποδειχθεί ότι σχετίζεται με τη μελέτη μεμονωμένων ιδιαζόντων σημείων ελαχιστικών εμβαπτίσεων στον Ευκλείδειο χώρο. Ο E. Calabi στο άρθρο [6] παρατήρησε ότι αν έχουμε ένα τριδιάστατο ελαχιστικό υποπολύπτυγμα M^3 στον Ευκλείδειο χώρο E^{n+3}, τότε το πολύπτυγμα $M^3 \cap S^{n+2}$, για σφαίρα S^{n+2} κατάλληλου κέντρου, είναι διδιάστατο ελαχιστικό υποπολύπτυγμα στην S^{n+2}. Αντίστροφα, αν M^2 είναι ένα διδιάστατο ελαχιστικό υποπολύπτυγμα της S^{n+2}, τότε ο κώνος που δημιουργείται από τις ημιευθείες με αρχή το κέντρο της σφαίρας S^{n+2} και διέρχονται από τα σημεία του M^2, είναι τριδιάστατο ελαχιστικό υποπολύπτυγμα στον Ευκλείδειο χώρο E^{n+3} με μεμονωμένο ιδιάζον σημείο το κέντρο της σφαίρας αν το M^2 δεν είναι ολικά γεωδαισιακό στην S^{n+2}. Επομένως, η μελέτη ισομετρικών ελαχιστικών εμβαπτίσεων τριδιάστατων πολυπτυγμάτων Riemann με μεμονωμένο ιδιάζον σημείο στον Ευκλείδειο χώρο, ανάγεται στη μελέτη ισομετρικών ελαχιστικών εμβαπτίσεων διδιάστατων πολυπτυγμάτων Riemann στη σφαίρα. Την ιδέα αυτή υλοποίησε ο E. Calabi στο πρωτοποριακό άρθρο [6] μελετώντας ελαχιστικές επιφάνειες στη σφαίρα με την απλούστερη δυνατή τοπολογία, δηλαδή συμπαγείς ελαχιστικές επιφάνειες γένους μηδέν ή ισοδύναμα ομοιομορφικές με την S^2. Αυτό το άρθρο έδωσε το έναυσμα για τη μελέτη ελαχιστικών επιφανειών στη σφαίρα. Λίγο μετά την εμφάνιση του άρθρου του E. Calabi, ο S.S. Chern παρουσίασε μια πιο γεωμετρική προσέγγιση των ελαχιστικών επιφανειών στη σφαίρα κάνοντας χρήση των θεμελιωδών μορφών ανωτέρας τάξεως. Η μελέτη αυτή συνεχίστηκε από τον J.L.M. Barbosa.

Ο στόχος της εργασίας είναι να αποδείξουμε τα αποτελέσματα του E. Calabi στο [6], με τον τρόπο που τα αναδιατύπωσε ο S.S. Chern στο [8], καθώς και του J.L.M. Barbosa στο [4].

Γνωρίζουμε ότι τα ολικά γεωδαισιακά m-διάστατα υποπολυπτύγματα της S^n, όπου $2 \leq m \leq n-1$, είναι οι μέγιστες m-σφαίρες της S^n, δηλαδή τομές της S^n με $(m+1)$-διάστατους υποχώρους του $\mathbb{R}^{n+1}$. Μια ισομετρική εμβάπτιση $f : (M, \langle,\rangle) \longrightarrow S^n$, όπου $(M, \langle,\rangle)$ είναι πολύπτυγμα Riemann, καλείται χορεσμένη (full) αν η εικόνα της δεν περιέχεται σε κανένα ολικά γεωδαισιακό υποπολύπτυγμα της S^n.

Στην εργασία αυτή το πρώτο αποτέλεσμα που θα αποδείξουμε είναι ότι οι συμπαγείς, προσανατολισμένες ελαχιστικές επιφάνειες γένους μηδέν στη σφαίρα είναι χορεσμένες μόνο σε άρτιας διάστασης σφαίρα. Επιπλέον θα δώσουμε μια εκτίμηση του εμβαδού των. Το συμπέρασμα αυτό το απέδειξε ο E. Calabi στο άρθρο [6]. Αργότερα, ο S.S. Chern στο [8] έδωσε μια διαφορετική προσέγγιση του αποτελέσματος το οποίο είναι το εξής:

Θεώρημα I. *Έστω $f : (M, \langle,\rangle) \longrightarrow S^n, n \geq 3$, συμπαγής, προσανατολισμένη, χορεσμένη, ελαχιστική επιφάνεια γένους μηδέν. Τότε:*

(i) *Ο αριθμός n είναι άρτιος ($n = 2m$).*

(ii) *Το εμβαδό $A(M)$ της επιφάνειας είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π και ισχύει $A(M) \geq 2\pi m(m+1)$.*

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι οι συμπαγείς, προσανατολισμένες, χορεσμένες, ελαχιστικές επιφάνειες γένους μηδέν στη σφαίρα είναι άκαμπτες (rigid), ένα αποτέλεσμα που οφείλεται στον J.L.M. Barbosa [4]:

Θεώρημα II. *Έστωσαν $f : (M, \langle,\rangle) \longrightarrow S^{2m}$, $\widetilde{f} : (M, \langle,\rangle) \longrightarrow S^{2m}$ συμπαγείς, προσανατολισμένες, χορεσμένες, ελαχιστικές επιφάνειες γένους μηδέν. Τότε υπάρχει ισομετρία $\tau : S^{2m} \longrightarrow S^{2m}$ ώστε $\widetilde{f} = \tau \circ f$.*

Τέλος, θα δείξουμε πως οι συμπαγείς, προσανατολισμένες, χορεσμένες, ελαχιστικές επιφάνειες γένους μηδέν στη σφαίρα με σταθερή καμπυλότητα Gauss ταξινομούνται πλήρως. Για την ακρίβεια αποδεικνύουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα του E. Calabi [6]:

Θεώρημα III. *Έστω $f : (M, \langle,\rangle) \longrightarrow S^{2m}$ συμπαγής, προσανατολισμένη, χορεσμένη, ελαχιστική επιφάνεια γένους μηδέν. Αν το πολύπτυγμα Riemann $(M, \langle,\rangle)$ έχει σταθερή καμπυλότητα Gauss K, τότε $K = \frac{2}{m(m+1)}$ και υπάρχουν ισομετρίες $F : (M, \langle,\rangle) \longrightarrow S^2\left(\sqrt{\frac{m(m+1)}{2}}\right)$ και $\tau : S^{2m} \longrightarrow S^{2m}$ ώστε $f \circ F^{-1} = \tau \circ f_m$, όπου $f_m : S^2\left(\sqrt{\frac{m(m+1)}{2}}\right) \longrightarrow S^{2m}$ είναι η επιφάνεια Veronese στην S^{2m}.*

Για τις αποδείξεις αυτών των αποτελεσμάτων χρησιμοποιούμε εργαλεία και μεθόδους από τη θεωρία κινουμένου πλαισίου, των θεμελιωδών μορφών ανώτερης τάξης και τη θεωρία επιφανειών Riemann (Θεώρημα Riemann-Roch).

Επιπλέον, η προσέγγιση που ακολουθούμε μας επιτρέπει να δώσουμε μια απόδειξη της εικασίας του U. Simon [15] για τις περιπτώσεις που είναι ήδη γνωστό ότι ισχύει. Παραθέτουμε την απόδειξη αυτών των περιπτώσεων στο τέλος της διατριβής.

Ευχαριστίες

Εκφράζω τις θερμές μου ευχαριστίες στον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Θεόδωρο Βλάχο για τη συνεχή επίβλεψη και καθοδήγησή του. Ευχαριστίες οφείλω και στα άλλα δύο μέλη της εξεταστικής επιτροπής, τον κ. Θωμά Χασάνη και τον κ. Χρήστο Μπαϊκούση για τις χρήσιμες παρατηρήσεις τους στην εργασία μου.

Επίσης, ευχαριστώ τους υποψήφιους διδάκτορες Χρήστο Τατάκη και Χρυσόστομο Ψαρουδάκη για τη βοήθειά τους.

Τέλος, ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω στη μεταπτυχιακή φοιτήτρια Ασημίνα Μπούσμπουρα για την πολύτιμη βοήθεια, υποστήριξη και φιλία της κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών σπουδών μου.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Προκαταρκτικά

1.1 Ισομετρικές εμβαπτίσεις

Στο παρόν κεφάλαιο θα αναφέρουμε απαραίτητα στοιχεία από τη θεωρία των ισομετρικών εμβαπτίσεων, του κινουμένου πλαισίου και των θεμελιωδών μορφών ανώτερης τάξης. Για τις βασικές έννοιες της Διαφορικής Γεωμετρίας παραπέμπουμε στα [10, 14, 13].

Έστω M^n διαφορίσιμο πολύπτυγμα διάστασης n. Για τυχόν $p \in M^n$ συμβολίζουμε με T_pM^n τον εφαπτόμενο χώρο του M^n στο p και με $TM^n = \{(p,v) : p \in M^n, v \in T_pM^n\}$ την εφαπτόμενη δέσμη του M^n. Το σύνολο των διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων του M^n το συμβολίζουμε με $\Delta(M^n)$ ή $\Gamma(TM^n)$ και το σύνολο των διαφορίσιμων συναρτήσεων $g : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ το συμβολίζουμε με $D(M^n)$ ή $C^\infty(M^n, \mathbb{R})$.

Ορισμός 1.1.1. *Έστω $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+k}$ διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ των διαφορίσιμων πολυπτυγμάτων M^n και $\overline{M}^{n+k}$. Διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της f καλούμε κάθε απεικόνιση V η οποία σε κάθε $p \in M^n$ αντιστοιχεί ένα διάνυσμα $V|_p \in T_{f(p)}\overline{M}^{n+k}$ και είναι διαφορίσιμη με την εξής έννοια: Αν $(\overline{U}, y)$ είναι χάρτης του $\overline{M}^{n+k}$ γύρω από το $f(p)$ με συντεταγμένες $(y_1, y_2, ..., y_{n+k})$ και $V|_q = \sum_{i=1}^{n+k} g_i(q) \frac{\partial}{\partial y_i}|_{f(q)}$ για κάθε $q \in f^{-1}(\overline{U})$, οι συναρτήσεις g_i, $i = 1, 2, ..., n+k$, είναι διαφορίσιμες.*

Συμβολίζουμε με $\Delta(f)$ το σύνολο των διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων κατά μήκος της f. Προφανώς το $\Delta(f)$ είναι το σύνολο των πεδίων (sections) της *επαγόμενης διανυσματικής δέσμης* $f^*(T\overline{M}^{n+k}) := \{(p,v) : p \in M^n, v \in T_{f(p)}\overline{M}^{n+k}\}$ βαθμίδας (rank) $n+k$, δηλαδή $\Delta(f) = \Gamma(f^*(T\overline{M}^{n+k}))$. Αν $X \in \Delta(M^n)$, τότε η απεικόνιση η οποία σε κάθε $p \in M^n$ αντιστοιχεί το διάνυσμα $df_p(X|_p)$, είναι διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της f και συμβολίζεται με $df(X)$. Επιπλέον, αν $\overline{Y} \in \Delta(\overline{M}^{n+k})$, τότε το $\overline{Y} \circ f$ είναι επίσης διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της f.

Ορισμός 1.1.2. *Έστω $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+k}$ διαφορίσιμη απεικόνιση και $X \in \Delta(M^n)$, $\overline{X} \in \Delta(\overline{M}^{n+k})$. Τα X, $\overline{X}$ λέγονται f-συσχετισμένα (f-related) αν $\overline{X} \circ f = df(X)$.*

Λήμμα 1.1.1. *Αν $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+k}$ είναι διαφορίσιμη απεικόνιση και X, $Y \in \Delta(M^n)$ είναι f-συσχετισμένα των $\overline{X}$, $\overline{Y} \in \Delta(\overline{M}^{n+k})$ αντίστοιχα, τότε τα γινόμενα Lie $[X, Y]$, $[\overline{X}, \overline{Y}]$ είναι f-συσχετισμένα.*

Απόδειξη. Έχουμε $\overline{X} \circ f = df(X)$, άρα για κάθε $p \in M^n$, $\overline{X}|_{f(p)} = df_p(X|_p)$. Θα δείξουμε ότι $[\overline{X}, \overline{Y}] \circ f = df\big([X, Y]\big)$, ή ισοδύναμα

$$\overline{X}|_{f(p)}(\overline{Y}) - \overline{Y}|_{f(p)}(\overline{X}) = df_p\big([X, Y]|_p\big).$$

Για κάθε $\varphi \in D(\overline{M}^{n+k})$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\big(\overline{X}|_{f(p)}(\overline{Y}) - \overline{Y}|_{f(p)}(\overline{X})\big)(\varphi) &= \overline{X}|_{f(p)}\big(\overline{Y}(\varphi)\big) - \overline{Y}|_{f(p)}\big(\overline{X}(\varphi)\big) \\
&= df_p(X|_p)\big(\overline{Y}(\varphi)\big) - df_p(Y|_p)\big(\overline{X}(\varphi)\big) \\
&= X|_p\big(\overline{Y}(\varphi) \circ f\big) - Y|_p\big(\overline{X}(\varphi) \circ f\big).
\end{aligned}$$

Όμως $\overline{Y}(\varphi) \circ f = Y(\varphi \circ f)$, αφού για κάθε $p \in M^n$ ισχύει: $\overline{Y}|_{f(p)}(\varphi) = df_p(Y|_p)(\varphi) = Y|_p(\varphi \circ f)$. Τελικά,

$$\begin{aligned}
\big(\overline{X}|_{f(p)}(\overline{Y}) - \overline{Y}|_{f(p)}(\overline{X})\big)(\varphi) &= X|_p\big(Y(\varphi \circ f)\big) - Y|_p\big(X(\varphi \circ f)\big) \\
&= (XY - YX)|_p(\varphi \circ f) \\
&= [X, Y]|_p(\varphi \circ f) \\
&= df_p\big([X, Y]|_p\big)(\varphi).
\end{aligned}$$

□

Χρειαζόμαστε την ακόλουθη πρόταση, η απόδειξη της οποίας δίνεται στο [13].

Πρόταση 1.1.1. *Έστω M^n διαφορίσιμο πολύπτυγμα και $(\overline{M}^{n+k}, \langle , \rangle)$ διαφορίσιμο πολύπτυγμα Riemann με συνοχή Levi-Civita $\overline{\nabla}$. Αν $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+k}$ είναι διαφορίσιμη απεικόνιση, τότε υπάρχει μοναδική απεικόνιση*

$$\nabla^f : \Delta(M^n) \times \Delta(f) \longrightarrow \Delta(f),$$

$$(X, V) \longmapsto \nabla^f_X V,$$

για την οποία ισχύουν:
(i) $\nabla^f_{X_1+X_2} V = \nabla^f_{X_1} V + \nabla^f_{X_2} V$,
(ii) $\nabla^f_{gX} V = g\nabla^f_X V$,
(iii) $\nabla^f_X (V_1 + V_2) = \nabla^f_X V_1 + \nabla^f_X V_2$,
(iv) $\nabla^f_X (gV) = X(g)V + g\nabla^f_X V$,
(v) $\nabla^f_X (\overline{Y} \circ f) = \overline{\nabla}_{df(X)} \overline{Y}$,
(vi) $X\big(\langle V_1, V_2 \rangle\big) = \langle \nabla^f_X V_1, V_2 \rangle + \langle V_1, \nabla^f_X V_2 \rangle$,
(vii) $\nabla^f_X df(Y) - \nabla^f_Y df(X) = df\big([X, Y]\big)$,
όπου $X, X_1, X_2, Y \in \Delta(M^n)$, $\overline{Y} \in \Delta(\overline{M}^{n+k})$, $V, V_1, V_2 \in \Delta(f)$ και $g \in D(M^n)$.

Η απεικόνιση ∇^f είναι η συνοχή που επάγει η συνοχή Levi-Civita του $\overline{M}^{n+k}$ στην επαγόμενη δέσμη $f^*(T\overline{M}^{n+k})$.

Ορισμός 1.1.3. *Έστωσαν $(M^n, \langle , \rangle)$ και $(\overline{M}^{n+k}, \langle , \rangle)$ διαφορίσιμα πολυπτύγματα Riemann. Μια διαφορίσιμη απεικόνιση $f : (M^n, \langle , \rangle) \longrightarrow (\overline{M}^{n+k}, \langle , \rangle)$ καλείται ισομετρική εμβάπτιση αν για κάθε $p \in M^n$ ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) *το διαφορικό $df_p : T_pM^n \longrightarrow T_{f(p)}\overline{M}^{n+k}$ είναι ένεση και*

(ii) $\langle df_p(v), df_p(w)\rangle_{f(p)} = \langle v, w\rangle_p$, *για κάθε $v, w \in T_pM^n$.*

Συμβολίζουμε τη συνοχή Levi-Civita του M^n με ∇ και τον τανυστή καμπυλότητάς του με R. Με $\overline{\nabla}$ συμβολίζουμε τη συνοχή Levi-Civita του $\overline{M}^{n+k}$ και με $\overline{R}$ τον τανυστή καμπυλότητάς του.

Αν $\{e_1, ..., e_n\}$ είναι τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο του M^n, τότε

$$R(e_i, e_j)e_k = \sum_{l=1}^{n} R_{ijkl}e_l,$$

όπου $R_{ijkl} := \langle R(e_i, e_j)e_k, e_l\rangle$.

Ορισμός 1.1.4. *Έστω M^n διαφορίσιμο πολύπτυγμα. Μια απεικόνιση*

$$T : \underbrace{\Delta(M^n) \times ... \times \Delta(M^n)}_{r} \longrightarrow D(M^n)$$

καλείται $(r, 0)$-τανυστικό πεδίο αν είναι $D(M^n)$-γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή της. Επιπλέον, αν E είναι διανυσματική δέσμη (vector bundle) υπεράνω του M^n, τότε μια απεικόνιση

$$T : \underbrace{\Delta(M^n) \times ... \times \Delta(M^n)}_{r} \longrightarrow \Gamma(E),$$

όπου $\Gamma(E)$ είναι το σύνολο των πεδίων (sections) της διανυσματικής δέσμης, καλείται $(r, 1)$-τανυστικό πεδίο αν είναι $D(M^n)$-γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή της.

Είναι γνωστό ότι αν T είναι $(r, 0)$-τανυστικό πεδίο ή $(r, 1)$-τανυστικό πεδίο και $X_1, ..., X_r, Y_1, ..., Y_r \in \Delta(M^n)$ με $X_i|_p = Y_i|_p$ για κάθε $i \in \{1, ..., r\}$ σε κάποιο σημείο p του M^n, τότε $T(X_1, ..., X_r)|_p = T(Y_1, ..., Y_r)|_p$. Αυτό μας επιτρέπει να βλέπουμε το τανυστικό πεδίο T σε κάθε σημείο $p \in M^n$ ως πλειογραμμική απεικόνιση $T|_p : T_pM^n \times ... \times T_pM^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ή $T|_p : T_pM^n \times ... \times T_pM^n \longrightarrow E_p$, όπου E_p είναι το νήμα (fiber) της δέσμης E υπεράνω του p.

Έστω σ ένας διδιάστατος υπόχωρος του T_pM^n. Η *καμπυλότητα τομής* του M^n στο σημείο p για το επίπεδο σ είναι ο αριθμός $K(p, \sigma) = \langle R(e_1, e_2)e_2, e_1\rangle$, όπου $\{e_1, e_2\}$ είναι τυχαία ορθομοναδιαία βάση του σ.

Ο *τανυστής Ricci* του M^n είναι το συμμετρικό (2,0)-τανυστικό πεδίο

$$Q : \Delta(M^n) \times \Delta(M^n) \longrightarrow D(M^n),\ (X, Y) \longmapsto Q(X, Y) := \sum_{j=1}^{n} \langle R(e_j, X)Y, e_j\rangle,$$

όπου $\{e_1, ..., e_n\}$ είναι τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο του M^n. Έστω p σημείο του M^n. Η *καμπυλότητα Ricci* στο σημείο p και στη μοναδιαία διεύθυνση $x \in T_pM^n$ είναι

$$\mathrm{Ric}(x) = Q(x, x).$$

Η *αριθμητική καμπυλότητα* του M^n είναι $Sc = \sum_{j=1}^n \mathrm{Ric}(e_j)$.

Για κάθε ισομετρική εμβάπτιση $f : (M^n, \langle,\rangle) \longrightarrow (\overline{M}^{n+k}, \langle,\rangle)$ ορίζεται ο *τανυστής καμπυλότητας* R^f της επαγόμενης δέσμης $f^*(T\overline{M}^{n+k})$ ως προς τη συνοχή ∇^f, ως εξής:

$$R^f : \Delta(M^n) \times \Delta(M^n) \times \Delta(f) \longrightarrow \Delta(f),$$

$$(X, Y, V) \longmapsto R^f(X, Y)V := \nabla^f_X \nabla^f_Y V - \nabla^f_Y \nabla^f_X V - \nabla^f_{[X,Y]} V$$

και ο οποίος είναι $D(M^n)$-γραμμικός ως προς κάθε μεταβλητή.

Λήμμα 1.1.2. *Αν* $f : (M^n, \langle,\rangle) \longrightarrow (\overline{M}^{n+k}, \langle,\rangle)$ *είναι ισομετρική εμβάπτιση και* $X, Y, Z \in \Delta(M^n)$ *είναι* f*-συσχετισμένα των* $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z} \in \Delta(\overline{M}^{n+k})$ *αντίστοιχα, τότε ισχύει* $\big(\overline{R}(\overline{X}, \overline{Y})\overline{Z}\big) \circ f = R^f(X, Y)df(Z)$.

Απόδειξη. Λόγω της Πρότασης 1.1.1 ισχύει

$$\begin{aligned}
\nabla^f_Y df(Z) &= \nabla^f_Y(\overline{Z} \circ f) = \overline{\nabla}_{df(Y)}\overline{Z} = \overline{\nabla}_{\overline{Y} \circ f}\overline{Z} = (\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{Z}) \circ f, \\
\nabla^f_X \nabla^f_Y df(Z) &= \nabla^f_X\big((\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{Z}) \circ f\big) = \overline{\nabla}_{df(X)}(\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{Z}) = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{Z}) \circ f.
\end{aligned}$$

Επίσης, κάνοντας χρήση του Λήμματος 1.1.1, έχουμε

$$\nabla^f_{[X,Y]} df(Z) = \nabla^f_{[X,Y]}(\overline{Z} \circ f) = \overline{\nabla}_{df([X,Y])}\overline{Z} = \overline{\nabla}_{[\overline{X},\overline{Y}] \circ f}\overline{Z} = (\overline{\nabla}_{[\overline{X},\overline{Y}]}\overline{Z}) \circ f.$$

Επομένως ισχύει

$$\begin{aligned}
R^f(X, Y)df(Z) &= (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{Z}) \circ f - (\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z}) \circ f - (\overline{\nabla}_{[\overline{X},\overline{Y}]}\overline{Z}) \circ f \\
&= (\overline{R}(\overline{X}, \overline{Y})\overline{Z}) \circ f.
\end{aligned}$$

□

Για κάθε ισομετρική εμβάπτιση $f : (M^n, \langle,\rangle) \longrightarrow (\overline{M}^{n+k}, \langle,\rangle)$ και τυχόν σημείο $p \in M^n$, έχουμε την ανάλυση του εφαπτόμενου χώρου $T_{f(p)}\overline{M}^{n+k}$ στο σημείο $f(p) \in \overline{M}^{n+k}$ στο εξής ορθογώνιο ευθύ άθροισμα ως προς το εσωτερικό γινόμενο που ορίζει η μετρική Riemann του $\overline{M}^{n+k}$

$$T_{f(p)}\overline{M}^{n+k} = df_p(T_pM^n) \oplus \big(df_p(T_pM^n)\big)^{\perp}.$$

Ο εφαπτόμενος χώρος T_pf της f στο p είναι ο n-διάστατος διανυσματικός υπόχωρος $df_p(T_pM^n)$ του $(n + k)$-διάστατου διανυσματικού χώρου $T_{f(p)}\overline{M}^{n+k}$. Η *εφαπτόμενη διανυσματική δέσμη* Tf της f είναι η $Tf := \{(p, v) : p \in M^n, v \in T_pf\}$, έχει βαθμίδα n και το σύνολο των πεδίων της είναι $\Gamma(Tf) =: \Delta_f(M^n)$. Ορίζουμε τον *κάθετο χώρο* της f στο p να είναι ο k-διάστατος διανυσματικός χώρος $N_pf := \{\xi : \xi \in (T_pf)^{\perp}\}$. Η *κάθετη διανυσματική δέσμη* Nf της f είναι η ένωση όλων των καθέτων χώρων, δηλαδή $Nf := \{(p,\xi) : p \in M^n, \xi \in N_pf\}$, έχει βαθμίδα k και το σύνολο των πεδίων της είναι $\Gamma(Nf) =: \Delta^{\perp}(f)$. Τα πεδία της κάθετης διανυσματικής δέσμης Nf τα καλούμε *κάθετα διανυσματικά πεδία κατά μήκος της* f.

Λόγω της παραπάνω ανάλυσης, για τυχόν $v \in T_{f(p)}\overline{M}^{n+k}$ υπάρχουν μοναδικά διανύσματα $v^{\top} \in T_pM^n$ και $v^{\perp} \in N_pf$ έτσι ώστε $v = df_p(v^{\top}) + v^{\perp}$. Κατά συνέπεια, για κάθε $V \in \Delta(f)$ υπάρχουν μοναδικά διανυσματικά πεδία $V^{\top} \in \Delta(M^n)$ και $V^{\perp} \in \Delta^{\perp}(f)$ ώστε

$$V = df(V^{\top}) + V^{\perp}.$$

Για X, $Y \in \Delta(M^n)$ έχουμε επομένως την ανάλυση:

$$\nabla^f_X df(Y) = df\Big(\big(\nabla^f_X df(Y)\big)^{\top}\Big) + \big(\nabla^f_X df(Y)\big)^{\perp},$$

όπου $\big(\nabla^f_X df(Y)\big)^{\top} \in \Delta(M^n)$ και $\big(\nabla^f_X df(Y)\big)^{\perp} \in \Delta^{\perp}(f)$.

Αποδεικνύεται ότι $\big(\nabla^f_X df(Y)\big)^{\top} = \nabla_X Y$.

Ορίζουμε την απεικόνιση

$$B : \Delta(M^n) \times \Delta(M^n) \longrightarrow \Delta^{\perp}(f),\ (X,Y) \longmapsto B(X,Y) := \big(\nabla^f_X df(Y)\big)^{\perp}.$$

Αποδεικνύεται ότι η B είναι συμμετρικό (2,1)-τανυστικό πεδίο και καλείται *δεύτερη θεμελιώδης μορφή* της f. Σύμφωνα με τα παραπάνω, η τελευταία σχέση γίνεται

$$\nabla^f_X df(Y) = df(\nabla_X Y) + B(X,Y),$$

ο λεγόμενος *τύπος του Gauss*.

Για $X \in \Delta(M^n)$, $\xi \in \Delta^{\perp}(f)$ έχουμε την ανάλυση:

$$\nabla^f_X \xi = df\big((\nabla^f_X\xi)^{\top}\big) + (\nabla^f_X\xi)^{\perp},$$

όπου $(\nabla^f_X\xi)^{\top} \in \Delta(M^n)$ και $(\nabla^f_X\xi)^{\perp} \in \Delta^{\perp}(f)$.

Η απεικόνιση *Weingarten* στη διεύθυνση $\xi \in \Delta^{\perp}(f)$ είναι

$$A_{\xi} : \Delta(M^n) \longrightarrow \Delta(M^n),\ X \longmapsto A_{\xi}X := -(\nabla^f_X\xi)^{\top}.$$

Η απεικόνιση Weingarten είναι $D(M^n)$-γραμμική ως προς ξ και αυτοπροσηρτημένο (1,1)-τανυστικό πεδίο. Αποδεικνύεται ότι $\langle A_{\xi}X, Y\rangle = \langle B(X,Y), \xi\rangle$.

Επίσης, ορίζουμε την απεικόνιση

$$\nabla^{\perp} : \Delta(M^n) \times \Delta^{\perp}(f) \longrightarrow \Delta^{\perp}(f),\ (X,\xi) \longmapsto \nabla^{\perp}_X\xi := (\nabla^f_X\xi)^{\perp},$$

η οποία είναι η *συνοχή της κάθετης διανυσματικής δέσμης* Nf. Επομένως, από τα παραπάνω παίρνουμε τον *τύπο του Weingarten* :

$$\nabla^f_X\xi = -df(A_{\xi}X) + \nabla^{\perp}_X\xi.$$

Θεωρούμε τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{\xi_1,...,\xi_k\}$ της Nf. Το *διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας* της ισομετρικής εμβάπτισης f ορίζεται να είναι το

$$H = \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{k}(\mathrm{trace}A_{\xi_\alpha})\xi_\alpha.$$

Το H είναι καλά ορισμένο κάθετο διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της f. Επιπλέον ισχύει

$$H = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}B(e_j,e_j),$$

όπου $\{e_1,...,e_n\}$ τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο του M^n.

Ορισμός 1.1.5. *Μια ισομετρική εμβάπτιση f λέγεται ελαχιστική αν $H=0$.*

Ο *τανυστής κάθετης καμπυλότητας* της ισομετρικής εμβάπτισης f ορίζεται να είναι η απεικόνιση

$$R^\perp : \Delta(M^n)\times\Delta(M^n)\times\Delta^\perp(f)\longrightarrow\Delta^\perp(f),$$
$$(X,Y,\xi)\longmapsto R^\perp(X,Y)\xi := \nabla^\perp_X\nabla^\perp_Y\xi - \nabla^\perp_Y\nabla^\perp_X\xi - \nabla^\perp_{[X,Y]}\xi.$$

Αποδεικνύεται ότι ο $R^\perp$ είναι $D(M^n)$-γραμμικός ως προς κάθε μεταβλητή.

Τέλος, για $\xi\in\Delta^\perp(f)$ ορίζουμε το (2,1)-τανυστικό πεδίο του M^n

$$(\nabla_X A_\xi)Y := \nabla_X(A_\xi Y) - A_\xi(\nabla_X Y),$$

όπου $X,Y\in\Delta(M^n)$.

Για ισομετρικές εμβαπτίσεις ισχύουν:

(i) η *εξίσωση Gauss*

$$\begin{aligned}\langle R^f(X,Y)df(Z),df(W)\rangle &= \langle R(X,Y)Z,W\rangle + \langle B(X,Z),B(Y,W)\rangle\\ &- \langle B(Y,Z),B(X,W)\rangle,\end{aligned}$$

(ii) η *εξίσωση Codazzi*

$$\left(R^f(X,Y)\xi\right)^\top = (\nabla_Y A_\xi)X - A_{\nabla^\perp_Y\xi}X - (\nabla_X A_\xi)Y + A_{\nabla^\perp_X\xi}Y,$$

(iii) η *εξίσωση Ricci*

$$\left(R^f(X,Y)\xi\right)^\perp = R^\perp(X,Y)\xi - B(X,A_\xi Y) + B(Y,A_\xi X),$$

όπου $X,Y,Z,W\in\Delta(M^n)$ και $\xi\in\Delta^\perp(f)$.

Θεωρούμε τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{e_1,...,e_n\}$ του M^n. Το *μήκος της δεύτερης θεμελιώδους μορφής* ορίζεται ως η συνάρτηση

$$\|B\| := \sqrt{\sum_{j,l=1}^{n}|B(e_j,e_l)|^2}.$$

Αποδεικνύεται ότι είναι καλά ορισμένη, δηλαδή ανεξάρτητη του πλαισίου και ότι $\|B\|^2 = \sum_{\alpha=1}^{k} \mathrm{trace}(A_{\xi_\alpha} \circ A_{\xi_\alpha})$.

Έστω $f : (M^n, \langle,\rangle) \longrightarrow (\overline{M}_c^{n+k}, \langle,\rangle)$ ισομετρική εμβάπτιση όπου M^n είναι διαφορίσιμο πολύπτυγμα Riemann και $\overline{M}_c^{n+k}$ είναι διαφορίσιμο πολύπτυγμα Riemann με σταθερή καμπυλότητα τομής c. Για $p \in M^n$, θεωρούμε διανύσματα $x, y \in T_pM^n$ και ορθομοναδιαία βάση $\{\xi_1, ..., \xi_k\}$ του N_pf. Από την εξίσωση Gauss αποδεικνύεται ότι για τον τανυστή Ricci ισχύει

$$Q(x,y) = \sum_{\alpha=1}^{k} (\mathrm{trace}A_{\xi_\alpha})\langle A_{\xi_\alpha}x, y\rangle - \sum_{\alpha=1}^{k} \langle A_{\xi_\alpha}x, A_{\xi_\alpha}y\rangle + (n-1)c\langle x, y\rangle.$$

Αν x είναι μοναδιαίο, τότε η καμπυλότητα Ricci στη διεύθυνση x δίνεται από τη σχέση

$$\mathrm{Ric}(x) = \sum_{\alpha=1}^{k} (\mathrm{trace}A_{\xi_\alpha})\langle A_{\xi_\alpha}x, x\rangle - \sum_{\alpha=1}^{k} |A_{\xi_\alpha}x|^2 + (n-1)c.$$

Επιπλέον, για την αριθμητική καμπυλότητα ισχύει

$$Sc = n(n-1)c + n^2|H|^2 - \|B\|^2. \tag{1.1}$$

Έστω $f : M^2 \longrightarrow S^n$ ισομετρική εμβάπτιση ενός πολύπτυγματος Riemann M^2 στη μοναδιαία σφαίρα S^n. Θεωρούμε τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{e_1, e_2\}$ του M^2. Τότε η f είναι ελαχιστική αν και μόνο αν $B(e_1, e_1) + B(e_2, e_2) = 0$. Για την αριθμητική καμπυλότητα έχουμε $Sc = 2K$, όπου K είναι η καμπυλότητα Gauss του M^2. Επομένως, η σχέση (1.1) γίνεται στην περίπτωση που η f είναι ελαχιστική

$$2K = 2 - \|B\|^2 \tag{1.2}$$

ή ισοδύναμα

$$K = 1 - |B(e_1, e_1)|^2 - |B(e_1, e_2)|^2. \tag{1.3}$$

Κατά συνέπεια, όταν η f είναι ελαχιστική ισχύει $K \leq 1$ και έχουμε $K = 1$ παντού αν και μόνο αν η ελαχιστική εμβάπτιση $f : M^2 \longrightarrow S^n$ είναι ολικά γεωδαισιακή.

1.2 Εξισώσεις δομής

Έστω $f : (M^n, \langle,\rangle) \longrightarrow (\overline{M}^{n+k}, \langle,\rangle)$ ισομετρική εμβάπτιση, όπου M^n και $\overline{M}^{n+k}$ είναι πολυπτύγματα Riemann με συνοχές Levi-Civita ∇, $\overline{\nabla}$ και τανυστές καμπυλότητας R, $\overline{R}$ αντίστοιχα. Θεωρούμε ανοικτό υποσύνολο U του M^n, ώστε η $f|_U$ να είναι εμφύτευση, και ανοικτό υποσύνολο $\overline{U}$ του $\overline{M}^{n+k}$ με $f(U) = \overline{U} \cap f(M^n)$. Για τα επόμενα θα χρησιμοποιήσουμε την εξής σύμβαση δεικτών:

$$1 \leq j, l, s, t, ... \leq n,$$

$$n+1 \leq \alpha, \beta, \gamma, ... \leq n+k,$$

$$1 \leq A, B, C, ... \leq n+k,$$

εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά.

Έστω $\{\overline{e}_A\}$ ορθομοναδιαίο πλαίσιο στο $\overline{U}$ έτσι ώστε για κάθε σημείο $q = f(p)$ του $f(U)$, να ισχύει $\overline{e}_j|_q \in T_p f$ για κάθε j. Συμβολίζουμε με $\{\overline{\omega}_A\}$ το συμπλαίσιο του $\{\overline{e}_A\}$. Για $\overline{V} \in \Delta(\overline{U})$ έχουμε $\overline{\omega}_A(\overline{V}) = \langle V, \overline{e}_A \rangle$. Ορίζουμε ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{e_j\}$ στο U με $e_j := df^{-1}(\overline{e}_j \circ f|_U)$ και έστω $\{\omega_j\}$ το συμπλαίσιό του. Για $X \in \Delta(U)$ έχουμε $\omega_j(X) = \langle X, e_j \rangle$. Αν θέσουμε $e_\alpha := \overline{e}_\alpha \circ f|_U$, τότε αποκτούμε ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{e_A\}$ κατά μήκος της f με εφαπτόμενο μέρος $\{e_j\}$ και κάθετο μέρος $\{e_\alpha\}$.

Ορισμός 1.2.1. *Καλούμε r-μορφή επί ενός διαφορίσιμου πολυπτύγματος κάθε αντισυμμετρικό $(r,0)$-τανυστικό πεδίο.*

Συμβολίζουμε με $\Lambda^r(\overline{M}^{n+k})$ και με $\Lambda^r(M^n)$ το σύνολο των r-μορφών ($r \geq 0$) του $\overline{M}^{n+k}$ και του M^n αντίστοιχα. Για $r = 0$ έχουμε τα σύνολα των διαφορίσιμων συναρτήσεων $D(\overline{M}^{n+k})$ και $D(M^n)$ αντίστοιχα. Η f επάγει για κάθε ακέραιο $r \geq 0$ μια απεικόνιση $f^* : \Lambda^r(\overline{M}^{n+k}) \longrightarrow \Lambda^r(M^n)$, την *ανάσυρση* (pullback) της f, που ορίζεται ως εξής: Για $r = 0$ και $g \in D(\overline{M}^{n+k})$, $f^*(g) = g \circ f$. Για $r > 0$ και $\overline{\omega} \in \Lambda^r(\overline{M}^{n+k})$ η $f^*(\overline{\omega}) \in \Lambda^r(M^n)$ είναι η r-μορφή, που στο $p \in M^n$ ορίζεται ως $f^*(\overline{\omega})|_p(v_1, v_2, ..., v_r) := \overline{\omega}|_{f(p)}\big(df_p(v_1), df_p(v_2), ..., df_p(v_r)\big)$, όπου $v_1, ..., v_r \in T_pM^n$.

Οι *μορφές συνοχής* του M^n για το πλαίσιο $\{e_j\}$, είναι οι 1-μορφές

$$\omega_{jl} : \Delta(U) \longrightarrow D(U),$$

$$X \longmapsto \omega_{jl}(X) := \langle \nabla_X e_j, e_l \rangle.$$

Επίσης, οι μορφές συνοχής του $\overline{M}^{n+k}$ για το πλαίσιο $\{\overline{e}_A\}$, είναι οι 1-μορφές

$$\overline{\omega}_{AB} : \Delta(\overline{U}) \longrightarrow D(\overline{U}),$$

$$\overline{X} \longmapsto \overline{\omega}_{AB}(\overline{X}) := \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{e}_A, \overline{e}_B \rangle.$$

Ισχύει $\omega_{jl} = -\omega_{lj}, \overline{\omega}_{AB} = -\overline{\omega}_{BA}$ και αποδεικνύεται ότι $\omega_j = f^*(\overline{\omega}_j), \omega_{jl} = f^*(\overline{\omega}_{jl})$. Οι *εξισώσεις δομής* του M^n είναι:

$$\begin{aligned} d\omega_j &= \sum_l \omega_{jl} \wedge \omega_l, \\ d\omega_{jl} &= \sum_s \omega_{js} \wedge \omega_{sl} + \Omega_{jl}, \end{aligned}$$

όπου $\Omega_{jl} \in \Lambda^2(U)$, $\Omega_{jl} = \sum_{s<t} R_{jlst}\omega_s \wedge \omega_t$, $\Omega_{jl} = -\Omega_{lj}$ και $\wedge$ είναι το εξωτερικό γινόμενο μορφών. Οι 2-μορφές Ω_{jl} καλούνται *μορφές καμπυλότητας* του M^n.

Οι εξισώσεις δομής του $\overline{M}^{n+k}$ είναι:

$$\begin{aligned} d\overline{\omega}_A &= \sum_B \overline{\omega}_{AB} \wedge \overline{\omega}_B, \\ d\overline{\omega}_{AB} &= \sum_C \overline{\omega}_{AC} \wedge \overline{\omega}_{CB} + \overline{\Omega}_{AB}, \end{aligned}$$

όπου $\overline{\Omega}_{AB} \in \Lambda^2(\overline{U})$, $\overline{\Omega}_{AB} = \sum_{C<D} \overline{R}_{ABCD}\overline{\omega}_C \wedge \overline{\omega}_D$, $\overline{\Omega}_{AB} = -\overline{\Omega}_{BA}$.

Ορίζουμε τις 1-μορφές $\omega_{j\alpha} := f^*(\overline{\omega}_{j\alpha})$, $\omega_{\alpha j} := f^*(\overline{\omega}_{\alpha j})$ και τις *μορφές κάθετης συνοχής* $\omega_{\alpha\beta} := f^*(\overline{\omega}_{\alpha\beta})$. Αποδεικνύεται ότι $\omega_{j\alpha}(X) = \langle A_{e_\alpha}X, e_j\rangle$, όπου A_{e_α} είναι η απεικόνιση Weingarten στη διεύθυνση e_α και $\omega_{\alpha\beta}(X) = \langle \nabla^{\perp}_X e_\alpha, e_\beta\rangle$ για κάθε $X \in \Delta(U)$. Επίσης ορίζουμε $\omega_\alpha := f^*(\overline{\omega}_\alpha)$. Εύκολα προκύπτει ότι $\omega_\alpha = 0$.

Λήμμα 1.2.1. (*Cartan*) *Έστωσαν οι γραμμικά ανεξάρτητες* 1-*μορφές* $\varphi_1, ..., \varphi_r$ ($r \leq n$) *του* M^n. *Αν* $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_r$ *είναι* 1-*μορφές του* M^n *τέτοιες ώστε να ισχύει* $\sum_{j=1}^r \varphi_j \wedge \theta_j = 0$, *τότε υπάρχουν συναρτήσεις* $a_{jl} \in D(M^n)$, *όπου* $j, l \in \{1, ..., r\}$ *ώστε να ισχύει* $\theta_j = \sum_{l=1}^r a_{jl}\varphi_l$ *και* $a_{jl} = a_{lj}$.

Επειδή $\omega_\alpha = 0$ έχουμε $\sum_{j=1}^r \omega_{j\alpha}\wedge\omega_j = 0$ και σύμφωνα με το Λήμμα 1.2.1, υπάρχουν συναρτήσεις $h^\alpha_{jl} \in D(U)$, με $h^\alpha_{jl} = h^\alpha_{lj}$, τέτοιες ώστε $\omega_{j\alpha} = \sum_{l=1}^n h^\alpha_{jl}\omega_l$ και $h^\alpha_{jl} = \langle A_{e_\alpha}e_j, e_l\rangle = \langle B(e_j, e_l), e_\alpha\rangle$.

Παρατήρηση 1.2.1. *Η ισομετρική εμβάπτιση* $f : (M^n, \langle,\rangle) \to (\overline{M}^{n+k}, \langle,\rangle)$ *είναι ελαχιστική αν για κάθε* α *ισχύει* $\sum_{j=1}^n h^\alpha_{jj} = 0$.

Όταν το πολύπτυγμα $\overline{M}^{n+k}$ έχει σταθερή καμπυλότητα τομής c, τότε οι εξισώσεις Gauss, Codazzi και Ricci γίνονται αντίστοιχα:

$$\begin{aligned}
\Omega_{jl} &= \sum_\alpha \omega_{j\alpha}\wedge\omega_{\alpha l} - c\omega_j\wedge\omega_l, \\
d\omega_{j\alpha} &= \sum_l \omega_{jl}\wedge\omega_{l\alpha} + \sum_\beta \omega_{j\beta}\wedge\omega_{\beta\alpha}, \\
d\omega_{\alpha\beta} &= \sum_j \omega_{\alpha j}\wedge\omega_{j\beta} + \sum_\gamma \omega_{\alpha\gamma}\wedge\omega_{\gamma\beta}.
\end{aligned}$$

Αν ω είναι 1-μορφή του M^n, τότε αποδεικνύεται στο [14] ότι ισχύει

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]),$$

όπου X, $Y \in \Delta(M^n)$.

Έστω M^2 ένα διδιάστατο πολύπτυγμα Riemann. Με τη βοήθεια και της παραπάνω σχέσης αποδεικνύεται ότι

$$d\omega_{12} = -K\omega_1\wedge\omega_2, \tag{1.4}$$

όπου K είναι η καμπυλότητα Gauss του M^2.

1.3 Θεμελιώδεις μορφές ανώτερης τάξης

Έστω $f : (M^n, \langle,\rangle) \longrightarrow (\overline{M}^{n+k}, \langle,\rangle)$ ισομετρική εμβάπτιση, όπου M^n, $\overline{M}^{n+k}$ είναι πολυπτύγματα Riemann με συνοχές Levi-Civita ∇, $\overline{\nabla}$ αντίστοιχα. Για $p \in M^n$ και θετικό ακέραιο r, ο διανυσματικός χώρος

$$\begin{aligned}
T^r_p f := \operatorname{span}\{& df_p(X_{j_1}|_p), (\nabla^f_{X_{l_1}} df(X_{l_2}))|_p, ..., (\nabla^f_{X_{s_1}}...\nabla^f_{X_{s_{r-1}}} df(X_{s_r}))|_p : \\
& X_m \in \Delta(M^n), m \in \{j_1, l_1, l_2, ..., s_1, ..., s_r\}\}
\end{aligned}$$

καλείται *εγγύτατος χώρος r-τάξης* (osculating space) της f στο p και είναι διανυσματικός υπόχωρος του $T_{f(p)}\overline{M}^{n+k}$.

Προφανώς, $T_p^1 f = df_p(T_pM^n)$ και $T^1 f = \bigcup_{p\in M^n} T_p^1 f$ είναι η εφαπτόμενη διανυσματική δέσμη της f. Αν αφήσουμε το p να μεταβάλεται, τότε για σταθερό $r > 1$ οι χώροι $T_p^r f$ ενδεχομένως να έχουν διαφορετική διάσταση. Επίσης, ο εγγύτατος χώρος r-τάξης της f στο p είναι υπόχωρος του εγγυτάτου χώρου $(r+1)$-τάξης της f στο p. Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε το ορθογώνιο συμπλήρωμα $N_p^r f$ του $T_p^r f$ στον $T_p^{r+1} f$ ως προς το εσωτερικό γινόμενο του $T_{f(p)}\overline{M}^{n+k}$, δηλαδή

$$T_p^{r+1} f = T_p^r f \oplus N_p^r f.$$

Ο $N_p^r f$ λέγεται *κάθετος χώρος r-τάξης* της f στο p. Ισχύει

$$T_p^{r+1} f = T_p^1 f \oplus N_p^1 f \oplus N_p^2 f \oplus ... \oplus N_p^r f.$$

Προφανώς, για $s \neq r$ έχουμε $N_p^r f \cap N_p^s f = \{0\}$ και $\langle v, w\rangle = 0$ για κάθε $v \in N_p^r f$, $w \in N_p^s f$.

Ορισμός 1.3.1. *Έστω f ισομετρική εμβάπτιση μεταξύ των πολυπτυγμάτων Riemann M^n και $\overline{M}_c^{n+k}$, όπου το $\overline{M}_c^{n+k}$ έχει σταθερή καμπυλότητα τομής c. Καλούμε θεμελιώδη μορφή $(r+1)$-τάξης της f στο $p \in M^n$ την απεικόνιση*

$$B_r|_p : \underbrace{T_pM^n \times T_pM^n \times ... \times T_pM^n}_{r+1} \longrightarrow N_p^r f,$$

$$(x_1, x_2, ..., x_{r+1}) \mapsto B_r|_p(x_1, x_2, ..., x_{r+1}) = \left(\nabla^f_{X_1}\nabla^f_{X_2}...\nabla^f_{X_r} df(X_{r+1})|_p\right)^{N_p^r f},$$

όπου με $\left(\nabla^f_{X_1}\nabla^f_{X_2}...\nabla^f_{X_r} df(X_{r+1})|_p\right)^{N_p^r f}$ συμβολίζουμε την προβολή του διανύσματος $\nabla^f_{X_1}\nabla^f_{X_2}...\nabla^f_{X_r} df(X_{r+1})|_p$ του $T_p^{r+1} f$ στον υπόχωρό του $N_p^r f$ και $X_1, ..., X_{r+1}$ είναι τοπικά διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία του M^n που επεκτείνουν τα $x_1, ..., x_{r+1}$ αντίστοιχα, δηλαδή $X_i|_p = x_i$ για $i = 1, ..., r+1$.

Επειδή το διάνυσμα $\nabla^f_{X_1}\nabla^f_{X_2}...\nabla^f_{X_r} df(X_{r+1})|_p$ ανήκει στον $T_p^{r+1} f = T_p^r f \oplus N_p^r f$ και ισχύει $T_p^r f = T_p^1 f \oplus N_p^1 f \oplus ... \oplus N_p^{r-1} f$, ένας ισοδύναμος ορισμός της $B_r|_p$ είναι

$$B_r|_p(x_1, ..., x_{r+1}) = \left(\nabla^f_{X_1}...\nabla^f_{X_s} df(X_{r+1})|_p\right)^{(T_p^1 f\oplus N_p^1 f\oplus...\oplus N_p^{r-1} f)^\perp},$$

όπου $(T_p^1 f \oplus N_p^1 f \oplus ... \oplus N_p^{r-1} f)^\perp$ είναι το ορθοσυμπλήρωμα του $T_p^1 f \oplus N_p^1 f \oplus ... \oplus N_p^{r-1} f$ στον $T_{f(p)}\overline{M}^{n+k}$.

Αποδεικνύεται στο [18] ότι η $B_r|_p$ είναι καλά ορισμένη και συμμετρική, δηλαδή $B_r|_p(x_1, x_2, ..., x_{r+1}) = B_r|_p(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(r+1)})$ για κάθε στοιχείο σ της ομάδας μεταθέσεων των αριθμών $1, 2, ..., r+1$. Επίσης, η $B_r|_p$ είναι $\mathbb{R}$-γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή της.

Θεωρούμε την ένωση $N^r f$ όλων των καθέτων χώρων r-τάξης της f, δηλαδή

$$N^r f := \bigcup_{p\in M^n} N_p^r f.$$

Αν αφήσουμε το p να μεταβάλεται στον Ορισμό 1.3.1, τότε έχουμε τη *θεμελιώδη μορφή* $(r+1)$*-τάξης* της f :

$$B_r : \underbrace{TM^n \oplus TM^n \oplus ... \oplus TM^n}_{r+1} \longrightarrow N^r f,$$

ή ισοδύναμα

$$B_r : \underbrace{TM^n \oplus TM^n \oplus ... \oplus TM^n}_{r+1} \longrightarrow (T^1 f \oplus N^1 f \oplus ... \oplus N^{r-1} f)^{\perp},$$

$$((p,x_1),...,(p,x_{r+1})) \longmapsto B_r|_p(x_1,...,x_{r+1}).$$

Προφανώς η B_1 είναι η δεύτερη θεμελιώδης μορφή της f, δηλαδή έχουμε $B_1 = B$. Για $r > 1$, η B_r δεν είναι εν γένει $(r+1,1)$-τανυστικό πεδίο, αφού το σύνολο $T^1 f \oplus N^1 f \oplus ... \oplus N^{r-1} f$ δε γνωρίζουμε αν είναι διανυσματική δέσμη.

Ας σημειωθεί ότι στο εξής θα γράφουμε B_r είτε για τη θεμελιώδη μορφή $(r+1)$-τάξης της f στο p, είτε για τη θεμελιώδη μορφή $(r+1)$-τάξης της f.

Λήμμα 1.3.1. *Έστω* $f : (M^n, \langle,\rangle) \longrightarrow (\overline{M}_c^{n+k}, \langle,\rangle)$ *ισομετρική εμβάπτιση, όπου* M^n *είναι πολύπτυγμα Riemann και* $\overline{M}_c^{n+k}$ *είναι πολύπτυγμα Riemann με σταθερή καμπυλότητα τομής* c. *Τότε για κάθε* $p \in M^n$ *ισχύει*

$$N_p^r f = \mathrm{spanIm} B_r = \mathrm{span}\{B_r(x_1,x_2,...,x_{r+1}) : x_1,x_2,...,x_{r+1} \in T_pM^n\}.$$

Απόδειξη. Προφανώς $\mathrm{spanIm}B_r \subset N_p^r f$, αφού $\mathrm{Im}B_r \subset N_p^r f$. Έστω $\xi \in N_p^r f$. Γνωρίζουμε ότι $T_p^{r+1} f = T_p^r f \oplus N_p^r f$, επομένως $\xi \in T_p^{r+1} f$ και θα γράφεται ως

$$\begin{aligned}
\xi &= \Big(\sum_j \alpha_j df_p(X_j|_p) + \sum_{l,m} \beta_{lm} \nabla^f_{X_l} df(X_m)|_p + ... + \\
&+ \sum_{s_1,...,s_r} \gamma_{s_1...s_r} \nabla^f_{X_{s_1}} ... \nabla^f_{X_{s_{r-1}}} df(X_{s_r})|_p \\
&+ \sum_{t_1,...,t_{r+1}} \delta_{t_1...t_{r+1}} \nabla^f_{X_{t_1}} ... \nabla^f_{X_{t_r}} df(X_{t_{r+1}})|_p \Big)^{N_p^r f},
\end{aligned}$$

για κατάλληλους συντελεστές, όπου $X_j,...,X_{t_{r+1}} \in \Delta(M^n)$. Επειδή η προβολή είναι γραμμική απεικόνιση, $T_p^s f \subset T_p^r f$ για κάθε $s < r$ και $T_p^{r+1} f = T_p^r f \oplus N_p^r f$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\xi &= \sum_{t_1,...,t_{r+1}} \delta_{t_1...t_{r+1}} (\nabla^f_{X_{t_1}} ... \nabla^f_{X_{t_r}} df(X_{t_{r+1}})|_p)^{N_p^r f} \\
&= \sum_{t_1,...,t_{r+1}} \delta_{t_1...t_{r+1}} B_r(X_{t_1}|_p, X_{t_2}|_p, ..., X_{t_{r+1}}|_p).
\end{aligned}$$

Επομένως, $\xi \in \mathrm{spanIm}B_r$. □

Λήμμα 1.3.2. *Έστω* $f : (M^2, \langle,\rangle) \longrightarrow (\overline{M}_c^{2+k}, \langle,\rangle)$ *ισομετρική ελαχιστική εμβάπτιση, όπου* M^2 *είναι πολύπτυγμα Riemann και* $\overline{M}_c^{2+k}$ *είναι πολύπτυγμα Riemann με σταθερή καμπυλότητα τομής* c. *Αν* $\{e_1, e_2\}$ *είναι τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο γύρω από το τυχόν σημείο* $p \in M^2$, *τότε για κάθε* $x_1,...,x_{r-1} \in T_pM^2$ *ισχύει*

$$B_r(x_1,...,x_{r-1}, e_1|_p, e_1|_p) + B_r(x_1,...,x_{r-1}, e_2|_p, e_2|_p) = 0.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε $X_1, ..., X_{r-1} \in \Delta(M^2)$ τέτοια ώστε $X_i|_p = x_i$, για $i = 1, ..., r-1$. Από τον ορισμό της B_r έχουμε:

$$B_r(x_1, ..., x_{r-1}, e_1|_p, e_1|_p) + B_r(x_1, ..., x_{r-1}, e_2|_p, e_2|_p) =$$

$$\left(\nabla^f_{X_1} ... \nabla^f_{X_{r-1}} (\nabla^f_{e_1} df(e_1) + \nabla^f_{e_2} df(e_2))|_p\right)^{N^r_p f}.$$

Αφού η f είναι ελαχιστική ισχύει $B(e_1, e_1) + B(e_2, e_2) = 0$. Λόγω του τύπου του Gauss έχουμε

$$\begin{aligned}
\nabla^f_{e_1} df(e_1) + \nabla^f_{e_2} df(e_2) &= df(\nabla_{e_1} e_1) + df(\nabla_{e_2} e_2) + B(e_1, e_1) + B(e_2, e_2) \\
&= df(\nabla_{e_1} e_1 + \nabla_{e_2} e_2).
\end{aligned}$$

Επομένως $\nabla^f_{e_1} df(e_1) + \nabla^f_{e_2} df(e_2) \in \Delta_f(M^2)$, οπότε

$$\nabla^f_{X_1} ... \nabla^f_{X_{r-1}} (\nabla^f_{e_1} df(e_1) + \nabla^f_{e_2} df(e_2))|_p \in T^r_p f,$$

το οποίο σημαίνει ότι $B_r(x_1, ..., x_{r-1}, e_1|_p, e_1|_p) + B_r(x_1, ..., x_{r-1}, e_2|_p, e_2|_p) = 0$. □

Λήμμα 1.3.3. *Έστω $f : (M^2, \langle, \rangle) \longrightarrow (\overline{M}^{2+k}_c, \langle, \rangle)$ ισομετρική ελαχιστική εμβάπτιση, όπου M^2 είναι πολύπτυγμα Riemann και $\overline{M}^{2+k}_c$ είναι πολύπτυγμα Riemann με σταθερή καμπυλότητα τομής c. Τότε για κάθε σημείο p του M^2 η διάσταση του κάθετου χώρου r-τάξης $N^r_p f$ είναι το πολύ 2 για κάθε r.*

Απόδειξη. Έστω p ένα σημείο του M^2. Θεωρούμε ορθομοναδιαία βάση $\{e_1, e_2\}$ του T_pM^2. Λόγω του Λήμματος 1.3.1, για τυχόντα διανύσματα $x_1, ..., x_{r+1}$ του T_pM^2 το διάνυσμα $B_r(x_1, ..., x_{r+1})$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $B_r(e_{i_1}, ..., e_{i_{r+1}})$, όπου $i_1, ..., i_{r+1} \in \{1, 2\}$. Κάνοντας χρήση της συμμετρίας της B_r και του Λήμματος 1.3.2 έχουμε,

$$B_r(e_{i_1}, ..., e_{i_{r+1}}) = \pm B_r(e_1, ..., e_1) \text{ ή } \pm B_r(e_1, ..., e_1, e_2).$$

Από τα παραπάνω παίρνουμε

$$\begin{aligned}
N^r_p f &= \mathrm{spanImB}_r \\
&= \mathrm{span}\{B_r(x_1, x_2, ..., x_{r+1}) : x_1, x_2, ..., x_{r+1} \in T_pM^n\} \\
&= \mathrm{span}\{B_r(e_1, ..., e_1), B_r(e_1, ..., e_1, e_2)\}.
\end{aligned}$$

Επομένως σε κάθε σημείο p η διάσταση του $N^r_p f$ είναι το πολύ 2 για κάθε r. □

Θα αποδείξουμε την παρακάτω πρόταση [3, 7].

Πρόταση 1.3.1. *Υποθέτουμε ότι $f : (M^2, \langle, \rangle) \longrightarrow (\overline{M}^{2+k}_c, \langle, \rangle)$ είναι ισομετρική ελαχιστική εμβάπτιση, όπου M^2 είναι πολύπτυγμα Riemann και $\overline{M}^{2+k}_c$ είναι πολύπτυγμα Riemann με σταθερή καμπυλότητα τομής c. Για κάθε σημείο p του M^2 η εικόνα του μοναδιαίου κύκλου του εφαπτόμενου χώρου T_pM^2 με κέντρο το 0 μέσω της B_r, δηλαδή* *το σύνολο* $E_r(p) := \{B_r(x,...,x) : x \in T_pM^2, |x| = 1\}$, *είναι έλλειψη, ενδεχομένως εκφυλισμένη. Επιπλέον, το σύνολο* $E_r(p)$ *είναι κύκλος ακτίνας* $\rho \geq 0$ *αν για τυχούσα ορθομοναδιαία βάση* $\{e_1, e_2\}$ *του* T_pM^2 *ισχύει* $|B_r(e_1,...,e_1)| = |B_r(e_1,...,e_1,e_2)| = \rho$ *και* $\langle B_r(e_1,...,e_1), B_r(e_1,...,e_1,e_2)\rangle = 0$.

Απόδειξη. Θεωρούμε το μοναδιαίο κύκλο του εφαπτόμενου χώρου στο σημείο p, δηλαδή το σύνολο $S_p = \{x \in T_pM^2 : |x| = 1\}$. Έστω $\{e_1, e_2\}$ ορθομοναδιαία βάση του T_pM^2. Για κάθε $x \in S_p$, έχουμε $x = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$, όπου $\theta \in \mathbb{R}$. Κάνοντας χρήση της συμμετρίας της B_r, έχουμε

$$\begin{aligned}
B_r(x,...,x) = & \\
&= B_r(\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2, ..., \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2) \\
&= \sum_{m=0}^{r+1} \binom{r+1}{m} (\cos\theta)^{r+1-m}(\sin\theta)^m B_r(\underbrace{e_1,...,e_1}_{r+1-m}, \underbrace{e_2,...,e_2}_{m}).
\end{aligned}$$

Συμβολίζουμε με I το σύνολο των άρτιων αριθμών του συνόλου $\{1,...,r+1\}$ και με J το σύνολο των περιττών αριθμών του.

$$\begin{aligned}
B_r(x,...,x) = & \\
&= \sum_{m\in I} \binom{r+1}{m} (\cos\theta)^{r+1-m}(\sin\theta)^m B_r(\underbrace{e_1,...,e_1}_{r+1-m}, \underbrace{e_2,...,e_2}_{m}) \\
&+ \sum_{m\in J}^{r+1} \binom{r+1}{m} (\cos\theta)^{r+1-m}(\sin\theta)^m B_r(\underbrace{e_1,...,e_1}_{r+1-m}, \underbrace{e_2,...,e_2}_{m}).
\end{aligned}$$

Όμως λόγω του Λήμματος 1.3.2 είναι

$$B_r(e_1,...,e_1,\underbrace{e_2,...,e_2}_{m}) = \begin{cases} (-1)^l B_r(e_1,...,e_1), & m = 2l, \\ (-1)^l B_r(e_1,...,e_1,e_2), & m = 2l+1. \end{cases}$$

Επομένως, έχουμε

$$\begin{aligned}
B_r(x,...,x) &= \sum_{m\in I, m=2l} \binom{r+1}{m} (\cos\theta)^{r+1-m}(\sin\theta)^m(-1)^l B_r(e_1,...,e_1) \\
&+ \sum_{m\in J, m=2l+1} \binom{r+1}{m} (\cos\theta)^{r+1-m}(\sin\theta)^m(-1)^l B_r(e_1,...,e_1,e_2).
\end{aligned}$$

Είναι γνωστό ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned}
\cos((r+1)\theta) &= \sum_{m\in I, m=2l} (-1)^l \binom{r+1}{m} (\cos\theta)^{r+1-m}(\sin\theta)^m, \\
\sin((r+1)\theta) &= \sum_{m\in J, m=2l+1} (-1)^l \binom{r+1}{m} (\cos\theta)^{r+1-m}(\sin\theta)^m.
\end{aligned}$$

Τελικά, έχουμε

$$B_r(x,...,x) = \cos\big((r+1)\theta\big)B_r(e_1,...,e_1) + \sin\big(r+1)\theta\big)B_r(e_1,...,e_1,e_2).$$

Κατά συνέπεια το σύνολο

$$E_r(p) = \{\cos\big((r+1)\theta\big)B_r(e_1,...,e_1) + \sin\big((r+1)\theta\big)B_r(e_1,...,e_1,e_2) : \theta \in \mathbb{R}\}$$

είναι έλλειψη, ενδεχομένως εκφυλισμένη και γίνεται κύκλος όταν τα δύο διανύσματα $B_r(e_1,...,e_1)$, $B_r(e_1,...,e_1,e_2)$ έχουν ίδιο μήκος και είναι κάθετα μεταξύ τους. □

Η έλλειψη $E_r(p)$ θα αναφέρεται και ως *έλλειψη r-τάξης* της f στο p. Συμβολίζουμε με κ_r, μ_r τα μήκη των ημιαξόνων της έλλειψης r-τάξης ώστε $\kappa_r \geqslant \mu_r \geqslant 0$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $K_r^\perp : M^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $p \longmapsto K_r^\perp(p) := 2\kappa_r(p)\mu_r(p)$ και την ονομάζουμε *κάθετη καμπυλότητα r-τάξης* της f. Είναι φανερό ότι αν $K_r^\perp(p) = 0$, τότε $\dim N_p^r f < 2$ και η έλλειψη $E_r(p)$ εκφυλίζεται σε ευθύγραμμο τμήμα ή σημείο. Ενώ όταν $K_r^\perp(p) > 0$, τότε $\dim N_p^r f = 2$ και η έλλειψη δεν είναι εκφυλισμένη.

Η παρακάτω πρόταση οφείλεται στον Otsuki [17].

Πρόταση 1.3.2. *Υποθέτουμε ότι $f : (M^2, \langle,\rangle) \longrightarrow (\overline{M}_c^{2+k}, \langle,\rangle)$ είναι ισομετρική ελαχιστική εμβάπτιση, όπου M^2 είναι συνεκτικό πολύπτυγμα Riemann και $\overline{M}_c^{2+k}$ είναι πολύπτυγμα Riemann με σταθερή καμπυλότητα τομής c.*

(i) Αν υπάρχει φυσικός r με $0 < r < [\frac{k+1}{2}]$, όπου $[\frac{k+1}{2}]$ είναι το ακέραιο μέρος του $\frac{k+1}{2}$, τέτοιος ώστε για κάθε σημείο p του M^2 να έχουμε $N_p^r f = \{0\}$ και $K_s^\perp(p) > 0$ για κάθε $s \in \{1,...,r-1\}$, τότε υπάρχει ολικά γεωδαισιακό υποπολύπτυγμα Q^{2r} του $\overline{M}_c^{2+k}$ ώστε $f(M^2) \subset Q^{2r}$.

(ii) Αν υπάρχει φυσικός r με $0 < r < [\frac{k+1}{2}]$ τέτοιος ώστε για κάθε σημείο p του M^2 να έχουμε $\dim N_p^r f = 1$ και $K_s^\perp(p) > 0$ για κάθε $s \in \{1,...,r-1\}$, τότε υπάρχει ολικά γεωδαισιακό υποπολύπτυγμα Q^{2r+1} του $\overline{M}_c^{2+k}$ ώστε $f(M^2) \subset Q^{2r+1}$.

Μια ισομετρική ελαχιστική εμβάπτιση $f : M^2 \longrightarrow S^n$ ενός πολυπτύγματος Riemann M^2 στην S^n καλείται *κορεσμένη* (full) αν η εικόνα της $f(M^2)$ δεν περιέχεται σε κανένα ολικά γεωδαισιακό υποπολύπτυγμα της S^n.

Ο Lawson [16] απέδειξε το εξής αποτέλεσμα:

Πρόταση 1.3.3. *Αν $f : M^2 \longrightarrow S^n$ είναι ισομετρική ελαχιστική εμβάπτιση, όπου M^2 προσανατολισμένο πολύπτυγμα Riemann, τότε η f είναι αναλυτική, δηλαδή αν (U,φ) είναι χάρτης του M^2, τότε η απεικόνιση $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ είναι αναλυτική.*

Παρατήρηση 1.3.1. *Άμεση συνέπεια των Προτάσεων 1.3.2 και 1.3.3, είναι πως αν $f : M^2 \longrightarrow S^n$ είναι ισομετρική ελαχιστική εμβάπτιση ενός προσανατολισμένου πολυπτύγματος Riemann M^2 στην S^n με $B_r|_U = 0$, όπου U είναι ανοικτό σύνολο και $r \in \{1,...,[\frac{n-1}{2}]-1\}$, τότε υπάρχει μέγιστη σφαίρα S^{2r} της S^n ώστε $f(U) \subset S^{2r}$. Λόγω αναλυτικότητας ισχύει $f(M^2) \subset S^{2r}$. Επομένως, αν υπάρχει r και ανοικτό σύνολο U του M^2 ώστε $B_r|_U = 0$, τότε η f δεν είναι κορεσμένη.*

Κεφάλαιο 2

Ελαχιστικές επιφάνειες στην S^n ομοιομορφικές με την S^2

2.1 Επιφάνειες Riemann

Στην ενότητα αυτή παραθέτουμε στοιχεία από τη θεωρία επιφανειών Riemann, τα οποία είναι απαραίτητα στις αποδείξεις των κυρίων αποτελεσμάτων.

Ορισμός 2.1.1. *Καλούμε επιφάνεια Riemann κάθε τοπολογικό χώρο Hausdorff M με αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του, ο οποίος είναι εφοδιασμένος με έναν άτλαντα $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ που πληροί τα παρακάτω:*

(i) *Η οικογένεια $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ είναι ανοικτή κάλυψη του M και οι απεικονίσεις $\varphi_\alpha : U_\alpha \subset M \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{C}$ είναι ομοιομορφισμοί. Το ζεύγος $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ονομάζεται μιγαδικός χάρτης ή σύστημα συντεταγμένων του M.*

(ii) *Για κάθε $\alpha, \beta \in I$, με $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ η μιγαδική συνάρτηση $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C} \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη.*

(iii) *Η οικογένεια μιγαδικών χαρτών $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ είναι μέγιστη, δηλαδή αν (U, φ) μιγαδικός χάρτης με $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}, \varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}, \alpha \in I$, ολόμορφες συναρτήσεις, τότε ο μιγαδικός χάρτης (U, φ) ανήκει στην οικογένεια $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$.*

Αν (U, φ) είναι μιγαδικός χάρτης, τότε για κάθε $p \in U$, ο μιγαδικός αριθμός $z(p) := \varphi(p) = x(p) + iy(p)$ δίδει τις συντεταγμένες του p ως προς τον εν λόγω χάρτη. Αξίζει να σημειώσουμε ότι κάθε επιφάνεια Riemann είναι προσανατολισμένο διδιάστατο διαφορίσιμο πολύπτυγμα.

Ορισμός 2.1.2. *Έστω M επιφάνεια Riemann. Μια συνεχής μιγαδική συνάρτηση $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ λέγεται ολόμορφη αν για κάθε μιγαδικό χάρτη (U, φ) του M η μιγαδική συνάρτηση $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη.*

Έστω $(M^2, \langle , \rangle)$ πολύπτυγμα Riemann και (U, φ) χάρτης γύρω από το $p \in M^2$ με συντεταγμένες (x, y). Αν ισχύει $\langle , \rangle = Edx^2 + Edy^2$, $E \in D(U)$ και $E > 0$, τότε το σύστημα συντεταγμένων (x, y) καλείται *ισόθερμο*. Ο Chern [9] απέδειξε το παρακάτω αποτέλεσμα: Έστω $(M^2, \langle , \rangle)$ διαφορίσιμο πολύπτυγμα Riemann. Τότε γύρω από κάθε σημείο $p \in M^2$ υπάρχει ισόθερμο σύστημα συντεταγμένων.

Πρόταση 2.1.1. *Κάθε προσανατολισμένο διδιάστατο διαφορίσιμο πολύπτυγμα γίνεται κατά φυσικό τρόπο επιφάνεια Riemann.*

Απόδειξη. Έστω M^2 προσανατολισμένο διδιάστατο διαφορίσιμο πολύπτυγμα. Γνωρίζουμε ότι κάθε πολύπτυγμα δέχεται μετρική Riemann. Επομένως μπορούμε να εφοδιάσουμε το M^2 με μετρική Riemann $\langle , \rangle$. Λόγω του προαναφερθέντος αποτελέσματος του Chern, γύρω από κάθε σημείο του M^2 υπάρχει σύστημα ισόθερμων συντεταγμένων. Θεωρούμε ένα σημείο p του M^2. Γύρω από το p, θεωρούμε χάρτες (U, φ) και (V, ψ) του προσανατολισμού με συντεταγμένες (x, y) και (u, v) αντιστοίχως, έτσι ώστε

$$\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \rangle = 0, \ \langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \rangle = \langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \rangle = E, \tag{2.1}$$

$$\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \rangle = 0, \ \langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \rangle = \langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \rangle = \widetilde{E}. \tag{2.2}$$

Στο ανοικτό σύνολο $W = U \cap V$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial}{\partial v}. \end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (2.1) και (2.2) παίρνουμε τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial x})^2 &= \frac{E}{\widetilde{E}}, \\ (\frac{\partial u}{\partial y})^2 + (\frac{\partial v}{\partial y})^2 &= \frac{E}{\widetilde{E}}. \end{aligned}$$

Επίσης, η απεικόνιση $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(W) \longrightarrow \psi(W)$ έχει θετική Ιακωβιανή ορίζουσα αφού οι χάρτες ανήκουν στον ίδιο προσανατολισμό, δηλαδή

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} > 0.$$

Από τις τελευταίες τέσσερις σχέσεις παίρνουμε

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

δηλαδή η απεικόνιση $\psi \circ \varphi^{-1}$ είναι ολόμορφη και επομένως το M^2 καθίσταται επιφάνεια Riemann. □

Η Πρόταση 2.1.1 μας επιτρέπει να θεωρούμε κάθε προσανατολισμένο διδιάστατο διαφορίσιμο πολύπτυγμα Riemann M^2 ως επιφάνεια Riemann. Στο εξής όταν θα λέμε ότι θεωρούμε μιγαδικό χάρτη (U, z), όπου $z = x + iy$, θα εννοούμε χάρτη (U, φ)

του προσανατολισμού του M^2 με συντεταγμένες (x,y), έτσι ώστε $\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \rangle = 0$ και $\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \rangle = E = \langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \rangle$ ή ισοδύναμα $\langle , \rangle = E|dz|^2$.

Θεωρούμε ένα προσανατολισμένο διδιάστατο διαφορίσιμο πολύπτυγμα Riemann M^2 και ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{e_1, e_2\}$ του προσανατολισμού. Ορίζεται ένα (1,1)-τανυστικό πεδίο $J : \Delta(M^2) \longrightarrow \Delta(M^2)$, ώστε για κάθε σημείο p του M^2, $J|_p : T_pM^2 \longrightarrow T_pM^2$ είναι η στροφή κατά γωνία $+\frac{\pi}{2}$. Το (1,1)-τανυστικό πεδίο J καλείται *μιγαδική δομή* του M^2. Μιγαδικοποιούμε τον εφαπτόμενο χώρο στο p και επεκτείνουμε $\mathbb{C}$-γραμμικά το J στο $T_pM^2 \otimes \mathbb{C}$ ως εξής: $J(v + iw) = J(v) + iJ(w)$. Επειδή $J \circ J = -Id$, οι μόνες ιδιοτιμές του J είναι $i, -i$. Ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή i είναι

$$T_p'M^2 := \{v \in T_pM^2 \otimes \mathbb{C} : J(v) = iv\} = \{x - iJ(x) : x \in T_pM^2\}$$

και ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $-i$ είναι

$$T_p''M^2 := \{v \in T_pM^2 \otimes \mathbb{C} : J(v) = -iv\} = \{x + iJ(x) : x \in T_pM^2\}.$$

Λήμμα 2.1.1. *Σε κάθε σημείο p του M^2 ισχύει $T_pM^2 \otimes \mathbb{C} = T_p'M^2 \oplus T_p''M^2$.*

Απόδειξη. Έστω $v \in T_pM^2 \otimes \mathbb{C}$, τότε $v = u + iw$ με $u, w \in T_pM^2$ και έχουμε

$$v = \underbrace{\frac{u + J(w)}{2} - iJ(\frac{u + J(w)}{2})}_{\in T_p'M^2} + \underbrace{\frac{u - J(w)}{2} + iJ(\frac{u - J(w)}{2})}_{\in T_p''M^2},$$

δηλαδή $T_pM^2 \otimes \mathbb{C} = T_p'M^2 + T_p''M^2$. Απομένει να δείξουμε ότι το άθροισμα είναι ευθύ. Έστω $x = a + ib \in T_p'M^2 \cap T_p''M^2$, $a, b \in T_pM^2$. Τότε $x = y - iJ(y)$ για κάποιο $y \in T_pM^2$, αφού $x \in T_p'M^2$ και $x = h + iJ(h)$ για κάποιο $h \in T_pM^2$, αφού $x \in T_p''M^2$. Επομένως $a = y = h$ και $b = -J(y) = J(h)$, δηλαδή $-J(y) = J(y)$, και άρα $y = 0$. Κατά συνέπεια $a = b = 0$ και το άθροισμα είναι ευθύ. □

Λόγω του Λήμματος 2.1.1, είναι φανερό ότι η μιγαδικοποιημένη εφαπτόμενη διανυσματική δέσμη $TM^2 \otimes \mathbb{C}$ διασπάται ως εξής:

$$TM^2 \otimes \mathbb{C} = T'M^2 \oplus T''M^2,$$

όπου $T'M^2 := \{(p,v) : p \in M^2, v \in T_p'M^2\}$ και $T''M^2 := \{(p,v) : p \in M^2, v \in T_p''M^2\}$.

Συμβολίζουμε τα πεδία της μιγαδικοποιημένης εφαπτόμενης διανυσματικής δέσμης με $\Gamma(TM^2 \otimes \mathbb{C})$ και θεωρούμε το σύνολο $C^\infty(M^2, \mathbb{C})$ των διαφορίσιμων συναρτήσεων $g : M^2 \longrightarrow \mathbb{C}$.

Ορισμός 2.1.3. *Καλούμε μιγαδικό $(r,0)$-τανυστικό πεδίο κάθε απεικόνιση*

$$T : \underbrace{\Gamma(TM^2 \otimes \mathbb{C}) \times \ldots \times \Gamma(TM^2 \otimes \mathbb{C})}_{r} \longrightarrow C^\infty(M^2, \mathbb{C})$$

η οποία είναι $C^\infty(M^2, \mathbb{C})$-γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή της.
Επίσης, αν E είναι διανυσματική δέσμη υπεράνω του M^2, καλούμε μιγαδικό $(r,1)$-τανυστικό πεδίο κάθε απεικόνιση

$$T : \underbrace{\Gamma(TM^2 \otimes \mathbb{C}) \times \ldots \times \Gamma(TM^2 \otimes \mathbb{C})}_{r} \longrightarrow \Gamma(E \otimes \mathbb{C})$$

η οποία είναι $C^\infty(M^2,\mathbb{C})$-γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή της.

Έστω τ ένα μιγαδικό $(r,0)$-τανυστικό πεδίο και σ ένα μιγαδικό $(s,0)$-τανυστικό πεδίο, τότε ορίζεται το *τανυστικό γινόμενο* $\tau\otimes\sigma$ των τ,σ ως το εξής μιγαδικό $(r+s,0)$-τανυστικό πεδίο

$$\tau\otimes\sigma:\underbrace{\Gamma(TM^2\otimes\mathbb{C})\times\ldots\times\Gamma(TM^2\otimes\mathbb{C})}_{r+s}\longrightarrow C^\infty(M^2,\mathbb{C}),$$

$$(X_1+iY_1,...,X_{r+s}+iY_{r+s})\longmapsto\tau\otimes\sigma(X_1+iY_1,...,X_{r+s}+iY_{r+s})=$$
$$\tau(X_1+iY_1,...,X_r+iY_r)\sigma(X_{r+1}+iY_{r+1},...,X_{r+s}+iY_{r+s}).$$

Ένα άλλο γινόμενο μιγαδικών τανυστικών πεδίων είναι το *εξωτερικό γινόμενο*, το οποίο για μιγαδικά (1,0)-τανυστικά πεδία τ και σ είναι το μιγαδικό (2,0)-τανυστικό πεδίο $\tau\wedge\sigma:=\tau\otimes\sigma-\sigma\otimes\tau$.

Έστω M^2 προσανατολισμένο διαφορίσιμο πολύπτυγμα και (U,z) μιγαδικός χάρτης του με $z=x+iy$. Στο U έχουμε τα (1,0)-τανυστικά πεδία $dx,dy:\Delta(U)\longrightarrow D(U)$, ή ισοδύναμα $dx,dy:\Gamma(TU)\longrightarrow C^\infty(U,\mathbb{R})$ τα οποία επεκτείνουμε $\mathbb{C}$-γραμμικά στη μιγαδικοποιημένη εφαπτόμενη διανυσματική δέσμη $TU\otimes\mathbb{C}$. Ορίζουμε το μιγαδικό (1,0)-τανυστικό πεδίο $dz:\Gamma(TU\otimes\mathbb{C})\longrightarrow C^\infty(U,\mathbb{C})$, $dz:=dx+idy$ και το συζυγές του $d\bar{z}:\Gamma(TU\otimes\mathbb{C})\longrightarrow C^\infty(U,\mathbb{C})$, $d\bar{z}:=dx-idy$. Επίσης ορίζουμε τους *τελεστές Wirtinger*

$$\frac{\partial}{\partial z}:=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

και

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}:=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

για τους οποίους ισχύει $dz(\frac{\partial}{\partial z})=1$, $dz(\frac{\partial}{\partial\bar{z}})=0$, $d\bar{z}(\frac{\partial}{\partial z})=0$ και $d\bar{z}(\frac{\partial}{\partial\bar{z}})=1$. Τα $\{\frac{\partial}{\partial z}|_p,\ \frac{\partial}{\partial\bar{z}}|_p\}$ αποτελούν βάση του $T_pM^2\otimes\mathbb{C}$ και μάλιστα $T_p'M^2=\mathrm{span}\{\frac{\partial}{\partial z}|_p\}$, $T_p''M^2=\mathrm{span}\{\frac{\partial}{\partial\bar{z}}|_p\}$. Το σύνολο των μιγαδικών (1,0)-τανυστικών πεδίων είναι $C^\infty(U,\mathbb{C})$-μόδιο με πράξεις την πρόσθεση των (1,0)-τανυστικών πεδίων και το βαθμωτό πολλαλασιασμό και βάση του αποτελούν τα μιγαδικά (1,0)-τανυστικά πεδία $dz,d\bar{z}$. Επιπλέον, αν W είναι μιγαδικό (1,0)-τανυστικό πεδίο, τότε $W=W(\frac{\partial}{\partial z})dz+W(\frac{\partial}{\partial\bar{z}})d\bar{z}$.

Το σύνολο των μιγαδικών (2,0)-τανυστικών πεδίων είναι $C^\infty(M^2,\mathbb{C})$-μόδιο, όπως και το σύνολο των μιγαδικών (1,0)-τανυστικών πεδίων, και έχει ως βάση τα μιγαδικά (2,0)-τανυστικά πεδία $dz\otimes dz$, $dz\otimes d\bar{z}$, $d\bar{z}\otimes dz$ και $d\bar{z}\otimes d\bar{z}$. Ένα μιγαδικό (2,0)-τανυστικό πεδίο W γράφεται ως

$$\begin{aligned}W &= W(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z})dz\otimes dz+W(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial\bar{z}})dz\otimes d\bar{z}\\ &+ W(\frac{\partial}{\partial\bar{z}},\frac{\partial}{\partial z})d\bar{z}\otimes dz+W(\frac{\partial}{\partial\bar{z}},\frac{\partial}{\partial\bar{z}})d\bar{z}\otimes d\bar{z}.\end{aligned}$$

Γενικότερα, το σύνολο των μιγαδικών $(r,0)$-τανυστικών πεδίων είναι $C^\infty(M^2,\mathbb{C})$-μόδιο με βάση τα μιγαδικά $(r,0)$-τανυστικά πεδία $dw_1\otimes\ldots\otimes dw_r$, όπου $w_j=z$ ή $\bar{z}$ για κάθε $j=1,...,r$. Κάθε μιγαδικό $(r,0)$-τανυστικό πεδίο W γράφεται ως

$$W=\sum_{p+q=r}W^{(p,q)}dz^pd\bar{z}^q,$$

όπου

$$\begin{aligned}
W^{(r,0)}dz^r &:= W(\underbrace{\frac{\partial}{\partial z},...,\frac{\partial}{\partial z}}_{r})\underbrace{dz\otimes...\otimes dz}_{r},\\
W^{(r-1,1)}dz^{r-1}d\bar{z} &:= W(\underbrace{\frac{\partial}{\partial z},...,\frac{\partial}{\partial z}}_{r-1},\frac{\partial}{\partial \bar{z}})\underbrace{dz\otimes...\otimes dz}_{r-1}\otimes d\bar{z}\\
&+ W(\underbrace{\frac{\partial}{\partial z},...,\frac{\partial}{\partial z}}_{r-2},\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z})\underbrace{dz\otimes...\otimes dz}_{r-2}\otimes d\bar{z}\otimes dz\\
&+ ...+W(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\underbrace{\frac{\partial}{\partial z},...,\frac{\partial}{\partial z}}_{r-1})d\bar{z}\otimes\underbrace{dz\otimes...\otimes dz}_{r-1},\\
&\vdots\\
W^{(0,r)}d\bar{z}^r &:= W(\underbrace{\frac{\partial}{\partial \bar{z}},...,\frac{\partial}{\partial \bar{z}}}_{r})\underbrace{d\bar{z}\otimes...\otimes d\bar{z}}_{r}.
\end{aligned}$$

Κάθε μιγαδικό $(r,0)$-τανυστικό πεδίο T της μορφής

$$T=f(z)\underbrace{dz\otimes...\otimes dz}_{r}=f(z)dz^r,$$

όπου (U,φ) είναι μιγαδικός χάρτης με μιγαδική συντεταγμένη z και $f\in C^\infty(U,\mathbb{C})$ λέγεται r-*διαφορικό*. Είναι φανερό ότι το r-διαφορικό T είναι μιγαδικό $(r,0)$-τανυστικό πεδίο τέτοιο ώστε αν κάποιο από τα $v_1,...,v_r$ ανήκει στη δέσμη $T''M^2$, τότε $T(v_1,...,v_r)=0$. Το r-διαφορικό $T=f(z)dz^r$ χαλείται *ολόμορφο* αν η f είναι ολόμορφη συνάρτηση.

Για τα r-διαφορικά ισχύει το ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα, γνωστό και ως Θεώρημα Riemann-Roch [12].

Θεώρημα 2.1.1. *Έστω M επιφάνεια Riemann ομοιομορφική με την S^2. Αν Φ είναι ολόμορφο r-διαφορικό ορισμένο στην επιφάνεια M, τότε $\Phi=0$.*

2.2 Συμπαγείς ελαχιστικές επιφάνειες γένους μηδέν

Το κλειδί για την απόδειξη των θεωρημάτων, που αναφέρονται στην εισαγωγή, είναι η διαπίστωση ότι για συμπαγείς ελαχιστικές επιφάνειες γένους μηδέν στη σφαίρα, οι ελλείψεις κάθε τάξης είναι κύκλοι σχεδόν παντού. Στόχος της παρούσης παραγράφου είναι η απόδειξη αυτής της διαπίστωσης. Για το σκοπό αυτό, ορίζουμε κατάλληλα r-διαφορικά τα οποία αποδεικνύουμε ότι είναι ολόμορφα και λόγω του Θεωρήματος Riemann-Roch, είναι εχ ταυτότητος μηδέν.

Έστω $f : M^2 \longrightarrow S^n, n \geq 3$, ελαχιστική επιφάνεια, δηλαδή ισομετρική ελαχιστική εμβάπτιση ενός προσανατολισμένου, συνεκτικού, διδιάστατου πολυπτύγματος Riemann $(M^2, \langle , \rangle)$ στην S^n με δεύτερη θεμελιώδη μορφή B.

Μιγαδικοποιούμε την εφαπτόμενη δέσμη TM^2 και την κάθετη δέσμη Nf, καθώς και κάθε υποδέσμη της. Επίσης, επεκτείνουμε $\mathbb{C}$-γραμμικά κάθε τανυστικό πεδίο που θα οριστεί στη συνέχεια. Από εδώ και στο εξής θεωρούμε μιγαδικό χάρτη (U, z) του M^2 με $z = x+iy$ και $\langle , \rangle = E|dz|^2$. Με $\langle , \rangle$ συμβολίζουμε τη $\mathbb{C}$-γραμμική επέκταση της μετρικής του M^2 καθώς και τη συνήθη μετρική της S^n. Επιλέγουμε τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο κατά μήκος της f με εφαπτόμενο μέρος $\{e_1, e_2\}$ ώστε $e_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial x}$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial y}$ και κάθετο μέρος $\{e_\alpha\}$. Οι τελεστές Wirtinger τότε είναι $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\sqrt{E}(e_1 - ie_2)$ και $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\sqrt{E}(e_1 + ie_2)$.

Συμβολίζουμε με $\{\omega_1, \omega_2\}$ το συμπλαίσιο του $\{e_1, e_2\}$. Προφανώς $\omega_1 = \sqrt{E}dx$ και $\omega_2 = \sqrt{E}dy$. Στο U ορίζουμε το μιγαδικό (1,0)-τανυστικό πεδίο $\phi := \omega_1 + i\omega_2$ για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις

$$\phi = \sqrt{E}dz, \tag{2.3}$$

$$d\phi = \frac{1}{2\sqrt{E}}dE \wedge dz. \tag{2.4}$$

Από τις εξισώσεις δομής του M^2 έχουμε

$$d\phi = -i\omega_{12} \wedge \phi. \tag{2.5}$$

Για $\alpha = 3, ..., n$ ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$H_1^\alpha : U \longrightarrow \mathbb{C},\ H_1^\alpha := h_{11}^\alpha + ih_{12}^\alpha,$$

όπου $h_{11}^\alpha = \langle B(e_1, e_1), e_\alpha\rangle$ και $h_{12}^\alpha = \langle B(e_1, e_2), e_\alpha\rangle$. Είναι φανερό ότι $H_1^\alpha \in C^\infty(U, \mathbb{C})$.

Για κάθε φυσικό $s \geq 2$ και για κάθε $\alpha = 3, ..., n$ ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$H_s^\alpha : U \longrightarrow \mathbb{C},\ H_s^\alpha := h_{(s),1}^\alpha + ih_{(s),2}^\alpha,$$

όπου $h_{(s),1}^\alpha := \langle B_s(e_1, ..., e_1), e_\alpha\rangle$ και $h_{(s),2}^\alpha := \langle B_s(e_1, ..., e_1, e_2), e_\alpha\rangle$.

Τέλος, ορίζουμε το *μήκος της $(r+1)$-θεμελιώδους μορφής* να είναι η συνάρτηση

$$\|B_r\| := \sqrt{\sum_{j_1,...,j_{r+1}=1}^{2} |B_r(e_{j_1}, ..., e_{j_{r+1}})|^2}.$$

Επεκτείνοντας $\mathbb{C}$-γραμμικά τη δεύτερη θεμελιώδη μορφή B, έχουμε το μιγαδικό (2,1)-τανυστικό πεδίο

$$B : \Gamma(TM^2 \otimes \mathbb{C}) \times \Gamma(TM^2 \otimes \mathbb{C}) \longrightarrow \Gamma(Nf \otimes \mathbb{C}).$$

Κάθε μία από τις $n+1$ συνιστώσες του τανυστικού πεδίου B στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^{n+1}$ είναι μιγαδικό (2,0)-τανυστικό πεδίο. Επομένως, για κάθε μιγαδικό χάρτη (U, z) με $z = x + iy$ και $\langle , \rangle = E|dz|^2$, αναλύοντας κάθε συνιστώσα του B, όπως στην παράγραφο 2.1, έχουμε την ακόλουθη ανάλυση για το B στο U

$$B = B^{(2,0)}dz^2 + B^{(1,1)}dzd\bar{z} + B^{(0,2)}d\bar{z}^2,$$

όπου

$$\begin{aligned} B^{(2,0)}dz^2 &:= B(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z})dz \otimes dz, \\ B^{(1,1)}dzd\bar{z} &:= B(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}})dz \otimes d\bar{z} + B(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial z})d\bar{z} \otimes dz, \\ B^{(0,2)}d\bar{z}^2 &:= B(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}})d\bar{z} \otimes d\bar{z} \end{aligned}$$

και ισχύει $B^{(0,2)} = \overline{B^{(2,0)}}$.

Επειδή η f είναι ελαχιστική, ισχύει $B(e_1, e_1) + B(e_2, e_2) = 0$. Όμως από την επιλογή του πλαισίου έχουμε $e_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial x}$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial y}$. Επιπλέον, είναι $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ και $\frac{\partial}{\partial y} = i(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}})$. Κατά συνέπεια ισχύει $B(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}) = 0$, ή ισοδύναμα $B^{(1,1)}dzd\bar{z} = 0$. Επομένως το B δέχεται την ανάλυση

$$B = B^{(2,0)}dz^2 + \overline{B^{(2,0)}}d\bar{z}^2.$$

Ορίζουμε το 4-διαφορικό $\Phi_1 := \langle B^{(2,0)}, B^{(2,0)} \rangle dz^4$.

Προφανώς $\langle B^{(2,0)}, B^{(2,0)} \rangle \in C^\infty(U, \mathbb{C})$. Θα δείξουμε ότι το Φ_1 είναι καλά ορισμένο, δηλαδή ανεξάρτητο της επιλογής του χάρτη. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε μιγαδικούς χάρτες (U, φ) με μιγαδική συντεταγμένη z και (V, ψ) με μιγαδική συντεταγμένη ζ ώστε $U \cap V \neq \varnothing$. Το M^2 είναι επιφάνεια Riemann άρα $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$ και $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \longrightarrow \varphi(U \cap V)$ είναι ολόμορφες, δηλαδή $\frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} = 0$ και $\frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} = 0$. Στο $U \cap V$ έχουμε λοιπόν τις σχέσεις $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \zeta}$, $d\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial z}dz$, και επομένως ισχύει

$$\begin{aligned} \langle B(\frac{\partial}{\partial \zeta}, \frac{\partial}{\partial \zeta}), B(\frac{\partial}{\partial \zeta}, \frac{\partial}{\partial \zeta}) \rangle d\zeta^4 &= \langle (\frac{\partial \zeta}{\partial z})^2 B(\frac{\partial}{\partial \zeta}, \frac{\partial}{\partial \zeta}), (\frac{\partial \zeta}{\partial z})^2 B(\frac{\partial}{\partial \zeta}, \frac{\partial}{\partial \zeta}) \rangle dz^4 \\ &= \langle B(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}), B(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}) \rangle dz^4. \end{aligned}$$

Συνεπώς, το 4-διαφορικό Φ_1 είναι καλά ορισμένο. Στη συνέχεια θα δούμε ότι το Φ_1 είναι ολόμορφο 4-διαφορικό.

Λήμμα 2.2.1. *Έστω $f : M^2 \longrightarrow S^n, n \geq 3$, ελαχιστική επιφάνεια. Τότε ισχύουν:*

(i) $(d\overline{H}_1^\alpha - 2i\overline{H}_1^\alpha \omega_{12} + \sum_\beta \overline{H}_1^\beta \omega_{\beta\alpha}) \wedge \phi = 0$ *για κάθε* $\alpha \geq 3$.

(ii) *Το 4-διαφορικό Φ_1 είναι ολόμορφο. Ειδικά, αν η επιφάνεια Riemann M^2 είναι ομοιομορφική με τη διδιάστατη σφαίρα, τότε $\Phi_1 = 0$.*

Απόδειξη. (i) Θυμίζουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} \omega_{1\alpha} &= h_{11}^\alpha \omega_1 + h_{12}^\alpha \omega_2, \ \omega_{2\alpha} = h_{12}^\alpha \omega_1 - h_{11}^\alpha \omega_2, \\ d\omega_1 &= \omega_{12} \wedge \omega_2, \ d\omega_2 = -\omega_{12} \wedge \omega_1. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις, οι εξισώσεις Codazzi

$$d\omega_{j\alpha} = \sum_l \omega_{jl} \wedge \omega_{l\alpha} + \sum_\beta \omega_{j\beta} \wedge \omega_{\beta\alpha}, \ j = 1, 2,$$

γίνονται

$$\sum_\beta h_{11}^\beta \omega_{\beta\alpha}\wedge\omega_2+\sum_\beta h_{12}^\beta\omega_{\beta\alpha}\wedge\omega_1=-dh_{11}^\alpha\wedge\omega_1-dh_{12}^\alpha\wedge\omega_2-2h_{11}^\alpha d\omega_1-2h_{12}^\alpha d\omega_2,$$

$$\sum_\beta h_{12}^\beta \omega_{\beta\alpha}\wedge\omega_1-\sum_\beta h_{11}^\beta\omega_{\beta\alpha}\wedge\omega_2=-dh_{12}^\alpha\wedge\omega_1+dh_{11}^\alpha\wedge\omega_2-2h_{12}^\alpha d\omega_1+2h_{11}^\alpha d\omega_2.$$

Επειδή $\overline{H_1^\alpha}=h_{11}^\alpha-ih_{12}^\alpha$, από τα παραπάνω και από τις σχέσεις (2.3), (2.5) εύκολα συμπεραίνουμε ότι

$$(d\overline{H_1^\alpha}-2i\overline{H_1^\alpha}\omega_{12}+\sum_\beta\overline{H_1^\beta}\omega_{\beta\alpha})\wedge\phi=0.$$

(ii) Υπολογίζουμε:

$$B^{(2,0)}=B(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z})=\frac{E}{2}\big(B(e_1,e_1)-iB(e_1,e_2)\big).$$

Το σύνολο $\{e_\alpha\}$ αποτελεί ορθομοναδιαίο πλαίσιο της κάθετης δέσμης, άρα

$$\begin{aligned}B^{(2,0)} &= \sum_\alpha\langle B^{(2,0)},e_\alpha\rangle e_\alpha\\ &= \frac{E}{2}\sum_\alpha\langle B(e_1,e_1),e_\alpha\rangle e_\alpha-i\frac{E}{2}\sum_\alpha\langle B(e_1,e_2),e_\alpha\rangle e_\alpha\\ &= \frac{E}{2}\sum_\alpha h_{11}^\alpha e_\alpha-i\frac{E}{2}\sum_\alpha h_{12}^\alpha e_\alpha\\ &= \frac{E}{2}\sum_\alpha\overline{H_1^\alpha}e_\alpha.\end{aligned}$$

Τελικά είναι

$$\Phi_1 = \langle B^{(2,0)},B^{(2,0)}\rangle dz^4=\frac{E^2}{4}\sum_\alpha(\overline{H_1^\alpha})^2dz^4.$$

Θέτουμε $f_1:=\frac{E^2}{4}\sum_\alpha(\overline{H_1^\alpha})^2$. Θα αποδείξουμε ότι η f_1 είναι ολόμορφη.

Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση που αποδείξαμε στο (i) με $\overline{H_1^\alpha}$, αθροίζοντας ως προς α και κάνοντας χρήση των σχέσεων (2.3), (2.4), (2.5) και της σχέσης $\sum_{\alpha,\beta}\overline{H_1^\beta}\,\overline{H_1^\alpha}\omega_{\beta\alpha}\wedge\phi=0$, παίρνουμε $df_1\wedge dz=0$ που σημαίνει ότι $\frac{\partial f_1}{\partial\bar z}=0$.

Άρα το Φ_1 είναι ολόμορφο 4-διαφορικό στη M^2. Επιπλέον, αν η επιφάνεια Riemann M^2 είναι ομοιομορφική με την S^2, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα Riemann-Roch, λαμβάνουμε $\Phi_1=0$. □

Από εδώ και στο εξής υποθέτουμε ότι η $f: M^2\longrightarrow S^n$, $n\geq 3$, είναι συμπαγής, χορεσμένη, ελαχιστική επιφάνεια γένους μηδέν, δηλαδή το M^2 είναι ομοιομορφικό με την S^2.

Επειδή $\Phi_1|_p = 0$ για κάθε $p \in M^2$, έχουμε $\langle B^{(2,0)}, B^{(2,0)}\rangle(p) = 0$, ή ισοδύναμα

$$|B(e_1,e_1)|^2(p) - |B(e_1,e_2)|^2(p) - 2i\langle B(e_1,e_1), B(e_1,e_2)\rangle(p) = 0.$$

Από εδώ συμπεραίνουμε ότι σε κάθε σημείο του M^2 τα διανύσματα $B(e_1,e_1)|_p$ και $B(e_1,e_2)|_p$ είναι του ιδίου μήκους και κάθετα μεταξύ τους. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.3.1 σε κάθε σημείο p του M^2 η έλλειψη $E_1(p)$ είναι κύκλος με ακτίνα

$$\kappa_1(p) = |B(e_1,e_1)|(p) = |B(e_1,e_2)|(p).$$

Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε σημείο $p \in M^2$ έχουμε $\dim N_p^1 f \in \{0,2\}$.

Αν $\dim N_p^1 f = 0$ για κάθε σημείο $p \in M^2$, τότε η δεύτερη θεμελιώδης μορφή B είναι ταυτοτικά 0. Σε αυτή την περίπτωση η εμβάπτιση f είναι ολικά γεωδαισιακή και σύμφωνα με την Παρατήρηση 1.3.1, το $f(M^2)$ περιέχεται σε ένα ολικά γεωδαισιακό διδιάστατο υποπολύπτυγμα της S^n και επομένως το $f(M^2)$ είναι μια μέγιστη 2-σφαίρα της S^n. Άτοπο, αφού η εμβάπτιση είναι χορεσμένη. Επομένως $\max_{q\in M^2}\dim N_q^1 f = 2$, το οποίο σημαίνει ότι $n \geq 4$.

Αν $n = 4$, τότε η διαδικασία σταματά εδώ. Αν $n \geq 5$, τότε συνεχίζουμε τη διαδικασία.

Έχουμε ήδη ορίσει το μήκος της δεύτερης θεμελιώδους μορφής ως τη συνάρτηση $\|B\| : M^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, με τύπο

$$\|B\| = \sqrt{|B(e_1,e_1)|^2 + 2|B(e_1,e_2)|^2 + |B(e_2,e_2)|^2}.$$

Προφανώς η συνάρτηση $\|B\|$ είναι συνεχής και $\|B\| = 2\kappa_1$.

Ορίζουμε το σύνολο $M_1 := \{p \in M^2 : \dim N_p^1 f = \max_{q\in M^2}\dim N_q^1 f\}$. Προφανώς ισχύει

$$\begin{aligned} M_1 &= \{p \in M^2 : \dim N_p^1 f = 2\} \\ &= \{p \in M^2 : \|B\|(p) > 0\} \\ &= \{p \in M^2 : \kappa_1(p) > 0\}. \end{aligned}$$

Το M_1 είναι μη κενό, αφού η f είναι χορεσμένη. Επιπλέον, είναι ανοικτό υποσύνολο του M^2, αφού είναι η αντίστροφη εικόνα του ανοικτού συνόλου $(0,+\infty)$ μέσω της συνεχούς συνάρτησης $\|B\|$. Επομένως, το M_1 είναι προσανατολισμένο διδιάστατο πολύπτυγμα Riemann και σύμφωνα με την Πρόταση 2.1.1, είναι επιφάνεια Riemann.

Παρατήρηση 2.2.1. *Το σύνολο M_1 είναι πυκνό υποσύνολο του M^2.*

Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι το εσωτερικό του συνόλου $M_1^c = M^2 - M_1$ δεν είναι κενό σύνολο και έστω U μια συνεκτική συνιστώσα του $\mathrm{int}(M_1^c)$. Στο U ισχύει $B|_U = 0$ και σύμφωνα με την Παρατήρηση 1.3.1 το $f(M^2)$ είναι μια μέγιστη 2-σφαίρα της S^n όπως παραπάνω. Άτοπο, αφού η f είναι χορεσμένη.

Η $N^1 f|_{M_1}$ είναι διανυσματική δέσμη με βαθμίδα 2. Επομένως η $(T_1 f|_{M_1} \oplus N^1 f|_{M_1})^\perp$ είναι διανυσματική δέσμη με βαθμίδα $n-4$ και η θεμελιώδης μορφή τρίτης τάξης της f περιορισμένη στο M_1 είναι (3,1)-τανυστικό πεδίο

$$B_2|_{M_1} : \Delta(M_1) \times \Delta(M_1) \times \Delta(M_1) \longrightarrow \Gamma\big((T^1 f|_{M_1} \oplus N^1 f|_{M_1})^\perp\big),$$

$$(X_1,X_2,X_3)\longmapsto B_2|_{M_1}(X_1,X_2,X_3)=\left(\nabla^f_{X_1}\nabla^f_{X_2}df(X_3)\right)^{(T^1f|_{M_1}\oplus N^1f|_{M_1})^\perp}.$$

Μιγαδικοποιούμε τις διανυσματικές δέσμες $TM_1, T^1f|_{M_1}, N^1f|_{M_1}$, επεκτείνουμε $\mathbb{C}$-γραμμικά τη $B_2|_{M_1}$ και αποκτούμε το μιγαδικό (3,1)-τανυστικό πεδίο

$$B_2|_{M_1}:\Gamma(TM_1\otimes\mathbb{C})\times\Gamma(TM_1\otimes\mathbb{C})\times\Gamma(TM_1\otimes\mathbb{C})\longrightarrow\Gamma\big((T^1f|_{M_1}\oplus N^1f|_{M_1})^\perp\otimes\mathbb{C}\big).$$

Για κάθε μιγαδικό χάρτη (U,z) του M_1 με $z=x+iy$ και $\langle,\rangle=E|dz|^2$ το μιγαδικό (3,1)-τανυστικό πεδίο $B_2|_{M_1}$ αναλύεται στο U ως εξής:

$$B_2|_{M_1}=B_2|_{M_1}^{(3,0)}dz^3+B_2|_{M_1}^{(2,1)}dz^2d\bar z+B_2|_{M_1}^{(1,2)}dzd\bar z^2+B_2|_{M_1}^{(0,3)}d\bar z^3.$$

Γνωρίζουμε από το Λήμμα 1.3.2 ότι

$$B_2|_{M_1}(X,e_1,e_1)+B_2|_{M_1}(X,e_2,e_2)=0.$$

Για $e_1=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial x}$, $e_2=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial y}$ η τελευταία σχέση γίνεται

$$B_2|_{M_1}(X,\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial\bar z})=0.$$

Επομένως, είναι

$$B_2|_{M_1}=B_2|_{M_1}^{(3,0)}dz^3+B_2|_{M_1}^{(0,3)}d\bar z^3,$$

όπου

$$B_2|_{M_1}^{(3,0)}=B_2|_{M_1}(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}),\ B_2|_{M_1}^{(0,3)}=B_2|_{M_1}(\frac{\partial}{\partial\bar z},\frac{\partial}{\partial\bar z},\frac{\partial}{\partial\bar z})$$

και ισχύει $\overline{B_2|_{M_1}^{(3,0)}}=B_2|_{M_1}^{(0,3)}$.

Στο M_1 ορίζουμε το 6-διαφορικό

$$\Phi_2:=\langle B_2|_{M_1}^{(3,0)},B_2|_{M_1}^{(3,0)}\rangle dz^6.$$

Θα δείξουμε ότι το Φ_2 είναι καλά ορισμένο, δηλαδή ανεξάρτητο της επιλογής χάρτη. Για το λόγο αυτό θεωρούμε μιγαδικούς χάρτες του M_1, (U,φ) με μιγαδική συντεταγμένη z και (V,ψ) με μιγαδική συντεταγμένη ζ ώστε $U\cap V\neq\varnothing$. Το M_1 είναι επιφάνεια Riemann συνεπώς οι απεικονίσεις $\psi\circ\varphi^{-1},\varphi\circ\psi^{-1}$ είναι ολόμορφες, δηλαδή $\frac{\partial\zeta}{\partial\bar z}=0$ και $\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}=0$. Στο $U\cap V$ έχουμε τις σχέσεις $\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial\zeta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\zeta}$, $d\zeta=\frac{\partial\zeta}{\partial z}dz$ και ισχύει

$$\langle B_2|_{M_1}(\frac{\partial}{\partial\zeta},\frac{\partial}{\partial\zeta},\frac{\partial}{\partial\zeta}),B_2|_{M_1}(\frac{\partial}{\partial\zeta},\frac{\partial}{\partial\zeta},\frac{\partial}{\partial\zeta})\rangle d\zeta^6=$$

$$\begin{aligned}
&= \langle B_2|_{M_1}(\frac{\partial}{\partial\zeta},\frac{\partial}{\partial\zeta},\frac{\partial}{\partial\zeta}),B_2|_{M_1}(\frac{\partial}{\partial\zeta},\frac{\partial}{\partial\zeta},\frac{\partial}{\partial\zeta})\rangle(\frac{\partial\zeta}{\partial z})^6dz^6\\
&= \langle(\frac{\partial\zeta}{\partial z})^3B_2|_{M_1}(\frac{\partial}{\partial\zeta},\frac{\partial}{\partial\zeta},\frac{\partial}{\partial\zeta}),(\frac{\partial\zeta}{\partial z})^3B_2|_{M_1}(\frac{\partial}{\partial\zeta},\frac{\partial}{\partial\zeta},\frac{\partial}{\partial\zeta})\rangle dz^6\\
&= \langle B_2|_{M_1}(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}),B_2|_{M_1}(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z})\rangle dz^6.
\end{aligned}$$

Τούτο δηλώνει ότι το Φ_2 είναι καλά ορισμένο 6-διαφορικό στο M_1.

Λήμμα 2.2.2. *Έστω $f : M^2 \longrightarrow S^n, n \geq 5$, συμπαγής, κορεσμένη, ελαχιστική επιφάνεια γένους μηδέν. Για κάθε μιγαδικό χάρτη (U, z) του M^2 με $z = x + iy$ και $\langle , \rangle = E|dz|^2$ υπάρχει ορθομοναδιαίο πλαίσιο κατά μήκος της $f|_{M_1 \cap U}$ με εφαπτόμενο μέρος $\{e_1, e_2\}$, όπου $e_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial x}$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial y}$ και με κάθετο μέρος $\{e_\alpha\}$, όπου $e_3 = \frac{1}{\kappa_1}B(e_1, e_1)$, $e_4 = \frac{1}{\kappa_1}B(e_1, e_2)$. Επιπλέον, στο $M_1 \cap U$ ισχύουν[1]:*

(i) $(d\log\kappa_1 + i\omega_{34}) \wedge \phi = 2i\omega_{12} \wedge \phi$,

(ii) $\omega_{3\alpha}(e_1) = -\omega_{4\alpha}(e_2)$, $\omega_{3\alpha}(e_2) = \omega_{4\alpha}(e_1)$, $\alpha = 5, ..., n$,

(iii) $(d\overline{H}_2^\alpha - 3i\overline{H}_2^\alpha\omega_{12} + \sum_{\beta \geq 5}\overline{H}_2^\beta\omega_{\beta\alpha}) \wedge \phi = 0$, $\alpha = 5, ..., n$,

(iv) *Το 6-διαφορικό Φ_2 είναι ολόμορφο.*

Απόδειξη. Λόγω του Λήμματος 2.2.1 έχουμε $\Phi_1 = 0$. Συνεπώς τα $B(e_1, e_1)$, $B(e_1, e_2)$ είναι ισομήκη και κάθετα μεταξύ τους. Επομένως, μπορούμε να επιλέξουμε ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{e_3, e_4\}$ της διανυσματικής δέσμης $N^1f|_{M_1 \cap U}$ τέτοιο ώστε $e_3 = \frac{1}{\kappa_1}B(e_1, e_1)$, $e_4 = \frac{1}{\kappa_1}B(e_1, e_2)$.

(i) Λόγω της επιλογής του πλαισίου $\{e_\alpha\}$, είναι $H_1^3|_{M_1 \cap U} = \kappa_1$, $H_1^4|_{M_1 \cap U} = i\kappa_1$ και $H_1^\alpha|_{M_1 \cap U} = 0$ για $\alpha \geq 5$. Από το Λήμμα 2.2.1(i) για $\alpha = 3$ λαμβάνουμε στο $M_1 \cap U$ τη σχέση

$$(d\log\kappa_1 + i\omega_{34}) \wedge \phi = 2i\omega_{12} \wedge \phi.$$

(ii) Στο $M_1 \cap U$ λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό της B_2 και τους τύπους των Gauss και Weingarten έχουμε

$$\begin{aligned}
B_2|_{M_1}(e_1, e_1, e_1) &= \left(\nabla^f_{e_1}(\nabla^f_{e_1} df(e_1))\right)^{(T^1f|_{M_1} \oplus N^1f|_{M_1})^\perp} \\
&= \left(\nabla^f_{e_1} B(e_1, e_1)\right)^{(T^1f|_{M_1} \oplus N^1f|_{M_1})^\perp} \\
&= \left(\nabla^f_{e_1}(\kappa_1 e_3)\right)^{(T^1f|_{M_1} \oplus N^1f|_{M_1})^\perp} \\
&= \big(\underbrace{e_1(\kappa_1)e_3}_{\in N^1f|_{M_1}} + \kappa_1 \nabla^f_{e_1} e_3\big)^{(T^1f|_{M_1} \oplus N^1f|_{M_1})^\perp} \\
&= \kappa_1(\nabla^f_{e_1} e_3)^{(T^1f|_{M_1} \oplus N^1f|_{M_1})^\perp} \\
&= \kappa_1(\nabla^\perp_{e_1} e_3)^{(T^1f|_{M_1} \oplus N^1f|_{M_1})^\perp}.
\end{aligned}$$

Επειδή ο δεύτερος κάθετος χώρος της f είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου που παράγεται από τα $\{e_5, ..., e_n\}$ έχουμε

$$B_2|_{M_1}(e_1, e_1, e_1) = \kappa_1 \sum_{\alpha=5}^{n} \langle \nabla^\perp_{e_1} e_3, e_\alpha \rangle e_\alpha = \kappa_1 \sum_{\alpha=5}^{n} \omega_{3\alpha}(e_1) e_\alpha.$$

Όμως, λόγω του Λήμματος 1.3.2 είναι

$$\begin{aligned}
B_2|_{M_1}(e_1, e_1, e_1) &= -B_2|_{M_1}(e_2, e_1, e_2) = -\kappa_1(\nabla^\perp_{e_2} e_4)^{(T^1f|_{M_1} \oplus N^1f|_{M_1})^\perp} \\
&= -\kappa_1 \sum_{\alpha=5}^{n} \omega_{4\alpha}(e_2) e_\alpha.
\end{aligned}$$

[1] Επειδή το M_1 είναι πυκνό υποσύνολο του M^2 (Παρατήρηση 2.2.1) είναι $M_1 \cap U \neq \varnothing$.

Συνεπώς ισχύει
$$\omega_{3\alpha}(e_1) = -\omega_{4\alpha}(e_2), \quad \alpha = 5, ..., n.$$
Όμοια,
$$B_2|_{M_1}(e_1, e_1, e_2) = \kappa_1 \sum_{\alpha=5}^{n} \omega_{4\alpha}(e_1)e_\alpha = \kappa_1 \sum_{\alpha=5}^{n} \omega_{3\alpha}(e_2)e_\alpha$$
και
$$\omega_{3\alpha}(e_2) = \omega_{4\alpha}(e_1), \quad \alpha = 5, ..., n.$$

(iii) Στο $M_1 \cap U$ για $\alpha \geq 5$ είναι $h^\alpha_{(2),1} = \kappa_1\omega_{3\alpha}(e_1)$ και $h^\alpha_{(2),2} = \kappa_1\omega_{3\alpha}(e_2)$. Είναι φανερό ότι οι συναρτήσεις $h^\alpha_{(2),1}, h^\alpha_{(2),2} : M_1 \cap U \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμες και τέτοιες ώστε $B_2|_{M_1}(e_1, e_1, e_1) = \sum_{\alpha=5}^{n} h^\alpha_{(2),1}e_\alpha$, $B_2|_{M_1}(e_1, e_1, e_2) = \sum_{\alpha=5}^{n} h^\alpha_{(2),2}e_\alpha$. Επιπλέον, στο $M_1 \cap U$ οι μιγαδικές συναρτήσεις H^α_2 είναι διαφορίσιμες. Λόγω του (ii) ισχύει η σχέση $H^\alpha_2\overline{\phi} = \kappa_1\omega_{3\alpha} + i\kappa_1\omega_{4\alpha}$. Επίσης, στο $M_1 \cap U$ για $\alpha \geq 5$ και για $j \in \{1, 2\}$ έχουμε
$$\begin{aligned} h^\alpha_{1j} &= \langle B(e_1, e_j), e_\alpha\rangle = 0, \\ h^\alpha_{2j} &= \langle B(e_2, e_j), e_\alpha\rangle = 0. \end{aligned}$$
Επομένως στο $M_1 \cap U$ ισχύει $\omega_{1\alpha} = \sum_j h^\alpha_{1j}\omega_j = 0$ και $\omega_{2\alpha} = \sum_j h^\alpha_{2j}\omega_j = 0$ και οι εξισώσεις Ricci δίνουν
$$\begin{aligned} d\omega_{3\alpha} &= \omega_{34} \wedge \omega_{4\alpha} + \sum_{\beta\geq 5} \omega_{3\beta} \wedge \omega_{\beta\alpha}, \\ d\omega_{4\alpha} &= -\omega_{34} \wedge \omega_{3\alpha} + \sum_{\beta\geq 5} \omega_{4\beta} \wedge \omega_{\beta\alpha}. \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας εξωτερικά τη σχέση $H^\alpha_2\overline{\phi} = \kappa_1\omega_{3\alpha} + i\kappa_1\omega_{4\alpha}$, χρησιμοποιώντας τις παραπάνω εξισώσεις Ricci και τη σχέση (2.5) παίρνουμε
$$dH^\alpha_2 \wedge \overline{\phi} + iH^\alpha_2\omega_{12} \wedge \overline{\phi} = H^\alpha_2 d(\log \kappa_1) \wedge \overline{\phi} - iH^\alpha_2\omega_{34} \wedge \overline{\phi} + \sum_{\beta\geq 5} H^\beta_2\overline{\phi} \wedge \omega_{\beta\alpha}.$$
Παίρνουμε τη συζυγή σχέση αυτής και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση που αποδείξαμε στο (i) έχουμε το ζητούμενο.

(iv) Επειδή
$$B_2|^{(3,0)}_{M_1} = B_2|_{M_1}(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}) = \frac{1}{2}E^{\frac{3}{2}} \sum_{\alpha\geq 5} \overline{H}^\alpha_2 e_\alpha,$$
έχουμε
$$\Phi_2 = \langle B_2|^{(3,0)}_{M_1}, B_2|^{(3,0)}_{M_1}\rangle dz^6 = \frac{1}{4}E^3 \sum_{\alpha,\beta\geq 5} \overline{H}^\alpha_2\overline{H}^\beta_2\langle e_\alpha, e_\beta\rangle dz^6 = \frac{1}{4}E^3 \sum_{\alpha\geq 5}(\overline{H}^\alpha_2)^2 dz^6.$$
Θέτουμε $f_2 := \frac{1}{4}E^3 \sum_{\alpha\geq 5}(\overline{H}^\alpha_2)^2$. Θα αποδείξουμε ότι η f_2 είναι ολόμορφη. Πολλαπλασιάζουμε τη σχέση που αποδείξαμε στο (iii) με $\overline{H}^\alpha_2$, αθροίζουμε για $\alpha \geq 5$, χάνουμε χρήση των σχέσεων (2.4), (2.5) και $\sum_{\alpha,\beta\geq 5} \overline{H}^\beta_2\overline{H}^\alpha_2\omega_{\beta\alpha} \wedge \phi = 0$ και βρίσκουμε $df_2 \wedge dz = 0$. Αυτό σημαίνει ότι $\frac{\partial f_2}{\partial \overline{z}} = 0$ και επομένως το Φ_2 είναι ολόμορφο στο $M_1 \cap U$. □

Στόχος μας είναι να δείξουμε ότι το Φ_2 είναι ταυτοτικά μηδέν. Για αυτό θα δείξουμε ότι το M_1^c είναι πεπερασμένο σύνολο και ότι υπάρχει υποδέσμη της κάθετης δέσμης με βαθμίδα 2 ορισμένη στο M^2, η οποία στο M_1 ταυτίζεται με τη δέσμη $N^1 f|_{M_1}$. Για το σκοπό αυτό χρειαζόμαστε το επόμενο λήμμα το οποίο οφείλεται στον Chern [8] (βλέπε επίσης [5] ή [11]).

Λήμμα 2.2.3. *Αν $f_1, ..., f_m : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ είναι μιγαδικές συναρτήσεις οι οποίες σε μια περιοχή U του μηδενός ικανοποιούν το διαφορικό σύστημα $\frac{\partial f_i}{\partial \bar{z}} = \sum_j a_{ij} f_j$, όπου $a_{ij} : U \longrightarrow \mathbb{C}$ είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις και $i, j = 1, ..., m$, τότε είτε $f_1 = ... = f_m = 0$, είτε οι κοινές ρίζες των $f_1, ..., f_m$ είναι μεμονωμένες και μάλιστα υπάρχει θετικός ακέραιος l και διαφορίσιμες συναρτήσεις $f_1^*, ..., f_m^* : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ώστε να ισχύει $f_i(z) = z^l f_i^*(z)$ με $(f_1^*(0), ..., f_m^*(0)) \neq (0, ..., 0)$.*

Λήμμα 2.2.4. *Αν $f : M^2 \longrightarrow S^n$, $n \geq 5$, συμπαγής, κορεσμένη, ελαχιστική επιφάνεια γένους μηδέν, τότε το σύνολο M_1^c είναι πεπερασμένο. Επιπλέον, υπάρχει διανυσματική υποδέσμη $N^{*1} f$ της κάθετης δέσμης Nf με βαθμίδα 2 ώστε $N^{*1} f|_{M_1} = N^1 f|_{M_1}$.*

Απόδειξη. Έστω $p \in M_1^c$. Θεωρούμε γύρω από το p μιγαδικό χάρτη (U, z) με $z(p) = 0$, $z = x + iy$, $\langle , \rangle = E|dz|^2$ και ορθομοναδιαίο πλαίσιο κατά μήκος της f με εφαπτόμενο μέρος $\{e_1, e_2\}$, όπου $e_1 = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial}{\partial x}$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial}{\partial y}$, και κάθετο μέρος $\{e_\alpha\}$. Στο U έχουμε το μιγαδικό (1,0)-τανυστικό πεδίο $\phi = \omega_1 + i\omega_2$ και τις μιγαδικές συναρτήσεις $H_1^\alpha = h_{11}^\alpha + ih_{12}^\alpha$ για $\alpha = 3, ..., n$. Με τη βοήθεια των σχέσεων

$$\begin{aligned} d\overline{H}_1^\alpha &= \frac{\partial \overline{H}_1^\alpha}{\partial z} dz + \frac{\partial \overline{H}_1^\alpha}{\partial \bar{z}} d\bar{z}, \\ \omega_{\alpha\beta} &= \omega_{\alpha\beta}(\frac{\partial}{\partial z}) dz + \omega_{\alpha\beta}(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}) d\bar{z} \end{aligned}$$

και των σχέσεων (2.4), (2.5), από το Λήμμα 2.2.1(i) λαμβάνουμε

$$\frac{\partial \overline{H}_1^\alpha}{\partial \bar{z}} = \sum_\beta g_{\alpha\beta} \overline{H}_1^\beta,$$

όπου $g_{\alpha\beta} := -\omega_{\beta\alpha}(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}) - \delta_{\alpha\beta} d \log E(\frac{\partial}{\partial \bar{z}})$ είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις και $\delta_{\alpha\beta}$ είναι το δέλτα του Kronecker.

Σύμφωνα με το Λήμμα 2.2.3 είτε $\overline{H}_1^\alpha = 0$ για κάθε $\alpha = 3, ..., n$, είτε οι κοινές ρίζες των $\overline{H}_1^\alpha$ είναι μεμονωμένες και υπάρχει θετικός ακέραιος l_1 και διαφορίσιμες συναρτήσεις $\overline{H}_1^{*\alpha} : U \longrightarrow \mathbb{C}$ ώστε να ισχύει

$$\overline{H}_1^\alpha = z^{l_1} \overline{H}_1^{*\alpha} \tag{2.6}$$

για κάθε α και $(\overline{H}_1^{*3}(0), ..., \overline{H}_1^{*n}(0)) \neq (0, ..., 0)$.

Αν ήταν $\overline{H}_1^\alpha = 0$ για κάθε $\alpha = 3, ..., n$, τότε $B|_U = 0$. Άτοπο, αφού σύμφωνα με την Παρατήρηση 1.3.1 η f δεν θα ήταν κορεσμένη. Άρα οι κοινές ρίζες των $\overline{H}_1^\alpha$ είναι μεμονωμένες. Οι κοινές ρίζες των $\overline{H}_1^\alpha$, $\alpha = 3, ..., n$, είναι ακριβώς τα σημεία όπου ο πρώτος κάθετος χώρος γίνεται μηδενικός. Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο M_1^c αποτελείται από μεμονωμένα σημεία και αφού το M^2 είναι συμπαγές, είναι πεπερασμένο σύνολο.

Επειδή το M_1^c είναι πεπερασμένο σύνολο, μπορούμε να θεωρήσουμε γύρω από το τυχόν σημείο $p \in M_1^c$ μιγαδικό χάρτη (U, z) με $z(p) = 0$ για τον οποίο όμως ισχύει $U \cap M_1^c = \{p\}$. Επιλέγουμε με τον συνήθη τρόπο τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο κατά μήκος της f. Έχουμε ήδη δει ότι σε κάθε σημείο q του M^2 η έλλειψη $E_1(q)$ είναι κύκλος, οπότε τα $B(e_1, e_1)|_q$, $B(e_1, e_2)|_q$ είναι του ιδίου μήκους και κάθετα μεταξύ τους για κάθε $q \in U$. Αυτό σημαίνει ότι το διάνυσμα $B(e_1, e_1)|_q - iB(e_1, e_2)|_q$ είναι ισοτροπικό, δηλαδή $\langle B(e_1, e_1)|_q - iB(e_1, e_2)|_q, B(e_1, e_1)|_q - iB(e_1, e_2)|_q\rangle = 0$ για κάθε $q \in U$.

Όμως λόγω της (2.6) έχουμε $B(e_1, e_1) - iB(e_1, e_2) = \sum_\alpha \overline{H}_1^\alpha e_\alpha = z^{l_1} \sum_\alpha \overline{H}_1^{*\alpha} e_\alpha$, άρα στο U έχουμε $z^{2l_1}\langle \sum_\alpha \overline{H}_1^{*\alpha} e_\alpha, \sum_\alpha \overline{H}_1^{*\alpha} e_\alpha\rangle = 0$. Στο $U - \{p\}$ είναι $z \neq 0$, επομένως στο $U - \{p\}$ έχουμε τη σχέση

$$\langle \sum_\alpha \overline{H}_1^{*\alpha} e_\alpha, \sum_\alpha \overline{H}_1^{*\alpha} e_\alpha\rangle = 0.$$

Λόγω συνέχειας, η σχέση αυτή ισχύει και στο p. Επομένως για κάθε $q \in U$ ισχύει

$$\left|\mathrm{Re}\left(\sum_\alpha \overline{H}_1^{*\alpha} e_\alpha\right)\right|(q) = \left|\mathrm{Im}\left(\sum_\alpha \overline{H}_1^{*\alpha} e_\alpha\right)\right|(q) \neq 0$$

και

$$\langle \mathrm{Re}\left(\sum_\alpha \overline{H}_1^{*\alpha} e_\alpha\right)|_q, \mathrm{Im}\left(\sum_\alpha \overline{H}_1^{*\alpha} e_\alpha\right)|_q\rangle = 0.$$

Για κάθε $q \in U$ ορίζουμε τον διδιάστατο υπόχωρο $N_q^{*1} f$ του κάθετου χώρου της f στο q

$$N_q^{*1} f := \mathrm{span}\left\{\mathrm{Re}\left(\sum_{\alpha=3}^{n} \overline{H}_1^{*\alpha} e_\alpha\right)|_q, \mathrm{Im}\left(\sum_{\alpha=3}^{n} \overline{H}_1^{*\alpha} e_\alpha\right)|_q\right\}.$$

Στο U έχουμε τη δέσμη βαθμίδας 2

$$N^{*1} f|_U = \bigcup_{q \in U} N_q^{*1} f.$$

Επιπλέον, επειδή για $q \in U - \{p\}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
N_q^1 f &= \mathrm{span}\{B(e_1, e_1)|_q, B(e_1, e_2)|_q\} \\
&= \mathrm{span}\left\{\mathrm{Re}\left(B(e_1, e_1)|_q - iB(e_1, e_2)|_q\right), \mathrm{Im}\left(B(e_1, e_1)|_q - iB(e_1, e_2)|_q\right)\right\} \\
&= \mathrm{span}\left\{\mathrm{Re}\left(z^{l_1} \sum_\alpha \overline{H}_1^{*\alpha} e_\alpha\right)|_q, \mathrm{Im}\left(z^{l_1} \sum_\alpha \overline{H}_1^{*\alpha} e_\alpha\right)|_q\right\} \\
&= \mathrm{span}\left\{\mathrm{Re}\left(\sum_\alpha \overline{H}_1^{*\alpha} e_\alpha\right)|_q, \mathrm{Im}\left(\sum_\alpha \overline{H}_1^{*\alpha} e_\alpha\right)|_q\right\},
\end{aligned}$$

ισχύει

$$N_q^1 f = \begin{cases} \mathrm{span}\{\mathrm{Re}(\sum_\alpha \overline{H}_1^{*\alpha} e_\alpha)|_q, \mathrm{Im}(\sum_\alpha \overline{H}_1^{*\alpha} e_\alpha)|_q\}, & q \in U - \{p\}, \\ \{0\}, & q = p, \end{cases}$$

άρα $N^{*1} f|_{U-\{p\}} = N^1 f|_{U-\{p\}}$.

Αν επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία γύρω από όλα τα σημεία του M_1^c, που όπως είδαμε είναι πεπερασμένα το πλήθος, αποκτούμε τη διανυσματική δέσμη $N^{*1} f$ με βαθμίδα 2 στο M^2 για την οποία ισχύει $N^{*1} f|_{M_1} = N^1 f|_{M_1}$. □

Στο M_1 έχουμε το μιγαδικό (3,1)-τανυστικό πεδίο $B_2|_{M_1}$ και το ολόμορφο 6-διαφορικό Φ_2. Θα δείξουμε ότι $\Phi_2 = 0$. Για το σκοπό αυτό ορίζουμε την απεικόνιση

$$B_2^* : \Delta(M^2) \times \Delta(M^2) \times \Delta(M^2) \longrightarrow \Gamma\big((T^1 f \oplus N^{*1} f)^{\perp}\big),$$

$$(X_1, X_2, X_3) \longmapsto B_2^*(X_1, X_2, X_3) = \big(\nabla^f_{X_1} \nabla^f_{X_2} df(X_3)\big)^{(T^1 f \oplus N^{*1} f)^{\perp}}.$$

Η B_2^* είναι $D(M^2)$-γραμμική ως προς την πρώτη μεταβλητή της. Θα δείξουμε ότι είναι συμμετρική και επομένως θα είναι $D(M^2)$-γραμμική ως προς όλες τις μεταβλητές της.

Λήμμα 2.2.5. *Ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) *Το B_2^* είναι συμμετρικό $(3,1)$-τανυστικό πεδίο. Επιπλέον, για κάθε $X \in \Delta(M^2)$ και $\{e_1, e_2\}$ τυχόν τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο του M^2 ισχύει*

$$B_2^*(X, e_1, e_1) + B_2^*(X, e_2, e_2) = 0.$$

(ii) *Για $X_1, X_2, X_3 \in \Delta(M^2)$ ισχύει*

$$B_2^*(X_1, X_2, X_3) = \big(\nabla^f_{X_1} B(X_2, X_3)\big)^{(T^1 f \oplus N^{*1} f)^{\perp}}.$$

(iii) *Για κάθε $p \in M^2$ έχουμε*

$$B_2^*|_p = \begin{cases} B_2|_p, & p \in M_1, \\ 0, & p \in M_1^c. \end{cases}$$

Απόδειξη. (i) Λόγω του Λήμματος 2.2.4, ισχύει $N^{*1} f|_{M_1} = N^1 f|_{M_1}$. Επομένως από τους ορισμούς των B_2 και B_2^* είναι $B_2^*|_{M_1} = B_2|_{M_1}$. Άρα η $B_2^*|_{M_1}$ είναι συμμετρική και πληροί τη σχέση $B_2^*|_{M_1}(X, e_1, e_1) + B_2^*|_{M_1}(X, e_2, e_2) = 0$. Γνωρίζουμε από το Λήμμα 2.2.4 ότι το M_1^c είναι πεπερασμένο σύνολο και επειδή η $B_2^*|_{M_1}$ είναι συμμετρικό (3,1)-τανυστικό πεδίο, λόγω συνέχειας, η B_2^* είναι συμμετρική και πληροί την εν λόγω σχέση και στα σημεία του M_1^c.

(ii) Έστω $X_1, X_2, X_3 \in \Delta(M^2)$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Gauss έχουμε

$$\begin{aligned} B_2^*(X_1, X_2, X_3) &= \big(\nabla^f_{X_1} \nabla^f_{X_2} df(X_3)\big)^{(T^1 f \oplus N^{*1} f)^{\perp}} \\ &= \big(\underbrace{\nabla^f_{X_1} df(\nabla^f_{X_2} X_3)}_{\in T^2 f} + \nabla^f_{X_1} B(X_2, X_3)\big)^{(T^1 f \oplus N^{*1} f)^{\perp}} \\ &= \big(\nabla^f_{X_1} B(X_2, X_3)\big)^{(T^1 f \oplus N^{*1} f)^{\perp}}. \end{aligned}$$

(iii) Έχουμε ήδη δει ότι $B_2^*|_{M_1} = B_2|_{M_1}$. Θα δείξουμε ότι $B_2^*|_{M_1^c} = 0$. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε τυχόν τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{e_3^*, e_4^*\}$ της διανυσματικής δέσμης $N^{*1} f$. Τότε λόγω των Λημμάτων 1.3.1 και 2.2.4 έχουμε

$$B(e_1, e_1) = h_{11}^{*3} e_3^* + h_{11}^{*4} e_4^*,$$

$$B(e_1, e_2) = h_{12}^{*3} e_3^* + h_{12}^{*4} e_4^*,$$

όπου $h_{11}^{*3}, h_{11}^{*4}, h_{12}^{*3}, h_{12}^{*4}$ είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις. Για κάθε $p \in M_1^c$ ισχύει $B|_p = 0$, επομένως

$$h_{11}^{*3}(p) = h_{11}^{*4}(p) = h_{12}^{*3}(p) = h_{12}^{*4}(p) = 0.$$

Κάνοντας χρήση του τύπου του Weingarten, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} B_2^*(e_1,e_1,e_1) &= \left(\nabla_{e_1}^f B(e_1,e_1)\right)^{(T^1 f \oplus N^{*1} f)^\perp} \\ &= \left(\nabla_{e_1}^\perp (h_{11}^{*3} e_3^* + h_{11}^{*4} e_4^*)\right)^{(T^1 f \oplus N^{*1} f)^\perp} \\ &= \left(e_1(h_{11}^{*3}) e_3^* + e_1(h_{11}^{*4}) e_4^*\right)^{(T^1 f \oplus N^{*1} f)^\perp} \\ &+ h_{11}^{*3} (\nabla_{e_1}^\perp e_3^*)^{(T^1 f \oplus N^{*1} f)^\perp} + h_{11}^{*4} (\nabla_{e_1}^\perp e_4^*)^{(T^1 f \oplus N^{*1} f)^\perp} \\ &= h_{11}^{*3} (\nabla_{e_1}^\perp e_3^*)^{(T^1 f \oplus N^{*1} f)^\perp} + h_{11}^{*4} (\nabla_{e_1}^\perp e_4^*)^{(T^1 f \oplus N^{*1} f)^\perp}. \end{aligned}$$

Όμοια

$$B_2^*(e_1,e_1,e_2) = h_{12}^{*3} (\nabla_{e_1}^\perp e_3^*)^{(T^1 f \oplus N^{*1} f)^\perp} + h_{12}^{*4} (\nabla_{e_1}^\perp e_4^*)^{(T^1 f \oplus N^{*1} f)^\perp}.$$

Συνεπώς για κάθε σημείο p του M_1^c ισχύει $B_2^*(e_1,e_1,e_1)|_p = B_2^*(e_1,e_1,e_2)|_p = 0$ και λόγω του (i) έχουμε ότι $B_2^*|_p = 0$. $\square$

Μιγαδικοποιούμε τις διανυσματικές δέσμες $TM^2, T^1 f, N^{*1} f$ και επεκτείνουμε $\mathbb{C}$-γραμμικά το (3,1)-τανυστικό πεδίο B_2^*, οπότε αποκτούμε το μιγαδικό (3,1)-τανυστικό πεδίο

$$B_2^* : \Gamma(TM^2 \otimes \mathbb{C}) \times \Gamma(TM^2 \otimes \mathbb{C}) \times \Gamma(TM^2 \otimes \mathbb{C}) \longrightarrow \Gamma\left((T^1 f \oplus N^{*1} f)^\perp \otimes \mathbb{C}\right).$$

Το μιγαδικό (3,1)-τανυστικό πεδίο B_2^* δέχεται την ανάλυση

$$B_2^* = B_2^{*\,(3,0)} dz^3 + B_2^{*\,(2,1)} dz^2 d\bar{z} + B_2^{*\,(1,2)} dz d\bar{z}^2 + B_2^{*\,(0,3)} d\bar{z}^3.$$

Από το Λήμμα 2.2.5(i) έχουμε $B_2^*(X,e_1,e_1) + B_2^*(X,e_2,e_2) = 0$ για $X \in \Delta(U)$ και $\{e_1,e_2\}$ τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο του U. Για $e_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial x}$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial y}$, επειδή $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ και $\frac{\partial}{\partial y} = i(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}})$, η τελευταία σχέση γίνεται

$$B_2^*(X, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}) = 0.$$

Επομένως

$$B_2^* = B_2^{*\,(3,0)} dz^3 + B_2^{*\,(0,3)} d\bar{z}^3,$$

όπου

$$B_2^{*\,(3,0)} = B_2^*(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}), \; B_2^{*\,(0,3)} = B_2^*(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}})$$

και ισχύει $\overline{B_2^{*\,(3,0)}} = B_2^{*\,(0,3)}$.

Στο U ορίζουμε το 6-διαφορικό

$$\Phi_2^* := \langle B_2^{*\,(3,0)}, B_2^{*\,(3,0)} \rangle dz^6.$$

Το Φ_2^* είναι καλά ορισμένο σε όλο το M^2 και λόγω του Λήμματος 2.2.5(iii), ισχύει

$$\Phi_2^*|_p = \begin{cases} \Phi_2|_p, & p \in M_1, \\ 0, & p \in M_1^c. \end{cases}$$

Θεωρούμε ένα σημείο $p \in M_1^c$ και έστω (U, z) μιγαδικός χάρτης γύρω από το p με $z(p) = 0$ και $U \cap M_1^c = \{p\}$. Από το Λήμμα 2.2.2(iv) το Φ_2^* είναι ολόμορφο στο $U - \{p\}$. Επειδή είναι και συνεχές στο σημείο p, συμπεραίνουμε ότι το Φ_2^* είναι ολόμορφο στο U [1]. Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία γύρω από όλα τα σημεία του M_1^c, έχουμε ότι το Φ_2^* είναι ολόμορφο 6-διαφορικό σε όλο το M^2. Από το Θεώρημα Riemann-Roch έχουμε $\Phi_2^* = 0$. Συνεπώς δείξαμε ότι $\Phi_2 = 0$. Κατά συνέπεια για κάθε $p \in M_1$ ισχύει $\Phi_2|_p = 0$ ή ισοδύναμα

$$|B_2(e_1, e_1, e_1)|^2(p) - |B_2(e_1, e_1, e_2)|^2(p) - 2i\langle B_2(e_1, e_1, e_1), B_2(e_1, e_1, e_2)\rangle(p) = 0.$$

Από την τελευταία σχέση, λόγω της Πρότασης 1.3.1 προκύπτει ότι σε κάθε σημείο $p \in M_1$ η έλλειψη $E_2(p)$ είναι κύκλος με ακτίνα

$$\kappa_2(p) = |B_2(e_1, e_1, e_1)|(p) = |B_2(e_1, e_1, e_2)|(p).$$

Επομένως, η διάσταση του κάθετου χώρου δεύτερης τάξης στο τυχόν $p \in M_1$ είναι 0 ή 2. Αν $\dim N_p^2 f = 0$ για κάθε $p \in M_1$, τότε σύμφωνα με την Παρατήρηση 1.3.1, $f(M^2) \subset S^4$, όπου S^4 είναι μια μέγιστη 4-σφαίρα της S^n. Άτοπο, αφού έχουμε ήδη αναφέρει πως εξετάζουμε χορεσμένη ελαχιστική επιφάνεια $f : M^2 \longrightarrow S^n, n \geq 5$. Συνεπώς, $\max_{p \in M^2} \dim N_p^2 f = 2$ το οποίο σημαίνει ότι $n \geq 6$. Αν $n = 6$, τότε η διαδικασία σταματά εδώ και αν $n \geq 7$, τότε συνεχίζει.

Είναι τώρα εύλογο η διαδικασία αυτή να γενικεύεται επαγωγικά. Για λόγους πληρότητας της απόδειξης των αποτελεσμάτων, θα περιγράψουμε λεπτομερώς το επαγωγικό βήμα.

Έστω $f : M^2 \longrightarrow S^n, n \geq 7$, συμπαγής, χορεσμένη, ελαχιστική επιφάνεια γένους μηδέν και θετικός ακέραιος r με $2 \leq r \leq [\frac{n-1}{2}] - 1$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $s \in \{2, ..., r\}$ ισχύουν τα ακόλουθα:

(I) Υπάρχουν διανυσματικές υποδέσμες $N^{*1} f, ..., N^{*r-1} f$ της κάθετης δέσμης Nf με βαθμίδα 2 υπεράνω του M^2 έτσι ώστε $N^{*s-1} f|_{M_{s-1}} = N^{s-1} f|_{M_{s-1}}$, όπου

$$M_{s-1} := \{p \in M^2 : \|B_{s-1}^*\|(p) > 0\}$$

και

$$\|B_s^*\| := \sqrt{\sum_{j_1, ..., j_{s+1}=1}^{2} |B_s^*(e_{j_1}, ..., e_{j_{s+1}})|^2}$$

είναι το μήκος του συμμετρικού $(s+1, 1)$-τανυστικού πεδίου

$$B_s^* : \underbrace{\Delta(M^2) \times ... \times \Delta(M^2)}_{s+1} \longrightarrow \Gamma\big((T^1 f \oplus N^{*1} f \oplus ... \oplus N^{*s-1} f)^{\perp}\big),$$

$$(X_1, ..., X_{s+1}) \longmapsto B_s^*(X_1, ..., X_{s+1}) = \big(\nabla_{X_1}^f ... \nabla_{X_s}^f df(X_{s+1})\big)^{(T^1 f \oplus N^{*1} f \oplus ... \oplus N^{*s-1} f)^{\perp}}.$$

Θέτουμε $B_1^* = B$.

Για το $(s+1,1)$-τανυστικό πεδίο B_s^* ισχύουν:

(i) Αν $X_1, ..., X_{s-1} \in \Delta(M^2)$ και $\{e_1, e_2\}$ είναι οποιοδήποτε τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο του M^2, τότε

$$B_s^*(X_1, ..., X_{s-1}, e_1, e_1) + B_s^*(X_1, ..., X_{s-1}, e_2, e_2) = 0.$$

(ii) Αν $X_1, ..., X_{s+1} \in \Delta(M^2)$, τότε

$$B_s^*(X_1, ..., X_{s+1}) = \left(\nabla^f_{X_1} B^*_{s-1}(X_2, ..., X_{s+1})\right)^{(T^1 f \oplus N^{*1} f \oplus ... \oplus N^{*s-1} f)^\perp}.$$

(iii) $B_s^*|_{M_{s-1}} = B_s|_{M_{s-1}}$ και $B_s^*|_{M^c_{s-1}} = 0$.

Επιπλέον, τα σύνολα M_{s-1} είναι μη κενά, ανοικτά και πυκνά υποσύνολα του M^2, με $M_1 \supset M_2 \supset ... \supset M_{r-1}$ και το συμπλήρωμα καθενός από αυτά στο M^2 είναι πεπερασμένο σύνολο.

(II) Μιγαδικοποιούμε τις διανυσματικές δέσμες $T^1 f, N^{*1} f, ..., N^{*r-1} f$, επεκτείνουμε $\mathbb{C}$-γραμμικά τα B_s^*, οπότε αποκτούμε τα μιγαδικά $(s+1,1)$-τανυστικά πεδία

$$B_s^* : \underbrace{\Gamma(TM^2 \otimes \mathbb{C}) \times ... \times \Gamma(TM^2 \otimes \mathbb{C})}_{s+1} \longrightarrow \Gamma\left((T^1 f \oplus N^{*1} f \oplus ... \oplus N^{*s-1} f)^\perp \otimes \mathbb{C}\right).$$

Το B_s^* ως μιγαδικό $(s+1,1)$-τανυστικό πεδίο δέχεται την ανάλυση

$$B_s^* = \sum_{p+q=s+1} B_s^{*\ (p,q)} dz^p d\bar{z}^q.$$

Σε ένα μιγαδικό χάρτη (U, z) του M^2 με $z = x + iy$ και $\langle , \rangle = E|dz|^2$ θεωρούμε τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{e_1, e_2\}$ με $e_1 = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial}{\partial x}$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial}{\partial y}$. Ισχύει η σχέση

$$B_s^*(X_1, ..., X_{s-1}, e_1, e_1) + B_s^*(X_1, ..., X_{s-1}, e_2, e_2) = 0,$$

για κάθε $X_1, ..., X_{s-1} \in \Delta(U)$. Επειδή $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, $\frac{\partial}{\partial y} = i(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}})$, η τελευταία σχέση γίνεται

$$B_s^*(X_1, ..., X_{s-1}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}) = 0.$$

Επομένως, το B_s^* έχει την ανάλυση

$$B_s^* = B_s^{*\ (s+1,0)} dz^{s+1} + B_s^{*\ (0,s+1)} d\bar{z}^{s+1},$$

όπου

$$B_s^{*\ (s+1,0)} = B_s^*(\frac{\partial}{\partial z}, ..., \frac{\partial}{\partial z}), \ B_s^{*\ (0,s+1)} = B_s^*(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, ..., \frac{\partial}{\partial \bar{z}})$$

και ισχύει $\overline{B_s^{*\ (s+1,0)}} = B_s^{*\ (0,s+1)}$.

Υποθέτουμε ότι τα καλά ορισμένα μιγαδικά $(2s+2)$-διαφορικά

$$\Phi_s^* := \langle B_s^{*\ (s+1,0)}, B_s^{*\ (s+1,0)} \rangle dz^{2s+2}$$

είναι εκ ταυτότητος μηδέν.

(III) Για κάθε μιγαδικό χάρτη (U, z) με $z = x + iy$ και $\langle , \rangle = E|dz|^2$ υπάρχει ορθομοναδιαίο πλαίσιο κατά μήκος της $f|_{M_{r-1}}$ με εφαπτόμενο μέρος $\{e_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial x}, e_2 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial y}\}$ και κάθετο μέρος $\{e_\alpha\}$ έτσι ώστε

$$e_3 = \frac{1}{\kappa_1}B(e_1, e_1),\ e_4 = \frac{1}{\kappa_1}B(e_1, e_2),$$

$$e_5 = \frac{1}{\kappa_2}B_2(e_1, e_1, e_1),\ e_6 = \frac{1}{\kappa_2}B_2(e_1, e_1, e_2),$$

$$\vdots$$

$$e_{2r-1} = \frac{1}{\kappa_{r-1}}B_{r-1}(e_1, ..., e_1),\ e_{2r} = \frac{1}{\kappa_{r-1}}B_{r-1}(e_1, ..., e_1, e_2),$$

όπου $\kappa_{s-1} > 0$, για το οποίο υποθέτουμε ότι στο $M_{s-1} \cap U$ ισχύουν οι σχέσεις

$$(d\log\kappa_{s-1} + i\omega_{2s-1,2s}) \wedge \phi = is\omega_{12} \wedge \phi$$

και

$$(d\overline{H}_s^\alpha - i(s+1)\overline{H}_s^\alpha\omega_{12} + \sum_{\beta \geq 2s+1} \overline{H}_s^\beta\omega_{\beta\alpha}) \wedge \phi = 0,\ \alpha \geq 2s+1.$$

Θα δείξουμε ότι τα (I), (II), (III) ισχύουν και για $s = r + 1$.

Απόδειξη. Λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, ισχύει $\Phi_r^* = 0$ στο M^2 και συνεπώς $\Phi_r^*|_{M_{r-1}} = 0$. Θα δείξουμε ότι η έλλειψη $E_r(p)$ είναι κύκλος σε κάθε σημείο $p \in M_{r-1}$.

Το M_{r-1}, ως μη κενό και ανοικτό υποσύνολο του προσανατολισμένου πολυπτύγματος Riemann M^2, είναι και αυτό προσανατολισμένο πολύπτυγμα Riemann. Έστω p ένα τυχόν σημείο του M_{r-1}. Γύρω από το $p \in M_{r-1}$ θεωρούμε μιγαδικό χάρτη (U, z) με $z = x + iy$ και $\langle , \rangle = E|dz|^2$. Έστω $\{e_1, e_2\}$ τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο στο U με $e_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial x}$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial y}$. Στο U έχουμε $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}) = \frac{1}{2}\sqrt{E}(e_1 - ie_2)$.

Για το $(2r+2)$-διαφορικό Φ_r^* ισχύει $\Phi_r^*|_p = 0$ αν και μόνο αν

$$\langle B_r^*(\frac{\partial}{\partial z}, ..., \frac{\partial}{\partial z})|_p, B_r^*(\frac{\partial}{\partial z}, ..., \frac{\partial}{\partial z})|_p\rangle = 0,$$

ή ισοδύναμα λόγω της σχέσης $B_r^*|_{M_{r-1}} = B_r|_{M_{r-1}}$,

$$\langle B_r(\frac{\partial}{\partial z}, ..., \frac{\partial}{\partial z})|_p, B_r(\frac{\partial}{\partial z}, ..., \frac{\partial}{\partial z})|_p\rangle = 0.$$

Όμως έχουμε

$$B_r(\frac{\partial}{\partial z}, ..., \frac{\partial}{\partial z}) = B_r(\frac{\sqrt{E}}{2}(e_1 - ie_2), ..., \frac{\sqrt{E}}{2}(e_1 - ie_2))$$

$$= \frac{1}{2^{r+1}} E^{\frac{r+1}{2}} \sum_{m=0}^{r+1} \binom{r+1}{m} B_r(e_1, ..., e_1, \underbrace{-ie_2, ..., -ie_2}_{m}).$$

Συμβολίζουμε με I το σύνολο των άρτιων αριθμών του συνόλου $\{1, ..., r+1\}$ και με J το σύνολο των περιττών αριθμών του, επομένως

$$\begin{aligned} B_r(\frac{\partial}{\partial z}, ..., \frac{\partial}{\partial z}) &= \frac{1}{2^{r+1}} E^{\frac{r+1}{2}} \sum_{m \in I, m=2l} (-1)^l \binom{r+1}{m} B_r(e_1, ..., e_1, \underbrace{e_2, ..., e_2}_{m}) \\ &- i \frac{1}{2^{r+1}} E^{\frac{r+1}{2}} \sum_{m \in J, m=2l+1} (-1)^l \binom{r+1}{m} B_r(e_1, ..., e_1, \underbrace{e_2, ..., e_2}_{m}). \end{aligned}$$

Επειδή από το Λήμμα 1.3.2 ισχύει

$$B_r(e_1, ..., e_1) + B_r(e_1, ..., e_1, e_2, e_2) = 0,$$

είναι

$$B_r(e_1, ...e_1, \underbrace{e_2, ..., e_2}_{m}) = \begin{cases} (-1)^l B_r(e_1, ..., e_1), & m = 2l, \\ (-1)^l B_r(e_1, ..., e_1, e_2), & m = 2l+1, \end{cases}$$

και επομένως,

$$\begin{aligned} B_r(\frac{\partial}{\partial z}, ..., \frac{\partial}{\partial z}) &= \frac{1}{2^{r+1}} E^{\frac{r+1}{2}} B_r(e_1, ..., e_1) \sum_{m \in I} \binom{r+1}{m} \\ &- i \frac{1}{2^{r+1}} E^{\frac{r+1}{2}} B_r(e_1, ..., e_1, e_2) \sum_{m \in J} \binom{r+1}{m}. \end{aligned}$$

Όμως ισχύει

$$\sum_{m \in I} \binom{r+1}{m} = \sum_{m \in J} \binom{r+1}{m} = 2^r$$

και τελικά έχουμε

$$B_r(\frac{\partial}{\partial z}, ..., \frac{\partial}{\partial z}) = \frac{1}{2} E^{\frac{r+1}{2}} B_r(e_1, ..., e_1) - i \frac{1}{2} E^{\frac{r+1}{2}} B_r(e_1, ..., e_1, e_2).$$

Οπότε, από τη σχέση $\Phi_r^*|_p = 0$ συνάγεται ότι στο M_{r-1} ισχύουν

$$|B_r(e_1, ..., e_1)| = |B_r(e_1, ..., e_1, e_2)|,$$
$$\langle B_r(e_1, ..., e_1), B_r(e_1, ..., e_1, e_2) \rangle = 0.$$

Λόγω της Πρότασης 1.3.1 έχουμε ότι η έλλειψη $E_r(p)$ είναι κύκλος σε κάθε σημείο του M_{r-1}. Αυτό σημαίνει ότι $\dim N_p^r f \in \{0, 2\}$ για κάθε $p \in M_{r-1}$.

Αν υποθέσουμε ότι $\dim N_p^r f = 0$ για κάθε $p \in M_{r-1}$, τότε από την Παρατήρηση 1.3.1 υπάρχει μέγιστη $2r$-σφαίρα της S^n ώστε $f(M^2) \subset S^{2r}$. Άτοπο αφού η εμβάπτιση είναι χορεσμένη στην S^n. Άρα, υπάρχει σημείο $p \in M_{r-1}$ ώστε $\dim N_p^r f = 2$, ή ισοδύναμα $\|B_r^*\|(p) > 0$, το οποίο σημαίνει ότι το σύνολο $M_r := \{p \in M^2 : \|B_r^*\|(p) > 0\}$ είναι μη κενό.

Επειδή η $\|B_r^*\|$ είναι συνεχής συνάρτηση, το σύνολο $\|B_r^*\|^{-1}\big((0,+\infty)\big) = M_r$ είναι ανοικτό στο M^2.

Επιπλέον, αφού

$$B_r^*|_p = \begin{cases} B_r|_p, & p \in M_{r-1}, \\ 0, & p \in M_{r-1}^c, \end{cases}$$

έχουμε $M_r \subset M_{r-1}$.

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι το M_r είναι πυκνό σύνολο του M^2. Έστω $\operatorname{int}(M_r^c) \neq \varnothing$. Θεωρούμε ένα μη κενό, ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο V του M_r^c. Έχουμε $B_r^*|_V = 0$. Αν $V \cap M_{r-1} = \varnothing$, τότε θα ισχύει $V \subset M_{r-1}^c$. Αδύνατο, αφού το M_{r-1}^c αποτελείται από πεπερασμένα σημεία. Το $V \cap M_{r-1}$ είναι μη κενό και ανοικτό σύνολο στο οποίο έχουμε $B_r|_{V\cap M_{r-1}} = 0$. Τότε, σύμφωνα με την Παρατήρηση 1.3.1, η f δε θα ήταν χορεσμένη, άτοπο. Επομένως το M_r είναι πυκνό υποσύνολο του M^2.

Έστω $p_0 \in M_r^c$. Θεωρούμε γύρω από το p_0 μιγαδικό χάρτη (U, z) με $z = x + iy$, $\langle , \rangle = E|dz|^2$ και $z(p_0) = 0$. Επιλέγουμε ορθομοναδιαίο πλαίσιο κατά μήκος της f με εφαπτόμενο μέρος $\{e_1, e_2\}$, όπου $e_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial x}$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial y}$ και κάθετο μέρος $\{e_\alpha\}$. Θέτουμε $h_{(r),1}^{*\alpha} := \langle B_r^*(e_1, ..., e_1), e_\alpha\rangle$, $h_{(r),2}^{*\alpha} := \langle B_r^*(e_1, ..., e_1, e_2), e_\alpha\rangle$ και $H_r^{*\alpha} := h_{(r),1}^{*\alpha} + i h_{(r),2}^{*\alpha}$, για $\alpha \geq 2r+1$. Προφανώς, η $H_r^{*\alpha}$ είναι διαφορίσιμη για κάθε $\alpha \geq 2r+1$ και

$$B_r^*(e_1, ..., e_1) = \sum_{\alpha \geq 2r+1} h_{(r),1}^{*\alpha} e_\alpha, \quad B_r^*(e_1, ..., e_1, e_2) = \sum_{\alpha \geq 2r+1} h_{(r),2}^{*\alpha} e_\alpha.$$

Στο $M_{r-1} \cap U$ έχουμε $B_r^*|_{M_{r-1}\cap U} = B_r|_{M_{r-1}\cap U}$, συνεπώς η σχέση

$$\Big(d\overline{H}_r^\alpha - i(r+1)\overline{H}_r^\alpha \omega_{12} + \sum_{\beta \geq 2r+1} \overline{H}_r^\beta \omega_{\beta\alpha}\Big) \wedge \phi = 0$$

μας δίνει τη σχέση

$$\Big(d\overline{H}_r^{*\alpha} - i(r+1)\overline{H}_r^{*\alpha} \omega_{12} + \sum_{\beta \geq 2r+1} \overline{H}_r^{*\beta} \omega_{\beta\alpha}\Big) \wedge \phi = 0 \qquad (2.7)$$

για κάθε $\alpha \geq 2r+1$. Επειδή το M_{r-1}^c είναι πεπερασμένο σύνολο, λόγω συνέχειας η τελευταία σχέση ισχύει γύρω από το τυχόν σημείο του U.

Με τη βοήθεια των σχέσεων (2.3), (2.4) και των σχέσεων

$$\begin{aligned} d\overline{H}_r^{*\alpha} &= \frac{\partial \overline{H}_r^{*\alpha}}{\partial z} dz + \frac{\partial \overline{H}_1^{*\alpha}}{\partial \overline{z}} d\overline{z}, \\ \omega_{\alpha\beta} &= \omega_{\alpha\beta}\Big(\frac{\partial}{\partial z}\Big) dz + \omega_{\alpha\beta}\Big(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\Big) d\overline{z}, \end{aligned}$$

η (2.7) γίνεται

$$\frac{\partial \overline{H}_r^{*\alpha}}{\partial \overline{z}} = \sum_\beta g_{\alpha\beta} \overline{H}_r^{*\beta},$$

στο U γύρω από το 0, όπου $g_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}) - \frac{r+1}{2}\delta_{\alpha\beta} d\log E(\frac{\partial}{\partial \overline{z}})$ είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις και $\delta_{\alpha\beta}$ είναι το δέλτα του Kronecker.

Σύμφωνα με το Λήμμα 2.2.3 είτε $\overline{H}_r^{*\alpha} = 0$ για κάθε $\alpha = 2r+1, ..., n$ ή οι κοινές ρίζες των $\overline{H}_r^{*\alpha}$ είναι μεμονωμένες και υπάρχει θετικός ακέραιος l_r και διαφορίσιμες συναρτήσεις $\overline{G}_r^{*\alpha} : U \longrightarrow \mathbb{C}$ ώστε να ισχύει

$$\overline{H}_r^{*\alpha} = z^{l_r} \overline{G}_r^{*\alpha} \tag{2.8}$$

για κάθε $\alpha \geq 2r+1$ με $(\overline{G}_1^{*2r+1}(0), ..., \overline{G}_1^{*n}(0)) \neq (0, ..., 0)$.

Αν ήταν $\overline{H}_r^{*\alpha} = 0$ για κάθε $\alpha = 2r+1, ..., n$, τότε $B_r|_{U \cap M_{r-1}} = 0$, άτοπο αφού λόγω της Παρατήρησης 1.3.1, η f δεν θα ήταν χορεσμένη. Επομένως, οι κοινές ρίζες των $\overline{H}_r^{*\alpha}$ είναι μεμονωμένες στο U και το σύνολο $\{p \in U : B_r^*|_p = 0\}$ αποτελείται από μεμονωμένα σημεία. Άρα και το σύνολο $M_r^c = \{p \in M^2 : B_r^*|_p = 0\}$ αποτελείται από μεμονωμένα σημεία και αφού το M^2 είναι συμπαγές, είναι πεπερασμένο.

Μπορούμε να θεωρήσουμε λοιπόν ότι ισχύει $U \cap M_r^c = \{p_0\}$. Από την υπόθεση, γνωρίζουμε ότι σε κάθε σημείο p του U ισχύει $\Phi_r^*|_p = 0$, ή ισοδύναμα

$$\big|B_r^*(e_1, ..., e_1)\big|(p) = \big|B_r^*(e_1, ..., e_1, e_2)\big|(p)$$

και

$$\big\langle B_r^*(e_1, ..., e_1), B_r^*(e_1, ..., e_1, e_2)\big\rangle(p) = 0.$$

Συνεπώς στο U ισχύει

$$\big\langle B_r^*(e_1, ..., e_1) - iB_r^*(e_1, ..., e_1, e_2), B_r^*(e_1, ..., e_1) - iB_r^*(e_1, ..., e_1, e_2)\big\rangle = 0.$$

Όμως λόγω της (2.8) έχουμε

$$B_r^*(e_1, ..., e_1) - iB_r^*(e_1, ..., e_1, e_2) = \sum_{\alpha \geq 2r+1} \overline{H}_r^{*\alpha} e_\alpha = z^{l_r} \sum_{\alpha \geq 2r+1} \overline{G}_r^{*\alpha} e_\alpha.$$

Συνεπώς στο $U - \{p_0\}$ επειδή $z \neq 0$, ισχύει η ισότητα

$$\langle \sum_{\alpha \geq 2r+1} \overline{G}_r^{*\alpha} e_\alpha, \sum_{\alpha \geq 2r+1} \overline{G}_r^{*\alpha} e_\alpha \rangle = 0,$$

η οποία λόγω συνέχειας ισχύει και στο p_0. Επομένως για κάθε $q \in U$ ισχύει

$$|\mathrm{Re}(\sum_{\alpha=2r+1}^{n} \overline{G}_r^{*\alpha} e_\alpha)|(q) = |\mathrm{Im}(\sum_{\alpha=2r+1}^{n} \overline{G}_r^{*\alpha} e_\alpha)|(q) \neq 0,$$

$$\langle \mathrm{Re}(\sum_{\alpha=2r+1}^{n} \overline{G}_r^{*\alpha} e_\alpha), \mathrm{Im}(\sum_{\alpha=2r+1}^{n} \overline{G}_r^{*\alpha} e_\alpha)\rangle(q) = 0.$$

Για κάθε $q \in U$ ορίζουμε τον διδιάστατο υπόχωρο $N_q^{*r} f$ του καθέτου χώρου της f στο q

$$N_q^{*r} f := \mathrm{span}\{\mathrm{Re}(\sum_{\alpha=2r+1}^{n} \overline{G}_r^{*\alpha} e_\alpha)|_q, \mathrm{Im}(\sum_{\alpha=2r+1}^{n} \overline{G}_r^{*\alpha} e_\alpha)|_q\}.$$

Επομένως στο U έχουμε τη διανυσματική δέσμη βαθμίδας 2

$$N^{*r} f|_U = \bigcup_{q \in U} N_q^{*r} f.$$

Επειδή $B_r|_{M_r} = B_r^*|_{M_r}$, έχουμε για $q \in U - \{p_0\}$

$$\begin{aligned} N_q^r f &= \operatorname{span}\{B_r(e_1,...,e_1)|_q, B_r(e_1,...,e_1,e_2)|_q\} \\ &= \operatorname{span}\{B_r^*(e_1,...,e_1)|_q, B_r^*(e_1,...,e_1,e_2)|_q\} \\ &= \operatorname{span}\{\operatorname{Re}(B_r^*(e_1,...,e_1)|_q - iB_r^*(e_1,...,e_1,e_2)|_q), \\ &\qquad \operatorname{Im}(B_r^*(e_1,...,e_1)|_q - iB_r^*(e_1,...,e_1,e_2)|_q)\} \\ &= \operatorname{span}\{\operatorname{Re}(z^{l_r}\sum_{\alpha\geq 2r+1}\overline{G}_r^{*\alpha}e_\alpha)|_q, \operatorname{Im}(z^{l_r}\sum_{\alpha\geq 2r+1}\overline{G}_r^{*\alpha}e_\alpha)|_q\} \\ &= \operatorname{span}\{\operatorname{Re}(\sum_{\alpha\geq 2r+1}\overline{G}_r^{*\alpha}e_\alpha)|_q, \operatorname{Im}(\sum_{\alpha\geq 2r+1}\overline{G}_r^{*\alpha}e_\alpha)|_q\}, \end{aligned}$$

ισχύει $N^{*r}f|_{U-\{p_0\}} = N^r f|_{U-\{p_0\}}$.

Αν επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία γύρω από όλα τα σημεία του M_r^c, που όπως είδαμε είναι πεπερασμένα το πλήθος, αποκτούμε τη διανυσματική δέσμη $N^{*r}f$ με βαθμίδα 2 στο M^2 για την οποία ισχύει $N^{*r}f|_{M_r} = N^r f|_{M_r}$.

Ορίζουμε την απεικόνιση

$$B_{r+1}^* : \underbrace{\Delta(M^2)\times ...\times\Delta(M^2)}_{r+2} \longrightarrow \Gamma\big((T^1 f\oplus N^{*1}f\oplus ...\oplus N^{*r}f)^\perp\big),$$

$$(X_1,...,X_{r+2}) \longmapsto$$

$$B_{r+1}^*(X_1,...,X_{r+2}) := (\nabla_{X_1}^f ...\nabla_{X_{r+1}}^f df(X_{r+2}))^{(T^1 f\oplus N^{*1}f\oplus...\oplus N^{*r}f)^\perp}.$$

Η B_{r+1}^* είναι $D(M^2)$-γραμμική ως προς την πρώτη μεταβλητή της. Θα δείξουμε ότι η B_{r+1}^* είναι συμμετρική και επομένως θα είναι $D(M^2)$-γραμμική ως προς όλες τις μεταβλητές της. Καταρχήν, επειδή $M_1 \supset M_2 \supset ... \supset M_r$, ισχύει $N^{*1}f|_{M_r} = N^1 f|_{M_r}, ..., N^{*r}f|_{M_r} = N^r f|_{M_r}$ και επομένως έχουμε $B_{r+1}^*|_{M_r} = B_{r+1}|_{M_r}$. Συνεπώς, η B_{r+1}^* είναι συμμετρική στο M_r. Το M_r^c αποτελείται από πεπερασμένα σημεία και επομένως, λόγω συνέχειας, η B_{r+1}^* είναι συμμετρική και στο M_r^c. Για τους ίδιους λόγους ισχύει

$$B_{r+1}^*(X_1,...,X_r,e_1,e_1) + B_{r+1}^*(X_1,...,X_r,e_2,e_2) = 0,$$

για $X_1,...,X_r \in \Delta(M^2)$ και $\{e_1,e_2\}$ οποιοδήποτε τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο του M^2.

Για $X_1,...,X_{r+2} \in \Delta(M^2)$ έχουμε

$$\begin{aligned} &B_{r+1}^*|_{M_r}(X_1,...,X_{r+2}) = \\ &= B_{r+1}|_{M_r}(X_1,...,X_{r+2}) \\ &= (\nabla_{X_1}^f...\nabla_{X_{r+1}}^f df(X_{r+2}))^{(T^1 f|_{M_r}\oplus N^1 f|_{M_r}\oplus...\oplus N^r f|_{M_r})^\perp} \\ &= \Big(\underbrace{\nabla_{X_1}^f(\nabla_{X_2}^f...\nabla_{X_{r+1}}^f df(X_{r+2}))^{T^r f|_{M_r}}}_{\in T^{r+1}f|_{M_r}}\Big)^{(T^1 f|_{M_r}\oplus N^1 f|_{M_r}\oplus...\oplus N^r f|_{M_r})^\perp} \\ &+ \Big(\nabla_{X_1}^f(\nabla_{X_2}^f...\nabla_{X_{r+1}}^f df(X_{r+2}))^{N^r f|_{M_r}}\Big)^{(T^1 f|_{M_r}\oplus N^1 f|_{M_r}\oplus...\oplus N^r f|_{M_r})^\perp} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\nabla^f_{X_1} B_r|_{M_r}(X_2,...,X_{r+2})\right)^{(T^1 f \oplus N^1 f|_{M_r} \oplus ... \oplus N^r f|_{M_r})^\perp} \\
&= \left(\nabla^f_{X_1} B^*_r|_{M_r}(X_2,...,X_{r+2})\right)^{(T^1 f|_{M_r} \oplus N^{*1} f|_{M_r} \oplus ... \oplus N^{*r} f|_{M_r})^\perp}
\end{aligned}
$$

και λόγω συνέχειας, ισχύει και στο M^c_r. Άρα στο M^2 έχουμε τη σχέση

$$B^*_{r+1}(X_1,...,X_{r+2}) = \left(\nabla^f_{X_1} B^*_r(X_2,...,X_{r+2})\right)^{(T^1 f \oplus N^{*1} f \oplus ... \oplus N^{*r} f)^\perp}.$$

Εν συνεχεία, θα δείξουμε ότι αν $B^*_r|_p = 0$, τότε $B^*_{r+1}|_p = 0$. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε μιγαδικό χάρτη (U,z) του M^2 και τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο κατά μήκος της f με εφαπτόμενο μέρος $\{e_1, e_2\}$ και κάθετο μέρος $\{e_\alpha\}$ έτσι ώστε $e_\alpha = e^*_\alpha$ για $\alpha = 3, ..., 2r+2$, όπου τα $e^*_3, ..., e^*_{2r+2}$ είναι τέτοια ώστε $N^{*1} f = \text{span}\{e^*_3, e^*_4\}$,...,$N^{*r} f = \text{span}\{e^*_{2r+1}, e^*_{2r+2}\}$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$h^{*2r+1}_{(r),1}, h^{*2r+2}_{(r),1}, h^{*2r+1}_{(r),2}, h^{*2r+2}_{(r),2} : U \longrightarrow \mathbb{R},$$

οι οποίες είναι τέτοιες ώστε

$$B^*_r(e_1,...,e_1) = h^{*2r+1}_{(r),1} e^*_{2r+1} + h^{*2r+2}_{(r),1} e^*_{2r+2}$$

και

$$B^*_r(e_1,...,e_1,e_2) = h^{*2r+1}_{(r),2} e^*_{2r+1} + h^{*2r+2}_{(r),2} e^*_{2r+2}.$$

Πράγματι, αυτό γίνεται διότι για κάθε $p \in M^2$ ο διανυσματικός χώρος $\text{spanIm}B^*_r|_p$ είναι υπόχωρος του $N^{*r}_p f$. Τούτο ισχύει από το Λήμμα 1.3.1 για κάθε $p \in M_{r-1}$, αφού $B^*_r|_{M_{r-1}} = B_r|_{M_{r-1}}$. Αν $p \in M^c_{r-1}$, τότε ισχύει τετριμμένα επειδή $B^*_r|_p = 0$.

Λόγω του τύπου του Weingarten έχουμε

$$
\begin{aligned}
&B^*_{r+1}(e_1,...,e_1) = \\
&\quad = \left(\nabla^f_{e_1} B^*_r(e_1,...,e_1)\right)^{(T^1 f \oplus N^{*1} f \oplus ... \oplus N^{*r} f)^\perp} \\
&\quad = \left(-df(A_{B^*_r(e_1,...,e_1)} e_1)\right)^{(T^1 f \oplus N^{*1} f \oplus ... \oplus N^{*r} f)^\perp} \\
&\quad + \left(\nabla^\perp_{e_1} B^*_r(e_1,...,e_1)\right)^{(T^1 f \oplus N^{*1} f \oplus ... \oplus N^{*r} f)^\perp} \\
&\quad = \left(\nabla^\perp_{e_1}(h^{*2r+1}_{(r),1} e^*_{2r+1} + h^{*2r+2}_{(r),1} e^*_{2r+2})\right)^{(T^1 f \oplus N^{*1} f \oplus ... \oplus N^{*r} f)^\perp} \\
&\quad = h^{*2r+1}_{(r),1} (\nabla^\perp_{e_1} e^*_{2r+1})^{(T^1 f \oplus N^{*1} f \oplus ... \oplus N^{*r} f)^\perp} \\
&\quad + h^{*2r+2}_{(r),1} (\nabla^\perp_{e_1} e^*_{2r+2})^{(T^1 f \oplus N^{*1} f \oplus ... \oplus N^{*r} f)^\perp}.
\end{aligned}
$$

Όμοια,

$$
\begin{aligned}
B^*_{r+1}(e_1,...,e_1,e_2) &= h^{*2r+1}_{(r),2} (\nabla^\perp_{e_1} e^*_{2r+1})^{(T^1 f \oplus N^{*1} f \oplus ... \oplus N^{*r} f)^\perp} \\
&+ h^{*2r+2}_{(r),2} (\nabla^\perp_{e_1} e^*_{2r+2})^{(T^1 f \oplus N^{*1} f \oplus ... \oplus N^{*r} f)^\perp}.
\end{aligned}
$$

Υποθέσαμε πως $B^*_r|_p = 0$, άρα

$$h^{*2r+1}_{(r),1}(p) = h^{*2r+2}_{(r),1}(p) = h^{*2r+1}_{(r),2}(p) = h^{*2r+2}_{(r),2}(p) = 0$$

και σύμφωνα με τις παραπάνω σχέσεις,

$$B^*_{r+1}(e_1,...,e_1)|_p = B^*_{r+1}(e_1,...,e_1,e_2)|_p = 0.$$

Από αυτή τη σχέση και επειδή η B^*_{r+1} είναι συμμετρική και τέτοια ώστε να ισχύει $B^*_{r+1}(X_1,...,X_r,e_1,e_1) + B^*_{r+1}(X_1,...,X_r,e_2,e_2) = 0$, έχουμε $B^*_{r+1}|_p = 0$. Συνεπώς αποδείξαμε ότι αν p είναι ένα σημείο του M^c_r, τότε $B^*_{r+1}|_p = 0$.

Τελικά, για την B^*_{r+1} ισχύει

$$B^*_{r+1}|_p = \begin{cases} B_{r+1}|_p, & p \in M_r, \\ 0, & p \in M^c_r. \end{cases}$$

Μιγαδικοποιούμε τις διανυσματικές δέσμες $T^1f, N^{*1}f, ..., N^{*r}f$, επεκτείνουμε $\mathbb{C}$-γραμμικά την B^*_{r+1} και αποκτούμε το μιγαδικό $(r+2,1)$-τανυστικό πεδίο

$$B^*_{r+1} : \underbrace{\Gamma(TM^2 \otimes \mathbb{C}) \times ... \times \Gamma(TM^2 \otimes \mathbb{C})}_{r+2} \longrightarrow \Gamma\big((T^1f \oplus N^{*1}f \oplus ... \oplus N^{*r}f)^{\perp} \otimes \mathbb{C})\big).$$

Η B^*_{r+1} ως μιγαδικό $(r+2,1)$-τανυστικό πεδίο δέχεται την ανάλυση

$$B^*_{r+1} = \sum_{p+q=r+2} B^{*\,(p,q)}_{r+1} dz^p d\bar{z}^q.$$

Σε μιγαδικό χάρτη (U,z) του M^2 με $z = x+iy$ και $\langle,\rangle = E|dz|^2$ γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$B^*_{r+1}(X_1,...,X_r,e_1,e_1) + B^*_{r+1}(X_1,...,X_r,e_2,e_2) = 0,$$

για $X_1,...,X_r \in \Delta(U)$ και $\{e_1,e_2\}$ οποιοδήποτε τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο του U. Αν θεωρήσουμε $e_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial x}$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial y}$, τότε επειδή $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, $\frac{\partial}{\partial y} = i(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}})$, η τελευταία σχέση γίνεται

$$B^*_{r+1}(X_1,...,X_r,\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial \bar{z}}) = 0.$$

Επομένως,

$$B^*_{r+1} = B^{*\,(r+2,0)}_{r+1} dz^{r+2} + B^{*\,(0,r+2)}_{r+1} d\bar{z}^{r+2},$$

όπου

$$B^{*\,(r+2,0)}_{r+1} = B^*_{r+1}(\frac{\partial}{\partial z},...,\frac{\partial}{\partial z}),\ B^{*\,(0,r+2)}_{r+1} = B^*_{r+1}(\frac{\partial}{\partial \bar{z}},...,\frac{\partial}{\partial \bar{z}})$$

και ισχύει $\overline{B^{*\,(r+2,0)}_{r+1}} = B^{*\,(0,r+2)}_{r+1}$.

Ορίζουμε τοπικά το $(2r+4)$-διαφορικό

$$\Phi^*_{r+1} := \langle B^{*\,(r+2,0)}_{r+1}, B^{*\,(r+2,0)}_{r+1}\rangle dz^{2r+4}.$$

Θα δείξουμε ότι είναι καλά ορισμένο σε όλο το M^2. Για το λόγο αυτό θεωρούμε χάρτες του M^2 (U,φ) με μιγαδική συντεταγμένη z και (V,ψ) με μιγαδική συντεταγμένη ζ με $U \cap V \neq \varnothing$. Επειδή το M^2 είναι επιφάνεια Riemann, οι απεικονίσεις $\psi \circ \varphi^{-1}, \varphi \circ \psi^{-1}$

είναι ολόμορφες, δηλαδή $\frac{\partial\zeta}{\partial\bar z}=0$ και $\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}=0$. Στο $U\cap V$ έχουμε τις σχέσεις $\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial\zeta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\zeta}$, $d\zeta=\frac{\partial\zeta}{\partial z}dz$ και επομένως

$$\langle B^*_{r+1}(\frac{\partial}{\partial\zeta},...,\frac{\partial}{\partial\zeta}),B^*_{r+1}(\frac{\partial}{\partial\zeta},...,\frac{\partial}{\partial\zeta})\rangle d\zeta^{2r+4}=$$

$$\begin{aligned}
&= \langle B^*_{r+1}(\frac{\partial}{\partial\zeta},...,\frac{\partial}{\partial\zeta}),B^*_{r+1}(\frac{\partial}{\partial\zeta},...,\frac{\partial}{\partial\zeta})\rangle(\frac{\partial\zeta}{\partial z})^{2r+4}dz^{2r+4}\\
&= \langle(\frac{\partial\zeta}{\partial z})^{r+2}B^*_{r+1}(\frac{\partial}{\partial\zeta},...,\frac{\partial}{\partial\zeta}),(\frac{\partial\zeta}{\partial z})^{r+2}B^*_{r+1}(\frac{\partial}{\partial\zeta},...,\frac{\partial}{\partial\zeta})\rangle dz^{2r+4}\\
&= \langle B^*_{r+1}(\frac{\partial}{\partial z},...,\frac{\partial}{\partial z}),B^*_{r+1}(\frac{\partial}{\partial z},...,\frac{\partial}{\partial z})\rangle dz^{2r+4}.
\end{aligned}$$

Άρα το Φ^*_{r+1} είναι καλά ορισμένο $(2r+4)$-διαφορικό στο M^2.

Έστω $p\in M_r$. Θεωρούμε γύρω από το p μιγαδικό χάρτη (U,z) με $z=x+iy$ και $\langle,\rangle=E|dz|^2$. Επιλέγουμε ορθομοναδιαίο πλαίσιο κατά μήκος της $f|_{M_r\cap U}$ με εφαπτόμενο μέρος $\{e_1,e_2\}$, όπου $e_1=\frac{1}{\sqrt E}\frac{\partial}{\partial x}$, $e_2=\frac{1}{\sqrt E}\frac{\partial}{\partial y}$ και κάθετο μέρος $\{e_\alpha\}$, όπου

$$e_3=\frac{1}{\kappa_1}B(e_1,e_1),\ e_4=\frac{1}{\kappa_1}B(e_1,e_2),$$

$$e_5=\frac{1}{\kappa_2}B_2(e_1,e_1,e_1),\ e_6=\frac{1}{\kappa_2}B_2(e_1,e_1,e_2),$$

$$\vdots$$

$$e_{2r+1}=\frac{1}{\kappa_r}B_r(e_1,...,e_1,e_1),\ e_{2r+2}=\frac{1}{\kappa_r}B_r(e_1,...,e_1,e_2)$$

και e_α για $\alpha\ge 2r+3$ είναι τυχόντα. Συμβολίζουμε με $\{\omega_1,\omega_2\}$ το συμπλαίσιο του $\{e_1,e_2\}$. Στο $M_r\cap U$ έχουμε το μιγαδικό (1,0)-τανυστικό πεδίο $\phi=\omega_1+i\omega_2=\sqrt E dz$ για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις (2.4) και (2.5).

Έχουμε

$$\begin{aligned}
B_r(e_1,...,e_1) &= \sum_{\alpha\ge 2r+1}h^\alpha_{(r),1}e_\alpha,\\
B_r(e_1,...,e_1,e_2) &= \sum_{\alpha\ge 2r+1}h^\alpha_{(r),2}e_\alpha
\end{aligned}$$

και $H^\alpha_r=h^\alpha_{(r),1}+ih^\alpha_{(r),2}$ για $\alpha=2r+1,...,n$. Επειδή επιλέξαμε ως ορθομοναδιαίο πλαίσιο της $N^rf|_{M_r\cap U}$ το $\{e_{2r+1}=\frac{1}{\kappa_r}B_r(e_1,...,e_1,e_1),\ e_{2r+2}=\frac{1}{\kappa_r}B_r(e_1,...,e_1,e_2)\}$, έχουμε

$$h^{2r+1}_{(r),1}=\kappa_r,\ h^\alpha_{(r),1}=0,\ \alpha\ge 2r+2,$$

$$h^{2r+2}_{(r),2}=\kappa_r,\ h^\alpha_{(r),2}=0,\ \alpha\ne 2r+2$$

και συνεπώς
$$H_r^{2r+1} = \kappa_r, \; H_r^{2r+2} = i\kappa_r.$$

Στο $M_r \cap U$ ισχύει η σχέση $(d\overline{H}_r^\alpha - i(r+1)\overline{H}_r^\alpha \omega_{12} + \sum_{\beta \geq 2r+1} \overline{H}_r^\beta \omega_{\beta\alpha}) \wedge \phi = 0$ για κάθε $\alpha \geq 2r+1$. Για $\alpha = 2r+1$ λαμβάνουμε

$$\Big(d\kappa_r - i(r+1)\kappa_r\omega_{12} + \sum_{\beta \geq 2r+1} \overline{H}_r^\beta \omega_{\beta,2r+1}\Big) \wedge \phi = 0$$

και αν χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι για $\beta \geq 2r+3$ ισχύει

$$\begin{aligned} H_r^\beta &= h_{(r),1}^\beta + i h_{(r),2}^\beta \\ &= \langle B_r(e_1, ..., e_1), e_\beta \rangle + i \langle B_r(e_1, ..., e_1, e_2), e_\beta \rangle \\ &= \langle \kappa_r e_{2r+1}, e_\beta \rangle + i \langle \kappa_r e_{2r+2}, e_\beta \rangle = 0, \end{aligned}$$

παίρνουμε τη σχέση

$$(d \log \kappa_r + i\omega_{2r+1,2r+2}) \wedge \phi = i(r+1)\omega_{12} \wedge \phi. \tag{2.9}$$

Αν περιοριοριστούμε στο M_r, η $(T^1 f|_{M_r} \oplus N^1 f|_{M_r} \oplus \dots \oplus N^r f|_{M_r})^\perp$ είναι διανυσματική δέσμη με βαθμίδα $n - 2r - 2$ και η $B_{r+1}|_{M_r}$ είναι $(r+2, 1)$-τανυστικό πεδίο. Στο $M_r \cap U$, λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό της B_{r+1} και τους τύπους των Gauss και Weingarten, έχουμε

$$\begin{aligned} B_{r+1}|_{M_r}(e_1, ..., e_1) &= \big(\nabla_{e_1}^f \nabla_{e_1}^f ... \nabla_{e_1}^f df(e_1)\big)^{(T^1 f|_{M_r} \oplus N^1 f|_{M_r} \oplus ... \oplus N^r f|_{M_r})^\perp} \\ &= \big(\nabla_{e_1}^f B_r(e_1, ..., e_1)\big)^{(T^1 f|_{M_r} \oplus N^1 f|_{M_r} \oplus ... \oplus N^r f|_{M_r})^\perp} \\ &= \big(\nabla_{e_1}^f (\kappa_r e_{2r+1})\big)^{(T^1 f|_{M_r} \oplus N^1 f|_{M_r} \oplus ... \oplus N^r f|_{M_r})^\perp} \\ &= \big(e_1(\kappa_r) e_{2r+1}\big)^{(T^1 f|_{M_r} \oplus N^1 f|_{M_r} \oplus ... \oplus N^r f|_{M_r})^\perp} \\ &+ (\kappa_r \nabla_{e_1}^f e_{2r+1})^{(T^1 f|_{M_r} \oplus N^1 f|_{M_r} \oplus ... \oplus N^r f|_{M_r})^\perp} \\ &= \kappa_r (\nabla_{e_1}^f e_{2r+1})^{(T^1 f|_{M_r} \oplus N^1 f|_{M_r} \oplus ... \oplus N^r f|_{M_r})^\perp} \\ &= \kappa_r \big(-df(A_{e_{2r+1}} e_1)\big)^{(T^1 f|_{M_r} \oplus N^1 f|_{M_r} \oplus ... \oplus N^r f|_{M_r})^\perp} \\ &+ (\nabla_{e_1}^\perp e_{2r+1})^{(T^1 f|_{M_r} \oplus N^1 f|_{M_r} \oplus ... \oplus N^r f|_{M_r})^\perp} \\ &= \kappa_r \sum_{\alpha \geq 2r+3} \langle \nabla_{e_1}^\perp e_{2r+1}, e_\alpha \rangle e_\alpha \\ &= \kappa_r \sum_{\alpha \geq 2r+3} \omega_{2r+1,\alpha}(e_1) e_\alpha. \end{aligned}$$

Επιπλέον,

$$\begin{aligned} B_{r+1}|_{M_r}(e_1, ..., e_1) &= -B_{r+1}|_{M_r}(e_2, e_1, ..., e_1, e_2) \\ &= -\kappa_r \sum_{\alpha \geq 2r+3} \omega_{2r+2,\alpha}(e_2) e_\alpha. \end{aligned}$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι

$$\begin{aligned} B_{r+1}|_{M_r}(e_1,...,e_1,e_2) &= \kappa_r \sum_{\alpha\geq 2r+3} \omega_{2r+2,\alpha}(e_1)e_\alpha \\ &= \kappa_r \sum_{\alpha\geq 2r+3} \omega_{2r+1,\alpha}(e_2)e_\alpha. \end{aligned}$$

Επομένως στο $M_r \cap U$ έχουμε για $\alpha \geq 2r+3$

$$\omega_{2r+1,\alpha}(e_1) = -\omega_{2r+2,\alpha}(e_2),\ \omega_{2r+2,\alpha}(e_1) = \omega_{2r+1,\alpha}(e_2)$$

και

$$h^\alpha_{(r+1),1} = \kappa_r\omega_{2r+1,\alpha}(e_1),\ h^\alpha_{(r+1),2} = \kappa_r\omega_{2r+1,\alpha}(e_2).$$

Από τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε στο $M_r \cap U$

$$H^\alpha_{r+1} = h^\alpha_{(r+1),1} + ih^\alpha_{(r+1),2} = \kappa_r\omega_{2r+1,\alpha}(e_1) + i\kappa_r\omega_{2r+1,\alpha}(e_2).$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$H^\alpha_{r+1}\overline{\phi} = \kappa_r\omega_{2r+1,\alpha} + i\kappa_r\omega_{2r+2,\alpha}. \tag{2.10}$$

Οι εξισώσεις Ricci για $\alpha \geq 2r+3$ δίνουν

$$d\omega_{2r+1,\alpha} = \sum_{j=1}^{2}\omega_{2r+1,j}\wedge\omega_{j\alpha} + \sum_{\beta=3}^{n}\omega_{2r+1,\beta}\wedge\omega_{\beta\alpha},$$

$$d\omega_{2r+2,\alpha} = \sum_{j=1}^{2}\omega_{2r+2,j}\wedge\omega_{j\alpha} + \sum_{\beta=3}^{n}\omega_{2r+2,\beta}\wedge\omega_{\beta\alpha}.$$

Για $s = 2,...,r$ έχουμε τοπικά στο M_{s-1}

$$B_s(e_1,...,e_1) = \kappa_{s-1}\sum_{\alpha\geq 2s+1}\omega_{2s-1,\alpha}(e_1)e_\alpha = -\kappa_{s-1}\sum_{\alpha\geq 2s+1}\omega_{2s,\alpha}(e_2)e_\alpha$$

και

$$B_s(e_1,...,e_1,e_2) = \kappa_{s-1}\sum_{\alpha\geq 2s+1}\omega_{2s-1,\alpha}(e_2)e_\alpha = \kappa_{s-1}\sum_{\alpha\geq 2s+1}\omega_{2s,\alpha}(e_1)e_\alpha,$$

άρα $\omega_{2s-1,\alpha}(e_1) = -\omega_{2s,\alpha}(e_2)$ και $\omega_{2s-1,\alpha}(e_2) = \omega_{2s,\alpha}(e_1)$ για $\alpha = 2s+1,...,n$. Όμως, $B_s(e_1,...,e_1) = \kappa_s e_{2s+1}$ και $B_s(e_1,...,e_1,e_2) = \kappa_s e_{2s+2}$, επομένως έχουμε

$$\omega_{2s-1,2s+1}(e_1) = -\omega_{2s,2s+1}(e_2) = \frac{\kappa_s}{\kappa_{s-1}}, \tag{2.11}$$

$$\omega_{2s,2s+2}(e_1) = \omega_{2s-1,2s+2}(e_2) = \frac{\kappa_s}{\kappa_{s-1}} \tag{2.12}$$

και

$$\omega_{2s-1,\alpha}(e_1) = \omega_{2s,\alpha}(e_2) = 0, \tag{2.13}$$

για $\alpha \neq 2s+1$,

$$\omega_{2s-1,\alpha}(e_2) = \omega_{2s,\alpha}(e_1) = 0, \tag{2.14}$$

για $\alpha \neq 2s+2$. Άρα για κάθε $\alpha \geq 2r+3$ ισχύει $\omega_{2s-1,\alpha} = \omega_{2s,\alpha} = 0$.

Επίσης, για $\alpha \geq 2r+3$ είναι $\omega_{1\alpha} = \sum_{j=1}^{2} h^{\alpha}_{1j}\omega_j$ με $h^{\alpha}_{1j} = \langle B(e_1, e_j), e_\alpha\rangle = 0$ και $\omega_{2\alpha} = \sum_{j=1}^{2} h^{\alpha}_{2j}\omega_j$ με $h^{\alpha}_{2j} = \langle B(e_2, e_j), e_\alpha\rangle = 0$, συνεπώς $\omega_{1\alpha} = \omega_{2\alpha} = 0$.

Τελικά παίρνουμε

$$\omega_{s\alpha} = 0, \tag{2.15}$$

για $s = 1, ..., 2r$, $\alpha \geq 2r+3$.

Οι εξισώσεις Ricci από τις σχέσεις (2.15) γίνονται

$$d\omega_{2r+1,\alpha} = \omega_{2r+1,2r+2} \wedge \omega_{2r+2,\alpha} + \sum_{\beta \geq 2r+3} \omega_{2r+1,\beta} \wedge \omega_{\beta\alpha}, \tag{2.16}$$

$$d\omega_{2r+2,\alpha} = \omega_{2r+2,2r+1} \wedge \omega_{2r+1,\alpha} + \sum_{\beta \geq 2r+3} \omega_{2r+2,\beta} \wedge \omega_{\beta\alpha}. \tag{2.17}$$

Παραγωγίζοντας εξωτερικά τη σχέση (2.10) και κάνοντας χρήση των σχέσεων (2.5), (2.9), (2.16), (2.17) παίρνουμε τη ζητούμενη ισότητα

$$\Big(d\overline{H}^{\alpha}_{r+1} - i(r+2)\overline{H}^{\alpha}_{r+1}\omega_{12} + \sum_{\beta \geq 2r+3} \overline{H}^{\beta}_{r+1}\omega_{\beta\alpha}\Big) \wedge \phi = 0$$

για κάθε $\alpha \geq 2r+3$ στο $M_r \cap U$.

Μιγαδικοποιούμε τις διανυσματικές δέσμες

$$T^1 f|_{M_r}, N^1 f|_{M_r}, ..., N^r f|_{M_r},$$

επεκτείνουμε $\mathbb{C}$-γραμμικά την $B_{r+1}|_{M_r}$ και αποκτούμε το μιγαδικό $(r+2,1)$-τανυστικό πεδίο

$$B_{r+1}|_{M_r} : \underbrace{\Gamma(TM_r \otimes \mathbb{C}) \times ... \times \Gamma(TM_r \otimes \mathbb{C})}_{r+2}$$
$$\longrightarrow \Gamma\big((T^1 f|_{M_r} \oplus N^1 f|_{M_r} \oplus ... \oplus N^r f|_{M_r})^{\perp} \otimes \mathbb{C}\big).$$

Η $B_{r+1}|_{M_r}$ ως μιγαδικό $(r+2,1)$-τανυστικό πεδίο δέχεται την ανάλυση

$$B_{r+1}|_{M_r} = \sum_{p+q=r+2} B_{r+1}|^{(p,q)}_{M_r} dz^p d\overline{z}^q.$$

Σε ένα μιγαδικό χάρτη (U,z) με $z = x+iy$ και $\langle,\rangle = E|dz|^2$ του M^2, σύμφωνα με το Λήμμα 1.3.2, ισχύει

$$B_{r+1}|_{M_r}(X_1, ..., X_r, e_1, e_1) + B_{r+1}|_{M_r}(X_1, ..., X_r, e_2, e_2) = 0,$$

για $X_1, ..., X_r \in \Delta(U)$ και $\{e_1, e_2\}$ οποιοδήποτε τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο του U. Αν θεωρήσουμε $e_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial x}$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial y}$, τότε επειδή $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}}$, $\frac{\partial}{\partial y} = i(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \overline{z}})$, η τελευταία σχέση γίνεται

$$B_{r+1}|_{M_r}(X_1, ..., X_r, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}}) = 0.$$

Επομένως, η $B_{r+1}|_{M_r}$ έχει την ανάλυση

$$B_{r+1}|_{M_r} = B_{r+1}|_{M_r}^{(r+2,0)} dz^{r+2} + B_{r+1}|_{M_r}^{(0,r+2)} d\bar{z}^{r+2},$$

όπου

$$B_{r+1}|_{M_r}^{(r+2,0)} = B_{r+1}|_{M_r}(\frac{\partial}{\partial z}, ..., \frac{\partial}{\partial z}),\ B_{r+1}|_{M_r}^{(0,r+2)} = B_{r+1}|_{M_r}(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, ..., \frac{\partial}{\partial \bar{z}})$$

και ισχύει $\overline{B_{r+1}|_{M_r}^{(r+2,0)}} = B_{r+1}|_{M_r}^{(0,r+2)}$.

Ορίζουμε το $(2r+4)$-διαφορικό

$$\Phi_{r+1} := \langle B_{r+1}|_{M_r}^{(r+2,0)}, B_{r+1}|_{M_r}^{(r+2,0)} \rangle dz^{2r+4}.$$

Επειδή

$$B^*_{r+1}|_p = \begin{cases} B_{r+1}|_p, & p \in M_r, \\ 0, & p \in M_r^c, \end{cases}$$

ισχύει

$$\Phi^*_{r+1}|_p = \begin{cases} \Phi_{r+1}|_p, & p \in M_r, \\ 0, & p \in M_r^c \end{cases}$$

και επομένως το Φ_{r+1} είναι καλά ορισμένο σε όλο το M_r. Συμβολίζουμε με $\{\omega_1, \omega_2\}$ το συμπλαίσιο του $\{e_1, e_2\}$. Στο $M_r \cap U$ έχουμε το μιγαδικό (1,0)-τανυστικό πεδίο $\phi = \omega_1 + i\omega_2 = \sqrt{E}dz$ και τις μιγαδικές συναρτήσεις H^α_{r+1} για $\alpha = 2s+3, ..., n$. Θα αποδείξουμε ότι $\Phi_{r+1} = \frac{1}{4}E^{r+2}\sum_{\alpha \geq 2r+3}(\overline{H}^\alpha_{r+1})^2 dz^{2r+4}$ στο $M_r \cap U$ και ότι είναι ολόμορφο.

Θεωρούμε μιγαδικό χάρτη (U, z) με $z = x+iy$ και $\langle , \rangle = E|dz|^2$ του M^2. Επιλέγουμε ορθομοναδιαίο πλαίσιο κατά μήκος της $f|_{M_r \cap U}$ με εφαπτόμενο μέρος $\{e_1, e_2\}$, όπου $e_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial x}$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial y}$ και κάθετο μέρος $\{e_\alpha\}$, όπου

$$e_3 = \frac{1}{\kappa_1}B(e_1, e_1),\ e_4 = \frac{1}{\kappa_1}B(e_1, e_2),$$

$$e_5 = \frac{1}{\kappa_2}B_2(e_1, e_1, e_1),\ e_6 = \frac{1}{\kappa_2}B_2(e_1, e_1, e_2),$$

$$\vdots$$

$$e_{2r+1} = \frac{1}{\kappa_r}B_r(e_1, ..., e_1, e_1),\ e_{2r+2} = \frac{1}{\kappa_r}B_r(e_1, ..., e_1, e_2)$$

και e_α για $\alpha \geq 2r+3$ είναι τυχόντα. Στο $M_r \cap U$, επιχειρηματολογώντας όπως στην αρχή της απόδειξης (σελ. 33), αποδεικνύεται ότι

$$B_{r+1}(\frac{\partial}{\partial z}, ..., \frac{\partial}{\partial z}) = \frac{1}{2}E^{\frac{r+2}{2}}B_r(e_1, ..., e_1) - i\frac{1}{2}E^{\frac{r+2}{2}}B_{r+1}(e_1, ..., e_1, e_2).$$

Επομένως, έχουμε

$$\begin{aligned} B_{r+1}^{(r+2,0)} &= B_{r+1}(\frac{\partial}{\partial z}, ..., \frac{\partial}{\partial z}) \\ &= \frac{1}{2}E^{\frac{r+2}{2}}\left(B_r(e_1, ..., e_1) - iB_{r+1}(e_1, ..., e_1, e_2)\right) \\ &= \frac{1}{2}E^{\frac{r+2}{2}}\Big(\sum_{\alpha \geq 2r+3} h^{\alpha}_{(r+1),1}e_\alpha - i\sum_{\alpha \geq 2r+3} h^{\alpha}_{(r+1),2}e_\alpha\Big) \\ &= \frac{1}{2}E^{\frac{r+2}{2}}\sum_{\alpha \geq 2r+3} \overline{H}^{\alpha}_{r+1}e_\alpha \end{aligned}$$

και συνεπώς

$$\begin{aligned} \Phi_{r+1} &= \langle B_{r+1}|_{M_r}^{(r+2,0)}, B_{r+1}|_{M_r}^{(r+2,0)}\rangle dz^{2r+4} \\ &= \frac{1}{4}E^{r+2}\langle \sum_{\alpha \geq 2r+3} \overline{H}^{\alpha}_{r+1}e_\alpha, \sum_{\alpha \geq 2r+3} \overline{H}^{\alpha}_{r+1}e_\alpha\rangle dz^{2r+4} \\ &= \frac{1}{4}E^{r+2}\sum_{\alpha \geq 2r+3}(\overline{H}^{\alpha}_{r+1})^2 dz^{2r+4}. \end{aligned}$$

Θέτουμε

$$f_{r+1} := \frac{1}{4}E^{r+2}\sum_{\alpha \geq 2r+3}(\overline{H}^{\alpha}_{r+1})^2.$$

Αποδείξαμε στο $M_r \cap U$ τη σχέση

$$\big(d\overline{H}^{\alpha}_{r+1} - i(r+2)\overline{H}^{\alpha}_{r+1}\omega_{12} + \sum_{\beta \geq 2r+3} \overline{H}^{\beta}_{r+1}\omega_{\beta\alpha}\big) \wedge \phi = 0$$

για κάθε $\alpha \geq 2r+3$. Πολλαπλασιάζοντας αυτή τη σχέση με $\overline{H}^{\alpha}_{r+1}$, αθροίζοντας ως προς $\alpha \geq 2r+3$, λαμβάνοντας υπόψη την (2.5) και επειδή

$$\sum_{\alpha,\beta \geq 2r+3} \overline{H}^{\alpha}_{r+1}\overline{H}^{\beta}_{r+1}\omega_{\beta\alpha} \wedge \phi = 0,$$

φτάνουμε στη σχέση

$$d\Big(\frac{1}{4}\sum_{\alpha \geq 2r+3}(\overline{H}^{\alpha}_{r+1})^2\Big) \wedge \phi + \frac{r+2}{2}\sum_{\alpha \geq 2r+3}(\overline{H}^{\alpha}_{r+1})^2 d\phi = 0,$$

ή ισοδύναμα

$$d\big(\frac{f_{r+1}}{E^{r+2}}\big) \wedge \phi + \frac{2r+4}{E^{r+2}}f_{r+1}d\phi = 0.$$

Λόγω των (2.3), (2.4) μετά από πράξεις βρίσκουμε

$$\frac{\partial f_{r+1}}{\partial \overline{z}} = 0.$$

Συνεπώς το Φ_{r+1} είναι ολόμορφο διαφορικό στο U.

Θεωρούμε ένα σημείο $p \in M_r^c$ και έστω (U, z) μιγαδικός χάρτης γύρω από το p με $z(p) = 0$ και $U \cap M_r^c = \{p\}$. Το Φ_{r+1}^* είναι ολόμορφο στο $U - \{p\}$ και συνεχές στο σημείο p, άρα Φ_{r+1}^* είναι ολόμορφο στο U [1]. Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία γύρω από όλα τα πεπερασμένα σημεία του M_r^c, έχουμε το Φ_{r+1}^* ολόμορφο $(2r+4)$-διαφορικό σε όλο το M^2 και από το Θεώρημα Riemann-Roch $\Phi_{r+1}^* = 0$. □

2.3 Βοηθητικά αποτελέσματα

Θα συνοψίσουμε όσα μέχρι στιγμής έχουμε αποδείξει και θα χρειαστούμε στη συνέχεια για τις συμπαγείς, χορεσμένες, ελαχιστικές επιφάνειες γένους μηδέν στη σφαίρα. Για το σκοπό αυτό χρειαζόμαστε τον ορισμό και το λήμμα που ακολουθούν.

Ορισμός 2.3.1. *Σε προσανατολισμένο πολύπτυγμα Riemann M^2 θεωρούμε τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{e_1, e_2\}$ του προσανατολισμού, το συμπλαίσιό του $\{\omega_1, \omega_2\}$ και το σύνολο των 1-μορφών $\Lambda^1(M^2)$. Ο τελεστής του Hodge ορίζεται να είναι η απεικόνιση*

$$* : \Lambda^1(M^2) \longrightarrow \Lambda^1(M^2),$$

$$\omega = \omega(e_1)\omega_1 + \omega(e_2)\omega_2 \longmapsto *\omega := -\omega(e_2)\omega_1 + \omega(e_1)\omega_2.$$

Αποδεικνύεται ότι ο ανωτέρω ορισμός είναι καλός, δηλαδή ανεξάρτητος του πλαισίου $\{e_1, e_2\}$. Προφανώς ισχύει $*\omega_1 = \omega_2$ και $*\omega_2 = -\omega_1$.

Θυμίζουμε ότι για μια συνάρτηση $g \in D(M^2)$ η κλίση της $\mathrm{grad} g$ και η Λαπλασιανή της Δg, όπου Δ είναι ο τελεστής Laplace του M^2, δίνονται ως $\mathrm{grad} g = e_1(g)e_1 + e_2(g)e_2$ και $\Delta g = e_1(e_1(g)) + e_2(e_2(g)) - (\nabla_{e_1}e_1)(g) - (\nabla_{e_2}e_2)(g)$.

Λήμμα 2.3.1. *Έστω $\{e_1, e_2\}$ τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο του M^2 και $\{\omega_1, \omega_2\}$ το συμπλαίσιό του.*

(i) *Για τυχούσα συνάρτηση $g \in D(M^2)$ ισχύει η σχέση*

$$d(*dg) = \Delta g \omega_1 \wedge \omega_2.$$

(ii) *Αν $\eta, \omega \in \Lambda^1(M^2)$, τότε*

$$\eta = *\omega \Leftrightarrow \eta \wedge \phi = i\omega \wedge \phi,$$

όπου $\phi = \omega_1 + i\omega_2$.

Απόδειξη. (i) Αρκεί να δείξουμε ότι $d(*dg)(e_1, e_2) = \Delta g$. Πράγματι, επειδή

$$dg = dg(e_1)\omega_1 + dg(e_2)\omega_2 = e_1(g)\omega_1 + e_2(g)\omega_2,$$

έχουμε

$$*dg = -e_2(g)\omega_1 + e_1(g)\omega_2.$$

Υπολογίζουμε

$$d(*dg)(e_1, e_2) =$$

$$= \quad -d(e_2(g)) \wedge \omega_1(e_1, e_2) + d(e_1(g)) \wedge \omega_2(e_1, e_2)$$

$$\begin{aligned}
&- \quad e_2(g)\omega_{12}\wedge\omega_2(e_1,e_2)+e_1(g)\omega_{21}\wedge\omega_1(e_1,e_2)\\
&= \quad d\big(e_2(g)\big)(e_2)+d\big(e_1(g)\big)(e_1)-e_2(g)\omega_{12}(e_1)-e_1(g)\omega_{21}(e_2)\\
&= \quad e_2\big(e_2(g)\big)+e_1\big(e_1(g)\big)-e_2(g)\langle\nabla_{e_1}e_1,e_2\rangle-e_1(g)\langle\nabla_{e_2}e_2,e_1\rangle\\
&= \quad \Delta g.
\end{aligned}$$

(ii) Η απόδειξη είναι απλός υπολογισμός. □

Πρόταση 2.3.1. *Έστω $f : M^2 \longrightarrow S^n, n \geq 3$, συμπαγής, κορεσμένη, ελαχιστική επιφάνεια γένους μηδέν. Υπάρχουν ανοικτά υποσύνολα $M_1, ..., M_{m-1}$ του M^2 με $M_1 \supset M_2 \supset ... \supset M_{m-1}$, όπου $m := 1 + [\frac{n-1}{2}]$, τέτοια ώστε τα συμπληρώματά τους $M_s^c = M^2 - M_s$ για κάθε $s \in \{1, ..., m-1\}$ να είναι πεπερασμένα σύνολα και ισχύουν:*

(i) Η έλλειψη E_s s-τάξης είναι κύκλος ακτίνας $\kappa_s > 0$ σε κάθε σημείο του M_{m-1} για κάθε $s \in \{1, ..., m-1\}$. Επιπλέον, ο αριθμός n είναι άρτιος και $n = 2m$.

(ii) Υπάρχουν διαφορίσιμες συναρτήσεις $g_s : M^2 \longrightarrow [0, +\infty)$ με $g_s|_{M_{m-1}} = \kappa_s^2|_{M_{m-1}}$, $g_s|_{M^c_{m-1}} = 0$ για κάθε $s \in \{1, ..., m-1\}$. Επιπλέον, για κάθε $p \in M^c_{m-1}$, υπάρχει μιγαδικός χάρτης (U, z) με $z(p) = 0$ και $g_s = |z|^{2l_s}u_s$ στο U, όπου l_s θετικός ακέραιος και $u_s \in D(U)$ θετική συνάρτηση.

(iii) Για κάθε μιγαδικό χάρτη (U, z) με $z = x + iy$, $\langle,\rangle = E|dz|^2$ υπάρχει τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{e_A\}$ κατά μήκος της $f|_{U\cap M_{m-1}}$ με εφαπτόμενο μέρος $\{e_1, e_2\}$, όπου $e_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial x}$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial y}$ και κάθετο μέρος $\{e_\alpha\}$ τέτοιο ώστε

$$e_{2s+1} = \frac{1}{\kappa_s}B_s(e_1, ..., e_1),\ e_{2s+2} = \frac{1}{\kappa_s}B_s(e_1, ..., e_1, e_2),\ s \in \{1, ..., m-1\},$$

για το οποίο ισχύουν τα ακόλουθα

$$\begin{gathered}
\omega_{2s+1,2s+2} - (s+1)\omega_{12} = *d\log\kappa_s,\\
\omega_{2s-1,2s+1}(e_1) = -\omega_{2s,2s+1}(e_2) = \frac{\kappa_s}{\kappa_{s-1}},\\
\omega_{2s-1,\alpha}(e_1) = \omega_{2s,\alpha}(e_2) = 0,\ \alpha > 2s+1,\\
\omega_{2s,2s+2}(e_1) = \omega_{2s-1,2s+2}(e_2) = \frac{\kappa_s}{\kappa_{s-1}},\\
\omega_{2s,\alpha}(e_1) = \omega_{2s-1,\alpha}(e_2) = 0,\ \alpha \geq 2s+1, \alpha \neq 2s+2,\\
\omega_{r\alpha} = 0,\ 1 \leq r \leq 2s,\ \alpha \geq 2s+3.
\end{gathered}$$

Απόδειξη. (i) Έχει αποδειχθεί στο επαγωγικό βήμα ότι σε κάθε σημείο $p \in M_s$ η έλλειψη μέχρι και s-τάξης στο p είναι κύκλος θετικής ακτίνας, για κάθε $s \in \{1, ..., m-1\}$. Επειδή $M_1 \supset M_2 \supset ... \supset M_{m-1}$, σε κάθε σημείο του M_{m-1} η έλλειψη s-τάξης E_s είναι κύκλος ακτίνας $\kappa_s > 0$ για όλα τα $s \in \{1, ..., m-1\}$.

Επειδή η f είναι κορεσμένη, για τυχόν σημείο p του M_{m-1} έχουμε

$$T_{f(p)}S^n = T_p^1 f \oplus N_p^1 f \oplus ... \oplus N_p^{m-1} f.$$

Όλες οι ελλείψεις κάθε τάξης είναι κύκλοι με θετική ακτίνα, άρα όλοι οι κάθετοι χώροι της f στο τυχόν $p \in M_{m-1}$ είναι διδιάστατοι. Επομένως, η παραπάνω ανάλυση μας δίνει $n = 2m$, δηλαδή ο αριθμός n είναι άρτιος.

(ii) Για κάθε s θέτουμε

$$g_s = \frac{1}{2^{s+1}}\|B_s^*\|^2.$$

Επειδή $M_1 \supset M_2 \supset \ldots \supset M_{m-1}$, ισχύει $B_s^*|_{M_{m-1}} = B_s|_{M_{m-1}}$ και $B_s^*|_{M_{m-1}^c} = 0$. Επομένως έχουμε

$$g_s(p) = \begin{cases} \kappa_s^2(p), & p \in M_{m-1}, \\ 0, & p \in M_{m-1}^c. \end{cases}$$

Στο επαγωγικό βήμα αποδείξαμε ότι $\Phi_1^* = \ldots = \Phi_{m-1}^* = 0$ από όπου συμπεραίνουμε ότι $|B_s^*(e_1, \ldots, e_1)| = |B_s^*(e_1, \ldots, e_1, e_2)|$. Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (2.6) και (2.8) υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} g_s &= \frac{1}{2}|B_s^*(e_1, \ldots, e_1)|^2 + \frac{1}{2}|B_s^*(e_1, \ldots, e_1, e_2)|^2 = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=2s+1}^{n}\left((h_{(s),1}^{*\alpha})^2 + (h_{(s),2}^{*\alpha})^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\alpha=2s+1}^{n}|\overline{H}_s^{*\alpha}|^2 = |z|^{2l_s}u_s, \end{aligned}$$

όπου $u_s := \frac{1}{2}\sum_{\alpha=2s+1}^{n}|\overline{G}_s^{*\alpha}|^2$.

(iii) Εφόσον $\Phi_1|_{M_{m-1}} = \ldots = \Phi_{m-1}|_{M_{m-1}} = 0$, τα $B_s(e_1, \ldots, e_1), B_s(e_1, \ldots, e_1, e_2)$ είναι ισομήκη και κάθετα μεταξύ τους για κάθε $s \in \{1, \ldots, m-1\}$. Επομένως, η επιλογή αυτού του πλαισίου είναι εφικτή.

Γνωρίζουμε ότι στο M_{m-1} για κάθε $s \in \{1, \ldots, m-1\}$ ισχύει η σχέση

$$\left(\omega_{2s+1,2s+2} - (s+1)\omega_{12}\right) \wedge \varphi = i d\log\kappa_s \wedge \varphi,$$

επομένως από το Λήμμα 2.3.1(ii) έχουμε

$$\omega_{2s+1,2s+2} - (s+1)\omega_{12} = *d\log\kappa_s.$$

Οι υπόλοιπες σχέσεις έχουν αποδειχθεί στο επαγωγικό βήμα ((2.11), (2.12), (2.13), (2.14), (2.15)). □

Στο ανοικτό και πυκνό υποσύνολο M_{m-1} του M^2 έχουμε τις διανυσματικές υποδέσμες $N^1f|_{M_{m-1}}, \ldots, N^{m-1}f|_{M_{m-1}}$ της κάθετης δέσμης με βαθμίδα 2. Για κάθε $s \in \{1, \ldots, m-1\}$, η δέσμη $N^sf|_{M_{m-1}}$ έχει μετρική $\langle , \rangle_s$ τη μετρική της S^n περιορισμένη σε κάθε ένα από αυτά και συνοχή ∇^s την κάθετη συνοχή της εμβάπτισης f, επίσης περιορισμένη σε κάθε ένα από αυτά. Επιπλέον, η δέσμη $N^sf|_{M_{m-1}}$ έχει τανυστή καμπυλότητας

$$R^s : \Delta(M_{m-1}) \times \Delta(M_{m-1}) \times \Gamma(N^sf|_{M_{m-1}}) \longrightarrow \Gamma(N^sf|_{M_{m-1}}),$$

$$(X, Y, V) \longmapsto R^s(X, Y)V = \nabla_X^s\nabla_Y^sV - \nabla_Y^s\nabla_X^sV - \nabla_{[X,Y]}^sV.$$

Αν $\{e_1, e_2\}$ είναι τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο του προσανατολισμού του M^2 και $\{v_1^s, v_2^s\}$ ορθομοναδιαίο πλαίσιο του προσανατολισμού της $N^s f|_{M_{m-1}}$ που επάγει η B_s, δηλαδή ο προσανατολισμός που ορίζει στην $N^s f|_{M_{m-1}}$ το πλαίσιό της

$$\{B_s(e_1, ..., e_1), B_s(e_1, ..., e_1, e_2)\},$$

τότε η καμπυλότητα K_s της $N^s f|_{M_{m-1}}$ ορίζεται ως

$$K_s = -\langle R^s(e_1, e_2)v_1^s, v_2^s\rangle_s.$$

Έχουμε επιλέξει τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{e_{2s+1}, e_{2s+2}\}$ της $N^s f|_{M_{m-1}}$ έτσι ώστε

$$B_s(e_1, ..., e_1) = \kappa_s e_{2s+1}, \ B_s(e_1, ..., e_1, e_2) = \kappa_s e_{2s+2}$$

για κάθε $s \in \{1, ..., m-1\}$.

Η μορφή συνοχής $\omega_{2s+1,2s+2}$ της δέσμης $N^s f|_{M_{m-1}}$ είναι

$$\omega_{2s+1,2s+2}(X) = \langle \nabla_X^s e_{2s+1}, e_{2s+2}\rangle_s$$

για $X \in \Delta(M^2)$ και ισχύει

$$d\omega_{2s+1,2s+2} = -K_s \omega_1 \wedge \omega_2. \tag{2.18}$$

Πρόταση 2.3.2. *Έστω $f: M^2 \longrightarrow S^n$ συμπαγής, κορεσμένη, ελαχιστική επιφάνεια γένους μηδέν. Τότε στο M_{m-1}, όπου $m = 1 + [\frac{n-1}{2}]$, ισχύουν:*

(i) $K = 1 - 2\kappa_1^2$.

(ii) *Για $s \in \{1, ..., m-1\}$ η καμπυλότητα K_s της δέσμης $N^s f|_{M_{m-1}}$ είναι*

$$K_s = \begin{cases} 2\kappa_1^2 - 2\dfrac{\kappa_2^2}{\kappa_1^2}, & s = 1, \\ 2\dfrac{\kappa_s^2}{\kappa_{s-1}^2} - 2\dfrac{\kappa_{s+1}^2}{\kappa_s^2}, & 1 < s < m-1, \\ \dfrac{\kappa_{m-1}^2}{\kappa_{m-2}^2}, & s = m-1. \end{cases}$$

(iii) $\Delta \log \kappa_s = (s+1)K - K_s$, $1 \le s \le m-1$, *και* $\Delta \log(\kappa_1 ... \kappa_{m-1}) = \frac{m(m+1)}{2}K - 1$.

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.3.1(i) έχουμε $n = 2m$. Επιλέγουμε ορθομοναδιαίο πλαίσιο όπως στην Πρόταση 2.3.1(iii).

(i) Σε κάθε σημείο του M^2 έχουμε $|B(e_1, e_1)| = |B(e_1, e_2)| = \kappa_1$, επομένως από τη σχέση (1.3) έχουμε $K = 1 - 2\kappa_1^2$ στο M^2, άρα και στο M_{m-1}.

(ii) Η καμπυλότητα της $N^1 f|_{M_{m-1}}$ δίνεται από τη σχέση $d\omega_{34} = -K_1 \omega_1 \wedge \omega_2$. Από την εξίσωση Ricci έχουμε $d\omega_{34} = \omega_{31} \wedge \omega_{14} + \omega_{32} \wedge \omega_{24} + \sum_{\alpha \ge 3} \omega_{3\alpha} \wedge \omega_{\alpha 4}$. Όμως $\omega_{31} \wedge \omega_{14}(e_1, e_2) = -\kappa_1^2 = \omega_{32} \wedge \omega_{24}(e_1, e_2)$ και από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \omega_{33} &= \omega_{44} = 0, \\ \omega_{35}(e_1) &= \omega_{54}(e_2) = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_{3\alpha}(e_1) &= \omega_{4\alpha}(e_2) = 0, \ \alpha > 5, \\
\omega_{46}(e_1) &= \omega_{36}(e_2) = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}, \\
\omega_{4\alpha}(e_1) &= \omega_{3\alpha}(e_2) = 0, \ \alpha \geq 5, \alpha \neq 6,
\end{aligned}$$

έχουμε

$$\sum_{\alpha\geq 3} \omega_{3\alpha} \wedge \omega_{\alpha 4}(e_1, e_2) = 2\frac{\kappa_2^2}{\kappa_1^2}.$$

Επομένως για την χαμπυλότητα της $N^1 f|_{M_{m-1}}$ ισχύει η σχέση

$$K_1 = 2\kappa_1^2 - 2\frac{\kappa_2^2}{\kappa_1^2}.$$

Η χαμπυλότητα K_s της $N^s f|_{M_{m-1}}$, όπου $s = 2, ..., m-2$, δίνεται από τη σχέση $d\omega_{2s+1,2s+2} = -K_s \omega_1 \wedge \omega_2$. Η εξίσωση Ricci είναι

$$d\omega_{2s+1,2s+2} = \omega_{2s+1,1} \wedge \omega_{1,2s+2} + \omega_{2s+1,2} \wedge \omega_{2,2s+2} + \sum_{\alpha\geq 3} \omega_{2s+1,\alpha} \wedge \omega_{\alpha,2s+2}.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 2.3.1(iii), ισχύουν οι σχέσεις

$$\omega_{r\alpha} = 0, \ 1 \leq r \leq 2s-2, \alpha \geq 2s+1.$$

Επιπλέον, ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned}
\omega_{2s-1,2s+1}(e_1) &= -\omega_{2s,2s+1}(e_2) = \frac{\kappa_s}{\kappa_{s-1}}, \\
\omega_{2s-1,\alpha}(e_1) &= \omega_{2s,\alpha}(e_2) = 0, \ \alpha > 2s+1, \\
\omega_{2s,2s+2}(e_1) &= \omega_{2s-1,2s+2}(e_2) = \frac{\kappa_s}{\kappa_{s-1}}, \\
\omega_{2s,\alpha}(e_1) &= \omega_{2s-1,\alpha}(e_2) = 0, \ \alpha \geq 2s+1, \alpha \neq 2s+2.
\end{aligned}$$

Αχόμη, ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned}
\omega_{2s+1,2s+3}(e_1) &= -\omega_{2s+2,2s+3}(e_2) = \frac{\kappa_{s+1}}{\kappa_s}, \\
\omega_{2s+1,\alpha}(e_1) &= \omega_{2s+2,\alpha}(e_2) = 0, \ \alpha > 2s+3, \\
\omega_{2s+2,2s+4}(e_1) &= \omega_{2s+1,2s+4}(e_2) = \frac{\kappa_{s+1}}{\kappa_s}, \\
\omega_{2s+2,\alpha}(e_1) &= \omega_{2s+1,\alpha}(e_2) = 0, \ \alpha \geq 2s+3, \alpha \neq 2s+4,
\end{aligned}$$

από όπου παίρνουμε ότι $\omega_{2s+1,\alpha} = \omega_{2s+2,\alpha} = 0$ για κάθε $\alpha \geq 2s+5$.

Υπολογίζουμε

$$d\omega_{2s+1,2s+2}(e_1, e_2) = \sum_{j=1}^{2} \omega_{2s+1,j} \wedge \omega_{j,2s+2}(e_1, e_2) + \sum_{\alpha\geq 3} \omega_{2s+1,\alpha} \wedge \omega_{\alpha,2s+2}(e_1, e_2)$$

$$= \sum_{3\le\alpha\le 2s-2} \omega_{2s+1,\alpha}\wedge\omega_{\alpha,2s+2}(e_1,e_2)$$
$$+ \sum_{2s-1\le\alpha\le 2s+4} \omega_{2s+1,\alpha}\wedge\omega_{\alpha,2s+2}(e_1,e_2)$$
$$+ \sum_{\alpha\ge 2s+5} \omega_{2s+1,\alpha}\wedge\omega_{\alpha,2s+2}(e_1,e_2)$$
$$= \sum_{2s-1\le\alpha\le 2s+4} \omega_{2s+1,\alpha}\wedge\omega_{\alpha,2s+2}(e_1,e_2) = -2\frac{\kappa_s^2}{\kappa_{s-1}^2} + 2\frac{\kappa_{s+1}^2}{\kappa_s^2}.$$

Τελικά για $s = 2, ..., m-2$ ισχύει

$$K_s = K_s\omega_1\wedge\omega_2(e_1,e_2) = -d\omega_{2s+1,2s+2}(e_1,e_2) = 2\frac{\kappa_s^2}{\kappa_{s-1}^2} - 2\frac{\kappa_{s+1}^2}{\kappa_s^2}.$$

Η διανυσματική δέσμη $N^{m-1}f|_{M_{m-1}}$ έχει καμπυλότητα K_{m-1} για την οποία γνωρίζουμε ότι

$$K_{m-1} = -d\omega_{2m-1,2m}(e_1,e_2).$$

Επειδή

$$\omega_{r\alpha} = 0,\ 1\le r\le 2m-4,\ \alpha\ge 2m-1,$$
$$\omega_{2m-3,2m-1}(e_1) = -\omega_{2m-2,2m-1}(e_2) = \frac{\kappa_{m-1}}{\kappa_{m-2}},$$
$$\omega_{2m-2,2m}(e_1) = \omega_{2m-3,2m}(e_2) = \frac{\kappa_{m-1}}{\kappa_{m-2}},$$
$$\omega_{2m-3,\alpha}(e_1) = \omega_{2m-2,\alpha}(e_2) = 0,\ \alpha > 2m-1,$$
$$\omega_{2m-2,\alpha}(e_1) = \omega_{2m-3,\alpha}(e_2) = 0,\ \alpha\ge 2m-1, \alpha\ne 2m,$$

παίρνουμε από την εξίσωση Ricci

$$K_{m-1} = -d\omega_{2m-1,2m}(e_1,e_2) =$$
$$= \sum_{j=1}^{2}\omega_{2m-1,j}\wedge\omega_{j,2m}(e_1,e_2) + \sum_{\alpha\ge 3}\omega_{2m-1,\alpha}\wedge\omega_{\alpha,2m}(e_1,e_2)$$
$$= \sum_{\alpha\ge 2m-3}\omega_{2m-1,\alpha}\wedge\omega_{\alpha,2m}(e_1,e_2) = -\frac{\kappa_{m-1}^2}{\kappa_{m-2}^2}.$$

(iii) Παραγωγίζοντας εξωτερικά τη σχέση $\omega_{2s+1,2s+2} - (s+1)\omega_{12} = *d\log\kappa_s$, που αποδείξαμε στην Πρόταση 2.3.1(iii) παίρνουμε

$$d\omega_{2s+1,2s+2} - (s+1)d\omega_{12} = d(*d\log\kappa_s).$$

Από το Λήμμα 2.3.1(i), τις σχέσεις (1.4) και (2.18) έχουμε στο M_{m-1} τη σχέση

$$\Delta\log\kappa_s = (s+1)K - K_s$$

για κάθε $s \in \{1, ..., m-1\}$. Αθροίζοντας ως προς s, για $1 \leq s \leq m-1$, και λαμβάνοντας υπόψη το (i) και το (ii), φτάνουμε στη σχέση

$$\Delta \log(\kappa_1 ... \kappa_{m-1}) = \frac{m(m+1)}{2} K - 1.$$

$\square$

Κεφάλαιο 3

Κύρια αποτελέσματα

3.1 Αποδείξεις των κυρίων αποτελεσμάτων

Είμαστε πλέον έτοιμοι να δώσουμε τις αποδείξεις των θεωρημάτων, που έχουν αναφερθεί στην εισαγωγή. Στις αποδείξεις θα γίνει χρήση, εκτός από τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 2, αποτελεσμάτων της Ολικής Διαφορικής Γεωμετρίας, όπως του Θεωρήματος Gauss-Bonnet, του Θεωρήματος Gauss-Green, της Αρχής Μεγίστου και του Θεωρήματος Μοναδικότητας των ισομετρικών εμβαπτίσεων.

Το αποτέλεσμα που ακολουθεί οφείλεται στον Calabi [6].

Θεώρημα 3.1.1. *Έστω $f : (M, \langle , \rangle) \longrightarrow S^n, n \geq 3$, συμπαγής, προσανατολισμένη, κορεσμένη, ελαχιστική επιφάνεια γένους μηδέν. Τότε:*

(i) *Ο αριθμός n είναι άρτιος ($n = 2m$).*

(ii) *Το εμβαδό $A(M)$ της επιφάνειας είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π και ισχύει $A(M) \geq 2\pi m(m+1)$.*

Απόδειξη. (i) Έχει αποδειχθεί στην Πρόταση 2.3.1(i).

(ii) Λαμβάνοντας υπόψη την Πρόταση 2.3.1(ii) και την Πρόταση 2.3.2(iii) έχουμε

$$\Delta \log u = m(m+1)K - 2 \tag{3.1}$$

στο M_{m-1}, όπου $u := g_1^2 ... g_{m-1}^2$.

Από την Πρόταση 2.3.1, το M_{m-1}^c αποτελείται από πεπερασμένο το πλήθος σημείων. Θεωρούμε τυχόν σημείο του p. Γύρω από το p θεωρούμε μιγαδικό χάρτη (U, z) του M ώστε $z(p) = 0$, $z = x + iy$, $\langle , \rangle = E|dz|^2$ και $U \cap M_{m-1}^c = \{p\}$. Επιλέγουμε ορθομοναδιαίο πλαίσιο κατά μήκος της f με εφαπτόμενο μέρος $\{e_1, e_2\}$, όπου $e_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial x}$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial y}$ και κάθετο μέρος $\{e_\alpha\}$ ώστε στο $U - \{p\}$ να ισχύει $e_{2s+1} = \frac{1}{\kappa_s}B_s(e_1, ..., e_1)$, $e_{2s+2} = \frac{1}{\kappa_s}B_s(e_1, ..., e_1, e_2)$ για κάθε $s \in \{1, ..., m-1\}$.

Λόγω της Πρότασης 2.3.1(ii) ισχύει $u = |z|^{2l}u_0$ στο U με $l := l_1 + ... + l_{m-1}$, όπου u_0 είναι διαφορίσιμη θετική συνάρτηση ορισμένη κοντά στο $p \in M_{m-1}^c$. Έστω $M_{m-1}^c = \{p_1, ..., p_t\}$. Για κάθε $s \in \{1, ..., t\}$ θεωρούμε γεωδαισιακή μπάλα $B_\varepsilon(p_s)$ με κέντρο το p_s και ακτίνα $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε $B_\varepsilon(p_s) \cap M_{m-1}^c = \{p_s\}$ και θέτουμε

$$M_\varepsilon := M - \bigcup_{s=1}^{t} B_\varepsilon(p_s).$$

Το M_ε είναι πολύπτυγμα με σύνορο

$$\partial M_\varepsilon = \bigcup_{s=1}^{t} \partial B_\varepsilon(p_s).$$

Προσανατολίζουμε θετικά το σύνορο ∂M_ε και συμβολίζουμε με ν το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο του M_ε. Από το Θεώρημα των Gauss-Green έχουμε

$$\int_{M_\varepsilon} \Delta \log u dM = \int_{\partial M_\varepsilon} \langle \nu, \operatorname{grad} \log u \rangle d\sigma = \sum_{s=1}^{t} \int_{\partial B_\varepsilon(p_s)} \langle \nu, \operatorname{grad} \log u \rangle d\sigma,$$

όπου dM είναι το στοιχείο εμβαδού του M και $d\sigma$ είναι το στοιχείο μήκους του ∂M_ε.

Έχουμε ήδη θεωρήσει μιγαδικό χάρτη (U, z) γύρω από το p_s με $z(p_s) = 0$. Θεωρούμε πολικές συντεταγμένες (ρ, θ), όπου $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$. Για τα διανυσματικά πεδία $\frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial \theta}$ ισχύουν

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} &= \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= -\rho\sin\theta \frac{\partial}{\partial x} + \rho\cos\theta \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Επειδή γύρω από κάθε σημείο του M^c_{m-1} ισχύει $u = |z|^{2l}u_0$, αν θέσουμε $|z| = \rho$, τότε έχουμε $u = \rho^{2l}u_0$, $\log u = 2l\log\rho + \log u_0$ και $u|_{\partial B_\varepsilon(p_s)} = \varepsilon^{2l}u_0|_{\partial B_\varepsilon(p_s)}$.

Επίσης, το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο είναι το

$$\nu = -\frac{\frac{\partial}{\partial \rho}}{|\frac{\partial}{\partial \rho}|} = -\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial \rho}$$

και το στοιχείο μήκους του $\partial B_\varepsilon(p_s)$ είναι το $d\sigma = |\frac{\partial}{\partial \theta}|d\theta = \rho\sqrt{E}d\theta$. Συνεπώς έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{M_\varepsilon} \Delta \log u dM &= \sum_{s=1}^{t} \int_{\partial B_\varepsilon(p_s)} \langle \nu, \operatorname{grad} \log u \rangle d\sigma \\ &= \sum_{s=1}^{t} \int_{\partial B_\varepsilon(p_s)} \Big(-\frac{1}{\sqrt{E}} \langle \frac{\partial}{\partial \rho}, \operatorname{grad} \log u_0 \rangle - \frac{2l}{\rho\sqrt{E}} \Big) d\sigma \\ &= -\sum_{s=1}^{t} \int_{\partial B_\varepsilon(p_s)} \rho \langle \frac{\partial}{\partial \rho}, \operatorname{grad} \log u_0 \rangle d\theta - 2l \sum_{s=1}^{t} \int_{\partial B_\varepsilon(p_s)} d\theta \\ &= -4\pi l t - \sum_{s=1}^{t} \int_{\partial B_\varepsilon(p_s)} \varepsilon \langle \frac{\partial}{\partial \rho}, \operatorname{grad} \log u_0 \rangle d\theta. \end{aligned}$$

Παίρνοντας το όριο καθώς το ε τείνει στο 0, βρίσκουμε

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{M_\varepsilon} \Delta \log u dM = -4\pi l t, \tag{3.2}$$

επειδή η ποσότητα $\langle \frac{\partial}{\partial \rho}, \mathrm{grad} \log u_0 \rangle$ είναι φραγμένη. Ολοκληρώνουμε τη σχέση (3.1) στο M_ε, παίρνουμε το όριο και λαμβάνοντας υπόψη την (3.2) έχουμε διαδοχικά

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{M_\varepsilon} \Delta \log u dM = m(m+1) \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{M_\varepsilon} K dM - 2 \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{M_\varepsilon} dM,$$

ή

$$-4\pi l t = m(m+1) \int_M K dM - 2 \int_M dM,$$

ή

$$A(M) = 2\pi l t + \frac{m(m+1)}{2} \int_M K dM.$$

Επειδή το M είναι συμπαγές και γένους μηδέν, έχουμε $\int_M K dM = 4\pi$, λόγω του Θεωρήματος Gauss-Bonnet. Επομένως ισχύει

$$A(M) = 2\pi\big(m(m+1) + lt\big),$$

δηλαδή το εμβαδό του M είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π και επιπλέον $A(M) \geq 2\pi m(m+1)$. □

Παρατήρηση 3.1.1. *Αξίζει να σημειωθεί ότι για το εμβαδό του M ισχύει $A(M) = 2\pi m(m+1)$ όταν $M_{m-1} = M$.*

Άμεση απόρροια του Θεωρήματος 3.1.1 είναι το ακόλουθο [2]

Πόρισμα 3.1.1. *Έστω $f : (M, \langle , \rangle) \longrightarrow S^3$ συμπαγής, προσανατολισμένη, ελαχιστική επιφάνεια γένους μηδέν. Τότε η f είναι ολικά γεωδαισιακή.*

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε το σημαντικό αποτέλεσμα ακαμψίας που οφείλεται στον Barbosa [4], για την απόδειξη του οποίου χρειαζόμαστε το Θεώρημα Μοναδικότητας των ισομετρικών εμβαπτίσεων στη σφαίρα [10].

Θεώρημα 3.1.2. *Έστωσαν $f, \widetilde{f} : M^n \longrightarrow S^{n+k}$ ισομετρικές εμβαπτίσεις του συνεκτικού πολυπτύγματος Riemann M^n στην S^{n+k}. Συμβολίζουμε με Nf, B, $\nabla^\perp$ και $N\widetilde{f}$, $\widetilde{B}$, $\widetilde{\nabla}^\perp$ την κάθετη δέσμη, τη δεύτερη θεμελιώδη μορφή και την κάθετη συνοχή των f και $\widetilde{f}$ αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ισομορφισμός T μεταξύ των διανυσματικών δεσμών Nf, $N\widetilde{f}$, $\xi_p = (p, \xi) \longmapsto T\xi_p = (p, \widetilde{\xi})$ τέτοιος ώστε:*
(i) $\langle T\xi_p, T\eta_p \rangle = \langle \xi_p, \eta_p \rangle$ *για κάθε* $\xi_p, \eta_p \in Nf$.
(ii) *Οι δεύτερες θεμελιώδεις μορφές συνδέονται μέσω του ισομορφισμού με τη σχέση* $T \circ B = \widetilde{B}$.
(iii) *Για* $X \in \Delta(M^n)$ *και* $\xi \in \Delta^\perp(f)$ *ισχύει* $T(\nabla^\perp_X \xi) = \widetilde{\nabla}^\perp_X (T\xi)$.
Τότε υπάρχει ισομετρία τ της S^{n+k} έτσι ώστε $\widetilde{f} = \tau \circ f$.

Θεώρημα 3.1.3. *Έστωσαν $f : (M, \langle , \rangle) \longrightarrow S^{2m}$, $\widetilde{f} : (M, \langle , \rangle) \longrightarrow S^{2m}$ συμπαγείς, προσανατολισμένες, κορεσμένες, ελαχιστικές επιφάνειες γένους μηδέν. Τότε υπάρχει ισομετρία τ της S^{2m} τέτοια ώστε $\widetilde{f} = \tau \circ f$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{e_1, e_2\}$ στον προσανατολισμό του M. Επίσης, όπως στην Πρόταση 2.3.1, για κάθε $s \in \{1, ..., m-1\}$ θεωρούμε για την f στο σύνολο M_{m-1} τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο

$$e_{2s+1} = \frac{1}{\kappa_s} B_s(e_1, ..., e_1), \; e_{2s+2} = \frac{1}{\kappa_s} B_s(e_1, ..., e_1, e_2)$$

της διανυσματικής δέσμης $N^s f|_{M_{m-1}}$. Αντίστοιχα για την $\widetilde{f}$ στο σύνολο $\widetilde{M}_{m-1}$ θεωρούμε τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο

$$\widetilde{e}_{2s+1} = \frac{1}{\widetilde{\kappa}_s} \widetilde{B}_s(e_1, ..., e_1), \; \widetilde{e}_{2s+2} = \frac{1}{\widetilde{\kappa}_s} \widetilde{B}_s(e_1, ..., e_1, e_2)$$

της διανυσματικής δέσμης $N^s \widetilde{f}|_{\widetilde{M}_{m-1}}$.

Το $M_{m-1} \cap \widetilde{M}_{m-1}$ είναι ανοικτό ως τομή ανοικτών. Έστω U μια συνεκτική συνιστώσα του. Ορίζουμε απεικόνιση T μεταξύ των διανυσματικών δεσμών $Nf|_U$, $N\widetilde{f}|_U$ ώστε για κάθε $p \in U$ και $s \in \{1, ..., m-1\}$ να ισχύει

$$Te_{2s+1}|_p = \widetilde{e}_{2s+1}|_p, \; Te_{2s+2}|_p = \widetilde{e}_{2s+2}|_p$$

και την επεκτείνουμε $D(U)$-γραμμικά. Προφανώς η T είναι ισομορφισμός. Επίσης, είναι φανερό ότι για κάθε $\xi_p, \eta_p \in N_p f|_U$ πληρείται η σχέση $\langle T\xi_p, T\eta_p \rangle = \langle \xi_p, \eta_p \rangle$.

Γνωρίζουμε από την Πρόταση 2.3.2 ότι στο U ισχύουν οι σχέσεις $K = 1 - 2\kappa_1^2 = 1 - 2\widetilde{\kappa}_1^2$. Συνεπώς είναι $\kappa_1 = \widetilde{\kappa}_1$.

Για κάθε $p \in U$ ισχύει $T \circ B(e_1, e_1)|_p = \kappa_1(p)\widetilde{e}_3|_p = \widetilde{\kappa}_1(p)\widetilde{e}_3|_p = \widetilde{B}(e_1, e_1)|_p$ και όμοια $T \circ B(e_1, e_2)|_p = \widetilde{B}(e_1, e_2)|_p$. Επειδή οι $B, \widetilde{B}$ είναι $D(M)$-γραμμικές, συνάγουμε ότι $T \circ B = \widetilde{B}$.

Θα δείξουμε ότι για τις μορφές κάθετης συνοχής των $f, \widetilde{f}$ ισχύει $\omega_{\alpha\beta} = \widetilde{\omega}_{\alpha\beta}$. Στο U για την f από την Πρόταση 2.3.2 έχουμε τις σχέσεις

$$K_s = \begin{cases} 2\kappa_1^2 - 2\dfrac{\kappa_2^2}{\kappa_1^2}, & s = 1, \\ 2\dfrac{\kappa_s^2}{\kappa_{s-1}^2} - 2\dfrac{\kappa_{s+1}^2}{\kappa_s^2}, & 1 < s < m-1, \\ \dfrac{\kappa_{m-1}^2}{\kappa_{m-2}^2}, & s = m-1, \end{cases}$$

και

$$\Delta \log \kappa_s = (s+1)K - K_s,$$

όπου K_s είναι η καμπυλότητα της διανυσματικής δέσμης $N^s f|_U$ και κ_s είναι το μήκος του $B_s(e_1, ..., e_1)$ για κάθε $s \in \{1, ..., m-1\}$.

Όμοια στο U για την $\widetilde{f}$ έχουμε

$$\widetilde{K}_s = \begin{cases} 2\widetilde{\kappa}_1^2 - 2\dfrac{\widetilde{\kappa}_2^2}{\widetilde{\kappa}_1^2}, & s = 1, \\ 2\dfrac{\widetilde{\kappa}_s^2}{\widetilde{\kappa}_{s-1}^2} - 2\dfrac{\widetilde{\kappa}_{s+1}^2}{\widetilde{\kappa}_s^2}, & 1 < s < m-1, \\ 2\dfrac{\widetilde{\kappa}_{m-1}^2}{\widetilde{\kappa}_{m-2}^2}, & s = m-1, \end{cases}$$

και
$$\Delta \log \widetilde{\kappa}_s = (s+1)K - \widetilde{K}_s,$$
όπου $\widetilde{K}_s$ είναι η καμπυλότητα της διανυσματικής δέσμης $N^s\widetilde{f}|_U$ και $\widetilde{\kappa}_s$ είναι το μήκος του $\widetilde{B}_s(e_1, ..., e_1)$ για κάθε $s \in \{1, ..., m-1\}$.

Στη συνέχεια εργαζόμαστε στο U. Επειδή $\kappa_1 = \widetilde{\kappa}_1$, από τις προαναφερθέντες σχέσεις εύκολα παίρνουμε ότι $\kappa_s = \widetilde{\kappa}_s$ και $K_s = \widetilde{K}_s$ για $1 \leq s \leq m-1$. Από την Πρόταση 2.3.1(iii) για την f γνωρίζουμε ότι $\omega_{2s+1,2s+2} - (s+1)\omega_{12} = *d\log\kappa_s$ και ομοίως για την $\widetilde{f}$ γνωρίζουμε ότι $\widetilde{\omega}_{2s+1,2s+2} - (s+1)\omega_{12} = *d\log\widetilde{\kappa}_s$. Από αυτές συνάγεται ότι
$$\omega_{2s+1,2s+2} = \widetilde{\omega}_{2s+1,2s+2}.$$

Επιπλέον από την Πρόταση 2.3.1(iii) για την $f|_U$ έχουμε
$$\begin{aligned}
\omega_{2s-1,2s+1}(e_1) &= -\omega_{2s,2s+1}(e_2) = \frac{\kappa_s}{\kappa_{s-1}},\\
\omega_{2s-1,\alpha}(e_1) &= \omega_{2s,\alpha}(e_2) = 0,\ \alpha > 2s+1,\\
\omega_{2s,2s+2}(e_1) &= \omega_{2s-1,2s+2}(e_2) = \frac{\kappa_s}{\kappa_{s-1}},\\
\omega_{2s,\alpha}(e_1) &= \omega_{2s-1,\alpha}(e_2) = 0,\ \alpha \geq 2s+1,\ \alpha \neq 2s+2
\end{aligned}$$
και για την $\widetilde{f}|_U$ έχουμε
$$\begin{aligned}
\widetilde{\omega}_{2s-1,2s+1}(e_1) &= -\widetilde{\omega}_{2s,2s+1}(e_2) = \frac{\widetilde{\kappa}_s}{\widetilde{\kappa}_{s-1}},\\
\widetilde{\omega}_{2s-1,\alpha}(e_1) &= \widetilde{\omega}_{2s,\alpha}(e_2) = 0,\ \alpha > 2s+1,\\
\widetilde{\omega}_{2s,2s+2}(e_1) &= \widetilde{\omega}_{2s-1,2s+2}(e_2) = \frac{\widetilde{\kappa}_s}{\widetilde{\kappa}_{s-1}},\\
\widetilde{\omega}_{2s,\alpha}(e_1) &= \widetilde{\omega}_{2s-1,\alpha}(e_2) = 0,\ \alpha \geq 2s+1,\ \alpha \neq 2s+2,
\end{aligned}$$
όπου $1 \leq s \leq m-1$. Από αυτές τις σχέσεις προκύπτει ότι $\omega_{\alpha\beta} = \widetilde{\omega}_{\alpha\beta}$, αφού $\kappa_s = \widetilde{\kappa}_s$.

Έστω $X \in \Delta(U)$ και $\xi \in \Gamma(Nf|_U)$. Το ξ έχει την ανάλυση $\xi = \sum_{\alpha=3}^{2m}\langle\xi, e_\alpha\rangle e_\alpha$. Επειδή για κάθε $p \in U$ ισχύει
$$T(\nabla^{\perp}_X e_\alpha|_p) = T(\sum_{\beta=3}^{2m}\omega_{\alpha\beta}(X)e_\beta)|_p = \sum_{\beta=3}^{2m}\omega_{\alpha\beta}(X)\widetilde{e}_\beta|_p = \widetilde{\nabla}^{\perp}_X\widetilde{e}_\alpha|_p,$$
παίρνουμε $T(\nabla^{\perp}_X\xi) = \widetilde{\nabla}^{\perp}_X(T\xi)$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.2 υπάρχει ισομετρία $\tau : S^{2m} \longrightarrow S^{2m}$ τέτοια ώστε $\widetilde{f}|_U = \tau \circ f|_U$. Θέτουμε $F := \widetilde{f} - \tau \circ f : M \longrightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$. Γνωρίζουμε ότι οι $f, \widetilde{f}$ είναι αναλυτικές (Πρόταση 1.3.3). Συνεπώς η F είναι αναλυτική στο M, ως διαφορά αναλυτικών και αφού $F|_U = 0$ συμπεραίνουμε ότι $F = 0$ στο M, δηλαδή $\widetilde{f} = \tau \circ f$. □

Το τελευταίο αποτέλεσμα είναι η ταξινόμηση των συμπαγών, προσανατολισμένων, χορεσμένων, ελαχιστικών επιφανειών γένους μηδέν στη σφαίρα με σταθερή καμπυλότητα Gauss, το οποίο οφείλεται στον Calabi [6]. Για το σκοπό αυτό θα αναφέρουμε τις επιφάνειες Veronese, οι οποίες είναι συμπαγείς και έχουν σταθερή καμπυλότητα Gauss.

Σύμφωνα με γνωστό Θεώρημα του Takahashi [19], μια ισομετρική εμβάπτιση $g = (g_1, ..., g_{n+k+1})$ από ένα n-διάστατο πολύπτυγμα Riemann M^n στην S^{n+k} είναι ελαχιστική αν και μόνο αν οι συναρτήσεις συντεταγμένων της g είναι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή Laplace Δ του M^n με αντίστοιχη ιδιοτιμή n, δηλαδή αν $\Delta g_i = -n g_i, i \in \{1, ..., n+k+1\}$.

Θεωρούμε τη διδιάστατη σφαίρα $S^2(R)$ ακτίνας $R > 0$, εφοδιασμένη με τη συνήθη μετρική Riemann. Είναι γνωστό ότι οι ιδιοτιμές του τελεστή Laplace της $S^2(R)$ είναι $\lambda_\kappa = \frac{\kappa(\kappa+1)}{R^2}$, όπου κ είναι μη αρνητικός ακέραιος. Επιπρόσθετα, ο ιδιοχώρος V_{λ_κ} που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_κ, παράγεται από τα αρμονικά ομογενή πολυώνυμα βαθμού κ του $\mathbb{R}^3$ περιορισμένα στην $S^2(R)$ και έχει διάσταση $2\kappa + 1$.

Η επιφάνεια Veronese στην $S^{2\kappa}$, όπου κ είναι θετικός ακέραιος, είναι η ισομετρική ελαχιστική εμβάπτιση

$$f_\kappa : S^2(R) \longrightarrow S^{2\kappa}, \quad R = \sqrt{\frac{\kappa(\kappa+1)}{2}},$$

με $f_\kappa = (g_1, ..., g_{2\kappa+1})$ και $g_1^2 + ... + g_{2\kappa+1}^2 = 1$, όπου $\{g_1, ..., g_{2\kappa+1}\}$ είναι βάση του ιδιοχώρου V_{λ_κ} αποτελούμενη από αρμονικά ομογενή πολυώνυμα βαθμού κ του $\mathbb{R}^3$ περιορισμένα στην $S^2(R)$ και η οποία είναι ορθομοναδιαία ως προς το εσωτερικό γινόμενο του διανυσματικού χώρου $D(S^2(R))$

$$\langle\langle , \rangle\rangle : D(S^2(R)) \times D(S^2(R)) \longrightarrow \mathbb{R}, \ (g, h) \longmapsto \langle\langle g, h \rangle\rangle := \int_{S^2(R)} g h dS^2(R),$$

όπου $dS^2(R)$ είναι το στοιχείο εμβαδού της $S^2(R)$.

Είναι τώρα φανερό ότι οι συναρτήσεις συντεταγμένων της f_κ είναι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή Laplace της $S^2(R)$. Συνεπώς, από το Θεώρημα Takahashi για κάθε θετικό ακέραιο κ η f_κ είναι ελαχιστική επιφάνεια. Προφανώς οι επιφάνειες Veronese είναι γένους μηδέν και έχουν σταθερή καμπυλότητα Gauss $K = \frac{2}{\kappa(\kappa+1)}$.

Για παράδειγμα, η επιφάνεια Veronese στην S^4 είναι η

$$f_2 : S^2(\sqrt{3}) \longrightarrow S^4, \ f_2(x, y, z) = \left(\frac{xy}{\sqrt{3}}, \frac{xz}{\sqrt{3}}, \frac{yz}{\sqrt{3}}, \frac{x^2 - y^2}{2\sqrt{3}}, \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{6}\right).$$

Το ακόλουθο θεώρημα δηλώνει πως ουσιαστικά οι επιφάνειες Veronese είναι οι μόνες ελαχιστικές επιφάνειες με αυτές τις ιδιότητες.

Θεώρημα 3.1.4. *Έστω $f : (M, \langle , \rangle) \longrightarrow S^{2m}$ συμπαγής, προσανατολισμένη, κορεσμένη, ελαχιστική επιφάνεια γένους μηδέν. Αν το M έχει σταθερή καμπυλότητα Gauss K, τότε $K = \frac{2}{m(m+1)}$ και υπάρχουν ισομετρίες $F : (M, \langle , \rangle) \longrightarrow S^2\left(\sqrt{\frac{m(m+1)}{2}}\right)$ και $\tau : S^{2m} \longrightarrow S^{2m}$ ώστε $f \circ F^{-1} = \tau \circ f_m$, όπου $f_m : S^2\left(\sqrt{\frac{m(m+1)}{2}}\right) \longrightarrow S^{2m}$ είναι η επιφάνεια Veronese στην S^{2m}.*

Απόδειξη. Από την Πρόταση 2.3.2 έχουμε τις σχέσεις

$$K = 1 - 2\kappa_1^2,$$

$$\Delta \log(\kappa_1 ... \kappa_{m-1})^2 = m(m+1)K - 2$$

και

$$\Delta \log \kappa_s = (s+1)K - K_s$$

στο M_{m-1} για κάθε $s \in \{1, ..., m-1\}$. Αφού η καμπυλότητα Gauss K είναι σταθερή, το κ_1 είναι σταθερό και συνεπώς $\Delta \log \kappa_1 = 0$. Λόγω της $\Delta \log \kappa_1 = 2K - K_1$ η τελευταία σχέση έχει ως συνέπεια το K_1 σταθερό και επειδή στην Πρόταση 2.3.2 είδαμε ότι $K_1 = 2\kappa_1^2 - 2\frac{\kappa_2^2}{\kappa_1^2}$, έχουμε κ_2 σταθερό και $\Delta \log \kappa_2 = 0$, το οποίο με τη σειρά του μας δίνει το K_2 σταθερό. Επαγωγικά φτάνουμε στο συμπέρασμα ότι $\kappa_1, ..., \kappa_{m-1}$ είναι σταθερές και επομένως έχουμε $\Delta \log(\kappa_1 ... \kappa_{m-1})^2 = 0$, δηλαδή $K = \frac{2}{m(m+1)}$.

Το M είναι πλήρες και απλά συνεκτικό. Από το Θεώρημα Ταξινόμησης Απλά Συνεκτικών Χώρων Μορφής [14] υπάρχει ισομετρία $F : M \longrightarrow S^2\left(\sqrt{\frac{m(m+1)}{2}}\right)$. Είναι φανερό ότι η $f \circ F^{-1} : S^2\left(\sqrt{\frac{m(m+1)}{2}}\right) \longrightarrow S^{2m}$ είναι συμπαγής χορεσμένη ελαχιστική επιφάνεια γένους μηδέν. Όμως και η επιφάνεια Veronese $f_m : S^2\left(\sqrt{\frac{m(m+1)}{2}}\right) \longrightarrow S^{2m}$ είναι συμπαγής χορεσμένη ελαχιστική επιφάνεια γένους μηδέν. Από το Θεώρημα 3.1.3 υπάρχει ισομετρία τ της S^{2m} ώστε $\tau \circ f_m = f \circ F^{-1}$. □

3.2 Εικασία του U. Simon

Η εικασία που ακολουθεί διατυπώθηκε στο [15] και έχει επαληθευθεί μόνο σε ειδικές περιπτώσεις.

Εικασία 3.2.1. *Έστω $f : (M, \langle , \rangle) \longrightarrow S^n$ συμπαγής, προσανατολισμένη, ελαχιστική επιφάνεια με καμπυλότητα Gauss K. Αν η K πληροί την ανισότητα $K(s+1) \leq K \leq K(s)$, όπου $K(s) := \frac{2}{s(s+1)}$, s θετικός ακέραιος, τότε είτε $K = K(s)$ και υπάρχουν ισομετρίες $F : (M, \langle , \rangle) \longrightarrow S^2\left(\sqrt{\frac{s(s+1)}{2}}\right)$ και $\tau : S^{2s} \longrightarrow S^{2s}$ ώστε $f \circ F^{-1} = \tau \circ f_s$, όπου $f_s : S^2\left(\sqrt{\frac{s(s+1)}{2}}\right) \longrightarrow S^{2s}$ είναι η επιφάνεια Veronese στην S^{2s}, ή $K = K(s+1)$ και υπάρχουν ισομετρίες $F : (M, \langle , \rangle) \longrightarrow S^2\left(\sqrt{\frac{(s+1)(s+2)}{2}}\right)$ και $\tau : S^{2(s+1)} \longrightarrow S^{2(s+1)}$ ώστε $f \circ F^{-1} = \tau \circ f_{s+1}$, όπου $f_{s+1} : S^2\left(\sqrt{\frac{(s+1)(s+2)}{2}}\right) \longrightarrow S^{2(s+1)}$ είναι η επιφάνεια Veronese στην $S^{2(s+1)}$.*

Η εικασία έχει αποδειχθεί στο [15] στις περιπτώσεις όπου $s = 1$ και $s = 2$. Θα δώσουμε μια απόδειξη για αυτές τις περιπτώσεις με τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στην παρούσα εργασία, δηλαδή θα αποδείξουμε το ακόλουθο

Θεώρημα 3.2.1. *Η εικασία του Simon είναι αληθής για $s = 1$ και $s = 2$.*

Απόδειξη. Λόγω της υπόθεσης $K(s+1) \leq K \leq K(s)$, $s = 1, 2$, έχουμε $\int_M K dM > 0$, όπου dM είναι το στοιχείο εμβαδού του M. Από το Θεώρημα των Gauss-Bonnet προκύπτει ότι το M είναι ομοιομορφικό με την S^2 και επομένως $\int_M K dM = 4\pi$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.1 η f είναι χορεσμένη σε σφαίρα S^{2m} άρτιας διάστασης. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Περίπτωση $s = 1$.

Εξετάζουμε συμπαγή, χορεσμένη, ελαχιστική επιφάνεια $f : M \longrightarrow S^{2m}$ γένους μηδέν με χαμπυλότητα Gauss $\frac{1}{3} \leq K \leq 1$. Από το Θεώρημα 3.1.1 για το εμβαδό του M ισχύει $A(M) \geq 2\pi m(m+1)$. Επιπλέον,

$$4\pi = \int_M K dM \geq \int_M \frac{1}{3} dM \geq \frac{2\pi}{3} m(m+1),$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι $m = 1$ ή 2.

Αν $m = 1$, τότε η f είναι ολικά γεωδαισιακή και από τη σχέση (1.2) παίρνουμε ότι $K = 1$.

Αν $m = 2$, τότε το σύνολο $M_1 = \{p \in M : B|_p \neq 0\}$ είναι μη κενό και ανοικτό υποσύνολο του M. Επιπλέον, από την Πρόταση 2.3.2, στο M_1 ισχύουν οι σχέσεις $K = 1 - 2\kappa_1^2$, $K_1 = 2\kappa_1^2 = 1 - K$ και $\Delta \log \kappa_1 = 2K - K_1$. Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις και λόγω της υπόθεσης παίρνουμε $\Delta \log(1-K) = 2(3K-1) \geq 0$.

Αν $u \in D(M)$ με $u > 0$, τότε ισχύει $\Delta \log u = \frac{\Delta u}{u} - \frac{|\mathrm{grad} u|^2}{u^2}$. Πράγματι, αν $\{e_1, e_2\}$ τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο του M, τότε

$$\begin{aligned}
\Delta \log u &= \sum_{j=1}^{2} \Big(e_j(e_j(\log u)) - (\nabla_{e_j} e_j)(\log u) \Big) \\
&= \sum_{j=1}^{2} \Big(e_j\big(\frac{e_j(u)}{u}\big) - \frac{(\nabla_{e_j} e_j)(u)}{u} \Big) \\
&= \sum_{j=1}^{2} \Big(\frac{e_j(e_j(u))}{u} - \frac{(e_j(u))^2}{u^2} - \frac{(\nabla_{e_j} e_j)(u)}{u} \Big) \\
&= \frac{\sum_{j=1}^{2} \Big(e_j(e_j(u)) - (\nabla_{e_j} e_j)(u) \Big)}{u} - \frac{\sum_{j=1}^{2} (e_j(u))^2}{u^2} \\
&= \frac{\Delta u}{u} - \frac{|\mathrm{grad} u|^2}{u^2}.
\end{aligned}$$

Επειδή στο M_1 ισχύει $1 - K > 0$ (λόγω της (1.2)), παίρνουμε

$$\Delta \log(1-K) = \frac{\Delta(1-K)}{1-K} - \frac{|\mathrm{grad}(1-K)|^2}{(1-K)^2}.$$

Επομένως, έχουμε $\Delta(1-K) \geq \frac{|\mathrm{grad}(1-K)|^2}{1-K} \geq 0$ και κατά συνέπεια ισχύει $\Delta(1-K) \geq 0$ στο M_1. Επειδή το M_1 είναι πυκνό υποσύνολο του M ισχύει $\Delta(1-K) \geq 0$ σε ολόκληρο το M. Από την Αρχή Μεγίστου συνάγεται ότι η χαμπυλότητα Gauss είναι σταθερή. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.4 το M έχει χαμπυλότητα Gauss $K = \frac{1}{3}$ και υπάρχουν ισομετρίες $F : M \longrightarrow S^2(\sqrt{3})$ και $\tau : S^4 \longrightarrow S^4$ ώστε $f \circ F^{-1} = \tau \circ f_2$, όπου $f_2 : S^2(\sqrt{3}) \longrightarrow S^4$ είναι η επιφάνεια Veronese στην S^4.

(ii) Περίπτωση $s = 2$.

Σε αυτή τη περίπτωση έχουμε συμπαγή, χορεσμένη, ελαχιστική επιφάνεια $f : M \longrightarrow S^{2m}$ γένους μηδέν με χαμπυλότητα Gauss $\frac{1}{6} \leq K \leq \frac{1}{3}$. Από το Θεώρημα 3.1.1 γνωρίζουμε ότι για το εμβαδό του M ισχύει η ανισότητα $A(M) \geq 2\pi m(m+1)$, επομένως

$$4\pi = \int_M K dM \geq \int_M \frac{1}{6} dM \geq \frac{\pi}{6} m(m+1).$$

Συνεπώς $m = 1$ ή $m = 2$ ή $m = 3$.

Αν $m = 1$, τότε η f θα ήταν ολικά γεωδαισιακή και επομένως η καμπυλότητα Gauss είναι ίση με 1, άτοπο. Άρα $m = 2$ ή $m = 3$.

Υποθέτουμε ότι $m = 2$. Τότε έχουμε συμπαγή, κορεσμένη, ελαχιστική επιφάνεια $f : M \longrightarrow S^4$ γένους μηδέν, επομένως $B \neq 0$ και $B_2 = 0$ $(\kappa_1 \neq 0, \kappa_2 = 0)$.

Επειδή $2K = -\|B\|^2 + 2$ (σχέση (1.2)), λόγω της υπόθεσης $\frac{1}{6} \leq K \leq \frac{1}{3}$ προκύπτει ότι

$$M_1 = \{p \in M : B|_p \neq 0\} = \{p \in M : K|_p < 1\} = M.$$

Από την Πρόταση 2.3.2 στο M λοιπόν, ισχύει $K = 1 - 2\kappa_1^2$, $K_1 = 2\kappa_1^2 = 1 - K$ και $\Delta \log \kappa_1 = 2K - K_1$, επομένως $\Delta \log(1 - K) = 2(3K - 1) \leq 0$. Από την Αρχή Μεγίστου συνάγεται ότι η καμπυλότητα Gauss K είναι σταθερή. Επιπλέον, από τη σχέση $\Delta \log(1 - K) = 2(3K - 1)$, συμπεραίνουμε ότι $K = \frac{1}{3}$ και από το Θεώρημα 3.1.4 υπάρχουν ισομετρίες $F : M \longrightarrow S^2(\sqrt{3})$ και $\tau : S^4 \longrightarrow S^4$ ώστε $f \circ F^{-1} = \tau \circ f_2$, όπου $f_2 : S^2(\sqrt{3}) \longrightarrow S^4$ είναι η επιφάνεια Veronese στην S^4.

Υποθέτουμε ότι $m = 3$. Τότε έχουμε συμπαγή, κορεσμένη, ελαχιστική επιφάνεια $f : M \longrightarrow S^6$ γένους μηδέν. Λόγω της Πρότασης 2.3.2 στο ανοικτό και πυκνό υποσύνολο M_2 του M έχουμε τις σχέσεις $K = 1 - 2\kappa_1^2$, $K_1 = 2\kappa_1^2 - 2\frac{\kappa_2^2}{\kappa_1^2}$ και $K_2 = 2\frac{\kappa_2^2}{\kappa_1^2}$, από όπου παίρνουμε ότι $K_1 = 1 - K$. Επιπλέον, στο M_2 ισχύουν οι σχέσεις $\Delta \log \kappa_1 = 2K - K_1$, $\Delta \log \kappa_2 = 3K - K_2$ από όπου βρίσκουμε $\Delta \log(\kappa_1 \kappa_2) = 6K - 1$, ή

$$\Delta \log(\kappa_1^2 \kappa_2^2) = 2(6K - 1) \geq 0. \tag{3.3}$$

Επομένως

$$\frac{\Delta(\kappa_1^2 \kappa_2^2)}{\kappa_1^2 \kappa_2^2} \geq \frac{|\mathrm{grad}(\kappa_1^2 \kappa_2^2)|^2}{\kappa_1^4 \kappa_2^4} \geq 0.$$

Έχουμε δηλαδή $\Delta(\kappa_1^2 \kappa_2^2) \geq 0$ στο πυκνό υποσύνολο M_2 του M. Λαμβάνοντας υπόψη την Πρόταση 2.3.1(ii) έχουμε $\Delta(g_1 g_2) \geq 0$ στο M_2. Λόγω συνέχειας ισχύει $\Delta(g_1 g_2) \geq 0$ στο M. Από την Αρχή Μεγίστου συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $g_1 g_2$ είναι σταθερή στο M. Αυτό σημαίνει ότι $\kappa_1^2 \kappa_2^2$ είναι σταθερή και λόγω της σχέσης (3.3) έχουμε $K = \frac{1}{6}$ στο M_2. Λόγω συνέχειας ισχύει $K = \frac{1}{6}$ στο M.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.4 υπάρχουν ισομετρίες $F : M \longrightarrow S^2(\sqrt{6})$ και $\tau : S^6 \longrightarrow S^6$ ώστε να ισχύει $f \circ F^{-1} = \tau \circ f_3$, όπου $f_3 : S^2(\sqrt{6}) \longrightarrow S^6$ είναι η επιφάνεια Veronese στην S^6. □

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία εξετάζουμε συμπαγείς, προσανατολισμένες ελαχιστικές επιφάνειες γένους μηδέν στην S^n. Αποδεικνύουμε ότι στην περίπτωση που είναι χορεσμένες, το n είναι άρτιος και επιπλέον δίνουμε μια εκτίμηση του εμβαδού των. Παράλληλα αποδεικνύουμε ότι αυτές είναι άκαμπτες. Αν όμως έχουν σταθερή καμπυλότητα Gauss ουσιαστικά είναι οι επιφάνειες Veronese. Τα αποτελέσματα αυτά οφείλονται στους E. Calabi, S.S. Chern και J.L.M. Barbosa.

We study compact, oriented minimal surfaces of genus zero in the sphere S^n. We prove that when such surfaces lie fully in S^n, then n is even, and provide an estimate for their area. Moreover, we show that these minimal surfaces are rigid. Furthermore, we prove that the Veronese surfaces are actually the only compact minimal surfaces of genus zero with constant Gaussian curvature. These results are due to E. Calabi, S.S. Chern and J.L.M. Barbosa.

Βιβλιογραφία

[1] L.V. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1979.

[2] F.J.Jr. Almgren, *Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein's theorem*, Ann. of Math. (2) **84** (1966), 277-292.

[3] A.C. Asperti, *Generic minimal surfaces*, Math. Z. **200** (1989), 181-186.

[4] J.L.M. Barbosa, *On minimal immersions of S^2 into S^{2m}*, Trans. Amer. Math. Soc. **210** (1975), 75-106.

[5] J.L.M. Barbosa, *An extrinsic rigidity theorem for minimal immersions from S^2 into S^n*, J. Differential Geom. **14** (1979), 355-368.

[6] E. Calabi, *Minimal immersions of surfaces in Euclidean spheres*, J. Differential Geom. 1 (1967), 111-125.

[7] C.C. Chen, *The generalized curvature ellipses and minimal surfaces*, Bull. Inst. Math. Acad. Sin. **11** (1983), 329-336.

[8] S.S. Chern, *On the minimal immersions of the two-sphere in a space of constant curvature*, Problems in Analysis, University Press, Princeton, N. J. (1970), 27-40.

[9] S.S. Chern, W.H. Chen and K.S. Lam, *Lectures on Differential Geometry*, World Scientific, 2000.

[10] M. Dajczer, M. Antonucci, G. Oliveira, P. Lima-Filho and R. Tojeiro, *Submanifolds and isometric immersions*, Publish or Perish, 1990.

[11] J. Eschenburg and R. Tribuzy, *Branch points of conformal mappings of surfaces*, Math. Ann. **279** (1988), 621-633.

[12] H. Farkas and I. Kra, *Riemann Surfaces*, Springer-Verlag, 1992.

[13] D. Ferus, *Differentialgeometrie*, **I-II**, Technische Universitaet Berlin, 2000.

[14] Δ. Κουτρουφιώτης, *Διαφορική Γεωμετρία*, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, 1994.

[15] M. Kozlowski and U. Simon, *Minimal immersions of 2-manifolds into spheres*, Math. Z. **186** (1984), 377-382.

[16] H.B. Lawson, *The global behavior of minimal surfaces in S^n*, Ann. of Math. (2) 92 (1970), 224-237.

[17] T. Otsuki, *Minimal submanifolds with m-index 2 and generalized Veronese surfaces*, J. Math. Soc. Japan 24 (1972), 89-122.

[18] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. IV. Berkeley: Publish or Perish, 1979.

[19] T. Takahashi, *Minimal immersions of Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan 18 (1966), 380-385.