ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

ΤΟ ΦΑΣΜΑ ΤΟΥ ΤΕΛΕΣΤΗ LAPLACE ΕΠΙ ΠΟΛΥΠΤΥΓΜΑΤΩΝ RIEMANN

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΑΠΟΣΤΟΛΟΣ Α. ΤΣΙΡΙΓΩΤΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2007

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στα πλαίσια του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών, για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, υπό την επίβλεψη του Επίκουρου Καθηγητή κ. Γεράσιμου Μπαρμπάτη.

Τριμελής Επιτροπή Κρίσης

Μπαρμπάτης Γεράσιμος, Επίκουρος Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών

Τσαμάτος Παναγιώτης, Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Πεταλάς Χρυσόστομος, Επίκουρος Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Αφιερώνεται στον πατέρα μου Αντώνη,
και στη μητέρα μου Ευαγγελία.

Πρόλογος

Ο τελεστής Laplace-Beltrami είναι για ένα πολύπτυγμα Riemann ότι και ο αντίστοιχος τελεστής Laplace στον $\mathbb{R}^n$. Ως εκ τούτου, ο τελεστής αυτός είναι πολύ σημαντικός στη μελέτη εφαρμογών οι οποίες έχουν ως φυσικό χώρο πολυπτύγματα.

Η μελέτη του τελεστή Laplace επί πολυπτυγμάτων Riemann είχε μια εκπληκτική εξέλιξη από τη δεκαετία του 1960 μέχρι σήμερα, η οποία χαρακτηρίστηκε από τον πλούτο και την ποικιλία τεχνικών και θεμάτων. Στην παρούσα διατριβή θα εξετάσουμε το φάσμα του τελεστή Laplace. Θα ασχοληθούμε αφενός με τη μορφή του και αφετέρου θα εκτιμήσουμε το infimum του φάσματος. Ας σημειωθεί ότι η ακριβής τιμή του infimum είναι πολύ σημαντική στις εφαρμογές. Αρχικά θα μελετήσουμε το φάσμα σε χώρους μορφής. Στη συνέχεια θα επεκτείνουμε τη μελέτη σε πολυπτύγματα Riemann των οποίων η καμπυλότητα τομής μπορεί να μην είναι σταθερή, αλλά φραγμένη από κάτω.

Μελετώντας το φάσμα του τελεστή Laplace προκύπτουν διάφορα συμπεράσματα αυτόνομης αξίας. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι τεχνικές που αναπτύσσουμε ποικίλουν και τα αποτελέσματα που παίρνουμε έχουν πληθώρα εφαρμογών σε θέματα που δεν αφορούν μόνο το φάσμα του τελεστή Laplace.

Επίσης, αν το πολύπτυγμα M είναι συμπαγές, η πρώτη μη μηδενική ιδιοτιμή λ_1 του τελεστή Laplace έχει ουσιαστική σημασία αφού καθορίζει έμμεσα, ακόμη και τη γεωμετρία του πολυπτύγματος. Το πρώτο αποτέλεσμα πάνω στην πρώτη ιδιοτιμή είναι το Θεώρημα του Lichnerowicz.

Στο πρώτο Κεφάλαιο της παρούσας μεταπτυχιακής διατριβής, αναφέρουμε κάποια βασικά στοιχεία για τις ασθενείς παραγώγους και για τους χώρους Sobolev που θα μας χρειαστούν στη συνέχεια. Επίσης, παραθέτουμε κάποια στοιχεία από τη θεωρία του φάσματος και απαραίτητους ορισμούς από τη Γεωμετρία Riemann.

Στο επόμενο Κεφάλαιο μελετούμε το φάσμα του Λαπλασιανού τελεστή σε χώρους σταθερής καμπυλότητας τομής. Θεωρούμε το πρόβλημα στον Ευκλείδειο χώρο, στη Σφαίρα και στον Υπερβολικό χώρο. Η μέθοδος που χρησιμοποιούμε έχει ομοιότητες μεταξύ του Ευκλείδειου και του Υπερβολικού χώρου, αλλά διαφέρει στην περίπτωση της Σφαίρας. Η πρώτη μέθοδος βασίζεται στην εύρεση κάποιων "προσεγγιστικών" συναρτήσεων, ενώ στην περίπτωση της Σφαίρας επιστρατεύσαμε τις λεγόμενες "σφαιρικές αρμονικές" συναρτήσεις.

Κλείνοντας το Κεφάλαιο αυτό παραθέτουμε κάποια ποιοτικά χαρακτηριστικά του φάσματος σε κάθε μία από τις τρεις περιπτώσεις. Συγκεκριμένα αναφέρουμε, αν το φάσμα είναι διακριτό, και στην περίπτωση που δεν είναι αν το μηδέν βρίσκεται ή όχι στο ουσιαστικό φάσμα. Η διεξοδική μελέτη του φάσματος του τελεστή Laplace στους λεγόμενους χώρους μορφής, βασίζεται στο γεγονός ότι ξέρουμε την ακριβή έκφραση της μετρικής καθώς και του τελεστή Laplace, και συνεπώς μπορούμε να κάνουμε ακριβείς υπολογισμούς. Επομένως, κατά μία έννοια μπορούμε να εικάσουμε ποιες θα είναι οι ιδιοσυναρτήσεις και οι ιδιοτιμές του τελεστή Laplace στους χώρους μορφής και έτσι να υπολογίσουμε με ακρίβεια το φάσμα.

Το τρίτο Κεφάλαιο, ουσιαστικά αποτελείται από δύο θεματικές ενότητες. Στην πρώτη, υποθέτουμε τη συμπάγεια του πολυπτύγματος, ενώ στη δεύτερη τη μη-συμπάγεια. Αποδεικνύουμε ότι, όταν το πολύπτυγμα Riemann είναι συμπαγές, τότε το φάσμα του τελεστή Laplace είναι διακριτό. Στο δεύτερο μέρος του Κεφαλαίου, μελετάμε το ουσιαστικό φάσμα του τελεστή Laplace. Για τη μελέτη αυτή αναπτύσσουμε τη Θεωρία Weyl. Το Θεώρημα καθώς και το κριτήριο Weyl είναι μερικά από τα κυριότερα στοιχεία αυτής της θεωρίας. Επιπρόσθετα, βρίσκουμε μια έκφραση για το μεγαλύτερο κάτω φράγμα του ουσιαστικού φάσματος η οποία αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως Λήμμα του Persson ή Αρχή της Διάσπασης των Donnelly-Li. Κάνοντας χρήση της Αρχής της Διάσπασης αποδεικνύουμε μία ανισοτική σχέση μεταξύ του μεγαλύτερου κάτω φράγματος του ουσιαστικού φάσματος και του όγκου των σφαιρών ενός μη συμπαγούς και πλήρους πολυπτύγματος Riemann η οποία αποδείχθηκε από τον Brooks.

Στο τελευταίο Κεφάλαιο, μέλημά μας είναι να αποδείξουμε το προαναφερθέν Θεώρημα του Lichnerowicz για την πρώτη ιδιοτιμή, το οποίο ήταν "κρυμμένο" στη σελίδα 135 του [Lz] και χρησιμοποιήθηκε στη μελέτη των ομάδων των μετασχηματισμών των πολυπτυγμάτων Riemann. Επίσης, θα χαρακτηρίσουμε και την υπόθεση της ισότητας η οποία αποδείχθηκε από τον Obata.

Κύρια εργαλεία για την απόδειξη είναι κάποια βασικά, και κατά κύριο λόγο εισαγωγικά, στοιχεία της Γεωμετρικής Ανάλυσης. Αρχικά, οι τύποι της Πρώτης και Δεύτερης Μεταβολής του όγκου ενός υποπολυπτύγματος N ενός πολυπτύγματος M, και κατά κύριο λόγο το Θεώρημα σύγκρισης όγκων του Bishop.

Η ιδέα είναι να συγκρίνουμε γεωμετρικές και φυσικές ποσότητες ενός δοθέντος πολυπτύγματος Riemann, με τις αντίστοιχες ποσότητες ενός χώρου μορφής. Η ιστορία αυτού του κλάδου των μαθηματικών που καλείται "Συγκριτική Γεωμετρία", αρχίζει περίπου τη δεκαετία του 1930 από τις εργασίες των Hopf, Morse-Schoenberg, Myers και Synge. Η εντυπωσιακή καινοτομία όμως ήταν τη δεκαετία του 1950, με την πρωτοπόρο δουλειά του Rauch και τις θεμελιώδεις ιδέες των Alexandrov, Topogonov και Bishop. Από τότε, η απλή ιδέα της σύγκρισης της γεωμετρίας ενός τυχαίου πολυπτύγματος Riemann με τη γεωμετρία των χώρων μορφής, είχε εντυπωσιακή εξέλιξη.

Γεωμετρικά Θεωρήματα σύγκρισης των O. Bonnet και S. B. Myers για εκτιμήσεις της διαμέτρου, του H. E. Rauch για εκτιμήσεις της αύξησης της μεταβολής του μήκους των πεδίων Jacobi καθώς και του R. Bishop για εκτιμήσεις της μεταβολής του όγκου των γεωδαισιακών σφαιρών είναι μερικά από αυτά.

Τέλος, ιδιαίτερη έμφαση σε όλο το κείμενο δίνουμε στην κατάλληλη επιλογή συντεταγμένων ανάλογα με την κατάσταση που αντιμετωπίζουμε. Στο δεύτερο Κεφάλαιο, όπου υπολογίζουμε το φάσμα του τελεστή Laplace στη Σφαίρα, χρησιμοποιούμε σφαιρικές συντεταγμένες, ενώ στο τελευταίο Κεφάλαιο κάνουμε χρήση των κανονικών και κανονικών σφαιρικών συντεταγμένων όπου οι υπολογισμοί απλοποιούνται ιδιαίτερα.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον επιβλέποντα μου, κ. Γεράσιμο Μπαρμπάτη, Επίκουρο Καθηγητή. Η συνεισφορά του στα μαθηματικά ζητήματα ήταν ανεκτίμητη χωρίς την οποία δεν θα ήταν δυνατή η διεκπεραίωση αυτής της διατριβής. Επίσης, τον ευχαριστώ θερμά για την επιλογή του θέματος καθώς και για την καθοδήγησή του κατά την διάρκεια των σπουδών μου. Θέλω ακόμη να ευχαριστήσω τα άλλα δύο μέλη της τριμελούς επιτροπής κρίσης, τον Καθηγητή κ. Παναγιώτη Τσαμάτο και τον Επίκουρου Καθηγητή κ. Χρυσόστομο Πεταλά για τις χρήσιμες παρατηρήσεις τους ως προς την τελική διαμόρφωση του κειμένου.

Θα ήθελα επιπλέον να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου σε όλους τους διδάσκοντες των τομέων Μαθηματικής Ανάλυσης και Άλγεβρας και Γεωμετρίας για την ιδιαίτερη προσοχή που επέδειξαν και τον χρόνο που δαπάνησαν καθ'όλη την διάρκεια των σπουδών μου, καθώς το ενδιαφέρον τους ήταν συγκινητικό.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω στον διδάκτορα κ. Ανδρέα Σάββα-Χαλιλάϊ, στον υποψήφιο διδάκτορα κ. Θεόφιλο Κατσιγιάννη και στους μεταπτυχιακούς φοιτητές κ. Παναγιώτη Ραπανάκη, κ. Χρυσόστομο Ψαρουδάκη και κ. Χρήστο Τατάκη για τις εποικοδομητικές συζητήσεις μας και κυρίως για την φιλία μας.

Τέλος, ευχαριστώ την οικογένεια μου για την υπομονή και επιμονή που επέδειξε κατά την διάρκεια των σπουδών μου. Χάρη στη στήριξη και στην κατανόηση που μου παρείχε, μου έδωσε την ευκαιρία πραγματοποιήσω τις σπουδές μου.

Α. Τσιριγώτης, Ιωάννινα 2007.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Βασικά Στοιχεία

Εισάγουμε βασικές έννοιες για τις ασθενείς μερικές παραγώγους καθώς και για τους χώρους Sobolev. Στη συνέχεια αναφέρουμε κάποια προκαταρκτικά στοιχεία από τη θεωρία του φάσματος και στοιχεία Διαφορικής Γεωμετρίας. Για έννοιες από τη Γεωμετρία Riemann που δεν αναφέρονται στο κείμενο παραπέμπουμε στα βιβλία [Ko] και [dC].

1.1 Ασθενείς Μερικές Παράγωγοι και Χώροι Sobolev

Έστω U, V ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Γράφουμε $V \subset\subset U$ αν $\overline{V} \subset U$ με $\overline{V}$ συμπαγές, και λέμε ότι το V **περιέχεται συμπαγώς** (compactly contained) στο U. Έστω Ω ένα **χωρίο**, δηλαδή ένα ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ μια συνάρτηση. Το σύνολο

$$\overline{\{x \in \Omega, f(x) \neq 0\}},$$

ονομάζεται στήριγμα **στήριγμα** (support) της συνάρτησης f και συμβολίζεται με $\operatorname{supp} f$. Ορίζουμε τους ακόλουθους χώρους συναρτήσεων:

$$\begin{aligned}
C^k(\Omega) &:= \{f : \Omega \to \mathbb{R}, \text{υπάρχουν οι } k\text{-τάξης μερικές παράγωγοι της } f \text{ και είναι} \\
&\qquad \text{συνεχείς στο } \Omega\} \\
C^k(\overline{\Omega}) &:= \{f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}, \text{υπάρχουν οι } k\text{-τάξης μερικές παράγωγοι της } f \text{ και είναι} \\
&\qquad \text{συνεχείς στο } \overline{\Omega}\} \\
C^\infty(\Omega) &:= \cap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, f \text{ άπειρες φορές διαφορίσιμη στο } \Omega\} \\
C(\overline{\Omega}) &:= \{f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}, f \text{ συνεχής στο } \overline{\Omega}\} \\
C^\infty(\overline{\Omega}) &:= \cap_{k=0}^{\infty} C^k(\overline{\Omega})
\end{aligned}$$

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ένα φραγμένο χωρίο. Λέμε ότι το $\partial\Omega$ είναι C^k, $k = 1, 2, \ldots$, αν για κάθε σημείο $x \in \partial\Omega$ υπάρχει $r > 0$ και μια C^k συνάρτηση $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να έχουμε (με επαναπροσδιορισμό του συστήματος συντεταγμένων):

$$\Omega \cap B(x, r) = \{x \in B(x, r) | x_n > \gamma(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$$

όπου $B(x, r)$ η ανοιχτή μπάλα με κέντρο x, ακτίνας r στον $\mathbb{R}^n$. Το $\partial\Omega$ λέμε ότι είναι C^∞ αν $\partial\Omega$ είναι C^k για κάθε $k = 1, 2, \ldots$. Αν $\partial\Omega$ είναι C^1, τότε ορίζεται το

μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο (με κατεύθυνση προς τα έξω) κατά μήκος του $\partial\Omega$ και συμβολίζεται με

$$\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n).$$

Συμβολίζουμε με α_N τον όγκο της μοναδιαίας N-μπάλας και με $V_N(r)$ τον όγκο της N-διάστατης μπάλας ακτίνας r στον $\mathbb{R}^N$. Ακόμα, ορίζουμε τους ακόλουθους χώρους συναρτήσεων :

$$C_c^k(\Omega) := \{f \in C^k(\Omega), \text{ με } \operatorname{supp} f \text{ συμπαγές υποσύνολο του } \Omega\}$$

$$C_c^\infty(\Omega) := \{f \in C^\infty(\Omega), \text{ με } \operatorname{supp} f \text{ συμπαγές υποσύνολο του } \Omega\}$$

$$L^p(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R}, \text{ με } \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty\} \text{ όπου}$$

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \begin{cases} \left(\int\limits_\Omega |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \le p < \infty \\ \operatorname{ess\,sup}_\Omega |f|, & p = \infty. \end{cases}$$

Σημειώνουμε ότι αν η πραγματικών τιμών συνάρτηση f είναι μετρήσιμη, τότε το **ουσιαστικό** (essential) **supremum** της $|f|$ ορίζεται ως εξής

$$\operatorname{ess\,sup} |f| := \inf\{\mu > 0 : \mathcal{V}\{x \in \Omega : |f(x)| > \mu\} = 0\},$$

όπου με $\mathcal{V}\{x \in \Omega : |f(x)| > \mu\} = 0\}$ συμβολίζουμε το μέτρο Lebesgue του συνόλου $\{x \in \Omega : |f(x)| > \mu\} = 0\}$. Επίσης, ορίζουμε

$$L^p_{loc}(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R}, f \in L^p(V), \text{ για κάθε } V \subset\subset \Omega\}.$$

Αναφέρουμε το παρακάτω Λήμμα, για μια απόδειξη του οποίου βλέπε [Ad].

Λήμμα 1.1.1. *Έστω $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Αν $\int\limits_\Omega u\varphi\, dx = 0$, για κάθε $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, τότε $u = 0$ σχεδόν παντού στο Ω.*

Κάθε διατεταγμένη n-άδα φυσικών αριθμών $a = (a_1, \ldots, a_n)$ ονομάζεται **πολυδείκτης** (multiindex) . Ο αριθμός $|a| = a_1 + \ldots + a_n$ καλείται **μήκος** του πολυδείκτη. Για κάθε πολυδείκτη $a = (a_1, \ldots, a_n)$ θέτουμε $a! = a_1!a_2!\ldots a_n!$ και αν $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ τότε συμβολίζουμε $x^a = x_1^{a_1}x_2^{a_2}\ldots x_n^{a_n}$. Επίσης, ορίζουμε το διαφορικό τελεστή D^a θέτοντας

$$D^a := \frac{\partial^{a_1}}{\partial x_1^{a_1}}\frac{\partial^{a_2}}{\partial x_2^{a_2}}\cdots\frac{\partial^{a_n}}{\partial x_n^{a_n}} = (\partial_{x_1})^{a_1}\ldots(\partial_{x_n})^{a_n}.$$

όπου θέσαμε $\frac{\partial}{\partial x_i} = \partial_{x_i}, i = 1, \ldots, n$.

Υποθέτουμε ότι $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ και a ένας πολυδείκτης. Λέμε ότι v είναι η a-**οστή ασθενής μερική παράγωγος** (a^{th}-weak partial derivative) της u, και γράφουμε $D^a u = v$ αν

$$\int\limits_\Omega uD^a\varphi\, dx = (-1)^{|a|}\int\limits_\Omega v\varphi\, dx,$$

για κάθε $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Λήμμα 1.1.2. *Αν υπάρχει η α-οστή ασθενής μερική παράγωγος της u, τότε αυτή είναι μοναδικά ορισμένη σχεδόν παντού.*

Απόδειξη. Πράγματι, έστω $v, \tilde{v} \in L^1_{loc}(\Omega)$ που ικανοποιούν τη σχέση

$$\int_\Omega u D^a \varphi \, dx = (-1)^{|a|} \int_\Omega v \varphi \, dx = (-1)^{|a|} \int_\Omega \tilde{v} \varphi \, dx,$$

για κάθε $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Τότε,

$$\int_\Omega (v - \tilde{v}) \varphi \, dx = 0,$$

για κάθε $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, που σημαίνει ότι $v = \tilde{v}$ σχεδόν παντού σύμφωνα με το Λήμμα 1.1.1. □

Παρατήρηση 1.1.3. Στο $\mathbb{R}$ μια συνάρτηση είναι ασθενώς παραγωγίσιμη αν και μόνο αν είναι απόλυτα συνεχής. Στις μεγαλύτερες διαστάσεις όμως, υπάρχουν ασυνεχείς συναρτήσεις που είναι ασθενώς παραγωγίσιμες (βλέπε [Ev]).

Παρατήρηση 1.1.4. Η ασθενής παράγωγος είναι τοπική ιδιότητα με την εξής έννοια: αν u, v είναι ασθενώς παραγωγίσιμες στο Ω και $u = v$ σε ένα ανοιχτό υποσύνολο $U \subset \Omega$, τότε $u_{x_i} = v_{x_i}$ στο U. Η απόδειξη είναι όμοια με αυτήν του Λήμματος 1.1.2, παίρνοντας βέβαια $\varphi \in C_c^\infty(U)$, και παραλείπεται.

Ορισμός 1.1.5. *Ορίζουμε το χώρο* ***Sobolev*** $W^{1,p}(\Omega)$ *(με $1 \le p < \infty$), ως το χώρο που αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $u \in L^p(\Omega)$ για τις οποίες υπάρχουν οι πρώτης τάξης ασθενείς παράγωγοι u_{x_i} και μάλιστα $u_{x_i} \in L^p(\Omega)$, για κάθε $i = 1, \ldots, n$.*

Ορίζουμε τη νόρμα του χώρου $W^{1,p}(\Omega)$ ως εξής

$$\|u\|_{1,p} := \left[\int_\Omega \left(|u|^p + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^p \right) dx \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Ο $W^{1,p}(\Omega)$ είναι χώρος Banach με αυτήν τη νόρμα (βλέπε [Ad]). Ειδικότερα, συμβολίζουμε $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$. Ο χώρος $W_0^{1,p}(\Omega)$ είναι η κλειστή θήκη του $C_c^\infty(\Omega)$ στον $W^{1,p}(\Omega)$ $\left(W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)} \right)$. Επιπρόσθετα, συμβολίζουμε $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$. Επίσης, ο χώρος $H^1(\Omega)$ είναι χώρος Hilbert με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega \left(uv + \sum_{i=1}^n u_{x_i} v_{x_i} \right) dx.$$

1.2 Το Φάσμα

Έστω X, Y χώροι Banach (υπεράνω του $\mathbb{C}$), και έστω A ένας γραμμικός τελεστής από το X στο Y. Ένας τελεστής $A^{-1} : \mathfrak{R}(A) \to \mathfrak{D}(A)$ καλείται **αντίστροφος** (inverse) του A, αν $A^{-1}A = id_{\mathfrak{D}(A)}$ και $AA^{-1} = id_{\mathfrak{R}(A)}$. Ένας τελεστής έχει αντίστροφο, αν και μόνο αν $\ker A = \{0\}$. Η συνθήκη αυτή, εγγυάται ότι η αντίστροφη απεικόνιση είναι συνάρτηση. Όμως, έχουμε λίγες πληροφορίες σχετικά με τον A^{-1}. Ένας γραμμικός τελεστής A λέγεται **αντιστρεπτός** (invertible), αν έχει φραγμένο αντίστροφο ορισμένο σε ένα πυκνό υποσύνολο του Y. Επίσης, αν ο A είναι αντιστρεπτός τότε ο A^{-1} θα είναι μοναδικά ορισμένος.

Θεώρημα 1.2.1. *Έστω $T : X \to X$ ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής με $\|T\| < 1$. Τότε ο τελεστής $I - T$ είναι αντιστρεπτός, και ο αντίστροφος δίνεται μέσω της απόλυτα συγκλίνουσας σειράς Neumann:*

$$(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Απόδειξη. Επειδή $\sum_{k=0}^{n} \|T^k\| < \sum_{k=0}^{n} \|T\|^k$, και η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k$ θα συγκλίνει, καθώς για $\|T\| < 1$ είναι απλά μια γεωμετρική σειρά και μάλιστα

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k = \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

Άρα, η ακολουθία των φραγμένων γραμμικών τελεστών $\sum_{k=0}^{n} T^k$ είναι κατά νόρμα Cauchy. Ο χώρος X είναι Banach, επομένως και ο χώρος των φραγμένων γραμμικών τελεστών από το X στο X θα είναι Banach. Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία Cauchy συγκλίνει σε ένα φραγμένο τελεστή. Επιπλέον, έχουμε

$$(I-T)\sum_{k=0}^{\infty} T^k = \sum_{k=0}^{\infty} (T^k - T^{k+1}) = I = \left(\sum_{k=0}^{\infty} T^k\right)(I-T)$$

όπου οι υπολογισμοί δικαιολογούνται από την κατά νόρμα σύγκλιση της δυναμοσειράς. □

Εξετάζοντας την αντιστρεψιμότητα του τελεστή $A - \lambda$ (όπου $\lambda \equiv \lambda I_X$) με $\lambda \in \mathbb{C}$, παίρνουμε μια ξένη διάσπαση του $\mathbb{C}$ σε δύο σύνολα που χαρακτηρίζουν πολλές ιδιότητες του A.

Ορισμός 1.2.2. *Έστω A ένας γραμμικός τελεστής στο χώρο X με πεδίο ορισμού $\mathfrak{D}(A)$. Ορίζουμε το **φάσμα** (spectrum) $\sigma(A)$ του A, ως το σύνολο όλων των σημείων $\lambda \in \mathbb{C}$, για τα οποία ο $A - \lambda$ δεν είναι αντιστρεπτός. Επίσης, **επιλύον σύνολο** (resolvent set) $\rho(A)$ του A, καλούμε το σύνολο όλων των σημείων $\lambda \in \mathbb{C}$, για τα οποία ο $A - \lambda$ είναι αντιστρεπτός. Αν $\lambda \in \rho(A)$, τότε ο αντίστροφος του $A - \lambda$ καλείται **επιλύων** (resolvent) του A στο λ και γράφεται ως $R_A(\lambda)$.*

Παρατήρηση 1.2.3. Άμεση συνέπεια του ορισμού είναι τα εξής:

$$\sigma(A) \cup \rho(A) = \mathbb{C},$$

και

$$\sigma(A) \cap \rho(A) = \emptyset.$$

Βασικά υπάρχουν τρεις λόγοι που ο $A - \lambda$ αποτυγχάνει να είναι αντιστρεπτός:

i) $\ker(A-\lambda) \neq \{0\}$, δηλαδή να μην υπάρχει αντίστροφος του $A - \lambda$,

ii) $\ker(A-\lambda) = \{0\}, \mathfrak{R}(A-\lambda)$ να είναι πυκνό έτσι ώστε ο $A-\lambda$ να έχει πυκνά ορισμένο αντίστροφο, όμως, να μην είναι φραγμένος, και

iii) $\ker(A-\lambda) = \{0\}$, αλλά $\mathfrak{R}(A-\lambda)$ να μην είναι πυκνό. Σε αυτήν την περίπτωση ο αντίστροφος τελεστής του $(A-\lambda)$ υπάρχει και μπορεί να είναι και φραγμένος στο $\mathfrak{R}(A-\lambda)$, αλλά, δεν είναι πυκνά ορισμένος οπότε, δεν μπορεί να επεκταθεί μοναδικά σε ένα φραγμένο τελεστή.

Ταξινομούμε το $\sigma(A)$ ως εξής:

α) Έστω μια τιμή $\lambda \in \sigma(A)$ και είναι τέτοια ώστε $\ker(A-\lambda) \neq \{0\}$. Τότε η λ είναι μια ιδιοτιμή του A και κάθε $u \in \ker(A-\lambda)$, με $u \neq 0$, είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στο λ και ικανοποιεί τη σχέση $Au = \lambda u$.

β) Το **διακριτό φάσμα** (discrete spectrum) $\sigma_d(A)$ του A, είναι το σύνολο όλων των ιδιοτιμών του A με πεπερασμένη πολλαπλότητα οι οποίες είναι και μεμονωμένα σημεία του $\sigma(A)$.

γ) Το **ουσιαστικό φάσμα** (essential spectrum) του A ορίζεται ως το συμπλήρωμα του $\sigma_d(A)$ στο $\sigma(A)$ και συμβολίζεται με $\sigma_{ess}(A)$, δηλαδή $\sigma_{ess}(A) = \sigma(A)\backslash\sigma_d(A)$

Παρατήρηση 1.2.4. Τα $\sigma_{ess}(A)$ και $\sigma_d(A)$ παρέχουν μια ξένη και πλήρη διάσπαση του $\sigma(A)$. Επίσης, το $\sigma_{ess}(A)$ μπορεί να περιέχει ιδιοτιμές του A. Για παράδειγμα, μια ιδιοτιμή άπειρης πολλαπλότητας ή μια που είναι όριο ακολουθίας ιδιοτιμών ανήκει στο $\sigma_{ess}(A)$.

1.3 Αυτοσυζυγείς Τελεστές

Χρησιμοποιούμε τη δομή εσωτερικού γινομένου ενός χώρου Hilbert για να ορίσουμε τον παρακάτω τελεστή, ο οποίος αποτελεί ένα πολύτιμο εργαλείο για τη μελέτη του φάσματος.

Ορισμός 1.3.1. *Έστω A ένας γραμμικός τελεστής σε έναν χώρο Hilbert $\mathcal{H}$, με πεδίο ορισμού $\mathfrak{D}(A)$. Ορίζουμε το **συζυγή** (adjoint) τελεστή A^* του A, ως την απεικόνιση*

$$A^* : \mathfrak{D}(A^*) \to \mathcal{H},$$

που ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle ,$$

για κάθε $x \in \mathfrak{D}(A)$ και $y \in \mathfrak{D}(A^*)$, όπου

$$\mathfrak{D}(A^*) = \{y \in \mathcal{H} : |\langle Ax, y\rangle| \leq C(y)\|x\|, x \in \mathfrak{D}(A)\},$$

για κάποια σταθερά $C(y)$ που εξαρτάται μόνο από το y.

Ορισμός 1.3.2. *Ένας γραμμικός τελεστής A σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$, με πεδίο ορισμού $\mathfrak{D}(A)$, καλείται* ***συμμετρικός*** *(symmetric) (ή* ***ερμιτιανός****) αν ο τελεστής A^* είναι επέκταση του A, ή ισοδύναμα*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle\,, \text{ για κάθε } x, y \in \mathfrak{D}(A).$$

Υποθέτουμε ότι το πεδίο ορισμού ενός γραμμικού τελεστή A σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ είναι πυκνό, εκτός αν δηλώνεται το αντίθετο.

Ορισμός 1.3.3. *Ένας γραμμικός τελεστής A καλείται* ***αυτοσυζυγής*** *(self-adjoint) αν $A = A^*$, δηλαδή αν A συμμετρικός και $\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}(A^*)$.*

Θεώρημα 1.3.4. *Έστω A ένας αυτοσυζυγής τελεστής. Αν για κάποιο $M > 0$ και για κάθε $u \in \mathfrak{D}(A) \subset \mathcal{H}$ ισχύει*

$$\|(\lambda - A)u\| \geq M\|u\|, \tag{1.1}$$

τότε $\lambda \in \rho(A)$. Επιπλέον,

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda| < M\} \subset \rho(A)$$

Απόδειξη. Έστω ότι πληρούται η σχέση (1.1) για κάποιο λ. Θα αποδείξουμε ότι $\lambda \in \rho(A)$. Από τον ορισμό του επιλύον συνόλου, πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει αντίστροφος τελεστής του $A - \lambda$, και μάλιστα είναι φραγμένος και ορισμένος επί ενός πυκνού υποσυνόλου του $\mathcal{H}$.

Αν $A\psi = \lambda\psi$, τότε από την (1.1) παίρνουμε

$$0 = \|(\lambda - A)\psi\| \geq M\|\psi\| \geq 0,$$

άρα $\psi = 0$, που σημαίνει ότι υπάρχει ο αντίστροφος του τελεστή $A - \lambda$, διότι

$$\ker(A - \lambda) = \{0\}.$$

Επειδή ο $A - \lambda$ είναι ένας πυκνά ορισμένος γραμμικός τελεστής, γνωρίζουμε ότι $\overline{\mathfrak{R}(A - \lambda)} \oplus \ker(A^* - \lambda) = \mathcal{H}$. Επομένως

$$\mathfrak{R}(A - \lambda)^{\perp} = \ker(A^* - \lambda) = \ker(A - \lambda) = \{0\},$$

που σημαίνει ότι το $\mathfrak{R}(A - \lambda)$ είναι πυκνό στο $\mathcal{H}$. Αρκεί να δείξουμε ότι είναι και κλειστό. Έστω $(x_n) \in \mathfrak{R}(A - \lambda)$ μια συγκλίνουσα ακολουθία με $\lim x_n = x$. Τότε υπάρχει μια ακολουθία $(y_n) \in \mathfrak{D}(A)$ τέτοια ώστε $x_n = (A - \lambda)y_n$. Ισχυριζόμαστε ότι και η y_n είναι συγκλίνουσα. Πράγματι, θέτοντας $u = y_n - y_m$ στην σχέση (1.1), παίρνουμε

$$\|y_n - y_m\| \leq M^{-1}\|(A - \lambda)(y_n - y_m)\| = M^{-1}\|x_n - x_m\|,$$

και επειδή η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy, το ίδιο θα είναι και η (y_n). Άρα υπάρχει ένα $y \in \mathcal{H}$ τέτοιο ώστε $y = \lim y_n$. Ακόμα, $y_n \to y$ και $x_n = (A - \lambda)y_n$ είναι ακολουθία Cauchy. Από το γεγονός ότι ο A είναι ένας πυκνά ορισμένος αυτοσυζυγής τελεστής, έπεται το ότι $x_n \to (A-\lambda)y \in \mathfrak{R}(A-\lambda)$. Επομένως, $x \in \mathfrak{R}(A-\lambda)$ και άρα το σύνολο είναι κλειστό.

Συνέπεια των παραπάνω είναι ότι ο τελεστής $(A-\lambda)$ έχει παντού ορισμένο αντίστροφο $(A-\lambda)^{-1}$. Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι είναι και φραγμένος. Έστω $x \in \mathcal{H}$ και $y \equiv (A-\lambda)^{-1}x \in \mathfrak{D}(A)$. Τότε, $x = (A-\lambda)y$ και

$$\|x\| = \|(A-\lambda)y\| \geq M\|y\| = M\|(A-\lambda)^{-1}x\|.$$

Άρα για κάθε $x \in \mathcal{H}$

$$\|(A-\lambda)^{-1}x\| \leq M^{-1}\|x\|, \tag{1.2}$$

το οποίο δείχνει ότι ο $(A-\lambda)^{-1}$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και τελικά $\lambda \in \rho(A)$.

Επιπλέον, αφού το $\lambda \in \rho(A)$ θα δείξουμε ότι για $\lambda - z$ αρκετά μικρό, και το $z \in \rho(A)$. Έστω

$$|z-\lambda| < M \leq \frac{1}{\|(\lambda-A)^{-1}\|}.$$

Ο φραγμένος τελεστής

$$T := (\lambda - A)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\left[(\lambda-z)(\lambda-A)^{-1}\right]^k,$$

είναι ο αντίστροφος του $\lambda - A - (\lambda - z)$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
(\lambda - A - (\lambda - z))T &= \sum_{k=0}^{\infty}\left[(\lambda-z)(\lambda-A)^{-1}\right]^k \\
&\quad -(\lambda-z)(\lambda-A)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\left[(\lambda-z)(\lambda-A)^{-1}\right]^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left[(\lambda-z)(\lambda-A)^{-1}\right]^k \\
&\quad -\sum_{k=1}^{\infty}\left[(\lambda-z)(\lambda-A)^{-1}\right]^k \\
&= I.
\end{aligned}$$

Όμοια $T\big(\lambda - A - (\lambda - z)\big) = I$. Άρα, αν $|z-\lambda| < M$, τότε $z \in \rho(A)$ το οποίο είναι και το ζητούμενο. □

Πόρισμα 1.3.5. *Έστω A ένας αυτοσυζυγής τελεστής. Τότε τα σύνολα $\sigma(A)$ και $\sigma_{ess}(A)$ είναι κλειστά.*

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια του δεύτερου συμπεράσματος του Θεωρήματος 1.3.4, είναι το γεγονός ότι το σύνολο $\rho(A) = \mathbb{C}\backslash\sigma(A)$ είναι ανοιχτό. Επομένως, το $\sigma(A)$ είναι κλειστό.

Θα δείξουμε ότι και το $\sigma_{ess}(A)$ είναι κλειστό. Θεωρούμε μια ακολουθία $(\lambda_k) \in \sigma_{ess}(A)$, με $\lambda_k \to \lambda$. Προφανώς, $\lambda \in \sigma(A)$ διότι δείξαμε παραπάνω ότι το $\sigma(A)$ είναι κλειστό. Επιπρόσθετα, το λ είναι σημείο συσσώρευσης, που σημαίνει ότι δεν μπορεί να ανήκει στο διακριτό φάσμα $\sigma_d(A)$ του A. Τελικά, $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$. □

Θεώρημα 1.3.6. *Έστω A ένας αυτοσυζυγής τελεστής. Τότε*

1. *$\sigma(A) \subset \mathbb{R}$, και*

2. *ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές είναι ορθογώνια.*

Απόδειξη.

1. Έστω $z = x + iy$ με $y \neq 0$. Τότε, από την αυτοσυζυγία του A ισχύει ότι

$$\|(A - z)u\|^2 = \|(A - x)u\|^2 + |y|^2\|u\|^2 \geq y^2\|u\|^2,$$

για κάθε $u \in \mathfrak{D}(A)$. Από το Θεώρημα 1.3.4, έχουμε ότι $z \in \rho(A)$ και επομένως $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

2. Έστω φ, ψ ιδιοδιανύσματα του A τέτοια ώστε $A\varphi = \lambda\varphi$ και $A\psi = \mu\psi$ με $\mu \neq \lambda$. Τότε

$$\lambda \langle\varphi, \psi\rangle = \langle A\varphi, \psi\rangle = \langle\varphi, A\psi\rangle = \bar{\mu} \langle\varphi, \psi\rangle$$

Όμως από το *1.* ισχύει ότι $\bar{\mu} = \mu$, άρα

$$(\lambda - \mu) \langle\varphi, \psi\rangle = 0.$$

Καθώς $\mu \neq \lambda$, προφανώς $\langle\varphi, \psi\rangle = 0$. □

Γενικά, το φάσμα ενός τελεστή σε έναν χώρο άπειρης διάστασης, δεν αποτελείται μόνο από ιδιοτιμές. Σε πολλές περιπτώσεις μάλιστα δεν υπάρχουν καθόλου ιδιοτιμές. Αυτή είναι μια βασική διαφορά μεταξύ τελεστών σε πεπερασμένης και άπειρης διάστασης χώρους. Με το παρακάτω Θεώρημα θα χαρακτηρίσουμε τα στοιχεία του φάσματος που δεν είναι ιδιοτιμές το οποίο μπορεί να μεταφραστεί ως εξής: κάθε $\lambda \in \sigma(A)$, είναι μια κατά προσέγγιση ιδιοτιμή, δηλαδή δοσμένου $\varepsilon > 0$, υπάρχει $u \in \mathfrak{D}(A)$ τέτοιο ώστε $\|(A - \lambda)u\| < \varepsilon\|u\|$.

Θεώρημα 1.3.7. *Έστω A ένας αυτοσυζυγής τελεστής. Τότε $\lambda \in \sigma(A)$ αν και μόνο αν υπάρχει μια ακολουθία $(u_n), u_n \in \mathfrak{D}(A)$,για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε*

$$\|u_n\| = 1 \text{ και } \|(A - \lambda)u_n\| \to 0 \text{ καθώς } n \to \infty.$$

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω $\lambda \in \sigma(A)$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει μια ακολουθία με τις παραπάνω ιδιότητες. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

- $\ker(A - \lambda) \neq \{0\}$ (δηλαδή λ είναι ιδιοτιμή). Έστω $f \in \ker(A - \lambda) \setminus \{0\}$ με $\|f\| = 1$ και $u_n = f$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Προφανώς η u_n είναι η ζητούμενη ακολουθία.

- $\ker(A - \lambda) = \{0\}$. Τότε $\mathfrak{R}(A - \lambda)$ είναι πυκνό αλλά όχι ίσο με $\mathcal{H}$. Άρα ο τελεστής $(A - \lambda)$ έχει αντίστροφο, αλλά δεν είναι φραγμένος. Συνεπώς, υπάρχει μια ακολουθία (v_n) με $v_n \in \mathfrak{D}\left((A - \lambda)^{-1}\right)$ και $\|v_n\| = 1$, τέτοια ώστε

$$\|(A - \lambda)^{-1}v_n\| \to \infty.$$

Ορίζουμε

$$u_n := \frac{(A-\lambda)^{-1}v_n}{\|(A-\lambda)^{-1}v_n\|}.$$

Τότε, $u_n \in \mathfrak{D}(A)$, προφανώς $u_n = 1$ και

$$\|(A-\lambda)u_n\| = \frac{\|v_n\|}{\|(A-\lambda)^{-1}v_n\|} \to 0 \text{ καθώς } n \to \infty$$

($\Leftarrow$) Αντίστροφα, θέλουμε να αποδείξουμε ότι αν υπάρχει μια τέτοια ακολουθία (u_n) με τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος, τότε $\lambda \in \sigma(A)$. Ισοδύναμα, μπορούμε να δείξουμε ότι αν $\lambda \in \rho(A)$, δεν υπάρχει ακολουθία που να πληροί τις ιδιότητες του Θεωρήματος. Θεωρούμε ένα $\lambda \in \rho(A)$ και ότι υπάρχει τέτοια ακολουθία (u_n) που ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες. Άρα υπάρχει ο αντίστροφος του $(A-\lambda)$,

$$(A-\lambda)^{-1} : \mathcal{H} \to \mathcal{H},$$

και είναι φραγμένος. Έστω $v_n = (A-\lambda)u_n$. Συνεπώς,

$$\frac{\|(A-\lambda)^{-1}v_n\|}{\|v_n\|} = \frac{\|u_n\|}{\|(A-\lambda)u_n\|} \to \infty,$$

το οποίο είναι άτοπο. □

Ορισμός 1.3.8. *Ένας γραμμικός τελεστής A καλείται* ***μη-αρνητικός*** *(non-negative), $A \geq 0$, αν $\langle u, Au\rangle \geq 0$, για κάθε $u \in \mathfrak{D}(A)$. Γενικότερα, $A \geq \lambda$ αν $\langle Au, u\rangle \geq \lambda\|u\|^2$, για κάθε $u \in \mathfrak{D}(A)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Σημειώνουμε ότι το πεδίο ορισμού $\mathfrak{D}(A)$ ενός τελεστή A, εφοδιασμένο με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle u, v\rangle_{\mathfrak{D}(A)} = \langle Au, Av\rangle_{\mathcal{H}} + \langle u, v\rangle_{\mathcal{H}},$$

για κάθε $u, v \in \mathfrak{D}(A)$, είναι χώρος Hilbert.

Πρόταση 1.3.9. *Έστω A ένας αυτοσυζυγής τελεστής και έστω $\lambda \in \rho(A)$. Τότε*

$$\|R_A(\lambda)\| = [\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(A))]^{-1}.$$

Η απόδειξη της παραπάνω Πρότασης περιέχει μεθόδους Συναρτησιακής Ανάλυσης και δεν θα την αποδείξουμε εδώ (για μια απόδειξη βλέπε [Da1]), αλλά θα την χρησιμοποιήσουμε στην παρακάτω Πρόταση.

Πρόταση 1.3.10. *Έστω A ένας αυτοσυζυγής τελεστής. Τότε $A \geq \lambda$, αν και μόνο αν $\sigma(A) \subset [\lambda, \infty)$.*

Απόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda = 0$. ($\Rightarrow$) Έστω $A \geq 0$ και ένα $\lambda_1 \notin [0, \infty)$. Θα δείξουμε ότι $\lambda_1 \in \rho(A)$. Από το Θεώρημα 1.3.4, αρκεί να δείξω ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|(A-\lambda_1)u\| \geq M\|u\|, \quad \text{για κάθε } u \in \mathfrak{D}(A).$$

Έστω $\lambda_1 = x + iy$. Τότε

$$\|(A-\lambda_1)u\|^2 = \|(A-x)u\|^2 + y^2\|u\|^2.$$

Άρα υπάρχουν δύο ενδεχόμενα.

- $y \neq 0$. Τότε
$$\|(A - \lambda_1)u\|^2 \geq y^2\|u\|^2,$$
που είναι η σχέση που θέλαμε με $M = |y|$.

- $y = 0$. Τότε $x < 0$. Άρα,
$$\begin{aligned}\|(A - \lambda_1)u\|^2 &= \|(A - x)u\|^2 = \|Au\|^2 + x^2\|u\|^2 - 2x\langle Au, u\rangle \\ &\geq x^2\|u\|^2,\end{aligned}$$
το οποίο είναι αυτό που θέλαμε να δείξουμε.

($\Leftarrow$) Αντίστροφα, έστω $\sigma(A) \subset [0, \infty)$. Τότε για κάθε $a > 0$, το $-a \in \rho(A)$ και $\text{dist}(-a, \sigma(A)) = a$. Από την Πρόταση 1.3.9, έχουμε
$$\|R_A(-a)\| = [\text{dist}(-a, \sigma(A))]^{-1}.$$
Άρα,
$$\|(A + a)^{-1}\| = \frac{1}{a}.$$
Επομένως, κάνοντας χρήση της παραπάνω ανισότητας συνάγουμε
$$\begin{aligned}\|u\| &= \|(A + a)^{-1}(A + a)u\| \leq \|(A + a)^{-1}\|\|(A + a)u\| \\ &= \frac{1}{a}\|(A + a)u\|.\end{aligned}$$
Από την παραπάνω σχέση, παίρνουμε
$$a^2\|u\|^2 \leq \|(A + a)u\|^2 = \|Au\|^2 + 2a\langle Au, u\rangle + a^2\|u\|^2,$$
ή
$$\langle Au, u\rangle \geq -(2a)^{-1}\|Au\|^2.$$
Το αποτέλεσμα $\langle Au, u\rangle \geq 0$, έπεται από το γεγονός ότι το $a > 0$ είναι τυχαίο. □

1.4 Στοιχεία Διαφορικής Γεωμετρίας

Ένα **διαφορίσιμο πολύπτυγμα M διάστασης m** (differentiable manifold), είναι ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff με αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του, που πληροί τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Υπάρχει κάλυψη του M από οικογένεια ανοιχτών υποσυνόλων του, έστω $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$, και αντίστοιχων ομοιομορφισμών $\varphi : U_\alpha \to \varphi(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^m$. Το ζευγάρι $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ονομάζεται **χάρτης** ή **σύστημα συντεταγμένων** του M.

2. Για κάθε $\alpha, \beta \in I$ με $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, η απεικόνιση $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ είναι διαφορίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

3. Η οικογένεια $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ είναι μέγιστη (δηλαδή, αν U είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του M και $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ είναι ομοιομορφισμός τέτοιος ώστε οι απεικονίσεις $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$ και $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ να είναι C^∞-διαφορίσιμες για κάθε $\alpha \in I$, τότε ο χάρτης (U, φ) ανήκει στην οικογένεια 1.).

Στο εξής θα γράφουμε M^m, όταν χρειάζεται να φαίνεται η διάσταση του πολυπτύγματος. Μια οικογένεια που πληροί μόνο τις συνθήκες *1.* και *2.* ονομάζεται **άτλας** του M^m. Προσαρτώντας σε έναν άτλαντα όλους τους χάρτες όπως περιγράφεται στην *3.*, αποκτούμε μια μέγιστη οικογένεια χαρτών, η οποία ονομάζεται **διαφορίσιμη δομή** του M^m. Με τον όρο πολύπτυγμα θα εννοούμε διαφορίσιμο πολύπτυγμα. Οι παραπάνω συνθήκες του ορισμού του πολυπτύγματος, μας επιτρέπουν να μεταφέρουμε τις ιδέες του Διαφορικού Λογισμού στον $\mathbb{R}^m$ σε διαφορίσιμα πολυπτύγματα.

Ένα **διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο** X του πολυπτύγματος M^m είναι μια επιλογή διανύσματος $X_p \in T_pM^m$, για κάθε $p \in M^m$, όπου με T_pM^m συμβολίζουμε τον **εφαπτόμενο χώρο** (tangent space) του M^m στο p με την ιδιότητα ότι για κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση $f : M^m \to \mathbb{R}$, η συνάρτηση

$$Xf : M^m \to \mathbb{R},$$

$$(Xf)(p) = X_p(f),$$

να είναι διαφορίσιμη. Συμβολίζουμε με $D(M^m)$ και με $\Delta(M^m)$ το σύνολο των διαφορίσιμων συναρτήσεων και το σύνολο των διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων στο M^m, αντίστοιχα. Από την ένωση όλων των εφαπτόμενων χώρων του M^m, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα νέο διαφορίσιμο πολύπτυγμα διαστάσεως $2m$, που λέγεται **εφαπτόμενη δέσμη** (tangent bundle) TM^m του M^m. Ως σύνολο η εφαπτόμενη δέσμη ισούται με

$$TM^m = \cup_{p \in M^m} T_pM^m = \{(p, v) : p \in M^m, v \in T_pM^m\}.$$

Έστω (U, φ) ένας χάρτης του M^m με συναρτήσεις συντεταγμένων $x_1, \ldots, x_m$. Σε αυτόν τον χάρτη αντιστοιχούν τα τοπικά διανυσματικά πεδία $\frac{\partial}{\partial x_i} \in \Delta(U), i = 1, \ldots, m$. Αυτά τα πεδία ονομάζονται **βασικά διανυσματικά πεδία συντεταγμένων** και για $f \in D(M^m)$ έχουμε

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f\right)(p) = D_i(f \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(p)}, p \in U,$$

όπου D_i η συνήθης μερική παράγωγος ως προς την συντεταγμένη x_i του $\mathbb{R}^m$.

Σε ένα πολύπτυγμα M^m, όπου δεν υπάρχει πάντα ένα ολικό σύστημα συντεταγμένων, πρέπει να εισάγουμε την έννοια της διαφόρισης διανυσματικών πεδίων κατά τρόπο αναλλοίωτο, έτσι ώστε να μην εξαρτάται από το σύστημα συντεταγμένων. Αυτό είναι εφικτό με την βοήθεια ενός τελεστή ο οποίος έχει τις συνήθεις ιδιότητες της παραγώγισης, τον οποίο ονομάζουμε γραμμική συνοχή. Τέτοια δομή υπάρχει πάντα σε κάθε διαφορίσιμο πολύπτυγμα M^m(βλέπε [Ko]).

Ορισμός 1.4.1. *Μια απεικόνιση*

$$\nabla : \Delta(M^m) \times \Delta(M^m) \to \Delta(M^m), \;\; (X, Y) \to \nabla_X Y$$

με τις ιδιότητες

i) $\nabla_{fX+gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z$

ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

*με $X, Y, Z \in \Delta(M^m)$ και $f, g \in D(M^m)$, λέγεται **γραμμική συνοχή** (affine connection). Το διανυσματικό πεδίο $\nabla_X Y$ λέγεται **συναλλοίωτη παράγωγος** (covariant derivative) του Y στην διεύθυνση X ως προς την συνοχή ∇.*

Παρόλα αυτά, ακόμα και όταν το M^m είναι εφοδιασμένο με κάποια γραμμική συνοχή, δεν υπάρχει τρόπος να υπολογίσουμε μήκη διανυσμάτων, καμπυλών ή ακόμα και γωνιών μεταξύ διανυσμάτων. Υπάρχει ένας φυσικός τρόπος μέτρησης του μήκους διανυσμάτων, ο οποίος είναι ένα εσωτερικό γινόμενο σε κάθε εφαπτόμενο χώρο T_pM^m. Αυτό το εσωτερικό γινόμενο όμως, θα πρέπει να μεταβάλλεται με διαφορίσιμο τρόπο από σημείο σε σημείο.

Μια **μετρική Riemann** σε ένα πολύπτυγμα M^m είναι μια αντιστοιχία $p \in M^m$ σε εσωτερικό γινόμενο $\langle , \rangle_p$ (δηλαδή μια συμμετρική, διγραμμική και θετικά οριστική μορφή) στον εφαπτόμενο χώρο T_pM^m η οποία είναι διαφορίσιμη με την εξής έννοια: για $X, Y \in \Delta(M^m)$ η συνάρτηση $\langle X, Y \rangle : M^m \to \mathbb{R}$ με

$$\langle X, Y \rangle_p = \langle X_p, Y_p \rangle$$

είναι διαφορίσιμη.

Θεωρούμε ένα χάρτη (U, φ) του πολυπτύγματος M^m με συναρτήσεις συντεταγμένων $x_1, \ldots, x_m$. Χρησιμοποιώντας τα βασικά διανυσματικά πεδία $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}$, ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$g_{ij} : U \to \mathbb{R}, \ g_{ij}(p) = \left\langle \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p \right\rangle, \ g_{ij} = g_{ji}, \ 1 \leq i, j \leq m,$$

οι οποίες λέγονται συνιστώσες της μετρικής $\langle , \rangle$ ως προς τον χάρτη (U, φ). Συμβολίζουμε με g την ορίζουσα του αντιστρέψιμου και συμμετρικού πίνακα (g_{ij}) και με g^{ij} τα στοιχεία του αντίστροφου του πίνακα (g_{ij}). Το πολύπτυγμα M^m εφοδιασμένο με μια μετρική Riemann θα λέγεται **πολύπτυγμα Riemann**.

Γνωρίζουμε ότι ένα διαφορίσιμο πολύπτυγμα δέχεται γραμμικές συνοχές καθώς και μετρικές Riemann. Θα συσχετίσουμε τις δύο αυτές δομές. Η επιλογή μιας μετρικής Riemann σε ένα πολύπτυγμα M^m, καθορίζει μοναδικά μια γραμμική συνοχή στο M^m, με την έννοια του παρακάτω Θεωρήματος. Έτσι είμαστε σε θέση να διαφορίσουμε διανυσματικά πεδία στο M^m.

Θεώρημα 1.4.2. *(Levi-Civita) Έστω $(M^m, \langle , \rangle)$ ένα διαφορίσιμο πολύπτυγμα Riemann. Υπάρχει μοναδική γραμμική συνοχή ∇ στο M^m η οποία ικανοποιεί τις εξής συνθήκες*

- $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$
- $X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$

*όπου $X, Y, Z \in \Delta(M^m)$ και $[X, Y]$ το **γινόμενο Lie** των διανυσματικών πεδίων X, Y. Η συνοχή αυτή καλείται **συνοχή Levi-Civita**.*

Στα επόμενα, ∇ θα συμβολίζει την συνοχή Levi-Civita του διαφορίσιμου πολυπτύγματος $(M^m, \langle , \rangle)$.

Μετά την βασική ορολογία, περνάμε στην μελέτη της γεωδαισιακής καμπύλης και της καμπυλότητας, οι οποίες είναι δύο θεμελιώδεις έννοιες της Γεωμετρίας Riemann.

Ορισμός 1.4.3. *Η καμπύλη $\gamma : I := (a, b) \to M^m$ καλείται **γεωδαισιακή** (geodesic) αν το διανυσματικό πεδίο ταχύτητας γ', είναι παράλληλο κατα μήκος της γ, δηλαδή αν ισχύει*

$$\frac{\nabla}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = 0.$$

Επίσης, ως προς χάρτη (U, φ) με συναρτήσεις συντεταγμένων $x_1, \ldots, x_m$ γύρω από το σημείο $\gamma(t_0)$, με $\varphi \circ \gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_m(t))$, έχουμε

$$\frac{d\gamma}{dt}(t) = \sum_{i=1}^{m} \frac{dx_i}{dt}(t) \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{\gamma(t)}.$$

Η γεωδαισιακή πρέπει να πληροί το ακόλουθο σύστημα των m συνήθων διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2}(t) + \sum_{i,j=1}^{m} \Gamma_{ij}^k(x_1(t), \ldots, x_m(t)) \frac{dx_i}{dt}(t) \frac{dx_j}{dt}(t) = 0, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{1.3}$$

όπου Γ_{ij}^k είναι τα σύμβολα Christoffel. Κάθε γεωδαισιακή της οποίας το μήκος είναι μικρότερο από κάθε άλλη κατά τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη που ενώνει τα ακραία σημεία, θα λέγεται **ελάχιστη γεωδαισιακή** (minimizing geodesic).

Ορισμός 1.4.4. *Ένα **τανυστικό πεδίο** τύπου (r, s) με $s = 0$ ή $s = 1$, στο M είναι μια απεικόνιση*

$$T : \underbrace{\Delta(M^m) \times \Delta(M^m)}_{r} \to \begin{cases} \Delta(M^m), & \text{αν } s = 1, \\ \mathrm{D}(M^m), & \text{αν } s = 0, \end{cases}$$

η οποία είναι $D(M^m)$-γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή.

Ορισμός 1.4.5. *Η απεικόνιση*

$$R : \Delta(M^m) \times \Delta(M^m) \times \Delta(M^m) \to \Delta(M^m), \text{ με τύπο}$$

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

*$X, Y, Z \in \Delta(M^m)$ ονομάζεται **τανυστής καμπυλότητας** (curvature tensor) του πολυπτύγματος Riemann $(M^m, \langle , \rangle)$.*

Ο τανυστής καμπυλότητας πληροί τις ακόλουθες ιδιότητες

1. $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle R(Y, X)Z, W \rangle$,
2. $\langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle R(Y, Z)X, W \rangle + \langle R(Z, X)Y, W \rangle = 0$,

3. $\langle R(X,Y)Z,W\rangle = -\langle R(X,Y)W,Z\rangle$,
4. $\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle R(Z,W)X,Y\rangle$,

για $X,Y,Z \in \Delta(M^m)$. Στενά συνδεδεμένη με τον τελεστή καμπυλότητας, είναι η έννοια της καμπυλότητας τομής.

Ορισμός 1.4.6. *Έστω σ ένας διδιάστατος γραμμικός υπόχωρος του εφαπτόμενου χώρου T_pM^m ενός πολυπτύγματος Riemann $(M^m, \langle,\rangle)$ με $m \geq 2$, και έστω $x,y \in \sigma$ δύο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.* ***Καμπυλότητα τομής*** *(sectional curvature) στο σημείο p για το επίπεδο σ ονομάζεται η ποσότητα*

$$K(\sigma) = K(x \wedge y) = \frac{\langle R(x,y)y,x\rangle}{|x \wedge y|^2},$$

όπου

$$|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2}.$$

Ο ορισμός αυτός δεν εξαρτάται από την επιλογή της βάσης. Αν v,w ορθομοναδιαία βάση του επιπέδου σ, ο τύπος απλοποιείται ως εξής

$$K(\sigma) = K(v \wedge w) = \langle R(v,w)w,v\rangle\,.$$

Οι ειδικές περιπτώσεις πλήρων και απλά συνεκτικών πολυπτυγμάτων Riemann με σταθερή καμπυλότητα τομής ονομάζονται **χώροι μορφής** (space forms) ή **χώροι σταθερής καμπυλότητας** και έχουν μεγάλη σημασία στην Γεωμετρία Riemann όπως θα δούμε στο επόμενο Κεφάλαιο. Θα εισάγουμε άλλες δύο καμπυλότητες που ορίζονται και αυτές με την βοήθεια του τανυστή καμπυλότητας. Αρχικά, ορίζουμε μια διγραμμική μορφή στον T_pM^m ως εξής: έστω $x,y \in T_pM^m$ και θεωρούμε, στο T_pM^m, τον γραμμικό μετασχηματισμό

$$z \to R(z,x)y.$$

Το ίχνος αυτού του μετασχηματισμού, έστω $\mathrm{Ric}(x,y)$, είναι μια διγραμμική μορφή και αν διαλέξουμε μια ορθομοναδιαία βάση $\{e_1,\dots,e_m\}$ του T_pM^m, έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(x,y) &= \sum_{i=1}^{m} \langle R(e_i,x)y,e_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{m} \langle R(e_i,y)x,e_i\rangle = \mathrm{Ric}(y,x),\end{aligned}$$

δηλαδή η Ric είναι συμμετρική. Προφανώς, αν $X,Y \in \Delta(M^m)$, τότε $\mathrm{Ric}(X,Y) \in D(M^m)$. Το συμμετρικό (2,0)-τανυστικό πεδίο Ric ονομάζεται **τανυστής Ricci** (Ricci tensor) και η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή $\mathrm{Ric}(x,x)$, για $x \in T_pM^m$ και $|x| = 1$, λέγεται **καμπυλότητα Ricci** (Ricci curvature) στο σημείο p, στην διεύθυνση $x \in T_pM^m$ και συμβολίζεται ως εξής

$$\mathrm{Ric}(x) = \mathrm{Ric}(x,x).$$

Γράφοντας,

$$\mathrm{Ric} \geq (m-1)K,$$

για κάποια συνάρτηση K, εννοούμε

$$\mathrm{Ric}(x,x) \geq (m-1)K(p)\langle x,x\rangle,$$

για κάθε $x \in T_pM^m$ και κάθε $p \in M^m$. Αν πάρουμε μια ορθομοναδιαία βάση $\{e_1,\ldots,e_m\}$ του T_pM^m, έχουμε την έκφραση της καμπυλότητας Ricci ως άθροισμα καμπυλοτήτων τομής

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(e_1) &= \sum_{i=1}^{m}\langle R(e_i,e_1)e_1,e_i\rangle = \sum_{i=2}^{m}\langle R(e_i,e_1)e_1,e_i\rangle \\ &= \sum_{i=2}^{m} K(e_1\wedge e_i).\end{aligned}$$

Στη συνέχεια θα γενικεύσουμε κάποιες έννοιες από τον Απειροστικό Λογισμό πολλαπλών μεταβλητών. Αν T_pM^m είναι ο εφαπτόμενος χώρος του M^m στο p, συμβολίζουμε με $T_p^*M^m$ τον δυϊκό του χώρο. Σε κάθε σημείο p του M^m η μετρική καθορίζει έναν ισομορφισμό μεταξύ του εφαπτόμενου χώρου και του αντίστοιχου δυϊκού του, ως εξής

$$T_pM^m \ni v \to v^* \in T_p^*M^m, \text{ με } v^*(w) = \langle v,w\rangle.$$

Αν πάρουμε μια ορθομοναδιαία βάση $\{e_1,\ldots,e_m\}$ του T_pM^m και συμβολίσουμε με $\{e_1^*,\ldots,e_m^*\}$ την δυϊκή βάση του $T_p^*M^m$, τότε παρατηρούμε ότι για $w=\sum_{i=1}^m w_ie_i$ έχουμε

$$e_i^*(w) = e_i^*\left(\sum_{j=1}^m w_je_j\right) = \sum_{j=1}^m w_j\delta_{ij} = w_i = \langle e_i,w\rangle.$$

Έστω $f \in D(M^m)$ και η αντίστοιχη 1-μορφή df. Σε κάθε $p \in M^m$ στην γραμμική μορφή $df_p \in T_p^*M^m$ αντιστοιχεί, μέσω του ισομορφισμού μεταξύ $T_p^*M^m$ και T_pM^m, ένα διάνυσμα του T_pM^m που ονομάζεται **κλίση** της f στο p και συμβολίζεται με $\operatorname{grad} f_p$. Άρα για κάθε $X \in \Delta(M^m)$ έχουμε

$$\langle X, \operatorname{grad} f\rangle = df(X) = Xf.$$

Διαλέγοντας γύρω από το p ένα χάρτη (U,φ) με συντεταγμένες $x_1,\ldots,x_m$, παίρνουμε την εξής έκφραση για την κλίση μιας συνάρτησης

$$\operatorname{grad} f = \sum_{i,j=1}^m g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{1.4}$$

Έστω Z διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο του διαφορίσιμου πολυπτύγματος Riemann M^m. Ορίζουμε την $\mathbb{R}$-γραμμική απεικόνιση

$$T_pM^m \to T_pM^m, v \to \nabla_v Z,$$

σε κάθε $p \in M^m$, με $v \in T_pM^m$. Ονομάζουμε το ίχνος αυτής της απεικόνισης **απόκλιση** του Z στο p, και συμβολίζεται με

$$(\operatorname{div} Z)_p = \operatorname{trace}(v \to \nabla_v Z), \ \ v \in T_pM^m.$$

Η συνάρτηση

$$\operatorname{div} Z : M^m \to \mathbb{R},$$

ως προς τον χάρτη (U, φ) με συντεταγμένες $x_1, \ldots, x_m$ παίρνει την μορφή

$$\operatorname{div} Z = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{g} z_i), \tag{1.5}$$

όπου

$$Z = \sum_{i=1}^{m} z_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Ορίζουμε τον τελεστή

$$\Delta : D(M^m) \to D(M^m), \Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f), \ \ f \in D(M^m).$$

Ο τελεστής Δ ονομάζεται **τελεστής του Laplace** και είναι προφανώς $\mathbb{R}$-γραμμικός. Η έκφρασή του σε ένα χάρτη (U, φ), με συντεταγμένες $x_1, \ldots, x_m$, σύμφωνα με τα παραπάνω, είναι η εξής

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right). \tag{1.6}$$

Συνηθίζεται η συνάρτηση Δf να λέγεται λαπλασιανή της f.

Για δεδομένη συνάρτηση $f \in D(M^m)$ ορίζουμε την απεικόνιση

$$\nabla^2 f : \Delta(M^m) \times \Delta(M^m) \to D(M^m),$$

ως εξής

$$\nabla^2 f(X, Y) = \langle \nabla_X \operatorname{grad} f, Y \rangle,$$

με $X, Y \in \Delta(M^m)$. Πρόκειται για συμμετρικό $(2,0)$–τανυστικό πεδίο αφού

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f(X, Y) &= \langle \nabla_X \operatorname{grad} f, Y \rangle \\
&= X \langle \operatorname{grad} f, Y \rangle - \langle \operatorname{grad} f, \nabla_X Y \rangle \\
&= X(Yf) - (\nabla_X Y) f \\
&= X(Yf) - (\nabla_Y X) f - [X, Y] f \\
&= Y(Xf) - (\nabla_Y X) f \\
&= \langle \nabla_Y \operatorname{grad} f, X \rangle \\
&= \nabla^2 f(Y, X).
\end{aligned}$$

Η $D(M^m)$-γραμμικότητα είναι προφανής. Σε κάθε σημείο $p \in M^m$, η διγραμμμική μορφή $\nabla^2 f(x, y), x, y \in T_pM^m$ είναι καλά ορισμένη και ονομάζεται **μορφή Hesse** της συνάρτησης f στο p. Επειδή η μορφή Hesse είναι συμμετρική ο γραμμικός μετασχηματισμός

$$L_p x = \nabla_x \operatorname{grad} f, \ x \in T_pM^m,$$

του T_pM^m, είναι αυτοπροσαρτημένος. Αν συμβολίσουμε με λ_i τις πραγματικές ιδιοτιμές του L_p, τότε

$$(\Delta f)(p) = \operatorname{trace} L_p = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i.$$

Παρατήρηση 1.4.7. Οι παραπάνω τύποι απλοποιούνται ιδιαίτερα αν αντί των βασικών διανυσματικών πεδίων χρησιμοποιήσουμε το **γεωδαισιακό πλαίσιο** (geodesic frame) $\{E_1, \ldots, E_m\}$. Το πλαίσιο αυτό ορίζεται σε μια αρκετά μικρή περιοχή U του σημείου $p_0 \in M^m$. Το γεωδαισιακό πλαίσιο έχει την εξής ιδιότητα στο σημείο p_0

$$\left(\nabla_{E_i} E_j\right)(p_0) = 0, \ i, j = 1, \ldots, m.$$

Τότε, επειδή $\langle E_i, \operatorname{grad} f\rangle = E_i f$, έχουμε

$$\operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^{m} (E_i f) E_i, \tag{1.7}$$

παντού στο U. Επίσης, αν $X = \sum_{i=1}^{m} f_i E_i$ τότε η απόκλιση του X στο p_0 γίνεται

$$(\operatorname{div} X)(p) = \sum_{i=1}^{m} (E_i f_i)(p_0). \tag{1.8}$$

Τέλος, η λαπλασιανή μιας συνάρτησης f παίρνει την μορφή

$$(\Delta f)(p_0) = \sum_{i=1}^{m} E_i(E_i f)(p_0). \tag{1.9}$$

Έστω N^n υποπολύπτυγμα του πολυπτύγματος Riemann M^m. Για κάθε $p \in N^n$ έχουμε την παρακάτω ανάλυση

$$T_pM^m = T_pN^n \oplus \left(T_pN^n\right)^{\perp},$$

όπου με $\left(T_pN^n\right)^{\perp}$ συμβολίζουμε το ορθοσυμπλήρωμα του υποχώρου T_pN^n στον χώρο T_pM^m και τον ονομάζουμε **κάθετο χώρο** (normal space) του υποπολυπτύγματος N^n στο p. Κάθε διάνυσμα $v \in T_pM^m$ αναλύεται μονοσήμαντα ως εξής

$$v = v^{\top} + v^{\perp},$$

με $v^{\top} \in T_pN^n$ και $v^{\perp} \in \left(T_pN^n\right)^{\perp}$. Επίσης, αν $\overline{X}$ είναι ένα διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο στο M^m, ο περιορισμός X του $\overline{X}$ στο N^n αναλύεται ως εξής

$$X = X^{\top} + X^{\perp},$$

με $X^{\top}$ εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο στο N^n και $X^{\perp}$ κάθετο διανυσματικό πεδίο στο N^n. Συμβολίζουμε με $\left(\Delta(N^n)\right)^{\perp}$ το σύνολο των καθέτων διανυσματικών πεδίων στο N^n. Επίσης, συμβολίζουμε με ∇^N και ∇^M τις συνοχές Levi-Civita των N^n και M^m, αντίστοιχα. Έστω X, Y διανυσματικά πεδία του N^n. Επεκτείνουμε τοπικά κατά τον συνήθη τρόπο σε διανυσματικά πεδία του M^m, τα οποία συμβολίζουμε με $\overline{X}$ και $\overline{Y}$ αντίστοιχα. Ισχύει ο **τύπος του Gauss**

$$\nabla^M_{\overline{X}}\overline{Y} = \nabla^N_X Y + B(X,Y),$$

όπου $\nabla^N_X Y = \left(\nabla^M_{\overline{X}}\overline{Y}\right)^{\top}$ και $B(X,Y) = \left(\nabla^M_{\overline{X}}\overline{Y}\right)^{\perp}$. Η συμμετρική και $D(M^m)$−διγραμμική μορφή B λέγεται **δεύτερη θεμελιώδης μορφή** του υποπολυπτύγματος N^n στο M^m. Αποδεικνύεται ότι η τιμή του πεδίου $B(X,Y)$ σε ένα σημείο $p \in N^n$ εξαρτάται μόνο από τις τιμές των X_p και Y_p, δηλαδή

$$B(X,Y)|_p = B(X_p, Y_p).$$

1.5 Τελεστής Laplace-Beltrami

Στην αρχή αυτού του Κεφαλαίου ορίσαμε τις ασθενείς μερικές παραγώγους και χώρους συναρτήσεων στον $\mathbb{R}^m$. Αυτοί οι ορισμοί μπορούν να επεκταθούν με αντίστοιχο τρόπο και σε ένα πλήρες πολύπτυγμα Riemann M^m. Θα ορίσουμε εδώ μόνο τους χώρους Sobolev $W^{1,p}(M^m)$ και $W_0^{1,p}(M^m)$ καθώς οι υπόλοιποι ορίζονται εντελώς αντίστοιχα.

Έστω μια συνάρτηση $u \in L^1_{loc}(M^m)$ και έστω $p \in M^m$. Θεωρούμε ένα χάρτη (U, φ) στο M^m με συντεταγμένες $x_1, \ldots, x_m$ και βασικά διανυσματικά πεδία $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}$. Θα ορίσουμε την **ασθενή κλίση** της συνάρτησης $u \in L^1_{loc}(M^m)$. Έστω ότι υπάρχει διανυσματικό πεδίο X με $|X| \in L^1_{loc}(M^m)$ τέτοιο ώστε για κάθε λείο διανυσματικό πεδίο Y με συμπαγές στήριγμα στο M^m ισχύει

$$\int_M u \operatorname{div} Y dv = -\int_M \langle X, Y\rangle \, dv,$$

όπου dv το κανονικό μέτρο του M^m, το οποίο σε ένα χάρτη (U, φ) ορίζεται ως

$$dv := \sqrt{g \circ \varphi^{-1}} dx,$$

όπου dx το μέτρο Lebesgue του $\mathbb{R}^m$. Μπορούμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα μιας μετρήσιμης συνάρτησης $f : M^m \to \mathbb{R}$ με την βοήθεια του διαμερισμού της μονάδας. Το ολοκλήρωμα αυτό είναι καλά ορισμένο, δηλαδή δεν εξαρτάται από τον την επιλογή των χαρτών και του διαμερισμού της μονάδας. Αν το πολύπτυγμα Riemann M^m είναι προσανατολίσιμο, διαλέγοντας έναν άτλα που είναι συμβατός με τον προσανατολισμό του M^m το dv μπορεί να δοθεί μέσω της m-διαφορικής μορφής που ονομάζεται και στοιχείο όγκου.

Συμβολίζουμε με ∇u το X δηλώνοντας ότι είναι η ασθενής κλίση της u, η οποία είναι μοναδική εκτός από σύνολα μηδενικού μέτρου.

Ορισμός 1.5.1. *Ορίζουμε το χώρο **Sobolev** $W^{1,p}(M^m)$ (με $1 \leq p < \infty$), ως το χώρο που αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $u \in L^p(M^m)$ για τις οποίες υπάρχει η ασθενής κλίση ∇u και μάλιστα $|\nabla u| \in L^p(M^m)$.*

Ορίζουμε τη νόρμα του χώρου $W^{1,p}(M^m)$ ως εξής

$$\|u\|_{1,p} := \left[\int_M (|u|^p + |\nabla u|^p)\, dv\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Ο χώρος $W_0^{1,p}(M^m)$ είναι η κλειστή θήκη του $C_c^\infty(M^m)$ στον $W^{1,p}(M^m)$. Όμοια με προηγουμένως, συμβολίζουμε $W^{1,2}(M^m) = H^1(M^m)$ και $W_0^{1,2}(M^m) = H_0^1(M^m)$.

Έστω

$$Q(u,\varphi) = \int_{M^m} \nabla u \cdot \nabla\varphi\, dv, \text{ με } u,\varphi \in H^1(M^m),$$

όπου ∇u, $\nabla\varphi$ είναι οι ασθενείς κλίσεις των u, φ. Ορίζουμε τον τελεστή

$$\mathrm{L} : L^2(M^m) \to L^2(M^m) \text{ (**Τελεστής Laplace-Beltrami**)}$$

με πεδίο ορισμού

$$\mathfrak{D}(\mathrm{L}) = \left\{u \in H^1(M^m) : \exists f \in L^2(M^m) : Q(u,\varphi) = \int_{M^m} f\varphi dv, \forall\varphi \in C_c^\infty(M^m)\right\}$$

Αν $u \in \mathfrak{D}(\mathrm{L})$, τότε η παραπάνω f είναι μοναδική και ορίζουμε $\mathrm{L}\,u = f$. Άρα

$$\int_{M^m} (\mathrm{L}\,u)\varphi\, dv = Q(u,\varphi),$$

δηλαδή $Q(u,\varphi) = \langle \mathrm{L}\,u, \varphi\rangle$, για κάθε $u \in \mathfrak{D}(\mathrm{L})$ και για κάθε $\varphi \in C_c^\infty(M^m)$.

Παρατηρήσεις 1.5.2.

- Ο τελεστής Laplace είναι ένας μη-αρνητικός τελεστής. Πράγματι για κάθε $u \in \mathfrak{D}(L)$ έχουμε

$$\langle Lu, u\rangle = Q(u,u) = \int_M \nabla u \cdot \nabla u dv = \int_M |\nabla u|^2 dv \geq 0,$$

  που σημαίνει ότι $\sigma(L) \subset [0,\infty)$ από την Πρόταση 1.3.10.

- Σύμφωνα με τις ταυτότητες Green κάθε $u \in C^2(M^m)$ με

$$\int_M |\Delta u|^2\, dv < +\infty,$$

  ανήκει στο $\mathfrak{D}(\mathrm{L})$ και $\mathrm{L}\,u = -\Delta u$.

Έστω A ένας συμμετρικός τελεστής με πεδίο ορισμού $\mathfrak{D}(A)$. Αν ο τελεστής A^{**} είναι αυτοσυζυγής τότε ο A καλείται **ουσιαστικά αυτοσυζυγής** (essentially self-adjoint). Κάθε πεδίο με αυτήν την ιδιότητα λέγεται **πυρήνας** (core) για τον αντίστοιχο αυτοσυζυγή τελεστή.

Θεώρημα 1.5.3. *Έστω M^m ένα πλήρες πολύπτυγμα Riemann.*

1. *Ο τελεστής L με πεδίο ορισμού $\mathfrak{D}(L)$ είναι αυτοσυζυγής.*

2. *Ο τελεστής L είναι ουσιαστικά αυτοσυζυγής στο $C_c^\infty(M^m)$.*

Άρα το σύνολο $C_c^\infty(M^m)$ είναι πυρήνας για τον τελεστή L. Για μια απόδειξη της παραπάνω Πρότασης βλέπε [Da2].

Κεφάλαιο 2

Το Φάσμα του Τελεστή Laplace σε Χώρους Μορφής

Ανάμεσα σε όλα τα πολυπτύγματα Riemann, τα πιο απλά είναι αυτά που έχουν σταθερή καμπυλότητα τομής. Η μεγάλη σημασία των πολυπτυγμάτων αυτών οφείλεται κυρίως στην πληθώρα των εφαρμογών τους. Ο μεγάλος αριθμός ισομετριών που έχουν συνεπάγεται την απλότητα των υπολογισμών.

Θα μελετήσουμε το φάσμα του τελεστή Laplace σε τρία παραδείγματα πολυπτυγμάτων με σταθερή καμπυλότητα τομής K. Τέτοια είναι ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^N$ με $K \equiv 0$, η μοναδιαία Σφαίρα $\mathbb{S}^N$ με $K \equiv 1$ και ο Υπερβολικός χώρος $\mathbb{H}^N$ με $K \equiv -1$.

Τα πολυπτύγματα αυτά είναι πλήρη και απλά συνεκτικά, και μάλιστα, ουσιαστικά τα μόνα με σταθερή καμπυλότητα τομής. Μπορούσαμε να εξετάσουμε πολυπτύγματα με καμπυλότητα τομής μια τυχαία σταθερά, αλλά δεν είναι δύσκολο να ελέγξουμε ότι πολλαπλασιάζοντας την μετρική Riemann με έναν θετικό αριθμό c, τότε η καμπυλότητα τομής του πολυπτύγματος πολλαπλασιάζεται με $\frac{1}{c}$. Επομένως οι γεωμετρίες των δύο πολυπτυγμάτων είναι όμοιες, άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι η τιμή της σταθερής καμπυλότητας τομής είναι $-1, 0$ ή 1.

Θα υπολογίσουμε το φάσμα του τελεστή Laplace στους χώρους μορφής. Στον Ευκλείδειο και Υπερβολικό χώρο, η απόδειξη στηρίζεται στην επιλογή κάποιων "προσεγγιστικών" συναρτήσεων, ενώ η απόδειξη στην Σφαίρα διαφέρει. Στην Σφαίρα θα κάνουμε χρήση των σφαιρικών αρμονικών συναρτήσεων οι οποίες είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στη μελέτη ιδιοτιμών και ιδιοσυναρτήσεων.

2.1 Φάσμα του Τελεστή Laplace στον Ευκλείδειο Χώρο

Έστω $\xi \in \mathbb{R}^N$ και $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο $u(x) = e^{i\xi \cdot x}$. Επειδή

$$-\Delta u = |\xi|^2 u,$$

θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε σαν ιδιοσυνάρτηση την $e^{i\xi \cdot x}$ με ιδιοτιμή $\lambda = |\xi|^2$. Αυτό όμως θα ήταν λάθος διότι $e^{i\xi \cdot x} \notin L^2(\mathbb{R}^N)$. Επομένως, για να υπολογίσουμε το φάσμα του τελεστή Laplace στον Ευκλείδειο χώρο, θα χρησιμοποιήσουμε κάποιες προσεγγιστικές συναρτήσεις που να ανήκουν στον $L^2(\mathbb{R}^N)$ και οι οποίες θα προσεγγίζουν την $e^{i\xi \cdot x}$. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι ο τελεστής Laplace είναι μη-αρνητικός και αυτοσυζυγής, ώστε να κάνουμε χρήση της Πρότασης 1.3.10 για το πρώτο σκέλος της απόδειξης, ενώ στο δεύτερο θα χρησιμοποιηθεί το Θεώρημα 1.3.7. Για να μην υπάρχει σύγχυση, θυμίζουμε ότι με N συμβολίζουμε την διάσταση του Ευκλείδειου χώρου και με n τον δείκτη του n-οστού όρου των ακολουθιών που αναφερόμαστε.

Θεώρημα 2.1.1. *Στον Ευκλείδειο χώρο διάστασης N έχουμε $\sigma(L) = [0, \infty)$.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι ισχύει η ισότητα στον τύπο $\sigma(L) \subset [0, \infty)$, της Παρατήρησης 1.5.2. Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ με $0 \leq \varphi \leq 1$, τέτοια ώστε

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases} \text{ και } \varphi_n(x) = \varphi(\tfrac{x}{n})$$

Έστω ένα $\lambda \in [0, \infty)$, και ένα $\xi \in \mathbb{R}^N$ με $|\xi|^2 = \lambda$. Ορίζουμε την συνάρτηση $u_n(x) = e^{i\xi \cdot x}\varphi_n(x)$ για $\xi, x \in \mathbb{R}^N$. Οι προσεγγιστικές συναρτήσεις λοιπόν είναι οι $v_n = u_n / \|u_n\|$. Θα δείξουμε ότι πληρούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος 1.3.7 για την ακολουθία v_n. Προφανώς $\|v_n\| = 1$. Μένει να δείξουμε ότι $\| - \Delta v_n - \lambda v_n\| \to 0$ καθώς $n \to \infty$, δηλαδή

$$\frac{\| - \Delta u_n - \lambda u_n\|}{\|u_n\|} \to 0,$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\int | - \Delta u_n - \lambda u_n|^2 dx}{\int |u_n|^2 dx} \to 0.$$

Κάνουμε τους εξής υπολογισμούς,

$$\begin{aligned} \nabla\varphi_n &= \frac{1}{n}(\nabla\varphi)\left(\frac{x}{n}\right), \\ \Delta\varphi_n &= \operatorname{div}\nabla\varphi_n = \frac{1}{n^2}(\Delta\varphi)\left(\frac{x}{n}\right), \\ \nabla e^{i\xi\cdot x} &= i\xi e^{i\xi\cdot x}, \\ \Delta e^{i\xi\cdot x} &= \operatorname{div}(i\xi e^{i\xi\cdot x}) = -|\xi|^2 e^{i\xi\cdot x}. \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας την ταυτότητα

$$\Delta(fg) = f\Delta g + 2\nabla f \cdot \nabla g + g\Delta f,$$

για $f = \varphi_n, g = e^{i\xi\cdot x}$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int | - \Delta u_n - \lambda u_n|^2 dx &= \int \Bigg| - \Bigg\{\varphi_n(-|\xi|^2 e^{i\xi\cdot x}) + 2i\xi e^{i\xi\cdot x} \cdot \frac{1}{n}(\nabla\varphi)\left(\frac{x}{n}\right) \\ &\quad + e^{i\xi\cdot x}\frac{1}{n^2}(\Delta\varphi)\left(\frac{x}{n}\right)\Bigg\} - |\xi|^2 e^{i\xi\cdot x}\varphi\left(\frac{x}{n}\right)\Bigg|^2 dx \\ &= \int \left| -2i\xi e^{i\xi\cdot x}\frac{1}{n}(\nabla\varphi)\left(\frac{x}{n}\right) - e^{i\xi\cdot x}\frac{1}{n^2}(\Delta\varphi)\left(\frac{x}{n}\right)\right|^2 dx. \end{aligned}$$

Επειδή $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}\int |-\Delta u_n - \lambda u_n|^2 dx &\leq 2\int \left[\frac{4}{n^2}|\xi|^2 \left|(\nabla\varphi)\left(\frac{x}{n}\right)\right|^2 \right.\\ &\left. + \frac{1}{n^4}\left|(\Delta\varphi)\left(\frac{x}{n}\right)\right|^2\right] dx\\ &= 2\int \left[\frac{4}{n^2}|\xi|^2 \left|(\nabla\varphi)\left(\frac{x}{n}\right)\right|^2 \right.\\ &\left. + \frac{1}{n^4}\left|(\Delta\varphi)\left(\frac{x}{n}\right)\right|^2\right] dx.\end{aligned}$$

Όμως

$$\int u_n^2 dx = \int \left|e^{i\xi\cdot x}\varphi\left(\frac{x}{n}\right)\right|^2 dx = \int \left|\varphi\left(\frac{x}{n}\right)\right|^2 dx,$$

Οπότε,

$$\frac{\int |-\Delta u_n - \lambda u_n|^2 dx}{\int |u_n|^2 dx} \leq 2\frac{\int \left[\frac{4}{n^2}|\xi|^2 \left|(\nabla\varphi)\left(\frac{x}{n}\right)\right|^2 + \frac{1}{n^4}\left|(\Delta\varphi)\left(\frac{x}{n}\right)\right|^2\right] dx}{\int \left|\varphi\left(\frac{x}{n}\right)\right|^2 dx}. \tag{2.1}$$

Επίσης, η φ_n είναι σταθερή στα διαστήματα $(-\infty, -2n], [-n, n]$ και $[2n, \infty)$. Επομένως, οι συναρτήσεις $\nabla\varphi_n, \Delta\varphi_n$ είναι φραγμένες διότι είναι διάφορες του μηδενός μόνο για $n \leq |x| \leq 2n$, και έτσι ο αριθμητής γίνεται

$$\begin{aligned}&2\int \left[\frac{4}{n^2}|\xi|^2 \left|(\nabla\varphi)\left(\frac{x}{n}\right)\right|^2 + \frac{1}{n^4}\left|(\Delta\varphi)\left(\frac{x}{n}\right)\right|^2\right] dx\\ &\leq \int_{n\leq|x|\leq 2n} \left[\frac{8}{n^2}|\xi|^2 \left|(\nabla\varphi)\left(\frac{x}{n}\right)\right|^2 + \frac{2}{n^4}\left|(\Delta\varphi)\left(\frac{x}{n}\right)\right|^2\right] dx\\ &\leq \int_{n\leq|x|\leq 2n} \left(\frac{8|\xi|^2}{n^2}c_1^2 + \frac{2}{n^4}c_2^2\right) dx\\ &\leq \left(\frac{8|\xi|^2}{n^2}c_1^2 + \frac{2}{n^4}c_2^2\right)\int_{n\leq|x|\leq 2n} dx\\ &\leq \frac{c_3(|\xi|^2+1)}{n^2}\int_{n\leq|x|\leq 2n} dx\\ &\leq \frac{c_3(|\xi|^2+1)}{n^2}\,\mathrm{vol}\{n \leq |x| \leq 2n\}\\ &= cn^{N-2}.\end{aligned}$$

Επίσης η φ έχει συμπαγές στήριγμα οπότε, θέτοντας $x/n = y, dx = n^N dy$ ο παρονομαστής του κλάσματος του δεξιού μέλους της (2.1) γίνεται

$$\int \left|\varphi\left(\frac{x}{n}\right)\right|^2 dx = \int (\varphi(y))^2 n^N dy = c_4 n^N.$$

Τελικά,
$$\int \frac{|-\Delta u_n - \lambda u_n|^2}{|u_n|^2} dx \leq \frac{c}{c_4} \frac{n^{N-2}}{n^N} = \frac{c}{c_4} \frac{1}{n^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. □

2.2 Φάσμα του Τελεστή Laplace στην Σφαίρα

Θα αποδείξουμε ότι το φάσμα του τελεστή Laplace στην μοναδιαία σφαίρα $\mathbb{S}^N$ είναι διακριτό, και μάλιστα είναι το σύνολο των τιμών

$$\lambda_k = k(k + N - 1),$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, με $k \geq 0$. Ακολουθούμε την τεχνική των Gilkey, Leahy, Park, βλέπε [G-L-P], οι οποίοι χρησιμοποιούν τις σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις, τις οποίες θα ορίσουμε αμέσως. Συμβολίζουμε με $\Delta^{\mathbb{S}^N}$ τον τελεστή Laplace της Σφαίρας ως προς την συνήθη μετρική Riemann. Έστω u_k οι συναρτήσεις που ικανοποιούν την εξής σχέση
$$-\Delta^{\mathbb{S}^N} u_k = \lambda_k u_k.$$
Οι συναρτήσεις u_k ορισμένες πάνω στην σφαίρα, είναι εδώ και καιρό γνωστές, και λέγονται **σφαιρικές αρμονικές** (spherical harmonics). Αυτές, αποτελούν θέμα απέραντης βιβλιογραφίας, διότι είναι τόσο σημαντικές όσο οι σειρές Fourier για την Γεωμετρία και την Φυσική. Είναι από τις πρώτες εφαρμογές της Ανάλυσης Fourier σε πολυπτύγματα Riemann, αν και αρχικά δεν είχαν χρησιμοποιηθεί για αυτό το σκοπό.

Θα βρούμε τον ακριβή τύπο που δίνει την Λαπλασιανή μιας συνάρτησης στην μοναδιαία σφαίρα $\mathbb{S}^N$. Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{\xi} = \frac{\vec{x}}{r}$, όπου $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_{N+1})$ το διάνυσμα θέσης και $r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_{N+1}^2}$. Επίσης συμβολίζουμε με

- ∇ την συνοχή του $\mathbb{R}^{N+1}$,
- $\nabla^{\mathbb{S}^N}$ την συνοχή της $\mathbb{S}^N$.

Διαλέγουμε ένα ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_N\}$ της $\mathbb{S}^N$. Κατά φυσικό τρόπο ορίζεται ένα ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_N, \xi = \frac{\vec{x}}{r}\}$ στο $\mathbb{R}^{N+1} \backslash \{0\}$. Οπότε, συμβολίζοντας με ∇ την συνοχή Levi-Civita του $\mathbb{R}^{N+1}$ έχουμε για $u : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}$

$$\operatorname{grad} u = \vec{e}_1(u)\vec{e}_1 + \ldots + \vec{e}_N(u)\vec{e}_N + (\vec{\xi}u)\vec{\xi}.$$
Παίρνοντας τη μορφή Hesse της u στον $\mathbb{R}^{N+1}$ έχουμε

$$\nabla^2 u(X, X) = X(Xu) - \langle \nabla_X X, \operatorname{grad} u \rangle, \ X \in \Delta\left(\mathbb{R}^{N+1}\right).$$

Οπότε, αν περιοριστούμε στην $\mathbb{S}^N$ και χρησιμοποιώντας τον τύπο του Gauss έχουμε

$$
\begin{aligned}
-\Delta^{\mathbb{R}^{N+1}} u &= -\operatorname{tr}\nabla^2 u = -\sum_{i=1}^{N}\left[\vec{e}_i\vec{e}_i(u) - \langle \nabla_{\vec{e}_i}\vec{e}_i, \operatorname{grad} u\rangle\right] \\
&\quad -\vec{\xi}(\vec{\xi}u) + \left\langle \nabla_{\vec{\xi}}\vec{\xi}, \operatorname{grad} u\right\rangle \\
&= -\sum_{i=1}^{N}\vec{e}_i\vec{e}_i(u) + \sum_{i=1}^{N}\left\langle \nabla^{\mathbb{S}^N}_{\vec{e}_i}\vec{e}_i - \vec{\xi}, \operatorname{grad}(u|_{\mathbb{S}^N}) + (\vec{\xi}u)\vec{\xi}\right\rangle \\
&\quad -\vec{\xi}(\vec{\xi}u) + \left\langle \nabla_{\vec{\xi}}\vec{\xi}, \operatorname{grad} u\right\rangle \\
&= -\sum_{i=1}^{N}\vec{e}_i\vec{e}_i(u) + \sum_{i=1}^{N}\left\langle \nabla^{\mathbb{S}^N}_{\vec{e}_i}\vec{e}_i, \operatorname{grad}(u|_{\mathbb{S}^N})\right\rangle - \sum_{i=1}^{N}(\vec{\xi}u) \\
&\quad -\vec{\xi}(\vec{\xi}u) + \left\langle \nabla_{\vec{\xi}}\vec{\xi}, \operatorname{grad} u\right\rangle \\
&= -\Delta^{\mathbb{S}^N}(u|_{\mathbb{S}^N}) - N(\vec{\xi}u)|_{\mathbb{S}^N} - \vec{\xi}(\vec{\xi}u)|_{\mathbb{S}^N} + \left\langle \nabla_{\vec{\xi}}\vec{\xi}, \operatorname{grad} u\right\rangle\Big|_{\mathbb{S}^N}
\end{aligned}
$$

Υπολογίζουμε το $\nabla_{\vec{\xi}}\vec{\xi}$ και έχουμε

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\frac{x}{r}}\frac{x}{r} &= \frac{1}{r}\left(\nabla_x\frac{x}{r}\right) = \frac{1}{r}\left(x\left(\frac{1}{r}\right)x + \frac{1}{r}\nabla_x x\right) \\
&= \frac{1}{r}\left(x\left(\frac{1}{r}\right)x + \frac{1}{r}x\right) = \frac{1}{r}\left(-\frac{1}{r^2}x(r)\,x + \frac{1}{r}x\right) \\
&= \frac{1}{r}\left(-\frac{1}{r^2}rx + \frac{1}{r}x\right) = 0
\end{aligned}
$$

Συνεπώς,

$$
\left(-\Delta^{\mathbb{R}^{N+1}} u\right)\Big|_{\mathbb{S}^N} = -\Delta^{\mathbb{S}^N}(u|_{\mathbb{S}^N}) - N(\vec{\xi}u)|_{\mathbb{S}^N} - \vec{\xi}(\vec{\xi}u)|_{\mathbb{S}^N} \tag{2.2}
$$

Παρατήρηση 2.2.1. Κάνοντας χρήση των σφαιρικών αρμονικών συναρτήσεων αποδεικνύεται τελικά ότι η πρώτη ιδιοτιμή του τελεστή Laplace στην Ευκλείδεια μπάλα ακτίνας r ισούται με

$$
\frac{(j_{\frac{N}{2}-1})^2}{r^2},
$$

όπου $j_{\frac{N}{2}-1}$ η πρώτη ρίζα της συνάρτησης Bessel (βλέπε [Cl1]).

Παρατήρηση 2.2.2. Ένας πιο αναλυτικός τρόπος για να αποδειχθεί ο παραπάνω τύπος, είναι κάνοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες στην ισότητα

$$
\int_{B(1)} |\nabla u|^2 = \int_0^1\int_{\mathbb{S}^N}\left(|u_r|^2 + \frac{1}{r^2}|\operatorname{grad}_{\mathbb{S}^N} u|^2\right) r^N dS dr,
$$

όπου με $B(1)$ συμβολίζουμε την $N+1$-διάστατη μοναδιαία μπάλα στον $\mathbb{R}^{N+1}$. Ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία προκύπτει ο τύπος (2.2) στην εξής μορφή

$$
\left(\Delta^{\mathbb{R}^{N+1}} u\right)\Big|_{\mathbb{S}^N} = \Delta^{\mathbb{S}^N}(u|_{\mathbb{S}^N}) + u_{rr}|_{\mathbb{S}^N} + \frac{N}{r}u_r|_{\mathbb{S}^N} \tag{2.3}
$$

Θέτουμε $\mathcal{P}(N,k)$ το σύνολο όλων των πολυωνύμων στον $\mathbb{R}^{N+1}$, τα οποία είναι ομογενή τάξης k και $\widetilde{\mathcal{P}}(N,k)$ τον περιορισμό αυτών των συναρτήσεων στην $\mathbb{S}^N$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{H}(N,k) \subset \mathcal{P}(N,k)$ το υποσύνολο όλων των ομογενών, αρμονικών πολυωνύμων στον $\mathbb{R}^{N+1}$. Δηλώνουμε με $\widetilde{\mathcal{H}}(N,k)$ τον περιορισμό αυτών των συναρτήσεων στην $\mathbb{S}^N$.

Θεώρημα 2.2.3. *Έστω $\Delta^{\mathbb{S}^N}$ ο τελεστής Laplace στον $C^\infty(\mathbb{S}^N)$. Τότε*

1. *Το διακριτό φάσμα της $\Delta^{\mathbb{S}^N}$ είναι το σύνολο των λ_k, με $\lambda_k = k(k+N-1)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, και $\widetilde{\mathcal{H}}(N,k)$ είναι οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι.*
2. $\dim \widetilde{\mathcal{H}}(N,k) = \binom{N+k}{N} - \binom{N+k-2}{N}$.

Απόδειξη. Αν $a = (a_1, \dots, a_{N+1})$, ένας πολυδείκτης και

$$p(x) = \sum_a p_a x^a,$$

ένα πολυώνυμο. Ορίζουμε τον μερικό διαφορικό τελεστή $P(p)$ θέτοντας

$$P(p) := \sum_a p_a D^a.$$

Στη συνέχεια ορίζουμε ένα θετικά οριστικό συμμετρικό εσωτερικό γινόμενο στο $\mathcal{P}(N,k)$ ως εξής:

$$\langle p, q \rangle = \sum_a a! p_a q_a.$$

Εύκολα παρατηρούμε ότι ισχύει η εξής ιδιότητα

$$\langle p, q \rangle = P(p)q, \quad \text{για κάθε } p, q \in \mathcal{P}(N,k).$$

Προφανώς $\mathcal{P}(N,k) = x_{N+1} \cdot \mathcal{P}(N,k-1) \oplus \mathcal{P}(N-1,k)$, δηλαδή ένα πολυώνυμο $p(x) \in \mathcal{P}(N,k)$ γράφεται ως άθροισμα δύο πολυωνύμων της μορφής $q(x) \in x_{N+1} \cdot \mathcal{P}(N,k-1)$ και ένα $h(x) \in \mathcal{P}(N-1,k)$, το οποίο είναι πολυώνυμο των μεταβλητών $x_1, \dots, x_N$. Άρα

$$\dim \mathcal{P}(N,k) = \dim \mathcal{P}(N,k-1) + \dim \mathcal{P}(N-1,k)$$

Σημειώνουμε ότι $\mathcal{P}(N,0)$ και $\mathcal{P}(0,k)$ αποτελούνται μόνο από τις σταθερές, άρα $\mathcal{P}(N,0) = \mathcal{P}(0,k) = 1$. Επιπλέον $\mathcal{P}(N,0) \equiv \mathcal{H}(N,0)$. Με την μέθοδο της επαγωγής βλέπουμε ότι

$$\dim \mathcal{P}(N,k) = \binom{N+k}{N}.$$

Αν $p \in \mathcal{P}(N,k-2)$ και $q \in \mathcal{P}(N,k)$ έχουμε

$$p(x_1, \dots, x_{N+1}) = \sum_{|a|=k-2} p_{a_1 \dots a_{N+1}} x_1^{a_1} \dots x_{N+1}^{a_{N+1}},$$

$$q(x_1,\ldots,x_{N+1}) = \sum_{|b|=k} q_{b_1\ldots b_{N+1}} x_1^{b_1}\ldots x_{N+1}^{b_{N+1}}.$$

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\left\langle -p, -\Delta^{\mathbb{R}^{N+1}} q\right\rangle &= -P(p)(\Delta^{\mathbb{R}^{N+1}} q) \\
&= -\sum_{|a|=k-2} p_a \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{a_1}\ldots\left(\frac{\partial}{\partial x_{N+1}}\right)^{a_{N+1}} \\
&\quad \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\ldots-\frac{\partial^2}{\partial x_{N+1}^2}\right)\sum_{|b|=k} q_b x^b \\
&= \left[\sum_{|a|=k-2} p_{a_1\ldots a_{N+1}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{a_1+2}\ldots\left(\frac{\partial}{\partial x_{N+1}}\right)^{a_{N+1}} + \ldots\right. \\
&\quad \left. + \sum_{|a|=k-2} p_{a_1\ldots a_{N+1}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{a_1}\ldots\left(\frac{\partial}{\partial x_N}\right)^{a_{N+1}+2}\right] \cdot \\
&\quad \cdot \sum_{|b|=k} q_{b_1\ldots b_{N+1}} x_1^{b_1}\ldots x_{N+1}^{b_{N+1}}.
\end{aligned}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}
P(r^2 p) &= P\left((x_1^2+\ldots+x_{N+1}^2)\sum_{|a|=k-2} p_{a_1\ldots a_{N+1}} x_1^{a_1}\ldots x_{N+1}^{a_{N+1}}\right) \\
&= \sum_{|a|=k-2} p_{a_1\ldots a_{N+1}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{a_1+2}\ldots\left(\frac{\partial}{\partial x_{N+1}}\right)^{a_{N+1}} + \ldots \\
&\quad + \sum_{|a|=k-2} p_{a_1\ldots a_{N+1}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{a_1}\ldots\left(\frac{\partial}{\partial x_{N+1}}\right)^{a_{N+1}+2}.
\end{aligned}$$

Ακόμα,

$$\begin{aligned}
\left\langle r^2 p, q\right\rangle &= P(r^2 p) q = \left[\sum_{|a|=k-2} p_{a_1\ldots a_{N+1}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{a_1+2}\ldots\left(\frac{\partial}{\partial x_N}\right)^{a_{N+1}} + \ldots\right. \\
&\quad \left. + \sum_{|a|=k-2} p_{a_1\ldots a_{N+1}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{a_1}\ldots\left(\frac{\partial}{\partial x_N}\right)^{a_{N+1}+2}\right] \sum_{|b|=k} q_{b_1\ldots b_{N+1}} x_1^{b_1}\ldots x_{N+1}^{b_{N+1}}.
\end{aligned}$$

Τελικά,

$$\left\langle -p, -\Delta^{\mathbb{R}^{N+1}} q\right\rangle = \left\langle r^2 p, q\right\rangle. \tag{2.4}$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε τον τελεστή Laplace περιορισμένο στον χώρο $\mathcal{P}(N,k)$, ως εξής

$$\Delta_e : \mathcal{P}(N,k) \to \mathcal{P}(N,k-2).$$

Ξέρουμε ότι $\mathcal{P}(N,k) = \ker\Delta_e \oplus (\ker\Delta_e)^{\perp}$ και προφανώς $\ker\Delta_e \equiv \mathcal{H}(N,k)$. Έστω $\Delta_e^* : \mathcal{P}(N,k-2) \to \mathcal{P}(N,k)$ ο συζυγής του Δ_e. Από την (2.4), έχουμε ότι ο Δ_e^* είναι ο πολλαπλασιασμός με r^2, άρα η απεικόνιση Δ_e^* είναι "1-1", που σημαίνει

$$(\ker\Delta_e)^{\perp} = \mathrm{Im}(\Delta_e^*) = r^2\cdot\mathcal{P}(N,k-2),$$

άρα

$$\mathcal{P}(N,k) \cong r^2\cdot\mathcal{P}(N,k-2)\oplus\mathcal{H}(N,k). \tag{2.5}$$

Ο περιορισμός των ομογενών και αρμονικών πολυωνύμων στην σφαίρα ορίζει μια "1-1" απεικόνιση από το $\mathcal{H}(N,k)$ στο $\widetilde{\mathcal{H}}(N,k)$. Επομένως, ο δεύτερος ισχυρισμός αποδεικνύεται μέσω της σχέσης

$$\dim\mathcal{H}(N,k) = \dim\mathcal{P}(N,k) - \dim\mathcal{P}(N,k-2),$$

η οποία είναι άμεση συνέπεια της σχέσης (2.5).

Έστω $\mathcal{A} := \sum_k \mathcal{H}(N,k) \subset C^{\infty}(\mathbb{S}^N)$, ο υπόχωρος που παράγεται από τα αρμονικά και ομογενή πολυώνυμα. Επειδή $r^2 = 1$ στην $\mathbb{S}^N$, η εξίσωση (2.5) συνεπάγεται ότι για κάθε $k \geq 0$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(N,2k) &\cong \mathcal{H}(N,2k)\oplus r^2\mathcal{H}(N,2k-2)\oplus\ldots\oplus r^{2k}\mathcal{H}(N,0),\\
\mathcal{P}(N,2k+1) &\cong \mathcal{H}(N,2k+1)\oplus r^2\mathcal{H}(N,2k-1)\oplus\ldots\oplus r^{2k}\mathcal{H}(N,1).
\end{aligned}$$

Αυτό όμως σημαίνει ότι

$$\mathcal{A} = \sum_k \mathcal{P}(N,k).$$

Επιπλέον, η $\mathbb{S}^N$ είναι συμπαγής και $\mathcal{A}$ είναι μια υποάλγεβρα του $C(\mathbb{S}^N)$ που περιέχει τις σταθερές συναρτήσεις. Ακόμα, για κάθε p_1, p_2 πολυώνυμα που ανήκουν στο $\mathcal{P}(N,k)$ με $p_1 \neq p_2$ υπάρχει μια συνάρτηση $f \in \mathcal{A}$ τέτοια ώστε $f(p_1) \neq f(p_2)$. Άρα η $\mathcal{A}$ διαχωρίζει σημεία. Επομένως, η $\mathcal{A}$ σχηματίζει μια μοναδιαία άλγεβρα που διαχωρίζει σημεία, οπότε από το Θεώρημα των Stone-Weierstrass παίρνουμε ότι το $\mathcal{A}$ είναι πυκνό στον χώρο των συνεχών συναρτήσεων ως προς την L^{∞} νόρμα η οποία είναι η νόρμα της ομοιόμορφης σύγκλισης. Άρα θα είναι πυκνό και στον $L^2(\mathbb{S}^N)$ (Αναλυτικότερα για το Θεώρημα των Stone-Weierstrass βλέπε [Di]).

Στη συνέχεια, αν πάρουμε ένα ομογενές πολυώνυμο k-βαθμού, έστω $p(x)$, τότε από την σχέση (2.2) έχουμε

$$\begin{aligned}
\vec{\xi}(p(x)) &= D_{\frac{x}{r}}p(x) = \frac{1}{r}D_x p(x) = \frac{1}{r}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial p}{\partial x_{N+1}}\right)\cdot\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_{N+1}\end{pmatrix}\right]\\
&= \frac{1}{r}\left[x_1\frac{\partial p}{\partial x_1}+\ldots+x_{N+1}\frac{\partial p}{\partial x_{N+1}}\right] = \frac{1}{r}kp(x),
\end{aligned}$$

και

$$\vec{\xi}(\vec{\xi}p(x)) = k\vec{\xi}\left(\frac{1}{r}p(x)\right) = kD_{\frac{x}{r}}\left(\frac{1}{r}p(x)\right) = \frac{k}{r}D_x\left(\frac{1}{r}p(x)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{k}{r}\left[x\left(\frac{1}{r}\right)\cdot p(x) + \frac{1}{r}D_x p(x)\right] = \frac{k}{r}\left[-\frac{1}{r^2}x(r)\cdot p(x) + \frac{1}{r}kp(x)\right] \\
&= \frac{k}{r}\left[-\frac{1}{r^2}rp(x) + \frac{1}{r}kp(x)\right] = -\frac{k}{r^2}p(x) + \frac{k^2}{r^2}p(x).
\end{aligned}
$$

Επομένως,

$$
\begin{aligned}
-\Delta^{\mathbb{R}^{N+1}}p(x) &= -\Delta^{\mathbb{S}^n}p(x) - N(\vec{\xi}p(x)) - \vec{\xi}(\vec{\xi}p(x)) \\
&= -\Delta^{\mathbb{S}^N}p(x) - \frac{N}{r}kp(x) + \frac{k}{r^2}p(x) - \frac{k^2}{r^2}p(x) \\
&= -\Delta^{\mathbb{S}^N}p(x) - k(k+N-1)p(x)
\end{aligned}
$$

Υποθέτοντας επιπλέον ότι το $p(x)$ είναι αρμονικό πολυώνυμο στο $\mathbb{R}^{N+1}$, η παραπάνω σχέση γίνεται

$$
-\Delta^{\mathbb{S}^N}p(x) - k(k+N-1)p(x) = 0. \tag{2.6}
$$

Αυτό όμως συνεπάγεται ότι

$$
\widetilde{\mathcal{H}}(N,k) \subset \ker(\Delta^{\mathbb{S}^N} - k(k+N-1)) = \mathrm{E}\left(k(k+N-1), \Delta^{\mathbb{S}^N}\right),
$$

όπου $\mathrm{E}(\lambda, \Delta^{\mathbb{S}^N})$ είναι ο αντίστοιχος ιδιοχώρος στην ιδιοτιμή λ. Αυτός είναι πεπερασμένης διάστασης για κάθε λ και μη τετριμμένος για το διακριτό σύνολο των ιδιοτιμών λ. Επειδή ο $\Delta^{\mathbb{S}^N}$ είναι αυτοσυζυγής, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.3.6 οι ιδιοχώροι είναι ορθογώνιοι και άρα

$$
\widetilde{\mathcal{H}}(N,k) \perp \widetilde{\mathcal{H}}(N,j) \text{ στον } L^2(\mathbb{S}^N) \text{ αν } k \neq j.
$$

Αφού $\mathcal{A}$ πυκνό στον $C^\infty(\mathbb{S}^N)$, είναι πυκνό και στον $L^2(\mathbb{S}^N)$ και επιπλέον

$$
L^2(\mathbb{S}^N) = \oplus_{k\geq 0}\widetilde{\mathcal{H}}(N,k).
$$

Τελικά $\widetilde{\mathcal{H}}(N,k) = \mathrm{E}\left(k(k+N-1), \Delta^{\mathbb{S}^N}\right)$ όπως θέλαμε. □

2.3 Φάσμα του Τελεστή Laplace στον Υπερβολικό Χώρο

Ορίζουμε για $N \geq 2$ τον Υπερβολικό χώρο $\mathbb{H}^N = \{(x_1, \ldots, x_{N-1}, y) \in \mathbb{R}^N, y > 0\}$ με μετρική

$$
\mathrm{g}_{ij}(x_1, \ldots, x_{N-1}, y) = \frac{\delta_{ij}}{y^2}.
$$

Ακόμα

$$
\mathrm{g}^{ij}(x_1, \ldots, x_{N-1}, y) = y^2\delta_{ij}
$$

και

$$
\mathrm{g} = \det(\mathrm{g}_{ij}) = \begin{vmatrix} \mathrm{g}_{11} & \cdots & \mathrm{g}_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{g}_{N1} & \cdots & \mathrm{g}_{NN} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{y^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{y^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{y^{2N}}.
$$

Το στοιχείο όγκου του $\mathbb{H}^N$ είναι $d\mathbb{H}^N = \sqrt{g} = \frac{1}{y^N}$. Θα δείξουμε ότι το φάσμα του τελεστή Laplace στον Υπερβολικό χώρο είναι το σύνολο $\left[\frac{(N-1)^2}{4}, +\infty\right)$. Υπολογίζουμε τον τελεστή Laplace στον Υπερβολικό χώρο. Έστω $f : \mathbb{H}^N \to \mathbb{R}$. Τότε

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{g}\, g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) = y^N \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{y^N} y^2 \delta_{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) \\
&= y^2 \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + y^N \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{y^N}\frac{\partial f}{\partial y}\right) = y^2 \Delta_x f + y^N \left[(2-N) y^{1-N} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{y^2}{y^N}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right] \\
&= y^2 \Delta_x f + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + y(2-N)\frac{\partial f}{\partial y}, \text{ όπου } \Delta_x f = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.
\end{aligned}$$

Θεώρημα 2.3.1. *Το φάσμα του τελεστή Laplace στον Υπερβολικό χώρο ισούται με* $= \left[\frac{(N-1)^2}{4}, +\infty\right)$.

Απόδειξη. Θα χωρίσουμε την απόδειξη σε δύο μέρη

i) $\sigma(L) \subset \left[\frac{(N-1)^2}{4}, +\infty\right)$,

ii) $\sigma(L) \supset \left[\frac{(N-1)^2}{4}, +\infty\right)$.

i) Για $X = (X_1, \ldots, X_N) \in \Delta(\mathbb{H}^N)$, και για μια συνάρτηση $u : \mathbb{H}^N \to \mathbb{R}$ με συμπαγές στήριγμα, με ολοκλήρωση κατά παράγοντες βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{H}^N} (\operatorname{div} X) \cdot u^2 d\mathbb{H}^N &= -\int_{\mathbb{H}^N} X \cdot (\nabla u^2) d\mathbb{H}^N = -2\int_{\mathbb{H}^N} X \cdot u \nabla u d\mathbb{H}^N \\
&\le \int_{\mathbb{H}^N} (|u \cdot X|^2 + |\nabla u|^2) d\mathbb{H}^N,
\end{aligned}$$

που σημαίνει

$$\int_{\mathbb{H}^N} (-\Delta u) u d\mathbb{H}^N = \int_{\mathbb{H}^N} |\nabla u|^2 d\mathbb{H}^N \ge \int_{\mathbb{H}^N} \left(\operatorname{div} X - |X|^2\right) u^2 d\mathbb{H}^N.$$

Για $X = (0, \ldots, 0, \lambda y^a)$, με $\lambda, a \in \mathbb{R}$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X &= y^N \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(y^{-N} \lambda y^a) = y^N \lambda \frac{\partial}{\partial y}(y^{a-N}) \\
&= \lambda(a-N) y^{a-1},
\end{aligned}$$

και

$$\operatorname{div} X - |X|^2 = \operatorname{div} X - \langle X, X\rangle_{\mathbb{H}^N} = \lambda(a-N)y^{a-1} - \lambda^2 y^{2a}\frac{1}{y^2}$$

$$= \lambda(a-N)y^{a-1} - \lambda^2 y^{2a-2}.$$

Θέτοντας $a=1$ η σχέση γίνεται

$$\operatorname{div} X - |X|^2 = \lambda(1-N) - \lambda^2.$$

Η παράσταση παίρνει μέγιστο για $\lambda = \frac{1-N}{2}$, οπότε

$$\operatorname{div} X - |X|^2 = \frac{(N-1)^2}{4}.$$

Επομένως

$$\langle -\Delta u, u\rangle_{\mathbb{H}^N} = \int_{\mathbb{H}^N} (-\Delta u) u \mathrm{d}\mathbb{H}^N \geq \frac{(N-1)^2}{4} \int_{\mathbb{H}^N} u^2 \mathrm{d}\mathbb{H}^N$$

και το πρώτο μέρος της απόδειξης ολοκληρώθηκε.

ii) Για κάθε $s \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} -\Delta y^s &= y^2 s(s-1)y^{s-2} + y(2-N)sy^{s-1} \\ &= s(s-N+1)y^s. \end{aligned}$$

Επειδή για κάθε $\lambda \in \left[\frac{(N-1)^2}{4}, \infty\right)$ υπάρχει ένα $s \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\lambda = s(s-N+1)$ θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ως ιδιοσυνάρτηση του τελέστη L την y^s, όμως κάτι τέτοιο θα ήταν λάθος διότι η συνάρτηση αυτή δεν ανήκει στο $L^2(\mathbb{H}^N)$. Θα κάνουμε χρήση του Θεωρήματος 1.3.7. Όπως στην απόδειξη για τον $\mathbb{R}^n$, πρέπει να βρούμε κατάλληλες προσεγγιστικές συναρτήσεις με συμπαγές στήριγμα. Διαλέγουμε $z_n = g_n/\|g_n\|$, όπου $g_n(x,y) = u(x)v_n(y)$, $v_n(y) = y^s\varphi_n(\log y)$ και η συνάρτηση $\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ορίζεται ως εξής

$$\varphi_n(t) = \varphi\left(\frac{t}{n}\right) \text{ και } \varphi(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1, \\ 0, & |t| > 2. \end{cases}$$

Επίσης, απαιτούμε από την συνάρτηση $u(x)$ να πληροί για κάθε $\varepsilon > 0$

$$\frac{\int (\Delta_x u(x))^2 dx}{\int u^2(x) dx} < \varepsilon. \tag{2.7}$$

Θα αποδείξουμε ότι

$$\frac{\int (-\Delta g_n - \lambda g_n)^2 d\mathbb{H}^N}{\int g_n^2 d\mathbb{H}^N} \to 0, \text{ καθώς } n \to \infty. \tag{2.8}$$

Κάνουμε τους υπολογισμούς

$$\begin{aligned} \Delta g_n &= y^2 v_n(y)\Delta_x u(x) + y^2 u(x)\frac{\partial^2 v_n(y)}{\partial y^2} + (2-N)y\left(\frac{\partial v_n(y)}{\partial y}\right)\cdot u(x) \\ &= y^2 v_n(y)\Delta_x u(x) + u(x)\left[y^2 v_n'' + (2-N)y v_n'\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\Delta g_n - \lambda g_n &= -y^2 v_n(y)\Delta_x u(x) + u(x)\left[-y^2 v_n'' - (2-N)yv_n'\right] - \lambda u(x) v_n \\
&= -y^2 v_n(y)\Delta_x u(x) + u(x)\left[-y^2 v_n'' - (2-N)yv_n' - \lambda v_n\right] \\
&= -y^2 v_n(y)\Delta_x u(x) + u(x)A(y),
\end{aligned}$$

όπου $A(y) = -y^2 v_n'' - (2-N)yv_n' - \lambda v_n$. Άρα

$$\begin{aligned}
\iint (-\Delta g_n - \lambda g_n)^2 y^{-N} dxdy &= \iint \left\{-y^2 v_n(y)\Delta_x u(x) + u(x)A(y)\right\}^2 y^{-N} dxdy \\
&\leq 2\iint y^{4-N} v_n^2(y)\left(\Delta_x u(x)\right)^2 dxdy \\
&\quad +2\iint u^2(x)A^2(y)y^{-N} dxdy \\
&= 2\left(\int \left(\Delta_x u(x)\right)^2 dx\right)\left(\int y^{4-N} v_n^2(y)dy\right) \\
&\quad +2\left(\int u^2(x)dx\right)\left(\int A^2(y)y^{-N}dy\right),
\end{aligned}$$

και

$$\iint g_n^2(x,y)y^{-N}dxdy = \left(\int u^2(x)dx\right)\left(\int v_n^2(y)y^{-N}dy\right).$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\frac{\iint(-\Delta g_n - \lambda g_n)^2 y^{-N} dxdy}{\iint g_n^2(x,y)y^{-N}dxdy} &\leq 2\frac{\int \left(\Delta_x u(x)\right)^2 dx}{\int u^2(x)dx}\cdot\frac{\int y^{4-N}v_n^2(y)dy}{\int y^{-N}v_n^2(y)dy} + \\
&\quad +2\frac{\int A^2(y)y^{-N}dy}{\int y^{-N}v_n^2(y)dy}. \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι για να επιβεβαιώσουμε την (2.8), πρέπει να δείξουμε ότι ο κάθε όρος του δεξιού μέλους της (2.9) τείνει στο μηδέν. Ο πρώτος τείνει στο μηδέν από την υπόθεση (2.7), και από το γεγονός ότι η v_n έχει συμπαγές στήριγμα. Επομένως για τον δεύτερο όρο θα πρέπει να υπολογίσουμε το $A(y)$. Πρώτα θα βρούμε εκφράσεις για τα v_n', v_n''.

$$\begin{aligned}
v_n'(y) &= \left(y^s\varphi\Big(\frac{\log y}{n}\Big)\right)' = sy^{s-1}\varphi\Big(\frac{\log y}{n}\Big) + \frac{1}{y}\frac{1}{n}y^s\varphi'\Big(\frac{\log y}{n}\Big) \\
&= y^{s-1}\left(s\varphi\Big(\frac{\log y}{n}\Big) + \frac{1}{n}\varphi\Big(\frac{\log y}{n}\Big)\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_n''(y) &= (s-1)y^{s-2}\left(s\varphi\Big(\frac{\log y}{n}\Big) + \frac{1}{n}\varphi'\Big(\frac{\log y}{n}\Big)\right) + y^{s-1}\left(s\frac{1}{y}\frac{1}{n}\varphi'\Big(\frac{\log y}{n}\Big)\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{n^2}\frac{1}{y}\varphi''\Big(\frac{\log y}{n}\Big)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (s-1)y^{s-2}\left(s\varphi\Big(\frac{\log y}{n}\Big)+\frac{1}{n}\varphi'\Big(\frac{\log y}{n}\Big)\right)+y^{s-2}\left(\frac{s}{n}\varphi'\Big(\frac{\log y}{n}\Big)\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{n^2}\varphi''\Big(\frac{\log y}{n}\Big)\right)\\
&= s(s-1)y^{s-2}\varphi\Big(\frac{\log y}{n}\Big)+\frac{2s-1}{n}y^{s-2}\varphi'\Big(\frac{\log y}{n}\Big)+\frac{1}{n^2}y^{s-2}\varphi''\Big(\frac{\log y}{n}\Big).
\end{aligned}$$

Τελικά,

$$\begin{aligned}
A(y) &= -y^2v_n''-(2-N)yv_n'-\lambda v_n=-s(s-1)y^s\varphi\Big(\frac{\log y}{n}\Big)-\frac{2s-1}{n}y^s\varphi'\Big(\frac{\log y}{n}\Big)\\
&\quad-\frac{1}{n^2}y^s\varphi''\Big(\frac{\log y}{n}\Big)-(2-N)y^s\left[s\varphi\Big(\frac{\log y}{n}\Big)+\frac{1}{n}\varphi'\Big(\frac{\log y}{n}\Big)\right]\\
&\quad-s(N-1-s)y^s\varphi\Big(\frac{\log y}{n}\Big)\\
&= -\left(\frac{2s-1}{n}+\frac{2-N}{n}\right)y^s\varphi'\Big(\frac{\log y}{n}\Big)-\frac{1}{n^2}y^s\varphi''\Big(\frac{\log y}{n}\Big)\\
&= \frac{N-2s-1}{n}y^s\varphi'\Big(\frac{\log y}{n}\Big)-\frac{1}{n^2}y^s\varphi''\Big(\frac{\log y}{n}\Big),
\end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned}
\int A^2(y)y^{-N}dy &= \int\left[\frac{N-2s-1}{n}y^s\varphi'\Big(\frac{\log y}{n}\Big)-\frac{1}{n^2}y^s\varphi''\Big(\frac{\log y}{n}\Big)\right]^2y^{-N}dy\\
&\leq 2\int\left[\frac{(N-2s-1)^2}{n^2}y^{2s}\left(\varphi'\Big(\frac{\log y}{n}\Big)\right)^2+\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{n^4}y^{2s}\left(\varphi''\Big(\frac{\log y}{n}\Big)\right)^2\right]y^{-N}dy.
\end{aligned}$$

Επειδή η συνάρτηση φ έχει συμπαγές στήριγμα, οι συναρτήσεις $\varphi'\big(\frac{\log y}{n}\big)$ και $\varphi''\big(\frac{\log y}{n}\big)$, είναι διάφορες του μηδενός για $U_1=\{y\in\mathbb{R}: e^n<y<e^{2n}\}$ και για $U_2=\{y\in\mathbb{R}: e^{-2n}<y<e^{-n}\}$, και η φ για $U_3=\{y\in\mathbb{R}: e^{-2n}<y<e^{2n}\}$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\begin{aligned}
\int A^2(y)y^{-N}dy &\leq c_1\frac{1}{n^2}\int_{U_1\cup U_2}y^{2s-N}dy+c_2\frac{1}{n^4}\int_{U_1\cup U_2}y^{2s-N}dy\\
&= \left(c_1\frac{1}{n^2}+c_2\frac{1}{n^4}\right)\int_{U_1\cup U_2}y^{2s-N}dy,
\end{aligned}$$

και

$$\int v_n^2(y)y^{-N}dy = \int y^{2s}\left(\varphi\Big(\frac{\log y}{n}\Big)\right)^2y^{-N}dy=c_3\int_{U_3}y^{2s-N}dy$$

$$\geq \; c_3 \int\limits_{U_1 \cup U_2} y^{2s-N} dy.$$

Τελικά,

$$\frac{\int A^2(y) y^{-N} dy}{\int v_n^2(y) y^{-N} dy} \leq \frac{c_1 \frac{1}{n^2} + c_2 \frac{1}{n^4}}{c_3} \cdot \frac{\int\limits_{U_1 \cup U_2} y^{2s-N} dy}{\int\limits_{U_1 \cup U_2} y^{2s-N} dy} = \frac{c_1 \frac{1}{n^2} + c_2 \frac{1}{n^4}}{c_3} \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Οπότε, γυρνώντας στην σχέση (2.9) έχουμε ότι

$$\frac{\iint (-\Delta g_n - \lambda g_n)^2 y^{-N} dx dy}{\iint g_n^2(x, y) y^{-N} dx dy} \longrightarrow 0.$$

Έτσι εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1.3.7, για την ακολουθία $z_n = g_n / \|g_n\|$ αφού προφανώς $\|z_n\| = 1$, παίρνουμε $\lambda \in \sigma(L)$. □

Κάνοντας έναν απολογισμό του Κεφαλαίου, παίρνουμε κάποιες χρήσιμες παρατηρήσεις. Υπολογίσαμε το φάσμα του τελεστή Laplace σε χώρους μορφής. Παρατηρούμε ότι στην μοναδιαία Σφαίρα, το φάσμα είναι διακριτό, ενώ στον Ευκλείδειο και Υπερβολικό χώρο το φάσμα είναι ίσο με το ουσιαστικό φάσμα του τελεστή Laplace. Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση της μοναδιαίας Σφαίρας, το γεγονός ότι το φάσμα είναι διακριτό είναι άμεση συνέπεια της συμπάγειας του πολυπτύγματος, όπως θα αποδείξουμε στο επόμενο Κεφάλαιο (Πόρισμα 3.1.5).

Επίσης, στις περιπτώσεις του Ευκλείδειου και του Υπερβολικού χώρου το φάσμα του τελεστή Laplace ταυτίζεται με το ουσιαστικό φάσμα. Όμως, υπάρχει μια πολύ σημαντική διαφορά. Στον Ευκλείδειο χώρο το μηδέν ανήκει στο ουσιαστικό φάσμα, ενώ στον Υπερβολικό χώρο δεν ανήκει. Το γεγονός αυτό δεν είναι τυχαίο, και μάλιστα είναι απόρροια ενός Θεωρήματος του Brooks όπως θα δούμε στο επόμενο Κεφάλαιο. Σχετίζεται άμεσα με την αύξηση του όγκου των μπαλών στον αντίστοιχο χώρο.

Κεφάλαιο 3

Γεωμετρικές Πληροφορίες σε σχέση με το Φάσμα του Τελεστή Laplace

Το Κεφάλαιο αυτό χωρίζεται θεματικά, σε δύο μέρη. Στο πρώτο, που περιέχει τις Ενότητες 3.1 και 3.2, εργαζόμαστε με την υπόθεση ότι βρισκόμαστε σε συμπαγές πολύπτυγμα. Στο δεύτερο μέρος, που αποτελείται από τις Ενότητες 3.3,3.4 και 3.5, μελετάμε κάποιες ιδιότητες του φάσματος στην περίπτωση του μη-συμπαγούς πολυπτύγματος.

3.1 Φάσμα Συμπαγών Πολυπτυγμάτων

Εξετάζοντας το φάσμα του τελεστή Laplace σε χώρους μορφής, παρατηρήσαμε ότι το φάσμα στην μοναδιαία Σφαίρα είναι διακριτό. Το γεγονός αυτό, προκύπτει ως συνέπεια ενός γενικού Θεωρήματος σε πολυπτύγματα.

Θα αποδείξουμε ότι όταν ένα πολύπτυγμα είναι συμπαγές τότε το φάσμα του τελεστή Laplace είναι διακριτό. Κύρια εργαλεία για την απόδειξη είναι το Φασματικό Θεώρημα για συμπαγείς αυτοσυζυγείς τελεστές, καθώς και το γεγονός ότι αν το πολύπτυγμα M^N είναι συμπαγές, η απεικόνιση έγκλεισης από τον χώρο $H^1(M^N)$ στον $L^2(M^N)$ είναι συμπαγής. Θα χρειαστούμε και το επόμενο Λήμμα.

Λήμμα 3.1.1. *Έστω M^N ένα συμπαγές πολύπτυγμα Riemann. Θεωρούμε τον χάρτη (V,ψ) του M^N και μια συνάρτηση $u \in L^2(V)$. Τότε μπορούμε να ορίσουμε την συνάρτηση*

$$\widetilde{u} := u \circ \psi^{-1} : \psi(V) := \widetilde{V} \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}.$$

Οι νόρμες των χώρων $L^2(V)$ και $H^1(V)$ είναι ισοδύναμες με αυτές των χώρων $L^2(\widetilde{V})$ και $H^1(\widetilde{V})$ αντίστοιχα, δηλαδή

$$c_1\|\widetilde{u}(x)\|_{L^2(\widetilde{V})} \leq \|u(x)\|_{L^2(V)} \leq c_2\|\widetilde{u}(x)\|_{L^2(\widetilde{V})},$$

$$c_3\|\widetilde{u}(x)\|_{H^1(\widetilde{V})} \leq \|u(x)\|_{H^1(V)} \leq c_4\|\widetilde{u}(x)\|_{H^1(\widetilde{V})},$$

με c_1, c_2, c_3, c_4 σταθερές που εξαρτώνται από το x.

Επιπλέον, ισχύουν και οι εξής ισοδυναμίες

$$u \in L^2(V) \Longleftrightarrow \widetilde{u} \in L^2(\widetilde{V}),$$

$$u \in H^1(V) \Longleftrightarrow \widetilde{u} \in H^1(\widetilde{V}).$$

Απόδειξη. Έστω A ένας συμμετρικός, πραγματικός πίνακας, και $e_1, \ldots, e_\ell$ μια ορθομοναδιαία βάση ιδιοδιανυσμάτων. Συμβολίζουμε με λ_k τις αντίστοιχες ιδιοτιμές του A στα ιδιοδιανύσματα e_k, $k = 1, \ldots, \ell$. Από την γραμμική άλγεβρα γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$\begin{aligned}
\langle A\xi, \xi \rangle &= \left\langle A \sum_{k=1}^{\ell} \langle \xi, e_k \rangle e_k, \sum_{m=1}^{\ell} \langle \xi, e_m \rangle e_m \right\rangle \\
&= \sum_{k,m=1}^{\ell} \langle \xi, e_k \rangle \langle \xi, e_m \rangle \langle Ae_k, e_m \rangle \\
&= \sum_{k,m=1}^{\ell} \langle \xi, e_k \rangle \langle \xi, e_m \rangle \langle \lambda_k e_k, e_m \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{\ell} \lambda_k \langle \xi, e_k \rangle^2 .
\end{aligned}$$

Άρα

$$\sum_{k=1}^{\ell} \lambda_{min} \langle \xi, e_k \rangle^2 \leq \langle A\xi, \xi \rangle \leq \sum_{k=1}^{\ell} \lambda_{max} \langle \xi, e_k \rangle^2 ,$$

όπου με λ_{min} και με λ_{max} συμβολίζουμε την ελάχιστη και τη μέγιστη ιδιοτιμή του δοθέντος πίνακα αντίστοιχα. Επειδή οι συνιστώσες του πίνακα της μετρικής είναι συνεχείς συναρτήσεις στο V για κάθε μπάλα D που περιέχεται συμπαγώς στο V ισχύει,

$$\|u(x)\|^2_{L^2(D)} = \int_D |u(x)|^2 dv = \int_{\psi(D)} |\widetilde{u}(x)|^2 \sqrt{g(x)} dx \asymp \int_{\psi(D)} |\widetilde{u}(x)|^2 dx = \|\widetilde{u}(x)\|^2_{L^2(\psi(D))},$$

όπου $\asymp$ σημαίνει φράξιμο από πάνω και από κάτω, από ένα πολλαπλάσιο του $\|\widetilde{u}(x)\|^2_{L^2(\psi(D))}$. Επίσης

$$\int_D |\nabla u|^2 dv = \int_{\psi(D)} \sum_{i,j} g^{ij}(x) \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_j} \sqrt{g(x)} dx \asymp \int_{\psi(D)} |\nabla_{\text{Ευκλ}} \widetilde{u}|^2_{\text{Ευκλ}} dx.$$

Αφού

$$\lambda_{min}(x) |\nabla_{\text{Ευκλ}} \widetilde{u}|^2_{\text{Ευκλ}} \leq \sum_{i,j} g^{ij}(x) \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_j} \leq \lambda_{max}(x) |\nabla_{\text{Ευκλ}} \widetilde{u}|^2_{\text{Ευκλ}},$$

ή

$$\lambda |\xi|^2 < \lambda_{min}(x) |\xi|^2 \leq \sum_{i,j} g^{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \lambda_{max}(x) |\xi|^2 < \Lambda |\xi|^2,$$

για κάθε $\xi \in \mathbb{R}^N$, έχουμε

$$\|u(x)\|^2_{H^1(D)} = \int_D |u(x)|^2 dv + \int_D |\nabla u|^2 dv \asymp \|\widetilde{u}(x)\|^2_{H^1(\psi(D))}.$$

Λόγω της συμπάγειας του M μπορούμε να βρούμε κάλυψη του M από πεπερασμένου πλήθους μπάλες και κάθε μια από τις οποίες να περιέχεται συμπαγώς σε κάποιον χάρτη. Από τα παραπάνω, έπεται ότι η στάθμη $\|\cdot\|_{L^2(\widetilde{V})}$ με την $\|\cdot\|_{L^2(V)}$ είναι ισοδύναμες. Το ίδιο ισχύει και για τις στάθμες $\|\cdot\|_{H^1(\widetilde{V})}$ και $\|\cdot\|_{H^1(V)}$. Οι επόμενοι ισχυρισμοί είναι άμεση συνέπεια των παραπάνω ισοδυναμίων των σταθμών. □

Θεώρημα 3.1.2. *Έστω M^N ένα διαφορίσιμο και συμπαγές πολύπτυγμα Riemann διάστασης N. Τότε η απεικόνιση έγκλεισης*

$$i : H^1(M^N) \hookrightarrow L^2(M^N),$$

είναι συμπαγής.

Απόδειξη. Θεωρούμε άτλαντα του M^N αποτελούμενο από τους χάρτες (U_α, ψ_α), $\alpha \in A$, όπου A σύνολο δεικτών. Επειδή το M^N είναι συμπαγές, μπορούμε να βρούμε μια πεπερασμένη κάλυψη του M^N από τα U_α, δηλαδή $\cup_{\alpha=1}^{k} U_\alpha = M^N$.

Παίρνουμε μια φραγμένη ακολουθία $(u_n) \subset H^1(M^N)$, με $\|u_n\|_{H^1(M^N)} \leq 1$. Θα δείξουμε ότι η u_n έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία στον $L^2(M^N)$. Ξέρουμε ότι για κάθε κάλυψη του διαφορίσιμου πολυπτύγματος M^N με ανοιχτά υποσύνολα U_α, υπάρχει διαμερισμός της μονάδας $\{y_\alpha\}_{\alpha\in I}$, $I = \{1, \ldots, k\}$ με την ιδιότητα $\mathrm{supp}(y_\alpha) \subset U_\alpha$, για κάθε $\alpha \in I$ (βλέπε [Si-Th]). Δηλαδή υπάρχει μια συλλογή διαφορισίμων συναρτήσεων $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}, \varphi_\alpha \in C_c^\infty(M^N)$ με τις εξής ιδιότητες

(i) Η συλλογή των $\{\mathrm{supp}(\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ είναι μια τοπικά πεπερασμένη κάλυψη του M^N, δηλαδή για κάθε $p \in M^N$ υπάρχει ανοιχτή περιοχή U του p, τέτοια ώστε $U \cap U_\alpha \neq \emptyset$ μόνο για πεπερασμένα α.

(ii) για κάθε $\alpha \in I$, ισχύει $\varphi_\alpha \geq 0$ και επιπλέον $\sum\limits_{\alpha\in I} \varphi_\alpha(p) = 1$, για κάθε $p \in M^N$.

Ορίζουμε επίσης τις συναρτήσεις

$$\widetilde{\varphi_\alpha} := \varphi_\alpha \circ \psi_\alpha^{-1} : \widetilde{U_\alpha} := \psi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R},$$

και

$$\widetilde{u_n} := u_n \circ \psi_\alpha^{-1} : \widetilde{U_\alpha} := \psi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}.$$

Συνεπώς, κάνοντας χρήση του Λήμματος 3.1.1, αφού $u_n\varphi_\alpha$ είναι φραγμένη στο $H^1(U_\alpha)$, θα είναι και η $\widetilde{u_n}\widetilde{\varphi_\alpha}$ στο $H^1(\widetilde{U_\alpha})$. Επομένως, επειδή η $\widetilde{u_n}\widetilde{\varphi_\alpha}$ θα συγκλίνει στο $L^2(\widetilde{U_\alpha})$ και η $u_n\varphi_\alpha$ θα συγκλίνει στο $L^2(U_\alpha)$. Έστω

$$u_n\varphi_\alpha \xrightarrow{L^2(U_\alpha)} v_\alpha, \quad \text{για κάθε } \alpha \in I.$$

Τότε

$$u_n \xrightarrow{L^2(M^N)} v \text{ με } v = \sum_{\alpha=1}^{k} v_\alpha.$$

Πράγματι

$$\|u_n - v\|_{L^2(M^N)} = \|\sum_{\alpha\in I}(u_n\varphi_\alpha - v_\alpha)\|_{L^2(M^N)} \leq \sum_{\alpha\in I} \|u_n\varphi_\alpha - v_\alpha\|_{L^2(M^N)},$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Ακολουθεί ένα Θεώρημα που αφορά μη-αρνητικούς τελεστές. μια απόδειξη για τον πρώτο ισχυρισμό βλέπε [Da1], ενώ για τον δεύτερο στο [Da2].

Πρόταση 3.1.3. *Έστω* H *είναι ένας μη-αρνητικός τελεστής ορισμένος σε ένα πολύπτυγμα Riemann* M^N. *Τότε*

$$\mathfrak{D}(\mathrm{H}) \subset \mathfrak{D}(\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}).$$

Επιπρόσθετα, αν ο τελεστής H *είναι ο τελεστής Laplace-Beltrami* L, *τότε*

$$\mathfrak{D}(L) \subset \mathfrak{D}(L^{\frac{1}{2}}) = H^1(M^N).$$

Θεώρημα 3.1.4. *Έστω* H *ένας μη-αρνητικός και αυτοσυζυγής τελεστής επί ενός χώρου Hilbert* $\mathcal{H}$. *Αν η απεικόνιση έγκλεισης*

$$i : \mathfrak{D}(\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}) \hookrightarrow \mathcal{H}$$

είναι συμπαγής τότε το φάσμα του τελεστή H *είναι διακριτό.*

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το μηδέν δεν ανήκει στο φάσμα του τελεστή H, αφού σε διαφορετική περίπτωση μπορούμε να δουλέψουμε με τον τελεστή $\mathrm{H}+1$ έτσι ώστε να είναι αντιστρεπτός. Περιορίζοντας το πεδίο τιμών του τελεστή

$$\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}} : \mathcal{H} \to \mathcal{H},$$

στο σύνολο $\mathfrak{D}(\mathrm{H}^{\frac{1}{2}})$, παίρνουμε έναν καινούργιο τελεστή τον οποίο συμβολίζουμε και πάλι με $\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}$,

$$\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}} : \mathcal{H} \to \mathfrak{D}(\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}).$$

Ο τελεστής $\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}} : \mathcal{H} \to \mathfrak{D}(\mathrm{H}^{\frac{1}{2}})$ είναι φραγμένος. Πράγματι

$$\begin{aligned} \| \mathrm{H}^{-\frac{1}{2}} u\|_{\mathfrak{D}(\mathrm{H}^{\frac{1}{2}})} &= \| \mathrm{H}^{\frac{1}{2}} \mathrm{H}^{-\frac{1}{2}} u\|_{\mathcal{H}} + \|u\|_{\mathcal{H}} \\ &= 2\|u\|_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε τον τελεστή $\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ως σύνθεση ενός φραγμένου και ενός συμπαγούς τελεστή όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[rr, "\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}"] \arrow[dr, "\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}"'] & & \mathcal{H} \\ & \mathfrak{D}(\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}) \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

Άρα ο $\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ είναι συμπαγής τελεστής και έτσι ο τελεστής

$$\mathrm{H}^{-1} = \mathrm{H}^{-\frac{1}{2}} \mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}$$

είναι και αυτός συμπαγής και αυτοσυζυγής. Επομένως, εφαρμόζοντας το Φασματικό Θεώρημα για συμπαγείς και αυτοσυζυγείς τελεστές παίρνουμε τα εξής:

Υπάρχει ορθομοναδιαία βάση $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ του $\mathcal{H}$, και $\{\mu_i\}_{i=1}^{\infty}$ μια φθίνουσα ακολουθία μεμονωμένων ιδιοτιμών πεπερασμένης πολλαπλότητας με $\lim_{i\to\infty}\mu_i = 0$,

$$\mathrm{H}^{-1}u_i = \mu_i u_i.$$

Επομένως,

$$\mathrm{H}\,u_i = \frac{1}{\mu_i}u_i = \lambda_i u_i$$

με $\lim_{i\to\infty}\lambda_i = +\infty$. Επειδή τα u_i αποτελούν ορθομοναδιαία βάση του $\mathcal{H}$, εξασφαλίζουμε την μη ύπαρξη άλλων ιδιοτιμών του Η. □

Πόρισμα 3.1.5. *Έστω M^N ένα συμπαγές πολύπτυγμα Riemann. Τότε το φάσμα του τελεστή Laplace-Beltrami L είναι διακριτό.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 3.1.2 έχουμε ότι η απεικόνιση έγκλεισης

$$i : H^1(M^N) \hookrightarrow L^2(M^N),$$

είναι συμπαγής. Άρα το Πόρισμα προκύπτει με εφαρμογή του Θεωρήματος 3.1.4, όπου $\mathcal{H} \equiv L^2(M^N)$ και $\mathfrak{D}(L^{\frac{1}{2}}) \equiv H^1(M^N)$. □

3.2 Χρήσιμα Αποτελέσματα από το Φάσμα του Τελεστή Laplace σε Συμπαγή Πολυπτύγματα

Σκοπός αυτής της Ενότητας είναι να παρουσιάσουμε κάποιες εφαρμογές που προκύπτουν όταν γνωρίζουμε το φάσμα του τελεστή Laplace επί ενός συμπαγούς πολυπτύγματος Riemann. Χρησιμοποιώντας τον ασυμπτωτικό τύπο του Weyl, γνωρίζοντας τον όγκο του πολυπτύγματος παίρνουμε προσεγγίσεις για τον αριθμό των ιδιοτιμών αλλά και για τις ίδιες τις ιδιοτιμές του τελεστή Laplace, καθώς και αντίστροφα.

Θεωρούμε τα ακόλουθα προβλήματα ιδιοτιμών

1. ***Κλειστό πρόβλημα ιδιοτιμών***: Έστω M^m ένα συμπαγές και συνεκτικό πολύπτυγμα Riemann χωρίς σύνορο. Να βρεθούν όλοι οι πραγματικοί αριθμοί λ για τους οποίους υπάρχει μη τετριμμένη λύση $u \in C^2(M^m)$ της εξίσωσης

$$\Delta u + \lambda u = 0. \tag{3.1}$$

2. ***Πρόβλημα ιδιοτιμών Dirichlet***: Έστω $M^m (m \geq 2)$ συμπαγές και συνεκτικό πολύπτυγμα Riemann με λείο σύνορο $\partial M^m \neq \emptyset$. Να βρεθούν όλοι οι πραγματικοί αριθμοί λ για τους οποίους υπάρχει μη τετριμμένη λύση $u \in C^2(M^m \backslash \partial M^m) \cap C^0(M^m)$ στην εξίσωση (3.1), που ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη

$$u = 0,$$

στο ∂M^m.

3. ***Πρόβλημα ιδιοτιμών Neumann***: Έστω $M^m(m \geq 2)$ συμπαγές και συνεκτικό πολύπτυγμα Riemann με λείο σύνορο $\partial M^m \neq \emptyset$. Να βρεθούν όλοι οι πραγματικοί αριθμοί λ για τους οποίους υπάρχει μη τετριμμένη λύση $u \in C^2(M^m \backslash \partial M^m) \cap C^1(M^m)$ στην εξίσωση (3.1), που ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη
$$\nu u = 0,$$
στο ∂M^m, όπου ν το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο με φορά προς το εξωτερικό του M^m.

4. ***Μικτό Πρόβλημα ιδιοτιμών*** : Έστω $M^m(m \geq 2)$ συμπαγές και συνεκτικό πολύπτυγμα Riemann με λείο σύνορο $\partial M^m \neq \emptyset$, και N ανοιχτό υποπολύπτυγμα του ∂M^m. Να βρεθούν όλοι οι πραγματικοί αριθμοί λ για τους οποίους υπάρχει μη τετριμμένη λύση $u \in C^2(M^m \backslash \partial M^m) \cap C^1((M^m \backslash \partial M^m) \cup N) \cap C^0(M^m)$ στην εξίσωση (3.1), που ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες
$$u = 0, \text{ στο } \partial M^m \backslash N \text{ και } \nu u = 0, \text{ στο } N$$
όπου ν το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο με φορά προς το εξωτερικό του M^m.

Ακολουθεί ο ασυμπτωτικός τύπος του Weyl, βλέπε [W].

Θεώρημα 3.2.1. *(Ασυμπτωτικός τύπος του Weyl) Θεωρούμε ένα οποιοδήποτε από τα παραπάνω προβλήματα ιδιοτιμών στο πολύπτυγμα Riemann $(M^m, \langle , \rangle)$. Συμβολίζουμε με $I(\lambda)$ τον αριθμό των ιδιοτιμών (μετρημένο με την πολλαπλότητά τους) που είναι μικρότερες ή ίσες του $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε*
$$I(\lambda) \sim \alpha_m \frac{\lambda^{\frac{m}{2}}}{(2\pi)^m} \operatorname{vol} M^m, \text{ καθώς } \lambda \to \infty, \tag{3.2}$$
όπου θυμίζουμε ότι α_m είναι ο όγκος της μοναδιαίας μπάλας στον $\mathbb{R}^m$. Επιπλέον, έχουμε
$$(\lambda_k)^{\frac{m}{2}} \sim \frac{(2\pi)^m}{\alpha_m} \frac{k}{\operatorname{vol} M^m}, \text{ καθώς } k \to \infty. \tag{3.3}$$

Παράδειγμα 3.2.2. Θα εξετάσουμε αντίστοιχα προβλήματα ιδιοτιμών στη διάσταση $m = 1$, επί της καμπύλης μήκους ℓ.

Το πρόβλημα ιδιοτιμών Dirichlet γίνεται
$$u'' + \lambda u = 0,$$
με αρχικές συνθήκες
$$u(0) = u(\ell) = 0.$$
Οι ιδιοτιμές σε αυτήν την περίπτωση είναι
$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2,$$

και οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι παράγονται από τις συναρτήσεις

$$u_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}}\sin\left(\frac{\pi k x}{\ell}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, .$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι στις σχέσεις (3.2) και (3.3) ισχύει η ισότητα.

Όμοια, το πρόβλημα ιδιοτιμών Neumann, με συνοριακές συνθήκες

$$u'(0) = u'(\ell) = 0,$$

δίνει λύσεις τις

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi(k-1)}{\ell}\right)^2.$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, βλέπουμε ότι ισχύουν οι τύποι του Weyl, διότι καταλήγουμε στα παρακάτω όρια

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k}{k-1} \text{ και } \lim_{k\to\infty}\frac{k-1}{k},$$

τα οποία είναι ίσα με την μονάδα.

Τέλος, στην περίπτωση του μεικτού προβλήματος ιδιοτιμών με συνοριακές συνθήκες

$$u'(0) = u(\ell) = 0,$$

ή

$$u(0) = u'(\ell) = 0,$$

έχουμε λύσεις

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi(k-\frac{1}{2})}{\ell}\right)^2$$

όπου και εδώ πληρούνται οι τύποι του Weyl.

3.3 Το infimum του Ουσιαστικού Φάσματος

Σκοπός αυτού του Κεφαλαίου είναι να αποδείξουμε ότι το infimum του ουσιαστικού φάσματος του τελεστή Laplace σε ένα πλήρες πολύπτυγμα Riemann M^N, δίνεται από την σχέση

$$\inf \sigma_{ess}(L) = \sup_{K\subset M^N}\left[\inf_{\phi\neq 0}\left\{\langle\phi, -\Delta\phi\rangle\,\|\phi\|^{-2} : \phi\in C_c^\infty(M^N\backslash K)\right\}\right],$$

όπου το supremum παίρνετε υπεράνω όλων των συμπαγών υποσυνόλων K, του M^N. Αυτή είναι η λεγόμενη Αρχη της Διάσπασης των Donnelly-Li (Decomposition Principle) (βλέπε [Do-Li]) ή το Λήμμα του Persson (βλέπε [Per]), το οποίο θα κάνουμε χρήση στην επόμενη ενότητα. Χρειαζόμαστε κάποιες έννοιες και Προτάσεις από τις οποίες παραθέτουμε αποδείξεις μόνο για αυτές που δεν ξεφεύγουν από τον σκοπό αυτής της εργασίας.

Ορισμός 3.3.1. *Μια ακολουθία λέγεται **ακολουθία Weyl** για τον τελεστή A και το λ αν υπάρχει ακολουθία $(u_n) \subset \mathfrak{D}(A)$, τέτοια ώστε*

$$\|u_n\| = 1, \ \ u_n \xrightarrow{w} 0 \textit{ και } (A - \lambda)u_n \xrightarrow{s} 0.$$

Θυμίζουμε ότι σε ένα χώρο Hilbert μια ακολουθία (u_n) **συγκλίνει ασθενώς** σε ένα $u \in \mathcal{H}$ αν για κάθε $v \in \mathcal{H}$, $\langle u_n, v\rangle \to \langle u, v\rangle$ καθώς $n \to \infty$, και γράφουμε $u_n \xrightarrow{w} u$. Μια ακολουθία **συγκλίνει ισχυρώς** στο u αν $\|u_n - u\| \to 0$ καθώς $n \to \infty$, και γράφουμε $u_n \xrightarrow{s} u$.

Θεώρημα 3.3.2. *(Κριτήριο Weyl) Έστω A ένας αυτοσυζυγής τελεστής. Τότε $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$ αν και μόνο αν υπάρχει μια ακολουθία Weyl για τον A και το λ.*

Το παραπάνω Θεώρημα είναι πολύ σημαντικό, και για την απόδειξη του οποίου χρειαζόμαστε εργαλεία της Συναρτησιακής Ανάλυσης τα οποία ξεφεύγουν από το σκοπό της παρούσας διατριβής. Για μια απόδειξη του Κριτηρίου Weyl βλέπε [Hi-Si].

Παρατήρηση 3.3.3. Τονίζουμε ότι η διαφορά μεταξύ του Κριτηρίου Weyl και του Θεωρήματος 1.3.7 βρίσκεται στην ασθενή σύγκλιση της ακολουθίας στο μηδέν. Είναι εμφανές ότι οι ιδιοτιμές του A με πεπερασμένη πολλαπλότητα χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι αν κατασκευάσουμε μια ακολουθία που ικανοποιεί το Θεώρημα 1.3.7, οι όροι της ακολουθίας μπορεί να μην συγκλίνουν ασθενώς στο μηδέν. Συνεπώς, αν οι όροι συγκλίνουν ασθενώς στο μηδέν, τότε υποψιαζόμαστε ότι το $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$. Αυτή είναι η ιδέα του Κριτηρίου Weyl.

Ακολουθώντας την μέθοδο του Persson, θα βρούμε μια έκφραση για το infimum του ουσιαστικού φάσματος. Θα χρειαστούμε κάποιους ορισμούς.

Ορισμός 3.3.4. *Ένας γραμμικός τελεστής B καλείται A-**φραγμένος** (A-bounded) αν $\mathfrak{D}(B) \supset \mathfrak{D}(A)$ και αν υπάρχουν α, β μη αρνητικές σταθερές τέτοιες ώστε*

$$\|Bu\| \leq \alpha\|Au\| + \beta\|u\|,$$

για κάθε $u \in \mathfrak{D}(A)$.

Ορισμός 3.3.5. *Ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής A σε έναν χώρο Hilbert καλείται **συμπαγής** (compact) αν απεικονίζει κάθε ασθενώς συγκλίνουσα ακολουθία σε μια ισχυρώς συγκλίνουσα ακολουθία.*

Επίσης, ένας γραμμικός τελεστής A με πεδίο ορισμού $\mathfrak{D}(A)$, καλείται **κλειστός** (closed), αν το γράφημά του

$$\Gamma(A) := \{(x, Ax) : x \in \mathfrak{D}(A)\},$$

είναι κλειστό υποσύνολο του χώρου Hilbert $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ με εσωτερικό γινόμενο

$$\|(x,y)\|_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} = \left[\|x\|^2_{\mathcal{H}} + \|y\|^2_{\mathcal{H}}\right]^{\frac{1}{2}},$$

με $(x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

3.4 Τοπικά Συμπαγείς Τελεστές

Ο επιλύων $R_L(\lambda)$ του τελεστή L στο λ, είναι γενικά μη συμπαγής τελεστής. Όμως, αν περιορίσουμε το πεδίο ορισμού του στον χώρο $L^2(X)$, όπου X συμπαγής χώρος, τότε ο τελεστής $R_L(\lambda)$ είναι συμπαγής. Άρα ο τελεστής L θα έχει διακριτό φάσμα με το μόνο πιθανό σημείο συσσώρευσης το άπειρο. Επομένως, το $\sigma(L)$ υποδηλώνει κατά κάποιο τρόπο την συμπάγεια του $R_L(\lambda)$. Αποδεικνύεται ότι οι παραπάνω ιδιότητες διατηρούνται, αν αντικαταστήσουμε την υπόθεση της συμπάγειας του τελεστή $R_L(\lambda)$ σε όλον τον χώρο, με αυτήν της συμπάγειας του τελεστή $R_L(\lambda)$ σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του χώρου. Με αυτήν την έννοια θα ασχοληθούμε παρακάτω, την οποία καλούμε τοπική συμπάγεια.

Ορισμός 3.4.1. *Έστω A ένας κλειστός γραμμικός τελεστής στον $L^2(\mathbb{R}^N)$ με $\rho(A) \neq \emptyset$, και έστω χ_B η χαρακτηριστική συνάρτηση για το σύνολο $B \subset \mathbb{R}^N$. Τότε ο A είναι **τοπικά συμπαγής** (locally compact) αν για κάθε φραγμένο σύνολο B, ο $\chi_B(A-z)^{-1}$ είναι συμπαγής για κάποιο $z \in \rho(A)$.*

Ορισμός 3.4.2. *Έστω A ένας κλειστός τελεστής με $\rho(A) \neq \emptyset$. Ένας τελεστής καλείται **(σχετικά) A-συμπαγής** (relatively A-compact) αν*

(i) $\mathfrak{D}(B) \supset \mathfrak{D}(A)$

(ii) *$B(A-z)^{-1}$ είναι συμπαγής για κάποιο $z \in \rho(A)$.*

Παρατηρήσεις 3.4.3.

1. Αν ένας τελεστής B είναι σχετικά A-συμπαγής, τότε από το (i) του ορισμού έχουμε ότι είναι σχετικά A-φραγμένος. Η έννοια της σχετικής συμπάγειας είναι συνδεδεμένη με την τοπική συμπάγεια. Προφανώς, ένας τελεστής A στον $L^2(\mathbb{R}^N)$ είναι τοπικά συμπαγής αν και μόνο αν η χαρακτηριστική συνάρτηση χ_B, για κάθε φραγμένο $B \subset \mathbb{R}^N$, είναι σχετικά A-συμπαγής.

2. Από τον ορισμό 3.4.1, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η $\chi_B(A-z)^{-1}$, είναι συμπαγής για όλα τα στοιχεία του $\rho(A)$, από την ταυτότητα
$$\begin{aligned}(A-\mu)^{-1} &= (A-z)^{-1} + (\mu - z)(A-\mu)^{-1}(A-z)^{-1} \\ &= (A-z)^{-1} + (\mu - z)(A-z)^{-1}(A-\mu)^{-1},\end{aligned}$$
για κάθε $\mu \in \rho(A)$. Το ίδιο ισχύει και για τον ορισμό 3.4.2.

3. Ο τελεστής L είναι τοπικά συμπαγής στον $L^2(\mathbb{R}^N)$ (βλέπε [Hi-Si] Κεφάλαιο 10).

Αποδεικνύουμε τώρα ένα σημαντικό Θεώρημα που αφορά τους σχετικά συμπαγείς τελεστές. Το Θεώρημα αυτό, που οφείλεται στον Weyl, δηλώνει ότι το ουσιαστικό φάσμα ενός τελεστή είναι αναλλοίωτο κάτω από σχετικά συμπαγείς διαταραχές. Αποδεικνύουμε την εκδοχή του θεωρήματος για αυτοσυζυγείς τελεστές. Θα χρειαστούμε και το επόμενο Λήμμα.

Λήμμα 3.4.4. *Έστω A και B δύο αυτοσυζυγείς τελεστές. Αν ο τελεστής $A-B$ είναι A-συμπαγής, τότε είναι και B-συμπαγής.*

Απόδειξη. Προφανώς $\mathfrak{D}(V) \subset \mathfrak{D}(B)$. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι ο τελεστής $VR_B(z)$ είναι συμπαγής για κάποιο $z \in \rho(A)$. Από την ταυτότητα

$$R_B(i) - R_A(i) = -R_B(i)VR_A(i),$$

έχουμε ότι

$$R_B(i)\,(1 + VR_A(i)) = R_A(i).$$

Όμως το -1 δεν ανήκει στο $\sigma(VR_A(i))$ από το Θεώρημα Fredholm alternative(για παράδειγμα βλέπε [Hi-Si]). Άρα ο τελεστής $1 + VR_A(i)$ είναι αντιστρεπτός. Έτσι

$$VR_B(i) = VR_A(i)\,(1 + VR_A(i))^{-1},$$

το οποίο είναι αυτό που θέλαμε να δείξουμε. Πράγματι, επειδή ο τελεστής V είναι A-συμπαγής συνεπάγεται ότι ο τελεστής $VR_A(i)$ είναι συμπαγής. Επίσης, ο όρος $(1 + VR_A(i))^{-1}$ είναι φραγμένος. Τελικά ο τελεστής $VR_B(i)$ είναι συμπαγής ως σύνθεση συμπαγούς και φραγμένου τελεστή. □

Θεώρημα 3.4.5. *(Θεώρημα Weyl) Έστω A και B αυτοσυζυγείς τελεστές, και έστω ότι ο $A - B$ είναι A-συμπαγής. Τότε*

$$\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B).$$

Απόδειξη. $(\Rightarrow)$ Έστω $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$. Θα δείξουμε ότι $\lambda \in \sigma_{ess}(B)$. Εφαρμόζοντας το Κριτήριο Weyl, Θεώρημα 3.3.2, υπάρχει μια ακολουθία Weyl (u_n) για τον A και το λ, δηλαδή

$$u_n \in \mathfrak{D}(A),\ \|u_n\| = 1,\ u_n \xrightarrow{w} 0 \text{ και } (A - \lambda)u_n \xrightarrow{s} 0.$$

Όμως

$$(i - A)u_n = (\lambda - A)u_n + (i - \lambda)u_n \xrightarrow{w} 0, \tag{3.4}$$

αφού $(\lambda - A)u_n \xrightarrow{s} 0$ και $u_n \xrightarrow{w} 0$ από τον ορισμό της ακολουθίας Weyl. Για να δείξουμε ότι $\lambda \in \sigma_{ess}(B)$, αρκεί να βρούμε μια ακολουθία Weyl για τον B και το λ. Αυτή η ακολουθία είναι η (u_n). Πράγματι,

$$(\lambda - B)u_n = (\lambda - A)u_n + (A - B)(i - A)^{-1}(i - A)u_n. \tag{3.5}$$

Ο πρώτος όρος του δευτέρου μέλους συγκλίνει ισχυρώς στο μηδέν. Από την υπόθεση ότι ο $A - B$ είναι A-συμπαγής παίρνουμε ότι ο τελεστής $(A - B)(i - A)^{-1}$ είναι συμπαγής, το οποίο σημαίνει ότι στέλνει την ασθενώς συγκλίνουσα ακολουθία $(i - A)u_n$ σε μια ισχυρώς συγκλίνουσα ακολουθία που τείνει στο μηδέν. Επομένως, η (u_n) είναι ακολουθία Weyl για το λ και B. Αυτό αποδεικνύει ότι $\sigma_{ess}(A) \subset \sigma_{ess}(B)$.

$(\Leftarrow)$Για το αντίστροφο δεν έχουμε παρά να εναλλάξουμε τους ρόλους των A και B σε όλα τα παραπάνω και να καταλήξουμε στο $\sigma_{ess}(B) \subset \sigma_{ess}(A)$, το οποίο σημαίνει τελικά ότι $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B)$. Πράγματι από την υπόθεση ότι A, B αυτοσυζυγείς τελεστές και ο $A - B$ είναι A-συμπαγής, από το Λήμμα 3.4.4 συνεπάγεται ότι και ο $A - B$ είναι B-συμπαγής. □

Το ουσιαστικό φάσμα τοπικά συμπαγών τελεστών καθορίζεται από την δράση των τελεστών σε περιοχές του απείρου. Η ιδέα αυτή μας παρέχει ένα εξαιρετικά χρήσιμο εργαλείο για τον υπολογισμό του ουσιαστικού φάσματος. Θα εισάγουμε μια συγκεκριμένη οικογένεια ακολουθιών, που λέγονται Zhislin ακολουθίες, οι οποίες θα μας βοηθήσουν να χαρακτηρίσουμε το ουσιαστικό φάσμα τοπικά συμπαγών, αυτοσυζυγών τελεστών.

Ορισμός 3.4.6. *Έστω $B_k = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq k, k \in \mathbb{N}\}$. Μια ακολουθία (u_n) θα λέγεται **ακολουθία Zhislin** για έναν κλειστό τελεστή A και $\lambda \in \mathbb{C}$ αν $u_n \in \mathfrak{D}(A) \subset L^2(\mathbb{R}^N)$,*

$$\|u_n\| = 1, \operatorname{supp} u_n \subset \{x : x \in \mathbb{R}^N \setminus B_n\}, \text{ και } \|(A-\lambda)u_n\| \to 0 \text{ καθώς } n \to \infty.$$

Ορισμός 3.4.7. *Έστω A κλειστός τελεστής. Το σύνολο όλων των $\lambda \in \mathbb{C}$ για τα οποία υπάρχει μια Zhislin ακολουθία για τον A και το λ, καλείται **Zhislin φάσμα** του A, το οποίο το συμβολίζουμε $Z(A)$.*

Έστω A, B γραμμικοί τελεστές. Συμβολίζουμε $[A, B]$ τον **αντιμεταθέτη** (commutator) των A, B που ορίζεται ως εξής

$$[A, B] = AB - BA.$$

Το επόμενο Θεώρημα δηλώνει ότι το ουσιαστικό φάσμα είναι ίσο με το Zhislin φάσμα ενός αυτοσυζυγούς, τοπικά συμπαγούς τελεστή ο οποίος είναι επίσης τοπικός με την έννοια (3.6) που ακολουθεί

Θεώρημα 3.4.8. *Έστω A ένας αυτοσυζυγής και τοπικά συμπαγής τελεστής στον $L^2(\mathbb{R}^N)$. Υποθέτουμε ότι ο A ικανοποιεί την*

$$\|[A, \phi_n(x)](A-i)^{-1}\| \to 0 \text{ καθώς } n \to \infty, \tag{3.6}$$

όπου $\phi_n(x) = \phi(x/n)$ για κάποια $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, με $\operatorname{supp}\phi \subset B_2(0) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq 2\}$, $\phi \geq 0$ και $\phi|_{B_1(0)} = 1$. Τότε $\sigma_{ess}(A) = Z(A)$.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω $\lambda \in Z(A)$. Θα αποδείξουμε ότι $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$. Υπάρχει μια Zhislin ακολουθία (u_n), με $u_n \in \mathfrak{D}(A)$,

$$\|u_n\| = 1, \operatorname{supp} u_n \subset \{x : x \in \mathbb{R}^N \setminus B_n\}, \text{ και } \|(A-\lambda)u_n\| \to 0 \text{ καθώς } n \to \infty.$$

Αφού η u_n έχει στήριγμα στο συμπλήρωμα του B_n, τότε

$$u_n \xrightarrow{w} 0.$$

Άρα $u_n \in \mathfrak{D}(A)$,

$$\|u_n\| = 1, \quad u_n \xrightarrow{w} 0 \text{ και } (A-\lambda)u_n \xrightarrow{s} 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι η u_n είναι ακολουθία Weyl, και από το Θεώρημα (3.3.2), έχουμε $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$.

($\Leftarrow$) Για να αποδείξουμε το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$ και θα δείξουμε ότι $\lambda \in Z(A)$. Αφού $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$ υπάρχει μια ακολουθία Weyl (u_n) για τον A και το λ, δηλαδή

$$\|u_n\| = 1, \ u_n \xrightarrow{w} 0 \text{ και } \|(A-\lambda)u_n\| \to 0, \text{ καθώς } n \to \infty. \tag{3.7}$$

Θέλουμε να κατασκευάσουμε μια ακολουθία Zhislin για τον A και το λ, έτσι ώστε από τον ορισμό του Zhislin φάσματος το $\lambda \in Z(A)$ και συνεπώς $\sigma_{ess}(A) \subset Z(A)$. Θεωρούμε για σταθερό n την

$$\phi_n u_m = \phi_n(i-A)^{-1}(i-A)u_m, \tag{3.8}$$

με ϕ_n όπως ορίστηκε στο Θεώρημα. Όμως

$$\phi_n(i-A)^{-1} = \chi_{B_2(0)}\phi_n(i-A)^{-1},$$

όπου $\chi_{B_2(0)}$ η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου $B_2(0)$. Άρα από το γεγονός ότι ο A είναι τοπικά συμπαγής, η $\phi_n(i-A)^{-1}$ είναι συμπαγής. Επίσης, η $(i-A)u_m$ συγκλίνει ασθενώς στο μηδέν. Πράγματι, γράφοντας

$$(i-A)u_m = (\lambda - A)u_m + (i-\lambda)u_m, \tag{3.9}$$

ο ισχυρισμός έπεται από την σχέση (3.7). Άρα από την (3.8) βλέπουμε ότι η $\phi_n u_m$ συγκλίνει ισχυρώς στο μηδέν το οποίο είναι άμεση συνέπεια της συμπάγειας του $\phi_n(i-A)^{-1}$. Επομένως, θέτοντας $\overline{\phi}_n = 1 - \phi_n$, έχουμε για κάθε σταθερό n,

$$\|\overline{\phi}_n u_m\|^2 = \|(1-\phi_n)u_m\|^2 = \|u_m\|^2 - 2\langle \phi_n, u_m\rangle + \|\phi_n u_m\|^2 \xrightarrow{m\to\infty} 1 - 0 + 0,$$

άρα

$$\|\overline{\phi}_n u_m\| \to 1, \text{ καθώς } m \to \infty. \tag{3.10}$$

Στη συνέχεια θα κατασκευάσουμε την ακολουθία Zhislin από την $\overline{\phi}_n u_m$. Θα δείξουμε ότι για κάθε k, υπάρχουν $n(k)$ και $m(k)$ τέτοια ώστε

$$\left.\begin{matrix} n(k) \to \infty, \\ m(k) \to \infty, \end{matrix}\right\} \text{ καθώς } k \to \infty,$$

και

$$\|\overline{\phi}_{n(k)} u_{m(k)}\| \geq 1 - \frac{1}{k}, \tag{3.11}$$

$$\|(\lambda - A)\overline{\phi}_{n(k)} u_{m(k)}\| \leq 1. \tag{3.12}$$

Τότε η

$$v_k = \frac{\overline{\phi}_{n(k)} u_{m(k)}}{\|\overline{\phi}_{n(k)} u_{m(k)}\|},$$

είναι η ζητούμενη ακολουθία Zhislin για τον A και το λ, το οποίο είναι άμεση συνέπεια των σχέσεων (3.11),(3.12) καθώς και από το γεγονός ότι $\operatorname{supp} v_k \subset \mathbb{R}^N \setminus B_{2k}$.

Πράγματι,

$$\|(\lambda - A)\overline{\phi_n} u_m\| \ = \ \|(\lambda - A)(1-\phi_n)u_m\|$$

$$
\begin{aligned}
&= \|(\lambda - A)u_m - (\lambda - A)\phi_n u_m\| \\
&= \|(\lambda - A)u_m - \lambda\phi_n u_m + A\phi_n u_m\| \\
&= \|(\lambda - A)u_m - \lambda\phi_n u_m + [A, \phi_n]u_m + \phi_n A u_m\| \\
&= \|(\lambda - A)u_m - \phi_n(\lambda - A)u_m + [A, \phi_n]u_m\| \\
&= \|(1 - \phi_n)(\lambda - A)u_m + [A, \phi_n]u_m\| \\
&= \|\overline{\phi_n}(\lambda - A)u_m + [A, \phi_n]u_m\| \\
&\leq \|\overline{\phi_n}\|\|(\lambda - A)u_m\| + \|[A, \phi_n]u_m\|.
\end{aligned}
$$

Αναλύουμε τον δεύτερο όρο χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.6) και (3.9):

$$
\begin{aligned}
\|[A, \phi_n]u_m\| &= \|[A, \phi_n](i - A)^{-1}(i - A)u_m\| \\
&\leq \|[A, \phi_n](i - A)^{-1}\|\|(\lambda - A)u_m + (i - \lambda)u_m\| \\
&\leq \|[A, \phi_n](i - A)^{-1}\| \left(\|(\lambda - A)u_m\| + |(i - \lambda)|\right),
\end{aligned}
$$

επειδή $\|u_m\| = 1$. Όμως, η ακολουθία $\|(\lambda - A)u_m\|$ είναι φραγμένη από έναν σταθερό αριθμό Λ, και έτσι

$$
\|[A, \phi_n]u_m\| \leq \|[A, \phi_n](i - A)^{-1}\| \left(\Lambda + |(i - \lambda)|\right) \to 0, \text{ καθώς } n \to \infty. \tag{3.13}
$$

Από την (3.13), για κάθε $m \in \mathbb{N}$, υπάρχει $n(k)$, με $k \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε

$$
\|[A, \phi_{n(k)}]u_m\| < \frac{1}{2k}.
$$

Επιπλέον, υπάρχει ένας διαφορετικός δείκτης m, τον οποίο θα συμβολίσουμε πάλι με $m(k)$, για τον οποίο σύμφωνα με την (3.7) ισχύει ότι

$$
\|\overline{\phi}_{n(k)}\|\|(\lambda - A)u_{m(k)}\| < \frac{1}{2k},
$$

και από την (3.10)

$$
\|\overline{\phi}_{n(k)}u_{m(k)}\| \geq 1 - \frac{1}{k},
$$

όπως θέλαμε. □

Χρειαζόμαστε μια έκφραση για το infimum του φάσματος. Αυτή την έκφραση μπορούμε να την πάρουμε από το παρακάτω Λήμμα, το οποίο εκφράζει την μικρότερη ιδιοτιμή ενός αυτοσυζυγούς τελεστή ως το ελάχιστο μιας τετραγωνικής μορφής.

Πρόταση 3.4.9. *Έστω L ο τελεστής Laplace-Beltrami στον $\mathbb{R}^N$. Τότε ισχύει η σχέση*

$$
\inf \sigma(L) = \inf_{\phi \neq 0} \{ \langle \phi, -\Delta\phi \rangle \, \|\phi\|^{-2} | \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \}. \tag{3.14}
$$

Απόδειξη. Αν στην σχέση (3.14) η συνάρτηση ϕ ανήκε στο $\mathfrak{D}(L)$, τότε ο ισχυρισμός θα ήταν άμεση συνέπεια της Πρότασης 1.3.10. Όμως η $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \subset \mathfrak{D}(L)$ άρα, η ακόλουθη ανισότητα είναι προφανής

$$
\inf \sigma(L) \leq \inf_{\phi \neq 0} \{ \langle \phi, -\Delta\phi \rangle \, \|\phi\|^{-2} | \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \}.
$$

Για την αντίστροφη ανισότητα θεωρούμε ένα τυχαίο $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό του infimum θα υπάρχει μια συνάρτηση $\varphi \in \mathfrak{D}(L)$, με $\|\varphi\| = 1$ τέτοια ώστε

$$\langle \varphi, L\varphi \rangle \leq \inf \sigma(L) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.15}$$

Από τον δεύτερο ισχυρισμό του Θεωρήματος 1.5.3 το σύνολο $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ είναι πυρήνας για τον τελεστή L, που σημαίνει ότι υπάρχει συνάρτηση $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$\| - \Delta\psi - L\varphi\| \leq \frac{\varepsilon}{4}. \tag{3.16}$$

Επιπρόσθετα, επειδή το $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ είναι πυκνό στον χώρο $\mathfrak{D}(L)$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ψ ικανοποιεί την σχέση

$$\|\varphi - \psi\| < \frac{\varepsilon}{4}\Lambda, \tag{3.17}$$

όπου Λ είναι ένα άνω φράγμα του όρου $\| - \Delta\psi\|$. Άρα, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz, καθώς και τις σχέσεις (3.16) και (3.17), παίρνουμε

$$\begin{aligned} |\langle \psi, -\Delta\psi \rangle - \langle \varphi, L\varphi \rangle| &= |\langle \psi, -\Delta\psi \rangle - \langle \varphi, -\Delta\psi \rangle + \langle \varphi, -\Delta\psi \rangle - \langle \varphi, L\varphi \rangle| \\ &= |\langle \psi - \varphi, -\Delta\psi \rangle| + |\langle \varphi, -\Delta\psi - L\varphi \rangle| \\ &\leq \|\psi - \varphi\| \| - \Delta\psi\| + \|\varphi\| \| - \Delta\psi - L\varphi\| \\ &< \frac{\varepsilon}{4\Lambda}\Lambda + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Τελικά, σύμφωνα και με την σχέση (3.15), έχουμε

$$\begin{aligned} |\langle \psi, -\Delta\psi \rangle| &\leq |\langle \varphi, L\varphi \rangle| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \inf \sigma(L) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Αφού το ε ήταν τυχαίο έχουμε το ζητούμενο. □

Θεώρημα 3.4.10. *Το infimum του ουσιαστικού φάσματος του τελεστή Laplace στον $\mathbb{R}^N$ δίνεται από την ισότητα*

$$\inf \sigma_{ess}(L) = \sup_{K \subset \mathbb{R}^N} \left[\inf_{\phi \neq 0} \left\{ \langle \phi, -\Delta\phi \rangle \|\phi\|^{-2} : \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N \backslash K) \right\} \right],$$

όπου το supremum παίρνεται υπεράνω όλων των συμπαγών υποσυνόλων $K \subset \mathbb{R}^N$.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 3.4.9 έχουμε την ακόλουθη έκφραση για το κάτω φράγμα του φάσματος

$$\lambda_0 = \inf \sigma(L) = \inf_{\phi \neq 0} \left\{ \langle \phi, -\Delta\phi \rangle \|\phi\|^{-2} : \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \right\}.$$

Επειδή ο χώρος $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ είναι πυρήνας για τον L, αρκεί να δουλέψουμε με συναρτήσεις στο $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Επειδή ο L είναι φραγμένος από κάτω, υπάρχει μια πεπερασμένη, μη αρνητική σταθερά Λ, τέτοια ώστε

$$\langle \phi, -\Delta\phi \rangle \geq -\Lambda \|\phi\|^2, \quad \text{για κάθε } \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Παίρνοντας για $-\Delta$ το $-\Delta + \Lambda + 1$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι για κάθε $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, ισχύει

$$\langle \phi, -\Delta\phi \rangle \geq \|\phi\|^2.$$

Ορίζουμε για κάθε συμπαγές υποσύνολο υποσύνολο $K \subset \mathbb{R}^N$,

$$\Sigma(L, K) := \inf \left\{ \langle \phi, -\Delta\phi \rangle \|\phi\|^{-2} : \phi \neq 0, \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N \backslash K) \right\},$$

και έστω,

$$\Sigma(L) := \sup_{K \subset \mathbb{R}^N} \Sigma(L, K).$$

Θα δείξουμε ότι

$$\inf \sigma_{ess}(L) \geq \Sigma(L).$$

Αρκεί να δειχθεί ότι για κάθε K συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$, ισχύει

$$\inf_{\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N \backslash K)} \langle \phi, -\Delta\phi \rangle \leq \inf \sigma_{ess}(L) := \Sigma_0.$$

Θα δείξουμε ότι ο τελεστής L ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 3.4.8, και άρα υπάρχει μια ακολουθία Zhislin, (u_n), για τον L και το Σ_0. Πράγματι, ο L είναι ένας αυτοσυζυγής και τοπικά συμπαγής τελεστής στον $L^2(\mathbb{R}^N)$, από την τρίτη Παρατήρηση 3.4.3. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι πληροί και την σχέση (3.6). Έχουμε, για $u \in \mathfrak{D}(L)$

$$\begin{aligned}
[L, \phi_n]u &= L(\phi_n u) + \phi_n(Lu) \\
&= -\phi_n Lu - 2\nabla\phi_n \nabla u - u\Delta\phi_n + \phi_n Lu \\
&= -2\nabla\phi_n \nabla u - u\Delta\phi_n,
\end{aligned}$$

και εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση για $u = (L - i)^{-1}v$, παίρνουμε

$$[L, \phi_n](L - i)^{-1}v = -2\nabla\phi_n \nabla \left((L - i)^{-1}v \right) - (L - i)^{-1}v\Delta\phi_n. \tag{3.18}$$

Εξετάζουμε τον κάθε όρο ξεχωριστά. Επειδή ο τελεστής $(L - i)^{-1}$ είναι φραγμένος έχουμε

$$\begin{aligned}
\|\nabla(L - i)^{-1}v\|^2 &= \int |\left(L(L - i)^{-1}v\right) v|^2 dx \\
&= \int |\left((L - i)(L - i)^{-1}v + i(L - i)^{-1}v\right) v|^2 dx \\
&= \int |\left(v + i(L - i)^{-1}v\right) v|^2 dx \\
&\leq c_1^2 \|v\|^2,
\end{aligned}$$

με c_1 σταθερός αριθμός. Επίσης,

$$\begin{aligned}
\nabla\varphi_n &= \frac{1}{n}(\nabla\varphi)\left(\frac{x}{n}\right), \\
\Delta\varphi_n &= \operatorname{div} \nabla\varphi_n = \frac{1}{n^2}(\Delta\varphi)\left(\frac{x}{n}\right),
\end{aligned}$$

και αφού η ϕ_n έχει συμπαγές στήριγμα, τότε οι συναρτήσεις $\nabla\varphi_n, \Delta\varphi_n$ είναι φραγμένες. Επιστρέφοντας στην σχέση (3.18), βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}[L,\phi_n](L-i)^{-1}v &= \frac{1}{n}\|(\nabla\varphi)\left(\frac{x}{n}\right)\|\cdot c_1\|v\| \\ &+\frac{1}{n^2}\|(\Delta\varphi)\left(\frac{x}{n}\right)\|\cdot c_2\|v\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

όπως θέλαμε. Άρα υπάρχει μια ακολουθία Zhislin, (u_n), για τον L και το Σ_0 με

$$\|u_n\| = 1,\ \operatorname{supp} u_n \subset \{x : x \in \mathbb{R}^N \backslash B_n\} \text{ και } \|Lu_n - \Sigma_0 u_n\| \to 0 \text{ καθώς } n \to \infty.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_1$ να ισχύει

$$\|Lu_n - \Sigma_0 u_n\| < \varepsilon.$$

Επίσης, υπάρχει ένα n_2 τέτοιο ώστε για κάθε n με $n \geq n_2$ να ισχύει

$$K \subset B_n \Rightarrow \mathbb{R}^N\backslash B_n \subset \mathbb{R}^N\backslash K,$$

το οποίο συναγάγει

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^N\backslash B_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N\backslash K).$$

Επομένως, διαλέγοντας $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\inf_{\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N\backslash K)}\langle\phi,-\Delta\phi\rangle &\leq \inf_{\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N\backslash B_{n_0})}\langle\phi,-\Delta\phi\rangle \\ &\leq \langle u_{n_0}, Lu_{n_0}\rangle \\ &= \Sigma_0 + \langle u_{n_0},(L-\Sigma_0)u_{n_0}\rangle \\ &\leq \Sigma_0+\varepsilon.\end{aligned}$$

Τελικά,

$$\inf_{\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N\backslash K)}\langle\phi,-\Delta\phi\rangle \leq \Sigma_0$$

για κάθε K συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$, αφού το ε είναι τυχαίο.

Αντίστροφα, θα δείξουμε ότι

$$\inf_{\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N\backslash K)}\langle\phi,-\Delta\phi\rangle \geq \Sigma_0.$$

Επειδή το ουσιαστικό φάσμα του L είναι κλειστό, Πόρισμα 1.3.5, έχουμε ότι $\Sigma_0 \in \sigma_{ess}(L)$. Όπως και προηγουμένως, από το Θεώρημα 3.4.8, υπάρχει μια Zhislin ακολουθία (u_n) για τον L και Σ_0. Από τον ορισμό της Zhislin ακολουθίας υπάρχει ένας δείκτης n_1 τέτοιος ώστε

$$\|(L-\Sigma_0)u_{n_1}\| \leq \varepsilon \text{ και } \operatorname{supp} u_{n_1} \cap K = \emptyset. \tag{3.19}$$

Επειδή ο χώρος $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ είναι πυρήνας για τον τελεστή L, μπορούμε να υποθέσουμε ότι u_{n_1} είναι λεία. Συνεπώς $u_{n_1} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N\backslash K)$. Για κάθε συμπαγές $K \subset \mathbb{R}^N$, γράφουμε

$$\Sigma(L,K) = \inf_{\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)\backslash K}\left\{\frac{\langle\phi,(-\Delta-\Sigma_0)\phi\rangle}{\|\phi\|^2}+\Sigma_0\right\}.$$

Από την (3.19) έχουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει μια $\psi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N \backslash K)$ τέτοια ώστε

$$\|\psi_\varepsilon\| = 1 \text{ και } |\langle \psi_\varepsilon, (-\Delta - \Sigma_0)\psi_\varepsilon\rangle| \leq \varepsilon.$$

Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$

$$\Sigma(L, K) \geq \Sigma_0 - \varepsilon,$$

'το οποίο αποδεικνύει το Θεώρημα. □

Θεώρημα 3.4.11. *(Αρχή της Διάσπασης ή Λήμμα του Persson) Έστω M^N ένα πλήρες πολύπτυγμα Riemann. Το infimum του ουσιαστικού φάσματος δίνεται από την ισότητα*

$$\inf \sigma_{ess}(L) = \sup_{K \subset M^N} \left[\inf_{\phi \neq 0} \left\{ \langle \phi, -\Delta\phi \rangle \|\phi\|^{-2} : \phi \in C_c^\infty(M^N \backslash K) \right\} \right],$$

όπου το supremum παίρνεται υπεράνω όλων των συμπαγών υποσυνόλων $K \subset M^N$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι συνέπεια του Θεωρήματος 3.4.10. Η μετάβαση από το παραπάνω Θεώρημα για τον $\mathbb{R}^N$ στο τυχαίο πολύπτυγμα M^N είναι εύκολη χωρίς καμία αλλαγή. Όμως, χρειάζεται προσοχή στο τρόπο που αλλάζουν οι προηγούμενες Προτάσεις καθώς εκεί πρέπει να δουλέψουμε πλέον με συναρτήσεις που είναι συνθέσεις με χάρτες του πολυπτύγματος. □

Πόρισμα 3.4.12. *Έστω M_1 και M_2 δύο πολυπτύγματα Riemann. Αν υπάρχουν K_1 και K_2 συμπαγή υποσύνολα των M_1 και M_2 αντίστοιχα, τέτοια ώστε το $M_1 \backslash K_1$ να είναι ισομετρικό με το $M_2 \backslash K_2$, τότε τα M_1 και M_2 έχουν ίσα infimum του ουσιαστικού φάσματος.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 3.4.11. □

Όπως φαίνεται και από το παραπάνω Πόρισμα, μια ερμηνεία του Θεωρήματος 3.4.11, είναι ότι το infimum του ουσιαστικού φάσματος εξαρτάται από την συμπεριφορά του τελεστή L σε περιοχές του απείρου. Ακόμα, συνεπάγεται ότι αλλάζοντας την μετρική του πολυπτύγματος σε ένα συμπαγές υποσύνολο του, δεν επηρεάζεται το infimum του ουσιαστικού φάσματος.

3.5 Μια Σχέση Μεταξύ του Όγκου και του Φάσματος του Τελεστή Laplace

Έστω M πλήρες, και μη συμπαγές πολύπτυγμα Riemann. Συμβολίζουμε με λ_0 το μεγαλύτερο κάτω φράγμα του φάσματος του τελεστή Laplace-Beltrami L. Θυμίζουμε ότι δίνεται από τον τύπο

$$\lambda_0 = \inf_f \frac{\int_M f(-\Delta f) dv}{\int_M f^2 dv},$$

όπου f ανήκει στο σύνολο όλων των λείων, μη-μηδενικών συναρτήσεων με συμπαγές στήριγμα στο M. Μια ενδιαφέρουσα αναλλοίωτη του M, την οποία την συμβολίζουμε με λ_0^{ess}, είναι το μεγαλύτερο κάτω φράγμα του ουσιαστικού φάσματος του L. Δείξαμε ότι αν το M είναι συμπαγές, το ουσιαστικό φάσμα είναι κενό. Επίσης έχουμε προφανώς $\lambda_0 \leq \lambda_0^{ess}$, και όπως δείξαμε $\lambda_0^{ess} = \sup_K \lambda_0(M-K)$, όπου K είναι συμπαγές υποσύνολο του M. Θα παρουσιάσουμε ένα φράγμα για το λ_0^{ess} το οποίο αποδείχθηκε από τον Brooks στο [Br1]. Έστω $x_0 \in M$. Για κάθε $r > 0$, δηλώνουμε με $B(x_0, r)$ την μπάλα ακτίνας r με κέντρο x_0, και με $V(x_0, r)$ τον όγκο αυτής της μπάλας. Ο αριθμός

$$\mu = \lim_{r\to\infty} \sup \frac{1}{r} \log\left(V(x_0, r)\right)$$

λέγεται **εκθετική αύξηση** (exponential growth) του M. Ελέγχουμε χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα ότι το μ είναι ανεξάρτητο της επιλογής του x_0. Πράγματι, αν x_0, x_1 είναι δύο τυχαία σημεία του M, και d η μεταξύ τους απόσταση, τότε

$$B(x_1, r) \subset B(x_0, r+d),$$

και έτσι

$$\frac{1}{r} \log V(x_1, r) \leq \frac{r+d}{r} \frac{1}{r+d} \log V(x_0, r+d).$$

Παίρνοντας στην παραπάνω ανισότητα το ανώτερο όριο, και επειδή

$$\frac{r+d}{r} \to 1 \text{ όταν } r \to \infty,$$

βλέπουμε ότι

$$\mu_{x_1} \leq \mu_{x_0}. \tag{3.20}$$

Εναλλάσσοντας τον ρόλο του x_0 με τον ρόλο του x_1, και εκτελώντας την ίδια διαδικασία έχουμε

$$\mu_{x_1} \leq \mu_{x_0},$$

το όποιο μαζί με την σχέση (3.20) αποδεικνύει τον ισχυρισμό. Επιπλέον, κάτω από απλές γεωμετρικές υποθέσεις (για παράδειγμα, αν η καμπυλότητα Ricci είναι φραγμένη από κάτω από κάποιον αρνητικό αριθμό), το μ είναι πεπερασμένο (βλέπε [B-C]). Θα αποδείξουμε ότι αν ο όγκος του M είναι άπειρος, τότε $\lambda_0^{ess} \leq \frac{1}{4}\mu^2$. Θα κάνουμε χρήση του Θεωρήματος 3.4.11, καθώς επίσης και το επόμενο

Λήμμα 3.5.1. *Έστω K ένα συμπαγές (πιθανώς κενό) υποσύνολο του M, και $\lambda_0(M-K)$ το μεγαλύτερο κάτω φράγμα του φάσματος του τελεστή Laplace-Beltrami L στο $L^2(M-K)$, με Dirichlet συνοριακές συνθήκες στο $\partial K (f = 0$ στο $\partial K)$. Έστω $\rho(x) = \rho(x, x_0)$ η συνάρτηση απόστασης από ένα σταθερό σημείο $x_0 \in M$. Αν*

$$\int_{M-K} e^{-2\alpha\rho(x)} dv < \infty,$$

για κάποιο α που ικανοποιεί την ανισότητα $0 < \alpha < \sqrt{\lambda_0(M-K)}$, τότε

$$\int_{M-K} e^{2\alpha\rho(x)} dv < \infty.$$

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορώ να υποθέσω ότι $\lambda_0(M-K)=1$, διότι διαφορετικά πολλαπλασιάζουμε την μετρική με $\lambda_0(M-K)$. Θεωρούμε μια λεία f συνάρτηση με συμπαγές στήριγμα (test function), $f(x)=e^{h(x)}\chi(x)$, $x\in M$, όπου υποθέτουμε ότι η $\chi\in C_c^\infty(M\backslash K)$ και η $h\in C^\infty(M)$ θα προσδιοριστεί αργότερα. Τότε

$$\nabla f = e^h\cdot\chi\cdot\nabla h + e^h\cdot\nabla\chi = e^h[\chi\cdot\nabla h+\nabla\chi],$$

$$|\nabla f|^2 = e^{2h}|\chi\cdot\nabla h+\nabla\chi|^2,$$

$$\int\limits_{M-K}|\nabla f|^2 dv = \int\limits_{M-K} e^{2h}|\chi\cdot\nabla h+\nabla\chi|^2 dv,$$

και επειδή

$$\frac{\int\limits_{M-K}|\nabla f|^2 dv}{\int\limits_{M-K} f^2 dv}\geq\lambda_0=1,$$

έχουμε

$$\int\limits_{M-K} e^{2h}|\chi\cdot\nabla h+\nabla\chi|^2 dv\geq\int\limits_{M-K} e^{2h}\chi dv.$$

Επιπλέον,

$$\int\limits_{M-K} e^{2h}\left[|\chi\cdot\nabla h+\nabla\chi|^2-\chi^2\right]dv\geq 0\Longrightarrow$$

$$\int\limits_{M-K} e^{2h}\left[\chi^2\cdot|\nabla h|^2+|\nabla\chi|^2+2\chi\langle\nabla h,\nabla\chi\rangle-\chi^2\right]dv\geq 0\Longrightarrow$$

$$\int\limits_{M-K} e^{2h}\left[[|\nabla h|^2-1]\chi^2+2\chi\langle\nabla h,\nabla\chi\rangle+|\nabla\chi|^2\right]dv\geq 0\Longrightarrow$$

$$\int\limits_{M-K} e^{2h}\left[1-|\nabla h|^2\right]\chi^2 dv\leq 2\int\limits_{M-K} e^{2h}\left[\chi\langle\nabla h,\nabla\chi\rangle+|\nabla\chi|^2\right]dv.$$

Επομένως, από την παραπάνω ανίσωση βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}\int\limits_{M-K} f^2\left[1-|\nabla h|^2\right]dv &\leq \int\limits_{M-K} e^{2h}\left[2\chi\langle\nabla h,\nabla\chi\rangle+|\nabla\chi|^2\right]dv\\ &\leq \int\limits_{M-K} e^{2h}\left[2\chi|\nabla h||\nabla\chi|+|\nabla\chi|^2\right]dv.\end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι $|\nabla h|\leq\alpha<1$, και για κάποια αύξουσα ακολουθία K_i συμπαγών υποσυνόλων του $M-K$ τέτοιων ώστε $\cup K_i=M-K$, θέτουμε

$$\chi_i(x)=\begin{cases}0, & \text{αν } x\in(M-K)-K_i\\ \frac{1}{\ell}\rho(x,M-K_i), & \text{αν } 0\leq\rho(x,M-K_i)\leq\ell\\ 1, & \text{αν } \rho(x,M-K_i)\geq\ell\end{cases}$$

όπου ℓ, μια σταθερά. Επειδή η χ_i είναι συνάρτηση Lipschitz με σταθερά Lipschitz ίση με $\frac{1}{\ell}$ τότε, $|\nabla\chi_i| \leq \frac{1}{\ell}$, και $\nabla\chi_i$ έχει στήριγμα σε μια περιοχή $B_\ell(\partial K_i)$ ακτίνας ℓ γύρω από το ∂K_i. Επομένως,

$$\begin{aligned}
\int\limits_{M-K} f^2[1-\alpha^2]dv &\leq \int\limits_{M-K} f^2[1-|\nabla h|^2]dv \\
&\leq \int\limits_{M-K} e^{2h}[2\chi_i|\nabla h||\nabla\chi_i| + |\nabla\chi_i|^2]dv \\
&= \int\limits_{B_\ell(\partial K_i)} e^{2h}[2\chi_i|\nabla h||\nabla\chi_i| + |\nabla\chi_i|^2]dv \\
&\leq \int\limits_{B_\ell(\partial K_i)} e^{2h}\left[2\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{\ell} + \frac{1}{\ell^2}\right]dv \\
&= \left(\frac{2}{\ell}+\frac{1}{\ell^2}\right)\int\limits_{B_\ell(\partial K_i)} e^{2h}dv.
\end{aligned}$$

Παίρνοντας όρια καθώς $i \to \infty$, και υποθέτοντας ότι e^{2h} είναι ολοκληρώσιμη υπεράνω του $M-K$, λαμβάνουμε

$$\int\limits_{M-K} e^{2h}[1-\alpha^2]dv \leq \left(\frac{2}{\ell}+\frac{1}{\ell^2}\right)\int\limits_{B_\ell(\partial K)} e^{2h}dv.$$

Υποθέτουμε ότι

$$\int\limits_{M-K} e^{-2\alpha\rho(x)}dv < \infty$$

και εφαρμόζουμε τα παραπάνω στην $h_j(x) = \min\{\alpha\rho(x), -\alpha\rho(x)+j\}$. Σημειώνουμε ότι, για κάθε j, έχουμε $|\nabla h_j| \leq \alpha$, και e^{2h_j} είναι ολοκληρώσιμη. Επίσης η h_j αυξάνει κατά σημείο στην $h = \alpha\rho(x)$. Άρα για j αρκετά μεγάλο, έχουμε

$$\int\limits_{M-K} e^{2h_j}[1-\alpha^2]dv \leq \left(\frac{2}{\ell}+\frac{1}{\ell^2}\right)\int\limits_{B_\ell(\partial K)} e^{2h_j}dv \leq \left(\frac{2}{\ell}+\frac{1}{\ell^2}\right)\int\limits_{B_\ell(\partial K)} e^{2\alpha\rho(x)}dv,$$

και άρα

$$\int\limits_{M-K} e^{2h_j}dv \leq C,$$

όπου C πεπερασμένη σταθερά ανεξάρτητη του j. Παίρνοντας το όριο καθώς $j \to \infty$ δίνει

$$\int\limits_{M-K} e^{2\alpha\rho(x)}dv \leq C,$$

που είναι και το ζητούμενο. □

Μετά από το παραπάνω Λήμμα είμαστε έτοιμοι να δείξουμε το βασικό Θεώρημα

Θεώρημα 3.5.2. *Έστω M πλήρες και μη συμπαγές πολύπτυγμα Riemann. Αν ο όγκος $V(M)$ του M είναι άπειρος, τότε*

$$\lambda_0^{ess} \leq \frac{1}{4}\mu^2.$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι $\sqrt{\lambda_0(M-K)} \leq \frac{\mu}{2}$, όπου K συμπαγές υποσύνολο του M. Δια της εις άτοπον επαγωγής, υποθέτουμε ότι $\sqrt{\lambda_0(M-K)} > \frac{\mu}{2}$. Θεωρούμε αριθμό α τέτοιο ώστε $\frac{\mu}{2} < \alpha < \sqrt{\lambda_0(M-K)}$. Τότε

$$\begin{aligned}
\int_{M-K} e^{-2\alpha\rho(x)}dv &\leq \int_M e^{-2\alpha\rho(x)}dv = \sum_{r=1}^{\infty}\left[V(x_0,r)e^{-2\alpha r} - V(x_0,r-1)e^{-2\alpha(r-1)}\right] \\
&\leq \sum_{r=1}^{\infty}\left[V(x_0,r) - V(x_0,r-1)\right]e^{-2\alpha(r-1)} \\
&= \sum_{r=1}^{\infty}V(x_0,r)e^{-2\alpha(r-1)} - \sum_{r=1}^{\infty}V(x_0,r-1)e^{-2\alpha(r-1)} \\
&= \sum_{r=1}^{\infty}V(x_0,r)e^{-2\alpha(r-1)} - \sum_{r=0}^{\infty}V(x_0,r)e^{-2\alpha r} \\
&= \sum_{r=1}^{\infty}V(x_0,r)e^{-2\alpha(r-1)} - \sum_{r=1}^{\infty}V(x_0,r)e^{-2\alpha r} \\
&= \sum_{r=1}^{\infty}V(x_0,r)e^{-2\alpha r}(e^{2\alpha}-1). \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η τελευταία έκφραση είναι πεπερασμένη, συγκρίνοντάς την με μια γεωμετρική σειρά, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $2\alpha > \mu$. Πράγματι, για $\varepsilon > 0$, με $2\alpha = \mu + 2\varepsilon$, έχουμε

$$\mu = \lim_{r\to\infty}\sup\frac{1}{r}\log(V(x_0,r)) \Longleftrightarrow (\exists r_0 \in \mathbb{N}) : \frac{1}{r}\log(V(x_0,r)) < \mu + \varepsilon,\ \forall r \geq r_0(\varepsilon).$$

Άρα

$$\log(V(x_0,r)) < \mu r + \varepsilon r \Rightarrow V(x_0,r) < e^{\mu r}e^{\varepsilon r} \Rightarrow V(x_0,r)e^{-\mu r} < e^{\varepsilon r}.$$

Τελικά,

$$V(x_0,r)e^{-2\alpha r} = V(x_0,r)e^{-\mu r}e^{-2\varepsilon r} < e^{\varepsilon r}e^{-2\varepsilon r} = e^{-\varepsilon r} = \lambda^r$$

με $\lambda < 1$. Επιστρέφοντας στην σχέση (3.21), παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\int_{M-K} e^{-2\alpha\rho(x)}dv &\leq \sum_{r=1}^{\infty}V(x_0,r)e^{-2\alpha r}(e^{2\alpha}-1) \\
&< (e^{2\alpha}-1)(\lambda+\lambda^2+\ldots) \\
&= (e^{2\alpha}-1)\lambda(1+\lambda+\ldots)
\end{aligned}$$

$$= \quad (e^{2\alpha}-1)\lambda\frac{1}{1-\lambda} \leq \Lambda,$$

όπου Λ πραγματική σταθερά. Σύμφωνα με το Λήμμα 3.5.1, είναι $\int_{M-K} e^{2\alpha\rho(x)}dv < \infty$. Αυτό όμως είναι προφανώς αδύνατο, επειδή το $M-K$ έχει άπειρο όγκο. Επομένως ισχύει $\sqrt{\lambda_0(M-K)} \leq \mu/2$ ή ισοδύναμα $\lambda_0(M-K) \leq \mu^2/4$ και παίρνοντας το sup πάνω από όλα τα συμπαγή υποσύνολα του M, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.4.11, έχουμε

$$\lambda_0^{ess} \leq \frac{1}{4}\mu^2,$$

το οποίο είναι το επιθυμητό συμπέρασμα. □

Έστω M πλήρες και μη συμπαγές πολύπτυγμα Riemann. Το M έχει **εκθετική αύξηση του όγκου** (volume exponential growth), αν η εκθετική αύξηση μ του M είναι θετική και αν για κάποιο σημείο $p \in M$ ο όγκος $V(p,r)$ της μπάλας $B(p,r)$ ακτίνας r με κέντρο p ικανοποιεί την εξής ανισότητα

$$V(p,r) \leq Ce^{\mu r},$$

για κάποια σταθερά C. Το M έχει **υποεκθετική αύξηση όγκου** (volume subexponential growth) αν η εκθετική αύξησή του είναι μηδέν (δηλαδή $\mu = 0$).

Πόρισμα 3.5.3. *Έστω M ένα πολύπτυγμα Riemann με υποεκθετική αύξηση. Τότε $\lambda_0^{ess}(M) = 0$.*

Απόδειξη. Πράγματι, η συνθήκη ότι το M έχει υποεκθετική αύξηση σημαίνει $\mu = 0$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.5.2 παίρνουμε το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 3.5.4. Το παραπάνω αποτέλεσμα είχε αποδειχθεί στο [Br2] κάτω από κάποιες τεχνικές υποθέσεις στο M.

Στο προηγούμενο Κεφάλαιο, μελετήσαμε το φάσμα του τελεστή Laplace στους χώρους μορφής. Προφανώς, το φάσμα του τελεστή Laplace στον Ευκλείδειο και Υπερβολικό χώρο συμπίπτει με το ουσιαστικό φάσμα. Είμαστε σε θέση λοιπόν, να ερμηνεύσουμε τον λόγο που στη μια περίπτωση το μηδέν ανήκει στο φάσμα του τελεστή Laplace ενώ στην άλλη όχι. Στον Ευκλείδειο χώρο, όπου έχουμε υποεκθετική αύξηση του όγκου (βλέπε Πόρισμα 4.4.6), εφαρμόζοντας και το Πόρισμα 3.5.3, το μηδέν ανήκει, ως έπρεπε, στο ουσιαστικό φάσμα. Αντίθετα, στην περίπτωση του Υπερβολικού χώρου δεν έχουμε υποεκθετική αύξηση του όγκου, οπότε δεν περιμέναμε αντίστοιχο αποτέλεσμα.

Κεφάλαιο 4

Σύγκριση Όγκων και το Θεώρημα των Lichnerowicz-Obata

Σε αυτό το Κεφάλαιο θα αποδείξουμε το Θεώρημα των Lichnerowicz-Obata. Βασικά εργαλεία για την απόδειξη είναι το Θεώρημα σύγκρισης όγκων του Bishop, το Θεώρημα του Cheng και οι τύποι της Πρώτης και Δεύτερης Μεταβολής του όγκου. Ακολουθούμε κυρίως την μέθοδο του Li στο [Li]. Τη θεωρία των κατά μήκος εμβάπτισης διανυσματικών πεδίων τη δανειστήκαμε από το [Fe].

4.1 Έννοιες Γεωμετρίας Riemann

Έστω M^m ένα διαφορίσιμο πολύπτυγμα Riemann εφοδιασμένο με μετρική Riemann $\langle , \rangle$. Συμβολίζουμε με ∇^M τη συνοχή Levi-Civita του M^m. Θεωρούμε επίσης, ένα διαφορίσιμο πολύπτυγμα N^n και $f : N^n \to M^m$ μια εμβάπτιση. Η f επάγει στο N^n μια μετρική, την οποία συμβολίζουμε ξανά με $\langle , \rangle$, από τον τύπο

$$\langle X, Y \rangle = \langle df(X), df(Y) \rangle \circ f,$$

με $X, Y \in \Delta(N^n)$.

Συμβολίζουμε με T_pN^n και $T_{f(p)}M^m$ τους εφαπτόμενους χώρους των N^n και M^m στα σημεία p και $f(p)$ αντίστοιχα. Για κάθε $p \in N^n$, ο εφαπτόμενος χώρος $T_{f(p)}M^m$ αναλύεται σε ορθογώνιο και ευθύ άθροισμα ως εξής

$$T_{f(p)}M^m = df(T_pN^n) \oplus T^{\perp}_{f(p)}N^n,$$

όπου με $T^{\perp}_{f(p)}N^n$ εννοούμε το ορθοσυμπλήρωμα του $df(T_pN^n)$ στο $T_{f(p)}M^m$. Άρα κάθε $x \in T_{f(p)}M^m$ αναλύεται κατά μοναδικό τρόπο σε εφαπτομενική και κάθετη συνιστώσα ως εξής

$$x = df(x^{\top}) + x^{\perp},$$

όπου $x^{\top} \in T_pN^n$ και $x^{\perp} \in T^{\perp}_{f(p)}N^n$.

Ένα **διανυσματικό πεδίο** X **κατά μήκος** της $f : N^n \to M^m$ είναι μια αντιστοιχία

$$p \in N^n \to X(p) \in T_{f(p)}M^m.$$

Επιλέγοντας ένα ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{e_1, \ldots, e_m\}$, σε περιοχή V του $f(p_0)$, όπου p_0 τυχόν σημείο του N^n, έχουμε

$$X(p) = \sum_{i=1}^{m} g_i(p) e_i(f(p)), \; p \in f^{-1}(V).$$

Το X λέγεται διαφορίσιμο αν οι συναρτήσεις g_i είναι διαφορίσιμες. Αποδεικνύεται ότι ο παραπάνω ορισμός δεν εξαρτάται από την επιλογή του πλαισίου. Την παραπάνω ανάλυση του X καλούμε παράσταση του X στο M^m ως προς το πλαίσιο $\{e_1, \ldots, e_m\}$.

Συμβολίζουμε με $\Delta_f(N^n)$ το σύνολο των **διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων κατά μήκος της** f. Επιπρόσθετα, παρατηρούμε ότι αν $X \in \Delta(N^n)$, τότε $df(X) \in \Delta_f(M^m)$. Επίσης, αν $Y \in \Delta(M^m)$, τότε το $Y \circ f$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της f.

Ένα διανυσματικό πεδίο X, κατά μήκος της f λέγεται **κάθετο**, αν για κάθε $p \in N^n$ το $X(p)$ είναι κάθετο στο $df_p(T_pN^n)$. Συμβολίζουμε με $\Gamma^{\perp}(N^n)$ το **σύνολο των καθέτων διανυσματικών πεδίων κατά μήκος της** f, και με $\Gamma^{\perp}_c(N^n)$ αν επιπλέον έχουν συμπαγές στήριγμα στο N^n.

Έστω $X = \sum_{i=1}^{m} g_i e_i \circ f$ η παράσταση του X ως προς το πλαίσιο $\{e_1, \ldots, e_m\}$. Για κάθε $v \in T_pN^n$, συμβολίζουμε με $\overset{f}{\nabla}_v X$ την **συναλλοίωτη παράγωγο** του X στην διεύθυνση v, που ορίζεται ως εξής

$$\overset{f}{\nabla}_v X := \sum_{i=1}^{m} v(g_i) e_i(f(p)) + \sum_{i=1}^{m} g_i(p) \nabla^M_{df(v)} e_i.$$

Αν V είναι ένα εφαπτόμενο διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο στο N^n, τότε ορίζουμε

$$\left(\overset{f}{\nabla}_V X\right)(p) := \overset{f}{\nabla}_{V(p)} X.$$

Αποδεικνύεται ότι η συναλλοίωτη παράγωγος $\overset{f}{\nabla}$ δεν εξαρτάται από την επιλογή του πλαισίου. Επίσης, ισχύουν οι εξής ιδιότητες :

1. $\overset{f}{\nabla}_{h_1X_1+h_2X_2} Y = h_1 \overset{f}{\nabla}_{X_1} Y + h_2 \overset{f}{\nabla}_{X_2} Y,$

2. $\overset{f}{\nabla}_{X_1} (h_1Y_1 + h_2Y_2) = X_1(h_1)Y_1 + h_1 \overset{f}{\nabla}_{X_1} Y_1 + X_1(h_2)Y_2 + h_2 \overset{f}{\nabla}_{X_1} Y_2,$

3. $\overset{f}{\nabla}_{X_1} (Z \circ f) = \nabla^M_{df(X_1)} Z,$

4. $X \langle Y_1, Y_2 \rangle = \left\langle \overset{f}{\nabla}_X Y_1, Y_2 \right\rangle + \left\langle Y_1, \overset{f}{\nabla}_X Y_2 \right\rangle,$

5. $\overset{f}{\nabla}_{X_1} df(X_2) - \overset{f}{\nabla}_{X_2} df(X_1) = df([X_1, X_2]),$

όπου X, X_1, X_2 εφαπτόμενα διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία του N^n, τα Y, Y_1, Y_2 είναι εφαπτόμενα διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία κατά μήκος της f, Z διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο του M^m και $h, h_1, h_2 : N^n \longrightarrow \mathbb{R}$ διαφορίσιμες συναρτήσεις.

Αν ξ είναι ένα κάθετο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της f και $v \in T_pN^n$, τότε συμβολίζουμε με $\overset{f}{D}_v \xi$, την κάθετη συνιστώσα του διανύσματος $\overset{f}{\nabla}_v \xi$, δηλαδή

$$\overset{f}{D}_v \xi := \left(\overset{f}{\nabla}_v \xi\right)^{\perp}.$$

Αν X είναι ένα εφαπτόμενο διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο στο N^n, ορίζουμε

$$\left(\overset{f}{D}_X \xi\right)(p) = \overset{f}{D}_{X(p)} \xi, p \in N^n.$$

Επίσης, η $\overset{f}{D}$ έχει τις ιδιότητες της συνοχής.

Από τον τύπο του Gauss ορίζουμε την **δεύτερη θεμελιώδη μορφή** B_f της f, ως εξής

$$B_f(X,Y) = \overset{f}{\nabla}_X df(Y) - df\left(\nabla^N_X Y\right),$$

όπου $X, Y \in \Delta(N^n)$. Ακόμα, για δοθέν κάθετο διανυσματικό πεδίο ξ κατά μήκος της f, ο αυτοπροσαρτημένος γραμμικός τελεστής A_ξ που ορίζεται ως

$$\langle A_\xi X, Y\rangle := \langle B_f(X,Y), \xi\rangle,$$

ονομάζεται **τελεστής Weingarten** της f στην διεύθυνση ξ. Επιπλέον, έχουμε και τον λεγόμενο **τύπο του Weingarten** :

$$\overset{f}{\nabla}_X \xi = -df(A_\xi X) + \overset{f}{D}_X \xi.$$

Αν $\{e_1, \ldots, e_n\}$ είναι ένα τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο του N^n, τότε το **διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας** της f ορίζεται ως εξής

$$\overrightarrow{H} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} B_f(e_i, e_i).$$

Ακολουθεί η (ισχυρή) αρχή μεγίστου του Hopf, που θα επικαλεστούμε στην συνέχεια. Για μια απόδειξη βλέπε για παράδειγμα [Pe].

Θεώρημα 4.1.1. *(Ισχυρή Αρχή Μεγίστου) Έστω M ένα συνεκτικό πολύπτυγμα Riemann χωρίς σύνορο και Δ ο τελεστής Laplace. Θεωρούμε μια C^2 συνάρτηση f, ορισμένη στο M, η οποία ικανοποιεί την ανισότητα*

$$\Delta f \geq 0,$$

στο M. Τότε η f είναι σταθερή σε μια περιοχή κάθε τοπικού μέγιστου. Επιπρόσθετα, αν η f έχει ένα ολικό μέγιστο, τότε είναι σταθερή.

4.2 Τύπος της Πρώτης Μεταβολής του Όγκου

Πριν δώσουμε τον ορισμό της διαφορίσιμης μεταβολής μιας εμβάπτισης, θα αποδείξουμε ένα χρήσιμο αλγεβρικό Λήμμα.

Λήμμα 4.2.1. *Έστω $(a_{ij}(t))$ ένας $n \times n$ αντιστρέψιμος και συμμετρικός πίνακας, με a_{ij} διαφορίσιμες συναρτήσεις. Συμβολίζουμε (a^{ij}) τον αντίστροφο του πίνακα (a_{ij}) και με $a = \det(a_{ij})$. Ισχύει η ταυτότητα*

$$\frac{da}{dt}(t) = a(t)\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(t)\frac{da_{ij}}{dt}(t).$$

Απόδειξη. Αφού ο πίνακας (a_{ij}) είναι συμμετρικός, τότε και ο αντίστροφός του είναι επίσης συμμετρικός. Αν αναπτύξουμε την ορίζουσα ως προς τα στοιχεία της j στήλης παίρνουμε

$$a = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}c_{ij}, \tag{4.1}$$

όπου c_{ij} η ελάσσονα ορίζουσα του πίνακα (a_{ij}), που προκύπτει αν διαγράψουμε την i γραμμή και την j στήλη. Επιπλέον,

$$a^{ij} = \frac{(-1)^{i+j}c_{ij}}{a}, \quad i,j \in \{1,\dots,n\}. \tag{4.2}$$

Αν γράψουμε

$$a = [\vec{a_1},\dots,\vec{a_n}],$$

όπου $\vec{a_i}$ είναι η i-στήλη του $(a_{ij}(t))$ ως διάνυσμα, τότε

$$\frac{da}{dt} = \left[\frac{d\vec{a_1}}{dt},\dots,\vec{a_n}\right] + \dots + \left[a_1,\dots,\frac{d\vec{a_n}}{dt}\right].$$

Συνεπώς, αν αναπτύξουμε όλες τις ορίζουσες κατά τα στοιχεία της στήλης που παραγωγίστηκε, χρησιμοποιώντας τους τύπους (4.1), (4.2) καθώς και τη συμμετρία του πίνακα (a_{ij}) έχουμε τελικά

$$\frac{da}{dt} = \sum_{i,j=1}^{n}(-1)^{i+j}c_{ij}\frac{da_{ij}}{dt} = a\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}\frac{da_{ij}}{dt},$$

όπως θέλαμε. □

Ορισμός 4.2.2. *Καλούμε **διαφορίσιμη μεταβολή** της εμβάπτισης $f : N^n \to M^m$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση*

$$F : (-\varepsilon,\varepsilon) \times N^n \to M^m,$$

όπου ε θετική σταθερά, τέτοια ώστε :

1. *Για κάθε $t \in (-\varepsilon,\varepsilon) := I$ η $F_t : N^n \to M^m$, $p \to F_t(p) := F(t,p)$ να είναι εμβάπτιση, και*

2. $F_0 = f$.

Η F_t επάγει στο N^n μια νέα μετρική, που συμβολίζεται με $\langle , \rangle^t$. Το στοιχείο όγκου της καινούργιας μετρικής το συμβολίζουμε με dN_t. Έτσι, ο όγκος του N^n ως προς την καινούργια μετρική δίνεται ως

$$V(t) = \int_N dN_t.$$

Θέτουμε

$$T(p) = dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{(0,p)}\right),$$

όπου με $\frac{\partial}{\partial t}|_{(0,p)}$ συμβολίζουμε το εφαπτόμενο διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο στο $I \times N^n$. Είναι φανερό ότι το T είναι ένα διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της $f = F_0$, δηλαδή $T \in \Delta_f(N^n)$, και λέγεται **πεδίο μεταβολής** της f.

Ακολουθώντας τον παραπάνω συμβολισμό, έχουμε το ακόλουθο

Θεώρημα 4.2.3. *(Τύπος της Πρώτης Μεταβολής του Όγκου) Έστω N^n ένα διαφορίσιμο και προσανατολισμένο πολύπτυγμα και M^m ένα πολύπτυγμα Riemann. Θεωρούμε μια εμβάπτιση $f : N^n \to M^m$. Έστω F μια διαφορίσιμη μεταβολή της f, με πεδίο μεταβολής το T. Αν το T έχει συμπαγές στήριγμα, τότε ισχύει ο τύπος*

$$\frac{d}{dt}V(t)|_{t=0} = -\int_N \left\langle n\vec{H}, T\right\rangle dN,$$

όπου $\vec{H}$ είναι το διάνυσμα μέσης καμπυλότητας της εμβάπτισης f.

Απόδειξη. Έστω p τυχαίο σημείο του N^n. Γύρω από το p θεωρούμε ένα χάρτη $(U, (x_1, \dots, x_n))$ έτσι ώστε το $(x_1, \dots, x_n)$ να είναι κανονικό σύστημα συντεταγμένων. Δηλαδή

$$\langle \partial_i, \partial_j \rangle (p) = \delta_{ij},$$

και

$$\nabla^N_{\partial_i} \partial_j(p) = 0, \ i, j = 1, \dots, n,$$

όπου $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n$.

Στο πολύπτυγμα γινόμενο $I \times N^n$, θεωρούμε τον χάρτη $(I \times U, (t, x_1, \dots, x_n))$ γύρω από το $(0, p)$. Επεκτείνουμε τα ∂_i κατά τον συνήθη τρόπο στο πολύπτυγμα γινόμενο $I \times N^n$, έτσι ώστε

$$dF(\partial_i) = dF_t(\partial_i).$$

Επίσης, έστω $g_F(t, x)$ η μετρική που επάγεται στο $I \times N^n$ από την F σε μια περιοχή του σημείου $(0, p) \in I \times N^n$. Συμβολίζουμε με

$$g_{ij}(t, x) = \langle dF(\partial_i), dF(\partial_j) \rangle \circ F,$$

τις συνιστώσες της $g_F(t, x)$ ως προς τον προηγούμενο χάρτη και με

$$g(t, x) = \det\left(g_{ij}(t, x)\right),$$

την ορίζουσα του αντίστοιχου πίνακα.

Αφού ο χώρος των n-μορφών είναι μονοδιάστατος, μπορούμε να γράψουμε

$$dN_t = \mathcal{J} dN, \tag{4.3}$$

όπου $\mathcal{J} : (-\varepsilon, \varepsilon) \times N^n \longrightarrow \mathbb{R}$, μια διαφορίσιμη συνάρτηση. Όμως, τοπικά,

$$dN_t = \sqrt{g(t,x)}dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

και

$$dN = \sqrt{g(0,x)}dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Επομένως, από την σχέση (4.3) παίρνουμε

$$\mathcal{J}(t,x) = \frac{\sqrt{g(t,x)}}{\sqrt{g(0,x)}}.$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση ως προς t και εκτιμώντας στο σημείο $(0,p)$, έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{J}'(0,p) &= \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t}(0,p) \\ &= \frac{1}{\sqrt{g(0,p)}} \frac{g'(t,p)}{2\sqrt{g(t,p)}}\bigg|_{t=0} \\ &= \frac{1}{2} g'(0,p). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Κάνοντας χρήση του Λήμματος 4.2.1 έχουμε

$$\begin{aligned} g'(0,p) &= g(0,p) \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(0,p) \frac{dg_{ij}}{dt}(0,p) \\ &= \sum_{i=1}^{n} g'_{ii}(0,p). \end{aligned}$$

Όμως, χρησιμοποιώντας και την ιδιότητα 5. της συναλλοίωτης παραγώγου $\overset{F}{\nabla}$, συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ii}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\langle dF(\partial_i), dF(\partial_i)\rangle \circ F\right) \\ &= dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\langle dF(\partial_i), dF(\partial_i)\rangle \\ &= 2\left\langle \overset{F}{\nabla}_{\partial_t} dF(\partial_i), dF(\partial_i)\right\rangle \\ &= 2\left\langle dF\left[\frac{\partial}{\partial t}, \partial_i\right] + \overset{F}{\nabla}_{\partial_i} dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), dF(\partial_i)\right\rangle. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Επειδή τα $\left\{\frac{\partial}{\partial t} =: \partial_t, \partial_1, \ldots, \partial_n\right\}$ είναι βασικά διανυσματικά πεδία που αντιστοιχούν στον χάρτη $(I \times U, (t, x_1, \ldots, x_n))$, προκύπτει ότι

$$dF\left([\partial_t, \partial_i]\right) = 0, \; i = 1, \ldots, n.$$

Επιστρέφοντας στην σχέση (4.5) και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα *3.* της συναλλοίωτης παραγώγου $\overset{F}{\nabla}$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_{ii}}{\partial t} &= 2\left\langle \overset{F}{\nabla}_{\partial_i} dF\left(\partial_t\right), dF(\partial_i)\right\rangle \\
&= 2\partial_i \left\langle dF\left(\partial_t\right), dF(\partial_i)\right\rangle \\
&\quad -2\left\langle dF\left(\partial_t\right), \overset{F}{\nabla}_{\partial_i} dF(\partial_i)\right\rangle \\
&= 2\left\{dF(\partial_i) \left\langle dF\left(\partial_t\right), dF(\partial_i)\right\rangle\right. .
\end{aligned}$$

Όμως, με την βοήθεια του τύπου του Gauss έχουμε

$$\overset{F}{\nabla}_{\partial_i} dF\left(\partial_i\right) \;=\; dF_t\left(\nabla^N_{\partial_i}\partial_i\right) + B_{F_t}\left(\partial_i, \partial_i\right).$$

Υπολογίζοντας στο $(0,p)$ και αθροίζοντας ως προς i, η παραπάνω σχέση παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_{ii}}{\partial t}(0,p) &= 2\left\{\sum_{i=1}^{n} \partial_i \left\langle df\left(\partial_t\right), df(\partial_i)\right\rangle\right. \\
&\quad \left. -\sum_{i=1}^{n} \left\langle df\left(\partial_t\right), B_f(\partial_i, \partial_i)\right\rangle\right\}. \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

Όμως, έχουμε την εξής ανάλυση του T στο σημείο p :

$$\begin{aligned}
T(p) &= df_{(0,p)}\left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{(0,p)}\right) \\
&= df_p(T^{\top}(p)) + T^{\perp}(p),
\end{aligned}$$

όπου $T^{\top} \in \Delta(N^n)$ και $T^{\perp}(p) \in T^{\perp}_{f(p)}N^n$. Από τα παραπάνω παίρνουμε ότι :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \partial_i \left\langle df(\partial_t), df(\partial_i)\right\rangle |_{(0,p)} &= \sum_{i=1}^{n} \partial_i \left\langle T, df(\partial_i)\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \partial_i \left\langle df(T^{\top}), df(\partial_i)\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \partial_i \left\langle T^{\top}, \partial_i\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{\partial_i} T^{\top}, \partial_i\right\rangle .
\end{aligned}$$

Άρα, η σχέση (4.6) γίνεται

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_{ii}}{\partial t}(0,p) = 2\left\{ \mathrm{div}_N T^{\top} - \left\langle T, n\vec{H}(p) \right\rangle \right\},$$

όπου div_N η απόκλιση στο N^n.

Αντικαθιστώντας στην (4.4), παίρνουμε τη σχέση

$$\begin{aligned} \mathcal{J}'(0,p) &= \frac{1}{2} g'(0,p) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1} g'_{ii}(0,p) \\ &= \mathrm{div}_N T^{\top} - \left\langle T, n\vec{H}(p) \right\rangle. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Τελικά,

$$\frac{d}{dt}(dN_t)|_{t=0} = \left(\mathrm{div}_N T^{\top} - n \left\langle T^{\perp}, \vec{H} \right\rangle \right) dN.$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Stokes, προκύπτει ότι

$$\left. \frac{d}{dt} V(t) \right|_{t=0} = -n \int_N \left\langle \vec{H}, T \right\rangle dN,$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Παρατήρηση 4.2.4. Αν στο πολύπτυγμα N^n ισχύει $\vec{H} = 0$, τότε ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του πολυπτύγματος είναι μηδέν. Τέτοιες εμβαπτίσεις ονομάζονται **ελαχιστικές** (minimal).

4.3 Τύπος της Δεύτερης Μεταβολής του Όγκου

Από την προηγούμενη ενότητα, και συγκεκριμένα από τον τύπο της πρώτης μεταβολής του όγκου, είδαμε ότι μια ελαχιστική εμβάπτιση $F : N^n \to M^m$ αντιπροσωπεύει ένα κρίσιμο σημείο για την συνάρτηση του όγκου στον χώρο των εμβαπτίσεων από το N^n στο M^m. Φυσικά λοιπόν, τίθεται το ερώτημα αν αυτό το κρίσιμο σημείο αποτελεί τοπικό ελάχιστο για την συνάρτηση του όγκου. Δηλαδή, θα εξετάσουμε πότε για κάθε λεία μεταβολή $F_t : N^n \to M^m$, ισχύει

$$V(0) \leq V(t),$$

για κάθε t που ανήκει σε μια περιοχή του μηδενός. Για να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα, πρέπει να εξετάσουμε την δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης του όγκου.

Θεώρημα 4.3.1. *(Τύπος της Δεύτερης Μεταβολής του Όγκου) Έστω N^n ένα διαφορίσιμο και προσανατολισμένο πολύπτυγμα και M^m ένα πολύπτυγμα Riemann. Θεωρούμε μια εμβάπτιση $f : N^n \to M^m$. Αν F μια διαφορίσιμη μεταβολή της f, με πεδίο μεταβολής $T \in \Gamma_c^{\perp}(N^n)$, τότε ισχύει ο τύπος*

$$\left. \frac{d^2 V(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = \int_N \left[-\sum_{i,j=1}^{n} \langle T, B_f(\partial_i, \partial_j) \rangle^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle R(df(\partial_i), T)\, T, df(\partial_i) \rangle \right.$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\ell=n+1}^{m}\left\langle \overset{f}{\nabla}_{\partial_i} T, e_\ell \right\rangle^2\Bigg] dN + \int_N \Big[\left\langle (\nabla_T^M T)^\perp, n\vec{H}\right\rangle$$

$$+\left\langle T, n\vec{H}\right\rangle^2\Bigg] dN, \tag{4.8}$$

όπου R είναι ο τανυστής καμπυλότητας του M^m και $e_{n+1}, \dots, e_m$ είναι ορθομοναδιαία κάθετα διανυσματικά πεδία της f.

Απόδειξη. Σε ένα γενικό σύστημα συντεταγμένων στο p ως προς $\langle , \rangle$, με βασικά διανυσματικά πεδία $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ χρησιμοποιώντας και το Λήμμα 4.2.1, η πρώτη παράγωγος του $\mathcal{J}(t,x)$ ως προς t ισούται με

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t}(t,x) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sqrt{g(t,x)}}{\sqrt{g(0,x)}}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{g(0,x)}}\frac{1}{2\sqrt{g(t,x)}}\frac{\partial g}{\partial t}(t,x)\\
&= \frac{1}{\sqrt{g(0,x)}}\frac{1}{2\sqrt{g(t,x)}} g(t,x)\sum_{i,j}^{n} g^{ij}\frac{\partial g_{ij}(t,x)}{\partial t}\\
&= \frac{1}{2}\mathcal{J}(t,x)\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(t,x)\frac{\partial}{\partial t}\left(\langle dF(\partial_i), dF(\partial_j)\rangle \circ F\right)\\
&= \frac{1}{2}\mathcal{J}(t,x)\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(t,x)\left(T\langle dF(\partial_i), dF(\partial_j)\rangle\right)\\
&= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(t,x)\left\langle \overset{F}{\nabla}_{\partial_t} dF(\partial_i), dF(\partial_j)\right\rangle \mathcal{J}(t,x).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Παίρνουμε την δεύτερη μερική παράγωγο ως προς t και υπολογίζουμε στο $(0,p)$, στο οποίο υποθέτουμε, όπως και προηγουμένως, ότι το $(U,(x_1,\dots,x_n))$ είναι χάρτης με $(x_1,\dots,x_n)$ κανονικό σύστημα συντεταγμένων, δηλαδή ισχύει

$$[\partial_t, \partial_i] = 0, \tag{4.10}$$

$$\langle \partial_i, \partial_j\rangle (p) = \delta_{ij},$$

και

$$\nabla^N_{\partial_i}\partial_j(p) = 0, \ i,j = 1,\dots,n.$$

Τότε,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathcal{J}}{\partial t^2}(0,p) &= \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial g^{ij}}{\partial t}(0,p)\left\langle \overset{F}{\nabla}_{\partial_i} T, dF(\partial_j)\right\rangle \mathcal{J}(0,p)\\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(0,p)\frac{\partial}{\partial t}\left(\left\langle \overset{F}{\nabla}_{\partial_i} T, dF(\partial_j)\right\rangle \circ F\right)\mathcal{J}(0,p)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& + \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(0,p) \left\langle \overset{F}{\nabla}_{\partial_i} T, dF(\partial_j) \right\rangle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t}(0,p) \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial g^{ij}}{\partial t}(0,p) \left\langle \overset{F}{\nabla}_{\partial_i} T, dF(\partial_j) \right\rangle + \sum_{i=1}^{n} T \left\langle \overset{F}{\nabla}_{\partial_i} T, dF(\partial_i) \right\rangle \\
& + \left(\sum_{i=1}^{n} \left\langle \overset{F}{\nabla}_{\partial_i} T, dF(\partial_i) \right\rangle \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \left\langle \overset{F}{\nabla}_{\partial_j} T, dF(\partial_j) \right\rangle \right) \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial g^{ij}}{\partial t}(0,p) \left\langle \nabla^M_{dF(\partial_i)} T, dF(\partial_j) \right\rangle + \sum_{i=1}^{n} T \left\langle \nabla^M_{dF(\partial_i)} T, dF(\partial_i) \right\rangle \\
& + \left(\sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla^M_{dF(\partial_i)} T, dF(\partial_i) \right\rangle \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \left\langle \nabla^M_{dF(\partial_j)} T, dF(\partial_j) \right\rangle \right). \quad (4.11)
\end{aligned}
$$

Επειδή

$$\sum_{k=1}^{n} g^{ik} g_{kj} = \delta_{ij},$$

διαφορίζοντας ως προς t και εφαρμόζοντας στο $t = 0$ έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g^{ik}}{\partial t}(0,p) g_{kj}(0,p) + \sum_{k=1}^{n} g^{ik}(0,p) \frac{\partial g_{kj}}{\partial t}(0,p) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial t}(0,p) + \frac{\partial g_{ij}}{\partial t}(0,p) = 0.$$

Συνεπώς, κάνοντας χρήση της σχέσης $[\partial_t, \partial_i] = 0,\ i = 1, \ldots, n$, και υπολογίζοντας στο $(0,p)$ συνεπάγεται

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g^{ij}}{\partial t} &= -\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} \\
&= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\langle dF(\partial_i), dF(\partial_j) \rangle \circ F \right) \\
&= -dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \langle dF(\partial_i), dF(\partial_j) \rangle \\
&= -\left\langle \overset{f}{\nabla}_{\partial_i} T, df(\partial_j) \right\rangle - \left\langle df(\partial_i), \overset{f}{\nabla}_{\partial_j} T \right\rangle \\
&= -\left\langle \nabla^M_{df(\partial_i)} T, df(\partial_j) \right\rangle - \left\langle df(\partial_i), \nabla^M_{df(\partial_j)} T \right\rangle.
\end{aligned}
$$

Επομένως, ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της (4.11) γίνεται

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial g^{ij}}{\partial t}(0,p) \left\langle \nabla^M_{df(\partial_i)} T, df(\partial_j) \right\rangle &= -\sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \nabla^M_{df(\partial_i)} T, df(\partial_j) \right\rangle^2 \\
& \quad - \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \nabla^M_{df(\partial_j)} T, df(\partial_i) \right\rangle \left\langle \nabla^M_{df(\partial_i)} T, df(\partial_j) \right\rangle.
\end{aligned}
$$

Ο δεύτερος όρος του δεξιού μέλους της (4.11) μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} T\left\langle \nabla^M_{df(\partial_i)}T, df(\partial_i)\right\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\left\langle \overset{f}{\nabla}_{\partial_t}\left(\nabla^M_{df(\partial_i)}T\right), df(\partial_i)\right\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\left\langle \nabla^M_{df(\partial_i)}T, \overset{f}{\nabla}_{\partial_t} df(\partial_i)\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left\langle \nabla^M_T\left(\nabla^M_{df(\partial_i)}T\right), df(\partial_i)\right\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\left\langle \nabla^M_{df(\partial_i)}T, \nabla^M_T df(\partial_i)\right\rangle . \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

Όμως από τον ορισμό του τανυστή καμπυλότητας και εφαρμόζοντας ξανά την (4.10), η παραπάνω σχέση παίρνει την μορφή

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} T\left\langle \nabla^M_{df(\partial_i)}T, df(\partial_i)\right\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\left\langle R\left(T, df(\partial_i)\right)T, df(\partial_i)\right\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\left\langle \nabla^M_{df(\partial_i)}\nabla^M_T T, df(\partial_i)\right\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\left\langle \nabla^M_{df(\partial_i)}T, \nabla^M_{df(\partial_i)}T\right\rangle ,
\end{aligned}
$$

όπου R ο τανυστής καμπυλότητας του M^m.

Επομένως, από τα παραπάνω και χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι το διανυσματικό πεδίο μεταβολής είναι κάθετο στο N, ο τύπος (4.11) γράφεται ως εξής

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathcal{J}}{\partial t^2}(0,p) &= -\sum_{i,j=1}^{n}\left\langle \nabla^M_{df(\partial_i)}T, df(\partial_j)\right\rangle^2 \\
&\quad - \sum_{i,j=1}^{n}\left\langle \nabla^M_{df(\partial_j)}T, df(\partial_i)\right\rangle \left\langle \nabla^M_{df(\partial_i)}T, df(\partial_j)\right\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\left\langle R\left(T, df(\partial_i)\right)T, df(\partial_i)\right\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\left\langle \nabla^M_{df(\partial_i)}\nabla^M_T T, df(\partial_i)\right\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\left|\nabla^M_{df(\partial_i)}T\right|^2 + \left(\sum_{i=1}^{n}\left\langle \nabla^M_{df(\partial_i)}T, df(\partial_i)\right\rangle\right)^2 . \qquad (4.13)
\end{aligned}
$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι ο τύπος του Gauss απλοποιείται ως εξής

$$
\nabla^M_{df(\partial_i)} df(\partial_i) = df(\nabla^N_{\partial_i}\partial_i) + B_f\left(\partial_i, \partial_i\right),
$$

ο τέταρτος όρος της (4.13) παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\langle\nabla^M_{df(\partial_i)}\nabla^M_T T, df(\partial_i)\rangle &= \sum_{i=1}^{n} df(\partial_i)\langle\nabla^M_T T, df(\partial_i)\rangle \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla^M_T T, \nabla^M_{df(\partial_i)} df(\partial_i)\rangle \\ &= \operatorname{div}(\nabla^M_T T)^{\top} - \sum_{i=1}^{n}\left\langle(\nabla^M_T T)^{\perp}, B_f(\partial_i,\partial_i)\right\rangle \\ &= \operatorname{div}(\nabla^M_T T)^{\top} - \sum_{i=1}^{n}\left\langle(\nabla^M_T T)^{\perp}, n\vec{H}\right\rangle.\end{aligned}$$

Επίσης, με την βοήθεια της σχέσης

$$\langle T, df(\partial_i)\rangle = 0 \Rightarrow df(\partial_i)\langle T, df(\partial_i)\rangle = 0,$$

ο τελευταίος όρος της (4.13) γράφεται ως εξής

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n}\langle\nabla^M_{df(\partial_i)}T, df(\partial_i)\rangle\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} df(\partial_i)\langle T, df(\partial_i)\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle T, \nabla^M_{df(\partial_i)} df(\partial_i)\rangle\right)^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n}\langle T, \nabla^M_{df(\partial_i)} df(\partial_i)\rangle\right)^2 \\ &= \left\langle T, n\vec{H}\right\rangle^2.\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην (4.13), και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα *1.*, του τανυστή καμπυλότητας (Ορισμός 1.4.5), παίρνουμε

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^2 \mathcal{J}}{\partial t^2}\right|_{t=0} &= -\sum_{i,j=1}^{n}\langle\nabla^M_{df(\partial_i)}T, df(\partial_j)\rangle^2 \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^{n}\left\langle\nabla^M_{df(\partial_j)}T, df(\partial_i)\right\rangle\langle\nabla^M_{df(\partial_i)}T, df(\partial_j)\rangle \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n}\langle R(df(\partial_i), T)T, df(\partial_i)\rangle + \operatorname{div}\left(\nabla^M_T T\right)^{\top} \\ &\quad - \left\langle(\nabla^M_T T)^{\perp}, n\vec{H}\right\rangle + \sum_{i=1}^{n}|\nabla^M_{df(\partial_i)}T|^2 + \left\langle T, n\vec{H}\right\rangle^2. \qquad (4.14)\end{aligned}$$

Αν $e_{n+1}, \ldots, e_m$ είναι ορθομοναδιαία κάθετα διανυσματικά πεδία της f, τότε

$$\sum_{i=1}^{n}|\nabla^M_{df(\partial_i)}T|^2 = \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla^M_{df(\partial_i)}T, df(\partial_j)\rangle^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\ell=n+1}^{m}\langle\nabla^M_{df(\partial_i)}T, e_\ell\rangle^2.$$

Όμως,

$$\begin{aligned}
\left\langle \nabla^M_{df(\partial_i)}T, df(\partial_j)\right\rangle &= df(\partial_i)\langle T, df(\partial_j)\rangle - \left\langle T, \nabla^M_{df(\partial_i)}df(\partial_j)\right\rangle \\
&= -\left\langle T, df\left(\nabla^N_{\partial_i}\partial_j\right) + B_f(\partial_i,\partial_j)\right\rangle \\
&= -\langle T, B_f(\partial_i,\partial_j)\rangle \\
&= -\langle T, B_f(\partial_j,\partial_i)\rangle \\
&= \left\langle \nabla^M_{df(\partial_j)}T, df(\partial_i)\right\rangle .
\end{aligned}$$

Άρα η σχέση (4.14) γράφεται

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial^2 \mathcal{J}}{\partial t^2}\right|_{t=0} &= -\sum_{i,j=1}^{n}\langle T, B_f(\partial_i,\partial_j)\rangle^2 - \sum_{i=1}^{n}\langle R(df(\partial_i),T)T, df(\partial_i)\rangle \\
&\quad + \operatorname{div}(\nabla^M_T T)^{\top} - \left\langle (\nabla^M_T T)^{\perp}, n\overrightarrow{H}\right\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\ell=n+1}^{m}\langle \nabla^M_{df(\partial_i)}T, e_\ell\rangle^2 + \left\langle T, n\overrightarrow{H}\right\rangle^2 . \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

Τελικά, κάνοντας χρήση του Θεωρήματος Stokes, ο τύπος της δεύτερης μεταβολής του όγκου για κάθετα πεδία μεταβολής με συμπαγή στήριγμα, γίνεται

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d^2V(t)}{dt^2}\right|_{t=0} &= \int_N \left[-\sum_{i,j=1}^{n}\langle T, B_f(\partial_i,\partial_j)\rangle^2 - \sum_{i=1}^{n}\langle R(df(\partial_i),T)T, df(\partial_i)\rangle \right.\\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\ell=n+1}^{m}\left\langle \overset{f}{\nabla}_{\partial_i} T, e_\ell\right\rangle^2\right] dN + \int_N \left[\left\langle (\nabla^M_T T)^{\perp}, n\overrightarrow{H}\right\rangle \right.\\
&\quad \left. + \left\langle T, n\overrightarrow{H}\right\rangle^2\right] dN.
\end{aligned}$$

που είναι ο τύπος που θέλαμε. □

Ειδικότερα, υποθέτουμε ότι το N^n είναι ένα προσανατολισμένο και ελαχιστικό υποπολύπτυγμα συνδιάστασης 1, ενός προσανατολίσιμου πολυπτύγματος M^m. Αν ∂_m είναι το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο στο N^n, τότε μπορούμε να γράψουμε το κάθετο πεδίο μεταβολής ως $T = \psi\partial_m$. Ο τύπος της δεύτερης μεταβολής του όγκου (4.8) παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d^2V(t)}{dt^2}\right|_{t=0} &= \int_N \left[-\sum_{i,j=1}^{n}\langle T, B_f(\partial_i,\partial_j)\rangle^2 - \operatorname{Ric}(T)\right.\\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla^M_{df(\partial_i)}T, \partial_m\rangle^2\right] dN, \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

όπου $\operatorname{Ric}(T)$ είναι η καμπυλότητα Ricci του πολυπτύγματος M^m στην διεύθυνση T. Στη συνέχεια αναλύουμε το διάνυσμα $B_f(\partial_i,\partial_j)$ στην μοναδική του συνιστώσα ως εξής

$$B_f(\partial_i,\partial_j) = b^f_{ij}\partial_m.$$

Επίσης, από την σχέση $\langle \partial_m, \partial_m \rangle = 1$ έχουμε

$$\partial_i \langle \partial_m, \partial_m \rangle = 2 \left\langle \nabla^M_{\partial_i} \partial_m, \partial_m \right\rangle = 0,$$

για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση παρατηρούμε το εξής

$$\begin{aligned} \left\langle \nabla^M_{df(\partial_i)} T, \partial_m \right\rangle |_{t=0} &= \left\langle \nabla^M_{\partial_i} T, \partial_m \right\rangle \\ &= \psi \left\langle \nabla^M_{\partial_i} \partial_m, \partial_m \right\rangle + \partial_i(\psi) \langle \partial_m, \partial_m \rangle \\ &= \partial_i(\psi). \end{aligned}$$

Άρα η σχέση (4.16) γίνεται

$$\left.\frac{d^2V(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \int_N \left[-\sum_{i,j=1}^{n} \psi^2 \left(b^f_{ij}\right)^2 - \psi^2 \operatorname{Ric}(\partial_m) + |\nabla\psi|^2 \right] dN.$$

Στην περίπτωση όπου το N^n είναι μια προσανατολισμένη υπερεπιφάνεια ενός προσανατολίσιμου πολυπτύγματος M^m μπορούμε να περιορίσουμε την μεταβολή σε υπερεπιφάνειες που απέχουν σταθερή απόσταση από το N^n. Η μεταβολή αυτή του N^n γίνεται ως εξής: Έστω ∂_m το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο του N^n στο M^m. Θεωρούμε την μεταβολή $F(t,p) = \exp_p(t\partial_m)$ όπου $\exp_p$ είναι η εκθετική απεικόνιση του M^m στο σημείο $p \in N^n$. Το πεδίο αυτής της μεταβολής είναι το ∂_m και ισχύει

$$\nabla^M_{\partial_m} dF \left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{(0,p)} \right) = 0.$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο (4.9) σε ένα σημείο $(x,0)$ και κάνοντας χρήση και του τύπου του Weingarten, έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t}(x,0) &= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(x,0) \left\langle \overset{F}{\nabla}_{\partial_t} dF(\partial_i), dF(\partial_j) \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(x,0) \left\langle \overset{F}{\nabla}_{dF(\partial_i)} dF(\partial_t), dF(\partial_j) \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(x,0) \left\langle -df\left(A_{\partial_t}\partial_i\right), \partial_j \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(x,0) \left\langle B_f(\partial_i, \partial_j), \partial_t \right\rangle \\ &= H(x), \end{aligned}$$

όπου A ο τελεστής Weingarten του N^n και θέσαμε $n\vec{H} = H\partial_m$. Έγινε χρήση του παρακάτω αποτελέσματος [Pe]: Θεωρούμε το $(2,0)-$τανυστικό πεδίο

$$(X,Y) \to \langle B(X,Y), \xi \rangle,$$

με $X, Y \in \Delta(M^m)$ και $\xi \in (\Delta(M^m))^{\perp}$. Η ποσότητα $\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(x,0) \langle B_f(\partial_i, \partial_j), \partial_t \rangle$ είναι ίση με το ίχνος του B.

Επίσης, ο τύπος της δεύτερης παραγώγου για το στοιχείο όγκου είναι ο εξής

$$\frac{\partial^2 \mathcal{J}}{\partial t^2}(x) = -\sum_{i,j=1}^{n}\left(b^f_{ij}\right)^2(x) - \mathrm{Ric}(\partial_m)(x) + H^2(x).$$

4.4 Τα Θεωρήματα των Bishop και Lichnerowicz-Obata

Θα ορίσουμε μια πολύ βασική απεικόνιση της Γεωμετρίας Riemann, την εκθετική απεικόνιση, μέσω της οποίας θα εισάγουμε ένα σύστημα συντεταγμένων, στο οποίο οι υπολογισμοί απλοποιούνται ιδιαίτερα. Μπορούμε να διαλέξουμε κανονικές ή κανονικές σφαιρικές συντεταγμένες.

Πρόταση 4.4.1. *Έστω M^m ένα πολύπτυγμα Riemann. Για κάθε $p \in M^m$, υπάρχουν ανοιχτή περιοχή U του p, ένας αριθμός $\varepsilon > 0$ και διαφορίσιμη απεικόνιση*

$$\gamma : (-2,2) \times \mathcal{U} \to M^m, \text{ με } \mathcal{U} = \{(p,v) \in TM^m, p \in U, v \in T_pM^m \text{ με } |v| < \varepsilon\},$$

τέτοια ώστε η καμπύλη $t \to \gamma(t,p,v), |t| < 2$, να είναι η μοναδική γεωδαισιακή που διέρχεται από το σημείο p για $t = 0$, με ταχύτητα v, δηλαδή $\gamma(0,p,v) = p$, $\frac{\partial\gamma}{\partial t}(0,p,v) = v$.

Ορισμός 4.4.2. *Έστω U μια περιοχή του p, και ε θετικός αριθμός όπως στην παραπάνω Πρόταση. Θεωρούμε την* **ανοιχτή μπάλα** *$B_\varepsilon(0)$ ακτίνας ε με κέντρο το μηδέν στον T_pM^m. Η απεικόνιση*

$$\exp_p : B_\varepsilon(0) \subset T_pM^m \to M^m,$$

$$\exp_p(v) := \exp(p,v) = \gamma(1,p,v), \ v \in B_\varepsilon(0),$$

λέγεται **εκθετική απεικόνιση** *στο σημείο p.*

Παρατηρήσεις 4.4.3. Η εκθετική απεικόνιση είναι καλά ορισμένη για κάθε $p \in U$, διαφορίσιμη και $\exp_p(0) = p$. Γεωμετρικά, το $\exp_p(v)$ είναι το σημείο στο M^m, στο οποίο καταλήγουμε διατρέχοντας την γεωδαισιακή με αρχή p και αρχική ταχύτητα v στον χρόνο 1. Επίσης αποδεικνύεται ότι για κάθε p, υπάρχει $\varepsilon = \varepsilon(p) > 0$ τέτοιο ώστε η

$$\exp_p : B_\varepsilon(0) \subset T_pM^m \to M^m,$$

να είναι διαφορομορφισμός του $B_\varepsilon(0) \subset T_pM^m$ στην εικόνα του. Η περιοχή

$$\exp_p(B_\varepsilon(0)) = B_\varepsilon(p)$$

του p ονομάζεται **γεωδαισιακή μπάλα** με κέντρο το p και ακτίνα ε. Η $\exp_p$ δεν είναι κατά ανάγκη ισομετρία, αλλά ὰπεικονίζει ισομετρικά κάθε ακτίνα $t \to tv$ του T_pM^m στην ακτινική γεωδαισιακή $t \to \gamma(t,p,v)$.

Ακολουθεί ένα Λήμμα που αναφέρεται στην βιβλιογραφία ως **Λήμμα του Gauss** (Gauss lemma). Η γεωμετρική του ερμηνεία είναι ότι η $d\exp_p$ απεικονίζει κάθετα διανύσματα στις ακτίνες του T_pM^m με αρχή το 0, σε διανύσματα κάθετα στις αντίστοιχες ακτινικές γεωδαισιακές με αρχή το σημείο $\exp_p(0) = p$ και έχει ως εξής:

Λήμμα 4.4.4. *(Gauss) Έστω $B_\varepsilon(p)$ μια γεωδαισιακή μπάλα στο πολύπτυγμα Riemann M^m. Κάθε γεωδαισιακή με αρχή το p τέμνει το σύνορο $\partial B_\varepsilon(p)$ κάθετα.*

Έστω M^m ένα πλήρες πολύπτυγμα Riemann, δηλαδή για κάθε $p \in M^m$, $v \in T_pM^m$, η γεωδαισιακή γ με παράμετρο το μήκος τόξου και $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$ να είναι ορισμένη στο διάστημα $[0, \infty)$. Ξέρουμε ότι για $t > 0$ αρκετά μικρό η $\gamma([0,t])$ είναι ελάχιστη γεωδαισιακή, δηλαδή $\text{dist}(\gamma(0), \gamma(t)) = t$. Συμβολίζουμε με Σ το σύνολο όλων των θετικών αριθμών t για τα οποία ισχύει $\text{dist}(\gamma(0), \gamma(t)) = t$. Αν $t_1 \in \Sigma$ και $t_2 < t_1$, τότε και $t_2 \in \Sigma$. Υποθέτουμε ότι κάποιο t_0 έχει την ιδιότητα : αν $0 < t < t_0$, τότε $t \in \Sigma$. Λόγω συνέχειας θα πρέπει και $t_0 \in \Sigma$. Πράγματι, για αυτά τα t ισχύει

$$\text{dist}(\gamma(0), \gamma(t_0)) = \lim_{t \to t_0} \text{dist}(\gamma(0), \gamma(t)) = \lim_{t \to t_0} t = t_0.$$

Έχουμε δύο περιπτώσεις. Η πρώτη είναι $\Sigma = (0, \infty)$, και η δεύτερη είναι $\sup \Sigma = t_0 < \infty$ και τότε $\Sigma = (0, t_0]$. Στην δεύτερη περίπτωση ονομάζουμε το σημείο $p_0 = \gamma(t_0)$, **σημείο διανομής** (cut point) του p κατά μήκος της γ. Έτσι για όλα τα $t \in [0, t_0]$, το τμήμα της γ που ενώνει τα σημεία $\gamma(0)$ και $\gamma(t_0)$, είναι ελάχιστη γεωδαισιακή, ενώ για $t > t_0$ το τμήμα αυτό της γ δεν είναι ελάχιστη γεωδαισιακή. Το σύνολο όλων των σημείων διανομής του p κατά μήκος όλων των γεωδαισιακών με αρχή το p, ονομάζεται **τόπος διανομής** (cut locus) του p, και συμβολίζεται με C_p. Είναι γνωστό ότι το C_p έχει μηδενικό μέτρο.

Ορισμός 4.4.5. *Έστω $\gamma : [\alpha, \beta] \to M^m$ μια γεωδαισιακή στο M^m. Ένα διανυσματικό πεδίο J κατά μήκος της γ καλείται **πεδίο Jacobi**, αν ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση*

$$\frac{\nabla}{dt}\left(\frac{\nabla J}{dt}\right) + R(J(t), \gamma'(t))\gamma'(t) = 0, \quad t \in [\alpha, \beta]$$

*η οποία λέγεται **εξίσωση Jacobi**.*

Είπαμε στις Παρατηρήσεις 4.4.3, ότι η εκθετική απεικόνιση είναι τοπικός διαφορομορφισμός από το T_pM^m στο M^m. Επιπλέον αν C_p είναι ο τόπος διανομής του p, τότε υπάρχει ένας θετικός αριθμός ε έτσι ώστε η απεικόνιση

$$\exp_p : B_\varepsilon(0) \to M^m - C_p$$

είναι διαφορομορφισμός. Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εκθετική απεικόνιση, και συγκεκριμένα τις **σφαιρικές κανονικές συντεταγμένες**, για να υπολογίσουμε το στοιχείο όγκου.

Οι σφαιρικές κανονικές συντεταγμένες δεν ορίζονται στο p, αλλά το $\{p\}$ έχει μέτρο μηδέν. Επομένως,

$$\exp : B_\varepsilon(0) - \{0\} \to M^m - C_p \cup \{p\}$$

είναι διαφορομορφισμός. Για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε [Cl2]. Διαλέγουμε μια ορθομοναδιαία βάση $\{e_1, \ldots, e_m\}$ του T_pM^m και θεωρούμε τον T_pM^m ως τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^m$ με άξονες συντεταγμένων x_i κατά μήκος των e_i, $i = 1, \ldots, m$. Για κάθε $q \in B_\varepsilon(p) := \exp_p(B_\varepsilon(0))$ υπάρχει μοναδικό $v \in T_pM^m$ με $q = \exp_p(v)$.

Όμως το v γράφεται μονοσήμαντα ως $v = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i$. Οι αριθμοί $x_1, \ldots, x_m$ ονομάζονται κανονικές συντεταγμένες του q. Είναι οι συντεταγμένες του χάρτη $(B_\varepsilon(p), \varphi)$ με $\varphi = (\exp_p)^{-1}$. Είναι γνωστό ότι $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p = e_i$, και επομένως οι συνιστώσες $g_{ij}(p)$ της μετρικής, μόνο στο p, ως προς αυτόν τον χάρτη πληρούν τις

$$g_{ij}(p) = \delta_{ij},$$

$$g_{ij,k}(p) = 0,$$

και

$$\Gamma^i_{jk}(p) = 0,$$

για κάθε $i, j, k = 1, \ldots, m$, όπου Γ^i_{jk} τα σύμβολα Christoffel, και $g_{ij,k}(p) = \partial g_{ij}/\partial x_k$.

Για $v \in T_pM^m \backslash \{0\}$ έχουμε $v = r\theta$ όπου $r = |v|$ και θ ανήκει στην μοναδιαία $(m-1)$-διάσταση σφαίρα του T_pM^m. Αν $\theta_1, \ldots, \theta_{m-1}$ είναι οι σφαιρικές συντεταγμένες του θ, οι αριθμοί $(\theta_1, \ldots, \theta_{m-1}, r)$ είναι οι σφαιρικές συντεταγμένες του v. Επειδή για κάθε $q \in B_\varepsilon(p)\backslash\{p\}$, υπάρχει μοναδικό $v \in T_pM^m\backslash\{0\}$, οι μονοσήμαντα ορισμένοι αριθμοί $(\theta_1, \ldots, \theta_{m-1}, r)$ καλούνται κανονικές σφαιρικές συντεταγμένες του q. Κατά αυτόν τον τρόπο ορίζεται χάρτης στο $B_\varepsilon(p)\backslash\{p\}$ με βασικά διανυσματικά πεδία $\frac{\partial}{\partial \theta_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \theta_{m-1}}, \frac{\partial}{\partial r}$.

Οι ευθείες του $\mathbb{R}^m$, $\gamma(t) = (t, \varphi_0)$, με σφαιρικές συντεταγμένες φ_0, t με φ_0 σταθερό, με παραμέτρηση ως προς το μήκος τόξου, απεικονίζονται μέσω της εκθετικής απεικόνισης σε γεωδαισιακές. Από το γεγονός ότι έχουμε φυσική παράμετρο συνεπάγεται η σχέση

$$g_{mm} = \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle = 1.$$

Επίσης, από το Λήμμα του Gauss, 4.4.4, ισχύει

$$g_{im} = \left\langle \frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle = 0,$$

για κάθε $i = 1, \ldots, m-1$.

Συμβολίζουμε με $J_i(r, \theta), i = 1, \ldots, m-1$ το μοναδικό πεδίο Jacobi κατά μήκος της ακτινικής γεωδαισιακής c με αρχικό σημείο το p και με αρχικές συνθήκες

$$J_i(0) = 0, \quad J_i'(0) = \frac{\partial}{\partial \theta_i}.$$

Τότε,

$$d(\exp_p)_{r\theta}\left(r\frac{\partial}{\partial \theta_i}\right) = J_i(r, \theta) \text{ με } i = 1, \ldots, m-1.$$

Αναλύοντας τα $J_1, \ldots, J_{m-1}, \frac{\partial}{\partial r}$ ως προς ένα ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{E_k\}_{k=1}^m$, έχουμε

$$J_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} E_k, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Άρα

$$\sqrt{\det(g_{ij})}(r, \theta) = |\det(a_{ik})| = \|J_1 \wedge \ldots \wedge J_{m-1} \wedge \frac{\partial}{\partial r}\| := \mathcal{J}(r, \theta).$$

Το στοιχείο όγκου dv του M^m, ισούται με

$$dv = \|J_1 \wedge \ldots \wedge J_{m-1} \wedge \frac{\partial}{\partial r}\| dr \wedge d\theta = \mathcal{J}(r,\theta) dr \wedge d\theta,$$

όπου $d\theta$ το στοιχείο όγκου της μοναδιαίας σφαίρας διάστασης $m-1$.

Παράδειγμα 4.4.6. *Έστω M^m χώρος σταθερής καμπυλότητας K, και $\gamma : [0,l] \to M^m$ γεωδαισιακή με παράμετρο το μήκος τόξου. Τα πεδία Jacobi J κατά μήκος της γ, τα οποία είναι κάθετα στην γ, με αρχικές συνθήκες*

$$J(0) = 0, \; J'(0) = \frac{\partial}{\partial \theta_i},$$

δίνονται από την εξίσωση

$$J'' + R(J,\gamma')\gamma' = J'' + KJ = 0.$$

Η λύση αυτής της εξίσωσης είναι

$$J_i(r,\theta) = \begin{cases} \frac{\sin\sqrt{K}r}{\sqrt{K}} \frac{\partial}{\partial \theta_i}, & K > 0 \\ r\frac{\partial}{\partial \theta_i}, & K = 0 \\ \frac{\sinh\sqrt{-K}r}{\sqrt{-K}} \frac{\partial}{\partial \theta_i}, & K < 0. \end{cases}$$

Επομένως,

- Το στοιχείο όγκου του $\mathbb{R}^m$ ισούται με
$$dv = r^{m-1} dr \wedge d\theta,$$
- Το στοιχείο όγκου της $\mathbb{S}^m$ ισούται με
$$dv = (\sin r)^{m-1} dr \wedge d\theta,$$
- Το στοιχείο όγκου του $\mathbb{H}^m$ ισούται με
$$dv = (\sinh r)^{m-1} dr \wedge d\theta.$$

Παράδειγμα 4.4.7. Ξέρουμε ότι ο όγκος της μοναδιαίας σφαίρας στον $\mathbb{R}^m$ είναι ίσος με

$$\int_{S^{m-1}} d\theta = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)},$$

όπου Γ, η συνάρτηση Γάμμα (βλέπε [Co-Jo]). Τότε ο όγκος της μοναδιαίας μπάλας στον $\mathbb{R}^m$ ισούται με

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \int_{S^{m-1}} \int_0^1 r^{m-1} dr d\theta \\ &= \frac{1}{m} \int_{S^{m-1}} d\theta \\ &= \frac{1}{m} \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Γενικότερα, σε ένα πλήρες πολύπτυγμα M^m διάστασης m, εκφράζοντας το στοιχείο όγκου της γεωδαισιακής μπάλας σε σφαιρικές κανονικές συντεταγμένες ως εξής

$$\mathcal{J}(\theta, r) dr \wedge d\theta,$$

όπου $d\theta$, το στοιχείο όγκου της μοναδιαίας σφαίρας διάστασης $m-1$, μπορούμε να εφαρμόσουμε τον τύπο της πρώτης και δεύτερης μεταβολής του όγκου. Από το Λήμμα του Gauss, η ποσότητα

$$\mathcal{J}(\theta, r) d\theta,$$

είναι το στοιχείο όγκου του υποπολυπτύγματος $\partial B_p(\theta, r)$, το οποίο είναι το σύνορο της γεωδαισιακής μπάλας του M^m, κέντρου p και ακτίνας r.

Ακολουθώντας την ίδια μέθοδο υπολογισμού των τύπων της Πρώτης και Δεύτερης Μεταβολής του όγκου με αυτήν στο τέλος της προηγούμενης Ενότητας, με την μόνη διαφορά ότι η ποσότητα $\mathcal{J}$ ισούται με $\sqrt{g(x)}$, αν $x = (\theta, r)$ δεν είναι στον τόπο διανομής του p, έχουμε

$$\mathcal{J}'(\theta, r) = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial r}(\theta, r) = H(\theta, r)\mathcal{J}(\theta, r) \tag{4.17}$$

και

$$\begin{aligned} \mathcal{J}''(\theta, r) &= \frac{\partial^2 \mathcal{J}}{\partial r^2}(\theta, r) \\ &= -\sum_{i,j=1}^{m-1} b_{ij}^2(\theta, r)\mathcal{J}(\theta, r) - \mathrm{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)(\theta, r)\mathcal{J}(\theta, r) \\ &\quad + H^2(\theta, r)\mathcal{J}(\theta, r), \end{aligned} \tag{4.18}$$

όπου αναλύσαμε το διάνυσμα μέσης καμπυλότητας ως $n\overrightarrow{H}(\theta, r) = H(\theta, r)\frac{\partial}{\partial r}$, και οι όροι $\mathrm{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)$ και $b_{ij}(\theta, r)$ δηλώνουν την καμπυλότητα Ricci στην ακτινική κατεύθυνση και τις συνιστώσες της δεύτερης θεμελιώδους μορφής του $\partial B_p(r)$ στο σημείο $x = (\theta, r)$, ως προς το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\frac{\partial}{\partial r}$, αντίστοιχα.

Ας εξετάσουμε την περίπτωση όπου το M^m είναι ένας χώρος με σταθερή καμπυλότητα τομής K. Συμβολίζουμε $\widehat{b}_{ij}, \widehat{H}, \widehat{\mathrm{Ric}}$ τις συνιστώσες της δεύτερης θεμελιώδους μορφής, την μέση καμπυλότητα και την καμπυλότητα Ricci αντίστοιχα, του συνόρου της γεωδαισιακής μπάλας $\partial\widehat{B_p}(r)$. Θεωρούμε, όπως προηγουμένως την συνάρτηση $\widehat{\mathcal{J}}$, στο πολύπτυγμα σταθερής καμπυλότητας τομής. Τότε σε κάθε σημείο του M^m, ο πίνακας της δεύτερης θεμελιώδους μορφής θα διαγωνοποιείται. Άρα,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{m-1} \widehat{b}_{ij}^2 &= \sum_{i=1}^{m-1} \widehat{b}_{ii}^2 \\ &= \frac{\left(\sum_{i=1}^{m-1} \widehat{b}_{ii}\right)^2}{m-1} \\ &= \frac{\widehat{H}^2}{m-1} \end{aligned} \tag{4.19}$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω ισότητα στην σχέση (4.18), παίρνουμε

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{J}}'' &= \frac{m-2}{m-1}\widehat{H}^2\widehat{\mathcal{J}} - \widehat{\mathrm{Ric}}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\widehat{\mathcal{J}} \\ &= \frac{m-2}{m-1}\left(\frac{\widehat{\mathcal{J}}'}{\widehat{\mathcal{J}}}\right)^2 - (m-1)K\widehat{\mathcal{J}}, \end{aligned} \tag{4.20}$$

αφού $\widehat{\mathcal{J}}'/\widehat{\mathcal{J}} = \widehat{H}$ από την σχέση (4.17). Από το Παράδειγμα 4.4.6 οι αρχικές συνθήκες είναι

$$\widehat{\mathcal{J}}(\theta, r) \sim r^{m-1},$$

$$\widehat{\mathcal{J}}'(\theta, r) \sim (m-1)r^{m-2},$$

καθώς $r \to 0$.

Επανερχόμαστε τώρα στην γενική περίπτωση όπου δεν έχουμε σταθερή καμπυλότητα τομής. Ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία περιμένουμε να συνάγουμε παρεμφερή αποτελέσματα. Πράγματι χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz μπορούμε να δείξουμε την εξής ανισότητα

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{m-1} b_{ij}^2 &\geq \sum_{i=1}^{m-1} b_{ii}^2 \\ &\geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{m-1} b_{ii}\right)^2}{m-1} \\ &= \frac{H^2}{m-1}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ανισότητα, από την (4.18) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{J}'' &\leq \frac{m-2}{m-1}H^2\mathcal{J} - \mathrm{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\mathcal{J} \\ &= \frac{m-2}{m-1}\left(\frac{\mathcal{J}'}{\mathcal{J}}\right)^2 - \mathrm{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\mathcal{J}, \end{aligned} \tag{4.22}$$

αφού $\mathcal{J}'/\mathcal{J} = H$ από την σχέση (4.17). Από το γεγονός ότι η μετρική γίνεται σημειακά ευκλείδεια, έχουμε τις αρχικές συνθήκες

$$\mathcal{J}(\theta, r) \sim r^{m-1},$$

$$\mathcal{J}'(\theta, r) \sim (m-1)r^{m-2},$$

καθώς $r \to 0$.

Συμφωνα με τα παραπάνω, είναι φυσικό να υπάρχει σχέση μεταξύ των όγκων τυχαίων πολυπτυγμάτων, και αυτών με σταθερή καμπυλότητα. Μια τέτοια σχέση αποδεικνύεται στο επόμενο Θεώρημα, το οποίο έχει αποδειχθεί από τον Bishop (βλέπε [B-C]).

Θεώρημα 4.4.8. *(Bishop) Έστω M^m ένα πλήρες πολύπτυγμα Riemann διάστασης m, και p ένα σημείο του M^m. Υποθέτουμε ότι η καμπυλότητα Ricci του M^m, σε κάθε σημείο x είναι φραγμένη από κάτω από το*

$$(m-1)K(\mathrm{dist}(p,x)),$$

για κάποια συνάρτηση K που εξαρτάται μόνο από την απόσταση του x από το p. Αν $\mathcal{J}(\theta,r)d\theta$ είναι το στοιχείο όγκου του $\partial B_p(r)$, όπως ορίστηκε προηγουμένως, και $\overline{\mathcal{J}}(r)$ είναι η λύση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης

$$\overline{\mathcal{J}}'' = \frac{m-2}{m-1}\left(\frac{\overline{\mathcal{J}}'^2}{\overline{\mathcal{J}}}\right) - (m-1)K\overline{\mathcal{J}}, \tag{4.23}$$

με αρχικές συνθήκες

$$\overline{\mathcal{J}}(r) \sim r^{m-1},$$
$$\overline{\mathcal{J}}'(r) \sim (m-1)r^{m-2},$$

καθώς $r \to 0$, τότε μέσα στον τόπο διανομής του p, $\frac{\mathcal{J}(\theta,r)}{\overline{\mathcal{J}}(r)}$ είναι μη αύξουσα συνάρτηση του r. Επίσης, αν $\overline{H}(r) = \frac{\overline{\mathcal{J}}'}{\overline{\mathcal{J}}}$, τότε $H(\theta,r) \leq \overline{H}(r)$, όπου το (θ,r) είναι μέσα στον τόπο διανομής του p. Ειδικότερα, αν K είναι μια σταθερά, τότε το $\overline{\mathcal{J}}(r)d\theta$ αντιστοιχεί στο στοιχείο όγκου του απλά συνεκτικού χώρου μορφής σταθερής καμπυλότητας K.

Απόδειξη. Για ευκολία θέτουμε $\overline{f} = \overline{\mathcal{J}}^{\frac{1}{m-1}}$ και αντικαθιστώντας στην σχέση (4.17) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\overline{f}' &= \frac{1}{m-1}\overline{\mathcal{J}}^{\frac{1}{m-1}}\frac{1}{\overline{\mathcal{J}}}\overline{\mathcal{J}}'\\ &= \frac{1}{m-1}\overline{f}\,\overline{H}.\end{aligned}$$

Θα αντικαταστήσουμε και στην σχέση (4.23), αφού πρώτα κάνουμε τους εξής υπολογισμούς

$$\overline{\mathcal{J}}' = (m-1)\overline{f}^{m-2}\overline{f}',$$

και

$$\overline{\mathcal{J}}'' = (m-1)(m-2)\overline{f}^{m-3}\left(\overline{f}'\right)^2 + (m-1)\overline{f}^{m-2}\overline{f}''.$$

Επομένως η (4.23) γίνεται

$$\begin{aligned}(m-1)(m-2)\overline{f}^{m-3}\left(\overline{f}'\right)^2 + (m-1)\overline{f}^{m-2}\overline{f}'' &= \frac{m-2}{m-1}\frac{(m-1)^2\overline{f}^{2m-4}\left(\overline{f}'\right)^2}{\overline{f}^{m-1}}\\ &\quad -(m-1)K\overline{f}^{m-1},\end{aligned}$$

ή

$$(m-1)(m-2)\overline{f}^{m-3}\left(\overline{f}'\right)^2 + (m-1)\overline{f}^{m-2}\overline{f}'' = (m-2)(m-1)\left(\overline{f}'\right)^2\overline{f}^{m-3}$$

$$-(m-1)K\overline{f}^{m-1},$$

και καταλήγουμε στην εξής ισότητα

$$(m-1)\overline{f}^{m-2}\overline{f}'' = -(m-1)K\overline{f}^{m-1},$$

δηλαδή

$$\overline{f}'' = -\overline{f}K.$$

Οι αρχικές συνθήκες γίνονται

$$\overline{f}(0) = \overline{\mathcal{J}}^{\frac{1}{m-1}}(0) = r^{\frac{1}{m-1}(m-1)}|_{r=0} = 0,$$

$$\overline{f}'(0) = \frac{1}{m-1}\overline{\mathcal{J}}^{\frac{1}{m-1}}\frac{1}{\overline{\mathcal{J}}}\overline{\mathcal{J}}' = \frac{1}{m-1}r\frac{1}{r^{m-1}}(m-1)r^{m-2} = 1.$$

Επομένως η συνάρτηση $\overline{f}$ ικανοποιεί την εξής διαφορική εξίσωση

$$\begin{cases} \overline{f}'' = -K\overline{f}, \\ \overline{f}(0) = 0, \overline{f}'(0) = 1. \end{cases} \tag{4.24}$$

Με τον ίδιο συλλογισμό, και θέτοντας $f = \mathcal{J}^{\frac{1}{m-1}}$, έχουμε από την σχέση (4.17)

$$f' = \frac{1}{m-1}\mathcal{J}^{\frac{1}{m-1}}\frac{1}{\mathcal{J}}\mathcal{J}' = \frac{1}{m-1}fH.$$

Αντικαθιστώντας στην (4.22), χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$\mathcal{J}' = (m-1)f^{m-2}f',$$

$$\mathcal{J}'' = (m-1)(m-2)f^{m-3}(f')^2 + (m-1)f^{m-2}f'',$$

συνάγουμε

$$(m-1)(m-2)f^{m-3}(f')^2 + (m-1)f^{m-2}f'' \le \frac{m-2}{m-1}\frac{(m-1)^2 f^{2m-4}(f')^2}{f^{m-1}} - \operatorname{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)f^{m-1},$$

και συνεπώς την σχέση

$$(m-1)f^{m-2}f'' \le -\operatorname{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)f^{m-1}.$$

Σύμφωνα με την υπόθεση για το κάτω φράγμα της καμπυλότητας Ricci, η σχέση γίνεται

$$f'' \le -\frac{1}{m-1}\operatorname{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)f$$

$$\begin{aligned} &\leq -\frac{1}{m-1}K(m-1)f \\ &= -fK. \end{aligned}$$

Όπως προηγουμένως, βρίσκοντας της αρχικές συνθήκες που πρέπει να πληροί η συνάρτηση f, έχουμε τελικά

$$\begin{cases} f'' \leq -Kf, \\ f(0)=0, f'(0)=1. \end{cases} \tag{4.25}$$

Παρατηρούμε ότι όταν η K είναι σταθερά, η $\overline{f}$ από την (4.24) ισούται με

$$\overline{f}(r) = \begin{cases} \frac{\sin\sqrt{K}r}{\sqrt{K}}, & K>0 \\ r, & K=0 \\ \frac{\sinh\sqrt{-K}r}{\sqrt{-K}}, & K<0. \end{cases}$$

Δηλαδή $\overline{f}>0$ για όλες τις τιμές του $r \in (0,\infty)$ όταν $K \leq 0$, και για $r \in \left(0, \frac{\pi}{\sqrt{K}}\right)$ όταν $K>0$. Σε κάθε περίπτωση, η $\overline{f}$ είναι θετική σε ένα ανοιχτό διάστημα. Για αυτές τις τιμές του r ορίζουμε την συνάρτηση

$$F(\theta,r) = \frac{f(\theta,r)}{\overline{f}(r)}.$$

Θα δείξουμε ότι η F είναι φθίνουσα συνάρτηση, γεγονός που θα μας οδηγήσει στο ζητούμενο. Έχουμε

$$F' = \overline{f}^{-2}(f'\overline{f} - f\overline{f}'), \tag{4.26}$$

και παίρνοντας την δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} F'' &= -2\overline{f}^{-3}\overline{f}'(f'\overline{f} - f\overline{f}') + \overline{f}^{-2}[f''\overline{f} + \overline{f}'f' - f'\overline{f}' - f\overline{f}''] \\ &= -2\overline{f}^{-1}\overline{f}'\overline{f}^{-2}(f'\overline{f} - f\overline{f}') + \overline{f}^{-2}[f''\overline{f} - f\overline{f}''] \\ &\overset{(4.26)}{=} -2\overline{f}^{-1}\overline{f}'F' + \overline{f}^{-2}[f''\overline{f} + Kf\overline{f}] \\ &= -2\overline{f}^{-1}\overline{f}'F' + \overline{f}^{-1}[f'' + Kf] \\ &\leq -2\overline{f}^{-1}\overline{f}'F', \end{aligned}$$

διότι $\overline{f}^{-1}[f''+Kf] \leq 0$. Επομένως

$$(\overline{f}^2F')' = \overline{f}^2(F'' + 2\overline{f}^{-1}\overline{f}'F') \leq 0.$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση από έναν αριθμό $\varepsilon > 0$ ως το r παίρνουμε

$$\begin{aligned} F'(r) &\leq F'(\varepsilon)\overline{f}^2(\varepsilon)\overline{f}^{-2}(r) \\ &\overset{(4.26)}{=} (\overline{f}(\varepsilon)f'(\varepsilon) - f(\varepsilon)\overline{f}'(\varepsilon))\overline{f}^{-2}(r). \end{aligned}$$

Αφήνοντας το $\varepsilon \to 0$, και από τις αρχικές συνθήκες των f και $\overline{f}$ έχουμε τελικά

$$F'(r) \leq 0$$

ή αλλιώς,

$$\overline{f}f' - \overline{f}'f \leq 0. \tag{4.27}$$

Όμως

$$H(\theta,r) = \frac{\mathcal{J}'}{\mathcal{J}} = \frac{(m-1)f^{m-2}f'}{f^{m-1}} = (m-1)\frac{f'}{f},$$

$$\overline{H}(r) = \frac{\overline{\mathcal{J}}'}{\overline{\mathcal{J}}} = \frac{(m-1)\overline{f}^{m-2}\overline{f}'}{\overline{f}^{m-1}} = (m-1)\frac{\overline{f}'}{\overline{f}},$$

και από την (4.27)

$$\overline{f}f' \leq \overline{f}'f \Rightarrow \frac{f'}{f} \leq \frac{\overline{f}'}{\overline{f}} \Rightarrow H(\theta,r) \leq \overline{H}(r).$$

Προφανώς, από το γεγονός ότι η F είναι μη αρνητική συνάρτηση του r συνεπάγεται ότι και η $\frac{\mathcal{J}(\theta,r)}{\overline{\mathcal{J}}(r)} = \frac{f^{m-1}}{\overline{f}^{m-1}}$ είναι επίσης μη αρνητική συνάρτηση του r. □

Υπολογίζοντας την μέση καμπυλότητα της γεωδαισιακής μπάλας σε χώρο μορφής με σταθερή καμπυλότητα K, έχουμε το ακόλουθο

Πόρισμα 4.4.9. *Κάτω από τις ίδιες υποθέσεις του Θεωρήματος 4.4.8, αν K είναι σταθερά, τότε*

$$H \leq \begin{cases} (m-1)\sqrt{K}\cot(\sqrt{K}r), & K>0 \\ (m-1)r^{-1}, & K=0 \\ (m-1)\sqrt{-K}\coth(\sqrt{-K}r), & K<0. \end{cases}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι προφανής, αφού $H(\theta,r) \leq \overline{H}(r) = \frac{\overline{\mathcal{J}}'}{\overline{\mathcal{J}}}$, και $\overline{\mathcal{J}} = \overline{f}^{m-1}$, όπου

$$\overline{f} = \begin{cases} \frac{\sin\sqrt{K}r}{\sqrt{K}}, & K>0 \\ r, & K=0 \\ \frac{\sinh\sqrt{-K}r}{\sqrt{-K}}, & K<0. \end{cases}$$

□

Από τα παραπάνω, μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε το παρακάτω Θεώρημα, το οποίο είναι γνωστό ως Θεώρημα του Myers.

Θεώρημα 4.4.10. *(Myers) Έστω M^m ένα m-διάστατο πλήρες πολύπτυγμα Riemann με καμπυλότητα Ricci φραγμένη από κάτω*

$$\mathrm{Ric} \geq (m-1)K,$$

για κάποια σταθερά $K>0$. Τότε το M^m είναι συμπαγές, με διάμετρο

$$d \leq \frac{\pi}{\sqrt{K}}.$$

Απόδειξη. Έστω $p, q \in M^m$ και $\gamma : [0, l] \to M^m$ μια ελάχιστη γεωδαισιακή με φυσική παράμετρο, και $\gamma(0) = p, \gamma(\ell) = q$. Τότε βρισκόμαστε εκτός του τόπου διανομής. Υποθέτουμε ότι $\ell > \frac{\pi}{\sqrt{K}}$ και επομένως από το Πόρισμα 4.4.9 θα ισχύει

$$H(\theta, r) \leq \overline{H}(r) = (n-1)\sqrt{K}\cot(\sqrt{K}r),$$

κατά μήκος της γ. Επειδή

$$\lim_{r \to \frac{\pi}{\sqrt{K}}} \cot(\sqrt{K}r) = -\infty,$$

οδηγούμαστε σε άτοπο. Συνάγουμε ότι $\ell \leq \frac{\pi}{\sqrt{K}}$ και άρα $\operatorname{diam} M^m \leq \frac{\pi}{\sqrt{K}}$. Επομένως το M^m είναι συμπαγές. □

Παρατήρηση 4.4.11. Αν M^m είναι ένα m-διάστατο πλήρες πολύπτυγμα Riemann με καμπυλότητα Ricci φραγμένη από κάτω

$$\mathrm{Ric} \geq (m-1)K,$$

για κάποια σταθερά $K > 0$. Τότε από το Θεώρημα του Myers 4.4.10, και σύμφωνα με το Πόρισμα 3.1.5, το φάσμα του τελεστή Laplace είναι διακριτό.

Θα δείξουμε ότι όταν η διάμετρος, στο Θεώρημα 4.4.10 του Myers, ισούται με $\frac{\pi}{\sqrt{K}}$ τότε το πολύπτυγμα είναι ισομετρικό με μια σφαίρα. Χρειαζόμαστε την επόμενη

Πρόταση 4.4.12. *Έστω M^m ένα m-διάστατο πλήρες πολύπτυγμα Riemann και $\overline{M}^m$ είναι ένας m-διάστατος χώρος μορφής με σταθερή καμπυλότητα τομής $K > 0$. Υποθέτουμε ότι το M^m έχει καμπυλότητα Ricci φραγμένη από κάτω*

$$\mathrm{Ric} \geq (m-1)K.$$

Επίσης συμβολίζουμε με $A_p(r)$ τον όγκο του συνόρου της γεωδαισιακής μπάλας $\partial B_p(r)$, με κέντρο το $p \in M^m$ ακτίνας r, και $\overline{A}(r)$ τον όγκο του συνόρου της γεωδαισιακής μπάλας $\partial\overline{B}(r)$ ακτίνας r στο $\overline{M}^m$, και με $V_p(r)$ και $\overline{V}(r)$ τον όγκο των $B_p(r)$ και $\overline{B}(r)$ αντίστοιχα. Τότε για $0 \leq r_1 \leq r_2 < \frac{\pi}{\sqrt{K}}$, έχουμε

$$A_p(r_1)\overline{A}(r_2) \geq A_p(r_2)\overline{A}(r_1) \tag{4.28}$$

και για $0 \leq r_1 \leq r_2, r_3 \leq r_4 < \infty$ ισχύει

$$(V_p(r_2) - V_p(r_1))(\overline{V}(r_4) - \overline{V}(r_3)) \geq (V_p(r_4) - V_p(r_3))(\overline{V}(r_2) - \overline{V}(r_1)). \tag{4.29}$$

Επιπλέον, η ισότητα στην σχέση (4.29) μαζί με την υπόθεση ότι το $r_1 = 0$ συνεπάγεται ότι το $B_p(r_4)$ είναι ισομετρικό με το $\overline{B}(r_4)$.

Απόδειξη. Ορίζουμε $\mathcal{X}(r)$ να είναι το υποσύνολο της μοναδιαίας εφαπτόμενης σφαίρας στο p, έτσι ώστε για κάθε $\theta \in \mathcal{X}(r)$ η γεωδαισιακή που δίνεται από $\gamma(s) = \exp_p(s\theta)$ να είναι ελάχιστη ως το $s = r$. Προφανώς αν $r_1 \leq r_2$ τότε $\mathcal{X}(r_2) \subset \mathcal{X}(r_1)$. Από το Θεώρημα 4.4.8, έχουμε

$$\mathcal{J}(\theta, r_1)\overline{\mathcal{J}}(r_2) \geq \mathcal{J}(\theta, r_2)\overline{\mathcal{J}}(r_1)$$

για $\theta \in \mathcal{X}(r_2)$. Ολοκληρώνοντας την παραπάνω ανισότητα υπεράνω του $\mathcal{X}(r_2)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{X}(r_2)} \mathcal{J}(\theta, r_1) d\theta \overline{\mathcal{J}}(r_2) &\geq \int_{\mathcal{X}(r_2)} \mathcal{J}(\theta, r_2) d\theta \overline{\mathcal{J}}(r_1) \\ &= A_p(r_2)\overline{\mathcal{J}}(r_1). \end{aligned} \tag{4.30}$$

Όμως

$$\begin{aligned} A_p(r_1) &= \int_{\mathcal{X}(r_1)} \mathcal{J}(\theta, r_1) d\theta \\ &\geq \int_{\mathcal{X}(r_2)} \mathcal{J}(\theta, r_1) d\theta. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Άρα από την ανισότητα (4.31), και από το γεγονός ότι $\overline{A}(r) = \alpha_{m-1}\overline{\mathcal{J}}(r)$ βλέπουμε ότι η (4.30) γίνεται

$$\begin{aligned} A_p(r_1)\overline{\mathcal{J}}(r_2) &\geq A_p(r_2)\overline{\mathcal{J}}(r_1) \\ A_p(r_1)\frac{\overline{A}(r_2)}{\alpha_{m-1}} &\geq A_p(r_2)\frac{\overline{A}(r_1)}{\alpha_{m-1}} \\ A_p(r_1)\overline{A}(r_2) &\geq A_p(r_2)\overline{A}(r_1), \end{aligned}$$

όπου α_{m-1} θυμίζουμε είναι ο όγκος της μοναδιαίας $(m-1)$-σφαίρας. Για να αποδείξουμε την σχέση (4.29), διακρίνουμε δύο περιπτώσεις

- $r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq r_4$. Σε αυτήν την περίπτωση ολοκληρώνουμε την ανισότητα

$$A_p(t_1)\overline{A}(t_2) \geq A_p(t_2)\overline{A}(t_1), \tag{4.32}$$

  υπεράνω $r_1 \leq t_1 \leq r_2$ και $r_3 \leq t_2 \leq r_4$ και έχουμε

$$\int_{r_1}^{r_2}\int_{r_3}^{r_4} A_p(t_1)\overline{A}(t_2) dt_2 dt_1 \geq \int_{r_1}^{r_2}\int_{r_3}^{r_4} A_p(t_2)\overline{A}(t_1) dt_2 dt_1$$

$$\left(\int_{r_1}^{r_2} A_p(t_1)dt_1\right)\left(\int_{r_3}^{r_4} \overline{A}(t_2)dt_2\right) \geq \left(\int_{r_1}^{r_2} \overline{A}(t_1)dt_1\right)\left(\int_{r_3}^{r_4} A_p(t_2)dt_2\right)$$

$$(V_p(r_2) - V_p(r_1))(\overline{V}(r_4) - \overline{V}(r_3)) \geq (V_p(r_4) - V_p(r_3))(\overline{V}(r_2) - \overline{V}(r_1)),$$

  το οποίο είναι και το ζητούμενο.

- $r_1 \leq r_3 \leq r_2 \leq r_4$. Σε αυτήν την περίπτωση, ολοκληρώνοντας κατάλληλα την (4.32) έχουμε τις εξής ανισότητες

  α) $(V_p(r_3) - V_p(r_1))(\overline{V}(r_2) - \overline{V}(r_3)) \geq (V_p(r_2) - V_p(r_3))(\overline{V}(r_3) - \overline{V}(r_1))$

  β) $(V_p(r_3) - V_p(r_1))(\overline{V}(r_4) - \overline{V}(r_2)) \geq (V_p(r_4) - V_p(r_2))(\overline{V}(r_3) - \overline{V}(r_1))$

$$\gamma)\ (V_p(r_2) - V_p(r_3))(\overline{V}(r_4) - \overline{V}(r_2)) \geq (V_p(r_4) - V_p(r_2))(\overline{V}(r_2) - \overline{V}(r_3)).$$

Εκτελούμε τις πράξεις

$$\begin{aligned}
&(V_p(r_2) - V_p(r_1))(\overline{V}(r_4) - \overline{V}(r_3)) \\
&= (V_p(r_3) - V_p(r_1) + V_p(r_2) - V_p(r_3))(\overline{V}(r_2) - \overline{V}(r_3) + \overline{V}(r_4) - \overline{V}(r_2)) \\
&= (V_p(r_3) - V_p(r_1))(\overline{V}(r_2) - \overline{V}(r_3)) + (V_p(r_3) - V_p(r_1))(\overline{V}(r_4) - \overline{V}(r_2)) \\
&\quad +(V_p(r_2) - V_p(r_3))(\overline{V}(r_2) - \overline{V}(r_3)) + (V_p(r_2) - V_p(r_3))(\overline{V}(r_4) - \overline{V}(r_2)) \\
&\geq (V_p(r_2) - V_p(r_3))(\overline{V}(r_3) - \overline{V}(r_1)) + (V_p(r_4) - V_p(r_2))(\overline{V}(r_3) - \overline{V}(r_1)) \\
&\quad +(V_p(r_2) - V_p(r_3))(\overline{V}(r_2) - \overline{V}(r_3)) + (V_p(r_4) - V_p(r_2))(\overline{V}(r_2) - \overline{V}(r_3)) \\
&= (V_p(r_4) - V_p(r_3))(\overline{V}(r_2) - \overline{V}(r_1)),
\end{aligned}$$

όπου κάναμε χρήση των ανισοτήτων $\alpha), \beta), \gamma)$ στο σημείο που πήραμε την ανισότητα.

Παρατήρηση 4.4.13. Η ισότητα στην σχέση (4.29) ισχύει, αν και μόνο αν $\mathcal{X}(r_1) = \mathcal{X}(r_4)$ $(= \mathcal{X}(r_2) = \mathcal{X}(r_3))$ και $\mathcal{J}(\theta, r) = \overline{\mathcal{J}}(r)$ για κάθε $0 \leq r \leq r_4$ και το $\theta \in \mathcal{X}(r_1)$. Συγκεκριμένα αν, $r_1 = 0$ τότε $\mathcal{J}(\theta, r) = \overline{\mathcal{J}}(r)$ για κάθε $r \leq r_4$ και το θ ανήκει στην εφαπτόμενη μοναδιαία σφαίρα στο p. Αυτό σημαίνει ότι το $B_p(r_4)$ είναι ισομετρικό με το $\overline{B}(r_4)$.

Με την Παρατήρηση αυτή ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Το ακόλουθο Θεώρημα έχει αποδειχθεί από τον S. Y. Cheng στην εργασία [Cg].

Θεώρημα 4.4.14. *(S. Y. Cheng) Έστω M^m πλήρες m-διάστατο πολύπτυγμα Riemann με καμπυλότητα Ricci φραγμένη από κάτω*

$$\mathrm{Ric} \geq (m-1)K,$$

για κάποια σταθερά $K > 0$. Αν η διάμετρος d του M^m ικανοποιεί την σχέση

$$d = \frac{\pi}{\sqrt{K}},$$

τότε το M^m είναι ισομετρικό με την σφαίρα ακτίνας $\frac{1}{\sqrt{K}}$.

Απόδειξη. Οπως είπαμε στην αρχή του Κεφαλαίου 2, πολλαπλασιάζοντας την μετρική με κατάλληλη σταθερά μπορούμε να υποθέσουμε ότι $K = 1$. Έστω p, q δύο σημεία του M^m, τέτοια ώστε $\mathrm{dist}(p, q) = d$. Ακολουθώντας τον ίδιο συμβολισμό, αν στην Πρόταση 4.4.12 θέσουμε $0 = r_1 = r_3 \leq r_2 = \frac{d}{2} \leq r_4 = d$, τότε η σχέση (4.29) γίνεται

$$V_p\left(\frac{d}{2}\right)\overline{V}(d) \geq V_p(d)\overline{V}\left(\frac{d}{2}\right), \tag{4.33}$$

άρα

$$V_p(d) \leq V_p\left(\frac{d}{2}\right)\frac{\overline{V}(d)}{\overline{V}\left(\frac{d}{2}\right)}. \tag{4.34}$$

Από την υπόθεση ότι $d = \frac{\pi}{\sqrt{K}}$, συνάγουμε ότι

$$\overline{V}(d) = 2\overline{V}\left(\frac{d}{2}\right),$$

και αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην (4.34), έχουμε

$$V_p(d) \leq 2V_p\left(\frac{d}{2}\right). \tag{4.35}$$

Όμοια για το q έχουμε

$$V_q(d) \leq 2V_q\left(\frac{d}{2}\right). \tag{4.36}$$

Θα δείξουμε ότι $B_p\left(\frac{d}{2}\right) \cap B_q\left(\frac{d}{2}\right) = \emptyset$. Έστω ότι υπάρχει ένα $p_0 \in B_p\left(\frac{d}{2}\right) \cap B_q\left(\frac{d}{2}\right)$. Τότε

$$\begin{aligned} d = d(p,q) &\leq \operatorname{dist}(p,p_0) + \operatorname{dist}(p_0,q) \\ &< \frac{d}{2} + \frac{d}{2} \\ &< d, \end{aligned}$$

άτοπο. Άρα $B_p\left(\frac{d}{2}\right) \cap B_q\left(\frac{d}{2}\right) = \emptyset$. Επομένως, κάνοντας χρήση των σχέσεων (4.35),(4.36) έχουμε

$$\begin{aligned} 2V(M^m) &= V_p(d) + V_q(d) \\ &\leq 2\left(V_p\left(\frac{d}{2}\right) + V_q\left(\frac{d}{2}\right)\right) \\ &= 2V(M^m), \end{aligned}$$

όπου $V(M^m)$ είναι ο όγκος του M^m. Αυτό σημαίνει ότι η ανισότητα στην σχέση (4.33) γίνεται ισότητα και σύμφωνα με την Παρατήρηση 4.4.13, το M^m είναι ισομετρικό με την σφαίρα. □

Λήμμα 4.4.15. *(Ταυτότητα του Lichnerowicz) Έστω M^m ένα πολύπτυγμα Riemann και έστω f μια $C^3(M^m)$ συνάρτηση. Ισχύει ο τύπος*

$$\frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) = \operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle + \|\operatorname{Hesse} f\|^2.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ένας μακροσκελής υπολογισμός. Εξετάζουμε ξεχωριστά τον κάθε όρο. Για ευκολία εκλέγουμε το γεωδαισιακό πλαίσιο $\{e_1, \ldots, e_n\}$ σε περιοχή ενός σημείου p, δηλαδή $\nabla_{e_i} e_j|_p = 0$ (βλέπε Παρατήρηση 1.4.7). Στο p έχουμε,

$$\begin{aligned} \langle \nabla f, \nabla \Delta f\rangle|_p &= \sum_{i,j=1}^{m} \langle e_i(f)e_i, e_j(\Delta f)e_j\rangle|_p = \sum_{i=1}^{m} e_i(f)e_i(\Delta f)|_p \\ &= \sum_{i,j=1}^{m} e_i(f)\left(e_i\langle \nabla_{e_j}\nabla f, e_j\rangle\right)|_p \\ &= \sum_{i,j=1}^{m} e_i(f)\left[\langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\nabla f, e_j\rangle + \langle \nabla_{e_j}\nabla f, \nabla_{e_i}e_j\rangle\right]|_p \\ &= \sum_{i,j=1}^{m} e_i(f)\left(\langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\nabla f, e_j\rangle\right)|_p \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{m} \left\langle \nabla_{\sum_{i=1}^{m} e_i(f) e_i} \nabla_{e_j} \nabla f, e_j \right\rangle |_p \\
&= \sum_{j=1}^{m} \left\langle \nabla_{\nabla f} \nabla_{e_j} \nabla f, e_j \right\rangle |_p. \qquad (4.37)
\end{aligned}
$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση

$$\nabla_{\nabla f} e_i|_p = 0,$$

καθώς και την συμμετρία της μορφής Hesse, δηλαδή

$$\left\langle \nabla_{[e_i, \nabla f]} \nabla f, e_i \right\rangle = \langle \nabla_{e_i} \nabla f, [e_i, \nabla f] \rangle ,$$

έχουμε στο $p \in M^m$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f) &= \sum_{i=1}^{m} \langle R(e_i, \nabla f) \nabla f, e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m} \langle \nabla_{e_i} \nabla_{\nabla f} \nabla f, e_i \rangle - \sum_{i=1}^{m} \langle \nabla_{\nabla f} \nabla_{e_i} \nabla f, e_i \rangle \\
&\quad - \sum_{i=1}^{m} \left\langle \nabla_{[e_i, \nabla f]} \nabla f, e_i \right\rangle \\
&\overset{(4.37)}{=} \sum_{i=1}^{m} \langle \nabla_{e_i} \nabla_{\nabla f} \nabla f, e_i \rangle - \langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle \\
&\quad - \sum_{i=1}^{m} \langle \nabla_{e_i} \nabla f, [e_i, \nabla f] \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m} \langle \nabla_{e_i} \nabla_{\nabla f} \nabla f, e_i \rangle - \langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle \\
&\quad - \sum_{i=1}^{m} \langle \nabla_{e_i} \nabla f, \nabla_{e_i} \nabla f \rangle + \sum_{i=1}^{m} \langle \nabla_{e_i} \nabla f, \nabla_{\nabla f} e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m} \langle \nabla_{e_i} \nabla_{\nabla f} \nabla f, e_i \rangle - \langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle \\
&\quad - \| \operatorname{Hesse} f \|^2. \qquad (4.38)
\end{aligned}
$$

Όμως, και πάλι από την συμμετρία της μορφής Hesse, παίρνουμε στο $p \in M^m$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} \left(\Delta |\nabla f|^2 \right) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{m} e_i(e_i(|\nabla f|^2)) \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} e_i(e_i \langle \nabla f, \nabla f \rangle) \\
&= \sum_{i=1}^{m} e_i(\langle \nabla_{e_i} \nabla f, \nabla f \rangle)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{m} e_i \langle \nabla_{\nabla f} \nabla f, e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m} \langle \nabla_{e_i} \nabla_{\nabla f} \nabla f, e_i \rangle + \sum_{i=1}^{m} \langle \nabla_{\nabla f} \nabla f, \nabla_{e_i} e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m} \langle \nabla_{e_i} \nabla_{\nabla f} \nabla f, e_i \rangle . \qquad (4.39)
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την (4.39), στην σχέση (4.38), έχουμε το ζητούμενο. □

Το ακόλουθο Θεώρημα αποδείχθηκε από τους Lichnerowicz και Obata. Το κάτω φράγμα το απέδειξε ο Lichnerowicz στο [Lz], ενώ ο Obata χαρακτήρισε την περίπτωση της ισότητας στην εργασία [O].

Θεώρημα 4.4.16. *(Lichnerowicz-Obata) Έστω M^m ένα m-διάστατο συμπαγές πολύπτυγμα Riemann χωρίς σύνορο. Υποθέτουμε ότι η καμπυλότητα Ricci του M^m είναι φραγμένη από κάτω*

$$\mathrm{Ric} \geq (m-1)K,$$

για κάποια σταθερά $K > 0$. Τότε η πρώτη μη μηδενική ιδιοτιμή του τελεστή Laplace του M^m ικανοποιεί την σχέση

$$\lambda_1 \geq mK.$$

Επιπλέον, η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν M^m είναι ισομετρικό με την σφαίρα ακτίνας $\frac{1}{\sqrt{K}}$.

Απόδειξη. Έστω u μη σταθερή ιδιοσυνάρτηση του Δ με ιδιοτιμή το λ, δηλαδή

$$\Delta u = -\lambda u.$$

Προφανώς $\lambda = \frac{\int |\nabla u|^2}{\int u^2} > 0$. Θεωρούμε την λεία συνάρτηση

$$Q = |\nabla u|^2 + \frac{\lambda}{m} u^2$$

ορισμένη στο M^m. Σύμφωνα με την ταυτότητα του Lichnerowicz, Λήμμα 4.4.15, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\Delta Q &= \Delta \left(|\nabla u|^2 + \frac{\lambda}{m} u^2 \right) = \Delta \left(|\nabla u|^2 \right) + \frac{\lambda}{m} \Delta u^2 \\
&= 2\,\mathrm{Ric}(\nabla u, \nabla u) + 2 \langle \nabla u, \nabla(\Delta u) \rangle \\
&\quad + 2 \|\, \mathrm{Hesse}\, u \|^2 + \frac{\lambda}{m} \Delta (u \cdot u). \qquad (4.40)
\end{aligned}$$

Έστω $\mu_1, \ldots, \mu_n$ οι ιδιοτιμές του πίνακα του Hesse. Τότε

$$\begin{aligned}
\|\, \mathrm{Hesse}\, u \|^2 &= \mu_1^2 + \ldots + \mu_m^2 \\
&\geq \frac{(\mu_1 + \ldots + \mu_m)^2}{m}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(\Delta u)^2}{m} \\
&= \frac{\lambda^2 u^2}{m}.
\end{aligned}
$$

Όμως

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(\nabla u, \nabla u) &= \sum_{i=1}^{m} \langle R(\nabla u, e_i)e_i, \nabla u \rangle \\
&= |\nabla u|^2 \sum_{i=1}^{m} \left\langle R(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}, e_i)e_i, \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right\rangle \\
&\geq (m-1)K|\nabla u|^2,
\end{aligned}
$$

λόγω της υπόθεσης για την καμπυλότητα Ricci. Επιστρέφοντας στην σχέση (4.40) και αντικαθιστώντας τις παραπάνω ανισότητες έχουμε

$$
\begin{aligned}
\Delta Q &= 2\,\mathrm{Ric}(\nabla u, \nabla u) + 2\langle \nabla u, \nabla(\Delta u)\rangle + 2\|\,\mathrm{Hesse}\, u\|^2 + \frac{\lambda}{m}\Delta(u\cdot u) \\
&\geq 2(m-1)K|\nabla u|^2 + 2\langle \nabla u, \nabla(-\lambda u)\rangle + 2\|\,\mathrm{Hesse}\, u\|^2 \\
&\quad +2\frac{\lambda}{m}u\Delta u + 2\frac{\lambda}{m}|\nabla u|^2 \\
&\geq 2(m-1)K|\nabla u|^2 - 2\lambda|\nabla u|^2 + 2\frac{\lambda^2u^2}{m} \\
&\quad +2\frac{\lambda u}{m}(-\lambda u) + 2\frac{\lambda}{m}|\nabla u|^2 \\
&= 2(m-1)K|\nabla u|^2 - 2\lambda|\nabla u|^2 + 2\frac{\lambda^2u^2}{m} \\
&\quad -2\frac{\lambda^2u^2}{m} + 2\frac{\lambda}{m}|\nabla u|^2 \\
&= 2(m-1)\left(K - \frac{\lambda}{m}\right)|\nabla u|^2, \qquad (4.41)
\end{aligned}
$$

αφού $\|\,\mathrm{Hesse}\, u\|^2 \geq \frac{\lambda^2u^2}{m}$. Ολοκληρώνοντας λαμβάνουμε $\lambda \geq mK$. Έστω ότι $\lambda = mK$. Τότε η Q είναι υφαρμονική συνάρτηση. Επομένως, εφαρμόζοντας την Αρχή Μεγίστου, Θεώρημα 4.1.1, η Q είναι μία θετική σταθερά, έστω Kc^2 με c μη μηδενική σταθερά και όλες οι παραπάνω ανισότητες γίνονται ισότητες. Επομένως έχουμε

$$|\nabla u|^2 + Ku^2 = Kc^2.$$

Άρα

$$\left|\nabla\left(\frac{u}{c}\right)\right|^2 + K\left(\frac{u}{c}\right)^2 = Kc^2.$$

Θέτοντας $U := \frac{u}{c}$, η σχέση γίνεται

$$|\nabla U|^2 + KU^2 = K \qquad (4.42)$$

Επειδή το M^m είναι συμπαγές, η U παίρνει μέγιστο και ελάχιστο, και από την υπόθεση ότι η U είναι μη σταθερή, έχουμε

$$\max U \neq \min U.$$

Στα σημεία x_{max}, x_{min}, όπου η U παίρνει μέγιστο και ελάχιστο αντίστοιχα, έχουμε $|\nabla U| = 0$, και από την (4.42) παίρνουμε

$$\max U = 1 \text{ και } \min U = -1.$$

Επιπλέον, το M^m είναι πλήρες. Άρα υπάρχει ελάχιστη γεωδαισιακή $\gamma : [\alpha, \beta] \to M^m$, με $\gamma(\alpha) = x_{max}$ και $\gamma(\beta) = x_{min}$. Η (4.42) γράφεται

$$\frac{|\nabla U|}{\sqrt{1-U^2}} = \sqrt{K}.$$

Ολοκληρώνοντας υπεράνω της καμπύλης γ και συμβολίζοντας με d την διάμετρο του M^m, η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\int_\gamma \frac{|\nabla U|}{\sqrt{1-U^2}} = \int_\gamma \sqrt{K} \Rightarrow$$

$$\int_{\gamma(\alpha)}^{\gamma(\beta)} \frac{|\nabla U| \cdot |\gamma'|}{\sqrt{1-U^2}} dt \leq d\sqrt{K}.$$

Κάνοντας χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz, συνεπάγεται ότι

$$\int_{\gamma(\alpha)}^{\gamma(\beta)} \frac{\langle \nabla U, \gamma' \rangle}{\sqrt{1-U^2}} dt \leq d\sqrt{K} \Rightarrow$$

$$\int_{\gamma(\alpha)}^{\gamma(\beta)} \frac{\frac{d}{dt}(U \circ \gamma)}{\sqrt{1-(U \circ \gamma)^2}} \leq d\sqrt{K}.$$

Επομένως

$$\int_{-1}^{1} \frac{dU}{\sqrt{1-U^2}} \leq d\sqrt{K} \Rightarrow$$

$$\arcsin U\Big|_{-1}^{1} \leq d\sqrt{K}.$$

Άρα

$$d \geq \frac{\pi}{\sqrt{K}}.$$

Όμως από το Θεώρημα του Myers, γνωρίζουμε ότι $d \leq \frac{\pi}{\sqrt{K}}$. Συνεπώς,

$$d = \frac{\pi}{\sqrt{K}},$$

και σύμφωνα με το Θεώρημα του Cheng, 4.4.14, το M^m είναι ισομετρικό με την σφαίρα ακτίνας $\frac{1}{\sqrt{K}}$. □

Βιβλιογραφία

[Ad] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[B-C] R. Bishop and R. Crittenden, *Geometry of Manifolds*, Academic Press, New York and London,1964.

[Br1] R. Brooks, *A Relation Between Growth and the Spectrum of the Laplacian*, Math. Z. **178**, 501 – 508, 1981.

[Br2] R. Brooks, *Exponential Growth and the Spectrum of the Laplacian*, Proc. Amer. Math. Soc. **82**, 473 – 477, 1981.

[dC] M. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhauser, 1992.

[Cl1] I. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Academic Press, Orlando, 1984.

[Cl2] I. Chavel, *Riemannian Geometry: A Modern Introduction*, Cambridge University Press, 1993.

[Cg] S. Y. Cheng, *Eigenvalue Comparison theorems and its Geometric Applications*, Math. Z. **143**, 289 – 297, 1975.

[Co-Jo] R. Courant and F. John, *Introduction to Calculus and Analysis*, John Wiley and Sons, Volume II, 1974.

[Da1] E. B. Davies *Spectral Theory and Differential Operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 42, 1995.

[Da2] E. B. Davies *Heat Kernels and Spectral Theory*, Cambridge University Press, 1989.

[Di] J. Dieudonne, *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York and London, 1969.

[Do-Li] H. Donnelly and P. Li, *Pure Point Spectrum and Negative Curvature for Noncompact Manifolds*, Duke Math. J. **46**, 497 – 503, 1979.

[Ev] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Volume 19, American Mathematical Society, 2006.

[Fe] D. Ferus, *Differentialgeometrie*, I, II, Technische Universitaet Berlin, 2000.

[G-L-P] P. B. Gilkey, J. V. Leahy and J. Park, *Spectral Geometry, Riemannian Submersions, and the Gromov-Lawson Conjecture*, Studies in Advanced Mathematics, Chapman & Hall/crc, 1999.

[Hi-Si] P. D. Hislop and I. M. Sigal, *Introduction to Spectral Theory. With Applications to Schroedinger Operators*, Applied Mathematical Sciences, 113, Springer Verlag, New York, 1996.

[Li] P. Li, *Lecture Notes on Geometric Analysis*, Lecture Notes Series No. 6 - Research Institute of Mathematics and Global Analysis Research Center, Seoul National University, Seoul 1993.

[Lz] A. Lichnerowicz, *Géometrie des groupes de transformations*, Dunod, Paris, 1958.

[Ko] Δ. Κουτρουφιώτης, *Διαφορική Γεωμετρία*, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, 1994.

[O] M. Obata, *Certain conditions for a Riemannian Manifold to be isometric to the sphere*, J. Math. Soc. Japan **14**, 333 – 340, 1962.

[Per] A. Persson, *Bounds for the Discrete Part of the Spectrum of a Semi-Bounded Schroedinger Operator*, Math. Scand. **8**, 143 – 153, 1960.

[Pe] P. Petersen, *Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, New York, 2006.

[Si-Th] I. Singer and J. A. Thorpe, *Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry*, Scott, Foresman and Co. 1967.

[W] H. Weyl, *Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung)* Math. Ann. **71**, no. 4, 441 – 479, 1912.

Ευρετήριο