
Herbert Goldstein

**Klassische
Mechanik**

Akademische Verlagsgesellschaft · Frankfurt am Main



7184184



ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



028000082702

531

GOL



Ullar



HERBERT GOLDSTEIN • KLASSISCHE MECHANIK



Μο. Βιλ. Εισαγ.
32048

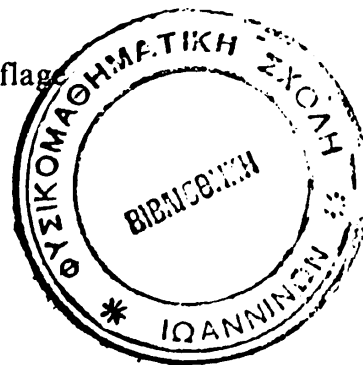
Klassische Mechanik

Von

Herbert Goldstein, Ph. D.
Columbia University New York

Aus dem Englischen übersetzt von
Prof. Dr. Günter Gliemann
Technische Universität Berlin

2., unveränderte Auflage



Akademische Verlagsgesellschaft · Frankfurt am Main

1972



Übersetzung der sechsten amerikanischen Ausgabe (Juni 1959)
mit freundlicher Genehmigung der
Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., und London

Copyright der ersten deutschen Ausgabe 1963
by Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt am Main

Ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages ist es nicht gestattet,
dieses Buch oder Teile daraus auf photomechanischem Wege (Photokopie,
Mikrokopie) zu vervielfältigen

Printed in Germany

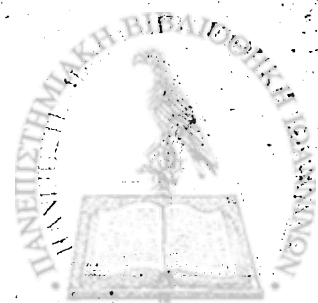
Druck: Taunus-Offset Haupka & Streng KG, Bad Soden a. Ta.

Bindearbeiten: Hollmann KG, Darmstadt

ISBN 3-400-00133-1



TO THE MEMORY OF
Louis J. Klein
TEACHER AND FRIEND

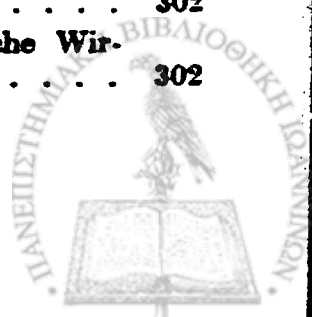


INHALTSVERZEICHNIS

VORWORT	xi
I. KAPITEL. ÜBERBLICK ÜBER DIE ELEMENTAREN PRINZIPIEN	1
1-1 Die Mechanik eines Teilchens	1
1-2 Die Mechanik eines Systems von Teilchen	5
1-3 Zwangsbedingungen	11
1-4 Das D'Alembertsche Prinzip und die Lagrangeschen Gleichungen	16
1-5 Geschwindigkeitsabhängige Potentiale und die Dissipationsfunktion	21
1-6 Einfache Anwendungen der Lagrangeschen Formulierung	25
II. KAPITEL. VARIATIONSPRINZIPIEN UND LAGRANGESCHE GLEICHUNGEN	33
2-1 Das Hamiltonsche Prinzip	33
2-2 Zur Technik der Variationsrechnung	35
2-3 Ableitung der Lagrangeschen Gleichungen aus dem Hamiltonschen Prinzip	40
2-4 Erweiterung des Hamiltonschen Prinzips auf nichtkonservative und nichtholonome Systeme	42
2-5 Vorteile der Formulierung mit Variationsprinzipien	48
2-6 Erhaltungssätze und Symmetrieeigenschaften	51
III. KAPITEL. DAS ZWEIKÖRPER-ZENTRALEKRÄFTEPROBLEM	64
3-1 Zurückführung auf das äquivalente Einkörperproblem	64
3-2 Die Bewegungsgleichungen und erste Integrale	65
3-3 Das äquivalente eindimensionale Problem und die Klassifikation der Bahnen	70
3-4 Der Virialsatz	76
3-5 Die Differentialgleichung für die Bahn und integrierbare Potentiale	78
3-6 Das Keplerproblem	83
3-7 Streuung in einem Zentralkräftefeld	89
3-8 Transformation des Streuproblems auf Laboratoriumskordinaten	94
IV. KAPITEL. DIE KINEMATIK STARRER KÖRPER	104
4-1 Die unabhängigen Koordinaten eines starren Körpers	104
4-2 Orthogonale Transformationen	108
4-3 Formale Eigenschaften der Transformationsmatrix	112
4-4 Die Eulerschen Winkel	118
4-5 Die Cayley-Kleinschen Parameter	121
4-6 Das Eulersche Theorem über die Bewegung eines starren Körpers	130
4-7 Infinitesimale Drehungen	137
4-8 Die Änderungsgeschwindigkeit eines Vektors	146
4-9 Die Corioliskraft	149



V. KAPITEL. DIE BEWEGUNGSGLEICHUNGEN DES STARREN KÖRPERS	158
5-1 Drehimpuls und kinetische Energie der Bewegung um einen Punkt	158
5-2 Tensoren und Dyaden	161
5-3 Der Trägheitstensor und das Trägheitsmoment	165
5-4 Die Eigenwerte des Trägheitstensors und die Hauptachsentransformation	168
5-5 Methoden zur Lösung der Probleme der Bewegung starrer Körper und die Eulerschen Bewegungsgleichungen	173
5-6 Die kräftefreie Bewegung eines starren Körpers	176
5-7 Der in einem Punkt gelagerte schwere symmetrische Kreisel	181
5-8 Die Präzession geladener Körper in einem Magnetfeld	195
VI. KAPITEL. DIE SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE IN DER KLASSISCHEN MECHANIK	205
6-1 Das grundlegende Programm der speziellen Relativitätstheorie	205
6-2 Die Lorentztransformation	208
6-3 Kovariante vierdimensionale Formulierungen	215
6-4 Die Kraft- und Energiegleichungen in der relativistischen Mechanik	221
6-5 Die Lagrangesche Formulierung der relativistischen Mechanik	227
6-6 Die kovariante Lagrangesche Formulierung	230
VII. KAPITEL. DIE HAMILTONSCHEN BEWEGUNGSGLEICHUNGEN	233
7-1 Die Legendreschen Transformationen und die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen	238
7-2 Zyklische Koordinaten und das Routhsche Verfahren	241
7-3 Erhaltungssätze und die physikalische Bedeutung der Hamiltonfunktion	243
7-4 Ableitung der Hamiltonschen Gleichungen von einem Variationsprinzip	249
7-5 Das Prinzip der kleinsten Wirkung	252
VIII. KAPITEL. KANONISCHE TRANSFORMATIONEN	263
8-1 Die Gleichungen der kanonischen Transformation	263
8-2 Beispiele kanonischer Transformationen	270
8-3 Die Integralinvarianten von Poincaré	274
8-4 Lagrange- und Poisson-Klammern als kanonische Invarianten	277
8-5 Formulierung der Bewegungsgleichungen mit Poissonschen Klammern	283
8-6 Infinitesimale Kontakttransformationen, Konstanten der Bewegung und Symmetrieeigenschaften	286
8-7 Die Poissonschen Klammerbeziehungen für den Drehimpuls	291
8-8 Der Liouvillesche Satz	295
IX. KAPITEL. DIE HAMILTON-JACOBISCHE THEORIE	302
9-1 Die Hamilton-Jacobische Gleichung für die Hamiltonsche Wirkungsfunktion	302



9-2 Das Problem des harmonischen Oszillators als ein Beispiel der Hamilton-Jacobischen Methode	307
9-3 Die Hamilton-Jacobische Gleichung für die Hamiltonsche charakteristische Funktion	309
9-4 Separation der Variablen in der Hamilton-Jacobischen Gleichung	314
9-5 Wirkungsvariable und Winkelvariable	318
9-6 Weitere Eigenschaften der Wirkungs- und Winkelvariablen	325
9-7 Das Kepler-Problem mit Wirkungs- und Winkelvariablen	331
9-8 Hamilton-Jacobische Theorie, geometrische Optik und Wellenmechanik	340
X. KAPITEL. KLEINE SCHWINGUNGEN	352
10-1 Die Formulierung des Problems	352
10-2 Die Eigenwertgleichung und die Hauptachsentransformation . .	355
10-3 Die Frequenzen der freien Schwingung und Normalkoordinaten	364
10-4 Freie Schwingungen eines linearen dreiatomigen Moleküls	369
10-5 Erzwungene Schwingungen und die Wirkung dissipativer Kräfte	374
XI. KAPITEL. EINFÜHRUNG IN DIE LAGRANGESCHE UND HAMILTONSCHE FORMULIERUNG FÜR KONTINUIERLICHE SYSTEME UND FELDER	385
11-1 Der Übergang von einem diskreten zu einem kontinuierlichen System	385
11-2 Der Lagrangesche Formalismus für kontinuierliche Systeme . .	388
11-3 Schallschwingungen in Gasen als Beispiel der Lagrangeschen Formulierung	394
11-4 Die Hamiltonsche Formulierung für kontinuierliche Systeme . .	399
11-5 Beschreibung von Feldern durch Variationsprinzipien	404
LITERATURVERZEICHNIS	415
VERZEICHNIS DER SYMBOLE	419
NAMEN- UND SACHVERZEICHNIS	429



VORWORT

Eine Vorlesung über klassische Mechanik für Fortgeschrittene war lange Zeit hindurch ein altherwürdiger Bestandteil der Ausbildung des Physikers höherer Semester. Die Funktion einer solchen Vorlesung in unseren Tagen kann jedoch wohl in Frage gestellt werden. Sie bringt dem Studenten höherer Semester keine neuen physikalischen Begriffe. Sie führt ihn nicht direkt in die gegenwärtige physikalische Forschung. Auch hilft sie ihm nicht in überschaubarem Maße bei der Lösung praktischer mechanischer Probleme, die ihm im Laboratorium begegnen.

Trotz dieser Einwände bleibt die klassische Mechanik ein unentbehrlicher Bestandteil der Ausbildung des Physikers. Sie spielt eine doppelte Rolle bei der Vorbereitung des Studenten auf das Studium der modernen Physik. Erstens dient die klassische Mechanik, in der einen oder anderen ihrer höheren Formulierungen, als Sprungbrett für die verschiedenen Gebiete der modernen Physik. So braucht man das Verfahren der Wirkungs- und Winkelvariablen für die ältere Quantenmechanik; die HAMILTON-JACOBISCHE Gleichung und das Prinzip der kleinsten Wirkung liefern den Übergang zur Wellenmechanik, während die POISSON-Klammern und die kanonischen Transformationen unschätzbaren Wert für die Formulierung der neueren Quantenmechanik haben. Zweitens gibt die klassische Mechanik dem Studenten Gelegenheit, sich viele der mathematischen Verfahren anzueigenen, die für die Quantenmechanik notwendig sind, während er noch mit den vertrauten Begriffen der klassischen Mechanik arbeitet.

Hat man dieses Ziel vor Augen, so sieht man natürlich, daß die traditionelle Behandlung des Gegenstandes, die im wesentlichen vor etwa fünfzig Jahren festgelegt wurde, nicht mehr angemessen ist. Das vorliegende Buch ist ein Versuch einer Darstellung der klassischen Mechanik, die den neuen Erfordernissen gerecht wird. Diejenigen Formulierungen, die für die moderne Physik von Wichtigkeit sind, wurden besonders hervorgehoben, und die mathematischen Verfahren, welche gemeinhin mit der Quantenmechanik verbunden sind, wurden eingeführt, wenn immer sie die Eleganz und Knappheit der Darstellung erhöhten. Zum Beispiel wurde die Diskussion der Zentralkraftbewegung auf die Kinematik der Streuung und die klassische Lösung des Streuproblems ausgedehnt. Beachtlicher Raum wurde den kanonischen



Transformationen, den Formulierungen mit POISSON-Klammern, der HAMILTON-JACOBISCHEN Theorie und den Wirkungs- und Winkelvariablen gewidmet. Eine Einführung in die Formulierung kontinuierlicher Systeme und Felder mit Variationsprinzipien wird gegeben. Zur Illustration der Anwendung neuer mathematischer Verfahren wird die Rotation starrer Körper vom Standpunkt der Matrizen Transformationen behandelt. Das bekannte EULERSCHE Theorem über die Bewegung eines starren Körpers läßt sich dann durch das Eigenwertproblem einer orthogonalen Matrix darstellen. Als eine Konsequenz werden so verschiedene Dinge wie der Trägheitstensor, die LORENTZ-Transformationen im MINKOWSKI-Raum und die Resonanzfrequenzen kleiner Schwingungen einer einheitlichen mathematischen Behandlung zugänglich. Mit Hilfe dieser Verfahren wird es möglich, bereits sehr früh die schwierigen Begriffe der Spiegelungsoperationen und der pseudotensoriellen Größen, die für die moderne Quantenmechanik so wichtig sind, in die Behandlung einzubeziehen. Ein weiterer Vorteil der Matrizenmethoden besteht darin, daß „Spinoren“ im Zusammenhang mit den Eigenschaften der CAYLEY-KLEINSCHEN Parameter eingeführt werden können.

Einige weitere Abweichungen vom üblichen wurden ohne Zögern gemacht. Allzuoft erfährt die spezielle Relativitätstheorie keine zusammenhängende Darstellung, außer als Teil einer hochspezialisierten Vorlesung, die auch die allgemeine Relativitätstheorie mit umfaßt. Ihre überragende Wichtigkeit für die moderne Physik macht es jedoch erforderlich, daß der Student bereits auf einer frühen Stufe seiner Ausbildung mit der speziellen Relativitätstheorie vertraut gemacht wird. Dementsprechend wurde das VI. Kapitel diesem Thema gewidmet. Eine andere Neuerung ist das Einbeziehen geschwindigkeitsabhängiger Kräfte. Historisch entwickelte sich die klassische Mechanik mit besonderer Betonung der statischen Kräfte, die allein von der Lage abhängen, wie etwa der Gravitationskräfte. Andererseits trifft man die geschwindigkeitsabhängige elektromagnetische Kraft fortwährend in der modernen Physik an. Um den Studenten in die Lage zu versetzen, mit solchen Kräften so früh wie möglich umgehen zu können, wurden geschwindigkeitsabhängige Potentiale gleich vom Anfang an in die Struktur der Mechanik mit einbezogen und im Text konsequent weiterentwickelt.

Ein weiteres neues Element ist die Behandlung der Mechanik kontinuierlicher Systeme und Felder im XI. Kapitel. Zur Auswahl des darin aufgenommenen Stoffes sind einige Bemerkungen angebracht. Genau genommen könnte dieser Gegenstand alles über Elastizität, Hydrodynamik und Akustik umfassen, jedoch liegen diese Themen



außerhalb des vorgesteckten Rahmens des Buches, zumal über die meisten von ihnen angemessene Abhandlungen bereits vorhanden sind. Dagegen gibt es keine zusammenfassende Darstellung über die klassischen Grundlagen der Formulierung kontinuierlicher Systeme mit Variationsprinzipien, trotz ihrer wachsenden Bedeutung in der Feldtheorie der Elementarteilchen. Die Theorie der Felder läßt sich in beachtlicher Breite und Kompliziertheit behandeln, ehe es notwendig ist, die Quantisierung einzuführen. Zum Beispiel ist es absolut möglich, den Spannungstensor, die mikroskopischen Kontinuitätsgleichungen, die Impulsraumdarstellungen usw. vollständig innerhalb des Bereiches der klassischen Physik zu diskutieren. Man hat jedoch das Gefühl, daß eine angemessene Diskussion dieser Themen eine Überforderung ist, die über das hinausgeht, was man natürlicherweise vom Studenten erwarten kann. Deshalb wurde, zumindest für diese Ausgabe, entschieden, das XI. Kapitel auf eine elementare Beschreibung der LAGRANGEschen und HAMILTONSchen Formulierung der Felder zu beschränken.

Die Vorlesung, für die dieser Text gedacht ist, setzt normalerweise eine „mittlere“ Vorlesung über Mechanik voraus. Um sowohl dem unzureichend vorbereiteten Studenten höherer Semester (eine allzu häufige Erscheinung) als auch dem ehrgeizigen Studenten niedrigerer Semester, der die mittlere Stufe zu überspringen wünscht, entgegenzukommen, wurde alle Anstrengung gemacht, eine innere Abgeschlossenheit des Buches zu erreichen. Vieles aus dem I. und III. Kapitel ist deshalb solchem Stoff gewidmet, der üblicherweise in Anfängervorlesungen behandelt wird.

Bis auf wenige Ausnahmen werden vom Studenten keine weiteren mathematischen Kenntnisse verlangt als die, die in Anfängervorlesungen über höhere Mathematik und Vektoranalysis vermittelt werden. Deshalb ist der Entwicklung der komplizierteren mathematischen Hilfsmittel beachtlicher Raum gegeben, sofern sie gebraucht werden. Die Vertrautheit mit den Elementen der MAXWELLSchen Gleichungen und deren einfacheren Konsequenzen ist für das Verständnis der Abschnitte über elektromagnetische Kräfte notwendig. Die meisten eingeschriebenen Studenten höherer Semester haben zumindest ein Semester lang einen Einblick in die moderne Physik erhalten, und gelegentlich wird dieser Umstand genutzt, um kurz die Beziehung zwischen klassischer Entwicklung und ihrer Fortführung in der Quantentheorie aufzuzeigen.

Es gibt eine große Menge von Übungen in der Literatur über Mechanik, allen leicht zugänglich, und es besteht folglich wenig Grund, eine ausführliche Sammlung solcher Probleme zu reproduzieren. Die Übungen, die jedem Kapitel angehängt sind, wurden deshalb im



wesentlichen auf solche beschränkt, die zur Erweiterung des Textes dienen, zur Illustration eines besonderen Punktes oder zum Beweis verschiedener Theoreme. Pedantische Museumstücke wurden absichtlich weggelassen.

Das Problem der Bezeichnungsweise ist immer eine Streitfrage. Es ist unmöglich, ein vollständig konsistentes und widerspruchsfreies System von Bezeichnungen zu erreichen, das nicht gleichzeitig unpraktisch und schwer zu handhaben ist. Der üblichen Konvention wurde insofern gefolgt, als Vektoren durch fettgedruckte Antiqua-Buchstaben bezeichnet wurden. Fernerhin werden Matrixgrößen, gleich welchen Ranges, und Tensoren, die keine Vektoren sind, durch fettgedruckte Grotesk-Buchstaben angedeutet, wie **A**. Ein Symbolindex ist am Ende des Buches angefügt. Darin sind die Bedeutung der wichtigsten Symbole und die Stellen angegeben, an denen sie zum ersten Male auftreten. Kleine Buchstaben, die nur einmal erscheinen, sind darin nicht enthalten.

Literaturhinweise wurden am Ende jedes Kapitels zusammengestellt, zur Erweiterung des diskutierten Stoffes oder zur Behandlung von Punkten, die nicht berührt wurden. Die Bewertungen, die diesen Referenzen beigegeben wurden, sind natürlich rein persönlich, doch wurde die Notwendigkeit empfunden, den Studenten mit einem Führer durch das verwirrende Labyrinth der Literatur über Mechanik auszurüsten. Diese Hinweise, zusammen mit vielen weiteren, werden nochmals am Ende des Buches angeführt. Der Liste liegt nicht die Absicht zugrunde, in irgendeiner Weise vollständig zu sein; viele der älteren Bücher sind mit Bedacht weggelassen worden. Im großen und ganzen enthält die Liste die Literatur, die beim Schreiben dieses Buches verwendet wurde, und soll deshalb auch ein Anerkenntnis meiner Schuld diesen Quellen gegenüber sein.

Der vorliegende Text ist aus einer Reihe von Vorlesungen über klassische Mechanik entstanden, die ich an der Harvard-Universität gehalten habe. Ich bin Herrn Professor J. H. VAN VLECK, damals Chairman des Physics Department, für viele persönliche und offizielle Unterstützungen dankbar. Herrn Professor J. SCHWINGER und anderen Kollegen danke ich für viele wertvolle Anregungen. Ich wünsche auch meine tiefe Dankbarkeit gegenüber den Studenten in meinen Vorlesungen auszudrücken, deren vorteilhafte Reaktion und aktives Interesse den fortwährenden Antrieb zu dieser Arbeit gaben. חושלביץ

Cambridge, Mass.
März 1950

HERBERT GOLDSTEIN



I. KAPITEL

ÜBERBLICK ÜBER DIE ELEMENTAREN PRINZIPIEN

Die Bewegung materieller Körper bildete den Gegenstand einiger der frühesten Forschungen, denen die Pioniere der Physik nachgingen. Aus ihren Bemühungen hat sich ein weites Feld entwickelt, bekannt als analytische Mechanik oder Dynamik, oder kurz, die Mechanik. Im gegenwärtigen Jahrhundert ist der Ausdruck „klassische Mechanik“ sehr gebräuchlich geworden, um dieses Gebiet der Physik gegenüber neueren physikalischen Theorien, besonders der Quantenmechanik, zu kennzeichnen. Wir werden diesem Gebrauch folgen. Dabei interpretieren wir den Namen so, daß der Typ der Mechanik, der aus der speziellen Relativitätstheorie folgt, mit eingeschlossen ist. Es ist Zweck dieses Buches, die Struktur der klassischen Mechanik zu entwickeln und einige ihrer Anwendungen auszuführen, die gegenwärtig in der reinen Physik von Interesse sind.

Grundlegend für eine Darstellung der Mechanik sind eine Anzahl fundamentaler physikalischer Begriffe wie Raum, Zeit, Gleichzeitigkeit, Masse und Kraft. Bei der Diskussion der speziellen Relativitätstheorie werden die Begriffe der Gleichzeitigkeit, der Zeit und der Längenskalen kurz untersucht. Vorwiegend werden diese Begriffe hier jedoch nicht kritisch analysiert. Es wird vielmehr angenommen, daß die Bedeutungen dieser Begriffe dem Leser vertraut sind.

1-1 Die Mechanik eines Teilchens

Das physikalisch Wesentliche der Mechanik eines Teilchens ist in NEWTONS zweitem Bewegungsgesetz enthalten, das gleichermaßen als grundlegendes Postulat oder als Definition von Kraft und Masse angesehen werden kann. Für ein einzelnes Teilchen lautet die genaue Form des Gesetzes:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad (1-1)$$

wobei \mathbf{F} die Gesamtkraft ist, die auf das Teilchen einwirkt. \mathbf{p} bedeutet den *linearen Impuls* des Teilchens. Er ist folgendermaßen definiert: s sei die Kurve, die das Teilchen bei seiner Bewegung durchläuft, und \mathbf{r}



der Radiusvektor vom Koordinatenursprung zum Teilchen. Die Vektorgeschwindigkeit kann dann formal durch die Gleichung

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (1-2)$$

definiert werden, wobei die Ableitung durch den Grenzübergang (vgl. Abb. 1-1)

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{s}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{s}}{dt}$$

bestimmt ist. (Die letzte Form für die Ableitung zeigt ausdrücklich, daß \mathbf{v} tangential zu der Kurve ist.) Der lineare Impuls \mathbf{p} ist mit Hilfe der Geschwindigkeit folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad (1-3)$$

so daß (1-1) geschrieben werden kann

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}). \quad (1-4)$$

In den meisten Fällen ist die Masse des Teilchens konstant, und Gl. (1-1) reduziert sich auf

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}, \quad (1-5)$$

wobei \mathbf{a} die Beschleunigung des Teilchens genannt wird und definiert ist durch

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (1-6)$$

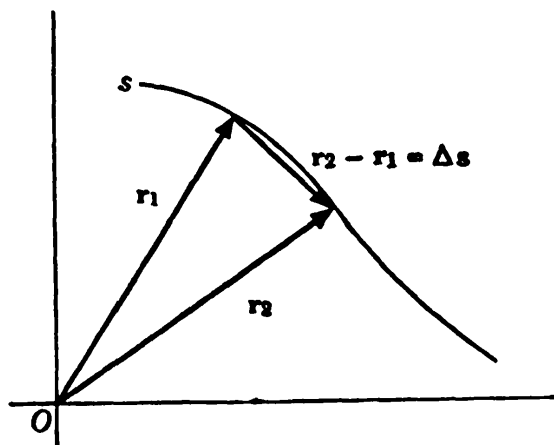


Abb. 1-1. Bewegung eines Teilchens im Raum, zur Definition der Geschwindigkeit.

Viele wichtige Ergebnisse der Mechanik können in der Form von Erhaltungssätzen ausgedrückt werden, die angeben, unter welchen Bedingungen gewisse mechanische Größen zeitlich unveränderlich sind. Den ersten dieser Erhaltungssätze liefert unmittelbar Gl. (1-1), nämlich den

Erhaltungssatz für den linearen Impuls eines Teilchens: Wenn die Gesamtkraft \mathbf{F} Null ist, dann gilt $\dot{\mathbf{p}} = 0$ und der lineare Impuls \mathbf{p} bleibt erhalten.

Der Drehimpuls eines Teilchens um einen Punkt O wird mit \mathbf{L} bezeichnet und ist definiert durch

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad (1-7)$$

wobei \mathbf{r} der Radiusvektor von O zum Teilchen ist. Es ist zu beachten, daß die Reihenfolge der Faktoren wichtig ist. Wir definieren nun das Drehmoment um O durch

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (1-8)$$



Die zu (1-1) analoge Gleichung für \mathbf{N} erhält man, indem man das Vektorprodukt von \mathbf{r} mit Gl. (1-4) bildet:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{N} = \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}). \quad (1-9)$$

Gl. (1-9) kann in anderer Form geschrieben werden, wenn man von der Vektoridentität

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

Gebrauch macht, worin der erste Term auf der rechten Seite offensichtlich verschwindet. Dieser Identität zufolge nimmt Gl. (1-9) die Form an:

$$\mathbf{N} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{L}}{dt}. \quad (1-10)$$

Wir beachten, daß sowohl \mathbf{N} als auch \mathbf{L} von dem Punkt O abhängen, auf den sie bezogen sind.

So wie es für Gl. (1-1) der Fall war, liefert auch die Drehimpulsgleichung (1-10) einen Erhaltungssatz, und zwar den *Erhaltungssatz für den Drehimpuls eines Teilchens*: Wenn das gesamte Drehmoment \mathbf{N} Null ist, dann gilt $\dot{\mathbf{L}} = 0$ und der Drehimpuls \mathbf{L} bleibt erhalten.

Als nächstes betrachten wir die durch eine äußere Kraft \mathbf{F} an einem Teilchen geleistete Arbeit, wenn es sich von Punkt 1 nach Punkt 2 bewegt. Nach Definition ist diese Arbeit

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \quad (1-11)$$

Für konstante Masse (wie wir von jetzt an annehmen wollen, sofern nichts anderes ausdrücklich vereinbart wird) reduziert sich das Integral in Gl. (1-11) auf

$$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = m \int \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = \frac{m}{2} \int \frac{d}{dt}(v^2) dt,$$

und damit ist

$$W_{12} = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2). \quad (1-12)$$

Die skalare Größe $mv^2/2$ nennt man die kinetische Energie des Teilchens und bezeichnet sie mit T . Nach Gl. (1-12) ist die geleistete



Arbeit gleich der Änderung der kinetischen Energie:

$$W_{12} = T_2 - T_1. \quad (1-13)$$

Wenn das Kraftfeld so beschaffen ist, daß die längs eines geschlossenen Weges geleistete Arbeit W Null ist, d.h.

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad (1-14)$$

dann sagt man, die Kraft (und das System) ist *konservativ*. Physikalisch ist klar, daß ein System nicht konservativ sein kann, wenn Reibungskräfte oder andere Dissipationskräfte vorhanden sind, denn $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ ist für Reibungskräfte stets positiv und das Integral kann nicht verschwinden. Mit Hilfe des STOKESSCHEN Satzes kann die Bedingung für konservative Kräfte, Gl. (1-14), geschrieben werden:

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0,$$

und da die Rotation eines Gradienten stets verschwindet, muß \mathbf{F} daher der Gradient eines Skalars sein:

$$\mathbf{F} = -\nabla V, \quad (1-15)$$

wobei V *Potential* oder *potentielle Energie* genannt wird. Die Existenz von V kann ohne Benutzung von Sätzen der Vektorrechnung begründet werden. Wenn Gl. (1-14) gilt, muß die Arbeit W_{12} unabhängig vom Integrationsweg zwischen den Punkten 1 und 2 sein. Daraus folgt, daß es möglich sein muß, W_{12} als Änderung einer Größe auszudrücken, die nur von der Lage der Endpunkte abhängt. Diese Größe soll mit $-V$ bezeichnet werden. Somit haben wir für ein differentielles Wegstück die Beziehungen

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -dV$$

oder

$$F_s = -\frac{\partial V}{\partial s},$$

die der Gl. (1-15) äquivalent sind. Wir stellen fest, daß wir in Gl. (1-15) zu V irgendeine Größe, die räumlich konstant ist, addieren können, ohne die Ergebnisse zu beeinflussen. *Der Nullpunkt von V ist beliebig.*

In einem konservativen System ist die durch die Kräfte geleistete Arbeit

$$W_{12} = V_1 - V_2. \quad (1-16)$$

Kombinieren wir Gl. (1-16) mit Gl. (1-13), so erhalten wir

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2. \quad (1-17)$$

Das ist in Symbolen der

Energieerhaltungssatz für ein Teilchen: *Wenn die Kräfte, die auf ein Teilchen wirken, konservativ sind, dann bleibt die Gesamtenergie $T + V$ des Teilchens erhalten.*



1-2 Die Mechanik eines Systems von Teilchen

Verallgemeinern wir die Vorstellungen des vorigen Abschnittes auf ein System vieler Teilchen, so müssen wir unterscheiden zwischen *äußeren Kräften*, die auf die Teilchen wirken und ihren Ursprung außerhalb des Systems haben, und *inneren Kräften*, die etwa auf das i -te Teilchen wirken und von allen anderen Teilchen im System herrühren. Somit ist die Bewegungsgleichung (zweites NEWTONSches Gesetz) für das i -te Teilchen zu schreiben:

$$\sum_j \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_i^{(e)} = \dot{\mathbf{p}}_i, \quad (1-18)$$

wobei $\mathbf{F}_i^{(e)}$ für eine äußere Kraft steht und \mathbf{F}_{ji} die innere Kraft des j -ten Teilchens auf das i -te Teilchen ist (\mathbf{F}_{ii} ist natürlich Null). Wir wollen annehmen, daß die \mathbf{F}_{ij} (wie die $\mathbf{F}_i^{(e)}$) NEWTONS drittem Gesetz von Aktion und Reaktion gehorchen: daß nämlich die Kräfte, die zwei Teilchen aufeinander ausüben, gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind *und in der Verbindungslinie beider Teilchen liegen*. Es gibt einige wichtige Systeme, in denen die Kräfte nicht diesem Gesetze folgen, und zwar die elektromagnetischen Kräfte zwischen bewegten Teilchen. Die im weiteren hergeleiteten Sätze dürfen nur mit besonderer Vorsicht auf solche Systeme angewendet werden.

Summieren wir über alle Teilchen, so nimmt Gl. (1-18) die Form an

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \mathbf{x}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathbf{F}_{ji}. \quad (1-19)$$

Die erste Summe auf der rechten Seite ist gerade die gesamte äußere Kraft $\mathbf{F}^{(e)}$. Der zweite Term verschwindet, da das Gesetz von Aktion und Reaktion bestimmt, daß jedes Paar $\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji}$ Null ist. Um die linke Seite zu vereinfachen, definieren wir einen Vektor \mathbf{R} als Mittelwert der Radiusvektoren der Teilchen, mit den Gewichten ihrer Massenverhältnisse versehen, d.h.,¹

$$\mathbf{R} = \frac{\sum m_i \mathbf{x}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum \dot{m}_i \mathbf{x}_i}{M}. \quad (1-20)$$

¹ Diese Definition mag vertrauter erscheinen, wenn Gl. (1-20) in cartesischen Koordinaten geschrieben wird

$$X = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \quad Y = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}, \quad Z = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}.$$



Der Vektor R definiert einen Punkt, der *Massenzentrum* oder, etwas freier, Schwerpunkt des Systems genannt wird. Mit dieser Definition reduziert sich (1-19) auf

$$M \frac{d^2R}{dt^2} = \sum_i F_i^{(e)} \equiv F^{(e)}. \quad (1-19a)$$

Diese Beziehung stellt fest, daß sich das Massenzentrum so bewegt, als ob die gesamte äußere Kraft auf die Gesamtmasse des Systems wirkt, die im Massenzentrum konzentriert ist. Reine innere Kräfte haben deshalb keinen Einfluß auf die Bewegung des Massenzentrums. Ein oft gewähltes Beispiel ist die Bewegung einer explodierenden Granate; das Massenzentrum der Bruchstücke bewegt sich so, als wäre die Granate noch ein einziges Stück (Vernachlässigung des Luftwiderstandes vorausgesetzt). Das gleiche Prinzip ist beim Düsen- und Raketenantrieb wirksam. Im Hinblick darauf, daß die Bewegung des Massenzentrums unbeeinflusst bleibt, muß der mit hoher Geschwindigkeit erfolgende Ausstoß der Abgase durch die Vorwärtsbewegung des Projektils ausgeglichen werden.

Nach Gl. (1-20) ist der gesamte lineare Impuls des Systems

$$P = \sum m_i \frac{dr_i}{dt} = M \frac{dR}{dt} \quad (1-21)$$

gleich der Gesamtmasse des Systems multipliziert mit der Geschwindigkeit des Massenzentrums. Folglich kann die Gleichung für die Bewegung des Massenzentrums (1-21) formuliert werden als

Erhaltungssatz für den linearen Impuls eines Systems von Teilchen: Ist die gesamte äußere Kraft Null, so bleibt der Gesamtimpuls erhalten.

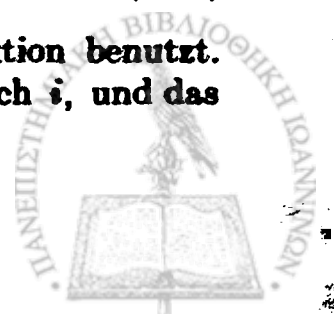
Wir finden den Gesamtdrehimpuls des Systems, indem wir das Vektorprodukt $r_i \times p_i$ bilden und über i summieren. Führen wir eine solche Operation in Gl. (1-18) aus, dann erhalten wir

$$\sum_i (r_i \times \dot{p}_i) = \sum_i \frac{d}{dt} (r_i \times p_i) = \dot{L} = \sum_i r_i \times F_i^{(e)} + \sum_{i,j} r_i \times F_{ji}. \quad (1-22)$$

Der letzte Term auf der rechten Seite in (1-22) kann aufgefaßt werden als Summe von Paaren der Form

$$r_i \times F_{ji} + r_j \times F_{ij} = (r_i - r_j) \times F_{ji}. \quad (1-23)$$

Wir haben darin die Gleichheit von Aktion und Reaktion benutzt. $r_i - r_j$ ist aber identisch mit dem Vektor r_{ij} von j nach i , und das



Gesetz von Aktion und Reaktion führt weiterhin auf

$$\mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{F}_{ji} = 0,$$

da \mathbf{F}_{ji} längs der Verbindungslinie der beiden Teilchen wirkt. Deshalb verschwindet diese Summe, und (1-22) kann geschrieben werden:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}^{(e)}. \quad (1-24)$$

Die Ableitung des Gesamtdrehimpulses nach der Zeit ist deshalb gleich dem Moment der äußerer Kraft um den gegebenen Drehpunkt. Gemäß Gl. (1-24) lautet der

Erhaltungssatz für den Gesamtdrehimpuls: \mathbf{L} ist zeitlich unveränderlich, wenn das angewendete (äußere) Drehmoment Null ist.

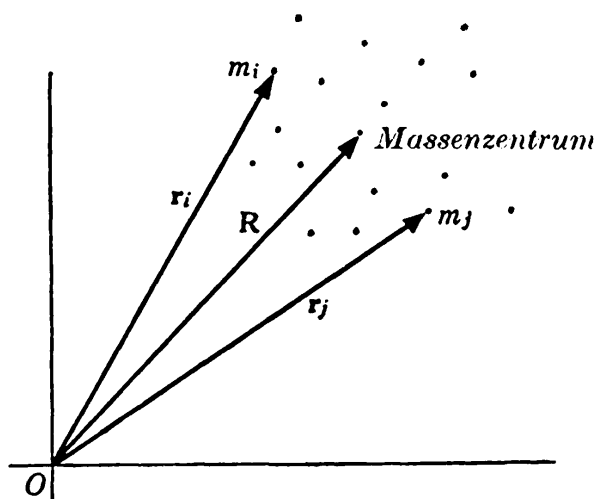


Abb. 1-2. Das Massenzentrum eines Systems von Teilchen.

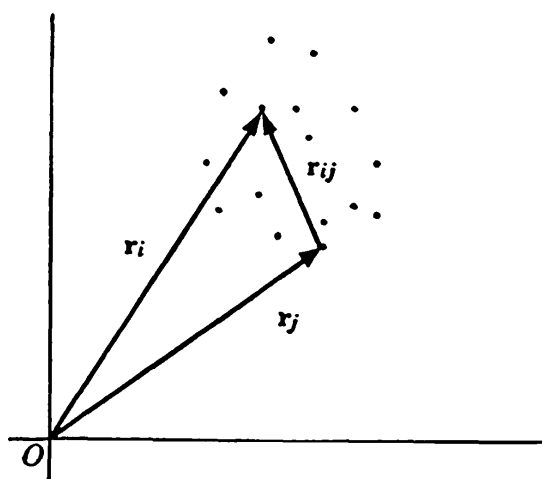


Abb. 1-3. Der Vektor \mathbf{r}_{ij} zwischen dem i -ten und dem j -ten Teilchen.

(Es ist vielleicht lohnend, nachdrücklich darauf hinzuweisen, daß dies ein *Vektortheorem* ist, d.h. L_z bleibt erhalten, wenn $N_z^{(e)}$ Null ist, auch dann, wenn $N_x^{(e)}$ und $N_y^{(e)}$ von Null verschieden sind.)

Wir stellen fest, daß die Erhaltung des Drehimpulses eines Systems bei Abwesenheit wirksamer Drehmomente nur dann gilt, wenn das Gesetz von Aktion und Reaktion erfüllt ist. In einem System, das bewegte Ladungen enthält, in dem dieses Gesetz also verletzt ist, bleibt nicht der mechanische Gesamtdrehimpuls erhalten, sondern die Summe des mechanischen und des elektromagnetischen „Drehimpulses“ des Feldes.

Gl. (1-21) sagt aus, daß der gesamte lineare Impuls eines Systems gleich dem Impuls ist, den man erhält, wenn die gesamte Masse im Massenzentrum konzentriert ist und sich mit diesem bewegt. Der entsprechende Satz für den Drehimpuls ist komplizierter. Mit dem Ur-



sprung O als Bezugspunkt lautet der Gesamtdrehimpuls des Systems

$$L = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i.$$

\mathbf{R} sei der Radiusvektor vom Punkt O zum Massenzentrum, und \mathbf{r}'_i sei der Radiusvektor vom Massenzentrum zum i -ten Teilchen. Dann gilt (vgl. Abb. 1-4):

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{R} \quad (1-25)$$

und

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{v},$$

wobei

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$$

die Geschwindigkeit des Massenzentrums bezogen auf O ist.

$$\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt}$$

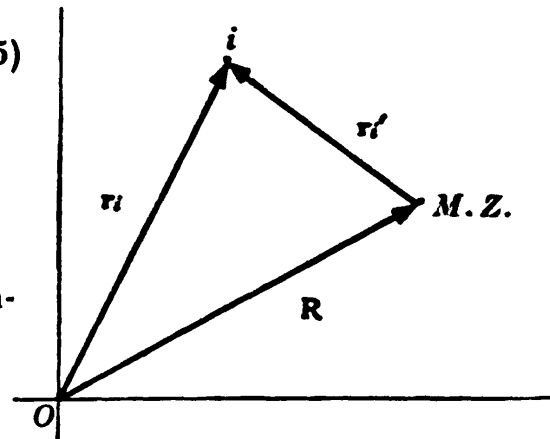


Abb. 1-4. Die Vektoren, die bei der Verschiebung des Bezugspunktes für den Drehimpuls auftreten.

ist die Geschwindigkeit des i -ten Teilchens relativ zum Massenzentrum des Systems. Verwenden wir Gl. (1-25), dann nimmt der Gesamtdrehimpuls die folgende Form an:

$$L = \sum_i \mathbf{R} \times m_i \mathbf{v} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i + \left(\sum_i m_i \mathbf{r}'_i \right) \times \mathbf{v} + \mathbf{R} \times \frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{r}'_i.$$

Die beiden letzten Terme in diesem Ausdruck verschwinden, da beide den Faktor $\sum m_i \mathbf{r}'_i$ enthalten. Dieser, erinnern wir uns, definiert den Radiusvektor des Massenzentrums in demjenigen Koordinatensystem, dessen Ursprung das Massenzentrum ist, und ist deshalb ein Nullvektor. Schreiben wir erneut die übrigbleibenden Terme, so lautet der Gesamtdrehimpuls um O :

$$L = \mathbf{R} \times M\mathbf{v} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i. \quad (1-26)$$

In Worten sagt Gl. (1-26), daß der Gesamtdrehimpuls um einen Punkt O gleich ist dem Drehimpuls des im Massenzentrum konzentrierten Systems plus dem Drehimpuls der Bewegung um das Massenzentrum. Die Form von Gl. (1-26) weist darauf hin, daß L im allgemeinen wegen des Vektors \mathbf{R} vom Ursprung O abhängt. Nur wenn das Massenzentrum bezüglich O in Ruhe ist, wird der Drehimpuls unabhängig vom Bezugspunkt sein. In diesem Fall verschwindet der erste Term in (1-26) und L reduziert sich auf den Drehimpuls um das Massenzentrum.



Schließlich wollen wir die Energiegleichung betrachten. Wie im Falle eines einzelnen Teilchens berechnen wir die durch alle Kräfte geleistete Arbeit, wenn das System aus einer Anfangskonfiguration 1 in eine Endkonfiguration 2 überführt wird:

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s}_i = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i^{(e)} \cdot d\mathbf{s}_i + \sum_{i \neq j} \int_1^2 \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{s}_i. \quad (1-27)$$

Wieder können wir unter Benutzung der Bewegungsgleichungen die Integrale zurückführen auf

$$\sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s}_i = \sum_i \int_1^2 m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \mathbf{v}_i dt = \sum_i \int_1^2 d(\frac{1}{2} m_i v_i^2).$$

Demnach kann die geleistete Arbeit auch als Differenz der kinetischen Energien am Ende und am Anfang geschrieben werden:

$$W_{12} = T_2 - T_1.$$

Darin ist die kinetische Energie T des Systems

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2. \quad (1-28)$$

Machen wir Gebrauch von den Transformationen auf Massenzentrumskoordinaten, die in Gl. (1-25) gegeben sind, dann dürfen wir für T auch schreiben

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{v} + \mathbf{v}'_i) \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{v}'_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2 + \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \mathbf{x}'_i \right). \end{aligned}$$

Aus Gründen, die wir schon bei der Berechnung des Drehimpulses berücksichtigt haben, verschwindet der letzte Term, und es bleibt

$$T = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2. \quad (1-29)$$

Die kinetische Energie besteht somit auch, ähnlich dem Drehimpuls, aus zwei Teilen: die kinetische Energie, die man erhält, wenn die gesamte Masse im Massenzentrum konzentriert ist, plus die kinetische Energie der Bewegung um das Massenzentrum.

Betrachten wir nun die rechte Seite von Gl. (1-27). In dem speziellen Falle, daß die äußeren Kräfte von einem Potential hergeleitet werden können, kann der erste Term folgendermaßen geschrieben werden:



$$\sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i^{(e)} \cdot d\mathbf{s}_i = - \sum_i \int_1^2 \nabla_i V_i \cdot d\mathbf{s}_i = - \sum_i V_i \Big|_1^2.$$

Der Index i am Nabla-Operator weist darauf hin, daß die Ableitungen hinsichtlich der Komponenten von \mathbf{r}_i vorzunehmen sind. Wenn die inneren Kräfte ebenfalls konservativ sind, dann können die Wechselwirkungskräfte \mathbf{F}_{ij} und \mathbf{F}_{ji} zwischen dem i -ten und dem j -ten Teilchen aus einer Potentialfunktion V_{ij} gewonnen werden. Um dem Gesetz von Aktion und Reaktion zu genügen, kann V_{ij} nur eine Funktion der Abstände zwischen den Teilchen sein:

$$V_{ij} = V_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|). \quad (1-30)$$

Die beiden Kräfte sind dann automatisch gleich groß und entgegengesetzt gerichtet:

$$\mathbf{F}_{ji} = -\nabla_i V_{ij} = +\nabla_j V_{ij} = -\mathbf{F}_{ij} \quad (1-31)$$

und liegen längs der Verbindungsgeraden beider Teilchen:

$$\nabla V_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)f. \quad (1-32)$$

f ist eine skalare Funktion. Wäre V_{ij} auch eine Funktion der Differenz anderer Paare von Vektoren, die den Teilchen zugeordnet sind, wie etwa ihrer Geschwindigkeiten oder (um einen Schritt in das Gebiet der modernen Physik zu tun) ihrer inneren „Spin“-Drehimpulse, dann wären zwar die Kräfte noch gleich groß und entgegengesetzt gerichtet, würden aber nicht mehr längs der Verbindungsgeraden beider Teilchen liegen.

Sind alle Kräfte konservativ, so kann der zweite Term in Gl. (1-27) als Summe über Paare von Teilchen geschrieben werden. Die Terme für jedes Paar haben die Form

$$- \int_1^2 (\nabla_i V_{ij} \cdot d\mathbf{s}_i + \nabla_j V_{ij} \cdot d\mathbf{s}_j).$$

Wenn der Differenzvektor $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ mit \mathbf{r}_{ij} bezeichnet wird und ∇_{ij} für den Gradienten bezüglich \mathbf{r}_{ij} gesetzt wird, dann ist

$$\nabla_i V_{ij} = \nabla_{ij} V_{ij} = -\nabla_j V_{ij}$$

und

$$d\mathbf{s}_i - d\mathbf{s}_j = d\mathbf{r}_i - d\mathbf{r}_j = d\mathbf{r}_{ij},$$

so daß der Term für das Paar ij die Gestalt annimmt:

$$- \int \nabla_{ij} V_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij}.$$



Die gesamte Arbeit, die von den inneren Kräften hervorgerufen wird, reduziert sich dann auf

$$-\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \int_1^2 \nabla_{ij} V_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} V_{ij} \Big|_1^2. \quad (1-33)$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ tritt in Gl. (1-33) auf, weil in der Summation über i und j jedes Mitglied eines gegebenen Paares zweimal enthalten ist, zuerst in der Summation über i und dann in der Summation über j .

Durch diese Betrachtungen wird klar, daß es dann, wenn sowohl die äußeren als auch die inneren Kräfte von Potentialen hergeleitet werden können, möglich ist, eine *totale potentielle Energie* V des Systems zu definieren:

$$V = \sum_i V_i + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} V_{ij} \quad (1-34)$$

so daß die Gesamtenergie $T + V$ erhalten bleibt, analog dem Erhaltungssatz (1-17) für ein einzelnes Teilchen.

Der zweite Term auf der rechten Seite der Gl. (1-34) wird innere potentielle Energie des Systems genannt. Im allgemeinen ist diese nicht Null, und, was noch wichtiger ist, sie kann sich ändern, indem sich das System im Laufe der Zeit ändert. Nur für eine besondere Klasse von Systemen, die man *starre Körper* nennt, bleibt das innere Potential immer konstant. Formal kann ein starrer Körper als ein System von Teilchen definiert werden, in dem die Abstände r_{ij} fest und zeitlich unveränderlich sind. In einem solchen Fall können die Vektoren $d\mathbf{r}_{ij}$ nur senkrecht zu den entsprechenden \mathbf{r}_{ij} und damit zu den \mathbf{F}_{ij} stehen. Deshalb *leisten die inneren Kräfte in einem starren Körper keine Arbeit*, und das innere Potential muß konstant bleiben. Da das totale Potential in jedem Falle nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, kann ein unveränderliches inneres Potential bei der Diskussion der Bewegung eines Systems vollständig außer acht gelassen werden.

1-3 Zwangsbedingungen

Aus den vorangegangenen Abschnitten könnte man den Eindruck gewinnen, daß alle Probleme der Mechanik auf die Lösung des Satzes von Differentialgleichungen (1-18)

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_j \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_i^{(e)}$$

zurückzuführen sind. Man setzt nur die verschiedenen Kräfte ein, die auf die Teilchen des Systems wirken, und löst das mathematische



Problem. Gerade vom physikalischen Standpunkt aus ist dieser Gesichtspunkt jedoch eine übermäßige Vereinfachung des Falles. Zum Beispiel kann es notwendig sein, die Zwangsbedingungen in Betracht zu ziehen, die die Bewegung des Systems einschränken. Wir haben bereits einen Systemtyp angetroffen, der Zwangsbedingungen unterworfen ist, nämlich starre Körper, für die der Zwang für die Bewegung der Teilchen derart ist, daß die Abstände r_i ungeändert bleiben. Andere Beispiele von Systemen unter Zwang lassen sich leicht angeben. Die Perlen eines Rechenbretts sind durch die Führungsdrähte zu eindimensionaler Bewegung gezwungen. Gasmoleküle in einem Behälter sind durch die Gefäßwände gezwungen, sich nur innerhalb des Behälters zu bewegen. Ein Teilchen, das auf die Oberfläche einer festen Kugel gesetzt wird, ist durch den Zwang derart eingeschränkt, daß es sich nur auf der Oberfläche oder im Gebiet außerhalb der Kugel bewegen kann.

Zwangsbedingungen können auf verschiedene Weisen klassifiziert werden. Wir werden das folgende System benutzen. Wenn die Zwangsbedingungen durch Gleichungen dargestellt werden, die die Koordinaten der Teilchen (und die Zeit) in Beziehung setzen und die Form haben

$$f(r_1, r_2, r_3, \dots, t) = 0, \quad (1-35)$$

dann sprechen wir von *holonomen* Zwangsbedingungen. Das einfachste Beispiel holonomer Zwangsbedingungen liefert der starre Körper, dessen Zwangsbedingungen durch Gleichungen der Form

$$(r_i - r_j)^2 - c_{ij}^2 = 0$$

dargestellt werden. Ein Teilchen, das gezwungen ist, sich längs einer Kurve oder einer Fläche zu bewegen, ist ein anderes leicht überschaubares Beispiel holonomer Zwangsbedingungen.

Zwangsbedingungen, die nicht auf diese Weise darstellbar sind, heißen *nichtholonom*. Die Wände eines Gasbehälters üben einen nichtholomonen Zwang aus. Die Zwangsbedingung für ein Teilchen, das auf die Oberfläche einer Kugel gesetzt wurde, ist auch nichtholonom, denn sie kann als Ungleichung dargestellt werden:

$$r^2 - a^2 \geq 0$$

(a ist darin der Radius der Kugel), die nicht die Form der Gl. (1-35) hat. So wird in einem Gravitationsfeld ein Teilchen, das auf die oberste Stelle der Kugel gelegt wird, ein Stück die Oberfläche herunterrollen und schließlich herabfallen.

Zwangsbedingungen werden weiterhin danach eingeteilt, ob sie zeitunabhängig sind (*skleronom*) oder die Zeit explizit enthalten



(rheonom). Ein Beispiel der letzten Art ist eine Perle, die auf einem bewegten Draht gleitet.

Zwangsbedingungen bringen zwei Arten von Schwierigkeiten für die Lösung mechanischer Probleme mit sich. Erstens sind die Koordinaten r_i nicht länger alle unabhängig, da sie durch die Gleichungen der Zwangsbedingungen miteinander verknüpft sind. So sind die Bewegungsgleichungen (1-18) nicht alle unabhängig voneinander. Zweitens sind die Zwangskräfte, z.B. die Kraft, die der Draht auf die Perle oder die Wandung auf das Gasteilchen ausübt, nicht a priori gegeben. Sie gehören zu den Unbekannten des Problems und müssen aus der Lösung gewonnen werden, die wir suchen. Unterwirft man ein System Zwangsbedingungen, so ist das tatsächlich nur eine andere Methode darzutun, daß Kräfte im Problem vorhanden sind, die nicht direkt im einzelnen angegeben werden können, die aber wohl hinsichtlich ihrer Wirkung auf die Bewegung des Systems bekannt sind.

Im Falle holonomer Zwangsbedingungen wird die erste Schwierigkeit durch die Einführung *generalisierter Koordinaten* überwunden. Bisher haben wir stillschweigend in Begriffen der cartesischen Koordinaten gedacht. Ein System von N Teilchen, das frei von Zwang ist, hat $3N$ unabhängige Koordinaten oder *Freiheitsgrade*. Existieren holonome Zwangsbedingungen, die durch k Gleichungen der Form (1-35) dargestellt sind, so benutzen wir diese Gleichungen, um k der $3N$ Koordinaten zu eliminieren, und wir behalten $3N - k$ unabhängige Koordinaten übrig. Man sagt dann, das System besitzt $3N - k$ Freiheitsgrade. Diese Elimination der abhängigen Variablen kann auf andere Weise dargestellt werden, nämlich durch die Einführung von $3N - k$ neuer, unabhängiger Variablen $q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}$. Durch sie werden die alten Koordinaten r_1, r_2, \dots, r_N mit Hilfe von Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_1(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t) \\ &\vdots \\ \mathbf{r}_N &= \mathbf{r}_N(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t) \end{aligned} \quad (1-36)$$

ausgedrückt, die die Zwangsbedingungen implizit enthalten. Das sind *Transformationsgleichungen* zwischen dem Satz der Variablen (\mathbf{r}_i) und dem Satz der (q_i) . Die Gleichungen (1-36) können auch als Parameterdarstellungen der Variablen (\mathbf{r}_i) aufgefaßt werden.

Im allgemeinen lassen sich die generalisierten Koordinaten q_i nicht wie die cartesischen Koordinaten in die gewohnten Gruppen zu dreien aufteilen, die dann zusammengefaßt Vektoren bilden. So sind in dem Falle eines Teilchens, das gezwungen wird, sich auf einer Kugeloberfläche zu bewegen, die generalisierten Koordinaten offensichtlich zwei Winkel, die die Lage auf der Kugel beschreiben, sagen wir Breite und



Länge. Oder im Beispiel eines Doppelpendels, das sich in einer Ebene bewegt, (zwei Teilchen, die durch einen starren leichten Stab verbunden sind und die durch einen ähnlichen Stab aufgehängt sind, der an einem der Teilchen befestigt ist), sind die generalisierten Koordinaten die beiden Winkel θ_1 und θ_2 (vgl. Abb. 1-5). Generalisierte Koordinaten, also keine Koordinaten im cartesischen Sinne, sind oft auch nützlich in Systemen ohne Zwang. So ist im Problem eines Teilchens, das sich in einem äußeren Zentralkraftfeld ($V = V(r)$) bewegt, keine Zwangsbedingung vorhanden, aber es ist offensichtlich bequemer, sphärische Polarkoordinaten anstatt cartesische Koordinaten zu verwenden. Man muß sich generalisierte Koordinaten nicht im Sinne der herkömmlichen orthogonalen Ortskoordinaten vorstellen. Alle Arten von Größen können als generalisierte Koordinaten geeignet sein. So können die Amplituden in einer Fourierreentwicklung von r ; als generalisierte Koordinaten verwendet werden, oder es kann zweckmäßig sein, Größen mit der Dimension der Energie oder des Drehimpulses zu verwenden.

Wenn die Zwangsbedingung nichtholonom ist, so können wir die Gleichungen, die den Zwang beschreiben, nicht zur Elimination der abhängigen Variablen verwenden. Ein oft genanntes Beispiel für eine nichtholonome Zwangsbedingung ist ein Körper, der auf einer rauhen Fläche ohne Schlupf rollt. Die zur Beschreibung des Systems benutzten Koordinaten werden im allgemeinen Winkelkoordinaten enthalten, um die Orientierung des Körpers anzugeben, und einen Koordinatensatz, der die Lage des Körpers auf der Fläche beschreibt. Die Zwangsbedingung „Rollen“ verbindet diese zwei Koordinatensätze; sie sind nicht unabhängig. Eine Änderung der Orientierung des Körpers bedeutet unvermeidlich eine Änderung seiner Lage. Gleichwohl können wir die Anzahl der Koordinaten nicht verringern, denn die Bedingung „Rollen“ ist nicht durch eine Gleichung zwischen den Koordinaten im Sinne von (1-35) darstellbar. Es handelt sich hier um eine Bedingung für die *Geschwindigkeiten* (d.h., der Berührungspunkt wird nicht verschoben), also um eine Differentialbedingung, die in integrierter Form erst *nach* der Lösung des Problems angegeben werden kann.

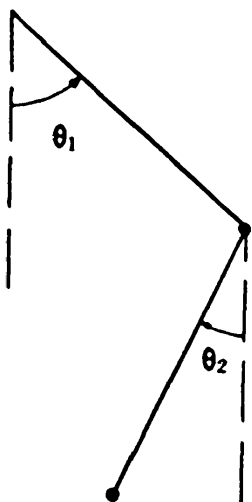


Abb. 1-5. Das Doppelpendel.

Ein einfaches Beispiel soll diesen Punkt illustrieren. Betrachten wir eine Scheibe, die auf der horizontalen xy -Ebene rollt. Sie sei gezwungen, sich so zu bewegen, daß die Ebene der Scheibe stets vertikal ist. (Die Scheibe könnte eines von zwei Rädern sein, die auf einer gemeinsamen



Achse angebracht sind.) Zur Beschreibung der Bewegung kann man als Koordinaten die xy -Koordinaten des Scheibenzentrums, einen Drehwinkel ϕ um die Scheibenachse und einen Winkel θ zwischen Scheibenachse und, sagen wir, der x -Achse wählen (vgl. Abb. 1-6). Zuzufolge des Zwangs ist der Betrag der Geschwindigkeit des Scheibenzentrums proportional zu $\dot{\phi}$:

$$v = a\dot{\phi},$$

wobei a der Radius der Scheibe ist, und ihre Richtung ist senkrecht zur Scheibenachse:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \sin \theta, \\ \dot{y} &= -v \cos \theta. \end{aligned}$$

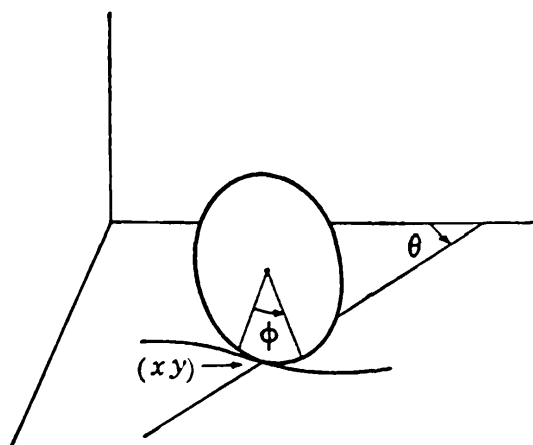


Abb. 1-6. Vertikale Scheibe, die auf einer horizontalen Ebene rollt.

Kombinieren wir diese Bedingungen, so erhalten wir zwei *Differentialgleichungen* für die Zwangsbedingungen

$$\begin{aligned} dx - a \sin \theta d\phi &= 0, \\ dy + a \cos \theta d\phi &= 0, \end{aligned} \quad (1-37)$$

und diese können nicht integriert werden, ehe man nicht das vollständige Problem tatsächlich gelöst hat. Solche *nichtintegrierbaren* Zwangsbedingungen sind nur spezielle Fälle nichtholonomer Zwangsbedingungen; die Zwangsbedingungen können auch in Form von Ungleichungen auftreten, wie wir gesehen haben.

Weil die abhängigen Koordinaten eliminiert werden können, sind die Probleme, die holonome Zwangsbedingungen enthalten, immer einer formalen Lösung zugänglich. Es gibt aber kein allgemeines Verfahren, nichtholonome Beispiele zu behandeln. Gewiß, wenn die Zwangsbedingungen nichtintegrierbar sind, können die differentiellen Zwangsbedingungen zusammen mit den Differentialgleichungen der Bewegung aufgestellt und die abhängigen Gleichungen nach der Methode der LAGRANGESchen Multiplikatoren mit Erfolg eliminiert werden. Wir werden auf diese Methode später zurückkommen. Jedoch müssen die übleren Fälle mit nichtholonomen Zwangsbedingungen individuell behandelt werden, und folglich ist bei der Entwicklung der mehr formalen Aspekte der klassischen Mechanik nahezu immer angenommen, daß jede Zwangsbedingung, sofern überhaupt eine vorliegt, holonom ist. Diese Einschränkung beschränkt die Anwendbarkeit der Theorie nicht wesentlich, trotz der Tatsache, daß viele der Zwangsbedingungen, die uns im täglichen Leben begegnen, nichtholonom sind.



Der Grund dafür ist, daß das gesamte Konzept der Zwangsbedingungen, denen ein System durch die Anwesenheit von Drähten oder Flächen oder Wänden unterworfen ist, nur makroskopischen oder räumlich sehr ausgedehnten Problemen besonders angepaßt ist. Der Physiker ist heute aber vorwiegend an atomaren Problemen interessiert. In diesen Größenordnungen bestehen alle Objekte gleichermaßen, ob innerhalb oder außerhalb des Systems, aus Molekülen, Atomen oder kleineren Teilchen, die definierte Kräfte ausüben, und der Begriff der Zwangsbedingung wird willkürlich und tritt selten auf. Zwangsbedingungen werden dann nur als mathematische Idealisierungen des tatsächlichen physikalischen Falles oder als klassische Näherungen einer quantenmechanischen Eigenschaft benutzt – z.B. die Rotation eines starren Körpers anstatt des „Spins“. Solche Zwangsbedingungen sind stets holonom und fügen sich ohne Schwierigkeit in die Theorie ein.

Um die zweite Schwierigkeit zu überwinden, daß nämlich die Zwangskräfte a priori unbekannt sind, möchten wir es vorziehen, die Mechanik so zu formulieren, daß die Zwangskräfte verschwinden. Wir brauchen uns dann nur mit den bekannten angewendeten Kräften zu befassen. Ein Hinweis, wie man vorzugehen hat, wird durch die Tatsache gegeben, daß in einem besonderen System mit Zwangsbedingungen, nämlich einem starren Körper, die von den inneren Kräften (die hier die Zwangskräfte sind) geleistete Arbeit verschwindet. Wir werden diesen Anhaltspunkt in den nachfolgenden Abschnitten verfolgen und die in ihm enthaltenen Ideen verallgemeinern.

1-4 Das D'Alembertsche Prinzip und die Lagrangeschen Gleichungen

Unter einer virtuellen (infinitesimalen) Verrückung eines Systems versteht man eine Veränderung der Konfiguration des Systems als Ergebnis irgendwelcher willkürlicher infinitesimaler Koordinatenänderungen δr_i , die mit den Kräften und Zwangsbedingungen verträglich sind, denen das System zu einem gegebenen Zeitpunkt t unterworfen ist. Die Verrückung wird virtuell genannt, um sie von einer wirklichen Verrückung des Systems zu unterscheiden, die sich während eines Zeitintervalls dt ereignet, während dem sich die Kräfte und Zwangsbedingungen ändern können. Setzen wir voraus, daß das System im Gleichgewicht ist, d.h. daß die an jedem Teilchen angreifende Gesamtkraft verschwindet: $F_i = 0$. Dann verschwindet natürlich auch das Skalarprodukt $F_i \cdot \delta r_i$, das die Arbeit der Kraft F längs der Verrückung δr_i bedeutet. Die Summe dieser verschwindenden Produkte für alle Teilchen muß ebenfalls Null sein:



$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (1-38)$$

Bis jetzt wurde nichts gesagt, was irgendwelchen neuen physikalischen Gehalt hat. Teilen wir \mathbf{F}_i auf in die angewendete Kraft $\mathbf{F}_i^{(a)}$ und die Zwangskraft \mathbf{f}_i

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(a)} + \mathbf{f}_i, \quad (1-39)$$

so wird aus Gl. (1-38)

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (1-40)$$

Wir beschränken uns nun auf Systeme, für die die virtuelle Arbeit der Zwangskräfte Null ist. Wir haben gesehen, daß diese Bedingung sicher für starre Körper gilt. Sie ist auch für eine große Zahl anderer Zwangsbedingungen richtig. Wenn ein Teilchen gezwungen wird, sich auf einer Fläche zu bewegen, steht die Zwangskraft senkrecht zu der Fläche, während die virtuelle Verrückung tangential zu ihr erfolgt. Deshalb verschwindet die virtuelle Arbeit. Das gilt jedoch nicht mehr, wenn Reibungskräfte auftreten, und wir müssen solche Systeme aus unserer Formulierung auslassen. Diese Einschränkung ist keine übermäßige Behinderung, denn die Reibung ist im wesentlichen eine makroskopische Erscheinung. Wir haben also für das Gleichgewicht des Systems die Bedingung, daß die virtuelle Arbeit der wirkenden Kräfte verschwindet:

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (1-41)$$

Gl.(1-41) wird oft *Prinzip der virtuellen Arbeit* genannt. Wir stellen fest, daß die Koeffizienten von $\delta \mathbf{r}_i$ nicht länger gleich Null gesetzt werden dürfen, d.h. im allgemeinen gilt $\mathbf{F}_i^{(a)} \neq 0$. Im Grunde genommen liegt das daran, daß die $\delta \mathbf{r}_i$ nicht vollständig unabhängig, sondern durch die Zwangsbedingungen verknüpft sind. Um die Koeffizienten zum Verschwinden zu bringen, muß man das Prinzip in eine Form überführen, die die virtuellen Verrückungen der q_i enthält, die voneinander unabhängig sind. Gl. (1-41) befriedigt unsere Wünsche, indem sie die \mathbf{f}_i nicht enthält; sie gilt aber nur für die Statik; wir wünschen jedoch eine Bedingung, die die allgemeine Bewegung des Systems umfaßt.

Um zu einem solchen Prinzip zu gelangen, machen wir von einem Kunstgriff Gebrauch, den zuerst JACOB BERNOULLI verwendet hat, und der von D'ALEMBERT weiterentwickelt wurde. Die Bewegungsgleichungen



können geschrieben werden als

$$\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}}_i$$

$$\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i = 0.$$

Diese Beziehung stellt fest, daß sich die Teilchen eines Systems im Gleichgewicht befinden, wenn die auf sie einwirkende Kraft gleich der Summe aus der tatsächlich ausgeübten Kraft plus einer „entgegengesetzt wirkenden effektiven Kraft“ $-\dot{\mathbf{p}}_i$ ist. Unter diesem Gesichtspunkt reduziert sich die Dynamik auf die Statik. Anstelle von (1-38) können wir sofort schreiben

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad (1-41')$$

und, wenn wir wieder die Aufteilung in angewendete Kräfte und Zwangskräfte vornehmen, erhalten

$$\sum_i (\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Wir beschränken uns wieder auf Systeme, für die die virtuelle Arbeit der Zwangskräfte verschwindet, und erhalten deswegen

$$\sum_i (\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (1-42)$$

Der physikalische Inhalt von (1-42) wird oft *D'ALEMBERTSches Prinzip* genannt. Wir haben unser Ziel erreicht: die Zwangskräfte treten nicht mehr in Erscheinung. Der obere Index ^(a) kann nunmehr ohne Willkür weggelassen werden. Gl. (1-42) hat aber noch nicht die geeignete Form, um Bewegungsgleichungen für das System zu liefern. Wir müssen jetzt das Prinzip in einen Ausdruck überführen, der die virtuellen Verrückungen der generalisierten Koordinaten enthält, die (für holonome Zwangsbedingungen) voneinander unabhängig sind, so daß die Koeffizienten der δq_i einzeln Null gesetzt werden können.

Die Übersetzung der \mathbf{r}_i - in die q_i -Sprache geht von den Transformationsgleichungen (1-36) aus:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

(vorausgesetzt sind n unabhängige Koordinaten) und ist auszuführen unter Beachtung der gewöhnlichen Rechenregeln für die partielle Differentiation. So wird $\mathbf{v}_i \equiv \dot{\mathbf{r}}_i$ durch die \dot{q}_i mit der Beziehung

$$\mathbf{v}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \quad (1-43)$$

ausgedrückt. Ganz ähnlich werden die willkürlichen virtuellen Verrückungen $\delta \mathbf{r}_i$ mit den virtuellen Verrückungen δq_i verknüpft durch



$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (1-44)$$

Wir bemerken, daß keine Variation der Zeit δt auftritt, da sich die virtuellen Verrückungen definitionsgemäß nur auf Auslenkungen der Koordinaten beziehen. (Nur dann ist die virtuelle Verrückung immer senkrecht zur Zwangskraft, auch wenn sich der Zwang selbst im Laufe der Zeit ändert.)

Mit Hilfe generalisierter Koordinaten läßt sich die virtuelle Arbeit der Kraft \mathbf{F}_i schreiben:

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= \sum_{i,j} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \\ &= \sum_j Q_j \delta q_j. \end{aligned} \quad (1-45)$$

Die Q_j werden Komponenten der *generalisierten Kraft* genannt. Sie sind definiert durch

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad (1-46)$$

Man beachte, daß ebenso, wie die q nicht die Dimension einer Länge haben müssen, die Q nicht notwendig die Dimension einer Kraft haben müssen. Stets muß aber $Q_j \delta q_j$ die Dimension einer Arbeit haben.

Wir wenden uns jetzt dem anderen Term in Gl. (1-42) zu, der auch folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{x}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i.$$

Drücken wir $\delta \mathbf{r}_i$ durch (1-44) aus, so erhalten wir

$$\sum_{i,j} m_i \ddot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j.$$

Betrachten wir nun die Beziehung

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \right\}. \quad (1-47)$$

Im letzten Term von Gl. (1-47) können wir die Reihenfolge der Differentiation bezüglich t und q_j vertauschen, denn in Analogie zu (1-43) gilt

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = \sum_k \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t}.$$

Das ist aber nach (1-43) gerade $\partial \mathbf{v}_i / \partial q_j$. Weiterhin sehen wir, daß nach (1-43) gilt

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad (1-48)$$



Setzen wir das in Gl. (1-47) ein, so erhalten wir

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \right\},$$

und der interessierende Term der Gl. (1-42) läßt sich folgendermaßen darstellen:

$$\sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right\} \delta q_j.$$

Identifizieren wir $\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$ mit der kinetischen Energie T des Systems,

so wird das D'ALEMBERTSche Prinzip

$$\sum_j \left[\left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} - Q_j \right] \delta q_j = 0. \quad (1-49)$$

Wenn nun die Zwangsbedingungen holonom sind (nur hier wird von dieser Bedingung Gebrauch gemacht), dann sind die q_j unabhängig. Irgendeine virtuelle Verrückung δq_j ist unabhängig von δq_k . Deshalb ist Gl. (1-49) nur dann erfüllt, wenn die einzelnen Koeffizienten verschwinden

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j. \quad (1-50)$$

Im ganzen gibt es n solcher Gleichungen.

Die Gleichungen (1-50) werden oft LAGRANGESche Gleichungen genannt, jedoch wird diese Bezeichnung häufig für die Form der Gleichungen (1-50) vorbehalten, die sich ergibt, wenn das System konservativ ist, d.h., wenn die Kräfte von einer skalaren Potentialfunktion V hergeleitet werden können, die die potentielle Energie des Systems ist:

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i V.$$

In diesem Falle können die generalisierten Kräfte geschrieben werden:

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_i \nabla_i V \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}.$$

Das ist genau der Ausdruck für die partielle Ableitung einer Funktion $-V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$ nach q_j (V ist keine explizite Funktion von t):

$$Q_j = - \frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (\text{für konservative Systeme}). \quad (1-51)$$

Gl. (1-50) kann damit geschrieben werden:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0.$$



Das Potential V ist eine Funktion allein der Lage und muß deshalb unabhängig von den generalisierten Geschwindigkeiten sein. Somit kann man die partielle Ableitung von V bezüglich \dot{q}_i hinzufügen:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial(T - V)}{\partial q_i} = 0,$$

oder, indem wir eine neue Funktion, die LAGRANGE-Funktion L definieren:

$$L = T - V, \quad (1-52)$$

werden die Gleichungen (1-50)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (1-53)$$

Wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, meinen wir die Gleichungen (1-53), wenn wir von „LAGRANGESchen Gleichungen“ sprechen.

1-5 Geschwindigkeitsabhängige Potentiale und die Dissipationsfunktion

LAGRANGESche Gleichungen können auch dann in der Form (1-53) aufgestellt werden, wenn das System nicht konservativ im üblichen Sinne ist; Voraussetzung ist aber, daß die generalisierten Kräfte von einer Funktion $U(q_i, \dot{q}_i)$ nach der Vorschrift

$$Q_i = - \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \right) \quad (1-54)$$

hergeleitet sind. In diesem Falle folgen die Gl. (1-53) auch aus den Gl. (1-50), wenn man die LAGRANGE-Funktion

$$L = T - U \quad (1-52')$$

verwendet. U kann als „generalisiertes Potential“ oder „geschwindigkeitsabhängiges Potential“ bezeichnet werden.² Die Möglichkeit, ein

² Die Geschichte der Bezeichnung dieses Potentials ist merkwürdig. Offenbar durch WEBERS frühe (und fehlerhafte) klassische Elektrodynamik angeregt, die geschwindigkeitsabhängige Kräfte forderte, scheint der deutsche Mathematiker E. SCHERING der erste gewesen zu sein, der den ernsthaften Versuch gemacht hat, solche Kräfte in das Gebäude der Mechanik einzubauen, vgl. Gött. Abh. 18 (1873) 3. Die erste Ausgabe von WHITTAKERS *Analytical Dynamics* (1904) bezeichnet deshalb das Potential als „SCHERINGS potential function“, aber der Name hat sich offensichtlich nicht eingebürgert, denn die Bezeichnung wurde in späteren Ausgaben weggelassen. Wir werden vorzugsweise den Ausdruck „generalisiertes Potential“ gebrauchen und schließen in diese Bezeichnung auch die gewöhnliche potentielle Energie ein, die eine Funktion allein der Lage ist.



solches „Potential“ zu verwenden, ist nicht nur von akademischem Interesse; es findet Anwendung bei einem sehr wichtigen Typ von Kraftfeldern, nämlich den elektromagnetischen Kräften auf bewegte Ladungen. Hinsichtlich der großen Bedeutung ist ein Abstecher in dieses Gebiet wohl lohnend.

Im GAUSSSchen Maßsystem lauten die MAXWELLSchen Gleichungen

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho, \\ \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \frac{4\pi\mathbf{j}}{c}, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (1-55)$$

Die auf eine Ladung q wirkende Kraft ist nicht allein durch die elektrische Kraft

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = -q \nabla\phi$$

gegeben, so daß das System in diesem Sinne nicht konservativ ist. Vielmehr ist die vollständige Kraft

$$\mathbf{F} = q \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right\}. \quad (1-56)$$

\mathbf{E} ist nicht Gradient einer Skalarfunktion, da $\nabla \times \mathbf{E} \neq 0$; aber aus $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ folgt, daß \mathbf{B} als Rotation eines Vektors dargestellt werden kann:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (1-57)$$

\mathbf{A} wird magnetisches Vektorpotential genannt. Somit wird die Gleichung für $\text{rot } \mathbf{E}$:

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Also können wir setzen

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\phi$$

oder

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (1-58)$$

Mit Hilfe der Ausdrücke für die Potentiale ϕ und \mathbf{A} wird die sogenannte LORENTZ-Kraft (1-56):

$$\mathbf{F} = q \left\{ -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A}) \right\}. \quad (1-59)$$

Die Terme in Gl. (1-59) können in bequemerer Form geschrieben werden. Als Beispiel betrachten wir die x -Komponente



$$(\nabla\phi)_x = \frac{\partial\phi}{\partial x}$$

und

$$\begin{aligned} (\nabla \times \nabla \times \mathbf{A})_x &= v_y \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - v_z \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \\ &= v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} - v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} - v_x \frac{\partial A_x}{\partial x}. \end{aligned}$$

Darin haben wir den Ausdruck

$$v_x \frac{\partial A_x}{\partial x}$$

addiert und subtrahiert. Nun lautet die totale Ableitung von A_x nach der Zeit

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \right),$$

worin der erste Term von der expliziten Änderung von A_x mit der Zeit herrührt. Der zweite Term stammt von der zeitlichen Bewegung des Teilchens, die den Raumpunkt ändert, an dem der Wert von A_x zu nehmen ist. Die x -Komponente von $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$ kann deshalb geschrieben werden:

$$(\nabla \times \nabla \times \mathbf{A})_x = \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - \frac{dA_x}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial t}.$$

Setzen wir das in (1-59) ein, so erhalten wir:

$$F_x = q \left\{ - \frac{\partial}{\partial x} \left(\phi - \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \right) - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial v_x} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) \right) \right\}.$$

Weil das skalare Potential unabhängig von der Geschwindigkeit ist, so ist dieser Ausdruck der Beziehung

$$F_x = - \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial v_x}$$

gleichwertig, mit

$$U = q\phi - \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}. \quad (1-60)$$

U ist ein generalisiertes Potential im Sinne von Gl. (1-54), und die LAGRANGE-Funktion eines geladenen Teilchens in einem elektromagnetischen Feld kann geschrieben werden:

$$L = T - q\phi + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}. \quad (1-61)$$



Es sei darauf hingewiesen, daß dann, wenn nur einige der auf das System wirkenden Kräfte von einem Potential herleitbar sind, die LAGRANGESchen Gleichungen stets in folgender Form geschrieben werden können:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i.$$

Darin enthält L das Potential der konservativen Kräfte wie bisher, und Q_i stellt die Kräfte dar, die *nicht* von einem Potential herrühren. Eine solche Situation tritt oft dann ein, wenn Reibungskräfte wirksam sind. Gelegentlich kommt es vor, daß die Reibungskraft der Geschwindigkeit des Teilchens proportional ist, so daß ihre x -Komponente die Form

$$F_{jx} = -k_x v_x$$

hat. Reibungskräfte dieses Typs können durch eine Funktion \mathfrak{F} , RAYLEIGHsche Dissipationsfunktion genannt, beschrieben werden. Sie ist definiert durch

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{2} \sum_i (k_x v_{ix}^2 + k_y v_{iy}^2 + k_z v_{iz}^2).$$

Darin ist die Summation über alle Teilchen des Systems vorzunehmen. Aus dieser Definition folgt offensichtlich

$$F_{jx} = - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial v_x}$$

oder symbolisch:

$$\mathbf{F}_j = -\nabla_v \mathfrak{F}.$$

Man kann der Dissipationsfunktion auch eine physikalische Interpretation geben. Die vom System gegen die Reibung geleistete Arbeit ist

$$dW_r = -\mathbf{F}_j \cdot d\mathbf{r} = -\mathbf{F}_j \cdot \mathbf{v} dt = (k_x v_x^2 + k_y v_y^2 + k_z v_z^2) dt.$$

Demnach ist $2\mathfrak{F}$ der Anteil an der Energiedissipation, der von der Reibung herrührt. Die Komponente der generalisierten Kraft, die ihren Ursprung in der Reibungskraft hat, ist gegeben durch

$$\begin{aligned} Q_i &= \sum_j \mathbf{F}_{j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i} = - \sum_j \nabla_v \mathfrak{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i} \\ &= - \sum_j \nabla_v \mathfrak{F} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_j}{\partial \dot{q}_i}, \quad \text{wegen (1-48)} \\ &= - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \dot{q}_i}. \end{aligned}$$

Die LAGRANGESchen Gleichungen werden also

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \dot{q}_i} = 0,$$



so daß zwei skalare Funktionen L und \mathcal{F} angegeben werden müssen, um die Bewegungsgleichungen zu erhalten.

1-6 Einfache Anwendungen der Lagrangeschen Formulierung

Die vorigen Abschnitte zeigen, daß uns für Systeme, für die man eine LAGRANGESCHE Funktion definieren kann, d.h. für holonome Systeme mit Kräften, die von einem gewöhnlichen oder generalisierten Potential herleitbar sind, eine recht bequeme Methode zur Verfügung steht, die Bewegungsgleichungen aufzustellen. Wir wurden auf den LAGRANGESCHEN Formalismus durch den Wunsch geführt, die Zwangskräfte aus den Bewegungsgleichungen zu eliminieren. Durch Erreichung dieses Zieles haben wir viele andere Vorteile gewonnen. Stellen wir die Bewegungsgleichungen in ihrer ursprünglichen Form (1-18) auf, so ist es notwendig, mit vielen *vektoriellen* Kräften und Beschleunigungen zu arbeiten. Nach der LAGRANGESCHEN Methode hat man lediglich zwei *skalare* Funktionen T und V zu ermitteln. Das vereinfacht das Problem außerordentlich. Wir können nun ein Routineverfahren für alle Probleme der Mechanik aufstellen, auf die der LAGRANGESCHE Formalismus anwendbar ist. Man hat lediglich T und V in generalisierten Koordinaten aufzuschreiben, aus ihnen L zu bilden und in (1-53) einzusetzen, um die Bewegungsgleichungen zu erhalten. Die benötigte Transformation der T und V von cartesischen Koordinaten auf generalisierte Koordinaten erreicht man durch Anwendung der Transformationsgleichungen (1-36) und (1-43). So ist T allgemein gegeben durch

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2.$$

Führt man die Entwicklung aus, so ist klar, daß der Ausdruck für T in generalisierten Koordinaten die Form hat:

$$T = a + \sum_j a_j \dot{q}_j + \sum_{j,k} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k. \quad (1-62)$$

Darin sind a , a_j , a_{jk} bestimmte Funktionen der \mathbf{r} und t und damit der q und t . Tatsächlich zeigt ein Vergleich:

$$a = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2,$$

$$a_j = \sum_i m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$$

und

$$a_{jk} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}.$$



Wenn die Transformationsgleichungen die Zeit nicht explizit enthalten, d.h. wenn die Zwangsbedingungen unabhängig von der Zeit (skleronom) sind, dann verschwindet lediglich der letzte Term in (1-62) nicht und T ist immer eine homogene quadratische Form in den generalisierten Geschwindigkeiten.

Wir wollen nun einige einfache Beispiele zu diesem Verfahren betrachten:

1. Ein einzelnes Teilchen im Raum
 - a. Cartesische Koordinaten
 - b. Ebene Polarkoordinaten
2. Die ATWOODSche Fallmaschine
3. Zeitabhängige Zwangsbedingungen – eine Perle, die auf einem rotierenden Draht gleitet.

1. *Bewegung eines Teilchens: a) Verwendung cartesischer Koordinaten.* Die für Gl. (1-50) benötigten generalisierten Kräfte sind offensichtlich F_x , F_y und F_z . Dann haben wir

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z},$$

und die Bewegungsgleichungen lauten

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = F_x, \quad \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = F_y, \quad \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = F_z. \quad (1-63)$$

Wir sind damit auf die ursprünglichen NEWTONSchen Bewegungsgleichungen zurückgeführt worden.

Bewegung eines Teilchens: b) Verwendung ebener Polarkoordinaten. Hier müssen wir T durch \dot{r} und $\dot{\theta}$ ausdrücken. Die Transformationsgleichungen, d.h. die Gl. (1-36) lauten in diesem Falle einfach

$$x = r \cos \theta,$$

$$y = r \sin \theta.$$

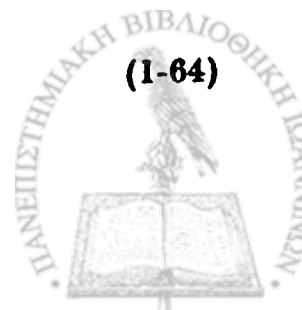
In Analogie zu (1-43) sind die Geschwindigkeiten gegeben durch

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta,$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta.$$

Die kinetische Energie $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ läßt sich damit formal zurückführen auf

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2).$$



Eine andere Ableitung von Gl. (1-64) erhält man, wenn man beachtet, daß die Komponenten der Geschwindigkeit in Polarkoordinaten folgendermaßen angegeben werden können: \dot{r} in Richtung von \mathbf{r} und

$r\dot{\theta}$ in der Richtung senkrecht zu \mathbf{r} . Diese Richtung bezeichnen wir durch den Einheitsvektor \mathbf{n} . Somit lautet das Geschwindigkeitsquadrat, ausgedrückt in Polarkoordinaten, $\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2$. Die Komponenten der generalisierten Kraft erhält man aus der Definition Gl. (1-46)

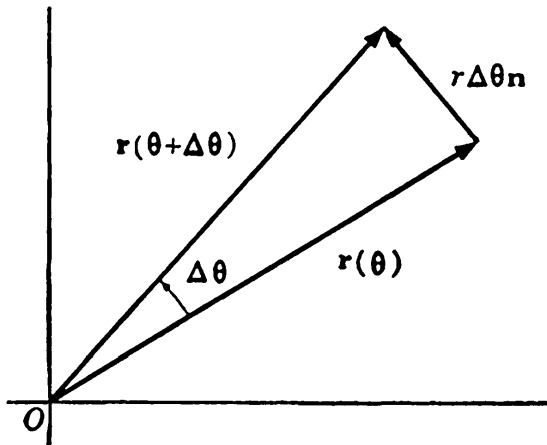


Abb. 1-7. Die Ableitung von \mathbf{r} nach θ .

$$Q_r = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = F_r,$$

$$Q_\theta = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \mathbf{F} \cdot r\mathbf{n} = rF_\theta,$$

da die Ableitung von \mathbf{r} bezüglich θ (nach Definition einer Ableitung) ein Vektor in Richtung \mathbf{n} ist, vgl. Abb. 1-7. Es gibt hier zwei generalisierte Koordinaten und deshalb zwei LAGRANGESCHE Gleichungen. Die Ableitungen, die in der r -Gleichung auftreten, lauten

$$\frac{\partial T}{\partial r} = m\dot{r}\dot{\theta}^2, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) = m\ddot{r},$$

und die Gleichung selbst lautet

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F_r.$$

Der zweite Term beschreibt die Zentripetalbeschleunigung. Für die θ -Gleichung haben wir die Ableitungen

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt} (mr^2\dot{\theta}) = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta},$$

so daß wir für die Gleichung erhalten:

$$\frac{d}{dt} (mr^2\dot{\theta}) = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = rF_\theta.$$

Wir stellen fest, daß die linke Seite gerade die Ableitung des Drehimpulses nach der Zeit und die rechte Seite das angewendete Drehmoment sind. Somit haben wir wieder die Drehimpuls-Gleichung (1-24) hergeleitet.

2. Die ATWOODSche Maschine ist ein Beispiel eines konservativen Systems mit holonomen skleronomen Zwangsbedingungen (wir



nehmen an, daß sich die Rolle ohne Reibung dreht). Offensichtlich gibt es hier nur eine unabhängige Koordinate x . Die Lage des anderen Gewichtes ist durch die Zwangsbedingung bestimmt, daß die Seillänge zwischen den Gewichten gleich l ist. Die potentielle Energie ist

$$V = -M_1gx - M_2g(l - x),$$

während für die kinetische Energie gilt:

$$T = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\dot{x}^2.$$

Kombiniert man beide, so findet man die LAGRANGE-Funktion

$$L = T - V = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\dot{x}^2 + M_1gx + M_2g(l - x).$$

Es gibt hier nur eine Bewegungsgleichung, die die Ableitungen

$$\frac{\partial L}{\partial x} = (M_1 - M_2)g,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M_1 + M_2)\dot{x}$$

enthält. Wir haben somit

$$(M_1 + M_2)\ddot{x} = (M_1 - M_2)g$$

oder

$$\ddot{x} = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}g.$$

Das ist das wohlbekannte Ergebnis, das auch auf elementarem Wege gewonnen werden kann. Dieses triviale Beispiel zeigt besonders deutlich, daß die Zwangskräfte – hier die Seilspannung – nirgendwo im LAGRANGESCHEN Formalismus erscheinen.

3. Eine auf einem gleichförmig rotierenden Draht gleitende Perle in einem kräftefreien Raum. Dieses Beispiel soll als einfache Erläuterung einer zeitabhängigen Zwangsbedingung gewählt werden. Die Transformationsgleichungen enthalten also die Zeit explizit.

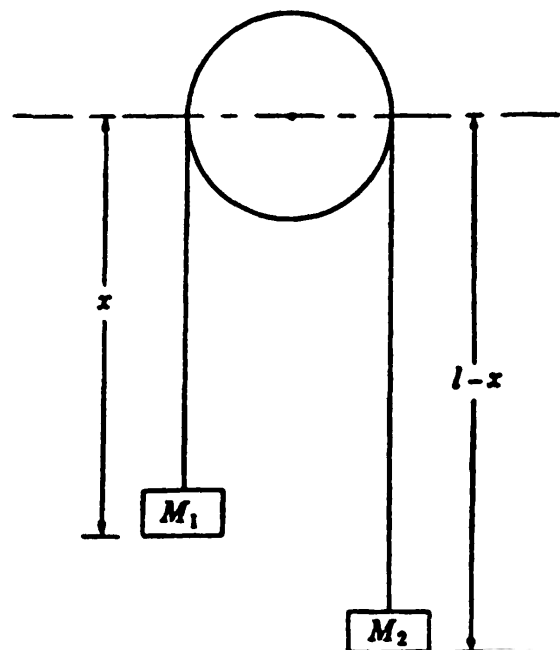


Abb. 1-8. Die Atwoodsche Fallmaschine.



Sie lauten

$$\begin{aligned} x &= r \cos \omega t, \\ y &= r \sin \omega t. \end{aligned} \quad \omega = \text{Winkelgeschwindigkeit der Drehung.}$$

Obwohl man T (hier dasselbe wie L) auf dem gleichen Wege finden könnte, der benutzt wurde, um (1-62) zu erhalten, ist es einfacher, (1-64) direkt heranzuziehen. Drückt man die Zwangsbedingung durch die Beziehung $\dot{\theta} = \omega$ aus, so wird

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2).$$

Wir bemerken, daß T keine homogene quadratische Funktion der generalisierten Koordinaten ist, weil jetzt ein zusätzlicher Term auftritt, der \dot{r} nicht enthält. Die Bewegungsgleichung lautet nun

$$\begin{aligned} \text{oder} \quad m\ddot{r} - mr\omega^2 &= 0 \\ \ddot{r} &= r\omega^2. \end{aligned}$$

Das ist das wohlbekanntes Resultat, daß sich die Perle zufolge der Zentrifugalbeschleunigung nach außen bewegt. Wieder kann die Methode nicht die Zwangskräfte liefern, die die Perle auf dem Draht halten.

LITERATURHINWEISE³

- J. L. SYNGE und B. A. GRIFFITH, *Principles of Mechanics*. Ein ausgezeichnetes Lehrbuch der Mechanik von mittlerem Schwierigkeitsgrad. Es kann mit großem Nutzen als Vorstufe zu einem weitergehenden Lehrbuch, wie dem hier vorliegenden, gelesen werden.
- C. J. COE, *Theoretical Mechanics*. Ein anderes Lehrbuch von mittlerem Schwierigkeitsgrad. Besondere Betonung wird auf die Verwendung von Vektoren gelegt. Einige der letzten Kapitel sind recht weitführend. Das Buch enthält eine Zusammenfassung der Vektoranalysis.
- W. F. OSGOOD, *Mechanics*. Die ersten fünf Kapitel dieses Buches geben eine elementare Einführung, köstlich gewürzt durch die große pädagogische Erfahrung des Autors. In dieser Hinsicht sei der Leser besonders auf Seite 102 hingewiesen!
- G. JOOS, *Theoretische Physik*. Teile des V. und VI. Kapitels sind vielleicht die von allen referierten Werken knappste Darstellung der in diesem Kapitel behandelten Gegenstände.
- E. A. MILNE, *Vectorial Mechanics*. Eine schreckliche Darstellung, die oft so vorgeht, daß die elegante Einfachheit der Vektor- und Tensormethoden völlig kompliziert und abstoßend wirkt. Trotzdem kann man in Teil III viele interessante Vektorsätze über die allgemeine Bewegung eines Teilchens und der Teilchensysteme finden, die aus elementaren Prinzipien abgeleitet sind.

³ In den Literaturangaben am Ende jedes Kapitels sind nur kurz die Titel angegeben. Die vollständigen bibliographischen Angaben findet man im Literaturverzeichnis am Ende des Buches.



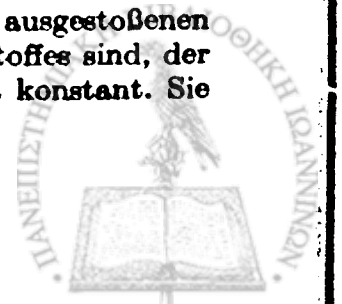
- E. MACH**, *The Science of Mechanics*. Eine klassische Analyse und Kritik der fundamentalen Begriffe der klassischen Mechanik. Die früheren Ausgaben dieses Buches trugen viel dazu bei, der Relativitätstheorie philosophisch den Weg zu ebnen.
- R. B. LINDSAY** und **H. MARGENAU**, *Foundations of Physics*. Kapitel 3 enthält eine klare Diskussion der Grundlagen der klassischen Mechanik. Dieses Buch, zusammen mit MACHs Werk, kann als hervorragender Ausgangspunkt für ein weiteres Studium der Natur der Grundideen dienen, die in der Mechanik enthalten sind.
- G. HAMEL**, *Die Axiome der Mechanik*. (Bd. V, *Handbuch der Physik*). Ein Versuch, die axiomatische Formulierung der Mechanik auf eine mathematisch strenge Grundlage zu stellen. Der Artikel von **NORDHEIM** im selben Band enthält eine kurze Diskussion der geschwindigkeitsabhängigen Potentiale, Abschnitt 10, Kapitel 2.
- E. T. WHITTAKER**, *Analytical Dynamics*. Eine wohlbekannte Abhandlung, die eine erschöpfende Darstellung der analytischen Mechanik unter den älteren Gesichtspunkten gibt. Die Darstellung ist, bedauerlicherweise, durch eine offensichtliche Abneigung gegen Diagramme (es gibt nur vier im ganzen Buch) und die Vektorschreibweise gekennzeichnet, und der Autor zeigt eine Vorliebe für die Art pedantischer mechanischer Probleme, die durch die Cambridger Tripos-Prüfungen bekannt geworden sind. Das Werk bleibt jedoch eine praktisch einzigartige Quelle für die Diskussion vieler spezieller Gegenstände. Für das vorliegende Kapitel kommt als Referenz grundsätzlich Kapitel II, speziell Abschnitt 31 in Betracht, in dem geschwindigkeitsabhängige Potentiale diskutiert werden. Die Abschnitte 92-94 des Kapitel VIII befassen sich mit der Dissipationsfunktion.
- LORD RAYLEIGH**, *The Theory of Sound*. Die Dissipationsfunktion wird in Kapitel IV, Bd. I dieser klassischen Abhandlung eingeführt.

ÜBUNGEN

1. Ein Kern, der ursprünglich in Ruhe ist, zerfällt radioaktiv, indem er ein Elektron mit dem Impuls $1,73 \text{ Mev}/c$ und im rechten Winkel dazu ein Neutrino mit dem Impuls $1,00 \text{ Mev}/c$ emittiert. (Mev (Million Elektronenvolt) ist eine Energieeinheit, die in der modernen Physik verwendet wird. Sie ist gleich $1,59 \times 10^{-6} \text{ erg}$. Entsprechend ist Mev/c eine Einheit des Impulses und gleich $5,33 \times 10^{-17} \text{ g}\cdot\text{cm}/\text{sec}$.) In welche Richtung wird der Kern zurückgestoßen? Wie groß ist sein Impuls in Mev/c ? Wenn die Masse des Rest-Kernes gleich $3,90 \times 10^{-24} \text{ g}$ ist, wie groß ist dann seine kinetische Energie in Elektronenvolt?

2. Die Fliehgeschwindigkeit eines Teilchens auf der Erde sei die Minimalgeschwindigkeit, die das Teilchen auf der Erdoberfläche haben muß, damit es aus dem Gravitationsfeld der Erde entweichen kann. Vernachlässigt man den Widerstand der Atmosphäre, so ist das System konservativ. Zeige mit Hilfe des Erhaltungssatzes für die Summe der potentiellen und kinetischen Energie daß die Fliehgeschwindigkeit auf der Erde, wenn man die Wirkung des Mondes vernachlässigt, $11,2 \text{ km}/\text{sec}$ ist.

3. Raketen werden durch den Impuls der aus dem Raketenende ausgestoßenen Gase angetrieben. Da diese Gase Reaktionsprodukte des Treibstoffes sind, der von der Rakete getragen wird, ist die Masse der Rakete nicht konstant. Sie



nimmt in dem Maße ab, in dem der Treibstoff verbraucht wird. Zeige, daß die Bewegungsgleichung für eine Rakete, die in einem homogenen Gravitationsfeld bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes vertikal aufwärts abgeschossen wird, folgendermaßen lautet:

$$m \frac{dv}{dt} = -v' \frac{dm}{dt} - mg,$$

wobei m die Masse der Rakete und v' die Geschwindigkeit der austretenden Gase relativ zur Rakete sind. Integriere diese Gleichung und bestimme so v als Funktion von m . Nimm dabei an, daß der Masseverlust proportional der Zeit ist. Zeige, daß für eine Rakete, die aus der Ruhelage startet, mit v' gleich 2070 m/sec und einem Masseverlust von $1/60$ der Anfangsmasse pro Sekunde (die Werte entsprechen der V-2), und die Fliehgeschwindigkeit erreichen soll, das Gewichtsverhältnis zwischen Treibstoff und leerer Rakete beinahe 300 sein muß!

4. Ein Teilchen bewege sich in einer Ebene unter dem Einfluß einer Kraft, die in Richtung auf ein Kraftzentrum wirkt. Der Betrag der Kraft sei

$$F = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{\dot{r}^2 - 2\ddot{r}r}{c^2} \right).$$

Darin ist r der Abstand des Teilchens vom Kraftzentrum. Bestimme das generalisierte Potential, das auf eine solche Kraft führt, und stelle mit ihm die LAGRANGE-Funktion für die Bewegung in einer Ebene auf. (Der Ausdruck für F stellt die Kraft zwischen zwei Ladungen in der WEBERSchen Elektrodynamik dar.)

5. Stelle die Bewegungsgleichung für ein Teilchen auf, das vertikal unter dem Einfluß der Schwere fällt. Dabei seien Reibungskräfte wirksam, die sich von einer Dissipationsfunktion $\frac{1}{2}kv^2$ herleiten. Integriere die Gleichung und bestimme die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit, und zeige, daß die höchstmögliche Geschwindigkeit für einen Fall aus der Ruhelage gleich $v = mg/k$ ist.

6. Zwei Punktmassen m seien durch einen starren, gewichtslosen Stab der Länge l verbunden. Sein Zentrum sei gezwungen, sich auf einem Kreis mit dem Radius a zu bewegen. Bestimme die kinetische Energie in generalisierten Koordinaten.

7. Stelle die LAGRANGESchen Bewegungsgleichungen für ein sphärisches Pendel auf, d.h. für einen Massenpunkt, der an einem starren, gewichtslosen Stab befestigt ist.

8. Ein System bestehe aus drei Teilchen mit gleichen Massen m . Zwischen zweien von ihnen mögen Kräfte wirken, die sich von einem Potential

$$V = -ge^{-\mu r}$$

herleiten lassen. Darin sei r der Abstand zwischen den zwei Teilchen. Zudem übe jedes dieser zwei Teilchen auf das dritte eine Kraft aus, die aus einem generalisierten Potential der Form

$$U = -fv \cdot r$$

erhalten werden kann. \mathbf{v} sei die Relativgeschwindigkeit der wechselwirkenden Teilchen. f ist eine Konstante. Stelle für dieses System die LAGRANGE-Funktion



auf. Verwende dabei als Koordinaten den Radiusvektor \mathbf{R} des Massenzentrums und die zwei Vektoren

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_s, \\ \rho_2 &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_s.\end{aligned}$$

Bleibt der Gesamtdrehimpuls des Systems erhalten?

9. Zwei Massepunkte mit den Massen m_1 und m_2 seien durch einen Faden verbunden, der durch ein Loch in einer glatten Tischplatte führt, und zwar so, daß m_1 auf der Tischoberfläche ruht und m_2 darunter hängt. Angenommen, m_2 bewege sich nur auf einer vertikalen Linie; wie lauten die generalisierten Koordinaten für das System? Schreibe die LAGRANGE-Gleichung für das System auf und diskutiere nach Möglichkeit die physikalische Bedeutung, die die darin auftretenden Terme haben könnten. Reduziere das Problem auf eine einzige Differentialgleichung zweiter Ordnung und bestimme ein erstes Integral der Gleichung. Welche physikalische Bedeutung hat dieses Integral? (Betrachte nur den Teil der Bewegung, für den weder m_1 noch m_2 durch das Loch im Tisch hindurchtritt.)

10. Stelle die LAGRANGE-Funktion und die Bewegungsgleichungen für das Doppelpendel auf (siehe Abb. 1-5), wobei die Pendellängen l_1 und l_2 und die entsprechenden Massen m_1 und m_2 sein sollen.



II. KAPITEL

VARIATIONSPRINZIPIEN UND LAGRANGESCHE GLEICHUNGEN

2-1 Das Hamiltonsche Prinzip

Die im vorigen Kapitel dargestellte Ableitung der LAGRANGESchen Gleichungen ging aus von einer Betrachtung des augenblicklichen Zustandes des Systems und kleinen virtuellen Verrückungen aus dem augenblicklichen Zustand, d.h., sie ging aus von einem „Differentialprinzip“ wie dem D’ALEMBERTSchem Prinzip. Es ist auch möglich, die LAGRANGESchen Gleichungen aus einem Prinzip zu gewinnen, das die gesamte Bewegung des Systems zwischen Zeitpunkten t_1 und t_2 und kleine virtuelle Abweichungen der gesamten Bewegung von der tatsächlichen Bewegung betrachtet. Ein Prinzip dieser Art wird als „Integralprinzip“ bezeichnet.

Ehe wir das Integralprinzip darstellen, müssen wir zunächst die Bedeutung des Ausdruckes „Bewegung des Systems zwischen Zeitpunkten t_1 und t_2 “ in präzisere Sprache fassen. Die augenblickliche Konfiguration eines Systems wird durch die Werte der n generalisierten Koordinaten $q_1 \dots q_n$ beschrieben und entspricht einem bestimmten Punkt in einem cartesischen Hyperraum, dessen n Koordinatenachsen durch die q gebildet werden. Dieser n -dimensionale Raum wird deshalb Konfigurationsraum genannt. Im Laufe der Zeit ändert sich der Zustand des Systems, und der Systempunkt bewegt sich im Konfigurationsraum, indem er eine Kurve durchläuft, die „Bewegungsbahn des Systems“ genannt wird. Die „Bewegung des Systems“ im obigen Sinne bezieht sich dann auf die Bewegung des Systempunktes längs dieser Bahn im *Konfigurationsraum*. Die Zeit kann formal als Parameter der Kurve angesehen werden; jedem Bahnpunkte sind ein oder mehrere Zeitwerte zugeordnet. Es muß betont werden, daß zwischen dem Konfigurationsraum und dem physikalischen dreidimensionalen Raum kein notwendiger Zusammenhang besteht, gerade so wie die generalisierten Koordinaten nicht notwendig Lagekoordinaten sind. Die Bahn im Konfigurationsraum muß nicht notwendig der Bahn im Raume irgendeines wirklichen Teilchens ähnlich sein; jeder Punkt der Bahn repräsentiert die Konfiguration des *gesamten* Systems zu einem entsprechenden Zeitpunkt.



Wir können nun das HAMILTONSche *Integralprinzip* für konservative Systeme (im weiteren Sinne, einschließlich generalisierter Potentiale) aufstellen:

Die Bewegung des Systems zwischen dem Zeitpunkt t_1 und dem Zeitpunkt t_2 ist derart, daß das Linienintegral

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (2-1)$$

ein Extremum für die durchlaufene Bahn ist. Dabei ist $L = T - V$.

Das heißt, unabhängig von allen möglichen Wegen, auf denen der Systempunkt von seiner Position zur Zeit t_1 nach seiner Position zur Zeit t_2 wandern kann, wird er tatsächlich längs des Weges wandern, für den das Integral (2-1) ein Extremum ist, gleich ob Minimum oder Maximum (vgl. Abb. 2-1).

Wir können das HAMILTONSche Prinzip zusammenfassen, indem wir sagen: die Bewegung ist derart, daß die *Variation* des Linienintegrals I für festes t_1 und t_2 Null ist, d.h.

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt = 0. \quad (2-2)$$

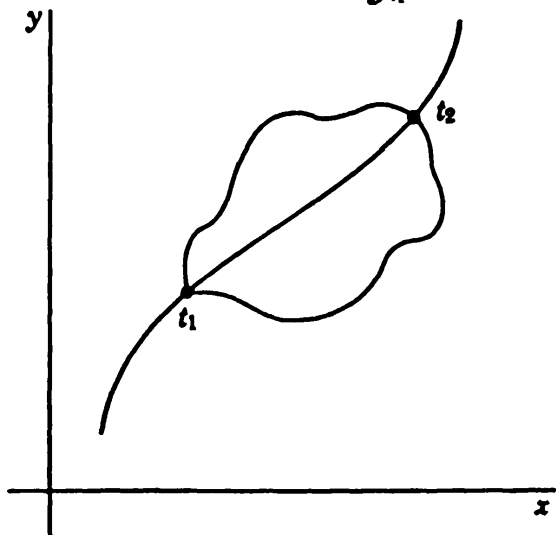


Abb. 2-1. Bahn des Systempunktes im Konfigurationsraum.

Das HAMILTONSche Prinzip (2-2) ist eine sowohl notwendige als auch hinreichende Bedingung für die LAGRANGESche Gl. (1-53). So kann man zeigen, daß das HAMILTONSche Prinzip notwendig aus den LAGRANGESchen Gleichungen folgt (siehe WHITTAKER, *Analytical Dynamics*, 4. Aufl., S. 245). Wir werden statt dessen die Umkehrung beweisen, nämlich, daß die LAGRANGESchen Gleichungen aus dem HAMILTONSchen Prinzip folgen. Das ist der wichtigere Satz. Er setzt uns in die Lage, die

Mechanik konservativer Systeme aus dem HAMILTONSchen Prinzip als dem grundlegenden Postulat zu entwickeln, und zwar besser als aus den NEWTONSchen Bewegungsgleichungen. Eine solche Formulierung hat gewisse Vorteile; zum Beispiel ist sie offensichtlich invariant gegenüber dem Koordinatensystem, in dem die LAGRANGE-Funktion ausgedrückt wird. Wichtiger ist, daß sie den Weg angibt, der eingeschlagen werden muß, wenn man versucht, offensichtlich nichtmecha-



nische Systeme im mathematischen Gewand der klassischen Mechanik zu beschreiben, wie in der Feldtheorie.

2-2 Zur Technik der Variationsrechnung

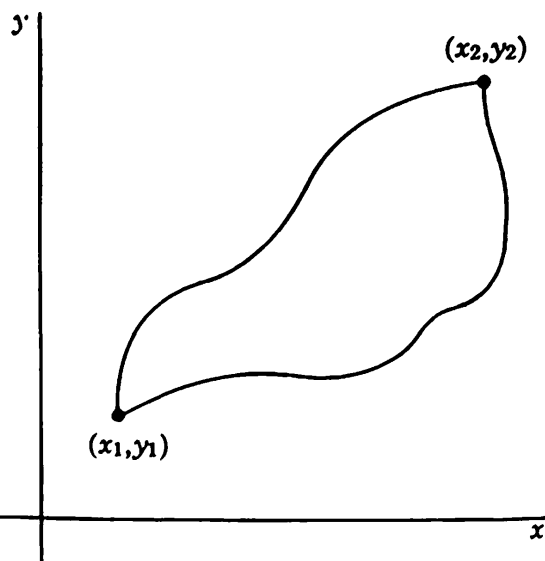
Ehe wir zeigen, daß die LAGRANGESchen Gleichungen aus (2-2) folgen, müssen wir zunächst einen Abstecher zu den Methoden der Variationsrechnung machen, denn eines der Hauptprobleme in dieser Rechnung ist, die Kurve zu finden, für die ein gegebenes Linienintegral ein Extremum wird.

Betrachten wir erst das Problem in einer wesentlich eindimensionalen Form; d.h., wir möchten einen solchen Weg $y = y(x)$ zwischen zwei Werten x_1 und x_2 finden, so daß das Linienintegral einer Funktion $f(y, \dot{y}, x)$ ein Extremum ist. Dabei ist $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$. Für die richtige Funktion y muß das Integral

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, \dot{y}, x) dx \quad (2-3)$$

ein Maximum oder ein Minimum sein. Die Variable x spielt hier die Rolle des Parameters t . Wir betrachten nur solche variierte Wege, für die $y(x_1) = y_1$ und $y(x_2) = y_2$ ist. (Vgl. Abb. 2-2. Das Diagramm stellt *nicht* den Konfigurationsraum dar.)

Wir bringen das Problem in eine Form, die uns in die Lage versetzt,



den wohlbekannten Apparat der Differentialrechnung zu benutzen, um einen Extremwert zu erhalten. Wir können alle möglichen zu prüfenden Kurven $y(x)$ mit verschiedenen Werten eines Parameters α kennzeichnen, derart, daß für einen Wert von α , etwa $\alpha = 0$, die Kurve mit dem Weg oder den Wegen übereinstimmen würde, für die das Integral ein Extremum wird. Die Größe y wäre dann eine Funktion sowohl von x als auch des Parameters α . Zum Beispiel können wir y darstellen durch

Abb. 2-2. Variierte Bahnen beim eindimensionalen Extremwertproblem.

$$y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha \eta(x).$$

(2-4)



Dabei ist $\eta(x)$ eine Funktion von x , die für $x = x_1$ und $x = x_2$ verschwindet. Gl. (2-4) ist nur eine der möglichen Parameterkurvenscharen y . Verwenden wir eine solche Parameterdarstellung (nicht notwendig Gl. (2-4)), dann ist J in (2-3) ebenfalls eine Funktion von α :

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x, \alpha), \dot{y}(x, \alpha), x) dx, \quad (2-5)$$

und die Extremwertsbedingung ist bekanntlich

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = 0. \quad (2-6)$$

Benutzt man die Methoden der Differentiation hinter dem Integralzeichen, so findet man

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} \right\} dx. \quad (2-7)$$

Betrachten wir das zweite dieser Integrale:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha} dx.$$

Durch partielle Integration wird das Integral

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha} dx = \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx. \quad (2-8)$$

Die Bedingung für alle variierten Kurven ist, daß sie durch die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) gehen, und daß deshalb $\partial y / \partial \alpha$ für x_1 und x_2 verschwinden muß. Deshalb verschwindet der erste Term in (2-8), und Gl. (2-7) wird

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx.$$

Um die Extremwertsbedingung zu erhalten, multiplizieren wir mit einem Differential $d\alpha$ und bilden die Ableitungen bei $\alpha = 0$. Es ergibt sich

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right)_0 d\alpha = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right\} \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_0 d\alpha dx. \quad (2-9)$$

Wir werden

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right)_0 d\alpha = \delta J$$

die Variation von J nennen. Entsprechend ist

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_0 d\alpha = \delta y \quad (2-10)$$

und

$$\left(\frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha}\right)_0 d\alpha = \delta \dot{y},$$



obgleich das letzte nicht benötigt wird. Hier repräsentiert δy eine beliebige Variation von $y(x)$, die man durch Variation des willkürlichen Parameters α um seinen Wert Null erhält. Das entspricht der früher definierten virtuellen Verrückung.¹ Da δy beliebig ist, folgt, daß

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right\} \delta y \, dx = 0$$

nur dann gilt, wenn

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = 0. \quad (2-11)$$

Deshalb ist J nur für solche Kurven $y(x)$ ein Extremum, für die f die Differentialgl. (2-11) erfüllt, die eine große Ähnlichkeit mit der LAGRANGESchen Gleichung zeigt. Wir wollen nun einige Beispiele dieses einfachen Problemtyps betrachten:

1. *Der kürzeste Abstand zweier Punkte in einer Ebene.* Ein Element der Bogenlänge in einer Ebene ist

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

und die gesamte Länge einer Kurve, die zwischen den Punkten 1 und 2 verläuft, ist

$$I = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Die Bedingung, daß die Kurve der kürzeste Weg ist, bedeutet, daß I ein Minimum sein soll. Das ist ein Beispiel des Extremwertproblems, das durch Gl. (2-3) beschrieben wird, mit

$$f = \sqrt{1 + \dot{y}^2}.$$

Setzen wir in (2-11)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}},$$

so erhalten wir

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \right) = 0$$

oder

$$\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = c,$$

wobei c eine Konstante ist. Diese Lösung kann nur für

$$\dot{y} = a$$

gelten. Darin ist a eine Konstante, die zu c in folgender Beziehung steht:

¹ Diese Variationssymbole können natürlich von Anfang an benutzt werden, aber es ist gut, sich immer daran zu erinnern, daß sie als Abkürzungen für das hier ausgeführte Parameterverfahren stehen.



$$a = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}$$

Die Lösung ist offensichtlich die Gleichung einer Geraden:

$$y = ax + b,$$

wobei b eine andere Integrationskonstante ist. Genau gesagt, haben wir für die Gerade nur bewiesen, daß sie ein extremaler Weg ist. Für dieses Problem ist sie aber offensichtlich auch ein Minimum. Die Integrationskonstanten a und b sind durch die Bedingung bestimmt, daß die Kurve durch die zwei Endpunkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) geht.

Auf ähnliche Weise kann man den kürzesten Abstand zwischen zwei Punkten auf einer Kugel erhalten, indem man die Bogenlänge auf der

Kugeloberfläche durch Kugelkoordinaten ausdrückt. Ganz allgemein werden Kurven, die den kürzesten Abstand zwischen zwei Punkten auf einer gegebenen Fläche angeben, *geodätische Linien* der Fläche genannt.

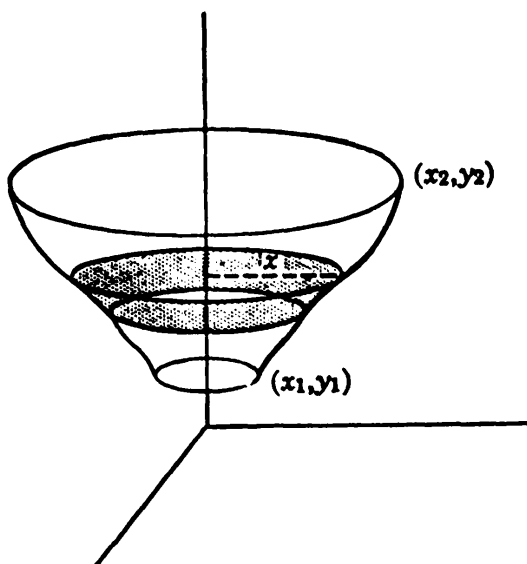


Abb. 2-3. Minimale Rotationsfläche.

2. Die minimale Rotationsfläche. Wir nehmen an, daß wir eine Rotationsfläche dadurch erzeugen, daß wir eine Kurve, die durch zwei feste Endpunkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) geht, um die y -Achse rotieren lassen (vgl. Abb. 2-3). Das Problem lautet dann, diejenige Kurve zu finden, für die die Oberfläche

ein Minimum ist. Die Fläche eines schmalen Streifens der Oberfläche ist $2\pi x ds = 2\pi x \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx$ und die Gesamtfläche ist

$$2\pi \int_1^2 x \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx.$$

Der Extremwert dieses Integrals ist wieder durch (2-11) gegeben, mit

$$f = x \sqrt{1 + \dot{y}^2}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{x\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}$$

Gl. (2-11) wird in diesem Falle

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \right) = 0$$



oder

$$\frac{x\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} = a.$$

Dabei ist a eine Integrationskonstante, die selbstverständlich kleiner als der Minimalwert von x ist. Quadrieren wir die oben stehende Gleichung und spalten sie in Faktoren auf, so haben wir

$$\dot{y}^2(x^2 - a^2) = a^2$$

und durch Auflösen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung lautet im Hinblick auf a

$$y = a \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} + b = a \operatorname{arc} \cosh \frac{x}{a} + b$$

oder

$$x = a \cosh \frac{y - b}{a}.$$

Das ist die Gleichung einer Kettenlinie. Wieder sind die beiden Integrationskonstanten a und b durch die Forderung bestimmt, daß die Kurve durch die zwei gegebenen Endpunkte läuft.

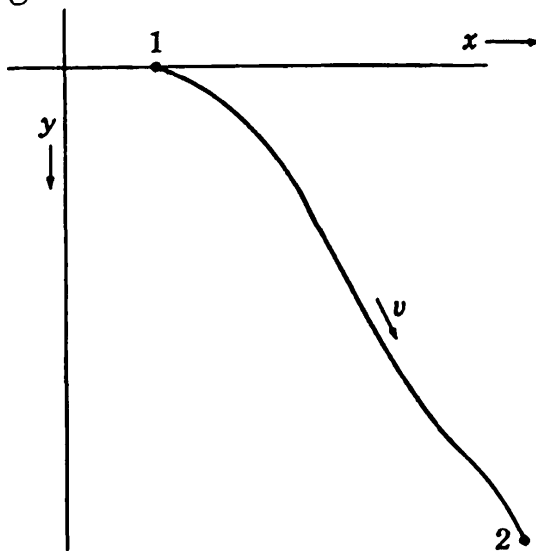


Abb. 2-4. Das Brachistochronenproblem.

3. *Das Brachistochronen-Problem.* Dieses wohlbekannte Problem lautet, diejenige Kurve zu finden, die zwei Punkte verbindet und längs der ein Teilchen in der kürzesten Zeit unter dem Einfluß der Schwerkraft fällt. Das Teilchen ist am Anfang in Ruhe und fällt vom höheren zum niedrigeren Punkt.

Ist v die Geschwindigkeit längs der Kurve, so ist die zum Durchfallen der Bogenlänge ds benötigte Zeit ds/v . Das Problem besteht darin, ein Minimum des Integrals

$$t_{12} = \int_1^2 \frac{ds}{v}$$

zu finden. Wird y vom Startpunkt aus gemessen, so kann der Energieerhaltungssatz für das Teilchen geschrieben werden:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy$$



oder

$$v = \sqrt{2gy}.$$

Damit wird der Ausdruck für t_{12} :

$$t_{12} = \int_1^2 \frac{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}{\sqrt{2gy}} dx.$$

Wir sehen, daß

$$f = \sqrt{\frac{1 + \dot{y}^2}{2gy}}.$$

Die Integration von Gl. (2-11) mit dieser Form von f macht keine Schwierigkeiten und wird als eine der Übungen dieses Kapitels gegeben. Das Brachistochronen-Problem ist berühmt in der Geschichte der Mathematik, denn die Analyse dieses Problems durch JOHANN BERNOULLI war es, die zu der formalen Begründung der Variationsrechnung führte.

2-3 Ableitung der Lagrangeschen Gleichungen aus dem Hamiltonschen Prinzip

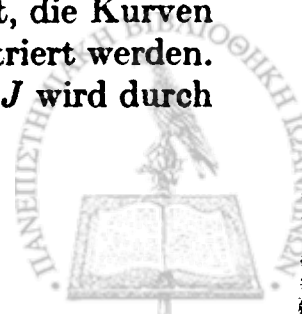
Das fundamentale Problem der Variationsrechnung ist leicht auf den Fall zu verallgemeinern, daß f eine Funktion mehrerer unabhängiger Variablen y_i und ihrer Ableitungen \dot{y}_i ist. (Natürlich werden alle diese Größen als Funktionen der Parametervariablen x angesehen.) Dann erhält man die Variation des Integrals J

$$\delta J = \delta \int_1^2 f(y_1(x), y_2(x), \dots, \dot{y}_1(x), \dot{y}_2(x), \dots, x) dx \quad (2-12)$$

wie vorher, indem man J als Funktion eines Parameters α auffaßt, der alle möglichen Kurven $y_i(x, \alpha)$ kennzeichnet. Wir führen α ein, indem wir setzen:

$$\begin{aligned} y_1(x, \alpha) &= y_1(x, 0) + \alpha \eta_1(x), \\ y_2(x, \alpha) &= y_2(x, 0) + \alpha \eta_2(x), \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2-13)$$

Dabei sind $y_1(x, 0)$, $y_2(x, 0)$ usw. die Lösungen des Extremwertproblems (die wir erhalten wollen), und η_1 , η_2 usw. sind beliebige Funktionen von x , mit der Einschränkung, daß sie an den Endpunkten verschwinden, da es sich hier um eine Variation mit festen Endpunkten handelt. Natürlich ist (2-13) nicht die einzige Möglichkeit, die Kurven zu kennzeichnen; damit soll lediglich das Verfahren illustriert werden. Die Rechnung geht weiter wie vorher. Die Variation von J wird durch



$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha = \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \alpha} d\alpha \right) dx \quad (2-14)$$

ausgedrückt. Wieder integrieren wir das Integral, das in der zweiten Summe von Gl. (2-14) steht, partiell:

$$\int_1^2 \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial^2 y_i}{\partial \alpha \partial x} dx = \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \right|_1^2 - \int_1^2 \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) dx.$$

Darin verschwindet der erste Term, weil alle Kurven durch die festen Endpunkte gehen. Setzen wir in (2-14) ein, so wird

$$\delta J = \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) \delta y_i dx. \quad (2-15)$$

Dabei ist die Variation δy_i in Analogie zu (2-10)

$$\delta y_i = \left(\frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \right)_0 d\alpha.$$

Da die Variablen y unabhängig sind, sind auch die Variationen δy_i unabhängig (z.B. werden die Funktionen $\eta_i(x)$ voneinander unabhängig sein). Deshalb gilt $\delta J = 0$ dann und nur dann, wenn die Koeffizienten der δy_i einzeln verschwinden:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2-16)$$

Das stellt eine entsprechende Verallgemeinerung von (2-11) auf mehrere Variablen dar. Die Differentialgleichungen (2-16) sind als die **EULER-LAGRANGESCHEN Differentialgleichungen** bekannt. Ihre Lösungen repräsentieren diejenigen Kurven, für die die Variation eines Integrals der in (2-12) gegebenen Form verschwindet. Weitere Verallgemeinerungen des fundamentalen Variationsproblems sind leicht möglich. So kann man f als Funktion höherer Ableitungen \ddot{y} , \dot{y} usw. setzen. Das führt auf Gleichungen, die von (2-16) verschieden sind. Man kann auch auf Fälle mit mehreren Parametern x_j erweitern. Man hat dann ein Mehrfachintegral, und f enthält als Variablen auch Ableitungen von y_i bezüglich jedes Parameters x_j . Schließlich ist es möglich, Variationen zu betrachten, für die die Endpunkte *nicht* festgehalten werden. Einige dieser Verallgemeinerungen werden wir später betrachten. Für unsere Zwecke reicht zunächst aus, was wir bereits gewonnen haben, denn das Integral im HAMILTONSchen Prinzip

$$I = \int_1^2 L(q_i, \dot{q}_i, t) dt \quad (2-2')$$



hat genau die Form, die in (2-12) mit Rücksicht auf die Transformationen

$$\begin{aligned}x &\rightarrow t \\ y_i &\rightarrow q_i \\ f(y_i, \dot{y}_i, x) &\rightarrow L(q_i, \dot{q}_i, t)\end{aligned}$$

festgelegt ist. Die EULER-LAGRANGESchen Gleichungen werden dadurch zu den LAGRANGESchen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

und wir haben unser ursprüngliches Ziel erreicht, nachzuweisen, daß die LAGRANGESchen Gleichungen aus dem HAMILTONSchen Prinzip – für konservative Systeme – folgen.

2-4 Erweiterung des Hamiltonschen Prinzips auf nichtkonservative und nichtholonome Systeme

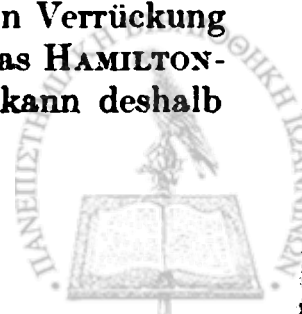
Man kann das HAMILTONSche Prinzip, zumindest formal, erweitern, so daß auch nichtkonservative Kräfte eingeschlossen sind. Man wird dann auf die in Gl. (1-50) gegebene Form der LAGRANGESchen Gleichungen geführt. Das erweiterte Prinzip lautet

$$\delta I = \delta \int_1^2 (T + W) dt = 0 \quad (2-17)$$

mit festen Endpunkten wie bisher. Jetzt ist W gegeben durch

$$W = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i. \quad (2-18)$$

Die Größe δW hat eine wichtige physikalische Bedeutung. Es ist bereits bemerkt worden, daß die Variationen δq_i und δr_i mit virtuellen Verrückungen der Koordinaten identisch sind, denn es findet keine Variation bezüglich der Zeit statt. Den variierten Weg im Konfigurationsraum kann man sich deshalb folgendermaßen vorstellen: Er entsteht durch eine Folge virtueller Verrückungen vom Weg C , den die Bewegung tatsächlich nimmt (vgl. Abb. 2-5). Jede virtuelle Verrückung ereignet sich zu einem gegebenen Zeitpunkt, und zu diesem Zeitpunkt haben die auf das System wirkenden Kräfte bestimmte Werte. Offensichtlich stellt δW die Arbeit dar, die durch die auf das System wirkenden Kräfte während der virtuellen Verrückung vom tatsächlichen zum variierten Weg geleistet wird. Das HAMILTONSche Prinzip in der durch Gl. (2-17) gegebenen Form kann deshalb



folgendermaßen beschrieben werden. Das Variationsintegral über die Summe aus kinetischer Energie und der bei der Variation auftretenden virtuellen Arbeit muß Null sein.

Die Variationen $\delta \mathbf{r}_i$ können durch die δq_j mit Hilfe der Transformationsgleichungen zwischen \mathbf{r} und q dargestellt werden. Jedes q hängt mit dem gewählten Weg über einen Parameter α zusammen:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}(q_j(\alpha, t), t).$$

Wir können das Verfahren jedoch dadurch abkürzen, daß wir von der Äquivalenz von $\delta \mathbf{r}_i$ mit einer virtuellen Verrückung Gebrauch machen; es wurde tatsächlich bereits gezeigt, daß

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_j Q_j \delta q_j.$$

Also kann Gl. (2-17) auch geschrieben werden:

$$\delta \int_1^2 T dt + \int_1^2 \sum_j Q_j \delta q_j dt = 0. \quad (2-19)$$

An diesem Punkte ist es möglich zu zeigen, daß sich (2-19) auf die gewöhnliche Form des HAMILTONSchen Prinzips reduziert, wenn die Q_j von einem generalisierten Potential herleitbar sind. Unter diesen Bedingungen wird das Integral der virtuellen Arbeit:

$$\int_1^2 \sum_j Q_j \delta q_j dt = - \int_1^2 \sum_j \delta q_j \left(\frac{\partial V}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \right) dt.$$

Kehren wir das uns nun wohlvertraute Verfahren der partiellen Integration um, so kann für das Integral auch geschrieben werden:

$$- \int_1^2 \sum_j \left(\frac{\partial V}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt = - \delta \int_1^2 V dt.$$

In solchen Fällen reduziert sich (2-19) auf

$$\delta \int_1^2 T dt - \delta \int_1^2 V dt = \delta \int_1^2 L dt = 0.$$

Das ist das in Gl. (2-2) gegebene HAMILTONSche Prinzip. Kehren wir zu dem allgemeineren Problem zurück. Die Variation des ersten

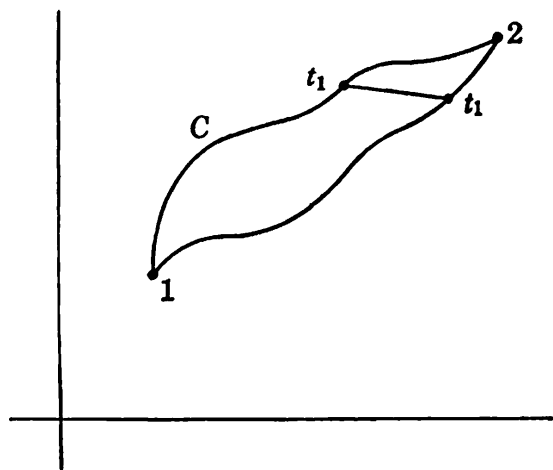


Abb. 2-5. Konstruktion der variierten Bahn im Konfigurationsraum durch virtuelle Verrückungen.



Integrals in (2-19) kann sofort niedergeschrieben werden, da T , wie L für konservative Systeme, eine Funktion von q_i und \dot{q}_i ist:

$$\delta \int_1^2 T dt = \int_1^2 \sum_j \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt.$$

Kombinieren wir beide Integrale, so lautet das HAMILTONSche Prinzip:

$$\int_1^2 \sum_j \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + Q_j \right) \delta q_j dt = 0. \quad (2-20)$$

Werden holonome Zwangsbedingungen angenommen, so verschwindet das Integral wieder dann und nur dann, wenn die einzelnen Koeffizienten verschwinden, d.h.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j. \quad (2-21)$$

Man sieht also, daß Gl. (2-17) die sinnvolle Erweiterung des HAMILTONSchen Prinzips Gl. (2-2) darstellt, die die Form der LAGRANGESchen Gleichungen liefert, die man erhält, wenn die Kräfte nicht von einem Potential herleitbar sind.

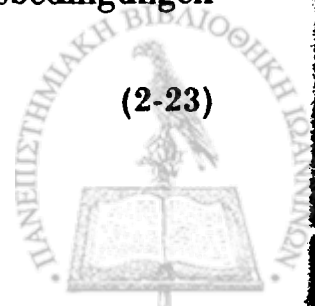
Es ist auch möglich, das HAMILTONSche Prinzip so zu erweitern, daß es bestimmte Typen nichtholonome Systeme umfaßt. In der Ableitung der LAGRANGESchen Gleichungen sowohl aus dem HAMILTONSchen als auch aus dem D'ALEMBERTSchen Prinzip tritt die Forderung nach holonomen Zwangsbedingungen nicht vor dem letzten Schritte auf, in dem die Variationen der q_i als voneinander unabhängig angesehen werden. Für nichtholonome Systeme sind die generalisierten Koordinaten nicht unabhängig voneinander, und es ist nicht möglich, sie weiter im Sinne von Zwangsbedingungen in die Form $f(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0$ zu bringen. Es gilt also nicht mehr, daß die q_i alle unabhängig sind.

Wir können nichtholonome Systeme auch dann noch behandeln, wenn die Zwangsbedingungen in die folgende Form gebracht werden können:

$$\sum_k a_{ik} dq_k + a_{it} dt = 0, \quad (2-22)$$

d.h. in eine Beziehung zwischen den *Differentialen* der q . Nun wird beim Variationsprozeß im HAMILTONSchen Prinzip die Zeit für jeden Punkt des Weges konstant gehalten. Deshalb müssen die virtuellen Verrückungen, die bei der Variation auftreten, Zwangsbedingungen der Form

$$\sum_k a_{ik} \delta q_k = 0 \quad (2-23)$$



erfüllen. Der Index l zeigt an, daß es mehr als eine solche Gleichung geben kann; es soll angenommen werden, daß insgesamt m Gleichungen vorliegen, d.h. $l = 1, 2, \dots, m$.

Wir können nun die Gl. (2-23) verwenden, um die Zahl der virtuellen Verrückungen auf die der unabhängigen Verrückungen zu reduzieren. Das Verfahren zur Eliminierung dieser übrigen virtuellen Verrückungen ist die Methode der LAGRANGESchen Multiplikatoren. Wenn die Gl. (2-23) gelten, dann ist auch

$$\lambda_l \sum_k a_{lk} \delta q_k = 0 \quad (2-24)$$

richtig, wobei die $\lambda_l, l = 1, 2, \dots, m$, unbestimmte Konstanten sind, im allgemeinen Funktionen der Zeit. Wir wollen nun diese m Gleichungen mit der Gleichung kombinieren, die für den Fall konservativer Systeme der Gl. (2-20) entspricht:

$$\int_1^2 dt \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k = 0. \quad (2-20')$$

Um unser Vorhaben auszuführen, summieren wir zuerst die Gl. (2-24) über l und integrieren die sich ergebende Gleichung von Punkt 1 bis Punkt 2:

$$\int_1^2 \sum_{k,l} \lambda_l a_{lk} \delta q_k dt = 0. \quad (2-25)$$

Das kombinieren wir mit Gl. (2-20') und erhalten das Ergebnis:

$$\int_1^2 dt \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_l \lambda_l a_{lk} \right) \delta q_k = 0. \quad (2-26)$$

Die δq_k sind natürlich noch nicht unabhängig; sie sind durch die m Beziehungen (2-23) verknüpft. D.h., während die ersten $(n - m)$ von ihnen unabhängig gewählt werden können, sind die letzten m dann durch die Gl. (2-23) festgelegt. Jedoch bleiben die Werte der λ_l zu unserer Verfügung. Nehmen wir an, daß wir die λ_l nun so wählen, daß

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_l \lambda_l a_{lk} = 0, \quad k = n - m + 1, \dots, n. \quad (2-27)$$

Das sind ihrer Natur nach Bewegungsgleichungen für die letzten m Variablen q_k . Mit den durch (2-27) bestimmten λ_l können wir (2-26) schreiben:

$$\int_1^2 dt \sum_{k=1}^{n-m} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_l \lambda_l a_{lk} \right) \delta q_k = 0. \quad (2-28)$$



Die hierin auftretenden δq_k sind unabhängig. Deshalb folgt

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_i \lambda_i a_{ik} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n - m. \quad (2-29)$$

Kombinieren wir (2-27) und (2-29), so haben wir schließlich den kompletten Satz LAGRANGEScher Gleichungen für nichtholonome Systeme:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_i \lambda_i a_{ik}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2-30)$$

Aber das ist noch nicht alles, denn wir haben $(n + m)$ Unbekannte, nämlich die n Koordinaten q_k und die m λ_i , während uns (2-30) insgesamt nur n Gleichungen liefert. Die zusätzlich benötigten Gleichungen sind natürlich genau die Zwangsbedingungen (2-22), die die q_k verknüpfen; allerdings sind sie jetzt als Differentialgleichungen aufzufassen:

$$\sum_k a_{ik} \dot{q}_k + a_{i0} = 0. \quad (2-31)$$

Die Gl. (2-30) und (2-31) bilden zusammen $(n + m)$ Gleichungen für $(n + m)$ Unbekannte.

Bei diesem Verfahren haben wir mehr erfahren, als wir ursprünglich wollten. Wir erhalten nicht nur die q_k , die wir finden wollten, sondern wir erhalten auch die m Größen λ_i . Was ist die physikalische Bedeutung dieser λ_i ? Nehmen wir an, daß die Zwangsbedingungen des Systems beseitigt werden, daß aber an ihrer Stelle äußere Kräfte Q'_k so angewendet werden, daß die Bewegung des Systems nicht verändert wird. Die Bewegungsgleichungen würden dann ebenfalls die gleichen bleiben. Selbstverständlich müssen diese zusätzlich angewendeten Kräfte gleich den Zwangskräften sein, denn sie sind Kräfte, die so auf das System wirken, daß die Zwangsbedingungen erfüllt werden. Mit Rücksicht auf diese Kräfte Q'_k lauten die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q'_k.$$

Diese müssen aber mit den Gl. (2-30) identisch sein. Demnach können wir $\sum \lambda_i a_{ik}$ als die Q_k , als die generalisierten Zwangskräfte, identifizieren. Bei diesem Problemtyp eliminieren wir die Zwangskräfte in Wirklichkeit nicht aus der Formulierung; sie werden als Teil der Antwort geliefert.

Wir stellen fest, daß Gl. (2-22) nicht der allgemeinste Typ nichtholonome Zwangsbedingungen ist, z.B. schließt er nicht Zwangsbedingungen in der Form von Ungleichungen ein. Andererseits schließt er holonome Zwangsbedingungen ein. Eine holonome Zwangsbedingung

$$f(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t) = 0$$



ist äquivalent einer Differentialgleichung

$$\sum_k \frac{\partial f}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0. \quad (2-32)$$

Diese ist der Form nach identisch mit (2-22), mit den Koeffizienten

$$a_{ik} = \frac{\partial f}{\partial q_k}, \quad a_{it} = \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (2-33)$$

Demnach kann die Methode der LAGRANGESchen Multiplikatoren auch für holonome Zwangsbedingungen verwendet werden, 1. wenn es unbequem ist, alle q auf unabhängige Koordinaten zu reduzieren, oder 2. wenn man die Zwangskräfte zu erhalten wünscht.

Als ein Beispiel der Methode wollen wir die folgende etwas triviale Illustration betrachten: ein Faß, das ohne Schlupf eine schiefe Ebene hinabrollt. In diesem Beispiel ist der Zwang zu „rollen“ tatsächlich holonom, aber diese Tatsache wird für die Diskussion unwesentlich sein.

Die zwei generalisierten Koordinaten sind x, θ (vgl. Abb. 2-6), und die Zwangsbedingung lautet

$$r d\theta = dx.$$

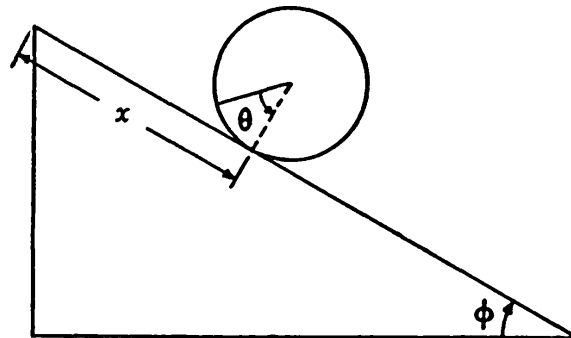


Abb. 2-6. Ein Reifen, der eine schiefe Ebene hinabrollt.

Die kinetische Energie kann dargestellt werden als Summe der kinetischen Energie der Bewegung des Massenzentrums und der kinetischen Energie der Bewegung um das Massenzentrum:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M r^2 \dot{\theta}^2.$$

Die potentielle Energie ist

$$V = Mg(l - x) \sin \phi.$$

Darin ist l die Länge der schiefen Ebene. Die LAGRANGE-Funktion lautet:

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{M \dot{x}^2}{2} + \frac{M r^2 \dot{\theta}^2}{2} - Mg(l - x) \sin \phi. \end{aligned}$$

Da nur eine Zwangsbedingung vorliegt, wird nur ein LAGRANGEScher Multiplikator λ benötigt. Die Koeffizienten, die in der Zwangsbedingung auftreten, lauten:



$$\begin{aligned} a_\theta &= r, \\ a_x &= -1. \end{aligned}$$

Die zwei LAGRANGE-Gleichungen sind deshalb

$$M\ddot{x} - Mg \sin \phi + \lambda = 0, \quad (2-34)$$

$$Mr^2\ddot{\theta} - \lambda r = 0, \quad (2-35)$$

die zusammen mit der Zwangsbedingung

$$r\dot{\theta} = \dot{x} \quad (2-36)$$

drei Gleichungen für drei Unbekannte θ , x , λ bilden.

Differenzieren wir (2-36) nach der Zeit, so haben wir

$$r\ddot{\theta} = \ddot{x}.$$

Damit folgt aus (2-35)

$$M\ddot{x} = \lambda$$

und (2-34) wird

$$\ddot{x} = \frac{g \sin \phi}{2}$$

mit

$$\lambda = \frac{Mg \sin \phi}{2}$$

und

$$\ddot{\theta} = \frac{g \sin \phi}{2r}.$$

Somit rollt das Faß die schiefe Ebene mit nur der halben Beschleunigung hinab, die es hätte, wenn es eine reibungslose Ebene hinabglitte. Die Zwangskraft der Reibung ist $\lambda = Mg \sin \phi / 2$.

Aus $\ddot{x} = v \frac{dv}{ds}$ erhält man $v = \sqrt{gl \sin \phi}$ für das untere Ende der schiefen Ebene. Dieses Ergebnis kann man natürlich auch auf elementarem Wege erhalten.

2-5 Vorteile der Formulierung mit Variationsprinzipien

Obgleich es möglich ist, die ursprüngliche Formulierung des HAMILTONSchen Prinzips (2-2) auf nichtkonservative Systeme und nicht-holonome Zwangsbedingungen zu erweitern, ist diese Formulierung der Mechanik jedoch am nützlichsten, wenn eine LAGRANGE-Funktion unabhängiger Koordinaten für das System aufgestellt werden kann. Der Formalismus des Variationsprinzips ist mit Recht als „elegant“



bezeichnet worden, denn in dem knappen HAMILTONSchen Prinzip ist die gesamte Mechanik konservativer holonomer Systeme enthalten. Das Prinzip hat den weiteren Vorteil, daß es nur physikalische Größen enthält, die ohne Bezug auf den speziellen Satz generalisierter Koordinaten definiert werden können, nämlich kinetische und potentielle Energien. Die Formulierung ist deshalb automatisch invariant hinsichtlich der Wahl der Koordinaten des Systems.

Ein anderer Vorteil ist der, daß die LAGRANGESche Formulierung leicht auf die Beschreibung von Systemen erweitert werden kann, die normalerweise nicht in der Dynamik untersucht werden – wie etwa das elastische Feld, das elektromagnetische Feld, Feldeigenschaften von Elementarteilchen usw. Einige dieser Verallgemeinerungen werden später betrachtet werden, aber als Beispiel seiner Anwendung außerhalb des üblichen Bereiches der Mechanik wollen wir den folgenden Fall untersuchen.

Nehmen wir an, wir haben ein System, für das eine LAGRANGE-Funktion

$$L = \frac{1}{2} \sum_j L_j \dot{I}_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,k \\ j \neq k}} M_{jk} \dot{I}_j \dot{I}_k - \sum_j \frac{I_j^2}{2C_j} + \sum_j \dot{E}_j(t) I_j \quad (2-37)$$

und eine Dissipationsfunktion

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_j R_j \dot{I}_j^2 \quad (2-38)$$

gilt. Dabei sind die das System beschreibenden Koordinaten mit I_j anstatt mit q_j bezeichnet worden. Die LAGRANGE-Gleichungen lauten

$$L_j \frac{d^2 I_j}{dt^2} + \sum_{\substack{k \\ j \neq k}} M_{jk} \frac{d^2 I_k}{dt^2} + R_j \frac{dI_j}{dt} + \frac{I_j}{C_j} = \dot{E}_j(t). \quad (2-39)$$

Diese Bewegungsgleichungen können auf mindestens zwei Arten interpretiert werden. Man kann sagen, die I_j sind Ströme, die L_j sind Selbstinduktivitäten, die R_j Widerstände, die C_j Kapazitäten und die E_j äußere EMK. Dann sind die Gl. (2-39) ein Satz von Gleichungen, die ein System induktiv gekoppelter Stromkreise beschreiben, z.B. für $j = 1, 2, 3$ hätten wir drei Stromkreise (vgl. Abb. 2-7). Andererseits ist zu sehen, daß die ersten zwei Terme in L zusammen eine willkürliche homogene quadratische Funktion der generalisierten Geschwindigkeiten bilden. Immer, wenn die (holonomen) Zwangsbedingungen des Systems unabhängig von der Zeit sind, hat die kinetische Energie T eine solche Form. Die Koeffizienten L_j, M_{jk} besitzen dann den Charakter von Massen – sie sind *Trägheitsgrößen*. Der nächste Term in der LAGRANGE-Funktion entspricht genau der



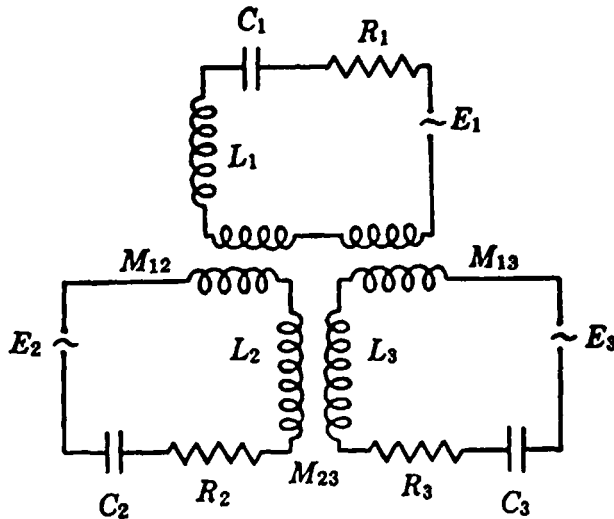


Abb. 2-7. Ein System gekoppelter Stromkreise, auf das sich die LAGRANGE'sche Formulierung anwenden läßt.

potentiellen Energie eines Satzes von Federn – harmonischen Oszillatoren – wobei die Kräfte dem HOOKESchen Gesetz gehorchen:

$$F = -kx,$$

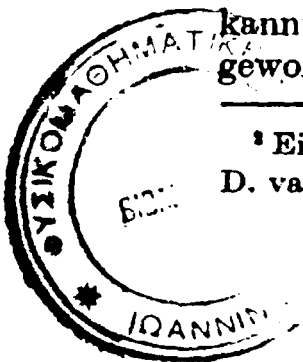
mit dem daraus folgenden Potential

$$V = \frac{kx^2}{2},$$

so daß die $1/C$, Federkonstanten darstellen. Der letzte Term entspricht dem Potential, das von den treibenden Kräften $\dot{E}_j = Q_j$ herrührt, die unabhängig von den Koordinaten – zum Beispiel Gravitationskräfte – sind; allerdings können die E_j zeitabhängige Kräfte sein. Schließlich entspricht die Dissipationsfunktion der Anwesenheit von dissipativen oder Zähigkeitskräften, die proportional den generalisierten Geschwindigkeiten sind. Wir sind somit auf eine andere Interpretation der Gl. (2-37) und (2-38) oder (2-39) geführt worden, die uns das Bild eines komplizierten Systems von Massen an Federn nahebringt, die sich in einer viskosen Flüssigkeit bewegen und von äußeren Kräften angetrieben werden.

Diese Beschreibung zweier verschiedener physikalischer Systeme durch LAGRANGE-Funktionen der gleichen Form bedeutet, daß alle Ergebnisse und Methoden, die für die Untersuchung eines der Systeme gewonnen wurden, unmittelbar übernommen und auf das andere System angewendet werden können. Im besonderen ist das Studium des Verhaltens elektrischer Ströme intensiv betrieben worden, und dafür sind spezielle Verfahren entwickelt worden; diese können direkt auf entsprechende mechanische Systeme angewendet werden. Viel Arbeit ist bei der Formulierung äquivalenter elektrischer Probleme für mechanische oder akustische Systeme, und umgekehrt, geleistet worden. Terme, die normalerweise für elektrische Ströme (Reaktanz, Suszeptanz usw.) reserviert waren, sind allgemein anerkannte Ausdrücke in der Schwingungstheorie mechanischer Systeme geworden.²

² Eine ausführliche Darstellung gibt H. F. OLSON, *Dynamical Analogies*, D. van Nostrand Co., Inc., New York 1946.



Zudem gibt es einen Typ der Verallgemeinerung der Mechanik, der von einer tiefgehenden Äquivalenz herrührt. Wir haben gesehen, daß die LAGRANGE-Funktion zusammen mit dem HAMILTONSchen Prinzip die mechanischen Bewegungsgleichungen enthält. Diese Möglichkeit ist nicht nur der Mechanik vorbehalten; in beinahe jedem Gebiet der Physik können Variationsprinzipien verwendet werden, um „Bewegungsgleichungen“ auszudrücken, ob es nun die NEWTONSchen Gleichungen, die MAXWELLSchen Gleichungen oder die SCHRÖDINGER-Gleichung sind. Wenn ein Variationsprinzip als Grundlage der Formulierung verwendet wird, werden folglich alle diese Gebiete – mindestens bis zu gewissem Grade – eine *strukturelle Analogie* aufweisen. Wenn die experimentellen Ergebnisse zeigen, daß eine Änderung des physikalischen Inhalts der Theorie eines Gebietes notwendig ist, hat dieser Grad an Analogie oft angezeigt, wie ähnliche Änderungen in anderen Gebieten ausgeführt werden können. So zeigten die zu Anfang dieses Jahrhunderts ausgeführten Experimente die Notwendigkeit zur Quantisierung sowohl der elektromagnetischen Strahlung als auch der Elementarteilchen. Die Methoden der Quantisierung wurden zuerst für die Teilchenmechanik entwickelt, indem man im wesentlichen vom LAGRANGESchen Formalismus der klassischen Mechanik ausging. Beschreibt man das elektromagnetische Feld durch eine LAGRANGE-Funktion und ein entsprechendes HAMILTONSches Variationsprinzip, so ist es möglich, die Methoden der Teilchenquantisierung auf die Konstruktion einer Quantenelektrodynamik zu übertragen (s. Abschn. 11-5).

2-6 Erhaltungssätze und Symmetrieeigenschaften

Bisher haben wir uns in erster Linie auf die Aufstellung der Bewegungsgleichungen konzentriert. Es ist wenig darüber gesagt worden, wie sie für ein spezielles Problem zu lösen sind, nachdem man sie bereits aufgestellt hat. Grundsätzlich ist das ein mathematisches Problem. Ein System von n Freiheitsgraden hat n Differentialgleichungen, die von zweiter Ordnung in der Zeit sind. Die Lösung jeder Gleichung erfordert zwei Integrationen. Man erhält insgesamt $2n$ Integrationskonstanten. In einem bestimmten Problem werden diese Konstanten durch die Anfangsbedingungen bestimmt, d.h. durch die Anfangswerte der n q_j und der n \dot{q}_j . Mitunter werden die Integrationen der Bewegungsgleichungen auf bekannte Funktionen führen, aber nicht immer. Tatsächlich ist die Mehrzahl der Probleme nicht vollständig integrierbar. Wenn man keine vollständigen Lösungen erhalten kann, so ist es jedoch oftmals möglich, viel über die physikalische Natur der



Systembewegung zu erfahren. Tatsächlich kann eine solche Information von größerem Interesse für den Physiker sein als die vollständige Auflösung nach den generalisierten Koordinaten als Funktionen der Zeit. Es ist deshalb wichtig zu prüfen, wieviel über die Bewegung eines gegebenen Systems festgestellt werden kann, ohne eine vollständige Integration des Problems zu verlangen.³

Bei vielen Problemen kann man eine Anzahl der ersten Integrale der Bewegungsgleichungen sofort erhalten; wir meinen damit Beziehungen des Typs

$$f(q_1, q_2, \dots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, t) = \text{constant}, \quad (2-40)$$

die Differentialgleichungen erster Ordnung sind. Diese ersten Integrale sind von Interesse, weil sie einiges über die physikalischen Eigenschaften des Systems aussagen. In der Tat enthalten sie die im I. Kapitel abgeleiteten Erhaltungssätze.

Betrachten wir als Beispiel ein System von Massenpunkten unter dem Einfluß von Kräften, die von nur ortsabhängigen Potentialen herleitbar sind. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} &\equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \sum \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \\ &= m_i \dot{x}_i = p_{ix}. \end{aligned}$$

Das ist die x -Komponente des Impulses des i -ten Teilchens. Dieses Ergebnis legt offenbar eine Erweiterung des Konzepts des Impulses nahe. Der generalisierte Impuls, der der Koordinate q_j zugeordnet ist, soll definiert werden durch

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}. \quad (2-41)$$

Die Ausdrücke *kanonischer Impuls* oder *konjugierter Impuls* werden oft ebenfalls für p_j gebraucht. Wir bemerken, daß dann, wenn q_j keine cartesische Koordinate ist, p_j nicht notwendig die Dimension eines Impulses hat. Liegt ein geschwindigkeitsabhängiges Potential vor, dann wird der zu einer cartesischen Koordinate q_j gehörige generalisierte Impuls nicht mit dem üblichen mechanischen Impuls identisch sein. So lautet für eine Gruppe von Teilchen im elektromagnetischen Feld die LAGRANGE-Funktion (vgl. 1-61)

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2 - \sum_i q_i \phi(x_i) + \sum_i \frac{q_i}{c} \mathbf{A}(x_i) \cdot \mathbf{v}_i.$$

³ In diesem und den nachfolgenden Abschnitten wird – sofern nichts anderes vereinbart wird – angenommen, daß das System so beschaffen ist, daß seine Bewegung vollständig durch ein HAMILTONSches Prinzip der Form (2-2) beschrieben wird.



(q_i bezeichnet hier Ladungen.) Der zu x_i konjugierte generalisierte Impuls ist

$$p_{ix} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i + \frac{q_i A_x}{c}, \quad (2-42)$$

d.h., er ist gleich dem mechanischen Impuls plus einem zusätzlichen Term.

Wenn die LAGRANGE-Funktion eines Systems eine gegebene Koordinate q_j nicht enthält (obgleich sie die entsprechende Geschwindigkeit \dot{q}_j enthalten kann), dann nennt man die Koordinate *zyklisch* oder *ignorabel*. Diese Definition ist nicht universell, sie ist aber gebräuchlich und soll hier benutzt werden.⁴ Die LAGRANGESCHE Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

reduziert sich für eine zyklische Koordinate auf

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

oder

$$\frac{dp_j}{dt} = 0.$$

Das bedeutet:

$$p_j = \text{constant.} \quad (2-43)$$

Demnach können wir den allgemeinen Erhaltungssatz aufstellen: *Der zu einer zyklischen Koordinate konjugierte generalisierte Impuls bleibt erhalten.*

Gl. (2-43) bildet ein erstes Integral der Form (2-40) für die Bewegungsgleichungen. Sie kann formal dazu benutzt werden, die zyklische Koordinate aus dem Problem zu eliminieren, das dann vollständig in Ausdrücken der übrigen generalisierten Koordinaten gelöst werden kann. Kurz gesagt, besteht diese von ROUTH begründete Methode

⁴ Beide Ausdrücke werden gewöhnlich gleichermaßen mit der oben angegebenen Bedeutung verwendet. Einige Autoren unterscheiden jedoch zwischen ihnen, indem sie definieren, daß eine zyklische Koordinate nicht in der kinetischen Energie T und eine ignorable Koordinate nicht in der LAGRANGE-Funktion erscheint (vgl. WEBSTER, *The Dynamics of Particles*, und BYERLY, *Generalized Coordinates*). AMES und MURNAGHAN (*Theoretical Mechanics*) benutzen beide Terme im selben Sinne, doch beschränken sie sie anscheinend auf die Bedeutung einer Koordinate, die nicht in T auftritt.



darin, die LAGRANGE-Funktion so zu modifizieren, daß sie nicht mehr eine Funktion der generalisierten Geschwindigkeit ist, die der zyklischen Koordinate entspricht, sondern daß sie nur ihren konjugierten Impuls enthält. Der Vorteil liegt darin, daß p_j dann als eine Integrationskonstante angesehen werden kann, und daß die übrigen Integrationen nur die nichtzyklischen Koordinaten enthalten. Wir wollen eine ausführliche Diskussion der ROTHSchen Methode zurückstellen, bis die HAMILTONSche Formulierung (die ihr sehr ähnlich ist) behandelt wurde.

Man beachte, daß die Bedingungen für die Erhaltung der generalisierten Impulse allgemeiner sind als die beiden Impulserhaltungssätze, die früher hergeleitet wurden. Zum Beispiel liefern sie einen Erhaltungssatz für einen Fall, in dem das Gesetz von Aktion und Reaktion verletzt ist, wenn nämlich elektromagnetische Kräfte vorhanden sind. Nehmen wir an, wir haben ein einzelnes Teilchen in einem Feld, in dem weder ϕ noch \mathbf{A} von x abhängt. Dann erscheint x nicht in L und ist deshalb zyklisch. Der entsprechende kanonische Impuls p_x muß deshalb erhalten bleiben. Nach (1-61) hat dieser Impuls die Form

$$p_x = m\dot{x} + \frac{qA_x}{c} = \text{constant.} \quad (2-44)$$

In diesem Falle ist es nicht der mechanische Impuls, der erhalten bleibt, sondern vielmehr seine Summe mit $\frac{qA_x}{c}$.⁵ Nichtsdestoweniger sollten die Erhaltungssätze vom I. Kapitel in der allgemeinen Regel für zyklische Koordinaten gültig bleiben; mit geeigneten Einschränkungen sollte sich (2-43) auf die Sätze von Abschnitt 1-2 reduzieren.

Betrachten wir zunächst eine generalisierte Koordinate q_j , deren Änderung dq_j eine Translation des gesamten Systems in einer gegebenen Richtung darstellt. Ein Beispiel dafür wäre eine der cartesischen Koordinaten des Massenzentrums des Systems. Dann kann offensichtlich q_j nicht in T auftreten, denn Geschwindigkeiten werden durch eine Verschiebung des Koordinatenursprungs nicht beeinflusst, und $\frac{\partial T}{\partial q_j}$ ist Null. Weiterhin wollen wir konservative Systeme annehmen, für die V keine Funktion der Geschwindigkeiten ist. Damit werden solche Anomalien wie elektromagnetische Kräfte ausgeschlossen. Die LAGRANGE-

⁵ Es kann nach der klassischen Elektrodynamik gezeigt werden, daß unter diesen Bedingungen, d.h., wenn weder \mathbf{A} noch ϕ von x abhängen, qA_x/c genau die x -Komponente des elektromagnetischen Impulses des Feldes ist, das zu der Ladung q gehört.



sche Bewegungsgleichung für eine derart definierte Koordinate reduziert sich dann auf

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \equiv \dot{p}_j = - \frac{\partial V}{\partial q_j} \equiv Q_j. \quad (2-45)$$

Wir wollen nun zeigen, daß (2-45) die Bewegungsgleichung für den gesamten Impuls ist, d.h., daß Q_j die Komponente der gesamten Kraft längs der Translationsrichtung von q_j darstellt, und daß p_j die Komponente des gesamten Impulses längs dieser Richtung ist. Allgemein ist die generalisierte Kraft Q_j gegeben durch

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$$

Da dq_j einer Translation des Systems längs einer Achse entspricht, stehen die Vektoren $\mathbf{r}_i(q_j)$ und $\mathbf{r}_i(q_j + dq_j)$ in einer Beziehung, die in Abb. (2-8) gezeigt ist. Entsprechend der Definition einer Ableitung haben wir

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \lim_{dq_j \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}_i(q_j + dq_j) - \mathbf{r}_i(q_j)}{dq_j} = \frac{dq_j \mathbf{n}}{dq_j} = \mathbf{n}. \quad (2-46)$$

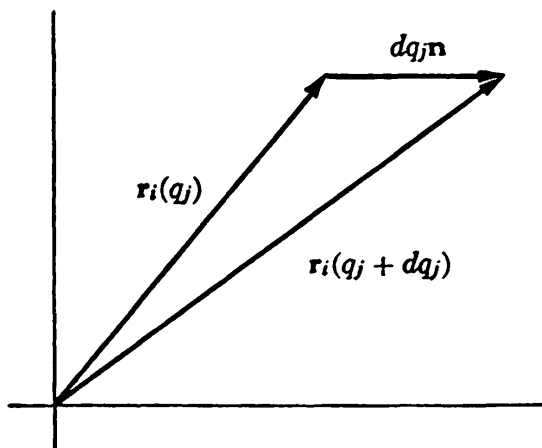


Abb. 2-8. Änderung eines Ortsvektors bei einer Translation des Systems.

Dabei ist \mathbf{n} der Einheitsvektor längs der Translationsrichtung, also ist

$$Q_j = \sum \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{F},$$

wie wir schon feststellten, die Komponente der Gesamtkraft in Richtung von \mathbf{n} . Um den anderen Teil unserer Behauptung zu beweisen, bemerken wir, daß dann, wenn die kinetische Energie die Form

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2$$

hat, der konjugierte Impuls folgendermaßen lautet:

$$\begin{aligned} p_j &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \\ &= \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \end{aligned}$$

Dabei benutzen wir Gl. (1-48). Somit folgt aus Gl. (2-46)

$$p_j = \mathbf{n} \cdot \sum_i m_i \mathbf{v}_i.$$



Das ist wiederum, wie vorausgesagt, die Komponente des gesamten Systemimpulses längs \mathbf{n} .

Nehmen wir nun an, daß die Translationskoordinate q_j , die wir diskutierten, zyklisch ist. Dann kann q_j nicht in V erscheinen, und es ist deshalb

$$-\frac{\partial V}{\partial q_j} \equiv Q_j = 0.$$

Das ist aber gerade der wohlbekannte Impulserhaltungssatz: Verschwindet eine gegebene Komponente der gesamten angewendeten Kraft, so bleibt die entsprechende Impulskomponente erhalten.

Auf ähnliche Weise kann gezeigt werden, daß dann, wenn eine zyklische Koordinate q_j die Eigenschaft hat, daß dq_j einer Drehung des Systems um eine Achse entspricht, der Erhaltung ihres konjugierten Impulses die Erhaltung eines Drehimpulses entspricht. Wegen des gleichen Argumentes, das wir oben benutzten, kann T nicht q_j enthalten, denn eine Drehung des Koordinatensystems kann den Betrag der Geschwindigkeiten nicht beeinflussen. Deshalb muß $\frac{\partial T}{\partial q_j}$ Null sein, und da V unabhängig von \dot{q}_j ist, erhalten wir wieder Gl. (2-45). Nun möchten wir aber zeigen, daß mit q_j als Rotationskoordinate die generalisierte Kraft die Komponente des gesamten angewendeten Drehmomentes um die Rotationsachse ist, und daß p_j die Komponente des gesamten Drehimpulses längs der gleichen Achse ist.

Die generalisierte Kraft Q_j ist wieder gegeben durch

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j},$$

nur hat die Ableitung jetzt eine andere Bedeutung. Hier muß die Änderung von q_j einer infinitesimalen Drehung des Vektors \mathbf{r}_i entsprechen, wobei der Betrag des Vektors konstant gehalten wird. Aus Abb. 2-9 kann man die Größe der Ableitung leicht finden:

$$|d\mathbf{r}_i| = r_i \sin \theta dq_j$$

und

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right| = r_i \sin \theta;$$

ihre Richtung ist senkrecht sowohl zu \mathbf{r}_i als auch zu \mathbf{n} . Offensichtlich kann die Ableitung in Vektorform folgendermaßen geschrieben werden:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \mathbf{n} \times \mathbf{r}_i. \quad (2-47)$$

Mit diesem Ergebnis wird die generalisierte Kraft



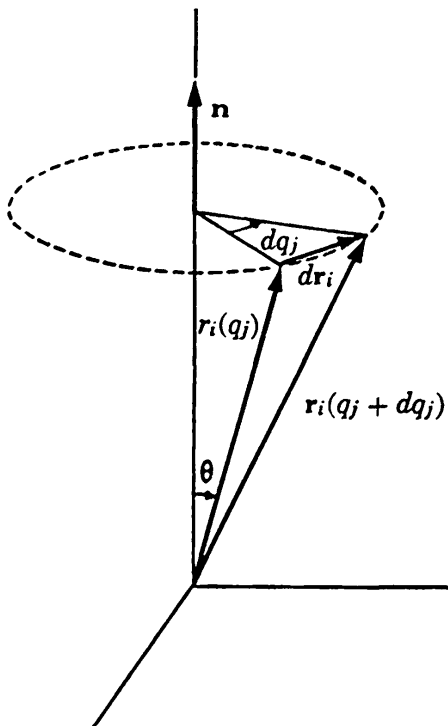


Abb. 2-9. Änderung eines Ortsvektors bei einer Drehung des Systems.

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{r}_i \\ = \sum_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i.$$

Sie reduziert sich auf

$$Q_j = \mathbf{n} \cdot \sum_i \mathbf{N}_i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{N}.$$

Damit ist der erste Teil bewiesen. Ein ähnliches Vorgehen mit p_j erlaubt den Beweis des zweiten Teiles der Behauptung:

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \\ = \mathbf{n} \cdot \sum_i \mathbf{L}_i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{L}.$$

Fassen wir die Ergebnisse zusammen, so sehen wir: Ist die Rotationskoordinate q_j zyklisch, dann verschwindet die Komponente Q_j des angewendeten Drehmomentes längs \mathbf{n} , und die Komponente von \mathbf{L} in Richtung von \mathbf{n} ist konstant. Hier haben wir den Drehimpulserhaltungssatz wiedergefunden, und zwar unabhängig vom allgemeinen Erhaltungssatz bezüglich zyklischer Koordinaten.

Die Bedeutung zyklischer Translations- oder Rotationskoordinaten im Zusammenhang mit den Systemeigenschaften verdient an dieser Stelle einige Beachtung. Wenn eine Koordinate, die einer Auslenkung entspricht, zyklisch ist, so bedeutet das, daß eine Translation des Systems, gleichsam als wäre es starr, keinen Einfluß auf das Problem hat. Mit anderen Worten, wenn das System *invariant* bezüglich einer Translation in einer gegebenen Richtung ist, so bleibt der entsprechende Impuls erhalten. Ganz ähnlich bedeutet die Tatsache, daß eine Rotationskoordinate zyklisch ist (und deshalb der konjugierte Drehimpuls erhalten bleibt), daß das System *invariant* gegenüber einer Rotation um die gegebene Achse ist. Somit sind die Impulserhaltungssätze eng mit den *Symmetrieeigenschaften* des Systems verbunden. Wenn das System kugelsymmetrisch ist, können wir ohne weiteres sagen, daß alle Komponenten des Drehimpulses erhalten bleiben. Oder wenn das System nur symmetrisch um die z-Achse ist, dann bleibt nur L_z erhalten. Entsprechendes gilt für die anderen Achsen. Wir werden diese Zusammenhänge zwischen den Konstanten der Bewegung und den Symmetrieeigenschaften verschiedentlich antreffen.



Ein anderer Erhaltungssatz, der aus dem LAGRANGESchen Formalismus folgen sollte, ist die Erhaltung der Gesamtenergie konservativer Systeme. Betrachten wir ein System, das konservativ in dem Sinne ist, daß $\mathbf{F} = -\nabla V$ gilt, so ist V unabhängig von den Geschwindigkeiten. Mit der zusätzlichen Einschränkung, daß die Zwangsbedingungen unabhängig von der Zeit sind, folgt, daß L keine explizite Funktion der Zeit sein kann. Dann ist die totale Ableitung von L nach der Zeit:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} \quad (2-48)$$

Wegen der LAGRANGESchen Gleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

und (2-48) kann geschrieben werden:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt}$$

oder

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)$$

Daraus folgt

$$\frac{d}{dt} \left(L - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0.$$

Das bedeutet, daß der Ausdruck in Klammern eine Konstante sein muß, die wir $-H$ nennen wollen:

$$L - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = -H. \quad (2-49)$$

Gleichung (2-49) kann auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$H = \sum_j \dot{q}_j p_j - L. \quad (2-50)$$

Die rechte Seite von (2-50) ist demnach ein Integral der Bewegung; wir werden nun zeigen, daß es gerade die Gesamtenergie des Systems ist. Für konservative Systeme, wenn also V unabhängig von den Geschwindigkeiten ist, haben wir

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}.$$



Der erste Term auf der rechten Seite von (2-50) ist also äquivalent

$$\sum_j \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$$

In Abschnitt 1-6 wurde gezeigt, daß dann, wenn die Zwangsbedingungen zeitunabhängig sind, oder genauer, wenn die Transformationsgleichungen (1-36) die Zeit nicht explizit enthalten, T eine homogene quadratische Funktion der \dot{q}_i ist. Wir erinnern uns daran, daß der EULERSche Satz für den Fall, daß f eine homogene Funktion n -ter Ordnung eines Satzes von Variablen q_i ist, feststellt:

$$\sum_i q_i \frac{\partial f}{\partial q_i} = n f.$$

Hier ist $n = 2$, so daß

$$\sum_j \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T. \quad (2-51)$$

Wir finden somit

$$H = 2T - (T - V) = T + V \quad (2-52)$$

Das ist die Gesamtenergie des Systems.

Diese Form des Energieerhaltungssatzes erscheint zwingender als die früher im I. Kapitel aufgestellte. Neben der Forderung, daß die Kräfte konservativ sind, scheint sie die Bedingung hinzuzufügen, daß die Zwangskräfte zeitunabhängig sind. In Wirklichkeit behandeln die beiden Sätze jedoch nicht genau dieselbe Energie. In der früheren Darstellung umfaßte die Energieänderung des Systems die durch alle Kräfte einschließlich der Zwangskräfte geleistete Arbeit. Hier in der LAGRANGESchen Formulierung enthält V nur die Arbeit der äußeren oder angewendeten Kräfte ausschließlich der Zwangskräfte. Bei zeitunabhängigen Zwangsbedin-

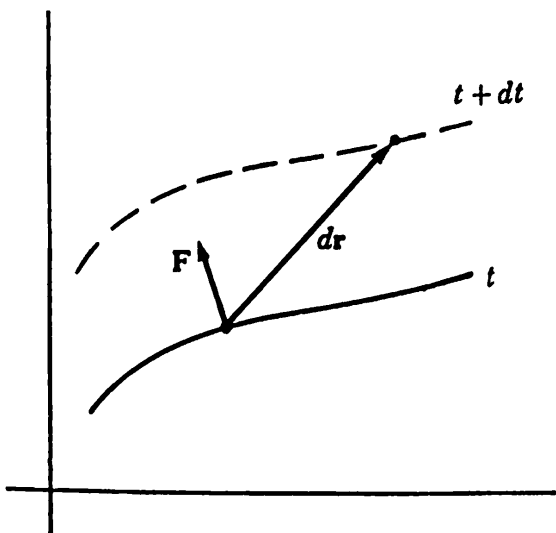


Abb. 2-10.



gungen gibt es keinen wesentlichen Unterschied. Wir haben bereits verlangt, daß die Zwangskräfte keine Arbeit bei einer virtuellen Verrückung leisten. Wenn sich also die Zwangsbedingungen im Laufe der Zeit nicht ändern, so wird die Unterscheidung zwischen einer wirklichen und einer virtuellen Verrückung gegenstandslos. Das Potential, das den Zwangskräften zugeordnet ist, wird dann automatisch konstant. Wenn jedoch eine veränderliche Zwangsbedingung vorliegt, brauchen die Zwangskräfte nicht senkrecht zur wirklichen Verrückung zu sein, und die durch solche Kräfte geleistete Arbeit wird dann nicht Null sein. Wenn also etwa ein Teilchen gezwungen wird, sich auf einer Kurve zu bewegen, die sich selbst bewegt, so wird die Zwangskraft zu einem gegebenen Zeitpunkt normal zur augenblicklichen Kurve stehen, aber die Verrückung des Teilchens während der Zeit dt ist nicht tangential zur Kurve, vgl. Abb. 2-10. Das Potential der Zwangskräfte wird sich so im Laufe der Zeit verändern, und es ist dann wichtig, ob die in Frage stehende „Gesamtenergie“ den Anteil der Zwangskräfte mit enthält oder nicht.⁶

LITERATURHINWEISE

- H. MARGENAU und G. M. MURPHY, *The Mathematics of Physics and Chemistry*. Die Literatur über Variationsrechnung ist natürlich sehr umfangreich, aber die meisten referierten Werke enthalten mehr an Mathematik als für die einfache Diskussion des HAMILTONSchen Prinzips notwendig ist. Die kurze Abhandlung des Gegenstandes in Kapitel 6 dieses Werkes ist mehr als angemessen für unsere Zwecke. Eine etwas längere, aber dennoch recht lesbare Darstellung findet man bei G. A. BLISS, *Calculus of Variations*. Die Extremwertprobleme, die zur Erfindung der Variationsrechnung führten, werden hier im Detail diskutiert.
- E. T. WHITTAKER, *Analytical Mechanics*. Diese Abhandlung ist vielleicht die beste Einzelreferenz für das meiste dieses Kapitels. Die Erhaltungssätze werden in Kapitel III diskutiert, während das HAMILTONSche Prinzip und seine Ableitung von den LAGRANGESchen Gleichungen in Kapitel IX zu finden ist.

⁶ Es muß hier darauf aufmerksam gemacht werden, daß die Gleichungen der Transformation auf generalisierte Koordinaten auch dann die Zeit explizit enthalten können, wenn keine zeitlich veränderlichen Zwangsbedingungen (z.B. rotierende Koordinatensysteme) vorliegen, und es kann auch vorkommen, daß die LAGRANGE-Funktion die Zeit trotzdem nicht explizit enthält. Die Größe H bleibt dann erhalten, aber so wie T keine homogene Funktion der Geschwindigkeiten ist, so ist auch H nicht mehr gleich $T + V$. Selbstverständlich bleibt die Energie des Systems auch erhalten, denn die Verwendung rotierender Koordinatenachsen zum Beispiel ist lediglich aus mathematischen Gründen zweckmäßig, hat aber keinen Einfluß auf die physikalische Situation. Siehe Kapitel VIII über kanonische Transformationen.



- A. SOMMERFELD, *Vorlesungen über Theoretische Physik*, Bd. I, *Mechanik*. Es ist zu bedauern, daß dieses vorzügliche Buch, geschrieben in dem für SOMMERFELD eigenen treffenden Stil, hier nicht allgemein verwendbar ist. Unglücklicherweise werden nicht alle hier interessierenden Themen diskutiert, und man könnte sich vielleicht einige Änderungen hinsichtlich der Betonung des auszuwählenden Stoffes wünschen, was jedoch die Behandlung der vorkommenden Gegenstände angeht, so kann es kaum Meinungsverschiedenheiten geben. Von besonderem Interesse für dieses Kapitel sind die Abschnitte 33-36.
- W. E. BYERLY, *Generalized Coordinates*. Dieses kleine Buch ist besonders wertvoll wegen der vielen ausführlichen Beispiele des LAGRANGESchen Verfahrens zur Aufstellung und Lösung mechanischer Probleme. Das Fehlen eines Sachregisters ist ein beklagenswerter Mangel, der den Gebrauch des Buches etwas schwierig macht.
- W. F. OSGOOD, *Mechanics*. Kapitel X erweist sich als interessant für die Ausdehnung der LAGRANGESchen Gleichungen auf nichtholonome Systeme mit einer ziemlich umfangreichen Behandlung der LAGRANGESchen unbestimmten Multiplikatoren.
- H. F. OLSON, *Dynamical Analogies*. In diesem Buch werden die Probleme elektrischer Stromkreise, die gegebenen mechanischen und akustischen Systemen äquivalent sind, sehr ausführlich diskutiert. Es wird die Anwendung der Theorie der Stromkreise auf die Lösung rein mechanischer oder akustischer Probleme erläutert.
- J. J. THOMSON, *Applications of Dynamics to Physics and Chemistry*. Das ist ein dünner Band, der THOMSONS erste Untersuchungen enthält. Darin wird versucht, eine große Mannigfaltigkeit chemischer, thermodynamischer und elektrischer Probleme in den Rahmen der LAGRANGESchen Formulierung einzubeziehen. THOMSON wendet die LAGRANGESche Methode jedoch nicht auf Felder an, was heute die fruchtbarste Erweiterung des HAMILTONSchen Prinzips ist. Der moderne Leser dieses Buches mag die Darstellung etwas verworren finden.

ÜBUNGEN

1. Beweise, daß der kürzeste Abstand zwischen zwei Punkten im Raum eine Gerade ist.
2. Zeige, daß die geodätischen Linien einer sphärischen Fläche Großkreise sind, d.h. Kreise, deren Zentren im Kugelzentrum liegen.
3. Vervollständige die Lösung des Brachistochronen-Problems, die in Abschnitt 2-2 begonnen wurde, und zeige, daß die gesuchte Kurve eine Zykloide ist, die am Anfangspunkt, an dem das Teilchen freigelassen wird, eine Spitze hat. Zeige auch, daß dann, wenn das Teilchen am Anfang mit einer kinetischen Energie $\frac{1}{2}mv_0^2$ abgeschossen wird, die Brachistochrone auch eine Zykloide ist, die durch die beiden Punkte geht und in der Höhe z über dem Anfangspunkt, gegeben durch $v_0 = 2gz$, eine Spitze hat.
4. In Abschnitt 2-2 diskutierten wir das Problem, die Funktion f zu finden, für die das Integral $\int f dx$ ein Extremum ist. Dabei wurde angenommen, daß f eine Funktion allein von x und y ist, und daß die Ableitung von y nach x \dot{y} ist.



Zeige, daß dann, wenn f auch die zweiten Ableitungen y'' von y nach x enthält, und wenn y und y' an den Endpunkten nicht variiert werden, die entsprechende EULER-LAGRANGESCHE Gleichung lautet:

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial f}{\partial y''} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

5. Angenommen, es sei experimentell bekannt, daß ein Teilchen einen gegebenen Abstand y_0 in einer Zeit $t_0 = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$ durchfällt, daß aber die Fallzeit für

von y_0 verschiedene Abstände nicht bekannt ist. Es sei weiterhin angenommen, daß die LAGRANGE-Funktion für das Problem bekannt ist. Aber anstatt die Bewegungsgleichung für y als Funktion von t zu lösen, soll die funktionale Form

$$y = at + bt^2$$

als Lösungsansatz verwendet werden. Zeige, daß dann, wenn die Konstanten a und b stets so festgelegt werden, daß die Zeit, y_0 zu durchfallen, genau durch t_0 gegeben ist, das Integral

$$\int_0^{t_0} L dt$$

nur dann für reelle Werte der Koeffizienten ein Extremum ist, wenn $a = 0$ und $b = g/2$ sind.

6. Wenn zwei Billardkugeln zusammenstoßen, sind die augenblicklich zwischen ihnen wirkenden Kräfte sehr groß. Sie wirken aber nur in einer infinitesimalen Zeit Δt , und zwar in solcher Weise, daß die Größe

$$\int_{\Delta t} F dt$$

endlich bleibt. Solche Kräfte werden als stoßende Kräfte bezeichnet, und das Integral über Δt wird Kraftstoß genannt. Zeige, daß dann, wenn Stoßkräfte wirken, die LAGRANGESCHEN Gleichungen transformiert werden können in

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)_f - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)_i = S_j,$$

wobei die Indizes i und f den Zustand des Systems vor bzw. nach dem Stoß kennzeichnen. S_j ist der Kraftstoß der generalisierten stoßende Kraft, die q_j entspricht, und L ist die LAGRANGE-Funktion, die alle Kräfte, die keine stoßende Kräfte sind, enthält.

7. Ein schweres Teilchen sei auf die oberste Stelle eines vertikal gestellten Reifens gelegt. Berechne die Reaktion des Reifens auf das Teilchen mittels der LAGRANGESCHEN unbestimmten Multiplikatoren und der LAGRANGESCHEN Gleichungen. Bestimme die Höhe, von der das Teilchen herabfällt.

8. Es gibt eine Form der WHEATSTONESCHEN Brücke, in der zusätzlich zu den üblichen vier Widerständen eine Induktion in einem Zweig und eine Kapazität in dem gegenüberliegenden Zweig angebracht sind. Stelle L und \mathcal{F} für die nichtabgegliche Brücke auf. Die Ströme durch die Elemente sollen dabei anstelle der Koordinaten stehen. Verwende die KIRCHHOFFSCHEN Verzweigungsbedingungen als Zwangsbedingungen für die Ströme, bilde die LAGRANGESCHEN Bewegungsgleichungen und zeige, daß diese nach Elimination der λ auf die üblichen Stromkreis-Gleichungen führen.



9. Zeige, daß dann, wenn das Potential in der LAGRANGE-Funktion geschwindigkeitsabhängige Terme enthält, der kanonische Impuls, der einer Koordinate θ der Drehung des gesamten Systems entspricht, nicht mehr der mechanische Drehimpuls L_θ ist, sondern gegeben wird durch

$$p_\theta = L_\theta - \sum_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i \times \nabla_{\mathbf{v}_i} U,$$

wobei ∇_v der Gradient ist, für den die Ableitungen nach den Geschwindigkeitskomponenten zu nehmen sind, und \mathbf{n} ein Einheitsvektor in Rotationsrichtung ist. Wenn die Kräfte ihrem Charakter nach elektromagnetisch sind, so lautet der kanonische Impuls deshalb

$$p_\theta = L_\theta + \sum_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i \times \frac{q_i}{c} \mathbf{A}_i.$$

10. Es kommt gelegentlich vor, daß die generalisierten Koordinaten in der kinetischen Energie und der potentiellen Energie getrennt in der Weise auftreten, daß T und V in der Form

$$T = \sum_i f_i(q_i) \dot{q}_i^2 \quad \text{und} \quad V = \sum_i V_i(q_i)$$

geschrieben werden können. Zeige, daß die LAGRANGESchen Gleichungen dann separiert sind, und daß das Problem immer auf Quadraturen zurückgeführt werden kann.



III. KAPITEL

DAS ZWEIKÖRPER-ZENTRALEKRAFTPROBLEM

In diesem Kapitel wollen wir das Problem zweier Körper, die sich unter dem Einfluß einer wechselseitigen Zentralkraft bewegen, als eine Anwendung des LAGRANGESchen Formalismus diskutieren. Nicht alle Probleme der Zentralkräftebewegung haben wohlbekannte Funktionen als Integrale. Wir wollen jedoch versuchen, das Problem soweit wie möglich mit den bereits entwickelten Methoden zu untersuchen.

3-1 Zurückführung auf das äquivalente Einkörperproblem

Betrachten wir ein konservatives System zweier Massenpunkte m_1 und m_2 , wobei die wirksamen Kräfte einem Wechselwirkungspotential V entsprechen. Es soll zunächst angenommen werden, V sei irgendeine Funktion des Vektors zwischen den zwei Teilchen, $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, oder derer Relativgeschwindigkeit, $\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1$, oder höherer Ableitungen von $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Ein solches System hat sechs Freiheitsgrade und demnach sechs unabhängige generalisierte Koordinaten. Wir wollen dafür die Komponenten des Radiusvektors \mathbf{R} zum Massenzentrum und die drei Komponenten des Differenzvektors $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ wählen. Die LAGRANGE-Funktion hat dann die Form

$$L = T(\dot{\mathbf{R}}, t) - V(\mathbf{r}, t, \dots). \quad (3-1)$$

Die kinetische Energie T kann geschrieben werden als die Summe der kinetischen Energie der Bewegung des Massenzentrums und der kinetischen Energie T' der Bewegung um das Massenzentrum:

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}^2 + T'$$

mit

$$T' = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2'^2.$$

Hier sind \mathbf{r}'_1 und \mathbf{r}'_2 die Radiusvektoren der zwei Teilchen, bezogen auf das Massenzentrum. Sie sind mit \mathbf{r} verknüpft durch

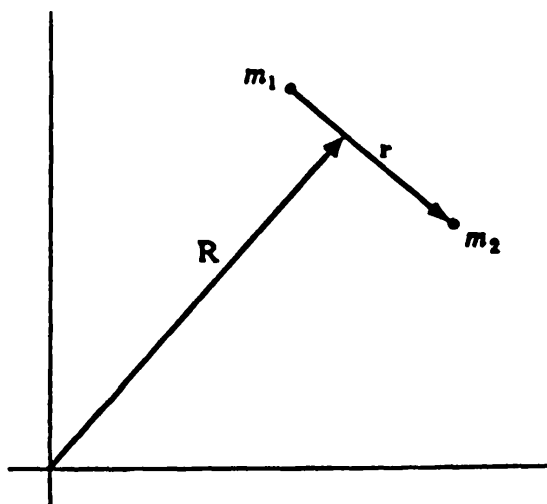
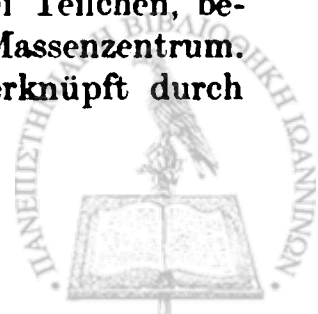


Abb. 3-1. Koordinaten für das Zweikörperproblem.



$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_1 &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \\ \mathbf{r}'_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (3-2)$$

T' läßt sich mit Hilfe von Gl. (3-2) durch \mathbf{r} folgendermaßen ausdrücken:

$$T' = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}}^2,$$

und die gesamte LAGRANGE-Funktion (3-1) ist somit

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \dots). \quad (3-3)$$

Man sieht, daß die drei Koordinaten \mathbf{R} zyklisch sind, so daß das Massenzentrum entweder in Ruhe ist oder sich gleichförmig bewegt. Keine der Bewegungsgleichungen für \mathbf{r} wird Ausdrücke mit \mathbf{R} und $\dot{\mathbf{R}}$ enthalten. Folglich ist das Verfahren hier besonders einfach. Wir streichen lediglich in allen weiteren Diskussionen den ersten Term der LAGRANGE-Funktion.

Der Rest der LAGRANGE-Funktion ist genau die Funktion, die zu erwarten wäre, wenn wir ein festgehaltenes Kraftzentrum mit einem einzelnen Teilchen im Abstand r von ihm hätten, das die Masse

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (3-4)$$

besitzt. μ wird *reduzierte Masse* genannt. Häufig wird Gl. (3-4) in der Form

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad (3-5)$$

geschrieben. Somit kann die Zentralkräftebewegung zweier Körper um ihr Massenzentrum stets auf ein äquivalentes Einkörperproblem reduziert werden.

3-2 Die Bewegungsgleichungen und erste Integrale

Wir beschränken uns jetzt auf wirkliche Zentralkräfte, wobei das Potential V eine Funktion allein von r ist, so daß die Kraft immer längs \mathbf{r} wirkt. Wegen der Ergebnisse des vorangehenden Abschnittes brauchen wir nur das Problem eines einzelnen Teilchens der Masse m zu betrachten, das sich um ein festgehaltenes Kraftzentrum bewegt, welches wir als Ursprung des Koordinatensystems wählen wollen. Weil die potentielle Energie nur vom Radialabstand abhängt, besitzt das Problem Kugelsymmetrie, d.h., irgendeine Drehung um irgendeine



festen Achse kann keinen Einfluß auf die Lösung haben. Deshalb muß eine Winkelkoordinate, die eine Drehung um eine feste Achse darstellt, zyklisch sein. Diese Symmetrieeigenschaften führen zu einer erheblichen Vereinfachung des Problems. Da das System kugelsymmetrisch ist, bleibt der Vektor des Gesamtdrehimpulses

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

erhalten. Daraus folgt, daß \mathbf{r} stets senkrecht zu der im Raum festen Richtung von \mathbf{L} ist. Das kann nur richtig sein, wenn \mathbf{r} immer in einer Ebene liegt, deren Normale parallel zu \mathbf{L} ist. Diese Argumentation ist nicht mehr gültig, wenn \mathbf{L} Null ist. In diesem Falle muß die Bewegung längs einer Geraden durch das Kraftzentrum verlaufen, denn $\mathbf{L} = 0$ erfordert, daß \mathbf{r} parallel zu $\dot{\mathbf{r}}$ ist. Das kann nur durch eine geradlinige Bewegung erfüllt werden.¹ Somit ist eine Zentralkräftebewegung stets eine Bewegung in einer Ebene. Nun wird die Bewegung eines Teilchens im Raum durch drei Koordinaten beschrieben; in Kugelkoordinaten sind dies der Azimutwinkel θ , der Polarwinkel ψ und der Radialabstand r . Wählt man die Polachse in Richtung von \mathbf{L} , so erfolgt die Bewegung stets in der Ebene senkrecht zur Polachse. Die Koordinate ψ hat dann den konstanten Wert $\pi/2$ und kann in der nachfolgenden Diskussion weggelassen werden. Die Erhaltung des Drehimpulsvektors liefert drei unabhängige Konstanten der Bewegung (entsprechend den drei cartesischen Komponenten). Zwei von diesen, nämlich die die konstante *Richtung* des Drehimpulses beschreiben, wurden dazu benutzt, das Problem von drei auf zwei Freiheitsgrade zu reduzieren. Die dritte dieser Konstanten, die der Erhaltung des Betrages von \mathbf{L} entspricht, bleibt noch zur Vervollständigung der Lösung zu unserer Verfügung.

Drücken wir nun die LAGRANGE-Funktion in ebenen Polarkoordinaten aus:

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r). \end{aligned} \quad (3-6)$$

Wie schon vorher zu sehen war, ist θ eine zyklische Koordinate, deren entsprechender kanonischer Impuls der Drehimpuls des Systems ist:

$$p_{\theta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}.$$

Eine der zwei Bewegungsgleichungen ist dann einfach

$$\dot{p}_{\theta} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \quad (3-7)$$

¹ Formal gilt $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{n}_r + r\dot{\theta}\mathbf{n}_{\theta}$. Deshalb erfordert $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = 0$, daß $\dot{\theta} = 0$ ist.



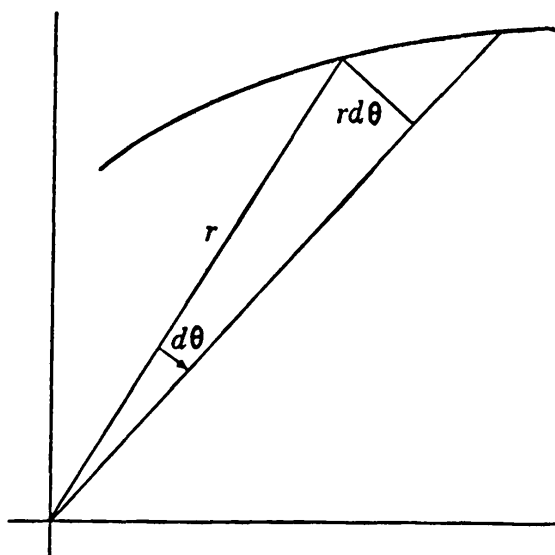


Abb. 3-2. Die vom Radiusvektor in der Zeit dt überstrichene Fläche.

mit dem Integral

$$mr^2\dot{\theta} = l. \quad (3-8)$$

Dabei ist l der konstante Betrag des Drehimpulses. Aus (3-7) folgt ebenfalls

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \right) = 0. \quad (3-9)$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ wurde eingesetzt, weil $\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$ gerade die *Flächengeschwindigkeit* ist – die Fläche, die vom Radiusvektor in der Zeiteinheit überstrichen wird. Diese Interpretation folgt aus dem Diagramm Abb. 3-2: Das Flächen-

differential, das in der Zeit dt überstrichen wird, ist

$$dA = \frac{1}{2} r(rd\theta),$$

und deshalb ist

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}.$$

Die Erhaltung des Drehimpulses ist somit äquivalent der Aussage: Die Flächengeschwindigkeit ist konstant. Hier haben wir den Beweis des wohlbekannten zweiten KEPLERSchen Gesetzes der Planetenbewegung: der Radiusvektor überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen. Es soll betont werden, daß die Erhaltung der Flächengeschwindigkeit eine allgemeine Eigenschaft der Zentralkräftebewegung ist und nicht auf eine Kraft der Form $1/r^2$ beschränkt ist.

Die verbleibende LAGRANGE-Gleichung für die Koordinate r lautet:

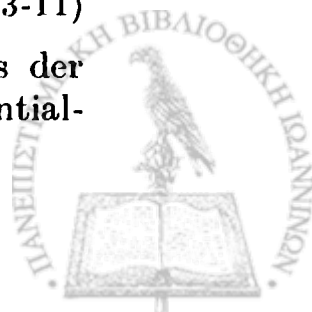
$$\frac{d}{dt} (m\dot{r}) - mr\dot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0. \quad (3-10)$$

Bezeichnen wir die Kraft $-\frac{\partial V}{\partial r}$ längs r mit $f(r)$, so kann die Gleichung

folgendermaßen geschrieben werden:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = f(r). \quad (3-11)$$

Verwenden wir das erste Integral Gl. (3-8), dann kann $\dot{\theta}$ aus der Bewegungsgleichung eliminiert werden. Man erhält eine Differential-



gleichung zweiter Ordnung, die nur r enthält:

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} = f(r). \quad (3-12)$$

Es läßt sich ein weiteres erstes Integral der Bewegung angeben, nämlich die Gesamtenergie, da die Kräfte konservativ sind. Auf Grund des allgemeinen Energieerhaltungssatzes können wir unmittelbar feststellen, daß

$$E = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) \quad (3-13)$$

eine Konstante der Bewegung ist, wobei E die Energie des Systems ist. Andererseits könnte dieses erste Integral wieder direkt aus den Bewegungsgleichungen (3-7) und (3-12) abgeleitet werden. Die letztere kann geschrieben werden:

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(V + \frac{1}{2} \frac{l^2}{mr^2} \right). \quad (3-14)$$

Multipliziert man beide Seiten von Gl. (3-14) mit \dot{r} , so wird die linke Seite

$$m\dot{r}\ddot{r} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m\dot{r}^2 \right).$$

Ähnlich kann die rechte Seite als eine totale Ableitung nach der Zeit geschrieben werden, denn wenn $g(r)$ irgendeine Funktion von r ist, dann hat die totale Ableitung von g nach der Zeit die Form

$$\frac{d}{dt} g(r) = \frac{dg}{dr} \frac{dr}{dt}.$$

Demnach ist Gl. (3-14) äquivalent zu

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m\dot{r}^2 \right) = -\frac{d}{dt} \left(V + \frac{1}{2} \frac{l^2}{mr^2} \right)$$

oder

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{mr^2} + V \right) = 0,$$

und deshalb ist

$$\frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{mr^2} + V = \text{constant}. \quad (3-15)$$

Gl. (3-15) bedeutet die Erhaltung der Gesamtenergie, denn verwendet man (3-8) für l , so kann der mittlere Term geschrieben werden:

$$\frac{1}{2} \frac{l^2}{mr^2} = \frac{1}{2mr^2} m^2 r^4 \dot{\theta}^2 = \frac{mr^2\dot{\theta}^2}{2},$$

und (3-15) reduziert sich auf (3-13).



Diese zwei ersten Integrale liefern uns tatsächlich zwei der Quadraturen, die zur Vervollständigung der Lösung notwendig sind. Weil zwei Variablen r und θ vorliegen, sind insgesamt vier Integrationen nötig, um die Bewegungsgleichungen zu lösen. Die ersten zwei Integrationen haben die LAGRANGESchen Gleichungen auf zwei Gleichungen erster Ordnung (3-8) und (3-15) geführt; die zwei übrigen Integrationen können (formal) auf verschiedenen Wegen ausgeführt werden. Das vielleicht einfachste Verfahren geht von Gl. (3-15) aus. Lösen wir nach \dot{r} auf, so haben wir

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2} \right)} \quad (3-16)$$

oder

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2} \right)}} \quad (3-17)$$

Zur Zeit $t = 0$ möge r den Anfangswert r_0 haben. Das Integral auf beiden Seiten der Gleichung zwischen Anfangszustand und dem Zustand zur Zeit t nimmt dann die Form an:

$$t = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2} \right)}} \quad (3-18)$$

Wie wir sehen, liefert Gl. (3-18) t als Funktion von r und den Integrationskonstanten E , l und r_0 . Das kann zumindest formal umgekehrt werden, so daß r als Funktion von t und den Konstanten gegeben ist. Ist die Lösung für r einmal gefunden, folgt die Lösung θ unmittelbar aus Gl. (3-8), die geschrieben werden kann:

$$d\theta = \frac{l dt}{mr^2} \quad (3-19)$$

Wenn der Anfangswert von θ gleich θ_0 ist, dann lautet das Integral von (3-19) einfach:

$$\theta = l \int_0^t \frac{dt}{mr^2(t)} + \theta_0 \quad (3-20)$$

Die Gl. (3-18) und (3-20) sind die zwei restlichen Integrationen. Damit ist das Problem formal auf Quadraturen mit vier Integrationskonstanten E , l , r_0 und θ_0 zurückgeführt. Diese Konstanten sind nicht die einzigen, die man betrachten kann. Wir hätten ebensogut r_0 , θ_0 , \dot{r}_0 und $\dot{\theta}_0$ nehmen können, aber natürlich lassen sich E und l immer



als Funktionen dieses Satzes bestimmen. Für viele Anwendungen ist der Satz, der die Energie und den Drehimpuls enthält, der natürliche. In der Quantenmechanik werden solche Konstanten wie die Anfangswerte von r und θ oder von \dot{r} und $\dot{\theta}$ bedeutungslos. Aber wir können noch immer von den Begriffen Systemenergie oder Systemdrehimpuls sprechen. Tatsächlich treten die hervorragenden Unterschiede zwischen klassischer und Quantenmechanik durch die Eigenschaften von E und l in den beiden Theorien in Erscheinung. Um den Übergang zu Quantentheorien zu diskutieren, ist es deshalb wichtig, daß die klassische Beschreibung des Systems durch seine Energie und seinen Drehimpuls erfolgt.

3-3 Das äquivalente eindimensionale Problem und die Klassifikation der Bahnen

Wir haben das Problem soweit zwar formal gelöst, praktisch sind die Integrale (3-18) und (3-20) aber gewöhnlich sehr schwer zu behandeln und in speziellen Fällen ist es oft bequem, die Integration in anderer Form auszuführen. Aber ehe wir daran gehen, die Lösung für besondere Kraftgesetze zu bestimmen, wollen wir sehen, was wir über die Bewegung im allgemeinen Falle lernen können, indem wir nur die Bewegungsgleichungen und die Erhaltungssätze verwenden, ohne explizite Lösungen zu verlangen.

Zum Beispiel können in einem System mit bekannter Energie und bekanntem Drehimpuls der Betrag und die Richtung der Geschwindigkeit des Teilchens unmittelbar als Funktionen des Abstandes r bestimmt werden. Der Betrag v folgt sofort aus dem Energieerhaltungssatz der Form

$$E = \frac{1}{2} mv^2 + V(r)$$

oder

$$v = \sqrt{\frac{2}{m} (E - V(r))}. \quad (3-21)$$

Die Radialgeschwindigkeit – die Komponente von $\dot{\mathbf{r}}$ in Richtung des Radiusvektors – ist bereits durch Gl. (3-16) gegeben. Zusammen mit dem Betrag v hat man damit eine ausreichende Information, um die Richtung der Geschwindigkeit zu bestimmen.² Diese Ergebnisse und vieles mehr können auch durch Betrachtung eines äquivalenten eindimensionalen Problems erhalten werden.

²Andererseits liefert die Erhaltung des Drehimpulses die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}$. $\dot{\theta}$ und \dot{r} ergeben zusammen den Betrag und die Richtung von $\dot{\mathbf{r}}$.



Die Bewegungsgleichung (3-12) in r , in der $\dot{\theta}$ durch l ausgedrückt ist, enthält nur r und dessen Ableitungen. Es ist dieselbe Gleichung, die man für ein fiktives eindimensionales Problem erhält, in dem ein Teilchen der Masse m einer Kraft

$$f' = f + \frac{l^2}{mr^3} \quad (3-22)$$

unterworfen ist. Die Bedeutung des zusätzlichen Terms wird klar, wenn man für ihn $mr\dot{\theta}^2 = mv_0^2/r$ schreibt. Das ist die bekannte Zentrifugalkraft. Eine äquivalente Aussage gewinnt man aus dem Erhaltungssatz für die Energie. Nach Gl. (3-15) ist die Bewegung des Teilchens in r die eines eindimensionalen Problems mit einer fiktiven potentiellen Energie

$$V' = V + \frac{1}{2} \frac{l^2}{mr^2}. \quad (3-22')$$

Zur Prüfung stellen wir fest, daß

$$f' = - \frac{\partial V'}{\partial r} = f(r) + \frac{l^2}{mr^3}$$

gilt. Das stimmt mit Gl. (3-22) überein. Der Energieerhaltungssatz (3-15) kann somit folgendermaßen geschrieben werden:

$$E = V' + \frac{1}{2} m\dot{r}^2. \quad (3-15')$$

Zur Erläuterung dieser Methode, die Bewegung zu untersuchen, betrachten wir eine graphische Darstellung von V' über r für den speziellen Fall einer anziehenden Kraft der Form

$$f = - \frac{k}{r^2}$$

(für positives k gewährleistet das Minuszeichen, daß die Kraft auf das Kraftzentrum hinweist). Die potentielle Energie für diese Kraft ist

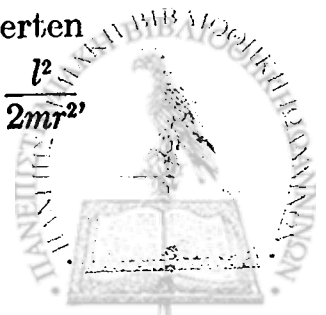
$$V = - \frac{k}{r},$$

und das entsprechende fiktive Potential lautet:

$$V' = - \frac{k}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}.$$

Eine solche Funktion ist in Abb. 3-3 dargestellt; die zwei punktierten

Kurven repräsentieren die einzelnen Komponenten $-k/r$ und $+\frac{l^2}{2mr^2}$



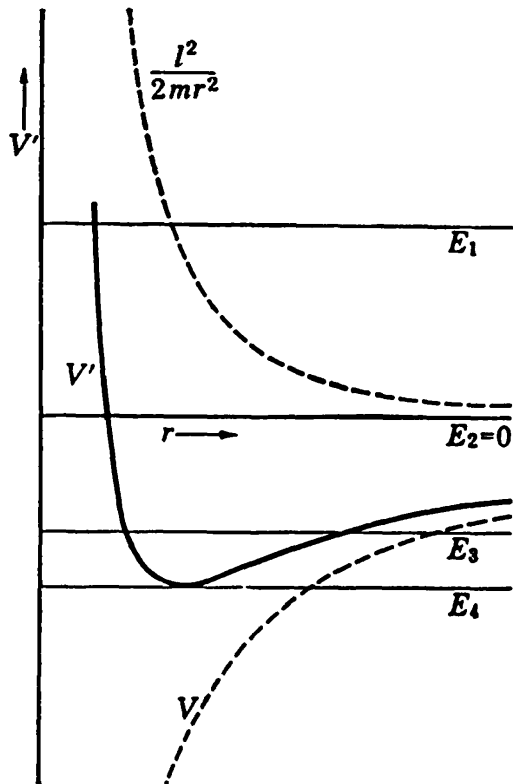


Abb. 3-3. Das äquivalente ein-dimensionale Potential für anziehende Kräfte, die dem Gesetz des reziproken Abstandsquadrates gehorchen.

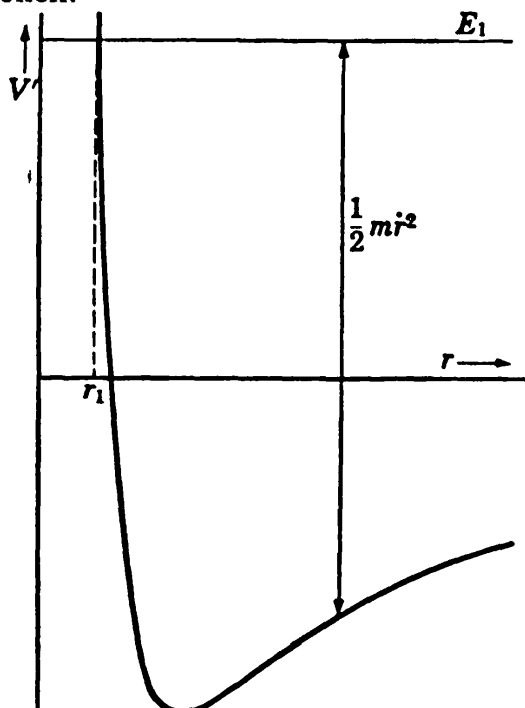
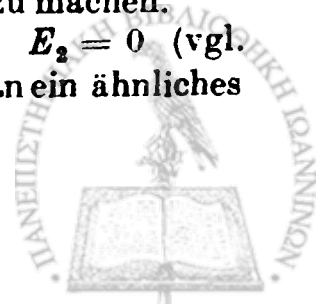


Abb. 3-4. Ungebundene Bewegung bei positiven Energien für das Kraftgesetz des reziproken Abstandsquadrates.

und die ausgezogene Kurve ist die Summe V' .

Wir wollen nun die Bewegung eines Teilchens betrachten, das die Energie E_1 besitzt, wie die Abb. 3-3 und 3-4 zeigen. Selbstverständlich kann dieses Teilchen niemals dichter als r_1 an das Kraftzentrum herankommen (vgl. Abb. 3-4). Ansonsten übersteigt V' für $r < r_1$ E_1 , und nach Gl. (3-15') wird die kinetische Energie negativ. Das entspricht einer imaginären Geschwindigkeit! Andererseits gibt es keine obere Grenze für den möglichen Wert von r , so daß die Bahn nicht geschlossen ist. Ein Teilchen kommt aus dem Unendlichen an, stößt gegen die „abstoßende Zentrifugalbarriere“, wird zurückgestoßen und wandert zurück nach dem Unendlichen (vgl. Abb. 3-5). Der Abstand zwischen E und V' ist $\frac{1}{2} m \dot{r}^2$, d.h. proportional dem Quadrat der Radialgeschwindigkeit und wird natürlich am *Umkehrpunkt* r_1 Null. Gleichzeitig ist der Abstand zwischen E und V auf der Kurve gleich der kinetischen Energie $\frac{1}{2} m v^2$ für den gegebenen Wert von r . Demnach ist der Abstand zwischen den Kurven für V und V' gleich $\frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2$. Diese Kurven liefern deshalb den Betrag der Teilchengeschwindigkeit und ihre Komponenten für irgendeinen Abstand r bei gegebener Energie und gegebenem Drehimpuls. Diese Information ist ausreichend, um sich ein ungefähres Bild von der Form der Bahn zu machen.

Für die Energie $E_2 = 0$ (vgl. Abb. 3-3) erhält man ein ähnliches



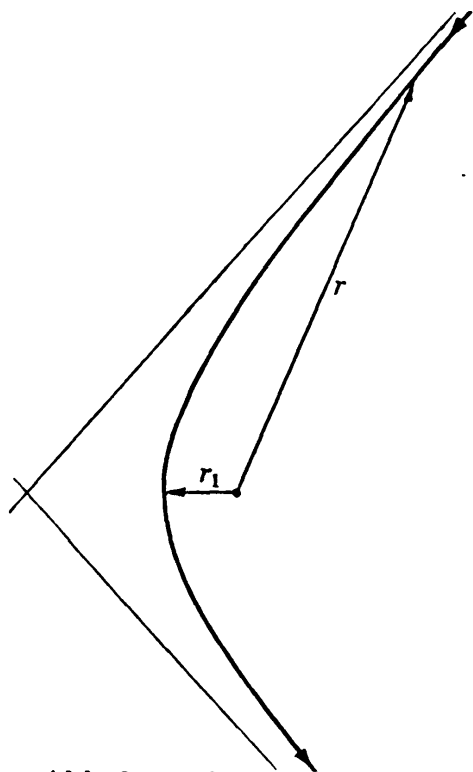


Abb. 3-5. Schematische Darstellung der Bahn für F . ungebundene Bewegung).

Abb. 3-8), dann fallen die beiden Bindungskreise zusammen. In einem solchen Falle ist die Bewegung nur für einen Radialabstand möglich; $\dot{r} = 0$ und die Bahn ist ein Kreis. Erinnern wir uns, daß die effektive

Bild für den Bahnverlauf. Aber für irgendeine niedrigere Energie, wie etwa E_3 in Abb. 3-6, ist die Situation anders. Zusätzlich zu einer unteren Grenze r_1 ist auch ein Maximalwert r_2 vorhanden, der für positive kinetische Energie von r nicht überschritten werden kann. Die Bewegung ist dann „gebunden“, und es gibt zwei Umkehrpunkte r_1 und r_2 , die auch *Apsidenabstände* genannt werden. Das bedeutet nicht notwendig, daß die Bahnen geschlossen sind. Man kann lediglich sagen, daß sie gebunden zwischen zwei Kreisen mit den Radien r_1 und r_2 verlaufen müssen. Die Umkehrpunkte liegen stets auf diesen Kreisen (vgl. Abb. 3-7).

Liegt die Energie E_4 gerade im Minimum des fiktiven Potentials (vgl.

Minimum des fiktiven Potentials (vgl.

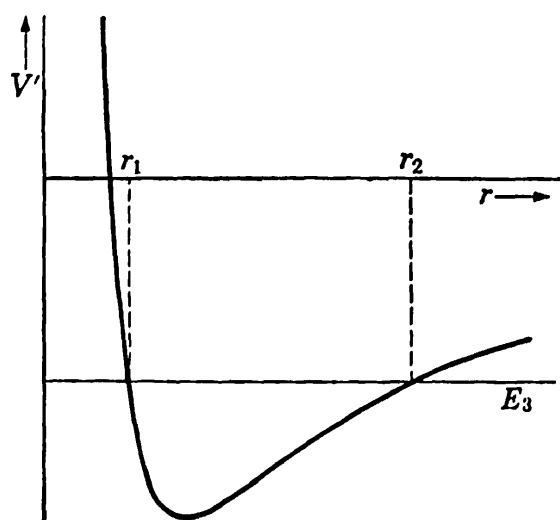


Abb. 3-6. Das äquivalente eindimensionale Potential des Kraftgesetzes des reziproken Abstandsquadrates, zur Darstellung einer gebundenen Bewegung bei negativen Energien.

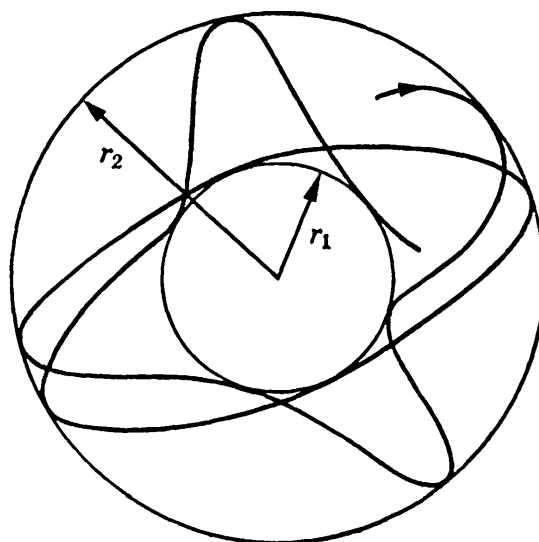


Abb. 3-7. Schematische Darstellung der Bahnen bei gebundener Bewegung.



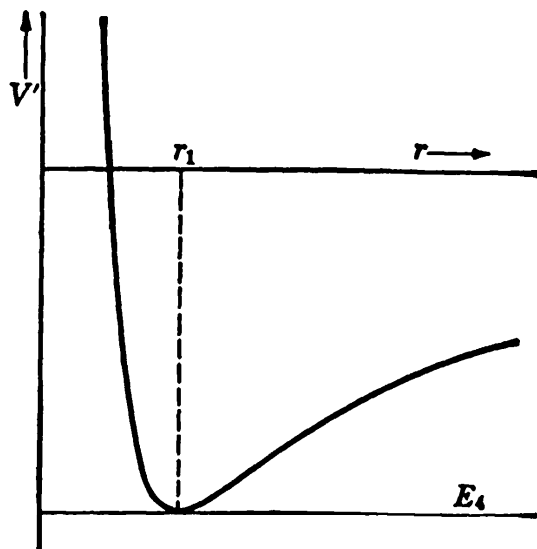


Abb. 3-8. Das äquivalente ein-dimensionale Potential des Kraftgesetzes des reziproken Abstandesquadrates, zur Illustration der Bedingung für Kreisbahnen.

galten. Eine Änderung von l wird zwar den quantitativen Kurvenverlauf von V' ändern, wird aber keinen Einfluß auf die allgemeine Klassifikation der Bahntypen haben.

Für die Anziehungskraft der oben diskutierten Form $1/r^2$ werden wir sehen, daß die Bahn für E_1 eine Hyperbel, für E_2 eine Parabel und für E_3 eine Ellipse ist. Für andere Kräfte haben die Bahnen nicht solche einfache Formen. Jedoch bleibt die gleiche allgemeine qualitative Einteilung in offene, gebundene und kreisförmige Bahnen auch für andere Anziehungspotentiale richtig, wenn diese nur: (1) schwächer als $1/r^2$ für $r \rightarrow \infty$ abnehmen, (2) langsamer als $1/r^2$ für $r \rightarrow 0$ unendlich werden. Die erste Bedingung gewährleistet, daß das Potential den Zentrifugalterm für große r überwiegt, während die zweite Bedingung dafür sorgt, daß für kleine r der Zentrifugalterm vorherrscht.

Die qualitative Natur der Bewegung wird geändert, wenn das Potential diese Forderungen nicht erfüllt, aber wir können immer noch die Methode des äquivalenten Potentials verwenden, um die Grundzüge der Bahnen zu untersuchen. Als Beispiel betrachten wir das Anziehungspotential $V(r) = -\frac{a}{r^3}$ mit $f = -\frac{3a}{r^4}$. Das Energiediagramm ist für diesen Fall in Abb. 3-9 gezeigt. Für eine Energie E gibt es zwei mögliche Bewegungstypen, die von dem Anfangswert von r abhängen.

³ Der Fall $E < E_4$ entspricht keiner physikalisch möglichen Bewegung, denn dann müßte \dot{r}^2 negativ, d.h. \dot{r} imaginär sein.

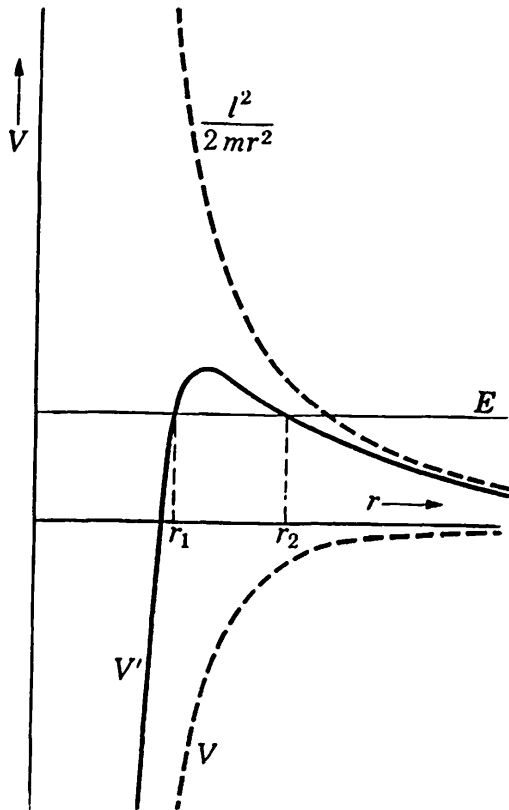
„Kraft“ gleich dem negativen Anstieg der V' -Kurve ist. Somit lautet die Bedingung für Kreisbahnen einfach, daß f' Null ist, oder

$$f(r) = \frac{-l^2}{mr^3} = -mr\dot{\theta}^2.$$

Wir haben hier die besonders elementare Bedingung für eine Kreisbahn, daß nämlich die angewendete Kraft gerade die „umgekehrte effektive Kraft“ der Zentripetalbeschleunigung ausgleicht.³

Es soll betont werden, daß alle diese Diskussionen über Bahnen mit verschiedenen Energien für nur einen Wert des Drehimpulses galten.





Ist r_0 kleiner als r_1 , so wird die Bewegung gebunden sein, r wird stets kleiner als r_1 bleiben, und das Teilchen wird eventuell durch das Kraftzentrum hindurchgehen. Wenn r anfangs größer als r_2 ist, dann wird es immer so bleiben; die Bewegung ist ungebunden, und das Teilchen kann niemals in den „Potentialtopf“ gelangen. Die Anfangsbedingung $r_1 < r_0 < r_2$ ist physikalisch wieder nicht möglich.

Ein anderes interessantes Beispiel der Methode begegnet uns bei einer linearen rücktreibenden Kraft (harmonischer Oszillator):

$$f = -kr, \quad V = \frac{1}{2}kr^2.$$

Abb. 3-9. Das äquivalente eindimensionale Potential einer anziehenden Kraft, die der vierten Potenz des Abstandes umgekehrt proportional ist.

Für verschwindenden Drehimpuls, entsprechend der Bewegung längs einer Geraden, gilt $V' = V$. Die Situation ist in Abb. 3-10 dargestellt.

Für irgendeine positive Energie ist die Bewegung gebunden und, wie wir wissen, einfach harmonisch. Ist $l \neq 0$, so haben wir die in Abb. 3-11 gezeigte Situation. Die Bewegung ist dann für alle physikalisch möglichen Energien gebunden und geht nicht durch das Kraftzentrum. In diesem besonderen Fall ist leicht einzusehen, daß die Bahn elliptisch ist, denn wenn $f = -kr$ ist, so haben wir für die Kraftkompo-

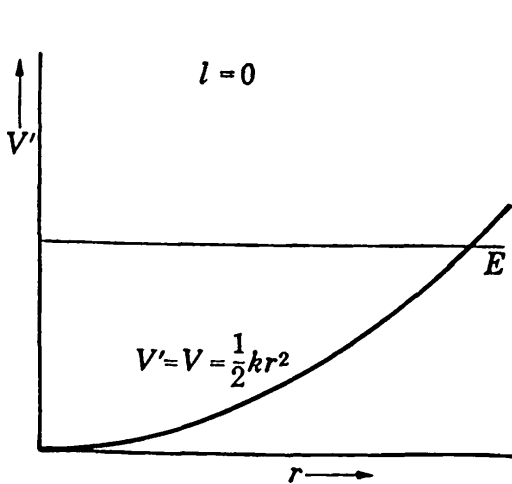


Abb. 3-10.

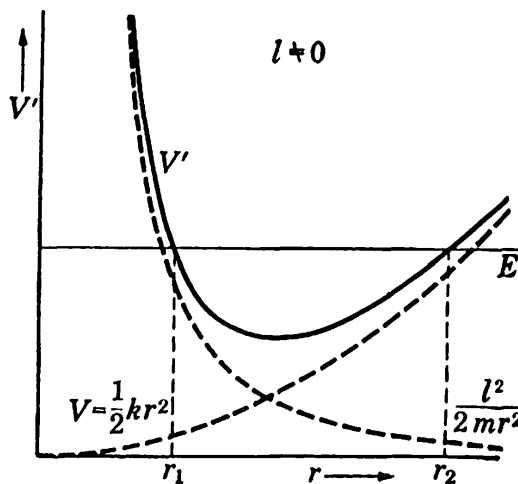


Abb. 3-11.



nennten in x - und y -Richtung

$$f_x = -kx, \quad f_y = -ky.$$

Die gesamte Bewegung ist demnach die Resultierende zweier einfacher harmonischer Schwingungen im rechten Winkel zueinander. Sie haben die gleiche Frequenz. Das führt im allgemeinen auf eine elliptische Bahn. Ein wohlbekanntes Beispiel ist das sphärische Pendel mit kleinen Amplituden. Die bekannten LISSAJOUS-Figuren erhält man durch Überlagerung zweier sinusförmiger Schwingungen im rechten Winkel zueinander, wobei das Verhältnis der Frequenzen eine rationale Zahl ist. Die Zentralkräftebewegung unter der Wirkung einer linearen rücktreibenden Kraft erzeugt demnach die einfachste LISSAJOUS-Figur.

3-4 Der Virialsatz

Eine andere Eigenschaft der Zentralkräftebewegung kann als Spezialfall eines allgemeinen Satzes hergeleitet werden, der für eine große Mannigfaltigkeit von Systemen gilt – des sog. *Virialsatzes*. Er unterscheidet sich in seinem Charakter von den bisher diskutierten Sätzen dadurch, daß er seiner Natur nach statistisch ist, d.h., er befaßt sich mit den Zeitmittelwerten verschiedener mechanischer Größen.

Betrachten wir ein allgemeines System von Massenpunkten mit Ortsvektoren r_i und angewendeten Kräften F_i (einschließlich Zwangskräften). Die grundlegenden Bewegungsgleichungen lauten dann

$$\dot{p}_i = F_i. \quad (1-1)$$

Wir wollen uns für die Größe

$$G = \sum_i p_i \cdot r_i$$

interessieren, wobei die Summe über alle Teilchen im System zu nehmen ist. Die totale Ableitung dieser Größe nach der Zeit ist

$$\frac{dG}{dt} = \sum_i \dot{r}_i \cdot p_i + \sum_i \dot{p}_i \cdot r_i. \quad (3-23)$$

Der erste Term kann umgeformt werden in

$$\sum_i \dot{r}_i \cdot p_i = \sum_i m_i \dot{r}_i \cdot \dot{r}_i = \sum_i m_i v_i^2 = 2T.$$

Der zweite wird wegen Gl. (1-1):

$$\sum_i \dot{p}_i \cdot r_i = \sum_i F_i \cdot r_i.$$



Gl. (3-23) reduziert sich deshalb auf

$$\frac{d}{dt} \sum_i p_i \cdot r_i = 2T + \sum_i F_i \cdot r_i. \quad (3-24)$$

Den Zeitmittelwert von Gl. (3-24) über ein Zeitintervall τ erhält man, indem man beide Seiten über t von 0 bis τ integriert und durch τ dividiert:

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dG}{dt} dt \equiv \overline{\frac{dG}{dt}} = \overline{2T} + \overline{\sum_i F_i \cdot r_i}$$

oder

$$\overline{2T} + \overline{\sum_i F_i \cdot r_i} = \frac{1}{\tau} [G(\tau) - G(0)]. \quad (3-25)$$

Ist die Bewegung periodisch, d.h., kehren alle Koordinatenwerte nach einer gewissen Zeit wieder, und wird τ gleich der Periode gewählt, dann verschwindet die rechte Seite von (3-25). Zu einem ähnlichen Schluß kommt man auch dann, wenn die Bewegung nicht periodisch ist, vorausgesetzt, daß die Koordinaten und Geschwindigkeiten für alle Teilchen endlich bleiben, so daß es eine obere Grenze für G gibt. Wählt man τ hinreichend groß, so kann die rechte Seite von Gl. (3-25) beliebig klein gemacht werden. In beiden Fällen folgt dann

$$\overline{T} = -\frac{1}{2} \overline{\sum_i F_i \cdot r_i}. \quad (3-26)$$

Gl. (3-26) ist als *Virialsatz* bekannt, und die rechte Seite wird *CLAUSIUS'sches Virial* genannt. In dieser Form ist der Satz sehr nützlich in der kinetischen Theorie der Gase. So braucht man nur ein paar Schritte weiterzugehen, um das BOYLESche Gesetz für ideale Gase zu beweisen (vgl. LINDSAY, *Physical Statistics*, S. 70). Der Satz ist praktisch unentbehrlich zur Berechnung der Zustandsgleichung *realer Gase*, wobei die Kräfte F_i nicht nur die Zwangskräfte umfassen, die die Gasteilchen im Behälter halten, sondern auch die Wechselwirkungskräfte zwischen den Molekülen.

Man kann weiter zeigen, daß dann, wenn die Kräfte F_i die Summe von Nichttreibungs-Kräften F'_i und geschwindigkeitsproportionalen Reibungskräften f_i sind, das Virial nur von den F'_i abhängt; die f_i liefern keinen Beitrag. Natürlich darf die Bewegung des Systems nicht auf Grund der Reibungskräfte zum Erliegen kommen. Ständig muß Energie in das System gepumpt werden, um die Bewegung zu erhalten; sonst würden *alle* Zeitmittelwerte mit beliebig wachsendem τ verschwinden.

Wenn die Kräfte nicht von einem Potential abgeleitet werden können, dann lautet das Theorem:



$$\bar{T} = \frac{1}{2} \sum_i \overline{\nabla V \cdot r_i}, \quad (3-27)$$

und für ein einzelnes Teilchen, das sich unter dem Einfluß einer Zentralkraft bewegt, reduziert es sich auf

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial V}{\partial r} r}. \quad (3-28)$$

Wenn V eine Potenzfunktion von r ist:

$$V = ar^{n+1},$$

wobei der Exponent so gewählt sei, daß das Kraftgesetz wie r^n geht, dann gilt

$$\frac{\partial V}{\partial r} r = (n+1)V,$$

und Gl. (3-28) wird

$$\bar{T} = \frac{n+1}{2} \bar{V}. \quad (3-29)$$

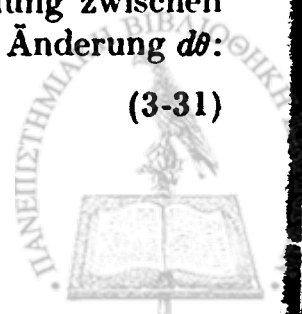
Für den mehr speziellen Fall des Kraftgesetzes mit $n = -2$ nimmt der Virialsatz die wohlbekannt Form an:

$$\bar{T} = -\frac{1}{2} \bar{V}. \quad (3-30)$$

3-5 Die Differentialgleichung für die Bahn und integrierbare Potenzpotentiale

Zur Behandlung besonderer Einzelheiten eines wirklichen Zentralkräfteproblems ist es notwendig, unsere Betrachtungen in einer anderen Richtung weiterzuführen. Das Lösen eines Problems bedeutete bislang, r und θ als Funktionen der Zeit mit E , l usw. als Integrationskonstanten zu finden. Meistens sind es aber die Bahngleichungen, die wir suchen, d.h., die Abhängigkeit des Abstandes r von θ , wobei der Parameter t eliminiert ist. Für Zentralkräfteprobleme ist die Elimination besonders einfach, da t in den Bewegungsgleichungen nur als Differentiationsvariable auftritt. Tatsächlich liefert eine Bewegungsgleichung, nämlich (3-8), einfach eine definierte Beziehung zwischen einer differentiellen Änderung dt und der entsprechenden Änderung $d\theta$:

$$l dt = mr^2 d\theta. \quad (3-31)$$



Die entsprechende Beziehung zwischen den Ableitungen nach t und θ lautet:

$$\frac{d}{dt} = \frac{l}{mr^2} \frac{d}{d\theta}. \quad (3-32)$$

Diese Beziehungen können dazu benutzt werden, die Bewegungsgleichung (3-12) in eine Differentialgleichung für die Bahn überzuführen. Zum anderen können sie auf die in Gl. (3-17) gegebene formale Lösung der Bewegungsgleichungen angewendet werden. Man erhält so direkt die Bahngleichung. Zunächst wollen wir der ersteren dieser Möglichkeiten nachgehen.

Nach (3-32) kann eine zweite Ableitung nach der Zeit folgendermaßen geschrieben werden:

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{l}{mr^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{l}{mr^2} \frac{d}{d\theta} \right),$$

und die LAGRANGE-Gleichung (3-12) für r wird

$$\frac{l}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{l}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} \right) - \frac{l^2}{mr^3} = f(r). \quad (3-33)$$

Um (3-33) zu vereinfachen, bemerken wir, daß

$$\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = - \frac{d(1/r)}{d\theta}$$

ist. Gehen wir zu einer anderen Variablen $u = 1/r$ über, so haben wir demnach

$$\frac{l^2 u^2}{m} \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = - f\left(\frac{1}{u}\right). \quad (3-34)$$

Gl. (3-34) ist somit eine Differentialgleichung für die Bahn, wenn das Kraftgesetz f bekannt ist. Ist umgekehrt die Bahngleichung bekannt, d.h., ist r als Funktion von θ gegeben, dann kann man umgekehrt vorgehen und erhält das Kraftgesetz $f(r)$.

Wir möchten hier jedoch einige allgemeinere Ergebnisse erhalten. Zum Beispiel kann mit (3-34) gezeigt werden, daß die Bahn symmetrisch zu den Umkehrpunkten ist. Zum Beweis dieser Behauptung bemerken wir, daß es dann, wenn die Bahn symmetrisch ist, möglich sein sollte, sie um die Richtung des Umkehrwinkels zu spiegeln, ohne daß eine Änderung hervorgerufen wird. Sind die Koordinaten so gewählt, daß der Umkehrpunkt bei $\theta = 0$ liegt, dann kann die Spiegelung mathematisch durch die Substitution von $-\theta$ anstelle von θ beschrieben werden. Die Differentialgleichung für die Bahn (3-34) ist offen-



sichtlich invariant gegenüber einer solchen Substitution. Außerdem werden die Anfangsbedingungen

$$u = u(0), \quad \left(\frac{du}{d\theta}\right)_0 = 0, \quad \text{für } \theta = 0$$

ebenfalls nicht beeinflußt. Demnach muß die Bahngleichung dieselbe bleiben, ob man sie nun durch θ oder $-\theta$ ausdrückt. Das ist aber der

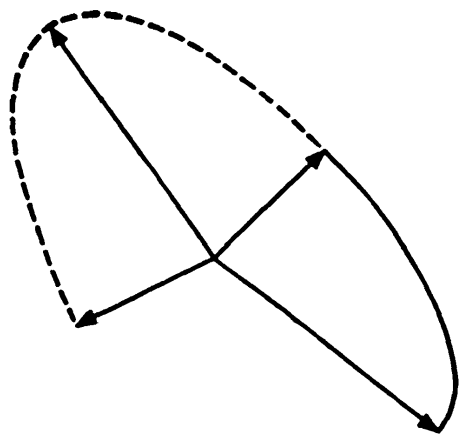


Abb. 3-12. Erweiterung der Bahn durch Spiegelung eines Teiles der Bahn an den Apsiden-Vektoren.

gewünschte Schluß. Die Bahn ist somit invariant gegenüber Spiegelung an den Apsiden-Vektoren. Tatsächlich bedeutet das, daß man die vollständige Bahn finden kann, wenn der Bahnabschnitt zwischen irgend zwei Umkehrpunkten bekannt ist. Spiegelung des gegebenen Abschnitts an einem der Apsiden-Vektoren erzeugt eine benachbarte Strecke der Bahn. Dieses Verfahren kann beliebig wiederholt werden, bis der Rest der Bahn vervollständigt ist, vgl. Abb. 3-12.

Für ein besonderes Kraftgesetz muß die Bahngleichung durch Integration der Differentialgleichung (3-34) gewonnen werden. Es ist jedoch nicht notwendig, alle Einzelheiten der Integration auszuführen, zumal die meiste Arbeit für die Lösung der Bewegungsgleichung (3-12) bereits geleistet wurde. Man hat lediglich nur noch t aus der Lösung (3-17) mit Rücksicht auf (3-31) zu eliminieren. Es ergibt sich

$$d\theta = \frac{l dr}{mr^2 \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2} \right)}} \quad (3-35)$$

Nach geringfügiger Umordnung wird das Integral von (3-35)

$$\theta = \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mV}{l^2} - \frac{1}{r^2}}} + \theta_0 \quad (3-36)$$

oder, wenn man die Integrationsvariable in $u = 1/r$ umändert,

$$\theta = \theta_0 - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mV}{l^2} - u^2}} \quad (3-37)$$

Gl. (3-37) löst das Problem zwar formal, aber wie im Falle der



Bewegungsgleichung ist sie nicht immer eine zweckmäßige Lösung, weil das Integral oft nicht durch wohlbekannte Funktionen dargestellt werden kann. Tatsächlich sind nur bestimmte Typen von Kraftgesetzen untersucht worden. Die wichtigsten sind die Potenzfunktionen von r :

$$V = ar^{n+1}, \quad (3-38)$$

so daß die Kraft mit der n -ten Potenz von r geht.⁴ Mit diesem Potential wird (3-37)

$$\theta = \theta_0 - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2ma}{l^2} u^{-n-1} - u^2}}. \quad (3-39)$$

Dieses Integral läßt sich wieder nur in bestimmten Fällen durch einfache Funktionen darstellen. Wenn der Radikand nicht von höherer Potenz in u als u^2 ist, hat der Nenner die Form $\sqrt{\alpha u^2 + \beta u + \gamma}$ und die Integration kann direkt in Ausdrücken von Kreisfunktionen ausgeführt werden. Diese Einschränkung entspricht der Forderung

$$-n - 1 = 0, 1, 2$$

oder, schließen wir $n = -1$ aus,

$$n = -2, -3.$$

Ein weiterer leicht integrierbarer Fall liegt für $n = 1$ vor, d.h. für die lineare Kraft; dann kann Gl. (3-39) nämlich geschrieben werden:

$$\theta = \theta_0 - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2ma}{l^2} \frac{1}{u^2} - u^2}}. \quad (3-39')$$

Machen wir nun die Substitution

$$u^2 = x, \quad du = \frac{dx}{2\sqrt{x}},$$

so wird Gl. (3-39')

$$\theta = \theta_0 - \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} x - \frac{2ma}{l^2} - x^2}}. \quad (3-40)$$

⁴ Der Fall $n = -1$ soll aus der folgenden Diskussion ausgeschlossen werden. Im Potential (3-38) entspricht er einem konstanten Potential, d.h., die Kraft ist überhaupt Null. Ein ebenso anormaler Fall liegt vor, wenn dieser Exponent direkt im Kraftgesetz benutzt wird, weil eine Kraft, die mit r^{-1} geht, einem logarithmischen Potential entspricht, das überhaupt kein Potenzgesetz ist. Ein logarithmisches Potential ist ungewöhnlich für die Bewegung um einen Punkt; es ist charakteristischer für eine *Linien-Quelle*.



Das ist wieder die gewünschte Form. Demnach erhält man eine Lösung durch einfache Funktionen für die Exponenten

$$n = 1, -2, -3.$$

Das bedeutet nicht, daß andere Potenzpotentiale nicht integrierbar sind; sie führen lediglich auf Funktionen, die nicht so gut bekannt sind. Zum Beispiel gibt es einen Bereich von Exponenten, für die Gl. (3-39) *elliptische Integrale* enthält. Die Lösung wird dann durch *elliptische Funktionen* dargestellt.

Ein elliptisches Integral ist definitionsgemäß

$$\int R(x, \omega) dx,$$

wenn R eine rationale Funktion von x und ω ist, wobei ω definiert ist durch

$$\omega = \sqrt{\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \eta}.$$

Natürlich können α und β nicht gleichzeitig Null sein, denn sonst könnte das Integral durch Kreisfunktionen gelöst werden. Man kann zeigen (WHITTAKER und WATSON, *Modern Analysis*, 4. Aufl., S. 512), daß jedes solche Integral auf Formen zurückgeführt werden kann, die Kreisfunktionen und LEGENDRESche elliptische Integrale erster, zweiter und dritter Art enthalten. Es gibt vollständige und detaillierte Tafeln dieser elliptischen Integrale, und ihre Eigenschaften und die Zusammenhänge mit elliptischen Funktionen sind ausführlich in der Literatur behandelt worden. In Wahrheit erfordern sie bei ihrer Anwendung keine höheren logischen Ansprüche als die Kreisfunktionen, sie sind nur nicht so geläufig. Aus ihrer Definition sieht man, daß das Integral in (3-39) durch elliptische Funktionen dargestellt werden kann, wenn

$$n = -4, -5$$

ist. Wir können versuchen, das Integral in eine andere Form zu bringen, die auch auf elliptische Funktionen führt, indem wir Zähler und Nenner mit u^ρ multiplizieren, wobei ρ ein unbestimmter Exponent ist. Das Integral wird dann

$$\int \frac{u^\rho du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} u^{2\rho} - \frac{2ma}{l^2} u^{-n-1+2\rho} - u^{2(\rho+1)}}}.$$

Dabei ist der Ausdruck unter der Wurzel ein Polynom von höherem als viertem Grad, außer für $\rho = 1$. Das Integral wird deshalb nur dann nicht schlimmer als elliptisch sein, wenn

$$-n - 1 + 2\rho = 0, 1, 2, 3, 4$$



oder $n = +1, 0, -1, -2, -3.$

Für $n = +1, -2, -3$ reduzieren sich die Lösungen auf Kreisfunktionen. Der Fall $n = -1$ wurde bereits ausgeschlossen, so daß dieses Verfahren nur für $n = 0$ auf elliptische Funktionen führt.

In bestimmten Fällen können wir auch dann Integrale vom elliptischen Typ erhalten, wenn wir die Variable folgendermaßen ändern: $u^2 = x$. Das in Frage kommende Integral lautet dann:

$$\frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} x - \frac{2ma}{l^2} x^{\frac{-n+1}{2}} - x^2}}$$

Es reduziert sich auf die elliptische Form für

$$(-n + 1)/2 = 3, 4.$$

Das führt auf die Exponenten

$$n = -5, -7.$$

Schließlich können wir wieder den Kunstgriff anwenden, Zähler und Nenner mit x zu multiplizieren. Die Bedingung dafür, elliptische oder einfachere Integrale zu erhalten, lautet dann:

$$\frac{-n + 1}{2} + 2 = 0, 1, 2, 3, 4$$

oder $n = +5, +3, +1, -1, -3.$

Das führt nur für $n = +5, +3$ auf neue Möglichkeiten. Alle ganzzahligen Exponenten, die auf elliptische Funktionen führen, sind somit

$$n = +5, +3, 0, -4, -5, -7.$$

Ogleich dadurch die Möglichkeiten für ganzzahlige Exponenten erschöpft sind, kann man zeigen, daß durch geeignete Transformationen auch einige gebrochene Exponenten auf elliptische Integrale führen.

3-6 Das Keplerproblem

Das Gesetz für $n = -2$ ist das wichtigste von allen Zentralkraftgesetzen und verdient eine ausführliche Behandlung. In diesem Fall können Kraft und Potential folgendermaßen geschrieben werden:

$$f = -\frac{k}{r^2}, \quad V = -\frac{k}{r} \quad (3-41)$$



Es gibt mehrere Wege, die Gleichung für die Bahn zu integrieren. Der einfachste besteht darin, daß man (3-41) in die Differentialgleichung (3-34) für die Bahn einsetzt:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{mf\left(\frac{1}{u}\right)}{l^2u^2} = \frac{mk}{l^2}. \quad (3-42)$$

Ändern wir die Variable gemäß $y = u - \frac{mk}{l^2}$, dann wird die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + y = 0.$$

Sie hat die direkte Lösung

$$y = b \cos(\theta - \theta'),$$

b und θ' sind zwei Integrationskonstanten. Durch r ausgedrückt lautet die Lösung

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2} (1 + \epsilon \cos(\theta - \theta')), \quad (3-43)$$

wobei

$$\epsilon = b \frac{l^2}{mk}$$

ist.

Es ist aufschlußreich, die Bahngleichung auch aus der formalen Lösung (3-39) zu gewinnen. Zwar ist dieses Verfahren langwieriger als die einfache Integration der Differentialgleichung (3-42), es hat aber den Vorteil, daß die bedeutsame Integrationskonstante ϵ automatisch durch die Energie E und den Drehimpuls l des Systems dargestellt wird. Wir schreiben (3-39) in der Form

$$\theta = \theta' - \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} + \frac{2mku}{l^2} - u^2}}. \quad (3-44)$$

Dabei ist das Integral jetzt unbestimmt. Die Größe θ' , die in (3-44) auftritt, ist eine Integrationskonstante und wird durch die Anfangsbedingungen bestimmt. Sie ist nicht notwendig gleich dem Anfangswinkel θ_0 zur Zeit $t = 0$. Das unbestimmte Integral hat die allgemeine Form:⁵

⁵ Vgl. zum Beispiel B. O. PEIRCE, *A Short Table of Integrals*, Nr. 161. Eine Konstante $-\pi/2$ muß noch zu dem von PEIRCE gegebenen Resultat addiert werden, um (3-45) zu erhalten. Das ist erlaubt, da das Integral unbestimmt ist.



$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \arccos - \frac{b + 2cx}{\sqrt{q}}, \quad (3-45)$$

wobei

$$q = b^2 - 4ac$$

ist. Um das auf (3-44) anwenden zu können, müssen wir setzen:

$$a = \frac{2mE}{l^2}, \quad b = \frac{2mk}{l^2}, \quad c = -1.$$

Die Diskriminante q ist deshalb

$$q = \left(\frac{2mk}{l^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2El^2}{mk^2}\right).$$

Mit diesen Substitutionen wird Gl. (3-44)

$$\theta = \theta' - \arccos \frac{\frac{l^2 u}{mk} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}}.$$

Lösen wir schließlich nach $u \equiv \frac{1}{r}$ auf, so finden wir die Bahngleichung

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} \cos(\theta - \theta')\right). \quad (3-46)$$

Diese stimmt mit (3-43) überein, außer daß hier ϵ durch E und l ausgedrückt ist. Die Integrationskonstante θ' kann nun mit Rücksicht auf Gl. (3-46) als einer der Umkehrwinkel der Bahn identifiziert werden. Es sei bemerkt, daß nur drei der vier Integrationskonstanten in der Bahngleichung auftreten. Das ist stets eine charakteristische Eigenschaft der Bahn. Die vierte Konstante lokalisiert nämlich die Anfangslage des Teilchens auf der Bahn. Sind wir lediglich an der Bahngleichung interessiert, so ist diese Auskunft offensichtlich belanglos und erscheint deshalb nicht in der Antwort. Natürlich muß die fehlende Konstante ergänzt werden, wenn man die Lösung zu vervollständigen wünscht, indem man r und θ als Funktionen der Zeit aufsucht. Will man lieber den Erhaltungssatz für den Drehimpuls,

$$mr^2 d\theta = l dt,$$

mit Rücksicht auf (3-46) integrieren, so muß man zusätzlich den Anfangswinkel θ_0 angeben.

Nun lautet die allgemeine Gleichung eines Kegelschnittes mit einem Brennpunkt im Ursprung



$$\frac{1}{r} = C(1 + e \cos(\theta - \theta_0)) \quad (3-47)$$

Dabei ist e die Exzentrizität des Kepler'schen Planeten, also N gleich mit Gl. (3-46) festgelegt die Bahnstetigkeit-Konstante ist, mit der Exzentrizität.

$$e = \sqrt{1 - \frac{2E}{mB}}$$

(3-48)

Die Natur der Bahn hängt von der Größe von e ab, die folgende Schenke ist:

$$\begin{aligned} e > 1 & \quad E > 0 & \quad \text{Hyperbel} \\ e = 1 & \quad E = 0 & \quad \text{Parabel} \\ e < 1 & \quad E < 0 & \quad \text{Ellipse} \\ e = 0 & \quad E = -\frac{mB}{2r} & \quad \text{Kreis} \end{aligned}$$

Diese Einteilung ist in Übereinstimmung mit der qualitativen Diskussion der Bahn, die auf dem Energieerhaltungssatz des entsprechenden eindimensionalen Potentials V beruht. Die Bedingung für die Kreisbewegung erscheint hier in einem etwas anderen, kann aber durch die Wahl von r mit dem obigen Potentials V in Übereinstimmung gebracht werden.

$$E = -\frac{k^2}{2a}$$

(3-49)

Für eine Kreisbahn sind k und k konstant, die Bahn ist ein Kreis.

$$T = \frac{2\pi k^2}{\sqrt{2mE}}$$

Somit ist die Periode

$$E = -\frac{1}{2} \frac{k^2}{a^2}$$

(3-50)

Mit Hilfe von Gl. (3-49) und (3-50) kann die Bahnstetigkeit-Konstante

$$k = \sqrt{2mEa}$$

ermittelt aus, daß in Übereinstimmung mit der früheren Absicht 3-3 gegeben Bedingung, die Anzahlschritt k gerade durch die Anzahl der Umläufe ausgedrückt wird.

Im Falle elliptischer Bahnen kann man zeigen, daß die Bahnstetigkeit-Konstante von der Energie abhängt. Die Bahnstetigkeit-Konstante



Wichtigkeit in der BOHRSchen Theorie des Atoms. Die große Halbachse ist halb so groß wie die Summe der beiden Apsidenabstände r_1 und r_2 (vgl. Abb. 3-6), ausgedrückt durch die Terme der Gl. (3-47) wird sie

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{1}{2C(1 + \epsilon)} + \frac{1}{2C(1 - \epsilon)} = \frac{1}{C} \frac{1}{1 - \epsilon^2}. \quad (3-51)$$

Mit den Konstanten der Bahn, die in (3-46) gegeben sind, lautet die Beziehung für die große Halbachse

$$a = -\frac{k}{2E}. \quad (3-52)$$

Wir bemerken, daß sie mit Gl. (3-50) für den Radius der Kreisbahn übereinstimmt.

Als letzten Punkt der Diskussion des KEPLERSchen Kraftgesetzes wollen wir die Periode der Bewegung auf elliptischen Bahnen berechnen. Wegen der Erhaltung des Drehimpulses ist die Flächengeschwindigkeit konstant. Sie ist gegeben durch

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{l}{2m}. \quad (3-53)$$

Die Fläche A der Bahn findet man, indem man (3-53) über eine vollständige Periode τ integriert:

$$\int_0^\tau \frac{dA}{dt} dt = A = \frac{l\tau}{2m}.$$

Die Fläche einer Ellipse ist

$$A = \pi ab,$$

wobei die halbe Hauptachse a durch (3-52) gegeben ist. Gemäß der Definition der Exzentrizität steht die halbe Nebenachse b mit a in folgender Beziehung:

$$b = a\sqrt{1 - \epsilon^2}.$$

Aus (3-51) ist zu sehen, daß für die halbe Nebenachse auch geschrieben werden kann:

$$b = \sqrt{\frac{a}{C}} = a^{1/2} \sqrt{\frac{l^2}{mk}},$$

und die Periode ist deshalb

$$\tau = \frac{2m}{l} \pi a^{3/2} \sqrt{\frac{l^2}{mk}} = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (3-54)$$



Gleichung (3-54) besagt folgendes: Das Quadrat der Periode ist der dritten Potenz der Hauptachse proportional. Diese Aussage wird oft als drittes KEPLERSches Gesetz bezeichnet.⁶ Tatsächlich befaßte sich KEPLER mit dem speziellen Problem der Planetenbewegung im Gravitationsfeld der Sonne. Eine präzisere Aussage seines Gesetzes würde deshalb lauten: Die Quadrate der Perioden der verschiedenen Planeten sind proportional der dritten Potenz ihrer Hauptachsen. In dieser Form ist das Gesetz nur näherungsweise richtig. Es muß daran erinnert werden, daß die Bewegung eines Planeten um die Sonne ein Zweikörperproblem ist und m in (3-54) durch die reduzierte Masse ersetzt werden muß:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Dabei mag sich m_1 auf den Planeten und m_2 auf die Sonne beziehen. Weiterhin lautet das Gravitationsgesetz der Massenanziehung:

$$f = -G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

so daß für die Konstante k gilt:

$$k = G m_1 m_2. \quad (3-55)$$

Unter diesen Bedingungen wird (3-54)

$$\tau = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{G(m_1 + m_2)}} \approx \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{G m_2}}, \quad (3-56)$$

wenn wir die Masse des Planeten im Vergleich zu der der Sonne vernachlässigen. Die Näherungsform von Gl. (3-56) entspricht dem dritten KEPLERSchen Gesetz, denn sie sagt aus, daß τ proportional $a^{3/2}$ ist und die Proportionalitätskonstante für alle Planeten gleich ist. Die Planetenmasse m_1 ist jedoch nicht immer vollständig vernachlässigbar im Vergleich zur Sonnenmasse; zum Beispiel hat der Jupiter eine Masse von etwa 0,1% der Sonnenmasse. Andererseits ist das dritte KEPLERSche Gesetz für die Elektronenbahnen im BOHRschen Atom streng richtig, da dort μ und k für alle Bahnen in einem gegebenen Atom gleich sind.

⁶ KEPLERS drei Gesetze der Planetenbewegung, die er um 1610 veröffentlichte, waren das Ergebnis seiner bahnbrechenden Analyse der Beobachtungen der Planetenbewegungen und legten den Grundstein für NEWTONS große Pioniertaten. Das zweite Gesetz, die Erhaltung der Flächengeschwindigkeit, ist ein allgemeiner Satz der Zentralkräftebewegung, wie wir oben bereits feststellten. Jedoch das erste – daß die Planeten sich auf Ellipsenbahnen um die Sonne bewegen, die in einem Brennpunkt steht – und das dritte sind auf das Kraftgesetz des reziproken Abstands-Quadrats beschränkt.



3-7 Streuung in einem Zentralkräftefeld

Historisch entstand das Interesse an Zentralkräften durch die astronomischen Probleme der Planetenbewegung. Es gibt jedoch keinen Grund, weshalb man sich die Zentralkräftebewegung nur in den Begriffen solcher Probleme vorstellen muß; erwähnt wurden bereits die Bahnen im BOHRschen Atom. Ein anderes Gebiet, das mit den Vorstellungen der klassischen Mechanik untersucht werden kann, ist die *Streuung* von Teilchen durch Zentralkraftfelder. Wenn die Teilchen von atomarer Größenordnung sind, so muß man natürlich erwarten, daß die spezifischen Ergebnisse einer klassischen Behandlung physikalisch oftmals fehlerhaft sind, denn die Quanteneffekte sind in diesen Dimensionen gewöhnlich groß. Nichtsdestoweniger gibt es viele klassische Aussagen, die in guter Näherung richtig bleiben. Wichtiger ist, daß die Verfahren zur *Beschreibung* von Streuphänomenen dieselben sind, unabhängig davon, ob die Mechanik klassisch oder quantisiert ist; man kann die Sprache gleichgut auf der Basis der klassischen Physik sprechen lernen.

In seiner Einkörperformulierung befaßt sich das Streuproblem mit der Streuung von Teilchen durch ein *Kraftzentrum*. Wir betrachten einen homogenen Teilchenstrahl – ob er aus Elektronen oder α -Teilchen besteht, ist unerheblich. Alle Teilchen haben die gleiche Masse und Energie und bewegen sich auf ein Kraftzentrum zu. Es soll angenommen werden, daß die Kraft für große Abstände gegen Null geht. Der einfallende Strahl ist charakterisiert durch seine *Intensität* I (auch Stromdichte genannt), die die Anzahl der Teilchen angibt, die eine senkrecht zum Strahl gelegene Einheitsfläche in der Zeiteinheit durchqueren. Nähert sich ein Teilchen dem Kraftzentrum, so wird es entweder angezogen oder abgestoßen, und seine Bahn wird von der geradlinigen Einfallstrahlbahn abweichen. Hat es das Kraftzentrum passiert, so wird die auf das Teilchen wirkende Kraft unter Umständen abnehmen, so daß sich die Bahn wieder einer geraden Linie nähert. Im allgemeinen ist die Bewegungsrichtung am Ende nicht gleich der Einfallstrahlrichtung, und man sagt, das Teilchen ist gestreut worden. Der *Wirkungsquerschnitt für die Streuung in eine gegebene Richtung*, $\sigma(\Omega)$, ist definiert durch

$$\sigma(\Omega) d\Omega = \frac{\text{Anzahl der pro Zeiteinheit in den Raumwinkel } d\Omega \text{ gestreuten Teilchen}}{\text{einfallende Intensität}}, \quad (3-57)$$

wobei $d\Omega$ ein Element des Raumwinkels in der Richtung Ω ist.



Oftmals wird $\sigma(\Omega)$ auch als *differentieller Wirkungsquerschnitt der Streuung* bezeichnet. Für Zentralkräfte muß vollständige Symmetrie um die Achse des einfallenden Strahles vorhanden sein. Demnach kann das Element des Raumwinkels geschrieben werden als

$$d\Omega = 2\pi \sin \Theta d\Theta. \quad (3-58)$$

Dabei ist Θ der Winkel zwischen Streuungs- und Einfallrichtung, Θ wird Streuwinkel genannt. Es sei bemerkt, daß der Name „Wirkungsquerschnitt“ zu Recht besteht, weil $\sigma(\Omega)$ die Dimension einer Fläche hat.

Für ein gegebenes Teilchen sind die Konstanten der Bahn und damit das Maß der Streuung durch seine Energie und seinen Drehimpuls bestimmt. Es ist zweckmäßig, den Drehimpuls durch die Energie und den sogenannten *Stoßparameter* s auszudrücken. Er ist definiert als der senkrechte Abstand zwischen Kraftzentrum und Einfallsgeschwindigkeit. Ist v_0 die Einfallsgeschwindigkeit des Teilchens, so gilt

$$l = mv_0 s = s\sqrt{2mE}. \quad (3-59)$$

Sind E und s einmal festgelegt, dann ist der Streuwinkel Θ eindeutig bestimmt.⁷ Deshalb muß die Anzahl der Teilchen, die in einen Raumwinkel $d\Omega$ zwischen Θ und $\Theta + d\Theta$ gestreut werden, gleich der Zahl der einfallenden Teilchen mit einem Stoßparameter sein, der zwischen dem

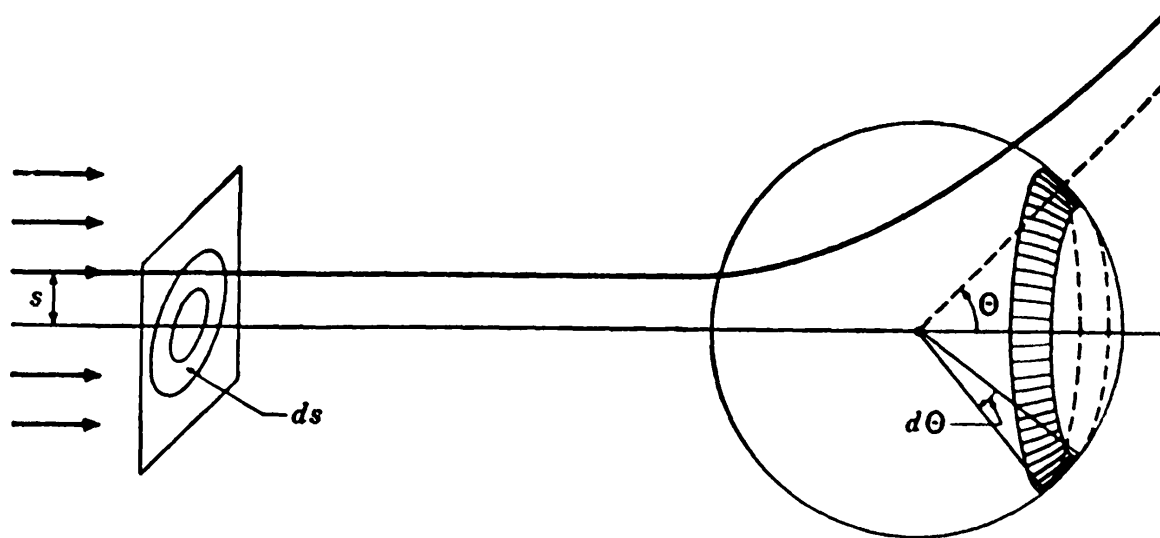


Abb. 3-13. Streuung eines einfallenden Teilchenstrahles durch ein Kraftzentrum.

⁷ An diesem Punkt der Formulierung trennen sich klassische und Quantenmechanik. Tatsächlich ist es eine grundlegende Eigentümlichkeit der Quantenmechanik, daß man die Bahn eines bestimmten Teilchens nicht eindeutig voraussagen kann. Man kann nur Wahrscheinlichkeiten für die Streuung in verschiedene Richtungen angeben.

entsprechenden s und $s + ds$ liegt:

$$2\pi I s ds = -2\pi\sigma(\Theta)I \sin(\Theta) d\Theta. \quad (3-60)$$

Das Minuszeichen wurde in Gl. (3-60) eingeführt, weil ein Zuwachs ds des Stoßparameters bedeutet, daß eine geringere Kraft auf das Teilchen ausgeübt wird. Daraus ergibt sich eine Abnahme $d\Theta$ des Streuwinkels. Betrachtet man s als eine Funktion der Energie und des entsprechenden Streuwinkels:

$$s = s(\Theta, E), \quad (3-61)$$

dann ist die Abhängigkeit des differentiellen Wirkungsquerschnittes von Θ gegeben durch

$$\sigma(\Theta) = - \frac{s}{\sin \Theta} \frac{ds}{d\Theta}. \quad (3-62)$$

Um das Verfahren zu veranschaulichen, wollen wir das historisch wichtige Problem der Streuung geladener Teilchen durch ein COULOMB-Feld betrachten. Das streuende Kraftfeld wird durch eine festgehaltene Ladung $-Ze$ erzeugt und wirkt auf die einfallenden Teilchen mit der Ladung $-Z'e$; somit kann für die Kraft geschrieben werden:

$$f = \frac{ZZ'e^2}{r^2},$$

d.h., es handelt sich um eine abstoßende KEPLERSche Kraft. Die Ergebnisse des vorigen Abschnittes können hier übernommen werden. Wir haben lediglich für die Kraftkonstante zu schreiben:

$$k = -ZZ'e^2. \quad (3-63)$$

Dann ist die Bahngleichung nach (3-46) einfach

$$\frac{1}{r} = - \frac{mZZ'e^2}{l^2} (1 + \epsilon \cos \theta). \quad (3-64)$$

Dabei sind die Koordinaten so gedreht worden, daß $\theta' = 0$ ist. Für ϵ gilt

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{m(ZZ'e^2)^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{2Es}{ZZ'e^2}\right)^2}. \quad (3-65)$$

Gl. (3-64) stellt noch einen Kegelschnitt dar, nämlich eine Hyperbel, da $\epsilon > 1$ ist. Zufolge des Minuszeichens sind jedoch die Werte von θ für die Bahn auf solche Winkel beschränkt, für die

$$\cos \theta < - \frac{1}{\epsilon} \quad (3-66)$$



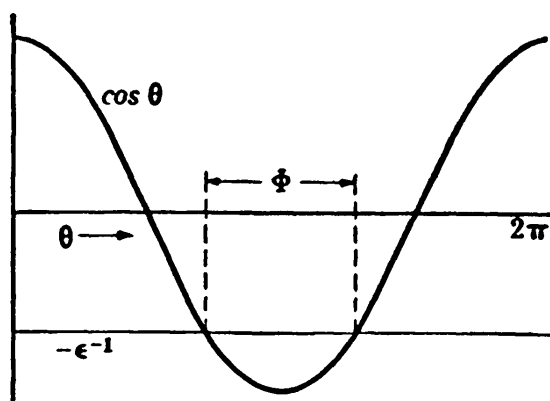


Abb. 3-14. Bereich von θ für abstoßende COULOMB-Streuung.

gilt, vgl. Abb. 3-14. Während für Anziehungskräfte das Kraftzentrum im inneren Brennpunkt der Hyperbel liegt, vgl. Abb. 3-5, liegt hier das Kraftzentrum im äußeren Brennpunkt, vgl. Abb. 3-15.

Die Änderung von θ , die auftritt, wenn das Teilchen aus dem Unendlichen kommt, gestreut wird und wieder nach dem Unendlichen geht, ist offensichtlich gleich dem Winkel ϕ zwischen den Asymptoten, der wiederum Supplement zum Streuwinkel Θ ist. Damit ist

Θ mit Rücksicht auf Gl. (3-66) und Abb. 3-14 gegeben durch

oder
$$\cos \frac{\phi}{2} = \sin \frac{\Theta}{2} = \frac{1}{\epsilon}$$

und schließlich
$$\cot^2 \frac{\Theta}{2} = \csc^2 \frac{\Theta}{2} - 1 = \epsilon^2 - 1$$

$$\cot \frac{\Theta}{2} = \frac{2Es}{ZZ'e^2} \quad (3-67)$$

Mit diesem Ergebnis kann man den differentiellen Wirkungsquerschnitt

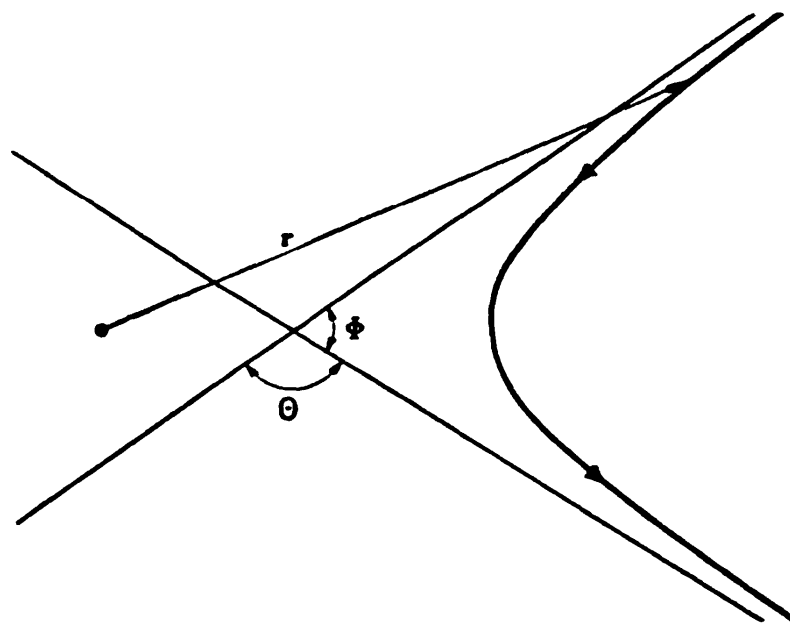


Abb. 3-15. Bahn für abstoßende COULOMB-Streuung, zur Illustration des Zusammenhanges zwischen dem von den Asymptoten eingeschlossenen Winkel und dem Streuwinkel.



leicht erhalten. Nach Gl. (3-67) ist der Stoßparameter durch E und Θ folgendermaßen gegeben:

$$s = \frac{ZZ'e^2}{2E} \cot \frac{\Theta}{2},$$

so daß $\sigma(\Theta)$ wegen (3-62)

$$\sigma(\Theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{ZZ'e^2}{2E} \right)^2 \frac{\cot \frac{\Theta}{2}}{\sin \Theta} \frac{1}{\sin^2 \frac{\Theta}{2}}$$

wird, oder

$$\sigma(\Theta) = \frac{1}{4} \left(\frac{ZZ'e^2}{2E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\Theta}{2}}. \quad (3-68)$$

Gl. (3-68) liefert den berühmten RUTHERFORDSchen Streuquerschnitt, der ursprünglich von RUTHERFORD für die Streuung von α -Teilchen an Atomkernen hergeleitet wurde. Die Quantenmechanik liefert für den nichtrelativistischen Grenzfall einen Wirkungsquerschnitt, der mit dem klassischen Ergebnis identisch ist.

In der Atomphysik ist der durch

$$\sigma_t = \int_{4\pi} \sigma(\Omega) d\Omega = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\Theta) \sin \Theta d\Theta$$

definierte Begriff des *totalen Wirkungsquerschnittes* σ_t der Streuung von erheblicher Wichtigkeit. Wenn wir jedoch versuchen, den totalen Wirkungsquerschnitt für die COULOMB-Streuung zu berechnen, indem wir Gl. (3-68) in diese Definition einsetzen, dann erhalten wir einen unendlich großen totalen Wirkungsquerschnitt! Der physikalische Grund für dieses Verhalten liegt nahe. Nach Definition ist der totale Wirkungsquerschnitt die Zahl der in der Zeiteinheit in alle Richtungen gestreuten Teilchen pro Einheit der einfallenden Intensität. Nun ist das COULOMB-Feld ein Beispiel einer „weitreichenden“ Kraft; seine Wirkung reicht unendlich weit. Sehr kleine Ablenkungen erfahren nur Teilchen mit sehr großen Stoßparametern. Demnach werden alle Teilchen in einem einfallenden Strahl mit unendlich großem Wirkungsquerschnitt in gewissem Maße gestreut und müssen in den totalen Streuquerschnitt eingeschlossen werden. Es ist deshalb klar, daß der unendliche Wert für σ_t keine Eigentümlichkeit des COULOMB-Feldes ist; er tritt in der klassischen Mechanik immer auf, wenn das streuende Feld für alle Abstände von Null verschieden ist, unabhängig davon, wie groß es



ist.⁸ Nur wenn das Kraftfeld „abgeschnitten“ wird, d.h., wenn es jenseits eines bestimmten Abstandes Null ist, wird der Streuquerschnitt endlich. Physikalisch tritt ein solches Abschneiden des COULOMB-Feldes wegen des Vorhandenseins der Atomelektronen auf, die den Kern „abschirmen“ und seine Ladung für große Abstände kompensieren.

3-8 Transformation des Streuproblems auf Laboratoriumskordinaten

Der vorige Abschnitt befaßte sich mit dem Einkörperproblem der Streuung eines Teilchens durch ein festgehaltenes Kraftzentrum. Praktisch gehören aber zur Streuung immer zwei Körper; z.B. haben wir bei der RUTHERFORDSchen Streuung das α -Teilchen und den Atomkern. Das zweite Teilchen ist nicht festgehalten, sondern wird infolge der Streuung aus seiner ursprünglichen Lage gestoßen. Da gezeigt wurde, daß ein Zweikörper-Zentralkräfteproblem auf ein Einkörperproblem reduziert werden kann, möchte man meinen, daß die einzige Änderung darin besteht, daß m durch die reduzierte Masse μ zu ersetzen ist. Jedoch ist die Sache nicht ganz so einfach. Der im Laboratorium wirklich gemessene Streuwinkel, den wir mit ϑ bezeichnen wollen, ist der Winkel zwischen End- und Anfangsrichtung des gestreuten Teilchens.⁹ Andererseits ist der Winkel Θ , der aus dem äquivalenten Einkörperproblem berechnet wird, der Winkel zwischen End- und Anfangsrichtung des Relativvektors zwischen den zwei Teilchen. Diese zwei Winkel sind aber nur dann gleich, wenn das zweite Teilchen während des Streuprozesses in Ruhe bleibt. Im allgemeinen setzt sich jedoch das zweite Teilchen, das ursprünglich in Ruhe war, infolge der Wechselwirkungskraft zwischen beiden Teilchen in Bewegung, und die zwei Winkel haben dann, wie in Abb. 3-16 angedeutet ist, verschiedene Werte. Das äquivalente Einkörperproblem liefert demnach nicht direkt den Streuwinkel, der im Laboratoriumskordinatensystem gemessen wird.

Die Situation ist jedoch ganz anders, wenn man in einem Koordinatensystem beobachtet, das sich mit dem Massenzentrum beider

⁸ σ_t ist auch in der Quantenmechanik für das COULOMB-Feld unendlich, da, wie wir feststellten, Gl. (3-68) dort richtig bleibt. Jedoch nicht alle „weitreichenden“ Kräfte geben Anlaß zu einem unendlich großen totalen Wirkungsquerschnitt in der Quantenmechanik. Es zeigt sich, daß alle Potentiale, die für große Abstände rascher als $1/r^2$ abfallen, einen endlichen quantenmechanischen totalen Wirkungsquerschnitt hervorrufen.

⁹ Der Streuwinkel ϑ darf nicht verwechselt werden mit der Winkelkoordinate θ des Relativvektors r zwischen den zwei Teilchen.



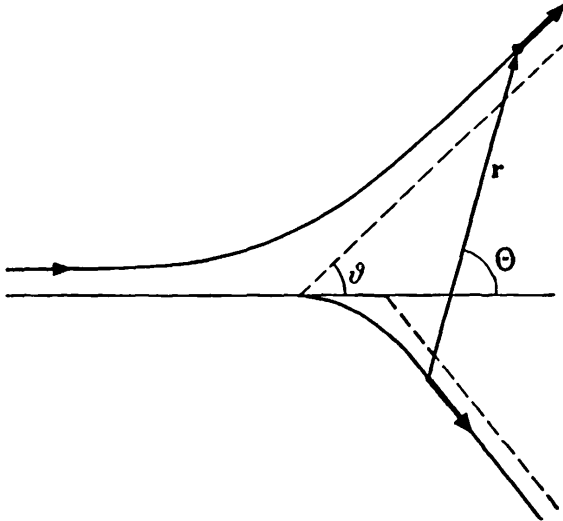


Abb. 3-16. Die Streuung zweier Teilchen im Laboratoriums-Koordinatensystem.

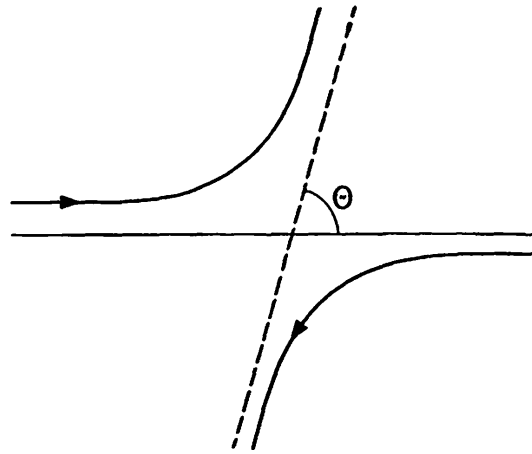


Abb. 3-17. Die Streuung zweier Teilchen im Schwerpunktsystem.

Teilchen bewegt. In einem solchen System ist der Gesamtimpuls natürlich Null, und die zwei Teilchen bewegen sich stets mit gleichem und entgegengesetzt gerichtetem Impuls. Abb. 3-17 zeigt den Streuprozess, wie ihn ein Beobachter im Schwerpunktsystem sieht. Vor der Streuung bewegen sich die Teilchen direkt aufeinander zu; nachher bewegen sie sich direkt voneinander weg. Der Winkel Θ zwischen Anfangs- und Endrichtung des Relativvektors muß deshalb gleich dem Streuwinkel jedes Teilchens im Schwerpunktsystem sein. Den Zusammenhang zwischen den beiden Streuwinkeln Θ und ϑ kann man somit dadurch erhalten, daß man die Transformation zwischen dem Schwerpunktsystem und dem Laborsystem betrachtet. Wir verwenden die Bezeichnungsweise von Abschnitt 3-1:

r_1 und v_1 sind die Lage und Geschwindigkeit des einfallenden Teilchens 1 im Laborsystem,

r'_1 und v'_1 sind die Lage und Geschwindigkeit des Teilchens 1 im Schwerpunktsystem, und

R und \dot{R} sind die Lage und die (konstante) Geschwindigkeit des Schwerpunktes.

Zu jedem Zeitpunkt ist nach Definition

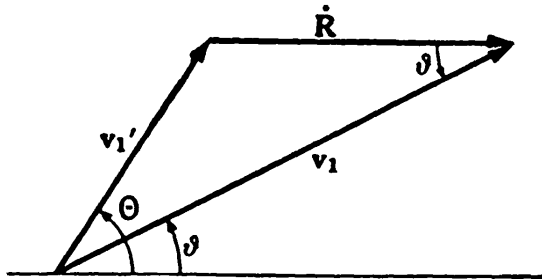
$$r_1 = R + r'_1$$

und folglich

$$v_1 = \dot{R} + v'_1.$$



Abb. 3-18 stellt diese Vektorbeziehung für den Zustand *nach* der Streuung graphisch dar; zu dieser Zeit bilden v_1 und v_1' die Winkel ϑ bzw. Θ mit dem Vektor \dot{R} , der längs der Anfangsrichtung liegt. Aus dem Diagramm erhalten wir sofort die Gleichung



$$\tan \vartheta = \frac{v_1' \sin \Theta}{v_1' \cos \Theta + \dot{R}} \quad (3-69)$$

Nun steht v_1' wegen Gl. (3-2) zur Relativgeschwindigkeit in folgender Beziehung:

$$v_1' = \frac{\mu}{m_1} t.$$

Abb. 3-18. Die Beziehungen zwischen den Geschwindigkeiten in Schwerpunktskoordinaten und Laboratoriumskoordinaten.

Da das System konservativ ist, muß die Relativgeschwindigkeit nach der Streuung, d.h., wenn sich die zwei Teilchen nicht mehr im Potential des anderen befinden, denselben Betrag wie die Anfangsgeschwindigkeit v_0 haben. Demnach gilt nach der Streuung

$$v_1' = \frac{\mu}{m_1} v_0. \quad (3-70)$$

Die konstante Geschwindigkeit des Schwerpunktes kann nach dem Erhaltungssatz für den Gesamtimpuls bestimmt werden:

$$(m_1 + m_2)\dot{R} = m_1 v_0$$

oder

$$\dot{R} = \frac{\mu}{m_2} v_0. \quad (3-71)$$

Setzen wir (3-70) und (3-71) in (3-69) ein, so wird die Beziehung zwischen den zwei Streuwinkeln:

$$\tan \vartheta = \frac{\sin \Theta}{\cos \Theta + \frac{m_1}{m_2}} \quad (3-72)$$

Ist m_1 viel kleiner als m_2 , so sind die beiden Winkel annähernd gleich; der massive Streuer m_2 erfährt einen geringen Rückstoß und wirkt praktisch wie ein festgehaltenes Massenzentrum.

Wegen der Transformation der Streuwinkel werden die Streuquerschnitte in Schwerpunktskoordinaten verschieden von denen in Laborkoordinaten sein. Den Zusammenhang zwischen beiden erhält man aus der Tatsache, daß die Zahl der in ein gegebenes Element des

Raumwinkels gestreuten Teilchen in beiden Systemen gleich sein muß:

$$2\pi I \sigma(\Theta) \sin \Theta d\Theta = 2\pi I \sigma'(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta$$

oder

$$\sigma'(\vartheta) = \sigma(\Theta) \frac{\sin \Theta d\Theta}{\sin \vartheta d\vartheta} = \sigma(\Theta) \frac{d \cos \Theta}{d \cos \vartheta}. \quad (3-73)$$

Dabei ist $\sigma'(\vartheta)$ der Wirkungsquerschnitt im Laborsystem. Zumindest im Prinzip kann Gl. (3-72) nach Θ , ausgedrückt durch ϑ , aufgelöst und $\sigma'(\vartheta)$ durch $\sigma(\Theta)$ dargestellt werden; das betrifft den Fall, daß ein beliebiges m_1/m_2 -Verhältnis vorliegt. Für die RUTHERFORDSche α -Teilchen-Streuung sind die Korrekturen offensichtlich klein, weil m_1 gleich 4 atomaren Einheiten und m_2 gewöhnlich gleich 100 atomaren Einheiten oder größer ist. Wenn aber beide Massen gleich sind wie bei der Neutronen-Protonen-Streuung, dann sind die Effekte maximal und recht groß. In diesem Falle wird Gl. (3-72)

$$\tan \vartheta = \frac{\sin \Theta}{\cos \Theta + 1} = \tan \frac{\Theta}{2},$$

so daß

$$\vartheta = \frac{\Theta}{2}, \quad (m_1/m_2 = 1) \quad (3-74)$$

gilt. Für gleiche Massen ist der maximale Streuwinkel im Laboratoriumssystem 90° . Hier kann keine Rückwärtsstreuung auftreten! Der Streuquerschnitt im Laboratoriumssystem ist dann

$$\sigma'(\vartheta) = 4 \cos \vartheta \sigma(2\vartheta), \quad (m_1/m_2 = 1). \quad (3-75)$$

Die hier beschriebene Streuung ist *elastisch* in dem Sinne, daß die gesamte kinetische Energie vor und nach der Streuung gleich bleibt, Allerdings werden die Geschwindigkeiten der Teilchen im Laborsystem nicht unverändert bleiben. So ist das *streuende* Teilchen anfangs in Ruhe, aber infolge der Streuung erfährt es einen Rückstoß und hat nach dem Streuvorgang im allgemeinen endliche Geschwindigkeit und kinetische Energie. Um die gesamte kinetische Energie konstant zu halten, müssen die Geschwindigkeit und die kinetische Energie des *gestreuten* Teilchens abnehmen. Der Streuprozess resultiert somit in einem Übergang von kinetischer Energie vom einfallenden Teilchen auf das streuende Teilchen. Mathematisch kann die Abnahme nach Abb. 3-18 mit Hilfe des Kosinussatzes berechnet werden:

$$v_1'^2 = v_1^2 + \dot{R}^2 - 2v_1\dot{R} \cos \vartheta$$

oder, wenn man (3-70) und (3-71) verwendet:



$$\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2 - \frac{2\mu}{m_2} \left(\frac{v_1}{v_0}\right) \cos \vartheta - \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} = 0. \quad (3-76)$$

Das ist eine quadratische Gleichung für v_1/v_0 . In dem speziellen Falle $m_1 = m_2$ ist die Lösung besonders einfach:

$$\frac{v_1}{v_0} = \cos \vartheta, \quad (m_1/m_2 = 1).$$

So ist für $\vartheta = 90^\circ$, was einer Rückwärtsstreuung ($\Theta = \pi$) im Schwerpunktsystem entspricht, der Übergang maximal, und das rückgestoßene Teilchen übernimmt alle einfallende Energie.

Dieser Übergang von kinetischer Energie durch Streuung ist natürlich das Prinzip, auf dem der „Moderator“ in einem Reaktor für langsame Neutronen beruht. Schnelle, durch Spaltung erzeugte Neutronen werden nach und nach elastisch gestoßen, bis ihre kinetische Energie auf einen Betrag abgesunken ist, bei dem die Neutronen eher eine Spaltung hervorrufen, als daß sie eingefangen werden. Offensichtlich sind die besten Moderatoren die leichten Elemente, ideal wäre Wasserstoff. Für einen Reaktor ist Wasserstoff nicht praktisch (weil er Neutronen einfängt), aber Deuterium mit der Masse 2 und Kohlenstoff mit der Masse 12 dienen als Annäherungen. Im Laboratorium wird jedoch Wasserstoff in der Form von Paraffinkohlenwasserstoffen ständig zum Abbremsen von Neutronen verwendet.

Trotz ihrer sehr aktuellen Anwendungen sind diese Berechnungen der Transformation von Laboratoriumskoordinaten auf Koordinaten im Schwerpunktsystem und des Überganges von kinetischer Energie nicht besonders „modern“ oder ihrer Natur nach „quanten“theoretisch. Auch die klassische Mechanik, die darin enthalten ist, ist nicht besonders „fortgeschritten“ oder schwierig. Alles, was dabei verwendet wurde, ist im wesentlichen die Erhaltung von Energie und Impuls. Tatsächlich können ähnliche Rechnungen in Lehrbüchern für Anfänger gefunden werden, gewöhnlich am Beispiel elastischer Stöße zwischen Billardkugeln. Es ist jedoch gerade die elementare Natur dieser Rechnungen, die ihnen so weitreichende Gültigkeit verschafft. Solange der Impuls erhalten bleibt (das bleibt auch richtig in der Quantenmechanik), und die Streuung elastisch ist, sind Einzelheiten des Streuprozesses unerheblich. In Wirklichkeit ist die Umgebung des streuenden Teilchens ein „schwarzer Kasten“, und wir schenken nur dem Beachtung, was hineingeht und was herauskommt. Im ganzen ist es bedeutungslos, ob die Phänomene, die sich in dem Kasten ereignen, „klassisch“ oder „quantisiert“ sind. Folglich können die Formeln dieses Abschnittes ohne Befürchtung auch für die experimen-

telle Analyse von Erscheinungen verwendet werden, die ihrer Natur nach wesentlich Quantencharakter haben, wie zum Beispiel die Neutronen-Protonen-Streuung.

LITERATURHINWEISE

- E. T. WHITTAKER, *Analytical Dynamics*. Nahezu jedes Buch über Mechanik widmet der Zentralkraftbewegung große Aufmerksamkeit. Deshalb können nur einige der vielen Referenzen hier aufgeführt werden. Die Abschnitte 47-49 von WHITTAKERS Abhandlung geben eine knappe Einführung in das Gebiet, für Fortgeschrittene.
- W. D. MACMILLAN, *Statics and the Dynamics of a Particle*. Das Kapitel XII dieses Werkes liefert eine sorgfältig ausgearbeitete Diskussion der Zentralkraftbewegung, einschließlich detaillierter Betrachtungen von Bahnen für einige Kraftgesetze, die von dem üblichen Gesetz des reziproken Abstandsquadrates verschieden sind. Die Abhandlung ist elementar und macht keinen Gebrauch von der LAGRANGESchen Formulierung.
- J. C. SLATER und N. H. FRANK, *Mechanics*. Die qualitative Diskussion der Zentralkraftbewegung mittels eines äquivalenten Potentials, das die Zentrifugal-Barriere einschließt, ist in der modernen Physik üblich, aber sie wird selten im Zusammenhang mit der klassischen Mechanik diskutiert. Eine bemerkenswerte Ausnahme ist dieses Buch von SLATER und FRANK. Der Leser wird viele interessante Anwendungen der Methode in den Kapiteln III und IV finden.
- A. SOMMERFELD, *Vorlesungen über Theoretische Physik*, Bd. 1, *Mechanik*. Die Kinematik der Streuungserscheinungen gehört zum Allgemeinwissen der meisten Physiker, es ist jedoch schwer, irgendeine umfassende Referenz zu diesem Gegenstand anzugeben. Viele Werke über Atom- oder Kernphysik diskutieren die RUTHERFORDSche Streuung, und einige betrachten die Streuung von Teilchen gleicher Masse. Der Rest des Stoffes scheint in einzelnen Schriften verteilt zu sein, hauptsächlich in solchen über Kernforschung. In Abschnitt 3, Teil 5 seines Buches gibt SOMMERFELD eine interessante Diskussion der Stöße; dabei geht er allein von der Erhaltung des Impulses und der Energie aus. Eine kurze Bemerkung widmet er den unelastischen Stößen. Die Übungen zu diesem Abschnitt 3 sind besonders wertvoll.
- R. B. LINDSAY, *Introduction to Physical Statistics*. In Kapitel V wird eine kurze Diskussion des Virialsatzes und seiner Verwendung bei der Ableitung der Zustandsgleichung idealer und realer Gase geführt. Als Referenz läßt sich auch die monumentale Abhandlung über statistische Mechanik von R. H. FOWLER angeben.

ÜBUNGEN

1. Zwei Teilchen bewegen sich unter dem Einfluß von Gravitationskräften auf Kreisbahnen mit einer Periode τ umeinander. Ihre Bewegung werde zu einem gegebenen Zeitpunkt plötzlich gestoppt, dann werden sie wieder freigelassen



und können aufeinanderfallen. Beweise, daß sie nach einer Zeit $\tau/4\sqrt{2}$ zusammenstoßen.

2. Ein Teilchen bewege sich in einem Zentralkräftefeld, das durch das Potential

$$V = -k \frac{e^{-ar}}{r}$$

gegeben ist. Darin sind k und a positive Konstanten. Diskutiere qualitativ die Art der Bewegung. Verwende dabei die Methode des äquivalenten eindimensionalen Potentials.

3. Betrachte ein System, in dem die auf die Teilchen wirkenden Gesamtkräfte aus konservativen Kräften F'_i und Reibungskräften f_i bestehen, die proportional der Geschwindigkeit sind. Zeige, daß für ein solches System der Virialsatz in der Form

$$\bar{T} = -\frac{1}{2} \sum_i \overline{F'_i \cdot r_i}$$

gilt, vorausgesetzt, daß die Bewegung einen stationären Zustand erreicht und nicht infolge der Reibungskräfte zum Erliegen kommt.

4. Ein Teilchen beschreibe unter dem Einfluß einer anziehenden Zentralkraft eine Kreisbahn. Die Kraft sei auf einen Punkt des Kreises gerichtet. Zeige, daß die Kraft dann umgekehrt proportional der fünften Potenz des Abstandes ist.

5. Zeige, daß das Zentralkräfteproblem mit elliptischen Funktionen lösbar ist, wenn die Kraft eine Potenzfunktion des Abstandes mit den folgenden gebrochenen Exponenten ist:

$$n = -\frac{3}{2}, \quad -\frac{5}{2}, \quad -\frac{1}{3}, \quad -\frac{5}{3}, \quad -\frac{7}{3}.$$

6. Bestimme näherungsweise das Massenverhältnis von Sonne und Erde. Verwende dabei nur die Längen des Jahres und des Mondmonats (27,3 Tage) und die mittleren Radien der Erdbahn ($1,49 \times 10^8$ km) und der Mondbahn ($3,8 \times 10^5$ km).

7. Diskutiere die Bewegung eines Teilchens in einem Zentralkräftefeld

$$f = -\frac{k}{r^2} + \frac{C}{r^3}.$$

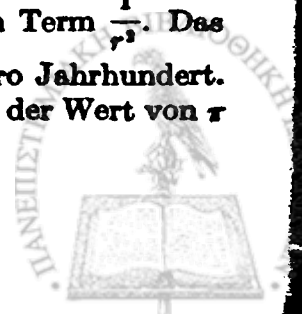
Zeige insbesondere, daß die Bahngleichung in folgende Form gebracht werden kann:

$$r = \frac{\alpha(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon \cos \alpha\theta}.$$

Für $\alpha = 1$ ist das eine Ellipse, aber für $\alpha \neq 1$ eine präzessierende Ellipse. Die Präzessionsbewegung kann durch die *Geschwindigkeit der Perihel-Präzession* beschrieben werden. Dabei ist der Ausdruck Perihel verwendet worden, um irgendeinen der Umkehrpunkte der Bahn zu bezeichnen. Leite einen Näherungsausdruck für die Präzessionsgeschwindigkeit her, wenn α nahezu Eins ist. Verwende dabei die dimensionslose Größe

$$\eta = \frac{C}{ka}$$

Das Verhältnis η ist ein Maß für die Stärke der Störung, die durch einen Term der Form $\frac{1}{r^3}$ dargestellt ist, gemessen an dem vorherrschenden Term $\frac{1}{r^2}$. Das Perihel des Merkur präzessiert nach Beobachtungen mit $40''$ pro Jahrhundert. Zeige, daß diese Präzession klassisch erklärt werden kann, wenn der Wert von τ



$1,42 \times 10^{-7}$ ist. (Die Exzentrizität der Merkurbahn ist 0,206, seine Periode ist 0,24 Jahre.)

8. Welche Änderungen, sofern sie überhaupt auftreten, sind bei der RUTHERFORDSchen Streuung zu erwarten, wenn die COULOMB-Kraft anziehend anstatt abstoßend ist?

9. Untersuche die Streuung, die durch eine abstoßende Zentralkraft $f = kr^{-3}$ hervorgerufen wird. Zeige, daß der differentielle Wirkungsquerschnitt

$$\sigma(\Theta) d\Theta = \frac{k}{2E} \frac{(1-x) dx}{x^2(2-x)^2 \sin \pi x}$$

ist, wobei x das Verhältnis Θ/π und E die Energie sind.

10. Ein Zentralkraftpotential, das in der Kernphysik häufig auftritt, ist das sogenannte *Stufenpotential*, definiert durch das Potential:

$$\begin{aligned} V &= 0, & r &> a \\ &= -V_0 & r &\leq a. \end{aligned}$$

Zeige, daß die durch ein solches Potential erzeugte Streuung in der klassischen Mechanik identisch ist mit der Brechung von Lichtstrahlen durch eine Kugel mit Radius a und dem relativen Brechungsindex

$$n = \sqrt{\frac{E + V_0}{E}}.$$

(Diese Äquivalenz legt dar, weshalb es möglich ist, die Brechungserscheinungen sowohl durch HUYGENSSche Wellen als auch durch NEWTONSche mechanische Korpuskeln zu erklären.) Zeige auch, daß der differentielle Wirkungsquerschnitt

$$\sigma(\Theta) = \frac{n^2 a^2}{4 \cos \frac{\Theta}{2}} \frac{\left(n \cos \frac{\Theta}{2} - 1\right) \left(n - \cos \frac{\Theta}{2}\right)}{\left(1 + n^2 - 2n \cos \frac{\Theta}{2}\right)^2}$$

ist. Wie lautet der totale Wirkungsquerschnitt?

11. Zeige, daß für irgendeine abstoßende Zentralkraft eine formale Lösung für den Streuwinkel gegeben ist durch

$$\Theta = \pi + 2 \int_0^{u_0} \frac{s du}{\sqrt{1 - \frac{V(u)}{E} - s^2 u^2}},$$

wobei V die potentielle Energie und $u = 1/r$ ist. u_0 entspricht dem Umkehrpunkt der Bahn. Wie lautet der entsprechende Ausdruck für anziehende Potentiale?

12. a) Zeige, daß der Rückstoßwinkel des streuenden Teilchens relativ zur Einfallrichtung des gestreuten Teilchens einfach $\phi = \frac{1}{2}(\pi - \Theta)$ ist.

b) Betrachte das System zweier Teilchen gleicher Masse, die sich streuen. Man hat beobachtet, daß die Energieverteilung der rückgestoßenen Teilchen bis zu einer gewissen Energie konstant ist, darüber aber Null wird. Zeige, daß die Streuung im Schwerpunktsystem isotrop sein muß.

13. Für die elliptische Zentralkraftbewegung mit einer anziehenden Kraft, die dem Gesetz des reziproken Abstandsquadrates gehorcht, ist unter Verwendung des Virialsatzes und Gl. (3-54) zu zeigen, daß



$$\oint p_r dr + \oint p_\theta d\theta = \pi k \sqrt{\frac{2m}{-E}}.$$

In der BOHRschen Quantentheorie des Wasserstoffatoms ist $k = e^2$, und die Kreisintegrale der konjugierten Impulse sind folgendermaßen quantisiert:

$$\oint p_i dq_i = n_i h, \quad n_i \text{ ist ganzzahlig,}$$

wobei h die PLANCKsche Konstante ist. Die Energieterme für dieses Modell sind deshalb gegeben durch

$$E = - \frac{2\pi^2 m e^4}{(n_r + n_\theta)^2 h^2}.$$



IV. KAPITEL

DIE KINEMATIK STARRER KÖRPER

Einen starren Körper haben wir früher als ein System von Massenpunkten definiert, die solchen holonomen Zwangsbedingungen unterworfen sind, daß die Abstände zwischen allen Punktepaaren während der Bewegung konstant bleiben. Obgleich das eine Idealisierung bedeutet, ist diese Konzeption sehr nützlich, und die Mechanik der Bewegung starrer Körper verdient eine ausführliche Darstellung. In diesem Kapitel wollen wir hauptsächlich die *Kinematik* der starren Körper diskutieren, d.h. die Natur und die Eigentümlichkeiten ihrer Bewegungen. Wir werden einige Zeit darauf verwenden, die dabei auftretenden mathematischen Rechenmethoden zu entwickeln, die selbst von erheblichem Interesse sind und viele wichtige Anwendungen in anderen Gebieten der Physik haben. Haben wir gelernt, wie die Bewegung starrer Körper zu beschreiben ist, dann wollen wir im nächsten Kapitel unter Bezugnahme auf den LAGRANGESCHEN Formalismus diskutieren, wie eine solche Bewegung durch angewendete Kräfte und Drehmomente erzeugt wird.

4-1 Die unabhängigen Koordinaten eines starren Körpers

Ehe wir die Bewegung eines starren Körpers diskutieren, müssen wir zunächst feststellen, wie viele unabhängige Koordinaten notwendig sind, um seine Konfiguration angeben zu können. Ein starrer Körper aus N Teilchen kann höchstens $3N$ Freiheitsgrade haben; diese sind aber durch Zwangsbedingungen stark reduziert, die durch Gleichungen der Form

$$r_{ij} = c_{ij} \quad (4-1)$$

ausgedrückt werden können. Hierbei ist r_{ij} der Abstand zwischen dem i -ten und dem j -ten Teilchen, und die c sind Konstanten. Die wirkliche Zahl der Freiheitsgrade kann man nicht einfach dadurch erhalten, daß man die Zahl der Zwangsbedingungen von $3N$ abzieht, denn es gibt $\frac{1}{2}N(N-1)$ mögliche Gleichungen der Form der Gl. (4-1), deren Zahl für große N größer als $3N$ wird. In Wirklichkeit sind die Gl. (4-1) nicht alle unabhängig. Um einen Punkt im starren Körper



festzulegen, ist es nicht notwendig, seine Abstände zu *allen* anderen Punkten im Körper anzugeben; man braucht nur die Abstände zu irgend drei anderen Punkten festzustellen, die nicht auf einer Geraden liegen, vgl. Abb. 4-1. Hat man einmal die Lage dreier Teilchen des starren Körpers bestimmt, so legen die Zwangsbedingungen die Lage aller übrigen Teilchen fest. Die Zahl der Freiheitsgrade kann deshalb nicht größer als Neun sein. Aber die drei Bezugspunkte sind selbst nicht unabhängig, es gibt tatsächlich drei Gleichungen für den Zwang, der auf sie ausgeübt wird:

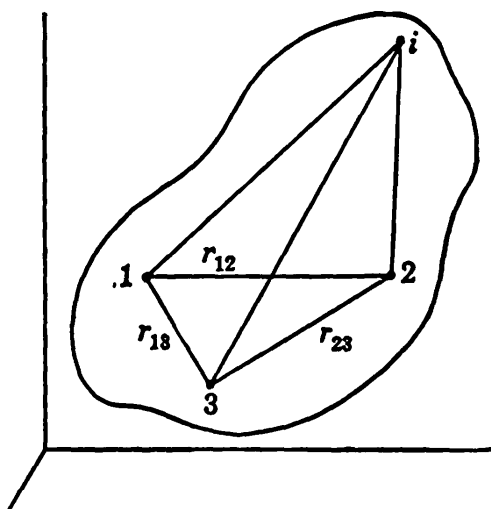


Abb. 4-1. Ein Punkt in einem starren Körper läßt sich durch seine Abstände von drei Bezugspunkten festlegen.

Koordinaten benötigt werden, kann man auch aus der folgenden Betrachtung erkennen. Um die Lage eines der Bezugspunkte festzulegen, müssen 3 Koordinaten angegeben werden. Ist aber einmal Punkt 1 festgelegt, so kann Punkt 2 durch nur zwei Koordinaten angegeben werden, da er gezwungen ist, sich auf einer Kugelfläche mit dem Zen-

trale $r_{12} = c_{12}$, $r_{23} = c_{23}$, $r_{13} = c_{13}$.

Sie reduzieren die Zahl der Freiheitsgrade auf *Sechs*. Daß nur 6

$$r_{12} = c_{12}, \quad r_{23} = c_{23}, \quad r_{13} = c_{13}.$$

Sie reduzieren die Zahl der Freiheitsgrade auf *Sechs*. Daß nur 6

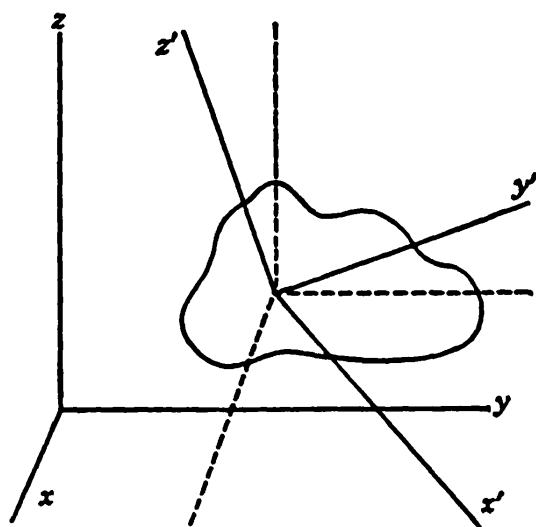


Abb. 4-2. Die ungestrichelten Achsen stellen ein äußeres Bezugssystem dar; die gestrichelten Achsen sind im starren Körper festgelegt.

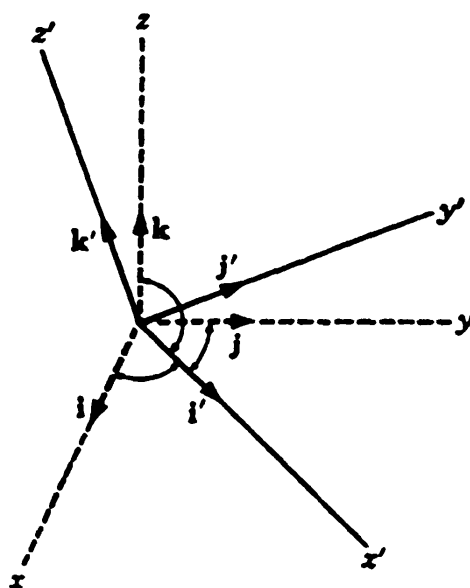


Abb. 4-3. Die Richtungskosinus des körperfesten Achsensatzes in bezug auf einen äußeren Achsensatz.



trum in Punkt 1 zu bewegen. Mit diesen zwei bestimmten Punkten hat Punkt 3 nur einen Freiheitsgrad, denn er kann nur um die Achse rotieren, die die anderen zwei Punkte verbindet. Demnach sind insgesamt sechs Koordinaten ausreichend.

Ein starrer Körper im Raum benötigt somit sechs unabhängige generalisierte Koordinaten, um seine Konfiguration festzulegen, unabhängig davon, wie viele Teilchen er enthält. Das gilt auch für den Grenzfall des kontinuierlichen Körpers. Natürlich können noch zusätzliche Zwangsbedingungen für den Körper neben der Zwangsbedingung der Starrheit vorhanden sein. Zum Beispiel kann der Körper gezwungen sein, sich auf einer Fläche zu bewegen, oder er kann an einem Punkt festgehalten sein. In solchem Falle werden die zusätzlichen Zwangsbedingungen die Zahl der Freiheitsgrade und damit die Zahl der unabhängigen Koordinaten weiter verringern.

Wie sollen diese Koordinaten ermittelt werden? Es sei bemerkt, daß die Konfiguration eines starren Körpers vollständig bestimmt ist, wenn man in dem starren Körper einen Satz cartesischer Koordinaten (die gestrichenen Achsen in Abb. 4-2) relativ zu den Koordinatenachsen des äußeren Raumes festlegt. Offensichtlich werden drei Koordinaten benötigt, um den Koordinatenursprung dieses körperfesten Achsensatzes anzugeben. Die übrigen drei Koordinaten müssen dann die Orientierung der gestrichenen Achsen relativ zu einem Koordinatensystem festlegen, das parallel zu den äußeren Achsen liegt, aber denselben Ursprung wie die gestrichenen Achsen hat.

Es gibt viele Möglichkeiten, die Orientierung eines cartesischen Achsensatzes relativ zu einem anderen Satz mit gemeinsamem Ursprung anzugeben. Ein sehr fruchtbares Verfahren beruht darauf, die Richtungskosinus der gestrichenen Achsen relativ zu den ungestrichenen festzustellen. So kann die x' -Achse durch ihre drei Richtungskosinus $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ bezüglich der x, y, z -Achsen angegeben werden. Sind wie gewöhnlich $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ die drei Einheitsvektoren längs x, y, z , und erfüllen $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ die entsprechende Funktion im gestrichenen System, dann sind diese Richtungskosinus definiert durch

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \cos(\mathbf{i}', \mathbf{i}) = \mathbf{i}' \cdot \mathbf{i} \\ \alpha_2 &= \cos(\mathbf{i}', \mathbf{j}) = \mathbf{i}' \cdot \mathbf{j} \\ \alpha_3 &= \cos(\mathbf{i}', \mathbf{k}) = \mathbf{i}' \cdot \mathbf{k}.\end{aligned}\tag{4-2}$$

Der Vektor \mathbf{i}' kann durch $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ mit Hilfe der Beziehung

$$\begin{aligned}\mathbf{i}' &= (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{k})\mathbf{k} \\ \text{ausgedrückt werden oder} \\ \mathbf{i}' &= \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}.\end{aligned}\tag{4-3}$$



Ähnlich können die Richtungskosinus der y' -Achse mit x, y, z durch $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ beschrieben werden. Sie sind die Komponenten von \mathbf{j}' im ungestrichenen Bezugssystem:

$$\mathbf{j}' = \beta_1 \mathbf{i} + \beta_2 \mathbf{j} + \beta_3 \mathbf{k}. \quad (4-4)$$

Eine zu (4-4) analoge Gleichung kann auch für \mathbf{k}' aufgestellt werden, wobei die Richtungskosinus der z' -Achse durch die γ bezeichnet werden. Diese Sätze von neun Richtungskosinus geben dann die Orientierung der x' -, y' -, z' -Achsen relativ zu dem xyz -System vollständig an. Man kann ebensogut das Verfahren umkehren und die Richtungskosinus benutzen, um die Einheitsvektoren $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ durch ihre Komponenten längs der gestrichenen Achsen auszudrücken. Wir können schreiben:

$$\mathbf{i} = (\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}') \mathbf{i}' + (\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}') \mathbf{j}' + (\mathbf{i} \cdot \mathbf{k}') \mathbf{k}'$$

oder

$$\mathbf{i} = \alpha_1 \mathbf{i}' + \beta_1 \mathbf{j}' + \gamma_1 \mathbf{k}'. \quad (4-5)$$

Analoge Gleichungen gelten für \mathbf{j} und \mathbf{k} .

Die Richtungskosinus liefern auch direkt die Beziehungen zwischen den Koordinaten eines gegebenen Punktes in dem einen System und den Koordinaten in dem anderen System. So sind die Koordinaten eines Punktes in einem gegebenen Bezugssystem die Komponenten des Ortsvektors \mathbf{r} längs der Achsen des Systems. Die x' -Koordinate ist dann durch x, y, z folgendermaßen gegeben:

$$x' = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{i}') = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z.$$

Für die anderen Koordinaten erhalten wir

$$\begin{aligned} y' &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z \\ z' &= \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z. \end{aligned} \quad (4-6)$$

Was hier für die Komponenten des Vektors \mathbf{r} gesagt wurde, gilt offensichtlich auch für irgendeinen beliebigen Vektor. Ist \mathbf{G} ein Vektor, dann ist die Komponente von \mathbf{G} längs der x' -Achse mit seinen x, y, z -Komponenten durch folgende Beziehung verknüpft:

$$G_{x'} = (\mathbf{G} \cdot \mathbf{i}') = \alpha_1 G_x + \alpha_2 G_y + \alpha_3 G_z$$

usw. Der Satz von neun Richtungskosinus gibt somit die Transformation zwischen den beiden Koordinatensystemen vollständig an.

Sind die gestrichenen Achsen im Körper festgelegt, dann sind die neun Richtungskosinus Funktionen der Zeit, und zwar in dem Maße, in dem der Körper seine Orientierung während der Bewegung ändert. In diesem Sinne können die α, β und γ als Koordinaten angesehen werden, die die augenblickliche Orientierung des Körpers beschreiben.



Aber offensichtlich sind das keine unabhängigen Koordinaten, denn es gibt neun von ihnen, und wir haben gezeigt, daß nur drei Koordinaten zur Angabe der Orientierung nötig sind.

Die Verknüpfung zwischen den Richtungskosinus beruht auf der Tatsache, daß die Basisvektoren in beiden Systemen orthogonal zueinander und auf eins normiert sind, symbolisch:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0,$$

bzw.

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1. \quad (4-7)$$

Entsprechende Beziehungen gelten für \mathbf{i}' , \mathbf{j}' und \mathbf{k}' . Wir können die Bedingungen, die durch die neun Koeffizienten erfüllt werden, dadurch erhalten, daß wir alle möglichen Punktprodukte zwischen den drei Gleichungen für \mathbf{i} , \mathbf{j} und \mathbf{k} , dargestellt durch \mathbf{i}' , \mathbf{j}' und \mathbf{k}' (wie in Gl. (4-5)), bilden und Gl. (4-7) verwenden:

$$\begin{aligned} \alpha_l \alpha_m + \beta_l \beta_m + \gamma_l \gamma_m &= 0, & l, m &= 1, 2, 3; l \neq m, \\ \alpha_l^2 + \beta_l^2 + \gamma_l^2 &= 1, & l &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4-8)$$

Diese zwei Sätze von drei Gleichungen sind gerade ausreichend, um die Zahl der unabhängigen Größen von neun auf drei zu reduzieren. Formal können die sechs Gleichungen zu einer zusammengefaßt werden, indem man das KRONECKERSCHE δ -Symbol δ_{lm} verwendet. Das ist definiert durch

$$\begin{aligned} \delta_{lm} &= 1 & l &= m \\ &= 0 & l &\neq m. \end{aligned}$$

Die Gl. (4-8) können dann geschrieben werden:

$$\alpha_l \alpha_m + \beta_l \beta_m + \gamma_l \gamma_m = \delta_{lm}. \quad (4-9)$$

Es ist deshalb nicht möglich, eine LAGRANGE-Funktion und die daraus folgenden Bewegungsgleichungen mit den neun Richtungskosinus als generalisierte Koordinaten aufzustellen. Zu diesem Zwecke müßten wir vielmehr einen Satz von drei unabhängigen Funktionen der Richtungskosinus verwenden. Eine Anzahl solcher Sätze unabhängiger Variabler wird später beschrieben werden, die wichtigsten sind die EULERSCHEN Winkel. Die Verwendung der Richtungskosinus zur Beschreibung der Zusammenhänge zwischen zwei cartesischen Koordinatensystemen hat nichtsdestoweniger eine Reihe wichtiger Vorteile. Mit ihrer Hilfe können viele Sätze über die Bewegung starrer Körper mit großer Eleganz und Allgemeinheit ausgedrückt und in einer Form gegeben werden, die ganz natürlich auf die Verfahren führt, die notwendig in der speziellen Relativitätstheorie und in der Quantenmechanik verwendet werden. Diese Art der Beschreibung verdient deshalb hier eine ausführliche Diskussion.



4-2 Orthogonale Transformationen

Zum Studium der Eigenschaften der neun Richtungskosinus ist es zweckmäßig, die Bezeichnungsweise abzuändern und alle Koordinaten durch x zu bezeichnen. Die Achsen werden durch Indizes unterschieden:

$$\begin{aligned}x &\rightarrow x_1 \\y &\rightarrow x_2 \\z &\rightarrow x_3.\end{aligned}\tag{4-10}$$

Somit wird Gl. (4-6)

$$\begin{aligned}x'_1 &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \\x'_2 &= \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 \\x'_3 &= \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3.\end{aligned}\tag{4-11}$$

Die Gl. (4-11) bilden eine Gruppe von Transformationsgleichungen von einem Koordinatensystem x_1, x_2, x_3 auf ein neues System x'_1, x'_2, x'_3 . Insbesondere geben sie ein Beispiel einer *linearen* oder *Vektortransformation*, die durch Transformationsgleichungen der Form

$$\begin{aligned}x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3\end{aligned}\tag{4-12}$$

definiert ist. Dabei sind a_{11}, a_{12}, \dots ein Satz konstanter, von x, x' unabhängiger Koeffizienten.¹ Die Gl. (4-11) sind nur ein Spezialfall von (4-12), da die Richtungskosinus nicht alle unabhängig sind.

Die Zusammenhänge, Gl. (4-8), zwischen den Koeffizienten mögen hier in der neuen Bezeichnungsweise nochmals hergeleitet werden. Da beide Koordinatensysteme cartesisch sind, ist der Betrag eines Vektors durch die Summe der Quadrate seiner Komponenten gegeben. Da weiterhin der tatsächliche Vektor ungeändert bleibt, welches Koordinatensystem auch verwendet wird, muß der Betrag des Vektors in beiden Systemen derselbe bleiben. Durch Symbole können wir die Invarianz des Betrages folgendermaßen darstellen:

$$\sum_{i=1}^3 x_i'^2 = \sum_{i=1}^3 x_i^2.\tag{4-13}$$

Die Gl. (4-12) lassen sich nun in folgender Form schreiben:

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j \quad i = 1, 2, 3.\tag{4-14}$$

¹ Die Gl. (4-12) sind natürlich nicht der allgemeinste Satz von Transformationsgleichungen, vgl. zum Beispiel die Transformation von den r nach den q in (1-36).



Die linke Seite von Gl. (4-13) ist deshalb

$$\sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j \right) \left(\sum_{k=1}^3 a_{ik} x_k \right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j,k=1}^3 a_{ij} a_{ik} x_j x_k.$$

Ordnen wir die Summen um, so kann dieser Ausdruck geschrieben werden:

$$\sum_{j,k} \left(\sum_i a_{ij} a_{ik} \right) x_j x_k.$$

Er kann dann und nur dann auf die rechte Seite von Gl. (4-13) reduziert werden, wenn

$$\sum_i a_{ij} a_{ik} = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$

oder, in knapper Schreibweise, wenn

$$\sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} \quad j, k = 1, 2, 3. \quad (4-15)$$

Drückt man die Koeffizienten a_{ij} durch die α , β und γ aus, so werden die sechs in Gl. (4-15) enthaltenen Gleichungen identisch mit den Gl. (4-9).

Eine lineare Transformation (4-12), die die durch Gl. (4-15) geforderten Eigenschaften besitzt, nennt man eine *orthogonale* Transformation. Gl. (4-15) selbst wird als *Orthogonalitätsbedingung* bezeichnet. Somit wird der Übergang von Koordinaten, die im Raum festgelegt sind, zu Koordinaten, die im starren Körper festgelegt sind, durch eine orthogonale Transformation ausgeführt. Das Schema der Transformationsgrößen (der Richtungskosinus)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (4-16)$$

nennt man die *Transformationsmatrix*. Sie wird durch einen großen Buchstaben A bezeichnet. Die Größen a_{ij} werden entsprechend die *Matrixelemente* der Transformation genannt.

Um diese formalen Betrachtungen verständlich zu machen, betrachten wir das einfache Beispiel der Bewegung in einer Ebene, um uns so auf ein zweidimensionales Koordinatensystem zu beschränken. Dann können die Indizes in den obigen Beziehungen nur die Werte 1 und 2 annehmen, und die Transformationsmatrix reduziert sich auf die Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$



Die vier Matrixelemente sind durch drei Orthogonalitätsbedingungen verknüpft:

$$\sum_{i=1}^2 a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk} \quad j, k = 1, 2,$$

so daß nur ein unabhängiger Parameter notwendig ist, um die Transformation festzulegen. Das ist nicht überraschend. Eine zweidimensionale Transformation von einem cartesischen Koordinatensystem zu einem anderen entspricht einer Drehung der Achsen in der Ebene, vgl. Abb. 4-4, und eine solche Drehung kann vollständig durch nur eine Größe, den Drehwinkel ϕ , festgelegt werden. Drücken wir die Transformationsgleichungen durch diesen einen Parameter aus, so lauten sie

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \phi + x_2 \sin \phi \\ x'_2 &= -x_1 \sin \phi + x_2 \cos \phi. \end{aligned}$$

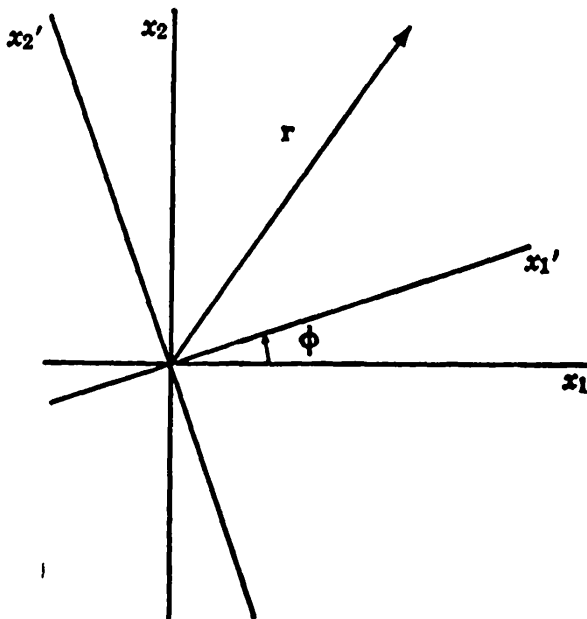


Abb. 4-4. Drehung der Koordinatenachsen als Äquivalent einer zweidimensionalen orthogonalen Transformation.

Die Matrixelemente sind deshalb

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \phi, & a_{12} &= \sin \phi, \\ a_{21} &= -\sin \phi, & a_{22} &= \cos \phi. \end{aligned} \quad (4-17)$$

Somit kann die Matrix A geschrieben werden:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (4-17')$$

Die drei Orthogonalitätsbedingungen erweitern sich auf die Gleichungen

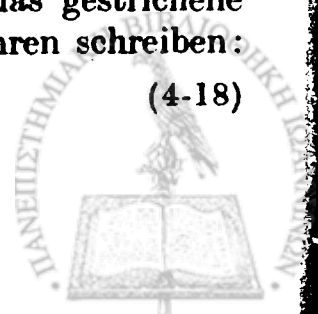
$$\begin{aligned} a_{11}a_{11} + a_{21}a_{21} &= 1 \\ a_{12}a_{12} + a_{22}a_{22} &= 1 \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} &= 0. \end{aligned}$$

Diese Bedingungen werden offensichtlich durch die Matrix (4-17') erfüllt, denn mit Hilfe der Matrixelemente (4-17) reduzieren sie sich auf die Identitäten

$$\begin{aligned} \cos^2 \phi + \sin^2 \phi &= 1 \\ \sin^2 \phi + \cos^2 \phi &= 1 \\ \cos \phi \sin \phi - \sin \phi \cos \phi &= 0. \end{aligned}$$

Die Transformationsmatrix A kann man sich als *Operator* vorstellen, der auf das ungestrichene System wirkt und es in das gestrichene transformiert. Symbolisch kann man für dieses Verfahren schreiben:

$$(\mathbf{r})' = \mathbf{A}\mathbf{r}. \quad (4-18)$$



Das ist so zu verstehen: Die Matrix A , die auf die Komponenten eines Vektors im ungestrichenen System wirkt, liefert die Komponenten des Vektors im gestrichenen System. Es soll nachdrücklich betont werden, daß in unserer bisherigen Darstellung A nur auf das Koordinatensystem wirkt; der Vektor wird nicht verändert. Wir fragen nur nach seinen Komponenten in zwei verschiedenen Koordinatensystemen. Deshalb wurde um r auf der linken Seite von Gl. (4-18) eine Klammer gesetzt, um klar zu machen, daß derselbe Vektor auf beiden Seiten der Gleichung enthalten ist. Nur die Komponenten haben sich geändert. Im Zweidimensionalen ist die Koordinatentransformation, wie wir sahen, einfach eine Drehung, und A ist identisch mit dem Operator der *Drehung* in der Ebene.

Trotzdem muß hervorgehoben werden, daß man sich, ohne den mathematischen Formalismus ändern zu müssen, A auch als einen

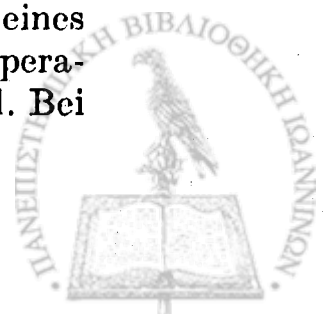
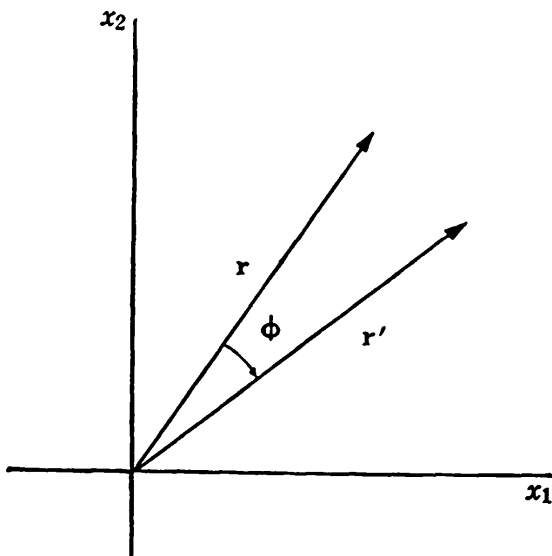
Operator vorstellen kann, der auf den Vektor r wirkt und ihn in einen anderen Vektor r' überführt:

$$x'_1 = x_1 \cos \phi + x_2 \sin \phi. \quad (4-19)$$

Darin sind beide Vektoren im gleichen Koordinatensystem ausgedrückt. So kann man im Zweidimensionalen anstatt das Koordinatensystem zu drehen, den Vektor r durch Drehung um einen Winkel ϕ im Uhrzeigersinn in einen neuen Vektor r' überführen. Die Komponenten des neuen Vektors stehen zu den Komponenten des alten durch dieselben Gl. (4-12) in Beziehung, die die Trans-

Abb. 4-5. Illustration der Interpretation einer orthogonalen Transformation als Drehung eines Vektors, bei der das Koordinatensystem un geändert bleibt.

formation der Koordinaten beschreiben. Formal ist es deshalb nicht notwendig, die Klammer in Gl. (4-18) zu verwenden; vielmehr kann man die Schreibweise wie in Gl. (4-19) anwenden und sie gleichermaßen als Operation auf das Koordinatensystem oder auf den Vektor interpretieren. Die Algebra bleibt dieselbe, unabhängig davon, welchen dieser beiden Standpunkte man bezieht. Die Interpretation als Operator, der auf die Koordinaten wirkt, ist angepaßter, wenn man die orthogonale Transformation dazu verwendet, die Orientierung eines starren Körpers festzulegen. Andererseits ist der Begriff eines Operators, der einen Vektor in einen anderen überführt, weiterreichend. Bei



der mathematischen Diskussion kann jede Interpretation verwendet werden, wie es die Situation gerade zweckmäßig erscheinen läßt. Natürlich muß man sich immer vor Augen halten, daß sich die Natur der durch **A** dargestellten Operation ändert, je nachdem welche Interpretation man gewählt hat. Falls also **A** einer Drehung um den Winkel ϕ entgegen dem Uhrzeigersinn entspricht, wenn es auf das Koordinatensystem angewendet wird, so vermittelt **A** eine Drehung im Uhrzeigersinn, wenn es auf den Vektor angewendet wird.

4-3 Formale Eigenschaften der Transformationsmatrix

Betrachten wir nun, was sich ereignet, wenn zwei aufeinanderfolgende Transformationen ausgeführt werden – entsprechend zwei aufeinanderfolgenden Auslenkungen des starren Körpers. Wir wollen die erste Transformation von r nach r' mit **B** bezeichnen:

$$x'_k = \sum_j b_{kj} x_j \quad (4-20)$$

und die darauffolgende Transformation von r' nach einem dritten Koordinatensatz r'' mit **A**:

$$x''_i = \sum_k a_{ik} x'_k \quad (4-21)$$

Die Beziehung zwischen x''_i und x_j erhält man dann, indem man die zwei Gl. (4-20) und (4-21) kombiniert:

$$\begin{aligned} x''_i &= \sum_k a_{ik} \sum_j b_{kj} x_j \\ &= \sum_j \left(\sum_k a_{ik} b_{kj} \right) x_j. \end{aligned}$$

Dafür kann auch geschrieben werden:

$$x''_i = \sum_j c_{ij} x_j \quad (4-22)$$

wobei

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj} \quad (4-23)$$

ist. Die aufeinanderfolgende Anwendung zweier orthogonaler Transformationen **A** und **B** ist demnach einer dritten linearen Transformation **C** äquivalent. Es kann gezeigt werden, daß wegen der Orthogonalität von **A** und **B** auch **C** eine orthogonale Transformation ist. Den ausführ-



lichen Beweis wollen wir in den Übungen führen. Symbolisch kann der resultierende Operator C als das Produkt der zwei Operatoren A und B angesehen werden:

$$C = AB,$$

und die Matrixelemente c_{ij} sind nach Definition die Elemente der Matrix, die man durch Multiplikation der zwei Matrizen A und B erhält.

Wir stellen fest, daß diese „Matrix“- oder Operatormultiplikation nicht kommutativ ist,

$$BA \neq AB,$$

denn nach Definition sind die Elemente der Transformation $D = BA$

$$d_{ij} = \sum_k b_{ik} a_{kj}. \quad (4-24)$$

Das ist im allgemeinen nicht in Übereinstimmung mit den Matrixelementen von C in Gl. (4-23). Somit hängt das endgültige Koordinatensystem von der Reihenfolge der Anwendung der Operatoren A und B ab, d.h. davon, ob zuerst A und dann B oder zuerst B und dann A angewendet wird. Jedoch ist die Matrizenmultiplikation assoziativ; in einem Produkt aus drei oder mehr Matrizen ist die Reihenfolge der *Multiplikationen* (nicht die der Faktoren!) unwichtig:

$$(AB)C = A(BC). \quad (4-25)$$

Das Nebeneinanderstellen von A und r in Gl. (4-19), um so die Operation von A auf das Koordinatensystem (oder auf den Vektor) zu charakterisieren, wurde als nur symbolisch bezeichnet. Aber durch die Ausdehnung unseres Konzeptes auf Matrizen kann es auch als Beschreibung einer wirklichen Matrizenmultiplikation angesehen werden. Bisher wurden nur quadratische Matrizen verwendet, d.h. solche mit gleicher Anzahl Reihen und Spalten. Es können jedoch auch einspaltige Matrizen wie x und x' vorkommen, die definiert sind durch

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}. \quad (4-26)$$

Das Produkt Ax , nach Definition eine Matrizenmultiplikation, ist eine einspaltige Matrix mit den Elementen

$$(Ax)_i = \sum_j a_{ij} x_j = x'_i.$$



Demnach kann Gl. (4-19) auch als Matrixgleichung

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (4-27)$$

geschrieben werden.

Die *Addition* zweier Matrizen, ein zwar nicht so wichtiger Begriff wie die Multiplikation, ist eine dennoch häufig verwendete Operation. Die Summe $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ ist eine Matrix \mathbf{C} , deren Elemente die Summe der entsprechenden Elemente von \mathbf{A} und \mathbf{B} sind:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Von größerer Wichtigkeit ist die zu \mathbf{A} inverse Transformation, die Operation, die \mathbf{r}' zurück in \mathbf{r} überführt. Diese Transformation nennt man \mathbf{A}^{-1} und ihre Matrixelemente bezeichnet man mit a'_{ij} . Wir haben damit den Satz von Gleichungen:

$$x_i = \sum_j a'_{ij} x'_j, \quad (4-28)$$

die mit

$$x'_k = \sum_i a_{ki} x_i \quad (4-29)$$

konsistent sein müssen. Substituieren wir x_i aus (4-28) in Gl. (4-29), so wird

$$\begin{aligned} x'_k &= \sum_i a_{ki} \sum_j a'_{ij} x'_j \\ &= \sum_j \left(\sum_i a_{ki} a'_{ij} \right) x'_j. \end{aligned} \quad (4-29')$$

Da die Komponenten von \mathbf{r}' unabhängig sind, ist Gl. (4-29') nur dann richtig, wenn sich die Summe über j identisch auf x'_k reduziert. Der Koeffizient von x'_j muß deshalb Eins für $j = k$ und Null für $j \neq k$ sein, symbolisch:

$$\sum_i a_{ki} a'_{ij} = \delta_{kj}. \quad (4-30)$$

Die linke Seite von Gl. (4-30) erkennt man leicht als das Matrixelement des Produktes $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$, während die rechte Seite das Element der als Einheitsmatrix $\mathbf{1}$ bekannten Matrix ist:

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4-31)$$



Gl. (4-30) kann deshalb geschrieben werden:

$$AA^{-1} = 1. \quad (4-32)$$

Sie zeigt den Grund, weshalb die inverse Matrix mit A^{-1} bezeichnet wird. Die Transformation, die 1 entspricht, heißt *identische Transformation*. Sie erzeugt keine Änderung im Koordinatensystem:

$$x = 1x.$$

Ähnlich läßt die Multiplikation einer Matrix A in irgendeiner Reihenfolge mit 1 die Matrix A unverändert:

$$1A = A1 = A.$$

Ändert man die Reihenfolge beim Beweis von Gl. (4-32), so kann man zeigen, daß A und A^{-1} kommutieren. Anstatt x_i durch die x' auszudrücken und in Gl. (4-29) zu substituieren, könnte man ebensogut Konsistenz verlangen, wenn man x' aus beiden Gleichungen eliminiert. Das führt ganz analog auf

$$\sum_j a'_{ij} a_{jk} = \delta_{ik}.$$

In Matrixschreibweise ist das

$$A^{-1}A = 1. \quad (4-33)$$

Das beweist die Behauptung.

Betrachten wir nun die Doppelsumme

$$\sum_{k,i} a_{ki} a'_{ij}.$$

Sie kann gelöst werden, indem man zuerst über k summiert:

$$\sum_i \left(\sum_k a_{ki} a_{ki} \right) a'_{ij}$$

oder zuerst über i :

$$\sum_k \left(\sum_i a_{ki} a'_{ij} \right) a_{kl}.$$

Wendet man die Orthogonalitätsbedingungen (4-15) an, so reduziert sich die Summe, in der ersten Schreibweise, auf

$$\sum_i \delta_{ii} a'_{ij} = a'_{ij}.$$

Andererseits kann dieselbe Summe in der zweiten Schreibweise mit Hilfe von Gl. (4-30) folgendermaßen geschrieben werden:

$$\sum_k \delta_{kj} a_{kl} = a_{jl}.$$



Somit stehen die Elemente der direkten Matrix A und der Reziproken A^{-1} in folgendem Zusammenhang:

$$a'_{ij} = a_{ji}. \quad (4-34)$$

Allgemein wird die Matrix, die man aus A durch Vertauschen von Reihen und Spalten erhält, *transponierte Matrix* genannt und mit \tilde{A} bezeichnet. Gl. (4-34) stellt demnach fest, daß für *orthogonale Matrizen* die reziproke Matrix mit der transponierten Matrix identisch ist; symbolisch:

$$A^{-1} = \tilde{A}. \quad (4-35)$$

Setzen wir dieses Ergebnis in Gl. (4-33) ein, so erhalten wir

$$\tilde{A}A = 1. \quad (4-36)$$

Das ist identisch mit dem Satz von Orthogonalitätsbedingungen (4-15), hier nur in abgekürzter Form geschrieben, wie man durch direktes Ausschreiben verifizieren kann.² Ähnlich kann man eine andere Form der Orthogonalitätsbedingungen aus Gl. (4-30) erhalten, indem man (4-34) einsetzt:

$$\sum_i a_{ki}a_{ji} = \delta_{kj}. \quad (4-37)$$

In symbolischer Form kann Gl. (4-37) geschrieben werden:

$$A\tilde{A} = 1.$$

Man kann sie direkt von (4-36) ableiten, indem man sie von links mit A und von rechts mit A^{-1} multipliziert.

Verbunden mit dem Begriff der transponierten Matrix, ist deren Komplexkonjugierte den Physikern als *adjungierte Matrix* bekannt. Sie wird durch ein Kreuz gekennzeichnet:

$$A^\dagger = (\tilde{A})^*. \quad (4-38)$$

Analog der Definition (4-36) für eine orthogonale Matrix erfüllt eine *unitäre Matrix* A die Bedingung

$$A^\dagger A = 1. \quad (4-39)$$

² Tatsächlich kann man (4-35) direkt aus den Orthogonalitätsbedingungen (4-36) erhalten. Die Kürze des Beweises zeigt uns die Mächtigkeit der symbolischen Verfahren. Multipliziert man (4-36) mit A^{-1} von rechts:

$$\tilde{A}AA^{-1} = A^{-1},$$

so ergibt sich mit (4-32)

$$\tilde{A} = A^{-1}.$$



In dem Problem, die Orientierung eines starren Körpers festzulegen, muß die Transformationsmatrix reell sein, denn sowohl x als auch x' sind reell. Es gibt dann keinen Unterschied zwischen der Orthogonalitäts- und der Unitaritätseigenschaft oder zwischen transponierten und adjungierten Matrizen. Kurz, eine reelle orthogonale Matrix ist unitär. Wir werden aber bald in diesem Kapitel und später im Zusammenhang mit der Relativitätstheorie Gelegenheit haben, komplexe Matrizen einzuführen. Dort ist die Unterscheidung wichtig.

Die zwei Interpretationen eines Operators, daß er nämlich einen Vektor transformiert oder andererseits das Koordinatensystem, sind beide mit eingeschlossen, wenn wir die Transformation eines Operators bei Änderung der Koordinaten aufsuchen. Wir wollen A als einen Operator ansehen, der auf einen Vektor F (oder auf eine einspaltige Matrix F) wirkt und dabei einen Vektor G erzeugt:

$$G = AF.$$

Wenn das Koordinatensystem durch eine Matrix B transformiert wird, werden die Komponenten des Vektors G im neuen System gegeben sein durch

$$BG = BAF,$$

wofür auch geschrieben werden kann

$$BG = BAB^{-1}BF. \quad (4-40)$$

Gl. (4-40) kann auch so interpretiert werden, daß man sagt, der Operator BAB^{-1} , der auf den im neuen System ausgedrückten Vektor F wirkt, erzeugt den Vektor G , der ebenfalls in neuen Koordinaten ausgedrückt ist. Wir können deshalb BAB^{-1} als die Form des Operators A ansehen, die er annimmt, wenn er auf einen neuen Achsensatz transformiert ist:

$$A' = BAB^{-1}. \quad (4-41)$$

Jede Matrixtransformation, die die Form von Gl. (4-41) hat, wird *Ähnlichkeitstransformation* genannt.

Es ist jetzt angebracht, die Eigenschaften der Determinante zu betrachten, die von den Elementen einer quadratischen Matrix gebildet wird. Wie üblich, wollen wir eine solche Determinante durch vertikale Striche kennzeichnen: $|A|$. Es sei bemerkt, daß die Definition der Matrizenmultiplikation mit der für die Multiplikation von Determinanten identisch ist (vgl. BÔCHER, *Introduction to Higher Algebra*, S. 26). Demnach ist

$$|AB| = |A| \cdot |B|.$$



Weil die Determinante der Einheitsmatrix 1 ist, kann die Determinantenform der Orthogonalitätsbedingungen Gl. (4-36) geschrieben werden:

$$|\tilde{A}| \cdot |A| = 1.$$

Da der Wert einer Determinante durch die Vertauschung von Reihen und Spalten nicht beeinflußt wird, können wir weiterhin schreiben:

$$|A|^2 = 1. \quad (4-42)$$

Das bedeutet, daß die Determinante einer orthogonalen Matrix nur + 1 oder - 1 sein kann. Wir werden später Gelegenheit haben, uns mit der geometrischen Bedeutung dieser zwei Werte zu befassen.

Wenn die Matrix nicht orthogonal ist, hat die Determinante natürlich nicht diese einfachen Werte. Es kann jedoch gezeigt werden, daß der Wert der Determinante gegenüber einer Ähnlichkeitstransformation invariant ist. Multiplizieren wir die Gleichung (4-41) für die transformierte Matrix von rechts mit B , so erhalten wir die Beziehung:

$$A'B = BA$$

oder in Determinantenform:

$$|A'| \cdot |B| = |B| \cdot |A|.$$

Da die Determinante von B nur eine Zahl ist, die von Null verschieden ist,³ können wir auf beiden Seiten durch $|B|$ dividieren, um das gewünschte Ergebnis zu erhalten:

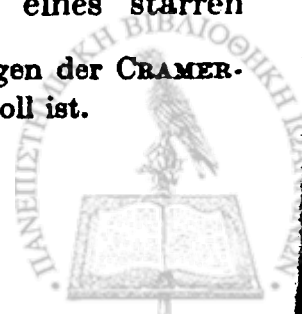
$$|A'| = |A|.$$

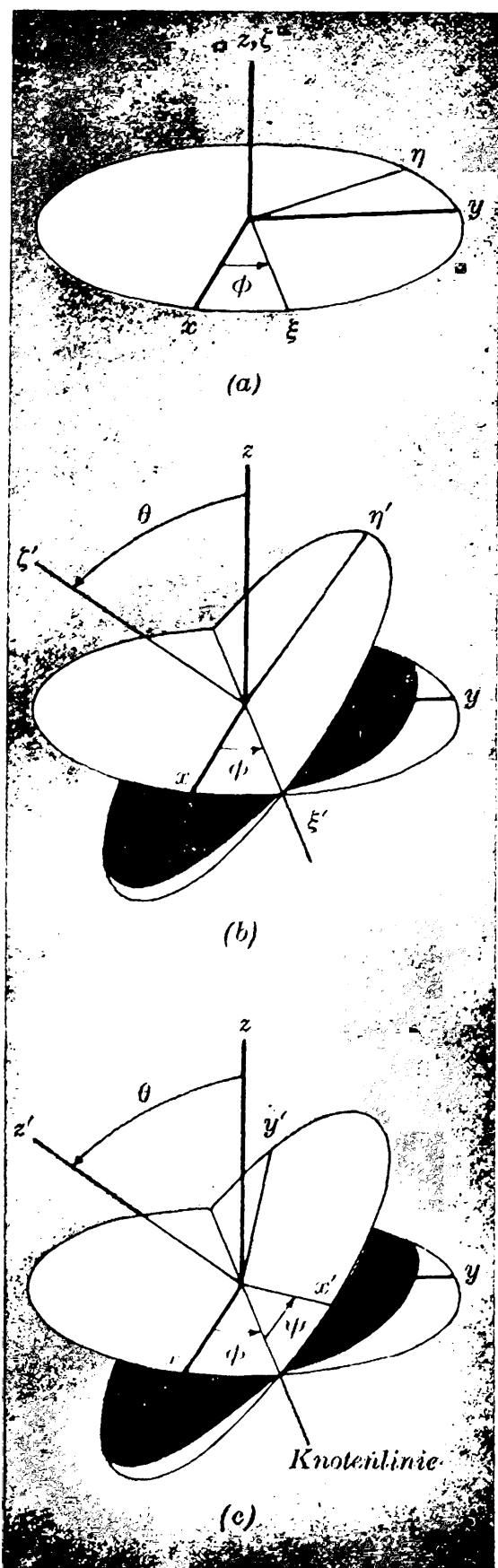
Später bei der Diskussion der Bewegung des starren Körpers werden alle diese Eigenschaften der Matrixtransformationen, besonders die für orthogonale Matrizen, angewendet. Zusätzlich werden andere Eigenschaften benötigt, die abgeleitet werden, wenn es die Umstände erfordern.

4-4 Die Eulerschen Winkel

Es wurde bereits festgestellt, daß die Elemente a_{ij} nicht unabhängig sind und deshalb nicht als generalisierte Koordinaten geeignet sind. Ehe wir die Bewegung starrer Körper in der LAGRANGESchen Formulierung der Mechanik aufstellen, wird es deshalb notwendig sein, drei unabhängige Parameter zu suchen, die die Orientierung eines starren

³ Wäre sie Null, so gäbe es keinen inversen Operator B^{-1} (wegen der CRAMER'schen Regel). Das ist aber erforderlich, damit Gl. (4-41) sinnvoll ist.





Körpers beschreiben. Nur wenn man solche generalisierten Koordinaten gefunden hat, kann man eine LAGRANGE-Funktion für das System angeben und die LAGRANGESchen Bewegungsgleichungen erhalten. Eine Anzahl solcher Parametersätze sind in der Literatur beschrieben worden, die gebräuchlichsten und nützlichsten sind jedoch die EULERSchen Winkel. Wir wollen deshalb jetzt diese Winkel definieren und zeigen, wie die Elemente der orthogonalen Transformationsmatrix durch sie ausgedrückt werden können.

Man kann die Transformation von einem cartesischen Koordinatensystem auf ein anderes mittels dreier aufeinanderfolgender Drehungen ausführen, die in einer bestimmten Reihenfolge vorzunehmen sind. Die EULERSchen Winkel sind dann als die drei aufeinanderfolgenden Drehwinkel definiert. Die Reihenfolge beginnt mit einer Drehung des ursprünglichen Achsensystems xyz um einen Winkel ϕ im Gegenuhrzeigersinn um die z -Achse. Das sich ergebende Koordinatensystem wird durch die $\xi\eta\zeta$ -Achsen bezeichnet. Im nächsten Schritt werden die Achsen $\xi\eta\zeta$ um die ξ -Achse im Gegenuhrzeigersinn um einen Winkel θ gedreht. Sie erzeugen ein anderes Zwischensystem, die $\xi'\eta'\zeta'$ -Achsen. Die ξ' -

Abb. 4-6. Die Drehungen, die die EULERSchen Winkel definieren.



Achse ist die Schnittgerade der xy - und der $\xi'\eta'$ -Ebene und wird Knotenlinie genannt. Schließlich werden die $\xi'\eta'\zeta'$ -Achsen im Gegenurzeigersinn um einen Winkel ψ um die ζ' -Achse gedreht. Es entsteht das gewünschte $x'y'z'$ -Achsensystem. Abb. 4-6 erläutert die verschiedenen Schritte der Drehungen. Die EULERSchen Winkel θ , ϕ und ψ legen somit die Orientierung des $x'y'z'$ -Systems relativ zum xyz -System vollständig fest und können deshalb als die drei benötigten generalisierten Koordinaten dienen.⁴

Die Elemente der vollständigen Transformation A kann man dadurch erhalten, daß man die Matrix als ein dreifaches Produkt der einzelnen Drehungen schreibt. Jede von ihnen besitzt eine verhältnismäßig einfache Matrixform. So kann die erste Drehung um z durch eine Matrix D beschrieben werden:

$$\xi = Dx,$$

dabei bedeuten ξ und x Spaltenmatrizen. Ähnlich kann die Transformation von $\xi\eta\zeta$ nach $\xi'\eta'\zeta'$ durch eine Matrix C beschrieben werden:

$$\xi' = C\xi$$

und die letzte Drehung auf $x'y'z'$ durch eine Matrix B :

$$x' = B\xi'.$$

Demnach ist die Matrix der vollständigen Transformation

$$x' = Ax$$

das Produkt der aufeinanderfolgenden Matrizen:

$$A = BCD.$$

⁴ Unglücklicherweise besteht in der Literatur keine Einheitlichkeit der Definition der EULERSchen Winkel. Die Unterschiede sind nicht groß, aber oft sind sie ausreichend, einen leichten Vergleich von Endformeln, wie etwa von Matrixelementen, zu verhindern. Die größte Verwirrung entsteht vielleicht durch den gelegentlichen Gebrauch von Links-Koordinatensystemen (wie bei OSGOOD und MARGENAU u. MURPHY). Häufiger ist die Gewohnheit, den Winkel der Knotenlinie von der y -Achse und nicht von der x -Achse aus zu messen. Diese Praxis, die charakteristisch für die britische Schule zu sein scheint (vgl. WHITTAKER, NEWBOULT, AMES und MURNAGHAN), beruht darauf, daß die zweite Drehung um η anstatt um ξ genommen wird. In einer solchen Bezeichnungsweise sind unsere Winkel ϕ und ψ dann gleich den Winkeln $\phi + \frac{\pi}{2}$ bzw. $\frac{\pi}{2} - \psi$. Autoren des Kontinents folgen gewöhnlich den hier gegebenen Definitionen, außer daß die Bedeutungen von ϕ und ψ oft vertauscht sind. Damit ist jedoch der Verwirrung noch nicht genug; viele Autoren quantenmechanischer Untersuchungen benutzen Drehungen im *Uhrzeigersinn* anstelle der hier getroffenen Vereinbarung der Zählung im *Gegenurzeigersinn*.



Nun ist die Transformation D eine Drehung um z und hat demnach eine Matrix der Form (vgl. Gl. (4-17)):

$$D = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4-43)$$

Die Transformation C entspricht einer Drehung um ξ mit der Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (4-44)$$

und schließlich ist B eine Drehung um ζ' und hat deshalb die gleiche Form wie D :

$$B = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4-45)$$

Für das Matrizenprodukt $A = BCD$ folgt dann

$$A = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & \cos \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \psi & -\sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (4-46)$$

Die inverse Transformation von Körperkoordinaten auf Raumachsen

$$x = A^{-1}x'$$

ist somit unmittelbar durch die transponierte Matrix \tilde{A} gegeben:

$$A^{-1} = \tilde{A} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & -\sin \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi & \sin \theta \sin \phi \\ \cos \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & -\sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (4-47)$$

Die Ausführung der Multiplikation und den Nachweis der Orthogonalität der Matrix A wollen wir als eine Übung lassen.

4-5 Die Cayley-Kleinschen Parameter

Man hat auch verschiedene andere Gruppen von Variablen verwendet, um die Orientierung eines starren Körpers zu beschreiben, und zwar meist aus Gründen der Zweckmäßigkeit bei speziellen Rechnungen. Eine dieser Gruppen ist so interessant, daß sie besondere Beachtung verdient – die sogenannten *CAYLEY-KLEINSchen Parameter*. Da sie aus vier Größen bestehen, sind diese Parameter nicht alle unabhängig und demnach nicht als generalisierte Koordinaten geeignet. Ursprünglich wurden sie in der klassischen Mechanik von FELIX KLEIN eingeführt, hauptsächlich um die Integration komplizierter gyro-



skopischer Probleme zu erleichtern. Heute beruht unser Hauptinteresse an ihnen auf ihrem engen Zusammenhang mit der Behandlung der Raumdrehung in der Quantenmechanik.

In den vorangehenden Abschnitten verwendeten wir gelegentlich einen zweidimensionalen reellen Raum mit Achsen x_1 und x_2 , um die Eigenschaften orthogonaler Transformationen zu erläutern. Wir wollen nun einen anderen zweidimensionalen Raum betrachten; diesmal habe er komplexe Achsen, die mit u und v bezeichnet werden sollen. Eine allgemeine lineare Transformation in einem solchen Raume lautet

$$\begin{aligned} u' &= \alpha u + \beta v, \\ v' &= \gamma u + \delta v \end{aligned} \quad (4-48)$$

mit der zugehörigen Transformationsmatrix

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}. \quad (4-49)$$

In der weiteren Diskussion wollen wir Q auf Transformationen beschränken, die unitär sind, und deren Determinante $+1$ ist. Es muß betont werden, daß das zwei verschiedene Bedingungen sind. Die Unitaritätseigenschaft (Gl. (4-39))

$$Q^t Q = 1 = Q Q^t \quad (4-50)$$

fordert nur, daß die Determinante den Betrag Eins hat:

$$|Q|^* |Q| = 1,$$

aber sie beschränkt nicht ihren Phasenwinkel. Die Bedingung, daß die Determinante $+1$ sei,

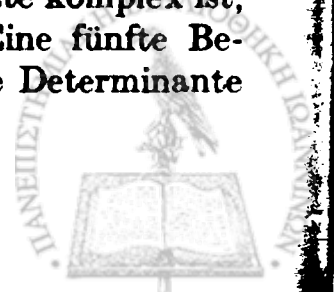
$$\alpha\delta - \beta\gamma = +1, \quad (4-51)$$

ist deshalb eine zusätzliche Forderung, die nicht in der Unitaritätseigenschaft enthalten ist.

Für die Matrix einer allgemeinen zweidimensionalen, linearen Transformation müssen *acht* Größen angegeben werden, da jedes der vier Elemente komplex ist. Jedoch reduzieren die auferlegten Bedingungen die Zahl der *unabhängigen* Größen. Ausführlich geschrieben lautet die Unitaritätsbedingung Gl. (4-50):

$$\begin{aligned} \alpha^* \alpha + \beta^* \beta &= 1 \\ \gamma^* \gamma + \delta^* \delta &= 1 \\ \alpha^* \gamma + \beta^* \delta &= 0. \end{aligned} \quad (4-52)$$

Die ersten zwei Gleichungen sind reell, während die letzte komplex ist, so daß sie zusammen vier Bedingungen enthalten. Eine fünfte Bedingung wird durch die Forderung geliefert, die an die Determinante



(4-51) gestellt wird. Deshalb enthält \mathbf{Q} nur drei unabhängige Größen, also genau so viele, wie zur Angabe der Orientierung eines starren Körpers erforderlich sind.

Die Reduktion auf unabhängige Parameter kann zum Teil ohne Schwierigkeit ausgeführt werden. So kann man wegen der letzten Gleichung in (4-52) schreiben:

$$\frac{\delta}{\gamma} = -\frac{\alpha^*}{\beta^*}. \quad (4-53)$$

In die Determinantenbedingungen eingesetzt, ergibt das

$$-(\alpha\alpha^* + \beta\beta^*) \frac{\gamma}{\beta^*} = 1.$$

Die erste der Gl. (4-52) stellt fest, daß die Größe in der Klammer Eins ist. Deshalb wird

$$\gamma = -\beta^*. \quad (4-54)$$

Es folgt dann aus (4-53), daß

$$\delta = \alpha^*. \quad (4-55)$$

Als Ergebnis dieser vier Bedingungen (Gl. (4-54) und (4-55)) könnte die Matrix \mathbf{Q} auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \quad (4-56)$$

mit der noch verbleibenden Bedingung

$$\alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1. \quad (4-57)$$

Oft werden wir es jedoch vorziehen, die Matrix in der Form (4-49) zu lassen.

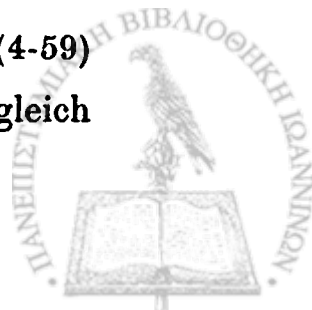
\mathbf{P} sei ein Matrixoperator in diesem Raum. Er habe die besondere Form

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}. \quad (4-58)$$

Mathematisch können x , y , z einfach als drei reelle Größen angesehen werden; physikalisch werden sie als Koordinaten eines Punktes im Raum interpretiert. Nehmen wir an, die Matrix \mathbf{P} werde durch die Matrix \mathbf{Q} in folgender Weise transformiert:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{Q}\mathbf{P}\mathbf{Q}^\dagger. \quad (4-59)$$

Wegen der Unitaritätseigenschaft von \mathbf{Q} ist die Adjungierte \mathbf{Q}^\dagger gleich



der Inversen Q^{-1} . Deshalb stellt Gl. (4-59) lediglich eine Ähnlichkeitstransformation von P dar, wenn der uv -Raum der unitären Transformation Q unterworfen wird. Wir stellen fest, daß die Adjungierte von P mit P identisch ist; die Matrix nennt man dann *selbstadjungiert* oder *hermiteisch*. Weiterhin ist die Summe der Diagonalelemente von P , *Spur* der Matrix genannt, hier Null. Nun kann gezeigt werden, daß sowohl die Hermitizitätseigenschaft als auch die Spur einer Matrix invariant gegenüber Ähnlichkeitstransformationen sind, vgl. die Übungen am Ende des Kapitels. Demnach muß P' ebenfalls selbstadjungiert sein und eine verschwindende Spur haben. Das ist nur dann richtig, wenn P' die Form hat:

$$P' = \begin{pmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{pmatrix}, \quad (4-60)$$

wobei x' , y' und z' reelle Größen sind. Die Determinante von P ist also auch invariant gegenüber der Ähnlichkeitstransformation (4-59), so daß wir die folgende Gleichheit schreiben können:

$$|P| = -(x^2 + y^2 + z^2) = -(x'^2 + y'^2 + z'^2) = |P'|.$$

Diese Feststellung erkennen wir als die Orthogonalitätsbedingung; sie fordert, daß die Länge des Vektors $r = xi + yj + zk$ durch die Transformation nicht verändert wird. Zu jeder unitären Matrix Q im komplexen zweidimensionalen Raum gehört deshalb eine reelle orthogonale Transformation im gewöhnlichen dreidimensionalen Raum.

Einen Einblick in die Natur dieses Zusammenhanges erhält man durch die folgenden Betrachtungen. Die reelle orthogonale Matrix, die von den Koordinaten x auf x' transformiert, werde mit B bezeichnet:

$$x' = Bx.$$

Die zugehörige unitäre Matrix bezeichnen wir mit Q_1 :

$$P' = Q_1 P Q_1^\dagger.$$

Eine zweite orthogonale Transformation von x' nach x'' werde durch eine Matrix A ausgeführt:

$$x'' = Ax'$$

mit der zugehörigen Matrix Q_2 :

$$P'' = Q_2 P' Q_2^\dagger.$$

Nun wird die direkte Transformation von x nach x'' durch die Matrix C erzeugt; sie ist definiert durch

$$C = AB.$$



Entsprechend wird die direkte Transformation von P nach P'' durch eine Ähnlichkeitstransformation mit einer Matrix Q_3 ausgeführt, die deshalb mit C zusammenhängen muß. Jedoch können wir die Transformation von P nach P'' auch durch die Gleichung

$$P'' = Q_2 Q_1 P Q_1^\dagger Q_2^\dagger$$

erhalten. Man kann leicht zeigen, daß

$$Q_1^\dagger Q_2^\dagger = (Q_2 Q_1)^\dagger.$$

Da das Produkt zweier unitärer Matrizen auch unitär ist, folgt, daß Q_3 mit dem Produkt $Q_2 Q_1$ identisch sein muß:

$$Q_3 = Q_2 Q_1.$$

Die Korrespondenz zwischen den komplexen unitären 2×2 -Matrizen und den reellen orthogonalen 3×3 -Matrizen ist derart, daß irgendeine Beziehung zwischen den Matrizen des einen Satzes auch durch die entsprechenden Matrizen des anderen Satzes erfüllt wird. Zwei solche Sätze von Matrizen nennt man *isomorph*.

Man kann die Elemente einer orthogonalen Matrix durch die Elemente der isomorphen Matrix Q ausdrücken. Wegen (4-54) und (4-55) ist die Adjungierte zu Q

$$Q^\dagger = \begin{pmatrix} \alpha^* & \gamma^* \\ \beta^* & \delta^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

Um die Rechnung zu vereinfachen, wollen wir die Abkürzungen x_+ und x_- einführen. Sie sind definiert durch

$$\begin{aligned} x_+ &= x + iy, \\ x_- &= x - iy. \end{aligned}$$

Die transformierte Matrix P' läßt sich dann schreiben als

$$P' = \begin{pmatrix} z' & x'_- \\ x'_+ & -z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & x_- \\ x_+ & -z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

oder, indem wir die Multiplikationen ausführen,

$$P' = \begin{pmatrix} (\alpha\delta + \beta\gamma)z - \alpha\gamma x_- + \beta\delta x_+ & -2\alpha\beta z + \alpha^2 x_- - \beta^2 x_+ \\ 2\gamma\delta z - \gamma^2 x_- + \delta^2 x_+ & -(\alpha\delta + \beta\gamma)z + \alpha\gamma x_- - \beta\delta x_+ \end{pmatrix}. \quad (4-61)$$

Durch Gleichsetzen der Matrixelemente können die Transformationsgleichungen zwischen den gestrichenen und den ungestrichenen Koordinatensystemen folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} x'_+ &= 2\gamma\delta z & - \gamma^2 x_- + \delta^2 x_+ \\ x'_- &= -2\alpha\beta z & + \alpha^2 x_- - \beta^2 x_+ \\ z' &= (\alpha\delta + \beta\gamma)z & - \alpha\gamma x_- + \beta\delta x_+. \end{aligned} \quad (4-62)$$



Schließlich können die Matrixelemente a_{ij} als Funktionen von α , β , γ und δ erhalten werden, indem man die Gl. (4-62) mit den gewöhnlichen Transformationsgleichungen (4-41) vergleicht. So kann für die letzte der Gl. (4-62) geschrieben werden:

$$z' = (\beta\delta - \alpha\gamma)x + i(\alpha\gamma + \beta\delta)y + (\alpha\delta + \beta\gamma)z.$$

Aus ihr folgt unmittelbar

$$a_{31} = (\beta\delta - \alpha\gamma) \quad a_{32} = i(\alpha\gamma + \beta\delta) \quad a_{33} = \alpha\delta + \beta\gamma.$$

Mit diesem Verfahren findet man leicht die vollständige Transformationsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\alpha^2 - \gamma^2 + \delta^2 - \beta^2) & \frac{i}{2}(\gamma^2 - \alpha^2 + \delta^2 - \beta^2) & \gamma\delta - \alpha\beta \\ \frac{i}{2}(\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 - \delta^2) & \frac{1}{2}(\alpha^2 + \gamma^2 + \beta^2 + \delta^2) & -i(\alpha\beta + \gamma\delta) \\ \beta\delta - \alpha\gamma & i(\alpha\gamma + \beta\delta) & \alpha\delta + \beta\gamma \end{pmatrix}. \quad (4-63)$$

Die Gl. (4-63) liefert eine Matrix, die die Orientierung eines starren Körpers angibt, und die durch die Größen α , β , γ und δ vollständig beschrieben ist. Wie die EULERSchen Winkel bieten diese vier Größen die Möglichkeit, die Orientierung des Körpers festzulegen; sie werden gewöhnlich als die CAYLEY-KLEINSchen *Parameter* bezeichnet.⁵ Daß die Matrixelemente reell sind, ist eine Folge der Hermitizitätseigenschaft von P . Man kann das auch direkt nachweisen, indem man die Matrixelemente mit Hilfe der Gl. (4-54) und (4-55) untersucht.

Die CAYLEY-KLEINSchen Parameter lassen sich durch die entsprechenden EULERSchen Winkel ausdrücken, wenn nötig durch direkten Vergleich der Elemente von Gl. (4-63) mit den durch ϕ , θ und ψ ausgedrückten Elementen. Jedoch besteht ein einfacheres und instruktiveres Verfahren darin, zuerst die Matrizen Q entsprechend den einzelnen aufeinanderfolgenden Drehungen, die die EULERSchen Winkel definieren, zu konstruieren, und sie dann zur vollständigen Matrix zu kombinieren. So wurde der Winkel ϕ als eine Drehung um die z -Achse definiert, wobei die Transformation, beschrieben durch x_+ , x_- und z , lautet:

⁵ Die Matrix A in Gl. (4-63) stimmt nicht mit der von WHITTAKER S. 12 gegebenen entsprechenden Form überein. Das liegt im wesentlichen an der anderen ursprünglichen Wahl der Matrix P . Selbstverständlich gibt es viele Wege, eine Matrix aufzustellen, deren Determinante $-r^2$ ist, und die besondere Wahl ist Sache der Konvention. Die hier in (4-58) benutzte Form wurde gewählt, um mit dem üblichen Brauch in der Quantenmechanik übereinzustimmen.



$$\begin{aligned}x'_+ &= e^{-i\phi} x_+ \\x'_- &= e^{i\phi} x_- \\z' &= z.\end{aligned}$$

Vergleichen wir diese Gleichungen mit (4-62), so wird klar, daß für diese einfache Drehung die Elemente von Q die Form haben müssen:

$$\gamma = \beta = 0 \quad \alpha^2 = e^{i\phi} \quad \delta^2 = e^{-i\phi}$$

oder

$$Q_\phi = \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}. \quad (4-64)$$

Wir bemerken, daß diese Matrixelemente die Bedingungen (4-54), (4-55) und (4-57) automatisch erfüllen.

Die nächste Drehung erfolgt um die x -Achse *im Gegenuhrzeigersinn* um einen Winkel θ . Die Identifizierung der entsprechenden Matrixelemente geht in ähnlicher Weise vor sich, jedoch werden die Rechnungen ziemlich mühsam. Es soll einfach angegeben werden, daß die entsprechende Matrix Q folgendermaßen lautet:

$$Q_\theta = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & i \sin \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (4-65)$$

Zur Prüfung kann man direkt verifizieren, daß

$$\begin{aligned}& \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & i \sin \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & x_- \\ x_+ & -z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -i \sin \frac{\theta}{2} \\ -i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z \cos \theta - y \sin \theta & x - i(y \cos \theta + z \sin \theta) \\ x + i(y \cos \theta + z \sin \theta) & -z \cos \theta + y \sin \theta \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Das führt auf die gewünschte Transformation

$$\begin{aligned}x' &= x \\y' &= y \cos \theta + z \sin \theta \\z' &= -y \sin \theta + z \cos \theta.\end{aligned}$$

Die letzte Drehung, die ψ definiert, erfolgt wieder um die z -Achse, so daß gilt

$$Q_\psi = \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix}. \quad (4-66)$$



In Abschnitt 4-4 erhielten wir die orthogonale Matrix für die vollständige Transformation als das Produkt der einzelnen Matrizen für jede der drei Drehungen. Aus dem Isomorphismus der reellen orthogonalen 3×3 -Matrizen mit den Matrizen Q folgt, daß Q für die vollständige Transformation ebenfalls durch das Produkt der drei Drehungsmatrizen Q_ψ , Q_θ , Q_ϕ gegeben ist:

$$Q = Q_\psi Q_\theta Q_\phi = \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & i \sin \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}$$

oder

$$Q = \begin{pmatrix} e^{i(\psi+\phi)/2} \cos \frac{\theta}{2} & ie^{i(\psi-\phi)/2} \sin \frac{\theta}{2} \\ ie^{-i(\psi-\phi)/2} \sin \frac{\theta}{2} & e^{-i(\psi+\phi)/2} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (4-67)$$

Die CAYLEY-KLEINSchen Parameter als Funktionen der EULERSchen Winkel lauten somit

$$\begin{aligned} \alpha &= e^{i(\psi+\phi)/2} \cos \frac{\theta}{2} & \beta &= ie^{i(\psi-\phi)/2} \sin \frac{\theta}{2} \\ \gamma &= ie^{-i(\psi-\phi)/2} \sin \frac{\theta}{2} & \delta &= e^{-i(\psi+\phi)/2} \cos \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad (4-68)$$

Das vervollständigt die gewünschte Identifizierung.

Es sei bemerkt, daß die Matrix P als Summe von drei Matrizen geschrieben werden kann:

$$P = x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z, \quad (4-69)$$

wobei σ_x , σ_y und σ_z die drei sogenannten PAULISchen Spin-Matrizen sind:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4-70)$$

Diese drei bilden zusammen mit der Einheitsmatrix

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

einen Satz von vier unabhängigen Matrizen. Folglich kann jede 2×2 -Matrix, die vier unabhängige Größen enthält, als lineare Funktion von ihnen ausgedrückt werden. Die Matrizen Q für die Drehung um eine Koordinatenachse können durch die σ in besonders einfacher



Form ausgedrückt werden. Zum Beispiel kann \mathbf{Q}_θ für die Drehung um die x -Achse, Gl. (4-65), geschrieben werden:

$$\mathbf{Q}_\theta = 1 \cos \frac{\theta}{2} + i\sigma_x \sin \frac{\theta}{2}. \quad (4-71)$$

Ähnlich hat die Matrix \mathbf{Q}_ϕ für die Drehung um die z -Achse die Form

$$\mathbf{Q}_\phi = \begin{pmatrix} \cos \frac{\phi}{2} + i \sin \frac{\phi}{2} & 0 \\ 0 & \cos \frac{\phi}{2} - i \sin \frac{\phi}{2} \end{pmatrix} = 1 \cos \frac{\phi}{2} + i\sigma_z \sin \frac{\phi}{2}. \quad (4-72)$$

Man kann direkt nachweisen, daß eine Drehung um die y -Achse die gleiche Matrixform wie in Gl. (4-72) hat, nur ist σ_z durch σ_y zu ersetzen. Alle elementaren Drehungsmatrizen sind somit durch ähnliche Ausdrücke gegeben. Sie enthalten nur die Einheitsmatrix und die entsprechende σ -Matrix. Jede der PAULISCHEN Spin-Matrizen gehört deshalb zu einer Drehung um eine bestimmte Achse und kann deshalb als der *Einheitsrotator* für diese Achse aufgefaßt werden.

Charakteristisch für die CAYLEY-KLEINSCHEN Parameter und für die sie enthaltenden Matrizen sind die immer auftretenden halben Winkel. Diese Besonderheit führt zu einigen eigentümlichen Eigenschaften des uv -Raumes. Zum Beispiel reproduziert eine Drehung des gewöhnlichen Raumes um die z -Achse um den Winkel 2π lediglich das ursprüngliche Koordinatensystem. Wenn in der Matrix \mathbf{D} des vorigen Abschnittes ϕ gleich 2π gesetzt wird, dann ist $\cos \phi = 1$, $\sin \phi = 0$, und \mathbf{D} reduziert sich richtig auf die Einheitsmatrix 1 , die der identischen Transformation entspricht. Wird andererseits dieselbe Substitution in \mathbf{Q}_ϕ in Gl. (4-64) gemacht, so erhalten wir

$$\mathbf{Q}_{2\pi} = \begin{pmatrix} e^{i\pi} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

das -1 , aber nicht 1 ist. Gleichzeitig muß die 2×2 -Matrix 1 auch der dreidimensionalen identischen Transformation entsprechen. Demnach gibt es zwei \mathbf{Q} -Matrizen, 1 und -1 , entsprechend der 3×3 -Einheitsmatrix. Wenn eine Matrix \mathbf{Q} einer reellen orthogonalen Matrix entspricht, dann entspricht im allgemeinen auch $-\mathbf{Q}$ derselben Matrix. Der Isomorphismus zwischen den zwei Sätzen enthält somit in diesem Falle eine ein-eindeutige Korrespondenz zwischen der einzelnen 3×3 -Matrix und dem Matrizenpaar $(\mathbf{Q}, -\mathbf{Q})$ nicht aber zwischen den individuellen Matrizen. In diesem Sinne sagt man, daß die Matrix \mathbf{Q} eine *zweideutige* Funktion der entsprechenden dreidimensionalen orthogonalen Matrix ist.



Eine solche paradoxe Situation darf uns nicht verwirren. Wie hier dargetan, ist der uv -Raum lediglich eine mathematische Konstruktion, allein dazu ersonnen, eine Korrespondenz zwischen 3×3 - und 2×2 -Matrizen bestimmten Typs herzustellen. Man darf natürlich nicht fordern oder erwarten, daß ein solcher Raum die gleichen Eigenschaften wie ein physikalischer dreidimensionaler Raum hat. Die Mathematiker haben sich ausführlich mit den Eigenschaften des uv -Raumes befaßt und den zweidimensionalen komplexen Vektor in diesem Raum mit dem Ausdruck *Spinor* bezeichnet. Es zeigt sich, daß in der Quantenmechanik der Spinorraum der physikalischen Realität etwas näher kommt, denn, um die Wirkung des „Spins“ des Elektrons mit einzuschließen, muß die Wellenfunktion oder Teile von ihr einen Spinor bilden. Tatsächlich sind die halben Winkel und die sich ergebende Zweideutigkeit eng mit der Tatsache verknüpft, daß der Spin halbzahlig ist.⁶ Wollten wir den Gegenstand weiterverfolgen, so würde uns das aus dem Bereich der klassischen Mechanik hinausführen.

4-6 Das Eulersche Theorem über die Bewegung eines starren Körpers

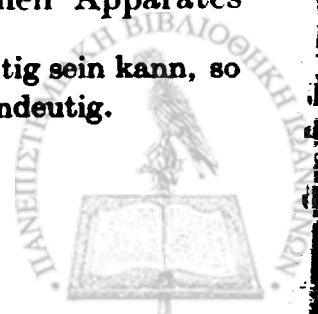
Die Diskussionen in den vorangehenden Abschnitten liefern einen vollständigen mathematischen Apparat zur Beschreibung der Bewegung eines starren Körpers. Zu irgendeinem Zeitpunkt läßt sich die Orientierung des Körpers durch eine orthogonale Transformation festlegen, deren Elemente durch einen geeigneten Parametersatz ausgedrückt werden können. Im Laufe der Zeit wird sich die Orientierung ändern, und deshalb wird die Transformationsmatrix eine Funktion der Zeit sein, $A(t)$ geschrieben. Werden die Körperachsen so gewählt, daß sie mit den Raumachsen zur Zeit $t = 0$ zusammenfallen, dann ist die Transformation am Anfang die identische Transformation:

$$A(0) = 1.$$

Zu irgendeiner späteren Zeit wird sich $A(t)$ im allgemeinen von der identischen Transformation unterscheiden, aber da die physikalische Bewegung kontinuierlich sein muß, muß $A(t)$ eine stetige Funktion der Zeit sein. Man sagt, die Transformation entwickelt sich *stetig aus der identischen Transformation*.

Mit dieser Methode, die Bewegung zu beschreiben, und unter Verwendung allein des bereits eingeführten mathematischen Apparates

⁶ Wenn auch die Wellenfunktion bezüglich Drehung zweideutig sein kann, so bleiben natürlich alle physikalisch meßbaren Eigenschaften eindeutig.



sind wir in der Lage, die wichtigen Eigentümlichkeiten der Bewegung starrer Körper abzuleiten. Von grundlegender Wichtigkeit ist das sogenannte *EULERSche Theorem*: *Die allgemeine Auslenkung eines starren Körpers, von dem ein Punkt festgehalten wird, ist eine Drehung um eine Achse.*

Wird der feste Punkt als Ursprung des körperfesten Achsensystems gewählt, dann enthält die Auslenkung des starren Körpers keine Translation der Körperachsen. Lediglich die Orientierung ändert sich. Das Theorem stellt dann fest, daß das körperfeste Achsensystem zu irgendeiner Zeit t stets durch eine einzige Drehung des ursprünglichen Achsensystems erhalten werden kann (von dem angenommen ist, daß es mit dem raumfesten System zusammenfällt). Mit anderen Worten, die durch die Matrix A dargestellte *Operation*, die die physikalische Bewegung des starren Körpers beschreibt, ist eine *Drehung*. Nun ist es für eine Drehung charakteristisch, daß eine Richtung, nämlich die Drehachse, durch die Operation unberührt bleibt. So muß ein Vektor, der auf der Drehachse liegt, die gleichen Komponenten in der Anfangs- und Endlage des Achsensystems haben. Die andere notwendige Bedingung für eine Drehung, daß der Betrag der Vektoren ungeändert bleibt, wird automatisch durch die Orthogonalitätsbedingungen geliefert. Demnach ist das EULERSche Theorem bewiesen, wenn man zeigen kann, daß es einen Vektor R gibt, der die gleichen Komponenten in beiden Systemen hat. Unter Verwendung von Matrixsymbolen für den Vektor heißt das

$$R' = AR = R. \quad (4-73)$$

Gl. (4-73) ist ein spezieller Fall einer allgemeineren Gleichung

$$R' = AR = \lambda R, \quad (4-74)$$

in der λ eine Konstante ist, die komplex sein kann. Die Werte von λ , für die Gl. (4-74) lösbar ist, werden die charakteristischen Werte oder *Eigenwerte* der Matrix A genannt. Das Problem, die die Gl. (4-74) befriedigenden Vektoren zu finden, heißt das *Eigenwertproblem* für die gegebene Matrix, und Gl. (4-74) selbst wird als *Eigenwertgleichung* bezeichnet. Entsprechend heißen die Lösungsvektoren die *Eigenvektoren* von A . Das EULERSche Theorem kann nun erneut in der folgenden Formulierung aufgestellt werden:

Die reelle orthogonale Matrix, die die physikalische Bewegung eines starren Körpers beschreibt, von dem ein Punkt festgehalten ist, hat den Eigenwert $+1$.

Die Eigenwertgl. (4-74) können geschrieben werden:

$$(A - \lambda I)R = 0 \quad (4-75)$$



oder in ausführlicher Form:

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)X + a_{12}Y + a_{13}Z &= 0, \\ a_{21}X + (a_{22} - \lambda)Y + a_{23}Z &= 0, \\ a_{31}X + a_{32}Y + (a_{33} - \lambda)Z &= 0. \end{aligned} \quad (4-76)$$

Die Gl. (4-76) bilden einen Satz von drei homogenen simultanen Gleichungen für die Komponenten X , Y , Z des Eigenvektors \mathbf{R} . Als solche können sie niemals bestimmte Werte für die drei Komponenten, sondern nur Verhältnisse der Komponenten liefern. Physikalisch entspricht das dem Umstand, daß nur die *Richtung* des Eigenvektors festgelegt werden kann, der Betrag bleibt unbestimmt. Das Produkt einer Konstanten mit einem Eigenvektor ist auch ein Eigenvektor. Auf jeden Fall können die homogenen Gl. (4-76) nur dann eine Lösung haben, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet:

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (4-77)$$

Gl. (4-77) ist als *charakteristische Gleichung* oder *Säkulargleichung* der Matrix bekannt, und die Werte von λ , durch die die Gleichung befriedigt wird, sind die gewünschten Eigenwerte. Das EULERSche Theorem reduziert sich auf die Feststellung, daß für die in Betracht kommenden reellen orthogonalen Matrizen die Säkulargleichung die Wurzel $\lambda = +1$ haben muß.

Im allgemeinen wird die Säkulargleichung drei Wurzeln und drei entsprechende Eigenvektoren haben. Zur bequemeren Diskussion wird oft die Bezeichnung X_1 , X_2 , X_3 anstelle von X , Y , Z verwendet. In dieser Bezeichnungsweise werden die Komponenten der Eigenvektoren durch X_{ik} gekennzeichnet; der erste Index weist auf die besondere Komponente hin, der zweite gibt an, welcher der drei Eigenvektoren gemeint ist. Ein typisches Glied der Gruppe von Gleichungen (4-76) wird dann folgendermaßen geschrieben:

$$\sum_j a_{ij} X_{jk} = \lambda_k X_{ik}$$

oder

$$\sum_j a_{ij} X_{jk} = \sum_j X_{ij} \delta_{jk} \lambda_k. \quad (4-78)$$

Beide Seiten der Gl. (4-78) haben die Form eines Elementes einer Produktmatrix; die linke Seite enthält entsprechend dem Produkt von \mathbf{A} mit einer Matrix \mathbf{X} die Elemente X_{jk} , die rechte Seite enthält

Elemente entsprechend dem Produkt von X mit einer Matrix, deren jk -tes Element $\delta_{jk}\lambda_k$ ist. Die letzte Matrix ist diagonal, und ihre Diagonalelemente sind die Eigenwerte von A . Wir werden deshalb die Matrix mit λ bezeichnen:

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (4-79)$$

Gl. (4-78) ist somit gleichbedeutend mit der Matrixgleichung

$$AX = X\lambda,$$

oder wenn wir von links mit X^{-1} multiplizieren,

$$X^{-1}AX = \lambda. \quad (4-80)$$

Nun hat die linke Seite die Form einer Ähnlichkeitstransformation, die auf A wirkt. (Man hat lediglich X^{-1} durch das Symbol Y zu ersetzen, um sie auf die Form der Gl. (4-41) zurückzuführen.) Somit liefert Gl. (4-80) den folgenden Zugang zu dem Eigenwertproblem: Wir suchen eine Matrix, die A in eine Diagonalmatrix transformiert; deren Elemente sind dann die gewünschten Eigenwerte.

Um das EULERSche Theorem zu beweisen, ist es zweckmäßig, zunächst einige einfache Hilfssätze über die Natur der Eigenwerte herzuleiten:

1. *Die Eigenwerte haben alle den Betrag Eins.* Das folgt aus der Orthogonalität von A . Obwohl alle Elemente von A reell sind, muß man mit der Möglichkeit rechnen, daß die Säkulargleichung komplexe Wurzeln hat. In einem solchen Falle beziehen sich die entsprechenden Eigenvektoren auf einen komplexen Raum und existieren nicht im wirklichen physikalischen Raum. Der Betrag eines komplexen Vektors ist durch die Quadratsumme nicht der Komponenten, sondern der *Beträge* der Komponenten bestimmt:

$$|X|^2 + |Y|^2 + |Z|^2 = \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{R} = |\mathbf{R}|^2. \quad (4-81)$$

Die Orthogonalitätsbedingung fordert dann, daß die Transformation den Betrag des Vektors \mathbf{R} ungeändert läßt:

$$\mathbf{R}^{*'} \cdot \mathbf{R}' = \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{R}.$$

Ist jedoch \mathbf{R} ein Eigenvektor, so gilt auch

$$\mathbf{R}^{*'} \cdot \mathbf{R}' = \lambda^* \lambda \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{R},$$

und somit haben wir das gewünschte Ergebnis:

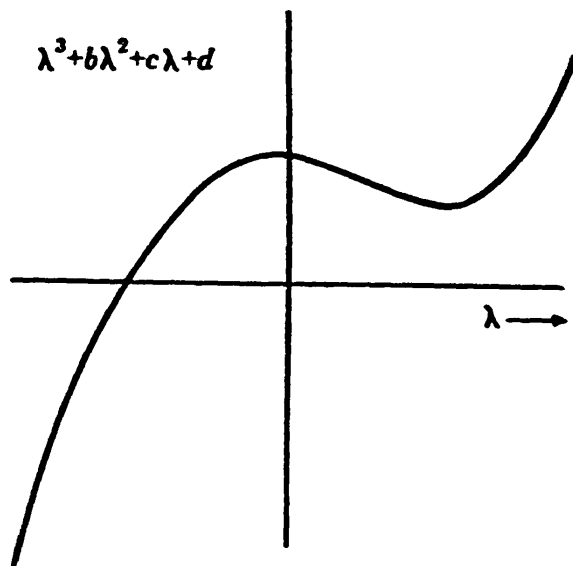
$$\lambda^* \lambda = 1. \quad (4-82)$$



Natürlich gibt dieser Hilfssatz keine Auskunft über den Phasenwinkel von λ .

2. Eine reelle orthogonale 3×3 -Matrix hat mindestens einen reellen Eigenwert. Die Säkulargleichung (4-77) ist eine kubische Gleichung für λ von der üblichen Form:

$$\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0. \quad (4-83)$$



Da die Matrix A reell ist, werden auch alle Koeffizienten reell sein. Für große negative λ wird die linke Seite von Gl. (4-83) groß und negativ sein, während sie für große positive λ groß und positiv sein wird. Demnach muß die Kurve des kubischen Polynoms die Achse mindestens einmal zwischen $\lambda = -\infty$ und $\lambda = +\infty$ schneiden. Damit ist der Hilfssatz bewiesen. Wegen Hilfssatz 1 kann diese reelle Wurzel nur ± 1 sein.

Abb. 4-7. Die Säkular determinante als eine Funktion von λ .

Die Determinante der Matrix λ ist gleich dem Produkt der drei Eigenwerte $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$. Da die Determinante einer Matrix invariant gegenüber Ähnlichkeitstransformationen ist, folgt, daß das Produkt auch die Determinante von A ist:

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = |A|.$$

Demnach kann das Produkt der Wurzeln höchstens $+1$ oder -1 sein. Hilfssatz 3 stellt nun fest, daß der Wert -1 ausgeschlossen werden muß.

3. Für die möglichen Auslenkungen eines starren Körpers muß das Produkt der Wurzeln der Säkular determinante $+1$ sein. Betrachten wir eine einfache Matrix mit der Determinante -1 :

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1.$$

Die Transformation S ändert das Vorzeichen jeder der Komponenten oder Koordinatenachsen (vgl. Abb. 4-8). Eine solche Operation transformiert ein Koordinaten-Rechtssystem in ein Linkssystem und wird als *Inversion* oder *Spiegelung* der Koordinatenachsen bezeichnet.

Der Natur dieser Operation nach ist es klar, daß die Inversion eines Rechtssystems in ein Linkssystem niemals durch irgendeine

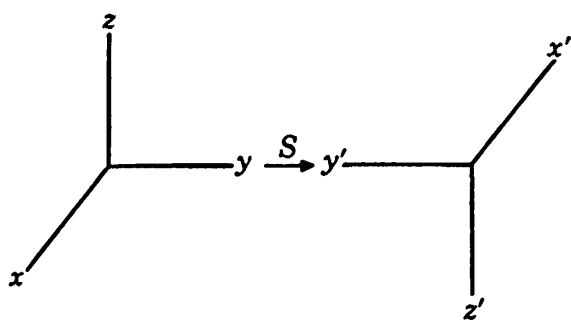


Abb. 4-8. Inversion der Koordinatenachsen.

starre Änderung der Orientierung der Koordinatenachsen erreicht werden kann. Deshalb entspricht eine Inversion niemals einer physikalischen Auslenkung eines starren Körpers. Was für S gilt, gilt gleichermaßen für jede Matrix, deren Determinante -1 ist, denn jede solche Matrix kann als Produkt

von S mit einer Matrix geschrieben werden, deren Determinante $+1$ ist, und enthält somit die Inversionsoperation. Folglich kann sie nicht eine starre Orientierungsänderung beschreiben. Deshalb müssen die Transformationen, die die Bewegung eines starren Körpers darstellen, auf Matrizen mit der Determinante $+1$ beschränkt werden. Eine andere Methode, zu diesem Schluß zu kommen, geht von der Tatsache aus, daß die Transformationsmatrix stetig aus der Einheitsmatrix hervorgehen muß, die natürlich die Determinante $+1$ hat. Es wäre mit der Stetigkeit der Bewegung unvereinbar, hätte man eine Matrix, deren Determinante zu irgendeiner gegebenen Zeit plötzlich von ihrem Anfangswert $+1$ auf -1 überginge.⁷ Ein weiterer Hilfssatz wird benötigt:

4. *Das Komplexkonjugierte eines Eigenwertes ist auch ein Eigenwert.* Dieser Schluß folgt unmittelbar aus der Eigenschaft der Koeffizienten in der Säkulargl. (4-83), reell zu sein. Ist λ eine Lösung, dann zeigt das Konjugiertkomplexe von Gl. (4-83), daß λ^* eine Lösung derselben Gleichung ist. Somit treten komplexe Eigenwerte stets in Paaren auf, die zueinander komplexkonjugiert sind.

Mit diesen aufgestellten Hilfssätzen wollen wir jetzt den Beweis des EULERSCHEN Theorems führen. Betrachten wir die möglichen Eigenwerte der reellen orthogonalen Matrix mit der Determinante $+1$. Alle drei Wurzeln können nicht reell und verschieden sein, denn reelle Wurzeln können nur $+1$ oder -1 sein. Sind alle Wurzeln reell, und zwei von ihnen gleich, dann muß die dritte Wurzel $+1$ sein, sonst wäre die Determinante nicht $+1$. Außer für den trivialen Fall dreier gleicher Wurzeln $+1$ (das ist die identische Transformation) bleibt nur die Möglichkeit, daß eine Wurzel reell und zwei komplex sind.

⁷ Orthogonale Transformationen mit einer Determinante -1 werden *uneigentliche Drehungen* genannt im Gegensatz zu Matrizen mit der Determinante $+1$, die, wie durch den EULERSCHEN Satz gezeigt werden wird, *eigentliche Drehungen* sind.



Aber die zwei komplexen Wurzeln sind komplexkonjugierte und ihr Produkt ist $+1$, so daß die einzelne reelle Wurzel $+1$ sein muß, um die richtige Determinante zu ergeben. Bei einer nichttrivialen physikalischen Transformation gibt es somit einen und nur einen Eigenwert $+1$. Das ist die Aussage des EULERSchen Theorems.

Die Richtungskosinus der Drehachsen kann man nun dadurch erhalten, daß man in die Eigenwertgl. (4-76) $\lambda = 1$ einsetzt und sie nach X , Y und Z auflöst.⁸ Der Drehwinkel Φ kann ebenfalls ohne Schwierigkeit erhalten werden. Vermittels einer Ähnlichkeitstransformation ist es stets möglich, die Matrix A auf ein Koordinatensystem zu transformieren, dessen z -Achse längs der Drehachse liegt. In einem solchen Koordinatensystem stellt A' eine Drehung um die z -Achse um den Winkel Φ dar und hat deshalb die Form

$$A' = \begin{pmatrix} \cos \Phi & \sin \Phi & 0 \\ -\sin \Phi & \cos \Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Spur (vgl. Abschnitt 4-5) von A' ist einfach

$$1 + 2 \cos \Phi.$$

Da eine Spur stets invariant gegenüber Ähnlichkeitstransformationen ist, muß das auch für den Wert der Spur von A , in seiner ursprünglichen Form, gelten:

$$\sum_i a_{ii} = 1 + 2 \cos \Phi. \quad (4-84)$$

Gl. (4-84) liefert den Drehwinkel in Abhängigkeit von den Matrixelementen. Beschreibt man zum Beispiel a_{ii} durch die EULERSchen Winkel, so kann der Drehwinkel Φ als eine Funktion der aufeinanderfolgenden Drehwinkel ϕ , θ , ψ ausgedrückt werden.

Eine unmittelbare Folge des EULERSchen Theorems ist der Satz von CHASLE: *Die allgemeinste Auslenkung eines starren Körpers setzt sich zusammen aus einer Translation und einer Drehung.* Ein ausführlicher Beweis ist kaum nötig. Wir stellen fest, daß dann, wenn die Zwangsbedingung der Bewegung mit einem festgehaltenen Punkt beseitigt

⁸ Gibt es mehrfache Wurzeln der Säkulargleichung, dann können die entsprechenden Eigenvektoren nicht so einfach gefunden werden, vgl. die Abschnitte 5-4 und 10-2. Tatsächlich ist es nicht immer möglich, eine allgemeine Matrix vollständig zu diagonalisieren, wenn die Eigenwerte nicht alle verschieden sind. Diese Ausnahmen sind für die gegenwärtigen Betrachtungen unwichtig, da der EULERSche Satz zeigt, daß für alle nichttrivialen orthogonalen Matrizen $+1$ eine einfache Wurzel ist.



wird, drei Freiheitsgrade der Translation für den Ursprung des körperfesten Achsensystems hinzukommen.

4-7 Infinitesimale Drehungen

Es ist verlockend zu versuchen, der durch eine orthogonale Transformation dargestellten endlichen Drehung einen Vektor zuzuordnen. Gewiß kann eine Richtung angegeben werden – die der Drehachse – und auch ein Betrag, z.B. der Drehwinkel. Man erkennt aber bald, daß einer solchen Korrespondenz kein Erfolg beschieden ist. Nehmen wir an, A und B seien zwei solche „Vektoren“, die den Transformationen A und B zugeordnet sind. Sollen es Vektoren sein, dann müssen sie bezüglich der Addition kommutativ sein,

$$A + B = B + A.$$

Aber die Addition zweier Drehungen, d.h., das Ausführen einer Drehung nach der anderen, entspricht, wie wir sahen, dem Produkt AB der zwei Matrizen. Die Matrizenmultiplikation ist jedoch nicht kommutativ, $AB \neq BA$, und demnach sind A und B nicht kommutativ bezüglich der Addition und dürfen nicht als Vektoren angesehen werden. Dieser Schluß, daß die Summe endlicher Drehungen von der Reihenfolge der Drehungen abhängt, wird durch ein einfaches Experiment eindrucksvoll demonstriert. So zeigt Abb. 4-9 die Reihenfolge der Stationen, die man erreicht, wenn man einen Quader erst um 90° um die z -Achse und dann um 90° um die y -Achse dreht, während Abb. 4-10 dieselben Drehungen in umgekehrter Reihenfolge darstellt. Die endgültigen Lagen des Quaders sind für die beiden Reihenfolgen wesentlich verschieden.

Obwohl eine endliche Drehung nicht durch einen einzelnen Vektor dargestellt werden kann, gelten dieselben Einwände nicht, wenn nur *infinitesimale Drehungen* betrachtet werden. Eine infinitesimale

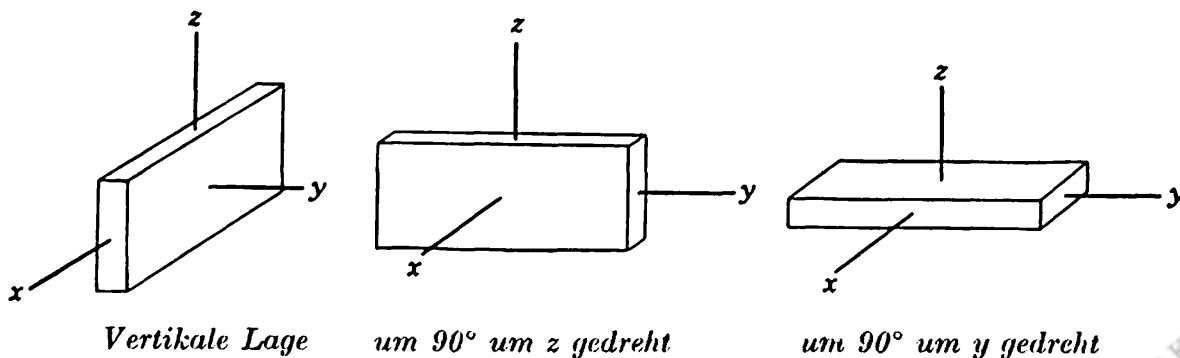


Abb. 4-9. Die Wirkung zweier Drehungen in gegebener Reihenfolge.



Drehung ist eine orthogonale Transformation der Koordinatenachsen, für die die Komponenten eines Vektors in beiden Koordinatensätzen nahezu gleich sind – die Änderung ist infinitesimal. So wäre die Komponente x'_1 eines Vektors r praktisch gleich x_1 ; die Differenz ist außerordentlich klein:

$$x'_1 = x_1 + \epsilon_{11}x_1 + \epsilon_{12}x_2 + \epsilon_{13}x_3. \quad (4-85)$$

Die Matrixelemente $\epsilon_{11}, \epsilon_{12}$ usw. sind als infinitesimale Größen anzusehen, so daß in den folgenden Rechnungen nur die erste, nichtverschwindende Ordnung in den ϵ_{ij} berücksichtigt zu werden braucht. Für irgendeine allgemeine Komponente x'_i können die Gleichungen der infinitesimalen Transformation geschrieben werden:

$$x'_i = x_i + \sum_j \epsilon_{ij}x_j$$

oder

$$x'_i = \sum_j (\delta_{ij} + \epsilon_{ij})x_j. \quad (4-86)$$

Die Größe δ_{ij} erkennen wir als das Element der Einheitsmatrix wieder. Gl. (4-86) lautet also in Matrixschreibweise:

$$x' = (1 + \epsilon)x. \quad (4-87)$$

Gl. (4-87) stellt fest, daß die typische Form für die Matrix einer infinitesimalen Transformation $1 + \epsilon$ ist, d.h., sie ist nahezu die identische Transformation, sie unterscheidet sich von ihr höchstens durch einen infinitesimalen Operator.

Man kann nun sehen, daß die Reihenfolge der Operationen für infinitesimale Transformationen unwichtig ist, mit anderen Worten, sie

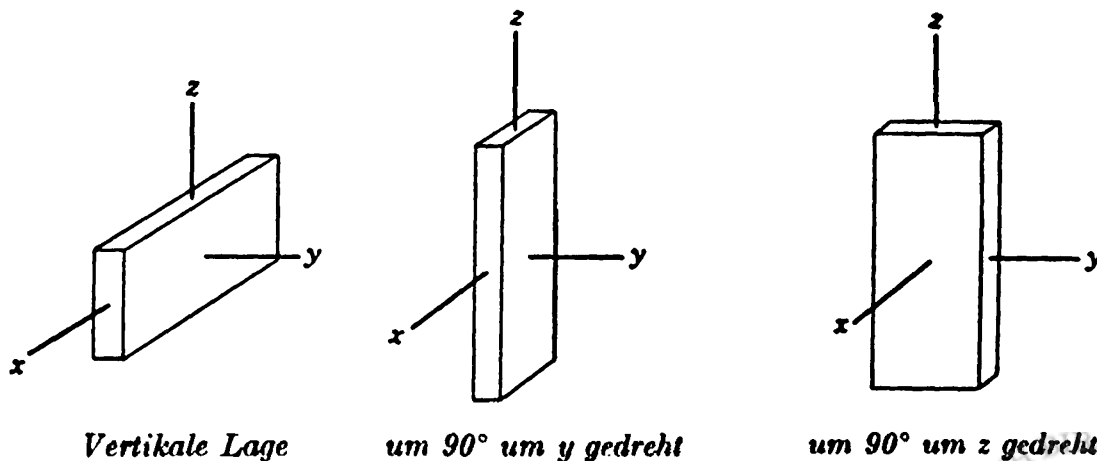


Abb. 4-10. Die in Abb. 4-9 gezeigten Drehungen, aber in umgekehrter Reihenfolge.

sind *kommutativ*. Sind $1 + \epsilon_1$ und $1 + \epsilon_2$ zwei infinitesimale Transformationen, dann lautet eines der möglichen Produkte:

$$\begin{aligned} (1 + \epsilon_1)(1 + \epsilon_2) &= 1^2 + \epsilon_1 1 + 1 \epsilon_2 + \epsilon_1 \epsilon_2 \\ &= 1 + \epsilon_1 + \epsilon_2, \end{aligned} \quad (4-88)$$

wenn man infinitesimale Größen höherer Ordnung vernachlässigt. Das Produkt in der umgekehrten Reihenfolge vertauscht lediglich ϵ_1 und ϵ_2 . Das hat keinen Einfluß auf das Ergebnis, da die Matrizenaddition stets kommutativ ist. Die kommutative Eigenschaft infinitesimaler Transformationen räumt den Einwand gegen ihre Darstellung durch Vektoren aus.

Die inverse Matrix für eine infinitesimale Transformation kann man leicht erhalten. Ist $A = 1 + \epsilon$ die Matrix der Transformation, dann ist die inverse

$$A^{-1} = 1 - \epsilon. \quad (4-89)$$

Zum Beweis bemerken wir, daß sich das Produkt AA^{-1} auf die Einheitsmatrix reduziert,

$$AA^{-1} = (1 + \epsilon)(1 - \epsilon) = 1,$$

in Übereinstimmung mit der Definition (4-32) der inversen Matrix.

Das Konzept der infinitesimalen Transformation soll ausführlich behandelt werden, indem wir eine besondere infinitesimale Drehung um die z -Achse betrachten. Für eine *endliche*

Drehung hat die Matrix die Form (vgl. Gl. (4-43)):

$$A = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix der infinitesimalen Drehung erhält man, indem man ϕ in der endlichen Drehung durch das Differential $d\phi$ ersetzt und nur infinitesimale Größen erster Ordnung berücksichtigt:

$$1 + \epsilon = \begin{pmatrix} 1 & d\phi & 0 \\ -d\phi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

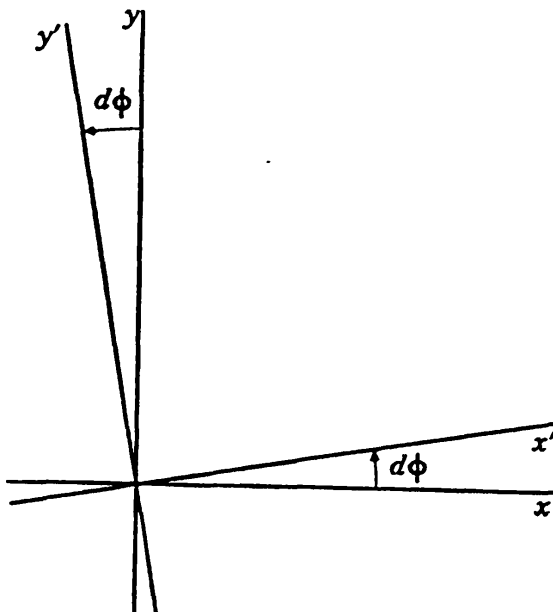


Abb. 4-11. Eine infinitesimale Drehung um die z -Achse.



Entsprechend lautet die infinitesimale Matrix ϵ :

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & d\phi & 0 \\ -d\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = d\phi \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4-90)$$

Wir bemerken, daß die Diagonalelemente von ϵ Null sind und die nichtverschwindenden Nichtdiagonalelemente jeweils die negativen der Elemente sind, die symmetrisch jenseits der Diagonale angeordnet sind. Eine Matrix mit diesen Eigenschaften nennt man *antisymmetrisch* oder *schiefsymmetrisch*. Diese Eigenschaften sind nicht nur der besonderen, hier betrachteten Matrix eigentümlich, denn die Matrix ϵ jeder infinitesimalen Drehung ist antisymmetrisch. Wegen (4-89) ist die inverse Matrix A^{-1} gleich $1 - \epsilon$. Für eine orthogonale Transformation ist die inverse Matrix aber identisch mit der Transponierten $\tilde{A} = 1 + \tilde{\epsilon}$. Folglich ist ϵ gleich der negativen transponierten Matrix:

$$\epsilon = -\tilde{\epsilon}$$

oder

$$\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}.$$

Das ist die Definition einer antisymmetrischen Matrix.⁹

Da die Diagonalelemente einer antisymmetrischen Matrix notwendig Null sind, kann es nur drei verschiedene Elemente in einer antisymmetrischen 3×3 -Matrix geben. Demnach ist es keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn ϵ in der Form

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & d\Omega_3 & -d\Omega_2 \\ -d\Omega_3 & 0 & d\Omega_1 \\ d\Omega_2 & -d\Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4-91)$$

geschrieben wird. Die drei Größen $d\Omega_1$, $d\Omega_2$, $d\Omega_3$ sind selbstverständlich den drei unabhängigen Parametern gleichzusetzen, die die Drehung festlegen. Wir werden nun zeigen, daß diese drei Größen auch die Komponenten eines Vektors bilden. Die *Änderung* der Komponenten eines Vektors unter dem Einfluß der infinitesimalen Transformation soll durch folgende Matrixgleichung ausgedrückt werden:

$$x' - x = dx = \epsilon x. \quad (4-92)$$

⁹ In diesem Abschnitt wurde implizit angenommen, daß eine infinitesimale orthogonale Transformation einer Drehung entspricht. In gewissem Sinne ist diese Annahme offensichtlich; der Ausdruck „infinitesimale Inversion“ ist ein Widerspruch. Formal folgt diese Feststellung aus der Antisymmetrie von ϵ . Alle Diagonalelemente von $1 + \epsilon$ sind dann Eins, und bis zur ersten Ordnung in kleinen Größen ist die Determinante der Transformation stets $+1$. Das ist aber das Kennzeichen einer Drehung.



Mit dem durch Gl. (4-91) gegebenen ϵ wird das in ausführlicher Form:

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_2 d\Omega_3 - x_3 d\Omega_2 \\ dx_2 &= x_3 d\Omega_1 - x_1 d\Omega_3 \\ dx_3 &= x_1 d\Omega_2 - x_2 d\Omega_1. \end{aligned} \quad (4-93)$$

Die rechte Seite jeder der Gl. (4-93) hat die Form einer Komponente des Kreuzproduktes zweier Vektoren, nämlich des Kreuzproduktes von \mathbf{r} mit einem Vektor $d\Omega$, der die Komponenten $d\Omega_1$, $d\Omega_2$, $d\Omega_3$ hat. Wir können deshalb für Gl. (4-93) schreiben:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r} \times d\Omega. \quad (4-94)$$

Die bloße Aufstellung der Gl. (4-93) in Vektorform ist jedoch nicht ausreichend, um die Vektornatur von $d\Omega$ zu beweisen. Die wesentliche Prüfung eines Vektors besteht darin, zu zeigen, daß er die richtigen Transformationseigenschaften gegenüber einer orthogonalen Transformation besitzt. Wenn $d\Omega$ wirklich ein Vektor ist, dann müssen sich seine Komponenten unter der Wirkung einer orthogonalen Matrix \mathbf{B} entsprechend den Gleichungen

$$d\Omega'_i = \sum_j b_{ji} d\Omega_j \quad (4-95)$$

verhalten. Die Größen $d\Omega_j$ wurden als die Elemente einer antisymmetrischen Matrix eingeführt. Nun ist es nicht ganz offensichtlich, daß sich die Matrixelemente entsprechend den Gl. (4-95) transformieren. Wie wir sehen werden, ist die formale Ableitung der wirklichen Transformationsgleichungen für $d\Omega_j$ sehr kompliziert. Aber einige einfache Betrachtungen sind ausreichend, um zu zeigen, daß $d\Omega$ den Hauptteil dieser Prüfung für einen Vektor besteht, obgleich er in einer Hinsicht versagt.

Unter der Wirkung einer orthogonalen Koordinatenänderung \mathbf{B} wird Gl. (4-92)

$$d\mathbf{x}' = \epsilon' \mathbf{x}', \quad (4-92')$$

wobei $d\mathbf{x}'$ und \mathbf{x}' transformierte Spaltenmatrizen sind. ϵ' ist das Ergebnis einer Transformation von ϵ mittels einer Ähnlichkeitstransformation mit der Matrix \mathbf{B} :

$$\epsilon' = \mathbf{B}\epsilon\mathbf{B}^{-1}.$$

In einer der Übungen wird bewiesen, daß die Antisymmetrieeigenschaft gegenüber Ähnlichkeitstransformationen mit orthogonalen Matrizen erhalten bleibt. Die Matrix ϵ' ist deshalb antisymmetrisch mit den drei verschiedenen Elementen $d\Omega'_1$, $d\Omega'_2$, $d\Omega'_3$. Folglich kann



Gl. (4-92') in der gleichen Form wie (4-93) geschrieben werden, und wir werden auf eine der Gl. (4-94) entsprechende Vektorbeziehung geführt:

$$d\mathbf{r}' = \mathbf{r}' \times d\boldsymbol{\Omega}'. \quad (4-94')$$

Somit bilden die Elemente einer antisymmetrischen Matrix in *allen* cartesischen Koordinatensystemen einen Vektor und müssen sich deshalb wie die Komponenten eines Vektors transformieren.

Betrachten wir jedoch das Verhalten der Gl. (4-93) unter der Wirkung einer Inversion S (vgl. Abschnitt 4-6). Die Komponenten von \mathbf{r} und $d\mathbf{r}$ ändern ihr Vorzeichen bei einer solchen Inversion der Koordinatenachsen. Für die Komponenten von $d\boldsymbol{\Omega}$ muß dasselbe gelten, wenn es wirklich ein Vektor ist. Die Gl. (4-93) bleiben aber ihrer Form nach in allen Koordinatensystemen die gleichen. Das kann nur richtig sein, wenn die Komponenten von $d\boldsymbol{\Omega}$ ihr Vorzeichen *nicht* ändern. Somit hat $d\boldsymbol{\Omega}$ in jeder Hinsicht, außer in bezug auf sein Verhalten bei uneigentlichen Drehungen, die Eigenschaften eines Vektors.

Diese Schlüsse werden durch die wirklichen Transformationsgleichungen für $d\boldsymbol{\Omega}$ verifiziert, die wir nun ableiten wollen. Formal stehen die Größen $d\Omega_i$ mit den Elementen von ϵ in folgender Beziehung:

$$d\Omega_i = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \delta_{ijk} \epsilon_{jk}. \quad (4-96)$$

Die Größe δ_{ijk} ist als die LEVI-CIVITA-Dichte bekannt. Ihrer Definition nach ist sie Null, wenn irgend zwei der Indizes ijk gleich sind, und entweder $+1$ oder -1 , je nachdem ijk eine gerade oder ungerade Permutation von 123 ist. Ist zum Beispiel $i = 1$, so verschwinden die Terme in der Summe, wenn nicht $j, k = 2$ oder 3 sind. Gl. (4-96) hat dann nur zwei Terme:

$$d\Omega_1 = \frac{1}{2} (\delta_{123} \epsilon_{23} + \delta_{132} \epsilon_{32}).$$

Nach Definition gilt $\delta_{123} = 1$, aber $\delta_{132} = -1$. Jedoch ist $\epsilon_{32} = -\epsilon_{23}$, so daß sich (4-96) reduziert auf:

$$d\Omega_1 = \frac{1}{2} (\epsilon_{23} + \epsilon_{23}) = \epsilon_{23}$$

in Übereinstimmung mit (4-91).

Ähnlich kann für $d\Omega'_i$ in dem neuen Koordinatensystem geschrieben werden:

$$d\Omega'_i = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \delta_{ijk} \epsilon'_{jk}.$$



Da $B^{-1} = \tilde{B}$ ist, steht das transformierte Matrixelement ϵ'_{jk} zu ϵ_{mn} in der Beziehung

$$\epsilon'_{jk} = \sum_{m, n} b_{jm} \epsilon_{mn} b_{kn},$$

so daß $d\Omega'_i$ in die Form

$$d\Omega'_i = \frac{1}{2} \sum_{\substack{j, k \\ m, n}} \delta_{ijk} b_{jm} b_{kn} \epsilon_{mn}$$

gebracht werden kann. Verwendet man die LEVI-CIVITASche Dichte, so läßt sich ϵ_{mn} auch durch $d\Omega_l$ entsprechend

$$\epsilon_{mn} = \sum_l \delta_{lmn} d\Omega_l$$

ausdrücken, und der Ausdruck für $d\Omega'$ als Funktion von $d\Omega$ wird dann

$$d\Omega'_i = \frac{1}{2} \sum_{\substack{j, k, l \\ m, n}} \delta_{ijk} \delta_{lmn} b_{jm} b_{kn} d\Omega_l.$$

Wir wollen nun die Behauptung aufstellen, daß sich die Summation über j, k, m und n auf das einfache Ergebnis

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{j, k \\ m, n}} \delta_{ijk} \delta_{lmn} b_{jm} b_{kn} = b_{il} |B| \quad (4-97)$$

zurückführen läßt. Der Beweis beruht auf dem folgenden Ausdruck für den Wert einer Determinante:

$$\sum_{l, m, n} \delta_{lmn} b_{il} b_{jm} b_{kn} = |B|,$$

wobei i, j, k eine gerade oder zyklische Permutation von 123 bilden. Ist jedoch die Anordnung von i, j, k eine ungerade Permutation von 123, entsprechend einer ungeraden Anzahl von Reihenvertauschungen, dann wird die Summe das Negative der Determinante. Es folgt deshalb

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{j, k \\ m, n}} \delta_{ijk} \delta_{lmn} b_{jm} b_{kn} = b_{il} |B|.$$

Die Orthogonalität von B liefert die Identität

$$\sum_i b_{ii}^2 = 1.$$

Diese kann in die obige Gleichung eingeführt werden, die dann die Form annimmt:

$$\sum_i b_{ii} \frac{1}{2} \sum_{\substack{j, k \\ m, n}} \delta_{ijk} \delta_{lmn} b_{jm} b_{kn} = \sum_i b_{ii} (b_{ii} |B|).$$



Da schließlich die Größen b_{il} Elemente einer beliebigen orthogonalen Matrix sind, ist die Gültigkeit der Identität (4-97) erwiesen. Mit diesem Ergebnis werden die Transformationsgleichungen für $d\Omega_i$:

$$d\Omega'_i = |\mathbf{B}| \sum_l b_{il} d\Omega_l. \quad (4-98)$$

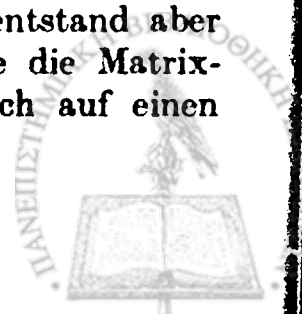
Die Gl. (4-98) sind nahezu identisch mit der gewünschten Vektortransformation (4-95). Der Unterschied besteht in dem Faktor $|\mathbf{B}|$. Für eigentliche Drehungen stimmen die zwei Sätze von Transformationsgleichungen exakt überein, aber wenn \mathbf{B} eine Inversion enthält, bringt die Determinante ein zusätzliches Minuszeichen. Diese Schlüsse sind in vollständiger Übereinstimmung mit den Ergebnissen der vorangegangenen weniger strengen Diskussion. Größen, die sich nach Gl. (4-98) transformieren, werden *Pseudovektoren* genannt, aber die gebräuchlichere Bezeichnung ist *axiale Vektoren*. Es soll festgehalten werden, daß die infinitesimale Natur von ϵ nicht benutzt wurde, nur seine Antisymmetrie. Demnach bilden die Elemente jeder antisymmetrischen 3×3 -Matrix die Komponenten eines Pseudovektors.

Obwohl $d\Omega$ in diesem Sinne nicht genau ein Vektor ist, so ist doch der Unterschied für die meisten Zwecke unwichtig. Tatsächlich tragen viele Größen, die man sich gewöhnlich als Vektoren vorstellt, sozusagen diesen Makel. So muß jedes Kreuzprodukt zweier Vektoren ein Pseudovektor sein, denn die Komponenten von $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ sind definiert durch

$$C_i = A_j B_k - A_k B_j.$$

Bei einer Inversion ändern die Komponenten sowohl von \mathbf{A} als auch von \mathbf{B} ihre Vorzeichen, demnach die von \mathbf{C} nicht. Das zeigt, daß \mathbf{C} ein Pseudovektor sein muß. Der Drehimpuls $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ und die magnetische Induktion sind somit Beispiele von Pseudovektoren. Das Punktprodukt eines Pseudovektors und eines Vektors nennt man einen *Pseudoskalar*. Während ein wirklicher Skalar gegenüber einer orthogonalen Transformation vollständig invariant ist, ändert ein Pseudoskalar sein Vorzeichen bei einer uneigentlichen Drehung.

Als die Frage des Zusammenhangs eines Vektors mit einer Drehung zuerst erörtert wurde, war es naheliegend anzunehmen, daß die Richtung eines solchen Vektors offensichtlich längs der Drehachse liegen würde, und daß der natürliche Wert für den Betrag der Drehwinkel wäre. Es erwies sich als unmöglich, einen Vektor zu konstruieren, der eine endliche Drehung darstellt. Diese Schwierigkeit entstand aber nicht für infinitesimale Drehungen. Tatsächlich führte die Matrixbeschreibung einer infinitesimalen Drehung automatisch auf einen



Vektor $d\Omega$, der die Drehung festlegt. Es kann nun gezeigt werden, daß Richtung und Betrag von $d\Omega$ mit den ursprünglichen Annahmen übereinstimmen, die für einen endlichen Drehvektor gemacht wurden.

Aus Gl. (4-94) folgt, daß die einzigen Vektoren, deren Komponenten durch eine infinitesimale Transformation nicht beeinflußt werden, parallel zu $d\Omega$ sein müssen. Weiterhin wurde nachgewiesen, daß die durch eine Drehung unveränderten Vektoren längs der Drehachse liegen müssen, die deshalb die Richtung von $d\Omega$ hat. Der Betrag von $d\Omega$ kann bestimmt werden, indem man die Form der ϵ -Matrix für den Fall untersucht, daß die z-Achse des Koordinatensystems parallel zur Drehachse gerichtet ist. Ein Vergleich von Gl. (4-91) mit Gl. (4-90) zeigt, daß der Betrag von $d\Omega$ dann gleich $d\phi$, dem Drehwinkel, ist. Nach Definition ist der Betrag eines Vektors (oder Pseudovektors) invariant gegenüber einer orthogonalen Transformation, und deshalb muß der Betrag von $d\Omega$ in allen Koordinatensystemen durch den Drehwinkel gegeben sein. Tatsächlich kann man auch umgekehrt vorgehen. Wenn $d\Omega$ so definiert ist, daß es längs der Drehachse liegt, und daß der Betrag $d\Omega$ gleich dem Drehwinkel ist, dann kann Gl. (4-94) auf elementarem Wege hergeleitet werden. Betrachten wir die

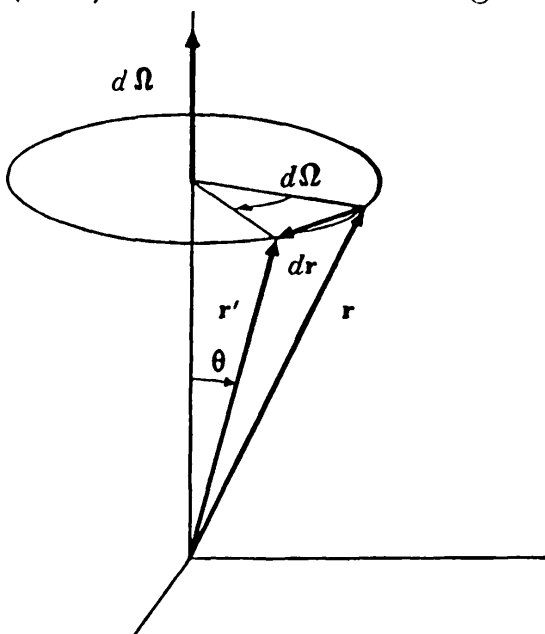


Abb. 4-12. Die durch eine infinitesimale Drehung hervorgerufene Änderung eines Vektors.

Änderung eines Vektors r , wenn man ihn im Uhrzeigersinn um einen kleinen Winkel $d\Omega$ um die z-Achse dreht (die Operation entspricht einer Drehung der Koordinaten im Gegenuhrzeigersinn). Nach Abb. 4-12 ist der Betrag von dr bis zur ersten Ordnung in $d\Omega$

$$dr = r \sin \theta d\Omega.$$

Das stimmt mit dem Betrag von $r \times d\Omega$ überein. Weiterhin muß dr senkrecht zu $d\Omega$ und r sein. Schließlich ist auch der Drehsinn richtig, wie Abb. 4-12 zeigt.

Umgekehrt bildet die Tatsache, daß eine infinitesimale orthogonale Transformation in der Form der Gl. (4-94) geschrieben werden kann,

einen unabhängigen Beweis des EULERSCHEN Theorems. Eine endliche Auslenkung eines starren Körpers mit einem festgehaltenen Punkt kann aus einer Folge infinitesimaler Auslenkungen aufgebaut werden. Wenn eine infinitesimale Transformation eine Drehung ist, dann muß die endliche Transformation ebenfalls einer Drehung entsprechen.



4-8 Die Änderungsgeschwindigkeit eines Vektors

Das Konzept der infinitesimalen Drehung liefert ein wirksames Hilfsmittel für die Beschreibung der Bewegung eines starren Körpers als Funktion der Zeit. Betrachten wir einen beliebigen Vektor \mathbf{G} , der in einem mechanischen Problem auftritt, wie etwa den Ortsvektor eines Punktes in dem Körper oder den Gesamtdrehimpuls. Gewöhnlich wird sich ein solcher Vektor im Laufe der Zeit verändern, so wie sich der Körper bewegt, aber die Änderung hängt oft von dem Koordinatensystem ab, auf das die Beobachtungen bezogen sind. Wenn zum Beispiel der Vektor der Radiusvektor vom Ursprung des körperfesten Achsensystems zu einem Punkt im starren Körper ist, dann erscheint der Vektor offenbar als konstanter Vektor, wenn er im körperfesten Koordinatensystem gemessen wird. Jedoch einem Beobachter gegenüber, der im raumfesten Koordinatensystem ruht, werden sich die Komponenten des Vektors, in *seinem* Achsensystem gemessen, im Laufe der Zeit verändern, wenn sich der Körper bewegt.

Die Änderung der Komponenten eines allgemeinen Vektors \mathbf{G} in einem Zeitintervall dt bezüglich der Körperachsen wird sich von der entsprechenden, auf die Raumachsen bezogenen Änderung nur infolge der Drehung der Körperachsen unterscheiden. Drücken wir das in Symbolen aus, so haben wir

$$(d\mathbf{G})_{\text{Körper}} = (d\mathbf{G})_{\text{Raum}} + (d\mathbf{G})_{\text{rot.}}$$

Die Änderung der Vektorkomponenten, die allein von einer infinitesimalen Koordinatendrehung herrührt, ist jedoch genau gleich der durch Gl. (4-94) gegebenen:

$$(d\mathbf{G})_{\text{rot.}} = \mathbf{G} \times d\boldsymbol{\Omega}.$$

Umgeformt steht das im raumfesten Koordinatensystem beobachtete Differential $d\mathbf{G}$ mit dem im körperfesten System beobachteten $d\mathbf{G}$ nach folgender Gleichung in Beziehung:

$$(d\mathbf{G})_{\text{Raum}} = (d\mathbf{G})_{\text{Körper}} + d\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{G}. \quad (4-99)$$

Die *Änderungsgeschwindigkeit* des Vektors \mathbf{G} erhält man somit, indem man Gl. (4-99) durch das in Betracht gezogene differentielle Zeitelement dt dividiert:

$$\left(\frac{d\mathbf{G}}{dt}\right)_{\text{Raum}} = \left(\frac{d\mathbf{G}}{dt}\right)_{\text{Körper}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G}. \quad (4-100)$$



Hier ist ω die *Winkelgeschwindigkeit* des Körpers, definiert durch

$$\omega = \frac{d\Omega}{dt}, \quad (4-101)$$

die Zunahme des Drehwinkels des Körpers in der kleinen Zeit dt . Der Vektor ω liegt längs der Achse der infinitesimalen Drehung, die zur Zeit t erfolgt, d.h. längs der Richtung, die man *augenblickliche* Drehachse nennt.

Gl. (4-100) ist weniger eine Gleichung für den speziellen Vektor \mathbf{G} , vielmehr macht sie eine Aussage über die Transformation der zeitlichen Ableitung zwischen den zwei Koordinatensystemen. Bei der Ableitung wurden keine Bedingungen für den Vektor gestellt; daß \mathbf{G} beliebig sein darf, kann dadurch besonders betont werden, daß man Gl. (4-100) als eine Operatorgleichung schreibt, die auf irgendeinen gegebenen Vektor wirkt:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{Raum}} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{Körper}} + \omega \times . \quad (4-102)$$

Wie in jeder Vektorgleichung kann man die Komponenten der Gl. (4-100) in jedem gewünschten Koordinatensystem wählen. So ist

$$\mathbf{F} = \left(\frac{d\mathbf{G}}{dt}\right)_{\text{Raum}}$$

die zeitliche Änderung des Vektors \mathbf{G} , die im raumfesten Achsensystem beobachtet wird. Hat man aber einmal den Vektor \mathbf{F} erhalten, so lassen sich seine Komponenten bezüglich irgendwelcher Achsen, sogar der sich bewegenden Achsen, angeben. Das erweist sich oft als bequem. Jedoch muß man vorsichtig sein: Wird F_x längs der sich bewegenden Achsen bestimmt, so ist F_x nicht gleich

$$\left(\frac{dG_x}{dt}\right)_{\text{Raum.}}$$

Zum Beispiel ist die zeitliche Änderung eines rotierenden Vektors \mathbf{r} , die im festen Achsensystem beobachtet wird, ein definierter Vektor \mathbf{v} , dessen Richtung und Größe durch Gl. (4-94) festgelegt sind. Die Komponente von \mathbf{v} längs der x -Achse eines Systems, das sich mit \mathbf{r} dreht, wird im allgemeinen nicht Null sein. Andererseits wird die x -Komponente von \mathbf{r} im gleichen System zeitlich konstant sein, und ihre zeitliche Ableitung wird verschwinden, gleichgültig, in welchem System der Beobachter sich befindet. Wenn eine zeitliche Ableitung eines Vektors sich auf ein Koordinatensystem bezieht, so dürfen die Komponenten längs eines anderen Satzes von Koordinatenachsen erst



dann ermittelt werden, *nachdem* die Differentiation ausgeführt wurde.

Es ist oft zweckmäßig, den Vektor der Winkelgeschwindigkeit durch die EULERSchen Winkel und deren zeitlichen Ableitungen auszudrücken. Die zu ω gehörige allgemeine infinitesimale Drehung kann so aufgefaßt werden, als bestünde sie aus drei aufeinanderfolgenden infinitesimalen Drehungen mit Winkelgeschwindigkeiten $\omega_\phi = \dot{\phi}$, $\omega_\theta = \dot{\theta}$, $\omega_\psi = \dot{\psi}$. Als Folge der Vektoreigenschaft infinitesimaler Drehungen kann der Vektor ω als Summe der drei einzelnen Vektoren der Winkelgeschwindigkeiten erhalten werden. Unglücklicherweise sind die Richtungen ω_ϕ , ω_θ , ω_ψ nicht symmetrisch angeordnet: ω_ϕ liegt längs der raumfesten z -Achse, ω_θ längs der Knotenlinie, während ω_ψ allein längs der körperfesten z' -Achse liegt. Jedoch können die orthogonalen Transformationen B, C, D des Abschnittes 4-4 dazu verwendet werden, die Komponenten dieser Vektoren längs jedes gewünschten Achsenatzes zu bestimmen.

Das körperfeste Achsensystem erweist sich als am nützlichsten für die Diskussion der Bewegungsgleichungen. Wir wollen deshalb die Komponenten von ω für ein solches Koordinatensystem aufsuchen. Da ω_ϕ parallel der raumfesten z -Achse liegt, erhält man seine Komponenten längs der körperfesten Achsen, indem man die vollständige orthogonale Transformation $A = BCD$, Gl. (4-46), anwendet:

$$(\omega_\phi)_x = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi, \quad (\omega_\phi)_y = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi, \quad (\omega_\phi)_z = \dot{\phi} \cos \theta.$$

Die Knotenlinie, die die Richtung von ω_θ hat, fällt mit der ξ' -Achse zusammen, so daß die Komponenten von ω_θ bezüglich der körperfesten Achsen durch Anwendung nur der letzten orthogonalen Transformation B, Gl. (4-45), geliefert werden:

$$(\omega_\theta)_x = \dot{\theta} \cos \psi, \quad (\omega_\theta)_y = -\dot{\theta} \sin \psi, \quad (\omega_\theta)_z = 0.$$

Für die Komponenten von ω_ψ , das längs der z' -Achse liegt, ist keine Transformation nötig. Addieren wir diese Komponenten der einzelnen Winkelgeschwindigkeiten, so werden die Komponenten von ω bezüglich der körperfesten Achsen:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_y &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_z &= \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}. \end{aligned} \tag{4-103}$$

Ein ähnliches Verfahren kann verwendet werden, um die Komponenten von ω längs des raumfesten Achsensystems durch die EULERSchen Winkel auszudrücken.



4-9 Die Corioliskraft

Gl. (4-102) ist das grundlegende kinematische Gesetz, auf dem die dynamischen Bewegungsgleichungen des starren Körpers beruhen. Aber ihre Gültigkeit ist nicht allein auf die Bewegung starrer Körper beschränkt. Sie kann immer dann verwendet werden, wenn man die Bewegung eines Teilchens oder Teilchensystems relativ zu einem sich drehenden Koordinatensystem diskutieren möchte. Ein sehr wichtiges Problem dieser letzten Kategorie ist die Beschreibung der Teilchenbewegung relativ zu Koordinatenachsen, die sich mit der Erde drehen. In der klassischen Mechanik wird postuliert, daß das zweite NEWTONsche Gesetz für ein Bezugssystem gilt, das im Zentrum der Sonne fixiert ist und *Inertialsystem* genannt wird.

Terrestrische Messungen werden gewöhnlich mit Bezug auf ein Koordinatensystem ausgeführt, das in der Erde festgelegt ist und sich deshalb gleichförmig mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω relativ zum Inertialsystem dreht. Gl. (4-102) liefert die Abänderung der Bewegungsgleichungen für dieses nichtinertiale Bezugssystem.

Zunächst ist Gl. (4-102) auf den Radiusvektor \mathbf{r} anzuwenden, der vom Ursprung des terrestrischen Systems zu dem gegebenen Teilchen führt:

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_r + \omega \times \mathbf{r}. \quad (4-104)$$

Darin sind \mathbf{v}_s und \mathbf{v}_r die Teilchengeschwindigkeiten, bezogen auf den Raum bzw. auf das sich drehende Achsensystem. Als nächstes wird Gl. (4-102) verwendet, um die zeitliche Änderung von \mathbf{v}_s zu erhalten:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{v}_s}{dt}\right)_s &= \mathbf{a}_s = \left(\frac{d\mathbf{v}_r}{dt}\right)_r + \omega \times \mathbf{v}_s \\ &= \mathbf{a}_r + 2(\omega \times \mathbf{v}_r) + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (4-105)$$

Dabei wurde \mathbf{v}_s aus Gl. (4-104) substituiert. \mathbf{a}_s und \mathbf{a}_r sind die Teilchenbeschleunigungen in den beiden Systemen. Schließlich wird die Bewegungsgleichung, die im Inertialsystem einfach

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_s$$

lautet, durch die sich drehenden Koordinaten ausgedrückt und so in die Gleichung

$$\mathbf{F} - 2m(\omega \times \mathbf{v}_r) - m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}) = m\mathbf{a}_r \quad (4-106)$$

übergeführt. Einem Beobachter in dem sich drehenden System scheint es deshalb, als ob sich das Teilchen unter dem Einfluß einer effektiven Kraft \mathbf{F}_{eff} bewegt:

$$\mathbf{F}_{\text{eff}} = \mathbf{F} - 2m(\omega \times \mathbf{v}_r) - m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}). \quad (4-107)$$



Wir wollen die Natur der in Gl. (4-107) auftretenden Terme untersuchen. Der letzte Term ist ein Vektor, der senkrecht zu ω steht und nach außen zeigt. Sein Betrag ist $m\omega^2 r \sin \theta$. Daraus erkennt man, daß dieser Term einfach die gewöhnliche Zentrifugalkraft ist. Ist das Teilchen in dem sich bewegenden System stationär, so ist die Zentrifugalkraft der einzige zusätzliche Term in der effektiven Kraft. Bewegt sich das Teilchen jedoch, so kommt der mittlere Term, CORIOLISKRAFT genannt, ins Spiel. Die Größenordnung dieser beiden Kräfte kann für ein Teilchen auf der Erdoberfläche leicht berechnet werden. Die Erde dreht sich entgegen dem Uhrzeigersinn um den Nordpol mit einer Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600} = 7.29 \times 10^{-5} \text{ sec}^{-1}.$$

Mit diesem Wert für ω und mit r gleich dem Erdradius ist die maximale Zentripetalbeschleunigung

$$\omega^2 r = 3.38 \text{ cm/sec}^2$$

oder etwa 0,3% der Schwerebeschleunigung. Obwohl sie klein ist, darf man diese Beschleunigung nicht vollständig vernachlässigen. Die Zentrifugalkraft ist stets abstoßend, und am Äquator ist sie parallel dem Radiusvektor r . In allen anderen Breiten ist die Kraft jedoch nicht parallel zu r . Die Gleichgewichtslage eines Schwerependels resultiert aus der Schwerkraft und der Zentrifugalkraft. Demnach wird außer am Äquator das Schwerependel nicht genau parallel zum Radiusvektor sein, wenn diese Abweichung auch sehr klein ist. Dieses Phänomen wird bei der Bestimmung der Vertikalen mittels eines Schwerelotes nicht korrigiert, weil die Vertikale tatsächlich durch die Richtung des Schwerelotes definiert wird, nicht durch die Richtung des Radiusvektors.¹⁰

Da die gesamte scheinbare Schwerkraft, die auf ein Pendel wirkt, die Summe aus tatsächlicher Schwerkraft und der Zentrifugalkraft ist, wird g mit der geographischen Breite variieren. g ist am kleinsten am Äquator und am größten an den Polen. Die Abplattung der Erde vergrößert diese Tendenz.

Wir haben hier die Zentrifugalkraft vernachlässigt, die von dem Umlauf um die Sonne herrührt, da sie verglichen mit der Wirkung der Rotation klein ist. Die Kreisfrequenz des Umlaufes ist um den Faktor

¹⁰ Die Vertikale kann genau so gut als die Normale zur Oberfläche einer Flüssigkeit definiert werden, die im Gleichgewicht ist.



$1/365$ oder etwa $2,7 \times 10^{-3}$ kleiner als die Rotationsfrequenz. Andererseits ist r um das Verhältnis des Bahnradius um die Sonne zum Erdradius größer, etwa $\frac{1}{4} \times 10^5$. Demnach ist das Verhältnis der Zentrifugalkraft, die vom Erdumlauf herrührt, zu der Zentrifugalkraft infolge der Erdrotation annähernd

$$\frac{1}{4} \times 10^5 \times (2,7 \times 10^{-3})^2 \simeq 0,2.$$

Das ist nicht groß genug, um eine Rolle zu spielen.

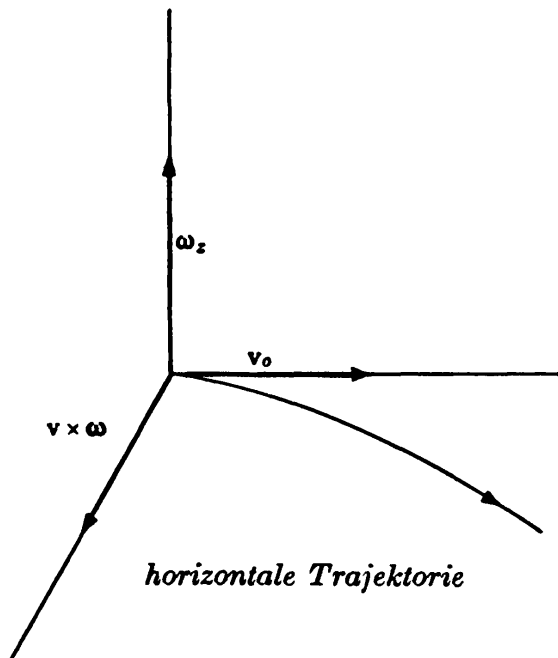


Abb. 4-13. Die Richtung der Coriolis-Ablenkung auf der nördlichen Hemisphäre.

Die CORIOLISKraft, die auf ein bewegtes Teilchen wirkt, steht senkrecht zu ω und zu v .¹¹ Auf der nördlichen Hemisphäre, wo ω aus dem Boden herausragt, versucht die CORIOLISKraft $2m(v \times \omega)$ ein Geschöß, das entlang der Erdoberfläche geschossen wird, von seiner Flugbahn nach rechts abzulenken, vgl. Abb. 4-13. Auf der südlichen Halbkugel ist die Richtung der CORIOLISablenkung umgekehrt, und am Äquator, wo ω horizontal liegt, verschwindet sie. Der Betrag der CORIOLISbeschleunigung ist immer kleiner als

$$2\omega v \simeq 1,5 \times 10^{-4}v,$$

dies ist für eine Geschwindigkeit von 10^5 cm/sec (gleich 3600 km/h) 15 cm/sec² oder etwa $0,015 g$. Normalerweise ist eine solche Beschleunigung außerordentlich klein, es gibt aber Fälle, für die sie wichtig wird. Zur Illustration nehmen wir an, ein Geschöß werde am Nordpol von einem Kriegsschiff horizontal abgefeuert. Die CORIOLISbeschleunigung hätte dann den Betrag $2\omega v$, so daß die lineare Ablenkung nach einer Zeit t gleich $\omega v t^2$ ist, und die Winkelablenkung wäre gleich der linearen Ablenkung geteilt durch die Flugweite:

$$\theta = \frac{\omega v t^2}{v t} = \omega t. \quad (4-108)$$

Das ist der Winkel der Erddrehung in der Zeit t . Physikalisch bedeutet dieses Ergebnis, daß eine vom Nordpol abgeschossene Granate keine

¹¹ Von hier an wird der Index r von v weggelassen, da alle Geschwindigkeiten nur auf die drehenden Koordinatenachsen bezogen werden sollen.



anfängliche Drehbewegung ausführt. Demnach ist seine Flugbahn im Inertialsystem eine Gerade. Die scheinbare Ablenkung beruht darauf, daß sich die Erde unter ihm dreht. Eine Vorstellung von der Größenordnung des Effektes erhält man, indem man eine Flugzeit von 100 Sekunden – für große Geschosse nicht ungewöhnlich – in Gl. (4-108) einsetzt. Die Winkelablenkung hat dann die Größenordnung 7×10^{-3} Bogengrad, also etwa $0,4^\circ$. Das ist nicht unerheblich. Selbstverständlich ist der Effekt noch wichtiger für ferngelenkte Raketen, wie etwa die V-2, die eine viel längere Flugzeit haben.

Die CORIOLISKraft ist von noch größerer Bedeutung für das meteorologische Problem der Windzirkulation, denn dort ist die effektive „Flugzeit“, die in Gl. (4-108) auftritt, viel größer als für Geschosse. Wind ist einfach eine Luftmasse, die sich in Bewegung befindet. Bei der Abwesenheit von CORIOLISKräften würde die Bewegungsrichtung entlang dem Druckgradienten, von hohen zu niedrigen Drucken, und deshalb senkrecht zu den Isobaren liegen. Jedoch auf der nördlichen Halbkugel lenken die CORIOLISKräfte den Wind nach rechts von seiner Richtung ab, wie es in Abb. 4-14 gezeigt ist. Im Gleichgewicht bleiben

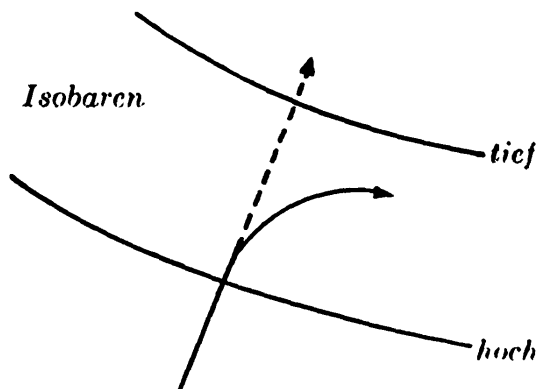


Abb. 4-14. Ablenkung des Windes von der Richtung des Druckgradienten durch die CORIOLIS-Kraft (auf der nördlichen Hemisphäre).

die Windprofile stationär. Die Geschwindigkeit nimmt weder zu noch ab, und die auf die Luftmasse wirkenden resultierenden Kräfte müssen verschwinden. In einem solchen Fall muß die CORIOLISKraft umgekehrt gleich der vom Druckgradienten herrührenden Kraft sein. Dies verlangt, daß die Windrichtung parallel zu den Isobaren verläuft. Ein Gebiet niedrigen Druckes mit annähernd konzentrischen Isobaren wird technisch als *Zyklon* bezeichnet. Infolge der CORIOLISKräfte drehen sich die Winde um den Zyklon auf der nördlichen Halbkugel im Gegenuhrzeigersinn und auf der südlichen Hemisphäre im Uhrzeigersinn. Tatsächlich kommen zu den Druck- und CORIOLISKräften noch Reibungskräfte hinzu, so daß sich die Winde im Gleichgewicht nicht genau entlang der Isobaren bewegen. In nördlichen Breiten ist der Winkel zwischen den Isobaren und der Windrichtung etwa 20° bis 30° , vgl. Abb. 4-15.

Ein anderes klassisches Experiment, bei dem CORIOLISKräfte eine wichtige Rolle spielen, ist die Ablenkung eines frei fallenden Teilchens von der Vertikalen. Da die Teilchengeschwindigkeit fast senkrecht ist



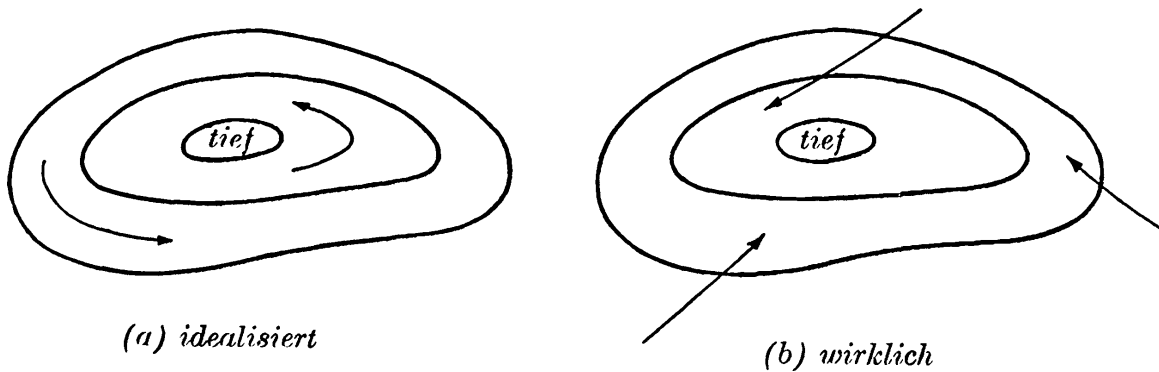


Abb. 4-15. Zyklon-Darstellung für die nördliche Hemisphäre.

und ω in der vertikalen Nord-Süd-Ebene liegt, wirkt die Ablenkungskraft $2m(\mathbf{v} \times \omega)$ in Ost-West-Richtung. Somit wird auf der nördlichen Halbkugel ein frei fallender Körper nach Osten abgelenkt. Die Berechnung der Ablenkung wird sehr vereinfacht, wenn man die z -Achse des terrestrischen Koordinatensystems längs der Richtung der vorhin definierten Vertikalen wählt. Bei dieser Wahl erscheint die Zentrifugalkraft nur als geringfügige Änderung des g -Wertes. Nimmt man die yz -Ebene als die vertikale Nord-Süd-Ebene, dann lautet die Bewegungsgleichung für die x -Richtung

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= -2m(\omega \times \mathbf{v})_x \\ &= -2m\omega v_z \sin \theta. \end{aligned} \quad (4-109)$$

Darin ist θ die Polhöhe. Die Wirkung der CORIOLISKRAFT auf v_z würde nur eine kleine Korrektur der Ablenkung ausmachen, die selbst sehr klein ist. Demnach kann die in Gl. (4-109) auftretende Vertikalgeschwindigkeit so berechnet werden, als ob gar keine CORIOLISKRÄFTE anwesend wären:

$$v_z = gt$$

und

$$t = \sqrt{\frac{2z}{g}}$$

Mit diesen Werten kann Gl. (4-109) leicht integriert werden. Man erhält als Ablenkung

$$x = -\frac{\omega g}{3} t^3 \sin \theta$$

oder

$$x = -\frac{\omega}{3} \sqrt{\frac{(2z)^3}{g}} \sin \theta.$$



Die Größenordnung der Ablenkung kann man erhalten, indem man $\theta = \pi/2$ (entsprechend dem Äquator) und $z = 30$ m annimmt. Die Ablenkung ist dann etwa

$$x \simeq 0.36 \text{ cm.}$$

Praktisch ist das Experiment schwer auszuführen, da die kleine Ablenkung oft durch die Wirkungen der Luftströmung, der Zähigkeit und anderer störender Einflüsse verdeckt wird.

Einfacher zu beobachten ist das wohlbekannte Experiment mit dem FOUCAULTSchen Pendel. Wird ein Pendel am Nordpol in einer gegebenen Raumebene in Schwingungen versetzt, dann ist sein Impuls senkrecht zu der Ebene Null, und es wird in dieser invariablen Ebene weiterschwingen, während die Erde sich unter ihm dreht. Einem Beobachter auf der Erde erscheint es so, als drehe sich die Schwingungsebene einmal pro Tag. In anderen Breiten ist das Ergebnis komplizierter, die Erscheinung ist aber qualitativ die gleiche. Die ausführliche Rechnung wird einer Übung überlassen.

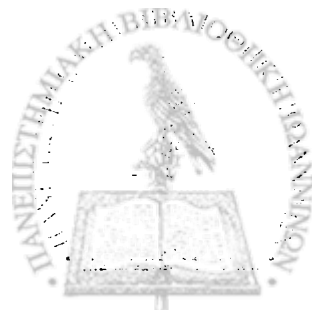
Effekte, die von den CORIOLISTermen herrühren, treten auch in der Atomphysik auf. So können in mehratomigen Molekülen zwei Bewegungstypen gleichzeitig vorkommen: Das Molekül *dreht* sich als starres Ganzes, und die Atome *schwingen* um ihre Gleichgewichtslagen. Infolge der Schwingungen sind die Atome relativ zu dem sich drehenden Koordinatensystem des Moleküls in Bewegung. Der CORIOLISTERM wird dann von Null verschieden sein und will die Atome veranlassen, sich in einer Richtung senkrecht zu den ursprünglichen Schwingungen zu bewegen. Störungen in Molekülspektren, die auf CORIOLISKräfte zurückzuführen sind, erscheinen so als Wechselwirkungen zwischen Rotations- und Schwingungsniveaus des Moleküls.

LITERATURHINWEISE

- H. MARGENAU und G. M. MURPHY, *The Mathematics of Physics and Chemistry*. Über die Theorie der Matrizen existieren viele sorgfältig ausgearbeitete Abhandlungen, für unsere Zwecke gibt jedoch das Kapitel 10 dieser Referenz einen ausreichenden Überblick über die vorkommenden mathematischen Methoden. Zudem enthalten die Abschnitte 15.15 und 15.16 Material über die CAYLEY-KLEINSchen Parameter und die PAULISchen Spin-Matrizen (wenn gleich dick in eine furchterweckende Bezeichnungsweise verpackt).
- H. JEFFREYS und B. S. JEFFREYS, *Methods of Mathematical Physics*. Obgleich hier nahezu dasselbe Stoffgebiet behandelt wird, wie bei MARGENAU und MURPHY, liegt die Betonung bei der Diskussion der Matrizen mehr auf den physikalischen Anwendungen. Vieles des im vorliegenden Kapitel behandelten Stoffes wird dort in den Kapiteln 3 und 4 diskutiert, einschließlich einer Be-



- handlung der PAULISchen Spin-Matrizen und ihres Zusammenhangs mit den Drehungsmatrizen des dreidimensionalen Raumes. Der Abschnitt über EULERSche Winkel ist praktisch unverständlich, hauptsächlich wegen eines schlechten Diagrammes. Jedem Kapitel ist ein passend gewähltes und witziges Zitat vorangestellt, wodurch das Buch eine unerwartete Würze erhält!
- M. BÔCHER, *Introduction to Higher Algebra*. Eines der älteren Standardwerke. Das Buch ist besonders wertvoll hinsichtlich des darin enthaltenen Stoffes über Determinanten, Bedingungen für die Unabhängigkeit von Gleichungssystemen und die Lösungen linear unabhängiger Gleichungen.
- R. COURANT und D. HILBERT, *Methoden der Mathematischen Physik*, Bd. I nicht zu verwechseln mit dem oben genannten Werk der JEFFREYS). Der COURANT-HILBERT war lange Zeit die klassische Einführung in die mathematischen Verfahren der theoretischen Physik. Kapitel I handelt von „der Algebra der linearen Transformationen und quadratischen Formen“ und diskutiert, in machtvолlem und klarem Stil, das Eigenwertproblem für lineare Transformationen und andere damit verbundene Themen. Infinitesimale Transformationen werden kurz im Anhang zu Kapitel I erwähnt.
- H. O. NEWBOULT, *Analytical Method in Dynamics*. Die Verwendung der Matrixalgebra zur systematischen Diskussion der räumlichen Drehungen ist selten in Schriften über klassische Mechanik zu finden, obgleich sie in der Quantenmechanik durchaus üblich ist. Die Behandlung der Kinematik der Bewegung starrer Körper in Kapitel III dieses schmalen Bandes verwendet die Matrixschreibweise in gewissem Maße. Insbesondere wird die Drehungsmatrix, ausgedrückt durch die EULERSchen Winkel, durch die Multiplikation dreier elementarer Drehungen dargestellt. Kapitel III gibt eine kurze Diskussion der Bewegung relativ zu sich bewegenden Achsen.
- L. BRILLOUIN, *Les Tenseurs en Mécanique et en Elasticité*. Dieses reizend geschriebene Buch enthält viel Information über eine Vielzahl von Themen, von der Differentialgeometrie bis zur Quantenmechanik der Festkörper. Es ist eine einzigartige Quelle über Pseudogrößen, d.h. solche Größen, die keine eigentlichen Transformationseigenschaften bei Spiegelung haben. Kapitel III ist allein solchen Themen gewidmet.
- E. T. WHITTAKER, *Analytical Dynamics*. Kapitel I enthält den Stoff, der für unsere Zwecke geeignet ist. Der Abschnitt über EULERSche Winkel ist schwer zu verstehen, weil kein einziges Diagramm enthalten ist. Will man die dort angeführten Ergebnisse mit unseren Gleichungen vergleichen, so beachte man unsere Fußnote in Abschnitt 4.4. In Abschnitt 12 wird der Zusammenhang der CAYLEY-KLEINSchen Parameter mit der sogenannten „homographischen“ Transformation diskutiert.
- W. F. OSGOOD, *Mechanics*. In Kapitel IX wird kurz die Bewegung relativ zu bewegten Achsen und die Wirkung von Zentrifugal- und CORIOLIS-Kräften diskutiert.
- G. HERZBERG, *Infrared and Raman Spectra*. Die Wirkung der CORIOLIS-Kräfte auf die Spektren mehratomiger Moleküle wird in diesem Buch, besonders in Kapitel IV, Abschnitt 1 und 2, sorgfältig diskutiert, obwohl zum vollen Verständnis ein Grundwissen über die Theorie kleiner Schwingungen (siehe unser X. Kapitel) und Quantenmechanik notwendig ist. Wegen einer kurzen klassischen Behandlung siehe jedoch S. 372-375.



ÜBUNGEN

1. Beweise, daß die Matrizenmultiplikation assoziativ ist. Zeige, daß das Produkt zweier orthogonaler Matrizen ebenfalls orthogonal ist.

2. Beweise die folgenden Eigenschaften der transponierten und adjungierten Matrizen:

$$\begin{aligned}\tilde{A}B &= \tilde{B}A, \\ (AB)^{\dagger} &= B^{\dagger}A^{\dagger}.\end{aligned}$$

3. Zeige, daß die Spur einer Matrix invariant gegenüber jeder Ähnlichkeitstransformation ist. Zeige auch, daß die Antisymmetrieeigenschaft einer Matrix bei einer orthogonalen Ähnlichkeitstransformation erhalten bleibt, während die Hermitizitätseigenschaft invariant gegenüber jeder unitären Ähnlichkeitstransformation ist.

4. Drücke die Matrixelemente der allgemeinen Matrix der Drehung durch die EULERSchen Winkel, Gl. (4-46), aus. Führe dabei die Multiplikationen der Komponentenmatrizen der aufeinanderfolgenden Drehungen aus. Verifiziere direkt, daß die Matrixelemente den Orthogonalitätsbedingungen genügen.

5. Zeige, daß die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit längs des raumfesten Achsensatzes folgendermaßen durch die EULERSchen Winkel ausgedrückt werden können:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi, \\ \omega_y &= \dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi, \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}.\end{aligned}$$

6. Drücke die Zwangsbedingung des „Rollens“ auf einer Kugel oder einer ebenen Fläche durch die EULERSchen Winkel aus. Zeige, daß die Bedingungen nichtintegabel und deshalb nichtholonom sind.

7. Zeige, daß die zwei komplexen Eigenwerte einer orthogonalen Matrix, die eine eigentliche Drehung darstellt, $e^{\pm i\Phi}$ sind, wobei Φ der Drehwinkel ist.

8. Verifiziere, daß der Drehwinkel Φ , durch die EULERSchen Winkel ausgedrückt, durch den Ausdruck

$$\cos \frac{\Phi}{2} = \cos \frac{\phi + \psi}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

gegeben ist.

9. Zeige, daß die drei PAULISchen Spinmatrizen miteinander antikommutieren, d.h., daß

$$\sigma_i \sigma_j = -\sigma_j \sigma_i, \quad i \neq j$$

und daß

$$\sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i = 2i\sigma_k, \quad \text{zyklisch in } i, j, k$$

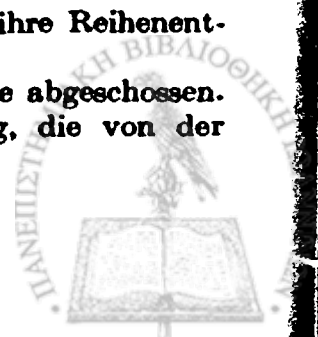
gilt. Beweise auch, daß für alle Werte von i $\sigma_i^2 = 1$ ist.

10. Zeige, daß Q_θ symbolisch in der Form

$$Q_\theta = e^{i\omega_x \frac{\theta}{\omega}}$$

geschrieben werden kann, wobei die Exponentialfunktion für ihre Reihenentwicklung steht, deren erster Term 1 ist.

11. Ein Geschöß werde horizontal entlang der Erdoberfläche abgeschossen. Zeige, daß die Winkelabweichung von der Abschußrichtung, die von der



CORIOISKRAFT herrührt, in erster Näherung der Zeit proportional ist, mit dem Proportionalitätsfaktor

$$\omega \cos \theta,$$

wobei ω die Winkelfrequenz der Erddrehung und θ die Polhöhe sind. Die Richtung der Abweichung weist auf der nördlichen Halbkugel nach rechts.

12. Beim FOUCAULTSchen Pendelversuch wird ein langes Pendel an einem Punkt auf der Oberfläche der sich drehenden Erde in Bewegung gesetzt. Dabei liegt sein Impuls ursprünglich in der vertikalen Ebene, die die Pendellinse und den Aufhängepunkt enthält. Zeige, daß die darauffolgende Bewegung dadurch beschrieben werden kann, daß man sagt, die Schwingungsebene dreht sich gleichförmig um $2\pi \cos \theta$ Bogengrad pro Tag, wobei θ die Polhöhe ist. Wie ist die Richtung der Drehung? Die Näherung kleiner Schwingungen darf, wenn gewünscht, verwendet werden.



V. KAPITEL

DIE BEWEGUNGSGLEICHUNGEN DES STARREN KÖRPERS

Im IV. Kapitel wurden alle die kinematischen Hilfsmittel dargelegt, die für die Diskussion der Bewegung starrer Körper benötigt werden. In den EULERSchen Winkeln haben wir einen Satz von drei Koordinaten, die zwar ziemlich unsymmetrisch definiert sind, die jedoch für den Gebrauch als generalisierte Koordinaten, die die Orientierung des starren Körpers beschreiben, geeignet sind. Zudem liefern die Methode der orthogonalen Transformation und die zugehörige Matrixalgebra eine mächtige und elegante Technik zur Erforschung der Eigentümlichkeiten der Bewegung starrer Körper. Wir haben bereits eine Anwendung dieser Technik kennengelernt, als wir Gl. (4-100) ableiteten, nämlich die Beziehung zwischen den Änderungsgeschwindigkeiten eines Vektors im raumfesten System und im körperfesten System. Diese Hilfsmittel wollen wir nun anwenden, um die dynamischen Bewegungsgleichungen des starren Körpers in ihrer zweckmäßigsten Form zu erhalten. Mit Hilfe der Bewegungsgleichungen können einige einfache aber höchst wichtige Probleme der Bewegung starrer Körper diskutiert werden.

5-1 Drehimpuls und kinetische Energie der Bewegung um einen Punkt

Der Satz von CHASLE sagt, daß eine allgemeine Auslenkung eines starren Körpers durch eine Translation und eine Drehung dargestellt werden kann. Der Satz legt nahe, daß es möglich sein sollte, das Problem der Bewegung starrer Körper in zwei getrennte Phasen aufzuspalten. Die eine befaßt sich nur mit der Translationsbewegung des Körpers, die andere mit seiner Drehbewegung. Ist ein Punkt des Körpers fest, so ist die Aufteilung leicht einzusehen, denn dann gibt es nur eine Drehbewegung um den festen Punkt und keine Translation. Aber gerade für einen allgemeinen Bewegungstyp ist eine solche Aufteilung oft möglich. Die sechs Koordinaten, die zur Beschreibung der Bewegung nötig sind, wurden bereits in Übereinstimmung mit einer solchen Aufteilung in zwei Sätze aufgeteilt: die drei cartesischen Koordinaten eines im starren Körper festgelegten Punktes, die die Translationsbewegung beschreiben, und etwa die drei EULERSchen Winkel



für die Bewegung um den Punkt. Wird weiterhin der Ursprung des körperfesten Systems so gewählt, daß er mit dem Massenzentrum zusammenfällt, dann spaltet wegen Gl. (1-26) der Gesamtdrehimpuls natürlich in Anteile auf, die von der Translation des Massenzentrums und von der Drehung um das Massenzentrum herrühren. Der erste Term wird nur die cartesischen Koordinaten des Massenzentrums, der letztere nur die Winkelkoordinaten enthalten. Wegen Gl. (1-29) gilt eine ähnliche Aufteilung für die gesamte kinetische Energie T , die in folgender Form geschrieben werden kann:

$$T = \frac{1}{2}Mv^2 + T'(\phi, \theta, \psi),$$

nämlich als die Summe derjenigen kinetischen Energie des gesamten Körpers, die er hätte, wenn er im Massenzentrum konzentriert wäre, und der kinetischen Energie der Bewegung um das Massenzentrum.

Oft kann die potentielle Energie ähnlich unterteilt werden; jeder Term enthält nur einen der Koordinatensätze, entweder den der Translation oder den der Drehung. So wird die potentielle Energie der Gravitation nur von der cartesischen Vertikalkoordinate des Schwerpunktes abhängen.¹ Oder wenn die auf einen Körper wirkende Kraft von einem homogenen Magnetfeld \mathbf{B} herrührt, das auf sein magnetisches Dipolmoment \mathbf{M} wirkt, dann ist das Potential proportional zu $\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}$. Es enthält also nur die Orientierung des Körpers. Fast alle praktisch lösbaren Probleme erlauben eine solche Separation. In diesem Falle spaltet das mechanische Problem tatsächlich in zwei Probleme auf, denn die LAGRANGE-Funktion $L = T - V$ zerfällt in zwei Teile. Der eine enthält nur die Translationskoordinaten, der andere nur die Winkelkoordinaten. Diese zwei Koordinatengruppen sind dann vollständig separiert, und das Translations- und das Rotationsproblem können unabhängig voneinander gelöst werden. Es ist deshalb offenbar wichtig, Ausdrücke für den Drehimpuls und die kinetische Energie der Bewegung um einen im Körper festgelegten Punkt zu erhalten.

Wenn sich ein starrer Körper, in dem ein Punkt festgehalten wird, bewegt, so ist der gesamte Drehimpuls um diesen Punkt

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i). \quad (5-1)$$

Darin sind \mathbf{r}_i und \mathbf{v}_i der Radiusvektor und die Geschwindigkeit des i -ten Teilchens relativ zu dem gegebenen Punkt. Da \mathbf{r}_i ein relativ zum Körper fester Vektor ist, entsteht die Geschwindigkeit \mathbf{v}_i bezüglich

¹ Der Schwerpunkt fällt natürlich in einem homogenen Gravitationsfeld mit dem Massenzentrum zusammen.



des raumfesten Achsensatzes nur durch die Drehbewegung des starren Körpers um den festen Punkt. Mit Gl. (4-100) folgt dann für \mathbf{v}_i ,

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i. \quad (5-2)$$

Demnach kann Gl. (5-1) geschrieben werden:

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i))$$

oder, wenn man das dreifache Kreuzprodukt ausführt,

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i (\boldsymbol{\omega} r_i^2 - \mathbf{r}_i (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega})). \quad (5-3)$$

Rechnet man weiter, so wird die x -Komponente des Drehimpulses:

$$L_x = \omega_x \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2) - \omega_y \sum_i m_i x_i y_i - \omega_z \sum_i m_i x_i z_i. \quad (5-4)$$

Ähnliche Gleichungen gelten für die anderen Komponenten von \mathbf{L} . Somit ist jede Komponente des Drehimpulses eine lineare Funktion aller Komponenten der Winkelgeschwindigkeit. *Der Drehimpulsvektor hängt mit der Winkelgeschwindigkeit durch eine lineare Transformation zusammen.* Um die Ähnlichkeit von (5-4) mit den Gleichungen einer linearen Transformation (4-12) hervorzuheben, schreiben wir für L_x :

$$L_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z. \quad (5-5)$$

Analog haben wir für L_y und L_z :

$$\begin{aligned} L_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z. \end{aligned} \quad (5-5)$$

Die neun Koeffizienten I_{xx} , I_{xy} usw. sind die neun Elemente der Transformationsmatrix. Die Diagonalelemente sind als *Koeffizienten des Trägheitsmoments* bekannt und haben die Form

$$I_{xx} = \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2), \quad (5-6)$$

während die Nichtdiagonalelemente als *Trägheitsprodukte* bezeichnet werden. Sie sind vom Typ

$$I_{xy} = - \sum_i m_i x_i y_i. \quad (5-7)$$

In den Gl. (5-6) und (5-7) erscheinen die Matrixelemente in einer Form, die dann zweckmäßig ist, wenn der starre Körper aus diskreten Teilchen zusammengesetzt ist. Für kontinuierliche Körper ist die Summation durch eine Volumenintegration zu ersetzen. Dabei wird aus der Teilchenmasse eine Massendichte. Das Diagonalelement lautet dann:

$$I_{xx} = \int_V \rho(r) (r^2 - x^2) dV. \quad (5-6')$$



Bisher wurde das Koordinatensystem, das zur Aufteilung von \mathbf{L} in Komponenten verwendet wurde, nicht festgelegt. Von nun an wird es zweckmäßig sein, ein System zu wählen, das körperfest ist.² Die verschiedenen Abstände x_i, y_i, z_i sind dann zeitlich konstant, so daß die Matrixelemente ebenfalls Konstanten sind. Sie sind dem Körper eigentümlich und vom Ursprung und der Orientierung des besonderen körperfesten Achsensatzes abhängig, in dem sie ausgedrückt sind.

Die Gleichungen (5-5), die die Komponenten von \mathbf{L} und $\boldsymbol{\omega}$ in Beziehung setzen, können durch eine einzige Operatorgleichung zusammengefaßt werden:

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}. \quad (5-8)$$

Darin steht das Symbol \mathbf{I} für den Operator, dessen Matrixelemente die in (5-5) auftretenden Trägheitskoeffizienten sind. In Abschnitt 4-2 wurden zwei Interpretationen des Operators einer linearen Transformation gegeben. Es ist klar, daß man sich \mathbf{I} hier als einen Operator vorstellen muß, der auf den Vektor $\boldsymbol{\omega}$ und nicht auf das Koordinatensystem wirkt. Die Vektoren \mathbf{L} und $\boldsymbol{\omega}$ sind zwei physikalisch verschiedene Vektoren. Sie haben verschiedene Dimensionen und sind *nicht* derselbe Vektor, der nur in zwei verschiedenen Koordinatensystemen ausgedrückt ist. Anders als der Drehoperator besitzt \mathbf{I} eine Dimension – Masse mal Längenquadrat – und ist nicht durch irgendwelche Orthogonalitätsbedingungen eingeschränkt. Gl. (5-8) läßt sich folgendermaßen auffassen: Wirkt der Operator \mathbf{I} auf den Vektor $\boldsymbol{\omega}$, so ergibt sich der physikalisch neue Vektor \mathbf{L} . Obwohl wir von der Technik der Matrixalgebra, die bei der Diskussion des Drehoperators entwickelt wurde, ausgiebig Gebrauch machen werden, müssen wir hier der Natur und dem physikalischen Charakter des Operators als solchem mehr Aufmerksamkeit widmen.

5-2 Tensoren und Dyaden

Die Größe \mathbf{I} kann als Definitionsgröße des Quotienten von \mathbf{L} und $\boldsymbol{\omega}$ angesehen werden:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{L}}{\boldsymbol{\omega}},$$

denn das Produkt von \mathbf{I} und $\boldsymbol{\omega}$ ergibt \mathbf{L} . Nun ist der Quotient zweier Größen oft nicht ein Mitglied derselben Klasse wie Dividend und Divi-

² Im IV. Kapitel wurde ein solches System durch Striche gekennzeichnet. Da Komponenten längs der Raumachsen hier kaum verwendet werden, wollen wir von nun an zur Vereinfachung der Bezeichnung diese Vereinbarung fallen lassen.



sor, sondern dieser kann zu einer komplizierteren Klasse gehören. So ist der Quotient zweier ganzer Zahlen im allgemeinen nicht eine ganze Zahl, sondern vielmehr eine rationale Zahl. Ähnlich kann der Quotient zweier Vektoren, wie wohl bekannt ist, nicht konsistent innerhalb der Klasse der Vektoren definiert werden. Es ist deshalb nicht überraschend, zu finden, daß **I** ein neuer Typus von Größen ist, ein *Tensor zweiter Stufe*.

Im dreidimensionalen Raum kann ein Tensor **T** *N*-ter Stufe für unsere Zwecke als Größe definiert werden, die 3^N Komponenten $T_{ijk} \dots$ (mit *N* Indizes) besitzt, die sich unter der Wirkung einer orthogonalen Transformation **A** der Koordinaten nach dem folgenden Schema transformieren:³

$$T'_{ijk\dots} = \sum_{l,m,n,\dots} a_{il}a_{jm}a_{kn}\dots T_{lmn\dots} \quad (5-9)$$

Nach dieser Definition hat ein Tensor nullter Stufe eine Komponente, die invariant gegenüber orthogonaler Transformation ist. *Ein Skalar ist demnach ein Tensor nullter Stufe*. Ein Tensor erster Stufe hat drei Komponenten, die sich gemäß

$$T'_i = \sum_j a_{ij}T_j$$

transformieren. Der Vergleich mit den Transformationsgleichungen (4-14) für einen Vektor zeigt, daß ein *Tensor erster Stufe vollständig einem Vektor äquivalent ist*.

Schließlich transformieren sich die neun Komponenten eines Tensors zweiter Stufe wie

$$T'_{ij} = \sum_{k,l} a_{ik}a_{jl}T_{kl} \quad (5-10)$$

Die Transformationseigenschaften der Komponenten von **I** sind durch die Tatsache bestimmt, daß sich die Matrix von **I** unter der Wirkung von **A** gemäß einer Ähnlichkeitstransformation transformiert:

$$I' = AIA^{-1}$$

oder, da **A** orthogonal ist,

$$I' = AIA.$$

Das *ij*-te Element der transformierten Matrix ist dann

³ Der Unterschied zwischen kovarianten und kontravarianten Indizes wird hier außer acht gelassen, da er für cartesische Koordinatensysteme ohne Bedeutung ist.



$$I'_{ij} = \sum_{k,l} a_{ik} I_{kl} \tilde{a}_{lj} = \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} I_{kl}. \quad (5-11)$$

Das stimmt der Form nach mit (5-10) überein und bestätigt die Identifikation von \mathbf{I} mit einem Tensor zweiter Stufe.

Genau genommen muß man zwischen dem Tensor \mathbf{I} und der quadratischen Matrix, die aus seinen Komponenten gebildet wird, unterscheiden. Ein Tensor ist nur definiert durch seine Transformationseigenschaften bei orthogonalen Koordinatentransformationen. Andererseits ist eine Matrix in keiner Weise auf die Typen von Transformationen beschränkt, denen man sie unterwirft, und sie kann tatsächlich vollständig unabhängig von ihren Eigenschaften gegenüber einer besonderen Klasse von Transformationen betrachtet werden. Nichtsdestoweniger sollte diese Unterscheidung nicht übermäßig betont werden. Innerhalb des beschränkten Bereiches der orthogonalen Transformationen liegt eine praktische Identität vor. Die Tensorkomponenten und die Matrixelemente werden in gleicher Weise behandelt; zu jeder Tensorgleichung gibt es eine entsprechende Matrixgleichung und umgekehrt. Die Äquivalenz zwischen dem Tensor und der Matrix ist nicht auf Tensoren zweiter Stufe beschränkt. Zum Beispiel wissen wir bereits, daß die Komponenten eines Vektors, der ein Tensor erster Stufe ist, eine Spaltenmatrix bilden, und die Vektorrechnung kann vollständig durch die Rechnung mit diesen entsprechenden Matrizen ersetzt werden.

Eine weitere nützliche Darstellung des Operators \mathbf{I} ist eine Dyade. Eine *lineare Dyade* ist einfach ein Paar von Vektoren, die in einer bestimmten Reihenfolge \mathbf{AB} geschrieben sind. \mathbf{A} nennt man die *Antezedente* und \mathbf{B} die *Konsequente*. Das skalare Punktprodukt einer linearen Dyade mit einem Vektor \mathbf{C} kann auf zwei Wegen ausgeführt werden, entweder

$$\mathbf{AB} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

oder

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{AB} = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}).$$

Im ersten Fall wird \mathbf{C} der *Nachfaktor*, im zweiten Fall *Vorfaktor* genannt. Die zwei Produkte werden im allgemeinen nicht gleich sein – die dyadische Skalarmultiplikation ist nicht kommutativ. Es soll darauf hingewiesen werden, daß in beiden Fällen das Ergebnis des Punktproduktes ein Vektor ist, der eine Richtung und einen Betrag hat, die im allgemeinen von denen von \mathbf{C} verschieden sind. Man kann auch das Doppelpunktprodukt zweier linearer Dyaden als das Skalar definieren, das gegeben ist durch: $\mathbf{AB} : \mathbf{CD} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D})$.



Eine bequemere Schreibweise für das Doppelpunktprodukt ist

$$AB : CD \equiv C \cdot AB \cdot D.$$

Eine *Dyade* ist definiert als eine Summe von linearen Dyaden:

$$AB + CD + \dots$$

Jede lineare Dyade AB kann als Dyade ausgedrückt werden, indem man die Vektoren A und B in Komponentenform mit den Einheitsvektoren i, j und k schreibt. Entwickelt man auf diese Weise, so erscheint die lineare Dyade als

$$\begin{aligned} AB = & A_x B_x ii + A_x B_y ij + A_x B_z ik \\ & + A_y B_x ji + A_y B_y jj + A_y B_z jk \\ & + A_z B_x ki + A_z B_y kj + A_z B_z kk. \end{aligned} \quad (5-12)$$

Gl. (5-12) ist die *Neunerform* der linearen Dyade, so genannt wegen der neun darin enthaltenen Koeffizienten. Offensichtlich können Dyaden in gleicher Weise stets auf die Neunerform reduziert werden. Da die Koeffizienten in der Neunerdarstellung einer Dyade homogene quadratische Funktionen der Vektorkomponenten sind, werden sie selbstverständlich die Transformationseigenschaften haben, die für Komponenten von Tensoren zweiter Stufe charakteristisch sind, vgl. Gl. (5-10). Umgekehrt kann eine Dyade stets aus einem Tensor zweiter Stufe gebildet werden, indem man die Tensorkomponenten als Neunerkoeffizienten verwendet. Somit besteht eine vollständige formale Identität zwischen einer Dyade und einem Tensor zweiter Stufe. Sie sind auch äquivalent hinsichtlich der Wirkung, die sie als Operatoren hervorrufen, wenn sie auf Vektoren wirken, denn wir haben gesehen, daß das Punktprodukt einer Dyade oder linearen Dyade mit einem Vektor einen neuen Vektor ergibt. Tatsächlich kann man den Operator I so schreiben, daß man seine Dyadenform explizit erkennt, indem man die Einheits-Dyade 1 einführt:

$$1 = ii + jj + kk. \quad (5-13)$$

Die Bezeichnung ist sicher zweckmäßig, denn die Matrix von 1 ist genau die Einheitsmatrix. Direkte Multiplikation zeigt:

$$1 \cdot A = A \cdot 1 = A.$$

In der Dyadenschreibweise kann für I geschrieben werden:

$$I = \sum_i m_i (r_i^2 1 - r_i r_i),$$

denn es gilt

$$I \cdot \omega = \sum_i m_i (r_i^2 \omega - r_i (r_i \cdot \omega)) = L \quad (5-14)$$

in Übereinstimmung mit (5-3).



5-3 Der Trägheitstensor und das Trägheitsmoment

Die Größe \mathbf{I} kann deshalb sowohl als Tensor zweiter Stufe oder als Dyade bezeichnet werden; sie wird gewöhnlich *Tensor* (oder *Dyade*) *des Trägheitsmomentes* oder kürzer *Trägheitstensor* genannt. Der Vorteil der Verwendung der dyadischen Form von \mathbf{I} besteht darin, daß die bekannten Methoden der Vektorrechnung noch angewendet werden können. So wird man auf ganz natürliche Weise darauf geführt, die kinetische Energie der Rotation mit Hilfe der Dyade \mathbf{I} auszudrücken. Die kinetische Energie der Bewegung um einen Punkt ist

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2.$$

Darin ist \mathbf{v}_i die Geschwindigkeit relativ zu dem festen Punkt. Wegen Gl. (5-2) kann T auch geschrieben werden:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i).$$

Nach Permutation der Vektoren in dem gemischten Produkt wird

$$T = \frac{\boldsymbol{\omega}}{2} \cdot \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i).$$

Die Summe erkennt man als den Drehimpuls des Körpers um den Koordinatenursprung. Folglich kann die kinetische Energie in der Form

$$T = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}}{2} = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}}{2} \quad (5-15)$$

geschrieben werden. Es sei \mathbf{n} ein Einheitsvektor in der Richtung von $\boldsymbol{\omega}$, so daß gilt $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{n}$. Damit kann man die kinetische Energie auch in einer anderen Form schreiben:

$$T = \frac{\omega^2}{2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2} I \omega^2, \quad (5-16)$$

wobei I ein Skalar ist, das definiert ist durch

$$I = \mathbf{n} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} = \sum_i m_i (r_i^2 - (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n})^2). \quad (5-17)$$

I wird das *Trägheitsmoment um die Rotationsachse* genannt.

In den üblichen elementaren Diskussionen wird das Trägheitsmoment um eine Achse definiert als die Summe der Produkte aus den Teilchenmassen und dem Quadrat des senkrechten Abstandes der



Teilchen von der Achse. Es ist zu zeigen, daß diese Definition mit dem in Gl. (5-17) gegebenen Ausdruck übereinstimmt. Der senkrechte Abstand ist gleich dem Betrag des Vektors $r_i \times \mathbf{n}$ (vgl. Abb. 5-1). Deshalb kann die gebräuchliche Definition von I geschrieben werden:

$$I = \sum_i m_i (r_i \times \mathbf{n}) \cdot (r_i \times \mathbf{n}).$$

Faßt man das erste Kreuzprodukt als einen Vektor auf, so kann man die Vektoren des dreifachen Produktes permutieren und für I schreiben:

$$I = \sum_i m_i r_i \cdot \mathbf{n} \times (r_i \times \mathbf{n}).$$

Entwickelt man das dreifache Produkt, so wird der Ausdruck für I schließlich

$$\begin{aligned} I &= \sum_i m_i r_i \cdot (r_i - \mathbf{n}(r_i \cdot \mathbf{n})) \\ &= \sum_i m_i (r_i^2 - (r_i \cdot \mathbf{n})^2). \end{aligned}$$

Das ist in Übereinstimmung mit Gl. (5-17).

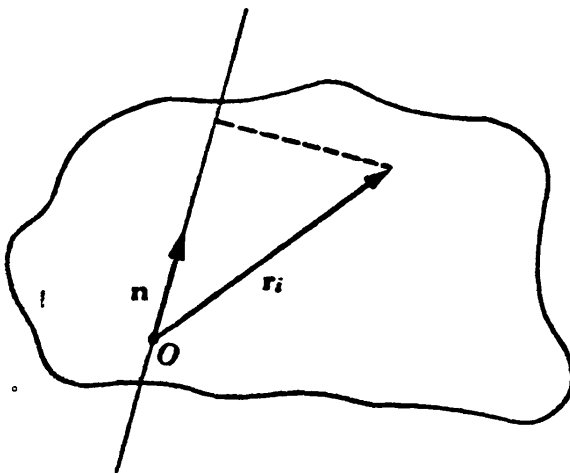


Abb. 5-1. Illustration der Definition des Trägheitsmomentes.

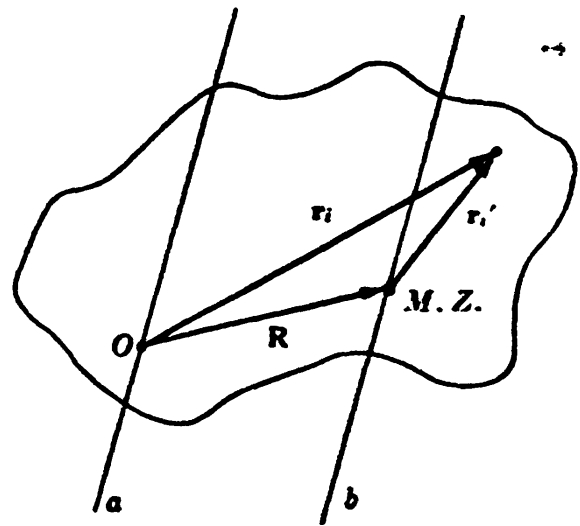


Abb. 5-2. Die Vektoren, die in der Beziehung zwischen den Trägheitsmomenten um parallele Achsen auftreten.

Der Wert des Trägheitsmomentes hängt von der Richtung der Drehachse ab. Üblicherweise ändert ω seine Richtung in bezug auf den Körper im Laufe der Zeit. Deshalb muß auch das Trägheitsmoment als eine Funktion der Zeit angesehen werden. Wenn der Körper gezwungen wird, sich um eine feste Achse zu drehen, dann ist das Trägheitsmoment konstant. In diesem Falle hat die kinetische Energie in (5-16) bereits die Form, die zum Aufstellen der LAGRANGESchen Funk-

tion und der Bewegungsgleichungen erforderlich ist. Der nächste notwendige Schritt besteht darin, ω als zeitliche Ableitung eines Winkels auszudrücken. Das läßt sich meist ohne Schwierigkeit erreichen.

So wie der Trägheitstensor hängt auch das Trägheitsmoment von der Wahl des Ursprunges des körperfesten Achsensatzes ab. Jedoch steht das Trägheitsmoment um eine gegebene Achse in einem einfachen Zusammenhang mit dem Moment um eine parallele Achse, die durch das Massenzentrum geht. \mathbf{R} sei der Vektor vom gegebenen Ursprung O zum Massenzentrum, und \mathbf{r}_i und \mathbf{r}'_i seien die Radiusvektoren von O bzw. vom Massenzentrum zum i -ten Teilchen. Die drei so definierten Vektoren sind verknüpft durch die Beziehung (vgl. Abb. 5-2)

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i.$$

Das Trägheitsmoment um die Achse a ist deshalb

$$I_a = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{n})^2 = \sum_i m_i [(\mathbf{r}'_i + \mathbf{R}) \times \mathbf{n}]^2$$

oder

$$I_a = \sum_i m_i (\mathbf{R} \times \mathbf{n})^2 + \sum_i m_i (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{n})^2 + 2 \sum_i m_i (\mathbf{R} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{n}).$$

Der letzte Term in diesem Ausdruck kann umgeformt werden:

$$-2(\mathbf{R} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \times \sum_i m_i \mathbf{r}'_i).$$

Wegen der Definition des Massenzentrums verschwindet die Summe $\sum_i m_i \mathbf{r}'_i$. Demnach kann I_a durch das Moment um die parallele Achse b in folgender Weise ausgedrückt werden:

$$I_a = I_b + M(\mathbf{R} \times \mathbf{n})^2. \quad (5-18)$$

Der Betrag von $\mathbf{R} \times \mathbf{n}$ ist der senkrechte Abstand des Massenzentrums von der Achse, die durch O geht.

Folglich ist das Trägheitsmoment um eine gegebene Achse gleich dem Trägheitsmoment um eine parallele Achse durch das Massenzentrum plus dem Trägheitsmoment bezüglich der ursprünglichen Achse, das der Körper hätte, wenn er im Massenzentrum konzentriert wäre. Das ist der Satz von STEINER. Man wird somit auf einen Typ der Zerlegung des Trägheitsmomentes geführt, der dem sehr ähnlich ist, der für den linearen Impuls, den Drehimpuls und die kinetische Energie in Abschnitt 1-2 gefunden wurde.



5-4 Die Eigenwerte des Trägheitstensors und die Hauptachsen- transformation

Die vorangegangene Diskussion diente dazu, die wichtige Rolle des Trägheitstensors hervorzuheben, die er bei der Diskussion der Bewegung starrer Körper spielt. Eine Untersuchung der Eigenschaften dieses Tensors und der ihm zugeordneten Matrix wird deshalb an dieser Stelle von besonderem Interesse sein. Aus der Definitionsgleichung (5-7) sieht man, daß die Komponenten des Tensors symmetrisch sind, das heißt,

$$I_{xy} = I_{yx}.$$

Da die Komponenten reell sind, folgt daraus, daß der Tensor gleich seinem adjungierten ist (vgl. Gl. (4-38)). Man sagt in diesem Falle, \mathbf{I} ist *selbstadjungiert* oder *hermiteisch*. Da der Trägheitstensor im allgemeinen neun Komponenten hat, sind deshalb nur sechs von diesen unabhängig – die drei Diagonalelemente und drei der Nichtdiagonalelemente.

Die Koeffizienten des Trägheitstensors hängen ab von der Lage des Ursprunges des körperfesten Achsensatzes und von der Orientierung dieser Achsen relativ zum Körper. Es wäre natürlich sehr bequem, wenn man für einen gegebenen Ursprung eine besondere Orientierung der Körperachsen finden könnte, für die der Trägheitstensor diagonal ist, so daß die Dyade geschrieben werden könnte:

$$\mathbf{I}' = I_1 \mathbf{i}\mathbf{i} + I_2 \mathbf{j}\mathbf{j} + I_3 \mathbf{k}\mathbf{k}. \quad (5-19)$$

Bezüglich eines solchen Achsensatzes enthielte jede Komponente von \mathbf{L} nur die entsprechende Komponente von $\boldsymbol{\omega}$:

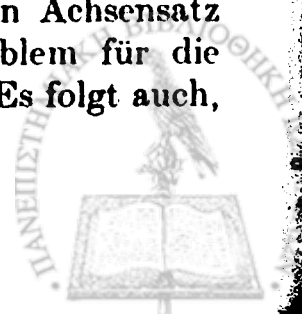
$$L_x = I_1 \omega_x, \quad L_y = I_2 \omega_y, \quad L_z = I_3 \omega_z. \quad (5-20)$$

Eine ähnliche Vereinfachung erhielte man dann auch für die kinetische Energie:

$$T = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}}{2} = \frac{1}{2} I_1 \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_z^2. \quad (5-21)$$

Man kann zeigen, daß es immer möglich ist, solche Achsen zu finden. Der Beweis beruht im wesentlichen auf der hermiteischen Natur des Trägheitstensors.

In Abschnitt 4-6 wurde festgestellt, daß die Eigenwertgleichung einer Matrix dadurch gelöst werden kann, daß man die Matrix auf eine Diagonalform transformiert. Deren Elemente sind dann die gesuchten Eigenwerte. Demnach ist das Problem, einen Achsensatz zu finden, in dem \mathbf{I} diagonal ist, dem Eigenwertproblem für die Matrix \mathbf{I} gleichwertig. I_1 , I_2 und I_3 sind die Eigenwerte. Es folgt auch,



daß für das Koordinatensystem, in dem \mathbf{I} diagonal ist, die Richtung der Achsen mit der Richtung der Eigenvektoren zusammenfällt. Nehmen wir zum Beispiel an, ω liege längs einer der Achsen, etwa der x -Achse. Wegen (5-20) liegt dann der Drehimpuls $\mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \omega$ auch längs der x -Achse. Die Wirkung von \mathbf{I} auf einen Vektor, der parallel zu einer der drei Koordinatenachsen ist, führt auf einen anderen Vektor mit derselben Richtung. Definitionsgemäß muß deshalb ein solcher Vektor einer der Eigenvektoren von \mathbf{I} sein.

In Abschnitt 4-6 wurde das Verfahren ausgeführt, nach dem man eine Matrix diagonalisiert und deren Eigenwerte findet. Dieses Verfahren selbst ist aber noch kein Beweis für die Existenz eines *reellen cartesischen* Koordinatensystems, in dem \mathbf{I} diagonal ist. Es sei daran erinnert, daß eine orthogonale Matrix außer in trivialen Fällen nur einen reellen Eigenwert und deshalb nur eine reelle Richtung (nämlich die Drehachse) hat, die einem Eigenvektor entspricht. Hier möchten wir dagegen beweisen, daß *alle* Eigenwerte von \mathbf{I} reell sind, und daß die drei reellen Richtungen der Eigenvektoren orthogonal zueinander sind.⁴

X_{kj} sei die k -te Komponente des j -ten Eigenvektors von \mathbf{I} . Wir verwenden dabei die Bezeichnungsweise von Abschnitt 4-6. Die Eigenwertgleichung lautet dann:

$$\sum_k I_{ik} X_{kj} = I_j X_{ij}. \quad (5-22)$$

Multipliziert man Gl. (5-22) mit X_{il}^* und summiert über den Index i , so erhält man

$$\sum_{i,k} X_{il}^* I_{ik} X_{kj} = I_j \sum_i X_{il}^* X_{ij}. \quad (5-23)$$

Die Summe auf der rechten Seite ist gleich $\mathbf{R}_l^* \cdot \mathbf{R}_j$, dem Punktprodukt des komplexkonjugierten des l -ten Eigenvektors mit dem j -ten Eigenvektor. Das komplexkonjugierte der entsprechenden Eigenwertgleichung für I_l ist

$$\sum_i I_{ki}^* X_{il}^* = I_l^* X_{kl}^*.$$

Multipliziert man dieses Mal mit X_{kj} und summiert über k , so erhält man

$$\sum_{i,k} X_{il}^* I_{ki}^* X_{kj} = I_l^* \sum_k X_{kl}^* X_{kj}. \quad (5-24)$$

⁴ In Ausdrücken der Matrix \mathbf{X} , die \mathbf{I} mittels einer Ähnlichkeitstransformation diagonalisiert, bedeuten diese Bedingungen, daß \mathbf{X} eine *reelle orthogonale* Matrix sein muß.



wenn man explizit von der Symmetrie von \mathbf{I} Gebrauch macht. Es ist zweckmäßig, einen Vektor $\boldsymbol{\rho}$ durch die folgende Gleichung zu definieren:

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{n}}{\sqrt{I}}$$

Der Betrag von $\boldsymbol{\rho}$ ist also auf das Trägheitsmoment um die Achse bezogen, deren Richtung durch \mathbf{n} gegeben ist. Mit Hilfe der Komponenten des neuen Vektors nimmt Gl. (5-27) die Form an:

$$1 = I_{xx}\rho_1^2 + I_{yy}\rho_2^2 + I_{zz}\rho_3^2 + 2I_{xy}\rho_1\rho_2 + 2I_{yz}\rho_2\rho_3 + 2I_{xz}\rho_3\rho_1. \quad (5-28)$$

Faßt man (5-28) als eine Funktion der drei Variablen ρ_1, ρ_2, ρ_3 auf, so ist sie die Gleichung einer Fläche im ρ -Raum. Im besonderen ist Gl. (5-28) die Gleichung eines Ellipsoids, das als *Trägheitsellipsoid* bezeichnet wird. Es ist bekannt, daß man immer auf einen Satz cartesischer Koordinaten transformieren kann, in dem die Gleichung eines Ellipsoids seine Normalform annimmt:

$$1 = I_1\rho_1'^2 + I_2\rho_2'^2 + I_3\rho_3'^2. \quad (5-29)$$

Hier liegen die Hauptachsen des Ellipsoids längs der neuen Koordinatenachsen. (5-29) hat aber gerade die Form, die Gl. (5-28) in einem Koordinatensystem hat, in dem der Trägheitstensor \mathbf{I} diagonal ist. Demnach ist die Koordinatentransformation, die die Gleichung des Ellipsoids in seine Normalform überführt, genau die früher diskutierte Hauptachsentransformation. Die Hauptträgheitsmomente bestimmen die Längen der Achsen des Trägheitsellipsoids: Wenn zwei der Wurzeln der Säkulargleichung gleich sind, dann hat das Trägheitsellipsoid zwei gleiche Achsen und ist ein Rotationsellipsoid. Wenn alle drei Hauptträgheitsmomente gleich sind, ist das Trägheitsellipsoid eine Kugel.

Eine Größe, die in engem Zusammenhang mit dem Trägheitsmoment steht, ist der Trägheitsradius R_0 , der durch die Gleichung

$$I = MR_0^2 \quad (5-30)$$

definiert ist. Mit Hilfe des Trägheitsradius kann der Vektor $\boldsymbol{\rho}$ folgendermaßen geschrieben werden:

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{n}}{R_0\sqrt{M}}$$

Der Radiusvektor zu einem Punkt auf dem Trägheitsellipsoid ist somit umgekehrt proportional dem Trägheitsradius um die Richtung des Vektors.

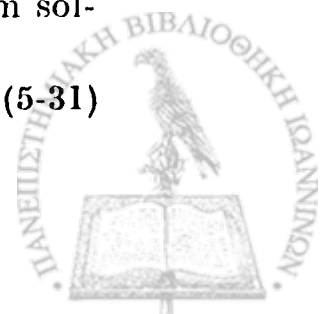


5-5 Methoden zur Lösung der Probleme der Bewegung starrer Körper und die Eulerschen Bewegungsgleichungen

Praktisch alle Regeln, die zur Formulierung und Lösung der Probleme der Dynamik starrer Körper notwendig sind, haben wir nun aufgestellt. Wenn nichtholonome Zwangsbedingungen vorliegen, so muß man besondere Beachtung darauf verwenden, die Wirkungen dieser Zwangsbedingungen in den Bewegungsgleichungen zu berücksichtigen. Wenn zum Beispiel „Rollbedingungen“ vorliegen, dann müssen diese nach der Methode der LAGRANGESchen Multiplikatoren in die Bewegungsgleichungen eingeführt werden (vgl. Abschn. 2-4). Mit Ausnahme solcher ungewöhnlicher Fälle enthalten die meisten Probleme, die sich mit der Bewegung starrer Körper befassen, nur holonome Zwangsbedingungen und konservative Kräfte. Die LAGRANGE-Funktion allein ist dann ausreichend, die Verhältnisse zu beschreiben. Wenn die Bewegung des Körpers völlig ohne Zwang verläuft, wird der vollständige Satz von sechs generalisierten Koordinaten benötigt: drei cartesische Koordinaten, um die Translationsbewegung zu beschreiben, und die drei EULERSchen Winkel, um die Rotationsbewegung zu beschreiben. Im besonderen kann die kinetische Energie T immer als die Summe aus der Translationsenergie des Massenzentrums, $\frac{1}{2}Mv^2$, plus der Rotationsenergie um das Massenzentrum, $\frac{1}{2}I\omega^2$, geschrieben werden. Um diesen letzten Term zweckmäßig auszudrücken, verwendet man fast immer eine Darstellung mit Hilfe der Hauptachsen, so daß die Rotationsenergie die einfache in Gl. (5-21) angegebene Form hat, wobei die Komponenten von ω durch die EULERSchen Winkel ausgedrückt sind. Wenn natürlich ein Punkt in dem Körper durch Zwangsbedingungen des Problems festgehalten wird, dann enthält die kinetische Energie nur die Rotationssterme und das Problem ist wesentlich vereinfacht. Oftmals verläuft die Bewegung praktisch nur in zwei Dimensionen, wie etwa die Bewegung einer starren Platte in einer Ebene. Die Rotationsachse ist dann in der Richtung senkrecht zu der Ebene festgelegt; damit ist nur ein Drehwinkel notwendig, und man ist von der etwas mühsamen Arbeit mit den EULERSchen Winkeln befreit.

Obwohl die LAGRANGESchen Bewegungsgleichungen für die Lösung des Problems formal ausreichend sind, ist es in dem Fall der Bewegung mit einem festgehaltenen Punkt oft bequem, einen anderen Satz zu verwenden, den man die *Eulerschen Bewegungsgleichungen* nennt. Für konservative Kräfte kann die LAGRANGE-Funktion in einem solchen Falle geschrieben werden:

$$L = T - V = \frac{1}{2}(I_1\omega_x^2 + I_2\omega_y^2 + I_3\omega_z^2) - V(\theta, \phi, \psi). \quad (5-31)$$



wenn man explizit von der Symmetrie von \mathbf{I} Gebrauch macht. Es ist zweckmäßig, einen Vektor $\boldsymbol{\rho}$ durch die folgende Gleichung zu definieren:

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{n}}{\sqrt{I}}$$

Der Betrag von $\boldsymbol{\rho}$ ist also auf das Trägheitsmoment um die Achse bezogen, deren Richtung durch \mathbf{n} gegeben ist. Mit Hilfe der Komponenten des neuen Vektors nimmt Gl. (5-27) die Form an:

$$1 = I_{xx}\rho_1^2 + I_{yy}\rho_2^2 + I_{zz}\rho_3^2 + 2I_{xy}\rho_1\rho_2 + 2I_{yz}\rho_2\rho_3 + 2I_{zx}\rho_3\rho_1. \quad (5-28)$$

Faßt man (5-28) als eine Funktion der drei Variablen ρ_1, ρ_2, ρ_3 auf, so ist sie die Gleichung einer Fläche im ρ -Raum. Im besonderen ist Gl. (5-28) die Gleichung eines Ellipsoids, das als *Trägheitsellipsoid* bezeichnet wird. Es ist bekannt, daß man immer auf einen Satz cartesischer Koordinaten transformieren kann, in dem die Gleichung eines Ellipsoids seine Normalform annimmt:

$$1 = I_1\rho_1'^2 + I_2\rho_2'^2 + I_3\rho_3'^2. \quad (5-29)$$

Hier liegen die Hauptachsen des Ellipsoids längs der neuen Koordinatenachsen. (5-29) hat aber gerade die Form, die Gl. (5-28) in einem Koordinatensystem hat, in dem der Trägheitstensor \mathbf{I} diagonal ist. Demnach ist die Koordinatentransformation, die die Gleichung des Ellipsoids in seine Normalform überführt, genau die früher diskutierte Hauptachsentransformation. Die Hauptträgheitsmomente bestimmen die Längen der Achsen des Trägheitsellipsoids: Wenn zwei der Wurzeln der Säkulargleichung gleich sind, dann hat das Trägheitsellipsoid zwei gleiche Achsen und ist ein Rotationsellipsoid. Wenn alle drei Hauptträgheitsmomente gleich sind, ist das Trägheitsellipsoid eine Kugel.

Eine Größe, die in engem Zusammenhang mit dem Trägheitsmoment steht, ist der Trägheitsradius R_0 , der durch die Gleichung

$$I = MR_0^2 \quad (5-30)$$

definiert ist. Mit Hilfe des Trägheitsradius kann der Vektor $\boldsymbol{\rho}$ folgendermaßen geschrieben werden:

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{n}}{R_0\sqrt{M}}$$

Der Radiusvektor zu einem Punkt auf dem Trägheitsellipsoid ist somit umgekehrt proportional dem Trägheitsradius um die Richtung des Vektors.



5-5 Methoden zur Lösung der Probleme der Bewegung starrer Körper und die Eulerschen Bewegungsgleichungen

Praktisch alle Regeln, die zur Formulierung und Lösung der Probleme der Dynamik starrer Körper notwendig sind, haben wir nun aufgestellt. Wenn nichtholonome Zwangsbedingungen vorliegen, so muß man besondere Beachtung darauf verwenden, die Wirkungen dieser Zwangsbedingungen in den Bewegungsgleichungen zu berücksichtigen. Wenn zum Beispiel „Rollbedingungen“ vorliegen, dann müssen diese nach der Methode der LAGRANGESchen Multiplikatoren in die Bewegungsgleichungen eingeführt werden (vgl. Abschn. 2-4). Mit Ausnahme solcher ungewöhnlicher Fälle enthalten die meisten Probleme, die sich mit der Bewegung starrer Körper befassen, nur holonome Zwangsbedingungen und konservative Kräfte. Die LAGRANGE-Funktion allein ist dann ausreichend, die Verhältnisse zu beschreiben. Wenn die Bewegung des Körpers völlig ohne Zwang verläuft, wird der vollständige Satz von sechs generalisierten Koordinaten benötigt: drei cartesische Koordinaten, um die Translationsbewegung zu beschreiben, und die drei EULERSchen Winkel, um die Rotationsbewegung zu beschreiben. Im besonderen kann die kinetische Energie T immer als die Summe aus der Translationsenergie des Massenzentrums, $\frac{1}{2}Mv^2$, plus der Rotationsenergie um das Massenzentrum, $\frac{1}{2}I\omega^2$, geschrieben werden. Um diesen letzten Term zweckmäßig auszudrücken, verwendet man fast immer eine Darstellung mit Hilfe der Hauptachsen, so daß die Rotationsenergie die einfache in Gl. (5-21) angegebene Form hat, wobei die Komponenten von ω durch die EULERSchen Winkel ausgedrückt sind. Wenn natürlich ein Punkt in dem Körper durch Zwangsbedingungen des Problems festgehalten wird, dann enthält die kinetische Energie nur die Rotationssterme und das Problem ist wesentlich vereinfacht. Oftmals verläuft die Bewegung praktisch nur in zwei Dimensionen, wie etwa die Bewegung einer starren Platte in einer Ebene. Die Rotationsachse ist dann in der Richtung senkrecht zu der Ebene festgelegt; damit ist nur ein Drehwinkel notwendig, und man ist von der etwas mühsamen Arbeit mit den EULERSchen Winkeln befreit.

Obwohl die LAGRANGESchen Bewegungsgleichungen für die Lösung des Problems formal ausreichend sind, ist es in dem Fall der Bewegung mit einem festgehaltenen Punkt oft bequem, einen anderen Satz zu verwenden, den man die *Eulerschen Bewegungsgleichungen* nennt. Für konservative Kräfte kann die LAGRANGE-Funktion in einem solchen Falle geschrieben werden:

$$L = T - V = \frac{1}{2}(I_1\omega_x^2 + I_2\omega_y^2 + I_3\omega_z^2) - V(\theta, \phi, \psi). \quad (5-31)$$



Darin sind I_1, I_2, I_3 die Hauptträgheitsmomente für den festgehaltenen Punkt. Die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit längs der Hauptachsen, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, können vermöge der Gl. (4-103) durch die EULERSchen Winkel ausgedrückt werden, die das Hauptachsensystem zu einem raumfesten Achsensystem in Beziehung setzen. In diesem Sinne kann die vollständige LAGRANGE-Funktion als Funktion der drei Drehwinkel θ, ϕ, ψ geschrieben werden. Es sei daran erinnert, daß die generalisierte Kraft, die einer generalisierten Rotationskoordinate entspricht, die Komponente des eingepprägten Drehmomentes längs der Drehachse ist (vgl. Abschn. 2-6). Die generalisierten Kräfte, die θ, ϕ, ψ entsprechen, sind deshalb die Komponenten des Drehmomentes, und zwar nicht längs der Hauptachsen, sondern vielmehr längs der Knotenlinie, der z -Achse des Raumes und der körperfesten z -Achse. Demnach liefert nur eine dieser drei generalisierten Kräfte, und zwar $-\frac{\partial V}{\partial \psi}$, die ψ entspricht, direkt eine Komponente des gesamten Drehmomentes längs einer Hauptachse, in diesem Falle längs der z -Achse. Die LAGRANGESche Gleichung für ψ kann deshalb geschrieben werden:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = N_\psi. \quad (5-32)$$

Eine Untersuchung der Gl. (4-103) zeigt, daß nur ω_z die zeitliche Ableitung $\dot{\psi}$ enthält, während ψ selbst nur in ω_x und ω_y auftritt; in der Tat gelten die Beziehungen:

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial \dot{\psi}} = 1, \quad \frac{\partial \omega_y}{\partial \dot{\psi}} = \omega_y, \quad \frac{\partial \omega_z}{\partial \dot{\psi}} = -\omega_z.$$

Mit diesen Formeln und mit der in Gl. (5-21) gegebenen Form der kinetischen Energie können die in (5-32) auftretenden partiellen Ableitungen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} &= I_3 \dot{\psi}, \\ \frac{\partial T}{\partial \psi} &= I_1 \omega_x \omega_y - I_2 \omega_y \omega_z. \end{aligned}$$

Die LAGRANGESche Gleichung für die Koordinate ψ hat deshalb die Form:

$$I_3 \dot{\omega}_z - \omega_x \omega_y (I_1 - I_2) = N_\psi. \quad (5-33)$$

Die Identifizierung einer der Hauptachsen mit der z -Achse ist völlig



willkürlich. Selbstverständlich kann man die Indizes permutieren und eine der Gl. (5-33) ähnliche Gleichung für die Komponente des gesamten Drehmomentes längs einer der anderen Hauptachsen schreiben. Mühelos findet man den vollständigen Gleichungssatz für alle Achsen:

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_x - \omega_y \omega_z (I_2 - I_3) &= N_x \\ I_2 \dot{\omega}_y - \omega_z \omega_x (I_3 - I_1) &= N_y \\ I_3 \dot{\omega}_z - \omega_x \omega_y (I_1 - I_2) &= N_z. \end{aligned} \quad (5-34)$$

Diese sind die sogenannten EULERSchen Bewegungsgleichungen für einen starren Körper mit einem festgehaltenen Punkt. Obwohl sich die dritte der Gl. (5-34) als die LAGRANGESche Gleichung für ψ erweist, muß darauf hingewiesen werden, daß die anderen zwei *nicht* die LAGRANGESchen Gleichungen sind, die den Koordinaten θ und ϕ entsprechen. So entspricht $-\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \theta}$ weder N_y noch N_x , sondern es ist vielmehr die Komponente von \mathbf{N} längs der Knotenlinie.

Eine andere Ableitung der EULERSchen Gleichungen geht auf die fundamentale Bewegungsgleichung für den gesamten Drehimpuls, Gl. (1-24), zurück:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}.$$

Hier bezieht sich die zeitliche Ableitung eindeutig auf das Raumsystem, denn die Gleichung gilt nur in einem Inertialsystem. Andererseits enthalten die Gleichungen (5-34) die zeitlichen Ableitungen der Komponenten bezüglich der sich bewegenden Achsen. Wegen Gl. (4-100) sind die beiden zeitlichen Ableitungen jedoch verknüpft durch

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{\text{Raum}} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{\text{Körper}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L},$$

und die Komponente der Bewegungsgleichung entlang der Hauptachse in x -Richtung ist

$$\frac{dL_x}{dt} + \omega_y L_z - \omega_z L_y = N_x. \quad (5-35)$$

Die Komponenten des Drehimpulses entlang der Hauptachsen sind jedoch proportional den entsprechenden Komponenten der Winkelgeschwindigkeit; die Proportionalitätsfaktoren sind die Hauptträgheitsmomente. Demnach führt Gl. (5-35) auf

$$I_1 \dot{\omega}_x - \omega_y \omega_z (I_2 - I_3) = N_x.$$

Das ist in Übereinstimmung mit der ersten der Gl. (5-35). Die anderen Gleichungen folgen daraus durch zyklische Permutation der Indizes.



5-6 Die kräftefreie Bewegung eines starren Körpers

Ein Problem der Dynamik starrer Körper, auf das die EULERSchen Gleichungen anwendbar sind, ist die Bewegung eines starren Körpers, der keinen äußeren Kräften oder Drehmomenten unterworfen ist. Das Massenzentrum ist dann entweder in Ruhe oder bewegt sich gleichförmig. Es bedeutet dann keine Einschränkung der Allgemeinheit der Lösung, wenn man die Rotationsbewegung in einem Bezugssystem diskutiert, in dem das Massenzentrum stationär ist. In diesem Falle rührt der Drehimpuls nur von der Drehung um das Massenzentrum her, und die EULERSchen Gleichungen sind die Bewegungsgleichungen für das System. Bei Abwesenheit irgendwelcher äußerer Drehmomente reduzieren sich diese auf

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_x &= \omega_y \omega_z (I_2 - I_3) \\ I_2 \dot{\omega}_y &= \omega_x \omega_z (I_3 - I_1) \\ I_3 \dot{\omega}_z &= \omega_x \omega_y (I_1 - I_2). \end{aligned} \quad (5-36)$$

Dieselben Gleichungen beschreiben natürlich auch die Bewegung eines starren Körpers, wenn ein Punkt festgelegt ist und keine äußeren Drehmomente wirken. Wir können sofort zwei Integrale der Bewegung angeben, denn sowohl die kinetische Energie als auch der Vektor des Gesamtdrehimpulses müssen zeitlich konstant sein. Mit diesen zwei Integralen ist es möglich, (5-36) mit Hilfe elliptischer Funktionen vollständig zu integrieren, jedoch ist eine solche Behandlung nicht sehr durchsichtig. Es ist aber möglich, eine elegante geometrische Beschreibung der Bewegung zu geben. Sie heißt POINSONSche Konstruktion. Für sie ist eine vollständige Lösung des Problems nicht erforderlich.

Betrachten wir ein Koordinatensystem, das längs der Hauptachsen des Körpers orientiert ist, dessen Achsen jedoch ein Maß für die Komponenten des in Abschnitt 5-4 definierten Vektors ρ , nicht aber ein Maß für die Komponenten des Ortsvektors \mathbf{r} sind. In diesem Raum definieren wir eine Funktion

$$F(\rho) = \rho \cdot \mathbf{l} \cdot \rho,$$

wobei die Flächen zu konstantem F Ellipsoide sind. Insbesondere ist die Fläche $F = 1$ das Trägheitsellipsoid. Entsprechend der Richtung der Drehachse ändert sich im Laufe der Zeit auch der zu ihr parallele Vektor ρ . Die Spitze des Vektors definiert immer einen Punkt auf dem Trägheitsellipsoid. Der Gradient von F , der für diesen Punkt bestimmt wird, liefert die Richtung der entsprechenden Normalen zum Trägheitsellipsoid. Wir erinnern uns daran, daß \mathbf{l} in den Hauptachsen



in Diagonalform vorliegt. Daraus und aus der Definition der Funktion F folgt für die partielle Ableitung von F bezüglich ρ_1

$$\frac{\partial F}{\partial \rho_1} = (\nabla F)_1 = 2I_1 \rho_1.$$

Da der Vektor ρ auch folgendermaßen definiert werden kann:

$$\rho = \frac{\omega}{\omega \sqrt{I}},$$

läßt sich diese Komponente des Gradienten von F bezüglich ρ schreiben:

$$(\nabla F)_1 = \frac{2}{\omega \sqrt{I}} I_1 \omega_x$$

oder

$$(\nabla F)_1 = \frac{2}{\omega \sqrt{I}} L_x.$$

Ähnlich folgt für die anderen Komponenten von ∇F

$$(\nabla F)_2 = \frac{2}{\omega \sqrt{I}} L_y,$$

$$(\nabla F)_3 = \frac{2}{\omega \sqrt{I}} L_z.$$

Demnach bewegt sich der Vektor ω immer so, daß die entsprechende Normale zum Trägheitsellipsoid die Richtung des Drehimpulses hat. In dem besonderen hier vorliegenden Fall ist zwar die Richtung von L im Raum fest, aber das Trägheitsellipsoid (das bezüglich des Körpers fest ist) muß sich im Raum bewegen, damit die Beziehung zwischen ω und L erfüllt ist (vgl. Abb. 5-3).

Man kann auch zeigen, daß der Abstand zwischen dem Mittelpunkt des Ellipsoids und der Tangentialebene im Punkte ρ ebenfalls konstant sein muß. Dieser Abstand ist gleich der Projektion von ρ auf L . Er ist gegeben durch

$$\frac{\rho \cdot L}{L} = \frac{\omega \cdot L}{\omega L \sqrt{I}} = \frac{2T}{L \sqrt{I} \omega^2}$$

oder

$$\frac{\rho \cdot L}{L} = \frac{\sqrt{2T}}{L}.$$

(5-37)

Sowohl die kinetische Energie T als auch der Drehimpuls L sind Konstanten der Bewegung. Deshalb muß die Tangentialebene immer einen



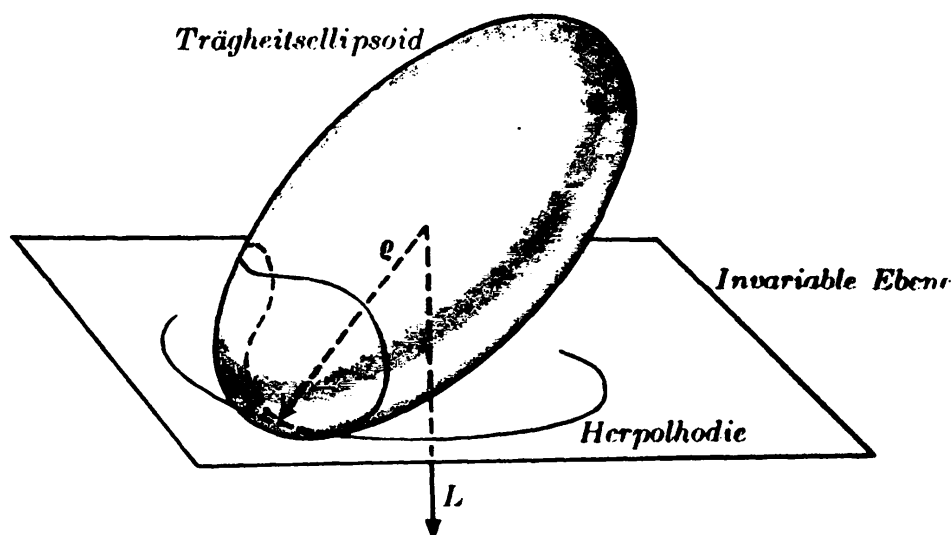
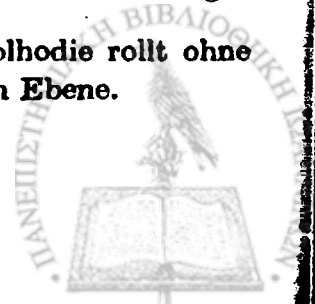


Abb. 5-3. Die Bewegung des Trägheitsellipsoids relativ zur invariablen Ebene.

festen Abstand vom Mittelpunkt des Ellipsoids haben. Da die längs L liegende Normale zu der Ebene auch eine feste Richtung hat, wird die Tangentialebene die *invariable Ebene* genannt. Wir können die kräftefreie Bewegung des starren Körpers folgendermaßen beschreiben: Das Trägheitsellipsoid rollt ohne zu gleiten auf der invariablen Ebene, wobei das Zentrum des Ellipsoids immer in einer konstanten Höhe über der Ebene ist. Das Rollen verläuft ohne Gleitung, weil der Berührungspunkt durch die Lage von ρ bestimmt ist. ρ liegt aber längs der augenblicklichen Drehachse und gibt somit diejenige Richtung an, für die der Körper momentan in Ruhe ist. Die Kurve, die durch den Berührungspunkt auf dem Trägheitsellipsoid beschrieben wird, heißt *Polhodie*. Die entsprechende Kurve auf der invariablen Ebene nennt man *Herpolhodie*.⁶

Die geometrische Diskussion von POINSON ist der vollständigen Beschreibung der kräftefreien Bewegung des Körpers völlig gleichwertig. Die Richtung der invariablen Ebene und die Höhe des Trägheitsellipsoids über ihr sind durch die Werte von T und L bestimmt, die wiederum zu den Anfangsbedingungen des Problems gehören. Es ist damit ein geometrisches Problem, die Polhodie und die Herpolhodie zu bestimmen. Die Richtung der Winkelgeschwindigkeit im Raum ist durch die Richtung von ρ gegeben, während die augenblickliche Orientierung des Körpers durch die Orientierung des Trägheitsellipsoids geliefert wird, welches im Körper festgelegt ist. Ausführliche Beschreibungen der kräftefreien Bewegung, die man auf diese Art ge-

⁶ Deshalb gilt der etwas zungenbrecherische Satz: Die Polhodie rollt ohne Schlupf auf der Herpolhodie; letztere liegt auf der invariablen Ebene.



winnt, sind häufig in der Literatur zu finden.⁷ In dem besonderen Falle eines symmetrischen Körpers ist das Trägheitsellipsoid ein Rotationsellipsoid, so daß die Polhodie auf dem Ellipsoid offensichtlich ein Kreis um die Symmetrieachse ist. Entsprechend bewegt sich der Vektor der Winkelgeschwindigkeit auf der Fläche eines Kegels. Physikalisch bedeutet das, daß die Richtung von ω im Laufe der Zeit um die Symmetrieachse des Körpers präzessiert.

Für einen symmetrischen starren Körper ist es nicht schwierig, die analytische Lösung für die kräftefreie Bewegung zu erhalten, und man kann direkt die Präzessionsbewegung bestätigen, die durch die POINCARÉsche Konstruktion vorausgesagt wird. Die Symmetrieachse sei als Hauptachse z gewählt, so daß $I_1 = I_2$. Die EULERSchen Gleichungen (5-36) reduzieren sich dann auf

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_x &= (I_1 - I_3) \omega_z \omega_y \\ I_1 \dot{\omega}_y &= -(I_1 - I_3) \omega_z \omega_x \\ I_3 \dot{\omega}_z &= 0. \end{aligned} \quad (5-38)$$

Die letzte Gleichung ergibt, daß ω_z eine Konstante ist. ω_z kann deshalb als eine der bekannten Anfangsbedingungen des Problems behandelt werden. Entweder ω_x oder ω_y kann aus den übrigen zwei Gleichungen eliminiert werden. Um nach ω_x aufzulösen, bilden wir die zeitliche Ableitung der ersten Gleichung (5-38):

$$I_1 \ddot{\omega}_x = (I_1 - I_3) \omega_z \dot{\omega}_y$$

und substituieren für $\dot{\omega}_y$ den Ausdruck, der durch die zweite Gleichung gegeben ist. Man erhält schließlich

$$\ddot{\omega}_x = - \left[\frac{(I_1 - I_3) \omega_z}{I_1} \right]^2 \omega_x. \quad (5-39)$$

Gl. (5-39) beschreibt eine einfache harmonische Bewegung mit einer Kreisfrequenz

$$\Omega = \frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_z, \quad (5-40)$$

so daß eine typische Lösung für ω_x lautet:

$$\omega_x = A \sin \Omega t. \quad (5-41)$$

A ist eine Konstante. Die entsprechende Lösung für ω_y findet man,

⁷ Siehe besonders WEBSTER, *Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, den Artikel von WINKELMANN und GRAMMEL in Bd. V des *Handbuches der Physik* und die Abhandlung von F. KLEIN und A. SOMMERFELD, *Theorie des Kreisels*.



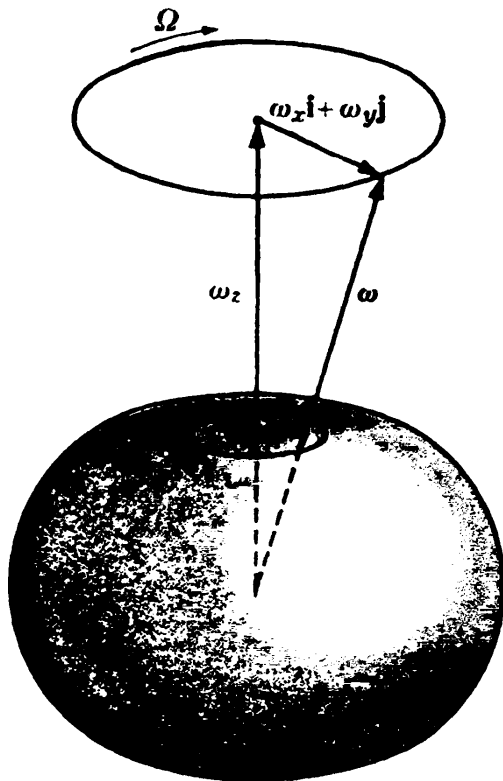


Abb. 5-4. Präzession der Winkelgeschwindigkeit um die Symmetrieachse bei der kräftefreien Bewegung eines symmetrischen starren Körpers.

Die Lösungen (5-41) und (5-42) zeigen, daß der Vektor $\omega_x i + \omega_y j$ einen konstanten Betrag hat und gleichförmig mit der Kreisfrequenz Ω um die z -Achse des Körpers rotiert (vgl. Abb. 5-4). Demnach ist die gesamte Winkelgeschwindigkeit $\omega = \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k$ dem Betrage nach konstant und präzessiert mit der gleichen Frequenz um die z -Achse, genau so wie es durch die POINSONSche Konstruktion vorausgesagt wurde.⁶ Es sei daran erinnert, daß die hier beschriebene Präzession relativ zu den Körperachsen erfolgt, die sich selbst mit der größeren Frequenz ω im Raum drehen. Aus Gl. (5-40) sieht man, daß die Präzessionsfrequenz Ω um so kleiner im Vergleich zur Rotationsfrequenz ω ist, je kleiner die Differenz zwischen I_1 und I_3 ist. Die Konstanten A (die Amplitude der Präzession) und ω_z können durch die gebräuchlicheren Konstanten der Bewegung, nämlich durch die kinetische Energie und den Betrag des Drehimpulses ausgedrückt werden. Sowohl T als auch L^2 können als Funktionen von A und ω_z geschrieben werden:

$$T = \frac{1}{2} I_1 A^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_z^2,$$

$$L^2 = I_1^2 A^2 + I_3^2 \omega_z^2,$$

und diese Beziehungen können wiederum nach A und ω_z als Funktionen von T und L aufgelöst werden.

⁶ Die Präzession kann auch auf eine andere Art demonstriert werden: Man definiert einen Vektor Ω , der längs der z -Achse liegt und den durch (5-40) gegebenen Betrag hat. Die Gl. (5-38) sind dann im wesentlichen äquivalent der Vektorgleichung

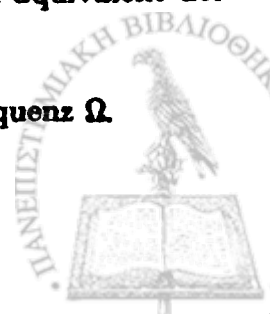
$$\dot{\omega} = \omega \times \Omega.$$

Aus dieser erkennt man sofort die Präzession von ω mit der Frequenz Ω .

indem man (5-41) in die erste der Gl. (5-38) substituiert und nach ω_y auflöst:

$$\omega_y = A \cos \Omega t. \quad (5-42)$$

Die Lösungen (5-41) und (5-42) zeigen, daß der Vektor $\omega_x i + \omega_y j$ einen konstanten Betrag hat und gleichförmig mit der Kreisfrequenz Ω um die z -Achse des Körpers rotiert (vgl. Abb. 5-4). Demnach ist die gesamte Winkelgeschwindigkeit $\omega = \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k$ dem Betrage nach konstant und präzessiert mit der gleichen Frequenz um die z -Achse, genau so wie es durch die POINSONSche Konstruktion vorausgesagt wurde.⁶ Es sei daran erinnert, daß die hier beschriebene Präzession relativ zu den Körperachsen erfolgt, die sich selbst mit der größeren Frequenz ω im Raum drehen. Aus Gl. (5-40) sieht man, daß die Präzessions-



Man sollte erwarten, daß die Drehachse der Erde diese Präzession ausführt, denn die äußeren auf die Erde wirkenden Drehmomente sind so schwach, daß die *Rotationsbewegung* als kräftefrei angesehen werden kann. Die Erde ist symmetrisch um die Polachse und an den Polen leicht abgeplattet, so daß I_1 kleiner als I_3 ist. Das numerische Verhältnis der Momente ist so, daß

$$\frac{I_1 - I_3}{I_1} = -0,0033$$

ist. Der Betrag der Winkelfrequenz der Präzession sollte deshalb sein:

$$\Omega = \frac{\omega_z}{300}$$

Da ω_z praktisch gleich dem Betrag von ω ist, führt dieses Ergebnis auf eine Präzessionsperiode von 300 Tagen oder etwa 10 Monaten. Ein Beobachter auf der Erde sollte deshalb feststellen, daß die Rotationsachse im Laufe von 10 Monaten einen Kreis um den Nordpol beschreibt. Etwas, das einem solchen Phänomen ungefähr ähnelt, ist tatsächlich beobachtet worden. Die Amplitude der Präzession ist sehr klein, die Drehachse wandert niemals mehr als etwa 4,5 m vom Nordpol weg. Die Bahn ist aber völlig unregelmäßig, und die Grundperiode scheint annähernd 427 Tage und nicht 300 Tage, wie vorausgesagt, zu sein. Die Fluktuationen werden kleinen Verschiebungen der Masseverteilung auf der Erde zugeschrieben, wie sie etwa durch atmosphärische Bewegung hervorgerufen werden, während der Unterschied in der Periode von der Tatsache herrührt, daß die Erde nicht vollständig starr ist, sondern die elastischen Eigenschaften eines Materials wie Stahl hat.⁹

5-7 Der in einem Punkt gelagerte schwere symmetrische Kreisel

Als ein weiteres und komplizierteres Beispiel der Anwendung der Methoden der Dynamik starrer Körper wollen wir die Bewegung eines symmetrischen Körpers betrachten, der sich in einem Gravitationsfeld befindet und von dem ein Punkt auf der Symmetrieachse im Raum

⁹ Die kräftefreie Präzession der Erdachse darf nicht mit ihrer langsamen Präzession um die Normale zur Ekliptik verwechselt werden. Diese *astronomische* Präzession der Äquinoktien rührt von den Gravitationskräften der Sonne und des Mondes her, die in der obigen Diskussion als vernachlässigbar angesehen wurden. Daß diese Annahme berechtigt ist, wird durch die Periode der Präzession der Äquinoktien (26 000 Jahre) gezeigt, die groß ist im Vergleich zu einer Periode von etwa einem Jahr für die kräftefreie Präzession. Die astronomische Präzession wird genauer im Abschnitt 5-7 und den Übungen diskutiert.



fixiert ist. Eine große Mannigfaltigkeit physikalischer Systeme, vom Kinderkreisel bis zu komplizierten gyroskopischen Navigationsinstrumenten, werden durch einen solchen *schweren symmetrischen Kreisel* näherungsweise beschrieben. Sowohl wegen seiner praktischen Anwendungen als auch als Illustration für viele der früher entwickelten Verfahren verdient die Bewegung des schweren symmetrischen Kreisels eine ausführliche Erörterung.

Die Symmetrieachse ist natürlich eine der Hauptachsen und soll als die z -Achse des körperfesten Koordinatensystems gewählt werden.

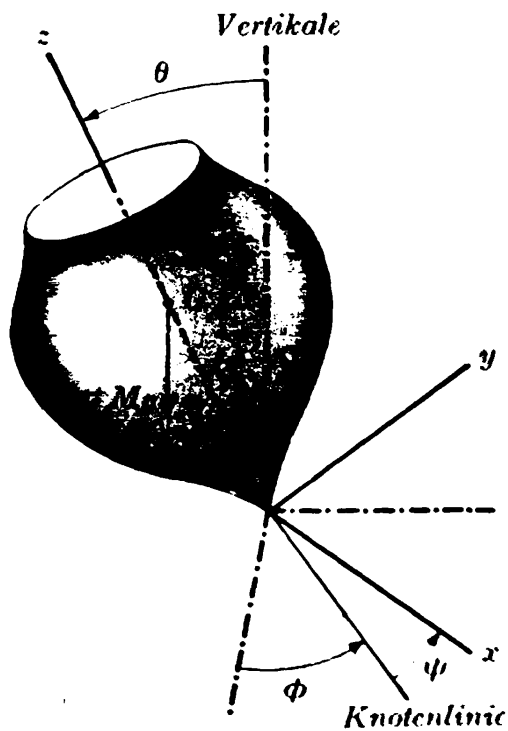


Abb. 5-5. Die EULERSchen Winkel, die die Orientierung eines symmetrischen Kreisels beschreiben.

Da ein Punkt stationär ist, wird die Konfiguration des Kreisels durch die drei EULERSchen Winkel vollständig beschrieben: θ gibt die Neigung der z -Achse gegen die Vertikale an, ϕ mißt den Azimut des Kreisels um die Vertikale, ψ ist der Drehwinkel des Kreisels um seine eigene z -Achse (vgl. Abb. 5-5). Der Abstand des Schwerpunkts (das auf der Symmetrieachse liegt) von dem festen Punkt soll mit l bezeichnet werden.

Das LAGRANGESche Verfahren, nicht die EULERSchen Gleichungen, soll dazu verwendet werden, eine Lösung für die Bewegung des Kreisels zu gewinnen. Da der Körper symmetrisch ist, kann die kinetische Energie geschrieben werden:

$$T = \frac{1}{2} I_1 (\omega_x^2 + \omega_y^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_z^2$$

oder mit Hilfe der EULERSchen Winkel und unter Verwendung der Gl. (4-103):

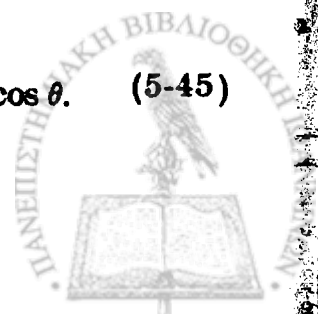
$$T = \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2, \quad (5-43)$$

wobei die gemischten Terme in ω_x^2 und ω_y^2 verschwinden. Die potentielle Energie ist einfach

$$V = Mgl \cos \theta, \quad (5-44)$$

so daß die LAGRANGE-Funktion lautet:

$$L = \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - Mgl \cos \theta. \quad (5-45)$$



Es sei darauf hingewiesen, daß ϕ und ψ nicht explizit in der LAGRANGE-Funktion auftreten; sie sind deshalb zyklische Koordinaten und zeigen damit an, daß die entsprechenden generalisierten Impulse zeitlich konstant sind. Nun haben wir gesehen, daß der zu einem Drehwinkel konjugierte Impuls die Komponente des totalen Drehimpulses längs der Drehachse ist. Für ϕ ist das die vertikale Achse und für ψ die z -Achse im Körper. Man kann tatsächlich auf elementare Weise zeigen, daß diese Komponenten des Drehimpulses unveränderlich sein müssen. Da das Gravitationsmoment längs der Knotenlinie liegt, gibt es keine Komponente des Momentes in der Vertikalen und keine in der körperfesten z -Achse, denn nach Definition sind diese beiden Achsen senkrecht zur Knotenlinie. Demnach müssen die Komponenten des Drehimpulses entlang dieser zwei Achsen zeitlich konstant sein.

Wir haben deshalb zwei erste Integrale der Bewegung:

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = I_3 \omega_z = I_1 a \quad (5-46)$$

und

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = (I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \dot{\phi} + I_3 \dot{\psi} \cos \theta = I_1 b. \quad (5-47)$$

Hier sind die zwei Konstanten der Bewegung durch neue Konstanten a und b ausgedrückt. Man findet leicht noch ein weiteres erstes Integral; da das System konservativ ist, so ist die Gesamtenergie E zeitlich konstant:

$$E = T + V = \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} \omega_z^2 + Mgl \cos \theta. \quad (5-48)$$

Es sind nur drei weitere Quadraturen nötig, um das Problem zu lösen, und man kann sie aus diesen drei ersten Integralen leicht erhalten, ohne die LAGRANGESchen Gleichungen direkt zu verwenden. Nach Gl. (5-46) ist $\dot{\psi}$ in folgender Weise durch $\dot{\phi}$ gegeben:

$$I_3 \dot{\psi} = I_1 a - I_3 \dot{\phi} \cos \theta. \quad (5-49)$$

Dieses Ergebnis kann in (5-47) eingesetzt werden, um $\dot{\psi}$ zu eliminieren:

oder

$$I_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_1 a \cos \theta = I_1 b$$

$$\dot{\phi} = \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta}. \quad (5-50)$$

Wenn θ als Funktion der Zeit bekannt wäre, könnte Gl. (5-50) integriert werden und würde die Zeitabhängigkeit von ϕ liefern. Substituiert man Gl. (5-50) zurück in Gl. (5-49), so ergibt sich ein ent-



sprechender Ausdruck für ψ :

$$\psi = \frac{I_1 a}{I_3} - \cos \theta \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta}. \quad (5-51)$$

Das liefert ψ , wenn θ bekannt ist. Schließlich können die Gl. (5-50) und (5-51) dazu verwendet werden, ϕ und ψ aus der Energiegleichung zu eliminieren. Das führt auf eine Differentialgleichung, die allein θ enthält. Zunächst stellt man fest, daß aus Gl. (5-46) folgt, daß ω_3 zeitlich konstant, und zwar gleich $\frac{I_1}{I_3} a$ ist. Deshalb ist $E - \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2$ eine Konstante der Bewegung, die wir mit E' bezeichnen wollen. Die Energiegleichung kann deshalb in der Form

$$E' = \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + Mgl \cos \theta \quad (5-52)$$

geschrieben werden, oder nachdem man Gl. (5-50) substituiert und die Terme umgeordnet hat,

$$\sin^2 \theta \dot{\theta}^2 = \sin^2 \theta (\alpha - \beta \cos \theta) - (b - a \cos \theta)^2. \quad (5-53)$$

Darin sind α und β zwei Konstanten,

$$\alpha = \frac{2E'}{I_1}, \quad \beta = \frac{2Mgl}{I_1} \quad (5-54)$$

Geht man zu einer neuen Variablen $u = \cos \theta$ über, so lautet die Gl. (5-53):

$$\dot{u}^2 = (1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2. \quad (5-55)$$

Das kann man sofort auf eine Quadratur zurückführen:

$$t = \int_{u(\theta)}^{u(0)} \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2}} \quad (5-56)$$

Mit diesem Ergebnis und den Gl. (5-50) und (5-51) können ϕ und ψ auch auf Quadraturen zurückgeführt werden. Das Polynom in der Wurzel ist jedoch 3. Grades, so daß wir uns mit elliptischen Integralen zu befassen haben. Ausführliche Diskussionen dieser Lösungen, die elliptische Funktionen enthalten, findet man in der Literatur,¹⁰ aber wie im Falle der kräftefreien Bewegung besteht die Gefahr, daß die Physik durch die Fülle der Mathematik verdunkelt wird. Glücklicher-

¹⁰ Siehe zum Beispiel die Abhandlung von F. KLEIN und A. SOMMERFELD, WHITTAKER, loc. cit., oder die sehr ausführliche Untersuchung in MACMILLAN, *Dynamics of Rigid Bodies*.



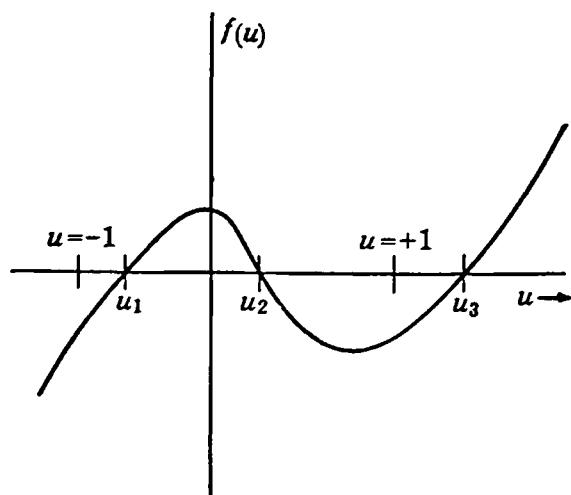


Abb. 5-6. Illustration der Lage der Umkehrwinkel von θ bei der Bewegung eines schweren symmetrischen Kreisels.

große negative u . An den Punkten $u = \pm 1$ wird $f(u)$ gleich $-(b \mp a)^2$ und ist deshalb immer negativ außer für den ungewöhnlichen Fall, in dem $u = \pm 1$ eine Wurzel ist (das entspricht einem vertikalen Kreisel). Demnach muß mindestens eine der Wurzeln in dem Gebiet $u > 1$ liegen; dieses Gebiet entspricht keinen reellen Winkeln. Tatsächlich kann eine physikalische Bewegung des Kreisels nur dann eintreten, wenn \dot{u}^2 irgendwo in dem Intervall zwischen $u = -1$ und $u = +1$ positiv ist, d.h., wenn θ zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt. Wir müssen daraus schließen, daß $f(u)$ für einen wirklichen Kreisel zwei Wurzeln u_1 und u_2 hat, die zwischen -1 und $+1$ liegen (vgl. Abb. 5-2), und daß sich der Kreisel so bewegt, daß $\cos \theta$ immer zwischen diesen zwei Wurzeln bleibt. Die Lage dieser Wurzeln und das Verhalten von ϕ und ψ für θ -Werte zwischen diesen Wurzeln liefern eine erhebliche qualitative Information über die Bewegung des Kreisels.¹¹

Es ist üblich, die Bewegung des Kreisels dadurch zu beschreiben, daß man die Schnittkurve der Figurenachse auf einer Kugel mit Einheitsradius um den festgehaltenen Punkt aufträgt. Diese Kurve wird der *Locus* der Figurenachse genannt. Die Polarkoordinaten eines Punktes auf dem Locus sind identisch mit den EULERSCHEN Winkeln

¹¹ Es besteht eine offensichtliche Ähnlichkeit zwischen dieser Methode, die Kreiselmovement zu diskutieren, und der Methode des „effektiven Potentials“, die im III. Kapitel für Zentralkräfte verwendet wurde. Tatsächlich kann man die modifizierte Energie Gl. (5-52) so auffassen, als repräsentiere sie die ein-dimensionale Bewegung eines Teilchens der Masse I_1 mit einer äquivalenten potentiellen Energie

$$Mgl \cos \theta + \frac{I_1}{2} \frac{(b - a \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta}$$

weise kann die allgemeine Natur der Bewegung entdeckt werden, ohne die Integrale wirklich auszuführen.

Wir wollen die rechte Seite der Gl. (5-55) mit $f(u)$ bezeichnen. Die Wurzeln dieses kubischen Polynoms liefern die Winkel, für die $\dot{\theta}$ sein Vorzeichen ändert, d.h. die „Umkehrwinkel“ von θ . Für große u ist βu^3 der vorherrschende Term in $f(u)$. Da β (vgl. Gl. (5-54)) immer größer als Null ist, ist $f(u)$ positiv für große positive u und negativ für



θ, ϕ für das körperfeste System. Aus den oben geführten Diskussionen sieht man, daß der Locus zwischen den zwei begrenzenden Kolatitudenkreisen $\theta_1 = \arccos u_1$ und $\theta_2 = \arccos u_2$ liegt, wobei θ auf beiden Kreisen verschwindet. Die Gestalt der Locuskurve ist in großem Maße durch den Wert der Wurzel von $b - au$ bestimmt, den wir mit u' bezeichnen wollen:

$$u' = \frac{b}{a} \quad (5-57)$$

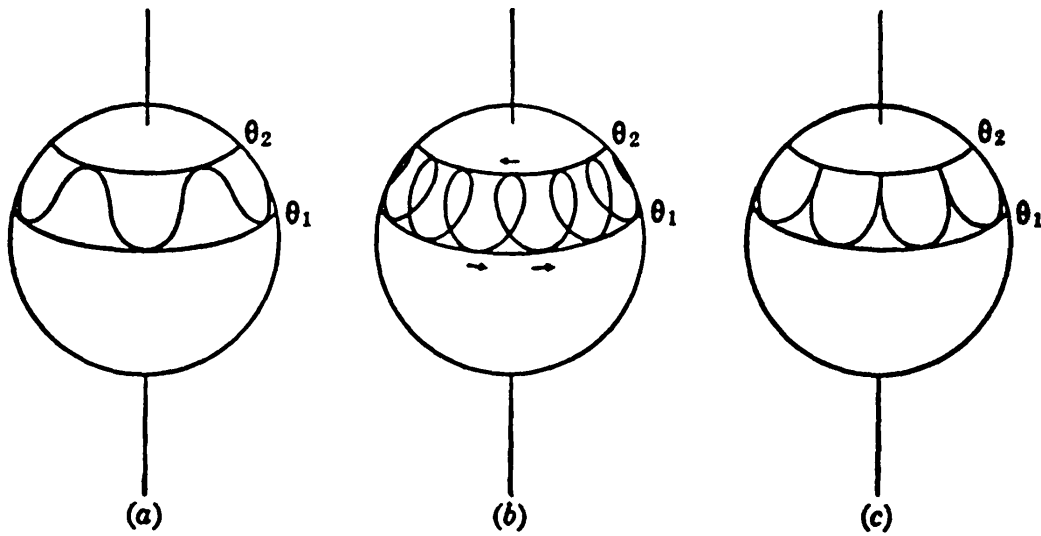


Abb. 5-7. Die möglichen Gestalten des Locus der Figurenachse auf der Einheitskugel.

Nehmen wir zum Beispiel an, daß die Anfangsbedingungen so sind, daß u' größer als u_2 ist. Dann wird ϕ wegen Gl. (5-50) immer das gleiche Vorzeichen für die erlaubten Neigungswinkel zwischen θ_1 und θ_2 haben. Deshalb muß der Locus der Figurenachse die begrenzenden Kreise so berühren, daß ϕ die gleiche Richtung für θ_1 und θ_2 hat (siehe Abb. 5-7a). Da ϕ deshalb in der einen oder anderen Richtung anwächst, sagt man, die Achse des Kreisels *präzessiert* um die vertikale Achse. Es handelt sich hier aber nicht um die reguläre Präzession, die man bei der kräftefreien Bewegung antrifft, denn wenn die Figurenachse umläuft, schwankt sie zwischen den Grenzwinkeln θ_1 und θ_2 auf und nieder – der Kreisel führt während der Präzession *Nutationen* aus.

Hat b/a einen solchen Wert, daß u' zwischen u_1 und u_2 liegt, so ist die Richtung der Präzession an den zwei Begrenzungskreisen verschieden, und der Locus der Figurenachse zeigt Schleifen, wie man in Abb. 5-7b sieht. Im Mittel wird ϕ jedoch nicht verschwinden, so daß stets eine reine Präzession in der einen oder anderen Richtung bleibt. Es kann auch vorkommen, daß u' mit einer der Wurzeln von $f(u)$ zusammenfällt. An den entsprechenden Bindungskreisen muß dann

sowohl $\dot{\theta}$ als auch $\dot{\phi}$ verschwinden. Das bedeutet, daß der Locus Spitzen hat, die den Kreis berühren (vgl. Abb. 5-7c). Dieser letzte Fall ist nicht so selten, wie man meinen möchte; er entspricht nämlich tatsächlich den Anfangsbedingungen, die man gemeinhin bei elementaren Diskussionen der Kreisel ansetzt: man nimmt an, daß sich der symmetrische Kreisel anfangs um seine Figurenachse dreht, die in einer Richtung θ_0 festgelegt ist. Zur Zeit $t = 0$ wird die Figurenachse freigelassen. Das Problem ist nun, die nachfolgende Bewegung zu beschreiben. Explizit lauten diese Anfangsbedingungen: für $t = 0$ sei $\theta = \theta_0$ und $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$. Der Winkel θ_0 muß deshalb eine der Wurzeln von $f(u)$ sein; tatsächlich entspricht er dem oberen Kreis. Zum Beweis stellen wir fest, daß E' am Anfang gleich $Mgl \cos \theta_0$ ist, und daß die Terme, die $\dot{\theta}$ und $\dot{\phi}$ enthalten, stets positiv sind. Sobald nun $\dot{\theta}$ und $\dot{\phi}$ anfangen, sich von ihren anfänglichen Nullwerten zu unterscheiden, kann die Energie nur dadurch erhalten bleiben, daß die potentielle Energie anwächst, d.h., daß θ anwächst. Der Anfangswert θ_0 ist deshalb gleich θ_2 , also gleich dem kleinsten Wert, den θ annehmen kann. Wenn der Kreisel auf diese Weise freigelassen wird, *beginnt der Kreisel immer zu fallen* und fällt weiter, bis der andere Grenzwinkel θ_1 erreicht ist. Zwischendurch präzessiert er. Die Figurenachse beginnt dann wieder gegen θ_2 anzusteigen. Die vollständige Bewegung ist so, wie sie in Abb. 5-7c gezeigt ist.

Einige quantitative Voraussagen über die Bewegung des Kreisels für die Anfangsbedingungen $\dot{\phi} = \dot{\theta} = 0$ kann man machen, vorausgesetzt, daß anfangs die kinetische Energie der Rotation groß im Vergleich zur maximalen Änderung der potentiellen Energie ist:

$$\frac{1}{2}I_3\omega_z^2 \gg 2Mgl. \quad (5-58)$$

Die Wirkungen der Gravitationsmomente, nämlich die Präzession und die sie begleitende Nutation, sind dann nur kleine Störungen der vorherrschenden Rotation des Kreisels um seine Figurenachse. In diesem Falle spricht man von einem „schnellen Kreisel“. Mit dieser Annahme kann man Ausdrücke für die Größe der Nutation, der Nutationsfrequenz und der mittleren Präzessionsfrequenz erhalten.

Unter den gegebenen Anfangsbedingungen entspricht θ_0 dem oberen Begrenzungskreis, so daß u_2 mit u_0 identisch ist. Das Ausmaß der Nutation hängt deshalb von der Lage des anderen reellen Winkels ab, der eine Wurzel von $f(u)$ ist. Aus der Forderung $\dot{\phi} = 0$ für $u = u_0$ folgt, daß die zwei Konstanten der Bewegung a und b mit u_0 durch

$$b = au_0.$$



verknüpft sind. Da $f(u_0)$ verschwindet, hat man aus Gl. (5-55) auch noch die Beziehung

$$\alpha = \beta u_0.$$

Diese stellt lediglich fest, daß E' durch $Mgl \cos \theta_0$ gegeben ist. Mit diesen Beziehungen kann $f(u)$ recht einfach geschrieben werden:

$$f(u) = (u_0 - u) \{ \beta(1 - u^2) - a^2(u_0 - u) \}. \quad (5-59)$$

Die Wurzeln von $f(u)$, die von u_0 verschieden sind, werden durch die Wurzeln des quadratischen Ausdruckes in der geschweiften Klammer gegeben. Die gesuchte Wurzel u_1 erfüllt deshalb die Gleichung

$$(1 - u_1^2) - \frac{a^2}{\beta} (u_0 - u_1) = 0. \quad (5-60)$$

Bezeichnet man $u_0 - u$ mit x und $u_0 - u_1$ mit x_1 , so kann für Gl. (5-60) geschrieben werden:

$$x_1^2 + px_1 - q = 0, \quad (5-61)$$

wobei

$$p = \frac{a^2}{\beta} - 2 \cos \theta_0, \quad q = \sin^2 \theta_0.$$

Der Term $2 \cos \theta_0$ in p kann vernachlässigt werden, und das Verhältnis a^2/β läßt sich in folgender Form schreiben:

$$\frac{a^2}{\beta} = \left(\frac{I_3}{I_1} \right) \frac{I_3 \omega_3^2}{2Mgl}$$

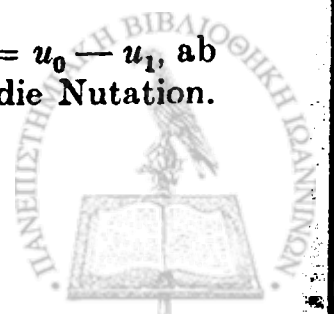
Wenn I_3 nicht viel kleiner als I_1 ist (das entspräche einem Kreisel von der ungewöhnlichen Gestalt einer Zigarre), so folgt aus der Annahme eines „schnellen“ Kreisels (5-58), daß dieses Verhältnis viel größer als 2 ist. Aus denselben Gründen ist p^2 viel größer als $4q$, so daß die Lösungen von (5-61) näherungsweise lauten:

$$x_1 = \frac{q}{p}, \quad -p - \frac{q}{p}$$

Die zweite Lösung entspricht $u > 1$. Demnach lautet die gesuchte Wurzel

$$x_1 = \frac{\beta \sin^2 \theta_0}{a^2} = \frac{I_1}{I_3} \frac{2Mgl}{I_3 \omega_3^2} \sin^2 \theta_0. \quad (5-62)$$

Somit nimmt das Maß der Nutation, gemessen durch $x_1 = u_0 - u_1$, ab wie $1/\omega_3^2$; je schneller der Kreisel ist, desto kleiner ist die Nutation.



Die *Frequenz* der Nutation kann ähnlich leicht für den „schnellen“ Kreisel gefunden werden. Da das Maß der Nutation klein ist, kann der Term $(1 - u^2)$ in Gl. (5-59) durch seinen Anfangswert $\sin^2 \theta_0$ ersetzt werden. Gl. (5-59) lautet dann

$$f(u) = \dot{x}^2 = x(\beta \sin^2 \theta_0 - a^2 x). \quad (5-63)$$

Gl. (5-63) ist eine Differentialgleichung für die Variation von x mit der Zeit. Sie kann ohne Schwierigkeit direkt integriert werden. Die Lösung für die Anfangsbedingung $x = 0$ für $t = 0$ lautet

$$x = \frac{x_1}{2} (1 - \cos at). \quad (5-64)$$

Darin ist x_1 durch (5-62) gegeben. Die Winkelfrequenz der Nutation der Figurenachse zwischen θ_0 und θ_1 ist deshalb

$$a = \frac{I_3}{I_1} \omega_z. \quad (5-65)$$

a wächst um so stärker, je schneller der Kreisel sich anfangs dreht.

Schließlich ist die Winkelgeschwindigkeit der Präzession wegen (5-50) gegeben durch

$$\dot{\phi} = \frac{a(u_0 - u)}{\sin^2 \theta} \approx \frac{ax}{\sin^2 \theta_0},$$

oder wenn man die Gl. (5-64) und (5-62) substituiert:

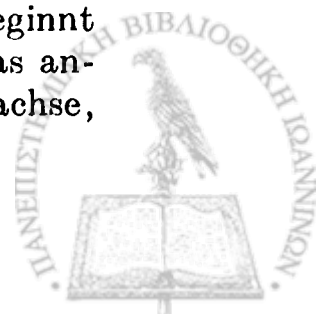
$$\dot{\phi} = \frac{\beta}{2a} (1 - \cos at). \quad (5-66)$$

Die Präzessionsgeschwindigkeit ist deshalb nicht gleichförmig, sondern sie ändert sich harmonisch mit der Zeit, und zwar mit der gleichen Frequenz wie die Nutation. Die *mittlere* Präzessionsfrequenz ist jedoch

$$\bar{\dot{\phi}} = \frac{\beta}{2a} = \frac{Mgl}{I_3 \omega_z}. \quad (5-67)$$

Damit ist gezeigt, daß die Präzessionsgeschwindigkeit abnimmt, wenn die anfängliche Rotationsgeschwindigkeit größer wird.

Wir sind nun in der Lage, uns ein vollständiges Bild von der Bewegung des schnellen Kreisels zu machen, wenn die Figurenachse am Anfang die Geschwindigkeit Null hat. Unmittelbar nachdem die Figurenachse freigelassen ist, besteht die Anfangsbewegung des Kreisels immer darin, daß er unter dem Einfluß der Schwere fällt. Aber indem er fällt, erfährt der Kreisel eine Präzessionsgeschwindigkeit, die direkt proportional dem Maß seines Falles ist. Damit beginnt die Figurenachse sich seitlich um die Vertikale zu bewegen. Das anfängliche Fallen führt auf eine periodische Nutation der Figurenachse,



zusätzlich zu der Präzession. Je rascher sich der Kreisel am Anfang dreht, um so stärker nimmt die Nutation ab, um so größer wird jedoch die Nutationsfrequenz, während die Präzession um die Vertikale gleichzeitig langsamer wird. In der Praxis wird die Nutation eines hinreichend schnellen Kreisels durch die Reibung im Lager gedämpft, und man kann sie nicht beobachten. Der Kreisel *scheint* dann gleichförmig um die vertikale Achse zu präzessieren. Weil die Präzession nur scheinbar regulär ist, haben sie KLEIN und SOMMERFELD eine *pseudoreguläre Präzession* genannt. In den meisten der elementaren Diskussionen der Präzession wird die Erscheinung der Nutation vernachlässigt. Demzufolge scheinen solche Ableitungen zu dem paradoxen Schluß zu führen, daß der Kreisel, nachdem man ihn freigelassen hat, *sofort* gleichförmig zu präzessieren beginnt; das ist eine Bewegung, die *normal* zu den Gravitationskräften ist, die die eigentliche Ursache der Präzession sind. Unsere Diskussion der pseudoregulären Präzession dient dazu, dieses Paradoxon aufzuklären; die Präzession entsteht kontinuierlich aus dem Ruhezustand ohne irgendwelche unendliche Beschleunigungen, und die anfängliche Tendenz des Kreisels *ist*, sich in der Richtung der Gravitationskräfte zu bewegen.

Es ist interessant, genau zu bestimmen, welche Anfangsbedingungen zu einer wirklich regulären Präzession führen. In einem solchen Falle bleibt der Winkel θ konstant gleich seinem Anfangswert θ_0 ; das bedeutet, $\theta_1 = \theta_2 = \theta_0$, oder mit anderen Worten, $f(u)$ muß eine Doppelwurzel bei u_0 haben (vgl. Abb. 5-8). Ebensogut können wir verlangen, daß $\dot{\theta}$ und $\ddot{\theta}$ an der Stelle θ_0 Null sein sollen.¹² Die modifizierte Energiegleichung (5-53) kann auch geschrieben werden:

$$\dot{\theta}^2 = (\alpha - \beta \cos \theta) - \frac{(b - a \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta}, \quad (5-68)$$

und ihre Ableitung nach der Zeit ist

$$2\dot{\theta}\ddot{\theta} = \beta \sin \theta \dot{\theta} + 2 \cos \theta \frac{(b - a \cos \theta)^2}{\sin^3 \theta} \dot{\theta} - \frac{2a(b - a \cos \theta)}{\sin \theta} \dot{\theta}.$$

$\dot{\theta}$ hat auf beiden Seiten der Gleichung denselben Faktor. Deshalb

¹² Die Bedingung, daß $\ddot{\theta}$ verschwindet, ist tatsächlich der Forderung gleichwertig, daß $f(u)$ bei $\theta = \theta_0$ eine Doppelwurzel haben soll, denn die letztere Bedingung kann ausgedrückt werden durch

$$\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} = 0 = 2\dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = 2\ddot{\theta},$$

da $\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \ddot{\theta}/\dot{\theta}$. Der hier erhaltene Ausdruck für $\ddot{\theta}$ ist natürlich dasselbe wie die LAGRANGESCHE Gleichung für die Koordinate θ .



kann die Bedingung, daß $\ddot{\theta} = 0$ für $\theta = \theta_0$ sein soll, geschrieben werden:

$$\frac{\beta}{2} = (a\phi - \phi^2 \cos \theta), \tag{5-69}$$

wenn man die Gl. (5-50) für $\dot{\phi}$ verwendet. Mit den Definitionen (5-54), (5-46) für β und a wird diese Bedingung:

$$Mgl = \phi(I_3\psi - (I_1 - I_3)\phi \cos \theta). \tag{5-70}$$

Die Anfangsbedingungen für das Problem des schweren Kreisels erfordern die Festlegung von $\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}, \theta, \phi, \psi$ für die Zeit $t = 0$. Da sie

zyklisch sind, sind die Anfangswerte von ϕ und ψ weitgehend unerheblich. Für jeden der vier anderen können wir im allgemeinen irgendeinen gewünschten Wert wählen. Wenn wir aber zusätzlich verlangen, daß die Bewegung der Figurenachse eine gleichförmige Präzession ohne Nutation sein soll, dann ist die Wahl dieser vier Anfangswerte nicht mehr völlig beliebig, vielmehr müssen sie Gl. (5-70) erfüllen. Man kann zwar noch Anfangswerte für $\dot{\theta}$ und etwa θ und $\dot{\psi}$ nahezu beliebig wählen, aber der Wert von ϕ ist dann festgelegt.

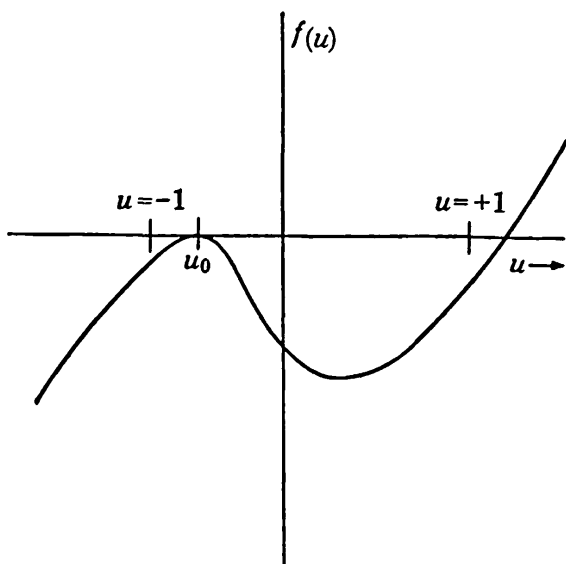


Abb. 5-8. Darstellung von $f(u)$ für eine reguläre Präzession.

Der Ausdruck „nahezu beliebig“ wurde verwendet, weil Gl. (5-70) quadratisch ist. Damit ϕ reell ist, muß die Diskriminante der Gleichung positiv sein:

$$I_3\psi^2 - 4Mgl(I_1 - I_3) \cos \theta \geq 0.$$

Dadurch ist das erlaubte Gebiet der Anfangswerte von θ und ψ beschränkt. Als Ergebnis der Tatsache, daß Gl. (5-70) quadratisch ist, gibt es im allgemeinen zwei Lösungen für ϕ , die man die „schnelle“ und die „langsame“ Präzession nennt. Es sei auch bemerkt, daß (5-70) niemals durch $\phi = 0$ für endliche ψ erfüllt werden kann; um eine gleichförmige Präzession zu erhalten, müssen wir stets dem Kreisel einen Stoß geben, damit er auf seine Bahn kommt. Ohne diese richtige anfängliche Präzessionsgeschwindigkeit kann man bestenfalls nur eine pseudoreguläre Präzession erhalten.



Wenn die Präzession langsam ist, so daß $\dot{\phi} \cos \theta$ im Vergleich zu a vernachlässigt werden kann, dann ist eine Näherungslösung für $\dot{\phi}$:

$$\dot{\phi} = \frac{\beta}{2a}.$$

Sie stimmt überein mit der mittleren Geschwindigkeit der pseudo-regulären Präzession für einen schnellen Kreisel. Dieses Ergebnis war natürlich zu erwarten; wenn die Präzessionsgeschwindigkeit klein ist, so besteht nur ein kleiner Unterschied darin, ob die Kreiselbewegung mit einem kleinen Stoß oder ganz ohne Stoß beginnt.

Ein weiterer Fall verdient unsere Aufmerksamkeit, nämlich für den $u = 1$ eine der Wurzeln von $f(u)$ ist. Nehmen wir zum Beispiel an, der sich drehende Kreisel sei am Anfang so gestellt, daß seine Figurenachse vertikal ist. Dann ist natürlich $b = a$, denn $I_1 b$ und $I_1 a$ sind die konstanten Komponenten des Drehimpulses um die vertikale Achse bzw. um die Figurenachse, und diese Achsen fallen am Anfang zusammen. Da nur die anfängliche Winkelgeschwindigkeit um die Figurenachse von Null verschieden ist, so folgt für die Energiegleichung (5-52) für $t = 0$:

$$E' = E - \frac{1}{2} I_3 \omega_z^2 = Mgl.$$

Nach den Definitionen von α und β (Gl.(5-54)) folgt daraus, daß $\alpha = \beta$ ist.

Die Energiegleichung für irgendeinen Winkel kann deshalb geschrieben werden:

$$\dot{u}^2 = (1 - u^2)\beta(1 - u) - a^2(1 - u)^2$$

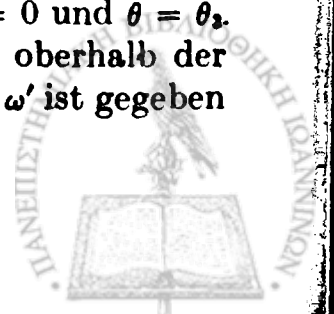
oder

$$\dot{u}^2 = (1 - u)^2\{\beta(1 + u) - a^2\}.$$

Die Form der Gleichung zeigt, daß $u = 1$ immer eine Doppelwurzel ist. Die dritte Wurzel ist gegeben durch

$$u_3 = \frac{a^2}{\beta} - 1.$$

Für $a^2/\beta > 2$ (das entspricht der Bedingung für einen „schnellen“ Kreisel) ist $u_3 > 1$, und die einzig mögliche Bewegung ist die für $u = 1$; der Kreisel dreht sich lediglich weiter um die Vertikale. Für diesen Fall hat die Kurve $f(u)$ die in Abb. 5-9a gezeigte Gestalt. Wenn andererseits $a^2/\beta < 2$ ist, dann ist $u_3 < 1$ und $f(u)$ hat die in Abb. 5-9b gezeigte Gestalt. Der Kreisel nutiert dann zwischen $\theta = 0$ und $\theta = \theta_3$. Es gibt somit eine kritische Winkelgeschwindigkeit ω' oberhalb der nur eine vertikale Bewegung möglich ist. Der Wert von ω' ist gegeben



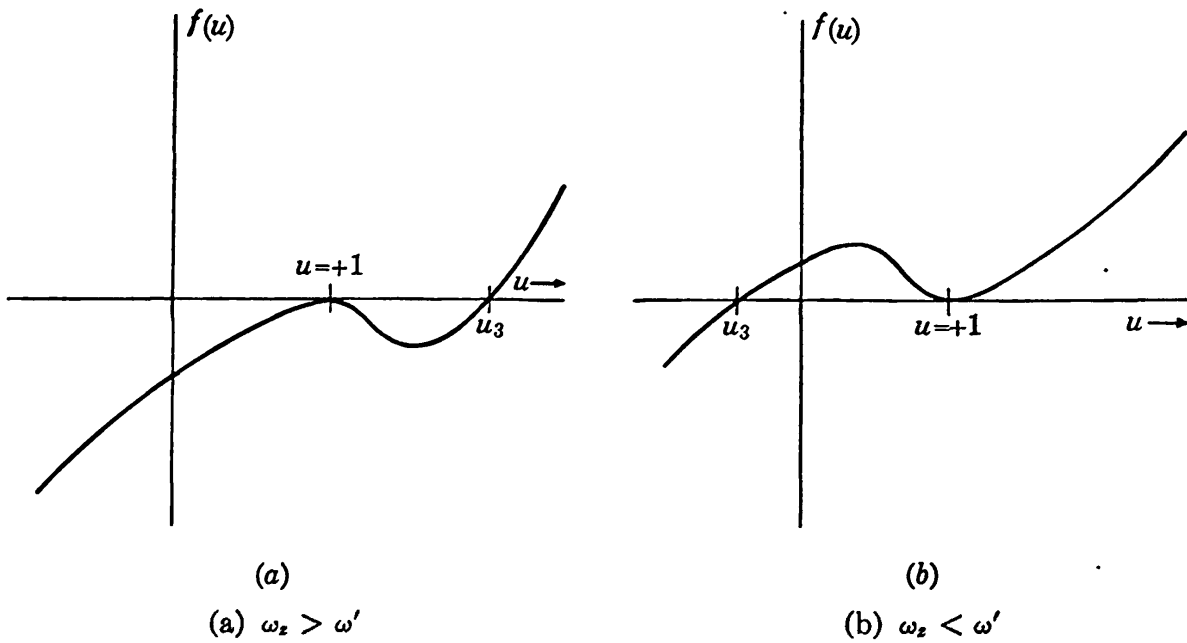


Abb. 5-9. Darstellung von $f(u)$ für den Fall, daß die Figurenachse anfangs vertikal steht.

durch

$$\frac{\alpha^2}{\beta} = \left(\frac{I_3}{I_1}\right) \frac{I_3 \omega'^2}{2Mgl} = 2$$

oder

$$\omega'^2 = 4 \frac{MglI_1}{I_3^2} \tag{5-71}$$

Wenn die Drehachse des rotierenden Kreisels anfangs vertikal steht und er sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω_z dreht, die größer als die kritische Winkelgeschwindigkeit ist, so wird er sich in der Praxis für eine Weile weiter um die Vertikale drehen (deshalb die Bezeichnung „schlafender“ Kreisel). Durch die Reibung wird die Frequenz der Rotation jedoch allmählich unter den kritischen Wert gebracht, und der Kreisel beginnt dann in immer größerem Maße zu taumeln, so wie er langsamer wird.

Es wurde bereits früher darauf hingewiesen, daß die Erde ein Kreisel ist, dessen Figurenachse um die Normale zur Ekliptik präzessiert. Diese Bewegung nennt man in der Astronomie die Präzession der Äquinoktien. Wäre die Erde vollständig sphärisch, könnte keines der anderen Mitglieder des Sonnensystems ein Gravitationsmoment auf sie ausüben. Die Erde ist aber an den Polen leicht abgeflacht und deshalb am Äquator geringfügig „ausgebaucht“. Es ist gerade das auf diese Ausweitungen am Äquator wirkende Moment, das von der Gravitationsanziehung, und zwar hauptsächlich durch die Sonne und den Mond herrührt, das die Erdachse zum Präzessieren im Raum bringt.



Das Moment ist sehr klein, so daß die Präzession außerordentlich langsam ist – die Periode beträgt 26 000 Jahre, die Rotationsperiode dagegen einen Tag. Das gesamte angewendete Drehmoment ist zeitlich nicht konstant, da die Momente der Sonne und des Mondes etwas verschiedene Richtungen zur Ekliptik haben und sich in dem Maße verändern, wie sich die drei Körper umeinander bewegen. Es ergeben sich deshalb Unregelmäßigkeiten in der Präzession, die oft als *astrophysikalische Nutation* bezeichnet werden. Man darf diese aber nicht mit der oben diskutierten wahren Nutation verwechseln, die dann auftritt, wenn der Ursprung der Drehmomente unveränderlich ist. KLEIN und SOMMERFELD haben darauf hingewiesen, daß die wahre Nutation als die kräftefreie Präzession der Rotationsachse der Erde um ihre Figurenachse erscheint, wie es im vorigen Abschnitt abgeleitet wurde. Die Erde wurde wahrscheinlich mit einem Anfangswert von ϕ in Drehung versetzt, der weit größer war, als es für eine gleichförmige Präzession nötig ist, so daß die Nutation im Raum etwa so wie in Abb. 5-7b erscheint. Man kann zeigen, daß die Periode der Nutation, die man auf dem rotierenden Körper beobachtet, unter diesen Bedingungen die durch Gl. (5-40) gegebene Periode der kräftefreien Präzession erreicht.

Eine kurze Bemerkung soll auch über die vielen technischen Anwendungen der Kreisel gemacht werden, jedoch verbieten räumliche Gründe eine ausgedehnte Diskussion. Unter dem Ausdruck „Gyroskop“ versteht man gewöhnlich einen symmetrischen Kreisel, der in cardanischen Ringen so aufgehängt ist, daß die Bewegung der Figurenachse nicht gehemmt wird, während das Schwerezentrum stationär bleibt. Um das Schwerezentrum wird kein resultierendes Gravitationsmoment ausgeübt. Der Drehimpulsvektor ist deshalb konstant. Wenn das Gyroskop um seine Figurenachse in Drehung versetzt wird (die Figurenachse fällt dann also mit der Richtung des Drehimpulses zusammen), so wird die Figurenachse immer ihr ursprüngliche Richtung beibehalten. Man kann sie deshalb als Richtungs-gyroskop verwenden. Sie dient als eine Bezugsrichtung und ist unabhängig von der Bewegung des Fahrzeuges, das das Gyroskop trägt.

Die Wirkung des Kreiselkompasses ist wesentlich feiner. In diesem Instrument wird die Achse des Kreisels gezwungen, sich nur in der horizontalen Ebene zu bewegen. Aber wegen der Rotation der Erde ändert die horizontale Ebene ihre Richtung relativ zum Inertialraum, so daß der Zwang das Gyroskop zum Präzessieren um die Erdachse bringt, und zwar mit einer Periode von einem Tag. Die Gyroskopachse versucht stationär zu bleiben, die Befestigung ist so, daß sie zum Präzessieren gezwungen ist; demzufolge üben die Zapfenlager Kräfte auf das Gyroskop aus. Es läßt sich zeigen, daß diese Kräfte immer so



wirken, daß sie die Gyroskopachse auf die Präzessionsachse bringen wollen, hier die Rotationsrichtung der Erde. Eine solche Anordnung dient deshalb dazu, die Richtung des Meridians anzuzeigen, sie ist ein „Kreiselkompaß“.

5-8 Die Präzession geladener Körper in einem Magnetfeld

Die Diskussionen im vorigen Abschnitt zeigen, daß die Bewegung eines symmetrischen Kreisels im Gravitationsfeld recht kompliziert sein kann. Dagegen ist die Bewegung eines geladenen rotierenden Körpers in einem homogenen *Magnetfeld* verhältnismäßig einfach, ist aber von größter Wichtigkeit für die Atomphysik. Anstatt die LAGRANGESCHE Formulierung zu verwenden, erweist es sich als einfacher, auf die ursprünglichen Prinzipien zurückzugehen und mit der Feststellung zu beginnen, daß die zeitliche Änderungsgeschwindigkeit des totalen Drehimpulses gleich dem gesamten aufgeprägten Drehmoment ist:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}. \quad (1-24)$$

Es soll angenommen werden, daß der Körper aus Teilchen aufgebaut ist, die alle das gleiche e/m -Verhältnis haben. Die Bewegung der Ladungen infolge der Rotation des Körpers erzeugt eine elektrische Stromverteilung, die mit einem Magnetfeld wechselwirken kann. Wenn das Feld homogen ist, gibt es keine resultierende Kraft auf den Körper,¹³ aber es wirkt ein resultierendes Drehmoment, das näherungsweise gegeben ist durch:¹⁴

$$\mathbf{N} = \mathbf{M} \times \mathbf{B}. \quad (5-72)$$

Darin ist \mathbf{M} das magnetische Moment der Stromverteilung und \mathbf{B} die magnetische Induktion. Die Bewegungsgleichung bei Wirkung eines solchen Drehmomentes ist deshalb

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} \times \mathbf{B}. \quad (5-73)$$

¹³ In einem solchen Falle kann das Massenzentrum als stationär angesehen werden, und wir betrachten die Bewegung um einen festen Punkt. Es ist dann nicht notwendig, den Bezugspunkt für das Drehmoment oder den Drehimpuls festzulegen (vgl. Abschn. 1-2).

¹⁴ Siehe zum Beispiel J. A. STRATTON, *Electromagnetic Theory*, New York 1941, S. 176, 242.



Für eine Volumenverteilung des Stromes ist das magnetische Moment in GAUSSSchen Einheiten definiert durch

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2c} \int \mathbf{r} \times \mathbf{j} dV. \quad (5-74)$$

Darin ist \mathbf{j} die Stromdichte.¹⁵ Zur Veranschaulichung dieser Definition wollen wir eine ebene Schleife aus dünnem Draht betrachten, in der ein Strom i fließt. Für $\mathbf{j} dV$ können wir dann schreiben

$$\mathbf{j} dV = j dS dl = i d\mathbf{l},$$

wobei dS der Querschnitt des Drahtes und $d\mathbf{l}$ ein Längenelement längs der Stromrichtung ist. Mit dieser Umformung kann das magnetische Moment geschrieben werden:

$$\mathbf{M} = \frac{i}{c} \frac{1}{2} \oint \mathbf{r} \times d\mathbf{l}.$$

$\frac{1}{2} \mathbf{r} \times d\mathbf{l}$ ist aber ein Flächenelement, das vom Radiusvektor überstrichen wird (vgl. die Diskussion der Flächengeschwindigkeit in Abschn. 3-2), und das Integral ist proportional der Fläche der Schleife, die wir mit A bezeichnen. Wenn \mathbf{n} einen Einheitsvektor senkrecht zur Schleifenebene bedeutet, dann ist das magnetische Moment einfach

$$\mathbf{M} = \frac{Ai}{c} \mathbf{n}.$$

Das ist vielleicht eine vertrautere Form.

Kehren wir zu der Definition Gl. (5-74) zurück. Man kann in ihr für \mathbf{j} das Produkt aus der Ladungsdichte und der Geschwindigkeit substituieren. Die Ladungsdichte ist aber auch das Produkt aus dem e/m -Verhältnis und der Massendichte ρ . Man kann deshalb schreiben

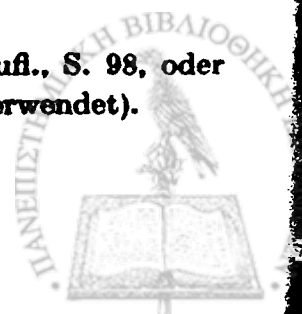
$$\mathbf{j} = \frac{e}{m} \rho \mathbf{v}.$$

Dieser Beziehung zufolge kann für das magnetische Moment geschrieben werden:

$$\mathbf{M} = \frac{e}{2mc} \int \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dV. \quad (5-75)$$

Das Integral erkennen wir wieder als den Gesamtdrehimpuls des Körpers; es gibt somit, zumindest in der klassischen Physik, eine ein-

¹⁵ Siehe R. BECKER, *Theorie der Elektrizität*, Band II, 6. Aufl., S. 98, oder J. A. STRATTON, op. cit., S. 235 (hier werden MKS-Einheiten verwendet).



deutige Beziehung zwischen dem Drehimpuls eines Körpers und seinem magnetischen Moment:¹⁶

$$\mathbf{M} = \frac{e}{2mc} \mathbf{L}. \quad (5-76)$$

Die Bewegungsgleichung (5-73) kann nun geschrieben werden:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{L} \times \frac{e\mathbf{B}}{2mc}. \quad (5-77)$$

Das ist aber genau die Bewegungsgleichung für einen Vektor konstanten Betrages, der im Raum um die Richtung von \mathbf{B} mit einer Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_l = -\frac{e\mathbf{B}}{2mc} \quad (5-78)$$

rotiert. Es muß deshalb geschlossen werden, daß die Wirkung eines homogenen magnetischen Feldes auf einen geladenen Körper, wobei Gl. (5-72) erfüllt wird, darin besteht, daß der Drehimpulsvektor *gleichförmig* mit der Winkelgeschwindigkeit (5-78), die *LARMOR-Frequenz* genannt wird, *präzessiert*. Für Elektronen, für die e negativ ist, erfolgt die Präzession entgegen dem Uhrzeigersinn um die Richtung von \mathbf{B} .

Die gleichförmige Präzession eines geladenen Körpers in einem Magnetfeld trifft man ständig in der Atomphysik an, und sie wird gewöhnlich als *LARMOR-Präzession* bezeichnet. Es sei darauf hingewiesen, daß wir durchaus nicht gefordert haben, daß der Körper starr sein soll. Die grundlegende Bewegungsgleichung (1-24) bleibt unabhängig von der Natur des Systems gültig, und das Integral in (5-75) ist der Drehimpuls um irgendeinen Punkt für jedes System, vorausgesetzt, daß das Massenzentrum in Ruhe ist. Für ein System geladener Teilchen wird deshalb der Drehimpuls in einem Magnetfeld eine *LARMOR-Präzession* ausführen, die durch (5-78) gegeben ist; die einzige Forderung besteht darin, daß alle Teilchen das gleiche e/m -Verhältnis haben.

Das Drehmoment-Gesetz in Gl. (5-72) ist nur für einen permanenten magnetischen Dipol streng gültig, dessen Betrag unabhängig von der Orientierung des Körpers ist. Wenn nämlich der magnetische Dipol von der Rotation eines geladenen Körpers herrührt, so hängt der Betrag von \mathbf{M} vom Drehimpuls ab, und dieser ist nicht notwendig unab-

¹⁶ Es ist charakteristisch für die Quanten-Natur des „Spin“-Drehimpulses des Elektrons, daß (5-76) in diesem Falle nicht erfüllt wird. Der Koeffizient ist vielmehr e/mc .



hängig von der Orientierung. Man kann zeigen, daß man dann zu Gl. (5-72) einen kleinen Term addieren muß, der proportional zu ω_l ist und eine kleine Nutation von L hervorruft. Solange ω_l klein im Vergleich zur Rotationsfrequenz des Körpers ist, ist die mittlere Präzessionsfrequenz noch durch die LARMOR-Frequenz gegeben.¹⁷

LITERATURHINWEISE

- A. P. WILLS, *Vector and Tensor Analysis*. In vielen der im letzten Kapitel zitierten Werke werden Tensoren, Dyaden und Hauptachsentransformationen diskutiert. Zusätzliches Material, ausgezeichnet dargestellt, findet man in den Kapiteln VI, VII und IX in dem Buch von WILLS. J. W. GIBBS führte Dyaden ein, und die ausführlichste Darstellung dieses Gegenstandes ist in dem klassischen Werk *Vector Analysis* von GIBBS und WILSON (1901) gegeben.
- A. G. WEBSTER, *Dynamics*. Die Literatur über die Dynamik starrer Körper ist sehr umfangreich; es gibt viele Bücher, die sich allein damit befassen, und jede allgemeine Abhandlung über Mechanik widmet ihr einigen Raum. Die meisten dieser Quellen stammen entweder vom Ende des 19. Jahrhunderts oder folgen der traditionellen Darstellung der Dynamik starrer Körper, die zu dieser Zeit entwickelt wurde. Eines der besten älteren Werke ist die allgemeine Abhandlung von WEBSTER (1. Auflage 1904). Verglichen mit WHITTAKER'S Buch ist das Werk von WEBSTER vielseitiger (es schließt Potentialtheorie, Elastizitätstheorie und Hydrodynamik ein), aber es ist elementarer. Viele der weitergehenden Themen werden nur angerührt. Der Stil ist angenehm abwechslungsreich, und der Inhalt ist weniger formal und mehr physikalisch als bei WHITTAKER und folglich verständlicher. Die Vektorschreibweise wird nicht verwendet, denn sie war praktisch zu der Zeit, als das Buch geschrieben wurde, in ihrer Entstehung. Teil II handelt von der Dynamik starrer Körper und enthält eine besonders ausgearbeitete Diskussion der kräftefreien Bewegung des symmetrischen Kreisels. Die Behandlung des schweren Kreisels ist ähnlich der hier gegebenen, jedoch umfassender.
- E. A. MILNE, *Vectorial Mechanics*. Im Gegensatz zu dem WEBSTERSCHEN Buch wird hier die Vektor- und Tensorschreibweise durchgehend verwendet, jedoch in einer Weise, die den physikalischen Inhalt eher verdeckt als erhellt. Kapitel XIV enthält eine knappe Diskussion des Trägheitstensors und dessen Eigenschaften. Der einzige Anhang zu diesem Kapitel befaßt sich mit der Berechnung des Trägheitstensors selbst (weniger mit den individuellen Komponenten) für eine Vielzahl von Körpern. Kapitel XVII, über gyrostatische Probleme, ist auch von Interesse.
- W. D. MACMILLAN, *Dynamics of Rigid Bodies*. Obwohl dieses Werk nicht für ein systematisches Studium der Dynamik starrer Körper zu empfehlen ist, enthält es doch viel Stoff, der anderswo nicht leicht zu finden ist. Insbesondere ist in Kapitel VII eine lange und sorgfältig ausgearbeitete Diskussion der POINSONSCHEN Bewegung und der Bewegung des schweren symmetrischen

¹⁷ Wegen weiterer Einzelheiten siehe HERBERT GOLDSTEIN, *Amer. J. Physics* 19 (1951) 100.



Kreisels zu finden, einschließlich der expliziten Lösungen mit Hilfe elliptischer Funktionen. Das Kapitel über die komplizierten Probleme des rollenden starren Körpers ist auch bemerkenswert.

M. WINKELMANN und R. GRAMMEL, *Kinetik der starren Körper*, Bd. V des *Handbuches der Physik*. Dieser Artikel ist in erster Linie interessant wegen der ausführlichen, doch klaren Diskussionen des kräftefreien Kreisels, des schweren symmetrischen Kreisels mit einem festen Punkt, der Bewegung von Billardkugeln, der sich drehenden Münze und ähnlicher Probleme. Der umfangreiche Abschnitt über die gyroskopische Bewegung in rotierenden Koordinatenachsen (wie auf der Erdoberfläche) wird leider den meisten Lesern unzugänglich sein, weil die Autoren den ungebräuchlichen Vektorbegriff „Motor“ verwenden.

J. L. SYNGE und B. A. GRIFFITH, *Principles of Mechanics*. Obwohl dieses Buch von elementaren Prinzipien ausgeht, enthält es eine beachtlich vollständige Diskussion der POINSONSchen Bewegung und des schweren symmetrischen Kreisels, wobei auch einiges über die explizite Beschreibung der Bewegung mit Hilfe elliptischer Funktionen mit eingeschlossen ist. Man findet auch einige kurze Abschnitte über die Rollbewegung und über die technischen Anwendungen der Gyroskope (hauptsächlich des Kreiselkompasses).

F. KLEIN und A. SOMMERFELD, *Theorie des Kreisels*. Dieses monumentale, vierbändige Werk über die Theorie des Kreisels hat alle äußeren Anzeichen des typischen schwerfälligen und schwülstigen deutschen „Handbuches“. Die Anzeichen täuschen jedoch, denn es ist bemerkenswert lesbar. Der angenehme, nicht formale Stil ist flüssig und beachtet pädagogische Einzelheiten, was für alle späteren SOMMERFELDSchen Schriften charakteristisch ist. Obwohl die Abhandlung mitunter hochmathematisch wird, wird die physikalische Welt nie aus den Augen verloren, und man verliert sich nicht in einem Wust von Formeln. Obgleich durch den Titel auf Kreisel und Gyroskope beschränkt, vermittelt die Abhandlung in Wirklichkeit eine reichhaltige Ausbildung in der gesamten Mechanik starrer Körper, mit Exkursionen in andere Gebiete der Physik und Mathematik. So werden in Kapitel I unter anderem die EULERSchen Winkel, infinitesimale Drehungen, die CAYLEY-KLEINSchen Parameter und ihre Zusammenhänge mit der homographischen Transformation und mit der Theorie der Quaternionen diskutiert. Die späteren Bemerkungen zu diesem Kapitel (in Bd. IV) behandeln auch die Zusammenhänge mit der Elektrodynamik und der speziellen Relativitätstheorie (die Quantenmechanik lag noch in weiter Ferne). Im großen und ganzen legt Bd. I das notwendige Fundament für die Dynamik starrer Körper und gibt eine physikalische Beschreibung der Kreiselbewegung mit wenig Mathematik.

Band II ist der ausführlichen Erklärung des schweren symmetrischen Kreisels gewidmet, obwohl darin auch viel über die POINSONSche Bewegung zu finden ist, und er enthält eine Zusammenfassung von dem, was damals über den asymmetrischen Kreisel bekannt war. Die Unterscheidung zwischen regulärer und pseudoregulärer Präzession wurde hier zuerst eingeführt, und die Autoren verwenden viel Mühe auf die Untersuchung der beiden Bewegungen und der Annäherung der regulären Präzession. Viele Seiten gelten der völligen Vernichtung der sogenannten populären oder elementaren „Ableitungen“ der gyroskopischen Präzession. (Die Autoren machen die Bemerkung, daß es die Unzulänglichkeit dieser Ableitungen gewesen sei, die sie dazu veranlaßt habe, diese Abhandlung zu schreiben!) Es wird auch eine lange Diskussion über Fragen der Stabilität der Bewegung geführt. Die Behandlung



beruht vorwiegend auf der Lösung mit Hilfe elliptischer Integrale und nicht nur auf der Näherung kleiner Nutationen, wie es hier getan wurde.

- Bd. III befaßt sich vorwiegend mit Störungskräften (hauptsächlich Reibung) und astronomischen Anwendungen (Nutation der Erde, Präzession der Äquinoktien, usw.). Die Diskussion der Wanderung der Erd-Pole ist besonders vollständig, einschließlich einer Abschätzung der Wirkungen der Elastizität der Erde und des Transportes atmosphärischer Massen durch die Luftzirkulation. Bd. IV handelt von technischen Anwendungen und ist heute etwas veraltet.
- F. KLEIN, *The Mathematical Theory of the Top*. 1896 hielt FELIX KLEIN eine Reihe von Vorlesungen in Princeton. Die Ausarbeitungen dafür bilden diesen dünnen Band. Das Buch befaßt sich vorwiegend mit sehr abstrakten mathematischen Einzelheiten der Theorie, aber die erste Vorlesung gibt eine lesbare Erklärung der CAYLEY-KLEINSchen Parameter. Es ist interessant festzustellen, daß sowohl in diesem Buch als auch in der größeren Abhandlung mit SOMMERFELD ein vierdimensionaler nichteuklidischer Raum Verwendung fand, in dem die Zeit die vierte Dimension ist – die Verwendung in der speziellen Relativitätstheorie um viele Jahre vorwegnehmend (siehe nächstes Kapitel). Dieser Raum wurde jedoch allein der mathematischen Zweckmäßigkeit wegen eingeführt, und ihm wurde keine physikalische Bedeutung beigemessen.
- A. SOMMERFELD, *Mechanik*. Das Werk mit KLEIN über den Kreisel war eine der ersten Veröffentlichungen SOMMERFELDS, während dieses Buch, mehr als 40 Jahre später publiziert, eine seiner letzten Schriften ist. Sein Interesse am Kreisel hat sich in dieser Zeit offensichtlich nicht vermindert, und er widmet der qualitativen Diskussion eines weiten Bereiches der gyroskopischen und Kreiselercheinungen beachtlichen Raum – selbst ein bis zwei Seiten dem asymmetrischen Kreisel. Die etwa dreißig Seiten über das gesamte Gebiet bilden beinahe das ganze Kapitel über starre Körper und geben praktisch einen Auszug des größeren Werkes! Die Behandlung ist weniger intensiv als ausführlich, und man findet wenige detaillierte Diskussionen.
- A. GRAY, *Treatise on Gyrostatics and Rotational Motion*. Das ist eine andere ausführliche Abhandlung, etwa in der Art des Werkes von KLEIN und SOMMERFELD. Die Behandlung ist jedoch weit weniger systematisch und nicht so lesbar und informativ. Besonders interessant sind die Abschnitte über kompliziertere gyroskopische Systeme – Schiffsstabilisatoren, Ketten von Kreiseln, auch Bumerangs!
- M. DAVIDSON, *The Gyroscope and Its Applications*. Dieses Buch wird hier mit erwähnt, weil es eine moderne (1947) Darstellung vieler technischer Anwendungen des Kreisels auf Navigationsinstrumente, automatische Steuerungsvorrichtungen und Pilots gibt. Die Theorie ist elementar und unzulänglich.
- S. TIMOSHENKO und D. H. YOUNG, *Advanced Dynamics*. Das letzte Kapitel dieses neueren Buches für Ingenieure ist der Theorie einiger technischer Anwendungen der Kreisel gewidmet, einschließlich des modernen Kreiselkompasses (der sich von dem im Text beschriebenen einfachen FOUCAULTSchen Kreiselkompaß erheblich unterscheidet).

ÜBUNGEN

1. Berechne die Änderung des Trägheitstensors, wenn der Bezugspunkt im starren Körper um den Vektor r_0 verschoben wird. Zeige, daß der neue Träg-



heitstensor denselben Hauptachsensatz wie der alte hat, wenn der ursprüngliche Bezugspunkt das Massenzentrum ist und r_0 längs einer der Hauptachsen liegt. Wie groß ist die Änderung der Hauptträgheitsmomente, die durch eine solche Verschiebung hervorgerufen wird?

2. Bestimme die Hauptträgheitsmomente um das Massenzentrum eines flachen starren Körpers, der die Gestalt eines rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecks mit homogener Massendichte hat. Welches sind die Hauptachsen?

3. Drei gleiche Massenpunkte mögen sich in den Raumpunkten $(a, 0, 0)$, $(0, a, 2a)$ und $(0, 2a, a)$ befinden. Bestimme die Hauptträgheitsmomente um den Ursprung und einen Hauptachsensatz.

4. Ein physikalisches Pendel besteht aus einem starren Körper von Gestalt eines Plättchens, das in der vertikalen Ebene in einem Punkt aufgehängt ist, der nicht der Schwerpunkt ist. Berechne die Periode für kleine Schwingungen. Verwende dazu den Trägheitsradius um den Schwerpunkt und den Abstand des Aufhängepunktes vom Schwerpunkt. Zeige, daß dann, wenn das Pendel dieselbe Periode für zwei Aufhängepunkte hat, deren Abstand zum Schwerpunkt verschieden ist, die Summe dieser Abstände gleich der Länge des äquivalenten mathematischen Pendels ist.

5. Eine homogene Stange der Masse M und der Länge $2l$ sei an einem Ende an einer Feder mit der Kraftkonstanten k aufgehängt. Die Stange kann nur in einer vertikalen Ebene frei schwingen, und die Feder wird gezwungen, sich nur in der vertikalen Richtung zu bewegen. Stelle die Bewegungsgleichungen in der LAGRANGESchen Formulierung auf.

6. Ein homogener Stab gleite mit seinen Enden auf einem glatten vertikalen Kreis. Die Stabenden sollen mit dem Kreiszentrum einen Mittelpunktswinkel von 120° bilden. Zeige, daß die Länge des äquivalenten mathematischen Pendels gleich dem Radius des Kreises ist.

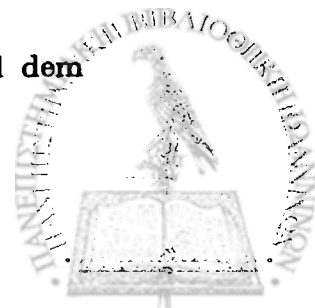
7. Ein Automobil starte aus dem Stand. Dabei sei eine seiner Türen anfangs senkrecht zur Fahrtrichtung geöffnet. Wenn die Scharniere der Tür vorn liegen, wird die Tür, sobald das Automobil Geschwindigkeit gewinnt, zuschlagen. Stelle eine Formel für die zum Schließen der Tür notwendige Zeit auf, wenn die Beschleunigung f konstant ist, der Trägheitsradius der Tür um die Drehachse r_0 ist und der Schwerpunkt im Abstand a vom Scharnier liegt. Zeige, daß dann, wenn f gleich $30,48 \text{ cm/sec}^2$ und die Tür eine homogene rechtwinklige Fläche mit der Seitenlänge $121,92 \text{ cm}$ ist, die Zeit annähernd $3,04$ Sekunden beträgt.

8. Ein Rad rolle eine schiefe Ebene hinab, die mit der Horizontalen einen Winkel α bildet. Das Rad werde gezwungen, seine Ebene immer senkrecht zur schiefen Ebene zu stellen, es darf sich aber um die zur Auflagefläche normale Achse drehen. Bestimme die Lösung für die zweidimensionale Bewegung des Rades. Verwende dabei die LAGRANGESchen Gleichungen und die Methode der unbestimmten Multiplikatoren.

9. a) Zeige, daß der Drehimpuls des kräftefreien symmetrischen Kreisels im körperfesten Koordinatensystem um die Symmetrieachse mit einer Kreisfrequenz Ω rotiert. Zeige auch, daß die Symmetrieachse im Raum um die feste Richtung des Drehimpulses mit der Kreisfrequenz

$$\phi = \frac{I_3 \omega_z}{I_1 \cos \theta}$$

rotiert, wobei ϕ der EULERSche Winkel zwischen der Knotenlinie und dem Drehimpuls als die raumfeste z -Achse ist.



b) Verwende die Ergebnisse von Übung 5, IV. Kapitel, und zeige, daß ω im Raum um den Drehimpuls mit der gleichen Frequenz ϕ rotiert, daß aber der Winkel θ' zwischen ω und L gegeben ist durch

$$\sin \theta' = \frac{\Omega}{\phi} \sin \theta'',$$

wobei θ'' die Neigung von ω gegen die Symmetrieachse ist. Zeige unter Verwendung der in Abschnitt 5-6 gegebenen Abbildungen, daß deshalb die Rotationsachse der Erde und die Achse des Drehimpulses niemals mehr als 1,5 cm auf der Erdoberfläche voneinander entfernt sind.

c) Zeige mit den Ergebnissen der Teile (a) und (b), daß die Bewegung des kräftefreien symmetrischen Kreisels durch die Rotation eines Kegels beschrieben werden kann, der bezüglich des Körpers fest ist und dessen Achse mit der Symmetrieachse zusammenfällt, und der auf einem raumfesten Kegel abrollt, dessen Achse längs des Drehimpulses liegt. Der Vektor der Winkelgeschwindigkeit liegt längs der Berührungslinie der zwei Kegel. Zeige, daß dieselbe Beschreibung unmittelbar aus der POINSONSchen Konstruktion folgt, wenn man das Trägheitsellipsoid zu Hilfe nimmt.

10. Wenn der starre Körper nicht symmetrisch ist, läßt sich keine analytische Lösung der EULERSchen Gleichung für die kräftefreie Bewegung mit elementaren Funktionen angeben. Zeige, daß jedoch die Erhaltung der Energie und des Drehimpulses dazu verwendet werden kann, einen Ausdruck für die körperfesten Komponenten von ω mit Hilfe elliptischer Integrale zu erhalten.

11. Bestimme aus den EULERSchen Bewegungsgleichungen die Bedingung (5-70) für die gleichförmige Präzession eines symmetrischen Kreisels in einem Gravitationsfeld. Stelle dabei die Forderung, daß die Bewegung eine gleichförmige Präzession ohne Nutation sei.

12. Zeige, daß der Betrag des Drehimpulses für einen schweren symmetrischen Kegel als eine Funktion von θ und den Konstanten der Bewegung allein ausgedrückt werden kann. Beweise, daß demnach der Drehimpulsvektor nur dann gleichförmig präzessiert, wenn es eine gleichförmige Präzession der Symmetrieachse gibt.

13. Im Text wurde festgestellt, daß die Präzession der Äquinoktien auf dem Drehmoment beruht, das Sonne und Mond auf die Erde ausüben. Dieses Drehmoment rührt allein von der Abflachung der Erde her, denn auf eine Kugel kann kein Gravitationsdrehmoment ausgeübt werden. In erster Näherung kann man deshalb die Erde durch eine Kugel mit einem „Gürtel“ am Äquator darstellen, wobei die Masse des Gürtels und das Trägheitsmoment der Kugel so zu wählen sind, daß diese Kombination dieselben Hauptträgheitsmomente wie die Erde hat. Das gesamte Drehmoment rührt dann allein von dem Äquatorialgürtel her. Da die Präzession sehr langsam ist im Vergleich mit den Umläufen des Mondes um die Erde und der Erde um die Sonne, können wir die Sonne und den Mond durch auf Kreisen verteilte Massen darstellen, in deren Zentren die Erde liegt. Will man die Größenordnung abschätzen, so wird es ausreichend sein, anzunehmen, daß die Bahnen von Sonne und Mond in einer Ebene, der sogenannten Ekliptik-Ebene verlaufen. Berechne das Gravitationspotential

$$V = -G \int \int \frac{dm_1 dm_2}{r}$$

zwischen dem Erdgürtel und dem Sonnenring durch Entwicklung des Abstandes r zwischen zwei Elementen der Ringe in Potenzen von $\frac{a}{R_1}$, wobei a der Radius



des Gürtels und R_s der mittlere Abstand zur Sonne ist. Nimm der Einfachheit halber für die Ekliptik-Ebene die xy -Ebene und verwende sphärische Polarkoordinaten. Bestimme durch eine ähnliche Rechnung das Potential zwischen Erd- und Mondring. Das sich ergebende Gesamtpotential ist eine Funktion des Neigungswinkels θ zwischen Erdachse und Ekliptik-Ebene. Die negative Ableitung von V nach θ liefert das durch Sonne und Mond auf die Erde ausgeübte Drehmoment. Zeige auf diese Weise, daß der erste nichtverschwindende Term des Drehmomentes gegeben ist durch

$$N = \frac{3}{4} G(I_3 - I_1) \sin 2\theta \left[\frac{m_s}{r_s^2} + \frac{m_l}{r_l^3} \right],$$

wobei G die universelle Gravitationskonstante ist. Die Indizes s und l beziehen sich auf die Sonne bzw. auf den Mond. Bestimme die Frequenz der regulären Präzession für dieses Drehmoment (verwende zum Beispiel die Methode der Übung 11) und nimm dabei an, daß die Präzession im Vergleich zur Rotationsfrequenz sehr langsam ist. Vergleiche dieses Ergebnis mit der gemessenen Präzessionsperiode von 25 800 Jahren.

14. In Abschnitt 5-6 wurde die Präzession der Achse der Erdrotation um die Pole unter der Annahme berechnet, daß auf die Erde keine Drehmomente wirken. In der vorigen Übung wurde andererseits gezeigt, daß die Erde eine erzwungene Präzession ausführt, die von den Drehmomenten der Sonne und des Mondes herrühren. Tatsächlich sind beide Ergebnisse richtig; die Bewegung der Rotationsachse um die Symmetrieachse erscheint als die Nutation der Erde im Verlaufe ihrer erzwungenen Präzession. Um diese Behauptung zu beweisen, berechne θ und ϕ als Funktionen der Zeit für einen schweren symmetrischen Kreisel, der eine Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\phi}_0$ hat, die groß im Vergleich zur reinen Präzessionsgeschwindigkeit $\beta/2a$, aber klein im Vergleich zu ω_z ist. Unter diesen Bedingungen liegen die Begrenzungskreise für die Figurenachse noch eng beieinander, aber die Bahn der Figurenachse erscheint wie in Abb. 5-7b, d.h., sie zeigt große Schleifen, die sich nur langsam um die Vertikale bewegen. Zeige für diesen Fall, daß (5-64) noch gilt, daß aber jetzt

$$x_1 = \left(\frac{\beta}{a^2} - \frac{2\dot{\phi}_0}{a} \right) \sin^2 \theta_0$$

ist. Bestimme mit diesen Werten von θ und $\dot{\phi}$ ω_x und ω_y und zeige, daß dann, wenn $\beta/2a$ klein gegenüber $\dot{\phi}_0$ ist, der Vektor ω mit einer Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega = \frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_z$$

um die Figurenachse präzessiert, in Übereinstimmung mit Gl. (5-40). Bestätige mit Hilfe der in Abschnitt 5-6 gegebenen Zahlenwerte, daß $\dot{\phi}_0$ einer Periode von etwa 1600 Jahren entspricht, so daß $\dot{\phi}_0$ sicher klein im Vergleich zur täglichen Rotation und hinreichend groß verglichen mit $\beta/2a$ ist, das der Präzessionsperiode von 26 000 Jahren entspricht.

15. (FOUCAULTScher Kreiselkompaß.) Ein Gyroskop sei mit seinem Schwerpunkt im Zentrum CARDANISCHER Ringe befestigt, so daß darauf kein Gravitationsmoment wirkt. Die Figurenachse sei jedoch gezwungen, sich nur in der horizontalen Ebene zu bewegen. Wenn das Gyroskop auf der Erdoberfläche in



Drehung versetzt wird, existiert eine zusätzliche Rotationsbewegung, die von der Erddrehung herrührt. Zeige mit den EULERSchen Gleichungen, daß dann, wenn die Kreisfrequenz des Gyroskops groß im Vergleich zu der der Erddrehung ist, die Figurenachse symmetrisch um den Meridian schwingt und somit als Kompaß verwendet werden kann.

16. Ein System bestehe aus geladenen Teilchen, die alle dasselbe e/m -Verhältnis haben. Die potentielle Energie hänge nur von der relativen Lage der Teilchen ab. Ein homogenes Magnetfeld \mathbf{B} wirke nun auf das System; das Vektorpotential \mathbf{A} ist gegeben durch

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} (\mathbf{B} \times \mathbf{r}).$$

Bestimme die LAGRANGE-Funktion für das System und zeige, daß sich die LAGRANGE-Funktion, wenn sie durch die Koordinatenachsen, die um \mathbf{B} mit der Winkelgeschwindigkeit ω_l rotieren, ausgedrückt wird, auf die feldfreie Form reduziert, wenn die Terme in B^2 klein sind und vernachlässigt werden können. Das bildet einen unabhängigen Beweis des LARMORSchen Satzes, der in dieser Form folgendes aussagt: Die *einzig*e Wirkung eines schwachen magnetischen Feldes besteht darin, daß es eine Präzession der Gesamtbewegung um \mathbf{B} hervorruft. Wie im Text angegeben wurde, bezieht sich der LARMORSche Satz lediglich auf die Wirkung, die auf den Drehimpuls ausgeübt wird.

17. Zeige, daß die HAMILTON-Funktion für einen geladenen symmetrischen Kreisel in einem homogenen Magnetfeld identisch ist mit der kinetischen Energie, und daß sie eine Konstante der Bewegung ist. Das Feld leistet deshalb keine Arbeit an dem System, wie man auch aus der LORENTZ-Kraft (1-56) sehen kann. Das ist anders beim Kreisel im Schwerfeld, wo die zusätzliche kinetische Energie der Präzession aus dem Gravitationsfeld stammt. Zeige, daß beim magnetischen Kreisel die Präzessionsenergie von einer Verminderung der Rotationsgeschwindigkeit um die Figurenachse herrührt, und daß dadurch eine Nutation der Figurenachse hervorgerufen wird.



VI. KAPITEL

DIE SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE IN DER KLASSISCHEN MECHANIK

Unsere Entwicklung der klassischen Mechanik beruhte auf einer Anzahl von Definitionen und Postulaten, die im ersten Kapitel dargelegt wurden. Wenn jedoch die auftretenden Geschwindigkeiten der Lichtgeschwindigkeit nahekommen, so repräsentieren diese Postulate die experimentellen Tatsachen bekanntlich nicht mehr, und sie müssen dann in Übereinstimmung mit der sogenannten *speziellen Relativitätstheorie* abgeändert werden. Das ist eine Modifikation der Struktur der Mechanik, die nicht mit der durch die Quantentheorie geforderten weit erheblicheren Umbildung verwechselt werden darf. Es gibt viele physikalische Gebiete, für die Quanteneffekte wichtig sind, aber relativistische Korrekturen vernachlässigbar sind. Umgekehrt treten häufig Phänomene auf, die relativistische Geschwindigkeiten enthalten, für die aber die Verfeinerungen der Quantenmechanik ohne Einfluß sind. Es gibt keinen eigentlichen Zusammenhang zwischen spezieller Relativitätstheorie und Quantenmechanik. Die Auswirkungen der einen können ohne die der anderen diskutiert werden. Es ist deshalb von beträchtlicher praktischer Wichtigkeit, die Änderungen in der Formulierung der klassischen Mechanik zu untersuchen, die durch die spezielle Relativitätstheorie gefordert werden.

Es ist jedoch nicht beabsichtigt, eine umfassende Diskussion der speziellen Relativitätstheorie und ihrer Konsequenzen darzulegen. Wir wollen uns nicht allzusehr für die Ereignisse und Experimente interessieren, die zur Konstruktion der Theorie führten, noch weniger für ihren philosophischen Gehalt, ihre scheinbaren Paradoxa, „die dem gesunden Menschenverstand spotten“. Die Betonung wird vielmehr auf der Frage liegen, wie die spezielle Relativitätstheorie in das Gebäude der klassischen Mechanik einzufügen ist, und es soll von der Theorie nur so viel gebracht werden, wie zur Beantwortung dieser Frage notwendig ist.

6-1 Das grundlegende Programm der speziellen Relativitätstheorie

In den Diskussionen des vorhergehenden Kapitels wurde häufig von Begriffen wie „räumliches System“ oder „raumfestes System“ Ge-



brauch gemacht. Unter diesen Begriffen haben wir nicht mehr als ein *Inertialsystem* verstanden, in dem das NEWTONSche Bewegungsgesetz

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (6-1)$$

gültig ist. Ein System, das in einem Körper fixiert ist, der sich bezüglich eines Inertialsystems dreht, hat nicht diese Eigenschaft. Man muß zu (6-1) Terme addieren, die die Wirkung der Drehung beschreiben. Andererseits scheint ein System, das sich gleichförmig bezüglich eines „Raumsystems“ bewegt, selbst ein Inertialsystem zu sein. Wenn \mathbf{r}' einen Radiusvektor vom Ursprung des zweiten Systems zu einem gegebenen Punkt und \mathbf{r} den entsprechenden Vektor im ersten System darstellen, vgl. Abb. 6-1, dann scheint es offenbar so zu sein, daß diese zwei Vektoren durch die Beziehung

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t \quad (6-2)$$

miteinander verknüpft sind. Da die Relativgeschwindigkeit konstant ist, lautet die zeitliche Ableitung der Gl. (6-2)

$$\dot{\mathbf{r}}' = \dot{\mathbf{r}} - \mathbf{v}. \quad (6-3)$$

Eine weitere Differentiation ergibt

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a}. \quad (6-4)$$

so daß die Beschleunigung in beiden Systemen gleich ist. Wenn das NEWTONSche Gesetz Gl. (6-1) in einem System gilt, sollte es auch in dem anderen gelten.

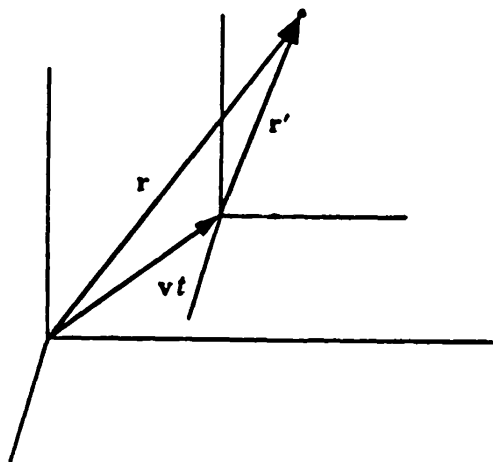


Abb. 6-1. Illustration der GALILEISchen Transformation.

Andererseits sagt die durch die Gl. (6-2) und (6-4) dargestellte Transformation, die *GALILEISCHE Transformation* genannt wird, daß die Lichtgeschwindigkeit in den zwei Systemen verschieden sein sollte. Nehmen wir an, im Ursprung des ungestrichenen Systems befinde sich eine Lichtquelle, die sphärische Wellen aussendet, die sich mit der Geschwindigkeit c fortpflanzen. Der Radiusvektor \mathbf{r} sei der Ortsvektor eines Punktes auf einer gegebenen Wellenfläche. Dann ist die Geschwindigkeit des Punktes auf der Wellenfläche im ungestrichenen System $\dot{\mathbf{r}} = c\mathbf{n}$. \mathbf{n} ist ein Einheitsvektor längs \mathbf{r} . Nach (6-2) ist jedoch die entsprechende Wellengeschwindigkeit im gestrichenen System $\dot{\mathbf{r}}' = c\mathbf{n} - \mathbf{v}$. In dem System, das sich bezüglich der Lichtquelle bewegt, wird der Betrag der Wellengeschwindigkeit im allgemeinen nicht gleich c sein; wegen der Richtungsabhängigkeit der Wellengeschwindigkeit werden die Wellen nicht mehr sphärisch sein.



Eine große Anzahl von Untersuchungen, besonders die berühmten Experimente von MICHELSON und MORLEY, haben gezeigt, daß die Lichtgeschwindigkeit in allen Richtungen immer gleich ist, und daß sie unabhängig von den relativen gleichförmigen Bewegungen des Beobachters, des übertragenden Mediums und der Lichtquelle ist. Die GALILEISCHE Transformation kann deshalb nicht richtig sein und muß durch eine andere, die LORENTZ-Transformation, ersetzt werden, die die Lichtgeschwindigkeit in allen Systemen erhält. EINSTEIN zeigte, daß eine solche Transformation die Revision der gewohnten Begriffe von Zeit und Gleichzeitigkeit erfordert. Er ging noch weiter; aus der experimentellen Tatsache, daß die Lichtgeschwindigkeit in allen Systemen konstant ist, verallgemeinerte er als grundlegendes Postulat, daß *alle* konstant ist, verallgemeinert er als grundlegendes Postulat, daß *alle* Erscheinungen der Physik in allen gleichförmig bewegten Systemen gleich erscheinen. Dieses sog. Äquivalenzpostulat behauptet, daß es im Sinne einer physikalischen Messung unmöglich ist, ein Koordinatensystem als wirklich „stationär“ oder „gleichförmig bewegt“ zu kennzeichnen; man kann nur schließen, daß sich zwei Systeme *relativ* zueinander bewegen. Somit müssen Messungen, die vollständig *innerhalb* eines gegebenen Systems gemacht werden, ungeeignet sein, das System von allen anderen zu unterscheiden, die sich ihm gegenüber gleichförmig bewegen. Das Äquivalenzpostulat fordert, daß alle physikalischen Gesetze für alle gleichförmig bewegten Systeme in identischer Weise ausgedrückt werden müssen. Die Behauptung zum Beispiel, daß die Lichtgeschwindigkeit überall c ist, bedeutet, daß eine Wellengleichung der Form

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

die Lichtfortpflanzung in allen Systemen beschreibt.

Wir haben gesehen, daß die NEWTONSchen Bewegungsgleichungen nur gegenüber einer GALILEISCHEN Transformation forminvariant sind, von der wir aber wissen, daß sie nicht richtig ist. Es ist deshalb a priori außerordentlich wahrscheinlich, daß die NEWTONSchen Bewegungsgleichungen und vielleicht andere gemeinhin akzeptierte Gesetze der Physik gegenüber einer korrekten LORENTZ-Transformation ihre Form nicht beibehalten. Das Äquivalenzpostulat behauptet, daß solche Gesetze ungenaue Darstellungen der experimentellen Erscheinungen sind und auf geeignete Weise ihrer Form nach so verallgemeinert werden müssen, daß sie die richtigen Transformationseigenschaften haben. Natürlich müssen die Verallgemeinerungen so sein, daß sie sich für Geschwindigkeiten, die viel kleiner als die des Lichtes sind, für die



also die GALILEISCHE Transformation näherungsweise richtig ist, auf die gewohnten Formen zurückführen lassen.

Das Programm der speziellen Relativitätstheorie ist deshalb ein zweifaches. Zuerst muß eine Transformation zwischen zwei gleichförmig bewegten Systemen gewonnen werden, die die Lichtgeschwindigkeit erhält. Zweitens müssen die Gesetze der Physik bezüglich ihrer Transformationseigenschaften gegenüber dieser LORENTZ-Transformation überprüft werden. Die Gesetze, deren Form nicht invariant ist, sind so zu verallgemeinern, daß sie dem Äquivalenzpostulat genügen. Ein reichhaltiger experimenteller Nachweis wurde bisher für das physikalische Bild erhalten, das sich aus diesem Programm ergibt, und letzten Endes ist das die einzige Rechtfertigung, die für EINSTEINS grundlegende Annahmen notwendig ist.

6-2 Die Lorentztransformation

Betrachten wir zwei gleichförmig bewegte Systeme, deren Ursprünge zur Zeit $t = 0$ zusammenfallen. Zu diesem Zeitpunkt strahle eine im Ursprung des ungestrichenen Systems befestigte Lichtquelle einen Lichtblitz aus. Ein Beobachter, der sich bezüglich dieses Systems in Ruhe befindet, wird natürlich eine sich ausbreitende Kugelwelle sehen, die mit der Geschwindigkeit c fortschreitet. Die Gleichung der beobachteten Wellenfront lautet:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2. \quad (6-5)$$

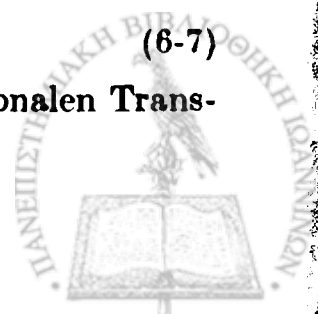
Aber das experimentelle Faktum der Invarianz der Lichtgeschwindigkeit bedeutet, daß ein Beobachter in dem System, das sich bezüglich der Lichtquelle bewegt, das Licht auch so sieht, als breite es sich als sphärische Welle um *seinen* Ursprung aus. Die entsprechende Gleichung der Wellenfront lautet:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2. \quad (6-6)$$

Indem man einen Strich an das „ t “ setzt, erkennt man ausdrücklich die Möglichkeit an, daß sich die Zeitskala auch transformiert, wenn man von einem System zum anderen übergeht. Ausführlicher gesagt, die gewünschte Transformation, die Gl. (6-5) in Gl. (6-6) überführt, kann es erforderlich machen, daß der Zeitabschnitt zwischen zwei Ereignissen vom Bezugssystem des Beobachters abhängt. Wegen der Gl. (6-5) und (6-6) muß die gewünschte Transformation derart sein, daß

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2. \quad (6-7)$$

Diese Bedingung erinnert an die Definition einer orthogonalen Trans-



formation Gl. (4-13), insbesondere wenn man $x_1x_2x_3$ für xyz schreibt, so daß Gl. (6-7) folgendermaßen lautet:

$$\sum_{i=1}^3 x_i^2 - c^2 t^2 = \sum_{i=1}^3 x_i'^2 - c^2 t'^2 \quad (6-7')$$

Der Vergleich der Form von Gl. (6-7') mit der von Gl. (4-13) legt nahe, formal eine vierte, imaginäre Koordinate $ict = x_4$ einzuführen, um eine noch deutlichere Ähnlichkeit mit räumlichen orthogonalen Transformationen zu erhalten:

$$\sum_{\mu=1}^4 x_{\mu}^2 = \sum_{\mu=1}^4 x_{\mu}'^2. \quad (6-8)$$

Gl. (6-8) zeigt, daß die gesuchte Transformation einer Drehung in in einem vierdimensionalen Raume entspricht, der aus den drei Dimensionen des gewöhnlichen Raumes und einer vierten, imaginären Dimension besteht, die proportional der Zeit ist. Dieser Raum wird *Welt-Raum* oder *MINKOWSKI-Raum* genannt. Die *LORENTZ-Transformationen* sind deshalb einfach die orthogonalen Transformationen des *MINKOWSKI-Raumes*. Die im IV. Kapitel für räumliche, orthogonale Transformationen entwickelten mathematischen Verfahren sind automatisch auch bei der Diskussion der *LORENTZ-Transformation* anwendbar.

Selbstverständlich ist eine räumliche Drehung zwischen zwei Systemen, die zueinander in Ruhe sind, als eine Unterklasse der *LORENTZ-Transformation* mit eingeschlossen. Wir werden von einer reinen *LORENTZ-Transformation* sprechen, wenn sie keine räumliche Drehung enthält, sondern sich nur mit gleichförmig bewegten Systemen befaßt, deren Achsen parallel sind. Es ist auch ohne ausführlichen Beweis¹ einzusehen, daß eine allgemeine *LORENTZ-Transformation* das Produkt aus einer Raumdrehung und einer reinen *LORENTZ-Transformation* ist. Weiterhin bedeutet es keine Einschränkung der Allgemeinheit, die Richtung der Geschwindigkeit \mathbf{v} zwischen den beiden Systemen längs einer der Achsen, etwa der x_3 -Achse zu legen. Unabhängig von der Richtung von \mathbf{v} kann man eine gewöhnliche Raumdrehung der Koordinatenachsen stets so ausführen, daß die x_3 -Achse mit der Richtung von \mathbf{v} zusammenfällt. Es wird deshalb ausreichend sein, die Matrixelemente $a_{\mu\nu}$ der Transformation zwischen x und x' zu bestimmen:

$$x_{\mu}' = \sum_{\nu=1}^4 a_{\mu\nu} x_{\nu} \quad (6-9)$$

¹ Siehe R. BECKER, *Theorie der Elektrizität*, Bd. II, 6. Aufl., Leipzig 1933, S. 287.



und zwar nur für eine reine LORENTZ-Transformation mit der Geschwindigkeit v längs der Richtung von x_3 .³ Die Matrixelemente müssen natürlich der gleichen Art von Orthogonalitätsbedingungen genügen, die für räumliche Drehungen (vgl. Gl. (4-37)) gelten:

$$\sum_{\nu} a_{\mu\nu} a_{\lambda\nu} = \delta_{\mu\lambda}. \quad (6-10)$$

Jedoch anders als bei der räumlichen orthogonalen Transformation sind die Matrixelemente jetzt nicht alle reell. Da die Koordinaten $x'_1 x'_2 x'_3$ reell bleiben müssen, ist es erforderlich, daß die Elemente a_{ii} für $i = 1, 2, 3$ imaginär sind. Ähnlich verlangt die imaginäre Natur von x'_4 , daß die Elemente a_{4i} imaginär sind, während a_{44} reell sein muß.

Die Richtungen senkrecht zur Bewegung bleiben offensichtlich durch die Transformation unbeeinflusst,

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2,$$

denn sie nehmen nicht an der Bewegung teil und sind wirklich in Ruhe. Nur die Koordinaten x_3 und x_4 erfordern eine Änderung bei der Transformation von einem System auf das andere. Man kann auch aus qualitativen Argumenten erkennen, daß weder x'_3 noch x'_4 die Werte von x_1 oder x_2 enthalten werden. Kein Ort in der $x_1 x_2$ -Ebene kann aus physikalischen Gründen notwendig als Ursprung des Koordinatensystems bevorzugt werden. Man kann offensichtlich den Ursprung zu jedem Punkt in der $x_1 x_2$ -Ebene verschieben, ohne die transformierten Werte von x'_3 und x'_4 zu beeinflussen. Eine solche Verschiebung wird aber die Werte von x_1 und x_2 beeinflussen, und deshalb dürfen diese Koordinaten nicht in den Transformationsgleichungen für x'_3 und x'_4 auftreten. Infolge dieser Vereinfachungen kann die Matrix für die reine LORENTZ-Transformation geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Die Orthogonalitätsbedingungen liefern drei Bedingungen, die die vier Matrixelemente verknüpfen:

$$\begin{aligned} a_{33}^2 + a_{34}^2 &= 1, \\ a_{43}^2 + a_{44}^2 &= 1, \\ a_{33}a_{43} + a_{34}a_{44} &= 0. \end{aligned} \quad (6-11)$$

³ Es ist gebräuchlich geworden, griechische Buchstaben μ, ν, λ usw. für Indizes zu verwenden, die von 1 bis 4 laufen, und lateinische i, j, k usw., wenn der Bereich von 1 bis 3 geht. Diesem Brauch soll von jetzt an gefolgt werden.



Eine vierte Bedingung ist noch nötig, um die übrigen Elemente eindeutig zu bestimmen. Sie kann aus der Beobachtung gewonnen werden, daß sich der Ursprung des gestrichenen Systems ($x'_3 = 0$) gleichförmig längs der x_3 -Achse bewegt, so daß zur Zeit t seine x_3 -Koordinate gleich vt ist:

$$x_3 = vt = -i\beta x_4,$$

wobei

$$\beta = v/c. \quad (6-12)$$

Mit Hilfe der Matrixelemente kann diese Bedingung geschrieben werden, indem man sagt, daß der Ursprung des gestrichenen Systems gegeben ist durch:

$$x'_3 = x_4(a_{34} - i\beta a_{33}) = 0$$

oder

$$a_{34} = i\beta a_{33}.$$

Die erste der Orthogonalitätsbedingungen (6-11) läßt sich dann vereinfachen:

$$a_{33}^2(1 - \beta^2) = 1$$

oder

$$a_{33} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (6-13)$$

und folglich

$$a_{34} = \frac{i\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (6-14)$$

Wir bemerken, daß a_{33} reell und a_{34} imaginär ist, wie durch die Realitätsbedingung für die Matrixelemente gefordert wird.

Die verbleibenden zwei Elemente kann man dadurch erhalten, daß man die letzte der Gl. (6-11) nach a_{43} auflöst:

$$a_{43} = -a_{44} \frac{a_{34}}{a_{33}} = -i\beta a_{44},$$

das Ergebnis in die zweite Orthogonalitätsbedingung einsetzt und nach a_{44} auflöst:

$$a_{44} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Das vierte Matrixelement ist dann

$$a_{43} = \frac{-i\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Mit diesen Werten für die vier Elemente hat die Matrix der LORENTZ-



Transformation die Form:³

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 0 & \frac{-i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix} \quad (6-15)$$

Wir stellen fest, daß die vollständige Matrix eine Untermatrix enthält, die dieselbe Form hat wie die Matrix für eine Drehung in der Ebene:

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich stellt die Matrix (6-15) eine Drehung in der x_3x_4 -Ebene dar, der Drehwinkel ist aber imaginär, denn hier ist

$$\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (6-16)$$

Das ist größer als Eins.

Die Gleichungen der LORENTZ-Transformation können auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y, \\ z' &= \frac{z - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ t' &= \frac{t - \frac{vz}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \quad (6-17)$$

Die inverse Transformation von x'_μ zurück nach x_μ kann dadurch erhalten werden, daß man einfach die Matrix (6-15) transponiert. Aus der Form der Matrix ist zu sehen, daß sich die inversen Gleichungen von (6-17) nur durch eine Änderung im Vorzeichen von v unterscheiden. Dieses Ergebnis ist aus rein physikalischen Gründen zu erwarten, da sich das ungestrichene System relativ zum gestrichenen mit der Geschwindigkeit $-v$ bewegt.

Der für die gewohnten Vorstellungen am paradoxesten erscheinende Aspekt ist in der Beziehung zwischen t und t' enthalten. Zwei Ereignisse, die sich zur gleichen Zeit an zwei verschiedenen Raumpunkten

³ Für a_{44} und a_{33} wurde die positive Quadratwurzel gewählt, damit sich die Matrix auf die Einheitsmatrix für $\beta \rightarrow 0$ reduziert. Wir sind nur an *eigentlichen* LORENTZ-Transformationen, mit der Determinante $+1$, interessiert.



im ungestrichenen System ereignen, werden Beobachtern im gestrichenen System nicht als gleichzeitig erscheinen. Das ist eine Folge des Terms vz/c^2 in der Gleichung für t' . Es ist nicht unsere Absicht, hier eine physikalische Diskussion dieser und ähnlicher scheinbarer Paradoxa⁴ zu führen, aber erwähnt werden müssen zwei berühmte Konsequenzen der LORENTZ-Transformationen – die LORENTZ-FITZGERALD-sche Längenkontraktion und die Dilatation der Zeitskalen.

Betrachten wir einen starren Stab, der bezüglich des ungestrichenen Systems in Ruhe ist und längs der z -Achse liegt. Er habe die Länge $l = z_2 - z_1$. Ein bewegter Beobachter mißt die Länge des Stabes, indem er die Lage der beiden Endpunkte z'_1 und z'_2 in seinem System zu einem Zeitpunkt t' lokalisiert. Aus den inversen Gleichungen finden wir

$$z_1 = \frac{z'_1 + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

$$z_2 = \frac{z'_2 + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

so daß die scheinbare Länge

$$z'_2 - z'_1 = l\sqrt{1 - \beta^2} \quad (6-18)$$

ist. Der Stab erscheint dem bewegten Beobachter um den Faktor $\sqrt{1 - \beta^2}$ verkürzt. Dieses Ergebnis ist die Grundlage für die berühmte LORENTZ-FITZGERALD-sche Kontraktionshypothese. Man beachte: es ist nicht zweckmäßig, hier die direkten Gl. (6-17) zu verwenden, denn obwohl beide Enden zur gleichen Zeit t' gemessen werden, sind das keine gleichzeitigen Ereignisse im ungestrichenen System, da sie an verschiedenen Punkten z_1 und z_2 erfolgen.

Nehmen wir an, eine Uhr werde im ungestrichenen System an einen Punkt z_1 gesetzt. Zur Zeit t_1 , nach dieser Uhr, bemerkt ein Beobachter, der sich in diesem Punkt, jedoch im bewegten System befindet, eine Zeit

$$t'_1 = \frac{t_1 - \frac{vz_1}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Zur Zeit t_2 findet ein ähnlicher Beobachter in seinem System die Zeit

$$t'_2 = \frac{t_2 - \frac{vz_1}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

so daß das scheinbare Zeitintervall

⁴ Solche Diskussionen sind zu finden bei P. BERGMANN, *An Introduction to the Theory of Relativity*, New York 1942, und R. BECKER, op. cit.



$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (6-19)$$

ist. Wenn nach der stationären Uhr eine Stunde vergangen ist, findet der bewegte Beobachter, daß auf seiner Uhr $\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ Stunden vergangen sind. Er wird sagen, die stationäre Uhr gehe langsamer, sie gehe nach; deshalb hat man diesem Phänomen den Namen „Zeitdilatation“ gegeben. Es soll aber nachdrücklich betont werden, daß Beobachter im ungestrichenen System, die die Geschwindigkeit einer Uhr prüfen, die fest im gestrichenen System ist, ebenfalls zu dem Schluß kommen, daß die Uhr im Vergleich zu ihrer langsamer läuft. Die gleiche Feststellung gilt für die LORENTZ-Kontraktion; ein Beobachter im ungestrichenen System beobachtet die gleiche Kontraktion (6-18) von Objekten, die fest im gestrichenen System sind. Somit ist kein System als stationäres und das andere als bewegtes ausgezeichnet – die Bewegung ist nur relativ; alle (gleichförmig bewegten) Systeme sind völlig gleichwertig.

Die LORENTZ-Transformation zeigt auch, daß es keine Relativgeschwindigkeit gibt, die größer als c ist. Hätte ein Körper bezüglich eines gegebenen Systems eine solche Geschwindigkeit, dann sollte es möglich sein, vom Bezugssystem auf das System, in dem der Körper in Ruhe ist, im Sinne einer LORENTZ-Transformation zu transformieren. Aber eine LORENTZ-Transformation auf reelle Koordinatensysteme ist nicht möglich, wenn $\beta > 1$ ist. Das zeigt, daß Geschwindigkeiten größer als die Lichtgeschwindigkeit nicht auftreten können.

Man könnte meinen, daß es möglich ist, eine Geschwindigkeit größer als c durch eine Folge von LORENTZ-Transformationen zu erhalten. So könnte man versuchen, von einem System auf ein zweites zu transformieren, das sich mit einer Relativgeschwindigkeit $v_1 > c/2$ bewegt, und dann von diesem auf ein drittes System zu transformieren, das sich parallel zu v_1 mit einer Geschwindigkeit v_2 , ebenfalls größer als $c/2$, relativ zum zweiten bewegt. Unglücklicherweise ist die Geschwindigkeit des dritten Systems relativ zum ersten nicht einfach durch $v_1 + v_2$ gegeben. Man kann die LORENTZ-Transformationen vom ersten zum dritten System direkt finden, indem man die Matrizen der beiden einzelnen Transformationen multipliziert. Man findet dann, daß die gesamte Transformation einer Geschwindigkeit v_3 entspricht, die durch das sogenannte EINSTEINSche Additionstheorem der Geschwindigkeiten gegeben ist:

$$v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$



oder

$$\beta_3 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2}. \quad (6-20)$$

Man sieht, daß β_3 stets kleiner als Eins bleibt. Der Beweis von (6-20) wird als Übung gegeben.

6-3 Kovariante vierdimensionale Formulierungen

Nachdem wir die LORENTZ-Transformation erhalten haben, um die inkorrekte GALILEISCHE Transformation zu ersetzen, können wir nun zum zweiten Schritt übergehen und fordern, daß die Gesetze der Mechanik, wie die der gesamten Physik, in allen gleichförmig bewegten Systemen die gleiche Form haben sollen. Die Prüfung der Gesetze der Physik auf Forminvarianz gegenüber LORENTZ-Transformation wird sehr erleichtert, wenn man sie in Ausdrücken des vierdimensionalen Raumes schreibt, der im vorigen Abschnitt eingeführt wurde. Wir werden zeigen, daß es dann tatsächlich möglich ist, die LORENTZ-Invarianz einer gegebenen Gleichung leicht zu erkennen.

Die Forminvarianz gegenüber LORENTZ-Transformation ist nicht die einzige invariante Eigenschaft, die von physikalischen Gesetzen gefordert wird. Selbstverständlich kann der physikalische Inhalt einer gegebenen Beziehung nicht durch die spezielle Orientierung beeinflusst werden, die man für die Raumachsen gewählt hat; die Gesetze der Physik müssen auch forminvariant gegenüber Drehungen, d.h. räumlichen orthogonalen Transformationen sein. Eine Untersuchung dieser geläufigeren Invarianzforderung wird das Verfahren klarmachen, dem wir bei der Einführung der Invarianz gegenüber LORENTZ-Transformation zu folgen haben.

Normalerweise hegen wir keinen Zweifel an der Invarianz unserer Theorien gegenüber Raumdrehungen. Bei der Aufstellung einer Gleichung ist es stets erforderlich, daß die Terme der Gleichung *alle* Skalare oder *alle* Vektoren sind; allgemein müssen alle Terme Tensoren gleicher Stufe sein. Diese Forderung sichert automatisch die gewünschte Invarianz gegenüber Drehung. So hat eine skalare Beziehung im allgemeinen die Form

$$a = b.$$

Da beide Seiten der Gleichung, die ja Skalare sind, invariant gegenüber räumlichen Drehungen sind, gilt die Beziehung offensichtlich in allen Koordinatensystemen. Eine Vektorbeziehung der Form

$$\mathbf{F} = \mathbf{G}$$



steht in Wirklichkeit für drei einzelne Beziehungen zwischen den Komponenten der Vektoren:

$$F_i = G_i.$$

Die Werte dieser Komponenten sind natürlich nicht invariant gegenüber räumlichen Drehungen; vielmehr werden sie auf neue Werte F'_i und G'_i transformiert, die die Komponenten der transformierten Vektoren \mathbf{F}' , \mathbf{G}' sind. Aber weil sich beide Seiten der Komponentenbeziehungen auf identische Weise transformieren, muß die gleiche Beziehung zwischen den transformierten Komponenten gelten:

$$F'_i = G'_i.$$

Die Beziehung zwischen den zwei Vektoren wird demnach durch eine räumliche Drehung nicht verändert. In dem neuen System wird immer noch gelten:

$$\mathbf{F}' = \mathbf{G}'.$$

Merken wir uns, daß die Forminvarianz der Beziehung eine Folge der Tatsache ist, daß sich beide Seiten wie Vektoren transformieren. Wir sagen, daß die Terme der Gleichung *kovariant* sind. Ähnlich schließt eine Gleichheit zwischen zwei Tensoren zweiter Stufe

$$\mathbf{C} = \mathbf{D}$$

notwendig dieselbe Gleichheit zwischen den zwei transformierten Tensoren

$$\mathbf{C}' = \mathbf{D}'$$

ein, weil sich die zwei Tensoren kovariant gegenüber einer Raumdrehung transformieren. Andererseits kann eine Gleichung, die eine Komponente eines Vektors und davon getrennt etwa eine Komponente eines Tensors enthält, offensichtlich nicht forminvariant gegenüber einer dreidimensionalen orthogonalen Transformation sein. *Die Invarianz eines physikalischen Gesetzes gegenüber Drehung des räumlichen Koordinatensystems erfordert die Kovarianz der Terme der Gleichung gegenüber dreidimensionaler orthogonaler Transformation.*

Nun wurde oben die LORENTZ-Transformation mit den orthogonalen Transformationen im MINKOWSKI-Raum identifiziert. Man kann Skalare, Vektoren, im allgemeinen Tensoren irgendeiner Stufe in diesem vierdimensionalen Raum mit Transformationseigenschaften aufstellen, die offensichtliche Verallgemeinerungen der Transformationseigenschaften der analogen räumlichen Größen sind. Deshalb wollen wir von *Weltskalaren* und *Weltvektoren* (oder *Vierervektoren*) sprechen. Die Forminvarianz eines physikalischen Gesetzes gegenüber LORENTZ-Transformation wird dann unmittelbar evident sein, wenn es in einer *kovarianten vierdimensionalen Form* ausgedrückt ist, wenn also alle Terme Welt-Tensoren gleicher Stufe sind. Ein Gesetz, das die Forderungen

des Äquivalenzprinzipes verletzt, kann nicht in eine kovariante Form gebracht werden. Die vierdimensionalen Transformationseigenschaften der Terme eines physikalischen Gesetzes dienen somit als Prüfstein für seine relativistische Gültigkeit.

Ein wichtiges Beispiel eines Vierervektors ist der Ortsvektor eines Punktes im MINKOWSKI-Raum mit den Komponenten $x_1 x_2 x_3 x_4$. Um Verwechslung mit räumlichen Vektoren zu verhindern, wird ein Vierervektor durch eine für ihn typische Komponente bezeichnet; so möge x_μ für den Vierer-Ortsvektor stehen. Es ist oft bequem, die EINSTEINSche Abkürzung für Summationen zu benutzen. Wenn in einem Term nacheinander gleiche Indizes auftreten, so ist darunter zu verstehen, daß der Ausdruck über den Index zu summieren ist, auch wenn das Summationszeichen nicht geschrieben ist. Zum Beispiel würde $x_\mu x_\mu$ für

$$\sum_{\mu=1}^4 x_\mu^2$$

stehen.

Bewegt sich ein Teilchen im gewöhnlichen Raum, so beschreibt sein entsprechender Punkt im vierdimensionalen Raum eine Bahn, die *Weltlinie* genannt wird. Der Vierervektor dx_μ stellt die Änderung des Vierer-Ortsvektors für eine differentielle Bewegung längs der Weltlinie dar. Aus dem Punktprodukt von dx_μ mit sich selbst können wir einen Weltskalar (und damit eine LORENTZ-Invariante) bilden, der mit $d\tau$ bezeichnet wird und durch die Gleichung

$$(d\tau)^2 = -\frac{1}{c^2} \sum_{\mu} (dx_{\mu})^2 \quad (6-21)$$

definiert ist. Die Bedeutung von $d\tau$ kann man sich klarmachen, indem man Gl. (6-21) für ein System löst, in dem das Teilchen momentan in Ruhe ist. In einem solchen System sind die Komponenten des transformierten Vektors $dx'_\mu (0, 0, 0, icdt')$, und die Invariante $d\tau$ ist gegeben durch

$$(d\tau)^2 = -\frac{1}{c^2} \sum_{\mu} (dx'_{\mu})^2 = (dt')^2.$$

Somit ist $d\tau$ das Zeitintervall, das auf einer Uhr gemessen wird, die sich mit dem Teilchen bewegt.⁵ $d\tau$ wird deshalb als ein Intervall der *Eigenzeit* oder der *Weltzeit* des Teilchens bezeichnet.

Die Beziehung zwischen $d\tau$ und einem Zeitintervall, das in einem gegebenen LORENTZ-System gemessen wird, kann unmittelbar her-

⁵ Nach Definition ist $d\tau$ gleich der positiven Quadratwurzel aus dem in Gl. (6-21) gegebenen Ausdruck.



geleitet werden, indem man die Definitionsgleichung (6-21) entwickelt:

$$(d\tau)^2 = -\frac{1}{c^2} ((dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - c^2(dt)^2)$$

oder

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right]}.$$

Das ist der Beziehung

$$\frac{d\tau}{\sqrt{1 - \beta^2}} = dt \quad (6-22)$$

äquivalent. Gl. (6-22) folgt auch aus der Formel für die Zeitdilatation, und zwar als Folge der Interpretation von $d\tau$ als das Zeitintervall auf einer Uhr, die an dem Teilchen fixiert ist, und von dt als das entsprechende Zeitintervall, das durch Beobachter gemessen wird, die sich relativ zum Teilchen bewegen.

Ist eine der Komponenten eines Vierervektors imaginär, so ist das Quadrat eines solchen Vektors nicht notwendig positiv definit. Vierervektoren, deren Betragsquadrat größer oder gleich Null sind, werden *raumähnlich* genannt; wenn die Beträge negativ sind, werden sie *zeitähnlich* genannt. Da diese Eigentümlichkeiten in den Beträgen von Vektoren, die ja Weltskalare sind, ihren Ursprung haben, werden die Bezeichnungen durch eine LORENTZ-Transformation offensichtlich nicht beeinflußt. Die Namen rühren von der Tatsache her, daß das Quadrat eines Raumvektors stets positiv definit ist und ein raumähnlicher Vierervektor stets so transformiert werden kann, daß seine vierte Komponente verschwindet. Ein zeitähnlicher Vierervektor muß jedoch stets eine vierte Komponente haben, er kann aber so transformiert werden, daß die ersten drei Komponenten verschwinden. Als Beispiel dieser Begriffe mag bemerkt werden, daß der Differenzvektor zwischen zwei Weltpunkten entweder raum- oder zeitähnlich sein kann. X_μ sei der Differenzvektor, definiert durch

$$X_\mu = x_{1\mu} - x_{2\mu}.$$

Die Indizes 1 und 2 bezeichnen die zwei Punkte. Der Betrag von X_μ ist gegeben durch

$$X_\mu X_\mu = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2 - c^2(t_1 - t_2)^2.$$

Somit ist X_μ raumähnlich, wenn die zwei Weltpunkte so weit voneinander entfernt sind, daß

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2 \geq c^2(t_1 - t_2)^2,$$



während er zeitähnlich ist, wenn

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2 < c^2(t_1 - t_2)^2.$$

Die Bedingung für einen zeitähnlichen Differenzvektor ist der Aussage gleichwertig, daß es möglich ist, den Abstand zwischen den beiden Weltpunkten durch ein Lichtsignal zu überbrücken, während dann, wenn die Punkte durch einen raumähnlichen Differenzvektor getrennt sind, diese Punkte nicht durch irgendeine Welle verbunden werden können, die sich mit der Geschwindigkeit c fortpflanzt.

Die Raumachsen können stets so orientiert werden, daß der räumliche Differenzvektor $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ längs der x_3 -Achse liegt. Deshalb ist $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ gleich $z_1 - z_2$. Unter einer LORENTZ-Transformation mit der Geschwindigkeit v parallel zur z -Achse transformiert sich die vierte Komponente von X_μ dann gemäß Gl. (6-17):

$$c(t'_1 - t'_2) = \frac{c(t_1 - t_2) - \frac{v}{c}(z_1 - z_2)}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Ist X_μ raumähnlich, dann gilt

$$c(t_1 - t_2) < z_1 - z_2,$$

und es ist deshalb möglich, eine solche Geschwindigkeit $v < c$ zu finden, daß $ic(t'_1 - t'_2) \equiv X'_4$ verschwindet, wie oben behauptet wurde. Nun entspricht einem Punkt im MINKOWSKI-Raum irgend etwas, das sich in einem gegebenen Punkt \mathbf{r} im Raum und zu einer gegebenen Zeit t ereignet; mit einem Wort, er beschreibt ein *Ereignis*. Physikalisch bedeutet das Verschwinden von X'_4 , daß man dann, wenn der Abstand zwischen zwei Ereignissen raumähnlich ist, stets ein LORENTZ-System finden kann, in dem die zwei Ereignisse gleichzeitig sind.

Man kann leicht noch andere Beispiele für Vierervektoren angeben. So ist die Vierergeschwindigkeit u_ν als das Maß der Änderung des Ortsvektors eines Teilchens in bezug auf seine Eigenzeit definiert:

$$u_\nu = \frac{dx_\nu}{d\tau} \quad (6-23)$$

mit den Raum- und Zeitkomponenten

$$u_i = \frac{v_i}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{und} \quad u_4 = \frac{ic}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (6-24)$$

Die Weltgeschwindigkeit hat einen konstanten Betrag, denn die Summe $u_\nu u_\nu$ ist gegeben durch

$$u_\nu u_\nu = \frac{v^2}{1 - \beta^2} - \frac{c^2}{1 - \beta^2} = -c^2. \quad (6-25)$$

Sie ist somit auch zeitähnlich.



Um das Verfahren zu illustrieren, ein physikalisches Gesetz in einer kovarianten vierdimensionalen Formulierung aufzustellen, betrachten wir die skalare Wellengleichung des Typs

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (6-26)$$

In Analogie zu dem dreidimensionalen Gradienten können wir einen *Vierergradienten* einführen, der durch das Symbol \square bezeichnet wird und die folgenden Komponenten besitzt:

$$\frac{\partial}{\partial x_1'}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2'}, \quad \frac{\partial}{\partial x_3'}, \quad \frac{\partial}{\partial x_4'}$$

Es kann leicht gezeigt werden, daß sich der Vierergradient wie ein Vierervektor transformiert. Nach den Gesetzen der partiellen Differentiation ist die partielle Ableitung nach der transformierten Koordinate x'_μ gegeben durch

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \sum_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \quad (6-27)$$

x_ν hängt aber mit x'_μ über die inverse Transformation

$$x_\nu = \sum_\mu a_{\mu\nu} x'_\mu$$

zusammen, so daß die partielle Ableitung von x_ν bezüglich x'_μ einfach $a_{\mu\nu}$ ist. Gl. (6-27) nimmt daher die Form an:

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \sum_\nu a_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}$$

Das ist die Transformationsgleichung für die Komponenten eines Vierervektors. Das Punktprodukt von \square mit sich selbst, \square^2 geschrieben und *D'ALEMBERTScher Operator* genannt, ist deshalb ein Weltskalar-Differentialoperator:

$$\square^2 = \sum_\mu \frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Der Vergleich mit (6-26) zeigt, daß \square^2 genau der Differentialoperator ist, der in der skalaren Wellengleichung steht. Diese kann somit geschrieben werden:

$$\square^2 \psi = 0. \quad (6-28)$$

Vorausgesetzt, daß ψ wirklich ein Weltskalar ist, zeigt diese kovariante Formulierung unmittelbar die Invarianz der Wellengleichung (6-26) gegenüber LORENTZ-Transformationen.



6-4 Die Kraft- und Energiegleichungen in der relativistischen Mechanik

Wir haben gesehen, daß die NEWTONSchen Bewegungsgleichungen, die invariant gegenüber einer GALILEI-Transformation sind, nicht invariant gegenüber einer LORENTZ-Transformation sein können; sie müssen geeignet verallgemeinert werden, um ein Kraftgesetz zu liefern, das das Äquivalenzprinzip erfüllt. Natürlich muß die Verallgemeinerung so sein, daß sich die neuen Gleichungen für Geschwindigkeiten, die klein gegen c sind, auf die bekannte Form

$$\frac{d}{dt} (mv_i) = F_i \quad (6-29)$$

reduzieren.

Nun bilden die Raumkomponenten eines Vierervektors für sich einen Raumvektor, denn eine LORENTZ-Transformation mit $a_{4i} = a_{i4} = 0$ und $a_{44} = 1$ ist lediglich eine gewöhnliche Raumdrehung und beeinflußt nur die Raumkomponenten eines Vierervektors. Die Umkehrung ist jedoch nicht richtig; die Komponenten eines Raumvektors transformieren sich nicht notwendig wie die Raumkomponenten eines Vierervektors. Man darf die Komponenten eines gewöhnlichen Vektors mit irgendeiner Funktion von β multiplizieren, ohne ihre räumlichen Dreieigenschaften zu verändern. Aber eine solche Multiplikation beeinflußt wesentlich die Art, in der sie sich gegenüber einer LORENTZ-Transformation ändern. So bilden die Raumkomponenten der Weltgeschwindigkeit u_ν einen Vektor $\mathbf{v}/\sqrt{1-\beta^2}$, aber \mathbf{v} selbst ist nicht Teil eines Vierervektors, es muß erst durch $\sqrt{1-\beta^2}$ dividiert werden.

Gl. (6-29) selbst ist zwar nicht LORENTZ-invariant, wir können aber dennoch erwarten, daß ihre relativistische Verallgemeinerung eine Vierervektor-Gleichung sein wird, deren Raumkomponenten sich in der Grenze $\beta \rightarrow 0$ auf (6-29) reduzieren. Es ist nicht schwierig, eine Vierervektor-Verallgemeinerung der linken Seite der Gleichung zu finden. Der einzige Vierervektor, dessen Raumanteil sich für kleine Geschwindigkeiten auf \mathbf{v} reduziert, ist die Weltgeschwindigkeit u_ν . Während m als eine invariante Eigenschaft des Teilchens angenommen werden kann, wissen wir weiterhin, daß die Zeit t keine LORENTZ-Invariante ist, daß sie aber offensichtlich durch die skalare Eigenzeit τ ersetzt werden kann, die mit $\beta \rightarrow 0$ gegen t geht. Die gewünschte Verallgemeinerung der NEWTONSchen Bewegungsgleichungen muß deshalb die Form haben:

$$\frac{d}{d\tau} (mu_\nu) = K_\nu \quad (6-30)$$

Darin ist K_ν ein Vierervektor, MINKOWSKI-Kraft genannt.



Man darf nicht denken, daß die Raumkomponenten von K_i mit den Komponenten der Kraft zu identifizieren sind. Alles, was Gl. (6-29) verlangt, ist, daß sich K_i in der Grenze kleiner Geschwindigkeiten auf F_i reduziert. Somit darf K_i gleich sein dem Produkt aus F_i und einer Funktion von β , die mit $\beta \rightarrow 0$ gegen 1 geht; die exakte Beziehung hängt selbstverständlich von den Eigenschaften der Kräftekomponenten bei einer LORENTZ-Transformation ab. In der Vergangenheit wurden zwei Verfahren benutzt, um das Verhalten von F gegenüber einer LORENTZ-Transformation zu bestimmen.

Ein Verfahren beginnt damit, zu zeigen, daß Kräfte grundsätzlich nur von einigen wenigen physikalischen Quellen herrühren – es sind entweder Gravitations-, elektromagnetische oder möglicherweise Kernkräfte. Man muß von einer korrekten Theorie dieser physikalischen Erscheinungen verlangen, daß sie Ausdrücke für die auftretenden Kräfte liefert, und daß diese Ausdrücke, wenn sie in kovarianter Form aufgestellt worden sind, automatisch Aussagen über die Transformationseigenschaften der Kraftkomponenten gestatten. Leider haben wir keine kovarianten Theorien aller möglichen Kraftquellen. Tatsächlich haben wir für Kernkräfte keine Theorie, über die zu sprechen sich lohnt. Nur von der klassischen elektromagnetischen Theorie kann erwartet werden, daß sie eine kovariante Kraftgleichung liefert, da die LORENTZ-Transformation ausdrücklich so konstruiert wurde, daß sie die Invarianz der Theorie gewährleistet. Das ist aber für unsere Zwecke ausreichend; die Transformationseigenschaften müssen für alle Kräfte dieselben sein, unabhängig davon, was ihr Ursprung ist. Der Satz, „ein Teilchen ist unter dem Einfluß zweier Kräfte im Gleichgewicht“, muß in allen LORENTZ-Systemen gelten. Das ist aber nur dann der Fall, wenn sich alle Kräfte in gleicher Weise transformieren.

In Abschnitt 1-5 wurde gezeigt, daß die auf ein Teilchen wirkende elektromagnetische Kraft gegeben ist durch

$$F_i = -q \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\phi - \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \right) + \frac{1}{c} \frac{dA_i}{dt} \right). \quad (6-31)$$

Darin sind ϕ und \mathbf{A} das elektromagnetische Skalar- und Vektorpotential. Man kann auch zeigen, daß die Invarianz der Lichtgeschwindigkeit erfordert, daß sich \mathbf{A} und $i\phi$ wie Raum- bzw. Zeitkomponente eines Vierervektors, mit A_μ bezeichnet, transformieren. Folglich kann der Ausdruck $\phi - \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$ kovariant geschrieben werden:

$$\phi - \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c} \sqrt{1 - \beta^2} u_\nu A_\nu, \quad (6-32)$$



und die Kraftkomponenten F_i werden

$$F_i = -\frac{q}{c} \sqrt{1 - \beta^2} \left(-\frac{\partial}{\partial x_i} (u_\nu A_\nu) + \frac{dA_i}{d\tau} \right). \quad (6-33)$$

Der Ausdruck in der Klammer transformiert sich wie die Raumkomponente eines Vierervektors, so daß F_i gleich dem Produkt aus $\sqrt{1 - \beta^2}$ und der Raumkomponente eines Vierervektors ist, der als die MINKOWSKI-Kraft K_μ zu identifizieren ist. Demnach muß der Zusammenhang zwischen den gewöhnlichen und den MINKOWSKI-Kräften lauten:

$$F_i = K_i \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (6-34)$$

unabhängig vom Ursprung dieser Kräfte. Ein Nebenprodukt dieser Ableitung ist die besondere Form der MINKOWSKI-Kraft auf geladene Teilchen:

$$K_\mu = \frac{q}{c} \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} (u_\nu A_\nu) - \frac{dA_\mu}{d\tau} \right).$$

Das andere Verfahren versucht zu vermeiden, eine physikalische Theorie außer der Mechanik selbst zu verwenden; man *definiert* einfach die Kraft als zeitliche Änderung des Impulses in allen LORENTZ-Systemen:

$$\frac{dp_i}{dt} = F_i. \quad (6-35)$$

Der in (6-35) angegebene Impuls ist jedoch nicht mv_i ; sondern vielmehr eine relativistische Verallgemeinerung, die sich in der Grenze kleiner Geschwindigkeiten auf mv_i reduziert. LEWIS und TOLMAN⁶ haben unabhängig von der Form (6-30) des Kraftgesetzes einen Ausdruck für den relativistischen Impuls erhalten, indem sie feststellten, daß eine LORENTZ-Invariante Folgerung aus der Definition (6-35) die Erhaltung des Impulses bei der Abwesenheit äußerer Kräfte ist. Sie untersuchten einen elastischen Stoß zwischen zwei Teilchen und fanden für p_i eine solche Form, die bei einem derartigen Stoß für alle LORENTZ-Systeme erhalten bleibt. Hat man aber (6-30) als die Form des Kraftgesetzes akzeptiert, so ist es möglich, den relativistischen Impuls und die Bedeutung von K_i sogleich zu finden, indem man (6-30) in eine Form bringt, die der von (6-35) möglichst gleicht. Mit der Beziehung zwischen τ und t und der Definition der Weltgeschwindigkeit können wir die Raumkomponenten von Gl. (6-30) schreiben:

⁶ Siehe P. BERGMANN, op. cit., S. 87f.



$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv_i}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = K_i \sqrt{1-\beta^2}.$$

Der Vergleich mit (6-35) zeigt, daß der Impulserhaltungssatz invariant ist, vorausgesetzt, daß der Impuls definiert ist durch

$$p_i = \frac{mv_i}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (6-36)$$

und daß F_i und K_i gemäß Gl. (6-34) zusammenhängen. Es sei bemerkt, daß sich Gl. (6-36) mit $\beta \rightarrow 0$ auf mv_i reduziert. Die zwei Methoden führen somit zu demselben Schluß.

Solange nur der Raumteil der Vierervektorgleichung (6-30) diskutiert wurde, wurde nichts über die physikalische Bedeutung der vierten Gleichung gesagt. Der zeitähnliche Teil des Vierervektors K_μ kann direkt aus dem Punktprodukt von (6-30) mit der Weltgeschwindigkeit erhalten werden:

$$u_\nu \frac{d}{d\tau} (mu_\nu) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{m}{2} u_\nu u_\nu \right) = K_\nu u_\nu. \quad (6-37)$$

Da das Betragsquadrat von u_ν eine Konstante $-c^2$ (vgl. Gl. (6-25)) und m hier ebenfalls eine Konstante ist, verschwindet die linke Seite von Gl. (6-37). Es bleibt

$$K_\nu u_\nu = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{1-\beta^2} + \frac{icK_4}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0.$$

Die vierte Komponente der MINKOWSKI-Kraft ist deshalb

$$K_4 = \frac{i}{c} \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (6-38)$$

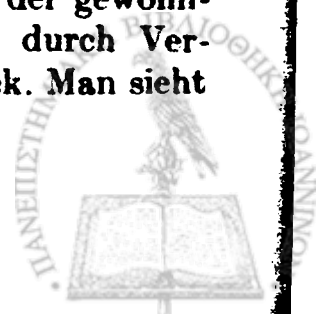
und die entsprechende vierte Komponente von Gl. (6-30) lautet:

$$\frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (6-39)$$

Nun ist die kinetische Energie T allgemein folgendermaßen definiert: Die zeitliche Änderung von T ist gleich $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$; dabei ist $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ ein Maß für die Arbeit, die die Kraft an dem Teilchen pro Zeiteinheit leistet:

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (6-40)$$

Das ist eine Definition der kinetischen Energie, die mit der gewöhnlichen nichtrelativistischen Form $\frac{1}{2}mv^2$ übereinstimmt; durch Vergleich mit (6-39) erhält man den relativistischen Ausdruck. Man sieht



somit, daß (6-39) die Energiegleichung ist mit

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (6-41)$$

Wenn β^2 wesentlich kleiner als 1 wird, kann Gl. (6-41) folgendermaßen entwickelt werden:

$$T \rightarrow mc^2 \left(1 + \frac{\beta^2}{2} \right) = mc^2 + \frac{mv^2}{2} \quad (6-42)$$

Dieser Grenzwert stimmt nicht mit der erwarteten nichtrelativistischen Form überein. Er enthält einen zusätzlichen Term mc^2 . Es scheint jedoch zunächst so, als sei dieser Term unwichtig, denn selbstverständlich kann eine Integrationskonstante auf der rechten Seite von Gl. (6-41) hinzuaddiert werden, ohne die Gültigkeit von Gl. (6-40) zu verletzen. Im besonderen könnte die Konstante $-mc^2$ sein, die T in Übereinstimmung mit dem nichtrelativistischen Wert brächte.

Es ist jedoch vorzuziehen, T wie in (6-41) zu definieren, denn dann bilden der Impuls \mathbf{p} , definiert durch (6-36), und iT/c einen Vierervektor, den *Weltimpuls* p_ν , definiert durch

$$p_\nu = mu_\nu \quad (6-43)$$

Es folgt, daß dann, wenn der Impuls p_i erhalten bleibt, d.h., wenn er zeitunabhängig ist, die Energie T , definiert durch Gl. (6-41), ebenfalls konstant ist. Anderenfalls könnte man auf ein anderes System transformieren, in dem die transformierten Komponenten p'_i durch die p_i und T über die Gleichungen der LORENTZ-Transformation gegeben sind, und der Impuls bliebe nicht mehr erhalten. Somit sind die Erhaltungssätze für Impuls und kinetische Energie nicht länger getrennt; sie erscheinen in der speziellen Relativitätstheorie als verschiedene Aspekte des Erhaltungssatzes für einen einzigen Vierervektor. Der Term mc^2 , *Ruheenergie* genannt, hat deshalb eine wichtige physikalische Bedeutung. In der nichtrelativistischen Formulierung der Mechanik, die im I. Kapitel gegeben wurde, ist die Erhaltung des Impulses möglich, ohne daß die kinetische Energie erhalten bleibt. In solchen Fällen muß die durch (6-41) definierte relativistische kinetische Energie noch erhalten bleiben. Das kann aber nur durch Änderung der Ruheenergie, d.h. der Ruhemasse, erreicht werden. Die Änderung der Energie, die durch eine gegebene Änderung der Ruhemasse hervorgerufen wird, wird durch die berühmte EINSTEINSche Beziehung

$$\Delta E = \Delta mc^2$$

geliefert.



In der Literatur über Relativitätstheorie sind viele Beispiele der Erhaltung der Summe aus kinetischer Bewegungsenergie und Ruheenergie angegeben. Eine der ersten vorgeschlagenen Illustrationen war der unelastische Stoß zweier Körper, die sich mit nichtrelativistischen Geschwindigkeiten bewegen. Hier bleibt der Impuls erhalten, nicht aber die kinetische Energie, wenn sie durch $\sum \frac{1}{2}mv^2$ definiert ist. Gewöhnlich sagen wir, daß die während des Stoßes verlorene Energie in Wärme umgewandelt wird. Damit die relativistische kinetische Energie dennoch erhalten bleibt, muß ein Anwachsen der Ruhemasse oder Trägheit des Systems im Verhältnis zur erzeugten Wärmemenge stattfinden. Die bei einem solchen Stoß auftretenden Massenänderungen sind natürlich sehr klein, da einem Joule eine Masse von nur $1.1 \cdot 10^{-14}$ g entspricht. Die moderne Physik liefert eine Anzahl von Erscheinungen, bei denen die Massenänderungen viel größere Folgen haben, so bei der Paar-Erzeugung, bei der zwei Teilchen endlicher Masse aus der Energie eines masselosen Photons gebildet werden. Der wohl eindrucksvollste Beweis der Umwandlung von Masse in Energie wird durch die Explosion einer Atombombe geliefert. Der Impuls bleibt bei einer solchen Explosion erhalten, aber es wird außerordentlich viel kinetische Bewegungsenergie erzeugt. Die gesamte Energie T bleibt konstant, aber nur vermöge einer Abnahme der Ruhemasse des Bombeninhalts. Trotz der erzeugten phantastischen Energien kann der Massenverlust höchstens 0,1% der ursprünglichen Masse betragen.

Formal wird der Zusammenhang zwischen der Energie T und dem Impuls durch die Feststellung ausgedrückt, daß der Betrag des Impuls-Vierervektors konstant ist:

$$p_\mu p_\mu = -m^2 c^2 = p^2 - \frac{T^2}{c^2}$$

oder

$$T^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (6-44)$$

Gl. (6-44) ist das relativistische Analogon zu der Beziehung $T = p^2/2m$ in der nichtrelativistischen Mechanik, außer daß T hier die Ruheenergie einschließt.

In der vorliegenden Diskussion wurde die Masse m als eine skalare invariante Eigenschaft des Teilchens behandelt, die durch eine LORENTZ-Transformation nicht beeinflußt wird, und als solche ist sie ja als Ruhemasse bekannt. Gelegentlich wird ein anderer Typ der Masse eingeführt, den wir die *relativistische Masse* m_r nennen wollen. Sie ist definiert durch

$$m_r = \frac{m}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

(6-45)



Der einzige Anlaß, eine solche Größe einzuführen, besteht darin, den Impuls in der gleichen Form wie in der nichtrelativistischen Mechanik schreiben zu wollen:

$$\mathbf{p} = m_r \mathbf{v}.$$

Anders als die Ruhemasse, ändert sich die relativistische Masse mit der Geschwindigkeit. Sie wird unendlich, wenn β gegen Eins geht. Man findet noch andere Arten von „Massen“ in der Literatur, gewöhnlich im Zusammenhang mit der Form der relativistischen Bewegungsgleichung

$$F_i = \frac{d}{dt} \frac{mv_i}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (6-46)$$

Die Kraft steht nicht mehr unmittelbar im Zusammenhang mit der Beschleunigung. Beide Größen haben im allgemeinen verschiedene Richtungen. Nur wenn die Beschleunigung parallel oder senkrecht zu der augenblicklichen Richtung von \mathbf{v} ist, zeigt es sich, daß \mathbf{F} proportional zur Beschleunigung ist (vgl. die Übungen am Ende des Kapitels). Die Koeffizienten der Beschleunigung für diese zwei speziellen Fälle sind als die longitudinalen bzw. transversalen Massen bekannt:

$$m_l = \frac{m}{(1 - \beta^2)^{3/2}}, \quad (6-47)$$

$$m_t = \frac{m}{(1 - \beta^2)^{1/2}}.$$

Allgemein wird die Verwendung dieser verschiedenen „Massen“ m_r , m_l und m_t immer seltener; sie verbergen die Kovarianz der Formulierung und verdunkeln die physikalischen Zusammenhänge mehr als sie sie erhellen.

6-5 Die Lagrangesche Formulierung der relativistischen Mechanik

Nachdem wir die für die spezielle Relativitätstheorie geeignete Verallgemeinerung der NEWTONSchen Bewegungsgleichung vorgenommen haben, können wir nun die LAGRANGESche Formulierung der relativistischen Mechanik untersuchen. In gewissem Sinne ist es nicht schwierig, eine LAGRANGE-Funktion aufzustellen, die die richtigen relativistischen Bewegungsgleichungen liefert. Es wäre allerdings schwer, die LAGRANGE-Funktion allein aus dem D'ALEMBERTSchen Prinzip zu bestimmen, wie wir es im I. Kapitel getan haben. Obwohl das Prinzip



selbst,

$$\sum_i (\mathbf{F}_i^{\text{ext}} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i \doteq 0, \quad (1-42)$$

noch gültig ist, kann man die dort verwendete anschließende Ableitung nicht mehr übernehmen, da \mathbf{p}_i jetzt nicht durch $m\mathbf{v}_i$ gegeben ist. Man kann aber die LAGRANGESche Formulierung auch auf dem Weg über das HAMILTONSche Prinzip (Abschnitt 2-1) gewinnen und einfach versuchen, eine Funktion L zu finden, für die die EULER-LAGRANGESchen Gleichungen, die man aus dem Variationsprinzip

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (6-48)$$

erhält, mit den bekannten relativistischen Bewegungsgleichungen übereinstimmen.

Es ist gewöhnlich nicht schwierig, eine Funktion zu finden, die diese Forderungen erfüllt. Zum Beispiel wäre eine geeignete relativistische LAGRANGE-Funktion für ein einzelnes Teilchen, auf das konservative, geschwindigkeitsunabhängige Kräfte wirken,

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} - V. \quad (6-49)$$

Darin ist V das Potential, das nur vom Ort abhängt. Daß (6-49) die richtige LAGRANGE-Funktion ist, kann dadurch gezeigt werden, daß die sich ergebenden LAGRANGESchen Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

mit den Gl. (6-46) übereinstimmen. Da das Potential geschwindigkeitsunabhängig ist, tritt v_i nur im ersten Term von (6-49) auf, und deshalb ist

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{mv_i}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (6-50)$$

Die von der LAGRANGE-Funktion (6-49) abgeleiteten Bewegungsgleichungen lauten dann:

$$\frac{d}{dt} \frac{mv_i}{\sqrt{1 - \beta^2}} = - \frac{\partial V}{\partial x_i} = F_i.$$

Sie stimmen mit (6-46) überein. Wir bemerken, daß die LAGRANGE-Funktion nicht mehr $L = T - V$ ist, daß aber die partielle Ableitung von L nach der Geschwindigkeit noch immer der Impuls ist. Gerade diese Tatsache ist es, die die Richtigkeit der LAGRANGESchen Gleichungen



chungen sicherstellt. Man hätte auch von Gl. (6-50) aus rückwärts gehen können, um am Ende die Geschwindigkeitsabhängigkeit der LAGRANGE-Funktion zu ergänzen.

Man kann die LAGRANGE-Funktion (6-49) leicht auf Systeme mit vielen Teilchen erweitern und von cartesischen Koordinaten auf irgendeinen gewünschten Satz generalisierter Koordinaten q_i übergehen. Der kanonische Impuls wird auch dann noch definiert durch

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i},$$

so daß der Zusammenhang zwischen zyklischen Koordinaten und Erhaltung der entsprechenden Impulse genau wie in der nichtrelativistischen Theorie erhalten bleibt. Jetzt erfordert nur die Ableitung des Energieerhaltungssatzes eine Änderung. Wir erinnern uns (vgl. Abschnitt 2-6), daß dann, wenn L die Zeit nicht explizit enthält, eine Konstante der Bewegung existiert:

$$H = \sum \dot{q}_i p_i - L.$$

Diese Tatsache bleibt auch hier gültig, denn unsere Ableitung enthielt nur die allgemeine Form der LAGRANGESchen Gleichungen und die Definition des kanonischen Impulses. Der Beweis für den Rest des Satzes – daß H die gesamte Energie ist – muß geändert werden, denn L ist nicht mehr $T - V$, auch ist $\sum \dot{q}_i p_i$ nicht gleich $2T$. Die Schlußfolgerung bleibt jedoch dieselbe, denn in dem Beispiel für ein einzelnes Teilchen ist H gegeben durch

$$H = \sum_i \frac{mv_i^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} + V.$$

Faßt man darin Terme zusammen, so wird

$$H = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + V = T + V = E.$$

Man sieht, daß die Größe H wieder die gesamte Energie E und deshalb unter diesen Bedingungen eine Konstante der Bewegung ist.

Die Einführung geschwindigkeitsabhängiger Potentiale bringt hier keine besondere Schwierigkeit mit sich und kann in genau der gleichen Weise wie in Abschnitt 1-5 für die nichtrelativistische Mechanik behandelt werden. So ist die LAGRANGE-Funktion für ein einzelnes Teilchen in einem elektromagnetischen Feld

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} - q\phi + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}. \quad (6-51)$$



Wir bemerken, daß der *kanonische* Impuls nicht mehr mu_i ist; es sind noch zusätzliche Terme vorhanden, die von dem geschwindigkeitsabhängigen Teil des Potentials herrühren:

$$p_i = mu_i + \frac{q}{c} A_i. \quad (6-52)$$

Das ist natürlich kein relativistisches Phänomen; genau der gleiche zusätzliche Term wurde in der früheren Untersuchung (vgl. Gl. (2-44)) gefunden.

Beinahe alle Verfahren, die früher für die Lösung spezieller mechanischer Probleme entwickelt wurden, können in der relativistischen Mechanik übernommen werden. Zum Beispiel besteht im Prinzip keine Schwierigkeit, die relativistische Form der Zentralkräftebewegung zu erhalten. Die allgemeinen physikalischen Eigentümlichkeiten der Teilchenbahnen bleiben dieselben wie im III. Kapitel, allerdings werden natürlich Einzelheiten durch die neue Form der LAGRANGE-Funktion beeinflußt.

6-6 Die kovariante Lagrangesche Formulierung

Das oben gegebene LAGRANGESCHE Verfahren liefert sicher die richtigen relativistischen Bewegungsgleichungen. Jedoch handelt es sich nur „in gewissem Sinne“ um eine relativistische Formulierung. Wir haben uns nicht die Mühe gemacht, alle Gesetze der Mechanik in eine kovariante vierdimensionale Form zu bringen. So wurde die Zeit t als ein Parameter behandelt, der völlig verschieden von den Raumkoordinaten ist, obwohl eine kovariante Formulierung fordert, daß Raum und Zeit als völlig gleichwertige Koordinaten im Welt-Raum anzusehen sind. Natürlich sollte der invariante Parameter, der zur Kennzeichnung der Wanderung des Systempunktes im Konfigurationsraum verwendet wird, vielmehr die invariante Eigenzeit τ als t sein. Weiterhin haben die im vorigen Abschnitt diskutierten LAGRANGE-Funktionen keine besonderen Eigenschaften bezüglich der LORENTZ-Transformation. Da die LAGRANGE-Funktion selbst schon eine invariante Eigenschaft des Systems, also unabhängig von dem besonderen verwendeten Koordinatensystem sein soll, müssen wir von ihr erwarten, daß sie ein Weltskalar ist, also invariant gegenüber allen LORENTZ-Transformationen ist. Anstatt daß sie eine Funktion von x_i und \dot{x}_i ($\equiv v_i$) mit t als Parameter ist, sollte eine LAGRANGE-Funktion, die richtig in der vierdimensionalen Sprache formuliert ist, eine Funktion der Komponenten von x_r und $\frac{dx_r}{d\tau}$ ($\equiv u_r$) mit τ als Parameter sein.



Eine kovariante Formulierung des HAMILTONSchen Prinzips sollte deshalb die Form haben:

$$\delta I = \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} L'(x_r, u_r, \tau) d\tau = 0. \quad (6-53)$$

I und L' , die kovariante LAGRANGE-Funktion, sind darin Weltskalare.

Es ist nicht immer möglich, eine vollständig kovariante Formulierung eines gegebenen Problems auf diese Weise zu erhalten. Die explizite Form des Potentials ist durch die Natur der auftretenden Kräfte bestimmt, die durch theoretische Betrachtungen geliefert werden müssen, die außerhalb des Bereiches der Mechanik liegen. Nur wenn diese nichtmechanischen Theorien selbst in einer kovarianten Formulierung aufgestellt worden sind, so daß die Kräfte die richtigen Transformationseigenschaften haben, kann man ein kovariantes L' finden, das Gl. (6-53) befriedigt. Es wurde bereits bemerkt, daß nicht alle Typen von Kräften in einer kovarianten Form zur Verfügung stehen. Sicher erfüllt die gewöhnliche Gravitationskraft, die Ursache der meisten mechanischen Probleme, diese Forderung nicht. Auch ist es nicht schwer, den physikalischen Grund dafür zu sehen. Gewöhnlich wird behauptet, die Gravitationskraft sei eine statische Kraft, ein Beispiel einer „Fernwirkung“. Man setzt dabei eine unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit voraus. Aber der Begriff der Fernwirkung hat keinen Sinn in der Relativitätstheorie, wo verlangt wird, daß Kräfte nur mit Geschwindigkeiten kleiner oder gleich c übertragen werden. Andererseits wurde bereits festgestellt, daß die elektromagnetischen Kräfte die Relativitätsforderung automatisch erfüllen. Wir wollen uns deshalb damit begnügen, L' für ein Teilchen zu bestimmen, das sich in den folgenden zwei Situationen befindet:

1. Das Teilchen sei völlig frei.
2. Das Teilchen bewege sich unter dem Einfluß äußerer elektromagnetischer Kräfte.

Die aus dem kovarianten Variationsprinzip hergeleiteten EULER-LAGRANGESchen Gleichungen für ein einzelnes Teilchen sind offenbar

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L'}{\partial u_r} - \frac{\partial L'}{\partial x_r} = 0. \quad (6-54)$$

Die linken Seiten dieser vier Gleichungen transformieren sich wie die Komponenten eines Vierervektors. Die LAGRANGE-Funktion L' für ein freies Teilchen muß so sein, daß sich die Gl. (6-54) auf

$$\frac{d}{d\tau} m u_r = 0 \quad (6-55)$$



reduzieren. Nun sind die Gl. (6-55) der Form nach den nichtrelativistischen Gleichungen

$$\frac{d}{dt} mv_i = 0$$

ähnlich. Das legt nahe, L' dadurch zu erhalten, daß man in der nichtrelativistischen Beziehung $L = \frac{1}{2}mv^2$ v^2 durch das Quadrat der Weltgeschwindigkeit ersetzt:

$$L' = \frac{1}{2} mu_r u_r. \quad (6-56)$$

Diese Wahl ist tatsächlich richtig, denn wir haben

$$\frac{\partial L'}{\partial x_r} = 0, \quad \frac{\partial L'}{\partial u_r} = mu_r = p_r,$$

so daß die LAGRANGESchen Gl. (6-54) mit (6-55) übereinstimmen.⁷

Wenn die auf das Teilchen wirkenden Kräfte ihrem Ursprung nach elektromagnetisch sind, ist eine geeignete invariante LAGRANGE-Funktion

$$L' = \frac{1}{2} mu_r u_r + \frac{q}{c} u_\lambda A_\lambda. \quad (6-57)$$

Die kanonischen Impulse sind hier

$$p_r = \frac{\partial L'}{\partial u_r} = mu_r + \frac{q}{c} A_r, \quad (6-58)$$

so daß aus den LAGRANGESchen Gleichungen (6-54) folgt:

$$\frac{d}{d\tau} \left(mu_r + \frac{q}{c} A_r \right) - \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{q}{c} u_\lambda A_\lambda \right) = 0$$

⁷ Es soll bemerkt werden, daß L' in (6-56) eine Konstante und gleich $-\frac{m}{2}c^2$ ist. Das hat keine Konsequenzen, denn alles, was von L' verlangt wird, ist die richtige funktionale Abhängigkeit von u_r , um die richtigen Gleichungen zu erhalten. Aber das bedeutet, daß der in (6-56) gegebene Ausdruck keinesfalls der einzig mögliche ist. Tatsächlich kann L' die Form $mf(u_r u_r)$ haben, wobei $f(x)$ irgendeine Funktion ist, für die, wenn $f' \partial f / \partial x$ bedeutet, gilt

$$f'(-c^2) = +\frac{1}{2}.$$

In Gl. (6-56) haben wir $f(u_r u_r) = \frac{1}{2}u_r u_r$ verwendet. Eine andere mögliche Wahl ist

$$f(u_r u_r) = -c\sqrt{-u_r u_r}.$$

Man erhält sie direkt, wenn in (6-48) die Integrationsvariable t in τ umgeändert wird.



oder

$$\frac{d}{d\tau} mu_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\frac{q}{c} u_\lambda A_\lambda \right) - \frac{q}{c} \frac{dA_\nu}{d\tau}.$$

Das ist aber genau die Form der generalisierten NEWTONschen Bewegungsgleichungen (6-30) mit der MINKOWSKI-Kraft

$$K_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\frac{q}{c} u_\lambda A_\lambda \right) - \frac{q}{c} \frac{dA_\nu}{d\tau},$$

in Übereinstimmung mit der früher abgeleiteten Beziehung (6-33).

Der kanonische Viererimpuls, Gl. (6-58), unterscheidet sich wieder von dem gewöhnlichen kinetischen Impuls durch den zusätzlichen Term, der das elektromagnetische Potential enthält. Wir stellen fest, daß hier p_4 nicht einfach iT/c wie im kräftefreien Fall (vgl. Gl. (6-43)) ist, sondern hier

$$p_4 = \frac{iT}{c} + \frac{iq\phi}{c} = \frac{i}{c} E$$

wird, wobei E die Gesamtenergie $T + q\phi$ ist. Somit ist der zur Zeitkoordinate kanonische Impuls proportional der Gesamtenergie. Ein ähnlicher Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen wird später in der nichtrelativistischen Theorie wiederkehren. Der Zusammenhang zwischen den Raumkomponenten des Impulses und der kinetischen Energie T kann hier auf demselben Wege abgeleitet werden, der auf Gl. (6-44) führte. Die Raumkomponenten von Gl. (6-58) können geschrieben werden:

$$mu_i = p_i - \frac{qA_i}{c},$$

so daß

$$m^2 u_\nu u_\nu = -m^2 c^2 = \left(\mathbf{p} - \frac{q\mathbf{A}}{c} \right)^2 - \frac{T^2}{c^2}$$

gilt. Das liefert den gewünschten Zusammenhang

$$T^2 = \left(\mathbf{p} - q \frac{\mathbf{A}}{c} \right)^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (6-59)$$

Man darf aus diesen Betrachtungen nicht schließen, daß alle Aspekte der nichtrelativistischen Mechanik eindeutige Entsprechungen in einer relativistischen Theorie haben. Wir haben bereits die Schwierigkeiten erwähnt, die durch Gravitations- und andere „Fernwirkungs“-Kräfte hervorgerufen werden. Die LORENTZ-Transformation befaßt



sich nur mit gleichförmig bewegten Koordinatensystemen, und Transformationen auf beschleunigte Systeme, wie etwa rotierende Achsen, können in das Gebäude der speziellen Relativitätstheorie nur mit Schwierigkeit eingebaut werden. Der Begriff der Zwangskräfte ist ebenfalls störend, denn jede Zwangskraft muß in LORENTZ-invarianter Form ausgedrückt werden. Im besonderen erfüllen die Zwangsbedingungen des starren Körpers diese Forderung nicht, da sie nur die Raumanteile des Vierervektors der Lage enthalten. Deshalb hat das gesamte Gebiet der Dynamik starrer Körper kein relativistisches Analogon.

LITERATURHINWEISE

- P. BERGMANN, *An Introduction to the Theory of Relativity*. Zweifellos die beste englischsprachige Abhandlung der Verfahren der Relativitätstheorie. Die Tensorformulierung wird im Hinblick auf die allgemeine Relativitätstheorie entwickelt (die in der zweiten Hälfte des Buches enthalten ist), führt aber leider auf eine Schreibweise, die für die spezielle Relativitätstheorie unnötig kompliziert ist.
- R. B. LINDSAY und H. MARGENAU, *Foundations of Physics*. Kapitel 7 befaßt sich hauptsächlich mit der speziellen Relativitätstheorie, besonders werden die Ereignisse, die zur Schaffung der Theorie führten, und die physikalischen Interpretationen einiger ihrer unmittelbaren Konsequenzen diskutiert. Die vierdimensionale Darstellung wird nicht ausführlich entwickelt.
- ALBERT EINSTEIN, *The Meaning of Relativity*. Dies ist keine populäre Darstellung. Etwas mehr als ein Drittel dieses dünnen Buches befaßt sich mit spezieller Relativitätstheorie, enthält aber sehr viele Informationen. Erhebliche Kenntnisse der Elektrodynamik werden vorausgesetzt.
- R. BECKER, *Theorie der Elektrizität*, Bd. II. Viele deutsche Abhandlungen über Elektrodynamik enthalten auch eine ausführliche Diskussion der speziellen Relativitätstheorie. Die vielleicht beste von ihnen ist in diesem zweiten Band des berühmten ABRAHAM und BECKER zu finden. Der Stil ist flüssig und leicht lesbar. Obwohl hier die Betonung auf den elektromagnetischen Erscheinungen liegt, ist die Diskussion der Mechanik doch recht vollständig. Auf den mehr als hundert Seiten, die der speziellen Relativitätstheorie gewidmet sind, werden sowohl die physikalischen als auch die mathematischen Grundlagen eingehend behandelt.

ÜBUNGEN

1. Verifiziere das EINSTEINSche Additionstheorem (Gl. (6-20)) für die Addition zweier paralleler Geschwindigkeiten. Der Beweis läßt sich am einfachsten führen, indem man die zwei LORENTZ-Transformationen als aufeinanderfolgende Drehungen in der x, x_4 -Ebene auffaßt.



2. Bestimme die LORENTZ-Transformation, bei der die Geschwindigkeit einen infinitesimalen Winkel $d\theta$ (im Gegenuhrzeigersinn) mit der z -Achse bildet, mittels einer Ähnlichkeitstransformation, die auf Gl. (6-15) angewendet wird. Zeige direkt, daß die resultierende Matrix orthogonal ist, und daß man die inverse Matrix erhält, wenn man v durch $-v$ ersetzt.

3. Das EINSTEINSche Additionstheorem kann man auch erhalten, indem man sich daran erinnert, daß die zweite Geschwindigkeit direkt auf die Raumkomponenten einer Vierergeschwindigkeit bezogen ist, die man somit auf das Anfangssystem mittels einer LORENTZ-Transformation zurücktransformieren kann. Zeige: Wenn sich das zweite System mit einer Geschwindigkeit v' relativ zum ersten in der Richtung ihrer z -Achsen bewegt, während sich ein drittes System relativ zum zweiten mit einer beliebig gerichteten Geschwindigkeit v'' bewegt, so ist der Betrag der Geschwindigkeit v zwischen dem ersten und dem dritten System gegeben durch

$$\sqrt{1 - \beta^2} = \frac{\sqrt{1 - \beta'^2} \sqrt{1 - \beta''^2}}{1 + \beta' \beta''_z},$$

und die Komponenten von v sind

$$\beta_x = \frac{\beta''_x \sqrt{1 - \beta'^2}}{1 + \beta' \beta''_z}, \quad \beta_y = \frac{\beta''_y \sqrt{1 - \beta'^2}}{1 + \beta' \beta''_z},$$

$$\beta_z = \frac{\beta' + \beta''_z}{1 + \beta' \beta''_z}.$$

Hier ist $\beta''_x = v''_x/c$ usw. Es sei darauf hingewiesen, daß sich die Gleichung für β_x genau auf Gl. (6-20) reduziert, wenn v'' längs der z -Achse liegt.

4. Betrachte die in Übung 3 beschriebene Situation für den speziellen Fall, daß v'' in der zx -Ebene liegt und einen im Vergleich zu v' infinitesimalen Betrag hat. Zeige, daß die z - und z'' -Achse nicht parallel sind (trotz der Tatsache, daß beide parallel zur z' -Achse gewählt sind), indem man darlegt, daß die Relativgeschwindigkeit zwischen den zwei Systemen dem Beobachter so erscheint, als bilde sie mit der z - und z'' -Achse verschiedene Winkel. Zeige insbesondere, daß der Winkel zwischen den zwei Achsen

$$d\theta = \frac{-\beta''_x \beta'}{2}$$

sein wird. Wenn die Geschwindigkeit v'' wirklich eine Änderung der Geschwindigkeit v' während einer infinitesimalen Zeit infolge einer Beschleunigung a darstellt, dann kann dieser Schluß so interpretiert werden, daß man sagt, die Achsen scheinen mit einer Winkelfrequenz

$$\omega_t = \frac{\mathbf{v}' \times \mathbf{a}}{2c^2}$$

zu rotieren. Dieses Phänomen ist in der Atomphysik wichtig. Es wird die THOMAS-Präzession genannt.

5. Zeige durch Entwicklung der Bewegungsgleichung (6-46), daß die Kraft nur dann parallel zur Beschleunigung ist, wenn die Geschwindigkeit entweder parallel oder senkrecht zur Beschleunigung ist, und verifiziere Gl. (6-47) für die Koeffizienten der Beschleunigung in diesen beiden Fällen.



6. Zeige mit den Transformationseigenschaften der Weltbeschleunigung, daß die Komponenten der Beschleunigung a , wenn sie durch die transformierte Beschleunigung a' in einem System ausgedrückt sind, das bezüglich des Teilchens momentan in Ruhe ist, durch die Formeln gegeben sind:

$$a'_x = \frac{a_x}{1 - \beta^2}, \quad a'_y = \frac{a_y}{1 - \beta^2}, \quad a'_z = \frac{a_z}{(1 - \beta^2)^{3/2}}$$

wobei die z -Achse in Richtung der Relativgeschwindigkeit gewählt wurde.

7. Beim β -Zerfall, der in der Übung 1, I. Kapitel, betrachtet wurde, hat das Elektron eine Masse, die einer Ruheenergie von 0,511 Mev äquivalent ist, während das Neutrino keine Masse hat. Wie groß sind die Gesamtenergien, die durch das Elektron und das Neutrino weggetragen werden? Der wievielte Teil der Kernmasse wird in kinetische Energie (einschließlich der Ruheenergie des Elektrons) umgesetzt?

8. Ein Meson der Masse π komme zur Ruhe und zerfalle in ein Meson der Masse μ und in ein Neutrino der Masse Null. Zeige, daß die kinetische Energie der Bewegung des μ -Mesons (d.h. ohne die Energie der Ruhemasse)

$$T = \frac{(\pi - \mu)^2}{2\pi} c^2$$

ist.

9. Ein Photon kann klassisch als ein Teilchen beschrieben werden, das die Masse Null hat, aber dennoch einen Impuls $h/\lambda = h\nu/c$ und deshalb eine kinetische Energie $h\nu$ besitzt. Wenn das Photon mit einem ruhenden Elektron der Masse m zusammenstößt, wird es um einen Winkel θ gestreut und hat die neue Energie $h\nu'$. Zeige, daß die Energieänderung mit dem Streuwinkel durch die Beziehung

$$\lambda' - \lambda = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

verknüpft ist, wobei $\lambda_c = h/mc$ die COMPTON-Wellenlänge ist. Zeige auch, daß die kinetische Energie der Rückstoßbewegung des Elektrons

$$T = h\nu \frac{2 \left(\frac{\lambda_c}{\lambda} \right) \sin^2 \theta/2}{1 + 2 \left(\frac{\lambda_c}{\lambda} \right) \sin^2 \theta/2}$$

ist.

10. Die in Übung 3, I. Kapitel, entwickelte Theorie der Raketenbewegung ist in relativistischen Bereichen nicht mehr anwendbar, zum Teil deswegen, weil es dort keine Erhaltung der Masse mehr gibt. Dafür sind alle Erhaltungsgesetze in der Erhaltung des Weltimpulses zusammengefaßt; die Änderung jeder Komponente des Weltimpulses der Rakete in einer infinitesimalen Zeit dt muß durch den Wert derselben Komponente von p , für die durch die Rakete ausgestoßenen Gase im gleichen Zeitintervall ausgeglichen werden. Zeige, daß dann, wenn keine äußeren Kräfte auf die Rakete wirken, die Differentialgleichung für ihre Geschwindigkeit als Funktion der Masse gegeben ist durch

$$m \frac{dv}{dm} + a \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = 0,$$



wobei a die konstante Geschwindigkeit der ausgestoßenen Gase *relativ zur Rakete* ist. Bestätige, daß die Lösung in die Form

$$\beta = \frac{1 - \left(\frac{m}{m_0}\right)^{\frac{2a}{c}}}{1 + \left(\frac{m}{m_0}\right)^{\frac{2a}{c}}}$$

gebracht werden kann. m_0 ist darin die Anfangsmasse der Rakete. Die Masse bleibt nicht erhalten. Was geschieht mit der Masse, die verlorengeht?

11. Zeige, daß aus Gl. (6-40) unmittelbar folgt, daß die Geschwindigkeit eines geladenen Teilchens in einem statischen Magnetfeld konstant ist. Zeige, daß als Folge dieser Tatsache ein geladenes Teilchen in einem homogenen Magnetfeld eine Helix beschreibt, wobei der Radius der Helix für einen gegebenen Teilchentyp umgekehrt proportional dem Betrag der magnetischen Intensität B und direkt proportional der Komponente des mechanischen Impulses senkrecht zum Magnetfeld ist. Das Produkt aus Feldstärke und Krümmungsradius, $B\rho$, ist somit ein direktes Maß für den Teilchenimpuls und wird oft als magnetische Steifheit des Teilchens bezeichnet.

12. Ein Teilchen der Ruhmasse m , der Ladung q und der Anfangsgeschwindigkeit \mathbf{v}_0 komme in ein homogenes elektrisches Feld \mathbf{E} , das senkrecht zu \mathbf{v}_0 ist. Bestimme die sich ergebende Trajektorie des Teilchens und zeige, daß sie sich auf eine Parabel reduziert, wenn c gegen Unendlich geht.

13. Zeige, daß die relativistische Bewegung eines Teilchens unter der Wirkung einer anziehenden Kraft, die mit dem Reziproken des Abstands-Quadrates geht, eine präzessierende Ellipse ist. Berechne die Präzession des Perihels des Merkur, die von diesem Effekt herrührt. (Das Ergebnis, etwa $7''$ pro Jahrhundert, ist viel kleiner als die tatsächliche Präzession von $40''$ pro Jahrhundert. Diese kann genau nur mit der allgemeinen Relativitätstheorie berechnet werden.)

14. Gehe von der Bewegungsgleichung (6-46) aus und leite das relativistische Analogon des Virialsatzes her, das besagt, daß für Bewegungen, die im Raum gebunden sind und deren Geschwindigkeiten der Lichtgeschwindigkeit c nicht beliebig nahekommen, gilt:

$$\overline{L_0} + \overline{T} = -\overline{\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}},$$

wobei L_0 die Form der LAGRANGE-Funktion ist, die bei der Abwesenheit äußerer Kräfte auftritt. Beachte, daß jedoch weder L_0 noch T genau der kinetischen Energie in der nichtrelativistischen Mechanik entsprechen. Ihre Summe $L + T$ spielt die gleiche Rolle wie die doppelte kinetische Energie im nichtrelativistischen Virialsatz, Gl. (3-26).



6. Zeige mit den Transformationseigenschaften der Weltbeschleunigung, daß die Komponenten der Beschleunigung \mathbf{a} , wenn sie durch die transformierte Beschleunigung \mathbf{a}' in einem System ausgedrückt sind, das bezüglich des Teilchens momentan in Ruhe ist, durch die Formeln gegeben sind:

$$a'_x = \frac{a_x}{1 - \beta^2}, \quad a'_y = \frac{a_y}{1 - \beta^2}, \quad a'_z = \frac{a_z}{(1 - \beta^2)^{3/2}}$$

wobei die z -Achse in Richtung der Relativgeschwindigkeit gewählt wurde.

7. Beim β -Zerfall, der in der Übung 1, I. Kapitel, betrachtet wurde, hat das Elektron eine Masse, die einer Ruheenergie von 0,511 Mev äquivalent ist, während das Neutrino keine Masse hat. Wie groß sind die Gesamtenergien, die durch das Elektron und das Neutrino weggetragen werden? Der wievielte Teil der Kernmasse wird in kinetische Energie (einschließlich der Ruheenergie des Elektrons) umgesetzt?

8. Ein Meson der Masse π komme zur Ruhe und zerfalle in ein Meson der Masse μ und in ein Neutrino der Masse Null. Zeige, daß die kinetische Energie der Bewegung des μ -Mesons (d.h. ohne die Energie der Ruhemasse)

$$T = \frac{(\pi - \mu)^2}{2\pi} c^2$$

ist.

9. Ein Photon kann klassisch als ein Teilchen beschrieben werden, das die Masse Null hat, aber dennoch einen Impuls $h/\lambda = h\nu/c$ und deshalb eine kinetische Energie $h\nu$ besitzt. Wenn das Photon mit einem ruhenden Elektron der Masse m zusammenstößt, wird es um einen Winkel θ gestreut und hat die neue Energie $h\nu'$. Zeige, daß die Energieänderung mit dem Streuwinkel durch die Beziehung

$$\lambda' - \lambda = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

verknüpft ist, wobei $\lambda_c = h/mc$ die COMPTON-Wellenlänge ist. Zeige auch, daß die kinetische Energie der Rückstoßbewegung des Elektrons

$$T = h\nu \frac{2 \left(\frac{\lambda_c}{\lambda} \right) \sin^2 \theta/2}{1 + 2 \left(\frac{\lambda_c}{\lambda} \right) \sin^2 \theta/2}$$

ist.

10. Die in Übung 3, I. Kapitel, entwickelte Theorie der Raketenbewegung ist in relativistischen Bereichen nicht mehr anwendbar, zum Teil deswegen, weil es dort keine Erhaltung der Masse mehr gibt. Dafür sind alle Erhaltungsgesetze in der Erhaltung des Weltimpulses zusammengefaßt; die Änderung jeder Komponente des Weltimpulses der Rakete in einer infinitesimalen Zeit dt muß durch den Wert derselben Komponente von p , für die durch die Rakete ausgestoßenen Gase im gleichen Zeitintervall ausgeglichen werden. Zeige, daß dann, wenn keine äußeren Kräfte auf die Rakete wirken, die Differentialgleichung für ihre Geschwindigkeit als Funktion der Masse gegeben ist durch

$$m \frac{dv}{dm} + a \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = 0,$$



wobei a die konstante Geschwindigkeit der ausgestoßenen Gase *relativ zur Rakete* ist. Bestätige, daß die Lösung in die Form

$$\beta = \frac{1 - \left(\frac{m}{m_0}\right)^{\frac{2a}{c}}}{1 + \left(\frac{m}{m_0}\right)^{\frac{2a}{c}}}$$

gebracht werden kann. m_0 ist darin die Anfangsmasse der Rakete. Die Masse bleibt nicht erhalten. Was geschieht mit der Masse, die verlorengeht?

11. Zeige, daß aus Gl. (6-40) unmittelbar folgt, daß die Geschwindigkeit eines geladenen Teilchens in einem statischen Magnetfeld konstant ist. Zeige, daß als Folge dieser Tatsache ein geladenes Teilchen in einem homogenen Magnetfeld eine Helix beschreibt, wobei der Radius der Helix für einen gegebenen Teilchentyp umgekehrt proportional dem Betrag der magnetischen Intensität B und direkt proportional der Komponente des mechanischen Impulses senkrecht zum Magnetfeld ist. Das Produkt aus Feldstärke und Krümmungsradius, $B\rho$, ist somit ein direktes Maß für den Teilchenimpuls und wird oft als magnetische Steifheit des Teilchens bezeichnet.

12. Ein Teilchen der Ruhmasse m , der Ladung q und der Anfangsgeschwindigkeit v_0 komme in ein homogenes elektrisches Feld E , das senkrecht zu v_0 ist. Bestimme die sich ergebende Trajektorie des Teilchens und zeige, daß sie sich auf eine Parabel reduziert, wenn c gegen Unendlich geht.

13. Zeige, daß die relativistische Bewegung eines Teilchens unter der Wirkung einer anziehenden Kraft, die mit dem Reziproken des Abstands-Quadrates geht, eine präzessierende Ellipse ist. Berechne die Präzession des Perihels des Merkur, die von diesem Effekt herrührt. (Das Ergebnis, etwa $7''$ pro Jahrhundert, ist viel kleiner als die tatsächliche Präzession von $40''$ pro Jahrhundert. Diese kann genau nur mit der allgemeinen Relativitätstheorie berechnet werden.)

14. Gehe von der Bewegungsgleichung (6-46) aus und leite das relativistische Analogon des Virialsatzes her, das besagt, daß für Bewegungen, die im Raum gebunden sind und deren Geschwindigkeiten der Lichtgeschwindigkeit c nicht beliebig nahekommen, gilt:

$$\overline{L_0} + \overline{T} = -\overline{F \cdot r},$$

wobei L_0 die Form der LAGRANGE-Funktion ist, die bei der Abwesenheit äußerer Kräfte auftritt. Beachte, daß jedoch weder L_0 noch T genau der kinetischen Energie in der nichtrelativistischen Mechanik entsprechen. Ihre Summe $L + T$ spielt die gleiche Rolle wie die doppelte kinetische Energie im nichtrelativistischen Virialsatz, Gl. (3-26).



VII. KAPITEL

DIE HAMILTONSCHEN BEWEGUNGSGLEICHUNGEN

Die LAGRANGESCHE Formulierung der Mechanik wurde im großen und ganzen in den ersten zwei Kapiteln entwickelt, und das meiste der daran anschließenden Diskussionen war der Natur nach Anwendung, blieb jedoch noch innerhalb des Rahmens des LAGRANGESCHEN Verfahrens. In diesem Kapitel nehmen wir die formale Entwicklung der Mechanik wieder auf. Dabei richten wir unsere Aufmerksamkeit auf eine andere Darstellung der Struktur der Theorie, die als HAMILTONSCHE Formulierung bekannt ist. Der in der Theorie enthaltenen Physik wird nichts Neues hinzugefügt; wir gewinnen lediglich eine andere (und wirksamere) Methode, mit den bereits aufgestellten physikalischen Prinzipien zu arbeiten. Wir wollen in den folgenden Kapiteln annehmen, daß die mechanischen Systeme holonom sind, und daß die Kräfte entweder von einem Potential, das allein vom Ort abhängt, oder von geschwindigkeitsabhängigen generalisierten Potentialen des in Abschnitt 1-5 diskutierten Typs abgeleitet sind.

7-1 Die Legendreschen Transformationen und die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

Zu einem System mit n Freiheitsgraden gehören n LAGRANGESCHE Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (7-1)$$

Da die Gleichungen von zweiter Ordnung sind, ist die Bewegung des Systems nur dann für alle Zeit vollständig festgelegt, wenn für alle n q_i und alle n \dot{q}_i Anfangswerte vorgegeben werden. In diesem Sinne bilden die Koordinaten q_i zusammen mit den Geschwindigkeiten \dot{q}_i einen vollständigen Satz von $2n$ unabhängigen Variablen, die zur Beschreibung der Systembewegung notwendig sind. Die LAGRANGESCHE Formulierung (in der nichtrelativistischen Theorie) kann somit als eine Beschreibung der Mechanik mit Hilfe der generalisierten *Koordinaten* und *Geschwindigkeiten* mit der Zeit als Parameter angesehen



werden. Wir suchen nun nach einer Formulierung, in der die unabhängigen Variablen die generalisierten *Koordinaten* und die generalisierten *Impulse* p_i sind, definiert durch (vgl. Gl. (2-41)):

$$p_i = \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial \dot{q}_i}. \quad (7-2)$$

Die Basisänderung von dem Satz (q, \dot{q}, t) auf den Satz (q, p, t) kann am besten mit einem mathematischen Verfahren ausgeführt werden, das als *LEGENDRESche Transformation* bekannt ist. Sie ist gerade diesem Typ der Variablenänderung angepaßt.

Betrachten wir eine Funktion von nur zwei Variablen $f(x, y)$, so daß ein Differential von f die Form hat:

$$df = u dx + v dy, \quad (7-3)$$

wobei

$$u = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial f}{\partial y}. \quad (7-4)$$

Wir wollen nun von der Basis x, y auf die unabhängigen Variablen u, y übergehen, so daß differentielle Größen durch die Differentiale du und dy ausgedrückt werden können. g sei eine Funktion von u und y , definiert durch die Gleichung

$$g = f - ux. \quad (7-5)$$

Ein Differential von g ist dann gegeben durch

$$dg = df - u dx - x du$$

oder wegen (7-3) durch

$$dg = v dy - x du.$$

Das hat genau die gewünschte Form. Die Größen x und v sind nun Funktionen der Variablen u und y , die durch die Beziehungen

$$x = - \frac{\partial g}{\partial u}, \quad v = \frac{\partial g}{\partial y} \quad (7-6)$$

gegeben sind. Sie sind im wesentlichen die Umkehrung der Gl. (7-4).

Die so definierte *LEGENDRESche Transformation* wird häufig in der Thermodynamik verwendet. Zum Beispiel ist die Enthalpie X eine Funktion der Entropie S und des Druckes P , und zwar gilt

$$\frac{\partial X}{\partial S} = T, \quad \frac{\partial X}{\partial P} = V,$$

so daß

$$dX = T dS + V dP,$$

wobei T und V die Temperatur bzw. das Volumen sind. Die Enthalpie



ist nützlich für die Betrachtung isentropischer und isobarer Prozesse, häufiger befaßt man sich aber mit isothermen und isobaren Prozessen. In solchen Fällen wünscht man eine thermodynamische Funktion, die nur von T und P abhängt. Die LEGENDRESche Transformation zeigt, daß die gesuchte Funktion definiert werden kann durch

$$G = X - TS$$

mit

$$dG = -S dT + V dP. \quad (7-7)$$

G ist die wohlbekannte GIBBSSche Funktion oder freie Energie, deren Eigenschaften durch Gl. (7-7) gegeben sind.

Die Transformation von (q, \dot{q}, t) nach (q, p, t) unterscheidet sich von dem in den Gl. (7-3 bis 7-5) betrachteten Typ nur dadurch, daß mehr als eine Variable zu transformieren ist. Anstelle der LAGRANGE-Funktion befaßt man sich mit einer Funktion, die bis auf das Minuszeichen analog der Gl. (7-5) definiert ist:

$$H(p, q, t) = \sum_i \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t). \quad (7-8)$$

H wird die HAMILTON-Funktion genannt. Man erkennt in ihr die gleiche Funktion H wieder, die früher in Abschnitt 2-6 diskutiert wurde. Sieht man sie als eine Funktion nur von p , q und t an, so ist das Differential von H gegeben durch

$$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (7-9)$$

Aber wegen der Definitionsgleichung (7-8) können wir auch schreiben:

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (7-10)$$

Die Terme mit $d\dot{q}_i$ in Gl. (7-10) heben sich auf infolge der Definition des generalisierten Impulses:

$$\sum_i p_i d\dot{q}_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i = 0,$$

und aus der LAGRANGESchen Gleichung folgt

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i.$$

Gl. (7-10) reduziert sich deshalb auf die einfache Form

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (7-11)$$



Ein Vergleich mit (7-9) liefert den folgenden Satz von $2n + 1$ Beziehungen, die analog den Gl. (7-6) sind:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (7-12)$$

$$-\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i},$$

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (7-13)$$

Die Gl. (7-12) heißen die *kanonischen HAMILTONSchen Gleichungen*; sie bilden einen Satz von $2n$ Bewegungsgleichungen erster Ordnung, die an die Stelle der LAGRANGESchen Gleichungen treten. Im Prinzip besteht der erste Schritt bei der Lösung mechanischer Probleme in dieser kanonischen Formulierung darin, die LAGRANGE-Funktion L als $L(q, \dot{q}, t)$ aufzustellen. Durch Verwendung der Gl. (7-2) erhält man dann die kanonischen Impulse, und mit ihrer Hilfe wird die HAMILTON-Funktion gemäß der Definition (7-8) gebildet. Die Bewegungsgleichungen, die nun von erster Ordnung sind, folgen dann durch Substitution von H in die Gl. (7-12).

7-2 Zyklische Koordinaten und das Routhsche Verfahren

Es sei bemerkt, daß das HAMILTONSche Verfahren besonders der Behandlung solcher Probleme angepaßt ist, die zyklische Koordinaten enthalten. Entsprechend der in Abschnitt 2-6 gegebenen Definition ist eine zyklische Koordinate q_j eine solche Koordinate, die nicht in der LAGRANGE-Funktion erscheint; wegen der LAGRANGESchen Gleichungen ist ihr konjugierter Impuls p_j dann eine Konstante. Aber aus den Gl. (7-12) folgt, daß dann, wenn \dot{p}_j verschwindet, $\frac{\partial H}{\partial q_j}$ ebenfalls Null ist. Eine Koordinate, die zyklisch ist, wird deshalb auch nicht in der HAMILTON-Funktion auftreten.¹ Erscheint umgekehrt eine generalisierte Koordinate nicht in H , dann bleibt der konjugierte Impuls erhalten. Soweit ist die Situation genauso wie in der LAGRANGESchen Formulierung. Wenn jedoch eine Koordinate, etwa q_n , zyklisch ist, so kann die LAGRANGE-Funktion als eine Funktion von q und \dot{q} geschrieben werden:

$$L = L(q_1 \dots q_{n-1}, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_n, t).$$

¹ Dieser Schluß folgt auch aus der Definition Gl. (7-8), denn H unterscheidet sich von $-L$ nur durch $\sum p_i \dot{q}_i$, das q_i explizit nicht enthält.



Alle generalisierten Geschwindigkeiten treten in der LAGRANGE-Funktion noch auf und werden im allgemeinen Funktionen der Zeit sein. Wir haben noch ein Problem mit n Freiheitsgraden zu lösen, wenn auch ein Freiheitsgrad einer zyklischen Koordinate entspricht. Eine zyklische Koordinate in der HAMILTONSchen Formulierung kann man jedoch in gewissem Sinne „ignorieren“, denn in diesem Falle ist p_n eine Konstante α und H hat die Form

$$H = H(q_1 \dots q_{n-1}, p_1 \dots p_{n-1}, \alpha, t).$$

Praktisch beschreibt die HAMILTON-Funktion jetzt ein Problem, das nur $n - 1$ Koordinaten enthält und das vollständig gelöst werden kann, indem man die zyklische Koordinate insofern ignoriert, als sie nur als Integrationskonstante α auftritt, die aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen ist. Das zeitliche Verhalten der zyklischen Koordinate selbst findet man, indem man die Bewegungsgleichung

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial \alpha}$$

integriert.

Die Vorteile des HAMILTONSchen Formalismus bei der Behandlung zyklischer Koordinaten können mittels einer von ROUTH gefundenen Methode mit dem LAGRANGESchen Verfahren kombiniert werden. Im wesentlichen führt man dabei die Transformation von der Basis q, \dot{q} auf die Basis q, p nur für die Koordinaten aus, die zyklisch sind. So erhält man deren Bewegungsgleichungen in der HAMILTONSchen Form, während die übrigen Koordinaten durch die LAGRANGESchen Gleichungen bestimmt werden. Wenn die zyklischen Koordinaten mit $q_1 \dots q_s$ bezeichnet werden, dann läßt sich eine neue Funktion R einführen, die ROUTHsche Funktion² genannt wird. Sie ist definiert durch die Beziehung

$$R(q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_s, \dot{q}_{s+1} \dots \dot{q}_n, t) = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - L. \quad (7-14)$$

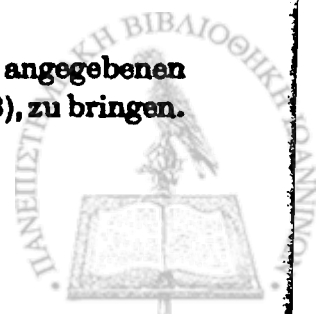
Ein Differential von R ist somit gegeben durch

$$dR = \sum_{i=1}^s \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=s+1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial R}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial R}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \quad i = 1 \dots s \quad (7-15)$$

² Die Funktion R ist hier als das Negative der üblicherweise angegebenen Form definiert, um sie in Einklang mit der Definition von H , Gl. (7-8), zu bringen.



und

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{\partial R}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} \quad i = s + 1 \dots n. \quad (7-16)$$

Die Gl. (7-15) für die Koordinaten $q_1 \dots q_s$ haben die Form der HAMILTONSchen Bewegungsgleichungen mit R als HAMILTON-Funktion, während die Gl. (7-16) zeigen, daß die übrigen Koordinaten aus den LAGRANGE-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 \quad i = s + 1 \dots n \quad (7-17)$$

mit R als LAGRANGE-Funktion bestimmt werden können! Bis hierher wurde von der zyklischen Natur der Koordinaten q_1 bis q_s nicht explizit Gebrauch gemacht. Eine Koordinate, die in L nicht auftritt, wird ebenfalls in der ROUTHschen Funktion nicht erscheinen. Die zu den zyklischen Koordinaten konjugierten Impulse p_1 bis p_s sind Konstanten und können in der ROUTHschen Funktion durch einen Satz von Konstanten $\alpha_1 \dots \alpha_s$ ersetzt werden, die aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen sind. Demnach sind die einzigen Variablen in der ROUTHschen Funktion die $n - s$ nichtzyklischen Koordinaten und deren generalisierten Geschwindigkeiten:

$$R(q_{s+1} \dots q_n, \dot{q}_{s+1} \dots \dot{q}_n, \alpha_1 \dots \alpha_s, t).$$

Die LAGRANGE-Gleichungen (7-17) für die nichtzyklischen Koordinaten können nun ohne Rücksicht auf das Verhalten der zyklischen Koordinaten gelöst werden, genau wie in der HAMILTONSchen Formulierung. Man könnte die ROUTHsche Formulierung dadurch beschreiben, daß man sagt, sie habe einen Fuß im LAGRANGESchen und den anderen im HAMILTONSchen Lager. Es hat jedoch den Anschein, daß man dann, wenn man einen Teil des Weges in der HAMILTONSchen Beschreibung zurücklegt, ebensogut den gesamten Weg gehen könnte.

7-3 Erhaltungssätze und die physikalische Bedeutung der Hamilton-Funktion

Der Schluß, daß eine in L zyklische Koordinate auch in H zyklisch ist, bedeutet, daß die Impulserhaltungssätze von Abschnitt 2-6 allein dadurch in die HAMILTONSche Formulierung übertragen werden können, daß man L durch H ersetzt. Insbesondere kann der Zusammenhang zwischen den Symmetrieeigenschaften des physikalischen Systems und den Konstanten der Bewegung auch mittels der HAMILTON-Funktion abgeleitet werden. Ist zum Beispiel ein System symmetrisch



um eine gegebene Achse, so daß H bezüglich Drehung um diese Achse invariant ist, dann kann H offensichtlich den Drehwinkel nicht enthalten. Der Winkel ist deshalb eine zyklische Koordinate und der entsprechende Drehimpuls bleibt erhalten.

Die physikalische Bedeutung von H wurde bereits in der Diskussion in Abschnitt 2-6 angedeutet. Es wurde dort gezeigt, daß dann, wenn L (und zufolge Gl. (7-13) auch H) keine explizite Funktion von t ist, H eine Konstante der Bewegung ist. Das kann auch aus den Bewegungsgleichungen (7-12) direkt abgelesen werden, indem man die totale Ableitung der HAMILTON-Funktion nach der Zeit folgendermaßen schreibt:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (7-18)$$

Substituiert man \dot{q}_i und \dot{p}_i aus den Gl. (7-12), so kann geschrieben werden:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial t}$$

und deshalb folgt

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (7-19)$$

Weiterhin wurde in Abschnitt 2-6 bewiesen, daß dann, wenn die Transformationsgleichungen, die die generalisierten Koordinaten (1-36) definieren:

$$r_m = r_m(q_1, \dots, q_n, t),$$

nicht explizit von der Zeit abhängen, und wenn das Potential geschwindigkeitsunabhängig ist, H die totale Energie $T + V$ ist. Dieser Satz ist auch im relativistischen Grenzfall (vgl. Abschn. 6-5) gültig. Die Identifizierung von H als eine Konstante der Bewegung und als die totale Energie sind zwei verschiedene Dinge, und die Bedingungen, die für das eine ausreichen, sind nicht ausreichend für das andere. Es kann sein, daß die Gl. (1-36) die Zeit explizit enthalten, H sie aber nicht enthält. In diesem Falle ist H eine Konstante der Bewegung, aber *nicht* die totale Energie.

In vielen Problemen sind die Ausdrücke für die kanonischen Impulse schon von physikalischen Betrachtungen her klar. Ist die HAMILTON-Funktion auch die totale Energie, dann kann viel von dem formalen Verfahren zur Gewinnung der HAMILTONSchen Gleichungen ausgelassen werden. Um ein einfaches Problem zu wählen, betrachten



wir die Bewegung eines Teilchens in einem Zentralkräftefeld. H ist dann die totale Energie

wobei
$$H = T + V(r),$$

$$T = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2).$$

Um in den HAMILTONSchen Gleichungen verwendet werden zu können, muß H durch die zu r und θ konjugierten Impulse ausgedrückt werden. Diese sind der lineare Impuls längs r bzw. der Drehimpuls des Teilchens:

$$\begin{aligned} p_r &= mv_r = m\dot{r}, \\ p_\theta &= mrv_\theta = mr^2\dot{\theta}. \end{aligned}$$

Die generalisierten Geschwindigkeiten, ausgedrückt durch die Impulse, lauten:

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}.$$

Für die HAMILTON-Funktion folgt deshalb unmittelbar

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r),$$

ohne daß man erst die LAGRANGE-Funktion aufschreiben muß. Es gibt hier vier HAMILTONSche Gleichungen; die zwei Gleichungen für \dot{q} :

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2},$$

die keine neue Information liefern, und die zwei für \dot{p} :

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r}, \quad \dot{p}_\theta = 0,$$

die mit den Gl. (3-7) und (3-10) übereinstimmen.

Als anderes Beispiel zum gleichen Verfahren wählen wir die relativistische HAMILTON-Funktion eines Teilchens, auf das geschwindigkeitsunabhängige Potentiale wirken. In Abschn. 6-5 wurde gezeigt, daß H dann die totale Energie ist:

$$H = T + V.$$

Die kinetische Energie T muß in der HAMILTONSchen Formulierung durch den Impuls p ausgedrückt werden. Verwendet man Gl. (6-44), so findet man leicht

$$T^2 = p^2c^2 + m^2c^4,$$



so daß

$$H = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} + V \quad (7-20)$$

wird.

Die Einführung geschwindigkeitsabhängiger Potentiale in die HAMILTONSche Formulierung bringt keine formalen Schwierigkeiten, aber es ist nicht mehr klar, daß H die totale Energie darstellt. Für den besonderen Fall elektromagnetischer Kräfte beweist die direkte Anwendung der Definition (7-8) von H jedoch, daß die HAMILTON-Funktion noch als eine Summe von kinetischen und potentiellen Energien geschrieben werden kann. Die (nichtrelativistische) LAGRANGE-Funktion für ein einzelnes Teilchen ist

$$L = \frac{mv^2}{2} - q\phi + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$$

mit den kanonischen Impulsen

$$p_i = mv_i + \frac{q}{c} A_i \quad (7-21)$$

Nach der Definition ist H gegeben durch

$$\begin{aligned} H &= \sum_i p_i v_i - L \\ &= mv^2 + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - L \end{aligned}$$

oder schließlich

$$H = \frac{mv^2}{2} + q\phi = T + q\phi,$$

die Gesamtenergie des Teilchens. Als Funktion der Impulse (7-21) erscheint die HAMILTON-Funktion als

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 + q\phi. \quad (7-22)$$

Ein ähnliches Ergebnis erhält man für die relativistische HAMILTON-Funktion bei elektromagnetischen Kräften. Auch da haben die kanonischen Impulse (Gl. (6-52)) den zusätzlichen Ausdruck qA_i/c . Das läuft auf dasselbe hinaus, als wenn man den Term in der HAMILTON-Funktion, der das Vektorpotential enthält, eliminiert. Die HAMILTON-Funktion ist wieder die totale Energie

$$H = T + q\phi,$$



und es soll bemerkt werden, daß die vierte Komponente des Weltimpulses (6-58) gleich iH/c ist. Die relativistische kinetische Energie wird durch die Impulse mit Gl. (6-59) ausgedrückt, so daß H schließlich die Form hat:

$$H = \sqrt{\left(\mathbf{p} - \frac{q\mathbf{A}}{c}\right)^2 c^2 + m^2 c^4} + q\phi. \quad (7-23)$$

Es ist interessant, die HAMILTON-Funktionen (7-22) und (7-23) für ein Teilchen in einem elektromagnetischen Feld mit den entsprechenden HAMILTON-Funktionen für geschwindigkeitsunabhängige Potentiale zu vergleichen. Für ein Teilchen mit der potentiellen Energie V ist H gegeben durch

$$H = \frac{p^2}{2m} + V,$$

und Gl. (7-22) kann man aus dieser Form erhalten, indem man lediglich V durch $q\phi$ und den kanonischen Impuls \mathbf{p} durch $\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}$ ersetzt. Dasselbe Rezept reicht aus, um die relativistische HAMILTON-Funktion (7-20) in (7-23) überzuführen, und wird häufig in der Quantenmechanik angewendet.

Die HAMILTON-Funktionen (7-20) und (7-23) wurden allein deshalb als relativistisch bezeichnet, weil sie auf die richtigen relativistischen Bewegungsgleichungen führen; sie selbst sind nicht kovariant. Jedoch kann eine wirklich kovariante HAMILTON-Funktion mittels einer LEGENDRESCHEN Transformation aus der kovarianten LAGRANGE-Funktion L' abgeleitet werden, die im letzten Kapitel diskutiert wurde. Der invariante Parameter τ wird anstelle von t verwendet, und für ein einzelnes Teilchen gibt es vier Impulskomponenten anstelle der drei räumlichen. In relativistischer Bezeichnungsweise ist die invariante HAMILTON-Funktion für ein einzelnes Teilchen definiert durch

$$H' = p_\lambda u_\lambda - L' \quad (7-24)$$

mit den entsprechenden acht Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial H'}{\partial p_\lambda} = \frac{dx_\lambda}{d\tau}, \quad \frac{\partial H'}{\partial x_\lambda} = -\frac{dp_\lambda}{d\tau}. \quad (7-25)$$

Für den besonderen Fall elektromagnetischer Kräfte wurde L' in Gl. (6-57) gegeben durch

$$L' = \frac{1}{2} m u_\lambda u_\lambda + \frac{q}{c} A_\lambda u_\lambda$$



mit kanonischen Impulsen (vgl. Gl. (6-58))

$$p_\lambda = mu_\lambda + \frac{q}{c} A_\lambda.$$

Die Invariante H' ist dann wegen Gl. (7-24)

$$\begin{aligned} H' &= mu_\lambda u_\lambda + \frac{q}{c} A_\lambda u_\lambda - \frac{1}{2} mu_\lambda u_\lambda - \frac{q}{c} A_\lambda u_\lambda \\ &= \frac{1}{2} mu_\lambda u_\lambda \end{aligned}$$

oder unter Verwendung der kanonischen Impulse

$$H' = \frac{1}{2m} \sum_\lambda \left(p_\lambda - \frac{q}{c} A_\lambda \right)^2. \quad (7-26)$$

Mit dieser kovarianten HAMILTON-Funktion muß der „Raumteil“ der Gl. (7-25) offensichtlich auf die räumlichen Bewegungsgleichungen führen. Zudem gibt es zwei Gleichungen, die man erhält, wenn der Index λ gleich 4 gesetzt wird. Eine von ihnen stellt einfach fest, daß p_4 proportional zur Gesamtenergie ist:

$$\frac{\partial H'}{\partial p_4} = \frac{p_4 - \frac{q}{c} A_4}{m} = u_4$$

oder

$$p_4 = \frac{i}{c} (T + q\phi) = \frac{iE}{c}.$$

Diese Tatsache hatten wir bereits festgestellt. Die andere Gleichung kann folgendermaßen geschrieben werden:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{dp_4}{dt} = - \frac{1}{ic} \frac{\partial H'}{\partial t}$$

oder

$$\frac{dH}{dt} = \sqrt{1 - \beta^2} \frac{\partial H'}{\partial t}.$$

Ein Vergleich der Form von H' (7-26) mit der von H (7-23) zeigt, daß

$$\frac{\partial H'}{\partial t} = \frac{T}{mc^2} \frac{\partial H}{\partial t},$$

so daß sich die Bewegungsgleichung reduziert auf

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Das ist das bereits durch Gl. (7-19) ausgedrückte Ergebnis.



Wie im Falle der LAGRANGE-Funktion kann eine kovariante HAMILTON-Funktion nur unter der Voraussetzung konstruiert werden, daß sich die auftretenden Potentiale kovariant ausdrücken lassen. Es wurde im vorigen Kapitel betont, daß das nicht oft möglich ist. Tatsächlich ist das Beispiel elektromagnetischer Kräfte das einzige einfache Beispiel, für das eine kovariante Formulierung gegenwärtig möglich ist.

Die relativistische Mechanik kann somit zumindest im Prinzip in das HAMILTONSche Verfahren einbezogen werden. Der Einfachheit halber wird jedoch in der nachfolgenden Diskussion nur die nicht-relativistische Formulierung ausgeführt.

7-4 Ableitung der Hamiltonschen Gleichungen von einem Variationsprinzip

Von den LAGRANGESchen Gleichungen wurde gezeigt, daß sie aus einem Variationsprinzip, nämlich dem HAMILTONSchen Prinzip, Abschn. 2-1, folgen. Tatsächlich hat sich die Variationsmethode oft als Vorzugsmethode zur Ableitung der LAGRANGESchen Gleichungen erwiesen, denn sie ist auf Typen von Systemen anwendbar, die im System der Mechanik gemeinhin nicht enthalten sind. Es wäre gleichermaßen vorteilhaft, wenn ein Variationsprinzip gefunden werden könnte, das direkt auf die HAMILTONSchen Bewegungsgleichungen führt. Das HAMILTONSche Prinzip

$$\delta I \equiv \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (7-27)$$

eignet sich selbst für diesen Zweck, wenn L durch die HAMILTON-Funktion mit Gl. (7-8) ausgedrückt wird. Dann erhält man nämlich:

$$\delta I \equiv \delta \int_{t_1}^{t_2} (\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)) dt = 0 \quad (7-28)$$

oder

$$\delta \sum_i \int_{q_1}^{q_2} p_i dq_i - \delta \int_{t_1}^{t_2} H dt = 0. \quad (7-28')$$

Gl. (7-28) wird gelegentlich als das *modifizierte HAMILTONSche Prinzip* bezeichnet. Obgleich es am häufigsten im Zusammenhang mit der Transformationstheorie (siehe VIII. Kapitel) verwendet wird, besteht das Hauptinteresse an ihm hier darin, zu zeigen, daß das Prinzip auf die HAMILTONSchen kanonischen Bewegungsgleichungen führt.



Es ist gut, hier die Bedeutung zu wiederholen, die dem in Abschn. 2-1 definierten Verfahren der δ -Variation gegeben wurde. In einem Konfigurationsraum, der durch die n generalisierten Koordinaten gebildet wird, werden die Anfangs- und Endkonfiguration des Systems zu den Zeiten t_1 und t_2 durch jeweils einen Punkt dargestellt. Der Ausdruck „Variation des Integrals“ bezieht sich auf die Variation des Integralwertes, wenn wir den durch den Systempunkt zwischen den zwei Endpunkten zurückgelegten Weg ändern (vgl. Abb. 2-1). Eine weitere Bedingung wird gestellt: Die Variation wird so beschrieben, als ereigne sie sich bei konstanter Zeit. Die Endpunktzeiten werden deshalb festgehalten, so daß die „Wanderungszeit“ zwischen den zwei Konfigurationen für alle Wege dieselbe ist. Zudem werden die variierten Wege so angesehen, als seien sie durch eine Folge virtueller Verrückungen entstanden, und als sei keine Änderung von t gegenüber den Punkten des wirklich durchwanderten Weges eingetreten. Die Variation des Integrals um den wirklichen Weg ist Null, ist der Aussage gleichwertig, daß das Integral für diesen Weg einen Extremwert hat.

Es sei daran erinnert, daß man das Verfahren der δ -Variation durch gewöhnliche Differentiationsverfahren beschreiben kann, indem man jeden der möglichen Wege im Konfigurationsraum mit einem Parameter α bezeichnet. Die Koordinaten q_i eines Punktes im Konfigurationsraum werden dann Funktionen sowohl der Zeit t als auch von α . Das letztere zeigt an, welcher Integrationsweg verwendet wird. Das Integral I kann deshalb als eine Funktion von α angesehen werden, und die δ -Variation kann man mit dem uns vertraueren Differential identifizieren, das sich aus einer Änderung $d\alpha$ um denjenigen Wert von α ergibt, der dem tatsächlichen Weg entspricht:

$$\delta \rightarrow d\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}. \quad (7-29)$$

Das war in Kürze die Methode, die zur Ableitung der LAGRANGEschen Gleichungen aus dem HAMILTONschen Prinzip verwendet wurde, und es ist im wesentlichen das Verfahren, das auch hier zu verwenden ist. Der einzige Unterschied wird darin bestehen, daß die Variationen von q und p als unabhängig zu behandeln sind, denn in der HAMILTONschen Formulierung haben die generalisierten Koordinaten und Impulse gleichen Status als Koordinaten, die zur Kennzeichnung der Bewegung des Systems notwendig sind.

Das modifizierte HAMILTONsche Prinzip kann mit Hilfe des Parameters α geschrieben werden:

$$\delta I = \frac{\partial I}{\partial \alpha} d\alpha = d\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_a^b (\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)) dt = 0.$$



Da die Endpunktzeiten nicht variiert werden und deshalb keine Funktionen von α sind, darf die Differentiation hinter dem Integralzeichen vorgenommen werden. Es ergibt sich:

$$d\alpha \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial p_i}{\partial \alpha} \dot{q}_i + p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha} \right) dt = 0. \quad (7-30)$$

Die Differentiationen bezüglich α und t im zweiten Term in der Klammer dürfen vertauscht werden, da die Variation bei konstanter Zeit stattfindet. Die Integrale, die diesen Termtyp enthalten, können dann mittels einer partiellen Integration umgeformt werden:

$$\int_{t_1}^{t_2} p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} dt = \int_{t_1}^{t_2} p_i \frac{d}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} dt = p_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} dt.$$

Da alle variierten Wege die gleichen Endpunkte haben, verschwindet $\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}$ für t_1 und t_2 , so daß der integrierte Term Null ist. Indem wir Glieder in Gl. (7-30) zusammenfassen, können wir die in Gl. (7-29) gegebene Korrespondenz verwenden und feststellen, daß

$$d\alpha \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} = \delta q_i \quad \text{und} \quad d\alpha \frac{\partial p_i}{\partial \alpha} = \delta p_i.$$

Haben wir die Ergebnisse der partiellen Integrationen eingesetzt, so wird die endgültige Form von Gl. (7-30):

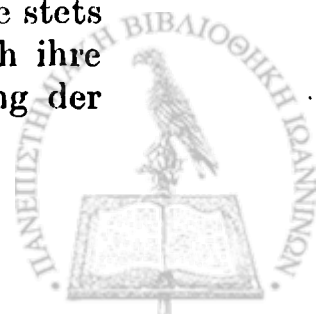
$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left\{ \delta p_i \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) - \delta q_i \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \right\} dt = 0.$$

Da die Variationen δq_i und δp_i unabhängig sind, kann das Integral nur verschwinden, wenn die Koeffizienten einzeln verschwinden. Das ergibt die Bedingungen

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Das sind aber die gewünschten HAMILTONSchen Gleichungen.

Die Forderung nach unabhängiger Variation von q und p , die so wesentlich für die obige Ableitung ist, beleuchtet den fundamentalen Unterschied zwischen der LAGRANGESchen und der HAMILTONSchen Formulierung. Es ist richtig, daß in dem LAGRANGESchen Verfahren sowohl die generalisierten Koordinaten q_i als auch die generalisierten Geschwindigkeiten \dot{q}_i am Anfang angegeben werden müssen, um die Bewegung des Systems vollständig zu bestimmen. Aber \dot{q}_i wurde stets als abhängige Variable betrachtet, eng verknüpft mit q_i durch ihre Definition als die zeitliche Ableitung von q_i . Bei der Ableitung der



LARANGESchen Gleichungen hatte man die Variation δq_i durch die unabhängigen Variationen δq_i mittels einer partiellen Integration auszudrücken. Das führte auf eine zweite Ableitung von L und folglich auf Bewegungsgleichungen zweiter Ordnung. Wir erhielten Gleichungen erster Ordnung aus dem modifizierten HAMILTONSchen Prinzip nur deshalb, weil die Variation δp_i , anders als δq_i , als unabhängig von δq_i angesehen wurde. Die Impulse mußten deshalb auf den Status unabhängiger Variablen erhoben werden, auf eine gleiche Basis mit den Koordinaten, wobei sie mit diesen und der Zeit *nur durch Bewegungsgleichungen selbst* und keine a priori definierende Beziehung verbunden sind. Weder die Koordinaten q_i noch die Impulse p_i sind als der fundamentalere Variablensatz anzusehen; beide sind gleichermaßen unabhängig. Nur wenn die Menge der unabhängigen Variablen von n auf $2n$ Größen erweitert wird, sind wir in der Lage, Bewegungsgleichungen zu erhalten, die von erster Ordnung sind. In gewissem Sinne sind die Bezeichnungen „Koordinaten“ und „Impulse“ unglücklich, denn sie bringen Bilder von räumlichen Koordinaten und linearen Impulsen oder bestenfalls Drehimpulsen in unsere Vorstellung. Von nun an muß diesen Termen eine erweiterte Bedeutung gegeben werden. Der Unterteilung in Koordinaten und Impulse entspricht nichts weiter als eine Trennung der unabhängigen Variablen, die die Bewegung beschreiben, in zwei Gruppen, die über die HAMILTONSchen Gleichungen in einer fast symmetrischen Beziehung zueinander stehen.

7-5 Das Prinzip der kleinsten Wirkung

Ein anderes Variationsprinzip, das mit der HAMILTONSchen Formulierung in Verbindung steht, ist als das *Prinzip der kleinsten Wirkung* bekannt. In der Mechanik ist die Wirkung eine Größe, die am allgemeinsten durch das Integral

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i p_i \dot{q}_i dt$$

definiert wird. Das Prinzip der kleinsten Wirkung behauptet, daß in einem System, für das H erhalten bleibt,

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_i p_i \dot{q}_i dt = 0 \quad (7-31)$$

ist, wobei Δ einen neuen Typ der Bahnvariation darstellt, der einer ausführlichen Erklärung bedarf.



Es wurde gezeigt, daß die δ -Variation virtuellen Verrückungen entspricht, bei denen die Zeit festgehalten ist und die Koordinaten mit Rücksicht auf die Zwangskräfte, die auf das System wirken, variiert werden. Eine solche virtuelle Verrückung fällt nicht immer mit einer möglichen wirklichen Auslenkung zusammen, die im Verlauf der Bewegung stattfindet. Das wird zum Beispiel der Fall sein, wenn die Zwangskräfte von der Zeit abhängen. Folglich braucht der variierte Weg in dem δ -Verfahren nicht einer möglichen Bahn der Bewegung des Systems zu entsprechen; insbesondere braucht die HAMILTON-Funktion bei der Variation nicht erhalten zu bleiben. Im Gegensatz dazu beschreibt das Δ -Verfahren Auslenkungen, die eine Änderung dt der Zeit einschließen, so daß die variierte Bahn durch eine Folge von Auslenkungen erhalten wird, von denen jede eine differentielle Änderung dt einschließt. Es ist dann möglich, weiterhin zu verlangen, daß die variierte Bahn mit der physikalischen Bewegung übereinstimmen soll; wenn z.B. H auf der wirklichen Bahn erhalten bleibt, muß es auch auf der variierten Bahn erhalten bleiben. Die Laufzeit längs der variierten Bahnen braucht nicht mehr dieselbe zu sein; der Systempunkt muß sich evtl. beschleunigen oder verlangsamen, damit die HAMILTON-Funktion konstant bleibt. Demzufolge enthält das Δ -Verfahren eine Variation von t gerade an den Endpunkten, wo die Variation der q_i weiterhin Null bleibt.

Zur Illustration dieser Überlegungen sei darauf hingewiesen, daß die variierte Bahn im Konfigurationsraum für die δ - und für die Δ -Variation gleich sein kann, daß sich aber der Systempunkt in beiden Fällen mit verschiedenen Geschwindigkeiten längs der Bahn bewegt. Bei der ersten Variation ist die Geschwindigkeit so, daß die Durchlaufzeit für die wirkliche Bahn dieselbe ist wie für die variierte Bahn; beim zweiten Verfahren bleibt H konstant.

Das Δ -Verfahren kann dadurch dargestellt werden, daß man die variierten Kurven durch ein Parameter α markiert, wie es beim δ -Verfahren gemacht wurde. Hier jedoch schließt die Variation die Zeit mit ein, die zu jedem Punkt auf der Bahn gehört, und deshalb muß t auch als eine Funktion von α angesehen werden. Bei der Variation von $q_i(t, \alpha)$ geht nicht nur die explizite Abhängigkeit der Koordinaten q_i von α ein, sondern auch die implizite Abhängigkeit über t . Somit müssen wir für Δq schreiben:

$$\Delta q \rightarrow d\alpha \left(\frac{dq}{d\alpha} \right) = d\alpha \left(\frac{\partial q}{\partial \alpha} + q \frac{dt}{d\alpha} \right). \quad (7-32)$$

Man erkennt, daß der erste Term genau δq entspricht:



$$\delta q \rightarrow d\alpha \frac{\partial q}{\partial \alpha},$$

während der Koeffizient von \dot{q} die Änderung von t darstellt, die als ein Ergebnis der Δ -Variation auftritt. Er kann deshalb mit Δt bezeichnet werden. Folglich hat (7-32) die Form

$$\Delta q = \delta q + \dot{q} \Delta t. \quad (7-33)$$

(Man beachte, daß die Δ -Operation und die Ableitung nach der Zeit nicht mehr vertauscht werden können, wie es bei der δ -Variation möglich war.) Für die durch Gl. (7-33) ausgedrückte Beziehung zwischen der Δ - und der δ -Variation kann nun gezeigt werden, daß sie für jede Funktion $f(q, t)$ gilt:

$$\Delta f = \delta f + \dot{f} \Delta t. \quad (7-34)$$

Allgemein wird Δf durch die Beziehung gegeben sein:

$$\Delta f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \Delta q_i + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t,$$

welche wegen Gl. (7-33) geschrieben werden kann:

$$\Delta f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \delta q_i + \left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \Delta t.$$

Dieser Ausdruck reduziert sich auf (7-34), da der erste Term auf der rechten Seite gleich δf ist, während die Terme in der Klammer zusammen die totale Ableitung von f bilden. Damit ist der gewünschte Hilfssatz bewiesen. Gl. (7-34) ist die einzige wichtige Eigenschaft der Δ -Variation, die zum Beweis des Prinzips der kleinsten Wirkung gebraucht wird, und wir sind von jetzt an von der mühseligen Parameterschreibweise befreit.

Nun kann die Wirkung A geschrieben werden:

$$\begin{aligned} A &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i p_i \dot{q}_i dt = \int_{t_1}^{t_2} (L + H) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} L dt + H(t_2 - t_1). \end{aligned} \quad (7-35)$$

Der letzte Schritt folgt daraus, daß H eine Erhaltungsgröße ist. Die Δ -Variation von A lautet deshalb folgendermaßen:

$$\Delta A = \Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + H(\Delta t_2 - \Delta t_1).$$

Wendet man die Beziehung (7-34) auf das Integral an, das in diesem



Ausdruck auftritt, so muß man sich daran erinnern, daß die Grenzen des Integrals auch der Variation unterworfen sind. Wenn für das Integral $I(t_2) - I(t_1)$ geschrieben wird, so nimmt die Variation die Form an:

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \Delta I(t_2) - \Delta I(t_1).$$

Wegen Gl. (7-34) kann dafür auch geschrieben werden:

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta I(t_2) - \delta I(t_1) + \dot{I}(t_2) \Delta t_2 - \dot{I}(t_1) \Delta t_1$$

oder schließlich

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + L \Delta t \Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (7-36)$$

Man könnte zu sagen versucht sein, daß der erste Term auf der rechten Seite infolge des HAMILTONSchen Prinzips verschwindet, aber dem ist nicht so. Das HAMILTONSche Prinzip fordert, daß die Variation δq_i für die Anfangs- und Endkonfiguration Null sein muß, während in dem hier vorliegenden Variationsverfahren statt dessen Δq_i an den Endpunkten verschwindet. Der wirkliche Wert dieses Terms kann jedoch ohne große Schwierigkeit bestimmt werden. Der Natur der δ -Variation zufolge haben wir

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt.$$

Wegen der LAGRANGESchen Gleichungen können wir dafür schreiben:

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt &= \sum_i \int \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i \right) dt \\ &= \sum_i \int \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) dt. \end{aligned}$$

Wenden wir Gl. (7-33) an, so wird

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt &= \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Delta q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \Delta t \right) dt \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Delta q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \Delta t \right) \Big|_{t_1}^{t_2}. \end{aligned}$$

An den Endpunkten verschwindet Δq_i , aber da die Laufzeit nicht konstant ist, verschwindet Δt nicht. Folglich kann der letzte Ausdruck geschrieben werden:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = - \sum_i p_i \dot{q}_i \Delta t \Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (7-37)$$



Fassen wir die verschiedenen Terme zusammen, so wird die vollständige Variation der Wirkung:

$$\Delta A = \left(- \sum_i p_i \dot{q}_i + L + H \right) \Delta t \Big|_a^b.$$

Sie ist – mit Rücksicht auf die Definition von H – identisch Null. Das vervollständigt den Beweis des Prinzips der kleinsten Wirkung.³

Das Prinzip der kleinsten Wirkung kann in einer Vielfalt von Formen dargestellt werden. Wenn in der nichtrelativistischen Mechanik die definierenden Transformationsgleichungen die Zeit nicht explizit enthalten, dann gilt, wie gezeigt wurde,

$$\sum_i p_i \dot{q}_i = 2T$$

(vgl. Gl. (2-56)). Unter diesen Umständen kann das Prinzip folgendermaßen geschrieben werden:

$$\Delta \int T dt = 0. \quad (7-38)$$

Wenn weiterhin keine äußeren Kräfte auf das System wirken, wie zum Beispiel beim starren Körper ohne resultierende angewendete Kräfte, dann bleibt T zusammen mit der totalen Energie H erhalten. Das Prinzip der kleinsten Wirkung nimmt dann die spezielle Form an:

$$\Delta(t_2 - t_1) = 0. \quad (7-39)$$

Gl. (7-39) besagt, daß von allen zwischen zwei Punkten möglichen Bahnen, die in Übereinstimmung mit der Erhaltung der Energie sind, das System sich längs der besonderen Bahn bewegt, für die die Laufzeit am kleinsten (genauer ein Extremum) ist. In dieser Form erinnert das Prinzip der kleinsten Wirkung an das FERMATSche Prinzip in der geometrischen Optik, daß nämlich ein Lichtstrahl zwischen zwei Punkten einer solchen Weg nimmt, für den die benötigte Zeit am kürzesten ist. Wir werden Gelegenheit haben, auf diese Betrachtungen im IX. Kapitel zurückzukommen, wenn wir den Zusammenhang zwischen der HAMILTONSchen Formulierung und der geometrischen Optik diskutieren.

³ Das Prinzip der kleinsten Wirkung ist gemeinhin mit dem Namen von MAUPERTIUS verbunden. Jedoch war die ursprüngliche Aufstellung des Prinzips durch MAUPERTIUS (1747) verschwommen theologisch und könnte heute kaum akzeptiert werden. Die objektive Aufstellung des Prinzips verdanken wir EULER und LAGRANGE.



Wenn das System nur aus einem Teilchen besteht, so ist die kinetische Energie gegeben durch

$$T = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|^2$$

oder

$$dt = \sqrt{\frac{m |d\mathbf{r}|^2}{2T}}$$

Darin ist dt durch die Bogenlänge der Teilchenbahn dargestellt. In einem solchen Fall kann das durch Gl. (7-39) ausgedrückte Prinzip der kleinsten Wirkung geschrieben werden:

$$\Delta \int 2T dt = \Delta \int \sqrt{2mT} ds = \Delta \int \sqrt{2m(H - V)} ds = 0, \quad (7-40)$$

wobei $(ds)^2$ für $|d\mathbf{r}|^2$ geschrieben wurde. Diese Form des Prinzips der kleinsten Wirkung kann auch auf Systeme mit mehr als einem Teilchen ausgedehnt und durch irgendeinen Satz generalisierter Koordinaten ausgedrückt werden. Der erforderliche Kunstgriff besteht darin, einen allgemeineren Ausdruck für dt als Funktion einer Bogenlänge aufzustellen. Wegen der gestellten Bedingung, daß nämlich die Gleichungen, die q_i definieren, die Zeit nicht enthalten, ist die kinetische Energie stets eine homogene quadratische Funktion der Geschwindigkeiten (vgl. Gl. (1-62)):

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k} m_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k$$

(wobei $m_{ik} = 2a_{ik}$). Diese Beziehung könnte auch geschrieben werden:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k} m_{ik} \frac{dq_i dq_k}{dt^2} \quad (7-41)$$

Wir definieren nun ein neues Differential $d\rho$ durch die Gleichung

$$(d\rho)^2 = \sum_{i,k} m_{ik} dq_i dq_k, \quad (7-42)$$

so daß die kinetische Energie die Form hat:

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 \quad (7-43)$$

oder entsprechend:

$$dt = \frac{d\rho}{\sqrt{2T}}$$



Mit dieser Beziehung für dt wird das Prinzip der kleinsten Wirkung

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = \Delta \int \sqrt{T} d\rho = 0$$

oder schließlich

$$\Delta \int \sqrt{H - V(q)} d\rho = 0. \quad (7-44)$$

Das ist ein äquivalenter Ausdruck für das Prinzip der kleinsten Wirkung, der formal der Gl. (7-40) für ein einzelnes Teilchen ähnlich ist. Gl. (7-44) wird oft als *JACOBISCHE Form des Prinzips der kleinsten Wirkung* bezeichnet. Das bei der Definition von $d\rho$ angewendete Verfahren scheint recht abstrakt zu sein, aber es läßt eine sehr elegante Interpretation zu. Das in Gl. (7-42) eingeführte Differential $d\rho$ ist in der Differentialgeometrie wohlbekannt als die allgemeinste Form der Weglänge in einem n -dimensionalen Raum, dessen Koordinaten $q_1 \dots q_n$ sind. Bei dieser Auffassung sind die Koeffizienten m_{ik} die Elemente des sogenannten *metrischen Tensors*. In einem cartesischen Koordinatensystem ist der metrische Tensor recht einfach; die Elemente sind

$$m_{ik} = \delta_{ik},$$

wie man durch Vergleich des Ausdrucks

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

mit Gl. (7-42) sieht. Der metrische Tensor ist für irgendein allgemeines orthogonales krummliniges Koordinatensystem diagonal, aber außer für cartesische Systeme sind die Diagonalelemente nicht alle gleich. Zum Beispiel ist das Element der Bogenlänge in zylindrischen Koordinaten

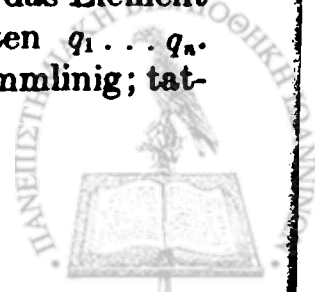
$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + (dz)^2,$$

so daß die einzigen nichtverschwindenden Elemente des entsprechenden metrischen Tensors

$$m_{rr} = 1, \quad m_{\theta\theta} = r^2, \quad m_{zz} = 1$$

sind. Im allgemeinen werden die Nichtdiagonalelemente für einen beliebigen krummlinigen nichtorthogonalen Satz von Koordinaten nicht Null sein.

Das durch Gl. (7-42) definierte Differential $d\rho$ ist somit das Element der Bahnlänge im Konfigurationsraum der Koordinaten $q_1 \dots q_n$. Dieser ist im allgemeinen nicht cartesisch, sondern krummlinig; tat-



sächlich ist er so gekrümmt, daß die Elemente des metrischen Tensors durch m_{ik} der Gl. (7-41) gegeben sind. Die Quadratwurzel aus $2T$ stellt die Geschwindigkeit des Systempunktes entlang der Bahn im Konfigurationsraum dar. Sind keine Kräfte vorhanden, die auf den Körper wirken, dann ist T konstant und die Bewegung verläuft derart, daß sich der Systempunkt längs der kürzesten Bahn im Konfigurationsraum bewegt – d.h., er bewegt sich längs einer der *geodätischen Linien* des Raumes.

Es soll betont werden, daß sich die JACOBISCHE Form des Prinzips der kleinsten Wirkung mehr mit der *Bahn* des Systempunktes als mit seiner *zeitlichen* Bewegung befaßt. Gl. (7-44) macht eine Aussage über das Element der Bahnlänge $d\rho$; die Zeit erscheint nirgends, da H eine Konstante ist, und V allein von q_i abhängt. Tatsächlich kann die JACOBISCHE Form des Prinzips so aufgestellt werden, daß sie Differentialgleichungen für die Bahn liefert. Das kann man am besten dadurch darstellen, indem man einen Parameter einführt, der zum Beispiel den Abstand längs der Bahn kennzeichnet. Man kann dann für Gl. (7-44) schreiben:

$$\Delta \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{H - V} \sqrt{\sum_{i,k} m_{ik} \frac{dq_i}{d\theta} \frac{dq_k}{d\theta}} d\theta = 0, \quad (7-45)$$

wobei der betreffende Parameter mit θ bezeichnet ist. Der Parameter darf nicht mit der Zeit verwechselt werden; er muß eine geometrische Eigenschaft der Bahn sein und kann so gewählt werden, daß er während der Auslenkungen, die die Δ -Variationen charakterisieren, konstant bleibt. Bezüglich θ ist die Δ -Variation deshalb identisch mit der δ -Variation, und die aus Gl. (7-45) abgeleiteten Differentialgleichungen haben die wohlbekannt Form der EULER-LAGRANGEschen Gleichungen. Werden die Ableitungen nach θ durch einen Strich bezeichnet, dann kann der Integrand von Gl. (7-45) als eine Funktion $F(q_i, \dot{q}_i, \theta, H)$ dargestellt werden: Die EULER-LAGRANGESchen Gleichungen für die Bahn des Systempunktes lauten dann:

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial F}{\partial q_i} = 0. \quad (7-46)$$

Handelt es sich um ein System aus vielen Teilchen, so ist der durch die JACOBISCHE Form des Prinzips bestimmte Weg die Bahn des Systempunktes im Konfigurationsraum. Aber wenn das System nur ein Teilchen enthält und die Koordinaten q_i Lagekoordinaten sind, dann stellt die durch die Gl. (7-46) gegebene Bahn auch die tatsächliche Bahn des Teilchens im Raum dar. Die Koordinaten q_i müssen keine cartesischen Koordinaten sein, auch muß das Problem nicht auf eine



Bewegung ohne Zwangskräfte in drei Dimensionen beschränkt sein. Wenn das Teilchen zum Beispiel gezwungen ist, sich auf einer gegebenen Fläche zu bewegen, wobei ihm zwei Koordinaten q_1 und q_2 zugeordnet sind, die die Lage des Teilchens auf der Fläche angeben, dann ist die Größe $d\rho$ offensichtlich proportional einem Element der wirklichen Bahnlänge auf der Fläche. Die Gl. (7-46) können dann dazu verwendet werden, die Bahn zu finden, die durch das Teilchen auf der Zwangsfläche beschrieben wird. Sind insbesondere keine äußeren Kräfte vorhanden, die auf das Teilchen wirken, dann ist die wirkliche Bahn auf der Fläche ebenso wie die Bahn im Konfigurationsraum eine der geodätischen Linien der Fläche. Bewegt sich etwa ein Teilchen auf der Fläche einer Kugel, ohne daß äußere Kräfte auf das Teilchen wirken, so muß es sich entlang eines Großkreises, einer geodätischen Linie der Kugel bewegen.

Eine große Anzahl ähnlicher Variationsprinzipien für die klassische Mechanik kann in verwirrender Vielgestaltigkeit abgeleitet werden. Wir geben ein Beispiel aus vielen: Das Prinzip der kleinsten Wirkung führt unmittelbar auf das *HERTZsche Prinzip der kleinsten Krümmung*, das behauptet, daß sich ein Teilchen beim Fehlen äußerer Kräfte längs der Bahn kleinster Krümmung bewegt. Nach dem *JACOBISCHEN* Prinzip muß eine solche Bahn eine geodätische Linie sein, und die geometrische Eigenschaft der minimalen Krümmung ist eine der wohlbekanntesten Eigentümlichkeiten einer geodätischen Linie. Es wurde gezeigt, daß die Variationsprinzipien selbst physikalisch nichts Neues enthalten, und sie vereinfachen kaum die praktische Lösung eines gegebenen mechanischen Problems. Ihr Wert liegt hauptsächlich darin, daß sie als Ausgangspunkt für neue Formulierungen der theoretischen Struktur der klassischen Mechanik dienen. Für diesen Zweck ist das *HAMILTONSche* Prinzip besonders fruchtbar und in einem etwas geringeren Maße ist es auch das Prinzip der kleinsten Wirkung. Die anderen Prinzipien haben sich als wenig nützlich erwiesen, außer daß sie zu fruchtlosen teleologischen Spekulationen geführt haben. Ihre weitere Diskussion scheint hier überflüssig.

LITERATURHINWEISE

- P. S. EPSTEIN, *Textbook of Thermodynamics*. Die Abschnitte 33 und 34 dieses Buches erläutern die Anwendungen der *LEGENDRESCHEN* Transformation beim Definieren neuer thermodynamischer Funktionen.
- E. T. WHITTAKER, *Analytical Dynamics*. Der Gegenstand der Variationsprinzipien, dem man in der klassischen Mechanik begegnet, kann sehr verwickelt sein und hat viele weitreichende Wurzeln in Gebieten, die scheinbar in kei-



nem Zusammenhang mit der Mechanik stehen. Zum Beispiel besteht eine enge Verknüpfung des HAMILTONSchen Prinzips mit der allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Einige dieser Themen werden wir in den folgenden Kapiteln diskutieren, vieles ist aber für die hier beabsichtigte Darstellung nicht geeignet. Ebenso können solche Fragen, wie etwa, ob das Extremum im HAMILTONSchen Prinzip ein Minimum oder Maximum ist, hier nicht aufgenommen werden, es wird auch nicht tunlich (oder wünschenswert) sein, die vielen Abarten der Variationsprinzipien zu betrachten. Der Student, der an Problemen dieser Art interessiert ist, findet reichhaltige Literatur darüber; tatsächlich gibt es ein „embarras des richesses“. Nur ein kleiner Teil der verfügbaren Referenzen kann in dieser Zusammenstellung aufgeführt werden. Von diesen ist das Buch von WHITTAKER eine der hauptsächlichsten Quellen. Das Kapitel IX und die ersten zwei Abschnitte von Kapitel X sind die Teile, die sich auf dieses Kapitel beziehen.

- A. G. WEBSTER, *Dynamics of Particles*. Eine ausführliche und oft abschweifende Diskussion der Variationsprinzipien und deren Konsequenzen findet man in Kapitel IV, dabei werden viele Punkte durch detaillierte Beispiele erläutert. Aus der Abhandlung läßt sich ein ausgezeichnete Einblick gewinnen, wie man um die Jahrhundertwende einzelne Teilgebiete der klassischen Mechanik hervorhob.
- L. NORDHEIM, *Die Prinzipie der Dynamik*, Bd. V des *Handbuches der Physik*. Dieser Artikel gibt eine recht vollständige Diskussion der Vielzahl der Integral- und Differentialprinzipien, die als Grundlage der Formulierung der Mechanik verwendet werden können. Die Abschnitte 1 und 2 des anschließenden Artikels von NORDHEIM und FUES bilden eine lesbare Einführung in die HAMILTONSchen Gleichungen.
- C. SCHAEFFER, *Die Prinzipie der Dynamik*. Dieses kleine Buch von etwa 76 Seiten gibt eine durchaus erschöpfende Diskussion der verschiedenen Prinzipien und der damit zusammenhängenden Typen von Variationsprozessen. Der voraussichtliche Leser sollte jedoch sehr vorsichtig sein, da der Autor die höchst unorthodoxe Bezeichnung H für die LAGRANGE-Funktion und R für die HAMILTON-Funktion verwendet.
- R. L. LINDSAY und H. MARGENAU, *Foundations of Physics*. Die Aussagen des HAMILTONSchen Prinzips und des Prinzips der kleinsten Wirkung scheinen das mechanische System mit der bestimmten Kenntnis des Endzustandes auszustatten, dem die Systembewegung zustrebt. Dieser Schein trügt natürlich; die Bewegung des Systems ist allein durch die Anfangsbedingungen bestimmt. Jedoch hat diese Ansicht in der Vergangenheit zu vielen philosophischen Spekulationen Anlaß gegeben. In Kapitel 3 dieses Buches werden diese und ähnliche Punkte angemessen diskutiert; die Leser, die weiteres darüber erfahren wollen, finden dort entsprechende Hinweise.

ÜBUNGEN

1. Stelle die HAMILTONSche Formulierung des Problems der Zentralkraftbewegung zweier Massenpunkte auf, eliminiere die zyklischen Variablen und reduziere das Problem auf Quadraturen.

2. Ermittle die HAMILTON-Funktion des in Übung 5, V. Kapitel, beschriebenen Systems und stelle die HAMILTONSchen Bewegungsgleichungen für das System auf.



3. Bestimme die HAMILTON-Funktion des schweren symmetrischen Kreisels mit einem festen Punkt und formuliere damit die HAMILTONSchen Bewegungsgleichungen. Bringe diese mit den in Abschnitt 5-7 diskutierten Bewegungsgleichungen in Zusammenhang und zeige insbesondere, wie die Lösung auf Quadraturen reduziert werden kann.

4. Betrachte ein System, das aus einem Teilchen besteht, auf das konservative Kräfte wirken, die unabhängig vom Azimut des Teilchens um die z -Achse eines Inertialsystems sind. Stelle die HAMILTON-Funktion des Teilchens mit Hilfe seiner cartesischen Koordinaten in bezug auf ein Achsensystem auf, das gleichförmig um die gegebene z -Achse mit einer Winkelgeschwindigkeit ω rotiert. Welche physikalische Bedeutung hat die HAMILTON-Funktion in diesem Fall? Ist sie eine Konstante der Bewegung?

5. In Übung 4 des I. Kapitels wurde das geschwindigkeitsabhängige Potential angegeben, das in der WEBERSchen Elektrodynamik angenommen wird. Wie lautet die HAMILTON-Funktion für ein einzelnes Teilchen, das sich unter dem Einfluß eines solchen Potentials bewegt?

6. Im VI. Kapitel wurde dargelegt, daß der Term in der kovarianten relativistischen LAGRANGE-Funktion, der der kinetischen Energie entspricht, in gewissem Maße beliebig ist, und daß Gl. (6-57) nur eine der möglichen Formen der LAGRANGE-Funktionen darstellt. Eine andere Form erhält man, wenn man die Parametervariable t im HAMILTONSchen Prinzip (6-48) direkt auf die LORENTZ-invariante Weltzeit τ transformiert und L' als den neuen Integranden verwendet. Leite die kovariante HAMILTON-Funktion für ein Teilchen in einem elektromagnetischen Feld her, die sich aus einer solchen LAGRANGE-Funktion ergibt. Zeige, daß der Wert der HAMILTON-Funktion identisch Null ist. Beim Aufstellen der Bewegungsgleichungen hat der Wert der HAMILTON-Funktion natürlich keine physikalische Bedeutung; wir sind nur an ihrer *funktionalen Abhängigkeit* von den Koordinaten und Impulsen interessiert.

7. Zeige, daß dann, wenn die kovariante LAGRANGE-Funktion auf die in der vorigen Übung festgelegte Weise erhalten wird, sich die HAMILTONsche Bewegungsgleichung für die totale Ableitung von p_4 nach τ identisch auf Gl. (7-19) reduziert, ohne daß spezielle Eigenschaften der Form von H' notwendig sind.



VIII. KAPITEL

KANONISCHE TRANSFORMATIONEN

Wird die HAMILTONSche Formulierung formal angewendet, so vermindert sie gemeinhin die Schwierigkeit bei der Lösung eines gegebenen Problems der Mechanik nicht wesentlich. Man muß sich mit praktisch denselben zu lösenden Differentialgleichungen befassen, die auch das LAGRANGESche Verfahren liefert. Die Vorteile der HAMILTONSchen Formulierung liegen nicht in ihrer Verwendung als Rechenhilfsmittel, sondern vielmehr in der tieferen Einsicht, die sie in die formale Struktur der Mechanik gewährt. Der gleiche Status, der den Koordinaten und Impulsen als unabhängigen Variablen gegeben wird, bietet eine größere Freiheit bei der Auswahl der physikalischen Größen, die als „Koordinaten“ und „Impulse“ bezeichnet werden. Als Ergebnis werden wir auf neuere, abstraktere Wege zur Darstellung des physikalischen Inhalts der Mechanik geführt. Obgleich oft eine beachtliche Hilfe bei den praktischen Anwendungen auf mechanische Probleme, sind diese abstrakteren Formulierungen für uns heute in erster Linie deshalb von Interesse, weil sie eine wesentliche Rolle bei der Konstruktion der moderneren Theorien der Materie spielen. Die eine oder andere dieser Formulierungen der klassischen Mechanik dient als Ausgangspunkt sowohl für die statistische Mechanik als auch für die Quantentheorie. Solchen Formulierungen, die als natürliche Folge des HAMILTONSchen Verfahrens entstehen, ist dieses und das nächste Kapitel gewidmet.

8-1 Die Gleichungen der kanonischen Transformation

Es gibt einen Problemtyp, für den die Lösung der HAMILTONSchen Gleichungen trivial ist. Betrachten wir den Fall, für den die HAMILTON-Funktion eine Konstante der Bewegung ist, und für den *alle* Koordinaten q_i zyklisch sind. Unter diesen Bedingungen sind die konjugierten Impulse p_i alle konstant:

$$p_i = \alpha_i,$$

und da die HAMILTON-Funktion weder eine explizite Funktion der Zeit noch der zyklischen Koordinaten sein kann, darf geschrieben werden:



$$H = H(\alpha_1 \dots \alpha_n).$$

Folglich sind die HAMILTONSchen Gleichungen für \dot{q}_i einfach:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial \alpha_i} = \omega_i, \quad (8-1)$$

wobei die ω_i Funktionen allein der α_i sind und deshalb ebenfalls zeitlich konstant sind. Die Gl. (8-1) haben die Lösungen

$$q_i = \omega_i t + \beta_i. \quad (8-2)$$

Darin sind die β_i Integrationskonstanten, die durch die Anfangsbedingungen bestimmt sind.

Man möchte meinen, daß die Lösung dieses Problemtyps, leicht wie sie ist, nur von akademischem Interesse sein kann, denn es wird in der Praxis kaum der Fall eintreten, daß alle generalisierten Koordinaten zyklisch sind. Ein gegebenes System kann aber durch mehr als einen Satz generalisierter Koordinaten beschrieben werden. So kann man zur Diskussion der Bewegung eines Teilchens in einer Ebene als generalisierte Koordinaten entweder die cartesischen Koordinaten

$$q_1 = x, \quad q_2 = y$$

oder die ebenen Polarkoordinaten

$$q_1 = r, \quad q_2 = \theta$$

verwenden. Beide sind gleichermaßen richtig, aber der eine oder der andere Satz mag für das vorliegende Problem bequemer sein. Es sei bemerkt, daß für Zentralkräfte weder x noch y zyklisch sind, während der zweite Satz eine zyklische Koordinate, den Winkel θ enthält. Die Anzahl zyklischer Koordinaten hängt somit von der Wahl der generalisierten Koordinaten ab, und für jedes Problem kann es eine besondere Wahl geben, für die alle Koordinaten zyklisch sind. Können wir diesen Satz finden, so ist das übrige der Aufgabe trivial. Da die generalisierten Koordinaten, die durch das Problem nahegelegt werden, normalerweise nicht zyklisch sind, müssen wir zunächst ein spezifisches Verfahren zur *Transformation* von einem Variablensatz auf einen anderen Satz, der geeigneter sein mag, ableiten.

Die in den vorigen Kapiteln betrachteten Transformationen dienten dazu, von einem Koordinatensatz q_i auf einen neuen Satz Q_i mittels Transformationsgleichungen der Form

$$Q_i = Q_i(q, t) \quad (8-3)$$

überzugehen. Zum Beispiel haben die Gleichungen einer orthogonalen Transformation oder des Übergangs von cartesischen auf ebene Polarkoordinaten die allgemeine Form der Gl. (8-3). Wir wollen solche



Transformationen als *Punkttransformationen* bezeichnen. In der HAMILTONSchen Formulierung sind aber auch die Impulse im gleichen Maße wie die generalisierten Koordinaten unabhängige Variable. Der Begriff der Koordinatentransformation muß deshalb erweitert werden, um die gleichzeitige Transformation der unabhängigen *Koordinaten* und *Impulse* q_i, p_i auf einen neuen Satz Q_i, P_i mittels Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_i(q, p, t), \\ P_i &= P_i(q, p, t) \end{aligned} \quad (8-4)$$

mit einzuschließen. Somit werden die neuen Koordinaten nicht nur durch die alten Koordinaten, sondern auch durch die alten Impulse definiert sein.

Bei der Entwicklung der HAMILTONSchen Mechanik können nur die Transformationen von Interesse sein, für die die neuen Q, P kanonische Koordinaten sind. Diese Forderung wird unter der Voraussetzung befriedigt sein, daß eine Funktion $K(Q, P, t)$ existiert, so daß die Bewegungsgleichungen in dem neuen Satz die HAMILTONSche Form

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = - \frac{\partial K}{\partial Q_i} \quad (8-5)$$

haben. Transformationen, für die die Gl. (8-5) gelten, nennt man *kanonisch*.¹ Die Funktion K spielt die Rolle der HAMILTON-Funktion in dem neuen Koordinatensatz.

Wenn die Q_i und P_i kanonische Koordinaten sein sollen, müssen sie ein modifiziertes HAMILTONSches Prinzip der Form

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\sum P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t)) dt = 0 \quad (8-6)$$

befriedigen. Gleichzeitig müssen natürlich die alten Koordinaten ein

¹ Die Bezeichnung Berührungstransformation oder Kontakttransformation wird auch verwendet. Zwischen einer Berührungs- und einer kanonischen Transformation kann ein Unterschied gemacht werden, doch geschieht das in der Literatur nicht einheitlich. Einige Autoren (z.B. A. SOMMERFELD in *Atombau und Spektrallinien*) beschränken die Berührungstransformationen auf solche, bei denen die Transformationsgleichungen (8-4) die Zeit nicht explizit enthalten. Andere sehen (wahrscheinlich richtiger) als Berührungstransformationen solche an, welche zusätzlich zu den Transformationen der Koordinaten und Impulse eine solche der Zeitkoordinate liefern, wie es in einer kovarianten relativistischen Theorie gefordert wird. Die Physiker neigen jedoch dazu, die zwei Ausdrücke als Synonyma zu behandeln, und wir wollen dieser Gewohnheit folgen. Die Bedeutung der Kontakttransformationen in der projektiven Geometrie (aus der wohl der Name herrührt) wird kurz von SOMMERFELD, loc. cit., und von CARATHÉODORY, *Variationsrechnung*, beschrieben.



ähnliches Prinzip erfüllen:

$$\delta \int_1^2 (\sum p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)) dt = 0. \quad (8-7)$$

Die gleichzeitige Gültigkeit der Gl. (8-6) und (8-7) bedeutet nicht, daß die Integranden der beiden Integrale gleich sind, wohl aber, daß sie sich höchstens um die totale Ableitung einer willkürlichen Funktion F nach der Zeit unterscheiden können. Das Integral zwischen den beiden Endpunkten eines solchen Differenztermes ist dann

$$\int_1^2 \frac{dF}{dt} dt = F(2) - F(1),$$

und die Variation dieses Integrales ist automatisch für irgendeine Funktion F Null, da die Variation an den Endpunkten verschwindet. Die beliebige Funktion F nennt man die *Erzeugende* oder *erzeugende Funktion der Transformation*, denn – wie wir sehen werden – sind die Transformationsgleichungen (8-4) vollständig bestimmt, wenn F gegeben ist.

Um die Transformation zwischen den zwei Sätzen kanonischer Variablen ausführen zu können, muß F sowohl eine Funktion der alten als auch der neuen Variablen sein. Abgesehen von der Zeit t muß die Erzeugende deshalb eine Funktion von insgesamt $4n$ Variablen sein. Aber nur $2n$ von diesen sind unabhängig, weil die zwei Koordinatensätze durch die $2n$ Transformationsgleichungen (8-4) verknüpft sind. Die Erzeugende kann deshalb als Funktion der unabhängigen Variablen nur in einer der vier Formen geschrieben werden:

$$F_1(q, Q, t), \quad F_2(q, P, t), \quad F_3(p, Q, t), \quad F_4(p, P, t).$$

Die Besonderheiten des Problems werden bestimmen, welche Form zu wählen ist. Wenn wir uns zum Beispiel mit einer durch Gl. (8-3) definierten Punkttransformation befassen, dann sind q und Q keine unabhängigen Variablen. Die Erzeugenden der Form F_1 müssen daher ausgeschlossen werden, während irgendeine der anderen verwendet werden kann.

Ist die erste Form F_1 geeignet, dann können die Integranden der Gl. (8-6) und (8-7) durch die Beziehung

$$\sum p_i \dot{q}_i - H = \sum P_i \dot{Q}_i - K + \frac{d}{dt} F_1(q, Q, t) \quad (8-8)$$

verknüpft werden. Die totale Ableitung von F nach der Zeit kann entwickelt werden:

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial F}{\partial t}$$



Da die alten und neuen Koordinaten q_i und Q_i hier als unabhängig angesehen werden, ist Gl. (8-8) nur dann identisch erfüllt, wenn die Koeffizienten der \dot{q}_i und \dot{Q}_i einzeln verschwinden:

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad (8-9a)$$

$$P_i = - \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}. \quad (8-9b)$$

Es bleibt schließlich

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (8-9c)$$

Die n Gleichungen (8-9a) sind n Beziehungen, die nur p_i, q_i, Q_i und t enthalten. Sie können nach den n Q_i als Funktionen der p_i, q_i, t aufgelöst werden; sie liefern so die erste Hälfte der Transformationsgl. (8-4). Hat man einmal die Beziehungen zwischen Q_i und (q_i, p_i) aufgestellt, so ergeben die Gl. (8-9b) die übrige Hälfte der Transformationsgleichungen. Sie geben die P_i als Funktionen von (q_i, p_i) . Schließlich liefert Gl. (8-9c) den Zusammenhang zwischen der neuen HAMILTON-Funktion K und der alten.

Sind q_i und P_i die unabhängigen Argumente von F , dann ist die Erzeugende vom Typ F_2 . Wir sehen, daß der Übergang von q, Q als unabhängige Variablen nach q, P durch eine LEGENDRESche Transformation ausgeführt werden kann, da nach Gl. (8-9b)

$$\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = - P_i$$

gilt. Das lege nahe, die Erzeugende F_2 durch F_1 entsprechend der Beziehung

$$F_2(q, P, t) = F_1(q, Q, t) + \sum_i P_i Q_i \quad (8-10)$$

zu definieren. Löst man Gl. (8-10) nach F_1 auf und setzt in Gl. (8-8) ein, so wird

$$\begin{aligned} \sum_i p_i \dot{q}_i - H &= \sum_i P_i \dot{Q}_i - K + \frac{d}{dt} (F_2(q, P, t) - \sum_i Q_i P_i) \\ &= - \sum_i Q_i \dot{P}_i - K + \frac{d}{dt} F_2(q, P, t). \end{aligned}$$

Wiederholt man das für F_1 verwendete Verfahren, indem man F_2 differenziert und die Koeffizienten von \dot{q}_i, \dot{P}_i zusammenfaßt, so erhält man die Transformationsgleichungen



$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad (8-11a)$$

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \quad (8-11b)$$

mit

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (8-11c)$$

Die Gleichungen (8-11a) können nach den P_i als Funktionen von q_i, p_i, t aufgelöst werden und entsprechen deshalb der zweiten Hälfte der Gl. (8-4). Die andere Hälfte der Transformationsgleichungen wird durch die Gl. (8-11b) geliefert.

Der dritte Typ der Erzeugenden $F_3(p, Q, t)$ kann wieder mittels einer LEGENDRESchen Transformation mit F_1 verknüpft werden, und zwar vermöge der durch die Gl. (8-9a) gegebenen Form von $\frac{\partial F}{\partial q_i}$. Die neue

Erzeugende kann deshalb definiert werden durch

$$F_1(q, Q, t) = \sum q_i p_i + F_3(Q, p, t). \quad (8-12)$$

Gl. (8-8) nimmt nun die Form an:

$$-\sum q_i \dot{p}_i - H = \sum P_i \dot{Q}_i - K + \frac{d}{dt} F_3(p, Q, t). \quad (8-13)$$

Gleichsetzen der Koeffizienten liefert auch hier wieder die Transformationsgleichungen

$$q_i = - \frac{\partial F_3}{\partial p_i}, \quad (8-14a)$$

$$P_i = - \frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \quad (8-14b)$$

und

$$K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}. \quad (8-14c)$$

Wie in den beiden vorhergehenden Fällen geben die Gl. (8-14a) die Q_i als Funktionen von q, p, t . Die Gl. (8-14b) liefern die neuen Impulse P_i als Funktionen der alten Variablen.

Sind schließlich p und P die unabhängigen Variablen, so kann die entsprechende Erzeugende F_4 durch eine doppelte LEGENDRESche Transformation mit F_1 verknüpft werden:

$$F_4(p, P, t) = F_1(q, Q, t) + \sum_i P_i Q_i - \sum_i p_i q_i, \quad (8-15)$$



und Gl. (8-8) reduziert sich auf

$$-\sum q_i \dot{p}_i - H = -\sum Q_i \dot{P}_i - K + \frac{d}{dt} F_4(p, P, t). \quad (8-16)$$

Der letzte Satz von Transformationsgleichungen ist deshalb

$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}, \quad (8-17a)$$

$$Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}, \quad (8-17b)$$

$$K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}. \quad (8-17c)$$

Bei diesen Überlegungen wurde die Zeit als invarianter Parameter behandelt, und es wurden keine Maßnahmen für eine gemeinsame Transformation von Zeitskalen *und* den Koordinaten und Impulsen getroffen. Natürlich tritt eine Transformation der Zeit in der vierdimensionalen relativistischen HAMILTONSchen Formulierung automatisch ein, denn dann ist die Weltzeit τ der invariante Parameter des Systems, und die gewöhnliche Zeit t erscheint als eine der Teilchenkoordinaten. Es ist jedoch interessant zu sehen, wie eine Änderung der Zeitskalen, und zwar eine andere als die durch eine LORENTZ-Transformation erzeugte, in das gewöhnliche Schema der kanonischen Transformationen eingefügt werden kann.

Da die Zeit kein invarianter Parameter der Bewegung des Systems mehr ist, wird es notwendig, einen anderen Parameter einzuführen, der ihren Platz einnimmt. In der kovarianten relativistischen Formulierung wird dieser Parameter durch die Eigenzeit des Teilchens vertreten. Allgemein ist jedoch irgendeine invariante Größe ausreichend, die das Fortschreiten des Systems längs seiner Bahn im Konfigurationsraum kennzeichnet. Wird ein solcher Parameter mit θ bezeichnet, so kann das modifizierte HAMILTONSche Prinzip geschrieben werden:

$$\delta \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\sum_i^n p_i \dot{q}_i \frac{dt}{d\theta} - H \frac{dt}{d\theta} \right) d\theta = 0$$

oder

$$\delta \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\sum_i^n p_i \frac{dq_i}{d\theta} - H \frac{dt}{d\theta} \right) d\theta = 0.$$

Die Form dieses Ausdruckes legt nahe, t als die $(n+1)$ -te generalisierte Koordinate anzusehen, mit $-H$ als ihren konjugierten Im-



puls.² Mit dieser Bezeichnung nimmt das Prinzip die Form an:

$$\delta \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sum_{i=1}^{n+1} p_i q_i' d\theta = 0,$$

wobei der Strich eine Ableitung nach θ bezeichnet. Nach der kanonischen Transformation der Koordinaten (einschließlich t) lautet das modifizierte HAMILTONSche Prinzip:

$$\delta \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sum_{i=1}^{n+1} P_i Q_i' d\theta = 0.$$

Hier ist Q_{n+1} die transformierte Zeitvariable, und $-P_{n+1}$ ist gleich der neuen HAMILTON-Funktion K . Folgen wir dem oben verwendeten Verfahren, so können wir eine Erzeugende $G(q_i, P_i)$ definieren. Die Transformationen sind mit dieser durch die $2n + 2$ Beziehungen

$$p_i = \frac{\partial G}{\partial q_i'}$$

$$Q_i = \frac{\partial G}{\partial P_i}$$

verknüpft. Obwohl es demnach formal möglich ist, kanonische Transformationen auszuführen, die Änderungen der Zeitskala einschließen, soll in den folgenden Abschnitten angenommen werden, daß die Zeit ein invarianter Parameter der Bewegung ist.

8-2 Beispiele kanonischer Transformationen

Die Natur kanonischer Transformationen und die Rolle der Erzeugenden kann am besten durch einige einfache aber wichtige Beispiele illustriert werden. Betrachten wir zuerst eine Erzeugende des zweiten Typs von der besonderen Form

$$F_2 = \sum_i q_i P_i \tag{8-18}$$

Wegen der Gl. (8-11) lauten die Transformationsgleichungen

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i,$$

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i,$$

$$K = H.$$

² Diese Wahl erinnert an das relativistische Ergebnis, daß iH/c konjugiert zu $x_4 = ict$ ist. Hier ist jedoch die Identifizierung rein formal und enthält oder erfordert nichts vom physikalischen Inhalt der speziellen Relativitätstheorie.



Die neuen und alten Koordinaten sind die gleichen; demnach erzeugt F_2 lediglich die *identische Transformation*.

Ein allgemeinerer Transformationstyp wird durch die Erzeugende

$$F_2 = \sum_i f_i(q_1 \dots q_n, t) P_i \quad (8-19)$$

beschrieben, wobei die f_i irgendeinen gewünschten Funktionensatz bilden. Wegen der Gl. (8-11b) sind die neuen Koordinaten Q_i gegeben durch

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = f_i(q, t). \quad (8-20)$$

Für diese Erzeugende hängen somit die neuen Koordinaten nur von den alten Koordinaten und der Zeit ab. Sie enthalten nicht die alten Impulse. Eine solche Transformation ist deshalb ein Beispiel für die durch Gl. (8-3) definierte Klasse der Punkttransformationen. Da die Funktionen f_i völlig beliebig sind, dürfen wir den Schluß ziehen, *daß alle Punkttransformationen kanonisch sind*. Gl. (8-11c) liefert die neue HAMILTON-Funktion in Abhängigkeit von der alten und von den Ableitungen der Funktionen f_i nach der Zeit.

Die orthogonalen Transformationen, die im IV. und VI. Kapitel ausführlich diskutiert wurden, sind spezielle Fälle von Punkttransformationen. Für sie sind die Funktionen f_i gegeben durch

$$f_i = Q_i = \sum_k a_{ik} q_k.$$

Die Erzeugende hat dann die Form

$$F_2 = \sum_{i,k} a_{ik} q_k P_i,$$

und die neuen Impulse findet man nach den Gl. (8-11a):

$$p_k = \frac{\partial F_2}{\partial q_k} = \sum_i a_{ik} P_i. \quad (8-21)$$

Diese Gleichungen können nach P_i aufgelöst werden, indem man mit a_{jk} multipliziert und über k summiert:

$$\sum_k a_{jk} p_k = \sum_{i,k} a_{jk} a_{ik} P_i = \sum_i \delta_{ij} P_i.$$

Der letzte Schritt folgt aus den Orthogonalitätsbedingungen. Die letzte Summation ergibt

$$P_i = \sum_k a_{ik} p_k, \quad (8-22)$$



so daß sich die Impulse auch orthogonal transformieren, wie es a priori zu erwarten war.

Eine lehrreiche Transformation wird durch die Erzeugende der ersten Art $F_1(q, Q, t)$ von der besonderen Form

$$F_1 = \sum_k q_k Q_k$$

geliefert. Die entsprechenden Transformationsgleichungen sind nach (8-9a,b)

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} = Q_i,$$

$$P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -q_i.$$

Die Transformation bewirkt die Vertauschung der Impulse und Koordinaten; die neuen Koordinaten sind die alten Impulse, und die neuen Impulse sind im wesentlichen die alten Koordinaten. Dieses einfache Beispiel macht die Unabhängigkeit der generalisierten Koordinaten und Impulse besonders deutlich. Sie sind beide erforderlich, um die Bewegung des Systems in der HAMILTONSchen Formulierung zu beschreiben, und der Unterschied zwischen ihnen besteht praktisch nur in der Bezeichnung. Man kann die Namen vertauschen; dabei wird höchstens eine Vorzeichenänderung auftreten. In der Theorie bleibt nichts mehr von der Konzeption übrig, daß q_i eine räumliche Koordinate und p_i das Produkt aus einer Masse und einer Geschwindigkeit ist. Übrigens sieht man direkt aus den HAMILTONSchen Gleichungen

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

daß diese Austauschtransformation kanonisch ist. Wenn q_i für p_i gesetzt wird, bleiben die Gleichungen nur dann in der kanonischen Form, wenn $-p_i$ mit q_i vertauscht wird.

Als letztes Beispiel betrachten wir die Erzeugende

$$F_1 = \frac{m}{2} \omega q^2 \cot Q. \quad (8-23)$$

Darin sind m und ω Konstanten, deren Bedeutung später diskutiert wird. Mit dieser Erzeugenden reduzieren sich die Gl. (8-9a,b) auf

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q \quad (8-24)$$

und

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2 \sin^2 Q} \quad (8-25)$$



Diese zwei Gleichungen können nach Q und P als Funktionen von q und p aufgelöst werden, aber für unsere Zwecke ist es wünschenswerter, die alten Variablen als Funktionen der neuen zu ermitteln. Nach Gl. (8-25) ist q gegeben durch

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q. \quad (8-26)$$

Setzt man das in Gl. (8-24) ein, so erhält man

$$p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q. \quad (8-27)$$

Da die Erzeugende die Zeit nicht explizit enthält, wird der Wert der HAMILTON-Funktion durch die Transformation nicht beeinflußt, und es ist lediglich notwendig, H mittels der Gl. (8-26, 27) durch die neuen Q und P auszudrücken. Die Konstanten in F_1 wurden im Hinblick auf die Anwendung auf das Problem des linearen harmonischen Oszillators gewählt. Wenn die Kraftkonstante der linearen rücktreibenden Kraft, die auf das Teilchen wirkt, k ist, dann ist die potentielle Energie

$$V = \frac{kq^2}{2},$$

und die HAMILTON-Funktion hat die Form

$$H = \frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{kq^2}{2} = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}.$$

Bezeichnet man das Verhältnis k/m mit ω^2 , so kann für H auch geschrieben werden:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2. \quad (8-28)$$

Setzt man die Transformationsgleichungen (8-26) und (8-27) in (8-28) ein, so erhält man die HAMILTON-Funktion in den neuen Koordinaten:

$$H = \omega P \cos^2 Q + \omega P \sin^2 Q = \omega P. \quad (8-29)$$

Die HAMILTON-Funktion ist demnach zyklisch in Q , und der konjugierte Impuls P ist deshalb eine Konstante. Aus Gl. (8-29) sieht man auch, daß P tatsächlich gleich der durch ω dividierten konstanten Energie ist:

$$P = \frac{E}{\omega}.$$



Die Bewegungsgleichung für Q reduziert sich auf die einfache Form

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \omega$$

mit der sofort hinzuschreibenden Lösung

$$Q = \omega t + \alpha.$$

Darin ist α eine Integrationskonstante, die durch die Anfangsbedingungen festgelegt ist. Aus Gl. (8-26) folgt die Lösung für q :

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \alpha). \quad (8-30)$$

Das ist die übliche Lösung für einen harmonischen Oszillator.

Man möchte meinen, daß die Verwendung von Kontakttransformationen zur Lösung des Problems des harmonischen Oszillators dem Verfahren ähnlich ist, „mit Kanonen nach Spatzen zu schießen“. Wir haben hier jedoch ein einfaches Beispiel dafür, wie die HAMILTON-Funktion mittels kanonischer Transformationen auf eine Form reduziert werden kann, die in allen Koordinaten zyklisch ist. Die Diskussion des allgemeinen Schemas für die Lösung mechanischer Probleme nach dieser Methode soll bis zum nächsten Kapitel zurückgestellt werden. Zunächst wollen wir damit fortfahren, die formalen Eigenschaften kanonischer Transformationen zu untersuchen.

8-3 Die Integralinvarianten von Poincaré

Die kanonischen Transformationen sind so definiert, daß die Form der HAMILTONSchen Bewegungsgleichungen bei der Transformation erhalten bleibt. Es erhebt sich die Frage, ob es andere Ausdrücke gibt, die gegenüber kanonischen Transformationen invariant sind. Die von POINCARÉ gefundenen Integralinvarianten haben diese Eigenschaft. Analog zum Konfigurationsraum in der LAGRANGESchen Formulierung definieren wir einen $2n$ -dimensionalen cartesischen Raum, der durch die Koordinaten $q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n$ gebildet wird. Er heißt *Phasenraum*. Die vollständige dynamische Beschreibung eines mechanischen Systems ist dann durch einen Punkt in einem solchen Raum gegeben. Der Satz von POINCARÉ behauptet nun, daß das Integral

$$J_1 = \iint_S \sum_i dq_i dp_i \quad (8-31)$$

gegenüber kanonischen Transformationen invariant ist, wobei S anzeigt, daß das Integral über eine beliebige zweidimensionale Fläche im Phasenraum zu erstrecken ist.



Der Beweis der Invarianz beginnt mit der Feststellung, daß die Lage eines Punktes auf einer zweidimensionalen Fläche durch nicht mehr als zwei Parameter vollständig gekennzeichnet ist. u und v mögen solche Parameter sein, die für die Fläche S geeignet sind, so daß auf dieser Fläche $q_i = q_i(u, v)$ und $p_i = p_i(u, v)$ gilt. Es ist bekannt, daß sich ein Flächenelement $dq_i dp_i$ auf ein Flächenelement $du dv$ gemäß der JACOBISCHEN Determinante transformiert. Symbolisch geschrieben lautet diese:

$$\frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_i}{\partial u} & \frac{\partial p_i}{\partial u} \\ \frac{\partial q_i}{\partial v} & \frac{\partial p_i}{\partial v} \end{vmatrix}. \quad (8-32)$$

Es gilt die Beziehung

$$dq_i dp_i = \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} du dv. \quad (8-33)$$

Somit kann die Behauptung, J_1 habe den gleichen Wert für alle kanonischen Koordinaten:

$$\iint_S \sum_i dq_i dp_i = \iint_S \sum_k dQ_k dP_k,$$

auch geschrieben werden:

$$\iint_S \sum_i \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} du dv = \iint_S \sum_k \frac{\partial(Q_k, P_k)}{\partial(u, v)} du dv.$$

Da das Integrationsgebiet beliebig ist, können die Integrale nur dann gleich sein, wenn die Integranden identisch sind:

$$\sum_i \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} = \sum_k \frac{\partial(Q_k, P_k)}{\partial(u, v)}. \quad (8-34)$$

Der Beweis der Invarianz von J_1 ist somit darauf reduziert worden, die Invarianz der Summe der JACOBISCHEN Determinanten zu zeigen.

Es ist zweckmäßig, die kanonische Transformation von den q, p auf die Q, P so aufzufassen, als hätte man sie aus einer Erzeugenden des Typs $F_2(q, P, t)$ erhalten.³ Die Spalten der Determinanten auf der linken Seite in Gl. (8-34) können dann mittels der Erzeugenden durch den neuen Variablensatz ausgedrückt werden. Nach den Gl. (8-11a) haben wir

³ Das ist keine notwendige Einschränkung. Der Beweis kann auch geführt werden, indem man irgendeine der anderen Erzeugenden verwendet, wie der Leser leicht verifizieren kann.



$$\frac{\partial p_i}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial F_2}{\partial q_i} \right).$$

Die Größe in der Klammer ist wegen ihrer Argumente q_k und P_k eine Funktion allein von u , und der Ausdruck kann deshalb folgendermaßen entwickelt werden:

$$\frac{\partial p_i}{\partial u} = \sum_k \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial u} + \sum_k \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial u}. \quad (8-35)$$

Man findet einen ähnlichen Ausdruck für die partielle Ableitung von p_i nach v . Setzt man diese Entwicklungen in die Determinantensumme ein, die in (8-34) auftritt, so erhält man die folgende Beziehung:

$$\sum_i \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} = \sum_i \left| \begin{array}{c} \frac{\partial q_i}{\partial u} \sum_k \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial u} + \sum_k \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial u} \\ \frac{\partial q_i}{\partial v} \sum_k \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial v} + \sum_k \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial v} \end{array} \right|.$$

Nach den Regeln der Determinantenrechnung kann man die Summationszeichen aus der Determinante herausziehen. Das gleiche kann man mit den Faktoren tun, die allen Termen in einer Spalte gemeinsam sind. Deswegen läßt sich die Determinantensumme schreiben:

$$\sum_i \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} = \sum_{i,k} \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial q_k} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial q_i}{\partial u} & \frac{\partial q_k}{\partial u} \\ \frac{\partial q_i}{\partial v} & \frac{\partial q_k}{\partial v} \end{array} \right| + \sum_{i,k} \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial P_k} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial q_i}{\partial u} & \frac{\partial P_k}{\partial u} \\ \frac{\partial q_i}{\partial v} & \frac{\partial P_k}{\partial v} \end{array} \right|.$$

Die Terme der ersten Reihe sind antisymmetrisch bezüglich der Vertauschung der Indizes i und k , da dabei die zwei Spalten der Determinante vertauscht werden. Der Wert der Summe darf aber nicht durch eine Vertauschung der Indizes beeinflußt werden; demnach muß die Reihe identisch verschwinden. Es ist uns deshalb freigestellt, an ihre Stelle eine ähnlich konstruierte Reihe zu setzen, deren Summe ebenfalls Null ist:

$$\sum_i \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} = \sum_{i,k} \frac{\partial^2 F_2}{\partial P_i \partial P_k} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial P_i}{\partial u} & \frac{\partial P_k}{\partial u} \\ \frac{\partial P_i}{\partial v} & \frac{\partial P_k}{\partial v} \end{array} \right| + \sum_{i,k} \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial P_k} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial q_i}{\partial u} & \frac{\partial P_k}{\partial u} \\ \frac{\partial q_i}{\partial v} & \frac{\partial P_k}{\partial v} \end{array} \right|.$$

Die Operation der Entwicklung der Determinantensumme kann nun umgekehrt werden, allerdings ist jetzt in der Determinante die Summe über i und nicht über k zu bilden. Ein typisches Element der ersten



Spalte der Determinante, das in der sich ergebenden Reihe auftritt, lautet in Analogie zu Gl. (8-35):

$$\sum_i \frac{\partial^2 F_2}{\partial P_i \partial P_k} \frac{\partial P_i}{\partial u} + \sum_i \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial P_k} \frac{\partial q_i}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial F_2}{\partial P_k}.$$

Wegen der Transformationsgleichungen (8-11b) ist aber

$$\frac{\partial F_2}{\partial P_k} = Q_k,$$

so daß sich deshalb die Determinantensumme reduziert auf:

$$\sum_i \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} = \sum_k \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial Q_k}{\partial u} & \frac{\partial P_k}{\partial u} \\ \frac{\partial Q_k}{\partial v} & \frac{\partial P_k}{\partial v} \end{array} \right| = \sum_k \frac{\partial(Q_k, P_k)}{\partial(u, v)}.$$

Das beweist den gewünschten Satz.

Auf ähnliche Weise – der Beweis ist jedoch komplizierter – kann man zeigen, daß

$$J_2 = \iiint\int_S \sum dq_i dp_i dq_k dp_k \quad (8-36)$$

invariant gegenüber einer kanonischen Transformation ist, wobei hier S eine beliebige vierdimensionale Fläche des $2n$ -dimensionalen Phasenraumes ist. Diese Kette von Integralinvarianten kann erweitert werden. Sie führt gegebenenfalls auf die Invarianten

$$J_n = \int \dots \int dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n, \quad (8-37)$$

wobei nun das Integral über ein beliebiges Gebiet im Phasenraum ausgedehnt werden kann. Die Invarianz von J_n ist der Feststellung gleichwertig, daß das Volumen im Phasenraum gegenüber kanonischen Transformationen invariant ist. Wie wir später sehen werden, folgt daraus, daß das Volumen im Phasenraum zeitlich konstant ist.

8-4 Lagrange- und Poisson-Klammern als kanonische Invarianten

Die Bedingung (8-34) für die Invarianz der Summe der JACOBI'schen Determinanten kann auch geschrieben werden:

$$\sum_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v} \right) = \sum_i \left(\frac{\partial Q_i}{\partial u} \frac{\partial P_i}{\partial v} - \frac{\partial P_i}{\partial u} \frac{\partial Q_i}{\partial v} \right). \quad (8-38)$$



Jede Seite dieser Gleichung hat die Form einer **LAGRANGE-Klammer** von u und v ; sie ist definiert durch

$$\{u, v\}_{e.p} = \sum_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v} \right). \quad (8-39)$$

Gl. (8-38) stellt fest, daß die **LAGRANGE-Klammern** gegenüber **Kontakttransformationen** invariant sind. Es ist deshalb belanglos, welcher **Satz kanonischer Koordinaten** dazu verwendet wird, die **LAGRANGE-Klammern** auszudrücken. Die Indizes q, p werden deshalb von nun an weggelassen. Allgemein gilt

$$\{u, v\} = -\{v, u\}. \quad (8-40)$$

Wir erinnern uns daran, daß u, v Koordinaten eines zweidimensionalen Gebietes des Phasenraumes sind. Wir können die q_i, q_j -Ebene als dieses Gebiet wählen. Bei der Auswertung der entsprechenden **LAGRANGE-Klammer** $\{q_i, q_j\}$ kann jeder **Satz kanonischer Koordinaten** verwendet werden. Es ist offensichtlich, daß der **Satz q, p** am bequemsten ist. Die **LAGRANGE-Klammer** kann deshalb entwickelt werden:

$$\{q_i, q_j\} = \sum_k \left(\frac{\partial q_k}{\partial q_i} \frac{\partial p_k}{\partial q_j} - \frac{\partial q_k}{\partial q_j} \frac{\partial p_k}{\partial q_i} \right)$$

Da die q und p unabhängige Koordinaten sind, folgt

$$\frac{\partial p_k}{\partial q_i} = 0 = \frac{\partial p_k}{\partial q_j},$$

und somit verschwindet die **LAGRANGE-Klammer**:

$$\{q_i, q_j\} = 0. \quad (8-41a)$$

Ein entsprechender Beweis zeigt, daß

$$\{p_i, p_j\} = 0. \quad (8-41b)$$

Ist jedoch $u = q_i$ und $v = p_j$, so ist die **LAGRANGE-Klammer**

$$\{q_i, p_j\} = \sum_k \left(\frac{\partial q_k}{\partial q_i} \frac{\partial p_k}{\partial p_j} - \frac{\partial q_k}{\partial p_j} \frac{\partial p_k}{\partial q_i} \right).$$

Während der zweite Term in der Klammer aus entsprechenden Gründen verschwindet, ist der erste Term nicht Null. Die in diesem Term auftretenden partiellen Ableitungen haben die Werte

$$\frac{\partial p_k}{\partial p_j} = \delta_{kj}, \quad \frac{\partial q_k}{\partial q_i} = \delta_{ki}.$$



Folglich reduziert sich die LAGRANGE-Klammer auf

$$\{q_i, p_j\} = \sum_k \delta_{jk} \delta_{ki} = \delta_{ij}. \quad (8-41c)$$

Die Gleichungen (8-41) sind offensichtlich für alle Sätze kanonischer Variablen gültig und werden oft als die *fundamentalen LAGRANGE-Klammern* bezeichnet.

Noch nützlicher sind die sogenannten POISSON-Klammern. Sie sind definiert durch

$$[u, v]_{q, p} = \sum_k \left(\frac{\partial u}{\partial q_k} \frac{\partial v}{\partial p_k} - \frac{\partial u}{\partial p_k} \frac{\partial v}{\partial q_k} \right) \quad (8-42)$$

mit der Identität

$$[u, v] = -[v, u]. \quad (8-43)$$

Es besteht eine enge Beziehung zwischen den LAGRANGESchen und den POISSONSchen Klammern. Betrachtet man sie lediglich als mathematische Ausdrücke ohne Rücksicht auf eine physikalische Bedeutung, so läßt sich der folgende Satz beweisen: Wenn die u_l , $l = 1 \dots, 2n$, einen Satz von $2n$ unabhängigen Funktionen derart bilden, daß jedes u eine Funktion der $2n$ Koordinaten $q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n$ ist, dann gilt

$$\sum_{i=1}^{2n} \{u_i, u_i\} [u_i, u_j] = \delta_{ij}.^4 \quad (8-44)$$

Der Beweis bietet keine Schwierigkeiten, ist jedoch etwas plumb. Wegen der Gl. (8-39) und (8-42) kann die Summe geschrieben werden:

$$\sum_i^{2n} \{u_i, u_i\} [u_i, u_j] = \sum_i^{2n} \sum_k^n \sum_m^n \left(\frac{\partial q_k}{\partial u_i} \frac{\partial p_k}{\partial u_i} - \frac{\partial q_k}{\partial u_i} \frac{\partial p_k}{\partial u_i} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial q_m} \frac{\partial u_j}{\partial p_m} - \frac{\partial u_j}{\partial q_m} \frac{\partial u_i}{\partial p_m} \right).$$

In der Entwicklung treten vier Terme auf, der erste von ihnen ist

$$\sum_{k, m}^n \frac{\partial p_k}{\partial u_i} \frac{\partial u_j}{\partial p_m} \sum_l^{2n} \frac{\partial q_k}{\partial u_l} \frac{\partial u_l}{\partial q_m} = \sum_{k, m} \frac{\partial p_k}{\partial u_i} \frac{\partial u_j}{\partial p_m} \frac{\partial q_k}{\partial q_m} = \sum_{k, m} \frac{\partial p_k}{\partial u_i} \frac{\partial u_j}{\partial p_m} \delta_{km}$$

⁴ Die durch (8-42) definierten POISSONSchen Klammern erscheinen in gewissem Sinne als die Reziproken der LAGRANGESchen Klammern. Gl. (8-44) gibt diesem intuitiven Gefühl eine genaue Bedeutung. Wird $\{u_l, u_i\}$ als ein Matrixelement L_{li} und $-[u_l, u_i]$ als das Matrixelement P_{li} angesehen, wobei die Matrizen quadratisch von der Dimension $2n$ sind, dann läßt sich Gl. (8-44) schreiben

$$LP = I$$

oder

$$P = L^{-1}.$$



oder schließlich

$$= \sum_k^n \frac{\partial u_j}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial u_i} \quad (8-45)$$

Der letzte der vier Terme hat genau die gleiche Form wie Gl. (8-45), lediglich sind die Rollen von q_k und p_k vertauscht. Folglich ergeben die beiden Terme zusammen

$$\sum_k^n \left(\frac{\partial u_j}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial u_i} + \frac{\partial u_j}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial u_i} \right) = \frac{\partial u_j}{\partial u_i} \quad (8-46)$$

Man kann leicht sehen, daß die übrigen zwei Terme der Entwicklung nichts zu der Summe beitragen. Der eine von ihnen enthält einen Faktor, in dem u_i auftritt,

$$\sum_i \frac{\partial q_k}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial p_m} = \frac{\partial q_k}{\partial p_m},$$

der stets verschwinden muß. In dem anderen Term sind nur p und q vertauscht. Nach Gl. (8-46) ist also die vollständige Summe:

$$\sum_i^{2n} \{u_i, u_i\} [u_i, u_j] = \frac{\partial u_j}{\partial u_i} = \delta_{ij},$$

womit der Beweis vollständig ist.

Wir bemerken, daß das besondere Koordinatensystem q, p , das bei dieser Ableitung verwendet wurde, völlig unwesentlich war; irgendein Satz von $2n$ unabhängigen Variablen Q, P hätte ebensogut dazu dienen können. Demnach ist Gl. (8-44) invariant gegenüber *allen* Transformationen der Koordinaten, ohne Beschränkung auf kanonische Koordinaten. Dieser Satz kann deshalb dazu verwendet werden, bestimmte POISSON-Klammern zu berechnen, ohne einen besonderen Koordinatensatz festzulegen. Für die $2n$ unabhängigen Funktionen u_i wollen wir den Satz $q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n$ wählen und weiterhin u_i gleich q_i und u_{i+n} gleich p_i setzen. Da u_i eine Koordinate und u_{i+n} ein Impuls sind, können die zwei Funktionen für irgendeinen Wert von i oder j niemals identisch sein, und Gl. (8-44) wird

$$\sum_i^n \{p_i, q_i\} [p_i, p_j] + \sum_i^n \{q_i, q_i\} [q_i, p_j] = 0.$$

Da

$$\{p_i, q_i\} = -\delta_{ii} \quad \text{und} \quad \{q_i, q_i\} = 0$$

für alle *kanonischen* Koordinaten gilt, folgt

$$[p_i, p_j] = 0,$$

(8-47a)



das gleichermaßen für alle kanonischen Koordinaten gelten muß. Ähnlich verschwindet die POISSONSche Klammer von q_i und q_j :

$$[q_i, q_j] = 0. \quad (8-47b)$$

Ist schließlich $u_i = q_i$ und $u_j = q_j$, so nimmt die Summation (8-44) die Form an:

$$\sum_l^n \{q_l, q_i\} [q_l, q_j] + \sum_l^n \{p_l, q_i\} [p_l, q_j] = \delta_{ij}.$$

Das reduziert sich auf

$$-\sum_l \delta_{il} [p_l, q_j] = \delta_{ij}$$

oder

$$[q_i, p_j] = \delta_{ij}. \quad (8-47c)$$

Die Gl. (8-47) bilden die *fundamentalen POISSONSchen Klammer-Beziehungen* in Analogie zu den entsprechenden Gleichungen (8-41) für die LAGRANGESchen Klammern. Man könnte einwenden, daß diese Beziehungen mit weniger Mühe hätten direkt abgeleitet werden können, wie es für die LAGRANGESchen Klammern getan wurde. Das wesentliche der Berechnung bestand jedoch darin, die fundamentalen POISSONSchen Klammern *ohne Bezug auf irgendeinen besonderen Satz kanonischer Variablen* zu berechnen. Die Bedeutung des Beweises liegt darin, daß er die kanonische *Invarianz* der Gl. (8-47) zeigt.

Die fundamentalen POISSON-Klammern sind tatsächlich grundlegend; mit ihrer Hilfe kann man zeigen, daß die Werte aller POISSONSchen Klammern unabhängig von dem Satz kanonischer Koordinaten sind, durch den sie ausgedrückt werden. Sind F und G zwei beliebige Funktionen, so ist deren POISSONSche Klammer bezüglich des Satzes q, p

$$[F, G]_{q,p} = \sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial G}{\partial q_j} \right). \quad (8-48)$$

Betrachtet man q_j und p_j als Funktionen des transformierten Variablen-satzes Q_k, P_k , dann kann Gl. (8-48) geschrieben werden:

$$[F, G]_{q,p} = \sum_{j,k} \left[\frac{\partial F}{\partial q_j} \left(\frac{\partial G}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial p_j} + \frac{\partial G}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial p_j} \right) - \frac{\partial F}{\partial p_j} \left(\frac{\partial G}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} + \frac{\partial G}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial q_j} \right) \right].$$

Nach einer Umordnung der Terme reduziert sich das auf

$$[F, G]_{q,p} = \sum_k \left(\frac{\partial G}{\partial Q_k} [F, Q_k]_{q,p} + \frac{\partial G}{\partial P_k} [F, P_k]_{q,p} \right). \quad (8-49)$$



Gl. (8-49) selbst kann dazu verwendet werden, die in der Klammer auftretenden Poissonschen Klammern zu berechnen. Substituieren wir Q_k für F und ersetzen G durch das Symbol F , dann wird Gl. (8-49)

$$[Q_k, F]_{q,p} = \sum_j \frac{\partial F}{\partial Q_j} [Q_k, Q_j] + \sum_j \frac{\partial F}{\partial P_j} [Q_k, P_j]. \quad (8-50)$$

Die Indizes an den Poisson-Klammern auf der rechten Seite wurden weggelassen, da diese fundamentale Poisson-Klammern sind, von denen bereits gesagt wurde, daß sie invariant sind. Infolge (8-47) reduziert sich Gl. (8-50) auf

$$[Q_k, F]_{q,p} = \sum_j \frac{\partial F}{\partial P_j} \delta_{jk}$$

oder

$$[F, Q_k] = - \frac{\partial F}{\partial P_k}. \quad (8-51)$$

Das ist ein nützliches, kanonisch invariantes Resultat. Auf ähnliche Weise findet man die andere Poissonsche Klammer aus der Gleichung

$$[P_k, F]_{q,p} = \sum_j \frac{\partial F}{\partial Q_j} [P_k, Q_j] + \sum_j \frac{\partial F}{\partial P_j} [P_k, P_j].$$

Sie führt auf

$$[F, P_k] = \frac{\partial F}{\partial Q_k}. \quad (8-52)$$

Setzt man die Beziehungen (8-51) und (8-52) ein, so wird Gl. (8-49):

$$[F, G]_{q,p} = \sum_k \left(\frac{\partial F}{\partial Q_k} \frac{\partial G}{\partial P_k} - \frac{\partial F}{\partial P_k} \frac{\partial G}{\partial Q_k} \right) = [F, G]_{q,p}.$$

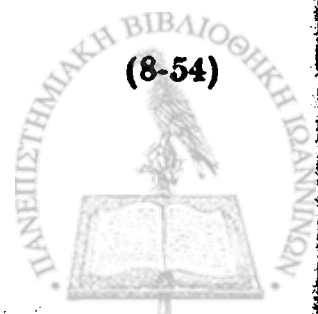
Dementsprechend werden von nun an die Indizes an allen Poissonschen Klammern weggelassen.

Einige einfache algebraische Eigenschaften der Poisson-Klammern sollen hier für den späteren Gebrauch zusammengestellt werden. Nach der Definition (8-42) ist klar, daß die Poisson-Klammer einer Funktion mit sich selbst identisch Null ist:

$$[u, u] = 0. \quad (8-53)$$

Ebenso muß die Poissonsche Klammer von u mit einer Größe c , die weder von q noch von p abhängt, verschwinden:

$$[u, c] = 0. \quad (8-54)$$



Aus den elementaren Eigenschaften der Differentiation folgt

und
$$[u + v, w] = [u, w] + [v, w] \quad (8-55)$$

$$[u, vw] = [u, v]w + v[u, w].^5 \quad (8-56)$$

8-5 Formulierung der Bewegungsgleichungen mit Poissonschen Klammern

Wird als Funktion F in den Gl. (8-51) und (8-52) die HAMILTON-Funktion gewählt, dann lauten die Gleichungen

$$[q_i, H] = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad (8-57a)$$

und

$$[p_i, H] = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i. \quad (8-57b)$$

Diese zwei Beziehungen bilden die kanonischen Bewegungsgleichungen, dargestellt durch Poissonsche Klammern; sie sind spezielle Fälle einer allgemeinen Beziehung für die totale zeitliche Ableitung einer Funktion $u(q, p, t)$. Mathematisch ist die totale zeitliche Ableitung definiert durch

$$\frac{du}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial u}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Drücken wir \dot{q}_i und \dot{p}_i durch die HAMILTON-Funktion mittels der Bewegungsgleichungen aus, so können wir schreiben:

oder
$$\frac{du}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{du}{dt} = [u, H] + \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (8-58)$$

⁵ Verlassen wir für einen Augenblick das Gebiet der klassischen Physik, so kann festgestellt werden, daß die POISSON-Klammer der klassischen Mechanik in der Quantenmechanik dem Ausdruck $\frac{2\pi}{ih}$ mal dem Kommutator der zwei Größen entspricht:

$$[u, v] \rightarrow \frac{2\pi}{ih} (uv - vu).$$

Darin ist h die PLANCKSche Konstante. Es läßt sich leicht nachweisen, daß die algebraischen Beziehungen (8-53 bis 8-56) ebensogut für die Kommutatoren gelten.



Die Gl. (8-57) folgen offensichtlich aus dieser Beziehung, wenn u durch q_i bzw. p_i ersetzt wird. Ein anderes bekanntes Ergebnis erhält man, wenn u die HAMILTON-Funktion selbst ist, denn aus (8-53) folgt dann

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Das ist identisch mit der früher gefundenen Gl. (7-19).

Für Systeme, in denen t in den interessierenden Größen nicht explizit auftritt (und wir wollen unsere weiteren Diskussionen allein auf solche Systeme beschränken), ist die totale zeitliche Ableitung einfach die POISSON-Klammer mit H . Alle Funktionen, deren POISSON-Klammern mit der HAMILTON-Funktion verschwinden, sind daher Konstanten der Bewegung. Umgekehrt müssen die POISSON-Klammern aller Konstanten der Bewegung mit H Null sein. Wir haben damit ein allgemeines Verfahren gewonnen, die Konstanten des Systems zu ermitteln und zu identifizieren.

Sind erst einmal zwei Konstanten der Bewegung bekannt, dann ist es möglich, andere Konstanten mittels der JACOBISCHEN Identität zu konstruieren. Diese behauptet, daß dann, wenn u , v und w drei Funktionen von q und p sind, gilt

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0. \quad (8-59)$$

Der Beweis dieser Beziehung beruht auf einer Untersuchung der Form der ersten zwei Terme auf der linken Seite in Gl. (8-59):

$$[u, [v, w]] - [v, [u, w]]. \quad (8-60)$$

Wir werden zeigen, daß diese Terme zusammen keine zweite Ableitung von w enthalten. Die POISSON-Klammer $[v, w]$ kann als linearer Differentialoperator D_v angesehen werden, der auf w wirkt, wobei D_v die allgemeine Form hat:

$$D_v = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial v}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial p_k} - \frac{\partial v}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q_k} \right).$$

Man kann D_v auch darstellen durch

$$D_v = \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}$$

Mit Hilfe der so definierten Differentialoperatoren kann der Ausdruck (8-60) geschrieben werden:

$$D_u D_v w - D_v D_u w = \sum_{i,k} \beta_i \frac{\partial}{\partial \eta_i} \left(\alpha_k \frac{\partial w}{\partial \xi_k} \right) - \alpha_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\beta_i \frac{\partial w}{\partial \eta_i} \right).$$



Nun sind die einzigen Terme in diesem Ausdruck, die die zweiten Ableitungen von w enthalten,

$$\sum_{i,k} \left(\beta_i \alpha_k \frac{\partial^2 w}{\partial \eta_i \partial \xi_k} - \alpha_k \beta_i \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_k \partial \eta_i} \right).$$

Dies verschwindet identisch. Demnach kann Gl. (8-60) nur erste Ableitungen von w enthalten und muß die Form haben:

$$[u, [v, w]] - [v, [u, w]] = \sum_k \left(A_k \frac{\partial w}{\partial p_k} + B_k \frac{\partial w}{\partial q_k} \right). \quad (8-61)$$

Darin sind A_k und B_k noch zu bestimmende Funktionen von u und v . Sie enthalten w aber nicht. Betrachten wir den besonderen Fall $w = p_i$ (das ändert weder A noch B), dann reduziert sich (8-61) auf:

$$[u, [v, p_i]] - [v, [u, p_i]] = A_i,$$

oder wegen (8-52):

$$\left[u, \frac{\partial v}{\partial q_i} \right] + \left[\frac{\partial u}{\partial q_i}, v \right] = A_i,$$

so daß schließlich gilt $A_i = \frac{\partial}{\partial q_i} [u, v]$.

Ähnlich findet man, wenn man $w = q_i$ setzt,

$$B_i = - \frac{\partial [u, v]}{\partial p_i},$$

und Gl. (8-61) kann geschrieben werden:

$$\begin{aligned} [u, [v, w]] + [v, [w, u]] &= \sum_k \left(\frac{\partial [u, v]}{\partial q_k} \frac{\partial w}{\partial p_k} - \frac{\partial [u, v]}{\partial p_k} \frac{\partial w}{\partial q_k} \right) \\ &= [[u, v], w]. \end{aligned}$$

Das ist identisch mit der JACOBISCHEN Identität (8-59). Sind u und v zwei Konstanten der Bewegung und wird für w die HAMILTON-Funktion gesetzt, dann verschwinden die ersten beiden Terme in der Identität, und die Beziehung reduziert sich auf

$$[H, [u, v]] = 0.$$

Demnach ist die POISSONSCHKE Klammer zweier Konstanten der Bewegung selbst eine Konstante der Bewegung.⁶ Es ist mitunter möglich,

⁶ Dieses Ergebnis wird verschiedentlich als POISSONSCHER Satz bezeichnet.



auf diese Weise eine vollständige Folge von Konstanten der Bewegung zu konstruieren. Jedoch allzuoft erweisen sich die so erhaltenen Konstanten der Bewegung als triviale Funktionen der alten und sind deshalb eine geringe Hilfe.

8-6 Infinitesimale Kontakttransformationen, Konstanten der Bewegung und Symmetrieeigenschaften

Weitere Eigenschaften der POISSON-Klammer zeigen sich, wenn man den Begriff der *infinitesimalen Kontakttransformationen* einführt. Wie im Falle der infinitesimalen Drehungen hat eine solche Transformation die Eigenschaft, daß sich die neuen Koordinaten von den alten nur durch infinitesimale Größen unterscheiden. Nur Terme ersten Grades in diesen infinitesimalen Größen werden in allen Rechnungen berücksichtigt. Die Transformationsgleichungen können daher in folgender Form geschrieben werden:

$$Q_i = q_i + \delta q_i, \quad (8-62a)$$

$$P_i = p_i + \delta p_i. \quad (8-62b)$$

Darin stellen δq_i und δp_i keine virtuellen Verrückungen dar, sondern sind einfach die infinitesimalen Änderungen der Koordinaten und Impulse. Selbstverständlich wird sich die erzeugende Funktion nur durch einen infinitesimalen Betrag von der Erzeugenden für die identische Transformation unterscheiden, die durch Gl. (8-18) gegeben ist. Man kann deshalb die Erzeugende schreiben:

$$F_2 = \sum_i q_i P_i + \epsilon G(q, P), \quad (8-63)$$

wobei ϵ ein infinitesimaler Transformationsparameter ist. Die Transformationsgleichungen für die neuen Impulse P_i findet man nach den Gl. (8-11a):

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i = P_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}$$

oder

$$P_i - p_i = \delta p_i = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \quad (8-64a)$$

Ähnlich erhält man die Transformationsgleichungen für Q_i aus den Gl. (8-11b):

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_i}$$



Da der zweite Term bereits linear in ϵ ist und P sich von p nur durch eine infinitesimale Größe unterscheidet, wird es in erster Näherung richtig sein, in der Ableitung P_i durch p_i zu ersetzen. G wird dann als Funktion allein von q, p betrachtet. Folglich lautet die Transformationsgleichung für Q_i :

$$\delta q_i = \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_i} \quad (8-64b)$$

Obgleich genau genommen der Begriff „Erzeugende“ auf die Größe F beschränkt ist, ist es gebräuchlich, auch G so zu bezeichnen; wir wollen uns dem anschließen.

Eine interessante Anwendung dieser Ergebnisse erhält man, wenn man eine infinitesimale kanonische Transformation betrachtet, bei der $G = H(q, p)$ gilt, und in der ϵ ein kleines Zeitintervall dt ist. Die entsprechenden infinitesimalen Änderungen der Koordinaten und Impulse sind dann

$$\delta q_i = dt \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i dt = dq_i \quad (8-65a)$$

und

$$\delta p_i = -dt \frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i dt = dp_i \quad (8-65b)$$

Diese Gleichungen besagen, daß die Transformation die Koordinaten und Impulse zur Zeit t auf die Werte bringt, die sie zur Zeit $t + dt$ haben. Somit kann die Bewegung des Systems in einem Zeitintervall dt durch eine infinitesimale Kontakttransformation beschrieben werden, die durch die HAMILTON-Funktion erzeugt wird. Dementsprechend wird die Systembewegung in einem endlichen Zeitintervall von t_0 bis t durch eine Folge infinitesimaler Kontakttransformationen dargestellt. Da das Ergebnis zweier nacheinander ausgeführter kanonischer Transformationen einer einzigen kanonischen Transformation äquivalent ist, können die Werte von q und p zu einer Zeit t aus ihren Anfangswerten durch eine kanonische Transformation erhalten werden, die eine kontinuierliche Funktion der Zeit ist. Unter diesem Gesichtspunkt entspricht die Bewegung eines mechanischen Systems der kontinuierlichen Entwicklung oder Entfaltung einer kanonischen Transformation. In einem sehr buchstäblichen Sinne ist die HAMILTON-Funktion die Erzeugende der Systembewegung in der Zeit.

Umgekehrt muß es eine kanonische Transformation von den Werten der Koordinaten und Impulse zu einer Zeit t nach deren konstanten Anfangswerten geben. Eine solche Transformation zu gewinnen, ist



offensichtlich dem Lösen des Problems der Systembewegung äquivalent. Am Beginn dieses Kapitels wurde darauf hingewiesen, daß ein mechanisches Problem darauf zurückgeführt werden kann, diejenige kanonische Transformation zu finden, für die alle Impulse Konstanten der Bewegung sind. Die hier angestellten Überlegungen weisen auf die Möglichkeit einer Lösung mittels der kanonischen Transformation hin, für die die Impulse *und* die Koordinaten Konstanten der Bewegung sind. Diese zwei Hinweise sollen im nächsten Kapitel bearbeitet werden. Wir werden dort zeigen, wie man formale Lösungen für irgendein mechanisches Problem erhalten kann.

Ein wichtiger Zusammenhang zwischen infinitesimalen Kontakttransformationen und POISSON-Klammern wird aufgedeckt, wenn man die Änderung einer Funktion $u(q, p)$ als Ergebnis der Transformation betrachtet. Es ist notwendig, sorgfältig zu klären, was mit der „Änderung“ der Funktion gemeint ist. In den vorhergehenden Diskussionen wurde eine Größe $u(q, p)$ auf neue Koordinaten „transformiert“, indem man die Argumente q und p als Funktionen der neuen Q und P ansah: $q(Q, P)$ und $p(Q, P)$. Man substituierte diese in u , um seine Abhängigkeit von den neuen Variablen zu erhalten. Nach der Variablenänderung wird die *funktionale* Abhängigkeit u von Q und P im allgemeinen nicht gleich der früheren Abhängigkeit von q und p sein. Andererseits bleibt der numerische Wert für eine gegebene Systemkonfiguration durch die Transformation unbeeinflusst. Die Funktion $u(q, p)$ ist eine „Punkt“-Funktion im Phasenraum, und ihr Wert an einem gegebenen Punkt im Phasenraum wird offensichtlich durch eine Transformation der Koordinatenachsen des Raumes nicht verändert. Die jetzt zu diskutierende „Änderung“ ist ganz anderer Natur. Hier meinen wir die Änderung von u als Ergebnis der Substitutionen Q für q und P für p überall in der Funktion. Bei einer solchen Änderung bleibt die Abhängigkeit u von den neuen und alten Variablen dieselbe. Die Wirkung der Transformation besteht darin, daß sie den Punkt, an dem die Funktion zu bestimmen ist, im Phasenraum verschiebt. Wenn deshalb die infinitesimale kanonische Transformation durch die HAMILTON-Funktion erzeugt wird, so besteht das Ergebnis der Substitution der alten Variablen durch die neuen darin, u von seinem Wert zur Zeit t auf den Wert zu ändern, den u zur späteren Zeit $t + dt$ hat.

Entsprechend dieser Bedeutung ist die Änderung einer Funktion u als Ergebnis einer infinitesimalen kanonischen Transformation:

$$\delta u = u(q_i + \delta q_i, p_i + \delta p_i) - u(q_i, p_i).$$

Eine Entwicklung in eine TAYLOR-Reihe bis zur ersten Ordnung in den infinitesimalen Parametern gibt für die Differenz:



$$\delta u = \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial u}{\partial p_i} \delta p_i \right)$$

Wegen der Transformationsgleichungen (8-64) kann für δu auch geschrieben werden:

$$\delta u = \epsilon \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right)$$

oder schließlich

$$\delta u = \epsilon [u, G]. \quad (8-66)$$

Folglich ist die Änderung der HAMILTON-Funktion bei einer infinitesimalen kanonischen Transformation

$$\delta H = \epsilon [H, G]. \quad (8-67)$$

Es wurde bereits gezeigt, daß dann, wenn eine Funktion $G(q, p)$ eine Konstante der Bewegung ist, ihre POISSON-Klammer mit H verschwindet. Gl. (8-67) besagt deshalb, daß eine solche Konstante eine infinitesimale kanonische Transformation erzeugt, die den Wert der HAMILTON-Funktion nicht ändert: *die Konstanten der Bewegung sind die Erzeugenden derjenigen infinitesimalen kanonischen Transformationen, die die HAMILTON-Funktion invariant lassen.* Nun bestimmen die Symmetrieeigenschaften des Systems, welche Transformationen den Wert von H nicht ändern. Ist das physikalische System bezüglich einer gegebenen Operation symmetrisch, so muß die HAMILTON-Funktion durch die entsprechende Transformation offenbar unbeeinflusst bleiben. Man kann deshalb alle Konstanten der Bewegung bestimmen (was gleichbedeutend mit der Lösung des Problems ist), indem man die Symmetrieeigenschaften der HAMILTON-Funktion untersucht! Das ist nicht das erste Beispiel für den Zusammenhang zwischen Erhaltungsgrößen und Symmetrieeigenschaften. Wir begegneten ihm früher (Abschn. 2-6), als wir die Erhaltung der generalisierten Impulse behandelten. Hier ist jedoch die Aussage eleganter und auch vollständiger, denn sie umfaßt alle Konstanten der Bewegung und nicht nur die Erhaltung der generalisierten Impulse.

Die Impulserhaltungssätze erscheinen nun als ein spezieller Fall der allgemeinen Aussage. Ist eine Koordinate q_i zyklisch, so wird die HAMILTON-Funktion von q_i unabhängig und sicher invariant sein gegenüber einer infinitesimalen Kontakttransformation, die allein eine Auslenkung in q_i enthält. Die Transformationsgleichungen hätten dann die Form

$$\begin{aligned} \delta q_i &= \epsilon \delta_{ij}, \\ \delta p_j &= 0, \end{aligned} \quad (8-68)$$



wobei ϵ die infinitesimale Auslenkung von q_i ist. Wegen der Gl. (8-64) sieht man, daß die einzige Erzeugende, die eine solche Transformation hervorruft,

$$G = p_i \quad (8-69)$$

ist, nämlich der zu q_i konjugierte Impuls. Wir erkennen darin leicht den bekannten Impulserhaltungssatz: ist eine Koordinate zyklisch, so ist ihr konjugierter Impuls eine Konstante der Bewegung.

Zur Illustration dieser Begriffe betrachten wir die infinitesimale Kontakttransformation der dynamischen Variablen, die eine Drehung des Gesamtsystems um einen Winkel $d\theta$ hervorruft. Die physikalische Bedeutung der entsprechenden Erzeugenden kann nicht von der anfangs getroffenen Wahl der kanonischen Koordinaten abhängen, und es ist bequem, zu diesem Zweck für alle Teilchen im System cartesische Koordinaten zu verwenden. Es bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn die Achsen so orientiert sind, daß die infinitesimale Drehung um die z -Achse erfolgt. Wird jedes Teilchen um den Winkel $d\theta$ gedreht, so ist die Änderung der Teilchenkoordinaten der Änderung äquivalent, die dadurch erzeugt wird, daß das System festgehalten wird und die Koordinatenachsen um einen Winkel $-d\theta$ gedreht werden. Die sich ergebenden neuen Koordinaten (vgl. Gl. (4-90)) sind bis auf Glieder höherer Ordnung in $d\theta$:

$$\begin{aligned} X_i &= x_i - y_i d\theta, \\ Y_i &= y_i + x_i d\theta, \\ Z_i &= z_i. \end{aligned}$$

Die infinitesimale Koordinatenänderung ist dann

$$\delta x_i = -y_i d\theta, \quad \delta y_i = x_i d\theta, \quad \delta z_i = 0. \quad (8-70)$$

Es gibt ähnliche Gleichungen für die Impulskomponenten, da sie sich bei Drehungen in gleicher Weise wie die Ortskomponenten transformieren. Durch Vergleich der Gl. (8-70) mit den Transformationsgleichungen (8-64) wird die entsprechende Erzeugende:

$$G = \sum_i (x_i p_{iy} - y_i p_{ix}). \quad (8-71)$$

Dabei ist $d\theta$ der infinitesimale Parameter ϵ . Eine direkte Prüfung zeigt, daß

$$\begin{aligned} \delta x_i &= d\theta \frac{\partial G}{\partial p_{ix}} = -y_i d\theta, & \delta p_{ix} &= -d\theta \frac{\partial G}{\partial x_i} = -p_{iy} d\theta, \\ \delta y_i &= d\theta \frac{\partial G}{\partial p_{iy}} = x_i d\theta, & \delta p_{iy} &= -d\theta \frac{\partial G}{\partial y_i} = p_{ix} d\theta, \end{aligned}$$



in Übereinstimmung mit Gl. (8-70). Die Erzeugende (8-71) hat zudem die physikalische Bedeutung der z -Komponente des totalen Drehimpulses:

$$G = L_z.$$

Da die z -Achse willkürlich gewählt war, kann man feststellen, daß die Erzeugende, die einer infinitesimalen Drehung um eine durch den Einheitsvektor \mathbf{n} bezeichnete Achse entspricht,

$$G = \mathbf{L} \cdot \mathbf{n} \quad (8-72)$$

ist. Gerade so, wie die HAMILTON-Funktion eine Auslenkung des Systems in der Zeit erzeugt, so erzeugt der Drehimpuls die Drehbewegung des Systems.

Die gleiche Feststellung folgt natürlich direkt und vielleicht Bündiger aus dem allgemeinen durch Gl. (8-69) gegebenen Resultat. Wird als eine der kanonischen Koordinaten ein Winkel gewählt, der die Drehung des Gesamtsystems kennzeichnet, dann ist der entsprechende kanonische Impuls (vgl. Abschn. 2-6) die Komponente des Drehimpulses längs der Drehachse. Somit wird Gl. (8-72) ein spezieller Fall der Gl. (8-69).

8-7 Die Poissonschen Klammerbeziehungen für den Drehimpuls

Aus der Tatsache, daß der Drehimpuls mit der Erzeugenden der Drehung identisch ist, ergibt sich eine Anzahl sehr interessanter und wichtiger Beziehungen für die Poissonschen Klammern. Entsprechend Gl. (8-66) ist die Änderung einer Vektorfunktion $\mathbf{F}(q, p)$ bei einer infinitesimalen Drehung des Systems gegeben durch

$$\delta \mathbf{F} = d\theta[\mathbf{F}, \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}]. \quad (8-73)$$

Die besondere, hier verwendete Bedeutung der „Änderung einer Funktion“ muß man sich stets vor Augen halten. Natürlich steht Gl. (8-73) anstelle dreier skalarer Gleichungen. Ist zum Beispiel $A(q, p)$ die x -Komponente von \mathbf{F} , dann besagt Gl. (8-73), daß

$$\delta A = A(Q, P) - A(q, p) = d\theta[A, \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}]. \quad (8-74)$$

Ähnliche Ausdrücke gelten für die y - und z -Komponenten, die mit $B(q, p)$ bzw. $C(q, p)$ bezeichnet werden sollen. Im vorigen Abschnitt hatten wir festgestellt, daß die Transformation einer skalaren Funktion $u(q, p)$ an einem Punkt im Phasenraum bei einer Koordinatentransformation einem völlig anderen Prozeß entspricht. Der Wert der Funktion bleibt derselbe, aber ihre funktionale Abhängigkeit von den



Koordinaten wird im allgemeinen geändert. Unterwirft man eine Vektorfunktion einer Transformation, die einer Drehung entspricht, so ist der Unterschied noch größer. Es ändert sich nicht nur die funktionale Abhängigkeit der Komponentenfunktionen wegen der Transformation ihrer Argumente, sondern es ändern sich die Werte der Komponenten selbst entsprechend den Dreieigenschaften des Vektors. Bei einer infinitesimalen Drehung um die z -Achse sind die ursprünglichen Komponenten von \mathbf{F} mit den neuen Komponenten durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} A(q, p) &= A'(Q, P) + B'(Q, P) d\theta, \\ B(q, p) &= B'(Q, P) - A'(Q, P) d\theta, \\ C(q, p) &= C'(Q, P) \end{aligned} \quad (8-75)$$

verknüpft. Hier deuten die Striche an den transformierten Funktionen an, daß sie andere Funktionen der neuen Argumente sind.

Wir haben diese Unterschiede ausführlich erklärt, damit man deutlich erkennen kann, unter welchen Bedingungen ein Zusammenhang besteht zwischen der gewöhnlichen Transformation eines Vektors bei einer Drehung und der in Gl. (8-74) enthaltenen „Änderung“. Es kann vorkommen, daß die Vektorfunktion \mathbf{F} die Eigenschaft hat, daß die funktionale Abhängigkeit der alten und neuen Komponenten von ihren jeweiligen Koordinaten genau die gleiche ist, d.h. für $A'(Q, P)$ kann $A(Q, P)$ geschrieben werden und entsprechendes für die anderen Komponenten. In einem solchen Falle transformieren sich die Argumente und die Komponenten gemeinsam auf eine solche Weise, daß die funktionale Abhängigkeit unverändert bleibt. Zum Beispiel ist die x -Komponente des Drehimpulses

$$L_x = \sum_i (y_i p_{iz} - z_i p_{iy}),$$

und nach der Drehung ist die X -Komponente von \mathbf{L} :

$$L_X = \sum_i (Y_i P_{iz} - Z_i P_{iy}).$$

L_X ist die gleiche Funktion von Q und P wie die Funktion L_x von q und p . Für Vektorfunktionen mit dieser Eigenschaft und nur für solche Vektoren werden die Transformationsgleichungen (8-75):

$$\begin{aligned} A(q, p) &= A(Q, P) + B(Q, P) d\theta, \\ B(q, p) &= B(Q, P) - A(Q, P) d\theta, \\ C(q, p) &= C(Q, P). \end{aligned}$$

Weiterhin kann für den Term $B(Q, P) d\theta$ bis auf infinitesimale Größen höherer Ordnung $B(q, p) d\theta$ geschrieben werden. Demnach wäre



(die durch (8-74) definierte) Änderung der Vektorkomponenten bei einer kleinen Drehung um die z -Achse:

$$\begin{aligned} A(Q, P) - A(q, p) &= \delta A = -B d\theta, \\ B(Q, P) - B(q, p) &= \delta B = A d\theta \end{aligned}$$

und

$$C(Q, P) - C(q, p) = \delta C = 0.$$

Diese Gleichungen stimmen genau mit der Änderung der Komponenten eines festgehaltenen Vektors überein, die sie durch eine z -Drehung der Koordinatenachsen um einen Winkel $-d\theta$ erfahren. Gl. (4-94) nimmt in diesem Falle die Form an:

$$d\mathbf{F} = \mathbf{k} d\theta \times \mathbf{F} = \delta\mathbf{F}.$$

Für eine allgemeine infinitesimale Drehung um eine beliebige Achse ist die Änderung $\delta\mathbf{F}$ deshalb

$$\delta\mathbf{F} = \mathbf{n} d\theta \times \mathbf{F}, \quad (8-76)$$

und wegen (8-73) folgt

$$[\mathbf{F}, \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}] = \mathbf{n} \times \mathbf{F}. \quad (8-77)$$

Obgleich wir Gl. (8-77) sorgfältig auf eine besondere Klasse von Vektorfunktionen beschränkt haben, sei bemerkt, daß die meisten in mechanischen Problemen auftretenden Vektoren die notwendigen Bedingungen erfüllen. Irgendeine Vektorfunktion von \mathbf{r} und \mathbf{p} , die keinen festen, vom System unabhängigen Vektor enthält, wird die Forderungen erfüllen. Verwendet man die Dyadenschreibweise, so kann Gl. (8-77) in allgemeinerer Form geschrieben werden:

$$[\mathbf{F}, \mathbf{L}] = -\mathbf{1} \times \mathbf{F}. \quad (8-78)$$

Darin ist $\mathbf{1}$ die Einheitsdyade $\mathbf{i}\mathbf{i} + \mathbf{j}\mathbf{j} + \mathbf{k}\mathbf{k}$. Gl. (8-78) reduziert sich sofort auf (8-77), wenn man auf beiden Seiten das Punktprodukt mit \mathbf{n} bildet. Die am besten bekannte Anwendung dieser Beziehung erhält man, wenn man \mathbf{F} gleich \mathbf{L} selbst setzt:

$$\begin{aligned} \text{oder} \quad [\mathbf{L}, \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}] &= \mathbf{n} \times \mathbf{L} \\ [\mathbf{L}, \mathbf{L}] &= -\mathbf{1} \times \mathbf{L}. \end{aligned} \quad (8-79)$$

Ein besonderer Fall der Gl. (8-79) ist die POISSON-Klammer von L_x mit L_y . Sie ist gegeben durch

$$[L_x, L_y] = (\mathbf{j} \times \mathbf{L})_x = L_z.$$



Die nichtverschwindenden Skalarkomponenten von Gl. (8-79) können deshalb geschrieben werden:

$$[L_i, L_j] = L_k, \quad \text{zyklisch in } i, j, k. \quad (8-80)$$

Aus den Gl. (8-79) und (8-80) ergeben sich eine Anzahl interessanter Folgerungen. Sind L_x und L_y Konstanten der Bewegung, so daß ihre Poisson-Klammer mit H verschwindet, so folgt dann aus dem Poissonschen Satz, daß $L_z = [L_x, L_y]$ auch eine Konstante der Bewegung ist. Sind zwei Komponenten des Drehimpulses konstant, dann bleibt der gesamte Drehimpulsvektor erhalten. Von noch größerer Tragweite ist die Beziehung

$$[L^2, \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}] = 0. \quad (8-81)$$

Zum Beweis dieser Beziehung stellen wir fest, daß die linke Seite folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$[\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}, \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}] = 2\mathbf{L} \cdot [\mathbf{L}, \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}].$$

Das ergibt wegen Gl. (8-79)

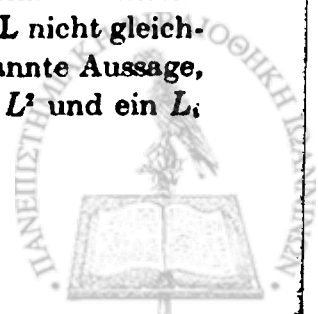
$$2\mathbf{L} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{L}) = 0.$$

Tatsächlich gelten die gleichen Argumente für irgendeinen Vektor, der Gl. (8-77) erfüllt, und wir können den allgemeinen Satz aufstellen:

$$[F^2, \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}] = 0. \quad (8-82)$$

Wir erinnern uns an Gl. (8-41b), wonach die Poisson-Klammer zweier kanonischer Impulse stets Null sein muß. Wegen (8-80) hat L_z jedoch keine verschwindende Poisson-Klammer mit einer der anderen Komponenten von \mathbf{L} . Wenn somit eine der Komponenten des Drehimpulses längs einer festen Richtung als kanonischer Impuls gewählt wird, können die zwei zu ihm senkrechten Komponenten nicht gleichzeitig kanonische Impulse sein! Dagegen können wegen (8-81) der Betrag von \mathbf{L} und irgendeine seiner Komponenten gleichzeitig kanonische Impulse sein.⁷

⁷ Es wurde früher bemerkt, daß die Korrespondenz zwischen Quantenmechanik und klassischer Mechanik darin zum Ausdruck kommt, daß die Poisson-Klammer im wesentlichen in den quantenmechanischen Kommutator übergeht. Vieles der formalen Struktur der Quantenmechanik erscheint als enge Übertragung des Formalismus der Poisson-Klammern der klassischen Mechanik: man liest das Symbol $[]$ überall als „Kommutator“ (bis auf einen konstanten Faktor). Alle Ergebnisse dieses Abschnittes haben enge quantenmechanische Analoga. Zum Beispiel die Tatsache, daß zwei Komponenten von \mathbf{L} nicht gleichzeitig kanonische Impulse sein können, erscheint als die wohlbekannteste Aussage, daß L_x und L_y nicht gleichzeitig Eigenwerte haben können. Aber L^2 und ein L_i



8-8 Der Liouvillesche Satz

Als letzte Anwendung der POISSONSchen Klammern wollen wir kurz einen fundamentalen Satz der statistischen Mechanik, den LIOUVILLEschen Satz, diskutieren. Obwohl in der klassischen Mechanik die genaue Bewegung eines Systems vollständig durch die Anfangsbedingungen bestimmt ist, ist es oft unmöglich, eine exakte Lösung für komplizierte Systeme zu berechnen. Zum Beispiel wäre es offensichtlich hoffnungslos, die Bewegung von annähernd 10^{23} Molekülen in einem Gasvolumen vollständig zu berechnen. Zudem sind die Anfangsbedingungen oft nur unvollständig bekannt. Wir können zwar feststellen, daß zur Zeit t_0 eine gegebene Masse eines Gases eine bestimmte Energie hat, aber wir können nicht die Anfangskoordinaten und -geschwindigkeiten jedes Moleküls bestimmen. Die statistische Mechanik versucht deshalb nicht, für Systeme, die viele Teilchen enthalten, eine vollständige Lösung zu gewinnen. Ihr Ziel besteht vielmehr darin, Voraussagen über bestimmte mittlere Eigenschaften zu machen, indem die Bewegung einer großen Zahl identischer Systeme untersucht wird. Die Werte der gewünschten Größen werden dann dadurch berechnet, daß man die Mittelwerte über alle Systeme in dieser *Gesamtheit* bildet. Alle Mitglieder der Gesamtheit gleichen dem tatsächlichen System so sehr, wie unsere unvollständige Kenntnis erlaubt, aber sie können irgendeiner Anfangsbedingung unterworfen sein, die mit dieser unvollständigen Kenntnis in Übereinstimmung ist. Da jedes System durch einen einzelnen Punkt im Phasenraum dargestellt wird, entspricht der Gesamtheit der Systeme ein Punktschwarm im Phasenraum. Der LIOUVILLEsche Satz behauptet, daß die Dichte der Systempunkte in der Nachbarschaft eines gegebenen Systempunktes im Phasenraum zeitlich konstant bleibt.

Die oben definierte Dichte D kann im Laufe der Zeit auf zwei verschiedene Arten variieren. Da sie die Dichte in der Nachbarschaft eines gegebenen Systempunktes ist, wird eine *implizite* Abhängigkeit

können zusammen eine gute Quantenzahl sein. Tatsächlich sind die meisten dieser Beziehungen in ihrer quantenmechanischen Form weit besser bekannt als die klassischen Sätze. So scheint einer der frühesten Hinweise auf die klassischen POISSON-Klammern für den Drehimpuls in der *Elementaren Quantenmechanik* von BORN und JORDAN aus dem Jahre 1930 zu sein. Während in ähnlicher Weise die allgemeine Änderung einer Vektorfunktion bei einer Drehung, Gl. (8-78), schon lange in der Quantenmechanik benutzt wurde (vgl. CONDON und SHORTLEY, „*The Theory of Atomic Spectra*“, S. 59), wurde meines Wissens dieser Satz für die klassische Mechanik erst in den letzten Jahren von Prof. J. SCHWINGER bewiesen.



davon bestehen, wie die Koordinaten (q_i, p_i) des Systems mit der Zeit variieren und der Systempunkt durch den Phasenraum wandert. Es kann auch eine explizite Abhängigkeit von der Zeit bestehen. Die Dichte kann noch mit der Zeit variieren, wenn sie an einem festen Punkt im Phasenraum bestimmt wird. Wegen Gl. (8-58) kann die totale zeitliche Ableitung von D entsprechend den beiden zeitlichen Variationstypen geschrieben werden:

$$\frac{dD}{dt} = [D, H] + \frac{\partial D}{\partial t}. \quad (8-83)$$

Darin rühren die POISSON-Klammer von der impliziten Abhängigkeit und der letzte Term von der expliziten Abhängigkeit her.

Betrachten wir ein infinitesimales Volumen im Phasenraum, das einen gegebenen Systempunkt umgibt. Die Grenzen des Volumens

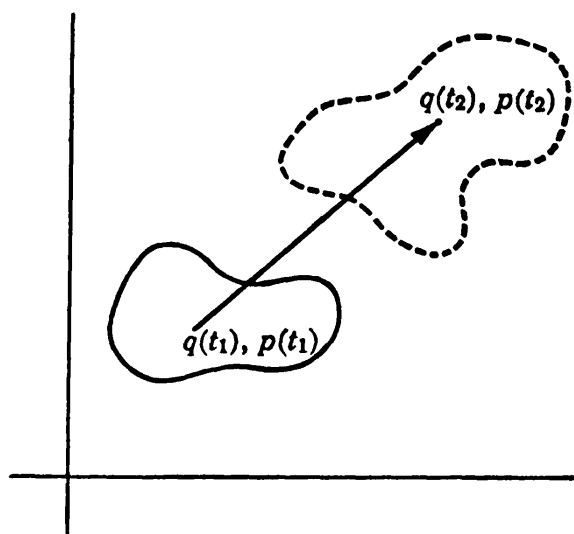


Abb. 8-1. Bewegung eines Volumens im Phasenraum.

werden durch eine Fläche aus benachbarten Systempunkten zur Zeit $t = 0$ gebildet. Im Laufe der Zeit bewegen sich die das Volumen definierenden Systempunkte durch den Phasenraum; und das Volumen wird im Laufe der Zeit verschiedene Gestalten annehmen. Die punktierte Kurve in Abb. 8-1 deutet schematisch die Veränderung des infinitesimalen Volumens im Laufe der Zeit an. Es ist klar, daß die Anzahl der Systeme innerhalb des Volumens konstant bleibt, denn ein System, das anfangs

innerhalb war, kann niemals hinausgelangen. Wollte ein System den Volumenrand passieren, so würde er zu einer gewissen Zeit die gleiche Lage im Phasenraum einnehmen wie einer der Systempunkte, die die Umgrenzungsfläche definieren. Da der Ablauf der Bewegung eines Systems eindeutig durch seine Lage im Phasenraum zu einer bestimmten Zeit definiert ist, würden die zwei Systeme von nun an gemeinsam wandern. Demnach kann das System niemals das Volumen verlassen. Aus denselben Gründen kann ein System, das sich anfangs außerhalb befand, niemals in das Volumen hineingelangen.

Es war gezeigt worden, daß die zeitliche Bewegung eines Systempunktes einfach eine besondere Kontakttransformation der kanonischen Koordinaten im Phasenraum ist. Folglich kann die zeitliche



Änderung des in Betracht kommenden infinitesimalen Gebietes durch eine Kontakttransformation dargestellt werden. Nun besagt eine der POINCARÉschen Integralinvarianten, daß das Volumen eines Gebietes des Phasenraumes bei Kontakttransformationen invariant bleibt. Die Größe des Volumens kann sich deshalb im Laufe der Zeit nicht ändern.

Somit sind sowohl die Anzahl der Systeme dN in dem infinitesimalen Gebiet als auch das Volumen dV Konstanten, und folglich muß die Dichte

$$D = \frac{dN}{dV}$$

ebenfalls zeitlich konstant sein, d.h.

$$\frac{dD}{dt} = 0.$$

Damit ist der LIOUVILLESche Satz bewiesen. Eine andere Aussage des Satzes folgt aus Gl. (8-83):

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -[D, H]. \quad (8-84)$$

Befindet sich die Gesamtheit der Systeme im statistischen Gleichgewicht, so muß die Anzahl der Systeme, die in einem gegebenen Zustand sind, zeitlich konstant sein, d.h., daß sich die Dichte der Systempunkte an einer gegebenen Stelle im Phasenraum zeitlich nicht ändert. Die Variation von D mit der Zeit an einem festen Punkt entspricht der partiellen Ableitung nach t ; sie muß deshalb im statistischen Gleichgewicht verschwinden. Aus Gl. (8-84) folgt, daß die Gleichgewichtsbedingung durch

$$[D, H] = 0$$

ausgedrückt werden kann. Wir können uns deshalb des Gleichgewichtes versichern, indem wir die Dichte D so wählen, daß sie eine Funktion von Konstanten der Bewegung des Systems ist, denn dann muß die POISSON-Klammer mit H verschwinden. Für konservative Systeme kann D irgendeine Funktion der Energie sein, und die Gleichgewichtsbedingung ist automatisch erfüllt. Die Eigenschaften der Gesamtheit werden durch die Wahl der Funktion für D bestimmt. Zum Beispiel liegt eine wohlbekannte Gesamtheit, die *mikrokanonische* Gesamtheit vor, wenn D für Systeme, die eine gegebene Energie haben, konstant ist, sonst aber verschwindet.

Diese Betrachtungen wurden hier dargelegt, um die Nützlichkeit des Formalismus der POISSONSchen Klammern in der statistischen Mechanik zu illustrieren. Weitere Diskussionen über diese Punkte würden uns zu weit führen.



LITERATURHINWEISE

- L. NORDHEIM und E. FUES, *Die Hamilton-Jacobische Theorie der Dynamik*, in Bd. V des Handbuches der Physik. Obwohl es keine einzelne Darstellung gibt, die allen Stoff dieses Kapitels umfaßt, kommt der Artikel von NORDHEIM und FUES dem noch am nächsten. Der Artikel behandelt kurz die kanonischen Transformationen und die POISSON-Klammern und ist zweifellos die beste verfügbare Übersicht über diese Gegenstände. Trotz des Titels wird die HAMILTON-JACOBISCHE Theorie (vgl. IX. Kapitel) nur in den letzten Abschnitten behandelt.
- E. T. WHITTAKER, *Analytical Dynamics*. Viel von dem Stoff im Artikel von NORDHEIM und FUES wird auch von WHITTAKER in den Kapiteln IX und X diskutiert, mehr vom mathematischen Standpunkt, und es ist interessant, beide Abhandlungen gegenüberzustellen. Es sei bemerkt, daß nur diese Transformationen diskutiert werden, deren erzeugende Funktion die Zeit nicht explizit enthält.
- M. BORN, *Die Mechanik des Atoms*. Der Gegenstand der kanonischen Transformationen der klassischen Mechanik spielte eine wichtige Rolle bei den ersten Formulierungen sowohl der älteren BOHRschen Quantentheorie als auch der neueren Quantenmechanik. So enthalten viele Abhandlungen, die ausdrücklich der einen oder der anderen dieser Formen der Quantenmechanik gewidmet sind, oftmals ausführliche Übersichten über die benötigten Gebiete der klassischen Mechanik. Aus diesen ragt der 1924 geschriebene Band von BORN hervor, der vor der Begründung der Wellenmechanik entstand. Im ersten Kapitel werden die kanonischen Transformationen mit vielen interessanten physikalischen Erläuterungen kurz diskutiert. Die POISSON-Klammern werden nicht erwähnt, denn diese wurden für den modernen Physiker erst mit dem Entstehen der HEISENBERGSchen und DIRACschen Formulierung der Quantenmechanik besonders interessant.
- M. BORN und P. JORDAN, *Elementare Quantenmechanik*. In dem Vorwort zu seinem 1924 erschienenen Buch gesteht BORN die Unzulänglichkeiten der damals bestehenden Quantentheorie ein und stellt fest, daß die Schwierigkeiten wahrscheinlich nur durch eine radikale Überarbeitung der fundamentalen Prinzipien bewältigt werden können (eine Situation, die dem heutigen Gefühl der Enttäuschung in der Theorie der Kernkräfte sehr ähnlich ist). Er kündigte an, dieser Revision der Quantentheorie, sobald sie erschiene, wenn sie überhaupt käme, einen weiteren Band zu widmen. BORNs Voraussagen der nachfolgenden Entwicklungen erwiesen sich als bemerkenswert genau, und 1929 waren er und JORDAN in der Lage, diesen „weiteren Band“ zu veröffentlichen. Wie in der früheren Abhandlung hielten sie es für notwendig, einigen Raum der klassischen Mechanik zu widmen; zu dieser Zeit bildete die Formulierung mit POISSON-Klammern den interessantesten Aspekt der Mechanik. Anhang III befaßt sich mit diesem Thema und enthält unter anderem die POISSON-Klammer-Beziehungen für den Drehimpuls.
- A. SOMMERFELD, *Atombau und Spektrallinien*. Diese klassische Abhandlung über die ältere Quantenmechanik enthält viel Interessantes über die HAMILTONschen Gleichungen und kanonischen Transformationen. Der Stoff ist verstreut über das Kapitel über das Wasserstoffatom und einige Anhänge.
- R. C. TOLMAN, *The Principles of Statistical Mechanics*. Eine wahrhafte Enzyklopädie der theoretischen Physik. Kapitel II dieses umfangreichen Bandes gibt eine kurze aber klare Diskussion der kanonischen Transformationen und



ähnlicher Themen der klassischen Mechanik. Die Eigenschaften der POISSON-Klammern werden in die Behandlung einbezogen. Abschnitt 19, Kapitel III, befaßt sich mit dem LIOUVILLESchen Satz.

C. CARATHEODORY, *Variationsrechnung*. Es ist hier nicht möglich, die weiteren mathematischen Zusammenhänge der kanonischen Transformationen zu behandeln, die besonders wichtig in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen sind. Der interessierte Leser wird in dem Buch von CARATHEODORY eine vortreffliche Einführung in diese Seite des Gegenstandes finden, mit einer Fülle von Stoff über kanonische und Berührungstransformationen und die verschiedenen Typen der Klammersausdrücke. Eine etwas kürzere Diskussion findet man in dem Kapitel über Variationsrechnung vom gleichen Autor in Bd. I von FRANK und VON MISES, *Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik*.

P. A. DIRAC, *The Principles of Quantum Mechanics*. Das Standardwerk für die Anwendung von POISSON-Klammern in der Quantenmechanik ist immer noch die Abhandlung von DIRAC. Leider hat das Buch einen beinahe legendären Ruf erworben, schwer verständlich zu sein. Für die späteren Auflagen trifft das aber nicht zu, und ein Student, der einige Vorkenntnisse über die physikalische Grundlage der Quantenmechanik hat, sollte in der Lage sein, den Stoff zu bewältigen. Die einschlägigen Angaben für dieses Kapitel findet man in den Abschnitten 25 bis 30.

ÜBUNGEN

1. Zeige direkt, daß die Transformation

$$Q = \log \left(\frac{1}{q} \sin p \right), \quad P = q \cot p$$

kanonisch ist.

2. Bei der Ableitung der Transformationsgleichungen mit Hilfe von Ausdrücken der erzeugenden Funktionen F_2 , F_3 und F_4 wurden die LEGENDRESchen Transformationen lediglich dazu verwendet, die Zusammenhänge zwischen den erzeugenden Funktionen nahezubringen. Zeige, daß die Gl. (8-11, 14 und 17) direkt aus den Gl. (8-9) abgeleitet werden können, und zwar infolge der im VII. Kapitel angeführten Eigenschaften der LEGENDRESchen Transformation.

3. Die Transformationsgleichungen zwischen zwei Koordinatensätzen seien

$$Q = \log (1 + q^{\frac{1}{2}} \cos p), \\ P = 2(1 + q^{\frac{1}{2}} \cos p)q^{\frac{1}{2}} \sin p.$$

(a) Zeige direkt mit diesen Transformationsgleichungen, daß dann, wenn q und p kanonische Variablen sind, auch Q und P kanonisch sind.

(b) Zeige, daß diese Transformation durch die folgende Funktion erzeugt wird:

$$F_3 = -(e^Q - 1)^2 \tan p.$$

4. Für welche Werte von α und β stellen die Gleichungen

$$Q = q^\alpha \cos \beta p, \quad P = q^\alpha \sin \beta p$$

eine kanonische Transformation dar? Welche Form hat die Erzeugende F_3 in diesem Fall?



5. Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einem Potentialfeld, das zylindersymmetrisch um die z -Achse ist. Ermittle die erzeugende Funktion für eine kanonische Transformation auf Koordinaten, die mit einer konstanten Frequenz ω um die z -Achse rotieren. Welche physikalische Bedeutung hat die neue HAMILTON-Funktion? Vergleiche mit dem in Übung 4, VII. Kapitel, erhaltenen Ergebnis. Leite die neuen kanonischen Bewegungsgleichungen ab und gib eine physikalische Interpretation aller in den Gleichungen auftretenden Terme.

6. Zeige, daß sich die Transformationsgleichungen, in denen t als kanonische Variable angesehen wird, auf die gewöhnlichen Gleichungen (8-11) reduzieren, wenn die Transformation keinen Einfluß auf den Zeitmaßstab hat.

7. Zeige, daß dann, wenn die kanonischen Variablen nicht alle unabhängig sind, sondern durch Nebenbedingungen der Form

$$\psi_k(q_i, p_i, t) = 0$$

verknüpft sind, die kanonischen Bewegungsgleichungen folgendermaßen geschrieben werden können:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_k \lambda_k \frac{\partial \psi_k}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_k \lambda_k \frac{\partial \psi_k}{\partial q_i} = -\dot{p}_i,$$

wobei λ_k die unbestimmten LAGRANGESchen Multiplikatoren sind. Die Formulierung der HAMILTONSchen Gleichungen mit t als eine kanonische Variable ist ein Ausnahmefall, da eine Beziehung zwischen p_{n+1} und den anderen kanonischen Variablen besteht:

$$H(q_1 \cdots q_{n+1}, p_1 \cdots p_n) + p_{n+1} = 0.$$

Weiterhin ist aus dem modifizierten HAMILTONSchen Prinzip zu erkennen, daß die „HAMILTON-Funktion“ der $2n + 2$ Variablen immer Null ist (vgl. Übung 6, VII. Kapitel). Zeige, daß infolge dieser Umstände die $2n + 2$ HAMILTONSchen Bewegungsgleichungen in dieser Formulierung auf die $2n$ gewöhnlichen HAMILTONSchen Gleichungen, auf die Gl. (7-19) und die Beziehung

$$\lambda = \frac{dt}{d\theta}$$

reduziert werden können. Beachte, daß diese Ergebnisse, obgleich sie uns bei der relativistischen kovarianten HAMILTONSchen Formulierung begegneten, hier völlig im Rahmen der nichtrelativistischen Mechanik abgeleitet wurden.

8. Zeige durch Einsetzen in Gl. (8-8), daß $\sum_i q_i Q_i$ die Vertauschungstransformation erzeugt. Zeige, daß $F_4 = \sum_i p_i P_i$ auch eine Vertauschung der Koordinaten und Impulse liefert, und daß $F_3 = -\sum_i Q_i p_i$ die identische Transformation erzeugt.

9. Zeige, daß es möglich ist, die Elemente der $2n \times 2n$ -Funktionaldeterminante einer kanonischen Transformation

$$D = \frac{\partial(Q_k, P_k)}{\partial(q_i, p_i)}$$

so umzuordnen, daß die Elemente der Determinante D^2 die fundamentalen LAGRANGE-Klammern sind, und beweise mit diesem Ergebnis, daß $D^2 = 1$ ist. (Tatsächlich kann man aus den POINCARÉSchen Integralinvarianten J_n erkennen, daß D immer gleich ± 1 ist.)



10. Beweise, daß aus den Transformationsgleichungen (8-9, 11, 14, 17) die Beziehungen für eine kanonische Transformation

$$\frac{\partial q_i}{\partial Q_k} = \frac{\partial P_k}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial q_i}{\partial P_k} = -\frac{\partial Q_k}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial Q_k} = -\frac{\partial P_k}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial P_k} = \frac{\partial Q_k}{\partial q_i}$$

folgen. Zeige so, daß zum Beispiel

$$[q_i, p_j] = \{q_i, p_i\}$$

gilt. Diese Beziehung kann für einen gesonderten Beweis der Invarianz der fundamentalen POISSON-Klammern verwendet werden. Weiterhin ist eine andere Konsequenz zu zeigen, daß nämlich die Determinante der inversen Transformation $(Q, P) \rightarrow (q, p)$, mit D^{-1} bezeichnet, gleich D ist. Das bildet einen anderen Beweis für $D^2 = 1$.

11. Eine Menge von Operatoren hat die Eigenschaft einer Gruppe, wenn (1) sie den identischen Operator enthält, (2) die Inverse zu jedem Element auch ein Element der Menge ist und (3) das Produkt von irgendzwei Operatoren auch zu der Menge gehört. Zeige, daß die kanonischen Transformationen für ein System mit n Freiheitsgraden die Eigenschaften einer Gruppe haben.

12. Im Text wurde gezeigt, daß die Invarianz der fundamentalen POISSON-Klammern eine notwendige Bedingung dafür ist, daß die Transformation kanonisch ist. Man kann auch zeigen, daß das hinreichend ist, um die kanonische Natur einer Transformation nachweisen zu können. Zeige für den besonders einfachen Fall, für den die Transformationsgleichungen die Zeit nicht explizit enthalten, daß Q, P Gleichungen der kanonischen Form befriedigen, vorausgesetzt, daß q, p kanonische Variablen sind und

$$[Q_i, Q_j]_{q,p} = 0 = [P_i, P_j]_{q,p}, \quad [Q_i, P_j]_{q,p} = \delta_{ij}$$

gilt. Am leichtesten ist der Beweis zu führen, wenn man $\frac{dQ}{dt}$ und $\frac{dP}{dt}$ als Ausdrücke der alten kanonischen Variablen berechnet.

13. Beweise, daß die POISSON-Klammer zweier Erhaltungsgrößen selbst eine Konstante der Bewegung ist, auch dann, wenn die Erhaltungsgrößen explizit von der Zeit abhängen.

14. (a) Zeige, daß dann, wenn die HAMILTON-Funktion und eine Größe F Erhaltungsgrößen sind, auch $\partial F / \partial t$ eine Konstante der Bewegung sein muß.

(b) Zur Veranschaulichung dieses Ergebnisses betrachten wir die gleichförmige Bewegung eines freien Teilchens der Masse m . Die HAMILTON-Funktion bleibt sicher erhalten, und es existiert eine Konstante der Bewegung

$$F = x - \frac{pt}{m}$$

Zeige durch direkte Berechnung, daß die Erhaltungsgröße $\frac{\partial F}{\partial t}$ mit $[H, F]$ übereinstimmt.

15. Stelle das Problem des sphärischen Pendels in der HAMILTONSchen Formulierung auf und verwende dabei sphärische Polarkoordinaten für die q_i . Löse direkt, ausgedrückt durch diese kanonischen Variablen, die folgenden POISSON-Klammern:

$$[L_x, L_y], \quad [L_y, L_z], \quad [L_x, L_z]$$

und zeige dabei, daß sie die durch Gl. (8-80) vorausgesagten Werte haben. Weshalb können p_θ und p_ψ als kanonische Impulse verwendet werden, obgleich sie zueinander senkrechte Komponenten des Drehimpulses sind?



IX. KAPITEL

DIE HAMILTON-JACOBISCHE THEORIE

Es wurde bereits erwähnt, daß die kanonischen Transformationen verwendet werden können, um ein allgemeines Verfahren zur Lösung mechanischer Probleme aufzustellen. Zwei Methoden wurden angedeutet. Bleibt die HAMILTON-Funktion erhalten, dann kann man eine Lösung dadurch gewinnen, daß man auf neue kanonische Koordinaten, die alle zyklisch sind, transformiert. Die Integration der neuen Bewegungsgleichungen wird dann trivial. Das andere Verfahren besteht darin, eine kanonische Transformation von den Koordinaten q und den Impulsen p zur Zeit t auf einen neuen Satz konstanter Größen zu suchen, die die $2n$ Anfangswerte q_0, p_0 zur Zeit $t = 0$ sein dürfen. Für eine solche Transformation sind die Transformationsgleichungen, die die alten und neuen Variablen verknüpfen, dann genau die gewünschte Lösung des mechanischen Problems:

$$\begin{aligned}q &= q(q_0, p_0, t) \\ p &= p(q_0, p_0, t),\end{aligned}$$

denn sie geben die Koordinaten und Impulse als Funktionen ihrer Anfangswerte und der Zeit. Dieses Verfahren ist das allgemeinere, besonders da es zumindest im Prinzip auch dann anwendbar ist, wenn die HAMILTON-Funktion die Zeit enthält. Wir werden deshalb unsere Diskussion mit der Betrachtung beginnen, wie eine solche Transformation gefunden werden kann.

9-1 Die Hamilton-Jacobische Gleichung für die Hamiltonsche Wirkungsfunktion

Wir können uns automatisch versichern, daß die neuen Variablen zeitlich konstant sind, indem wir fordern, daß die transformierte HAMILTON-Funktion K identisch Null sein soll, denn dann lauten die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial P_i} &= \dot{Q}_i = 0, \\ -\frac{\partial K}{\partial Q_i} &= \dot{P}_i = 0.\end{aligned}$$



K steht zur alten HAMILTON-Funktion und zur Erzeugenden in folgendem Zusammenhang:

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t}$$

und wird deshalb Null sein, wenn F die Gleichung

$$H(q, p, t) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad (9-2)$$

erfüllt. Es ist zweckmäßig, F als Funktion der alten Koordinaten q_i , der neuen konstanten Impulse P_i und der Zeit zu wählen; nach der Bezeichnungsweise im vorigen Kapitel würden wir die Erzeugende mit $F_2(q, P, t)$ bezeichnen. Um die HAMILTON-Funktion in Gl. (9-2) als Funktion der gleichen Variablen zu schreiben, verwenden wir die Transformationsgleichungen (vgl. Gl. (8-11a)):

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$$

Somit wird Gl. (9-2)

$$H\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F_2}{\partial q_n}, t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0. \quad (9-3)$$

Gl. (9-3) wird als die HAMILTON-JACOBISCHE Gleichung bezeichnet. Sie ist eine partielle Differentialgleichung in $(n + 1)$ Variablen $q_1 \dots q_n, t$ für die gewünschte Erzeugende. Gewöhnlich wird die Lösung von Gl. (9-3) mit S bezeichnet und HAMILTONSCHE Wirkungsfunktion oder Prinzipalfunktion genannt.

Natürlich liefert die Integration von Gl. (9-3) nur die Abhängigkeit von den alten Koordinaten und der Zeit; die Lösung gibt keine Auskunft darüber, in welcher Weise die neuen Impulse in S enthalten sind. Tatsächlich wurden die neuen Impulse bisher nicht spezifiziert, außer daß wir wissen, daß sie Konstanten sein müssen. Die Natur der Lösung weist jedoch darauf hin, wie die neuen P_i auszuwählen sind.

Mathematisch hat Gl. (9-3) die Form einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung in $n + 1$ Variablen. Folglich muß eine vollständige Lösung $n + 1$ unabhängige Integrationskonstanten enthalten: $\alpha_1 \dots \alpha_n, \alpha_{n+1}$. Wir stellen jedoch fest, daß S selbst nicht in Gl. (9-3) auftritt, nur ihre partiellen Ableitungen bezüglich q und t sind darin enthalten. Ist S eine Lösung der Differentialgleichung, dann muß auch $S + \alpha$, wenn α eine Konstante ist, eine Lösung sein, denn eine additive Konstante beeinflußt den Wert der partiellen Ableitungen nicht. Eine der $n + 1$ Integrationskonstanten muß deshalb eine S zugefügte



additive Konstante sein. Aus demselben Grunde ist diese Konstante hinsichtlich der Transformation unwichtig, da in den Transformationsgleichungen nur partielle Ableitungen von S auftreten. Demnach kann eine vollständige Lösung der Gl. (9-3) in folgender Form geschrieben werden:

$$S = S(q_1 \dots q_n, \alpha_1 \dots \alpha_n, t). \quad (9-4)$$

Darin ist keine der n Konstanten nur additiv. Wir werden sehen, daß diese mathematische Form mit der früher angegebenen physikalischen Beschreibung der Erzeugenden insoweit genau übereinstimmt, als Gl. (9-4) aussagt, daß S eine Funktion von n Koordinaten q_i , der Zeit t und n unabhängiger Konstanten α_i ist. Wir haben deshalb die Freiheit, für die n Integrationskonstanten die neuen (konstanten) Impulse zu nehmen:

$$P_i = \alpha_i. \quad (9-5)$$

Eine solche Wahl steht nicht im Widerspruch zu unserer ursprünglichen Behauptung, daß die neuen Impulse mit den Anfangswerten von q und p zur Zeit t_0 verknüpft sind. Die n Transformationsgl. (8-11a) können somit geschrieben werden:

$$p_i = \frac{\partial S(q_i, \alpha_i, t)}{\partial q_i}. \quad (9-6)$$

Zur Zeit t_0 bilden diese n Gleichungen Beziehungen zwischen den n α und den Anfangswerten für q und p . Wir sind somit in der Lage, die Integrationskonstanten durch die speziellen Anfangsbedingungen des Problems zu bestimmen. Die andere Hälfte der Transformationsgleichungen, die die neuen konstanten Koordinaten liefert, lautet:

$$Q_i = \beta_i = \frac{\partial S(q_i, \alpha_i, t)}{\partial \alpha_i}. \quad (9-7)$$

Die Konstanten β kann man in ähnlicher Weise aus den Anfangsbedingungen erhalten. Man berechnet einfach den Wert der rechten Seite von Gl. (9-7) für $t = t_0$ mit den bekannten Anfangswerten von q_i . Die Gl. (9-7) kann dann „umgekehrt“ werden und liefert q in Abhängigkeit von α_i , β_i und t :

$$q = q(\alpha_i, \beta_i, t). \quad (9-8)$$



Gl. (9-8) ist die Lösung des Problems. Sie gibt die Koordinaten als Funktionen der Zeit und der Anfangsbedingungen.¹

Die HAMILTONSche Wirkungsfunktion ist somit die Erzeugende einer Kontakttransformation auf konstante Koordinaten und Impulse. *Lösen wir die HAMILTON-JACOBISCHE Gleichung, so erhalten wir gleichzeitig eine Lösung des mechanischen Problems.* Mathematisch gesprochen heißt das, wir haben zwischen den $2n$ kanonischen Bewegungsgleichungen, die Differentialgleichungen erster Ordnung sind, und der HAMILTON-JACOBISCHEN Gleichung, einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, eine Äquivalenz hergestellt. Diese Korrespondenz ist nicht auf Gleichungen mit der HAMILTON-Funktion beschränkt. Tatsächlich befaßt sich die allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung weitgehend mit den Eigenschaften des äquivalenten Satzes gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung. Im wesentlichen kann der Zusammenhang auf die Tatsache zurückgeführt werden, daß sowohl die partielle Differentialgleichung als auch ihre kanonischen Gleichungen von einem gemeinsamen Variationsprinzip, in diesem Falle vom HAMILTONSchen modifizierten Prinzip, abstammen.

Bis zu einem bestimmten Maße ist die Wahl der α_i als die neuen Impulse willkürlich. Man könnte ebenso gut irgendwelche n Größen γ_i wählen, die unabhängige Funktionen der Integrationskonstanten α_i sind:

$$\gamma_i = \gamma_i(\alpha_1 \dots \alpha_n). \quad (9-9)$$

Mit Hilfe dieser Definitionsbeziehungen kann die HAMILTONSche Wirkungsfunktion als Funktion von q_i , γ_i und t geschrieben werden.

¹ Vom mathematischen Standpunkt aus kann man fragen, ob dieses Verfahren des „Umkehrens“ für die Gl. (9-6) und (9-7) ausführbar ist, d.h., ob sie nach α_i bzw. q_i aufgelöst werden können. Die Frage hängt davon ab, ob die Gleichungen in jedem Satz unabhängig sind, denn anderenfalls sind sie offensichtlich zur Bestimmung der n unabhängigen Größen α_i oder q_i nicht ausreichend. Dieser

Fall kann eintreten. Daß die Ableitungen $\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}$ in (9-7) unabhängige Funktionen der q sind, folgt unmittelbar aus der Natur der HAMILTON-JACOBISCHEN Gleichung, und gerade das meinen wir, wenn wir sagen, die n Integrationskonstanten sind unabhängig. Folglich kann die JACOBISCHE Determinante von $\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}$ nach q_i nicht verschwinden. Da die Reihenfolge der Differentiationen unwesentlich ist, ist das der Aussage gleichwertig, daß die JACOBISCHE Determinante von $\frac{\partial S}{\partial q_i}$ bezüglich α_i nicht verschwinden kann. Das beweist die Unabhängigkeit der Gl. (9-6).



Der Rest der Ableitung bleibt unverändert. Es erweist sich oft als bequem, einen besonderen Satz der γ_i als die neuen Impulse zu verwenden. Das ist oft günstiger, als die Integrationskonstanten zu benutzen, die natürlich bei der Integration der HAMILTON-JACOBISCHEN Gleichung auftreten.

Eine tiefere Einsicht in die physikalische Bedeutung von S erhält man dadurch, daß man die totale zeitliche Ableitung von S untersucht. Sie kann nach der Formel

$$\frac{dS}{dt} = \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$$

berechnet werden, da die P_i zeitlich konstant sind. Wegen Gl. (9-6) und (9-3) kann für diese Beziehung auch geschrieben werden:

$$\frac{dS}{dt} = \sum_i p_i \dot{q}_i - H = L. \quad (9-10)$$

Somit unterscheidet sich die Wirkungsfunktion von dem unbestimmten Zeitintegral über die LAGRANGE-Funktion höchstens durch eine Konstante:

$$S = \int L dt + \text{constant}. \quad (9-11)$$

Nun macht das HAMILTONSche Prinzip eine Aussage über das bestimmte Integral von L . Aus ihm erhielten wir die Lösung des Problems auf dem Wege über die LAGRANGESCHEN Gleichungen. Hier liefert das gleiche Integral in unbestimmter Form einen anderen Weg zur Lösung des Problems. Bei praktischen Rechnungen bietet das durch Gl. (9-11) ausgedrückte Ergebnis keine Hilfe, da man die LAGRANGE-Funktion bezüglich der Zeit nicht integrieren kann, wenn nicht q_i und p_i als Funktionen der Zeit bekannt sind, d.h., wenn das Problem nicht gelöst ist.²

² Historisch kam die Erkenntnis durch HAMILTON, daß das Zeitintegral über L eine spezielle Lösung einer partiellen Differentialgleichung ist, bevor man sah, wie die HAMILTON-JACOBISCHE Gleichung die Lösung eines mechanischen Problems liefern kann. Es war JACOBI, der die Richtigkeit der Umkehrung erkannte, daß nämlich vermöge der Verfahren der kanonischen Transformationen jede vollständige Lösung der HAMILTON-JACOBISCHEN Gleichung zur Beschreibung der Systembewegung verwendet werden kann.



9-2 Das Problem des harmonischen Oszillators als ein Beispiel der Hamilton-Jacobischen Methode

Um die HAMILTON-JACOBISCHE Methode zur Lösung der Bewegung mechanischer Systeme zu illustrieren, wollen wir das einfache Beispiel eines eindimensionalen harmonischen Oszillators ausführlich untersuchen. Die HAMILTON-Funktion ist

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2},$$

wobei k die Federkonstante ist. Man erhält die HAMILTON-JACOBISCHE Gleichung für S , indem man p gleich $\frac{\partial S}{\partial q}$ setzt und in der HAMILTON-Funktion substituiert; die Forderung, daß die neue HAMILTON-Funktion verschwindet, lautet:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + \frac{kq^2}{2} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (9-12)$$

Da die explizite Abhängigkeit S von t nur im letzten Term enthalten ist, kann eine Lösung für Gl. (9-12) in der Form

$$S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - \alpha t \quad (9-13)$$

gefunden werden. Darin ist α eine Integrationskonstante (sie wird später als der transformierte Impuls bezeichnet). Bei dieser Wahl der Lösung kann die Zeit aus Gl. (9-12) eliminiert werden. Diese reduziert sich dann auf

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + \frac{kq^2}{2} = \alpha. \quad (9-14)$$

Gl. (9-14) kann direkt integriert werden:

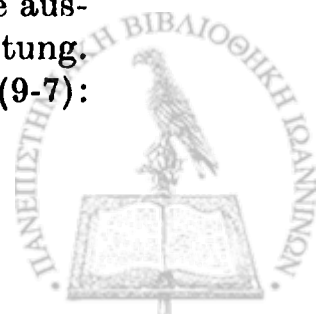
$$W = \sqrt{mk} \int dq \sqrt{\frac{2\alpha}{k} - q^2},$$

so daß

$$S = \sqrt{mk} \int dq \sqrt{\frac{2\alpha}{k} - q^2} - \alpha t \quad (9-15)$$

wird. Obwohl die in (9-15) auftretende Integration nicht besonders schwierig ist, besteht kein Grund dafür, sie schon auf dieser Stufe auszuführen, denn gesucht ist nicht S sondern seine partielle Ableitung. Die Lösung für q erhält man aus der Transformationsgleichung (9-7):

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} \equiv \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{dq}{\sqrt{\frac{2\alpha}{k} - q^2}} - t.$$



Ohne Mühe findet man

$$t + \beta = - \sqrt{\frac{m}{k}} \arccos q \sqrt{\frac{k}{2\alpha}} \quad (9-16)$$

Schreibt man ω für $\sqrt{\frac{k}{m}}$, so kann Gl. (9-16) umgeformt werden und liefert q als Funktion von t und den zwei Integrationskonstanten α und β :

$$q = \sqrt{\frac{2\alpha}{k}} \cos \omega(t + \beta), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (9-17)$$

Das ist die bekannte Lösung für einen harmonischen Oszillator. Schließlich müssen die Konstanten α und β mit den Anfangsbedingungen verknüpft werden. Nehmen wir an, das Teilchen sei zur Zeit $t = 0$ in Ruhe, $p_0 = 0$, aber es sei aus der Gleichgewichtslage um einen Betrag q_0 ausgelenkt. Um α zu finden, hat man Gl. (9-12) für $t = 0$ zu berechnen:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)_0 = p_0 = 0 = \sqrt{2m} \sqrt{\alpha - \frac{kq_0^2}{2}}$$

Das ergibt

$$\alpha = \frac{kq_0^2}{2} = \frac{m\omega^2 q_0^2}{2}. \quad (9-18)$$

Die Konstante α ist deshalb die anfängliche Gesamtenergie des Systems. Da die Kräfte konservativ sind, muß die Energie für alle Zeit gleich α sein. Tatsächlich hätte man die Identität von α und der Gesamtenergie direkt aus Gl. (9-13) und der Beziehung

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0$$

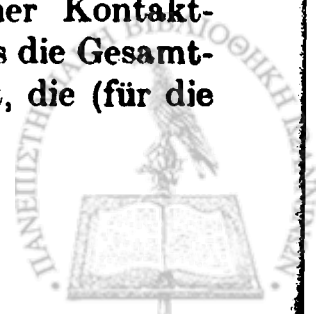
erkennen können. Man erhält nämlich sofort

$$H = \alpha.$$

Wegen Gl. (9-18) für α als Funktion von q_0 reduziert sich die Lösung (9-17) für q auf

$$q = q_0 \cos \omega(t + \beta).$$

Das zeigt, daß β unter den gegebenen Anfangsbedingungen Null ist. Demnach ist die Wirkungsfunktion die Erzeugende einer Kontakttransformation, die auf einen kanonischen Impuls, der als die Gesamtenergie identifiziert wird, und auf eine Koordinate führt, die (für die



angenommenen besonderen Anfangsbedingungen) identisch verschwindet.

Mit Hilfe von Gl. (9-18) kann die Wirkungsfunktion geschrieben werden:

$$S = m\omega \int \sqrt{q_0^2 - q^2} dq - \frac{m\omega^2 q_0^2 t}{2}$$

oder nach Einsetzen von Gl. (9-17):³

$$= m\omega^2 q_0^2 \int \left(\sin^2 \omega t - \frac{1}{2} \right) dt.$$

Nun ist die LAGRANGE-Funktion

$$\begin{aligned} L &= \frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{m\omega^2 q^2}{2} \\ &= \frac{m\omega^2 q_0^2}{2} (\sin^2 \omega t - \cos^2 \omega t) \\ &= m\omega^2 q_0^2 \left(\sin^2 \omega t - \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Somit ist S in Übereinstimmung mit der allgemeinen Beziehung (9-11) das Zeitintegral über die LAGRANGE-Funktion. Wir stellen fest, daß die Identität nicht bewiesen werden kann, *ehe* man *nicht* die Lösung des Problems erhalten hat.

9-3 Die Hamilton-Jacobische Gleichung für die Hamiltonsche charakteristische Funktion

Es war in erster Linie deshalb möglich, die HAMILTON-JACOBISCHE Gleichung für den einfachen harmonischen Oszillator zu integrieren, weil S in zwei Teile separiert werden konnte. Der eine enthielt nur q und der andere nur die Zeit. Eine solche Separation der Variablen ist immer dann möglich, *wenn die alte HAMILTON-Funktion die Zeit nicht explizit enthält.*

Wenn H keine explizite Funktion von t ist, dann wird die HAMILTON-JACOBISCHE Gleichung für S :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H \left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i} \right) = 0.$$

³ Dabei muß man die negative Quadratwurzel von $q_0^2 - q^2$ nehmen, denn – wie wir uns erinnern – ist $\sqrt{q_0^2 - q^2} = \frac{p}{m\omega} = \frac{\dot{q}}{\omega}$ Das ist wegen Gl. (9-17) $-q_0 \sin \omega t$.



Der erste Term befaßt sich nur mit der Abhängigkeit von t , der zweite nur mit der Abhängigkeit von q_i . Die Zeitvariable kann deshalb absepariert werden, indem man für S eine Lösung der Form

$$S(q_i, \alpha_i, t) = W(q_i, \alpha_i) - \alpha_1 t \quad (9-19)$$

annimmt. Substituiert man diesen Lösungsansatz, so reduziert sich die Differentialgleichung auf den Ausdruck

$$H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = \alpha_1. \quad (9-20)$$

Dieser enthält die Zeit nicht mehr. Eine der Integrationskonstanten, die in S erscheint, nämlich α_1 , ist somit gleich dem konstanten Wert von H . (Normalerweise wird H die Energie sein, jedoch erinnern wir uns, daß das nicht stets der Fall zu sein braucht, vgl. Übung 4, VII. Kapitel.)

Die zeitunabhängige Funktion W erscheint hier lediglich als ein Teil der Erzeugenden S , wenn H konstant ist. Man kann auch zeigen, daß W seine eigene Kontakttransformation gesondert erzeugt, deren Eigenschaften von der durch S erzeugten völlig verschieden sind. Betrachten wir eine kanonische Transformation, in der alle neuen Impulse Konstanten der Bewegung α_i sind, wobei α_1 insbesondere die Erhaltungsgröße H der Bewegung ist. Wenn die Erzeugende für diese Transformation mit $W(q, P)$ bezeichnet wird, dann lauten die Transformationsgleichungen:

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial W}{\partial P_i} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \quad (9-21)$$

Während diese Gleichungen den Gl. (9-6, 7) für die Wirkungsfunktion S ähnlich sind, lautet jetzt die Bedingung, die W festlegt, daß H gleich dem neuen Impuls α_1 sein soll:

$$H(q_i, p_i) = \alpha_1.$$

Verwendet man die Gl. (9-21), dann wird diese Forderung eine partielle Differentialgleichung für W :

$$H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = \alpha_1.$$

Man sieht, daß sie mit Gl. (9-20) identisch ist. Da W die Zeit nicht enthält, sind die neue und die alte HAMILTON-Funktion gleich. Es folgt, daß $K = \alpha_1$ ist.

Die Funktion W , HAMILTONSche charakteristische Funktion genannt, erzeugt somit eine kanonische Transformation, in der alle neuen Koordinaten zyklisch sind. Im vorigen Kapitel wurde festge-



stellt, daß dann, wenn H eine Konstante der Bewegung ist, eine Transformation dieser Art das entsprechende mechanische System wirklich löst, denn die Integration der neuen Bewegungsgleichungen ist dann trivial. Die kanonischen Gleichungen für \dot{P}_i wiederholen tatsächlich nur die Aussage, daß alle zu den zyklischen Koordinaten konjugierten Impulse Konstanten sind:

$$\dot{P}_i = - \frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0, \quad P_i = \alpha_i. \quad (9-22a)$$

Da die neue HAMILTON-Funktion nur von den Impulsen α_i abhängt, lauten die Bewegungsgleichungen für \dot{Q}_i :

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \frac{\partial K}{\partial \alpha_i} = 1 & i &= 1, \\ &= 0 & i &\neq 1 \end{aligned}$$

mit den Lösungen

$$\begin{aligned} Q_1 &= t + \beta_1 \equiv \frac{\partial W}{\partial \alpha_1}, \\ Q_i &= \beta_i \equiv \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} & i &\neq 1. \end{aligned} \quad (9-22b)$$

Die einzige Koordinate, die nicht einfach eine Erhaltungsgröße der Bewegung ist, ist Q_1 , die gleich der Zeit plus einer Konstanten ist. Wir haben hier ein anderes Beispiel für die Konjugation zwischen der Zeit als einer Koordinate und der HAMILTON-Funktion als ihrem konjugierten Impuls.

Die Abhängigkeit der Funktion W von den alten Koordinaten q_i ist durch die partielle Differentialgleichung (9-20) bestimmt, die ähnlich Gl. (9-3) auch als HAMILTON-JACOBISCHE Gleichung bezeichnet wird. Wir haben jetzt n Integrationskonstanten, aber wieder muß eine von ihnen lediglich eine additive Konstante sein. Die $n - 1$ übrigen unabhängigen Konstanten $\alpha_2 \dots \alpha_n$ zusammen mit α_1 können somit als die neuen konstanten Impulse verwendet werden. Man berechnet zunächst die erste Hälfte der Gl. (9-21) für t_0 . Diese dient dann dazu, die n Konstanten α_i mit den Anfangswerten von p_i und q_i zu verknüpfen. Schließlich können die Gl. (9-22b) nach den q_i als Funktion von α_i , β_i und der Zeit t aufgelöst werden. Damit wird die Lösung des Problems vollständig. Es sei darauf hingewiesen, daß $n - 1$ der Gl. (9-22b) die Zeit überhaupt nicht enthalten. Eines der q_i kann als unabhängige Variable gewählt werden, und die übrigen Koordinaten können dann durch dieses ausgedrückt werden, indem man nur diese zeitunabhängigen Gleichungen löst. So werden wir direkt auf die *Bahngleichungen* der



Bewegung geführt. Bei der Zentralkräftebewegung zum Beispiel liefert diese Methode r als Funktion von θ , ohne daß es nötig ist, r und θ einzeln als Funktionen der Zeit zu bestimmen.

Es ist nicht immer notwendig, α_i und die Integrationskonstanten in W als die neuen konstanten Impulse zu verwenden. Gelegentlich ist es vielmehr wünschenswert, einen besonderen Satz von n unabhängigen Funktionen der α_i als die transformierten Impulse zu benutzen. Bezeichnet man diese Konstanten mit γ_i , so kann die charakteristische Funktion W dann durch die q_i und γ_i als die unabhängigen Variablen ausgedrückt werden. Die HAMILTON-Funktion wird im allgemeinen von mehr als einem der γ_i abhängen, und die Bewegungsgleichungen für \dot{Q}_i werden:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial \gamma_i} = \nu_i,$$

wobei die ν_i Funktionen der γ_i sind. In diesem Falle sind alle neuen Koordinaten lineare Funktionen der Zeit:

$$Q_i = \nu_i t + \beta_i. \quad (9-22')$$

Die charakteristische Funktion W besitzt eine physikalische Bedeutung, die der von S ähnlich ist. Weil W die Zeit nicht explizit enthält, lautet seine totale Ableitung nach der Zeit

$$\frac{dW}{dt} = \sum_i \frac{\partial W}{\partial q_i} \dot{q}_i = \sum_i p_i \dot{q}_i,$$

und demnach ist

$$W = \int \sum_i p_i \dot{q}_i dt = \int \sum_i p_i dq_i.$$

Man erkennt, daß die obigen Integrale die Wirkung A definieren, die in Abschnitt 7-5 verwendet wurde. Wiederum bietet diese Information nur eine geringe praktische Hilfe; man kann die Form von W nicht a priori finden, ohne daß man ein vollständiges Integral der HAMILTON-JACOBISCHEN Gleichung erhalten hat. Die bei der Lösung eines mechanischen Problems durch die Wirkungsfunktion oder die charakteristische Funktion auftretenden Verfahren sollen nun im folgenden tabellarisch zusammengestellt werden:

Die zwei Lösungsmethoden sind anwendbar, wenn die HAMILTON-Funktion

eine allgemeine Funktion von q, p, t ist: | erhalten bleibt:

$$H(q, p, t).$$

$$H(q, p) = \text{constant.}$$



Wir suchen solche kanonische Transformationen auf neue Variable, daß alle Koordinaten und Impulse Q_i, P_i ; Erhaltungsgrößen sind. | alle Impulse P_i ; Konstanten sind.

Um diese Forderung zu erfüllen, ist es hinreichend, zu verlangen, daß die neue HAMILTON-Funktion identisch verschwindet: | in allen Koordinaten zyklisch ist:

$$K = 0.$$

$$K = H(P_i) = \alpha_1.$$

Unter diesen Bedingungen werden die neuen Bewegungsgleichungen

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0,$$

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = \nu_i,$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0$$

mit den unmittelbaren Lösungen

$$Q_i = \beta_i,$$

$$Q_i = \nu_i t + \beta_i,$$

$$P_i = \gamma_i.$$

$$P_i = \gamma_i.$$

Dadurch sind die aufgestellten Forderungen erfüllt.

Die Erzeugende, die die gewünschte Transformation liefert, ist die HAMILTONSche

Wirkungsfunktion:
 $S(q, P, t).$

charakteristische Funktion:
 $W(q, P).$

Diese erfüllt die HAMILTON-JACOBISCHE partielle Differentialgleichung

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) - \alpha_1 = 0.$$

Eine vollständige Lösung der Gleichung enthält

n nichttriviale Integrationskonstanten $\alpha_1 \dots \alpha_n$.

$n - 1$ nichttriviale Integrationskonstanten, die zusammen mit α_1 einen Satz von n unabhängigen Konstanten $\alpha_1 \dots \alpha_n$ bilden.

Die neuen konstanten Impulse $P_i = \gamma_i$ können als n unabhängige Funktionen der n Integrationskonstanten gewählt werden:

$$P_i = \gamma_i(\alpha_1 \dots \alpha_n).$$

$$P_i = \gamma_i(\alpha_1 \dots \alpha_n).$$

Somit können die vollständigen Lösungen der HAMILTON-JACOBISCHEN Gleichung als Funktionen der neuen Impulse angesehen werden:

$$S = S(q_i, \gamma_i, t).$$

$$W = W(q_i, \gamma_i).$$



Insbesondere können für die γ_i die α_i selbst gewählt werden. Eine Hälfte der Transformationsgleichungen:

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad \Bigg| \quad p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}$$

ist automatisch erfüllt, da sie bei der Konstruktion der HAMILTON-JACOBISCHEN Gleichung verwendet wird. Die andere Hälfte

$$Q_i = \frac{\partial S}{\partial \gamma_i} = \beta_i \quad \Bigg| \quad Q_i = \frac{\partial W}{\partial \gamma_i} = \nu_i(\gamma_i)t + \beta_i$$

kann nach den q_i als Funktionen von t und den $2n$ Konstanten β_i, γ_i aufgelöst werden. Die Lösung des Problems wird vervollständigt, indem man diese $2n$ Konstanten durch die Anfangswerte (q_0, p_0) der Koordinaten und Impulse ausdrückt.

Wenn die HAMILTON-Funktion die Zeit nicht explizit enthält, sind beide Methoden geeignet, und die Erzeugenden stehen dann in folgendem Zusammenhang:

$$S(q, P, t) = W(q, P) - \alpha_1 t.$$

9-4 Separation der Variablen in der Hamilton-Jacobischen Gleichung

Man könnte aus dem vorigen Abschnitt den Eindruck gewinnen, daß durch die Einführung des HAMILTON-JACOBISCHEN Verfahrens ein praktisch nur geringer Vorteil gewonnen wird. Anstatt die $2n$ gewöhnlichen Differentialgleichungen zu lösen, die die kanonischen Bewegungsgleichungen sind, muß man nun die HAMILTON-JACOBISCHE partielle Differentialgleichung lösen, und partielle Differentialgleichungen sind bekanntlich recht schwer zu lösen. Unter gewissen Bedingungen ist es jedoch möglich, die Variablen in der HAMILTON-JACOBISCHEN Gleichung zu separieren. Die Lösung kann dann stets auf Quadraturen zurückgeführt werden. Praktisch ist das HAMILTON-JACOBISCHE Verfahren nur dann eine nützliche Rechenhilfe, wenn sich eine solche Separation erreichen läßt.

Die nachfolgende Diskussion wird auf Systeme beschränkt, für die die HAMILTON-Funktion eine der Erhaltungsgrößen der Bewegung ist, jedoch muß sie nicht notwendig die Gesamtenergie sein. Es wird deshalb ausreichend sein, nur die durch W erzeugte Kontakttransformation und die entsprechende HAMILTON-JACOBISCHE Differentialgleichung zu betrachten. Die Variablen q_i , die in dieser Gleichung auftreten, nennt man separabel, wenn eine Lösung der Form

$$W = \sum_i W_i(q_i, \alpha_1 \dots \alpha_n)$$



die HAMILTON-JACOBISCHE Gleichung in n Gleichungen der Form

$$H_i \left(q_i, \frac{\partial W_i}{\partial q_i}, \alpha_1 \dots \alpha_n \right) = \alpha_i \quad (9-23)$$

aufspaltet. Jede der Gl. (9-23) enthält nur eine der Koordinaten q_i und die entsprechende partielle Ableitung von W_i nach q_i . Sie bilden deshalb einen Satz gewöhnlicher Differentialgleichungen von besonders einfacher Form. Da die Gleichungen nur von erster Ordnung sind, ist es stets möglich, sie auf Quadraturen zurückzuführen; man hat nur nach $\frac{\partial W_i}{\partial q_i}$ aufzulösen und dann über q_i zu integrieren.

Es läßt sich kein einfaches Kriterium angeben, nach dem man entscheiden kann, ob die HAMILTON-JACOBISCHE Gleichung separierbar ist.⁴ Für manche Probleme ist es überhaupt nicht möglich, die Separation der Variablen auszuführen; das berühmte Dreikörperproblem ist ein Beispiel. Glücklicherweise sind die in der Atomphysik interessierenden Systeme beinahe immer separabel. Sicher haben die Probleme der klassischen Mechanik, die in geschlossener Form lösbar sind, separierbare HAMILTON-JACOBISCHE Gleichungen. Es muß besonders hervorgehoben werden, daß die Frage, ob die HAMILTON-JACOBISCHE Gleichung separierbar ist oder nicht, von dem verwendeten System der generalisierten Koordinaten abhängt. So ist das Einkörper-Zentralkräfteproblem in Polarkoordinaten, aber nicht in cartesischen Koordinaten separierbar. In vielen Fällen wird es mehr als einen Koordinatensatz geben, für den die Separation ausführbar ist.

Eine teilweise Separation der Variablen wurde bereits bei der Reduktion der HAMILTON-JACOBISCHEN Gleichung für S verwendet, wenn H keine explizite Funktion der Zeit ist. Für S wurde eine Lösung der Form

$$S(q_i, \alpha_i, t) = W(q_i, \alpha_i) + S_2(t, \alpha_i)$$

gesucht. Mit diesem Lösungsansatz lautet die HAMILTON-JACOBISCHE Gleichung:

$$H \left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial S_2}{\partial t} = 0.$$

⁴ Vollständigere Diskussionen der separierbaren Typen von HAMILTON-JACOBISCHEN Gleichungen findet man in dem Artikel von NORDHEIM und FUES in Bd. V des *Handbuches der Physik*, im II. Kapitel, Abschn. 5, Bd. II der *Differentialgleichungen der Physik* von FRANK und VON MISES und in den dort angegebenen Referenzen.



Da der erste Term nur die q_i und der zweite nur die Zeit enthält, gilt die Gleichung nur dann für alle Werte der Variablen, wenn die zwei Terme Konstanten mit gleichem Betrag und umgekehrtem Vorzeichen sind:

$$\frac{\partial S_2}{\partial t} = -\alpha_1, \quad (9-24a)$$

$$H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = \alpha_1. \quad (9-24b)$$

Die erste Gleichung liefert wie in Gl. (9-13) $S_2 = -\alpha_1 t$, die zweite ist die HAMILTON-JACOBISCHE Gleichung für W .

Eine ähnliche Separation der Variablen in der HAMILTONSchen charakteristischen Funktion ist immer dann möglich, wenn alle bis auf eine der generalisierten Koordinaten zyklisch sind. Nehmen wir an, q_1 sei die einzige nichtzyklische Koordinate. Wir suchen für W eine Lösung der Form

$$W = \sum_i W_i(q_i, P_i).$$

Da die zu den zyklischen Koordinaten konjugierten Impulse Konstanten sind, können die Transformationsgleichungen für $i \neq 1$ folgendermaßen geschrieben werden:

$$\frac{\partial W_i}{\partial q_i} = p_i = \alpha_i \quad i \neq 1. \quad (9-25a)$$

Unter diesen Umständen reduziert sich die HAMILTON-JACOBISCHE Gleichung auf

$$H\left(q_1, \frac{\partial W_1}{\partial q_1}, \alpha_2, \dots, \alpha_n\right) = \alpha_1. \quad (9-25b)$$

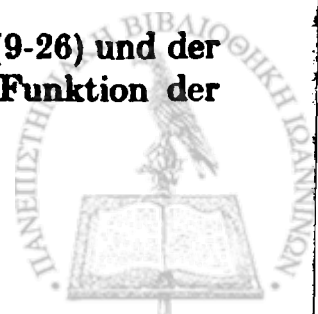
Das ist eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für W_1 . Sie ist direkt lösbar. Die Gl. (9-25a) und (9-25b) zusammen definieren die charakteristische Funktion W vollständig. Die Integration der Gl. (9-25a) ist trivial und führt auf die Ergebnisse:

$$W_i = \alpha_i q_i \quad i \neq 1.$$

Somit kann für W einfach geschrieben werden:

$$W = W_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i q_i. \quad (9-26)$$

Es besteht eine offensichtliche Ähnlichkeit zwischen Gl. (9-26) und der Form (9-13), die S annimmt, wenn H keine explizite Funktion der



Zeit ist. Tatsächlich kann man beide Gleichungen so ansehen, als seien sie unter ähnlichen Umständen entstanden. Wir haben gesehen, daß man t als eine generalisierte Koordinate und $-H$ als deren kanonischen Impuls betrachten kann. Bleibt H erhalten, dann kann t als zyklische Koordinate behandelt werden, und Gl. (9-24a) ist dann lediglich ein besonderer Fall der Gl. (9-25a), die für alle zyklischen Koordinaten gelten.⁵

Als Beispiel der Lösung der HAMILTON-JACOBISCHEN Gleichung durch Separation der Variablen wollen wir die Bewegung eines Teilchens in einer Ebene unter der Wirkung einer Zentralkraft betrachten. Die HAMILTON-Funktion hat die Form

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} \right) + V(r)$$

und ist zyklisch in ϕ . Folglich lautet die charakteristische Funktion

$$W = W_1(r) + \alpha_\phi \phi. \quad (9-27)$$

Darin ist α_ϕ der konstante, zu ϕ konjugierte Drehimpuls p_ϕ . Die HAMILTON-JACOBISCHE Gleichung wird damit

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial W_1}{\partial r} \right)^2 + \frac{\alpha_\phi^2}{r^2} \right] + V(r) = \alpha_1, \quad (9-28)$$

wobei α_1 die Konstante ist, die physikalisch mit der Gesamtenergie des Systems identisch ist. Löst man Gl. (9-28) nach der partiellen Ableitung von W_1 auf, so erhält man

$$\frac{\partial W_1}{\partial r} = \sqrt{2m(\alpha_1 - V) - \frac{\alpha_\phi^2}{r^2}}.$$

Deswegen ist

$$W = \int dr \sqrt{2m(\alpha_1 - V) - \frac{\alpha_\phi^2}{r^2}} + \alpha_\phi \phi.$$

⁵ Die Form von (9-26) kann auch durch die folgenden Überlegungen gewonnen werden. Man muß sich daran erinnern, daß W die erzeugende Funktion einer Transformation auf neue Koordinaten ist, die alle zyklisch sind. Wenn aber $q_2 \dots q_n$ bereits zyklisch sind, ist für sie keine weitere Transformation mehr nötig. Soweit es sie betrifft, kann W die identische Transformation sein. Da die α_i die neuen Impulse sind, kann die Summe in (9-26) geschrieben werden:

$$\sum_{i=2}^n P_i q_i.$$

Diesen Ausdruck erkennen wir wieder als den Erzeuger der identischen Transformation (vgl. Gl. (8-19) für die Koordinaten $q_2 \dots q_n$).



Mit dieser Form der charakteristischen Funktion lauten die Transformationsgl. (9-22b):

$$t + \beta_1 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \int \frac{m dr}{\sqrt{2m(\alpha_1 - V) - \frac{\alpha_\phi^2}{r^2}}} \quad (9-29a)$$

und

$$\beta_2 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_\phi} = - \int \frac{\alpha_\phi dr}{r^2 \sqrt{2m(\alpha_1 - V) - \frac{\alpha_\phi^2}{r^2}}} + \phi. \quad (9-29b)$$

Gl. (9-29a) liefert r als Funktion von t und stimmt mit der entsprechenden Lösung (3-18) im III. Kapitel überein. Dort war für α_1 und α_ϕ explizit E bzw. l gesetzt worden. Es wurde früher bemerkt, daß die übrigen Transformationsgleichungen für Q_i , hier ist es nur Gl. (9-29b), die Bahngleichung liefern sollten. Wird für die Integrationsvariable in Gl. (9-29b) $u = \frac{1}{r}$ substituiert, so reduziert sich die Gleichung auf

$$\phi = \beta_2 - \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2m}{\alpha_\phi^2} (\alpha_1 - V) - u^2}}.$$

Sie stimmt mit der früher gefundenen Bahngl. (3-37) überein, wenn man β_2 mit ϕ_0 identifiziert.

An diesem einfachen Beispiel wird die Macht und Eleganz der HAMILTON-JACOBISCHEN Methode deutlich. In einigen kurzen Schritten haben wir die Abhängigkeit r von t und die Bahngleichung erhalten, Ergebnisse, die früher nur mit erheblicher Mühe gewonnen werden konnten. Die Separation der Variablen in der HAMILTON-JACOBISCHEN Gleichung ist natürlich nicht allein auf solche Probleme beschränkt, in denen nur eine Koordinate nichtzyklisch ist. Wenn zum Beispiel die HAMILTON-Funktion für die Zentralkräftebewegung in *sphärischen* Polarkoordinaten geschrieben wird, ist nur der Azimutwinkel ϕ zyklisch, jedoch ist die HAMILTON-JACOBISCHE Gleichung noch separierbar, wie in Abschn. 9-7 gezeigt werden wird.

9-5 Wirkungsvariable und Winkelvariable

In vielen Gebieten der Physik sind besonders solche Systeme wichtig, deren Bewegung periodisch ist. Oftmals sind wir nicht so sehr an Einzelheiten der Bahn wie an den Frequenzen der Bewegung interessiert. Eine sehr elegante und wirksame Methode zur Behandlung solcher Systeme wird durch eine Abänderung des HAMILTON-JACOBISCHEN Verfahrens geliefert. Bei dieser Methode werden die Integrations-



konstanten α_i , die direkt in der Lösung der HAMILTON-JACOBISCHEN Gleichung auftreten, nicht selbst als die neuen Impulse gewählt. Dagegen verwendet man geeignet definierte Konstanten J_i , die einen Satz von n unabhängigen Funktionen der α_i bilden, und die man *Wirkungsvariable* nennt.

Ehe wir diese Variablen einführen, ist es notwendig, ausführlich zu klären, was unter dem Begriff „periodische Bewegung“ zu verstehen ist. Betrachten wir zunächst ein System mit nur einem Freiheitsgrad. Für ein solches System ist der Phasenraum eine zweidimensionale Ebene. Zwei Typen von periodischen Bewegungen können unterschieden werden:

1. Der erste Typ tritt immer dann auf, wenn sowohl q als auch p periodische Funktionen der Zeit mit gleicher Frequenz sind. Diese Bewegung ist für schwingende Systeme charakteristisch, wie etwa für den eindimensionalen linearen harmonischen Oszillator. Sie wird oft mit dem astronomischen Ausdruck *Libration* bezeichnet. Periodische Bewegungen dieser Art findet man, wenn die Anfangslage des Systempunktes zwischen zwei Nullstellen der kinetischen Energie liegt. Da q und p nach einer Periode zu ihren ursprünglichen Ausgangswerten zurückkehren, durchläuft der Systempunkt nach jeder Periode denselben Weg, und die Bahn im Phasenraum ist *geschlossen*, wie in Abb. 9-1a illustriert wird.

2. Beim zweiten Typ der periodischen Bewegung ist q selbst nicht periodisch, aber wenn q um einen gewissen Wert, etwa q_0 , anwächst, so bleibt die Konfiguration des Systems im wesentlichen unverändert. Das bekannteste Beispiel liefert ein starrer Körper, der gezwungen ist, sich um eine gegebene Achse zu drehen, wobei q der Drehwinkel ist. Ein Anwachsen von q um 2π ruft keine wesentliche Änderung des Systemzustandes hervor. Tatsächlich ist die Lagekoordinate bei diesem Typ der Periodizität stets ein Drehwinkel, und die Bewegung wird im

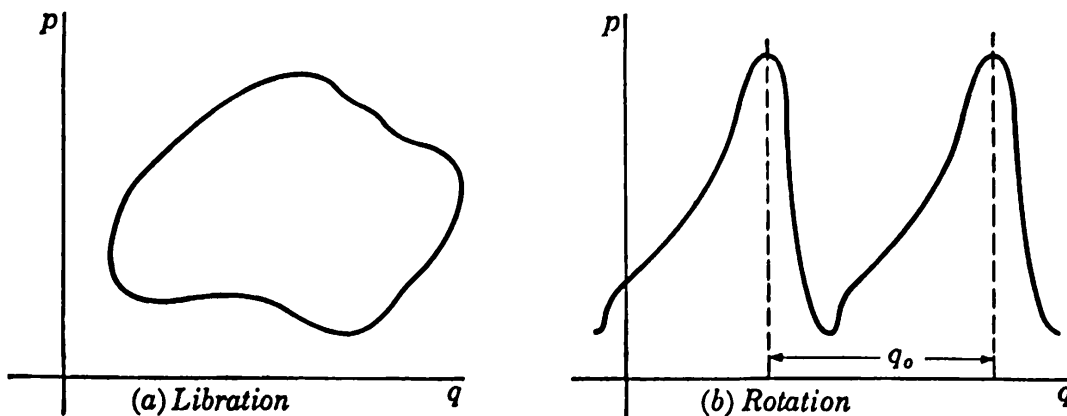


Abb. 9-1. Bahn des Systempunktes im Phasenraum für eine periodische Bewegung eines eindimensionalen Systems.



Gegensatz zur Libration einfach als *Rotation* bezeichnet. Die Werte von q sind nicht mehr beschränkt, sondern sie können beliebig anwachsen. Im Phasenraum bewegt sich der Systempunkt nicht mehr auf einer geschlossenen Bahn, sondern p wird eine periodische Funktion von q mit der Periode q_0 sein, vgl. Abb. 9-1b.

Zur Klarstellung dieser Begriffe bemerken wir, daß beide Typen der Periodizität in dem gleichen physikalischen System auftreten können. Das klassische Beispiel ist das einfache Pendel, wobei q der Auslenkungswinkel θ ist. Ist die Pendellänge l , dann wird die konstante Energie des Systems gegeben durch

$$E = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl \cos \theta. \quad (9-30)$$

Löst man Gl. (9-30) nach p_θ auf, dann lautet die Gleichung für die Bahn des Systempunktes im Phasenraum

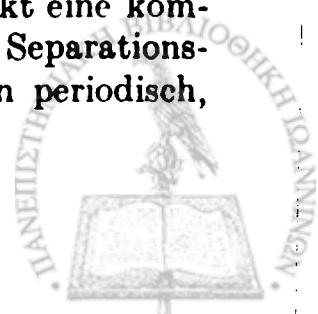
$$p_\theta = \sqrt{2ml^2(E + mgl \cos \theta)}. \quad (9-31)$$

Ist E kleiner als mgl , dann kann eine physikalische Bewegung des Systems nur dann eintreten, wenn $|\theta|$ kleiner als ein Grenzwert θ' ist, der durch die Gleichung

$$\cos \theta' = -\frac{E}{mgl}$$

definiert ist. Unter diesen Bedingungen schwingt das Pendel zwischen $-\theta'$ und $+\theta'$. Das ist eine periodische Bewegung vom Typ der Libration. Der Systempunkt durchläuft dann einen Weg im Phasenraum, der durch Kurve 1 in Abb. 9-2 angedeutet ist. Ist jedoch $E > mgl$, so entsprechen alle Werte von θ einer physikalischen Bewegung, und θ kann über alle Grenzen anwachsen und erzeugt somit eine periodische Bewegung vom Typ der Rotation. In diesem Fall ereignet sich physikalisch das folgende. Das Pendel hat so viel Energie, daß es durch die vertikale Lage $\theta = \pi$ hindurchschwingt und deshalb weiter rotiert. Kurve 3 in Abb. 9-2 entspricht der Rotationsbewegung des Pendels. Der Grenzfall $E = mgl$ wird durch Kurve 2 in Abb. 9-2 dargestellt.

Bei der Beschreibung von Systemen mit mehr als einem Freiheitsgrad wollen wir unsere Diskussion auf solche Probleme beschränken, für die die HAMILTON-JACOBISCHE Gleichung für W in mindestens einem Satz kanonischer Variablen separierbar ist. Wenn sich das System bewegt, dann durchläuft der entsprechende Punkt eine komplizierte Bahn im vieldimensionalen Phasenraum der Separationsvariablen (q, p) . Die Bewegung des Systems nennt man periodisch,



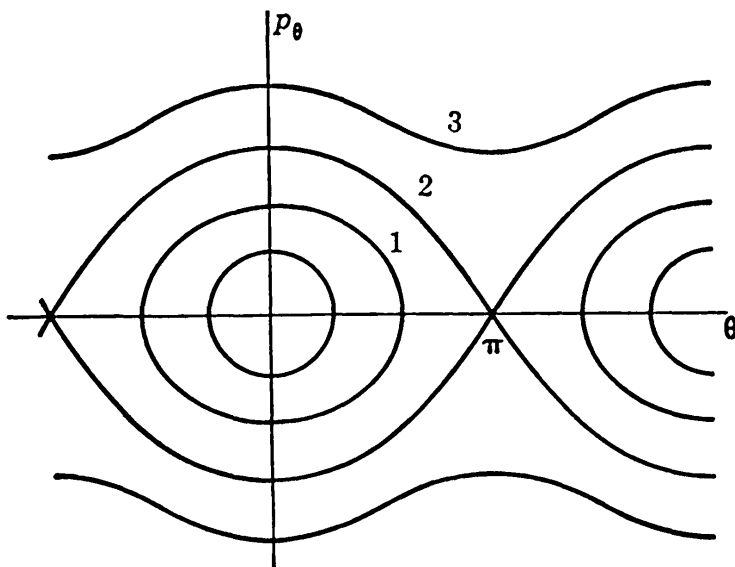


Abb. 9-2. Bahnen im Phasenraum für das einfache Pendel.

wenn die Projektion der Bahn des Systempunktes auf jede Ebene (q_i, p_i) einfach periodisch in dem Sinne ist, wie für die Bewegung im Falle eines Freiheitsgrades definiert wurde. Da die Variablen separierbar sind, sind die projizierten Bewegungen voneinander unabhängig und können leicht untersucht werden. Die Gleichungen der kanonischen Transformation besagen

$$p_i = \frac{\partial W_i(q_i, \alpha_1 \dots \alpha_n)}{\partial q_i}. \quad (9-32)$$

Sie liefern jedes p_i als Funktion des entsprechenden q_i und der n Konstanten α_j :

$$p_i = p_i(q_i, \alpha_1 \dots \alpha_n). \quad (9-33)$$

Wir erinnern uns, daß Gl. (9-33) die Gleichung der projizierten Bahn des Systempunktes in der (q_i, p_i) -Ebene ist. Die Bewegung wird periodisch sein, wenn Gl. (9-33) entweder eine geschlossene Bahn oder eine periodische Funktion von q_i beschreibt.

Es ist nicht notwendig, daß alle Sätze q_i, p_i die gleiche Frequenz der periodischen Bewegung aufweisen. So können in einem dreidimensionalen harmonischen Oszillator die Kraftkonstanten für die Bewegung längs der drei Achsen alle verschieden sein, das System wird aber noch periodisch genannt. Die vollständige Bewegung des Teilchens in diesem Beispiel braucht selbst nicht einfach periodisch zu sein. Sind nämlich die einzelnen Frequenzen keine rationalen Verhältnisse voneinander, so wird sich das Teilchen nicht auf einer geschlossenen Kurve im Raum bewegen, sondern es wird eine offene „LISSAJOUS-Figur“



beschreiben. Eine solche Bewegung nennt man *bedingt periodisch*.

Nachdem wir den zur Diskussion stehenden Typ der Bewegung beschrieben haben, können wir nun die Wirkungsvariablen $J_1 \dots J_n$ einführen, welche nun als die transformierten konstanten Impulse P_i ; die Konstanten $\alpha_1 \dots \alpha_n$ ersetzen. Die Wirkungsvariable J_i , die dem Paar von Separationsvariablen (q_i, p_i) entspricht, ist definiert durch

$$J_i = \oint p_i dq_i, \quad (9-34)$$

wobei die Integration über eine vollständige Periode der Schwingung oder Rotation von q_i zu nehmen ist, je nachdem welcher Fall vorliegt. Die Bezeichnung als Wirkungsvariable rührt von der Ähnlichkeit von (9-34) mit der Wirkung A (vgl. Abschn. 7-5) her, die definiert ist durch

$$A = \int \sum_i p_i dq_i = \int \sum_i p_i \dot{q}_i dt.$$

Wegen Gl. (9-32) kann für J_i auch geschrieben werden:

$$J_i = \oint \frac{\partial W_i(q_i, \alpha_1 \dots \alpha_n)}{\partial q_i} dq_i. \quad (9-35)$$

Da q_i hier lediglich eine Integrationsvariable ist, ist jede Wirkungsvariable J_i eine Funktion allein der n Integrationskonstanten, die in der Lösung der HAMILTON-JACOBISCHEN Gleichung auftreten. Weiterhin folgt aus der Unabhängigkeit der einzelnen Variablenpaare (q_i, p_i) , daß die J_i n unabhängige Funktionen der α_i bilden und demnach für die Verwendung als ein Satz neuer konstanter Impulse geeignet sind. Drückt man die α_i als Funktionen der Wirkungsvariablen aus, so kann die charakteristische Funktion W in folgender Form geschrieben werden:

$$W = W(q_1 \dots q_n; J_1 \dots J_n),$$

während die HAMILTON-Funktion eine Funktion allein der J_i ist:

$$H = \alpha_1 = H(J_1 \dots J_n). \quad (9-36)$$

Wegen der Definition Gl. (9-34) stellen wir fest, daß die Dimensionen der Wirkungsvariablen stets die des Drehimpulses sind. Ist eine der Separationskoordinaten zyklisch, so ist ihr konjugierter Impuls konstant. Die entsprechende Bahn in der Ebene q_i, p_i im Phasenraum ist dann eine horizontale Gerade, die bei einer periodischen Bewegung nicht auftreten würde. Tatsächlich kann die Bewegung als ein Grenzfall des Typs der Rotations-Periodizität angesehen werden, in dem q_i



eine beliebige Periode zugeordnet werden kann. Da die Koordinate bei Rotationsperiodizität immer ein Winkel ist, hat ein solches zyklisches q_i stets die natürliche Periode 2π . Dementsprechend ist das Integral in der Definition der Wirkungsvariablen, die einer zyklischen Winkelkoordinate entspricht, von 0 bis 2π zu nehmen, und demnach gilt

$$J_i = 2\pi p_i \quad (9-34')$$

für alle zyklischen Variablen.

Die generalisierten, zu J_i konjugierten Koordinaten nennt man die *Winkelvariablen* w_i . Sie werden durch die Transformationsgleichungen

$$w_i = \frac{\partial W}{\partial J_i} \quad (9-37)$$

geliefert. Entsprechend lauten die Bewegungsgleichungen für die Winkelvariablen

$$\dot{w}_i = \frac{\partial H(J_1 \dots J_n)}{\partial J_i} = \nu_i(J_1 \dots J_n) \quad (9-38)$$

Darin sind die ν_i ein Satz konstanter Funktionen der Wirkungsvariablen. Die Gl. (9-38) haben die Lösungen

$$w_i = \nu_i t + \beta_i, \quad (9-39)$$

so daß die w_i genau wie in den Gl. (9-22') lineare Funktionen der Zeit sind.

Die Gl. (9-37) und (9-39) können stets so kombiniert werden, daß sie die q_i als Funktionen von t , ν_i und β_i liefern, genauso wie vorgegangen wurde, als die α_i als die neuen Impulse verwendet wurden. Verfährt man aber auf diese Weise, so bieten die Wirkungs- und Winkelvariablen keinen großen Vorteil gegenüber den Koordinaten α_i . Ihre besondere Bedeutung rührt von der physikalischen Interpretation her, die man den ν_i geben kann. Wir wollen die Änderung einer Winkelvariablen w_i untersuchen, die sie erfährt, wenn eine der Koordinaten q_j einen vollständigen Zyklus einer Libration oder Rotation durchläuft, während alle anderen Koordinaten konstant gehalten werden. Die Änderung kann dargestellt werden durch

$$\Delta w_i = \oint \delta w_i,$$

wobei δw_i die infinitesimale Änderung ist, die durch ein Anwachsen von q_j allein zustande kommt:

$$\delta w_i = \frac{\partial w_i}{\partial q_j} dq_j. \quad (9-40)$$



Kombiniert man die Gl. (9-40) und (9-37), so kann für Δw_i geschrieben werden:

$$\Delta w_i = \oint \frac{\partial w_i}{\partial q_i} dq_i = \oint \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial J_i} dq_i.$$

Die Ableitung nach J_i kann vor das Integralzeichen gezogen werden. Das führt auf

$$\Delta w_i = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint \frac{\partial W}{\partial q_i} dq_i = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint p_i dq_i.$$

Dabei haben wir von den Transformationsgleichungen Gebrauch gemacht. Wir erinnern daran, daß das hier auftretende Integral die Wirkungsvariable J_i definiert, so daß gilt:

$$\begin{aligned} \Delta w_i &= \frac{\partial J_i}{\partial J_i} \\ &= \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (9-41)$$

Gl. (9-41) besagt, daß sich w_i um Eins ändert, wenn q_i eine vollständige Periode durchläuft, aber es wird nicht beeinflusst durch eine gleiche Änderung von q_j , $j \neq i$. Ist τ_i die zu q_i gehörige Periode, dann folgt aus Gl. (9-39)

$$\Delta w_i = 1 = \nu_i \tau_i.$$

Demnach läßt sich die Konstante ν_i mit dem Kehrwert der Periode identifizieren,

$$\nu_i = \frac{1}{\tau_i}. \quad (9-42)$$

ν_i ist deshalb die *Frequenz*, die zu der periodischen Bewegung von q_i gehört. Die Wirkungs- und Winkelvariablen liefern somit ein mächtiges Hilfsmittel, mit dem man die Frequenzen periodischer Bewegungen bestimmen kann, ohne eine vollständige Lösung für die Bewegung des Systems aufsuchen zu müssen. Ist von vornherein bekannt, daß das System periodisch ist, so ist zum Aufsuchen der Frequenzen allein notwendig, die Wirkungsvariablen durch die Definitionsgl. (9-34) zu bestimmen und die Energie durch die J_i auszudrücken. Die Ableitung von H bezüglich J_i gibt dann wegen Gl. (9-38) direkt die q_i -entsprechende Frequenz. Die Bezeichnung von w_i als *Winkelvariable* wird wegen der Identifikation von ν_i in Gl. (9-39) als eine Frequenz offensichtlich. Der Name steht auch mit der Tatsache in Einklang, daß J_i die Dimension eines Drehimpulses hat, da die zu einem Drehimpuls konjugierte Koordinate ein Winkel ist.



Um die Verwendung von Wirkungs- und Winkelvariablen beim Aufsuchen der Frequenzen zu illustrieren, betrachten wir das Problem des gewöhnlichen linearen harmonischen Oszillators. Hier gibt es nur eine Wirkungsvariable. Sie ist gegeben durch

$$J = \oint p dq = \oint \frac{\partial W(q, \alpha)}{\partial q} dq = \sqrt{mk} \oint \sqrt{\frac{2\alpha}{k} - q^2} dq,$$

vgl. (9-15). Die Substitution

$$q = \sqrt{\frac{2\alpha}{k}} \sin \theta$$

führt auf

$$J = 2\alpha \sqrt{\frac{m}{k}} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta. \tag{9-43}$$

Darin sind die Grenzen so gewählt, daß sie einem vollständigen Zyklus von q entsprechen. Die Integration ist leicht auszuführen und liefert

$$J = 2\pi\alpha \sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{9-44}$$

Löst man Gl. (9-44) nach α auf, so erhält man

$$\alpha = H = \frac{J}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}},$$

und die Frequenz der Schwingung ist deshalb

$$\frac{\partial H}{\partial J} = \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Das ist die bekannte Formel für die Frequenz eines linearen harmonischen Oszillators.

9-6 Weitere Eigenschaften der Wirkungs- und Winkelvariablen

Die Ergebnisse des vorigen Abschnittes zeigen, daß dann, wenn sich der Wert der Winkelkoordinate um Eins ändert, die entsprechende Separationskoordinate q_i einen vollständigen Zyklus durchläuft. Für den Typ der Libration bedeutet ein vollständiger Zyklus von q_i , daß q_i seinen ursprünglichen Wert wieder annimmt. Demnach muß im Falle der Libration q_i eine periodische Funktion der Winkelkoordinate w_i mit der Fundamentalperiode $\Delta w_i = 1$ sein. Es ist deshalb möglich, eine Librationskoordinate q_k darzustellen als eine FOURIER-Reihe der Form

$$q_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{2\pi i j w_k} \tag{Libration} \tag{9-45a}$$



oder wegen (9-39)

$$q_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{2\pi U(\nu_k t + \beta_k)} \quad (\text{Libration}). \quad (9-46a)$$

Hier ist der Index j eine ganze Zahl, die zwischen $-\infty$ und $+\infty$ variiert. Die FOURIER-Koeffizienten a_j kann man in der üblichen Weise aus der Gleichung

$$a_j = \int_0^1 q_k e^{-2\pi U \nu_k} dw \quad (9-47)$$

erhalten. Ist die Bewegung ihrer Natur nach eine Rotation, so führt eine Änderung von w_k um Eins q_k nicht auf dessen ursprünglichen Wert zurück, sondern q_k wächst um den Wert seiner Periode q_{0k} an. Eine solche Rotationskoordinate ist deshalb selbst nicht rein periodisch, aber man sieht, daß die Funktion $q_k - w_k q_{0k}$ eine periodische Funktion von w_k mit der Periode Eins sein muß und deshalb in eine FOURIER-Reihe entwickelt werden kann:

$$q_k - w_k q_{0k} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{2\pi U \nu_k} \quad (\text{Rotation}). \quad (9-45b)$$

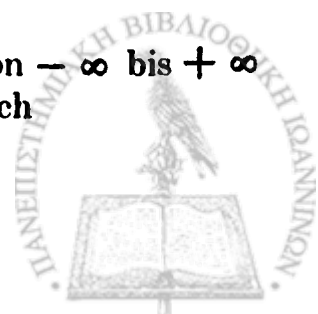
Entsprechend ist die zeitliche Abhängigkeit der Funktion durch die Entwicklung

$$q_k - (\nu_k t + \beta_k) q_{0k} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{2\pi U(\nu_k t + \beta_k)} \quad (\text{Rotation}) \quad (9-46b)$$

gegeben. Es ist demnach stets möglich, eine periodische Separationskoordinate durch eine Summe einfacher harmonischer Bewegungen auszudrücken, die die Fundamentalfrequenz ν_k und alle ihre Harmonischen enthält. Betrachten wir jedoch eine Funktion, die mehrere q_k enthält, dann müssen in einer FOURIER-Entwicklung dieser Funktion die Frequenzen ν_k jeder auftretenden Koordinate q_k erscheinen. Zum Beispiel sind die cartesischen Koordinaten x_i der Teilchen des Systems oft keine separierbaren Koordinaten. Nichtsdestoweniger können sie durch die separierbaren Koordinaten q_k ausgedrückt werden, und jede FOURIER-Entwicklung der x_i wird alle möglichen Linearkombinationen der Fundamentalfrequenzen der Separationskoordinaten enthalten. Wir werden somit auf eine Entwicklung der Form

$$x_i = \sum_{j_1=-\infty}^{\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{j_n=-\infty}^{\infty} a_{j_1 \dots j_n} e^{2\pi i(j_1 \nu_1 + j_2 \nu_2 + \dots + j_n \nu_n)} \quad (9-48)$$

geführt, wobei die j n ganzzahlige Indizes sind, die von $-\infty$ bis $+\infty$ laufen. Als Funktion der Zeit wird Gl. (9-48) schließlich



$$x_i = \sum_{j_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{j_n=-\infty}^{\infty} a_{j_1 \dots j_n} e^{2\pi i(j_1\nu_1 + \dots + j_n\nu_n)t + 2\pi i(\beta_1 + \dots + \beta_n)}. \tag{9-49}$$

Wenn nun die ν_i in keinem rationalen Verhältnis zueinander stehen, stellt Gl. (9-49) keine einfach periodische Funktion der Zeit dar, wie zum Beispiel (9-46). Während der Faktor

$$e^{2\pi i j_1 t}$$

seinen ursprünglichen Wert wieder annimmt, wenn t sich um $1/\nu_1$ ändert, zeigen die anderen Exponentialfaktoren nicht die gleiche Periodizität, solange die verschiedenen Frequenzen inkommensurabel sind. Die gesamte Funktion ist deshalb nicht einfach periodisch; vielmehr sagt man, sie sei *mehrfach* oder *bedingt periodisch*. Die Bahn eines harmonischen Oszillators mit mehr als einer Dimension wurde bereits als Beispiel der bedingt periodischen Bewegung angeführt. Betrachten wir einen zweidimensionalen Oszillator mit rüchtreibenden Kräften, die längs der x - und y -Achse wirken! Diese cartesischen Koordinaten sind die Separationsvariablen, und jede wird eine einfache harmonische Bewegung mit den Frequenzen ν_x bzw. ν_y zeigen. Nehmen wir an, daß die Koordinaten um 45° um die z -Achse gedreht seien; die Komponenten der Bewegung längs der neuen x' , y' -Achsen lauten dann

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{2}} [x_0 \cos 2\pi(\nu_x t + \beta_x) + y_0 \cos 2\pi(\nu_y t + \beta_y)], \\ y' &= \frac{1}{\sqrt{2}} [y_0 \cos 2\pi(\nu_y t + \beta_y) - x_0 \cos 2\pi(\nu_x t + \beta_x)]. \end{aligned} \tag{9-50}$$

Ist ν_x/ν_y eine rationale Zahl, so sind diese zwei Ausdrücke einfach periodisch. Sie entsprechen einer geschlossenen LISSAJOUS-Figur. Aber wenn ν_x und ν_y inkommensurabel sind, wird die LISSAJOUS-Figur niemals ihren vorherigen Weg wieder durchlaufen, und die Gl. (9-50) liefern einfache Beispiele der mehrfach periodischen Reihenentwicklungen der Form (9-49).

Sieht man wieder davon ab, daß alle Frequenzen in einem rationalen Verhältnis zueinander stehen, so kann eine bedingt periodische Funktion stets aus der Erzeugenden W gebildet werden. Die Definitionsgleichung für J_1 , Gl. (9-35), besagt, daß dann, wenn q_i einen vollständigen Zyklus durchläuft, d.h., wenn w_i sich um Eins ändert, die charakteristische Funktion um J_i anwächst. Daraus folgt, daß die Funktion

$$W' = W - \sum_k w_k J_k \tag{9-51}$$



ungeändert bleibt, wenn *jedes* w_k um Eins anwächst, während alle anderen Winkelvariablen konstant bleiben. Gl. (9-51) stellt deshalb eine mehrfach periodische Funktion dar, die mit Ausdrücken w_i in eine Reihe der Form (9-48) oder mit den Frequenzen ν_i wie in Gl. (9-49) entwickelt werden kann. Da die Transformationsgleichungen für die Winkelvariablen lauten:

$$w_k = \frac{\partial W}{\partial J_k},$$

kann man erkennen, daß Gl. (9-51) eine LEGENDRESche Transformation von der Basis q, J nach der Basis q, w definiert. Tatsächlich zeigt der Vergleich mit Gl. (8-10), daß $W'(q, w)$ die Erzeugende der Form $F_1(q, Q)$ ist, die die kanonische Transformation von den Variablen q, p auf die Variablen w, J hervorruft. Obwohl W' somit die gleiche Transformation wie W erzeugt, ist W' natürlich *keine* Lösung der HAMILTON-JACOBISchen Gleichung.⁶

Es wurde besonders darauf hingewiesen, daß die Konfiguration des Systems nur dann bedingt periodisch ist, wenn die Frequenzen ν_i keine rationalen Vielfache voneinander sind. Anderenfalls wiederholte sich die Konfiguration nach einer hinreichend langen Zeit und wäre deshalb einfach periodisch. Die formale Bedingung dafür, daß die Verhältnisse aller Frequenzen rational sind, besteht darin, daß $n - 1$ Beziehungen der Form

$$\sum_{i=1}^n j_i \nu_i = 0 \quad (9-52)$$

existieren, wobei die j_i ganze Zahlen sind. Löst man diese Gleichungen auf, so kann man jedes ν_i als rationales Verhältnis der anderen Frequenzen ausdrücken. Wenn nur m Beziehungen der Form (9-52) zwischen den Fundamentalfrequenzen bestehen, dann nennt man das System *m-fach entartet*. Ist m gleich $n - 1$, so daß die Bewegung ein-

⁶ Die Wirkungs- und Winkelvariablen wurden hier mit Hilfe der einfach periodischen separierbaren Koordinaten definiert. Es wurde dann gezeigt, daß die Bewegung des Systems als Ganzes im allgemeinen mehrfach periodisch ist. Man muß daran denken, daß es möglich ist, das Verfahren umzukehren. Geht man davon aus, daß die Systembewegung mehrfach periodisch ist, so ist es möglich, die Wirkungs- und Winkelvariablen derart einzuführen, daß die Konfiguration des Systems und die Erzeugende $W'(q, w)$ mehrfach periodisch in den w mit der Periode Eins sind, und die HAMILTON-Funktion in allen w zyklisch ist. Man kann auf diese Weise die Notwendigkeit vermeiden, sich auf die Separationskoordinaten zu beziehen. Wegen weiterer Einzelheiten siehe BORN, *Die Mechanik des Atoms*, Abschn. 15.



fach periodisch ist, dann nennt man das System *vollständig entartet*. Ist die Bahn des Systempunktes geschlossen, so wird die Bewegung demnach immer vollständig entartet sein.⁷

Die einfachsten Beispiele von Entartung treten auf, wenn zwei oder mehr Frequenzen gleich sind. Wenn zwei der Kräftekonstanten in einem dreidimensionalen Oszillator gleich sind, dann sind die entsprechenden Frequenzen identisch, und das System ist einfach entartet. In einem isotropen linearen Oszillator sind die Kräftekonstanten in allen Richtungen die gleichen, d.h., alle Frequenzen sind gleich, und das System ist vollständig entartet.

Immer wenn Entartung vorliegt, sind die Fundamentalfrequenzen nicht mehr unabhängig, und die periodische Bewegung des Systems kann durch weniger als den vollen Satz der n Frequenzen beschrieben werden. Tatsächlich können die m Entartungsbedingungen dazu benutzt werden, die Zahl der Frequenzen auf $n - m$ zu reduzieren, und man sagt, die Systembewegung sei $(n - m)$ -fach periodisch. Die Reduktion der Frequenzen kann am elegantesten mittels einer Punkttransformation der Wirkungs- und Winkelvariablen ausgeführt werden. Es ist zweckmäßig, die m Entartungsbedingungen in folgender Form zusammenzufassen:

$$\sum_{i=1}^n j_{ki} \nu_i = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (9-53)$$

Betrachten wir nun eine Punkttransformation von (w, J) nach (w', J') , die definiert ist durch die Erzeugende (vgl. Gl. (8-19)):

⁷ Es besteht ein interessanter Zusammenhang zwischen Entartung und den Koordinaten, für die die HAMILTON-JACOBISCHE Gleichung separierbar ist. Man kann zeigen, daß die Bahn des Systempunktes für ein nichtentartetes System ein begrenztes Gebiet sowohl im Konfigurations- als auch im Phasenraum vollständig ausfüllt (vgl. BORN, op. cit., Anhang 1). Nun ist die Bewegung für irgendeine der Separationskoordinaten einfach periodisch und – wie gezeigt wurde – unabhängig von der Bewegung der anderen Koordinaten. Demnach muß die Bahn des Systempunktes durch die Flächen konstanter q_i, p_i begrenzt sein, die die Grenzen der Schwingungsbewegung der Separationsvariablen markieren. (Das Argument läßt sich leicht auf die Rotation ausdehnen, indem man alle Winkel auf das Gebiet 0 bis 2π beschränkt.) Diese Flächen definieren deshalb das Volumen im Raum, das durch die Bahn des Systempunktes dicht ausgefüllt wird. Offensichtlich folgt daraus, daß die Separation der Variablen in nichtentarteten Systemen eindeutig sein muß; die HAMILTON-JACOBISCHE Gleichung kann nicht in zwei verschiedenen Koordinatensystemen separiert werden (abgesehen von trivialen Variationen wie etwa Maßstabsänderungen). Die Möglichkeit, die Bewegung in mehr als einem Satz von Koordinaten zu separieren, liefert somit den sicheren Nachweis, daß das System entartet ist.



$$F_2 = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n J'_k j_{ki} w_i + \sum_{k=m+1}^n J'_k w_k. \quad (9-54)$$

Die transformierten Koordinaten sind

$$\begin{aligned} w'_k &= \sum_{i=1}^n j_{ki} w_i, & k &= 1, \dots, m, \\ w'_k &= w_k, & k &= m+1 \dots n. \end{aligned} \quad (9-55)$$

Entsprechend lauten die neuen Frequenzen

$$\begin{aligned} \nu'_k &= \dot{w}'_k = \sum_{i=1}^n j_{ki} \nu_i = 0 & k &= 1, \dots, m, \\ &= \nu_k & k &= m+1, \dots, n. \end{aligned} \quad (9-56)$$

Somit sind in der Schreibweise der transformierten Koordinaten m der Frequenzen Null, und es bleibt ein Satz von $n - m$ unabhängigen Frequenzen übrig. Offensichtlich können die neuen w'_k auch als Winkelvariablen in dem Sinne bezeichnet werden, daß die Systemkonfiguration mehrfach periodisch in den Koordinaten w'_k mit der Fundamentalperiode Eins ist. Die entsprechenden konstanten Wirkungsvariablen sind durch die Lösung der n Transformationsgleichungen

$$J_i = \sum_{k=1}^m J'_k j_{ki} + \sum_{k=m+1}^n J'_k \delta_{ki} \quad (9-57)$$

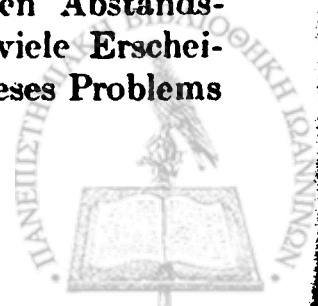
gegeben.

Die Frequenzen Null entsprechen konstanten Faktoren in der FOURIER-Entwicklung. Diese liegen natürlich auch in den ursprünglichen FOURIER-Reihen als Funktionen der ν vor (vgl. Gl. 9-49)). Sie treten immer dann auf, wenn die Indizes j_i die Entartungsbedingungen erfüllen. Da

$$\nu'_i = \frac{\partial H}{\partial J'_i}$$

gilt, muß die HAMILTON-Funktion von den Wirkungsvariablen J'_i unabhängig sein, deren entsprechenden Frequenzen verschwinden. In einem vollständig entarteten System kann die HAMILTON-Funktion deshalb so geschrieben werden, daß sie nur von einer der Wirkungsvariablen abhängt.

Das Problem der gebundenen Bewegung eines Teilchens in einem Zentralkräftefeld, das durch das Gesetz des reziproken Abstands-Quadrates beschrieben werden kann, veranschaulicht viele Erscheinungen, die bei Entartung auftreten. Eine Diskussion dieses Problems



bietet auch eine Gelegenheit, zu zeigen, wie das Verfahren der Wirkungs- und Winkelvariablen auf spezielle Systeme angewendet wird, und welche Zusammenhänge mit der BOHRSchen Quantenmechanik bestehen. Dementsprechend ist der nächste Abschnitt einer ausführlichen Behandlung des KEPLER-Problems mit Hilfe von Wirkungs- und Winkelvariablen gewidmet.

9-7 Das Kepler-Problem mit Wirkungs- und Winkelvariablen

Um alle Eigenschaften der Lösung aufzuzeigen, wollen wir die Bewegung im Raum untersuchen und lieber nicht von der uns von vornherein bekannten Tatsache Gebrauch machen, daß die Bahn in einer Ebene liegt. In sphärischen Polarkoordinaten lautet die kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta \dot{\phi}^2), \quad (9-58)$$

wobei θ der Polar- und ϕ der Azimut-Winkel um die Polachse sind. Die kanonischen Impulse sind deshalb

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta}, \quad p_\phi = mr^2 \sin^2\theta \dot{\phi}. \quad (9-59)$$

Mit diesen Koordinaten und Impulsen wird die HAMILTON-Funktion des Problems

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2\theta} \right) - \frac{k}{r} \quad (9-60)$$

Nur für eine anziehende Kraft entsprechend einem positiven k wird die Bahn beschränkt und deshalb periodisch sein. Aus der Form der HAMILTON-Funktion kann die HAMILTON-JACOBISCHE Gleichung für W unmittelbar abgelesen werden:

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \left(\frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 \right] - \frac{k}{r} = \alpha_1 = E, \quad (9-61)$$

wobei die Konstante α_1 im besonderen mit der Gesamtenergie identifiziert worden war. Die Variablen in Gl. (9-61) können separiert werden, indem man eine Lösung der Form

$$W = W_r(r) + W_\theta(\theta) + W_\phi(\phi) \quad (9-62)$$

ansetzt. Bei der Substitution dieses Lösungsansatzes in Gl. (9-61) stellt man fest, daß die Abhängigkeit von ϕ nur im letzten Term in der Klammer auftritt. Soll die Gleichung für alle ϕ identisch erfüllt



sein, so muß gelten:

$$\frac{\partial W_\phi}{\partial \phi} = \alpha_\phi. \quad (9-63a)$$

α_ϕ ist eine der Integrationskonstanten. Die HAMILTON-JACOBISCHE Gleichung reduziert sich nun auf

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial W_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left\{ \left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\alpha_\phi^2}{\sin^2 \theta} \right\} \right] - \frac{k}{r} = E.$$

Der Term in der geschweiften Klammer enthält nur θ und muß deshalb wiederum eine Konstante sein:

$$\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\alpha_\phi^2}{\sin^2 \theta} = \alpha_\theta^2. \quad (9-63b)$$

Die HAMILTON-JACOBISCHE Gleichung enthält nun nur noch die Abhängigkeit von r :

$$\left(\frac{\partial W_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{\alpha_\theta^2}{r^2} = 2m \left(E + \frac{k}{r} \right). \quad (9-63c)$$

Jede der drei einzelnen Gleichungen (9-63) entspricht einem Erhaltungssatz der Bewegung. Die erste besagt, daß p_ϕ , die Komponente des Drehimpulses längs der festen Polachse, eine Konstante der Bewegung ist. Gl. (9-63b) kann geschrieben werden:

$$p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} = \alpha_\theta^2.$$

Nun lautet die HAMILTON-Funktion in ebenen Polarkoordinaten

$$H = \frac{1}{2m} \left[p_r^2 + \frac{p^2}{r^2} \right] - \frac{k}{r}$$

Darin ist p der Betrag des Gesamtdrehimpulses. Der Vergleich mit der HAMILTON-Funktion in Gl. (9-60) zeigt, daß α_θ mit p zu identifizieren ist. Gl. (9-63b) beschreibt deshalb die Erhaltung des Gesamtdrehimpulses. Gl. (9-63c) schließlich entspricht der Erhaltung der Energie.

Die Gl. (9-63) können unmittelbar integriert werden. Sie liefern die Form der erzeugenden Funktion. Allerdings ist dieser Schritt praktisch von geringem Interesse, da uns in erster Linie daran liegt, die Wirkungs- und Winkelvariablen zu erhalten. Es gibt drei Wirkungsvariablen, definiert durch

$$J_1 \equiv J_\phi = \oint p_\phi d\phi = \oint \frac{\partial W_\phi}{\partial \phi} d\phi, \quad (9-64a)$$



$$J_2 \equiv J_\theta = \oint p_\theta d\theta = \oint \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} d\theta, \quad (9-64b)$$

$$J_3 \equiv J_r = \oint p_r dr = \oint \frac{\partial W_r}{\partial r} dr. \quad (9-64c)$$

Wegen der Gl. (9-63) können diese drei Definitionsintegrale geschrieben werden:

$$J_\phi = \oint \alpha_\phi d\phi, \quad (9-65a)$$

$$J_\theta = \oint \sqrt{\alpha_\theta^2 - \frac{\alpha_\phi^2}{\sin^2 \theta}} d\theta, \quad (9-65b)$$

$$J_r = \oint \sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}} dr. \quad (9-65c)$$

Das erste Integral ist trivial; ϕ durchläuft bei einem vollständigen Umlauf den Winkel 2π , und es ist deshalb

$$J_\phi = 2\pi\alpha_\phi = 2\pi p_\phi. \quad (9-66)$$

Dieses Ergebnis hätte man bereits voraussagen können, denn ϕ ist eine zyklische Koordinate in H , und Gl. (9-66) ist lediglich ein spezieller Fall der Gl. (9-34') für die Wirkungsvariablen, die zyklischen Koordinaten entsprechen. Die Integration der Gl. (9-65b) bietet keine besondere mathematische Schwierigkeit und wird am einfachsten nach einem Verfahren ausgeführt, das von J. H. VAN VLECK stammt. Es sei wiederholt, daß dann, wenn die Definitionsgleichungen für die generalisierten Koordinaten die Zeit nicht explizit enthalten, gilt:

$$2T = \sum_i p_i \dot{q}_i$$

(vgl. Abschn. 2-6). Drückt man die kinetische Energie sowohl in sphärischen als auch in ebenen Polarkoordinaten aus, so folgt

$$p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} + p_\phi \dot{\phi} = p_r \dot{r} + p_\psi \dot{\psi},$$

wobei ψ der ebene Azimutwinkel des Teilchens auf seiner Bahn ist. Demnach kann $p_\theta d\theta$ in Gl. (9-64b) durch $p d\psi - p_\phi d\phi$ ersetzt werden, und die Wirkungsvariable wird

$$J_\theta = \oint p d\psi - \oint p_\phi d\phi.$$

Durchläuft θ einen vollständigen Librationszyklus, so ändern sich ϕ und ψ um 2π und die Integrale reduzieren sich auf

$$J_\theta = 2\pi(p - p_\phi) = 2\pi(\alpha_\theta - \alpha_\phi). \quad (9-67)$$



Das letzte Integral (für J_r) kann nun geschrieben werden:

$$J_r = \oint \sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{(J_\phi + J_\theta)^2}{4\pi^2 r^2}} dr. \quad (9-68)$$

Nach Ausführung der Integration kann diese Gleichung nach der Energie $E \equiv H$ in Abhängigkeit von den drei Wirkungsvariablen J_ϕ, J_θ, J_r aufgelöst werden. Wir stellen fest, daß J_ϕ und J_θ in E nur in der Kombination $J_\theta + J_\phi$ auftreten können, und daß demnach die entsprechenden Frequenzen ν_ϕ und ν_θ gleich sein müssen und auf eine Entartung hinweisen. Dieses Ergebnis setzt nicht voraus, daß die Zentralkraft durch ein Gesetz des reziproken Abstands-Quadrates dargestellt werden kann; jede Bewegung, die durch eine Zentralkraft hervorgerufen wird, ist mindestens einfach entartet.

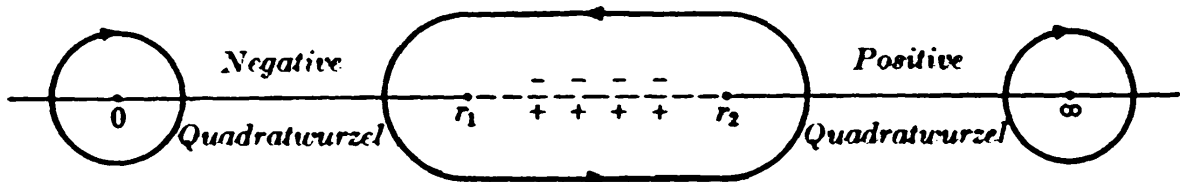


Abb. 9-3. Die komplexe r -Ebene in der Nachbarschaft der reellen Achse; die bei der Berechnung von J_r auftretenden Integrationswege sind eingezeichnet.

Das in Gl. (9-68) enthaltene Integral kann auf elementare Weise gelöst werden, jedoch läßt sich die Integration am elegantesten und raschesten ausführen, wenn man die Residuenmethode verwendet. Dieses Verfahren wurde hierfür zuerst von SOMMERFELD angewendet. Für die Leser, die mit diesem Verfahren vertraut sind, wollen wir die Schritte darlegen, die bei der Integration von Gl. (9-68) vorzunehmen sind. Eine gebundene Bewegung kann natürlich nur dann auftreten, wenn E negativ ist (vgl. Abschn. 3-3), und da der Integrand gleich $p_r = m\dot{r}$ ist, sind die Grenzen der Bewegung durch die Wurzeln r_1 und r_2 des Ausdruckes unter dem Wurzelzeichen definiert. Wenn r_1 wie in Abb. 3-6 die innere Grenze ist, geht ein vollständiger r -Zyklus von r_1 nach r_2 und dann wieder zurück nach r_1 . Auf der äußeren Hälfte des Weges, von r_1 nach r_2 , ist p_r positiv, und wir haben die positive Quadratwurzel zu nehmen. Jedoch auf dem Rückweg nach r_1 ist p_r negativ, und die Quadratwurzel muß ebenfalls negativ sein. Die Integration enthält somit beide Zweige einer zweideutigen Funktion. r_1 und r_2 sind die Verzweigungspunkte. Folglich kann die komplexe Ebene als Blatt einer RIEMANNschen Fläche dargestellt werden, die längs der reellen Achse von r_1 bis r_2 aufgeschnitten ist (siehe Abb. 9-3).

Da der Integrationsweg die Linie zwischen den Verzweigungspunkten umschließt, kann die Residuenmethode nicht direkt ange-

wendet werden. Wir können jedoch den Weg auch so auffassen, als umschließe er den gesamten Rest der komplexen Ebene. Die Integrationsrichtung ist nun allerdings umgekehrt (im Uhrzeigersinn).⁸ Der Integrand ist in diesem Gebiet eindeutig, und es besteht nun keine Einschränkung für die Anwendung der Residuenmethode. Es gibt nur zwei Singularitäten, nämlich den Ursprung und Unendlich. Der Integrationsweg kann zu zwei Kreisen auseinandergezogen werden, die diese zwei Punkte im Uhrzeigersinn umschließen. Nun muß das Vorzeichen vor der Quadratwurzel im Integranden für das Gebiet längs der reellen Achse unterhalb r_1 negativ sein, wie man durch eine Untersuchung des Verhaltens der Funktion in der Nachbarschaft von r_1 sehen kann. Wenn der Integrand dargestellt wird durch

$$-\sqrt{A + \frac{2B}{r} - \frac{C}{r^2}},$$

so ist das Residuum am Ursprung

$$R_0 = -\sqrt{-C}.$$

Oberhalb r_2 ist das Vorzeichen der Quadratwurzel auf der reellen Achse positiv. Das Residuum erhält man nach dem gebräuchlichen Verfahren, indem man die Integrationsvariable in $z = r^{-1}$ abändert:

$$-\oint \frac{1}{z^2} \sqrt{A + 2Bz - Cz^2} dz.$$

Die Entwicklung um $z = 0$ liefert das Residuum

$$R_\infty = -\frac{B}{\sqrt{A}}.$$

Das gesamte Integral ist das $-2\pi i$ -fache der Summe der Residuen:

$$J_r = 2\pi i \left(\sqrt{-C} + \frac{B}{\sqrt{A}} \right)$$

oder, wenn man die Koeffizienten A , B und C substituiert:

$$J_r = -(J_\theta + J_\phi) + \pi k \sqrt{\frac{2m}{-E}} \quad (9-69)$$

⁸ Um sich diese Änderung des Standpunktes vorzustellen, ist es zweckmäßig, sich die komplexe Ebene als stereographische Projektion auf die Oberfläche einer Kugel vorzustellen, wobei der Ursprung am Südpol und der Punkt ∞ am Nordpol liegt. Die reelle Achse wird ein Meridiankreis, der die beiden Pole verbindet. Jeder geschlossene Integrationsweg auf der Kugel teilt die Oberfläche der Kugel in zwei Gebiete. Man kann den Weg dann so ansehen, als umschließe er jedes der zwei Gebiete, je nachdem welche Integrationsrichtung gewählt wird.



Gl. (9-69) liefert die funktionale Abhängigkeit von H von den Wirkungsvariablen; löst man nämlich nach E auf, so findet man

$$H \equiv E = - \frac{2\pi^2 mk^2}{(J_r + J_\theta + J_\phi)^2} \quad (9-70)$$

Es sei bemerkt, daß, wie vorhergesagt, J_θ und J_ϕ nur in der Kombination $J_\theta + J_\phi$ auftreten. Mehr noch, alle drei Wirkungsvariablen erscheinen nur in der Form $J_r + J_\theta + J_\phi$. Demnach sind alle Frequenzen gleich; *die Bewegung ist vollständig entartet*. Dieses Ergebnis hätte man auch bereits früher voraussagen können, denn wir wissen, daß bei einem Kraftgesetz der Form $1/r^2$ die Bahn für negative Energien geschlossen ist. Bei einer geschlossenen Bahn ist die Bewegung einfach periodisch und deshalb vollständig entartet. Wenn die Zentralkraft einen Term r^{-3} enthält, der infolge relativistischer Korrekturen auftritt, dann ist die Bahn nicht mehr geschlossen, sondern sie hat die Form einer präzessierenden Ellipse. Eine der Entartungen wird in diesem Falle aufgehoben, aber die Bewegung ist noch einfach entartet, da für alle Zentralkräfte $\nu_\theta = \nu_\phi$ gilt. Die eine Frequenz für die Bewegung ist gegeben durch

$$\nu = \frac{\partial H}{\partial J_r} = \frac{\partial H}{\partial J_\theta} = \frac{\partial H}{\partial J_\phi} = \frac{4\pi^2 mk^2}{(J_r + J_\theta + J_\phi)^3}$$

Wenn wir die Summe der J durch die Energie vermöge der Gl. (9-70) ausdrücken, so ist die Periode der Bahn

$$\tau = \pi k \sqrt{\frac{m}{-2E^3}} \quad (9-71)$$

Diese Formel für die Periode stimmt mit dem dritten KEPLERSchen Gesetz (Gl. (3-54)) überein, wenn man sich daran erinnert, daß die große Halbachse a gleich $-k/2E$ ist.

Die entarteten Frequenzen können durch eine Kontakttransformation auf einen neuen Satz von Wirkungs- und Winkelvariablen eliminiert werden, indem man dabei dem im vorigen Abschnitt dargestellten Verfahren folgt. Werden die Entartungsbedingungen ausgedrückt durch

$$\nu_\phi - \nu_\theta = 0, \quad \nu_\theta - \nu_r = 0,$$

so ist die geeignete erzeugende Funktion

$$F = (w_\phi - w_\theta)J'_1 + (w_\theta - w_r)J'_2 + w_r J'_3 \quad (9-72)$$

Die neuen Winkelvariablen sind

$$\begin{aligned} w'_1 &= w_\phi - w_\theta, \\ w'_2 &= w_\theta - w_r, \\ w'_3 &= w_r, \end{aligned}$$

(9-73)



und zwei der neuen Frequenzen ν'_1 und ν'_2 sind, wie beabsichtigt, Null. Die neuen Wirkungsvariablen können wir aus den Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned} J_\phi &= J'_1, \\ J_\theta &= J'_2 - J'_1, \\ J_r &= J'_3 - J'_2 \end{aligned}$$

erhalten. Das liefert die Beziehungen

$$\begin{aligned} J'_1 &= J_\phi, \\ J'_2 &= J_\phi + J_\theta, \\ J'_3 &= J_\phi + J_\theta + J_r. \end{aligned} \quad (9-74)$$

Mit diesen transformierten Variablen lautet die HAMILTON-Funktion

$$H = - \frac{2\pi^2 m k^2}{J'^2_3}. \quad (9-75)$$

H enthält nur die Wirkungsvariable, für die die entsprechende Frequenz von Null verschieden ist.

Die Werte der Winkelvariablen und ihre physikalische Bedeutung im Zusammenhang mit der Bahn erhält man aus den Transformationsgleichungen

$$w_i = \frac{\partial W}{\partial J_i}. \quad (9-76)$$

Die Integration der Gl. (9-63) liefert W in Abhängigkeit von den Konstanten der Bewegung p , p_ϕ und E , und damit in Abhängigkeit von den Wirkungsvariablen. Diese Funktion kann nun in die Gl. (9-76) eingesetzt werden und stellt damit einen Zusammenhang zwischen den w und den Konstanten der Bewegung her. In der Praxis werden die Integrationen oft recht langwierig. Glücklicherweise reichen einige qualitative Betrachtungen aus, um die Bedeutung der konstanten Winkelkoordinaten w'_1 und w'_2 aufzuzeigen. Die Wirkungsvariable J'_1 ist das 2π -fache der Komponente des Drehimpulses längs der Polachse, und demnach muß seine konjugierte Winkelvariable ein fester Drehwinkel um diese Achse sein. Der Winkel der Knotenlinie (die Linie, die durch den Schnitt der Bahnebene mit der Äquatorialebene gebildet wird) ist ein solcher Winkel, und w'_1 kann sich deshalb von ihm nur durch eine Konstante unterscheiden (der Wert dieser Konstanten muß durch die explizite Integration bestimmt werden). Ähnlich gilt $J'_2 = J_\theta + J_\phi = 2\pi p$ und ist somit proportional zum gesamten Drehimpuls. Der konjugierte Winkel w'_2 ist deshalb auf einen festen Winkel in der Bahnebene bezogen, wie zum Beispiel auf den Winkel zwischen dem Perihel und der



Knotenlinie. Es sei auch bemerkt, daß das Verhältnis J'_1/J'_2 der Kosinus des Winkels zwischen der Polachse und dem Drehimpulsvektor sein muß. Diese drei Größen w'_1 , w'_2 und J'_1/J'_2 sind in Wirklichkeit die EULERSchen Winkel, die die Orientierung der Bahn im Raum bestimmen.

Die Methode der Wirkungs- und Winkelvariablen wird einem wahrscheinlich nicht als der kürzeste Weg erscheinen, das KEPLER-Problem zu lösen, und die praktische Nützlichkeit des Verfahrens kann wohl in Frage gestellt werden. Wir haben gesehen, daß der Variablensatz (w', J') dazu dient, die Lage der Bahn im Raum festzulegen, und es ist auch möglich, die Gestalt und Form der Bahn (d.h. die große Halbachse und die Elliptizität) mit Hilfe der J'_i auszudrücken. Diese Variablen sind deshalb zum Studium der astronomischen Planetenbahnen besonders geeignet, wobei der Satz (w', J') der Wirkungs- und Winkelvariablen als die DELAUNAYSchen *Elemente* der Bahn bekannt sind. Wenn nur zwei Körper an der Bewegung teilhaben, sind diese Elemente (mit Ausnahme von w'_3) exakt Konstanten der Bewegung. Wenn jedoch kleine Störkräfte wirken, die zum Beispiel von anderen Planeten oder Satelliten herrühren, kann die Bewegung oft durch eine langsame zeitliche Änderung dieser Elemente dargestellt werden. Die Wirkungs- und Winkelvariablen liefern ein bedeutendes Hilfsmittel für das Studium der Effekte solcher Störungen.

Lange Zeit blieben die Wirkungs- und Winkelvariablen ein esoterisches Verfahren der klassischen Mechanik, das nur von Astronomen verwendet wurde. Die Situation änderte sich rapide mit der Entstehung der BOHRSchen Quantentheorie des Atoms, denn man fand, daß die Quantenbedingungen am einfachsten mit Hilfe der Wirkungsvariablen aufgestellt werden können. In der klassischen Mechanik besitzen die Wirkungsvariablen einen kontinuierlichen Wertebereich, das ist aber in der Quantenmechanik nicht mehr der Fall. Die Quantenbedingungen von SOMMERFELD und WILSON fordern, daß die Bewegung auf solche Bahnen beschränkt ist, für die die „Eigen“-Wirkungsvariablen diskrete Werte haben, die ganzzahlige Vielfache des Wirkungsquantums h sind. (Mit „Eigen“-Wirkungsvariablen sind diejenigen J gemeint, deren Frequenzen nicht entartet und verschieden von Null sind. Zum Beispiel ist J'_3 eine „Eigen“-Wirkungsvariable.) Wie SOMMERFELD sagte, liefert somit die Methode der Wirkungs- und Winkelvariablen „einen Königsweg zur Quantisierung“. Man hatte nur das Problem in der klassischen Mechanik unter Verwendung von Wirkungs- und Winkelvariablen zu lösen, und die Bewegung konnte unmittelbar quantisiert werden, indem man die J durch ganzzahlige Vielfache der PLANCKSchen Konstanten h ersetzte.



Als Beispiel dieses Verfahrens sei bemerkt, daß die quantisierten Energieterme eines Wasserstoffatoms sofort aus Gl. (9-75) folgen, wenn k gleich Ze^2 gesetzt und J'_3 durch nh ersetzt wird:

$$E = - \frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{n^2 h^2} \quad (9-77)$$

Hier wird die ganze Zahl n die *Hauptquantenzahl* genannt. Sie ist die einzige Quantenzahl für das vollständig entartete System. Die Entartung wird teilweise aufgehoben, wenn relativistische Korrekturen eingeführt werden. Diese rufen eine Präzession des Perihels in der Bahnebene hervor. Die Winkelvariable w'_2 , die die Lage des Perihels mißt, ändert sich dann mit der Zeit und die konjugierte Wirkungsvariable wird eine „Eigen“-Variable und muß auch quantisiert sein:

$$J'_2 = kh.$$

Dabei ist k die *Bahnquantenzahl*. Da sowohl ν'_3 als auch ν'_2 von Null verschieden sind, muß die Energie sowohl von J'_3 als auch J'_2 , d.h. von n und k abhängen. Wir erhalten damit die wohlbekannte relativistische Feinstruktur der Wasserstoffniveaus. Die Entartung kann vollständig aufgehoben werden, indem man ein konstantes Magnetfeld längs der willkürlichen Polachse einführt. Die Bahnebene führt dann eine LARMOR-Präzession um die Polachse aus und ruft somit ein gleichförmiges Anwachsen der Winkelvariablen w'_1 mit der Zeit hervor. J'_1 wird deshalb eine „Eigen“-Wirkungsvariable bei der Anwesenheit eines Magnetfeldes und muß ebenfalls den Quantenbedingungen genügen:

$$J'_1 = mh.$$

m ist die *magnetische* Quantenzahl. Die Energie hängt nun von allen drei Quantenzahlen ab, und die Beseitigung der Entartung auf diese Weise führt so auf die ZEEMAN-Aufspaltung der Atomterme.⁹

Während der Blütezeit der alten Quantentheorie wurde dem Verfahren der Wirkungs- und Winkelvariablen natürlich große Aufmerksamkeit gewidmet, und eine Zeit lang war sie das tägliche Hilfsmittel für den forschenden theoretischen Physiker. Schon nach dem einfachen Wasserstoffatom wurden die Probleme jedoch zunehmend komplizierter, als daß sie noch klassisch hätten gelöst werden können, und es wurde notwendig, viele der zusätzlichen Kräfte als kleine Störungen zu behandeln. Wieder wandte sich der Physiker an den Astronomen, dieses Mal, um sich die Technik der Störungsrechnungen in der klassischen Mechanik auszuleihen. Obwohl es viele Ähnlichkeiten zwischen

⁹ Die so erhaltene Aufspaltung stellt nur den normalen ZEEMAN-Effekt dar. Der wirkliche anormale ZEEMAN-Effekt kann natürlich nur durch Einbeziehung der Wirkungen des „Spins“ berechnet werden.



der klassischen Störungstheorie und den Störungsmethoden der Wellenmechanik gibt, sind die klassischen Verfahren weit häufiger als ihre quantentheoretischen Gegenstücke anzutreffen, besonders dann, wenn Entartung auftritt.

Es wurde jedoch bald offensichtlich, daß die Schwierigkeiten nicht allein mathematischer Natur waren; die BOHRsche Quantentheorie war einfach kein genaues Abbild der Natur. Es ist wohlbekannt, daß dieser tote Punkt durch die fast gleichzeitige Einführung der Wellen- und Matrizenmechanik überwunden wurde. Die Verfahren zur Lösung quantentheoretischer Probleme waren in diesen neuen Theorien völlig anders, und das Interesse an Wirkungs- und Winkelvariablen verschwand ganz plötzlich. Jetzt sind sie wieder in den ausschließlichen Bereich der Astronomie (und in Lehrbücher über klassische Mechanik) zurückgekehrt. Doch einige der Begriffe sind geblieben – wie etwa Entartung und der Zusammenhang zwischen Entartung und den Separationskoordinaten – und sind noch ein Teil im Gebäude der Quantenmechanik.

Es ist sonderbar genug, daß die Wurzel der neueren Wellenmechanik auch aus der HAMILTON-JACOBISCHEN Theorie entstanden ist. Wie die Formulierung der klassischen Mechanik mit Hilfe der POISSONSCHEN Klammern als Ausgangspunkt der Matrizenmechanik dient, so liegt der Ursprung der Wellenmechanik in dem Zusammenhang zwischen HAMILTON-JACOBISCHER Theorie und geometrischer Optik. Dem Studium dieses Zusammenhanges wollen wir nun unsere Aufmerksamkeit zuwenden.

9-8 Hamilton-Jacobische Theorie, geometrische Optik und Wellenmechanik

Wir wollen nur solche Systeme betrachten, deren HAMILTON-Funktion eine Konstante der Bewegung und mit der Gesamtenergie identisch ist. Die HAMILTONSche Wirkungsfunktion und die charakteristische Funktion stehen dann in folgendem Zusammenhang:

$$S(q, P, t) = W(q, P) - Et. \quad (9-78)$$

Da die charakteristische Funktion zeitunabhängig ist, sind die Flächen mit konstantem W im Konfigurationsraum fest angeordnet. Eine Fläche, die durch einen konstanten Wert von S charakterisiert wird, muß zu einer gegebenen Zeit mit einer besonderen Fläche zu konstantem W zusammenfallen. Der Wert von W , der einem definierten Wert von S entspricht, ändert sich jedoch im Laufe der Zeit ent-



sprechend Gl. (9-78). So fallen für $t = 0$ die Flächen $S = a$ und $S = b$ mit den Flächen $W = a$ bzw. $W = b$ zusammen (vgl. Abb. 9-4). Zu einer Zeit dt später fallen die Fläche $S = a$ mit der Fläche $W = a + Edt$ und ähnlich $S = b$ mit der Fläche $W = b + Edt$ zusammen. In

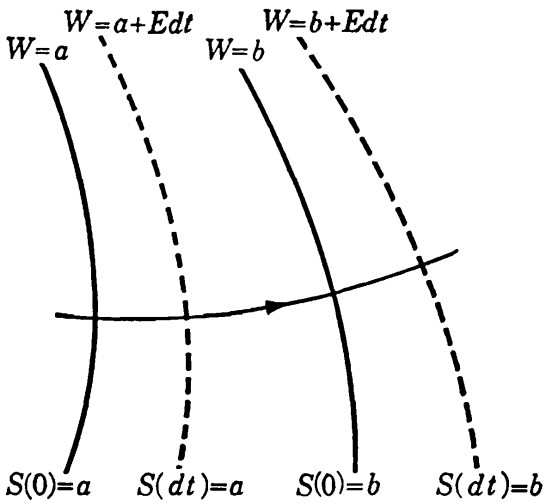


Abb. 9-4. Die Bewegung der Flächen mit konstantem S im Konfigurationsraum.

Wirklichkeit hat sich die Fläche $S = a$ während der Zeit dt von $W = a$ nach $W = a + Edt$ bewegt. Die Bewegung der Fläche im Laufe der Zeit ist dem Fortschreiten einer Wellenfront ähnlich, so etwa, wie sich zum Beispiel eine Stoßwelle durch den Raum fortpflanzt. Die Flächen mit konstantem S können deshalb als *Wellenfronten* angesehen werden, die im Konfigurationsraum fortschreiten.

Da die Flächen mit konstantem S im allgemeinen im Laufe der Zeit ihre Gestalt ändern, wird die

Wellengeschwindigkeit, d.h. die Geschwindigkeit, mit der sich die Flächen bewegen, nicht für alle Punkte auf den Flächen gleich sein. Es ist jedoch möglich, den Wert der Wellengeschwindigkeit an irgendeinem gegebenen Punkt zu berechnen. Der Einfachheit halber wollen wir ein System betrachten, das nur aus einem Teilchen besteht, und cartesische Lagekoordinaten als generalisierte Koordinaten verwenden. Der Konfigurationsraum reduziert sich dann auf den gewöhnlichen dreidimensionalen Raum. Dadurch wird die Geometrie des Problems wesentlich vereinfacht. Die Wellengeschwindigkeit an einem speziellen Punkt auf einer Fläche mit konstantem S ist durch den zur Fläche senkrechten Abstand gegeben, den die Wellenfront in einem infinitesimalen Zeitintervall dt durchwandert, geteilt durch das Zeitintervall dt . Wenn der infinitesimale, zur Fläche normale Abstand mit ds bezeichnet wird, dann ist die Wellengeschwindigkeit

$$u = \frac{ds}{dt} \tag{9-79}$$

Nun wandert die Fläche S in der Zeit dt von einer Fläche W nach einer neuen Fläche, für die der Wert der charakteristischen Funktion $W + dW$ ist, wobei

$$dW = E dt$$

gilt. Die Änderung dW steht zu dem Normalenabstand ds auch in



folgender Beziehung:

$$dW = |\nabla W| ds. \quad (9-80)$$

so daß

$$u = \frac{ds}{dt} = \frac{E}{|\nabla W|} \quad (9-81)$$

Der Betrag des Gradienten von W wird durch die HAMILTON-JACOBI-sche Gleichung geliefert. Diese hat die Form

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right] + V = E \quad (9-82)$$

oder entsprechend

$$(\nabla W)^2 = 2m(E - V). \quad (9-83)$$

Demnach ist die Wellengeschwindigkeit

$$u = \frac{E}{\sqrt{2m(E - V)}} \quad (9-84)$$

Gl. (9-84) kann in verschiedenen Formen ausgedrückt werden. Die Differenz zwischen E und V ist einfach die kinetische Energie T , so daß

$$u = \frac{E}{\sqrt{2mT}} \quad (9-85)$$

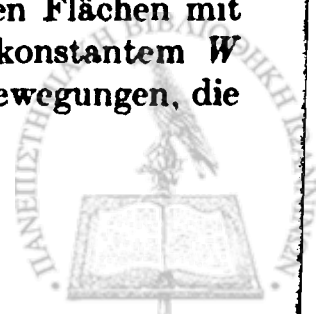
ist. Für das betrachtete Einteilchensystem gilt $2mT = m^2 v^2 = p^2$, und Gl. (9-85) kann deshalb auch geschrieben werden:

$$u = \frac{E}{p} = \frac{E}{mv} \quad (9-85')$$

Gl. (9-85') besagt, daß die Geschwindigkeit eines Punktes auf einer Fläche mit konstantem S umgekehrt proportional der räumlichen Geschwindigkeit des Teilchens ist, dessen Bewegung durch S beschrieben wird. Man kann leicht zeigen, daß die Trajektorien des Teilchens immer zu den Flächen mit konstantem S normal sein müssen. Die Richtung der Trajektorie an irgendeinem gegebenen Punkt im Raum ist durch die Richtung des Impulses p bestimmt. Wegen Gl. (9-21) gilt jedoch

$$p = \nabla W. \quad (9-86)$$

Also bestimmt der Gradient von W die Normale zu den Flächen mit konstantem S oder W . Eine Schar von Flächen mit konstantem W erzeugt somit einen Satz von Trajektorien möglicher Bewegungen, die



stets normal zu den Flächen sind. Wenn sich ein Teilchen längs einer der Trajektorien bewegt, so wandern die Flächen von S , die die Bewegung erzeugen, auch durch den Raum, aber die zwei Bewegungen halten nicht miteinander Schritt. Tatsächlich bewegen sich die Flächen rascher, wenn das Teilchen langsamer wird, und umgekehrt.

Bei diesen Betrachtungen haben wir uns auf ein System mit einem Teilchen beschränkt, um die Diskussion zu erleichtern. Die meisten der Ergebnisse gelten aber auch für Mehrteilchensysteme, wenn wir einen Konfigurationsraum verwenden, dessen metrischer Tensor so beschaffen ist, daß ein Element der Bogenlänge $d\rho$ gegeben ist durch

$$d\rho^2 = 2T dt^2$$

(vgl. Gl. (7-42)). Anstelle der tatsächlichen Trajektorie des Teilchens im Raum betrachten wir die Bahn des Systempunktes im Konfigurationsraum. Für die Wellengeschwindigkeit der S -Flächen findet man dann¹⁰

$$u = \frac{E}{\sqrt{2(E-V)}} = \frac{E}{\sqrt{2T}} \quad (9-84')$$

Das ist das Analogon zu Gl. (9-84). In Abschnitt 7-5 fanden wir, daß die Geschwindigkeit des Systempunktes im Konfigurationsraum proportional zu \sqrt{T} ist, so daß die Reziprokenbeziehung zwischen den Wellen- und Systemgeschwindigkeiten erhalten bleibt. Gleichfalls findet man, daß die möglichen Systemtrajektorien wieder normal zu den Flächen mit konstantem S sind. Der Übergang auf ein Mehrteilchensystem bringt somit keine neuen physikalischen Ergebnisse, und um den Aufwand an Mathematik klein zu halten, wollen wir fortfahren, die Diskussion auf Einteilchensysteme zu beschränken.

Die Flächen mit konstantem S wurden als Wellenfronten charakterisiert, weil sie im Raum auf dieselbe Weise wie Wellenflächen konstanter Phase fortschreiten. Wir sind bisher bis zur Berechnung der Wellengeschwindigkeit gekommen, jedoch wurde noch nichts gesagt über die Natur oder den Ursprung dieser Wellen, deren Fronten Flächen mit konstantem S sind. Die wesentlichen Merkmale jeder Wellenbewegung rühren von ihrer Periodizität her, und es gab bisher keinen Hinweis auf die Frequenz und das Wellenlängenspektrum der Wellen, die S zugeordnet sind. Um Licht in diese Fragen zu bringen, wollen wir einige Eigenschaften einer wohlbekannteren Wellenbewegung – nämlich der von Lichtwellen – untersuchen.

¹⁰ Wegen einer Diskussion der Bewegung der S -Flächen im Konfigurationsraum siehe L. BRILLOUIN, *Les Tenseurs en Mécanique et en Élasticité*, Kapitel VIII.



Die skalare Wellengleichung der Optik lautet:

$$\nabla^2 \phi - \frac{n^2}{c^2} \frac{d^2 \phi}{dt^2} = 0. \quad (9-87)$$

Darin ist ϕ eine skalare Größe wie etwa das skalare elektromagnetische Potential, c ist die Geschwindigkeit des Lichtes im Vakuum und n ist der Brechungsindex, gleich dem Verhältnis von c zur Lichtgeschwindigkeit. Im allgemeinen wird n vom Medium abhängen und eine Funktion des Ortes sein. Wenn n konstant ist, wird Gl. (9-87) durch eine Lösung für eine ebene Welle

$$\phi = \phi_0 e^{i(k \cdot r - \omega t)} \quad (9-88)$$

befriedigt, wobei die Wellenzahl k und die Frequenz ω durch die folgende Beziehung verknüpft sind:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\omega}{c} \quad (9-89)$$

Legt man die Richtung von k der Einfachheit halber längs der z -Achse, so kann die Funktion der ebenen Welle auch geschrieben werden:

$$\phi = \phi_0 e^{i(k_0(z - ct) - \omega t)}, \quad (9-90)$$

wobei k_0 die Wellenzahl im Vakuum ist. Wir werden jedoch an dem Fall der *geometrischen Optik* interessiert sein, in dem n nicht exakt konstant, sondern räumlich geringfügig variabel ist. Die ebene Welle ist dann nicht mehr eine Lösung der Wellengleichung (9-87); die Ortsabhängigkeit des Brechungsindex wird die Welle stören und beugen. Da angenommen wird, daß sich n nur geringfügig im Raum ändert, suchen wir nach einer Lösung, die der ebenen Welle möglichst ähnlich ist:

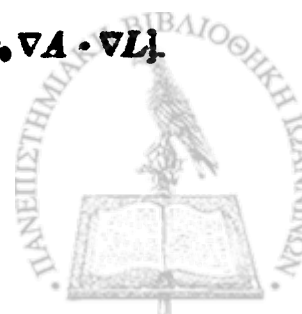
$$\phi = e^{i(A(t) + k_0 L(t) - \omega t)} \quad (9-91)$$

Die Größen A und L sollen Funktionen des Ortes sein, die zu bestimmen sind und beide als reell angesehen werden. A ist deshalb ein Maß für die Amplitude der Welle. Wenn n konstant wäre, würde sich L auf nz reduzieren. L wird deshalb die *optische Weglänge* oder Phase der Welle genannt. L wird auch gelegentlich als *Eikonal* bezeichnet. Sukzessive Anwendungen des Gradientenoperators auf die Lösung ϕ führt auf die Beziehungen

$$\nabla \phi = \phi \nabla(A + ik_0 L),$$

oder
$$\nabla^2 \phi = \phi [\nabla^2(A + ik_0 L) + (\nabla(A + ik_0 L))^2]$$

$$\nabla^2 \phi = \phi [\nabla^2 A + ik_0 \nabla^2 L + (\nabla A)^2 - k_0^2 (\nabla L)^2 + 2ik_0 \nabla A \cdot \nabla L].$$



Die Wellengleichung wird nun

$$ik_0[2\nabla A \cdot \nabla L + \nabla^2 L]\phi + [\nabla^2 A + (\nabla A)^2 - k_0^2(\nabla L)^2 + n^2 k_0^2]\phi = 0. \quad (9-92)$$

Da sowohl A als auch L reell sind, gelten die Gleichungen nur dann, wenn die zwei Ausdrücke in den eckigen Klammern einzeln verschwinden:

$$\nabla^2 A + (\nabla A)^2 + k_0^2(n^2 - (\nabla L)^2) = 0, \quad (9-93a)$$

$$\nabla^2 L + 2\nabla A \cdot \nabla L = 0. \quad (9-93b)$$

Bisher wurde keine Vereinfachung gemacht; beide Gleichungen sind streng gültig. Wir können nun die Annahme einführen, daß sich n nur geringfügig mit dem Abstand ändert, insbesondere, daß sich n nur sehr wenig über Abstände ändert, die von der Größenordnung der Wellenlänge sind. Das bedeutet, daß die Wellenlänge klein im Vergleich zur Größenordnung einer Änderung im Medium ist. Das ist die Annahme in der geometrischen Optik. Der Term mit $k_0^2 = 4\pi^2/\lambda_0^2$ in Gl. (9-93a) ist deshalb vorherrschend, und die Gleichung reduziert sich auf die einfache Form

$$(\nabla L)^2 = n^2. \quad (9-94)$$

Gl. (9-94) wird *Eikonalgleichung der geometrischen Optik* genannt. Die Flächen mit konstantem L , die durch diese Gleichung bestimmt sind, sind die Flächen konstanter optischer Phase und definieren somit die Wellenfronten. Die Strahlentrajektorien stehen überall senkrecht zu den Wellenfronten und sind somit ebenfalls durch Gl. (9-94) bestimmt.

Wir brauchen nicht weiter in die geometrische Optik abzuschweifen, denn wir werden sehen, daß die Eikonalgleichung (9-94) mit der mechanischen HAMILTON-JACOBISCHEN Gleichung (9-83) für W formal identisch ist. Die charakteristische Funktion W spielt dieselbe Rolle wie das Eikonal L , und $[2m(E - V)]^{1/2}$ dient als Brechungsindex. Die HAMILTON-JACOBISCHE Gleichung besagt somit, daß *die klassische Mechanik dem geometrisch-optischen Grenzfall einer Wellenbewegung entspricht*, bei der die Lichtstrahlen, die orthogonal zu den Wellenfronten stehen, den Teilchentrajektorien entsprechen, die orthogonal zu den Flächen mit konstantem S verlaufen. Es ist nun klar, weshalb die HUYGENSSCHE Wellentheorie und die NEWTONSCHEN Lichtkorpusseln gleich gut in der Lage waren, die Erscheinungen der Reflexion und Brechung zu erklären, denn beide Theorien der geometrischen Optik sind formal identisch. Die Ähnlichkeit des Prinzips der kleinsten Wirkung mit dem FERMATSCHEN Prinzip der geometrischen Optik ist auch erklärt. Entsprechend Gl. (7-40) erscheint das Prinzip der klein-



sten Wirkung als

$$\Delta \int \sqrt{2mT} ds = 0.$$

Man sieht, daß der Integrand proportional dem Brechungsindex für die entsprechende Wellenbewegung bzw. umgekehrt proportional zu der Wellengeschwindigkeit ist. Demnach kann das Prinzip der kleinsten Wirkung auch geschrieben werden:

$$\Delta \int n ds = \Delta \int \frac{ds}{u} = 0. \quad (9-95)$$

Das sind zwei wohlbekannte Schreibweisen des FERMATSchen Prinzips für die Trajektorien der Lichtstrahlen.

Wir haben bisher noch nicht die Frequenzen und Wellenlängen der Wellen festgelegt, die zu der klassischen Bewegung gehören. Bisher haben wir nur festgesetzt, daß die Wellenlänge sehr viel kleiner als die räumliche Ausdehnung der Kräfte und Potentiale sein muß. Weiter als bis hierhin können wir nicht in das Reich der klassischen Mechanik eindringen. Als Teilgebiet der geometrischen Optik ist die klassische Mechanik genau das Gebiet, in dem Erscheinungen, die von der Wellenlänge abhängen (Interferenz, Beugung usw.), nicht auftreten können. Es gibt auch in der klassischen Mechanik eine Dualität von Teilchen und Welle, jedoch ist das Teilchen das Dominierende, und der Wellen-aspekt hat keine Gelegenheit, seine einzigartigen Eigentümlichkeiten zu zeigen.

Wir können nichtsdestoweniger über die Form der Wellengleichung nachdenken, für die die HAMILTON-JACOBISCHE Gleichung den Grenzfall kurzer Wellenlängen darstellt. Die Ähnlichkeit der Eikonalgleichung (9-94) mit der HAMILTON-JACOBISCHEN Gleichung (9-83) impliziert nicht die Äquivalenz von L und W ; es ist nur notwendig, daß beide Größen proportional zueinander sind. Wir werden sehen, daß die Proportionalitätskonstante ein Maß für die Größe der Wellenlänge ist. Wenn W L entspricht, dann muß $S = W - Et$ proportional der totalen Phase der Lichtwelle sein, die durch Gl. (9-91) beschrieben wird:

$$k_0(L - ct) = 2\pi \left(\frac{L}{\lambda_0} - \nu t \right).$$

Demnach müssen die Teilchenenergie E und die Wellenfrequenz ν proportional sein, und wir wollen das konstante Verhältnis der zwei Größen mit dem Symbol h bezeichnen:

$$E = h\nu.$$

(9-96)



Die Wellenlänge und die Frequenz sind verknüpft durch die Beziehung

$$\lambda\nu = u,$$

so daß λ wegen Gl. (9-85') gegeben ist durch

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{E}{p} \bigg| \frac{E}{h}$$

oder

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (9-97)$$

Die optische Wellengleichung (9-87) kann auch geschrieben werden:

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{u^2} \frac{d^2\phi}{dt^2} = 0,$$

wobei u die Wellengeschwindigkeit in dem Medium mit dem Brechungsindex n ist. Wenn die Zeitabhängigkeit $e^{-i\omega t}$ in diese Gleichung eingesetzt wird, erhalten wir

$$\nabla^2\phi + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \phi = 0. \quad (9-98)$$

Das ist die zeitunabhängige Wellengleichung. Entsprechend der Wellenamplitude ϕ in der Optik wird es in der Wellentheorie der Mechanik eine Größe ψ geben, die eine Gleichung von derselben Form wie (9-98) befriedigen muß. λ ist jetzt aber h/p , wobei $p = \sqrt{2m(E - V)}$ ist. Demnach muß die Wellengleichung, für die W das Eikonale darstellt, gegeben sein durch

$$\nabla^2\psi + \frac{8\pi^2m}{h^2} (E - V)\psi = 0. \quad (9-99)$$

Die Gl. (9-99) erkennen wir als die SCHRÖDINGER-Gleichung der Wellenmechanik.

Aus Gl. (9-97) sieht man, daß die Größe der Wellenlänge von dem Betrag der Proportionalitätskonstanten h abhängt. Je kleiner h ist, desto kleiner ist die Wellenlänge und desto besser ist die Annäherung zur geometrischen Optik. Die Äquivalenz von HAMILTON-JACOBISCHER Gleichung und Eikonalgleichung wurde zuerst 1834 von HAMILTON erkannt; die entsprechende Wellengleichung wurde zuerst 1926 von DE BROGLIE und SCHRÖDINGER abgeleitet. Es ist behauptet worden, wäre HAMILTON nur ein wenig weiter gegangen, so hätte er die SCHRÖDINGER-Gleichung entdeckt. Dem ist nicht so; ihm fehlte die experimentelle Ermächtigung zu diesem Schritt. In den Tagen HAMILTONS wurde



die klassische Mechanik als vollständig richtig angesehen, und es gab vom Experiment her keine Berechtigung, sie als eine Näherung einer umfassenderen Theorie zu betrachten. Mit anderen Worten, HAMILTON hatte gar keinen Grund zu glauben, daß der Wert von h überhaupt von Null verschieden ist. Die Einsicht, daß die klassische Mechanik nur eine geometrisch-optische *Näherung* einer Wellentheorie ist, konnte erst dann kommen, als Effekte entdeckt waren, die von der Teilchen-Wellenlänge abhängen – wie bei den Interferenzexperimenten von DAVISSON und GERMER. Nur dann konnte h eine physikalische Realität zugeschrieben werden. h ist natürlich die berühmte PLANCKSche Konstante.¹¹

Nichtsdestoweniger kann man jetzt sehen, daß die klassische Mechanik den Keim der Quantentheorie enthält, und daß die HAMILTON-JACOBISCHE Formulierung besonders geeignet ist, zu zeigen, wie von der klassischen Mechanik auf die Wellenmechanik zu verallgemeinern ist. Diesen Gegenständen weiter nachzugehen würde uns aus dem Rahmen dieses Buches führen, das sehr wohl den Titel „Die geometrische Optik der Wellenmechanik“ tragen könnte.

LITERATURHINWEISE

- M. BORN, *Die Mechanik des Atoms*. Die meisten der im vorigen Kapitel zitierten Bücher befassen sich mehr oder weniger ausführlich mit der HAMILTON-JACOBISCHEN Theorie. Das BORNsche Buch ragt aus diesen hervor, was die Reichhaltigkeit des Stoffes über die Anwendungen der HAMILTON-JACOBI-schen Theorie und der Wirkungs- und Winkelvariablen angeht. Die Diskussion der mehrfach periodischen Bewegung und der Störungstheorie sind überaus vollständig. Der Leser sollte jedoch vorsichtig sein, die Aussagen über die Atomstruktur zu akzeptieren. Die meisten davon sind überholt.
- A. SOMMERFELD, *Atombau und Spektrallinien*. Die Ausführungen über die HAMILTON-JACOBISCHE Theorie und die Wirkungs- und Winkelvariablen, über den Text und die Anhänge dieses Buches verstreut, sind erheblich weniger ausführlich als bei BORN. Wahrscheinlich sind sie aus diesem Grund oft leichter lesbar. Besonders beachtenswert ist die Diskussion des Zusammenhanges zwischen der Anzahl der Systeme der Separationskoordinaten und der Entartung der Bewegung. Die Berechnung der beim KEPLER-Problem auftretenden Integrale mit Hilfe der Residuentheorie wird in einem Anhang erklärt (und ist auch in dem Buch von BORN enthalten).

¹¹ Eine ähnliche Situation trat bei der Entwicklung der Wellentheorie des Lichtes ein. Bis die Erscheinungen der Interferenz und Beugung des Lichtes experimentell beobachtet waren, gab es keinen Grund, die HUYGENSSCHE Wellentheorie den NEWTONSchen Korpuskularstrahlen vorzuziehen.



- J. H. VAN VLECK, *Quantum Principles and Line Spectra*. Das mit „Mathematical Techniques“ überschriebene Kapitel dieses Buches gibt einen raschen Überblick über die HAMILTON-JACOBISCHE Theorie und die Wirkungs- und Winkelvariablen, mit einer Einführung in die Störungstheorie. Das meiste des restlichen Buches ist nur von historischem Interesse. Die Vorsicht, die man beim BORNschen Buche walten lassen soll, ist auch hier angebracht, sie ist auch in geringerem Maße im Band von SOMMERFELD am Platze.
- E. FUES, *Störungsrechnung* in Bd. V des *Handbuches der Physik*. Der zuvor stehende Artikel in diesem Band des *Handbuches*, „HAMILTON-JACOBISCHE Theorie“ von L. NORDHEIM und E. FUES, kommt praktisch erst in den abschließenden Abschnitten zur HAMILTON-JACOBISCHEN Theorie. Außer einigen allgemeinen Aussagen über Grundlagen der Theorie findet man dort eine kurze Diskussion der Separationsbedingungen. Der Artikel von FUES schließt daran an und ist erheblich umfassender in seinen Ausführungen. Die Natur der mehrfach periodischen Bewegung wird sorgfältig erklärt, die Wirkungs- und Winkelvariablen werden eingeführt, und das KEPLER-Problem wird ausführlich behandelt (bis auf die Integration in Komplexen). Über die Hälfte des Artikels ist der Störungstheorie gewidmet, deren ganze Komplexheit, verglichen mit der Störungstheorie der Quantenmechanik, in der sehr ausführlichen Abhandlung offenbar wird.
- P. FRANK, *Die Differentialgleichungen allgemeiner Mechanischer Systeme* in Bd. 2 der *Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik* von FRANK und VON MISES. Dieses Kapitel stellt eine kompakte Abhandlung der gesamten Mechanik auf ziemlich hohem Niveau dar. Für das hier vorliegende Kapitel sind die Abschnitte 4 bis 7 von Interesse. Besonders wertvoll ist die sehr allgemeine Behandlung separierbarer Systeme in Abschnitt 5, die auf der Arbeit von STAECKEL beruht. Man findet auch einigen Stoff über den Zusammenhang zwischen HAMILTON-JACOBISCHER Theorie und geometrischer Optik. Das vorliegende Kapitel gibt tatsächlich eine detaillierte Ausführung der geometrischen Optik auf der Grundlage der HAMILTON-JACOBISCHEN Gleichung für ein Teilchen.
- C. CARATHÉODORY, *Variationsrechnung*. Auf den Zusammenhang zwischen HAMILTONScher Theorie und dem allgemeinen mathematischen Problem der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung wurde bereits hingewiesen. Die HAMILTON-JACOBISCHE Gleichung spielt in diesem Zusammenhang eine wesentliche Rolle. Eine ausführliche Behandlung dieser Dinge, zusammen mit der sogenannten Theorie der „Charakteristiken“, findet man in der CARATHÉODORYSchen Abhandlung.
- C. L. CHARLIER, *Die Mechanik des Himmels*. Die Stellung der HAMILTON-JACOBISCHEN Theorie in der astronomischen Mechanik wird in dieser Standardabhandlung dargelegt. In Kapitel 2 werden mehrfach periodische Bewegungen behandelt, während in den Kapiteln 6 und 7 die Störungstheorie und ihre Anwendung auf das Dreikörperproblem diskutiert wird. Wegen eines gründlicheren Zuganges vom mathematischen Standpunkt, siehe H. POINCARÉ, *Les Methodes Nouvelles de Mécanique Céleste*.
- L. BRILLOUIN, *Les Tenseurs en Mécanique et en Élasticité*. Die Bewegung der Flächen zu konstantem S im Konfigurationsraum wird im Detail in Kapitel VIII dargelegt, und die Zusammenhänge, die die klassische Mechanik, die geometrische Optik und die Wellenmechanik verbinden, werden ausführlich in Kapitel IX diskutiert.



ÜBUNGEN

1. Im Text wurde die HAMILTON-JACOBISCHE Gleichung für S dadurch erhalten, daß eine Berührungstransformation von den kanonischen Koordinaten (q, p) auf die Konstanten (α, β) aufgesucht wurde. Zeige, daß dann, wenn umgekehrt $S(q_i, \alpha_i, t)$ eine vollständige Lösung der HAMILTON-JACOBISCHEN Gleichung (9-3) ist, der Satz der durch die Gl. (9-6, 7) definierten Variablen (q_i, p_i) ein Satz kanonischer Variablen ist, d.h., daß diese die HAMILTONSchen Gleichungen befriedigen.

2. Löse das Problem der Bewegung eines punktförmigen Geschosses im Raum, das unter dem Einfluß eines homogenen Gravitationsfeldes steht. Verwende dabei die HAMILTON-JACOBI-Methode: Bestimme sowohl die Gleichung der Trajektorie als auch die Abhängigkeit der Koordinaten von der Zeit.

3. Stelle das Problem des schweren symmetrischen Kreisels mit einem festen Punkt nach der HAMILTON-JACOBI-Methode auf und bestimme die formale Lösung der Bewegung, wie sie in Gl. (5-56) angegeben ist.

4. Bestimme die Frequenzen eines dreidimensionalen harmonischen Oszillators mit ungleichen Kraftkonstanten. Verwende dabei die Methode der Wirkungs- und Winkelvariablen.

5. (a) Zeige, daß dann, wenn die Schwingungsamplitude klein ist, die Energie eines mathematischen Pendels gegeben ist durch

$$E = J\nu.$$

(b) Betrachte ein mathematisches Pendel, das aus einem punktförmigen Gewicht besteht, das an einem Faden hängt. Der Faden gehe vertikal durch ein Loch in einer horizontalen Tischplatte. Es werde angenommen, daß die Pendellänge abnimmt, indem man den Faden langsam durch das Loch zieht. Die zeitliche Abnahme der Länge sei außerordentlich klein gegenüber der Schwingungsfrequenz, so daß man noch von einer Schwingungsperiode für eine gegebene Länge sprechen kann. Berechne die Änderung der Energie des Pendels, wenn die Länge verkürzt wird, aus der Arbeit, die beim Ziehen gegen die Fadenspannung geleistet wird. Zeige, daß demzufolge die Wirkungsvariable $J = E/\nu$ während des Prozesses konstant ist. Eine Änderung der äußeren Parameter des Systems in einem Maße, das klein gegenüber den inneren Frequenzen ist, heißt *adiabatische Änderung*, und die Wirkungsvariable des Pendels ist deshalb eine *adiabatische Invariante*. Es ist möglich, allgemein die adiabatische Invarianz der Wirkungsvariablen für irgendein System zu beweisen, in dem keine Entartung auftritt. Die Wirkungsvariablen sind somit feste Konstanten des Systems, das sich unter dem Einfluß langsam veränderlicher äußerer Bedingungen befindet. Nun ist auch der Quantenzustand eines Systems eine adiabatische Invariante; eine langsame Änderung der äußeren Parameter induziert keine Übergänge von einem Zustand zum anderen. Wir haben hier einen anderen Hinweis darauf, daß die Wirkungsvariablen zur Beschreibung der Quantisierung der Systemzustände geeignet sind.

6. (a) In dem harmonischen Oszillator von Übung 4 sollen alle Frequenzen gleich sein (isotroper Oszillator), so daß die Bewegung vollständig entartet ist. Transformiere auf die „Eigen“-Wirkungs- und Winkelvariablen; drücke dazu die Energie durch nur eine der Wirkungsvariablen aus.

(b) Löse das Problem des isotropen Oszillators mit Wirkungs- und Winkelvariablen unter Verwendung sphärischer Polarkoordinaten. Transformiere wie-



der auf „Eigen“-Wirkungs- und Winkelvariablen und vergleiche mit dem Ergebnis in Teil (a). Sind die zwei Sätze der Eigen-Variablen dieselben? Was für eine physikalische Bedeutung haben sie? Dieses Problem veranschaulicht, daß es zweckmäßig ist, eine entartete Bewegung in mehr als einem Koordinatensatz zu separieren. Der nichtentartete Oszillator kann nur in cartesischen Koordinaten, aber nicht in Polarkoordinaten separiert werden.

7. Die Bewegung eines entarteten ebenen harmonischen Oszillators kann in jedem cartesischen Koordinatensystem separiert werden. Bestimme die Beziehungen zwischen den zwei Sätzen von Wirkungs- und Winkelvariablen, die zwei cartesischen Achsensystemen entsprechen, die einen Winkel θ miteinander bilden. Beachte, daß die Transformation zwischen den zwei Sätzen *nicht* die orthogonale Transformation der Drehung ist.

8. Berechne das Integral, das in dem Ausdruck (9-68) für J_r im KEPLER-Problem auftritt, mit elementaren Methoden. (Verwende die üblichen Integraltafeln, wie etwa die von PIERCE.)

9. Bestimme durch Integration jeder der separierten HAMILTON-JACOBI-Gleichungen des KEPLER-Problems W als Summe dreier Integrale. Ermittle ähnlich aus den Beziehungen

$$w'_i = \frac{\partial W}{\partial J'_i}$$

Integralausdrücke für die drei Winkelvariablen. Zeige, daß w'_1 bis auf eine additive Integrationskonstante der Azimut der Knotenlinie ist, und daß w'_2 (wieder bis auf eine additive Konstante) der Winkel in der Bahnebene zwischen Perihel und Knotenlinie ist. Bei der Interpretation der Integrale erweist es sich als zweckmäßig, das Verhältnis J'_1/J'_2 durch $\cos \alpha$ zu ersetzen, wobei α der Winkel zwischen Bahnebene und Polachse ist.

10. Die Bahngleichung für das KEPLER-Problem kann in Ausdrücken der Wirkungs- und Winkelvariablen nach Gl. (9-29b) berechnet werden, indem man $\alpha_1 = E$ und $\alpha_\phi = l$ als Funktionen von J'_2 und J'_3 ausdrückt. (Beachte die andere Bedeutung des Winkels ϕ .) Führe die Integration aus, um die Bahngleichung zu erhalten, und zeige, daß die große Halbachse a und die Exzentrizität ϵ gegeben sind durch

$$a = \frac{J_3'^2}{4\pi^2 mk'}, \quad \epsilon = \sqrt{1 - \frac{J_2'}{J_3'}}$$

11. Formuliere das Problem der relativistischen KEPLER-Bewegung mit Wirkungs- und Winkelvariablen und verwende dabei die in Gl. (7-20) gegebene Form der HAMILTON-Funktion. Zeige insbesondere, daß die Gesamtenergie (einschließlich der Ruhemasse) gegeben ist durch

$$\frac{E}{mc^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\pi^2 k^2}{[(J_3' - J_2')c + \sqrt{J_2'^2 c^2 - 4\pi^2 k^2}]^2}}}$$

Beachte, daß die Entartung teilweise aufgehoben ist, weil die Bahn nicht mehr geschlossen ist. Eben ist die Bahn aber noch. Zeige, daß sich die oben angegebene Beziehung für den Grenzfall für unendlich großes c auf die Gl. (9-75) reduziert.



X. KAPITEL

KLEINE SCHWINGUNGEN

Im vorigen Kapitel wurden mehrfach periodische Systeme behandelt, deren Bewegung durch eine mehrfache FOURIER-Entwicklung nach den Fundamentalfrequenzen ν_i , allen ihren Harmonischen und den Kombinationsfrequenzen dargestellt werden konnte. Ein wichtiger Sonderfall der mehrfach periodischen Bewegung liegt bei den Schwingungen vor, deren Amplituden so klein sind, daß nur die Fundamentalfrequenzen, aber keine Harmonischen, angeregt werden. Die allgemeine Methode der Wirkungs- und Winkelvariablen ist für eine solche Bewegung nicht besonders geeignet. Dafür sind elementarere, allerdings hochspezialisierte Verfahren ausgearbeitet worden. Die Theorie kleiner Schwingungen findet weitreichende physikalische Anwendungen in der Akustik, in der Molekülspektroskopie und in der Theorie gekoppelter Stromkreise. Sie gibt auch eine Vorbereitung auf die Diskussion der Mechanik kontinuierlicher Systeme und Felder, die im nächsten Kapitel behandelt wird. Wir wollen uns hier in erster Linie mit kleinen Schwingungen um stabile Gleichgewichtslagen befassen, jedoch ist es auch möglich, kleine Schwingungen um eine stabile Bewegung zu behandeln.

10-1 Die Formulierung des Problems

Wir betrachten konservative Systeme, deren potentielle Energie allein eine Funktion des Ortes ist. Es wird angenommen, daß die Transformationsgleichungen, die die generalisierten Koordinaten $q_1 \dots q_n$ des Systems definieren, die Zeit nicht explizit enthalten. Damit sind zeitabhängige Zwangsbedingungen auszuschließen. Man sagt, das System sei im *Gleichgewicht*, wenn die auf das System wirkenden generalisierten Kräfte verschwinden:

$$Q_i = \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right)_0 = 0. \quad (10-1)$$

Die potentielle Energie hat deshalb für die Gleichgewichtskonfiguration $q_{01}, q_{02} \dots q_{0n}$ des Systems einen Extremwert. Wenn die Konfiguration



anfangs in der Gleichgewichtslage ist und Anfangsgeschwindigkeiten $\dot{q}_i = 0$ hat, dann wird das System immer im Gleichgewicht bleiben. Es gibt außerordentlich viele Beispiele für das Gleichgewicht mechanischer Systeme – ein Pendel, das sich in Ruhe befindet, ein Galvanometer in seiner Ruhelage, ein Ei, das auf der Spitze steht.

Eine Gleichgewichtslage wird als *stabil* bezeichnet, wenn eine kleine Auslenkung des Systems aus dem Gleichgewicht nur zu einer kleinen gebundenen Bewegung um die Ruhelage führt. Das Gleichgewicht ist *instabil*, wenn eine infinitesimale Störung eine ungebundene Bewegung hervorruft. Ein Pendel, das sich in Ruhe befindet, ist im stabilen Gleichgewicht, aber das Ei, das auf der Spitze steht, ist ein offensichtliches Beispiel für ein instabiles Gleichgewicht. Man kann leicht sehen, daß dann, wenn das Extremum von V ein Minimum ist, das Gleichgewicht stabil sein muß. Nehmen wir an, das System sei durch ein Anwachsen der Energie um dE über die Gleichgewichtsenergie aus dem Gleichgewicht gebracht worden. Wenn V im Gleichgewicht ein Minimum ist, wird eine Abweichung von dieser Lage ein Anwachsen von V hervorrufen. Wegen der Erhaltung der Energie müssen die Geschwindigkeiten dann abnehmen und evtl. Null werden. Dadurch ist aber gerade die gebundene Bewegung gekennzeichnet. Wenn V andererseits durch eine Abweichung vom Gleichgewicht abnimmt, wachsen die kinetische Energie und die Geschwindigkeiten unbeschränkt an. Das entspricht einer instabilen Bewegung. Zu dem gleichen Schluß kann man auf graphischem Wege kommen, indem man die Gestalt der Kurve der potentiellen Energie untersucht, die in Abb. 10-1 symbolisch

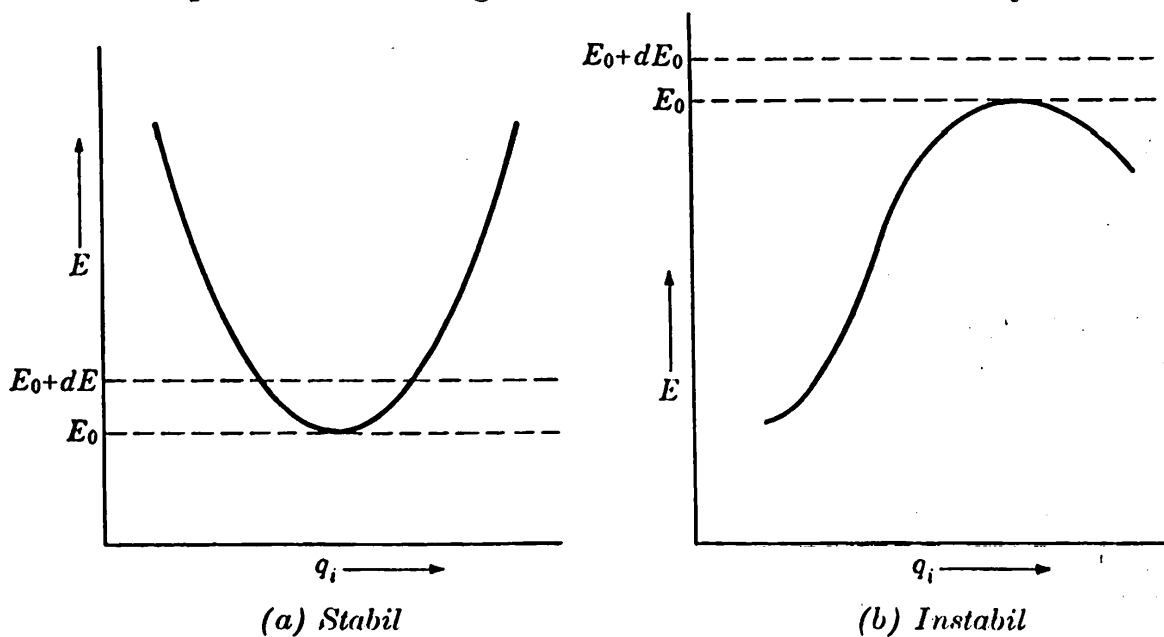


Abb. 10-1. Gestalt der Kurve der potentiellen Energie am Gleichgewicht:



gezeigt ist. Ein ausführlicher mathematischer Beweis dafür, daß stabiles Gleichgewicht ein Minimum von V erfordert, wird im Laufe der Diskussion gegeben werden.

Wir werden an der Bewegung des Systems in der unmittelbaren Nachbarschaft einer Konfiguration mit stabilem Gleichgewicht interessiert sein. Da die Abweichungen vom Gleichgewicht klein sein sollen, können alle Funktionen in eine TAYLOR-Reihe um das Gleichgewicht entwickelt und die Glieder höherer Ordnung vernachlässigt werden. Die Abweichungen der generalisierten Koordinaten vom Gleichgewicht sollen mit η_i bezeichnet werden:

$$q_i = q_{0i} + \eta_i \quad (10-2)$$

und sollen als die neuen generalisierten Koordinaten der Bewegung verwendet werden. Entwickelt man die potentielle Energie um q_{0i} , so erhält man

$$V(q_1 \dots q_n) = V(q_{01} \dots q_{0n}) + \sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right)_0 \eta_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 \eta_i \eta_j + \dots \quad (10-3)$$

Die in η_i linearen Terme verschwinden automatisch infolge der Gleichgewichtsbedingungen (10-1). Der erste Term in der Reihe ist die potentielle Energie für die Gleichgewichtslage. Verschiebt man den willkürlichen Nullpunkt des Potentials so, daß er mit dem Gleichgewichtspotential zusammenfällt, so kann dieser Term auch zum Verschwinden gebracht werden. Es bleiben deshalb nur die quadratischen Terme als erste Näherung für V :

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 \eta_i \eta_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij} \eta_i \eta_j \quad (10-4)$$

Darin wurden die zweiten Ableitungen von V durch die Konstanten V_{ij} bezeichnet, die nur von den Gleichgewichtswerten der q_i abhängen. Wegen ihrer Definition sind die V_{ij} offensichtlich symmetrisch, d.h. $V_{ij} = V_{ji}$.

Eine ähnliche Reihenentwicklung kann man für die kinetische Energie ausführen. Da die generalisierten Koordinaten die Zeit nicht explizit enthalten, ist die kinetische Energie eine homogene quadratische Funktion der Geschwindigkeiten (vgl. Gl. (1-62)):

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j \quad (10-5)$$

Die Koeffizienten m_{ij} sind im allgemeinen Funktionen der Koordinaten q_i , aber sie können in eine TAYLOR-Reihe um die Gleichgewichtskonfiguration entwickelt werden:

$$m_{ij}(q_1 \dots q_n) = m_{ij}(q_{01} \dots q_{0n}) + \sum_k \left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} \right)_0 \eta_k + \dots$$



Da Gl. (10-5) bereits quadratisch in den $\dot{\eta}_i$ ist, erhält man die niedrigste nicht verschwindende Näherung für T , indem man alle Terme bis auf den ersten in der Entwicklung von m_{ij} streicht. Bezeichnet man die konstanten Werte der Funktionen m_{ij} im Gleichgewicht mit T_{ij} , so kann man deshalb für die kinetische Energie schreiben:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j. \quad (10-6)$$

Man sieht wieder sofort, daß die Konstanten T_{ij} symmetrisch sein müssen, da die einzelnen Terme in Gl. (10-6) durch eine Vertauschung der Indizes nicht beeinflußt werden. Aus den Gl. (10-4) und (10-6) folgt für die LAGRANGE-Funktion:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - V_{ij} \eta_i \eta_j). \quad (10-7)$$

Nimmt man die η als generalisierte Koordinaten, so führt die LAGRANGE-Funktion (10-7) auf die folgenden n Bewegungsgleichungen:

$$\sum_j T_{ij} \ddot{\eta}_j + \sum_j V_{ij} \eta_j = 0. \quad (10-8)$$

Dabei wurde von der Symmetrieeigenschaft der Koeffizienten V_{ij} und T_{ij} explizit Gebrauch gemacht. Jede der Gleichungen (10-8) wird im allgemeinen alle Koordinaten η_i enthalten. Dieser Satz simultaner Differentialgleichungen muß gelöst werden, wenn man die Bewegung in der Nähe des Gleichgewichts erhalten will.

10-2 Die Eigenwertgleichung und die Hauptachsentransformation

Die Bewegungsgleichungen (10-8) sind lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Die Form dieser Gleichung ist aus der Theorie elektrischer Stromkreise bekannt. Es ist deshalb naheliegend, eine Schwingungslösung der Form

$$\eta_i = C a_i e^{-i\omega t} \quad (10-9)$$

zu versuchen. Hierin ist $C a_i$ die komplexe Amplitude der Schwingung für die Koordinate η_i . Der Faktor C wurde zweckmäßig als Skalenfaktor eingeführt. Er ist für alle Koordinaten gleich. Selbstverständlich entspricht nur der reelle Teil von Gl. (10-9) einer wirklichen Bewegung. Setzt man den Lösungsansatz (10-9) in die Bewegungsgleichungen ein, so führt das auf die folgenden Gleichungen für die Amplitudenfaktoren:



$$\sum_j (V_{ij}a_j - \omega^2 T_{ij}a_j) = 0. \quad (10-10)$$

Die Gl. (10-10) sind n lineare homogene Gleichungen für die a_i , und folglich können sie nur dann eine Lösung haben, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet:

$$\begin{vmatrix} V_{11} - \omega^2 T_{11} & V_{12} - \omega^2 T_{12} & \dots & \dots \\ V_{21} - \omega^2 T_{21} & V_{22} - \omega^2 T_{22} & & \\ V_{31} - \omega^2 T_{31} & & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \end{vmatrix} = 0. \quad (10-11)$$

Diese Determinantenbedingung ist effektiv eine algebraische Gleichung n -ten Grades für ω^2 , und die Wurzeln der Determinante liefern die Frequenzen, für die Gl. (10-9) eine korrekte Lösung der Bewegungsgleichungen darstellt. Für jeden dieser Werte von ω^2 können die Gleichungen (10-10) nach den Amplituden a_i aufgelöst werden, oder genauer, nach $n - 1$ der Amplituden, die von dem übrigbleibenden a_i abhängen.

Mit all dem sind wir vertraut, und wir können den eigentlichen mathematischen Überblick erhalten, indem wir kurz einen einfachen Sonderfall des allgemeinen Problems betrachten. Wir wollen annehmen, daß die geeigneten generalisierten Koordinaten die cartesischen Koordinaten der Teilchen des Systems sind. Die kinetische Energie enthält dann nur die Quadrate der Geschwindigkeitskomponenten. Führt man generalisierte Koordinaten ein, die gleich den cartesischen Komponenten multipliziert mit der Quadratwurzel aus der Teilchenmasse sind, so kann die kinetische Energie in der folgenden Form geschrieben werden:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i \dot{\eta}_i^2, \quad (10-12)$$

so daß in diesem Falle $T_{ij} = \delta_{ij}$ ist. Wenn ω^2 mit λ bezeichnet wird, vereinfachen sich die homogenen Gleichungen (10-10) auf

$$\sum_j V_{ij}a_j = \lambda a_i. \quad (10-13)$$

Das ist aber genau die Formulierung des Eigenwertproblems, das wir aus den Kapiteln IV und V kennen (vgl. Gl. (5-22)); der einzige Unterschied besteht darin, daß der Vektorraum n Dimensionen anstelle von drei Dimensionen hat. Betrachtet man V_{ij} als ein Element einer n -dimensionalen quadratischen Matrix V und a_i als die Komponente



eines n -dimensionalen Vektors \mathbf{a} , so kann Gl. (10-13) in folgende Form gebracht werden:

$$\mathbf{V}\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a},$$

die der Eigenwertgleichung (4-47) ähnlich ist. Unter diesen Umständen reduziert sich die Determinantengleichung (10-11) ganz ähnlich auf die Säkulargleichung für die Eigenwerte λ .

Da \mathbf{V} symmetrisch und reell ist, sind die entsprechenden Eigenwerte reell (vgl. Abschn. 5-4). Wenn die n Sätze der a_i , die den n Eigenwerten entsprechen, als eine Matrix \mathbf{A} geschrieben werden, dann muß wie in Abschn. 4-6 \mathbf{A} die Matrix \mathbf{V} mittels einer Ähnlichkeitstransformation diagonalisieren. Weiterhin sind die n Eigenvektoren \mathbf{a} orthogonal zueinander (Abschn. 5-4), und die diagonalisierende Matrix \mathbf{A} muß deshalb orthogonal sein.

Diese Schlußfolgerungen sind für den Fall gültig, daß T_{ij} nicht diagonal ist; ähnliche Ergebnisse lassen sich für das allgemeine Problem beweisen. Die Gl. (10-10) repräsentieren einen Typ einer Eigenwertgleichung, denn schreibt man T_{ij} als ein Element der Matrix \mathbf{T} , so können die Gleichungen geschrieben werden:

$$\mathbf{V}\mathbf{a} = \lambda\mathbf{T}\mathbf{a}. \quad (10-14)$$

Hier beruht die Wirkung von \mathbf{V} auf den Eigenvektor \mathbf{a} nicht allein darauf, den Vektor (bis auf einen Faktor λ) zu reproduzieren wie beim gewöhnlichen Eigenwertproblem; vielmehr hat der Eigenvektor die Eigenschaft, daß \mathbf{V} , das auf \mathbf{a} wirkt, ein Vielfaches von dem ergibt, das man erhält, wenn man \mathbf{T} auf \mathbf{a} anwendet. Wir werden zeigen, daß die Eigenwerte λ , für die Gl. (10-14) befriedigt werden kann, alle reell sind infolge der Hermitizität von \mathbf{T} und \mathbf{V} und positiv sein müssen. Es wird auch gezeigt werden, daß die Eigenvektoren \mathbf{a} – in gewissem Sinne – orthogonal sind. Weiterhin diagonalisiert die Matrix \mathbf{A} der Eigenvektoren sowohl \mathbf{T} als auch \mathbf{V} , die erstere auf die Einheitsmatrix $\mathbf{1}$ und die letztere auf eine Matrix, deren Diagonalelemente die Eigenwerte λ sind.

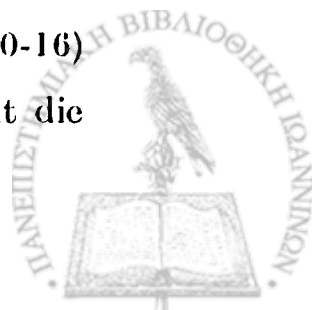
Wir gehen vor wie in Abschn. 5-4. a_{jk} möge die j -te Komponente des k -ten Eigenvektors darstellen. Eine typische Gleichung aus (10-14) für den Eigenwert λ_k kann geschrieben werden:

$$\sum_j V_{ij} a_{jk} = \lambda_k \sum_j T_{ij} a_{jk}. \quad (10-15)$$

Das komplexkonjugierte der entsprechenden Gleichung für λ_l hat die Form

$$\sum_i V_{ij} a_{il}^* = \lambda_l^* \sum_i T_{ij} a_{il}^*. \quad (10-16)$$

Man multipliziert Gl. (10-16) mit a_{jk} , summiert über j und zieht die



sich ergebende Gleichung von dem entsprechenden Produkt der Gl. (10-15) mit a_{ik}^* , das über i summiert ist, ab. Die linke Seite der Differenzgleichung verschwindet. Es bleibt nur

$$0 = (\lambda_k - \lambda_l^*) \sum_{i,j} T_{ij} a_{jk} a_{il}^* \quad (10-17)$$

Betrachten wir zuerst die spezielle Form von Gl. (10-17) für $l = k$:

$$(\lambda_k - \lambda_k^*) \sum_{i,j} T_{ij} a_{jk} a_{ik}^* = 0. \quad (10-18)$$

Es soll nun gezeigt werden, daß die Summe über i und j reell und tatsächlich positiv definit ist. Um diese Behauptung zu beweisen, teilen wir a_{jk} in seine reelle und imaginäre Komponente auf:

$$a_{jk} = \alpha_{jk} + i\beta_{jk}.$$

Die Summation kann dann geschrieben werden:

$$\sum_{i,j} T_{ij} a_{jk} a_{ik}^* = \sum_{i,j} T_{ij} \alpha_{jk} \alpha_{ik} + \sum_{i,j} T_{ij} \beta_{jk} \beta_{ik} + i \sum_{i,j} T_{ij} (\beta_{jk} \alpha_{ik} - \beta_{ik} \alpha_{jk}).$$

Der imaginäre Term verschwindet zufolge der Symmetrie von T_{ij} , denn eine Vertauschung der Indizes i und j ändert das Vorzeichen der Summe. Demnach ist die Summe reell. Weiterhin sieht man aus der Definition (10-6) der Koeffizienten T_{ij} , daß die zwei reellen Summen zweimal die kinetische Energie sind, wenn die Geschwindigkeiten $\dot{\eta}_i$ die Werte α_{ik} bzw. β_{ik} haben. Nun muß eine kinetische Energie ihrer Natur nach für reelle Geschwindigkeiten positiv definit sein, und deshalb kann die Summe in Gl. (10-18) nicht Null sein. Es folgt, daß die Eigenwerte λ_k reell sein müssen.

Da die Eigenwerte reell sind, müssen die Verhältnisse der Eigenvektor-Komponenten a_{jk} , die durch die Gl. (10-15) bestimmt sind, alle reell sein. Es gibt natürlich noch eine Unbestimmtheit, da der Wert eines der a_{jk} noch frei gewählt werden kann, ohne die Gl. (10-15) zu verletzen. Wir können jedoch fordern, daß diese Komponente reell sein soll. Dadurch, daß λ_k reell ist, sind wir dann sicher, daß alle anderen Komponenten reell sind. (Ein komplexer Phasenfaktor in der Amplitude der Schwingung soll in den Faktor C gesteckt werden, vgl. Gl. (10-9)). Wir multiplizieren nun Gl. (10-15) mit a_{ik} und summieren über i :

$$\sum_{i,j} V_{ij} a_{ik} a_{jk} = \lambda_k \sum_{i,j} T_{ij} a_{ik} a_{jk}.$$

Diese Gleichung kann nach λ_k aufgelöst werden:

$$\lambda_k = \frac{\sum_{i,j} V_{ij} a_{ik} a_{jk}}{\sum_{i,j} T_{ij} a_{ik} a_{jk}} \quad (10-19)$$



Der Nenner dieses Ausdruckes ist gleich der doppelten kinetischen Energie für Geschwindigkeiten a_{ik} , und da die Eigenvektoren reell sind, muß die Summe positiv definit sein. Ähnlich ist der Zähler die potentielle Energie für Koordinaten a_{ik} , und die Bedingung, daß V ein Minimum im Gleichgewicht ist, erfordert, daß die Summe positiv oder Null sein muß. Weder Zähler noch Nenner können negativ sein, und der Nenner kann nicht Null sein. Demnach ist λ stets endlich und positiv. (λ kann jedoch Null sein.) Wir erinnern uns, daß λ anstelle von ω^2 steht, so daß positives λ reellen Schwingungsfrequenzen entspricht. Wenn das Potential nicht genau ein Minimum ist, kann der Zähler in Gl. (10-19) negativ sein. Das gibt Anlaß zu imaginären Frequenzen, die ein unbeschränktes exponentielles Anwachsen von η_i mit der Zeit hervorrufen würden. Eine solche Bewegung wäre offensichtlich instabil. Wir haben hiermit den angekündigten mathematischen Beweis, daß für stabile Bewegungen ein Minimum des Potentials erforderlich ist.

Wir wollen für einen Augenblick auf Gl. (10-17) zurückkommen. Im Hinblick darauf, daß die Eigenwerte und Eigenvektoren reell sind, kann diese geschrieben werden:

$$(\lambda_k - \lambda_l) \sum_{i,j} T_{ij} a_{il} a_{jk} = 0. \quad (10-17')$$

Wenn alle Wurzeln der Säkulargleichung verschieden sind, kann Gl. (10-17') nur gelten, wenn die Summation für $l \neq k$ verschwindet:

$$\sum_{i,j} T_{ij} a_{il} a_{jk} = 0. \quad l \neq k \quad (10-20a)$$

Es wurde mehrmals bemerkt, daß die Werte der a_{jk} nicht vollständig durch die Eigenwertgleichungen (10-10) festgelegt sind. Wir können diese Unbestimmtheit beseitigen, wenn wir weiterhin fordern, daß

$$\sum_{i,j} T_{ij} a_{ik} a_{jk} = 1 \quad (10-20b)$$

ist. Es gibt n solche Gleichungen (10-20b). Sie legen die eine willkürliche Komponente von jedem der n Eigenvektoren a_k eindeutig fest.¹ Die

¹ Gl. (10-20b) kann in eine Form gebracht werden, die explizit zeigt, daß das ausreicht, die Unbestimmtheit in den a_{jk} zu beseitigen. Nehmen wir an, der Betrag von a_{1k} sei zu bestimmen; das Verhältnis aller anderen a_{jk} zu a_{1k} erhält man aus den Gl. (10-10). Dann kann Gl. (10-20b) geschrieben werden:

$$\sum_{i,j} T_{ij} \frac{a_{ik} a_{jk}}{a_{1k} a_{1k}} = \frac{1}{a_{1k}^2}.$$

Die linke Seite ist vollständig durch die Eigenwertgleichungen bestimmt. Sie kann direkt gelöst werden und liefert a_{1k} .



zwei Gleichungen (10-20a und b) können in eine Gleichung der Form

$$\sum_{i,j} T_{ij} a_{ij} a_{jk} = \delta_{ik} \quad (10-21)$$

zusammengefaßt werden.

Fallen zwei oder mehr der Wurzeln zusammen, so ist das Argument, das auf Gl. (10-20a) führt, nicht mehr gültig. Wir wollen eine Diskussion dieses Ausnahmefalles auf später verschieben. Für die augenblicklichen Überlegungen ist es ausreichend, festzustellen, daß ein Satz von Koeffizienten a_{jk} stets gefunden werden kann, der sowohl die Eigenwertgleichungen (10-10) als auch Gl. (10-20a) befriedigt.

Die Bedingung (10-21) lautet in Matrixschreibweise:

$$\tilde{A}TA = 1. \quad (10-21')$$

Nun sagt man, eine Matrix A ist orthogonal (vgl. Gl. (4-36)), wenn

$$\tilde{A}A = 1. \quad (10-22)$$

Die zwei Bedingungen sind sich ihrer Form nach etwas ähnlich, aber Gl. (10-21') unterscheidet sich von der Orthogonalitätsforderung durch die Matrix T in der Mitte. Wir werden jedoch sehen, daß Gl. (10-21') eine Orthogonalitätsbedingung darstellt, allerdings in einem Raum, der im allgemeinen nicht cartesisch ist. Die gewöhnliche Orthogonalitätsforderung besagt in Wirklichkeit, daß jeder der Vektoren \mathbf{a}_k den Betrag Eins hat:

$$\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_k = \sum_j a_{jk}^2 = 1,$$

und daß zwei Vektoren zueinander senkrecht sind:

$$\mathbf{a}_l \cdot \mathbf{a}_k = \sum_j a_{jl} a_{jk} = 0, \quad j \neq k.$$

In einem nichtcartesischen Raum mit schiefen Achsen, in dem die Elemente des metrischen Tensors T Konstanten sind, die von den Koordinaten nicht abhängen, ist die Länge eines Vektors \mathbf{a}_k gegeben durch (vgl. Gl. (7-42)):

$$\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_k = \sum_{i,j} T_{ij} a_{ik} a_{jk}.$$

Das Punktprodukt zweier Vektoren \mathbf{a}_l und \mathbf{a}_k ist dementsprechend in einem solchen Raum

$$\mathbf{a}_l \cdot \mathbf{a}_k = \sum_{i,j} T_{ij} a_{il} a_{jk}.$$



Ein Vergleich mit den Gl. (10-20) zeigt, daß (10-20b) besagt: Die Vektoren \mathbf{a}_k haben die Länge Eins. Gl. (10-20a) beinhaltet, daß zwei verschiedene Vektoren $\mathbf{a}_l, \mathbf{a}_k$ zueinander senkrecht sind. Gl. (10-21') ist dementsprechend die *Orthogonalitätsbedingung für die Matrix A in dem Konfigurationsraum, dessen metrischer Tensor T ist*. In einem cartesischen Raum ist der metrische Tensor der Einheitstensor $\mathbf{1}$, und die Bedingung (10-21') reduziert sich dann auf die gewöhnlichen Orthogonalitätsforderungen.

Im IV. Kapitel wurde die *Ähnlichkeitstransformation* einer Matrix C mit einer Matrix B definiert durch die Gleichung (vgl. Gl. (4-41)):

$$\mathbf{C}' = \mathbf{BCB}^{-1}.$$

Wir führen nun den entsprechenden Begriff der *Kongruenztransformation* von C mit A ein, entsprechend der Beziehung

$$\mathbf{C}' = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{CA}. \quad (10-23)$$

Wenn A orthogonal ist, so daß $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^{-1}$, dann besteht kein wesentlicher Unterschied zwischen den beiden Transformationstypen (wie man sieht, wenn man \mathbf{A}^{-1} durch die Matrix E bezeichnet). Gl. (10-21') kann deshalb als die Feststellung aufgefaßt werden, daß A die Matrix T durch eine Kongruenztransformation in eine Diagonalmatrix, im besonderen in die Einheitsmatrix, transformiert.

Wenn eine Diagonalmatrix λ mit den Elementen $\lambda_{ik} = \lambda_k \delta_{ik}$ eingeführt wird, können die Eigenwertgleichungen (10-15) geschrieben werden:

$$\sum_j V_{ij} \tilde{a}_{jk} = \sum_{j,l} T_{ij} a_{jl} \lambda_{lk}$$

oder in Matrizenschreibweise

$$\mathbf{VA} = \mathbf{TA}\lambda. \quad (10-24)$$

Multipliziert man mit $\tilde{\mathbf{A}}$ von links, so nimmt Gl. (10-24) die Form an:

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{VA} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{TA}\lambda.$$

Das reduziert sich wegen Gl. (10-21') auf

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{VA} = \lambda. \quad (10-25)$$

Unsere letzte Gleichung (10-25) besagt, daß eine Kongruenztransformation von V mit A das V in eine Diagonalmatrix überführt, deren Elemente die Eigenwerte λ_k sind.

Die Matrix A diagonalisiert somit gleichzeitig T und V. Erinnern wir uns an die Interpretation von T als metrischen Tensor im Konfigu-



rationsraum, so können wir dem Diagonalisierungsprozeß die folgende Deutung geben. A ist die Matrix einer linearen Transformation von einem System *schiefer* Achsen auf *cartesische orthogonale* Achsen, wie aus der Tatsache zu erkennen ist, daß der transformierte metrische Tensor 1 ist. Gleichzeitig sind die neuen Achsen die zueinander senkrechten *Hauptachsen* von V , so daß die Matrix V in dem transformierten Koordinatensystem diagonal ist. Das Verfahren zur Bestimmung der Fundamentalfrequenzen kleiner Schwingungen ist somit ein besonderer Typ der *Hauptachsentransformation*, die im V. Kapitel diskutiert wurde.

Es ist nur noch der Fall mehrfacher Wurzeln der Säkulargleichung zu betrachten. Dieser Fall ist in der mathematischen Theorie störender als in der Praxis. Wenn eine oder mehrere Wurzeln zusammenfallen, so findet man, daß die Zahl der unabhängigen Gleichungen unter den Eigenwerten nicht ausreicht, auch nur das Verhältnis der Komponenten der Eigenvektoren zu bestimmen. Wenn etwa der Eigenwert λ eine Doppelwurzel ist, können zwei der Komponenten a_i willkürlich gewählt werden. Der Rest der Komponenten wird durch die Eigenwertgleichungen festgelegt. Zur Illustration wollen wir ein zweidimensionales System betrachten, dessen Säkulargleichung lautet:

$$\text{oder} \quad \begin{vmatrix} V_{11} - \lambda T_{11} & V_{12} - \lambda T_{12} \\ V_{12} - \lambda T_{12} & V_{22} - \lambda T_{22} \end{vmatrix} = 0$$

$$(V_{12} - \lambda T_{12})^2 - (V_{11} - \lambda T_{11})(V_{22} - \lambda T_{22}) = 0.$$

Nehmen wir nun an, daß die Matrixelemente folgende Eigenschaft haben:

$$\frac{V_{12}}{T_{12}} = \frac{V_{11}}{T_{11}} = \frac{V_{22}}{T_{22}} = \lambda_0. \quad (10-26)$$

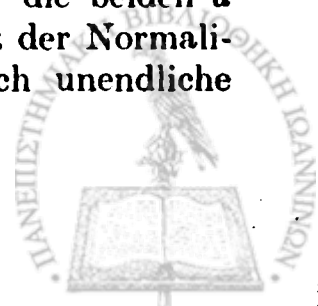
Dann kann die Säkulargleichung geschrieben werden:

$$(T_{12}^2 - T_{11}T_{22})(\lambda_0 - \lambda)^2 = 0.$$

Darin bezeichnet λ_0 eine Doppelwurzel der Säkulargleichung. Die Eigenwertgleichungen (10-10) für diese Wurzel sind aber

$$\begin{aligned} (V_{11} - \lambda_0 T_{11})a_1 + (V_{12} - \lambda_0 T_{12})a_2 &= 0, \\ (V_{12} - \lambda_0 T_{12})a_1 + (V_{22} - \lambda_0 T_{22})a_2 &= 0, \end{aligned}$$

und im Hinblick auf die Bedingungen (10-26) verschwinden alle Koeffizienten der a identisch. Irgendein Wertesatz für die beiden a wird dann die Eigenwertgleichungen befriedigen. Trotz der Normalisierungsforderung (10-20b) wird es somit eine einfach unendliche



Mannigfaltigkeit der Eigenvektoren geben, die einer Doppelwurzel der Säkulargleichung entspricht, eine doppelt unendliche Mannigfaltigkeit für eine dreifache Wurzel usw.

Im allgemeinen wird irgendein Paar von Eigenvektoren, das willkürlich aus dem unendlichen Satz der erlaubten Vektoren ausgewählt worden ist, nicht orthogonal sein. Dennoch ist es stets möglich, ein Paar erlaubter Vektoren zu konstruieren, die orthogonal sind, und die zur Bildung der orthogonalen Matrix A verwendet werden können. Betrachten wir der Einfachheit halber das Verfahren, dem im Falle einer Doppelwurzel zu folgen ist. \mathbf{a}'_k und \mathbf{a}'_l seien zwei erlaubte Eigenvektoren für eine gegebene Doppelwurzel λ . Weiterhin sei \mathbf{a}'_k so normiert, daß es Gl. (10-20b) befriedigt. Irgendeine Linearkombination von \mathbf{a}'_k und \mathbf{a}'_l wird auch ein Eigenvektor zur Wurzel λ sein. Wir versuchen deshalb, einen Vektor \mathbf{a}_l zu konstruieren:

$$\mathbf{a}_l = c_1 \mathbf{a}'_k + c_2 \mathbf{a}'_l, \quad (10-27)$$

in dem c_1 und c_2 solche Konstanten sind, daß \mathbf{a}_l orthogonal zu \mathbf{a}'_k ist. In Komponentenform kann Gl. (10-27) geschrieben werden:

$$a_{li} = c_1 a'_{ik} + c_2 a'_{il}. \quad (10-27')$$

Multipliziert man Gl. (10-27') mit $T_{ij} a'_{jk}$ und summiert über i und j , so wird

$$\sum_{i,j} T_{ij} a_{li} a'_{jk} = c_1 + c_2 \sum_{i,j} T_{ij} a'_{il} a'_{jk}.$$

Um die Orthogonalitätsbedingung (10-20a) zu befriedigen, muß die linke Seite dieser Gleichung verschwinden. Wir setzen also

$$\frac{c_1}{c_2} = - \sum_{i,j} T_{ij} a'_{il} a'_{jk}.$$

Eine andere Gleichung für das Verhältnis c_1/c_2 wird durch die Forderung geliefert, daß \mathbf{a}_l die Normierungsbedingung (10-20b) erfüllt. Die beiden Gleichungen zusammen legen die Koeffizienten c_1 und c_2 und damit den Vektor \mathbf{a}_l fest. Sowohl \mathbf{a}_l als auch $\mathbf{a}_k \equiv \mathbf{a}'_k$ sind automatisch zu den Eigenvektoren der anderen verschiedenen Eigenwerte orthogonal, denn das Argument, auf dem Gl. (10-17') beruht, bleibt gültig. Somit haben wir einen Satz von n Eigenvektoren \mathbf{a}_j , deren Komponenten die Matrix A bilden, die die Gl. (10-21') erfüllt.

Ein ähnliches Verfahren ist für eine Wurzel höherer Multiplizität zu befolgen. Wenn λ eine m -fache Wurzel ist, dann werden die ortho-



normierten Eigenvektoren aus Linearkombinationen der m entsprechenden Eigenvektoren $a'_1 \dots a'_m$ gebildet. Der erste der „orthogonalen“ Eigenvektoren a_1 wird dann als Vielfaches von a'_1 gewählt; a_2 wird aus einer Linearkombination von a'_1 und a'_2 gebildet usw. Auf diese Weise ist die Zahl der zu bestimmenden Konstanten gleich der Summe der ersten m ganzen Zahlen, also $\frac{1}{2}m(m+1)$. Die Normierungsforderungen liefern m Bedingungen, während es $\frac{1}{2}m(m-1)$ Orthogonalitätsbedingungen gibt. Zusammen hat man somit gerade genügend Bedingungen, um die Konstanten eindeutig festzulegen.

Dieses Verfahren, orthogonale Eigenvektoren im Falle mehrfacher Wurzeln zu konstruieren, ist der Methode völlig analog, eine Folge orthogonaler Funktionen aus einem beliebigen Funktionensatz zu konstruieren. In der Sprache der Geometrie ausgedrückt, sieht man auch, daß es identisch mit dem Verfahren ist, das wir im V. Kapitel für mehrfache Eigenwerte des Trägheitstensors verwendet haben. Zum Beispiel bedeutet die zusätzliche Unbestimmtheit in den Eigenvektorkomponenten bei einer Doppelwurzel, daß alle Vektoren in einer Ebene Eigenvektoren sind. Wir wählen lediglich irgend zwei zueinander senkrechte Richtungen in der Ebene als neue Hauptachsen. Die Einheitsvektoren längs dieser Achsen sind die Eigenvektoren in A .

Mehrfache Wurzeln der Säkulargleichung werden oft als entartete Frequenzen bezeichnet. Es sei bemerkt, daß der Begriff hier eine andere Bedeutung hat als im vorigen Kapitel. Zwei verschiedene Frequenzen, selbst wenn sie in einem rationalen Verhältnis zueinander stehen, werden hier nicht als entartet betrachtet, im IX. Kapitel wurden sie jedoch so klassifiziert.

10-3 Die Frequenzen der freien Schwingung und Normalkoordinaten

Die etwas ausgedehnten Überlegungen im vorigen Abschnitt zeigen, daß die Bewegungsgleichungen nicht nur für eine Frequenz, sondern im allgemeinen für einen Satz von n Frequenzen ω_k durch eine Schwingungslösung der Form (10-9) befriedigt werden. Eine vollständige Lösung der Schwingungsgleichungen enthält deshalb eine Überlagerung von Schwingungen mit allen erlaubten Frequenzen. Wenn das System geringfügig aus seiner Gleichgewichtslage ausgelenkt wird und dann sich selbst überlassen bleibt, wird das System somit kleine Schwingungen um die Gleichgewichtslage mit den Frequenzen $\omega_1 \dots \omega_n$ ausführen. Die Lösungen der Säkulargleichung werden deshalb oft als Frequenzen der *freien Schwingung* oder als *Resonanzfrequenzen* des Systems bezeichnet.



Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen kann nun geschrieben werden:

$$\eta_i = \sum_k C_k a_{ik} e^{-i\omega_k t}. \quad (10-28)$$

Darin sind die C_k komplexe Skalenfaktoren für jede Resonanzfrequenz. Man könnte einwenden, daß es für jede Lösung λ_k der Säkulargleichung zwei Resonanzfrequenzen $+\omega_k$ und $-\omega_k$ gibt. Der Eigenvektor a_k wäre für die zwei Frequenzen derselbe, jedoch die Skalenfaktoren C_k^+ und C_k^- könnten begrifflicherweise verschieden sein. Deshalb sollte die allgemeine Lösung lauten:

$$\eta_i = \sum_k a_{ik} (C_k^+ e^{+i\omega_k t} + C_k^- e^{-i\omega_k t}). \quad (10-29)$$

Wir erinnern uns jedoch daran, daß die tatsächliche Bewegung dem Realteil der komplexen Lösung entspricht, und daß der Realteil von (10-28) und (10-29) in folgender Form geschrieben werden kann:

$$\eta_i = \sum_k f_k a_{ik} \cos(\omega_k t + \delta_k). \quad (10-30)$$

Darin sind die Amplitude f_k und die Phase δ_k durch die Anfangsbedingungen bestimmt. Beide Lösungen (10-28, 29) werden deshalb die tatsächliche Bewegung darstellen, doch ist die erstere natürlich bequemer.

Die Orthogonalitätseigenschaften von A vereinfachen die Bestimmung des Skalenfaktors C_k in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen erheblich. Für $t = 0$ reduziert sich der Realteil von Gl. (10-28) auf

$$\eta_i(0) = \sum_k \operatorname{Re} C_k a_{ik}. \quad (10-31)$$

Darin steht Re für „Realteil von“. Ähnlich erhält man den Anfangswert der Geschwindigkeiten:

$$\dot{\eta}_i(0) = \sum_k \operatorname{Im} C_k a_{ik} \omega_k. \quad (10-32)$$

Darin bezeichnet $\operatorname{Im} C_k$ den Imaginärteil von C_k . Aus diesen $2n$ Gleichungen können die Real- und Imaginärteile der n Konstanten C_k bestimmt werden. Um zum Beispiel Gl. (10-31) zu lösen, multipliziert man auf beiden Seiten mit $T_{ij} a_{jl}$ und summiert über i und j :

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} T_{ij} \eta_i(0) a_{jl} &= \sum_{i,j,k} \operatorname{Re} C_k T_{ij} a_{ik} a_{jl} \\ &= \sum_k \operatorname{Re} C_k \delta_{kl}. \end{aligned}$$

Der letzte Schritt wurde mit Rücksicht auf Gl. (10-21) ausgeführt. Führt man die Summation über k aus, so erhält man



$$\operatorname{Re} C_i = \sum_{i,j} T_{ij} \eta_i(0) a_{ji}. \quad (10-33)$$

Ähnlich ist der Imaginärteil des Skalenfaktors gegeben durch

$$\operatorname{Im} C_i = -\frac{1}{\omega_i} \sum_{i,j} T_{ij} \dot{\eta}_i(0) a_{ji}. \quad (10-34)$$

Die Gl. (10-33, 34) erlauben somit die direkte Berechnung des komplexen Faktors C_i in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen und den Matrizen T und A .

Die vollständige Lösung (10-28) für η_i ist ein Beispiel einer mehrfach periodischen Bewegung, wie sie im IX. Kapitel diskutiert wurde. Allerdings ist es ein besonders einfacher Typ mehrfacher Periodizität, denn jeder Term der mehrfachen FOURIER-Entwicklung enthält nur eine der Fundamentalfrequenzen und alle harmonischen Terme fehlen. Aber sogar mit dieser Vereinfachung ist die Bewegung nur bedingt periodisch, denn wenn die Resonanzfrequenzen nicht kommensurabel sind, wird η_i niemals seinen Anfangswert wieder annehmen. Demnach sind die Koordinaten η_i im allgemeinen nicht die Separationskoordinaten des Problems, von denen jede einzelne einfach periodisch ist. Wir können jedoch einen solchen Satz periodischer Koordinaten aus den η_i durch eine Punkttransformation erhalten.

Wir definieren einen neuen Satz von Koordinaten ζ_j , die mit den ursprünglichen Koordinaten η_i durch die folgenden Gleichungen verknüpft sind:

$$\eta_i = \sum_j a_{ij} \zeta_j. \quad (10-35)$$

Wenn η_i und ζ_j als Elemente von einspaltigen Matrizen η bzw. ζ dargestellt werden, lauten die Definitionsgleichungen (10-35):

$$\eta = A\zeta. \quad (10-36)$$

Infolge der Eigenschaften der Matrix A nehmen die potentielle und die kinetische Energie einfache Formen an, wenn sie durch die neuen Koordinaten ausgedrückt werden. Die potentielle Energie (10-4)

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \eta_i V_{ij} \eta_j$$

kann in Matrixform geschrieben werden:

$$V = \frac{1}{2} \eta V \eta. \quad (10-37)$$

Ähnlich kann die kinetische Energie (10-6) als Matrizenprodukt angegeben werden:



$$T = \frac{1}{2} \tilde{\eta} T \dot{\eta}. \quad (10-38)$$

Nun steht die transponierte Matrix $\tilde{\eta}$ (das ist eine einreihige Matrix) zu $\tilde{\zeta}$ in folgender Beziehung:

$$\tilde{\eta} = A \tilde{\zeta} = \tilde{\zeta} A$$

(vgl. Übung 2, IV. Kapitel), und die potentielle Energie lautet deshalb

$$V = \frac{1}{2} \tilde{\zeta} \tilde{A} V A \zeta.$$

A diagonalisiert jedoch V durch eine Kongruenztransformation, vgl. Gl. (10-25), und das Potential reduziert sich einfach auf

$$V = \frac{1}{2} \tilde{\zeta} \lambda \zeta. \quad (10-39)$$

Ausführlich geschrieben lautet Gl. (10-39):

$$V = \frac{1}{2} \sum_k \omega_k^2 \zeta_k^2. \quad (10-40)$$

Die kinetische Energie hat in den neuen Koordinaten eine noch einfachere Form. Da sich die Geschwindigkeiten wie die Koordinaten transformieren, kann T geschrieben werden:

$$T = \frac{1}{2} \tilde{\zeta} \tilde{A} T A \dot{\zeta},$$

und mit Rücksicht auf die „Orthogonalitäts“-Eigenschaft (10-21') von A reduziert sich T auf

$$T = \frac{1}{2} \tilde{\zeta} \dot{\zeta}. \quad (10-41)$$

Als Funktion der neuen Geschwindigkeiten lautet deshalb die kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} \sum_k \dot{\zeta}_k^2. \quad (10-42)$$

Die Gleichungen (10-40) und (10-42) besagen, daß in den neuen Koordinaten sowohl die potentiellen als auch die kinetischen Energien Summen von Quadraten sind und keine gemischten Terme enthalten. Natürlich ist dieses Ergebnis einfach eine andere Form der Aussage, daß A eine Hauptachsentransformation erzeugt. Es sei daran erinnert, daß die Hauptachsentransformation des Trägheitstensors besonders dadurch gekennzeichnet ist, daß sie das Trägheitsmoment auf eine Summe von Quadraten reduziert; die neuen Achsen sind die Hauptachsen des Trägheitsellipsoids. Hier sind die kinetischen und poten-



tiellen Energien auch quadratische Formen (so wie es das Trägheitsmoment war) und beide sind durch A diagonalisiert. Aus diesem Grunde ist die hier angewendete Hauptachsentransformation ein besonderes Beispiel für das wohlbekanntere algebraische Verfahren der *gleichzeitigen Diagonalisierung zweier quadratischer Formen*.

Die durch die neuen Koordinaten hervorgerufene Vereinfachung wirkt sich auch auf die Bewegungsgleichungen aus. Die neue LAGRANGE-Funktion ist

$$L = \frac{1}{2} \sum_k (\dot{\zeta}_k^2 - \omega_k^2 \zeta_k^2), \quad (10-43)$$

so daß die LAGRANGE-Gleichungen für ζ lauten:

$$\ddot{\zeta}_k + \omega_k^2 \zeta_k = 0. \quad (10-44)$$

Die Gl. (10-44) haben die Lösungen:

$$\zeta_k = C_k e^{-i\omega_k t}, \quad (10-45)$$

die man natürlich direkt aus Gl. (10-28) hätte ablesen können. Jede der neuen Koordinaten ist somit eine einfach periodische Funktion, die nur *eine* der Resonanzfrequenzen enthält. Es ist deshalb üblich, die ζ die *Normalkoordinaten* des Systems zu nennen. Offensichtlich sind die Normalkoordinaten auch die Separationskoordinaten für das Problem, und $\omega_k/2\pi$ ist die k -te Winkelvariable.

Jede Normalcoordinate entspricht einer Schwingung des Systems mit nur einer Frequenz, und diese Komponenten der Schwingungen werden *Normalschwingungen* genannt. Bei jeder Normalschwingung schwingen alle Teilchen mit derselben Frequenz und mit der gleichen Phase²; die Amplitudenverhältnisse sind durch die Matrixelemente $a_{\alpha k}$ bestimmt. Die vollständige Bewegung wird dann aus der Summe der Normalschwingungen aufgebaut, zu denen entsprechende Amplituden- und Phasenfaktoren gehören, die in den C_k enthalten sind.

Die Harmonischen der Fundamentalfrequenzen fehlen in der vollständigen Bewegung wegen der Vereinbarung, daß die Amplitude der Schwingung klein sein soll. Wir konnten dann das Potential als eine quadratische Form darstellen, welche wiederum charakteristisch ist für die einfache harmonische Bewegung. Die Transformation auf Normalkoordinaten hebt diesen Punkt besonders hervor, denn, wie man sieht, ist die LAGRANGE-Funktion in den Normalkoordinaten (10-43) die Summe von LAGRANGE-Funktionen für harmonische Oszillatoren der Frequenzen ω_k . Wir können uns deshalb die voll-

² Teilchen können in Gegenphase sein, wenn die a verschiedene Vorzeichen haben.



ständige Bewegung kleiner Schwingungen so vorstellen, als würde man sie durch die Anregung der verschiedenen harmonischen Oszillatoren mit verschiedenen Intensitäten und Phasen erhalten.³

10-4 Freie Schwingungen eines linearen dreiatomigen Moleküls

Um das Verfahren zu erläutern, nach dem man die Resonanzfrequenzen und die Normalschwingungen erhält, wollen wir im Detail ein Modell betrachten, das auf einem linearen symmetrischen dreiatomigen Molekül beruht. Im Gleichgewichtszustand des Moleküls sind zwei Atome der Masse m symmetrisch auf jeder Seite eines Atoms der Masse M lokalisiert (vgl. Abb. 10-2). Alle drei Atome liegen auf einer Geraden, die Gleichgewichts-

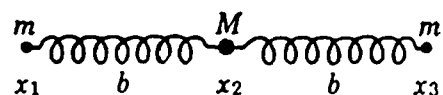


Abb. 10-2. Modell eines linearen symmetrischen dreiatomigen Moleküls.

abstände werden mit b bezeichnet. Der Einfachheit halber wollen wir zuerst nur Schwingungen längs der Molekülachse betrachten, und das wirkliche komplizierte zwischenatomare Potential werde durch zwei Federn mit der Kraftkonstanten k angenähert, die die drei Atome verbinden. Es gibt offenbar drei Koordinaten, die die lineare Lage der drei Atome beschreiben. Mit diesen Koordinaten ist die potentielle Energie

$$V = \frac{k}{2} (x_2 - x_1 - b)^2 + \frac{k}{2} (x_3 - x_2 - b)^2.$$

Wir führen nun Koordinaten relativ zu den Gleichgewichtslagen ein:

$$\eta_i = x_i - x_{0i},$$

wobei

$$x_{02} - x_{01} = b = x_{03} - x_{02}.$$

Die potentielle Energie reduziert sich dann auf

$$V = \frac{k}{2} (\eta_2 - \eta_1)^2 + \frac{k}{2} (\eta_3 - \eta_2)^2$$

oder

$$V = \frac{k}{2} (\eta_1^2 + 2\eta_2^2 + \eta_3^2 - 2\eta_1\eta_2 - 2\eta_2\eta_3). \quad (10-46)$$

³ Es sei für künftige Betrachtungen darauf hingewiesen, daß dasselbe Bild bei der Quantisierung des elektromagnetischen Feldes auftritt. Die Frequenzen der harmonischen Oszillatoren werden mit den Photonen-Frequenzen identifiziert, und die Anregungsamplituden werden die diskreten quantisierten „Besetzungszahlen“ – die Anzahl der Photonen zu jeder Frequenz.



Demnach hat die Matrix V die Gestalt

$$V = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix} \quad (10-47)$$

Die kinetische Energie hat eine noch einfachere Form:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_3^2) + \frac{M}{2} \dot{\eta}_2^2, \quad (10-48)$$

so daß die Matrix T diagonal ist:

$$T = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}. \quad (10-49)$$

Kombiniert man diese zwei Matrizen, so lautet die Säkulargleichung:

$$|V - \omega^2 T| = \begin{vmatrix} k - \omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega^2 M & -k \\ 0 & -k & k - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0. \quad (10-50)$$

Die direkte Entwicklung der Determinante führt auf die kubische Gleichung

$$\omega^2(k - \omega^2 m)(k(M + 2m) - \omega^2 M m) = 0 \quad (10-51)$$

mit den Lösungen

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M}\right)} \quad (10-52)$$

Der erste Eigenwert $\omega_1 = 0$ mag etwas überraschen und auf den ersten Blick schockieren. Eine solche Lösung entspricht nämlich überhaupt keiner Schwingungsbewegung, denn die Bewegungsgleichung für die entsprechende Normalkoordinate lautet:

$$\ddot{\xi}_1 = 0.$$

Sie liefert eine gleichförmige Translationsbewegung. Aber das ist genau der Schlüssel zu der Schwierigkeit. Die verschwindende Frequenz rührt von der Tatsache her, daß das Molekül längs seiner Achse eine Translation ausführen kann, ohne daß sich die potentielle Energie ändert.⁴ Da die rücktreibende Kraft gegen eine solche Bewegung Null ist, muß die effektive „Frequenz“ auch verschwinden. Wir haben die

⁴ Solche Fälle, in denen eine Bewegung um eine Gleichgewichtskonfiguration ohne Störung des Gleichgewichts auftreten kann, werden als *labiles* oder *indifferentes* Gleichgewicht bezeichnet.



Annahme gemacht, daß das Molekül drei Freiheitsgrade der Schwingungsbewegung hat, während jedoch in Wirklichkeit einer von diesen ein Freiheitsgrad des starren Körpers ist.

Eine Anzahl interessanter Punkte kann im Zusammenhang mit einer verschwindenden Resonanzfrequenz diskutiert werden. Man sieht aus Gl. (10-19), daß ω den Wert Null nur dann annehmen kann, wenn die potentielle Energie positiv, aber nicht positiv definit ist, d.h., ω kann auch dann verschwinden, wenn nicht alle η_i Null sind. Eine Untersuchung von V , Gl. (10-46), zeigt, daß es nicht positiv definit ist, und daß V tatsächlich verschwindet, wenn alle η gleich sind (gleichförmige Translation).

Da die hier gefundene Frequenz Null keine Folgen für die uns interessierenden Schwingungsfrequenzen hat, ist es oft wünschenswert, das Problem so zu formulieren, daß diese Wurzel von Anfang an eliminiert ist. Wir können das hier am einfachsten dadurch erreichen, indem wir die Bedingung oder den Zwang auferlegen, daß das Massenzentrum stationär im Koordinatenursprung bleibt:

$$m(x_1 + x_2) + Mx_3 = 0. \quad (10-53)$$

Gl. (10-53) kann dazu verwendet werden, eine der Koordinaten aus V und T zu eliminieren. Dadurch wird das Problem auf einen der zwei Freiheitsgrade reduziert (vgl. Übung 2 in diesem Kapitel).

Die Beschränkung der Bewegung auf die Molekülachse erlaubt nur einen Typ der gleichförmigen Bewegung des starren Körpers. Wenn man jedoch das allgemeine Problem der Schwingungen in allen drei Richtungen betrachtet, ist die Anzahl der Freiheitsgrade des starren Körpers größer, im allgemeinen gleich sechs. Das Molekül kann dann gleichförmige Translationsbewegungen längs der drei Achsen und gleichförmige Rotationen um die Achsen ausführen. Demnach gibt es in einem allgemeinen System von n Freiheitsgraden sechs verschwindende Frequenzen und nur $n - 6$ wirkliche Schwingungsfrequenzen. Die Reduktion der Anzahl der Freiheitsgrade kann wiederum von Anfang an ausgeführt werden, indem man von den Koordinaten die Erhaltung des Translationsimpulses und des Drehimpulses verlangt.

Zusätzlich zur Bewegung des starren Körpers können verschwindende Resonanzfrequenzen auch dann auftreten, wenn das Potential derart ist, daß die ersten *und* zweiten Ableitungen von V im Gleichgewicht verschwinden. Kleine Schwingungen sind in diesem Falle noch möglich, wenn die vierten Ableitungen nicht auch verschwinden (die dritten Ableitungen müssen für ein stabiles Gleichgewicht ver-



schwinden), aber die Schwingungen sind dann nicht einfach harmonisch. Eine solche Situation führt zum Versagen der gewöhnlichen Methode kleiner Schwingungen, aber glücklicherweise tritt sie nicht häufig auf.

Kehren wir nun zur Untersuchung der Resonanzfrequenzen zurück. ω_2 erkennen wir als die wohlbekannte Schwingungsfrequenz einer Masse m , die an einer Feder mit der Kraftkonstanten k befestigt ist. Wir erwarten deshalb, daß nur die Endatome an dieser Schwingung teilnehmen; das Molekülzentrum bleibt in Ruhe. Nur bei der dritten Schwingung ω_3 nimmt die Masse M an der Schwingungsbewegung teil. Diese Vorhersagen lassen sich verifizieren, indem man die Eigenvektoren der drei Normalschwingungen untersucht.

Die Komponenten a_{ij} werden für jede Frequenz durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$\begin{aligned} (k - \omega_j^2 m)a_{1j} & - ka_{2j} & & = 0, \\ -ka_{1j} + (2k - \omega_j^2 M)a_{2j} & - ka_{3j} & & = 0, \\ & - ka_{2j} + (k - \omega_j^2 m)a_{3j} & & = 0 \end{aligned} \quad (10-54)$$

zusammen mit der Normierungsbedingung

$$m(a_{1j}^2 + a_{3j}^2) + Ma_{2j}^2 = 1. \quad (10-55)$$

Für $\omega_1 = 0$ folgt unmittelbar aus der ersten und der dritten der Gl. (10-54), daß alle drei Koeffizienten gleich sind: $a_{11} = a_{21} = a_{31}$. Das ist natürlich genau das, was wegen der Natur der translatorischen Bewegung zu erwarten war (vgl. Abb. 10-3a). Die Normierungsbedingung legt den Wert von a_{1j} fest, so daß

$$a_{11} = \frac{1}{\sqrt{2m + M}}, \quad a_{12} = \frac{1}{\sqrt{2m + M}}, \quad a_{13} = \frac{1}{\sqrt{2m + M}} \quad (10-56a)$$

Die Faktoren $(k - \omega_j^2 m)$ verschwinden für die zweite Normalschwingung, und die Gl. (10-54) zeigen unmittelbar, daß $a_{22} = 0$ (wie vorhergesagt) und $a_{12} = -a_{32}$ ist. Der numerische Wert dieser Größen wird bestimmt durch Gl. (10-55):

$$a_{12} = \frac{1}{\sqrt{2m}}, \quad a_{22} = 0, \quad a_{32} = -\frac{1}{\sqrt{2m}} \quad (10-56b)$$

Bei dieser Normalschwingung ist das Zentralatom in Ruhe, während die zwei äußeren mit genau entgegengesetzter Phase schwingen (da ja der lineare Impuls erhalten bleiben muß), vgl. Abb. 10-3b. Wenn schließlich $\omega = \omega_3$ ist, kann man aus der ersten und dritten der Gl. (10-54) sehen, daß a_{13} und a_{33} gleich sein müssen. Der Rest der Rechnung für diese Normalschwingung ist nicht ganz so einfach wie für die anderen, und es mag ausreichen, die endgültigen Ergebnisse anzugeben:



$$a_{13} = \frac{1}{\sqrt{2m \left(1 + \frac{2m}{M}\right)}}, \quad a_{23} = \frac{-2}{\sqrt{2M \left(2 + \frac{M}{m}\right)}}, \quad a_{33} = \frac{1}{\sqrt{2m \left(1 + \frac{2m}{M}\right)}}.$$

(10-56c)

Hier schwingen die zwei äußeren Atome mit der gleichen Amplitude, während das innere nicht in Phase mit ihnen schwingt und eine andere

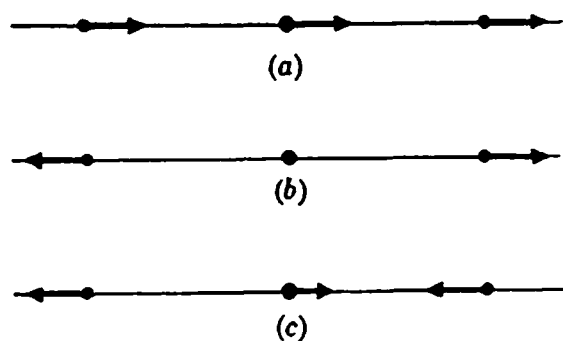


Abb. 10-3. Longitudinale Normalschwingungen des linearen symmetrischen dreiatomigen Moleküls.

Amplitude hat, vgl. Abb. 10-3c. Eine allgemeine Longitudinalschwingung des Moleküls, die keine Gesamttranslation enthält, wird eine Linearkombination der Normalschwingungen ω_2 und ω_3 sein. Die Amplituden der Normalschwingungen und deren Phasen relativ zueinander werden natürlich durch die Anfangsbedingungen bestimmt.

Wir haben bisher nur von Schwingungen längs der Molekülachse gesprochen; im wirklichen Molekül wird es auch Normalschwingungen senkrecht zur Molekülachse geben. Der vollständige Satz der Normalschwingungen ist natürlich schwieriger zu bestimmen als die Longitudinalschwingungen allein, denn die allgemeine Bewegung in allen Richtungen entspricht neun Freiheitsgraden. Obwohl das Verfahren nicht von dem üblichen Wege abweicht, wird der algebraische Aufwand sehr rasch recht kompliziert, und es ist nicht möglich, die ausführliche Rechnung hier darzustellen. Es ist jedoch möglich, eine qualitative Diskussion auf der Basis allgemeiner Prinzipien zu führen, und die meisten Ergebnisse der vollständigen Lösung können vorausgesagt werden.

Zum allgemeinen Problem gehören eine Anzahl Resonanzfrequenzen Null, die einer Bewegung als starrer Körper entsprechen. Für das lineare Molekül gibt es drei Freiheitsgrade für die Translation des starren Moleküls, aber nur zwei Freiheitsgrade für die Rotation des starren Moleküls. Die Drehung um die Achse des Moleküls ist offensichtlich bedeutungslos und erscheint nicht als eine Bewegungsform des starren Körpers. Es bleiben deshalb vier wahre Schwingungsbewegungen. Zwei von ihnen sind die Longitudinalschwingungen, die wir bereits untersucht haben, so daß es nur zwei Schwingungsformen senkrecht zur Achse geben kann. Die Symmetrie des Moleküls um seine Achse zeigt jedoch, daß diese zwei Normalschwingungen entartet sein müssen. Es besteht keine Möglichkeit, eine Schwingung in der y -Richtung von einer Schwingung in der z -Richtung zu unterscheiden.



Deshalb müssen die zwei entsprechenden Frequenzen gleich sein. Die zusätzliche Unbestimmtheit der Eigenvektoren einer entarteten Schwingung wird hier dadurch deutlich, daß alle Richtungen senkrecht zur Molekülachse gleichwertig sind. Irgend zwei orthogonale Achsen in der Ebene, die senkrecht zur Molekülachse steht, können als die Richtungen der entarteten Normalschwingungen gewählt werden. Die vollständige Bewegung der Atome senkrecht zur Molekülachse wird von den Amplituden und den relativen Phasen der zwei entarteten Schwingungen abhängen. Sind beide angeregt, und sind beide genau in Phase, dann werden sich die Atome auf einer geraden Linie bewegen, die durch die Gleichgewichtskonfiguration geht. Sind sie aber nicht in Phase, so ist die zusammengesetzte Bewegung eine elliptische LISSAJOUSSCHE Figur, genau wie bei einem zweidimensionalen isotropen Oszillator. Die zwei Bewegungen stellen dann weniger eine Schwingung als vielmehr eine Rotation dar.

Wegen der Symmetrie des Moleküls ist es offensichtlich, daß die Amplituden der Endatome identisch sein müssen. Die vollständige Rechnung zeigt, daß sich die Endatome auch in derselben Richtung längs der LISSAJOUS-Figur bewegen. Das Zentralatom muß jedoch in entgegengesetzter Richtung umlaufen, damit der Drehimpuls erhalten bleibt. Abb. 10-4 illustriert

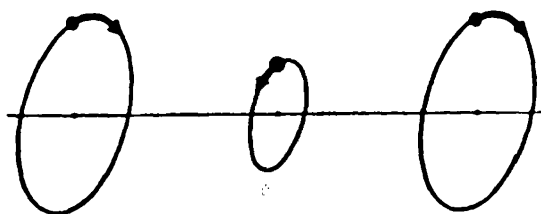
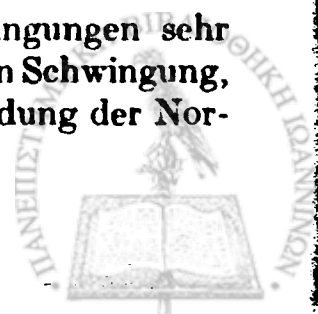


Abb. 10-4. Entartete Schwingungen des symmetrischen dreiatomigen Moleküls.

die Bewegung für den Fall, daß die entarteten Normalschwingungen einen Phasenunterschied von neunzig Grad haben.

10-5 Erzwungene Schwingungen und die Wirkung dissipativer Kräfte

Freie Schwingungen treten dann auf, wenn das System zunächst aus seiner Gleichgewichtslage gebracht wird und ihm dann, wenn es sich selbst überlassen bleibt, erlaubt wird zu schwingen. Sehr oft wird das System jedoch durch eine äußere antreibende Kraft in Schwingung versetzt, und diese Kraft wirkt auf das System auch noch nach $t = 0$. Die Frequenz einer solchen *erzwungenen Schwingung* ist durch die Frequenz der antreibenden Kraft und nicht durch die Resonanzfrequenzen bestimmt. Dennoch sind die Normalschwingungen sehr wichtig zur Bestimmung der Amplituden der erzwungenen Schwingung, und das Problem läßt sich wesentlich durch die Verwendung der Nor-



malkoordinaten vereinfachen, die man aus den freien Schwingungen erhalten hat.

Wenn F_j die generalisierte Kraft ist, die zu der Koordinate η_j gehört, dann ist wegen Gl. (1-46) die generalisierte Kraft Q_i für die Normalkoordinate ζ_i :

$$Q_i = \sum_j a_{ji} F_j. \quad (10-57)$$

Drückt man die Bewegungsgleichungen durch die Normalkoordinaten aus, so lauten sie jetzt: $\ddot{\zeta}_i + \omega_i^2 \zeta_i = Q_i.$ (10-58)

Die Gleichungen (10-58) sind ein Satz von n inhomogenen Differentialgleichungen, die nur gelöst werden können, wenn man die Abhängigkeit von Q_i von der Zeit kennt. Obwohl die Lösung nicht so einfach wie im Falle der freien Schwingung ist, so behalten die Normalkoordinaten dennoch ihren Vorteil, Separationsvariable zu sein, und jede Gleichung enthält nur eine einzige Koordinate. Häufig variiert die antreibende Kraft sinusförmig mit der Zeit. In einem akustischen Problem zum Beispiel kann die antreibende Kraft von dem Druck einer Schallwelle herrühren, die auf das System wirkt. Q_i hat dann die gleiche Frequenz wie die Schallwelle. Oder wenn das System ein mehratomiges Molekül ist, tritt eine sinusförmige antreibende Kraft dann auf, wenn das Molekül mit monochromatischem Licht bestrahlt wird. Auf jedes Atom im Molekül wirkt dann eine elektrische Kraft, deren Frequenz gleich der des einfallenden Lichtes ist. In allen solchen Systemen kann für die Kraft Q_i geschrieben werden:

$$Q_i = Q_{0i} \cos(\omega t + \delta_i), \quad (10-59)$$

wobei ω die Kreisfrequenz der äußeren Kraft ist. Die Bewegungsgleichung lautet nun

$$\ddot{\zeta}_i + \omega_i^2 \zeta_i = Q_{0i} \cos(\omega t + \delta_i). \quad (10-60)$$

Eine vollständige Lösung von Gl. (10-60) besteht aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung (d.h. für die freien Schwingungen) plus einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung. Durch eine geeignete Wahl der Anfangsbedingungen können die überlagerten freien Schwingungen zum Verschwinden gebracht werden.⁵ Wir kon-

⁵ Die freien Schwingungen sind im wesentlichen die vorübergehenden Erscheinungen, die durch die Anwendung der antreibenden Kraft erzeugt werden. Wenn wir davon ausgehen, daß das System anfangs in einer Gleichgewichtskonfiguration ist, und wir dann die antreibenden Kräfte von Null aus allmählich einschalten, so werden diese Übergangserscheinungen nicht auftreten. Andererseits kann man dissipative Kräfte als vorhanden annehmen (siehe die folgenden Seiten), die die freien Schwingungen durch Dämpfung zum Verschwinden bringen.



zentrieren uns deshalb auf die partikuläre Lösung von Gl. (10-60), die offensichtlich folgende Form hat:

$$\zeta_i = B_i \cos(\omega t + \delta_i). \quad (10-61)$$

Hier werden die Amplituden B_i dadurch bestimmt, daß man die Lösung in die Gl. (10-60) einsetzt:

$$B_i = \frac{Q_{0i}}{\omega_i^2 - \omega^2} \quad (10-62)$$

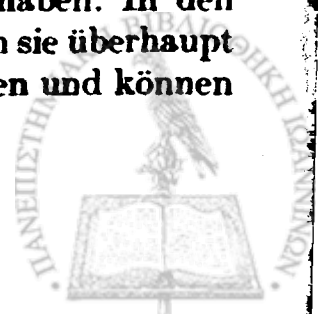
Die vollständige Lösung lautet dann

$$\eta_j = \sum_i a_j \zeta_i = \sum_i \frac{a_j Q_{0i} \cos(\omega t + \delta_i)}{\omega_i^2 - \omega^2} \quad (10-63)$$

Somit ist die Schwingung jedes Teilchens wieder aus Linearkombinationen der Normalschwingungen zusammengesetzt, aber jetzt erscheint jede Normalschwingung mit der Frequenz der antreibenden Kraft.

Zwei Faktoren bestimmen das Maß, mit dem jede Normalschwingung angeregt wird. Einer ist die Amplitude der generalisierten antreibenden Kraft Q_{0i} . Wenn die auf jedes Teilchen wirkende Kraft keine Komponente in der Schwingungsrichtung einer speziellen Normalschwingung hat, dann wird die generalisierte Kraft, die zu dieser Normalschwingung gehört, verschwinden, und Q_{0i} wird Null sein. *Eine äußere Kraft kann eine Normalschwingung nur dann anregen, wenn sie die Teilchen in der gleichen Richtung wie in dieser Normalschwingung zu bewegen sucht.* Der zweite Faktor ist der Unterschied zwischen der antreibenden Frequenz und der Frequenz der freien Schwingung. Wegen der Nenner in Gl. (10-63) wird eine Normalschwingung relativ zu den anderen Normalschwingungen um so stärker angeregt werden, je näher ω der Frequenz ω_i dieser Normalschwingung kommt. Tatsächlich ergibt Gl. (10-63) eine unendlich große Amplitude, wenn die antreibende Frequenz mit einem der ω_i genau übereinstimmt – das ist die bekannte Erscheinung der Resonanz. Allerdings setzt Gl. (10-63) natürlich nur kleine Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage voraus, und die Amplitude der Schwingung bleibt bei Resonanz endlich. Wir bemerken, daß die Schwingungen mit der antreibenden Kraft in Phase sind, wenn die Frequenz kleiner als die Resonanzfrequenz ist, daß aber eine Phasenänderung um π auftritt, wenn man durch die Resonanz hindurchgeht.

Unsere Diskussion war insofern unrealistisch, als wir die Abwesenheit von dissipativen oder Reibungskräften angenommen haben. In den meisten physikalischen Systemen sind diese Kräfte, wenn sie überhaupt auftreten, proportional zu den Teilchengeschwindigkeiten und können



deshalb von einer Dissipationsfunktion \mathcal{F} hergeleitet werden (vgl. Abschn. 1-5). Wir wollen zunächst die Wirkung von Reibungskräften auf die freien Schwingungen betrachten.

Nach der Definition muß \mathcal{F} eine homogene quadratische Funktion der Geschwindigkeiten sein:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \mathcal{F}_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j \quad (10-64)$$

Die Koeffizienten \mathcal{F}_{ij} sind selbstverständlich symmetrisch, $\mathcal{F}_{ij} = \mathcal{F}_{ji}$, und werden im allgemeinen Funktionen der Koordinaten sein. Da wir uns nur mit kleinen Schwingungen um die Gleichgewichtslage befassen, ist es ausreichend, die Koeffizienten um das Gleichgewicht zu entwickeln und nur den ersten konstanten Term zu berücksichtigen, genau so wie wir es für die kinetische Energie getan haben. Bei den weiteren Anwendungen von Gl. (10-64) wollen wir \mathcal{F}_{ij} zur Bezeichnung dieser konstanten Faktoren verwenden. Es sei daran erinnert, daß $2\mathcal{F}$ gleich der Energiedissipation ist, die von den Reibungskräften herrührt. Die Dissipationsfunktion kann deshalb niemals negativ sein, und folglich müssen die Koeffizienten \mathcal{F}_{ij} entweder positiv oder Null sein. Der vollständige Satz der LAGRANGESCHEN Bewegungsgleichungen lautet nun (vgl. Abschn. 1-5):

$$\sum_j T_{ij} \ddot{\eta}_j + \sum_j \mathcal{F}_{ij} \dot{\eta}_j + \sum_j V_{ij} \eta_j = 0. \quad (10-65)$$

Gelegentlich tritt der Fall ein, daß die Hauptachsentransformation, die T und V diagonalisiert, auch \mathcal{F} diagonalisiert. Das ist zum Beispiel der Fall, wenn die Reibungskraft proportional der Teilchengeschwindigkeit *und* proportional der Teilchenmasse ist. Für solche Ausnahmefälle lauten die Bewegungsgleichungen als Funktionen der Normalkoordinaten:

$$\ddot{\zeta}_i + \mathcal{F}_i \dot{\zeta}_i + \omega_i^2 \zeta_i = 0, \quad (10-66)$$

wobei die \mathcal{F}_i die positiven Koeffizienten der diagonalisierten Form von \mathcal{F} sind. Die Gl. (10-66) sind ein Satz von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und können gelöst werden durch Funktionen der Form

$$\zeta_i = C_i e^{-i\omega'_i t},$$

wobei ω'_i die quadratische Gleichung

$$\omega_i'^2 + i\omega_i' \mathcal{F}_i - \omega_i^2 = 0 \quad (10-67)$$



erfüllt. Gl. (10-67) hat zwei Lösungen:

$$\omega'_i = \pm \sqrt{\omega_i^2 - \frac{\mathfrak{F}_i^2}{4}} - i \frac{\mathfrak{F}_i}{2}. \quad (10-68)$$

Die Bewegung ist deshalb keine reine Schwingung, denn ω' ist komplex. Man sieht aus Gl. (10-68), daß der imaginäre Teil von ω'_i auf einen Faktor $e^{-\mathfrak{F}_i t/2}$ führt. Weil die \mathfrak{F}_i positiv (oder Null) sind, ist diese Funktion stets eine mit der Zeit exponentiell abfallende Funktion. Das Auftreten solch eines Dämpfungsfaktors, der von der Reibung herrührt, überrascht nicht. Wenn die Teilchen schwingen, so arbeiten sie gegen die Reibungskräfte, und die Energie des Systems (und damit die Schwingungsamplituden) muß im Laufe der Zeit abnehmen. Der reelle Teil von Gl. (10-68) entspricht dem Schwingungsfaktor in der Bewegung. Wir stellen fest, daß das Vorliegen einer Reibung auch die Frequenz der Schwingung beeinflusst. Wenn jedoch die Dissipation klein ist, können die quadratischen Terme in \mathfrak{F}_i vernachlässigt werden, und die Frequenz der Schwingung führt auf den Wert für den Fall fehlender Reibung. Die vollständige Bewegung ist dann einfach eine exponentielle gedämpfte freie Schwingung:

$$\zeta_i = C_i e^{-\mathfrak{F}_i t/2} e^{-i\omega_i t}. \quad (10-69)$$

Wenn die Dissipationsfunktion nicht zusammen mit T und V diagonalisiert werden kann, ist die Lösung viel schwieriger. Die allgemeine Natur der Lösung bleibt ungefähr dieselbe, jedoch besteht sie aus einem exponentiellen Dämpfungsfaktor multipliziert mit einer exponentiellen Schwingungsfunktion. Nehmen wir an, wir versuchen für die Gl. (10-65) eine Lösung der Form

$$\eta_j = C a_j e^{-i\omega t} = C a_j e^{-\gamma t} e^{-i\omega t}. \quad (10-70)$$

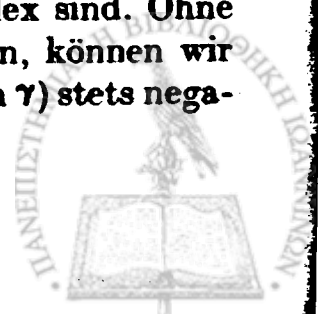
Mit dieser Lösung führen die Gl. (10-65) auf einen Satz simultaner linearer Gleichungen:

$$\sum_j V_{ij} a_j - i\omega \sum_j \mathfrak{F}_{ij} a_j - \omega^2 \sum_j T_{ij} a_j = 0 \quad (10-71)$$

oder, wenn wir $i\gamma$ für ω schreiben:

$$\sum_j V_{ij} a_j + \gamma \sum_j \mathfrak{F}_{ij} a_j + \gamma^2 \sum_j T_{ij} a_j = 0. \quad (10-71')$$

Die Gl. (10-70) oder (10-71') können für die a_j nur für bestimmte Werte von ω oder γ gelöst werden, die im allgemeinen komplex sind. Ohne die entsprechende Säkulargleichung tatsächlich zu lösen, können wir zeigen, daß der Imaginärteil von ω (oder der Realteil von γ) stets nega-



tiv sein muß. Man multipliziert Gl. (10-71') mit a_i^* und summiert über i :

$$\sum_{i,j} V_{ij} a_i^* a_j + \gamma \sum_{i,j} \mathcal{F}_{ij} a_i^* a_j + \gamma^2 \sum_{i,j} T_{ij} a_i^* a_j = 0. \quad (10-72)$$

Wie in Abschn. 10-2 gezeigt wurde, ist die Symmetrie der Koeffizienten von V_{ij} , \mathcal{F}_{ij} und T_{ij} hinreichend dafür, daß jede der Summen in Gl. (10-72) reell ist. Zerlegt man die a_j in ihre Real- und Imaginärteile, so kann man Gl. (10-72) tatsächlich in folgender Form schreiben:

$$\sum_{i,j} V_{ij} (\alpha_i \alpha_j + \beta_i \beta_j) + \gamma \sum_{i,j} \mathcal{F}_{ij} (\alpha_i \alpha_j + \beta_i \beta_j) + \gamma^2 \sum_{i,j} T_{ij} (\alpha_i \alpha_j + \beta_i \beta_j) = 0. \quad (10-72')$$

Wenn nun γ eine Lösung der quadratischen Gleichung (10-72') ist, dann ist die Komplexkonjugierte γ^* auch eine Wurzel der Gleichung. Die Summe dieser zwei Wurzeln ist doppelt so groß wie der Realteil von γ und muß außerdem gleich dem Koeffizienten von γ in (10-72') dividiert durch den Koeffizienten von γ^2 sein:

$$\gamma + \gamma^* = 2\kappa = \frac{\sum \mathcal{F}_{ij} (\alpha_i \alpha_j + \beta_i \beta_j)}{\sum T_{ij} (\alpha_i \alpha_j + \beta_i \beta_j)}. \quad (10-73)$$

Die Dissipationsfunktion \mathcal{F} muß stets positiv sein, und T ist positiv definit; demnach kann κ nur positiv sein. Die Schwingungen des Systems können mit der Zeit exponentiell abnehmen, sie können jedoch niemals im Laufe der Zeit anwachsen. Wenn \mathcal{F} positiv definit ist, muß κ von Null verschieden (und positiv) sein, und alle Schwingungen sind exponentiell gedämpft. Die Frequenzen der Schwingung, die durch den reellen Teil von ω gegeben sind, werden natürlich durch die dissipativen Kräfte beeinflusst, aber die Änderung ist klein, wenn die Dämpfung während einer Schwingungsperiode nicht sehr groß ist.

Wir wollen schließlich noch erzwungene Schwingungen beim Vorhandensein dissipativer Kräfte betrachten. Stellen wir die Zeitabhängigkeit der antreibenden Kraft dar durch

$$F_j = F_{0j} e^{-i\omega t},$$

wobei F_{0j} komplex sein darf, so lauten die Bewegungsgleichungen:

$$\sum_j V_{ij} \eta_j + \sum_j \mathcal{F}_{ij} \dot{\eta}_j + \sum_j T_{ij} \ddot{\eta}_j = F_{0i} e^{-i\omega t}. \quad (10-74)$$

Wenn wir eine partikuläre Lösung dieser Gleichung von der Form

$$\eta_j = A_j e^{-i\omega t}$$



ansetzen, so erhalten wir das folgende System inhomogener linearer Gleichungen für die Amplituden A_j :

$$\sum_j A_j (V_{ij} - i\omega \mathcal{F}_{ij} - \omega^2 T_{ij}) - F_{0i} = 0. \quad (10-75)$$

Die Lösung dieser Gleichung kann man leicht mit Hilfe der CRAMERSchen Regel erhalten:

$$A_j = \frac{D_j(\omega)}{D(\omega)}, \quad (10-76)$$

wobei $D(\omega)$ die Koeffizientendeterminante der A_j in Gl. (10-75) und $D_j(\omega)$ die Determinante ist, die aus $D(\omega)$ hervorgeht, wenn man in ihr die j -te Spalte durch $F_{01} \dots F_{0n}$ ersetzt. Der Nenner $D(\omega)$ ist für uns in erster Linie von Interesse, denn die Resonanzen sind im wesentlichen durch die algebraische Form des Nenners bestimmt. Nun ist D die Determinante, die in der Säkulargleichung auftritt; ihre Wurzeln sind die komplexen Frequenzen $\omega_1 \dots \omega_n$ der Normalschwingungen. Demnach kann $D(\omega)$ dargestellt werden durch

$$D(\omega) = G(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)(\omega - \omega_3) \dots (\omega - \omega_n),$$

wobei G eine Konstante ist. Verwendet man die Produktschreibweise, so wird

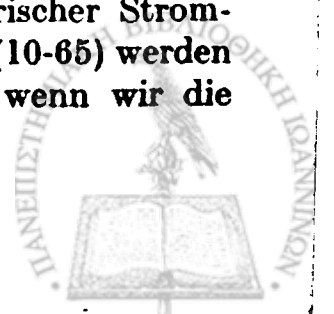
$$D(\omega) = G \prod_{i=1}^n (2\pi(\nu - \nu_i) + i\kappa_i). \quad (10-77)$$

Wenn wir den Bruch in Gl. (10-76) mit $D^*(\omega)$ erweitern, um A_j in Real- und Imaginärteil zu zerlegen, so wird der reelle Nenner:

$$D^*(\omega)D(\omega) = GG^* \prod_{i=1}^n (4\pi^2(\nu - \nu_i)^2 + \kappa_i^2). \quad (10-78)$$

Man sieht, daß eine Resonanz dann auftritt, wenn die Frequenz ν mit einer der Resonanzfrequenzen ν_i übereinstimmt, aber der Dämpfungskonstanten κ_i zufolge verschwinden die Resonanznenner nicht mehr. Jede freie Schwingung ist zwar noch am stärksten angeregt, wenn die antreibende Frequenz mit der freien Frequenz übereinstimmt, aber jetzt muß die antreibende Kraft gegen die Reibung Arbeit leisten, und deshalb werden die Resonanzamplituden nicht unendlich.

Wir haben die Eigenschaften kleiner Schwingungen allein für mechanische Systeme diskutiert. Der Leser wird jedoch zweifellos die Ähnlichkeit mit der Theorie der Schwingungen elektrischer Stromkreise bemerkt haben. Aus den Bewegungsgleichungen (10-65) werden die Stromgleichungen für n gekoppelte Stromkreise, wenn wir die



Koeffizienten V_{ij} als reziproke Kapazitäten, die \mathcal{F}_{ij} als Widerstände und die T_{ij} als Induktivitäten ansehen. Die antreibenden Kräfte werden durch Spannungsquellen der Frequenz ω ersetzt, die auf einen oder mehrere der Stromkreise wirken. Die Gleichungen der erzwungenen Schwingung (10-74) reduzieren sich dann auf die elektrischen Stromgleichungen (2-39), die im II. Kapitel angegeben wurden. Wir haben hier nur einen Teil der Verfahren angegeben, die zur Behandlung kleiner Schwingungen entwickelt worden sind. Wir haben uns auch auf nur wenige allgemeine Sätze über die Bewegung beschränkt. Wenn wir diesen Gegenstand weiter verfolgen wollten, würden wir uns jedoch mehr in die Theorie elektrischer Ströme als in die Mechanik begeben.

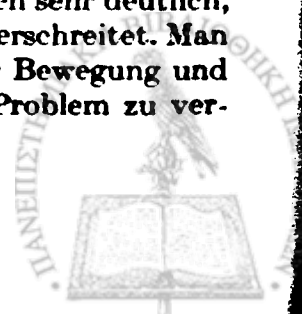
Statt dessen wollen wir unsere Aufmerksamkeit einem anderen Zweig der Theorie kleiner Schwingungen zuwenden: den Methoden zur Behandlung der Schwingungen kontinuierlicher Systeme. Historisch wurde der Übergang von diskreten zu kontinuierlichen Systemen zuerst durch RAYLEIGH und andere mit der Absicht entwickelt, die Schwingungen von Federn, Membranen und Stäben zu behandeln. In neuerer Zeit hat man erkannt, daß eine stetige Änderung einer oder mehrerer Größen im Raum – mit anderen Worten, ein Feld – als Darstellung eines kontinuierlichen Systems angesehen werden kann. Die Verfahren, die für kontinuierliche mechanische Systeme entwickelt wurden, können deshalb zum Beispiel auf elektromagnetische Felder angewendet werden. In ihren quantisierten Formen haben diese Verfahren größte Bedeutung für den modernen theoretischen Physiker erlangt, und zwar für das Arbeiten mit den Feldern von Elementarteilchen, die heute in großer Fülle erfunden werden. Im nächsten Kapitel werden wir deshalb eine kurze Einführung in die klassische Mechanik kontinuierlicher Systeme geben.

LITERATURHINWEISE

- H. MARGENAU und G. M. MURPHY, *The Mathematics of Physics and Chemistry*. Im 9. Kapitel wird eine kurze Einführung in die Theorie kleiner Schwingungen gegeben; die wichtigen mathematischen Grundlagen der Matrixalgebra findet man in Kapitel 10. Die Behandlung unterscheidet sich etwas von der in unserem Text gegebenen, jedoch wird von der Matrixalgebra ausgiebig Gebrauch gemacht.
- A. G. WEBSTER, *Dynamics*. Kapitel V enthält eine etwas altmodische Behandlung kleiner Schwingungen, sie ist aber besonders wertvoll für die Diskussion von Systemen, die dissipative Kräfte enthalten. Erzwungene Schwingungen und der Übergang auf kontinuierliche Systeme werden ebenfalls gut behandelt. Am wertvollsten sind jedoch die Bemerkungen am Schluß der Abhandlung, die einen kurzen Lehrgang über quadratische Formen und deren Haupt-



- achsentransformationen vermitteln. Für die gleichzeitige Diagonalisierung von T und V wird eine ausführliche Methode angegeben, die zwar nicht die Matrixalgebra verwendet, aber die Schwierigkeit der mehrfachen Wurzeln sehr schön umgeht.
- E. T. WHITTAKER, *Analytical Dynamics*. Kapitel VII handelt von der Theorie der Schwingungen und gibt einen expliziten Beweis dafür, daß T und V gleichzeitig diagonalisiert werden können; die Behandlung dieses Punktes ist jedoch bei WEBSTER viel klarer. Wertvoller sind die anschließenden Abschnitte des Kapitels über die Wirkung von Zwangskräften und über Schwingungen um eine gleichförmige Bewegung, was bemerkenswert ausführlich diskutiert wird. Abschnitt 94 des Kapitels VIII über Schwingungen bei der Anwesenheit von dissipativen Kräften ist fragmentarisch und beschränkt sich auf zwei Freiheitsgrade.
- M. BÔCHER, *Introduction to Higher Algebra*. Kapitel XIII befaßt sich mit der Diagonalisierung quadratischer Formen. Dazu wird eine Methode verwendet, die der von WEBSTER und WHITTAKER ähnlich ist. Die vorhergehenden Kapitel über die Lösung simultaner linearer Gleichungen sind auch von Interesse.
- S. TIMOSHENKO und D. H. YOUNG, *Advanced Dynamics*. Das ist ein Buch für Ingenieure, und die allgemeine Theorie bleibt in den Anfängen stecken. Die Schwingungen in Systemen mit zwei oder drei Freiheitsgraden werden jedoch sehr ausführlich behandelt, und für viele erläuternde Beispiele werden Lösungen ausgearbeitet. Diese relativ einfachen Systeme vermitteln ein Gefühl für Begriffe wie Normalschwingungen, Resonanz, u.s.w., das man oft bei der Abstraktheit einer allgemeinen Theorie verliert. Eine Reihe ungewöhnlicher Themen wird ebenfalls behandelt, wie etwa Methoden für das näherungsweise Lösen der Säkulargleichung und kleine Schwingungen um eine gleichförmige Bewegung.
- LORD RAYLEIGH, *Theory of Sound*. Einer der Klassiker der Physik-Literatur. Diese Abhandlung enthält eine Fülle von Sätzen und physikalischen Erläuterungen zu allen Aspekten der Schwingungstheorie. RAYLEIGH selbst war für die Entwicklung eines großen Teiles der Theorie verantwortlich, besonders hinsichtlich der Einführung der Dissipationsfunktion. Seine Abhandlung ist flüssig und klar und enthält Themen, die nur selten diskutiert werden, wie etwa die Wirkungen von Zwangskräften und die Stationaritätseigenschaften der Eigenfrequenzen. Sowohl RAYLEIGH als auch WEBSTER stützen sich stark auf das Werk von ROUTH, der in seinem ADAMS Prize Essay von 1877 und in seinem Buch *Rigid Dynamics* einer der ersten war, die kleine Schwingungen systematisch diskutierten.
- E. A. GUILLEMIN, *The Mathematics of Circuit Analysis*. Dieser Literaturhinweis wird mit angeführt, um auf die Wichtigkeit der Theorie kleiner Schwingungen in der modernen Elektrotechnik hinzuweisen. Besondere Beachtung finden quadratische Formen und deren Hauptachsentransformationen. Die Abhandlung, die durchgehend die Matrixalgebra verwendet, hat hohes Niveau und ist elegant.
- G. HERZBERG, *Infrared and Raman Spectra of Polyatomic Molecules*. Diese Darstellung enthält viele Erläuterungen der Anwendung der klassischen Theorie kleiner Schwingungen auf die Molekülstruktur. Die bei der Lösung der Säkulargleichung in der Praxis auftretenden Schwierigkeiten werden sehr deutlich, wenn die Zahl der Freiheitsgrade zwei oder drei wesentlich überschreitet. Man muß dann möglichst viel Gebrauch von den Konstanten der Bewegung und den Symmetrieeigenschaften des Systems machen, um das Problem zu ver-



einfachen. Diese Verfahren werden hier ausführlich behandelt, und der Leser findet für viele Molekülmodelle explizite Lösungen mit erläuternden Diagrammen der verschiedenen Normalschwingungen.

ÜBUNGEN

1. Bestimme die Normalschwingungen des in Abb. 1-5 gezeigten Doppelpendels. Nehme dabei gleiche Längen aber verschiedene Massen an. Zeige, daß dann, wenn die untere Masse klein gegenüber der oberen Masse ist, die beiden Resonanzfrequenzen nahezu gleich sind. Zeige: Wenn das Pendel in Bewegung gesetzt wird, indem man die obere Masse geringfügig aus der Vertikalen zieht und dann freiläßt, dann verläuft die anschließende Bewegung so, daß nach bestimmten Zeitabständen ein Pendel in Ruhe ist, während das andere seine maximale Amplitude hat. Das ist die bekannte Erscheinung der Schwebungen.

2. Das Problem des linearen dreiatomigen Moleküls kann auf ein Problem mit zwei Freiheitsgraden reduziert werden, indem man Koordinaten $y_1 = x_3 - x_1$, $y_2 = x_3 - x_2$ einführt und x_2 durch die Forderung eliminiert, daß der Schwerpunkt in Ruhe bleibt. Bestimme die Frequenzen der Normalschwingungen in diesen Koordinaten und zeige, daß sie mit den Ergebnissen in Abschnitt 10-4 übereinstimmen. Die Abstände y_1 und y_2 zwischen den Atomen werden *innere Koordinaten* des Moleküls genannt.

3. Bestimme die Frequenzen der Longitudinalschwingung des in Abschnitt 10-4 diskutierten Moleküls, allerdings soll jetzt das Zentralatom durch eine Feder mit der Kraftkonstanten k an den Ursprung gebunden sein. Zeige, daß die Translationsbewegung unter diesen Umständen nicht auftritt.

4. Die Gleichgewichtskonfiguration eines Moleküls werde durch drei Atome gleicher Masse dargestellt, die an den Ecken eines rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecks sitzen und durch Federn mit gleichen Kraftkonstanten verbunden sind. Stelle die Säkulardeterminante für die Schwingungen in der Ebene auf und ordne die Spalten so, daß die Säkulargleichung eine dreifache Wurzel $\omega = 0$ hat. Reduziere die Determinante auf eine dritten Grades und bestimme die nichtverschwindenden Frequenzen der freien Schwingung.

5. Zeige direkt, daß die Bewegungsgleichungen des vorhergehenden Problems erfüllt werden durch (a) eine gleichförmige Translation aller Atome längs der x -Achse, (b) eine gleichförmige Translation längs der y -Achse und (c) eine gleichförmige Rotation um die z -Achse.

6. Zeige, daß dann, wenn die generalisierten treibenden Kräfte Q_i nicht sinusförmig sind, die erzwungenen Schwingungen der Normalkoordinaten beim Fehlen einer Dämpfung gegeben sind durch

$$\zeta_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_i(\omega)}{\omega_i^2 - \omega^2} e^{-i\omega t} d\omega,$$

wobei $G_i(\omega)$ die FOURIER-Transformierte von Q_i ist, gegeben durch

$$Q_i(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G_i(\omega) e^{-i\omega t} d\omega.$$

Zeige weiterhin: Wenn sich die Dissipationsfunktion gleichzeitig mit T und V



diagonalisieren läßt, so sind die erzwungenen Schwingungen gegeben durch

$$\zeta_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_i(\omega)(\omega_i^2 - \omega^2 + i\omega\mathcal{F}_i)}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\mathcal{F}_i^2} e^{-i\omega t} d\omega,$$

das den typischen Resonanz-Nenner hat. Diese Ergebnisse sind einfache Beispiele der überaus wirksamen Technik des *Operator-Kalküls* für die Behandlung abklingender Schwingungen.

7. Ein Teilchen bewege sich auf einer Kreisbahn unter dem Einfluß einer Zentralkraft, die vom Zentrum des Kreises ausgeht. Untersuche die Bewegung des Teilchens, wenn es geringfügig aus seiner Gleichgewichtsbahn ausgelenkt wird. Führe dazu Differenz-Koordinaten $\rho = r - r_0$, $\phi = \theta - \omega t$ ein, wobei r_0 der Radius der Kreisbahn und ω die Gleichgewichts-Kreisfrequenz sind. T und V können durch diese Koordinaten ausgedrückt werden, die als kleine Größen anzusehen sind, so daß höhere als quadratische Terme weggelassen werden dürfen. Stelle die Bewegungsgleichungen auf und ermittle die Bedingungen für stabile Schwingungen. Zeige, daß dann, wenn V ein Potenzgesetz der Form r^{-n+1} ist, stabile Schwingungen auftreten, wenn n kleiner als 3 ist. Zeige auch, daß es immer eine Schwingungsfrequenz Null gibt, die dem Übergang in eine andere Kreisbahn entspricht.



XI. KAPITEL

EINFÜHRUNG IN DIE LAGRANGESCHE UND HAMILTONSCHE FORMULIERUNG FÜR KONTINUIERLICHE SYSTEME UND FELDER

Alle Formulierungen der Mechanik, die wir bisher diskutiert haben, wurden zur Behandlung von Systemen mit einer endlichen oder höchstens abzählbar unendlichen Anzahl von Freiheitsgraden entwickelt. Es gibt jedoch einige mechanische Probleme, die kontinuierliche Systeme enthalten, wie zum Beispiel das Problem eines schwingenden, elastischen Festkörpers. Hier nimmt jeder Punkt des kontinuierlichen Festkörpers an den Schwingungen teil, und die vollständige Bewegung kann nur dadurch beschrieben werden, daß man die Lagekoordinaten *aller* Punkte angibt. Es ist nicht schwierig, die früher gegebenen Formulierungen der Mechanik derart abzuändern, daß man solche Probleme behandeln kann. Die direkteste Methode besteht darin, das kontinuierliche System durch ein System anzunähern, das diskrete Teilchen enthält, und dann die Änderung zu untersuchen, die die Bewegungsgleichungen erfahren, wenn man sich dem Grenzfall des Kontinuums nähert.

11-1 Der Übergang von einem diskreten zu einem kontinuierlichen System

Wir wollen dieses Verfahren auf einen unendlich langen elastischen Stab anwenden, der kleine Longitudinalschwingungen ausführen kann, d.h. oszillatorische Auslenkungen der Teilchen des Stabes parallel zur

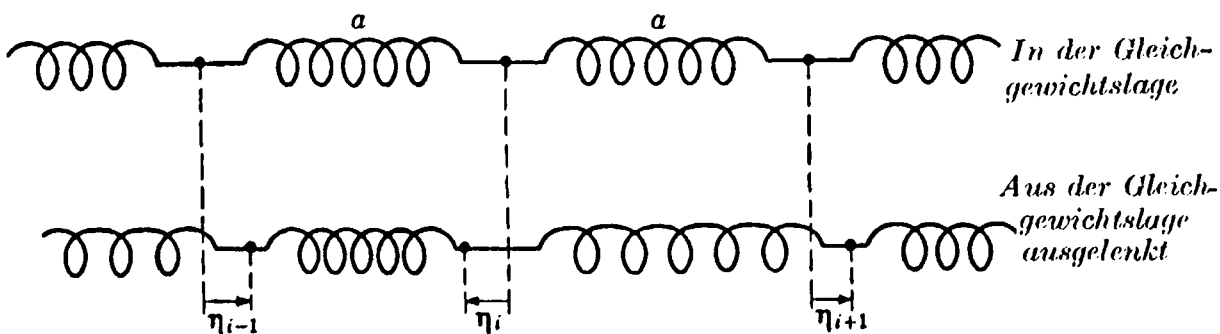


Abb. 11-1. Ein diskretes System gleicher Punktmassen, die durch Federn verbunden sind (als Modell eines kontinuierlichen elastischen Stabes).



Stabachse. Ein System, das aus diskreten Teilchen besteht und das den kontinuierlichen Stab näherungsweise beschreibt, ist eine unendlich lange Kette aus gleichen Massenpunkten, die in einem Abstand a voneinander angeordnet sind und durch gleiche masselose Federn mit den Kraftkonstanten k verbunden sind (vgl. Abb. 11-1). Wir wollen annehmen, daß sich die Massenpunkte nur längs der Kette bewegen können. Das diskrete System läßt sich als eine Erweiterung des linearen mehratomigen Moleküls auffassen, das im vorigen Kapitel behandelt wurde. Wir können deshalb die Gleichungen, die die Bewegung beschreiben, mit Hilfe der üblichen Verfahren für kleine Schwingungen erhalten. Bezeichnet man die Auslenkung des i -ten Teilchens aus seiner Gleichgewichtslage mit η_i , so ist die kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m \dot{\eta}_i^2, \quad (11-1)$$

wobei m die Masse jedes Teilchens ist. Die entsprechende potentielle Energie ist die Summe der potentiellen Energien der Federn. Sie ergibt sich aus der Dehnung oder Kompression um die Gleichgewichtslängen (vgl. Abschn. 10-4):

$$V = \frac{1}{2} \sum_i k (\eta_{i+1} - \eta_i)^2. \quad (11-2)$$

Daß Gl. (11-2) die richtige potentielle Energie ist, kann man auch sehen, indem man die Kraft auf das i -te Teilchen direkt berechnet und sie mit der entsprechenden Kraft vergleicht, die sich aus V ergibt. Die Kraft, die von der Feder auf der rechten Seite des Teilchens herrührt, ist $k(\eta_{i+1} - \eta_i)$, während die Feder auf der linken Seite die Kraft $-k(\eta_i - \eta_{i-1})$ ausübt, so daß die gesamte Kraft lautet:

$$F_i = k(\eta_{i+1} - \eta_i) - k(\eta_i - \eta_{i-1}).$$

Das stimmt mit $F_i = -\frac{\partial V}{\partial \eta_i}$ überein, das man aus Gl. (11-2) erhält.

Kombiniert man die Gl. (11-1) und (11-2), so lautet die LAGRANGE-Funktion für das System:

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_i \left(m \dot{\eta}_i^2 - k (\eta_{i+1} - \eta_i)^2 \right). \quad (11-3)$$

Dafür kann man auch schreiben:

$$L = \frac{1}{2} \sum_i a \left[\frac{m}{a} \dot{\eta}_i^2 - ka \left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \right)^2 \right] = \sum_i a L_i. \quad (11-4)$$

Die sich ergebenden LAGRANGESchen Bewegungsgleichungen für die Koordinaten η_i lauten:



$$\frac{m}{a} \ddot{\eta}_i - ka \left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a^2} \right) + ka \left(\frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{a^2} \right) = 0. \quad (11-5)$$

Die besondere Form von L in Gl. (11-4) und die Form der entsprechenden Bewegungsgleichungen wurden aus Gründen der Zweckmäßigkeit gewählt: man erhält den Grenzfall eines kontinuierlichen Stabes, wenn a gegen Null geht. Es ist klar, daß sich m/a auf μ , die Masse pro Längeneinheit des kontinuierlichen Systems, reduziert, aber der Grenzwert von ka ist nicht so einfach zu erkennen. Es sei daran erinnert, daß für einen elastischen Stab, der dem HOOKEschen Gesetz unterliegt, die Ausdehnung des Stabes *pro Längeneinheit* direkt proportional der Kraft oder Spannung ist, die auf den Stab wirkt. Diese Beziehung kann geschrieben werden:

$$F = Y\xi,$$

wobei ξ die Elongation pro Längeneinheit und Y der YOUNGSche Modul ist. Nun ist die Dehnung einer Länge a eines diskreten Systems pro Längeneinheit gleich $\xi = (\eta_{i+1} - \eta_i)/a$. Die Kraft, die zur Dehnung der Feder um diesen Betrag notwendig ist, beträgt

$$F = k(\eta_{i+1} - \eta_i) = ka \left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \right),$$

so daß ka dem YOUNGSchen Modul des kontinuierlichen Stabes entsprechen muß. Geht man vom diskreten zum kontinuierlichen Fall über, so wird der ganzzahlige Index i , der einen einzelnen Massenpunkt kennzeichnet, zur kontinuierlichen Lagekoordinate x ; anstatt der Variablen η_i haben wir $\eta(x)$. Weiterhin geht die Größe

$$\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} = \frac{\eta(x+a) - \eta(x)}{a},$$

die in L auftritt, offensichtlich im Grenzfall über in

$$\frac{d\eta}{dx},$$

wenn a , das die Rolle von dx spielt, gegen Null geht. Schließlich wird die Summation über eine diskrete Anzahl von Teilchen zu einem Integral über x , die Länge des Stabes, und die LAGRANGE-Funktion (11-4) lautet:

$$L = \frac{1}{2} \int \left(\mu \dot{\eta}^2 - Y \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right) dx. \quad (11-6)$$

Wenn a gegen Null geht, werden die letzten zwei Terme in der Bewegungsgleichung (11-5)

$$\lim_{a \rightarrow 0} - \frac{Y}{a} \left\{ \left(\frac{d\eta}{dx} \right)_x - \left(\frac{d\eta}{dx} \right)_{x-a} \right\}.$$



Das ist genau die Definition einer zweiten Ableitung von η . Demnach lautet die Bewegungsgleichung für den kontinuierlichen elastischen Stab:

$$\mu \frac{d^2\eta}{dt^2} - Y \frac{d^2\eta}{dx^2} = 0. \quad (11-7)$$

Dieses einfache Beispiel ist ausreichend, um die hervorragenden Merkmale des Überganges von einem diskreten zu einem kontinuierlichen System aufzuzeigen. Die wichtigste Tatsache, die man zu begreifen hat, ist die Rolle, die die Lagekoordinate x spielt. Sie ist *keine* generalisierte Koordinate; sie dient lediglich als ein kontinuierlicher Index, der die diskreten i ersetzt. Gerade so wie jeder Wert von i einer besonderen generalisierten Koordinate η_i des Systems entsprach, so gibt es hier für jeden Wert von x eine generalisierte Koordinate $\eta(x)$. Da η auch von der stetigen Variablen t abhängt, sollten wir vielleicht genauer $\eta(x, t)$ schreiben, um damit anzudeuten, daß wie x auch t als Parameter angesehen werden kann, der in der LAGRANGE-Funktion auftritt. Wäre das kontinuierliche System dreidimensional, nicht ein-dimensional wie hier, dann wären die generalisierten Koordinaten durch drei kontinuierliche Indizes x, y, z zu unterscheiden, und sie wären zu schreiben $\eta(x, y, z, t)$. Gl. (11-6) zeigt auch, daß die LAGRANGE-Funktion als Integral über den kontinuierlichen Index x auftritt; in dem entsprechenden dreidimensionalen Fall hätte die LAGRANGE-Funktion die Form:

$$L = \iiint \mathcal{L} dx dy dz, \quad (11-8)$$

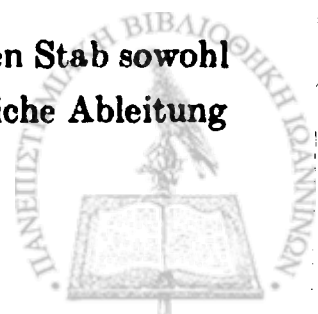
wobei \mathcal{L} die LAGRANGESche Dichte genannt wird. Für die longitudinalen Schwingungen des kontinuierlichen Stabes ist die LAGRANGESche Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left\{ \mu \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 - Y \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right\}. \quad (11-9)$$

Das entspricht der Größe L_i , die in Gl. (11-4) auftritt, für den Grenzfall der Kontinuums. Es ist weniger die LAGRANGE-Funktion selbst als vielmehr die LAGRANGESche Dichte, die zur Beschreibung der Bewegung des Systems verwendet werden wird.

11-2 Der Lagrangesche Formalismus für kontinuierliche Systeme

Aus Gl. (11-9) ist zu erkennen, daß \mathcal{L} für den elastischen Stab sowohl eine Funktion von $\dot{\eta} \equiv \frac{\partial \eta}{\partial t}$ ist, als daß es auch eine räumliche Ableitung



von η , nämlich $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ enthält; x und t spielen also eine ähnliche Rolle als Parameter der LAGRANGESchen Dichte. Natürlich kann \mathcal{L} in speziellen Fällen eine Funktion von η selbst sein und kann auch t und x explizit enthalten. In einem allgemeinen dreidimensionalen kontinuierlichen System tritt die LAGRANGESche Dichte als eine Funktion der folgenden Form auf:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y}, \frac{\partial \eta}{\partial z}, \frac{\partial \eta}{\partial t}, x, y, z, t \right). \quad (11-10)$$

Die LAGRANGE-Funktion spielt eine wichtige Rolle in der Mechanik diskreter Systeme, weil man aus ihr die Bewegungsgleichungen erhalten kann. Für kontinuierliche Systeme werden die Bewegungsgleichungen für $\eta(x, t)$ jedoch direkt durch die LAGRANGESche Dichte \mathcal{L} ausgedrückt. Grundsätzlich müssen die Bewegungsgleichungen aus dem HAMILTONschen Prinzip folgen. Das nimmt jetzt die Form an:

$$\delta I = \delta \int_1^2 \iiint \mathcal{L} dx dy dz dt = 0. \quad (11-11)$$

Die Natur der in Gl. (11-11) enthaltenen Variation unterscheidet sich nur geringfügig von der früher besprochenen. Es kann keine Variation der Parameter x, y, z geben; die virtuellen Verrückungen, die die variierten Wege erzeugen, gelten für konstante x, y, z , wie auch für konstantes t . Der Variationsprozeß hat weder Einfluß auf die Grenzen der Integration über die Zeit, noch auf den räumlichen Integrationsbereich. Genauso wie die Variation von η an den Endpunkten t_1 und t_2 Null gesetzt wird, hat die Variation von η auf der Oberfläche des Integrationsvolumens auch zu verschwinden. Das Verfahren, das Variationsprinzip in ein gewöhnliches Extremalproblem zu überführen, indem man die variierten Bahnen mit einem Parameter α kennzeichnet, verläuft hier wie im Falle diskreter Systeme. Wir haben inzwischen ausreichende Erfahrung in der Behandlung der δ -Variation gesammelt, so daß wir uns die Parameterschreibweise ersparen und direkt die Variationen vornehmen können, indem wir uns immer daran erinnern, daß

$$\delta \rightarrow d\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}$$

gilt. Da die LAGRANGESche Dichte nicht nur eine Funktion von η und $\dot{\eta}$, sondern auch von den räumlichen Ableitungen von η ist, kann die Variation von \mathcal{L} geschrieben werden:



$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \delta \eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \delta \dot{\eta} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right)} \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right), \quad (11-12)$$

wobei der Bequemlichkeit halber für die räumlichen Koordinaten $x_1 x_2 x_3$ anstatt xyz geschrieben wurde. Das HAMILTONSche Prinzip wird deshalb

$$\int_1^2 \iiint \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \delta \eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \delta \dot{\eta} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right)} \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right) \right] dx_1 dx_2 dx_3 dt = 0. \quad (11-13)$$

Verwenden wir dieselbe partielle Integration, die bei der Ableitung der gewöhnlichen LAGRANGESchen Gleichungen auftritt, so erhalten wir die Beziehung:

$$\int_1^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \delta \dot{\eta} dt = - \int_1^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \right) \delta \eta dt.$$

Die Integrale, die die räumlichen Ableitungen von η enthalten, können auf ähnliche Weise behandelt werden. Vertauschen wir die Ableitung nach x_k mit der δ -Variation, so haben wir

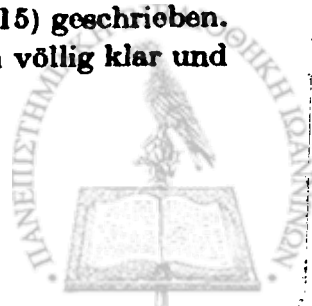
$$\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right)} \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right) dx_k = \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right)} \frac{\partial \delta \eta}{\partial x_k} dx_k. \quad (11-14)$$

Eine partielle Integration führt das Integral nun über in¹

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right)} \delta \eta - \int \frac{d}{dx_k} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right)} \right) \delta \eta dx_k. \quad (11-15)$$

Der integrierte Term in Gl. (11-15) verschwindet wie in dem Integral über die Zeit, weil der Variationsprozeß so verläuft, daß $\delta \eta$ an den Grenzen der räumlichen Integration verschwindet. Es gibt, zumindest

¹ Der Übergang von einer partiellen Ableitung nach x_k in (11-14) zu einer totalen Ableitung in (11-15) kann auf eine Schwierigkeit führen. Im ersten Fall wird eine partielle Ableitung verwendet, um anzudeuten, daß η nicht nur eine Funktion von x_k , sondern auch von t und den anderen räumlichen Koordinaten ist. Die Verwendung einer partiellen Ableitung in (11-15) sollte auch mit andeuten, daß nur die explizite Abhängigkeit von \mathcal{L} von x_k in Betracht kommt. Um besonders zu betonen, daß die Ableitung auch die implizite Abhängigkeit von x_k über η enthält, haben wir deshalb eine totale Ableitung in (11-15) geschrieben. Auf jeden Fall sind die tatsächlich auszuführenden Operationen völlig klar und eindeutig.



im Prinzip, eine Schwierigkeit, wenn das System unendlich ausgedehnt ist. Sehr oft nimmt in solchen Systemen die Störung, die durch η gemessen wird, hinreichend schnell ab, so daß der integrierte Term, unabhängig von der Natur der Variation im Unendlichen, Null ist. In jedem Fall kann das Integral formal stets so genommen werden, als ginge es über ein endliches Gebiet, und nachdem man den integrierten Term gestrichen hat, ist es erlaubt, das Volumen auf Unendlich auszudehnen. Folglich nimmt das HAMILTONSche Prinzip die folgende Form an:

$$\int_1^2 \iiint \delta\eta \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} - \sum_{k=1}^3 \frac{d}{dx_k} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right)} \right) \right] dx_1 dx_2 dx_3 dt = 0. \quad (11-16)$$

Das Integral kann nur dann identisch verschwinden, wenn die einzelnen Koeffizienten der unabhängigen Variationen $\delta\eta(x_1, x_2, x_3, t)$ verschwinden. Dies liefert die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} + \sum_{k=1}^3 \frac{d}{dx_k} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} = 0. \quad (11-17)$$

Zu einem System mit n diskreten Freiheitsgraden gehören n LAGRANGESche Bewegungsgleichungen; für ein kontinuierliches System mit einer unendlichen Anzahl von Freiheitsgraden scheinen wir nur eine LAGRANGESche Gleichung zu erhalten! Wir müssen uns jedoch daran erinnern, daß die Bewegungsgleichung für η_i eine Differentialgleichung ist, die nur die Zeit enthält, und daß in diesem Sinne Gl. (11-17) für jeden Wert von x_k eine Bewegungsgleichung liefert. Die Kontinuumsnatur der Indizes x_k drückt sich dadurch aus, daß Gl. (11-17) eine partielle Differentialgleichung in den vier Variablen x_1, x_2, x_3 und t ist und η als $\eta(x_1, x_2, x_3, t)$ liefert.

Die Form der LAGRANGESchen Dichte und die daraus folgenden Bewegungsgleichungen wurden unter der Annahme diskutiert, daß für jeden Punkt in dem System nur ein Auslenkungstyp zugelassen ist, der durch η bezeichnet ist. In einem komplizierteren Problem wie etwa der Schwingung eines elastischen Körpers wird ein Teilchen natürlich Auslenkungen längs aller drei Achsen x_1, x_2 und x_3 erfahren. In einem solchen Falle gibt es drei Typen generalisierter Koordinaten, die wir durch einen ganzzahligen Index j kennzeichnen können: $\eta_j(x_1, x_2, x_3, t)$. Bei einem allgemeinen Problem müssen wir deshalb erwarten, daß wir generalisierte Koordinaten haben, die sowohl durch einen diskreten Index (oder Satz von Indizes) als auch durch die kontinuierlichen Raumindizes x_1, x_2, x_3 charakterisiert sind. Die LAGRANGESche Dichte \mathcal{L}



wird dann eine Funktion aller generalisierter Koordinaten und deren räumlichen und zeitlichen Ableitungen sein. Zu jedem $\eta_j(x_1, x_2, x_3, t)$ gehört dann eine Bewegungsgleichung der Form:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_j} + \sum_k \frac{d}{dx_k} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta_j}{\partial x_k} \right)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots \quad (11-18)$$

Eine wesentliche Vereinfachung der Schreibweise erhält man, wenn man eine Größe einführt, die *Funktionalableitung*² genannt wird. Die Funktionalableitung der LAGRANGE-Funktion L nach η_j ist definiert durch

$$\frac{\delta L}{\delta \eta_j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_j} - \sum_{k=1}^3 \frac{d}{dx_k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta_j}{\partial x_k} \right)} \quad (11-19)$$

Eine ähnliche Definition gilt für die Funktionalableitung von L nach $\dot{\eta}_j$, aber da \mathcal{L} nicht von den Gradienten von $\dot{\eta}_j$ abhängt, haben wir einfach

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{\eta}_j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_j} \quad (11-20)$$

Der große Vorteil der Schreibweise mit Funktionalableitungen besteht darin, daß es uns effektiv möglich wird, die komplizierende Abhängigkeit der LAGRANGE-Dichte \mathcal{L} von den räumlichen Ableitungen von η außer acht zu lassen. Aus den Gl. (11-8), (11-12) und (11-15) kann man sehen, daß für die δ -Variation von L gilt:

$$\delta L = \int \sum_j \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_j} \delta \eta_j - \sum_k \frac{d}{dx_k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta_j}{\partial x_k} \right)} \delta \eta_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_j} \delta \dot{\eta}_j \right) dV \quad (11-21)$$

(wobei dV ein Volumenelement ist). Mit Hilfe der Funktionalableitung lautet dieses Ergebnis einfach:

$$\delta L = \int \sum_j \left(\frac{\delta L}{\delta \eta_j} \delta \eta_j + \frac{\delta L}{\delta \dot{\eta}_j} \delta \dot{\eta}_j \right) dV. \quad (11-22)$$

Genau dies hätten wir erhalten, wenn wir die δ -Variation direkt auf Gl. (11-8) angewendet und die Abhängigkeit von den Gradienten von η nicht berücksichtigt hätten. Die Bewegungsgleichungen (11-18)

² Der Name wird verwendet, weil die Funktionalableitung, etwa von L nach η , die Änderung von L liefert, die von einer Änderung des Wertes der Funktion $\eta(x)$ an einem speziellen Raumpunkt x herrührt, wo sich die Abhängigkeit von η von t nicht ändert.



nehmen mit Hilfe der Funktionalableitungen ebenfalls eine einfache Form an:

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\eta}_i} - \frac{\delta L}{\delta \eta_i} = 0. \tag{11-23}$$

Sie sehen den gewöhnlichen LAGRANGESchen Gleichungen sehr ähnlich.

Obwohl die Schreibweise mit Funktionalableitungen die Behandlung der Variationsprinzipien außerordentlich vereinfacht, so könnte doch ihre Verwendung die Tatsache verschleiern, daß die Bewegungsgleichungen *partielle Differentialgleichungen* in Raum und Zeit sind. Sie hebt auch die Zeitkoordinate als ihrer Natur nach verschieden von den Raumkoordinaten hervor, obgleich bei der Ableitung x_k und t in Wirklichkeit in gleicher Weise als Parameter behandelt wurden, die in \mathcal{L} auftreten. Diese Gleichwertigkeit erinnert uns an die spezielle Relativitätstheorie; tatsächlich führt das ganze Verfahren leicht auf eine kovariante LORENTZ-Formulierung. Das Produkt $dx_1 dx_2 dx_3 dt$ ist im wesentlichen ein Volumenelement im Welt-Raum und ist demnach invariant gegenüber einer LORENTZ-Transformation. Das HAMILTONsche Prinzip (11-11) ist deshalb automatisch LORENTZ-invariant, wenn man nur voraussetzt, daß \mathcal{L} ein Weltskalar ist. Die Bewegungsgleichung (11-17) lautet in kovarianter Formulierung einfach

$$\sum_{\mu=1}^4 \frac{d}{dx_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_\mu} \right)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} = 0. \tag{11-24}$$

Das ist relativistisch invariant, vorausgesetzt, daß \mathcal{L} und η Weltskalare sind. Ähnlich sind die Bewegungsgleichungen (11-18) kovariant, wenn \mathcal{L} ein Weltskalar ist und die η_i definierte Eigenschaften bezüglich der LORENTZ-Transformation haben, z.B. wenn sie die Komponenten eines Vierervektors sind.

Ein einfaches Beispiel des LAGRANGESchen Verfahrens zur Aufstellung der Bewegungsgleichung liefern uns die Longitudinalschwingungen eines langen elastischen Stabes, die im vorigen Abschnitt behandelt wurden. Die LAGRANGESche Dichte ist durch Gl. (11-9) gegeben, und die verschiedenen Ableitungen, die in Gl. (11-17) auftreten, lauten:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} = \mu \dot{\eta}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)} = -Y \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

Demnach ist die Bewegungsgleichung, die man aus der LAGRANGESchen Dichte erhält:



$$\mu \frac{d^2\eta}{dt^2} - Y \frac{d^2\eta}{dx^2} = 0.$$

Sie stimmt mit der früher gefundenen Gl. (11-7) überein. Gl. (11-7) erkennen wir als eine eindimensionale Wellengleichung mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\mu}}. \quad (11-25)$$

Das ist die wohlbekanntete Formel für die Geschwindigkeit longitudinaler elastischer Wellen.

11-3 Schallschwingungen in Gasen als Beispiel der Lagrangeschen Formulierung

Um das LAGRANGESCHE Verfahren zur Behandlung der Bewegung kontinuierlicher mechanischer Systeme zu erläutern, wollen wir die Bewegungsgleichungen für die Longitudinalschwingungen eines Gases aufsuchen. Diese Schwingungen bilden natürlich ein *Schallfeld*, und wir suchen die Wellengleichung für die Schallausbreitung. Die Auslenkung des Gases sei durch den Vektor η mit den Komponenten η_i , $i = 1, 2, 3$, gekennzeichnet. Zu jedem Punkt xyz im Raum gehören somit drei generalisierte Koordinaten. Wir wollen annehmen, daß die Störung stets klein ist, so daß sich der Druck P und die Dichte μ nur geringfügig von ihren Gleichgewichtswerten P_0 bzw. μ_0 unterscheiden.

Bei einem diskreten System wird das LAGRANGESCHE Verfahren folgendermaßen angewendet: man ermittelt die kinetische und die potentielle Energie und schreibt die LAGRANGE-Funktion als Differenz dieser Größen. Hier ist die LAGRANGE-Funktion, die wir suchen, das Volumenintegral einer Dichte \mathcal{L} . Die kinetische und die potentielle Energie können ganz ähnlich als Volumenintegrale von Dichten \mathfrak{J} bzw. \mathfrak{U} erhalten werden, wobei die Beziehung

$$\mathcal{L} = \mathfrak{J} - \mathfrak{U} \quad (11-26)$$

gilt. Die Dichte der kinetischen Energie ist nicht problematisch; setzen wir voraus, daß die Auslenkungen aus dem Gleichgewicht klein sind, so haben wir

$$\mathfrak{J} = \frac{\mu_0}{2} \dot{\eta}^2 = \frac{\mu_0}{2} (\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2 + \dot{\eta}_3^2).$$

Ein schwierigeres Problem ist es, die Dichte der potentiellen Energie zu erhalten. Die potentielle Energie des Gases ist ein Maß für die Arbeit, die das Gas leisten kann, wenn es sich gegen den Druck aus-



dehnt. Im wesentlichen rührt sie von dem her, was die Forscher des 17. Jahrhunderts gern die „Feder“ des Gases nannten. Betrachten wir eine Masse M eines Gases mit einem hinreichend kleinen Gleichgewichtsvolumen

$$V_0 = \frac{M}{\mu_0}, \quad (11-27)$$

so daß \mathcal{U} über das Volumen konstant ist. Dann stellt $\mathcal{U}V_0$ die potentielle Energie der Gasmenge dar. Als ein Ergebnis der Schallstörung ändert sich das Volumen von V_0 auf $V_0 + \Delta V$. Nun ist bei einer Veränderung des Volumens um dV die am System geleistete Arbeit, d.h. die Erhöhung der potentiellen Energie, gleich $-P dV$.³ Demnach ist

die potentielle Energie, die einer Volumenänderung von V_0 auf $V_0 + \Delta V$ entspricht, gleich

$$\mathcal{U}V_0 = - \int_{V_0}^{V_0 + \Delta V} P dV.$$

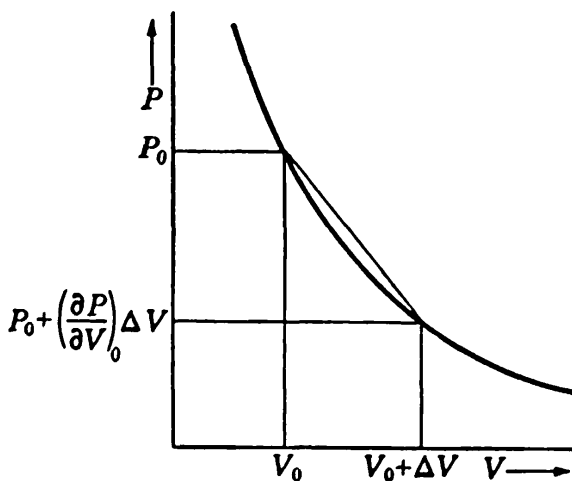


Abb. 11-2. Druck-Volumen-Diagramm eines Gases.

Da ΔV klein ist, möchte man meinen, das Integral könne näherungsweise durch $P_0 \Delta V$ ersetzt werden. Wie wir sehen werden, trägt dieser Term jedoch nichts zu den Bewegungsgleichungen bei. Es ist deshalb notwendig, zu der nächsten Näherung überzugehen, in der die Kurve P gegen V durch eine gerade Linie

in dem Gebiet zwischen V_0 und $V_0 + \Delta V$ ersetzt wird (vgl. Abb. 11-2):

$$\int_{V_0}^{V_0 + \Delta V} P dV = P_0 \Delta V + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_0 (\Delta V)^2. \quad (11-28)$$

Um die Ableitung von P nach V zu ermitteln, müssen wir für einen Moment in die Thermodynamik abschweifen. Man könnte zunächst geneigt sein, als Beziehung zwischen Druck und Volumen das BOYLESCHE Gesetz

³ Die gewöhnliche elementare Ableitung ist folgendermaßen. Die Kraft, die durch das äußere System auf ein Oberflächenelement dA ausgeübt wird, ist PdA und zeigt ins Innere. Bei einer Expansion bewegt sich die Oberfläche um dx längs der Normale nach außen, und die äußere geleistete Arbeit ist $-P dA dx = -P dV$.



$$PV = C \quad (11-29)$$

zu verwenden. Das ist das Verfahren, dem NEWTON folgte. Es führt jedoch auf ein falsches Ergebnis, weil in (11-29) vorausgesetzt ist, daß die Änderungen von Druck und Volumen *isothermisch* verlaufen. Tatsächlich sind die Schallschwingungen fast immer so rasch, daß die Zeit nicht ausreicht, die entwickelte Wärme abzuleiten und einen Temperatúrausgleich zu erreichen. Die Kontraktionen und Expansionen verlaufen vielmehr *adiabatisch*, d.h. ohne Wärmeableitung. Unter diesen Bedingungen lautet die Beziehung zwischen P und V :

$$PV^\gamma = C, \quad (11-30)$$

wobei γ das konstante Verhältnis der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und Volumen ist.⁴ Demnach ist die gesuchte Ableitung

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_0 = -\frac{\gamma P_0}{V_0} \quad (11-31)$$

Es ist zweckmäßig, die Volumenänderung durch die entsprechende Dichteänderung auszudrücken. Wegen $V = M/\mu$ ist die Änderung von V gegeben durch

$$\Delta V = -\frac{M}{\mu_0^2} \Delta\mu = -V_0\sigma, \quad (11-32)$$

wobei die relative Änderung der Dichte mit σ bezeichnet ist:

$$\mu = \mu_0(1 + \sigma). \quad (11-33)$$

Kombiniert man die Gl. (11-27, 28, 31 und 32), dann lautet die Dichte der potentiellen Energie:

$$v = P_0\sigma + \frac{\gamma P_0}{2} \sigma^2. \quad (11-34)$$

Das ist noch nicht die für die LAGRANGE-Funktion geeignete Form; wir haben noch σ durch η auszudrücken. Betrachten wir ein endliches Volumen V im Raum. Erfährt das System eine kleine Störung aus dem Gleichgewicht, so ist die aus dem Volumen ausfließende Masse gegeben durch

$$\mu_0 \int \eta \cdot dA.$$

⁴ Wegen der Ableitung siehe M. W. ZEMANSKY, *Heat and Thermodynamics*, McGraw-Hill, VI. Kapitel.



Dabei ist über die Oberfläche des Volumens zu integrieren. Das Volumenintegral über die Dichteänderung muß genau gleich diesem Massentransport sein:

$$-\mu_0 \int \sigma dV = \mu_0 \int \eta \cdot dA. \quad (11-35)$$

Wegen des Divergenzsatzes kann die Beziehung (11-35) geschrieben werden:

$$-\int \sigma dV = \int \nabla \cdot \eta dV,$$

und da die Gleichheit für ein beliebiges Volumen gilt, so muß gelten⁵:

$$\sigma = -\nabla \cdot \eta. \quad (11-36)$$

Mit dieser Verknüpfung ist die endgültige Form der Dichte der potentiellen Energie

$$\mathcal{U} = -P_0 \nabla \cdot \eta + \frac{\gamma P_0}{2} (\nabla \cdot \eta)^2. \quad (11-37)$$

Man kann nun sehen, daß der Term in \mathcal{U} , der linear in σ ist, nichts zur gesamten potentiellen Energie beitragen kann. Wegen Gl. (11-35) ist das Volumenintegral über σ gleich dem Negativen des Flächenintegrals über η , und wenn die Fläche das System vollständig umschließt, muß das Integral Null sein, d.h., es findet kein Massentransport aus dem System statt. Daß dieser Term nichts zu L beiträgt, ist noch kein ausreichender Grund dafür, ihn in \mathcal{U} wegzulassen. Es ist denkbar, daß das funktionale Verhalten des Termes noch einen Einfluß auf die Bewegungsgleichung hat. (Es sei daran erinnert, daß die kovariante HAMILTON-Funktion eines Systems Null sein kann, daß aber die Bewegungsgleichungen natürlich nicht verschwinden). Wir wollen deshalb den Term noch einige Schritte weiter berücksichtigen.

Die vollständige LAGRANGESCHE Dichte kann nun geschrieben werden:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\mu_0 \eta^2 + 2P_0 \nabla \cdot \eta - \gamma P_0 (\nabla \cdot \eta)^2). \quad (11-38)$$

Zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen werden wir die folgenden Ableitungen brauchen:

⁵ Gl. (11-36) erkennt man aus ihrer bekannteren Form

$$\dot{\mu} = -\nabla \cdot \mu \eta$$

als die *Kontinuitätsgleichung* für den Gasstrom.



$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_i} &= \mu_0 \dot{\eta}_i, \\ \frac{\partial(\nabla \cdot \eta)}{\partial \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial x_k}\right)} &= \delta_{ik}\end{aligned}\quad (11-39)$$

und

$$\frac{\partial(\nabla \cdot \eta)^2}{\partial \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial x_k}\right)} = 2(\nabla \cdot \eta) \delta_{ik}.$$

Aus Gl. (11-39) folgt, daß der Term $2P_0 \nabla \cdot \eta$ nichts zu den Bewegungsgleichungen beitragen und deshalb schließlich aus \mathcal{L} gestrichen werden kann:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\mu_0 \dot{\eta}^2 - \gamma P_0 (\nabla \cdot \eta)^2). \quad (11-40)$$

Es ergeben sich die Bewegungsgleichungen nun zu

$$\mu_0 \frac{\partial^2 \eta_i}{\partial t^2} - \gamma P_0 \frac{\partial(\nabla \cdot \eta)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (11-41)$$

Die Gl. (11-41) können zu einer Vektorgleichung zusammengefaßt werden:

$$\mu_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \gamma P_0 \nabla \nabla \cdot \eta = 0. \quad (11-42)$$

In dieser Gestalt mag die physikalische Bedeutung der Bewegungsgleichung noch nicht sehr durchsichtig sein, aber wir können sie leicht auf eine bekannte Form zurückführen. Bilden wir die Divergenz von Gl. (11-42), und erinnern wir uns daran, daß $\nabla \cdot \nabla$ der LAPLACE-Operator $\nabla^2 \equiv \Delta$ ist, und daß gilt $\nabla \cdot \eta = -\sigma$, so finden wir:

$$\nabla^2 \sigma - \frac{\mu_0}{\gamma P_0} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = 0. \quad (11-43)$$

Die Gl. (11-43) erkennen wir als die dreidimensionale Wellengleichung, mit der Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\mu_0}}. \quad (11-44)$$

Das ist der gebräuchliche Ausdruck für die Schallgeschwindigkeit in Gasen. Die LAGRANGESche Dichte (11-40) stellt somit genau das Fortschreiten von Schallwellen in Gasen dar. Wir haben damit unser Ziel erreicht, Schallschwingungen durch eine LAGRANGESche Formulierung zu beschreiben.



11-4 Die Hamiltonsche Formulierung für kontinuierliche Systeme

Es ist möglich, eine HAMILTONSche Formulierung für Systeme mit einem kontinuierlichen Koordinatensatz zu erhalten, ähnlich wie in Kapitel VII für diskrete Systeme. Um die Methode anzugeben, kehren wir kurz zu der linearen Kette von Massenpunkten zurück, die in Abschn. 11-1 diskutiert wurde. Zu jedem η_i gibt es einen konjugierten kanonischen Impuls:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} = a \frac{\partial L_i}{\partial \dot{\eta}_i}. \quad (11-45)$$

Die HAMILTON-Funktion für das System lautet deshalb:

$$H \equiv \sum_i p_i \dot{\eta}_i - L = \sum_i a \frac{\partial L_i}{\partial \dot{\eta}_i} \dot{\eta}_i - L$$

oder

$$H = \sum_i a \left(\frac{\partial L_i}{\partial \dot{\eta}_i} \dot{\eta}_i - L_i \right). \quad (11-46)$$

Es sei daran erinnert, daß im Grenzfall des kontinuierlichen Stabes, d.h., wenn a gegen Null geht, $L_i \rightarrow \mathcal{L}$ gilt und die Summation in Gl. (11-46) ein Integral wird:

$$H = \int dx \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \dot{\eta} - \mathcal{L} \right). \quad (11-47)$$

Die individuellen kanonischen Impulse p_i , die durch Gl. (11-45) gegeben sind, verschwinden im Grenzfall des Kontinuums. Wir können aber eine *Impulsdichte* π definieren, die immer endlich bleibt:

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}}.$$

Gl. (11-47) hat die Form eines Raumintegrals über eine HAMILTONSche Dichte \mathcal{H} , definiert durch

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\eta} - \mathcal{L}. \quad (11-48)$$

Es ist deshalb klar, daß in jedem allgemeinen dreidimensionalen System mit mehr als einem Typ generalisierter Koordinaten die gesamte HAMILTON-Funktion ein Volumenintegral über die HAMILTONSche Dichte sein wird:

$$H = \iiint \mathcal{H} dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint \left(\sum_k \pi_k \dot{\eta}_k - \mathcal{L} \right) dx_1 dx_2 dx_3, \quad (11-49)$$



wobei

$$\pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_i} = \frac{\delta L}{\delta \dot{\eta}_i} \quad (11-50)$$

Die kanonischen Feldgleichungen der Bewegung kann man aus der HAMILTONSchen Dichte erhalten, indem man dem in Abschn. 7-1 verwendeten Verfahren folgt. Wir betrachten \mathcal{H} als eine gegebene Funktion der Koordinaten $\eta_k(x_j, t)$, der kanonischen Impulsdichten $\pi_k(x_j, t)$, der räumlichen Ableitungen der Koordinaten $\frac{\partial \eta_k}{\partial x_j}$ und mög-

licherweise der Zeit t . Eine infinitesimale Änderung von H wird dann beschrieben durch

$$dH = \iiint \left\{ \sum_k \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_k} d\eta_k + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_k} d\pi_k + \sum_j \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \left(\frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right)} d \left(\frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right) \right] + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt \right\} dx_1 dx_2 dx_3.$$

Das hier auftretende Integral ist dem im HAMILTONSchen Prinzip auftretenden Volumenintegral Gl. (11-13) etwas ähnlich. So wie dort führen wir hier eine partielle Integration des Integrals

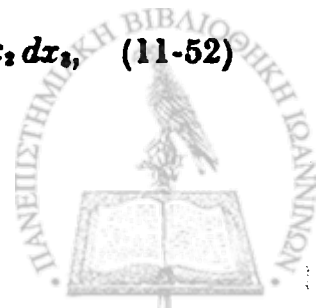
$$\int \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \left(\frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right)} d \left(\frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right) dx_j$$

aus. Der integrierte Term kann zum Verschwinden gebracht werden, indem man das Volumen der Integration größer als das des Systems macht. Man kann das Integrationsgebiet auch so groß machen, daß die Werte von η und \mathcal{H} auf der Oberfläche im Unendlichen klein genug sind, so daß man den integrierten Term vernachlässigen kann. Als Ergebnis können wir schreiben:

$$dH = \iiint \left\{ \sum_k \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_k} d\eta_k + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_k} d\pi_k - \sum_j \frac{d}{dx_j} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \left(\frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right)} \right) d\eta_k \right] + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt \right\} dx_1 dx_2 dx_3. \quad (11-51)$$

Verwendet man die in Gl. (11-19) definierte Funktionalableitung, so kann dieser Ausdruck reduziert werden auf

$$dH = \iiint \left\{ \sum_k \left(\frac{\delta H}{\delta \eta_k} d\eta_k + \frac{\delta H}{\delta \pi_k} d\pi_k \right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt \right\} dx_1 dx_2 dx_3, \quad (11-52)$$



da \mathcal{H} nicht Funktion der räumlichen Ableitungen von π_k ist. Immer, wenn wir ein Differential einer Größe zu bilden haben, deren Dichte von den räumlichen Ableitungen von η oder π abhängt, läßt sich eine ähnliche partielle Integration vornehmen, und die verschiedenen Ableitungen können so zusammengefaßt werden, daß sie funktionale Ableitungen bilden. Es ist deshalb stets möglich, die Differentiale von Anfang an durch funktionale Ableitungen auszudrücken, die die Operationen wesentlich erleichtern.

Das Differential von H kann auch in anderer Weise, und zwar durch L ausgedrückt werden, wenn wir seine Definition Gl. (11-49) verwenden:

$$dH = \iiint \left\{ \sum_k \left(\pi_k d\dot{\eta}_k + \dot{\eta}_k d\pi_k - \frac{\delta L}{\delta \eta_k} d\eta_k - \frac{\delta L}{\delta \dot{\eta}_k} d\dot{\eta}_k \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \right\} dx_1 dx_2 dx_3. \quad (11-53)$$

Gemäß der Definition von π_k , Gl. (11-50), heben sich der erste und der letzte Term in der Klammer weg. Für den dritten Term gilt wegen der LAGRANGESchen Bewegungsgleichungen (11-23):

$$\frac{\delta L}{\delta \eta_k} = \frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\eta}_k} = \dot{\pi}_k.$$

Demnach kann Gl. (11-53) geschrieben werden:

$$dH = \iiint \left\{ \sum_k \left(-\dot{\pi}_k d\eta_k + \eta_k d\pi_k \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \right\} dx_1 dx_2 dx_3. \quad (11-54)$$

Der Vergleich der Gl. (11-54) mit Gl. (11-52) ergibt einen Satz von Gleichungen:

$$\frac{\delta H}{\delta \eta_k} = -\dot{\pi}_k, \quad \frac{\delta H}{\delta \pi_k} = \dot{\eta}_k \quad (11-55)$$

und die Identität

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$

Die Gl. (11-55) sind das Analogon der HAMILTONSchen kanonischen Gleichungen für das kontinuierliche System; mit Hilfe der HAMILTONSchen Dichte können sie geschrieben werden:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_k} - \sum_j \frac{d}{dx_j} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \left(\frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right)} \right) = -\dot{\pi}_k, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_k} = \dot{\eta}_k. \quad (11-56)$$

In dieser Form verlieren sie viel von ihrer Symmetrie, da \mathcal{H} keine Funktion der Gradienten von π_k ist.



Als einfaches Beispiel des HAMILTONSchen Verfahrens können wir die Schallwellen in einem Gas untersuchen, die bereits im vorigen Abschnitt diskutiert wurden. Die Impulsdichte dafür lautet einfach:

$$\pi_k = \mu_0 \dot{\eta}_k$$

oder, wenn wir eine vektorielle Impulsdichte bilden:

$$\pi = \mu_0 \dot{\eta}.$$

Die HAMILTONSche Dichte ist (vgl. Gl. (11-40)):

$$\mathcal{H} = \pi \cdot \dot{\eta} - \mathcal{L} = \frac{\pi^2}{2\mu_0} + \frac{P_0 \gamma}{2} (\nabla \cdot \eta)^2. \quad (11-57)$$

Die HAMILTONSche Dichte ist somit gleich der Summe aus den Dichten der kinetischen und potentiellen Energie:

$$\mathcal{H} = \mathcal{J} + \mathcal{U}$$

und kann deshalb in diesem Falle als eine Energiedichte angesehen werden.⁶ Die aus \mathcal{H} gewonnenen kanonischen Gleichungen lauten:

$$\dot{\eta}_k = \frac{\pi_k}{\mu_0} \quad (11-58)$$

(das ist lediglich die Definition von π_k) und

$$-\dot{\pi}_k = -\frac{d}{dx_k} (P_0 \gamma \nabla \cdot \eta).$$

Die Kombination dieser zwei Sätze von Gleichungen ist identisch mit den Bewegungsgleichungen, die durch Gl. (11-41) gegeben sind.

Vieles der formalen Entwicklung der HAMILTONSchen Formulierung – Erhaltungssätze, POISSONSche Klammern, usw. – kann leicht in eine für kontinuierliche Systeme geeignete Form gebracht werden. So wird das modifizierte HAMILTONSche Prinzip:

$$\delta \int_1^2 \iiint \left\{ \sum_k \pi_k \dot{\eta}_k - \mathcal{H} \right\} dx_1 dx_2 dx_3 dt = 0. \quad (11-58)$$

Als Beispiel der Erhaltungssätze wollen wir die Bedingungen untersuchen, unter denen die HAMILTON-Funktion eine Konstante der Bewegung ist. Die totale Ableitung von H nach der Zeit ist

$$\frac{dH}{dt} = \iiint \left\{ \sum_k \left(\frac{\delta H}{\delta \eta_k} \dot{\eta}_k + \frac{\delta H}{\delta \pi_k} \dot{\pi}_k \right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \right\} dx_1 dx_2 dx_3.$$

⁶ Der in $\nabla \cdot \eta$ lineare Term wurde weggelassen, denn wie wir sahen, trägt er nichts zur Gesamtenergie bei.



Aber wegen der Bewegungsgleichungen (11-55) reduziert sich das auf

$$\frac{dH}{dt} = \iiint \left\{ \sum_k \left(\frac{\delta H}{\delta \eta_k} \frac{\delta H}{\delta \pi_k} - \frac{\delta H}{\delta \pi_k} \frac{\delta H}{\delta \eta_k} \right) + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t} \right\} dx_1 dx_2 dx_3,$$

so daß

$$\frac{dH}{dt} = \iiint \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t} dx_1 dx_2 dx_3.$$

Die vollständige HAMILTON-Funktion bleibt somit erhalten, wenn \mathcal{C} (oder H) keine explizite Funktion der Zeit ist.

Ähnliche Verfahren können dazu verwendet werden, einen Ausdruck für die zeitliche Ableitung einer Funktion G zu gewinnen, die nicht explizit von der Zeit abhängt, und die als Volumenintegral einer Dichtefunktion \mathcal{G} dargestellt werden kann:

$$G = \iiint \mathcal{G} dx_1 dx_2 dx_3.$$

Die totale Ableitung von G nach der Zeit ist unter diesen Bedingungen

$$\frac{dG}{dt} = \iiint \sum_k \left(\frac{\delta G}{\delta \eta_k} \dot{\eta}_k + \frac{\delta G}{\delta \pi_k} \dot{\pi}_k \right) dx_1 dx_2 dx_3.$$

Wegen der Bewegungsgleichungen kann dafür geschrieben werden:

$$\frac{dG}{dt} = \iiint \sum_k \left(\frac{\delta G}{\delta \eta_k} \frac{\delta H}{\delta \pi_k} - \frac{\delta G}{\delta \pi_k} \frac{\delta H}{\delta \eta_k} \right) dx_1 dx_2 dx_3. \quad (11-59)$$

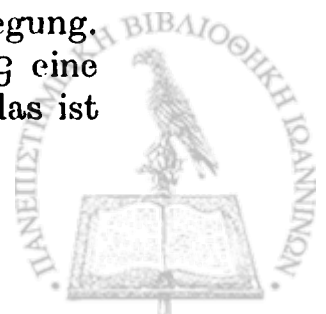
Nun ist das Integral auf der rechten Seite von (11-59) genau das Analogon der POISSON-Klammer von G mit H (vgl. Gl. (8-42)); die Summation über die generalisierten Koordinaten tritt hier auf als ein Integral über die stetigen Indizes x_1 , x_2 und x_3 und eine diskrete Summation über den Index k . Wir können deshalb schreiben:

$$\frac{dG}{dt} = [G, H]. \quad (11-60)$$

Natürlich erhalten wir dann, wenn G von der Zeit explizit abhängt,

$$\frac{dG}{dt} = [G, H] + \frac{\partial G}{\partial t},$$

in vollständiger Übereinstimmung mit Gl. (8-58). Eine Integralfunktion, die keine explizite Funktion der Zeit ist, und deren POISSON-Klammer mit H verschwindet, ist somit eine Konstante der Bewegung. Wir bemerken, daß die Ableitung auch dann gültig ist, wenn \mathcal{G} eine Funktion der räumlichen Ableitungen von η oder π ist, denn das ist



genau der Fall, den die funktionalen Ableitungen einschließen sollten.

Die Erhaltungssätze für Integralgrößen ergeben sich somit wie in der gewöhnlichen Theorie. Es besteht derselbe Zusammenhang zwischen den Konstanten der Bewegung und den Symmetrieeigenschaften des Systems, den wir früher gefunden haben. Man muß sich jedoch daran erinnern, daß es neben diesen „makroskopischen“ Konstanten der Bewegung auch „mikroskopische“ Erhaltungssätze gibt. Diese befassen sich direkt mit Dichten und nicht mit den integrierten Größen. Man kann zum Beispiel Sätze erhalten, die im wesentlichen Kontinuumsgleichungen für den inneren Fluß der Energie als auch des linearen Impulses und des Drehimpulses sind. Leider würde uns die Diskussion solcher Probleme zu weitab führen. Wir möchten deshalb den interessierten Leser auf die am Ende des Kapitels zitierten Werke verweisen.

11-5 Beschreibung von Feldern durch Variationsprinzipien

Die LAGRANGESchen und HAMILTONSchen Formulierungen für einen stetigen Satz generalisierter Koordinaten wurde mit der Absicht entwickelt, kontinuierliche mechanische Systeme, wie etwa einen elastischen Körper, zu behandeln. Die Formulierungen können aber auch, wenn kein mechanisches System vorliegt, dazu verwendet werden, die Gleichungen zu beschreiben, die ein *Feld* bestimmen. Mathematisch ist ein Feld nicht mehr als eine oder mehrere unabhängige Funktionen von Raum und Zeit. Die generalisierten Koordinaten $\eta_i(x_1, x_2, x_3, t)$ treffen genau für diese Definition zu. Tatsächlich rührten historisch die in der Physik auftretenden Felder oftmals von Schwingungen eines kontinuierlichen Systems her. Das Schall-„Feld“ in Gasen bezieht sich nach allem wirklich auf die Longitudinalschwingungen von Gasteilchen (vgl. Abschn. 11-3). Ähnlich dachte man sich das elektromagnetische Feld lange Zeit in Begriffen der elastischen Schwingungen eines mysteriösen Äthers. Erst in der neueren Zeit sah man ein, (um einen passenden Ausdruck von Professor S. L. QUIMBY zu zitieren,) daß der Äther keine andere Rolle spielte, als das Subjekt zu dem Verb „sich wellenförmig bewegen“ zu sein. Wir erkennen gleichwohl, daß die Verfahren des Variationsprinzips, die in den vorigen Abschnitten entwickelt wurden, auch unabhängig von der Bezugnahme auf ein kontinuierliches mechanisches System bestehen bleiben, und daß sie dazu dienen, die Gleichungen zu liefern, die irgendein raum-zeitliches Feld beschreiben. Das HAMILTONSche Prinzip wird so praktisch eine bequeme Abkürzung für das Feld, das bei geeigneter Entwicklung die Feldgleichungen liefert.



Da die LAGRANGESche Dichte für ein Feld nicht zu einem bestimmten mechanischen System gehört, ist sie nicht notwendig als Differenz einer kinetischen und potentiellen Energiedichte gegeben. Vielmehr können wir irgendeinen Ausdruck für \mathcal{L} verwenden, der auf die gewünschten Feldgleichungen führt. So erhielten wir die LAGRANGESche Dichte für das Schallfeld früher in Abschn. 11-3 dadurch, daß wir das mechanische System betrachteten, in dem sich der Schall fortpflanzt. Wir wurden dann natürlich darauf geführt, das Feld zu beschreiben, indem wir die Komponenten der vektoriellen Auslenkung η als die generalisierten Koordinaten verwendeten. Es sei jedoch angemerkt, daß das Feld in Wirklichkeit skalar ist, da die Eigenschaften des Schalles vollständig mittels des einen Skalars σ , der relativen Dichteänderung, diskutiert werden können. Die Größe σ ist deshalb die natürliche generalisierte Koordinate, die man verwendet, wenn man das Feld durch eine LAGRANGE-Funktion ohne Bezug auf ein mechanisches System beschreiben will. \mathcal{L} muß dann so sein, daß die LAGRANGESche Bewegungsgleichung die Wellengleichung (11-43) für σ ist. Es ist leicht zu sehen, daß eine LAGRANGESche Dichte, die durch σ ausgedrückt wird und diese Forderung erfüllt, lautet:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0}{\gamma P_0} \dot{\sigma}^2 - (\nabla \sigma)^2 \right) = \frac{\mu_0}{2\gamma P_0} \dot{\sigma}^2 - \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x_k} \right)^2. \quad (11-61)$$

Die für die Bewegungsgleichung benötigten Ableitungen sind:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\sigma}} = \frac{\mu_0 \dot{\sigma}}{\gamma P_0}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x_k} \right)} = - \frac{\partial \sigma}{\partial x_k},$$

so daß die LAGRANGESche Gleichung (11-17) lautet:

$$\frac{\mu_0}{\gamma P_0} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} - \sum_k \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_k^2} = 0,$$

in Übereinstimmung mit Gl. (11-43). Wir bemerken, daß die LAGRANGESche Dichte (11-61) nicht dasselbe wie die Dichte (11-40) ist, die wir in Abschn. 11-3 erhielten. Keiner der Terme in (11-61) ist die mechanische kinetische oder potentielle Energiedichte. Die LAGRANGESche Dichte führt aber auf die richtige Wellengleichung, und das ist alles, was verlangt wird.

Ähnlich könnte man eine hinreichende Beschreibung des Schallfeldes erhalten, indem man eine HAMILTONSche Dichte

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma P_0}{\mu_0} \pi^2 + (\nabla \sigma)^2 \right) \quad (11-62)$$

verwendet. Gl. (11-62) führt offensichtlich auf die richtige Feld-



gleichung, aber sie ist nicht die gleiche wie (11-53). Auch ist sie keine Energiedichte des mechanischen Systems.

Als ein komplizierteres Beispiel, eine LAGRANGESche Dichte zur Beschreibung eines gegebenen Feldes aufzustellen, wollen wir das elektromagnetische Feld bei der Abwesenheit eines materiellen Mediums betrachten. In diesem Falle gilt $\mathbf{E} = \mathbf{D}$ und $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ in GAUSSSchen Einheiten. Die MAXWELLSchen Gleichungen (1-55) reduzieren sich auf

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (11-63)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi\mathbf{j}}{c}. \quad (11-64)$$

Die ersten zwei Gleichungen, daran sei erinnert, dienen hauptsächlich dazu, \mathbf{E} und \mathbf{B} mittels eines Skalars und eines Vektorpotentials zu definieren:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (1-58)$$

und

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (1-57)$$

Es ist das zweite Gleichungspaar, das die Erzeugung der Felder durch äußere Ladungen und Ströme beschreibt, und das deshalb als die gewünschten Feldgleichungen angesehen werden kann. Die sechs Feldkomponenten sind nicht besonders als generalisierte Koordinaten geeignet, da sie nicht unabhängig sind. Sie können aber durch die vier Potentialkomponenten ausgedrückt werden. Wir wollen deshalb \mathbf{A} und ϕ als die generalisierten Koordinaten des Feldes verwenden.

Es wird nun behauptet, daß eine LAGRANGESche Dichte, die auf die Feldgleichungen (11-64) führt, lautet:

$$\mathcal{L} = \frac{E^2 - B^2}{8\pi} - \rho\phi + \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{A}}{c}, \quad (11-65)$$

wobei \mathbf{E} und \mathbf{B} durch die Potentiale vermöge der Gl. (1-57, 58) auszudrücken sind. Um diese Behauptung zu beweisen, wollen wir zunächst die Bewegungsgleichung aufsuchen, die zu der Koordinate ϕ gehört. Das skalare Potential selbst tritt nur in dem Term $-\rho\phi$ auf, und die räumlichen Ableitungen von ϕ erscheinen nur in E^2 . (Wir stellen fest, daß zeitliche Ableitungen von ϕ nirgends auftreten.) Demnach haben wir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\rho$$



und

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right)} = \frac{E_k}{4\pi} \frac{\partial E_k}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right)} = - \frac{E_k}{4\pi}.$$

Der letzte Schritt folgt aus Gl. (1-58). Die LAGRANGESche Gleichung für ϕ ist deshalb

$$\frac{1}{4\pi} \sum_k \frac{\partial E_k}{\partial x_k} - \rho = 0$$

oder

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho.$$

Das ist die erste der Gl. (11-64).

Die Lösung der Bewegungsgleichungen, die zu den Komponenten von \mathbf{A} gehören, ist etwas umständlicher. Betrachten wir eine typische Komponente von \mathbf{A} , etwa A_1 . Die LAGRANGESche Dichte enthält sowohl räumliche als auch zeitliche Ableitungen von A_1 . Die Komponente selbst tritt in dem Term $(\mathbf{j} \cdot \mathbf{A})/c$ auf. Die erforderlichen Ableitungen von \mathcal{L} sind deshalb:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_1} &= \frac{j_1}{c}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_1} &= \frac{E_1}{4\pi} \frac{\partial E_1}{\partial \dot{A}_1} = - \frac{E_1}{4\pi c}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right)} &= - \frac{1}{4\pi} B_3 \frac{\partial B_3}{\partial \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right)} = \frac{B_3}{4\pi} \end{aligned}$$

und schließlich

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} \right)} = - \frac{B_2}{4\pi}.$$

Kombiniert man diese Ausdrücke, so wird die LAGRANGESche Gleichung für A_1 :

$$\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial B_3}{\partial x_2} - \frac{\partial B_2}{\partial x_3} \right) - \frac{1}{4\pi c} \frac{dE_1}{dt} - \frac{j_1}{c} = 0. \quad (11-66)$$

Gl. (11-66) erkennt man leicht als die 1-Komponente der noch verbleibenden MAXWELL-Gleichung

$$(\nabla \times \mathbf{B}) - \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{E}}{dt} = \frac{4\pi\mathbf{j}}{c}.$$



Die anderen Komponenten sind die Bewegungsgleichungen für A_2 und A_3 . Demnach sind die vier Feldgleichungen, die man aus der LAGRANGESchen Dichte (11-65) erhält, identisch mit den MAXWELLSchen Gleichungen (11-64).⁷

Die Ladung und Stromdichte sind natürlich durch die Beziehung

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} \quad (11-67)$$

verknüpft, wobei \mathbf{v} die Geschwindigkeit der Ladung ist. \mathbf{v} ist eine Funktion des Ortes. Das Volumenintegral der LAGRANGESchen Dichte (11-65) ist die vollständige LAGRANGE-Funktion für das elektromagnetische Feld. Mit Rücksicht auf Gl. (11-67) kann man schreiben:

$$L = \int \left\{ \frac{E^2 - B^2}{8\pi} - \rho \left(\phi - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}}{c} \right) \right\} dV. \quad (11-68)$$

Es sei bemerkt, daß die Kombination von ϕ und \mathbf{A} in den Klammern auch in der LAGRANGE-Funktion Gl. (1-61) für ein geladenes Teilchen in einem elektromagnetischen Feld auftritt. Tatsächlich können wir zeigen, daß dieser Teil der LAGRANGE-Funktion für das Feld genau dem generalisierten Potentialanteil der LAGRANGE-Funktion für das Teilchen entspricht.

Der Ausdruck „Teilchen“ soll bedeuten, daß Masse und Ladung auf einen Punkt im Raum konzentriert sind. Demnach muß die Ladungsdichte, die zu einem Teilchen gehört, überall bis auf den Ort des Teilchens Null sein. Dort muß sie unendlich sein, aber in der Weise, daß das Volumenintegral der Ladungsdichte gleich der Gesamtladung des Teilchens ist. Die mathematische Funktion, die diese besonderen Forderungen erfüllt, ist ein Vielfaches der wohlbekannten δ -Funktion für das Volumen. Sie wurde von DIRAC eingeführt und ist definiert durch die Bedingungen:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = 0, \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_1$$

$$\int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) dV = 1. \quad (11-69)$$

⁷ In gewisser Hinsicht ist das elektromagnetische Feld ein unglückliches Beispiel, da es eine Anzahl besonderer Schwierigkeiten in sich birgt. Es wurde daran erinnert, daß \mathcal{L} die Ableitung $\dot{\phi}$ nicht enthält. Demnach gibt es keinen zu ϕ konjugierten kanonischen Impuls, und die HAMILTONSche Formulierung nach Abschn. 11-4 läßt sich nicht anwenden. Im wesentlichen rührt die Schwierigkeit daher, daß das Skalar und die Vektorpotentiale keine vollständig unabhängigen Größen sind, sondern daß sie durch die sogenannte *Eichbedingung* verknüpft sind. Die Eichforderung wirkt als zusätzliche Bedingung, die praktisch dazu verwendet werden kann, eine der generalisierten Koordinaten zu eliminieren, so daß das Feld nur durch unabhängige Koordinaten beschrieben ist. Wegen weiterer Einzelheiten siehe G. WENTZEL, *Introduction to the Quantum Theory of Fields*.

Darin ist \mathbf{r}_i der Ortsvektor des Teilchens. Eine offensichtliche Eigenschaft der δ -Funktion besteht darin, daß dann, wenn $f(\mathbf{r})$ eine Funktion des Ortes ist, gilt:

$$\int f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) dV = f(\mathbf{r}_i). \quad (11-70)$$

Die Dichtefunktion für eine Gruppe von n Teilchen kann deshalb dargestellt werden durch:

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (11-71)$$

wobei q_i die Ladung des i -ten Teilchens und \mathbf{r}_i dessen Ortsvektor sind.

Wir wollen nun das Integral

$$\int \rho(\mathbf{r}) \left\{ \phi(\mathbf{r}) - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})}{c} \right\} dV$$

für die Ladungsdichte (11-71) berechnen. Wegen Gl. (11-70) ist das Integral dann gleich

$$\sum_i q_i \left(\phi(\mathbf{r}_i) - \frac{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_i)}{c} \right).$$

Wenn die Ladungen und Ströme von einem System von Teilchen herühren, so wird demnach die vollständige LAGRANGE-Funktion für das Feld:

$$L = \int \frac{E^2 - B^2}{8\pi} dV - \sum_i q_i \left(\phi_i - \frac{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{A}_i}{c} \right). \quad (11-72)$$

Hierin bedeuten die Indizes, daß die Werte von ϕ und \mathbf{A} an den Orten der Teilchen zu nehmen sind. Der Vergleich mit Gl. (1-61) zeigt nun, daß die Summe in (11-72) *genau* der Teil der LAGRANGE-Funktion für die n Teilchen ist, der die auf die Teilchen wirkenden elektromagnetischen Kräfte hervorruft! Wir können tatsächlich die zwei LAGRANGE-Funktionen kombinieren, indem wir die kinetische Energie der Teilchen zu (11-72) addieren:

$$L = \int \frac{E^2 - B^2}{8\pi} dV - \sum_i q_i \left(\phi_i - \frac{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{A}_i}{c} \right) + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2. \quad (11-73)$$

Eine andere Form für Gl. (11-73) ist:

$$L = \int \left\{ \frac{E^2 - B^2}{8\pi} - \sum_i q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \left(\phi - \frac{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{A}}{c} \right) \right\} dV + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2. \quad (11-73')$$

In Gl. (11-73) oder (11-73') haben wir eine vollständige LAGRANGE-



Funktion, die sowohl einerseits das elektromagnetische Feld als auch andererseits die mechanische Bewegung der n Teilchen beschreibt. Sie ist eine Funktion der generalisierten Koordinaten ϕ , \mathbf{A} mit stetigen Ortsindizes x_1, x_2, x_3 und der generalisierten Koordinaten r_i der Teilchen, die durch einen diskreten Index i unterschieden werden. Ein einziges HAMILTONSches Prinzip ist also ausreichend für beide Systeme! Eine Variation bezüglich der Potentiale erzeugt die MAXWELLSchen Feldgleichungen, während eine Variation bezüglich der Teilchenkoordinaten die Bewegungsgleichungen der Teilchen liefert. Wir weisen darauf hin, daß der erste Term in Gl. (11-73) die LAGRANGE-Funktion für das Feld bei der Abwesenheit der geladenen Teilchen darstellt. Ähnlich stellt der letzte Term die LAGRANGE-Funktion für die Teilchen bei Abwesenheit des Feldes dar. Der mittlere Term liefert die Wechselwirkung zwischen Teilchen und Feld.

Drückt man die Felder mittels eines Variationsprinzips aus, so erhält man eine knappe und elegante Beschreibung. Man kann sich natürlich fragen, was für praktische Vorteile diese Formulierung gegenüber der direkten Verwendung der Feldgleichungen hat. Die wichtigsten Anwendungen liegen in Wirklichkeit außerhalb des Bereiches der klassischen Physik, wir möchten sie jedoch hier kurz erwähnen.

Erstens liefert die LAGRANGESche Formulierung ein bequemes Verfahren für das Aufsuchen neuer Feldtypen und zur Erforschung ihrer Eigenschaften. Die möglichen Terme in der LAGRANGESchen Dichte sind stark beschränkt durch die Forderungen, daß \mathcal{L} nur die Koordinaten und deren erste Ableitungen nach Ort und Zeit enthalten darf, und daß \mathcal{L} LORENTZ-invariant sein muß. Wenn es zum Beispiel nur eine Art der generalisierten Koordinate η gibt, die ein Weltskalar (oder Pseudoskalar) sein muß, dann gibt es nur drei mögliche Terme, die diese Forderungen erfüllen:

$$\eta, \quad \sum_{\mu} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_{\mu}} \right)^2, \quad \sum_{\mu} A_{\mu} \frac{\partial \eta}{\partial x_{\mu}}.$$

Darin ist A_{μ} ein äußerer Weltvektor (oder Pseudovektor). Irgendeine LAGRANGESche Dichte für ein skalares Feld muß deshalb aus Kombinationen dieser Terme aufgebaut sein. Man kann damit viele allgemeine Eigenschaften solcher skalarer Felder untersuchen, ohne den physikalischen Mechanismus zu kennen, der dieses Feld erzeugt. Das ist das Verfahren, das heutzutage in den theoretischen Untersuchungen über Mesonen-Felder verwendet wird.

Die zweite Anwendung steht im Zusammenhang mit der Quantisierung von Feldern. Es wurde bereits bemerkt, daß der Übergang von



der klassischen Theorie zur Quantentheorie nur mit Hilfe der kanonischen Variablen vollzogen werden kann, die ein System beschreiben. So wurde bereits hervorgehoben, daß die klassischen POISSONSchen Klammern der kanonischen Koordinaten oder Funktionen von diesen den Vertauschungsrelationen der Quantentheorie entsprechen. Wie ein System zu quantisieren ist, wissen wir in Wirklichkeit nur dann, wenn wir es durch mechanische Terme beschreiben können. Wenn man wünscht, eine Quantentheorie des elektromagnetischen Feldes oder irgendeines anderen Feldes zu konstruieren, muß man zuerst eine Beschreibung des Feldes in der Sprache der Mechanik finden. Die in diesem Kapitel dargestellten LAGRANGESchen und HAMILTONSchen Formulierungen bilden die Grundlage einer solchen Beschreibung.

LITERATURHINWEISE

- J. C. SLATER und N. H. FRANK, *Mechanics*. Bei der Diskussion der Mechanik kontinuierlicher Systeme sind wir nur bis zu den Bewegungsgleichungen gegangen. Deren Lösungen haben wir nicht ausführlich betrachtet. Allein die Behandlung der Schwingungen von Saiten, Membranen, Flüssigkeiten oder Festkörpern würde einen besonderen Band erfordern. Beinahe die Hälfte des Buches von SLATER und FRANK ist solchen Fragen gewidmet. Es stellt eine lesbare, wenn auch etwas elementare, Einführung in dieses Gebiet dar. Insbesondere wird in Kapitel VII der Übergang von der diskreten Kette auf die kontinuierliche Saite für *Transversalschwingungen* diskutiert.
- LORD RAYLEIGH, *The Theory of Sound*. Diese Abhandlung enthält natürlich viel Stoff über die Schwingungen kontinuierlicher Körper. Eine Diskussion der Wellengleichung für die Schallausbreitung in Gasen findet man in Kapitel XI, Band 2, wo die Frage der adiabatischen bzw. isothermen Bewegung des Gases sehr ausführlich untersucht wird.
- G. WENTZEL, *Introduction to the Quantum Theory of Fields*. Es läßt sich keine einzelne Literaturstelle angeben, die eine ausführliche und umfassende Behandlung der klassischen Mechanik der Felder enthält. Weil die klassische Theorie gewöhnlich als Vorstufe zur Quantisierung des Feldes entwickelt wird, findet man die meisten Diskussionen in Werken über Quantenmechanik. Die beste Quelle ist wahrscheinlich der ausgezeichnete und gut geschriebene Band von WENTZEL, besonders Kapitel 1. Wertvolles Material gibt auch L. I. SCHIFF in den Kapiteln XIII und XIV seiner *Quantum Mechanics*. Insbesondere ist das letzte Kapitel dem elektromagnetischen Feld gewidmet. Eine ältere Referenz ist Abschnitt 9 des Anhanges in W. HEISENBERGS *Die physikalischen Grundlagen der Quantentheorie*. Die bahnbrechende Arbeit über die Theorie der Felder ist die noch immer recht wertvolle Schrift von W. HEISENBERG und W. H. PAULI, *Z. Physik* 56, 1 (1929).



ÜBUNGEN

1. (a) Die Transversalschwingungen einer gespannten Saite können näherungsweise durch die Transversalschwingungen eines diskreten Systems beschrieben werden, das aus gleichweit entfernten Massenpunkten besteht, die auf einer gewichtslosen Saite angeordnet sind. Zeige, daß dann, wenn der Abstand zwischen den Massenpunkten gegen Null geht, die LAGRANGE-Funktion dem Grenzwert

$$L = \frac{1}{2} \int \left[\mu \dot{\eta}^2 - T \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] dx$$

für die kontinuierliche Saite zustrebt, wobei T die feste Spannung ist. Wie lautet die Bewegungsgleichung, wenn die Dichte μ eine Funktion des Ortes ist?

(b) Stelle die LAGRANGE-Funktion für die kontinuierliche Saite auf. Ermittle dazu die kinetische und die potentielle Energie, die der Transversalbewegung entsprechen. Die potentielle Energie kann man aus der Arbeit erhalten, die durch die Spannungskraft geleistet wird, wenn die Saite während der Transversalschwingung gedehnt wird.

2. Bestimme die HAMILTONSchen Bewegungsgleichungen für ein kontinuierliches System aus dem modifizierten HAMILTONSchen Prinzip (11-58). Verfahre dabei so wie in Abschnitt 7-4.

3. Zeige, daß dann, wenn ψ und ψ^* als zwei unabhängige Feldvariablen gewählt werden, die LAGRANGESche Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \nabla \psi \cdot \nabla \psi^* + V \psi^* \psi + \frac{\hbar}{2\pi i} (\psi^* \dot{\psi} - \dot{\psi}^* \psi)$$

auf die SCHRÖDINGER-Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \nabla^2 \psi + V \psi = \frac{i\hbar}{2\pi} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

und deren Komplexkonjugierte führt. Wie lauten die kanonischen Impulse? Bestimme die \mathcal{L} entsprechende HAMILTONSche Dichte.

4. Zeige, daß

$$G_i = - \int \sum_k \pi_k \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i} dV$$

eine Konstante der Bewegung ist, wenn die HAMILTONSche Dichte keine explizite Funktion des Ortes ist. Die Größe G_i kann als Gesamtimpuls des Feldes längs der x_i -Richtung identifiziert werden. Die Ähnlichkeit dieses Satzes mit dem gewöhnlichen Erhaltungssatz für den linearen Impuls diskreter Systeme (vgl. Abschnitt 8-6) ist offensichtlich.

5. Eine LAGRANGESche Dichte für das elektromagnetische Feld ist gegeben durch die relativistisch kovariante Form:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} \sum_{\mu, \nu} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \right)^2 - \frac{1}{8\pi} \sum_\mu \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} \right)^2 + \sum_\mu \frac{j_\mu A_\mu}{c}$$



wobei A_μ das Vierer-Vektorpotential und j_μ ein Vierervektor mit den Komponenten \mathbf{j} und $i\rho$ sind. Zeige, daß die LAGRANGESche Dichte direkt auf die Wellengleichung für das Vektorpotential führt:

$$\square^2 A_\mu = \frac{4\pi j_\mu}{c}.$$

Zeige auch, daß diese LAGRANGE-Dichte mit der im Text gegebenen bis auf den mittleren Term identisch ist. (Der mittlere Term hat irgendwie infolge der Eichbedingung den Wert Null.)



LITERATURVERZEICHNIS

Bei Büchern, die in letzter Zeit neu erschienen sind (wie im Falle einiger deutscher Bücher), sind Ort und Datum der Neuerscheinung in Klammern hinzugefügt. Wenn ein angegebenes Buch bereits im Abschnitt *Literaturhinweise* eines Kapitels angeführt ist, so steht die entsprechende Kapitelnummer in Klammern hinter der Referenz.

ALLGEMEINE ABHANDLUNGEN ÜBER KLASSISCHE MECHANIK

1. AMES, JOSEPH SWEETMAN und MURNAGHAN, FRANCIS D., *Theoretical Mechanics*. Boston: Ginn and Company, 1929.
2. APPELL, PAUL, *Traité de Mécanique Rationnelle* (5 Bde.). 2. Aufl. Paris: Gauthier-Villars, 1902–37.
3. COE, CARL JENESS, *Theoretical Mechanics*. New York: Macmillan Co., 1938 (I. Kapitel).
4. DESTOUCHE, JEAN LOUIS, *Principes de la Mécanique Classique*. Paris: Centre National de la Recherche Scientifique, 1948.
5. LAMB, HORACE, *Higher Mechanics*. 2. Aufl. Cambridge: Cambridge University Press, 1929.
6. MACMILLAN, WILLIAM DUNCAN, *Theoretical Mechanics*. New York: McGraw-Hill. Bd. 1: *Statics and the Dynamics of a Particle*, 1927 (III. Kapitel).
Bd. 3: *Dynamics of Rigid Bodies*, 1936 (V. Kapitel).
7. MILNE, E. A., *Vectorial Mechanics*. New York: Interscience Publishers, 1948 (I. u. V. Kapitel).
8. OSGOOD, WILLIAM F., *Mechanics*. New York: Macmillan, 1937 (I., II. u. IV. Kapitel).
9. SCHAEFER, CLEMENS, *Einführung in die theoretische Physik*. Bd. 1: *Mechanik materieller Punkte; Mechanik starrer Körper und Mechanik der Continua (Elastizität und Hydrodynamik)*, 3. Aufl. Berlin: Walter de Gruyter, 1929.
10. SLATER, JOHN C. und FRANK, NATHANIEL H., *Mechanics*. New York: McGraw-Hill, 1947 (III. u. XI. Kapitel).
11. SOMMERFELD, ARNOLD, *Vorlesungen über theoretische Physik*. Bd. 1: *Mechanik*. 4. Aufl. Wiesbaden: Dieterich'sche Verlagsbuchhandlung, 1949 (II., III. u. V. Kapitel).
12. SYNGE, JOHN L. und GRIFFITH, BYRON A., *Principles of Mechanics*. 2. Aufl. New York: McGraw-Hill, 1949 (I. u. V. Kapitel).
13. TIMOSHENKO, S. und YOUNG, D. H., *Advanced Dynamics*. New York: McGraw-Hill, 1948 (V. u. X. Kapitel).
14. WEBSTER, ARTHUR GORDON, *The Dynamics of Particles and of Rigid, Elastic, and Fluid Bodies*. Leipzig: B. G. Teubner, 1904 (New York: Stochert-Hafner, 1920) (V., VII. u. X. Kapitel).
15. WHITTAKER, E. T., *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*. 4. Aufl. Cambridge: Cambridge University Press, 1937 (New York: Dover Publications, 1944) (I.–IV., VII., VIII. u. X. Kapitel).



16. —, *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*. Bde. IV₁ und IV₂: *Mechanik. A: Grundlagen der Mechanik; B: Mechanik der Punkte und starrer Systeme*. Leipzig: B. G. Teubner, 1901–35.
17. —, *Handbuch der Physik*. Bd. V: *Grundlagen der Mechanik der Punkte und starrer Körper*. Berlin: Julius Springer, 1927 (I., V., VII., VIII. u. IX. Kapitel).

WERKE ÜBER SPEZIELLE GEBIETE DER KLASSISCHEN MECHANIK

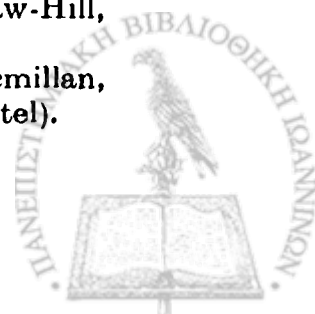
18. BERGMANN, PETER GABRIEL, *Introduction to the Theory of Relativity*. New York: Prentice-Hall, 1942 (VI. Kapitel).
19. BYERLY, WILLIAM ELWOOD, *An Introduction to the Use of Generalized Coordinates in Mechanics and Physics*. Boston: Ginn & Co., 1913 (II. Kapitel).
20. CHARLIER, CARL LUDWIG, *Die Mechanik des Himmels* (2 Bde.). 2. Aufl. Berlin: Walter de Gruyter, 1927 (IX. Kapitel).
21. DAVIDSON, MARTIN, *The Gyroscope and Its Applications*. Rev. Aufl. London: Hutchinson, 1947 (V. Kapitel).
22. EINSTEIN, ALBERT, *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie*. 8. Aufl. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn, 1920 (VI. Kapitel).
23. GRAY, ANDREW, *A Treatise on Gyrostatics and Rotational Motion*. London: Macmillan Co., 1918 (V. Kapitel).
24. KASNER, EDWARD, *Differential-Geometric Aspects of Dynamics*. New York: American Mathematical Society, 1913.
25. KLEIN, FELIX, *The Mathematical Theory of the Top*. New York: Scribners, 1897 (V. Kapitel).
26. — und SOMMERFELD, ARNOLD, *Über die Theorie des Kreisels* (4 Bde.). Leipzig: B. G. Teubner, 1897–1910 (V. Kapitel).
27. LANZOS, CORNELIUS, *The Variational Principles of Mechanics*. Toronto: University of Toronto Press, 1949.
28. MACH, ERNST, *Die Mechanik in ihrer Entwicklung*. 4. Aufl. Leipzig: Brockhaus, 1901 (I. Kapitel).
29. NEWBOULT, H. O., *Analytical Method in Dynamics*. Oxford: Oxford University Press, 1946 (IV. Kapitel).
30. OLSON, HARRY F., *Dynamical Analogies*. New York: D. van Nostrand, 1946 (II. Kapitel).
31. PAULI, WOLFGANG, JR., *Relativitätstheorie*. Leipzig: B. G. Teubner, 1921.
32. POINCARÉ, HENRI, *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste* (3 Bde.). Paris: Gauthier-Villars, 1892–99 (IX. Kapitel).
33. ROUTH, E. J., *The Advanced Part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies*. 6. Aufl. London: Macmillan, 1905.
34. SCHAEFER, CLEMENS, *Die Prinzipie der Dynamik*. Berlin: Walter de Gruyter, 1919 (VII. Kapitel).
35. THOMSON, J. J., *Applications of Dynamics to Physics and Chemistry*. London: Macmillan, 1888 (II. Kapitel).
36. WINTNER, AUREL, *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*. Princeton: Princeton University Press, 1941.

WERKE ANDERER GEBIETE DER PHYSIK UND MATHEMATIK, DIE MATERIAL ENTHALTEN, DAS FÜR DIE KLASSISCHE MECHANIK VON INTERESSE IST

37. BECKER, R., *Theorie der Elektrizität*. Bd. II: *Elektronentheorie*. 6. Aufl. Leipzig: B. G. Teubner, 1933 (VI. Kapitel).



38. BERGMANN, PETER GABRIEL, *Basic Theories of Physics: Mechanics and Electrodynamics*. New York: Prentice-Hall, 1949.
39. BLISS, GILBERT AMES, *Calculus of Variations* (Carus Mathematical Monographs, 1). La Salle, Illinois: Open Court Publishing Co., 1925 (II. Kapitel).
40. BÔCHER, MAXIME, *Introduction to Higher Algebra*. New York: Macmillan, 1907 (IV. u. X. Kapitel).
41. BORN, MAX, *Vorlesungen über Atommechanik*. Berlin: Julius Springer, 1925 (VIII. und IX. Kapitel).
42. — und JORDAN, PASCUAL, *Elementare Quantenmechanik*. Berlin: Julius Springer, 1930 (Ann Arbor: J. W. Edwards, 1946) (VIII. Kapitel).
43. BRAND, LOUIS, *Vector and Tensor Analysis*. New York: John Wiley & Sons, 1947.
44. BRILLOUIN, LÉON, *Les Tenseurs en Mécanique et en Élasticité*. Paris: Masson et Cie., 1938 (New York: Dover Publications, 1946) (IV. u. IX. Kapitel).
45. CARATHÉODORY, CONSTANTIN, *Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung*. Leipzig: B. G. Teubner, 1935.
46. COURANT, R. und HILBERT, D., *Methoden der mathematischen Physik* (2 Bde.). 2. Aufl. Berlin: Julius Springer, 1931–37 (IV. Kapitel).
47. DIRAC, P. A. M., *The Principles of Quantum Mechanics*. 3. Aufl. Oxford: Oxford University Press, 1944 (VIII. Kapitel).
48. EPSTEIN, PAUL S., *Textbook of Thermodynamics*. New York: John Wiley & Sons, 1937 (VII. Kapitel).
49. FRANK, PHILIPP und VON MISES, RICHARD, *Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik* (2 Bde.). 2. Aufl. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn, 1930–35 (VIII. u. IX. Kapitel).
50. GIBBS, J. WILLARD, *Vector Analysis*. Hrsg. von E. B. WILSON. New York: Scribner, 1901 (New Haven: Yale University Press, 1931) (V. Kapitel).
51. GUILLEMIN, ERNST A., *The Mathematics of Circuit Analysis*. New York: John Wiley & Sons, 1949 (X. Kapitel).
52. HEISENBERG, WERNER, *Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie*. Leipzig: Hirzel, 1930 (Mannheim: Bibliographisches Institut, 1958) (XI. Kapitel).
53. HERZBERG, GERHARD, *Infrared and Raman Spectra of Polyatomic Molecules*. New York: D. van Nostrand, 1945 (IV. u. X. Kapitel).
54. JEFFREYS, H. und JEFFREYS, BERTHA S., *Methods of Mathematical Physics*. 2. Aufl. Cambridge: Cambridge University Press, 1950 (IV. Kapitel).
55. JOOS, GEORG, *Theoretische Physik*. 10. Aufl. Frankfurt am Main: Akademische Verlagsgesellschaft, 1959 (I. Kapitel).
56. LAMB, HORACE, *Hydrodynamics*. 6. Aufl. Cambridge: Cambridge University Press, 1932 (New York: Dover Publications, 1945).
57. LEVI-CIVITA, TUILLIO, *Der absolute Differentialkalkül und seine Anwendungen in Geometrie und Physik*. Berlin: Julius Springer, 1928.
58. LINDSAY, ROBERT BRUCE, *Introduction to Physical Statistics*. New York: John Wiley & Sons, 1941 (III. Kapitel).
59. LINDSAY, ROBERT BRUCE und MARGENAU, HENRY, *Foundations of Physics*. New York: John Wiley & Sons, 1936 (I., VI. u. VII. Kapitel).
60. MARGENAU, HENRY und MURPHY, GEORGE MOSELEY, *The Mathematics of Physics and Chemistry*. New York: D. van Nostrand, 1943.
61. MORSE, PHILIP M., *Vibration and Sound*. 2. Aufl. New York: McGraw-Hill, 1948.
62. LORD RAYLEIGH, *The Theory of Sound* (2 Bde.). 2. Aufl. London: Macmillan, 1894–96 (New York: Dover Publications, 1945) (I., X. u. XI. Kapitel).



63. SCHIFF, LEONARD I., *Quantum Mechanics*. New York: McGraw-Hill, 1949 (XI. Kapitel).
64. SOMMERFELD, ARNOLD, *Atombau und Spektrallinien*. 8 Aufl. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn, 1960 (VIII. und IX. Kapitel).
65. ———, *Vorlesungen über theoretische Physik*. Bd. III: *Elektrodynamik*. Wiesbaden: Dieterich'sche Verlagsbuchhandlung, 1948.
66. TOLMAN, RICHARD C., *The Principles of Statistical Mechanics*. Oxford: Oxford University Press, 1938 (VIII. Kapitel).
67. VAN VLECK, J. H., *Quantum Principles and Line Spectra*. Washington: National Research Council, 1926 (IX. Kapitel).
68. WENTZEL, GREGOR, *Einführung in die Quantentheorie der Wellenfelder*. Wien: Deuticke, 1943 (XI. Kapitel).
69. WIGNER, EUGEN, *Gruppentheorie und ihre Anwendungen auf die Quantenmechanik der Atomspektren*. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn, 1931.
70. WILLS, A. P., *Vector Analysis, with an Introduction to Tensor Analysis*. New York: Prentice-Hall, 1931 (V. Kapitel).
71. ZEMANSKY, MARK W., *Heat and Thermodynamics*. 2. Aufl. New York: McGraw-Hill, 1943.



VERZEICHNIS DER SYMBOLE

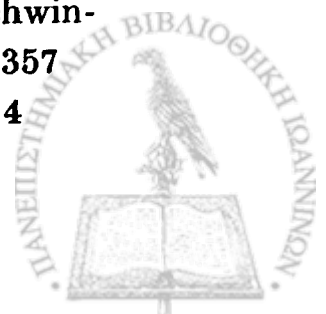
Bei der Wahl der verschiedenen Symbole wurden, wenn immer es möglich war, gewisse allgemeine Prinzipien befolgt. So wurden Vektoren durch fettgedruckte Antiqua-Buchstaben bezeichnet, während Tensoren zweiter und höherer Stufe sowie Matrizen durch fettgedruckte Grotesk-Buchstaben dargestellt wurden. Wenn ein Vektor speziell als ein Tensor erster Stufe oder als eine einspaltige (oder einreihige) Matrix aufgefaßt wird, werden Grotesk-Buchstaben verwendet. Bei griechischen Symbolen wird ebenfalls Fettdruck für Vektoren, Matrizen und Tensoren benutzt.

Ein Punkt über einem Buchstaben bedeutet stets Differentiation bezüglich der Zeit. Striche werden häufig zur Bezeichnung von Größen verwendet, die einer Transformation irgendeiner Art unterworfen wurden. Im IV. Kapitel beziehen sich Striche an Koordinaten auf körpereigene Achsensätze zur Unterscheidung von den ungestrichenen raumfesten Achsensätzen. Nach dem IV. Kapitel wird diese Vereinbarung, nachdem sie ihren Zweck erfüllt hat, nicht mehr befolgt.

Bei der Diskussion kanonischer Transformationen werden kleine Buchstaben für die ursprünglichen Variablen und große Buchstaben für die transformierten Variablen verwendet. Indizes 0 bezeichnen häufig Anfangs- oder Gleichgewichtswerte. Wie üblich werden komplexkonjugierte Größen durch einen Stern bezeichnet.

Dieses Verzeichnis der Symbole ist nicht vollständig; in ihm sind nur die wichtigen Symbole zusammengestellt, und solche, die möglicherweise Anlaß zu Verwechslungen geben.

A	Fläche 67, 87	A	elektromagnetisches Vektorpotential 22
A	Betrag der Winkelgeschwindigkeit senkrecht zu L 179	$A, B, C, \text{ usw.}$	orthogonale Matrizen 109
A	Wirkung 252	A	vollständige Matrix der räumlichen Drehung. 120
A	Maß für die Amplituden von Lichtwellen 344	A	Matrix der Normalschwingungsamplituden a_{α} 357
A, B, C	Komponenten der Vektorfunktion F 291	A^{-1}	zu A inverse Matrix 114
A_{ν}	Vierer-Vektorpotential 222		



- \tilde{A} Transponierte der Matrix A 116
 A^\dagger zu A adjungierte Matrix 116
 $|A|$ Determinante von A 117
 a große Halbachse 87
 a Konstante der Bewegung für den schweren symmetrischen Kreisel 183
 a Gleichgewichtsabstand im linearen Kettenmolekül 386
 a, a_j, a_{jk} Koeffizienten in der kinetischen Energie 25
 a_{ik} Koeffizienten in der Differentialgleichung für die Zwangsbedingung 44
 a_{ij} Matrixelement der orthogonalen Transformation 109
 $a_{\mu\nu}$ Matrixelement der LORENTZ-Transformation 209
 a_j FOURIER-Koeffizienten 326
 a_i, a_{ik} Schwingungsamplituden der Normalschwingungen 355
 a Beschleunigung 2
 a, a_k Eigenvektor einer gegebenen Normalschwingung 357
B magnetische Induktion 22
B Matrix der dem EULERSchen Winkel ψ zugeordneten Drehung 120
 b kleine Halbachse 87
 b Konstante der Bewegung für den schweren symmetrischen Kreisel 183
 b Gleichgewichtsabstand im linearen dreiatomigen Molekül 369
 C_i Kapazitäten 49
 C Integrationskonstante im KEPLER-Problem 86
 C, C_k Skalenfaktoren von Normalschwingungen 355
C Matrix der dem EULERSchen Winkel ϕ zugeordneten Drehung 120
 c_i Koeffizienten orthogonalisierender Eigenvektoren 363
D Dichte der Systempunkte im Phasenraum 295
D Determinante 300, 380
D elektrische Verschiebung 22
D Matrix der dem EULERSchen Winkel θ zugeordneten Drehung 120
E Gesamtenergie 68
 E_i elektromotorische Kraft 49
 E' Konstante der Bewegung für den schweren symmetrischen Kreisel 184
E elektrische Feldstärke 22
 e Ladung des Elektrons (-4.80×10^{-10} esu) 91
 $F(\rho)$ Funktion von ρ und Trägheitstensor 176
 F_1, F_2, F_3, F_4 erzeugende Funktionen 266



- F, G beliebige Funktionen 281
 \mathbf{F} Kraft 1
 $F^{(\omega)}$ angewendete Kraft 17
 $F^{(e)}$ äußere Kraft 5
 $\mathbf{F}(q, p)$ beliebige Vektorfunktion 291
 \mathcal{F} Dissipationsfunktion 24
 \mathcal{F}_i Koeffizienten in der diagonalisierten Dissipationsfunktion 377
 \mathcal{F}_{ij} Koeffizienten in der Dissipationsfunktion 377
 $f(r)$ Betrag der Zentralkraft 67
 $f'(r)$ Kraft im äquivalenten ein-dimensionalen Zentralkräfteproblem 71
 f beliebige Funktion 239, 254
 $f_i(q, t)$ beliebige Funktionen in der erzeugenden Funktion von Punkttransformationen 271
 f_i Zwangskraft 17
 G universelle Gravitationskonstante 88
 G erzeugende Funktion, die die Transformation der Zeit mit einschließt 270
 G beliebige Funktion des Volumens 403
 $G(q, p)$ erzeugende Funktion der infinitesimalen Kontakttransformation 287
 $G_i(\omega)$ FOURIER-Transformierte der treibenden Kraft 383
 \mathbf{G} beliebiger Vektor 106
 g Gravitationsbeschleunigung 28
 H HAMILTON-Funktion 58, 240
 H' kovariante HAMILTON-Funktion 247
 \mathcal{H} HAMILTONSche Dichte 399
 \mathbf{H} magnetische Feldstärke 22
 h PLANCKSche Konstante 236
 I bestimmtes Integral der LAGRANGE-Funktion 34
 I Stromdichte oder Intensität 89
 I Trägheitsmoment 165
 I_1, I_2, I_3 Hauptträgheitsmomente 168, 171
 I_j Ströme 49
 I_{zz}, I_{ij} Koeffizienten des Trägheitsmomentes 160
 \mathbf{I} Trägheitstensor 161
 i elektrischer Strom 196
 i, j, k, l, m, n Summationsindizes 5, 44, 45, 142
 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ Einheitsvektoren 105
 J bestimmtes Integral im Extremwertproblem 35
 J_i Wirkungsvariable 319
 J_n n -te POINCARÉsche Integralinvariante 274f
 \hat{j}_μ Vierervektor der Stromdichte 412
 j elektrische Stromdichte 22



- K** transformierte HAMILTON-Funktion 265
K, MINKOWSKI-Kraft 221
k_z Koeffizienten in der Dissipationsfunktion 24
k Kraftkonstante von Zentralkräften 71
k Kraftkonstante des harmonischen Oszillators 75
k radiale Quantenzahl 339
k Wellenzahl 344
k₀ Wellenzahl im Vakuum 344
k Wellenzahlvektor 344

L LAGRANGE-Funktion 21
L Eikonal 344
L' kovariante LAGRANGE-Funktion 231
L_i LAGRANGE-Funktion pro Längeneinheit des unendlich ausgedehnten linearen Moleküls 386
L_j Selbstinduktion 49
L Drehimpuls 2
ℒ LAGRANGESCHE Dichte 388
l eine Länge 28, 47
l Betrag des Gesamtdrehimpulses 67
l Abstand des Schwerpunktes des symmetrischen Kreisels vom festgehaltenen Punkt 182

M Gesamtmasse des Systems 5
M_{jk} Koeffizienten der Induktion 49

M magnetisches Moment 195
m Masse 2
m Anzahl der Gleichungen für die Zwangsbedingungen 45
m Entartungsgrad 328
m magnetische Quantenzahl 339
m_l longitudinale Masse 227
m_r relativistische Masse 226
m_t transversale Masse 227
m_α Elemente des metrischen Tensors und Koeffizienten in der kinetischen Energie 257

N Anzahl der Teilchen in einem System 13
N Drehmoment 2
N^(α) äußeres Drehmoment 7
n Anzahl der unabhängigen Koordinaten oder Freiheitsgrade 18
n Exponent der Potenz in der Zentralkraft 78
n Hauptquantenzahl 339
n Brechungsindex 344
n Einheitsvektor 27

P Druck 239, 394
P Translationsimpuls eines Systems 6
P komplexe 2 × 2-Matrix, die zu einer räumlichen Lage gehört 123



- p Betrag des Gesamtdrehimpulses 332
 p_i kanonischer Impuls 52
 p_v Weltimpuls 225
 \mathbf{P} linearer Impuls 1
 Q generalisierte Kraft 19
 Q_i, P_i transformierte kanonische Koordinaten und Impulse 265
 Q unitäre Matrix der CAYLEY-KLEINSchen Parameter 122
 q generalisierte Koordinate 13
 q elektrische Ladung 22
 R ROUTHsche Funktion 242
 R_i Widerstände 49
 R_0 Trägheitsradius 172
 \mathbf{R} Radiusvektor des Massenzentrums 5
 r Polarkoordinate 26
 \mathbf{r} Radiusvektor 1
 S beliebige Fläche 274
 S HAMILTONSche Wirkungsfunktion 303
 S_i Kraftstoß 62
 \mathbf{S} Inversionsmatrix 134
 s Stoßparameter 90
 s Anzahl der zyklischen Koordinaten 242
 s, ds Bogenlänge 2
 T kinetische Energie 3
 T_{ij} Koeffizienten, die bei der Entwicklung der kinetischen Energie um das Gleichgewicht auftreten 355
 $T_{lm\dots}$ Tensorkomponenten 162
 \mathbf{T} Matrix der Koeffizienten T_{ij} 357
 \mathfrak{J} Dichte der kinetischen Energie 394
 t Zeit 1
 U generalisiertes Potential 21
 u $1/r$ (für Zentralkräfte) 79
 u gleich $\cos \theta$ 184
 u Wellengeschwindigkeit 341
 u, v komplexe Achsen 122
 u, v Koordinaten auf einer zweidimensionalen Fläche 275
 u, v, w beliebige Funktionen von q, p 284
 u_l $2n$ unabhängige Funktionen von q, p 279
 u_v Vierergeschwindigkeit 219
 V potentielle Energie 4
 V Volumen 160
 V' Potential des äquivalenten eindimensionalen Zentralkräfteproblems 71
 V_{ij} Koeffizienten, die bei der Entwicklung des Potentials um das Gleichgewicht auftreten 354
 \mathbf{V} Matrix der Koeffizienten V_{ij} 356
 υ Dichte der potentiellen Energie 394
 \mathbf{v} Geschwindigkeit 2



W	Arbeit 3	X	Matrix von Eigenvektoren 132
W	eine Größe, die dem CLAU- SIUSSCHEN Virial proportio- nal ist 42 (vgl. auch S. 77)	x, y, z	cartesische Koordinaten im Raum 5
W	HAMILTONSche charakteri- stische Funktion 307, 310	$x_i = x_1, x_2, x_3$	cartesische Koor- dinaten im Raum 108
W'	periodische erzeugende Funktion 327	$x_\mu = x_1, x_2, x_3, x_4$	cartesische Koordinaten im Welt-Raum 209
W_i	separierte charakteristische HAMILTONSche Funktion 316	x	Nutationsparameter für den Kreisel 188
w_i	Winkelvariable 323	x_\pm	$= x \pm iy$ 125
X, Y, Z	cartesische Koordinaten des Massezentrums 5	x_μ	Vierer-Ortsvektor 217
$X, Y, Z; X_1, X_2, X_3, X_{i*}$	Kom- ponenten von Eigenvektoren 132	x	einspaltige Matrix von r 113
		Y	YOUNGScher Modul 387
		Z	Kernladungszahl 91

INDEX DER GRIECHISCHEN SYMBOLE

α	Bahnparameter (in der Va- riationsrechnung) 35	α_1	Energie (als einer der kon- stanten Impulse) 310
α, β	Konstanten, die bei der Be- wegung des schweren sym- metrischen Kreisels auftre- ten 184	α_θ	konstanter Impuls, Separa- tionskonstante für θ 332
$\alpha, \beta, \gamma, \delta$	CAYLEY-KLEINSche Pa- rameter 122	α_ϕ	Drehimpuls, konjugiert zu ϕ 317
α_i	konstanter Impuls, der zu einer zyklischen Koordi- nate konjugiert ist 242f, 263, 303	β	gleich v/c 211
$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$	Richtungskosinus 105, 106	β_i	Integrationskonstanten 264, 304
		γ	Verhältnis der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und Volumen 396



- γ_i transformierte konstante Impulse 305
 Δ eine Differenz 2
 Δ Variationsoperator, der die Variation von t einschließt 252
 δ Operator der virtuellen Ver-rückung 16
 δ Variationsoperator für kon-stantes t 34
 δ Operator einer infinitesima-len Änderung 286
 δ_i Phasenfaktoren, 365
 δ_{lm} KRONECKER-Symbol 107
 δ_{ijk} LEVI-CIVITASche Dichte 142
 $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$ DIRACsche δ -Funktion für Volumina 408
 ϵ Exzentrizität 84
 ϵ Parameter der infinitesima-len Kontakttransformation 286
 ϵ Matrix der infinitesimalen Drehung 138
 ξ_i Normalkoordinaten 366
 ζ_1 Matrix der generalisierten Koordinaten 366
 $\eta(x)$ variierte Bahn (in der Varia-tionsrechnung) 35
 $\eta(x), \eta_i(x_k)$ generalisierte Koor-dinaten kontinuierlicher Systeme 387, 388
 η_i generalisierte Koordinaten, bezogen auf die Gleichge-wichtslage 354
 η vektorielle Auslenkung von Teilchen in Gasen 394
 η Matrix der Koordinaten η_i 366
 Θ Streuwinkel im Schwer-punktsystem 90
 θ allgemeiner Winkel 14
 θ Winkel im ebenen Polar-koordinatensystem 26
 θ Azimutwinkel im sphäri-schen Polarkoordinaten-system 66
 θ EULERScher Winkel 119
 θ Polhöhe 157, 331
 θ Bahnparameter im Konfi-gurationsraum 259, 269
 θ' Umkehrwinkel 85
 ϑ Streuwinkel in Laboratori-umskoordinaten 94
 κ Dämpfungsfaktor 378
 λ Eigenwert 131
 λ Wellenlänge 236
 λ_i LAGRANGEScheunbestimmte Multiplikatoren 45
 λ diagonale Matrix der Eigen-werte 133, 361
 μ reduzierte Masse 65
 μ Masse pro Längeneinheit 387
 μ Dichte 394



μ, ν, λ , usw. Summationsindizes in der speziellen Relativitätstheorie, die von 1 bis 4 laufen 210	τ Weltzeit oder Eigenzeit 217
ν Frequenz 236	τ_i Perioden der periodischen Bewegung 324
ν_i Integrationskonstanten 312	Φ durch eine orthogonale Matrix hervorgerufener Drehwinkel 136
ν_i Frequenzen der periodischen Bewegung 324	ϕ ein Winkel 15, 47, 110
$\xi, \eta, \zeta; \xi', \eta', \zeta'$ Achsensysteme zur Definition der EULERSchen Winkel 119	ϕ elektromagnetisches skalares Potential 22
π Impulsdichte 399	ϕ EULERScher Winkel 119
ρ Ladungsdichte 22	ϕ Winkel im ebenen Polarkoordinatensystem 317
ρ Massendichte 196	ϕ Azimutwinkel im sphärischen Koordinatensystem 331
ρ Krümmungsradius 237	ϕ skalares Lichtwellenfeld 344
$d\rho$ Bogenlänge im Konfigurationsraum 257	ψ Zenitwinkel im sphärischen Koordinatensystem 66
ρ Vektor, bezogen auf das Trägheitsmoment in einer gegebenen Richtung 172, 176	ψ EULERScher Winkel 120
σ funktionale Dichteänderung 396	ψ skalare Feldgröße 220
$\sigma(\Omega)$ differentieller Streuquerschnitt 89	ψ Azimutwinkel im ebenen Polarkoordinatensystem 333
σ_t totaler Streuquerschnitt 93	ψ Wellenfunktion der Quantentheorie 347
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ PAULISChe Spinmatrizen 128	$\psi(q, p, t)$ Funktion, die Nebenbedingung für die kanonischen Variablen ausdrückt 300
τ mittelndes Zeitintervall 77	Ω Raumwinkel 89
τ Umlaufperiode 87	Ω Winkelgeschwindigkeit der Präzession 179
	$d\Omega$ Vektor der infinitesimalen Drehung 141



- | | | | |
|------------|--|-------------------------|--|
| ω | Winkelgeschwindigkeit 29,
146 | ∇ | Nabla-Operator 220 |
| ω_i | Integrationskonstanten 264 | \square | Vierergradient 220 |
| ω_L | Frequenz der LARMOR-Prä-
zession 197 | \square^2 | D'ALEMBERTScher Operator
220 |
| | | $\{u, v\}$ | LAGRANGESche Klammer
von u, v 278 |
| 1 | Einheitsmatrix 114 | $[u, v]$ | POISSONSche Klammer von
u, v 279 |
| \oint | Linienintegral über geschlos-
senen Weg 4 | $\frac{\delta}{\delta}$ | Funktionalableitung 392 |

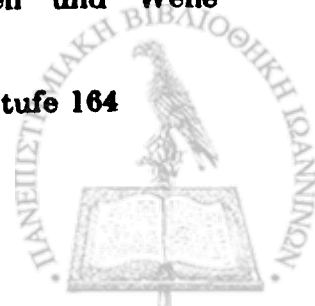


NAMEN- UND SACHVERZEICHNIS

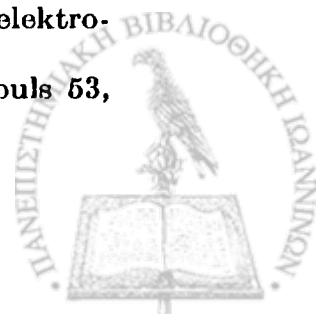
- Ableitungen, ausgedrückt durch Poissonsche Klammern 281f, 283, 403
 —, räumliche (*siehe*: räumliche Ableitungen)
 —, zeitliche (*siehe*: zeitliche Ableitungen)
 —, zweite (*siehe*: zweite Ableitungen)
 Achsen, schiefe 362
 Achsensatz, körperfester 105
 Ähnlichkeitstransformation 117, 357, 361
 Änderung einer Funktion bei einer infinitesimalen Kontakttransformation 288f, 291
 Äquivalenzpostulat 207
 Aktion und Reaktion 5
 Akustik 50, 352, 375, 394ff
 α -Teilchen-Streuung 89, 93, 97
 AMES, J. S. und MURNAGHAN, F.-D. 53
 analytische Mechanik 1
 Anfangsbedingungen für den schweren symmetrischen Kreisel 187
 Antezedente 163
 Apsiden-Abstände 73, 80
 Arbeit 3
 —, durch das Schallfeld in Gasen geleistete 395f
 Astronomie 67, 88, 181, 193, 338f, 348f
 Atombombe 226
 Atome, wasserstoffähnliche 88, 339
 ATWOODSche Fallmaschine 26, 27
 Ausbreitung des Schalles in Gasen 394f, 411
- Bahn im Konfigurationsraum, Gleichung der 258f
 Bahnen, Differentialgleichungen für die 79f
 —, gebundene 73
 —, geschlossene 73, 329
 — für das Gesetz des reziproken Abstandsquadrats 74, 83f, 336f, 351
- , Klassifikation der 72f, 86f
 —, Kreis-, Bedingungen für 74, 86
 — im Phasenraum, Typen von periodischen 319f
 — bei der Streuung durch Zentralkräfte 89
 —, Zahl der Integrationskonstanten 85
 Bahngleichungen aus der HAMILTON-JACOBISchen Gleichung 311, 317f, 351
 — aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung 259
 BECKER, R. 196, 209, 213
 Berechnung von Wirkungsintegralen nach der Residuenmethode 334f, 348
 BERGMANN, P. 213, 223
 BERNOULLI, JACOB 17
 —, JOHANN 40
 Beschleunigung, Gravitations- 28, 150
 —, lineare 2, 227, 236
 —, Zentripetal- 27, 29, 74
 Bewegung, bedingt periodische 322, 327, 366
 — —, Beispiele für 327
 —, einfach harmonische 75, 76, 368
 —, einfach periodische 319
 —, mehrfach periodische 327, 348, 349, 352, 366
 —, periodische (*siehe*: periodische Bewegung)
 —, vollständig entartete 329
 Bewegungsgleichung für kleine Schwingungen 355, 368, 375, 377, 379
 — für kontinuierliche Systeme 391f
 —, ausgedrückt durch Poisson-Klammern 283f
 — im ROUTHschen Verfahren 242f
 — für Schall in Gasen 398, 402, 405
 — in der speziellen Relativitätstheorie 221f, 227, 235
 —, ausgedrückt durch Winkelvariable 323



- BÖCHER, M. 117
 Bogenlänge im Konfigurationsraum 257, 343
 BOHRsches Atom 87, 88, 338f
 BORN, M. 328, 329
 — und JORDAN, P. 295
 BOYLESches Gesetz 77, 395
 Brachistochrone 39, 61
 Brechungsindex 344f
 BRILLOUIN, L. 343
 BYERLY, W. E. 53
- CARATHÉODORY, C. 265
 CAYLEY-KLEINSche Parameter 121f, 154, 155, 199, 200
 charakteristische Gleichung 132
 CHASLE, Satz von 136, 158
 CLAUDIUS, R. J. E. 77
 COMPTON-Streuung 236
 CONDON, E. V. und SHORTLEY, G. S. 295
 CORIOLIS-Kräfte 150f
 — und Molekülspektren 154, 155
 COULOMB-Feld, Streuung geladener Teilchen durch ein 91f
- Dämpfung freier Schwingungen 378f
 Dämpfungsfaktor 378
 D'ALEMBERT, JEAN 17
 D'ALEMBERTScher Operator 220
 D'ALEMBERTSches Prinzip 16ff, 18, 33, 227
 DELAUNAYSche Bahnelemente 338
 Determinante 117, 155, 275
 —, explizite Formel für eine 143
 — gleich dem Produkt der Eigenwerte 134
 —, Invarianz gegenüber Ähnlichkeitstransformationen 118
 —, JACOBISCHE 275, 300 (*siehe auch*: JACOBISCHE Determinante)
 — der kanonischen Transformation 300f
 — einer orthogonalen Matrix 118
 —, Säkular- 132, 356f
 Diagonalisierung der kinetischen und potentiellen Energie 367f, 382
 — einer Matrix 132f, 357
 —, gleichzeitige, zweier Matrizen 361
 Dichte im Phasenraum 295
 Differentialprinzipien 33
 Dilatation der Zeitskalen 213f, 218f
 DIRACsche δ -Funktion 408
 Dissipationsfunktion, RAYLEIGHsche 21, 24, 377
 — in den LAGRANGESchen Gleichungen 24
 Doppeldeutigkeit der Spinor-Rotationsmatrizen 129
 Doppelpendel 14, 32, 383
 Drehachse, augenblickliche 147
 Drehimpuls 2, 66, 159
 —, elektromagnetischer 7
 —, Erhaltungssätze für den 3, 7, 55f, 66f, 291, 332
 — als Erzeuger einer Drehbewegung 291
 — mit geschwindigkeitsabhängigen Potentialen 63
 — als kanonischer Impuls 294, 301
 — und magnetisches Moment 197
 —, POISSON-Klammern, die den, enthalten 291f, 301
 — als Pseudovektor 144
 —, Unabhängigkeit vom Bezugspunkt 9, 195
 —, Zerlegungssätze für den 8, 159
 —, Zusammenhang mit der Winkelgeschwindigkeit 161
 Drehmoment 2
 — Gleichung 3, 195
 Drehung, Änderung einer Vektorfunktion bei einer 291f
 —, eigentliche und uneigentliche 135
 —, infinitesimale (*siehe*: infinitesimale Drehung)
 —, Invarianz physikalischer Gesetze gegenüber 216
 — der Koordinatenachsen, zweidimensional 110, 121, 290
 Drehungsoperator 110, 131
 — im Spinorraum 128f
 — ist kein Vektor 137f
 Drehwinkel und orthogonale Matrix 136f, 156
 Dualität von Teilchen und Welle 345, 347f
 Dyade 163ff, 198
 — als Tensor zweiter Stufe 164



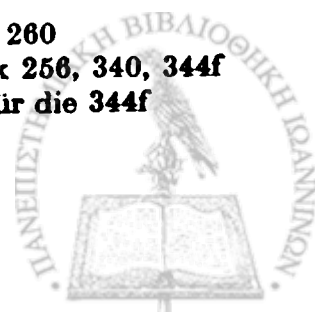
- dyadische Form der POISSON-Klam-
mern für den Drehimpuls 293
- Dynamik 1, 18
- Eichbedingung 408
- Eigenvektoren 131
- für kleine Schwingungen 357f
- , Orthogonalität der 361
- , orthonormierte 363
- , Unbestimmtheit der 356, 358, 359f
362
- Eigenwerte einer hermiteschen Ma-
trix 170, 357
- einer reellen orthogonalen Matrix
133
- für kleine Schwingungen 355f
- —, mehrfache Wurzeln 362f
- —, positive Wurzeln für stabiles
Gleichgewicht 359
- des Trägheitstensors 169
- Eigenwertgleichung 131, 169, 355
- Eigenwertproblem 131, 155, 168f,
355f
- als Diagonalisierung einer Matrix
133, 357
- als gleichzeitige Diagonalisierung
zweier Matrizen 361
- Eigenzeit 217
- Eikonal 344f
- Gleichung 345, 347
- Einheitsdyade 164
- Einheitsmatrix 114
- Einheitsrotator 129
- EINSTEIN, ALBERT 207
- EINSTEINSches Additionsgesetz für Ge-
schwindigkeiten 214f, 234f
- EINSTEINSche Energiebeziehung 225
- EINSTEINSche Schreibweise für Sum-
men 217
- elastischer Festkörper 385, 404
- elastischer Stab, Annäherung durch
ein diskretes System 385
- , LAGRANGE-Funktion und Bewe-
gungsgleichung des 387f, 393f
- elektrische Stromkreise 49f, 380
- elektromagnetisches Feld 51, 381, 404,
406f
- , LAGRANGE-Funktion des 51, 406
412
- elektromagnetischer Impuls 7, 54
- elektromagnetische Kräfte 5, 7, 22f
52, 54, 220f, 229, 232, 236f, 246, 408
- , LAGRANGE-Funktion der 23, 52,
229, 232
- elektromagnetische Potentiale 22, 222,
406
- elliptische Funktionen 82, 176, 184,
202
- Energie, Äquivalenz mit der Masse
225f
- für Bahnen, die dem Gesetz des
reziproken Abstandsquadrats ge-
nügen 86
- , Erhaltungssatz für die 4, 11, 58,
68, 229, 332
- und Frequenz 346
- , Form für konservative Systeme 9f
- als kanonischer Impuls 233, 269f,
273, 308
- , kinetische (*siehe*: kinetische Ener-
gie)
- , potentielle (*siehe*: potentielle Ener-
gie)
- Energiegleichung in der speziellen
Relativitätstheorie 224
- entartete Frequenzen bei kleinen
Schwingungen 364, 374
- und Wirkungs- und Winkelvariable
328ff
- Entartung 328f, 334f
- , Beispiele von 329, 334, 350f
- im KEPLER-Problem 336f, 339
- , *m*-fache 328
- und Natur der Bahn 329, 336, 339
- und separierbare Koordinaten 329,
348f, 351
- , vollständige 329, 336, 339
- in der Zentralkraftbewegung 334,
339
- Erde, kräftefreie Präzession der 181,
202, 203
- , rotierende, Messungen auf der 149f
- Ereignis, definiert in der speziellen
Relativitätstheorie 219
- Erhaltungssätze für den Drehimpuls
3, 7, 56f, 67, 244, 290f, 332
- —, Ausnahmen dazu 7
- unter Berücksichtigung elektro-
magnetischer Kräfte 54, 233
- für den generalisierten Impuls 53,
244, 290f



- für die Gesamtenergie 4, 11, 58, 68, 229, 332
- für Impuls *und* Energie 225, 233
- für den linearen Impuls 2, 6, 56, 224, 412
- —, Ausnahmen dazu 5
- für kontinuierliche Systeme 403f
- , mikroskopische 404
- und Symmetrieeigenschaften 51f, 243, 289
- für Systeme 6f, 51f
- für ein Teilchen 2f
- erste Integrale 52, 66f
- erzeugende Funktion für infinitesimale Drehung 291
- , Typen der 266
- erzwungene Schwingungen, Amplitude der 376, 380
- für nichtsinusförmige Kräfte 383f
- in Normalkoordinaten 374f
- für sinusförmige antreibende Kräfte 375f
- , Wirkung von Reibungskräften auf 379f
- EULER-LAGRANGESche Gleichungen 41f, 228 (*siehe auch* : LAGRANGESche Gleichungen)
- EULERSche Bewegungsgleichungen 173f, 179f
- aus LAGRANGESchen Gleichungen 173
- aus Drehmomentgleichungen 175
- EULERSches Theorem 130ff, 145
- EULERSche Winkel 107, 118ff, 148, 155
- , Definitionen in der Literatur 120
- für elliptische Bahnen im Raum 338
- , Matrix, ausgedrückt durch 121, 156
- Extremwertprobleme 35f, 41

- fallender Körper, CORIOLIS-Ablenkung eines 153f
- Felder 51, 404ff, 410f
- FERMATsches Prinzip 256, 345
- Figurenachse, Locus der, für den schweren Kreisel 185f
- Flächengeschwindigkeit 67, 87
- Fliehgeschwindigkeit 30
- formale Lösung mechanischer Probleme 263f, 274, 288, 302ff, 307, 312f
- Formen, quadratische (*siehe* : quadratische Formen)
- FOUCAULTScher Kreiselkompaß 194, 200, 203
- FOUCAULTSches Pendel 154, 157
- FOURIER-Entwicklung für periodische Bewegung 325f
- , mehrfache 326f, 352, 366
- freie Schwingungen 364
- , Dämpfung der, durch Reibung 376f
- Freiheitsgrade 13
- für starre Körper 103f
- , unendliche Zahl von 385
- Frequenzen der periodischen Bewegung und Winkelvariable 324
- kleiner Schwingungen 356, 359, 364f
- —, Wirkung der Reibung auf 378f
- , Reduktion der Anzahl der, bei Entartung 330, 336f
- , verschwindende, bei kleinen Schwingungen 370f, 384
- —, bei Entartung 330
- von Wellen, die der klassischen Bewegung zugeordnet sind 346f
- fundamentale LAGRANGE-Klammern 279
- fundamentale POISSON-Klammern 281
- Funktionalableitung 392, 400

- GALILEI-Transformation 206
- Gasgesetz, adiabatisches 396
- generalisierter Impuls 52, 239
- als unabhängige Variable 239, 251f, 272
- generalisierte Koordinaten 13
- , Beispiele von 13f
- , Bewegung, wenn alle zyklisch sind 263f, 274
- des elektromagnetischen Feldes 406
- für kontinuierliche Systeme 388
- , relativ zum Gleichgewicht 354
- für starre Körper 118f, 121
- , Transformationsgleichungen für 13
- , Wahl der 264
- geodätische Linien 38, 61, 259f
- einer Ebene 37f
- einer Kugel 38, 260
- geometrische Optik 256, 340, 344f
- , Bedingungen für die 344f



- , Vergleich mit der klassischen Mechanik 345, 349
 Gesamtheit 295
 —, mikrokanonische 297
 Geschosse, CORIOLIS-Kräfte auf 151, 156f
 Geschwindigkeit 2
 — des Lichtes als Maximalgeschwindigkeit 214
 — —, experimentelle Invarianz 207
 — der longitudinalen elastischen Schwingungen 394
 — des Schalles in Gasen 398
 geschwindigkeitsabhängige Potentiale 21f
 Gesetz des reziproken Abstandsquadrats 67, 74, 78, 81, 83f, 91, 331f
 gleichförmig bewegte Systeme 206
 Gleichgewicht 16, 222, 297, 352f
 —, instabiles 353
 —, labiles oder indifferentes 370
 —, stabiles 353
 — —, Bedingungen für 353, 359
 —, statistisches 297
 Gleichungen der kanonischen Transformation 266ff, 286f
 GRAMMEL, R., WINKELMANN, M. und 179
 Gruppeneigenschaft 301
 Gyroskop 194
- HAMILTON, Sir W. R. 347
 HAMILTON-Funktion 240ff
 —, Änderung bei einer infinitesimalen Kontakttransformation 289
 —, Erhaltung der, bei der Δ -Variation 253
 — als Erzeuger der Bewegung in der Zeit 287
 — als eine Funktion der Wirkungsvariablen 322, 330
 — für geladene Teilchen 246
 — als Gesamtenergie 59, 229, 244f, 246
 — nicht gleich der Gesamtenergie 59f, 244
 — als kanonischer Impuls 269f, 311, 317
 — als Konstante der Bewegung 58, 229, 243f, 402
 — für kontinuierliche Systeme 399
 —, kovariante 247f, 262, 300
 —, Invarianz der, und Konstanten der Bewegung 289f
 —, POISSON-Klammer mit der 283f, 403
 —, relativistische 245f
 —, transformiert durch eine kanonische Transformation 265
 — für unendliche lineare Moleküle 399
 — als vierte Komponente des Weltimpulses 247
 —, zeitliche Ableitung der 240, 244, 248, 284, 402f
 — und zyklische Koordinaten 241, 243f
 HAMILTON-JACOBISCHE Gleichung 303ff
 —, Äquivalenz mit den kanonischen Gleichungen 305f
 — und Bahngleichungen 311
 —, beliebige konstante Impulse, erhalten aus der 305, 311f
 — liefert die HAMILTONSche charakteristische Funktion 311
 — für den harmonischen Oszillator 307
 —, mathematische Natur der Lösung der 303
 — und Quantenmechanik 347f
 —, Separation der Variablen in der 309, 314ff, 331f
 — und Theorie der partiellen Differentialgleichungen 305, 349
 —, Vergleich mit der Eikonalgleichung 345, 347
 — für Zentralkräfte 317f, 331f
 —, wenn H nicht explizit von der Zeit abhängt 309
 HAMILTON-JACOBISCHE Theorie 298, IX. Kapitel
 —, Vergleich der HAMILTONSchen Wirkungsfunktion mit der charakteristischen Funktion 312f
 HAMILTONSche charakteristische Funktion 310
 —, periodische Funktion, erhalten aus der 327
 —, separierte Form der 314
 — als unbestimmtes Integral der Wirkung 312
 HAMILTONSche Dichte 309
 — als eine Energiedichte 402



- für das Schallfeld in Gasen 402, 405
- HAMILTONSche Formulierung für das elektromagnetische Feld 408
- , Natur der 238
- HAMILTONSche Gleichungen, Ableitungen der 240, 249f, 399f
- für kontinuierliche Systeme 401, 412
- , kovariante 248
- mit Nebenbedingungen 300
- , Verfahren zum Aufstellen der 240f, 244f
- HAMILTONSches Prinzip 33ff, 43, 228, 249f, 306
- für das elektromagnetische Feld und geladene Teilchen 410
- und Feldtheorien 404f
- für kontinuierliche Systeme 389f
- in kovarianter Form 231
- für nichtkonservative und nicht-holonome Systeme 42f
- und Theorie der partiellen Differentialgleichungen 261, 299, 305, 349
- HAMILTONSche Wirkungsfunktion 303
- , Fortschreiten der, im Konfigurationsraum 341, 350
- und Teilchentrajektorien 342f
- als unbestimmtes Integral von L 306, 309
- HAMILTONSche Wirkungsfunktion und charakteristische Funktion, Vergleich der 312
- harmonischer Oszillator 50, 75, 272f, 307f, 319, 325, 327f, 350, 368f
- Hauptachsen 171f, 362
- Hauptachse der elliptischen Bahn 86f, 336
- Hauptachsentransformation 171f
- für kleine Schwingungen 362, 367
- Hauptquantenzahl 339
- Hermitizitätseigenschaft 124, 170, 357
- , Invarianz der, bei Ähnlichkeitstransformationen 124, 156
- Herpolhodie 178
- HERTZSches Prinzip der kleinsten Krümmung 260
- homographische Transformationen und CAYLEY-KLEINSche Parameter 155, 199
- HOOKEsches Gesetz 50, 387
- Impuls, Dreh- (*siehe* : Drehimpuls)
 - für elektromagnetische Kräfte 53, 230, 232, 248
 - , kanonischer 52, 229, 289f, 399f
 - , konjugierter 52
 - , linearer (*siehe* : linearer Impuls)
 - als unabhängige Variable in der HAMILTONSchen Formulierung 251f, 263f, 272
 - , Vierervektor 225
 - und Wellenlänge 347
- Impulsdichte 399
- für ein elektromagnetisches Feld 408
- Inertialsystem 149, 206
- infinitesimale Drehung 137ff, 286, 290
- , dargestellt durch einen Vektor 141f, 144–145
- , erzeugt durch den Drehimpuls 291
- in einer Ebene 139
- infinitesimale Kontakttransformation 286ff
- , funktionale Änderung bei einer 288f
- , Gleichungen der 287
- Integralinvarianten von POINCARÉ 274f
- Integralprinzipien 33
- Integrationskonstanten in der HAMILTON-JACOBIschen Gleichung 304, 311
- Intensität bei Streuproblemen 89
- invariable Ebene 178
- Invarianten kanonischer Transformationen 274, 277f, 281
- Invarianz physikalischer Gesetze gegenüber einer Drehung 215
- gegenüber einer LORENTZ-Transformation 207f, 216, 220, 230f
- Inversion 134, 142, 155
- isomorphe Sätze von Matrizen 125, 129

- JACOBI, C. G. J. 306
- JACOBIsche Determinante, Invarianz der, gegenüber kanonischer Transformation 275f (*siehe auch* : Determinante, JACOBIsche)
- JACOBIsche Form des Prinzips der kleinsten Wirkung 258
- JACOBIsche Identität 284f



- als Erzeugende der Konstanten der Bewegung 285, 294, 301
 JORDAN, P., BORN, M. und 295
- kanonische Gleichungen von HAMILTON 241 (*siehe auch*: HAMILTONSche Gleichungen)
 —, Äquivalenz der, mit den HAMILTON-JACOBISchen Gleichungen 305
 kanonischer Impuls (*siehe*: Impuls, kanonischer)
 kanonische Transformation, VIII. Kapitel, 265, 298–299
 —, Beispiele von 270ff, 299f
 —, Gleichungen der 266ff, 275f, 304
 — mit Gruppeneigenschaft 301
 — für den harmonischen Oszillator 272f
 —, infinitesimale 286
 —, Invarianten der 274f, 277f, 281
 —, Inversion der Gleichungen der 304f
 — auf konstante Koordinaten und Impulse 288, 203ff
 —, Vergleich zweier Verfahren 312f
 —, die Zeit enthaltende 269f
 — und zeitliche Bewegung 287
 — auf zyklische Koordinaten 263f, 274, 302, 310ff
 Kegelschnitte, als Bahnen bei Kräften mit dem reziproken Abstandsquadrat 86
 KEPLERSche Gesetze der Planetenbewegung 67, 88, 336
 KEPLER-Problem 83f, 331f, 348f
 —, Energie elliptischer Bahnen 337
 —, Entartung von Bahnen 336f, 339
 —, relativistisches 351
 Kettenlinie 39
 Kinematik 103
 kinetische Energie 3
 —, Dichte der, in Gasen 394
 —, Erhaltung der, in der speziellen Relativitätstheorie 225
 —, Form der, für kleine Schwingungen 354, 367
 —, homogene quadratische Form der 26, 59, 257
 — in der speziellen Relativitätstheorie 224f
 — und Trägheitsdyade 165
- , Zerlegungssatz für Systeme 9, 64, 159
 kinetische Theorie der Gase 77, 295f
 klassische Mechanik 1, 70, 89, 90, 98, 205, 263, 294, 338
 — als Teilgebiet der geometrischen Optik 345
 KLEIN, FELIX 121
 — und SOMMERFELD, A. 179, 184, 190, 194
 kleine Schwingungen, Eigenwertproblem für 355f
 — und elektrische Stromkreistheorie 380f
 —, erzwungene 374f
 —, freie, Lösungen 364f, 368
 — für kontinuierliche Systeme 352, 381, XI. Kapitel
 —, mehrfache Wurzeln bei 362f
 — von Molekülen 369f
 —, Normalkoordinaten für 365f
 —, Normalschwingungen 368
 —, Wirkung von Reibungskräften 376f
 —, Wirkung von Zwangskräften 382
 kleinste Wirkung, Prinzip der 252f (*siehe auch*: Prinzip der kleinsten Wirkung)
 Knotenlinie 120, 182, 337
 Kommutator 283, 294
 Konfigurationsraum 33
 —, Bewegung des Systempunktes im 33, 253, 256, 258f, 340f
 Kongruenztransformation 361
 Konsequente 163
 konservative Systeme 4
 Konstanten der Bewegung als Dichten von Gesamtheiten 297
 — als Erzeugende von infinitesimalen Kontakttransformationen 289
 — und POISSON-Klammern 284, 289, 297, 301
 — und Symmetrieeigenschaften 51f, 243f, 289
 Kontakttransformationen 265 (*siehe auch*: kanonische Transformationen, infinitesimale Kontakttransformationen)
 kontinuierliche Systeme 51, 352, 381
 —, kovariante Formulierung für 393
 —, Übergang auf, von diskreten Systemen 381, 385ff, 399f



- Kontinuumsgleichung für Energie- und Impulsdichte 404
 — für Gasstrom 397f
 Koordinaten, rotierende, Transformation auf 146f, 235
 —, zyklische (*siehe*: zyklische Koordinaten)
 Koordinatenachsen, rotierende 60, 149f, 199, 262, 300
 kovariante Feldtheorien 410
 kovariante Formulierungen 215f, 230f, 393
 kovariante HAMILTON-Funktion 247
 — für elektromagnetische Kräfte 248, 261
 kovariante LAGRANGE-Dichte 393
 kovariante LAGRANGE-Funktion für elektromagnetische Kräfte 232f, 262
 — für ein freies Teilchen 231f
 —, Willkür in der 232, 262
 Kovarianz 215f
 — der Wellengleichung 220
 Kräfte, äußere 5, 68, 173
 —, elektromagnetische 5, 22f, 52, 54, 220f, 229, 232, 236f, 246f
 —, generalisiert 19
 — — für konservative Systeme 20
 — —, Zwangs- 46
 —, innere 5
 — —, leisten keine Arbeit im starren Körper 11
 —, konservative 4
 —, mögliche Quellen von 222, 231, 249
 —, Reibungs- 24f, 77
 —, Stoß- 62
 Kraft 1
 —, definiert als zeitliche Ableitung des Impulses 1, 223
 —, effektive, in rotierenden Achsen 149
 —, entgegengesetzt wirkende effektive 18, 74
 —, Transformationseigenschaften der, in der speziellen Relativitätstheorie 221f
 Kraftgesetz der Form $1/r^2$ 81, 100, 336
 Kraftstoß 62
 Kraftzentrum 89
 Kreisel, asymmetrischer 199, 200
 —, geladener, im Magnetfeld 195f, 204
 —, „schlafender“ 193
 —, schneller 187
 —, schwerer symmetrischer 181ff, 262, 350
 — —, Anfangsbewegung des 187f, 189
 — —, anfangs vertikaler 192f
 — —, Ausmaß der Nutation 187f
 — —, Bedingung für reguläre Präzession 190, 202
 — —, Betrag des Drehimpulses 202
 — —, formale Lösung für den 184
 — —, Frequenz der Nutation des 189
 — —, Konstanten der Bewegung für den 183
 — —, mittlere Präzessionsfrequenz 189
 — —, Nutation 186, 190
 — —, schnelle und langsame reguläre Präzession 191
 Kreiselkompaß 194, 200, 203
 KRONECKERSCHES δ -Symbol 107

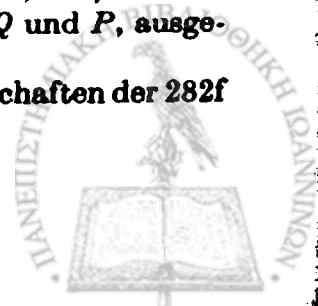
 Laboratoriumskordinaten, Transformation auf 94f
 LAGRANGESCHE Dichte 388
 — für das elektromagnetische Feld 406, 412
 — für Schallschwingungen in Gasen 397f, 405
 — für die SCHRÖDINGER-Gleichung 412
 LAGRANGESCHE Formulierung für kontinuierliche Systeme und Felder 388ff
 — für nichtmechanische Systeme 49, 405f
 — in der speziellen Relativitätstheorie 227ff
 LAGRANGE-Funktion 21
 — für elektrische Stromkreise 49
 — für elektromagnetisches Feld und geladene Teilchen 409
 — für kleine Schwingungen 355, 368
 — für kontinuierliche Systeme 388
 —, kovariante 230f, 262, 393
 — für relativistische Bewegung 228f
 — für Systeme geladener Teilchen 23, 229, 232, 409



- LAGRANGESche Gleichungen 16f, 20f, 40f
 —, Berücksichtigung von Reibungskräften 24
 — für das elektromagnetische Feld 407
 — für kontinuierliche Systeme 391f, 393
 — — in relativistischer Form 393
 —, kovariante 231
 LAGRANGE-Klammern 277f
 —, fundamentale 279, 300
 —, Invarianz der 278
 —, Zusammenhang mit den POISSON-Klammern 279f
 LAGRANGESche Multiplikatoren 15, 45, 173, 201
 LARMOR-Frequenz 197
 LARMORSches Theorem 197f, 204, 339
 Laufzeit, extreme 256
 LEGENDRESche Transformation 238f, 260, 267f, 299, 328
 LEVI-CIVITASche Dichte 142
 LEWIS, G. N. und TOLMAN, R. C. 223
 Libration 319, 325
 Licht (*siehe*: geometrische Optik oder Wellengleichung)
 LINDSAY, R. B. 77
 lineares dreiatomiges Molekül 369ff, 383
 —, entartete Schwingungen des 373f
 —, Frequenzen des 370
 linearer Impuls 1f
 —, Erhaltungssätze für den 2, 6, 56, 224, 412
 — von Feldern 412
 — in der speziellen Relativitätstheorie 224
 lineares Molekül, HAMILTON-Funktion des 399f
 —, LAGRANGE-Funktion und Bewegungsgleichung für das 386
 —, unendliches 385f
 lineare Transformation 108
 LIOUVILLEScher Satz 295f, 299
 LISSAJOUSsche Figuren 76, 321, 327, 374
 logarithmisches Potential 81
 LORENTZ-FITZGERALDSche Kontraktion 213.
 LORENTZ-Kraft 22f
 LORENTZ-Transformation 207f
 —, Ableitung der 208f
 —, aufeinanderfolgende 214
 — Bedingungen für die Matrixelemente der 210
 —, Berücksichtigung der räumlichen Drehung 209
 —, Gleichungen der 212
 —, inverse 212
 —, Matrix für die 212
 —, reine 209
 Luftzirkulation 152
 MACMILLAN, W. D. 184
 magnetisches Feld 22, 195, 237, 339
 — und Drehimpuls 195
 magnetische Quantenzahlen 339
 magnetische Steifheit 237
 Masse 1
 —, longitudinale 227
 —, reduzierte 65, 88
 —, transversale 227
 Massenzentrum 6
 —, Bewegung des, unabhängig von inneren Kräften 6
 —, Drehimpuls bezüglich des 8
 Matrix, adjungierte 116
 —, antisymmetrische 140, 156
 — und dreidimensionale Pseudovektoren 142, 144
 —, Einheits- 114
 —, einspaltige 113
 —, inverse 114
 —, orthogonale (*siehe*: orthogonale Matrix)
 —, schiefsymmetrische 140
 —, selbstadjungierte 124
 —, transponierte 116, 156
 —, unitäre 116, 122
 Matrixelemente 109
 Matrizenaddition 114
 Matrizenmultiplikation 113, 156
 MAUPERTIUS, PIERRE DE 256
 MAXWELLSche Gleichungen 22, 51, 406
 —, Ableitung der, von einer LAGRANGE-Funktion 406f
 Mechanik (*siehe unter*: analytische, klassische, Quanten-, statistische Mechanik)
 mehrfache Wurzeln, Aufstellen orthogonaler Eigenvektoren für 170, 363



- einer Säkulargleichung 136, 171, 362
 Merkur, Präzession des Perihels des 100, 237
 Mesonen 236, 410
 Million Elektronenvolt 30
 MINKOWSKI-Kraft 221f, 233
 MINKOWSKI-Raum 209
 Moderator 98
 modifiziertes HAMILTONSches Prinzip 249f, 265, 305, 412
 Molekül, lineares (*siehe* : lineares Molekül)
 —, lineares dreiatomiges (*siehe* : lineares dreiatomiges Molekül)
 Molekülschwingung 369f, 382f
 Molekülspektren 154, 352, 382f
 Multiplikation, dyadische 163
 MURNAGHAN, F. D., AMES, J. S. und 53
- Nachfaktor 163
 Nebenachse der elliptischen Bahn 87
 Neunerform von Dyaden 164
 Neutronen-Protonen-Streuung 97
 Neutronen-Reaktor 98
 NEWTONSches drittes Bewegungsgesetz 5
 —, elektromagnetische Kräfte als Ausnahme 5
 NEWTONSches zweites Bewegungsgesetz 1, 149, 206
 — in der speziellen Relativitätstheorie 222f
 Normalkoordinaten 366f
 — bei erzwungenen Schwingungen 374f
 —, kinetische und potentielle Energie, ausgedrückt durch 367
 —, LAGRANGE-Funktion und Bewegungsgleichungen in 368
 Normalschwingungen 368f
 — mit Frequenz Null 370f
 — eines linearen dreiatomigen Moleküls 371f
 —, Wirkung von Reibungskräften auf 377f
 Nutation 186, 194
 —, astronomische 194
- OLSON, H. F. 50
 Operatorkalkül 384
 Optik und klassische Mechanik 101, 256, 340ff (*siehe auch* : geometrische Optik)
 optische Weglänge 344
 orthogonale Matrix 109
 — als Drehoperator 131
 — zur Orientierung eines starren Körpers 109, 121, 126, 130
 —, den Trägheitstensor diagonalisierende 169
 orthogonale Transformation 108ff, 208f, 216, 264, 270f
 Orthogonalisierung von Eigenvektoren des Trägheitstensors 169f
 — für kleine Schwingungen 357, 359f
 Orthogonalitätsbedingungen 107, 109, 116f, 360
 Oszillator, harmonischer (*siehe* : harmonischer Oszillator)
- Paarerzeugung 226
 PAULISChe Spinmatrizen 128f, 155, 156
 Pendel, einfaches 320
 —, sphärisches 31, 76, 301
 Perihel 100, 237, 337, 339
 Periode der elliptischen Bahn 87, 336
 periodische Bewegung 318ff
 —, FOURIER-Entwicklung für die 325f
 — für einen Freiheitsgrad 319f
 —, Frequenz der, ausgedrückt durch Winkelvariable 325
 —, oszillatorische 319
 Phase 344, 346
 Phasenraum 274, 295f
 —, Invarianz des Volumens im 277, 297
 PIERCE, B. O. 84
 PLANCKSche Konstante 283, 338, 348
 Planetenbewegung 67, 88
 POINCARÉsches Integralinvarianten 274f, 297, 300
 POINSONSche Konstruktion 176f, 199, 202
 POISSON-Klammern 279, 298, 402
 —, Ableitungen nach Q und P , ausgedrückt durch 282
 —, algebraische Eigenschaften der 282f

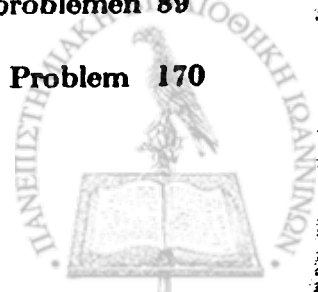


- , Bewegungsgleichungen, ausgedrückt durch 283f
- für den Drehimpuls 291f, 298, 301
- des Drehimpulses und eines Skalars 294
- , fundamentale 281f, 301
- mit H , Ableitungen nach der Zeit, ausgedrückt durch 283f, 403
- als kanonische Invarianten 282, 301
- zweier Komponenten des Drehimpulses 293f, 301
- und Konstanten der Bewegung 284, 285f, 301, 403
- , Zusammenhang mit den LAGRANGE-Klammern 279f
- Poissonscher Satz 285, 294
- Polhodie 178
- Postulat der Äquivalenz 207
- Potential 4
 - , elektromagnetisches 22, 222, 406
 - , generalisiertes 21
 - , geschwindigkeitsabhängiges 21
 - , logarithmisches 81
 - , willkürlicher Nullpunkt des 4
- potentielle Energie 4, 159
 - , Dichte der, in Gasen 394f, 397
 - , Form der, für kleine Schwingungen 354, 366
 - , gesamte 11
 - am Gleichgewicht 352f, 359
 - , innere 11
- Präzession der Äquinoktien 181, 193f, 202f
 - des Nordpols 181
 - des Perihels 100, 237, 339
- Präzession, astronomische 181, 202f
 - im homogenen Magnetfeld 195f, 204
 - , LARMOR- 197, 339
 - , pseudoreguläre 190, 191, 199
 - , „schnelle“ und „langsame“ 191
 - des schweren symmetrischen Kreiselers 186f
 - , THOMAS- 235
- Präzession der Rotationsachsen für den kräftefreien starren Körper 178f, 194, 201
- Prinzip der kleinsten Wirkung 252f, 345f
 - , JACOBIsche Form des 258
 - , Variationen des 256f
- Pseudoskalar 144
- Pseudovektor 144
- Punkttransformation 265, 271, 329f
- quadratische Formen, gleichzeitige Diagonalisierung von 368, 382
- Quantenbeziehungen für den Drehimpuls 294f
- Quantenelektrodynamik 51, 369
- Quantenmechanik 70, 89, 90, 93f, 98f, 107, 120, 122, 126, 130, 205, 247, 263, 294, 298, 338f, 347f
- Quantenzahlen 339
- Quantisierung von Feldern 51, 369, 410
- QUIMBY, S. L. 404
- radiale Quantenzahl 339
- räumliche Ableitungen in der LAGRANGE-Funktion für kontinuierliche Systeme 388f
- raumähnlicher Vierervektor 218
- Raketenantrieb 6, 30f, 236
- RAYLEIGH, Lord 381
- Reibung 24f, 77, 376f
- Reihenfolge endlicher Drehungen 137f
- relativistische HAMILTON-Funktion 229, 245f
- relativistischer Impuls 223f, 226f
- relativistische kinetische Energie 224f
- relativistische Masse 226
- Relativitätstheorie (*siehe*: spezielle Relativitätstheorie)
- Residuenmethode 334f, 348
- Resonanzerscheinungen 376, 380, 382
- Resonanzfrequenzen 364
 - , verschwindende 370
- Richtungskompaß 194
- Richtungskosinus zur Festlegung der Orientierung starrer Körper 105f
- Rollen, das 14–15, 47, 156, 173, 178, 199, 201
- Rotation, erzeugt durch den Drehimpuls 291
 - als Typ der periodischen Bewegung 320, 326
- Rotationsachse und Richtung des Drehimpulses 178f
- Rotationsfläche, minimale 38
- Rotationssymmetrie 56f, 243f, 290
- ROUTHsche Funktion 242



- ROUTH'sches Verfahren für zyklische Koordinaten 53, 241f
 Rückstoß 96f
 Ruheenergie 225
 Ruhemasse 226
 RUTHERFORD'sche Streuung 93f, 97, 101

 Säkular determinante 132, 356
 Säkulargleichung 132, 171, 356, 362
 Saite, Transversalschwingungen der 411, 412
 Schall (*siehe*: Akustik)
 Schallfeld 394f, 404, 405
 SCHERING, E. 21
 „schlafender“ Kreisel 193
 SCHRÖDINGER-Gleichung 51, 347, 412
 Schwebung 383
 Schwerezentrum 6
 SCHWINGER, J. 295
 Schwingungen, erzwungene (*siehe*: erzwungene Schwingungen)
 —, freie (*siehe*: freie Schwingungen)
 — eines Gases 394f
 —, kleine (*siehe*: kleine Schwingungen)
 — von Saiten und Membranen 381, 383
 — um stabile Bewegung 352, 382, 384
 — um stabiles Gleichgewicht 352ff
 —, Theorie der 50, X. Kapitel
 Schwingungsbewegung, Natur der 319
 Separation der Variablen, Abhängigkeit vom Koordinatensatz 315
 — in der HAMILTON-JACOBISCHEN Gleichung 309, 314ff, 331f
 — für kleine Schwingungen 366
 —, Möglichkeit der 316, 318, 349
 — bei zyklischen Koordinaten 316f
 Skalar als Tensor nullter Stufe 162
 SOMMERFELD, A. 265, 334, 338
 —, KLEIN, FELIX und 179, 184, 190, 194
 spezielle Relativitätstheorie 107
 — in der klassischen Mechanik 1, 205
 —, Programm der 208
 Spiegelung der Bahnen um die Umkehrpunkte 80
 Spiegelungsoperator 134
 Spin 10, 130, 197, 339
 Spinor 130
 Spur einer Matrix 124, 136
 —, Invarianz gegenüber Ähnlichkeitstransformation 124, 156
 starrer Körper 11, 234
 —, Bewegung des, allgemeine Verfahren zur Lösung 173f
 — —, in einer Ebene 173
 — —, kräftefreie 179f, 198, 201f
 — —, Zerlegung in Rotation und Translation 158f
 —, Drehimpuls des 159
 —, kinetische Energie des 165
 —, Orientierung des, beschrieben durch CAYLEY-KLEINSche Parameter 126
 — —, beschrieben durch EULERSche Winkel 121, 156
 — —, beschrieben durch Richtungskosinus 105
 —, symmetrischer, kräftefreie Bewegung des 179f
 —, Zahl der Freiheitsgrade des 103f
 Statik 17
 statistische Mechanik 263, 295f, 298
 stereographische Projektion 335
 Störungstheorie 338, 339, 340, 348, 349
 Stoßparameter 90
 Strahlantrieb 6
 Strahlen 345
 STRATTON, J. A. 195
 Streuungsquerschnitt 89
 —, differentieller 90
 — in Laboratoriumskordinaten und in Schwerpunktskordinaten 97
 —, totaler 93
 —, unendlicher Wert des, in der klassischen Mechanik 93
 Streuung durch ein COULOMB-Feld 91f
 —, elastische 97, 223
 —, inelastische 99, 226
 —, Übertragung von kinetischer Energie bei der 97
 —, Unterschiede zwischen klassischer Mechanik und Quantenmechanik bei der 89
 Streuwinkel, formale Lösung für den 101
 — in Laboratoriumskordinaten 94
 — in Schwerpunktskordinaten 90, 95
 Stromdichte, bei Streuproblemen 89
 Stufenpotential 101
 STURM-LIOUVILLESches Problem 170



- Symmetrieeigenschaften von Bahnen
bei Zentralkräften 80
— der HAMILTON-Funktion 289
— von Systemen und Erhaltungssätze
51f, 56, 57, 243, 289
symmetrischer Kreisel (*siehe*: Kreisel,
schwerer symmetrischer)
Systeme, Invarianzeigenschaften von
57f, 289f
—, kontinuierliche (*siehe*: kontinuierliche
Systeme)
- Teilchen, Erhaltungssätze für ein 2f
—, Ladungsdichte für ein 408
—, Mechanik eines 1f
Tensoren 161f, 216
—, metrische 258, 343, 361
Thermodynamik 239, 260, 395f
THOMAS-Präzession 235
Trägheitsellipsoid 172, 176f, 367
—, Bewegung des, auf der invariablen
Ebene 177f
Trägheitsmoment 165
—, äquivalente Definitionen des 165f
—, Haupt- 171
—, Koeffizienten des 160
— um parallele Achsen 167
Trägheitsprodukte 160
Trägheitsradius 172
Trägheitstensor 162f, 165, 198, 367
—, Eigenwertproblem für den 168f
—, Hermitizitätseigenschaft des 168
—, Orthogonalität der Eigenvektoren
des 170
—, Verschiebung des Bezugspunktes
des 200f
Trajektorien im Konfigurationsraum
342f
— von Lichtstrahlen 345
Transformation, identische 115, 271,
300, 317
—, kanonische (*siehe*: kanonische
Transformation)
—, lineare 108
—, orthogonale (*siehe*: orthogonale
Transformation)
— zwischen körperfesten und raum-
festen Koordinatenachsen 105f, 146f
— von Schwerpunktskoordinaten auf
Laboratoriumskoordinaten 95f
- Transformationsmatrix 109
— als Operator, der auf einen Vektor
oder auf die Koordinatenachsen
wirkt 111
Translationssymmetrie 54f, 370, 383
- Umkehrpunkte 72, 85, 185
Umwandlung von Masse in kinetische
Energie 225f
uneigentliche Drehung 135, 142, 144
- VAN VLECK, J. H. 333
Variation 34, 36, 250
—, ausgedrückt durch Funktionalab-
leitungen 392f, 400f
— einschließlich der Zeit 250f
— der Endpunkte 41, 253
— für konstante Zeit 33f, 250
— für kontinuierliche Systeme 389f
—, Zusammenhang zwischen δ - und
 Δ -Prozessen 254
Variationsprinzipien für Felder 404f,
410
— für kontinuierliche Systeme 389f
—, Vorteile der 48ff, 228, 249, 260, 410
Variationsrechnung 35ff, 40f, 61f
—, Parametermethode in der 35, 250,
253, 389
Vektor, axialer 144
— als Tensor erster Stufe 162
Vektorfunktionen, die den POISSON-
Klammern für den Drehimpuls ge-
nügen 293
Vektorpotential 22, 406
Vektortransformationen 108
Vertauschungstransformationen 272,
300
vertikale Richtung, Definition der 150
vierdimensionaler Raum 200, 209f
Vierergeschwindigkeit 219
Vierergradient 220
Vierervektor 216
— Potential 222
—, raum- oder zeitähnlicher 218
Virial, CLAUSIUSsches 77
Virialsatz 76f, 86, 99, 100, 237
virtuelle Arbeit, Prinzip der 17
— für veränderliche Zwangsbedingun-
gen 59f



- virtuelle Verrückung 16, 18, 37, 250
 vollständige Entartung für geschlossene Bahnen 329, 336, 339
 Volumen im Phasenraum 277, 296
 Vorfaktor 163
- WATSON, G. N., WHITTAKER, E. T. und 82
 WEBERSche Elektrodynamik 21, 31, 262
 WEBSTER, A. G. 53, 179
 Wechselwirkung zwischen geladenen Teilchen und Feld 410
 Weglänge, Element der 258
 Wellen, akustische 398
 —, ebene 344f
 Wellenbewegung und klassische Mechanik 340ff, 347f
 Wellenfronten 341
 Wellenfunktion 130, 347
 Wellengeschwindigkeit der Flächen mit konstantem S 341f
 — und Systemgeschwindigkeit 342
 Wellengleichung für Licht 207, 220, 344, 347
 — für Schall in Gasen 398, 405
 Wellenlänge und Impuls 347
 —, Zusammenhang der, mit der klassischen Mechanik 345f
 Wellenmechanik 340, 348
 Wellenzahl 344
 Welt-Geschwindigkeit 219
 Welt-Impuls 225
 Welt-Linie 217
 Welt-Raum 209
 Welt-Skalar 216
 Welt-Vektor 216
 Welt-Zeit 217
 WHITTAKER, E. T. 21, 34, 126, 184
 — und WATSON, G. N. 82
 Winkelgeschwindigkeit 29, 147
 — und EULERSche Winkel 148, 156
 —, Präzession der, für den kräftefreien symmetrischen starren Körper 180
 —, Vektor der, und Richtung des Drehimpulses 177
 WINKELMANN, M. und GRAMMEL, R. 179
 Winkelvariable 323, 368
 — für das KEPLER-Problem 337, 351
 —, Lösung für 323
 Wirkung 252, 312, 322
 —, Fern- 231, 233
 Wirkungsquantum 338
 Wirkungsvariable 318f, 322f
 —, Änderung der, während einer Periode 323f
 —, Definition der 322
 —, Dimension eines Drehimpulses 324, 333
 —, Eigen- 339
 — für das KEPLER-Problem 332f, 351
 —, Verwendung der Residuenmethode zur Bestimmung der 334, 348
 — für zyklische Koordinaten 322f
 Wirkungs- und Winkelvariable für allgemeine mehrfach periodische Systeme 328
 — für den harmonischen Oszillator 325f
 —, Geschichte der Anwendung der 338f
 — im KEPLER-Problem 331f
 — beim Vorliegen von Entartung 328ff, 336
 Wurzeln, mehrfache (*siehe*: mehrfache Wurzeln)
- YOUNG'Scher Modul 387
- ZEEMAN-Effekt 339
 Zeit als kanonische Koordinate 233, 269, 300, 311, 317
 —, kanonische Transformationen, die die, enthalten 269f, 300
 —, Transformation der, in der speziellen Relativitätstheorie 209, 213f
 — als vierte Dimension im MIN-KOWSKI-Raum 209
 zeitähnlicher Vierervektor 218
 zeitliche Ableitungen im raumfesten und im körperfesten Achsensystem 146f
 ZEMANSKY, M. W. 396
 Zentralkräfte, äquivalentes eindimensionales Problem für 71f, 100



- , äquivalentes Einkörperproblem für 64
- , Bahngleichung für 78f, 317f
- , Bahnen, die durch elliptische Funktionen ausgedrückt werden können 82f
- , erste Integrale für 66f
- , formale Lösung für 69, 317
- , Integrationskonstanten für 69
- , integrierbare Potenzgesetze für 81f
- , Klassifikation der Bahnen für 72ff
- in der speziellen Relativitätstheorie 230, 336
- in sphärischen Polarkoordinaten 66, 318, 331f
- , Streuung durch 89ff
- , Symmetrieeigenschaften der 65f
- Zentralkraftbewegung III. Kapitel, 245, 261, 315, 317f, 331f
- , Entartung der 334, 339
- , Gesetz des reziproken Abstandsquadrats 83ff, 331ff
- in der HAMILTON-JACOBISCHEN Form 317f, 331f
- Zentrifugalbarriere 72, 99
- Zentrifugalkraft 27, 71, 150f
- Zustandsgleichung 77, 99
- Zwangsbedingungen 11f, 234
- , Beispiele von 12–15, 28f
- , Differentialgleichungen für 15, 44
- , holonome 12, 44, 46f, 173
- , nichtholonome 12, 44, 46, 173
- —, das Rollen als Beispiel für 14–15, 156, 173
- , nichtintegrierbare 15, 156
- , rheonome 13
- , Schwierigkeiten, hervorgerufen durch 13, 234
- , skleronome 12
- , veränderliche 28, 60
- , verschwindende virtuelle Arbeit für 17
- zweite Ableitungen in der LAGRANGE-Funktion 61f
- zyklische Koordinaten 53, 183, 241
- und Erhaltung des konjugierten Impulses 53, 229, 243
- , kanonische Transformation auf 263f, 274, 302, 310ff
- , Separation der Variablen für 316f
- , Wirkungsvariable für 322f, 333
- Zyklon 152



studien—texte

Physik

U. Gradmann/H. Wolter, Marburg a. d. Lahn

Grundlagen der Atomphysik

1971. X, 302 S. mit 138 Abbn., 15 Tabn., Snolin DM 19,80.
ISBN 3-400-00136-8.

G. Grawert, Marburg a. d. Lahn

Quantenmechanik I

1969. VIII, 172 S. mit 11 Abbn., Snolin DM 9,80. ISBN 3-400-00025-6.

G. Grawert, Marburg a. d. Lahn

Quantenmechanik II

1969. VII, 180 S. mit 11 Abbn., mit Register zu den Teilen I und II, Snolin
DM 9,80. ISBN 3-400-00026-4.

S. Großmann, Marburg a. d. Lahn

Funktionalanalysis I

1970. XV, 158 S. mit 13 Abbn., Snolin DM 9,80. ISBN 3-400-00023-X.

S. Großmann, Marburg a. d. Lahn

Funktionalanalysis II

1970. XI, 158 S., mit Register zu den Teilen I und II, Snolin DM 9,80.
ISBN 3-400-00024-8.

W. Ludwig, Gießen

Einführung in die Festkörperphysik I

1970. X, 206 S. mit 63 Abbn., Snolin DM 14,80. ISBN 3-400-00003-5.

W. Ludwig, Gießen

Einführung in die Festkörperphysik II

1970. XIV, 216 S. mit 95 Abbn., mit Register zu den Teilen I und II,
Snolin DM 14,80. ISBN 3-400-00004-3.

W. Martienssen, Frankfurt am Main

Einführung in die Physik I (Mechanik)

1969. XII, 128 S. mit 125 Abbn., mit Register zu Teil I, Snolin DM 9,80.
ISBN 3-400-00019-1.

W. Martienssen, Frankfurt am Main

Einführung in die Physik II (Elektrodynamik)

1970. VIII, 144 S. mit 135 Abbn., mit Register zu Teil II, Snolin DM 9,80.
ISBN 3-400-00020-5.

W. Martienssen, Frankfurt am Main

Einführung in die Physik III (Materiephysik)

1972. Ca. 200 S. mit ca. 180 Abbn., mit Register zu Teil III, Snolin
DM 14,80. ISBN 3-400-00146-5.



**Akademische Verlagsgesellschaft
Frankfurt am Main**



DM 39

1934
Prof. Juan
Kad. E. E. E.

H. Volz, Erlangen

Einführung in die Theoretische Mechanik I

Mechanik der Kräfte

1971. XI, 290 S. mit 108 Abbn., Gr.-8°, Linson DM 29,—.
ISBN 3-400-00036-1

Das Werk ist aus einer Vorlesung für Studierende der Physik im 3. Semester hervorgegangen. Es behandelt die Mechanik der Newtonschen Bewegungsgleichung und des D'Alembertschen Prinzips. Auf den Hauptthemen (Massenpunkt, Punktsysteme, starrer Körper) aufbauend, bringt schon der eigentliche Textteil eine Reihe von grundsätzlich wichtigen und bisher vielfach noch nicht in dieser Form zugänglichen Anwendungen. Das letzte Drittel des Buches ist Beispielen gewidmet, die im einzelnen durchdiskutiert werden. Dabei werden auch in „konventionellen Fällen“ manche neue Aspekte sichtbar. — Das Werk geht nur gelegentlich über elementare mathematische Hilfsmittel hinaus.

H. Volz, Erlangen

Einführung in die Theoretische Mechanik II

Lagrange-Hamiltonsche Mechanik und Ansatzpunkte der Quantentheorie

1972. Ca. 250 S. mit ca. 100 Abbn., Gr.-8°, Linson ca. DM 29,—.
ISBN 3-400-00037-X.

Von dem Fall diskreter Freiheitsgrade aus wird der Übergang zu den Bewegungen des Kontinuums vollzogen, wobei sich die Wellengleichungen der Optik und der Mechanik als einfachste Fälle herausstellen. Punktmechanische und feldtheoretische Erhaltungsgrößen ergeben sich dabei nach einheitlichen Gesichtspunkten. Sowohl von der Punkt- wie von der Kontinuumstheorie her werden die Wurzeln der „Quantelung“ aufgezeigt und bis zur Herleitung der punkt- bzw. feldtheoretischen Vertauschungsrelationen geführt.

Interessentenkreis:

Studierende der Physik, Physiker, Techniker, Lehrer.



**Akademische Verlagsgesellschaft
Frankfurt am Main**

