Ομογενείς και Ανισότροπες Κοσμολογίες τύπου Bianchi IX και Μελέτη της Συνδεσιμότητάς τους με τις Κοσμολογίες FRW

Υβόννη-Χριστίνα Ευαγγέλου

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Ιωάννινα 2009

Επιβλέπων:

Κολάσης Χαράλαμπος
Επίκουρος Καθηγητής
Τμήμα Φυσικής
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή:

1. Κολάσης Χαράλαμπος
   Επίκουρος Καθηγητής
   Τμήμα Φυσικής
   Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

2. Περιβολαρόπουλος Λέανδρος
   Αναπληρωτής Καθηγητής
   Τμήμα Φυσικής
   Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

3. Χριστοδουλάκης Θεοδόσης
   Αναπληρωτής Καθηγητής
   Τμήμα Φυσικής
   Πανεπιστήμιο Αθηνών

0.1 Ευχαριστίες

Καταρχάς θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα Επίκουρο Καθηγητή κ.Χ.Κολάση για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε, για την πολύτιμη βοήθειά του, την υποστήριξη, καθώς και την τεράστια υπομονή του στο διάστημα της συνεργασίας μας.

Ευχαριστώ επίσης τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ.Λ.Περιβολαρόπουλο και τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ.Θ.Χριστοδουλάκη, μέλη της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής, για τις εύστοχες και χρήσιμες παρατηρήσεις τους που συντέλεσαν στη βελτίωση της παρούσας εργασίας.

Ακόμη ευχαριστώ πολύ τη γραμματέα του Τομέα Θεωρητικής Φυσικής κα.Φ.Φούζα για τη βοήθεια και την υποστήριξή της, καθώς και τους συναδέλφους και φίλους μου μεταπτυχιακούς και διδακτορικούς φοιτητές του Τμήματος Φυσικής που με στήριξαν και με βοήθησαν κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για τη βοήθεια και τη συμπαράσταση της καθ'όλη τη διάρκεια των πανεπιστημιακών μου σπουδών.

Υβόννη Ευαγγέλου

0.2 Περίληψη

Στην εργασία αυτή μελετήσαμε τους χωροχρόνους Bianchi IX στα πλαίσια της θεωρίας της Γενικής Σχετικότητας, χρησιμοποιώντας τις μεθόδους της 1+3 συναλλοίωτης περιγραφής και του τετραδικού φορμαλισμού και επιχειρήσαμε να συνδέσουμε ένα χωροχρόνο Bianchi IX με διαγώνια τετραδική μετρική του οποίου το υλικό περιεχόμενο περιγράφεται από ένα ιδανικό ρευστό με ένα χωροχρόνο FRW θετικής καμπυλότητας, κατά μήκος μιας υπερεπιφάνειας σταθερού χρόνου.Για τη σύνδεση αυτή χρησιμοποιήσαμε τις συνθήκες σύνδεσης του Lichnerowicz

Σύμφωνα με τα μέχρι σήμερα παρατηρησιακά δεδομένα, το σύμπαν σε μεγάλη κλίμακα είναι κατά μέσο όρο ομογενές και ισοτροπικό.Παρόλα αυτά δεν υπάρχουν σοβαροί λόγοι να υποθέτουμε ότι το σύμπαν ήταν ομογενές και ισοτροπικό και κατά τα αρχικά του στάδια.Σκοπός μας ήταν, μέσω της σύνδεσης που περιγράψαμε, να φτιάξουμε ένα κοσμολογικό μοντέλο το οποίο μετά την αρχική ανωμαλία εξελίσσεται ως ομογενές και ανισοτροπικό και κάποια χρονική στιγμή μετατρέπεται σε ομογενές και ανισοτροπικό.Αν και από πρώτη άποψη οι συνθήκες σύνδεσης φαίνεται ότι θα ήταν δυνατόν να ικανοποιηθούν τελικά αποδεικνύεται ότι στη γειτονιά της υπερεπιφάνειας σύνδεσης η μετρική αλλάζει χαρακτηριστική και η σύνδεση καθίσταται ανέφικτη.

Η διατριβή ξεκινά με μία ιστορική αναδρομή στην εξέλιξη της σχετικιστικής κοσμολογίας.Στα κεφάλαια 2 και 3 αναλύουμε τις γνωστές μεθόδους της 1+3 συναλλοίωτης περιγραφής και του τετραδικού φορμαλισμού, οι οποίες αποτελούν χρήσιμα εργαλεία για τη μελέτη των κοσμολογικών χωροχρόνων.Στο κεφάλαιο 4 παραθέτουμε την ταξινόμηση των κοσμολογικών μοντέλων σύμφωνα με τις συμμετρίες τους.Στο κεφάλαιο 5 μελετάμε την οικογένεια χωροχρόνων Bianchi στα πλαίσια της 1+3 συναλλοίωτης περιγραφής και του τετραδικού φορμαλισμού.Στα κεφάλαια 6 και 7 εφαρμόζουμε τις μεθόδους αυτές για τη μελέτη των χωροχρόνων Bianchi IX και FRW αντίστοιχα.Τέλος στο κεφάλαιο 8 εξετάζουμε τη δυνατότητα σύνδεσης ενός χωροχρόνου Bianchi IX με διαγώνια τετραδική μετρική του οποίου το υλικό περιεχόμενο είναι ένα ιδανικό ρευστό και ενός χωροχρόνου FRW θετικής καμπυλότητας, κατά μήκος μιας χωροειδούς ομογενούς υπερεπιφάνειας σταθερού χρόνου, χρησιμοποιώντας τις συνθήκες σύνδεσης Lichnerowicz.Η εργασία ολοκληρώνεται με τα συμπεράσματα στο κεφάλαιο 9.Το παράρτημα Α περιέχει αποδείξεις σχέσεων και θεωρημάτων που δεν περιλαμβάνονται στο κυρίως κείμενο.

0.3 Abstract

In this thesis we studied the Bianchi type IX spacetimes in the framework of General Relativity by using the 1+3 covariant decomposition and the tetrad formalism.Our aim was to match a Bianchi IX spacetime with diagonal tetrad metric whose matter content is a perfect fluid, with a FRW spacetime of positive curvature, throught a spacelike homogeneous hypersurface of constant time.For this matching we used the junction conditions of Lichnerowicz.

According to the available today observational data the universe in large scale is homogeneous and isotropic in average.Despite that, there are no serious reasons to assume that the universe was also homogeneous and isotropic at its early stages.By the matching we described above, we attempted to create a cosmological model which, after the initial singularity, evolves as homogeneous and anisotropic and at some instant of time becomes homogeneous and isotropic.Even though at first it seemed possible to satisfy the junction conditions, it was finally proved that at a neighborhood of the matching hypersuface the signature of the metric changes and as a result the matching becomes impossible.

The thesis begins with a historical review of the evolution of relativistic cosmology.In chapters 2 and 3 we analyse the known methods of 1+3 covariant decomposition and tetrad formalism, which are very useful tools for the study of cosmological models.In chapter 4 we give the classification of spacetimes according to their symmetries.In chapter 5 we study the family of Bianchi spacetimes within the framework of 1+3 covariant description and tetrad formalism.In chapters 6 and 7 we employ these methods in order to study the the Bianchi IX and FRW spacetimes respectively.In chapter 8 we examine the possibility of the matching of a Bianchi IX spacetime with diagonal tetrad metric whose matter content is a perfect fluid and a FRW spacetime of positive curvature, by using the junction conditions of Lichnerowicz.The thesis ends with concluding remarks in chapter 9.Appendix A contains proofs of equations and theorems that were omitted from the main text.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Ιστορική Αναδρομή

Η κοσμολογία είναι η μελέτη του σύμπαντος ως συνόλου.Μια επιστήμη που αντιμετωπίζει ολόκληρους γαλαξίες σαν να είναι μικρά αντικείμενα μπορεί με την πρώτη ματιά να φαίνεται αποκομμένη από τα ενδιαφέροντα της ανθρωπότητας.Παρόλα αυτά η κοσμολογία ασχολείται με ζητήματα τα οποία παραπέμπουν σε ερωτήματα που είναι θεμελιώδη για την ανθρωπότητα, π.χ. από πού προερχόμαστε, πού πάμε και τι είμαστε.Οι κοσμολόγοι θέτουν ερωτήσεις όπως: Από τι είδους ύλη αποτελείται το σύμπαν;Είναι άπειρο ή πεπερασμένο;Είναι στατικό η διαστελλόμενο;Είχε μια αρχή στο παρελθόν και θα έχει ένα τέλος στο μέλλον;Είναι επίπεδο, ανοιχτό ή κλειστό;Πώς σχηματίστηκαν οι διάφορες δομές όπως π.χ οι γαλαξίες;Δηλαδή η κοσμολογία προσπαθεί να περιγράψει το παρελθόν, να εξηγήσει το παρόν και να προβλέψει το μέλλον του σύμπαντος.

Αν και αρχικά υπήρξε καθαρά φιλοσοφική και ακόμη και στις αρχές του εικοστού αιώνα αρκετα υποθετική, η κοσμολογία σταδιακά εξελίχθηκε σε ξεχωριστό επιστημονικό κλάδο χάρη στην πρόοδο των αστρονομικών παρατηρήσεων και στη διατύπωση της Γενικής Θεωρίας την Σχετικότητας.

Η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας προτάθηκε από τον Einstein το 1915 και βασίζεται στις έννοιες της Διαφορικής Γεωμετρίας Riemann.Είναι μία κλασική θεωρία, δηλαδή όχι κβαντική, η οποία αντιμετωπίζει τα βαρύτικα φαινόμενα ως εκδηλώσεις της " τοπικής " καμπύλωσης του τετραδιάστατου χωροχρόνου, που οφείλεται στην τοπική κατανομή της συνολικής πυκνότητας όλων των μορφών μάζας (και ενέργειας).Η καμπύλωση αυτή εκφράζεται μέσω του μετρικού τανυστή g, ο οποίος περιέχει πληροφορίες για τις απειροστές φυσικές αποστάσεις στις τέσσερεις διαστάσεις.Η σχέση αυτή της γεωμετρίας του χωροχρόνου με την πυκνότητα της ύλης που περιέχει αποδίδεται από τις Εξισώσεις Πεδίου του Einstein.

Από τη διατύπωσή της μέχρι σήμερα, η αποτελεσματικότητα της Γενικής Σχετικότητας έχει ελεχθεί με άμεσο και έμμεσο τρόπο και έχει δώσει πολύ ακριβή αποτελέσματα ως προς την ανάλυση και πρόβλεψη των βαρυτικών αλληλεπιδράσεων στο ηλιακό μας σύστημα και σε γαλαξιακή κλίμακα.Ωστόσο, από την αρχή της διατύπωσης της και ξεκινώντας με τον ίδιο τον Einstein, η Γενική Σχετικότητα θεωρήθηκε ότι παρέχει ένα ισχυρό υπόβαθρο για τη διατύπωση ενός μοντέλου του σύμπαντος συνολικά.Ο κλάδος της σύγχρονης φυσικής που ασχολείται με τη μελέτη του σύμπαντος στα πλαίσια της Γενικής Σχετικότητας ονομάζεται Σχετικιστική Κοσμολογία.

Θα πρέπει εδώ να κάνουμε δύο παρατηρήσεις.Πρώτον, σε κοσμολογικές κλίμακες η κυρίαρχη δύναμη που καθορίζει την εξέλιξη του σύμπαντος είναι η βαρύτητα.Η ασθενής και η ισχυρή πυρηνική δύναμη είναι δυνάμεις μικρής εμβέλειας (μικρότερης των $10^{-18}m$ και $10^{-15}m$ αντίστοιχα).Η βαρυτική και η ηλεκτρομαγνητική δύναμη έχουν μεγάλη εμβέλεια.Σε μικρές αποστάσεις η βαρυτική δύναμη είναι αμελητέα σε σύγκριση με την ηλεκτρομαγνητική.Σε μεγάλες κλίμακες όμως το σύμπαν είναι ηλεκτρικά ουδέτερο.Επιπλέον τα διαγαλαξιακά μαγνητικά πεδία είναι αρκετά μικρά ώστε οι μαγνητικές δυνάμεις να θεωρούνται κι αυτές αμελητέες σε κοσμολογική κλίμακα.Επομένως η βαρύτητα, η ασθενέστερη από όλες τις αλληλεπιδράσεις από τη σκοπιά της φυσικής στοιχειωδών σωματιδίων, είναι η δύναμη που καθορίζει την εξέλιξη του σύμπαντος τουλάχιστον κατά το μεγαλύτερο μέρος τη ιστορίας του.

Δεύτερον, θα πρέπει να πούμε ότι είναι δυνατόν να διατυπώσουμε μία κοσμολογία που να βασίζεται στη Νευτώνεια αντίληψη για τη βαρύτητα, η οποία, με την προσθήκη κάποιον ειδικών υποθέσεων, μπορεί να μας δώσει αποτελέσματα παρόμοια με αυτά της σχετικιστικής κοσμολογίας.Είναι αξιοσημείωτο όμως ότι η εφαρμογή της Νευτώνειας θεωρίας για τη βαρύτητα στην κοσμολογία έγινε μόνο αφού η σχετικιστική κοσμολογία είχε ήδη εδραιωθεί.

Σκοπός της κοσμολογίας είναι να βρει ένα (μαθηματικό) μοντέλο που να περιγράφει το σύμπαν.Προφανώς ένα τέτοιο μοντέλο θα πρέπει να βρίσκεται σε συμφωνία με τα παρατηρησιακά δεδομένα.Όπως είναι φυσικό αρχικά προσπαθούμε να βρούμε ένα αρκετά απλό μοντέλο του σύμπαντος μελετώντας μόνο τα κύρια χαρακτηριστικά του και εξομαλύνοντας τις όποιες τοπικές " ανωμαλίες ", όπως είναι το ηλιακό σύστημα, οι γαλαξίες κλπ και εξετάζοντας μόνο τη συνολική δυναμική του συστήματος.Όταν βρούμε αυτό το μοντέλο μπορούμε να εισάγουμε τις διάφορες " λεπτομέρειες " ώστε να καταλήξουμε σε μια πιο πλήρη θεωρία.

Πολύ σημαντικό ρόλο στην εύρεση του κοσμολογικού αυτού μοντέλου διαδραματίζει η λεγόμενη Κοσμολογική Αρχή, σύμφωνα με την οποία το σύμπαν δεν διαφέρει στο χώρο από σημείο σε σημείο.Πρόκειται για μια γενίκευση της Αρχής του Κοπέρνικου, ο οποίος υποστήριξε ότι η Γη δεν είναι το κέντρο του ηλιακού συστήματος.Στο ίδιο πνεύμα δεν περιμένουμε ούτε η Γη, ούτε το ηλιακό μας σύστημα, ούτε ο Γαλαξίας μας, ούτε ακόμη και το τοπικό σμήνος γαλαξιών να καταλαμβάνει κάποια ξεχωριστή θέση στο σύμπαν.Δηλαδή δεν υπάρχει κέντρο του σύμπαντος!Η κοσμολογική αρχή συνεπάγεται ότι το σύμπαν είναι ομογενές και ισοτροπικό, δηλαδή δεν υπάρχουν προτιμητέες θέσεις και κατευθύνσεις στο χώρο.Είναι μια απλουστευτική αρχή αφού προφανώς το σύμπαν είναι ομογενές και ισοτροπικό μόνο κατά μέσο όρο και μόνο σε μεγάλες κλίμακες ($> 100Mpc$).Η υπόθεση αυτή ξεκίνησε από τον Einstein το 1931 και ονομάστηκε έτσι από τον Edward Milne το 1933.

Στις αρχές του εικοστού αιώνα υπήρχαν πολύ λίγα αξιόπιστα παρατηρησιακά δεδομένα.Την εποχή που ο Einstein εργαζόταν πάνω στην εύρεση ενός μοντέλου για το σύμπαν τα αστρονομικά δεδομένα που είχε στη διάθεσή του καταδείκνυαν ότι το σύμπαν περιείχε μόνο ύλη και ακτινοβολία και ήταν στατικό, δηλαδή δεν υπήρχε καθόλου συνολική διαστολή ή συστολή (εκτός φυσικά από τις τοπικές κινήσεις όπως αυτές των πλανητών γύρω από τον ήλιο).Βασιζόμενος σε αυτά τα δεδομένα και επηρεασμένος από τις κυρίαρχες φιλοσοφικές αντιλήψεις της εποχής του, ο Einstein (και άλλοι όπως ο De Sitter) πρότεινε το 1917 ένα στατικό και υψηλής συμμετρίας μοντέλο του σύμπαντος.Όμως οι αρχικές του εξισώσεις για το βαρυτικό πεδίο δεν επέτρεπαν μια στατική λύση για ένα σύμπαν το οποίο περιλαμβάνει μία πεπερασμένη ποσότητα μάζας και ακτινοβολίας.Ένα τέτοιο σύμπαν θα έπρεπε είτε να διαστέλλεται είτε να συστέλλεται, αφού αν αρχικά ήταν στατικό τότε κάποια στιγμή θα άρχιζε να συστέλλεται κάτω από την επίδραση της βαρύτητας.Το μόνο επιτρεπτό στατικό σύμπαν ήταν ένα άδειο σύμπαν.Έτσι ο Einstein αναγκάστηκε να προσθέσει στις εξισώσεις του έναν επιπλέον όρο ο οποίος στη συνέχεια ονομάστηκε Κοσμολογική Σταθερά.Η επίδραση της κοσμολογικής σταθεράς ήταν να προσθέσει στην αμοιβαία βαρυτική έλξη μεταξύ των σωμάτων του σύμπαντος μία απωστική δύναμη αρκετή ώστε να παράγει στατική ισορροπία.

Αμέσως ξεκίνησε μία διαμάχη σχετικά με τη φυσική σημασία της κοσμολογικής σταθεράς.Ακόμη και ο ίδιος ο Einstein δεν ήταν ευχαριστημένος με την εισαγωγή της κοσμολογικής σταθεράς στις εξισώσεις του αφού θεωρούσε ότι ήταν "σοβαρά επιβλαβής για τη συμμετρική ομορφιά της θεωρίας ".

Την επόμενη δεκαετία, χαρη στη δουλειά του Friedmann (1922) και του Lemaitre (1927) αποδείχθηκε ότι οι εξισώσεις του Einstein, είτε στην αρχική τους μορφή είτε με την κοσμολογική σταθερά, επέτρεπαν μη στατικές λύσεις.Ο Friedmann έδειξε ότι οι εξισώσεις επέτρεπαν μια λύση διαστολής ή συστολής του σύμπαντος με σταθερή καμπυλότητα.Αυτό το σύμπαν θα μπορούσε να έχει αρνητική ή μηδενική καμπυλότητα και να είναι άπειρης χωρικής έκτασης (ανοιχτό) ή να έχει θετική καμπυλότητα και να είναι πεπερασμένου συνολικού όγκου (κλειστό) που αυξάνεται ή μειώνεται με το χρόνο.Τα μοντέλα αυτά, που ονομάζονται μοντέλα Friedmann αποτελούν λύσεις μιας συνήθους διαφορικής εξίσωσης πρώτου βαθμού που προκύπτει από τις εξισώσεις του Einstein και ονομάζεται εξίσωση Friedmann.Ο Lemaitre πρότεινε μια θεωρία αρχέγονης έκρηξης (που αργότερα εξελίχθηκε στη θεωρία της Μεγάλης Εκρηξης) για την προέλευση του σύμπαντος, σύμφωνα με την οποία το σύμπαν ξεκίνησε ως μια πολύ πυκνή κατάσταση ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας και ύλης και καθώς διαστελλόταν και κρύωνε οι γαλαξίες και οι αστέρες συμπυκνώθηκαν υπό την έπίδραση της βαρύτητας.Σε ένα τέτοιο σύμπαν τα δυνατα μοντέλα του Friedmann διαχωρίζονται από τη μέση πυκνότητα της ύλης στο σύμπαν, η οποία διαθέτει μία κρίσιμη τιμή.Επιπλέον ο Lemaitre απέδειξε ότι το πεπερασμένο σύμπαν του Einstein ήταν ασταθές, δηλαδή αν απέκλινε έστω και λίγο από την ισορροπία είτε θα διαστελλόταν (runaway expansion) είτε θα συστελλόταν (runaway collapse).

Από το 1912 έως το 1925 ο Vesto Slipher μέτρησε τις φασματικές γραμμές φωτός που φτάνει σε μας από μακρινούς γαλαξίες.Βρήκε ότι οι φασματικές γραμμές από όλους σχεδόν τους γαλαξίες παρουσιάζουν μία μετατόπιση προς το ερυθρό (οι εξαιρέσεις, δηλαδή οι γαλαξίες των οποίων οι φασματικές γραμμές παρουσιάζουν μετατόπιση προς το κυανό ήταν όλοι κοντινοί μας γαλαξίες εντός της τοπικής μας ομάδας).Η μετατόπιση αυτών των χαρακτηριστικών φασματικών γραμμών θεωρήθηκε ότι ήταν αποτέλεσμα του φαινομένου Doppler, επομένως μέσω αυτού μπορούσε να υπολογιστεί η ταχύτητα απομάκρυνσης των αστέρων που εκπέμπουν αυτό το φως.Το συμπέρασμα ήταν ότι η μεγάλη πλειοψηφία των μακρυνών γαλαξιών που παρατήρησε ο Slipher απομακρύνονται από εμάς, ενώ θα περίμενε κανείς ότι όσοι γαλαξίες παρουσιάζουν μετατόπιση προς το ερυθρό, δηλαδή απομακρύνονται από μας, άλλοι τόσοι περίπου να παρουσιάζουν μετατόπιση προς το κυανό, δηλαδή να πλησιάζουν προς εμάς.

Βελτιώνοντας τις τεχνικές του Harlow Shapley, ο Edwin Hubble μπόρεσε να ορίσει ανεξάρτητα τις αποστάσεις των μακρυνών αυτών γαλαξιών και το 1929 απέδειξε τελειωτικά ότι οι γαλαξίες έχουν μία ταχύτητα απομάκρυνσης η οποία είναι ευθέως ανάλογη της απόστασής τους από μας.Η σχέση αυτή ονομάζεται νόμος του Hubble και η σταθερά αναλογίας H_0 σταθερά του Hubble (Μόνο σε πολύ μεγάλες αποστάσεις ο νόμος του Hubble αποκλίνει από τη γραμμικότητα).Ο μέσος άνθρωπος που δεν είναι εξοικειωμένος με την κοσμολογία θα θεωρούσε ότι ο νόμος του Hubble παραβιάζει την κοσμολογική αρχή, αφού εκ πρώτης όψεως φαίνεται ότι βρισκόμαστε σε ένα πολύ ξεχωριστό σημείο του σύμπαντος από το οποίο όλοι οι γαλαξίες απομακρύνονται.Στην πραγματικότητα αυτό που βλέπουμε από το γαλαξία μας είναι ακριβώς αυτό που θα περιμέναμε να δούμε σε ένα σύμπαν το οποίο υφίσταται ομογενή και ισοτροπική διαστολή.Δηλαδή η ερυθρή μετατόπιση που παρατηρούμε δεν οφείλεται στην κίνηση των των γαλαξιών μέσα στο χώρο αλλά στη διαστολή του ίδιου του χώρου.Σε ένα τέτοιο διαστελλόμενο σύμπαν οποιοσδήποτε παρατηρητής, σε όποιον γαλαξία κι αν βρίσκεται, πιστεύει πως βρίσκεται στο κέντρο του σύμπαντος.Επίσης θα πρέπει να σημειώσουμε ότι δεν υπάρχει όριο, ούτε καν το c ,στην ταχύτητα απομάκρυνσης λόγω της διαστολής του χώρου.

Το 1930 ο Arthur Eddington αντιλήφθηκε ότι η εργασία του Friedmann και του Lemaitre παρείχε μια φυσική εξήγηση του νόμου του Hubble.Ο ίδιος ο Einstein επισκεύθηκε το Ινστιντούτο Τεχνολογίας της Καλιφόρνια το 1930-1931 και συζήτησε με τους επιστήμονες εκεί τις πρόσφατες αστρονομικές παρατηρήσεις.Το 1931 τελικά εγκατέλειψε την κοσμολογική σταθερά και υιοθέτησε την ιδέα του διαστελλόμενου σύμπαντος.Αργότερα δήλωσε ότι η κοσμολογική σταθερά ήταν η μεγαλύτερη γκάφα της ζωής του.

Παρόλο που ο νόμος του Hubble φαινόταν να επιβεβαιώνει τη θεωρία της Μεγάλης Έκρηξης, το 1948 οι Herman Bondi, Thomas Gold και Fred Hoyle πρότειναν ένα μοντέλο του σύμπαντος το οποίο ονομάζεται Steady-State model.Το μοντέλο αυτό είναι συμβατό με το νόμο του Hubble και βασίζεται στην τέλεια κοσμολογική αρχή, σύμφωνα με την οποία όχι μόνο δεν υπάρχουν προτιμητέα σημεία στο χώρο αλλά ούτε και προτιμητέες χρονικές στιγμές.Επομένως οι συνολικές ιδιότητες αυτού του σύμπαντος όπως η μέση πυκνότητα και η σταθερά του Hubble θα πρέπει να παραμένουν σταθερές με το χρόνο.Ο νόμος του Hubble σ'αυτή την περίπτωση συνεπάγεται ότι ο χώρος διαστέλλεται εκθετικά με το χρόνο.Επίσης το σύμπαν θα πρέπει να έχει άπειρη ηλικία αφού αν υπήρχε μία χρονική στιγμή κατά την οποία το σύμπαν άρχισε να διαστέλλεται θα παραβιάζονταν η τέλεια κοσμολογική αρχή.Όμως το να υπάρχει σταθερή πυκνότητα ύλης ενώ το σύμπαν διαστέλλεται σημαίνει ότι θα πρέπει συνεχώς να δημιουργείται νέα ύλη.

Τις δεκαετίες του 1950 και 1960 το μοντέλο της Μεγάλης Έκρηξης και το Steady-State model μάχονταν για το ποιο θα κυριαρχήσει.Οι πολέμιοι του Steady-State model υποστήριζαν ότι η συνεχής δημιουργία νέας ύλης παραβιάζει την Αρχή Διατήρησης Μάζας - Ενέργειας.Οι υπέρμαχοί του υποστήριζαν ότι η συνεχής δημιουργία ύλης δεν είναι περισσότερο παράλογη από τη στιγμιαία δημιουργία του σύμπαντος από μία Μεγάλη Έκρηξη.Παρατηρησιακά δεδομένα ικανοποιητικής ποιότητας και ποσότητας, που να παρέχουν στους κοσμολόγους τη δυνατότητα να ελέγξουν τις υποθέσεις τους έγιναν διαθέσιμα μόνο απο τις αρχές του 1960 και μετά και βελτιώθηκαν σημαντικά τα επόμενα 20 χρόνια.Τα δεδομένα αυτά έδειξαν ότι το σύμπαν είναι κατά μέσο όρο ισοτροπικό και ομογενές, αλλά η τέλεια κοσμολογική αρχή δεν ισχύει και οι ιδιότητες του σύμπαντος αλλάζουν με το χρόνο.

Η πιο σημαντική παρατήρηση που έγειρε την πλάστιγγα υπέρ του μοντέλου της Μεγάλης Έκρηξης ήταν η ανακάλυψη της Κοσμικής Ακτινοβολίας Υποβάθρου (Cosmic Microwave Background-CMB) από τους Arno Penzias και Robert Wilson το 1965.Οι δύο Αμερικάνοι ραδιοαστρονόμοι αποφάσισαν να χρησιμοποιήσουν μια κεραία μεγάλης ευαισθησίας για να κάνουν κάποιες ράδιο-παρατηρήσεις του γαλαξία μας.Ανακάλυψαν ένα σήμα υποβάθρου ίσης έντασης σε όλες τις κατευθύνσεις.Αρχικά το θεώρησαν θόρυβο λόγω των οργάνων, όμως παρά τις προσπάθειές τους δεν μπόρεσαν να εξαλείψουν το σήμα αυτό.Επίσης δεν μπορούσαν να συνδέσουν αυτή την ακτινοβολία με κάποιο αστέρι, γαλαξία ή κάποια άλλη μεμονωμένη ουράνια πηγή.Τελικά έπειτα από αρκετούς ελέγχους διαπιστώθηκε ότι αυτό που είχαν μετρήσει ήταν μία ομογενής και ισοτροπική ακτινοβολία στην περιοχή των μικροκυμάτων που παρουσίαζε ένα φάσμα μέλανος σώματος με θερμοκρασία περίπου $3K$.Με τη βοήθεια του Robert Dicke, κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η ακτινοβολία αυτή μπορούσε να εξηγηθεί μόνο ως κατάλοιπο της Μεγάλης Έκρηξης. Αν και η ύπαρξη της ακτινοβολίας υποβάθρου ως κατάλοιπο της Μεγάλης Έκρηξης είχε ήδη προβλεφθεί από τους George Gamow,Ralph Alpher και Robert Herman το 1948, η πρόβλεψή τους αυτή είχε πέσει στην αφάνεια.Ήταν η πρώτη φορά που ένα κοσμολογικό μοντέλο είχε ελεγχθεί πειραματικά.Οι Penzias και Wilson πήραν για την ανακάλυψή τους αυτή το βραβείο Nobel φυσικής το 1978.

Επιπλέον το 1963-65 ανακλύφθηκάν πηγές φωτός μεγάλης έντασης οι οποίες απομακρύνονται από μας με μεγάλη ταχύτητα.Οι πηγές αυτές ονομάστηκαν quasars από τις λέξεις quasi-stellar radio source (ημιαστρική ραδιοπηγή) και από το νόμο του Hubble συμπεραίνουμε ότι βρίσκονται υπερβολικά μακριά ($10^9 - 10^{10}$ έτη φωτός).Βέβαια το να κοιτάζει κανείς ένα μακρινό γαλαξία ισοδυναμεί με το να κοιτάζει πολύ πίσω στην ιστορία του σύμπαντος, αφού η ταχύτητα του φωτός είναι πεπερασμένη.Επομένως η ύπαρξη πηγών τόσο πολύ λαμπρότερων από τους γαλαξίες πιο μακριά μας και όχι πιο κοντά μας αποτελεί ένδειξη ότι το σύμπαν ήταν στο παρελθόν πολύ διαφορετικό απ' ότι είναι τώρα.Αυτό πάλι μπορεί να θεωρηθεί ως στοιχείο που συμφωνεί με το μοντέλο της Μεγάλης Έκρηξης αλλά όχι με το Steady-State model.Μετά από τις ανακαλύψεις αυτές όλο και περισσότεροι φυσικοί συνειδητοποίησαν ότι το να μπορέσουμε να περιγράψουμε την ιστορία του σύμπαντος δεν είναι επιστημονική φαντασία και άρχισαν να ασχολούνται με την κοσμολογία.

Τις τελευταίες δεκαετίες το μοντέλο που θεωρείται από την πλειοψηφία των κοσμολόγων ότι περιγράφει καλύτερα την εξέλιξη του σύμπαντος είναι το μοντέλο της Ζεστής Μεγάλης Έκρηξης, σύμφωνα με το οποίο αρχικά όλη η ύλη και ενέργεια του σύμπαντος ήταν συγκεντρωμένη σε μία αρχική ανωμαλία και το σύμπαν, δηλαδή ο χρόνος, ο χώρος και όλες οι μορφές ύλης, άρχισε να υπάρχει όταν συνέβη ένα κατακλυσμιαίο γεγονός που ονομάζεται Μεγάλη Έκρηξη.Από μαθηματική σκοπιά η δυναμική εξέλιξη του μοντέλου αυτού χαρακτηρίζεται από δυναμικές εξισώσεις που περιγράφουν μία διαστελλόμενη ομογενή και ισοτροπική κατανομή ύλης (σε συμφωνία και με την κοσμολογική αρχή).Αυτές οι εξισώσεις αρχικά βρέθηκαν, όπως είδαμε, από το Friedmann (1922) και τον Lemaitre (1927).Ένα πιο γεωμετρικό πλαίσιο μελετήθηκε αργότερα από τον Robertson (1935) και τον Walker (1936) και γι᾽ αυτό τα καθιερωμένα μοντέλα της σχετικιστικής κοσμολογίας ονομάζονται και μοντέλα Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW).Το μοντέλο αυτό συμφωνεί σε μεγάλο βαθμό με τα παρατηρησιακά δεδομένα που είναι διαθέσιμα σήμερα.Οι μεγαλύτερες επιτυχίες του είναι η ερμηνεία της ύπαρξης του CMB και του νόμου του Hubble και η συμφωνία των θεωρητικών εκτιμήσεων με τα παρατηρούμενα ποσοστά των βαριών στοιχείων.Παρά τις επιτυχίες του το μοντέλο αυτό παρούσιάζει και αρκετά προβλήματα για την επίλυση των οποίων αναπτύχθηκαν διάφορες θεωρίες, όπως η θεωρία του πληθωρισμού που προτάθηκε αρχικά από τον Guth το 1981 και έχει υποστεί αρκετή επεξεργασία μέχρι σήμερα (π.χ. " χαοτικός πληθωρισμός ", Linde 1983) , που βασίζονται κυρίως στην κβαντική φυσική, στη φυσική στοιχειωδών σωματιδίων και στη θεωρία χορδών. Επιπλέον σήμερα έχουμε ενδείξεις για την ύπαρξη μίας μορφής ύλης που μπορεί να ανιχνευθεί μόνο έμμεσα, χάρη στη βαρυτική επίδραση που ασκεί στη συνηθισμένη ύλη και γι'αυτό ονομάζεται σκοτεινή ύλη, καθώς και για την ύπαρξη μίας μορφής ενέργειας που ονομάζεται σκοτεινή ενέργεια.Μία πιθανότητα είναι η πυκνότητα αυτής της μορφής ενέργειας να παραμένει σταθερή με το χρόνο.Σ'αυτή την περίπτωση η σκοτεινή ενέργεια ονομάζεται Κοσμολογική Σταθερά γιατί η επίδρασή της στην εξέλιξη του σύμπαντος είναι παρόμοια με αυτή της κοσμολογικής σταθεράς του Einstein!Θα θέλαμε εδώ επίσης να σημειώσουμε ότι οι Penzias και Wilson μέτρησαν το CMB μόνο σε ένα μήκος κύματος και βρήκαν ότι ήταν τελείως ισοτροπικό.Σήμερα, χάρη σε μετρήσεις που έχουν γίνει από τους δορυφόρους COBE το 1992 και WMAP το 2003 έχουμε μία πλήρη εικόνα του φάσματος του CMB και επίσης έχουμε ανιχνεύσει διαταραχές ή καλύτερα ανισοτροπίες στο φάσμα αυτό της τάξης του 10^{-5} οι οποίες βρίσκονται σε συμφωνία με τις θεωρητικές προβλέψεις.Αν δεν υπήρχαν αυτές οι ανισοτροπίες και το αρχέγονο σύμπαν ήταν πλήρως ομογενές και ισοτροπικό δεν θα ήταν δυνατόν να δημιουργηθούν τα άστρα, οι γαλαξίες κτλ.Τέλος θα πρέπει να αναφέρουμε ότι υπάρχουν και θεωρίες εναλλακτικές της Μεγάλης Έκρηξης ακόμη και της Γενικής Σχετικότητας.

Οι εξισώσεις Einstein για τον τετραδιάστατο χωροχρόνο αποτελούν ένα πολύπλοκο σύστημα δέκα πεπλεγμένων, μη-γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης για τις δέκα συνιστώσες του μετρικού τανυστή.Εξαιτίας της μεγάλης πολυπλοκότηττας αυτού του συστήματος εξισώσεων μόνο λίγες και πολύ ειδικής μορφής ακριβείς λύσεις του είναι γνωστές σήμερα.Οι λύσεις αυτές, εν γένει, αποκτώνται είτε θεωρώντας ορισμένες εξιδανικευμένες συμμετρίες του χωροχρόνου ή επιβάλλοντας αλγεβρικούς ή δυναμικούς περιορισμούς στις διάφορες γεωμετρικά ορισμένες ποσότητες.

Καθώς είναι σχεδόν βέβαιο ότι η γενική ακριβής λύση των εξισώσεων πεδίου του Einstein (αν υπάρχει!) θα παραμείνει άγνωστη για αρκετό καιρό ακόμη, παράλληλα με τις προσπάθειες ακριβούς επίλυσης έχουν αναπτυχθεί τρεις διαφορετικές μέθοδοι έρευνας καθεμία από τις οποίες παρουσιάζει πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα.Πρόκειται για τις προσεγγιστικές, για τις αριθμητικές και για τις ποιοτικές μεθόδους.Στην πρώτη κατηγορία περιλαμβάνονται μέθοδοι γραμμικών διαταραχών όπως αυτές των χωροχρόνων FRW.Όσον αφορά τη δεύτερη κατηγορία, που εστιάζει στην αριθμητική επίλυση των εξισώσεων πεδίου, αυτή παρουσίασε μεγάλη άνθιση χάρη στην ανάπτυξη των ισχυρών υπολογιστών κατά τις τελευταίες δεκαετίες.Όμως, η ευρύτερη κατηγορία, στην οποία έχει γίνει και γίνεται εντατική έρευνα, είναι η τελευταία, όπου περιλαμβάνονται τα ζητήματα ύπαρξης και μονοσήμαντου των λύσεων, ολικής γεωμετρίας, ανωμαλιών κλπ.Εδώ εφαρμόζονται ευρέως, όταν αυτό είναι εφικτό όπως π.χ. στην περίπτωση των ομογενών χωροχρόνων, Χαμιλτονιανές μέθοδοι και μέθοδοι της θεωρίας δυναμικών συστημάτων.

Ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο, που εφαρμόζεται συχνά στη σχετικιστική κοσμολογία και θα χρησιμοποιηθεί και σε αυτή τη διατριβή, είναι η 1+3 Συναλλοίωτη Περιγραφή, η οποία είναι μία ανάλυση όλων των γεωμετρικά ορισμένων ποσοτήτων του χωροχρόνου και των εξισώσεων που τις συνδέουν, παράλληλα και κάθετα σε σχέση με μία προεξάρχουσα οικογένεια χρονοειδών (future-pointing) καμπύλων με εφαπτόμενο διάνυσμα $\mathbf{u}$.Η 1+3 συναλλοίωτη περιγραφή αντί να εστιάζει στη μετρική, εστιάζει στη διερεύνηση των δυναμικών σχέσεων ανάμεσα σε γεωμετρικές ποσότητες μεγαλύτερου φυσικού ενδιαφέροντος, όπως οι μεταβλητές του ρευστού και της καμπυλότητας.Επιπλέον, επειδή στη γενική σχετικότητα έχουμε πλήρη ελευθερία ως προς την επιλογή των συντεταγμένων, είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούμε τανυστικές εξισώσεις, οι οποίες ισχύουν σε όλα τα συστήματα συντεταγμένων, για να περιγράφουμε τη φυσική και τη γεωμετρία του χωροχρόνου.Αυτό αποτελεί ένα ακόμη πλεονέκτημα της περιγραφής αυτής.Η 1+3 συναλλοίωτη περιγραφή αναπτύχθηκε αρχικά από τους Raychaudhuri, Schucking, Ehlers, Sachs και Trumper και αργότερα από τον Ellis (*βλέπε και [32] σελ.4-6 για τις σχετικές αναφορές*).Στη διατριβή αυτή θα χρησιμοποιήσουμε επίσης τον τετραδικό φορμαλισμό που αποτελεί συμπλήρωμα της 1+3 συναλλοίωτης περιγραφής.

Η κοσμολογία κατά τη διάρκεια του εικοστού αιώνα κατάφερε να μετατραπεί από φιλοσοφική αναζήτηση σε επιστημονική μελέτη.Χάρη στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας του Einstein και την πρόοδο των αστρονομικών παρατηρήσεων οι κοσμολόγοι έχουν πλέον τη δυνατότητα όχι μόνο να φτιάχνουν θεωρητικά μοντέλα που να περιγράφουν το σύμπαν, αλλά και να ελέγχουν τη συμφωνία των μοντέλων αυτών με τις παρατηρήσεις.Επιπλέον στην κατανόηση της εξέλιξης του σύμπαντος εμπλέκονται πλέον και άλλοι κλάδοι της φυσικής όπως είναι η φυσική στοιχειωδών σωματιδίων.

Παρόλες τις μέχρι τώρα επιτυχίες της κοσμολογίας δεν παύουν να υπάρχουν πολλά προβλήματα τόσο από την πλευρά της θεωρητικής φυσικής όσο και της πειραματικής.Στην προσπάθειά μας να κατανοήσουμε το σύμπαν είμαστε αναγκασμένοι να χρησιμοποιήσουμε φυσικούς νόμους που έχουμε επιβεβαιώσει ότι ισχύουν τοπικά, σε κλίμακες που δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι εξακολουθούν να ισχύουν π.χ η Γενική Σχετικότητα αναμένεται να καταρρέει και να παύει να ισχύει πριν από το λεγόμενο χρόνο Planck $10^{-43}s$ μετά τη Μεγάλη Έκρηξη, όπότε θα πρέπει να βρεθεί μία νέα θεωρία, ίσως η Κβαντική Βαρύτητα ή κάτι άλλο, που να περιγράφει αυτές τις αρχικές στιγμές του σύμπαντος.Το πιο σημαντικό όμως πρόβλημα της κοσμολογίας που τη διαφοροποιεί από όλους τους άλλους κλάδους της φυσικής είναι το γεγονός ότι, σε αντίθεση με τους άλλους κλάδους της φυσικής που είναι δυνατό ερευνήσουν διάφορα φαινόμενα κάνοντας επαναλαμβανόμενα πειράματα στα εργαστήρια κάτω από ελεγχόμενες συνθήκες, στην κοσμολογία δεν υπάρχει αυτή η δυνατότητα.Το σύστημα που μελετά η κοσμολογία είναι μοναδικό και μη επαναλαμβανόμενο!Κάτω από αυτούς τους περιορισμούς είναι πραγματικά εκπληκτικό το γεγονός ότι έχουμε καταφέρει να κατασκευάσουμε τόσο επιτυχημένα κοσμολογικά μοντέλα.

Οι πληροφορίες αυτής της ιστορικής αναδρομής καθώς και περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με το καθιερωμένο κοσμολογικό μοντέλο και τις εναλλακτικές θεωρίες μπορούν να βρεθούν για παράδειγμα στα: [5] κεφάλαιο 18, [20], [9], [11], [6] κεφάλαιο 22 , [26] κεφάλαιο 2, [7] κεφάλαιο 1.

1.2 Ανομοιογενή και Ανισοτροπικά Κοσμολογικά Μοντέλα

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, πολύ σημαντικό ρόλο στην κοσμολογία παίζει η Κοσμολογική Αρχή, σύμφωνα με την οποία σε κάθε χρονική στιγμή το σύμπαν φαίνεται ίδιο από κάθε σημείο, εκτός φυσικά από τις τοπικές ανωμαλίες.Δηλαδή δεν υπάρχουν ούτε προτιμητέα σημεία ούτε προτιμητέες κατευθύνσεις στο χώρο.Κατά συνέπεια το σύμπαν θα πρέπει να είναι ομογενές και ισοτροπικό.Φυσικά η Κοσμολογική Αρχή είναι μια απλουστευτική αρχή και αναφέρεται στο σύμπαν σε μεγάλη κλίμακα και κατά μέσο όρο.

Προφανώς, όπως και κάθε θεωρία της φυσικής, η Κοσμολογική Αρχή θα πρέπει να επιβεβαιώνεται από τις παρατηρήσεις για να ισχύει.Είναι σημαντικό λοιπόν να αναφέρουμε ποια είναι τα παρατηρησιακά δεδομένα που την υποστηρίζουν.Οι παρατηρήσεις των ορατών γαλαξιών δεν είναι και τόσο ακριβείς αλλά υποδεικνύουν ότι η κατανομή τους είναι ισοτροπική με μία απόκλιση της τάξης του 30%.Οι μετρήσεις της σταθεράς του Hubble προτείνουν ότι είναι ισοτροπική με απόκλιση 25% περίπου.Οι παρατηρήσεις ραδιο-γαλαξιών αποκαλύπτουν ότι η κατανομή τους είναι πολύ πιο ισοτροπική με απόκλιση απο την ισοτροπία μικρότερη του 5%.Το ίδιο ισχύει και για τις κοσμικές ακτίνες - X που διαποτίζουν το σύμπαν.Όμως το πιο σημαντικό στοιχείο που υποστηρίζει την κοσμολογική αρχή είναι φυσικά η ύπαρξη του CMB, η κατανομή του οποίου είναι ισοτροπική με απόκλιση της τάξης κλασμάτων του εκατοστού.Η χωρική ομογένεια υποστηρίζεται επίσης και από τη γραμμικότητα του νόμου του Hubble.

Παρά τον υψηλό βαθμό ισοτροπίας και ομογένειας που παρατηρούμε σήμερα αρκετοί κοσμολόγοι έχουν μελετήσει ανισοτροπικά και ανομοιογενή κοσμολογικά μοντέλα για τρεις βασικούς λόγους: Πρώτον, οι υπολογισμοί των στατιστικών διακυμάνσεων στα μοντέλα Friedmann δείχνουν ότι δεν μπορούν να καταρρεύσουν αρκετά γρήγορα ώστε να σχηματίσουν τους παρατηρούμενους γαλαξίες.Δεύτερον, αν και υπάρχουν σημαντικοί λόγοι που υποστηρίζουν τη θεωρία της Μεγάλης Έκρηξης, δεν υπάρχει κάποιος σοβαρός λόγος να υποθέσουμε ότι η αρχική ανωμαλία ήταν σφαιρικά συμμετρική όπως υποθέτουν τα μοντέλα Friedmann.Τέλος, είναι πολύ πιθανό το σύμπαν να ήταν ανισοτροπικό και ανομοιογενές στα αρχικά του στάδια, αλλά ότι υπάρχει κάποιος μηχανισμός ο οποίος " έσβησε " αυτά τα χαρακτηριστικά του σύμπαντος κατά την επακόλουθη εξέλιξη, ανεξάρτητα από τις αρχικές συνθήκες.

Από θεωρητικής άποψης έχει γίνει πολύ σημαντική δουλειά στη διερεύνηση των μη-ομοιογενών και ανισοτροπικών μοντέλων.Μία ομάδα τέτοιων λύσεων είναι τα μοντέλα Bianchi, τα οποία θα μας απασχολήσουν και σε αυτή τη διατριβή.Πρόκειται για χωρικά ομογενείς αλλά ανισοτροπικούς χωροχρόνους που μελετήθηκαν αρχικά από τον Bianchi, ο οποίος τους ταξινόμησε σε εννέα κατηγορίες (Bianchi I,II,III,IV,V,VI,VII,VIII,IX).Οι εξισώσεις πεδίου στην περίπτωση των χωροχρόνων Bianchi απλοποιούνται σε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις με το χρόνο ως ανεξάρτητη μεταβλητή, οι οποίες μπορούν να διερευνηθούν είτε με αριθμητικές είτε με ποιοτικές μεθόδους.Οι χωροχρόνοι Bianchi, εν γένει, έχουν ανωμαλίες.(*βλέπε [6] σελ.313-314*)

1.3 Βασικές Σχέσεις

Για να περιγράψουμε ένα κοσμολογικό μοντέλο που βασίζεται στη Γενική Σχετικότητα πρέπει να προσδιορίσουμε τα εξής βασικά χαρακτηριστικά του:

1. Μία 4-διάστατη διαφορική ψευδορημάνια πολλαπλότητα M που περιγράφεται από συντεταγμένες $\{x^i\}, i = 0, 1, 2, 3$, οι οποίες μπορούν να επιλεγούν αυθαίρετα.

2. Έναν συμμετρικό μετρικό τανυστή $g_{ij}(x^k)$ που περιγράφει τη χωροχρονική γεωμετρία της πολλαπλότητας.

3. Έναν τανυστή ορμής - ενέργειας T_{ij} ο οποίος περιγράφει την ενέργεια, την ορμή και την πίεση όλων των πεδίων ύλης (και ενέργειας) που υπάρχουν στο χωροχρόνο.Η συμπεριφορά κάθε είδους ύλης περιγράφεται από μία καταστατική εξίσωση.

4. Την αλληλεπίδραση γεωμετρίας - ύλης, δηλαδή το πώς η ύλη καθορίζει τη γεωμετρία η οποία με τη σειρά της καθορίζει την κίνηση της ύλης.Θεωρούμε ότι η περιγραφή της αλληλεπίδρασης αυτής γίνεται μέσω των εξισώσεων Einstein, οι οποίες σε γεωμετρικοποιημένες μονάδες είναι:

$$G_{ij} \equiv R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} = T_{ij} - \Lambda g_{ij} \tag{1.1}$$

   όπου G_{ij} είναι ο τανυστής του Einstein, $R_{ij} \equiv R^k{}_{ikj}$ είναι ο τανυστής του Ricci ή βαθμωτή καμπυλότητα, $R \equiv g_{ij}R^{ij}$ είναι το βαθμωτό του Ricci, T_{ij} ο τανυστής ορμής - ενέργειας και Λ η κοσμολογική σταθερά. Ο τανυστής Einstein ικανοποιεί τις twice-contracted ταυτότητες του Bianchi:

$$\nabla_j G^{ij} = 0 \Rightarrow \nabla_j T^{ij} = 0 \tag{1.2}$$

   που διασφαλίζουν τη διατήρηση της συνολικής ενέργειας - ορμής, με την προϋπόθεση ότι η κοσμολογική σταθερά ικανοποιεί τη σχέση $\nabla_i \Lambda = 0$, δηλαδή ότι είναι σταθερή στο χώρο και στο χρόνο.
   Αυτές οι εξισώσεις μαζί καθορίζουν τη δυναμική εξέλιξη του μοντέλου.

5. Τις παρατηρησιακές προβλέψεις του μοντέλου.

Όσον αφορά την περιγραφή της ύλης του μοντέλου οι πιο συνηθισμένες επιλογές είναι μία ή ένας συνδυασμός των παρακάτω:

- ένα ρευστό με μία καθορισμένη καταστατική εξίσωση, π.χ. ένα ιδανικό ρευστό.

- ένα μείγμα ρευστών συνήθως με διαφορετικές τετραταχύτητες.

- ένα βαθμωτό πεδίο Φ με δυναμικό $V(\Phi)$.

- ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που περιγράφεται από τις εξισώσεις πεδίου του Maxwell.

Επιπλέον σε ένα κοσμολογικό μοντέλο ορίζουμε σε κάθε σημείο του χωροχρόνου ένα τετραδιάνυσμα $\mathbf{u}$ το οποίο είναι μοναδιαίο ($u_i u^i = -1$) και ονομάζεται τετραταχύτητα.Το διάνυσμα αυτό αντιπροσωπεύει τη μέση κίνηση της ύλης σ' εκείνο το σημείο.Οι παγκόσμιες γραμμές που ορίζονται από αυτό το διανυσματικό πεδίο είναι οι παγκόσμιες γραμμές των θεμελιωδών παρατηρητών, δηλαδή των παρατηρητών εκείνων που εκτελούν τη μέση κίνηση της ύλης σε κάθε χωροχρονικό σημείο.Αν τ είναι ο ιδιοχρόνος όπως μετράται κατά μήκος αυτών των γραμμών τότε η τετραταχύτητα δίνεται από τη σχέση $u^i = dx^i/d\tau$.

Όπως έχουμε ήδη τονίσει για να είναι ένα κοσμολογικό μοντέλο αποδεκτό θα πρέπει οι προβλέψεις του να συμφωνούν με τις αστρονομικές παρατηρήσεις.Είναι όμως σημαντικό να αναφέρουμε ότι ένα κοσμολογικό μοντέλο μπορεί να θεωρείται αποδεκτό ακόμη και αν δεν είναι ρεαλιστικό για την περιγραφή ολόκληρης της εξέλιξης του σύμπαντος αλλά μόνο π.χ για μεγάλες κλίμακες ή για τα πολύ αρχικά στάδια της ιστορίας του σύμπαντος.Σ' αυτή τη διατριβή δεν θα ασχοληθούμε με την παρατηρησιακή κοσμολογία, αλλά κυρίως με την εφαρμογή των γεωμετρικών και μαθηματικών αρχών της Γενικής Σχετικότητας στην κοσμολογία.

1.4 Συμβάσεις-Συμβολισμοί

Στην εργασία αυτή χρησιμοποιήσαμε τις παρακάτω συμβάσεις και συμβολισμούς

- Για τη χαρακτηριστική της μετρικής υιοθετήσαμε τη σύμβαση: $(-,+,+,+)$
- Χρησιμοποιήσαμε γεωμετρικοποιημένες μονάδες: $c = 1 = 8\pi G/c^2$
- Οι ελληνικοί δείκτες $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ παίρνουν τις τιμές $1, 2, 3$.
  Οι λατινικοί δείκτες $i, j, k, \ldots$ και $a, b, c, \ldots$ παίρνουν τις τιμές $0, 1, 2, 3$
- Ο τανυστής του Ricci ορίζεται ως: $R_{ij} = R^k{}_{ikj}$
- Για τη μερική παράγωγο χρησιμοποιήσαμε τους συμβολισμούς:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \equiv \partial_i \equiv {}_{,i}$$

- Για τη συναλλοίωτη παράγωγο χρησιμοποιήσαμε τους συμβολισμούς: $\nabla_i \equiv {}_{;i}$

1.5 Δομή της Διατριβής

Στη διατριβή αυτή μελετήσαμε τους ομογενείς και ανισότροπους χωροχρόνους τύπου Bianchi IX στα πλαίσια της 1+3 συναλλοίωτης περιγραφής και του τετραδικού φορμαλισμού και επιχειρήσαμε να τους συνδέσουμε με τους χωροχρόνους FRW έτσι ώστε να προκύψει ένας χωροχρόνος ο οποίος ξεκινά από μία αρχική ανωμαλία, εξελίσσεται ως ανισότροπο Bianchi IX μέχρι κάποια χρονική στιγμή t_0 και στη συνέχεια μετατρέπεται σε FRW θετικής καμπυλότητας.Συγκεκριμμένα:

Το Κεφάλαιο 2 αποτελεί μία παρουσίαση της 1+3 συναλλοίωτης περιγραφής και των εξισώσεων εξέλιξης και δεσμών που προκύπτουν στα πλάισια της περιγραφής αυτής, μέσω των ταυτοτήτων του Ricci και του Bianchi για τον τανυστή καμπυλότητας Riemann, σε συνδυασμό με τις εξισώσεις πεδίου του Einstein.

Στο Κεφάλαιο 3 μελετάμε τον τετραδικό φορμαλισμό.Μία τετράδα αποτελείται από τέσσερα διανυσματικά πεδία τα οποία αποτελούν μία βάση στο χωροχρόνο.Ο τετραδικός φορμαλισμός συμπληρώνει την 1+3 συναλλοίωτη περιγραφή.Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε το γενικό αλλά και τον ορθοκανονικό τετραδικό φορμαλισμό.Ο τελευταίος χρησιμοποιείται ευρέως γιατί απλοποιεί σημαντικά τις εξισώσεις, εισάγει όμως ορισμένους περιορισμούς.Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε το γενικό τετραδικό φορμαλισμό.

Στο Κεφάλαιο 4 παραθέτουμε την κατηγοριοποίηση των κοσμολογικών χωροχρόνων ανάλογα με τις συμμετρίες που περιέχουν, οι οποίες εκφράζονται από μαθηματική άποψη μέσω της ομάδας ισομετριών που δρα σε αυτούς.Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στους χωρικά ομογενείς χωροχρόνους.

Στο Κεφάλαιο 5 εφαρμόζουμε την 1+3 συναλλοίωτη περιγραφή και τον τετραδικό φορμαλισμό στην περίπτωση των χωροχρόνων Bianchi και βρίσκουμε τη μορφή των εξισώσεων εξέλιξης και δεσμών.

Στο Κεφάλαιο 6 εξετάζουμε τους χωροχρόνους Bianchi IX.Το κεφάλαιο αυτό αποτελείται από δύο μέρη.Στο πρώτο μέρος επιλέγουμε χωροχρόνους Bianchi IX με διαγώνια τετραδική μετρική που έχουν ως υλικό περιεχόμενο ένα ιδανικό ρευστό και εξάγουμε τις εξισώσεις εξέλιξης και δεσμών.Στο δεύτερο μέρος εισάγουμε συντεταγμένες και παραθέτουμε τη διαδικασία εύρεσης αναλλοίωτης βάσης στους χωροχρόνους Bianchi IX.

Στο κεφάλαιο 7 μελετάμε τους χωροχρόνους FRW και εξάγουμε τις εξισώσεις εξέλιξης και δεσμών.Η οικογένεια των χωροχρόνων FRW αποτελεί μία ειδική περίπτωση της οικογένειας χωροχρόνων Bianchi που παρουσιάζει υψηλότερη συμμετρία.

Στο Κεφάλαιο 8 επιχειρούμε να συνδέσουμε τους χωροχρόνους Bianchi IX με διαγώνια τετραδική μετρική και τους χωροχρόνους FRW θετικής καμπυλότητας πάνω σε μία υπερεπιφάνεια $t =$σταθερό, χρησιμοποιώντας τις συνθήκες σύνδεσης του Lichnerowicz οι οποίες απαιτούν τη συνέχεια της μετρικής και των πρώτων παραγώγων της πάνω στην υπερεπιφάνεια.

Η διατριβή ολοκληρώνεται με τα συμπεράσματα στο Κεφάλαιο 9.Στο Παράρτημα Α παρατίθενται αποδείξεις σχέσεων και θεωρημάτων που κρίθηκε σκόπιμο να μην ενσωματωθούν στο κυρίως κείμενο για τη διατηρηση της συνοχής του κειμένου.Επίσης θα πρέπει να αναφέρουμε ότι ορισμένοι από τους υπολογισμούς του κεφαλαίου 6 πραγματοποιήθηκαν και με το πρόγραμμα Wolfram Mathematica 6.0 και τα πακέτα RGTC και EDC τα οποία έχουν δημιουργηθεί από τον Σ.Μπονάνο.

Κεφάλαιο 2

1+3 Συναλλοίωτη Περιγραφή

Για τη μαθηματική περιγραφή ενός κοσμολογικού χωροχρόνου ο οποίος περιέχει μία κατανομή μάζας - ενέργειας μπορούμε πάντα να ορίσουμε ένα μοναδιαίο χρονοειδές (future pointing) διανυσματικό πεδίο $\mathbf{u}$, τη θεμελιώδη τετραταχύτητα, το οποίο είναι εφαπτόμενο στις παγκόσμιες γραμμές μιας οικογένειας θεμελιωδών παρατηρητών.Αν θεωρήσουμε ότι η ύλη του σύμπαντος συμπεριφέρεται σαν ρευστό τότε το χρονοειδές αυτό διανυσματικό πεδίο μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε τοπικά να αντιπροσωπεύει τη μέση τετραταχύτητα του ρευστού αυτού.Αυτή βέβαια δεν είναι η μόνη δυνατή επιλογή για το $\mathbf{u}$.Αν στο χωροχρόνο υπάρχει κάποια άλλη προεξάρχουσα χρονοειδής διεύθυνση η οποία θα μπορούσε π.χ. να καθορίζεται από τη γεωμετρία του (όπως π.χ. μια κάθετη διεύθυνση σε μία οικογένεια ομογενών τρισδιάστατων χωροειδών υπερεπιφανειών) τότε είναι δυνατόν να επιλεγεί αυτή για τον ορισμό αυτού του διανυσματικού πεδίου.Σε αυτή την περίπτωση όμως πρέπει να είμαστε προσεκτικοί στο ότι το $\mathbf{u}$ μπορεί να μην διατηρεί τον χρονοειδή του χαρακτήρα καθ'όλο το μήκος της τροχιάς του.

Στο κεφάλαιο αυτό θα παραθέσουμε την "1+3" συναλλοίωτη περιγραφή.Το "1+3" αναφέρεται στο γεγονός ότι θα κάνουμε μία ανάλυση της μορφής "χρόνος + χώρος " προβάλλοντας τους τανυστές και τις τανυστικές εξισώσεις παράλληλα και κάθετά στο χρονοειδές διανυσματικό πεδίο $\mathbf{u}$.Το δεύτερο σημαντικό στοιχείο αυτής της περιγραφής είναι ότι κάνουμε μία αλγεβρική ανάλυση των τανυστών έτσι ώστε να γράφουμε έναν τανυστή ως το άθροισμα αλγεβρικά απλούστερων όρων.Για παράδειγμα ένας οποιοσδήποτε ανταλλοίωτος τανυστής δευτέρας τάξης A^{ab} μπορεί πάντα να γραφεί στη μορφή

$$A^{ab} = B^{ab} + A^{[ab]} + \frac{A}{4}g^{ab} \tag{2.1}$$

όπου $A^{[ab]} = \frac{1}{2}(A^{ab} - A^{ba})$ είναι το αντισυμμετρικό μέρος του A^{ab} και $B^{ab} = A^{(ab)} - \frac{A}{4}g^{ab}$ με $A^{(ab)} = \frac{1}{2}(A^{ab} + A^{ba})$ το συμμετρικό μέρος του A^{ab} και $A = A^{b}{}_{b}$

το ίχνος του.Ο τανυστής B^{ab} είναι προφανώς συμμετρικός και άιχνος.

Βασικές ποσότητες που υπεισέρχονται στην "1+3" περιγραφή είναι:

- Οι κινηματικές ποσότητες που ορίζονται γράφοντας το $\nabla_a u_b$ ως άθροισμα απλούστερων ποσοτήτων αν αναλύσουμε σύμφωνα με την (2.1).
- Ο τανυστής ορμής - ενέργειας, T_{ab}, ο οποίος περιγράφει τη μάζα-ενέργεια, τη ροή ενέργειας και τις διατμητικές τάσεις που αφορούν το ρευστό που γεμίζει το σύμπαν.Όταν αναλύσουμε τον T_{ab} ως προς την θεμελιώδη τετραταχύτητα $\mathbf{u}$ παράγονται οι ποσότητες που είναι γνωστές ως μεταβλητές μάζας.
- Ο τανυστής καμπυλότητας του Weyl, C_{abcd}, ο οποίος ορίζεται ως το τμήμα του τανυστή καμπυλότητας του Riemann που έχει μηδενικό ίχνος.Αναλύεται δε ως προς το $\mathbf{u}$ σε δύο άιχνους συμμετρικούς τανυστές που ονομάζονται το ηλεκτρικό του μέρος E_{ab} και το μαγνητικό του μέρος H_{ab}.

Οι ανωτέρω ποσότητες εμφανίζονται στις *εξισώσεις εξέλιξης* (evolution equations) και στις *εξισώσεις δεσμών* (constraint equations), οι οποίες λαμβάνονται από τις ταυτότητες του Ricci και του Bianchi σε συνδυασμό με τις εξισώσεις πεδίου του Einstein προβάλλοντας παράλληλα και κάθετα προς τη διεύθυνση του $\mathbf{u}$.

2.1 Προβολή και Διαφόριση

Για να προβάλλουμε παράλληλα και κάθετα στο $\mathbf{u}$ ορίζουμε τους παρακάτω προβολικούς τανυστές (*βλέπε [15] σελ.6-7, [31] σελ.4-5*)

$$U^a{}_b = -u^a u_b \quad \Rightarrow \quad U^a{}_c U^c{}_b = U^a{}_b \ , \quad U^a{}_a = 1 \ , \ U_{ab}u^b = u_a \tag{2.2}$$

$$h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b \quad \Rightarrow \quad h^a{}_c h^c{}_b = h^a{}_b \ , \quad h^a{}_a = 3 \ , \ h_{ab}u^b = 0 \tag{2.3}$$

Ο πρώτος τανυστής προβάλλει παράλληλα και ο δεύτερος κάθετα ως προς το u^a.Μέσω αυτών των προβολών μπορούμε να μελετήσουμε τη γεωμετρία των υπερεπιφανειών που είναι κάθετες στο u^a και αντιστοιχούν σε παρατηρητές που κινούνται με τετραταχύτητα u^a.

Αντίστοιχα ορίζονται δύο είδη παραγώγισης:
Η τελεία, που συμβολίζει τη συναλλοίωτη χρονική παράγωγο (παραγώγιση κατά τη διεύθυνση του u^a) και ορίζεται για βαθμωτα πεδία ως:

$$\dot{f} = f_{,a}u^a \tag{2.4}$$

και για τανυστές ως:

$$\dot{T}_{ab\cdots c} = u^d \nabla_d T_{ab\cdots c} \tag{2.5}$$

Η χωρική συναλλοίωτη παράγωγος $\tilde{\nabla}_a$ (ορθογώνια στο u^a προβολή της συναλλοίωτης παραγώγου) ορίζεται προβάλλοντας όλους τους ελεύθερους δείκτες της συναλλοίωτης παραγώγου μιας ποσότητας κάθετα στο $\mathbf{u}$[1].Για παράδειγμα:

$$\tilde{\nabla}_a f = h^b{}_a \nabla_b f \ , \quad \tilde{\nabla}_e T^{ab}{}_{cd} = h^a{}_f h^b{}_g h^p{}_c h^q{}_d h^r{}_e \nabla_r T^{fg}{}_{pq} \tag{2.6}$$

Είναι προφανές ότι η συναλλοίωτη παράγωγος για ένα βαθμωτό μπορεί πάντα να αναλυθεί σε μία παράγωγο κατά μήκος της διεύθυνσης του u^a και μία χωρική παράγωγο, ως εξής:

$$\nabla_a f = \tilde{\nabla}_a f - u_a \dot{f} \tag{2.7}$$

Χρησιμοποιούμε τις παρενθέσεις $<>$ για να συμβολίσουμε τις ορθογώνιες προβολές ως προς u^a ενός διανύσματος, του συμμετρικού και άιχνου τμήματος ενός τανυστή και των χρονικών τους παραγώγων ως εξής:

$$X^{<a>} = h^a{}_b X^b \ , \quad T^{<ab>} = [h^{(a}{}_c h^{b)}{}_d - \frac{1}{3} h^{ab} h_{cd}] T^{cd} \tag{2.8}$$

$$\dot{X}^{<a>} = h^a{}_b \dot{X}^b \ , \quad \dot{T}^{<ab>} = [h^{(a}{}_c h^{b)}{}_d - \frac{1}{3} h^{ab} h_{cd}] \dot{T}^{cd} \tag{2.9}$$

Επιπλέον χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\perp$ για να δηλώσουμε την πλήρη (δηλαδή ως προς όλους τους δείκτες) κάθετη προβολή προς το u^a ενός τανυστή:

$$(T^{ab}{}_{cd})_\perp = h^a{}_p h^b{}_q h^r{}_c h^s{}_d T^{pq}{}_{rs} \tag{2.10}$$

Το τετραδιάστατο στοιχείο όγκου ορίζεται μέσω του πλήρως αντισυμμετρικού τανυστή:

$$\eta_{abcd} = \eta_{[abcd]} \ , \quad \eta_{0123} = \sqrt{|det(g_{ab})|} \ , \quad \eta^{0123} = \frac{1}{\sqrt{|det(g_{ab})|}} \tag{2.11}$$

Το τρισδιάστατο στοιχείο όγκου για τις χωροειδείς υπερεπιφάνειες στιγμιαίας ηρεμίας (τρισδιάστατες επιφάνειες κάθετες στο $\mathbf{u}$) καθορίζεται από τον πλήρως αντισυμμετρικό τανυστή τρίτης τάξης η_{abc} :

$$\eta_{abc} = u^d \eta_{dabc} \Rightarrow \eta_{abc} = \eta_{[abc]} \ , \quad \eta_{abc} u^c = 0 \tag{2.12}$$

Ο η^{abc} είναι χρήσιμος για τον ορισμό του χωρικού στροβιλισμού διανυσμάτων και τανυστών.Για παράδειγμα:

$$(curlT)^{ab} = \eta^{cd<a} \tilde{\nabla}_c T^{b>}{}_d \tag{2.13}$$

[1]Δεν θα πρέπει να ξεχνάμε ότι αν η u^a έχει μη μηδενική ελικότητα (vorticity) τότε η παράγωγος αυτή δεν είναι μία χωροειδής τρισδιάστατη συναλλοίωτη παράγωγος

2.2 Κινηματικές Ποσότητες

Αρχικά θα αναλύσουμε την πρώτη συναλλοίωτη παράγωγο της τετραταχύτητας u^a.Είναι γνωστό ότι (*βλέπε π.χ. [27] σελ.175, [15] σελ.7, [31] σελ.5-6, [32] σελ.12, [33] σελ.2674*) η συναλλοίωτη παράγωγος ενός μοναδιαίου χρονοειδούς διανύσματος **u** αναλύεται ως εξής:

$$\nabla_a u_b = -u_a \dot{u}_b + \tilde{\nabla}_a u_b = -u_a \dot{u}_b + \frac{1}{3}\Theta h_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab} \tag{2.14}$$

όπου το βαθμωτό

$$\Theta = \tilde{\nabla}_a u^a = \nabla_a u^a \tag{2.15}$$

εκφράζει το *ρυθμό διαστολής όγκου του ρευστού* (rate of expansion) (με $H = \Theta/3$ την παράμετρο Hubble), ο τανυστής

$$\sigma_{ab} = \tilde{\nabla}_{<a} u_{b>} = \nabla_{(a} u_{b)} - \frac{1}{3}\Theta h_{ab} + u_{(a}\dot{u}_{b)} \tag{2.16}$$

εκφράζει τη *διατμητική ταχύτητα του ρευστού* (rate of shear tensor) και είναι συμμετρικός και άιχνος ($\sigma_{ab} = \sigma_{(ab)}$, $\sigma^a{}_a = 0$, $\sigma_{ab}u^b = 0$), ο τανυστής

$$\omega_{ab} = \tilde{\nabla}_{[a} u_{b]} = \nabla_{[a} u_{b]} + u_{[a}\dot{u}_{b]} \tag{2.17}$$

λέγεται *τανυστής ελικότητας* (vorticity tensor), είναι αντισυμμετρικός και περιγράφει την περιστροφή της ύλης σε σχέση με ένα μη περιστρεφόμενο (Fermi-propagated) σύστημα αναφοράς (με $\omega_{ab} = \omega_{[ab]}$, $\omega_{ab}u^b = 0$) και τέλος το διάνυσμα

$$\dot{u}_a = u^b \nabla_b u_a \tag{2.18}$$

είναι το *διάνυσμα της σχετικιστικής επιτάχυνσης* (relativistic acceleration vector) που δείχνει πώς το ρευστό κινείται κάτω από την επιδραση δυνάμεων άλλων εκτός από τη βαρύτητα και τις αδρανειακές δυνάμεις (για τις οποίες δεν υπάρχει τοπικός διαχωρισμός στη Γενική Σχετικότητα, είναι διαφορετικές όψεις του ίδιου πράγματος).Στην περίπτωση που το ρευστό κινείται μόνο κάτω από την επίδραση της βαρύτητας η σχετικιστική επιτάχυνση μηδενίζεται.

Πολλές φορές στην πράξη αντί για το ω_{ab} θα χρησιμοποιούμε το *διάνυσμα ελικότητας* (vorticity vector):

$$\omega^a = \frac{1}{2}\eta^{abc}\omega_{bc} \quad \Rightarrow \quad \omega_a u^a = 0 \ , \quad \omega_{ab}\omega^b = 0 \tag{2.19}$$

Επίσης χρήσιμα είναι τα μεγέθη:

$$\omega^2 = \frac{1}{2}(\omega_{ab}\omega^{ab}) \geq 0 \ , \quad \sigma^2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ab}\sigma^{ab}) \geq 0 \tag{2.20}$$

και η μέση κλίμακα μήκους S που ορίζεται από τη σχέση:

$$\frac{\dot{S}}{S} = \frac{1}{3}\Theta \tag{2.21}$$

ώστε ο όγκος ενός στοιχειώδους τμήματος του ρευστού να μεταβάλλεται ως S^3.

2.3 Ανάλυση του Τανυστή Ορμής - Ενέργειας

Ο τανυστής ορμής - ενέργειας είναι ένας συμμετρικός τανυστής ο οποίος περιγράφει το ρευστό που πληροί το σύμπαν.Θα χρησιμοποιήσουμε την καθιερωμένη ανάλυση (*βλέπε π.χ. [27] σελ.82, [15] σελ.8, [31] σελ.7, [32] σελ.13, [33] σελ.2677*):

$$T_{ab} = \mu u_a u_b + q_a u_b + q_b u_a + p h_{ab} + \pi_{ab} \tag{2.22}$$

με

$$q_a u^a = 0 \ , \quad \pi^a{}_a = 0 \ , \quad \pi_{ab} = \pi_{(ab)} \ , \quad \pi_{ab} u^b = 0 \tag{2.23}$$

όπου $\mu = T_{ab}u^a u^b$ είναι η *σχετικιστική πυκνότητα ενέργειας του ρευστού* ως προς έναν παρατηρητή που κινείται με τετραταχύτητα u^a, $q_a = -T_{bc}u^b h^c{}_a$ είναι η *σχετικιστική πυκνότητα ορμής* (η οποία ερμηνεύεται και ως *ροή ενέργειας* σε σχέση με το u^a), $p = \frac{1}{3}(T_{ab}h^{ab})$ είναι η *ισοτροπική πίεση* και ο τανυστής $\pi_{ab} = T_{cd}h^c{}_{<a}h^d{}_{b>}$ περιγράφει τις *ανισοτροπικές τάσεις* εντός του ρευστού.

Αν το ρευστό είναι ακίνητο ως προς τον παρατηρητή που κινείται με τετραταχύτητα u^a ο παρατηρητής αυτός λέγεται συνκινούμενος (comoving) με το ρευστό.Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι το u^a είναι η τετραταχύτητα του ρευστού.Αν στον τύπο (2.22) το u^a είναι η τετραταχύτητα του ρευστού τότε το χωροειδές τετραδιάνυσμα q_a περιγράφει τη ροή θερμότητας στο ρευστό, ενώ ο τανυστής π_{ab} περιγράφει το ιξώδες του ρευστού.Μια ιδιαίτερη κατηγορία ρευστών, που χρησιμοποιούνται πολύ στην κοσμολογία, είναι τα ιδανικά ρευστά.Τα ρευστά αυτά δεν έχουν ιξώδες και ροή θερμότητας και ως προς έναν συνκινούμενο παρατηρητή έχουν τανυστή ορμής - ενέργειας που δίνεται από τη σχέση

$$T_{ab} = \mu u_a u_b + p h_{ab} \tag{2.24}$$

Για την πλήρη περιγραφή του συμπαντικού ρευστού πρέπει να δίνεται και η *καταστατική εξίσωση* η οποία δείχνει πώς εκφράζονται οι διάφορες θερμοδυναμικές μεταβλητές του ρευστού (όπως π.χ. η πυκνότητα βαριονίων, η εντροπία ανά μονάδα βαριονικής μάζας, η ισοτροπική πίεση, η θερμοκρασία κλπ.) συναρτήσει ενός ελάχιστου αριθμού ανεξάρτητων μεταβλητών εξ'αυτών.Στις θεωρητικές κοσμολογικές μελέτες χρησιμοποιούνται το πολύ διπαραμετρικές καταστατικές εξισώσεις της μορφής $p = p(\mu, s)$, όπου μ η πυκνότητα ενέργειας και s η εντροπία ανά βαρυόνιο.Οι περισσότερο όμως χρησιμοποιούμενες καταστατικές εξισώσεις είναι οι μονοπαραμετρικές (ή και *βαροτροπικές*, όπως αλλιώς λέγονται) της μορφής $p = p(\mu)$.Μια ενδιαφέρουσα ειδική κατηγορία ιδανικών ρευστών αποτελείται από τα ρευστά που έχουν μηδενική ισοτροπική πίεση ($p = 0$).Αυτά αναφέρονται στη διεθνή βιβλιογραφία ως σκόνη (dust).

Τέλος, συνήθως απαιτούμε να ικανοποιούνται και κάποιες *ενεργειακές συνθήκες* (*βλέπε π.χ. [17] σελ.88-96, [15] σελ.8*), όπως για παράδειγμα οι

$$\mu > 0 \ , \quad (\mu + p) > 0 \tag{2.25}$$

οι οποίες αναφέρονται σαν *ασθενείς ενεργειακές συνθήκες* και είναι ευρέως αποδεκτές αφού δεν έχει παρατηρηθεί μέχρι στιγμής κάποια μορφή ύλης η οποία να μην τις ικανοποιεί και η

$$(\mu + 3p) > 0 \tag{2.26}$$

η οποία όμως παραβιάζεται από τα βαθμωτα πεδία στα μοντέλα του πληθωριστικού σύμπαντος.Επιπλέον απαιτούμε η *ισεντροπική ταχύτητα του ήχου* ${c_s}^2 = (\partial p/\partial \mu)_{s=const}$ να υπακούει στη σχέση:

$$0 \leq {c_s}^2 \leq 1 \tag{2.27}$$

κάτι που είναι απαραίτητο για την τοπική ευστάθεια της ύλης (κάτω όριο) και τη συμφωνία με τις αρχές τις ειδικής σχετικότητας (άνω όριο) (*βλέπε και [13]*).

2.4 Τανυστής Καμπυλότητας του Weyl

Ο τανυστής καμπυλότητας του Weyl ορίζεται μέσω του τανυστή Riemann και του τανυστή Ricci από τη γνωστή σχέση (*βλέπε π.χ. [6] σελ.88*)

$$C_{abcd} = R_{abcd} - \frac{1}{2}(g_{ac}R_{bd} + g_{bd}R_{ac} - g_{bc}R_{ad} - g_{ad}R_{bc}) + \frac{1}{6}R(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}) \tag{2.28}$$

ή ισοδύναμα

$$C^{ab}{}_{cd} = R^{ab}{}_{cd} - 2\delta^{[a}{}_{[c}R^{b]}{}_{d]} + \frac{1}{3}R\delta^{a}{}_{[c}\delta^{b}{}_{d]} \tag{2.29}$$

Παρατηρούμε ότι ο τανυστής του Weyl διατηρεί όλες τις ιδιότητες συμμετρίας του τανυστή Riemann και επιπλέον έχει μηδενικό ίχνος ($C^{a}{}_{bad} = 0$).

Στα πλαίσια του 1+3 συναλλοίωτου φορμαλισμού ο τανυστής Weyl αναλύεται σε ένα ηλεκτρικό μέρος (E_{ab}) και ένα μαγνητικό μέρος (H_{ab}) (*βλέπε [15]* *σελ.9, [31] σελ.7-8, [32] σελ.13, [33] σελ.2677-2678*).Αυτό επιτυγχάνεται προβάλλοντας τον C_{abcd} και τον δυϊκό του τανυστή $\eta_{abc}C^{bc}{}_{de}$ κάθετα στο $\mathbf{u}$, σύμφωνα με τις σχέσεις

$$E_{ab} = C_{acbd}u^c u^d \ , \quad H_{ab} = \frac{1}{2}\eta_{ade}C^{de}{}_{bc}u^c \tag{2.30}$$

Τα E_{ab} και H_{ab} είναι προφανώς συμμετρικά, ορθογώνια στο $\mathbf{u}$ και έχουν μηδενικό ίχνος:

$$E_{ab} = E_{(ab)} \ , \ E^a{}_a = 0 \ , \ E_{ab}u^b = 0 \tag{2.31}$$

$$H_{ab} = H_{(ab)} \ , \ H^a{}_a = 0 \ , \ H_{ab}u^b = 0 \tag{2.32}$$

Συναρτήσει αυτών των δύο ποσοτήτων ο τανυστής του Weyl δίνεται από τη σχέση

$$C^{ab}{}_{cd} = (4\delta^{[a}{}_e\delta^{b]}{}_f\delta^g{}_{[c}\delta^h{}_{d]} - \eta^{ab}{}_{ef}\eta^{gh}{}_{cd})E^e{}_g u^f u_h - 2(\eta^{ab}{}_{ef}\delta^g{}_{[c}\delta^h{}_{d]} + \delta^{[a}{}_e\delta^{b]}{}_f\eta^{gh}{}_{cd})H^e{}_g u^f u_h \tag{2.33}$$

Αυτή η ανάλυση περιγράφει τον τανυστή Weyl πλήρως αφού:

$$E_{ab} = 0 = H_{ab} \quad \Leftrightarrow \quad C_{abcd} = 0 \tag{2.34}$$

Σημειώνουμε επίσης ότι, μέσω των (2.28) και (2.33), τα E_{ab} , H_{ab} και R_{ab} περιγράφουν πλήρως τη χωροχρονική καμπυλότητα, όπως αυτή δίνεται από τον τανυστή Riemann.

2.5 Εξισώσεις Εξέλιξης και Δεσμών

Οι εξισώσεις στον 1+3 συναλλοίωτο φορμαλισμό αποτελούνται από τις εξισώσεις εξέλιξης και τις εξισώσεις δεσμών που συνδέουν μεταξύ τους τις γεωμετρικές ποσότητες που ορίσαμε στις προηγούμενες ενότητες.Οι εξισώσεις αυτές απορρέουν από τις εξισώσεις πεδίου του Einstein:

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = T_{ab} - \Lambda g_{ab} \tag{2.35}$$

σε συνδυασμό με τα τρία σετ ταυτοτήτων που ικανοποιούνται από τον τανυστή καμπυλότητας Riemann (*βλέπε π.χ. [6] σελ.77, [27] σελ.59-60, [35] σελ.146-147*):

1. Ταυτότητες του Ricci:

$$2\nabla_{[a}\nabla_{b]}u_c = R_{abcd}u^d \tag{2.36}$$

2. Ταυτότητες του Bianchi:

$$\nabla_{[a}R_{bc]de} = 0 \tag{2.37}$$

3. Twice contracted ταυτότητες του Bianchi:

$$\nabla_a(R^{ab} - \frac{1}{2}Rg^{ab}) = 0 \tag{2.38}$$

Για να καταλήξουμε στις εξισώσεις εξέλιξης και δεσμών αντικαθιστούμε στις ταυτότητες (2.36)-(2.38) τον τανυστή του Riemann και τον τανυστή του Weyl εκφρασμένους συναρτήσει των E^{ab} και H^{ab} (με τη βοήθεια των (2.28) και (2.33)) και τον τανυστή του Ricci εκφρασμένο μέσω των εξισώσεων Einstein (2.35) με τον τανυστή ορμής - ενέργειας που δίνεται από τη σχέση (2.22).Όπου εμφανίζονται οι παράγωγοι $u_{a;b}$ αυτές αντικαθίστανται από τις κινηματικές ποσότητες που υπεισέρχονται στην (2.14).Τέλος, οι εξισώσεις που προκύπτουν προβάλλονται παράλληλα και κάθετα προς το $\mathbf{u}$.Οι παράλληλες προβολές δίνουν το σετ των εξισώσεων εξέλιξης, στις οποίες υπεισέρχονται οι χρονικές (κατά τη διεύθυνση του $\mathbf{u}$) παράγωγοι των ποσοτήτων $\Theta, \sigma_{ab}, \mu, p, q_a, \pi_{ab}$.Οι κάθετες προβολές δίνουν το σετ των εξισώσεων δεσμών στις οποίες υπεισέρχονται μόνο οι χωρικές (δηλαδή κατά την κάθετη προς το $\mathbf{u}$ διεύθυνση) παράγωγοι των παραπάνω ποσοτήτων.

2.5.1 Ταυτότητες Ricci

Ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία για τις ταυτότητες του Ricci (2.36) προκύπτουν τρεις εξισώσεις εξέλιξης και τρεις εξισώσεις δεσμών (*βλέπε [15] σελ.10, [32] σελ.15*).

Εξισώσεις Εξέλιξης:

- Εξίσωση Raychaudhuri

$$\dot{\Theta} - \tilde{\nabla}_a \dot{u}^a = -\frac{1}{3}\Theta^2 + \dot{u}_a\dot{u}^a - 2\sigma^2 + 2\omega^2 - \frac{1}{2}(\mu + 3p) + \Lambda \tag{2.39}$$

Αυτή είναι η βασική εξίσωση της βαρυτικής έλξης, η οποία δείχνει την απωστική φύση μιας θετικής κοσμολογικής σταθεράς και ταυτοποιεί το $(\mu+3p)$ ως την ενεργό πυκνότητα βαρυτικής μάζας.Η εξίσωση Raychaudhuri διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στα θεωρήματα ύπαρξης ανωμαλιών (*βλέπε και [23], [12], [17] σελ.261-275*)

- Εξίσωση διάδοσης της ελικότητας

$$\dot{\omega}^{<a>} - \frac{1}{2}\eta^{abc}\tilde{\nabla}_b\dot{u}_c = -\frac{2}{3}\Theta\omega^a + \sigma^a{}_b\omega^b \tag{2.40}$$

Η εξίσωση αυτή μαζί με την εξίσωση (2.56) που ακολουθεί δείχνουν πώς διατηρείται η ελικότητα σε ένα ιδανικό ρευστό με δυναμικό επιτάχυνσης Φ χρησιμοποιώντας τη σχέση $\eta^{abc}\tilde{\nabla}_b\dot{u}_c = \eta^{abc}\tilde{\nabla}_b\tilde{\nabla}_c\Phi = 2\omega^a\dot{\Phi}$

- Εξίσωση διάδοσης της διατμητικής ταχύτητας

$$\dot{\sigma}^{<ab>} - \tilde{\nabla}^{<a}\dot{u}^{b>} = -\frac{2}{3}\Theta\sigma^{ab} + \dot{u}^{<a}\dot{u}^{b>} - \sigma^{<a}{}_c\sigma^{b>c} - \omega^{<a}\omega^{b>} - (E^{ab} - \frac{1}{2}\pi^{ab}) \tag{2.41}$$

Η εξίσωση αυτή δείχνει πώς το ηλεκτρικό μέρος E^{ab} του τανυστή του Weyl προκαλεί διατμητική ταχύτητα η οποία με τη σειρά της τροφοδοτώντας τις εξισώσεις Raychaudhuri και διάδοσης της ελικότητας επηρεάζει τη μορφή της ροής του ρευστού.

Εξισώσεις Δεσμών:

- Η εξίσωση-(0α)

$$\tilde{\nabla}_b\sigma^{ab} - \frac{2}{3}\tilde{\nabla}^a\Theta + \eta^{abc}(\tilde{\nabla}_b\omega_c + 2\dot{u}_b\omega_c) + q^a = 0 \tag{2.42}$$

η οποία δείχνει πώς το διάνυσμα ροής ενέργειας q^a (μηδενική για ιδανικό ρευστό) σχετίζεται με τη χωρική ανομοιογένεια του ρυθμού διαστολής.

- Η ταυτότητα απόκλισης της ελικότητας

$$\tilde{\nabla}_a\omega^a - (\dot{u}_a\omega^a) = 0 \tag{2.43}$$

- Η εξίσωση-H_{ab}

$$H^{ab} + 2\dot{u}^{<a}\omega^{b>} + \tilde{\nabla}^{<a}\omega^{b>} - (curl\sigma)^{ab} = 0 \tag{2.44}$$

η οποία συνδέει το μαγνητικό μέρος H^{ab} του τανυστή του Weyl με τη χωρική μεταβολή της ελικότητας και τον στροβιλισμό της διατμητικής ταχύτητας $(curl\sigma)^{ab} = \eta^{cd<a}\tilde{\nabla}_c\sigma^{b>}{}_d$

2.5.2 Ταυτότητες Bianchi

Το δεύτερο σετ εξισώσεων προκύπτει από τις ταυτότητες του Bianchi, οι οποίες δίνουν δύο επιπλέον εξισώσεις εξέλιξης και δύο εξισώσεις δεσμών (*βλέπε [15] σελ.11-12, [32] σελ.16-17*).

Εξισώσεις Εξέλιξης:

- Η εξίσωση-$\dot{E}$

$$
\begin{aligned}
(\dot{E}^{<ab>} + \frac{1}{2}\dot{\pi}^{<ab>}) - (curlH)^{ab} + \frac{1}{2}\tilde{\nabla}^{<a}q^{b>} = &- \frac{1}{2}(\mu+p)\sigma^{ab} - \Theta(E^{ab} + \frac{1}{6}\pi^{ab}) \\
&+ 3\sigma^{<a}{}_{c}(E^{b>c} - \frac{1}{6}\pi^{b>c}) - \dot{u}^{<a}q^{b>} \\
&+ \eta^{cd<a}[2\dot{u}_c H^{b>}{}_{d} + \omega_c(E^{b>}{}_{d} + \frac{1}{2}\pi^{b>}{}_{d})]
\end{aligned}
\tag{2.45}
$$

- Η εξίσωση-$\dot{H}$

$$
\begin{aligned}
\dot{H}^{<ab>} + (curlE)^{ab} - \frac{1}{2}(curl\pi)^{ab} = &- \Theta H^{ab} + 3\sigma^{<a}{}_{c}H^{b>c} + \frac{3}{2}\omega^{<a}q^{b>} \\
&- \eta^{cd<a}[2\dot{u}_c E^{b>}{}_{d} - \frac{1}{2}\sigma^{b>}{}_{c}q_d - \omega_c H^{b>}{}_{d}]
\end{aligned}
\tag{2.46}
$$

όπου

$$(curlH)^{ab} = \eta^{cd<a}\tilde{\nabla}_c H^{b>}{}_{d} \tag{2.47}$$

$$(curlE)^{ab} = \eta^{cd<a}\tilde{\nabla}_c E^{b>}{}_{d} \tag{2.48}$$

$$(curl\pi)^{ab} = \eta^{cd<a}\tilde{\nabla}_c \pi^{b>}{}_{d} \tag{2.49}$$

Αυτές οι εξισώσεις δείχνουν πως παράγεται η βαρυτική ακτινοβολία:Παραγωγίζοντας την εξίσωση (2.45) ως προς το χρόνο παίρνουμε μία εξίσωση η οποία περιέχει τους όρους $\ddot{E}$ και $(curl\ \dot{H})$. Απαλοίφουμε το H με τη βοήθεια της (2.46) και τελικά προκύπτει μία εξίσωση η οποία περιέχει τους όρους $\ddot{E}$ και $(curl\ curl\ E)$ και είναι αντίστοιχη της εξίσωσης κύματος. Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε την αντίστοιχη εξίσωση και για το μαγνητικό μέρος.

Εξισώσεις Δεσμών:

- Η εξίσωση (*div E*), όπου υπεισέρχεται η χωρική κλίση της πυκνότητας ενέργειας

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_b(E^{ab} + \frac{1}{2}\pi^{ab}) - \frac{1}{3}\tilde{\nabla}^a\mu + \frac{1}{3}\Theta q^a - \frac{1}{2}\sigma^a{}_b q^b & \\ -3\omega_b H^{ab} - \eta^{abc}(\sigma_{bd}H^d{}_c - \frac{3}{2}\omega_b q_c) &= 0 \end{aligned} \qquad (2.50)$$

  Η εξίσωση αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως το διανυσματικό ανάλογο της Νευτώνιας εξίσωσης του Poisson.Δείχνει πώς η πυκνότητα ενέργειας μ (βαθμωτό) δημιουργεί μία μη μηδενική απόκλιση του E^{ab} και επομένως ένα μη μηδενικό πεδίο E^{ab}.

- Η εξίσωση (*div H*), στην οποία υπεισέρχεται η ελικότητα του ρευστού.

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_b H^{ab} + (\mu + p)\omega^a + 3\omega_b(E^{ab} - \frac{1}{6}\pi^{ab}) & \\ +\eta^{abc}[\frac{1}{2}\tilde{\nabla}_b q_c + \sigma_{bd}(E^d{}_c + \frac{1}{2}\pi^d{}_c)] &= 0 \end{aligned} \qquad (2.51)$$

  Εδώ φαίνεται πώς η ελικότητα ω^a (διάνυσμα) δημιουργεί μη μηδενική απόκλιση του H^{ab} και επομένως ένα μη μηδενικό πεδίο H^{ab}.

2.5.3 Twice-contracted ταυτότητες του Bianchi

Το τρίτο σετ εξισώσεων απορρέει από τις twice-contracted ταυτότητες του Bianchi οι οποίες, μέσω των εξισώσεων Einstein (2.35), συνεπάγονται τις εξισώσεις διατήρησης (*βλέπε [15] σελ.11, [32] σελ.16-17*):

$$\nabla_b G^{ab} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla_b T^{ab} = 0 \qquad (2.52)$$

Οι εξισώσεις που προκύπτουν είναι οι εξής:

- Η εξίσωση χρονικής εξέλιξης της ενέργειας

$$\dot{\mu} + \tilde{\nabla}_a q^a = -\Theta(\mu + p) - 2(\dot{u}_a q^a) - (\sigma^a{}_b \pi^b{}_a) \qquad (2.53)$$

- Η εξίσωση χρονικής εξέλιξης της ορμής

$$\dot{q}^{<a>} + \tilde{\nabla}^a p + \tilde{\nabla}_b \pi^{ab} = -\frac{4}{3}\Theta q^a - \sigma^a{}_b q^b - (\mu + p)\dot{u}^a - \dot{u}_b \pi^{ab} - \eta^{abc}\omega_b q_c \quad (2.54)$$

Για ιδανικό ρευστό η εξίσωση (2.53) γίνεται η εξίσωση διατήρησης της ενέργειας:

$$\dot{\mu} = -\Theta(\mu + p) \tag{2.55}$$

και η εξίσωση (2.54) γίνεται η εξίσωση διατήρησης της ορμής:

$$\tilde{\nabla}_a p + (\mu + p)\dot{u}_a = 0 \tag{2.56}$$

Αυτό δείχνει ότι το $(\mu + p)$ είναι η πυκνότητα αδρανειακής μάζας και επιπλέον διέπει τη διατήρηση της ενέργειας.Είναι φανερό ότι αν αυτή η ποσότητα είναι μηδέν (μία ενεργή κοσμολογική σταθερά) ή αρνητική τότε η συμπεριφορά της μάζας θα είναι ανώμαλη.

Οι εξισώσεις εξέλιξης και δεσμών δεν αποτελούν ένα πλήρες σύνολο δυναμικών εξισώσεων.Για παράδειγμα δεν υπάρχουν εξισώσεις εξέλιξης για την πίεση p και για την επιτάχυνση $\dot{u}^a$.Προκειμένου να ολοκληρώσουμε αυτό το σετ εξισώσεων θα πρέπει να συμπεριλάβουμε επιπλέον υποθέσεις που αφορούν τις θερμοδυναμικές ιδιότητες των πεδίων ύλης (π.χ καταστατικές εξισώσεις).

Κεφάλαιο 3

Τετραδικός Φορμαλισμός

Οι εξισώσεις εξέλιξης και δεσμών που προκύπτουν από την 1+3 συναλλοίωτη περιγραφή έχουν το πλεονέκτημα ότι συνδέουν συναλλοίωτα ορισμένες ποσότητες οι οποίες έχουν ξεκάθαρη γεωμετρική ή φυσική σημασία όπως π.χ. ο ρυθμός διαστολής, η διατμητική ταχύτητα κλπ. Όμως σε αυτές δεν υπεισέρχονται εκπεφρασμένα η μετρική και η connection, πράγμα που είναι συχνά επιθυμητό για μία βαθύτερη μελέτη των ιδιοτήτων του χωροχρόνου. Αυτή η αδυναμία της 1+3 συναλλοίωτης περιγραφής καλύπτεται από τη χρήση του τετραδικού φορμαλισμού. Επιπλέον, ο τετραδικός φορμαλισμός είναι χρήσιμος και στη μελέτη της κατηγοριοποίησης των διαφόρων χωροχρόνων σύμφωνα με τις ομάδες ισομετριών που δρουν σε αυτούς, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Μία τετράδα είναι μία βάση του εφαπτόμενου διανυσματικού χώρου σε κάθε σημείο του χωροχρόνου, αποτελούμενη από τέσσερα διανυσματικά πεδία $\{\mathbf{E}_a\}, a = 0, 1, 2, 3$.Οι συνιστώσες του μετρικού τανυστή , αναφορικά με αυτή τη βάση, εκφράζονται από τα εσωτερικά γινόμενα των διανυσμάτων της βάσης.Κάθε δε τανυστής πάνω στον εφαπτόμενο διανυσματικό χώρο σε κάθε σημείο του χωροχρόνου προσδιορίζεται μονοσήμαντα από τις τετραδικές του συνιστώσες που προκύπτουν με προβολή του πάνω στα διανύσματα της τετράδας.

3.1 Γενικός Τετραδικός Φορμαλισμός

Η βάση μας (τετράδα) αποτελείται από τέσσερα διανυσματικά πεδία $\{\mathbf{E}_a\}, a = 0, 1, 2, 3$, των οποίων οι συνιστώσες, ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων $\{x_i\}, i = 0, 1, 2, 3$, συμβολίζονται [1] με ${E_a}^i$ (*βλέπε [18] σελ.215, [15] σελ.17*).Η τετράδα που χρησιμοποιούμε εδώ είναι γενική με την έννοια ότι μπορεί να είναι

[1] Οι δείκτες που βρίσκονται αριστερά $(a, d, c, d, ...)$ είναι τετραδικοί δείκτες, ενώ οι δείκτες που βρίσκονται δεξιά $(i, j, k, l, ...)$ είναι δείκτες συντεταγμένων.

ολόνομη ή μη ολόνομη.[2] Αν η τετράδα είναι ολόνομη τότε μπορεί πάντα να βρεθεί ένα σύστημα συντεταγμένων τέτοιο ώστε $\mathbf{E}_a = \frac{\partial}{\partial x^a}$ ή ισοδύναμα $E_a{}^i = \delta^i_a$. Η δυϊκή τετράδα (1-μορφή) $\{\mathbf{E}^a\}, a = 0, 1, 2, 3$ ορίζεται από τη σχέση:

$$\mathbf{E}^a(\mathbf{E}_b) = \delta^a_b \tag{3.1}$$

και οι συνιστώσες της σε ένα σύστημα συντεταγμένων $\{x^i\}$ συμβολίζονται ως $E^a{}_i$. Επομένως, η (3.1) γράφεται και στη μορφή

$$E^a{}_i E_b{}^i = \delta^a_b \tag{3.2}$$

η οποία προφανώς είναι ισοδύναμη με την

$$E^a{}_i E_a{}^j = \delta^i_j \tag{3.3}$$

Η παράγωγος οποιασδήποτε συνάρτησης f κατά τη διεύθυνση του $\mathbf{E}_a$ ορίζεται ως:

$$\partial_a f = E_a{}^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \tag{3.4}$$

Κάθε τανυστής με συνιστώσες $T^{i\cdots j}{}_{k\cdots l}$ ως προς κάποιο σύστημα συντεταγμένων θα έχει τετραδικές συνιστώσες $T^{a\cdots b}{}_{c\cdots d}$ που δίνονται από τη σχέση[3]:

$$T^{a\cdots b}{}_{c\cdots d} = E^a{}_i \cdots E^b{}_j \, T^{i\cdots j}{}_{k\cdots l} \, E_c{}^k \cdots E_d{}^l \tag{3.5}$$

Οι τετραδικές συνιστώσες g_{ab} του μετρικού τανυστή προκύπτουν από το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων της τετράδας:

$$g_{ab} = \mathbf{E}_a \cdot \mathbf{E}_b = E_a{}^i E_b{}^j g_{ij} \tag{3.6}$$

Η αντίστοιχη σχέση για το μετρικό τανυστή στον αντίστοιχο δυϊκό εφαπτομενικό χώρο είναι η εξής:

$$g^{ab} = \mathbf{E}^a \cdot \mathbf{E}^b = E^a{}_i E^b{}_j g^{ij} \tag{3.7}$$

Είναι προφανές, λόγω των (3.2) και (3.3), ότι

$$g^{ab} g_{bc} = \delta^a_c \tag{3.8}$$

Οι αντίστροφες σχέσεις των (3.6) και (3.7):

$$g_{ij} = E^a{}_i E^b{}_j g_{ab} \tag{3.9}$$
$$g^{ij} = E_a{}^i E_b{}^j g^{ab} \tag{3.10}$$

[2] Αν η τετράδα είναι ολόνομη τότε οι τετραδικοί δείκτες είναι και αυτοί δείκτες συντεταγμένων.

[3] Οι τετραδικές συνιστώσες τανυστή συμπεριφέρονται σαν βαθμωτά κάτω από μετασχηματισμούς συντεταγμένων.

προκύπτουν εύκολα με τη βοήθεια της (3.3), όπως και οι:

$$E_{ai} = g_{ab}E^{b}{}_{i} \quad , \quad E^{ai} = g^{ab}E_{b}{}^{i} \tag{3.11}$$

που εκφράζουν τη γραμμική σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην τετράδα και τη δυϊκή τετράδα.Στην πράξη η τετραδική μετρική g_{ab} και η δυϊκή της g^{ab} χρησιμοποιούνται για το ανεβοκατέβασμα των τετραδικών δεικτών.

Οι διαφορικές ιδιότητες της βάσης καθορίζονται από τους *συντελεστές στροφής του Ricci* [4] (Ricci rotation coefficients), οι οποίοι ορίζονται από τη σχέση (*βλέπε [15] σελ.17*):[5]

$$E_{b}{}^{j}E_{a}{}^{i}{}_{;j} = \Gamma^{c}{}_{ab}E_{c}{}^{i} \;\Leftrightarrow\; \Gamma^{c}{}_{ab} = E^{c}{}_{i}E_{a}{}^{i}{}_{;j}E_{b}{}^{j} \tag{3.12}$$

ή ισοδύναμα:

$$\Gamma_{abc} = E_{a}{}^{i}E_{bi;j}E_{c}{}^{j} \tag{3.13}$$

όπου $\Gamma_{abc} = g_{ad}\Gamma^{d}{}_{bc}$.

Δηλαδή, το Γ_{abc} είναι η a-συνιστώσα της συναλλοίωτης παραγώγου του διανύσματος $\mathbf{E}_b$ κατά τη διεύθυνση του $\mathbf{E}_c$.
Από τη σχέση (3.13) προκύπτει ότι:

$$E_{bi;j} = \Gamma_{abc}E^{a}{}_{i}E^{c}{}_{j} \tag{3.14}$$

Με τη βοήθεια της σχέσης (3.12) μπορούμε να βρούμε την τετραδική μορφή της συναλλοίωτης παραγώγου.

Θεώρημα 3.1.1. *Η τετραδική μορφή της συναλλοίωτης παραγώγου ενός διανύσματος με τετραδικές συνιστώσες X_a είναι τελείως ανάλογη με τη συνηθισμένη τανυστική της μορφή, δηλαδή:*

$$X_{a;b} = X_{a,b} - \Gamma^{c}{}_{ab}X_{c} \tag{3.15}$$

Απόδειξη. Η συναλλοίωτη παράγωγος $X_{i;j}$ ενός διανύσματος με συνιστώσες X_i είναι ένας τανυστής δεύτερης τάξης.Οι τετραδικές συνιστώσες του, που τις συμβολίζουμε με $X_{a;b}$, δίνονται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} X_{a;b} &= E_{a}{}^{i}E_{b}{}^{j}X_{i;j} \\ &= E_{b}{}^{j}(E_{a}{}^{i}X_{i})_{;j} - E_{b}{}^{j}E_{a}{}^{i}{}_{;j}X_{i} \end{aligned} \tag{3.16}$$

---

[4]Ένας πιθανός λόγος για τον οποίο ονομάζονται " συντελεστές στροφής " αναλύεται στο Παράρτημα A.1

[5]Στην παλαιότερη βιβλιογραφία χρησιμοποιούνται διαφορετικοί ορισμοί για τους συντελεστές στροφής του Ricci κάτι που επηρεάζει τη μορφή ορισμένων σχέσεων που βρίσκουμε παρακάτω, π.χ. οι King και Ellis στο [18], χρησιμοποιούν τον ορισμό:

$$\Gamma_{abc} = E_{a}{}^{i}E_{ci;j}E_{b}{}^{j}$$

Εμείς χρησιμοποιούμε τον ορισμό που δίνεται από τους Ellis και van Elst στο [15] σελ.17

η οποία με τη βοήθεια της (3.12) γίνεται

$$\begin{aligned} X_{a;b} &= E_b{}^j X_{a;j} - \Gamma^c{}_{ab} E_c{}^i X_i \\ &= E_b{}^j X_{a,j} - \Gamma^c{}_{ab} X_c \\ &= X_{a,b} - \Gamma^c{}_{ab} X_c \end{aligned} \tag{3.17}$$

□

Ομοίως βρίσκουμε ότι ο αντίστοιχος τύπος για τη συναλλοίωτη παράγωγο $X^a{}_{;b}$ είναι

$$X^a{}_{;b} = X^a{}_{,b} + \Gamma^a{}_{cb} X^c \tag{3.18}$$

Ανάλογοι τύποι ισχύουν και για τις τετραδικές συνιστώσες της συναλλοίωτης παραγώγου τανυστών οποιασδήποτε τάξης.
Θα πρέπει εδώ να τονίσουμε ότι: $X_{a;b} = E_a{}^i E_b{}^j X_{i;j} \neq E_b{}^j X_{a;j}$. Αυτό αποτελεί ένα αδύνατο σημείο του συμβολισμού $X_{a;b}$ το οποίο πρέπει να έχουμε κατά νου όταν κάνουμε τετραδικές πράξεις.

Από τη σχέση (3.13) και λαμβάνοντας υπόψιν ότι οι τετραδικές συνιστώσες ενός τανυστή είναι βαθμωτά ως προς τους μετασχηματισμούς συντεταγμένων προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \Gamma_{abc} &= E_a{}^i E_{bi;j} E_c{}^j \\ &= E_c{}^j (E_a{}^i E_{bi})_{;j} - E_{bi} E_a{}^i{}_{;j} E_c{}^j \\ &= E_c{}^j g_{ab;j} - E_b{}^i E_{ai;j} E_c{}^j \\ &= E_c{}^j g_{ab,j} - E_b{}^i E_{ai;j} E_c{}^j \\ &= g_{ab,c} - \Gamma_{bac} \\ \Leftrightarrow g_{ab,c} &= \Gamma_{abc} + \Gamma_{bac} \end{aligned} \tag{3.19}$$

Παρατηρούμε ότι η (3.19) είναι ισοδύναμη με την

$$g_{bc;a} = 0 \tag{3.20}$$

η οποία εκφράζει τις τετραδικές συνιστώσες της

$$g_{ij;k} = 0 \tag{3.21}$$

Πράγματι, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.2

$$\begin{aligned} g_{bc;a} &= g_{bc,a} - \Gamma^d{}_{ba} g_{bc} - \Gamma^d{}_{ca} g_{bd} \\ &= g_{bc,a} - \Gamma_{cba} - \Gamma_{bca} \end{aligned} \tag{3.22}$$

η οποία σε συνδυασμό με την (3.19) μας δίνει

$$g_{bc;a} = g_{bc,a} - g_{bc,a} = 0 \tag{3.23}$$

Έστω δύο διανυσματικά πεδία $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$.Ο μεταθέτης τους $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ ορίζεται ως

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \mathbf{XY} - \mathbf{YX} \tag{3.24}$$

και οι συνιστώσες του $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]^i$ δίνονται από τη σχέση

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]^i = X^j Y^i{}_{,j} - Y^j X^i{}_{,j} = X^j Y^i{}_{;j} - Y^j X^i{}_{;j} \tag{3.25}$$

(*βλέπε π.χ. [6] σελ.66*). Όπως θα δούμε στην παράγραφο 4.1 ο μεταθέτης ισούται με την παράγωγο Lie $L_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$ των διανυσμάτων αυτών: $L_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$. Θεωρώντας τον μεταθέτη των διανυσμάτων βάσης $\{\mathbf{E}_a\}$ ορίζουμε τις *συναρτήσεις μετάθεσης* (commutation functions) $\gamma^c{}_{ab}$ ως εξής:

$$[\mathbf{E}_a, \mathbf{E}_b] = \gamma^c{}_{ab}\mathbf{E}_c \tag{3.26}$$

(*βλέπε [18] σελ.215, [15] σελ.17, [32] σελ.70, [33] σελ.2676*). Εν γένει $\gamma^c{}_{ab} = \gamma^c{}_{ab}(x^i)$ δηλαδή , όπως και η ονομασία τους αφήνει να εννοηθεί, οι συναρτήσεις μετάθεσης εξαρτώνται από τις συντεταγμένες.Από τον ορισμό (3.26) είναι προφανές ότι: $\gamma^a{}_{bc} = -\gamma^a{}_{cb}$. Μέσω του τετραδικού μετρικού τανυστή μπορούμε να ορίσουμε και τις πλήρως συναλλοίωτες ποσότητες $\gamma_{abc} = g_{ad}\gamma^d{}_{bc}$ οι οποίες θα μας είναι χρήσιμες στη συνέχεια.Σημειώνουμε ότι οι συναρτήσεις μετάθεσης μηδενίζονται αν και μόνο αν η βάση $\{\mathbf{E}_a\}$ είναι ολόνομη, αφού τότε: $[\mathbf{E}_a, \mathbf{E}_b]^i = 0 \Leftrightarrow \gamma^c{}_{ab} = 0$. Από τις σχέσεις (3.25), (3.26) και (3.12) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}_a, \mathbf{E}_b]^i = \gamma^c{}_{ab}E_c{}^i \quad &\Rightarrow \quad E_b{}^i{}_{;j}E_a{}^j - E_a{}^i{}_{;j}E_b{}^j = \gamma^c{}_{ab}E_c{}^i \\ &\Rightarrow \quad E^d{}_i E_b{}^i{}_{;j}E_a{}^j - E^d{}_i E_a{}^i{}_{;j}E_b{}^j = \gamma^c{}_{ab}E^d{}_i E_c{}^i \\ &\Rightarrow \quad \Gamma^d{}_{ba} - \Gamma^d{}_{ab} = \gamma^c{}_{ab}\delta^d_c = \gamma^d{}_{ab} \end{aligned} \tag{3.27}$$

ή ισοδύναμα

$$\gamma^c{}_{ab} = -(\Gamma^c{}_{ab} - \Gamma^c{}_{ba}) \tag{3.28}$$

Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της (3.19) και με κυκλική μετάθεση των δεικτών παίρνουμε:

$$\begin{aligned} g_{ab,c} - g_{bc,a} + g_{ca,b} &= \Gamma_{abc} + \Gamma_{bac} - \Gamma_{bca} - \Gamma_{cba} + \Gamma_{cab} + \Gamma_{acb} \\ &= 2\Gamma_{abc} - \Gamma_{abc} + \Gamma_{bac} - \Gamma_{bca} - \Gamma_{cba} + \Gamma_{cab} + \Gamma_{acb} \end{aligned} \tag{3.29}$$

και χρησιμοποιώντας την (3.28) τελικά προκύπτει ότι

$$\Gamma_{abc} = \frac{1}{2}(\gamma_{acb} - \gamma_{bca} + \gamma_{cab}) + \frac{1}{2}(g_{ab,c} + g_{ca,b} - g_{bc,a}) \tag{3.30}$$

Οι σχέσεις (3.28) και (3.30) συνδέουν τους συντελεστές στροφής του Ricci με τις συναρτήσεις μετάθεσης.

Με άμεσο υπολογισμό, χρησιμοποιώντας τον ορισμό (3.24), διαπιστώνουμε ότι κάθε τριάδα διανυσμάτων $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ πρέπει να ικανοποιεί τις ταυτότητες Jacobi:

$$[\mathbf{X},[\mathbf{Y},\mathbf{Z}]]+[\mathbf{Y},[\mathbf{Z},\mathbf{X}]]+[\mathbf{Z},[\mathbf{X},\mathbf{Y}]]=0 \tag{3.31}$$

Στην περίπτωση που τις εφαρμόζουμε για τα διανύσματα της τετράδας, αυτές παίρνουν τη μορφή (*βλέπε [18] σελ.215, [15] σελ.18, [33] σελ.2677 και παράρτημα Α.1 για την απόδειξη*)

$$\partial_{[a}\gamma^{d}{}_{bc]}+\gamma^{e}{}_{[ab}\gamma^{d}{}_{c]e}=0 \tag{3.32}$$

Οι τετραδικές συνιστώσες $R^{a}{}_{bcd}$ του τανυστή καμπυλότητας Riemann ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων $\{x^{i}\}$ δίνονται από τη σχέση

$$R^{a}{}_{bcd}=R^{l}{}_{ijk}E^{a}{}_{l}E_{b}{}^{i}E_{c}{}^{j}E_{d}{}^{k} \tag{3.33}$$

Από αυτή τη σχέση είναι φανερό ότι οι ποσότητες $R^{a}{}_{bcd}$ έχουν όλες τις συμμετρίες που έχουν και οι συνιστώσες $R^{l}{}_{ijk}$. Αν εφαρμόσουμε τις ταυτότητες του Ricci

$$X_{i;jk}-X_{i;kj}=R^{l}{}_{ijk}X_{l} \tag{3.34}$$

για τα διανύσματα της τετράδας $\mathbf{E}_{a}$ προκύπτει ότι οι τετραδικές συνιστώσες του τανυστή του Riemann είναι:

$$R^{a}{}_{bcd}=\Gamma^{a}{}_{bd,c}-\Gamma^{a}{}_{bc,d}+\Gamma^{a}{}_{ec}\Gamma^{e}{}_{bd}-\Gamma^{a}{}_{ed}\Gamma^{e}{}_{bc}-\Gamma^{a}{}_{be}\gamma^{e}{}_{cd} \tag{3.35}$$

(*βλέπε [15] σελ.18, [32] σελ.72, [32] σελ.2677 και παράρτημα Α.1 για την απόδειξη*). Κάνοντας συστολή ως προς τους δείκτες a και c στην (3.35) προκύπτουν οι τετραδικές συνιστώσες του τανυστή του Ricci

$$R_{bd}=\Gamma^{a}{}_{bd,a}-\Gamma^{a}{}_{ba,d}+\Gamma^{a}{}_{ea}\Gamma^{e}{}_{bd}-\Gamma^{a}{}_{de}\Gamma^{e}{}_{ba} \tag{3.36}$$

Είναι αξιοσημείωτο ότι δεν είναι αμέσως εμφανές από την παραπάνω σχέση ότι οι R_{ab} είναι συμμετρικές, όμως η σχέση (3.32) συνεπάγεται ότι (*βλέπε παράρτημα Α.1 για την απόδειξη*)

$$R_{a[bcd]}=0\Rightarrow R_{ab}=R_{(ab)} \tag{3.37}$$

Οι εξισώσεις του Einstein έχουν τη μορφή

$$R_{bd}-\frac{1}{2}Rg_{bd}+\Lambda g_{bd}=T_{bd} \tag{3.38}$$

Αν στην παραπάνω εξίσωση πάρουμε τα ίχνη των τανυστών προκύπτει ότι

$$R - \frac{1}{2}4R + 4\Lambda = T \Rightarrow R = 4\Lambda - T$$

Άρα οι εξισώσεις Einstein γίνονται:

$$R_{bd} = T_{bd} - \frac{1}{2}Tg_{bd} + \Lambda g_{bd} \tag{3.39}$$

και αντικαθιστώντας τη σχέση (3.36) στην (3.39) τελικά παίρνουν τη μορφή

$$\Gamma^a{}_{bd,a} - \Gamma^a{}_{ba,d} + \Gamma^a{}_{ea}\Gamma^e{}_{bd} - \Gamma^a{}_{de}\Gamma^e{}_{ba} = T_{bd} - \frac{1}{2}Tg_{bd} + \Lambda g_{bd} \tag{3.40}$$

Μια αλλαγή της τετράδικής βάσης εκφράζεται με τη σχέση

$$\mathbf{E}_a = \Lambda_a{}^{a'}(x^i)\mathbf{E}_{a'} \tag{3.41}$$

της οποίας η αντίστροφη είναι η

$$\mathbf{E}_{a'} = \Lambda_{a'}^{a}(x^i)\mathbf{E}_a \tag{3.42}$$

Ένας τέτοιος μετασχηματισμός της τετραδικής βάσης έχει σαν αποτέλεσμα να αλλάξουν γραμμικά οι τετραδικές συνιστώσες κάθε τανυστή, π.χ. για έναν τανυστή τετάρτης τάξης με μεικτές συνιστώσες $T^{ab}{}_{cd}$ θα έχουμε:

$$T^{ab}{}_{cd} = \Lambda_{a'}^{a}\Lambda_{b'}^{b}\Lambda_c{}^{c'}\Lambda_d{}^{d'}T^{a'b'}{}_{c'd'} \tag{3.43}$$

3.2 Ορθοκανονικές Τετράδες

Αναφερθήκαμε παραπάνω σε τετράδες οι οποίες δεν είναι κατ'ανάγκη ορθοκανονικές.Μία ορθοκανονική τετράδα $\{\mathbf{e}_a\}, a = 0, 1, 2, 3$ ορίζεται με τη σχέση:

$$\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b = g_{ab} = \eta_{ab} \tag{3.44}$$

όπου η_{ab} είναι η μετρική Minkowski

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.45}$$

Σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι $g_{ab,c} = \eta_{ab,c} = 0$

Επομένως οι σχέσεις (3.19) και (3.30) γίνονται αντίστοιχα:

$$\Gamma_{abc} = -\Gamma_{bac} \Leftrightarrow \Gamma_{(ab)c} = 0 \tag{3.46}$$

$$\Gamma_{abc} = \frac{1}{2}(\gamma_{acb} - \gamma_{bca} + \gamma_{cab}) \tag{3.47}$$

Οι υπόλοιπες σχέσεις που έχουμε αποδείξει για τις γενικές τετράδες ισχύουν και για τις ορθοκανονικές τετράδες.(*βλέπε [15] σελ.17-18, [32] σελ.69-70, [33] σελ.2675-2676*)

Οι ορθοκανονικές τετράδες χρησιμοποιούνται ευρέως γιατί έχουν το πλεονέκτημα ότι απλοποιούν αρκετά τις τετραδικές εξισώσεις, αφού η τετραδική μετρική η_{ab} είναι σταθερή.Έχουν όμως το μειονέκτημα ότι πολλές φορές δεν προσαρμόζονται καλά στη γεωμετρία του χωροχρόνου ή και δεν μπορεί να προσανατολιστούν σε προεξάρχουσες διευθύνσεις που δημιουργούνται από τα υλικά πεδία.Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε γενικές τετράδες.

Κεφάλαιο 4

Συμμετρικά Κοσμολογικά Μοντέλα

Οι εξισώσεις πεδίου της γενικής σχετικότητας είναι ένα σύστημα συζευγμένων, μη γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων.Στην κοσμολογία απλοποιούμε αυτές τις εξισώσεις επιβάλλοντας συμμετρίες στη γεωμετρία του χωροχρόνου.Οι συμμετρίες που παρουσιάζουν ειδικό ενδιαφέρον και χρησιμοποιούνται συνηθέστερα είναι οι *ισομετρίες*.Αυτές είναι μετασχηματισμοί του χωροχρόνου στον εαυτό του που αφήνουν αναλλοίωτο τον μετρικό τανυστή και περιγράφονται αλγεβρικά από μία συνεχή ομάδα.

Τα χωρικά ομογενή κοσμολογικά μοντέλα, με τα οποία θα ασχοληθούμε κυρίως εδώ, είναι χωροχρόνοι που διαθέτουν κάποια προεξάρχουσα χρονοειδή διεύθυνση.Οι χωροειδείς υπερεπιφάνειες που πληρούν τον χωροχρόνο και είναι κάθετες σε αυτή τη χρονοειδή διεύθυνση δέχονται μια τρισδιάστατη ομάδα ισομετριών που αντιστοιχίζει κάθε σημείο μιας υπερεπιφάνειας με ένα οποιοδήποτε άλλο σημείο της.Τέτοιες ομάδες λέμε ότι δρουν *μεταβατικά* (transitively) πάνω στην υπερεπιφάνεια ή ότι είναι *μεταβατικές* (transitive).

4.1 Διανύσματα Killing και Ομάδες Ισομετριών

Έστω ένα διανυσματικό πεδίο ξ με συνιστώσες ξ^i σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων $\{x^i\}$, $i = 0, 1, 2, 3$. Οι τροχιές (ή ολοκληρωτικές καμπύλες) του ξ είναι καμπύλες στο χωροχρόνο, σε κάθε σημείο των οποίων το ξ είναι εφαπτόμενο, με εξίσωση $x^i = x^i(y^\alpha, u)$ που είναι λύσεις του συστήματος διαφορικών εξισώσεων $\frac{\partial x^i}{\partial u} = \xi^i[x^j(u)]$. Οι τροχιές αυτές πληρούν το χωροχρόνο και ταυτοποιούνται από τις τρεις παραμέτρους y^α, $\alpha = 1, 2, 3$ (δηλαδή σε κάθε τροχιά αντιστοιχεί μία τριάδα y^α η οποία παραμένει σταθερή κατά μήκος της, αλλά αλλάζει από τροχιά σε τροχιά).Η παράμετρος u μεταβάλλεται κατά μήκος κάθε τροχιάς προσδιορίζοντας τα σημεία της.

Το διανυσματικό αυτό πεδίο ορίζει ένα μονοπαραμετρικό σημειακό μετασχηματισμό f_u στο χωροχρόνο ως εξής: Στο τυχόν σημείο $P(u)$ του χωροχρόνου, με συντεταγμένες x^i, από το οποίο διέρχεται η τροχιά $x^i = x^i(y^\alpha, u)$ αντιστοιχίζει το σημείο $f_{u'}(P) = P'(u+u')$ με συντεταγμένες $x^i(y^\alpha, u+u')$, το οποίο προκύπτει από το P με μετατόπισή του επί αυτής της τροχιάς κατά μία σταθερή παραμετρική απόσταση u'.Προφανώς για μικρές μετατοπίσεις με $u' = \delta u$ οι συντεταγμένες του $P'(u+u')$ θα είναι

$$x^i(y^\alpha, u+\delta u) = x^i(y^\alpha, u) + \xi^i \delta u \tag{4.1}$$

όπου οι συνιστώσες ξ^i υπολογίζονται στο σημείο $P(u)$. Ανάλογα μπορούμε να πούμε ότι ο μετασχηματισμός αυτός αντιστοιχεί ένα οποιοδήποτε γεωμετρικό αντικείμενο X_Δ (διάνυσμα, τανυστή κλπ., όπου το Δ συμβολίζει μια συλλογή δεικτών) στο γεωμετρικό αντικείμενο $X'_\Delta = f'_u(X_\Delta)$ με “ σύρσιμο ” του X πάνω στις τροχιές του ξ κατά σταθερή παραμετρική απόσταση u'.Συγκρίνοντας τώρα το μετασχηματισμένο αντικείμενο X'_Δ με την τιμή $X_\Delta \equiv X_\Delta[x^i(y^\alpha, u+u')]$ που αυτό εξ'αρχής είχε στο σημείο $P'(u+u')$ ορίζουμε τη Lie παράγωγό του κατά τη διεύθυνση του ξ ως εξής:

$$L_\xi X_\Delta = lim_{u'\to 0} \frac{X_\Delta - X'_\Delta}{u'} \tag{4.2}$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η παράγωγος Lie υπακούει στον κανόνα του Leibnitz για την παραγώγιση και ότι όταν δρα πάνω σ'ένα τανυστή παράγει έναν τανυστή της ίδιας τάξης.

Αν τώρα κάποια γεωμετρική οντότητα X_Δ είναι ορισμένη μόνο για μία συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου u, μπορούμε να επεκτείνουμε τον ορισμό της παντού στο χωροχρόνο αν την προσδέσουμε στις τροχιές του διανυσματικού πεδίου ξ και τη σύρουμε κατά μήκος τους κατά δεδομένη κάθε φορά παραμετρική απόσταση.Μία τέτοια μεταφορά του X_Δ λέγεται *μεταφορά Lie* (Lie transfer) και το γεωμετρικό αντικείμενο X_Δ που ορίζεται κατ'αυτόν τον τρόπο σε όλο το χωροχρόνο θα υπακούει προφανώς στη σχέση

$$L_\xi X_\Delta = 0 \tag{4.3}$$

Εφαρμόζοντας τον ορισμό (4.2) μπορούμε πολύ εύκολα να δείξουμε ότι η παράγωγος Lie κατά τη διεύθυνση του ξ ενός διανυσματικού πεδίου $\mathbf{w}$ ισούται με το μεταθέτη $[\xi, \mathbf{w}]$, δηλαδή

$$L_\xi \mathbf{w} = [\xi, \mathbf{w}] \tag{4.4}$$

ή σε συνιστώσες ως προς κάποιο σύστημα συντεταγμένων

$$L_\xi w^i = \xi^j w^i{}_{,j} - w^j \xi^i{}_{,j} = \xi^j w^i{}_{;j} - w^j \xi^i{}_{;j} \tag{4.5}$$

Επίσης, εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε ότι η παράγωγος Lie ως προς ξ του μετρικού τανυστή γράφεται

$$L_\xi g_{ij} = \xi_{i;j} + \xi_{j;i} \tag{4.6}$$

Ο σημειακός μετασχηματισμός που παράγεται από ένα διάνυσμα ξ του οποίου οι τροχιές είναι τέτοιες ώστε ο μετρικός τανυστής να μεταφέρεται κατά μήκος τους αναλλοίωτος λέγεται *ισομετρία* και αποτελεί θεμελιώδη έννοια της γεωμετρίας των χωροχρόνων.Το αντίστοιχο διάνυσμα ξ που παράγει την ισομετρία λέγεται *διάνυσμα Killing*.Εν γένει, σε ένα τυχόντα χωροχρόνο δεν υπάρχει διανυσμάτικό πεδίο Killing.Για να υπάρχει θα πρέπει να έχουν λύση οι εξισώσεις Killing:

$$L_\xi g_{ij} = \xi_{i;j} + \xi_{j;i} = 0 \tag{4.7}$$

με επίλυση των οποίων μπορούμε να έχουμε τις συνιστώσες ξ_i του διανύσματος Killing στο χρησιμοποιούμενο σύστημα συντεταγμένων.

Ας θεωρήσουμε ένα ρημάνιο [1] χώρο n διαστάσεων του οποίου η μετρική είναι αναλλοίωτη κάτω από διάφορες ισομετρίες.Το σύνολο όλων των ισομετριών του χώρου αποτελεί μία ομάδα.[2]Αυτό γιατί η σύνθεση δύο ισομετριών είναι επίσης ισομετρία και υπακούει στην προσεταιριστική ιδιότητα, το ταυτοτικό στοιχείο είναι ισομετρία και το αντίστροφο μιας ισομετρίας είναι ισομετρία.Η ομάδα αυτή είναι επιπλέον εφοδιασμένη με την πράξη της μετάθεσης δύο ισομετριών (η οποία είναι εσωτερική πράξη, αφού ο μεταθέτης δύο ισομετριών είναι πάλι ισομετρία) η οποία της προσδίδει τη δομή μιας άλγεβρας Lie.Λέμε ότι το σύνολο των ισομετριών ενός χωροχρόνου έχει την αλγεβρική δομή μιας ομάδας Lie.Σημειώνουμε ότι αν $\boldsymbol{\xi_1}$ και $\boldsymbol{\xi_2}$ είναι δύο διανύσματα Killing τότε και ο γραμμικός συνδυασμός $a_1\xi_1 + a_2\xi_2$ είναι διάνυσμα Killing αν τα a_1 και a_2 είναι σταθερές.Αν όμως τα a_1 και a_2 είναι συναρτήσεις της θέσης τότε αυτός ο γραμμικός συνδυασμός είναι ένα διανυσματικό πεδίο, αλλά όχι απαραίτητα διάνυσμα Killing.Ο μεταθέτης $[\xi_a, \xi_b]$, όπως ήδη αναφέραμε, είναι επίσης διάνυσμα Killing.

Έστω ότι στο χώρο μας των n διαστάσεων θεωρούμε μία βάση διανυσμάτων Killing $\{\xi_a\}, a = 1, 2, ..., r$.Τότε κάθε διάνυσμα Killing του χώρου μπορεί να

[1]Εδώ και στο επόμενο κεφάλαιο στους ρημάνιους χώρους που θεωρούμε συμπεριλαμβάνουμε και τους χώρους με μη θετικά ορισμένη μετρική όπως οι (ψευδορημάνιοι) χώροι της γενικής σχετικότητας

[2]συμβολίζεται με G_r, όπου r είναι οι διαστάσεις της ομάδας.

γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός με σταθερούς συντελεστές των διανυσμάτων αυτής της βάσης.Το ίδιο ισχύει και για το μεταθέτη $[\xi_a, \xi_b]$ δύο διανυσμάτων Killing που είναι επίσης διάνυσμα Killing και άρα οι συνιστώσες του ως προς αυτή τη βάση είναι σταθερές.Οι σταθερές αυτές λέγονται *σταθερές δομής* (structure constants) της ομάδας ισομετριών και θα τις συμβολίζουμε με ${C^a}_{bc}$:

$$[\xi_a, \xi_b] = {C^e}_{ab}\xi_e \tag{4.8}$$

Από τον ορισμό είναι προφανές ότι:

$${C^e}_{ab} = -{C^e}_{ba} \Leftrightarrow {C^e}_{ab} = {C^e}_{[ab]} \tag{4.9}$$

Εφαρμόζοντας τις ταυτότητες Jacobi (3.31) για τα διανύσματα Killing της βάσης αποδεικνύεται ότι οι σταθερές δομής πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση:

$${C^e}_{d[a}{C^d}_{bc]} = 0 \tag{4.10}$$

η οποία είναι ίδια με τη σχέση (3.32) στην ειδική περίπτωση που οι συναρτήσεις μετάθεσης είναι σταθερές.Αυτές είναι οι συνθήκες ολοκληρωσιμότητας που πρέπει να ικανοποιούνται προκειμένου η άλγεβρα Lie της ομάδας να υπάρχει με ένα συνεπή τρόπο.Αποδεικνύεται ότι κάθε σύνολο συντελεστών ${C^a}_{bc}$ που είναι αντισυμμετρικοί ως προς τα b και c και ικανοποιούν τη σχέση (4.10) είναι σταθερές δομής κάποιας ομάδας Lie.

Η βάση $\{\xi_a\}$ των διανυσμάτων Killing δεν είναι μονοσήμαντα καθορισμένη.Μπορούμε να την αλλάξουμε κάνοντας ένα γραμμικό μετασχηματισμό, ως εξής:

$$\xi_{a'} = \Lambda_{a'}^a \xi_a \Leftrightarrow \xi_{a'}^{\ i} = \Lambda_{a'}^a {\xi_a}^i \tag{4.11}$$

όπου τα $\Lambda_{a'}^a$ είναι σταθερά με ορίζουσα $det(\Lambda_{a'}^a) \neq 0$ έτσι ώστε τα $\xi_{a'}$ να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.Τότε εύκολα βλέπουμε ότι οι σταθερές δομής μετασχηματίζονται σαν τανυστές, δηλαδή:

$${C^{c'}}_{a'b'} = {\Lambda^{c'}}_c \Lambda_{a'}^a \Lambda_{b'}^b {C^c}_{ab} \tag{4.12}$$

Άρα όταν έχουμε δύο σύνολα, ${C^c}_{ab}$ και ${C^{c'}}_{a'b'}$, σταθερών δομής για να ελέγξουμε αν αντιστοιχούν στην ίδια άλγεβρα Lie θα πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει μετασχηματισμός $(\Lambda_{a'}^a)$ που να ικανοποιεί την (4.12), κάτι που δεν είναι καθόλου προφανές.
(*βλέπε π.χ.[36], [27] σελ.49-51,194-209, [6] σελ.69-74,102-103, [35] σελ.375-381, [28] σελ.91-94*)

4.2 Διαστάσεις ομάδων και τροχιών

Έστω ένας ρημάνιος χώρος Π με n διαστάσεις.Αποδεικνύεται ότι η διάσταση r της άλγεβρας Lie των διανυσμάτων Killing αυτού του χώρου δεν μπορεί να υπερβαίνει τον ακέραιο αριθμό $\frac{1}{2}n(n+1)$. Με άλλα λόγια, σε ένα ρημάνιο χώρο n διαστάσεων μπορεί να έχουμε το πολύ $\frac{1}{2}n(n+1)$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα Killing.Π.χ. από το σύνολο των χωροχρόνων της γενικής θεωρίας της σχετικότητας (που είναι ψευδορημάνιοι με διάσταση $n = 4$) ο χωροχρόνος Minkowski δέχεται τον μέγιστο αριθμό $\frac{1}{2}4(4+1) = 10$ διανυσμάτων Killing (που αντιστοιχούν σε 4 παράλληλες μετατοπίσεις κατά μήκος των τεσσάρων καρτεσιανών αξόνων t, x, y, z, τρεις χωρικές περιστροφές που καθορίζονται από τις τρεις γωνίες Euler και τις τρεις περιστροφές (boosts) στα επίπεδα $(t, x), (t, y), (t, z)$) ενώ ο γνωστός σφαιρικά συμμετρικός χωροχρόνος Schwarzchild δέχεται συνολικά τέσσερα (< 10) γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα Killing.Είναι αξιοσημείωτο ότι όταν $r = \frac{1}{2}n(n+1)$, δηλαδή ο ρημάνιος χώρος δέχεται τον μέγιστο δυνατό αριθμό γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων Killing, τότε ο τανυστής καμπυλότητας έχει τη μορφή

$$R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \tag{4.13}$$

όπου το K είναι σταθερά.Οι χωροι αυτοί έχουν σταθερή καμπυλότητα αφού από την ανωτέρω σχέση προκύπτει ότι $R = (n-1)K =$σταθερά.

Ας συμβολίσουμε με G την ομάδα Lie των ισομετριών του χώρου Π της οποίας η διάσταση είναι r.Το σύνολο των τροχιών της G είναι σαφές ότι απαρτίζουν έναν υποχώρο του Π που συχνά αναφέρεται σαν *τροχιά της ομάδας* [3] και του οποίου η διάσταση είναι μικρότερη ή ίση με το n.Όταν η τροχιά της ομάδας συμπίπτει με τον αρχικό ρημάνιο χώρο Π, πράγμα που σημαίνει ότι η διάστασή της είναι n, λέμε ότι αυτή η ομάδα δρα *μεταβατικά* πάνω στον Π.Σε αυτή την περίπτωση κάθε σημείο του χώρου Π μπορεί να απεικονιστεί σε ένα οποιοδήποτε άλλο σημείο του με τη δράση ενός στοιχείου (δηλαδή μιας ισομετρίας) της G.

Ας θεωρήσουμε ένα τυχόν σημείο x του Π πάνω στον οποίο δρα η ομάδα ισομετριών G.Όλα τα σημεία του Π που είναι εικόνες του x μέσω της δράσης της G, δηλαδή τα σημεία $y = T(x)$ όπου T είναι κάποια ισομετρία στοιχείο της G, αποτελούν έναν υποχώρο του Π που λέγεται *τροχιά του* x.Αν συμβολίσουμε με d τη διάσταση της τροχιάς του x τότε προφανώς $d \leq n$ και $d \leq r$.Όταν συμβαίνει να έχουμε $d = r$ λέμε ότι η G δρα *απλώς μεταβατικά* (simply transitive) επί των τροχιών της.Όταν όμως $d < r$, επειδή μπορούμε να μεταβούμε

[3]Αναφέρονται επίσης και σαν επιφάνειες μετάβασης της ομάδας (surfaces of transitivity)

από το x στο y μέσω της δράσης της G με περισσότερους από έναν τρόπους, λέμε ότι η G δρα *πολλαπλώς μεταβατικά* (multiply transitive) επί των τροχιών της.

Τώρα τα στοιχεία T της G για τα οποία $T(x) = x$ (δηλαδή οι ισομετρίες που απεικονίζουν το x στον εαυτό του) παρατηρούμε ότι φτιάχνουν μία υποομάδα G_x της ομάδας G που λέγεται *ισοτροπική ομάδα* [4] του σημείου x.Αν ανατρέξουμε στη σχέση (4.1) γίνεται αμέσως κατανοητό ότι τα διανύσματα Killing που παράγουν τις ισομετρίες της ισοτροπικής ομάδας G_x έχουν την ιδιότητα να μηδενίζονται στο σημείο x.Μέσω αυτής της ιδιότητας μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε την ισοτροπική ομάδα που δρα σε κάποιο σημείο του *Π*.Τέλος, επειδή η τροχιά της G_x αποτελείται μόνο από το σημείο x, η G_x δεν συνεισφέρει στη διάσταση d της τροχιάς του x.Έτσι, αν συμβολίσουμε με s τη διάσταση της G_x είναι προφανές ότι θα ισχύει η σχέση

$$r = d + s \tag{4.14}$$

από την οποία γίνεται σαφές ότι η G δρα απλώς μεταβατικά επί των τροχιών της αν και μόνο αν $s = 0$.

Για να βρούμε τη μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η διάσταση s της G_x αρκεί να παρατηρήσουμε ότι οι ισομετρίες στοιχεία της G_x είναι ουσιαστικά περιστροφές γύρω από το σημείο x, αφού κρατούν αυτό το σημείο σταθερό.Αν εισάγουμε λοιπόν στο x ένα τοπικά καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n)$, μια μέγιστη βάση γραμμικά ανεξάρτητων στοιχείων της G_x αποτελείται από τις περιστροφές πάνω στο επίπεδο που ορίζεται από κάθε ζευγάρι αξόνων.Επειδή όμως το πλήθος των ζευγών αξόνων είναι

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n-1}{2}n \tag{4.15}$$

αυτή είναι και η μέγιστη τιμή για το s.Άρα:

$$s \leq \frac{1}{2}n(n-1) \tag{4.16}$$

Αν σε αυτή τη μέγιστη τιμή του s προσθέσουμε και τις n στο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητες παράλληλες μετατοπίσεις κατά μήκος των n αξόνων, παίρνουμε την προαναφερθείσα $\frac{1}{2}n(n-1) + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ μέγιστη τιμή για τη διάσταση r της G.Από αυτά γίνεται φανερό ότι οι χώροι σταθερής καμπυλότητας μπορούν μονοσήμαντα να χαρακτηριστούν και από το ότι γι'αυτούς η ισοτροπική ομάδα G_x λαμβάνει σε κάθε σημείο x τη μέγιστη δυνατή διάσταση $\frac{1}{2}n(n-1)$.
(βλέπε π.χ. [8] σελ.221-251, [35] σελ.375-381, [27] σελ.194-209, [28] σελ.97-111, [36])

[4]Στην ορολογία των ομάδων Lie λέγεται και *ομάδα ευστάθειας* του x (stability group)

4.3 Ταξινόμηση Κοσμολογικών Μοντέλων

Για ένα κοσμολογικό μοντέλο με ιδανικό ρευστό, όπου ο χωροχρόνος έχει τέσσερεις διαστάσεις, οι δυνατές διαστάσεις των τροχιών μιας ομάδας ισομετριών είναι: $d = 0, 1, 2, 3, 4$. Ως προς την ισοτροπική ομάδα, αν θεωρήσουμε ότι $(\mu + p) \neq 0$ τότε οι διαστάσεις της μπορεί να είναι $s = 0, 1$ ή 3.Αυτό γιατί αφού η προεξάρχουσα χρονοειδής διεύθυνση u^a του χωροχρόνου είναι αναλλοίωτη κάτω από τη δράση της G, η ισοτροπική ομάδα σε κάθε σημείο πρέπει να είναι μια υποομάδα των περιστροφών που δρουν πάνω στην κάθετη προς το u^a χωροειδή τρισδιαστατη υπερεπιφάνεια σε αυτό το σημείο.Επειδή όμως η άλγεβρα αυτών των περιστροφών είναι η $O(3)$, η οποία δεν δέχεται διδιάστατη υποομάδα, συμπεραίνουμε ότι το s δεν μπορεί να πάρει την τιμή 2.Οι διαστάσεις s της ομάδας ισοτροπιών μπορεί να διαφέρουν στα διάφορα σημεία του χώρου, αλλά όχι πάνω στην ίδια τροχιά: μπορεί να είναι περισσότερες σε ειδικά σημεία όπου οι διαστάσεις d της τροχιάς είναι λιγότερες, αλλά οι διαστάσεις r της συνολικής ομάδας συμμετριών πρέπει να είναι ίδιες παντού.Επομένως μπορούμε να διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις χωροχρόνων όσον αφορά την ισοτροπία σε ένα τυχόν σημείο (*βλέπε [15] σελ.36-39*):

α)Ισοτροπικό σύμπαν, $s = 3$ **:** Ο τανυστής Weyl και όλες οι κινηματικές ποσότητες, εκτός από το Θ, μηδενίζονται.Όλες οι παρατηρήσεις σε κάθε σημείο είναι ισοτροπικές.Σ' αυτή την κατηγορία ανήκει η οικογένεια χωροχρόνων FLRW.

β)Τοπικά Συμμετρικό ως προς τις Περιστροφές Σύμπαν (Locally Rotationally Symmetric-LRS), $s = 1$ **:** Οι κινηματικές ποσότητες είναι συμμετρικές κάτω από περιστροφές γύρω από μία προτιμητέα χωρική κατεύθυνση.Όλες οι παρατηρήσεις σε ένα τυχόν σημείο είναι συμμετρικές ως προς την περιστροφή γύρω από αυτή την κατεύθυνση.Όλες οι LRS μετρικές είναι γνωστές στην περίπτωση της σκόνης και του ιδανικού ρευστού.

γ)Ανισοτροπικό Σύμπαν, $s = 0$ **:** Δεν υπάρχουν περιστροφικές συμμετρίες.Οι παρατηρήσεις σε κάθε κατεύθυνση είναι διαφορετικές από τις παρατηρήσεις σε κάθε άλλη κατεύθυνση.

Αν συνδυάσουμε τις παραπάνω περιπτώσεις με τις δυνατότητες που υπάρχουν για τις διαστάσεις των τροχιών της ομάδας ισομετριών προκύπτουν οι παρακάτω κατηγορίες κοσμολογικών μοντέλων.

4.3.1 Χωροχρονικά Ομογενή Σύμπαντα

Αυτά τα μοντέλα με $d = 4$ δεν αλλάζουν στο χώρο και στο χρόνο, άρα η πυκνότητα ενέργειας (μ) του ιδανικού ρευστού είναι μια σταθερά.Επομένως, από την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας (2.53) προκύπτει ότι δεν διαστέλλονται: $\Theta = 0$ και ως εκ τούτου δεν μπορούν να παράγουν μία σχεδόν ισοτροπική ερυθρή μετατόπιση.Άρα δεν είναι χρήσιμα ως μοντέλα για το αληθινό σύμπαν.Παρόλα αυτά παρουσιάζουν κάποιο ενδιαφέρον.

Στην ισοτροπική περίπτωση, όπου $s = 3 \Rightarrow r = 7$, έχουμε το στατικό σύμπαν του Einstein.Πρόκειται για το μη διαστελλόμενο FLRW μοντέλο το οποίο ήταν το πρώτο σχετικιστικό κοσμολογικό μοντέλο που βρέθηκε.

Στην περίπτωση LRS, όπου $s = 1 \Rightarrow r = 5$, έχουμε το στασιμό περιστρεφόμενο σύμπαν του Godel, το οποίο επίσης δεν έχει ερυθρή μετατόπιση.Αυτό το μοντέλο ήταν σημαντικό γιατί οδήγησε σε μια νέα κατανόηση της φύσης του χρόνου στη Γενική Σχετικότητα.Είναι ένα μοντέλο στο οποίο παραβιάζεται η αιτιότητα (υπάρχουν κλειστές χρονοειδείς τροχιές μέσω κάθε χωροχρονικού σημείου) και για το οποίο δεν μπορεί να ορισθεί ένας συμπαντικός χρόνος.

Τα ανισοτροπικά μοντέλα, για τα οποία $s = 0 \Rightarrow r = 4$, είναι όλα γνωστά, αλλά είναι χρήσιμα μόνο για τις γνώσεις που μας προσφέρουν σε σχέση με την αρχή του Mach.

4.3.2 Χωρικά Ομογενή Σύμπαντα

Στα θεωρητικά μοντέλα που περιγράφουν τα χωρικά ομογενή σύμπαντα έχουμε $d = 3$.Αυτά είναι τα σημαντικότερα μοντέλα της θεωρητικής κοσμολογίας, γιατί εκφράζουν μαθηματικά την ιδέα της " Κοσμολογικής Αρχής ", ότι δηλαδή όλα τα σημεία του χώρου στον ίδιο χρόνο είναι ισοδύναμα μεταξύ τους.

Στην ισοτροπική περίπτωση, όπου $s = 3 \Rightarrow r = 6$, έχουμε την οικογένεια των μοντέλων FRW, που είναι τα πιο συνηθισμένα κοσμολογικά μοντέλα.

Στην περίπτωση LRS, όπου $s = 1 \Rightarrow r = 4$, περιλαμβάνεται η οικογένεια των συμπάντων Kantowski-Sachs και τα LRS ορθογώνια και πλάγια (tilted) μοντέλα Bianchi.

Στην ανισοτροπική περίπτωση, όπου $s = 0 \Rightarrow r = 3$, εχουμε την οικογένεια των μοντέλων Bianchi, τα οποία δέχονται μία τρισδιάστατη ομάδα ισομετριών G που δρα απλά μεταβατικά πάνω στις κάθετες προς το u^a χωροειδείς υπερεπιφάνειες.Τα μοντέλα αυτά διακρίνονται σε ορθογώνια (όταν η τετραταχύτητα είναι κάθετη προς τις τροχιές της G) και σε πλάγια (tilted) (όταν η τετραταχύτητα δεν είναι κάθετη προς τις τροχιές της G).

4.3.3 Χωρικά Μη-Ομογενή Σύμπαντα

Σε αυτά τα μοντέλα οι τροχιές της G είναι το πολύ διδιάστατες, δηλαδή $d \leq 2$

Στην περίπτωση LRS, όπου $s = 1, d = 2 \Rightarrow r = 3$, έχουμε μία σφαιρικά συμμετρική οικογένεια μοντέλων.Σε αυτή περιλαμβάνονται τα μοντέλα Lemaitre-Tolman-Bondi (LTB) τα οποία μπορούν να έχουν ένα ή και δύο κέντρα συμμετρίας, αλλά δεν μπορούν να είναι ισοτροπικά γύρω από ένα γενικό σημείο, αφού ισοτροπία παντού σημαίνει χωρική ομογένεια.

Οι ανισοτροπικές περιπτώσεις, με $s = 0, d \leq 2 \Rightarrow r \leq 2$, περιλαμβάνουν λύσεις των εξισώσεων Einstein που δέχονται μία Αβελιανή ή μία μη-Αβελιανή ομάδα ισομετριών G_2 όπως επίσης και χωρικά ομοιοθετικά (self-similar) μοντέλα.

Τέλος υπάρχουν λύσεις των εξισώσεων Einstein χωρίς καθόλου συμμετρίες, για τις οποίες $s = 0, d = 0 \Rightarrow r = 0$. Το πραγματικό σύμπαν ανήκει φυσικά σε αυτή την κατηγορία.Όλα τα άλλα μοντέλα που εξετάζουμε αποτελούν προσεγγίσεις του πραγματικού σύμπαντος.Παραδόξως έχουν βρεθεί κάποιες ακριβείς λύσεις των εξισώσεων Einstein χωρίς καθόλου συμμετρίες όπως (α)τα ημισφαιρικά (quasi-spherical) μοντέλα Szekeres που είναι κατά έναν τρόπο μη γραμμικές διαταραχές των μοντέλων FLRW, (β)τα σύμμορφα επίπεδα μοντέλα του Stephani και (γ)οι λύσεις τύπου Petrov N του Oleson.Τέλος, μία ενδιαφέρουσα οικογένεια μοντέλων χωρίς ολικές συμμετρίες είναι τα μοντέλα Swiss-Cheese που φτιάχνονται συνενώνοντας τμήματα διαφορετικών σφαιρικά συμμετρικών μοντέλων.

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με τα χωρικά ομογενή κοσμολογικά μοντέλα και πιο συγκεκριμένα με την οικογένεια των μοντέλων Bianchi.

4.4 Αναλλοίωτη Βάση

Πολλές φορές η περιγραφή ενός χωροχρόνου είναι απλούστερη όταν χρησιμοποιούμε μία αναλλοίωτη τετραδική βάση .Με αυτό εννοούμε ότι κάθε διάνυσμα $\mathbf{E}_a$ αυτής της βάσης είναι αναλλοίωτο κάτω από τη δράση της ομάδας ισομετριών και επομένως έχει μηδενική παράγωγο Lie ως προς όλα τα διανύσματα Killing της ομάδας:

$$L_{\xi_\alpha}\mathbf{E}_b = 0 \Leftrightarrow [\xi_\alpha, \mathbf{E}_b] = 0, \alpha = 1, 2, ..., r, \ b = 0, 1, 2, 3 \tag{4.17}$$

(*βλέπε π.χ. [25] σελ.103, [14] σελ.112*) όπου r =διαστάσεις της ομάδας ισομετριών . Η αναλλοίωτη βάση είναι χρήσιμη για τους εξής λόγους:

α) Οι συνιστώσες της τετραδικής μετρικής είναι αναλλοίωτες κάτω από τη δράση της ομάδας, δηλαδή:

$$L_{\xi_\gamma}(g_{ab}) = 0 \tag{4.18}$$

και άρα η μετρική είναι σταθερή πάνω σε κάθε ομογενή υπερεπιφάνεια που παράγεται από την ομάδα ισομετριών. (*βλέπε ενότητα 5.2 για την απόδειξη στην περίπτωση των χωροχρόνων Bianchi*)
β) Μπορεί να δειχτεί ότι οι συναρτήσεις μετάθεσης της βάσης αυτής είναι σταθερές πάνω σε κάθε ομογενή υπερεπιφάνεια. (*Για την απόδειξη βλέπε ενότητα 4.4.1.*)

4.4.1 Παραγωγή Αναλλοίωτης Βάσης στα Χωρικά Ομογενή Μοντέλα

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει ένας χωρικά ομογενής χωροχρόνος δέχεται μία τρισδιάστατη ομάδα ισομετριών G_3.Εμείς θα ασχοληθούμε με την περίπτωση στην οποία η ομάδα είναι απλά μεταβατική.Σ' αυτή την περίπτωση η δράση της G_3 παράγει τρισδιάστατες ομογενείς υπερεπιφάνειες οι οποίες αποτελούν μία μονοπαραμετρική οικογένεια που γεμίζει το χωροχρόνο.Τότε ο χωροχρόνος μπορεί να θεωρηθεί ως το τοπολογικό γινόμενο $S * \Re$, όπου με S συμβολίζουμε τις τρισδιάστατες ομογενείς υπερεπιφάνειες και $\Re$ είναι μία πραγματική καμπύλη κάθετη στις ομογενείς υπερεπιφάνειες.Αν t είναι μία παράμετρος κατά μήκος της $\Re$ συμβολίζουμε ως $S(t)$ την ομογενή υπερεπιφάνεια που διέρχεται από το σημείο της $\Re$ που αντιστοιχεί στο t.Τότε η μετρική είναι ανεξάρτητη από τη θέση πάνω στην υπερεπιφάνεια, αλλά μπορεί να εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου t.

Για να παράγουμε μία αναλλοίωτη βάση (*βλέπε [25] σελ.103-107*) αρχικά επιλέγουμε μία καμπύλη $\Re$ κάθετη στις ομογενείς υπερεπιφάνειες.Το εφαπτόμενο σ'αυτή την καμπύλη διάνυσμα είναι αναλλοίωτο κάτω από τη δράση της ομάδας ισομετριών, όπως θα αποδείξουμε στο επόμενο κεφάλαιο.Ονομάζουμε αυτό το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{E}_0$.Από τον ορισμό του $\mathbf{E}_0$ είναι φανερό ότι μπορούμε να θέσουμε $\mathbf{E}_0 = \frac{\partial}{\partial t}$. Έπειτα επιλέγουμε άλλα τρία γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ τα οποία είναι εφαπτόμενα στην υπερεπιφάνεια και χρησιμοποιούμε την μεταφορά Lie (κατά τη διεύθυνση του $\mathbf{E}_0$ και των τριών διανυσμάτων Killing) για να δημιουργήσουμε από τα $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ τα υπόλοιπα τρία διανυσματικά πεδία που χρειαζόμαστε για να ολοκληρώσουμε τη βάση.Από τον ορισμό είναι φανερό ότι:

$$[\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_\alpha] = 0, \alpha = 1, 2, 3 \tag{4.19}$$

το οποίο συνεπάγεται, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, ότι τα $\mathbf{E}_\alpha$ δεν εξαρτώνται από το t.Επιπλέον, τα διανύσματα Killing της ομάδας ισομετριών και τα διανύσματα της βάσης δεν έχουν συνιστώσες κατά μήκος της $\Re$, αφού εφάπτονται στις ομογενείς υπερεπιφάνειες στις οποίες η καμπύλη $\Re$ είναι κάθετη.

$$E_\alpha{}^0 = \xi_\alpha{}^0 = 0 \tag{4.20}$$

Θεώρημα 4.4.1. *Οι συναρτήσεις μετάθεσης $\gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}$ της αναλλοίωτης βάσης δεν εξαρτώνται από τη θέση πάνω στην υπερεπιφάνεια.*

Απόδειξη. Εξ ορισμού έχουμε ότι

$$[\mathbf{E}_{\alpha}, \mathbf{E}_{\beta}] = \gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}\mathbf{E}_{\gamma} \tag{4.21}$$

Εφαρμόζοντας τις ταυτότητες Jacobi για τα διανύσματα $\xi_{\alpha}, \mathbf{E}_{\beta}, \mathbf{E}_{\gamma}$ παίρνουμε ότι

$$[\xi_{\alpha}, [\mathbf{E}_{\beta}, \mathbf{E}_{\gamma}]] + [\mathbf{E}_{\beta}, [\mathbf{E}_{\gamma}, \xi_{\alpha}]] + [\mathbf{E}_{\gamma}, [\xi_{\alpha}, \mathbf{E}_{\beta}]] = 0 \tag{4.22}$$

Όμως οι δύο τελευταίοι μεταθέτες μηδενίζονται εξαιτίας της (4.17) και η παραπάνω σχέση γίνεται

$$[\xi_{\alpha}, [\mathbf{E}_{\beta}, \mathbf{E}_{\gamma}]] = 0 \tag{4.23}$$

Αντικαθιστώντας την (4.21) στην (4.23) έχουμε ότι

$$[\xi_{\alpha}, \gamma^{\delta}{}_{\beta\gamma}\mathbf{E}_{\delta}] = 0 \Leftrightarrow L_{\xi_{\alpha}}(\gamma^{\delta}{}_{\beta\gamma}\mathbf{E}_{\delta}) = (L_{\xi_{\alpha}}\gamma^{\delta}{}_{\beta\gamma})\mathbf{E}_{\delta} + \gamma^{\delta}{}_{\beta\gamma}(L_{\xi_{\alpha}}\mathbf{E}_{\delta}) = 0 \tag{4.24}$$

η οποία, σε συνδυασμό με τη σχέση (4.17), γίνεται

$$(L_{\xi_{\alpha}}\gamma^{\delta}{}_{\beta\gamma})\mathbf{E}_{\delta} = 0 \tag{4.25}$$

ή ισοδύναμα

$$L_{\xi_{\alpha}}\gamma^{\delta}{}_{\beta\gamma} = 0 \tag{4.26}$$

αφού τα διανύσματα $\mathbf{E}_{\delta}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα μεταξύ τους.Όμως τα $\gamma^{\delta}{}_{\beta\gamma}$ είναι βαθμωτά ως προς τις συντεταγμένες, άρα

$$L_{\xi_{\alpha}}\gamma^{\delta}{}_{\beta\gamma} = \xi_{\alpha}{}^{\varepsilon}\gamma^{\delta}{}_{\beta\gamma,\varepsilon} = 0 \tag{4.27}$$

Όμως τα διανύσματα Killing της ομάδας ισομετριών είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, άρα η προηγούμενη σχέση συνεπάγεται ότι [5]

$$\gamma^{\delta}{}_{\beta\gamma,\varepsilon} = 0 \tag{4.28}$$

Επομένως οι συναρτήσεις μετάθεσης $\gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}$ είναι ανεξάρτητες από τη θέση πάνω στην υπερεπιφάνεια. □

[5] Γράφοντας τη σχέση (4.27) για κάθε ένα από τα τρία διανύσματα Killing της ομάδας ισομετριών καταλήγουμε σε ένα γραμμικό και ομογενές σύστημα εξισώσεων του οποίου η ορίζουσα $det(\xi_{\alpha}{}^{\varepsilon})$ είναι διάφορη του μηδενός λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των διανυσμάτων Killing της ομάδας ισομετριών.Επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση $\gamma^{\delta}{}_{\beta\gamma,i} = 0$.

Θεώρημα 4.4.2. *Μπορούμε να επιλέξουμε μία αναλλοίωτη βάση τέτοια ώστε οι συναρτήσεις μετάθεσης* $\gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ *της βάσης να συνδέονται με τις σταθερές δομής* $C^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ *της ομάδας ισομετριών μέσω της σχέσης:*

$$\gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = -C^{\alpha}{}_{\beta\gamma} \tag{4.29}$$

Επομένως

$$[\mathbf{E}_{\alpha}, \mathbf{E}_{\beta}] = -C^{\gamma}{}_{\alpha\beta}\mathbf{E}_{\gamma} \tag{4.30}$$

Απόδειξη. Αρχικά επιλέγουμε τρία γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα εφαπτόμενα σε ένα συγκεκριμένο σημείο P_0 της ομογενούς υπερεπιφάνειας και τα συμβολίζουμε ως $\mathbf{E}_{\alpha 0}$.Θα ορίσουμε τα αντίστοιχα διανυσματικά πεδία χρησιμοποιώντας την παράγωγο Lie, δηλαδή απαιτώντας να ισχύει:

$$[\xi_{\alpha}, \mathbf{E}_{\beta}] = 0 \tag{4.31}$$

όπου $\mathbf{E}_{\beta}(P_0) = \mathbf{E}_{\beta 0}$. Για να προσδιορίσουμε τις συναρτήσεις μετάθεσης πρέπει να επιλέξουμε συγκεκριμένες τιμές για τα διανύσματα $\mathbf{E}_{\alpha 0}$.Μία πολύ φυσική επιλογή είναι να επιλέξουμε τα $\mathbf{E}_{\alpha 0}$ να ταυτίζονται με τα διανύσματα Killing στο σημείο P_0, δηλαδή

$$\mathbf{E}_{\alpha 0} = \xi_{\alpha}(P_0) \tag{4.32}$$

Τότε τα αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία που αποτελούν το χωρικό κομμάτι της βάσης μας θα δίνονται από τη σχέση[6]:

$$\mathbf{E}_{\alpha} = a^{\beta}{}_{\alpha}\xi_{\beta} \tag{4.33}$$

όπου

$$a^{\beta}{}_{\alpha}(P_0) = \delta^{\beta}_{\alpha} \tag{4.34}$$

Η συνθήκη που πρέπει να ισχύει για να είναι αυτά τα διανυσματικά πεδία αναλλοίωτα κάτω από τη δράση της ομάδας ισομετριών είναι η (4.17):

$$L_{\xi_{\alpha}}\mathbf{E}_{\beta} = 0 \tag{4.35}$$

Από τις σχέσεις (4.33) και (4.35) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
L_{\xi_{\alpha}}\mathbf{E}_{\beta} = 0 \quad &\Rightarrow \quad L_{\xi_{\alpha}}(a^{\gamma}{}_{\beta}\xi_{\gamma}) = 0 \\
&\Rightarrow \quad (L_{\xi_{\alpha}}a^{\gamma}{}_{\beta})\xi_{\gamma} + a^{\gamma}{}_{\beta}(L_{\xi_{\alpha}}\xi_{\gamma}) = 0 \\
&\Rightarrow \quad \xi_{\alpha}{}^{i}a^{\gamma}{}_{\beta,i}\xi_{\gamma} + a^{\gamma}{}_{\beta}[\xi_{\alpha}, \xi_{\gamma}] = 0 \\
&\Rightarrow \quad \xi_{\alpha}{}^{i}a^{\gamma}{}_{\beta,i}\xi_{\gamma} + a^{\gamma}{}_{\beta}C^{\delta}{}_{\alpha\gamma}\xi_{\delta} = 0
\end{aligned}$$

[6] Τα $a^{\beta}{}_{\gamma}$ είναι βαθμωτα ως προς τις συντεταγμένες.

Εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση στο σημείο P_0 έχουμε:

$$\begin{aligned} & \xi_\alpha{}^i(P_0)a^\gamma{}_{\beta,i}(P_0)\xi_\gamma(P_0) + a^\gamma{}_\beta(P_0)C^\delta{}_{\alpha\gamma}\xi_\delta(P_0) = 0 \\ \Rightarrow\ & (\xi_\alpha{}^i a^\gamma{}_{\beta,i})(P_0)\xi_\gamma(P_0) + \delta^\gamma_\beta C^\delta{}_{\alpha\gamma}\xi_\delta(P_0) = 0 \\ \Rightarrow\ & \{(\xi_\alpha{}^i a^\gamma{}_{\beta,i})(P_0) + C^\gamma{}_{\alpha\beta}\}\xi_\gamma(P_0) = 0 \end{aligned}$$

Όμως τα διανύσματα Killing είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, άρα πρέπει να ισχύει ότι:

$$(\xi_\alpha{}^i a^\gamma{}_{\beta,i})(P_0) + C^\gamma{}_{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow (\xi_\alpha{}^i a^\gamma{}_{\beta,i})(P_0) = -C^\gamma{}_{\alpha\beta} \tag{4.36}$$

Από τον ορισμό (3.26) των συναρτήσεων μετάθεσης σε συνδυασμό με τη σχέση (4.33) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} & [\mathbf{E}_\alpha, \mathbf{E}_\beta]^i = [a^\gamma{}_\alpha\xi_\gamma, a^\delta{}_\beta\xi_\delta]^i = \gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}E_\gamma{}^i \\ \Rightarrow\ & a^\gamma{}_\alpha\xi_\gamma{}^j(a^\delta{}_\beta\xi_\delta{}^i)_{,j} - a^\delta{}_\beta\xi_\delta{}^j(a^\gamma{}_\alpha\xi_\gamma{}^i)_{,j} = \gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}a^\delta{}_\gamma\xi_\delta{}^i \\ \Rightarrow\ & a^\gamma{}_\alpha\xi_\gamma{}^j a^\delta{}_{\beta,j}\xi_\delta{}^i + a^\gamma{}_\alpha\xi_\gamma{}^j a^\delta{}_\beta\xi_\delta{}^i{}_{,j} - a^\delta{}_\beta\xi_\delta{}^j a^\gamma{}_{\alpha,j}\xi_\gamma{}^i - a^\delta{}_\beta\xi_\delta{}^j a^\gamma{}_\alpha\xi_\gamma{}^i{}_{,j} = \gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}a^\delta{}_\gamma\xi_\delta{}^i \\ \Rightarrow\ & a^\gamma{}_\alpha\xi_\gamma{}^j a^\delta{}_{\beta,j}\xi_\delta{}^i - a^\delta{}_\beta\xi_\delta{}^j a^\gamma{}_{\alpha,j}\xi_\gamma{}^i + a^\gamma{}_\alpha a^\delta{}_\beta\xi_\gamma{}^j\xi_\delta{}^i{}_{,j} - a^\delta{}_\beta a^\gamma{}_\alpha\xi_\delta{}^j\xi_\gamma{}^i{}_{,j} = \gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}a^\delta{}_\gamma\xi_\delta{}^i \\ \Rightarrow\ & a^\gamma{}_\alpha\xi_\gamma{}^j a^\delta{}_{\beta,j}\xi_\delta{}^i - a^\delta{}_\beta\xi_\delta{}^j a^\gamma{}_{\alpha,j}\xi_\gamma{}^i + a^\gamma{}_\alpha a^\delta{}_\beta[\xi_\gamma, \xi_\delta] = \gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}a^\delta{}_\gamma\xi_\delta{}^i \end{aligned} \tag{4.37}$$

Επομένως στο σημείο P_0 ισχύει ότι

$$\begin{aligned} & a^\gamma{}_\alpha(P_0)(\xi_\gamma{}^j a^\delta{}_{\beta,j})(P_0)\xi_\delta{}^i(P_0) - a^\delta{}_\beta(P_0)(\xi_\delta{}^j a^\gamma{}_{\alpha,j})(P_0)\xi_\gamma{}^i(P_0) + \\ & \quad + a^\gamma{}_\alpha(P_0)a^\delta{}_\beta(P_0)[\xi_\gamma, \xi_\delta]^i(P_0) = \gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}(P_0)a^\delta{}_\gamma(P_0)\xi_\delta{}^i(P_0) \end{aligned} \tag{4.38}$$

η οποία με τη βοήθεια της (4.36) γίνεται:

$$\begin{aligned} & \delta^\gamma_\alpha(-C^\delta{}_{\gamma\beta})\xi_\delta{}^i(P_0) - \delta^\delta_\beta(-C^\gamma{}_{\delta\alpha}\xi_\gamma{}^i)(P_0) + \delta^\gamma_\alpha\delta^\delta_\beta C^\varepsilon{}_{\gamma\delta}\xi_\varepsilon{}^i(P_0) = \gamma^\gamma_{\alpha\beta}(P_0)\delta^\delta_\gamma\xi_\delta{}^i(P_0) \\ \Rightarrow\ & -C^\delta{}_{\alpha\beta}\xi_\delta{}^i(P_0) + C^\gamma{}_{\beta\alpha}\xi_\gamma{}^i(P_0) + C^\varepsilon{}_{\alpha\beta}\xi_\varepsilon{}^i(P_0) = \gamma^\delta{}_{\alpha\beta}(P_0)\xi_\delta{}^i(P_0) \end{aligned} \tag{4.39}$$

όμως $C^\gamma{}_{\beta\alpha} = -C^\gamma{}_{\alpha\beta}$, αφού $[\mathbf{E}_\beta, \mathbf{E}_\alpha] = -[\mathbf{E}_\alpha, \mathbf{E}_\beta]$
Λαμβάνοντας αυτό υπόψιν και αλλάζοντας τα ονόματα των βουβών δεικτών όπου χρειάζεται καταλήγουμε στη σχέση:

$$\begin{aligned} & -\ C^\gamma{}_{\alpha\beta}\xi_\gamma{}^i(P_0) - C^\gamma{}_{\alpha\beta}\xi_\gamma{}^i(P_0) + C^\gamma{}_{\alpha\beta}\xi_\gamma{}^i(P_0) = \gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}(P_0)\xi_\gamma{}^i(P_0) \\ \Rightarrow\ & -\ C^\gamma{}_{\alpha\beta}\xi_\gamma{}^i(P_0) = \gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}(P_0)\xi_\gamma{}^i(P_0) \\ \Rightarrow\ & \quad (C^\gamma{}_{\alpha\beta} + \gamma^\gamma{}_{\alpha\beta})(P_0)\xi_\gamma{}^i(P_0) = 0 \end{aligned} \tag{4.40}$$

και επειδή τα διανύσματα Killing είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στο P_0 η σχέση (4.40) συνεπάγεται ότι:

$$\gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}(P_0) = -C^\gamma{}_{\alpha\beta} \tag{4.41}$$

Όμως τα $\gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}$ είναι ανεξάρτητα από τη θέση πάνω στην υπερεπιφάνεια, άρα:

$$\gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta} = -C^{\gamma}{}_{\alpha\beta} \tag{4.42}$$

παντού πάνω στην υπερεπιφάνεια.Επιλέον, επειδή τα διανύσματα $\mathbf{E}_\alpha$ είναι ανεξάρτητα της συντεταγμένης t θα είναι ανεξάρτητες της t και οι συναρτήσεις μετάθεσης $\gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}$.Έτσι, η σχέση (4.42) θα ισχύει παντού στο χωροχρόνο. □

Η αναλλοίωτη βάση που υπακούει στους περιορισμούς (4.17), (4.19) και (4.30), με το $\mathbf{E}_0$ κάθετο στις ομογενείς υπερεπιφάνειες $S(t)$ δεν είναι μοναδική.Αν γνωρίζουμε μία τέτοια αναλλοίωτη βάση μπορούμε να βρούμε μία άλλη χρησιμοποιώντας ένα γραμμικό μετασχηματισμό

$$\mathbf{E}'_\alpha = \Lambda_\alpha{}^\beta \mathbf{E}_\beta \tag{4.43}$$

με $det(\Lambda_\alpha{}^\beta) \neq 0$, του οποίου οι συντελεστές $\Lambda_\alpha{}^\beta$ είναι σταθεροί.

Θα πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι είναι δυνατόν να εισάγουμε μια νέα αναλλοίωτη τετράδα $(\mathbf{E}'_0, \mathbf{E}'_\alpha)$ η οποία να ικανοποιεί τους περιορισμούς (4.17), (4.19) και (4.30) και της οποίας το χρονοειδές διάνυσμα $\mathbf{E}'_0$ να είναι " πλάγιο ", δηλαδή μη-κάθετο προς τις ομογενείς υπερεπιφάνειες t =σταθερό (*βλέπε και [25], σελ.106-107*).Αυτό μπορεί να επιτευχθεί θέτοντας

$$\mathbf{E}'_0 = N(t)\mathbf{E}_0 + N^\beta(t)\mathbf{E}_\beta \tag{4.44}$$

και

$$\mathbf{E}'_\alpha = \Lambda_\alpha{}^\beta(t)\mathbf{E}_\beta \tag{4.45}$$

με $det(\Lambda_\alpha{}^\beta(t)) \neq 0$

Κατ' αρχήν παρατηρούμε το προφανές, δηλαδή ότι λόγω της (4.17) και η νέα τετράδα θα είναι αναλλοίωτη κάτω από τη δράση της ομάδας ισομετριών:

$$[\xi_\alpha, \mathbf{E}'_0] = [\xi_\alpha, \mathbf{E}'_\beta] = 0 \tag{4.46}$$

Για να δούμε ποιος είναι ο περιορισμός που πρέπει να ικανοποιούν οι ποσότητες $N(t), N^\beta(t), \Lambda_\alpha{}^\beta(t)$ έτσι ώστε η νέα τετράδα να υπακούει και στην (4.19) υπολογίζουμε το μεταθέτη $[\mathbf{E}'_0, \mathbf{E}'_\alpha]$ στον οποίο αντικαθιστούμε τις (4.44) και (4.45) και λαμβάνουμε υπόψη τις (4.19) και (4.30) για να πάρουμε:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{E}_0, \mathbf{E}'_\alpha] &= N[\mathbf{E}_0, \Lambda_\alpha{}^\beta \mathbf{E}_\beta] + N^\beta[\mathbf{E}_\beta, \Lambda_\alpha{}^\gamma \mathbf{E}_\gamma] \\
&= N\Big(\frac{d\Lambda_\alpha{}^\beta}{dt}\Big)\mathbf{E}_\beta - N^\beta \Lambda_\alpha{}^\gamma C^\delta{}_{\beta\gamma}\mathbf{E}_\delta \\
&= \left\{ N\Big(\frac{d\Lambda_\alpha{}^\beta}{dt}\Big) - N^\delta \Lambda_\alpha{}^\gamma C^\beta{}_{\delta\gamma} \right\} \mathbf{E}_\beta
\end{aligned} \tag{4.47}$$

αφού τα $N, N^\beta, \Lambda_\alpha{}^\beta$ είναι συναρτήσεις μόνο του t. Έτσι η νέα " πλάγια " τετράδα θα υπακούει στην

$$[\mathbf{E}'_0, \mathbf{E}'_\alpha] = 0 \tag{4.48}$$

αν και μόνο αν

$$N\Big(\frac{d\Lambda_\alpha{}^\beta}{dt}\Big) = N^\delta \Lambda_\alpha{}^\gamma C^\beta{}_{\delta\gamma} \tag{4.49}$$

αφού τα $\mathbf{E}_\beta$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Απομένει να δείξουμε ότι η νέα τετράδα μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε μαζί με τις (4.46) και (4.48) να ικανοποιεί και την αντίστοιχη της (4.30) σχέση.Γι'αυτό εισάγουμε τα διανύσματα

$$\xi'_\alpha = \Lambda_\alpha{}^\beta(t_0)\xi_\beta \tag{4.50}$$

όπου $t = t_0$ είναι η υπερεπιφάνεια που περιέχει το σημείο P_0 στο οποίο $\mathbf{E}_\alpha(P_0) = \xi_\alpha(P_0)$.Τα ξ'_α είναι προφανώς διανύσματα Killing και γραμμικώς ανεξάρτητα λόγω της $det(\Lambda_\alpha{}^\beta(t_0)) \neq 0$, οπότε ικανοποιούν την (4.46).Επιπλέον, θα ισχύει:

$$\mathbf{E}'_\alpha(P_0) = \Lambda_\alpha{}^\beta(t_0)\mathbf{E}_\beta(P_0) = \Lambda_\alpha{}^\beta(t_0)\xi_\beta(P_0) = \xi'_\alpha(P_0) \tag{4.51}$$

Έτσι, ακολουθώντας την ίδια αποδεικτική διαδικασία με αυτή του θεωρήματος 4.4.2 καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι χωρικές συναρτήσεις μετάθεσης $\gamma'^\gamma{}_{\alpha\beta}$ των χωρικών διανυσμάτων $\mathbf{E}'_\alpha$ της βάσης (οι οποίες βάσει του θεωρήματος 4.4.1 δεν εξαρτώνται από τη θέση πάνω σε κάθε υπερεπιφάνεια t =σταθερό) θα ικανοποιούν πάνω στην υπερεπιφάνεια $t = t_0$ τη σχέση

$$\gamma'^\gamma{}_{\alpha\beta} = -C'^\gamma{}_{\alpha\beta} \tag{4.52}$$

Λόγω της (4.48) οι συναρτήσεις μετάθεσης της νέας τετράδας έχουν τις εξής μηδενικές συνιστώσες:

$$\gamma'^d{}_{0c} = 0 \tag{4.53}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν αυτό και εφαρμόζοντας την ταυτότητα (3.32) για $a = 0, d = \delta, b = \beta, c = \gamma$ παίρνουμε:

$$\partial'_0 \gamma'^\delta{}_{\beta\gamma} = 0 \Leftrightarrow E'_0{}^i \frac{\partial \gamma'^\delta{}_{\beta\gamma}}{\partial x^i} = 0 \tag{4.54}$$

και με τη βοήθεια της (4.44) τελικά παίρνουμε:

$$\begin{aligned}(NE_0{}^i + N^\beta E_\beta{}^i)\frac{\partial \gamma'^\delta{}_{\beta\gamma}}{\partial x^i} = 0 \quad &\Rightarrow \quad N\frac{\partial \gamma'^\delta{}_{\beta\gamma}}{\partial t} + N^\beta E_\beta{}^\varepsilon \frac{\partial \gamma'^\delta{}_{\beta\gamma}}{\partial x^\varepsilon} = 0 \\ &\Rightarrow \quad N\Big(\frac{d\gamma'^\delta{}_{\beta\gamma}}{dt}\Big) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \frac{d\gamma'^\delta{}_{\beta\gamma}}{dt} = 0 \end{aligned} \tag{4.55}$$

αφού αν το $N=0$ το διάνυσμα $\mathbf{E}'_0$ δεν θα ήταν χρονοειδές.Επομένως οι ${\gamma'}^{\gamma}{}_{\alpha\beta}$ είναι σταθερές και η σχέση (4.52) θα ισχύει παντού στο χωροχρόνο.

Θα πρέπει εδώ να σημειώσουμε ότι για να είναι πλάγια η τετράδα θα πρέπει $N^{\beta} \neq 0$ και τότε είναι δυνατόν να επιλεγούν τα $\Lambda_{\alpha}{}^{\beta}(t)$ έτσι ώστε η τριάδα $\{\mathbf{E}'_{\alpha}\}, \alpha = 1,2,3$ να είναι ορθογώνια ή με άλλα λόγια, η τετραδική μετρική της υπερεπιφάνειας $g'_{\alpha\beta}(t)$ να είναι διαγώνια.Όμως σε αυτή την περίπτωση τα $g'_{0\alpha}$ δεν είναι εν γένει μηδέν, αφού:

$$\begin{aligned} g'_{0\alpha} &= \mathbf{E}'_0 \cdot \mathbf{E}'_{\alpha} = \Lambda_{\alpha}{}^{\gamma} N^{\beta} \mathbf{E}_{\beta} \mathbf{E}_{\gamma} \\ &= \Lambda_{\alpha}{}^{\gamma} N^{\beta} g_{\beta\gamma} = \Lambda_{\alpha}{}^{\gamma} N_{\gamma} \neq 0 \end{aligned} \tag{4.56}$$

4.5 Κατάλογος Τρισδιάστατων Ομάδων

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, κάνοντας γραμμικούς μετασχηματισμούς πάνω στα διανύσματα Killing της βάσης μας μπορούμε να περάσουμε σε μία άλλη ισοδύναμη βάση.Για να κατηγοριοποιήσουμε τις άλγεβρες Lie πρέπει να βρούμε σετ σταθερών δομής $C^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ οι οποίες να μη συνδέονται μέσω κάποιου γραμμικού μετασχηματισμού (4.12).Θα πρέπει λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε ιδιότητες οι οποίες παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από τέτοιους μετασχηματισμούς, όπως π.χ. οι διαστάσεις της ομάδας ισομετριών.

Εμάς θα μας απασχολήσει η περίπτωση των χωρικά ομογενών χωροχρόνων.Θα ασχοληθούμε μόνο με τις τοπικές και όχι με τις ολικές ιδιότητες των ομάδων.Η κατηγοριοποίηση για τους χωροχρόνους αυτούς έγινε για πρώτη φορά από τον Bianchi (*βλέπε [2]*).Υπάρχουν εννέα τύποι Bianchi, από I έως IX.Για την ταξινόμησή τους ο Bianchi ακολούθησε μία μέθοδο η οποία ξεκινούσε λαμβάνοντας υπόψιν τις διαστάσεις της επαγόμενης άλγεβρας.Μπορούμε όμως να καταλήξουμε στα ίδια συμπεράσματα και με διαφορετικό τρόπο (*βλέπε [28] σελ.95-96, [16], [14], [19]*).Οι σταθερές δομής $C^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ μπορούν πάντα να αναλυθούν ως εξής:

$$\frac{1}{2} C^{\alpha}{}_{\beta\gamma} \epsilon^{\beta\gamma\delta} = n^{\alpha\delta} + \epsilon^{\alpha\delta\varepsilon} a_{\varepsilon} \tag{4.57}$$

όπου $a_{\varepsilon} \equiv \frac{1}{2} C^{\beta}{}_{\varepsilon\beta}$, $n^{\alpha\delta} = n^{(\alpha\delta)}$ και $\epsilon^{\alpha\beta\gamma}$ είναι ένας πλήρως αντισυμμετρκός τανυστής.Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\delta\varepsilon\zeta} = 6\delta^{\alpha}_{[\delta}\delta^{\beta}_{\varepsilon}\delta^{\gamma}_{\zeta]}$ προκύπτει ότι

$$C^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \epsilon_{\beta\gamma\delta} n^{\alpha\delta} + 2\delta^{\alpha}_{[\gamma} a_{\beta]} \tag{4.58}$$

τότε οι ταυτότητες Jacobi (4.10) γίνονται:

$$n^{\alpha\beta} a_{\beta} = 0 \tag{4.59}$$

Οι αναλλοίωτες ιδιότητες του $n^{\alpha\beta}$ είναι η τάξη του (rank) και το μέτρο της χαρακτηριστικής του (modulus of signature).Για τους τύπους VI και VII υπάρχει μία επιπλέον αναλλοίωτη ποσότητα, το h, που ορίζεται από τη σχέση

$$(1-h)C^{\alpha}{}_{\beta\alpha}C^{\delta}{}_{\gamma\delta} = -2hC^{\alpha}{}_{\delta\beta}C^{\delta}{}_{\alpha\gamma} \tag{4.60}$$

το οποίο είναι απαραίτητο για την υποδιαίρεση αυτών των τύπων Bianchi σε τύπο VI, $h < 0$ και VII, $h > 0$. Υπάρχουν δύο κύριες τάξεις, η A για την οποία ισχύει ότι $a_\varepsilon = 0$ και η B για την οποία $a_\varepsilon \neq 0$. Σε όλες τις περιπτώσεις κάνοντας μετασχηματισμούς πάνω στη βάση $\{\xi_a\}$ των διανυσμάτων Killing μπορούμε να θέσουμε (κανονική μορφή): $n^{\delta\varepsilon} = diag(n_1, n_2, n_3)$, $a_\varepsilon = (a, 0, 0)$ όπου τα n_1, n_2, n_3 παίρνουν τις τιμές 0 ή ± 1 και το $a = \sqrt{hn_2n_3}$ (για τους τύπους VI, VII και III).Ο Πίνακας 1 περιέχει όλους τους τύπους Bianchi και τις κανονικές μορφές των σταθερών δομής.Όλοι οι τύποι δέχονται διδιάστατες ομάδες ισομετριών εκτός από τους VIII και IX.Η κανονική μορφή δεν καθορίζει μοναδικά τη βάση.Οι διαστάσεις της υποομάδας των γραμμικών μετασχηματισμών που διατηρούν την κανονική μορφή φαίνονται στον Πίνακα 1.

Τάξη	G_3A						G_3B				
Τύπος	I	II	VI_0	VII_0	$VIII$	IX	V	IV	III	VI_h	VII_h
Τάξη του $(n^{\alpha\beta})$	0	1	2	2	3	3	0	1	2	2	2
$\lvert$Χαρακτηριστική του $(n^{\alpha\beta})\rvert$	0	1	0	2	1	3	0	1	0	0	2
a	0	0	0	0	0	0	1	1	1	$\sqrt{-h}$	$\sqrt{h}$
n_1	0	1	0	0	-1	1	0	0	0	0	0
n_2	0	0	-1	1	1	1	0	0	-1	-1	1
n_3	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1
Βαθμοί Ελευθερίας της Κανονικής Βάσης	9	6	4	4	3	3	6	4	4	4	4

Πίνακας 1:Ταξινόμηση και κανονικές σταθερές δομής των τύπων Bianchi.

Κεφάλαιο 5

Χωροχρόνοι **Bianchi** με Ιδανικό Ρευστό

Όπως έχουμε ήδη εξηγήσει στο προηγούμενο κεφάλαιο, ένα χωρικά ομογενές κοσμολογικό μοντέλο είναι ένας χωροχρόνος ο οποίος δέχεται μία τρισδιάστατη, απλά μεταβατική ομάδα ισομετριών.Τα διανύσματα Killing της ομάδας αυτής παράγουν τρισδιάστατες ομογενείς υπερεπιφάνειες που γεμίζουν το χωροχρόνο.Οι χωροχρόνοι αυτοί ταξινομήθηκαν αρχικά από τον Bianchi σε εννέα τύπους και γι'αυτό τα αντίστοιχα κοσμολογικά μοντέλα ονομάζονται και μοντέλα Bianchi.Αν θεωρήσουμε ως υλικό περιεχόμενο των χωροχρόνων αυτών ένα ιδανικό ρευστό μπορούμε να κάνουμε έναν επιπλέον διαχωρισμό που σχετίζεται με τον προσανατολισμό της τετραταχύτητας του ρευστού ως προς τις ομογενείς υπερεπιφάνειες που παράγονται από τα διανύσματα Killing.Πιο συγκεκριμένα διακρίνουμε δύο κατηγορίες:

- *Ορθογώνια Μοντέλα*
  Είναι τα μοντέλα στα οποία η τετραταχύτητα του ρευστού είναι κάθετη στις ομογενείς υπερεπιφάνειες.

- *Πλάγια (Tilted) Μοντέλα*
  Είναι τα μοντέλα στα οποία η τετραταχύτητα του ρευστού δεν είναι κάθετη στις ομογενείς υπερεπιφάνειες, με αποτέλεσμα οι συνιστώσες της τετραταχύτητας του ρευστού ως προς τις ομογενείς υπερεπιφάνειες να υπεισέρχονται ως επιπλέον μεταβλητές.Δηλαδή το ρευστό μπορεί να έχει μη μηδενική ελικότητα και επιτάχυνση.Το ρευστό είναι ιδανικό ως προς έναν συνκινούμενο παρατηρητή όμως το σύμπαν μπορεί να φαίνεται ανομοιογενες σε έναν τέτοιο παρατηρητή, παρόλο που ο χωροχρόνος και το περιεχόμενό του είναι ομογενή από την καθαρά μαθηματική άποψη.Ως προς δε τον παρατηρητή που κινείται με τετραταχύτητα κάθετη στις ομογενείς υπερεπιφάνειες το σύμπαν είναι ομογενές αλλά το συμπαντικό

ρευστό είναι μη ιδανικό (*βλέπε [18]*).

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε εκτενέστερα τα πλάγια μοντέλα Bianchi.Για τη μελέτη αυτή θα χρησιμοποιήσουμε τον τετραδικό φορμαλισμό και την 1+3 συναλλοίωτη περιγραφή που αναπτύξαμε σε προηγούμενα κεφάλαια.[1]

5.1 Πλάγιοι Χωροχρόνοι Bianchi

Θεωρούμε έναν χωροχρόνο Bianchi.Τα διανύσματα Killing της ομάδας ισομετριών παράγουν μία μονοπαραμετρική οικογένεια ομογενών υπερεπιφανειών που γεμίζει το χωροχρόνο.Οι ομογενείς υπερεπιφάνειες ορίζουν ένα future-pointing χρονοειδές μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο $\mathbf{n}$, $n_a n^a = -1$.Τα δύο θεωρήματα που ακολουθούν είναι θεμελιώδη για την κατανόηση της γεωμετρίας αυτών των χωροχρόνων (*η απόδειξή τους δίνεται στο παράρτημα A.2*)

Θεώρημα 5.1.1. *Το διανυσματικό πεδίο* $\mathbf{n}$ *είναι γεωδαισιακό και αστρόβιλο, δηλαδή:*

$$\dot{n}_a = 0 \ , \ n_{[a}n_{b;c]} = 0 \tag{5.1}$$

και παρέχει μία φυσική επιλογή της χρονικής συντεταγμένης t *που ορίζεται από τη σχέση*

$$n_a = -t_{,a} \tag{5.2}$$

Θεώρημα 5.1.2. *Το διανυσματικό πεδίο* $\mathbf{n}$ *είναι αναλλοίωτο κάτω από τη δράση της ομάδας ισομετριών, δηλαδή:*

$$L_{\xi_\gamma}\mathbf{n} = [\xi_\gamma, \mathbf{n}] = 0 \tag{5.3}$$

Έστω ότι το υλικό περιεχόμενο του χωροχρόνου είναι ένα ιδανικό ρευστό του οποίου η τετραταχύτητα $\mathbf{u}$, $(u_a u^a = -1)$ δεν είναι κάθετη στις ομογενείς υπερεπιφάνειες, αλλά σχηματίζει γωνία $\beta(t)$ με το κάθετο στις υπερπιφάνειες διανυσματικό πεδίο $\mathbf{n}$. Ορίζουμε τους προβολικούς τανυστές

$$h_{ab} = g_{ab} + n_a n_b \tag{5.4}$$

ο οποίος προβάλλει κάθετα στο διάνυσμα $\mathbf{n}$ και

$$\tilde{h}_{ab} = g_{ab} + u_a u_b \tag{5.5}$$

ο οποίος προβάλλει κάθετα στην τετραταχύτητα $\mathbf{u}$.Προφανώς ισχύουν οι σχέσεις $h_{ab}n^b = 0$, $\tilde{h}_{ab}u^b = 0$. Η σχέση ανάμεσα στα n^a και u^a καθορίζεται από:

[1] Για μία σύντομη ανασκόπηση όσον αφορά τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες των μοντέλων Bianchi βλέπε [10]

1. τη μεταξύ τους υπερβολική γωνία $\beta(t)$, για την οποία ισχύει

$$\cosh(\beta) = -u^a n_a \ \ , \ \beta(t) \geq 0 \tag{5.6}$$

και από τη διεύθυνση του $\mathbf{u}$ η οποία προσδιορίζεται είτε από:

2. τη διεύθυνση $\tilde{c}_a$ της προβολή του u_a στις υπερεπιφάνειες $S(t)$, που ορίζεται από τη σχέση

$$h^a{}_b u^b = \sinh(\beta)\tilde{c}^a \Rightarrow \tilde{c}_a n^a = 0 \ , \ \tilde{c}_a \tilde{c}^a = 1 \tag{5.7}$$

ή από:

3. τη διεύθυνση c^a του n^a κάθετα στο u^a, που ορίζεται από τη σχέση

$$\tilde{h}^a{}_b n^b = -\sinh(\beta)c^a \Rightarrow c_a u^a = 0 \ , \ c_a c^a = 1 \tag{5.8}$$

Από τις σχέσεις (5.7) και (5.8) προκύπτει ότι:

$$u^a = \cosh(\beta)n^a + \sinh(\beta)\tilde{c}_a \tag{5.9}$$
$$n^a = \cosh(\beta)u^a - \sinh(\beta)c^a \tag{5.10}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (5.9) και (5.10) βρίσκουμε ότι:

$$c^a = \sinh(\beta)n^a + \cosh(\beta)\tilde{c}^a \tag{5.11}$$
$$\tilde{c}^a = -\sinh(\beta)u^a + \cosh(\beta)c^a \tag{5.12}$$

(*βλέπε [18] σελ.210-211*)

Ως προς έναν παρατηρητή που κινείται με την τετραταχύτητα του ρευστού το ρευστό είναι ιδανικό και άρα έχει τανυστή ορμής - ενέργειας που δίνεται από τη σχέση:

$$T_{ab} = (\tilde{\mu} + \tilde{p})u_a u_b + \tilde{p} g_{ab} \ , \ \tilde{\mu} > 0 \ , \ \tilde{p} \geq 0 \tag{5.13}$$

όπου $\tilde{\mu}$ είναι η πυκνότητα ενέργειας και $\tilde{p}$ είναι η πίεση ως προς αυτόν τον παρατηρητή.Ως προς έναν παρατηρητή όμως που κινείται κάθετα στις υπερεπιφάνειες το ρευστό δεν θα φαίνεται ιδανικό.Αν στην παραπάνω σχέση για τον τανυστή ορμής - ενέργειας αντικαταστήσουμε την τετραταχύτητα από τη σχέση (5.9) εύκολα αποδεικνύεται ότι ο τανυστής ορμής - ενέργειας παίρνει τη μορφή:

$$T_{ab} = \mu n_a n_b + q_a n_b + q_b n_a + p h_{ab} + \pi_{ab} \tag{5.14}$$

όπου

$$\mu = \tilde{\mu}\cosh^2(\beta) + \tilde{p}\sinh^2(\beta) \tag{5.15}$$

είναι η πυκνότητα ενέργειας

$$q_a = (\tilde{\mu} + \tilde{p}) \sinh(\beta) \cosh(\beta) \tilde{c}_a \tag{5.16}$$

είναι το διάνυσμα ροής ενέργειας

$$p = \tilde{p} + \frac{1}{3}(\tilde{\mu} + \tilde{p}) \sinh^2(\beta) \tag{5.17}$$

είναι η ισοτροπική πίεση και

$$\pi_{ab} = (\tilde{\mu} + \tilde{p}) \sinh^2(\beta)(\tilde{c}_a \tilde{c}_b - \frac{1}{3} h_{ab}) \tag{5.18}$$

είναι η ανισοτροπική τάση ως προς τον παρατηρητή που κινείται με τετραταχύτητα κάθετη στις ομογενείς υπερεπιφάνειες.Επομένως το ρευστό για αυτόν τον παρατηρητή φαίνεται να είναι μη ιδανικό. (*βλέπε [18] σελ.214*)

5.2 Τετραδικός Φορμαλισμός στους Χωροχρόνους Bianchi

Σε ένα χωρικά ομογενή κοσμολογικό χωροχρόνο θεωρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων $\{x^i\}$, $i = 0, 1, 2, 3$ με τις γραμμές της χρονικής συντεταγμένης $x^0 = t$ κάθετες στις ομογενείς υπερεπιφάνειες που περιγράφονται από τις χωρικές συντεταγμένες $\{x^\alpha\}$, $\alpha = 1, 2, 3$, δηλαδή $g_{0\alpha} = 0$, για $\alpha = 1, 2, 3$.Η συντεταγμένη t έχει εκλεγεί έτσι ώστε το εφαπτόμενο διάνυσμα στις τροχιές της να είναι ${E_0}^i = \delta^i_0$ και το $g_{00} = -1$.

Το διάνυσμα ${E_0}^i$ το συμπληρώνουμε με τα χωροειδή διανύσματα ${E_\alpha}^i$, $\alpha = 1, 2, 3$ έτσι ώστε σε κάθε σημείο του χωροχρόνου τα διανύσματα αυτά να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, δηλαδή να συνιστούν βάση στον εφαπτόμενο χώρο κάθε σημείου και να είναι ορθογώνια στο χρονοειδές διάνυσμα, οπότε ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_\alpha = 0 \quad &\Rightarrow \quad {E_0}^i {E_\alpha}^j g_{ij} = 0 \\ &\Rightarrow \quad \delta^i_0 {E_\alpha}^j g_{ij} = 0 \\ &\Rightarrow \quad {E_\alpha}^0 = 0 \end{aligned} \tag{5.19}$$

Άρα τα διανύσματα $\mathbf{E}_a$ δεν έχουν χρονικές συνιστώσες.Ομοίως, τα διανύσματα Killing της ομάδας ισομετριών δεν έχουν χρονοειδείς συνιστώσες, αφού εφάπτονται στην υπερεπιφάνεια

$${\xi_\alpha}^0 = 0 \tag{5.20}$$

Η δυϊκή τετράδα της $\{\mathbf{E}_\alpha\}$ είναι η $\{\mathbf{E}^a\}$, $a = 0,1,2,3$, για την οποία, όπως έχουμε δει και σε προηγούμενο κεφάλαιο, ισχύουν οι σχέσεις:

$$E^\alpha{}_i E_a{}^j = \delta_i^j \;\Leftrightarrow\; E^a{}_i E_b{}^i = \delta_b^a \tag{5.21}$$

$$\Rightarrow E^a{}_0 = \delta_0^i E^a{}_i = E_0{}^i E^a{}_i = \delta_0^a \tag{5.22}$$

Από την τετράδα $E_a{}^i$ και τη δυϊκή τετράδα $E^a{}_i$ ορίζονται οι συνιστώσες του μετρικού τανυστή (σχέσεις (3.6) και (3.7)):

$$g_{ab} = E_a{}^i E_b{}^j g_{ij} \tag{5.23}$$

και

$$g^{ab} = E^a{}_i E^b{}_j g^{ij} \tag{5.24}$$

Σημειώνουμε επίσης ότι:

$$\begin{aligned} E^0{}_i E_\beta{}^i = \delta_\beta^0 = 0 \;\; &\Rightarrow\;\; E^0{}_0 E_\beta{}^0 + E^0{}_\gamma E_\beta{}^\gamma = 0 \\ &\Rightarrow\;\; E^0{}_\gamma E_\beta{}^\gamma = 0 \\ &\Rightarrow\;\; E^0{}_\gamma = 0 \;,\; \beta,\gamma = 1,2,3 \end{aligned} \tag{5.25}$$

διότι τα $E_\beta{}^\gamma$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.Άρα το δυϊκό διάνυσμα $\mathbf{E}^0$ δεν έχει χωρικές συνιστώσες.

Υποθέτουμε ότι η τετράδα $E_a{}^i$ είναι αναλλοίωτη κάτω από τη δράση της ομάδας ισομετριών, δηλαδή

$$L_{\xi_\gamma}(E_a{}^i) = 0 \tag{5.26}$$

όπου ξ_γ , $\gamma = 1,2,3$ είναι τα τρία διανύσματα Killing που παράγουν τις ομογενείς υπερεπιφάνειες $t =$σταθ.

Πρόταση 5.2.1. *Αν η βάση $\{\mathbf{E}_a\}$, $a = 0,1,2,3$ είναι αναλλοίωτη κάτω από τη δράση της ομάδας ισομετριών (δηλαδή ισχύει η σχέση (5.26)) τότε για τις τετραδικές συνιστώσες g_{ab} του μετρικού τανυστή ισχύει ότι:*

$$L_{\xi_\gamma}(g_{ab}) = 0 \tag{5.27}$$

Απόδειξη. Από τις σχέσεις (5.23),(5.26) και (3.6) προκύπτει ότι

$$L_{\xi_\gamma}(g_{ab}) = L_{\xi_\gamma}(E_a{}^i E_b{}^j g_{ij}) = (L_{\xi_\gamma} E_a{}^i) E_b{}^j g_{ij} + E_a{}^i (L_{\xi_\gamma} E_b{}^j) g_{ij} + E_a{}^i E_b{}^j (L_{\xi_\gamma} g_{ij}) = 0$$

□

Πρόταση 5.2.2. *Αν η βάση $\{\mathbf{E}_a\}$ είναι αναλλοίωτη κάτω από τη δράση της ομάδας ισομετριών ο τετραδικός μετρικός τανυστής εξαρτάται μόνο από το χρόνο και όχι από τις χωρικές συντεταγμένες,δηλαδή:*

$$g_{ab} = g_{ab}(t) \tag{5.28}$$

Απόδειξη. Από τη σχέση (5.29) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} L_{\xi_\gamma} g_{ab} = 0 \quad &\Rightarrow \quad {\xi_\gamma}^i g_{ab,i} = 0 \\ &\Rightarrow \quad {\xi_\gamma}^0 g_{ab,0} + {\xi_\gamma}^\beta g_{ab,\beta} = 0 \\ &\overset{{\xi_\gamma}^0=0}{\Rightarrow} \quad {\xi_\gamma}^\beta g_{ab,\beta} = 0 \Rightarrow g_{ab,\beta} = 0 \\ &\Rightarrow \quad g_{ab} = g_{ab}(t) \end{aligned}$$

αφού τα διανύσματα Killing είναι γραμμικώς ανεξάρτητα □

Έχουμε αποδείξει ότι (σχέσεις (4.19) και (4.30)) η αναλλοίωτη τετράδα μπορεί πάντα να εκλεγεί έτσι ώστε:

$$[\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_\alpha]^i = 0 \tag{5.29}$$

και

$$[\mathbf{E}_\alpha, \mathbf{E}_\beta]^i = -C^\gamma{}_{\alpha\beta} {E_\gamma}^i \tag{5.30}$$

με $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$ όπου $C^\gamma{}_{\alpha\beta}$ είναι οι σταθερές δομής της ομάδας ισομετριών. Υπενθυμίζουμε ότι (σχέση (3.12)) οι συντελεστές στροφής του Ricci δίνονται από τις σχέσεις

$$\Gamma^a{}_{bc} = E^a{}_i {E_b}^i{}_{;j} {E_c}^j \tag{5.31}$$

και

$$\Gamma_{abc} = g_{ad}\Gamma^d{}_{bc} = {E_a}^i E_{bi;j} {E_c}^j \tag{5.32}$$

Ισοδύναμα μπορούμε να γράφουμε

$${E_b}^i{}_{;j} {E_c}^j = \Gamma^a{}_{bc} {E_a}^i \tag{5.33}$$

Σημειώνουμε ότι το γραμμικό στοιχείο της μετρικής σύμφωνα με τα ανωτέρω γράφεται

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{ij} dx^i dx^j \\ &= g_{ab} E^a{}_i E^b{}_j dx^i dx^j \\ &= g_{00} E^0{}_i E^0{}_j dx^i dx^j + g_{\alpha\beta}(t) E^\alpha{}_i E^\beta{}_j dx^i dx^j \\ &= g_{00} (E^0{}_0)^2 (dx^0)^2 + g_{\alpha\beta}(t) E^\alpha{}_i E^\beta{}_j dx^i dx^j \\ &= -dt^2 + g_{\alpha\beta}(t) E^\alpha{}_i E^\beta{}_j dx^i dx^j \end{aligned} \tag{5.34}$$

Σημείωση 5.2.1. *Τα $E_\alpha{}^i$ και E^α_i δεν εξαρτώνται από το χρόνο.*

Απόδειξη. Από τη σχέση (5.29) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_\alpha]^i = 0 \quad &\Rightarrow \quad E_0{}^i E_\alpha{}^j{}_{,i} - E_\alpha{}^i E_0{}^j{}_{,i} = 0 \\ &\Rightarrow \quad E_0{}^i E_\alpha{}^j{}_{,i} - E_\alpha{}^i \delta^j_{0,i} = 0 \\ &\Rightarrow \quad E_0{}^i E_\alpha{}^j{}_{,i} = 0 \\ &\Rightarrow \quad \delta^i_0 E_\alpha{}^j{}_{,i} = 0 \\ &\Rightarrow \quad E_\alpha{}^j{}_{,0} = 0 \end{aligned} \tag{5.35}$$

αφού $E_0{}^i = \delta^i_0$. Άρα τα $E_\alpha{}^i$ δεν εξαρτώνται από το χρόνο.Αλλά τότε, λόγω της (5.19), προφανώς ούτε και τα E^α_i εξαρτώνται από το χρόνο. □

Οι συναρτήσεις μετάθεσης $\gamma^a{}_{bc}$ παίρνουν εδώ, λόγω της ειδικής μορφής της αναλλοίωτης τετράδας (σχέσεις (5.29) και (5.30)), τις εξής τιμές:

$$\gamma^a{}_{00} = 0\ ,\ \gamma^a{}_{0c} = \gamma^a{}_{c0} = 0\ ,\ \gamma^0{}_{bc} = 0\ ,\ \gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = -C^\alpha{}_{\beta\gamma} \tag{5.36}$$

και είναι σταθερές (δεν εξαρτώνται από τις συντεταγμένες).Η σχέση που συνδέει τις συναρτήσεις μετάθεσης με τους συντελεστές στροφής του Ricci (βλ.σχέση (3.28)) είναι

$$\gamma^a{}_{bc} = \Gamma^a{}_{cb} - \Gamma^a{}_{bc} \tag{5.37}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (5.36) και (5.37) προκύπτει ότι

$$\Gamma^0{}_{bc} = \Gamma^0{}_{cb}\ ,\ \Gamma^a{}_{0b} = \Gamma^a{}_{b0}\ ,\ \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} - \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta} = C^\alpha{}_{\beta\gamma} \tag{5.38}$$

Επίσης ισχύει ότι

$$\gamma_{abc} = g_{ad}\gamma^d{}_{bc} = g_{a0}\gamma^0{}_{bc} + g_{a\delta}\gamma^\delta{}_{bc} = g_{a\delta}\gamma^\delta{}_{bc} \tag{5.39}$$

Επομένως:

$$\gamma_{a00} = g_{a\delta}\gamma^\delta_{00} = 0 \tag{5.40}$$
$$\gamma_{0bc} = g_{0\delta}\gamma^\delta{}_{bc} = 0 \tag{5.41}$$
$$\gamma_{a0c} = g_{a\delta}\gamma^d{}_{0c} = 0 = \gamma_{ac0} \tag{5.42}$$
$$\gamma_{\alpha\beta\gamma} = g_{\alpha\delta}\gamma^\delta{}_{\beta\gamma} = -g_{\alpha\delta}C^\delta{}_{\beta\gamma} \tag{5.43}$$

Η γνωστή μας σχέση (3.30)

$$\Gamma_{abc} = \frac{1}{2}(\gamma_{acb} - \gamma_{bca} + \gamma_{cab}) + \frac{1}{2}(g_{ab,c} - g_{bc,a} + g_{ca,b}) \tag{5.44}$$

μας δίνει βάσει των ανωτέρω:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{0bc} &= \frac{1}{2}(g_{0b,c} - g_{bc,0} + g_{c0,b}) = -\frac{1}{2}g_{bc,0} && (5.45)\\
\Gamma_{000} &= \Gamma_{00\gamma} = \Gamma_{0\gamma 0} = 0\ ,\ \Gamma_{0\beta\gamma} = -\frac{1}{2}g_{\beta\gamma,0} && (5.46)\\
\Gamma_{a0c} &= \frac{1}{2}(g_{a0,c} - g_{0c,a} + g_{ca,0}) = -\frac{1}{2}g_{ca,0} && (5.47)\\
\Gamma_{\alpha 00} &= \Gamma_{000} = 0\ ,\ \Gamma_{\alpha 0\gamma} = \frac{1}{2}g_{\gamma\alpha,0} && (5.48)\\
\Gamma_{ab0} &= \frac{1}{2}(g_{ab,0} - g_{b0,a} + g_{0a,b}) = \frac{1}{2}g_{\alpha\beta,0} && (5.49)\\
\Gamma_{\alpha\beta 0} &= \frac{1}{2}g_{\alpha\beta,0} && (5.50)\\
\Gamma_{\alpha\beta\gamma} &= \frac{1}{2}(\gamma_{\alpha\gamma\beta} - \gamma_{\beta\gamma\alpha} + \gamma_{\gamma\alpha\beta})\\
&\overset{g_{\alpha 0}=0}{=} \frac{1}{2}(g_{\alpha\delta}\gamma^{\delta}{}_{\gamma\beta} - g_{\beta\delta}\gamma^{\delta}{}_{\gamma\alpha} + g_{\gamma\delta}\gamma^{\delta}{}_{\alpha\beta})\\
&= \frac{1}{2}(-g_{\alpha\delta}C^{\delta}{}_{\gamma\beta} + g_{\beta\delta}C^{\delta}{}_{\gamma\alpha} - g_{\gamma\delta}C^{\delta}{}_{\alpha\beta}) && (5.51)
\end{aligned}$$

Είναι αξιοσημείωτο ότι τα $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ είναι γραμμικοί συνδυασμοί με σταθερούς συντελεστές των στοιχείων της μετρικής $g_{\alpha\beta}$. Οι αντίστοιχες σχέσεις για τα $\Gamma^{a}{}_{bc} = g^{ad}\Gamma_{dbc}$ είναι:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{0}{}_{bc} &= g^{0d}\Gamma_{dbc} = g^{00}\Gamma_{0bc} = -\Gamma_{0bc} = \frac{1}{2}g_{bc,0} && (5.52)\\
\Gamma^{0}{}_{00} &= \Gamma^{0}{}_{0\gamma} = \Gamma^{0}{}_{\gamma 0} = 0\ ,\ \Gamma^{0}{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g_{\beta\gamma,0} && (5.53)\\
\Gamma^{a}{}_{0c} &= g^{ad}\Gamma_{d0c} = \frac{1}{2}g^{ad}g_{cd,0} && (5.54)\\
\Gamma^{\alpha}{}_{00} &= 0\ ,\ \Gamma^{\alpha}{}_{0\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\delta}g_{\delta\beta,0} && (5.55)\\
\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} &= g^{\alpha d}\Gamma_{d\beta\gamma} = g^{\alpha\delta}\Gamma_{\delta\beta\gamma}\\
&= \frac{1}{2}(-g^{\alpha\delta}g_{\delta\varepsilon}C^{\varepsilon}{}_{\gamma\beta} + g^{\alpha\delta}g_{\beta\varepsilon}C^{\varepsilon}{}_{\gamma\delta} - g^{\alpha\delta}g_{\gamma\varepsilon}C^{\varepsilon}{}_{\delta\beta})\\
&= \frac{1}{2}(\delta^{\alpha}_{\varepsilon}C^{\varepsilon}{}_{\beta\gamma} + g^{\alpha\delta}g_{\beta\varepsilon}C^{\varepsilon}{}_{\gamma\delta} + g^{\alpha\delta}g_{\gamma\varepsilon}C^{\varepsilon}{}_{\beta\delta})\\
&= \frac{1}{2}(C^{\alpha}{}_{\beta\gamma} + g^{\alpha\delta}g_{\beta\varepsilon}C^{\varepsilon}{}_{\gamma\delta} + g^{\alpha\delta}g_{\gamma\varepsilon}C^{\varepsilon}{}_{\beta\delta}) && (5.56)
\end{aligned}$$

5.3 1+3 Συναλλοίωτη Περιγραφή στα Μοντέλα Bianchi με Πλάγιο Ιδανικό Ρευστό

Στο Κεφάλαιο 2 αναπτύξαμε την 1+3 συναλλοίωτη περιγραφή αναλλοίωντας τις διάφορες τανυστικές ποσότητες παράλληλα και κάθετα στην τετραταχύτητα.Στην περίπτωση που εξετάζουμε εδώ όμως η τετραταχύτητα u^a δεν είναι κάθετη στις ομογενείς υπερεπιφάνειες , γι᾽ αυτό θα προτιμήσουμε να κάνουμε την ίδια ανάλυση ως προς το χρονοειδές κάθετο $\mathbf{n}$ στις υπερεπιφάνειες, το οποίο ταυτίζεται με το διάνυσμα $\mathbf{E_0}$ της τετραδικής μας βάσης.Επιπλέον υπενθυμίζουμε ότι οι δείκτες που χρησιμοποιήσαμε στο Κεφάλαιο 2 μπορεί να είναι είτε δείκτες συντεταγένων είτε τετραδικοί δείκτες.Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε το διαχωρισμό που εισάγαμε στο Κεφαλαιο 3 για τους δείκτες συντεταγμένων και τους τετραδικούς δείκτες.

Στο σύστημα συντεταγμένων $\{x^i\}, i = 0, 1, 2, 3$ το μοναδιαίο κάθετο έχει συνιστώσες $n^i = E_0{}^i = \delta_0^i$ και οι τετραδικές συνιστώσες του δίνονται από τις σχέσεις:

$$n^a = E^a{}_i n^i = E^a{}_i \delta_0{}^i = E^a{}_0 = \delta_0^a \tag{5.57}$$

και

$$n_a = g_{ab} n^b = g_{ab} \delta_0^b = g_{a0} = -\delta_{a0} \tag{5.58}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} n_{b;a} &= n_{b,a} - \Gamma^c{}_{ba} n_c = (-\delta_{b0})_{,a} - \Gamma^c{}_{ba} n_c \\ &= n_{b;a} = -\Gamma^c{}_{ba} n_c = -\Gamma^c{}_{ba}(-\delta_{c0}) = \Gamma^0{}_{ba} \\ \Rightarrow n_{b;a} &= \Gamma^0{}_{ba} \end{aligned} \tag{5.59}$$

και

$$\begin{aligned} n^b{}_{;a} &= n^b{}_{,a} + \Gamma^b{}_{ca} n^c = (\delta_0^b)_{,a} + \Gamma^b{}_{ca} n^c \\ &= \Gamma^b{}_{ca} n^c = \Gamma^b{}_{ca} \delta_0^c = \Gamma^b{}_{0a} \\ \Rightarrow n^b{}_{;a} &= \Gamma^b{}_{0a} \end{aligned} \tag{5.60}$$

Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 2, για τις τετραδικές συνιστώσες της συναλλοίωτης παραγώγου του n_a ισχύει η παρακάτω ανάλυση:

$$n_{b;a} = -n_a \dot{n}_b + \frac{1}{3}\Theta h_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab} \tag{5.61}$$

όπου $\dot{n}_b = n_{b;c}$ είναι η τεραδική επιτάχυνση, $\Theta = n^a{}_{;a}$ είναι η τετραδική διατμητική ταχύτητα, $\omega_{ab} = n_{[a;b]} + \dot{n}_{[a} n_{b]}$, $\omega_{ab} = \omega_{[ab]}$ είναι η τετραδική περιστροφική ταχύτητα, $\sigma_{ab} = n_{(a;b)} + \dot{n}_{(a} n_{b)} - \frac{1}{3}\Theta h_{ab}$, $\sigma_{ab} = \sigma_{(ab)}$ είναι η τετραδική διατμητική ταχύτητα και $h_{ab} = g_{ab} + n_a n_b$ ο τετραδικός προβολικός τανυστής που προβάλλει κάθετα στο n^a. Οι παραπάνω ποσότητες ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\dot{n}_a n^a = 0 \ , \ \omega_{ab} n^b = 0 \ , \ \sigma_{ab} n^b = 0 \tag{5.62}$$

Για τον προβολικό τανυστή ισχύουν τα εξής:

$$\begin{aligned} h_{ab} = g_{ab} + n_a n_b \Rightarrow h_{00} &= g_{00} + n_0 n_0 = -1 + (-\delta_{00})(-\delta_{00}) = -1 + 1 = 0 \\ h_{\alpha 0} &= g_{0\alpha} + n_0 n_\alpha = 0 + (-\delta_{00})(-\delta_{0\alpha}) = 0 \qquad (5.63) \\ h_{\alpha\beta} &= g_{\alpha\beta} + n_\alpha n_\beta = g_{\alpha\beta} + (-\delta_{\alpha 0})(-\delta_{\beta 0}) = g_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Ομοίως

$$h^{ab} = g^{ab} + n^a n^b \Rightarrow h^{00} = 0 \ , \ h^{\alpha 0} = 0 \ , \ h^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} \tag{5.64}$$

$$h^a{}_b = \delta^a_b + n^a n_b \Rightarrow h^0{}_0 = 0 \ , \ h^\alpha{}_0 = 0 = h^0{}_\alpha \ , \ h^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha_\beta \tag{5.65}$$

Δηλαδή το h_{ab} είναι ουσιαστικά η μετρική της ομογενούς υπερεπιφάνειας.Θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (5.59) και (5.60) για να υπολογίσουμε τις κινηματικές ποσότητες:

$$\dot{n}_a = n_{a;b} n^b = \Gamma^0{}_{ab} n^b = \Gamma^0{}_{ab} \delta^b_0 = \Gamma^0{}_{a0} = 0 \tag{5.66}$$

$$\Theta = n^a{}_{;a} = \Gamma^a{}_{0a} = \Gamma^\alpha{}_{0\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,0} \tag{5.67}$$

$$\omega_{ab} = n_{[a;b]} = \Gamma^0{}_{[ab]} = 0 \tag{5.68}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ab} &= n_{(a;b)} - \frac{1}{3}\Theta h_{ab} = \Gamma^0{}_{ab} - \frac{1}{6}(g^{\gamma\delta} g_{\gamma\delta,0}) h_{ab} \\ &= \frac{1}{2} g_{ab,0} - \frac{1}{6}(g^{\gamma\delta} g_{\gamma\delta,0}) h_{ab} \qquad (5.69) \end{aligned}$$

Επιπλέον, στην ενότητα 5.1 είδαμε ότι ο τανυστής ορμής - ενέργειας, για το πλάγιο ιδανικό ρευστό, ως προς έναν παρατηρητή που κινείται κάθετα στις ομογενείς υπερεπιφάνειες δίνεται από τη σχέση

$$T_{ab} = \mu n_a n_b + q_a n_b + q_b n_a + p h_{ab} + \pi_{ab} \tag{5.70}$$

όπου μ είναι η πυκνότητα ενέργειας, q_a είναι η ροή ενέργειας, p είναι η ισοτροπική πίεση και ο τανυστής π_{ab} εκφράζει τις ανοσοτροπικές τάσεις ως προς αυτόν τον παρατηρητή.

Θέλουμε τώρα να γράψουμε τις εξισώσεις εξέλιξης και δεσμών για την τετράδα που έχουμε επιλέξει.Γι' αυτό είναι χρήσιμο να λάβουμε υπόψιν τα εξής:

1. $\dot{n}_a = \omega_{ab} = 0$
2. Οι ποσότητες Θ , σ^{ab} , E^{ab} , H^{ab} , μ , p , q^a , π^{ab} δεν εξαρτώνται από τις συντεταγμένες $\{x^\alpha\}, \alpha = 1, 2, 3$ της υπερεπιφάνειας, αλλά μόνο από το χρόνο, δηλαδή π.χ. $\pi^{ab}{}_{,\gamma} = 0$
3. Οι ποσότητες σ^{ab} , E^{ab} , H^{ab} , q^a , π^{ab} δεν έχουν συνιστώσες κατά την κάθετη στην υπερεπιφάνεια διεύθυνση.
4. Οι συνιστώσες των εξισώσεων εξέλιξης και δεσμών κατά την κάθετη στην υπερεπιφάνεια διεύθυνση είναι κενές πληροφορίας.

(Τα παραπάνω αποδεικνύονται αναλυτικά στο Παράρτημα Α)

Λαμβάνοντας υπόψιν τις διαπιστώσεις αυτές καταλήγουμε στις παρακάτω σχέσεις για τις χωρικές παραγώγους των ποσοτήτων που υπεισέρχονται στις εξισώσεις εξέλιξης και δεσμών.

$$\tilde{\nabla}_\alpha \Theta = h^\beta{}_\alpha \nabla_\beta \Theta = \delta^\beta_\alpha \nabla_\beta \Theta = \nabla_\alpha \Theta = \Theta_{,\alpha} = 0 \tag{5.71}$$

Ομοίως

$$\tilde{\nabla}_\alpha \mu = \tilde{\nabla}_\alpha p = 0 \tag{5.72}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_\alpha q^\beta &= h^\gamma{}_\alpha h^\beta{}_\delta \nabla_\gamma q^\delta = \delta^\gamma_\alpha \delta^\beta_\delta \nabla_\gamma q^\delta = \nabla_\alpha q^\beta \\ &= q^\beta{}_{,\alpha} + \Gamma^\beta{}_{\gamma\alpha} q^\gamma \\ &= \Gamma^\beta{}_{\gamma\alpha} q^\gamma \end{aligned} \tag{5.73}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_\beta \sigma^{\alpha\beta} &= h^\gamma{}_\beta h^\alpha{}_\delta h^\beta{}_\varepsilon \nabla_\gamma \sigma^{\delta\varepsilon} = \delta^\gamma_\beta \delta^\alpha_\delta \delta^\beta_\varepsilon \nabla_\gamma \sigma^{\delta\varepsilon} = \nabla_\beta \sigma^{\alpha\beta} \\ &= \sigma^{\alpha\beta}{}_{,\beta} + \Gamma^\beta{}_{\gamma\beta} \sigma^{\alpha\gamma} + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta} \sigma^{\gamma\beta} \\ &= \Gamma^\beta{}_{\gamma\beta} \sigma^{\alpha\gamma} + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta} \sigma^{\gamma\beta} \end{aligned} \tag{5.74}$$

Παρόμοιες σχέσεις ισχύουν και για τα $\tilde{\nabla}_\beta H^{\alpha\beta}$, $\tilde{\nabla}_\beta E^{\alpha\beta}$, $\tilde{\nabla}_\beta \pi^{\alpha\beta}$:

$$\tilde{\nabla}_\beta H^{\alpha\beta} = \Gamma^\beta{}_{\gamma\beta} H^{\alpha\gamma} + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta} H^{\gamma\beta} \tag{5.75}$$

$$\tilde{\nabla}_\beta E^{\alpha\beta} = \Gamma^\beta{}_{\gamma\beta} E^{\alpha\gamma} + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta} E^{\gamma\beta} \tag{5.76}$$

$$\tilde{\nabla}_\beta \pi^{\alpha\beta} = \Gamma^\beta{}_{\gamma\beta} \pi^{\alpha\gamma} + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta} \pi^{\gamma\beta} \tag{5.77}$$

$$\begin{aligned}
(curl\sigma)^{\alpha\beta} &= \eta^{\gamma\delta<\alpha}\tilde{\nabla}_\gamma\sigma^{\beta>}{}_\delta = \eta^{\gamma\delta<\alpha}\nabla_\gamma\sigma^{\beta>}{}_\delta \\
&= [h^{(\alpha}{}_\varepsilon h^{\beta)}{}_\zeta - \frac{1}{3}h^{\alpha\beta}h_{\varepsilon\zeta}]\eta^{\gamma\delta\varepsilon}\nabla_\gamma\sigma^\zeta{}_\delta \\
&= [\delta^{(\alpha}_\varepsilon\delta^{\beta)}_\zeta - \frac{1}{3}g^{\alpha\beta}g_{\varepsilon\zeta}]\eta^{\gamma\delta\varepsilon}\nabla_\gamma\sigma^\zeta{}_\delta \\
&= \eta^{\gamma\delta(\alpha}\nabla_\gamma\sigma^{\beta)}{}_\delta - \frac{1}{3}g^{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta\varepsilon}\nabla_\gamma\sigma_{\varepsilon\delta} = \eta^{\gamma\delta(\alpha}\nabla_\gamma\sigma^{\beta)}{}_\delta \\
&= \eta^{\gamma\delta(\alpha}(\sigma^{\beta)}{}_{\delta,\gamma} + \Gamma^{\beta)}{}_{\varepsilon\gamma}\sigma^\varepsilon{}_\delta - \sigma^{\beta)}{}_\varepsilon\Gamma^\varepsilon{}_{\delta\gamma}) \\
\Rightarrow (curl\sigma)^{\alpha\beta} &= \eta^{\gamma\delta(\alpha}\Gamma^{\beta)}{}_{\varepsilon\gamma}\sigma^\varepsilon{}_\delta - \eta^{\gamma\delta(\alpha}\sigma^{\beta)}{}_\varepsilon\Gamma^\varepsilon{}_{\delta\gamma} \qquad (5.78)
\end{aligned}$$

Παρόμοιες σχέσεις ισχύουν και για τα $(curl\pi)^{\alpha\beta}$, $(curlE)^{\alpha\beta}$, $(curlH)^{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned}
(curl\pi)^{\alpha\beta} &= \eta^{\gamma\delta(\alpha}\Gamma^{\beta)}{}_{\varepsilon\gamma}\pi^\varepsilon{}_\delta - \eta^{\gamma\delta(\alpha}\pi^{\beta)}{}_\varepsilon\Gamma^\varepsilon{}_{\delta\gamma} \qquad (5.79) \\
(curlE)^{\alpha\beta} &= \eta^{\gamma\delta(\alpha}\Gamma^{\beta)}{}_{\varepsilon\gamma}E^\varepsilon{}_\delta - \eta^{\gamma\delta(\alpha}E^{\beta)}{}_\varepsilon\Gamma^\varepsilon{}_{\delta\gamma} \qquad (5.80) \\
(curlH)^{\alpha\beta} &= \eta^{\gamma\delta(\alpha}\Gamma^{\beta)}{}_{\varepsilon\gamma}H^\varepsilon{}_\delta - \eta^{\gamma\delta(\alpha}H^{\beta)}{}_\varepsilon\Gamma^\varepsilon{}_{\delta\gamma} \qquad (5.81)
\end{aligned}$$

$$\dot{q}^{<\alpha>} = h^\alpha{}_\beta\dot{q}^\beta = \delta^\alpha_\beta\dot{q}^\beta = \dot{q}^\alpha \qquad (5.82)$$

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}^{<\alpha\beta>} &= [h^{(\alpha}{}_\gamma h^{\beta)}{}_\delta - \frac{1}{3}h^{\alpha\beta}h_{\gamma\delta}]\dot{\sigma}^{\gamma\delta} \\
&= [\delta^{(\alpha}_\gamma\delta^{\beta)}_\delta - \frac{1}{3}g^{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}]\dot{\sigma}^{\gamma\delta} \\
&= \dot{\sigma}^{(\alpha\beta)} - \frac{1}{3}g^{\alpha\beta}\dot{\sigma}^\gamma{}_\gamma \qquad (5.83)
\end{aligned}$$

Όμως $\sigma^{\alpha\beta} = \sigma^{(\alpha\beta)} \Rightarrow \dot{\sigma}^{\alpha\beta} = \dot{\sigma}^{(\alpha\beta)}$ και $\sigma^\gamma{}_\gamma = 0 \Rightarrow \dot{\sigma}^\gamma{}_\gamma = 0$, επομένως η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$\dot{\sigma}^{<\alpha\beta>} = \dot{\sigma}^{\alpha\beta} \qquad (5.84)$$

Ομοίως:

$$\begin{aligned}
\dot{\pi}^{<\alpha\beta>} &= \dot{\pi}^{\alpha\beta} \qquad (5.85) \\
\dot{E}^{<\alpha\beta>} &= \dot{E}^{\alpha\beta} \qquad (5.86) \\
\dot{H}^{<\alpha\beta>} &= \dot{H}^{\alpha\beta} \qquad (5.87)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}^{<\alpha}q^{\beta>} &= [h^{(\alpha}{}_{\gamma}h^{\beta)}{}_{\delta} - \frac{1}{3}h^{\alpha\beta}h_{\gamma\delta}]\tilde{\nabla}^{\gamma}q^{\delta} \\ &= [\delta^{(\alpha}{}_{\gamma}\delta^{\beta)}{}_{\delta} - \frac{1}{3}g^{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}]\nabla^{\gamma}q^{\delta} \\ &= \nabla^{(\alpha}q^{\beta)} - \frac{1}{3}g^{\alpha\beta}\nabla_{\gamma}q^{\gamma} \end{aligned} \tag{5.88}$$

Όμως:

$$\begin{aligned} \nabla^{\alpha}q^{\beta} &= g^{\alpha\gamma}\nabla_{\gamma}q^{\gamma} = g^{\alpha\gamma}(q^{\beta}{}_{\gamma} + \Gamma^{\beta}{}_{\delta\gamma}q^{\delta}) \\ &= g^{\alpha\gamma}\Gamma^{\beta}{}_{\delta\gamma} = g^{\alpha\delta}\Gamma^{\beta}{}_{\gamma\delta}q^{\gamma} \\ \Rightarrow \nabla^{(\alpha}q^{\beta)} &= g^{\delta(\alpha}\Gamma^{\beta)}{}_{\gamma\delta}q^{\gamma} \end{aligned} \tag{5.89}$$

Επιπλέον:

$$\nabla_{\gamma}q^{\gamma} = q^{\gamma}{}_{,\gamma} + \Gamma^{\gamma}{}_{\delta\gamma}q^{\delta} = \Gamma^{\delta}{}_{\gamma\delta}q^{\gamma} \tag{5.90}$$

Επομένως:

$$\tilde{\nabla}^{<\alpha}q^{\beta>} = [g^{\delta(\alpha}\Gamma^{\beta)}{}_{\gamma\delta} - \frac{1}{3}g^{\alpha\beta}\Gamma^{\delta}{}_{\gamma\delta}]q^{\gamma} \tag{5.91}$$

$$\begin{aligned} \sigma^{<\alpha}{}_{\gamma}\pi^{\beta>\gamma} &= [h^{(\alpha}{}_{\delta}h^{\beta)}{}_{\varepsilon} - \frac{1}{3}h^{\alpha\beta}h_{\delta\varepsilon}]\sigma^{\delta}{}_{\gamma}\pi^{\varepsilon\gamma} \\ &= [\delta^{(\alpha}{}_{\delta}\delta^{\beta)}{}_{\varepsilon} - \frac{1}{3}g^{\alpha\beta}g_{\delta\varepsilon}]\sigma^{\delta}{}_{\gamma}\pi^{\varepsilon\gamma} \\ &= \sigma^{(\alpha}{}_{\gamma}\pi^{\beta)\gamma} - \frac{1}{3}g^{\alpha\beta}\sigma_{\varepsilon\gamma}\pi^{\varepsilon\gamma} \end{aligned} \tag{5.92}$$

Παρόμοιες σχέσεις ισχύουν και για τα $\sigma^{<\alpha}{}_{\gamma}H^{\beta>\gamma}$, $\sigma^{<\alpha}{}_{\gamma}E^{\beta>\gamma}$:

$$\sigma^{<\alpha}{}_{\gamma}H^{\beta>\gamma} = \sigma^{(\alpha}{}_{\gamma}H^{\beta)\gamma} - \frac{1}{3}g^{\alpha\beta}\sigma_{\varepsilon\gamma}H^{\varepsilon\gamma} \tag{5.93}$$

$$\sigma^{<\alpha}{}_{\gamma}E^{\beta>\gamma} = \sigma^{(\alpha}{}_{\gamma}E^{\beta)\gamma} - \frac{1}{3}g^{\alpha\beta}\sigma_{\varepsilon\gamma}E^{\varepsilon\gamma} \tag{5.94}$$

Για το $\sigma^{<\alpha}{}_{\gamma}\sigma^{\beta>\gamma}$ η σχέση (5.92) γίνεται:

$$\begin{aligned} \sigma^{<\alpha}{}_{\gamma}\sigma^{\beta>\gamma} &= \sigma^{(\alpha}{}_{\gamma}\sigma^{\beta)\gamma} - \frac{1}{3}g^{\alpha\beta}\sigma_{\varepsilon\gamma}\sigma^{\varepsilon\gamma} \\ &= \sigma^{\alpha}{}_{\gamma}\sigma^{\beta\gamma} - \frac{2}{3}g^{\alpha\beta}\sigma^{2} \end{aligned} \tag{5.95}$$

$$\begin{aligned}
\eta^{\gamma\delta<\alpha}\sigma^{\beta>}{}_{\gamma} &= [h^{(\alpha}{}_{\varepsilon}h^{\beta)}{}_{\zeta} - \frac{1}{3}h^{\alpha\beta}h_{\varepsilon\zeta}]\eta^{\gamma\delta\varepsilon}\sigma^{\zeta}{}_{\gamma} \\
&= [\delta^{(\alpha}_{\varepsilon}\delta^{\beta)}_{\zeta} - \frac{1}{3}g^{\alpha\beta}g_{\varepsilon\zeta}]\eta^{\gamma\delta\varepsilon}\sigma^{\zeta}{}_{\gamma} \\
&= \eta^{\gamma\delta(\alpha}\sigma^{\beta)}{}_{\gamma} - \frac{1}{3}g^{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta\varepsilon}\sigma_{\varepsilon\gamma} \\
&= \eta^{\gamma\delta(\alpha}\sigma^{\beta)}{}_{\gamma} \qquad (5.96)
\end{aligned}$$

Ομοίως

$$\eta^{\gamma\delta<\alpha}\pi^{\beta>}{}_{\delta} = \eta^{\gamma\delta(\alpha}\pi^{\beta)}{}_{\delta} \qquad (5.97)$$

Τώρα με τη βοήθεια των ανωτέρω μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις εξέλιξης και δεσμών για την τετράδα που έχουμε επιλέξει.

5.3.1 Εξισώσεις Εξέλιξης

1. Εξίσωση Raychaudhuri

$$\dot{\Theta} = -\frac{1}{3}\Theta^2 - 2\sigma^2 - \frac{1}{2}(\mu + 3p) + \Lambda \qquad (5.98)$$

2. Εξίσωση διάδοσης της διατμητικής ταχύτητας

$$\dot{\sigma}^{\alpha\beta} = -\frac{2}{3}\Theta\sigma^{\alpha\beta} - \sigma^{<\alpha}_{\ \ \gamma}\sigma^{\beta>\gamma} - (E^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\pi^{\alpha\beta}) \qquad (5.99)$$

όπου το $\sigma^{<\alpha}_{\ \ \gamma}\sigma^{\beta>\gamma}$ δίνεται από τη σχέση (5.95).

3. Εξίσωση χρονικής εξέλιξης της ενέργειας

$$\dot{\mu} + \nabla_{\alpha}q^{\alpha} = -\Theta(\mu + p) - (\sigma^{\alpha}{}_{\beta}\pi^{\beta}{}_{\alpha}) \qquad (5.100)$$

όπου το $\nabla_{\alpha}q^{\alpha}$ δίνεται από τη σχέση (5.91).

4. Εξίσωση χρονικής εξέλιξης της ορμής

$$\dot{q}^{\alpha} + \nabla_{\beta}\pi^{\alpha\beta} = -\frac{4}{3}\Theta q^{\alpha} - \sigma^{\alpha}{}_{\beta}q^{\beta} \qquad (5.101)$$

όπου το $\nabla_{\beta}\pi^{\alpha\beta}$ δίνεται από τη σχέση (5.77)

5. Εξίσωση-$\dot{E}$

$$(\dot{E}^{\alpha\beta}+\frac{1}{2}\dot{\pi}^{\alpha\beta})-(curlH)^{\alpha\beta}+\frac{1}{2}\nabla^{<\alpha}q^{\beta>} = -\frac{1}{2}(\mu+p)\sigma^{\alpha\beta}-\Theta(E^{\alpha\beta}+\frac{1}{6}\pi^{\alpha\beta}) + 3\sigma^{<\alpha}{}_{\gamma}E^{\beta>\gamma}-\frac{1}{2}\sigma^{<\alpha}{}_{\gamma}\pi^{\beta>\gamma} \tag{5.102}$$

όπου τα $(curlH)^{\alpha\beta}$, $\nabla^{<\alpha}q^{\beta>}$, $\sigma^{<\alpha}{}_{\gamma}E^{\beta>\gamma}$, $\sigma^{<\alpha}{}_{\gamma}\pi^{\beta>\gamma}$ δίνονται από τις σχέσεις (5.81) , (5.89) , (5.94) και(5.92) αντίστοιχα

6. Εξίσωση-$\dot{H}$

$$\dot{H}^{\alpha\beta}+(curlE)^{\alpha\beta}-\frac{1}{2}(curl\pi)^{\alpha\beta}=-\Theta H^{\alpha\beta}+3\sigma^{<\alpha}{}_{\gamma}H^{\beta>\gamma}+\frac{1}{2}\eta^{\gamma\delta<\alpha}\sigma^{\beta>}{}_{\gamma}q_{\delta} \tag{5.103}$$

όπου τα $(curlE)^{\alpha\beta}$, $(curl\pi)^{\alpha\beta}$, $\sigma^{<\alpha}{}_{\gamma}H^{\beta>\gamma}$, $\eta^{\gamma\delta<\alpha}\sigma^{\beta>}{}_{\gamma}$ δίνονται από τις σχέσεις (5.80) , (5.79) , (5.93) και (5.96) αντίστοιχα.

Η εξίσωση διάδοσης της ελικότητας είναι κενή πληροφορίας.

5.3.2 Εξισώσεις Δεσμών

1. Εξίσωση-(0α)

$$\nabla_{\beta}\sigma^{\alpha\beta}+q^{\alpha}=0 \tag{5.104}$$

όπου το $\nabla_{\beta}\sigma^{\alpha\beta}$ δίνεται από τη σχέση (5.74)

2. Εξίσωση-H_{ab}

$$H^{\alpha\beta}-(curl\sigma)^{\alpha\beta}=0 \tag{5.105}$$

όπου το $(curl\sigma)^{\alpha\beta}$ δίνεται από τη σχέση (5.78).

3. Εξίσωση $(div\ E)$

$$\nabla_{\beta}(E^{\alpha\beta}+\frac{1}{2}\pi^{\alpha\beta})+\frac{1}{3}\Theta q^{\alpha}-\frac{1}{2}\sigma^{\alpha}{}_{\beta}q^{\beta}-\eta^{\alpha\beta\gamma}\sigma_{\beta\delta}H^{\delta}{}_{\gamma}=0 \tag{5.106}$$

όπου τα $\nabla_{\beta}E^{\alpha\beta}$, $\nabla_{\beta}\pi^{\alpha\beta}$ δίνονται από τις σχέσεις (5.76) και (5.77) αντίστοιχα.

4. Εξίσωση $(div\ H)$

$$\nabla_{\beta}H^{\alpha\beta}+\eta^{\alpha\beta\gamma}[\frac{1}{2}\nabla_{\beta}q^{\gamma}+\sigma_{\beta\delta}(E^{\delta}{}_{\gamma}+\frac{1}{2}\pi^{\delta}{}_{\gamma})]=0 \tag{5.107}$$

όπου τα $\nabla_{\beta}H^{\alpha\beta}$, $\nabla_{\beta}q^{\gamma}$ δίνονται από τις σχέσεις (5.75) και (5.73).

Η ταυτότητα απόκλισης της ελικότητας είναι κενή πληροφορίας.

Κεφάλαιο 6

Χωροχρόνοι Bianchi IX με Ιδανικό Ρευστό

Στο προηγούμενο κεφάλαιο εξετάσαμε τα βασικά χαρακτηριστικά της οικογένειας χωροχρόνων Bianchi.Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τους χωροχρόνους Bianchi IX.Η ομάδα ισομετριών που δρα στους χωροχρόνους Bianchi IX έχει την ίδια άλγεβρα Lie με τις περιστροφές που δρουν στον τρισδιάστατο Ευκλείδιο χώρο.Αυτό έχει σαν συνέπεια οι χωροχρόνοι Bianchi IX να έχουν τοπολογία της μορφής $\Re \times S^3$ όπου το $\Re$ συμβολίζει μια πραγματική γραμμή που αντιστοιχεί στο χρόνο και το S^3 μία τρισδιάστατη κλειστή χωροειδή υπερεπιφάνεια.Επειδή οι χωροχρόνοι αυτοί είναι κατάλληλοι για την περιγραφή ενός κλειστού σύμπαντος παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον και έχουν μελετηθεί εκτενώς.Οι χωροχρόνοι Bianchi IX είναι, εν γένει, ανισοτροπικοί.Όπως σε όλους τους ομογενείς χωροχρόνους έτσι και στους χωροχρόνους Bianchi IX οι εξισώσεις πεδίου (που αποτελούν ένα σύστημα εξισώσεων με μερικές παραγώγους) ολοκληρώνονται ως προς τις χωρικές συντεταγμένες για να δώσουν ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων με ανεξάρτητη μεταβλητή τη χρονική συντεταγμένη.Οι χωροχρόνοι Bianchi IX έχουν αρχική ανωμαλία (*βλέπε [25] σελ.176-178*).Επιπλέον, έχει αποδειχθεί ότι ένας χωροχρόνος Bianchi IX, του οποίου το υλικό περιεχόμενο ικανοποιεί την ισχυρή ενεργειακή συνθήκη και έχει θετικές κύριες πιέσεις αν αρχικά διαστέλλεται, δεν θα συνεχίσει να διαστέλλεται επ' άπειρον, αλλά θα φτάσει σε ένα μέγιστο της διαστολής και μετά θα αρχίσει να συστέλλεται μέχρι να φτάσει σε μία τελική ανωμαλία (*βλέπε [21], [22]*)

Για τη μελέτη των χωροχρόνων Bianchi IX, των παρατηρησιακών σχέσεων, την ύπαρξη ανωμαλιών και τη συμπεριφορά τους κοντά στα σημεία ανωμαλίας έχουν χρησιμοποιηθεί χαμιλτονιανές μέθοδοι, αριθμητικές προσεγγίσεις και μέθοδοι δυναμικών συστημάτων (*βλέπε π.χ. [25], [34], [1]*).Η ανάλυση αυτών των μεθόδων και των συμπερασμάτων τους υπερβαίνουν τους στόχους της διατριβής αυτής.

Στο κεφάλαιο αυτό θα θεωρήσουμε χωροχρόνους Bianchi IX οι οποίοι περιέχουν ένα ιδανικό ρευστό και η τετραδική μετρική παίρνει διαγώνια μορφή.Αρχικά θα γράψουμε τις εξισώσεις εξέλιξης και δεσμών για αυτή τη μορφή της τετραδικής μετρικής και έπειτα θα εισάγουμε συντεταγμένες και θα βρούμε την αναλλοίωτη τετράδα και τη μετρική ως προς τις συντεταγμένες αυτές.Ας σημειωθεί εδώ ότι στην περίπτωση των χωροχρόνων Bianchi IX για το κενό αποδεικνύεται ότι χωρίς βλάβη της γενικότητας η τετραδική μετρική τίθεται πάντα σε διαγώνια μορφή (*βλέπε [4]*).

6.1 Εύρεση Εξισώσεων Εξέλιξης και Δεσμών για Διαγώνια Τετραδική Μετρική

Πριν προχωρήσουμε στη διατύπωση των εξισώσεων εξέλιξης και δεσμών για τους διαγώνιους χωροχρόνους Bianchi IX με ιδανικό ρευστό είναι απαραίτητο να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το ακόλουθο Θεώρημα 6.1.1.Το θεώρημα αυτό έχει θεμελιώδη σημασία διότι αποκλείει από τη μελέτη μας τα πλάγια ιδανικά ρευστά.

Θεώρημα 6.1.1. *Οι χωροχρόνοι Bianchi IX που έχουν διαγώνια τετραδική μετρική δεν μπορούν να έχουν ως υλικό περιεχόμενο ένα ιδανικό ρευστό που είναι πλάγιο.*

Απόδειξη. Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο (σχέση (4.58)) οι συντελεστές δομής για τους χωροχρόνους Bianchi μπορούν να γραφούν στη μορφή:

$$C^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \epsilon_{\beta\gamma\delta}n^{\alpha\delta} + \delta^{\alpha}_{\gamma}a_{\beta} - \delta^{\alpha}_{\beta}a_{\gamma} \tag{6.1}$$

Επίσης έχουμε αποδείξει ότι (σχέση (5.56)) οι συντελεστές στροφής του Ricci δίνονται από τη σχέση

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}(C^{\alpha}{}_{\beta\gamma} + g^{\alpha\varepsilon}g_{\beta\delta}C^{\delta}{}_{\gamma\varepsilon} + g^{\alpha\varepsilon}g_{\gamma\delta}C^{\delta}{}_{\beta\varepsilon}) \tag{6.2}$$

Συνυδάζοντας τις δύο προηγούμενες σχέσεις έχουμε:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} &= \frac{1}{2}\{\epsilon_{\beta\gamma\delta}n^{\alpha\delta} + \delta^{\alpha}_{\gamma}a_{\beta} - \delta^{\alpha}_{\beta}a_{\gamma} + g^{\alpha\varepsilon}g_{\beta\delta}(\epsilon_{\gamma\varepsilon\zeta}n^{\zeta\delta} + \delta^{\delta}_{\varepsilon}a_{\gamma} - \delta^{\delta}_{\gamma}a_{\varepsilon}) + \\
&\quad + g^{\alpha\varepsilon}g_{\gamma\delta}(\epsilon_{\beta\varepsilon\zeta}n^{\zeta\delta} + \delta^{\delta}_{\varepsilon}a_{\beta} - \delta^{\delta}_{\beta}a_{\varepsilon})\} \\
&= \frac{1}{2}(\epsilon_{\beta\gamma\delta}n^{\alpha\delta} + \delta^{\alpha}_{\gamma}a_{\beta} - \delta^{\alpha}_{\beta}a_{\gamma} + g^{\alpha\varepsilon}\epsilon_{\gamma\varepsilon\zeta}n^{\zeta}{}_{\beta} + g^{\alpha\delta}g_{\beta\delta}a_{\gamma} - \\
&\quad - g^{\alpha\varepsilon}g_{\beta\gamma}a_{\varepsilon} + g^{\alpha\varepsilon}\epsilon_{\beta\varepsilon\zeta}n^{\zeta}{}_{\gamma} + g^{\alpha\delta}g_{\gamma\delta}a_{\beta} - g^{\alpha\varepsilon}g_{\gamma\beta}a_{\varepsilon})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(\epsilon_{\beta\gamma\delta}n^{\delta\alpha} + \delta^{\alpha}_{\gamma}a_{\beta} - \delta^{\alpha}_{\beta}a_{\gamma} + g^{\alpha\varepsilon}\epsilon_{\gamma\varepsilon\delta}n^{\delta}{}_{\beta} + \delta^{\alpha}_{\beta}a_{\gamma} - g_{\beta\gamma}a^{\alpha} + \\
&\quad + g^{\alpha\varepsilon}\epsilon_{\beta\varepsilon\delta}n^{\delta}{}_{\gamma} + \delta^{\alpha}_{\gamma}a_{\beta} - g_{\beta\gamma}a^{\alpha}) \\
&= \frac{1}{2}(\epsilon_{\beta\gamma\delta}g^{\alpha\varepsilon}n^{\delta}{}_{\varepsilon} + g^{\alpha\varepsilon}\epsilon_{\gamma\varepsilon\delta}n^{\delta}{}_{\beta} + g^{\alpha\varepsilon}\epsilon_{\beta\varepsilon\delta}n^{\delta}{}_{\gamma} + 2\delta^{\alpha}_{\gamma}a_{\beta} - 2g_{\beta\gamma}a^{\alpha}) \\
\Rightarrow \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} &= \frac{1}{2}g^{\alpha\varepsilon}(\epsilon_{\beta\gamma\delta}n^{\delta}{}_{\varepsilon} + \epsilon_{\gamma\varepsilon\delta}n^{\delta}{}_{\beta} + \epsilon_{\beta\varepsilon\delta}n^{\delta}{}_{\gamma}) + \delta^{\alpha}_{\gamma}a_{\beta} - g_{\beta\gamma}a^{\alpha} \qquad (6.3)
\end{aligned}$$

Με συστολή στους δείκτες α και γ παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\alpha} &= \frac{1}{2}g^{\alpha\varepsilon}(\epsilon_{\beta\gamma\delta}n^{\delta}{}_{\varepsilon} + \epsilon_{\alpha\varepsilon\delta}n^{\delta}{}_{\beta} + \epsilon_{\beta\varepsilon\delta}n^{\delta}{}_{\alpha}) + \delta^{\alpha}_{\alpha}a_{\beta} - g_{\beta\alpha}a^{\alpha} \\
&= \frac{1}{2}(\epsilon_{\beta\alpha\delta}n^{\delta\alpha} + g^{\alpha\varepsilon}\epsilon_{\alpha\varepsilon\delta}n^{\delta\beta} + \epsilon_{\beta\varepsilon\delta}n^{\delta\varepsilon}) + 3a_{\beta} - a_{\beta} \\
&= 2a_{\beta} \qquad (6.4)
\end{aligned}$$

Από την εξίσωση (5.104) έχουμε ότι:

$$q^{\alpha} = -\Gamma^{\beta}{}_{\gamma\beta}\sigma^{\alpha\gamma} - \Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta}\sigma^{\gamma\beta} = -\Gamma^{\beta}{}_{\gamma\beta}\sigma^{\alpha\gamma} - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\sigma^{\beta\gamma} \qquad (6.5)$$

Αντικαθιστώντας στην (6.5) τις σχέσεις (6.2) και (6.3) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
q^{\alpha} = &- 2a_{\gamma}\sigma^{\alpha\gamma} - \frac{1}{2}g^{\alpha\varepsilon}(\epsilon_{\beta\gamma\delta}n^{\delta}{}_{\varepsilon} + \epsilon_{\gamma\varepsilon\delta}n^{\delta}{}_{\beta} + \epsilon_{\beta\varepsilon\delta}n^{\delta}{}_{\gamma})\sigma^{\beta\gamma} - \\
&- \delta^{\alpha}_{\gamma}a_{\beta}\sigma^{\beta\gamma} + g_{\beta\gamma}a^{\alpha}\sigma^{\beta\gamma} \\
= &- 2a_{\gamma}\sigma^{\alpha\gamma} - \frac{1}{2}\epsilon_{\beta\gamma\delta}\sigma^{\beta\gamma}n^{\delta\alpha} - \frac{1}{2}g^{\alpha\varepsilon}(\epsilon_{\gamma\varepsilon\delta}n^{\delta}{}_{\beta} + \epsilon_{\beta\varepsilon\delta}n^{\delta}{}_{\gamma})\sigma^{\beta\gamma} - \\
&- a_{\beta}\sigma^{\beta\alpha} + a^{\alpha}\sigma^{\beta}{}_{\beta} \\
= &- 3a_{\beta}\sigma^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\varepsilon}(\epsilon_{\gamma\varepsilon\delta}n^{\delta}{}_{\beta} + \epsilon_{\beta\varepsilon\delta}n^{\delta}{}_{\gamma})\sigma^{\beta\gamma} \qquad (6.6)
\end{aligned}$$

Όμως

$$\begin{aligned}
\epsilon_{\gamma\varepsilon\delta}n^{\delta}{}_{\beta}\sigma^{\beta\gamma} + \epsilon_{\beta\varepsilon\delta}n^{\delta}{}_{\gamma}\sigma^{\beta\gamma} &= \epsilon_{\beta\varepsilon\delta}n^{\delta}{}_{\gamma}\sigma^{\gamma\beta} + \epsilon_{\beta\varepsilon\delta}n^{\delta}{}_{\gamma}\sigma^{\beta\gamma} \\
&= 2\epsilon_{\beta\varepsilon\delta}n^{\delta}{}_{\gamma}\sigma^{\beta\gamma} \qquad (6.7)
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (6.7) η (6.6) γίνεται:

$$q^{\alpha} = -3a_{\beta}\sigma^{\alpha\beta} - g^{\alpha\varepsilon}\epsilon_{\beta\varepsilon\delta}n^{\delta}{}_{\gamma}\sigma^{\beta\gamma} \qquad (6.8)$$

Για τα ομογενή κοσμολογικά μοντέλα της τάξης A, στα οποία ανήκουν οι χωροχρόνοι Bianchi IX, ισχύει ότι $a_{\beta} = 0$, επομένως για τα μοντέλα αυτά η προηγούμενη σχέση δίνει:

$$q^{\alpha} = -g^{\alpha\varepsilon}\epsilon_{\beta\varepsilon\delta}n^{\delta}{}_{\gamma}\sigma^{\beta\gamma} \qquad (6.9)$$

Από τη σχέση (5.69) έχουμε ότι

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g_{\alpha\beta,0} - \frac{1}{3}\Theta h_{\alpha\beta} \tag{6.10}$$

Βέβαια για να βρούμε τις ανταλλοίωτες συνιστώσες $\sigma^{\alpha\beta}$ δεν μπορούμε κατευθείαν να ανεβάσουμε τους δείκτες στην έκφραση (6.10) αφού η μετρική εξαρτάται από το χρόνο:

$$\begin{aligned}
\sigma^{\alpha\beta} &= g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}\sigma_{\gamma\delta} = g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}\Big(\frac{1}{2}g_{\gamma\delta,0} - \frac{1}{3}\Theta h_{\gamma\delta}\Big) \\
&= \frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}\{(g^{\beta\delta}g_{\gamma\delta})_{,0} - g^{\beta\delta}{}_{,0}g_{\gamma\delta}\} - \frac{1}{3}g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}\Theta g_{\gamma\delta} \\
&= \frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}(\delta^{\beta}{}_{\gamma,0} - g^{\beta\delta}{}_{,0}g_{\gamma\delta}) - \frac{1}{3}\Theta g^{\alpha\gamma}\delta^{\beta}_{\gamma} \\
&= -\frac{1}{2}g^{\beta\delta}{}_{,0}g^{\alpha\gamma}g_{\gamma\delta} - \frac{1}{3}\Theta g^{\alpha\beta} \\
&= -\frac{1}{2}g^{\beta\delta}{}_{,0}\delta^{\alpha}_{\delta} - \frac{1}{3}\Theta g^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}g^{\beta\alpha}{}_{,0} - \frac{1}{3}\Theta g^{\alpha\beta} \\
\Rightarrow \sigma^{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}{}_{,0} - \frac{1}{3}\Theta g^{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Αφού η μετρική είναι διαγώνια ο τανυστής $\sigma^{\alpha\beta}$ θα είναι προφανώς και αυτός διαγώνιος.Επιπλέον ο τανυστής $n^{\alpha\beta}$ μπορεί πάντα να διαγωνιοποιηθεί με κατάλληλη επιλογή της τετράδας.Άρα η σχέση (6.9) μας δίνει:

$$q^{\alpha} = -g^{\alpha\varepsilon}(\epsilon_{1\varepsilon1}n^{1}{}_{1}\sigma^{11} + \epsilon_{2\varepsilon2}n^{2}{}_{2}\sigma^{22} + \epsilon_{3\varepsilon3}n^{3}{}_{3}\sigma^{33}) = 0 \tag{6.12}$$

Από τη σχέση (5.16), αφού $(\tilde{\mu} + \tilde{p}) > 0$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι:

$$\sinh(\beta) = 0 \Leftrightarrow \beta = 0 \tag{6.13}$$

Επομένως $\mathbf{u} \equiv \mathbf{n}$. και $\pi^{ab} = q^{\alpha} = 0$. □

Ανατρέχοντας στον Πίνακα 1 του κεφαλαίου 4 και σύμφωνα με τις παραδοχές που έχουμε κάνει για την τετραδική μας βάση παρατηρούμε ότι στην περίπτωση των χωροχρόνων Bianchi IX ισχύουν τα εξής:

$$n^{\alpha\beta} = diag(1,1,1) \;\;,\;\; a_{\beta} = 0 \tag{6.14}$$

Επομένως οι συντελεστές δομής $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$ παίρνουν τις τιμές:

$$C^{\alpha}_{\beta\gamma} = \begin{cases} +1 & \text{αν τα } \alpha,\beta,\gamma \text{ είναι άρτια μετάθεση των } 1,2,3 \\ -1 & \text{αν τα } \alpha,\beta,\gamma \text{ είναι περιττή μετάθεση των } 1,2,3 \\ \;\;0 & \text{σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση} \end{cases} \tag{6.15}$$

Όπως έχουμε αποδείξει, όταν χρησιμοποιούμε αναλλοίωτη τετράδα η τετραδική μετρική εξαρτάται μόνο από το χρόνο.Επομένως θα θεωρήσουμε μία διαγώνια τετραδική μετρική της μορφής:

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^2(t) \end{pmatrix} \tag{6.16}$$

Παρακάτω θα διαπιστώσουμε ότι η επιλογή αυτή απλοποιεί πολύ τις εξισώσεις εξέλιξης και δεσμών αφού όλες οι ποσότητες που υπεισέρχονται σ΄ αυτές είναι διαγώνιες.

Για να υπολογίσουμε τις κινηματικές ποσότητες που υπεισέρχονται στις εξισώσεις εξέλιξης και δεσμών πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τους συντελεστές στροφής του Ricci ${\Gamma^a}_{bc}$.Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.52)-(5.56) σε συνδυασμό με τις σχέσεις (6.15) και (6.16) βρίσκουμε ότι:

$$
\begin{aligned}
{\Gamma^0}_{00} &= {\Gamma^0}_{\gamma 0} = {\Gamma^0}_{0\gamma} = 0 && (6.17)\\
{\Gamma^0}_{\beta\gamma} &= a\dot{a}\ \delta^1_\beta \delta^1_\gamma + b\dot{b}\ \delta^2_\beta \delta^2_\gamma + c\dot{c}\ \delta^3_\beta \delta^3_\gamma && (6.18)\\
{\Gamma^\alpha}_{00} &= 0 && (6.19)\\
{\Gamma^\alpha}_{0\gamma} &= {\Gamma^\alpha}_{\gamma 0} = \frac{\dot{a}}{a}\ \delta^\alpha_1 \delta^1_\gamma + \frac{\dot{b}}{b}\ \delta^\alpha_2 \delta^2_\gamma + \frac{\dot{c}}{c}\ \delta^\alpha_3 \delta^3_\gamma && (6.20)\\
{\Gamma^1}_{\beta\gamma} &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{b^2}{a^2} - \frac{c^2}{a^2}\right)\delta^2_\beta \delta^3_\gamma + \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{b^2}{a^2} - \frac{c^2}{a^2}\right)\delta^3_\beta \delta^2_\gamma && (6.21)\\
{\Gamma^2}_{\beta\gamma} &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{c^2}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}\right)\delta^3_\beta \delta^1_\gamma + \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{c^2}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}\right)\delta^1_\beta \delta^3_\gamma && (6.22)\\
{\Gamma^3}_{\beta\gamma} &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a^2}{c^2} - \frac{b^2}{c^2}\right)\delta^1_\beta \delta^2_\gamma + \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{a^2}{c^2} - \frac{b^2}{c^2}\right)\delta^2_\beta \delta^1_\gamma && (6.23)
\end{aligned}
$$

Επιπλέον από τον ορισμό του η_{abc} έχουμε ότι:

$$
\begin{aligned}
\eta_{abc} &= n^d \eta_{dabc} = \delta^d_0 \eta_{dabc} = \eta_{0abc} \\
&= (|det g_{ab}|)^{1/2} \epsilon_{0abc} = a(t)b(t)c(t)\epsilon_{0abc} && (6.24)
\end{aligned}
$$

και

$$\eta^{abc} = g^{ad} g^{be} g^{cf} \eta_{def} \tag{6.25}$$

Οι κινηματικές ποσότητες δίνονται από τις σχέσεις (5.66)-(5.69).Συνδυάζοντας τις σχέσεις αυτές με τις (6.17)-(6.23) προκύπτουν τα εξής:

$$\begin{aligned}
\dot{n}_a &\equiv \dot{u}_a = 0 &(6.26)\\
\omega_{ab} &= 0 &(6.27)\\
\Theta &= \Gamma^a{}_{0a} = \Gamma^\alpha{}_{0\alpha} = \Gamma^1{}_{01} + \Gamma^2{}_{02} + \Gamma^3{}_{03} = \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} &(6.28)\\
\sigma_{\alpha\beta} &= \Gamma^0{}_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\Theta g_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,0} - \frac{1}{3}\Theta g_{\alpha\beta}\\
&= \frac{a^2}{3}\left(\frac{2\dot{a}}{a} - \frac{\dot{b}}{b} - \frac{\dot{c}}{c}\right)\delta^1_\alpha\delta^1_\beta + \frac{b^2}{3}\left(\frac{2\dot{b}}{b} - \frac{\dot{c}}{c} - \frac{\dot{a}}{a}\right)\delta^2_\alpha\delta^2_\beta +\\
&+ \frac{c^2}{3}\left(\frac{2\dot{c}}{c} - \frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{b}}{b}\right)\delta^3_\alpha\delta^3_\beta &(6.29)
\end{aligned}$$

Οι ποσότητες $\sigma^\alpha{}_\beta$ και $\sigma^{\alpha\beta}$ υπολογίζονται εύκολα από τις σχέσεις:

$$\sigma^\alpha{}_\beta = g^{\alpha\gamma}\sigma_{\gamma\beta} \tag{6.30}$$

και

$$\sigma^{\alpha\beta} = g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}\sigma_{\gamma\delta} \tag{6.31}$$

Από τον ορισμό (2.20) και τις σχέσεις (6.29) και (6.30) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \frac{1}{2}(\sigma_{ab}\sigma^{ab}) = \frac{1}{2}(\sigma_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}) = \frac{1}{2}(\sigma_{11}\sigma^{11} + \sigma_{22}\sigma^{22} + \sigma_{33}\sigma^{33})\\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{a^2}{3}\frac{1}{3a^2}\Big(\frac{2\dot{a}}{a} - \frac{\dot{b}}{b} - \frac{\dot{c}}{c}\Big)^2 + \frac{b^2}{3}\frac{1}{3b^2}\Big(\frac{2\dot{b}}{b} - \frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{c}}{c}\Big)^2 + \frac{c^2}{3}\frac{1}{3c^2}\Big(\frac{2\dot{c}}{c} - \frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{b}}{b}\Big)^2\right\}\\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} + \frac{\dot{c}^2}{c^2} - \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} - \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc}\right) &(6.32)
\end{aligned}$$

Η παράγωγος $\dot{\sigma}^{\alpha\beta}$ δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}^{\alpha\beta} &= \sigma^{\alpha\beta}{}_{;c}n^c = \sigma^{\alpha\beta}{}_{;c}\delta^c_0 = \sigma^{\alpha\beta}{}_{;0}\\
&= \sigma^{\alpha\beta}{}_{,0} + \Gamma^\alpha{}_{\gamma 0}\sigma^{\gamma\beta} + \Gamma^\beta{}_{\gamma 0}\sigma^{\alpha\gamma}\\
&= \frac{1}{3a^2}\left(\frac{2\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{b}}{b} - \frac{\ddot{c}}{c} - \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} + \frac{\dot{c}^2}{c^2}\right)\delta^\alpha_1\delta^\beta_1 +\\
&+ \frac{1}{3b^2}\left(\frac{2\ddot{b}}{b} - \frac{\ddot{c}}{c} - \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{2\dot{b}^2}{b^2} + \frac{\dot{c}^2}{c^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)\delta^\alpha_2\delta^\beta_2 +\\
&+ \frac{1}{3c^2}\left(\frac{2\ddot{c}}{c} - \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{b}}{b} - \frac{2\dot{c}^2}{c^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\dot{b}^2}{b^2}\right)\delta^\alpha_3\delta^\beta_3 &(6.33)
\end{aligned}$$

Το $(curl\sigma)^{\alpha\beta}$ υπολογίζεται από τη σχέση (5.78) με τη βοήθεια των σχέσεων (6.21)-(6.23) και (6.24)

$$
\begin{aligned}
(curl\sigma)^{\alpha\beta} &= \eta^{\gamma\delta(\alpha}\Gamma^{\beta)}{}_{\varepsilon\gamma}\sigma^{\varepsilon}{}_{\delta} - \eta^{\gamma\delta(\alpha}\sigma^{\beta)}{}_{\varepsilon}\Gamma^{\varepsilon}{}_{\delta\gamma} && (6.34)\\
&= \frac{1}{abc}\left\{\Big(-\frac{1}{2}+\frac{b^2}{2a^2}-\frac{c^2}{2a^2}\Big)(\sigma^3{}_3-\sigma^1{}_1)+\Big(\frac{1}{2}+\frac{b^2}{2a^2}-\frac{c^2}{2a^2}\Big)(\sigma^1{}_1-\sigma^2{}_2)\right\}\delta^\alpha_1\delta^\beta_1 + \\
&+ \frac{1}{abc}\left\{\Big(-\frac{1}{2}+\frac{c^2}{2b^2}-\frac{a^2}{2b^2}\Big)(\sigma^1{}_1-\sigma^2{}_2)+\Big(\frac{1}{2}+\frac{c^2}{2b^2}-\frac{a^2}{2b^2}\Big)(\sigma^2{}_2-\sigma^3{}_3)\right\}\delta^\alpha_2\delta^\beta_2 + \\
&+ \frac{1}{abc}\left\{\Big(-\frac{1}{2}+\frac{a^2}{2c^2}-\frac{b^2}{2c^2}\Big)(\sigma^2{}_2-\sigma^3{}_3)+\Big(\frac{1}{2}+\frac{a^2}{2c^2}-\frac{b^2}{2c^2}\Big)(\sigma^3{}_3-\sigma^1{}_1)\right\}\delta^\alpha_3\delta^\beta_3 \\
&= \frac{1}{2abc}\left\{\frac{2\dot{a}}{a}-\frac{\dot{b}}{b}\Big(1+\frac{b^2}{a^2}-\frac{c^2}{a^2}\Big)-\frac{\dot{c}}{c}\Big(1-\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}\Big)\right\}\delta^\alpha_1\delta^\beta_1 + \\
&+ \frac{1}{2abc}\left\{\frac{2\dot{b}}{b}-\frac{\dot{c}}{c}\Big(1+\frac{c^2}{b^2}-\frac{a^2}{b^2}\Big)-\frac{\dot{a}}{a}\Big(1-\frac{c^2}{b^2}+\frac{a^2}{b^2}\Big)\right\}\delta^\alpha_2\delta^\beta_2 + \\
&+ \frac{1}{2abc}\left\{\frac{2\dot{c}}{c}-\frac{\dot{a}}{a}\Big(1+\frac{a^2}{c^2}-\frac{b^2}{c^2}\Big)-\frac{\dot{b}}{b}\Big(1-\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}\Big)\right\}\delta^\alpha_3\delta^\beta_3 && (6.35)
\end{aligned}
$$

Η ποσότητα $\sigma^{<\alpha}{}_{\gamma}\sigma^{\beta>\gamma}$ προκύπτει συνδυάζοντας τη σχέση (5.95) με τις σχέσεις (6.16), (6.30), (6.31) και (6.32)

$$
\begin{aligned}
\sigma^{<\alpha}{}_{\gamma}\sigma^{\beta>\gamma} &= \sigma^{\alpha}{}_{\gamma}\sigma^{\beta\gamma} - \frac{2}{3}g^{\alpha\beta}\sigma^2 \\
&= \frac{1}{9a^2}\left(\frac{2\dot{a}^2}{a^2}-\frac{\dot{b}^2}{b^2}-\frac{\dot{c}^2}{c^2}+\frac{4\dot{b}\dot{c}}{bc}-\frac{2\dot{a}\dot{b}}{ab}-\frac{2\dot{a}\dot{c}}{ac}\right)\delta^\alpha_1\delta^\beta_1 + \\
&+ \frac{1}{9b^2}\left(\frac{2\dot{b}^2}{b^2}-\frac{\dot{c}^2}{c^2}-\frac{\dot{a}^2}{a^2}+\frac{4\dot{a}\dot{c}}{ac}-\frac{2\dot{b}\dot{c}}{bc}-\frac{2\dot{a}\dot{b}}{ab}\right)\delta^\alpha_2\delta^\beta_2 + \\
&+ \frac{1}{9c^2}\left(\frac{2\dot{c}^2}{c^2}-\frac{\dot{a}^2}{a^2}-\frac{\dot{b}^2}{b^2}+\frac{4\dot{a}\dot{b}}{ab}-\frac{2\dot{a}\dot{c}}{ac}-\frac{2\dot{b}\dot{c}}{bc}\right)\delta^\alpha_3\delta^\beta_3 \qquad (6.36)
\end{aligned}
$$

Όπως αποδείξαμε στο κεφάλαιο 3 (σχέση (3.36)) οι τετραδικές συνιστώσες του τανυστή του Ricci δίνονται από τη σχέση

$$
R_{ab} = \Gamma^{c}{}_{ab,c} - \Gamma^{c}{}_{ac,b} + \Gamma^{c}{}_{dc}\Gamma^{d}{}_{ab} - \Gamma^{d}{}_{ac}\Gamma^{c}{}_{bd} \qquad (6.37)
$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (6.36) τους συντελεστές στροφής του Ricci από τις σχέσεις (6.17)-(6.23) ο τανυστής του Ricci παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned}
R_{ab} = & - \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c}\right)\delta^0_a\delta^0_b + \\
& + a^2\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} + \frac{a^2}{2b^2c^2} - \frac{b^2}{2a^2c^2} - \frac{c^2}{2a^2b^2} + \frac{1}{a^2}\right)\delta^1_a\delta^1_b + \\
& + b^2\left(\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{b^2}{2a^2c^2} - \frac{c^2}{2a^2b^2} - \frac{a^2}{2b^2c^2} + \frac{1}{b^2}\right)\delta^2_a\delta^2_b + \\
& + c^2\left(\frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} + \frac{c^2}{2a^2b^2} - \frac{a^2}{2b^2c^2} - \frac{b^2}{2a^2c^2} + \frac{1}{c^2}\right)\delta^3_a\delta^3_b \qquad (6.38)
\end{aligned}$$

Οι ποσότητες $R^a{}_b$ και R^{ab} υπολογίζονται εύκολα με τη βοήθεια των σχέσεων

$$R^a{}_b = g^{ac}R_{cb} \qquad (6.39)$$

και

$$R^{ab} = g^{ac}g^{bd}R_{cd} \qquad (6.40)$$

αντίστοιχα.Το βαθμωτό του Ricci R υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
R &= g^{ab}R_{ab} \\
&= 2\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc}\right) - \\
&- \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b^2c^2} + \frac{b^2}{a^2c^2} + \frac{c^2}{a^2b^2}\right) + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \qquad (6.41)
\end{aligned}$$

Θέλουμε τώρα να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό και το μαγνητικό μέρος του τανυστή Weyl.Από τις σχέσεις ορισμού (2.30) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
E_{ab} &= C_{acbd}n^cn^d = C_{acbd}\delta^c_0\delta^d_0 = C_{a0b0} \Rightarrow E_{\alpha\beta} = C_{\alpha 0\beta 0} \qquad (6.42) \\
H_{ab} &= \frac{1}{2}\eta_{ade}C^{de}{}_{bc}n^c = \frac{1}{2}\eta_{ade}C^{de}{}_{bc}\delta^c_0 = \frac{1}{2}\eta_{ade}C^{de}{}_{b0} \Rightarrow H_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta_{\alpha\delta\varepsilon}C^{\delta\varepsilon}{}_{\beta 0} \qquad (6.43)
\end{aligned}$$

αφού το η^{abc} είναι μηδενίζεται αν κάποιος από τους δείκτες a, b, c πάρουν την τιμή μηδέν.Από τη σχέση (2.28) έχουμε ότι οι τετραδικές συνιστώσες C_{abcd} του τανυστή Weyl είναι:

$$C_{abcd} = R_{abcd} + \frac{1}{2}(g_{ad}R_{cb} + g_{bc}R_{da} - g_{ac}R_{db} - g_{bd}R_{ca}) + \frac{1}{6}(g_{ac}g_{db} - g_{ad}g_{cb})R \qquad (6.44)$$

Επομένως με τη βοήθεια των σχέσεων (6.16) και (6.44) η σχέση (6.42) γίνεται:

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta} &= R_{\alpha0\beta0} + \frac{1}{2}(g_{\alpha0}R_{\beta0} + g_{0\beta}R_{0\alpha} - g_{\alpha\beta}R_{00} - g_{00}R_{\beta\alpha}) + \frac{1}{6}(g_{\beta\alpha}g_{00} - g_{\alpha0}g_{\beta0})R \\ &= R_{\alpha0\beta0} - \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta}R_{00} - R_{\alpha\beta}) - \frac{1}{6}g_{\alpha\beta}R \end{aligned} \tag{6.45}$$

Από τη σχέση (3.35) προκύπτει ότι οι τετραδικές συνιστώσες R_{abcd} του τανυστή Riemann δίνονται από τη σχέση

$$R_{abcd} = g_{ae}({\Gamma^e}_{bd,c} - {\Gamma^e}_{bc,d} + {\Gamma^e}_{fc}{\Gamma^f}_{bd} - {\Gamma^e}_{fd}{\Gamma^f}_{bc} - {\Gamma^e}_{bf}{\Gamma^f}_{dc} + {\Gamma^e}_{bf}{\Gamma^f}_{cd}) \tag{6.46}$$

Τελικά, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (6.16) και (6.17)-(6.23) παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned} R_{\alpha0\beta0} &= g_{\alpha\varepsilon}(-{\Gamma^\varepsilon}_{0\beta,0} - {\Gamma^\varepsilon}_{\gamma0}{\Gamma^\gamma}_{0\beta} - {\Gamma^\varepsilon}_{0\gamma}{\Gamma^\gamma}_{0\beta} + {\Gamma^\varepsilon}_{0\gamma}{\Gamma^\gamma}_{\beta0}) \\ &= -a\ddot{a}\ \delta^1_\alpha\delta^1_\beta - b\ddot{b}\ \delta^2_\alpha\delta^2_\beta - c\ddot{c}\ \delta^3_\alpha\delta^3_\beta \end{aligned} \tag{6.47}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (6.16),(6.38),(6.41) και (6.47) στη σχέση (6.45) βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta} &= \frac{a^2}{6}\left(-\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} - \frac{2\dot{b}\dot{c}}{bc} + \frac{2a^2}{b^2c^2} - \frac{b^2}{a^2c^2} - \frac{c^2}{a^2b^2} + \frac{2}{a^2} - \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)\delta^1_\alpha\delta^1_\beta + \\ &+ \frac{b^2}{6}\left(-\frac{2\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} - \frac{2\dot{a}\dot{c}}{ac} + \frac{2b^2}{a^2c^2} - \frac{c^2}{a^2b^2} - \frac{a^2}{b^2c^2} + \frac{2}{b^2} - \frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)\delta^2_\alpha\delta^2_\beta + \\ &+ \frac{c^2}{6}\left(-\frac{2\ddot{c}}{c} + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} - \frac{2\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{2c^2}{a^2b^2} - \frac{a^2}{b^2c^2} - \frac{b^2}{a^2c^2} + \frac{2}{c^2} - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\delta^3_\alpha\delta^3_\beta \end{aligned} \tag{6.48}$$

Η σχέση (2.29) μας δίνει ότι οι τετραδικές συνιστώσες ${C^{ab}}_{cd}$ του τανυστή Weyl είναι:

$${C^{ab}}_{cd} = {R^{ab}}_{cd} - \frac{1}{2}(\delta^a_c {R^b}_d - \delta^a_d {R^b}_c - \delta^b_c {R^a}_d + \delta^b_d {R^a}_c) + \frac{1}{6}(\delta^a_c\delta^b_d - \delta^b_c\delta^a_d)R \tag{6.49}$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (6.49) και στη σχέση (6.43) έχουμε

$$\begin{aligned} H_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\eta_{\alpha\delta\varepsilon}\left\{{R^{\delta\varepsilon}}_{\beta0} - \frac{1}{2}(\delta^\delta_\beta {R^\varepsilon}_0 - \delta^\delta_0 {R^\varepsilon}_\beta - \delta^\varepsilon_\beta R^\delta_0 + \delta^\varepsilon_0 {R^\delta}_\beta) + \frac{1}{6}(\delta^\delta_\beta\delta^\varepsilon_0 - \delta^\varepsilon_\beta\delta^\delta_0)R\right\} \\ \Rightarrow H_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\eta_{\alpha\delta\varepsilon}{R^{\delta\varepsilon}}_{\beta0} \end{aligned} \tag{6.50}$$

όπου από την (3.35)

$${R^{\delta\varepsilon}}_{\beta0} = g^{\varepsilon\gamma}({\Gamma^\delta}_{\gamma0,\beta} - {\Gamma^\delta}_{\gamma\beta,0} + {\Gamma^\delta}_{\zeta\beta}{\Gamma^\zeta}_{\gamma0} - {\Gamma^\delta}_{\zeta0}{\Gamma^\zeta}_{\gamma\beta} - {\Gamma^\delta}_{\gamma\zeta}{\Gamma^\zeta}_{0\beta} + {\Gamma^\delta}_{\gamma\zeta}{\Gamma^\zeta}_{\beta0}) \tag{6.51}$$

Άρα η σχέση (6.50) χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (6.51),(6.17)-(6.23),(2.11) και (6.16) μας δίνει

$$\begin{aligned} H_{\alpha\beta} &= \frac{a^3}{2bc}\left\{\frac{2\dot{a}}{a} - \frac{\dot{b}}{b}\Big(1+\frac{b^2}{a^2}-\frac{c^2}{a^2}\Big) - \frac{\dot{c}}{c}\Big(1-\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}\Big)\right\}\delta_1^\alpha\delta_1^\beta + \\ &+ \frac{b^3}{2ac}\left\{\frac{2\dot{b}}{b} - \frac{\dot{c}}{c}\Big(1+\frac{c^2}{b^2}-\frac{a^2}{b^2}\Big) - \frac{\dot{a}}{a}\Big(1-\frac{c^2}{b^2}+\frac{a^2}{b^2}\Big)\right\}\delta_2^\alpha\delta_2^\beta + \\ &+ \frac{c^3}{2ab}\left\{\frac{2\dot{c}}{c} - \frac{\dot{a}}{a}\Big(1+\frac{a^2}{c^2}-\frac{b^2}{c^2}\Big) - \frac{\dot{b}}{b}\Big(1-\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}\Big)\right\}\delta_3^\alpha\delta_3^\beta \end{aligned} \tag{6.52}$$

Οι ανταλλοίωτες συνιστώσες $E^{\alpha\beta}$, $H^{\alpha\beta}$ και οι μεικτές συνιστώσες $E^{\alpha}_{\ \beta}$, $H^{\alpha}_{\ \beta}$ του ηλεκτρικού και του μαγνητικού μέρους του τανυστή Weyl προκύπτουν εύκολα από τις παρακάτω σχέσεις

$$E^{ab} = g^{ac}g^{bd}E_{cd} \Rightarrow E^{\alpha\beta} = g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}E_{\gamma\delta} \tag{6.53}$$

$$E^{a}_{\ b} = g^{ac}E_{cb} \Rightarrow E^{\alpha}_{\ \beta} = g^{\alpha\gamma}E_{\gamma\beta} \tag{6.54}$$

$$H^{ab} = g^{ac}g^{bd}H_{cd} \Rightarrow H^{\alpha\beta} = g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}H_{\gamma\delta} \tag{6.55}$$

$$H^{a}_{\ b} = g^{ac}H_{cb} \Rightarrow H^{\alpha}_{\ \beta} = g^{\alpha\gamma}H_{\gamma\beta} \tag{6.56}$$

Για τις χρονικές παραγώγους $\dot{E}^{\alpha\beta}$ και $\dot{H}^{\alpha\beta}$ ισχύουν τα εξής:

$$\begin{aligned} \dot{E}^{\alpha\beta} &= E^{\alpha\beta}_{\ \ ;c}n^c = E^{\alpha\beta}_{\ \ ;c}\delta_0^c = E^{\alpha\beta}_{\ \ ;0} \\ &= E^{\alpha\beta}_{\ \ ,0} + \Gamma^{\alpha}_{\ c0}E^{c\beta} + \Gamma^{\beta}_{\ c0}E^{\alpha c} \\ &= E^{\alpha\beta}_{\ \ ,0} + \Gamma^{\alpha}_{\ \gamma 0}E^{\gamma\beta} + \Gamma^{\beta}_{\ \gamma 0}E^{\alpha\gamma} \end{aligned} \tag{6.57}$$

Ομοίως

$$\dot{H}^{\alpha\beta} = H^{\alpha\beta}_{\ \ ,0} + \Gamma^{\alpha}_{\ \gamma 0}H^{\gamma\beta} + \Gamma^{\beta}_{\ \gamma 0}H^{\alpha\gamma} \tag{6.58}$$

Με τη βοήθεια των (6.20),(6.53) και (6.48) η σχέση (6.57) μας δίνει τις συνιστώσες του τανυστή $\dot{E}^{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} \dot{E}^{11} = \frac{1}{6a^2}\Bigg(&- \frac{2a^{(3)}}{a} + \frac{b^{(3)}}{b} + \frac{c^{(3)}}{c} + \\ &+ \frac{\dot{a}}{a}\Big(\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} - \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} + \frac{4a^2}{b^2c^2} + \frac{2b^2}{a^2c^2} + \frac{2c^2}{a^2b^2} - \frac{4}{a^2}\Big) + \\ &+ \frac{\dot{b}}{b}\Big(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{b}}{b} - \frac{2\ddot{c}}{c} - \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{2\dot{b}\dot{c}}{bc} - \frac{4a^2}{b^2c^2} - \frac{2b^2}{a^2c^2} + \frac{2c^2}{a^2b^2} + \frac{2}{b^2}\Big) + \\ &+ \frac{\dot{c}}{c}\Big(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{2\ddot{b}}{b} - \frac{\ddot{c}}{c} - \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} + \frac{2\dot{b}\dot{c}}{bc} - \frac{4a^2}{b^2c^2} + \frac{2b^2}{a^2c^2} - \frac{2c^2}{a^2b^2} + \frac{2}{c^2}\Big)\Bigg) \end{aligned} \tag{6.59}$$

Οι συνιστώσες $\dot{E}^{22}$ και $\dot{E}^{33}$ προκύπτουν από τη σχέση (6.59) με κυκλική εναλλαγή των a, b, c και οι μη διαγώνιες συνιστώσες $\dot{E}^{12}, \dot{E}^{13}, \dot{E}^{23}$ είναι μηδέν.

Οι συνιστώσες του $\dot{H}^{\alpha\beta}$ υπολογίζονται συνδυάζοντας τη σχέση (6.58) με τις (6.20), (6.52) και (6.55):

$$\begin{aligned}\dot{H}^{11} = \frac{1}{2abc} & \Bigg(\frac{2\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{b}}{b} - \frac{\ddot{c}}{c} - \frac{3\dot{a}\dot{b}}{ab} - \frac{3\dot{a}\dot{c}}{ac} + \frac{2\dot{b}\dot{c}}{bc} + \frac{2\dot{b}^2}{b^2} + \frac{2\dot{c}^2}{c^2} + \\ & + \frac{b^2}{a^2}\Big(\frac{\ddot{c}}{c} - \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} + \frac{2\dot{b}\dot{c}}{bc} - \frac{2\dot{c}^2}{c^2}\Big) + \\ & + \frac{c^2}{a^2}\Big(\frac{\ddot{b}}{b} - \frac{\ddot{c}}{c} - \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} + \frac{2\dot{b}\dot{c}}{bc} - \frac{2\dot{b}^2}{b^2}\Big) \Bigg) \end{aligned} \tag{6.60}$$

Οι συνιστώσες $\dot{H}^{22}$ και $\dot{H}^{33}$ δίνονται από τη σχέση (6.60) με κυκλική εναλλαγή των a, b, c και οι μη διαγώνιες συνιστώσες $\dot{H}^{12}, \dot{H}^{13}, \dot{H}^{23}$ είναι μηδέν.

Τα $(curlE)^{\alpha\beta}, (curlH)^{\alpha\beta}$ δίνονται από τις σχέσεις (5.80) και (5.81) αντίστοιχα:

$$(curlE)^{\alpha\beta} = \eta^{\gamma\delta(\alpha}\Gamma^{\beta)}{}_{\varepsilon\gamma}E^{\varepsilon}{}_{\delta} - \eta^{\gamma\delta(\alpha}E^{\beta)}{}_{\varepsilon}\Gamma^{\varepsilon}{}_{\delta\gamma} \tag{6.61}$$

$$(curlH)^{\alpha\beta} = \eta^{\gamma\delta(\alpha}\Gamma^{\beta)}{}_{\varepsilon\gamma}H^{\varepsilon}{}_{\delta} - \eta^{\gamma\delta(\alpha}H^{\beta)}{}_{\varepsilon}\Gamma^{\varepsilon}{}_{\delta\gamma} \tag{6.62}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (6.61) τις σχέσεις (6.21)-(6.23), (6.25)και (6.54) και (6.48) αντίστοιχα παίρνουμε:

$$\begin{aligned}(curlE)^{11} = \frac{1}{4abc}\Bigg(& - \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} - \frac{2\dot{b}\dot{c}}{bc} + \\ & + \frac{b^2}{a^2}\Big(\frac{\ddot{b}}{b} - \frac{\ddot{c}}{c} - \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} - \frac{b^2}{a^2c^2} + \frac{1}{a^2}\Big) + \\ & + \frac{c^2}{a^2}\Big(\frac{\ddot{c}}{c} - \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} - \frac{c^2}{a^2b^2} + \frac{1}{a^2}\Big) + \\ & + \frac{2a^2}{b^2c^2} - \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \Bigg) \end{aligned} \tag{6.63}$$

Οι συνιστώσες $(curlE)^{22}$ και $(curlE)^{33}$ υπολογίζονται από τη σχέση (6.61) με κυκλική μετάθεση των δεικτών και οι μη διαγώνιες συνιστώσες $(curlE)^{12}, (curlE)^{13}$ και $(curlE)^{23}$ είναι μηδέν.

Ομοίως από τις σχέσεις (6.62),(6.21)-(6.23),(6.25),(6.56) και (6.52) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}(curlH)^{11} = \frac{1}{2a^2} \quad \Bigg(\quad & \frac{\dot a}{a}\Big(\frac{3a^2}{b^2c^2} + \frac{b^2}{a^2c^2} + \frac{c^2}{a^2b^2} - \frac{2}{a^2}\Big) + \\ + \quad & \frac{\dot b}{b}\Big(-\frac{3a^2}{2b^2c^2} - \frac{3b^2}{2a^2c^2} + \frac{c^2}{2a^2b^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\Big) + \\ + \quad & \frac{\dot c}{c}\Big(-\frac{3a^2}{2b^2c^2} + \frac{b^2}{2a^2c^2} - \frac{3c^2}{2a^2b^2} + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\Big) \Bigg)\end{aligned} \tag{6.64}$$

Οι ποσότητες $\sigma^{<\alpha}{}_{\gamma}E^{\beta>\gamma}$ και $\sigma^{<\alpha}{}_{\gamma}H^{\beta>\gamma}$ δίνονται από τις σχέσεις (5.93) και (5.94) αντίστοιχα

$$\sigma^{<\alpha}{}_{\gamma}E^{\beta>\gamma} = \sigma^{(\alpha}{}_{\gamma}E^{\beta)\gamma} - \frac{1}{3}g^{\alpha\beta}\sigma_{\varepsilon\gamma}E^{\varepsilon\gamma} \tag{6.65}$$

$$\sigma^{<\alpha}{}_{\gamma}H^{\beta>\gamma} = \sigma^{(\alpha}{}_{\gamma}H^{\beta)\gamma} - \frac{1}{3}g^{\alpha\beta}\sigma_{\varepsilon\gamma}H^{\varepsilon\gamma} \tag{6.66}$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων (6.30), (6.31),(6.29) και (6.48) η σχέση (6.65) δίνει

$$\begin{aligned}\sigma^{<1}{}_{\gamma}E^{1>\gamma} = \frac{1}{18a^2} \quad \Bigg(\quad & \frac{\dot a}{a}\Big(-\frac{2\ddot a}{a} + \frac{\ddot b}{b} + \frac{\ddot c}{c} + \frac{\dot a\dot b}{ab} + \frac{\dot a\dot c}{ac} + \frac{2a^2}{b^2c^2} - \frac{b^2}{a^2c^2} - \frac{c^2}{a^2b^2} + \frac{2}{a^2} - \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\Big) + \\ + \quad & \frac{\dot b}{b}\Big(\frac{\ddot a}{a} + \frac{\ddot b}{b} - \frac{2\ddot c}{c} - \frac{2\dot a\dot b}{ab} + \frac{\dot b\dot c}{bc} - \frac{a^2}{b^2c^2} - \frac{b^2}{a^2c^2} + \frac{2c^2}{a^2b^2} - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} + \frac{2}{c^2}\Big) + \\ + \quad & \frac{\dot c}{c}\Big(\frac{\ddot a}{a} - \frac{2\ddot b}{b} + \frac{\ddot c}{c} - \frac{2\dot a\dot c}{ac} + \frac{\dot b\dot c}{bc} - \frac{a^2}{b^2c^2} + \frac{2b^2}{a^2c^2} - \frac{c^2}{a^2b^2} - \frac{1}{a^2} + \frac{2}{b^2} - \frac{1}{c^2}\Big) \Bigg)\end{aligned} \tag{6.67}$$

Οι συνιστώσες $\sigma^{<2}{}_{\gamma}E^{2>\gamma}$ και $\sigma^{<3}{}_{\gamma}E^{3>\gamma}$ δίνονται από τη σχέση (6.67) με κυκλική εναλλαγή των δεικτών ενώ οι μη διαγώνιες συνιστώσες $\sigma^{<1}{}_{\gamma}E^{2>\gamma}, \sigma^{<2}{}_{\gamma}E^{1>\gamma}$, $\sigma^{<1}{}_{\gamma}E^{3>\gamma}, \sigma^{<3}{}_{\gamma}E^{1>\gamma}, \sigma^{<2}{}_{\gamma}E^{3>\gamma}$ και $\sigma^{<3}{}_{\gamma}E^{2>\gamma}$ είναι μηδέν.
Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (6.30),(6.31),(6.29) και (6.52) στην (6.66) παίρνουμε

$$\sigma^{<1}{}_{\gamma}H^{1>\gamma} = \frac{1}{6abc}\Bigg(\frac{2\dot a^2}{a^2} + \frac{\dot b^2}{b^2} + \frac{\dot c^2}{c} - \frac{2\dot a\dot b}{ab} - \frac{2\dot a\dot c}{ac} - \Big(\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}\Big)\Big(\frac{\dot b^2}{b^2} + \frac{\dot c^2}{c^2} - \frac{2\dot b\dot c}{bc}\Big)\Bigg) \tag{6.68}$$

Οι συνιστώσες $\sigma^{<2}{}_{\gamma}H^{2>\gamma}$ και $\sigma^{<3}{}_{\gamma}H^{3>\gamma}$ δίνονται από τη σχέση (6.68) με κυκλική εναλλαγή των δεικτών ενώ οι μη διαγώνιες συνιστώσες $\sigma^{<1}{}_{\gamma}H^{2>\gamma}, \sigma^{<2}{}_{\gamma}H^{1>\gamma}$, $\sigma^{<1}{}_{\gamma}H^{3>\gamma}, \sigma^{<3}{}_{\gamma}H^{1>\gamma}, \sigma^{<2}{}_{\gamma}H^{3>\gamma}$ και $\sigma^{<3}{}_{\gamma}H^{2>\gamma}$ είναι μηδέν.

Οι διάφορες ποσότητες που υπολογίσαμε, από τη σχέση (6.26) έως και την (6.68), μπορούν τώρα να αντικατασταθούν στις εξισώσεις εξέλιξης και δεσμών (5.98)-(5.107).Έπειτα από πράξεις προέκυψαν τα ακόλουθα αποτελέσματα.

6.1.1 Εξισώσεις Εξέλιξης και Δεσμών

1. Εξίσωση Raychaudhuri

$$\mu + 3p + \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{2\ddot{b}}{b} + \frac{2\ddot{c}}{c} = 2\Lambda \tag{6.69}$$

2. Εξίσωση διάδοσης της ελικότητας

   - $\alpha = \beta = 1$:

$$\frac{2\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{b}}{b} - \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} - \frac{2\dot{b}\dot{c}}{bc} + \frac{2a^2}{b^2c^2} - \frac{b^2}{a^2c^2} - \frac{c^2}{a^2b^2} + \frac{2}{a^2} - \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0 \tag{6.70}$$

   - $\alpha = \beta = 2$:

$$\frac{2\ddot{b}}{b} - \frac{\ddot{c}}{c} - \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - \frac{2\dot{a}\dot{c}}{ac} + \frac{2b^2}{a^2c^2} - \frac{c^2}{a^2b^2} - \frac{a^2}{b^2c^2} + \frac{2}{b^2} - \frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} = 0 \tag{6.71}$$

   - $\alpha = \beta = 3$:

$$\frac{2\ddot{c}}{c} - \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} - \frac{2\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{2c^2}{a^2b^2} - \frac{a^2}{b^2c^2} - \frac{b^2}{a^2c^2} + \frac{2}{c^2} - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 0 \tag{6.72}$$

3. Εξίσωση διατήρησης της ενέργειας

$$\dot{\mu} = -(\mu + p)\Big(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\Big) \tag{6.73}$$

4. Εξίσωση-$\dot{E}$

   - $\alpha = \beta = 1$:

$$\begin{aligned} - & \frac{2a^{(3)}}{a} + \frac{b^{(3)}}{b} + \frac{c^{(3)}}{c} + \frac{2\dot{a}\ddot{a}}{a^2} - \frac{2\dot{b}\ddot{a}}{ac} - \frac{2\dot{c}\ddot{a}}{ac} - \frac{\dot{b}\ddot{b}}{b^2} + \frac{\dot{a}\ddot{b}}{ab} + \frac{\dot{c}\ddot{b}}{bc} - \\ - & \frac{\dot{c}\ddot{c}}{c^2} + \frac{\dot{a}\ddot{c}}{ac} + \frac{\dot{b}\ddot{c}}{bc} - \frac{\dot{a}^2\dot{b}}{a^2b} + \frac{2\dot{a}\dot{b}^2}{ab^2} - \frac{\dot{a}^2\dot{c}}{a^2c} + \frac{2\dot{a}\dot{c}^2}{ac^2} - \frac{\dot{b}^2\dot{c}}{b^2c} - \frac{\dot{b}\dot{c}^2}{bc^2} - \\ - & \frac{5a\dot{a}}{b^2c^2} + \frac{7a^2\dot{b}}{2b^3c^2} + \frac{7a^2\dot{c}}{2b^2c^3} + \frac{5b\dot{b}}{2a^2c^2} - \frac{5b^2\dot{c}}{2a^2c^3} - \frac{b^2\dot{a}}{a^3c^2} + \frac{5c\dot{c}}{2a^2b^2} - \\ - & \frac{5c^2\dot{b}}{2a^2b^3} - \frac{c^2\dot{a}}{a^3b^2} + \frac{2\dot{a}}{a^3} - \frac{\dot{b}}{b^3} - \frac{\dot{c}}{c^3} + (\mu + p)\left(\frac{2\dot{a}}{a} - \frac{\dot{b}}{b} - \frac{\dot{c}}{c}\right) = 0 \end{aligned} \tag{6.74}$$

- $\alpha = \beta = 2$:

$$\begin{aligned}
&- \frac{2b^{(3)}}{b} + \frac{c^{(3)}}{c} + \frac{a^{(3)}}{a} + \frac{2\dot{b}\ddot{b}}{b^2} - \frac{2\dot{c}\ddot{b}}{bc} - \frac{2\dot{a}\ddot{b}}{ab} - \frac{\dot{c}\ddot{c}}{c^2} + \frac{\dot{a}\ddot{c}}{ac} + \frac{\dot{b}\ddot{c}}{bc} - \\
&- \frac{\dot{a}\ddot{a}}{a^2} + \frac{\dot{b}\ddot{a}}{ab} + \frac{\dot{c}\ddot{a}}{ac} - \frac{\dot{b}^2\dot{c}}{b^2c} + \frac{2\dot{b}\dot{c}^2}{bc^2} - \frac{\dot{a}\dot{b}^2}{ab^2} + \frac{2\dot{a}^2\dot{b}}{a^2b} - \frac{\dot{a}^2\dot{c}}{a^2c} - \frac{\dot{a}\dot{c}^2}{ac^2} - \\
&- \frac{5b\dot{b}}{a^2c^2} + \frac{7b^2\dot{c}}{2a^2c^3} + \frac{7b^2\dot{a}}{2a^3c^2} + \frac{5c\dot{c}}{2a^2b^2} - \frac{5c^2\dot{a}}{2a^3b^2} - \frac{c^2\dot{b}}{a^2b^3} + \frac{5a\dot{a}}{2b^2c^2} - \\
&- \frac{5a^2\dot{c}}{2b^2c^3} - \frac{a^2\dot{b}}{b^3c^2} + \frac{2\dot{b}}{b^3} - \frac{\dot{c}}{c^3} - \frac{\dot{a}}{a^3} + (\mu + p)\left(\frac{2\dot{b}}{b} - \frac{\dot{c}}{c} - \frac{\dot{a}}{a}\right) = 0
\end{aligned} \tag{6.75}$$

- $\alpha = \beta = 3$:

$$\begin{aligned}
&- \frac{2c^{(3)}}{c} + \frac{a^{(3)}}{a} + \frac{b^{(3)}}{b} + \frac{2\dot{c}\ddot{c}}{c^2} - \frac{2\dot{a}\ddot{c}}{ac} - \frac{2\dot{b}\ddot{c}}{bc} - \frac{\dot{a}\ddot{a}}{a^2} + \frac{\dot{b}\ddot{a}}{ab} + \frac{\dot{c}\ddot{a}}{ac} - \\
&- \frac{\dot{b}\ddot{b}}{b^2} + \frac{\dot{a}\ddot{b}}{ab} + \frac{\dot{c}\ddot{b}}{cb} - \frac{\dot{a}\dot{c}^2}{ac^2} + \frac{2\dot{a}^2\dot{c}}{a^2c} - \frac{\dot{b}\dot{c}^2}{bc^2} + \frac{2\dot{b}^2\dot{c}}{b^2c} - \frac{\dot{a}^2\dot{b}}{a^2b} - \frac{\dot{a}\dot{b}^2}{ab^2} - \\
&- \frac{5c\dot{c}}{a^2b^2} + \frac{7c^2\dot{a}}{2a^3b^2} + \frac{7c^2\dot{b}}{2a^2b^3} + \frac{5a\dot{a}}{2b^2c^2} - \frac{5a^2\dot{b}}{2b^3c^2} - \frac{a^2\dot{c}}{b^2c^3} + \frac{5b\dot{b}}{2a^2c^2} - \\
&- \frac{5b^2\dot{a}}{2a^3c^2} - \frac{b^2\dot{c}}{a^2c^3} + \frac{2\dot{c}}{c^3} - \frac{\dot{a}}{a^3} - \frac{\dot{b}}{b^3} + (\mu + p)\left(\frac{2\dot{c}}{c} - \frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{b}}{b}\right) = 0
\end{aligned} \tag{6.76}$$

5. Εξίσωση-$\dot{H}$

- $\alpha = \beta = 1$:

$$\begin{aligned}
&\frac{2\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{b}}{b} - \frac{\ddot{c}}{c} - \frac{b\ddot{b}}{a^2} - \frac{c\ddot{c}}{a^2} + \frac{c^2\ddot{b}}{a^2b} + \frac{b^2\ddot{c}}{a^2c} + \frac{b^2\dot{a}\dot{c}}{a^3c} + \frac{c^2\dot{a}\dot{b}}{a^3b} - \frac{b\dot{a}\dot{b}}{a^3} - \frac{c\dot{a}\dot{c}}{a^3} + \\
&+ \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} - \frac{2\dot{b}\dot{c}}{bc} + \frac{2a^2}{b^2c^2} - \frac{b^4}{a^4c^2} - \frac{c^4}{a^4b^2} + \frac{b^2}{a^4} + \frac{c^2}{a^4} - \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0
\end{aligned} \tag{6.77}$$

- $\alpha = \beta = 2$:

$$\begin{aligned}
&\frac{2\ddot{b}}{b} - \frac{\ddot{c}}{c} - \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{c\ddot{c}}{b^2} - \frac{a\ddot{a}}{b^2} + \frac{a^2\ddot{c}}{b^2c} + \frac{c^2\ddot{a}}{ab^2} + \frac{a^2\dot{b}\dot{c}}{b^3c} + \frac{c^2\dot{a}\dot{b}}{ab^3} - \frac{c\dot{b}\dot{c}}{b^3} - \frac{a\dot{a}\dot{b}}{b^3} + \\
&+ \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - \frac{2\dot{a}\dot{c}}{ac} + \frac{2b^2}{a^2c^2} - \frac{c^4}{a^2b^4} - \frac{a^4}{b^4c^2} + \frac{c^2}{b^4} + \frac{a^2}{b^4} - \frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} = 0
\end{aligned} \tag{6.78}$$

- $\alpha = \beta = 3$:

$$\begin{aligned} \frac{2\ddot{c}}{c} - \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{b}}{b} - \frac{a\ddot{a}}{c^2} - \frac{b\ddot{b}}{c^2} + \frac{a^2\ddot{b}}{bc^2} + \frac{b^2\ddot{a}}{ac^2} + \frac{a^2\dot{b}\dot{c}}{bc^3} + \frac{b^2\dot{a}\dot{c}}{ac^3} - \frac{a\dot{a}\dot{c}}{c^3} - \frac{b\dot{b}\dot{c}}{c^3} & + \\ + \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} - \frac{2\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{2c^2}{a^2b^2} - \frac{a^4}{b^2c^4} - \frac{b^4}{a^2c^4} + \frac{a^2}{c^4} + \frac{b^2}{c^4} - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} & = 0 \end{aligned} \tag{6.79}$$

Όλες οι Εξισώσεις Δεσμών είναι ταυτοτικά ίσες με το μηδέν.

Οι Εξισώσεις Εξέλιξης (6.69)-(6.79) δεν είναι όλες ανεξάρτητες μεταξύ τους, αλλά περιέχουν και εξισώσεις κενές πληροφορίας.Μπορούμε να καταλήξουμε στο ελάχιστο σύστημα εξισώσεων κάνοντας γραμμικούς συνδυασμούς των εξισώσεων αυτών:
Αν αφαιρέσουμε την εξίσωση (6.71) από την (6.70) προκύπτρι η εξίσωση

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} - \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} + \frac{a^2}{a^2c^2} - \frac{b^2}{b^2c^2} + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 0 \tag{6.80}$$

Ομοίως αφαιρώντας την (6.72) από την (6.70) και από την (6.69) προκύπτουν οι εξισώσεις

$$\frac{\ddot{b}}{b} - \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} + \frac{b^2}{a^2c^2} - \frac{c^2}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0 \tag{6.81}$$

και

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} + \frac{a^2}{b^2c^2} - \frac{c^2}{a^2b^2} + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2} = 0 \tag{6.82}$$

Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις (6.79)-(6.81) δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους αλλά η μία από τις τρεις είναι συνέπεια των άλλων δύο.Για παράδειγμα η (6.81) προκύπτει αν από την (6.82) αφαιρέσουμε την (6.80).
Παραγωγίζουμε την εξίσωση (6.70) και λύνουμε ως προς $-\frac{2a^{(3)}}{a}+\frac{b^{(3)}}{b}+\frac{c^{(3)}}{c}$.Αντικαθιστώντας τη σχέση που προκύπτει στην (6.74) καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\left(\frac{2\dot{a}}{a} - \frac{\dot{b}}{b} - \frac{\dot{c}}{c}\right)\left(\mu + p + \frac{2\ddot{c}}{c} - \frac{2\dot{a}\dot{b}}{ab} - \frac{a^2}{2b^2c^2} - \frac{b^2}{2a^2c^2} + \frac{3c^2}{2a^2b^2} - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = 0 \tag{6.83}$$

Με παρόμοιο τρόπο από τις (6.75), (6.71) και (6.76), (6.72) αντίστοιχα παίρνουμε

$$\left(\frac{2\dot{b}}{b} - \frac{\dot{c}}{c} - \frac{\dot{a}}{a}\right)\left(\mu + p + \frac{2\ddot{a}}{a} - \frac{2\dot{b}\dot{c}}{bc} - \frac{b^2}{2a^2c^2} - \frac{c^2}{2a^2b^2} + \frac{3a^2}{2b^2c^2} - \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) = 0 \tag{6.84}$$

και

$$\left(\frac{2\dot{c}}{c}-\frac{\dot{a}}{a}-\frac{\dot{b}}{b}\right)\left(\mu+p+\frac{2\ddot{b}}{b}-\frac{2\dot{a}\dot{c}}{ac}-\frac{c^2}{2a^2b^2}-\frac{a^2}{2b^2c^2}+\frac{3b^2}{2a^2c^2}-\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=0 \tag{6.85}$$

Έστω ότι

$$\frac{2\dot{a}}{a}=\frac{\dot{b}}{b}+\frac{\dot{c}}{c}\Leftrightarrow a^2=\lambda bc \tag{6.86}$$

όπου λ =σταθερά.Τότε θα πρέπει

$$\frac{2\dot{b}}{b}\neq\frac{\dot{c}}{c}+\frac{\dot{a}}{a} \tag{6.87}$$

και

$$\frac{2\dot{c}}{c}\neq\frac{\dot{a}}{a}+\frac{\dot{b}}{b} \tag{6.88}$$

διότι αν π.χ.

$$\frac{2\dot{b}}{b}=\frac{\dot{c}}{c}+\frac{\dot{a}}{a} \tag{6.89}$$

που σε συνδυασμό με την (6.86) θα μας δίνει

$$\frac{\dot{a}}{a}=\frac{\dot{b}}{b}=\frac{\dot{c}}{c} \tag{6.90}$$

και άρα μηδενική διατμητική ταχύτητα που οδηγεί σε ισότροπο ομογενή χωροχρόνο FRW.Με παραγώγιση της (6.86) προκύπτει

$$\frac{4\ddot{a}}{a}=\frac{2\ddot{b}}{b}+\frac{2\ddot{c}}{c}-\frac{\dot{b}^2}{b^2}-\frac{\dot{c}^2}{c}+\frac{2\dot{b}\dot{c}}{bc} \tag{6.91}$$

Πολλαπλασιάζουμε την (6.80) με 4 και στη σχέση που προκύπτει αντικαθιστούμε τις (6.86) και (6.91) και παίρνουμε

$$2\left(\frac{\ddot{c}}{c}-\frac{\ddot{b}}{b}\right)=\frac{\dot{b}^2}{b^2}-\frac{\dot{c}^2}{c^2}+\frac{4b^2}{a^2c^2}-\frac{4a^2}{b^2c^2}+\frac{4}{b^2}-\frac{4}{a^2} \tag{6.92}$$

Πολλαπλασιάζουμε την (6.81) με 2 και στη σχέση που προκύπτει αντικαθιστούμε την (6.86) οπότε προκύπτει ότι

$$2\left(\frac{\ddot{b}}{b}-\frac{\ddot{c}}{c}\right)=\left(\frac{\dot{b}}{b}+\frac{\dot{c}}{c}\right)\left(\frac{\dot{c}}{c}-\frac{\dot{b}}{b}\right)+\frac{2c^2}{a^2b^2}-\frac{2b^2}{a^2c^2}+\frac{2}{c^2}-\frac{2}{b^2} \tag{6.93}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (6.92) και (6.93) προκύπτει ότι

$$\frac{b^2}{a^2c^2}+\frac{c^2}{a^2b^2}-\frac{2a^2}{b^2c^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{2}{a^2}=0 \tag{6.94}$$

Με τη βοήθεια της (6.86) η (6.94) γίνεται

$$\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{2}{\lambda bc}+\frac{b}{\lambda c^3}+\frac{c}{\lambda b^3}-\frac{2\lambda}{bc}=0 \tag{6.95}$$

ή ισοδύναμα

$$\left(\frac{c}{b}\right)^2+1-2\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)\frac{c}{b}+\frac{1}{\lambda}\left(\frac{b}{c}+\frac{c^3}{b^3}\right)=0 \tag{6.96}$$

η οποία συνεπάγεται ότι

$$\frac{c}{b}=constant \Rightarrow \frac{\dot{b}}{b}=\frac{\dot{c}}{c} \tag{6.97}$$

οπότε από τις (6.86) και (6.97)

$$\frac{\dot{a}}{a}=\frac{\dot{b}}{b}=\frac{\dot{c}}{c} \tag{6.98}$$

και πάλι καταληγουμε σε μηδενική διατμητική ταχύτητα.Ακολουθώντας μία παρόμοια διαδικασία αποδεικνύεται ότι για να έχουμε μη μηδενική διατμητική ταχύτητα θα πρέπει να μην μηδενίζεται καμία από τις ποσότητες

$$\frac{2\dot{a}}{a}-\frac{\dot{b}}{b}-\frac{\dot{c}}{c}\ ,\ \frac{2\dot{b}}{b}-\frac{\dot{c}}{c}-\frac{\dot{a}}{a}\ ,\ \frac{2\dot{c}}{c}-\frac{\dot{a}}{a}-\frac{\dot{b}}{b} \tag{6.99}$$

Επομένως οι εξισώσεις (6.83)-(6.85) γίνονται

$$\begin{aligned}
\mu+p+\frac{2\ddot{c}}{c}-\frac{2\dot{a}\dot{b}}{ab}-\frac{a^2}{2b^2c^2}-\frac{b^2}{2a^2c^2}+\frac{3c^2}{2a^2b^2}-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} &= 0 \quad (6.100)\\
\mu+p+\frac{2\ddot{a}}{a}-\frac{2\dot{b}\dot{c}}{bc}-\frac{b^2}{2a^2c^2}-\frac{c^2}{2a^2b^2}+\frac{3a^2}{2b^2c^2}-\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2} &= 0 \quad (6.101)\\
\mu+p+\frac{2\ddot{b}}{b}-\frac{2\dot{a}\dot{c}}{ac}-\frac{c^2}{2a^2b^2}-\frac{a^2}{2b^2c^2}+\frac{3b^2}{2a^2c^2}-\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} &= 0 \quad (6.102)
\end{aligned}$$

Λύνουμε την εξίσωση (6.69) ως προς μ και αντικαθιστούμε στις (6.100)-(6.102) οι οποίες παίρνουν τελικά τη μορφή

$$\begin{aligned}
\frac{\ddot{a}}{a}+\frac{\ddot{b}}{b}+\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab}+\frac{a^2}{4b^2c^2}+\frac{b^2}{4a^2c^2}-\frac{3c^2}{4a^2b^2}+\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{2b^2}-\frac{1}{2c^2} &= \Lambda-p \quad (6.103)\\
\frac{\ddot{b}}{b}+\frac{\ddot{c}}{c}+\frac{\dot{b}\dot{c}}{bc}+\frac{b^2}{4a^2c^2}+\frac{c^2}{4a^2b^2}-\frac{3a^2}{4b^2c^2}+\frac{1}{2b^2}+\frac{1}{2c^2}-\frac{1}{2a^2} &= \Lambda-p \quad (6.104)\\
\frac{\ddot{c}}{c}+\frac{\ddot{a}}{a}+\frac{\dot{a}\dot{c}}{ac}+\frac{c^2}{4a^2b^2}+\frac{a^2}{4b^2c^2}-\frac{3b^2}{4a^2c^2}+\frac{1}{2c^2}+\frac{1}{2a^2}-\frac{1}{2b^2} &= \Lambda-p \quad (6.105)
\end{aligned}$$

Είναι φανερό ότι οι εξισώσεις (6.103)-(6.105) δεν είναι όλες ανεξάρτητες αλλά οι δύο από τις τρεις μπορούν να προκύψουν από την τρίτη σε συνδυασμό με τις (6.80)-(6.81).Για παράδειγμα η (6.104) προκύπτει αν από την (6.103) αφαιρέσουμε την (6.82).
Με άθροιση κατά μέλη των (6.100)-(6.102) και με τη βοήθεια της (6.69) καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab}+\frac{\dot{a}\dot{c}}{ac}+\frac{\dot{b}\dot{c}}{bc}-\frac{a^2}{4b^2c^2}-\frac{b^2}{4a^2c^2}-\frac{c^2}{4a^2b^2}+\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{2b^2}+\frac{1}{2c^2}=\mu+\Lambda \quad (6.106)$$

Η εξίσωση (6.73) προκύπτει εύκολα παραγωγίζοντας την (6.106) και χρησιμοποιώντας τις (6.80)-(6.81).Επιπλέον οι εξισώσεις (6.77)-(6.79) είναι κενές πληροφορίας αφού με τη βοήθεια των (6.80)-(6.81) γίνονται ταυτοτικά ίσες με το μηδέν.

Σύμφωνα με την παραπάνω ανάλυση καταλήγουμε στο ότι το ελάχιστο σύστημα εξισώσεων που περιέχει όλη την πληροφορία για το χωροχρόνο και το υλικό του περιεχόμενο είναι το εξής:

$$\frac{\ddot{a}}{a}-\frac{\ddot{b}}{b}+\frac{\dot{a}\dot{c}}{ac}-\frac{\dot{b}\dot{c}}{bc}+\frac{a^2}{b^2c^2}-\frac{b^2}{a^2c^2}+\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}=0 \quad (6.107)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a}-\frac{\ddot{c}}{c}+\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab}-\frac{\dot{b}\dot{c}}{bc}+\frac{a^2}{b^2c^2}-\frac{c^2}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}=0 \quad (6.108)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a}-\frac{\ddot{c}}{c}+\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab}+\frac{a^2}{4b^2c^2}+\frac{b^2}{4a^2c^2}-\frac{3c^2}{4a^2b^2}+\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{2b^2}-\frac{1}{2c^2}=\Lambda-p \quad (6.109)$$

$$\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab}+\frac{\dot{a}\dot{c}}{ac}+\frac{\dot{b}\dot{c}}{bc}-\frac{a^2}{4b^2c^2}-\frac{b^2}{4a^2c^2}-\frac{c^2}{4a^2b^2}+\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{2b^2}+\frac{1}{2c^2}=\Lambda+\mu \quad (6.110)$$

6.2 Εύρεση Αναλλοίωτης Βάσης για τους Χωροχρόνους Bianchi IX

Σκοπός μας εδώ είναι να εισάγουμε ένα σύστημα συντεταγμένων $x^i, i = 0,1,2,3$, όπου $x^0 \equiv t$, $x^1 \equiv x$, $x^2 \equiv y$, $x^3 \equiv z$ και να βρούμε τη μορφή της αναλλοίωτης βάσης ως προς αυτό το σύστημα συντεταγμένων.Οι τροχιές της συντεταγμένης t λαμβάνονται κάθετες προς τις ομογενείς υπερεπιφάνειες (όπως στο κεφάλαιο 5.2) οπότε:

$$E_0{}^i = \delta_0^i \quad (6.111)$$

Επιπλέον μπορούμε πάντα να επιλέξουμε ένα από τα τρία διανύσματα της χωρικής αναλλοίωτης τετραδικής βάσης να εφάπτεται στις τροχιές της συντεταγμένης x^1 έτσι ώστε:

$$E_1{}^i = \delta_1{}^i \quad (6.112)$$

Οι συνιστώσες των άλλων δύο διανυσμάτων της χωρικής βάσης θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$E_2{}^i = b_1\delta_1^i + b_2\delta_2^i + b_3\delta_3^i \tag{6.113}$$
$$E_3{}^i = c_1\delta_1^i + c_2\delta_2^i + c_3\delta_3^i \tag{6.114}$$

όπου τα $b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ είναι συναρτήσεις των συντεταγμένων x, y, z.

Συνδυάζοντας τις (5.30) και (6.15) προκύπτει ότι οι σχέσεις μετάθεσης για τα χωρικά διανύσματα της αναλλοίωτης βάσης παίρνουν τη μορφή:

$$[E_1, E_2]^i = -E_3{}^i \tag{6.115}$$
$$[E_2, E_3]^i = -E_1{}^i \tag{6.116}$$
$$[E_3, E_1]^i = -E_2{}^i \tag{6.117}$$

Από τις (6.112),(6.113) και (6.115) παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
[E_1, E_2]^i = -E_3{}^i \;&\Rightarrow\; E_1{}^j E_2{}^i{}_{,j} - E_2{}^j E_1{}^i{}_{,j} = -E_3{}^i \\
&\Rightarrow\; \delta_1^j E_2{}^i{}_{,j} - E_2{}^j \delta^i_{1,j} = -E_3{}^i \\
&\Rightarrow\; E_2{}^i{}_{,x} = -E_3{}^i \\
&\Rightarrow\; b_{1,x}\delta_1^i + b_{2,x}\delta_2^i + b_{3,x}\delta_3^i = -c_1\delta_1^i - c_2\delta_2^i - c_3\delta_3^i \\
&\Rightarrow\; b_{1,x} = -c_1 \ , \ b_{2,x} = -c_2 \ , \ b_{3,x} = -c_3
\end{aligned} \tag{6.118}$$

Με τον ίδιο τρόπο από τις υπόλοιπες σχέσεις μετάθεσης (6.116) και (6.117) με τη βοήθεια των (6.112)-(6.114) λαμβάνονται αντίστοιχα οι σχέσεις:

$$b_1c_{1,x} + b_2c_{1,y} + b_3c_{1,z} - c_1b_{1,x} - c_2b_{1,y} - c_3b_{1,z} = -1 \tag{6.119}$$
$$b_1c_{2,x} + b_2c_{2,y} + b_3c_{2,z} - c_1b_{2,x} - c_2b_{2,y} - c_3b_{2,z} = 0 \tag{6.120}$$
$$b_1c_{3,x} + b_2c_{3,y} + b_3c_{3,z} - c_1b_{3,x} - c_2b_{3,y} - c_3b_{3,z} = 0 \tag{6.121}$$

και

$$c_{1,x} = b_1 \ , \ c_{2,x} = b_2 \ , \ c_{3,x} = b_3 \tag{6.122}$$

Παραγωγίζοντας τις (6.119) ως προς x και χρησιμοποιώντας τις (6.118) καταλήγουμε στο ότι οι συναρτήσεις $b_1(x,y,z), b_2(x,y,z), b_3(x,y,z)$ ικανοποιούν τις διαφορικές εξισώσεις

$$b_{1,xx} = -b_1 \ , \ b_{2,xx} = -b_2 \ , \ b_{3,xx} = -b_3 \tag{6.123}$$

και άρα έχουν τη μορφή

$$b_1 = \alpha_1(y,z)\sin x + \beta_1(y,z)\cos x \tag{6.124}$$
$$b_2 = \alpha_2(y,z)\sin x + \beta_2(y,z)\cos x \tag{6.125}$$
$$b_3 = \alpha_3(y,z)\sin x + \beta_3(y,z)\cos x \tag{6.126}$$

Εισάγωντας τις σχέσεις (6.124)-(6.126) στις (6.118) βρίσκουμε ότι η μορφή των συναρτήσεων $c_1(x, y, z)$, $c_2(x, y, z)$, $c_3(x, y, z)$ είναι η εξής

$$c_1 = \beta_1(y, z) \sin x - \alpha_1(y, z) \cos x \quad (6.127)$$
$$c_2 = \beta_2(y, z) \sin x - \alpha_2(y, z) \cos x \quad (6.128)$$
$$c_3 = \beta_3(y, z) \sin x - \alpha_3(y, z) \cos x \quad (6.129)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (6.124)-6.129) στις (6.119)-(6.121) καταλήγουμε στο ακόλουθο προς επίλυση σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2 + \alpha_2\beta_{1,y} + a_3\beta_{1,z} - \beta_2\alpha_{1,y} - \beta_3\alpha_{1,z} = -1 \quad (6.130)$$
$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \alpha_2\beta_{2,y} - \beta_2\alpha_{2,y} + \alpha_3\beta_{2,z} - \beta_3\alpha_{2,z} = 0 \quad (6.131)$$
$$\alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3 + \alpha_2\beta_{3,y} - \beta_2\alpha_{3,y} + \alpha_3\beta_{3,z} - \beta_3\alpha_{3,z} = 0 \quad (6.132)$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε την ελευθερία που έχουμε ως προς την επιλογή των συντεταγμένων για να απλοποιήσουμε και εν τέλει να επιλύσουμε το παραπάνω σύστημα.Πρώτη μας επιδίωξη είναι να βρούμε πώς μετασχηματίζονται οι ποσότητες $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ κάτω από το μετασχητισμό των χωρικών συντεταγμένων.Δηλαδή ένα μετασχηματισμό της μορφής $x'^i = x'^i(x^j)$, όπου $i, j = 1, 2, 3$. Οι συνιστώσες των διανυσματικών πεδίων της τετραδικής μας βάσης ως προς το νέο σύστημα συντεταγμένων συμβολίζονται ως $E'_a{}^i$.Προφανώς ισχύει ότι:

$$E'_0{}^i \equiv E_0{}^i = \delta^i_0 \quad (6.133)$$

Οι συνιστώσες $E_\alpha{}^i$ μετασχηματίζονται σύμφωνα με τη σχέση:

$$E'_\alpha{}^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} E_\alpha{}^j \Rightarrow E'_\alpha{}^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x} E_\alpha{}^1 + \frac{\partial x'^i}{\partial y} E_\alpha{}^2 + \frac{\partial x'^i}{\partial z} E_\alpha{}^3 \quad (6.134)$$

αφού $E_\alpha{}^0 = 0$.Απαιτούμε επιπλέον το διάνυσμα $\mathbf{E}_1$ να είναι εφαπτόμενο και στην καινούρια συντεταγμένη x'^1 ,επομένως:

$$E'_1{}^i = \delta^i_1 \quad (6.135)$$

Για τα υπόλοιπα διανυσματικά πεδία ισχύουν οι σχέσεις:

$$E'_2{}^i = b'_1\delta^i_1 + b'_2\delta^i_2 + b'_3\delta^i_3 \quad (6.136)$$
$$E'_3{}^i = c'_1\delta^i_1 + c'_2\delta^i_2 + c'_3\delta^i_3 \quad (6.137)$$

όπου τα $b'_1, b'_2, b'_3, c'_1, c'_2, c'_3$ είναι συναρτήσεις των καινούριων συντεταγμένων x', y', z'. Προφανώς οι σχέσεις μετάθεσης (6.115)-(6.117) ισχύουν και για τις μετασχηματισμένες συνιστώσες $E'_{\alpha}{}^{i}$, άρα οι συναρτήσεις $b'_1, b'_2, b'_3, c'_1, c'_2, c'_3$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} b'_1 &= \alpha'_1(y',z')\sin x' + \beta'_1(y',z')\cos x' && (6.138)\\ b'_2 &= \alpha'_2(y',z')\sin x' + \beta'_2(y',z')\cos x' && (6.139)\\ b'_3 &= \alpha'_3(y',z')\sin x' + \beta'_3(y',z')\cos x' && (6.140) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} c'_1 &= \beta'_1(y',z')\sin x' - \alpha'_1(y',z')\cos x' && (6.141)\\ c'_2 &= \beta'_2(y',z')\sin x' - \alpha'_2(y',z')\cos x' && (6.142)\\ c'_3 &= \beta'_3(y',z')\sin x' - \alpha'_3(y',z')\cos x' && (6.143) \end{aligned}$$

και οι συναρτήσεις $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \beta'_1, \beta'_2, \beta'_3$ ικανοποιούν τις (6.130)-(6.132) στο νέο σύστημα συντεταγμένων. Από την (6.136) έχουμε ότι:

$$b'_1 = E'_2{}^{1} \ , \ b'_2 = E'_2{}^{2} \ , \ b'_3 = E'_2{}^{3} \tag{6.144}$$

επίσης από τις σχέσεις (6.134) και (6.113):

$$\begin{aligned} E'_2{}^{i} &= \frac{\partial x'^i}{\partial x}E_2{}^1 + \frac{\partial x'^i}{\partial y}E_2{}^2 + \frac{\partial x'^i}{\partial z}E_2{}^3 \\ \Rightarrow E'_2{}^{i} &= b_1\frac{\partial x'^i}{\partial x} + b_2\frac{\partial x'^i}{\partial y} + b_3\frac{\partial x'^i}{\partial z} && (6.145) \end{aligned}$$

Επομένως αντικαθιστώντας την (6.145) στις σχέσεις (6.144) βρίσκουμε ότι οι ποσότητες $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ μετασχηματίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} b'_1 &= b_1\frac{\partial x'}{\partial x} + b_2\frac{\partial x'}{\partial y} + b_3\frac{\partial x'}{\partial z} && (6.146)\\ b'_2 &= b_1\frac{\partial y'}{\partial x} + b_2\frac{\partial y'}{\partial y} + b_3\frac{\partial z'}{\partial z} && (6.147)\\ b'_3 &= b_1\frac{\partial z'}{\partial x} + b_2\frac{\partial z'}{\partial y} + b_3\frac{\partial z'}{\partial z} && (6.148) \end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (6.134),(6.135) και (6.112) βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned} \delta_1^i &= \frac{\partial x'^i}{\partial x}E_1{}^1 + \frac{\partial x'^i}{\partial y}E_1{}^2 + \frac{\partial x'^i}{\partial x}E_1{}^3 = \frac{\partial x'^i}{\partial x} \\ \Rightarrow\ & \frac{\partial x'}{\partial x} = 1 \ , \ \frac{\partial y'}{\partial x} = 0 \ , \ \frac{\partial z'}{\partial x} = 0 \\ \Rightarrow\ & x' = x + X(y,z) \ , \ y' = y'(y,z) \ , \ z' = z'(y,z) && (6.149) \end{aligned}$$

όπου οι σχέσεις αυτές εκφράζουν την ελευθερία που έχουμε στην επιλογή των χωρικών συντεταγμένων.Τώρα από τις (6.149) και (6.146)-(6.148) προκύπτουν τα εξής:

$$b_1' = b_1 + b_2\frac{\partial X}{\partial y} + b_3\frac{\partial X}{\partial z} \tag{6.150}$$

$$b_2' = b_2\frac{\partial y'}{\partial y} + b_2\frac{\partial y'}{\partial z} \tag{6.151}$$

$$b_3' = b_2\frac{\partial z'}{\partial y} + b_2\frac{\partial z'}{\partial z} \tag{6.152}$$

Αν αντικαταστήσουμε τις (6.124)-(6.126) στις (6.150)-(6.152) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} b_1' &= \alpha_1\sin x + \beta_1\cos x + (\alpha_2\sin x + \beta_2\cos x)\frac{\partial X}{\partial y} + \\ &+ (\alpha_3\sin x + \beta_3\cos x)\frac{\partial X}{\partial z} \end{aligned} \tag{6.153}$$

$$b_2' = (\alpha_2\sin x + \beta_2\cos x)\frac{\partial y'}{\partial y} + (\alpha_3\sin x + \beta_3\cos x)\frac{\partial y'}{\partial z} \tag{6.154}$$

$$b_3' = (\alpha_2\sin x + \beta_2\cos x)\frac{\partial z'}{\partial y} + (\alpha_3\sin x + \beta_3\cos x)\frac{\partial z'}{\partial z} \tag{6.155}$$

Όμως για να βρούμε τα $\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3', \beta_1', \beta_2', \beta_3'$ πρέπει να εκφράσουμε τα b_1', b_2', b_3' συναρτήσει των $\sin x'$ και $\cos x'$.Από τη σχέση (6.149) και από τις γνωστές μας τριγωνομετρικές ταυτότητες παίρνουμε:

$$\sin x = \sin(x' - X) = \sin x'\cos X - \cos x'\sin X \tag{6.156}$$

$$\cos x = \cos(x' - X) = \cos x'\cos X + \sin x'\sin X \tag{6.157}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (6.156) και (6.157) στις (6.153)-(6.155) τελικά προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} b_1' &= \left\{\alpha_1\cos X + \beta_1\sin X + \Big(\alpha_2\cos X + \beta_2\sin X\Big)\frac{\partial X}{\partial y} + \Big(\alpha_3\cos X + \beta_3\sin X\Big)\frac{\partial X}{\partial z}\right\}\sin x' + \\ &+ \left\{\beta_1\cos X - \alpha_1\sin X + \Big(\beta_2\cos X - \alpha_2\sin X\Big)\frac{\partial X}{\partial y} + \Big(\beta_3\cos X + \alpha_3\sin X\Big)\frac{\partial X}{\partial z}\right\}\cos x' \end{aligned} \tag{6.158}$$

$$\begin{aligned} b_2' &= \left\{\Big(\alpha_2\cos X + \beta_2\sin X\Big)\frac{\partial y'}{\partial y} + \Big(\alpha_3\cos X + \beta_3\sin X\Big)\frac{\partial y'}{\partial z}\right\}\sin x' + \\ &+ \left\{\Big(\beta_2\cos X - \alpha_2\sin X\Big)\frac{\partial y'}{\partial y} + \Big(\beta_3\cos X - \alpha_3\sin X\Big)\frac{\partial y'}{\partial z}\right\}\cos x' \end{aligned} \tag{6.159}$$

$$\begin{aligned} b'_3 &= \left\{\Big(\alpha_2\cos X+\beta_2\sin X\Big)\frac{\partial z'}{\partial y}+\Big(\alpha_3\cos X+\beta_3\sin X\Big)\frac{\partial z'}{\partial z}\right\}\sin x'+ \\ &+ \left\{\Big(\beta_2\cos X-\alpha_2\sin X\Big)\frac{\partial z'}{\partial y}+\Big(\beta_3\cos X-\alpha_3\sin X\Big)\frac{\partial z'}{\partial z}\right\}\cos x' \end{aligned} \tag{6.160}$$

Συγκρίνοντας τις (6.158)-(6.160) με τις (6.138)-(6.140) καταλήγουμε στους ακόλουθους τύπους μετασχηματισμού για τα $\alpha_i,\beta_i,\ i=1,2,3$:

$$\begin{aligned} \alpha'_1=\alpha_1\cos X+\beta_1\sin X &+ (\alpha_2\cos X+\beta_2\sin X)\frac{\partial X}{\partial y}+ \\ &+ (\alpha_3\cos X+\beta_3\sin X)\frac{\partial X}{\partial z} \end{aligned} \tag{6.161}$$

$$\begin{aligned} \beta'_1=\beta_1\cos X-\alpha_1\sin X &+ (\beta_2\cos X-\alpha_2\sin X)\frac{\partial X}{\partial y}+ \\ &+ (\beta_3\cos X-\alpha_3\sin X)\frac{\partial X}{\partial z} \end{aligned} \tag{6.162}$$

$$\alpha'_2 = (\alpha_2\cos X+\beta_2\sin X)\frac{\partial y'}{\partial y}+(\alpha_3\cos X+\beta_3\sin X)\frac{\partial y'}{\partial z} \tag{6.163}$$

$$\beta'_2 = (\beta_2\cos X-\alpha_2\sin X)\frac{\partial y'}{\partial y}+(\beta_3\cos X-\alpha_3\sin X)\frac{\partial y'}{\partial z} \tag{6.164}$$

$$\alpha'_3 = (\alpha_2\cos X+\beta_2\sin X)\frac{\partial z'}{\partial y}+(\alpha_3\cos X+\beta_3\sin X)\frac{\partial z'}{\partial z} \tag{6.165}$$

$$\beta'_3 = (\beta_2\cos X-\alpha_2\sin X)\frac{\partial z'}{\partial y}+(\beta_3\cos X-\alpha_3\sin X)\frac{\partial z'}{\partial z} \tag{6.166}$$

Σημειώνουμε ότι οι σχέσεις (6.161)-(6.166) μας δίνουν τα $\alpha'_1,\alpha'_2,\alpha'_3,\beta'_1,\beta'_2,\beta'_3$ συναρτήσει των παλιών συντεταγμένων x,y,z και όχι των x',y',z'

Τώρα εισάγουμε την απαίτηση:

$$\beta'_1=\alpha'_2=\beta'_3=0 \tag{6.167}$$

Τότε, σύμφωνα με τις (6.135)-(6.137) και (6.138)-(6.143), τα διανύσματα βάσης παίρνουν τη μορφή:

$$E'^{\,i}_1 = \delta^i_1 \tag{6.168}$$

$$E'^{\,i}_2 = \alpha'_1\sin x'\delta^i_1+\beta'_2\cos x'\delta^i_2+\alpha'_3\sin x'\delta^i_3 \tag{6.169}$$

$$E'^{\,i}_3 = -\alpha'_1\cos x'\delta^i_1+\beta'_2\sin x'\delta^i_2-\alpha'_3\cos x'\delta^i_3 \tag{6.170}$$

και οι σχέσεις μετασχηματισμού (6.161)-(6.166) γίνονται:

$$\begin{aligned}\alpha'_1 = \alpha_1 \cos X + \beta_1 \sin X &+ (\alpha_2 \cos X + \beta_2 \sin X)\frac{\partial X}{\partial y} + \\ &+ (\alpha_3 \cos X + \beta_3 \sin X)\frac{\partial X}{\partial z} \qquad (6.171) \\ 0 = \beta_1 \cos X - \alpha_1 \sin X &+ (\beta_2 \cos X - \alpha_2 \sin X)\frac{\partial X}{\partial y} + \\ &+ (\beta_3 \cos X - \alpha_3 \sin X)\frac{\partial X}{\partial z} \qquad (6.172)\end{aligned}$$

$$0 = (\alpha_2 \cos X + \beta_2 \sin X)\frac{\partial y'}{\partial y} + (\alpha_3 \cos X + \beta_3 \sin X)\frac{\partial y'}{\partial z} \qquad (6.173)$$

$$\beta'_2 = (\beta_2 \cos X - \alpha_2 \sin X)\frac{\partial y'}{\partial y} + (\beta_3 \cos X - \alpha_3 \sin X)\frac{\partial y'}{\partial z} \qquad (6.174)$$

$$\alpha'_3 = (\alpha_2 \cos X + \beta_2 \sin X)\frac{\partial z'}{\partial y} + (\alpha_3 \cos X + \beta_3 \sin X)\frac{\partial z'}{\partial z} \qquad (6.175)$$

$$0 = (\beta_2 \cos X - \alpha_2 \sin X)\frac{\partial z'}{\partial y} + (\beta_3 \cos X - \alpha_3 \sin X)\frac{\partial z'}{\partial z} \qquad (6.176)$$

Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις (6.172), (6.173) και (6.176) περιορίζουν αλλά δεν καθορίζουν πλήρως τις συναρτήσεις μετασχηματισμού $X(y,z), y'(y,z), z'(y,z)$ αφήνοντας ακόμη ελευθερία στην επιλογή των συντεταγμένων μέσω του μετασχηματισμού (6.149).Εκτελούμε λοιπόν εκ νέου το μετασχηματισμό:$x'' = x' + X'(y',z'), y'' = y''(y',z'), z'' = z''(y',z')$ όπου και πάλι απαιτούμε:

$$\beta''_1 = \alpha''_2 = \beta''_3 = 0 \qquad (6.177)$$

Από δω και πέρα για να απλοποιήσουμε τη μορφή των εξισώσεων θα χρησιμοποιήσουμε τον εξής συμβολισμό:

$$\begin{aligned} x'' &\to x' \ , \ y'' \to y' \ , \ z'' \to z' \\ x' &\to x \ , \ y' \to y \ , \ z' \to z \\ \alpha''_1 &\to \alpha'_1 \ , \ \alpha''_2 \to \alpha'_2 \ , \ \alpha''_3 \to \alpha'_3 \\ \alpha'_1 &\to \alpha_1 \ , \ \alpha'_2 \to \alpha_2 \ , \ \alpha'_3 \to \alpha_3 \end{aligned}$$

Για τα μετασχηματισμένα διανύσματα βάσης E'^i_a και τις ποσότητες $\alpha'_1, \beta'_2, \alpha'_3$ ισχύουν μετασχηματισμένες οι σχέσεις (6.115)-(6.117), (6.130)-(6.132) και

(6.168)-(6.170). Επιπλέον, οι εξισώσεις (6.172), (6.173) και (6.176) που περιορίζουν τις συναρτήσεις $X(y,z), y'(y,z), z'(y,z)$, παίρνουν τη μορφή:

$$-\alpha_1 \sin X + \beta_2 \cos X \frac{\partial X}{\partial y} - \alpha_2 \sin X \frac{\partial X}{\partial z} = 0 \tag{6.178}$$

$$\beta_2 \sin X \frac{\partial y'}{\partial y} + \alpha_3 \cos X \frac{\partial y'}{\partial z} = 0 \tag{6.179}$$

$$\beta_2 \cos X \frac{\partial z'}{\partial y} - \alpha_3 \sin X \frac{\partial z'}{\partial z} = 0 \tag{6.180}$$

και οι σχέσεις (6.171), (6.174) και (6.175) που αποτελούν τις εξισώσεις μετασχηματισμού των συναρτήσεων $\alpha'_1, \beta'_2, \alpha'_3$ γίνονται:

$$\alpha'_1 = \alpha_1 \cos X + \beta_2 \sin X \frac{\partial X}{\partial y} + \alpha_3 \cos X \frac{\partial X}{\partial z} \tag{6.181}$$

$$\beta'_2 = \beta_2 \cos X \frac{\partial y'}{\partial y} - \alpha_3 \sin X \frac{\partial y'}{\partial z} \tag{6.182}$$

$$\alpha'_3 = \beta_2 \sin X \frac{\partial z'}{\partial y} + \alpha_3 \cos X \frac{\partial z'}{\partial z} \tag{6.183}$$

Λόγω των (6.167) οι εξισώσεις μετάθεσης (6.130)-(6.132) παίρνουν τώρα την απλούστερη μορφή:

$$\alpha_1^2 - \beta_2 \alpha_{1,y} = -1 \tag{6.184}$$

$$\alpha_3 \beta_{2,z} = 0 \tag{6.185}$$

$$\alpha_1 \alpha_3 - \beta_2 \alpha_{3,y} = 0 \tag{6.186}$$

Από την εξίσωση (6.185), εφόσον $\alpha_3 \neq 0$ (ειδάλως τα $\mathbf{E}_a$ θα πάψουν να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα), προκύπτει ότι:

$$\alpha_3 \beta_{2,z} = 0 \Rightarrow \beta_{2,z} = 0 \Rightarrow \beta_2 = \beta_2(y) \tag{6.187}$$

Η (6.187) μας επιτρέπει, όπως θα δείξουμε στη συνέχεια, να θέσουμε:

$$\beta'_2 = 1 \tag{6.188}$$

Πράγματι, για να είναι αυτό εφικτό θα πρέπει να βρεθούν συναρτήσεις $y'(y,z), z'(y,z)$ που να ικανοποιούν το σύστημα των εξισώσεων (6.182) και (6.179), οι οποίες τώρα παίρνουν τη μορφή:

$$\beta_2 \cos X \frac{\partial y'}{\partial y} - \alpha_3 \sin X \frac{\partial y'}{\partial z} = 1 \tag{6.189}$$

$$\beta_2 \sin X \frac{\partial y'}{\partial y} + \alpha_3 \cos X \frac{\partial y'}{\partial z} = 0 \tag{6.190}$$

Θα επιλύσουμε το σύστημα αυτό ως προς $\frac{\partial y'}{\partial y}, \frac{\partial y'}{\partial z}$.Η ορίζουσα του συστήματος είναι:

$$D = \begin{vmatrix} \beta_2 \cos X & -\alpha_3 \sin X \\ \beta_2 \sin X & \alpha_3 \cos X \end{vmatrix} = \beta_2 \alpha_3 \neq 0 \tag{6.191}$$

Άρα το σύστημα έχει μη τετριμμένη λύση.Επιπλέον

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & -\alpha_3 \sin X \\ 0 & \alpha_3 \cos X \end{vmatrix} = \alpha_3 \cos X \tag{6.192}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} \beta_2 \cos X & 1 \\ \beta_2 \sin X & 0 \end{vmatrix} = -\beta_2 \sin X \tag{6.193}$$

Επομένως η λύση του συστήματος (6.189), (6.190) είναι:

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{D_y}{D} = \frac{\cos X}{\beta_2} \tag{6.194}$$

$$\frac{\partial y'}{\partial z} = \frac{D_z}{D} = -\frac{\sin X}{\alpha_3} \tag{6.195}$$

Για να είναι συνεπές το σύστημα των εξισώσεων (6.194), (6.195) θα πρέπει να ικανοποιείται η σχέση ολοκληρωσιμότητας

$$\frac{\partial^2 y'}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 y'}{\partial y \partial z} \tag{6.196}$$

Από τη σχέση (6.194), λαμβάνοντας υπόψιν και την (6.187), παίρνουμε:

$$\frac{\partial^2 y'}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\cos X}{\beta_2}\Big) = \frac{-\sin X}{\beta_2}\frac{\partial X}{\partial z} \tag{6.197}$$

και από την (6.195):

$$\frac{\partial^2 y'}{\partial y \partial z} = -\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\sin X}{\alpha_3}\Big) = \frac{\sin X}{{\alpha_3}^2}\alpha_{3,y} - \frac{\cos X}{\alpha_3}\frac{\partial X}{\partial y} \tag{6.198}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (6.197) και (6.198) στην (6.196) προκύπτει ότι

$$\frac{-\sin X}{\beta_2}\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\sin X}{{\alpha_3}^2}\alpha_{3,y} - \frac{\cos X}{\alpha_3}\frac{\partial X}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \quad -{\alpha_3}^2 \sin X \frac{\partial X}{\partial z} = \beta_2 \alpha_{3,y} \sin X - \beta_2 \alpha_3 \cos X \frac{\partial X}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \quad \beta_2 \alpha_{3,y} \sin X + \alpha_3 \Big(\alpha_3 \sin X \frac{\partial X}{\partial z} - \beta_2 \cos X \frac{\partial X}{\partial y}\Big) = 0 \tag{6.199}$$

Με τη βοήθεια της εξίσωσης (6.178) η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$\begin{aligned} \beta_2\alpha_{3,y}\sin X - \alpha_1\alpha_3\sin X &= 0 \\ \Rightarrow (\beta_2\alpha_{3,y} - \alpha_1\alpha_3)\sin X &= 0 \end{aligned} \tag{6.200}$$

η οποία ισχύει λόγω της σχέσης (6.186).Επομένως ικανοποιείται η συνθήκη ολοκληρωσιμότητας (6.196) και έτσι η επιλογή (6.188) είναι δυνατή και δεν οδηγεί σε ασυνέπεια.

Ας εκτελέσουμε εκ νέου το μετασχηματισμό (6.149):

$$\begin{aligned} x' &= x + X(y,z) \\ y' &= y'(y,z) \\ z' &= z'(y,z) \end{aligned}$$

κρατώντας όλες τις συνθήκες που έχουμε επιβάλλει, δηλαδή:

$$\beta_1 = \alpha_2 = \beta_3 = 0\ ,\ \beta_2 = 1 \tag{6.201}$$

$$\beta'_1 = \alpha'_2 = \beta'_3 = 0\ ,\ \beta'_2 = 1 \tag{6.202}$$

Τότε οι εξισώσεις μετάθεσης (6.184)-(6.186) γίνονται

$$\alpha_1{}^2 - \alpha_{1,y} = -1 \tag{6.203}$$

$$\alpha_1\alpha_3 - \alpha_{3,y} = 0 \tag{6.204}$$

και οι σχέσεις (6.178)-(6.183), (6.194) και (6.195) που καθορίζουν το μετασχηματισμό μας δίνουν

$$-\alpha_1\sin X + \cos X\frac{\partial X}{\partial y} - \alpha_3\sin X\frac{\partial X}{\partial z} = 0 \tag{6.205}$$

$$\cos X\frac{\partial z'}{\partial y} - \alpha_3\sin X\frac{\partial z'}{\partial z} = 0 \tag{6.206}$$

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = \cos X \tag{6.207}$$

$$\frac{\partial y'}{\partial z} = -\frac{\sin X}{\alpha_3} \tag{6.208}$$

και

$$\alpha'_1 = \alpha_1\cos X + \sin X\frac{\partial X}{\partial y} + \alpha_3\cos X\frac{\partial X}{\partial z} \tag{6.209}$$

$$\alpha'_3 = \sin X\frac{\partial z'}{\partial y} + \alpha_3\cos X\frac{\partial z'}{\partial z} \tag{6.210}$$

Η ποσότητα α_3' είναι εν γένει συνάρτηση των μετασχηματισμένων συντεταγμένων y', z', δηλαδή $\alpha_3' = \alpha_3'(y', z')$.Με έναν μετασχηματισμό συντεταγμένων θα απαιτήσουμε η συνάρτηση α_3' να εξαρτάται μόνο από τη συντεταγμένη y', δηλαδή να ισχύει $\alpha_3' = \alpha_3'(y')$.Όμως το $y' = y'(y, z)$.Επομένως το α_3' εξαρτάται έμμεσα από τις συντεταγμένες y, z και ισχύει ότι

$$\frac{\partial \alpha_3'}{\partial y} = \frac{\partial \alpha_3'}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y} \tag{6.211}$$

$$\frac{\partial \alpha_3'}{\partial z} = \frac{\partial \alpha_3'}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial z} \tag{6.212}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο παραπάνω σχέσεις και χρησιμοποιώντας τις (6.207) και (6.208) παίρνουμε ότι:

$$\frac{\partial \alpha_3'}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial z} = \frac{\partial \alpha_3'}{\partial z}\frac{\partial y'}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-\sin X}{\alpha_3}\frac{\partial \alpha_3'}{\partial y} = \cos X \frac{\partial \alpha_3'}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \quad \cos X \frac{\partial \alpha_3'}{\partial z} + \frac{\sin X}{\alpha_3}\frac{\partial \alpha_3'}{\partial y} = 0 \tag{6.213}$$

Άρα αν το α_3' είναι συνάρτηση μόνο του y' τότε πρέπει να ικανοποιεί και τη σχέση (6.213). Τώρα θα αποδείξουμε και το αντίστροφο, δηλαδή ότι αν ικανοποιείται η σχέση (6.213) το α_3' είναι συνάρτηση μόνο του y'.Έστω λοιπόν ότι ισχύει η σχέση (6.213) και $\alpha_3' = \alpha_3'(y', z')$, όπου $y' = y'(y, z)$ και $z' = z'(y, z)$.Τότε

$$\frac{\partial \alpha_3'}{\partial y} = \frac{\partial \alpha_3'}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_3'}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial y} \tag{6.214}$$

$$\frac{\partial \alpha_3'}{\partial z} = \frac{\partial \alpha_3'}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial \alpha_3'}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial z} \tag{6.215}$$

Θα λύσουμε αυτό το σύστημα ως προς $\frac{\partial \alpha_3'}{\partial y'}, \frac{\partial \alpha_3'}{\partial z'}$.Για να υπάρχει λύση θα πρέπει η ορίζουσα του συστήματος να είναι διάφορη του μηδενός

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial y'}{\partial y} & \frac{\partial z'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial z} & \frac{\partial z'}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial z'}{\partial z} - \frac{\partial y'}{\partial z}\frac{\partial z'}{\partial y} \tag{6.216}$$

Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη σχέση τις παραγώγους $\frac{\partial y'}{\partial y}$ και $\frac{\partial y'}{\partial z}$ από τις (6.207) και (6.208) αντίστοιχα και την παράγωγο $\frac{\partial z'}{\partial y}$ χρησιμοποιώντας τη σχέση (6.206) (θεωρώντας ότι $\cos X \neq 0$) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} D &= \cos X \frac{\partial z'}{\partial z} + \frac{\sin X}{\alpha_3} \frac{\partial z'}{\partial y} \\ &= \cos X \frac{\partial z'}{\partial z} + \frac{\sin^2 X}{\cos X} \frac{\partial z'}{\partial z} \\ &= \frac{1}{\cos X} \frac{\partial z'}{\partial z} \end{aligned} \tag{6.217}$$

Άρα η ορίζουσα του συστήματος είναι διάφορη του μηδενός αν η παράγωγος $\frac{\partial z'}{\partial z}$ είναι διάφορη του μηδενός

$$D \neq 0 \Leftrightarrow \frac{\partial z'}{\partial z} \neq 0 \tag{6.218}$$

το οποίο μπορούμε πάντα να επιλέξουμε να ισχύει αφού δεν αντιτίθεται στους περιορισμούς (6.205) και (6.206) και τότε το σύστημα έχει λύση.Η λύση του συστήματος βρίσκεται ως εξής:

$$D_y = \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha_3'}{\partial y} & \frac{\partial z'}{\partial y} \\ \frac{\partial \alpha_3'}{\partial z} & \frac{\partial z'}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{\partial \alpha_3'}{\partial y} \frac{\partial z'}{\partial z} - \frac{\partial \alpha_3'}{\partial z} \frac{\partial z'}{\partial y} \tag{6.219}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} \frac{\partial y'}{\partial y} & \frac{\partial \alpha_3'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial z} & \frac{\partial \alpha_3'}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{\partial \alpha_3'}{\partial z} \frac{\partial y'}{\partial y} - \frac{\partial \alpha_3'}{\partial y} \frac{\partial y'}{\partial z} \tag{6.220}$$

Χρησιμοποιώντας και πάλι τις σχέσεις (6.207) και (6.208) η ορίζουσα D_z γίνεται

$$D_z = \cos X \frac{\partial \alpha_3'}{\partial z} + \frac{\sin X}{\alpha_3} \frac{\partial \alpha_3'}{\partial y} \tag{6.221}$$

και τελικά αφού ισχύει η σχέση (6.213)

$$D_z = 0 \Rightarrow \frac{\partial \alpha_3'}{\partial z'} = \frac{D_z}{D} = 0 \Rightarrow \alpha_3' = \alpha_3'(y') \tag{6.222}$$

Έχοντας τώρα επιτύχει η ποσότητα α_3 να εξαρτάται μόνο από τη συντεταγμένη y (οπότε και η α_1 εξαρτάται μόνο από το y λόγω της (6.204)) εκτελώ εκ νέου το μετασχηματισμό (6.149) με

$$\sin X = 0 \Leftrightarrow X = k\pi, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{6.223}$$

Για να είναι αυτός επιτρεπτός, δηλαδή να διατηρεί τις (6.201) και (6.222), θα πρέπει να είναι συμβατός με τους περιορισμούς (6.205)-(6.208).Εξ αυτών ο (6.205) ικανοποιείται ταυτοτικά, ενώ οι υπόλοιποι τρεις δίνουν αντίστοιχα:

$$\cos(k\pi) \frac{\partial z'}{\partial y} - \alpha_3 \sin(k\pi) \frac{\partial z'}{\partial z} = 0 \Rightarrow (-1)^k \frac{\partial z'}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z'}{\partial y} = 0 \tag{6.224}$$

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = \cos(k\pi) = (-1)^k \tag{6.225}$$

$$\frac{\partial y'}{\partial z} = -\frac{\sin(k\pi)}{\alpha_3} = 0 \tag{6.226}$$

Επιπλέον, η συνθήκη (6.213) γράφεται:

$$\cos(k\pi)\frac{\partial \alpha_3'}{\partial z} + \frac{\sin(k\pi)}{\alpha_3}\frac{\partial \alpha_3'}{\partial y} = 0 \Rightarrow (-1)^k \frac{\partial \alpha_3'}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \alpha_3'}{\partial z} = 0 \tag{6.227}$$

και σε συνδυασμό με τις (6.225) και (6.226) μας λέει ότι η (6.222) συνεχίζει να ισχύει και στο νέο σύστημα συντεταγμένων.Οι εξισώσεις (6.209) και (6.210), που δείχνουν πώς μετασχηματίζονται οι ποσότητες α_1, α_2 γράφονται τώρα

$$\alpha_1' = \alpha_1 \cos(k\pi) + \sin(k\pi)\frac{\partial(k\pi)}{\partial y} + \alpha_3 \cos(k\pi)\frac{\partial(k\pi)}{\partial z} = (-1)^k \alpha_1(y) \tag{6.228}$$

$$\alpha_3' = \sin(k\pi)\frac{\partial z'}{\partial y} + \alpha_3 \cos(k\pi)\frac{\partial z'}{\partial z} = (-1)^k \alpha_3(y)\frac{\partial z'}{\partial z} \tag{6.229}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (6.227) και (6.229) παίρνουμε

$$(-1)^k \alpha_3(y)\frac{\partial^2 z'}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 z'}{\partial z^2} = 0 \tag{6.230}$$

Τελικά βλέπουμε ότι οι (6.224)-(6.226) και (6.230) δείχνουν ότι ο μετασχηματισμός (6.149) με $\sin X = 0$ μπορεί να εκτελεστεί μόνο στη μορφή

$$x' = x + k\pi \tag{6.231}$$

$$y' = (-1)^k y + a \tag{6.232}$$

$$z' = bz + c \tag{6.233}$$

όπου τα a, b, c είναι σταθερές και το k παίρνει ακέραιες τιμές $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...$ Οι σχέσεις (6.228) και (6.229) μας δίνουν τα α_1' και α_3' συναρτήσει του y.Για να γράψουμε τις ποσότητες αυτές συναρτήσει του y', από τη σχέση (6.232) παίρνουμε

$$y = \frac{y' - a}{(-1)^k} \tag{6.234}$$

και αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στις (6.228) και (6.229) βρίσκουμε ότι

$$\alpha_1'(y') = (-1)^k \alpha_1\Big(\frac{y' - a}{(-1)^k}\Big) \tag{6.235}$$

$$\alpha_3'(y') = (-1)^k b\alpha_3\Big(\frac{y' - a}{(-1)^k}\Big) \tag{6.236}$$

Αυτό που απομένει τώρα είναι να ολοκληρώσουμε τις εξισώσεις μετάθεσης (6.203) και (6.204) και να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους μετασχηματισμού (6.235) και (6.236) για να απαλείψουμε τις σταθερές ολοκλήρωσης.Έτσι, από την εξισώση μετάθεσης (6.203) παίρνουμε:

$$\alpha_1 = \tan(y + c_1) \tag{6.237}$$

όπου c_1 =σταθερά.Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στην (6.204) προκύπτει ότι

$$\frac{d\alpha_3}{dy} = \alpha_3 \tan(y + c_1) \Rightarrow \alpha_3 = \frac{c_2}{\cos(y + c_1)} \tag{6.238}$$

όπου c_2 =σταθερά.Επομένως οι σχέσεις μετασχηματισμού (6.235) και (6.236) γίνονται

$$\alpha_1'(y') = (-1)^k \tan\Big(\frac{y' - a}{(-1)^k} + c_1\Big) \tag{6.239}$$

$$\alpha_3'(y') = (-1)^k b \frac{c_2}{\cos\Big(\frac{y'-a}{(-1)^k} + c_1\Big)} \tag{6.240}$$

Επιλέγω:

$$k = 1\ ,\ c_1 = -a\ ,\ c_2 = \frac{1}{b} \tag{6.241}$$

Τότε ο μετασχηματισμός μου δίνεται από τις σχέσεις

$$x' = x + \pi \tag{6.242}$$

$$y' = -y + a \tag{6.243}$$

$$z' = bz + c \tag{6.244}$$

και οι σχέσεις (6.239) και (6.240) γράφονται:

$$\alpha_1'(y') = \tan y' \tag{6.245}$$

$$\alpha_3'(y') = -\frac{1}{\cos y'} \tag{6.246}$$

Τελικά αντικαθιστώντας τις σχέσεις (6.245) και (6.246) στις σχέσεις (6.168)-(6.170) και λαμβάνοντας υπόψιν ότι έχουμε απαιτήσει $\beta_2' = 1$ προκύπτει ότι τα χωρικά διανύσματα της τετραδικής μας βάσης είναι τα εξής (*βλέπε και [28] σελ.107*):

$$E_1{}^i = \delta_1^i \tag{6.247}$$

$$E_2{}^i = \tan y \sin x \delta_1^i + \cos x \delta_2^i - \frac{\sin x}{\cos y}\delta_3^i \tag{6.248}$$

$$E_3{}^i = -\tan y \cos x \delta_1^i + \sin x \delta_2^i + \frac{\cos x}{\cos y}\delta_3^i \tag{6.249}$$

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο (σχέση (5.34)), το γραμμικό στοιχείο της μετρικής σε ένα σύστημα συντεταγμένων $\{x^i\}$ δίνεται από τη σχέση:

$$ds^2 = -dt^2 + g_{\alpha\beta}(t)E^{\alpha}{}_i E^{\beta}{}_j dx^i dx^j \tag{6.250}$$

Επομένως για να γράψουμε το γραμμικό στοιχείο της μετρικής θα πρέπει να βρούμε τη δυϊκή χωρική βάση $\{E^{\alpha}{}_i\}$.Γι' αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (3.2) η οποία για $a = \alpha$ και $b = \beta$ γράφεται

$$E^{\alpha}{}_i E_{\beta}{}^i = \delta^{\alpha}_{\beta} \tag{6.251}$$

Αν τώρα στην (6.251) (δηλαδή την $E^1{}_i E_{\beta}{}^i = \delta^1_{\beta}$) αντικαταστήσουμε τις τιμές των $E_{\beta}{}^i$ από τις (6.247)-(6.249) παίρνουμε και τις σχέσεις

$$E^1{}_1 = 1 \tag{6.252}$$

$$\cos x E^1{}_2 - \frac{\sin x}{\cos y} E^1{}_3 = -\sin x \tan y \tag{6.253}$$

$$\sin x E^1{}_2 + \frac{\cos x}{\cos y} E^1{}_3 = \cos x \tan y \tag{6.254}$$

Οι εξισώσεις (6.253) και (6.254) αποτελούν ένα γραμμικό μη-ομογενές σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, τους $E^1{}_2$ και $E^1{}_3$.Λύνοντας το σύστημα αυτό βρίσκουμε ότι:

$$E^1{}_2 = 0 \tag{6.255}$$

$$E^1{}_3 = \sin y \tag{6.256}$$

Άρα

$$E^1{}_i = \delta^1_i + \sin y \delta^3_i \tag{6.257}$$

Με τον ίδιο τρόπο από την (6.251) για $\alpha = 2$ και $\alpha = 3$ αντίστοιχα βρίσκουμε και τα υπόλοιπα διανύσματα βάσης

$$E^2{}_i = \cos x \delta^2_i - \sin x \cos y \delta^3_i \tag{6.258}$$

$$E^3{}_i = \sin x \delta^2_i + \cos x \cos y \delta^3_i \tag{6.259}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (6.257)-(6.259) στη σχέση (6.250) παίρνουμε

$$\begin{aligned} ds^2 = &- dt^2 + a^2 dx^2 + (b^2\cos^2 x + c^2 \sin^2 x)dy^2 + \\ &+ (a^2 \sin^2 y + b^2 \sin^2 x \cos^2 y + c^2 \cos^2 x \cos^y)dz^2 + \\ &+ 2a^2 \sin y \; dx \; dz + 2(c^2 - b^2)\sin x \cos x \cos y \; dy \; dz \end{aligned} \tag{6.260}$$

και

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & a^2 \sin y \\ 0 & 0 & b^2\cos^2 x + c^2 \sin^2 x & (c^2-b^2)\sin x \cos x \cos y \\ 0 & a^2 \sin y & (c^2 - b^2)\sin x \cos x \cos y & a^2 \sin^2 y + b^2 \sin^2 x \cos^2 y + c^2 \cos^2 x \cos^2 y \end{pmatrix}$$

(6.2

Κεφάλαιο 7

Χωροχρόνοι FRW

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, για να περιγράψουμε σε μεγάλη κλίμακα τη "μέση" συμπεριφορά της ύλης και της ενέργειας που υπάρχει στο σύμπαν έχουμε εισάγει την έννοια ενός κοσμολογικού ιδανικού ρευστού, του συμπαντικού ρευστού.Ένας παρατηρητής προσδεδεμένος στο συμπαντικό ρευστό από οποιοδήποτε σημείο, οποιαδήποτε χρονική στιγμή και προς οποιαδήποτε κατεύθυνση και αν κοιτάξει το σύμπαν θα αποκομίσει την ίδια εικόνα:"το σύμπαν είναι ομογενές και ισότροπο".Αυτή είναι μία θεμελιώδης παραδοχή-υπόθεση (που εν μέρει στηρίζεται από τις παρατηρήσεις μας στο σημείο του σύμπαντος που βρισκόμαστε) που λέγεται Κοσμολογική Αρχή.Η οικογένεια χωροχρόνων FRW (Friedmann-Robertson-Walker) περιλαμβάνει όλους τους χωροχρόνους που είναι συμβατοί με την κοσμολογική αρχή.Η γεωμετρική συνέπεια της κοσμολογικής αρχής είναι ότι υπάρχει μία μονοπαραμετρική (t η παράμετρος) οικογένεια τρισδιάστατων χωροειδών υπερεπιφανειών που διαμερίζει (foliation) το χωροχρόνο έτσι ώστε κάθε υπερεπιφάνεια $t =$σταθερό να είναι ομογενής και ισότροπη σε κάθε σημείο της.Οι χρονοειδείς καμπύλες που είναι κάθετες στις ομογενείς και ισότροπες υπερεπιφάνειες αποτελούν τις παγκόσμιες γραμμές των "θεμελιωδών παρατηρητών" ως προς τους οποίους το συμπαντικό ρευστό είναι αναγκαστικά ιδανικό.Αυτό διότι μέσω των εξισώσεων του Einstein η ύπαρξη ανισοτροπίας στα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του ρευστού θα μεταφερόταν στη γεωμετρία των υπερεπιφανειών.Η υπόθεση της ισοτροπίας έχει σαν συνέπεια η ισοτροπική ομάδα που δρα σε κάθε υπερεπιφάνεια να έχει τη μέγιστη δυνατή διάσταση $\frac{3-1}{2} \cdot 3 = 3$, ενώ η ομάδα που περιγράφει την ομογένεια είναι και αυτή τρισδιάστατη.Έτσι, οι χωροχρόνοι FRW δέχονται μία μέγιστη εξαδιάστατη ομάδα ισομετριών και από αυτή την άποψη αποτελούν μία υποκατηγορία των χωροχρόνων Bianchi.

7.1 1+3 Συναλλοίωτη Περιγραφή

Η απαίτηση για (χωρική) ομογένεια και ισοτροπία έχει σαν συνέπεια την ύπαρξη ενός χρονοειδούς μοναδιαίου διανυσματικού πεδίου **n** κάθετου στις ομογενείς και ισότροπες υπερεπιφάνειες.Η τετραταχύτητα του ρευστού **u** πρέπει αναγκασικά να συμπίπτει με το **n**: $\mathbf{u} \equiv \mathbf{n}$. Αυτό γιατί αν δεν συνέπιπτε, τότε οι κάθετες προς το **u** χωροειδείς υπερεπιφάνειες θα τέμνονταν με τις ομογενείς και ισότροπες υπερεπιφάνειες καθορίζοντας μία οικογένεια διδιάστατων χωροειδών επιφανειών.Η κάθετη χωροειδής κατεύθυνση προς αυτές τις επιφάνειες θα αποτελούσε μία προεξάρχουσα διεύθυνση στο χωροχρόνο σε αντίφαση με την κοσμολογική αρχή.Κάθε διάνυσμα που μπορεί να ορισθεί από τη γεωμετρία ή τη φυσική του συμπαντικού ρευστού και είναι κάθετο προς το **u** πρέπει να είναι μηδέν αφού διαφορετικά θα όριζε μία προεξάρχουσα διεύθυνση πάνω στις υπερεπιφάνειες.Έτσι:

$$\dot{u}_a = \omega_a = q_a = 0 \tag{7.1}$$

Επίσης, οι άιχνοι συμμετρικοί τανυστές σ_{ab} και π_{ab}, που εξ᾽ ορισμού είναι κάθετοι στο **u**, πρέπει να μηδενίζονται γιατί σε διαφορετική περίπτωση τα ιδιοδιανύσματά τους θα όριζαν μία προεξάρχουσα χωροειδή κατεύθυνση

$$\sigma_{ab} = \pi_{ab} = 0 \tag{7.2}$$

Βρίσκουμε λοιπόν ότι η κοσμολογική αρχή επιβάλλει το συμπαντικό ρευστό να είναι ιδανικό, μη επιταχυνόμενο και με μηδενική περιστροφική και διατμητική ταχύτητα.Επιλέον, εφόσον οι υπερεπιφάνειες είναι ομογενείς, όλες οι ποσότητες θα πρέπει να εξαρτώνται μόνο από την παράμετρο t και όχι από τη θέση πάνω στην υπερεπιφάνεια, άρα:

$$\tilde{\nabla}^a \mu = \tilde{\nabla}^a p = \tilde{\nabla}^a \Theta = 0 \tag{7.3}$$

όπως έχουμε αποδείξει και στο Κεφάλαιο 5 (σχέσεις (5.71) και (5.72)).Τότε από τις Εξισώσεις Εξέλιξης και Δεσμών (2.41) και (2.44) σε συνδυασμό με τις σχέσεις (7.1)-(7.3) προκύπτει ότι:

$$E^{ab} = H^{ab} = 0 \tag{7.4}$$

δηλαδή ο τανυστής του Weyl είναι μηδέν πράγμα που σημαίνει ότι ο χωροχρόνος είναι σύμμορφα επίπεδος. Αντιστρόφως, αν δεχτούμε ότι ισχύουν οι σχέσεις (7.1)-(7.4) τότε αποδεικνύεται ότι ο αντίστοιχος χωροχρόνος είναι ομογενής και ισοτροπικός γύρω από κάθε σημείο.(*βλέπε π.χ. [31] σελ.13-19, [15] σελ.21*)

Από τις σχέσεις (7.1)-(7.4) και (2.39)-(2.54) συμπεραίνουμε ότι για τους χωρχρόνους FRW οι μόνες μη τετριμένες Εξισώσεις Εξέλιξης και Δεσμών είναι οι εξής:

- Εξίσωση Raychaudhuri

$$\dot{\Theta} = -\frac{1}{3}\Theta^2 - \frac{1}{2}(\mu + 3p) + \Lambda \tag{7.5}$$

- Εξίσωση Διατήρησης της Ενέργειας

$$\dot{\mu} = -\Theta(\mu + p) \tag{7.6}$$

7.2 Παραγωγή της Τετραδικής Μετρικής Robertson-Walker

Θα χρησιμοποιήσουμε την αναλλοίωτη τετράδα που ορίσαμε στο Κεφάλαιο 5.Επομένως το γραμμικό στοιχείο της μετρικής δίνεται από τη σχέση

$$ds^2 = -dt^2 + g_{\alpha\beta}E^{\alpha}_{\ i}E^{\beta}_{\ j}dx^i dx^j \tag{7.7}$$

όπου η τετραδική μετρική $g_{\alpha\beta}$ εξαρτάται μόνο από το χρόνο, δηλαδή $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(t)$ και τα διανύσματα της χωρικής βάσης $E^{\alpha}_{\ i}$ εξαρτώνται μόνο από τις χωρικές συντεταγμένες.Από τις (7.2) και (5.69) προκύπτει ότι

$$\frac{1}{2}g_{\alpha\beta,0} - \frac{1}{3}\Theta g_{\alpha\beta} = 0 \tag{7.8}$$

Με ολοκλήρωση της παραπάνω σχέσης παίρνουμε

$$\int \frac{dg_{\alpha\beta}}{g_{\alpha\beta}} = \frac{2}{3}\int \Theta(t)dt \Rightarrow g_{\alpha\beta}(t) = a^2(t)\tilde{g}_{\alpha\beta} \tag{7.9}$$

όπου

$$a^2(t) = \exp\left\{\frac{2}{3}\int \Theta(t)dt\right\} \tag{7.10}$$

και τα $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ είναι σταθερές ολοκήρωσης.Αν ορίσουμε τις ποσότητες $\tilde{g}^{\alpha\beta}$ έτσι ώστε

$$\tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{g}_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma} \tag{7.11}$$

τότε από τη σχέση (3.8) και (7.9) προκύπτει ότι

$$g^{\alpha\beta} = \frac{1}{a^2(t)}\tilde{g}^{\alpha\beta} \tag{7.12}$$

Εφόσον η ποσότητα $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ περιγράφεται από έναν σταθερό πίνακα με μη μηδενική ορίζουσα (άρα υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας) μπορούμε κάνοντας γραμμικούς μετασχηματισμούς με σταθερούς συντελεστές να τον μετατρέψουμε στον ταυτοτικό πίνακα.[1] Επομένως η μετρική g_{ab} παίρνει τη μορφή

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t) \end{pmatrix} \tag{7.13}$$

7.3 Εξισώσεις Εξέλιξης και Δεσμών

Παραγωγίζοντας τη μετρική (7.9) ως προς το χρόνο παίρνουμε ότι

$$g_{\alpha\beta,0} = 2a\dot{a}\tilde{g}_{\alpha\beta} = 2a^2\Big(\frac{\dot{a}}{a}\Big)\tilde{g}_{\alpha\beta} \tag{7.14}$$

η οποία με τη βοήθεια των (7.8) και (7.9) γίνεται

$$\frac{2}{3}\Theta g_{\alpha\beta} = 2\frac{\dot{a}}{a}g_{\alpha\beta} \Rightarrow \Theta = 3\frac{\dot{a}}{a} \tag{7.15}$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (7.15) στις εξισώσεις (7.5) και (7.6) παίρνουμε:

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2}(\mu + 3p) + \Lambda \tag{7.16}$$

και

$$\dot{\mu} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\mu + p) \tag{7.17}$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (7.16) και (7.17) και κάνοντας μία ολοκλήρωση βρίσκουμε τη γνωστή εξίσωση Friedmann (*βλέπε Παράρτημα Α΄.3*):

$$3\Big(\frac{\dot{a}}{a}\Big)^2 = \mu - \frac{3k}{a^2} + \Lambda \tag{7.18}$$

όπου το k είναι μία σταθερά ολοκλήρωσης που συνδέεται με την καμπυλότητα των ομογενών και ισότροπων υπερεπιφανειών και παίρνει τις τιμές $k = -1, 0, +1$ για αρνητική, μηδενική και θετική καμπυλότητα αντίστοιχα.Για την περαιτέρω ολοκλήρωση της εξίσωσης Friedmann απαιτείται η εισαγωγή μιας καταστατικής εξίσωσης για το ρευστό (*βλέπε π.χ. [27] σελ.270-271, [26] σελ.63-95*)

Όπως ήδη επισημάναμε οι χωροχρόνοι FRW ανήκουν στην οικογένεια των χωροχρόνων Bianchi (*βλέπε π.χ. [10] σελ.1007*).Συγκεκριμένα οι χωροχρόνοι

[1] Η τετράδα $E_a{}^i$ δεν είναι μονοσήμαντα καθορισμένη.Γραμμικοί μετασχηματισμοί με σταθερούς συντελεστές όπως οι (4.43) είναι επιτρεπτοί

FRW με θετική καμπυλότητα ($k = +1$) ανήκουν στην κατηγορία Bianchi IX και η τοπολογία των ομογενών και ισότροπων υπερπιφανειών είναι " κλειστή ".Οι χωροχρόνοι FRW με μηδενική καμπυλότητα ($k = 0$) ανήκουν στην κατηγορία Bianchi I και τέλος οι χωροχρόνοι FRW με αρνητική καμπυλότητα ($k = -1$) ανήκουν στην κατηγορία Bianchi V και σ'αυτές τις περιπτώσεις η τοπολογία των ομογενών και ισότροπων υπερπιφανειών είναι " ανοιχτή ".Οι χωροχρόνοι FRW έχουν αρχική ανωμαλία κατά την οποία ο όγκος των υπερεπιφανειών τείνει στο μηδέν και η πυκνότητα ενέργειας στο άπειρο.Η εξέλιξή τους εξαρτάται από την καμπυλότητα.(*βλέπε π.χ. [9] σελ.4-5, [6] σελ.335-337*)

Κεφάλαιο 8

Σύνδεση των Χωροχρόνων Bianchi IX και FRW

Στο κεφάλαιο αυτό θα προσπαθήσουμε να συνδέσουμε τους χωροχρόνους Bianchi IX με διαγώνια τετραδική μετρική και τους χωροχρόνους FRW με θετική καμπυλότητα κατά μήκος μιας ομογενούς υπερεπιφάνειας $S(t_0)$ σε κάποιο χρόνο t_0.Υπάρχουν τρία σετ συνθηκών σύνδεσης στη Γενική Σχετικότητα:Οι συνθήκες σύνδεσης (α) του Darmois, (β) των O'Brien και Synge και (γ) του Lichnerowicz.Στις περισσότερες περιπτώσεις τα τρία αυτά σετ είναι ισοδύναμα, αλλά ορισμένες φορές οι συνθήκες σύνδεσης των O'Brien και Synge είναι πιο περιοριστικές από τις άλλες και μπορεί να αποκλείσουν συνδέσεις οι οποίες είναι πραγματοποιήσιμες από φυσική άποψη (*βλέπε [3], [24]*).Εδώ για τη μελέτη της συνδεσιμότητας των χωροχρόνων Bianchi IX και FRW θα χρησιμοποιήσουμε τις συνθήκες Lichnerowicz.Αυτό γιατί η ύπαρξη μιας προεξάρχουσας χρονικής διεύθυνσης στους εν λόγω χωροχρόνους κάνει σχεδόν επιβεβλημένη τη χρήση γκαουσιανών συντεταγμένων.Σε αυτές τις συντεταγμένες η εφαρμογή των συνθηκών Lichnerowicz είναι απλή και άμεση.Βέβαια σημειώνουμε ότι στο πλαίσιο που εργαζόμαστε και τα τρία σετ συνθηκών σύνδεσης είναι ισοδύναμα.

8.1 Συνθήκες Σύνδεσης Lichnerowicz

Έστω ότι V και V' είναι δύο περιοχές του χωροχρόνου οι οποίες χωρίζονται από μία υπερεπιφάνεια S, που δίνεται από τη σχέση

$$x^0 - a = 0 \tag{8.1}$$

όπου x^0 είναι μία από τις συντεταγμένες και a είναι μία σταθερά.Σύμφωνα με τις συνθήκες σύνδεσης Lichnerowicz οι περιοχές V και V' συνδέονται κατά μήκος της υπερεπιφάνειας S αν σε κάθε σημείο της υπερεπιφάνειας υπάρχει ένα σύστημα συντεταγμένων τέτοιο ώστε οι συνιστώσες g_{ij} της μετρικής και οι πρώτες τους παράγωγοι $g_{ij,k}$ να είναι εκεί συνεχείς (*βλέπε [3], [24], [30] σελ.39*).Αυτές οι συντεταγμένες λέγονται αποδεκτές (admissible).Εφόσον οι περιοχές V και V' συνδέονται, ασυνέχεια της μετρικής κατά μήκος της S σε ένα σύστημα αποδεκτών συντεταγμένων μπορεί να εμφανιστεί μόνο στις παραγώγους της, δεύτερης ή μεγαλύτερης τάξης.

Άμεση συνέπεια των συνθηκών Lichnerowicz είναι το γεγονός ότι οι συνιστώσες $G^0{}_i,\ i = 0, 1, 2, 3$ του τανυστή Einstein είναι συνεχείς στην S, αφού δεν περιέχουν καμία μερική παράγωγο δεύτερης τάξης ως προς το x^0.Επομένως από τις εξισώσεις Einstein

$$G^i{}_j = T^i{}_j - \Lambda\delta^i{}_j \tag{8.2}$$

έπεται ότι οι συνιστώσες T^0_i του τανυστή ορμής - ενέργειας είναι επίσης συνεχείς στην S (*βλέπε [3], [24], [30] σελ.39-40*).(Η απόδειξη της συνέχειας των συνιστωσών T^0_i στην περίπτωση που εξετάζουμε θα παρατεθεί παρακάτω.)

Στην περίπτωση που εξετάζουμε η επιφάνεια ασυνέχειας είναι μία ομογενής χωροειδής υπερεπιφάνεια που προδιορίζεται από τη σχέση

$$t = t_0 \tag{8.3}$$

Η περιοχή $t \leq t_0$ είναι ένας χωροχρόνος τύπου Bianch IX με διαγώνια τετραδική μετρική και ιδανικό ρευστό, ενώ η περιοχή $t \geq t_0$ είναι ένας χωροχρόνος FRW με θετική καμπυλότητα, ο οποίος ανήκει επίσης στην οικογένεια χωροχρόνων Bianchi IX.Θα πρέπει εδώ να σημειώσουμε ότι οι ιδιότητες συνέχειας της μετρικής και των παραγώγων της πάνω στην υπερεπιφάνεια μπορούν να καταστραφούν εξαιτίας μιας ακατάλληλης επιλογής συντεταγμένων.Για να αποφύγουμε την παραγωγή τεχνιτών ασυνεχειών από κακή επιλογή των συντεταγμένων χρησιμοποιούμε ένα Γκαουσιανό σύστημα συντεταγμένων το οποίο εύκολα ελέγχεται αν αποτελεί αποδεκτό σύστημα συντεταγμένων.Έχουμε επιλέξει:

$$x^0 \equiv t,\ x^1 \equiv x,\ x^2 \equiv y,\ x^3 \equiv z \tag{8.4}$$

και εφόσον πρόκειται για Γκαουσιανές συντεταγμένες το γραμμικό στοιχείο της μετρικής δίνεται από τη σχέση:[1]

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j = -dt^2 + g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \tag{8.5}$$

Οι συνθήκες Lichnerowicz είναι διατυπωμένες για τη μετρική g_{ij} του χωροχρόνου ως προς τις συντεταγμένες που έχουμε επιλέξει.Εμείς όμως θέλουμε να

[1]Όλοι οι δείκτες είναι δείκτες συντεταγμένων.Οι δείκτες i, j παίρνουν τιμές από 0 ως 3, ενώ οι α, β παίρνουν τιμές από 1 έως 3.

δουλέψουμε με την τετραδική μετρική g_{ab}.Η σχέση που συνδέει τις δύο μετρικές είναι η σχέση (3.9):[2]

$$g_{ij} = g_{ab}E^a{}_iE^b{}_j \tag{8.6}$$

Και στις δύο περιοχές V και V' θα χρησιμοποιήσουμε την τετράδα που ορίσαμε στο κεφάλαιο 6.Όπως αποδείξαμε στο κεφάλαιο 5 (σχέση (5.28)) η τετραδική μετρική g_{ab} είναι συνάρτηση μόνο του χρόνου, ενώ οι συνιστώσες $E^a{}_i$ της δυϊκής τετράδας εξαρτώνται μόνο από τις χωρικές συντεταγμένες.Επομένως οι $E^a{}_i$ είναι συνεχείς πάνω στην υπερεπιφάνεια $t = t_0$.Κατά συνέπεια από τη σχέση (8.6) συμπεραίνουμε ότι η απαίτηση για συνέχεια της μετρικής g_{ij} πάνω στην υπερεπιφάνεια ισοδυναμεί με την απαίτηση να είναι συνεχής η τετραδική μετρική g_{ab} πάνω στην υπερεπιφάνεια.Οι συνθήκες Lichnerowicz απαιτούν επίσης να είναι συνεχείς και οι πρώτες παράγωγοι $g_{ij,k}$ της μετρικής πάνω στην S.Παραγωγίζοντας την (8.6) παίρνουμε:

$$g_{ij,k} = g_{ab,k}E^a{}_iE^b{}_j + g_{ab}E^a{}_{i,k}E^b{}_j + g_{ab}E^a{}_iE^b{}_{j,k} \tag{8.7}$$

όμως οι παράγωγοι $E^a{}_{i,k}$ δεν εξαρτώνται από το χρόνο, άρα είναι συνεχείς πάνω στην S όπου έχουμε ήδη απαιτήσει η g_{ab} να είναι συνεχής.Επομένως, για να είναι συνεχείς οι παράγωγοι $g_{ij,k}$ πρέπει να είναι συνεχείς οι $g_{ab,k}$ και αντιστρόφως.Όμως η g_{ab} εξαρτάται μόνο από το χρόνο, άρα η μόνη μη μηδενική παράγωγος είναι η $g_{ab,0}$, η οποία συμπίπτει και με τη μοναδική μη μηδενική τετραδική συνιστώσα της $g_{ab,c}$.

Για να αποδείξουμε τη συνέχεια των συνιστωσών T^0_i του τανυστή ορμής - ενέργειας πάνω στην υπερεπιφάνεια $t = t_0$ αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι συνεχείς οι αντίστοιχες τετραδικές συνιστώσες $T^0{}_a$, αφού:

$$T^0_i = T^b{}_aE_b{}^0E^a_i = T^0{}_aE^a{}_i \tag{8.8}$$

και τα διανύσματα E^a_i είναι συνεχή πάνω στην υπερεπιφάνεια αφού δεν εξαρτώνται από το χρόνο.Οι συνιστώσες του τανυστή ορμής - ενέργειας T_{ab} συνδέονται με τις συνιστώσες του τανυστή Einstein G_{ab} μέσω των εξισώσεων πεδίου του Einstein:

$$G_{ab} = T_{ab} - \Lambda g_{ab} \tag{8.9}$$

ή ισοδύναμα

$$G^a{}_b = T^a_b - \Lambda\delta^a_b \tag{8.10}$$

Επομένως αν αποδείξουμε ότι είναι συνεχείς οι συνιστώσες $G^0{}_a$ τότε μέσω των εξισώσεων (8.10) προκύπτει ότι είναι συνεχείς και οι $T^0{}_a$.Οι συνιστώσες G_{0a} δίνονται από τη σχέση:

$$G_{0a} = R_{0a} - \frac{1}{2}Rg_{0a} \tag{8.11}$$

[2]Οι δείκτες i, j είναι δείκτες συντεταγμένων και οι a, b τετραδικοί δείκτες.

Από την (3.36) παίρνουμε ότι

$$R_{0d} = \Gamma^a{}_{0d,a} - \Gamma^a{}_{0a,d} + \Gamma^a{}_{ea}\Gamma^e{}_{0d} - \Gamma^a{}_{de}\Gamma^e{}_{0a} \tag{8.12}$$

Επιπλέον

$$R = g^{bd}R_{bd} = g^{bd}(\Gamma^a{}_{bd,a} - \Gamma^a{}_{ba,d} + \Gamma^a{}_{ea}\Gamma^e{}_{bd} - \Gamma^a{}_{de}\Gamma^e{}_{ba}) \tag{8.13}$$

Οι συντελεστές στροφής του Ricci $\Gamma^a{}_{bc}$ περιέχουν μόνο την τετραδική μετρική και τις πρώτες παραγώγους της, επομένως είναι συνεχείς πάνω στην υπερεπιφάνεια αν ισχύουν οι συνθήκες Lichnerowicz.Κατά συνέπεια η μόνη περίπτωση να έχουμε δεύτερες παραγώγους της μετρικής και άρα ασυνέχεια, είναι στους όρους που περιέχουν παραγώγους των $\Gamma^a{}_{bc}$.Από τις σχέσεις (8.12) και (8.13), σε συνδυασμό με τις (5.52)-(5.56) προκύπτει ότι

$$R_{0d} = -\frac{1}{2}g^{ab}g_{ab,0d} - \frac{1}{2}g^{ab}{}_{,d}g_{ab,0} + \Gamma^a{}_{ea}\Gamma^e{}_{0d} - \Gamma^a{}_{de}\Gamma^e{}_{0a} \tag{8.14}$$

και

$$R = g^{ac}g_{ac,00} + \frac{1}{2}g^{ac}{}_{,0}g_{ac,0} + g^{bd}(\Gamma^a{}_{ea}\Gamma^e{}_{bd} - \Gamma^a{}_{de}\Gamma^e{}_{ba}) \tag{8.15}$$

Αντικαθιστούμε τις (8.14) και (8.15) στην (8.11) και έχουμε

$$\begin{aligned} G_{0d} = & - \frac{1}{2}g^{ab}g_{ab,0d} - \frac{1}{2}g_{0d}g^{ab}g_{ab,00} - \frac{1}{2}g^{ab}{}_{,d}g_{ab,0} - \frac{1}{4}g_{0d}g^{ab}{}_{,0}g_{ab,0} + \\ & + \Gamma^a{}_{ea}\Gamma^e{}_{0d} - \Gamma^a{}_{de}\Gamma^e{}_{0a} + g_{0d}g^{bc}(\Gamma^a{}_{ea}\Gamma^e{}_{bc} - \Gamma^a{}_{ce}\Gamma^e{}_{ba}) \end{aligned} \tag{8.16}$$

η οποία μας δίνει

$$\begin{aligned} G_{00} = & - \frac{1}{2}g^{ab}g_{ab,00} - \frac{1}{2}g_{00}g^{ab}g_{ab,00} - \frac{1}{2}g^{ab}{}_{,0}g_{ab,0} - \frac{1}{4}g_{00}g^{ab}{}_{,0}g_{ab,0} + \\ & + \Gamma^a{}_{ea}\Gamma^e{}_{00} - \Gamma^a{}_{0e}\Gamma^e{}_{0a} + g_{00}g^{bc}(\Gamma^a{}_{ea}\Gamma^e{}_{bc} - \Gamma^a{}_{ce}\Gamma^e{}_{ba}) \\ = & - \frac{1}{4}g^{ab}{}_{,0}g_{ab,0} - \Gamma^a{}_{0e}\Gamma^e{}_{0a} - g^{bc}(\Gamma^a{}_{ea}\Gamma^e{}_{bc} - \Gamma^a{}_{ce}\Gamma^e{}_{ba}) \end{aligned} \tag{8.17}$$

και

$$\begin{aligned} G_{0\delta} = & - \frac{1}{2}g^{ab}g_{ab,0\delta} - \frac{1}{2}g_{0\delta}g^{ab}g_{ab,00} - \frac{1}{2}g^{ab}{}_{,\delta}g_{ab,0} - \frac{1}{4}g_{0\delta}g^{ab}{}_{,0}g_{ab,0} + \\ & + \Gamma^a{}_{ea}\Gamma^e{}_{0\delta} - \Gamma^a{}_{\delta e}\Gamma^e{}_{0a} + g_{0\delta}g^{bc}(\Gamma^a{}_{ea}\Gamma^e{}_{bc} - \Gamma^a{}_{ce}\Gamma^e{}_{ba}) \\ = & \quad \Gamma^a{}_{ea}\Gamma^e{}_{0\delta} - \Gamma^a{}_{\delta e}\Gamma^e{}_{0a} \end{aligned} \tag{8.18}$$

Παρατηρούμε ότι οι τετραδικές συνιστώσες G_{00} και $G_{0\delta}$ του τανυστή Einstein περιέχουν μόνο τη μετρική και τις πρώτες παραγώγους της και μάλιστα με τετραγωνική εξάρτηση ως προς αυτές.Επομένως οι G_{0a} είναι συνεχείς πάνω στην υπερεπιφάνεια.Άρα και οι $G^0{}_a = g^{00}G_{0a}$ είναι συνεχείς και μέσω των εξισώσεων Einstein (8.10) είναι συνεχείς και οι $T^0{}_a$.

8.2 Σύνδεση

Θεωρούμε ότι η περιοχή V είναι ένας χωροχρόνος Bianchi IX με διαγώνια τετραδική μετρική που δίνεται από τη σχέση (6.16):

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^2(t) \end{pmatrix} \tag{8.19}$$

και η περιοχή V' είναι ένας χωροχρόνος FRW θετικής καμπυλότητας με τετραδική μετρική που δίνεται από τη σχέση (7.13):

$$g'_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R^2(t) \end{pmatrix} \tag{8.20}$$

Θέλουμε να συνδέσουμε τους δύο αυτούς χωροχρόνους πάνω στην ομογενή υπερεπιφάνεια που δίνεται από τη σχέση $t = t_0$.Στην προηγούμενη ενότητα δείξαμε ότι για να γίνει η σύνδεση, σύμφωνα με τις συνθήκες σύνδεσης Lichnerowicz, θα πρέπει η τετραδική μετρική και η πρώτη της παράγωγος ως προς το χρόνο να είναι συνεχείς πάνω στην υπερεπιφάνεια, δηλαδή να ισχύει:

$$g_{ab}(t_0) = g'_{ab}(t_0) \tag{8.21}$$

$$g_{ab,0}(t_0) = g'_{ab,0}(t_0) \tag{8.22}$$

Από τις σχέσεις (8.19)-(8.22) προκύπτει ότι για να γίνεται η σύνδεση θα πρέπει να ισχύουν τα εξής:

$$a^2(t_0) = b^2(t_0) = c^2(t_0) = R^2(t_0) \tag{8.23}$$

$$(a^2)^{\cdot}(t_0) = (b^2)^{\cdot}(t_0) = (c^2)^{\cdot}(t_0) = (R^2)^{\cdot}(t_0) \tag{8.24}$$

Επειδή όμως η μετρική εκφράζεται από τις ποσότητες a^2, b^2, c^2 είναι προφανές ότι το πρόσημο των a, b, c δεν μπορεί να καθοριστεί από τις εξισώσεις πεδίου και μπορεί να εκλεγεί αυθαίρετα.Επομένως μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να γράψουμε τις συνθήκες σύνδεσης και στη μορφή:

$$a(t_0) = b(t_0) = c(t_0) = R(t_0) \tag{8.25}$$

$$\dot{a}(t_0) = \dot{b}(t_0) = \dot{c}(t_0) = \dot{R}(t_0) \tag{8.26}$$

Αρχικά θα ελέγξουμε αν στην περιοχή V μπορεί να υπάρξει μία υπερεπιφάνεια $t = t_0$ τέτοια ώστε:

$$a(t_0) = b(t_0) = c(t_0) \tag{8.27}$$

$$\dot{a}(t_0) = \dot{b}(t_0) = \dot{c}(t_0) \tag{8.28}$$

Εάν το επιτύχουμε αυτό τότε το να βρούμε έναν χωροχρόνο FRW θετικής καμπυλότητας τέτοιον ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες (8.25) και (8.26) αναμένουμε να είναι εν γένει εφικτό αφού από την επίλυση των εξισώσεων για το $R(t)$ θα προκύψουν τουλάχιστον δύο σταθερές ολοκλήρωσης τις οποίες μπορούμε να προσαρμόσουμε κατάλληλα έτσι ώστε να ισχύουν οι συνθήκες αυτές.

Για να ελέγξουμε αν υπάρχει υπερεπιφάνεια $t = t_0$ πάνω στην οποία ισχύουν οι συνθήκες (8.27) και (8.28) θα εξετάσουμε την ποιοτική συμπεριφορά, στη γειτονιά της υπερεπιφάνειας, των συναρτήσεων $a(t), b(t), c(t)$ που ικανοποιούν τις συνθήκες αυτές.Για να απλοποιήσουμε τις εξισώσεις εισάγουμε τις συναρτήσεις $f(t), g(t)$ θέτοντας:[3]

$$b(t) = f(t)a(t)\ ,\ c(t) = g(t)a(t) \tag{8.29}$$

Παραγωγίζοντας τις σχέσεις αυτές ως προς το χρόνο παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\dot{b} &= \dot{f}a + f\dot{a} \Rightarrow \frac{\dot{b}}{b} = \frac{\dot{f}}{f} + \frac{\dot{a}}{a} && (8.30)\\
\ddot{b} &= \ddot{f}a + f\ddot{a} + 2\dot{a}\dot{f} \Rightarrow \frac{\ddot{b}}{b} = \frac{\ddot{f}}{f} + \frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}\dot{f}}{af} && (8.31)\\
\dot{c} &= \dot{g}a + g\dot{a} \Rightarrow \frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{g}}{g} + \frac{\dot{a}}{a} && (8.32)\\
\ddot{c} &= \ddot{g}a + g\ddot{a} + 2\dot{a}\dot{g} \Rightarrow \frac{\ddot{c}}{c} = \frac{\ddot{g}}{g} + \frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}\dot{g}}{ag} && (8.33)
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι οι συνθήκες (8.27) και (8.28) ικανοποιούνται αν και μόνο αν μπορούμε να βρούμε δύο συναρτήσεις $f(t)$ και $g(t)$ τέτοιες ώστε

$$\begin{aligned}
f(t_0) &= g(t_0) = 1 && (8.34)\\
\dot{f}(t_0) &= \dot{g}(t_0) = 0 && (8.35)
\end{aligned}$$

Με μετάθεση του χρόνου $t \to t - t_0$ (επιτρεπτός μετασχηματισμός που διατηρεί τη μορφή (8.5) του γραμμικού στοιχείου) οι σχέσεις (8.34) και (8.35) γράφονται, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ως εξής:

$$\begin{aligned}
f(0) &= g(0) = 1 && (8.36)\\
\dot{f}(0) &= \dot{g}(0) = 0 && (8.37)
\end{aligned}$$

[3]Θα πρέπει εδώ να σημειώσουμε ότι δεν μας ενδιαφέρει η περίπτωση κατά την οποία και η περιοχή V είναι ένας χωροχρόνος FRW θετικής καμπυλότητας.Αυτό συμβαίνει αν $f(t) =$σταθερά και $g(t) =$σταθερά, διότι τότε, όπως εύκολα μπορούμε να δούμε, οι (6.107) και (6.108) επιβάλλουν $f^2(t) = g^2(t) = 1$ οπότε $a^2(t) = b^2(t) = c^2(t)$.Λόγω της συμμετρίας των εξισώσεων (6.107)-(6.110) οι περιπτώσεις $f(t) =$σταθερά, $g(t) \neq$σταθερά και $g(t) =$σταθερά, $f(t) \neq$σταθερά είναι ισοδύναμες.Έτσι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα υποθέσουμε εδώ ότι $g(t) \neq$σταθερά $\Leftrightarrow \dot{g}(t) \neq 0$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (6.108) τις σχέσεις (8.29)-(8.33) παίρνουμε:

$$\frac{\ddot{g}}{g}+\frac{\dot{f}\dot{g}}{fg}+3\frac{\dot{a}\dot{g}}{ag}-\frac{1}{a^2f^2}\left(f^2-\frac{f^2}{g^2}+\frac{1}{g^2}-g^2\right)=0 \tag{8.38}$$

πολλαπλασιάζοντας με fg προκύπτει

$$\begin{aligned} f\ddot{g}+\dot{f}\dot{g}+3\frac{\dot{a}}{a}f\dot{g}-\frac{1}{a^2}\frac{g}{f}\left\{f^2\Big(1-\frac{1}{g^2}\Big)+\frac{1}{g^2}-g^2\right\} &= 0 \\ \Rightarrow (f\dot{g})^{\cdot}+3\frac{\dot{a}}{a}f\dot{g}-\frac{1}{a^2}\frac{g}{f}\left\{f^2\Big(1-\frac{1}{g^2}\Big)+\frac{1}{g^2}-g^2\right\} &= 0 \end{aligned} \tag{8.39}$$

Θέτουμε:[4]

$$a^2(t)=\frac{4}{3}\alpha(t)(f\dot{g})^{-2/3}\Rightarrow\frac{\dot{a}}{a}=\frac{1}{2}\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}-\frac{1}{3}\frac{(f\dot{g})^{\cdot}}{f\dot{g}} \tag{8.40}$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (8.40) στην εξίσωση (8.39) παίρνουμε

$$\dot{\alpha}=\frac{1}{2}\frac{g^2-1}{fg}(f^2-g^2-1)(f\dot{g})^{-1/3} \tag{8.41}$$

Έστω τώρα ότι οι συναρτήσεις $f(t)$ και $g(t)$ είναι τάξης C^3, δηλαδή έχουν συνεχείς παραγώγους μέχρι και τρίτης τάξης, σε μία γειτονιά του $t=0$.Τότε σύμφωνα με το θεώρημα Taylor:(*βλέπε π.χ. [29] σελ.350*)

$$f(t) = f(0)+\dot{f}(0)t+\frac{1}{2!}\ddot{f}(0)t^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(x)t^3 \tag{8.42}$$

$$g(t) = g(0)+\dot{g}(0)t+\frac{1}{2!}\ddot{g}(0)t^2+\frac{1}{3!}g^{(3)}(x)t^3 \tag{8.43}$$

για κάποιο $x\epsilon(0,t)$.Αφού οι παράγωγοι $f^{(3)}(t)$ και $g^{(3)}(t)$ είναι συνεχείς σε μία γειτονιά του μηδενός οι τιμές τους στο x είναι πεπερασμένες.Επομένως καθώς $t\to 0$ οι όροι που περιέχουν το t^3 μηδενίζονται πολύ γρηγορότερα από τους όρους μικρότερης τάξης και μπορούμε να τους αγνοήσουμε.Λαμβάνοντας υπόψιν τις (8.36) και (8.37) και κρατώντας μόνο τους επικρατέστερους όρους οι (8.42) και (8.43) γίνονται

$$f(t) \simeq 1+\frac{1}{2}\ddot{f}(0)t^2 \tag{8.44}$$

$$g(t) \simeq 1+\frac{1}{2}\ddot{g}(0)t^2 \tag{8.45}$$

[4]Έχουμε θεωρήσει ότι $\dot{g}(t)\neq 0$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (8.44) παίρνουμε

$$\begin{aligned} f^2(t) &\simeq \Big(1+\frac{1}{2}\ddot{f}(0)t^2\Big)\Big(1+\frac{1}{2}\ddot{f}(0)t^2\Big) \\ &= 1+\ddot{f}(0)t^2+\frac{1}{4}\Big(\ddot{f}(0)\Big)^2 t^4 \\ &\simeq 1+\ddot{f}(0)t^2 \end{aligned} \tag{8.46}$$

ομοίως από τη σχέση (8.45)

$$g^2(t) \simeq 1+\ddot{g}(0)t^2 \tag{8.47}$$

και συνδυάζοντας τις σχέσεις (8.44) και (8.45)

$$\begin{aligned} f(t)g(t) &\simeq \Big(1+\frac{1}{2}\ddot{f}(0)t^2\Big)\Big(1+\frac{1}{2}\ddot{g}(0)t^2\Big) \\ &= 1+\frac{1}{2}\ddot{f}(0)t^2+\frac{1}{2}\ddot{g}(0)t^2+\frac{1}{4}\ddot{f}(0)\ddot{g}(0)t^4 \\ &\simeq 1+\frac{1}{2}\Big(\ddot{f}(0)+\ddot{g}(0)\Big)t^2 \end{aligned} \tag{8.48}$$

Επιπλέον, εφόσον οι $f(t)$ και $g(t)$ είναι τάξης C^3 το γινόμενο $f(t)\dot{g}(t)$ είναι τάξης C^2.Εφαρμόζοντας και πάλι το θεώρημα Taylor και κρατώντας τους επικρατέστερους όρους έχουμε:

$$f(t)\dot{g}(t) \simeq f(0)\dot{g}(0)+(f\dot{g})^{\cdot}(0)t \tag{8.49}$$

Χρησιμοποιώντας τις (8.36) και (8.37) καταλήγουμε στη σχέση:

$$f(t)\dot{g}(t) \simeq (f\dot{g})^{\cdot}(0)t \tag{8.50}$$

Από τη σχέση (8.50) προκύπτει επίσης ότι

$$(f\dot{g})^{-1/3} \simeq \Big((f\dot{g})^{\cdot}(0)\Big)^{-1/3}t^{-1/3} \tag{8.51}$$

Αντικαθιστώντας τις (8.46)-(8.51) στην (8.41) παίρνουμε ότι στην περιοχή του $t_0=0$:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \frac{1}{2}\frac{\ddot{g}(0)t^2\Big((f\dot{g})^{\cdot}(0)\Big)^{-1/3}t^{-1/3}}{1+\frac{1}{2}\Big(\ddot{f}(0)+\ddot{g}(0)\Big)t^2}\Big(\ddot{f}(0)t^2-\ddot{g}(0)t^2-1\Big) \\ &\simeq \frac{1}{2}\ddot{g}(0)t^2\Big((f\dot{g})^{\cdot}(0)\Big)^{-1/3}t^{-1/3}\Big(\ddot{f}(0)t^2-\ddot{g}(0)t^2-1\Big)\left\{1-\frac{1}{2}\Big(\ddot{f}(0)+\ddot{g}(0)\Big)t^2\right\} \end{aligned} \tag{8.52}$$

Κρατώντας μόνο τους επικρατέστερους όρους καταλήγουμε στη σχέση

$$\dot{\alpha} \simeq -\frac{1}{2}\ddot{g}(0)\Big((f\dot{g})^{\cdot}(0)\Big)^{-1/3} t^{5/3} \tag{8.53}$$

όμως

$$(f\dot{g})^{\cdot} = \dot{f}\dot{g} + f\ddot{g} \Rightarrow (f\dot{g})^{\cdot}(0) = \dot{f}(0)\dot{g}(0) + f(0)\ddot{g}(0) = \ddot{g}(0) \tag{8.54}$$

και επομένως η (8.53) γράφεται

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &\simeq -\frac{1}{2}\Big(\ddot{g}(0)\Big)^{2/3} t^{5/3} \\ \Rightarrow \alpha &\simeq -\frac{3}{16}\Big(\ddot{g}(0)\Big)^{2/3} t^{8/3} + c \end{aligned} \tag{8.55}$$

όπου c =σταθερά ολοκλήρωσης.Όμως το a^2 πρέπει να είναι πεπερασμένο πάνω στην υπερεπιφάνεια $t = 0$ οπότε από τη σχέση (8.40)

$$\alpha(0) = \frac{3}{4}a^2(0)\Big((f\dot{g})(0)\Big)^{2/3} = 0 \tag{8.56}$$

και έτσι στην (8.55) αναγκαστικά η σταθερά $c = 0$.Τελικά με αντικατάσταση της (8.55) στην (8.40) προκύπτει ότι σε μία περιοχή γύρω από την υπερεπιφάνεια θα είναι

$$a^2 \simeq -\frac{1}{4}t^2 < 0 \tag{8.57}$$

και λόγω των (8.29), (8.44) και (8.45)

$$b^2 \simeq -\frac{1}{4}t^2 \tag{8.58}$$

$$c^2 \simeq -\frac{1}{4}t^2 \tag{8.59}$$

Όμως αυτό σημαίνει ότι στη γειτονιά της υπερεπιφάνειας σύνδεσης η μετρική εμφανίζει διαφορετική χαρακτηριστική από αυτή του χωροχρόνου Minkowski, πράγμα που δεν είναι αποδεκτό.Η μετρική αυτή αντιστοιχεί σε έναν τετραδιάστατο ρημάνιο χώρο, ενώ ο χωροχρόνος είναι ψευδορημάνιος.Επιπλέον, επειδή στους χωροχρόνους Bianchi IX υπάρχει αρχική ανωμαλία, θα υπάρχει μία περίοδος αμέσως μετά την αρχική αυτή ανωμαλία κατά την οποία τα a^2, b^2, c^2 είναι θετικά.Για να έχουμε στο $t = t_0 : a^2 < 0, b^2 < 0, c^2 < 0$ θα πρέπει πριν τη σύνδεση να προηγήθηκε και κάποια άλλη ανωμαλία στην οποία το a^2 ή το b^2 ή το c^2 ή όλα μαζί να μηδενίστηκαν.Τέλος, από τις (8.57)-(8.59) παρατηρούμε ότι τα a^2, b^2, c^2 τείνουν στο μηδέν καθώς το t τείνει στο μηδέν, δηλαδή υπάρχει ανωμαλία πάνω στην υπερεπιφάνεια σύνδεσης.Το συμπέρασμα από τα ανωτέρω είναι ότι από φυσική άποψη δεν είναι δυνατόν να επιτευχθεί η σύνδεση.

Κεφάλαιο 9

Συμπεράσματα

Η Σχετικιστική Κοσμολογία βασίζεται κυρίως σε δύο παραδοχές.Η πρώτη είναι η πεποίθηση ότι οι νόμοι της φυσικής είναι ίδιοι παντού στο σύμπαν, δηλαδή ότι είναι σταθεροί στο χώρο και στο χρόνο, μετά την παρέλευση του χρόνου Planck από τη Μεγάλη Έκρηξη.Η δεύτερη υποστηρίζει ότι η εξέλιξη του σύμπαντος σε μέγάλη κλίμακα καθορίζεται από τις βαρυτικές αλληλεπιδράσεις, από το χρόνο Planck και μετά, οι οποίες περιγράφονται από τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας του Einstein, παρόλο που η θεωρία αυτή έχει επαληθευτεί μόνο σε αποστάσεις οι οποίες είναι πολύ μικρές συγκρινόμενες με τις διαστάσεις του σύμπαντος.Σημαντικό ρόλο στην κοσμολογία διαδραματίζει και η λεγόμενη κοσμολογική αρχή, σύμφωνα με την οποία το σύμπαν σε μεγάλη κλίμακα είναι ομογενές και ισοτροπικό.Η κοσμολογική αρχή φαίνεται να επιβεβαιώνεται από τα μέχρι σήμερα παρατηρησιακά δεδομένα.Παρόλα αυτά θεωρείται πιθανό το σύμπαν να ήταν αρχικά ανομοιογένες και ανισοτροπικό και να υπάρχει κάποιος μηχανισμός ο οποίος το μετέτρεψε σε ομογενές και ισοτροπικό.

Στην παρούσα διατριβή μελετήσαμε τους χωροχρόνους Bianchi IX, οι οποίοι είναι ομογενείς και ανισότροποι, χρησιμοποιώντας την 1+3 συναλλοίωτη περιγραφή και τον τετραδικό φορμαλισμό και τη δυνατότητα σύνδεσής τους με τους χωροχρόνους FRW.Επιπλέον ένας από τους στόχους της εργασίας είναι να αποτελέσει ένα χρήσιμο βοήθημα για άλλους νέους ερευνητές που ασχολούνται με παρόμοια θέματα καθώς καταβλήθηκε προσπάθεια να συγκεντρωθούν και να παρουσιαστούν όσο το δυνατόν πιο ξεκάθαρα τα βασικά στοιχεία των μεθόδων που χρησιμοποιήθηκαν, να τονιστούν ορισμένα σημεία που μπορεί να προκαλέσουν σύγχιση καθώς και να παρατεθούν όσο το δυνατόν περισσότερες αποδείξεις σχέσεων και θεωρημάτων οι οποίες συνήθως δεν συναντώνται αναλυτικά στη βιβλιογραφία.

Πιο αναλυτικά, στα Κεφάλαια 2 και 3 αναφερθήκαμε στα βασικά χαρακτηριστικά της 1+3 συναλλοίωτης περιγραφής και του τετραδικού φορμαλισμού, που αποτέλεσαν το υπόβαθρο πάνω στο οποίο αναπτύχθηκε η υπόλοιπη διατριβή.Στο κεφάλαιο 4 παραθέσαμε την κατηγοριοποίηση των κοσμολογικών μοντέλων σύμφωνα με τις συμμετρίες τους, με έμφαση στους χωρικά ομογενείς χωροχρόνους.Στο Κεφάλαιο 5 επικεντρωθήκαμε στους χωροχρόνους Bianchi και στην εφαρμογή των παραπάνω μεθόδων σ'αυτούς.Στο Κεφάλαιο 6 εξαγάγαμε τις εξισώσεις εξέλιξης και δεσμών στην περίπτωση των χωροχρόνων Bianchi IX με διαγώνια τετραδική μετρική που έχουν ως υλικό περιεχόμενο ένα ιδανικό ρευστό και αποδείξαμε ότι στην περίπτωση αυτή το ιδανικό ρευστό δεν μπορεί να είναι πλάγιο.Επίσης, στο κεφάλαιο αυτό ολοκληρώσαμε τις εξισώσεις της μετρικής για τους χωροχρόνους Bianchi IX εισάγωντας ένα κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων.Ας σημειωθεί πως παρά το ότι η χωρική εξάρτηση της μετρικής είναι γνωστή για τα μοντέλα Bianchi και μπορεί εύκολα κανείς να τη βρει σε εξιδεικευμένα βιβλία και διατριβές, μία διεξοδική μέθοδος ολοκήρωσης των εξισώσεων αυτών δεν φαίνεται να είναι διαθέσιμη στη διεθνή βιβλιογραφία.Πιστεύουμε ότι η επίλυση των εξισώσεων στην περίπτωση Bianchi IX (που είναι η πιο δυσχερής) που λεπτομερειακά εκθέσαμε εδώ είναι ένα άριστο εργαστήριο για κάποιον που θέλει να μυηθεί στον τρόπο επίλυσης των εξισώσεων της μετρικής με προοδευτική προσαρμογή των συντεταγμένων μέσω κατάλληλων μετασχηματισμών.Στο Κεφάλαιο 7 εξαγάγαμε τις εξισώσεις εξέλιξης και δεσμών για τους χωροχρόνους FRW.Τέλος στο Κεφάλαιο 8 προσπαθήσαμε να συνδέσουμε τους χωροχρόνους Bianchi IX με διαγώνια μετρική και ιδανικό ρευστό με τους χωροχρόνους FRW θετικής καμπυλότητας πάνω σε μία ομογενή υπερεπιφάνεια t =σταθερό, χρησιμοποιώντας τις συνθήκες σύνδεσης Lichnerowicz, έτσι ώστε να δημιουργήσουμε ένα κοσμολογικό μοντέλο το οποίο αρχικά είναι ομογενές και ανισοτροπικό αλλά κάποια χρονική στιγμή γίνεται ισοτροπικό.

Αν και κατ'αρχήν φαίνεται ότι η σύνδεση των δύο χωροχρόνων θα μπορούσε να επιτευχθεί, τελικά αποδείχθηκε ότι κάτι τέτοιο είναι ανέφικτο.Ο λόγος αυτής της αδυναμίας δεν φαίνεται να μπορεί να εξηγηθεί με απλούς όρους που βασίζονται στη φυσική διαίσθηση, αλλά ίσως να οφείλεται στην ειδική πολύπλοκη αναλυτική δομή που έχουν οι εξισώσεις εξέλιξης και δεσμών.Γι'αυτό μελλοντικά θα μπορούσε ίσως να μελετηθεί η δυνατότητα σύνδεσης των δύο χωροχρόνων αν θεωρήσουμε έναν χωροχρόνο Bianchi IX με μη διαγώνια τετραδική μετρική.Πάντως θα θέλαμε να επισημάνουμε ότι η διεργασία ισοτροποίησης του χωροχρόνου μετά τη μεγάλη έκρηξη με σύνδεση πάνω σε μία χωροειδή υπερεπιφάνεια δεν έχει εξετασθεί από κανέναν ερευνητή μέρχι σήμερα (τουλάχιστον αυτό έδειξε η αναζήτηση που κάναμε μέσω internet).Αυτό που κάνει ίσως αυτή την ιδέα ιδιαίτερα ελκυστική είναι το ότι το μόνο που απαιτεί από τη φυσική του συμπαντικού ιδανικού ρευστού είναι μία απότομη μεταβολή της ισοτροπικής πίεσης (ίσως μιας αλλαγής φάσης).Βέβαια, η φυσική διαδικασία που λαμβάνει χώρα (στην περίπτωση που θα μπορούσε να επιτευχθεί αυτή η σύνδεση) και εξηγεί την μετατροπή του χωροχρόνου από ανισοτροπικό σε ισοτροπικό αποτελεί επίσης πρόταση για μελλοντική μελέτη.

Παράρτημα Α′

Αποδείξεις

Α′.1 Αποδείξεις Κεφαλαίου 3

Γιατί η ονομασία " Συντελεστές Στροφής " για τα Γ_{abc};
Ας θεωρήσουμε την καμπύλη $C : \mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ με εφαπτόμενο διάνυσμα $\mathbf{E}_c = \frac{d\mathbf{x}}{ds}$. Θεωρούμε επίσης ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{E}_a$, το οποίο μεταφέρουμε παράλληλα κατά μήκος της C με τη βοήθεια της συναλλοίωτης παραγώγου, δηλαδή

$$E_c{}^j E_a{}^i{}_{;j} = 0 \tag{Α′.1}$$

ή με άλλα λόγια το $\mathbf{E}_a$ μεταφέρεται κατά μήκος της C έτσι ώστε να διατηρεί σταθερά τη διεύθυνση και το μέτρο του. Έστω τώρα ένα μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο $\mathbf{E}_b$, το οποίο σχηματίζει γωνία θ με το $\mathbf{E}_a$, δηλαδή

$$\mathbf{E}_a \cdot \mathbf{E}_b = \cos\theta \tag{Α′.2}$$

όπου κατά μήκος της C η θ θα είναι συνάρτηση της θέσης πάνω στην καμπύλη $\theta = \theta(s)$. Παραγωγίζουμε την ανωτέρω σχέση ως προς s και παίρνουμε

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{E}_a \cdot \mathbf{E}_b) = E_c{}^j(\mathbf{E}_a \cdot \mathbf{E}_b)_{,j} = -\sin\theta\frac{d\theta}{ds} \tag{Α′.3}$$

όμως το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{E}_a \cdot \mathbf{E}_b$ είναι βαθμωτό ως προς τις συντεταγμένες, άρα η (Α′.3) γίνεται:

$$E_c{}^j(E_a{}^i E_{bi})_{;j} = -\sin\theta\frac{d\theta}{ds} \tag{Α′.4}$$

και επειδή το $\mathbf{E}_a$ εκτελεί παράλληλη μεταφορά (σχέση (Α′.1)) η ανωτέρω σχέση συνεπάγεται ότι

$$E_a{}^i E_{bi;j} E_c{}^j = -\sin\theta\frac{d\theta}{ds} \Leftrightarrow \Gamma_{abc} = -\sin\theta\frac{d\theta}{ds} \tag{Α′.5}$$

Αν τώρα θεωρήσουμε ότι σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο $P(s_0)$ επί της C, που αντιστοιχεί στην τιμή s_0 της παραμέτρου s, η γωνία των $\mathbf{E}_a$ και $\mathbf{E}_b$ είναι $\frac{\pi}{2}$, η ανωτέρω σχέση γράφεται:

$$\Gamma_{abc} = -\left(\frac{d\theta}{ds}\right)_{s=s_0} \tag{Α΄.6}$$

Δηλαδή το Γ_{abc} εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ που σχηματίζει το $\mathbf{E}_b$ με την κάθετη προς αυτό σταθερή διεύθυνση του $\mathbf{E}_a$, όταν το $\mathbf{E}_b$ μετακινείται κατά τη διεύθυνση της καμπύλης C.

Απόδειξη της Σχέσης (3.35)
Εφαρμόζουμε τη σχέση (3.34) για τα διανύσματα $\mathbf{E}^a$ και παίρνουμε:

$$E^a{}_{i;jk} - E^a{}_{i;kj} = R^l{}_{ijk} E^a{}_l \tag{Α΄.7}$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση που βρήκαμε στην (3.33) προκύπτει ότι:

$$R^a{}_{bcd} = (E^a{}_{i;jk} - E^a{}_{i;kj}) E_b{}^i E_c{}^j E_d{}^k \tag{Α΄.8}$$

Από τον ορισμό (3.12) των συντελεστών στροφής του Ricci έχουμε:

$$\begin{aligned}
\Gamma^c{}_{ab} &= E^c{}_i E_a{}^i{}_{;j} E_b{}^j \\
&= (E^c{}_i E_a{}^i)_{;j} E_b{}^j - E^c{}_{i;j} E_a{}^i E_b{}^j \\
&= \delta^c{}_{a;j} E_b{}^j - E^c{}_{i;j} E_a{}^i E_b{}^j \\
&= \delta^c{}_{a,j} E_b{}^j - E^c{}_{i;j} E_a{}^i E_b{}^j \\
&= -E^c{}_{i;j} E_a{}^i E_b{}^j
\end{aligned} \tag{Α΄.9}$$

ή ισοδύναμα

$$E^c{}_{i;j} = -\Gamma^c{}_{ab} E^a{}_i E^b{}_j \tag{Α΄.10}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
E^a{}_{i;jk} &= -(\Gamma^a{}_{ef} E^e{}_i E^f{}_j)_{;k} \\
&= -\Gamma^a{}_{ef;k} E^e{}_i E^f{}_j - \Gamma^a{}_{ef} E^e{}_{i;k} E^f{}_j - \Gamma^a{}_{ef} E^e{}_i E^f{}_{j;k} \\
&= -\Gamma^a{}_{ef,k} E^e{}_i E^f{}_j - \Gamma^a{}_{ef}(-\Gamma^e{}_{gh} E^g{}_i E^h{}_k) E^f{}_j - \Gamma^a{}_{ef} E^e{}_i (-\Gamma^f{}_{gh} E^g{}_j E^h{}_k) \\
&= -\Gamma^a{}_{ef,k} E^e{}_i E^f{}_j + \Gamma^a{}_{ef} \Gamma^e{}_{gh} E^g{}_i E^h{}_k E^f{}_j + \Gamma^a{}_{ef} E^e{}_i \Gamma^f{}_{gh} E^g{}_j E^h{}_k
\end{aligned} \tag{Α΄.11}$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι

$$E^a{}_{i;kj} = -\Gamma^a{}_{ef,j} E^e{}_i E^f{}_k + \Gamma^a{}_{ef} \Gamma^e{}_{gh} E^g{}_i E^h{}_j E^f{}_k + \Gamma^a{}_{ef} E^e{}_i \Gamma^f{}_{gh} E^g{}_k E^h{}_j \tag{Α΄.12}$$

Αντικαθιστώντας τις (Α΄.11) και (Α΄.12) στην (Α΄.8) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
R^a{}_{bcd} &= \Big(-\Gamma^a{}_{ef,k}E^e{}_iE^f{}_j + \Gamma^a{}_{ef}\Gamma^e{}_{gh}E^g{}_iE^h{}_kE^f{}_j + \Gamma^a{}_{ef}E^e{}_i\Gamma^f{}_{gh}E^g{}_jE^h{}_k + \\
&\quad +\Gamma^a{}_{ef,j}E^e{}_iE^f{}_k - \Gamma^a{}_{ef}\Gamma^e{}_{gh}E^g{}_iE^h{}_jE^f{}_k - \Gamma^a{}_{ef}E^e{}_i\Gamma^f{}_{gh}E^g{}_kE^h{}_j\Big)E_b{}^iE_c{}^jE_d{}^k \\
&= -\Gamma^a{}_{ef,d}\delta^e_b\delta^f_c + \Gamma^a{}_{ef}\Gamma^e{}_{gh}\delta^g_b\delta^h_d\delta^f_c + \Gamma^a{}_{ef}\Gamma^f{}_{gh}\delta^e_b\delta^g_c\delta^h_d + \\
&\quad +\Gamma^a{}_{ef,c}\delta^e_b\delta^f_d - \Gamma^a{}_{ef}\Gamma^e{}_{gh}\delta^g_b\delta^h_c\delta^f_d - \Gamma^a{}_{ef}\Gamma^f{}_{gh}\delta^e_b\delta^g_d\delta^h_c \\
&= -\Gamma^a{}_{bc,d} + \Gamma^a{}_{ec}\Gamma^e{}_{bd} + \Gamma^a{}_{be}\Gamma^e{}_{cd} + \Gamma^a{}_{bd,c} - \Gamma^a{}_{ed}\Gamma^e{}_{bc} - \Gamma^a{}_{be}\Gamma^e{}_{dc} \\
&= \Gamma^a{}_{bd,c} - \Gamma^a{}_{bc,d} + \Gamma^a{}_{ec}\Gamma^e{}_{bd} - \Gamma^a{}_{ed}\Gamma^e{}_{bc} - \Gamma^a{}_{be}\gamma^e{}_{cd} \qquad (\text{Α΄.13})
\end{aligned}$$

Απόδειξη της Σχέσης (3.32)

Αν εφαρμόσουμε τις ταυτότητες του Jacobi (3.31) για τα διανύσματα βάσης $\mathbf{E}_a$ παίρνουμε την εξής σχέση:

$$[\mathbf{E}_a,[\mathbf{E}_b,\mathbf{E}_c]] + [\mathbf{E}_b,[\mathbf{E}_c,\mathbf{E}_a]] + [\mathbf{E}_c,[\mathbf{E}_a,\mathbf{E}_b]] = 0 \qquad (\text{Α΄.14})$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{E}_a,[\mathbf{E}_b,\mathbf{E}_c]]^i &= [\mathbf{E}_a,\gamma^d{}_{bc}\mathbf{E}_d]^i = E_a{}^j(\gamma^d{}_{bc}E_d{}^i)_{,j} - \gamma^d{}_{bc}E_d{}^jE_a{}^i{}_{,j} \\
&= E_a{}^j\gamma^d{}_{bc}E_d{}^i{}_{,j} + E_a{}^j\gamma^d{}_{bc,j}E_d{}^i - \gamma^d{}_{bc}E_d{}^jE_a{}^i{}_{,j} \\
&= \gamma^d{}_{bc}E_a{}^jE_d{}^i{}_{,j} - E_a{}^jE_d{}^i\gamma^d{}_{bc,j} \\
&= \gamma^d{}_{bc}(E_a{}^jE_d{}^i{}_{,j} - E_d{}^jE_a{}^i{}_{,j}) + E_d{}^iE_a{}^j\gamma^d{}_{bc,j} \\
&= \gamma^d{}_{bc}[\mathbf{E}_a,\mathbf{E}_d]^i + E_d{}^j\partial_a\gamma^d{}_{bc} \\
&= \gamma^d{}_{bc}\gamma^e{}_{ad}E_e{}^i + E_d{}^j\partial_a\gamma^d{}_{bc} \\
&= \gamma^e{}_{bc}\gamma^d{}_{ae}E_d{}^i + (\partial_a\gamma^d{}_{bc})E_d{}^i \\
&= (\gamma^e{}_{bc}\gamma^d{}_{ae} + \partial_a\gamma^d{}_{bc})E_d{}^i \qquad (\text{Α΄.15})
\end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
[\mathbf{E}_a,[\mathbf{E}_b,\mathbf{E}_c]] &= (\gamma^e{}_{bc}\gamma^d{}_{ae} + \partial_a\gamma^d{}_{bc})\mathbf{E}_d \\
&= \frac{1}{2}(\gamma^e{}_{bc}\gamma^d{}_{ae} - \gamma^e{}_{cb}\gamma^d{}_{ae} + \partial_a\gamma^d{}_{bc} - \partial_a\gamma^d{}_{cb})\mathbf{E}_d \qquad (\text{Α΄.16})
\end{aligned}$$

Ομοίως βρίσκουμε ότι οι άλλοι δύο μεταθέτες δίνονται από τις σχέσεις:

$$[\mathbf{E}_b,[\mathbf{E}_c,\mathbf{E}_a]] = \frac{1}{2}(\gamma^e{}_{ca}\gamma^d{}_{be} - \gamma^e{}_{ac}\gamma^d{}_{be} + \partial_b\gamma^d{}_{ca} - \partial_b\gamma^d{}_{ac})\mathbf{E}_d \qquad (\text{Α΄.17})$$

$$[\mathbf{E}_c,[\mathbf{E}_a,\mathbf{E}_b]] = \frac{1}{2}(\gamma^e{}_{ab}\gamma^d{}_{ce} - \gamma^e{}_{ba}\gamma^d{}_{ce} + \partial_c\gamma^d{}_{ab} - \partial_c\gamma^d{}_{ba})\mathbf{E}_d \qquad (\text{Α΄.18})$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (Α΄.16)-(Α΄.18) η σχέση (Α΄.14) τελικά γίνεται

$$\frac{1}{2}(\gamma^{e}{}_{[ab}\gamma^{d}{}_{c]e} + \partial_{[a}\gamma^{d}{}_{bc]})\mathbf{E}_{d} = 0 \tag{Α΄.19}$$

όμως τα διανύσματα της τετραδικής βάσης είναι γραμμικώς ανεξάρτητα επομένως καταλήγουμε στη σχέση (3.32)

$$\gamma^{e}{}_{[ab}\gamma^{d}{}_{c]e} + \partial_{[a}\gamma^{d}{}_{bc]} = 0 \tag{Α΄.20}$$

Απόδειξη της Σχέσης (3.37)

$$R^{a}{}_{[bcd]} = \frac{1}{6}(R^{a}{}_{bcd} - R^{a}{}_{bdc} + R^{a}{}_{dbc} - R^{a}{}_{dcb} + R^{a}{}_{cdb} - R^{a}{}_{cbd}) \tag{Α΄.21}$$

όμως ο τανυστής Riemann είναι αντισυμμετρικός ως προς το τελευταίο ζεύγος δεικτών, δηλαδή

$$R^{a}{}_{bcd} = -R^{a}{}_{bdc} \tag{Α΄.22}$$

επομένως χρησιμοποιώντας την (Α΄.22) η (Α΄.21) γίνεται

$$R^{a}{}_{[bcd]} = \frac{1}{3}(R^{a}{}_{bcd} + R^{a}{}_{dbc} + R^{a}{}_{cdb}) \tag{Α΄.23}$$

Από τη σχέση (Α΄.13) και με κυκλική μετάθεση των δεικτών παίρνουμε

$$R^{a}{}_{bcd} = \Gamma^{a}{}_{bd,c} - \Gamma^{a}{}_{bc,d} + \Gamma^{a}{}_{ec}\Gamma^{e}{}_{bd} - \Gamma^{a}{}_{ed}\Gamma^{e}{}_{bc} - \Gamma^{a}{}_{be}\gamma^{e}{}_{cd} \tag{Α΄.24}$$
$$R^{a}{}_{dbc} = \Gamma^{a}{}_{dc,b} - \Gamma^{a}{}_{db,c} + \Gamma^{a}{}_{eb}\Gamma^{e}{}_{dc} - \Gamma^{a}{}_{ec}\Gamma^{e}{}_{db} - \Gamma^{a}{}_{de}\gamma^{e}{}_{bc} \tag{Α΄.25}$$
$$R^{a}{}_{cdb} = \Gamma^{a}{}_{cb,d} - \Gamma^{a}{}_{cd,b} + \Gamma^{a}{}_{ed}\Gamma^{e}{}_{cb} - \Gamma^{a}{}_{eb}\Gamma^{e}{}_{cd} - \Gamma^{a}{}_{ce}\gamma^{e}{}_{db} \tag{Α΄.26}$$

Αντικαθιστώντας τις (Α΄.24)-(Α΄.26) στην (Α΄.23) και με τη βοήθεια της (3.28) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} R^{a}{}_{[bcd]} &= (\Gamma^{a}{}_{bd} - \Gamma^{a}{}_{db})_{,c} + (\Gamma^{a}{}_{dc} - \Gamma^{a}{}_{cd})_{,b} + (\Gamma^{a}{}_{cb} - \Gamma^{a}{}_{bc})_{,d} + \\ &\quad + \Gamma^{a}{}_{ec}(\Gamma^{e}{}_{bd} - \Gamma^{e}{}_{db}) + \Gamma^{a}{}_{eb}(\Gamma^{e}{}_{dc} - \Gamma^{e}{}_{cd}) + \Gamma^{a}{}_{ed}(\Gamma^{e}{}_{cb} - \Gamma^{e}{}_{bc}) - \\ &\quad - \Gamma^{a}{}_{be}(\Gamma^{e}{}_{dc} - \Gamma^{e}{}_{cd}) - \Gamma^{a}{}_{de}(\Gamma^{e}{}_{cb} - \Gamma^{e}{}_{bc}) - \Gamma^{a}{}_{ce}(\Gamma^{e}{}_{bd} - \Gamma^{e}{}_{db}) \\ &= \gamma^{a}{}_{db,c} + \gamma^{a}{}_{cd,b} + \gamma^{a}{}_{bc,d} + \gamma^{e}{}_{db}\gamma^{a}{}_{ce} + \gamma^{e}{}_{cd}\gamma^{a}{}_{be} + \gamma^{e}{}_{bc}\gamma^{a}{}_{de} \\ &= \gamma^{a}{}_{[db,c]} + \gamma^{e}{}_{[db}\gamma^{a}{}_{c]e} \end{aligned} \tag{Α΄.27}$$

και λαμβάνοντας υπόψιν την (Α΄.20) παίρνουμε ότι

$$R^{a}{}_{[bcd]} = 0 \tag{Α΄.28}$$

επομένως

$$R_{a[bcd]} = g_{ae}R^{e}{}_{[bcd]} = 0 \tag{Α΄.29}$$

Επιπλέον η (Α′.28) με συστολή των δεικτών a και c μας δίνει

$$\begin{aligned} R^a{}_{[bad]} = 0 &\Rightarrow R^a{}_{bad} + R^a{}_{dba} + R^a{}_{adb} = 0 \\ &\Rightarrow R_{bd} + R^a{}_{dba} + R^a{}_{adb} = 0 \\ &\Rightarrow R_{bd} - R^a{}_{dab} = 0 \\ &\Rightarrow R_{bd} - R_{db} = 0 \\ &\Rightarrow R_{bd} = R_{db} \end{aligned} \tag{Α′.30}$$

ή ισοδύναμα

$$R_{ab} = R_{(ab)} \tag{Α′.31}$$

Α′.2 Αποδείξεις Κεφαλαίου 5

Α′.2.1 Πλάγια Μοντέλα Bianchi

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.1
Αφού το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{n}$ είναι χρονοειδές και μοναδιαίο

$$\begin{aligned} n_i n^i = -1 &\Rightarrow (n_i n^i)_{;j} = 0 \\ &\Rightarrow n_{i;j} n^i + n_i n^i{}_{;j} = 0 \\ &\Rightarrow 2 n_{i;j} n^i = 0 \\ &\Rightarrow n_{i;j} n^i = 0 \end{aligned} \tag{Α′.32}$$

Το $\mathbf{n}$ είναι κάθετο στις ομογενείς υπερεπιφάνειες, άρα είναι κάθετο και στα διανύσματα Killing.Επομένως για κάθε διάνυσμα Killing ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \xi^i n_i = 0 &\Rightarrow (\xi^i n_i)_{;j} = 0 \\ &\Rightarrow \xi^i{}_{;j} n_i + \xi^i n_{i;j} = 0 \\ &\Rightarrow \xi_{i;j} n^i + \xi^i n_{i;j} = 0 \end{aligned} \tag{Α′.33}$$

Κάνουμε συστολή στην σχέση (Α′.33) με το n^j και έχουμε

$$\xi_{i;j} n^i n^j + \xi^i n_{i;j} n^j = 0 \tag{Α′.34}$$

Από την εξίσωση Killing παίρνουμε

$$\begin{aligned} \xi_{i;j} + \xi_{j:i} = 0 &\Rightarrow \xi_{i;j} n^i n^j + \xi_{j:i} n^i n^j = 0 \\ &\Rightarrow 2\xi_{i;j} n^i n^j = 0 \Rightarrow \xi_{i;j} n^i n^j = 0 \end{aligned} \tag{Α′.35}$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (Α′.35) στην (Α′.34) προκύπτει

$$\xi^i n_{i;j} n^j = 0 \Rightarrow \xi^i \dot{n}_i = 0 \tag{Α′.36}$$

Επιπλέον από την (Α΄.32) κάνοντας συστολή με το n^j παίρνουμε

$$n_{i;j}n^i n^j = 0 \Rightarrow n^i \dot{n}_i = 0 \tag{Α΄.37}$$

Από τις σχέσεις (Α΄.36) και (Α΄.37) συμπεραίνουμε ότι

$$\dot{n}_i = 0 \tag{Α΄.38}$$

γιατί διαφορετικά θα έπρεπε το $\dot{\mathbf{n}}$ να είναι κάθετο ταυτόχρονα και στο $\mathbf{n}$ και στα διανύσματα Killing ξ τα οποία είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.Επομένως το $\mathbf{n}$ είναι εφαπτόμενο σε μια οικογένεια γεωδαισιακών καμπύλων.
Αφού το $\mathbf{n}$ είναι κάθετο στις ομογενείς υπερεπιφάνειες ορίζεται από τη σχέση

$$n_i = -\lambda f_{,i} \tag{Α΄.39}$$

όπου τα λ και f είναι βαθμωτά και οι υπερεπιφάνειες δίνονται από τη σχέση $f(t)$ =σταθ.Χρησιμοποιώντας τη σχέση (Α΄.39) εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$n_{[i}n_{j;k]} = 0 \tag{Α΄.40}$$

αφού

$$n_{[i}n_{j;k]} = \frac{1}{6}(n_i n_{j;k} - n_i n_{k;j} + n_j n_{k;i} - n_j n_{i;k} + n_k n_{i;j} - n_k n_{j;i}) \tag{Α΄.41}$$

και

$$\begin{aligned} n_i n_{j;k} &= n_i(n_{j,k} - \Gamma^l_{jk} n_l) \\ &= -\lambda f_{,i}\{(-\lambda f_{,j})_{,k} - \Gamma^l_{jk}(-\lambda f_{,l})\} \\ &= -\lambda f_{,i}(-\lambda_{,k} f_{,j} - \lambda f_{,jk} + \lambda \Gamma^l_{jk} f_{,l}) \end{aligned} \tag{Α΄.42}$$

Με κυκλική μετάθεση των δεικτών βρίσκουμε τις αντίστοιχες σχέσεις για τους υπόλοιπους όρους της (Α΄.40)

$$n_i n_{k;j} = -\lambda f_{,i}(-\lambda_{,j} f_{,k} - \lambda f_{,kj} + \lambda \Gamma^l_{kj} f_{,l}) \tag{Α΄.43}$$

$$n_j n_{k;i} = -\lambda f_{,j}(-\lambda_{,i} f_{,k} - \lambda f_{,ki} + \lambda \Gamma^l_{ki} f_{,l}) \tag{Α΄.44}$$

$$n_j n_{i;k} = -\lambda f_{,j}(-\lambda_{,k} f_{,i} - \lambda f_{,ik} + \lambda \Gamma^l_{ik} f_{,l}) \tag{Α΄.45}$$

$$n_k n_{i;j} = -\lambda f_{,k}(-\lambda_{,j} f_{,i} - \lambda f_{,ij} + \lambda \Gamma^l_{ij} f_{,l}) \tag{Α΄.46}$$

$$n_k n_{j;i} = -\lambda f_{,k}(-\lambda_{,i} f_{,j} - \lambda f_{,ji} + \lambda \Gamma^l_{ji} f_{,l}) \tag{Α΄.47}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (Α΄.42)-(Α΄.47) στην (Α΄.41) και λαμβάνοντας υπόψιν ότι $f_{,ij} = f_{,ji}$, $\Gamma^l{}_{ij} = \Gamma^l{}_{ji}$ προκύπτει η σχέση (Α΄.40).
Κάνοντας συστολή της (Α΄.40) με το n^i έχουμε

$$\begin{aligned} n_{[i}n_{j;k]}n^i = 0 &\Rightarrow n_i n_{j;k} n^i - n_i n_{k;j} n^i + n_j n_{k;i} n^i - n_j n_{i;k} n^i + n_k n_{i;j} n^i - n_k n_{j;i} n^i = 0 \\ &\Rightarrow -n_{j;k} + n_{k;j} + n_j \dot{n}_k - n_j n_{i;k} n^i + n_k n_{i;j} n^i - n_k \dot{n}_j = 0 \end{aligned} \tag{Α΄.48}$$

η οποία με τη βοήθεια των (Α΄.32) και (Α΄.38) γίνεται

$$\begin{aligned} n_{j;k} - n_{k;j} = 0 &\Rightarrow n_{[j;k]} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}(n_{j,k} - \Gamma^l_{jk} - n_{k,j} + \Gamma^l_{kj} n_l) = 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}(n_{j,k} - n_{k,j}) = 0 \\ &\Rightarrow n_{[i,j]} = 0 \end{aligned}$$

Επομένως

$$n_{[i;j]} = n_{[i,j]} = 0 \tag{Α΄.49}$$

Από τις σχέσεις (Α΄.49) και (Α΄.39) προκύπτει ότι

$$n_{[i,j]} = -\lambda_{,i} f_{,j} + \lambda_{,j} f_{,i} = 0 \tag{Α΄.50}$$

Το οποίο σημαίνει ότι $\lambda = \lambda(f)$.Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε τη χρονική συντεταγμένη t ως $t = \int \lambda(f) df$.Κατά συνέπεια $n_i = -t_{,i}$ και οι ομογενείς υπερεπιφάνειες δίνονται από τη σχέση t =σταθερό.

Προφανώς και οι τετραδικές συνιστώσες του **n** ικανοποιούν τις σχέσεις (Α΄.40) και (Α΄.49):

$$\begin{aligned} n_{[a} n_{b;c]} &= n_{[i} n_{j;k]} E_a{}^i E_b{}^j E_c{}^k = 0 &\text{(Α΄.51)} \\ n_{[a;b]} &= n_{[i;j]} E_a{}^i E_b{}^j = 0 &\text{(Α΄.52)} \\ n_{[a,b]} &= n_{[i,j]} E_a{}^i E_b{}^j = 0 &\text{(Α΄.53)} \end{aligned}$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.2

$$\begin{aligned} L_\xi n_i &= \xi^j n_{i;j} + n_j \xi^j{}_{;i} \\ &= \xi^j n_{i;j} + n^j \xi_{j;i} &\text{(Α΄.54)} \end{aligned}$$

Το **n** είναι κάθετο στην υπερεπιφάνεια και στα διανύσματα Killing, επομένως για κάθε διάνυσμα Killing ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \xi^j n_j = 0 &\Rightarrow (\xi^j n_j)_{;i} = 0 \\ &\Rightarrow \xi^j{}_{;i} n_j + \xi^j n_{j;i} = 0 \\ &\Rightarrow \xi_{j;i} n^j + \xi^j n_{j;i} = 0 &\text{(Α΄.55)} \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις (Α΄.54), (Α΄.55) και (Α΄.49) προκύπτει ότι

$$L_\xi n_i = \xi^j (n_{i;j} - n_{j;i}) = 2\xi^j n_{[i;j]} = 0 \tag{Α΄.56}$$

Από τη σχέση (Α΄.56) σε συνδυασμό με τη σχέση (4.17) συνεπάγεται ότι και η Lie παράγωγος των τετραδικών συνιστωσών του **n** είναι μηδέν αφού

$$L_\xi n_a = L_\xi (n_i E_a{}^i) = (L_\xi n_i) E_a{}^i + n_i (L_\xi E_a{}^i) = 0 \qquad (Α'.57)$$

Επειδή όταν χρησιμοποιούμε αναλλοίωτη βάση η Lie παράγωγος των συνιστωσών της μετρικής και της τετραδικής μετρικής είναι μηδέν, είναι προφανές ότι μπορούμε να ανεβάσουμε τους δείκτες στις σχέσεις (Α΄.56) και (Α΄.57):

$$L_\xi n^i = L_\xi n^a = 0 \qquad (Α'.58)$$

Α΄.2.2 1+3 Συναλλοίωτη Περιγραφή στα Μοντέλα Bianchi με Πλάγιο Ιδανικό Ρευστό

1. $\dot{n}_a = \omega_{ab} = 0$
   Έχει ήδη αποδειχθεί.

2. Οι ποσότητες Θ , E^{ab} , H^{ab} , μ , p , q^a , π^{ab} δεν εξαρτώνται από τις χωρικές συντεταγμένες αλλά μόνο από το χρόνο t.

   Απόδειξη. Για να αποδείξουμε την παραπάνω πρόταση πρέπει να λάβουμε υπόψιν τα εξής:

   - Δουλεύουμε με αναλλοίωτη τετράδα, άρα η παράγωγος Lie ως προς τα διανύσματα Killing, της μετρικής και των διανυσμάτων της βάσης είναι μηδέν:

   $$\begin{aligned} L_\xi g_{ij} &= L_\xi g_{ab} = 0 && (Α'.59) \\ L_\xi E_a{}^i &= 0 && (Α'.60) \end{aligned}$$

   - Η παράγωγος Lie ως προς τα διανύσματα Killing, του κάθετου διανύσματος **n** είναι μηδέν:

   $$L_\xi n_i = L_\xi n_a = 0 \qquad (Α'.61)$$

   (σχέσεις (Α΄.56), (Α΄.57), (Α΄.58)).Από τις (Α΄.59) και (Α΄.61) παίρνουμε ότι

   $$L_\xi h_{ab} = L_\xi (g_{ab} + n_a n_b) = 0 \qquad (Α'.62)$$

   - Η παράγωγος Lie ως προς τα διανύσματα Killing, των γάμμα του Christoffel (connection) και του τανυστή καμπυλότητας είναι μηδέν:

   $$\begin{aligned} L_\xi \Gamma^i{}_{jk} &= 0 && (Α'.63) \\ L_\xi R^i{}_{jkl} &= 0 && (Α'.64) \end{aligned}$$

(*βλέπε [36] σελ.8 θεώρημα 2.3 και σελ.17 σχέση (4.14)*). Από τη σχέση (Α΄.64) προκύπτουν επίσης τα εξής:

$$L_\xi R_{ij} = L_\xi R^k{}_{ikj} = 0 \tag{Α΄.65}$$

$$L_\xi R = L_\xi (g^{ij} R_{ij}) = 0 \tag{Α΄.66}$$

Οι (Α΄.64)-(Α΄.66) σε συνδυασμό με τις (Α΄.59),(2.28) και (2.35) αντίστοιχα, συνεπάγονται επίσης ότι:

$$L_\xi C_{ijkl} = 0 \tag{Α΄.67}$$

$$L_\xi G_{ij} = L_\xi \Big(R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} \Big) = 0 \tag{Α΄.68}$$

$$L_\xi T_{ij} = L_\xi (G_{ij} + \Lambda g_{ij}) = 0 \tag{Α΄.69}$$

(όπου $L_\xi \Lambda = \xi^i \Lambda_{,i} = 0$).
Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (Α΄.60) και (Α΄.64)-(Α΄.69) εύκολα αποδεικνύεται ότι οι Lie παράγωγοι ως προς τα διανύμστα Killing, των αντίστοιχων τετραδικών ποσοτήτων είναι επίσης μηδέν:

$$L_\xi R^a{}_{bcd} = 0 \tag{Α΄.70}$$

$$L_\xi R_{ab} = 0 \tag{Α΄.71}$$

$$L_\xi C_{abcd} = 0 \tag{Α΄.72}$$

$$L_\xi G_{ab} = 0 \tag{Α΄.73}$$

$$L_\xi T_{ab} = 0 \tag{Α΄.74}$$

- Η παράγωγος Lie ως προς τα διανύσματα Killing και η συναλλοίωτη παράγωγος μετατίθενται.(*βλέπε [36] σελ.16 θεώρημα 4.2*)

Προφανώς στις σχέσεις (Α΄.59)-(Α΄.69) και (Α΄.70)-(Α΄.74) μπορούμε να ανεβοκατεβάσουμε τους δείκτες.

Από τη σχέση (Α΄.62) έχουμε ότι

$$\Theta = n^a{}_{;a} \quad \Rightarrow \quad L_\xi \Theta = L_\xi (n^a{}_{;a}) = (L_\xi n^a)_{;a} = 0 \tag{Α΄.75}$$

λόγω της (Α΄.61).Όμως το Θ είναι βαθμωτό, άρα

$$L_\xi \Theta = \xi^i \Theta_{,i} \tag{Α΄.76}$$

Από τις (Α΄.75) και (Α΄.76) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \xi^i \Theta_{,i} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \xi^0 \Theta_{,0} + \xi^\alpha \Theta_{,\alpha} = 0 \\ &\Rightarrow \quad \xi^\alpha \Theta_{,\alpha} = 0 \end{aligned} \tag{Α΄.77}$$

Γράφοντας αυτή τη σχέση για κάθε ένα από τα τρία γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα Killing $\xi_{(r)}$, $r = 1, 2, 3$ καταλήγουμε σε ένα γραμμικό και ομογενές σύστημα του οποίου η ορίζουσα $|\xi^{\alpha}_{(r)}|$ είναι διάφορη του μηδενός λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των διανυσμάτων Killing.Επομένως το σύστημα αυτό έχει μοναδική λύση:

$$\Theta_{,\alpha} = 0 \Leftrightarrow \Theta = \Theta(t) \tag{Α΄.78}$$

Από την ανάλυση του τανυστή ορμής - ενέργειας (σελ.) έχουμε ότι

$$\mu = T_{ab} n^a n^b \tag{Α΄.79}$$

Επομένως με τη βοήθεια των σχέσεων (Α΄.61) και (Α΄.74) η (Α΄.79) μας δίνει

$$L_\xi \mu = 0 \tag{Α΄.80}$$

όμως το μ είναι βαθμωτό, άρα

$$\begin{aligned} L_\xi \mu = \xi^i \mu_{,i} = \xi^\alpha \mu_{,\alpha} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \mu_{,\alpha} = 0 \\ &\Rightarrow \quad \mu = \mu(t) \end{aligned} \tag{Α΄.81}$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι:

$$p = p(t)\ ,\ q_a = q_a(t)\ ,\ \pi_{ab} = \pi_{ab}(t) \tag{Α΄.82}$$

Το ηλεκτρικό και το μαγνητικό μέρος του τανυστή Weyl ορίζονται από τις σχέσεις (2.30):

$$E_{ab} = C_{acbd} n^c n^d \tag{Α΄.83}$$

$$H_{ab} = \frac{1}{2} \eta_{ade} C^{de}{}_{bc} n^c \tag{Α΄.84}$$

Από την (Α΄.83) σε συνδυασμό με τις (Α΄.61) και (Α΄.72) προκύπτει ότι

$$L_\xi E_{ab} = 0 \tag{Α΄.85}$$

Όμως το H_{ab} είναι βαθμωτό ως προς τις συντεταγμένες, επομένως

$$\begin{aligned} L_\xi E_{ab} = \xi^\gamma E_{ab,\gamma} = 0 \quad &\Rightarrow \quad E_{ab,\gamma} = 0 \\ &\Rightarrow \quad E_{ab} = E_{ab}(t) \end{aligned} \tag{Α΄.86}$$

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι

$$H_{ab} = H_{ab}(t) \tag{Α΄.87}$$

□

3. Οι ποσότητες σ_{ab} , E_{ab} , H_{ab} , q_a , π_{ab} δεν έχουν συνιστώσες κατά την κάθετη στην υπερεπιφάνεια κατεύθυνση.

Απόδειξη. Από τη σχέση (5.69) παίρνουμε

$$\sigma_{ab} = \frac{1}{2} g_{ab,0} - \frac{1}{3} \Theta h_{ab} \tag{Α΄.88}$$

επομένως

$$\sigma_{a0} = \frac{1}{2} g_{a0,0} - \frac{1}{3} \Theta h_{a0} = 0 \tag{Α΄.89}$$

αφού $g_{a0,0} = h_{a0} = 0$.
Τα E_{ab} και H_{ab} ορίζονται από τις σχέσεις (2.30):

$$\begin{aligned} E_{ab} &= C_{acbd} n^c n^d = C_{acbd} \delta^c_0 \delta^d_0 = C_{a0b0} && (\text{Α΄.90}) \\ H_{ab} &= \frac{1}{2} \eta_{ade} C^{de}{}_{bc} n^c = \frac{1}{2} \eta_{ade} C^{de}{}_{bc} \delta^c_0 = \frac{1}{2} \eta_{ade} C^{de}{}_{b0} && (\text{Α΄.91}) \end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} E_{a0} &= C_{a000} = 0 && (\text{Α΄.92}) \\ H_{a0} &= \frac{1}{2} \eta_{ade} C^{de}{}_{00} = 0 && (\text{Α΄.93}) \end{aligned}$$

λόγω των συμμετριών του τανυστή Weyl ως προς τους δείκτες. Από την ανάλυση του τανυστή ορμής - ενέργειας έχουμε ότι

$$\begin{aligned} q_a &= -T_{bc} n^b h^c{}_a && (\text{Α΄.94}) \\ \pi_{ab} &= T_{cd} h^c{}_{<a} h^d{}_{b>} && (\text{Α΄.95}) \end{aligned}$$

Άρα, χρησιμοποιώντας και τον ορισμό (2.9) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} q_0 &= -T_{bc} n^b h^c{}_0 = 0 && (\text{Α΄.96}) \\ \pi_{a0} &= T_{cd} h^c{}_{<a} h^d{}_{0>} \\ &= T_{cd} \left\{ h_{(a}{}^e h_{0)}^f - \frac{1}{3} h_{a0} h^{ef} \right\} h^c{}_e h^d{}_f \\ &= 0 && (\text{Α΄.97}) \end{aligned}$$

αφού $h_{a0} = h^a{}_0 = 0$. □

4. Οι συνιστώσες των εξισώσεων εξέλιξης και δεσμών κατά την κάθετη στην υπερεπιφάνεια διεύθυνση είναι κενές πληροφορίας.

Απόδειξη. Η πρόταση αυτή αποδεικνύεται εύκολα χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (Α΄.89), (Α΄.92), (Α΄.93), (Α΄.96) και (Α΄.97).Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την εξίσωση διάσοσης της διάτμησης:

$$\dot{\sigma}^{<ab>}-\tilde{\nabla}^{<a}\dot{n}^{b>}=-\frac{2}{3}\Theta\sigma^{ab}+\dot{n}^{<a}\dot{n}^{b>}-\sigma^{<a}{}_{c}\sigma^{b>c}-\omega^{<a}\omega^{b>}-\left(E^{ab}-\frac{1}{2}\pi^{ab}\right) \tag{Α΄.98}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι

$$\dot{n}^{a}=\omega^{a}=0 \tag{Α΄.99}$$

η εξίσωση (Α΄.98) μας δίνει

$$\dot{\sigma}^{<a0>}=-\frac{2}{3}\Theta\sigma^{a0}-\sigma^{<a}{}_{c}\sigma^{0>c}-\left(E^{a0}-\frac{1}{2}\pi^{a0}\right) \tag{Α΄.100}$$

Έχουμε αποδείξει (σχέσεις (Α΄.89), (Α΄.92), (Α΄.97)) ότι $\sigma^{a0}=E^{a0}=\pi^{a0}=0$.Επίσης χρησιμοποιώντας τον ορισμό (2.9) βρίσκουμε ότι

$$\dot{\sigma}^{<a0>} = \left\{h^{(a}{}_{c}h^{0)}{}_{d}-\frac{1}{3}h^{a0}h_{cd}\right\}\dot{\sigma}^{cd}=0 \tag{Α΄.101}$$

$$\sigma^{<a}{}_{c}\sigma^{0>c} = \left\{h^{(a}{}_{d}h^{0)}{}_{e}-\frac{1}{3}h^{a0}h_{de}\right\}\sigma^{<d}{}_{c}\sigma^{e>c}=0 \tag{Α΄.102}$$

αφού $h_{a0}=h^{0}{}_{a}=0$.
Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (Α΄.89), (Α΄.92), (Α΄.97), (Α΄.101) και (Α΄.102) προκύπτει ότι η εξίσωση (Α΄.100) μηδενίζεται ταυτοτικά.Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και για τις υπόλοιπες εξισώσεις εξέλιξης και δεσμών ότι οι συνιστώσες τους κατά την κάθετη στην υπερεπιφάνεια διεύθυνση μηδενίζονται ταυτοτικά και κατά συνέπεια είναι κενές πληροφορίας. □

Α΄.3 Αποδείξεις Κεφαλαίου 7

Απόδειξη της Εξίσωσης Friedmann

Η σχέση (7.16) είναι ισοδύναμη με την:

$$3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^{\cdot}+3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^{2}=-\frac{3}{2}(\mu+p)+\mu+\Lambda \tag{Α΄.103}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (Α΄.103) με $(\dot{a}/a)$ παίρνουμε

$$3\left\{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^{2}\right\}^{\cdot}+3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^{3}=-\frac{3}{2}(\mu+p)\frac{\dot{a}}{a}+\mu\frac{\dot{a}}{a}+\Lambda\frac{\dot{a}}{a} \tag{Α΄.104}$$

η οποία, με τη βοήθεια της (7.17), γίνεται

$$3\left\{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right\}^{\cdot} + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^3 = \frac{1}{2}\dot{\mu} + \mu\frac{\dot{a}}{a} + \Lambda\frac{\dot{a}}{a} \tag{Α΄.105}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (Α΄.105) με a^2 τελικά προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2}a^2\left\{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right\}^{\cdot} + 3\frac{\dot{a}^3}{a} = \frac{1}{2}(a^2\mu + a^2\Lambda)^{\cdot} \\ \Rightarrow\ & \frac{3}{2}\left\{a^2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right\}^{\cdot} = \frac{1}{2}(a^2\mu + a^2\Lambda)^{\cdot} \\ \Rightarrow\ & 3(\dot{a}^2)^{\cdot} = (a^2\mu + a^2\Lambda)^{\cdot} \end{aligned} \tag{Α΄.106}$$

από την οποία με ολοκλήρωση παίρνουμε την εξίσωση Friedmann

$$3\dot{a}^2 = a^2\mu + a^2\Lambda - 3k \Leftrightarrow 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \mu - \frac{3k}{a^2} + \Lambda \tag{Α΄.107}$$

Βιβλιογραφία

[1] Belinskii V.A., Khalatnikov I.M. and Lipshitz E.M., *A general solution of the Einstein equations with a time singularity*, Advances in Physics, Vol.31, No.6, p.639-667, 1982

[2] Bianchi L., *On the three-dimensional spaces which admit a continuous group of motions*, Golden Oldie 18, translated by Robert Jantzen, Original Title: *Sugli spazi a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti*, Memorie di Mathematica e di Fisica della Societa Italianna delle Scienze, Serie Terza, Tomo IX, p.267-352, 1898

[3] Bonnor W.B. and Vickers P.A., *Junction Conditions in General Relativity*, General Relativity and Gravitation, Vol.13, No.1, 1981

[4] Christodoulakis T., Kofinas G., Korfiatis E., Papadopoulos G.O. and Paschos A., *Time-independent Automorphism Including Diffeomorphisms in Vacuum Bianchi Cosmologies and the Complete Closed Form Solutions For Type II and V*, Journal of Mathematical Physics, Vol.42, p.3580, 2001, e-print: arXiv:gr-qc/0008050v5 22 May 2001

[5] Cushing J.T., *Φιλισοφικές Έννοιες στη Φυσική-η ιστορική σχέση μεταξύ φιλοσοφίας και επιστημονικών θεωριών*, Εκδόσεις Leader Books, Αθήνα, 2003

[6] D'Inverno R., *Introducing Einstein's Relativity*, Clarendon Press, Oxford, 1999

[7] Dodelson S., *Modern Cosmology*, Academic Press, 2003

[8] Eisenhart L.P., *Riemannian Geometry*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1997 (eighth printing)

[9] Ellis G.F.R., *Issues in the Philosophy of Cosmology*, e-print: arXiv:astro-ph/0602280v2 29 Mar 2006

[10] Ellis G.F.R., *The Bianchi Models:Then and Now*, General Relativity and Geavitation, Vol.38, No.6, p.1003-1015, 2006

[11] Ellis G.F.R., *Alternatives to the Big-Bang*, Annual review of astronomy and astrophysics, Vol.22, p.157-184, 1984

[12] Ellis G.F.R., *On the Raychaudhuri Equation*, Pramana-journal of physics, Vol.69, No.1, p.15-22, July 2007

[13] Ellis G.F.R., Maartens R. amd MacCallum M.A.H., *Causality and the speed of sound*, General Relativity and Gravitation, Vol.39, p.1651-1660, 2007

[14] Ellis G.F.R. and MacCallum M.A.H., *A Class of Homogeneous Cosmological Models*, Communications in Mathematical Physics, Vol.12, p.108-141, 1969

[15] Ellis G.F.R. and van Elst H., *Cosmological Models*, in Cargese Lectures, 1998, e-print: arXiv:gr-qc/9812046v4 8 Feb 2000

[16] Estabrook F.B., Wahlquist H.D. and Behr C.G., *Dyadic Analysis of Spatially Homogeneous World Models*, Journal of Mathematical Physics, Vol.9, No.4, April 1968

[17] Hawking S.W. and Ellis G.F.R., *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, Cambridge, 1980

[18] King A.R. and Ellis G.F.R., *Tilted Homogeneous Cosmological Models*, Communications in Mathematical Physics, Vol.31, p.209-242, 1973

[19] Krasinski A., Behr C.G., Schucking E., Estabrook F.B., Wahlquist H.D., Ellis G.F.R., Jantzen R. and Kundt W., *The Bianchi Classification in the Schucking-Behr Approach*, General Relativity and Gravitation, Vol.35, No.3, March 2003

[20] Lesgourgues J., *An Overview of Cosmology*, e-print: arXiv:astro-ph/0409426v1 17 Sep 2004

[21] Lin X.F. and Wald R.M., *Proof of the closed-universe recollapse conjecture for diagonal Bianchi type-IX cosmologies*, Physical Review D, Vol.40, No.10, 15 Nov 1989

[22] Lin X.F. and Wald R.M., *Proof of the cloded-universe recollapse conjecture for genereal Bianchi type-IX cosmologies*, Physical Review D, Vol.41, No.8, 15 April 1990

[23] Raychaudhuri A., *Relativistic Cosmology I*, Physical Review, Vol.98, No.4, 1955

[24] Robson E.H., *Junction conditions in general relativity theory*, Annales de l'I.H.P., section A, tome 16, No.1, p.41-50, 1972

[25] Ryan M.P. and Shepley L.C., *Homogeneous Relativistic Cosmologies*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1975

[26] Ryden B., *Introduction to Cosmology*, Adisson Wesley, 2003

[27] Stephani H., *General Relativity-an introduction to the theory of the gravitational field*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990 (2nd english edition)

[28] Stephani H., Kramer D., MacCallum M., Hoenselaers C. and Herlt E., *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*, Cambridge University Press, 2003 (2nd edition)

[29] Spivak M., *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμόσ-μία εισαγωγή στην ανάλυση*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2000 (6η έκδοση)

[30] Synge J.L., *Relativity:The General Theory*, North-Holland Publishing Company, 1979, (fifth printing)

[31] Ullrich P., *Exact and Perturbed Friedmann-Lemaitre Cosmologies*, Master Thesis, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada 2007

[32] van Elst H., *Extensions and Applications of 1+3 Decomposition Methods in General Relativistic Cosmological Modelling*, PhD Thesis, University of London, 1996

[33] van Elst H. and Uggla C., *General relativistic orthonormal frame approach*, Classical and Quantum Gravity, Vol.14, p.2673-2695, 1997

[34] Wainwright J. and Ellis G.F.R., *Dynamical Systems in Cosmology*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997

[35] Weinberg S., *Gravitation and Cosmology:Principles and Applications of the General Relativity Theory*, John Willey and Sons Inc., New York, 1972

[36] Yano K., *The Theory ofLie Derivatives and its Applications*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1955