ΜΑΘΗΜΑΤΑ
ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ
ΛΟΓΙΣΜΟΥ,

ΕΡΑΝΙΣΘΕΝΤΑ

ΥΠΟ

ΤΟΥ ΑΝΤΙΣΥΝΤΑΓΜΑΤΑΡΧΟΥ ΤΟΥ ΠΥΡΟΒΟΛΙΚΟΥ

ΜΙΧΑΗΛ ΣΟΦΙΑΝΟΥ,

ΑΡΧΑΙΟΥ ΜΑΘΗΤΟΥ ΤΗΣ ΣΤΡΑΤΙΩΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΕΥΕΛΠΙΔΩΝ
ΣΧΟΛΗΣ, ΝΥΝ ΔΕ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΝ ΤΗι ΑΥΤΗι ΣΧΟΛΗι,

Πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν αὐτοῦ.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ,

ΕΚ ΤΟΥ ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΥ Κ. ΑΝΤΩΝΙΑΔΟΥ,

ΑΠΕΝΑΝΤΙ ΤΗΣ ΡΩΜΒΗΣ, ΑΡΙΘ. 177.

1858.

ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ.

Α'. ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΣΥΝΕΚΘΕΣΕΩΝ ΕΝ ΓΕΝΕΙ. — ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΟΜΕΝΩΝ ΣΥΝΕΚΘΕΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ.

1. Ἡ ἀλγεβρικὴ ἀνάλυσις θεωρεῖ σχέσεις ὑπαρχούσας, καὶ δι' ἐξισώσεων ἐκτιθεμένας, μεταξὺ ποσοτήτων *γνωστῶν* καὶ ποσοτήτων *ἀγνώστων*. Κύριον αὐτῆς ἀντικείμενον εἶναι ἡ εὕρεσις τῶν ὡρισμένων τιμῶν τῶν ἀγνώστων, ἐπαληθευουσῶν ἐξισώσεις δεδομένας. Ἐν γένει, ἑκάστη ἄγνωστος λαμβάνει τόσας τιμὰς ὅσας μονάδας περιέχει ὁ βαθμὸς τῶν ἐξισώσεων· ἀλλ' αἱ τιμαὶ αὗται εἰσὶν ἀείποτε ποσὰ ὡρισμένα, πραγματικὰ ἢ φανταστικά.

Ἡ δὲ διαφορικὴ καὶ ὁλοκληρωτικὴ ἀνάλυσις, καὶ ἅπαντες οἱ ἀπὸ ταύτης ἐξαρτώμενοι κλάδοι τῶν μαθηματικῶν, θεωροῦσι σχέσεις ὑπαρχούσας μεταξὺ ποσοτήτων *ἀμεταβλήτων*, ἤτοι ὧν ἡ τιμὴ διαμένει ἀείποτε ἡ αὐτή, καὶ ποσοτήτων *μεταβλητῶν*, ἤτοι ὧν ἡ τιμὴ μεταβάλλεται ὁπωσδήποτε. Αἱ σχέσεις αὗται δηλοῦνται ἀείποτε ἢ ἐκλαμβάνονται ὡς δηλούμεναι ὑπὸ ἐξισώσεων. Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς τῶν μεταβλητῶν ποσῶν μείζων εἶναι τοῦ τῶν ἐξισώσεων, τὰ ποσὰ ταῦτα λαμβάνουσιν ἀπειρίαν τιμῶν διαφόρων, ὑποκειμένων τῷ μόνῳ ὅρῳ τοῦ ἐπαληθεύειν τὰς δοθείσας ἐξισώσεις.

2. Τεθείσθω ὅτι πρόκειται περὶ ζητήματος συγκροτουμένου ἐκ ν ἐξισώσεων περιεκτικῶν μ μεταβλητῶν· τοῦ ἀριθμοῦ μ ὄντος μείζονος τοῦ ν. Ἐπειδὴ ν ἐξισώσεις ἰσαρίθμους ἀγνώστους ὁρίζουσι, μενοῦσι μ—ν μεταβληταὶ ὧν αἱ τιμαὶ εἰσὶ κατ᾽ ἀρέσκειαν. Ἀλλ᾽ ἅπαξ ὁρισθεισῶν τῶν τελευταίων τιμῶν τούτων, αἱ τῶν λοιπῶν ν μεταβλητῶν ἔσονται ἐντελῶς ὡρισμέναι. Τοῦτο δ᾽ ἐκφράζομεν λέγοντες ὅτι, αἱ τελευταῖαι αὗται μεταβληταὶ εἰσὶ *συνεκθέσεις* τῶν πρώτων. Ἐν γένει, ἐν ἑκάστῃ προτάσει διακρίνονται· 1ον· *αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταί*, αἵτινες λαμβάνουσι παντοίας τιμάς· 2ον· αἱ μεταβληταὶ ὧν αἱ τιμαὶ εἰσὶν ὡρισμέναι, ὅταν ληφθῶσιν αἱ τῶν πρώτων ὧν εἰσὶ *συνεκθέσεις*. Ἡ ἐκλογὴ τῶν μεταβλητῶν αἵτινες ἔσονται ἀνεξάρτητοι, εἶναι κατὰ βούλησιν· ἀλλ᾽ οἱ κανόνες τοῦ λογισμοῦ, ἅπαξ γινομένης τῆς ἐκλογῆς ταύτης, οὐδεμίαν ἐπιτρέπουσιν ἀλλοίωσιν ὡς πρὸς τὸ ἀντικείμενον τοῦτο κατὰ τὴν σειρὰν τῶν ἐργασιῶν, ἢ τουλάχιστον πρὸς τοιαύτην ἀλλοίωσιν ἀπαιτοῦνται μετασχηματισμοὶ ἰδιαίτεροι.

Θεωρήσωμεν δύο μεταβλητὰς x, ψ, συνδεομένας μιᾷ ἐξισώσει. Ἡ τιμὴ τῆς ἑτέρας αὐτῶν, τῆς x, δύναται εἶναι ἡ τυχοῦσα· ἀλλὰ τῇ κατ᾽ ἀρέσκειαν τιμῇ ταύτῃ συστοιχεῖ ἀείποτε τιμή τις ὡρισμένη τῆς ψ. Λοιπὸν, x ἔσεται ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ, καὶ ψ συνέκθεσις τῆς x.

Ὅταν ἔχωμεν τρεῖς μεταβλητὰς x, ψ, ω, μίαν δ᾽ ἐξίσωσιν συνδέουσαν αὐτὰς, θεωροῦμεν δύο, τὰς x, ψ, ὡς ἀνεξαρτήτους· τότε ω ἔσεται συνέκθεσις τῶν x καὶ ψ. Ὑπαρχουσῶν ὅμως δύο ἐξισώσεων περιεκτικῶν x, ψ, ω, μόνη x ἔσεται ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ, αἱ δὲ ψ, ω, ἑκάστη συνέκθεσις τῆς x. Καὶ οὕτω καθεξῆς.

3. Δηλοῦμεν ὅτι ποσότης τις ψ εἶναι συνέκθεσις ἑτέρας x, γράφοντες,

$$\psi = \Sigma(x), \quad \text{ἢ} \quad \psi = \sigma(x), \quad \text{κ. τ. ἑ.}$$

ἐννοοῦμεν δὲ ὅτι ψ λαμβάνει τιμὴν ὡρισμένην ὅταν δοθῇ τῇ x τιμὴ οἱαδήποτε.

Ὅταν ω ἦναι συνέκθεσις δύο μεταβλητῶν x, ψ, γράφομεν·

$$\omega = \Sigma(x, \psi), \quad \text{ἢ} \quad \omega = \sigma(x, \psi), \quad \text{κ. τ. ἑ.}$$

Πᾶσα ἔκθεσις ἀναλυτικὴ συγκροτουμένη ὁπωσδήποτε ἐκ ποσοτήτων μεταβλητῶν, x, ψ, ω, καὶ ἐκ ποσοτήτων ἀτρέπτων, δηλοῦται οὕτω·

$$\Sigma(x, \psi, \omega) = 0, \quad \text{ἢ} \quad \sigma(x, \psi, \omega) = 0, \quad \text{κ. τ. ἑ.}$$

Ὅταν δὲ ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἐπιλυθῇ πρὸς ω, λαμβάνει τὴν προηγουμένην μορφήν.

4. Ἔστω δοθεῖσα ἡ σχέσις

$$\psi = \Sigma(x).$$

Ὑποθέσωμεν ὅτι δίδομεν τῇ ἀνεξαρτήτῳ μεταβλητῇ x πᾶσαν τιμὴν ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $+\infty$. Ἑκάστῃ τῶν τιμῶν τούτων συστοιχεῖ τιμή τις τῆς συνεκθέσεως ψ. Ἡ Γεωμετρία δίδει τὸ μέσον τοῦ παριστάνειν τὴν διαδοχὴν τῶν τιμῶν τούτων. Θεωρητέον x ὡς τετμημένην, λογιζομένην ἀπὸ ἀρχῆς μονίμου ἐπί τινος ἄξονος, καὶ ψ ὡς τὴν ἀντιστοιχοῦσαν τεταγμένην, λογιζομένην ἐπὶ ἄξονος πρὸς ὀρθὰς τῷ πρώτῳ (Σχ. 1). Αἱ τιμαὶ τῆς ψ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι ταῖς τιμαῖς τῆς x, ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξισώσει, ἀνήκουσιν εἰς γραμμὴν MN, ἧς ἡ μορφὴ παρίστησι τὴν πρόοδον τῶν περὶ ὧν ὁ λόγος τιμῶν. Ἀπαιτεῖται νὰ φανταζώμεθα ἀείποτε τὸ σύνολον τῶν συστοίχων τιμῶν τῶν δύο τούτων μεταβλητῶν, οὐχὶ δὲ τὴν δεῖνα ἰδιαιτέραν τιμὴν τῆς x σὺν τῇ συστοίχῳ τιμῇ τῆς ψ.

5. Ἐκ τῶν ἰδιωμάτων ἅτινα παρουσιάζει ἡ συνέκθεσις $\psi = \Sigma(x)$, ἢ ἡ ταύτην ἐμφαίνουσα γραμμὴ, τὸ μᾶλλον ἄξιον παρατηρήσεως, ὅπερ εἶναι καὶ τὸ κύριον ἀντικείμενον ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ἢ ΤΟΥ ΤΩΝ ΑΠΕΙΡΟΣΤΩΝ ΛΟΓΙΣΜΟΥ, καὶ οὗτινος ἡ θεωρία ἐμφιλοχωρεῖ εἰς ἁπάσας τοῦ λογισμοῦ τούτου τὰς ἐφαρμογὰς εἰς τὴν Φυσικὴν καὶ τὰς τέχνας, εἶναι ὁ βαθμὸς τῆς ταχύτητος μεθ᾽ οὗ ἡ συνέκθεσις μεταβάλλεται, μεταβαλλομένης τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς. Ὁ βαθμὸς οὗτος

τῆς ταχύτητος τῆς αὐξήσεως τῆς συνεκθέσεως, ὅταν αὐξάνῃ ἡ μεταβλητή, δυνατὸν νὰ διαφέρῃ οὐχὶ μόνον ἀφ' ἑτέρας εἰς ἑτέραν συνέκθεσιν, ἀλλὰ καὶ ἐν τῇ αὐτῇ συνεκθέσει, κατὰ τὴν ἀποδιδομένην τιμὴν τῇ μεταβλητῇ, ἀφ' ἧς ὑποτίθεται ἀρχομένη ἡ αὔξησις τῆς τελευταίας ταύτης. Ὅπως λάβωμεν ἀκριβῆ γνῶσιν τοῦ ἀντικειμένου τούτου, δώσωμεν τῇ x τιμὴν ὡρισμένην ΑΠ, ἐφ' ἣν ἀντιστοιχεῖ τιμὴ ἐπίσης ὡρισμένη $\psi = \Sigma(x)$, ἡ ΠΜ. Ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι x αὐξάνει ἀπὸ τῆς τιμῆς ταύτης κατὰ ποσὸν οἱονδήποτε ΠΚ, ὃ καλέσομεν Δx. Ἡ συνέκθεσις ψ μεταβληθήσεται, κατὰ συνέπειαν, κατὰ ποσὸν ὃ δηλώσωμεν $\Delta\psi$. Οὕτως ἕξομεν·

$$\psi + \Delta\psi = \Sigma(x + \Delta x), \quad \text{ἢ} \quad \Delta\psi = \Sigma(x + \Delta x) - \Sigma(x).$$

ΝΚ παριστᾷ ἐπὶ τοῦ σχήματος τὴν νέαν τιμὴν τῆς συνεκθέσεως ψ, καὶ ΝΡ τὴν $\Delta\psi$, ἤτοι τὴν μεταβολὴν ἣν λαμβάνει ἡ συνέκθεσις αὕτη. Τὸν λόγον $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}$ τῆς αὐξήσεως τῆς συνεκθέσεως πρὸς τὴν αὔξησιν τῆς μεταβλητῆς, οὗτινος ἡ ἔκθεσις εἶναι

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \frac{\Sigma(x + \Delta x) - \Sigma(x)}{\Delta x},$$

ἐμφαίνει ἡ τριγωνομετρικὴ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας ΝΜΡ, ὑπὸ τῆς τεμνούσης ΜΝ καὶ τοῦ ἄξονος τῶν x περιεχομένης.

6. Δῆλον ὅτι, ὁ λόγος $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}$ εἶναι ἡ φυσικὴ ἔκφρασις τοῦ ἰδιώματος περὶ οὗ ὡμιλήσαμεν· ἤτοι τοῦ βαθμοῦ τῆς ταχύτητος μεθ' οὗ ἡ συνέκθεσις ψ αὐξάνει, αὐξανομένης τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x. Διότι, ὅσον μείζων ἔσεται ἡ τιμὴ τοῦ λόγου τούτου, τοσοῦτον μείζων ἔσεται καὶ ἡ αὔξησις τῆς συνεκθέσεως, γινομένη συνεπείᾳ τῆς κατὰ τὸ δοθὲν μέγεθος Δx αὐξήσεως τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς. Παρατηρητέον ὅμως ὅτι, ἡ τιμὴ τοῦ λόγου $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}$ (ἐξαιρέσει μόνης τῆς περιπτώσεως καθ' ἣν ἡ γραμμὴ ΜΝ εἶναι εὐθεῖα) ἐξαρτᾶται, οὐχὶ μόνον ἀπὸ τῆς διδομένης τιμῆς τῇ x, ἤτοι ἀπὸ τοῦ σημείου Μ ἐπὶ τῆς καμπύλης λαμβανομένου, ἀλλὰ προσέτι ἀπὸ τοῦ ἀπολύτου μεγέθους τοῦ τῇ αὐξήσει Δx διδομένου. Εἰ ἡ αὔξησις αὕτη ἔμενε κατὰ βούλησιν, ἀδύνατον ἦτο νὰ ὁρισθῇ ἀκριβῶς τιμὴ τῷ περὶ οὗ πρόκειται λόγῳ $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}$. Ἄρα, ἀπολύτως ἀναγκαῖον εἶναι νὰ παραδεχθῶμεν ὅρον τινὰ ἀφαιροῦντα πᾶσαν ἐπὶ τοῦ ἀντικειμένου τούτου ἀβεβαιότητα.

Ὑποθέσωμεν ὅτι, δώσαντες τῇ Δx τιμὴν τὴν τυχοῦσαν, ἐφ' ἣν ἀντιστοιχεῖ τιμή τις τῆς $\Delta\psi$, καί τις διεύθυνσις τῆς τεμνούσης ΜΝ, μειοῦμεν κατὰ μικρὸν τὴν τιμὴν τῆς Δx ὅπως ἡ αὔξησις αὕτη καταντήσῃ ἐπὶ τέλους ἴση μηδενί. Ἡ ἀντιστοιχοῦσα αὔξησις $\Delta\psi$ ἀλλοιοῦται κατὰ συνέπειαν, καὶ τείνει ἐπίσης, ἐν γένει, πρὸς τὸ κατασταθῆναι ἴση μηδενί. Τὸ σημεῖον Ν τείνει πρὸς τὸ ταυτισθῆναι τῷ Μ, ἡ δὲ τέμνουσα ΜΝ πρὸς τὸ ταυτισθῆναι τῇ ἐφαπτομένῃ ΜΤ τῆς καμπύλης τῇ ἀγομένῃ κατὰ τὸ σημεῖον Μ. Ἐπίσης ὁ λόγος $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}$ τῶν δύο αὐξήσεων προσεγγίζει πρός τι ὅριον ὃ ἐμφαίνει ἡ τριγωνομετρικὴ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας ΤΜΡ, ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης ΜΤ καὶ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων περιεχομένης.

7. Αἱ αὐταὶ παρατηρήσεις χωροῦσι καὶ ὅταν ἡ μεταβολὴ Δx ἦναι ἀρνητικὴ ἐλαττοῦσα τὴν τετμημένην ἀντὶ ν' αὐξάνῃ αὐτήν. Καθ' ὅσον ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῆς μεταβολῆς ταύτης ὑποτίθεται ἐλάσσων καὶ μᾶλλον προσεγγίζουσα τῷ μηδενί, ἡ ἀντιστοιχοῦσα μεταβολὴ $\Delta\psi$ τῆς τεταγμένης ἐπίσης προσεγγίζει τῷ μηδενί. Ἡ ζευγνύουσα τέμνουσα τὰ δύο σημεῖα τῆς καμπύλης, ἀντιστοιχοῦντα ἐπὶ τὰς τετμημένας x καὶ $x + \Delta x$, τείνει ἀδιακόπως πρὸς τὸ ταυτισθῆναι τῇ ἀγομένῃ ἐφαπτομένῃ κατὰ τὸ ἐπὶ τὴν τετμημένην x σημεῖον Μ. Τέλος, ἡ τιμὴ τοῦ λόγου $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}$ ἀμφοτέ-

ρων τῶν μεταβολῶν προσεγγίσει ἐπ' ἄπειρον τῷ ὁρίῳ περὶ οὗ ἀνωτέρω ὡμιλήσαμεν· ἤτοι, τῇ τριγωνομετρικῇ ἐφαπτομένῃ τῆς γωνίας, ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης καὶ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων περιεχομένης.

8. Βλέπομεν ὅτι, ὅταν ἡ αὔξησις Δx, καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ ἀντιστοιχοῦσα αὔξησις Δψ, μειοῦνται βαθμηδὸν τείνουσαι πρὸς τὸ ἰσωθῆναι μηδενί, ὁ λόγος $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}$ τῶν αὐξήσεων τούτων προσεγγίζει ἐν γένει ὁρίῳ, οὗτινος ἡ τιμὴ εἶναι πεπερασμένη καὶ ὡρισμένη (*). Ἄρα, τὴν τῷ ὁρίῳ τούτῳ ἀντιστοιχοῦσαν τιμὴν τοῦ λόγου $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}$, θεωρητέον ὡς διδοῦσαν τὸ ἀληθὲς καὶ ἀκριβὲς μέτρον τῆς ἰδιότητος περὶ ἧς λόγος ἐν § 5· ἤτοι τῆς ταχύτητος μεθ' ἧς ἡ συνέκθεσις μεταβάλλεται, μεταβαλλομένης τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς· διότι ἐν τῇ ἐκθέσει τῆς τιμῆς ταύτης, οὐδὲν μένει κατ' ἀρέσκειαν· δὲν ἐξαρτᾶται πλέον αὕτη ἀπὸ τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν αὐξήσεων Δx καὶ Δψ, οὔτε ἀπὸ τοῦ σχήματος τῆς καμπύλης ἐν ἀποστάσει πεπερασμένῃ ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου Μ. Ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τῆς *διευθύνσεως* τῆς καμπύλης κατὰ τὸ σημεῖον τοῦτο· ἤτοι, ἐκ τῆς κλίσεως τῆς ἐφαπτομένης ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν τετμημένων. Ὁ λόγος, οὕτως ὁριζόμενος, ἐκφράζει ὅπερ ὁ ΝΕΥΤΩΝ ὠνόμαζε *ῥοὴν* τῆς τεταγμένης. Ὅσον ἀφορᾷ τὸν τρόπον τοῦ εὑρίσκειν, ἐν ἑκάστῃ μερικῇ περιπτώσει, τὴν τιμὴν αὐτοῦ, φανερὸν ὅτι ἀρκεῖ θεωρῆσαι τὴν γενικὴν ἔκθεσιν

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \frac{\Sigma(x+\Delta x)-\Sigma(x)}{\Delta x},$$

(*) Ποσὸν λέγεται ὅριον ἑτέρου ποσοῦ, ὅταν τὸ τελευταῖον τοῦτο δύναται προσεγγίσαι τῷ πρώτῳ μεχρισοῦ ἡ ἀπ' ἀλλήλων διαφορὰ εἴη ὅσον βουλόμεθα ἐλαχίστη, χωρὶς ὅμως νὰ κατασταθῶσιν ἀκριβῶς ἴσα τὰ ποσὰ ταῦτα. Οὕτω, τὸ ὅριον συνεκθέσεώς τινος εἶναι ἡ τιμὴ πρὸς ἣν προσχωρεῖ ἡ συνέκθεσις αὕτη καθ' ὅσον ἡ μεταβλητὴ ἀφ' ἧς ἐξαρτᾶται προσχωρεῖ καὶ αὕτη πρός τινα τιμὴν ὡρισμένην. Δῆλον δὲ ὅτι ἡ αὐτὴ ποσότης ἀδύνατον νὰ τείνῃ συγχρόνως πρὸς δύο ὅρια ἄνισα.

ζητῆσαι δὲ τὸ ὅριον ᾧ αὕτη προσεγγίζει καθ' ὅσον Δx λαμβάνει τιμὰς μᾶλλον καὶ μᾶλλον ἐλάσσονας, τείνουσα πρὸς τὸ κατασταθῆναι ἴση μηδενί. Τὸ ὅριον τοῦτο ἔσεται συνέκθεσίς τις τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, τῆς δὲ συνεκθέσεως ταύτης ἡ φύσις ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν τῆς δοθείσης Σ(x).

9. Ἀναγκαῖον διακρῖναι τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν οὕτω θεωροῦμεν τὴν αὔξησιν Δx τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς ὡς προσεγγίζουσαν ἐπ' ἄπειρον τῷ μηδενί, ἢ ἔχουσαν τιμὴν ἀόριστον ἐλάσσονα παντὸς ἀριθμοῦ δεδομένου. Ἡ αὔξησις αὕτη καλεῖται τότε *ἀπειροστὸν* ἢ *ἀπειροστημόριον*. Ἡ ἀντιστοιχοῦσα αὔξησις Δψ τότε ἔχει ἐπίσης ἐν γένει τιμὴν ἐλάσσονα παντὸς ἀριθμοῦ δεδομένου, ἢ ἀπειροστημόριον, ἧς ὁ λόγος πρὸς Δx εἶναι ὡρισμένος. Τὸν λόγον τοῦτον θεωρητέον ὡς ἐπ' ἄπειρον προσεγγίζοντα τῷ ὁρίῳ περὶ οὗ εἴπομεν ἀνωτέρω, ἢ ὡς διαφέροντα αὐτοῦ κατὰ ποσὸν ἔλαττον παντὸς ἀριθμοῦ δεδομένου.

Ἐπειδὴ ἡ θεωρία τοῦ περὶ οὗ λόγος ὁρίου ἐστὶν οὐσιωδεστάτη, οἱ Μαθηματικοὶ προσέταξαν αὐτῷ ὀνομασίας καὶ σημεῖα ἴδια. Αἱ μεταβολαὶ Δx, Δψ, καλοῦνται ἐν γένει *αἱ διαφοραὶ* τῆς μεταβλητῆς x καὶ τῆς συνεκθέσεως ψ· διότι, Δx θεωρεῖται ὡς ἡ διαφορὰ δύο διαδοχικῶν τιμῶν τῆς x, καὶ Δψ ὡς ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν τῆς ψ. Ὅταν δὲ Δx καὶ Δψ ὑποτεθῶσιν ἀπειροστά, αἱ διαφοραὶ αὗται καλοῦνται ὑποκοριστικῶς *τὰ διαφορικὰ* τῶν μεταβλητῶν x καὶ ψ. Πρὸς διάκρισιν τῆς περιπτώσεως ταύτης, ποιοῦσι χρῆσιν, ἀντὶ τοῦ Δ, τὸ χαρακτηριστικὸν δ, γράφοντες δx καὶ δψ. Τὸ ὅριον πρὸς ὃ τείνει ὁ λόγος $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}$, καθ' ὅσον Δx ἧττον διαφέρει μηδενός, δηλοῦται ὑπὸ $\frac{\delta\psi}{\delta x}$.

Ἡ συνέκθεσις τῆς x, ἥτις δίδει τὴν τιμὴν τοῦ ὁρίου $\frac{\delta\psi}{\delta x}$, καλεῖται *συντελεστὴς διαφορικός*, ἢ κατὰ ΛΑΓΡΑΓΓΙΟΝ, *συνέκθεσις παραγομένη*· διότι παράγεται ἐκ τῆς ἀρχικῆς συνεκθέσεως $\Sigma(x)$, καὶ προκύπτει ἐξ αὐτῆς δι' ἐργασιῶν ὡρισμένων.

ΣΗΜ. Ὑπὸ τὴν τελευταίαν ταύτην ἔποψιν θεωρῶν τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος ὅριον, ὁ αὐτὸς Γεωμέτρης παριστᾷ τὴν παραγομένην συνέκθεσιν τῆς ψ ἢ $\Sigma(x)$, διὰ ψ' ἢ $\Sigma'(x)$· τῶν τοιούτων δὲ δηλώσεων συνεχῶς ποιοῦσι χρῆσιν οἱ Γεωμετροῦντες.

10. Παρατηρητέον ὅτι, τὸ ἀπόστημα NP, τὸ τὴν διαφορὰν $\Delta\psi$ ἐμφαῖνον, συντίθεται ἐκ δύο μερῶν, TP καὶ NT, ἀμφοτέρων τεινόντων πρὸς τὸ μηδενισθῆναι ὅταν Δx προσεγγίζῃ τῷ μηδενί. Ἐπειδὴ ἡ τριγωνομετρικὴ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας TMP εἶναι τὸ ὅριον τοῦ $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}$, ἢ $\frac{\delta\psi}{\delta x}$, ἔχομεν $TP = \frac{\delta\psi}{\delta x}\Delta x$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γραμμὴ NT μηδενίζεται συγχρόνως τῇ Δx, δύναται αὕτη δηλωθῆναι ἐν γένει ὑπὸ $\omega\Delta x$, ω δηλούσης συνέκθεσίν τινα τῶν x καὶ Δx. Λοιπὸν γράφομεν γενικῶς·

$$\Delta\psi = \left(\frac{\delta\psi}{\delta x} + \omega\right)\Delta x, \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \frac{\delta\psi}{\delta x} + \omega.$$

Ἐφ' ὅσον αἱ αὐξήσεις Δx, $\Delta\psi$, διατηρήσουσι τιμὰς ὑπαρχούσας, ὅσον βουλόμεθα σμικράς, ἡ ποσότης ω διατηρήσει καὶ αὕτη τιμὴν ὁμοίαν. Ἀλλ' ἐὰν θέσωμεν $\Delta x = 0$, ἔξομεν $\omega = 0$· διότι, τῇ ὑποθέσει ταύτῃ, ὁ λόγος $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}$ ἀποκαθίσταται ἴσος $\frac{\delta\psi}{\delta x}$.

Λοιπὸν, εἰ βουλόμεθα δηλῶσαι ὅτι θεωροῦμεν, οὐχὶ τὴν ἀληθῆ τιμὴν τοῦ λόγου $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}$, ἀλλὰ τὸ ὅριον πρὸς ὃ τείνει ἡ τιμὴ αὕτη, ὅταν Δx καὶ $\Delta\psi$ τείνωσι πρὸς τὸ κατασταθῆναι ἴσαι μηδενὶ, ὅπερ γίνεται, ὡς προείρηται, τῇ ἀντικαταστάσει δx ἀντὶ Δx καὶ $\delta\psi$ ἀντὶ $\Delta\psi$, ὑποθετέον ω μηδὲν καὶ γραπτέον ἁπλῶς $\delta\psi = \frac{\delta\psi}{\delta x}\delta x$. Τοῦτο ἐκφρά-

ζομεν λέγοντες ὅτι *τὸ ἀπειροστὸν, ἤτοι τὸ διαφορικὸν τῆς συνεκθέσεως* ψ *ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ διαφορικοῦ* δx *τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς ἐπὶ τὸ ὅριον* $\frac{\delta\psi}{\delta x}$ *τοῦ λόγου* $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}$ *τῶν συστοίχων διαφορῶν τῶν δύο μεταβλητῶν.* Τούτου ἕνεκα τὸ ὅριον τοῦτο $\frac{\delta\psi}{\delta x}$ καλεῖται *συντελεστὴς διαφορικός*.

11. Ἀνακεφαλαιοῦντες τὰς προεκτεθείσας γνώσεις καὶ θεωροῦντες συνέκθεσίν τινα ψ μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x, πρέπει νὰ φανταζώμεθα τὴν μεταβλητὴν x ὡς βαθμηδὸν αὐξάνουσαν ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $+\infty$, καὶ λαμβάνουσαν διαδοχικῶς τιμὰς ὧν ἑκάστη ὑπερβαίνει τὴν προηγουμένην κατὰ τὴν ποσότητα δx ὑποτιθεμένην ἀπειροστημόριον, ἤτοι ἐλάσσονα παντὸς μεγέθους δεδομένου. Τὴν ποσότητα ταύτην δx, δηλοῦσαν τὴν διαφορὰν δύο διαδοχικῶν τιμῶν τῆς x, ὑποθέτομεν κατ' ἀρέσκειαν ἄτρεπτον ἢ τρεπτὴν καθ' ἅπασαν τὴν ἔκτασιν τῆς σειρᾶς. Ἀλλὰ, προκειμένου λόγου περὶ μεταβλητῆς ἀνεξαρτήτου, ἁπλούστερον εἶναι καὶ σύμφωνον τῷ πνεύματι τοῦ τῶν ἀπειροστῶν λογισμοῦ, ὑποθέτειν τὸ διαφορικὸν δx ἄτρεπτον. Καθ' ὅσον οὕτω μεταβαίνομεν ἀπὸ τιμῆς α τῆς x εἰς ἑτέραν β, δι' ἀριθμοῦ ἀπείρου ὅρων ἐμμέσων διϊσταμένων κατὰ τὴν μόνιμον ἀπόστασιν δx, μεταβαίνομεν ἐπίσης ἀπὸ τῆς τιμῆς A τῆς συνεκθέσεως ψ, συστοιχούσης τῇ τιμῇ α τῆς x, εἰς τὴν τιμὴν B συστοιχοῦσαν τῇ β. Ἑκάστῃ αὐξήσει τῆς x κατὰ τὸ διαφορικὸν δx, ψ μεταβάλλεται κατὰ τὸ ἀντιστοιχοῦν διαφορικὸν $\delta\psi$, ὅπερ δυνατὸν εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν. Θεωροῦμεν τὸ διαφορικὸν δx, ὅπερ εἶναι κατ' ἀρέσκειαν, ὡς ἄτρεπτον, καὶ δίδομεν αὐτῷ ἀείποτε τὴν αὐτὴν τιμὴν, οἱαδήποτε εἶναι ἡ x. Ἀλλ' ὅταν x καὶ δx δοθῶσι, $\delta\psi$ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς φύσεως τῆς συνεκθέσεως. Τὸ τελευταῖον τοῦτο διαφορικὸν λαμβάνομεν ἀφοῦ ὁρίσωμεν, συνεκθέσει

τῆς μεταβλητῆς x, τὴν ἔκθεσιν τοῦ ὁρίου $\frac{\delta\psi}{\delta x}$ τοῦ λόγου $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}$· διότι ἔχομεν πάντοτε $\delta\psi = \frac{\delta\psi}{\delta x}\delta x$. Τὸ ὅριον τοῦτο $\frac{\delta\psi}{\delta x}$ ἐκφράζει καὶ μετρεῖ τὴν ταχύτητα μεθ' ἧς ἡ τιμὴ τῆς συνεκθέσεως μεταβάλλεται κατὰ τὰ διάφορα μέρη τῆς σειρᾶς αὐτῆς, καθ' ὅσον ἡ μεταβλητὴ μεταβάλλεται καὶ αὐτή.

12. Μίαν εἰσέτι προσθέσομεν ἐναργεστάτην παρατήρησιν. Τὰ ἀπειροστὰ δx καὶ δψ, περὶ ὧν λόγος ἀνωτέρω, δηλοῦσιν ἀείποτε ποσὰ τῆς αὐτῆς φύσεως πρὸς τὰ δηλούμενα ὑπὸ τῶν μεταβλητῶν x καὶ ψ. Οὕτως, ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ, ὅταν x ἐμφαίνῃ γραμμὴν, ἐπιφάνειαν, ἢ στερεὸν, ἐπίσης τὸ διαφορικὸν δx ἐμφαίνει γραμμὴν, ἐπιφάνειαν, ἢ στερεόν. Τὰ διαφορικὰ εἰσὶ ποσὰ ὑποτιθέμενα ἐλάσσονα παντὸς μεγέθους δεδομένου· ἀλλ' ἡ ὑπόθεσις αὕτη οὐδόλως ἀλλοιοῖ τὴν φύσιν αὐτῶν· δx καὶ δψ εἰσὶν ἀείποτε ὁμογενῆ πρὸς τὰς x καὶ ψ· ἤτοι δηλοῦσι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν διαστάσεων τῆς μονάδος δι' ἧς αἱ τιμαὶ τῶν μεταβλητῶν τούτων ἐκφράζονται.

Β'. ΠΕΡΙ ΔΙΑΦΟΡΙΣΕΩΣ ΤΩΝ ΑΠΛΩΝ ΣΥΝΕΚΘΕΣΕΩΝ ΕΚ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΣΥΓΚΡΟΤΟΥΜΕΝΩΝ.

13. *Διαφορίσαι* συνέκθεσίν τινα,

$$\psi = \Sigma(x),$$

σημαίνει τὸ ζητῆσαι τὴν ἔκθεσιν τοῦ διαφορικοῦ αὐτῆς δψ· ἤτοι τῆς ἀπειροστημορίου μεταβολῆς ἣν ἡ συνέκθεσις ψ λαμβάνει, ὅταν ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ x αὐξήσῃ κατὰ τὸ ἀπειροστὸν αὐτῆς δx. Κατὰ τὰ προαποδεδομένα, ἡ ἔρευνα αὕτη ἄγεται εἰς τὴν θεωρίαν τοῦ λόγου

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \frac{\Sigma(x+\Delta x)-\Sigma(x)}{\Delta x},$$

καὶ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ὁρίου $\frac{\delta\psi}{\delta x}$, ᾧ ὁ λόγος οὗτος προσεγγίζει ἐπ' ἄπειρον, καθ' ὅσον Δx προσεγγίζει εἰς τὸ κατασταθῆναι ἴση μηδενί. Ἔχομεν, τῷ ὄντι, διὰ τὸ ζητούμενον διαφορικὸν

$$\delta\psi = \frac{\delta\psi}{\delta x}\delta x.$$

14. Ἐν τῇ ἀναλύσει ὑπάρχουσιν ὀλίγαι τινες συνεκθέσεις ἁπλαῖ ἢ στοιχειώδεις, ἐν αἷς ἡ ἔκθεσις τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος ὁρίου ἀπαιτεῖ ἔρευναν εἰδικὴν, ἧς ἐκτελεσθείσης διὰ τὰς συνεκθέσεις ταύτας, πᾶσα ἑτέρα συνέκθεσις, ὑπὸ τῶν πρώτων ἀείποτε συγκεκροτημένη, οὐδεμίαν δυσκολίαν παρουσιάζει.

Αἱ ἁπλαῖ αὗται συνεκθέσεις, ἃς διαδοχικῶς θεωρήσωμεν, εἰσὶν αἱ ἑξῆς.

1ον. *Ἡ συνέκθεσις* x^{μ}· ἤτοι ἡ μεταβλητὴ ὑψουμένη εἰς δύναμιν δηλουμένην ὑπὸ τοῦ δείκτου μ, ἀριθμοῦ ὄντος οἱουδήποτε ἀτρέπτου, ἀκεραίου ἢ κλασματικοῦ, θετικοῦ ἢ ἀρνητικοῦ.

2ον. *Ἡ λογαριθμικὴ συνέκθεσις*, λογx. Γινώσκομεν ὅτι, διὰ λογx, ἐννοοῦμεν τὸν δείκτην τῆς δυνάμεως ἐν ᾗ πρέπει νὰ ὑψωθῇ ἀριθμὸς ἄτρεπτος, βάσις τοῦ συστήματος καλούμενος, ὅπως λάβωμεν τὸν ἀριθμὸν x. Ἄρα, α οὔσης τῆς βάσεως τοῦ συστήματος, ἔχομεν $\alpha^{\lambda o\gamma x} = x$. Ἐπομένως, σὺν τῇ συνεκθέσει λογx, ἀπαιτεῖται ἀείποτε ἡ γνῶσις τῆς βάσεως τοῦ συστήματος εἰς ὃ ὁ λογάριθμος ἀνήκει.

3ον. *Ἡ δεικτικὴ συνέκθεσις* α^{x}, ἐν ᾗ ἡ μεταβλητὴ εἶναι ὁ δείκτης τῆς δυνάμεως εἰς ἣν ἀριθμός τις ἄτρεπτος ὑψοῦται.

4ον. *Αἱ τριγωνομετρικαὶ συνεκθέσεις* ἡμx, συνx, ἐν αἷς x δηλοῖ τόξον τὸ τυχὸν λογιζόμενον ἀπὸ ἀρχῆς μονίμου ἐπὶ τῆς περιφερείας κύκλου, οὗτινος ἡ ἀκτὶς ἰσοῦται μονάδι.

1^{ov}. *Συνέκθεσις* $\psi = x^{\mu}$.

15. Ἁπλουστέρα περίπτωσις εἶναι ἐκείνη καθ' ἣν ὁ δείκτης μ εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος θετικός. Εὐκολώτατα τότε εὑρίσκομεν τὸ διαφορικὸν τῆς συνεκθέσεως ψ. Ὁ ἐν § 13 γενικὸς τύπος δίδει

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^{\mu} - x^{\mu}}{\Delta x}.$$

ἢ ἀναπτύσσοντες κατὰ τὸν τύπον τοῦ Νεύτωνος·

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \mu x^{\mu-1} + \frac{\mu(\mu-1)}{2} x^{\mu-2}\Delta x + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{2\cdot 3} x^{\mu-3}(\Delta x)^2 + \ldots\ldots + (\Delta x)^{\mu-1}.$$

Ἀλλ' ὅταν Δx τείνῃ πρὸς τὸ κατασταθῆναι μηδὲν, ἅπαντες οἱ ὅροι, πλὴν τοῦ πρώτου, τοῦ δευτέρου μέλους τείνουσιν ἐπίσης πρὸς τὸ μηδενισθῆναι. Ἄρα, τὸ ὅριον τοῦ λόγου $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}$, ἤτοι ὁ διαφορικὸς συντελεστὴς ἢ ἡ παραγομένη συνέκθεσις τῆς x^{μ}, εἶναι

$$\frac{\delta\psi}{\delta x} = \mu x^{\mu-1}.$$

Ἑπομένως, τὸ διαφορικὸν τῆς συνεκθέσεως ταύτης εἶναι

$$\delta\psi = \mu x^{\mu-1}\,\delta x.$$

16. Ὁ τύπος οὗτος δίδει ἐπίσης τὴν ἔκθεσιν τοῦ ζητουμένου διαφορικοῦ οἱοσδήποτε εἶναι ὁ ἄτρεπτος δείκτης μ, ὡς δείξομεν ἐφεξῆς.

Παρατηρητέον ὅτι, ἡ ἔκθεσις τῆς ποσότητος $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}$ τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu} - 1}{\frac{\Delta x}{x}}\, x^{\mu-1}.$$

Καλοῦμεν, πρὸς συντομίαν, $\frac{\Delta x}{x} = a$. Δῆλον ὅτι πρόκειται εὑρεῖν τὸ ὅριον ᾧ προσεγγίζει ἐπ' ἄπειρον ὁ λόγος $\frac{(1+a)^{\mu} - 1}{a}$, ὅταν ἡ ποσότης a τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν. Ἀλλ' ὅταν a ὑποτεθῇ ἀπειροστὸν, δῆλον ὅτι δυνάμεθα γράψαι

$$(1+a)^{\mu} = 1 + \beta,$$

β οὔσης ἐπίσης ποσότητος ἀπειροστημορίου μηδενιζομένης σὺν a. Ἡ προηγουμένη ἔκθεσις τοῦ $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}$ καθίσταται τότε

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \frac{\beta}{a} x^{\mu-1}.$$

Ὥστε, πρόκειται τέλος εὑρεῖν τὸ ὅριον τοῦ λόγου $\frac{\beta}{a}$.

17. Πρὸς τοῦτο, θεωρήσωμεν τὸν τύπον

$$(1+a)^{\frac{1}{a}},$$

καὶ ζητήσωμεν τὸ ὅριον πρὸς ὃ τείνει ἡ τιμὴ αὐτοῦ ὅταν a τείνῃ πρὸς τὸ γενέσθαι ἴση μηδενί. Ἐπειδὴ a θεωρεῖται ἔχουσα τιμὴν οἱανδήποτε, πλὴν πάντοτε ἐλάσσονα παντὸς μεγέθους δεδομένου, δυνάμεθα γράψαι $a = \frac{1}{\tau}$, τ δηλοῦντος ἀριθμὸν ἀκέραιον μείζονα παντὸς ἀριθμοῦ δεδομένου. Ἡ περὶ ἧς λόγος ἔκθεσις καθίσταται τότε

$$\left(1 + \frac{1}{\tau}\right)^{\tau}.$$

Ἀναπτύσσοντες αὐτὴν ἔχομεν,

$$\left(1+\frac{1}{\tau}\right)^{\tau}=1+\tau\frac{1}{\tau}+\frac{\tau(\tau-1)}{2\tau^2}+\frac{\tau(\tau-1)(\tau-2)}{2\,.\,3\tau^3}+\dots$$

ἢ

$$\left(1+\frac{1}{\tau}\right)^{\tau}=1+1+\frac{1-\frac{1}{\tau}}{2}+\frac{\left(1-\frac{1}{\tau}\right)\left(1-\frac{2}{\tau}\right)}{2\,.\,3}+\frac{\left(1-\frac{1}{\tau}\right)\left(1-\frac{2}{\tau}\right)\left(1-\frac{3}{\tau}\right)}{2\,.\,3\,.\,4}+\dots$$

Ἀλλ᾿ ὅταν ὑποθέσωμεν τ αὐξάνοντα ἐπ᾿ ἄπειρον, ἅπαντες οἱ ἀριθμηταὶ ἑκάστου ὅρου τοῦ ἐκτυλίγματος τούτου τενοῦσι πρὸς τὸ ἰσωθῆναι μονάδι. Ἄρα συνάγομεν ὅτι, τὸ ὅριον ᾧ ἐπ᾿ ἄπειρον προσεγγίζει ἡ ἔκθεσις $(1+a)^{\frac{1}{a}}$, ὅταν a τείνῃ πρὸς τὸ μηδὲν, δηλοῦται τῇ σειρᾷ·

$$1+1+\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2\,.\,3}+\frac{1}{2\,.\,3\,.\,4}+\frac{1}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}+\dots$$

Πρόδηλον ὅτι ἡ σειρὰ αὕτη εἶναι προσχωροῦσα· ἤτοι, λαμβανομένου ἀριθμοῦ ὅρων μᾶλλον καὶ μᾶλλον μείζονος, τὰ ἐξαγόμενα προσεγγίζουσι μᾶλλον καὶ μᾶλλον ἀριθμῷ ἐκμέτρῳ ὃν οὐδέποτε ὑπερβαίνουσι. Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ ἅπαντες οἱ ὅροι εἰσὶ θετικοί, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν προοδεύει αὐξάνον καθ᾿ ὅσον συγκροτεῖται ὑπὸ μείζονος ἀριθμοῦ ὅρων· εὐκόλως δὲ διακρίνομεν δύο ὅρια ἀπολαμβάνοντα τὸ ἄθροισμα τοῦτο. Ἡ τιμὴ αὐτοῦ μείζων εἶναι 2, ἐλάσσων δὲ τοῦ 2 αὐξανομένου κατὰ τὴν γεωμετρικὴν πρόοδον $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+$ κ.τ.έ. Τὸ ἄθροισμα τῆς προόδου ταύτης, ὑποτιθεμένης ἐπ᾿ ἄπειρον προαγομένης, ἰσοῦται μονάδι. Ἄρα, ἡ τιμὴ τῆς σειρᾶς ἀπολαμβάνεται μεταξὺ 2 καὶ 3. Ὁ λογισμὸς αὐτῆς εἶναι εὔκολος· περιοριζόμενοι εἰς ἓξ δεκαδικὰ εὑρίσκομεν·

$$1+1+\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2\,.\,3}+\frac{1}{2\,.\,3\,.\,4}+\dots=2,718282.$$

Οἱ Μαθηματικοὶ παριστάνουσι συνήθως τῷ e τὸν ἀριθμὸν τοῦτον, λίαν χρήσιμον ἐν τῇ ἀναλύσει.

Ἐκ τῶν προεκτεθέντων συνάγομεν ὅτι, τὸ ὅριον τῆς ἐκθέσεως $(1+a)^{\frac{1}{a}}$, ὅταν a τείνῃ πρὸς τὸ ἰσωθῆναι μηδενί, εἶναι ὁ ἀνωτέρω εὑρεθεὶς ἀριθμὸς e.

ΣΗΜ. Ἡ αὐτὴ πρότασις ὑπάρχει καὶ ὅταν a ἦναι ποσότης ἀρνητική. Τῷ ὄντι, δυνάμεθα γράψαι

$$1-a=\frac{1}{1+\varepsilon}$$

ε δηλοῦντος ἀπειροστημόριον ποσότητα μηδενιζομένην σὺν a. Ἐντεῦθεν λαμβάνομεν

$$(1-a)^{-\frac{1}{a}}=(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}(1+\varepsilon).$$

Ἐπειδὴ τὸ ὅριον τοῦ δευτέρου μέλους εἶναι ὁ ἀριθμὸς e, ὁ αὐτὸς ἐπίσης εἶναι τὸ ὅριον τοῦ πρώτου.

18. Ἐπανέλθωμεν ἤδη εἰς τὴν ἐξίσωσιν

$$(1+a)^{\mu}=1+\beta.$$

Λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους ἐν τῷ τυχόντι συστήματι·

$$\mu\,\lambda o\gamma(1+a)=\lambda o\gamma(1+\beta),\qquad \text{ὅθεν}\qquad \frac{\lambda o\gamma(1+\beta)}{\lambda o\gamma(1+a)}=\mu\cdot$$

ὑποθέτοντες δὲ a καὶ β ἀπειροστά, ἔχομεν ἐν τῷ ὁρίῳ

$$(1+a)^{\frac{1}{a}}=e,\qquad (1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}=e\cdot$$

ἐπομένως,

$$\frac{1}{a}\lambda o\gamma(1+a)=\lambda o\gamma e,\qquad \frac{1}{\beta}\lambda o\gamma(1+\beta)=\lambda o\gamma e,$$

ὅθεν $$\frac{\lambda o\gamma(1+\beta)}{\lambda o\gamma(1+a)}=\frac{\beta}{a}.$$

Ἄρα $$\frac{\beta}{a}=\mu.$$

Λοιπόν, ἐν γένει, ἡ ἔκθεσις τοῦ ζητουμένου διαφορικοῦ συντελεστοῦ εἶναι

$$\frac{\delta\psi}{\delta x} = \mu x^{\mu-1},$$

ὁμοία τῇ ἐν § 15 εὑρεθείσῃ, ἐξ ἧς συνάγομεν

$$\delta(x^{\mu}) = \mu x^{\mu-1}\delta x.$$

19. Δύο περιπτώσεις ἰδιαίτεραι, συνεχῶς παρουσιαζόμεναι, εἰσὶν ἄξιαι παρατηρήσεως.

Ὅταν $\mu = \frac{1}{2}$, ὁ προηγούμενος τύπος δίδει·

$$\delta\sqrt{x} = \delta(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{\delta x}{2\sqrt{x}}.$$

Ὅταν $\mu = -1$, ὁ αὐτὸς τύπος δίδει

$$\delta\frac{1}{x} = \delta(x^{-1}) = -\frac{\delta x}{x^2}.$$

2ον. *Συνέκθεσις λογαριθμική* $\quad \psi = \lambda o\gamma\, x$.

20. Ὁ ἐν § 13 γενικὸς τύπος δίδει·

$$\Delta\psi = \frac{\lambda o\gamma(x+\Delta x) - \lambda o\gamma\, x}{\Delta x} = \frac{\lambda o\gamma\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Ἀλλὰ κατὰ § 18, ὅταν Δx κατασταθῇ ἀπειροστόν, ἔχομεν

$$\lambda o\gamma\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{\Delta x}{x}\lambda o\gamma\, e.$$

Ἄρα,

$$\frac{\delta\psi}{\delta x} = \frac{1}{x}\lambda o\gamma\, e, \quad \text{καὶ} \quad \delta\psi = \frac{\delta x}{x}\lambda o\gamma\, e.$$

21. Ὁ λογάριθμος ὑποτίθεται ἀνήκων τῷ τυχόντι συστήματι. Ὅταν λαμβάνωμεν αὐτὸν ἐν τῷ συστήματι οὗτινος βάσις εἶναι ὁ ἀριθμὸς e, τότε ἔχομεν ἁπλῶς,

$$\delta.\lambda x = \frac{\delta x}{x}.$$

Τὸ τελευταῖον τοῦτο σύστημα εἶναι τὸ τῶν *ὑπερβολικῶν* ἢ *νεπερανῶν* καλουμένων λογαρίθμων, ὧν γενικῶς ποιοῦσι χρῆσιν ἐν τῇ ἀναλύσει. Δηλοῦσι δὲ συνήθως αὐτοὺς τῷ γράμματι λ, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τῶν λογαρίθμων παντὸς ἑτέρου συστήματος δηλουμένων τῷ χαρακτῆρι λογ. Οὕτως ἔχομεν

$$\frac{\delta.\lambda o\gamma\, x}{\delta x} = \frac{\lambda o\gamma\, e}{x}, \quad \text{καὶ} \quad \frac{\delta.\lambda x}{\delta x} = \frac{1}{x}.$$

3ον. *Συνέκθεσις δεικτική* $\quad \psi = \alpha^x$.

22. Κατὰ τὸν ἐν § 13 γενικὸν τύπον ἔχομεν,

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \frac{\alpha^{x+\Delta x} - \alpha^x}{\Delta x} = \frac{\alpha^{\Delta x}-1}{\Delta x}\alpha^x.$$

Ἔστω $\Delta x = a$. Γράφομεν $\alpha^a = 1+\beta$, θεωρητέον δὲ a καὶ β ὡς ποσὰ προσεγγίζοντα ἐπ' ἄπειρον τῷ μηδενί. Λοιπὸν

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \frac{\beta}{a}\alpha^x.$$

Πρόκειται δὲ εὑρεῖν τὸ ὅριον πρὸς ὃ τείνει ὁ λόγος $\frac{\beta}{a}$ ὅταν a καὶ β τείνωσι πρὸς τὸ μηδέν. Λαμβάνομεν τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν, ἐν τῷ τυχόντι συστήματι, τῆς ἐξισώσεως $\alpha^a = 1+\beta$·

$a\,\lambda o\gamma\,\alpha = \lambda o\gamma(1+\beta)$· ἑπομένως $\frac{a}{\beta}\lambda o\gamma\,\alpha = \frac{\lambda o\gamma(1+\beta)}{\beta}$.

Ἀλλά, κατὰ § 18, τὸ ὅριον τοῦ $\frac{\lambda o\gamma(1+\beta)}{\beta}$ εἶναι λογ e.

Ἄρα, ἐν τῷ ὁρίῳ,

$$\frac{\beta}{a} = \frac{\lambda o\gamma\,\alpha}{\lambda o\gamma\, e}.$$

ὅθεν συνάγομεν

$$\frac{\delta\psi}{\delta x} = \frac{\lambda o\gamma\,\alpha}{\lambda o\gamma\, e}\alpha^x, \quad \text{καὶ} \quad \delta.\alpha^x = \frac{\lambda o\gamma\,\alpha}{\lambda o\gamma\, e}\alpha^x\delta x.$$

23. Όταν οἱ λογάριθμοι ὦσιν ὑπερβολικοί, ἔχομεν ἁπλῶς

$$\delta\,.\,\alpha^x = \lambda\alpha\,.\,\alpha^x\delta x.$$

Όταν δὲ ἡ ἄτρεπτος $\alpha = e$,

$$\delta\,.\,e^x = e^x\delta x.$$

Ἡ συνέκθεσις e^x παράγεται ἐκ νέου τῇ διαφορίσει· διότι ὁ διαφορικὸς συντελεστὴς ἢ ἡ παραγομένη συνέκθεσις οὐδόλως διαφέρει τῆς συνεκθέσεως αὐτῆς.

ΣΗΜ. Ἐν § 39 θέλομεν ἰδεῖ ὅτι, τὸ διαφορικὸν τῆς συνεκθέσεως α^x παράγεται ἀμέσως ἀπὸ τοῦ διαφορικοῦ τῆς συνεκθέσεως λογ x.

4ον. *Συνεκθέσεις τριγωνομετρικαὶ* $\psi = \eta\mu x$, $\psi = \sigma\upsilon\nu x$.

24. Διὰ μὲν τὴν πρώτην ἔχομεν, κατὰ τὸν γενικὸν τύπον,

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \frac{\eta\mu(x+\Delta x) - \eta\mu x}{\Delta x} = \frac{\eta\mu\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}\sigma\upsilon\nu(x+\tfrac{1}{2}\Delta x).$$

Όταν Δx προσεγγίζῃ ἐπ᾽ ἄπειρον τῷ μηδενί, ὁ λόγος τοῦ $\eta\mu\frac{1}{2}\Delta x$ πρὸς τὸ τόξον $\frac{1}{2}\Delta x$ τείνει πρὸς τὴν μονάδα, ὅριον αὐτοῦ οὖσαν. Ἄρα

$$\frac{\delta\psi}{\delta x} = \sigma\upsilon\nu x, \qquad \text{ὅθεν} \qquad \delta\,.\,\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x\delta x.$$

Διὰ δὲ τὴν συνέκθεσιν $\psi = \sigma\upsilon\nu x$, ἔχομεν ἐπίσης·

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \frac{\sigma\upsilon\nu(x+\Delta x) - \sigma\upsilon\nu x}{\Delta x} = -\frac{\eta\mu\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}\eta\mu\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right),$$

οὗτινος τὸ ὅριον εἶναι

$$\frac{\delta\psi}{\delta x} = -\eta\mu x, \qquad \text{ὅθεν} \qquad \delta\,.\,\sigma\upsilon\nu x = -\eta\mu x\delta x.$$

Λοιπόν, ἡ παραγομένη συνέκθεσις τοῦ ημ x εἶναι τὸ συν x· ἀμοιβαίως, ἡ τοῦ συν x εἶναι τὸ ημ x προσλαμβάνον τὸ σημεῖον —.

ΣΗΜ. Ἐν § 34 θέλομεν ἰδεῖ ὅτι, γνωστοῦ ὄντος τοῦ διαφορικοῦ τοῦ ημ x, τὸ τοῦ συν x παράγεται ἀμέσως ἐξ αὐτοῦ.

Γ'. ΠΕΡΙ ΔΙΑΦΟΡΙΣΕΩΣ ΤΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΣΥΝΕΚΘΕΣΕΩΝ, ΗΤΟΙ ΣΥΝΕΚΘΕΣΕΩΝ ΕΤΕΡΩΝ ΣΥΝΕΚΘΕΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ.

25. Αἱ ἤδη θεωρηθεῖσαι συνεκθέσεις θεωροῦνται ὡς τὰ ἁπλᾶ στοιχεῖα εἰς ἃ ἀποσυντίθενται ἅπασαι αἱ ἀναλυτικαὶ ἐκθέσεις (ἐφ᾽ ὅσον τουλάχιστον δὲν πρόκειται περὶ τοῦ μέρους τῆς ἐπιστήμης ταύτης ἀφορῶντος τὸν Ὁλοκληρωτικὸν λογισμόν). Τῷ ὄντι, πᾶς τύπος σύγκειται ἐκ τῶν περὶ ὧν ὁ λόγος ἁπλῶν συνεκθέσεων συνδυαζομένων ἀλλήλαις, εἴτε διὰ σημείων δηλούντων τὰς συνήθεις ἀλγεβρικὰς ἐργασίας, εἴτε διὰ τῆς χρήσεως τῶν χαρακτηριστικῶν λογ, ημ, συν, ἅτινα δυνάμεθα θεωρῆσαι ὡς δηλοῦντα ἑτέρας μᾶλλον πολυπλόκους ἐργασίας, ὧν ἡ ἐκτέλεσις διευκολύνθη τῇ κατασκευῇ τῶν πινάκων. Ἡ ἄμεσος ἔρευνα τῆς ἐκθέσεως τοῦ διαφορικοῦ τῶν τριῶν συνεκθέσεων x^μ, λογ x, ημ x, ἦτο τὸ ἀντικείμενον περὶ ὃ ἐνησχολήθημεν πρῶτον, εἰς ταύτας ἄγεται ὁ διορισμὸς τῶν δύο ποσοτήτων $\delta\,.\,\alpha^x$, $\delta\,.\,\sigma\upsilon\nu x$, ἃς πρὸ μικροῦ εὕρομεν δι᾽ ἰδιαιτέρων μεθόδων. Ὅσον ἀφορᾷ τὰς μᾶλλον πολυπλόκους συνεκθέσεις, ὑπάρχουσι κανόνες εὔκολοι δι᾽ ὧν ἄγεται ἡ εὕρευνα τοῦ διαφορικοῦ αὐτῶν εἰς τὴν τοῦ διαφορικοῦ ἁπλουστέρας συνεκθέσεως περιεχομένης ἐν τῇ πρώτῃ. Τοὺς κανόνας τούτους ἐφαρμόζοντες, καταντῶμεν διαδοχικῶς εἰς τὰ τελευταῖα στοιχεῖα εἰς ἃ ἀναλύεται ἡ τεθεῖσα συνέκθεσις, καὶ τὰ ὁποῖα εἰσὶν ἀείποτε ἐκ τῶν ἁπλῶν συνεκθέσεων περὶ ἃς προηγουμένως ἐνησχολήθημεν. Ἄρα, γινώσκοντες διαφορίσαι τὰς συνεκθέσεις ταύτας, ἡ πασῶν τῶν λοιπῶν διαφόρισις καθίσταται εὔκολος. Ἐφεξῆς καταστήσομεν γνωστοὺς τοὺς κανόνας περὶ ὧν ὁ λόγος.

26. Ἔστω, πρῶτον, ἡ συνέκθεσις

$$\psi = \Sigma(\upsilon),$$

ἐν ᾗ υ ἐμφαίνει συνέκθεσίν τινα $\varphi(x)$ τῆς x. Πρόκειται εὑρεῖν τὸ διαφορικὸν τῆς ψ, ἥτις ἐνταῦθα εἶναι, ὡς καλοῦσιν αὐτήν, *συνέκθεσις συνεκθέσεως* τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x· ἤτοι τὴν ἀπειροστημόριον μεταβολὴν ἣν λαμβάνει ἡ ψ ὅταν x αὐξήσῃ κατὰ τὴν ἀπειροστημόριον ποσότητα δx. Κατὰ τὴν ἐν § 13 ἀρχήν, καλοῦντες Δυ τὴν αὔξησιν τῆς συνεκθέσεως υ, ἀντιστοιχοῦσαν τῇ αὐξήσει Δx τῆς x, ἔχομεν

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \frac{\Sigma(\upsilon+\Delta\upsilon)-\Sigma(\upsilon)}{\Delta x} = \frac{\Sigma(\upsilon+\Delta\upsilon)-\Sigma(\upsilon)}{\Delta\upsilon}\,\frac{\Delta\upsilon}{\Delta x}.$$

Ὑποθέτοντες ἤδη ὅτι Δx προσεγγίζει ἐπ' ἄπειρον τῷ μηδενί, πρέπει ἐν τῷ ὁρίῳ νὰ θέσωμεν

$$\frac{\delta\upsilon}{\delta x} \text{ ἀντὶ } \frac{\Delta\upsilon}{\Delta x}, \quad \text{καὶ} \quad \frac{\delta\psi}{\delta\upsilon} \text{ ἀντὶ } \frac{\Sigma(\upsilon+\Delta\upsilon)-\Sigma(\upsilon)}{\Delta\upsilon}.$$

Λοιπόν,

$$\frac{\delta\psi}{\delta x}=\frac{\delta\psi}{\delta\upsilon}\,\frac{\delta\upsilon}{\delta x}, \quad\text{καὶ}\quad \delta\psi=\frac{\delta\psi}{\delta\upsilon}\,\frac{\delta\upsilon}{\delta x}\,\delta x.$$

Οὕτω, πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου διαφορικοῦ συντελεστοῦ $\frac{\delta\psi}{\delta x}$, *ληπτέον πρῶτον τὸν διαφορικὸν συντελεστὴν* $\frac{\delta\psi}{\delta\upsilon}$, *ὡς ἐὰν υ ἦτον μεταβλητὴ ἀνεξάρτητος, εἶτα δὲ πολυπλασιαστέον ἐπὶ* $\frac{\delta\upsilon}{\delta x}$, *διαφορικὸν συντελεστὴν τῆς συνεκθέσεως υ λαμβανόμενον κατὰ τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν x.*

Ἐπειδὴ $\frac{\delta\upsilon}{\delta x}\delta x=\delta\upsilon$, ἡ ἐξίσωσις $\delta\psi=\frac{\delta\psi}{\delta\upsilon}\,\frac{\delta\upsilon}{\delta x}\,\delta x$ ἄγεται εἰς τὴν $\delta\psi=\frac{\delta\psi}{\delta\upsilon}\,\delta\upsilon$, ἧς ἡ μορφὴ εἶναι ἡ αὐτὴ ὡς εἰ υ ἦτον ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητή. Π. χ. θέτοντες $\psi=\upsilon^{\mu}$, κατὰ τὸν ἐν § 18 τύπον συνάγομεν ὅτι, $\delta(\upsilon^{\mu})=\mu\upsilon^{\mu-1}\delta\upsilon$, οἱαδήποτε εἶναι ἡ συνέκθεσις υ.

27. Ἔστω ἡ συνέκθεσις

$$\psi=\Sigma(\pi),$$

ἐν ᾗ π εἶναι συνέκθεσις τῆς υ καὶ υ συνέκθεσις τῆς x. Λαμβάνομεν πρῶτον, κατὰ τὸν προηγούμενον κανόνα, $\frac{\delta\psi}{\delta x}=\frac{\delta\psi}{\delta\pi}\,\frac{\delta\pi}{\delta x}$. Ἀλλά, κατὰ τὸν αὐτόν, $\frac{\delta\pi}{\delta x}=\frac{\delta\pi}{\delta\upsilon}\,\frac{\delta\upsilon}{\delta x}$. Ἄρα

$$\frac{\delta\psi}{\delta x}=\frac{\delta\psi}{\delta\pi}\,\frac{\delta\pi}{\delta\upsilon}\,\frac{\delta\upsilon}{\delta x}, \quad\text{καὶ}\quad \delta\psi=\frac{\delta\psi}{\delta\pi}\,\frac{\delta\pi}{\delta\upsilon}\,\frac{\delta\upsilon}{\delta x}\delta x.$$

Ἄρα, ἡ κατὰ τὴν x παραγομένη συνέκθεσις τῆς ψ εἶναι τὸ γινόμενον τῶν διαφορικῶν συντελεστῶν τῆς ψ κατὰ τὴν π, τῆς π κατὰ τὴν υ καὶ τῆς υ κατὰ τὴν x.

Καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

28. Ἔστω ἤδη ἡ σύνθετος συνέκθεσις

$$\psi=\Sigma(\omega,\ \upsilon),$$

ἐν ᾗ ω καὶ υ δηλοῦσι μεταβλητάς, συνεκθέσεις καὶ ταύτας τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x. Πρόκειται εὑρεῖν τὸν διαφορικὸν συντελεστὴν $\frac{\delta\psi}{\delta x}$. Παρατηρητέον ὅτι, ἡ διαφορὰ $\Delta\psi$ ἢ $\Sigma(\omega+\Delta\omega,\ \upsilon+\Delta\upsilon)-\Sigma(\omega,\upsilon)$ τῆς τεθείσης συνεκθέσεως ἰσομερῶς ἰσοῦται

$$\Sigma(\omega+\Delta\omega,\upsilon)-\Sigma(\omega,\upsilon)+\Sigma(\omega+\Delta\omega,\upsilon+\Delta\upsilon)-\Sigma(\omega+\Delta\omega,\upsilon).$$

Ἄρα,

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta x}=\frac{\Sigma(\omega+\Delta\omega,\upsilon)-\Sigma(\omega,\upsilon)}{\Delta x}+\frac{\Sigma(\omega+\Delta\omega,\upsilon+\Delta\upsilon)-\Sigma(\omega+\Delta\omega,\upsilon)}{\Delta x}.$$

Ὅσον διὰ τὸ ὅριον ᾧ τείνει ἡ ἔκθεσις αὕτη, ὅταν Δx τείνῃ πρὸς τὸ κατασταθῆναι ἴση μηδενί, τὸ μὲν τοῦ πρώτου ὅρου εἶναι, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, $\frac{\delta\psi}{\delta\omega}\,\frac{\delta\omega}{\delta x}$, τὸ δὲ τοῦ δευτέρου ὅρου, ἐὰν Δυ ἦτον ἄτρεπτος, ἤθελεν εἶσθαι $\frac{\delta\Sigma(\omega+\Delta\omega,\upsilon)}{\delta\upsilon}\,\frac{\delta\upsilon}{\delta x}$. Ἀλλ' ἐπειδὴ Δω μηδενίζεται σὺν Δx, ἡ τελευταία αὕτη ποσότης οὐδόλως διαφέρει τῆς $\frac{\delta\,\Sigma(\omega,\,\upsilon)}{\delta\upsilon}\,\frac{\delta\upsilon}{\delta x}$, ἢ $\frac{\delta\psi}{\delta\upsilon}\,\frac{\delta\upsilon}{\delta x}$.

Ἄρα,

$$\frac{\delta\psi}{\delta x}=\frac{\delta\psi}{\delta\omega}\,\frac{\delta\omega}{\delta x}+\frac{\delta\psi}{\delta\upsilon}\,\frac{\delta\upsilon}{\delta x},\ \text{καὶ}\ \delta\psi=\left(\frac{\delta\psi}{\delta\omega}\,\frac{\delta\omega}{\delta x}+\frac{\delta\psi}{\delta\upsilon}\,\frac{\delta\upsilon}{\delta x}\right)\delta x.$$

Λοιπόν, τὸν ζητούμενον διαφορικὸν συντελεστὴν μορφοῦμεν, *λαμβάνοντες ἐκ διαδοχῆς τοὺς διαφορικοὺς συντελεστὰς κατὰ τὰς δύο συνεκθέσεις ω, υ, ἤτοι, θεωροῦντες διαδοχικῶς ω μόνην ὡς μεταβλητὴν καὶ υ μόνην ὡς μεταβλητήν, προσθέτοντες δὲ τὰ ἐξαγόμενα.*

29. Ἐὰν εἴχομεν

$$\psi=\Sigma(\tau,\ \omega,\ \upsilon),$$

τῶν μεταβλητῶν τ, ω, υ, οὐσῶν συνεκθέσεων τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x, τῇ αὐτῇ μεθόδῳ μορφοῦμεν τὸν τύπον

$$\frac{\delta\psi}{\delta x}=\frac{\delta\psi}{\delta\tau}\,\frac{\delta\tau}{\delta x}+\frac{\delta\psi}{\delta\omega}\,\frac{\delta\omega}{\delta x}+\frac{\delta\psi}{\delta\upsilon}\,\frac{\delta\upsilon}{\delta x},$$

ἐξ οὗ συνάγομεν

$$\delta\psi=\left(\frac{\delta\psi}{\delta\tau}\,\frac{\delta\tau}{\delta x}+\frac{\delta\psi}{\delta\omega}\,\frac{\delta\omega}{\delta x}+\frac{\delta\psi}{\delta\upsilon}\,\frac{\delta\upsilon}{\delta x}\right)\delta x\ .$$

ΣΗΜ. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ παρατηρητέον ὅτι, ἡ διαφορὰ Δψ ἰσομερῶς ἰσοῦται

$$\begin{aligned}&\Sigma(\tau+\Delta\tau,\ \omega,\ \upsilon)-\Sigma(\tau,\ \omega,\ \upsilon)\\+\ &\Sigma(\tau+\Delta\tau,\ \omega+\Delta\omega,\ \upsilon)-\Sigma(\tau+\Delta\tau,\ \omega,\ \upsilon)\\+\ &\Sigma(\tau+\Delta\tau,\ \omega+\Delta\omega,\ \upsilon+\Delta\upsilon)-\Sigma(\tau+\Delta\tau,\ \omega+\Delta\omega,\ \upsilon).\end{aligned}$$

Δ'. ΧΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΠΡΟΕΚΤΕΘΕΝΤΩΝ ΚΑΝΟΝΩΝ.

30. Οἱ προαποδοθέντες κανόνες, σὺν τοῖς ἐν ἄρθ. Β' ἐξαγομένοις, ἐπαρκοῦσιν εἰς εὕρεσιν τοῦ διαφορικοῦ πάσης ἀναλυτικῆς ἐκθέσεως. Προσθέσομεν ἐφεξῆς παρατηρήσεις τινὰς πρὸς διευκόλυνσιν τῶν τοιούτου εἴδους ἐργασιῶν.

31. Ὅταν ἡ συνέκθεσις συγκροτῆται ἐξ ἑτέρας τινος συνδυαζομένης ἀτρέπτῳ ποσότητι, προσθέσει, ἀφαιρέσει, ἢ

πολυπλασιασμῷ, ἡ δήλωσις μόνη τοῦ διαφορικοῦ ἀρκεῖ πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐξαγομένου. Οὕτω,

$$\begin{aligned}\psi&=\alpha+\upsilon, &&\text{δίδει}\quad &\delta\psi&=\delta\upsilon.\\ \psi&=\alpha-\upsilon, && &\delta\psi&=-\delta\upsilon.\\ \psi&=\alpha\upsilon, && &\delta\psi&=\alpha\delta\upsilon.\end{aligned}$$

32. Ὅταν ἡ συνέκθεσις συγκροτῆται ἐκ πλειόνων συνεκθέσεων, προστιθεμένων ἀλλήλαις, πολυπλασιαζομένων, ἢ διαιρουμένων, τὸ ἐξαγόμενον μορφοῦται κατὰ §§ 28, 29. Οὕτω, δηλοῦντες πάντοτε τ, υ, ω, τὰς συνεκθέσεις τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς,

$$\begin{aligned}\psi&=\omega+\upsilon, &&\text{δίδει}\quad \delta\psi=\delta\omega+\delta\upsilon.\\ \psi&=\omega\upsilon, && \delta\psi=\upsilon\delta\omega+\omega\delta\upsilon.\\ \psi&=\tau\omega\upsilon, && \delta\psi=\omega\upsilon\delta\tau+\tau\upsilon\delta\omega+\tau\omega\delta\upsilon.\\ \psi&=\frac{\omega}{\upsilon}, && \delta\psi=\frac{\delta\omega}{\upsilon}-\frac{\omega\delta\upsilon}{\upsilon^2}=\frac{\upsilon\delta\omega-\omega\delta\upsilon}{\omega^2}.\end{aligned}$$

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ τελευταίου διαφορικοῦ παρατηρητέον ὅτι,

$$\delta.\frac{1}{\upsilon}=\delta.\upsilon^{-1}=-\frac{\delta\upsilon}{\upsilon^2}.$$

Βουλόμενοι ἐκθέσαι τὸ δψ διὰ τοῦ διαφορικοῦ δx τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, θετέον ἀντὶ δτ, δυ, δω, ἀμοιβαίως $\frac{\delta\tau}{\delta x}\delta x$, $\frac{\delta\upsilon}{\delta x}\delta x$, $\frac{\delta\omega}{\delta x}\delta x$.

33. Ἤδη θεωρήσομεν τοὺς ἁπλουστέρους συνδυασμοὺς τῶν λογαριθμικῶν, δεικτικῶν, καὶ τριγωνομετρικῶν συνεκθέσεων, ὑπὸ τῶν Μαθηματικῶν κοινῇ καλουμένων *ὑπερβατικῶν*. Ἡ τάξις ἣν πρέπει ν' ἀκολουθῶμεν πρὸς εὕρεσιν τοῦ διαφορικοῦ, συνίσταται ἀείποτε εἰς τὸ γράφειν τὴν προκειμένην συνέκθεσιν ὑπὸ μορφὰς ὁμοίας ταῖς τῶν γενικῶν συνεκθέσεων ἃς προλαβόντως ἐθεωρήσαμεν· ἤτοι, εἰς τὸ διακρίνειν τὰς ὡς συνεκθέσεις ἀλλήλων θεωρητέας ποσό-

τητας, μέχρις οὗ καταντήσομεν εἰς τὰς ἁπλουστέρας συνεκθέσεις.

Ἔστω $$\psi = \lambda(\lambda x).$$

Ὁ τύπος οὗτος ἄγεται εἰς

$$\psi = \lambda \upsilon, \qquad \text{ἔχομεν δὲ} \qquad \upsilon = \lambda x.$$

Ἄρα, κατὰ §§ 21, 26,

$$\frac{\delta\psi}{\delta\upsilon} = \frac{1}{\upsilon}, \qquad \frac{\delta\upsilon}{\delta x} = \frac{1}{x}.$$

ὅθεν $$\frac{\delta\psi}{\delta x} = \frac{1}{x\lambda x}, \qquad \text{καὶ} \qquad \delta\psi = \frac{\delta x}{x\lambda x}.$$

Ἔστω $$\psi = \alpha^{\beta^x}.$$

Ἄγεται εἰς $\psi = \alpha^\upsilon$, καθιστῶντες $\upsilon = \beta^x$.

Κατὰ §§ 22, 26, ἔχομεν·

$$\frac{\delta\psi}{\delta\upsilon} = \lambda\alpha \,.\, \alpha^\upsilon, \qquad \frac{\delta\upsilon}{\delta x} = \lambda\beta \,.\, \beta^x,$$

ἤ, $$\frac{\delta\psi}{\delta x} = \lambda\alpha.\lambda\beta.\alpha^{\beta^x}.\beta^x, \quad \text{καὶ} \quad \delta\psi = \lambda\alpha.\lambda\beta.\alpha^{\beta^x}.\beta^x.\delta x.$$

Ἔστω $$\psi = \omega^\upsilon,$$

ω καὶ υ δηλούντων δύο συνεκθέσεις τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x. Κατὰ § 28, διαφορίζομεν διαδοχικῶς πρὸς ω μόνην καὶ πρὸς υ μόνην, καὶ λαμβάνομεν,

$$\frac{\delta\psi}{\delta\omega} = \upsilon\omega^{\upsilon-1}, \qquad \frac{\delta\psi}{\delta\upsilon} = \lambda\omega.\omega^\upsilon.$$

Προσθέτοντες δὲ τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα,

$$\delta\psi = \omega^\upsilon\left(\frac{\upsilon}{\omega}\delta\omega + \lambda\omega.\delta\upsilon\right).$$

34. Ἔστω $$\psi = \text{ἡμ}(x + \tfrac{1}{2}\Pi),$$

Π δηλοῦντος τὴν ἡμιπεριφέρειαν κύκλου οὗτινος ἡ ἀκτὶς ἰσοῦται μονάδι.

Καθιστῶμεν $\upsilon = x + \frac{1}{2}\Pi$, καὶ ἔχομεν

$$\psi = \text{ἡμ}\,\upsilon, \qquad \frac{\delta\psi}{\delta\upsilon} = \text{συν}\,\upsilon, \qquad \frac{\delta\upsilon}{\delta x} = 1.$$

Ἄρα,

$$\frac{\delta\psi}{\delta x} = \text{συν}(x + \tfrac{1}{2}\Pi) = -\,\text{ἡμ}\,x, \quad \text{καὶ} \quad \delta\psi = -\,\text{ἡμ}\,x\delta x.$$

Ἀλλά, $\text{ἡμ}(x + \frac{1}{2}\Pi) = \text{συν}\,x$. Λοιπόν, εὑρίσκομεν καὶ αὖθις τὸ ἐν § 24 ἐξαγόμενον,

$$\delta\,.\,\text{συν}\,x = -\,\text{ἡμ}\,x\,\delta x.$$

Οὕτως εὑρίσκομεν καὶ τὰ ἑξῆς ἐξαγόμενα.

$$\psi = \text{ἐφ}\,x = \frac{\text{ἡμ}\,x}{\text{συν}\,x}, \qquad \delta\psi = \frac{\delta x}{\text{συν}^2 x}.$$

$$\psi = \text{συνεφ}\,x = \frac{\text{συν}\,x}{\text{ἡμ}\,x}, \qquad \delta\psi = -\,\frac{\delta x}{\text{ἡμ}^2 x}.$$

$$\psi = \text{τέμ}\,x = \frac{1}{\text{συν}\,x}, \qquad \delta\psi = \frac{\text{ἡμ}\,x\,\delta x}{\text{συν}^2 x}.$$

$$\psi = \text{συνδ}\,x = \frac{1}{\text{ἡμ}\,x}, \qquad \delta\psi = -\,\frac{\text{συν}\,x\,\delta x}{\text{ἡμ}^2 x}.$$

35. Τὰ διαφορικὰ τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν λαμβάνομεν καὶ κατὰ τὴν γενικὴν μέθοδον, τῇ χρήσει τοῦ ἐν § 13 τύπου. Π. χ. Ἔστω

$$\psi = \text{ἐφ}\,x.$$

Ἔχομεν

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \frac{\text{ἐφ}(x+\Delta x) - \text{ἐφ}\,x}{\Delta x} = \frac{\dfrac{\text{ἐφ}\,x + \text{ἐφ}\,\Delta x}{1 - \text{ἐφ}\,x\;\text{ἐφ}\,\Delta x} - \text{ἐφ}\,x}{\Delta x}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{ἐφ}\,\Delta x\,(1 + \text{ἐφ}^2 x)}{1 - \text{ἐφ}\,x\;\text{ἐφ}\,\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\text{ἐφ}\,\Delta x}{\Delta x} \times \frac{1 + \text{ἐφ}^2 x}{1 - \text{ἐφ}\,x\;\text{ἐφ}\,\Delta x}.$$

Μεταβαίνοντες ἤδη εἰς τὰ ὅρια συνάγομεν·

$$\frac{\delta\psi}{\delta x} = 1 + \text{ἐφ}^2 x = \text{τέμ}^2 x = \frac{1}{\text{συν}^2 x},$$

καὶ
$$\delta\psi = \delta\,.\,\text{ἐφ}\, x = \frac{\delta x}{\text{συν}^2 x}.$$

Οὕτω καὶ διὰ τὰς λοιπάς.

36. Ὑποθέτοντες

$$\psi = \lambda\text{ἡμ}\, x,\quad \text{ἔχομεν}\quad \delta\psi = \frac{\delta.\text{ἡμ}\, x}{\text{ἡμ}\, x} = \frac{\text{συν}x}{\text{ἡμ}\, x}\delta x = \frac{\delta x}{\text{ἐφ}\, x}.$$

$$\psi = \lambda\text{συν}x,\qquad \delta\psi = \frac{\delta.\text{συν}x}{\text{συν}\, x} = -\frac{\text{ἡμ}\, x}{\text{συν}x}\delta x = -\frac{\delta x}{\text{συνεφ}x}.$$

37. Οἱ Γεωμέτραι καλοῦσι συνέκθεσιν *ἀντίστροφον* τῆς $\Sigma(\upsilon)$, τὴν συνέκθεσιν τῆς ω ἣν λαμβάνομεν ἐπιλύοντες τὴν ἐξίσωσιν $\omega = \Sigma(\upsilon)$ πρὸς υ. Τὸ διαφορικὸν ἀντιστρόφου τινὸς συνεκθέσεως εὐκόλως εὑρίσκομεν, γινώσκοντες τὸ τῆς συνεκθέσεως.

Ἔστω $\psi = \text{τόξ ἡμ}\, x,$

συνέκθεσις ἀντίστροφος τῆς $x = \text{ἡμ}\, \psi.$

Ζητήσωμεν τὸ $\delta\psi$. Πρὸς τοῦτο, ληπτέον τοὺς διαφορικοὺς συντελεστὰς ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς $x = \text{ἡμ}\, \psi$ (*), θεωρουμένης ἐν τῷ δευτέρῳ ψ ὡς συνεκθέσεως τῆς x, κατὰ τὸν ἐν § 26 κανόνα,

$$1 = \text{συν}\, \psi \frac{\delta\psi}{\delta x}.$$

ἐπομένως συνάγομεν
$$\frac{\delta\psi}{\delta x} = \frac{1}{\text{συν}\, \psi} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ἔστω ἐν γένει ἡ συνέκθεσις $\Sigma(x)$ ἧς ἀντίστροφος ἡ $\varphi(\psi)$. Τοῦτο δηλοῖ ὅτι ἐὰν θέσωμεν

$$\psi = \Sigma(x),\qquad \text{ἔχομεν}\qquad x = \varphi(\psi).$$

Αἱ δύο αὗται ἐξισώσεις εἰσὶν αἱ αὐταὶ ὑπὸ μορφὴν διάφορον, δίδουσι δὲ τὰς αὐτὰς αὐξήσεις ἀντιστοιχούσας διὰ x καὶ ψ. Ἡ τελευταία ἐξίσωσις δίδει

$$\frac{\delta x}{\delta\psi} = \varphi'(\psi),\qquad \text{ὅθεν}\qquad \frac{\delta\psi}{\delta x} = \frac{1}{\varphi'(\psi)}.$$

ἤτοι

$$\Sigma'(x) = \frac{1}{\varphi'(\psi)} = \frac{1}{\varphi'[\Sigma(x)]}.$$

Οὕτως ἐργαζόμενοι μορφοῦμεν τὰ ἑξῆς διαφορικὰ τῶν κυκλικῶν συνεκθέσεων.

$$\delta.\text{τόξ ἡμ}\, x = \frac{\delta x}{\sqrt{1-x^2}}.\qquad \delta.\text{τόξ συν}\, x = -\frac{\delta x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\delta.\text{τόξ ἐφ}\, x = \frac{\delta x}{1+x^2}.\qquad \delta.\text{τόξ συνεφ}\, x = -\frac{\delta x}{1+x^2}.$$

$$\delta.\text{τόξ τέμ}\, x = \frac{\delta x}{x\sqrt{x^2-1}}.\qquad \delta.\text{τόξ συνδ}\, x = -\frac{\delta x}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

38. *Παρατηρητέον*, ὅτι τὰ ῥιζικὰ τῶν τύπων τούτων προσλαμβάνουσι ποτὲ μὲν τὸ σημεῖον $+$, ποτὲ δὲ τὸ $-$. Τὸ ἁρμόζον αὐτοῖς σημεῖον διακρίνομεν, θεωροῦντες τὴν τοῦτο εἰσάγουσαν τριγωνομετρικὴν γραμμήν.

Τὰ τρία τελευταῖα διαφορικὰ εἰσὶν ἴσα πρὸς τὰ τρία πρῶτα, πλὴν τῶν σημείων ἅτινα δύνανται εἶναι τὰ αὐτὰ ἢ

(*) Ὅταν δύο συνεκθέσεις $\sigma(x)$, $\Sigma(x)$, ὦσιν ἴσαι ἀλλήλαις, εἴτε διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς x, εἴτε ἐν ἐκτάσει τινὶ τιμῶν τῆς μεταβλητῆς ταύτης, αἱ παραγόμεναι αὐτῶν (κατὰ συνέπειαν καὶ τὰ ἀπειροστὰ) εἰσὶν ἐπίσης ἴσαι ἀλλήλαις κατὰ τὴν αὐτὴν ἔκτασιν· διότι αἱ δύο ἐξισώσεις

$$\sigma(x) = \Sigma(x),\qquad \sigma(x+\Delta x) = \Sigma(x+\Delta x),$$

δίδουσι

$$\frac{\sigma(x+\Delta x)-\sigma(x)}{\Delta x} = \frac{\Sigma(x+\Delta x)-\Sigma(x)}{\Delta x}.$$

Ὅθεν προκύπτει, κατὰ τὸ ὅριον, $\sigma'(x) = \Sigma'(x)$.

Ἐπίσης ἔχομεν $\sigma'(x) = \Sigma'(x)$, καὶ ὅταν ἡ διαφορὰ $\sigma(x) - \Sigma(x)$, ἀντὶ μηδενὶ, ἰσοῦται ποσότητι ἀτρέπτῳ οἱαδήποτε.

διάφορα· τοῦτο προέρχεται ἐκ τοῦ ὅ,τι τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο συστοίχων τόξων ἰσοῦται ἀτρέπτῳ τινι. Τὰ σημεῖα ἃ ἐνταῦθα ἔχουσι τὰ ῥιζικὰ ἀναφέρονται τῇ περιπτώσει ἐν ᾗ τὸ τόξον περιλαμβάνεται μεταξὺ 0 καὶ $\frac{1}{2}$ Π.

39. Ἡ θεωρία τῶν ἀντιστρόφων συνεκθέσεων ἄγει τὴν ἔρευναν τοῦ διαφορικοῦ τῆς δεικτικῆς ποσότητος α^x εἰς τὴν τοῦ διαφορικοῦ τοῦ λογ x. Τῷ ὄντι, ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\psi = \alpha^x$ συνάγομεν $\text{λογ}\,\psi = x\,\text{λογ}\,\alpha$. Λαμβάνοντες δὲ τὰ διαφορικὰ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν,

$$\text{λογ}\,e\,\frac{\delta\psi}{\psi} = \text{λογ}\,\alpha\,\delta x, \qquad \text{ἢ} \qquad \delta\psi = \frac{\text{λογ}\,\alpha}{\text{λογ}\,e}\,\alpha^x\,\delta x.$$

40. Πρέπει νὰ ἔχωμεν ἐν μνήμῃ τὰς ἐκθέσεις τῶν ἁπλουστάτων ἀπειροστῶν ἐν τῷ ἑξῆς πίνακι περιεχομένων.

$\delta(\alpha x + \beta) = \alpha\,\delta x.$	$\delta\,.\,\text{ἡμ}\,x = \text{συν}\,x\,\delta x.$	$\delta\,.\,\text{τόξἡμ}\,x = \frac{\delta x}{\sqrt{1 - x^2}}.$
$\delta\,.\,\frac{1}{x} = -\frac{\delta x}{x^2}.$	$\delta\,.\,\text{συν}\,x = -\,\text{ἡμ}\,x\,\delta x.$	$\delta\,.\,\text{τόξσυν}\,x = -\frac{\delta x}{\sqrt{1 - x^2}}.$
$\delta\,.\,x^{\mu} = \mu x^{\mu-1}\delta x$	$\delta\,.\,\text{ἐφ}\,x = \frac{\delta x}{\text{συν}^2 x}.$	$\delta\,.\,\text{τόξ ἐφ}\,x = \frac{\delta x}{1 + x^2}.$
$\delta\,.\,\sqrt{x} = \frac{\delta x}{2\sqrt{x}}.$	$\delta\,.\,\text{συνεφ}\,x = -\frac{\delta x}{\text{ἡμ}^2 x}.$	$\delta.\text{τόξσυνεφ}\,x = -\frac{\delta x}{1 + x^2}.$
$\delta\,.\,\text{λογ}\,x = \text{λογ}\,e\,\frac{\delta x}{x}.$	$\delta\,.\,\text{τέμ}\,x = \frac{\text{ἡμ}\,x\,\delta x}{\text{συν}^2 x}.$	$\delta.\text{τόξ τέμ}\,x = \frac{\delta x}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$
$\delta\,.\,\alpha^x = \lambda\alpha.\alpha^x\,\delta x.$		
$\delta\,.\,e^x = e^x\,\delta x.$	$\delta\,.\,\text{συνδ}\,x = -\frac{\text{συν}\,x\,\delta x}{\text{ἡμ}^2 x}.$	$\delta.\text{τόξσυνδ}\,x = -\frac{\delta x}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$

Ἐν τοῖς ἀνωτέρω τριγωνομετρικοῖς καὶ κυκλικοῖς τύποις, ἡ ἀκτίς, ὅταν ἀντὶ μονάδι ἰσοῦται α, εἰσάγεται εἰ δέον κατὰ τοὺς γνωστοὺς περὶ ὁμογενείας κανόνας. Π. χ. ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἔξομεν·

$$\alpha\,\text{τόξ ἡμ}\,\frac{x}{\alpha}, \qquad \alpha\,\text{τόξ ἐφ}\,\frac{x}{\alpha}, \qquad \text{κ.τ.έ.}$$

$$\delta\,.\,\text{ἡμ}\,x = \frac{\delta x\,\text{συν}\,x}{\alpha}, \qquad \delta\,.\,\text{ἐφ}\,x = \frac{\alpha^2\delta x}{\text{συν}^2 x}, \quad \text{κ.τ.έ.}$$

$$\delta\,.\,\text{τόξἡμ}\,x = \frac{\alpha\delta x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}, \qquad \delta\,.\,\text{τόξ ἐφ}\,x = \frac{\alpha^2\delta x}{\alpha^2 + x^2}, \quad \text{κ.τ.έ.}$$

41. Τὰ διαφορικὰ τῶν μᾶλλον πολυπλόκων συνεκθέσεων λαμβάνομεν κατὰ § 33. Ἕπονται διάφορα ὑποδείγματα πρὸς ἄσκησιν.

1) $$\psi = (\alpha x^{\mu} + \beta)^{\nu}.$$

Τὴν συνέκθεσιν ταύτην ἀναλυτέον ὡς ἑξῆς·

$$\psi = \omega^{\nu}, \qquad \omega = \alpha\upsilon + \beta, \qquad \upsilon = x^{\mu}.$$

Εὑρίσκομεν δὲ τῇ ἐφαρμογῇ τῶν κανόνων,

$$\delta\psi = \nu\omega^{\nu-1}\delta\omega, \quad \delta\omega = \alpha\delta\upsilon, \quad \delta\upsilon = \mu x^{\mu-1}\delta x\cdot$$

καὶ ἀντεισάγοντες,

$$\delta\omega = \alpha\mu x^{\mu-1}\delta x, \quad \delta\psi = \nu(\alpha x^{\mu} + \beta)^{\nu-1} \times \alpha\mu x^{\mu-1}\delta x.$$

Ἡ ἕξις τοῦ λογισμοῦ δείξει μετ' οὐ πολὺ ὅτι περιττὸν καθιστᾶναι τὰς τοιαύτας ἐξισώσεις· δυνάμεθα ἐργάζεσθαι ἀμέσως ἐπὶ τῶν περιεχομένων ποσοτήτων ἐν τῇ τεθείσῃ συνεκθέσει. Οὕτω, διαφορίζομεν πρῶτον πρὸς $\alpha x^{\mu} + \beta$·

$$\delta\psi = \nu(\alpha x^{\mu} + \beta)^{\nu-1} \times \delta(\alpha x^{\mu} + \beta).$$

Εἶτα, πρὸς μόρφωσιν τοῦ διαφορικοῦ $\delta(\alpha x^{\mu} + \beta)$, διαφορίζομεν πρὸς x^{μ}.

$$\delta(\alpha x^{\mu} + \beta) = \alpha\,\delta(x^{\mu}).$$

Τέλος δὲ $\qquad \delta(x^{\mu}) = \mu x^{\mu-1}\delta x.$

Τῇ διαδοχικῇ ἀντεισαγωγῇ τῶν τιμῶν τούτων μορφοῦμεν τὴν τοῦ δψ, ἀνωτέρω εὑρεθεῖσαν.

2) $$\psi = \text{ἡμ}\,\frac{\alpha x}{\sqrt{1 - \alpha^2 x^2}}.$$

Κατὰ τοὺς δοθέντας κανόνας γραπτέον,

$$\psi = \text{ἡμ}\,\tau,\quad \tau = \frac{\alpha x}{\omega},\quad \omega = \sqrt{\upsilon},\quad \upsilon = 1 - \alpha^2 x^2.$$

Οὕτως ἀποσυντίθεται ἡ τεθεῖσα συνέκθεσις εἰς τὰς ἐν αὐτῇ περιεχομένας ἁπλᾶς συνεκθέσεις, ὧν τὸ διαφορικὸν ἀμέσως γινώσκομεν. Ἄρα ἔχομεν·

$$\delta\psi = \text{συν}\,\tau\,\delta\tau,\qquad \delta\tau = \frac{\omega\alpha\delta x - \alpha x\delta\omega}{\omega^2},$$

$$\delta\omega = \frac{\delta\upsilon}{2\sqrt{\upsilon}},\qquad \delta\upsilon = -\alpha^2 . 2x\delta x.$$

Τέλος, ἀντεισάγοντες,

$$\delta\omega = -\frac{\alpha^2 x\delta x}{\sqrt{1-\alpha^2x^2}},\qquad \delta\tau = \frac{\alpha\delta x}{(1-\alpha^2x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\delta\psi = \text{συν}\frac{\alpha x}{\sqrt{1-\alpha^2x^2}} \times \frac{\alpha\delta x}{(1-\alpha^2x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ἀλλά, καὶ ἄνευ τῆς συνδρομῆς τῶν ἄνω ἐξισώσεων, ἐργαζόμεθα ἀμέσως ἐπὶ τῶν περιεχομένων συνεκθέσεων ἐν τῇ προτεθείσῃ. Οὕτω, διαφορίζοντες πρὸς $\frac{\alpha x}{\sqrt{1-\alpha^2x^2}}$, ἔχομεν

$$\delta\psi = \text{συν}\frac{\alpha x}{\sqrt{1-\alpha^2x^2}}\ \delta\left(\frac{\alpha x}{\sqrt{1-\alpha^2x^2}}\right).$$

εἶτα, θεωροῦντες $\frac{\alpha x}{\sqrt{1-\alpha^2x^2}}$ ὡς κλάσμα,

$$\delta\left(\frac{\alpha x}{\sqrt{1-\alpha^2x^2}}\right) = \frac{\sqrt{1-\alpha^2x^2}\,\alpha\delta x - \alpha x . \delta\sqrt{1-\alpha^2x^2}}{1-\alpha^2x^2}.$$

Ἀλλά, $$\delta\sqrt{1-\alpha^2x^2} = \frac{\delta(1-\alpha^2x^2)}{2\sqrt{1-\alpha^2x^2}},$$

καὶ $$\delta(1-\alpha^2x^2) = -\alpha^2 2x\delta x.$$

Ἄρα, τῇ ἀντεισαγωγῇ ἑκάστης ἐκθέσεως ἐν τῇ προηγουμένῃ αὐτῆς, συνάγομεν·

$$\delta\sqrt{1-\alpha^2x^2} = -\frac{\alpha^2x\delta x}{\sqrt{1-\alpha^2x^2}},\quad \delta\left(\frac{\alpha x}{\sqrt{1-\alpha^2x^2}}\right) = \frac{\alpha\delta x}{(1-\alpha^2x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\delta\psi = \text{συν}\frac{\alpha x}{\sqrt{1-\alpha^2x^2}} . \frac{\alpha\delta x}{(1-\alpha^2x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

3) $$\psi = e^{\alpha\omega^2\,\text{ἐφ}\frac{\omega^2}{\omega^2+\upsilon^2}}.$$

e δηλοῖ τὴν βάσιν τῶν νεπεριανῶν λογαρίθμων· ω, υ, εἰσὶ συνεκθέσεις τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x. Διαφορίζοντες πρῶτον πρὸς $\alpha\omega^2\,\text{ἐφ}\frac{\omega^2}{\omega^2+\upsilon^2}$, ἔχομεν·

$$\delta\psi = e^{\alpha\omega^2\,\text{ἐφ}\frac{\omega^2}{\omega^2+\upsilon^2}} . \delta\left(\alpha\omega^2\,\text{ἐφ}\frac{\omega^2}{\omega^2+\upsilon^2}\right).$$

Τὸ γινόμενον $\alpha\omega^2\,\text{ἐφ}\frac{\omega^2}{\omega^2+\upsilon^2}$, διαφοριζόμενον πρὸς τοὺς παράγοντας $\alpha\omega^2$ καὶ $\text{ἐφ}\frac{\omega^2}{\omega^2+\upsilon^2}$, δίδει,

$$\delta\left(\alpha\omega^2\,\text{ἐφ}\frac{\omega^2}{\omega^2+\upsilon^2}\right) = \text{ἐφ}\frac{\omega^2}{\omega^2+\upsilon^2}\,\delta(\alpha\omega^2) + \alpha\omega^2.\delta.\text{ἐφ}\frac{\omega^2}{\omega^2+\upsilon^2}.$$

Εἶτα ἔχομεν,

$$\delta(\alpha\omega^2) = \alpha 2\omega\delta\omega,\qquad \delta\,.\,\text{ἐφ}\frac{\omega^2}{\omega^2+\upsilon^2} = \frac{\delta\dfrac{\omega^2}{\omega^2+\upsilon^2}}{\text{συν}^2\dfrac{\omega^2}{\omega^2+\upsilon^2}},$$

καὶ $$\delta\frac{\omega^2}{\omega^2+\upsilon^2} = \frac{(\omega^2+\upsilon^2)\,2\omega\delta\omega - \omega^2\delta(\omega^2+\upsilon^2)}{(\omega^2+\upsilon^2)^2}.$$

τέλος, $$\delta(\omega^2+\upsilon^2) = 2(\omega\delta\omega+\upsilon\delta\upsilon).$$

'Αντεισάγοντες ἕκαστον ἐξαγόμενον ἐν τῷ πρὸ αὐτοῦ, λαμβάνομεν·

$$\delta \frac{\omega^2}{\omega^2+\upsilon^2} = \frac{2\omega\upsilon\,(\upsilon\delta\omega-\omega\delta\upsilon)}{(\omega^2+\upsilon^2)^2},$$

$$\delta\,.\,\text{ἐφ}\frac{\omega^2}{\omega^2+\upsilon^2} = \frac{2\omega\upsilon\,(\upsilon\delta\omega-\omega\delta\upsilon)}{(\omega^2+\upsilon^2)^2\;\text{συν}^2\,\frac{\omega^2}{\omega^2+\upsilon^2}},$$

$$\delta.\alpha\omega^2\text{ἐφ}\frac{\omega^2}{\omega^2+\upsilon^2} = 2\alpha\left\{\text{ἐφ}\frac{\omega^2}{\omega^2+\upsilon^2}\omega\delta\omega + \frac{\omega^3\upsilon\,(\upsilon\delta\omega-\omega\delta\upsilon)}{(\omega^2+\upsilon^2)^2\text{συν}^2\frac{\omega^2}{\omega^2+\upsilon^2}}\right\},$$

$$\delta\psi = e^{\alpha\omega^2\text{ἐφ}\frac{\omega^2}{\omega^2+\upsilon^2}}\,2\alpha\left\{\text{ἐφ}\frac{\omega^2}{\omega^2+\upsilon^2}\omega\delta\omega + \frac{\omega^3\upsilon\,(\upsilon\delta\omega-\omega\delta\upsilon)}{(\omega^2+\upsilon^2)^2\text{συν}^2\frac{\omega^2}{\omega^2+\upsilon^2}}\right\}.$$

Ἵνα ἐκτεθῇ τὸ ζητούμενον διαφορικὸν $\delta\psi$ διὰ τοῦ δx τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, θετέον ἀντὶ $\delta\omega$ καὶ $\delta\upsilon$ τὰς ἀμοιβαίας τιμὰς αὐτῶν $\frac{\delta\omega}{\delta x}\delta x$, $\frac{\delta\upsilon}{\delta x}\delta x$.

42. Τὰ προηγούμενα παραδείγματα ἀρκοῦσιν ὅπως ἐννοήσωμεν τὴν μέθοδον τῆς ἐργασίας περὶ ἧς λόγος· ἀπαιτεῖται ὅμως μεγίστη ἄσκησις ὅπως ἐξοικειωθῶσιν αὐτῇ οἱ πρωτόπειροι. Πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον ἕπονται πλεῖστα ἕτερα ὑποδείγματα.

1) $\psi = x(\alpha^2+x^2)\sqrt{\alpha^2-x^2}$, $\quad \delta\psi = \dfrac{\alpha^4+\alpha^2x^2-4x^4}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}\delta x.$

2) $\psi = \sqrt[4]{\left(\alpha - \dfrac{\beta}{\sqrt{x}} + (\gamma^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\right)^3}.$

$$\delta\psi = \frac{\dfrac{3\beta}{2x\sqrt{x}} - \dfrac{4x}{(\gamma^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}}{4\sqrt[4]{\alpha-\dfrac{\beta}{\sqrt{x}}+(\gamma^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}}\,\delta x\,;$$

3) $\psi = \lambda\left(\dfrac{x}{\sqrt{\alpha^2+x^2}}\right)$; $\quad \delta\psi = \dfrac{\alpha^2\delta x}{x(\alpha^2+x^2)}.$

4) $\psi = \lambda\left(\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right)$, $\quad \delta\psi = -\dfrac{\delta x}{x\sqrt{1-x^2}}.$

5) $\psi = \lambda\,(x+\sqrt{1+x^2})$, $\quad \delta\psi = \dfrac{\delta x}{\sqrt{1+x^2}}.$

6) $\psi = \dfrac{1}{\sqrt{-1}}\lambda(x\sqrt{-1}+\sqrt{1-x^2})$; $\quad \delta\psi = \dfrac{\delta x}{\sqrt{1-x^2}}.$

7) $\psi = \lambda\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\quad \delta\psi = \dfrac{\delta x}{\sqrt{1+x^2}}.$

8) $\psi = \omega^{\tau^\sigma}$ (ω, τ καὶ σ οὐσῶν συνεχθέσεων τῆς x),

$$\delta\psi = \omega^{\tau^\sigma}.\tau^\sigma\left(\delta\sigma\,.\,\lambda\tau\,.\,\lambda\omega + \frac{\sigma\delta\tau\,.\,\lambda\omega}{\tau} + \frac{\delta\omega}{\omega}\right).$$

9) $\psi = \text{συν}x^{\text{ἡμ}x}$, $\quad \delta\psi = \text{συν}x^{\text{ἡμ}x}\left(\text{συν}x.\lambda\text{συν}x - \dfrac{\text{ἡμ}^2x}{\text{συν}x}\right)\delta x.$

10) $\psi = \text{τόξ ἡμ}\dfrac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}$, $\quad \delta\psi = \dfrac{\delta x}{1+x^2}.$

11) $\psi = \text{ἡμ λογ}\,x$; $\quad \delta\psi = \dfrac{\text{λογ}e}{x}\,\text{συν λογ}x\,.\,\delta x\,;$

$$12)\ \psi = \text{τόξ ἐφ}\,\frac{2x}{1-x^2}, \qquad \delta\psi = \frac{2}{1+x^2}\,\delta x,$$

$$13)\ \psi = \text{τόξ ἡμ}\left(\frac{x^2-\alpha^2}{\beta^2-\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \delta\psi = \frac{x\,\delta x}{\left[(x^2-\alpha^2)(\beta^2-x^2)\right]^{\frac{1}{2}}},$$

$$14)\ \psi = \lambda\left[x+(x^2-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}\right] + \text{τόξ τέμ}\,\frac{x}{\alpha},$$

$$\delta\psi = \frac{1}{x}\left(\frac{x+\alpha}{x-\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\delta x.$$

ΣΗΜ. Ὅταν συνέκθεσίς τις συγκροτῆται ἐκ ῥιζικῶν καὶ δυνάμεων γινομένων καὶ πηλίκων, ἐν γένει ἁπλούστερον εἶναι ἐφαρμόζειν τοὺς λογαρίθμους εἶτα ζητεῖν τὸ λογαριθμικὸν διαφορικὸν τῆς συνεκθέσεως. Τῷ τρόπῳ τούτῳ εὑρέθησαν τῶν ἑξῆς παραδειγμάτων τὰ διαφορικά.

$$15)\ \psi = (\alpha+x)^{\mu}(\beta+x)^{\nu},$$

$$\lambda\psi = \mu\lambda(\alpha+x) + \nu\lambda(\beta+x),$$

$$\frac{1}{\psi}\frac{\delta\psi}{\delta x} = \frac{\mu}{\alpha+x} + \frac{\nu}{\beta+x},$$

$$\delta\psi = (\alpha+x)^{\mu}(\beta+x)^{\nu}\left(\frac{\mu}{\alpha+x}+\frac{\nu}{\beta+x}\right)\delta x.$$

$$16)\ \psi = \frac{\left[(x+1)(x+3)^7\right]^{\frac{1}{4}}}{(x+2)^4}, \quad \delta\psi = \frac{x^2}{(x+2)^5}\left(\frac{[x+3]^7}{x+1}\right)^{\frac{1}{4}}\delta x.$$

$$17)\ \psi = e^{\alpha x}\,\text{ἡμ}\,\rho x, \qquad \delta\psi = e^{\alpha x}(\alpha\,\text{ἡμ}\,\rho x + \rho\,\text{συν}\,\rho x)\,\delta x.$$

$$18)\ \psi = \lambda\left[(\alpha+x)^{\nu}(\alpha'+x)^{\nu'}(\alpha''+x)^{\nu''}\right],$$

$$\delta\psi = \frac{\nu\,\delta x}{\alpha+x} + \frac{\nu'\,\delta x}{\alpha'+x} + \frac{\nu''\,\delta x}{\alpha''+x}.$$

Ἐὰν φέρωμεν τὰ κλάσματα ταῦτα ἐπὶ τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ἕξομεν ἔκθεσιν ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{Ax^2+Bx+\Gamma}{x^3+A'x^2+B'x+\Gamma'}\,\delta x,$$

τῶν $-\alpha$, $-\alpha'$, $-\alpha''$, οὐσῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως

$$x^3+A'x^2+B'x+\Gamma' = 0.$$

Ε΄. ΠΕΡΙ ΔΙΑΦΟΡΙΣΕΩΣ ΣΥΝΕΚΘΕΣΕΩΝ ΣΥΓΚΡΟΤΟΥΜΕΝΩΝ ΕΚ ΠΛΕΙΟΝΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΩΝ.

43. Ἐπανερχόμενοι εἰς τὰς ἐν § 2 ἀρχάς, ὑποθέσωμεν ὑπάρχουσαν μίαν ἐξίσωσιν περιεκτικὴν πλειόνων μεταβλητῶν ἀνεξαρτήτων. Ἅπασαι αἱ τιμαὶ τούτων ἔσονται κατὰ βούλησιν, πλὴν μιᾶς. Ἡ μεταβλητὴ ἧς τὴν τιμὴν ὑποθέτομεν ὁριζομένην διὰ τῆς ἐξισώσεως, ἀφοῦ δοθῶσιν αἱ τυχοῦσαι τιμαὶ εἰς ἁπάσας τὰς λοιπάς, εἶναι συνέκθεσις τῶν τελευταίων τούτων, αἵτινες ἔσονται αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταί. Ἡ σχέσις αὕτη δηλοῦται οὕτω,

$$\omega = \Sigma(\tau, \upsilon, x, \psi, \ldots).$$

Τὰ μὲν ἐν παρενθέσει γράμματα δηλοῦσι τὰς ἀνεξαρτήτους μεταβλητάς, ω δὲ τὴν μεταβλητήν, συνέκθεσιν αὐτῶν οὖσαν. Ἄρα πρέπει νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι δίδομεν ἑκάστῃ τῶν μεταβλητῶν τ, υ, x, ... ἁπάσας τὰς ὑπὸ $-\infty$ καὶ $+\infty$ ἀπολαμβανομένας τιμάς, νὰ φαντασθῶμεν δὲ τὴν διαδοχὴν τῶν συστοίχων τιμῶν ἃς λαμβάνει ἡ συνέκθεσις ω.

44. Ὅταν αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ ὦσι δύο, ἤτοι ὅταν ἔχωμεν

$$\omega = \Sigma(x, \psi),$$

ἡ Γεωμετρία χορηγεῖ καὶ αὖθις τὸ μέσον τοῦ παριστᾷν τὴν διαδοχὴν τῶν τιμῶν τῆς συνεκθέσεως ω. Τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τούτων συγκροτεῖ ἐπιφάνειαν ἧς τὸ σχῆμα δίδει ἰδέαν τῆς φύσεως τῆς συνεκθέσεως $\omega = \Sigma(x, \psi)$, καὶ τῆς διαδοχικῆς προόδου τῶν τιμῶν αὐτῆς.

Ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν μείζων εἶναι δύο, ἀδύνατον πλέον παραστῆσαι διὰ τῆς Γεωμετρίας, οὕτως ἐπαισθητῶς, τὴν φύσιν καὶ τὰ ἰδιώματα τῆς συνεκθέσεως. Ὅσα ζητήματα ἄγουσιν εἰς τὴν θεωρίαν πλειόνων μεταβλητῶν, ἀνήκουσιν ἀποκλειστικῶς τῇ ἀναλύσει, ἧς ἡ γενικότης εἶναι ἀπεριόριστος, καὶ ἥτις περιλαμβάνει ἅπαντας τοὺς συνδυασμοὺς οὓς παρέχει ἡ θεωρία τοῦ ποσοῦ.

45. Ἡ διαφόρισις τῶν ἐκ πλειόνων μεταβλητῶν ἀνεξαρτήτων συγκροτουμένων συνεκθέσεων ἐξαρτᾶται ἀπὸ τῶν αὐτῶν προεκτεθεισῶν ἀρχῶν. Ἑκάστη μεταβλητὴ ἀνεξάρτητος $\tau, \upsilon, x, \ldots$, ὑποτίθεται αὐξάνουσα κατὰ διαφορὰς ἀπειροστημορίους $\delta\tau, \delta\upsilon, \delta x, \ldots$ ὧν ἑκάστη διατηρεῖ μὲν τιμὴν ἄτρεπτον, δὲν ἔχουσι δὲ ποσῶς πρὸς ἀλλήλας σχέσεις ὡρισμένας. Ἐπομένως, ἡ μεταβλητὴ ω μεταβάλλεται κατὰ τὸ ἀπειροστὸν $\delta\omega$, οὗτινος ἡ τιμὴ εὑρίσκεται ἀείποτε διὰ τῆς θεωρίας τοῦ ὁρίου τοῦ πρὸς ἀλλήλας λόγου τῶν αὐξήσεων τῆς συνεκθέσεως καὶ ἑκάστης μεταβλητῆς ἀνεξαρτήτου.

46. Ἔστω ἡ συνέκθεσις

$$\omega = \Sigma(x, \psi).$$

Ὑποτιθεμένου ὅτι x καὶ ψ αὐξάνουσιν ἀμοιβαίως κατὰ ποσὰ οἱαδήποτε Δx καὶ $\Delta\psi$, ἡ σύστοιχος μεταβολὴ $\Delta\omega$ τῆς συνεκθέσεως ἀποσυντίθεται εἰς δύο μέρη, τὸ μὲν προερχόμενον ἐκ τῆς μεταβολῆς τῆς x μόνης, τὸ δὲ ἐκ τῆς μεταβολῆς τῆς ψ μόνης. Τῷ ὄντι, γράφομεν,

$$\Delta\omega = [\Sigma(x + \Delta x, \psi) - \Sigma(x, \psi)] + [\Sigma(x + \Delta x, \psi + \Delta\psi) - \Sigma(x + \Delta x, \psi)]$$

ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό,

$$\Delta\omega = \frac{\Sigma(x + \Delta x, \psi) - \Sigma(x, \psi)}{\Delta x}\Delta x + \frac{\Sigma(x + \Delta x, \psi + \Delta\psi) - \Sigma(x + \Delta x, \psi)}{\Delta\psi}\Delta\psi.$$

Ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι αἱ διαφοραὶ Δx καὶ $\Delta\psi$ προσεγγίζουσιν ἐπ' ἄπειρον τῷ μηδενί· τὸ ὅριον τοῦ μὲν λόγου

$$\frac{\Sigma(x + \Delta x, \psi) - \Sigma(x, \psi)}{\Delta x},$$

ἔσεται, κατὰ ἄρθ. Α΄, $\dfrac{\delta\,\Sigma(x, \psi)}{\delta x}$, τοῦ δὲ λόγου

$$\frac{\Sigma(x + \Delta x, \psi + \Delta\psi) - \Sigma(x + \Delta x, \psi)}{\Delta\psi},$$

ἔσεται, κατὰ τὸν ἐν § 28 συλλογισμόν, $\dfrac{\delta\,\Sigma(x, \psi)}{\delta\psi}$. Ἄρα ἡ ἔκθεσις τοῦ ζητουμένου διαφορικοῦ εἶναι

$$\delta\omega = \frac{\delta\,\Sigma(x, \psi)}{\delta x}\delta x + \frac{\delta\,\Sigma(x, \psi)}{\delta\psi}\delta\psi,$$

γραφομένη καὶ οὕτω,

$$\delta\omega = \frac{\delta\omega}{\delta x}\delta x + \frac{\delta\omega}{\delta\psi}\delta\psi.$$

47. Ὅταν ἐν τῇ τεθείσῃ συνεκθέσει περιέχωνται τρεῖς ἢ πλείονες μεταβληταί, αἱ αὐταὶ παρατηρήσεις ἐφαρμόζονται. Ἔστω

$$\omega = \Sigma(\upsilon, x, \psi).$$

Εὑρίσκομεν

$$\delta\omega = \frac{\delta\,\Sigma(\upsilon, x, \psi)}{\delta\upsilon}\delta\upsilon + \frac{\delta\,\Sigma(\upsilon, x, \psi)}{\delta x}\delta x + \frac{\delta\,\Sigma(\upsilon, x, \psi)}{\delta\psi}\delta\psi,$$

ἤ, ἁπλούστερον,

$$\delta\omega = \frac{\delta\omega}{\delta\upsilon}\delta\upsilon + \frac{\delta\omega}{\delta x}\delta x + \frac{\delta\omega}{\delta\psi}\delta\psi.$$

Καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς διὰ μείζονα ἀριθμὸν μεταβλητῶν.

48. *Παρατηρητέον*, ὅτι ἐν τῷ ἀνωτέρῳ τύπῳ, ὁ ὅρος $\dfrac{\delta\omega}{\delta\upsilon}\delta\upsilon$ δηλοῖ τὸ διαφορικὸν τῆς τεθείσης συνεκθέσεως ληφθὲν θεωρηθείσης υ μόνης ὡς μεταβλητῆς· τοῦτο δὲ καλεῖται τὸ *μερικὸν διαφορικὸν* τῆς συνεκθέσεως ω λαμβανόμενον πρὸς υ. Ὡσαύτως οἱ ὅροι $\dfrac{\delta\omega}{\delta x}\delta x$, $\dfrac{\delta\omega}{\delta\psi}\delta\psi$, ἐμφαίνουσι τὰ μερικὰ

διαφορικὰ τῆς συνεκθέσεως ω ληφθέντα τὸ μὲν πρὸς x, τὸ δὲ πρὸς ψ. Τὸ ἄθροισμα τῶν μερικῶν τούτων διαφορικῶν συγκροτεῖ τὸ *ὅλον διαφορικὸν* δω. Τὰ κλάσματα $\frac{\delta\omega}{\delta\upsilon}$, $\frac{\delta\omega}{\delta x}$, $\frac{\delta\omega}{\delta\psi}$, εἰσὶν ἐνταῦθα σύμβολα ἀναλυτικὰ δηλοῦντα ἀμοιβαίως τοὺς διαφορικοὺς συντελεστὰς τῆς συνεκθέσεως ω, οὓς μορφοῦμεν θεωροῦντες υ μόνην ὡς μεταβλητήν, x μόνην ὡς μεταβλητήν, ψ μόνην ὡς μεταβλητήν. Τῷ ἐν τῷ ἀριθμητῇ δω ἐμφαίνει τὸ μερικὸν διαφορικὸν τῆς ω, λαμβανόμενον πρὸς υ, ἢ πρὸς x, ἢ πρὸς ψ· δι' ὃ δὲν πρέπει νὰ συγχέηται τῷ δω τοῦ πρώτου μέλους τῆς ἐξισώσεως, ἐμφαίνοντι τὸ ὅλον διαφορικὸν τῆς συνεκθέσεως ω.

Παρατηρητέον προσέτι ὅτι, ἕνεκα τοῦ ἀνεξαρτήτου τῶν τιμῶν τῶν μεταβλητῶν υ, x, ψ, οὐδὲν ὑποχρεοῖ ὑποθέτειν αὐτὰς συγχρόνως μεταβαλλομένας. Οὕτως, ὅταν ζητῆται τὸ διαφορικὸν τῆς συνεκθέσεως $\omega = \Sigma\,(\upsilon, x, \psi)$, δηλωτέον συγχρόνως ἐὰν τὸ διαφορικὸν τοῦτο ἔσεται ὁλικόν· τότε δὲ μορφοῦται ἐν γένει κατὰ τὸν προηγούμενον τύπον· ἢ ἐὰν πρέπει νὰ ληφθῇ κατὰ μίαν, ἢ κατά τινας μόνον μεταβλητάς· τότε παραλείπονται ἐκ τοῦ αὐτοῦ τύπου οἱ ἀναφερόμενοι ὅροι πρὸς τὰς μεταβλητὰς αἵτινες ἔσονται θεωρηταὶ ὡς ἀναλλοίωτοι.

49. Ἐπειδὴ ἡ διαφόρισις τῶν ἐκ πολλῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν συγκροτουμένων συνεκθέσεων ἄγεται, κατὰ τὰ ἤδη ἐκτεθέντα, εἰς τὴν διαφόρισιν τῆς συνεκθέσεως πρὸς μίαν μόνην ἐξ αὐτῶν, εὐκόλως ἐφαρμόζομεν, ἐν ἑκάστῃ ἰδιαιτέρᾳ περιπτώσει, τοὺς ἐν τῷ προηγουμένῳ ἄρθρῳ κανόνας.

50. Ὅταν ἡ τεθεῖσα συνέκθεσις περιέχῃ δύο μόνον μεταβλητὰς ἀνεξαρτήτους, ὡς

$$\omega = \Sigma\,(\chi, \psi),$$

τὰ διάφορα μέρη τοῦ ὅλου διαφορικοῦ

$$\delta\omega = \frac{\delta\omega}{\delta x}\delta x + \frac{\delta\omega}{\delta\psi},$$

παριστάνονται διὰ τῆς Γεωμετρίας. (Σχ. 2) Ἔστω μ τὸ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τῶν xψ οὗτινος αἱ συντεταγμέναι ΑΠ, ΑΚ, παριστῶσι x, ψ· καὶ Μ τὸ ἐπὶ μ προβαλλόμενον σημεῖον τῆς ἐπιφανείας, οὗτινος ἡ τεταγμένη ΑΡ ἐμφαίνει τὴν τιμὴν τῆς συνεκθέσεως ω. Αἱ αὐξήσεις Δx, Δψ, παρασταθήσονται ὑπὸ μΘ καὶ μΘ'. Ἔστω μ'ν' ἡ προβολὴ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΧΩ τῆς καμπύλης τῆς τομῆς τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ ἐπιπέδου ἀγομένου ἀπὸ τοῦ σημείου Μ παραλλήλως τῷ ΧΩ. Ἔστω ἐπίσης μ''ν'' ἡ προβολὴ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΨΩ τῆς καμπύλης τῆς τομῆς τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ ἐπιπέδου ἀγομένου ἀπὸ τοῦ σημείου Μ παραλλήλως τῷ ΨΩ. Δῆλον ὅτι ν'Ρ' ἐμφαίνει τὴν μεταβολὴν ἣν λαμβάνει ἡ τεταγμένη ω, εἰ ἡ τετμημένη x μόνη ηὔξανε κατὰ Δx ἢ μΘ· ὅτι ν''Ρ'' ἐμφαίνει τὴν μεταβολὴν τῆς αὐτῆς τεταγμένης, εἰ ψ μόνη ηὔξανε κατὰ Δψ ἢ μΘ'. Ἡ ὅλη διαφορὰ τῆς τεταγμένης ω, ἤτοι ἡ προκύπτουσα ἐκ τῆς ταυτοχρόνου αὐξήσεως ἀμφοτέρων τῶν τετμημένων, παριστάνεται ὑπὸ τῆς διαφορᾶς ἀπ' ἀλλήλων τῆς τεταγμένης τοῦ σημείου Μ τῆς ἐπιφανείας ἐπὶ μ προβαλλομένου, καὶ τῆς τεταγμένης τοῦ σημείου Ν τῆς αὐτῆς ἐπὶ ν προβαλλομένου. Ὅταν αἱ αὐξήσεις ὑποτεθῶσιν ἀπειροστά, ν'Ρ' ἐμφαίνει τὸ μέρος $\frac{\delta\omega}{\delta x}\delta x$ τοῦ ὅλου διαφορικοῦ, ὁ δὲ διαφορικὸς συντελεστὴς $\frac{\delta\omega}{\delta x}$, πρὸς x λαμβανόμενος, δηλοῦται ὑπὸ τῆς τριγωνομετρικῆς ἐφαπτομένης τῆς γωνίας ν'μ'Ρ'. Ἐπίσης, ν''Ρ'' παριστᾷ τὸ μέρος $\frac{\delta\omega}{\delta\psi}\delta\psi$ τοῦ ὅλου διαφορικοῦ, ὁ δὲ διαφορικὸς συντελεστὴς $\frac{\delta\omega}{\delta\psi}$, πρὸς ψ λαμβανόμενος, δηλοῦται ὑπὸ τῆς τριγωνομετρικῆς ἐφαπτομένης τῆς γωνίας ν''μ''Ρ''. Βλέπομεν ὅτι, ἐν τῇ περιπτώσει τῶν ἀπειροστημορίων αὐξήσεων, ἡ μεταβολὴ τῆς τεταγμένης ω, ὅταν ἀπὸ τοῦ ἐπὶ μ προβαλλομένου σημείου τῆς ἐπιφανείας μεταβῶμεν εἰς τὸ ἐπὶ ν προβαλλόμενον, εἶναι ἀείποτε τὸ ἄθροισμα τῶν μεταβολῶν προκυπτουσῶν ἀμοιβαίως τῇ μεταβάσει ἀπὸ τοῦ ἐπὶ μ προβαλλομένου σημείου εἰς τὰ δύο σημεῖα ἐπὶ Θ καὶ Θ′ προβαλλόμενα.

51. Ἕπονται πρὸς ἄσκησιν διάφορα ὑποδείγματα διαφορίσεως συνεκθέσεων ἐκ πλειόνων μεταβλητῶν συγκροτουμένων.

1) $\omega = x^{\mu}\,\psi^{\nu}\,,\quad \delta\omega = x^{\mu-1}\psi^{\nu-1}(\mu\psi\delta x + \nu x\delta\psi).$

2) $\omega = \dfrac{\alpha\psi}{\sqrt{x^2+\psi^2}},\quad \delta\omega = \dfrac{-\alpha x\psi\delta x + \alpha x^2\delta\psi}{(x^2+\psi^2)^{\frac{3}{2}}}.$

3) $\omega = \text{τόξ ἐφ}\,\dfrac{x}{\psi},\qquad \delta\omega = \dfrac{\psi\delta x - x\delta\psi}{x^2+\psi^2}.$

4) $\omega = \left(\dfrac{x^2-\psi^2}{x^2+\psi^2}\right)^{\frac{1}{2}},\quad \delta\omega = \dfrac{2x\psi\,(\psi\delta x - x\delta\psi)}{(x^2+\psi^2)^{\frac{3}{2}}\,(x^2-\psi^2)^{\frac{1}{2}}}.$

5) $\omega = (x^2+\psi^2+\upsilon^2)^{\frac{1}{2}} + \text{τόξ ἐφ}\,\dfrac{x}{\upsilon} + \dfrac{\upsilon^2}{2},$

$$\delta\omega = \frac{x\delta x + \psi\delta\psi + \upsilon\delta\upsilon}{(x^2+\psi^2+\upsilon^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\upsilon\delta x - x\delta\upsilon}{x^2+\upsilon^2} + \upsilon\delta\upsilon,$$

6) $\omega = \lambda\,\text{ἐφ}\,\dfrac{x}{\psi},\qquad \delta\omega = \dfrac{2\,(\psi\delta x - x\delta\psi)}{\psi^2\,\text{ἡμ}\,2\dfrac{x}{\psi}}.$

7) $\omega = \dfrac{x^{\frac{1}{2}} + \psi^{\frac{1}{2}}}{x+\psi}$

$$\delta\omega = \frac{[\psi - x - 2(x\psi)^{\frac{1}{2}}]\psi^{\frac{1}{2}}\delta x + [x - \psi - 2(x\psi)^{\frac{1}{2}}]x^{\frac{1}{2}}\delta\psi}{2(x\psi)^{\frac{1}{2}}(x+\psi)^2}.$$

8) $\omega = \dfrac{e^{\upsilon}\,\psi}{(x^2+\psi^2)^{\frac{1}{2}}},\quad \delta\omega = \dfrac{e^{\upsilon}\,\psi\,\delta\upsilon}{(x^2+\psi^2)^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{x e^{\upsilon}(x\delta\psi - \psi\delta x)}{(x^2+\psi^2)^{\frac{3}{2}}}.$

9) $\omega = \text{ἡμ}(x^{\mu}\psi^{\nu}),\ \delta\omega = x^{\mu-1}\psi^{\nu-1}\,\text{συν}(x^{\mu}\psi^{\nu})(\mu\psi\delta x + \nu x\delta\psi),$

10) $\omega = \dfrac{x^2\psi}{\alpha^2-\upsilon^2},\quad \delta\omega = \dfrac{2x\psi\delta x}{\alpha^2-\upsilon^2} + \dfrac{x^2\delta\psi}{\alpha^2-\upsilon^2} + \dfrac{2x^2\psi\upsilon\delta\upsilon}{(\alpha^2-\upsilon^2)^2}.$

ΣΤ′. ΠΕΡΙ ΔΙΑΦΟΡΙΣΕΩΣ ΣΥΝΕΚΘΕΣΕΩΝ ΣΥΝΕΠΤΥΓΜΕΝΩΝ.

52. *Συνέκθεσις ἀνεπτυγμένη* καλεῖται ἐκείνη ἧς ἡ ἀναλυτικὴ ἔκθεσις δίδεται διὰ ποσῶν ἀμεταβλήτων καὶ μεταβλητῶν ἀφ᾽ ὧν ἡ τιμὴ αὐτῆς ἐξαρτᾶται. Οὕτω λέγομεν ὅτι, συνέκθεσίς τις ω τῶν μεταβλητῶν x καὶ ψ εἶναι ἀνεπτυγμένη, ἢ ὅτι δίδεται *ἀνεπτυγμένως*, ὅταν ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν,

$$\omega = \Sigma\,(x,\,\psi).$$

Ἀλλ᾽ ὅταν ἡ συνέκθεσις ω συμπλέκηται ταῖς μεταβληταῖς x καὶ ψ ἐν ἐξισώσει ὡς τὴν

$$\Sigma\,(x,\,\psi,\,\omega) = 0,$$

μὴ οὔσῃ ἐπιλελυμμένῃ πρὸς ω, αὕτη τότε καλεῖται *συνέκθεσις συνεπτυγμένη*· λέγομεν δὲ ὅτι ἡ τιμὴ αὐτῆς δίδεται *συνεπτυγμένως*. Τῇ τοιαύτῃ ἐκφράσει ἐννοοῦμεν ὅτι, ἡ τιμὴ τῆς συνεκθέσεως ω, καίτοι οὖσα ὡρισμένη ὅταν ὁρισθῶσιν αἱ τῶν μεταβλητῶν x, ψ, δὲν δηλοῦται ὑπὸ ἐκθέσεως ἀναλυτικῆς γνωστῆς· τὴν ἔκθεσιν ταύτην λαμβάνομεν ἐπιλύοντες τὴν ἐξίσωσιν, ἡ δὲ συνέκθεσις καθίσταται τότε ἀνεπτυγμένη. Τὰς συνεπτυγμένας συνεκθέσεις διαφορίζομεν εὐκόλως ὡς τὰς ἀνεπτυγμένας· ἤτοι μορφοῦμεν τὴν ἔκθεσιν τοῦ διαφορικοῦ τῆς συνεκθέσεως χωρὶς νὰ ἐπιλύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ἐν ᾗ ὑπάρχει περιπεπλεγμένη.

Ἡ φύσις ἑκάστης προτάσεως [2] ὁρίζει ἀείποτε τὸν ἀριθμὸν τῶν μεταβλητῶν, ὡς καὶ τὰς μεταξὺ αὐτῶν ὑπαρχούσας σχέσεις, αἵτινες δηλοῦνται ὑπὸ ἐξισώσεων. Τοῦ μὲν ἀριθμοῦ τῶν μεταβλητῶν ὄντος μ, τοῦ δὲ τῶν ἐξισώσεων ν, μ—ν μεταβληταὶ ἔσονται ἀνεξάρτητοι, αἱ δὲ λοιπαὶ ν συνεκθέσεις τούτων. Ἐκ τῶν μεταβλητῶν διακρίνονται αἱ ὡς ἀνεξάρτητοι θεωρηταί και αί ούσαι συνεκθέσεις τούτων· ή διάκρισις δὲ αὕτη τηρεῖται ἀναλλοιώτως καθ' ἅπασαν τὴν σειρὰν τῶν ἐργασιῶν.

53. Θεωρήσωμεν πρῶτον τὴν ἁπλῆν περίπτωσιν μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x σὺν τῇ συνεκθέσει ψ, συνδεομένων τῇ ἐξισώσει

$$\Sigma(x, \psi) = 0.$$

Τῆς ἐξισώσεως ταύτης ὑπαρχούσης οἱανδήποτε τιμὴν δώσωμεν τῇ x, φανερὸν ὅτι ἔχομεν

$$\Sigma(x + \Delta x,\ \psi + \Delta\psi) = 0\cdot$$

δηλοῦντες πάντοτε $\Delta\psi$ τὴν μεταβολὴν τῆς συνεκθέσεως ψ, ἀντιστοιχοῦσαν τῇ αὐξήσει Δx διδομένῃ τῇ x. Ἄρα ἔχομεν ἐπίσης τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\Sigma(x + \Delta x,\ \psi + \Delta\psi) - \Sigma(x,\ \psi)}{\Delta x} = 0\,,$$

ὑπάρχουσαν οἱαδήποτε εἶναι ἡ Δx· ἑπομένως ὑπάρχουσαν καὶ κατὰ τὸ ὅριον ᾧ τείνει τὸ πρῶτον μέλος, ὅταν Δx τείνῃ πρὸς τὸ κατασταθῆναι ἴση μηδενί. Ἀλλά, τὸ ὅριον τοῦτο ἀκριβῶς ἐστιν ὁ διαφορικὸς συντελεστὴς $\dfrac{\delta\,\Sigma(x,\psi)}{\delta x}$, τοῦ πρώτου μέλους τῆς τεθείσης ἐξισώσεως, οὗτινος ἡ ἔκθεσις εἶναι ἐνταῦθα (κατὰ § 28 καὶ διότι ψ εἶναι συνέκθεσις τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x), $\dfrac{\delta\,\Sigma(x,\psi)}{\delta x} + \dfrac{\delta\,\Sigma(x,\psi)}{\delta\psi}\,\dfrac{\delta\psi}{\delta x}$,

Ἄρα, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν,

$$\frac{\delta\Sigma(x,\psi)}{\delta x} + \frac{\delta\Sigma(x,\psi)}{\delta\psi}\,\frac{\delta\psi}{\delta x} = 0,$$

ἣν πολλάκις γράφουσι συντομώτερον καὶ οὕτω,

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta x} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\psi}\,\frac{\delta\psi}{\delta x} = 0\cdot$$

δηλουμένης μόνῳ τῷ γράμματι Σ τῆς τεθείσης συνεκθέσεως $\Sigma(x, \psi)$, ἐξ ἧς δὲ συνάγομεν τὴν ἔκθεσιν τοῦ διαφορικοῦ συντελεστοῦ ἢ τῆς παραγομένης συνεκθέσεως τῆς ψ,

$$\frac{\delta\psi}{\delta x} = -\,\frac{\dfrac{\delta\Sigma}{\delta x}}{\dfrac{\delta\Sigma}{\delta\psi}}, \qquad \text{καὶ} \qquad \delta\psi = -\,\frac{\dfrac{\delta\Sigma}{\delta x}}{\dfrac{\delta\Sigma}{\delta\psi}}\,\delta x.$$

Παρατηρητέον, ὅτι αἱ τιμαὶ αὗται ἐκτίθενται δι' ἀμφοτέρων συγχρόνως τῶν μεταβλητῶν x, ψ. Τότε μόνον δύνανται ἐκτεθεῖναι διὰ μόνης τῆς x, ὅταν δυνάμεθα ἐπιλῦσαι τὴν ἐξίσωσιν $\Sigma(x, \psi) = 0$ πρὸς ψ. Οὐχ ἧττον ὅμως οἱ τύποι οὗτοι εἰσὶ λίαν χρήσιμοι καὶ ἐν περιπτώσει καθ' ἣν ἡ ἐπίλυσις αὕτη εἶναι ἀδύνατος.

54. Ἡ ποσότης $\dfrac{\delta\Sigma}{\delta x} + \dfrac{\delta\Sigma}{\delta\psi}\,\dfrac{\delta\psi}{\delta x}$ εἶναι τὸ διαφορικὸν τῆς συνεκθέσεως Σ, ἀφ' οὗ ἀφῃρέθη ὁ ἄτρεπτος παράγων δx. Τὸ διαφορικὸν τοῦτο ἰσοῦται μηδενί. Δῆλον τῷ ὄντι ὅτι, ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις $\Sigma(x, \psi) = 0$ ὑπάρχει διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς x, ἡ ἔκθεσις μεταβολῆς πεπερασμένης ἢ ἀπειροστημορίου ἐπερχομένης τῇ συνεκθέσει $\Sigma(x, \psi)$, συνεπείᾳ αὐξήσεως πεπερασμένης ἢ ἀπειροστημορίου διδομένης τῇ x, ἔσεται μηδέν. Ἐν γένει, ἡ ἐξίσωσις $\Sigma = 0$, Σ δηλοῦντος πᾶσαν συνέκθεσιν πολλῶν μεταβλητῶν, συνεπάγει ἀείποτε τὴν ἐξίσωσιν $\delta\Sigma = 0\cdot$ $\delta\Sigma$ δηλοῦντος τὸ διαφορικὸν τῆς συνεκθέσεως Σ, ὃ δύναται εἶναι ὁλικὸν ἢ μερικόν.

55. Ἔστω προσέτι ἡ ἐξίσωσις

$$\Sigma(x,\ \psi,\ \omega) = 0,$$

ἐν ᾗ x, ψ, εἰσὶ μεταβληταὶ ἀνεξάρτητοι, καὶ ω συνέκθεσις ἀμφοτέρων τούτων. Ὅταν x λάβῃ οἱανδήποτε αὔξησιν, τῆς ψ ὑποτιθεμένης ἀτρέπτου, ἡ ω λαμβάνει μεταβολὴν ἐξαρτωμένην ἀπὸ τῆς μεταβολῆς τῆς x. Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ταύτην, θεωρητέον τὴν τεθεῖσαν ἐξίσωσιν ὡς περιεκτικὴν τῶν δύο μόνον μεταβλητῶν x καὶ ω. Λοιπόν, κατὰ τ' ἀνωτέρω; ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta x}+\frac{\delta\Sigma}{\delta\omega}\frac{\delta\omega}{\delta x}=0,$$

ἐξ ἧς ποριζόμεθα τὸν μερικὸν διαφορικὸν συντελεστὴν $\frac{\delta\omega}{\delta x}$ τῆς συνεκθέσεως ω, πρὸς x μόνην μεταβαλλομένην.

Κατὰ συλλογισμὸν ἀνάλογον, δῆλον ὅτι ἔχομεν καὶ τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta\psi}+\frac{\delta\Sigma}{\delta\omega}\frac{\delta\omega}{\delta\psi}=0\,;$$

ἐξ ἧς ὁρίζεται ὁ μερικὸς διαφορικὸς συντελεστὴς $\frac{\delta\omega}{\delta\psi}$ τῆς συνεκθέσεως ω, πρὸς ψ μόνην μεταβαλλομένην.

56. Ἐὰν πολυπλασιάσωμεν τὰς ἄνωθι δύο ἐξισώσεις, τὴν μὲν ἐπὶ δx τὴν δὲ ἐπὶ δψ, καὶ προσθέσωμεν αὐτάς, ἕξομεν

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta x}\delta x+\frac{\delta\Sigma}{\delta\psi}\delta\psi+\frac{\delta\Sigma}{\delta\omega}\left(\frac{\delta\omega}{\delta x}\delta x+\frac{\delta\omega}{\delta\psi}\delta\psi\right)=0\cdot$$

ἢ κατὰ § 46,

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta x}\delta x+\frac{\delta\Sigma}{\delta\psi}\delta\psi+\frac{\delta\Sigma}{\delta\omega}\delta\omega=0\cdot$$

Ὅθεν βλέπομεν καὶ αὖθις ὅτι δυνάμεθα ἐξισῶσαι μηδενὶ τὸν διαφορικὸν συντελεστὴν τῆς ἐξισώσεως $\Sigma=0$, λαμβανόμενον κατὰ τὰς τρεῖς μεταβλητὰς x, ψ, ω. Πρέπει ὅμως νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι, τὸ διαφορικὸν τοῦτο ἰσοδυναμεῖ πρὸς δύο ἐξισώσεις· διότι, ὅταν ἐν τῇ ἐκθέσει αὐτοῦ θέσωμεν ἀντὶ δω τὴν τιμὴν $\frac{\delta\omega}{\delta x}\delta x+\frac{\delta\omega}{\delta\psi}\delta\psi$, τὸ ἀνεξάρτητον τῶν αὐξήσεων δx καὶ δψ, ἀπαιτεῖ ὅπως ἑκάστη χωριστὰ τῶν πολυπλασιαζουσῶν αὐτὰς ποσοτήτων εἴη ἴση μηδενί.

57. Θεωρήσωμεν ἤδη τὴν γενικὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἔχομεν πλείονας συνεκθέσεις καὶ μεταβλητὰς ἀνεξαρτήτους· Ἔστωσαν π. χ. αἱ δύο ἐξισώσεις

$$\sigma(\upsilon,x,\psi,\omega)=0,\qquad \Sigma(\upsilon,x,\psi,\omega)=0,$$

ἐν αἷς υ καὶ x εἰσὶ μεταβληταὶ ἀνεξάρτητοι, ψ καὶ ω συνεκθέσεις τῶν υ καὶ x διδόμεναι συνεπτυγμένως ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων τούτων. Ἐπειδὴ τὰ διαφορικὰ τῶν συνεκθέσεων σ καὶ Σ πρέπει νὰ ὦσι μηδέν, κατὰ τὰ προλεχθέντα, λαμβάνοντες αὐτὰ συμφώνως πρὸς τοὺς προαποδοθέντας κανόνας, ἔχοντες δὲ ὑπ' ὄψιν ὅτι ψ καὶ ω εἰσὶ συνεκθέσεις τῶν υ καὶ x, ἔχομεν,

$$\left(\frac{\delta\sigma}{\delta\upsilon}+\frac{\delta\sigma}{\delta\psi}\frac{\delta\psi}{\delta\upsilon}+\frac{\delta\sigma}{\delta\omega}\frac{\delta\omega}{\delta\upsilon}\right)\delta\upsilon+\left(\frac{\delta\sigma}{\delta x}+\frac{\delta\sigma}{\delta\psi}\frac{\delta\psi}{\delta x}+\frac{\delta\sigma}{\delta\omega}\frac{\delta\omega}{\delta x}\right)\delta x=0,$$

$$\left(\frac{\delta\Sigma}{\delta\upsilon}+\frac{\delta\Sigma}{\delta\psi}\frac{\delta\psi}{\delta\upsilon}+\frac{\delta\Sigma}{\delta\omega}\frac{\delta\omega}{\delta\upsilon}\right)\delta\upsilon+\left(\frac{\delta\Sigma}{\delta x}+\frac{\delta\Sigma}{\delta\psi}\frac{\delta\psi}{\delta x}+\frac{\delta\Sigma}{\delta\omega}\frac{\delta\omega}{\delta x}\right)\delta x=0.$$

Ἐν ἑκάστῃ τῶν ἐξισώσεων τούτων δυνάμεθα ὑποθέσαι χωριστὰ $\delta\upsilon=0$, ἢ $\delta x=0$· ἄρα, ἰσοδυναμοῦσιν αὗται πρὸς τέσσαρας ἐξισώσεις διακεκριμένας ὁριζούσας τὰς τιμὰς τῶν τεσσάρων μερικῶν διαφορικῶν συντελεστῶν $\frac{\delta\psi}{\delta\upsilon},\frac{\delta\psi}{\delta x},\frac{\delta\omega}{\delta\upsilon},\frac{\delta\omega}{\delta x}$. Οἱ διαφορικοὶ οὗτοι συντελεσταὶ ἐκτίθενται διὰ τῶν τεσσάρων μεταβλητῶν υ, x, ψ, ω, συγχρόνως.

Ἀφ' οὗ οὕτω λάβωμεν τὰς τιμὰς τῶν μερικῶν διαφορικῶν συντελεστῶν τῶν συνεκθέσεων ψ καὶ ω, μορφοῦμεν τὰ ὁλικὰ διαφορικὰ τούτων, ἀντεισάγοντες τὰς αὐτὰς τιμὰς ἐν ταῖς γενικαῖς ἐκθέσεσι

$$\delta\psi=\frac{\delta\psi}{\delta\upsilon}\delta\upsilon+\frac{\delta\psi}{\delta x}\delta x\,,\qquad \delta\omega=\frac{\delta\omega}{\delta\upsilon}\delta\upsilon+\frac{\delta\omega}{\delta x}\delta x.$$

58. Αἱ αὐταὶ θεωρίαι ἐπεκτείνονται εὐκόλως εἰς περι-

πτώσεις καθ' ἃς ἔχομεν μείζονα ἀριθμὸν μεταβλητῶν καὶ ἐξισώσεων.

Ἕπονται ὑποδείγματά τινα πρὸς ἄσκησιν.

1) $\psi^2 - 2\mu x\psi + x^2 - \alpha^2 = 0, \quad \frac{\delta\psi}{\delta x} = \frac{\mu\psi - x}{\psi - \mu x}.$

2) $\psi^3 - 3\,\alpha x\psi + x^3 = 0, \quad \frac{\delta\psi}{\delta x} = \frac{\alpha\psi - x^2}{\psi^2 - \alpha x}.$

3) $x\lambda\psi = \psi\lambda x, \quad \frac{\delta\psi}{\delta x} = \frac{\psi}{x}\cdot\frac{\psi - x\lambda\psi}{x - \psi\lambda x}.$

4) $\eta\mu\,\psi = x\,\eta\mu(\alpha + \psi), \quad \frac{\delta\psi}{\delta x} = \frac{\eta\mu\,(\alpha + \psi)}{\sigma\upsilon\nu\,\psi - x\,\sigma\upsilon\nu(\alpha + \psi)}.$

5) $\psi^\nu\lambda\psi = \alpha x, \quad \frac{\delta\psi}{\delta x} = \frac{\alpha}{\psi^{\nu-1}(1 + \nu\lambda\psi)}.$

6) $\varepsilon\varphi\,\psi = 1 + x\,\eta\mu\,\psi, \quad \frac{\delta\psi}{\delta x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\psi\;\eta\mu\,\psi}{1 - x\,\sigma\upsilon\nu^3\psi}.$

7) $\varepsilon\varphi\,\frac{\psi}{2} = \left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)^{\frac{1}{2}},$ τῇ διὰ λογαρίθμων διαφορίσει

εὑρίσκομεν, $\frac{\delta\psi}{\delta x} = -\frac{\eta\mu\,\psi}{1 - x^2} = -\frac{1}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}.$

8) $\psi = 1 + xe^\psi, \quad \frac{\delta\psi}{\delta x} = \frac{e^\psi}{1 - xe^\psi} = \frac{e^\psi}{2 - \psi}.$

9) $x(1 + \psi)^{\frac{1}{2}} + \psi(1 + x)^{\frac{1}{2}} = 0,$

$$\frac{\delta\psi}{\delta x} = \frac{\psi}{x}\cdot\frac{\psi + 2\,(1 + x)^{\frac{1}{2}}(1 + \psi)^{\frac{1}{2}}}{x + 2\,(1 + x)^{\frac{1}{2}}(1 + \psi)^{\frac{1}{2}}}.$$

10) $2\,\tau\acute{o}\xi\,\eta\mu\,\frac{x}{\theta} + \tau\acute{o}\xi\,\eta\mu\,\frac{\psi}{\eta} = \gamma, \quad \frac{\delta\psi}{\delta x} = -\frac{(\eta^2 - \psi^2)^{\frac{1}{2}}}{(\theta^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}.$

11) $(x - \beta\psi^2)^{\frac{1}{3}} = (\alpha x^3 - \psi)^{\frac{1}{5}},$

$$\frac{\delta\psi}{\delta x} = \frac{5\,(\alpha x^3 - \psi) - 9\alpha x^2\,(x - \beta\psi^3)}{10\,\beta\psi\,(\alpha x^3 - \psi) - 3(x - \beta\psi^2)}.$$

12) $x^2 + \psi^2 + \omega^2 = \kappa^2, \quad \alpha x + \beta\psi + \gamma\omega + \theta = 0,$

$$\frac{\delta\psi}{\delta x} = \frac{\alpha\omega - \gamma x}{\gamma\psi - \beta\omega}, \qquad \frac{\delta\omega}{\delta x} = \frac{\beta x - \alpha\psi}{\gamma\psi - \beta\omega}.$$

Ζ'. ΠΕΡΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΤΑΞΕΩΝ ΤΩΝ ΣΥΝΕΚΘΕΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ.

59. Πρῶτον θεωρήσομεν μίαν μεταβλητὴν ἀνεξάρτητον σὺν τῇ ἀπὸ ταύτης ἐξαρτωμένῃ συνεκθέσει ψ,

$$\psi = \Sigma\,(x).$$

Πρὸς μείζονα δὲ σαφήνειαν, θέσομεν ὑπ' ὄψιν ἡμῶν τὴν γεωμετρικὴν παράστασιν τῆς συνεκθέσεως (Σχ. 3). Ἡ μὲν τετμημένη ΑΠ παριστᾷ τὴν x, ἡ δὲ τεταγμένη ΜΠ τὴν ψ.

Τούτων τεθέντων, τεθείσθω ὅτι x αὐξάνει κατά τινα ποσότητα Δx ἢ ΠΠ'. Ἡ νέα τιμὴ τῆς ψ, ἣν καλοῦμεν ψ_1, παρασταθήσεται ὑπὸ Π'Μ', καὶ Μ'Κ παραστήσει τὴν $\Delta\psi$. Ἔχομεν

$$\Delta\psi = \psi_1 - \psi.$$

Εἶτα, ὑποθέσωμεν ὅτι x αὐξάνει καὶ πάλιν ἀπὸ τῆς τιμῆς ΑΠ' κατὰ τὴν αὐτὴν ποσότητα Δx, παρισταμένην ὑπὸ Π'Π'' = ΠΠ'. Ἡ νέα τιμὴ τῆς ψ, ἣν καλοῦμεν ψ_2, παρασταθήσεται ὑπὸ Π''Μ'', καὶ Μ''Κ' παραστήσει $\Delta\psi_1$. Ἄρα

$$\Delta\psi_1 = \psi_2 - \psi_1.$$

Προαχθείτω ἡ τέμνουσα ΜΜ' μέχρι Σ· τὸ ἀπόστημα ΣΚ' ἰσοῦται Μ'Κ ἢ $\Delta\psi$. Ἄρα, Μ''Σ παριστᾷ τὴν διαφορὰν τῶν $\Delta\psi_1$ καὶ $\Delta\psi$. Ἐπειδὴ τῇ $\Delta\psi$ δηλοῦται ἡ διαφορὰ τῶν δύο τιμῶν τῆς ψ, ἀντιστοιχουσῶν ἐπὶ x καὶ $x + \Delta x$, ἐξ ἀναλογίας ὁδηγούμεθα δηλῶσαι $\Delta\Delta\psi$ ἢ $\Delta^2\psi$, τὴν διαφορὰν τῶν δύο τιμῶν τῆς $\Delta\psi$ ἀντιστοιχουσῶν ἐπὶ x καὶ $x + \Delta x$. Λοιπόν, γράφομεν

$$\Delta^2\psi = \Delta\psi_1 - \Delta\psi.$$

Μορφοῦντες τὸν ἑξῆς πίνακα, λαμβάνομεν σαφεστέραν ἰδέαν τῶν ποσοτήτων ἃς ἐνταῦθα θεωροῦμεν.

Τιμαὶ τῆς x.	Τιμαὶ ἀντιστοιχοῦσαι τῆς ψ.	Διαφοραὶ τῶν τιμῶν αὐτῶν.	Διαφοραὶ τῶν διαφορῶν.
x	ψ		
$x + \Delta x$	ψ_1	$\Delta\psi = \psi_1 - \psi$	
$x + 2\Delta x$	ψ_2	$\Delta\psi_1 = \psi_2 - \psi_1$	$\Delta^2\psi = \Delta\psi_1 - \Delta\psi.$

Οἱ Μαθηματικοὶ καλοῦσι, τὴν μὲν $\Delta\psi$ *διαφορὰν πρώτην*, ἢ *διαφορὰν τῆς πρώτης τάξεως* τῆς συνεχθέσεως ψ· τὴν δὲ $\Delta^2\psi$ *διαφορὰν δευτέραν*, ἢ *διαφορὰν τῆς δευτέρας τάξεως* τῆς αὐτῆς συνεχθέσεως.

60. Ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι ἡ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς διαφορὰ Δx μειοῦται βαθμηδὸν τείνουσα πρὸς τὸ κατασταθῆναι ἴση μηδενί. Τὰ δύο σημεῖα Μ', Μ'', τενοῦσι πρὸς τὸ ταυτισθῆναι τῷ Μ· αἱ δύο τιμαὶ ψ_1, ψ_2, πρὸς τὸ ἰσωθῆναι τῇ ψ· αἱ δὲ τρεῖς διαφοραὶ $\Delta\psi$, $\Delta\psi_1$, $\Delta^2\psi$, πρὸς τὸ μηδενισθῆναι συγχρόνως. Ἀλλ' ἀναγκαῖον παρατηρῆσαι ὅτι, ἡ δευτέρα διαφορὰ $\Delta^2\psi$ μειωθήσεται πολὺ ταχύτερον ἢ αἱ πρῶται

διαφοραὶ $\Delta\psi$, $\Delta\psi_1$· ὥστε, ὅταν Δx, $\Delta\psi$, $\Delta\psi_1$, κατασταθῶσιν ἐλάχισται πρὸς τὴν μονάδα, $\Delta^2\psi$ ἔσεται ἐλαχίστη πρὸς Δx, $\Delta\psi$, ἢ $\Delta\psi_1$.

Ὅπως πεισθῶμεν περὶ τούτου, παρατηρητέον ὅτι, ἡ ἔκθεσις τῆς $\Delta^2\psi$ τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\Delta^2\psi = \left(\frac{\Delta\psi_1}{\Delta x} - \frac{\Delta\psi}{\Delta x}\right)\Delta x .$$

Ὑποθέτοντες δὲ ὅτι Δx μειοῦται τείνουσα πρὸς τὸ μηδέν, τὰ ποσὰ $\frac{\Delta\psi_1}{\Delta x}$, $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}$, προσεγγίσουσιν ἀμφότερα τῷ αὐτῷ ὁρίῳ, ὅπερ εἶναι $\frac{\delta\psi}{\delta x}$. Ἄρα, ἡ τιμὴ τῆς $\Delta^2\psi$, συγκροτουμένη ἐκ δύο παραγόντων ἐχόντων κοινὸν ὅριον τὸ μηδέν, μειωθήσεται πολὺ ταχύτερον ἢ ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων τούτων· ὅταν δὲ ἀμφότεροι ἀποκατασταθῶσιν ἐλάχιστοι, καὶ αὐτὴ ἔσεται ἐλαχίστη πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν.

61. Ἡ αὐτὴ ἔκθεσις τῆς $\Delta^2\psi$ γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς,

$$\Delta^2\psi = \frac{\dfrac{\Delta\psi_1}{\Delta x} - \dfrac{\Delta\psi}{\Delta x}}{\Delta x}(\Delta x)^2 .$$

Ὅταν Δx μειοῦται προσεγγίζουσα τῷ μηδενὶ καὶ ἀποκαθίσταται ἐλάσσων παντὸς μεγέθους δεδομένου, ὅπερ ἐκφράζομεν δηλοῦντες τὴν διαφορὰν ταύτην τῷ δx, ἑκάστης τῶν ποσοτήτων $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}$, $\frac{\Delta\psi_1}{\Delta x}$, τὸ ὅριον εἶναι ὁ διαφορικὸς συντελεστὴς $\frac{\delta\psi}{\delta x}$· τοῦ λόγου δὲ $\dfrac{\dfrac{\Delta\psi_1}{\Delta x} - \dfrac{\Delta\psi}{\Delta x}}{\Delta x}$ τὸ ὅριον εἶναι ὁ διαφορικὸς συντελεστὴς τῆς συνεκθέσεως $\frac{\delta\psi}{\delta x}$ ἢ ἤτοι $\frac{\delta \frac{\delta\psi}{\delta x}}{\delta x}$. Λοιπόν, δηλοῦντες $\delta^2\psi$ ὅ,τι καθίσταται ἡ $\Delta^2\psi$, ὅταν Δx καθίσταται δx, ἔχομεν

$$\delta^2\psi = \frac{\delta \frac{\delta\psi}{\delta x}}{\delta x} (\delta x)^2 .$$

$\delta^2\psi$ *καλεῖται τὸ διαφορικὸν ἢ ἀπειροστὸν τῆς δευτέρας τάξεως* τῆς συνεκθέσεως ψ.

ΣΗΜ. *Παρατηρητέον ὅτι, εἰώθασι γράφειν ἁπλῶς* Δx^2 *ἢ* δx^2 *εἰς δήλωσιν* τοῦ τετραγώνου τῆς Δx ἢ τοῦ δx· οὐ συγχέεται δὲ πως ἡ τοιαύτη δήλωσις τῷ διαφορικῷ τῆς συνεκθέσεως x^2, ὅπερ ἐκθετέον οὕτω, $\delta(x^2)$, ἢ $\delta . x^2$.

Ἡ μὲν συνέκθεσις $\frac{\delta\psi}{\delta x}$ εἶναι *ὁ διαφορικὸς συντελεστὴς τῆς πρώτης τάξεως* τῆς συνεκθέσεως ψ· ἡ δὲ $\frac{\delta \frac{\delta\psi}{\delta x}}{\delta x}$, *ὁ διαφορικὸς συντελεστὴς τῆς δευτέρας τάξεως* τῆς αὐτῆς συνεκθέσεως. Ἐξ ἀναλογίας ὁδηγούμενοι σημειοῦμεν τοῦτον ἁπλούστερον, γράφοντες $\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}$ Λοιπόν, *τὸ διαφορικὸν τῆς δευτέρας τάξεως*, ὅπερ ἐκθετέον οὕτω

$$\delta^2\psi = \frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}\, \delta x^2 ,$$

ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ τετραγώνου τοῦ δx *ἐπὶ τὸν διαφορικὸν συντελεστὴν τῆς δευτέρας τάξεως τῆς τεθείσης συνεκθέσεως, ἢ ἐπὶ τὴν συνέκθεσιν ἣν μορφοῦμεν λαμβάνοντες, κατὰ τοὺς γνωστοὺς κανόνας, τὸν διαφορικὸν*

συντελεστὴν τῆς ψ, *εἶτα δὲ τὸν τούτου διαφορικὸν συντελεστήν.*

62. Ἐκ τῶν προεκτεθέντων καταφαίνεται ὅτι τὸ διαφορικὸν τῆς δευτέρας τάξεως συνεκθέσεώς τινος λαμβάνομεν, διαφορίζοντες δὶς κατὰ συνέχειαν τὴν συνέκθεσιν ταύτην, θεωροῦντες δx, ἐν τῇ δευτέρᾳ διαφορίσει, ὡς παράγοντα ἄτρεπτον.

ΣΗΜ. Ὅταν δηλῶμεν τὸν διαφορικὸν συντελεστὴν ἢ τὴν παραγομένην συνέκθεσιν τῆς πρώτης τάξεως διὰ ψ' ἢ $\Sigma'(x)$, δηλοῦμεν ἐπίσης τὸν διαφορικὸν συντελεστὴν ἢ τὴν παραγομένην συνέκθεσιν τῆς δευτέρας τάξεως διὰ ψ'' ἢ διὰ $\Sigma''(x)$.

63. Ἐξακολουθήσωμεν τὸν ἐν σελ. 50 πίνακα, θεωροῦντες τέσσαρας ἀλληλοδιαδόχους τιμὰς τῆς x διαφερούσας ἀλλήλων κατὰ τὸ μόνιμον ἀπόστημα Δx.

Τιμαὶ τῆς x.	Τιμαὶ ἀντιστοιχοῦσαι τῆς ψ.	Διαφοραὶ πρῶται.	Διαφοραὶ δεύτεραι.	Διαφοραὶ τρίται.
x	ψ			
$x + \Delta x$	ψ_1	$\Delta\psi = \psi_1 - \psi$		
$x + 2\Delta x$	ψ_2	$\Delta\psi_1 = \psi_2 - \psi_1$	$\Delta^2\psi = \Delta\psi_1 - \Delta\psi$	
$x + 3\Delta x$	ψ_3	$\Delta\psi_2 = \psi_3 - \psi_2$	$\Delta^2\psi_1 = \Delta\psi_2 - \Delta\psi_1$	$\Delta^3\psi = \Delta^2\psi_1 - \Delta^2\psi$

Παρατηροῦμεν ἐπίσης ὅτι, ὅταν Δx τείνῃ πρὸς τὸ κατασταθῆναι μηδὲν, αἱ τιμαὶ ψ_1, ψ_2, ψ_3, τείνουσι πρὸς τὸ ἰσωθῆναι τῇ ψ· αἱ πρῶται, δεύτεραι καὶ τρίται διαφοραὶ τείνουσιν ἐπίσης πρὸς τὸ μηδενισθῆναι. Ἀλλά, ὡς $\Delta^2\psi$ μειοῦται πολὺ ταχύτερον ἢ $\Delta\psi$, εὐκόλως βλέπομεν ὅτι $\Delta^3\psi$ μειοῦται πολὺ ταχύτερον ἢ $\Delta^2\psi$. Τῷ ὄντι, ἡ τῆς $\Delta^3\psi$ ἔκθεσις γράφεται οὕτω:

$$\Delta^3\psi = \left(\frac{\Delta^2\psi_1}{\Delta x^2} - \frac{\Delta^2\psi}{\Delta x^2}\right)\Delta x^2,$$

ἢ καὶ οὕτω,

$$\Delta^3\psi = \left(\frac{\Delta\psi_2 - \Delta\psi_1}{\Delta x^2} - \frac{\Delta\psi_1 - \Delta\psi}{\Delta x^2}\right)\Delta x^3.$$

Καθ' ὅσον Δx τείνει πρὸς τὸ κατασταθῆναι ἴση μηδενί, ἀμφότεροι οἱ ὅροι $\frac{\Delta\psi_2 - \Delta\psi_1}{\Delta x^2}$, $\frac{\Delta\psi_1 - \Delta\psi}{\Delta x^2}$, προσεγγίζουσι τῷ αὐτῷ ὁρίῳ, ὅπερ ἐστὶ $\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}$. Ἄρα, ἡ τιμὴ τῆς $\Delta^3\psi$ συγκροτεῖται ἐκ τριῶν παραγόντων ἐχόντων κοινὸν ὅριον τὸ μηδέν, ἑπομένως μειοῦται πολὺ ταχύτερον ἢ $\Delta^2\psi$, συγκροτουμένη ἐκ δύο μόνον παραγόντων κοινὸν ὅριον ἐχόντων τὸ μηδέν. Ἄρα, ὅταν $\Delta\psi$ κατασταθῇ ἐλαχίστη πρὸς τὴν μονάδα, $\Delta^2\psi$ ἔσεται ἐλαχίστη πρὸς $\Delta\psi$, καὶ $\Delta^3\psi$ ἐλαχίστη πρὸς $\Delta^2\psi$.

64. Θέτοντες $\Delta^3\psi$ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\Delta^3\psi = \frac{\dfrac{\Delta\psi_2 - \Delta\psi_1}{\Delta x^2} - \dfrac{\Delta\psi_1 - \Delta\psi}{\Delta x^2}}{\Delta x}\Delta x^3,$$

βλέπομεν ὅτι, μειουμένης Δx καὶ καταντώσης ἐλάσσονος παντὸς μεγέθους δεδομένου, τὸ ὅριον ἑκάστης τῶν ποσοτήτων $\frac{\Delta\psi_2 - \Delta\psi_1}{\Delta x^2}$, $\frac{\Delta\psi_1 - \Delta\psi}{\Delta x^2}$, εἶναι ὁ διαφορικὸς συντελεστὴς τῆς δευτέρας τάξεως $\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}$ · τοῦ δὲ λόγου $\frac{\dfrac{\Delta\psi_2 - \Delta\psi_1}{\Delta x^2} - \dfrac{\Delta\psi_1 - \Delta\psi}{\Delta x^2}}{\Delta x}$, τὸ ὅριον εἶναι ὁ διαφορικὸς συντελεστὴς τῆς συνεκθέσεως $\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}$, ἤτοι $\frac{\delta\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}}{\delta x}$. Ἄρα παριστάνοντες τῷ $\delta^3\psi$ ὅ,τι καθίσταται ἡ $\Delta^3\psi$, ὅταν Δx κατασταθῇ δx, ἔχομεν τὴν ἔκθεσιν

$$\delta^3\psi = \frac{\delta\frac{\delta^2 x}{\delta x^2}}{\delta x}\delta x^3,$$

ἣν γράφομεν ἁπλούστερον οὕτω

$$\delta^3\psi = \frac{\delta^3\psi}{\delta x^3}\delta x^3.$$

$\delta^3\psi$ εἶναι τὸ *διαφορικὸν τῆς τρίτης τάξεως* τῆς τεθείσης συνεκθέσεως ψ, ἡ δὲ συνέκθεσις $\frac{\delta\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}}{\delta x}$, ἢ $\frac{\delta^3\psi}{\delta x^3}$, εἶναι ὁ ***διαφορικὸς συντελεστὴς τῆς τρίτης τάξεως*** τῆς αὐτῆς συνεκθέσεως. ***Τὸ διαφορικὸν τῆς τρίτης τάξεως ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ κύβου τοῦ δx ἐπὶ τὸν διαφορικὸν συντελεστὴν τῆς τρίτης τάξεως.***

ΣΗΜ. Ὁ διαφορικὸς συντελεστὴς τῆς τρίτης τάξεως δηλοῦται ἐπίσης ὑπὸ ψ''', ἢ $\Sigma'''(x)$.

65. Ἄρα, φανερὸν ὅτι τὸ διαφορικὸν τῆς τρίτης τάξεως συνεκθέσεώς τινος λαμβάνομεν, διαφορίζοντες τρὶς ἀλληλοδιαδόχως τὴν συνέκθεσιν ταύτην, θεωροῦντες τὸ διαφορικὸν δx, ἐν τῇ δευτέρᾳ καὶ ἐν τῇ τρίτῃ διαφορίσει, ὡς παράγοντα ἄτρεπτον.

66. Ἐὰν θεωρήσωμεν πέντε τιμὰς διαδοχικὰς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x καὶ τὰς συστοίχους πέντε τιμὰς τῆς συνεκθέσεως ψ, καταντήσομεν εἰς τὴν διαφορὰν τῆς τετάρτης τάξεως $\Delta^4\psi$, ἧς ἡ ἔκθεσις συγκροτεῖται ἐκ τεσσάρων παραγόντων τεινόντων ὅλων πρὸς τὸ κατασταθῆναι μηδέν, ὅταν Δx τείνῃ καὶ αὕτη πρὸς τὸ μηδέν. Ἄρα, ἡ τετάρτη αὕτη

διαφορὰ μειωθήσεται, ὅταν Δx προσεγγίζῃ τῷ μηδενί, πολὺ ταχύτερον ἢ ἡ τρίτη διαφορὰ ἥτις συγκροτεῖται ἐκ τριῶν μόνον παραγόντων ὅριον ἐχόντων τὸ μηδέν. Δηλοῦντες $\delta^4 x$ ὅ,τι καθίσταται ἡ $\Delta^4\psi$, ὅταν Δx λαμβάνῃ τὴν ἀπειροστημόριον τιμὴν δx, ἕξομεν

$$\delta^4\psi = \frac{\delta^4\psi}{\delta x^4}\,\delta x^4,$$

$\frac{\delta^4\psi}{\delta x^4}$ δηλοῦντος *τὸν διαφορικὸν συντελεστὴν τῆς τετάρτης τάξεως* τῆς τεθείσης συνεκθέσεως· ἤτοι τὸ ἐξαγόμενον ὅπερ λαμβάνομεν διαφορίζοντες τετράκις κατὰ συνέχειαν τὴν συνέκθεσιν ταύτην, τοῦ παράγοντος δx θεωρουμένου ἀμεταβλήτου, εἶτα διαιροῦντες διὰ δx^4.

Καὶ οὕτω καθεξῆς, ἐὰν θεωρήσωμεν πλειοτέρας τιμὰς καὶ διαφορὰς τάξεων ὑπερτέρων.

67. Ἐκ τῶν προεκτεθέντων συνάγομεν ὅτι, πᾶσα συνέκθεσις $\psi = \Sigma(x)$, θεωρητέα ἐστὶν ὡς παράγουσα σειρὰν ἀπέραντον διαφορικῶν δηλουμένων ὑπὸ

$$\delta\psi = \frac{\delta\psi}{\delta x}\,\delta x,\quad \delta^2\psi = \frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}\,\delta x^2,\ \ldots\ \delta^\nu\psi = \frac{\delta^\nu\psi}{\delta x^\nu}\,\delta x^\nu,$$

ἅτινα παράγονται ἐκ τῆς αὐτῆς συνεκθέσεως, ἕκαστον δὲ ἐκ τοῦ ἑτέρου, διὰ τῆς ἐργασίας ἣν ἐκαλέσαμεν *διαφόρισιν*. Ἡ ἔκθεσις τῶν διαφορικῶν τούτων ἐμφαίνει ἐναργῶς ὅτι ἡ τιμὴ ἑνὸς εἶναι ἀπειροστὸν τῆς ἑτέρου, διότι οἱ διαφορικοὶ συντελεσταὶ $\frac{\delta\psi}{\delta x}$, $\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}$, $\frac{\delta^3\psi}{\delta x^3}$, κ. τ. ἑ., οἵτινες εἰσὶ συνεκθέσεις πεπερασμέναι τῆς μεταβλητῆς x, εἰσέρχονται ἐν αὐταῖς πολυπλασιαζόμενοι ἐπὶ δυνάμεις μᾶλλον καὶ μᾶλλον ὑπερτέρας τῆς ἀπειροστημορίου ποσότητος δx. Ἡ παράθεσις αὕτη ὑπάρχει εἰ καὶ ἅπαντα τὰ διαφορικὰ δψ, $\delta^2\psi$, $\delta^3\psi$, κ. τ. ἑ. θεωροῦνται ἐξίσου ὡς ποσὰ διαφέροντα τοῦ μηδενὸς ἧττον παντὸς μεγέθους δεδομένου. Τῷ ὄντι, ἡ ὑπόθεσις τοῦ ὅτι δx διαφέρει μηδενὸς ἔλαττον παντὸς μεγέθους δεδομένου,

ἢ ὅτι δx εἶναι ἀπειροστὸν, συνεπάγει τὴν τοῦ ὅτι, οἱ λόγοι τοῦ $\delta^2\psi$ πρὸς δψ, τοῦ $\delta^3\psi$ πρὸς $\delta^2\psi$, κ. τ. ἑ., διαφέρουσιν ἐπίσης μηδενὸς ἧττον παντὸς μεγέθους δεδομένου. Τοῦτο δὲ ἐκφράζομεν λέγοντες ὅτι, τὰ ποσὰ ταῦτα εἰσὶν ἀπειροστὰ ἀλλήλων, ἢ ὅτι συνιστῶσι σειρὰν ἀπειροστῶν τάξεως μᾶλλον καὶ μᾶλλον ὑπερτέρας.

68. Παρατηρητέον ὅτι, ὑποτιθεμένης τῆς συνεκθέσεως $\psi = \Sigma(x)$ δηλουμένης τῇ τεταγμένῃ καμπύλης ἧς ἡ τετμημένη εἶναι x, ἡ διεύθυνσις τῆς καμπύλης καὶ τὸ μέρος τοῦ σχήματος πρὸς ὃ στρέφει τὰ κυρτὰ αὐτῆς, ὁρίζονται, ἐν ἐλαχίστῃ ἀποστάσει ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου M, διὰ μόνου τοῦ σημείου τῶν διαφορικῶν τῶν δύο πρώτων τάξεων δψ, $\delta^2\psi$· ἤτοι διὰ μόνου τοῦ σημείου τῶν διαφορικῶν συντελεστῶν ἢ συνεκθέσεων παραγομένων τῆς πρώτης καὶ τῆς δευτέρας τάξεως $\frac{\delta\psi}{\delta x}$, $\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}$.

Τοὺς διαφόρους συνδυασμοὺς, πρὸς τὸ ἀντικείμενον τοῦτο ὑπάρχοντας, παριστῶσι τὰ ἑξῆς σχήματα.

Σχ. 4 καὶ 5. Ἀμφότεροι οἱ διαφορικοὶ συντελεσταὶ εἰσὶ θετικοί.

Σχ. 6 καὶ 7. $\frac{\delta\psi}{\delta x}$ εἶναι ἀρνητικὸς καὶ $\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}$ θετικός.

Σχ. 8 καὶ 9. $\frac{\delta\psi}{\delta x}$ εἶναι θετικὸς καὶ $\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}$ ἀρνητικός.

Σχ. 10 καὶ 11. Ἀμφότεροι οἱ διαφορικοὶ συντελεσταὶ εἰσὶν ἀρνητικοί.

Βλέπομεν ὅτι $\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}$ *εἶναι θετικὸς μὲν, ὅταν ἡ καμπύλη στρέφῃ τὰ κυρτὰ αὐτῆς πρὸς τὰ κάτω τοῦ πίνακος· ἀρνητικὸς δὲ, ὅταν ἡ καμπύλη στρέφῃ τὰ κοῖλα αὐτῆς πρὸς τὰ κάτω τοῦ πίνακος.* Ἐνταῦθα ὑποτίθενται, κατὰ τὴν κοινὴν συνήθειαν, αἱ θετικαὶ ψ ἀγόμεναι κάτωθεν πρὸς τὰ ἄνω.

ΣΗΜ. Ἐκφραζόμεθα καὶ ὡς ἑξῆς. Καμπύλη τις εἶναι κοίλη ἢ κυρτὴ πρὸς τὸν ἄξονα τῶν τετμημένων, καθ' ὅσον ἡ τεταγμένη σὺν τῷ δευτεροταγεῖ διαφορικῷ αὐτῆς συντελεστῇ ἔχουσι σημεῖα ἐναντία ἢ ὅμοια.

Η'. ΠΕΡΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΤΑΞΕΩΝ ΤΩΝ ΑΠΛΩΝ ΣΥΝΕΚΘΕΣΕΩΝ.

69. Τὰς προεκτεθείσας θεωρίας ἐφαρμόσομεν ἐπὶ τῶν ἁπλῶν συνεκθέσεων, περὶ τῆς διαφορίσεως τῶν ὁποίων πραγματεύεται τὸ ἄρθ. Β'.

Ἡ συνέκθεσις x^{μ} δίδει·

$$\frac{\delta . x^{\mu}}{\delta x} = \mu x^{\mu-1},$$

$$\frac{\delta^2 . x^{\mu}}{\delta x^2} = \mu(\mu-1)x^{\mu-2},$$

$$\frac{\delta^3 . x^{\mu}}{\delta x^3} = \mu(\mu-1)(\mu-2)x^{\mu-3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\frac{\delta^{\nu} . x^{\mu}}{\delta x^{\nu}} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\nu+1)x^{\mu-\nu}.$$

Ἡ σειρὰ αὕτη τῶν παραγομένων συνεκθέσεων προάγεται ἐπ' ἄπειρον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς μ ἦναι ἀρνητικός, ἢ ἦναι μὲν θετικός, ἀλλ' ἔκμετρος ἢ μόνον κλασματικός. Ἀλλὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ὄντος ἀκεραίου καὶ θετικοῦ, ἔχομεν

$$\frac{\delta^{\nu} . x^{\mu}}{\delta x^{\nu}} = \mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)\ldots 3 . 2 . 1.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ συνέκθεσις καταντᾷ ποσὸν ἄτρεπτον, οἱ ἑπόμενοι διαφορικοὶ συντελεσταὶ εἰσὶ μηδέν.

70. Ἡ συνέκθεσις λογ x δίδει, λαμβανομένου τοῦ λογαρίθμου εἴτε ἐν τῷ τυχόντι συστήματι, εἴτε ἐν τῷ νεπεριανῷ,

$$\frac{\delta . \lambda o\gamma\, x}{\delta x} = \frac{\lambda o\gamma\, e}{x}, \quad \text{ἢ} \quad \frac{\delta . \lambda x}{\delta x} = \frac{1}{x},$$

$$\frac{\delta^2 . \lambda o\gamma\, x}{\delta x^2} = -\frac{\lambda o\gamma\, e}{x^2}, \quad \text{ἢ} \quad \frac{\delta^2 . \lambda x}{\delta x^2} = -\frac{1}{x^2},$$

$$\frac{\delta^3 . \lambda o\gamma\, x}{\delta x^3} = \frac{2\lambda o\gamma\, e}{x^3}, \qquad \frac{\delta^3 . \lambda x}{\delta x^3} = \frac{2}{x^3},$$

$$\cdots\cdots, \qquad \cdots\cdots,$$

$$\frac{\delta^{\nu} . \lambda o\gamma x}{\delta x^{\nu}} = \pm\frac{1.2.3..(\nu-1)\lambda o\gamma e}{x^{\nu}}, \quad \frac{\delta^{\nu} . \lambda x}{\delta x^{\nu}} = \pm\frac{1.2...(\nu-1)}{x^{\nu}}.$$

71. Αἱ συνεκθέσεις α^{x} καὶ α^{-x} δίδουσι·

$$\frac{\delta . \alpha^{x}}{\delta x} = \lambda\alpha . \alpha^{x}, \qquad \frac{\delta . \alpha^{-x}}{\delta x} = -\lambda\alpha . \alpha^{-x},$$

$$\frac{\delta^2 . \alpha^{x}}{\delta x^2} = (\lambda\alpha)^2\alpha^{x}, \qquad \frac{\delta^2 . \alpha^{-x}}{\delta x^2} = (\lambda\alpha)^2\alpha^{-x},$$

$$\frac{\delta^3 . \alpha^{x}}{\delta x^3} = (\lambda\alpha)^3\alpha^{x}, \qquad \frac{\delta^3 . \alpha^{-x}}{\delta x^3} = -(\lambda\alpha)^3\alpha^{-x},$$

$$\cdots\cdots, \qquad \cdots\cdots,$$

$$\frac{\delta^{\nu} . \alpha^{x}}{\delta x^{\nu}} = (\lambda\alpha)^{\nu}\alpha^{x}, \qquad \frac{\delta^{\nu} . \alpha^{-x}}{\delta x^{\nu}} = \pm(\lambda\alpha)^{\nu}\alpha^{-x}.$$

Ἐὰν δὲ $\alpha = e$, ἔχομεν·

$$\frac{\delta . e^{x}}{\delta x} = e^{x}, \qquad \frac{\delta . e^{-x}}{\delta x} = -e^{-x},$$

$$\frac{\delta^2 . e^{x}}{\delta x^2} = e^{x}, \qquad \frac{\delta^2 . e^{-x}}{\delta x^2} = e^{-x},$$

$$\frac{\delta^3 . e^{x}}{\delta x^3} = e^{x}, \qquad \frac{\delta^3 . e^{-x}}{\delta x^3} = -e^{-x},$$

$$\cdots\cdots, \qquad \cdots\cdots,$$

$$\frac{\delta^\nu . e^x}{\delta x^\nu} = e^x . \qquad \frac{\delta^\nu . e^{-x}}{\delta x^\nu} = \pm e^{-x} .$$

Η διαφόρισις παράγει [23] μονίμως τὴν συνέκθεσιν e^x, ἢ γενικώτερον, τὴν συνέκθεσιν Be^x μόνην παρουσιάζουσαν τὸ τοιοῦτον ἰδίωμα. Ὅταν ὁ μεταβλητὸς δείκτης x ἦναι ἀρνητικός, ἡ συνέκθεσις παράγεται μὲν ἐκ νέου ἐπίσης, πλὴν αἱ παραγόμεναι εἰσὶν ἐναλλὰξ ἀρνητικαὶ καὶ θετικαί.

72. Αἱ τριγωνομετρικαὶ συνεκθέσεις ἡμ x καὶ συν x δίδουσιν·

Η μὲν πρώτη

$$\frac{\delta . \text{ἡμ}\, x}{\delta x} = \text{συν}\, x = \text{ἡμ}\, (x + \tfrac{1}{2}\Pi),$$

$$\frac{\delta^2 . \text{ἡμ}\, x}{\delta x^2} = - \text{ἡμ}\, x = \text{ἡμ}\, (x + \Pi),$$

$$\frac{\delta^3 . \text{ἡμ}\, x}{\delta x^3} = - \text{συν}\, x = \text{ἡμ}\, (x + \tfrac{3}{2}\Pi),$$

$$\frac{\delta^4 . \text{ἡμ}\, x}{\delta x^4} = \text{ἡμ}\, x = \text{ἡμ}\, (x + 2\Pi),$$

. . . . ,

$$\frac{\delta^\nu . \text{ἡμ}\, x}{\delta x^\nu} = \text{ἡμ}\left(x + \nu\frac{\Pi}{2}\right),$$

Η δὲ δευτέρα

$$\frac{\delta . \text{συν}\, x}{\delta x} = - \text{ἡμ}\, x = \text{συν}\, (x + \tfrac{1}{2}\Pi),$$

$$\frac{\delta^2 . \text{συν}\, x}{\delta x^2} = - \text{συν}\, x = \text{συν}\, (x + \Pi),$$

$$\frac{\delta^3 . \text{συν}\, x}{\delta x^3} = \text{ἡμ}\, x = \text{συν}\, (x + \tfrac{3}{2}\Pi),$$

$$\frac{\delta^4 . \text{συν}\, x}{\delta x^4} = \text{συν}\, x = \text{συν}\, (x + 2\Pi),$$

. . . . ,

$$\frac{\delta^\nu . \text{συν}\, x}{\delta x^\nu} = \text{συν}\left(x + \nu\frac{\Pi}{2}\right).$$

Αἱ ἀρχικαὶ συνεκθέσεις ἀναφαίνονται μετὰ τέσσαρας διαφορίσεις σὺν τῷ σημείῳ αὐτῶν.

73. Πλὴν τοῦ ὅτι πρέπει νὰ ἔχωμεν ἐν μνήμῃ τὰ ἀξιοπαρατήρητα ἰδιώματα ταῦτα, ἐπάναγκες εἶναι ἐπίσης διακρίνειν τὸ σχῆμα τῶν καμπύλων ἃς ἐμφαίνουσιν αἱ προηγούμεναι ἁπλαῖ συνεκθέσεις. Τὴν ἔρευναν ταύτην εὐκολύνουσι τὰ μέγιστα, κατὰ § 68, αἱ ἐκθέσεις τῶν διαφορικῶν συντελεστῶν τῶν δύο πρώτων τάξεων.

74. Ἔστω

$$\psi = x^\mu , \quad \frac{\delta\psi}{\delta x} = \mu x^{\mu-1} , \quad \frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} = \mu(\mu-1)x^{\mu-2} .$$

Η καμπύλη, ἧς x εἶναι ἡ τετμημένη καὶ ψ ἡ τεταγμένη, παρουσιάζεται ὑπὸ διάφορα σχήματα κατὰ τὴν φύσιν τοῦ δείκτου μ.

Πρῶτον ὑποθέσωμεν τὸν δείκτην τοῦτον θετικὸν καὶ μείζονα μονάδος.

(Σχ. 12) Εἰ μ ἦναι ἀριθμὸς ἀκέραιος ἄρτιος, ψ εἶναι θετική, οἱονδήποτε τὸ σημεῖον τῆς x. $\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}$ εἶναι μονίμως θετικός· τὸ δὲ σημεῖον τοῦ $\frac{\delta\psi}{\delta x}$ μεταβάλλεται σὺν τῷ τῆς x.

(Σχ. 13) Εἰ μ ἦναι ἀριθμὸς ἀκέραιος περιττός, τῆς ψ τὸ σημεῖον μεταβάλλεται σὺν τῷ τῆς x, $\frac{\delta\psi}{\delta x}$ διαμένει ἀείποτε θετικός· τοῦ δὲ $\dfrac{\delta^2\psi}{\delta x^2}$ τὸ σημεῖον τρέπεται σὺν τῷ τῆς x.

Εἰ μ ἦναι ἀριθμὸς κλασματικὸς $\dfrac{\pi}{\varkappa}$, π καὶ κ ὄντων ἀκεραίων, ἡ καμπύλη ἔχει τὴν ἐν Σχ. 12 μορφὴν ὅταν π ἦναι ἀριθμὸς ἄρτιος καὶ κ περιττός, τὴν δὲ ἐν Σχ. 13 ὅταν ἀμφότεροι π καὶ κ ὦσι περιττοί. Ἀλλ' ἐὰν κ ἦναι ἄρτιος, δὲν ὑπάρχει καμπύλη πρὸς τὸ μέρος τῶν ἀρνητικῶν x· διότι τότε, εἰς ἀρνητικὰς τιμὰς τῆς x συστοιχοῦσι τιμαὶ τῇ ψ φαντασικαί.

75. Ὑποθέσωμεν ἤδη τὸν δείκτην μ θετικὸν καὶ ἐλάσσονα μονάδος. Ἡ περίπτωσις αὕτη διαφέρει τῆς προηγουμένης καθ' ὅ,τι, $\dfrac{\delta^2\psi}{\delta x^2}$ ἔσεται ἀρνητικὸς ὅταν ἐν τῇ προηγουμένῃ περιπτώσει ἦτο θετικός, καὶ ἀντιστρόφως. Ἀντὶ τοῦ Σχ. 12 ἕξομεν τὸ Σχ. 14, καὶ ἀντὶ τοῦ Σχ. 13 τὸ Σχ. 15.

76. Ὑποθέσωμεν τὸν δείκτην μ ἀρνητικόν· ἤτοι,

$$\psi = \frac{1}{x^{\mu}}, \quad \frac{\delta\psi}{\delta x} = -\frac{\mu}{x^{\mu+1}}, \quad \frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} = \frac{\mu(\mu+1)}{x^{\mu+2}}.$$

Τοῦ δείκτου μ ὄντος ἤδη θετικοῦ, εὐκόλως μεταβαίνομεν ἀπὸ τῶν προηγουμένων περιπτώσεων εἰς τὰς ἀντιστοιχούσας τῇ ὑποθέσει ταύτῃ, διαιρέσει τῆς μονάδος διὰ τῶν τεταγμένων τῶν καμπύλων ἃς παριστάνουσι τὰ Σχ. 12 καὶ 13, 14 καὶ 15. Τὰ μὲν Σχ. 12 καὶ 14 ἀντικατασαθήσονται ὑπὸ τοῦ Σχ. 16, τὰ δὲ Σχ. 13 καὶ 15 ὑπὸ τοῦ Σχ. 17. Οἱ ἄξονες εἰσὶν ἐνταῦθα ἀσύμπτωτοι τῶν καμπύλων.

77. Ἔστω ἡ λογαριθμικὴ συνέκθεσις, δι' ἣν ἔχομεν·

$$\psi = \lambda o \gamma\, x, \quad \frac{\delta\psi}{\delta x} = \frac{\lambda o \gamma\, e}{x}, \quad \frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} = -\frac{\lambda o \gamma\, e}{x^2}.$$

(Σχ. 18.) Ὁ ἄξων τῶν ψ εἶναι ἀσύμπτωτος τῇ καμπύλῃ πρὸς τὸ μέρος τῶν ἀρνητικῶν ψ. Ἡ τετμημένη AB τοῦ σημείου καθ' ὃ ἡ καμπύλη συμπίπτει τῷ ἄξονι τῶν x ἰσοῦται μονάδι. Κλάδος καμπύλης πρὸς τὰς ἀρνητικὰς x δὲν ὑπάρχει.

78. Ἡ δεικτικὴ συνέκθεσις α^x δίδει·

$$\psi = \alpha^x, \quad \frac{\delta\psi}{\delta x} = \lambda\alpha \,.\, \alpha^x; \quad \frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} = (\lambda\alpha)^2\alpha^x.$$

Ὅταν α ἦναι ἀριθμὸς θετικὸς μείζων μονάδος, ἡ τεταγμένη αὐξάνει ἀπεριορίστως πρὸς τὸ μέρος τῶν θετικῶν x (Σχ. 19). Ἡ καμπύλη ἔχει ἀσύμπτωτον τὸν ἄξονα τῶν x πρὸς τὸ μέρος τῶν ἀρνητικῶν τετμημένων. Ἡ τεταγμένη AB τοῦ σημείου καθ' ὃ ἡ καμπύλη συμπίπτει τῷ ἄξονι τῶν ψ ἰσοῦται μονάδι.

Ὑποτιθεμένου τοῦ ἀριθμοῦ α θετικοῦ καὶ ἐλάσσονος μονάδος, ἡ συνέκθεσις α^x τρέπεται εἰς $\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^x$, ἢ α^{-x}, τοῦ ἀριθμοῦ α ὑποτιθεμένου, ὡς ἀνωτέρω, μείζονος μονάδος. Ἄρα, ἡ περίπτωσις αὕτη ἄγεται εἰς τὴν προηγουμένην, τρεπομένων τῶν θετικῶν x εἰς ἀρνητικάς, καὶ ἐναλλάξ.

79. Ἐπειδὴ τῆς ἐξισώσεως $\psi = \alpha^x$ συνέπεια ἐστὶν ἡ $x = \lambda o \gamma\, \psi$, ὅταν α ἦναι ἡ βάσις τοῦ συστήματος τῶν λογαρίθμων, δῆλον ὅτι, ἀνταλλασσομένων πρὸς ἀλλήλους τῶν συντεταγμένων ἀξόνων, ἡ καμπύλη, περὶ ἧς λόγος, οὐδόλως διαφέρει τῆς ἐν § 77.

80. Ὅταν ἐν τῇ α^x ὑποθέσωμεν τὸν ἀριθμὸν α ἀρνητικόν, ἡ συνέκθεσις αὕτη δὲν παρουσιάζει πλέον τιμὰς συνεχεῖς· δὲν ὑπάρχει καμπύλη, ἀλλὰ σημεῖα μεμονωμένα ἀντιστοιχοῦντα εἰς τιμὰς τῆς x ἀκεραίας, ἢ εἰς κλασματικὰς περιττὸν ἐχούσας παρονομαστήν. Τούτου ἕνεκα, ὑποθέσομεν πάντοτε ἐν τοῖς ἑξῆς, προκειμένου λόγου περὶ συστήματος λογαριθμικοῦ, ὅτι ἡ βάσις αὐτοῦ α εἶναι ἀριθμὸς θετικός, μείζων μονάδος.

81. Ἔστω προσέτι ἡ συνέκθεσις e^{-x^2}, παρουσιαζομένη εἰς πολλὰς ἀξιολόγους ἐφαρμογάς. Αὕτη δίδει,

$$\psi = e^{-x^2}, \quad \frac{\delta\psi}{\delta x} = -2xe^{-x^2}, \quad \frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} = 2(2x^2-1)e^{-x^2}.$$

(Σχ. 20.) Ἡ καμπύλη συγκροτεῖται ὑπὸ δύο κλώνων ἴσων, ἑκατέρωθεν τοῦ ἄξονος τῶν ψ κειμένων. Ἡ τεταγμένη ΑΒ τοῦ σημείου καθ' ὃ ἡ καμπύλη συμπίπτει τῷ ἄξονι τούτῳ ἰσοῦται μονάδι. Τὸ σημεῖον τοῦ διαφορικοῦ συντελεστοῦ $\frac{\delta\psi}{\delta x}$ μεταβάλλεται σὺν τῷ τῆς τετμημένης. Ὁ τῆς δευτέρας τάξεως διαφορικὸς συντελεστὴς $\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}$ εἶναι ἀρνητικὸς μέν, ὅταν x ἦναι ἐλάσσων τοῦ ἀποστήματος $A\Pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, θετικὸς δέ, ὅταν x ὑπερβαίνῃ τὸ ἀπόστημα τοῦτο. Οὕτως, ἡ καμπύλη προτείνει τὰ κοῖλα αὐτῆς πρὸς τὰ κάτω τοῦ πίνακος ἐν τῷ ὑπὸ τῶν τεταγμένων ΜΠ, Μ'Π', ἀπολαμβανομένῳ χωρίῳ, ἐκτὸς δὲ αὐτοῦ προτείνει τὰ κυρτὰ αὐτῆς πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος. Τὰ σημεῖα Μ, Μ', καθ' ἃ μεταβάλλεται τὸ σημεῖον τοῦ δευτεροταγοῦς διαφορικοῦ συντελεστοῦ, καὶ δι' ἃ ἡ τιμὴ τοῦ $\frac{\delta\psi}{\delta x}$ ἰσοῦται μηδενί, καλοῦνται *σημεῖα καμπῆς*.

82. Τέλος, θεωρήσωμεν τὰς τριγωνομετρικὰς συνεκθέσεις.

$$\psi = \text{ἡμ}\, x, \qquad \frac{\delta\psi}{\delta x} = \text{συν}\, x, \qquad \frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} = -\text{ἡμ}\, x.$$

(Σχ. 21) Ἡ καμπύλη αὕτη, *ἡμιτονοειδὴς* καλουμένη, τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x κατὰ τὰ σημεῖα καθ' ἃ ἡ τετμημένη ἰσοῦται πρὸς τὰ τόξα 0, Π, 2Π, 3Π, κ.τ.έ. Κατὰ τὰ σημεῖα ταῦτα ἡ ἐφαπτομένη σχηματίζει μετὰ τῶν ἀξόνων

γωνίαν ἴσην 45°, διότι $\frac{\delta\psi}{\delta x} = \pm 1$. Αἱ μέγισται τεταγμέναι, ἰσούμεναι μονάδι, ἀντιστοιχοῦσιν εἰς τὰ σημεῖα Μ, ὧν ἡ τετμημένη ἰσοῦται πρὸς τὰ τόξα $\frac{1}{2}\Pi$, $\frac{3}{2}\Pi$, $\frac{5}{2}\Pi$, κ.τ.έ. Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον τοῦ δευτεροταγοῦς διαφορικοῦ συντελεστοῦ ἐναντίον ἐστὶ τοῦ τῆς τεταγμένης, ἡ καμπύλη προτείνει τὰ κυρτὰ αὐτῆς πρὸς τὰ κάτω τοῦ πίνακος, ὅταν ἡ τεταγμένη ἦναι ἀρνητική, καὶ ἀντιστρόφως. Τὰ σημεῖα καθ' ἃ ἡ τεταγμένη ἰσοῦται μηδενί, εἰσὶ σημεῖα καμπῆς. Ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος καμπύλη ἐκτείνεται ἐπ' ἄπειρον πρός τε τὰς θετικὰς καὶ πρὸς τὰς ἀρνητικὰς τετμημένας, συγκροτουμένη ὑπὸ σειρᾶς μερῶν ἴσων τοῖς ἐν τῷ χωρίῳ ἀπὸ 0 μέχρι 2Π. Τοῦτο δὲ ἐκφράζουσι λέγοντες ὅτι, ἡ συνέκθεσις εἶναι *περιοδική*.

83. Ἔχομεν ὡσαύτως,

$$\psi = \text{συν}\, x, \qquad \frac{\delta\psi}{\delta x} = -\text{ἡμ}\, x, \qquad \frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} = -\text{συν}\, x.$$

Δῆλον ὅτι, τὸ σχῆμα τῆς καμπύλης ἔσεται ἀκριβῶς τὸ αὐτὸ τῆς ἡμιτονοειδοῦς, εἰ ἐν ταύτῃ μετατεθῇ ἡ ἀρχὴ τῶν τετμημένων x κατὰ τὸ ἀπόστημα $\frac{1}{2}\Pi$· διότι ἔχομεν ἀείποτε

$$\text{συν}\, x = \text{ἡμ}\,(x + \tfrac{1}{2}\Pi).$$

84. Χάριν ἀσκήσεως προτείνομεν τοῖς μαθηταῖς εὑρεῖν τὰ ἀπειροστὰ τῶν διαφόρων τάξεων τῶν ἑξῆς συνεκθέσεων.

1) $\psi = e^{x\,\text{συν}\,\theta}\,\text{συν}(x\,\text{ἡμ}\,\theta), \quad \frac{\delta^\nu\psi}{\delta x^\nu} = e^{x\,\text{συν}\,\theta}\,\text{συν}(x\,\text{ἡμ}\,\theta + \nu\theta).$

2) $\psi = e^{\alpha x}\,\text{συν}\,\mu x, \quad \frac{\delta^\nu\psi}{\delta x^\nu} = (\alpha^2 + \mu^2)^{\frac{\nu}{2}} e^{\alpha x}\,\text{συν}(\mu x + \nu\varphi).$

$\left(\text{Θετέον} -\frac{\mu}{\alpha} = \text{ἐφ}\,\varphi\right).$

3) $\psi = e^{\alpha x}\,\text{ἡμ}\,\mu x, \quad \frac{\delta^\nu\psi}{\delta x^\nu} = (\alpha^2 + \mu^2)^{\frac{\nu}{2}} e^{\alpha x}\,\text{ἡμ}\,(\mu x + \nu\varphi).$

4) $\psi=\frac{1+x}{1-x}, \quad \frac{\delta^{\nu}\psi}{\delta x^{\nu}}=\frac{\delta^{\nu-1}\psi}{\delta x^{\nu-1}}\frac{\nu}{(1-x)}=\frac{2\nu(\nu-1)\dots 3.2}{(1-x)^{\nu+1}}.$

Προσέτι, προτείνομεν τὴν ἔρευναν τῶν ὑπὸ τῶν ἀκολούθων ἐξισώσεων δηλουμένων καμπύλων.

5) (Σχ. 22) $\qquad \psi = \text{τέμ}^2 x.$

6) (Σχ. 23) $\qquad \psi = \frac{1}{\lambda o\gamma\, x}.$

7) (Σχ. 24) $\qquad \psi = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}.$

Θ'. ΠΕΡΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΤΑΞΕΩΝ ΣΥΝΕΚΘΕΣΕΩΝ ΕΚ ΠΛΕΙΟΝΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΣΥΓΚΡΟΤΟΥΜΕΝΩΝ.

85. Αἱ θεωρίαι τῶν ἀπειροστῶν τάξεων ὑπερτέρων εὐκόλως ἐκτείνονται καὶ ἐπὶ συνεκθέσεων ἐκ πλειόνων μεταβλητῶν συγκροτουμένων· διότι ἡ διαφόρισις τῶν τοιούτου εἴδους συνεκθέσεων ἐκτελεῖται ἀείποτε μερικῶς καθ' ἑκάστην τῶν μεταβλητῶν.

Ἔστω ἡ συνέκθεσις

$$\omega = \Sigma(x, \psi),$$

ἐν ᾗ x, ψ, εἰσὶ μεταβληταὶ ἀνεξάρτητοι. Εἴδομεν ὅτι, τὸ ὁλικὸν διαφορικὸν πρώτης τάξεως τῆς συνεκθέσεως ταύτης εἶναι

$$\delta\omega = \frac{\delta\omega}{\delta x}\delta x + \frac{\delta\omega}{\delta\psi}\delta\psi\cdot$$

ἤτοι συγκροτεῖται ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν μερικῶν διαφορικῶν $\frac{\delta\omega}{\delta x}\delta x$, $\frac{\delta\omega}{\delta\psi}\delta\psi$, λαμβανομένων πρὸς x μόνην θεωρουμένην ὡς μεταβλητήν, καὶ πρὸς ψ μόνην θεωρουμένην ὡς μεταβλητήν. Αἱ ὑπὸ $\frac{\delta\omega}{\delta x}$ καὶ $\frac{\delta\omega}{\delta\psi}$ δηλούμεναι συνεκθέσεις, εἰσὶν οἱ μερικοὶ διαφορικοὶ συντελεσταὶ τῆς πρώτης τάξεως τῆς συνεκθέσεως ω, λαμβανόμενοι ἀμοιβαίως πρὸς x καὶ πρὸς ψ.

Ἡ ἐργασία τῆς διαφορίσεως ἐφαρμόζεται ἐπίσης ἐπὶ τὴν ἔκθεσιν τοῦ δω, ἐν ᾗ θεωρητέον δx καὶ δψ ὡς παράγοντας ἀτρέπτους. Πρὸς μόρφωσιν τοῦ ὁλικοῦ διαφορικοῦ, διαφορίζομεν ἐκ διαδοχῆς τὰς συνεκθέσεις $\frac{\delta\omega}{\delta x}$ καὶ $\frac{\delta\omega}{\delta\psi}$, ἑκάστην πρὸς x καὶ πρὸς ψ. Οὕτω, τὸ ὁλικὸν διαφορικὸν τῆς δευτέρας τάξεως ἔσεται·

$$\delta^2\omega = \left(\frac{\delta\frac{\delta\omega}{\delta x}}{\delta x}\delta x + \frac{\delta\frac{\delta\omega}{\delta x}}{\delta\psi}\delta\psi\right)\delta x + \left(\frac{\delta\frac{\delta\omega}{\delta\psi}}{\delta x}\delta x + \frac{\delta\frac{\delta\omega}{\delta\psi}}{\delta\psi}\delta\psi\right)\delta\psi.$$

Ἐν τῷ προηγουμένῳ ἄρθρῳ παρεστήσαμεν τὸν διαφορικὸν συντελεστὴν $\frac{\delta\frac{\delta\omega}{\delta x}}{\delta x}$ διὰ $\frac{\delta^2\omega}{\delta x^2}$. Ἐξ ἀναλογίας ὁδηγούμενοι παριστῶμεν ἐπίσης τὸν $\frac{\delta\frac{\delta\omega}{\delta x}}{\delta\psi}$ διὰ $\frac{\delta^2\omega}{\delta x\delta\psi}$. Ὡσαύτως γράφομεν $\frac{\delta^2\omega}{\delta\psi\delta x}$ καὶ $\frac{\delta^2\omega}{\delta\psi^2}$, ἀντὶ $\frac{\delta\frac{\delta\omega}{\delta\psi}}{\delta x}$ καὶ $\frac{\delta\frac{\delta\omega}{\delta\psi}}{\delta\psi}$.

Ἄρα, ἡ ἀνωτέρω ἔκθεσις καθίσταται·

$$\delta^2\omega = \left(\frac{\delta^2\omega}{\delta x^2}\delta x + \frac{\delta^2\omega}{\delta x\delta\psi}\delta\psi\right)\delta x + \left(\frac{\delta^2\omega}{\delta\psi\delta x}\delta x + \frac{\delta^2\omega}{\delta\psi^2}\delta\psi\right)\delta\psi\cdot$$

ἢ

$$\delta^2\omega = \frac{\delta^2\omega}{\delta x^2}\delta x^2 + \left(\frac{\delta^2\omega}{\delta x\delta\psi} + \frac{\delta^2\omega}{\delta\psi\delta x}\right)\delta x\delta\psi + \frac{\delta^2\omega}{\delta\psi^2}\delta\psi^2.$$

Ἐν τῇ ἐκθέσει ταύτῃ τοῦ ὁλικοῦ δευτέρου διαφορικοῦ τῆς συνεκθέσεως ω, τὸ σύμβολον $\frac{\delta^2\omega}{\delta x^2}$ δηλοῖ τὸν διαφορικὸν συντελεστὴν τῆς δευτέρας τάξεως τῆς τεθείσης συνεκθέσεως, ληφθέντα θεωρηθείσης x μόνης ὡς μεταβλητῆς. Τὸ σύμβολον $\frac{\delta^2\omega}{\delta x\delta\psi}$ δηλοῖ, ὅτι ἐλάβομεν τὸν διαφορικὸν συντελεστὴν τῆς πρώτης τάξεως $\frac{\delta\omega}{\delta x}$, θεωροῦντες x μόνην ὡς μεταβλητήν, εἶτα τὸν διαφορικὸν συντελεστὴν τῆς αὐτῆς συνεκθέσεως $\frac{\delta\omega}{\delta x}$, θεωροῦντες ψ μόνην ὡς μεταβλητήν. Τὸ σύμβολον $\frac{\delta^2\omega}{\delta\psi\delta x}$ δηλοῖ, ὅτι ἐλάβομεν τὸν διαφορικὸν συντελεστὴν τῆς πρώτης τάξεως $\frac{\delta\omega}{\delta\psi}$, θεωρήσαντες ψ μόνην ὡς μεταβλητήν, εἶτα τὸν διαφορικὸν συντελεστὴν τῆς αὐτῆς συνεκθέσεως $\frac{\delta\omega}{\delta\psi}$, θεωρήσαντες x μόνην ὡς μεταβλητήν. Τέλος, $\frac{\delta^2\omega}{\delta\psi^2}$ παριστᾷ τὸν διαφορικὸν συντελεστὴν δευτέρας τάξεως τῆς συνεκθέσεως ω, ληφθέντα θεωρηθείσης ψ μόνης ὡς μεταβλητῆς.

86. Παρατηρητέον ἤδη ὅτι, οἱ διαφορικοὶ συντελεσταὶ $\frac{\delta^2\omega}{\delta x\delta\psi}$ καὶ $\frac{\delta^2\omega}{\delta\psi\delta x}$ εἰσὶν ἀναγκαίως ἴσοι. Τῷ ὄντι, κατὰ ἄρθ. Ζ′, γινώσκομεν ὅτι, $\frac{\delta\omega}{\delta x}$ εἶναι τὸ ὅριον πρὸς ὃ τείνει ὁ λόγος

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta x} = \frac{\Sigma(x + \Delta x, \psi) - \Sigma(x, \psi)}{\Delta x},$$

ὅταν Δx τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν. Ἐπίσης, $\frac{\delta^2\omega}{\delta x\delta\psi}$ εἶναι τὸ ὅριον πρὸς ὃ τείνει ἡ ἔκθεσις

$$\frac{\Delta^2\omega}{\Delta x\Delta\psi} = \frac{\frac{\Sigma(x + \Delta x, \psi + \Delta\psi) - \Sigma(x, \psi + \Delta\psi)}{\Delta x} - \frac{\Sigma(x + \Delta x, \psi) - \Sigma(x, \psi)}{\Delta x}}{\Delta\psi},$$

ὅταν Δx καὶ Δψ τείνωσι πρὸς τὸ κατασταθῆναι μηδέν. Ἐπίσης γινώσκομεν ὅτι, $\frac{\delta\omega}{\delta\psi}$ εἶναι τὸ ὅριον πρὸς ὃ τείνει ὁ λόγος

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta\psi} = \frac{\Sigma(x, \psi + \Delta\psi) - \Sigma(x, \psi)}{\Delta\psi},$$

ὅταν Δψ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν· καὶ ὅτι, $\frac{\delta^2\omega}{\delta\psi\delta x}$ εἶναι τὸ ὅριον πρὸς ὃ τείνει ἡ ἔκθεσις

$$\frac{\Delta^2\omega}{\Delta\psi\Delta x} = \frac{\frac{\Sigma(x + \Delta x, \psi + \Delta\psi) - \Sigma(x + \Delta x, \psi)}{\Delta\psi} - \frac{\Sigma(x, \psi + \Delta\psi) - \Sigma(x, \psi)}{\Delta\psi}}{\Delta x},$$

ὅταν Δψ καὶ Δx τείνωσι πρὸς τὸ κατασταθῆναι ἴσαι μηδενί. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ τελευταία αὕτη ποσότης οὐδόλως διαφέρει τῆς προηγουμένης, καὶ τὰ ὅρια ἀμφοτέρων εἰσὶν ἐπίσης ἴσα. Ἄρα, $\frac{\delta^2\omega}{\delta\psi\delta x} = \frac{\delta^2\omega}{\delta x\delta\psi}$. Λοιπόν, ὁ διαφορικὸς συντελεστὴς τῆς δευτέρας τάξεως λαμβανόμενος κατὰ τὰς δύο μεταβλητὰς x, ψ, εἶναι ἰσομερῶς ὁ αὐτός, εἴτε διαφορίσωμεν πρῶτον πρὸς x, εἴτε πρῶτον πρὸς ψ. Τοῦτο δ' ἐκφράζομεν λέγοντες ὅτι, *ἡ τάξις τῶν διαφορίσεων οὐδεμίαν ἔχει ἐπιῤῥοὴν ἐπὶ τῶν ἐξαγομένων*. Ἐκ τούτου συνάγομεν ὅτι τὸ διαφορικὸν δευτέρας τάξεως τῆς ἐν § 85 συνεκθέσεως γράφεται οὕτω,

$$\delta^2\omega = \frac{\delta^2\omega}{\delta x^2}\delta x^2 + 2\frac{\delta^2\omega}{\delta x\delta\psi}\delta x\delta\psi + \frac{\delta^2\omega}{\delta\psi^2}\delta\psi^2.$$

87. Ἡ ἐργασία τῆς διαφορίσεως ἐφαρμοζομένη καὶ ἐπὶ τὴν ἔκθεσιν ταύτην, δίδει τὸ ὁλικὸν διαφορικὸν τῆς τρίτης τάξεως· πρέπει δὲ νὰ διαφορίσωμεν τὰς συνεκθέσεις $\frac{\delta^2\omega}{\delta x^2}$,

$\frac{\delta^2\omega}{\delta x\delta\psi}$, $\frac{\delta^2\omega}{\delta\psi^2}$, πρὸς x καὶ πρὸς ψ. Οὕτω λαμβάνομεν, ἔχοντες ὑπ' ὄψιν καὶ τὴν ἐν τῷ προηγουμένῳ § δειχθεῖσαν πρότασιν,

$$\delta^3\omega = \frac{\delta^3\omega}{\delta x^3}\delta x^3 + 3\frac{\delta^3\omega}{\delta x^2\delta\psi}\delta x^2\delta\psi + 3\frac{\delta^3\omega}{\delta x\delta\psi^2}\delta x\delta\psi^2 + \frac{\delta^3\omega}{\delta\psi^3}\delta\psi^3.$$

88. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐξακολουθοῦντες, εὑρίσκομεν ἐν γένει,

$$\delta^\nu\omega = \frac{\delta^\nu\omega}{\delta x^\nu}\delta x^\nu + \nu\frac{\delta^\nu\omega}{\delta x^{\nu-1}\delta\psi}\delta x^{\nu-1}\delta\psi$$

$$+ \frac{\nu(\nu-1)}{1\,.\,2}\frac{\delta^\nu\omega}{\delta x^{\nu-2}\delta\psi^2}\delta x^{\nu-2}\delta\psi^2 + \ldots + \frac{\delta^\nu\omega}{\delta\psi^\nu}\delta\psi^\nu.$$

Τοῦ τύπου τούτου ἡ ἀναλογία πρὸς τὸ ἐκτύλιγμα τῆς ἀκεραίας δυνάμεως ἑνὸς διωνύμου εἶναι πρόδηλος. Ἄρα, ἐν γένει, γραπτέον

$$\delta^\nu\omega = \left(\frac{\delta\omega}{\delta x}\delta x + \frac{\delta\omega}{\delta\psi}\delta\psi\right)^\nu,$$

προσέχοντες τρέπειν ἐν τῇ ἀναπτύξει, $\delta\omega^\nu$ εἰς $\delta^\nu\omega$.

89. Αἱ περιπτώσεις καθ' ἃς ὑπάρχουσι πλείονες ἢ δύο μεταβληταί, οὐ χρήζουσι νέων διασαφήσεων. Π. χ. Ἔστω

$$\omega = \Sigma(\upsilon, x, \psi).$$

Τὸ ὁλικὸν διαφορικὸν τῆς πρώτης τάξεως εἶναι [47],

$$\delta\omega = \frac{\delta\omega}{\delta\upsilon}\delta\upsilon + \frac{\delta\omega}{\delta x}\delta x + \frac{\delta\omega}{\delta\psi}\delta\psi.$$

Ἔχομεν δέ, διαφορίζοντες τὴν ἔκθεσιν ταύτην, ἐν ᾗ θεωρητέον δυ, δx, δψ, ὡς παράγοντας ἀτρέπτους, καὶ $\frac{\delta\omega}{\delta\upsilon}$, $\frac{\delta\omega}{\delta x}$,

$\frac{\delta\omega}{\delta\psi}$, ὡς συνεχθέσεις τῶν τριῶν μεταβλητῶν υ, x, ψ, τὸ ὁλικὸν διαφορικὸν τῆς δευτέρας τάξεως τῆς τεθείσης συνεχθέσεως·

$$\delta^2\omega = \frac{\delta^2\omega}{\delta\upsilon^2}\delta\upsilon^2 + \frac{\delta^2\omega}{\delta x^2}\delta x^2 + \frac{\delta^2\omega}{\delta\psi^2}\delta\psi^2 + 2\left(\frac{\delta^2\omega}{\delta\upsilon\delta x}\delta\upsilon\delta x + \frac{\delta^2\omega}{\delta\upsilon\delta\psi}\delta\upsilon\delta\psi + \frac{\delta^2\omega}{\delta\psi\delta x}\delta\psi\delta x\right).$$

Ἐν γένει γράφομεν,

$$\delta^\nu\omega = \left(\frac{\delta\omega}{\delta\upsilon}\delta\upsilon + \frac{\delta\omega}{\delta x}\delta x + \frac{\delta\omega}{\delta\psi}\delta\psi\right)^\nu,$$

ἐνθυμούμενοι τρέπειν ἐν τῇ ἀναπτύξει, $\delta\omega^\nu$ εἰς $\delta^\nu\omega$.

Καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, διὰ μείζονα ἀριθμὸν μεταβλητῶν ἀνεξαρτήτων.

90. Ἕπονται παραδείγματά τινα πρὸς ἄσκησιν.

1) $\omega = x^\mu\psi^\nu$,

$$\delta^4\omega = \mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)\Big[x^{\mu-4}\psi^\nu\delta x^4 + 4\frac{\nu}{\mu-3}x^{\mu-3}\psi^{\nu-1}\delta x^3\delta\psi$$

$$+ 6\frac{\nu(\nu-1)}{(\mu-2)(\mu-3)}x^{\mu-2}\psi^{\nu-2}\delta x^2\delta\psi^2$$

$$+ 4\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}x^{\mu-1}\psi^{\nu-3}\delta x\delta\psi^3$$

$$+ \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}x^\mu\psi^{\nu-4}\delta\psi^4\Big].$$

2) $\omega = e^{\alpha x + \beta\psi}$,

$$\delta^3\omega = (\alpha^3\delta x^3 + 3\alpha^2\beta\delta x^2\delta\psi + 3\alpha\beta^2\delta x\delta\psi^2 + \beta^3\delta\psi^3)\,e^{\alpha x+\beta\psi}.$$

3) $\omega = \text{ἡμ}\,\mu x\ \text{ἡμ}\,\nu\psi$,

$$\delta^4\omega = (\mu^4\delta x^4 + 6\mu^2\nu^2\delta x^2\delta\psi^2 + \nu^4\delta\psi^4)\,\text{ἡμ}\,\mu x\ \text{ἡμ}\,\nu\psi$$

$$- 4\mu\nu(\mu^2\delta x^3\delta\psi + \nu^2\delta x\delta\psi^3)\,\text{συν}\,\mu x\ \text{συν}\,\nu\psi.$$

4) $\omega = \lambda(\alpha x + \beta\psi)$,

$$\delta^2\omega = -\left(\alpha^2\,\delta x^2 + 2\alpha\beta\,\delta x\,\delta\psi + \beta^2\,\delta\psi^2\right)\frac{1}{(\alpha x + \beta\psi)^2},$$

5) $\omega = (x^2 + \psi^2)^{\frac{1}{2}}$,

$$\delta^2\omega = \left(\psi^2\,\delta x^2 - 2\,x\psi\,\delta x\,\delta\psi + x^2\,\delta\psi^2\right)\frac{1}{(x^2 + \psi^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

6) $\omega = \text{τόξ ἡμ}\,\frac{x}{\psi}$,

$$\delta^2\omega = \left(x\,\delta x^2 - 2\psi\,\delta x\,\delta\psi + x\,\frac{2\psi^2 - x^2}{\psi^2}\,\delta\psi^2\right)\frac{1}{(\psi^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Γ'. ΠΕΡΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΤΑΞΕΩΝ ΣΥΝΕΚΘΕΣΕΩΝ ΣΥΝΕΠΤΥΓΜΕΝΩΝ.

91. Ἔστω πρῶτον ἡ ἐξίσωσις

$$\Sigma(x, \psi) = 0,$$

ἐν ᾗ, x εἶναι μεταβλητὴ ἀνεξάρτητος, ψ δὲ συνέκθεσις τῆς x διδομένη συνεπτυγμένως τῇ ἐξισώσει ταύτῃ. Ζητεῖται, χωρὶς νὰ ἐπιλύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν, εὑρεῖν τὰς ἐκθέσεις τῶν διαφορικῶν συντελεστῶν $\frac{\delta\psi}{\delta x}$, $\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}$, $\frac{\delta^3\psi}{\delta x^3}$, κ. τ. ἑ. τῆς συνεκθέσεως ψ. Εὕρομεν ἤδη [53] τὴν πρωτοταγῆ διαφορικὴν ἐξίσωσιν·

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta x} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\psi}\frac{\delta\psi}{\delta x} = 0, \quad \text{ἐξ ἧς} \quad \frac{\delta\psi}{\delta x} = -\frac{\frac{\delta\Sigma}{\delta x}}{\frac{\delta\Sigma}{\delta\psi}}.$$

Ἐκ δευτέρου διαφορίζοντες, ἔχοντες δὲ ὑπ' ὄψιν, ὅτι αἱ συνεκθέσεις $\frac{\delta\Sigma}{\delta x}$, $\frac{\delta\Sigma}{\delta\psi}$, περιέχουσιν ἀμφοτέρας τὰς μεταβλητὰς x, ψ, ὧν ἡ ψ θεωρεῖται ὡς συνέκθεσις τῆς x, μορφοῦμεν τὴν τῆς δευτέρας τάξεως διαφορικὴν ἐξίσωσιν·

$$\frac{\delta^2\Sigma}{\delta x^2} + 2\frac{\delta^2\Sigma}{\delta x\delta\psi}\frac{\delta\psi}{\delta x} + \frac{\delta^2\Sigma}{\delta\psi^2}\left(\frac{\delta\psi}{\delta x}\right)^2 + \frac{\delta\Sigma}{\delta\psi}\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} = 0,$$

ἐξ ἧς συνάγομεν, ἀφοῦ θέσωμεν ἀντὶ $\frac{\delta\psi}{\delta x}$ τὴν ἄνω τιμήν,

$$\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} = -\frac{\frac{\delta^2\Sigma}{\delta x^2}\left(\frac{\delta\Sigma}{\delta\psi}\right)^2 - 2\frac{\delta^2\Sigma}{\delta x\delta\psi}\frac{\delta\Sigma}{\delta x}\frac{\delta\Sigma}{\delta\psi} + \frac{\delta^2\Sigma}{\delta\psi^2}\left(\frac{\delta\Sigma}{\delta x}\right)^2}{\left(\frac{\delta\Sigma}{\delta\psi}\right)^3}.$$

Τὴν αὐτὴν ἔκθεσιν λαμβάνομεν ἀμέσως ἐκ τῆς τιμῆς τοῦ $\frac{\delta\psi}{\delta x}$ τῇ διαφορίσει.

Ὁμοίως ἐργαζόμενοι μορφοῦμεν τοὺς διαφορικοὺς συντελεστὰς τάξεων ὑπερτέρων.

92. Ἔστω προσέτι ἡ ἐξίσωσις

$$\Sigma(x, \psi, \omega) = 0,$$

ἐν ᾗ ω εἶναι συνέκθεσις τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν x καὶ ψ. Ἐν § 55 εἴδομεν ὅτι οἱ δύο διαφορικοὶ συντελεσταὶ τῆς πρώτης τάξεως $\frac{\delta\omega}{\delta x}$ καὶ $\frac{\delta\omega}{\delta\psi}$ ὁρίζονται ἐκ τῶν δύο διαφορικῶν ἐξισώσεων,

$$(1)\quad \frac{\delta\Sigma}{\delta x} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\omega}\frac{\delta\omega}{\delta x} = 0, \qquad (2)\quad \frac{\delta\Sigma}{\delta\psi} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\omega}\frac{\delta\omega}{\delta\psi} = 0.$$

Ἵνα μορφώσωμεν τὰς ἐξισώσεις διδούσας τοὺς διαφορικοὺς συντελεστὰς τῆς δευτέρας τάξεως, διαφορίζομεν τὰς ἄνωθι ἑκάστην πρὸς x, ψ, ω, θεωροῦντες ω ὡς συνέκθεσιν τῶν x, καὶ ψ·

$$\frac{\delta^2\Sigma}{\delta x^2} + 2\frac{\delta^2\Sigma}{\delta x\delta\omega}\frac{\delta\omega}{\delta x} + \frac{\delta^2\Sigma}{\delta\omega^2}\left(\frac{\delta\omega}{\delta x}\right)^2 + \frac{\delta\Sigma}{\delta\omega}\frac{\delta^2\omega}{\delta x^2} = 0,$$

$$\frac{\delta^2\Sigma}{\delta x\delta\psi} + \frac{\delta^2\Sigma}{\delta\omega\delta\psi}\frac{\delta\omega}{\delta x} + \frac{\delta^2\Sigma}{\delta\omega\delta x}\frac{\delta\omega}{\delta\psi} + \frac{\delta^2\omega}{\delta x\delta\psi}\frac{\delta\Sigma}{\delta\omega} + \frac{\delta^2\Sigma}{\delta\omega^2}\frac{\delta\omega}{\delta x}\frac{\delta\omega}{\delta\psi} = 0,$$

$$\frac{\delta^2\Sigma}{\delta\psi^2}+2\frac{\delta^2\Sigma}{\delta\psi\delta\omega}\frac{\delta\omega}{\delta\psi}+\frac{\delta^2\Sigma}{\delta\omega^2}\left(\frac{\delta\omega}{\delta\psi}\right)^2+\frac{\delta\Sigma}{\delta\omega}\frac{\delta^2\omega}{\delta\psi^2}=0.$$

Τὴν μὲν πρώτην ἐξίσωσιν ἐλάβομεν τῇ διαφορίσει τῆς (1) πρὸς x καὶ ω, τὴν δὲ δευτέραν τῇ διαφορίσει τῆς (1) πρὸς ψ καὶ ω, ἢ τῆς (2) πρὸς x καὶ ω. Τὰ ἐξαγόμενα εἰσὶν ἓν καὶ τὸ αὐτό, συνεπείᾳ τῆς ἐν § 86 δειχθείσης προτάσεως. Τέλος, τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν ἐλάβομεν διαφορίσαντες τὴν (2) πρὸς ψ καὶ ω.

93. Παρατηρητέον ὅτι, ἐὰν πολυπλασιάσωμεν τὰς ἀνωτέρω τρεῖς τελευταίας ἐξισώσεις, ἀμοιβαίως ἐπὶ δx^2, $2\delta x\delta\psi$, $\delta\psi^2$, εἶτα δὲ προσθέσωμεν τὰ γινόμενα, καθιστῶντες,

$$\delta\omega,\quad \text{ἀντὶ}\quad \frac{\delta\omega}{\delta x}\delta x+\frac{\delta\omega}{\delta\psi}\delta\psi,$$

$$\text{καὶ}\ \delta^2\omega,\ \text{ἀντὶ}\quad \frac{\delta^2\omega}{\delta x^2}\delta x^2+2\frac{\delta^2\omega}{\delta x\delta\psi}\delta x\delta\psi+\frac{\delta^2\omega}{\delta\psi^2}\delta\psi^2,$$

εὑρήσομεν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον, ὁποῖον καὶ ἐὰν διαφορίσωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta x}\delta x+\frac{\delta\Sigma}{\delta\psi}\delta\psi+\frac{\delta\Sigma}{\delta\omega}\delta\omega=0,$$

καθ' ἁπάσας τὰς μεταβλητάς, θεωροῦντες τοὺς μὲν παράγοντας δx καὶ δψ ὡς ἀτρέπτους, τὸν δὲ δω ὡς συνέκθεσιν τῶν x καὶ ψ· ἤτοι

$$\frac{\delta^2\Sigma}{\delta x^2}\delta x^2+\frac{\delta^2\Sigma}{\delta\psi^2}\delta\psi^2+\frac{\delta^2\Sigma}{\delta\omega^2}\delta\omega^2+2\frac{\delta^2\Sigma}{\delta x\delta\psi}\delta x\delta\psi$$
$$+2\frac{\delta^2\Sigma}{\delta x\delta\omega}\delta x\delta\omega+2\frac{\delta^2\Sigma}{\delta\psi\delta\omega}\delta\psi\delta\omega+\frac{\delta\Sigma}{\delta\omega}\delta^2\omega=0.$$

94. Αἱ αὐταὶ ἀρχαὶ ἐφαρμόζονται καὶ ἐπὶ περιπτώσεων καθ' ἃς ἔχομεν μείζονα ἀριθμὸν μεταβλητῶν καὶ ἐξισώσεων. Τὸ πᾶν συνίσταται εἰς τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου τῆς διαφορίσεως πρὸς μόρφωσιν διαφορικῶν ἐξισώσεων τάξεων ὑπερ-

τέρων, ἀφ' ὧν ἀείποτε ποριζόμεθα τὰς ἐκθέσεις τῶν διαφορικῶν συντελεστῶν τῶν συνεπτυγμένως διδομένων συνεκθέσεων. Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις

$$\sigma(x,\psi,\omega)=0,\qquad \Sigma(x,\psi,\omega)=0,$$

ἐν αἷς, x εἶναι ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ καὶ ψ, ω, δύο συνεκθέσεις τῆς μεταβλητῆς ταύτης ὁριζόμεναι διὰ τῶν ἐξισώσεων τούτων. Διαφορίζοντες αὐτὰς ἅπαξ, μορφοῦμεν τὰς ἐξισώσεις τῆς πρώτης τάξεως,

$$\frac{\delta\sigma}{\delta x}+\frac{\delta\sigma}{\delta\psi}\frac{\delta\psi}{\delta x}+\frac{\delta\sigma}{\delta\omega}\frac{\delta\omega}{\delta x}=0,\quad \frac{\delta\Sigma}{\delta x}+\frac{\delta\Sigma}{\delta\psi}\frac{\delta\psi}{\delta x}+\frac{\delta\Sigma}{\delta\omega}\frac{\delta\omega}{\delta x}=0,$$

ἀφ' ὧν, τῇ ἀπαλοιφῇ, συνάγομεν,

$$\frac{\delta\psi}{\delta x}=-\frac{\dfrac{\delta\sigma}{\delta x}\dfrac{\delta\Sigma}{\delta\omega}-\dfrac{\delta\Sigma}{\delta x}\dfrac{\delta\sigma}{\delta\omega}}{\dfrac{\delta\sigma}{\delta\psi}\dfrac{\delta\Sigma}{\delta\omega}-\dfrac{\delta\Sigma}{\delta\psi}\dfrac{\delta\sigma}{\delta\omega}},\quad \frac{\delta\omega}{\delta x}=-\frac{\dfrac{\delta\Sigma}{\delta x}\dfrac{\delta\sigma}{\delta\psi}-\dfrac{\delta\sigma}{\delta x}\dfrac{\delta\Sigma}{\delta\psi}}{\dfrac{\delta\sigma}{\delta\psi}\dfrac{\delta\Sigma}{\delta\omega}-\dfrac{\delta\Sigma}{\delta\psi}\dfrac{\delta\sigma}{\delta\omega}}.$$

Διαφορίζοντες τὰς προηγουμένας ἐξισώσεις, μορφοῦμεν τὰς τῆς δευτέρας τάξεως· ἤτοι,

$$\frac{\delta^2\sigma}{\delta x^2}+2\frac{\delta^2\sigma}{\delta x\delta\psi}\frac{\delta\psi}{\delta x}+2\frac{\delta^2\sigma}{\delta x\delta\omega}\frac{\delta\omega}{\delta x}+\frac{\delta^2\sigma}{\delta\psi^2}\left(\frac{\delta\psi}{\delta x}\right)^2$$
$$+2\frac{\delta^2\sigma}{\delta\psi\delta\omega}\frac{\delta\psi}{\delta x}\frac{\delta\omega}{\delta x}+\frac{\delta^2\sigma}{\delta\omega^2}\left(\frac{\delta\omega}{\delta x}\right)^2+\frac{\delta\sigma}{\delta\psi}\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}+\frac{\delta\sigma}{\delta\omega}\frac{\delta^2\omega}{\delta x^2}=0,$$

$$\frac{\delta^2\Sigma}{\delta x^2}+2\frac{\delta^2\Sigma}{\delta x\delta\psi}\frac{\delta\psi}{\delta x}+2\frac{\delta^2\Sigma}{\delta x\delta\omega}\frac{\delta\omega}{\delta x}+\frac{\delta^2\Sigma}{\delta\psi^2}\left(\frac{\delta\psi}{\delta x}\right)^2$$
$$+2\frac{\delta^2\Sigma}{\delta\psi\delta\omega}\frac{\delta\psi}{\delta x}\frac{\delta\omega}{\delta x}+\frac{\delta^2\Sigma}{\delta\omega^2}\left(\frac{\delta\omega}{\delta x}\right)^2+\frac{\delta\Sigma}{\delta\psi}\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}+\frac{\delta\Sigma}{\delta\omega}\frac{\delta^2\omega}{\delta x^2}=0,$$

ἀφ' ὧν ποριζόμεθα τὰς ἐκθέσεις τῶν $\dfrac{\delta^2\psi}{\delta x^2}$ καὶ $\dfrac{\delta^2\omega}{\delta x^2}$, ἀφοῦ θέσωμεν ἀντὶ $\frac{\delta\psi}{\delta x}$ καὶ $\frac{\delta\omega}{\delta x}$ τὰς προηγουμένας τιμὰς αὐτῶν.

Τὰς αὐτὰς ἐκθέσεις τῶν $\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}$ καὶ $\frac{\delta^2\omega}{\delta x^2}$, εὑρίσκομεν ἐπίσης τῇ ἀμέσῳ διαφορίσει τῶν προηγουμένων τιμῶν τῶν $\frac{\delta\psi}{\delta x}$ καὶ $\frac{\delta\omega}{\delta x}$.

Καθ' ὅμοιον τρόπον μορφοῦμεν τοὺς διαφορικοὺς συντελεστὰς τάξεων ὑπερτέρων τῶν συνεκθέσεων ψ καὶ ω.

ΙΑ'. ΠΕΡΙ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΤΗΣ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟΥ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ.

95. Ἐν § 2 ἐδηλώθη ἡ ἀνάγκη τοῦ διακρίνειν ἐν ἑκάστῳ ζητήματι τὰς ἀνεξαρτήτους μεταβλητὰς ἀπὸ τῶν μεταβλητῶν συνεκθέσεων οὐσῶν τούτων. Τὸ αὐτὸ ἐπανελάβομεν ἐν § 43. Αἱ τὸν Διαφορικὸν λογισμὸν συνιστῶσαι ἀναλυτικαὶ ἐργασίαι κυρίως βάσιν ἔχουσι τὴν τοιαύτην διάκρισιν, τηρητέαν καθ' ἅπασαν τὴν ἔκτασιν τῶν ἐξισώσεων· διότι αἱ διαδοχικαὶ διαφορίσεις ἐκτελοῦνται ἀείποτε θεωρουμένων τῶν διαφορικῶν τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν ὡς παραγόντων ἀτρέπτων, ἐνῷ τὰ διαφορικὰ τῶν ἑτέρων μεταβλητῶν μεταβάλλονται. Δυνάμεθα ὅμως, βοηθείᾳ τινῶν μεταμορφώσεων, εἰσάγειν ἐν τῇ σειρᾷ λογισμοῦ τινος νέας μεταβλητὰς ἀνεξαρτήτους ἀντὶ τῶν πρότερον ἐκλεχθεισῶν ὡς τοιούτων.

Ὅπως λάβωμεν ἰδέαν ἀκριβῆ τῶν τοιούτων μετασχηματισμῶν, ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἐπίλυσις προτάσεως ἔδωκεν ἐξίσωσιν, ὡς

$$\Sigma\left(x, \psi, \frac{\delta\psi}{\delta x}, \frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}, \frac{\delta^3\psi}{\delta x^3}, \ldots\right) = 0,$$

ἐν ᾗ x θεωρεῖται ὡς μεταβλητὴ ἀνεξάρτητος, ψ δὲ ὡς συνέκθεσις τῆς x. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἐμφαίνει σχέσιν τινὰ μεταξὺ x, ψ, καὶ τῶν διαφορικῶν συντελεστῶν $\frac{\delta\psi}{\delta x}$, $\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}$, $\frac{\delta^3\psi}{\delta x^3}$,

κ. τ. ἑ., δηλούντων ἀμοιβαίως τὰ ὅρια τῶν ὑπαρχόντων λόγων μεταξὺ τῶν ταυτοχρόνων μεταβολῶν τῆς x καὶ τῶν συνεκθέσεων ψ, $\frac{\delta\psi}{\delta x}$, $\frac{\delta^2\psi}{\delta\psi^2}$, κ. τ. ἑ. Τεθείσθω ἤδη ὅτι, x μὲν παύει τοῦ θεωρεῖσθαι ὡς μεταβλητὴ ἀνεξάρτητος, ἑτέρα δέ τις, τῷ τ δηλουμένη, θεωρηθήσεται ὡς τοιαύτη. Διὰ τούτου ἐννοοῦμεν ὅτι x καὶ ψ ἔσονται συνεκθέσεις τῆς τ, διατηρουμένης οὐχ ἧττον τῆς πρότερον τεθείσης συναλλήλου σχέσεως τῶν δύο τούτων μεταβλητῶν x, ψ. Ἡ συνδέουσα σχέσις τὴν τ πρὸς τὰς μεταβλητὰς x, ψ, πρέπει νὰ δίδηται εἴτε δι' ἐξισώσεως μεταξὺ τ καὶ x, ὡς $\Phi(\tau, x) = 0$, εἴτε δι' ἐξισώσεως μεταξὺ τ καὶ ψ, ὡς $\Psi(\tau, \psi) = 0$, εἴτε, τέλος, δι' ἐξισώσεως περιεκτικῆς τῶν τριῶν μεταβλητῶν, ὡς $\Pi(\tau, x, \psi) = 0$.

Τούτου τεθέντος, δῆλον ὅτι οἱ διαφορικοὶ συντελεσταὶ $\frac{\delta\psi}{\delta x}$, $\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}$, $\frac{\delta^3\psi}{\delta x^3}$, ... ἐν τῇ ἐξισώσει $\Sigma = 0$ περιεχόμενοι, πρέπει ν' ἀντικατασταθῶσιν ὑφ' ἑτέρων διαφορικῶν συντελεστῶν τῆς συνεκθέσεως ψ πρὸς τ λαμβανομένων. Πρόκειται δὲ ἐκτελέσαι τὴν μεταβολὴν ταύτην διατηρουμένης τῆς ἀμοιβαίας σχέσεως τῶν ψ καὶ x. Τοῦτο κατορθοῦμεν παρατηροῦντες ἁπλῶς ὅτι, ὅταν x μὲν ἦναι συνέκθεσις τῆς τ, ψ δὲ συνέκθεσις τῆς x, ἔχομεν, κατὰ § 26, τὴν ἔκθεσιν

$$\frac{\delta\psi}{\delta\tau} = \frac{\delta\psi}{\delta x}\frac{\delta x}{\delta\tau}, \qquad \text{ἐξ ἧς} \qquad \frac{\delta\psi}{\delta x} = \frac{\frac{\delta\psi}{\delta\tau}}{\frac{\delta x}{\delta\tau}},$$

ἀντεισακτέαν ἀντὶ $\frac{\delta\psi}{\delta x}$ ἐν τῇ ἐξισώσει $\Sigma = 0$.

Ἡ πρώτη αὕτη ἔκθεσις δίδει ἀμέσως τὴν τῶν διαφορικῶν συντελεστῶν τῶν ἀνωτέρων τάξεων. Διότι, διαφορίζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς προηγουμένης ἐξισώσεως κατὰ τ, ἑπομένως θεωροῦντες δτ ὡς ἄτρεπτον, λαμβάνομεν·

$$\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}\,\frac{\delta x}{\delta\tau} = \frac{\frac{\delta x}{\delta\tau}\frac{\delta^2\psi}{\delta\tau^2} - \frac{\delta\psi}{\delta\tau}\frac{\delta^2 x}{\delta\tau^2}}{\left(\frac{\delta x}{\delta\tau}\right)^2},$$

ἢ

$$\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} = \frac{\frac{\delta x}{\delta\tau}\frac{\delta^2\psi}{\delta\tau^2} - \frac{\delta\psi}{\delta\tau}\frac{\delta^2 x}{\delta\tau^2}}{\left(\frac{\delta x}{\delta\tau}\right)^3}.$$

Ἐκ τῆς ἐκθέσεως ταύτης πορίζόμεθα ἐπίσης, τῇ κατὰ τ διαφορίσει καὶ διαιρέσει διὰ $\frac{\delta x}{\delta\tau}$,

$$\frac{\delta^3\psi}{\delta x^3} = \frac{\left(\frac{\delta x}{\delta\tau}\right)^2\frac{\delta^3\psi}{\delta\tau^3} - 3\,\frac{\delta x}{\delta\tau}\frac{\delta^2 x}{\delta\tau^2}\frac{\delta^2\psi}{\delta\tau^2} + 3\,\frac{\delta\psi}{\delta\tau}\left(\frac{\delta^2 x}{\delta\tau^2}\right)^2 - \frac{\delta x}{\delta\tau}\frac{\delta\psi}{\delta\tau}\frac{\delta^3 x}{\delta\tau^3}}{\left(\frac{\delta x}{\delta\tau}\right)^5}.$$

Καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

96. Μετὰ τὴν ἀντεισαγωγὴν τῶν τιμῶν τούτων ἐν τῇ $\Sigma = 0$, ἡ ἐξίσωσις αὕτη περιέξει x, ψ, καὶ τοὺς διαφορικοὺς συντελεστὰς τούτων κατὰ τ λαμβανομένους. Ἐὰν ἐδόθη μία ἐξίσωσις $\Phi(\tau, x) = 0$, μεταξὺ τ καὶ x, δυνάμεθα ἀντικαταστῆσαι ἐν τῇ ἐξισώσει $\Sigma = 0$, x καὶ τοὺς διαφορικοὺς ταύτης συντελεστὰς διὰ τῶν ἐκ τῆς $\Phi(\tau, x) = 0$ ἐξαγομένων τιμῶν αὐτῶν, ὡς ἐν § 91 εἴδομεν. Τότε x ἐκλείψει, ἡ δ' ἐξίσωσις $\Sigma = 0$ περιέξει μόνον τ, ψ, $\frac{\delta\psi}{\delta\tau}$, $\frac{\delta^2\psi}{\delta\tau^2}$, $\frac{\delta^3\psi}{\delta\tau^3}$, κ.τ.έ. Ἐὰν ἐδόθη ἐξίσωσις $\Psi(\tau, \psi) = 0$, μεταξὺ τ καὶ ψ, δυνάμεθα ἐπίσης ἐξαλεῖψαι ψ καὶ τοὺς διαφορικοὺς αὐτῆς συντελεστάς, ὥστε ἡ ἐξίσωσις $\Sigma = 0$ περιέξει μόνον τ, x, $\frac{\delta x}{\delta\tau}$, $\frac{\delta^2 x}{\delta\tau^2}$, $\frac{\delta^3 x}{\delta\tau^3}$, κ. τ. έ. Τέλος, εἰ ἐδόθη ἐξίσωσις $\Pi(\tau, x, \psi) = 0$ περιεκτικὴ τῶν τριῶν μεταβλητῶν, ἐξα-

λείφομεν κατ' ἀρέσκειαν x ἢ ψ· διότι ἡ ἐξίσωσις αὕτη καὶ αἱ διαδοχικαὶ αὐτῆς διαφορικαὶ κατὰ τ λαμβανόμεναι (θεωρουμένων x καὶ ψ ὡς συνεκθέσεων τῆς τ), δώσουσι τὰς τιμὰς τῶν x, $\frac{\delta x}{\delta\tau}$, $\frac{\delta^2 x}{\delta\tau^2}$, κ. τ. έ. συνεκθέσει τῶν ψ, $\frac{\delta\psi}{\delta\tau}$, $\frac{\delta^2\psi}{\delta\tau^2}$, κ. τ. έ. καὶ ἀμοιβαίως.

97. Ἐὰν ἡ μεταξὺ τ καὶ τῶν ἑτέρων μεταβλητῶν τεθεῖσα σχέσις συνίσταται ἐν τῇ ἐξισώσει $x = \tau$, τότε ἔχομεν $\frac{\delta x}{\delta\tau} = 1$, $\frac{\delta^2 x}{\delta\tau^2} = 0$, $\frac{\delta^3 x}{\delta\tau^3} = 0$, κ. τ. έ., οἱ δ' ἐν § 95 τύποι ἄγονται, ὡς ἑπόμενον, εἰς

$$\frac{\delta\psi}{\delta x} = \frac{\delta\psi}{\delta\tau},\quad \frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} = \frac{\delta^2\psi}{\delta\tau^2},\quad \frac{\delta^3\psi}{\delta x^3} = \frac{\delta^3\psi}{\delta\tau^3},\quad \text{κ. τ. έ.}$$

Ἐὰν ἡ περὶ ἧς λόγος σχέσις συνίσταται ἐν τῇ ἐξισώσει $\psi = \tau$, τότε ἔχομεν $\frac{\delta\psi}{\delta\tau} = 1$, $\frac{\delta^2\psi}{\delta\tau^2} = 0$, $\frac{\delta^3\psi}{\delta\tau^3} = 0$, κ.τ.έ. Οἱ αὐτοὶ δὲ τύποι ἀποκαθίστανται (γραφομένου ψ ἀντὶ τ),

$$\frac{\delta\psi}{\delta x} = \frac{1}{\frac{\delta x}{\delta\psi}},\qquad \frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} = -\frac{\frac{\delta^2 x}{\delta\psi^2}}{\left(\frac{\delta x}{\delta\psi}\right)^3},$$

$$\frac{\delta^3\psi}{\delta x^3} = \frac{3\left(\frac{\delta^2 x}{\delta\psi^2}\right)^2 - \frac{\delta x}{\delta\psi}\frac{\delta^3 x}{\delta\psi^3}}{\left(\frac{\delta x}{\delta\psi}\right)^5},$$

κ. τ. έ.

Λοιπόν, καθιστῶμεν τὰς τελευταίας ταύτας ἐκθέσεις ἀντὶ $\frac{\delta\psi}{\delta x}$, $\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}$, $\frac{\delta^3\psi}{\delta x^3}$, κ. τ. έ., ὅταν, ἔν τινι ἐξισώσει περιεκτικῇ x καὶ ψ, κατ' ἀρχὰς μὲν ἐλάβομεν x ὡς μεταβλητὴν ἀνεξάρτητον, εἶτα δὲ βουλόμεθα καταστῆσαι ψ τοιαύτην,

98. Οἱ προηγούμενοι τύποι ἄγουσιν ἀμέσως εἰς τὴν ἔκθεσιν τοῦ διαφορικοῦ τῶν ἀντιστρόφων συνεκθέσεων [37].

1). Ἡ ἐξίσωσις

$$\psi = \lambda x, \qquad \delta \acute{\iota} \delta \epsilon \iota \qquad \frac{\delta\psi}{\delta x} = \frac{1}{x},$$

x θεωρουμένης ὡς μεταβλητῆς ἀνεξαρτήτου. Ἔστω ἤδη ὅτι πρόκειται θεωρῆσαι ψ ὡς μεταβλητὴν ἀνεξάρτητον. Καθιστῶμεν $\dfrac{1}{\frac{\delta x}{\delta\psi}}$ ἀντὶ $\dfrac{\delta\psi}{\delta x}$, καὶ λαμβάνομεν·

$$\frac{1}{\frac{\delta x}{\delta\psi}} = \frac{1}{x}, \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{\delta x}{\delta\psi} = x\cdot$$

ἤτοι, θέτοντες ἀντὶ x τὴν εἰς ψ τιμὴν αὐτῆς e^{ψ},

$$\frac{\delta . e^{\psi}}{\delta\psi} = e^{\psi},$$

2). Ἡ ἐξίσωσις

$$\psi = \text{ἡμ}\, x, \qquad \delta \acute{\iota} \delta \epsilon \iota \qquad \frac{\delta\psi}{\delta x} = \text{συν}\, x,$$

x θεωρουμένης ὡς μεταβλητῆς ἀνεξαρτήτου. Ἐὰν ἤδη ἔσεται τοιαύτη ἡ ψ, γράφομεν

$$\frac{1}{\frac{\delta x}{\delta\psi}} = \text{συν}\, x, \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{\delta x}{\delta\psi} = \frac{1}{\text{συν}\, x}.$$

ἤτοι, θέτοντες ἀντὶ x τὴν τιμὴν αὐτῆς τόξ ἡμ. ψ,

$$\frac{\delta\, .\, \text{τόξ ἡμ}\, \psi}{\delta\psi} = \frac{1}{\sqrt{1-\psi^2}}.$$

3). Ἡ ἐξίσωσις

$$\psi = \text{ἐφ}\, x, \qquad \delta \acute{\iota} \delta \epsilon \iota \qquad \frac{\delta\psi}{\delta x} = \frac{1}{\text{συν}^2 x}:$$

Ἄρα,

$$\frac{1}{\frac{\delta x}{\delta\psi}} = \frac{1}{\text{συν}^2 x}, \quad \frac{\delta x}{\delta\psi} = \text{συν}^2 x, \quad \text{ἢ} \quad \frac{\delta\, .\, \text{τόξ ἐφ}\psi}{\delta\psi} = \frac{1}{1+\psi^2}.$$

99. Αἱ αὐταὶ θεωρίαι ἐφαρμόζονται ἐπὶ περιπτώσεων καθ' ἃς ὑπάρχει μείζων ἀριθμὸς μεταβλητῶν. Ἔστω, π. χ., ἡ ἐξίσωσις

$$\Sigma\left(\upsilon, x, \psi, \frac{\delta\psi}{\delta\upsilon}, \frac{\delta\psi}{\delta x}, \text{κ.τ.ἑ.} \quad \omega, \quad \frac{\delta\omega}{\delta\upsilon}, \frac{\delta\omega}{\delta x}, \text{κ.τ.ἑ.}\right) = 0,$$

ἐν ᾗ υ μὲν καὶ x δηλοῦσι τὰς δύο μεταβλητὰς ἀνεξαρτήτους, ψ δὲ καὶ ω δύο συνεκθέσεις τούτων. Ληφθήτωσαν ἤδη σ καὶ τ ὡς μεταβληταὶ ἀνεξάρτητοι. Παρατηρητέον ὅτι, ἐπειδὴ υ καὶ x ἀποκαθίστανται συνεκθέσεις τῶν σ καὶ τ, ἐνῷ ψ καὶ ω δὲν παύουσι τοῦ εἶναι συνεκθέσεις τῶν υ καὶ x, ἔχομεν

$$\frac{\delta\psi}{\delta\sigma} = \frac{\delta\psi}{\delta\upsilon}\frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma} + \frac{\delta\psi}{\delta x}\frac{\delta x}{\delta\sigma}, \qquad \frac{\delta\psi}{\delta\tau} = \frac{\delta\psi}{\delta\upsilon}\frac{\delta\upsilon}{\delta\tau} + \frac{\delta\psi}{\delta x}\frac{\delta x}{\delta\tau}.$$

ὅθεν τῇ ἀπαλοιφῇ συνάγομεν·

$$\frac{\delta\psi}{\delta\upsilon} = \frac{\frac{\delta\psi}{\delta\tau}\frac{\delta x}{\delta\sigma} - \frac{\delta\psi}{\delta\sigma}\frac{\delta x}{\delta\tau}}{\frac{\delta x}{\delta\sigma}\frac{\delta\upsilon}{\delta\tau} - \frac{\delta x}{\delta\tau}\frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma}}, \qquad \frac{\delta\psi}{\delta x} = \frac{\frac{\delta\psi}{\delta\sigma}\frac{\delta\upsilon}{\delta\tau} - \frac{\delta\psi}{\delta\tau}\frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma}}{\frac{\delta x}{\delta\sigma}\frac{\delta\upsilon}{\delta\tau} - \frac{\delta x}{\delta\tau}\frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma}}.$$

Ὁμοίας ἐκθέσεις λαμβάνομεν διὰ $\dfrac{\delta\omega}{\delta\upsilon}$ καὶ $\dfrac{\delta\omega}{\delta x}$. Ἐὰν διαφορίσωμεν τὰς δύο προηγουμένας ἐκθέσεις τῶν $\dfrac{\delta\psi}{\delta\sigma}$ καὶ $\dfrac{\delta\psi}{\delta\tau}$ πρὸς σ καὶ τ, ἕξομεν τρεῖς ἐξισώσεις, ἐξ ὧν ὁρίζομεν τὰς ἐκθέσεις τῶν τριῶν δευτεροταγῶν διαφορικῶν συντελεστῶν $\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}$, $\frac{\delta^2\psi}{\delta x\delta\upsilon}$, $\frac{\delta^2\psi}{\delta\upsilon^2}$. Καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς διὰ τοὺς λοιποὺς διαφορικοὺς συντελεστάς.

Περιττὴν νομίζομεν τὴν περαιτέρω ἔρευναν τῶν γενικῶν τούτων τύπων· διότι κάλλιον ἐργάζεσθαι ἐν ταῖς ἐφαρμογαῖς ἐπὶ τῶν παρουσιαζομένων ἀναλυτικῶν ἐκθέσεων.

100. Ἡ μεταβολὴ τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν κυρίως χωρεῖ ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ, προκειμένου λόγου μεταβῆναι ἀπὸ συστήματος συντεταγμένων εἰς ἕτερον.

Ἔστω, π. χ., ὅτι ἐν τῇ ἐξισώσει

$$\Sigma\left(x,\ \psi,\ \frac{\delta\psi}{\delta x},\ \frac{\delta^2\psi}{\delta x^2},\ \frac{\delta^3\psi}{\delta x^3},\ \ldots\right)=0,$$

x καὶ ψ δηλοῦσι δύο συντεταγμένας (Σχ. 25) ΑΠ, ΜΠ, λογιζομένας ἐπὶ δύο ἀξόνων ὀρθογωνίων, βουλόμεθα δὲ καταστῆσαι ἀντὶ x τὴν γωνίαν ω ὑπὸ τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος ΑΜ καὶ τοῦ ἄξονος τῶν x σχηματιζομένης. Ἔχομεν

$$\text{ἐφ}\ \omega = \frac{\psi}{x}.$$

Τῇ ἀλλεπαλλήλῳ διαφορίσει τῆς ἐξισώσεως ταύτης κατὰ ω, ἧς ψ καὶ x εἰσὶ συνεκθέσεις, μορφοῦμεν ἑτέρας ἐξισώσεις ἀφ' ὧν ἐξάγομεν τὰς τιμὰς τῶν $\frac{\delta x}{\delta\omega}$, $\frac{\delta^2 x}{\delta\omega^2}$, κ. τ. ἑ. ἃς πρέπει ν' ἀντεισάξωμεν ἐν τοῖς ἐν § 95 τύποις. Αἱ τιμαὶ τῶν διαφορικῶν συντελεστῶν $\frac{\delta\psi}{\delta x}$, $\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}$, κ. τ. ἑ., ὑπὸ τῶν τύπων τούτων ἐμφαινόμεναι, ἀντεισαγόμεναι ἐν τῇ $\Sigma = 0$, ἡ ἐξίσωσις αὕτη περιέξει ω, ψ, $\frac{\delta\psi}{\delta\omega}$, $\frac{\delta^2\psi}{\delta\omega^2}$, κ.τ.ἑ.

Εἰ βουλόμεθα μεταβαλλεῖν καθ' ὁλοκληρίαν τὸ σύστημα τῶν συντεταγμένων, εἰσάγοντες ἀντὶ ψ τὸ μῆκος τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος ΑΜ, τῷ ρ δηλουμένης, σὺν τῇ προηγουμένῃ ἐξισώσει θετέον καὶ τὴν

$$\psi = \rho\ \text{ἡμ}\ \omega,$$

ἣν καὶ ταύτην διαφορίζοντες πολλάκις κατὰ συνέχειαν πρὸς ω, τῆς ρ θεωρουμένης ὡς μεταβλητῆς, λαμβάνομεν ἐξισώσεις, ἀφ' ὧν πορίζόμεθα τὰς τιμὰς τῶν $\frac{\delta\psi}{\delta\omega}$, $\frac{\delta^2\psi}{\delta\omega^2}$, κ. τ. ἑ. ἃς ἀντικαθιστῶμεν ἐν τῇ προτεθείσῃ ἐξισώσει, περιεξούσῃ τότε ω, ρ, $\frac{\delta\rho}{\delta\omega}$, $\frac{\delta^2\rho}{\delta\omega^2}$, κ. τ. ἑ.

Ἀλλ' ἐν τῇ τελευταίᾳ ταύτῃ περιπτώσει ἁπλούστερον ἐργαζόμεθα καθιστῶντες ἀμέσως τὰς ἐξισώσεις

$$x = \rho\ \text{συν}\ \omega, \qquad \psi = \rho\ \text{ἡμ}\ \omega,$$

καὶ ἐξάγοντες ἐκ τούτων τὰς τιμὰς τῶν

$$\frac{\delta x}{\delta\omega},\ \frac{\delta^2 x}{\delta\omega^2},\ \text{κ. τ. ἑ.,}\quad \text{καὶ}\quad \frac{\delta\psi}{\delta\omega},\ \frac{\delta^2\psi}{\delta\omega^2},\ \text{κ. τ. ἑ.}$$

Αἱ τιμαὶ αὗται ἀντεισαγόμεναι ἐν τοῖς ἐν § 95 τύποις δίδουσι τὰς τιμὰς τῶν

$$\frac{\delta\psi}{\delta x},\ \frac{\delta^2\psi}{\delta x^2},\ \text{κ. τ. ἑ., εἰς}\ \omega,\ \rho,\ \frac{\delta\rho}{\delta\omega},\ \frac{\delta^2\rho}{\delta\omega^2},\ \text{κ.τ.ἑ.,}$$

ἀντεισακτέας ἐν τῇ τεθείσῃ ἐξισώσει.

101. Ἕπονται πρὸς ἄσκησιν ὑποδείγματά τινα μεταβολῆς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς.

1). *Μετασχηματισθείτω ὁ τύπος*

$$\left[1+\left(\frac{\delta\psi}{\delta x}\right)^2\right]\frac{\delta\psi}{\delta x}+(\psi-\alpha)\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}=0;$$

εἰς ἕτερον ἐν ᾧ ψ εἴη ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητή.

Ἐξαγόμενον. $1+\left(\frac{\delta x}{\delta\psi}\right)^2-(\psi-\alpha)\frac{\delta^2 x}{\delta\psi^2}=0.$

2) *Ὁ τύπος* $$A = \frac{\left[1+\left(\frac{\delta\psi}{\delta x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{-\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}},$$

ὃν βραδύτερον [196] *ἀπαντήσομεν, ἀποκαθίσταται λαμβανομένης* ψ *ἀντὶ μεταβλητῆς ἀνεξαρτήτου,*

$$A = \frac{\left[1+\left(\frac{\delta x}{\delta\psi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\delta^2 x}{\delta\psi^2}}.$$

3) *Λαμβανομένης* ψ *ὡς μεταβλητῆς ἀνεξαρτήτου ἐν τῇ ἐξισώσει*

$$\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} - x\left(\frac{\delta\psi}{\delta x}\right)^3 + e^{\psi}\left(\frac{\delta\psi}{\delta x}\right)^3 = 0,$$

εὑρήσομεν τὴν μετασχηματισθεῖσαν,

$$\frac{\delta^2 x}{\delta\psi^2} + x - e^{\psi} = 0.$$

4) *Ὑποτιθεμένης* $\psi = e^x$, *ληφθείτω* x *ὡς μεταβλητὴ ἀνεξάρτητος ἐν τῇ ἐκθέσει*

$$\psi^2 \frac{\delta^2\omega}{\delta\psi^2} + A\psi\frac{\delta\omega}{\delta\psi} + B\omega = 0.$$

Ἐξαγόμενον. $$\frac{\delta^2\omega}{\delta x^2} + (A-1)\frac{\delta\omega}{\delta x} + B\omega = 0.$$

5) *Τῇ ὑποθέσει* $\psi = \text{συν}\, x$, *μεταβληθείτω ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ* ψ *εἰς* x *ἐν τῷ τύπῳ·*

$$(1-\psi^2)\frac{\delta^2\omega}{\delta\psi^2} - \psi\frac{\delta\omega}{\delta\psi} + \nu^2\omega = 0.$$

Ἐξαγόμενον. $$\frac{\delta^2\omega}{\delta x^2} + \nu^2\omega = 0.$$

6) *Ἐν τῇ ἐκθέσει* $\omega + \frac{1}{x}\frac{\delta\omega}{\delta x} + \frac{\delta^2\omega}{\delta x^2} = 0$, *μεταβληθείτω* x *εἰς* θ, *ἐπὶ τῇ ὑποθέσει* $x^2 = 4\theta$.

Ἐξαγόμενον. $$\omega + \frac{\delta\omega}{\delta\theta} + \theta\frac{\delta^2\omega}{\delta\theta^2} = 0.$$

7) *Μεταβληθείτω ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ ἐν τῇ ἐκθέσει*

$$(\alpha+\psi)^3\frac{\delta^3\omega}{\delta\psi^3} + 3(\alpha+\psi)^2\frac{\delta^2\omega}{\delta\psi^2} + (\alpha+\psi)\frac{\delta\omega}{\delta\psi} + \beta\omega = 0,$$

ἐπὶ τῇ ὑποθέσει $x = \lambda(\alpha+\psi)$.

Ἐξαγόμενον. $$\frac{\delta^3\omega}{\delta x^3} + \beta\omega = 0.$$

8) *Μετασχηματισθείτω* $$\lambda = \frac{x\frac{\delta\psi}{\delta x} - \psi}{\left[1+\left(\frac{\delta\psi}{\delta x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

εἰς συνέκθεσιν τῶν ρ *καὶ* ω, *οὐσῶν δεδομένων* [100]

$$x = \rho\ \text{συν}\,\omega, \qquad \psi = \rho\ \text{ημ}\,\omega,$$

καὶ θεωρουμένης ρ *ὡς συνεκθέσεως τῆς* ω.

Ἐξαγόμενον. $$\lambda = \frac{\rho^2}{\left[\rho^2+\left(\frac{\delta\rho}{\delta\omega}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

9) *Μετασχηματίσαι τὴν ἔκθεσιν*

$$A = \frac{\left[1+\left(\frac{\delta\psi}{\delta x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{-\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}},$$

εἰς ἑτέραν, ἐν ᾗ ω εἴη ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητή, κατὰ τὰ ἐν τῷ προηγουμένῳ παραδείγματι διδόμενα.

Ἐξαγόμενον. [222] $$\Lambda = \frac{\left[\rho^2 + \left(\frac{\delta\rho}{\delta\omega}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\left(\frac{\delta\rho}{\delta\omega}\right)^2 - \rho\,\frac{\delta^2\rho}{\delta\omega^2}}.$$

10) *Μορφῶσαι* $$\tau = \frac{x\,\frac{\delta\psi}{\delta x} - \psi}{x + \psi\,\frac{\delta\psi}{\delta x}},$$

εἰς συνέκθεσιν τῶν ρ *καὶ* ω, *ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἐν τῷ παραδ.* 8ῳ *δεδομένων.*

Ἐξαγόμενον. $$\tau = \rho\,\frac{\delta\omega}{\delta\rho}.$$

ΙΒ'. ΕΚΘΕΣΙΣ ΓΕΝΙΚΗ ΤΟΥ ΕΚΤΥΛΙΓΜΑΤΟΣ ΣΥΝΕΚΘΕΣΕΩΣ ΤΙΝΟΣ ΚΑΤΑ ΤΑΣ ΑΚΕΡΑΙΑΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ. ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΤΑΫΛΟΡ.

102. Ἡ θεωρία τῶν διαφορικῶν συντελεστῶν ἢ συνεκθέσεων παραγομένων τῶν διαφόρων τάξεων, χορηγεῖ μέσον τοῦ ἀναπτύσσειν πᾶσαν συνέκθεσιν εἰς σειρὰν ἀπέραντον διατεταγμένην κατὰ τὰς ἀκεραίας δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς.

Ἔστω ἡ συνέκθεσις

$$\psi = \Sigma(x).$$

Ἐπανερχόμενοι ἐν τοῖς ἐν ἄρθρ. Ζ'. ἐκτεθεῖσι, καὶ ἐξακολουθοῦντες τὸν ἐν § 63 πίνακα, συνάγομεν, δι' ἁπλῶν ἀντεισαγωγῶν, τὰς ἑξῆς συστοίχους τιμὰς τῶν x καὶ ψ.

$$\begin{array}{l|l}
x & \psi = \psi, \\
x + \Delta x & \psi_1 = \psi + \Delta\psi, \\
x + 2\Delta x & \psi_2 = \psi + 2\Delta\psi + \Delta^2\psi, \\
x + 3\Delta x & \psi_3 = \psi + 3\Delta\psi + 3\Delta^2\psi + \Delta^3\psi, \\
\cdots & \cdots\cdots, \\
\cdots & \cdots\cdots, \\
x + \nu\Delta x & \psi_\nu = \psi + \nu\Delta\psi + \frac{\nu(\nu-1)}{2}\Delta^2\psi + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{2\,.\,3}\Delta^3\psi + \ldots + \Delta^\nu\psi.
\end{array}$$

Ἡ ἔκθεσις τῆς ψ_ν εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπὸ τῆς φύσεως τῆς συνεκθέσεως· μορφοῦται δὲ ἀείποτε ἐνόσῳ ἡ συνέκθεσις αὕτη δὲν λαμβάνει τιμὰς ἀπείρους ἐν τῷ ἀποστήματι τῶν τιμῶν x καὶ $x + \nu\Delta x$ τῆς μεταβλητῆς. Ἄρα γράφομεν·

$$\psi_\nu = \psi + \nu\Delta\psi + \frac{\nu^2\left(1-\frac{1}{\nu}\right)}{2}\Delta^2\psi + \frac{\nu^3\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(1-\frac{2}{\nu}\right)}{2\,.\,3}\Delta^3\psi + \ldots + \Delta^\nu\psi,$$

ἢ προσέτι,

$$\psi_\nu = \psi + \nu\Delta x\frac{\Delta\psi}{\Delta x} + \frac{(\nu\Delta x)^2\left(1-\frac{1}{\nu}\right)}{2}\frac{\Delta^2\psi}{\Delta x^2} + \frac{(\nu\Delta x)^3\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(1-\frac{2}{\nu}\right)}{2\,.\,3}\frac{\Delta^3\psi}{\Delta x^3} + \ldots + \Delta^\nu\psi.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ὑπάρχει οἱονδήποτε εἶναι τὸ διδόμενον μέγεθος τῷ μονίμῳ ἀποστήματι Δx, καὶ οἱοσδήποτε ὁ ἀριθμὸς ν. Ὑποθέσωμεν ὅτι, τοῦ ἀποστήματος νΔx (διαχωρίζοντος τὰς τιμὰς τῆς x ἐφ' ἃς ἀντιστοιχοῦσιν αἱ τιμαὶ ψ καὶ ψ_ν τῆς συνεκθέσεως) μένοντος ἀτρέπτου, Δx μειοῦται ἐπ' ἄπειρον, ὁ δὲ ἀριθμὸς ν αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον καθ' ὁμοίαν ἀναλογίαν. Ἡ προηγουμένη ἐξίσωσις ἀείποτε ὑπάρξει, ἑπομένως ὑπάρξει ἐπίσης ὅταν ἀντικαταστήσωμεν ἕκαστον ὅρον διὰ τοῦ ὁρίου πρὸς ὃ οὗτος τείνει, ὅταν Δx τείνῃ πρὸς τὸ κατασταθῆναι μηδέν. Ἀλλά, φανερὸν ὅτι τῶν μὲν κλασμάτων $\left(1-\frac{1}{\nu}\right)$, $\left(1-\frac{2}{\nu}\right)$, κ. τ. ἑ., κοινὸν ὅριον εἶναι ἡ μονάς, τῶν δὲ λόγων $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}$, $\frac{\Delta^2\psi}{\Delta x^2}$, $\frac{\Delta^3\psi}{\Delta x^3}$, κ. τ. ἑ., τὰ ὅρια εἰσὶν οἱ διαφορικοὶ συντελεσταὶ ἢ συνεκθέσεις παραγόμεναι $\frac{\delta\psi}{\delta x}$, $\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}$, $\frac{\delta^3\psi}{\delta x^3}$, κ. τ. έ. Λοιπόν, καλοῦντες πρὸς συντομίαν $\nu\Delta x = \theta$, δῆλον ὅτι ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\psi = \Sigma(x)$ παράγεται ἡ ἑξῆς·

$$\Sigma(x+\theta)=\psi+\theta\frac{\delta\psi}{\delta x}+\frac{\theta^2}{2}\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}+\frac{\theta^3}{2\,.\,3}\frac{\delta^3\psi}{\delta x^3}+\frac{\theta^4}{2\,.\,3\,.\,4}\frac{\delta^4\psi}{\delta x^4}+\ldots;$$

ἥτις γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς·

$$\Sigma(x+\theta)=\Sigma(x)+\theta\Sigma'(x)+\frac{\theta^2}{2}\Sigma''(x)+\frac{\theta^3}{2\,.\,3}\Sigma'''(x)+\frac{\theta^4}{2\,.\,3\,.\,4}\Sigma''''(x)+\ldots,$$

103. Ἡ ἀξιοπαρατήρητος αὕτη ἔκθεσις καλεῖται *θεώρημα*, ἢ *τύπος*, ἢ *σειρὰ τοῦ* ΤΑΫΛΟΡ, ἐκ τοῦ ὀνόματος τοῦ ἐφευρετοῦ αὐτῆς. Θεωρεῖται δὲ ὡς τὸ κυριώτερον στοιχεῖον τοῦ τῶν ἀπειροστῶν Λογισμοῦ καὶ τῶν ἐφαρμογῶν αὐτοῦ.

104. Ἡ αὐτὴ ἔκθεσις παρουσιάζεται πολλάκις ὑφ' ἑτέραν μορφήν. Καθιστῶντες $x=0$, δηλοῦντες δὲ ψ_0, $\frac{\delta\psi_0}{\delta x}$, $\frac{\delta^2\psi_0}{\delta x^2}$, κ. τ. έ., τὰς μερικὰς καὶ μονίμους τιμὰς ἃς τότε λαμβάνουσιν αἱ συνεκθέσεις ψ, $\frac{\delta\psi}{\delta x}$, $\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}$, ... , ἔχομεν,

$$\Sigma(\theta)=\psi_0+\theta\frac{\delta\psi_0}{\delta x}+\frac{\theta^2}{2}\frac{\delta^2\psi_0}{\delta x^2}+\frac{\theta^3}{2\,.\,3}\frac{\delta^3\psi_0}{\delta x^3}+\frac{\theta^4}{2\,.\,3\,.\,4}\frac{\delta^4\psi_0}{\delta x^4}+\ldots$$

ἢ, θέτοντες x ἀντὶ θ,

$$\Sigma(x)=\psi_0+x\frac{\delta\psi_0}{\delta x}+\frac{x^2}{2}\frac{\delta^2\psi_0}{\delta x^2}+\frac{x^3}{2\,.\,3}\frac{\delta^3\psi_0}{\delta x^3}+\frac{\theta^4}{2\,.\,3\,.\,4}\frac{\delta^4\psi_0}{\delta x^4}+\ldots$$

Ὁ τελευταῖος οὗτος τύπος ἐδόθη ὑπὸ ΣΤΙΡΛΙΓΓΙΟΥ, ἀλλ' εἶναι γνωστότερος ὑπὸ τὸ ὄνομα *σειρὰ τοῦ* ΜΑΚΛΩΡΙΚΟΥ, πρὸς ὃν γενικῶς ἀπεδόθη. Ἡ αὐτὴ σειρὰ γράφεται καὶ οὕτω·

$$\Sigma(x)=\Sigma(0)+x\Sigma'(0)+\frac{x^2}{2}\Sigma''(0)+\frac{x^3}{2\,.\,3}\Sigma'''(0)+\frac{x^4}{2\,.\,3\,.\,4}\Sigma''''(0)+\ldots$$

105. Οἱ προηγουμένως εὑρεθέντες δύο τύποι χρησιμεύουσι πρὸς ἀνάπτυξιν συνεκθέσεώς τινος εἰς σειρὰν κατὰ τὰς ἀκεραίας δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς x ἢ θ. Ἐν γένει, ἡ σειρὰ ἐκτείνεται ἐπ' ἄπειρον. Μόναι αἱ ἀκέραιαι ἀλγεβρικαὶ συνεκθέσεις αἱ συγκροτούμεναι ὑπὸ ὅρων τοῦ σχήματος αx^μ, μ ὄντος ἀριθμοῦ ἀκεραίου θετικοῦ, παράγουσι σειρὰς περιωρισμένας· διότι οἱ διαφορικοὶ συντελεσταὶ τάξεως ἀνωτέρας τῆς μ εἰσὶ μηδὲν [69]. Δῆλον προσέτι ὅτι, ἐὰν τὰ ἐκτυλίγματα τῶν $\Sigma(x)$ καὶ $\Sigma(x+\theta)$ περιέχωσι μόνον ὅρους ἀριθμοῦ περιωρισμένου, τότε ἀποκαθίστανται πολυώνυμα ἀκέραια. Π. χ., εἰ αἱ παραγόμεναι $\Sigma^{\nu+1}(0)$, $\Sigma^{\nu+2}(0)$, ... , εἰσὶν ἅπασαι μηδέν, ἔχομεν ἁπλῶς,

$$\Sigma(x)=\Sigma(0)+x\Sigma'(0)+\ .\ .\ .\ .\ +\frac{x^\nu}{2\,.\,3\ldots\nu}\Sigma^\nu(0),$$

ὥστε, $\Sigma(x)$ εἶναι τότε ἀλγεβρικὴ συνέκθεσις ἀκεραία βαθμοῦ $\nu^{o\tilde{v}}$.

106. Ἡ ἐξίσωσις

$$(1)\quad \Sigma(x)=\Sigma(0)+x\Sigma'(0)+\frac{x^2}{2}\Sigma''(0)+\frac{x^3}{2.3}\Sigma'''(0)+\ldots$$

δεικνύεται καὶ διὰ τῆς μεθόδου τῶν ὁριστέων συντελεστῶν, εἰ γνωστὸν ἐστὶν *ἐκ τῶν προτέρων* ὅτι ἡ συνέκθεσις $\Sigma(x)$ ἀναπτύσσεται εἰς σειρὰν μορφὴν ἔχουσαν τοιάδε,

$$A+Bx+\Gamma x^2+\Delta x^3+Ex^4+\ldots\ldots$$

Τῷ ὄντι, καθιστῶμεν

$$\Sigma(x)=A+Bx+\Gamma x^2+\Delta x^3+Ex^4+\ldots.$$

Ὅπως ὁρίσωμεν τὰς ἀγνώστους ἀτρέπτους Α, Β, Γ, κ. τ. λ., λαμβάνομεν τὰς διαδοχικὰς παραγομένας τῆς προηγουμένης ἐξισώσεως·

$$\Sigma'(x)=B+2\Gamma x+3\Delta x^2+4Ex^3+\ldots\ldots$$

$$\Sigma''(x)=2\Gamma+2\,.\,3\Delta x+3\,.\,4Ex^2+\ldots\ldots$$

. . . .

Εἶτα καθιστῶμεν $\chi = 0$, καὶ ἔχομεν

$$\mathrm{A} = \Sigma(0), \quad \mathrm{B} = \Sigma'(0), \quad \Gamma = \frac{\Sigma''(0)}{2}, \quad \text{κ. τ. ἑ.}$$

Ὅθεν προκύπτει ἡ ἐξίσωσις (1) ἣν ἐπρόκειτο δεῖξαι.

107. Τῇ αὐτῇ μεθόδῳ λαμβάνομεν καὶ τὸν τύπον τοῦ Τάϋλορ. Καθιστῶμεν

$$(2) \qquad \Sigma(\mathrm{x}+\theta) = \mathrm{A} + \mathrm{B}\theta + \Gamma\theta^2 + \Delta\theta^3 + \mathrm{E}\theta^4 + \ldots$$

Διαφορίζομεν πολλάκις ἀλληλοδιαδόχως πρὸς θ·

$$(3) \qquad \frac{\delta\Sigma(\mathrm{x}+\theta)}{\delta\theta} = \mathrm{B} + 2\Gamma\theta + 3\Delta\theta^2 + 4\mathrm{E}\theta^3 + \ldots$$

$$(4) \qquad \frac{\delta^2\Sigma(\mathrm{x}+\theta)}{\delta\theta^2} = 2\Gamma + 2\,.\,3\Delta\theta + 3\,.\,4\mathrm{E}\theta^2 + \ldots$$

. . . .

Ἔστω $\mathrm{x}+\theta = \omega$, ὅθεν $\Sigma(\mathrm{x}+\theta) = \Sigma(\omega)$. Κατὰ τὴν ἐν ἀριθ. Γ' ἀρχήν, ἔχομεν

$$\frac{\delta\Sigma(\mathrm{x}+\theta)}{\delta\theta} = \Sigma'(\omega)\frac{\delta\omega}{\delta\theta} = \Sigma'(\omega).$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν

$$\frac{\delta^2\Sigma(\mathrm{x}+\theta)}{\delta\theta^2} = \Sigma''(\omega),$$

καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Ἄρα, διὰ $\theta = 0$, αἱ διαδοχικαὶ παραγόμεναι

$$\frac{\delta\Sigma(\mathrm{x}+\theta)}{\delta\theta}, \quad \frac{\delta^2\Sigma(\mathrm{x}+\theta)}{\delta\theta^2}, \quad \frac{\delta^3\Sigma(\mathrm{x}+\theta)}{\delta\theta^3}, \ldots$$

ἰσοῦνται ἀμοιβαίως

$$\Sigma'(\mathrm{x}), \qquad \Sigma''(\mathrm{x}), \qquad \Sigma'''(\mathrm{x}), \ldots$$

Ἄρα, καθιστῶντες $\theta = 0$ ἐν ταῖς ἐξισώσεσι (2), (3), (4), . . . λαμβάνομεν·

$$\mathrm{A} = \Sigma(\mathrm{x}), \quad \mathrm{B} = \Sigma'(\mathrm{x}), \quad \Gamma = \frac{\Sigma''(\mathrm{x})}{2}, \ldots,$$

ὅπερ ἐπρόκειτο δεῖξαι.

108. *Παρατηρητέον* ὅτι, αἱ δύο παραγόμεναι

$$\frac{\delta\Sigma(\mathrm{x}+\theta)}{\delta\mathrm{x}}, \qquad \frac{\delta\Sigma(\mathrm{x}+\theta)}{\delta\theta},$$

ἔχουσι κοινὴν ἔκφρασιν $\Sigma'(\omega)$· ἐπομένως ἰσοῦνται ἀλλήλαις. Τὸ αὐτὸ ἰδίωμα ὑπάρχει καὶ πρὸς τὰς παραγομένας τάξεων ὑπερτέρων·

$$\frac{\delta^2\Sigma(\mathrm{x}+\theta)}{\delta\mathrm{x}^2}, \qquad \frac{\delta^2\Sigma(\mathrm{x}+\theta)}{\delta\theta^2},$$

$$\frac{\delta^3\Sigma(\mathrm{x}+\theta)}{\delta\mathrm{x}^3}, \qquad \frac{\delta^3\Sigma(\mathrm{x}+\theta)}{\delta\theta^3},$$

. . . . , ... ,

ἐκφωνεῖται δὲ ὡς ἑξῆς. *Ἐὰν ἔν τινι συνεκθέσει ἡ μεταβλητὴ* x *τραπῇ εἰς* x + θ, *τὸν αὐτὸν διαφορικὸν συντελεστὴν λαμβάνομεν εἴτε θεωρήσομεν* x *ὡς μεταβλητὴν καὶ* θ *ὡς ἀμετάβλητον, εἴτε ἀντιστρόφως.*

109. Ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ τῆς θ καὶ τῆς x ἐν τοῖς ἐν §§ 102 καὶ 104 τύποις εἰσὶν ἀπεριόριστοι, ἡ συνέκθεσις ψ ἐκφράζεται καθ' ἅπασαν τὴν ἔκτασιν αὐτῆς, ὅπερ λίαν ἀξιοπαρατήρητον, διὰ τῆς τιμῆς τῆς συνεκθέσεως ταύτης καὶ τῶν τιμῶν τῆς ἀπεριορίστου σειρᾶς τῶν διαφορικῶν αὐτῆς συντελεστῶν συστοιχούντων μιᾷ μόνῃ τιμῇ τῆς χ. Λοιπόν, τὸ δοῦναι τὰς τιμὰς τῆς συνεκθέσεως καὶ τῶν διαφορικῶν αὐτῆς συντελεστῶν διὰ μίαν μόνην τιμὴν τῆς μεταβλητῆς, εἶναι ἐν γένει τὸ αὐτὸ δοῦναι τὴν συνέκθεσιν αὐτήν.

Παρατηρητέον ὅμως ὅτι, ἑκάστη τῶν σειρῶν τούτων δὲν δύναται εἶναι ἴση τῇ ἀντιστοιχούσῃ συνεκθέσει $\Sigma(\mathrm{x})$ ἢ $\Sigma(\mathrm{x}+\theta)$, ἢ ὅταν ἦναι *προσχωροῦσα*· ἤτοι καθ' ὅσον αἱ τιμαὶ, ἃς εὑρίσκομεν λαμβάνοντες ἀριθμὸν ὅρων μᾶλλον καὶ μᾶλλον μείζονα, προσεγγίζουσιν ὁρίῳ τινι· ἢ, ὅπερ τὸ αὐτὸ, καθ' ὅσον δυνάμεθα ὁρίσαι δύο ὅρια ὅσον βουλόμεθα ἧττον διαφέροντα ἀλλήλων, ἐν οἷς ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ περιλαμβάνεται ὁσωνδήποτε ὅρων λάβομεν τὸ ἄθροισμα. Ὑπάρχουσι περιπτώσεις καθ' ἃς ἡ προσχώρησις σειρᾶς τινος εἶναι πρόδηλος· ἐν γένει ὅμως ἀπαιτεῖται εἰδικὴ ἔρευνα ὅπως βεβαιωθῶμεν ἐὰν σειρά τις ἦναι προσχωροῦσα ἢ ἀποχωροῦσα. Περὶ τοῦ ἀντικειμένου τούτου πραγματευσόμεθα λεπτομερῶς ἐν τῇ Ἀλγέβρᾳ.

ΙΓ'. ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ ΚΑΘ' ΑΣ ΔΙΑ ΤΙΝΑΣ ΙΔΙΑΙΤΕΡΑΣ ΤΙΜΑΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ, Η ΣΕΙΡΑ ΤΟΥ ΤΑΫΛΟΡ ΔΕΝ ΔΙΔΕΙ ΤΟ ΕΚΤΥΛΙΓΜΑ ΤΗΣ ΣΥΝΕΚΘΕΣΕΩΣ.

110. Ἡ ὕπαρξις τῆς τοῦ Τάϋλορ σειρᾶς ὑποθέτει ὅτι ἡ συνέκθεσις $\psi = \Sigma(x)$ καὶ οἱ διαφορικοὶ αὐτῆς συντελεσταὶ $\Sigma'(x)$, $\Sigma''(x)$, ... , οὐ καθίστανται ἄπειροι πρὸς τὴν τιμὴν τῆς x, ἀφ' ἧς ἡ τῷ θ δηλουμένη αὔξησις μετρεῖται· εἰ συμβαίνει τὸ ἐναντίον, ἡ σειρὰ ἔσεται ἀναρμόδιος.

Ἔστω, π. χ., συνέκθεσις ἔχουσα μορφὴν τοιαύτην $\dfrac{\Sigma(x)}{(x-\alpha)^{\mu}}$, ἐν ᾗ μ εἶναι ἀριθμὸς θετικὸς καὶ $\Sigma(x)$ συνέκθεσίς τις τῆς x μὴ καθισαμένη μηδὲν οὔτε ἄπειρον τῇ $x = \alpha$. Ἐὰν κατὰ τοὺς προεκτεθέντας κανόνας ἀναπτύξωμεν $\dfrac{\Sigma(x+\theta)}{(x+\theta-\alpha)^{\mu}}$, εἰς σειρὰν διατεταγμένην κατὰ τὰς ἀκεραίας δυνάμεις τῆς θ, ἅπαντες οἱ ὅροι ἀποκατασταθήσονται ἄπειροι ὅταν $x = \alpha$. Ἀλλ' οὐχ ἧττον ἡ συνέκθεσις τότε ἔχει τιμὴν ὡρισμένην, τὴν $\dfrac{\Sigma(\alpha+\theta)}{\theta^{\mu}}$. Ἄρα, τὸ ἐκτύλιγμα τῆς τιμῆς ταύτης, κατὰ τὰς δυνάμεις τῆς θ, ἐπειδὴ πρέπει ἀναγκαίως νὰ παρουσιάζῃ δυνάμεις ἀρνητικὰς τῆς ποσότητος ταύτης, ἀδύνατον νὰ δοθῇ ὑπὸ σειρᾶς τοῦ Τάϋλορ.

Ἔστω προσέτι ἡ συνέκθεσις λογ x. Ἅπαντες οἱ ὅροι τοῦ ἐκτυλίγματος τοῦ $\lambda o\gamma(x+\theta)$ ἀποκαθίστανται ἄπειροι τῇ $x = 0$· ὅμως ἡ συνέκθεσις ἔχει τότε τὴν ὡρισμένην τιμὴν λογ θ. Ἀλλ' ἡ τιμὴ αὕτη ἀδύνατον νὰ ἐκτεθῇ ὑπὸ σειρᾶς διατεταγμένης κατὰ τὰς ἀκεραίας δυνάμεις τῆς θ· διότι

$$\lambda o\gamma\,\theta = -\frac{1}{0},\ \text{ὅταν}\ \theta = 0.$$

111. Ἡ τοῦ Τάϋλορ σειρὰ δίδει φυσικῶς ἐξαγόμενα ἀόριστα ὅταν, τῆς τεθείσης συνεκθέσεως $\Sigma(x)$ περιεχούσης ῥιζικὰ, ἡ διδομένη μερικὴ τιμὴ τῇ x ἀφανίζει ταῦτα ἀπό τε τῆς συνεκθέσεως καὶ τῶν διαφορικῶν αὐτῆς συντελεστῶν. Ἵνα ἐννοήσωμεν τὸν τούτου λόγον, παρατηρητέον ὅτι ῥιζικὸν ἀποτελοῦν μέρος τῆς συνεκθέσεως, ὡς τὸ $\sqrt[\kappa]{(x-\alpha)^{\pi}}$, ἐν ᾧ π καὶ κ δηλοῦσιν ἀριθμοὺς ἀκεραίους, δίδει τῇ συνεκθέσει ταύτῃ τόσας τιμὰς διαφόρους, πραγματικὰς ἢ φανταστικὰς, ὅσαι μονάδες περιέχονται ἐν τῷ ἀριθμῷ κ. Ἐπειδὴ τὸ αὐτὸ ῥιζικὸν ἀναφαίνεται εἰς τοὺς διαφορικοὺς συντελεστὰς τῆς συνεκθέσεως, οἱ συντελεσταὶ οὗτοι εἰσὶν ἐπίσης ἐπιδεκτικοὶ κ τιμῶν. Ἄρα, ἀκριβῶς εἰπεῖν, ὑπάρχουσι τόσα ἐκτυλίγματα μερικὰ καὶ διάφορα ἀλλήλων, ὅσας τιμὰς ἐμφαίνει τὸ περὶ οὗ λόγος ῥιζικόν. Ἀλλ' ἐὰν δώσωμεν τῇ x τὴν μερικὴν τιμὴν α, τὸ ῥιζικὸν ἀφανίζεται ἀφ' ὅλων τῶν ὅρων τῆς σειρᾶς, ἐν ᾧ διαμένει πάντοτε ἐν τῇ συνεκθέσει, ἐν ᾗ ἀποκαθίσταται $\sqrt[\kappa]{\theta^{\pi}}$. Ἄρα, ἡ σειρὰ ἀδύνατον πλέον τότε παραστῆσαι τὴν συνέκθεσιν· διότι, αὕτη μὲν ἔχει πλείονας τιμὰς, ἡ δὲ σειρὰ ἤθελεν ἔχει μίαν μόνην. Ἡ ἀνάλυσις διαλύει τὴν ἀντίφασιν ταύτην δίδουσα τιμὰς ἀπείρους εἰς τοὺς ὅρους τῆς σειρᾶς, μὴ παρουσιαζούσης πλέον ἐξαγόμενον ὡρισμένον.

Τὸ ἐκτύλιγμα τῆς $\Sigma(x)$, κατὰ τὴν προκειμένην περίπτωσιν, πρέπει νὰ περιέχῃ ὅρους εἰς $\theta^{\frac{\pi}{\kappa}}$. Εὑρίσκομεν δὲ αὐτὸ καθιστῶντες ἐν τῇ τεθείσῃ συνεκθέσει $x = \alpha + \theta$, καὶ ἀναπτύσσοντες τὴν $\Sigma(\alpha + 0)$. Αἱ κλασματικαὶ δυνάμεις τῆς 0 ἐμφανισθήσονται ἐν τῷ τελευταίῳ τούτῳ ἐκτυλίγματι.

112. Ἔστω, π. χ., ἡ συνέκθεσις

$$\Sigma(x) = 2\alpha x - x^2 + \alpha\sqrt{x^2 - \alpha^2},$$

διδοῦσα

$$\frac{\delta\,\Sigma(x)}{\delta x} = 2(\alpha - x) + \frac{\alpha x}{\sqrt{x^2 - \alpha^2}},$$

$$\frac{\delta^2\,\Sigma(x)}{\delta x^2} = -2 + \frac{\alpha}{\sqrt{x^2 - \alpha^2}} - \frac{\alpha x^2}{(x^2 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}}},$$

κ. τ. ἑ.

Καθιστῶντες $x = \alpha$, λαμβάνομεν $\Sigma(x) = \alpha^2$· οἱ δὲ διαφορικοὶ συντελεσταὶ πασῶν τῶν τάξεων καθίστανται ἄπειροι. Ἡ περίπτωσις αὕτη καταδείκνυσιν ὅτι τὸ ἐκτύλιγμα τῆς $\Sigma(x + 0)$ πρέπει ἐνταῦθα νὰ περιέχῃ δυνάμεις κλασματικὰς τῆς 0, ὅταν $x = \alpha$. Τῷ ὄντι, ἡ συνέκθεσις τότε καθίσταται

$$\Sigma(\alpha + 0) = \alpha^2 - 0^2 + \alpha\sqrt{0}\sqrt{2\alpha + 0},$$

ἧς τὸ ἐκτύλιγμα κατὰ τὰς δυνάμεις τῆς 0 περιέχει ὅρους $0^{\frac{1}{2}}$, $0^{\frac{3}{2}}$, $0^{\frac{5}{2}}$, ...

113. Παρατηρητέον ὅμως ὅτι, ῥιζικὸν περιεχόμενον ἐν τῇ συνεκθέσει $\Sigma(x)$ ἀφανίζεται δυσὶ τρόποις διαφόροις διδομένης τῇ μεταβλητῇ x τιμῆς μερικῆς· 1ον μηδενιζομένης τῆς ὑπορρίζου ποσότητος· 2ον μηδενιζομένου παράγοντός τινος ἐκτὸς τοῦ ῥιζικοῦ. Ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει, τὸ κατὰ τὴν σειρὰν τοῦ Τάϋλορ διδόμενον ἐκτύλιγμα δὲν ἁρμόζει εἰς τὴν συνέκθεσιν $\Sigma(x + 0)$, διὰ τὴν θεωρουμένην μερικὴν τιμὴν τῆς x, δι' ὃν λόγον εἴδομεν ἐν § 111. Ἐν τῇ δευτέρᾳ ὅμως περιπτώσει δὲν συμβαίνει τὸ αὐτό· διότι ὁ ἐκτὸς τοῦ ῥιζικοῦ παράγων, ὅστις μηδενίζεται ἐν τῇ συνεκθέσει, δύναται νὰ μὴν ὑπάρξῃ εἰς τὸ ῥιζικὸν τοῦτο ἐν τοῖς διαφορικοῖς συντελεσταῖς τῶν ἀνωτέρων τάξεων, ὥστε τὸ ῥιζικὸν δὲν ἀφανίζεται ἀπὸ τούτων· ἐπομένως ἡ σειρὰ παρουσιάζει τὸν ἀπαιτούμενον ἀριθμὸν τιμῶν. Ἄρα, ἡ σειρὰ αὕτη ἁρμόζει κατὰ τὰς περὶ ὧν

ὁ λόγος περιπτώσεις, διδοῦσα τιμὴν ὡρισμένην. Π. χ., προκειμένου λόγου περὶ τῆς συνεκθέσεως

$$\Sigma(x) = (x - \alpha)^{\mu}\sqrt{x - \beta},$$

ἐν ᾗ μ εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος θετικός, ἔχομεν·

$$\frac{\delta\,\Sigma(x)}{\delta x} = \mu(x - \alpha)^{\mu - 1}\sqrt{x - \beta} + \frac{(x - \alpha)^{\mu}}{2\sqrt{x - \beta}},$$

$$\frac{\delta^2\Sigma(x)}{\delta x^2} = \mu(\mu - 1)(x - \alpha)^{\mu - 2}\sqrt{x - \beta} + \frac{\mu(x - \alpha)^{\mu - 1}}{\sqrt{x - \beta}} - \frac{(x - \alpha)^{\mu}}{4(x - \beta)^{\frac{3}{2}}},$$

κ. τ. ἑ.

Ἑκάστη διαφόρισις ἀφανίζει ἀπὸ τοῦ πρώτου ὅρου ἕνα τῶν ἐν $(x - \alpha)^{\mu}$ παραγόντων. Μετὰ ἀριθμὸν μ διαφορίσεων, οἱ παράγοντες οὗτοι ἐκλείψουσιν ὁλοτελῶς· ἐπομένως, ἡ ὑπόθεσις $x = \alpha$, μηδενίζουσα ἅπαντας τοὺς διαφορικοὺς συντελεστὰς τῶν μ πρώτων τάξεων, ἀφήσει τὸ ῥιζικὸν $\sqrt{x - \beta}$ ἐν ἅπασι τοῖς λοιποῖς.

ΙΔ'. ΠΕΡΙ ΔΙΟΡΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΜΕΡΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΣΥΝΕΚΘΕΣΕΩΝ ΠΑΡΟΥΣΙΑΖΟΜΕΝΩΝ ΥΠΟ ΤΑΣ ΜΟΡΦΑΣ $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty \times 0$, 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0}.

114. Αἱ προεκτεθεῖσαι γνώσεις ἐφαρμόζονται ἀμέσως πρὸς εὕρεσιν τῆς τιμῆς τῶν κλασμάτων, ὡς $\frac{\sigma(x)}{\Sigma(x)}$, τὰ ὁποῖα διὰ τιμήν τινα α τῆς μεταβλητῆς x, ἄγονται ὑπὸ τὴν ἀόριστον μορφὴν $\frac{0}{0}$.

Ὅταν, καθ' ὑπόθεσιν, $x = \alpha$ μηδενίζῃ ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους $\sigma(x)$, $\Sigma(x)$, ἡ ζητουμένη τιμὴ τοῦ κλάσματος, κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην, εἶναι προφανῶς τὸ ὅριον ᾧ προσεγγίζει ὁ λόγος $\frac{\sigma(x)}{\Sigma(x)}$, ὅταν x τείνῃ πρὸς τὸ ἰσωθῆναι α. Ἐνόσῳ ἡ μεταβλητὴ x μένει ἀόριστος, ἀναπτυσσομένων τῶν δύο συνεκθέσεων κατὰ τὸν τοῦ Τάϋλορ τύπον, μορφοῦται ἀείποτε ἡ ἐξίσωσις,

$$\frac{\sigma(x+0)}{\Sigma(x+0)}=\frac{\sigma(x)+0\sigma'(x)+\frac{0^2}{2}\sigma''(x)+\frac{0^3}{2.3}\sigma'''(x)+\ldots}{\Sigma(x)+0\Sigma'(x)+\frac{0^2}{2}\Sigma''(x)+\frac{0^3}{2.3}\Sigma'''(x)+\ldots}.$$

Ὑποθέσωμεν πρῶτον, ὅτι αἱ δύο σειραὶ δὲν πίπτουσιν, ὅταν δώσωμεν τῇ x τὴν μερικὴν τιμὴν α, εἰς τὰς ἐξαιρετικὰς περιπτώσεις περὶ ὧν ὡμιλήσαμεν ἐν ἄρθ. ΙΓ'. Φανερὸν ὅτι ἔξομεν τὴν ζητουμένην τιμὴν καθιστῶντες πρῶτον $x=\alpha$, εἶτα δὲ ἐρευνῶντες ὁποῖον τὸ ὅριον πρὸς ὃ τείνει τὸ δεύτερον μέλος, ὅταν 0 τείνῃ πρὸς τὸ κατασταθῆναι ἴση μηδενί. Ἐπειδὴ $\sigma(\alpha)$ καὶ $\Sigma(\alpha)$ εἰσί, καθ' ὑπόθεσιν, μηδέν, δῆλον ὅτι τὸ ὅριον τοῦτο εἶναι

$$\frac{\sigma'(\alpha)}{\Sigma'(\alpha)},$$

ἤτοι, ὁ λόγος τῶν διαφορικῶν συντελεστῶν ἢ συνεκθέσεων παραγομένων τῆς πρώτης τάξεως τῶν συνεκθέσεων $\sigma(x)$ καὶ $\Sigma(x)$, ἐν αἷς ἐτέθη $x=\alpha$.

Ἐὰν ἡ τιμὴ $x=\alpha$ μηδενίζῃ ἀμφοτέρους τούτους τοὺς διαφορικοὺς συντελεστὰς τῆς πρώτης τάξεως, τότε, διὰ τοῦ αὐτοῦ συλλογισμοῦ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη τιμὴ ἔσεται

$$\frac{\sigma''(\alpha)}{\Sigma''(\alpha)}.$$

Καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, *λαμβάνοντες πάντοτε ὡς τιμὴν τοῦ τεθέντος κλάσματος τὸ πηλίκον τῶν δύο διαφορικῶν συντελεστῶν, πρώτων μὴ μηδενιζομένων συγχρόνως τῇ τιμῇ*

$$x=\alpha.$$

Ἀλλ' ἐὰν ὁ διαφορικὸς συντελεστὴς ὅστις πρῶτος δὲν μηδενίζεται ἐν τῷ ἀριθμητῇ, δὲν εἶναι ὁμοταγὴς πρὸς τὸν διαφορικὸν συντελεστὴν πρῶτον μὴ μηδενιζόμενον ἐν τῷ παρονομαστῇ, φανερὸν ὅτι ἡ ζητουμένη τιμὴ ἔσεται 0 ἢ $\frac{1}{0}$· ἤτοι

μηδὲν ἢ ἄπειρον, καθ' ὅσον ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐν τῷ ἀριθμητῇ μηδενιζομένων ὅρων μείζων εἶναι ἢ ἐλάσσων τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐν τῷ παρονομαστῇ μηδενιζομένων ὅρων.

115. Τεθείσθω ἤδη ὅτι, ἀμφότεραι αἱ συνεκθέσεις $\sigma(x)$, $\Sigma(x)$, ἢ ἡ ἑτέρα τούτων, δὲν ἀναπτύσσονται κατὰ τὰς ἀκεραίας τῆς 0 δυνάμεις, ὅταν $x=\alpha$. Ὡς ἐν ἄρθρ. ΙΓ' εἴδομεν, ὁ προηγούμενος κανὼν δὲν ἐφαρμόζεται πλέον. Τότε, πρὸς εὕρεσιν τῆς τιμῆς τοῦ κλάσματος $\frac{\sigma(x)}{\Sigma(x)}$, ἀναπτύσσομεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{\sigma(\alpha+0)}{\Sigma(\alpha+0)}$, κατὰ σειρὰς περιεχούσας δυνάμεις ἀρνητικὰς ἢ κλασματικὰς τῆς 0· εἶτα καθιστῶμεν $0=0$, ἀφοῦ ἐξαλείψωμεν τὸν κοινὸν παράγοντα ἀπό τε τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ.

116. Ἔστω, π. χ., τὸ κλάσμα

$$\frac{x-x^{\nu+1}}{1-x},$$

οὗτινος ζητεῖται ἡ τῇ $x=1$ συστοιχοῦσα τιμή. Ὁ λόγος τῶν διαφορικῶν συντελεστῶν τῆς πρώτης τάξεως τῶν δύο ὅρων εἶναι

$$\frac{1-(\nu+1)x^{\nu}}{-1}.$$

Καθιστῶντες δὲ $x=1$, εὑρίσκομεν ν. Τῷ ὄντι, ἡ τεθεῖσα συνέκθεσις εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς προόδου

$$\div\!\div\; x : x^2 : x^3 : x^4 : x^5 : \ldots\ldots : x^{\nu}.$$

117. Ἔστω προσέτι τὸ κλάσμα

$$\frac{1-(\nu+1)x^{\nu}+\nu x^{\nu+1}}{(1-x)^2},$$

ὅπερ εἶναι ὁ διαφορικὸς συντελεστὴς τῆς πρώτης τάξεως τοῦ προηγουμένου· ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς σειρᾶς

$$1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\ldots\ldots+\nu x^{\nu-1}.$$

Ὁ λόγος τῶν διαφορικῶν συντελεστῶν τῶν δύο ὅρων εἶναι,

$$\frac{-\nu(\nu+1)x^{\nu-1}+\nu(\nu+1)x^{\nu}}{-2(1-x)}.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἀποκαθίσταται $\frac{0}{0}$ ὅταν $x=1$, ληπτέον τὸν λόγον τῶν δευτεροταγῶν διαφορικῶν συντελεστῶν,

$$\frac{-(\nu-1)\nu(\nu+1)x^{\nu-2}+\nu^2(\nu+1)x^{\nu-1}}{2}.$$

ὅθεν, ποιοῦντες $x=1$, συνάγομεν τὴν ζητουμένην τιμὴν

$$\frac{\nu(\nu+1)}{2}.$$

118. Τεθείσθω ἤδη ὅτι ζητεῖται ἡ τῇ $x=\alpha$ συστοιχοῦσα τιμὴ τῆς συνεκθέσεως

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}+\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}.$$

Ἐπειδὴ ὅ τε ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς δὲν ἀναπτύσσονται κατὰ τὰς ἀκεραίας τῆς 0 δυνάμεις, ὅταν θέσωμεν $\alpha+0$ ἀντὶ x (διότι οἱ διαφορικοὶ συντελεσταὶ τῶν ὅρων τούτων ἀποκαθίστανται ἄπειροι τῇ $x=\alpha$), κατὰ § 115, καθιστῶμεν $x=\alpha+0$ καὶ ἔχομεν

$$\frac{\sqrt{\alpha+0}-\sqrt{\alpha}+\sqrt{0}}{\sqrt{0}.\sqrt{2\alpha+0}}.$$

Ἀναπτύσσοντες δὲ κατὰ τὰς δυνάμεις τῆς 0, εἶτα ἐξαλείφοντες τὸν παράγοντα $\sqrt{0}$ κοινὸν τοῖς ὅροις τοῦ κλάσματος, λαμβάνομεν·

$$\frac{1+\frac{\sqrt{0}}{2\sqrt{\alpha}}-\cdots\cdots}{\sqrt{2\alpha}+\frac{0}{2\sqrt{2\alpha}}-\cdots\cdots}.$$

Τέλος, εὑρίσκομεν, καθιστῶντες $0=0$, τὴν ζητουμένην τιμὴν

$$\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}.$$

119. Τῶν ἐξαγομένων τούτων εὐκόλως δίδεται λόγος διὰ τῆς Γεωμετρίας (Σχ. 26). Ἔστω προτεθὲν τὸ κλάσμα $\frac{\sigma(x)}{\Sigma(x)}$. Ἔστωσαν δὲ ΜΝ′ καὶ ΜΝ αἱ καμπύλαι, ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων ἀμοιβαίως $\psi=\sigma(x)$, $\psi=\Sigma(x)$, δηλούμεναι. Τὸ κλάσμα τοῦτο ἐμφαίνει τὴν τιμὴν τοῦ λόγου $\frac{\Pi N'}{\Pi N}$ τῶν τεταγμένων ἀμφοτέρων τῶν καμπύλων συστοιχουσῶν τῇ αὐτῇ τετμημένῃ $x=\mathrm{A\Pi}$. Ἐπειδὴ αἱ συνεκθέσεις $\sigma(x)$ καὶ $\Sigma(x)$ μηδενίζονται τῇ $x=\alpha$, δῆλον ὅτι αἱ καμπύλαι τέμνουσιν ἀλλήλας κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον τοῦ ἄξονος τῶν x ἐν ἀποστάσει ἀπὸ τῆς ἀρχῆς $\mathrm{AM}=\alpha$. Ἄρα, ζητῆσαι τὴν τιμὴν τοῦ κλάσματος $\frac{\sigma(x)}{\Sigma(x)}$ ὅταν $x=\alpha$, εἶναι τὸ αὐτὸ ζητῆσαι τὸ ὅριον πρὸς ὃ τείνει ὁ λόγος τῶν δύο τεταγμένων ΠΝ′, ΠΝ, ὅταν τὸ ἀπόστημα ΜΠ τείνῃ πρὸς τὸ κατασταθῆναι μηδέν. Ἀλλὰ τὸ ὅριον τοῦτο εἶναι προδήλως ὁ λόγος τῶν δύο τριγωνομετρικῶν ἐφαπτομένων τῶν σχηματιζομένων γωνιῶν πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων τῶν δύο καμπύλων κατὰ τὸ σημεῖον Μ, ἤτοι $\frac{\sigma'(\alpha)}{\Sigma'(\alpha)}$.

Ὅταν οἱ δύο διαφορικοὶ συντελεσταὶ $\sigma'(x)$, $\Sigma'(x)$, μηδενίζωνται τῇ τιμῇ $x=\alpha$, ἀμφότεραι αἱ καμπύλαι ἅπτονται τοῦ ἄξονος τῶν x κατὰ τὸ σημεῖον Μ. Τὸ ὅριον τοῦ λόγου τῶν τεταγμένων δίδεται τότε ὑπὸ τῆς τιμῆς $\frac{\sigma''(\alpha)}{\Sigma''(\alpha)}$, διότι ὁ διαφορικὸς συντελεστὴς τῆς δευτέρας τάξεως εἶναι ἀνάλογος τῷ ἀποστήματι καθ' ὃ ἡ καμπύλη ἀποχωρεῖ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων ἐν διαστήματι ἀπειροστημορίῳ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τούτου καθόσον προβαίνομεν ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς.

120. Ὁ ἐν § 114 κανὼν ἐφαρμόζεται ἐπίσης πρὸς εὕρεσιν τῆς τιμῆς κλάσματος, ὡς $\frac{\sigma(x)}{\Sigma(x)}$, ὅπερ τῇ μερικῇ τιμῇ $x = \alpha$, ἄγεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{\infty}{\infty}$. Πρὸς δεῖξιν γραπτέον·

$$\frac{\sigma(x)}{\Sigma(x)} = \frac{\frac{1}{\Sigma(x)}}{\frac{1}{\sigma(x)}}.$$

Ὅταν $x = \alpha$, τὸ δεύτερον μέλος ἀποκαθίσταται $\frac{0}{0}$. Ἄρα, εὑρίσκομεν τὴν ἀληθῆ τιμὴν αὐτοῦ Α, καθιστῶντες $x = \alpha$ ἐν τῷ νέῳ κλάσματι·

$$\frac{-\frac{\Sigma'(x)}{\Sigma(x)^2}}{-\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)^2}} = \frac{\Sigma'(x)}{\sigma'(x)} \times \frac{\sigma(x)^2}{\Sigma(x)^2}.$$

Ἐπομένως ἔχομεν·

$$A = \frac{\Sigma'(\alpha)}{\sigma'(\alpha)} A^2, \qquad \text{ὅθεν} \qquad A = \frac{\sigma'(\alpha)}{\Sigma'(\alpha)}.$$

Τὸν κανόνα τοῦτον ἐφαρμόζοντες ἐπὶ τῶν ποσοτήτων

$$x^\nu \lambda o\gamma x, \qquad \frac{\lambda o\gamma x}{x^\nu},$$

ὧν τὴν πρώτην θεωρητέον ὡς τὸ πηλίκον τοῦ $\lambda o\gamma x$ διὰ $\frac{1}{x^\nu}$, εὑρίσκομεν, ὑποθέτοντες ν θετικόν,

$$x^\nu \lambda o\gamma x = -\frac{x^\nu}{\nu} = 0, \qquad \text{διὰ} \qquad x = 0,$$

$$\frac{\lambda o\gamma x}{x^\nu} = \frac{1}{\nu x^\nu} = 0, \qquad \text{διὰ} \qquad x = \infty.$$

121. Ἐάν, τῇ τιμῇ $x = \alpha$, τὸ γινόμενον

$$\sigma(x) . \Sigma(x)$$

καθίσταται $0 \times \infty$, τότε παρατηρητέον ὅτι·

$$\sigma(x) . \Sigma(x) = \frac{\sigma(x)}{\frac{1}{\Sigma(x)}} = \frac{0}{0}, \qquad \text{ὅταν} \qquad x = \alpha.$$

Καταντῶμεν οὕτως ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει, καὶ εὑρίσκομεν τὴν ἀληθῆ τιμὴν Α τοῦ γινομένου·

$$A = -\frac{\Sigma(\alpha)^2 . \sigma'(\alpha)}{\Sigma'(\alpha)}.$$

Ἔστω π. χ. ἡ συνέκθεσις

$$(1 - x)\, \text{εφ}\left(\tfrac{1}{2}\Pi x\right),$$

ἥτις, ὅταν $x = 1$, καθίσταται $0 \times \infty$. Παρατηρητέον ὅτι αὕτη τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{1 - x}{\text{συνεφ}\left(\frac{1}{2}\Pi x\right)},$$

ἰσοῦται δὲ $\frac{2}{\Pi}$, ὅταν $x = 1$, κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα.

122. Ἐνίοτε αἱ ζητούμεναι τιμαὶ τινῶν συνεκθέσεων παρουσιάζονται καὶ ὑπὸ ἑτέρας μορφάς. Ἔστω, π. χ., ὅτι πρόκειται περὶ συνεκθέσεως ὡς $\Sigma(x)^{\sigma(x)}$, ἥτις διά τινα μερικὴν τιμὴν τῆς μεταβλητῆς x, ἄγεται εἴς τινα ἀόριστον μορφήν, ὡς 1^∞, ∞^0, 0^0. Λαμβάνομεν τὸν λογάριθμον αὐτῆς καὶ ἔχομεν

$$\sigma(x) . \lambda o\gamma\, \Sigma(x).$$

Ἄρα, εἰ δυνάμεθα ὁρίσαι, διὰ τῶν προαποδοθέντων κανόνων, τὴν ἀληθῆ τιμὴν τοῦ λογαρίθμου τούτου, συνάγομεν ἀμέσως τὴν τῆς προτεθείσης συνεκθέσεως.

123. Ἕπονται διάφορα παραδείγματα ζητουμένων τιμῶν συνεκθέσεων, πρὸς ἐφαρμογὴν τῶν διαφόρων τούτων κανόνων.

1) $\dfrac{e^{x-1}}{x^\nu}$,
2) $\dfrac{\text{ἡμ}\, x}{x^\nu}$,
3) $\dfrac{\lambda(1+x)}{x^\nu}$,

Ἡ τιμὴ ἑκάστης τῶν συνεκθέσεων τούτων, ἐν αἷς ν δηλοῖ ἀριθμὸν θετικὸν, εἶναι ὅταν $x = 0$, $\frac{1}{0}$, ἢ 1, ἢ 0, ἐφ' ὅσον ἔχομεν
$\nu > 1$, ἢ $\nu = 1$, ἢ $\nu < 1$.

4) $\dfrac{1 - \text{συν}\, x}{x^\nu}$. Ὅταν $x = 0$, ἡ ζητουμένη τιμὴ ἔσεται $\frac{1}{0}$, $\frac{1}{2}$, ἢ 0, ἐφ' ὅσον $\nu > 2$, $= 2$, ἢ < 2.

5) $\dfrac{\alpha^x - \beta^x}{x} = \lambda\alpha - \lambda\beta = \lambda\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)$, $\quad (x = 0)$.

6) $\dfrac{1 - \text{ἡμ}\, x + \text{συν}\, x}{\text{ἡμ}\, x + \text{συν}\, x - 1} = 1$, $\quad (x = 90^\circ)$.

7) $\dfrac{x^x - x}{1 - x + \lambda x} = -2$, $\quad (x = 1)$.

8) $\dfrac{\alpha x^2 - 2\alpha\gamma x + \alpha\gamma^2}{\beta x^2 - 2\beta\gamma x + \beta\gamma^2} = \dfrac{\alpha}{\beta}$, $\quad (x = \gamma)$.

9) $\dfrac{\alpha - x - \alpha\lambda\alpha + \alpha\lambda x}{\alpha - \sqrt{2\alpha x - x^2}} = -1$, $\quad (x = \alpha)$.

10) $\dfrac{x^3 - \beta^3}{4(x - \beta)} = \dfrac{3}{4}\beta^2$, $\quad (x = \beta)$.

11) $\dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 6x^2 + 8x - 3} = \dfrac{1}{0}$, $\quad (x = 1)$.

12) $\dfrac{(x^2 - 3\alpha x + 2\alpha^2)^{\frac{2}{3}}}{(x^3 - \alpha^3)^{\frac{1}{2}}} = 0$, $\quad (x = \alpha)$.

13) $\dfrac{x^3 - 4\alpha x^2 + 7\alpha^2 x - 2\alpha^3 - 2\alpha^2\sqrt{2\alpha x - \alpha^2}}{x^2 - 2\alpha x - \alpha^2 + 2\alpha\sqrt{2\alpha x - x^2}} = -6\alpha$, $(x = \alpha)$.

14) $\dfrac{(x^2 - \alpha^2)^{\frac{1}{2}}}{(x - \alpha)^{\frac{1}{2}}} = (2\alpha)^{\frac{1}{2}}$, $\quad (x = \alpha)$.

15) $\dfrac{\text{ἐφ}\left(\dfrac{\Pi}{2} \cdot \dfrac{x}{\alpha}\right)}{\dfrac{x^3}{\alpha(x^2 - \alpha^2)}} = -\dfrac{4\alpha}{\Pi}$. $\quad (x = \alpha)$.

16) $\dfrac{\alpha^x}{x} = \infty$, $\quad$ ($x = \infty$, ἐὰν $\alpha > 1$).

17) $x^{\frac{1}{x}} = 1$, $\quad (x = \infty)$.

18) $\dfrac{\lambda o\gamma\, x}{x} = 0$, $\quad (x = \infty)$.

19) $x\, \lambda o\gamma\, x = 0$, $\quad (x = 0)$.

20) $x^x = 1$, $\quad (x = 0)$.

21) $(\text{συν}\, \mu x)^{\frac{1}{x}} = 1$, $\quad (x = 0)$.

22) $(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$, [17], $\quad (x = 0)$.

23) $x e^{\frac{1}{x}} = \infty$, $\quad (x = 0)$.

24) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{\text{ἡμ}\, x} = 2$, $\quad (x = 0)$.

25) $\dfrac{\text{ἡμ}^2 x}{x} = 0$, $\quad (x = 0)$.

26) $\dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \text{ἡμ}\, x} = 2$, $\quad (x = 0)$.

27) $\dfrac{\text{συνεφ}\, x}{\text{συνδ}\, x} = 1$, $\quad (x = 0)$.

28) $\dfrac{\lambda\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\text{συνεφ}\, x} = 0$, $\quad (x = 0)$.

29) $\dfrac{\lambda x}{e^{x}} = 0, \qquad (x = \infty).$

30) $\dfrac{\alpha^{x-4} - 1}{\lambda(5 - x)} = -\lambda\alpha, \qquad (x = 4).$

31) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2 - 1} - \sqrt{x - 1}}{(x-1) + \sqrt[3]{x^2 + 2x - 3}} = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}, \quad (x = 1).$

32) $\dfrac{\lambda x}{\eta\mu(x - 1)} = 1, \qquad (x = 1).$

33) $\dfrac{1 - x + \lambda x}{1 - \sqrt{2x - x^2}} = +1, \qquad (x = 1).$

34) $x^{\frac{1}{1-x}} = \dfrac{1}{e}, \qquad (x = 1).$

35) $(Ax^{\mu} + Bx^{\mu-1} + \ldots + T)^{\frac{1}{x}} = 1, \; (x = \infty).$

36) $x^{\nu}e^{-x} = \dfrac{1\,.\,2\,.\,3\ldots.\nu}{e^{x}} = 0, \quad (x = \infty).$

37) $\dfrac{x + \sigma\upsilon\nu x}{x - \eta\mu\, x} = 1, \qquad (x = \infty).$

ΙΕ'. ΠΕΡΙ ΑΝΑΠΤΥΞΕΩΣ ΤΩΝ ΑΠΛΩΝ ΣΥΝΕΚΘΕΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ.

124. *Συνέκθεσις* x^{μ}.

Ἐν § 69 εὕρομεν ἐν γένει

$$\frac{\delta^{\nu}x^{\mu}}{\delta x^{\nu}} = \mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)\ldots\ldots(\mu-\nu+1)x^{\mu-\nu}.$$

Ὅθεν μορφοῦμεν τὴν ἀνεπτυγμένην ἔκθεσιν

$$(x+\theta)^{\mu} = x^{\mu} + \mu x^{\mu-1}\theta + \frac{\mu(\mu-1)}{2}x^{\mu-2}\theta^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\mu(\mu-1)\ldots.(\mu-\nu+2)}{1\,.\,2\ldots.(\nu-1)}x^{\mu-\nu+1}\theta^{\nu-1} + \ldots.$$

Ἡ σειρὰ αὕτη εἶναι προσχωροῦσα ὅταν $\dfrac{\theta}{x} < 1$, μὴ λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν σημείων. Διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ x^{μ}, εἶτα γράφοντες x ἀντὶ $\dfrac{\theta}{x}$, λαμβάνομεν·

$$(1+x)^{\mu} = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{2\,.\,3}x^3 + \ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{\mu(\mu-1)\ldots.(\mu-\nu+2)}{2\,.\,3\ldots.(\nu-1)}x^{\nu-1} + \ldots$$

Ἡ σειρὰ ἐκτεινομένη ἐπ' ἄπειρον ἔσεται προσχωροῦσα ὅταν $x < 1$. Κατὰ τὰ προηγούμενα, οἱοσδήποτε εἶναι ὁ δείκτης μ, συνάγομεν τὴν ἀπόδειξιν τοῦ τύπου τοῦ διωνύμου.

125. *Συνέκθεσις λογαριθμικὴ* λογ x.

Κατὰ § 70 ἔχομεν ἐν γένει

$$\frac{\delta^{\nu}\lambda o\gamma x}{\delta x^{\nu}} = \pm\ \lambda o\gamma\, e\ \frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots(\nu-1)}{x^{\nu}},$$

λαμβανομένου ἐναλλὰξ τοῦ ἀνωτέρου καὶ τοῦ κατωτέρου σημείου καθ' ὅσον ν εἶναι περιττὸς ἢ ἄρτιος. Ἐπομένως μορφοῦμεν τὴν τιμὴν τοῦ λογ(x + θ)·

$$\lambda o\gamma(x+\theta) = \lambda o\gamma x + \lambda o\gamma e\left(\frac{\theta}{x} - \frac{\theta^2}{2x^2} + \frac{\theta^3}{3x^3} \ldots \pm \frac{\theta^{\nu}}{\nu x^{\nu}}\right),$$

κατὰ τὸν τύπον τοῦ Ταῦλορ. Τὸν λογάριθμον ὑπεθέσαμεν ἀνήκοντα τῷ τυχόντι συστήματι· ὅταν λάβωμεν αὐτὸν ἐν τῷ νεπεριανῷ, τότε καθιστῶμεν λογ e = 1.

Όταν $x = 1$, θέσωμεν δὲ προσέτι x ἀντὶ θ, λαμβάνομεν ἐκ τοῦ προηγουμένου τύπου·

$$\lambda o\gamma(1+x) = \lambda o\gamma\, e\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots \pm \frac{x^\nu}{\nu}\right).$$

Ἡ σειρὰ αὕτη εἶναι προσχωροῦσα ὅταν x περιλαμβάνηται μεταξὺ $+1$ καὶ -1.

126. *Συνέκθεσις δεικτικὴ* α^x.

Κατὰ § 71 ἔχομεν ἐν γένει $\dfrac{\delta^\nu \alpha^x}{\delta x^\nu} = (\lambda\alpha)^\nu \alpha^x$.

Ἐπομένως συνάγομεν

$$\alpha^{x+\theta} = \alpha^x\left(1 + \lambda\alpha.\theta + \frac{(\lambda\alpha)^2}{2}\theta^2 + \frac{(\lambda\alpha)^3}{2.3}\theta^3 + \ldots + \frac{(\lambda\alpha)^\nu}{2.3\ldots\nu}\theta^\nu\right).$$

Διαιροῦντες διὰ α^x, εἶτα γράφοντες x ἀντὶ θ, λαμβάνομεν·

$$\alpha^x = 1 + \lambda\alpha.x + \frac{(\lambda\alpha)^2}{2}x^2 + \frac{(\lambda\alpha)^3}{2.3}x^3 + \ldots + \frac{(\lambda\alpha)^\nu}{2.3\ldots\nu}x^\nu.$$

Καθιστῶντες $x = 1$,

$$\alpha = 1 + \lambda\alpha + \frac{(\lambda\alpha)^2}{2} + \frac{(\lambda\alpha)^3}{2.3} + \ldots\ldots + \frac{(\lambda\alpha)^\nu}{2.3\ldots\ldots\nu}.$$

Ὑποθέτοντες $\alpha = e$, λαμβάνομεν

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \ldots + \frac{x^\nu}{2.3.4\ldots\nu},$$

σειρὰν ἀείποτε προσχωροῦσαν. Όταν $x = 1$, εὑρίσκομεν καὶ αὖθις τὴν [17] ἔκθεσιν τῆς βάσεως e τοῦ νεπεριανοῦ συστήματος.

127. *Συνεκθέσεις τριγωνομετρικαὶ* ἡμ x καὶ συν x. Κατὰ § 72 ἔχομεν·

$$\frac{\delta^\nu \eta\mu x}{\delta x^\nu} = \eta\mu\left(x + \frac{\nu\pi}{2}\right), \qquad \frac{\delta^\nu \sigma\upsilon\nu x}{\delta x^\nu} = \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\nu\pi}{2}\right).$$

Ἐπομένως,

$$\eta\mu(x+\theta) = \eta\mu x + \theta\,\sigma\upsilon\nu x - \frac{\theta^2}{2}\eta\mu x - \frac{\theta^3}{2.3}\sigma\upsilon\nu x + \ldots + \frac{\theta^\nu}{2.3\ldots\nu}\eta\mu\left(x + \frac{\nu\pi}{2}\right),$$

$$\sigma\upsilon\nu(x+\theta) = \sigma\upsilon\nu x - \theta\,\eta\mu x - \frac{\theta^2}{2}\sigma\upsilon\nu x + \frac{\theta^3}{2.3}\eta\mu x + \ldots + \frac{\theta^\nu}{2.3\ldots\nu}\sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\nu\pi}{2}\right).$$

Αἱ σειραὶ αὗται εἰσὶν ἀείποτε προσχωροῦσαι οἱαιδήποτε ἂν ὦσιν αἱ x καὶ θ. Ἐὰν θέσωμεν $x = 0$, εἶτα γράψωμεν x ἀντὶ θ, λαμβάνομεν·

$$\eta\mu\, x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3.4.5.6.7} + \ldots,$$

$$\sigma\upsilon\nu\, x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \ldots$$

128. Αἱ σειραὶ αὗται, ὑπὸ τοῦ ΝΕΥΤΩΝΟΣ δοθεῖσαι, εἰσὶν ἀκριβεῖς οἱαδήποτε εἶναι ἡ μεταβλητὴ x· οἱονδήποτε δὲ τὸ μέγεθος ταύτης, πάντοτε καταντῶσι προσχωροῦσαι ἐπὶ τέλους. Ὑποθέτουσι τὴν ἀκτῖνα ἴσην μονάδι· x δηλοῖ τὸν λόγον τοῦ τόξου πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, ἤτοι τὸν ἀφῃρημένον ἀριθμὸν δηλοῦντα τὸ μῆκος τοῦ τόξου εἰς τὴν περιφέρειαν ἧς ἡ ἀκτὶς $= 1$, καὶ ἡμ x, συν x, δηλοῦσι τοὺς λόγους τῶν γραμμῶν πρὸς ἃς ἀναφέρονται, πρὸς τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα. Ἐν περιπτώσει καθ' ἣν ἡ ἀκτὶς ἤθελεν εἶσθαι α, πρέπει νὰ καθιστῶμεν εἰς τὰ δεύτερα μέλη ἀντὶ x, $\dfrac{x}{\alpha}$,

καὶ εἰς τὰ πρῶτα ἀντὶ ἡμ x καὶ συν x, $\dfrac{\eta\mu x}{\alpha}$ καὶ $\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\alpha}$,

Ἐν ἄλλοις λόγοις, ἐνόσῳ ἡ ποσότης x εἶναι ὑπὸ τὰ σύμβολα ἡμ, συν, εφ, κ. τ. ἑ., ἐννοητέον αὐτὴν ὡς δηλοῦσαν μοίρας· ἀλλ' ὅταν ἦναι ἐκτὸς τῶν συμβόλων τούτων, πρέπει νὰ λαμβάνῃ τὴν ἀληθῆ αὐτῆς ἔκφρασιν. Εἰ ἐξακολουθοῦμεν ἐκφράζειν αὐτὴν εἰς μοίρας, τότε πρέπει νὰ πολυπλασιάζωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν ἐπὶ τὸν λόγον $\frac{\Pi}{180^0}$. Αἱ παρατηρήσεις αὗται χρησιμεύουσι κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῶν τύπων τούτων.

129. Λάβωμεν προσέτι ὡς παράδειγμα τὴν συνέκθεσιν

$$\psi = \text{τόξ ἐφ}\, x.$$

Κατὰ § 37 ἔχομεν

$$\frac{\delta\psi}{\delta x} = \frac{1}{1 + x^2} = \text{συν}^2\psi.$$

Διαφορίζοντες δὲ καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει ψ εἶναι συνέκθεσις τῆς x, λαμβάνομεν διαδοχικῶς·

$$\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} = -2\,\text{συν}\psi\;\text{ἡμ}\psi\,\frac{\delta\psi}{\delta x} = -2\,\text{συν}\psi\;\text{ἡμ}\psi\;\text{συν}^2\psi$$
$$= -\text{ἡμ}\,2\psi\;\text{συν}^2\psi,$$

$$\frac{\delta^3\psi}{\delta x^3} = -2\,(\text{συν}2\psi\;\text{συν}^2\psi - \text{ἡμ}2\psi\;\text{συν}\psi\;\text{ἡμ}\psi)\,\frac{\delta\psi}{\delta x}$$
$$= -2\,\text{συν}3\psi\;\text{συν}^3\psi,$$

$$\frac{\delta^4\psi}{\delta x^4} = 2.3\,(\text{ἡμ}3\psi\;\text{συν}^3\psi + \text{συν}3\psi\;\text{συν}^2\psi\;\text{ἡμ}\psi)\,\frac{\delta\psi}{\delta x}$$
$$= 2.3\;\text{ἡμ}4\psi\;\text{συν}^4\psi,$$

$$\frac{\delta^5\psi}{\delta x^4} = 2.3.4\,(\text{συν}4\psi\;\text{συν}^4\psi - \text{ἡμ}4\psi\;\text{συν}^3\psi\;\text{ἡμ}\psi)\,\frac{\delta\psi}{\delta x}$$
$$= 2.3.4\;\text{συν}5\psi\;\text{συν}^5\psi,$$

κ. τ. έ.

Ἐπομένως

$$\text{Τόξ ἐφ}(x+\theta) = \psi + \text{συν}^2\psi\,\theta - \text{ἡμ}\,2\psi\text{συν}^2\psi\,\frac{\theta^2}{2} - \text{συν}3\psi\text{συν}^3\psi\,\frac{\theta^3}{3}$$
$$+ \text{ἡμ}4\psi\text{συν}^4\psi\,\frac{\theta^4}{4} + \text{συν}5\psi\text{συν}^5\psi\,\frac{\theta^5}{5} - \dots\dots$$

Ὁ τύπος οὗτος δίδει τὴν ἔκθεσιν τοῦ τόξου, οὗτινος $x+\theta$ εἶναι ἡ ἐφαπτομένη, συνεκθέσει τοῦ τόξου οὗτινος x εἶναι ἡ ἐφαπτομένη. Ὑποθέτοντες $x = 0$, λαμβάνομεν·

$$\text{Τόξ ἐφ}\,\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} - \frac{\theta^7}{7} + \frac{\theta^9}{9} - \dots\dots$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου, ὑπὸ ΛΕΪΒΝΙΤΙΟΥ δοθέντος, παράγεται τῇ ὑποθέσει $\theta = 1$, ἀξιοπαρατήρητός τις ἔκφρασις τοῦ λόγου τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν περιφέρειαν· ἤτοι

$$\tfrac{1}{4}\Pi = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \dots\dots$$

ΙΣΤ'. ΕΠΕΚΤΑΣΙΣ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΤΟΥ ΤΑΫΛΟΡ ΕΠΙ ΣΥΝΕΚΘΕΣΕΩΝ ΕΚ ΠΛΕΙΟΝΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΣΥΓΚΡΟΤΟΥΜΕΝΩΝ.

130. Ἔστω ἡ συνέκθεσις

$$\omega = \sigma(x, \psi),$$

περιεκτικὴ τῶν δύο μεταβλητῶν ἀνεξαρτήτων χ, ψ. Τεθείσθω ὅτι αἱ μεταβληταὶ αὗται λαμβάνουσιν ἀμοιβαίως τὰς τιμὰς $x+\theta$, $\psi+\tau$, πρόκειται δὲ μορφῶσαι τὸ ἐκτύλιγμα τῆς τιμῆς ἣν λαμβάνει ἡ συνέκθεσις $\sigma(x+\theta, \psi+\tau)$, διατεταγμένον κατὰ τὰς δυνάμεις τῶν ποσοτήτων θ καὶ τ.

Πρὸς τοῦτο, καθιστῶμεν $\theta = a\xi$, $\tau = a\eta$· θεωροῦντες δὲ τὴν ποσότητα $\sigma(x + a\xi, \psi + a\eta)$ ὡς συνέκθεσιν τοῦ οἱουδήποτε ἀριθμοῦ a, γράφομεν

$$\Sigma(a) = \sigma(x + a\xi,\ \psi + a\eta).$$

Κατὰ τὸ ἐν § 104 θεώρημα, ἡ Σ(a) ἀναπτύσσεται κατὰ τὰς δυνάμεις τῆς a. Λοιπόν, λαμβάνομεν ἀλληλοδιαδόχως τοὺς διαφορικοὺς συντελεστὰς τῶν διαφόρων τάξεων τῆς Σ(a), ὧν αἱ ἐκθέσεις εἰσίν·

$$\Sigma'(a) = \frac{\delta\sigma}{\delta x}\xi + \frac{\delta\sigma}{\delta\psi}\eta,$$

$$\Sigma''(a) = \frac{\delta^2\sigma}{\delta x^2}\xi^2 + 2\frac{\delta^2\sigma}{\delta x\delta\psi}\xi\eta + \frac{\delta^2\sigma}{\delta\psi^2}\eta^2,$$

$$\Sigma'''(a) = \frac{\delta^3\sigma}{\delta x^3}\xi^3 + 3\frac{\delta^3\sigma}{\delta x^2\delta\psi}\xi^2\eta + 3\frac{\delta^3\sigma}{\delta x\delta\psi^2}\xi\eta^2 + \frac{\delta^3\sigma}{\delta\psi^3}\eta^3,$$

. . . .

$$\Sigma^{\nu}(a) = \frac{\delta^{\nu}\sigma}{\delta x^{\nu}}\xi^{\nu} + \nu\frac{\delta^{\nu}\sigma}{\delta x^{\nu-1}\delta\psi}\xi^{\nu-1}\eta + \ldots + \frac{\delta^{\nu}\sigma}{\delta\psi^{\nu}}\eta^{\nu},$$

γράφοντες πρὸς συντομίαν, σ ἀντὶ $\sigma(x+a\xi,\ \psi+a\eta)$. Εἶτα καθιστῶμεν ἐν ταῖς τιμαῖς τῶν συντελεστῶν τούτων $a=0$, καὶ ἔχομεν·

$$\Sigma'(0) = \frac{\delta\omega}{\delta x}\xi + \frac{\delta\omega}{\delta\psi}\eta,$$

$$\Sigma''(0) = \frac{\delta^2\omega}{\delta x^2}\xi^2 + 2\frac{\delta^2\omega}{\delta x\delta\psi}\xi\eta + \frac{\delta^2\omega}{\delta\psi^2}\eta^2,$$

$$\Sigma'''(0) = \frac{\delta^3\omega}{\delta x^3}\xi^3 + 3\frac{\delta^3\omega}{\delta x^2\delta\psi}\xi^2\eta + 3\frac{\delta^3\omega}{\delta x\delta\psi^2}\xi\eta^2 + \frac{\delta^3\omega}{\delta\psi^3}\eta^3,$$

. . . . ;

Ἄρα, κατὰ τὴν ἐν τῷ ῥηθέντι χωρίῳ μέθοδον, ἔχομεν·

$$\Sigma(a) = \omega + \left|\begin{array}{l}\frac{\delta\omega}{\delta x}\xi \\ +\frac{\delta\omega}{\delta\psi}\eta\end{array}\right| a + \left|\begin{array}{l}\frac{\delta^2\omega}{\delta x^2}\xi^2 \\ +2\frac{\delta^2\omega}{\delta x\delta\psi}\xi\eta \\ +\frac{\delta^2\omega}{\delta\psi^2}\eta^2\end{array}\right| \frac{a^2}{2} + \left|\begin{array}{l}\frac{\delta^3\omega}{\delta x^3}\xi^3 \\ +3\frac{\delta^3\omega}{\delta x^2\delta\psi}\xi^2\eta \\ +3\frac{\delta^3\omega}{\delta x\delta\psi^2}\xi\eta^2 \\ +\frac{\delta^3\omega}{\delta\psi^3}\eta^3\end{array}\right| \frac{a^3}{2.3} + \ldots$$

ἢ, θέτοντες θ ἀντὶ $a\xi$ καὶ τ ἀντὶ $a\eta$ (ὅπερ τὸ αὐτὸ ὑποθέσαι $a=1,\ \xi=\theta,\ \eta=\tau$)·

$$\sigma(x+\theta,\ \psi+\tau) =$$

$$\begin{aligned}\omega &+ \frac{\delta\omega}{\delta x}\theta + \frac{\delta^2\omega}{\delta x^2}\frac{\theta^2}{2} + \frac{\delta^3\omega}{\delta x^3}\frac{\theta^3}{2.3} + \frac{\delta^4\omega}{\delta x^4}\frac{\theta^4}{2.3.4} + \ldots \\ &+ \frac{\delta\omega}{\delta\psi}\tau + \frac{\delta^2\omega}{\delta x\delta\psi}\theta\tau + \frac{\delta^3\omega}{\delta x^2\delta\psi}\frac{\theta^2\tau}{2} + \frac{\delta^4\omega}{\delta x^3\delta\psi}\frac{\theta^3\tau}{2.3} \\ &+ \frac{\delta^2\omega}{\delta\psi^2}\frac{\tau^2}{2} + \frac{\delta^3\omega}{\delta x\delta\psi^2}\frac{\theta\tau^2}{2} + \frac{\delta^4\omega}{\delta x^2\delta\psi^2}\frac{\theta^2\tau^2}{2.2} \\ &+ \frac{\delta^3\omega}{\delta\psi^3}\frac{\tau^3}{2.3} + \frac{\delta^4\omega}{\delta x\delta\psi^3}\frac{\theta\tau^3}{2.3} \\ &+ \frac{\delta^4\omega}{\delta\psi^4}\frac{\tau^4}{2.3.4}\end{aligned}$$

Τοῦ ἐκτυλίγματος τούτου ὁ νόμος ἐστὶ σαφής. Ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι ἡ ἀρχικὴ συνέκθεσις. Ὁ δεύτερος, τὸ διαφορικὸν τῆς πρώτης τάξεως πλῆρες τῆς συνεκθέσεως ω, ἐν ᾧ ἐγράφη θ ἀντὶ δx καὶ τ ἀντὶ $\delta\psi$. Ὁ τρίτος, τὸ διαφορικὸν τῆς δευτέρας τάξεως τῆς αὐτῆς συνεκθέσεως, ἐν ᾧ ἔγιναν μεταλλαγαὶ ὅμοιαι, διὰ 2 διαιρεθέν. Ὁ τέταρτος, τὸ διαφορικὸν τῆς τρίτης τάξεως πλῆρες τῆς αὐτῆς συνεκθέσεως, ἐν ᾧ ἔγιναν αἱ αὐταὶ μεταλλαγαί, διὰ 2.3 διαιρεθέν. Καὶ οὕτω καθεξῆς.

131. Ἡ προεκτεθεῖσα θεωρία ἐκτείνεται εὐκόλως καὶ ἐν περιπτώσεσι καθ' ἃς ἡ τεθεῖσα συνέκθεσις περιέχει μεταβλητὰς ἀνεξαρτήτους πλείονας ἢ δύο. Οἱ διαδοχικοὶ ὅροι τοῦ ἐκτυλίγματος εἰσὶ πάντοτε τὰ διαφορικὰ πλήρη τῶν διαφόρων τάξεων τῆς ἀρχικῆς συνεκθέσεως, ἐν οἷς τὸ ἀπειροστὸν ἑκάστης μεταβλητῆς ἀντικαθίσταται τῇ ἰδίᾳ αὐτοῦ αὐξήσει, διαιρεθέντα ἀμοιβαίως διὰ 1.2, 2.3, 2.3.4., κ.τ.έ.

132. Ὁ προηγούμενος τύπος δίδει ἐπίσης τὸ ἐκτύλιγμα τῆς συνεκθέσεως $\omega = \sigma(x, \psi)$ κατὰ τὰς δυνάμεις τῶν x καὶ ψ. Καθιστῶντες ἐν αὐτῷ $x = 0$ καὶ $\psi = 0$, εἶτα γράφοντες x ἀντὶ 0 καὶ ψ ἀντὶ τ, λαμβάνομεν τὸ ἐξαγόμενον·

$$\begin{aligned}\sigma(x, \psi) = \omega_0 &+ \frac{\delta\omega_0}{\delta x} x + \frac{\delta^2\omega_0}{\delta x^2}\frac{x^2}{2} + \frac{\delta^3\omega_0}{\delta x^3}\frac{x^3}{2.3} + \ldots\ldots \\ &+ \frac{\delta\omega_0}{\delta\psi}\psi + \frac{\delta^2\omega_0}{\delta x\delta\psi} x\psi + \frac{\delta^3\omega_0}{\delta x^2\delta\psi}\frac{x^2\psi}{2} \\ &+ \frac{\delta^2\omega_0}{\delta\psi^2}\frac{\psi^2}{2} + \frac{\delta^3\omega_0}{\delta x\delta\psi^2}\frac{x\psi^2}{2} \\ &+ \frac{\delta^3\omega_0}{\delta\psi^3}\frac{\psi^3}{2.3}\end{aligned}$$

ἐν ᾧ $\frac{\delta\omega_0}{\delta x}$, $\frac{\delta\omega_0}{\delta\psi}$, $\frac{\delta^2\omega_0}{\delta x^2}$, ... δηλοῦσι τὰς τιμὰς ἃς λαμβάνουσιν ἀμοιβαίως αἱ συνεκθέσεις ω, $\frac{\delta\omega}{\delta x}$, $\frac{\delta\omega}{\delta\psi}$, $\frac{\delta^2\omega}{\delta x^2}$ ..... ὅταν ἐν αὐταῖς συγχρόνως γίνωσι $x = 0$, $\psi = 0$.

Τὰ αὐτὰ χωροῦσι καὶ πρὸς συνεκθέσεις πλειόνων μεταβλητῶν ἀνεξαρτήτων.

ΙΖʹ. ΠΕΡΙ ΜΕΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΩΝ ΣΥΝΕΚΘΕΣΕΩΝ.

133. Θεωρήσωμεν πρῶτον συνέκθεσίν τινα πραγματικὴν μιᾶς μεταβλητῆς

$$\psi = \Sigma(x)\cdot$$

φαντασθῶμεν δὲ τὸ σύνολον τῶν τιμῶν αὐτῆς, τῆς x λαμβανούσης πᾶσαν τιμὴν ἀπὸ $-\frac{1}{0}$ μέχρι $+\frac{1}{0}$. Ἐὰν αἱ τιμαὶ τῆς συνεκθέσεως ψ πρῶτον προϊοῦσαι αὐξάνουσαι μέχρι τινος εἶτα ἄρχωνται μειοῦσθαι, ἡ μείζων τῶν τιμῶν τούτων καλεῖται *μέγιστον*. Ἀντιστρόφως· ἐὰν αἱ τιμαὶ τῆς ψ προϊοῦσαι μειούμεναι μέχρι τινὸς εἶτα ἄρχωνται αὐξάνειν, ἡ ἐλάσ-

σων αὐτῶν καλεῖται *ἐλάχιστον*. Δῆλον ὅτι, συνέκθεσίς τις δύναται μὲν ἔχειν μέγιστον οὐχὶ δ' ἐλάχιστον, ἢ ἐλάχιστον καὶ μέγιστον οὐδέν, ἢ τέλος μέγιστα καὶ ἐλάχιστα πολλά, ἅτινα ἀναγκαίως συνακολουθοῦνται ἐναλλάξ, ἢ οὐδέν. Ἓν μέγιστον δύναται εἶναι ἔλαττον ἑνὸς ἐλαχίστου. Ἓν μέγιστον ἀρνητικὸν ἀποκαθίσταται ἐλάχιστον ἐὰν παραληφθῇ τὸ σημεῖον αὐτοῦ· ἐπίσης ἓν ἐλάχιστον ἀρνητικόν, θετικῶς λαμβανόμενον, ἀποκαθίσταται μέγιστον. Πρόκειται ἤδη ὁρίσαι τὰς τιμὰς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ἐὰν ὑπάρχωσι τοιαῦται, ἀντιστοιχούσας εἰς μέγιστα ἢ ἐλάχιστα τῆς συνεκθέσεως.

134. Ἐὰν ἡ τιμὴ $x = \alpha$ συστοιχῇ μεγίστῳ τῆς πραγματικῆς συνεκθέσεως $\Sigma(x)$, φανερὸν ὅτι $\Sigma(\alpha)$ ἔσεται μείζων $\Sigma(\alpha + 0)$ καὶ $\Sigma(\alpha - 0)$, 0 οὔσης ποσότητος ἐλάσσονος παντὸς μεγέθους δεδομένου. Ὁμοίως, ἐὰν ἡ τιμὴ α τῆς x συστοιχῇ ἐλαχίστῳ, $\Sigma(\alpha)$ ἔσεται ἐλάσσων $\Sigma(\alpha + 0)$ καὶ $\Sigma(\alpha - 0)$. Τῇ παρατηρήσει ταύτῃ τὸ προκείμενον ζήτημα ἐπιλύεται εὐκόλως.

Ἀναπτύσσοντες τὰς $\Sigma(x + 0)$ καὶ $\Sigma(x - 0)$ κατὰ τὴν σειρὰν τοῦ Ταΰλορ, ἔχομεν ἐν γένει, οἱονδήποτε εἶναι τὸ σημεῖον τῆς 0,

$$\Sigma(x+0) = \Sigma(x) + \frac{\delta\Sigma(x)}{\delta x}0 + \frac{\delta^2\Sigma(x)}{\delta x^2}\frac{0^2}{2} + \frac{\delta^3\Sigma(x)}{\delta x^3}\frac{0^3}{2.3} + \ldots\ldots$$

Πρόκειται εὑρεῖν τὰς ἀναγκαίας συνθήκας ὅπως $\Sigma(\alpha)$ εἴη μείζων ἢ ἐλάσσων $\Sigma(\alpha \pm 0)$. Φανερὸν ὅτι, λαμβανομένης 0 ὅσον ἔνεστι σμικρᾶς, ἀποκαθιστῶμεν ἀείποτε τὸν τυχόντα ὅρον τῆς σειρᾶς μείζονα τοῦ ἀθροίσματος ὅλων τῶν ἀκολούθων αὐτοῦ. Π. χ., ὅπως ἀποκαταστήσωμεν τὸν ὅρον $\frac{\delta\Sigma(x)}{\delta x}0$ μείζονα τοῦ ἀθροίσματος ὅλων τῶν ἄλλων, γράφομεν ὡς ἑξῆς τὸ μέρος τῆς σειρᾶς, τὸ ἀπὸ τοῦ ὅρου τούτου,

$$\left[\frac{\delta\Sigma(x)}{\delta x} + \frac{\delta^2\Sigma(x)}{\delta x^2}\frac{0}{2} + \frac{\delta^3\Sigma(x)}{\delta x^3}\frac{0^2}{2.3} + \ldots\ldots\right]0.$$

Ἐπειδὴ ὅταν $0 = 0$ τὸ μέρος

$$\frac{\delta^2 \Sigma(x)}{\delta x^2}\frac{0}{2} + \frac{\delta^3 \Sigma(x)}{\delta x^3}\frac{0^2}{2.3} + \ldots .$$

μηδενίζεται, ἐννοοῦμεν ὅτι δύναται ἀποκατασταθῆναι, λαμβανομένης τῆς 0 ὅσον ἔνεστι σμικρᾶς, ἔλαττον τοῦ ὅρου $\frac{\delta \Sigma(x)}{\delta x}$ ἀνεξαρτήτου ὄντος τῆς 0. Τὸ αὐτὸ δεικνύεται καὶ διὰ πάντα ἕτερον ὅρον σχετικῶς πρὸς τοὺς ἐπομένους αὐτῷ.

Ἐντεῦθεν συνάγομεν· 1ον· ὅτι $\Sigma(\alpha)$ ἀδύνατον εἶναι μείζων $\Sigma(\alpha \pm 0)$ συγχρόνως, ἢ ὅταν $\frac{\delta \Sigma(\alpha)}{\delta x}$ ἦναι μηδὲν, καὶ $\frac{\delta^2 \Sigma(\alpha)}{\delta x^2}$ ἔχῃ τὸ σημεῖον $-$. 2ον· ὅτι $\Sigma(\alpha)$ ἀδύνατον εἶναι ἐλάσσων $\Sigma(\alpha \pm 0)$ συγχρόνως, ἢ ὅταν $\frac{\delta \Sigma(\alpha)}{\delta x}$ ἦναι μηδὲν, καὶ $\frac{\delta^2 \Sigma(\alpha)}{\delta x^2}$ ἔχῃ τὸ σημεῖον $+$.

Ἄρα, ἵνα συστοιχῇ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον τῇ τιμῇ $x = \alpha$, πρέπει ἡ τιμὴ αὕτη νὰ μηδενίζῃ τὸν διαφορικὸν συντελεστὴν τῆς πρώτης τάξεως· ὑπάρχει δὲ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον καθ' ὅσον ἡ αὐτὴ τιμὴ δίδει τὸ σημεῖον $-$ ἢ τὸ $+$ τῷ διαφορικῷ συντελεστῇ τῆς δευτέρας τάξεως.

135. Συμβαίνει ὅμως ἡ περὶ ἧς λόγος τιμὴ νὰ μηδενίζῃ ἀμφοτέρους τοὺς διαφορικοὺς συντελεστὰς τῶν δύο πρώτων τάξεων. Ἐν περιπτώσει τοιαύτῃ θεωρητέον τοὺς ἐπομένους ὅρους τῶν ἐκτυλιγμάτων τῆς $\Sigma(x \pm 0)$. Δι' ὁμοίου τῷ προηγουμένῳ συλλογισμοῦ δεικνύεται ὅτι, ἐὰν οἱ ὅροι

$$\frac{\delta \Sigma(x)}{\delta x} 0 + \frac{\delta^2 \Sigma(x)}{\delta x^2}\frac{0^2}{2}$$

ἀφανίζωνται τῇ $x = \alpha$, ἡ τιμὴ αὕτη ἀδύνατον συστοιχεῖν μεγίστῳ ἢ ἐλαχίστῳ, ἢ ὅταν ἀφανίζῃ ὁμοῦ τὸν ὅρον $\frac{\delta^3 \Sigma(x)}{\delta x^3}\frac{0^3}{2.3}$.

Ὑπάρχει δὲ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον καθ' ὅσον ἡ αὐτὴ τιμὴ ἀποκαθιστᾷ ἀρνητικὸν ἢ θετικὸν τὸν διαφορικὸν συντελεστὴν τῆς τετάρτης τάξεως $\frac{\delta^4 \Sigma(x)}{\delta x^4}$.

136. Ἐν γένει, *τιμή τις δοθεῖσα τῆς x συστοιχεῖ μεγίστῳ ἢ ἐλαχίστῳ συνεκθέσεως ἧς αἱ παραγόμεναι εἰσὶ συνεχεῖς, ὅταν ἡ τιμὴ αὕτη μηδενίζῃ περιττὸν ἀριθμὸν διαδοχικῶν διαφορικῶν συντελεστῶν, ἀπὸ τοῦ πρώτου. Ἐκπληρουμένου δὲ τοῦ ὅρου τούτου, ὑπάρχει μέγιστον ἢ ἐλάχιστον καθ' ὅσον ὁ ἑπόμενος διαφορικὸς συντελεστὴς, ὅστις εἶναι ἀείποτε τάξεως ἀρτίας, ἀποκαθίσταται ἀρνητικὸς ἢ θετικὸς τῇ ἀντεισαγωγῇ τῆς περὶ ἧς λόγος τιμῆς τῆς x.*

137. Συμβαίνει προσέτι ἡ ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{\delta \Sigma(x)}{\delta x} = 0$$

ὁριζομένη τιμὴ α τῆς x ν' ἀποκαθιστᾷ ἀπείρους τόν τε διαφορικὸν συντελεστὴν τῆς δευτέρας τάξεως καὶ τοὺς ἐφεξῆς. Ἡ περίπτωσις αὕτη δηλοῖ, κατὰ τὰ ἐν ἄρθ. Η' ἐκτεθέντα, ὅτι ὁ τύπος τοῦ Τάϋλορ δὲν δύναται δοῦναι τὴν τιμὴν τῆς συνεκθέσεως κατὰ σειρὰν διατεταγμένην κατὰ δυνάμεις τῆς 0 ἀκεραίας. Ἄρα, οἱ προαποδοθέντες κανόνες δὲν ἐφαρμόζονται. Ἀπαιτεῖται εἰδικὴ ἔρευνα τῆς προόδου τῶν τιμῶν τῆς συνεκθέσεως· τοῦτο δὲ εὐκόλως ἐκτελεῖται, ἐὰν ἀναπτύξωμεν αὐτὴν κατὰ τὰς κλασματικὰς ἢ ἀρνητικὰς δυνάμεις τῆς 0, ἀφοῦ θέσωμεν $x = \alpha$. (Παρατηρητέον προσέτι, ὅτι ἡ προηγουμένη ἀνάλυσις ἐξαιρεῖ ἐμμέσως τὰ μέγιστα καὶ ἐλάχιστα συστοιχοῦντα τιμῇ τινι τῆς x, δι' ἣν ἡ παραγομένη $\frac{\delta \psi}{\delta x}$ ἤθελεν εἶσθαι ἄπειρος ἢ ἀσυνεχής). Ἡ τιμὴ $x = \alpha$ ἀποκαθιστᾷ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον τὴν τεθεῖσαν συνέκθεσιν, καθ' ὅσον αἱ ὑποθέσεις $x = \alpha \pm 0$ δίδουσιν ἐξαγόμενα ἀμφότερα ἐλάχιστα ἢ μείζονα τῆς $\Sigma(\alpha)$. Π. χ.

$$\Sigma(x) = 6 + (x - \alpha)^{\frac{2}{3}} \qquad \text{δίδει}$$

$$\Sigma'(x) = \tfrac{5}{3}(x-\alpha)^{\frac{2}{3}}, \qquad \Sigma''(x) = \frac{10}{9(x-\alpha)^{\frac{1}{3}}}.$$

Θέτοντες $\Sigma'(x) = 0$, λαμβάνομεν $x = \alpha$. Ἀλλ' ἡ τιμὴ αὕτη ἀποκαθιστᾷ ἄπειρον τὴν δευτεροταγῆ παραγομένην· ἄρα ἡ τοῦ Τάϋλορ σειρὰ εἶναι ἀνεφάρμοστος· ἐπομένως ἐκτελοῦμεν ἀμέσως τὰ δύο ἐκτυλίγματα

$$\Sigma(\alpha+0) = 6 + 0^{\frac{5}{3}}, \qquad \Sigma(\alpha-0) = 6 - 0^{\frac{5}{3}},$$

ἐξ ὧν συνάγομεν ὅτι ἡ συνέκθεσις οὐκ ἐπιδέχεται οὔτε μεγίστου οὔτε ἐλαχίστου.

Διὰ τὴν $\Sigma(x) = 6 + (x-\alpha)^{\frac{4}{3}}$, ἡ τιμὴ $x = \alpha$ δίδει

$$\Sigma'(x) = 0, \qquad \Sigma''(x) = \infty.$$

Τὰ δὲ ἐκτυλίγματα

$$\Sigma(\alpha+0) = 6 + 0^{\frac{4}{3}}, \qquad \Sigma(\alpha-0) = 6 + 0^{\frac{4}{3}}$$

δεικνύουσιν ὅτι τῇ $x = \alpha$ ἀντιστοιχεῖ ἐλάχιστον, ἴσον 6, τῆς τεθείσης συνεκθέσεως. Τοὐναντίον, ἡ τιμὴ αὕτη τῆς x ἀποκαθιστᾷ τὴν συνέκθεσιν $6-(x-\alpha)^{\frac{4}{3}}$ μέγιστον ἴσον 6.

138. Αἱ προεκτεθεῖσαι γνώσεις ἀποκαθίστανται μᾶλλον ἐπαισθηταὶ ἐὰν θεωρήσωμεν τὰς καμπύλας ὧν αἱ τεταγμέναι παριστῶσι τὰς τιμὰς τῆς $\Sigma(x)$, παραδεχθῶμεν δὲ ὅτι αἱ συνεκθέσεις $\Sigma(x)$, $\Sigma'(x)$, $\Sigma''(x)$, εἰσὶ συνεχεῖς. Τῷ ὄντι, δῆλον ὅτι ἀδύνατον ὑπάρχειν μέγιστον ἢ ἐλάχιστον, ἢ κατὰ τὰ σημεῖα Μ, Ν, Π, Κ, (Σχ. 27), καθ' ἃ ἡ ἐφαπτομένη εἶναι παράλληλος τῇ τῶν x γραμμῇ, καὶ ἐν οἷς $\frac{\delta\psi}{\delta x} = 0$. Προσέτι, ὑπάρχει μέγιστον εἰς Μ καὶ Π ὅταν ὁ $\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}$ εἶναι ἀρνητικός· διότι ἡ καμπύλη στρέφει τὰ κοῖλα αὐτῆς πρὸς τὰ κάτω τοῦ πίνακος· ὑπάρχει δὲ ἐλάχιστον εἰς Ν καὶ Κ ὅταν ὁ $\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}$ εἶναι θετικός, τῆς καμπύλης στρεφούσης τὰ κυρτὰ αὐτῆς πρὸς τὰ κάτω τοῦ πίνακος. Αἱ ἀρνητικαὶ ποσότητες θεωροῦνται ἐνταῦθα τοσοῦτον ἐλάσσονες ὅσον μείζων εἶναι ἡ ἀπόλυτος αὐτῶν τιμή.

139. Γνωστὸν καθίσταται ἐπίσης ὅτι ἡ συνθήκη $\frac{\delta\psi}{\delta x} = 0$ δὲν ἔχει ὡς ἀναπόφευκτον συνέπειαν τὴν ὕπαρξιν μεγίστων ἢ ἐλαχίστων· διότι ὑπάρχουσι σημεῖα καθ' ἃ ἡ ἐφαπτομένη εἶναι παράλληλος τῷ τῶν x ἄξονι, καί τοι μὴ παυούσης τῆς συνεκθέσεως αὐξάνειν ἢ μειοῦσθαι. Ἀλλὰ τὰ σημεῖα ταῦτα εἰσὶν ἐν γένει σημεῖα καμπῆς, καθ' ἃ ἡ μὲν καμπύλη μεταβάλλει διεύθυνσιν, ὁ δὲ τῆς πρώτης τάξεως διαφορικὸς συντελεστής, μέλλων μεταβαλεῖν σημεῖον, διέρχεται τῆς τιμῆς 0. Ἀκολούθως ὁμιλήσομεν περὶ τῶν ἀναλυτικῶν χαρακτήρων ἀνηκόντων εἰς τὰ διάφορα *σημεῖα εἰδικὰ* ἅτινα αἱ καμπύλαι ἐνδεχόμενον εἶναι νὰ παρουσιάσωσι.

140. Λοιπὸν ἐκ τῶν προεκτεθέντων συνάγομεν ὅτι, ὅπως ἐξιχνεύσωμεν τὰ μέγιστα καὶ τὰ ἐλάχιστα τεθείσης συνεκθέσεως, $\psi = \Sigma(x)$, ἐξαιρουμένων τῶν καθιστώντων ἄπειρον ἢ ἀσυνεχῆ τὴν παραγομένην $\Sigma'(x)$, θετέον τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\delta\psi}{\delta x} = 0,$$

ἥτις ἐπιλυομένη πρὸς x δίδει τὰς ζητουμένας τιμάς. Ἵνα δὲ γνωσθῇ ἐὰν αἱ τιμαὶ αὗται συστοιχῶσι μεγίστῳ ἢ ἐλαχίστῳ, ἀντεισακτέον αὐτὰς ἐν τῷ διαφορικῷ συντελεστῇ τῆς δευτέρας τάξεως $\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}$, ὅπως ὁδηγηθῶμεν ὑπὸ τοῦ σημείου ὅπερ οὗτος λαμβάνει. Ἐὰν ὁ διαφορικὸς οὗτος συντελεστὴς μηδενίζηται, μεταβαίνομεν εἰς τοὺς ἑπομένους, κ. τ. ἑ.

141. Ἐφαρμοστέον ἤδη παραδείγμασι τοὺς προεκτεθέντας κανόνας.

Ἔστω ἡ συνέκθεσις $\qquad \psi = 6 + (x-\alpha)^{\nu}$,

τοῦ ν ὑποτιθεμένου ἀριθμοῦ ἀκεραίου, ἧς ζητοῦνται τὰ μέγιστα καὶ τὰ ἐλάχιστα. Διαφορίζοντες καὶ θέτοντες τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\delta\psi}{\delta x} = \nu\gamma\,(x-\alpha)^{\nu-1} = 0,$$

συνάγομεν $x=\alpha$, τιμὴν ἀφανίζουσαν ἅπαντας τοὺς διαφορικοὺς συντελεστὰς μέχρι τοῦ $\nu^{\text{ης}}$ τάξεως μὴ συμπεριλαμβανομένου. Ἄρα ἕπεται ὅτι, εἰ μὲν ν περιττός, ἡ τεθεῖσα συνέκθεσις οὔτε μέγιστον ἔχει οὔτε ἐλάχιστον· εἰ δὲ ν ἄρτιος, ἡ τιμὴ $x=\alpha$ καθιστᾷ ψ μεγίστην μὲν ὅταν γ ἦναι ἀρνητικός, ἐλαχίστην δὲ ὅταν γ ἦναι θετικός.

142. Ἔστω ἡ συνέκθεσις $\psi=\frac{\lambda x}{x^{\nu}}$.

Ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν

$$\frac{\delta\psi}{\delta x} = \frac{1-\nu\lambda x}{x^{\nu+1}} = 0,\quad \text{ἐπομένως}\quad \lambda x = \frac{1}{\nu}.$$

Πρὸς ζήτησιν τοῦ διαφορικοῦ συντελεστοῦ τῆς δευτέρας τάξεως, παρατηρητέον ὅτι περιττὸν διαφορίσαι (*) τὸν παρονομαστὴν τοῦ τῆς πρώτης· διότι οὗτος πολυπλασιασθήσεται ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν μηδενιζόμενον κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν. Λαμβάνομεν οὕτως

$$\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} = -\frac{\nu}{x^{\nu+2}}.$$

(*) Ἐπειδὴ ἀναγκαιότερον εἶναι τὸ νὰ γνωρίσωμεν τὴν τιμὴν ἣν λαμβάνει, διὰ $x=\alpha$, ἡ παραγομένη $\Sigma''(x)$, ἢ τὸ νὰ εὕρωμεν τὴν γενικὴν ἔκθεσιν ταύτης, ἥτις ἐνίοτε εἶναι λίαν πολύπλοκος, προσθέσομεν τὴν ἑξῆς παρατήρησιν εὐκολύνουσαν πολλάκις τὴν ἔρευναν τῆς τιμῆς ταύτης.

Ἔστωσαν X, X_1, δύο συνεκθέσεις τῆς x, ὧν ἡ πρώτη μόνη μηδενίζεται τῇ τιμῇ $x=\alpha$. Ἡ παραγομένη τοῦ γινομένου αὐτῶν ἔπεται $XX'_1+X'X_1$. Ἀλλ' ἐπειδὴ $x=\alpha$ μηδενίζει X, ἡ παραγομένη αὕτη ἄγεται εἰς $X'X_1$. Ἄρα, λαμβάνομεν τὴν παραγομένην τοῦ γινομένου XX_1, πολυπλασιάζοντες τὴν τοῦ μηδενιζομένου παράγοντος ἐπὶ τὸν ἕτερον παράγοντα.

Ἐξαγόμενον ἀρνητικὸν δεικνύον ὅτι ἡ τιμὴ $\lambda x=\frac{1}{\nu}$, καὶ ἐπομένως $x=e^{\frac{1}{\nu}}$, συστοιχεῖ μεγίστῳ.

143. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Ἀριθμὸν δοθέντα α τεμεῖν οὕτως εἰς δύο, ὅπως τὸ γινόμενον τῆς $\mu^{\text{ης}}$ δυνάμεως τοῦ ἑνὸς μέρους ἐπὶ τὴν $\nu^{\text{ην}}$ δύναμιν τοῦ ἑτέρου ᾖ τὸ μέγιστον.*

Ἔστωσαν x καὶ $\alpha-x$ τὰ δύο μέρη. Ἡ συνέκθεσις ἧς τὸ μέγιστον ζητεῖται εἶναι

$$\psi = x^{\mu}\,(\alpha-x)^{\nu}.$$

Ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν·

$$\frac{\delta\psi}{\delta x} = [\mu\alpha-(\mu+\nu)x]\,x^{\mu-1}\,(\alpha-x)^{\nu-1} = 0.$$

Ἐξισοῦντες χωριστὰ τῷ μηδενὶ ἕκαστον παράγοντα, ἔχομεν·

$$x=\frac{\mu\alpha}{\mu+\nu},\quad x=0,\quad x=\alpha.$$

Ἡ πρώτη τῶν τιμῶν τούτων συστοιχεῖ μεγίστῳ· διότι, ἀντεισαγομένη ἐν τῇ γενικῇ ἐκθέσει τοῦ διαφορικοῦ συντελεστοῦ τῆς δευτέρας τάξεως, δίδει τὸ ἀρνητικὸν ἐξαγόμενον

$$-\frac{\mu^{\mu-1}\nu^{\nu-1}\alpha^{\mu+\nu-2}}{(\mu+\nu)^{\mu+\nu-3}}.$$

Αἱ ἕτεραι δύο ἀντιστοιχοῦσιν εἰς ἐλάχιστα ὅταν μ καὶ ν ὦσιν ἄρτιοι. Ἀλλ' ἐνταῦθα εἰσὶν ἀποῤῥιπτέαι ὡς μὴ ἐκπληροῦσαι τὴν ἀκριβῆ ἔννοιαν τοῦ προβλήματος. Τῷ ὄντι, οὐδετέρα αὐτῶν δύναται δηλῶσαι μέρος τοῦ ἀριθμοῦ α.

144. Ὅταν $\mu=2$, καὶ $\nu=1$, εὑρεθήσεται $x=\frac{2}{3}\alpha$. Τοῦτο δ' εἶναι τὸ μέγιστον τῶν δυνατῶν ὀρθῶν παραλληλεπιπέδων κατασκευαζομένων τῇ τομῇ εὐθείας ἴσης α.

Ὅταν $\mu=\nu=1$, $x=\frac{1}{2}\alpha$. Ἄρα, *τὸ μέγιστον τῶν ὀρθογωνίων, τῶν συγκροτουμένων ὑπὸ δύο τμημάτων εὐθείας ἴσης α, ἔσεται ὅταν τὰ τμήματα ὦσιν ἰσάλληλα ἤτοι τὸ τετράγωνον.*

145. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Ἐπὶ εὐθείας δοθείσης, ὡς ὑποτεινούσης, εὑρεῖν τὸ μέγιστον τῶν δυναμένων συσταθῆναι τριγώνων ὀρθογωνίων.*

Καλοῦμεν α τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν· x τὴν ἑτέραν τῶν πλευρῶν τοῦ ζητουμένου τριγώνου· ἡ ἑτέρα ἔσεται $\sqrt{\alpha^2 - x^2}$. Τὸ ἐμβαδὸν δὲ τοῦ τριγώνου ἐμφαίνει τὴν συνέκθεσιν ἧς τὸ μέγιστον ζητεῖται· ἤτοι

$$\psi = \frac{x}{2}\sqrt{\alpha^2 - x^2}.$$

Διαφορίζοντες λαμβάνομεν

$$\frac{\delta\psi}{\delta x} = \frac{(\alpha^2 - 2x^2)x}{\sqrt{\alpha^2x^2 - x^4}}, \quad \text{ὅθεν} \quad x = 0 \quad \text{καὶ} \quad x = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}.$$

Ἡ πρώτη τιμὴ τῆς x εἶναι ἄχρηστος. Ἡ δευτέρα δείκνυσιν ὅτι τὸ ζητούμενον τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

Εὑρίσκομεν προσέτι $\quad \dfrac{\delta^2\psi}{\delta x^2} = -\dfrac{4x^2}{\sqrt{\alpha^2x^2 - x^4}}.$

Ἡ μορφὴ τοῦ ἐξαγομένου τούτου δείκνυσιν ὅτι τὸ ζητούμενον μέγιστον συστοιχεῖ τῇ τιμῇ $x = \dfrac{\alpha}{\sqrt{2}}$.

146. Ὅταν ἡ συνέκθεσις ψ δίδηται συνεπτυγμένως ἐξισώσει τινί, $\Sigma(x, \psi) = 0$, ἐξισοῦμεν τῷ μηδενὶ τὸν διαφορικὸν αὐτῆς συντελεστὴν, ὃν μορφοῦμεν κατὰ τοὺς γνωστοὺς κανόνας [53]. Ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{\delta\psi}{\delta x} = 0$ ἔσεται περιεκτικὴ x καὶ ψ. Ἀλλὰ τῇ ἀπαλοιφῇ τῆς ψ μεταξὺ τῆς ἐξισώσεως ταύτης καὶ τῆς $\Sigma(x, \psi) = 0$, λαμβάνομεν τρίτην εἰς x μόνην, ἐξ ἧς πορίζόμεθα τὰς ζητουμένας τιμάς.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\quad \psi^2 - 2\mu x\psi + x^2 - \alpha^2 = 0$·

ἧς ἡ διαφορικὴ $\quad (\psi - \mu x)\delta\psi - (\mu\psi - x)\delta x = 0,$

δίδει $\quad \dfrac{\delta\psi}{\delta x} = \dfrac{\mu\psi - x}{\psi - \mu x}, \quad$ ὅθεν $\quad \mu\psi - x = 0.$

Ἵνα λάβωμεν τὴν τιμὴν τῆς x, συνδυάζομεν τὴν τελευταίαν τῇ προτεθείσῃ ἐξισώσει καὶ ἔχομεν·

$$\psi = \frac{x}{\mu}, \qquad \frac{x^2}{\mu^2} - x^2 - \alpha^2 = 0.$$

Καὶ $\quad x = \dfrac{\pm\mu\alpha}{\sqrt{1 - \mu^2}}, \qquad \psi = \dfrac{\pm\alpha}{\sqrt{1 - \mu^2}}.$

Ἐξετάσωμεν ἤδη τί γίνεται ὁ τῆς δευτέρας τάξεως διαφορικὸς συντελεστής. Ἡ δευτέρα διαφορικὴ ἐξίσωσις τῆς προτεθείσης εἶναι ἡ ἑξῆς·

$$(\psi - \mu x)\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} + \left(\frac{\delta\psi}{\delta x}\right)^2 - 2\mu\frac{\delta\psi}{\delta x} + 1 = 0,$$

ἥτις, συνεπείᾳ τῆς ὑποθέσεως $\dfrac{\delta\psi}{\delta x} = 0$, ἄγεται εἰς ταύτην,

$$(\psi - \mu x)\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} + 1 = 0,$$

ἐξ ἧς συνάγομεν, καθιστῶντες ἀντὶ ψ τὴν εἰς x τιμὴν αὐτῆς,

$$\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} = \frac{-\mu}{x\sqrt{1 - \mu^2}}.$$

Ὑπολείπεται ἤδη ἀντεισάξαι τὴν τιμὴν τῆς x. Εὑρίσκομεν οὕτως

$$\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} = \mp\frac{1}{\alpha\sqrt{1 - \mu^2}},$$

ἐξαγόμενα, δεικνύοντα ὅτι αἱ ἀνωτέρω ὁρισθεῖσαι τιμαὶ τῆς ψ εἰσὶν ἡ μὲν μέγιστον ἡ δὲ ἐλάχιστον.

147. Ἐν γένει, θεωρήσωμεν συνέκθεσιν συνδεομένην

μετὰ $\mu - 1$ μεταβλητῶν $\mu - 1$ ἐξισώσεσιν. Ὅπως δ' ἐξηγηθῶμεν σαφέστερον, ἔστω ὅτι ἔχομεν

$$(1)\quad \Sigma(\upsilon,x,\psi,\omega)=0,\quad \Sigma_1(\upsilon,x,\psi,\omega)=0,\quad \Sigma_2(\upsilon,x,\psi,\omega)=0,$$

τῆς μὲν x οὔσης μεταβλητῆς ἀνεξαρτήτου, τῶν δὲ υ, ψ, ω, συνεκθέσεων ταύτης. Ζητήσωμεν ἰδίως τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῆς συνεκθέσεως ω. Διαφορίζοντες τὰς ἐξισώσεις (1) λαμβάνομεν,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\delta\Sigma}{\delta\upsilon}\frac{\delta\upsilon}{\delta x}+\frac{\delta\Sigma}{\delta x}+\frac{\delta\Sigma}{\delta\psi}\frac{\delta\psi}{\delta x}+\frac{\delta\Sigma}{\delta\omega}\frac{\delta\omega}{\delta x}=0,\\
&\frac{\delta\Sigma_1}{\delta\upsilon}\frac{\delta\upsilon}{\delta x}+\frac{\delta\Sigma_1}{\delta x}+\frac{\delta\Sigma_1}{\delta\psi}\frac{\delta\psi}{\delta x}+\frac{\delta\Sigma_1}{\delta\omega}\frac{\delta\omega}{\delta x}=0,\\
&\frac{\delta\Sigma_2}{\delta\upsilon}\frac{\delta\upsilon}{\delta x}+\frac{\delta\Sigma_2}{\delta x}+\frac{\delta\Sigma_2}{\delta\psi}\frac{\delta\psi}{\delta x}+\frac{\delta\Sigma_2}{\delta\omega}\frac{\delta\omega}{\delta x}=0.
\end{aligned}\right.$$

Διὰ τῶν ἐξισώσεων τούτων ἀπαλείφομεν $\frac{\delta\upsilon}{\delta x}$ καὶ $\frac{\delta\psi}{\delta x}$, τὴν δὲ προκύπτουσαν τιμὴν τοῦ $\frac{\delta\omega}{\delta x}$ ἐξισοῦμεν τῷ μηδενί. Ἢ ἁπλούστερον, παραλείπομεν ἐκ τῶν ἐξισώσεων (2) τοὺς περιέχοντας $\frac{\delta\omega}{\delta x}$ ὅρους, εἶτα ἐκτελοῦμεν τὴν ἀπαλοιφὴν ἐπὶ τῶν προκυπτουσῶν νέων ἐξισώσεων, αἵτινες εἰσί,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\delta\Sigma}{\delta\upsilon}\frac{\delta\upsilon}{\delta x}+\frac{\delta\Sigma}{\delta x}+\frac{\delta\Sigma}{\delta\psi}\frac{\delta\psi}{\delta x}=0,\\
&\frac{\delta\Sigma_1}{\delta\upsilon}\frac{\delta\upsilon}{\delta x}+\frac{\delta\Sigma_1}{\delta x}+\frac{\delta\Sigma_1}{\delta\psi}\frac{\delta\psi}{\delta x}=0,\\
&\frac{\delta\Sigma_2}{\delta\upsilon}\frac{\delta\upsilon}{\delta x}+\frac{\delta\Sigma_2}{\delta x}+\frac{\delta\Sigma_2}{\delta\psi}\frac{\delta\psi}{\delta x}=0,
\end{aligned}\right.$$

καὶ λαμβάνομεν ἐξίσωσίν τινα, ὡς

$$\Sigma_3(\upsilon,\ x,\ \psi,\ \omega)=0,$$

ἥτις συνδυαζομένη ταῖς (1) ὁρίσει τὰς τιμὰς τῶν υ, x, ψ, ω, δυναμένας συστοιχεῖν μεγίστῳ ἢ ἐλαχίστῳ τῆς συνεκθέσεως ω.

Διαφορίζομεν ἐκ νέου τὰς ἐξισώσεις (2) καὶ λαμβάνομεν τὴν τιμὴν τοῦ $\frac{\delta^2\omega}{\delta x^2}$, ἐν ᾗ ἀντεισάγομεν τὰς εὑρεθείσας τιμὰς τῶν υ, x, ψ, ω· ἐκ τοῦ σημείου δὲ τοῦ ἐξαγομένου εἰκάζομεν ἐὰν ὑπάρχῃ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον. Ἐν περιπτώσει καθ' ἣν εὑρίσκομεν $\frac{\delta^2\omega}{\delta x^2}=0$, ζητητέον τὰς ἐφεξῆς παραγομένας τῆς ω ὡς πρὸς x, καὶ ἐφαρμοστέον τὴν προηγουμένην θεωρίαν.

148. Ἕπονται διάφοροι προτάσεις πρὸς ἄσκησιν.

Εὑρεῖν τῶν ἑξῆς συνεκθέσεων τὰ μέγιστα ἢ τὰ ἐλάχιστα.

1) x^x. *Ἐλάχιστον διδόμενον* τῇ $x=\frac{1}{e}$.

2) $\frac{\alpha^x}{x}$. *Ἐλάχιστον* $x=\frac{1}{\lambda\alpha}$.

3) $\frac{x^\alpha}{e^x}$. *Μέγιστον* $x=\alpha$.

4) $e^x+2\sigma\upsilon\nu x+e^{-x}$. *Ἐλάχιστον* $x=0$.

5) *Εὑρεῖν τὸν ἀριθμὸν οὗτινος ὁ λόγος πρὸς τὸν νεπεριανὸν αὐτοῦ λογάριθμον εἴη ἐλάχιστον.*

Ἀπ. $x=e$.

6) *Εὑρεῖν τὸν ἀριθμὸν* x *οὗτινος ἡ τοῦ βαθμοῦ* x *ῥίζα εἴη μέγιστον.*

Ἀπ. $x=e$.

7) *Εὑρεῖν τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον τοῦ κλάσματος*

$$\frac{x}{1+x^2}.$$

Ἀπ. $x=+1$, *συστοιχεῖ μεγίστῳ·* $x=-1$, *ἐλαχίστῳ.*

8) *Εὑρεῖν τὸ μέγιστον τῆς συνεπτυγμένης συνεχθέσεως* $\psi^3 - 3\alpha\psi x + x^3 = 0$, *(φύλλον τοῦ Καρτεσίου).*

'Απ. $\psi = \alpha\sqrt[3]{4}$, $x = \alpha\sqrt[3]{2}$, *συστοιχοῦσι μεγίστῳ.*

9) *Εὑρεῖν τὴν μεγίστην καὶ τὴν ἐλαχίστην τῶν τεταγμένων ἐν τῷ κύκλῳ, ἐμφαινομένῳ ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως*

$$\psi^2 + x^2 + \alpha\psi + \beta x + \gamma = 0.$$

'Απ. *Αἱ ζητούμεναι τεταγμέναι συστοιχοῦσι τῇ τετμημένῃ* $x = -\dfrac{\beta}{2}$.

10) *Κώνῳ ὀρθῷ δοθέντι ἐγγράψαι κύλινδρον οὗ ἡ στερεότης ἐστὶ μεγίστη ἁπάντων τῶν ἐγγραφῆναι δυναμένων.*

'Απ. *Τὸ ὕψος τοῦ ζητουμένου κυλίνδρου ἰσοῦται τῷ τριτημορίῳ τοῦ ὕψους τοῦ κώνου.*

11) *Τόξον* x *εὑρεῖν οὗ τὸ ἡμίτονον εἴη μέγιστον.*

'Απ. $x = 90^\circ$.

12) *Εὑρεῖν τὰς διαστάσεις ἀγγείου κυλινδρικοῦ ἔχοντος τὴν ἐλαχίστην ἐσωτερικὴν ἐπιφάνειαν ἵνα χωρήσῃ ποσότητα ὑγροῦ* Φ.

'Απ. *'Ακτὶς ἐσωτερικὴ τῆς βάσεως τοῦ ἀγγείου* $= \sqrt[3]{\dfrac{\Phi}{\Pi}}$ *= τῷ ἐσωτερικῷ ὕψει αὐτοῦ.*

13) *Εὑρεῖν τὸν μεγίστην κυρτὴν ἐπιφάνειαν ἔχοντα κῶνον, ἁπάντων τῶν σφαίρᾳ δεδομένῃ ἐγγραφομένων.*

'Απ. *Τὸ ὕψος τοῦ κώνου ἰσοῦται δυσὶ τριτημορίοις τῆς σφαιρικῆς διαμέτρου.*

14) *'Απὸ σημείου Γ δοθέντος ἐν τῇ ὀρθῇ γωνίᾳ ΨΑΧ, ἀγαγεῖν εὐθεῖαν ἧς τὸ ὑπὸ τῶν σκελῶν ἀπολαμβανόμενον μέρος ΔΕ εἴη ἐλάχιστον (Σχ. 28).*

'Απ. $BE = x = \sqrt[3]{\alpha\beta^2}$.

15) *Εὐθεῖαν δοθεῖσαν τεμεῖν εἰς δύο οὕτως, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων τῶν μερῶν, ὑπ' ἀλλήλων διαιρουμένων, ᾖ τὸ ἐλάχιστον ἁπάντων τῶν οὕτω μορφουμένων.*

'Απ. *Τὰ δύο μέρη εἰσὶν ἰσάλληλα.*

16) *Κύκλῳ δοθέντι ἐγγράψαι τὸ μέγιστον ἁπάντων τῶν ἐγγραφομένων ὀρθογωνίων.*

'Απ. *Τὸ ζητούμενον σχῆμα εἶναι τετράγωνον.*

17) *Εὑρεῖν τὸ μέγιστον τῶν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως συσταθῆναι δυναμένων τριγώνων ἰσοπεριμέτρων.*

'Απ. *Αἱ ζητούμεναι δύο πλευραὶ εἰσὶν ἰσάλληλοι.*

18) *Δίδεται μοχλὸς οὗ τὸ ὑπομόχλιον εἶναι* A *καὶ ἐφ' ὃν ἐνεργεῖ πρὸς ὀρθὰς δύναμις* Λ *γνωστή, ἐν ἀποστάσει* $AB = \alpha$. *Τὸ τοῦ μοχλοῦ βάρος εἶναι* β *κατὰ μονάδα τοῦ μήκους αὐτοῦ. Εὑρεῖν τὸ σημεῖον ἐφ' ὃ ἐφαρμοσθήσεται δύναμις* X *ἐλαχίστη ἰσοῤῥοπίαν ἀποτελοῦσα* (Σχ. 29).

'Απ. $AK = x = \sqrt{\dfrac{2\Lambda\alpha}{\beta}}$.

19) *'Απάντων τῶν κλασμάτων* x *εὑρεῖν τὸ τὴν μεγίστην διαφορὰν ἔχον ἀπὸ τῆς* $\mu^{\text{ης}}$ *αὐτοῦ δυνάμεως.*

'Απ. $x = \sqrt[\mu-1]{\dfrac{1}{\mu}}$.

20) *Μεταξὺ δύο φωτοβόλων σημείων εὑρεῖν τὸ ἧττον φωτιζόμενον σημεῖον τῆς ζευγνυούσης αὐτὰ εὐθείας.*

Καλοῦμεν α τὴν ἀπ' ἀλλήλων τῶν δύο φώτων ἀπόστασιν, μ^2 καὶ ν^2 τὴν ἔντασιν αὐτῶν κατὰ μονάδα ἀποστάσεως, καὶ x τὸ ἀπὸ τοῦ πρώτου φωτὸς ἀπόστημα τοῦ ζητουμένου σημείου.

'Απ. $x = \dfrac{\alpha\sqrt[3]{\mu^2}}{\sqrt[3]{\mu^2} + \sqrt[3]{\nu^2}}$.

21) *Εὑρεῖν τὸ μέγιστον τῶν ὑπὸ δύο πλευρῶν δεδομένων, τῆς τρίτης οὔσης κατὰ βούλησιν, συγκροτουμένων τριγώνων.*

Ἀπ. *Τὸ ζητούμενον τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον.*

22) *Ἐν τῇ ἐλλείψει εὑρεῖν ὁποῖον τὸ περιέχον μείζονα γωνίαν ἁπάντων τῶν συστημάτων διαμέτρων συζυγῶν.*

149. Τὸ πέριξ ἑνὸς σημείου διάστημα δύναται καλυφθῆναι καθ' ὁλοκληρίαν ἢ δι' ἓξ τριγώνων ἰσοπλεύρων, ἢ διὰ τεσσάρων τετραγώνων, ἢ διὰ τριῶν ἑξαγώνων κανονικῶν. Ἁπάντων τῶν σχημάτων τούτων, ὑποτιθεμένων ἰσοπεριμέτρων, τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον περικλείει τὸ μέγιστον χωρίον. Ἄξιον παρατηρήσεως εἶναι ὅτι αἱ μέλισσαι δίδουσι τοῖς κυττάροις αὐτῶν τὸ σχῆμα πρίσματος ἑξαγώνου, μόνου καταλλήλου ἐκπληρῶσαι δύο ὅρους οὐσιώδεις· περικλύσαι μὲν τὸ μέγιστον χωρίον ὑπὸ τὴν αὐτὴν περίμετρον, μὴ ἀφιέναι δὲ ποσῶς κενόν. Ἀλλ' οὐχ ἧττον ἀξιοθαύμαστος εἶναι ὁ τρόπος καθ' ὃν τὰ ζωΰφια ταῦτα σχηματίζουσι τὸν βυθὸν τῶν κυττάρων· ἀείποτε σχεδὸν κλείουσιν αὐτοὺς οὕτως, ὥστε ἐνῷ πρὸς τοῦτο ἔχουσι χρείαν ὅσον ἔνεστιν ὀλιγωτέρου ποσοῦ κηροῦ, διατηροῦσι συγχρόνως τὴν αὐτὴν χωρητικότητα.

(Σχ. 30) Ἔστω τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον πρίσμα ΑΔΑ. Τῇ βάσει ΑΒΓΔΕΖ ἐγγράφομεν τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΓΕ. Ἀπὸ σημείου οἱουδήποτε Η τοῦ ἄξονος προεκβαλλομένου καὶ ἀπὸ τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου τούτου, ἄγομεν τρία ἐπίπεδα ἐξίσου κεκλιμμένα ἐπὶ τὸν ἄξονα τοῦτον, ἅτινα ἀποτέμνουσιν ἀπὸ τοῦ πρίσματος τὰς τρεῖς κορυφὰς Β, Δ, Ζ. Οὕτω, τὸ πρίσμα, ἀνθ' ἑνὶ μετώπῳ ἑξαγώνῳ, περατοῦται τρισὶ ῥόμβοις ἴσοις τῷ ΠΑΙΓ. Δῆλον προσέτι, ὅτι οἱαδήποτε ἂν ᾖ ἡ κλίσις τῶν ῥόμβων τούτων, ἡ χωρητικότης τοῦ κυττάρου ἔσεται ἀείποτε ἡ αὐτή· διότι ἑκάτερος αὐτῶν ἀφαιρεῖ ἀπὸ τοῦ πρίσματος ὄγκον ἴσον τῷ προστιθεμένῳ. Ὅσον ἀφορᾷ τὴν ὅλην ἐπιφάνειαν τοῦ κυττάρου, αὕτη μεταβάλλεται σὺν τῇ κλίσει ΗΠΟ τῶν πυθμένων ἐπὶ τὴν βάσιν ΑΒΓΔΕΖ. Ζητεῖται ἤδη εὑρεῖν ὁποία πρέπει νὰ ἦναι ἡ κλίσις αὕτη

ὅπως ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος μετὰ τῶν πυθμένων αὐτοῦ ᾖ ἐλαχίστη.

Δηλοῦμεν θ τὴν γωνίαν ΗΠΟ· λαμβάνομεν ὡς μονάδα μήκους τὴν τοῦ ἑξαγώνου πλευράν. Ἔστω δὲ α τὸ μῆκος τοῦ ἄξονος ἢ τῆς πλευρᾶς ΓΑ. Ἐν τῷ ῥόμβῳ ΠΑΙΓ ἔχομεν ΠΙ $=$ ΠΗ. Ἐν δὲ τῷ ῥόμβῳ ΑΒΓΟ ἔχομεν προσέτι

$$\mathrm{B\Pi} = \Pi\mathrm{O}, \quad \mathrm{BO} = \mathrm{B}\Gamma = 1, \quad \mathrm{A}\Gamma = \sqrt{3}.$$

Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΠΙ δίδει

$$\Pi\mathrm{I} = \frac{\mathrm{B\Pi}}{\text{συν}\,\theta} = \frac{\mathrm{BO}}{2\,\text{συν}\,\theta} = \frac{1}{2\,\text{συν}\,\theta}, \qquad \mathrm{BI} = \mathrm{B\Pi}\,\text{εφ}\,\theta = \tfrac{1}{2}\,\text{εφ}\,\theta.$$

Ἄρα $\qquad \mathrm{IK} = \mathrm{BK} - \mathrm{BI} = \alpha - \frac{1}{2}\,\text{εφ}\,\theta.$

Ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου $\mathrm{IKA}\Gamma = \frac{1}{2}\left(2\alpha - \frac{1}{2}\,\text{εφ}\,\theta\right)$.

Τὸ ἐμβαδὸν τῶν ἓξ τραπεζίων ὁμοῦ, ἢ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυττάρου, ἰσοῦται $3\left(2\alpha - \frac{1}{2}\,\text{εφ}\,\theta\right)$.

Ἀλλὰ $\qquad \mathrm{IH} = 2\,\Pi\mathrm{I} = \dfrac{1}{\text{συν}\,\theta}. \qquad$ ἄρα

ἐμβαδὸν τοῦ ῥόμβου $\Pi\mathrm{AI}\Gamma = \mathrm{A}\Gamma \times \Pi\mathrm{I} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\,\text{συν}\,\theta}.$

Οὕτως οἱ τρεῖς ῥόμβοι ἰσοῦνται $\dfrac{3\sqrt{3}}{2\,\text{συν}\,\theta}$. Ἑπομένως, καλοῦντες Ω ἅπασαν τὴν τοῦ κυττάρου κυρτὴν ἐπιφάνειαν μετὰ τῶν πυθμένων αὐτοῦ, ἔχομεν

$$\Omega = 3\left(2\alpha - \tfrac{1}{2}\,\text{εφ}\,\theta\right) + \frac{3\sqrt{3}}{2\,\text{συν}\,\theta}.$$

Αὕτη δὲ εἶναι ἡ συνέκθεσις ἧς ζητεῖται τὸ ἐλάχιστον. Ἐξ αὐτῆς ἔχομεν

$$\frac{\delta\Omega}{\delta\theta} = -\tfrac{3}{2}\,\frac{1}{\text{συν}^2\theta} + \tfrac{3}{2}\,\sqrt{3}\,.\,\frac{\text{ημ}\,\theta}{\text{συν}^2\theta} = 0. \qquad \text{Ὅθεν}$$

$\sqrt{3}\,.\,\text{ἡμ}\,\theta - 1 = 0,\quad \text{ἡμ}\,\theta = \sqrt{\tfrac{1}{3}},\quad$ καὶ $\quad \theta = 35^\circ\ 16'.$

Ἐκ τοῦ $\quad \text{ἡμ}.\,\theta = \sqrt{\tfrac{1}{3}},\quad$ συνάγομεν

$$\text{συν}\,\theta = \sqrt{\tfrac{2}{3}},\quad \text{ἐφ}\,\theta = \sqrt{\tfrac{1}{2}},\quad \text{ΠΙ} = \text{ΙΙΠ} = \frac{1}{2\,\text{συν}\,\theta} = \sqrt{\tfrac{3}{8}}.$$

Προσέτι $\quad \text{ΑΠ} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3},\quad \text{ΑΙ} = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}.$

Τὸ δὲ τρίγωνον $\quad$ ΠΑΙ $\quad$ δίδει $\quad \text{ἐφ}\,\text{ΠΑΙ} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}.$

Ἄρα, $\quad$ ἐπειδὴ $\quad \text{ἐφ}\,\theta = \sqrt{\tfrac{1}{2}},\quad$ ἔχομεν

$$\text{ΠΑΙ} = \text{ΗΑΓ} = \text{ΗΠΟ} = \theta,\quad \text{ΗΑΙ} = \text{ΙΓΗ} = 2\theta = 70^\circ\ 32',$$

$$\text{ΑΗΓ} + \text{ΑΙΓ} = 360^\circ - 2\text{ΗΑΙ} = 218^\circ\ 56',$$

$$\text{ΑΗΓ} = \text{ΑΙΓ} = 109^\circ\ 28'.$$

Τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα εὑρέθησαν σύμφωνα πρὸς καταμετρήσεις πλείστων κυττάρων· δεικνύουσι δὲ ἐν τῇ φύσει, ὡς λέγουσιν οἱ σοφοὶ ἄνδρες, οἰκονομίαν καὶ ἁπλότητα μέσων, πλοῦτον καὶ ποικιλίαν ἀνεξάντλητον κατὰ τὰ ἀποτελέσματα, ὡς ἄπειρος ἐστὶ καὶ ἡ σοφία τοῦ Δημιουργοῦ τοῦ παντός.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω εὑρεθείσης ἐκθέσεως τοῦ $\dfrac{\delta\Omega}{\delta\theta}$, συνάγομεν·

$$\frac{\delta^2\Omega}{\delta\theta^2} = -3\,\frac{\text{ἡμ}.\theta}{\text{συν}^3\theta} + 3\,\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{\text{συν}\,\theta} + 2\,\frac{\text{ἡμ}^2\,\theta}{\text{συν}^3\,\theta}\right).$$

Ἐὰν δὲ ἀντεισάξωμεν ἀντὶ ἡμ.θ, συνθ, τὰς ἀμοιβαίας τιμὰς αὐτῶν, θέλομεν ἰδεῖ ὅτι ὁ δευτεροταγὴς οὗτος διαφορικὸς συντελεστὴς ἀποκαθίσταται θετικός.

150. Αἱ αὐταὶ ἀρχαὶ περὶ μεγίστων καὶ ἐλαχίστων τῶν συνεκθέσεων μιᾶς μεταβλητῆς ἀνεξαρτήτου ἐφαρμόζονται καὶ ἐπὶ συνεκθέσεων ἐκ δύο μεταβλητῶν συγκροτουμένων. Ἔστω

$$\omega = \Sigma(x,\ \psi).$$

Ἀναπτυσσομένης $\Sigma(x+\theta,\ \psi+\tau)$ κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Τάϋλορ λαμβάνομεν,

$$\Sigma(x+\theta,\ \psi+\tau) = \omega + \frac{\delta\omega}{\delta x}\theta + \frac{\delta^2\omega}{\delta x^2}\frac{\theta^2}{2} + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{\delta\omega}{\delta\psi}\tau + \frac{\delta^2\omega}{\delta x\delta\psi}\theta\tau$$
$$+ \frac{\delta^2\omega}{\delta\psi^2}\frac{\tau^2}{2}$$

Ἐὰν $\dfrac{\delta\omega}{\delta x}$ καὶ $\dfrac{\delta\omega}{\delta\psi}$ διαφέρωσι μηδενός, λαμβάνοντες θ καὶ τ ὅσον ἔνεστι σμικράς, κατορθοῦμεν ὅπως τὸ δεύτερον μέλος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τοῦ σημείου τοῦ δευτέρου ὅρου μόνου $\dfrac{\delta\omega}{\delta x}\theta + \dfrac{\delta\omega}{\delta\psi}\tau$. Ἄρα, ὅπως συστοιχῶσιν αἱ τιμαὶ $x=\alpha$, $\psi=\beta$, μεγίστῳ ἢ ἐλαχίστῳ τῆς συνεκθέσεως $\Sigma(x,\psi)$, ὅτε ἀπαιτεῖται τὴν $\Sigma(\alpha,\beta)$ εἶναι μείζονα ἢ ἐλάσσονα τῆς $\Sigma(\alpha\pm\theta,\ \beta\pm\tau)$, ἀναγκαίως ὁ ὅρος $\dfrac{\delta\omega}{\delta x}\theta + \dfrac{\delta\omega}{\delta\psi}\tau$ πρέπει νὰ ἦναι μηδέν, καὶ ἐπομένως, ἐπειδὴ αἱ ποσότητες θ καὶ τ οὐδόλως ἀπ' ἀλλήλων ἐξαρτῶνται, νὰ ἔχωμεν ἰδίᾳ

$$\frac{\delta\omega}{\delta x} = 0,\qquad \frac{\delta\omega}{\delta\psi} = 0.$$

Προσέτι, δίδοντες οἱανδήποτε τιμήν, ὅσον βουλόμεθα ἐλάσσονα, ταῖς αὐξήσεσι θ καὶ τ, ἡ ποσότης

$$\frac{\delta^2\omega}{\delta x^2}\frac{\theta^2}{2} + \frac{\delta^2\omega}{\delta x\delta\psi}\theta\tau + \frac{\delta^2\omega}{\delta\psi^2}\frac{\tau^2}{2},$$

πρέπει, μεγίστου μὲν ὑπάρχοντος νὰ μένῃ πάντοτε ἀρνητική, ἐλαχίστου δὲ θετική. Ὑποθέσωμεν πρῶτον ὅτι τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{\delta^2\omega}{\delta x^2}\frac{\theta^2}{\tau^2} + 2\,\frac{\delta^2\omega}{\delta x\delta\psi}\frac{\theta}{\tau} + \frac{\delta^2\omega}{\delta\psi^2} = 0,$$

ἐπιλυομένης κατὰ τὴν ἀόριστον $\frac{0}{\tau}$, αἱ ῥίζαι εἰσὶ φανταστικαί· ἤτοι ὅτι ἔχομεν τὴν σχέσιν,

$$\left(\frac{\delta^2\omega}{\delta x\delta\psi}\right)^2 < \frac{\delta^2\omega}{\delta x^2}\ \frac{\delta^2\omega}{\delta\psi^2},$$

ἥτις δὲν ἐκπληροῦται ἢ ὅταν $\frac{\delta^2\omega}{\delta x^2}$ καὶ $\frac{\delta^2\omega}{\delta\psi^2}$ ἔχωσι τὸ αὐτὸ σημεῖον. Τότε ἡ ποσότης

$$\frac{\delta^2\omega}{\delta x^2}\frac{\theta^2}{2} + \frac{\delta^2\omega}{\delta x\delta\psi}\theta\tau + \frac{\delta^2\omega}{\delta\psi^2}\frac{\tau^2}{2},$$

οὔτε καθίσταται ποτὲ μηδέν, οὔτε ἀλλάσσει σημεῖον, ἀλλὰ διατηρεῖ μονίμως τὸ τοῦ πρώτου αὐτῆς ὅρου $\frac{\delta^2\omega}{\delta x^2}$. Λοιπόν, μέγιστον μὲν ὑπάρχει ἐὰν ὁ συντελεστὴς $\frac{\delta^2\omega}{\delta x^2}$ ἦναι ἀρνητικός, ἐλάχιστον δὲ ἐὰν θετικός. Ἐὰν ὅμως ἔχωμεν

$$\left(\frac{\delta^2\omega}{\delta x\delta\psi}\right)^2 > \frac{\delta^2\omega}{\delta x^2}\ \frac{\delta^2\omega}{\delta\psi^2},$$

αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{\delta^2\omega}{\delta x^2}\frac{\theta^2}{\tau^2} + 2\frac{\delta^2\omega}{\delta x\delta\psi}\frac{\theta}{\tau} + \frac{\delta^2\omega}{\delta\psi^2} = 0,$$

ἔσονται πραγματικαὶ καὶ ἄνισαι· ἐπομένως ἡ ποσότης

$$\frac{\delta^2\omega}{\delta x^2}\frac{\theta^2}{2} + \frac{\delta^2\omega}{\delta x\delta\psi}\theta\tau + \frac{\delta^2\omega}{\delta\psi^2}\frac{\tau^2}{2},$$

ποτὲ μὲν καθίσταται θετική, ποτὲ δὲ ἀρνητική. Ἄρα, οὔτε μέγιστον οὔτε ἐλάχιστον ὑπάρχει.

Ἀλλ' ἡ περίπτωσις καθ' ἣν

$$\left(\frac{\delta^2\omega}{\delta x\delta\psi}\right)^2 = \frac{\delta^2\omega}{\delta x^2}\ \frac{\delta^2\omega}{\delta\psi^2},$$

χρῄζει ἰδίας διασκοπήσεως. Τότε τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{\delta^2\omega}{\delta x^2}\frac{\theta^2}{\tau^2} + 2\frac{\delta^2\omega}{\delta x\delta\psi}\frac{\theta}{\tau} + \frac{\delta^2\omega}{\delta\psi^2} = 0$$

αἱ ῥίζαι ἔσονται ἴσαι. Καλοῦντες μ τὸν λόγον τοῦ $\frac{\delta^2\omega}{\delta x\delta\psi}$ πρὸς $\frac{\delta^2\omega}{\delta x^2}$, ἔχομεν

$$\frac{\delta^2\omega}{\delta x^2}\frac{\theta^2}{2} + \frac{\delta^2\omega}{\delta x\delta\psi}\theta\tau + \frac{\delta^2\omega}{\delta\psi^2}\frac{\tau^2}{2} = \tfrac{1}{2}\frac{\delta^2\omega}{\delta x^2}(\theta + \mu\tau)^2.$$

Ἄρα, ἡ ποσότης $\frac{\delta^2\omega}{\delta x^2}\frac{\theta^2}{2} + \frac{\delta^2\omega}{\delta x\delta\psi}\theta\tau + \frac{\delta^2\omega}{\delta\psi^2}\frac{\tau^2}{2}$ ἔχει ἐν γένει τὸ αὐτὸ τοῦ $\frac{\delta^2\omega}{\delta x^2}$ σημεῖον, καὶ δὲν μηδενίζεται ἢ ὅταν $\theta = -\mu\tau$. Τότε ὑπάρχει μέγιστον ἢ ἐλάχιστον, ἐὰν ἡ ὑπόθεσις $\theta = -\mu\tau$ μηδενίζῃ τὴν ὁμάδα τῶν ὅρων τῆς τρίτης τάξεως μεταδίδουσα τὸ τοῦ $\frac{\delta^2\omega}{\delta x^2}$ σημεῖον τῇ ὁμάδι τῶν ὅρων τῆς τετάρτης τάξεως. Ταῖς μὲν ἀρνητικαῖς τιμαῖς τοῦ $\frac{\delta^2\omega}{\delta x^2}$ συστοιχεῖ μέγιστον, ταῖς δὲ θετικαῖς ἐλάχιστον.

151. Ἐὰν αἱ τιμαὶ α καὶ β, αἱ ἀποκαθιστῶσαι μηδὲν τοὺς ὅρους τῆς πρώτης τάξεως, ἀφανίζωσι καὶ τοὺς τῆς δευτέρας, δῆλον ὅτι δὲν δύνανται συστοιχεῖν μεγίστῳ ἢ ἐλαχίστῳ ἢ ὅταν ἐπίσης ἀφανίζωσι τοὺς ὅρους τῆς τρίτης τάξεως, οὐχὶ δὲ καὶ τοὺς τῆς τετάρτης. Πρὸς τούτοις, πρέπει τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τούτων τῆς τετάρτης τάξεως νὰ διατηρῇ μονίμως τὸ σημεῖον $-$ ὅπως ὑπάρχῃ μέγιστον, ἢ τὸ σημεῖον $+$ ὅπως ὑπάρχῃ ἐλάχιστον. Καὶ οὕτω καθεξῆς.

152. Τὰ προαποδοθέντα ἐξαγόμενα καθίστανται ἐπαισθητὰ ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν συνέκθεσιν ω ὡς τεταγμένην ἐπιφανείας ἧς x καὶ ψ εἰσὶ τετμημέναι. Ὅταν ἡ συνέκθεσις ω καὶ αἱ παραγόμεναι αὐτῆς ὦσι συνεχεῖς, ἐννοοῦμεν τῷ ὄντι ἀμέσως ὅτι, ἀδύνατον ὑπάρχειν μέγιστον ἢ ἐλάχιστον κατὰ σημεῖον δοθὲν τῆς ἐπιφανείας, ἢ ὅταν αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν δύο τομῶν ταύτης, γινομένων κατὰ τὸ σημεῖον τοῦτο ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων τοῖς ΧΩ καὶ ΨΩ, ὦσι παράλληλοι τῷ ἐπιπέδῳ ΧΨ· ὥστε, τὸ ἐπίπεδον ὅπερ ἐφάπτεται τῆς ἐπιφανείας κατὰ τὸ περὶ οὗ λόγος σημεῖον, εἶναι καὶ αὐτὸ παράλληλον τῷ ΧΨ. Ἡ πρώτη αὕτη συνθήκη δίδει τὰς ἐξισώσεις $\frac{\delta\omega}{\delta x}=0$, $\frac{\delta\omega}{\delta\psi}=0$. Προσέτι, ἀμφότεραι αἱ ἄνω ῥηθεῖσαι καμπύλαι τῶν τομῶν πρέπει τὰ στρέφωσι τὰ κοῖλα αὐτῶν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος· ἄρα ἀπαιτεῖται νὰ ἔχωσιν οἱ διαφορικοὶ συντελεσταὶ $\frac{\delta^2\omega}{\delta x^2}$, $\frac{\delta^2\omega}{\delta\psi^2}$, τὸ αὐτὸ σημεῖον. Ἀλλ' ἡ τελευταία αὕτη συνθήκη μόνη δὲν ἐπαρκεῖ ἐν γένει ὅπως γνωσθῇ μετὰ βεβαιότητος ἡ ὕπαρξις τοῦ μεγίστου ἢ τοῦ ἐλαχίστου· σὺν ταύταις προσληπτέον καὶ τὰς ἀνωτέρω δοθείσας.

153. Οἱ αὐτοὶ κανόνες ἐφαρμόζονται καὶ ἐπὶ συνεκθέσεων ἐκ πλειόνων μεταβλητῶν ἀνεξαρτήτων συγκροτουμένων· ἀλλ' αἱ συνθῆκαι τῆς ὑπάρξεως τοῦ μεγίστου ἢ τοῦ ἐλαχίστου εἰσὶ μᾶλλον πολύπλοκοι.

154. Πρὸς ἐφαρμογὴν τῶν προαποδοθέντων κανόνων τεθείσθω τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Εὑρεῖν τὴν ἐλαχίστην ἢ τὴν μεγίστην ἁπασῶν τῶν εὐθειῶν ἀγομένων ἀπὸ σημείου δοθέντος ἐπὶ καμπύλην δοθεῖσαν.

Ἔστωσαν, α, ϐ, αἱ συντεταγμέναι τοῦ δοθέντος σημείου x, ψ, αἱ τοῦ τυχόντος τῆς καμπύλης. Ἡ ἔκθεσις τοῦ μήκους τῶν περὶ ὧν ὁ λόγος γραμμῶν ἔσεται

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(\psi-\beta)^2}.$$

Πρόκειται ὁρίσαι τὴν τιμὴν τῆς x τῇ συνθήκῃ τοῦ ἀποκαθι-

στᾶν τὴν ἔκθεσιν ταύτην μεγίστην ἢ ἐλαχίστην. Διαφορίζοντες πρὸς x εὑρίσκομεν

$$\frac{x-\alpha+(\psi-\beta)\frac{\delta\psi}{\delta x}}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(\psi-\beta)^2}}.$$

Ἐξισοῦντες δὲ μηδενὶ τὸν διαφορικὸν τοῦτον συντελεστήν,

$$x-\alpha+(\psi-\beta)\frac{\delta\psi}{\delta x}=0,\quad \text{ὅθεν}\quad \frac{\psi-\beta}{x-\alpha}=-\frac{1}{\frac{\delta\psi}{\delta x}}.$$

Ἐπειδὴ $\frac{\delta\psi}{\delta x}$ ἐμφαίνει τὴν τριγωνομετρικὴν ἐφαπτομένην τῆς περιεχομένης γωνίας ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης καὶ τοῦ ἄξονος τῶν x, δῆλον ἐκ τοῦ ἐξαγομένου τούτου, ὅτι αἱ ἐλάχισται ἢ αἱ μέγισται γραμμαί, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου ἐπὶ τὴν καμπύλην ἀγόμεναι, τέμνουσι ταύτην πρὸς ὀρθάς.

Λάβωμεν ἤδη τὸν διαφορικὸν συντελεστὴν τῆς δευτέρας τάξεως·

$$\frac{1+\left(\frac{\delta\psi}{\delta x}\right)^2+(\psi-\beta)\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(\psi-\beta)^2}}-\frac{\left[(x-\alpha)+(\psi-\beta)\frac{\delta\psi}{\delta x}\right]^2}{[(x-\alpha)^2+(\psi-\beta)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Παραλείποντες τὸν δεύτερον ὅρον, ἀφανιζόμενον συνεπείᾳ τῆς ἀνωτέρω τεθείσης ἐξισώσεως, βλέπομεν ὅτι τὸ σημεῖον τοῦ διαφορικοῦ συντελεστοῦ τούτου ἐξαρτᾶται ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς ποσότητος

$$1+\left(\frac{\delta\psi}{\delta x}\right)^2+(\psi-\beta)\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}.$$

Ὑποθέσωμεν $\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}$ θετικόν· ἤτοι τὴν καμπύλην στρέφουσαν τὰ κυρτὰ αὐτῆς πρὸς τὰ κάτω τοῦ πίνακος. Ἡ προηγουμένη ποσότης ἔσεται πάντοτε θετικὴ ἐὰν ἡ διαφορὰ ψ — ϐ ἦναι θετική· ἤτοι εἰ τὸ δοθὲν σημεῖον Σ (Σχ. 31) κεῖται ἐγγύτερον τοῦ ἄξονος τῶν x ἢ τὸ σημεῖον Μ τῆς καμπύλης πρὸς ὃ ἡ κάθετος διευθύνεται. Ὅθεν ἕπεται ὅτι, τὸ ἀπόστημα ΣΜ, ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, ἔσεται ἀείποτε ἐλάχιστον, ὅπερ σαφές. Ἀλλ' ἐάν, $\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}$ ὑποτιθεμένου πάντοτε θετικοῦ, ἡ διαφορὰ $\psi - \beta$ ἦναι ἀρνητική, ἤτοι τὸ δοθὲν σημεῖον μᾶλλον ἀπέχῃ τοῦ ἄξονος τῶν x ἢ τὸ Μ, ἡ ποσότης περὶ ἧς ὁ λόγος ἔσεται θετική, καὶ ὑπάρξει ἐλάχιστον ἐὰν τὸ ἀπόστημα

$\beta - \psi$ ἦναι ἔλαττον $\dfrac{1+\left(\dfrac{\delta\psi}{\delta x}\right)^2}{\dfrac{\delta^2\psi}{\delta x^2}}$. ἐνῷ ἡ αὐτὴ ποσότης

ἔσεται ἀρνητικὴ καὶ ὑπάρξει μέγιστον, ἐὰν τὸ ἀπόστημα

$\beta - \psi$ ἦναι μεῖζον $\dfrac{1+\left(\dfrac{\delta\psi}{\delta x}\right)^2}{\dfrac{\delta^2\psi}{\delta x^2}}$.

Ἐν § 196 θέλομεν ἰδεῖ ὅτι ἡ τιμή

$$\beta - \psi = \frac{1+\left(\dfrac{\delta\psi}{\delta x}\right)^2}{\dfrac{\delta^2\psi}{\delta x^2}},$$

συστοιχεῖ σημείῳ τινὶ Κ τῆς καθέτου οὕτω κειμένῳ, ὥστε ὁ γραφόμενος κύκλος, κέντρῳ μὲν τῷ σημείῳ τούτῳ ἀκτῖνι δὲ ΚΜ, ταυτίζεται τῇ προτεθείσῃ καμπύλῃ, ἐν ἀποστάσει ἀπειροστημορίῳ ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου Μ, μᾶλλον ἢ πᾶς ἕτερος κύκλος. Ἄρα, φανερὸν ὅτι τὸ σημεῖον τοῦτο Κ διαχωρίζει ἐπὶ τῆς καθέτου τὰ σημεῖα Σ_1 δι' ἃ ἡ ἀπόστασις Σ_1Μ εἶναι ἐλάχιστον, ἀπὸ τῶν σημείων Σ_2 δι' ἃ ἡ ἀπόστασις Σ_2Μ εἶναι μέγιστον.

Ἡ περίπτωσις καθ' ἣν ὁ διαφορικὸς συντελεστὴς $\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}$ εἶναι ἀρνητικὸς ἐπιδεκτικὴ ἐστὶν ὁμοίων παρατηρήσεων.

155. Ἐν τῇ μερικῇ περιπτώσει καθ' ἣν ἀντὶ προτεθείσης καμπύλης λάβωμεν κύκλον δηλούμενον ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$x^2 + \psi^2 = A^2,$$

εὑρήσομεν τὰς τιμὰς

$$x = \frac{\pm \alpha A}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \qquad \psi = \frac{\pm \beta A}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

Ὅταν α καὶ β ὦσι θετικαί, τὰ μὲν ἀνώτερα σημεῖα συστοιχοῦσιν ἐλαχίστῳ, τὰ δὲ κατώτερα μεγίστῳ, ὡς δείκνυσι τὸ αὐτὸ καὶ τὸ σημεῖον τοῦ δευτέρου διαφορικοῦ συντελεστοῦ. Τὰ δύο σημεῖα εἰσὶν αἱ τομαὶ τοῦ κύκλου πρὸς τὴν ζευγνύουσαν τὸ κέντρον τῷ δοθέντι σημείῳ εὐθεῖαν.

156. Θεωρήσωμεν προσέτι τὴν ἑξῆς πρότασιν.

Ἁπασῶν τῶν δύο σημεῖα δύο καμπύλων δεδομένων ζευγνυουσῶν εὐθειῶν εὑρεῖν τὴν μεγίστην καὶ τὴν ἐλαχίστην.

Ἔστωσαν x, ψ, αἱ συντεταγμέναι σημείου τοῦ τυχόντος τῆς πρώτης καμπύλης· x′, ψ′, αἱ τοῦ τυχόντος ἐπίσης σημείου τῆς δευτέρας. Τὸ μῆκος τῶν περὶ ὧν ὁ λόγος γραμμῶν δηλοῦται ἐν γένει ὑπὸ

$$Z = \sqrt{(x-x')^2+(\psi-\psi')^2}.$$

Τὴν ἔκθεσιν ταύτην θεωρητέον ὡς συνέκθεσιν τῶν δύο ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν x, x′, θεωρουμένης τῆς μὲν ψ ὡς συνεκθέσεως τῆς x μόνης, τῆς δὲ ψ′ ὡς συνεκθέσεως τῆς x′ μόνης. Ἐφαρμόζοντες τοὺς ἐν § 150 κανόνας, ἔχομεν·

$$\frac{\delta Z}{\delta x} = \frac{x - x' + (\psi-\psi')\dfrac{\delta\psi}{\delta x}}{\sqrt{(x-x')^2+(\psi-\psi')^2}}, \quad \frac{\delta Z}{\delta x'} = \frac{x - x' + (\psi-\psi')\dfrac{\delta\psi'}{\delta x'}}{\sqrt{(x-x')^2+(\psi-\psi')^2}}.$$

Ἐξισοῦντες δὲ μηδενὶ τοὺς δύο τούτους διαφορικοὺς συντελεστάς,

$$x - x' + (\psi - \psi')\frac{\delta\psi}{\delta x} = 0, \quad x - x' + (\psi - \psi')\frac{\delta\psi'}{\delta x'} = 0\cdot$$

ὅθεν

$$\frac{\psi - \psi'}{x - x'} = -\frac{1}{\frac{\delta\psi}{\delta x}} = -\frac{1}{\frac{\delta\psi'}{\delta x'}}.$$

Γνωστὸν καθίσταται ἐν πρώτοις ὅτι ἡ γραμμή, ἧς τὸ μῆκος εἶναι μέγιστον ἢ ἐλάχιστον, τέμνει πρὸς ὀρθὰς ἀμφοτέρας τὰς καμπύλας. Λαμβάνοντες ἤδη τοὺς διαφορικοὺς συντελεστὰς τῆς δευτέρας τάξεως ἔχομεν, παραλειπομένων τῶν συνεπείᾳ τῶν προηγουμένων ἐξισώσεων μηδενιζομένων ὅρων,

$$\frac{\delta^2 Z}{\delta x^2} = \frac{1 + \left(\frac{\delta\psi}{\delta x}\right)^2 + (\psi - \psi')\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}}{\sqrt{(x - x')^2 + (\psi - \psi')^2}},$$

$$\frac{\delta^2 Z}{\delta x\,\delta x'} = -\frac{1 + \frac{\delta\psi}{\delta x}\,\frac{\delta\psi'}{\delta x'}}{\sqrt{(x - x')^2 + (\psi - \psi')^2}},$$

$$\frac{\delta^2 Z}{\delta x'^2} = \frac{1 + \left(\frac{\delta\psi'}{\delta x'}\right)^2 - (\psi - \psi')\frac{\delta^2\psi'}{\delta x'^2}}{\sqrt{(x - x')^2 + (\psi - \psi')^2}}.$$

Ὅθεν συνάγομεν ὅτι, ἵνα ὑπάρχῃ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον, ἀπαιτεῖται, ἐν πρώτοις, νὰ ἔχωσι τὸ αὐτὸ σημεῖον αἱ ποσότητες

$$1 + \left(\frac{\delta\psi}{\delta x}\right)^2 + (\psi - \psi')\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}, \quad 1 + \left(\frac{\delta\psi'}{\delta x'}\right)^2 - (\psi - \psi')\frac{\delta^2\psi'}{\delta x'^2}.$$

Προσέτι δὲ νὰ ἐκπληροῦται ἡ σχέσις·

$$\left(1 + \frac{\delta\psi}{\delta x}\frac{\delta\psi'}{\delta x'}\right)^2 < \left[1 + \left(\frac{\delta\psi}{\delta x}\right)^2 + (\psi - \psi')\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}\right]\left[1 + \left(\frac{\delta\psi'}{\delta x'}\right)^2 - (\psi - \psi')\frac{\delta^2\psi'}{\delta x'^2}\right].$$

Ἡ τελευταία αὕτη συνθήκη μόνη ἐπαρκεῖ· συνέπεια αὐτῆς εἶναι ἀναγκαίως ἡ προηγουμένη.

Περιπτώσεις καθ' ἃς ὑπάρχουσι σχέσεις τῶν μεταβλητῶν πρὸς ἀλλήλας.

157. Εἰς πλείστας οὐσιώδεις προτάσεις, πλὴν τοῦ ὅρου τοῦ ν' ἀποκαθιστῶσιν αἱ ζητούμεναι τιμαὶ τῶν μεταβλητῶν μέγιστον ἢ ἐλάχιστον συνέκθεσίν τινα Φ, ἀπαιτεῖται προσέτι νὰ ἐκπληρῶσι σχέσεις δηλουμένας ὑπὸ ἐξισώσεων δεδομένων μεταξὺ τῶν μεταβλητῶν τούτων. Φανερὸν δὲ ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐξισώσεων τούτων πρέπει ἀναγκαίως νὰ ἦναι ἐλάσσων τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μεταβλητῶν ἀφ' ὧν ἡ τεθεῖσα συνέκθεσις ἐξαρτᾶται. Ἔστω, π. χ.,

$$\Phi = \Sigma(x, \psi, \omega).$$

Τεθείσθω δὲ ὅτι x, ψ, ω, πρέπει νὰ ἐπαληθεύωσι τὴν σχέσιν

$$\Lambda = 0\cdot$$

Λ δηλοῦντος συνέκθεσιν δοθεῖσαν τῶν x, ψ, ω. Ἡ φυσικωτέρα παρουσιαζομένη μέθοδος εἶναι, νὰ ἐπιλύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\Lambda = 0$ πρὸς μίαν τῶν μεταβλητῶν, π. χ. πρὸς ω, καὶ ν' ἀντεισάξωμεν τὴν τιμὴν ταύτης ἐν τῇ $\Sigma(x, \psi, \omega)$. Τῆς συνεκθέσεως Φ μὴ περιεχούσης πλέον τότε ἢ τὰς δύο μεταβλητὰς x, ψ, αἵτινες ἔσονται ὅλως ἀνεξάρτητοι, τὸ πρόβλημα ἀχθήσεται οὕτως ἐν τῇ προηγουμένῃ περιπτώσει.

Ὡσαύτως, ὅταν αἱ μεταβληταὶ x, ψ, ω, συνδέωνται σχέσεσι δηλουμέναις ὑπὸ δύο ἐξισώσεων,

$$\Lambda = 0, \quad M = 0,$$

ἐξάγομεν ἐκ τούτων τὰς τιμὰς τῶν ψ καὶ ω συνεκθέσει τῆς x, καὶ καθιστῶμεν αὐτὰς ἐν τῇ $\Sigma(x, \psi, \omega)$. Οὕτως ἡ συνέκθεσις Φ περιεκτικὴ ἔσεται τῆς μόνης ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x.

'Αλλ' ἐπειδὴ ἐν γένει εἶναι δυσκολώτατον ἢ καὶ ἀδύνατον πολλάκις ἀπαλεῖψαι οὕτω τὰς μεταβλητὰς διὰ τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων, παρατηρητέον ὅτι ἡ συνθήκη τοῦ μεγίστου ἢ τοῦ ἐλαχίστου τῆς συνεκθέσεως Φ ἀπαιτεῖ τὴν ὕπαρξιν τῆς σχέσεως,

$$\frac{\delta\Phi}{\delta x}\,\delta x + \frac{\delta\Phi}{\delta\psi}\,\delta\psi + \frac{\delta\Phi}{\delta\omega}\,\delta\omega = 0.$$

Προσέτι, ἡ ἐξίσωσις τῆς συνθήκης $\Lambda = 0$ διαφοριζομένη δίδει·

$$\frac{\delta\Lambda}{\delta x}\,\delta x + \frac{\delta\Lambda}{\delta\psi}\,\delta\psi + \frac{\delta\Lambda}{\delta\omega}\,\delta\omega = 0.$$

Ἐὰν αἱ μεταβληταὶ x, ψ, ω, ἦσαν ὅλως ἀνεξάρτητοι, ἐπειδὴ τὰ διαφορικὰ δx, δψ, δω, εἰσὶ κατ' ἀρέσκειαν, ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἤθελον παράγεσθαι αἱ ἑξῆς μερικαί·

$$\frac{\delta\Phi}{\delta x} = 0, \quad \frac{\delta\Phi}{\delta\psi} = 0, \quad \frac{\delta\Phi}{\delta\omega} = 0.$$

Ἀλλ' αἱ τιμαὶ τῶν διαφορικῶν τούτων πρέπει νὰ ἐτυμοποιῶσι τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν. Λοιπόν, ἐκ τῆς δευτέρας ταύτης ἐξισώσεως λαμβάνομεν τὴν τιμὴν ἑνὸς τῶν διαφορικῶν τούτων, π. χ. δω, ἀντεισάγομεν αὐτὴν ἐν τῇ πρώτῃ, ἥτις οὕτως ἔσεται περιεκτικὴ δx καὶ δψ μόνων. Εἶτα ἐξισοῦμεν μηδενὶ ἕνα ἕκαστον τῶν περιεχόντων τὰ δύο διαφορικὰ ταῦτα ὅρων. Τοιουτοτρόπως μορφοῦμεν δύο ἐξισώσεις περιεκτικὰς x, ψ, ω, αἵτινες, σὺν τῇ $\Lambda = 0$, ὁρίσουσι τὰς ζητουμένας τιμὰς τῶν τριῶν μεταβλητῶν.

Ὅταν ὑπάρχωσι δύο ἐξισώσεις συνθήκης $\Lambda = 0$, $M = 0$, μορφοῦμεν τὰς δύο διαφορικάς·

$$\frac{\delta\Lambda}{\delta x}\,\delta x + \frac{\delta\Lambda}{\delta\psi}\,\delta\psi + \frac{\delta\Lambda}{\delta\omega}\,\delta\omega = 0,$$

$$\frac{\delta M}{\delta x}\,\delta x + \frac{\delta M}{\delta\psi}\,\delta\psi + \frac{\delta M}{\delta\omega}\,\delta\omega = 0,$$

δι' ὧν ἀπαλείφομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{\delta\Phi}{\delta x}\,\delta x + \frac{\delta\Phi}{\delta\psi}\,\delta\psi + \frac{\delta\Phi}{\delta\omega}\,\delta\omega = 0,$$

δύο τῶν διαφορικῶν δx, δψ, δω. Ἡ προκύψουσα ἐξίσωσις, σὺν ταῖς δυσὶ $\Lambda = 0$, $M = 0$, δίδουσι τὰς ζητουμένας τιμὰς τῶν τριῶν μεταβλητῶν x, ψ, ω.

Ἡ μέθοδος αὕτη ἐφαρμόζεται οἱοσδήποτε εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν μεταβλητῶν ἀφ' ὧν ἡ συνέκθεσις Φ ἐξαρτᾶται, καὶ ὁ τῶν ἐξισώσεων ἐμφαινουσῶν τὰς μεταξὺ τῶν μεταβλητῶν σχέσεις· δὲν ἀπαιτεῖ ἢ ἀπαλοιφὰς μεταξὺ ἐξισώσεων πρωτοβαθμίων ἢ γραμμικῶν.

158. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Εὑρεῖν τὸ ἔχον μέγιστον ὄγκον παραλληλεπίπεδον ὀρθὸν ἁπάντων τῶν ἴσην ἐπιφάνειαν α^2 ἐχόντων.*

Ἔστωσαν x, ψ, ω, αἱ τρεῖς διαστάσεις τοῦ ζητουμένου παραλληλεπιπέδου. Ἡ συνέκθεσις ἣν πρόκειται ἀποκαταστῆσαι μέγιστον εἶναι

$$\Phi = x\psi\omega\cdot$$

αἱ δὲ τρεῖς μεταβληταὶ συνδέονται τῇ σχέσει

$$2(x\psi + x\omega + \psi\omega) = \alpha^2.$$

Ἐφαρμόζοντες τὴν ἐν τῷ προηγουμένῳ χωρίῳ μέθοδον, εὑρίσκομεν

$$x = \psi = \omega = \sqrt{\frac{\alpha^2}{6}}.$$

Ἄρα, *τὸ μέγιστον παραλληλεπίπεδον εἶναι ὁ κύβος.*

Ὅπως βεβαιωθῶμεν περὶ τῆς ἀκριβείας τοῦ ἐξαγομένου τούτου, παρατηρητέον ὅτι ὁ ὅρος τῆς δευτέρας τάξεως τοῦ ἐκτυλίγματος τῆς συνεκθέσεως $\Phi = x\psi\omega$ ἄγεται εἰς

$$\omega \,.\, \delta x\delta\psi + \psi \,.\, \delta x\delta\omega + x \,.\, \delta\psi\delta\omega.$$

Ὑπάρχοντος μεγίστου, ἡ ποσότης αὕτη πρέπει νὰ ἔχῃ τιμὴν μονίμως ἀρνητικήν, τῇ ἐν αὐτῇ ὑποθέσει $x = \psi = \omega$, οἱαιδήποτε ἂν ὦσιν αἱ διδόμεναι τιμαὶ τοῖς δx, δψ, δω, ἀρκεῖ αὗται νὰ ἐκπληρῶσι τὴν τῆς συνθήκης ἐξίσωσιν. Ἀλλ' ὅταν $x = \psi = \omega$, ἡ μὲν προηγουμένη ποσότης ἀποκαθίσταται,

$$x\,(\delta x\delta\psi + \delta x\delta\omega + \delta\psi\delta\omega),$$

ἡ δ' ἐξίσωσις τῆς συνθήκης δίδει

$$\delta x + \delta\psi + \delta\omega = 0.$$

Ἀπαλείφοντες $\delta\omega$ διὰ τῆς ἐξισώσεως ταύτης, λαμβάνομεν τὸν περὶ οὗ πρόκειται ὅρον τῆς δευτέρας τάξεως

$$-\,x\,(\delta x^2 + \delta x\delta\psi + \delta\psi^2),$$

ποσότητα μένουσαν ἀρνητικήν, οἱαιδήποτε ἂν ὦσιν αἱ τιμαὶ τῶν δx, $\delta\psi$.

159. Ἕπονται προβλήματά τινα πρὸς ἄσκησιν.

1) *Δοθέντα ἀριθμὸν α τεμεῖν εἰς τρία τμήματα, ὅπως τὸ ὑπ' αὐτῶν γινόμενον $x^\mu\psi^\nu\omega^\pi$ ᾖ μέγιστον ἁπάντων τῶν οὕτω συγκροτουμένων.*

Ἀπ. $x = \dfrac{\mu\alpha}{\mu+\nu+\pi}$, $\psi = \dfrac{\nu\alpha}{\mu+\nu+\pi}$, $\omega = \dfrac{\pi\alpha}{\mu+\nu+\pi}$.

2) *Ἁπάντων τῶν ὀρθῶν παραλληλεπιπέδων, ἐν οἷς τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν διαστάσεων ἰσοῦται α, εὑρεῖν τὸ μεγίστην ἔχον στερεότητα.*

Ἀπ. $x = \psi = \omega = \dfrac{\alpha}{3}$.

3) *Ἁπάντων τῶν σημείων ἐπιπέδου ἐξίσου φωτιζομένων ὑπὸ δύο σημείων Α καὶ Β φωτοβόλων ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ὧν αἱ ἐντάσεις εἰσὶν ἀμοιβαίως, κατὰ μονάδα ἀποστάσεως, μ^2 καὶ ν^2, εὑρεῖν τὰ μᾶλλον ἀπέχοντα τῆς τὰ φωτοβόλα σημεῖα ἐπιζευγνυούσης εὐθείας $AB = \alpha$.* (Σχ. 32).

Ἀπ. $x = \dfrac{\mu^2 - \nu^2}{\alpha\mu^2}$, $\psi = \pm \dfrac{\alpha\mu\nu}{\mu^2 - \nu^2}$.

Ἡ μὲν θετικὴ τιμὴ τῆς ψ συστοιχεῖ μεγίστῳ, ἡ δὲ ἀρνητικὴ ἐλαχίστῳ.

ΙΗ'. ΠΕΡΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ, ΤΟΥ ΤΟΞΟΥ, ΚΑΙ ΤΗΣ ΚΛΙΣΕΩΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ.

160. (Σχ. 33) Ἔστω δοθεῖσα καμπύλη ΜΜ' ἐμφαινομένη, ἐν ἄξοσιν ὀρθογωνίοις, τῇ ἐξισώσει

$$\psi = \Sigma(x).$$

Ἐμβαδὸν καμπύλης καλεῖται τὸ ἀπολαμβανόμενον χωρίον ὑπὸ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων, τῆς καμπύλης ΜΜ', καὶ δύο τεταγμένων οἱωνδήποτε ΜΠ, Μ'Π', ὧν αἱ θέσεις εἰσὶν ὡρισμέναι. Ὑποθέτοντες τὴν πρώτην τεταγμένην ΜΠ διατηροῦσαν μονίμως θέσιν τινά, δηλοῦντες δὲ x τὸ μεταβλητὸν ἀπόστημα ΑΠ', φανερὸν ὅτι ἡ ἔκθεσις τοῦ ἐμβαδοῦ ΠΜΜ'Π' εἶναι συνέκθεσις τῆς τετμημένης x, ἀπὸ τῆς φύσεως τῆς καμπύλης ἢ τῆς συνεκθέσεως $\Sigma(x)$ ἐξαρτωμένη.

Καλέσομεν ε τὴν συνέκθεσιν ταύτην. Πρόκειται εὑρεῖν τὴν ἔκθεσιν τοῦ διαφορικοῦ αὐτῆς· ἤτοι τῆς μεταβολῆς ἣν λαμβάνει ἡ συνέκθεσις ε ὅταν ἡ τετμημένη x αὐξήσῃ κατὰ τὴν ἀπειροστημόριον ποσότητα δx.

Τεθείσθω ὅτι ΑΠ' ἢ x αὐξάνει κατὰ τὴν πεπερασμένην ποσότητα Δx ἢ Π'Κ. Τὸ ἐμβαδὸν ε αὐξήσει κατὰ $\Delta\varepsilon$ παριστωμένην τῷ τραπεζίῳ Π'Μ'ΝΚ. Δυνατὸν ἀείποτε ὑποθέσαι Δx ἀρκούντως σμικράν, ὅπως σταθερῶς αὐξανομένης ἢ μειουμένης τῆς συνεκθέσεως $\Sigma(x)$ ἐν τῷ ἀποστήματι Π'Κ, τὸ τραπέζιον τοῦτο περιλαμβάνηται ὑπὸ τῶν δύο ὀρθογωνίων Μ'Κ καὶ ΝΠ'. Ἄρα γράφομεν·

$$\Delta\varepsilon = \psi\Delta x \pm \omega\Delta x, \quad \text{ἢ} \quad \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta x} = \psi \pm \omega,$$

ω οὔσης ποσότητος ἐλάσσονος $\Delta\psi$. Λαμβάνοντες τὰ ὅρια ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἔχομεν·

$$\frac{\delta\varepsilon}{\delta x} = \psi, \quad \text{καὶ} \quad \delta\varepsilon = \psi\delta x.$$

Ἄρα, τὸ διαφορικὸν τοῦ ἐμβαδοῦ καμπύλης ἰσοῦται τῷ *γινομένῳ τοῦ δx ἐπὶ τὴν συνέκθεσιν τῆς x, τὴν τῆς τεταγμένης ψ τιμὴν ἐμφαίνουσαν.*

161. Ἐὰν οἱ ἄξονες, ἀντὶ νὰ τέμνωνται πρὸς ὀρθὰς, περιέχωσι γωνίαν τὴν τυχοῦσαν θ, ἡ ἔκθεσις τοῦ ἀνωτέρω διαφορικοῦ ἔσεται

$$\delta\varepsilon = \psi\delta x \,.\, \eta\mu.\,\theta.$$

162. Θεωρήσωμεν ἤδη (Σχ. 33) τὸ μῆκος τοῦ τόξου καμπύλης, τῆς ΜΜ′, λογιζόμενον ἀπὸ σημείου οἱουδήποτε Μ μονίμου μέχρι τοῦ σημείου Μ′ οὗτινος ἡ τετμημένη ΑΠ′ δηλοῦται x. Καλοῦμεν ς τὸ μῆκος τοῦτο, ὅπερ θεωροῦμεν ὡς συνέκθεσιν τῆς x. Ζητήσωμεν τὴν ἔκθεσιν τοῦ διαφορικοῦ αὐτοῦ.

Ἔστω Π′Κ ἡ διαφορὰ Δx, ἥτις δυνατὸν ἀείποτε ὑποτεθεῖναι ἀρκούντως σμικρὰ, ὅπως τὸ ἀντιστοιχοῦν τόξον Μ′Ν στρέφῃ τὸ κυρτὸν αὐτοῦ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος. Συμφώνως πρὸς τὰ τοῦ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥ θεωρήματα, θεωροῦμεν πάντοτε τὸ μῆκος τοῦ τόξου τούτου ἀπολαμβανόμενον μεταξὺ τοῦ μήκους τῆς χορδῆς αὐτοῦ Μ′Ν καὶ τοῦ μήκους τῶν μερῶν Μ′Τ + ΝΤ τῶν ἀγομένων ἐφαπτομένων κατὰ τὰ δύο τοῦ τόξου πέρατα. Ἄρα, ἔτι μᾶλλον τὸ τόξον περιλαμβάνεται μεταξὺ Μ′Ρ καὶ ΝΣ· διότι Μ′Ρ εἶναι ἐλάσσων τῆς χορδῆς, καὶ ΣΤ μείζων Μ′Τ. Ἀλλὰ $M'P = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\delta\,\Sigma(x)}{\delta x}\right)^2}$. Ἔστω πρὸς συντομίαν $\varphi(x) = \sqrt{1 + \left(\frac{\delta\,\Sigma(x)}{\delta x}\right)^2}$. Ἔχομεν $\varphi(x + \Delta x)$ διὰ τιμὴν τῆς $\varphi(x)$ κατὰ τὸ σημεῖον Ν τῆς καμπύλης ἁρμόζουσαν. Ἄρα, $N\Sigma = \Delta x \,.\, \varphi(x + \Delta x)$. Οὕτω γράφομεν·

$$\Delta\varsigma > \Delta x \,.\, \varphi(x), \quad \text{καὶ} \quad \Delta\varsigma < \Delta x\,[\varphi(x + \Delta x)].$$

Ἀλλὰ $\varphi(x+\Delta x) = \varphi(x) + \frac{\delta\varphi(x)}{\delta x}\Delta x + \frac{\delta^2\varphi(x)}{\delta x^2}(\Delta x)^2 + \ldots;$

Ἄρα, $\Delta\varsigma = \Delta x \,.\, \varphi(x) + \omega\Delta x$, ἢ $\frac{\Delta\varsigma}{\Delta x} = \varphi(x) + \omega$,

ω δηλοῦντος ποσότητα ἐλάσσονα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὅρων τοῦ ἐκτυλίγματος $\varphi(x+\Delta x)$, ἀπὸ τοῦ δευτέρου. Ἐντεῦθεν συνάγομεν, λαμβάνοντες τὸ ὅριον πρὸς ὃ τείνουσιν ἐπ' ἄπειρον ἀμφότερα τὰ μέλη ὅταν Δx τείνῃ πρὸς τὸ μηδὲν,

$$\frac{\delta\varsigma}{\delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\delta\Sigma(x)}{\delta x}\right)^2}, \quad \text{καὶ} \quad \delta\varsigma = \delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\delta\Sigma(x)}{\delta x}\right)^2},$$

ἢ προσέτι

$$\frac{\delta\varsigma}{\delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\delta\psi}{\delta x}\right)^2}, \quad \text{καὶ} \quad \delta\varsigma = \delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\delta\psi}{\delta x}\right)^2}.$$

163. Ἐν τοῖς προηγουμένοις ὑπεθέσαμεν ὅτι ἡ τεταγμένη ἀφ' ἧς τὸ ἐμβαδὸν ε λογίζεται, ἢ τὸ μόνιμον σημεῖον τῆς καμπύλης ἀφ' οὗ τὸ τόξον ς λογίζεται, εἰσὶν οὕτω διατεθειμένα ὥστε ε καὶ ς αὐξάνουσι σὺν x. Ὅταν ἄλλως ἔχῃ προτάσσομεν τὸ σημεῖον — τῶν διαφορικῶν αὐτῶν, γράφοντες·

$$\delta\varepsilon = -\psi\delta x, \qquad \delta\varsigma = -\delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\delta\psi}{\delta x}\right)^2}.$$

Προσέτι, τὸ σημεῖον τοῦ διαφορικοῦ δε μεταβάλλεται σὺν τῷ σημείῳ τῆς τεταγμένης ψ. Ἐν γένει, ὅταν αἱ θετικαὶ ψ λογίζωνται κάτωθεν πρὸς τὰ ἄνω, τὰ μέρη τοῦ ἐμβαδοῦ καμπύλης τινος τὰ ἄνω τοῦ ἄξονος τῶν x κείμενα εἰσὶ θετικὰ, τὰ δὲ ὑπὸ τὸν ἄξονα τοῦτον κείμενα εἰσὶν ἀρνητικά.

164. Ἡ κλίσις τ τῆς ἐφαπτομένης ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν x ὁρίζεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$\varepsilon\varphi\,\tau = \frac{\delta\psi}{\delta x}.$$

ὅθεν

$$\frac{\delta\tau}{\delta x} = \sigma\upsilon\nu^2\tau\,\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} = \frac{\dfrac{\delta\psi^2}{\delta x^2}}{1+\left(\dfrac{\delta\psi}{\delta x}\right)^2}, \quad \text{ἢ} \quad \delta\tau = \frac{\dfrac{\delta^2\psi}{\delta x^2}\,\delta x}{1+\left(\dfrac{\delta\psi}{\delta x}\right)^2}.$$

165. Ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ $\delta\tau$ καλεῖται, ὡς θέλομεν ἰδεῖ βραδύτερον, *γωνία καμπυλότητος*, λαμβάνεται δὲ ἀντὶ $\Delta\tau$, ἥτις εἶναι ἡ γωνία τῶν δύο ἐφαπτομένων κατὰ τὰ σημεῖα ὧν αἱ τετμημέναι διαφέρουσι κατὰ δx, χωρὶς νὰ ἀλλοιωθῶσι τὰ ὅρια τῶν λόγων.

ΙΘ'. ΠΕΡΙ ΕΠΑΦΗΣ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ.

166. Δύο καμπύλαι ἅπτονται ἀλλήλων ὅταν ἔχωσιν ἓν σημεῖον κοινὸν καὶ μίαν ἐφαπτομένην κοινήν. Πρὸς τούτοις, ὅταν δύο καμπύλαι (Σχ. 34) ΤΚ, ΡΣ, ἐφάπτωνται τῆς καμπύλης ΑΝ κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον Μ, ἡ καμπύλη ΡΣ, μεταξὺ τῶν ἑτέρων δύο διερχομένη, θεωρεῖται ὡς ἔχουσα μετὰ τῆς καμπύλης ΑΝ ἐπαφὴν στενωτέραν ἢ ἡ καμπύλη ΤΚ. Οὕτως οἱ Γεωμέτραι διακρίνουσιν *ἐπαφὰς διαφόρων τάξεων*, ὧν οἱ χαρακτῆρες διακρίνονται εὐκόλως τῇ θεωρίᾳ τῶν διαφορικῶν συντελεστῶν ἢ συνεκθέσεων παραγομένων.

167. Ἔστωσαν $\psi = \Sigma(x)$, $\psi = \Phi(x)$, αἱ ἐξισώσεις τῶν δύο καμπύλων ἐν ἄξοσιν ὀρθογωνίοις· x δηλούσης τὴν τετμημένην τοῦ κοινοῦ αὐταῖς σημείου, $x+0$ τὴν τετμημένην ἑτέρου σημείου ἐγγὺς τῷ πρώτῳ. Αἱ σύστοιχοι τεταγμέναι ἔσονται ἀμοιβαίως·

$$\Sigma(x) + \frac{\delta\Sigma(x)}{\delta x}0 + \frac{\delta^2\Sigma(x)}{\delta x^2}\frac{0^2}{2} + \frac{\delta^3\Sigma(x)}{\delta x^3}\frac{0^3}{2.3} + \cdots\cdots,$$

$$\Phi(x) + \frac{\delta\Phi(x)}{\delta x}0 + \frac{\delta^2\Phi(x)}{\delta x^2}\frac{0^2}{2} + \frac{\delta^3\Phi(x)}{\delta x^3}\frac{0^3}{2.3} + \cdots\cdots;$$

Ἐὰν αἱ καμπύλαι αὗται ἔχωσι μίαν κοινὴν ἐφαπτομένην κατὰ τὸ σημεῖον οὗτινος x εἶναι ἡ τετμημένη, κατὰ τὸ

αὐτὸ σημεῖον ἔχομεν, οὐχὶ μόνον $\Phi(x) = \Sigma(x)$, ἀλλὰ καὶ $\dfrac{\delta\Phi(x)}{\delta x} = \dfrac{\delta\Sigma(x)}{\delta x}$. Τῆς συνθήκης ταύτης ἐκπληρουμένης, βέβαιον εἶναι ὅτι οὐδεμία ἑτέρα καμπύλη, ἧς ἔσω ἡ ἐξίσωσις $\psi = \Psi(x)$, χωρεῖ μεταξὺ τῶν δύο πρώτων, πλὴν ὅταν ἐπίσης $\dfrac{\delta\Psi(x)}{\delta x} = \dfrac{\delta\Sigma(x)}{\delta x}$. Τῷ ὄντι, ἡ ἀπ' ἀλλήλων διαφορὰ τῶν τεταγμένων τῶν δύο προτεθεισῶν καμπύλων, συστοιχουσῶν ἐπὶ τὴν τετμημένην $x+0$, δηλοῦται ὑπὸ

$$\frac{0^2}{2}\left[\frac{\delta^2\Phi(x)}{\delta x^2} + \frac{\delta^3\Phi(x)}{\delta x^3}\frac{0}{3} + \cdots - \left(\frac{\delta^2\Sigma(x)}{\delta x^2} + \frac{\delta^3\Sigma(x)}{\delta x^3}\frac{0}{3} + \cdots\right)\right].$$

Ἐνῷ, ἐὰν ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος συνθήκη δὲν ὑπάρχῃ, ἡ ἀπ' ἀλλήλων διαφορὰ τῶν τεταγμένων τῆς τρίτης καμπύλης καὶ τῆς πρώτης ἔσεται

$$\left(\frac{\delta\Psi(x)}{\delta x} - \frac{\delta\Sigma(x)}{\delta x}\right)0 + \left[\frac{\delta^2\Psi(x)}{\delta x^2} + \cdots - \left(\frac{\delta^2\Sigma(x)}{\delta x^2} + \cdots\right)\right]\frac{0^2}{2}.$$

Φανερὸν ὅτι, λαμβανομένης 0 ὅσον δεῖ ἐλάσσονος, ἀποκαθίσταται ἀείποτε ἡ δευτέρα ἔκθεσις μείζων τῆς πρώτης. Ἄρα, οὐδεμία καμπύλη, $\psi = \Psi(x)$, δι' ἣν δὲν ὑπάρχει ἡ ἰσότης $\dfrac{\delta\Psi(x)}{\delta x} = \dfrac{\delta\Sigma(x)}{\delta x}$, δύναται χωρῆσαι μεταξὺ τῶν $\psi = \Sigma(x)$ καὶ $\psi = \Phi(x)$, ἐν αἷς ἔχομεν $\dfrac{\delta\Phi(x)}{\delta x} = \dfrac{\delta\Sigma(x)}{\delta x}$.

Δύο γραμμαὶ ἔχουσαι ἓν σημεῖον κοινὸν καὶ ἐν αἷς ὁ διαφορικὸς συντελεστὴς τῆς πρώτης τάξεως τῆς τεταγμένης ἔχει τὴν αὐτὴν τιμὴν κατὰ τὸ σημεῖον αὐτό, ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας *ἐπαφὴν τῆς πρώτης τάξεως*.

168. Τεθείσθω ἤδη ὅτι, ἐν ταῖς δύο προτεθείσαις καμπύλαις οἱ διαφορικοὶ συντελεσταὶ τῶν δύο πρώτων τάξεων ἔχουσι τιμὰς κοινάς. Ἡ διαφορὰ τῶν τεταγμένων τῶν αὐτῶν καμπύλων, συστοιχουσῶν ἐπὶ τὴν τετμημένην $x+0$, ἔσεται

$$\frac{\theta^3}{2.3}\left[\frac{\delta^3\Phi(x)}{\delta x^3} + \ldots\ldots - \left(\frac{\delta^3\Sigma(x)}{\delta x^3} + \ldots\ldots\right)\right].$$

ἐνῷ διά τινα τρίτην καμπύλην, ἐφαπτομένην μὲν τῆς πρώτης μὴ ἐκπληρούσης δὲ τὴν αὐτὴν συνθήκην, ἡ διαφορὰ τῶν τεταγμένων ἔσεται

$$\left(\frac{\delta^2\Psi(x)}{\delta x^2} - \frac{\delta^2\Sigma(x)}{\delta x^2}\right)\frac{\theta^2}{2} + \left[\frac{\delta^3\Psi(x)}{\delta x^3} + \ldots - \left(\frac{\delta^3\Sigma(x)}{\delta x^3} + \ldots\right)\right]\frac{\theta^3}{2.3}$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ δευτέρα ἔκθεσις, θ τεινούσης πρὸς τὸ ὅριον 0, ἀποκαθίσταται ἀείποτε μείζων τῆς πρώτης, ἕπεται ὅτι ἡ τρίτη καμπύλη ἀδύνατον διελθεῖν μεταξὺ τῶν δύο πρώτων. Ἄρα, οὐδεμία καμπύλη, ἐν ᾗ οἱ διαφορικοὶ συντελεσταὶ τῶν δύο πρώτων τάξεων δὲν εἶναι ἴσοι πρὸς τοὺς τῆς καμπύλης $\psi = \Sigma(x)$, δύναται χωρῆσαι μεταξὺ ταύτης καὶ τῆς $\psi = \Phi(x)$, δι' ἣν ἡ ἰσότης αὕτη ὑπάρχει.

Αἱ γραμμαὶ ἐν αἷς οἱ διαφορικοὶ συντελεσταὶ τῶν δύο πρώτων τάξεων ἔχουσι τιμὴν κοινήν, λέγονται ἔχουσαι πρὸς ἀλλήλας *ἐπαφὴν τῆς δευτέρας τάξεως.*

169. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐξακολουθοῦντες πληροφορούμεθα ὅτι, ἐν γένει, ἐὰν αἱ καμπύλαι $\psi = \Sigma(x)$, $\psi = \Phi(x)$, ὦσι τοιαῦται, ὥστε οἱ ν πρῶτοι διαφορικοὶ συντελεσταὶ τῶν συνεκθέσεων $\Sigma(x)$, $\Phi(x)$, ἔχουσι τιμὴν κοινὴν τῇ τετμημένῃ x συστοιχοῦσαν, ὅτε αἱ καμπύλαι λέγονται ἔχουσαι *ἐπαφὴν τάξεως ν*ης, οὐδεμία ἑτέρα γραμμὴ $\psi = \Psi(x)$ δύναται διελθεῖν μεταξὺ αὐτῶν, ἐκτὸς εἰ ἐκπληροῖ ἐπίσης τὴν συνθήκην τοῦ νὰ ὦσιν οἱ ν πρῶτοι διαφορικοὶ συντελεσταὶ τῆς συνεκθέσεως $\Psi(x)$ ἴσοι τοῖς ν πρώτοις διαφορικοῖς συντελεσταῖς τῆς συνεκθέσεως $\Sigma(x)$, τῇ αὐτῇ τετμημένῃ x συστοιχούσοις. Ἄρα, διάφοροι καμπύλαι, κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἁπτόμεναι ἀλλήλων, θεωρητέαι εἰσὶν ὡς ἔχουσαι ἐπαφὴν τοσοῦτον στενωτέραν, ὅσον μείζονα ἀριθμὸν διαφορικῶν συντελεστῶν ἔχουσιν ὧν αἱ τιμαὶ ταυτίζονται. Ὁ ἀριθμὸς τῶν κοινῶν διαφορικῶν συντελεστῶν διακρίνει τὰς διαφόρων

τάξεων ἐπαφάς, ὅπερ ἀδύνατον γενέσθαι διὰ μόνης τῆς Γεωμετρίας.

170. Παρατηρητέον ὅτι, γραμμαὶ ἐπαφὴν πρώτης τάξεως ἔχουσαι, δὲν τέμνονται ἐν γένει ὑπ' ἀλλήλων· διότι, τῆς διαφορᾶς τῶν τεταγμένων κατὰ τὰ ἐγγὺς σημεῖα ἐχούσης ὡς παράγοντα θ^2, δὲν μεταβάλλεται τὸ σημεῖον ὅταν μεταβληθῇ τὸ τῆς θ. Ἐὰν δὲ ἔχωσιν ἐπαφὴν δευτέρας τάξεως, τέμνονται· διότι ἡ διαφορὰ τῶν τεταγμένων πολυπλασιάζεται ἐπὶ θ^3, ἐπομένως μεταβάλλεται τὸ σημεῖον αὐτῆς μεταβαλλομένου τοῦ τῆς θ.

Ἐν γένει, δύο γραμμαὶ τέμνουσιν ἢ οὐ ἀλλήλας, ἐνῷ συγχρόνως ἅπτονται, καθ' ὅσον ἡ ἐπαφὴ αὐτῶν εἶναι τάξεως ἀρτίας ἢ τάξεως περιττῆς.

ΣΗΜ. Εὐθεῖά τις ἐφαπτομένη καμπύλης ἔχει ἐν γένει μετ' αὐτῆς ἐπαφὴν πρώτης τάξεως, ἤτοι τάξεως περιττῆς· ἄρα, κεῖται κατὰ τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς ὁλόκληρος ἀφ' ἑνὸς μέρους τῆς καμπύλης. Ἐὰν τὸ τῆς ἐπαφῆς σημεῖον ἦναι σημεῖον καμπῆς, τότε ἡ ἐπαφὴ ἀποκαθίσταται τάξεως ἀρτίας, ἡ δ' ἐφαπτομένη διαπερᾷ τὴν καμπύλην.

171. Αἱ παραβολικαὶ γραμμαὶ εἰσὶν αἱ ἁπλούστεραι ἁπασῶν τῶν δυναμένων τεθεῖναι εἰς ἐπαφὴν μετὰ καμπύλης δοθείσης. Προκείσθωσαν

$$\psi = \Sigma(x)$$

ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης ταύτης, καὶ

$$\psi = A + Bx + \Gamma x^2 + \Delta x^3 + Ex^4 + \ldots\ldots + Nx^\nu,$$

ἑτέρα ἐμφαίνουσα καμπύλην παραβολικὴν τοῦ ν^ου βαθμοῦ. A, B, Γ, ... , N, δηλοῦσι συντελεστὰς ἀτρέπτους ὁριστέους ὅπως ἡ παραβολικὴ καμπύλη ἔχῃ ἐπαφὴν τῆς ν^ης τάξεως μετὰ τῆς δοθείσης κατὰ τὸ σημεῖον (x', ψ'). Ἡ ζητουμένη ἐπαφὴ ὑπάρξει ἐάν, κατὰ τὰ προαποδεδομένα, αἱ τιμαὶ τῶν ψ, $\frac{\delta\psi}{\delta x}$, $\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}$, ... , $\frac{\delta^\nu\psi}{\delta x^\nu}$, ἐκ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως ἐξαγόμεναι, ὦσιν ἴσαι, ὅταν $x = x'$, ταῖς τιμαῖς τῶν ὁμοίων ποσοτήτων ἐκ τῆς πρώτης ἐξαγομέναις. Οὕτω, τῇ συνθήκῃ ταύτῃ, αἱ ἄτρεπτοι A, B, Γ, ... , N, ὁρίζονται, καὶ μορφοῦμεν τὴν ἑπομένην ἐξίσωσιν τῆς παραβολικῆς καμπύλης·

$$\psi = \psi' + \frac{\delta\psi'}{\delta x'}(x - x') + \frac{\delta^2\psi'}{\delta x'^2}\frac{(x - x')^2}{1\,.\,2} + \frac{\delta^3\psi'}{\delta x'^3}\frac{(x - x')^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots + \frac{\delta^\nu\psi'}{\delta x'^\nu}\frac{(x - x')^\nu}{1.2.3..\nu}.$$

Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἧς ὁ λόγος παραβολικῆς καμπύλης περιεῖχε $\nu + 1$ ἀτρέπτους οἱασδήποτε, ὅθεν ἦτο δυνατὸν δοῦναι αὐτῇ ἐπαφὴν τάξεως $\nu^{\tilde{\eta}\varsigma}$ μετὰ καμπύλης δοθείσης. Ἐν γένει, ἀείποτε συνιστῶμεν μεταξὺ μιᾶς πρώτης καμπύλης καὶ μιᾶς δευτέρας, καθ' ἓν σημεῖον δοθὲν τῆς πρώτης, ἐπαφὴν ἧς ἡ τάξις δηλοῦται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν κατὰ βούλησιν ἀτρέπτων, ἐν τῇ ἐξισώσει τῆς δευτέρας καμπύλης περιεχομένων, ἐλαττουμένου κατὰ μονάδα.

172. Περιοριζόμενοι εἰς τὸν πρῶτον βαθμόν, ἔχομεν·

$$\psi - \psi' = \frac{\delta\psi'}{\delta x'}(x - x'),$$

ἐξίσωσιν γραμμῆς εὐθείας ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης $\psi = \Sigma(x)$ κατὰ τὸ σημεῖον οὗτινος αἱ συντεταγμέναι εἰσὶ x' καὶ ψ'. Οὐδεμία, πλὴν ταύτης, εὐθεῖα δύναται διελθεῖν μεταξὺ τῆς καμπύλης καὶ τῆς ἐφαπτομένης περὶ ὧν πρόκειται.

173. Ἡ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις δίδει·

$$\psi - \psi' = \frac{\delta\psi'}{\delta x'}(x - x') + \frac{\delta^2\psi'}{\delta x'^2}\frac{(x - x')^2}{1\,.\,2}.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἐμφαίνει κοινὴν παραβολήν, ἧς ὁ ἄξων παράλληλος τῷ ἄξονι τῶν ψ, ἐφαπτομένην τῆς δοθείσης καμπύλης κατὰ τὸ σημεῖον (x', ψ'), καὶ ἔχουσαν μετ' αὐτῆς ἐπαφὴν τῆς δευτέρας τάξεως. Οἱ Γεωμέτραι καλοῦσι προσέτι τὴν αὐτὴν καμπύλην *φιλοῦσαν* τῆς δοθείσης. Οὐδεμία, πλὴν ταύτης, παραβολὴ δευτεροβάθμιος, ἔχουσα τὸν ἄξονα αὐτῆς παράλληλον τῶν τεταγμένων, δύναται χωρῆσαι μεταξὺ τῆς προτεθείσης καμπύλης καὶ τῆς παραβολῆς τῆς ὑπὸ τῆς ἄνωθι ἐξισώσεως ἐμφαινομένης.

174. Ἐν γένει, βλέπομεν ὅτι σημείου τινος, M, μιᾶς πρώτης καμπύλης ὁρισθέντος, ὅπως δοθῇ δευτέρᾳ τινὶ καμπύλῃ ἐπαφὴ τάξεως $\nu^{\tilde{\eta}\varsigma}$ μετὰ τῆς πρώτης κατὰ τὸ σημεῖον τοῦτο, τὸ πᾶν συνίσταται εἰς τὸ ποιῆσαι, ὅπως ἡ ἐξίσωσις τῆς δευτέρας καμπύλης καὶ αἱ διαφορικαὶ αὐτῆς μέχρι καὶ συμπεριλαμβανομένης τῆς τάξεως $\nu^{\tilde{\eta}\varsigma}$, ταυτοποιῶνται ὑπὸ τῶν τιμῶν τῆς τετμημένης x' τοῦ σημείου M, τῆς τεταγμένης ψ' τοῦ αὐτοῦ, καὶ τῶν διαφορικῶν συντελεστῶν τῆς τεταγμένης ταύτης·

$$\frac{\delta\psi'}{\delta x'},\ \frac{\delta^2\psi'}{\delta x'^2},\ \frac{\delta^3\psi'}{\delta x'^3},\ \ldots\ldots,\ \frac{\delta^\nu\psi'}{\delta x'^\nu}.$$

Κ'. ΠΕΡΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΚΑΘΕΤΩΝ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ.

175. Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης κατὰ σημεῖον οἱονδήποτε καμπύλης δοθείσης εἶναι [172], ἐν οἱῳδήποτε συστήματι συντεταγμένων, ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\psi - \psi' = \frac{\delta\psi'}{\delta x'}(x - x').$$

x' καὶ ψ' εἰσὶν αἱ συντεταγμέναι τῆς ἐπαφῆς· $\frac{\delta\psi'}{\delta x'}$ εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ διαφορικοῦ συντελεστοῦ πρώτης τάξεως τῆς συνεκθέσεως $\psi = \Sigma(x)$ τῷ αὐτῷ σημείῳ συστοιχοῦσα.

176. Ἐν ἄξοσιν ὀρθογωνίοις, ἡ τῆς καθέτου τῇ καμπύλῃ ἐξίσωσις εἶναι

$$\psi - \psi' = -\frac{1}{\frac{\delta\psi'}{\delta x'}}(x - x'), \quad \text{ἢ} \quad x - x' + \frac{\delta\psi'}{\delta x'}(\psi - \psi') = 0.$$

Ἐν ἄξοσι πλαγιογωνίοις, κατὰ γωνίαν θ τεμνομένοις, ἡ ἐξίσωσις τῆς αὐτῆς γραμμῆς ἔχει τὴν μορφὴν

$$\psi - \psi' = -\frac{1 + \frac{\delta\psi}{\delta x}\,\text{συν}\,\theta}{\frac{\delta\psi}{\delta x} + \text{συν}\,\theta}\,(x - x').$$

177. Ὅπως ἐκφράσωμεν τὴν διεύθυνσιν γραμμῆς εὐθείας, φανταζόμεθα ταύτην μεταφερθεῖσαν παραλλήλως πρὸς ἑαυτὴν ἐν τῇ ἀρχῇ τῶν συντεταγμένων, καὶ θεωροῦμεν τὰς γωνίας ἃς σχηματίζει μετὰ τῶν μερῶν τῶν ἀξόνων ἐφ' ὧν αἱ συντεταγμέναι λογίζονται θετικαί. Ἔστωσαν a, a', αἱ ἀμοιβαῖαι γωνίαι ἃς ἡ ἐφαπτομένη καμπύλης σχηματίζει πρὸς τὰ μέρη τῶν θετικῶν ἀξόνων. Ἡ τριγωνομετρικὴ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας a ἔσεται $\frac{\delta\psi'}{\delta x'}$. Τὸ δὲ συν a' ἔσεται ἀείποτε ἴσον τῷ ἡμ. a. Ἄρα,

$$\text{συν}\,a = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\delta\psi'}{\delta x'}\right)^2}}, \quad \text{συν}\,a' = \frac{\frac{\delta\psi'}{\delta x'}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\delta\psi'}{\delta x'}\right)^2}}.$$

Ἐὰν καθ' ὅμοιον τρόπον καλέσωμεν λ καὶ λ' τὰς περιεχομένας γωνίας ὑπὸ τῆς καθέτου τῇ καμπύλῃ καὶ τῶν μερῶν τῶν ἀξόνων ἐφ' ὧν θεωροῦνται αἱ x καὶ ψ θετικαί, τῆς μὲν λ ἡ τριγωνομετρικὴ ἐφαπτομένη ἔσεται $-\frac{1}{\frac{\delta\psi'}{\delta x'}}$, τῆς δὲ λ' τὸ συνημίτονον ἔσεται ἀείποτε ἴσον τῷ ἡμιτόνῳ τῆς λ. Ἄρα,

$$\text{συν}\,\lambda = -\frac{\frac{\delta\psi'}{\delta x'}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\delta\psi'}{\delta x'}\right)^2}}, \quad \text{συν}\,\lambda' = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\delta\psi'}{\delta x'}\right)^2}}.$$

Τοῦ ῥιζικοῦ $\sqrt{1 + \left(\frac{\delta\psi'}{\delta x'}\right)^2}$ προτάττομεν ἀδιαφόρως τὸ σημεῖον + ἢ τὸ —, ἀλλὰ πρέπει νὰ δίδωμεν αὐτῷ σημεῖον ὅμοιον ἐν ταῖς ἐκθέσεσι τῶν συνημιτόνων τῶν δύο γωνιῶν συστοιχουσῶν τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ. Κατὰ τὸ σημεῖον τοῦ ῥιζικοῦ τούτου, αἱ δύο γωνίαι ἔσονται τοῦ μέρους τῆς γραμμῆς ὅπερ κεῖται ἀφ' ἑνὸς ἢ ἀφ' ἑτέρου μέρους τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων. Ὅταν λαμβάνωμεν τὸ ῥιζικὸν τοῦτο θετικῶς, ἐννοεῖται ὅτι θεωροῦμεν τὸ μέρος ΜΣ (Σχ. 35) τῆς ἐφαπτομένης ὃ κεῖται, σχετικῶς πρὸς τὸ σημεῖον Μ, πρὸς τὸ μέρος τῶν θετικῶν x, καὶ τὸ μέρος ΜΝ τῆς καθέτου ὃ κεῖται, σχετικῶς πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον Μ, πρὸς τὸ μέρος τῶν θετικῶν ψ.

178. Προσέτι, δηλοῦντες [162] δς τὸ διαφορικὸν τοῦ τόξου καμπύλης, μεταμορφοῦμεν ὡς ἑξῆς τὰς προηγουμένας ἐκθέσεις·

$$\text{συν}\,a = \frac{\delta x'}{\delta\varsigma'}, \quad \text{συν}\,a' = \frac{\delta\psi'}{\delta\varsigma'}, \quad \text{συν}\,\lambda = -\frac{\delta\psi'}{\delta\varsigma'}, \quad \text{συν}\,\lambda' = \frac{\delta x'}{\delta\varsigma'}.$$

Ἐν τοῖς δὲ τοῖς τύποις τὸ ἀπειροστὸν ςοιχεῖον δς' θεωρεῖται ὡς λαμβάνον ἀδιαφόρως τὸ σημεῖον + ἢ τὸ —, διότι οὐδὲν τὸ κανονίζον πρότερον καθ' ὁποίαν διεύθυνσιν τὸ τόξον ς λογίζεται. Ἀλλὰ δοτέον ἀείποτε αὐτῷ σημεῖον ὅμοιον ἐν ἀμφοτέροις τοῖς συςοιχουμένοις τύποις. Καθ' ὅσον λάβομεν δς' θετικῶς ἢ ἀρνητικῶς, αἱ γωνίαι a, a', ἢ αἱ λ, λ', λογισθήσονται ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἢ ἀπὸ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων τῆς ἐφαπτομένης ἢ τῆς καθέτου, ἅτινα διαχωρίζει τὸ σημεῖον τῆς καμπύλης.

179. (Σχ. 35) Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ κατὰ τὸ σημεῖον Μ τῆς καμπύλης ἐφαπτομένη καὶ ἡ κάθετος προάγονται μέχρις οὗ συμπέσωσι τῷ ἄξονι τῶν x ἀμοιβαίως κατὰ τὰ σημεῖα Τ, Ρ. Ἔστω ψ' ἡ κατὰ τὴν ἐπαφὴν τεταγμένη ΜΠ. Συνάγομεν ὅτι·

Ἡ *ἐφαπτομένη* $\mathrm{MT} = \dfrac{\psi'}{\eta\mu\,\mathrm{a}} = \dfrac{\psi'\sqrt{1+\left(\dfrac{\delta\psi'}{\delta x'}\right)^2}}{\dfrac{\delta\psi'}{\delta x'}}$,

Ἡ *ὑφαπτομένη* $\Pi\mathrm{T} = \dfrac{\psi'}{\grave{\epsilon}\varphi\,\mathrm{a}} = \dfrac{\psi'}{\dfrac{\delta\psi'}{\delta x'}}$,

Ἡ *κάθετος* $\mathrm{MP} = \dfrac{\psi'}{\sigma\upsilon\nu\,\mathrm{a}} = \psi'\sqrt{1+\left(\dfrac{\delta\psi'}{\delta x'}\right)^2}$.

Ἡ *ὑποκάθετος* $\Pi\mathrm{P} = \psi'\grave{\epsilon}\varphi\mathrm{a} = \psi'\,\dfrac{\delta\psi'}{\delta x'}$.

Ἡ τεταγμένη εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς ὑποκαθέτου.

ΣΗΜ. Μῆκος τῆς ἐφαπτομένης ἢ τῆς καθέτου ἐννοοῦμεν, ὡς δῆλον, τὸ μέρος ἑκάστης τῶν γραμμῶν τούτων τὸ ἀπολαμβανόμενον ὑπὸ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς καὶ τοῦ σημείου καθ' ὃ τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x.

180. Ὅταν ἡ ἀρχικὴ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης δίδηται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\Sigma(x,\psi) = 0,$$

ἡ διαφορικὴ αὐτῆς ἔσεται,

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta x}\,\delta x + \frac{\delta\Sigma}{\delta\psi}\,\delta\psi = 0\cdot$$

Ἔχομεν δέ, κατὰ § 53, $\dfrac{\delta\psi}{\delta x} = -\dfrac{\dfrac{\delta\Sigma}{\delta x}}{\dfrac{\delta\Sigma}{\delta\psi}}$.

Συνεπείᾳ τῆς τιμῆς ταύτης τοῦ $\dfrac{\delta\psi}{\delta x}$, αἱ ἐν §§ 175 καὶ

176, ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς καθέτου μορφοῦνται ὡς ἑξῆς·

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta x'}(x-x')+\frac{\delta\Sigma}{\delta\psi'}(\psi-\psi')=0,\quad \frac{\delta\Sigma}{\delta\psi'}(x-x')-\frac{\delta\Sigma}{\delta x'}(\psi-\psi')=0.$$

Φανερὸν ὅτι, ἐκ τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως τῆς καμπύλης μορφοῦμεν, τὴν μὲν ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης καθιστῶντες τὸν λόγον $\dfrac{\psi-\psi'}{x-x'}$ ἀντὶ τοῦ λόγου $\dfrac{\delta\psi}{\delta x}$, τὴν δὲ τῆς καθέτου καθιστῶντες τὸν λόγον $-\dfrac{x-x'}{\psi-\psi'}$ ἀντὶ τοῦ $\dfrac{\delta\psi}{\delta x}$.

Ὅταν οἱ ἄξονες τῶν συντεταγμένων περιέχωσι γωνίαν οἱανδήποτε θ, ἡ τῆς καθέτου ἐξίσωσις ἔχει τὴν ἑξῆς μορφήν·

$$(\psi-\psi')\left(\frac{\delta\Sigma}{\delta x'}-\frac{\delta\Sigma}{\delta\psi'}\sigma\upsilon\nu\theta\right)-(x-x')\left(\frac{\delta\Sigma}{\delta\psi'}-\frac{\delta\Sigma}{\delta x'}\sigma\upsilon\nu\theta\right)=0.$$

Τῶν γωνιῶν ἃς ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ κάθετος σχηματίζουσι πρὸς τοὺς ἄξονας τῶν x καὶ ψ, δηλουμένων καὶ αὖθις ἀμοιβαίως ὑπὸ a, a', καὶ λ, λ', ἔχομεν·

$$\sigma\upsilon\nu\,\mathrm{a} = -\frac{\dfrac{\delta\Sigma}{\delta\psi'}}{\sqrt{\left(\dfrac{\delta\Sigma}{\delta x'}\right)^2+\left(\dfrac{\delta\Sigma}{\delta\psi'}\right)^2}},$$

$$\sigma\upsilon\nu\,\mathrm{a}' = \frac{\dfrac{\delta\Sigma}{\delta x'}}{\sqrt{\left(\dfrac{\delta\Sigma}{\delta x'}\right)^2+\left(\dfrac{\delta\Sigma}{\delta\psi'}\right)^2}},$$

$$\sigma\upsilon\nu\,\lambda = \frac{\dfrac{\delta\Sigma}{\delta x'}}{\sqrt{\left(\dfrac{\delta\Sigma}{\delta x'}\right)^2+\left(\dfrac{\delta\Sigma}{\delta\psi'}\right)^2}},$$

$$\text{συνλ}' = \frac{\frac{\delta\Sigma}{\delta\psi'}}{\sqrt{\left(\frac{\delta\Sigma}{\delta x'}\right)^2 + \left(\frac{\delta\Sigma}{\delta\psi'}\right)^2}}.$$

Ἐφαρμοστέον ἤδη τοὺς γενικοὺς τούτους τύπους.

181. Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐλλείψεως ἢ τῆς ὑπερβολῆς ἐν ταῖς διαμέτροις εἶναι

$$\frac{x^2}{\alpha^2} \pm \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1.$$

Ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις εἶναι

$$\frac{x}{\alpha^2}\delta x \pm \frac{\psi}{\beta^2}\delta\psi = 0, \quad \text{ἐξ ἧς} \quad \frac{\delta\psi}{\delta x} = \mp \frac{\beta^2 x}{\alpha^2\psi}.$$

Αἱ ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς καθέτου εἰσὶν ἀμοιβαίως·

$$\frac{x'}{\alpha^2}(x - x') \pm \frac{\psi'}{\beta^2}(\psi - \psi') = 0, \quad \text{ἢ} \quad \frac{x'x}{\alpha^2} \pm \frac{\psi'\psi}{\beta^2} = 1,$$

$$\pm\frac{\psi'}{\beta^2}(x - x') - \frac{x'}{\alpha^2}(\psi - \psi') = 0, \quad \text{ἢ} \quad \frac{\psi'x}{\beta^2} \mp \frac{x'\psi}{\alpha^2} = x'\psi'\left(\frac{1}{\beta^2} \mp \frac{1}{\alpha^2}\right).$$

Τέλος εὑρίσκομεν ὅτι·

$$\text{Ἐφ}^{\eta} = \frac{\psi'}{\beta^2 x'}\sqrt{\alpha^4\psi'^2 + \beta^4 x'^2}, \quad \text{Κ}^{\text{ος}} = \frac{1}{\alpha^2}\sqrt{\alpha^4\psi'^2 + \beta^4 x'^2},$$

$$\text{Ὑφ}^{\eta} = \frac{\alpha^2 - x'^2}{x'}, \qquad \text{Ὑκ}^{\text{ος}} = \mp\frac{\beta^2 x'}{\alpha^2}.$$

182. *Ἐν τῇ ἰσοσκελῇ ὑπερβολῇ*, ἐμφαινομένῃ ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$x\psi = \frac{\alpha^2}{2},$$

λαμβάνομεν τὰ ἑξῆς ἐξαγόμενα.

$$\psi\delta x + x\delta\psi = 0, \qquad \text{ὅθεν} \qquad \frac{\delta\psi}{\delta x} = -\frac{\psi}{x}.$$

Ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης, $\quad x'\psi + \psi'x = \alpha^2.$

$$\text{Ἐφ}^{\eta} = \sqrt{x'^2 + \psi'^2}, \qquad \text{Κ}^{\text{ος}} = \frac{\psi'}{x'}\sqrt{x'^2 + \psi'^2},$$

$$\text{Ὑφ}^{\eta} = -x', \qquad \text{Ὑκ}^{\text{ος}} = -\frac{\psi'^2}{x'}.$$

Τὴν ὑφαπτομένην, ἴσην οὖσαν τῇ τετμημένῃ, ληπτέον δεξιὰ τῆς τεταγμένης· διότι ἡ ἐφαπτομένη σχηματίζει γωνίαν ἀμβλεῖαν πρὸς τὰς θετικὰς x.

183. *Ἐν τῇ παραβολῇ*, ἐμφαινομένῃ ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$\psi^2 = 2\pi x,$$

ἔχομεν τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν

$$\psi\delta\psi = \pi\delta x, \qquad \text{ἐξ ἧς} \qquad \frac{\delta\psi}{\delta x} = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$$

Τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης

$$\psi'(\psi - \psi') = \pi(x - x'), \qquad \text{ἢ} \qquad \psi'\psi = \pi(x + x').$$

Τὴν τῆς καθέτου

$$\psi'(x - x') + \pi(\psi - \psi') = 0, \qquad \text{ἢ} \qquad \psi - \psi' = -\frac{\psi'}{\pi}(x - x').$$

$$\text{Ἐφ}^{\eta} = \sqrt{2x'(2x' + \pi)}, \qquad \text{Κ}^{\text{ος}} = \sqrt{\pi(2x' + \pi)},$$

$$\text{Ὑφ}^{\eta} = 2x', \qquad \text{Ὑκ}^{\text{ος}} = \pi,$$ ἤτοι *ἀμετάβλητος*.

184. Θεωρήσωμεν ἤδη τὴν *λογαριθμικήν*, ἐμφαινομένην ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$\psi = \alpha\,\lambda\,\frac{x}{\mu},$$

α καὶ μ εἰσὶ γραμμαὶ δοθεῖσαι, οἱ δὲ λογάριθμοι ὑποτίθενται νεπεριανοί. Ἔχομεν

$$\frac{\delta\psi}{\delta x} = \frac{\alpha}{x}.$$

$$\psi - \psi' = \frac{\alpha}{x'}(x - x'), \quad \text{ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης,}$$

$$\psi - \psi' = -\frac{x'}{\alpha}(x - x'), \quad \text{ἐξίσωσιν τῆς καθέτου.}$$

$$\Upsilon\varphi^{\eta} = -x'\lambda\frac{x'}{\mu}, \qquad \Upsilon\kappa^{o\varsigma} = \frac{\psi'\alpha}{x'} = \frac{\alpha^2\lambda\frac{x'}{\mu}}{x'}.$$

Ἡ ὑφαπτομένη καὶ ἡ ὑποκάθετος ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ψ, ἔχουσι δι' ἔκθεσιν τὴν τιμὴν τῆς $\psi - \psi'$ συστοιχοῦσαν τῇ $x = 0$. Εὑρίσκομεν οὕτως·

$$\Upsilon\varphi^{\eta} = -\alpha, \qquad \Upsilon\kappa^{o\varsigma} = \frac{x'^2}{\alpha}.$$

185. Ἡ ἐξίσωσις, $\psi = \alpha^x$,

ἐν ᾗ α ὑποτίθεται ἡ βάσις τοῦ λογαριθμικοῦ συστήματος, δίδει,

$$\delta\psi = \lambda\alpha\,.\,\alpha^x\delta x, \qquad \text{ὅθεν} \qquad \frac{\delta\psi}{\delta x} = \alpha^x\lambda\alpha.$$

Εὑρίσκομεν δέ·

Ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης, $\psi - \psi' = \alpha^{x'}\lambda\alpha(x - x')$.

Ἐξίσωσιν τῆς καθέτου, $\psi - \psi' + \frac{\alpha^{-x'}}{\lambda\alpha}(x - x') = 0$.

$$\Upsilon\varphi^{\eta} = \frac{1}{\lambda\alpha}, \qquad \Upsilon\kappa^{o\varsigma} = \lambda\alpha\,.\,\alpha^{2x'}.$$

Οὕτως, ἡ μὲν ὑφαπτομένη εἶναι ἀμετάβλητος καὶ ἴση τῇ διαστολεῖ τοῦ λογαριθμικοῦ συστήματος, ἡ δὲ ὑποκάθετος

αὐξάνει ταχύτατα καθ' ὅσον τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς μᾶλλον ἀφίσταται τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων.

Διὰ τὴν λογαριθμικὴν $\psi = e^x$, ἡ μόνιμος τιμὴ τῆς ὑφαπτομένης εἶναι ἡ μονάς.

186. Θεωρήσωμεν ἤδη τὴν ὑπερβατικὴν καμπύλην *Κυκλοειδῆ* καλουμένην. Αὕτη καταγράφεται ἐξ ἑνὸς σημείου τῆς περιφερείας κύκλου περικυλιομένου, ἄνευ ὀλισθήσεως, ἐπὶ γραμμὴν εὐθεῖαν. Αἱ ἰδιότητες τῆς κυκλοειδοῦς ἔχουσι πλείστας ἀξίας λόγου ἐφαρμογὰς ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ καὶ τῇ Μηχανικῇ.

(Σχ. 36) Ἔστω Γ μία τῶν θέσεων τοῦ κέντρου τοῦ *γεννήτορος κύκλου* καὶ Μ ἡ θέσις τοῦ σημείου τῆς περιφερείας τοῦ τὴν καμπύλην καταγράφοντος. Λαμβάνομεν ὡς ἄξονα τῶν x τὴν εὐθεῖαν ἐφ' ἣν ἐπακουμβᾷ ὁ κύκλος περιαγόμενος· ὡς ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων τὸ σημεῖον Α καθ' ὃ τὸ Μ ἦτον ἐν ἀρχῇ τῆς περικυλίσεως. Καλοῦμεν, x καὶ ψ τὰς συντεταγμένας ΑΠ καὶ ΜΠ, α τὴν ἀκτῖνα τοῦ γεννήτορος κύκλου, καὶ ω τὴν γωνίαν ΜΓΡ, περιεχομένην ὑπὸ τῆς ἀκτῖνος ΓΜ καὶ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου καθέτου οὔσης τῷ ἄξονι τῶν x. Ἡ γωνία αὕτη λαμβάνει πᾶσαν τιμὴν ἀπὸ 0 μέχρι $\pm\infty$. Εὐκόλως μορφοῦμεν τὰς ἑξῆς σχέσεις·

$$x = \alpha(\omega - \eta\mu\,\omega), \qquad \psi = \alpha(1 - \sigma\upsilon\nu\,\omega)\cdot$$

ἐξ ὧν ἀπαλείφομεν ω ἵνα λάβωμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς κυκλοειδοῦς. Ἄρα,

$$\sigma\upsilon\nu\,\omega = \frac{\alpha - \psi}{\alpha}, \qquad \eta\mu\,\omega = \pm\frac{\sqrt{2\alpha\psi - \psi^2}}{\alpha}.$$

ἐπομένως

$$x = \alpha\ \tau\acute{o}\xi\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{\alpha - \psi}{\alpha} \mp \sqrt{2\alpha\psi - \psi^2}.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἐμφαίνει τὴν κυκλοειδῆ· παρουσιάζει δὲ ἄπειρον ἀριθμὸν μερῶν, πρός τε τὰς θετικὰς x καὶ πρὸς τὰς ἀρνητικάς, ἁπάντων κειμένων ἄνω τοῦ ἄξονος τούτου, ἰσαλλήλων καὶ κατεχόντων ἑκάστου ἐπὶ τούτου διάστημα $AB = 2\Pi\alpha$.

Προσέτι, ἕκαστον τῶν μερῶν τῆς κυκλοειδοῦς συγκροτεῖται ἐκ δύο ἡμίσεων συμμετρικῶν, ἐν τῷ μέσῳ τῶν ὁποίων ἀντιστοιχεῖ ἡ μεγίστη τεταγμένη $EZ = 2\alpha$. Τὸ σημεῖον τοῦ ῥιζικοῦ ἐν τῇ τῆς καμπύλης ἐξισώσει μεταβάλλεται εἰς τὰ δύο ἥμιση ἑκάστου τῶν διαδοχικῶν κλώνων· διότι, ἐπὶ μὲν τοῦ τόξου ΑΕ, ἔχομεν $\omega < \Pi$ καὶ $\text{ημ}\,\omega > 0$, ἐπὶ δὲ τοῦ τόξου ΕΒ ἔχομεν $\omega > \Pi$ καὶ $\text{ημ}\,\omega < 0$.

Αἱ προηγούμεναι ἐκθέσεις τῶν x καὶ ψ διαφοριζόμεναι διδοῦσι·

$$\delta x = \alpha\,(1 - \text{συν}\,\omega)\,\delta\omega, \qquad \delta\psi = \alpha\ \text{ημ}\,\omega\,\delta\omega.$$

Ἄρα, $$\frac{\delta\psi}{\delta x} = \frac{\text{ημ}\,\omega}{1 - \text{συν}\,\omega} = \frac{\sqrt{2\alpha\psi - \psi^2}}{\psi} = \sqrt{\frac{2\alpha}{\psi} - 1}.$$

Τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ $\frac{\delta\psi}{\delta x}$ λαμβάνομεν προσέτι διαφορίζοντες τὴν ἐξίσωσιν τῆς κυκλοειδοῦς.

Ἐκ τῶν γενικῶν ἐν § 175 τύπων συνάγομεν.

Τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης, $\psi - \psi' = \sqrt{\frac{2\alpha}{\psi'} - 1}\,(x - x')$.

Τὴν ἐξίσωσιν τῆς καθέτου, $\psi - \psi' = -\frac{1}{\sqrt{\frac{2\alpha}{\psi'} - 1}}\,(x - x')$.

$$\text{Εφ}^{\eta} = \psi' \sqrt{\frac{2\alpha'}{2\alpha - \psi'}} = \text{ΜΤ}. \qquad \text{Κ}^{o\varsigma} = \sqrt{2\alpha\psi'} = \text{ΜΡ}.$$

$$\text{Υφ}^{\eta} = \psi' \sqrt{\frac{\psi'}{2\alpha - \psi'}} = \text{ΠΤ}. \qquad \text{Υκ}^{o\varsigma} = \sqrt{2\alpha\psi' - \psi'^3} = \text{ΠΡ}.$$

Ἡ κάθετος τέμνει ἀείποτε τὸν ἄξονα τῶν x καθ' ὃ σημεῖον ὁ ἄξων οὗτος ἐφάπτεται τοῦ γεννήτορος κύκλου. Ἄρα, κατασκευάζομεν τὴν ἐφαπτομένην κατὰ σημεῖον Μ δοθὲν τῆς κυκλοειδοῦς, γράφοντες τὸν γεννήτορα κύκλον καὶ

προεκβάλλοντες τὴν χορδὴν ΔΜ, ἥτις ἔσεται ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη. Ἀλλ' ἀποφεύγομεν τὴν κατασκευὴν τοῦ κύκλου τούτου καθ' ἕκαστον σημεῖον τῆς καμπύλης, κατασκευάζοντες ἡμικύκλιον αὐτοῦ ἐπὶ τὴν μείζονα τεταγμένην τῆς κυκλοειδοῦς, καὶ ἄγοντες ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, Μ', τὴν πρὸς ὀρθὰς Μ'Η ἐπὶ τὴν ΕΖ. Ἡ παράλληλος Μ'Τ' τῇ χορδῇ ΕΘ ἔσεται ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη τῆς κυκλοειδοῦς κατὰ τὸ σημεῖον Μ'.

ΚΑ'. ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΑΣΥΜΠΤΩΤΩΝ.

187. Ἔστω $\psi = \gamma x + \varepsilon$

ἐξίσωσις ἐμφαίνουσα εὐθεῖαν ἀσύμπτωτον καμπύλης δοθείσης μὴ οὖσαν παράλληλον ταῖς τεταγμέναις. Ἐκ τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας γνωρίζομεν ὅτι·

$$\gamma = \text{ὅριον}\ \frac{\psi}{x}, \qquad \text{καὶ} \qquad \varepsilon = \text{ὅριον}\ (\psi - \gamma x).$$

Ἐκθέσωμεν ἤδη τὴν γενικὴν μέθοδον δι' ἧς λογίζονται αἱ δύο ποσότητες γ, ε, ἐν ταῖς ἀλγεβρικαῖς καμπύλαις.

Ἔστω $\Sigma(x, \psi) = 0$ ἡ ἐξίσωσις καμπύλης τάξεως μ^ης. Τὴν ἐξίσωσιν ταύτην γράφομεν καὶ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$(1) \quad \Sigma_0(x, \psi) + \Sigma_1(x, \psi) + \Sigma_2(x, \psi) + \ldots\ldots = 0,$$

συναθροίζοντες τοὺς ὁμοβαθμίους ὅρους, καὶ δηλοῦντες Σ_0, Σ_1, Σ_2, ..., τὸ σύνολον τῶν ὅρων τῶν βαθμῶν μ, $\mu - 1$, $\mu - 2$, ... Λαμβάνομεν ὡς ἄγνωστον τὸν μεταβλητὸν λόγον τῶν συντεταγμένων σημείου τινος τῆς καμπύλης. Θέτομεν

$$\frac{\psi}{x} = k, \qquad \text{ἢ} \qquad \psi = kx,$$

ἐπομένως ἡ ἐξίσωσις (1) καθίσταται

$$(2) \quad \Sigma_0(x, kx) + \Sigma_1(x, kx) + \Sigma_2(x, kx) + \ldots = 0.$$

Οἱ ἐν $\Sigma_0(x, kx)$ ὅροι περιέχουσιν ἅπαντες x εἰς τὴν μ^ην δύναμιν· οἱ ἐν $\Sigma_1(x, kx)$ περιέχουσιν αὐτὴν εἰς τὴν $(\mu-1)^{\tilde{\eta}\nu}$ δύναμιν· καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Οἱ πολυπλασιασταὶ τῶν δυνάμεων μ, $\mu-1$, $\mu-2$, ... , τῆς x, ἔσονται αἱ τιμαὶ ἃς λαμβάνουσι τὰ πολυώνυμα $\Sigma_0(x, \psi)$, $\Sigma_1(x, \psi)$, κ. τ. ἑ. τῇ ἐν αὐτοῖς ἀντεισαγωγῇ 1 ἀντὶ x, καὶ k ἀντὶ ψ.

Ἡ ἐξίσωσις (2), τῇ διὰ x^μ διαιρέσει λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$(3) \quad \Sigma_0(1, k) + \Sigma_1(1, k)\frac{1}{x} + \Sigma_2(1, k)\frac{1}{x^2} + \ldots = 0.$$

Τῆς τιμῆς τῆς x τεινούσης πρὸς τὸ ἄπειρον, τοῦ δὲ k προχωροῦντος πρός τινα πεπερασμένην τιμὴν γ, ἅπαντες οἱ ὅροι, ἀπὸ τοῦ δευτέρου, μηδενίζονται ἐν τῷ ὁρίῳ, καὶ ἔχομεν

$$(4) \qquad \Sigma_0(1, \gamma) = 0.$$

Ἄρα, συνάγομεν ὅτι, *οἱ συντελεσταὶ τῆς x ἐν ταῖς ἐξισώσεσι τῶν ἀσυμπτώτων, εἰσὶν αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως ἣν λαμβάνομεν ἰσοῦντες μηδενὶ τὸ σύνολον τῶν ἀνωτέρου βαθμοῦ ὅρων τῆς ἐξισώσεως τῆς τελείας καμπύλης, ἐν οἷς ἀντεισάγομεν 1 ἀντὶ x καὶ γ ἀντὶ ψ.*

Ζητήσωμεν ἤδη τὴν τιμὴν τῆς ε, ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τεταγμένης τῆς ἀσυμπτώτου. Πρὸς τοῦτο καλοῦμεν θ τὴν μεταβλητὴν διαφορὰν ψ—γx, ἐν ᾗ ψ καὶ x δηλοῦσι τὰς συντεταγμένας τοῦ τυχόντος σημείου τῆς καμπύλης, γ δὲ μίαν ῥίζαν πραγματικὴν τῆς ἐξισώσεως $\Sigma_0(1, \gamma) = 0$. Ἔξομεν

$$\psi - \gamma x = \theta, \qquad \text{ὅθεν} \qquad \frac{\psi}{x} = k = \gamma + \frac{\theta}{x}.$$

Ἀντεισάγοντες $\gamma + \dfrac{\theta}{x}$ ἀντὶ k ἐν τῇ ἐξισώσει (3), λαμβάνομεν

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{r|l|l} \Sigma_0(1,\gamma) + \Sigma'_0(1,\gamma)\theta & \dfrac{1}{x} + \frac{1}{2}\Sigma''_0(1,\gamma)\theta^2 & \dfrac{1}{x^2} \\ + \Sigma_1\ (1,\gamma) & \ + \Sigma'_1\ (1,\gamma)\theta & \\ & \ + \Sigma_2\ (1,\gamma) & \end{array} \quad + \ldots \right\} = 0.$$

Παρατηρητέον ὅτι $\Sigma_0(1, \gamma) = 0$· πολυπλασιάζοντες δὲ ἐπὶ x τοὺς ὅρους τῆς ἐξισώσεως (5), εὑρίσκομεν·

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{r|l|l} \Sigma'_0(1,\gamma)\theta + \frac{1}{2}\Sigma''_0(1,\gamma)\theta^2 & \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2\cdot 3}\Sigma'''_0(1,\gamma)\theta^3 & \dfrac{1}{x^2} \\ + \Sigma_1(1,\gamma) + \Sigma'_1(1,\gamma)\theta & \ + \frac{1}{2}\ \Sigma''_1(1,\gamma)\theta^2 & \\ + \Sigma_2(1,\gamma) & \ + \Sigma'_2\ (1,\gamma)\theta & \\ & \ + \Sigma_3\ (1,\gamma) & \end{array} \quad + \ldots \right\} = 0.$$

Ὅταν x αὐξάνῃ ἐπ' ἄπειρον, θ προσχωρεῖ πρός τινα τιμὴν πεπερασμένην ε, ἐν δὲ τῷ ὁρίῳ $x = \infty$, ἡ προηγουμένη ἐξίσωσις καθίσταται

$$\Sigma'_0(1, \gamma)\,\varepsilon + \Sigma_1(1, \gamma) = 0,$$

ἐξ ἧς

$$(7) \qquad \varepsilon = -\frac{\Sigma_1\,(1, \gamma)}{\Sigma'_0\,(1, \gamma)}.$$

Ἄρα, μ ὄντος τοῦ βαθμοῦ τῆς τὴν καμπύλην ἐμφαινούσης ἐξισώσεως, *ἡ ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τεταγμένη τῆς ἀσυμπτώτου ἰσοῦται, μετὰ σημείου ἐναντίου, τῷ μέρει τοῦ $(\mu-1)^{ου}$ βαθμοῦ τῆς ἐξισώσεως τῆς καμπύλης, διαιρεθέντι διὰ τῆς πρὸς ψ παραγομένης τοῦ μέρους τοῦ $\mu^{ου}$ βαθμοῦ, x καὶ ψ ἀντικαθισταμένων διὰ 1 καὶ γ.*

188. Ὅταν γ ἦναι ῥίζα ἁπλῆ τῆς ἐξισώσεως $\Sigma_0(1,\gamma)=0$, ἡ παραγομένη $\Sigma'_0(1, \gamma)$ δὲν μηδενίζεται διὰ τῆς ῥίζης ταύτης· ὅθεν ἡ ἐξίσωσις (7) δίδει διὰ τὴν ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τεταγμένην ε μίαν τιμὴν πεπερασμένην συστοιχοῦσαν τῇ τιμῇ τῆς γ.

Ἐὰν γ ἦναι ῥίζα πολλαπλῆ τῆς $\Sigma_0(1, \gamma) = 0$, ἔξομεν

$$\Sigma'_0(1, \gamma) = 0·$$

καί, τῇ ὑποθέσει ὅτι $\Sigma_1(1, \gamma)$ δὲν μηδενίζεται ὑπὸ τῆς αὐτῆς τιμῆς τῆς γ, προκύψει $\varepsilon = \infty$. Ἐπομένως, οὐδεμία ἀσύμπτωτος ὑπάρχει ὑπὸ τὴν κλίσιν τὴν ὁριζομένην ἐκ τῆς τιμῆς ταύτης τῆς γ.

Ὅταν ἡ πολλαπλῆ ῥίζα τῆς $\Sigma_0(1, \gamma) = 0$, μηδενίζῃ $\Sigma_1(1, \gamma)$, ὁ ἀνεξάρτητος τῆς x ὅρος τῆς ἐξισώσεως (6) ἀφανίζεται· πολυπλασιάζοντες δὲ ἐπὶ x τοὺς μένοντας ὅρους, καὶ μεταβαίνοντες εἰς τὸ ὅριον, τῇ ὑποθέσει $x = \infty$, λαμβάνομεν ἐκ τῆς αὐτῆς ἐξισώσεως·

$$\tfrac{1}{2}\Sigma''_0(1, \gamma)\, \varepsilon^2 + \Sigma'_1(1, \gamma)\, \varepsilon + \Sigma_2(1, \gamma) = 0.$$

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, δυνατὸν εὑρεῖν διὰ ε δύο τιμὰς συστοιχούσας ταῖς τιμαῖς τῆς γ· τῷ ὄντι δέ, τὸ τοιοῦτον συμβαίνει ὅταν ὑπάρχωσι δύο ἀσύμπτωτοι παράλληλοι, ἐν ταῖς ἐξισώσεσι τῶν ὁποίων ὁ συντελεστὴς τῆς x ἰσοῦται γ.

Ἐάν, ἡ αὐτὴ τιμὴ γ μηδενίζῃ προσέτι $\Sigma''_0(1,\gamma)$, $\Sigma'_1(1,\gamma)$, $\Sigma_2(1,\gamma)$, ὅτε ἀπαιτεῖται γ νὰ ἦναι τοὐλάχιστον ῥίζα τριπλῆ τῆς ἐξισώσεως $\Sigma_0(1, \gamma) = 0$, ὅπως ὁρίσωμεν τὰς ἀντιστοιχούσας τιμὰς τῆς ε, προστρέχομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν·

$$\frac{1}{2.3}\Sigma'''_0(1,\gamma)\varepsilon^3 + \tfrac{1}{2}\Sigma''_1(1,\gamma)\varepsilon^2 + \Sigma'_2(1,\gamma)\varepsilon + \Sigma_3(1,\gamma) = 0.$$

Τοῦτο δὲ συμβαίνει ὅταν ἡ καμπύλη ἔχῃ τρεῖς ἀσυμπτώτους παραλλήλους, ἐν ταῖς ἐξισώσεσι τῶν ὁποίων ὁ συντελεστὴς τῆς x εἶναι ἡ ῥίζα αὐτὴ τῆς ἐξισώσεως $\Sigma_0(1, \gamma) = 0$.

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα ὅπως ὁρίσωμεν τὰς τιμὰς τῆς ε ἀντιστοιχούσας εἰς τέσσαρας ἀσυμπτώτους παραλλήλους, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

189. Ἐκ τῶν προεκτεθέντων προκύπτει ὅτι, *ὁ ἀριθμὸς τῶν μὴ παραλλήλων τῷ ἄξονι τῶν ψ ἀσυμπτώτων, δὲν ὑπερβαίνει τὸν μείζονα τῶν ἐκθετῶν τῆς ψ ἐν τῇ ἐξισώσει τῆς προτεθείσης καμπύλης.*

Σαφὲς τῷ ὄντι ὅτι, ὁ ἀριθμὸς τῶν περὶ ὧν ὁ λόγος ἀσυμπτώτων ἰσοῦται, τὸ πλεῖστον, τῷ βαθμῷ τῆς ἐξισώσεως $\Sigma_0(1, \gamma) = 0$, ὁ βαθμὸς δὲ οὗτος δὲν ὑπερβαίνει τὸν μείζονα τῶν ἐκθετῶν τῆς ψ ἐν τῇ τῆς καμπύλης ἐξισώσει.

190. Ἵνα ὁρίσωμεν τὰς τῷ ἄξονι τῶν ψ παραλλήλους ἀσυμπτώτους, παρατηρητέον ὅτι, ἐὰν $x = \alpha$ ἦναι ἡ ἐξίσωσις μιᾶς τῶν εὐθειῶν τούτων, πρέπει, ἐφ' ὅσον x τείνει πρὸς τὸ ἰσωθῆναι α, ἀπό τινος τιμῆς $(\alpha \pm 0)$ ὅσον ἔνεστι προσεγγιζούσης τῇ α, ἡ τεταγμένη τῆς καμπύλης ν' αὐξάνῃ ἐπ' ἄπειρον καὶ καθίστασθαι μείζων πάσης ποσότητος δεδομένης. Κατὰ τὸ ὅριον $(x = \alpha)$, ψ ἀποκαθίσταται ἄπειρος. Ἄρα, εὑρήσομεν α, ζητοῦντες τὰς πεπερασμένας τιμὰς τῆς x συστοιχούσας τιμαῖς πραγματικαῖς ἀπείροις τῆς ψ ἐν τῇ προτεθείσῃ ἐξισώσει.

Λοιπόν, συνεπείᾳ τῶν προλεχθέντων, κατατάσσομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς καμπύλης κατὰ τὰς μειούσας δυνάμεις τῆς ψ· ἤτοι δίδομεν αὐτῇ τὴν μορφὴν

$$(1) \qquad A\psi^{\nu} + B\psi^{\pi} + \Gamma\psi^{\rho} + \ldots\ldots = 0.$$

Α, Β, Γ, ... , δηλούντων ἐν γένει συνεκθέσεις τῆς x. Διαιροῦμεν διὰ ψ^{ν} τὴν αὐτὴν ἐξίσωσιν καὶ ἔχομεν,

$$(2) \qquad A + \frac{B}{\psi^{\nu-\pi}} + \frac{\Gamma}{\psi^{\nu-\rho}} + \ldots\ldots = 0.$$

Δῆλον ἤδη ὅτι, πᾶσα τιμὴ πεπερασμένη τῆς x συστοιχοῦσα τῇ $\psi = \infty$, μηδενίσει Α.

Ἄρα, ὅπως ὁρίσωμεν τὰς παραλλήλους τῷ ἄξονι τῶν ψ ἀσυμπτώτους, ἐπιλύομεν τὴν ἐξίσωσιν ἣν μορφοῦμεν ἰσοῦντες μηδενὶ τὸν συντελεστὴν τῆς ἀνωτέρας δυνάμεως τῆς ψ ἐν τῇ ἐξισώσει τῆς προτεθείσης καμπύλης.

Ἕπεται ὅτι, *ὁ ἀριθμὸς τῶν παραλλήλων τῷ ἄξονι τῶν ψ ἀσυμπτώτων δὲν ὑπερβαίνει τὸν βαθμὸν* τῆς x *ἐν τῷ συντελεστῇ τοῦ ὅρου, τοῦ περιέχοντος* ψ *εἰς τὴν ἀνωτέραν δύναμιν.* Ἄρα δηλοῦντες μ τὸν βαθμὸν τῆς καμπύλης, καὶ ν τὸν μείζονα τῶν ἐκθετῶν τῆς ψ, ὁ ἀριθμὸς τῶν περὶ ὧν λόγος ἀσυμπτώτων εἶναι τὸ πλεῖστον μ — ν.

Γινώσκομεν προσέτι, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν μὴ παραλλήλων ταῖς ψ ἀσυμπτώτων δὲν εἶναι μείζων τοῦ ν. Ἄρα, *καμπύλη βαθμοῦ* μ*οῦ ἀδύνατον ἔχειν ἀσυμπτώτους εὐθυγράμμους πλείονας τῶν* μ.

191. Αἱ ἀσύμπτωτοι θεωροῦνται προσέτι *ὡς ἐφαπτόμεναι*

ὧν τὸ τῆς ἐπαφῆς σημεῖον ἐπ' ἄπειρον ἀφίσταται ἐπὶ τῆς καμπύλης. Ἡ γενικὴ ἐξίσωσις [180]

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta x'}(x - x') + \frac{\delta\Sigma}{\delta\psi'}(\psi - \psi') = 0,$$

ἁρμόζει εἰς τὴν τυχοῦσαν τῶν ἐφαπτομένων τῆς ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\Sigma(x, \psi) = 0$ ἐμφαινομένης καμπύλης· ἀνήκει ἐπίσης εἰς ἀσύμπτωτόν τινα εἰ ἐν αὐτῇ ὑποτεθῶσιν αἱ συντεταγμέναι x' ἢ ψ' τῆς ἐπαφῆς ἄπειροι τὸ μέγεθος. Ἄρα, ὅπως λάβωμεν τὴν ἐξίσωσιν τῶν ἀσυμπτώτων καμπύλης δοθείσης, θέτομεν ἐν τῇ ἀνωτέρω γενικῇ τῶν ἐφαπτομένων ἐξισώσει τὴν τιμὴν τῆς ψ' εἰς x' ἐξαγομένην ἐκ τῆς $\Sigma(x', \psi') = 0$, εἶτα καθιστῶμεν $x' = +\infty$, ἢ $-\infty$, καὶ οὕτως εὑρίσκομεν ἁπάσας τὰς ἀσυμπτώτους τὰς μὴ ταυτιζομένας ἢ μὴ οὔσας παραλλήλους τῷ ἄξονι τῶν ψ. Τὰς τελευταίας ταύτας, ἐὰν ὑπάρχωσι τοιαῦται, πορίζόμεθα καθιστῶντες ἐν τῇ αὐτῇ ἐξισώσει τὴν εἰς ψ' τιμὴν τῆς x' ἐκ τῆς $\Sigma(x', \psi') = 0$ ἐξαγομένην, εἶτα ποιοῦντες $\psi' = +\infty$, ἢ $-\infty$, καὶ θεωροῦντες μόνα τὰ ἐξαγόμενα μὴ ἀντιστοιχοῦντα τῇ x' ἀπείρῳ.

192. Ἡ αὐτὴ μέθοδος ἐφαρμόζεται καὶ ὅταν πρόκηται οὐχὶ περὶ γραμμῆς εὐθείας, ἀλλὰ περὶ πάσης καμπύλης ἀσυμπτωτικῆς. Μορφωθείσης, κατὰ ἄρθ. III', τῆς ἐξισώσεως $\psi = \Phi(x)$ ἐμφαινούσης καμπύλην ἔχουσαν ἐπαφὴν πρώτης τάξεως μετὰ τῆς καμπύλης $\psi = \Sigma(x)$ κατὰ τὸ σημεῖον (x', ψ'), γνωσθήσεται τὸ σχῆμα ὃ πρέπει νὰ ἔχῃ ἡ καμπύλη $\psi = \Phi(x)$ ὅπως ᾖ ἀσύμπτωτος τῆς ἑτέρας, ἀντεισαγομένων ἐν τῇ ἐξισώσει αὐτῆς τῶν τιμῶν τῆς ψ' εἰς x', ἢ τῆς x' εἰς ψ', διδομένων ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\psi' = \Sigma(x')$, εἶτα δὲ ὑποτιθεμένης x', ἢ ψ', ἀπείρου.

193. Τὰς προεκτεθείσας μεθόδους ἐφαρμόζοντες·

1) Ἐπὶ τὴν *ὑπερβολήν*, εὑρίσκομεν τὰς τῶν ἀσυμπτώτων αὐτῆς ἐξισώσεις·

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{\psi}{\beta} = 0, \qquad \text{ἢ} \qquad \psi = \pm\frac{\beta}{\alpha}x.$$

2) Θεωροῦντες τὴν ἐξίσωσιν $\psi = \lambda o\gamma\, x$,

εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ἄξων τῶν ψ εἶναι ἀσύμπτωτος τῆς καμπύλης κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῶν ἀρνητικῶν ψ (Σχ. 18).

3) Ἐν τῇ καμπύλῃ, (Σχ. 37),

$$\psi^3 - 3\alpha x\psi + x^3 = 0,$$

εὑρήσομεν μίαν ἀσύμπτωτον, τὴν ΗΗ', ἐμφαινομένην ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$\psi = -x - \alpha.$$

4) Ἡ ἐξίσωσις $\psi^2 = \sigma\upsilon\nu\,\frac{\psi}{x}$,

δίδει $\gamma = 0$, $\varepsilon = \pm 1$.

Ἄρα, ἡ καμπύλη ἔχει ἀσυμπτώτους τὰς δύο εὐθείας

$$\psi = +1, \qquad \psi = -1.$$

5) Θεωροῦντες τὴν ἐξίσωσιν (Σχ. 19)

$$\psi = \alpha^x,$$

ἐάν, κατὰ § 191, θέσωμεν ἀντὶ ψ' τὴν τιμὴν αὐτῆς $\alpha^{x'}$ ἐν τῇ ἐξισώσει τῆς ἐφαπτομένης, ἕξομεν

$$\psi - \alpha^{x'} = \lambda\alpha.\alpha^{x'}(x - x').$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη τῇ ὑποθέσει $x' = -\infty$ ἄγεται εἰς

$$\psi = 0\cdot$$

ὅθεν συνάγομεν ὅτι, ὁ τῶν x ἄξων εἶναι ἀσύμπτωτος τῆς καμπύλης πρὸς τὸ ἀρνητικὸν μέρος.

6) Ἡ *κισσοειδής*, ἐμφαινομένη ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$(2\alpha - x)\psi^2 - x^3 = 0,$$

ἔχει (Σχ. 38) μίαν ἀσύμπτωτον $x = 2\alpha$· ἤτοι τὴν ΤΤ'.

7) Ἡ *κογχοειδής*, ἐμφαινομένη ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$(\psi^2 + x^2)(x - \alpha)^2 = \beta^2 x^2,$$

ἐν ᾗ ὑποθέτομεν $\beta < \alpha$ (Σχ. 39), ἔχει ἀσύμπτωτον τὴν εὐθεῖαν ΓΔ, ἧς ἡ ἐξίσωσις εἶναι

$$x = \alpha.$$

8) Ἡ καμπύλη $\psi = \tau\acute{\epsilon}\mu.^2 x$,

(Σχ. 22) ἔχει ἀσύμπτωτον τὴν εὐθεῖαν ΖΗ, ἧς ἡ ἐξίσωσις εἶναι

$$x = \tfrac{1}{2}\,\Pi.$$

9) Ἡ καμπύλη $\psi = \dfrac{1}{\lambda o\gamma\, x}$,

ἐν τῷ Σχ. 23 παρισταμένη, ἔχει ἀσυμπτώτους τὰς δύο εὐθείας ΗΗ', καὶ ΓΧ, ἐμφαινομένας ἀμοιβαίως ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων

$$x = 1, \qquad \psi = 0.$$

10) (Σχ. 24). Ἡ ἐξίσωσις $\psi = \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$,

ἐμφαίνει καμπύλην ἧς οἱ κλάδοι ἔχουσι κοινὴν ἀσύμπτωτον τὴν εὐθεῖαν ΑΑ', δηλουμένην ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$\psi = \tfrac{1}{2}\,x - 1.$$

Ἐν τῇ αὐτῇ καμπύλῃ ὁ ἄξων τῶν x ἐφάπτεται τοῦ πρὸς τὰς θετικὰς x ἐκτεινομένου κλάδου αὐτῆς, ἡ δὲ εὐθεῖα ἥτις διχοτομεῖ τὴν γωνίαν Χ'ΟΨ' ἐφάπτεται τοῦ ἑτέρου κλάδου. Ἀμφότεραι αἱ ἐπαφαὶ εἰσὶν ἐν τῇ ἀρχῇ τῶν συντεταγμένων.

ΚΒ'. ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΦΙΛΠΤΟΡΟΣ ΚΥΚΛΟΥ. — ΠΕΡΙ ΕΝΕΙΛΙΓΜΕΝΩΝ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ.

194. Ἡ ἁπλουστέρα γραμμή, μετὰ τὴν εὐθεῖαν, εἶναι ὁ κύκλος. Ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις αὐτοῦ ἐν γένει περιέχει τρεῖς ποσότητας ἀτρέπτους, ὧν δυνάμεθα διατιθέναι κατὰ βούλησιν, δυνατὸν δοῦναι κύκλῳ ἐπαφὴν δευτέρας τάξεως μεθ' οἱασδήποτε καμπύλης.

195. Ἐπανέλθωμεν ἐν τοῖς ἐν ἄρθ. ΙΘ' ἐκτεθεῖσιν. Ἔστωσαν, ἐν ἄξοσιν ὀρθογωνίοις, ἡ μὲν ἐξίσωσις καμπύλης οἱασδήποτε

$$\psi = \Sigma(x),$$

ἡ δ' ἐξίσωσις κύκλου οἱουδήποτε

$$(\pi - x)^2 + (\varkappa - \psi)^2 = \Lambda^2.$$

Κατὰ § 171, δίδομεν τῷ κύκλῳ τούτῳ ἐπαφὴν τῆς πρώτης τάξεως μετὰ τῆς τεθείσης καμπύλης κατὰ τὸ σημεῖον αὐτῆς Μ, οὗτινος αἱ συντεταγμέναι εἰσὶ x' καὶ ψ', ὁριζομένων τῶν ἀτρέπτων π, κ καὶ Λ, οὕτως ὥστε, ἡ ἐξίσωσις τοῦ κύκλου καὶ ἡ διαφορικὴ αὐτῆς τῆς πρώτης τάξεως

$$\pi - x + (\varkappa - \psi)\frac{\delta\psi}{\delta x} = 0,$$

νὰ ταυτοποιῶνται ὑπὸ τῶν τιμῶν τῶν x', ψ', $\dfrac{\delta\psi'}{\delta x'}$, συστοιχουσῶν τῷ σημείῳ Μ τῆς τεθείσης καμπύλης. Ἄρα ἔχομεν τὰς δύο ἐξισώσεις

$$(\pi - x')^2 + (\varkappa - \psi')^2 = \Lambda^2, \quad \pi - x' + (\varkappa - \psi')\frac{\delta\psi'}{\delta x'} = 0,$$

ἃς πρέπει νὰ ἐπαληθεύωσιν αἱ τιμαὶ τῶν π, κ, Λ. Ἡ δευτέρα τῶν ἐξισώσεων τούτων, θεωρουμένων π καὶ κ ὡς συντεταγμένων μεταβλητῶν, ἀνήκει εἰς τὴν κάθετον τῇ καμπύλῃ κατὰ τὸ σημεῖον Μ ἀγομένῃ. Ἡ ἑτέρα τῶν συντεταγμένων τούτων μένει ἀόριστος. Συνάγομεν ἐκ τούτου ὅτι, πᾶς κύκλος, τὸ κέντρον αὐτοῦ ἐπὶ τῆς καθέτου ἔχων, ἐφάπτεται τῆς καμπύλης [154].

196. Ἵνα δώσωμεν τῷ κύκλῳ ἐπαφὴν δευτέρας τάξεως μετὰ τῆς τεθείσης καμπύλης κατὰ τὸ σημεῖον αὐτῆς Μ, πρέπει ἡ ἐξίσωσις τοῦ κύκλου τούτου, καὶ αἱ διαφορικαὶ αὐτῆς τῆς τε πρώτης τάξεως καὶ τῆς δευτέρας, οὔσης

$$1 + \left(\frac{\delta\psi}{\delta x}\right)^2 - (\varkappa - \psi)\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} = 0,$$

νὰ ἐτυμοποιῶνται ὑπὸ τῶν τιμῶν τῶν x', ψ', $\frac{\delta\psi'}{\delta x'}$, $\frac{\delta^2\psi'}{\delta x'^2}$, συστοιχουσῶν τῷ σημείῳ Μ τῆς καμπύλης. Ἄρα, διὰ τῶν τριῶν ἐξισώσεων,

$$(\pi - x')^2 + (\varkappa - \psi')^2 = \Lambda^2, \qquad \pi - x' + (\varkappa - \psi')\frac{\delta\psi'}{\delta x'} = 0,$$

$$1 + \left(\frac{\delta\psi'}{\delta x'}\right)^2 - (\varkappa - \psi')\frac{\delta^2\psi'}{\delta x'^2} = 0,$$

ἐντελῶς ὁρίζονται αἱ ἄτρεπτοι π, $\varkappa$, Λ· ἤτοι συνάγομεν·

$$\pi - x' = -\frac{\frac{\delta\psi'}{\delta x'}\left[1 + \left(\frac{\delta\psi'}{\delta x'}\right)^2\right]}{\frac{\delta^2\psi'}{\delta x'^2}},$$

$$\varkappa - \psi' = \frac{1 + \left(\frac{\delta\psi'}{\delta x'}\right)^2}{\frac{\delta^2\psi'}{\delta x'^2}},$$

$$\Lambda = \pm\frac{\left[1 + \left(\frac{\delta\psi'}{\delta x'}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\delta^2\psi'}{\delta x'^2}},$$

Διὰ τῶν ἐκθέσεων τούτων καθίστανται γνωσταὶ ἡ θέσις τοῦ κέντρου τοῦ *φιλήτορος κύκλου* καὶ τὸ μέγεθος τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ. Τὸ σημεῖον τῆς τιμῆς τῆς ἀκτῖνος Λ εἶναι ἀόριστον ἕνεκα τοῦ ἐν τῷ ἀριθμητῇ αὐτῆς ῥιζικοῦ, ὅπερ λαμβάνεται ἀδιαφόρως θετικῶς ἢ ἀρνητικῶς (*). Ἄλλως ὅμως ἔχει

(*) Τὴν ἔκθεσιν τῆς τιμῆς τῆς Λ καθιστῶσιν ἀείποτε θετικὴν λαμβάνοντες τὸ ἁρμόζον πρὸς τοῦτο σημεῖον τοῦ ῥιζικοῦ. Ἐὰν $\frac{\delta^2\psi'}{\delta x'^2}$ ἦναι θετικὸς, ἤτοι ὅταν ἡ καμπύλη στρέφῃ τὰ κυρτὰ αὐτῆς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x, ληπτέον τὸ σημεῖον +. Ἐν τῇ ἐναντίᾳ δὲ περιπτώσει προτιμητέον τὸ σημεῖον —.

πρὸς τὰς τιμὰς τῶν ποσοτήτων $\pi - x'$, $\varkappa - \psi'$, αἵτινες εἰσὶν αἱ προβολαὶ τῆς ἀκτῖνος Λ ἐπὶ τῶν ἀξόνων τῶν x καὶ τῶν ψ. Τὸ σημεῖον τῶν ποσοτήτων τούτων δείκνυσι τὸ μέρος τῆς καμπύλης πρὸς ὃ κεῖται τὸ κέντρον τοῦ φιλήτορος κύκλου ἐπὶ τῆς καθέτου. Διακρίνομεν εὐκόλως ὅτι ἡ θέσις ἐν ᾗ τὸ κέντρον τοῦτο εὑρίσκεται, εἶναι ἀείποτε πρὸς τὸ μέρος τῆς κοιλότητος τῆς καμπύλης.

197. Ἐπειδὴ ὁ φιλήτωρ κύκλος ἔχει πρὸς τὴν καμπύλην ἐπαφὴν ἐν γένει οὖσαν τῆς δευτέρας τάξεως, ἤτοι τάξεως ἀρτίας, ἕπεται ὅτι διαπερᾷ τὴν καμπύλην, πλὴν εἴς τινα σημεῖα ἰδιάζοντα καθ' ἃ ἡ ἐπαφὴ τάξεως ἐστὶν ἀνωτέρας τῆς δευτέρας. Ἐν τῇ τελευταίᾳ ταύτῃ περιπτώσει, ἐὰν ἡ ἐπαφὴ ἦναι τάξεως περιττῆς, ἡ καμπύλη καὶ ὁ φιλήτωρ κύκλος αὐτῆς κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς κοινῆς ἐφαπτομένης.

198. Ὁ ὁρισμὸς τοῦ φιλήτορος κύκλου δίδει *τὸ μέτρον τῆς καμπυλότητος* οἱασδήποτε γραμμῆς ἐν σημείῳ δοθέντι. Γραμμή τις θεωρεῖται ἐν γένει ἔχουσα τοσοῦτον μείζονα καμπυλότητα ἔν τινι σημείῳ, ὅσον μᾶλλον ἀφιστάμεθα τῆς ἐφαπτομένης, προβαίνοντες κατ' ἐλαχίστην ποσότητα ἐπὶ τῆς καμπύλης. Ἐν ἄλλοις λόγοις, ἡ καμπυλότης τόξου ἄνευ καμπῆς εἶναι ἡ γωνία ἣν πρὸς ἀλλήλας σχηματίζουσιν αἱ διευθύνσεις τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τελευταίου στοιχείου τοῦ τόξου τούτου· εἶναι δὲ αὕτη ἡ γωνία τῶν δύο ἄκρων ἐφαπτομένων· ἐμφαίνει τὴν ποσότητα καθ' ἣν ἡ καμπύλη διαδοχικῶς ἐξετράπη τῆς εὐθείας γραμμῆς κατὰ τὴν ἔκτασιν τοῦ τόξου τούτου. Ἐν τῷ κύκλῳ ἡ καμπυλότης εἶναι ἡ αὐτὴ καθ' ἅπαντα τῆς περιφερείας τὰ σημεῖα· εἰς διαφόρους δὲ κύκλους αἱ καμπυλότητες εἰσὶν ἐν ἀντιπεπονθότι λόγῳ τῶν ἀκτίνων. Ἐπειδὴ ὁ φιλήτωρ κύκλος, ἐγγὺς τῷ σημείῳ τῆς ἐπαφῆς, ἀφίσταται τῆς προτεθείσης καμπύλης ἧττον παντὸς ἑτέρου κύκλου, θεωροῦμεν τὴν καμπυλότητα τοῦ φιλήτορος κύκλου ὡς δίδουσαν τὸ μέτρον τῆς καμπυλότητος τῆς καμπύλης, ἥτις οὕτως ἀνάλογος ἐστὶ πρὸς $\frac{1}{\Lambda}$ ἐν ἑκάστῳ τῶν σημείων αὐτῆς. Λ δηλοῖ, ὡς ἀνωτέρω, τὴν ἀκτῖνα τοῦ φιλήτορος κυ-

κλου. Ἕνεκα τούτου πολλάκις ὀνομάζουσι τὸν μὲν φιλήτορα κύκλον, *κύκλον καμπυλότητος*, τὴν δὲ ἀκτῖνα καὶ τὸ κέντρον αὐτοῦ, *ἀκτῖνα καὶ κέντρον καμπυλότητος*.

199. Θεωροῦντες τὸν φιλήτορα κύκλον ὡς δίδοντα τὸ μέτρον τῆς καμπυλότητος τῆς καμπύλης, ἐννοοῦμεν καὶ παραδεχόμεθα ὅτι, ἐν ἀπειροστημορίῳ ἀποστάσει ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς, ὁ κύκλος καὶ ἡ καμπύλη ταυτίζονται. Μόνη ἡ ὑπόθεσις αὕτη ἀρκεῖ ὅπως καταδείξῃ τὴν ἀκρίβειαν τῶν προηγουμένων ἐξαγομένων. Τῷ ὄντι, ἔστωσαν, ς μὲν τὸ τόξον τῆς καμπύλης ἐπιλογιζόμενον μέχρι τοῦ σημείου οὗτινος ἡ τετμημένη εἶναι x, τ δὲ ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ τῆς κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης· τῶν ποσοτήτων ς καὶ τ θεωρουμένων ὡς συνεκθέσεων τῆς x. Ὅταν ἡ τετμημένη αὐξήσῃ κατὰ δx, ς καὶ τ ἐπίσης αὐξάνουσιν ἀμοιβαίως κατὰ δς καὶ δτ. Τὸ ἀπειροστὸν δτ δηλοῖ τὴν περιεχομένην γωνίαν ὑπὸ τῶν δύο ἐφαπτομένων τῆς καμπύλης, ἀγομένων κατὰ τὰ ἐπὶ τὰς τετμημένας x καὶ x+δx σημεῖα· ἢ προσέτι, τὴν περιεχομένην γωνίαν ὑπὸ τῶν δύο καθέτων τῇ καμπύλῃ, ἀγομένων κατὰ τὰ σημεῖα ταῦτα. Τοῦ τόξου δς θεωρουμένου ὡς ἀνήκοντος τῷ φιλήτορι κύκλῳ, οὗτινος ἡ ἀκτὶς εἶναι Α, ἔχομεν

$$\delta\varsigma = \mathrm{A}\delta\tau\cdot$$

ἤτοι,

$$\delta x\sqrt{1+\left(\frac{\delta\psi}{\delta x}\right)^2} = \mathrm{A}\delta.\text{τόξεφ}\,\frac{\delta\psi}{\delta x} = \mathrm{A}\,\frac{\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}\delta x}{1+\left(\frac{\delta\psi}{\delta x}\right)^2},$$

ὅθεν συνάγομεν ὡς ἀνωτέρω

$$\mathrm{A} = \frac{\left[1+\left(\frac{\delta\psi}{\delta x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}}.$$

Ὁρισθέντος τοῦ μήκους τῆς ἀκτῖνος τῆς καμπυλότητος, ἡ θέσις τοῦ κέντρου τοῦ φιλήτορος κύκλου καθίσταται γνωστή· διότι, ὡς εἴδομεν, ἡ τῆς καμπυλότητος ἀκτὶς διευθύνεται κατὰ τὴν κάθετον πρὸς ὃ μέρος ἡ καμπύλη στρέφει τὰ κοῖλα αὐτῆς.

ΣΗΜ. Συντεμίας χάριν παραλίπομεν ἐνταῦθα τοὺς τόνους τῶν γραμμάτων x καὶ ψ, ὑπάρχοντας ἐν ταῖς τύποις τῶν προηγουμένων χωρίων. Ἀναμνηστέον ὅτι, τὰ γράμματα ταῦτα δηλοῦσι τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου καθ' ὃ ὁ φιλήτωρ κύκλος ἅπτεται τῆς τεθείσης καμπύλης.

200. Ἡ γωνία δτ, ἥτις εἶναι ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν δύο ἐφαπτομένων, ἢ ὑπὸ τῶν δύο καθέτων, ἀγομένων κατὰ τὰ πέρατα τοῦ ἀπειροστημορίου τόξου δς, καλεῖται *γωνία καμπυλότητος* [165].

Ἐκ τῆς προηγουμένης ἐξισώσεως συνάγομεν

$$\mathrm{A} = \frac{\delta\varsigma}{\delta\tau}.$$

Ἄρα, ἡ ἀκτὶς τῆς καμπυλότητος ἰσοῦται τῷ λόγῳ τοῦ στοιχείου τοῦ τόξου πρὸς τὴν γωνίαν τῆς καμπυλότητος.

201. Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὡς ἐν § 180, ὅτι ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης δίδεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\Sigma(x,\psi) = 0,$$

ἀντεισάγοντες ἐν ταῖς ἐκθέσεσι τῶν π, κ, Α, [196] τὰς ἐν § 91 εὑρεθείσας τιμὰς τῶν $\frac{\delta\psi}{\delta x}$, $\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}$, ἔχομεν·

$$\pi - x = -\frac{\frac{\delta\Sigma}{\delta x}\left[\left(\frac{\delta\Sigma}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta\Sigma}{\delta\psi}\right)^2\right]}{\left(\frac{\delta\Sigma}{\delta\psi}\right)^2\frac{\delta^2\Sigma}{\delta x^2}-2\frac{\delta\Sigma}{\delta x}\frac{\delta\Sigma}{\delta\psi}\frac{\delta^2\Sigma}{\delta x\delta\psi}+\left(\frac{\delta\Sigma}{\delta x}\right)^2\frac{\delta^2\Sigma}{\delta\psi^2}},$$

$$\kappa - \psi = -\frac{\frac{\delta\Sigma}{\delta\psi}\left[\left(\frac{\delta\Sigma}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta\Sigma}{\delta\psi}\right)^2\right]}{\left(\frac{\delta\Sigma}{\delta\psi}\right)^2\frac{\delta^2\Sigma}{\delta x^2}-2\frac{\delta\Sigma}{\delta x}\frac{\delta\Sigma}{\delta\psi}\frac{\delta^2\Sigma}{\delta x\delta\psi}+\left(\frac{\delta\Sigma}{\delta x}\right)^2\frac{\delta^2\Sigma}{\delta\psi^2}},$$

$$\Lambda = \frac{\left[\left(\frac{\delta\Sigma}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta\Sigma}{\delta\psi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{\delta\Sigma}{\delta\psi}\right)^2\frac{\delta^2\Sigma}{\delta x^2} - 2\frac{\delta\Sigma}{\delta x}\frac{\delta\Sigma}{\delta\psi}\frac{\delta^2\Sigma}{\delta x\delta\psi} + \left(\frac{\delta\Sigma}{\delta x}\right)^2\frac{\delta^2\Sigma}{\delta\psi^2}}.$$

Θεωρία τῶν ἐνειλιγμένων.

202. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις καμπύλης δοθείσης

(1) $$\psi = \Sigma(x).$$

Πρὸς ὁρισμὸν τοῦ φιλήτορος κύκλου, κατὰ τὸ σημεῖον (x, ψ) τῆς καμπύλης ταύτης, ἔχομεν τὰς τρεῖς ἐξισώσεις [196],

(2) $$\begin{cases} (\pi - x)^2 + (\varkappa - \psi)^2 = \Lambda^2, \quad \pi - x + (\varkappa - \psi)\dfrac{\delta\psi}{\delta x} = 0, \\ 1 + \left(\dfrac{\delta\psi}{\delta x}\right)^2 - (\varkappa - \psi)\dfrac{\delta^2\psi}{\delta x^2} = 0. \end{cases}$$

Αἱ διὰ τῶν ἐξισώσεων τούτων ὁρισθεῖσαι τιμαὶ τῶν π, καὶ $\varkappa$, συντεταγμένων τοῦ κέντρου τοῦ φιλήτορος κύκλου, εἰσὶ [196],

(3) $$\pi = x - \frac{\frac{\delta\psi}{\delta x}\left[1 + \left(\frac{\delta\psi}{\delta x}\right)^2\right]}{\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}}, \quad \varkappa = \psi + \frac{1 + \left(\frac{\delta\psi}{\delta x}\right)^2}{\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}};$$

Καθισαμένων ἀντὶ ψ, $\frac{\delta\psi}{\delta x}$, $\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}$, τῶν τιμῶν αὐτῶν εἰς x, ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) τῆς δοθείσης καμπύλης ἐξαγομένων, αἱ τιμαὶ (3) ἐκτεθείσονται διὰ τῆς τετμημένης x καὶ δώσουσι τὴν θέσιν τοῦ κέντρου τῆς καμπυλότητος συστοιχοῦντος οἱῳδήποτε σημείῳ τῆς καμπύλης.

Μεταβαλλομένης x ἀφ' ἑνὸς εἰς ἕτερον σημεῖον τῆς καμπύλης (1), μεταβάλλεται, ὡς ἑπόμενον, καὶ ἡ θέσις τοῦ τῆς καμπυλότητος κέντρου. Ἡ συνέχεια τῶν θέσεων τούτων συγ-

κροτεῖ καμπύλην ἧς π καὶ $\varkappa$, ὡς μεταβληταὶ θεωρούμεναι, δηλοῦσι τὰς συντεταγμένας, καὶ ἧς, ὡς σαφές, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν τῇ ἀπαλοιφῇ τῆς x ἐκ τῶν δύο ἐξισώσεων (3). Τῷ ὄντι, αἱ ἐκθέσεις αὗται ἁρμόζουσιν εἰς πᾶν κέντρον καμπυλότητος ὁριζόμενον ὑπὸ τιμῆς διδομένης τῇ x· ἀπαλοιφομένης τῆς μεταβλητῆς ταύτης, προκύπτει σχέσις ἁρμόζουσα εἰς ἅπαντα τὰ κέντρα· ἤτοι εἰς τὴν καμπύλην τόπον αὐτῶν οὖσαν. Ἡ καμπύλη αὕτη καλεῖται *ἡ ἐνειλιγμένη* τῆς ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\psi = \Sigma(x)$ ἐμφαινομένης.

203. Αἱ ἐξισώσεις (2) ἀνήκουσιν, ὡς σαφές, εἰς τὴν ἐνειλιγμένην, ἐὰν ἐν αὐταῖς θεωρήσωμεν π, $\varkappa$, Λ, ὡς μεταβλητὰς καὶ ὡς συνεκθέσεις τῆς x· ἄρα, καὶ αἱ διαφορικαὶ τῶν αὐτῶν ἐξισώσεων ἀνήκουσιν ἐπίσης εἰς τὴν αὐτὴν καμπύλην. Διαφορίζοντες τὴν πρώτην τῶν ἐξισώσεων (2), παραλείποντες τοὺς συνεπείᾳ τῆς δευτέρας ἀφανιζομένους ὅρους, λαμβάνομεν

(4) $$(\pi - x)\,\delta\pi + (\varkappa - \psi)\,\delta\varkappa = \Lambda\delta\Lambda.$$

Διαφορίζοντες καὶ τὴν δευτέραν τῶν (2), παραλείποντες τοὺς συνεπείᾳ τῆς τρίτης ἀφανιζομένους ὅρους, συνάγομεν

(5) $$\delta x\delta\pi + \delta\psi\delta\varkappa = 0.$$

Ἡ ἐξίσωσις (5) ἐμφαίνει ὅτι, αἱ ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι κατὰ τὰ σύστοιχα σημεῖα καμπύλης τινος καὶ τῆς ἐνειλιγμένης αὐτῆς, εἰσὶν ἀείποτε κάθετοι ἀλλήλαις. Ἄρα, *ἡ ἀκτὶς τῆς καμπυλότητος ἐφάπτεται τῆς ἐνειλιγμένης κατὰ τὸ τῆς καμπυλότητος κέντρον*.

Ἡ ἐξίσωσις (4) γράφεται καὶ οὕτω,

$$\frac{\pi - x}{\Lambda}\delta\pi + \frac{\varkappa - \psi}{\Lambda}\delta\varkappa = \delta\Lambda.$$

Παρατηρητέον δὲ ὅτι οἱ λόγοι $\frac{\pi - x}{\Lambda}$, $\frac{\varkappa - \psi}{\Lambda}$, εἰσὶν ἀμοιβαίως τὰ συνημίτονα τῶν περιεχομένων γωνιῶν ὑπὸ τῶν ἀξόνων τῶν x καὶ ψ, καὶ τῆς ἀκτῖνος Λ ἐφαπτομένης τῆς ἐνειλιγμένης. Ἄρα, τὸ πρῶτον μέλος τῆς τελευταίας ταύτης ἐξισώσεως ἐμφαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν προβολῶν, ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἐνειλιγμένης, τῶν στοιχείων δπ καὶ δκ· ἤτοι τὸ μῆκος τοῦ στοιχείου τοῦ τόξου τῆς ἐνειλιγμένης, οὗτινος δπ καὶ δκ εἰσὶν ἀμοιβαίως αἱ προβολαὶ ἐπὶ τῶν ἀξόνων τῶν x καὶ ψ. Καλοῦντες τὸ στοιχεῖον τοῦτο δσ, ἤτοι θέτοντες

$$\delta\sigma = \sqrt{\delta\pi^2 + \delta\kappa^2}, \quad \text{ἔχομεν} \quad \delta\sigma = \delta\Lambda.$$

Ἄρα, βλέπομεν ὅτι (Σχ. 40), ἐνῷ προβαίνομεν ἐπὶ τῆς προτεθείσης καμπύλης ἀπὸ τοῦ σημείου Μ, οὗτινος ἡ τετμημένη εἶναι x = ΑΠ, ἐπὶ τὸ σημεῖον Ν, οὗτινος ἡ τετμημένη εἶναι x + δx = ΑΚ, ἑπομένως δὲ προβαίνομεν ἀπὸ τοῦ σημείου Μ′ τῆς ἐνειλιγμένης ἐπὶ τὸ σημεῖον Ν′ αὐτῆς, τὸ τόξον Μ′Ν′, ὑπὸ τῶν δύο τελευταίων τούτων σημείων ἀπολαμβανόμενον, ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ τῶν δύο φιλουσῶν ἀκτίνων ΜΜ′ καὶ ΝΝ′.

204. Ἐκ τῶν προαποδοθέντων ἐξαγομένων συνάγομεν ὅτι, ἡ καμπύλη ΜΝ δυνατὸν καταγραφῆναι τῷ πέρατι νήματος ἐφηρμοσμένου τῇ καμπύλῃ Μ′Ν′, κατὰ μικρὸν δὲ αὐτῆς ἀποχωριζομένου. Ἕνεκα τοῦ ἰδιώματος τούτου, ἡ μὲν καμπύλη Μ′Ν′ ὠνομάσθη *ἡ ἐνειλιγμένη* τῆς ΜΝ, ἡ δὲ ΜΝ, ἀντιστρόφως, *ἡ ἐξειλιγμένη* τῆς Μ′Ν′. Τῆς θεωρίας τῶν ἐνειλιγμένων πλεῖσται ἄξιαι λόγου ἐφαρμογαὶ ὑπάρχουσιν.

205. Ὅταν ἡ ἐξίσωσις τῆς προτεθείσης καμπύλης δίδηται ὑπὸ τὴν μορφὴν $\Sigma(x, \psi) = 0$, τότε ἀντὶ τῶν ἐξισώσεων (3), ἀφ᾽ ὧν μορφοῦμεν τὴν τῆς ἐνειλιγμένης ἀπαλοιφῇ τῆς x, ληπτέον τὰς ἐν § 201 ἐκθέσεις τῶν π καὶ κ, ἀφ᾽ ὧν εἶτα ἀπαλοίφομεν x καὶ ψ συνδρομῇ τῆς ἐξισώσεως $\Sigma(x, \psi) = 0$ τῆς προτεθείσης καμπύλης.

Ἐφαρμογαί.

206. *Ἔλλειψις* (Σχ. 41). Ἔστω $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1.$

Ἔχομεν $\Sigma(x, \psi) = \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} - 1, \quad \frac{\delta\Sigma}{\delta x} = \frac{2x}{\alpha^2},$

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta\psi} = \frac{2\psi}{\beta^2}, \quad \frac{\delta^2\Sigma}{\delta x^2} = \frac{2}{\alpha^2}, \quad \frac{\delta^2\Sigma}{\delta x\delta\psi} = 0, \quad \frac{\delta^2\Sigma}{\delta\psi^2} = \frac{2}{\beta^2}.$$

Ἀντεισάγοντες ἐν τῇ ἐκθέσει τῆς Λ [201], λαμβάνομεν τὴν τιμὴν τῆς ἀκτῖνος τῆς καμπυλότητος ἀνήκουσαν τῇ ἐλλείψει,

$$\Lambda = \frac{(\beta^4x^2 + \alpha^4\psi^2)^{\frac{3}{2}}}{\alpha^4\beta^4}, \quad \text{ἢ} \quad \Lambda = \frac{\alpha^2(K^{0\varsigma})^3}{\beta^4}, \quad [181].$$

Δι᾽ ὁμοίων ἀντεισαγωγῶν λαμβάνομεν προσέτι τὰς συντεταγμένας τοῦ κέντρου τῆς καμπυλότητος·

$$\pi = x^3\,\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^4}, \quad \kappa = \psi^3\,\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta^4}.$$

Ἐξάγοντες ἤδη τὰς τιμὰς τῶν x καὶ ψ καὶ καθιστῶντες αὐτὰς ἐν τῇ ἐξισώσει τῆς καμπύλης, μορφοῦμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐνειλιγμένης τῆς ἐλλείψεως·

$$\left(\frac{\alpha\pi}{\alpha^2 - \beta^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\beta\kappa}{\alpha^2 - \beta^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Ἡ καμπύλη αὕτη συγκροτεῖται ὑπὸ τεσσάρων μερῶν ἴσων, συμμετρικῶς διατεθειμένων πρὸς τοὺς ἄξονας τῆς ἐλλείψεως. Αἱ τῶν κορυφῶν ἀκτῖνες τῆς καμπυλότητος Μμ καὶ Νν ἰσοῦνται ἀμοιβαίως $\frac{\beta^2}{\alpha}$ καὶ $\frac{\alpha^2}{\beta}$. Ἡ ἐνειλιγμένη ἐφάπτεται τῶν ἀξόνων, ὡς κατωτέρω δείξομεν, κατὰ τὰ σημεῖα μ καὶ ν, ὧν εὐκόλως εὑρίσκομεν τὰς συντεταγμένας. Τὰ δύο σημεῖα καθ᾽ ἃ ἐφάπτεται τοῦ ἄξονος τῶν x κεῖνται μεταξὺ τῶν ἑστιῶν τῆς ἐλλείψεως.

Διαφορίζοντες δὶς κατὰ συνέχειαν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐνειλιγμένης λαμβάνομεν τὸ ἐξαγόμενον·

$$\frac{\delta^2\kappa}{\delta\pi^2} = \frac{\left(\frac{\pi}{K}\right)^{-\frac{4}{3}}\frac{1}{K^2} + \left(\frac{\kappa}{\Lambda}\right)^{-\frac{4}{3}}\frac{1}{\Lambda^2}\left(\frac{\delta\kappa}{\delta\pi}\right)^2}{3\left(\frac{\kappa}{\Lambda}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{1}{\Lambda}},$$

ἐν ᾧ, πρὸς συντομίαν ἐκαλέσαμεν $\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha}=K$, καὶ $\frac{\alpha^2-\beta^2}{\beta}=\Lambda$. Τὸ σημεῖον τοῦ δευτεροταγοῦς τούτου διαφορικοῦ συντελεστοῦ εἶναι τὸ αὐτὸ τοῦ παρονομαστοῦ τῆς τιμῆς αὐτοῦ, διότι ὁ ἀριθμητὴς εἶναι θετικός· ἐπομένως ἡ παραγομένη αὐτὴ ἔχει τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς κ. Ἄρα, ἡ καμπύλη στρέφει πανταχοῦ τὰ κυρτὰ αὐτῆς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν τετμημένων. Ἔχομεν προσέτι·

$$\frac{\delta\varkappa}{\delta\pi}=-\left(\frac{K\varkappa}{\Lambda\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{\Lambda}{K}.$$

Τῆς παραγομένης ταύτης μηδενιζομένης τῇ $\varkappa=0$ καὶ ἀποκαθισταμένης ἀπείρου τῇ $\pi=0$, συνάγομεν ὅτι οἱ ἄξονες ἐφάπτονται τῆς καμπύλης. Τὰ τέσσαρα ταῦτα σημεῖα τῆς ἐπαφῆς, ἕνεκα τῆς συμμετρίας τοῦ σχήματος, εἰσὶ σημεῖα εἰδικά, *ἀντιστροφῆς* λεγόμενα, περὶ ὧν ἐφεξῆς ποιήσομεν λόγον.

207. *Ὑπερβολὴ* (Σχ. 43). Ἔστω $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$.

Τὰ τῇ ὑπερβολῇ ἀνήκοντα ἐξαγόμενα πορίζόμεθα ἐκ τῶν τῆς ἐλλείψεως, τροπῇ β^2 εἰς $-\beta^2$. Ἡ ἔκθεσις τῆς ἀκτῖνος τῆς καμπυλότητος ἔσεται ἡ αὐτή, ἡ δ' ἐξίσωσις τῆς ἐνειλιγμένης ἡ ἑξῆς·

$$\left(\frac{\alpha\pi}{\alpha^2+\beta^2}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{\beta\varkappa}{\alpha^2+\beta^2}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$

Ἡ ἐνειλιγμένη συγκροτεῖται ἐπίσης ἐκ τεσσάρων μερῶν ἴσων καὶ συμμετρικῶν πρὸς τοὺς ἄξονας τῆς ὑπερβολῆς. Ἡ ἀκτὶς τῆς καμπυλότητος Μμ, τῇ κορυφῇ συστοιχοῦσα, ἰσοῦται $\frac{\beta^2}{\alpha}$. Ἡ ἐνειλιγμένη ἐφάπτεται τοῦ ἄξονος τῶν x κατὰ δύο σημεῖα *ἀντιστροφῆς*, ὡς τὸ μ, κείμενα πέραν τῶν ἑστιῶν· στρέφει δὲ τὰ κυρτὰ αὐτῆς πανταχοῦ πρὸς τὸν πλάγιον ἄξονα.

208. *Παραβολὴ* (Σχ. 42). Ἔστω $\psi^2=2\rho x$.

Ἔχομεν $\quad\frac{\delta\psi}{\delta x}=\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{2x}},\quad \frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}=-\frac{\sqrt{\rho}}{(2x)^{\frac{3}{2}}}.$

Ἐπομένως ἐκ τῶν ἐν § 201 τύπων συνάγομεν

$$\pi=\rho+3x,\quad \varkappa=\frac{(2x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\rho}},\quad \Lambda=\frac{(\rho+2x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\rho}},\quad \text{ἢ}\quad \Lambda=\frac{(K^{o\varsigma})^3}{\rho^2},[185].$$

Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐνειλιγμένης τῆς παραβολῆς εἶναι

$$\varkappa^2=\frac{8}{27}\frac{(\pi-\rho)^3}{\rho}.$$

Ἡ καμπύλη αὕτη συγκροτεῖται ὑπὸ δύο μερῶν συμμετρικῶς κειμένων πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x, καὶ ἐκτεινομένων ἐπ' ἄπειρον πρὸς τὰς θετικὰς x. Ἡ τῆς κορυφῆς ἀκτὶς τῆς καμπυλότητος Αμ ἰσοῦται ρ. Ἡ ἐνειλιγμένη ἐφάπτεται τοῦ ἄξονος τῶν x κατὰ τὸ σημεῖον μ.

Μεταφερομένου τοῦ ἄξονος τῶν τεταγμένων παραλλήλως ἑαυτῷ εἰς τὸ σημεῖον μ, δι' ὃ $\mathrm{A}\mu=\rho$, ἡ τῆς ἐνειλιγμένης ἐξίσωσις ἄγεται ὑπὸ τὴν ἁπλουστέραν μορφήν·

$$\varkappa^2=\frac{8}{27\rho}\pi'^3,\quad \text{ἢ}\quad \varkappa=\pm\sqrt{\frac{8}{27\rho}}\cdot\pi'^{\frac{3}{2}}.$$

Διαφορίζοντες εὑρίσκομεν·

$$\frac{\delta\varkappa}{\delta\pi}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{8}{27\rho}}\cdot\pi^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\delta^2\varkappa}{\delta\pi^2}=\frac{3}{4}\sqrt{\frac{8}{27\rho}}\cdot\pi^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{6\rho}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Τὸ σημεῖον τοῦ $\frac{\delta^2\varkappa}{\delta\pi^2}$ εἶναι τὸ αὐτὸ τῆς κ· ἐπομένως ἡ καμπύλη πανταχοῦ στρέφει τὰ κυρτὰ αὐτῆς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν τετμημένων.

209. Θεωροῦντες τὰς τιμὰς τῶν ἀκτίνων καμπυλότητος ἃς ἀνωτέρω ἐλάβομεν, συνάγομεν τὸ ἑξῆς θεώρημα.

Ἐν ταῖς τρισὶ καμπύλαις τῆς δευτέρας τάξεως, ἡ ἀκτὶς τῆς καμπυλότητος ἰσοῦται τῷ κύβῳ τῆς καθέτου διαιρεθέντι τῷ τετραγώνῳ τῆς ἡμιπαραμέτρου.

210. Ἐπειδὴ πᾶν τόξον ἐνειλιγμένης εἶναι [203] ἡ διαφορὰ τῶν ἀπὸ τῶν περάτων αὐτοῦ ἀναχωρουσῶν ἀκτίνων καμπυλότητος, ἕπεται ὅτι τὸ τόξον τοῦτο εἶναι ἐκτυλικτέον· ἤτοι δυνατὸν εὑρεῖν εὐθεῖαν ἰσομήκη τῷ τῆς ἐνειλιγμένης τόξῳ.

ΣΗΜ. Προτείνομεν τοῖς μαθηταῖς πρὸς ἄσκησιν εὑρεῖν τὴν μεγίστην ἢ τὴν ἐλαχίστην ἀκτῖνα καμπυλότητος ἐν ταῖς καμπύλαις ὧν τὰς ἐνειλιγμένας ζητοῦμεν.

211. *Κυκλοειδής* (Σχ. 44). Ἐν § 186 εὕρομεν·

$$\frac{\delta\psi}{\delta x}=\sqrt{\frac{2\alpha}{\psi}-1},\quad \text{ὅθεν}\quad \frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}=-\frac{\dfrac{\alpha}{\psi^2}\dfrac{\delta\psi}{\delta x}}{\sqrt{\dfrac{2\alpha}{\psi}-1}}=-\frac{\alpha}{\psi^2}.$$

Κατὰ συνέπειαν λαμβάνομεν, ἐκ τοῦ ἐν § 196 τύπου,

$$\Lambda=2\sqrt{2\alpha\psi}.$$

Συγκρίνοντες τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο τῇ ἐν § 186 τιμῇ τῆς καθέτου, συνάγομεν ὅτι, *ἐν τῇ κυκλοειδεῖ, ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος ἀείποτε διπλασία ἐστὶ τῆς καθέτου.*

Ἀντεισάγοντες τὰς προηγουμένας τιμὰς ἐν ταῖς ἐκθέσεσι τῶν π καὶ κ τοῦ § 196, εὑρίσκομεν·

$$\pi=x+2\sqrt{2\alpha\psi-\psi^2},\qquad \kappa=-\psi.$$

Δῆλον καθίσταται, εἴτε ἐκ τῶν ἐκθέσεων τούτων, εἴτε ἐκ τῆς τιμῆς τῆς ἀκτῖνος τῆς καμπυλότητος Λ, ὅτι τὸ κέντρον καμπυλότητος τῆς κορυφῆς Ν τῆς κυκλοειδοῦς εἶναι τὸ σημεῖον Ν′ κείμενον ἐν ἀποστάσει Α′Ν′ = Α′Ν. Ἵνα λάβωμεν τὴν τῆς ἐνειλιγμένης ἐξίσωσιν ὑπὸ μορφὴν ὅσον ἔνεστιν ἁπλουστέραν, ἀναφέρωμεν αὐτὴν πρὸς δύο νέας συντεταγμένας π′ καὶ κ′ παραλλήλους μὲν ταῖς προτέραις, ἐπιλογιζομένας δὲ ἀπὸ τοῦ σημείου Ν′ κατὰ τὰς διευθύνσεις Ν′Β καὶ Ν′Α′. Οὕτω γράφομεν·

$$\pi=\Pi\alpha-\pi',\qquad \kappa=-2\alpha+\kappa'.$$

Αἱ προηγούμεναι δὲ ἐξισώσεις μεταμορφοῦνται ὡς ἑξῆς·

$$\pi'=\Pi\alpha-x-2\sqrt{2\alpha\psi-\psi^2},\quad \psi=2\alpha-\kappa'.$$

Ἐκ τούτων συνάγομεν, λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν καὶ τῆς εἰς ψ τιμῆς τῆς x [186],

$$\pi'=\alpha\left(\Pi-\text{τόξσυν}\frac{\alpha-\psi}{\alpha}\right)-\sqrt{2\alpha\psi-\psi^2}.$$

ἢ τέλος, καθιστῶντες ἀντὶ ψ τὴν εἰς κ′ τιμὴν αὐτῆς,

$$\pi'=\alpha\,\text{τόξσυν}\frac{\alpha-\kappa'}{\alpha}-\sqrt{2\alpha\kappa'-\kappa'^2}.$$

Ἄρα, *ἡ τῆς κυκλοειδοῦς ἐνειλιγμένη ἐστὶν ἑτέρα κυκλοειδὴς ἴση τῇ πρώτῃ,* κειμένη σχετικῶς πρὸς τοὺς ἄξονας Ν′Β καὶ Ν′Α′, ὡς ἡ προτεθεῖσα πρὸς τοὺς προτέρους ἄξονας.

Τὸ ἐξαίρετον ἰδίωμα τοῦτο τῆς κυκλοειδοῦς συνέπεια ἐστὶν ἄμεσος τῆς ἀνωτέρω ληφθείσης τιμῆς τῆς ἀκτῖνος τῆς καμπυλότητος. Ἐπειδὴ τὸ κέντρον τῆς καμπυλότητος ἀντιστοιχοῦν τῷ σημείῳ Μ τῆς κυκλοειδοῦς, κεῖται ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς καθέτου ἐν ἀποστάσει ΡΜ′ = ΡΜ, ἕπεται ὅτι τὸ τόξον ΡΜ′ τοῦ γραφομένου κύκλου κέντρῳ τῷ Δ καὶ ἀκτῖνι Α, ἰσοῦται τῷ τόξῳ ΡΜ τοῦ τῇ αὐτῇ μὲν ἀκτῖνι κέντρῳ δὲ τῷ Γ γραφομένου κύκλου. Ἀλλὰ τὸ τόξον ΡΜ ἰσοῦται τῷ ἀποστήματι ΑΡ, ἄρα καὶ τὸ τόξον ΣΜ′ ἰσοῦται τῷ ἀποστήματι Ν′Σ.

Παρατηρητέον προσέτι ὅτι, ἡ ἀκτὶς τῆς καμπυλότητος εἶναι μηδὲν κατὰ τὸ σημεῖον Α τῆς κυκλοειδοῦς ΑΜΝ. Λοιπόν, τὸ τόξον ΑΜ′ τῆς ἐνειλιγμένης ἰσοῦται τῇ ἀκτῖνι τῆς καμπυλότητος ΜΜ′. Ἄρα, τὸ μῆκος τῆς ἡμικυκλοειδοῦς

ΑΜ′Ν′ διπλάσιον ἐστὶ τῆς τοῦ γεννήτορος κύκλου διαμέτρου. Ἐν γένει δὲ, ἐὰν λάβωμεν τὴν κορυφὴν Ν τῆς καμπύλης ὡς ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων x καὶ ψ, λογίσωμεν δὲ τὸν ἄξονα τῶν ψ′ κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΝΑ′, καλοῦντες ΝΜ $=$ ς, καὶ θέτοντες $2\alpha - \psi = \psi'$, εὑρήσομεν

$$ς^2 = 8\alpha\psi', \quad \text{ἢ} \quad ς = 2\sqrt{2\alpha\psi'}.$$

Τοιαύτη ἡ τῆς κυκλοειδοῦς ἐξίσωσις μεταξὺ τῆς τεταγμένης καὶ τοῦ τόξου, ἐπιλογιζομένων ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς καμπύλης.

ΚΓ′. ΠΕΡΙ ΠΟΛΙΚΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ.

212. Πρὸς ὁρισμὸν τῆς θέσεως σημείου οἱουδήποτε Μ διὰ συντεταγμένων πολικῶν (Σχ. 45), ἀντικαθιστῶμεν, ὡς γνωστὸν, τὰς τιμὰς τῶν ὀρθογωνίων γραμμικῶν συντεταγμένων συνεκθέσει τῶν πολικῶν. Λαμβάνοντες, ὡς πολικὸν μὲν ἄξονα τὴν γραμμὴν τῶν x, ὡς πόλον δὲ τὴν ἀρχὴν τῶν γραμμικῶν συντεταγμένων, αἱ συντεταγμέναι ἀμφοτέρων τῶν συστημάτων συνδέονται ἀλλήλαις ταῖς σχέσεσι [100],

$$x = \rho\,\text{συν}\,\omega, \qquad \psi = \rho\,\text{ἡμ}\,\omega,$$

ἐξ ὧν συνάγομεν

$$\rho = +\sqrt{x^2 + \psi^2}, \qquad \omega = \text{τόξ}\,\text{ἐφ}\,\frac{\psi}{x}.$$

213. Τῆς ἐξισώσεως γραμμῆς εὐθείας, διερχομένης σημείου οὗτινος αἱ ὀρθογώνιοι συντεταγμέναι εἰσὶ x′ καὶ ψ′, καὶ σχηματιζούσης μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν x γωνίαν τ, οὔσης

$$\psi - \psi' = \text{ἐφ}\,\tau\,(x - x'),$$

ἡ πολικὴ ἐξίσωσις τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ἐμφαίνουσα ἔσεται,

$$\rho\,\text{ἡμ}\,(\omega - \tau) = \rho'\,\text{ἡμ}\,(\omega' - \tau).$$

ω′ καὶ ρ′ δηλουσῶν τὰς τιμὰς τῶν ω καὶ ρ, ἀνηκούσας τῷ σημείῳ (x′, ψ′). Τῷ ὄντι, ρ ἡμ (ω — τ) ἐμφαίνει τὴν μόνιμον ἀπόστασιν ἀπ᾽ ἀλλήλων τῆς περὶ ἧς ὁ λόγος εὐθείας

καὶ τῆς διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων ἀγομένης παραλλήλου αὐτῇ.

ΣΗΜ. Περὶ πολικῶν συντεταγμένων ἐν ἐκτάσει πραγματευόμεθα ἐν τῇ Ἀναλυτικῇ Γεωμετρίᾳ. Ἐνταῦθα ζητήσομεν μόνον τὰς γενικὰς διαφορικὰς ἐκθέσεις ἀνηκούσας τῇ διευθύνσει τῆς ἐφαπτομένης καμπύλης οἱασδήποτε, τῷ ἐμβαδῷ καὶ τῷ μήκει τοῦ τόξου αὐτῆς, ἐν συντεταγμέναις πολικαῖς.

214. Προκείσθω ἐν γένει ἡ ἐξίσωσις καμπύλης

$$\rho = \Sigma(\omega).$$

Πρὸς εὕρεσιν τῆς διευθύνσεως τῆς καμπύλης, κατὰ τὸ ὑπὸ τῶν συντεταγμένων ω καὶ ρ δηλούμενον σημεῖον, παρατηρητέον ὅτι, ἡ εὐθεῖα τὴν γωνίαν τ σχηματίζουσα μετὰ τοῦ ἄξονος ἀφ᾽ οὗ μετρεῖται ἡ γωνία ω, καὶ ἧς ἡ ἐξίσωσις εἶναι [213]

$$\rho = \rho'\,\frac{\text{ἡμ}\,(\omega' - \tau)}{\text{ἡμ}\,(\omega - \tau)},$$

ἔσεται ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης κατὰ τὸ ῥηθὲν σημεῖον (συμφώνως πρὸς τὰς ἐν ἄρθ. ΙΘ′ ἐκτεθείσας ἀρχὰς), εἰ ἡ τιμὴ τοῦ $\dfrac{\delta\rho}{\delta\omega}$, ἐκ τῆς ἐξισώσεως τῆς εὐθείας ἐξαγομένη, ἰσοῦται, ἐν τῷ σημείῳ τούτῳ, τῇ τιμῇ τοῦ αὐτοῦ διαφορικοῦ συντελεστοῦ ἐκ τῆς ἐξισώσεως τῆς καμπύλης ἐξαγομένῃ. Ἀλλὰ, διαφορίζοντες τὴν προηγουμένην ἔκθεσιν τῆς ρ, εὑρίσκομεν·

$$\frac{\delta\rho}{\delta\omega} = -\rho'\frac{\text{ἡμ}(\omega' - \tau)\,\text{συν}(\omega - \tau)}{\text{ἡμ}^2(\omega - \tau)}, \quad \text{ἢ} \quad \frac{\delta\rho}{\delta\omega} = -\rho\,\text{συνεφ}(\omega - \tau).$$

Ἄρα, ἡ γωνία τ, ἣν ἡ καμπύλη σχηματίζει μετὰ τοῦ πολικοῦ ἄξονος, ὁρίζεται ἐν γένει ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$\text{συνεφ}\,(\tau - \omega) = \frac{1}{\rho}\,\frac{\delta\rho}{\delta\omega},$$

ἐν ᾗ $\dfrac{\delta\rho}{\delta\omega}$ παριστᾷ τὸν διαφορικὸν συντελεστὴν τῆς πρώτης τάξεως τῆς συνεκθέσεως $\rho = \Sigma(\omega)$. Παρατηρητέον δὲ ὅτι,

$\tau - \omega$ εἶναι ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης καὶ τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος.

215. Τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον εὑρίσκομεν καὶ διὰ τῆς Γεωμετρίας. (Σχ. 45) Ἔστωσαν Μ, Ν, δύο σημεῖα συστοιχοῦντα ταῖς τιμαῖς ω, $\omega + \delta\omega$, τῆς κλίσεως τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος. Τὸ μῆκος τοῦ τόξου ΜΚ, γραφομένου κέντρῳ μὲν τῷ Ο ἀκτῖνι δὲ ΟΜ ἴσῃ ρ, ἰσοῦται $\rho\delta\omega$· προσέτι $NK = \delta\rho$. Ἀλλ' ἐν τῷ ὁρίῳ, θεωροῦμεν ΜΚ ὡς γραμμὴν εὐθεῖαν κάθετον τῇ ΟΜ, τὴν δὲ καμπύλην ὡς ταυτιζομένην τῇ ἐφαπτομένῃ ἐν τῷ ἀποστήματι ΜΝ. Παρατηροῦντες προσέτι, ὅτι ἡ γωνία ΝΜΚ εἶναι τὸ συμπλήρωμα τῆς $\tau - \omega$, ἔχομεν ὡς ἀνωτέρω,

$$\text{συνεφ}\,(\tau - \omega) = \frac{\delta\rho}{\rho\delta\omega}.$$

216. Ἔστω σ ἡ γωνία ἣν ἡ ἐπὶ τὴν καμπύλην κάθετος, κατὰ τὸ σημεῖον Μ ἀγομένη, σχηματίζει πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x. Κατὰ τὸν προηγούμενον τύπον ἔχομεν·

$$\text{ἐφ}\,(\sigma - \omega) = -\frac{\delta\rho}{\rho\delta\omega}.$$

$\sigma - \omega$ εἶναι ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῆς καθέτου καὶ τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος.

ΣΗΜ. Τοὺς αὐτοὺς τύπους λαμβάνομεν προσέτι καὶ διὰ μετασχηματισμοῦ τῶν συντεταγμένων. Τοὺς πρὸς τοῦτο λογισμούς, οὐδεμίαν ἄλλως παρουσιάζοντας δυσκολίαν, παραλείπομεν πρὸς ἄσκησιν τῶν πρωτοπείρων [218].

217. Ἐν συντεταγμέναις πολικαῖς, ἐμβαδὸν καμπύλης καλεῖται τὸ τριγωνικὸν χωρίον ἀπολαμβανόμενον ὑπὸ τῆς καμπύλης αὐτῆς, ὑπό τινος ἀκτῖνος ἐπιβατικῆς μονίμου (π. χ. τῆς τῷ ἄξονι συμπιπτούσης ἀκτῖνος Οα) (Σχ. 45), καὶ τῆς κινητῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος ΟΜ. Τὰ παραλληλόγραμμα ἅτινα ἐν § 160 εἴδομεν ἀπολαμβάνοντα τὸ ἐμβαδόν, ἀντικαθίστανται ἐνταῦθα ὑπὸ δύο τομέων ὁμοίων. Καλοῦμεν ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦτο. Ὅταν ω αὐξήσῃ κατὰ $\delta\omega$, ε αὐξάνει κατὰ

τὸ τρίγωνον ΟΜΝ, οὗτινος τὸ ἐμβαδόν, θεωρουμένου ΜΝ καὶ αὖθις ὡς γραμμῆς εὐθείας, εἶναι.

$$\tfrac{1}{2}(\rho + \delta\rho)\,\rho\delta\omega.$$

Ἐν τῷ ὁρίῳ, παραλειπομένων τῶν δευτεροταγῶν διαφορικῶν, ἔχομεν

$$\delta\varepsilon = \tfrac{1}{2}\rho^2\delta\omega.$$

218. Ἐντεῦθεν ὁδηγούμεθα εἴς τινα συνέπειαν χρησιμεύουσαν ἐνίοτε. Ἐκ τοῦ τριγωνομετρικοῦ τύπου τοῦ διδόντος τὴν ἐφαπτομένην τῆς διαφορᾶς δύο τόξων, ἔχομεν·

$$\text{ἐφ ΟΜΤ} = \text{ἐφ}\,(\tau - \omega) = \text{ἐφ}\,(\text{ΜΤΧ} - \text{ΜΟΤ})$$

$$= \frac{\dfrac{\delta\psi}{\delta x} - \dfrac{\psi}{x}}{1 + \dfrac{\psi\delta\psi}{x\delta x}},$$

ἤτοι $$\text{ἐφ}\,(\tau - \omega) = \frac{x\delta\psi - \psi\delta x}{x\delta x + \psi\delta\psi}.$$

Ἀλλά, [214], $$\text{ἐφ}(\tau - \omega) = \frac{\rho\delta\omega}{\delta\rho}.$$

Ἄρα $$\frac{x\delta\psi - \psi\delta x}{x\delta x + \psi\delta\psi} = \frac{\rho^2\delta\omega}{\rho\delta\rho}.$$

Ἀλλ' ἐκ τῆς σχέσεως [212]

$$x^2 + \psi^2 = \rho^2, \quad \text{λαμβάνομεν} \quad x\delta x + \psi\delta\psi = \rho\delta\rho·$$

ἄρα, $x\delta\psi - \psi\delta x = \rho^2\delta\omega$, ἢ $\tfrac{1}{2}(x\delta\psi - \psi\delta x) = \tfrac{1}{2}\rho^2\delta\omega = \delta\varepsilon$.

Εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον φθάνομεν καὶ ὡς ἑξῆς. Ἔχομεν [212]

$$\frac{\psi}{x} = \text{ἐφ}\,\omega, \qquad \text{ὅθεν} \qquad \frac{x\delta\psi - \psi\delta x}{x^2} = \frac{\delta\omega}{\text{συν}^2\omega},$$

ἢ $$x\delta\psi - \psi\delta x = \frac{x^2}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}\,\delta\omega.$$ Ἀλλὰ

$x^2 = \rho^2\,\sigma\upsilon\nu^2\omega,$ ἄρα $\frac{1}{2}(x\delta\psi - \psi\delta x) = \frac{1}{2}\rho^2\delta\omega.$

219. Ἡ ἔκθεσις τοῦ διαφορικοῦ τοῦ τόξου ς τῆς καμπύλης εἶναι, ὡς δῆλον,

$$\delta\varsigma = \delta\omega\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\delta\rho}{\delta\omega}\right)^2}.$$

διότι, τὸ στοιχεῖον ΜΝ θεωρεῖται ἐν τῷ ὁρίῳ ὡς ἡ ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΜΝΚ, οὗτινος αἱ πλευραὶ εἰσὶ ρδω καὶ δρ. Τὸ τόξον ς ὑποτίθεται αὐξάνον σὺν τῇ γωνίᾳ ω.

220. Τὸ διαφορικὸν δς εὑρίσκομεν προσέτι καὶ διὰ μετασχηματισμοῦ τῶν συντεταγμένων ὡς ἑξῆς. Ἔχομεν·

$$\delta\varsigma = \sqrt{\delta x^2 + \delta\psi^2}, \quad x = \rho\,\sigma\upsilon\nu\omega, \quad \psi = \rho\,\dot\eta\mu\omega.$$

Διαφορίζοντες τὰς δύο τελευταίας ἐξισώσεις καὶ ἀντεισάγοντες ἐν τῇ πρώτῃ, λαμβάνομεν·

$$\delta\varsigma = \sqrt{(\delta\rho\,\sigma\upsilon\nu\omega - \rho\,\dot\eta\mu\omega\,\delta\omega)^2 + (\delta\rho\,\dot\eta\mu\omega + \rho\,\sigma\upsilon\nu\omega\,\delta\omega)^2},$$

ἢ $$\delta\varsigma = \sqrt{\delta\rho^2 + \rho^2\delta\omega^2}.$$

221. Ἐν συντεταγμέναις πολικαῖς (Σχ. 46), ὑφαπτομένην καλοῦσι τὸ ἀπόστημα ΟΤ, ἀπολαμβανόμενον ὑπὸ τοῦ πόλου Ο καὶ τῆς ἐφαπτομένης ΜΤ, ἐπὶ τῆς ἀγομένης καθέτου τῇ ἐπιβατικῇ ἀκτῖνι τῇ ἐπιζευγνυούσῃ τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς Μ. Ἡ ὑποκάθετος ΟΘ μετρεῖται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἀπὸ τοῦ πόλου μέχρι τῆς καθέτου ΜΘ. Πρὸς εὕρεσιν τῆς ἀναλυτικῆς ἐκθέσεως τῆς ὑφαπτομένης, ἄγομεν δύο ἐπιβατικὰς ἀκτῖνας ΟΜ καὶ ΟΝ· ἀπὸ δὲ τοῦ Μ τὴν πρὸς ὀρθὰς ΜΣ ἐπὶ τὴν ἐπιβατικὴν ἀκτῖνα ΟΝ, καὶ τὴν ΟΤ′ παράλληλον τῇ ΣΜ. Τὰ ὅμοια τρίγωνα ΟΤ′Ν, ΣΜΝ δίδουσιν·

$$OT' = \frac{ON \times \Sigma M}{\Sigma N} = \frac{ON \times \Sigma M}{\sqrt{\overline{MN}^2 - \overline{\Sigma M}^2}}.$$

Ἐν δὲ τῷ ὁρίῳ ἔχομεν,

$$\Sigma M = \tau\acute o\xi\, MK = \rho\delta\omega, \qquad ON = OM = \rho,$$

$$MN = \delta\varsigma = \delta\omega\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\delta\rho}{\delta\omega}\right)^2},$$

Ἄρα, $$\Upsilon\varphi^{\eta} = OT = \frac{\rho^2\delta\omega}{\delta\rho}.$$

Ἐκ τοῦ αὐτοῦ σχήματος συνάγομεν προσέτι τὰς ἑξῆς ἐκθέσεις.

$$E\varphi^{\eta} = MT = \rho\sqrt{1 + \rho^2\left(\frac{\delta\omega}{\delta\rho}\right)^2}. \quad \Upsilon\kappa^{o\varsigma} = O\Theta = \frac{\delta\rho}{\delta\omega}.$$

$$K^{o\varsigma} = M\Theta = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\delta\rho}{\delta\omega}\right)^2}.$$

222. Πρὸς εὕρεσιν τῆς γενικῆς ἐκθέσεως τῆς ἀκτῖνος τῆς καμπυλότητος ἐν συντεταγμέναις πολικαῖς, λαμβάνομεν [200] τὸν τύπον

$$A = \frac{\delta\varsigma}{\delta\tau}.$$

Ἡ [214] ἐξίσωσις $\sigma\upsilon\nu\epsilon\varphi(\tau - \omega) = \frac{\delta\rho}{\rho\delta\omega}$,

διαφοριζομένη δίδει·

$$-\frac{\delta\tau - \delta\omega}{\dot\eta\mu^2(\tau - \omega)} = \delta\left(\frac{1}{\rho}\,\frac{\delta\rho}{\delta\omega}\right),$$

ἢ $$\frac{\delta\tau}{\delta\omega} = 1 - \dot\eta\mu^2(\tau - \omega)\,\frac{\delta}{\delta\omega}\left(\frac{1}{\rho}\,\frac{\delta\rho}{\delta\omega}\right).$$

'Αλλ' ἡ αὐτὴ δίδει προσέτι, $\eta\mu^2(\tau-\omega)=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\delta\rho}{\delta\omega}\right)^2}$.

Ἄρα, $$\frac{\delta\tau}{\delta\omega}=\frac{1+\left(\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\delta\rho}{\delta\omega}\right)^2-\dfrac{\delta}{\delta\omega}\left(\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\delta\rho}{\delta\omega}\right)}{1+\left(\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\delta\rho}{\delta\omega}\right)^2}.$$

'Αλλ' ἀνωτέρω εὕρομεν

$$\frac{\delta\varsigma}{\delta\omega}=\rho\left[1+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\delta\rho}{\delta\omega}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Ἄρα, $$A=\frac{\delta\varsigma}{\delta\tau}=\frac{\rho\left[1+\left(\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\delta\rho}{\delta\omega}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{1+2\left(\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\delta\rho}{\delta\omega}\right)^2-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\delta^2\rho}{\delta\omega^2}},$$

ἢ προσέτι,

$$A=\frac{\left[\rho^2+\left(\dfrac{\delta\rho}{\delta\omega}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\rho^2+2\left(\dfrac{\delta\rho}{\delta\omega}\right)^2-\rho\dfrac{\delta^2\rho}{\delta\omega^2}}.$$

Γνωστῆς οὔσης τῆς διευθύνσεως τῆς καθέτου, κατὰ § 216, ἡ ἔκθεσις αὕτη τῆς ἀκτῖνος τῆς καμπυλότητος ἐπαρκεῖ ὅπως ὁρισθῇ τὸ κέντρον τοῦ φιλήτορος κύκλου. Τὸ ῥιζικὸν ἐν τῷ ἀριθμητῇ προσλαμβάνει τὸ σημεῖον $+$ ἢ τὸ $-$. Θέτοντες ὅρον τοῦ λαμβάνειν τὸ σημεῖον $+$, ἑπόμενον ἔσεται ὅτι ἡ ἀκτὶς τῆς καμπυλότητος θεωρηθήσεται, ὡς θετικὴ μὲν ὅταν τὰ διαφορικὰ $\delta\tau$ καὶ $\delta\varsigma$ ἔχωσι τὸ αὐτὸ σημεῖον, ὡς ἀρνητικὴ δὲ ὅταν ἔχωσι σημεῖα ἐναντία. Ἐνταῦθα ὑποθέτομεν τὸ τόξον ς αὐξάνον κατὰ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν καθ' ἣν καὶ ἡ

γωνία ω. Οὕτως, ἡ ἀκτὶς τῆς καμπυλότητος λογίζεται, θετικὴ μὲν ὅταν ἡ καμπύλη στρέφῃ τὰ κοῖλα αὐτῆς πρὸς τὸν πόλον, ἀρνητικὴ δὲ ἐν τῇ ἐναντίᾳ περιπτώσει.

Παρατηρητέον ὅτι

$$\delta\tau=\frac{\rho^2+2\left(\dfrac{\delta\rho}{\delta\omega}\right)^2-\rho\dfrac{\delta^2\rho}{\delta\omega^2}}{\rho^2+\left(\dfrac{\delta\rho}{\delta\omega}\right)^2}\,\delta\omega,$$

εἶναι ἡ ἀνάλογος ἔκθεσις τῆς ἐν § 165 εὑρεθείσης $\delta\tau$, ἣν *γωνίαν καμπυλότητος* καλοῦσιν [200]. Ἐν τῷ περὶ οὗ πρόκειται συστήματι συντεταγμένων, ἡ ὑπὸ δύο συνεχῶν ἐφαπτομένων περιεχομένη γωνία, ἤτοι ἡ ἀπειροστημόριος διαφορὰ τῆς κλίσεως τ τῆς ἐφαπτομένης ἐπὶ τοῦ μονίμου ἄξονος, ἰσοῦται τῇ γωνίᾳ τῶν δύο συστοίχων ἐπιβατικῶν ἀκτίνων, πλέον τῇ αὐξήσει τῆς κλίσεως τῆς ἐφαπτομένης ἐπὶ τῆς τοῦ σημείου ἐπαφῆς διερχομένης ἀκτῖνος.

223. Ἐν τῷ ἐφεξῆς ἄρθρῳ ἐφαρμόσομεν τὰς προεκτεθείσας θεωρίας ἐπὶ διαφόρων καμπύλων ὑπερβατικῶν ἐν συντεταγμέναις πολικαῖς. Ὅσον ἀφορᾷ τὰς τῆς δευτέρας τάξεως καμπύλας, παρελίπομεν τὰς ἐπ' αὐτῶν ἐφαρμογὰς τοῖς μαθηταῖς πρὸς ἄσκησιν· ἄλλως, ἡ τοιαύτη ἐργασία οὐδόλως ἔσεται δύσκολος ἐξ ὅσων ἄχρι τοῦδε ἐδιδάχθησαν. Συνιστῶμεν αὐτοῖς τὴν ἀπόδειξιν τῶν ἑξῆς προτάσεων, ἐκ τῆς γνωστῆς πολικῆς ἐξισώσεως ἁπάσας τὰς περὶ ὧν ὁ λόγος καμπύλας ἐμφαινούσης.

1ον. *Ἐν ταῖς καμπύλαις τῆς δευτέρας τάξεως, ὁ τόπος τῶν ἐξωτερικῶν περάτων τῶν πολικῶν ὑφαπτομένων εἶναι εὐθεῖα πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὸν πολικὸν ἄξονα. Ἡ πρὸς ὀρθὰς δὲ αὕτη εὐθεῖα εἶναι ἀκριβῶς ἡ διευθετοῦσα τῆς καμπύλης. (Ἐντεῦθεν πορίζόμεθα μέσον τοῦ ἄγειν ἐφαπτομένην τῆς καμπύλης κατὰ σημεῖον δοθὲν ἐπ' αὐτῆς).*

2ον. *Ἐν τῇ παραβολῇ, ἡ ἐφαπτομένη παράλληλος ἐστὶ τῆς διχοτομούσης εὐθείας τὴν γωνίαν ἣν ἡ ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν* *ἀγομένη ἐπιβατικὴ ἀκτὶς σχηματίζει μετὰ τοῦ πολικοῦ ἄξονος.*

3ον. Ἐν τῇ αὐτῇ καμπύλῃ, ἡ τοῦ πόλου ἀπόστασις ἀπὸ τοῦ σημείου καθ' ὃ ἡ ἐφαπτομένη τέμνει τὸν πολικὸν ἄξονα, ἰσοῦται τῇ τὴν ἐπαφὴν ζευγνυούσῃ ἐπιβατικῇ ἀκτῖνι.

ΚΔ'. ΠΕΡΙ ΣΠΕΙΡΩΝ.

224. *Σπείρας* καλοῦσιν οἱ Γεωμέτραι παντὸς εἴδους καμπύλας τεμνομένας κατ' ἄπειρον ἀριθμὸν σημείων ὑπὸ εὐθείας. Τῶν τοιούτων καμπύλων τὰ ἰδιώματα εὐκολώτερον ἐξιχνεύονται ἐν συντεταγμέναις πολικαῖς.

225. *Σπεῖρα Ἀρχιμήδειος* (Σχ. 47). Ἡ καμπύλη αὐτή, ἥτις καὶ *Ἕλιξ Ἀρχιμήδειος* καλεῖται, γράφεται τῷ ἑξῆς τρόπῳ. Ἐνῷ ἡ ἀκτὶς ΟΑ στρέφεται περὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΝΠ, συγχρόνως ἓν σημεῖον κινητὸν προβαίνει ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ταύτης ἐκ τοῦ Ο ταχύτητι τῇ αὐτῇ ᾗ κινεῖται τὸ πέρας Α τῆς ἀκτῖνος, περιφερομένης κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον, περὶ τὴν περιφέρειαν. Οὕτω, τὸ κινητὸν σημεῖον Ο εὑρεθήσεται εἰς τὸ Α ἅμα ὡς ἡ ΟΑ τελειώσει ὁλόκληρον περιστροφὴν αὐτῆς. Ἐντεῦθεν δῆλον ὅτι, ἐν τῷ τυχόντι σημείῳ Μ τῆς σπείρας ὁ λόγος τῆς ΟΜ πρὸς τὴν ΟΝ ἰσοῦται τῷ λόγῳ τοῦ τόξου ΑΝ πρὸς τὴν περιφέρειαν ΑΝΠ. Ἐὰν φαντασθῶμεν τὸ μὲν κινητὸν σημεῖον ἐξακολουθοῦν τὴν κίνησιν αὐτοῦ πέραν τοῦ σημείου Α ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος προεκβαλλομένης, τὴν αὐτὴν δὲ ἀκτῖνα περιστρεφομένην ἐπ' ἄπειρον, ἡ σπεῖρα προαχθήσεται στρεφομένη ἀείποτε περὶ τὸ σημεῖον Ο, οὕτως ὥστε, ὁ λόγος τοῦ ἀποστήματος οἱουδήποτε αὐτῆς σημείου ἀπὸ τοῦ Ο, πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, ἔσεται ἴσος τῷ λόγῳ τοῦ διατρεχθέντος τόξου ἀπὸ τοῦ σημείου Α, ἐξ ἀρχῆς τῆς κινήσεως, πρὸς τὴν περιφέρειαν. Π. χ. κατὰ τὸ σημεῖον Μ', ἐν ᾧ ἡ ἀκτὶς ἔφθασε μετὰ μίαν περιστροφὴν πλέον τοῦ τόξου ΑΝ, ἔχομεν·

$$\frac{OM'}{ON} = \frac{ANΠA + AN}{ANΠA}.$$

Καλοῦντες ρ τὴν ἐπιβατικὴν ἀκτῖνα ΟΜ, ω τὸ τόξον ΑΝ, ὑποθέτοντες δὲ τὴν ἀκτῖνα $OA = 1$, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν τὴν περὶ ἧς λόγος σπεῖραν ἐμφαίνουσαν,

$$\rho = \frac{\omega}{2\Pi}, \quad ἢ \quad ἐν\ γένει \quad \rho = \alpha\omega.$$

226. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης λαμβάνομεν

$$\frac{\delta\rho}{\delta\omega} = \alpha,$$

Ἄρα, ἐν τῷ Ἀρχιμηδείῳ ἕλικι (ὡς ἐν τῇ παραβολῇ ἐν ἄξοσιν ὀρθογωνίοις) ἡ ὑποκάθετος εἶναι σταθερά· ἑπομένως, ἡ κέντρῳ τῷ πόλῳ καὶ ἀκτῖνι ἴσῃ τῇ ὑποκαθέτῳ γραφομένη περιφέρεια κύκλου ἰσοῦται τῇ ΟΑ, ἀκτῖνι τοῦ γεννήτορος κύκλου. Ἐντεῦθεν καταφαίνεται προσέτι ἁπλουστάτη κατασκευή τις τῆς ἐφαπτομένης καθ' οἱονδήποτε σημεῖον δοθέν.

Ἐκ τοῦ γενικοῦ τύπου τῆς ὑφαπτομένης [221] συνάγομεν προσέτι·

$$OT = Υφ^n = \frac{\rho^2}{\alpha} = \alpha\omega^2 = \frac{\omega^2}{2\Pi}.$$

Τὸ τῆς ὑφαπτομένης μῆκος κατὰ τὸ σημεῖον Α, ἐν ᾧ $\omega = 2\Pi$, ἰσοῦται 2Π· ἤτοι τῇ περιφερείᾳ τοῦ γεννήτορος κύκλου. Δῆλον δὲ ὅτι, ἡ ἀντιστοιχοῦσα ὑφαπτομένη ἐν σημείῳ τῆς καμπύλης διδόμενον μετὰ μ περιελίξεις, ἰσοῦται μ φορὰς τὴν περιφέρειαν ἧς ἡ ἀκτὶς ἰσοῦται μ. ΟΑ.

Ἡ ἀξία λόγου αὕτη ἰδιότης ἠδύνατο χρησιμεῦσαι πρὸς εὐθυγράμμισιν τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἐὰν ἦτο γνωστή κατασκευή τις γεωμετρικὴ τῆς Ἀρχιμηδείου σπείρας.

227. Καλοῦντες $(\tau - \omega)$ τὴν γωνίαν ἣν ἡ ἐφαπτομένη κατὰ σημεῖον τὸ τυχὸν τῆς καμπύλης σχηματίζει μετὰ τῆς κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἀγομένης ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος, ἔχομεν [215, 221]·

$$ἐφ(\tau - \omega) = \frac{\rho}{\alpha} = \omega. \qquad Υφ^n = \alpha\omega^2.$$

Ἐννοοῦμεν τίνι κατασκευῇ ὁρίζεται ἡ ἐφαπτομένη καθ' οἱονδήποτε σημεῖον τῆς καμπύλης.

228. *Σπεῖρα ὑπερβολική* (Σχ. 48). Ἄγομεν δύο εὐθείας ΟΧ, ΟΔ, πρὸς ὀρθὰς τεμνομένας. Κέντρῳ τῷ Ο γράφομεν τόξα, ὡς τὸ ΜΜ', ἴσα ἕκαστον μήκει δεδομένῳ τῷ $ΟΔ = α$. Ἡ τὰ ἄκρα Μ' τῶν τόξων τούτων ἐπιζευγνύουσα καμπύλη καλεῖται *σπεῖρα ὑπερβολική*, διὰ τὸ ἀνάλογον τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς πρὸς τὴν τῆς ὑπερβολῆς ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις.

Ἐκ τῆς ἀναλογίας

$ΟΘ : ΟΝ' :: ΘΗ : Ν'Ν'$, ἢ $1 : ρ :: ω : α$,

συνάγομεν τῆς καμπύλης τὴν ἐξίσωσιν,

$$ρω = α, \quad ἢ \quad ρ = \frac{α}{ω}.$$

Ἐκ τῆς σχέσεώς ταύτης δῆλον ὅτι, διὰ $ω = 0$ ἔχομεν $ρ = \infty$, καὶ $ρ = 0$ ὅταν $ω = \infty$. Καθ' ὅσον ω αὐξάνει, ρ μειοῦται· ἄρα, ἡ καμπύλη μετὰ ἀριθμὸν ἄπειρον περιελίξεων φθάνει εἰς τὸν πόλον.

Ἄγοντες Ν'Π κάθετον τῇ ΑΒ, ἔχομεν

$$Ν'Π = ρ\,ἡμ\,ω = \frac{α\,ἡμ\,ω}{ω}.$$

Ὅταν $ω = 0$, τότε $Ν'Π = α$. Ἄρα, ἡ ΑΕ παράλληλος τῷ ἄξονι εἶναι ἀσύμπτωτος τῆς σπείρας.

229. Ἐκ τῆς αὐτῆς ἐξισώσεως συνάγομεν

$$δρ = -\frac{α\,δω}{ω^2}, \quad ἢ \quad \frac{δω}{δρ} = -\frac{ω^2}{α}.$$

Ἐπομένως [221] $\quad Υφ^n = -α$.

Ἄρα, *Ἐν τῇ ὑπερβολικῇ σπείρᾳ, τὸ τῆς ὑφαπτομένης μῆκος εἶναι μόνιμον δι' ἅπαντα τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης.*

Εὑρίσκομεν προσέτι [215] $\quad ἐφ(τ - ω) = -ω$.

230. Αἱ ἐξισώσεις τῶν δύο προηγηθεισῶν σπειρῶν εἰσὶ μερικαὶ περιπτώσεις τῶν τῇ ἐξισώσει $ρ = αω^ν$ δηλουμένων καμπύλων. Ὅταν ν ἦναι ἀριθμὸς θετικός, αἱ σπεῖραι ἄρχονται ἀπὸ τοῦ πόλου. Ὅταν ν ἦναι ἀριθμὸς ἀρνητικός, ἡ σπεῖρα οὐδέποτε φθάνει ἐν τῷ πόλῳ, ἢ μετὰ ἀπείρους περιελίξεις. Ὅταν $ν = 1$, ἔχομεν τὴν τῆς Ἀρχιμηδείου σπείρας ἐξίσωσιν. Ὅταν $ν = -1$, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ὑπερβολικῆς σπείρας.

231. *Σπεῖρα παραβολική*. Δηλοῦται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$ρ^2 = σω.$$

(Σχ. 47) Ἡ καμπύλη καταγράφεται τυλισσομένου τοῦ ἄξονος παραβολῆς περὶ κύκλον, τὸν Ο. Αἱ τεταγμέναι τῆς παραβολῆς τηροῦνται κάθετοι τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ, πίπτουσαι ἐπὶ τὰς προεκβολὰς τῶν ἀκτίνων. Ἐνταῦθα, ἀντὶ τοῦ ἀποστήματος ΟΜ, λαμβάνομεν ὡς ρ τὸ ἀπολαμβανόμενον μέρος ἐπὶ τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος ὑπὸ τοῦ σημείου Μ καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

Ἐὰν λάβωμεν ὡς πόλον τὸ κέντρον τοῦ αὐτοῦ κύκλου, ἡ προηγουμένη ἐξίσωσις μετασχηματισθήσεται εἰς τὴν ἑξῆς·

$$ρ = α \pm \sqrt{σω}.$$

232. *Σπεῖρα λογαριθμική*. Ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς εἶναι·

$$ω = λογ\,ρ, \quad ἢ \quad ρ = α^ω, \quad ἢ \text{ καὶ } \quad ρ = e^{λα \cdot ω}.$$

α δηλοῖ τὴν βάσιν τοῦ λογαριθμικοῦ συστήματος, ἣν ὑποθέτομεν μείζονα μονάδος (Σχ. 49).

Ὅταν $ω = 0$, ἡ ρ ἰσοῦται μονάδι. Αὐξανούσης τῆς ω, ἀπὸ μηδενός, ρ αὐξάνει ἐπίσης μᾶλλον καὶ μᾶλλον. Οὕτως, ἡ καμπύλη, ἀπὸ τοῦ Α ἀρχομένη, λαμβάνει περὶ τὸν πόλον ἀπείρους περιελίξεις ἀφισταμένη αὐτοῦ. Αὐξανούσης τῆς ω ἀρνητικῶς, ρ μειοῦται, ἡ δὲ σπεῖρα λαμβάνει ἐπίσης, ἀπὸ τοῦ σημείου Α, ἀπείρους περιελίξεις περὶ τὸν πόλον Ο, ᾧ προσεγγίζει ἐπ' ἄπειρον ἀλλ' οὐδέποτε συμπίπτει.

233. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\rho = e^{\lambda\alpha\,.\,\omega}$ συνάγομεν

$$\frac{\delta\rho}{\delta\omega} = \lambda\alpha\,.\,e^{\lambda\alpha\,.\,\omega}, \qquad \frac{\delta^2\rho}{\delta\omega^2} = (\lambda\alpha)^2\,e^{\lambda\alpha\,.\,\omega}.$$

Οἱ ἐν §§ 216, 215, τύποι δίδουσιν

$$\acute{\varepsilon}\varphi\,(\sigma - \omega) = -\,\lambda\alpha, \qquad \acute{\varepsilon}\varphi\,(\tau - \omega) = \frac{1}{\lambda\alpha}.$$

Ἄρα, αἱ ὑπὸ τῆς καθέτου καὶ τῆς ἐφαπτομένης μετὰ τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος περιεχόμεναι γωνίαι εἰσὶ μόνιμοι.

Εὑρίσκομεν προσέτι

$$\Upsilon\varphi^{\eta} = \frac{\rho}{\lambda\alpha}\,. \qquad \Upsilon\kappa^{\sigma\varsigma} = \rho\lambda\alpha.$$

Ἡ ἔκθεσις τῆς ἀκτῖνος τῆς καμπυλότητος [222] εἶναι ἐνταῦθα

$$A = \rho\,\sqrt{1 + (\lambda\alpha)^2} = \frac{\rho}{\sigma\upsilon\nu(\omega - \sigma)}.$$

Ἄρα, μ ὄντος τοῦ κέντρου καμπυλότητος ἐν τῷ σημείῳ Μ τῆς λογαριθμικῆς σπείρας, ἕπεται ὅτι, ἡ μὲν γραμμὴ Ομ εἶναι κάθετος τῇ ἐπιβατικῇ ἀκτῖνι ΟΜ, ἡ δὲ ἀκτὶς τῆς καμπυλότητος ἰσοῦται τῇ καθέτῳ Μμ. Ὁ λόγος τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος πρὸς τὴν φιλοῦσαν ἀκτῖνα εἶναι μόνιμος.

234. Ἔστωσαν ω′ καὶ ρ′ αἱ πολικαὶ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου καμπυλότητος μ. Κατὰ τ᾽ ἀνωτέρω ἔχομεν·

$$\omega' = \omega + \frac{\Pi}{2}, \qquad \rho' = \sqrt{A^2 - \rho^2} = \lambda\alpha\,.\,\rho\,.$$

Ἀντεισάγοντες ἐν τῇ ἐξισώσει τῆς σπείρας $\rho = e^{\lambda\alpha\,.\,\omega}$ τὰς ἐκ τῶν τελευταίων τούτων ἐξαγομένας τιμὰς τῶν ω καὶ ρ, λαμβάνομεν τὴν τῆς ἐνειλιγμένης ἐξίσωσιν,

$$\rho' = \lambda\alpha\,.\,e^{\lambda\alpha\left(\omega' - \frac{\Pi}{2}\right)}, \quad \ddot{\eta} \quad \rho' = e^{\lambda\alpha\left(\omega' - \frac{\Pi}{2} + \frac{\lambda\lambda\alpha}{\lambda\alpha}\right)}.$$

Λοιπόν, ἡ ἐνειλιγμένη τῆς λογαριθμικῆς σπείρας εἶναι ἡ αὐτὴ σπεῖρα στραφεῖσα περὶ τὸν πόλον κατὰ γωνίαν ἴσην $\frac{\pi}{2} - \frac{\lambda\lambda\alpha}{\lambda\alpha}$. Ἵνα ἐννοήσωμεν καὶ ἄλλως ὅτι ἡ περὶ ἧς λόγος ἐνειλιγμένη εἶναι σπεῖρα λογαριθμική, παρατηρητέον ὅτι ἡ ἐφαπτομένη αὐτῆς, οὖσα ἀκριβῶς ἡ ἀκτὶς Μμ, σχηματίζει πρὸς τὴν ἐπιβατικὴν αὐτῆς ἀκτῖνα γωνίαν μόνιμον.

ΣΗΜ. Τῆς διαφορᾶς δύο ἀκτίνων καμπυλότητος οὔσης ἴσης τῷ ἀντιστοιχοῦντι τόξῳ τῆς ἐνειλιγμένης, εὐκόλως ἐννοοῦμεν ὅτι, τὸ μῆκος ὁλόκληρον τοῦ τόξου τῆς λογαριθμικῆς σπείρας, ἀπολαμβανομένου μεταξὺ σημείου Μ οἱουδήποτε καὶ τοῦ ἀσυμπτώτου πόλου, ἰσοῦται τῇ ἐφαπτομένῃ ἀγομένῃ κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον Μ, περατουμένῃ δὲ ἐπὶ τὴν κάθετον τῇ ἐπιβατικῇ ἀκτῖνι ΟΜ.

235. *Ἡ τετραγωνίζουσα, καμπύλη* τοῦ ΔΕΙΝΟΣΤΡΑΤΟΥ. (Σχ. 51) Ἔστω κύκλος Ο. Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἐφαπτομένη ΑΤ καὶ ἡ ἀκτὶς ΟΑ κινοῦνται συγχρόνως καὶ ὁμοιομόρφως, ἡ μὲν προσεγγίζουσα τῇ ΟΔ παραλλήλως ἑαυτῇ, ἡ δὲ διατρέχουσα τὸ τεταρτοκύκλιον ἀπὸ τοῦ σημείου Α, καθ᾽ ὃ εἰσὶ κάθετοι ἀλλήλαις, πρὸς Δ. *Τετραγωνίζουσα* καλεῖται ἡ καμπύλη ΑΖΔ, παραγομένη τῇ συνεχῇ τομῇ ὑπ᾽ ἀλλήλων τῶν εὐθειῶν τούτων κινουμένων.

Ἐκ τοῦ τρόπου παραγωγῆς τῆς περὶ ἧς ὁ λόγος καμπύλης, εὐκόλως μορφοῦμεν τὰς ἐξισώσεις αὐτῆς πρὸς συντεταγμένας ὀρθογωνίους γραμμικὰς καὶ πρὸς συντεταγμένας πολικάς. Ἔχομεν οὕτω, καλοῦντες α τὴν ἀκτῖνα ΟΑ,

$$\psi = x\,\acute{\varepsilon}\varphi\left(\frac{\Pi}{2}\,\frac{\alpha - x}{\alpha}\right), \qquad \kappa\alpha\grave{\iota} \qquad \rho = \frac{\alpha\left(\frac{1}{2}\,\Pi - \omega\right)}{\frac{1}{2}\,\Pi\,\sigma\upsilon\nu\,\omega}.$$

Τῇ ὑπερβατικῇ ταύτῃ καμπύλῃ ὑπάρχει ἀσύμπτωτος ἡ εὐθεῖα ΣΔ. Εὐκόλως συνάγομεν τὴν ἰδιότητα

$$O\Delta : O\Lambda :: O\Lambda : \tau\acute{o}\xi\,\tfrac{1}{2}\,\Pi.$$

Ἄρα, τῆς καμπύλης γραφείσης, εὑρίσκομεν διὰ τρίτης ἀναλόγου τὸ τεταρτημόριον τῆς περιφερείας, ἐπομένως καὶ τὴν περιφέρειαν ὁλόκληρον. Ἐκ τοῦ ἀξιοπαρατηρήτου ἰδιώματος τούτου ἡ καμπύλη ὠνομάσθη *τετραγωνίζουσα*· διότι ὁ Δεινόστρατος ἐνόμισεν ὅτι ἠδύνατο ὠφεληθῆναι πρὸς τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου. Τῷ ὄντι δέ, τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐλύετο, εἰ δυνατὸν ἦτον ὁρίσαι ἀκριβῶς τὸ σημεῖον Λ. Ἀλλὰ τοῦτο προφανῶς ἀδύνατον· διότι τὸ σημεῖον αὐτὸ πρέπει νὰ προκύψῃ τῇ ὑπ' ἀλλήλων τομῇ δύο εὐθειῶν ἀμφοτέρων ταυτιζομένων τῇ ΟΨ.

236. Πρὸς ἄσκησιν προτείνομεν τὴν κατασκευὴν καὶ διασκόπησιν τῶν καμπύλων ὑπὸ τῶν ἑξῆς ἐξισώσεων ἐμφαινομένων ἐν συντεταγμέναις πολικαῖς.

1) $\rho = \alpha\,\text{συν}\,\omega \pm \beta$. (*Κοχλίας τοῦ Πασχάλη*).

Τὴν μορφὴν τῆς καμπύλης ταύτης, τῇ ὑποθέσει $\beta < \alpha$, παρίστησι τὸ Σχ. 50.

2) $\rho = \mu + \text{συν}\,\nu\omega$.

Οἱ συντελεσταὶ μ, ν, δηλοῦσιν ἀριθμούς, ὧν ὁ μὲν δεύτερος ὑποτίθεται ἀκέραιος, ὁ δὲ πρῶτος μείζων μονάδος. Ἡ ἐξίσωσις αὔτη ἐμφαίνει καμπύλην *ἀστεροειδῆ*, περιλαμβανομένην μεταξὺ δύο κύκλων, γραφομένων κέντρῳ μὲν τῷ πόλῳ ἀκτῖσι δὲ ἀμοιβαίως ἴσαις $\mu+1$ καὶ $\mu-1$.

ΚΕ'. ΠΕΡΙ ΑΣΥΜΠΤΩΤΩΝ ΤΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΕΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΑΙΣ ΠΟΛΙΚΑΙΣ.

237. Ὁ προσδιορισμὸς τῶν ἀσυμπτώτων ἐν τῷ τοιούτῳ συστήματι συντεταγμένων, προκύπτει ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ αὐτοῦ τῶν γραμμῶν τούτων. Ἔστω, τῷ ὄντι, ω' τιμή τις τῆς ω δι' ἣν ἡ ἐπιβατικὴ ἀκτὶς ρ ἀποκαθίσταται ἄπειρος. Λαμβάνοντες ἐπὶ τῆς καμπύλης σημεῖον Μ (Σχ. 52) τὸ τυχόν, οὗτινος τὴν ἀπόστασιν ΜΠ ἀπὸ τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος ΟΑ καλοῦμεν z, ἔχομεν

$$z = \rho\,\text{ἡμ}\,(\omega' - \omega),$$

ω οὔσης τῆς οἱασδήποτε γωνίας ΜΟΧ. Τὸ ὅριον πρὸς ὃ τείνει ἡ z, ὅταν ω τείνῃ πρὸς ω', ἔσεται τὸ ἀπόστημα τῆς ἀσυμπτώτου ἀπὸ τῆς διευθύνσεως τῆς ἀπείρου ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος. Ὅταν τὸ ὅριον τοῦτο ἦναι μηδέν, συνάγομεν ὅτι ἡ εὐθεῖα ἥτις σχηματίζει τὴν γωνίαν ω' μετὰ τοῦ πολικοῦ ἄξονος, εἶναι ἀσύμπτωτος. Ἀλλ' ἐὰν εὕρωμεν

$$\textit{ὅριον}\quad \rho\,\text{ἡμ}\,(\omega' - \omega) = \pm\lambda,$$

ἡ ἀσύμπτωτος ἔσεται παράλληλος τῇ εὐθείᾳ ταύτῃ, κειμένη ἄνω ἢ κάτω αὐτῆς ἐν τῇ ἀποστάσει λ. Τέλος, ὅταν z δὲν ἔχῃ ὅριον, δὲν ὑπάρχει ἀσύμπτωτος σχηματίζουσα τὴν γωνίαν ω' μετὰ τοῦ πολικοῦ ἄξονος.

Πρὸς ὁρισμὸν τοῦ ὁρίου τοῦ $\rho\,\text{ἡμ}\,(\omega' - \omega)$, παρατηρητέον ὅτι·

$$\rho\,\text{ἡμ}\,(\omega' - \omega) = \frac{\text{ἡμ}\,(\omega' - \omega)}{\left(\dfrac{1}{\rho}\right)}.$$

Ὅταν $\omega = \omega'$, ἀμφότεροι οἱ ὅροι τοῦ ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει κλάσματος μηδενίζονται· τὴν δὲ ἀληθῆ τιμὴν αὐτοῦ εὑρίσκομεν καθιστῶντες ω' ἀντὶ ω ἐν ταῖς παραγομέναις τῶν δύο ὅρων [114]. Ἀλλά,

$$\frac{\delta\,.\,\text{ἡμ}\,(\omega' - \omega)}{\delta\omega} = -\,\text{συν}(\omega' - \omega) = -1, \quad \text{ὅταν}\quad \omega = \omega'.$$

Ἄρα, ὅπως γνωσθῇ τὸ ζητούμενον ὅριον, διαιρετέον -1 τῇ τιμῇ ἣν λαμβάνει ἡ παραγομένη τῆς συνεκθέσεως τῆς ω, ἣν $\dfrac{1}{\rho}$ ἐμφαίνει, θετέον δ' ἐν αὐτῇ ω' ἀντὶ ω.

238. Προκείσθω ἡ τῆς ὑπερβολῆς πολικὴ ἐξίσωσις

$$\rho = \frac{\pi}{1 - \varepsilon\,\text{συν}\,\omega}.$$

Ἔχομεν $$\frac{1}{\rho} = \frac{1 - \varepsilon\,\text{συν}\,\omega}{\pi}.$$

Ἑπομένως, ἡ τῆς $\frac{1}{\rho}$ παραγομένη εἶναι

$$\frac{\varepsilon\,\text{ἡμ}\,\omega}{\pi}.$$

Διαιροῦντες -1 διὰ ταύτης, λαμβάνομεν

$$\frac{-\pi}{\varepsilon\,\text{ἡμ}\,\omega} = \frac{-6^2}{6} = -6.$$

Ἄρα, ἐν τῇ ὑπερβολῇ, αἱ τῶν ἑστιῶν ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν ἀσυμπτώτων ἰσοῦνται τῷ δευτέρῳ ἡμιάξονι τῆς καμπύλης.

239. Προκείσθω προσέτι ἡ ἐξίσωσις (Σχ. 53)·

$$\rho = \text{ἐφ}\,\nu\,\omega,$$

ἐν ᾗ ν ὑποτίθεται ἀριθμὸς ἀκέραιος.

Ἡ καμπύλη διέρχεται τοῦ πόλου. Αὐξανομένης ω ἀπὸ 0 μέχρι $\frac{\Pi}{2\nu}$, ἡ ρ αὐξάνει ἀπὸ 0 ἐπ' ἄπειρον. Ὅπως ἐξιχνεύσωμεν ἐὰν ἡ καμπύλη ἔχῃ ἀσύμπτωτον παράλληλον τῇ ἐπιβατικῇ ἀκτῖνι ΟΘ, σχηματιζούσῃ μετὰ τοῦ ἄξονος ΟΧ τὴν γωνίαν $\frac{\Pi}{2\nu}$, ζητήσωμεν τὸ ὅριον τοῦ $\rho\,\text{ἡμ}\left(\frac{\Pi}{2\nu} - \omega\right)$, ὅταν $\omega = \frac{\Pi}{2\nu}$ [237]. Τὸ ὅριον τοῦτο ἔξομεν διαιροῦντες -1 διὰ τῆς τιμῆς ἣν λαμβάνει ἡ παραγομένη τῆς συνεχθέσεως τῆς ω, ἣν $\frac{1}{\rho}$ ἐμφαίνει, φροντίζοντες καθιστᾷν $\frac{\Pi}{2\nu}$ ἀντὶ ω ἐν τῇ αὐτῇ παραγομένῃ. Ἀλλὰ

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\text{ἐφ}\,\nu\,\omega},$$

καὶ $$\frac{\delta\dfrac{1}{\text{ἐφ}\,\nu\,\omega}}{\delta\omega} = -\frac{\nu\,.\,\text{τέμ}^2\,\nu\,\omega}{\text{ἐφ}^2\,\nu\omega} = -\frac{\nu}{\text{ἡμ}^2\nu\,\omega}.$$

Ἄρα, διαιροῦντες -1 διὰ τῆς παραγομένης ταύτης, ἔχομεν

$$\frac{\text{ἡμ}^2\,\nu\,\omega}{\nu}.$$

Καθιστῶντες δὲ $\omega = \frac{\Pi}{2\nu}$, λαμβάνομεν,

$$\frac{\text{ἡμ}^2\,\frac{1}{2}\,\Pi}{\nu}, \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{\nu}.$$

Ἄρα, ἡ καμπύλη ἔχει ἀσύμπτωτον τὴν εὐθεῖαν ΖΛ, παράλληλον τῇ ΟΘ, ἐν ἀποστάσει ἀπὸ ταύτης $\text{ΟΖ} = \frac{1}{\nu}$. Βλέπομεν ὅτι αἱ ἀπὸ 0 μέχρι $\frac{1}{2}\,\Pi$ αὐξάνουσαι τιμαὶ τῆς ω, διδοῦσι τὸ τόξον ΟΔ, ἀπὸ τοῦ πόλου ἀναχωροῦν καὶ ἔχον ἀσύμπτωτον τὴν εὐθεῖαν ΖΛ.

Αὐξάνοντες τὴν ω ἀπὸ $\frac{\Pi}{2\nu}$ μέχρι $\frac{\Pi}{\nu}$, εὑρίσκομεν τὸ τόξον Δ'Ο, ἀσύμπτωτον τῇ ἐπεκτάσει ΖΛ' τῆς ΖΛ, καὶ περατούμενον ἐν τῷ πόλῳ, ὅταν $\omega = \frac{\Pi}{\nu}$. Ἡ ἐπιβατικὴ ἀκτὶς εἶναι τότε ἀρνητική, μειουμένη, ἐν ἀπολύτῳ τιμῇ, ἀπὸ ∞ μέχρι 0.

240. Καθιστῶντες ἐν τῇ προτεθείσῃ ἐξισώσει, ἀντὶ ω, $\omega' + \frac{\Pi}{\nu}$, ἤτοι λαμβάνοντες πολικὸν ἄξονα τὴν εὐθεῖαν ΟΧ' περιέχουσαν μετὰ τοῦ παλαιοῦ ΟΧ γωνίαν ἴσην $\frac{\Pi}{\nu}$, ἡ ἐξίσωσις οὐδόλως ἀλλοιοῦται. Ἑπομένως, αἱ τῆς ω' τιμαί, ἀπὸ 0 μέχρι $\frac{\Pi}{\nu}$ αὐξάνουσαι, ὁρίσουσι δύο νέα τόξα ἴσα τοῖς ΟΔ, ΟΔ',

ἔχοντα ἐπίσης κοινὴν ἀσύμπτωτον, καὶ ὧν ἡ πρὸς τὸν ἄξονα ΟΧ′ θέσις ἐστὶν ἡ αὐτὴ οἵα ἡ τῶν ΟΔ, ΟΔ′, πρὸς τὸν ΟΚ.

Εὐκόλως ἤδη ἐννοοῦμεν ὅτι, ἡ καμπύλη συγκροτεῖται ἐκ 2ν ζευγῶν κλωνῶν, ὡς ΟΔ, ΟΔ′, καὶ ἔχει 2ν ἀσυμπτώτους.

241. Τέλος, διὰ τῶν αὐτῶν κανόνων εὑρίσκομεν καὶ αὖθις, ὅτι ἐν τῇ ὑπερβολικῇ σπείρᾳ, θεωρηθείσῃ ἐν § 228, ἡ εὐθεῖα ΔΕ εἶναι ἀσύμπτωτος τῆς καμπύλης κειμένη ἐν ἀποστάσει $ΟΔ = α$ (Σχ. 48).

ΚΣΤ′. ΠΕΡΙ ΣΗΜΕΙΩΝ ΕΙΔΙΚΩΝ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ.

242. Αἱ ἐν τοῖς προηγουμένοις ἄρθροις ἐκτεθεῖσαι γνώσεις, ἀφορῶσαι τὸν ὁρισμὸν τῶν ἐφαπτομένων τῶν καμπυλῶν, τῶν φιλητόρων κύκλων, ἢ ἐν γένει, τῶν φιλουσῶν καμπυλῶν, βάσιν ἔχουσι τὸ θεώρημα τοῦ Ταΰλορ, ὑποθέτουσαι ἐν γένει ὅτι οἱ διαφορικοὶ συντελεσταὶ τῆς συνεκθέσεως, τὴν τιμὴν τῆς τεταγμένης ἐκφράζούσης διὰ τῆς τετμημένης, λαμβάνουσιν, ἐν τῷ περὶ οὗ πρόκειται σημείῳ τῆς καμπύλης, τιμὰς πεπερασμένας καὶ ὡρισμένας. Ἄρα ἐπάναγκες, κατὰ ἄρθ. ΙΒ′, τὸ σχῆμα τῆς καμπύλης νὰ ἦναι συνεχὲς ἐγγὺς τοῖς σημείοις τούτοις· προσέτι δέ, ἡ περὶ ἧς πρόκειται συνέκθεσις νὰ μὴ πίπτῃ, διὰ τὴν κατὰ ταῦτα ἀνήκουσαν τιμὴν τῆς τετμημένης, εἰς τὰς ἐξαιρετικὰς περιπτώσεις περὶ ὧν πραγματεύεται τὸ ἄρθ. ΙΓ′· εἰ τοὐναντίον, τὸ σχῆμα τῶν καμπυλῶν ἔχει ἐν γένει ἰδιάζοντα σχηματισμόν, παρουσιάζον σημεῖα καλούμενα *εἰδικά*.

Ἐν πλείσταις περιπτώσεσιν ὑπάρχουσι σημεῖα εἰδικά, διότι ἡ καμπύλη ἔχει δύο ἢ πλείονας κλῶνας συμπίπτοντας κατὰ τὰ αὐτὰ σημεῖα. Οὐχ ἧττον ὅμως, καμπύλαι, μοναδικὴν διεύθυνσιν ἔχουσαι, ἢ διαχωριζόμεναι εἰς πλείονας κλῶνας διακεκριμένους καὶ μὴ χιαζομένους, παρουσιάζουσιν ἐνίοτε σημεῖα ἀξιοπαρατήρητα τῇ γενικῇ ὀνομασίᾳ τῶν εἰδικῶν συμπεριλαμβανόμενα. Τὰ μέγιστα καὶ τὰ ἐλάχιστα, περὶ ὧν ἐπραγματεύθημεν ἤδη, συστοιχοῦσι καὶ ταῦτα σημείοις εἰδικοῖς. Ἐφεξῆς ὁμιλήσομεν περὶ ἑτέρων.

Σημεῖα καμπῆς.

243. *Σημεῖον καμπῆς* ὀνομάζεται ἐκεῖνο καθ' ὃ ἡ καμπύλη, μὴ διακόπτουσα τὴν συνέχειαν αὐτῆς, ἐκ κοίλης γίνεται κυρτή, ἢ ἐκ κυρτῆς κοίλη. Σημεῖον τοιοῦτον εἶναι τὸ Μ (Σχ. 54). Ἄξωμεν κατὰ τὸ σημεῖον τοῦτο ἐφαπτομένην. Παρατηροῦντες τὰς διαφόρους τεταγμένας τῆς τε καμπύλης ΒΜΓ καὶ τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς ΤΤ′, τὰς ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς τεταγμένης ΜΠ κειμένας, βλέπομεν ὅτι, αἱ διαφοραὶ Μ′Ν′ καὶ Μ″Ν″ ἐλαττοῦνται βαθμηδὸν προσεγγίζουσαι τῷ σημείῳ Μ, ἐν ᾧ ἐν τέλει μηδενίζονται· προσέτι δὲ πρέπει νὰ ἔχωσι σημεῖα ἐναντία ὡς κείμεναι ἐκ διαφόρων μερῶν τῆς ἐφαπτομένης. Ἐκθέσωμεν ἀναλυτικῶς τὴν τοιαύτην συνθήκην.

Καλοῦμεν $ΠΠ' = ΠΠ'' = θ$, καὶ ἔχομεν,

$$M'N' = \frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}\frac{\theta^2}{2} + \frac{\delta^3\psi}{\delta x^3}\frac{\theta^3}{2.3} + \frac{\delta^4\psi}{\delta x^4}\frac{\theta^4}{2.3.4} + \ldots,$$

$$M''N'' = \frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}\frac{\theta^2}{2} - \frac{\delta^3\psi}{\delta x^3}\frac{\theta^3}{2.3} + \frac{\delta^4\psi}{\delta x^4}\frac{\theta^4}{2.3.4} - \ldots.$$

Τούτων τεθέντων, ἵνα ὑπάρχῃ καμπὴ εἰς Μ, πρέπει ἀναγκαίως, διδομένης τῇ θ τιμῆς σμικροτάτης, αἱ δύο γραμμαὶ Μ′Ν′ καὶ Μ″Ν″ νὰ ἔχωσι σημεῖα ἐναντία. Ἀλλὰ τοῦτο ἀδύνατον, ἢ ὅταν ὁ πρῶτος ὅρος $\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}\frac{\theta^2}{2}$ τῶν προηγουμένων δύο σειρῶν ἰσοῦται μηδενί· διότι τὸ σημεῖον αὐτῶν δυνατὸν νὰ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τοῦ σημείου τοῦ πρώτου τούτου ὅρου, ἔχοντος ἐν ἀμφοτέραις ταῖς σειραῖς τὸ αὐτὸ σημεῖον [134]. Ἄρα πρέπει νὰ ἔχωμεν

$$\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}\frac{\theta^2}{2} = 0, \quad \text{ἢ μᾶλλον} \quad \frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} = 0.$$

Ἐάν, ἡ μηδενίζουσα τὸν δεύτερον διαφορικὸν συντελεστὴν τιμὴ τῆς x, μηδενίζῃ καὶ τὸν τρίτον $\frac{\delta^3\psi}{\delta x^3}$, ἀπαιτεῖται, ἵνα ὑπάρχῃ σημεῖον καμπῆς, νὰ μηδενίζηται τῇ αὐτῇ τιμῇ καὶ ὁ τέταρτος διαφορικὸς συντελεστής. Καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἄρα, ἐν γένει, ἵνα ὑπάρχῃ σημεῖον καμπῆς, πρέπει νὰ ἦναι τάξεως ἀρτίας ὁ τελευταῖος διαφορικὸς συντελεστὴς μηδενιζόμενος τῇ περὶ ἧς πρόκειται τιμῇ τῆς x.

244. Ὅταν ἡ τιμὴ αὕτη τῆς x, ἥτις εἶναι ἡ αὐτὴ εἰς ἀμφοτέρας τὰς προηγουμένας σειράς, ἀποκαθιστᾷ ἄπειρον τὸν διαφορικὸν συντελεστὴν τῆς δευτέρας τάξεως, ὅπερ δύναται συμβῆναι ὅταν οὗτος ἦναι κλασματικός, τότε ἀμφότεραι αἱ σειραὶ ἀποκαθίστανται ἄπειροι, ἐπομένως οὐδὲν συνάγομεν ἐκ τῆς προηγουμένης ἀποδείξεως, βάσιν ἐχούσης τὴν ὕπαρξιν τῶν τοιούτων ἐκτυλιγμάτων. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ παρατηρητέον ὅτι, ἡ σχέσις $\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} = 0$ δείκνυσιν ὅτι, ἐν γένει, μεταβάλλεται τὸ σημεῖον τοῦ δευτεροταγοῦς διαφορικοῦ συντελεστοῦ ἐν τῇ καμπῇ· ἀλλὰ τὸ σημεῖον τοῦ συντελεστοῦ τούτου ἐπίσης μεταβάλλεται διερχομένου αὐτοῦ διὰ τοῦ ἀπείρου, καὶ περὶ τούτου πρέπει νὰ βεβαιούμεθα.

245. Ἐκ τῶν προεκτεθέντων συνάγομεν ὅτι ἵνα ὑπάρχῃ ἐν καμπύλῃ τινὶ σημεῖον καμπῆς, ἀπαιτεῖται ἡ τετμημένη τοῦ σημείου τούτου νὰ ταυτοποιῇ τὴν ἑτέραν τῶν σχέσεων·

$$\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} = 0, \qquad ἢ \qquad \frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} = \infty .$$

Ὅταν βεβαιωθῶμεν περὶ τῆς ὑπάρξεως τῆς ἑτέρας τῶν σχέσεων τούτων, αὐξάνομεν καὶ ἐλαττοῦμεν διαδοχικῶς κατὰ σμικροτάτην ποσότητα θ τὴν τετμημένην τοῦ περὶ οὗ λόγος σημείου. Ἐὰν αἱ τιμαὶ τοῦ $\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}$, διδόμεναι τῇ ἀντεισαγωγῇ τῶν τιμῶν τούτων τῆς x, ἔχωσι σημεῖα ἐναντία, δῆλον ὅτι ὑπάρχει σημεῖον καμπῆς.

246. Προκείσθω ἡ ἐξίσωσις

$$\psi = 6 + 2(x - \alpha)^3.$$

Ἡ ὑπ' αὐτῆς ἐμφαινομένη καμπύλη, ὁμοία τῇ τοῦ Σχ. 54, ἔχει ἓν σημεῖον καμπῆς συστοιχοῦν ἐπὶ τὴν τετμημένην $x = \alpha$, καθ' ὃ ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης εἶναι παράλληλος τῷ ἄξονι τῶν x.

247. Ἐκ τοῦ ἑξῆς παραδείγματος πληροφορούμεθα, ὅτι ἐνίοτε ἀδύνατον εἶναι ἰσῶσαι μηδενὶ τὸν διαφορικὸν συντελεστὴν τῆς δευτέρας τάξεως, πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦ ἐξιχνεῦσαι ἐὰν ὑπάρχῃ σημεῖον καμπῆς.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως, παραβολὴν ἐμφαινούσης,

$$\psi = 6 + \alpha x^2,$$

συνάγομεν $\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} = 2\alpha$, τιμὴν ἀμετάβλητον. Ἄρα, ἐν τῇ παραβολῇ οὐδὲν σημεῖον καμπῆς ὑπάρχει.

248. Ἕπονται διάφοροι ἐξισώσεις, παρέχουσαι σημεῖα καμπῆς.

1) $\psi^3 - x^5 = 0.$
Σημεῖον καμπῆς ἐν τῇ ἀρχῇ τῶν συντεταγμένων.

2) $\psi = e^{-x^2}.$ *Δύο σημεῖα καμπῆς* [81] (Σχ. 20),
$$\left(+\sqrt{\tfrac{1}{2}},\ +\frac{1}{\sqrt{e}}\right) \text{ καὶ } \left(-\sqrt{\tfrac{1}{2}},\ +\frac{1}{\sqrt{e}}\right).$$

3) $\psi = x^3.$ *Σημεῖον καμπῆς ἐν τῇ ἀρχῇ, ἐν ᾗ ὁ τῶν x ἄξων ἅπτεται τῆς καμπύλης.*

4) $\psi = x - x^3.$ *Σημεῖον καμπῆς ἐν τῇ ἀρχῇ.*

5) $\psi = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$
Μία καμπὴ κατὰ τὸ σημεῖον (+2, 0).

6) $\psi^5 + \alpha^2 x^3 - 6^5 = 0.$ *Τρία σημεῖα καμπῆς ὧν αἱ συντεταγμέναι εἰσὶν ἀμοιβαίως* (0, 6),
$$\left(\sqrt[3]{\frac{6^5}{\alpha^2}},\ 0\right),\ \left(-\sqrt[3]{\frac{5 \cdot 6^5}{\alpha^2}},\ 6\sqrt[5]{6}\right).$$

7) $\psi = \beta + (x - \alpha)^3$.

Καμπὴ ὁριζόντειος ἐν τῷ σημείῳ (α, β).

8) $\psi = \beta + (x - \alpha)^{\frac{1}{3}}$.

Καμπὴ κατακόρυφος ἐν τῷ σημείῳ (α, β).

9) $\psi = \text{ἐφ}\, x$. *Ἅπαντα τὰ σημεῖα, ἄπειρα τὸν ἀριθμόν,* $(x = \pm \mu\Pi)$ *καθ' ἃ ἡ καμπύλη τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x, εἰσὶ σημεῖα καμπῆς.*

Σημεῖα ἀνακάμψεως.

249. *Σημεῖον ἀνακάμψεως* καλεῖται ἐκεῖνο ἐφ' ὃ ἡ καμπύλη φθάσασα στρέφει τὴν ὁδὸν αὐτῆς πρὸς τὰ ὄπισθεν. Κατὰ τὸ σημεῖον τῆς ἀνακάμψεως δύο κλῶνες τῆς καμπύλης ἀπολήγουσιν ἔχοντες μίαν κοινὴν ἐφαπτομένην.

Δύο εἰδῶν ἀνακάμψεις διακρίνονται, ἡ μὲν M λέγεται *ἀνάκαμψις τοῦ πρώτου εἴδους*, ἡ δὲ M' *ἀνάκαμψις τοῦ δευτέρου εἴδους*, καθ' ὅσον τὰ κυρτὰ ἀμφοτέρων τῶν κλωνῶν εἰσὶν ἀντίθετα, ἢ τὰ κοῖλα ὁμόκεντρα· ἢ ἐν ἄλλοις λόγοις, καθ' ὅσον οἱ δύο κλῶνες τῆς καμπύλης κεῖνται ἐκ διαφόρων μερῶν τῆς ἐφαπτομένης ἢ ἐκ τοῦ αὐτοῦ μέρους (Σχ. 55).

Ἐπειδὴ ἡ καμπύλη κατὰ τὸ σημεῖον τῆς ἀνακάμψεως διακόπτει τὴν ὁδὸν αὐτῆς, πρέπει, ἐν τῇ δε τῇ περιπτώσει, δύο τιμαὶ τῆς ψ, πραγματικαὶ ὅταν x ἦναι μείζων ἢ ἐλάσσων τῆς τετμημένης τοῦ σημείου, νὰ ὦσι φανταστικαὶ ὅταν x ἦναι ἐλάσσων ἢ μείζων τῆς τετμημένης ταύτης· προσέτι δέ, δύο τιμαὶ τοῦ $\frac{\delta\psi}{\delta x}$ ν' ἀποκαθίστανται ἴσαι. Ὁ συλλογισμὸς οὗτος ὑποθέτει ὅτι ὁ διαφορικὸς συντελεστὴς περιέχει ῥιζικόν.

250. Ἐξ ὅσων εἴδομεν ἐν § 68, τὸ εἶδος τῆς ἀνακάμψεως καθίσταται γνωστὸν ἐκ τοῦ σημείου τοῦ $\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}$ ἐπὶ τῶν δύο κλωνῶν ἐγγὺς τῷ σημείῳ περὶ οὗ ὁ λόγος. Ἐάν, πρὶν ἢ διακόψῃ ἡ καμπύλη τὴν ὁδὸν αὐτῆς, ὁ δευτεροταγὴς διαφορικὸς

συντελεστὴς ἔχῃ δύο τιμάς, τὴν μὲν ἔχουσαν σημεῖον ὅμοιον τῷ τῆς ψ, τὴν δὲ ἐναντίον, δῆλον ὅτι ὑπάρχουσι δύο κλῶνες καμπύλης ἑνούμενοι κατὰ τὸ σημεῖον M (Σχ. 55), ὁ μὲν κυρτὸς ὁ δὲ κοῖλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x. Διὰ τῶν χαρακτήρων τούτων διακρίνομεν ἐν σημεῖον ἀνακάμψεως τοῦ πρώτου εἴδους. Εἰ δὲ τοὐναντίον, αἱ δύο τιμαὶ τοῦ $\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}$ ἔχουσι τὸ αὐτὸ σημεῖον, οἱ κατὰ τὸ σημεῖον M' ἑνούμενοι κλῶνες εἰσὶν ὁμόκεντροι. Διὰ τοῦ χαρακτῆρος δὲ τούτου γνωρίζομεν ὅτι ὑπάρχει ἀνάκαμψις τοῦ δευτέρου εἴδους.

251. Ὁ χαρακτὴρ $\Sigma'(x) = 0$, διδόμενος τῇ τιμῇ $x = \alpha$, ἀνήκει εἰς ἀνάκαμψιν ὁριζόντειον, ἥτις ἔσεται τοῦ πρώτου εἴδους ἐάν, ποιοῦντες $x = \alpha \mp 0$, εὑρίσκομεν διὰ ψ μίαν τιμὴν φανταστικὴν ἀφ' ἑνὸς μέρους τοῦ τῆς ἀνακάμψεως σημείου καὶ δύο τιμὰς πραγματικὰς ἀφ' ἑτέρου, τὴν μὲν μείζονα τὴν δὲ ἐλάσσονα τῆς τεταγμένης τοῦ αὐτοῦ σημείου. Ἀλλ' ὅταν αἱ δύο πραγματικαὶ καὶ διακεκριμέναι τιμαὶ τῆς ψ, τῇ αὐτῇ τετμημένῃ στοιχοῦσαι, εἰσὶν ἀμφότεραι μείζονες ἢ ἀμφότεραι ἐλάσσονες τῆς τιμῆς τῆς τεταγμένης τοῦ σημείου τῆς ἀνακάμψεως, τότε αὕτη εἶναι τοῦ δευτέρου εἴδους.

Τέλος, ὁ χαρακτὴρ $\Sigma'(x) = \infty$ ἀνήκει εἰς ἀνάκαμψιν ὀρθήν, ἥτις εἶναι τοῦ πρώτου εἴδους ἐάν, διὰ τετμημένας ὅσον βουλόμεθα μικρὸν διαφερούσας τῆς $x = \alpha$, εὑρίσκομεν τεταγμένας πραγματικὰς ἑκατέρωθεν τοῦ τῆς ἀνακάμψεως σημείου, καὶ ἀμφοτέρας μείζονας ἢ ἐλάσσονας τῆς τεταγμένης τοῦ σημείου τούτου. Ἀλλ' ἡ ὀρθὴ ἀνάκαμψις εἶναι τοῦ δευτέρου εἴδους ὅταν, ποιοῦντες $x = \alpha \mp 0$, λαμβάνομεν διὰ ψ μίαν τιμὴν φανταστικὴν ἀφ' ἑνὸς μέρους τοῦ σημείου τῆς ἀνακάμψεως καὶ δύο τιμὰς πραγματικὰς ἀφ' ἑτέρου, ἀμφοτέρας μείζονας ἢ ἀμφοτέρας ἐλάσσονας της τεταγμένης τοῦ σημείου αὐτοῦ.

252. Προκείσθω ἡ ἐξίσωσις

$$(\psi - x)^2 - x^5 = 0, \quad \text{ἢ} \quad \psi = x \pm x^2\sqrt{x}.$$

Ἡ καμπύλη σταματᾷ ἐν τῇ ἀρχῇ τῶν συντεταγμένων.

Ἀλλὰ τοῦτο δὲν ἀρκεῖ ὅπως γνωρίσωμεν ἐὰν κατὰ τὸ μέρος τοῦτο ὑπάρχῃ σημεῖον ἀνακάμψεως· διότι δυνατὸν νὰ ὑπάρχῃ τόξον καμπύλης ὡς ἐν τῇ κορυφῇ τῆς παραβολῆς. Ἐξετάσωμεν τί γίνεται περὶ τὴν ἀρχὴν ὁ διαφορικὸς συντελεστὴς τῆς δευτέρας τάξεως. Ἡ τεθεῖσα ἐξίσωσις διαφοριζομένη δίδει·

$$\frac{\delta\psi}{\delta x} = 1 \pm \tfrac{?}{?} x^{\frac{?}{?}}, \qquad \frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} = \pm \tfrac{?}{?} \times \tfrac{?}{?} x^2 \sqrt{x}.$$

Τῇ ἀντεισαγωγῇ $x = 0 + 0$ λαμβάνομεν,

$$\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} = \pm \tfrac{?}{?} \times \tfrac{?}{?} 0^2 \sqrt{0}.$$

Ἄρα, ἡ καμπύλη ἔχει ἐν τῇ ἀρχῇ τῶν συντεταγμένων ἓν σημεῖον ἀνακάμψεως τοῦ πρώτου εἴδους,

253. Ἕπονται διάφορα παραδείγματα.

1) $(\psi - \beta)^2 - (x - \alpha)^3 = 0.$

Ἀνάκαμψις τοῦ πρώτου εἴδους κατὰ τὸ σημεῖον (α, β).

2) $(\psi - \beta - x)^2 - (x - \alpha)^3 = 0.$
3) $2\psi + 1 + x - 2(1 - x)^3 = 0.$

Ἀνακάμψεις τοῦ πρώτου εἴδους.

4) $\psi = \alpha x^2 \pm \beta x^2 \sqrt{x}.$

Ἀνάκαμψις τοῦ δευτέρου εἴδους ἐν τῇ ἀρχῇ.

5) $\alpha(\psi - x)^2 - (x - \beta)^3 = 0.$

Ἀνάκαμψις τοῦ πρώτου εἴδους κατὰ τὸ σημεῖον (β, β).

6) $(\psi - x^2)^2 - x^5 = 0.$

(Σχ. 64) *Ἀνάκαμψις ἐν τῇ ἀρχῇ τοῦ δευτέρου εἴδους.*

7) $\psi^3 - \alpha x^2 = 0.$

Ἀνάκαμψις κατακόρυφος ἐν τῇ ἀρχῇ, ὑπὸ δύο κλώνων κοίλων πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x.

Σημεῖα πολλαπλᾶ.

254. Σημεῖον *διπλοῦν, τριπλοῦν, ... , πολλαπλοῦν*, ὀνομάζεται ἐκεῖνο ἐν ᾧ συμπίπτουσι δύο, τρεῖς, ... , πλείονες κλῶνες τῆς αὐτῆς καμπύλης. Ὁ διακριτικὸς χαρακτὴρ ἑνὸς σημείου τοιούτου εἶναι ὅτι, κατὰ τὸ σημεῖον τοῦτο δυνατὸν ἀγαγεῖν πλέον ἢ μίαν ἐφαπτομένην τῆς θεωρουμένης καμπύλης. Ἀλλὰ συμβαίνει αἱ ἐφαπτόμεναι αὗται νὰ ταυτίζωνται μιᾷ μόνῃ.

255. Ἔστω Α ἓν σημεῖον διπλοῦν, καθ' ὃ ἐξ ὑποθέσεως διασταυροῦνται δύο κλῶνες καμπύλης ἔχοντες ἕκαστος ἰδίαν ἐφαπτομένην. Ἔστω $\Sigma(x, \psi) = 0$, ἡ τὴν καμπύλην ἐμφαίνουσα ἐξίσωσις, ἣν ὑποθέτομεν ἐλευθέραν ῥιζικῶν. Φανερὸν ὅτι καὶ ἡ διαφορικὴ αὐτῆς ἐξίσωσις

$$\frac{\delta\Sigma(x, \psi)}{\delta x}\delta x + \frac{\delta\Sigma(x, \psi)}{\delta\psi}\delta\psi = 0,$$

ἔσεται ἄνευ ῥιζικῶν· ἑπομένως οἱ μερικοὶ δύο διαφορικοὶ συντελεσταὶ ἔσονται ποσότητες λογικαί. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης λαμβάνομεν

$$\frac{\delta\psi}{\delta x} = -\frac{\dfrac{\delta\Sigma}{\delta x}}{\dfrac{\delta\Sigma}{\delta\psi}}.$$

Ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ διαφορικοῦ συντελεστοῦ τῆς πρώτης τάξεως εἶναι ἐπιδεκτικὴ δύο τιμῶν· διότι δύο ἐφαπτόμεναι ὑπάρχουσιν. Ἑπομένως ὁ ἐμφαίνων τὴν τιμὴν ταύτην λόγος πρέπει νὰ ὁρισθῇ, ὅπως ἡ συνθήκη αὕτη ἐκπληροῦται. Ἀλλὰ τὸ τοιοῦτον ἀδύνατον, μὴ ὑπάρχοντος ἐν αὐτῇ ῥιζικοῦ. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, κατὰ τὰς ἀλγεβρικὰς ἀρχάς, ἔχομεν

$$\frac{\delta\psi}{\delta x} = \frac{0}{0}, \qquad \text{ἤτοι} \qquad \frac{\delta\Sigma}{\delta x} = 0, \quad \frac{\delta\Sigma}{\delta\psi} = 0.$$

ΣΗΜ. Ὅταν, ἀντὶ δύο κλωνῶν, συντρέχωσι πλείονες τῷ αὐτῷ σημείῳ, ἀρκεῖ θεωρῆσαι δύο μόνον ἐξ αὐτῶν ὅπως ἀποδειχθῇ ὅτι κατὰ τὸ σημεῖον αὐτὸ ἔχομεν $\frac{\delta\psi}{\delta\psi} = \frac{0}{0}$.

256. Ἐκ τῶν προεκτεθέντων συνάγομεν ὅτι, ὅπως ἐξιχνεύσωμεν ἐὰν ἐν καμπύλῃ τινὶ ὑπάρχωσι σημεῖα πολλαπλᾶ, ἐξισοῦμεν τῷ μηδενὶ τοὺς διαφορικοὺς συντελεστὰς τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς λαμβανομένους ἐκ διαδοχῆς πρὸς x καὶ πρὸς ψ· ἔχομεν οὕτω τὰς τρεῖς ἐξισώσεις·

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta x} = 0, \quad \frac{\delta\Sigma}{\delta\psi} = 0, \quad \Sigma(x, \psi) = 0.$$

Μόναι αἱ πραγματικαὶ λύσεις, ἐκ τῶν δύο πρώτων διδόμεναι τῇ ἀπαλοιφῇ, αἱ ταυτοποιοῦσαι καὶ τὴν τρίτην, δύνανται ἀνήκειν εἰς σημεῖα πολλαπλᾶ. (Λέγομεν, *δύνανται ἀνήκειν* διότι δυνατὸν αἱ ἐξισώσεις αὗται νὰ ἔχωσι κοινὰς λύσεις ἄνευ τῆς ὑπάρξεως σημείων πολλαπλῶν, ὡς μετ' οὐ πολὺ θέλομεν ἰδεῖ). Εἶτα μορφοῦμεν τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν τῆς δευτέρας τάξεως [91], ἐν ᾗ καθιστῶμεν ἕκαστον τῶν συστημάτων τῶν εὑρεθεισῶν λύσεων. Ὁ δεύτερος διαφορικὸς συντελεστὴς ἀφανισθήσεται καθὸ πολυπλασιαζόμενος ἐπὶ $\frac{\delta\Sigma}{\delta\psi}$. Ἕξομεν οὕτως ἐξίσωσιν δευτεροβάθμιον ἐν ᾗ ἄγνωστος ὁ $\frac{\delta\psi}{\delta x}$. Αἱ ῥίζαι αὐτῆς, ἐὰν μὲν ὦσι πραγματικαί, ὁρίζουσι τὰς δύο ἐφαπτομένας, ἑπομένως τὴν διεύθυνσιν τῶν δύο κλωνῶν τῆς καμπύλης κατὰ τὸ σημεῖον περὶ οὗ πρόκειται, ἐὰν δὲ φανταστικαί, φανερὸν ὅτι ὑπάρχει *σημεῖον μεμονωμένον* ἄνευ ἐφαπτομένης, μὴ συνεχόμενον τῇ καμπύλῃ. Περὶ τῶν τοιούτων σημείων ἐφεξῆς ὁμιλήσομεν.

Ἐὰν ἅπαντες οἱ ὅροι τῆς ῥηθείσης δευτεροταγοῦς διαφορικῆς ἐξισώσεως μηδενισθῶσι, προστρέχομεν εἰς τὴν διαφορικὴν τῆς τρίτης τάξεως, ἐν ᾗ οἱ διαφορικοὶ συντελεσταὶ $\frac{\delta^3\psi}{\delta x^3}$, $\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}$, ἀφανισθήσονται, μενεῖ δὲ ὁ $\frac{\delta\psi}{\delta x}$ ὑψωμένος εἰς

τὸν τρίτον βαθμόν. Ἐὰν λάβωμεν δι' αὐτὸν τρεῖς τιμὰς πραγματικάς, δῆλον ὅτι τὸ περὶ οὗ πρόκειται σημεῖον εἶναι τριπλοῦν· τοὐναντίον δέ, δὲν ὑπάρχει *σημεῖον πολλαπλοῦν*.

Ἐν γένει, τῆς συνδρομῆς ν κλωνῶν τῆς καμπύλης ἐν ἑνὶ σημείῳ πολλαπλῷ συνέπειά ἐστιν ἡ τῷ μηδενὶ ἰσότης ἁπασῶν τῶν παραγομένων

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta x}, \quad \frac{\delta\Sigma}{\delta\psi}, \quad \frac{\delta^2\Sigma}{\delta x^2}, \quad \frac{\delta^2\Sigma}{\delta x\delta\psi}, \quad \frac{\delta^2\Sigma}{\delta\psi^2}, \ldots\ldots,$$

$$\frac{\delta^{\nu-1}\Sigma}{\delta x^{\nu-1}}, \quad \frac{\delta^{\nu-1}\Sigma}{\delta x\delta\psi^{\nu-2}}, \ldots\ldots, \quad \frac{\delta^{\nu-1}\Sigma}{\delta\psi^{\nu-1}}.$$

Εἶτα μορφοῦμεν τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν τῆς ν$^{\text{ης}}$ τάξεως ἐξ ἧς πορίζόμεθα τὰς ν τιμὰς τοῦ διαφορικοῦ συντελεστοῦ $\frac{\delta\psi}{\delta x}$.

257. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις (Σχ. 56),

$$x^4 - 2\alpha\psi^3 - 3\alpha^2\psi^2 - 2\alpha^2x^2 + \alpha^4 = 0.$$

Ἔχομεν·

$$-6\alpha(\psi + \alpha)\psi\frac{\delta\psi}{\delta x} + 4x(x^2 - \alpha^2) = 0,$$

$$-6\alpha(2\psi + \alpha)\left(\frac{\delta\psi}{\delta x}\right)^2 + 12x^2 - 4\alpha^2 = 0.$$

Τὸ σχῆμα τῆς καμπύλης ἣν ἡ τεθεῖσα ἐξίσωσις ἐμφαίνει εἶναι συμμετρικὸν πρὸς τὸν ἄξονα τῶν ψ· διότι μόναι δυνάμεις ἄρτιαι τῆς x περιέχονται ἐν αὐτῇ. Καθιστῶμεν τὰς ἐξισώσεις

$$-6\alpha(\psi + \alpha)\psi = 0, \qquad 4x(x^2 - \alpha^2) = 0,$$

τῷ συνδυασμῷ τῶν ὁποίων μετὰ τῆς προτεθείσης συνάγομεν ὅτι δυνατὸν νὰ ὑπάρχωσι τρία σημεῖα πολλαπλᾶ, ἤτοι·

κατὰ τὰ Α, Α', δι' ἃ $\psi = 0$ καὶ $x = \pm\alpha$,

κατὰ τὸ Ε, δι' ὃ $x = 0$ καὶ $\psi = -\alpha$.

Τὰ σημεῖα ταῦτα εἰσὶ διπλᾶ· Αἱ ἐφαπτόμεναι τῆς καμπύλης σχηματίζουσι μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν x γωνίας ὧν αἱ τριγωνομετρικαὶ ἐφαπτόμεναι εἰσίν·

εἰς μὲν τὰ σημεῖα Δ καὶ Δ', $\quad \frac{\delta\psi}{\delta x} = \pm \sqrt{\frac{4}{3}}$,

εἰς δὲ τὸ σημεῖον Ε, $\quad \frac{\delta\psi}{\delta x} = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$.

Ἵνα εὕρωμεν τὰ σημεῖα καθ' ἃ ἡ τῆς καμπύλης ἐφαπτομένη εἶναι παράλληλος τῷ ἄξονι τῶν x, καθιστῶμεν $\frac{\delta\psi}{\delta x} = 0$, ἤτοι $x(x^2 - \alpha^2) = 0$, καὶ συνάγομεν.

1ον. Θέτοντες ἐν τῇ προτεθείσῃ ἐξισώσει $x = 0$,

$$(\psi - \tfrac{1}{2}\alpha)(\psi + \alpha)^2 = 0\cdot$$

ὅθεν, $x = 0$ καὶ $\psi = -\alpha$ ὁρίζουσι τὸ σημεῖον Ε, δι' ὃ ὁ $\frac{\delta\psi}{\delta x}$ καθίσταται $\frac{0}{0}$ καὶ οὐχὶ μηδέν· $x = 0$ καὶ $\psi = \frac{1}{2}\alpha$ ὁρίζουσι τὸ μέγιστον κατὰ τὸ Ζ.

2ον. $x = \pm \alpha$ δίδει, πλὴν τῶν σημείων Δ καὶ Δ', τὰ ἐλάχιστα Θ' καὶ Θ, ἐν οἷς $\psi = -\frac{1}{2}\alpha$.

Ἵνα εὕρωμεν τὰ σημεῖα καθ' ἃ ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης εἶναι παράλληλος τῷ ἄξονι τῶν ψ, καθιστῶμεν

$$\frac{\delta\psi}{\delta x} = \infty, \qquad \text{ἤτοι} \qquad \psi(\psi + \alpha) = 0.$$

Τῇ $\psi = -\alpha$ συστοιχεῖ $x = \pm \alpha\sqrt{2}$. Λαμβάνομεν οὕτω τὰ σημεῖα Η, Η'.

258. Ἐφαρμόζοντες τὴν θεωρίαν ἐπὶ τὴν ἐξίσωσιν (Σχ. 57)

$$x^4 + 2\alpha x^2\psi - \alpha\psi^3 = 0,$$

εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων εἶναι σημεῖον τριπλοῦν τῆς καμπύλης, δι' ὃ ἔχομεν τὰς τιμάς, ἐκ τῆς τρίτης διαφορικῆς ἐξισώσεως διδομένας,

$$\frac{\delta\psi}{\delta x} = 0, \qquad \frac{\delta\psi}{\delta x} = \pm\sqrt{2}.$$

Τὰ ἐν τοῖς σημείοις Θ καὶ Θ' ἐλάχιστα ὁρίζονται ὑπὸ τῶν τιμῶν

$$x = \pm \alpha, \qquad \psi = -\alpha.$$

Τέλος, διὰ τὰ ὅρια τῆς καμπύλης Ζ καὶ Ζ' ἔχομεν, καθιστῶντες $\frac{\delta\psi}{\delta x} = \infty$,

$$x = \pm \tfrac{4}{9}\alpha\sqrt{6}, \qquad \psi = -\tfrac{8}{9}\alpha.$$

259. Ἡ ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως (Σχ. 58),

$$\psi^4 - \alpha x\psi^3 + x^4 = 0,$$

ἐμφαινομένη καμπύλη ἔχει σημεῖον τριπλοῦν ἐν τῇ ἀρχῇ τῶν συντεταγμένων, ὧν οἱ ἄξονες ἐφάπτονται τῆς καμπύλης.

260. Ἡ καμπύλη ἐμφαινομένη ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$\psi^4 + x^4 - 3\alpha\psi^3 + 26x^2\psi = 0,$$

καὶ ἧς τὴν μορφὴν ἐμφαίνει τὸ Σχ. 59, ἔχει ἐν τῇ ἀρχῇ τῶν συντεταγμένων σημεῖον τριπλοῦν.

261. Ἐπὶ τῶν ἑξῆς ὑποδειγμάτων ἐργασθήτωσαν οἱ πρωτόπειροι.

1) $\psi^4 - 96\alpha^2\psi^2 + 100\alpha^2x^2 - x^4 = 0$. (Σχ. 60).
Καμπύλη ὀνομαζομένη courbe du diable· σύγκειται ἐκ τριῶν κλωνῶν διακεκριμένων. Ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων εἶναι συγχρόνως σημεῖον καμπῆς καὶ πολλαπλοῦν.

2) $\alpha\psi^3 - x^2\psi - 6x^3 = 0$.
Οὐδὲν σημεῖον πολλαπλοῦν ὑπάρχει.

3) $\alpha^2\psi^2 - \alpha^2 x^2 + x^4 = 0$. (Σχ. 61).

Ὁ τόπος τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἶναι ἡ καμπύλη Λημνίσκος καλουμένη. Ὑπάρχουσι δύο κλῶνες συμπίπτοντες ἐν τῇ ἀρχῇ τῶν συντεταγμένων κέντρον οὔσῃ τῆς καμπύλης. Αἱ κατὰ τὸ σημεῖον τοῦτο ἐφαπτόμεναι διχοτομοῦσι τὰς τῶν συντεταγμένων ἀξόνων γωνίας. Κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον εἶναι προσέτι καμπή.

4) $\psi^3 - 3\alpha x\psi + x^3 = 0$.

Φύλλον τοῦ Καρτεσίου (Σχ. 37).

Τὴν ἐξίσωσιν ταύτην εὐκολώτερον κατασκευάζομεν διὰ τῶν τομῶν τῆς καμπύλης ὑπὸ τῶν εὐθειῶν $\psi = \mu x$ τῆς ἀρχῆς διερχομένων. Κατὰ συνέπειαν λαμβάνομεν·

$$x = \frac{3\alpha\mu}{\mu^3 + 1}, \qquad \psi = \frac{3\alpha\mu^2}{\mu^3 + 1}.$$

5) *Ἐν κύκλῳ γραφέντι διαμέτρῳ ΓΙ = 2α, εὐθεῖα ΓΖ στρέφεται περὶ τὸ σημεῖον Γ, ἐνῷ ἡ ΗΝ, πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΓ, κινεῖται παραλλήλως ἑαυτῇ. Ζητεῖται ἡ συγκροτουμένη καμπύλη ΓΜΑ ὑπὸ τῶν σημείων Μ τῆς κοινῆς τομῆς τῶν δύο κινουμένων εὐθειῶν τούτων, τοῦ σημείου Ν ὄντος ἀεί-ποτε μέσου τοῦ ὑπὸ τῆς ΓΖ ὑποτεινομένου τόξου ΓΝΖ.*

Ἡ τὸν ζητούμενον γεωμετρικὸν τόπον ἐμφαίνουσα ἐξίσωσις εἶναι

$$\psi = \pm x \sqrt{\frac{\alpha - x}{\alpha + x}}.$$

Ζητηθήτωσαν τὰ διάφορα σημεῖα εἰδικά (Σχ. 62).

Σημεῖα μεμονωμένα.

262. *Σημεῖον μεμονωμένον*, ἢ *συζυγές*, εἶναι ἐκεῖνο οὗτινος αἱ συντεταγμέναι ταυτοποιοῦσι μὲν τὴν ἐξίσωσιν καμπύλης, οὐδεὶς δὲ κλάδος ταύτης διέρχεται αὐτοῦ.

Ἔστωσαν x', ψ', αἱ συντεταγμέναι σημείου μεμονωμένου, ἐτυμοποιοῦσαι τὴν ἐξίσωσιν καμπύλης δοθείσης

$$\psi = \Sigma(x).$$

Αἱ τιμαὶ τῆς ψ ἀντιστοιχοῦσαι ταῖς $x = x' \pm \theta$, θ οὔσης ποσότητος σμικροτάτης, πρέπει νὰ ὦσι φανταστικαί· διότι οὐδὲν σημεῖον τῆς καμπύλης ὑπάρχει πλησίον τοῦ μεμονωμένου. Ὁ τύπος τοῦ Τάϋλορ δίδει ἐν γένει·

$$\Sigma(x \pm \theta) = \Sigma(x) \pm \Sigma'(x)\theta + \Sigma''(x)\frac{\theta^2}{2} \pm \Sigma'''(x)\frac{\theta^3}{2.3} + \ldots$$

Ἐὰν ἐν τῷ ἐκτυλίγματι τούτῳ θέσωμεν ἀντὶ x καὶ ψ, τὰς τιμὰς x' καὶ ψ', ἡ ποσότης $\Sigma(x' \pm \theta)$ ἔσεται φανταστική, καθ' ὑπόθεσιν. Ἄρα, πρέπει εἷς τῶν ὅρων τοῦ δευτέρου μέλους νὰ ἦναι φανταστικός. Ἐν ἄλλοις λόγοις, ἡ ὑπόθεσις $x = x' \pm \theta$ πρέπει νὰ καθιστᾷ φανταστικὸν ἕνα τῶν διαφορικῶν συντελεστῶν. Τῆς περιπτώσεως ταύτης ὑπαρχούσης, ἡ καμπύλη δυνατὸν νὰ ἔχῃ ἐν σημεῖον μεμονωμένον.

263. Ἔστω, π. χ., ἡ ἐξίσωσις (Σχ. 63)·

$$\psi = \pm(\beta + x)\sqrt{x},$$

ἐξ ἧς συνάγομεν

$$\frac{\delta\psi}{\delta x} = \pm\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{\beta}{2\sqrt{x}}\right).$$

Ἐπειδὴ ἡ ἔκθεσις αὕτη καθίσταται φανταστικὴ ὅταν $x = -\beta$ καὶ $\psi = 0$, αἱ τιμαὶ δὲ αὗται ἐτυμοποιοῦσι τὴν τεθεῖσαν ἐξίσωσιν δίδουσαι τὸ σημεῖον Β, εἰκαστέον ὅτι τὸ σημεῖον τοῦτο δυνατὸν εἶναι συνεζευγμένον τῇ καμπύλῃ. Ἵνα βεβαιωθῶμεν περὶ τούτου, αὐξάνομεν ἢ ἐλαττοῦμεν τὴν τετμημένην $-\beta$ κατ' ἐλαχίστην ποσότητα, καὶ βλέπομεν ὅτι ψ καθίσταται φανταστική. Ἄρα, τὸ σημεῖον Β εἶναι μεμονωμένον.

264. Ἡ ὕπαρξις τῶν μεμονωμένων σημείων δηλοῦται, ὡς ἡ τῶν πολλαπλῶν, καὶ ὅταν ὁ διαφορικὸς συντελεστὴς τῆς πρώτης τάξεως ἄγεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{0}{0}$.

Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ ἡ αὔξησις k τῆς τεταγμένης ψ', ἀντιστοιχοῦσα τῇ 0, εἶναι φανταστική, τοιοῦτος ἔσεται καὶ ὁ λόγος $\frac{k}{0}$· ἐπομένως καὶ τὸ ὅριον τοῦ λόγου τούτου, ὅπερ εἶναι ὁ διαφορικὸς συντελεστὴς τῆς πρώτης τάξεως τῆς τεταγμένης θεωρουμένης ὡς συνεκθέσεως τῆς τετμημένης. Ἄρα, ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης κατὰ τὸ μεμονωμένον σημεῖον ὁρίζεται ὑπὸ τιμῆς φανταστικῆς. Ἐπομένως, αἱ συντεταγμέναι x', ψ', πρέπει νὰ μηδενίζωσι τὰ μερικὰ διαφορικὰ $\frac{\delta\Sigma}{\delta x}$, $\frac{\delta\Sigma}{\delta\psi}$, τῆς προτεθείσης ἐξισώσεως $\Sigma(x, \psi) = 0$, να καθιστῶσι δὲ φανταστικὰς τὰς ῥίζας τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως τῆς δευτέρας τάξεως, εἰς ἣν προστρέχομεν ἵνα εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ $\frac{\delta\psi}{\delta x}$, ὅταν αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς μηδενίζωσι συγχρόνως τὰς δύο μερικὰς παραγομένας πρὸς x καὶ πρὸς ψ.

265. *Παραδείγματα.*

1) $(\psi - 1)^2 - (x - 2)^4 (x - 3) = 0.$

Σημεῖον μεμονωμένον $(x = 2,\ \psi = 1)$.

2) $\alpha\psi^2 - x^3 + \beta x^2 = 0.$

Ἡ ἀρχὴ σημεῖον μεμονωμένον.

3) $\psi = (x - 2)\sqrt{x - 3} + 1.$

Σημεῖον μεμονωμένον $(x = 2,\ \psi = 1)$.

4) $\psi = \pm(x - \alpha)\sqrt{x - \beta}.$

Σημεῖον μεμονωμένον $(x = \alpha,\ \psi = 0)$, *ἐὰν* $\alpha < \beta$· *ἢ σημεῖον διπλοῦν τῇ αὐτῇ ἀντιστοιχοῦν τετμημένῃ ἐὰν* $\alpha > \beta$.

5) $\psi = x\sqrt{x - \beta}.$ *Ἡ ἀρχὴ σημεῖον συζυγές.*

Σημεῖα γωνιώδη ἢ ἐξέχοντα.

266. Ὀνομάζονται οὕτω τὰ σημεῖα καθ' ἃ ἀπολήγουσι δύο κλῶνες καμπύλης, μὴ ἔχοντες κατὰ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἐφαπτομένην κοινήν, ἀλλ' ἐφαπτομένας διαφόρους. Ἐπομένως, εὐκόλως ἐννοοῦμεν κατὰ τί διακρίνεται σημεῖον γωνιῶδες ἀπὸ σημείου ἀνακάμψεως [249]. Δῆλον ἄρα, ὅτι οἱ διαφορικοὶ συντελεσταὶ τῆς πρώτης τάξεως, ἐν τοῖς περὶ οἷς ὁ λόγος σημείοις, πρέπει νὰ δίδωνται ὑπὸ ἐξισώσεως δευτεροβαθμίου ἧς αἱ ῥίζαι νὰ ὦσιν ἄνισαι. Τοιοῦτον εἶναι τὸ σημεῖον $(x = 0,\ \psi = 0)$ ἐν τῇ καμπύλῃ δηλουμένῃ ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως [84]·

$$\psi = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}.$$

Ἡ καμπύλη (Σχ. 24) σύγκειται ἐκ δύο κλωνῶν ληγόντων ἐν τῇ ἀρχῇ τῶν συντεταγμένων καὶ ἐκτεινομένων ἐπ' ἄπειρον ἑκατέρωθεν τοῦ ἄξονος τῶν ψ, τοῦ μὲν ἄνω τοῦ τῶν x τοῦ δὲ κάτω αὐτοῦ. Ἵνα ἄξωμεν ἐν τῇ ἀρχῇ ἐφαπτομένην ἑκάστου τῶν κλωνῶν τούτων, ζητητέον τὰ ὅρια πρὸς ἃ τείνουσιν αἱ ποσότητες

$$\frac{\psi}{x} = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}, \qquad \frac{\psi}{x} = \frac{1}{1 + \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}},$$

ὅταν x τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν. Εὑρίσκομεν ὅτι τὰ ὅρια ταῦτα εἰσὶ 0 καὶ 1. Ἄρα, ὁ θετικὸς κλάδος ἐφάπτεται τοῦ ἄξονος τῶν x· τοῦ δὲ ἀρνητικοῦ ἐφαπτομένη ἐστὶν ἡ διχοτομοῦσα εὐθεῖα τὴν γωνίαν τῶν ἀρνητικῶν συντεταγμένων.

Σημεῖα ἀπότομα. (Points d'arrêt).

267. Ὀνομάζουσιν οὕτω σημεῖον ἐν ᾧ εἷς μόνος κλὼν καμπύλης λήγει ἀποτόμως. Ἐὰν x', ψ', δηλῶσι τὰς συντε-

ταγμένας ἑνὸς σημείου ἀποτόμου τῆς καμπύλης $\Sigma(x, \psi)=0$, 0 δὲ ποσότητα ὅσον βουλόμεθα σμικράν, πρέπει, θέτοντες ἐκ διαδοχῆς ἀντὶ x, $x'-0$ καὶ $x'+0$ ἐν τῇ $\Sigma(x, \psi)=0$, μία τῶν πραγματικῶν τιμῶν τῆς ψ ν' ἀποκαθίσταται φανταστική ἢ ἀντιστρόφως, μία τιμὴ φανταστικὴ τῆς ψ ν' ἀποκαθίσταται πραγματική. Ἐπάναγκες ἐπίσης ἔσεται ἡ ψ νὰ ἔχῃ μίαν μόνην τιμὴν πραγματικὴν μικρὸν διαφέρουσαν τῆς ψ' καὶ συστοιχοῦσαν $x'-0$, ἢ $x'+0$· διότι εἰς μόνον κλὼν καμπύλης πρέπει νὰ λήγῃ κατὰ τὸ περὶ οὗ πρόκειται σημεῖον.

268. Ἔστω $\psi = e^{\frac{1}{x}}$.

Δώσωμεν κατὰ πρῶτον τῇ x τιμὰς θετικὰς αὐξανούσας ἀπὸ 0 μέχρι $+\infty$. $x=0$ δίδει $\psi=+\infty$. Αὐξανομένης τῆς x, ψ μειοῦται. Ὅταν δὲ $x=+\infty$, ἔχομεν

$$\psi = +1.$$

Ὁμοίαν διασκόπησιν ἐφαρμόζομεν, ὅπως ἴδωμεν τὴν πρὸς τὰς ἀρνητικὰς x πορείαν τῆς καμπύλης. Τότε $x=-0$ δίδει $\psi=0$, καὶ $x=-\infty$ δίδει $\psi=+1$.

Ἐκ τοῦ συνόλου τῶν τιμῶν τούτων προκύπτει ὅτι, ἡ καμπύλη συγκροτεῖται ἐκ δύο κλωνῶν κειμένων ἑκατέρωθεν τοῦ ἄξονος τῶν ψ. Τοῦ θετικοῦ μέρους ὑπάρχουσιν ἀσύμπτωτοι ὁ ἄξων τῶν ψ καὶ μία παράλληλος τοῦ ἄξονος τῶν x ἐν τῇ ἀποστάσει $+1$. Ὁ τῶν ἀρνητικῶν τετμημένων κλὼν ἔχει τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ἀσύμπτωτον, καὶ λήγει ἀποτόμως ἐν τῇ ἀρχῇ προερχόμενος ἐκ τοῦ ἀρνητικοῦ ἀπείρου. Ὁ τελευταῖος οὗτος κλὼν ἐφάπτεται τοῦ ἄξονος τῶν x κατὰ τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων· διότι τοῦ κλωνὸς τούτου διδομένου ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$\psi = \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}},$$

ἡ ἐφαπτομένη κατὰ τὸ σημεῖον τοῦτο, εἶναι τὸ ὅριον τοῦ λόγου

$$\frac{\psi}{x} = \frac{1}{xe^{\frac{1}{x}}},$$

Ἀλλ' ἐκ τοῦ ἐν § 126 γενικοῦ τύπου συνάγομεν·

$$xe^{\frac{1}{x}} = x + 1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{6x^2} + \dots\dots$$

Καθιστῶντες δὲ $x=0$, εὑρίσκομεν $xe^{x}=\infty$. Ἄρα,

$$\textit{ὅριον}\ \frac{\psi}{x} = \frac{\delta\psi}{\delta x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

269. Ἡ καμπύλη δηλουμένη ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως [84] (Σχ. 23).

$$\psi = \frac{1}{\lambda o\gamma\, x},$$

ἔχει σημεῖον ἀπότομον, ἀνῆκον τῷ ἑνὶ κλάδῳ αὐτῆς, ἐν τῇ ἀρχῇ.

Δὲν δυνάμεθα δοῦναι τῇ x τιμὰς ἀρνητικάς· διότι τότε λογ x ἔσεται φανταστικός. Δίδοντες αὐτῇ τιμὰς θετικὰς σμικροτάτας, ἡ τεταγμένη ἔσεται σμικροτάτη καὶ ἀρνητική, αὐξάνουσα, ἐν ἀπολύτῳ τιμῇ, σὺν τῇ x μέχρι $x=1$, καὶ καθισταμένη ἴση $-\infty$ διὰ $x=1$. Οὕτω λαμβάνομεν ἕνα κλῶνα καμπύλης ἀναχωροῦντα ἀπὸ τῆς ἀρχῆς, καὶ ἔχοντα ἀσύμπτωτον πρὸς τὸ μέρος τῶν ἀρνητικῶν ψ τὴν εὐθεῖαν $x=1$. Αὐξανούσης x ἀπὸ 1 μέχρι ∞, ψ καθίσταται θετική. Ἡ τεταγμένη δὲ αὕτη, κατ' ἀρχὰς μεγίστη, μειοῦται απεριορίστως μέχρι 0, ὅπερ δίδει τὸν κλῶνα ΑΘ.

270. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον διασκοποῦντες τὴν ἐξίσωσιν

$$\psi = x\lambda x,$$

εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ὑπ' αὐτῆς ἐμφαινομένη λογαριθμικὴ ἔχει ἐπίσης ἓν σημεῖον ἀπότομον ἐν τῇ ἀρχῇ, τέμνει δὲ τὸν ἄξονα τῶν x κατὰ $x = 1$.

271. Τὰ γωνιώδη σημεῖα καὶ τὰ ἀπότομα εἰσὶν ἰδιάζοντα σημεῖα τῶν ὑπερβατικῶν καμπυλῶν.

Ὅταν ἡ ἐξίσωσις καμπύλης τινος δίδηται ὑπὸ μορφὴν ἀνεπτυγμένην, ἡ ἔρευνα τῶν εἰδικῶν σημείων εἶναι εὐκολωτάτη.

Περιττὸν νομίζομεν ἐκτεῖναι περαιτέρω τὰς ἐπὶ τοῦ ἀντικειμένου τούτου ἐρεύνας. Προσθέτομεν δὲ μόνον ὅτι, ἡ ἔρευνα τῶν εἰδικῶν σημείων ἀπαιτεῖ ἀκριβῆ ἐξέτασιν τοῦ σχήματος τῆς καμπύλης πέριξ τοῦ σημείου δι' ὃ ἡ ἀναλυτικὴ ἔκθεσις τοῦ $\frac{\delta\psi}{\delta x}$ παρουσιάζει τινα τῶν ἰδιαζόντων χαρακτήρων περὶ ὧν ἐπραγματεύθημεν ἐν τῷ δε τῷ ἄρθρῳ· διότι συμβαίνει ὁ μὲν λόγος $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}$ νὰ ἦναι μονίμως φανταστικὸς πλησίον τοῦ σημείου τούτου, ὁ δὲ $\frac{\delta\psi}{\delta x}$ πραγματικὸς ἐν τῷ αὐτῷ σημείῳ.

ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ.

Α'. ΠΕΡΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΕΩΣ ΤΩΝ ΑΠΛΟΥΣΤΑΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΣΥΝΕΚΘΕΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ.

272. Πᾶσα πρωτοταγὴς διαφορικὴ συνέκθεσις μιᾶς μεταβλητῆς, δηλοῦται ἐν γένει οὕτω·

$$X\delta x,$$

X δηλοῦντος συνέκθεσιν τῆς x τὴν τυχοῦσαν. Ἡ διαφορικὴ αὕτη συνέκθεσις εἶναι ἀείποτε (*), ἢ τουλάχιστον ἀπεκδεχόμεθα αὐτὴν ὡς οὖσαν τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἐργασίας τῆς

(*) Τῷ ὄντι, ἔστω ἡ καμπύλη BMN (Σχ. 68) ἥτις, ἐν ἄξοσιν ὀρθογωνίοις, δηλοῦται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\psi = X$. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς καμπύλης ταύτης ἀπολαμβανόμενον ὑπὸ τεταγμένης οἱασδήποτε μονίμου MH καὶ ἑτέρας τεταγμένης NK ἀντιστοιχούσης ἐπὶ τὴν μεταβλητὴν τετμημένην x, εἶναι συνέκθεσις ὡρισμένη τῆς x [160]. Ἀλλὰ τὸ διαφορικὸν τοῦ ἐμβαδοῦ τούτου εἶναι $\psi\delta x$ ἢ $X\delta x$· ἄρα, τὸ ἐμβαδὸν τοῦτο εἶναι συνέκθεσίς τις ἔχουσα $X\delta x$ διὰ διαφορικὸν, ἢ X ὡς παραγωμένην. Ἄρα, *ὑπάρχει ἀείποτε μία συνέκθεσις ἔχουσα ὡς διαφορικὸν τὴν προτεθεῖσαν* $X\delta x$.

διαφορίσεως ἐφαρμοσθείσης ἐπὶ συνεκθέσεώς τινος ψ τῆς μεταβλητῆς x· ὥστε ἔχομεν

$$\delta\psi = X\delta x, \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{\delta\psi}{\delta x} = X.$$

Ἡ ἐργασία, *ὁλοκλήρωσις* καλουμένη, μέθοδός ἐστι καθ' ἥν, διαφορικοῦ Xδx δοθέντος, εὑρίσκεται ἡ ἄγνωστος συνέκθεσις τῆς x, ἧς διαφορικὸν ἐστὶ τὸ δοθὲν τοῦτο. Ἐν ἄλλοις λόγοις, ὁ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ἐργασία ἐστὶν ἀντίστροφος τῷ Διαφορικῷ.

Ἡ συνέκθεσις ψ τῆς μεταβλητῆς x, ἧς διαφορικὸν εἶναι τὸ προτεθὲν Xδx, ὀνομάζεται τὸ *ὁλοκληρωτικὸν* τοῦ διαφορικοῦ τούτου. Τὸ ὁλοκληρωτικὸν τῆς διαφορικῆς συνεκθέσεως Xδx δηλοῦται τῷ σημείῳ ∫ προτασσομένῳ τῆς ὁλοκληρωτέας ποσότητος Xδx. Οὕτως ἡ προηγουμένη ἐξίσωσις

$$\delta\psi = X\delta x,$$

ἐναντίως ἔχει τῆς

$$\psi = \int X\delta x\cdot$$

καὶ ἀμοιβαίως. Παρατηρητέον ὅτι, τῇ εὑρεθείσῃ συνεκθέσει τῆς x, ἥτις διαφοριζομένη δίδει τὸ ἐξαγόμενον Xδx, δυνάμεθα προστιθέναι οἱανδήποτε ἄτρεπτον ποσότητα, χωρὶς αὕτη νὰ παύσῃ τοῦ νὰ δίδῃ διαφοριζομένη τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον Xδx. Ἄρα, ἐὰν ἡ ζητουμένη συνέκθεσις ἦναι γνωστὴ διὰ μόνης τῆς συνθήκης τοῦ ἔχειν διαφορικὸν Xδx, ὅπως μορφώσωμεν τὴν γενικὴν αὐτῆς ἔκθεσιν, συμπεριληπτέον αὐτῇ τὸν κατὰ βούλησιν ἄτρεπτον ὅρον A. Οὕτω δηλουμένου ψ τοῦ *ὁλοκληρωτικοῦ* διαφορικῆς τινος συνεκθέσεως Xδx, γραπτέον ἐν γένει

$$\psi = A + \int X\delta x.$$

Ἐν τῇ ἐξισώσει ταύτῃ, ἡ ἔκθεσις ∫Xδx ἐμφαίνει τὸ ἄμεσον ἐξαγόμενον τῆς *ὁλοκληρώσεως*· ἤτοι τὴν συνέκθεσιν τῆς x ἧς τὸ διαφορικὸν εἶναι Xδx. A δηλοῖ τὴν *κατὰ βούλησιν* ἄτρεπτον ποσότητα προστιθεμένην τῇ συνεκθέσει ταύτῃ ὅπως ἡ τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ ψ ἔκθεσις ἔχῃ πλήρη γενικότητα. Τῇ

προσθήκῃ τῆς ἀτρέπτου ταύτης ἐσμὲν βέβαιοι ὅτι ψ συμπεριλαμβάνει ἁπάσας τὰς ἀναλυτικὰς ἐκθέσεις, ἐκ τῆς μεταβλητῆς x μορφουμένας, αἵτινες διαφοριζόμεναι δίδουσι Xδx κοινὸν διαφορικόν. Δὲν δυνάμεθα προστιθέναι τῷ ∫Xδx ἢ ὅρον οὗτινος ἡ παραγομένη συνέκθεσις εἴη μηδὲν, ἤτοι ἄτρεπτον [31]· διότι συνεκθέσεις ἔχουσαι τὴν αὐτὴν παραγομένην οὐ δύνανται διαφέρειν ἀπ' ἀλλήλων ἢ κατὰ ποσότητα ἀμετάβλητον.

273. Ἐνόσῳ τῷ ὁλοκληρωτικῷ ψ ἐπιβάλλεται μόνος ὁ ὅρος τοῦ ἔχειν διαφορικὸν τὸ Xδx, ἡ ἄτρεπτος A εἶναι ὅλως κατὰ βούλησιν. Ἀλλ' ἐν ἅπασι τοῖς ἀπὸ τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ ἐξαρτωμένοις ζητήμασιν, ὑπάρχουσιν ἀείποτε συνθῆκαι δι' ὧν ὁρίζεται ἡ τῆς ἀτρέπτου ταύτης τιμὴ, καὶ οὕτω φθάνομεν εἰς ἐξαγόμενον ὡρισμένον, ὡς ἐν τοῖς ἐφεξῆς θέλομεν ἰδεῖ.

274. Τὸ σύμβολον ∫ εἶναι τὸ ἀρχικὸν γράμμα τῆς λέξεως somme (κεφάλαιον). Ἡ χρῆσις αὐτοῦ διετηρήθη καὶ παρ' ἡμῖν· θεωρητέον δὲ αὐτὸ ὡς σύμβολον ἰσοδυναμοῦν τῇ λέξει *ὁλοκληρον*. Ἰδοὺ ὁ λόγος δι' ὃν οἱ Μαθηματικοὶ προέταξαν τὸ τοιοῦτον στοιχεῖον τῆς ἐκθέσεως Xδx, ὅπως δηλώσωσι τὴν συνέκθεσιν ἧς τὸ διαφορικὸν εἶναι Xδx.

Πᾶσα συνέκθεσις δύναται θεωρηθῆναι ἀείποτε ὡς τὸ κεφάλαιον ἀπείρου ἀριθμοῦ τιμῶν τοῦ διαφορικοῦ αὐτῆς. Ὅπως δείξωμεν τοῦτο σαφέστερον, θεωρήσωμεν τὰς καὶ ἄλλοτε θεωρηθείσας ἀλληλοδιαδόχους τιμὰς διδομένας τῇ ἀνεξαρτήτῳ μεταβλητῇ x, ἐν αἷς Δx ἐκλαμβάνεται ὡς διαφορὰ μόνιμος,

$$x_0,\quad x_0+\Delta x,\quad x_0+2\Delta x,\quad x_0+3\Delta x,\ \ldots\ldots,\quad x_0+(\nu-1)\Delta x,\quad x_0+\nu\Delta x,$$

σὺν ταῖς συστοίχοις τιμαῖς τῆς συνεκθέσεως ψ τῆς μεταβλητῆς ταύτης,

$$\psi_0,\quad \psi_1,\quad \psi_2,\quad \psi_3,\ \ldots\ldots,\quad \psi_{\nu-1},\quad \psi_\nu.$$

Τῶν διαφορῶν δύο διαδοχικῶν τιμῶν τῆς ψ οὐσῶν

$\Delta\psi_0,\quad \Delta\psi_1,\quad \Delta\psi_2,\ \ldots\ldots,\quad \Delta\psi_{\nu-1},$ ἔχομεν προσθήλως (πλὴν ὅταν ἡ συνέκθεσις ψ λαμβάνῃ τιμὰς ἀπείρους μεταξὺ $x = 0$ καὶ $x = x_\nu$),

$$\psi_\nu = \psi_0 + \Delta\psi_0 + \Delta\psi_1 + \Delta\psi_2 + \Delta\psi_3 + \ldots + \Delta\psi_{\nu-1},$$

ἔκθεσιν ἣν γράφομεν καὶ οὕτω·

$$\psi_\nu = \psi_0 + \left(\frac{\Delta\psi_0}{\Delta x} + \frac{\Delta\psi_1}{\Delta x} + \frac{\Delta\psi_2}{\Delta x} + \frac{\Delta\psi_3}{\Delta x} + \ldots + \frac{\Delta\psi_{\nu-1}}{\Delta x}\right)\Delta x.$$

Ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι, ἡ μὲν διαφορὰ Δx μειοῦται κατὰ μικρὸν προσεγγίζουσα τῷ μηδενί, ὁ δὲ ἀριθμὸς ν αὐξάνει ἀναλόγως, ὥστε $\nu\Delta x$ νὰ μὴ μεταβάλληται ποσῶς. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐν παρενθέσεσιν ὅρων αὐξάνει μᾶλλον καὶ μᾶλλον, ἡ δὲ τιμὴ τοῦ τυχόντος αὐτῶν $\frac{\Delta\psi_\tau}{\Delta x}$ τενεῖ πρὸς τὸ ταυτισθῆναι τῇ τιμῇ τοῦ διαφορικοῦ συντελεστοῦ $\frac{\delta\psi}{\delta x}$, συστοιχοῦντος τῇ τιμῇ $x_0 + \tau\Delta x$ τῆς μεταβλητῆς x. Ὅθεν βλέπομεν ὅτι, καθ' ὅσον Δx μειοῦται, ἡ ποσότης

$$\left(\frac{\Delta\psi_0}{\Delta x} + \frac{\Delta\psi_1}{\Delta x} + \frac{\Delta\psi_2}{\Delta x} + \frac{\Delta\psi_3}{\Delta x} + \ldots\ldots\ldots + \frac{\Delta\psi_{\nu-1}}{\Delta x}\right)\Delta x$$

προσεγγίζει ὁρίῳ τινὶ ὅπερ εἶναι τὸ κεφάλαιον τῶν τιμῶν, ἀπείρων κατὰ τὸν ἀριθμόν, ἃς λαμβάνει τὸ διαφορικὸν $\frac{\delta\psi}{\delta x}\delta x$ τῆς τεθείσης συνεκθέσεως, αὐξανομένης τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x κατὰ τὸ μόνιμον καὶ ἀπειροστημόριον ἀπόστημα δx, ἀπὸ $x = x_0$ μέχρι $x = x_0 + \nu\Delta x$. Ἄρα συνάγομεν ὅτι, μεταβαίνομεν ἀπό τινος τιμῆς ψ_0 οἱασδήποτε τῆς συνεκθέσεως εἰς ἑτέραν οἱανδήποτε τιμὴν ψ, προσθέτοντες τῇ ψ_0 τὸ κεφάλαιον τῶν τιμῶν ἃς λαμβάνει τὸ διαφορικὸν $\frac{\delta\psi}{\delta x}\delta x$ ἐν τῷ ἀπολαμβανομένῳ διαστήματι ὑπὸ τῶν τιμῶν x_0 καὶ x συστοιχουσῶν ταῖς ψ_0 καὶ ψ.

Λοιπόν, δηλοῦντες ὡς ἀνωτέρω $X\delta x$, τὸ διαφορικὸν $\frac{\delta\psi}{\delta x}\delta x$ τῆς συνεκθέσεως ψ, ἀντὶ τῆς προηγουμένης ἐξισώσεως γράφομεν

$$\psi = \psi_0 + \int_{x_0} X\delta x.$$

Τὸ σημεῖον $\int_{x_0}$ δηλοῖ, ὅτι ἔγινε τὸ ἄθροισμα τῶν τιμῶν τοῦ διαφορικοῦ $X\delta x$, ἀντιστοιχουσῶν ἁπάσαις ταῖς τιμαῖς x_0, $x_0 + \delta x$, $x_0 + 2\delta x$, $x_0 + 3\delta x$, ..., μέχρι τῆς $x_0 + (\nu - 1)\delta x$, ἥτις προηγεῖται τῆς τιμῆς τῆς x συστοίχου τῇ ἐν τῷ πρώτῳ μέλει τιμῇ ψ τῆς συνεκθέσεως. Γράφοντες x_0 κάτωθι τοῦ τῆς ὁλοκληρώσεως συμβόλου $\int$ ὁρίζομεν τὴν μερικὴν τιμὴν τῆς x, συστοιχοῦσαν τῇ ψ_0, ἀφ' ἧς τὸ ἄθροισμα λαμβάνεται.

Ἀλλ' ἡ προηγουμένη ἐξίσωσις ὑπάρχει οἱαιδήποτε ἂν ὦσιν αἱ σύστοιχοι τιμαὶ x_0 καὶ ψ_0. Ὅταν ἁπλῶς δίδηται διαφορικόν, μὴ ὁριζομένης τιμῆς x_0 τῇ ἀνεξαρτήτῳ μεταβλητῇ ἀφ' ἧς πρέπει νὰ προστεθῶσιν αἱ τιμαὶ τοῦ διαφορικοῦ τούτου, οὔτε ὁποία ἐστὶν ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ ψ_0 τῆς συνεκθέσεως, οὐδεὶς τρόπος ὑπάρχει τοῦ ὁρίσαι αὐτάς. Λοιπόν, θεωροῦντες ἐν τῇ προηγουμένῃ ἐξισώσει τὴν συνέκθεσιν ψ ὡς ὑποβαλλομένην μόνῳ τῷ ὅρῳ τοῦ ἔχειν $X\delta x$ διαφορικόν, θεωρητέον ἐν αὐτῇ τήν τε x_0 καὶ ψ_0 ὡς οὔσας κατὰ βούλησιν. Ἄρα, περιττὸν σημειοῦσθαι τὴν ἀόριστον τιμὴν τῆς x ἀφ' ἧς τὸ κεφάλαιον $\int X\delta x$ λαμβάνεται· γραπτέον δὲ ἁπλῶς, ὡς ἐν τῷ προηγουμένῳ χωρίῳ,

$$\psi = A + \int X\delta x.$$

275. Τὸ ἀόριστον τῆς τιμῆς τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ, καὶ ἡ ἀνάγκη τοῦ συμπληροῦσθαι τὴν ἔκθεσιν αὐτοῦ τῇ προσθήκῃ ἀτρέπτου κατὰ βούλησιν, καθίστανται ἐναργῆ ὅταν θεωρήσωμεν x καὶ ψ ὡς τὰς συντεταγμένας καμπύλης ἐπιπέδου. Τῷ ὄντι, ὅταν ἡ συνέκθεσις ψ δίδηται ἀνεπτυγμένως ἢ συνεπτυγμένως εἰς x, τὸ σχῆμα τῆς καμπύλης εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένον. Δὲν συμβαίνει ὅμως τὸ αὐτὸ δοθέντος μόνου τοῦ διαφορικοῦ $\delta\psi = X\delta x$, ἢ τοῦ

διαφορικοῦ συντελεστοῦ $\frac{\delta\psi}{\delta x} = X$ τῆς περὶ ἧς λόγος συνεκθέσεως. Ἡ ἔκθεσις του διαφορικοῦ τούτου συντελεστοῦ ὁρίζει ἁπλῶς τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης, ὑπαρχούσης καθ' ἕκαστον σημεῖον συστοιχοῦν ἐπὶ τιμὴν τῆς x δοθεῖσαν. Ἐὰν φαντασθῶμεν ὅτι καμπύλη ἐγράφη οὕτως ὥστε ἐκπληροῖ τὴν σχέσιν $\frac{\delta\psi}{\delta x} = X$, ἀκολούθως δὲ κινήσωμεν αὐτὴν ὥστε ἅπαντα αὐτῆς τὰ σημεῖα νὰ γράφωσι παραλλήλους τῷ ἄξονι τῶν ψ, ἡ καμπύλη αὕτη ἐκπληρώσει ἀείποτε, ἐν ἁπάσαις ταῖς θέσεσιν αὐτῆς, τὴν ῥηθεῖσαν συνθήκην, οὐδεὶς δὲ λόγος ὑπάρξει εἰς τὸ ἐκλέξαι τὴν τυχοῦσαν τῶν θέσεων τούτων.

Φανερὸν ἄλλως, ὅτι ἡ τεταγμένη τῆς καμπύλης πρέπει νὰ ἐκτίθηται τῇ συνεκθέσει τῆς x δηλουμένῃ ὑπὸ $\int X\delta x$, καὶ ἧς X εἶναι ὁ διαφορικὸς συντελεστής. Ἀλλ' ἐὰν ἐμμείνωμεν εἰς μόνην ταύτην τὴν συνέκθεσιν, γράφοντες ἁπλῶς $\psi = \int X\delta x$, ποιήσομεν ἐκλογὴν μεταξὺ τῶν εἰρημένων καμπυλῶν· διότι εἰς τιμὴν ὡρισμένην τῆς x θέλει συστοιχεῖ τότε τιμὴ τῆς ψ ὡρισμένη. Ἄρα, ὅπως δώσωμεν, ὡς ἀναγκαῖον, τῷ ὁλοκληρωτικῷ τελείαν γενικότητα καὶ εὐρεῖαν ἔννοιαν, οἵας τῷ τεθέντι διαφορικῷ, γραπτέον

$$\psi = A + \int X\delta x\cdot$$

A δηλοῦντος ποσότητα ἄτρεπτον οἱανδήποτε. Οὕτως, ἡ τῆς ψ ἔκθεσις δύναται παραστῆσαι τὴν τεταγμένην ἁπασῶν τῶν καμπυλῶν, ἀπείρων τὸν ἀριθμόν, ἐν αἷς ἡ διεύθυνσις τῆς ἐφαπτομένης ὁρίζεται κατὰ σημεῖον οἱονδήποτε, τῇ ἐκθέσει $\frac{\delta\psi}{\delta x} = X$ τοῦ διαφορικοῦ συντελεστοῦ τῆς πρώτης τάξεως.

276. Τέλος, παρατηρητέον ὅτι, ὅπως ἐκλείψῃ πᾶσα ἀοριστία ἐν τῇ καμπύλῃ, ἧς ἡ συνέκθεσις ψ πρέπει νὰ παριστᾷ τὴν τεταγμένην, ἀρκεῖ νὰ δοθῇ ἓν οἱονδήποτε σημεῖον δι' οὗ ἡ καμπύλη αὕτη διελεύσεται. Τῷ ὄντι, εὐκόλως ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ γνῶσις ἑνὸς μόνου σημείου τῆς καμπύλης, καὶ τῆς διευθύνσεως τῆς ἀντιστοιχούσης ἐφαπτομένης τιμῇ οἱαδήποτε τῆς τετμημένης, ἀρκεῖ πρὸς χάραξιν τῆς καμπύλης ταύτης καθ' ἅπασαν τὴν ἔκτασιν αὐτῆς. Ἀλλά, τὸ δοῦναι ἓν σημεῖον τῆς καμπύλης, τὸ αὐτὸ εἰπεῖν ὅτι, τιμῇ τινι x_0 τῆς x συστοιχεῖ τιμὴ ψ_0 τῆς ψ. Ἄρα, τεθείσης τοιαύτης ὑποθέσεως, ἡ κατὰ βούλησιν ἄτρεπτος A τῆς ἐξισώσεως

$$\psi = A + \int X\delta x,$$

ἔσεται ὡρισμένη· διότι, ἔστω Π ἡ συνέκθεσις τῆς x ἧς τὸ διαφορικὸν εἶναι $X\delta x$· ἔστω δὲ Π_0 ἡ τιμὴ τῆς Π ὅταν $x = 0$. Ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\psi_0 = A + \Pi_0,$$

ἐξ ἧς ὁρίζεται ἡ τιμὴ τῆς A.

Ἐν γένει, ἡ κατ' ἀρέσκειαν ἄτρεπτος ὁρίζεται ὅταν, δοθέντος διαφορικοῦ, τοῦ $X\delta x$, οὗ τινος τὸ ὁλοκληρωτικὸν ψ ζητεῖται, προστίθηται συγχρόνως ὅτι, τιμῇ δεδομένῃ α τῆς x συστοιχεῖ τιμὴ ϐ τῆς ψ ἐπίσης δεδομένη.

277. Ἐξηγηθείσης διὰ τῶν προεκτεθέντων τῆς φύσεως τῆς ἐργασίας ἣν *ὁλοκλήρωσιν* ὀνομάζουσιν, ὑπολείπεται δεῖξαι τὰς πρὸς ἐκτέλεσιν αὐτῆς ἀναλυτικὰς μεθόδους· ἤτοι, τὰς μεθόδους δι' ὧν εὑρίσκομεν τὴν πεπερασμένην συνέκθεσιν τῆς x ἧς ἀπειροστόν ἐστι τὸ προτεθέν· ἢ προσέτι, τὴν ἀρχικὴν συνέκθεσιν ἧς ἡ δοθεῖσα X εἶναι ἡ παραγομένη ἢ ὁ διαφορικὸς συντελεστὴς τῆς πρώτης τάξεως. Παρατηρητέον ὅμως ὅτι, ἡ μὲν ἐργασία δι' ἧς μορφοῦται τὸ διαφορικὸν δψ συνεκθέσεως δοθείσης ψ, ἐκτελεῖται διὰ κανόνων δι' ὧν ἀείποτε λαμβάνομεν τὸ ζητούμενον ἐξαγόμενον· ἡ ἀντίστροφος δὲ ἐργασία, ἤτοι ἡ ὁλοκλήρωσις, ἥτις εἶναι μέθοδος δι' ἧς ἐπανερχόμεθα ἀπὸ τοῦ διαφορικοῦ εἰς τὴν ἀρχικὴν συνέκθεσιν, δὲν ἐκτελεῖται ἢ ἐν περιπτώσεσι μερικαῖς καὶ τρόπον τινὰ ἐξαιρετικαῖς. Ἐν γένει, δὲν εἴμεθα βέβαιοι ὅτι δυνάμεθα ὁρίσαι πεπερασμένως τὴν ἀρχικὴν συνέκθεσιν τῆς x ἀνήκουσαν διαφορικῷ δοθέντι· ὥστε πολλάκις ἀναγκαζόμεθα, ὡς ἐφεξῆς θέλομεν ἰδεῖ, ἀναπληρῶσαι διὰ μεθόδων προσεγγίσεως τὴν ἔλλειψιν τῆς

πεπερασμένης ἐκθέσεως τῆς ἀρχικῆς ταύτης συνεκθέσεως; Ἀλλ' ἐπάναγκες εἶναι νὰ γνωρίσωμεν τὰς κυριωτέρας περιπτώσεις καθ' ἃς ἡ ὁλοκλήρωσις ἐκτελεῖται, καὶ τὰς πρὸς τοῦτο ἐν χρήσει μεθόδους. Ἄλλως, ἡ συχνὴ χρῆσις καὶ τοῦ ἐργαζομένου ἡ δεξιότης ὑπαγορεύουσι τὸ πρακτέον ἐφ' ἑκάστης περιπτώσεως μερικῆς.

278. Κατὰ πρῶτον, δῆλον ὅτι λαμβάνομεν ἀμέσως τὸ ὁλοκληρωτικὸν διαφορικοῦ δοθέντος, ὅταν τὸ διαφορικὸν τοῦτο ἀνήκῃ εἰς τὰς ἁπλᾶς συνεκθέσεις περὶ ὧν ὡμιλήσαμεν ἐν ἀρχῇ τοῦ πρώτου μέρους. Διὰ τῆς *ἀμέσου ὁλοκληρώσεως* ταύτης μορφοῦμεν τὰ ἐν τῷ ἑξῆς πίνακι περιεχόμενα ὁλοκληρωτικά.

$$\delta.x^{\mu+1} = (\mu+1)x^{\mu}\delta x, \qquad \int x^{\mu}\delta x = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + \mathrm{A}.$$

$$\delta.\alpha^{x} = \lambda\alpha.\alpha^{x}\,\delta x, \qquad \int \alpha^{x}\delta x = \frac{\alpha^{x}}{\lambda\alpha} + \mathrm{A}.$$

$$\delta.e^{x} = e^{x}\delta x, \qquad \int e^{x}\,\delta x = e^{x} + \mathrm{A}.$$

$$\delta.\text{λογ}\,x = \text{λογ}\,e\,\frac{\delta x}{x}, \qquad \int \frac{\delta x}{x} = \frac{\text{λογ}\,x}{\text{λογ}\,e} + \mathrm{A}.$$

$$\delta.\lambda x = \frac{1}{x}\,\delta x, \qquad \int \frac{\delta x}{x} = \lambda x + \mathrm{A}.$$

$$\delta.\text{ημ}\,x = \text{συν}\,x\,\delta x, \qquad \int \text{συν}\,x\,\delta x = \text{ημ}\,x + \mathrm{A}.$$

$$\delta.\text{συν}\,x = -\text{ημ}\,x\,\delta x, \qquad \int \text{ημ}\,x\,\delta x = -\text{συν}\,x + \mathrm{A}.$$

$$\delta.\text{εφ}\,x = \frac{\delta x}{\text{συν}^2 x}, \qquad \int \frac{\delta x}{\text{συν}^2 x} = \text{εφ}\,x + \mathrm{A}.$$

$$\delta.\text{συνεφ}\,x = -\frac{\delta x}{\text{ημ}^2 x}, \qquad \int \frac{\delta x}{\text{ημ}^2 x} = -\text{συνεφ}\,x + \mathrm{A}.$$

$$\delta.\text{τέμ}\,x = \frac{\text{ημ}\,x\,\delta x}{\text{συν}^2 x}, \qquad \int \frac{\text{ημ}\,x\,\delta x}{\text{συν}^2 x} = \text{τέμ}\,x + \mathrm{A}.$$

$$\delta.\text{συνδ}\,x = -\frac{\text{συν}\,x\,\delta x}{\text{ημ}^2 x}, \qquad \int \frac{-\text{συν}\,x\,\delta x}{\text{ημ}^2 x} = \text{συνδ}\,x + \mathrm{A}.$$

$$\delta.\text{τόξ ημ}\,x = \frac{\delta x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int \frac{\delta x}{\sqrt{1-x^2}} = \text{τόξ ημ}\,x + \mathrm{A}.$$

$$\delta.\text{τόξσυν}\,x = \frac{-\delta x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int \frac{-\delta x}{\sqrt{1-x^2}} = \text{τόξσυν}\,x + \mathrm{A}.$$

$$\delta.\text{τόξ εφ}\,x = \frac{\delta x}{1+x^2}, \qquad \int \frac{\delta x}{1+x^2} = \text{τόξ εφ}\,x + \mathrm{A}.$$

$$\delta.\text{τόξσυνεφ}x = \frac{-\delta x}{1+x^2}, \qquad \int \frac{-\delta x}{1+x^2} = \text{τόξ συνεφ}x + \mathrm{A}.$$

$$\delta.\text{τόξτέμ}\,x = \frac{\delta x}{x\sqrt{x^2-1}}, \qquad \int \frac{\delta x}{x\sqrt{x^2-1}} = \text{τόξτέμ}\,x + \mathrm{A}.$$

$$\delta.\text{τόξσυνδ}x = \frac{-\delta x}{x\sqrt{x^2-1}}, \qquad \int \frac{-\delta x}{x\sqrt{x^2-1}} = \text{τόξσυνδ}\,x + \mathrm{A}.$$

Ἐν τοῖς δὲ τοῖς τύποις x ἐμφαίνει ποσότητα μεταβλητὴν οἱανδήποτε, δυναμένην εἶναι συνέκθεσιν ἑτέρας μεταβλητῆς. Ἐν ἄλλοις λόγοις, τὴν x δύναται ἀντικαταστῆσαι, ἐν ἅπασι τοῖς προηγουμένοις τύποις, συνέκθεσις οἱαδήποτε $\varphi(x)$. Οὕτω, π. χ., ὁ πρῶτος τύπος δίδει·

$$\int [\varphi(x)]^{\mu}\,\delta.\varphi(x) = \frac{[\varphi(x)]^{\mu+1}}{\mu+1} + \mathrm{A}.$$

Ὑπάρχει δὲ ἐν γένει δι' ἁπάσας τὰς τιμὰς τοῦ δείκτου μ, θετικὰς ἢ ἀρνητικάς, ἀκεραίας ἢ κλασματικάς, ἔστω καὶ ἐκμέτρους· ὅθεν συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα. *Τὸ ὁλοκληρωτικὸν διαφορικῆς ἐκθέσεως ἐχούσης τὴν μορφὴν* $x^{\mu}\delta x$, *μορ-*

φοῦται αὐξανομένου τοῦ δείκτου αὐτῆς μ κατὰ μονάδα καὶ διαιρουμένης διὰ τοῦ νέου δείκτου καὶ διὰ δx.

Αἱ ἑξῆς μερικαὶ περιπτώσεις, συχνάκις ἀπαντώμεναι, εἰσὶ διακριτέαι.

$$\int\frac{\delta x}{x^2}=-\frac{1}{x}+A,\qquad \int\frac{\delta x}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+A.$$

279. Τοῦ προηγουμένου κανόνος μόνη ἐξαιρετέα περίπτωσις ἐστὶν ὅταν $\mu=-1$· διότι τότε ὁ γενικὸς τύπος

$$\int x^\mu\delta x=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+A,\ \text{καθίσταται}\ \int\frac{\delta x}{x}=\frac{1}{0},\ \text{ὅπερ ἄτοπον.}$$

Παρατηρητέον ὅτι, ἐπειδὴ ὁ τύπος εἶναι ἀληθὴς ὁσονδήποτε καὶ ἂν προσεγγίζῃ ὁ μ τῇ -1, πορίζόμεθα τὴν ἔκθεσιν αὐτοῦ ἁρμόζουσαν τῇ μερικῇ περὶ ἧς πρόκειται περιπτώσει, προσχωροῦντες τὸν δείκτην μ πρὸς τὸ ὅριον -1, ἐκλέγοντες δὲ τὴν κατ' ἀρέσκειαν ἄτρεπτον, ὥστε τὸ ἐξαγόμενον νὰ τείνῃ πρὸς ἓν ὅριον πεπερασμένον. Πρὸς τοῦτο, θέτομεν τὸ δεύτερον μέλος ὑπὸ τὴν μορφὴν $\dfrac{x^{\mu+1}-\alpha^{\mu+1}}{\mu+1}+A'$, ἧς τὸ πρῶτον μέρος κατασταθήσεται $\frac{0}{0}$ τῇ ὑποθέσει $\mu=-1$, τῆς A' οὔσης ἀτρέπτου κατὰ βούλησιν. Ἄρα ἔχομεν πάντοτε·

$$\int x^\mu\delta x=\frac{x^{\mu+1}-\alpha^{\mu+1}}{\mu+1}+A'.$$

Τὸ μέρος, ὅπερ ἀποκαθίσταται $\frac{0}{0}$ ὅταν $\mu=-1$, ἔχει ὅριον προσδιωρισμένον, ἴσον $\lambda x-\lambda\alpha$ [114]· καθιστῶντες δὲ $A'-\lambda\alpha=A''$, λαμβάνομεν το ἐξαγόμενον

$$\int x^{-1}\,\delta x=\lambda x+A'',$$

ὅπερ σύμφωνον τῷ πέμπτῳ τύπῳ τοῦ προεκτεθέντος πίνακος.

Ἐννοοῦμεν ἤδη ὅτι, ἐπειδὴ ἡ διδομένη τιμὴ -1 τῷ δείκτῃ μ ἐπιφέρει μεταβολὴν εἰς τὴν φύσιν τῆς τὸ ὁλοκληρωτικὸν ἐμφαινούσης συνεκθέσεως, ἡ συνέκθεσις αὕτη δὲν συμπεριλαμβάνεται τότε ἐν τῇ γενικῇ ἐκθέσει $\dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+A$.

Περὶ τῆς περιπτώσεως δὲ ταύτης εἰδοποιούμεθα ὑπὸ τῆς ἀορίστου τιμῆς ἣν λαμβάνει ἡ ἔκθεσις αὕτη.

280. Τὰς μᾶλλον πολυπλόκους συνεκθέσεις δὲν δυνάμεθα ὁλοκληρῶσαι ἢ διὰ τρόπων διαφόρων, ὧν ἀντικείμενον ἀείποτε ἐστίν, ἢ ἡ ἀποσύνθεσις τῆς τεθείσης συνεκθέσεως εἰς ἑτέρας συνεκθέσεις ἁπλουστέρας ἀναγομένας εἴς τινας τῶν ἀμέσως ὁλοκληρουμένων· ἢ ἡ μεταμόρφωσις αὐτῆς τῇ ἀντεισαγωγῇ ἑτέρας μεταβλητῆς ἀντὶ x, ὅπως ἀχθῇ ἐπίσης εἰς τὰ διαφορικὰ ὧν αἱ ἀρχικαὶ συνεκθέσεις μορφοῦνται δι' ἀμέσου ὁλοκληρώσεως· ἢ τέλος, ποιῆσαι ὅπως ἐξαρτᾶται ἡ εὕρεσις τοῦ ζητουμένου ὁλοκληρωτικοῦ ἀφ' ἑτέρου εὐκολώτερον λαμβανομένου.

Τὸ τελευταῖον τοῦτο εἶναι τὸ ἀντικείμενον τῆς μεθόδου καλουμένης *ὁλοκλήρωσις μοιρική* (*), ἥτις εἶναι ἐκ τῶν γενικωτέρων ἐν χρήσει ἐν τῷ Ὁλοκληρωτικῷ λογισμῷ.

Παρατηρητέον ὅτι

$$\delta\,.\,\omega\upsilon=\omega\delta\upsilon+\upsilon\delta\omega.$$

Ἄρα ἀντιστρόφως, ὁλοκληροῦντες ἔχομεν·

$$\omega\upsilon=\int\omega\delta\upsilon+\int\upsilon\delta\omega,\quad \text{ὅθεν}\quad \int\omega\delta\upsilon=\omega\upsilon-\int\upsilon\delta\omega.$$

Οὕτως, ἀγομένου οἱουδήποτε διαφορικοῦ ὑπὸ τὴν μορφὴν ωδυ, ἤτοι ὑπὸ τὴν μορφὴν τοῦ γινομένου πεπερασμένης συνεκθέσεως ω τῆς μεταβλητῆς x ἐπὶ τὴν διαφορικὴν συνέκθεσιν δυ τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς (ἧς ὑποθέτομεν γνωστὸν τὸ ὁλοκληρωτικὸν υ), ἡ ἔρευνα τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ $\int\omega\delta\upsilon$ ἄγεται εἰς τὴν τοῦ $\int\upsilon\delta\omega$.

Ἀναμνηστέον, ὅτι ἡ ἔκθεσις τοῦ ζητουμένου ὁλοκληρωτικοῦ πρέπει νὰ συμπληροῦται ἀείποτε μιᾷ ἀτρέπτῳ κατὰ βούλησιν.

(*) Τὴν λέξιν μοιρικὴ ἐνομίσαμεν προτιμοτέραν τῆς κατὰ μέρη. Τὴν αὐτὴν μέθοδον δυνάμεθα προσέτι ὀνομάσαι ὁλοκλήρωσιν κατὰ παράγοντας, καθ' ὅτι βάσιν ἔχει κυρίως τὴν ἀποσύνθεσιν τῆς ὁλοκληρωτέας διαφορικῆς συνεκθέσεως εἰς δύο παράγοντας.

Διὰ τοῦ ἑξῆς παραδείγματος ἐννοήσομεν τὸ χρήσιμον τῆς μοιρικῆς ὁλοκληρώσεως. Προκείσθω τὸ διαφορικὸν

$$\delta\psi = x\,\sigma\upsilon\nu x\,\delta x.$$

Θεωροῦμεν τοὺς δύο παράγοντας x καὶ συνx δx, τοῦ τελευταίου τῶν ὁποίων τὸ ὁλοκληρωτικὸν εἶναι ἡμ. x. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω γενικὸν τύπον γράφομεν·

$$\psi = \int x\,\sigma\upsilon\nu x\,\delta x = x\,\acute{\eta}\mu.\,x - \int \acute{\eta}\mu.\,x\,\delta x = x\,\acute{\eta}\mu\,x + \sigma\upsilon\nu x + A.$$

Τῆς ἐκθέσεως ταύτης ἡ ἀκρίβεια ἐπιβεβαιοῦται τῇ διαφορίσει.

281. Παρατηρητέον ὅτι ἡ ἐπιτυχία τῆς μεθόδου ἐξαρτᾶται ἐν γένει ἀπὸ τῆς ἐκλογῆς τῶν παραγόντων ἐν οἷς ἀποσυντίθεται τὸ προτεθὲν διαφορικόν. Θεωρήσωμεν ἐν τῷ προηγουμένῳ ὑποδείγματι τοὺς δύο παράγοντας συν x καὶ x δx, τοῦ τελευταίου τῶν ὁποίων τὸ ὁλοκληρωτικὸν εἶναι $\frac{1}{2}x^2$. Ἔχομεν

$$\int \sigma\upsilon\nu x\,.\,x\delta x = \frac{x^2\sigma\upsilon\nu x}{2} - \int \frac{x^2}{2}(-\,\acute{\eta}\mu.\,x\,\delta x)$$

$$= \frac{x^2\sigma\upsilon\nu x}{2} + \int \frac{x^2\acute{\eta}\mu.x\;\delta x}{2}.$$

Βλέπομεν δὲ ὅτι, τὸ ζητούμενον ὁλοκληρωτικὸν ἐξαρτᾶται ἀφ' ἑτέρου μᾶλλον πολυπλόκου. Πρέπει ἀείποτε, κατὰ τὸ δυνατόν, ἀναλύειν οὕτω τὸ περὶ οὗ πρόκειται διαφορικὸν ὥστε ἡ ὁλοκλήρωσις ἑνὸς τῶν παραγόντων καὶ ἡ διαφόρισις τοῦ ἑτέρου νὰ ἄγωσιν αὐτὸ εἰς ἔκθεσιν ἁπλουστέραν, ἧς τὸ ὁλοκληρωτικόν, ἀφ' οὗ τὸ προτεθὲν ἐξαρτᾶται, νὰ διακρίνηται ἀμέσως.

282. Ἀντιστρεφομένων τῶν κυριωτέρων κανόνων τοῦ Διαφορικοῦ λογισμοῦ, συνάγομεν κανόνας τοῦ Ὁλοκληρωτικοῦ. Πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον ἕπονται παρατηρήσεις τινὲς χρήσιμοι εἰς πλείστας περιπτώσεις.

1ον. Ὁ τυχὸν ἐν τῷ διαφορικῷ ὑπάρχων παράγων ἄτρεπτος, μένει ὁ αὐτὸς καὶ ἐν τῷ ὁλοκληρωτικῷ· τίθεται δὲ ἐκτὸς τοῦ σημείου ὁλοκληρώσεως, ὡς καὶ ἐκτὸς τοῦ σημείου διαφορίσεως [31].

Τῷ ὄντι, ἔχομεν $\delta\,.\,\alpha\omega = \alpha\delta\omega.$

Ἀλλὰ $\int\delta\,.\,\alpha\omega = \alpha\omega,\qquad \alpha\int\delta\omega = \alpha\omega\cdot$

ἄρα $\int\delta\,.\,\alpha\omega = \alpha\int\delta\omega,\quad$ ἢ $\int\alpha\delta\omega = \alpha\int\delta\omega,$

ἢ προσέτι, θέτοντες $\delta\omega = \Sigma(x)\delta x,$

$$\int\alpha\Sigma(x)\delta x = \alpha\int\Sigma(x)\delta x + A.$$

2ον. Τὸ ὁλοκληρωτικὸν διαφορικῆς συνεκθέσεως, κεφάλαιον οὔσης πλειόνων διαφορικῶν, συγκροτεῖται [32] ὑπὸ τοῦ κεφαλαίου τῶν μερικῶν ὁλοκληρωτικῶν ἑκάστου τῶν διαφορικῶν τούτων. Οὕτως ἔχομεν·

$$\psi = \int[\Sigma(x) + \Phi(x) - \Psi(x)]\delta x$$

$$= \int\Sigma(x)\delta x + \int\Phi(x)\delta x - \int\Psi(x)\delta x + A.$$

3ον. Κατὰ § 278, ὅταν τὸ προτεθὲν διαφορικὸν ἦναι, ἢ τίθηται ὑπὸ μορφὴν τοιαύτην,

$$\Phi(X)\delta X,$$

X δηλοῦντος συνέκθεσιν τῆς μεταβλητῆς x, τότε ἐργαζόμεθα ἐπ' αὐτοῦ ὡς ἂν X ἦτο μεταβλητὴ ἀνεξάρτητος.

Ἔστω, π. χ., τὸ διαφορικὸν

$$\delta\psi = x^{\mu-1}\,\acute{\eta}\mu.\,(\alpha + \beta x^{\mu})\delta x.$$

Πολυπλασιάζομεν καὶ διαιροῦμεν διὰ μβ·

$$\delta\psi = \frac{1}{\mu\beta}\,\acute{\eta}\mu.(\alpha + \beta x^{\mu})\mu\beta x^{\mu-1}\,\delta x.$$

Ἀλλά, $\mu\beta x^{\mu-1}\delta x$ εἶναι τὸ διαφορικὸν τῆς ὑπὸ τὸ σύμβολον ἡμ. συνεκθέσεως $\alpha + \beta x^{\mu}$. Ἄρα, καθιστῶντες $X = \alpha + \beta x^{\mu}$, ἔχομεν

$$\delta\psi = \frac{1}{\mu\beta}\,\acute{\eta}\mu.\,X\,\delta X\cdot$$

ἑπομένως δὲ τὸ ὁλοκληρωτικὸν

$$\psi = \mathrm{A} - \frac{1}{\mu\beta}\,\text{συν}\,\mathrm{X} = \mathrm{A} - \frac{1}{\mu\beta}\,\text{συν}\,(\alpha + \beta x^{\mu}),$$

ὡς βεβαιούμεθα ἐφαρμόζοντες τοὺς κανόνας τῆς διαφορίσεως.

Β΄. ΠΕΡΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΕΩΣ ΣΥΝΕΚΘΕΣΕΩΝ ΛΟΓΙΚΩΝ, ΟΛΟΣΧΕΡΩΝ ΚΑΙ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ.

283. Συνέκθεσις λογικὴ ὁλοσχερὴς τῆς μεταβλητῆς x λέγεται πᾶσα συνέκθεσις συγκροτουμένη ἐξ ὅρων ἐν οἷς ὑπάρχουσι μόνον δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς ταύτης ὧν ὁ δείκτης ἐστὶν ἀριθμὸς ἀκέραιος. Τοιαύτη εἶναι ἡ διαφορικὴ συνέκθεσις·

$$\delta\psi = (\alpha + \beta x^{\mu} + \gamma x^{\nu} + \theta x^{\pi} + \ldots\ldots)\,\delta x,$$

ἐν ᾗ α, β, γ, ... , εἰσὶν ἄτρεπτοι οἱαιδήποτε· μ, ν, π, ... , ἀριθμοὶ ἀκέραιοι θετικοὶ ἢ ἀρνητικοί. Πᾶσα τοιαύτη συνέκθεσις ἀείποτε ἐστὶν ἐπιδεκτικὴ ὁλοκληρώσεως· διότι, ἐξ ὅσων ἐν τῷ προηγουμένῳ ἄρθρῳ εἴδομεν, τὸ ὁλοκληρωτικὸν αὐτῆς, συμπληρούμενον τῇ κατὰ βούλησιν ἀτρέπτῳ Α, εἶναι

$$\psi = \mathrm{A} + \alpha x + \frac{\beta x^{\mu+1}}{\mu+1} + \frac{\gamma x^{\nu+1}}{\nu+1} + \frac{\theta x^{\pi+1}}{\pi+1} + \ldots;$$

Παρατηρητέον μόνον, ὅτι ὅταν ὁ δείκτης τῆς x ἰσοῦται -1, τὸ ὁλοκληρωτικὸν τοῦ ὅρου ἐκείνου, π. χ. $\frac{\eta\delta x}{x}$, ἔσεται $\eta\lambda x$.

Ὁμοίῳ τῷ τρόπῳ ὁλοκληροῦται τὸ προηγούμενον διαφορικὸν ὅταν οἱ δεῖκται μ, ν, π, ... , ἔχωσι τιμὰς μὴ ἀκεραίας οἱασδήποτε.

284. Πᾶσαν διαφορικὴν συνέκθεσιν διδομένην ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\delta\psi = (\alpha + \beta x^{\mu} + \gamma x^{\nu} + \theta x^{\pi} + \ldots\ldots)^{\pi}\,\delta x,$$

π ὄντος ἀριθμοῦ ἀκεραίου, ἄγομεν ὑπὸ μορφὴν ὁμοίαν τῇ ἐν τῷ προηγουμένῳ χωρίῳ, ἀναπτύσσοντες τὴν δύναμιν.

Ἀλλ᾽ ὅταν ἔχωμεν ἁπλῶς τὸ διαφορικὸν

$$\delta\psi = (\alpha + \beta x)^{\pi}\,\delta x,$$

ὅπερ γράφομεν καὶ οὕτω

$$\delta\psi = \frac{1}{\beta}\,(\alpha + \beta x)^{\pi}\,\beta\delta x,$$

παρατηρητέον ὅτι, ἐπειδὴ $\beta\delta x$ εἶναι τὸ διαφορικὸν τῆς ἐν παρενθέσει ποσότητος $\alpha + \beta x$, ἡ τεθεῖσα συνέκθεσις ὑπάγεται εἰς τὴν ἐν § 282, 3ην περίπτωσιν. Ἄρα, καθιστῶντες $\alpha + \beta x = \mathrm{X}$, ἔχομεν $\delta\psi = \frac{1}{\beta}\,\mathrm{X}^{\pi}\,\delta\mathrm{X}$· ὅθεν συνάγομεν (οἱοσδήποτε εἶναι ὁ ἀριθμὸς π, πλὴν ὅταν ἰσοῦται -1),

$$\psi = \mathrm{A} + \frac{1}{\beta}\,\frac{\mathrm{X}^{\pi+1}}{\pi+1}, \qquad \text{ἢ} \qquad \psi = \mathrm{A} + \frac{(\alpha + \beta x)^{\pi+1}}{\beta(\pi+1)}.$$

Ὡσαύτως, ὅταν ἔχωμεν

$$\delta\psi = (\alpha + \beta x^{\mu})^{\pi}\,x^{\mu-1}\,\delta x,$$

δι᾽ ὁμοίων παρατηρήσεων συνάγομεν·

$$\psi = \mathrm{A} + \frac{(\alpha + \beta x^{\mu})^{\pi+1}}{\beta\mu(\pi+1)}.$$

285. Ἕπονται πρὸς ἄσκησιν ἐπὶ τῶν προαποδεδομένων κανόνων διάφορα ὑποδείγματα.

1) $\int \frac{(x^3 - 4x^2 + 5)\delta x}{x} = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5\lambda x + \mathrm{A}.$

2) $\int(4x^3 - 5x^2 - 3x + 8)\delta x = x^4 - \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 8x + \mathrm{A}$

3) $\int x^2 \text{συν} x\,\delta x = x^2 \text{ημ} x + 2x\,\text{συν} x - 2\text{ημ} x + \mathrm{A}.$

4) $\int x^2 e^x\,\delta x = e^x(x^2 - 2x + 2) + \mathrm{A}.$

5) $\int \lambda x\,.\,\delta x = x(\lambda x - 1) + \mathrm{A}.$

6) $\int \frac{5x^3\delta x}{3x^4+7} = \frac{5}{12}\lambda(3x^4+7)+\Lambda.$

7) $\int \frac{x\delta x}{\sqrt{\alpha^2+x^2}} = \sqrt{\alpha^2+x^2}+\Lambda.$

8) $\int \frac{\alpha\delta x}{x^3} = -\frac{\alpha}{2x^2}+\Lambda.$

9) $\int \delta x\sqrt[3]{x^2} = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+\Lambda.$

10) $\int \left(\alpha-\frac{\beta}{x^3}+x\sqrt{x}\right)\delta x = \alpha x+\frac{\beta}{2x^2}+\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+\Lambda.$

11) $\int \frac{\delta x}{\alpha\pm\beta x} = \pm\frac{1}{\beta}\lambda(\alpha\pm\beta x)+\Lambda.$

12) $\int (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\theta)^{\mu}(3\alpha x^2+2\beta x+\gamma)\delta x$

$$= \frac{(\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\theta)^{\mu+1}}{\mu+1}+\Lambda;$$

13) $\int \alpha^{x^3-3x^2+4x+6}\times(3x^2-6x+4)\delta x$

$$= \frac{\alpha^{x^3-3x^2+4x+6}}{\lambda\alpha}+\Lambda;$$

14) $\int \frac{\delta x}{\alpha^2+x^2} = \frac{1}{\alpha}\,\text{τόξ εφ}\,\frac{x}{\alpha}+\Lambda.$

15) $\int 5\,\text{ημ}^5 x\,\text{συν}\,x\,\delta x = \frac{5}{6}\,\text{ημ}^6 x+\Lambda.$

16) $\int \frac{\delta x}{\text{συν}^2 x\;\text{εφ}\,x} = \lambda\,\text{εφ}\,x+\Lambda.$

17) $\int \frac{\delta x}{\text{συν}^2 x\sqrt[4]{\text{εφ}^3 x}} = 4\sqrt[4]{\text{εφ}\,x}+\Lambda.$

18) $\int \text{εφ}(\alpha+\beta x^{\mu})x^{\mu-1}\delta x = -\frac{1}{\mu\beta}\lambda\,\text{συν}(\alpha+\beta x^{\mu})+\Lambda.$

19) $\int \frac{\alpha^2\delta x}{\sqrt{\alpha^2-x^2}} = \alpha^2\,\text{τόξ ημ}\,\frac{x}{\alpha}.$

20) $\int \frac{\delta x}{\text{ημ}^2 x\sqrt[5]{\frac{\text{συν}^2 x}{\text{ημ}^2 x}}} = -\frac{5}{3}\,\text{συνεφ}^{\frac{3}{5}}x+\Lambda.$

21) Τελευταῖον ἔστω ἡ διαφορικὴ συνέκθεσις

$$\delta x\sqrt{\alpha^2-x^2},$$

ἣν ὁλοκληρώσομεν κατὰ τὸν ἐν § 280 τύπον. Κατὰ πρῶτον λαμβάνομεν

$$(\alpha)\quad \int \delta x\sqrt{\alpha^2-x^2} = x\sqrt{\alpha^2-x^2}+\int\frac{x^2\delta x}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}.$$

Πολυπλασιάζοντες ἐπὶ $\frac{\sqrt{\alpha^2-x^2}}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}$ τὸ προτεθὲν διαφορικόν, μορφοῦμεν τὴν ἰσομερῆ ἐξίσωσιν·

$$\int \delta x\sqrt{\alpha^2-x^2} = \int\frac{\alpha^2\delta x}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}-\int\frac{x^2\delta x}{\sqrt{\alpha^2-x^2}},$$

ἤ, ἐκτελοῦντες τὴν πρώτην τῶν ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει ὁλοκληρώσεων, κατὰ τὸ 19ον ὑπόδειγμα,

$$\int \delta x\sqrt{\alpha^2-x^2} = \alpha^2\,\text{τόξ ημ}\,\frac{x}{\alpha}-\int\frac{x^2\delta x}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}.$$

Προσθέτομεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην τῇ (α) καὶ ἔχομεν τέλος,

$$\int \delta x\sqrt{\alpha^2-x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{\alpha^2-x^2}+\frac{1}{2}\alpha^2\,\text{τόξ ημ}\,\frac{x}{\alpha}+\Lambda;$$

286. Θεωρήσωμεν ἤδη τὰς κλασματικὰς λογικὰς συνεκθέσεις διαφορικάς, συμπεριλαμβανομένας τῇ γενικῇ μορφῇ·

$$\delta\psi = \frac{\alpha x^{\mu} + \beta x^{\mu-1} + \gamma x^{\mu-2} + \dots\dots + \rho}{x^{\nu} + \pi x^{\nu-1} + \kappa x^{\nu-2} + \dots\dots + \tau}\,\delta x.$$

$\alpha, \beta, \dots, \rho$, $\pi, \kappa, \dots, \tau$, δηλοῦσι συντελεστὰς ἀτρέπους οἱουσδήποτε· μ καὶ ν ἀριθμοὺς ἀκεραίους. Ὅταν ὁ βαθμὸς μ τοῦ ἀριθμητοῦ μείζων ἦναι τοῦ βαθμοῦ ν τοῦ παρονομαστοῦ, δυνατόν, τῇ ἀλγεβρικῇ διαιρέσει, τρέψαι τὸ πολυπλασιάζον δx κλάσμα εἰς συνέκθεσιν ὁλοσχερῆ πλέον νέου τινὸς κλάσματος, ἐν ᾧ ὁ μείζων βαθμὸς τῆς x ἐν τῷ ἀριθμητῇ εἴη ἐλάσσων, τοὐλάχιστον κατὰ μονάδα, τοῦ μείζονος βαθμοῦ αὐτῆς ἐν τῷ παρονομαστῇ. Ἡ ὁλοσχερὴς συνέκθεσις ὁλοκληροῦται ἀείποτε κατὰ τὰ προλεχθέντα. Ἄρα, ἡ ὁλοκλήρωσις τοῦ προτεθέντος διαφορικοῦ ἄγεται πάντοτε εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ὁ δείκτης μ ἰσοῦται τὸ πλεῖστον $\nu - 1$.

287. Τούτου τεθέντος, προκείσθω ἐν γένει τὸ διαφορικὸν

$$\frac{\sigma(x)}{\Sigma(x)}\,\delta x.$$

$\sigma(x)$ καὶ $\Sigma(x)$ δηλοῦσι πολυώνυμα ὁλοσχερῆ, ὧν τὸ πρῶτον ὑποτίθεται βαθμοῦ ἥττονος τοῦ ἑτέρου τοὐλάχιστον κατὰ μονάδα. Θεωρήσωμεν πρῶτον ἰδίως τὸ λογικὸν κλάσμα $\frac{\sigma(x)}{\Sigma(x)}$. Ὑποθέσωμεν ὅτι, θέσαντες τὴν ἐξίσωσιν $\Sigma(x) = 0$, ἐπελύσαμεν αὐτὴν διὰ τῶν ἀλγεβρικῶν μεθόδων καὶ ὡρίσαμεν εἰς ἀριθμοὺς ἁπάσας αὐτῆς τὰς ῥίζας, πραγματικὰς ἢ φανταστικάς, ἃς κατὰ πρῶτον ὑποθέσομεν ἁπάσας ἀνίσους. Ἔστωσαν $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots\dots$, αἱ πραγματικαὶ ῥίζαι· $a \pm \beta\sqrt{-1}$, $a_1 \pm \beta_1\sqrt{-1}$, $a_2 \pm \beta_2\sqrt{-1}$, $\dots\dots$, αἱ φανταστικαί· ἑπόμενον ὅτι, $x - \alpha$, $x - \alpha_1$, $x - \alpha_2$, $\dots\dots$, εἰσὶν οἱ ἁπλοῖ παράγοντες ἀντιστοιχοῦντες ἑκάστῃ ῥίζῃ πραγματικῇ· $(x - a)^2 + \beta^2$, $(x - a_1)^2 + \beta_1^2$, $(x - a_2)^2 + \beta_2^2$, $\dots\dots$,

οἱ δευτεροβάθμιοι παράγοντες ἀντιστοιχοῦντες ἑκάστῳ ζεύγει ῥιζῶν φανταστικῶν. Ἐκ τῆς θεωρίας τῶν ἐξισώσεων γινώσκομεν ὅτι, τὸ πολυώνυμον $\Sigma(x)$ ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν ἁπλῶν ἢ διπλῶν παραγόντων ἀντιστοιχούντων ταῖς ῥίζαις τῆς ἐξισώσεως $\Sigma(x) = 0$. Ἄρα, δυνατὸν ἀείποτε μορφῶσαι τὴν ἐξίσωσιν·

$$\frac{\sigma(x)}{\Sigma(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \dots\dots\dots$$

$$+ \frac{Mx+N}{(x-a)^2+\beta^2} + \frac{M_1x+N_1}{(x-a_1)^2+\beta_1^2} + \frac{M_2x+N_2}{(x-a_2)^2+\beta_2^2} + \dots,$$

ἐν ᾗ $A, A_1, A_2, \dots\dots, M, M_1, M_2, \dots\dots, N, N_1, N_2, \dots\dots$, δηλοῦσι ποσὰ ἄτρεπτα. Τῷ ὄντι, ἄγοντες τὰ ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει κλάσματα ἐπὶ τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ὁ μὲν κοινὸς αὐτῶν παρονομαστὴς ἔσεται $\Sigma(x)$, ὁ δὲ ἀριθμητὴς πολυώνυμον τοῦ $\nu-1$ βαθμοῦ, ὃ ἀποκαθιστῶμεν ἰσομερὲς τῷ πολυωνύμῳ $\sigma(x)$ θέτοντες $\nu-1$ ἐξισώσεις πρωτοβαθμίους· ἤτοι τόσας ἐξισώσεις ὅσαι ἄτρεπτοι ποσότητες ὁριστέαι ὑπάρχουσι. Τοιουτοτρόπως τὸ κλάσμα $\frac{\sigma(x)}{\Sigma(x)}$ ἀναλυθήσεται εἰς μερικὰ κλάσματα ἁπλᾶ τῆς μορφῆς $\frac{A}{x-\alpha}$ ἢ $\frac{Mx+N}{(x-a)^2+\beta^2}$.

Ἀλλ' ὑπάρχει ἕτερον μέσον ἁπλούστερον δι' οὗ ὁρίζονται αἱ ἄγνωστοι ἄτρεπτοι τῶν ἀριθμητῶν τῶν μερικῶν κλασμάτων, καὶ δι' οὗ καθίσταται καταφανὲς ὅτι αἱ τιμαὶ αὐτῶν οὔτε ἄπειροι εἰσίν, οὔτε ἀόριστοι.

288. Ὁρίσωμεν, π. χ., τὸν ἀριθμητὴν A τοῦ πρώτου ἁπλοῦ κλάσματος. Συντομίας χάριν θέτομεν

$$\Sigma(x) = (x - \alpha) \times \Phi(x),$$

δηλοῦντες $\Phi(x)$ τὸ γινόμενον ἁπάντων τῶν παραγόντων τοῦ πολυωνύμου $\Sigma(x)$, πλὴν τοῦ $(x - \alpha)$. Ἀντὶ τῆς προηγουμένης ἐξισώσεως γράφομεν ταύτην

$$\frac{\sigma(x)}{\Sigma(x)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{T(x)}{\Phi(x)},$$

$T(x)$ δηλούσης συνέκθεσιν ὁλοσχερῆ τῆς x. Πολυπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ $\Sigma(x)$ λαμβάνομεν

$$\sigma(x) = A\ \frac{\Sigma(x)}{x - \alpha} + \frac{T(x)\,.\,\Sigma(x)}{\Phi(x)}.$$

Ὑποθέσωμεν ἤδη $x = \alpha$. Τὸ μὲν μέρος $\frac{T(x)\,.\,\Sigma(x)}{\Phi(x)}$ ἀφανίζεται, τὸ δὲ ἐπὶ A πολυπλασιαζόμενον κλάσμα καθίσταται $\frac{0}{0}$· ἀλλὰ κατὰ § 114 ἡ ἀληθὴς αὐτοῦ τιμὴ εἶναι $\Sigma'(x)$· ἤτοι, ὁ διαφορικὸς συντελεστὴς τῆς πρώτης τάξεως τῆς συνεκθέσεως $\Sigma(x)$. Ἄρα,

$$\sigma(\alpha) = A\,.\,\Sigma'(\alpha), \quad \text{ὅθεν} \quad A = \frac{\sigma(\alpha)}{\Sigma'(\alpha)}.$$

Τῇ αὐτῇ μεθόδῳ ὁρίζονται καὶ οἱ ἀριθμηταὶ τῶν λοιπῶν κλασμάτων ἁπλῶν εἰς πραγματικὰς ῥίζας ἀντιστοιχούντων· ἤτοι, ἔχομεν ἐπίσης·

$$A_1 = \frac{\sigma(\alpha_1)}{\Sigma'(\alpha_1)}, \qquad A_2 = \frac{\sigma(\alpha_2)}{\Sigma'(\alpha_2)}, \qquad \text{κ. τ. ἑ.}$$

Αἱ τιμαὶ τῶν $\Sigma'(\alpha)$, $\Sigma'(\alpha_1)$, $\Sigma'(\alpha_2)$, ... , οὐδέποτε μηδενίζονται· διότι, καθ' ὑπόθεσιν, δὲν ὑπάρχουσι ῥίζαι ἴσαι ἐν τῇ ἐξισώσει $\Sigma(x) = 0$. Προσέτι αἱ τιμαὶ τῶν A, A_1, A_2, ... , διαφέρουσι μηδενός, ἐὰν παραδεχθῶμεν, ὅπερ ἀείποτε ἐπιτρέπεται, ὅτι ἡ συνέκθεσις $\frac{\sigma(x)}{\Sigma(x)}$ ἐστὶν ἀνάγωγος.

289. Οἱ αὐτοὶ συλλογισμοὶ ἐφαρμόζονται πρὸς ὁρισμὸν τῶν ἀτρέπτων ἀριθμητῶν τῶν εἰς ῥίζας φανταστικὰς ἀντιστοιχούντων κλασμάτων ἁπλῶν. Ἀλλ' αἱ ἐργασίαι τροποποιοῦνται ὡς ἑξῆς πρὸς ἀποφυγὴν τῶν φανταστικῶν μορφῶν.

Προκείσθω τὸ κλάσμα

$$\frac{Mx + N}{(x - a)^2 + \beta^2}.$$

Αἱ πρὸς δύο ῥίζας συζυγεῖς ἀναφερόμεναι ἄτρεπτοι δὲν διαφέρουσιν ἀλλήλων ἢ κατὰ τὸ σημεῖον τοῦ $\sqrt{-1}$. Ἄρα γράφομεν τὸ ἀνωτέρω κλάσμα ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{\Pi - K\sqrt{-1}}{x - a - \beta\sqrt{-1}} + \frac{\Pi + K\sqrt{-1}}{x - a + \beta\sqrt{-1}} = \frac{2\Pi(x - a) + 2K\beta}{(x - a)^2 + \beta^2}.$$

Ἔχομεν οὕτω $M = 2\Pi$, $N = -2\Pi a + 2K\beta$. Συλλογιζόμενοι δὲ ὡς ἐν τῷ προηγουμένῳ χωρίῳ, εὑρίσκομεν ὅτι αἱ ἄτρεπτοι Π καὶ K ἐκπληροῦσι τὴν σχέσιν

$$\Pi - K\sqrt{-1} = \frac{\sigma(a + \beta\sqrt{-1})}{\Sigma'(a + \beta\sqrt{-1})},$$

ἀναλυομένην εἰς δύο ἐξισώσεις διακεκριμένας, ἐξισουμένων χωριστὰ τῶν πραγματικῶν ὅρων καὶ χωριστὰ τῶν ὅρων ἐν οἷς εἰσέρχεται τὸ φανταστικὸν ῥιζικὸν $\sqrt{-1}$, ἐπομένως ἐπαρκοῦσαν πρὸς ὁρισμὸν τῶν δύο ἀγνώστων ποσοτήτων.

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρήσομεν·

$$\Pi_1 - K_1\sqrt{-1} = \frac{\sigma(a_1 + \beta_1\sqrt{-1})}{\Sigma'(a_1 + \beta_1\sqrt{-1})},$$

$$\Pi_2 - K_2\sqrt{-1} = \frac{\sigma(a_2 + \beta_2\sqrt{-1})}{\Sigma'(a_2 + \beta_2\sqrt{-1})},$$

κ. τ. ἑ. Εἶτα $M_1 = 2\Pi_1$, $N_1 = -2\Pi_1 a_1 + 2K_1\beta_1$,

$M_2 = 2\Pi_2$, $N_2 = \quad 2\Pi_2 a_2 + 2K_2\beta_2$.

290. Ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι ἡ ἐν § 287 τεθεῖσα ἐξίσωσις $\Sigma(x) = 0$ ἔχει πλείονας ῥίζας ἴσας τῇ πραγματικῇ ῥίζῃ α.

Ἡ ἀνάλυσις τοῦ προτεθέντος κλάσματος $\frac{\sigma(x)}{\Sigma(x)}$ ἀδύνατον γένεσθαι ὡς ἐν τῇ προηγουμένῃ περιπτώσει· διότι ἀδύνατον εὑρεῖν τιμὰς τῶν A, A_1, A_2, ... , ἐπαληθευούσας τὴν ἰσότητα

$$\frac{\sigma(x)}{\Sigma(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \dots\dots$$

Τῷ ὄντι, ἐὰν ἄξωμεν ἅπαντας τοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου μέλους εἰς ἓν κλάσμα, ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος τούτου δὲν θέλει περιέχει $x-\alpha$ ἢ εἰς τὴν πρώτην δύναμιν, ἐνῷ τὸ διώνυμον τοῦτο εἰσέρχεται εἰς τὴν $\varkappa^{\text{ην}}$ δύναμιν ἐν $\Sigma(x)$, τὸ δὲ κλάσμα $\frac{\sigma(x)}{\Sigma(x)}$ ὑποτίθεται ἀνάγωγον. Τὴν πρόκειμένην ἀνάλυσιν ἐκτελοῦμεν ὡς ἑξῆς·

$$\frac{\sigma(x)}{\Sigma(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^{\varkappa}} + \frac{A_1}{(x-\alpha)^{\varkappa-1}} + \dots\dots + \frac{A_{\varkappa-1}}{x-\alpha} + \frac{T(x)}{\Phi(x)}$$

$\varkappa$ δηλοῦντος τὸν ἀριθμὸν τῶν ἰσαλλήλων ῥιζῶν· A, A_1, A_2, ... , $A_{\varkappa-1}$, δηλούντων σταθερὰς ὁριστέας· $\Phi(x)$ τὸ γινόμενον ἁπάντων τῶν παραγόντων τοῦ παρονομαστοῦ $\Sigma(x)$, πλὴν τοῦ $(x-\alpha)^{\varkappa}$· ὥστε ἔχομεν $(x-\alpha)^{\varkappa}\times\Phi(x) = \Sigma(x)$. Τέλος, $T(x)$ ἐμφαίνει πολυώνυμον ὁλοσχερὲς εἰς x βαθμοῦ ἥττονος τῆς μείζονος δυνάμεως τῆς x περιεχομένης ἐν $\Phi(x)$. Δῆλον ὅτι, ἀγομένων ἁπάντων τῶν κλασμάτων τοῦ δευτέρου μέλους ἐπὶ τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ἐσόμενον $\Sigma(x)$, δυνατὸν ἀποκαταστῆσαι ἰσομερῶς ἴσα ἀλλήλοις τὰ δύο μέλη διατιθεμένων τῶν ἀτρέπτων A, A_1, A_2, ... , $A_{\varkappa-1}$. Ὅπως ὁρίσωμεν ἁπλούστερον τὰς τιμὰς τῶν τελευταίων τούτων, παρατηρητέον ὅτι, μετὰ τὴν ὡς προείρηται ἀναγωγὴν ἐπὶ τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ἡ προηγουμένη ἐξίσωσις ἀποκαθίσταται

$$\sigma(x) = A\Phi(x) + A_1(x-\alpha)\Phi(x) + A_2(x-\alpha)^2\Phi(x) + \dots\dots$$
$$+ A_{\varkappa-1}(x-\alpha)^{\varkappa-1}\Phi(x) + (x-\alpha)^{\varkappa}\,T(x).$$

Διαφορίζοντες αὐτὴν ἅπαξ, δίς, τρίς, ... , εἶτα καθιστῶντες $x=\alpha$, συνάγομεν τὰς ἑξῆς·

$$\sigma(\alpha) = A\Phi(\alpha),$$
$$\sigma'(\alpha) = A\Phi'(\alpha) + A_1\Phi(\alpha),$$
$$\sigma''(\alpha) = A\Phi''(\alpha) + A_1 2\Phi'(\alpha) + A_2 2\Phi(\alpha),$$
$$\sigma'''(\alpha) = A\Phi'''(\alpha) + A_1 3\Phi''(\alpha) + A_2 6\Phi'(\alpha) + A_3 6\Phi(\alpha),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

δι' ὧν αἱ τιμαὶ τῶν A, A_1, A_2, ... , $A_{\varkappa-1}$, λογίζονται ἀλληλοδιαδόχως. Αἱ τιμαὶ αὗται ἐξαρτῶνται, ὡς δῆλον, ἀπὸ τῶν διαδοχικῶν συνεκθέσεων παραγομένων τῆς $\Phi(x)$, πηλίκου τῆς διαιρέσεως τοῦ παρονομαστοῦ $\Sigma(x)$ διὰ $(x-\alpha)^{\varkappa}$, ἑπομένως δὲ οὔσης γνωστῆς.

Εἰ δὲ βουλόμεθα, ἀποφεύγομεν τὸν λογισμὸν τῆς συνεκθέσεως ταύτης. Πρὸς τοῦτο παρατηρητέον ὅτι, λαμβάνοντες ἐν τῇ ἐξισώσει

$$\Sigma(x) = (x-\alpha)^{\varkappa}\times\Phi(x),$$

τοὺς διαφορικοὺς συντελεστὰς ἢ συνεκθέσεις παραγομένας τῶν διαφόρων τάξεων ἑκάστου μέλους, εὑρίσκομεν ἐν γένει δι' ἔκθεσιν τῆς παραγομένης συνεκθέσεως τάξεως οἱασδήποτε ι·

$$\Sigma^{(\iota)}(x) = \varkappa(\varkappa-1)(\varkappa-2)\dots\dots(\varkappa-\iota+1)(x-\alpha)^{\varkappa-\iota}\Phi(x)$$
$$+\iota\varkappa(\varkappa-1)(\varkappa-2)\dots(\varkappa-\iota+2)(x-\alpha)^{\varkappa-\iota+1}\Phi'(x)$$
$$+\frac{\iota(\iota-1)}{2}\varkappa(\varkappa-1)(\varkappa-2)\dots(\varkappa-\iota+3)(x-\alpha)^{\varkappa-\iota+2}\Phi''(x)$$
$$+\frac{\iota(\iota-1)(\iota-2)}{2.3}\varkappa(\varkappa-1)(\varkappa-2)\dots(\varkappa-\iota+4)(x-\alpha)^{\varkappa-\iota+3}\Phi'''(x)$$
$$+\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+\qquad\qquad (x-\alpha)^{\varkappa}\times\Phi^{(\iota)}(x).$$

Ὅθεν βλέπομεν ἐναργῶς ὅτι, καθιστῶντες $x=\alpha$ ἐν ταῖς παραγομέναις συνεκθέσεσι τῶν τάξεων $\varkappa$, $\varkappa+1$, . . . , ἔχομεν·

$$\Sigma^{(\varkappa)}(\alpha) = \varkappa(\varkappa-1)(\varkappa-2)\dots\dots 2.1.\Phi(\alpha),$$
$$\Sigma^{(\varkappa+1)}(\alpha) = (\varkappa+1)\varkappa(\varkappa-1)(\varkappa-2)\dots\dots 2.1.\Phi'(\alpha),$$
$$\Sigma^{(\varkappa+2)}(\alpha) = \frac{(\varkappa+2)(\varkappa+1)}{2}\varkappa(\varkappa-1)(\varkappa-2)\dots\dots 2.1.\Phi''(\alpha),$$
$$\Sigma^{(\varkappa+3)}(\alpha) = \frac{(\varkappa+3)(\varkappa+2)(\varkappa+1)}{2.3}\varkappa(\varkappa-1)(\varkappa-2)\dots\dots 2.1.\Phi'''(\alpha),$$

. . . .

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων ὁρίζονται αἱ ποσότητες $\Phi(\alpha)$, $\Phi'(\alpha)$, $\Phi''(\alpha)$, ..., διὰ τῶν τιμῶν ἃς λαμβάνουσιν αἱ παραγόμεναι συνεκθέσεις τῶν τάξεων $\varkappa$, $\varkappa+1$, $\varkappa+2$, ..., τοῦ παρονομαστοῦ $\Sigma(x)$, ὅταν θέσωμεν ἐν αὐταῖς $x=\alpha$.

291. Ὅταν ἡ ἐξίσωσις $\Sigma(x)=0$ περιέχῃ καὶ ἑτέρας ῥίζας πραγματικὰς ἰσαλλήλους, π. χ., $\varkappa$ ῥίζας ἴσας τῇ α_1, τότε, ἕνεκα τοῦ παράγοντος $(x-\alpha_1)^\varkappa$ ὑπάρχοντος ἐν τῷ πολυωνύμῳ $\Sigma(x)$, τὸ προτεθὲν κλάσμα $\frac{\sigma(x)}{\Sigma(x)}$, ἀναλυόμενον εἰς ἁπλᾶ κλάσματα, περιέξει τὰ ἑξῆς·

$$\frac{\Lambda}{(x-\alpha_1)^\varkappa} + \frac{\Lambda_1}{(x-\alpha_1)^{\varkappa-1}} + \frac{\Lambda_2}{(x-\alpha_1)^{\varkappa-2}} + \dots + \frac{\Lambda_{\varkappa-1}}{x-\alpha_1},$$

Πρὸς ὁρισμὸν δὲ τῶν ἀτρέπτων Λ, Λ_1, Λ_2, ..., $\Lambda_{\varkappa-1}$, μεταχειριζόμεθα τοὺς ἀνωτέρω τύπους, ἐν οἷς θεωρητέον $\Phi(x)$ ὡς τὸ πηλίκον τῆς $\Sigma(x)$ διὰ τοῦ παράγοντος $(x-\alpha_1)^\varkappa$ διαιρεθείσης. Καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, ὑπαρχουσῶν πλειόνων ῥιζῶν πραγματικῶν πολλαπλῶν.

292. Αἱ μέθοδοι αὗται εὐκόλως ἐφαρμόζονται καὶ ἐν τῇ περιπτώσει καθ' ἣν ἡ ἐξίσωσις $\Sigma(x)=0$ ἔχει ῥίζας φανταστικὰς πολλαπλᾶς. Ἔστω $[(x-a)^2+\beta^2]^\varkappa$ εἷς τῶν παραγόντων τοῦ πολυωνύμου $\Sigma(x)$· ὅπως μορφώσωμεν τὰ ἁπλᾶ κλάσματα ὑπάρχοντα ἕνεκα τοῦ παράγοντος τούτου, γράφομεν·

$$\frac{\sigma(x)}{\Sigma(x)} = \frac{Mx+N}{[(x-a)^2+\beta^2]^\varkappa} + \frac{M_1x+N_1}{[(x-a)^2+\beta^2]^{\varkappa-1}} + \dots + \frac{T(x)}{\Phi(x)}$$

$\Phi(x)$ δηλοῦντος τὸ γινόμενον ἁπάντων τῶν παραγόντων συγκροτούντων τὸ πολυώνυμον $\Sigma(x)$, πλὴν τοῦ $[(x-a)^2+\beta^2]^\varkappa$. Μετὰ τὴν ἀναγωγὴν ἐπὶ τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ἡ ἐξίσωσις αὕτη καθίσταται·

$$\sigma(x) = (Mx+N)\Phi(x) + (M_1x+N_1)[(x-a)^2+\beta^2]\Phi(x) + \dots$$
$$\dots\dots + [(x-a)^2+\beta^2]^\varkappa T(x).$$

Ἐὰν λάβωμεν τὰς διαδοχικὰς παραγομένας συνεκθέσεις, εἶτα δώσωμεν τῇ x τὰς τιμὰς $x=a\pm\beta\sqrt{-1}$, μηδενιζούσας τὸν παράγοντα $(x-a)^2+\beta^2$, ἕξομεν τὸν ἱκανὸν ἀριθμὸν ἐξισώσεων πρὸς ὁρισμὸν τῶν ἀτρέπτων M καὶ N, M_1 καὶ N_1, M_2 καὶ N_2, κ. τ. ἑ., παρατηροῦντες συγχρόνως ὅτι ἑκάστη τῶν ἐξισώσεων τούτων ἰσοδυναμεῖ πρὸς δύο, ἰσουμένων χωριστὰ τῶν πραγματικῶν μερῶν καὶ χωριστὰ τῶν φανταστικῶν.

Οἱ αὐτοὶ συλλογισμοὶ χωροῦσι καὶ ὅταν ὁ παρονομαστὴς τοῦ προτεθέντος κλάσματος περιέχῃ ἑτέρας ῥίζας φανταστικὰς πολλαπλᾶς.

Δυνάμεθα προσέτι, ὡς ἐν τῇ περιπτώσει τῶν ἰσαλλήλων πραγματικῶν ῥιζῶν, ἀποφυγεῖν τὴν μόρφωσιν τοῦ πηλίκου $\Phi(x)$· ποιῆσαι δὲ ὅπως ἐξαρτᾶται ἡ τιμὴ αὐτοῦ τε καὶ τῶν παραγομένων αὐτοῦ συνεκθέσεων, διὰ $x=a\pm\beta\sqrt{-1}$, ἀπὸ τῶν τιμῶν ἃς λαμβάνουσι, κατὰ τὴν αὐτὴν ὑπόθεσιν, αἱ παραγόμεναι τῆς $\Sigma(x)$. Ἀλλ' οἱ τύποι εἰσὶ μᾶλλον πολύπλοκοι τῶν τῆς προηγουμένης περιπτώσεως.

293. Ἕπονται διάφορα ὑποδείγματα ἀναλύσεως κλασμάτων χρησιμεύοντα πρὸς ἄσκησιν ἐπὶ τῶν προαποδοθέντων κανόνων.

1) $$\frac{1-x}{6x+x^2-x^3} = \frac{2}{15(x-3)} - \frac{3}{10(x+2)} + \frac{1}{6x}.$$

2) $$\frac{2x^2-9x+14}{x^3-6x^2+12x-8} = \frac{4}{(x-2)^3} - \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{x-2}.$$

3) $$\frac{3x-1}{(x-2)^3} = \frac{5}{(x-2)^3} + \frac{3}{(x-2)^2}.$$

$$4)\quad \frac{x^3+x^2+2}{x^5-2x^3+x}=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{3}{4(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)^2}-\frac{5}{4(x+1)}+\frac{2}{x},$$

$$5)\quad \frac{7x^3-24x^2+25x+2}{x^4-5x^3+6x^2+4x-8}=\frac{4}{(x-2)^3}+\frac{3}{(x-2)^2}+\frac{5}{x-2}+\frac{2}{x+1},$$

$$6)\quad \frac{5x^2-18x+25}{x^3-5x^2+3x+9}=\frac{4}{(x-3)^2}+\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+1},$$

$$7)\quad \frac{7x^2+9x+19}{x^3+x-10}=\frac{2x+3}{x^2+2x+5}+\frac{5}{x-2},$$

$$8)\quad \frac{x}{x^3-1}=\frac{-x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{1}{3(x-1)}.$$

$$9)\quad \frac{x^2-x+1}{x^3+x^2+x+1}=-\frac{x+1}{2(x^2+1)}+\frac{3}{2(x+1)},$$

$$10)\quad \frac{7x^6+18x^4+2x^3+16x^2+2x+4}{x^7+3x^5+3x^3+x}=\frac{x}{(x^2+1)^3}+\frac{2}{(x^2+1)^2}+\frac{3x}{x^2+1}+\frac{4}{x},$$

$$11)\quad \frac{-x^4+3x^3-4x^2+4x-3}{x^5-5x^4+12x^3-16x^2+12x-4}=\frac{x+1}{(x^2-2x+2)^2}-\frac{1}{x^2-2x+2}+\frac{1}{x-1},$$

$$12)\quad \frac{1}{x^9+x^8+4x^7+4x^6+5x^5+5x^4+2x^3+2x^2}=$$

$$\frac{x-1}{2(x^2+1)^2}+\frac{x-1}{4(x^2+1)}+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2x}+\frac{x-1}{6(x^2+2)}+\frac{1}{12(x+1)},$$

$$13)\quad \frac{2x-1}{x^7-7x^6+20x^5-32x^4+35x^3-29x^2+16x-4}$$

$$=\frac{1}{2(x-1)^3}+\frac{3}{2(x-1)^2}+\frac{7}{4(x-1)}+\frac{3}{5(x-2)^2}-\frac{47}{25(x-2)}+\frac{13x-9}{100(x^2+1)}.$$

294. Ἀσχοληθῶμεν ἤδη περὶ τὴν ὁλοκλήρωσιν τῆς κλασματικῆς διαφορικῆς συνεκθέσεως [287]

$$\frac{\sigma(x)}{\Sigma(x)}\delta x,\ \text{ἢ}\ \delta\psi=\frac{\alpha x^{\mu}+\beta x^{\mu-1}+\gamma x^{\mu-2}+\ldots+\rho}{x^{\nu}+\pi x^{\nu-1}+\varkappa x^{\nu-2}+\ldots+\tau}\,\delta x.$$

Ἡ εἰς ἁπλούστερα κλάσματα ἀνάλυσις τοῦ τοιούτου κλάσματος κατὰ τὰς προαποδοθείσας μεθόδους, ἄγει ἀείποτε τὴν περὶ ἧς λόγος ὁλοκλήρωσιν εἰς τὴν ὁλοκλήρωσιν ἐκθέσεων ἐχουσῶν μίαν τῶν ἑξῆς μορφῶν·

$$\frac{P\delta x}{x-\alpha},\quad \frac{P\delta x}{(x-\alpha)^{\varkappa}},\quad \frac{(Mx+N)\delta x}{(x-\alpha)^2+\beta^2},\quad \frac{(Mx+N)\delta x}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{\varkappa}}.$$

Θεωρήσωμεν διαδοχικῶς ἑκάστην τῶν ἐκθέσεων τούτων.

1ον. Ἡ πρώτη δίδει ἀμέσως, κατὰ § 279,

$$\int\frac{P\delta x}{x-\alpha}=P\lambda(x-\alpha)+A.$$

2ον. Διὰ τὴν δευτέραν εὑρίσκομεν·

$$\int\frac{P\delta x}{(x-\alpha)^{\varkappa}}=-\frac{P}{(\varkappa-1)(x-\alpha)^{\varkappa-1}}+A.$$

3ον. Τὴν τρίτην ἀναλύομεν ὡς ἑξῆς·

$$\frac{(Mx+N)\delta x}{(x-\alpha)^2+\beta^2}=\frac{M(x-\alpha)\delta x}{(x-\alpha)^2+\beta^2}+\frac{(M\alpha+N)\delta x}{(x-\alpha)^2+\beta^2}.$$

Τὸ πρῶτον τῶν δύο τούτων νέων κλασμάτων, ἔχον ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον τοῦ M ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ διαφορικοῦ τοῦ παρονομαστοῦ, εἶναι τὸ διαφορικὸν τῆς ἐκθέσεως

$$\frac{M}{2}\lambda\left[(x-a)^2+\beta^2\right].$$

Πρὸς ὁλοκλήρωσιν τοῦ δευτέρου κλάσματος, καλοῦμεν

$$x-a=\beta\tau, \qquad \text{ὅθεν} \qquad \delta x=\beta\delta\tau\cdot$$

Οὕτω καθίσταται $\dfrac{Ma+N}{\beta}\times\dfrac{\delta\tau}{1+\tau^2}$,

ὅπερ εἶναι τὸ διαφορικὸν τοῦ $\dfrac{Ma+N}{\beta}$ τόξ ἐφ τ.

Ἄρα

$$\int\frac{(Mx+N)\delta x}{(x-a)^2+\beta^2}=$$

$$\frac{M}{2}\lambda\left[(x-a)^2+\beta^2\right]+\frac{Ma+N}{\beta}\,\text{τόξ ἐφ}\,\frac{x-a}{\beta}+A.$$

2ον. Τὸ τελευταῖον διαφορικὸν ἀναλύεται ὡς ἑξῆς·

$$\frac{(Mx+N)\delta x}{[(x-a)^2+\beta^2]^{\varkappa}}=\frac{M(x-a)\delta x}{[(x-a)^2+\beta^2]^{\varkappa}}+\frac{(Ma+N)\delta x}{[(x-a)^2+\beta^2]^{\varkappa}};$$

Τοῦ μὲν πρώτου μέρους τὸ ὁλοκληρωτικὸν εἶναι προφανῶς

$$A-\frac{M}{2(\varkappa-1)\left[(x-a)^2+\beta^2\right]^{\varkappa-1}}.$$

Τοῦ δὲ δευτέρου μέρους

$$\frac{(Ma+N)\delta x}{[(x-a)^2+\beta^2]^{\varkappa}}=\frac{\dfrac{Ma+N}{\beta^{2\varkappa-1}}\,\dfrac{\delta x}{\beta}}{\left[\left(\dfrac{x-a}{\beta}\right)^2+1\right]^{\varkappa}},$$

ἡ ὁλοκλήρωσις ἐκτελεῖται ὡς ἑξῆς.

Θέτομεν $\dfrac{x-a}{\beta}=\tau$, ὅθεν $\dfrac{\delta x}{\beta}=\delta\tau$· τὸ τελευταῖον τοῦτο διαφορικὸν ἀποκαθίσταται

$$\frac{Ma+N}{\beta^{2\varkappa-1}}\times\frac{\delta\tau}{(\tau^2+1)^{\varkappa}}.$$

Ἄρα, πρόκειται ὁλοκληρῶσαι τὴν διαφορικὴν συνέκθεσιν

$$\frac{\delta\tau}{(\tau^2+1)^{\varkappa}},$$

ἥτις, τῇ ἐν τῷ ἀριθμητῇ προσθέσει καὶ ἀφαιρέσει $\tau^2\delta\tau$, ἄγεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{\delta\tau}{(\tau^2+1)^{\varkappa-1}}-\frac{\tau^2\delta\tau}{(\tau^2+1)^{\varkappa}}.$$

Ἄρα ἔχομεν

$$\int\frac{\delta\tau}{(\tau^2+1)^{\varkappa}}=\int\frac{\delta\tau}{(\tau^2+1)^{\varkappa-1}}-\int\frac{\tau^2\delta\tau}{(\tau^2+1)^{\varkappa}}.$$

Θεωροῦντες ἐν τῷ ὁλοκληρωτικῷ $\displaystyle\int\frac{\tau^2\delta\tau}{(\tau^2+1)^{\varkappa}}$ τοὺς δύο παράγοντας $\dfrac{\tau}{2}$ καὶ $\dfrac{2\tau\delta\tau}{(\tau^2+1)^{\varkappa}}$, καὶ ἐφαρμόζοντες τὴν μέθοδον τῆς μοιρικῆς ὁλοκληρώσεως, λαμβάνομεν·

$$\int\frac{\tau^2\delta\tau}{(\tau^2+1)^{\varkappa}}=-\frac{\tau}{2}\,\frac{1}{(\varkappa-1)(\tau^2+1)^{\varkappa-1}}$$

$$+\int\frac{\delta\tau}{2}\,\frac{1}{(\varkappa-1)(\tau^2+1)^{\varkappa-1}}.$$

Ἀντεισάγοντες ἤδη ἐν τῇ προηγουμένῃ ἐξισώσει,

$$\int \frac{\delta\tau}{(\tau^2+1)^\varkappa} = \frac{\tau}{2(\varkappa-1)(\tau^2+1)^{\varkappa-1}}$$

$$+\frac{2\varkappa-3}{2(\varkappa-1)}\int\frac{\delta\tau}{(\tau^2+1)^{\varkappa-1}}.$$

Ἄρα, τὸ ζητούμενον ὁλοκληρωτικὸν ἐξαρτᾶται ἀφ' ἑτέρου τῆς αὐτῆς φύσεως, ἐν ᾧ ὁ δείκτης $\varkappa$ τοῦ παρονομαστοῦ ἠλαττώθη κατὰ μονάδα. Ἐξακολουθοῦντες κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς τύπον ἐκθέτοντα τὸ ζητούμενον ὁλοκληρωτικόν,

$$\int\frac{\delta\tau}{(\tau^2+1)^\varkappa} =$$

$$\frac{\tau}{2(\varkappa-1)(\tau^2+1)^{\varkappa-1}}\left[\begin{array}{l}1+\frac{2\varkappa-3}{2\varkappa-4}(\tau^2+1)+\frac{2\varkappa-3}{2\varkappa-4}\cdot\frac{2\varkappa-5}{2\varkappa-6}(\tau^2+1)^2+\ldots\\ \ldots\ldots+\frac{2\varkappa-3}{2\varkappa-4}\cdot\frac{2\varkappa-5}{2\varkappa-6}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}(\tau^2+1)^{\varkappa-2}\end{array}\right]$$

$$+\frac{2\varkappa-3}{2\varkappa-2}\cdot\frac{2\varkappa-5}{2\varkappa-4}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\,\text{τόξ ἐφ}\,\tau+\Lambda.$$

Τέλος, πολυπλασιαζομένης τῆς ἐκθέσεως ταύτης ἐπὶ $\frac{M\alpha+N}{\beta^{2\varkappa-1}}$

καὶ ἀντικαθισταμένου $\frac{x-\alpha}{\beta}$ ἀντὶ τ, μορφωθήσεται τὸ ὁλοκληρωτικὸν τοῦ δευτέρου μέρους τῆς προτεθείσης διαφορικῆς συνεκθέσεως.

Δυνάμεθα προσέτι εὑρεῖν τὸ $\int\frac{\delta\tau}{(\tau^2+1)^\varkappa}$ καὶ ὡς ἑξῆς.

Θέτομεν $\quad \upsilon = \text{τόξ ἐφ}\,\tau, \quad$ καὶ ἔχομεν·

$$\delta\upsilon = \frac{\delta\tau}{\tau^2+1},\quad \frac{\delta\tau}{(\tau^2+1)^\varkappa} = \frac{\delta\upsilon}{(\tau^2+1)^{\varkappa-1}}.$$

$$\frac{1}{\tau^2+1} = \text{συν}^2\upsilon,\quad \text{ὅθεν}\quad \frac{\delta\tau}{(\tau^2+1)^\varkappa} = \text{συν}^{2\varkappa-2}\,\upsilon\delta\upsilon\cdot$$

$$\text{ἄρα}\quad \int\frac{\delta\tau}{(\tau^2+1)^\varkappa} = \int\text{συν}^{2\varkappa-2}\,\upsilon\delta\upsilon.$$

Ἀκολούθως θέλομεν ἰδεῖ διαφόρους τρόπους δι' ὧν λαμβάνομεν τὸ

$$\int\text{συν}^{2\varkappa-2}\,\upsilon\delta\upsilon\,.$$

295. Διὰ τῶν ἐκτεθεισῶν μεθόδων ὁλοκληροῦμεν πᾶσαν συνέκθεσιν διαφορικὴν λογικήν. Ἕπονται διάφορα ὑποδείγματα πρὸς ἄσκησιν.

1) $\displaystyle\int\frac{\alpha\delta x}{x^2-\alpha^2} = \lambda\sqrt{\frac{x-\alpha}{x+\alpha}}+\Lambda.$

2) $\displaystyle\int\frac{(\alpha^3+6x^2)\delta x}{\alpha^2x-x^3} = \alpha\lambda x-(\alpha+6)\lambda\sqrt{\alpha^2-x^2}+\Lambda.$

3) $\displaystyle\int\frac{(3x-5)\delta x}{x^2-6x+8} = \lambda\frac{\sqrt{(x-4)^7}}{\sqrt{x-2}}+\Lambda.$

4) $\displaystyle\int\frac{x\delta x}{x^2+4\alpha x-6^2} =$

$$\frac{2\alpha+\sqrt{4\alpha^2+6^2}}{2\sqrt{4\alpha^2+6^2}}\lambda(x+2\alpha+\sqrt{4\alpha^2+6^2})$$

$$-\frac{2\alpha-\sqrt{4\alpha^2+6^2}}{2\sqrt{4\alpha^2+6^2}}\lambda(x+2\alpha-\sqrt{4\alpha^2+6^2})+\Lambda.$$

5) $\displaystyle\int\frac{2\alpha x\delta x}{(x+\alpha)^2} = \frac{2\alpha^2}{\alpha+x}+2\alpha\lambda(\alpha+x)+\Lambda.$

$$6)\quad \int \frac{x^2\delta x}{x^3-\alpha x^2-\alpha^2 x+\alpha^3}=\int\frac{x^2\delta x}{(x-\alpha)^2(x+\alpha)}$$

$$=-\frac{\alpha}{2(x-\alpha)}+\tfrac{3}{4}\lambda(x-\alpha)+\tfrac{1}{4}\lambda(x+\alpha)+\Lambda$$

$$=-\frac{\alpha}{2(x-\alpha)}+\lambda\sqrt[4]{(x-\alpha)^3(x+\alpha)}+\Lambda.$$

$$7)\quad \int\frac{\alpha\,\delta x}{(x^2-1)^2}=\frac{1}{4}\alpha\left[-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\lambda(x-1)+\lambda(x+1)\right]+\Lambda.$$

$$8)\quad \int\frac{(\alpha+\beta x)\delta x}{x^3-1}=\frac{\alpha+\beta}{3}\lambda(x-1)-\frac{(\alpha+\beta)}{3}\lambda\sqrt{x^2+x+1}$$

$$+\frac{(\beta-\alpha)}{\sqrt{3}}\,\text{τόξ εφ}\,\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}+\Lambda.$$

$$9)\quad \int\frac{\delta x}{x^8+x^7-x^4-x^3}=\int\frac{\delta x}{x^3(x-1)(x+1)^2(x^2+1)}$$

$$=\frac{2-2x-5x^2}{4x^2(1+x)}+\tfrac{1}{8}\lambda\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)+\lambda\left(\frac{x+1}{x}\right)-\tfrac{1}{4}\,\text{τόξεφ}x+\Lambda,$$

$$10)\quad \int\frac{(3-2x)\delta x}{x^2-x-2}=-\tfrac{5}{3}\lambda(x+1)-\tfrac{1}{3}\lambda(x-2)+\Lambda$$

$$=\Lambda+\lambda\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^5(x-2)}}.$$

$$11)\quad \int\frac{\delta x}{\alpha^2-x^2}=\frac{1}{2\alpha}\lambda\left(\Lambda\frac{x+\alpha}{x-\alpha}\right).$$

$$12)\quad \int\frac{(3x+7)\delta x}{2x^2-3x+5}=$$

$$\tfrac{3}{4}\lambda(2x^2-3x+5)+\frac{37}{2\sqrt{31}}\,\text{τόξ εφ}\,\frac{4x-3}{\sqrt{31}}+\Lambda.$$

Γ'. ΠΕΡΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΕΩΣ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΕΚΜΕΤΡΩΝ ΣΥΝΕΚΘΕΣΕΩΝ.

296. Αἱ ἀλγεβρικαὶ ἔκμετροι συνεκθέσεις διαφορικαὶ ἐν γένει δὲν εἶναι πάντοτε ἐπιδεκτικαὶ ὁλοκληρώσεως πεπερασμένης. Αἱ πρὸς ὁλοκλήρωσιν αὐτῶν ἐν χρήσει μέθοδοι συνίστανται κυρίως εἰς τὴν ἀντικατάστασιν τῆς μεταβλητῆς x, καθ' ἣν τὸ προτεθὲν διαφορικὸν ἐμορφώθη, ὑπὸ ἑτέρας τ· μεταξὺ δὲ τῶν δύο τούτων μεταβλητῶν συνιστᾶται σχέσις τοιαύτη, ὅπως τῇ ἀντεισαγωγῇ τῶν τιμῶν τῶν x καὶ δx συνεκθέσει τῶν τ καὶ δτ, ἡ προτεθεῖσα συνέκθεσις ἀποκατασταθῇ λογική.

Ἡ εὐρυτέρα περίπτωσις καθ' ἣν ἡ ἐπιτυχία τῶν τοιούτων μεταμορφώσεων μᾶλλον ἐςὶ βεβαία, εἶναι ὅταν τῇ προτεθείσῃ συνεκθέσει ἐμφιλοχωρῇ ἓν ῥιζικὸν δευτεροβάθμιον, ὑφ' ὃ ὑπάρχει πολυώνυμον μηδ' αὐτὸ ὑπερβαῖνον τὸν δεύτερον βαθμόν, ὡς $\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$, ἐνῷ α, β, γ, δηλοῦσι ποσὰ ἄτρεπτα οἱαδήποτε. Αἱ τοιαῦται συνεκθέσεις ἀείποτε ἀποκαθίστανται λογικαί, ἑπομένως δὲ ὁλοκληροῦνται διὰ τῶν προαποδοθεισῶν μεθόδων.

297. Πρῶτον ὑποθέσομεν πρὸ τοῦ ὑπορρίζου ὅρου γx^2 ὑπάρχον τὸ σημεῖον +. Ἔστω τ νέα τις μεταβλητή. Θέτομεν·

$$\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}=\tau-\sqrt{\gamma}.x,\quad \text{ἢ}\quad \alpha+\beta x=\tau^2-2\sqrt{\gamma}.\tau x\text{·}$$

ὅθεν

$$x=\frac{\tau^2-\alpha}{2\sqrt{\gamma}.\tau+\beta},\quad \delta x=\frac{2(\sqrt{\gamma}.\tau^2+\beta\tau+\alpha\sqrt{\gamma})\delta\tau}{(2\sqrt{\gamma}.\tau+\beta)^2}.$$

Αἱ τιμαὶ αὗται ἀντεισαγόμεναι ἐν τῷ τεθέντι διαφορικῷ, ἀποκαθιστῶσιν αὐτὸ λογικόν· διότι λαμβάνομεν

$$\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}=\frac{\sqrt{\gamma}.\tau^2+\beta\tau+\alpha\sqrt{\gamma}}{2\sqrt{\gamma}.\tau+\beta}.$$

ΣΗΜ. Ἐπίσης ἐπιτυγχάνομεν τοῦ σκοπουμένου ἐὰν καταστήσωμεν τὸ ῥιζικὸν $\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}=\tau+\sqrt{\gamma}.x$.

Τὸ προτεθὲν διαφορικὸν ἀποκαθίσταται ἐπίσης λογικὸν τῇ ὑποθέσει

$$\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2} = \sqrt{\alpha} + x\tau,$$

ὅθεν

$$x = \frac{2\sqrt{\alpha}.\tau - \beta}{\gamma - \tau^2}, \qquad \delta x = \frac{2(\tau^2\sqrt{\alpha} - \beta\tau + \gamma\sqrt{\alpha})}{(\gamma - \tau^2)^2}\,\delta\tau,$$

καὶ $$\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2} = \frac{\sqrt{\alpha}.\tau^2 - \beta\tau + \gamma\sqrt{\alpha}}{\gamma - \tau^2}.$$

Παρατηρητέον ὅμως ὅτι, τὸ προτεθὲν ἀπειροστὸν ἀποκαθίσταται μὲν καὶ αὖθις λογικόν, ἀλλ' ὁ μετασχηματισμὸς οὗτος εἰσάγει ποσὰ φανταστικὰ ὅταν α ἦναι ἀρνητικόν.

Ὑπάρχει καὶ τρίτος μετασχηματισμὸς οὗτινος χρῆσιν ποιοῦμεν ὅταν αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου $\alpha + \beta x + \gamma x^2$ ὦσι πραγματικαί· ὅπερ ἀείποτε ὑπάρχει ὁσάκις ἡ προηγουμένη μεταμόρφωσις δὲν ἐκτελεῖται εἰς ποσὰ πραγματικά. Ἔστω

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 = \gamma(x - \rho)(x - \rho'),$$

τῶν ῥιζῶν ρ καὶ ρ' οὐσῶν πραγματικῶν. Θέτομεν·

$$\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2} = \sqrt{\gamma}(x - \rho)\tau, \text{ ἢ } x - \rho' = (x - \rho)\tau^2.$$

Συνάγομεν δὲ ἐντεῦθεν·

$$x = \frac{\rho' - \rho\tau^2}{1 - \tau^2}, \qquad \delta x = \frac{2\tau(\rho' - \rho)}{(1 - \tau^2)^2}\,\delta\tau,$$

$$\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2} = \frac{\sqrt{\gamma}(\rho' - \rho)\tau}{1 - \tau^2}.$$

298. Τεθείσθω ἤδη πρὸ τοῦ ὑποῤῥίζου ὅρου γx^2 ὑπάρχον τὸ σημεῖον —. Ὅπως ἀποκαταστήσωμεν λογικὴν τὴν τεθεῖσαν διαφορικὴν ἔκθεσιν, δὲν δυνάμεθα ποιῆσαι χρῆσιν τῆς πρώτης τῶν τριῶν προεκτεθεισῶν μεταμορφώσεων. Ὅταν α ἦναι ποσότης θετικὴ ποιοῦμεν χρῆσιν τοῦ δευτέρου μετασχηματισμοῦ· ἤτοι θέτομεν·

$$\sqrt{\alpha + \beta x - \gamma x^2} = x\tau - \sqrt{\alpha}, \text{ ἢ } \beta - \gamma x = x\tau^2 - 2\sqrt{\alpha}.\tau$$

ὅθεν

$$x = \frac{\beta + 2\sqrt{\alpha}.\tau}{\gamma + \tau^2}, \quad \delta x = \frac{2(\gamma\sqrt{\alpha} - \beta\tau - \sqrt{\alpha}.\tau^2)}{(\gamma + \tau^2)^2}\,\delta\tau.$$

Τέλος, ὅταν α ἦναι ἀρνητικόν, αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου $\alpha + \beta x - \gamma x^2$ ἔσονται πραγματικαί· ἄλλως τὸ ῥιζικὸν $\sqrt{\alpha + \beta x - \gamma x^2}$ ἤθελεν εἶσθαι φανταστικόν. Ἐννοεῖται δὲ ἐνταῦθα ὅτι ἐργαζόμεθα ἐπὶ ποσῶν πραγματικῶν. Τότε ποιοῦμεν χρῆσιν τοῦ τρίτου μετασχηματισμοῦ μὴ ἀπαιτοῦντος ἢ τὴν πραγματικότητα τῶν ῥιζῶν τοῦ τριωνύμου. Θέτομεν

$$\sqrt{\alpha + \beta x - \gamma x^2} = \sqrt{\gamma(x - \rho)(\rho' - x)} = \sqrt{\gamma}(x - \rho)\tau$$

ἢ $$\rho' - x = (x - \rho)\tau^2.$$

ὅθεν συνάγομεν

$$x = \frac{\rho\tau^2 + \rho'}{1 + \tau^2}, \qquad \delta x = \frac{2(\rho - \rho')\tau}{(1 + \tau^2)^2}\,\delta\tau.$$

Αἱ τιμαὶ αὗται ἀποκαθιστῶσι λογικὸν τὸ προτεθὲν ἀπειροστὸν μὴ εἰσάγουσαι ἐν αὐτῷ ποσὰ φανταστικά.

299. Διὰ τῶν προλαβουσῶν μεθόδων ὁλοκληροῦμεν, ἀποκαθιστῶντες λογικήν, πᾶσαν ἀλγεβρικὴν συνέκθεσιν, ὡς

$$\Sigma(x, \sqrt{x + \alpha}, \sqrt{x + \beta})\,\delta x,$$

περιεκτικὴν δύο ῥιζικῶν δευτεροβαθμίων ὑφ' ἃ ὑπάρχουσι δύο διάφορα διώνυμα τοῦ πρώτου βαθμοῦ. Πρὸς τοῦτο γραπτέον

$$\sqrt{\alpha + x} = \tau, \qquad \text{ὅθεν συνάγομεν}$$

$$x = \tau^2 - \alpha, \quad \delta x = 2\tau\delta\tau, \quad \sqrt{\beta + x} = \sqrt{\tau^2 + \beta - \alpha}.$$

Ἀντεισαγομένων τῶν τιμῶν τούτων ἐν τῇ προτεθείσῃ διαφορικῇ συνεκθέσει, τὸ πρῶτον ῥιζικὸν ἀφανισθήσεται· μενεῖ δὲ ἓν μόνον ῥιζικὸν δευτεροβάθμιον ὑφ' ὃ ὑπάρχει ἔκθεσις δευτεροβάθμιος εἰς τ. Οὕτως εὑρισκόμεθα ἐν τῇ προηγουμένῃ περιπτώσει.

300. Ἐφαρμόσωμεν ἤδη τοὺς μετασχηματισμοὺς τούτους εἴς τινα ὑποδείγματα ἁπλᾶ.

Ἔστω $$\delta\psi = \frac{\delta x}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}}.$$

Διὰ τοῦ ἐν § 297 πρώτου μετασχηματισμοῦ τὸ διαφορικὸν τοῦτο τρέπεται εἰς

$$\delta\psi = \frac{2\delta\tau}{2\sqrt{\gamma}\,.\,\tau + \beta}.$$

Ἄρα

$$\int \frac{\delta x}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}} = \int \frac{2\delta\tau}{2\sqrt{\gamma}.\tau+\beta} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\lambda(2\sqrt{\gamma}.\tau+\beta) + \Lambda.$$

Ἤ, ἀντεισάγοντες τὴν εἰς x τιμὴν τῆς τ,

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\lambda(\beta + 2\gamma x + 2\sqrt{\gamma}\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}) + \Lambda,$$

ἢ καὶ

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\lambda\left(\frac{\beta}{2\sqrt{\gamma}} + \sqrt{\gamma}\,.\,x + \sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}\right) + \Lambda.$$

301. Ἔστω προσέτι

$$\delta\psi = \frac{\delta x}{\sqrt{\alpha + \beta x - \gamma x^2}}.$$

Διὰ τοῦ πρώτου ἐν § 298 μετασχηματισμοῦ τρέπομεν τὸ διαφορικὸν τοῦτο εἰς

$$\delta\psi = -\frac{2\delta\tau}{\gamma + \tau^2}, \quad \text{ἢ} \quad \delta\psi = -\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\cdot\frac{\dfrac{\delta\tau}{\sqrt{\gamma}}}{1 + \dfrac{\tau^2}{\gamma}}.$$

Ἄρα $$\int \frac{\delta x}{\sqrt{\alpha + \beta x - \gamma x^2}} = \Lambda - \frac{2}{\sqrt{\gamma}}\text{ τόξ ἐφ } \frac{\tau}{\sqrt{\gamma}}$$

$$= \Lambda - \frac{2}{\sqrt{\gamma}}\text{ τόξ ἐφ } \frac{\sqrt{\alpha + \beta x - \gamma x^2} + \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\gamma}\,.\,x}.$$

Ποιήσωμεν ἤδη χρῆσιν τῆς ἐν τῷ αὐτῷ χωρίῳ δευτέρας μεταμορφώσεως, ὑποθέτοντες τὰς ῥίζας τοῦ ὑπορρίζου τριωνύμου πραγματικάς. Τὸ προτεθὲν διαφορικὸν ἀποκαθίσταται,

$$\delta\psi = -\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\cdot\frac{\delta\tau}{1 + \tau^2}.$$

Ἄρα

$$\int \frac{\delta x}{\sqrt{\alpha + \beta x - \gamma x^2}} = \Lambda - \frac{2}{\sqrt{\gamma}}\text{ τόξ ἐφ } \sqrt{\frac{\rho' - x}{x - \rho}}$$

ἤ, ἐπειδὴ ρ καὶ ρ′ εἰσὶν αἱ δύο ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$x^2 - \frac{\beta}{\gamma}x - \frac{\alpha}{\gamma} = 0,$$

$$\psi = \Lambda - \frac{2}{\sqrt{\gamma}}\text{ τόξ ἐφ } \sqrt{\frac{-2\gamma x + \beta + \sqrt{4\alpha\gamma + \beta^2}}{2\gamma x - \beta + \sqrt{4\alpha\gamma + \beta^2}}}$$

$$= \Lambda - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\text{ τόξ ἐφ } \frac{\sqrt{1 - \left(\dfrac{2\gamma x - \beta}{\sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}}\right)^2}}{\left(\dfrac{2\gamma x - \beta}{\sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}}\right)}$$

$$= \Lambda - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\text{ τόξ συν } \frac{2\gamma x - \beta}{\sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}}$$

$$= \Lambda + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\text{ τόξ ἡμ } \frac{2\gamma x - \beta}{\sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}}.$$

302. Ἔστω $\delta\psi = \dfrac{\delta x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Ἐκ τοῦ ἐν § 300 ἐξαγομένου, καθιστῶντες ἐν αὐτῷ $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, λαμβάνομεν

$$\int \frac{\delta x}{\sqrt{1+x^2}} = \lambda(x + \sqrt{1+x^2}) + A.$$

303. Ὅταν τὸ προτεθὲν διαφορικὸν ἦναι

$$\delta\psi = \frac{\delta x}{\sqrt{1-x^2}},$$

γινώσκομεν ὅτι [278] $\psi = \text{τόξ ἡμ. } x + A.$

Τῷ ὄντι, ὁ πρῶτος τύπος τοῦ § 301 δίδει

$$\int \frac{\delta x}{\sqrt{1-x^2}} = A - 2 \text{ τόξ ἐφ } \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Ἔστω τόξ ἡμ. x = φ· ἡ ἔκθεσις αὕτη ἄγεται εἰς

$$\int \frac{\delta x}{\sqrt{1-x^2}} = A - 2 \text{ τόξ ἐφ } \frac{1+\text{συν}\,\varphi}{\text{ἡμ. }\varphi}$$

$$= A - 2 \text{ τόξ ἐφ } \frac{\text{συν } \frac{1}{2}\varphi}{\text{ἡμ. } \frac{1}{2}\varphi} = A + \text{τόξ ἡμ.x.}$$

Τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον λαμβάνομεν καὶ ἐκ τοῦ ἐν τῷ αὐτῷ χωρίῳ δευτέρου τύπου, τῇ ὑποθέσει $\alpha=1$, $\beta=0$, $\gamma=1$· ἤτοι

$$\int \frac{\delta x}{\sqrt{1-x^2}} = A - \text{τόξ συν } x = A + \text{τόξ ἡμ. } x.$$

304. Πολλάκις παρουσιάζονται πρὸς ὁλοκλήρωσιν ἐκθέσεις τοῦ σχήματος

$$\frac{(\nu x + \mu)\delta x}{\sqrt{\alpha + \beta x - x^2}}.$$

Τότε εἰσάγομεν ἐν τῷ ἀριθμητῇ τὸ διαφορικὸν τῆς ὑπορρίζου ποσότητος καὶ ἀναλύομεν τὸ προτεθὲν διαφορικὸν τοῦτο εἰς τὰ ἑξῆς δύο·

$$\frac{\nu\left(x - \frac{\beta}{2}\right)\delta x}{\sqrt{\alpha + \beta x - x^2}} + \frac{\left(\mu + \frac{\nu\beta}{2}\right)\delta x}{\sqrt{\alpha + \beta x - x^2}},$$

τοῦ πρώτου τῶν ὁποίων τὸ ὁλοκληρωτικὸν εἶναι

$$-\nu\sqrt{\alpha + \beta x - x^2},$$

τὸ δεύτερον δὲ ὑπάγεται εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν.

305. Παρατηρητέον προσέτι ὅτι ἡ ὁλοκλήρωσις τοῦ ἀπειροστοῦ

$$\delta\psi = \frac{\delta x}{\sqrt{\alpha + \beta x - \gamma x^2}},$$

ἐκτελεῖται ἁπλούστερον ἢ διὰ τῶν προηγουμένων μεταμορφώσεων, ἀγομένου αὐτοῦ ἀμέσως ὑπὸ τὴν μορφὴν $\dfrac{\delta\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}$, ὡς ἑξῆς·

$$\int \frac{\delta x}{\sqrt{\alpha + \beta x - \gamma^2}} = \frac{\delta x}{\sqrt{\gamma}\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma}x - x^2}}$$

$$= \frac{\delta x}{\sqrt{\gamma}\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta^2}{4\gamma^2} - \left(x - \frac{\beta}{2\gamma}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\frac{\delta x}{p}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x - \frac{\beta}{2\gamma}}{p}\right)^2}},$$

καλοῦντες πρὸς συντομίαν, $\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta^2}{4\gamma^2}} = P$. Ἄρα,

$$\int \frac{\delta x}{\sqrt{\alpha+\beta x-\gamma x^2}} = A + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\,\text{τόξ ἡμ}\,\frac{x-\frac{\beta}{2\gamma}}{\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta^2}{4\gamma^2}}},$$

ἢ $$\int \frac{\delta x}{\sqrt{\alpha+\beta x-\gamma x^2}} = A + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\,\text{τόξ ἡμ}\,\frac{2\gamma x-\beta}{\sqrt{4\alpha\gamma+\beta^2}}.$$

306. Τὰ ἑξῆς ὑποδείγματα προτείνονται πρὸς ἄσκησιν.

1) $$\delta\psi = \frac{\delta x}{x\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}.$$

Τρεπόμενον εἰς $\frac{2\delta\tau}{\sqrt{\gamma}(\tau^2-\alpha)}$, ὁλοκληροῦται ὡς κλάσμα λογικόν.

2) $$\delta\psi = \delta x\sqrt{\alpha^2+x^2}.$$

Τρέπεται εἰς $-\frac{(\tau^2+\alpha^2)^2}{4\tau^3}\delta\tau$, καὶ ὁλοκληροῦται ὡς ἔκθεσις λογική.

3) $$\delta\psi = \delta x\sqrt{2\alpha x-x^2}.$$

Τρέπεται εἰς $-\frac{8\alpha^2\tau^2\delta\tau}{(\tau^2+1)^3}$, καὶ ὁλοκληροῦται διὰ τῆς μεθόδου τῶν λογικῶν κλασμάτων.

307. Ὁμιλήσωμεν ἤδη περὶ ὁλοκληρώσεως τῶν ἐμμέτρων μονονύμων διαφορικῶν. Αἱ τοιαῦται ἐκθέσεις ἀείποτε ἀποκαθίστανται λογικαί. Π. χ., ἐὰν ἔχωμεν ἀλγεβρικήν τινα συνέκθεσιν τῶν ποσοτήτων $x^{\frac{\mu}{\nu}}$, $x^{\frac{\pi}{\kappa}}$, $x^{\frac{\rho}{\sigma}}$, ..., ὅπως ἀποκαταστήσωμεν αὐτὴν λογικήν, σὺν τῷ δx, θετέον $x = \tau^{\nu\kappa\sigma\dots}$.

Ἕξομεν οὕτω $\delta x = \nu\kappa\sigma\dots\tau^{\nu\kappa\sigma\dots-1}\delta\tau$, ἅπαντα δὲ τὰ μονώνυμα $x^{\frac{\mu}{\nu}}$, $x^{\frac{\pi}{\kappa}}$, ..., ἀποκατασταθήσονται λογικά.

Ἔστω $$\frac{\sqrt{x}-\frac{1}{3}\alpha}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}\,\delta x = \frac{x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}\alpha}{x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{2}}}\,\delta x.$$

Διὰ τῆς προεκτεθείσης μεθόδου μεταμορφοῦμεν αὐτὸ εἰς τὸ ἑξῆς,

$$\frac{6\tau^6-2\alpha\tau^3}{1-\tau}\,\delta\tau,$$

ὅπερ γινώσκομεν ὁλοκληρῶσαι. Εἶτα δὲ ἀντεισακτέον ἀντὶ τ τὴν εἰς x τιμὴν τῆς βοηθητικῆς ταύτης μεταβλητῆς.

Ἔστω προσέτι $$\delta\psi = \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt[3]{x}}\,\delta x.$$

Εὑρίσκομεν

$$\psi = A - \tfrac{3}{4}x\sqrt[6]{x^2} + \tfrac{6}{7}x\sqrt[6]{x} + x - \tfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt[6]{x^3} - 6\sqrt[6]{x} + 6\,\text{τόξ ἐφ}\sqrt[6]{x}.$$

Εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν ἄγεται πᾶν κλάσμα μὴ περιέχον ἢ ῥιζικὰ ἐφ' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ διωνύμου τοῦ πρώτου βαθμοῦ. Ἔστω π. χ. ὅτι ζητεῖται

$$\int\frac{[x^2+\sqrt[3]{(\alpha x+\beta)^2}]\,\delta x}{x+\sqrt{\alpha x+\beta}}.$$

Θέτομεν $\alpha x+\beta = \tau^6$, ὅθεν

$$x = \frac{\tau^6-\beta}{\alpha},\quad \delta x = \frac{6\tau^5\delta\tau}{\alpha},\quad \sqrt[3]{(\alpha x+\beta)^2} = \tau^4.$$

Ἐπομένως ἔχομεν πρὸς ὁλοκλήρωσιν τὸ λογικὸν κλάσμα

$$\frac{6}{\alpha^3}\,\frac{\tau^5[(\tau^6-\beta)^2+\alpha^2\tau^4]\delta\tau}{\tau^6-\beta+\alpha\tau^3}.$$

Δ΄. ΠΕΡΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΕΩΣ ΤΩΝ ΔΙΩΝΥΜΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ.

308. *Διώνυμα διαφορικὰ* ὀνομάζονται αἱ ὑπὸ τὴν ἑξῆς γενικὴν μορφὴν ἐκθέσεις

$$x^{\mu-1}(\alpha+\beta x^{\nu})^{\frac{\pi}{\kappa}}\,\delta x.$$

α καὶ β δηλοῦσιν ἀτρέπτους· μ καὶ ν ἀριθμοὺς οἱουσδήποτε· π καὶ κ ἀριθμοὺς ἀκεραίους. Δυνατὸν ἀείποτε ὑποθέτειν τοὺς ἐκθέτας μ, ν, *ἀκεραίους*· διότι, ὅταν ὦσι κλασματικοί, διὰ τοῦ ἐν τῷ προηγουμένῳ χωρίῳ μετασχηματισμοῦ τὸ προτεθὲν διαφορικὸν μεταμορφοῦται εἰς ἕτερον ὅμοιον ἐν ᾧ οἱ ἐκθέται τῆς μεταβλητῆς ἔσονται ἀκέραιοι. Ὅταν ὁ ἐκθέτης $\frac{\pi}{\kappa}$ ἦναι ἀριθμὸς ἀκέραιος, ἀναπτύσσομεν τὸ ἐν παρενθέσει διώνυμον κατὰ τὴν ὑπὸ τοῦ ἐκθέτου αὐτοῦ δηλουμένην δύναμιν, εἶτα ὁλοκληροῦμεν τὰ μερικὰ μονώνυμα. Ἄρα, ὑποθέσομεν $\frac{\pi}{\kappa}$ κλασματικόν. Τὰ σημεῖα τῶν τριῶν τούτων ἐκθετῶν εἶσιν οἱαδήποτε, ἀλλὰ δυνατὸν ὑποθέτειν ἀείποτε ν θετικόν. Τῷ ὄντι, εἰ τοὐναντίον ἔχει, πολυπλασιαστέον τὸ διώνυμον $\alpha+\beta x^{\nu}$ ἐπὶ $x^{-\nu}$ καὶ προσθετέον $\nu\frac{\pi}{\kappa}$ εἰς τὸν ἐκθέτην τοῦ $x^{\mu-1}$, ὅστις τότε συμβαίνει ν' ἀποκαθίσταται κλασματικός, ἀλλά, διὰ τοῦ εἰρημένου μετασχηματισμοῦ τρέπεται εἰς ἀκέραιον. Ἄρα, ἔξεστιν ὑποθέτειν μ καὶ ν ἀριθμοὺς ἀκεραίους καὶ ν θετικόν.

309. Τούτων τεθέντων, ἐξετάσωμεν τὰς περιπτώσεις καθ' ἃς τὸ προκείμενον διώνυμον διαφορικὸν ἀποκαθίσταται λογικόν.

Θέτομεν $\alpha+\beta x^{\nu}=\tau^{\kappa}$, ὅθεν

$$x=\left(\frac{\tau^{\kappa}-\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{\nu}},\qquad \delta x=\frac{\kappa\tau^{\kappa-1}}{\nu\beta}\left(\frac{\tau^{\kappa}-\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{\nu}-1}.$$

Ἐπομένως

$$x^{\mu-1}(\alpha+\beta x^{\nu})^{\frac{\pi}{\kappa}}\,\delta x=\frac{\kappa\tau^{\pi+\kappa-1}}{\nu\beta}\left(\frac{\tau^{\kappa}-\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\mu}{\nu}-1}\delta\tau.$$

Ἄρα, εἰ $\frac{\mu}{\nu}$, ἤτοι, εἰ ὁ ἐκθέτης τῆς ἐκτὸς τοῦ διωνύμου x μονάδι αὐξηθείς, ἀκριβῶς διαιρέσιμος ἐστὶ τῷ ἐκθέτῃ τῆς ἐν παρενθέσει x, τὸ προτεθὲν διαφορικὸν διώνυμον ἀποκαθίσταται λογικόν, κατὰ συνέπειαν δὲ ὁλοκληρώσιμον.

Προτεθείσθω, π. χ., τὸ διαφορικὸν διώνυμον

$$x^5(\alpha+\beta x^2)^{\frac{2}{3}}\,\delta x.$$

Ἔχομεν, $\pi=2$, $\kappa=3$, $\mu-1=5$ ἢ $\mu=6$, $\nu=2$.

Ὁ τῆς ὁλοκληρωσιμότητος ὅρος ἐκπληροῦται· διότι

$$\frac{\mu}{\nu}=\frac{6}{2}=3.$$

Τῇ ἐφαρμογῇ δὲ τῆς μεθόδου ἔχομεν·

$$\int\frac{3}{2\beta^3}(\tau^3-\alpha)^2\tau^4\delta\tau=$$
$$\int\frac{3\tau^{10}}{2\beta^3}\delta\tau-\int\frac{3\alpha}{\beta^3}\tau^7\delta\tau+\int\frac{3\alpha^2}{2\beta^3}\tau^4\delta\tau.$$

Ἄρα

$$\int x^5(\alpha+\beta x^2)^{\frac{2}{3}}\delta x=\frac{3\tau^{11}}{22\beta^3}-\frac{3\alpha\tau^8}{8\beta^3}+\frac{3\alpha^2\tau^5}{10\beta^3}+\Lambda.$$

Ὑπολείπεται ἤδη ἡ ἀντὶ τ ἀντεισαγωγὴ τῆς τιμῆς αὐτῆς εἰς x.

310. Θέτομεν $\alpha+\beta x^{\nu}=x^{\nu}\tau^{\kappa}$, ὅθεν

$$x = \left(\frac{\alpha}{\tau^{\varkappa} - \beta}\right)^{\frac{1}{\nu}}, \qquad \delta x = \frac{1}{\nu}\left(\frac{\alpha}{\tau^{\varkappa} - \beta}\right)^{\frac{1}{\nu}-1}\delta\,\frac{\alpha}{\tau^{\varkappa} - \beta}.$$

Τὸ προτεθὲν διαφορικὸν τρέπεται εἰς τὸ ἑξῆς·

$$x^{\mu-1}(\alpha + \beta x^{\nu})^{\frac{\pi}{\varkappa}}\,\delta x = \frac{\tau^{\pi}}{\nu}\left(\frac{\alpha}{\tau^{\varkappa} - \beta}\right)^{\frac{\mu}{\nu}+\frac{\pi}{\varkappa}-1}\delta\,\frac{\alpha}{\tau^{\varkappa} - \beta}.$$

Δῆλον δὲ ὅτι τοῦτο ἔσεται λογικὸν εἰ $\frac{\mu}{\nu} + \frac{\pi}{\varkappa}$ εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος. Ἡ δευτέρα αὐτὴ συνθήκη ὁλοκληρωσιμότητος ἐκπληροῦται ἐνίοτε μὴ ἐκπληρουμένης τῆς πρώτης.

Ἔστω π. χ.,

$$\delta x . x^4 \sqrt[3]{\alpha + \beta x^3} = x^4 (\alpha + \beta x^3)^{\frac{1}{3}}\,\delta x.$$

Ἔχομεν, $\mu - 1 = 4$ ἢ $\mu = 5$, $\pi = 1$, $\varkappa = 3$, $\nu = 3$, καὶ $\frac{\mu}{\nu} + \frac{\pi}{\varkappa} = 2$. Ἄρα, τὸ προτεθὲν διαφορικὸν εἶναι ὁλοκληρώσιμον· τῇ ἐφαρμογῇ δὲ τῆς μεθόδου λαμβάνομεν·

$$\int x^4(\alpha + \beta x^3)^{\frac{1}{3}}\,\delta x = \int -\frac{\alpha^2\tau^3}{(\tau^3 - \beta)^3}\,\delta\tau + A,$$

ἔκθεσιν ὁλοκληρουμένην τῇ μεθόδῳ τῶν λογικῶν κλασμάτων.

ΣΗΜ. Τὴν δευτέραν ταύτην συνθήκην ὁλοκληρωσιμότητος πορίζόμεθα καὶ ἐκ τῆς πρώτης. Γράφομεν τὸ διώνυμον διαφορικὸν ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$x^{\mu-1}\,x^{\frac{\nu\pi}{\varkappa}}\left(\frac{\alpha}{x^{\nu}} + \beta\right)^{\frac{\pi}{\varkappa}}\delta x, \quad \text{ἢ} \quad x^{\mu + \frac{\nu\pi}{\varkappa} - 1}(\alpha x^{-\nu} + \beta)^{\frac{\pi}{\varkappa}}\,\delta x.$$

Ἔσται δὲ ὁλοκληρώσιμον ὅταν [300],

$$\frac{\mu + \frac{\nu\pi}{\varkappa}}{-\nu} = \frac{\mu}{\nu} + \frac{\pi}{\varkappa} = \text{ἀριθμῷ ἀκεραίῳ}.$$

311. Κατὰ τὰ προεκτεθέντα, ὁλοκληροῦται πᾶν διαφορικὸν μορφὴν ἔχον τοιαύτην·

$$\Sigma\left[x^{\mu\nu},\ (\alpha + \beta x^{\nu})^{\frac{\pi}{\varkappa}},\ (\alpha + \beta x^{\nu})^{\frac{\rho}{\sigma}},\ (\alpha + \beta x^{\nu})^{\frac{\omega}{\upsilon}}, \ldots\right] x^{\nu-1}\,\delta x.$$

μ, ν, π, $\varkappa$, ρ, σ, ω, υ, ... , δηλούντων ἀριθμοὺς ἀκεραίους, Σ δὲ συνέκθεσιν λογικὴν τῶν ἐν ταῖς μείζοσι παρενθέσεσι ποσοτήτων. Τῷ ὄντι, τὸ προτεθὲν διαφορικὸν ἀποκαθίσταται λογικὸν τῇ ὑποθέσει

$$\alpha + \beta x^{\nu} = \tau^{\varkappa\sigma\upsilon\cdots\cdots}.$$

Πρὸς μείζονα σαφήνειαν ὑποθέσομεν ὑπαρχούσας τρεῖς ποσότητας ἐκμέτρους. Ἔχομεν·

$$x^{\nu} = \frac{\tau^{\varkappa\sigma\upsilon} - \alpha}{\beta}, \qquad x^{\nu-1}\,\delta x = \frac{\varkappa\sigma\upsilon\tau^{\varkappa\sigma\upsilon-1}}{\nu\beta}\,\delta\tau.$$

Τὸ τεθὲν διαφορικὸν τρέπεται εἰς

$$\Sigma\left[\left(\frac{\tau^{\varkappa\sigma\upsilon} - \alpha}{\beta}\right)^{\mu},\ \tau^{\pi\sigma\upsilon},\ \tau^{\rho\varkappa\upsilon},\ \tau^{\omega\varkappa\sigma}\right]\frac{\varkappa\sigma\upsilon\tau^{\varkappa\sigma\upsilon-1}\,\delta\tau}{\nu\beta},$$

ἐξαγόμενον λογικὸν κατὰ τ, συνεπείᾳ τῆς ὑποθέσεως. Προκείσθω ὡς παράδειγμα τὸ διαφορικὸν

$$\frac{x\delta x}{\sqrt[3]{1 + x} - \sqrt{1 + x}} = \frac{x\delta x}{(1 + x)^{\frac{1}{3}} - (1 + x)^{\frac{1}{2}}}.$$

Κατὰ τὸν ἄνωθι τύπον, θετέον $1 + x = \tau^{3\cdot 2} = \tau^6$. ὅθεν συνάγομεν τὴν ἔκθεσιν·

$$\frac{-6\tau^3(1 - \tau^6)}{1 - \tau}\,\delta\tau = -6(\tau^3 + \tau^4 + \tau^5 + \tau^6 + \tau^7 + \tau^8)\delta\tau,$$

εὐκόλως ὁλοκληρουμένην. Ἐν τέλει δὲ θετέον ἀντὶ τ τὴν τιμὴν $\sqrt[6]{1 + x}$.

Ἐπίσης ὁλοκληροῦται ἀποκαθιστάμενον λογικὸν πᾶν διαφορικὸν τοῦ σχήματος

$$\Sigma\left[x^{\mu\nu},\ \left(\frac{\alpha+\beta x^{\nu}}{\alpha'+\beta' x^{\nu}}\right)^{\frac{\pi}{\varkappa}},\ \left(\frac{\alpha+\beta x^{\nu}}{\alpha'+\beta' x^{\nu}}\right)^{\frac{\varrho}{\sigma}},\ \ldots\ldots\right]x^{\nu-1}\,\delta x,$$

διότι θέτοντες $\dfrac{\alpha+\beta x^{\nu}}{\alpha'+\beta' x^{\nu}}=\tau^{\varkappa\sigma}\cdots$, μεταμορφοῦμεν εἰς λογικὰς ἁπάσας τὰς ἐν αὐτῷ ποσότητας.

312. Αἱ ἐν τοῖς χωρίοις 309, 310, περιπτώσεις εἰσὶν αἱ μόναι καθ' ἃς ἐσμὲν βέβαιοι ὅτι ἀποκαθιστῶμεν λογικὸν πᾶν ἀπειροστὸν διώνυμον. Ὅταν ἀδύνατον ἀποκαταστῆσαι λογικὸν τὸ διώνυμον διαφορικὸν

$$x^{\mu-1}(\alpha+\beta x^{\nu})^{\pi}\,\delta x,$$

(π δηλοῦντος ἀριθμὸν κλασματικὸν) ἄγομεν αὐτὸ, κατὰ τὸ δυνατὸν, ὑπὸ μορφὴν ἁπλουστέραν ἐλαττοῦντες τοὺς ἐκθέτας μ ἢ π. Αἱ πρὸς τοῦτο ἀναγωγαὶ ἐκτελοῦνται ὡς ἐν τοῖς ἑξῆς χωρίοις διὰ τῆς μοιρικῆς ὁλοκληρώσεως.

313. Ὅταν ὁ ἐκθέτης μ ἦναι θετικὸς καὶ μείζων τοῦ ν, ἐλαττοῦμεν αὐτὸν γράφοντες·

$$\int x^{\mu-1}(\alpha+\beta x^{\nu})^{\pi}\,\delta x=\int x^{\mu-\nu}(\alpha+\beta x^{\nu})^{\pi}x^{\nu-1}\delta x$$

$$=\frac{x^{\mu-\nu}(\alpha+\beta x^{\nu})^{\pi+1}}{\nu(\pi+1)\beta}-\frac{\mu-\nu}{\nu(\pi+1)\beta}\int\delta x.x^{\mu-\nu-1}(\alpha+\beta x^{\nu})^{\pi+1}.$$

Ἀλλὰ

$$\int\delta x.x^{\mu-\nu-1}(\alpha+\beta x^{\nu})^{\pi+1}=\int x^{\mu-\nu-1}(\alpha+\beta x^{\nu})^{\pi}(\alpha+\beta x^{\nu})\delta x$$

$$=\alpha\int\delta x.x^{\mu-\nu-1}(\alpha+\beta x^{\nu})^{\pi}+\beta\int x^{\mu-1}(\alpha+\beta x^{\nu})^{\pi}\delta x.$$

Ἄρα, ἀντεισάγοντες,

$$\int x^{\mu-1}(\alpha+\beta x^{\nu})^{\pi}\,\delta x=$$

$$\frac{x^{\mu-\nu}(\alpha+\beta x^{\nu})^{\pi+1}}{\nu(\pi+1)\beta}-\frac{\mu-\nu}{\nu(\pi+1)}\int x^{\mu-1}(\alpha+\beta x^{\nu})^{\pi}\,\delta x$$

$$-\frac{(\mu-\nu)\alpha}{\nu(\pi+1)\beta}\int\delta x\,.\,x^{\mu-\nu-1}(\alpha+\beta x^{\nu})^{\pi},$$

Ἢ τέλος,

$$\int x^{\mu-1}(\alpha+\beta x^{\nu})^{\pi}\,\delta x=$$

$$\frac{x^{\mu-\nu}(\alpha+\beta x^{\nu})^{\pi+1}}{(\mu+\nu\pi)\beta}-\frac{(\mu-\nu)\alpha}{(\mu+\nu\pi)\beta}\int x^{\mu-\nu-1}(\alpha+\beta x^{\nu})^{\pi}\,\delta x.$$

Οὕτω, τὸ ζητούμενον ὁλοκληρωτικὸν ἐξαρτᾶται ἀφ' ἑτέρου ὁμοιομόρφου αὐτῷ, ἐν ᾧ ὁ ἐκθέτης $\mu-1$ ἠλαττώθη κατὰ ν μονάδας. Ἐξακολουθοῦντες ἐφαρμόζειν τὸν αὐτὸν τύπον, τὸ τεθὲν διαφορικὸν θέλει ἐξαρτᾶσθαι ἀφ' ἑτέρου ἐν ᾧ ὁ ἐξωτερικὸς ἐκθέτης τῆς x ἔσεται $\mu-2\nu-1$. Καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Ἐὰν δὲ $\rho\nu$ ἦναι τὸ μέγιστον πολλαπλάσιον τοῦ ν ἐν μ περιεχόμενον, ὁ ἔσχατος ἐκθέτης τῆς ἐκτὸς x, κατὰ τὴν ἐσχάτην ἐργασίαν, ἔσεται $\mu-\rho\nu-1$· ἑπομένως ἡ x ἐν τῷ πρώτῳ μέλει τῆς ἀναγωγικῆς ἐξισώσεως ἕξει ἐκθέτην $\mu-(\rho-1)\nu-1$. Ἄρα, καθιστῶντες ἐν τῷ ἀνωτέρῳ τύπῳ $\mu=\mu-(\rho-1)\nu$, καὶ δηλοῦντες K τὸ ἤδη ὁλοκληρωθὲν μέρος, ἔχομεν·

$$\int x^{\mu-(\rho-1)\nu-1}\,\delta x(\alpha+\beta x^{\nu})^{\pi}=$$

$$\frac{K-(\mu-\rho\nu)\alpha\int x^{\mu-\rho\nu-1}(\alpha+\beta x^{\nu})^{\pi}\,\delta x}{\beta[\mu-(\rho-1)\nu+\pi\nu]}.$$

Ἐὰν $\rho\nu=\mu$, ἤτοι $\mu-\rho\nu=0$, τὸ ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει τῆς ἐξισώσεως ταύτης ὁλοκληρωτέον μέρος ἀφανισθήσεται, μενεῖ δὲ

$$\int x^{\mu-(\rho-1)\nu-1}(\alpha+\beta x^{\nu})^{\pi}\,\delta x=\frac{K}{\beta(1+\pi)\nu}.$$

Τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ τούτου ὄντος ἀκριβῶς ὡρισμένου, ἅπαντα τὰ προηγούμενα, ἑπομένως καὶ τὸ τοῦ προτεθέντος διαφορικοῦ διωνύμου, ἔσονται ἀκριβῶς ὡρισμένα.

Παρατηρητέον ὅτι, ἡ συνθήκη $\rho\nu=\mu$, ἐξ ἧς $\dfrac{\mu}{\nu}=\rho$, εἶναι ἡ ἐν § 309 εὑρεθεῖσα πρώτη συνθήκη ὁλοκληρωσιμότητος.

314. Ὑποθέτοντες τὸν ἐκθέτην π θετικὸν, ἐλαττοῦμεν καὶ τοῦτον ὡς ἀκολούθως.

$$\int x^{\mu-1}(\alpha+\beta x^{\nu})^{\pi}\delta x = \int x^{\mu-1}(\alpha+\beta x^{\nu})^{\pi-1}(\alpha+\beta x^{\nu})\delta x$$

$$=\alpha\int x^{\mu-1}(\alpha+\beta x^{\nu})^{\pi-1}\delta x+\beta\int x^{\mu+\nu-1}(\alpha+\beta x^{\nu})^{\pi-1}\delta x.$$

'Αλλ' ἐκ τοῦ ἐν § 313 τύπου, τροπῇ μ εἰς $\mu+\nu$, καὶ π εἰς $\pi-1$, συνάγομεν·

$$\int \delta x . x^{\mu+\nu-1}(\alpha+\beta x^{\nu})^{\pi-1} =$$

$$\frac{x^{\mu}(\alpha+\beta x^{\nu})^{\pi}}{(\mu+\nu\pi)\beta} - \frac{\mu\alpha}{(\mu+\nu\pi)\beta}\int x^{\mu-1}(\alpha+\beta x^{\nu})^{\pi-1}\delta x.$$

'Αντεισάγοντες δὲ ἐν τῇ προηγουμένῃ ἐξισώσει,

$$\int x^{\mu-1}(\alpha+\beta x^{\nu})^{\pi}\delta x =$$

$$\frac{x^{\mu}(\alpha+\beta x^{\nu})^{\pi}}{\mu+\nu\pi} + \frac{\nu\pi\alpha}{\mu+\nu\pi}\int x^{\mu-1}(\alpha+\beta x^{\nu})^{\pi-1}\delta x,$$

Διὰ τοῦ τύπου τούτου τὸ ζητούμενον ὁλοκληρωτικὸν ἐξαρτᾶται ἀφ' ἑτέρου, ἐν ᾧ ὁ ἐκθέτης π ἐλάσσων ἐστὶ κατὰ μονάδα. Ἐὰν ἐν τῷ τύπῳ τούτῳ θέσωμεν ἤδη $\pi-1$ ἀντὶ π, τὸ ὁλοκληρωτικὸν $\int x^{\mu-1}(\alpha+\beta x^{\nu})^{\pi-1}\delta x$ θέλει ἐξαρτᾶσθαι ἀπὸ τοῦ $\int x^{\mu-1}(\alpha+\beta x^{\nu})^{\pi-2}\delta x$. Καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Ἄρα, ὁ δείκτης π μειωθήσεται ἀνὰ μονάδα μέχρι τοῦ μείζονος ἀριθμοῦ ἀκεραίου ρ ἐν αὐτῷ περιεχομένου. Ἐὰν τὸ τελευταῖον διαφορικὸν $x^{\mu-1}(\alpha+\beta x^{\nu})^{\pi-\rho}\delta x$ ὁλοκληροῦται ἀκριβῶς, καὶ ἅπαντα τὰ προηγούμενα ὁλοκληρωτικά, σὺν τῷ τοῦ προτεθέντος διαφορικοῦ διωνύμου, ἔσονται ἀκριβῶς ὡρισμένα.

315. Ὅταν ὁ ἐκθέτης μ ἦναι ἀρνητικός, ὁ ἐν § 313 εὑρεθεὶς τύπος ἄγει τὸ προτεθὲν διαφορικὸν εἰς ἕτερον ἧττον ἁπλοῦν· διότι ὁ ἐκθέτης τοῦ μονωνύμου παράγοντος λαμβάνει τιμὴν ἀριθμητικῶς μείζονα. Ἀλλ' ἐὰν ἐκ τῆς αὐτῆς ἐξισώσεως λάβωμεν τὴν τιμὴν τοῦ δευτέρου ὁλοκληρωτικοῦ

συνεκθέσει τοῦ πρώτου, ἕξομεν τύπον δι' οὗ, ἐν τῇ περιπτώσει τοῦ ἀρνητικοῦ ἐκθέτου, ἡ περὶ ἧς λόγος ὁλοκλήρωσις ἐξαρτᾶται ἀφ' ἑτέρας ἁπλουστέρας. Λοιπὸν ἔχομεν·

$$\int x^{\mu-\nu-1}(\alpha+\beta x^{\nu})^{\pi}\delta x =$$

$$\frac{x^{\mu-\nu}(\alpha+\beta x^{\nu})^{\pi+1}}{(\mu-\nu)\alpha} - \frac{(\mu+\nu\pi)\beta}{(\mu-\nu)\alpha}\int x^{\mu-1}(\alpha+\beta x^{\nu})^{\pi}\delta x.$$

Θέτοντες ἤδη $-\mu+\nu$ ἀντὶ μ, ἔχομεν·

$$\int x^{-\mu-1}(\alpha+\beta x^{\nu})^{\pi}\delta x =$$

$$-\frac{x^{-\mu}(\alpha+\beta x^{\nu})^{\pi+1}}{\alpha\mu} - \frac{(\mu-\nu-\nu\pi)\beta}{\alpha\mu}\int x^{-\mu+\nu-1}(\alpha+\beta x^{\nu})^{\pi}\delta x.$$

Διὰ τοῦ τύπου τούτου ὁ ἐκθέτης $-\mu-1$ ἠλαττώθη· διότι κατεστάθη $-\mu+\nu-1$, τὸν δὲ ν δυνατὸν ὑποτεθεῖναι ἀείποτε θετικόν. Ἐξακολουθοῦντες οὕτω καταντήσομεν μέχρι τοῦ δείκτου $-\mu+\rho\nu$· ἔσεται δὲ δυνατὸν ὁλοκληρῶσαι εἰ τὸ τελευταῖον ὁλοκληρωτικὸν ἀφανίζεται.

316. Ὅταν ὁ ἐκθέτης π ἦναι ἀρνητικός, ἐξάγομεν ἐκ τῆς ἐν § 314 ἐξισώσεως τὴν τιμὴν τοῦ δευτέρου ὁλοκληρωτικοῦ καὶ ἔχομεν·

$$\int x^{\mu-1}(\alpha+\beta x^{\nu})^{\pi-1}\delta x =$$

$$-\frac{x^{\mu}(\alpha+\beta x^{\nu})^{\pi}}{\nu\pi\alpha} + \frac{\mu+\nu\pi}{\nu\pi\alpha}\int x^{\mu-1}(\alpha+\beta x^{\nu})^{\pi}\delta x.$$

Θέτοντες δὲ $-\pi+1$ ἀντὶ π,

$$\int x^{\mu-1}(\alpha+\beta x^{\nu})^{-\pi}\delta x =$$

$$\frac{x^{\mu}(\alpha+\beta x^{\nu})^{-\pi+1}}{\nu(\pi-1)\alpha} - \frac{\mu+\nu-\nu\pi}{\nu(\pi-1)\alpha}\int x^{\mu-1}(\alpha+\beta x^{\nu})^{-\pi+1}\delta x,$$

Ὁ τύπος οὗτος καθίσταται ἄχρηστος ἐν τῇ μοναδικῇ περιπτώσει καθ' ἣν $\pi = 1$. Ἀλλὰ τότε τὸ προτεθὲν διαφορικὸν εἶναι λογικόν, πλὴν ὅταν μ ἦναι κλασματικός· ἐν τῇ περιπτώσει δὲ ταύτῃ ποιοῦμεν χρῆσιν γνωστοῦ τινος μετασχηματισμοῦ.

Διὰ τοῦ τελευταίου τούτου τύπου ὁ ἀρνητικὸς ἐκθέτης $-\pi$ δύναται αὐξηνθῆναι διαδοχικῶς καθ' ὅσας βουλόμεθα μονάδας, μέχρις οὗ καταντήσῃ μεταξὺ 0 καὶ +1.

317. Παρατηρητέον ὅτι, οἱ προηγούμενοι τύποι εἰσὶν ἄχρηστοι ὅταν $\mu+\nu\pi=0$, ἢ $\mu-\nu=0$, ἢ καὶ $\mu=0$. Ἀλλ' ἐν ταῖς τοιαύταις περιπτώσεσι τὸ διαφορικὸν διώνυμον ἀποκαθίσταται λογικόν, ὡς ἐκπληρουμένης τῆς ἑτέρας τῶν συνθηκῶν ὁλοκληρωσιμότητος. Παρατηρητέον προσέτι ὅτι, καὶ καθ' ἃς περιπτώσεις τὸ διαφορικὸν τοῦτο εἶναι λογικόν, ἢ ἀποκαθίσταται τοιοῦτον, ἡ χρῆσις τῶν προεκτεθέντων ἀναγωγικῶν τύπων εἶναι ἐν γένει τὸ ἁπλούστερον μέσον τοῦ εὑρίσκειν τὸ ζητούμενον ὁλοκληρωτικόν.

318. Διαφορικὸν ἔχον τὴν μορφὴν $x^{\mu}(\alpha x^{\rho}+\beta x^{\sigma})^{\pi}\delta x$,

ἄγεται ὑπὸ τὴν ἑξῆς $x^{\mu+\rho\pi}(\alpha+\beta x^{\sigma-\rho})\delta x$,

καὶ ἐπομένως θεωρεῖται ὡς διαφορικὸν διώνυμον.

319. Ἐφαρμοστέον ἤδη τοὺς προαποδοθέντας τύπους παραδείγμασι. Προκείσθω τὸ διαφορικὸν

$$\frac{x^{\mu}\delta x}{\sqrt{1-x^2}} = x^{\mu}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\delta x,$$

ἐν ᾧ μ εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος θετικός. Τὸ διαφορικὸν τοῦτο ἀείποτε ἐστὶν ὁλοκληρώσιμον· διότι $\nu = 2$, $\pi = -\frac{1}{2}$, ἡ ἑτέρα δὲ τῶν συνθηκῶν ὁλοκληρωσιμότητος,

$$\frac{\mu+1}{\nu}, \quad \text{ἢ} \quad \frac{\mu+1}{\nu}+\pi,$$

πάντοτε ὑπάρχει. Ἐφαρμοζομένου τοῦ ἐν § 313 τύπου, ἢ ὁλοκληροῦντες ἀμέσως μοιρικῶς, εὑρίσκομεν·

$$\int\frac{x^{\mu}\delta x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{\mu-1}\sqrt{1-x^2}}{\mu}+\frac{\mu-1}{\mu}\int\frac{x^{\mu-2}\delta x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ὁ ἐκθέτης μ ἠλαττώθη κατὰ δύο μονάδας. Ἐξακολουθοῦντες τὴν ἐφαρμογὴν τῆς αὐτῆς μεθόδου, καταντήσομεν εἰς τὴν ἑτέραν τῶν ἐκθέσεων $\int\frac{x\delta x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\int\frac{\delta x}{\sqrt{1-x^2}}$, καθ' ὅσον μ εἶναι περιττὸς ἢ ἄρτιος, ὧν τῆς μὲν τὸ ὁλοκληρωτικὸν εἶναι $-\sqrt{1-x^2}$, τῆς δέ, τόξ ἡμ x.

Ὅταν μ ἦναι περιττός, μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς τύπον·

$$\int\frac{x^{\mu}\delta x}{\sqrt{1-x^2}} = +A$$
$$-\frac{\sqrt{1-x^2}}{\mu}\left[x^{\mu-1}+\frac{\mu-1}{\mu-2}x^{\mu-3}+\frac{(\mu-1)(\mu-3)}{(\mu-2)(\mu-4)}x^{\mu-5}+\ldots \ldots\ldots+\frac{(\mu-1)(\mu-3)\ldots\ldots 4.2}{(\mu-2)(\mu-4)\ldots\ldots 3.1}\right].$$

Ἐν δὲ τῇ περιπτώσει τοῦ μ ἀρτίου, τὸν ἑξῆς·

$$\int\frac{x^{\mu}\delta x}{\sqrt{1-x^2}} = +A$$
$$-\frac{\sqrt{1-x^2}}{\mu}\left[x^{\mu-1}+\frac{\mu-1}{\mu-2}x^{\mu-3}+\ldots\frac{(\mu-1)(\mu-3)\ldots 3.1}{(\mu-2)(\mu-4)\ldots 4.2}x\right]$$
$$+\frac{(\mu-1)(\mu-3)\ldots 5.3.1}{\mu(\mu-2)(\mu-4)\ldots 6.4.2}\text{ τόξ ἡμ } x.$$

Ὑποτιθεμένου τοῦ ἐκθέτου ἀρνητικοῦ, $-\mu$, ὁ ἀναγωγικὸς τύπος ἔσεται·

$$\int\frac{x^{-\mu}\delta x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{-\mu+1}\sqrt{1-x^2}}{\mu-1}+\frac{\mu-2}{\mu-1}\int\frac{x^{-\mu+2}\delta x}{\sqrt{1-x^2}};$$

Μόνη περίπτωσις καθ' ἣν δὲν ἐφαρμόζεται εἶναι ὅταν $\mu = 1$. Τότε πρόκειται ὁλοκληρῶσαι τὸ διαφορικὸν

$$\frac{\delta x}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

Πρὸς τοῦτο ποιοῦμεν χρῆσιν τῆς τῶν δευτεροβαθμίων ῥιζικῶν μεταμορφώσεως. Θέτομεν

$$\sqrt{1-x^2} = 1 + x\tau,$$

ὅθεν

$$-x = 2\tau + x\tau^2, \qquad -\delta x = 2\delta\tau + 2x\tau\delta\tau + \tau^2\delta x,$$

$$\frac{\delta x}{1+x\tau} = \frac{\delta x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{2\delta\tau}{1+\tau^2}, \qquad \frac{\delta x}{x\sqrt{1-x^2}} = \frac{\delta\tau}{\tau}.$$

Ἄρα

$$\int\frac{\delta x}{x\sqrt{1-x^2}} = \lambda\tau + A = \lambda\left(\frac{-1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) + A.$$

Εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον καταντῶμεν ἁπλούστερον θέτοντες

$$x = \frac{1}{\tau}, \quad \text{ὅπερ δίδει} \quad \frac{-\delta\tau}{\sqrt{\tau^2-1}},$$

διαφορικὸν ὁλοκληρωθὲν ἤδη.

320. Θεωρήσωμεν προσέτι τὸ διαφορικὸν διώνυμον

$$\frac{x^\mu \delta x}{\sqrt{\alpha x - x^2}},$$

χρήσιμον ἐν τῇ θεωρίᾳ τοῦ ἐκκρεμοῦς. Ἔχομεν ἰσομερῶς

$$\int\frac{x^\mu\delta x}{\sqrt{\alpha x - x^2}} = \int\frac{x^{\mu-1}(x-\frac{1}{2}\alpha)\delta x}{\sqrt{\alpha x - x^2}} + \frac{1}{2}\alpha\int\frac{x^{\mu-1}\delta x}{\sqrt{\alpha x - x^2}}.$$

Ἀλλ' ὁλοκληροῦντες μοιρικῶς εὑρίσκομεν·

$$\int\frac{x^{\mu-1}(x-\frac{1}{2}\alpha)\delta x}{\sqrt{\alpha x - x^2}} = -x^{\mu-1}\sqrt{\alpha x - x^2} + (\mu-1)\int x^{\mu-2}\delta x\sqrt{\alpha x - x^2}$$

$$= -x^{\mu-1}\sqrt{\alpha x - x^2} + (\mu-1)\int\frac{x^{\mu-2}(\alpha x - x^2)\delta x}{\sqrt{\alpha x - x^2}}$$

$$= -x^{\mu-1}\sqrt{\alpha x - x^2} + (\mu-1)\alpha\int\frac{x^{\mu-1}\delta x}{\sqrt{\alpha x - x^2}} - (\mu-1)\int\frac{x^\mu\delta x}{\sqrt{\alpha x - x^2}}.$$

Ἀντεισάγοντες δὲ ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει καὶ ἁπλοποιοῦντες,

$$\int\frac{x^\mu\delta x}{\sqrt{\alpha x - x^2}} = -\frac{x^{\mu-1}\sqrt{\alpha x - x^2}}{\mu} + \frac{(2\mu-1)\alpha}{2\mu}\int\frac{x^{\mu-1}\delta x}{\sqrt{\alpha x - x^2}}$$

Ὁ ἐκθέτης μ ἠλαττώθη κατὰ μονάδα. Ἐφαρμόζοντες τὴν αὐτὴν μέθοδον ἐπὶ τὸ νέον διαφορικὸν καὶ ἐπὶ τὰ ἑπόμενα, καταντῶμεν τέλος εἰς τὸ $\int\frac{\delta x}{\sqrt{\alpha x - x^2}}$, ὅπερ ὁλοκληροῦμεν παρατηροῦντες ὅτι·

$$\frac{\delta x}{\sqrt{\alpha x - x^2}} = \frac{\delta x}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \left(\frac{\alpha}{2} - x\right)^2}} = \frac{\frac{2}{\alpha}\delta x}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha - 2x}{\alpha}\right)^2}}.$$

Ἄρα

$$\int\frac{\delta x}{\sqrt{\alpha x - x^2}} = \text{τόξ συν}\,\frac{\alpha - 2x}{\alpha} + A.$$

Ε'. ΠΕΡΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΕΩΣ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΩΝ, ΤΩΝ ΔΕΙΚΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΚΥΚΛΙΚΩΝ ΣΥΝΕΚΘΕΣΕΩΝ.

321. Ἄγνωστος εἰσέτι ὁ τρόπος καθ' ὃν δυνάμεθα ἐν γένει ὁλοκληρῶσαι πεπερασμένως ἁπάσας τὰς τοιαύτης φύσεως συνεκθέσεις. Ἀλλ' ὑπάρχουσι περιπτώσεις μερικαὶ καθ' ἃς ἡ τοιαύτη ἐργασία ἐκτελεῖται.

Κατὰ πρῶτον δῆλον ὅτι, κατὰ τὴν ἐν § 282 [3ον] παρατήρησιν, γινώσκοντες ὁλοκληρῶσαι τὸ ἀπειροστὸν $\Sigma(x)\delta x$, ὁλοκληροῦμεν ἐπίσης δι' ἁπλῆς ἀντεισαγωγῆς τὰς ἑξῆς διαφορικὰς συνεκθέσεις·

$$\Sigma(e^x)e^x\,\delta x, \quad \Sigma(\lambda x)\frac{\delta x}{x}, \quad \Sigma(\alpha^x)\alpha^x\,\delta x, \quad \Sigma(\text{ἡμ}\,x)\,\text{συν}\,x\,\delta x,$$

$$\Sigma(\text{συν}\,x)\,\text{ἡμ}\,x\,\delta x, \qquad \Sigma(\text{τόξ ἡμ}\,x)\frac{\delta x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\Sigma(\text{τόξ συν}\,x)\frac{\delta x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \Sigma(\text{τόξ ἐφ}\,x)\frac{\delta x}{1+x^2}.$$

Π. χ. Ἔστω ζητούμενον $\int(\lambda x)^\nu \frac{\delta x}{x}$.

Θέτομεν $\lambda x = \tau$, ὅθεν $\frac{\delta x}{x} = \delta\tau$, καὶ ἑπομένως,

$$\int(\lambda x)^\nu \frac{\delta x}{x} = \int \tau^\nu \delta\tau = \frac{\tau^{\nu+1}}{\nu+1} + \Lambda,$$

ἢ
$$\int(\lambda x)^\nu \frac{\delta x}{x} = \frac{(\lambda x)^{\nu+1}}{\nu+1} + \Lambda.$$

Ἐπίσης, Σ δηλοῦντος συνέκθεσιν ἀλγεβρικὴν τῶν ὑπὸ τὸ σύμβολον τοῦτο ποσῶν, δυνατὸν ἀποκαταστῆσαι ἀλγεβρικὰς τὰς διαφορικὰς συνεκθέσεις

$$\Sigma(e^x)\,\delta x, \qquad \Sigma(\text{ἡμ}\,x,\ \text{συν}\,x)\,\delta x,$$

$$\Sigma(\text{ἡμ}x,\ \text{ἡμ}2x,\ \ldots\ldots,\ \text{συν}x,\ \text{συν}2x,\ \ldots\ldots)\,\delta x,$$

καθιστῶντες ἀμοιβαίως

$$e^x = \tau, \quad \text{ἡμ}x = \tau, \quad \text{ἢ} \quad \text{συν}\,x = \tau, \quad \text{ἐφ}\tfrac{1}{2}x = \tau, \ldots$$

καὶ ἐκθέτοντες λογικῶς τὰ ἡμίτονα καὶ τὰ συνημίτονα τῶν πολλαπλασίων τόξων διὰ τῶν δυνάμεων τοῦ ἡμιτόνου ἢ τοῦ συνημιτόνου τοῦ ἁπλοῦ τόξου, κατὰ τοὺς ἐν τῇ Ἀλγέβρᾳ δεικνυομένους τύπους. Ἑπομένως τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος διαφορικὰ ἔσονται ὁλοκληρώσιμα ὅταν ἡ συνέκθεσις Σ ἦναι λογικὴ ἢ ἀποκαθίσταται τοιαύτη.

Π. χ. Ζητουμένου $\int\Sigma(\text{ἡμ}x,\ \text{συν}x)\delta x$, θέτομεν $\text{ἐφ}\frac{1}{2}x = \tau$, καὶ λαμβάνομεν

$$\int\Sigma(\text{ἡμ}\,x,\ \text{συν}\,x)\,\delta x = \int\Sigma\left(\frac{2\tau}{1+\tau^2},\quad \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}\right)\frac{2\delta\tau}{1+\tau^2},$$

συνέκθεσιν λογικὴν κατὰ τὴν μεταβλητὴν τ.

322. Προκείσθω ἤδη τὸ διαφορικὸν

$$\Pi z^\nu \delta x,$$

ἐν ᾧ z δηλοῖ συνέκθεσιν ὑπερβατικὴν ἧς ὁ διαφορικὸς συντελεστὴς τῆς πρώτης τάξεως εἶναι ἀλγεβρικός. Π συνέκθεσιν ἀλγεβρικήν· ν ἀριθμὸν ἀκέραιον θετικόν. Τὰ τοιαῦτα διαφορικὰ ὁλοκληροῦνται ἐνίοτε. Τῷ ὄντι, ὁλοκληροῦντες μοιρικῶς τὸ προτεθὲν διαφορικὸν ἔχομεν, θέτοντες $K = \int\Pi\delta x$,

$$\int\Pi z^\nu\delta x = Kz^\nu - \nu\int Kz^{\nu-1}\frac{\delta z}{\delta x}\delta x.$$

Εἶτα, θέτοντες
$$P = \int K\frac{\delta z}{\delta x}\delta x\cdot$$

$$\int Kz^{\nu-1}\frac{\delta z}{\delta x}\delta x = Pz^{\nu-1} - (\nu-1)\int Pz^{\nu-2}\frac{\delta z}{\delta x}\delta x.$$

Εἶτα, θέτοντες
$$\Sigma = \int P\frac{\delta z}{\delta x}\delta x\cdot$$

$$\int Pz^{\nu-2}\frac{\delta z}{\delta x}\delta x = \Sigma z^{\nu-2} - (\nu-2)\int\Sigma z^{\nu-3}\frac{\delta z}{\delta x}\delta x.$$

Καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Ἄρα,

$$\int\Pi z^\nu\delta x = Kz^\nu - \nu Pz^{\nu-1} + \nu(\nu-1)\Sigma z^{\nu-2} - \ldots\ldots$$

Ἀνάλογος ἐργασία χορηγεῖ μέσον δι' οὗ ὁλοκληροῦται τὸ τεθὲν διαφορικὸν καὶ ὅταν ὁ δείκτης ν ἦναι ἀρνητικός.

Διὰ τῆς ἐργασίας ταύτης μορφωθήσεται τὸ ζητούμενον ὁλοκληρωτικόν, εἰ δυνατὸν εὑρεῖν πεπερασμένως τὰς ἐκθέσεις τῶν ποσοτήτων ὑπὸ Κ, Ρ, Σ, ... , δηλουμένων.

323. Ὑποθέσωμεν $\Pi = 1$, ἐκ διαδοχῆς δὲ $z = \lambda x$, $z = \text{τόξ ἡμ}\, x$. Εὑρίσκομεν·

$$\int (\lambda x)^\nu \delta x = A + x(\lambda x)^\nu \left[1 - \frac{\nu}{\lambda x} + \frac{\nu(\nu-1)}{(\lambda x)^2} - \dots\dots \pm \frac{\nu(\nu-1)\dots\dots 3.2.1}{(\lambda x)^\nu}\right].$$

$$\int (\text{τόξ ἡμ} x)^\nu \delta x = \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{\nu\sqrt{1-x^2}}{\text{τόξ ἡμ}\, x} - \dfrac{\nu(\nu-1)x}{(\text{τόξ ἡμ} x)^2} \\ - \dfrac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\sqrt{1-x^2}}{(\text{τόξ ἡμ}\, x)^3} + \dots \end{array}\right] (\text{τόξ ἡμ} x)^\nu + A,$$

Ὑποτεθείσθω $\Pi = x^{\mu-1}$, καὶ $z = \lambda x$. Ἕξομεν·

$$\int x^{\mu-1}(\lambda x)^\nu \delta x = A + \frac{x^\mu}{\mu}\left[(\lambda x)^\nu - \frac{\nu}{\mu}(\lambda x)^{\nu-1} + \frac{\nu(\nu-1)}{\mu^2}(\lambda x)^{\nu-2} - \dots \pm \frac{\nu(\nu-1)\dots 2.1}{\mu^\nu}\right].$$

Ἐὰν ἐν τῷ πρώτῳ καὶ ἐν τῷ ἐσχάτῳ τῶν τριῶν τούτων τύπων θέσωμεν $\lambda x = z$, συνάγομεν·

$$\int z^\nu e^z \delta z = A + e^z[z^\nu - \nu z^{\nu-1} + \nu(\nu-1)z^{\nu-2} - \dots \pm \nu(\nu-1)\dots 2.1].$$

$$\int z^\nu e^{\alpha z} \delta z = A + \frac{e^{\alpha z}}{\alpha}\left[z^\nu - \frac{\nu}{\alpha} z^{\nu-1} + \frac{\nu(\nu-1)}{\alpha^2} z^{\nu-2} - \dots \pm \frac{\nu(\nu-1)\dots 2.1}{\alpha^\nu}\right].$$

Ἐὰν ἐν τῷ δευτέρῳ τύπῳ θέσωμεν

$$\text{τόξ ἡμ}\, x = z, \qquad \text{ὅθεν} \qquad x = \text{ἡμ}\, z, \qquad \delta x = \text{συν} z\, \delta z,$$

ὁ αὐτὸς καθίσταται·

$$\int z^\nu \text{συν}\, z\, \delta z = \text{ἡμ}\, z[z^\nu - \nu(\nu-1)z^{\nu-2} + \dots\dots]$$
$$+ \text{συν}\, z[\nu z^{\nu-1} - \nu(\nu-1)(\nu-2)z^{\nu-3} + \dots\dots] + A.$$

Παρατηρητέον ὅτι δυνάμεθα μορφῶσαι καὶ ἀμέσως τοὺς τρεῖς τελευταίους τύπους, ἀντιστρόφως δ' ἐξ αὐτῶν πορισθῆναι τοὺς τρεῖς πρώτους.

324. Διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδου λαμβάνομεν καὶ τὰ ἑξῆς ὁλοκληρωτικά.

$$\int x^\nu \text{συν}\, \alpha x\, \delta x = \frac{x^\nu}{\alpha}\left\{ \text{ἡμ}\, \alpha x \left[1 - \frac{\nu(\nu-1)}{\alpha^2 x^2} + \dots\right] + \text{συν}\, \alpha x \left[\frac{\nu}{\alpha x} - \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{\alpha^3 x^3} + \dots\right]\right\} + A.$$

$$\int x^\nu \text{ἡμ}\, \alpha x\, \delta x = -\frac{x^\nu}{\alpha}\left\{ \text{συν}\, \alpha x \left[1 - \frac{\nu(\nu-1)}{\alpha^2 x^2} + \dots\right] - \text{ἡμ}\, \alpha x \left[\frac{\nu}{\alpha x} - \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{\alpha^3 x^3} + \dots\right]\right\} + A.$$

325. Τὰ δύο ὁλοκληρωτικὰ

$$\int e^{\alpha x}\, \text{συν}\, \beta x\, \delta x, \qquad \int e^{\alpha x}\, \text{ἡμ}\, \beta x\, \delta x,$$

ὁρίζονται συγχρόνως διὰ τῆς μοιρικῆς ὁλοκληρώσεως. Τῷ ὄντι, εὑρίσκομεν ἀμέσως·

$$\int e^{\alpha x}\, \text{συν}\, \beta x\, \delta x = \frac{e^{\alpha x}\, \text{συν}\, \beta x}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha}\int e^{\alpha x}\, \text{ἡμ}\, \beta x\, \delta x,$$

$$\int e^{\alpha x}\, \text{ἡμ}\, \beta x\, \delta x = \frac{e^{\alpha x}\, \text{ἡμ}\, \beta x}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}\int e^{\alpha x}\, \text{συν}\, \beta x\, \delta x.$$

Ἐκ τῶν δύο τούτων ἐξισώσεων λαμβάνομεν·

$$\int e^{\alpha x}\,\text{συν}\,\beta x\,\delta x = \frac{\alpha\,\text{συν}\,\beta x + \beta\,\text{ημ}\,\beta x}{\alpha^2+\beta^2}\,e^{\alpha x} + A,$$

$$\int e^{\alpha x}\,\text{ημ}\,\beta x\,\delta x = \frac{\alpha\,\text{ημ}\,\beta x - \beta\,\text{συν}\,\beta x}{\alpha^2+\beta^2}\,e^{\alpha x} + A.$$

326. Γινώσκοντες τὰ τελευταῖα ταῦτα ὁλοκληρωτικά, λαμβάνομεν τὰ τῶν διαφορικῶν·

$$x^\nu e^{\alpha x}\,\text{συν}\,\beta x\,\delta x, \qquad x^\nu e^{\alpha x}\,\text{ημ}\,\beta x\,\delta x,$$

ἐλαττοῦντες ἐκ διαδοχῆς τὸν ἐκθέτην τῆς x. Ἀλλ' οἱ λογισμοὶ ἁπλοποιοῦνται τῇ χρήσει τοῦ ἀνωτέρω τύπου, διδόντος τὴν τιμὴν τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ $\int z^\nu e^{\alpha z}\,\delta z$, ἐν ᾗ ἀντικαταστήσομεν $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ ἀντὶ α. Ἡ τιμὴ αὕτη ἀποκαθίσταται οὕτω τροπῇ z εἰς x,

$$\int x^\nu e^{\alpha x}\left(\text{συν}\,\beta x + \sqrt{-1}\;\text{ημ}\,\beta x\right)\delta x =$$

$$\frac{e^{\alpha x}(\text{συν}\beta x+\sqrt{-1}\,\text{ημ}\beta x)}{\alpha+\beta\sqrt{-1}}\left[x^\nu - \frac{\nu x^{\nu-1}}{\alpha+\beta\sqrt{-1}} + \ldots \pm \frac{\nu(\nu-1)\ldots 2.1}{(\alpha+\beta\sqrt{-1})^\nu}\right] + A.$$

Ἰσοῦντες ἀλλήλοις τά τε πραγματικὰ καὶ τὰ φανταστικὰ μέρη ἀμφοτέρων τῶν μελῶν, ἕξομεν τὰς τιμὰς τῶν δύο ζητουμένων ὁλοκληρωτικῶν.

327. Ὅταν τὰ ὑπερβατικὰς συνεκθέσεις περιέχοντα ἀπειροστά, οὐχ ὁλοκληροῦνται πεπερασμένως, προσπαθοῦμεν τοὐλάχιστον ποιῆσαι ὅπως ἐξαρτῶνται ἀφ' ἑτέρων συνεκθέσεων ἁπλουστέρων. Ἁπάντων τῶν πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον χρησιμευόντων ἀναγωγικῶν τύπων, διακριτέοι εἰσὶν οἱ ἁρμόζοντες τοῖς διαφορικοῖς τοῦ σχήματος

$$\text{ημ}^\mu x\,\text{συν}^\nu x\,\delta x,$$

μ καὶ ν δηλούντων ἀριθμοὺς οἱουσδήποτε θετικοὺς ἢ ἀρνητικούς.

Παρατηρητέον κατὰ πρῶτον, ὅτι τὸ διαφορικὸν τοῦτο ἄγεται εὐκόλως εἰς τὰ διαφορικὰ διώνυμα περὶ ὧν ἤδη ἐπραγματεύθημεν. Τῷ ὄντι ἔχομεν·

$$\text{ημ}^\mu x\,\text{συν}^\nu x\,\delta x = \text{ημ}^\mu x\,(1-\text{ημ}^2 x)^{\frac{\nu}{2}}\,\delta x.$$

Θέτοντες δὲ

$$\text{ημ}\,x = \tau, \qquad \text{ὅθεν} \qquad \delta x = \frac{\delta\tau}{\sqrt{1-\tau^2}},$$

συνάγομεν

$$\text{ημ}^\mu x\,\text{συν}^\nu x\,\delta x = \tau^\mu(1-\tau^2)^{\frac{\nu-1}{2}}\,\delta\tau.$$

Ἄρα, τὸ τεθὲν διαφορικὸν ἔσεται ὁλοκληρώσιμον ὅταν $\frac{\mu+1}{2}$ ἦναι ἀριθμὸς ἀκέραιος· ἤτοι ὅταν μ ἦναι ἀριθμὸς ἀκέραιος περιττός, ἢ ν ἀριθμὸς ἀκέραιος περιττός, ἢ ὅταν μ+ν ἦναι ἀριθμὸς ἀκέραιος ἄρτιος.

Δυνάμεθα ὑποθέσαι συν x = τ· τότε τὸ προτεθὲν διαφορικὸν ἀποκαθίσταται

$$-\tau^\nu(1-\tau^2)^{\frac{\mu-1}{2}}\,\delta\tau,$$

ὁμοίας δὲ συνάγομεν ἐντεῦθεν συνεπείας.

328. Ἀντὶ τῶν προειρημένων μεταμορφώσεων δυνάμεθα ἐφαρμόσαι ἀμέσως ἐπὶ τὸ προτεθὲν διαφορικὸν τὴν μοιρικὴν ὁλοκλήρωσιν. Οὕτως εὑρίσκομεν·

$$(1)\quad \int \text{ημ}^\mu x\,\text{συν}^\nu x\,\delta x =$$

$$\frac{\text{ημ}^{\mu+1}x\,\text{συν}^{\nu-1}x}{\mu+1} + \frac{\nu-1}{\mu+1}\int \text{ημ}^{\mu+2}x\,\text{συν}^{\nu-2}x\,\delta x.$$

Ἀλλὰ

$$\int \text{ημ}^{\mu+2}x\,\text{συν}^{\nu-2}x\,\delta x = \int\left(\text{ημ}^\mu x\,\text{συν}^{\nu-2}x\right)(1-\text{συν}^2 x)\,\delta x$$

$$= \int \text{ημ}^\mu x\,\text{συν}^{\nu-2}x\,\delta x - \int \text{ημ}^\mu x\,\text{συν}^\nu x\,\delta x.$$

Ἀντεισάγοντες καὶ ἁπλοποιοῦντες λαμβάνομεν·

(2) $\int \acute{\eta}\mu^{\mu} x \, \sigma\upsilon\nu^{\nu} x \, \delta x =$

$$\frac{\acute{\eta}\mu^{\mu+1} x \, \sigma\upsilon\nu^{\nu-1} x}{\mu+\nu} + \frac{\nu-1}{\mu+\nu} \int \acute{\eta}\mu^{\mu} x \, \sigma\upsilon\nu^{\nu-2} x \, \delta x.$$

Τῷ τύπῳ τούτῳ ὁ ἐκθέτης ν, ὅταν ἦναι θετικός, μειοῦται δυσὶ μονάσι, μὴ μεταβαλλομένου τοῦ μ. Ἐξαιρετέον τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν $\mu + \nu = 0$, ἣν μετ' οὐ πολὺ ἐξετάσομεν. Ἐξακολουθοῦντες κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, τῇ ὑποθέσει ὅτι ἡ ῥηθεῖσα ἐξαίρεσις δὲν παρουσιάζεται μέχρι τέλους τῶν λογισμῶν, ὁ ἐκθέτης τοῦ συν x, εἰ ἀκέραιος ἐστὶν, ἐλαττωθήσεται μέχρι 0 ἢ 1.

Διευθυνομένης διαφόρως τῆς μεθόδου, ἐλαττοῦμεν τὸν ἐκθέτην τοῦ ἡμ. x.

(3) $\int \acute{\eta}\mu^{\mu} x \, \sigma\upsilon\nu^{\nu} x \, \delta x =$

$$-\frac{\sigma\upsilon\nu^{\nu+1} x \, \acute{\eta}\mu^{\mu-1} x}{\nu+1} + \frac{\mu-1}{\nu+1} \int \acute{\eta}\mu^{\mu-2} x \, \sigma\upsilon\nu^{\nu+2} x \, \delta x.$$

Ἀλλὰ

$$\int \acute{\eta}\mu^{\mu-2} x \, \sigma\upsilon\nu^{\nu+2} x \, \delta x = \int (\acute{\eta}\mu^{\mu-2} x \, \sigma\upsilon\nu^{\nu} x)(1 - \acute{\eta}\mu^{2} x) \, \delta x$$

$$= \int \acute{\eta}\mu^{\mu-2} x \, \sigma\upsilon\nu^{\nu} x \, \delta x - \int \acute{\eta}\mu^{\mu} x \, \sigma\upsilon\nu^{\nu} x \, \delta x.$$

Ἀντεισάγοντες ἐν τῷ προηγουμένῳ τύπῳ καὶ ἁπλοποιοῦντες λαμβάνομεν·

(4) $\int \acute{\eta}\mu^{\mu} x \, \sigma\upsilon\nu^{\nu} x \, \delta x =$

$$-\frac{\acute{\eta}\mu^{\mu-1} x \, \sigma\upsilon\nu^{\nu+1} x}{\mu+\nu} + \frac{\mu-1}{\mu+\nu} \int \acute{\eta}\mu^{\mu-2} x \, \sigma\upsilon\nu^{\nu} x \, \delta x.$$

Ἐξαιρέσει καὶ αὖθις τῆς περιπτώσεως $\mu + \nu = 0$, δυνατὸν ἐλαττῶσαι τὸν ἐκθέτην τοῦ ἡμ x καθ' οἱονδήποτε ἀριθμὸν ἄρτιον, εἰ δὲ ἀκέραιος ἐστὶν ὁ ἐκθέτης οὗτος μειωθήσεται μέχρι 0 ἢ 1, τοῦ ἐκθέτου τοῦ συν x μένοντος τοῦ αὐτοῦ. Ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ἐκθέται οὗτοι ὦσιν ἀκέραιοι, ἐλαττοῦμεν αὐτοὺς διαδοχικῶς, κατὰ τὸ δυνατὸν, μένοντας ἀεί-

ποτε θετικούς. Ἐν τέλει δὲ καταντῶμεν εἰς μίαν τῶν ἑξῆς ἐκθέσεων·

$$\int \delta x, \quad \int \sigma\upsilon\nu\, x \, \delta x, \quad \int \acute{\eta}\mu\, x \, \delta x, \quad \int \acute{\eta}\mu\, x \, \sigma\upsilon\nu\, x \, \delta x,$$

ἃς μετ' ὀλίγον δείξομεν τίνι τρόπῳ ὁλοκληροῦμεν.

Τεθείσθω ἤδη ὅτι, τοῦ ἐκθέτου μ. ὄντος θετικοῦ, ν εἶναι ἀρνητικός. Ὁ τύπος (2), τρεπομένου ν εἰς —ν, δίδει·

$$\int \frac{\acute{\eta}\mu^{\mu} x}{\sigma\upsilon\nu^{\nu} x} \delta x = \frac{\acute{\eta}\mu^{\mu+1} x}{(\mu-\nu)\sigma\upsilon\nu^{\nu+1} x} - \frac{\nu+1}{\mu-\nu} \int \frac{\acute{\eta}\mu^{\mu} x}{\sigma\upsilon\nu^{\nu+2} x} \delta x.$$

Τοῦ ἐκθέτου τοῦ συν x ὄντος ηὐξημένου δυσὶ μονάσι, ληπτέον τὴν τιμὴν τοῦ ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει ὁλοκληρωτικοῦ. Εὑρίσκομεν, καθιστῶντες ν ἀντὶ ν + 2,

(5) $$\int \frac{\acute{\eta}\mu^{\mu} x}{\sigma\upsilon\nu^{\nu} x} \delta x = \frac{\acute{\eta}\mu^{\mu+1} x}{(\nu-1)\sigma\upsilon\nu^{\nu-1} x} + \frac{\nu-\mu-2}{\nu-1} \int \frac{\acute{\eta}\mu^{\mu} x}{\sigma\upsilon\nu^{\nu-2} x} \delta x.$$

Ὁ τύπος οὗτος δὲν ἐφαρμόζεται ὅταν $\nu = 1$. Ἐὰν συγχρόνως μ ἦναι ἀκέραιος, καταβιβάζομεν αὐτὸν διὰ τοῦ τύπου (4), καὶ καταντῶμεν εἰς τὰς ἐκθέσεις

$$\int \frac{\acute{\eta}\mu\, x}{\sigma\upsilon\nu x} \delta x, \quad \text{ἢ} \quad \int \frac{\delta x}{\sigma\upsilon\nu\, x},$$

ἃς μετὰ μικρὸν ὁλοκληρώσομεν.

Εἰ τοὐναντίον, ν μὲν εἶναι θετικὸς μ δὲ ἀρνητικός, ἀντικαθιστῶμεν —μ ἀντὶ τοῦ τελευταίου ἐν τῷ τύπῳ (4), ὅπερ δίδει·

$$\int \frac{\sigma\upsilon\nu^{\nu} x}{\acute{\eta}\mu^{\mu} x} \delta x = \frac{\sigma\upsilon\nu^{\nu+1} x}{(\mu-\nu)\acute{\eta}\mu^{\mu+1} x} + \frac{\mu+1}{\mu-\nu} \int \frac{\sigma\upsilon\nu^{\nu} x}{\acute{\eta}\mu^{\mu+2} x} \delta x,$$

Τοῦ ἐκθέτου τοῦ ἡμ x ηὐξημένου ὄντος δυσὶ μονάσιν, ἐξακτέον τὴν τιμὴν τοῦ ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει ὁλοκληρωτικοῦ. Τρέπομεν μ + 2 εἰς μ, καὶ ἔχομεν·

$$(6)\int\frac{\text{συν}^{\nu}x}{\text{ἡμ}^{\mu}x}\delta x=-\frac{\text{συν}^{\nu+1}x}{(\mu-1)\text{ἡμ}^{\mu-1}x}+\frac{\mu-\nu-2}{\mu-1}\int\frac{\text{συν}^{\nu}x}{\text{ἡμ}^{\mu-2}x}\delta x.$$

Ὁ τύπος οὗτος δὲν ἐφαρμόζεται ὅταν $\mu=1$. Τότε ἐλαττοῦμεν τὸν τοῦ συν x ἐκθέτην· ὅταν δὲ οὗτος ἦναι ἀκέραιος καταντῶμεν εἰς τὴν ἑτέραν τῶν ἐκθέσεων

$$\int\frac{\text{συν}x}{\text{ἡμ}\,x},\qquad \text{ἢ}\qquad \int\frac{\delta x}{\text{ἡμ}x}.$$

Τεθείσθωσαν τέλος ἀμφότεροι οἱ ἐκθέται μ, ν, ἀρνητικοί. Καθιστῶμεν ἀντ' αὐτῶν $-\mu$ καὶ $-\nu$. Ὁ τύπος (2) δίδει·

$$\int\frac{\delta x}{\text{ἡμ}^{\mu}x\,\text{συν}^{\nu}x}=\frac{-1}{(\mu+\nu)\text{ἡμ}^{\mu-1}x\,\text{συν}^{\nu+1}x}+\frac{\nu+1}{\mu+\nu}\int\frac{\delta x}{\text{ἡμ}^{\mu}x\,\text{συν}^{\nu+2}x},$$

ἢ, λαμβάνοντες τὴν τιμὴν τοῦ δευτέρου ὁλοκληρωτικοῦ καὶ τρέποντες $\nu+2$ εἰς ν,

$$(7)\quad\int\frac{\delta x}{\text{ἡμ}^{\mu}x\,\text{συν}^{\nu}x}=$$

$$\frac{1}{(\nu-1)\text{ἡμ}^{\mu-1}x\,\text{συν}^{\nu-1}x}+\frac{\mu+\nu-2}{\mu-1}\int\frac{\delta x}{\text{ἡμ}^{\mu}x\,\text{συν}^{\nu-2}x};$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἐκ τοῦ τύπου (4) συνάγομεν·

$$\int\frac{\delta x}{\text{ἡμ}^{\mu}x\,\text{συν}^{\nu}x}=\frac{1}{(\mu+\nu)\text{ἡμ}^{\mu+1}x\,\text{συν}^{\nu-1}x}+\frac{\mu+1}{\mu+\nu}\int\frac{\delta x}{\text{ἡμ}^{\mu+2}x\,\text{συν}^{\nu}x}.$$

Ἐξάγοντες δ' ἐντεῦθεν τὴν τιμὴν τοῦ δευτέρου ὁλοκληρωτικοῦ καὶ καθιστῶντες μ ἀντὶ $\mu+2$,

$$(8)\quad\frac{\delta x}{\text{ἡμ}^{\mu}x\,\text{συν}^{\nu}x}=$$

$$\frac{-1}{(\mu-1)\text{ἡμ}^{\mu-1}x\,\text{συν}^{\nu-1}x}+\frac{\mu+\nu-2}{\mu-1}\int\frac{\delta x}{\text{ἡμ}^{\mu-2}x\,\text{συν}^{\nu}x},$$

Διὰ τῶν τύπων (7) καὶ (8) ἐλαττωθήσονται, κατὰ τὸν ὅσον δυνατὸν μείζονα ἀριθμὸν ἄρτιον, οἱ ἐκθέται τῶν ἡμ x καὶ συν x. Μόνη ἐξαιρετέα περίπτωσις ὅταν $\mu=1$, ἢ $\nu=1$· ἀλλὰ τότε, ὑποτιθεμένων μ καὶ ν ἀκεραίων, καταντῶμεν εἰς μίαν τῶν ἐκθέσεων·

$$\int\frac{\delta x}{\text{ἡμ}\,x},\qquad\int\frac{\delta x}{\text{συν}\,x},\qquad\int\frac{\delta x}{\text{ἡμ}\,x\,\text{συν}\,x}.$$

329. Ἀνακεφαλαιοῦντες τὰς μερικὰς περιπτώσεις εἰς ἃς ἄγει ἡ τῶν προαποδοθεισῶν μεθόδων ἐφαρμογή, συνάγομεν ὅτι, ὅταν οἱ ἐκθέται μ καὶ ν ὦσιν ἀκέραιοι, καταντῶμεν ἀείποτε εἰς ἓν τῶν ἑξῆς ὁλοκληρωτικῶν·

$$\int\delta x,\qquad\int\text{συν}\,x\,\delta x,\qquad\int\text{ἡμ}\,x\,\delta x,\qquad\int\text{ἡμ}\,x\,\text{συν}\,x\,\delta x,$$

$$\int\frac{\text{ἡμ}\,x}{\text{συν}x}\,\delta x,\qquad\int\frac{\text{συν}x}{\text{ἡμ}\,x}\,\delta x,\qquad\int\frac{\delta x}{\text{ἡμ}\,x\,\text{συν}\,x},\qquad\int\frac{\delta x}{\text{ἡμ}\,x},$$

$$\int\frac{\delta x}{\text{συν}x},\qquad\int\frac{\text{ἡμ}^{\mu}x}{\text{συν}^{\mu}x}\,\delta x,\qquad\int\frac{\text{συν}^{\mu}x}{\text{ἡμ}^{\mu}x}\,\delta x.$$

Τὰς τιμὰς τῶν τεσσάρων πρώτων λαμβάνομεν ἀμέσως· εἰσὶ δὲ ἀμοιβαίως αἱ ἑξῆς·

$$\int\delta x=x+\Lambda,\qquad\int\text{συν}\,x\,\delta x=\text{ἡμ}\,x+\Lambda,$$

$$\int\text{ἡμ}x\,\delta x=-\text{συν}x+\Lambda;\qquad\int\text{ἡμ}x\,\text{συν}x\,\delta x=\tfrac{1}{2}\,\text{ἡμ}^{2}x+\Lambda.$$

Ἐν τοῖς δυσὶν ἐφεξῆς ὁ ἀριθμητὴς εἶναι τὸ διαφορικὸν τοῦ παρονομαστοῦ, πλὴν τοῦ σημείου· ἄρα,

$$\int\frac{\text{ἡμ}\,x}{\text{συν}x}\,\delta x=-\lambda\,\text{συν}\,x+\Lambda,$$

$$\int\frac{\text{συν}x}{\text{ἡμ}\,x}\,\delta x=\lambda\,\text{ἡμ}\,x+\Lambda.$$

Τὸ ἕβδομον ὁλοκληροῦται τῇ διαιρέσει ἀμφοτέρων τῶν ὅρων αὐτοῦ διὰ συν^{2}x·

$$\int \frac{\delta x}{\acute{\eta}\mu\, x\, \sigma\upsilon\nu x} = \int \frac{\frac{\delta x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}{\frac{\acute{\eta}\mu\, x}{\sigma\upsilon\nu\, x}} = \int \frac{\delta\,.\,\grave{\epsilon}\varphi\, x}{\grave{\epsilon}\varphi\, x} = \lambda\, \grave{\epsilon}\varphi\, x + A;$$

Τὸ $\frac{\delta x}{\acute{\eta}\mu\, x}$ ὁλοκληροῦται τῇ διαιρέσει τῶν δύο αὐτοῦ ὅρων διὰ $\sigma\upsilon\nu^2 \frac{1}{2} x$, ἀφοῦ προηγουμένως τεθῇ ἀντὶ $\acute{\eta}\mu\, x$ τὸ ἴσον αὐτῷ $2\acute{\eta}\mu \frac{1}{2} x\ \sigma\upsilon\nu \frac{1}{2} x$·

$$\int \frac{\delta x}{\acute{\eta}\mu\, x} = \int \frac{\frac{\delta\,.\,\frac{1}{2} x}{\sigma\upsilon\nu^2 \frac{1}{2} x}}{\frac{\acute{\eta}\mu\, \frac{1}{2} x}{\sigma\upsilon\nu\, \frac{1}{2} x}} = \int \frac{\delta\,.\,\grave{\epsilon}\varphi\, \frac{1}{2} x}{\grave{\epsilon}\varphi \frac{1}{2} x} = \lambda\, \grave{\epsilon}\varphi\, \frac{1}{2} x + A,$$

Τὸ ὁλοκληρωτικὸν $\int \frac{\delta x}{\sigma\upsilon\nu x}$ ἄγεται εἰς τὸ $\int \frac{\delta x}{\acute{\eta}\mu\, x}$,

$$\int \frac{\delta x}{\sigma\upsilon\nu x} = \int \frac{\delta x}{\acute{\eta}\mu(\frac{1}{2}\Pi - x)} = -\int \frac{\delta(\frac{1}{2}\Pi - x)}{\acute{\eta}\mu(\frac{1}{2}\Pi - x)}$$

$$= -\lambda \grave{\epsilon}\varphi(\tfrac{1}{4}\Pi - \tfrac{1}{2}x) + A = \lambda \grave{\epsilon}\varphi(\tfrac{1}{4}\Pi + \tfrac{1}{2}x) + A,$$

330. Ὑπολείπεται ἤδη ἡ ὁλοκλήρωσις τῶν δύο ἐκθέσεων $\frac{\acute{\eta}\mu^\nu x}{\sigma\upsilon\nu^\nu x}\delta x$, $\frac{\sigma\upsilon\nu^\nu x}{\acute{\eta}\mu^\nu x}\delta x$, ὧν ἡ ἑτέρα ἄγεται εἰς τὴν ἑτέραν τροπῇ τοῦ x εἰς $\frac{1}{2}\Pi - x$.

Ὁ τύπος (1), ὑποτιθεμένου ν ἀρνητικοῦ καὶ ἴσου $-\mu$, καθίσταται

$$\int \grave{\epsilon}\varphi^{\mu} x\, \delta x = \frac{\grave{\epsilon}\varphi^{\mu+1} x}{\mu + 1} - \int \grave{\epsilon}\varphi^{\mu+2} x \delta x\cdot$$

ὅθεν συνάγομεν, θέτοντες μ ἀντὶ $\mu + 2$,

$$\int \grave{\epsilon}\varphi^{\mu} x\, \delta x = \frac{\grave{\epsilon}\varphi^{\mu-1} x}{\mu - 1} - \int \grave{\epsilon}\varphi^{\mu-2} x \delta x.$$

Ἐξακολουθοῦντες καταβιβάζειν τὸν ἐκθέτην μ κατὰ δύο μονάδας, καταντήσομεν εἰς τὰ ὁλοκληρωτικά, προηγουμένως ὁρισθέντα,

$$\int \delta x, \quad \text{ἢ} \quad \int \grave{\epsilon}\varphi\, x\, \delta x = \int \frac{\acute{\eta}\mu\, x}{\sigma\upsilon\nu x}\delta x.$$

Ὡσαύτως εὑρίσκομεν·

$$\int \sigma\upsilon\nu\epsilon\varphi^{\mu} x\, \delta x = -\frac{\sigma\upsilon\nu\epsilon\varphi^{\mu-1} x}{\mu - 1} - \int \sigma\upsilon\nu\epsilon\varphi^{\mu-2} x\, \delta x.$$

Ὁ τύπος οὗτος ἄγει εἰς ἓν τῶν ὁρισθέντων ἤδη ὁλοκληρωτικῶν,

$$\int \delta x, \quad \text{ἢ} \quad \int \sigma\upsilon\nu\epsilon\varphi\, x\, \delta x = \int \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\acute{\eta}\mu\, x}\delta x.$$

331. Ἐφαρμοζομένων τῶν αὐτῶν κανόνων πρὸς ὁρισμὸν τῶν ὁλοκληρωτικῶν

$$\int \acute{\eta}\mu^\nu x\, \delta x, \qquad \int \sigma\upsilon\nu^\nu x\, \delta x, \qquad \int \grave{\epsilon}\varphi^\nu x\, \delta x,$$

$$\int \sigma\upsilon\nu\epsilon\varphi^\nu x\, \delta x, \qquad \int \frac{\delta x}{\sigma\upsilon\nu^\nu x}, \qquad \int \frac{\delta x}{\acute{\eta}\mu^\nu x},$$

εὑρίσκομεν τὰ ἐν τῷ ὄπισθεν πίνακι ἐξαγόμενα.

1ον. Τοῦ ἐκθέτου ν ἀρτίου ὄντος·

$$\int \eta\mu^{\nu}x\,\delta x = -\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\nu}\left(\eta\mu^{\nu-1}x + \frac{\nu-1}{\nu-2}\eta\mu^{\nu-3}x + \ldots + \frac{3.5\ldots[\nu-3][\nu-1]}{2.4\ldots[\nu-4][\nu-2]}\eta\mu x\right) + \frac{1.3\ldots[\nu-3][\nu-1]}{2.4\ldots[\nu-2]\nu}x + A.$$

$$\int \sigma\upsilon\nu^{\nu}x\,\delta x = \frac{\eta\mu\, x}{\nu}\left(\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x + \frac{\nu-1}{\nu-2}\sigma\upsilon\nu^{\nu-3}x + \ldots + \frac{3.5\ldots[\nu-3][\nu-1]}{2.4\ldots[\nu-4][\nu-2]}\sigma\upsilon\nu x\right) + \frac{1.3\ldots[\nu-3][\nu-1]}{2.4\ldots[\nu-2]\nu}x + A.$$

$$\int \dot{\epsilon}\varphi^{\nu}x\,\delta x = \frac{\dot{\epsilon}\varphi^{\nu-1}x}{\nu-1} - \frac{\dot{\epsilon}\varphi^{\nu-3}x}{\nu-3} + \ldots\ldots \pm \dot{\epsilon}\varphi x \mp x + A.$$

$$\int \sigma\upsilon\nu\epsilon\varphi^{\nu}x\,\delta x = -\frac{\sigma\upsilon\nu\epsilon\varphi^{\nu-1}x}{\nu-1} + \frac{\sigma\upsilon\nu\epsilon\varphi^{\nu-3}x}{\nu-3} - \ldots\ldots \pm \sigma\upsilon\nu\epsilon\varphi\, x \mp x + A.$$

$$\int \tau\acute{\epsilon}\mu^{\nu}x\,\delta x = \frac{\eta\mu\, x}{\nu-1}\left(\tau\acute{\epsilon}\mu^{\nu-1}x + \frac{\nu-2}{\nu-3}\tau\acute{\epsilon}\mu^{\nu-3}x + \ldots + \frac{2.4\ldots[\nu-4][\nu-2]}{1.3\ldots[\nu-5][\nu-3]}\tau\acute{\epsilon}\mu\, x\right) + A.$$

$$\int \sigma\upsilon\nu\delta^{\nu}x\,\delta x = -\frac{\sigma\upsilon\nu\, x}{\nu-1}\left(\sigma\upsilon\nu\delta^{\nu-1}x + \frac{\nu-2}{\nu-3}\sigma\upsilon\nu\delta^{\nu-3}x + \ldots + \frac{2.4\ldots[\nu-2]}{1.3\ldots[\nu-3]}\sigma\upsilon\nu\delta\, x\right) + A.$$

2ον. Τοῦ ἐκθέτου ν περιττοῦ ὄντος·

$$\int \eta\mu^{\nu}x\,\delta x = -\frac{\sigma\upsilon\nu\, x}{\nu}\left(\eta\mu^{\nu-1}x + \frac{\nu-1}{\nu-2}\eta\mu^{\nu-3}x + \ldots + \frac{2.4\ldots[\nu-3][\nu-1]}{1.3\ldots[\nu-4][\nu-2]}\right) + A.$$

$$\int \sigma\upsilon\nu^{\nu}x\,\delta x = \frac{\eta\mu\, x}{\nu}\left(\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x + \frac{\nu-1}{\nu-2}\sigma\upsilon\nu^{\nu-3}x + \ldots + \frac{2.4\ldots[\nu-3][\nu-1]}{1.3\ldots[\nu-4][\nu-2]}\right) + A.$$

$$\int \dot{\epsilon}\varphi^{\nu}x\,\delta x = \frac{\dot{\epsilon}\varphi^{\nu-1}x}{\nu-1} - \frac{\dot{\epsilon}\varphi^{\nu-3}x}{\nu-3} + \ldots \pm \frac{\dot{\epsilon}\varphi^{2}x}{2} \mp \lambda\,\sigma\upsilon\nu x + A.$$

$$\int \sigma\upsilon\nu\epsilon\varphi^{\nu}x\,\delta x = -\frac{\sigma\upsilon\nu\epsilon\varphi^{\nu-1}x}{\nu-1} + \frac{\sigma\upsilon\nu\epsilon\varphi^{\nu-3}x}{\nu-3} + \ldots \pm \frac{\sigma\upsilon\nu\epsilon\varphi^{2}x}{2} \mp \lambda\,\eta\mu\, x + A.$$

$$\int \tau\acute{\epsilon}\mu^{\nu}x\,\delta x = \frac{\eta\mu\, x}{\nu-1}\left(\tau\acute{\epsilon}\mu^{\nu-1}x + \frac{\nu-2}{\nu-3}\tau\acute{\epsilon}\mu^{\nu-3}x + \ldots + \frac{3.5\ldots[\nu-2]}{2.4\ldots[\nu-3]}\tau\acute{\epsilon}\mu^{2}x\right) + \frac{1.3\ldots[\nu-2]}{2.4\ldots[\nu-1]}\lambda\dot{\epsilon}\varphi\left(\frac{x}{2} + \frac{\Pi}{4}\right) + A.$$

$$\int \sigma\upsilon\nu\delta^{\nu}x\,\delta x = -\frac{\sigma\upsilon\nu\, x}{\nu-1}\left(\sigma\upsilon\nu\delta^{\nu-1}x + \frac{\nu-2}{\nu-3}\sigma\upsilon\nu\delta^{\nu-3}x + \ldots + \frac{3.5\ldots[\nu-2]}{2.4\ldots[\nu-3]}\sigma\upsilon\nu\delta^{2}x\right) + \frac{1.3\ldots[\nu-2]}{2.4\ldots[\nu-1]}\lambda\,\dot{\epsilon}\varphi\frac{x}{2} + A.$$

332. Παρατηρητέον ὅτι, πολλάκις ἁπλούστερον εἶναι ἀναλύειν τὰ ὑπὸ τὴν μορφὴν $\dfrac{\delta x}{\text{ημ}^{\mu} x \,\text{συν}^{\nu} x}$ διαφορικὰ πολυπλασιάζοντες αὐτὰ ἅπαξ ἢ πολλάκις ἐκ διαδοχῆς ἐπὶ $\text{ημ}^2 x + \text{συν}^2 x$, ὅπερ οὐδόλως μεταβάλλει τὴν τιμὴν αὐτῶν, καὶ ὁλοκληροῦντες ἰδίᾳ ἅπαντα τὰ κλάσματα ἐν τῷ παρονομαστῇ τῶν ὁποίων δὲν περιέχεται ἢ μία δύναμις τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν. Ἐν τέλει τῆς ἐργασίας καταντῶμεν εἰς ὅρους οἵτινες δυνατὸν νὰ περιέχωσι δυνάμεις τοῦ ἡμιτόνου ἢ τοῦ συνημιτόνου, ἢ οἵτινες ἔχουσι μίαν τῶν ἑξῆς μορφῶν·

$$\int \frac{\delta x}{\text{ημ}\, x\, \text{συν}\, x}, \qquad \int \frac{\delta x}{\text{συν}\, x}, \qquad \int \frac{\delta x}{\text{ημ}\, x}.$$

Παρατηρητέον ὅτι, ἐνίοτε ἐπωφελῶς ἀντικαθίστανται αἱ δυνάμεις τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου διὰ τῶν ἐκτυλιγμάτων αὐτῶν κατὰ συνεκθέσεις γραμμικὰς τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων τῶν πολλαπλασίων τοῦ x.

333. Ἕπονται ὑποδείγματά τινα πρὸς ἄσκησιν.

1) $$\int \frac{\delta x}{\alpha + \beta\, \text{συν}^2 x + \gamma\, \text{ημ}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}}\, \text{τόξ έφ}\, \tau \sqrt{\frac{\alpha+\gamma}{\alpha+\beta}} + \Lambda.$$

Ὁλοκληροῦμεν θέτοντες $\text{έφ}\, x = \tau$. Ἐὰν $\alpha+\gamma$ καὶ $\alpha+\beta$ δὲν ἔχωσι τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἡ ἔκθεσις αὕτη τρέπεται εἰς λογάριθμον.

2) $$\int \frac{\delta x}{\alpha + \beta\, \text{συν}\, x}.$$

Ἡ ἔκθεσις αὕτη ἄγεται εἰς τὴν προηγουμένην τῇ ἀντικαταστάσει $\text{συν}^2 \frac{1}{2} x - \text{ημ}^2 \frac{1}{2} x$ ἀντὶ $\text{συν}\, x$· τότε καθιστῶμεν $\text{έφ}\, \frac{1}{2} x = \tau$.

3) $$\int \frac{x^{\mu} \delta x}{\sqrt{\lambda x}} = \Lambda +$$

$$x^{\mu+1}\left[\frac{1}{(\mu+1)\sqrt{\lambda x}} + \frac{1}{2(\mu+1)^2(\lambda x)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1\,.\,3}{4(\mu+1)^3(\lambda x)^{\frac{5}{2}}} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{8(\mu+1)^4(\lambda x)^{\frac{7}{2}}} + \ldots\right].$$

4) $$\int \text{ημ}^5 x\, \delta x = \tfrac{1}{16}\left(-\tfrac{1}{5}\,\text{συν} 5x + \tfrac{5}{3}\,\text{συν} 3x - 10\,\text{συν} x\right) + \Lambda.$$

5) $$\int \frac{e^x x\, \delta x}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{1+x} + \Lambda.$$

6) $$\int \delta x \sqrt{1 - \text{συν} x} = -2\sqrt{2}\,.\,\text{συν}\, \tfrac{1}{2} x + \Lambda.$$

7) $$\int \delta x \sqrt{1 + \text{συν} x} = 2\sqrt{2}\,.\,\text{ημ}\, \tfrac{1}{2} x + \Lambda.$$

8) $$\int \frac{\delta x}{\alpha\, \text{ημ} x + \beta\, \text{συν} x} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\, \lambda\, \text{έφ}\, \frac{x+k}{2} + \Lambda.$$

Ἐθέσαμεν $\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \text{ημ} k$, $\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \text{συν} k$.

9) $$\int \frac{\delta x}{\alpha\, \text{ημ} x + \beta\, \text{συν} x + \gamma}.$$

Καθιστῶμεν $\text{έφ}\, \frac{1}{2} x = \tau$, καὶ οὕτως ἔχομεν πρὸς ὁλοκλήρωσιν τὸ λογικὸν κλάσμα

$$\int \frac{2\delta\tau}{2\alpha\tau + \beta(1-\tau^2) + \gamma(1+\tau^2)},$$

ὅπερ δίδει, κατὰ τὰς περιπτώσεις,

$$\frac{2}{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2 - \alpha^2}}\, \text{τόξ έφ}\, \frac{(\gamma - \beta)\, \text{έφ}\, \frac{1}{2} x + \alpha}{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2 - \alpha^2}} + \Lambda,$$

ἢ $$\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}}\, \lambda\, \frac{(\gamma-\beta)\, \text{έφ}\, \frac{1}{2} x + \alpha - \sqrt{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}}{(\gamma-\beta)\, \text{έφ}\, \frac{1}{2} x + \alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}}.$$

10) $$\int \frac{\lambda x\,.\,\delta x}{(1-x)^2} = \frac{x \lambda x}{1-x} - \lambda\left(\frac{1}{1-x}\right) + \Lambda.$$

11) $$\int \frac{\delta x}{x\sqrt{x}}\, \lambda\left(\frac{1}{1-x}\right) =$$

$$-\frac{2}{\sqrt{x}}\, \lambda\left(\frac{1}{1-x}\right) + 2\lambda\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) + \Lambda.$$

12) $$\int\frac{\alpha^x\delta x}{x^\nu} = A - \frac{\alpha^x}{(\nu-1)x^{\nu-1}} - \frac{\alpha^x\lambda\alpha}{(\nu-1)(\nu-2)x^{\nu-2}}$$

$$\dots - \frac{\alpha^x(\lambda\alpha)^{\nu-2}}{(\nu-1)(\nu-2)\dots1.x} + \frac{(\lambda\alpha)^{\nu-1}}{(\nu-1)(\nu-2)\dots1}\int\frac{\alpha^x\delta x}{x}.$$

Ἐν τῷ ὑποδείγματι τούτῳ ἀδύνατον προχωρῆσαι τὸν λογισμόν· διότι ἡ ἐν τοῖς προηγουμένοις αὐτοῦ ὑπόθεσις $\nu = 1$ δίδει τὸ ἄπειρον, ὅπερ ἐμφαίνει ἀτοπίαν. Τὸ ὁλοκληρωτικὸν $\int\frac{\alpha^x\delta x}{x}$ δὲν εὗρον μέχρι τοῦδε οἱ Γεωμετροῦντες· θεωροῦσι δὲ αὐτὸ ὡς ἔκθεσιν ὑπερβατικὴν ἰδιάζουσαν, μὴ ἐξαρτωμένην οὔτε ἀπὸ τόξων κύκλου, οὔτε ἀπὸ λογαρίθμων. Ἐν ἐλλείψει μεθόδου ἀκριβοῦς ποιοῦσι χρῆσιν τῆς σειρᾶς [126],

$$\frac{\alpha^x}{x} = \frac{1}{x} + \lambda\alpha + \frac{(\lambda\alpha)^2}{2}x + \frac{(\lambda\alpha)^3}{2.3}x^2 + \dots\dots,$$

ἑπομένως συνάγουσιν, ὁλοκληροῦντες ἕκαστον ὅρον ἰδίᾳ,

$$\int\frac{\alpha^x\delta x}{x} = \lambda x + x\lambda\alpha + \frac{x^2(\lambda\alpha)^2}{2.2} + \frac{x^3(\lambda\alpha)^3}{3.2.3} + \dots + A.$$

13) $$\int\frac{\alpha^x\delta x}{1-x} = A +$$

$$\alpha^x\left[\frac{1}{(1-x)\lambda\alpha} - \frac{1}{(1-x)^2(\lambda\alpha)^2} + \frac{1.2}{(1-x)^3(\lambda\alpha)^3} - \frac{1.2.3}{(1-x)^4(\lambda\alpha)^4} + \dots\right].$$

14) $$\int\frac{x^\mu\delta x}{(\lambda x)^\nu} = -\frac{x^{\mu+1}}{\nu-1}\left[\frac{1}{(\lambda x)^{\nu-1}} + \frac{(\mu+1)}{(\nu-2)(\lambda x)^{\nu-2}}\right.$$

$$\left.+\frac{(\mu+1)^2}{(\nu-2)(\nu-3)(\lambda x)^{\nu-3}} + \dots\right] + \frac{(\mu+1)^{\nu-1}}{1.2.3\dots(\nu-1)}\int\frac{x^\mu\delta x}{\lambda x}$$

Ἐνταῦθα ἐπίσης σταματοῦμεν· διότι λαμβάνοντες $\nu = 1$ εἰσάγομεν ἐν τῷ τύπῳ τὸ ἄπειρον. Ἀλλὰ θέτομεν

$$x^{\mu+1} = \tau, \quad \text{ὅθεν} \quad (\mu+1)x^\mu\delta x = \delta\tau.$$

Ἑπομένως

$$\frac{x^\mu\delta x}{\lambda x} = \frac{\delta\tau}{\lambda\tau} = \frac{e^\upsilon\delta\upsilon}{\upsilon}, \quad (\lambda\tau = \upsilon).$$

Καταντῶμεν οὕτως εἰς ὑπερβατικὴν ἔκθεσιν, ὁμοίαν τῇ ἐν τῷ 12ῳ παραδείγματι, κατὰ προσέγγισιν ὁλοκληρουμένην.

ΣΗΜ. Ἐκ τῶν ἑξῆς ὑποδειγμάτων πληροφορούμεθα, ὅτι πολλάκις οἱ τριγωνομετρικοὶ τύποι χρησιμεύουσι τὰ μέγιστα εἰς τὰς ὁλοκληρώσεις.

15) Κατὰ γνωστὸν τριγωνομετρικὸν τύπον, ἔχοντες

$$\text{ἡμ}\,\mu x\,\text{συν}\,\nu x = \tfrac{1}{2}\,\text{ἡμ}[(\mu+\nu)x] + \tfrac{1}{2}\,\text{ἡμ}[(\mu-\nu)x],$$

συνάγομεν·

$$\int\text{ἡμ}\,\mu x\,\text{συν}\,\nu x\,\delta x = A - \frac{\text{συν}[(\mu+\nu)x]}{2(\mu+\nu)} - \frac{\text{συν}[(\mu-\nu)x]}{2(\mu-\nu)};$$

16) $$\int\text{ἡμ}\,(\mu x+\nu)\,\text{συν}\,(\rho x+\varkappa)\,\delta x =$$

$$A - \frac{\text{συν}[(\mu+\rho)x+\nu+\varkappa]}{2(\mu+\rho)} - \frac{\text{συν}[(\mu-\rho)x+\nu-\varkappa]}{2(\mu-\rho)}.$$

17) $$\int\frac{\delta x}{\text{ἡμ}\,x} = \int\frac{-\delta\tau}{1-\tau^2} =$$

$$\lambda\sqrt{\frac{1-\text{συν}\,x}{1+\text{συν}\,x}} = \lambda\,\text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}x + A.$$

18) $$\int\frac{\delta x}{\text{συν}\,x} = \int\frac{\delta\tau}{1-\tau^2} =$$

$$\lambda\sqrt{\frac{1+\text{ἡμ}\,x}{1-\text{ἡμ}\,x}} = -\lambda\,\text{ἐφ}\left(\frac{\Pi}{4}-\frac{x}{2}\right) + A.$$

ΣΤ'. ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΔΙΑ ΣΕΙΡΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΕΩΣ.

334. Πᾶσα συνέκθεσις, ὡς γνωστόν, ἀναπτύσσεται ἐν γένει κατὰ τὰς ἀκεραίας δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς· δυνατὸν ἄρα λαβεῖν ὑπὸ τὴν αὐτὴν μορφὴν τὸ ὁλοκληρωτικὸν παντὸς ἀπειροστοῦ. Οὕτως, ἐν γένει ἔχοντες [104]

$$\Sigma(x)=\Sigma(0)+\Sigma'(0)x+\frac{\Sigma''(0)}{1.2}x^2+\dots+\Sigma^{\mu}(0)\frac{x^{\mu}}{1.2\dots\mu}+\dots,$$

ἐπίσης ἔχομεν·

$$\int\Sigma(x)\delta x=A+\Sigma(0)x+\Sigma'(0)\frac{x^2}{1.2}+\dots+\Sigma^{\mu}(0)\frac{x^{\mu+1}}{1.2..(\mu+1)}+..$$

Ἡ εἰς σειρὰν ἔκθεσις αὕτη τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ $\int\Sigma(x)\delta x$ χρησιμεύει ὁσάκις ἡ σειρὰ εἶναι προσχωροῦσα.

335. Ὅταν ἡ συνέκθεσις $\Sigma(x)$ ὑπάγηται εἰς τὰς ἐξαιρετικὰς περιπτώσεις περὶ ὧν πραγματεύεται τὸ ἄρθ. ΙΓ'. [Μέρ. Α'.]· ἤτοι, ὅταν τὸ ἐκτύλιγμα τῆς συνεκθέσεως ταύτης περιέχῃ δυνάμεις τῆς x κλασματικὰς ἢ ἀρνητικάς, οὐχ ἧττον ποιοῦμεν χρῆσιν τοῦ ἐκτυλίγματος τούτου πρὸς μόρφωσιν τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ $\int\Sigma(x)\delta x$ εἰς σειράν, ἡ τοιαύτη δὲ ἔκθεσις χρησιμεύει πρὸς λογισμὸν τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ, ἐὰν ἡ σειρὰ ἦναι προσχωροῦσα.

336. Ἡ διὰ σειρᾶς ὁλοκλήρωσις, ἥτις καὶ *κατὰ προσέγγισιν ὁλοκλήρωσις* ὀνομάζεται, εἶναι ἐνίοτε τὸ ἁπλούστερον μέσον δι' οὗ συνιστᾶται τὸ ἐκτύλιγμα συνεκθέσεώς τινος κατὰ τὰς ἀκεραίας ἀνιούσας ἢ κατιούσας δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς.

Π. χ., ἔχομεν

$$\delta.\lambda(1+x)=\frac{\delta x}{1+x}=\left(1-x+x^2-\dots\pm x^{\nu-1}\mp\frac{x^{\nu}}{1+x}\right)\delta x.$$

Ἄρα

$$\lambda(1+x)=\int_0\frac{\delta x}{1+x}=A+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots\pm\frac{x^{\nu}}{\nu}\mp\int_0\frac{x^{\nu}\delta x}{1+x}.$$

Τὴν ἄτρεπτον A ὁριστέον ὅπως ἡ ἰσότης ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ὑπάρχῃ διὰ τὴν τυχοῦσαν τιμὴν τῆς x. Ἀλλὰ

καθιστῶντες $x=0$, τὸ πρῶτον μέλος μηδενίζεται, ἡ δὲ σειρὰ τοῦ δευτέρου ἀφανίζεται· ἄρα $A=0$. Ἐπομένως ἔχομεν, ὡς ἐν § 125,

$$\lambda(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\dots\dots$$

337. Ὁμοίως ἔχομεν·

$$\delta.\text{τόξέφ}x=\frac{\delta x}{1+x^2}=\left(1-x^2+x^4-\dots\pm x^{\nu-1}\mp\frac{x^{\nu+1}}{1+x^2}\right)\delta x.$$

Ἐπομένως $\quad \text{τόξ ἐφ } x=\int_0\frac{\delta x}{1+x^2}=$

$$A+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots\pm\frac{x^{\nu}}{\nu}\mp\int_0\frac{x^{\nu+1}\delta x}{1+x^2}.$$

Τῆς δὲ ἀτρέπτου A οὔσης 0, ἔχομεν, ὡς ἐν § 129,

$$\text{τόξ ἐφ } x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\dots\dots$$

Παρατηρητέον ὅτι ἡ σειρὰ αὕτη δὲν εἶναι προσχωροῦσα, ἢ καθ' ὅσον x δὲν ὑπερβαίνει τὴν μονάδα. Δυνατὸν συστῆσαι ἑτέραν οὖσαν τοὐναντίον προσχωροῦσαν ὅταν x μείζων ἦναι μονάδος, γράφοντες

$$\delta.\text{τόξ ἐφ}=\frac{\delta x}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{\delta x}{x^2}\left(1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^6}+\dots\right)$$

ὅθεν

$$\text{τόξ ἐφ } x=A-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{7x^7}-\frac{1}{9x^9}+\dots\dots$$

Ἐπειδὴ $x=\frac{1}{0}$ δίδει $\frac{1}{2}\Pi=A$, εὑρίσκομεν τέλος,

$$\text{τόξ ἐφ } x=\frac{\Pi}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{7x^7}-\frac{1}{9x^9}+\dots\dots$$

Ἡ σειρὰ αὕτη δὲν χρησιμεύει ἢ καθ' ὅσον x περιλαμβάνεται μεταξὺ 1 καὶ $\frac{1}{0}$.

338. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$\delta.\text{τόξἡμ}x = \frac{\delta x}{\sqrt{1-x^2}} = \delta x\left(1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots\right)$$

λαμβάνομεν καθ' ὅμοιον τρόπον, παρατηροῦντες ὅτι $\Lambda = 0$,

$$\text{τόξ ἡμ}\, x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots.,$$

Καθιστῶντες $x = 1$ εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς τὴν ἔκθεσιν τοῦ ἀριθμοῦ Π, λόγου τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν περιφέρειαν·

$$\frac{\Pi}{2} = 1 + \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}.\tfrac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\tfrac{1}{7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\tfrac{1}{9} + \ldots$$

339. Τὴν συνέκθεσιν $\int\Sigma(x)\delta x$ ἀναπτύσσομεν καὶ διὰ τοῦ τύπου τοῦ *I. Bernoulli*, διδόντος δι' οἱανδήποτε συνέκθεσιν ψ,

$$\psi = \psi_0 + x\frac{\delta\psi}{\delta x} - \frac{x^2}{1.2}\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} + \frac{x^3}{1.2.3}\frac{\delta^3\psi}{\delta x^3} - \ldots\ldots,$$

ψ_0 οὔσης τῆς τιμῆς τῆς ψ συστοιχούσης τῇ $x = 0$. Ὑποθέτοντες $\psi = \int\Sigma(x)\delta x$, καὶ $\psi_0 = \Lambda$, ἔχομεν·

$$\int\Sigma(x)\delta x = \Lambda + x\Sigma(x) - \frac{x^2}{1.2}\Sigma'(x) + \frac{x^3}{1.2.3}\Sigma''(x) - \ldots$$

Τὸν αὐτὸν τύπον λαμβάνομεν ὁλοκληροῦντες μοιρικῶς τὸ διαφορικὸν $\Sigma(x)\delta x$. Τῷ ὄντι, ἔχομεν διαδοχικῶς·

$$\int\Sigma(x)\delta x = x\Sigma(x) - \int x\Sigma'(x)\delta x,$$

$$\int x\Sigma'(x)\delta x = \frac{x^2}{1.2}\Sigma'(x) - \int\frac{x^2}{1.2}\Sigma''(x)\delta x,$$

$$\int\frac{x^2}{1.2}\Sigma''(x)\delta x = \frac{x^3}{1.2.3}\Sigma''(x) - \int\frac{x^3}{1.2.3}\Sigma'''(x)\delta x.$$

Ἐάν, ἐξακολουθοῦντες ἐπ' ἄπειρον τὰς ὁλοκληρώσεις ταύτας, τὸ ἔσχατον ὁλοκληρωτικὸν τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, ἕξομεν, ἐκτελοῦντες τὰς ἀντεισαγωγάς, προσθέτοντες δὲ τὸν κατ' ἀρέσκειαν ἄτρεπτον ὅρον, τὸν τύπον περὶ οὗ ὁ λόγος.

Ἔστω $\int\frac{\delta x}{\alpha + x} = \lambda(\alpha + x)$. Ἔχομεν·

$$\lambda(\alpha + x) = \lambda\alpha + \frac{x}{\alpha + x} + \frac{x^2}{2(\alpha + x)^2} + \ldots + \frac{x^\nu}{\nu(\alpha + x)^\nu}.$$

340. Ὅταν ἡ συνέκθεσις $\Sigma(x)$ ἄγηται ὑπὸ τὴν μορφὴν γινομένου, ὡς τὸ $\Phi(x).\Psi(x)$, δύο ἢ πλειόνων παραγόντων, ἀναλύομεν τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν εἰς σειράν, ἀρκεῖ οἱ ἕτεροι παράγοντες πολυπλασιαζόμενοι ἐπὶ τοὺς διαφόρους ὅρους τῆς σειρᾶς ταύτης νὰ δίδωσι γινόμενα ὁλοκληρώσιμα. Π. χ., προκείσθω τὸ διαφορικόν, ἀπαντώμενον ἐν τῷ λογισμῷ τῆς κινήσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς,

$$\delta\psi = \frac{\delta x}{\sqrt{\alpha x - x^2}\,\sqrt{1 - \beta x}}.$$

Ἀναπτύσσομεν $(1 - \beta x)^{-\frac{1}{2}}$, ἐὰν $\beta x < 1$ παραλειπομένων τῶν σημείων, καὶ ἔχομεν·

$$\psi = \int\frac{\delta x}{\sqrt{\alpha x - x^2}}\left(1 + \tfrac{1}{2}\beta x + \frac{1.3}{2.4}\beta^2x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\beta^3x^3 + ..\right).$$

Ἕκαστος ὅρος τῆς σειρᾶς δίδει πρὸς ὁλοκλήρωσιν ἀπειροστὸν τοῦ σχήματος $\frac{x^\mu\delta x}{\sqrt{\alpha x - x^2}}$, ὁλοκληρούμενον κατὰ § 320.

Ἀναλόγως ἐργαζόμενοι καὶ ἐπὶ τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ

$$\int\frac{\delta x\sqrt{1 - \gamma^2x^2}}{\sqrt{1 - x^2}},$$

εὑρίσκομεν, καλοῦντες, συντομίας χάριν, $\text{τόξ ἡμ}\, x = T$,

$$\int \frac{\delta x \sqrt{1-\gamma^2 x^2}}{\sqrt{1-x^2}} = T + \tfrac{1}{2}\gamma^2 \left(\tfrac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} - \tfrac{1}{2} T\right)$$

$$+ \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\gamma^4 \left[\left(\tfrac{1}{4}x^3 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}x\right)\sqrt{1-x^2} - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}T\right]$$

$$+ \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}\gamma^6 \left[\left(\tfrac{1}{6}x^5 + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{5}{6}x^3 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}x\right)\sqrt{1-x^2} - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}T\right]$$

$$+ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad + A.$$

341. Τελευταῖον ὑπόδειγμα τῆς κατὰ προσέγγισιν ὁλοκληρώσεως προτείνομεν τὸ ἑξῆς. Τὸ ὁλοκληρωτικὸν ἐλάβομεν ἀναπτύξαντες προηγουμένως $x^{\nu x}$ κατὰ τὴν γνωστὸν τύπον. Συγκροτεῖται δὲ ἐξ ἀπείρου ἀριθμοῦ σειρῶν ἀπεριορίστως ἐκτεινομένων.

$$\int x^{\nu x}\delta x = x\left[1 - \frac{\nu x}{2^2} + \frac{\nu^2 x^2}{3^3} - \frac{\nu^3 x^3}{4^4} + \frac{\nu^4 x^4}{5^5} - \cdots\cdots\right]$$

$$+ \frac{\nu x^2 \lambda x}{1}\left[\frac{1}{2} - \frac{\nu x}{3^2} + \frac{\nu^2 x^2}{4^3} - \frac{\nu^3 x^3}{5^4} + \frac{\nu^4 x^4}{6^5} - \cdots\cdots\right]$$

$$+ \frac{\nu^2 x^3 (\lambda x)^2}{1\,.\,2}\left[\frac{1}{3} - \frac{\nu x}{4^2} + \frac{\nu^2 x^2}{5^3} - \frac{\nu^3 x^3}{6^4} + \frac{\nu^4 x^4}{7^5} - \cdots\cdots\right]$$

$$+ \frac{\nu^3 x^4 (\lambda x)^3}{1\,.\,2\,.\,3}\left[\frac{1}{4} - \frac{\nu x}{5^2} + \frac{\nu^2 x^2}{6^3} - \frac{\nu^3 x^3}{7^4} + \frac{\nu^4 x^4}{8^5} - \cdots\cdots\right]$$

$$+ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad + A,$$

Ζ'. ΠΕΡΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΩΝ ΩΡΙΣΜΕΝΩΝ.

342. Συμφώνως πρὸς τὰς ἐν ἄρθ. Α' ἐκτεθείσας θεωρίας, προκείσθω ἐν γένει $\sigma(x)\delta x$ συνέκθεσίς τις διαφορικὴ τῆς μεταβλητῆς x, ἧς $\Sigma(x)$ δηλούσθω τὸ ὁλοκληρωτικόν· ἤτοι ἡ συνέκθεσις ἥτις διαφοριζομένη δίδει $\sigma(x)\delta x$. Τοῦτο παριστῶμεν γράφοντες·

$$\delta\Sigma(x) = \sigma(x)\delta x, \quad \text{ἢ γενικώτερον,} \quad \delta[A + \Sigma(x)] = \sigma(x)\delta x.$$

Ἐπίσης ἡ συνέκθεσις $\Sigma(x)$ παράγεται ἐκ τῆς διαφορικῆς $\sigma(x)\delta x$, δοθείσης διὰ τῶν προαποδεδομένων μεθόδων. Τούτου τεθέντος, κατὰ § 274, πᾶσα συνέκθεσις $A + \Sigma(x)$ ἐν γένει θεωρεῖται ὡς ἐμφαίνουσα τὸ κεφάλαιον ἀπείρου ἀριθμοῦ τιμῶν τοῦ διαφορικοῦ αὐτῆς $\sigma(x)\delta x$. Ἐφ' ὅσον ἡ ἄτρεπτος A μένει ἀόριστος, ἡ τιμὴ τῆς x ἀφ' ἧς ἠρχίσαμεν προσθέτειν τὰ ἀπειροστὰ εἶναι ἐπίσης ἀόριστος. Ὅσον ἀφορᾷ τὴν τιμὴν τῆς x ἐν ᾗ τὸ ἄθροισμα λήγει, αὕτη εἶναι ἡ αὐτὴ τιμὴ τῆς μεταβλητῆς x οὖσα ὑπὸ τὸ σύμβολον Σ τῆς συνεκθέσεως.

343. Παρατηρητέον ἤδη, ὅτι ἐν πλείστοις ζητήμασιν ἀπαιτεῖται ἡ μόρφωσις τοῦ κεφαλαίου ἀπείρου ἀριθμοῦ τιμῶν διαφορικοῦ προτεθέντος, λαμβανομένου τοῦ δὲ τοῦ κεφαλαίου ἀπό τινος τιμῆς x_0 τῆς x, ἀφ' ἧς τὰ διαδοχικὰ ἀπειροστὰ ὑποτίθενται προσθετόμενα ἀλλήλοις, μέχρις ἑτέρας τιμῆς x_ω τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς, πέραν τῆς ὁποίας δὲν προχωρεῖ ἡ πρόσθεσις αὐτῶν. Τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἐκτίθεται ἀναλυτικῶς τῷ ἑξῆς γενικῷ τρόπῳ,

$$\int_{x_0}^{x_\omega} \sigma(x)\,\delta x\cdot$$

τιθεμένων, κάτω μὲν τοῦ σημείου $\int$, τῆς τιμῆς τῆς μεταβλητῆς ἀφ' ἧς ἄρχεται ἡ πρόσθεσις τῶν διαφορικῶν, ἄνω δ' αὐτοῦ, τῆς τιμῆς τῆς μεταβλητῆς ἐν ᾗ λήγει ἡ πρόσθεσις αὕτη. Τὴν ἔκθεσιν περὶ ἧς πρόκειται ὀνομάζουσιν *ὁλοκληρωτικὸν ὡρισμένον*, ἐννοοῦντες οὕτως, ὅτι τὸ ὁλοκληρωτικὸν ἢ τὸ ἄθροισμα τῶν διαφορικῶν λαμβάνεται μεταξὺ ὁρίων προσδιωρισμένων· x_0 εἶναι *τὸ κατώτερον ὅριον*, καὶ x_ω *τὸ ἀνώτερον ὅριον* τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ.

Εἰς ἀντίθεσιν τῶν *ὡρισμένων ὁλοκληρωτικῶν*, οἱ Μαθηματικοὶ δίδουσι πολλάκις τὸ ὄνομα *ὁλοκληρωτικὸν ἀόριστον* τῇ ἐκθέσει $A + \Sigma(x)$ (περὶ ἧς πραγματευόμεθα ἐν τοῖς προηγουμένοις), ἐκπληροῦσῃ γενικώτατα τὸν ὅρον τοῦ ἔχειν διαφορικὸν $\sigma(x)\delta x$, καὶ ἐμφαινούσῃ τὸ ἄθροισμα τῶν τιμῶν τοῦ διαφορικοῦ τούτου λαμβανόμενον ἀπό τινος τιμῆς ἀορίστου τῆς x, μέχρι τῆς τυχούσης τιμῆς διδομένης τῇ μεταβλητῇ ταύτῃ ἐν τῷ ὅρῳ $\Sigma(x)$. Ἀλλά, γνωστοῦ ὄντος τοῦ ἀορίστου ὁλοκληρωτικοῦ διαφορικοῦ δοθέντος, λαμβάνομεν ἐν γένει ἀμέσως ἓν ὁλοκληρωτικὸν ὡρισμένον, ἀφορῶν τὸ αὐτὸ διαφορικὸν μεταξὺ ὁρίων οἱωνδήποτε. Τῷ ὄντι, ἐὰν ἐν τῇ ἐκθέσει $A+\Sigma(x)$ θέσωμεν $x=x_0$, ἕξομεν τὴν $A+\Sigma(x_0)$, ἐμφαίνουσαν τὸ ἄθροισμα τῶν τιμῶν τοῦ διαφορικοῦ $\sigma(x)\delta x$ λαμβανόμενον ἀπὸ τιμῆς ἀορίστου τῆς x μέχρι τῆς x_0. Ἐὰν δὲ ἐν τῇ αὐτῇ ἐκθέσει θέσωμεν $x=x_\omega$, τῆς ἀτρέπτου A μενούσης τῆς αὐτῆς, ἕξομεν τὴν $A+\Sigma(x_\omega)$, ἐμφαίνουσαν τὸ ἄθροισμα τῶν τιμῶν τοῦ διαφορικοῦ τούτου λαμβανόμενον ἀπὸ τῆς αὐτῆς ἀορίστου τιμῆς τῆς x μέχρι τῆς x_ω. Ἄρα, ἡ ἀπ' ἀλλήλων διαφορὰ τῶν δύο τούτων ἐκθέσεων

$$\Sigma(x_\omega) - \Sigma(x_0),$$

ἐμφαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν τιμῶν τοῦ περὶ οὗ λόγος διαφορικοῦ, ληφθὲν ἀπὸ τῆς τιμῆς x_0 τῆς x μέχρι τῆς τιμῆς x_ω.

Κατὰ τὰ προεκτεθέντα δῆλον ὅτι ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$\delta\Sigma(x) = \sigma(x)\delta x,$$

παράγεται ἐν γένει ἡ ἑξῆς

$$(a) \qquad \int_{x_0}^{x_\omega} \sigma(x)\delta x = \Sigma(x_\omega) - \Sigma(x_0).$$

Ἤτοι, τὴν τιμὴν ὁλοκληρωτικοῦ ὡρισμένου εὑρίσκομεν ἀφαιροῦντες ἀπ' ἀλλήλων τὰς δύο τιμὰς ἃς λαμβάνει τὸ ἀόριστον ὁλοκληρωτικὸν ὅταν δώσωμεν τῇ ἐν αὐτῷ μεταβλητῇ x τὰς συστοιχούσας τιμὰς τῷ ἀνωτέρῳ καὶ τῷ κατωτέρῳ ὁρίῳ, μεταξὺ τῶν ὁποίων τὸ ὡρισμένον ὁλοκληρωτικὸν πρέπει νὰ ληφθῇ.

344. Ἐκ τῶν προεκτεθέντων προκύπτει ὅτι τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν παντὸς ὁλοκληρωτικοῦ ὡρισμένου λαμβάνομεν ἀείποτε, ὁσάκις δυνάμεθα λαβεῖν ὑπὸ μορφὴν πεπερασμένην, ἢ κατὰ σειρὰν προσχωροῦσαν, τὴν συνέκθεσιν $\Sigma(x)$ ἧς τὸ διαφορικὸν εἶναι $\sigma(x)\delta x$. Ἀλλὰ τοῦτο δὲν εἶναι πάντοτε δυνα-

τόν· ἐν περιπτώσει δὲ τοιαύτῃ ἀναγκαζόμεθα λογίσαι κατὰ προσέγγισιν τὴν περὶ ἧς λόγος τιμὴν ἀριθμητικήν.

345. Αἱ προεκτεθεῖσαι γνώσεις κατασταθήσονται ὅσον ἔνεστιν εὐκρινεῖς, ἐὰν θεωρήσωμεν, ὡς ἐν § 275, τὴν μὲν μεταβλητὴν x ὡς τετμημένην, τὴν δὲ συνέκθεσιν $\Sigma(x)$, ἢ γενικώτερον τὴν $A+\Sigma(x)$, ὡς τεταγμένην καμπύλης. Πᾶν διαφορικὸν τῆς συνεκθέσεως ταύτης ἐμφαίνει τὴν ἀπειροστημόριον αὔξησιν τῆς τεταγμένης τῇ ἀπὸ τῆς τετμημένης x μεταβάσει ἐπὶ τὴν $x+\delta x$. Τὸ ἄθροισμα τῶν αὐξήσεων τούτων τῆς τεταγμένης, λαμβανουσῶν χώραν ἀπό τινος τιμῆς x_0 τῆς x μέχρι ἑτέρας x_ω, ἰσοῦται προφανῶς τῇ ὑπεροχῇ τῆς τεταγμένης, ἀντιστοιχούσης τῷ τελευταίῳ ὁρίῳ, ἐπὶ τῆς τεταγμένης ἀντιστοιχούσης τῷ πρώτῳ· ἤτοι ἰσοῦται

$$\psi_\omega - \psi_0, \qquad \text{ἢ} \qquad \Sigma(x_\omega) - \Sigma(x_0).$$

346. Παρατηρητέον ὅμως ὅτι, ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις (a) ἐν ᾗ $\Sigma(x)$ εἶναι τοιαύτη ὥστε $\delta\Sigma(x) = \sigma(x)\delta x$, δὲν ἐφαρμόζεται ἐπὶ περιπτώσεων καθ' ἃς αἱ συνεκθέσεις $\sigma(x)$ ἢ $\Sigma(x)$ ἀποκαθίστανται ἄπειροι διὰ τιμήν τινα τῆς x ἐν τοῖς ὁρίοις x_0 καὶ x_ω τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρωτικοῦ ἀπολαμβανομένην. Τῷ ὄντι, ὅτε ἀνεπτύξαμεν [274] τὴν θεωρίαν ἐξ ἧς προέκυψεν ὅτι πᾶν ὁλοκληρωτικὸν ἐμφαίνει ἀείποτε τὸ ἄθροισμα ἀπείρου ἀριθμοῦ τιμῶν τοῦ διαφορικοῦ αὐτοῦ, ἐξῃρέσαμεν τὰς περιπτώσεις καθ' ἃς αἱ συνεκθέσεις περὶ ὧν πρόκειται λαμβάνουσι τιμὰς ἀπείρους.

Ὅταν ζητῆται ἡ τιμὴ ὁλοκληρωτικοῦ τινος ὡρισμένου, συμβαίνει δὲ ἡ συνέκθεσις $\sigma(x)$ ν' ἀποκαθίσταται ἄπειρος διὰ τιμὴν α τῆς x ἀπολαμβανομένην ἐν τοῖς ὁρίοις x_0 καὶ x_ω τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ τούτου, ἀδύνατον ἐν γένει εὑρεῖν τὴν ζητουμένην τιμὴν ἢ διαχωριζομένου τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ εἰς δύο μέρη, ὧν τὸ μὲν λήγει τὸ δὲ ἄρχεται κατὰ τὴν τιμὴν $x=\alpha$· ἤτοι θεωρουμένων ἰδίᾳ ἑκάστου τῶν δύο ὡρισμένων ὁλοκληρωτικῶν

$$\int_{x_0}^{\alpha} \sigma(x)\,\delta x, \qquad \int_{\alpha}^{x_\omega} \sigma(x)\,\delta x,$$

ὧν τὸ ἄθροισμα συνιστᾷ τὴν ζητουμένην τιμήν. Τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἔξει τιμὴν ἄπειρον, ἐὰν ἀμφότερα τὰ μέρη ἔχωσι καὶ αὐτὰ τιμὰς ἀπείρους μετὰ σημείων ὁμοίων, ἢ ἐὰν ἡ τιμὴ τοῦ ἑτέρου αὐτῶν ἦναι ἄπειρος. Ἕξει τιμὴν ἀόριστον ὅταν τὰ δύο μέρη ἔχωσι τιμὰς ἀπείρους μετὰ σημείων ἐναντίων. Τέλος, ἕξει τιμὴν πεπερασμένην καὶ ὡρισμένην, ἐὰν ἀμφότερα τὰ μέρη ἔχωσι τιμὰς τοιαύτας.

Ὡσαύτως, ὅταν μεταξὺ τῶν ὁρίων x_0 καὶ x_ω ὑπάρχωσι δύο τιμαὶ καθ' ἃς ἡ $\sigma(x)$ ἀποκαθίσταται ἄπειρος, διαιροῦμεν ὡς ἑξῆς τὸ τεθὲν ὡρισμένον ὁλοκληρωτικόν,

$$\int_{x_0}^{\alpha} \sigma(x)\,\delta x + \int_{\alpha}^{\alpha_1} \sigma(x)\,\delta x + \int_{\alpha_1}^{x_\omega} \sigma(x)\,\delta x\cdot$$

διορίζομεν δὲ ἰδίᾳ τὴν τιμὴν ἑκάστου μέρους. Καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

347. Κατὰ τὰ προεκτεθέντα, δῆλον ὅτι ἡ ἀλλαγὴ τοῦ σημείου ὁλοκληρωτικοῦ τινος ὡρισμένου ἰσοδυναμεῖ τῇ ἀντιστροφῇ τῆς τῶν ὁρίων τάξεως. Οὕτως

$$\int_{x_0}^{x_\omega} \sigma(x)\,\delta x = -\int_{x_\omega}^{x_0} \sigma(x)\,\delta x.$$

Δυνάμεθα προσέτι μεταβαλεῖν τὴν οὖσαν ὑπὸ τὸ σύμβολον ὁλοκληρώσεως ὡρισμένης μεταβλητὴν x, ἀρκεῖ νὰ μεταβληθῶσι συγχρόνως τὰ ὅρια ὅπως διατηρῶσι τὰς αὐτὰς τιμὰς ἀπολύτους. Π. χ., εἰ ἐν τῇ προηγουμένῃ ἐκθέσει βουλόμεθα ἀντικαταστῆσαι τῇ x νέαν μεταβλητήν, τὴν τ, συνιστῶντες μεταξὺ τῶν δύο τούτων ποσοτήτων τὴν τυχοῦσαν σχέσιν $x = \varphi(\tau)$, πρέπει ν' ἀντικαταστήσωμεν δx ὑπὸ $\delta.\varphi(\tau)$, καὶ x_0, x_ω, ὑπὸ τῶν τιμῶν τῆς τ ἐξαγομένων ἀμοιβαίως ἐκ τῶν ἐξισώσεων $x_0 = \varphi(\tau)$, $x_\omega = \varphi(\tau)$.

348. Ἡ θεωρία τῶν ὡρισμένων ὁλοκληρωτικῶν χρησιμεύει πρὸς μόρφωσιν τῆς σειρᾶς τοῦ Τάϋλορ. Κατὰ § 343, οἱαδήποτε ἦναι ἡ συνέκθεσις, ἀρκεῖ αὕτη νὰ ἦναι συνεχὴς μεταξὺ τῶν τιμῶν x καὶ $x+\theta$ τῆς μεταβλητῆς, ἔχομεν

$$\Sigma(x+\theta) - \Sigma(x) = \int_{x}^{x+\theta} \Sigma'(x)\,\delta x.$$

Δηλοῦντες τῷ τ νέαν τινα μεταβλητήν, καθιστῶμεν ἐν τῷ ὡρισμένῳ ὁλοκληρωτικῷ τοῦ δευτέρου μέλους $x+\theta-\tau$ ἀντὶ x· οὕτω, τὸ ὁλοκληρωτικὸν τοῦτο, κατὰ § 347, τρέπεται εἰς

$$-\int_{\theta}^{0} \Sigma'(x+\theta-\tau)\delta\tau, \quad \text{ἢ} \quad \int_{0}^{\theta} \Sigma'(x+\theta-\tau)\delta\tau.$$

Ἄρα γράφομεν

$$\Sigma(x+\theta) - \Sigma(x) = \int_{0}^{\theta} \Sigma'(x+\theta-\tau)\delta\tau.$$

Θεωρήσωμεν ἤδη τὸ ἀόριστον ὁλοκληρωτικὸν

$$\int \Sigma'(x+\theta-\tau)\,\delta\tau\cdot$$

ἐφαρμόζοντες αὐτῷ τὴν μέθοδον τῆς μοιρικῆς ὁλοκληρώσεως, εὑρίσκομεν διαδοχικῶς·

$$\int \Sigma'(x+\theta-\tau)\delta\tau = \tau\Sigma'(x+\theta-\tau) + \int \tau\Sigma''(x+\theta-\tau)\delta\tau,$$

$$\int \tau\Sigma''(x+\theta-\tau)\,\delta\tau = \frac{\tau^2}{2}\Sigma''(x+\theta-\tau) + \int \frac{\tau^2}{2}\Sigma'''(x+\theta-\tau)\delta\tau,$$

$$\int \frac{\tau^2}{2}\Sigma'''(x+\theta-\tau)\,\delta\tau = \frac{\tau^3}{2.3}\Sigma'''(x+\theta-\tau) + \int \frac{\tau^3}{2.3}\Sigma''''(x+\theta-\tau)\delta\tau,$$

κ. τ. ἑ. Ἑπομένως·

$$\int \Sigma'(x+\theta-\tau)\,\delta\tau =$$

$$\tau\Sigma'(x+\theta-\tau) + \frac{\tau^2}{2}\Sigma''(x+\theta-\tau) + \frac{\tau^3}{2.3}\Sigma'''(x+\theta-\tau) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\tau^{\mu-1}}{2.3..(\mu-1)}\Sigma^{\mu-1}(x+\theta-\tau) + \int \frac{\tau^{\mu-1}}{2.3..(\mu-1)}\Sigma^{\mu}(x+\theta-\tau)\,\delta\tau.$$

Ἄρα, λαμβάνοντες τὸ ὁλοκληρωτικὸν μεταξὺ τῶν ὁρίων 0 καὶ θ,

$$\int_0^\theta \Sigma'(x+\theta-\tau)\delta\tau = \theta\Sigma'(x) + \frac{\theta^2}{2}\Sigma''(x) + \frac{\theta^3}{2.3}\Sigma'''(x) + \dots$$

$$+\frac{\theta^{\mu-1}}{2.3\dots(\mu-1)}\Sigma^{\mu-1}(x) + \int_0^\theta \frac{\tau^{\mu-1}}{2.3\dots(\mu-1)}\Sigma^{\mu}(x+\theta-\tau)\delta\tau$$

'Αντεισάγοντες δὲ τὴν τιμὴν ταύτην ἐν τῇ προηγουμένῃ ἐξισώσει λαμβάνομεν·

$$\Sigma(x+\theta) = \Sigma(x) + \theta\Sigma'(x) + \frac{\theta^2}{2}\Sigma''(x) + \frac{\theta^3}{2.3}\Sigma'''(x) + \dots$$

$$+\frac{\theta^{\mu-1}}{2.3\dots(\mu-1)}\Sigma^{\mu-1}(x) + \int_0^\theta \frac{\tau^{\mu-1}}{2.3\dots(\mu-1)}\Sigma^{\mu}(x+\theta-\tau)\delta\tau$$

Καθιστῶντες $x=0$ ἐν τῇ ἐξισώσει ταύτῃ, εἶτα γράφοντες x ἀντὶ θ, ἄγομεν αὐτὴν ὑπὸ τὴν μορφήν·

$$\Sigma(x) = \Sigma(0) + x\Sigma'(0) + \frac{x^2}{2}\Sigma''(0) + \frac{x^3}{2.3}\Sigma'''(0) + \dots\dots$$

$$+\frac{x^{\mu-1}}{2.3\dots(\mu-1)}\Sigma^{\mu-1}(0) + \int_0^x \frac{\tau^{\mu-1}}{2.3\dots(\mu-1)}\Sigma^{\mu}(x-\tau)\delta\tau.$$

Αἱ δύο αὗται σειραὶ ἔσονται προχωροῦσαι, ὅταν ὁ περιέχων τὸ ὡρισμένον ὁλοκληρωτικὸν ὅρος τείνῃ πρὸς τὸ μηδὲν καθ' ὅσον μ αὐξάνει.

340. Ἕπονται ὑποδείγματά τινα ὁλοκληρωτικῶν ὡρισμένων, πρὸς ἄσκησιν.

1) $\int_0^1 x^\mu \delta x = \frac{1}{\mu+1}$. 2) $\int_0^\infty e^{-x}\delta x = 1$.

3) $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\delta x = \frac{1}{\alpha}$. 4) $\int_0^\infty \frac{\delta x}{x^2+\alpha^2} = \frac{\Pi}{2\alpha}$.

5) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta x}{x^2+\alpha^2} = \frac{\Pi}{\alpha}$. 6) $\int_0^\alpha \frac{\delta x}{\sqrt{\alpha^2-x^2}} = \frac{\Pi}{2}$.

7) $\int_0^\infty e^{\alpha x}\delta x = \infty$. 8) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta x}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{\Pi}{\beta}$.

9) $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,\text{ἡμ}\,\beta x\,\delta x = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$.

10) $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,\text{συν}\,\beta x\,\delta x = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$.

11) $\int_\alpha^\beta \frac{\delta x}{x} = \lambda\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$.

12) $\int_1^2 \frac{\delta x}{3x^2-2x+5} =$

$$\frac{1}{\sqrt{14}}\left(\text{τόξέφ}\frac{5}{\sqrt{14}} - \text{τόξέφ}\frac{2}{\sqrt{14}}\right) = \frac{1}{\sqrt{14}}\text{τόξέφ}\frac{\sqrt{14}}{8}.$$

13) $\int_0^{\frac{\Pi}{2}} \text{ἡμ}^{2\kappa+1}x\delta x = \frac{2.4\dots2\kappa}{3.5\dots(2\kappa+1)} = \int_0^{\frac{\Pi}{2}} \text{συν}^{2\kappa+1}x\delta x$.

14) $\int_0^{\frac{\Pi}{2}} \text{ἡμ}^{2\kappa}x\delta x = \frac{1.3\dots(2\kappa-1)}{2.4\dots2\kappa}\,\frac{\Pi}{2} = \int_0^{\frac{\Pi}{2}} \text{συν}^{2\kappa}x\,\delta x$.

15) $\int_0^{\frac{\Pi}{2}} \text{συν}^{2\nu}x\,\text{ἡμ}^{2\kappa+1}x\delta x = \frac{2.4.6\dots\dots2\kappa}{(2\nu+1)(2\nu+3)\dots\dots(2\nu+2\kappa+1)}$.

16) $$\int_0^{\frac{\Pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^{2\nu}x\,\eta\mu^{2\varkappa}x\,\delta x = \frac{1.3\ldots(2\nu-1)1.3\ldots(2\varkappa-1)}{2.4.6\ldots(2\nu+2\varkappa)}\,\frac{\Pi}{2}.$$

17) $$\int_0^1 \frac{x^{2\varkappa}\delta x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3.5\ldots\ldots(2\varkappa-1)}{2.4.6\ldots\ldots2\varkappa}\,\frac{\Pi}{2}.$$

18) $$\int_0^1 \frac{x^{2\varkappa+1}\delta x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2.4.6\ldots\ldots2\varkappa}{3.5.7\ldots\ldots(2\varkappa+1)}.$$

Τὰ τελευταῖα ταῦτα ὁλοκληρωτικὰ ἄγονται εἰς δύο τῶν προηγουμένων, τῇ ὑποθέσει

$$x = \eta\mu\, z, \qquad \text{ὅθεν} \qquad \frac{\delta x}{\sqrt{1-x^2}} = \delta z.$$

19) $$\int_0^{\Pi} \eta\mu\,\alpha x\,\delta x = \frac{1-\sigma\upsilon\nu\,\alpha\Pi}{\alpha}.$$

20) $$\int_0^{\Pi} \sigma\upsilon\nu\,\alpha x\,\delta x = \frac{\eta\mu\,\alpha\Pi}{\alpha}.$$

Ἄρα, τοῦ μὲν πρώτου τῶν δύο τελευταίων ὁλοκληρωτικῶν ἡ τιμὴ ἔσεται $\frac{2}{\alpha}$ ἢ μηδέν, ἐφ' ὅσον α εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος περιττὸς ἢ ἄρτιος, τοῦ δὲ δευτέρου ἀείποτε μηδὲν ἐὰν α ᾖναι ἀριθμὸς ἀκέραιος.

21) $$\int_0^{\Pi} x\,\eta\mu\,\alpha x\,\delta x = -\frac{\Pi\,\sigma\upsilon\nu\,\alpha\,\Pi}{\alpha}.$$

22) $$\int_0^{\Pi} x\,\sigma\upsilon\nu\,\alpha x\,\delta x = \frac{\sigma\upsilon\nu\,\alpha\,\Pi - 1}{\alpha^2}.$$

Ἐφ' ὅσον α εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος περιττὸς ἢ ἄρτιος, τὸ μὲν πρῶτον τῶν δύο τελευταίων ὁλοκληρωτικῶν ἰσοῦται $+\frac{\Pi}{\alpha}$ ἢ $-\frac{\Pi}{\alpha}$, τὸ δὲ δεύτερον, $-\frac{2}{\alpha^2}$ ἢ 0.

23) $$\int_0^1 \frac{\delta x}{x^{\mu}} = \infty.$$

24) $$\int_0^{\infty} \delta x . x^{\alpha-1} e^{-x} = 1.2.3.4\ldots(\alpha-1).$$

Παρατηρητέον ὅτι αἱ ἀνωτέρω εὑρεθεῖσαι τιμαὶ τῶν ὡρισμένων ὁλοκληρωτικῶν

$$\int_0^{\frac{\Pi}{2}} \eta\mu^{\mu}x\,\delta x, \qquad \int_0^{\frac{\Pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^{\mu}x\,\delta x,$$

τείνουσιν ἀμφότεραι πρὸς τὸ μηδὲν καθ' ὅσον μ αὐξάνει, εἴτε ἄρτιος ἐστὶν εἴτε περιττός. Ἄρα, ὁ λόγος τῶν τιμῶν τούτων ἔχει ὅριον τὴν μονάδα· συνάγομεν δὲ τὴν ἀκόλουθον ἀξιοπαρατήρητον ἔκθεσιν τοῦ ἀριθμοῦ Π·

$$\frac{\Pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8\ldots\ldots}{1.3.3.5.5.7.7.9\ldots\ldots}.$$

Η'. ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ.

350. Θεωρήσωμεν καμπύλην τὴν τυχοῦσαν, ἐν ἄξοσιν ὀρθογωνίοις ἀναφερομένην, ἧς προκείσθω εὑρεῖν τὸ ἐμβαδόν· ἤτοι λογίσαι εἰς ἀριθμοὺς τὸ ἀπολαμβανόμενον χωρίον ὑπὸ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων, ὑπὸ τῆς καμπύλης καὶ ὑπὸ δύο τεταγμένων οἱωνδήποτε. Ἔστωσαν,

$$\psi = \Sigma(x)$$

ἡ τὴν καμπύλην ἐμφαίνουσα ἐξίσωσις· x_0, x_ω, αἱ τετμημέναι συστοιχοῦσαι ταῖς τεταγμέναις ὑφ' ὧν περιορίζεται τὸ λογιστέον ἐμβαδόν. Κατὰ § 160, ε δηλοῦντος τὴν συνέκθεσιν τῆς x, διδοῦσαν τὴν τιμὴν τοῦ ἐμβαδοῦ λογιζομένου ἀπὸ ἀρχῆς οἱασδήποτε μέχρι τῆς τεταγμένης συστοιχούσης τῇ τετμημένῃ x, ἔχομεν.

$$\delta\varepsilon = \psi\delta x.$$

Ἀλλὰ τὸ λογιστέον ἐμβαδὸν εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν τιμῶν, ἀπείρων τὸν ἀριθμόν, ἃς λαμβάνει τὸ διαφορικὸν δε, διδομένων ἐν τούτῳ τῇ x ἁπασῶν τῶν τιμῶν ἀπὸ x_0 μέχρι x_ω. Ἄρα, κατὰ τὰ ἐν τῷ προηγουμένῳ ἄρθρῳ ἐκτεθέντα, τὸ προκείμενον ἐμβαδὸν ἐκφράζεται διὰ τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρωτικοῦ

$$\varepsilon = \int_{x_0}^{x_\omega} \psi\delta x.$$

Ἐννοητέον ὅτι, ἐν τῇ ἐκθέσει ταύτῃ, τὰ ὅρια x_0 καὶ x_ω εἰσὶν ἀριθμοὶ δεδομένοι στοιχοῦντες ταῖς θέσεσι τῶν τεταγμένων ὑφ' ὧν τὸ χωρίον περιορίζεται. Ἄρα, καὶ τὸ ἐξαγόμενον ὅπερ ἐμφαίνει ἡ τοιαύτη ἀναλυτικὴ ἔκθεσις, εἶναι ἐπίσης ἀριθμὸς ὡρισμένος ἐμφαίνων τὴν τιμὴν τοῦ χωρίου τούτου.

Ἀλλ' οὐχ ἧττον δυνάμεθα ὑποθέσαι τὸ πρῶτον μόνον ὅριον x_0 δοθὲν καὶ μόνιμον, τὸ δὲ δεύτερον x_ω ἀόριστον καὶ κατ' ἀρέσκειαν. Τότε παριστῶμεν τὸ τελευταῖον τοῦτο διὰ x. Οὕτω, τὸ ἐξαγόμενον τῆς ὡρισμένης ὁλοκληρώσεως ἔσεται συνέκθεσις τῆς x ἐμφαίνουσα ἐμβαδὸν ἀρχόμενον μὲν ἀπὸ τῆς τῇ τετμημένῃ x_0 συστοιχούσης τεταγμένης, ἀπολῆγον δὲ εἰς ἑτέραν οἱανδήποτε τεταγμένην συστοιχοῦσαν τῇ τετμημένῃ x. Ἄρα γράφομεν

$$\varepsilon = \int_{x_0}^{x} \psi\delta x.$$

ΣΗΜ. Ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης δίδει ψ συνεκθέσει τῆς x· οὕτως ὁ τετραγωνισμὸς τῆς ἐπιφανείας ἄγεται εἴς τινα ὁλοκλήρωσιν. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον, ὀνομάζουσι πολλάκις τετραγωνισμὸν τὴν ἐργασίαν τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ δι' ἧς μεταβαίνομεν ἀπὸ τοῦ διαφορικοῦ συνεκθέσεώς τινος μιᾶς μεταβλητῆς εἰς τὴν συνέκθεσιν αὐτήν.

351. Ὅταν ἡ τεθεῖσα καμπύλη ἀναφέρηται πρὸς συντεταγμένας πολικάς, τότε τὸ λογιστέον ἐμβαδὸν εἶναι τὸ τριγωνικὸν χωρίον ἀπολαμβανόμενον ὑπὸ τοῦ τόξου τῆς καμπύλης καὶ ὑπὸ δύο ἀκτίνων ἐπιβατικῶν σχηματιζουσῶν μετὰ τοῦ πολικοῦ ἄξονος τῆς μὲν τὴν γωνίαν ω_0, τῆς δὲ τὴν τυχοῦσαν γωνίαν ω. Ἐν § 217 εὕρομεν,

$$\delta\varepsilon = \tfrac{1}{2}\rho^2\delta\omega \qquad \text{Ἄρα} \qquad \varepsilon = \frac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\omega} \rho^2\delta\omega.$$

Ἐφαρμοστέον ἐφεξῆς τοὺς τύπους τούτους.

352 *Παραβολαί.* Λογίσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῶν παραβολῶν ἐμφαινομένων ὑπὸ τῆς γενικῆς ἐξισώσεως

$$\psi^\mu = \pi x^\nu,$$

μ καὶ ν ὄντων θετικῶν (Σχ. 65). Ἔχομεν

$$\int \psi\delta x = \pi^{\frac{1}{\mu}} \int x^{\frac{\nu}{\mu}}\delta x = \pi^{\frac{1}{\mu}} \frac{x^{\frac{\nu}{\mu}+1}}{\frac{\nu}{\mu}+1} + A.$$

Ἄρα, ἅπασαι αἱ καμπύλαι αὗται εἰσὶν ἐπιδεκτικαὶ τετραγωνισμοῦ. Ἐὰν λάβωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἀπὸ $x = 0$, ἕξομεν $A = 0$ τὸ δὲ ἐμβαδόν, περατούμενον ὑπὸ τεταγμένης συστοιχούσης οἱαδήποτε τετμημένῃ, δοθήσεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\frac{\mu\pi^{\frac{1}{\mu}} x^{\frac{\nu}{\mu}+1}}{\mu+\nu}, \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{\mu x\psi}{\mu+\nu}.$$

Τὸ λειπόμενον μέρος τοῦ ὀρθογωνίου xψ, ἀφαιρουμένου τοῦ χωρίου τούτου, εἶναι $\frac{\nu x\psi}{\mu+\nu}$. Ἄρα, τὸ τόξον τῆς καμπύλης διαιρεῖ τὸ ὀρθογώνιον xψ κατὰ τὸν σταθερὸν λόγον μ : ν.

Ἀντιστρόφως, καμπύλη ἔχουσα τὸ ἰδίωμα τοῦτο, ἀδύνατον δηλωθῆναι ὑπὸ ἐξισώσεως ἐχούσης μορφὴν διάφορον τῆς προτεθείσης. Τῷ ὄντι, ἔστω ψ ἡ ἄγνωστος τεταγμένη τῆς καμπύλης ταύτης. Ἔχομεν

$\int \psi \delta x : x\psi - \int \psi \delta x :: \mu : \nu$, ὅθεν $(\mu + \nu) \int \psi \delta x = \mu x \psi$.

διαφορίζοντες δὲ,

$$\nu \psi \delta x = \mu x \delta \psi, \qquad \text{ὅθεν} \qquad \frac{\mu \delta \psi}{\psi} = \frac{\nu \delta x}{x}.$$

Ἐπομένως

$$\mu \lambda \psi = \nu \lambda x + \lambda A, \quad \text{ἢ} \quad \psi^\mu = A x^\nu.$$

λA, ἢ A, δηλοῦντος ἄτρεπτον ποσότητα οἱανδήποτε, ᾗ διδοντες πᾶσαν τιμὴν, λαμβάνομεν ἁπάσας τὰς τὴν ῥηθεῖσαν ἰδιότητα ἐχούσας καμπύλας.

353. Ὅταν $\mu = \nu$, ἡ μὲν παραβολὴ καθίσταται γραμμὴ εὐθεῖα, τὸ δὲ παραβολικὸν τμῆμα τρέπεται εἰς τρίγωνον οὗτινος τὸ ἐμβαδὸν ἰσοῦται $\frac{1}{2} x\psi$, ὡς γνωστὸν ἐκ τῆς Γεωμετρίας.

Ὑποθέτοντες $\mu = 2$ καὶ $\nu = 1$, ἔχομεν τὴν κοινὴν παραβολὴν (Σχ. 65), ἧς τὸ ἐμβαδὸν ΑΜΗ, ἢ

$$\varepsilon = \tfrac{2}{3} x\psi$$

ἤτοι, ἰσοῦται δυσὶ τριτημορίοις τοῦ ὑπὸ τῶν συντεταγμένων συγκροτουμένου ὀρθογωνίου, οἱαδήποτε εἶναι ἡ x. Ἄρα, τὸ χωρίον ΑΜΡ ἰσοῦται τῷ τριτημορίῳ τοῦ αὐτοῦ ὀρθογωνίου.

354. *Ὑπερβολαί.* Θεωρήσωμεν ἤδη τὴν γενικὴν ἐξίσωσιν τῶν ὑπερβολῶν ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις αὐτῶν (Σχ. 16, 17)

$$\psi^\mu x^\nu = \alpha.$$

Ἔχομεν·

$$\int_o^x \psi \delta x = \alpha^{\frac{1}{\mu}} \int_o^x x^{-\frac{\nu}{\mu}} \delta x = \frac{\alpha^{\frac{1}{\mu}} x^{-\frac{\nu}{\mu}+1}}{-\frac{\nu}{\mu}+1} + A.$$

Ἔστω πρῶτον $\nu < \mu$· ὑποθέσωμεν δὲ τὸ ἐμβαδὸν ἀρχόμενον ἀπὸ τοῦ ἄξονος τῶν ψ. Τότε $A = 0$, ἡ δ' ἔκθεσις τοῦ ἐμβαδοῦ ἔσεται·

$$\frac{\mu \alpha^{\frac{1}{\mu}} x^{-\frac{\nu}{\mu}+1}}{\mu - \nu}, \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{\mu x \psi}{\mu - \nu}.$$

Βλέπομεν ὅτι ἡ τιμὴ αὐτοῦ εἶναι πεπερασμένη, εἰ καὶ ἐκτείνεται ἀπεριορίστως κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῶν ψ· διότι ὁ τῶν ψ ἄξων εἶναι ἀσύμπτωτος τῆς καμπύλης. Ἡ τιμὴ αὕτη μείζων ἐστὶ τοῦ ὀρθογωνίου $x\psi$, οὗτινος ἀφαιρουμένου, μένει $\frac{\nu x \psi}{\mu - \nu}$. Ἄρα τὰ δύο χωρία εἰσὶ καὶ αὖθις πρὸς ἄλληλα ἐν λόγῳ ἀτρέπτῳ, $\mu : \nu$.

Ἀντιστρόφως, ἀναχωροῦντες ἀπὸ τοῦ ἰδιώματος τούτου, εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν μορφὴν ἔχουσαν ὁμοίαν τῇ τῆς προτεθείσης.

Τῷ ὄντι, ἔχομεν·

$\int \psi \delta x : \int \psi \delta x - x\psi :: \mu : \nu$, ὅθεν $(\mu - \nu) \int \psi \delta x = \mu x \psi$.

ἐπομένως $\quad - \nu \psi \delta x = \mu x \delta \psi.$ Ἄρα·

$$\frac{\mu \delta \psi}{\psi} = - \frac{\nu \delta x}{x}, \qquad \mu \lambda \psi = - \nu \lambda x + \lambda A,$$

λA οὔσης ἀτρέπτου κατ' ἀρέσκειαν. Ἐντεῦθεν συνάγομεν ἀμέσως

$$\psi^\mu = A x^{-\nu}, \qquad \text{ἢ} \qquad \psi^\mu x^\nu = A.$$

Τὸ ἐμβαδὸν $\dfrac{\mu \alpha^{\frac{1}{\mu}} x^{-\frac{\nu}{\mu}+1}}{\mu - \nu}$ ἀποκαθίσταται ἄπειρον σὺν τῇ x. Ἄρα, τὸ ἐμβαδὸν ἀρχόμενον μὲν ἐκ τῆς τυχούσης τεταγμένης, ἐκτεινόμενον δὲ ἐπ' ἄπειρον κατὰ τὴν ἑτέραν τῶν ἀσυμπτώτων, εἶναι πεπερασμένον ἢ ἄπειρον, καθ' ὅσον ἡ ἐπὶ τῆς ἀσυμπτώτου ταύτης λογιζομένη συντεταγμένη ἔχει τὸν μείζονα ἢ τὸν ἐλάσσονα ἐκθέτην ἐν τῇ ἐξισώσει.

355. Ὅταν $\nu > \mu$, εἰς τὸ αὐτὸ καταντῶμεν συμπέρασμα. Ὅταν $\mu = \nu$, ἡ ἐξίσωσις ἀγομένη ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$x\psi = \eta^2,$$

ἐμφαίνει, ἐν ἄξοσιν ὀρθογωνίοις, ὑπερβολὴν ἰσοσκελῆ. Τότε ἔχομεν·

$$\int \psi \delta x = \eta^2 \int \frac{\delta x}{x} = \eta^2 \lambda x + A.$$

Ὅταν τὸ ἐμβαδὸν ἄρχηται ἀπὸ τοῦ ἄξονος τῶν ψ, $A = \infty$· ὅπερ δείκνυσιν ὅτι, τὸ ἀπολαμβανόμενον χωρίον ὑπὸ τῆς τυχούσης τεταγμένης καὶ τοῦ ἄξονος τῶν ψ εἶναι ἄπειρον.

Ἐὰν τὸ ἐμβαδὸν ἄρχηται ἀπὸ τῆς τετμημένης x_0, ἔχομεν $A = -\eta^2 \lambda x_0$, ἐπομένως ἡ ἔκθεσις τοῦ ἐμβαδοῦ ἔσεται

$$\varepsilon = \eta^2 \lambda \frac{x}{x_0}.$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν $x_0 = \eta$, τὸ ἐμβαδὸν ἀρχίσει ἀπὸ τῆς τεταγμένης τῆς κορυφῆς τῆς ὑπερβολῆς. Ἐὰν δὲ λάβωμεν $\eta = 1$, ἡ ἔκθεσις αὐτοῦ ἔσεται λx. Ἕνεκα τῆς ἰδιότητος ταύτης οἱ νεπεριανοὶ λογάριθμοι ὠνομάσθησαν *ὑπερβολικοί.*

356. Ἐν τῷ προηγουμένῳ χωρίῳ ἐλάβομεν τοὺς νεπεριανοὺς λογαρίθμους· διότι ἡ ὑπερβολὴ ἣν ἐθεωρήσαμεν ἦτον ἰσοσκελής. Ἀλλά, μεταβαλλομένης τῆς τῶν ἀσυμπτώτων γωνίας, καὶ λαμβανομένης ἀείποτε τῆς ὑπερβολικῆς δυνάμεως ἴσης 1, λαμβάνομεν ἄπειρα συστήματα λογαρίθμων διάφορα. Ἔστω ἡ τυχοῦσα ὑπερβολὴ ἧς αἱ ἀσύμπτωτοι σχηματίζουσι γωνίαν θ. Κατὰ § 161, ἡ ἔκθεσις τοῦ ἐμβαδοῦ εἶναι

$$\varepsilon = \eta\mu\,\theta \int \frac{\delta x}{x} = \lambda o\gamma\, x.$$

Ὑποτιθεμένης $\eta = 1$ καὶ λαμβανομένου ἡμθ ἀντὶ διαστολέως. Τοῦ τῶν κοινῶν λογαρίθμων ὄντος 0,4342944819, συνάγομεν ὅτι, ἡ γωνία θ, ἡμίτονον ἔχουσα τὸν ἀριθμὸν τοῦτον, ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων τῆς ὑπερβολῆς, ἧς ἕκαστον ἐμβαδὸν ἰσοῦται τῷ κοινῷ λογαρίθμῳ τῆς τετμημένης αὐτοῦ. Εὑρίσκομεν δὲ $\theta = 25^\circ\, 44'\, 25'', 47$ τῆς παλαιᾶς ὑποδιαιρέσεως.

357. ***Ἔλλειψις.*** Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐλλείψεως ἐν τοῖς ἄξοσιν αὐτῆς (Σχ. 66), μορφοῦμεν τὴν ἔκθεσιν τοῦ χωρίου ΑΒΜΠ κατὰ τὰ προεκτεθέντα,

$$\varepsilon = \int_0^x \psi \delta x = \frac{\beta}{\alpha} \int_0^x \delta x \sqrt{\alpha^2 - x^2}.$$

Τὸ ἀόριστον ὁλοκληρωτικὸν λαμβάνομεν ἀποκαθιστῶντες αὐτὸ λογικὸν διὰ τῆς ἐν τῷ περὶ διωνύμων διαφορικῶν ἄρθρῳ μεταμορφώσεως, ἢ προσέτι γράφοντες αὐτὸ ὑπὸ τὴν μορφὴν $\int \frac{\alpha^2 - x^2}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} \delta x$, καὶ θεωροῦντες ἰδίᾳ ἕκαστον τῶν μερῶν

$$\int \frac{\alpha^2 \delta x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}, \qquad \int \frac{-x^2 \delta x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}},$$

ὧν τὸ μὲν ὁλοκληροῦται ἀμέσως, κατὰ § 303, τὸ δὲ κατὰ § 319, θεωρούμενον ὡς διώνυμον διαφορικόν. Ἀλλ' ἡ ἑξῆς μέθοδος εἶναι ἁπλουστέρα. Καθιστῶμεν

$$\sqrt{\alpha^2 - x^2} = \tau x, \qquad \text{ὅθεν} \qquad x^2 = \frac{\alpha^2}{1 + \tau^2}.$$

τ δηλοῦντος νέαν μεταβλητήν· ὅπερ δίδει·

$$\int \delta x \sqrt{\alpha^2 - x^2} =$$

$$\int \tau x \delta x = \tfrac{1}{2} \tau x^2 - \tfrac{1}{2} \int \delta\tau . x^2 = \tfrac{1}{2} \tau x^2 - \frac{\alpha^2}{2} \int \frac{\delta\tau}{1 + \tau^2}.$$

Ἐπομένως

$$\int \delta x \sqrt{\alpha^2 - x^2} = A + \tfrac{1}{2} \tau x^2 - \frac{\alpha^2}{2} \,\text{τόξ ἐφ}\, \tau$$

$$= A + \tfrac{1}{2} x \sqrt{\alpha^2 - x^2} - \tfrac{1}{2} \alpha^2 \,\text{τόξ ἐφ}\, \frac{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}{x}.$$

Λαμβάνοντες δὲ τὸ ὁλοκληρωτικὸν ἀπὸ $x = 0$ μέχρι x οἱασδήποτε,

$$\int_0^x \delta x \sqrt{\alpha^2 - x^2} = \tfrac{1}{2} x \sqrt{\alpha^2 - x^2} + \tfrac{1}{2}\alpha^2\left(\frac{\Pi}{2} - \text{τόξ}\,\text{έφ}\,\frac{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}{x}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2} x \sqrt{\alpha^2 - x^2} + \tfrac{1}{2}\alpha^2\,\text{τόξ}\,\text{έφ}\,\frac{x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}$$

$$= \tfrac{1}{2} x \sqrt{\alpha^2 - x^2} + \tfrac{1}{2}\alpha^2\,\text{τόξ}\,\text{ήμ}\,\frac{x}{\alpha}.$$

Ἄρα, ἡ τιμὴ τοῦ ζητουμένου ἐμβαδοῦ εἶναι

$$\varepsilon = \frac{\beta x}{2\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2} + \frac{\alpha\beta}{2}\,\text{τόξ}\,\text{ήμ}\,\frac{x}{\alpha} = \frac{x\psi}{2} + \frac{\alpha\beta}{2}\,\text{τόξ}\,\text{ήμ}\,\frac{x}{\alpha}.$$

Ὑποθέτοντες $x = \alpha$, καὶ τετραπλασιάζοντες, λαμβάνομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐλλείψεως ὁλοκλήρου, $\Pi\alpha\beta$. Ὅταν $\alpha = \beta$, περίπτωσις τοῦ κύκλου, τὸ ἐμβαδὸν τοῦτο ἰσοῦται $\Pi\alpha^2$.

Ὁ ὅρος $\dfrac{\beta x\sqrt{\alpha^2 - x^2}}{2\alpha}$ ἰσοῦται $\dfrac{x\psi}{2}$, ἤτοι τῷ μέτρῳ τοῦ τριγώνου ΑΜΠ· ἑπομένως ὁ ὅρος $\dfrac{\alpha\beta}{2}$ τόξ ἡμ. $\dfrac{x}{\alpha}$ εἶναι τὸ μέτρον τοῦ τομέως ΑΒΜ.

358. *Ὑπερβολή.* Ἐν τῇ ὑπερβολῇ (Σχ. 67) ἐν τοῖς ἄξοσιν αὐτῆς, τὸ ἐμβαδὸν ΑΜΠ δηλοῦται, τῆς x οὔσης οἱασδήποτε, ὑπὸ

$$\varepsilon = \int_\alpha^x \psi\delta x = \frac{\beta}{\alpha}\int_\alpha^x \delta x\sqrt{x^2 - \alpha^2}.$$

Πρὸς μόρφωσιν τοῦ ἀορίστου ὁλοκληρωτικοῦ $\int \delta x\sqrt{x^2 - \alpha^2}$ καθιστῶμεν, ὡς ἐν τῇ ἐλλείψει,

$$\sqrt{x^2 - \alpha^2} = \tau x, \qquad \text{ὅθεν} \qquad x^2 = \frac{\alpha^2}{1 - \tau^2},$$

καὶ ἔχομεν

$$\int \delta x\sqrt{x^2 - \alpha^2} =$$

$$\int \tau x\delta x = \tfrac{1}{2}\tau x^2 - \tfrac{1}{2}\int \delta\tau . x^2 = \tfrac{1}{2}\tau x^2 - \frac{\alpha^2}{2}\int\frac{\delta\tau}{1 - \tau^2};$$

Ἀλλὰ $$\int\frac{\delta\tau}{1 - \tau^2} = \tfrac{1}{2}\int\delta\tau\left(\frac{1}{1 + \tau} + \frac{1}{1 - \tau}\right).$$

Ἄρα, $$\int \delta x\sqrt{x^2 - \alpha^2} = A + \tfrac{1}{2}\tau x^2 + \frac{\alpha^2}{4}\lambda\,\frac{1 - \tau}{1 + \tau}$$

$$= A + \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2 - \alpha^2} + \frac{\alpha^2}{4}\lambda\,\frac{x - \sqrt{x^2 - \alpha^2}}{x + \sqrt{x^2 - \alpha^2}}$$

$$= A + \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2 - \alpha^2} - \frac{\alpha^2}{2}\lambda\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - \alpha^2}}{\alpha}\right).$$

Λαμβάνοντες ἤδη τὸ ὁλοκληρωτικὸν ἀπὸ $x = \alpha$ μέχρι x τῆς τυχούσης, ἔχομεν

$$\int_\alpha^x \delta x\sqrt{x^2 - \alpha^2} = \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2 - \alpha^2} - \frac{\alpha^2}{2}\lambda\,\frac{x + \sqrt{x^2 - \alpha^2}}{\alpha}.$$

Ἄρα, ἡ ἔκθεσις τοῦ ζητουμένου χωρίου ΑΜΠ εἶναι

$$\varepsilon = \frac{\beta x}{2\alpha}\sqrt{x^2 - \alpha^2} - \frac{\alpha\beta}{2}\lambda\,\frac{x + \sqrt{x^2 - \alpha^2}}{\alpha}$$

$$= \frac{x\psi}{2} - \frac{\alpha\beta}{2}\lambda\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{\psi}{\beta}\right).$$

Τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ΑΜΠ ὄντος $\tfrac{1}{2}x\psi$, δῆλον ὅτι τὸ τοῦ τομέως ΑΜΒ ἰσοῦται $\dfrac{\alpha\beta}{2}\lambda\left(\dfrac{x}{\alpha} + \dfrac{\psi}{\beta}\right)$. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦτο ἀποκαθίσταται ἄπειρον ὅταν, τοῦ σημείου Μ ἐπ' ἄπειρον ἀφισταμένου, ἡ ἀκτὶς ΑΜ ταυτίζηται τῇ ἀσυμπτώτῳ.

359. Θεωρήσωμεν τὴν καμπύλην (Σχ. 68)

$$\psi = \alpha^x,$$

α οὔσης ποσότητος ἀτρέπτου μείζονος μονάδος. Ἡ ἔκθεσις τοῦ χωρίου ΜΠΚΝ, περατουμένου κατὰ τὰς τεταγμένας ΑΠ καὶ ΑΚ, ἢ x_0 καὶ x, εἶναι·

$$\varepsilon = \int_{x_0}^{x} \alpha^x \delta x = \frac{\alpha^x - \alpha^{x_0}}{\lambda \alpha}.$$

Τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ ἀρχόμενον χωρίον, πρὸς τὸ μέρος τῶν θετικῶν x, εἶναι $\frac{\alpha^x - 1}{\lambda\alpha}$· τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΒ, πρὸς τὸ μέρος τῶν ἀρνητικῶν x, ἰσοῦται $\frac{1 - \alpha^{-x}}{\lambda\alpha}$. Ἡ τελευταία τιμὴ αὕτη δίδει $\frac{1}{\lambda\alpha}$, ὅταν $x = \frac{1}{0}$· εἶναι δὲ ἡ τοῦ ἀπολαμβανομένου χωρίου ὑπὸ τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ τῆς καμπύλης ἐπ' ἄπειρον προαγομένης.

360. *Κυκλοειδής.* Διὰ τὴν καμπύλην ταύτην (Σχ. 69) ἔχομεν [186]·

$$x = \alpha\,(\omega - \text{ἡμ}\,\omega), \qquad \psi = \alpha\,(1 - \text{συν}\,\omega).$$

$$\varepsilon = \int_0^x \psi \delta x = \alpha^2 \int_0^\omega \delta\omega\,(1 - \text{συν}\,\omega)^2.$$

Ἀλλὰ

$$\int \delta\omega\,(1 - \text{συν}\,\omega)^2 = \int \delta\omega\,(1 - 2\,\text{συν}\,\omega + \text{συν}^2\omega)$$
$$= \int \delta\omega\,(\tfrac{3}{2} - 2\,\text{συν}\,\omega + \tfrac{1}{2}\,\text{συν}\,2\omega) = \tfrac{3}{2}\omega - 2\,\text{ἡμ}\,\omega + \tfrac{1}{4}\,\text{ἡμ}\,2\omega.$$

Ἄρα, τοῦ ἐμβαδοῦ ΑΜΠ ἡ ἔκθεσις εἶναι

$$\varepsilon = \alpha^2\,(\tfrac{3}{2}\,\omega - 2\,\text{ἡμ}\,\omega + \tfrac{1}{4}\,\text{ἡμ}\,2\omega).$$

Ὁ τύπος οὗτος, τῇ ὑποθέσει $\omega = 2\Pi$, δίδει τὴν τιμὴν τοῦ ὅλου χωρίου ΑΝΒΑ ὑφ' ἑνὸς μέρους τῆς κυκλοειδοῦς καὶ τοῦ ἄξονος ΑΒ ἀπολαμβανομένου· ἤτοι $\varepsilon = 3\Pi\alpha^2$, τὸ τριπλάσιον τοῦ γεννήτορος κύκλου.

Παρατηρητέον ὅτι,

$$\text{ΑΚΤΜ} = \text{ΑΚΤΠ} - \text{ΑΜΠ} = 2\alpha x - \varepsilon = \tfrac{1}{2}\alpha^2(\omega - \text{ἡμ}\,\omega\,\text{συν}\,\omega).$$

Ἄρα, τὸ χωρίον ΑΚΤΜ ἰσοῦται τῷ μέρει ΡΜΣ τοῦ γεννήτορος κύκλου· ἐπομένως τὸ χωρίον ΑΚΤΝΜ ἰσοῦται τῷ ἡμίσει τοῦ αὐτοῦ κύκλου.

361. Εἰς τ' αὐτὰ ἐξαγόμενα καταντῶμεν ζητοῦντες τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυκλοειδοῦς ἀναφερομένης πρὸς τὴν κορυφὴν αὐτῆς Α (Σχ. 70). Ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις αὐτῆς εἶναι

$$\frac{\delta\psi}{\delta x} = \sqrt{\frac{\psi}{2\alpha - \psi}},$$

τοῦ δὲ χωρίου ΑΜΠ ἡ ἔκθεσις

$$\int_0^x \psi \delta x, \qquad \text{ἢ} \qquad \int_0^\psi \delta\psi \sqrt{2\alpha\psi - \psi^2}.$$

Ἄρα, εἶναι ἡ αὐτὴ τοῦ χωρίου ΑΚΝ τοῦ γεννήτορος κύκλου, κ. τ. ἑ.

Παρατηρητέον ὅτι, τὸ ἀόριστον ὁλοκληρωτικὸν

$$\int \delta\psi \sqrt{2\alpha\psi - \psi^2}$$ τρεπόμενον ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\int \delta\psi \sqrt{\alpha^2 - (\psi - \alpha)^2},$$

καθίσταται ὅμοιον τῷ ἐν τῇ περιπτώσει τῆς ἐλλείψεως λογισθέντι, τροπῇ τοῦ x εἰς $\psi - \alpha$. Οὕτως εὑρίσκομεν·

$$\int \delta\psi \sqrt{\alpha^2 - (\psi - \alpha)^2} =$$
$$\frac{(\psi - \alpha)\sqrt{2\alpha\psi - \psi^2}}{2} + \frac{\alpha^2}{2}\,\text{τόξ ἡμ}\,\frac{\psi - \alpha}{\alpha} + \text{Α}.$$

Λαμβάνοντες δὲ τὸ ὁλοκληρωτικὸν ἀπὸ $\psi = 0$, συνάγομεν $\text{Α} = \frac{1}{4}\Pi\alpha^2$· καὶ λαμβάνοντες ὡς δεύτερον ὅριον $\psi = 2\alpha$, εὑρίσκομεν, ὡς ἀνωτέρω, τὴν τιμὴν τοῦ ἐμβαδοῦ $\text{ΑΔΕ} = \frac{1}{2}\Pi\alpha^2$.

362. Θεωρήσωμεν τὴν ἐξίσωσιν, ἐν ἄξοσιν ὀρθογωνίοις,

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{1 - x}}$$

ἐμφαίνουσαν καμπύλην στρέφουσαν πανταχοῦ τὰ κυρτὰ αὐτῆς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x, καὶ ἔχουσαν ἀσυμπτώτους τὸν αὐτὸν ἄξονα πρὸς τὰς ἀρνητικὰς x καὶ μίαν παράλληλον τοῦ ἄξονος τῶν ψ ἐν ἀποστάσει ἀπὸ τῆς ἀρχῆς ἴση $+1$. Ἔχομεν τὸ ἀόριστον ὁλοκληρωτικὸν

$$\varepsilon = \int \frac{\delta x}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x} + A,$$

Τὸ δὲ ἐμβαδὸν ὑπὸ τῶν ὁρίων 0 καὶ 1 ἀπολαμβανόμενον

$$\varepsilon = \int_0^1 \frac{\delta x}{\sqrt{1-x}} = 2.$$

Ἄρα, εἰ καὶ τὸ χωρίον τοῦτο ἐκτείνεται ἐπ' ἄπειρον, ἡ τιμὴ αὐτοῦ εἶναι πεπερασμένη.

363. Ἐὰν ζητήσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἡμιτονοειδοῦς $\psi = \eta\mu\, x$, ὑπὸ τῶν ὁρίων $x=0$ καὶ $x=\Pi$ ἀπολαμβανόμενον, ἤτοι τὸ τοῦ τμήματος ΑΜΠΑ (Σχ. 21), εὑρήσομεν ὅτι τὸ χωρίον τοῦτο διπλάσιον ἐστὶ τοῦ ἐπὶ τὴν μεγίστην τεταγμένην τετραγώνου.

364. Τέλος, ἐν τῇ καμπύλῃ $\psi = \tau\acute{\varepsilon}\mu^2 x$ (Σχ. 22) ἡ τιμὴ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τμήματος ΛΟΒΠ ἰσοῦται $\varepsilon\varphi\, x$.

365. *Σπεῖρα λογαριθμική.* Ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης ταύτης, ἐν συντεταγμέναις πολικαῖς, εἶναι

$$\rho = e^{\lambda\alpha.\omega}.$$

Ἡ ἔκθεσις τοῦ τριγωνικοῦ χωρίου ἀπολαμβανομένου ὑπὸ τῆς καμπύλης καὶ δύο ἀκτίνων ἐπιβατικῶν ρ καὶ ρ_0, περιεχουσῶν τὴν γωνίαν $\omega - \omega_0$, ἔσεται [351]

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\omega} e^{2\lambda\alpha.\omega}\,\delta\omega = \frac{e^{2\lambda\alpha.\omega} - e^{2\lambda\alpha.\omega_0}}{4\lambda\alpha} = \frac{\rho^2 - \rho_0^{\,2}}{4\lambda\alpha};$$

Ἐὰν ἀναχωρήσωμεν ἀπὸ $\rho_0 = 0$· ἤτοι, ἐὰν ζητήσωμεν τὸ ὅριον τοῦ περιεχομένου χωρίου ὑπὸ τῆς μονίμου ἀκτῖνος ρ καὶ ἑτέρας ἀκτῖνος ἧς τὸ μὲν πέρας τείνει πρὸς τὸν πόλον, ἡ δὲ διεύθυνσις στρέφεται ἀπεριορίστως περὶ τὸ ἀσύμπτωτον

τοῦτο σημεῖον, εὑρήσομεν ἁπλῶς $\dfrac{\rho^2}{4\lambda\alpha}$. Ἄρα, τὸ ἐμβαδὸν τοῦτο αὐξάνει ὡς τὸ τετράγωνον τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος.

Ἐν τῇ μερικῇ περιπτώσει ἐν ᾗ $\lambda\alpha = 1$ καὶ $\rho = e^{\omega}$, τὸ περὶ οὗ λόγος ἐμβαδὸν ἰσοῦται τῷ τεταρτημορίῳ τῆς διαφορᾶς τῶν ἐπὶ τῶν δύο ἀκτίνων ἐπιβατικῶν κατασκευαζομένων τετραγώνων.

366. Διὰ τῆς προεκτεθείσης ἐργασίας λογίζομεν πᾶν ἐμβαδὸν περιεχόμενον ἐν περιμέτρῳ γεγραμμένῃ ἐπὶ ἐπιπέδου. Ἔστω (Σχ. 71) ΜΜ'ΝΜ'' περιοχή τις ἐν ἄξοσιν ὀρθογωνίοις. Καλοῦμεν x_0 καὶ x_ω τὰς ἄκρας τετμημένας ΑΠ καὶ ΑΚ· x τὴν τυχοῦσαν ΑΠ'· καὶ ψ_1, ψ_2, τὰς τεταγμένας Μ'Π', Μ''Π', συστοιχούσας ἐπὶ τὴν τετμημένην ταύτην καὶ ἀνηκούσας ἀμοιβαίως εἰς τὰς δύο καμπύλας ΜΜ'Ν, ΜΜ''Ν, τὰς συνιστώσας τὴν περίμετρον ὁλόκληρον. Αἱ τεταγμέναι αὗται πρέπει νὰ ὦσι δεδομέναι συνεκθέσει τῆς x. Δῆλον δέ, κατὰ τὰ προλεχθέντα, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ΜΜ'ΝΜ'' δηλοῦται τῷ ὡρισμένῳ ὁλοκληρωτικῷ

$$\int_{x_0}^{x_\omega} (\psi_2 - \psi_1)\delta x.$$

Ἐὰν ἡ περίμετρος ΜΜ'ΝΜ'' ἦναι ἀσυνεχής, συγκροτουμένη ἐκ μερῶν διακεκριμένων, ὧν αἱ τεταγμέναι δὲν δηλοῦνται ὑπὸ τῆς αὐτῆς συνεκθέσεως τῆς τετμημένης x, δυνάμεθα διελεῖν τὸ προτεθὲν ἐμβαδὸν σὺν τῷ ὡρισμένῳ ὁλοκληρωτικῷ, τῷ τὴν τιμὴν τοῦ ἐμβαδοῦ τούτου ἐμφαίνοντι, εἰς διάφορα μέρη ἀντιστοιχοῦντα ἀμοιβαίως τοῖς τμήμασι τῆς περιοχῆς ὧν αἱ τεταγμέναι ἔχουσιν ἔκθεσιν κοινήν. Λογιστέον δὲ ἰδίᾳ ἕκαστον χωρίον.

367. Ὁ τετραγωνισμὸς τῶν καμπυλογράμμων ἐμβαδῶν ἐνίοτε καθίσταται εὐκολώτερος τῇ χρήσει συντεταγμένων πολικῶν. Π. χ., θεωρήσωμεν τὴν καμπύλην (Σχ. 37, *folium de Descartes*) δηλουμένην τῇ ἐξισώσει

$$x^3 + \psi^3 - \alpha x\psi = 0.$$

Τὸ πρόβλημα περὶ ὃ ἀσχολούμεθα ἀπαιτεῖ, ἐν συντεταγμέναις γραμμικαῖς, τὴν ἐπίλυσιν ἐξισώσεως τριτοβαθμίου. Λάβωμεν συντεταγμένας πολικάς. Ἔστωσαν, πόλος μὲν ἡ τῶν προτέρων συντεταγμένων ἀρχή, ἄξων δὲ πολικὸς ὁ τῶν x. Διὰ τῶν γνωστῶν τύπων [212] μορφοῦμεν τὴν πολικὴν ἐξίσωσιν τῆς αὐτῆς καμπύλης,

$$\rho = \frac{\alpha\, \dot{\eta}\mu\, \omega\, \sigma\upsilon\nu\, \omega}{\dot{\eta}\mu^3\omega + \sigma\upsilon\nu^3\omega}.$$

Ἀντεισάγοντες ἐν τῷ ἐν § 351 τύπῳ, καὶ ὁλοκληροῦντες, εὑρίσκομεν τὴν ἔκθεσιν τοῦ ζητουμένου ἐμβαδοῦ·

$$\varepsilon = -\frac{\alpha^2}{6}\,\frac{1}{1 + \dot{\varepsilon}\varphi^3\omega} + \mathrm{A}.$$

Τὴν ἄτρεπτον Α ὁριστέον ὅπως τὸ ἐμβαδὸν εἴη μηδὲν διὰ $\omega = 0$· ἄρα $\mathrm{A} = \frac{1}{6}\alpha^2$· ἐπομένως

$$\varepsilon = \frac{\alpha^2}{6}\,\frac{\dot{\varepsilon}\varphi^3\omega}{1 + \dot{\varepsilon}\varphi^3\omega}.$$

Λαμβάνομεν ὁλοκλήρου τοῦ φύλλου τὸ ἐμβαδόν, ποιοῦντες $\omega = \frac{1}{2}\Pi$ ἐν τῇ τιμῇ τοῦ ε, ἥτις τότε ἀποκαθίσταται $\frac{1}{6}\alpha^2$· διότι τὸ κλάσμα $\frac{\dot{\varepsilon}\varphi^3\omega}{1 + \dot{\varepsilon}\varphi^3\omega}$ ἰσοῦται 1 διὰ $\omega = \frac{1}{2}\Pi$.

Θʹ. ΕΥΘΥΝΣΙΣ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ.

368. Ἐν § 162 εὕρομεν ὅτι ἡ ἔκθεσις τοῦ διαφορικοῦ τόξου καμπύλης, ἐμφαινομένης ἐν ἄξοσιν ὀρθογωνίοις ὑπὸ ἐξισώσεως δοθείσης, εἶναι

$$\delta\varsigma = \delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\delta\psi}{\delta x}\right)^2}.$$

Ἄρα, δῆλον ὅτι τὸ ὡρισμένον ὁλοκληρωτικὸν

$$\varsigma = \int_{x_0}^{x} \delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\delta\psi}{\delta x}\right)^2},$$

ἐμφαίνει γενικῶς τὸ μῆκος τοῦ τόξου τῆς καμπύλης· ἤτοι δηλοῖ τίνι εὐθείᾳ γραμμῇ ἰσοῦται εἴτε ἡ ὅλη καμπύλη εἴτε τόξον αὐτῆς ὡρισμένον καὶ περατούμενον κατὰ τὰ ἐπὶ τὰς τετμημένας x_0 καὶ x συστοιχοῦντα σημεῖα.

369. Καμπύλης ἀναφερομένης πρὸς συντεταγμένας πολικάς, ἡ ἔκθεσις τοῦ διαφορικοῦ τοῦ τόξου εἶναι, κατὰ § 219,

$$\delta\varsigma = \delta\omega \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\delta\rho}{\delta\omega}\right)^2}.$$

Ἐπομένως, ἡ γενικὴ ἔκθεσις τοῦ μήκους αὐτῆς εἶναι

$$\varsigma = \int_{\omega_0}^{\omega} \delta\omega \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\delta\rho}{\delta\omega}\right)^2}.$$

ω_0 καὶ ω οὐσῶν τῶν κατὰ τὰ πέρατα τοῦ λογιστέου τόξου τιμῶν τῆς γωνίας ω, ὁριζούσης τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος.

370. *Παραβολή.* Ἡ ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς δίδει·

$$\psi = \sqrt{2\pi x}, \qquad \frac{\delta\psi}{\delta x} = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$$

Ἄρα, ἡ ἔκθεσις τοῦ μήκους τοῦ τόξου, ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς καμπύλης μέχρι τοῦ ἐπὶ τὴν τετμημένην x σημείου, εἶναι

$$\varsigma = \int_0^x \delta x \sqrt{1 + \frac{\pi}{2x}}.$$

Τὸ ἀόριστον ὁλοκληρωτικὸν εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς. Καθιστῶμεν

$$\sqrt{1 + \frac{\pi}{2x}} = \tau, \qquad \text{ὅθεν} \qquad x = \frac{\pi}{2(\tau^2 - 1)},$$

$$\int \delta x \sqrt{1 + \frac{\pi}{2x}} = \int \delta x . \tau = x\tau - \int x\,\delta\tau = x\tau - \frac{\pi}{2}\int \frac{\delta\tau}{\tau^2 - 1}$$

Ἀλλὰ $\int \frac{\delta\tau}{\tau^2 - 1} = \frac{1}{2}\int \delta\tau\left(\frac{1}{\tau - 1} - \frac{1}{\tau + 1}\right)$. ἄρα

$$\int \delta x \sqrt{1 + \frac{\pi}{2x}} = x\tau - \frac{\pi}{4}\lambda\frac{\tau - 1}{\tau + 1} + A$$

$$= x\sqrt{1 + \frac{\pi}{2x}} - \frac{\pi}{4}\lambda\frac{\sqrt{1 + \frac{\pi}{2x}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{\pi}{2x}} + 1} + A.$$

Λαμβάνοντες ἤδη τὸ ὁλοκληρωτικὸν ἀπὸ $x = 0$, μέχρι x οἱασδήποτε, ἔχομεν·

$$\varsigma = x\sqrt{1 + \frac{\pi}{2x}} - \frac{\pi}{4}\lambda\frac{\sqrt{1 + \frac{\pi}{2x}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{\pi}{2x}} + 1}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2\pi x + 4\pi x^2} + \tfrac{1}{2}\pi\lambda\frac{2x + \sqrt{2\pi x + 4x^2}}{\sqrt{2\pi x}}$$

$$= \sqrt{x}\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi + x} + \tfrac{1}{2}\pi\lambda\frac{\sqrt{x} + \sqrt{\tfrac{1}{2}\pi + x}}{\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi}}$$

Ἢ προσέτι,

$$\varsigma = \frac{\psi\sqrt{\psi^2 + \pi^2}}{2\pi} + \tfrac{1}{2}\pi\lambda\frac{\psi + \sqrt{\psi^2 + \pi^2}}{\pi}$$

Τὴν τελευταίαν ἔκθεσιν τοῦ ς εὑρίσκομεν ἀναχωροῦντες καὶ ἀπὸ τοῦ τύπου

$$\varsigma = \frac{1}{\pi}\int_{\psi_0}^{\psi} \delta\psi\sqrt{\psi^2 + \pi^2},$$

ὃν ὁλοκληροῦμεν μοιρικῶς, εἶτα δὲ ὑποθέτομεν τὸ τόξον

ἀρχόμενον ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς παραβολῆς, ὅτε ἔξομεν τὴν κατ' ἀρέσκειαν ἄτρεπτον $A = -\frac{1}{2}\pi\lambda\pi$.

371. *Ἔλλειψις.* Ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης ταύτης δίδει·

$$\psi = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2}, \qquad \frac{\delta\psi}{\delta x} = -\frac{\beta}{\alpha}\frac{x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}.$$

Ἑπομένως ἔχομεν·

$$\varsigma = \int_0^x \delta x\sqrt{1 + \frac{\beta^2 x^2}{\alpha^2(\alpha^2 - x^2)}} = \int_0^x \delta x\sqrt{\frac{\alpha^4 - (\alpha^2 - \beta^2)x^2}{\alpha^2(\alpha^2 - x^2)}}$$

δι' ἔκθεσιν τοῦ τόξου ἐπιλογιζομένου ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς καμπύλης μέχρι τοῦ ἐπὶ τὴν τετμημένην x σημείου. Καθιστῶντες $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha^2\varepsilon^2$, ἡ ἔκθεσις αὕτη ἄγεται εἰς

$$\varsigma = \int_0^x \delta x\sqrt{\frac{\alpha^2 - \varepsilon^2 x^2}{\alpha^2 - x^2}}.$$

Τὸ ὁλοκληρωτικὸν τοῦτο ἀμήχανον λαβεῖν ἄλλως ἢ ἀνεπτυγμένον κατὰ σειρὰν προσχωροῦσαν. Ἡ ἀνάπτυξις τοῦ ῥιζικοῦ ἐκτελεῖται κατὰ διαφόρους τρόπους. Π. χ., παρατηροῦντες ὅτι x εἶναι ἀείποτε ἐλάσσων α, θέτομεν

$$x = \alpha\,\text{συν}\,\varphi, \qquad \text{ὅθεν} \qquad \delta x = -\alpha\,\text{ἡμ}\,\varphi\,\delta\varphi,$$

καὶ

$$\varsigma = -\alpha\int_{\frac{\Pi}{2}}^{\varphi} \delta\varphi\sqrt{1 - \varepsilon^2\text{συν}^2\varphi}.$$

Ἤ, ἀναπτύσσοντες τὸ ῥιζικόν·

$$\varsigma = \alpha\left(\frac{\Pi}{2} - \varphi\right) + \alpha\int_{\frac{\Pi}{2}}^{\varphi}\delta\varphi\left(\frac{\varepsilon^2}{2}\text{συν}^2\varphi + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^4}{4}\text{συν}^4\varphi + \frac{1.3}{2.4}\frac{\varepsilon^6}{6}\text{συν}^6\varphi\right.$$

$$\left. + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\varepsilon^8}{8}\text{συν}^8\varphi + \ldots\ldots\right).$$

Διὰ τοῦ ἐν § 331 γενικοῦ τύπου λαμβάνομεν·

$$\int \delta\varphi\, \text{συν}^2\varphi = \tfrac{1}{2}\, \text{ἡμ}\varphi\, \text{συν}\, \tfrac{1}{2}\,\varphi + \text{A},$$

$$\int \delta\varphi\, \text{συν}^4\varphi = \frac{1}{4}\,\text{ἡμ}\varphi\,\text{συν}^3\varphi + \frac{1.3}{2.4}\,\text{ἡμ}\varphi\,\text{συν}\varphi + \frac{1.3}{2.4}\,\varphi + \text{A},$$

$$\int \delta\varphi\, \text{συν}^6\varphi = \frac{1}{6}\,\text{ἡμ}\varphi\,\text{συν}^5\varphi + \frac{1.5}{4.6}\,\text{ἡμ}\varphi\,\text{συν}^3\varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\text{ἡμ}\varphi\,\text{συν}\varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\varphi + \text{A},$$

$$\int \delta\varphi\, \text{συν}^8\varphi = \frac{1}{8}\,\text{ἡμ}\varphi\,\text{συν}^7\varphi + \frac{1.7}{6.8}\,\text{ἡμ}\varphi\,\text{συν}^5\varphi + \frac{1.5.7}{4.6.8}\,\text{ἡμ}\varphi\,\text{συν}^3\varphi + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\,\text{ἡμ}\varphi\,\text{συν}\varphi + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\,\varphi + \text{A},$$

. . . .

Λαμβάνοντες δὲ τὰ ὁλοκληρωτικὰ ἀπὸ $\varphi = \frac{1}{2}\Pi$ μέχρι $\varphi = \varphi$·

$$\int_{\frac{\Pi}{2}}^{\varphi} \delta\varphi\, \text{συν}^2\varphi = \frac{1}{2}\,\text{ἡμ}\varphi\,\text{συν}\varphi - \frac{1}{2}\left(\frac{\Pi}{2} - \varphi\right),$$

$$\int_{\frac{\Pi}{2}}^{\varphi} \delta\varphi\, \text{συν}^4\varphi = \frac{1}{4}\,\text{ἡμ}\varphi\,\text{συν}^3\varphi + \frac{1.3}{2.4}\,\text{ἡμ}\varphi\,\text{συν}\varphi - \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{\Pi}{2} - \varphi\right),$$

$$\int_{\frac{\Pi}{2}}^{\varphi} \delta\varphi\, \text{συν}^6\varphi = \frac{1}{6}\,\text{ἡμ}\varphi\,\text{συν}^5\varphi + \frac{1.5}{4.6}\,\text{ἡμ}\varphi\,\text{συν}^3\varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\text{ἡμ}\varphi\,\text{συν}\varphi - \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{\Pi}{2} - \varphi\right),$$

$$\int_{\frac{\Pi}{2}}^{\varphi} \delta\varphi\, \text{συν}^8\varphi = \frac{1}{8}\,\text{ἡμ}\varphi\,\text{συν}^7\varphi + \frac{1.7}{6.8}\,\text{ἡμ}\varphi\,\text{συν}^5\varphi + \frac{1.5.7}{4.6.8}\,\text{ἡμ}\varphi\,\text{συν}^3\varphi + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\,\text{ἡμ}\varphi\,\text{συν}\varphi - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\left(\frac{\Pi}{2} - \varphi\right),$$

. . . .

μορφοῦμεν τὰς τιμὰς ἑκάστου ὅρου τῆς προηγουμένης σειρᾶς, ἥτις ἔσεται τοσούτῳ μᾶλλον προσχωροῦσα ὅσον ἡ ἐκκεντρότης ε ἐλάσσων.

Θέτοντες $x = \alpha$, ἑπομένως $\text{συν}\varphi = 1$, ἢ $\varphi = 0$, λαμβάνομεν τὸ μῆκος τοῦ τεταρτημορίου τῆς περιφερείας τῆς ἐλλείψεως,

$$\frac{\Pi\alpha}{2}\left[1 - (\tfrac{1}{2}\varepsilon)^2 - \tfrac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\varepsilon^2\right)^2 - \tfrac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\varepsilon^3\right)^2 - \dots \frac{1}{2\mu-1}\left(\frac{1.3\dots(2\mu-1)}{2.4\dots.2\mu}\varepsilon^{\mu}\right)^2 - \dots\right]$$

Ὅταν $\varepsilon = 0$, ἡ ἔλλειψις ἀποκαθίσταται κύκλος, ἡ δὲ προηγουμένη τιμὴ ἄγεται εἰς $\frac{1}{2}\Pi\alpha$, τεταρτημόριον τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

ΣΗΜ. Εὑρεθήτω ἐπὶ τοῦ σχήματος ἡ γωνία φ διδομένη ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $x = \alpha\, \text{συν}\, \varphi$.

372. *Ὑπερβολή.* Διὰ τὴν καμπύλην ταύτην ἔχομεν·

$$\psi = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2 - \alpha^2}, \qquad \frac{\delta\psi}{\delta x} = \frac{\beta}{\alpha}\,\frac{x}{\sqrt{x^2 - \alpha^2}},$$

$$\varsigma = \int_{\alpha}^{x} \delta x \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\,\frac{x^2}{x^2 - \alpha^2}}$$

$$= \int_{\alpha}^{x} \delta x \sqrt{\frac{(\alpha^2 + \beta^2)\,x^2 - \alpha^4}{\alpha^2(x^2 - \alpha^2)}}.$$

Καλοῦντες $\alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2\varepsilon^2$, λαμβάνομεν

$$\varsigma = \int_{\alpha}^{x} \delta x \sqrt{\frac{\varepsilon^2 x - \alpha^2}{x^2 - \alpha^2}},$$

ἔκθεσιν τοῦ ὑπερβολικοῦ τόξου λογιζομένου ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς καμπύλης μέχρι τοῦ ἐπὶ τὴν τετμημένην x σημείου.

Ἐπειδὴ ἐν τῇ ὑπερβολῇ ἀείποτε $x > \alpha$, θέτομεν

$$x = \frac{\alpha}{\text{συν}\,\varphi}, \qquad \text{ὅθεν} \qquad \delta x = \frac{\alpha\,\text{ἡμ}\,\varphi\,\delta\varphi}{\text{συν}^2\varphi},$$

$$\varsigma = \alpha \int_0^{\varphi} \frac{\delta x}{\text{συν}^2\varphi}\sqrt{\varepsilon^2 - \text{συν}^2\varphi} = \alpha \int_0^{\varphi} \frac{\varepsilon\delta\varphi}{\text{συν}^2\varphi}\sqrt{1 - \frac{\text{συν}^2\varphi}{\varepsilon^2}}.$$

'Αναπτύσσοντες τὸ ῥιζικὸν συνάγομεν·

$$\varsigma = \alpha \int_0^{\varphi} \frac{\varepsilon\delta\varphi}{\text{συν}^2\varphi}\left(1 - \frac{1}{2\varepsilon^2}\,\text{συν}^2\varphi - \frac{1}{2}\,\frac{1}{4\varepsilon^4}\,\text{συν}^4\varphi - \frac{1.3}{2.4}\,\frac{1}{6\varepsilon^6}\,\text{συν}^6\varphi - \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{1}{8\varepsilon^8}\,\text{συν}^8\varphi - \dots\right)$$

$$= \alpha\varepsilon\,\text{ἐφ}\,\varphi - \frac{\alpha}{2\varepsilon}\,\varphi - \alpha\int_0^{\varphi}\delta\varphi\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{4\varepsilon^3}\,\text{συν}^2\varphi + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{1}{6\varepsilon^5}\,\text{συν}^4\varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{1}{8\varepsilon^7}\,\text{συν}^6\varphi + \dots\right).$$

Αὐξανούσης x ἐπ' ἄπειρον, φ τείνει πρὸς $\frac{1}{2}\Pi$, ς δὲ αὐξάνει ἀπεριορίστως. Οἱ ὅροι τῆς σειρᾶς δίδονται ἐκ τῶν τύπων τοῦ προηγουμένου χωρίου, ὑποτιθεμένης τῆς ἀτρέπτου Λ ἴσης μηδενί.

Παρατηρητέον ὅτι, τῆς ἐξισώσεως τῆς ἀσυμπτώτου οὔσης $\psi = \frac{\beta}{\alpha}x$, τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου τῆς καμπύλης ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς ἀσυμπτώτου, οὗτινος ἡ τετμημένη εἶναι x, ἰσοῦται

$$\sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2 . x}{\alpha}} = \varepsilon x = \frac{\alpha\varepsilon}{\text{συν}\,\varphi}.$$

Ἔστω ρ τὸ ἀπόστημα τοῦτο· ἔχομεν

$$\rho - \varsigma = \alpha\varepsilon\frac{1 - \text{ἡμ}\,\varphi}{\text{συν}\,\varphi} + \frac{\alpha}{2\varepsilon}\,\varphi + \alpha\int_0^{\varphi}\delta\varphi\left(\frac{1}{2}\,\frac{\text{συν}^2\varphi}{4\varepsilon^3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{\text{συν}^4\varphi}{6\varepsilon^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{\text{συν}^6\varphi}{8\varepsilon^7} + \dots\right).$$

Ὑποθέτοντες $x = \frac{1}{0}$, ἐπομένως $\text{συν}\,\varphi = 0$, ἢ $\varphi = \frac{1}{2}\Pi$, ὁ τύπος οὗτος δίδει τὸ ὅριον ᾧ τείνει ἡ ἐπὶ τοῦ ς ὑπεροχὴ τοῦ ρ, καθ' ὅσον ἡ τετμημένη x αὐξάνει· ἤτοι (παρατηροῦντες ὅτι, ὅταν $\varphi = \frac{1}{2}\Pi$, $\frac{1 - \text{ἡμ}\,\varphi}{\text{συν}\,\varphi} = \frac{\text{συν}\,\varphi}{1 + \text{ἡμ}\,\varphi} = 0$),

$$\frac{\Pi\alpha}{4\varepsilon}\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{\varepsilon^2}\right)^2 + \frac{1}{7}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{\varepsilon^3}\right)^2 + \dots\dots\right].$$

373. Προκείσθω ἤδη ἡ καμπύλη δηλουμένη ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$\psi = \alpha^x, \quad \text{διδούσης} \quad \frac{\delta\psi}{\delta x} = \lambda\alpha . \alpha^x = \lambda\alpha . \psi.$$

Ἔχομεν διὰ μῆκος τοῦ τόξου οὗτινος τὰ πέρατα συστοιχοῦσι ταῖς τετμημέναις x_0 καὶ x_ω,

$$\varsigma = \int_{x_0}^{x_\omega}\delta x\sqrt{1 + (\lambda\alpha . \alpha^x)^2}.$$

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ θέτομεν·

$$\frac{\delta\psi}{\delta x} = \lambda\alpha . \psi = \text{ἐφ}\,\tau, \quad \text{ὅθεν} \quad \lambda\alpha . \delta\psi = \frac{\delta\tau}{\text{συν}^2\tau},$$

$$\delta x = \frac{1}{\lambda\alpha}\,\frac{\delta\psi}{\psi} = \frac{1}{\lambda\alpha}\,\frac{\delta\tau}{\text{ἡμ}\,\tau\ \text{συν}\,\tau},$$

καὶ

$$\varsigma = \frac{1}{\lambda\alpha}\int_{\tau_0}^{\tau}\frac{\delta\tau}{\text{ἡμ}\,\tau\ \text{συν}^2\tau}.$$

Ἀλλά, ἐκ τῶν ἐν ἄρθ. Ε' γενικῶν τύπων συνάγομεν·

$$\int\frac{\delta\tau}{\text{ἡμ}\,\tau\ \text{συν}^2\tau} = \frac{1}{\text{συν}\,\tau} + \int\frac{\delta\tau}{\text{ἡμ}\,\tau} = \frac{1}{\text{συν}\,\tau} + \lambda\,\text{ἐφ}\,\frac{\tau}{2} + \Lambda.$$

Ἄρα,

$$\varsigma = \frac{1}{\lambda\alpha}\left(\frac{1}{\text{συν}\,\tau} - \frac{1}{\text{συν}\,\tau_0} + \lambda\,\frac{\text{ἐφ}\,\frac{1}{2}\tau}{\text{ἐφ}\,\frac{1}{2}\tau_0}\right).$$

ΣΗΜ. Περιττὸν ἴσως παρατηρῆσαι, ὅτι $\tau =$ τόξ ἐφ $(\lambda\alpha.\psi)$ εἶναι ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης κατὰ τὸ ἐπὶ τὴν τετμημένην x σημεῖον ταύτης.

374. *Κυκλοειδής.* Διὰ τὴν καμπύλην ταύτην (Σχ. 69) ἔχομεν [186]·

$$\frac{\delta\psi}{\delta x} = \frac{\sqrt{2\alpha\psi - \psi^2}}{\psi}, \quad \text{ἢ} \quad \frac{\delta x}{\delta\psi} = \frac{\psi}{\sqrt{2\alpha\psi - \psi^2}}.$$

Ἐπειδὴ τὸ διαφορικὸν τοῦ τόξου πάσης καμπύλης λαμβάνει καὶ τὴν μορφὴν $\delta\psi\sqrt{1 + \left(\frac{\delta x}{\delta\psi}\right)^2}$, ἄρα, παριστῶμεν ἐνταῦθα ὡς ἑξῆς

$$\varsigma = \int_0^\psi \delta\psi\sqrt{1 + \frac{\psi^2}{2\alpha\psi - \psi^2}} = \sqrt{2\alpha}\int_0^\psi \frac{\delta\psi}{\sqrt{2\alpha - \psi}}$$

τὸ μῆκος τοῦ τόξου τῆς κυκλοειδοῦς ἀρχομένου ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς καμπύλης μέχρι τοῦ σημείου οὗτινος ἡ τεταγμένη εἶναι ψ. Ὁλοκληροῦντες δὲ λαμβάνομεν

$$\varsigma = 4\alpha - 2\sqrt{2\alpha}\,\sqrt{2\alpha - \psi}.$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου, τῇ ὑποθέσει $\psi = 2\alpha$, συνάγομεν τὸ μῆκος τῆς ἡμικυκλοειδοῦς ἴσον 4α, ὡς ἐν § 211.

Ἐὰν ἀναφέρωμεν τὴν κυκλοειδῆ εἰς τὴν κορυφὴν αὐτῆς N, λογίζοντες τὰς μὲν τεταγμένας ἄνωθεν πρὸς τὰ κάτω, τὸ δὲ τόξον ς ἀπὸ τοῦ σημείου N κατὰ τὴν διεύθυνσιν NMA, γραπτέον $2\alpha - \psi$ ἀντὶ ψ καὶ $4\alpha - \varsigma$ ἀντὶ ς. Ἔξομεν οὕτω

$$\sigma = 2\sqrt{2\alpha\psi}.$$

375. *Σπεῖρα λογαριθμική.* Ἡ πολικὴ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης ταύτης εἶναι

$$\rho = c^{\lambda\alpha.\omega}, \quad \text{ἐξ ἧς} \quad \frac{\delta\rho}{\delta\omega} = \lambda\alpha.c^{\lambda\alpha.\omega} = \lambda\alpha.\rho.$$

Κατὰ § 369 ἔχομεν,

$$\varsigma = \int_{\omega_0}^{\omega} \delta\omega\sqrt{\rho^2 + (\lambda\alpha)^2\rho^2} = \sqrt{1 + (\lambda\alpha)^2}\int_{\omega_0}^{\omega} \delta\omega.c^{\lambda\alpha.\omega}\cdot$$

ἤτοι,
$$\varsigma = \frac{\sqrt{1 + (\lambda\alpha)^2}}{\lambda\alpha}(\rho - \rho_0)\cdot$$

ὅπερ εἶναι τὸ μῆκος τοῦ τόξου τῆς περὶ ἧς λόγος σπείρας ἀπολαμβανομένου μεταξὺ τῶν σημείων οἷς ἀνήκουσιν αἱ ρ_0 καὶ ρ ἐπιβατικαὶ ἀκτῖνες. Ἐπειδὴ ἡ τριγωνομετρικὴ ἐφαπτομένη τῆς ὑπὸ τῆς καθέτου καὶ τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος περιεχομένης γωνίας ἰσοῦται $-\lambda\alpha$ [233], ἡ τριγωνομετρικὴ ἐφαπτομένη τῆς ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης καὶ τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος ἔσεται $\frac{1}{\lambda\alpha}$, τὸ δὲ συνημίτονον $\frac{\lambda\alpha}{\sqrt{1+(\lambda\alpha)^2}}$.

Δῆλον, τῷ ὄντι, ἐκ τῆς φύσεως τῆς περὶ ἧς πρόκειται καμπύλης, ὅτι ἡ διαφορὰ δύο ἀκτίνων ἐπιβατικῶν εἶναι πρὸς τὸ μῆκος τοῦ ὑπ' αὐτῶν ἀπολαμβανομένου τόξου ἐν λόγῳ ἀτρέπτῳ ἐμφαινομένῳ ὑπὸ τοῦ συνημιτόνου τούτου.

Ὅταν ἡ τῆς λογαριθμικῆς σπείρας ἐξίσωσις ἦναι ἁπλῶς $\rho = c^\omega$, ἔχομεν $\varsigma = \sqrt{2}.(\rho - \rho_0)$. Ἄρα, τὸ μῆκος οἱουδήποτε τόξου τῆς καμπύλης ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ τῶν διαγωνίων τῶν κατασκευαζομένων τετραγώνων ἐπὶ τῶν ζευγνυουσῶν τὰ πέρατα τοῦ τόξου ἀκτίνων ἐπιβατικῶν.

Ἐὰν τὸ τόξον ἄρχηται ἐκ τοῦ πόλου, ὅστις εἶναι ἀσύμπτωτος τῇ καμπύλῃ, ἕξομεν

$$\varsigma = \rho\frac{\sqrt{1 + (\lambda\alpha)^2}}{\lambda\alpha}, \quad \text{ἢ} \quad \varsigma = \rho\sqrt{2}.$$

Ἡ πρώτη τῶν ἐκθέσεων τούτων εἶναι ἡ τοῦ μήκους τῆς κατὰ τὸ πέρας τοῦ τόξου ἀγομένης ἐφαπτομένης καὶ περατουμένης ἐπὶ τῆς ἀπὸ τοῦ πόλου ἀγομένης καθέτου τῇ ἐπιβατικῇ ἀκτῖνι. Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο ἔγινεν ἤδη γνωστὸν ἐκ τῆς τῶν ἐνειλιγμένων θεωρίας [234]. Ἡ δευτέρα δεικνυσιν ὅτι τὸ μῆκος τοῦ τόξου ἐν τῇ σχετικῇ σπείρᾳ ἰσοῦται τῇ διαγωνίῳ τοῦ ἐπὶ τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος κατασκευαζομένου τετραγώνου. Τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα δεικνύουσιν ὅτι, ἂν καὶ ἀπὸ τοῦ πόλου μέχρι οἱουδήποτε σημείου τῆς καμπύλης ὑπάρχουσιν ἄπειραι περιελίξεις, αὗται συνιστῶσι μῆκος πεπερασμένον.

Ι΄. ΚΥΒΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ.

376. Θεωρήσωμεν στερεὸν ἀπογεννώμενον τῇ περιαγωγῇ καμπύλης περὶ ἄξονα ὃν ὑποθέσομεν ταυτιζόμενον τῷ τῶν x. Ἔστω

$$\psi = \Sigma(x)\cdot$$

ἡ ἐμφαίνουσα ἐξίσωσις τὴν ἐπίπεδον καμπύλην ἐξ ἧς καταγράφεται ἡ ἐπιφάνεια τοῦ στερεοῦ τούτου. Παραστήσωμεν O τὸ τμῆμα στερεοῦ ἀπολαμβανόμενον μὲν ὑπὸ δύο ἐπιπέδων καθέτως ἀγομένων τῷ ἄξονι AX (Σχ. 72) κατὰ τὰ σημεῖα Π, Ρ, καταγραφόμενον δὲ τῇ περιαγωγῇ τοῦ χωρίου ΠΜΣΡ τῆς καμπύλης γεννητρίας. Ἔστω x ἡ τετμημένη AΡ. Δῆλον ὅτι, ὅταν ἡ x αὐξήσῃ κατὰ ΡΚ $= \Delta x$, τὸ στερεὸν O αὐξήσει κατὰ ποσότητα ΔO ἴσην τῷ γραφομένῳ στερεῷ ἐκ τῆς περιαγωγῆς τοῦ χωρίου ΡΣΝΚ. Ἀλλ' ὁ ὄγκος οὗτος (ὑποτιθεμένης τῆς Δx ὅσον δεῖ σμικρᾶς ὅπως ψ εἴη μονίμως αὔξουσα ἢ φθίνουσα ἐν τῷ ἀποστήματι ΡΚ) περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δύο κυλίνδρων, ὧν ὕψος μὲν κοινὸν ΡΚ ἀκτῖνες δὲ ἀμοιβαίως αἱ ΡΣ καὶ ΚΝ. Ἄρα·

$$\Delta O > \Pi\psi^2\Delta x, \qquad \Delta O < \Pi(\psi + \Delta\psi)^2\Delta x,$$

ἢ

$$\frac{\Delta O}{\Delta x} > \Pi\psi^2, \qquad \frac{\Delta O}{\Delta x} < \Pi(\psi + \Delta\psi)^2.$$

Ἀλλά, τῆς Δx μειουμένης ἐπ' ἄπειρον, ἐν τῷ ὁρίῳ, $\Pi\psi^2$, κοινῷ ἀμφοτέραις ταῖς ἐκθέσεσι ταύταις, ἔχομεν

$$\frac{\delta O}{\delta x} = \Pi\psi^2, \qquad \text{ἢ} \qquad \delta O = \Pi\psi^2\delta x.$$

Αὕτη εἶναι ἡ γενικὴ ἔκθεσις τοῦ διαφορικοῦ τοῦ τῷ O δηλουμένου στερεοῦ. Ἐπομένως συνάγομεν ἀμέσως, ὅτι τὸ ὡρισμένον ὁλοκληρωτικὸν

$$O = \Pi\int_{x_0}^{x} \psi^2\delta x\ ,$$

δίδει τὴν ἔκθεσιν τοῦ μέρους στερεοῦ τινος ἐκ περιστροφῆς ἀπογεννωμένου, τοῦ περιεχομένου ὑπὸ δύο ἐπιπέδων ἀγομένων πρὸς ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ἐν ταῖς ἀποστάσεσι x_0, x, ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων.

377. *Ἐλλειψοειδές.* Τεθείσθω ὅτι ἡ γεννήτρια ἐπιφάνεια εἶναι ἔλλειψις, περιαγομένη περὶ τὸν ἕτερον τῶν ἀξόνων αὐτῆς, ἧς ἡ ἐξίσωσις ἔστω

$$\psi^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}\,(2\alpha x - x^2).$$

Ἔχομεν

$$O = \frac{\Pi\beta^2}{\alpha^2}\int(2\alpha x - x^2)\,\delta x = \frac{\Pi\beta^2}{\alpha^2}\left(\alpha x^2 - \frac{x^3}{3}\right) + A.$$

Ἐὰν δὲ ὁ ὄγκος ἄρχηται ἀπὸ τῆς κορυφῆς,

$$A = 0, \quad \text{καὶ} \quad O = \frac{\Pi\beta^2}{\alpha^2}\left(\alpha x^2 - \frac{x^3}{3}\right).$$

Τὸν τοῦ ἐλλειψοειδοῦς ὁλοκλήρου ὄγκον λαμβάνομεν καθιστῶντες $x = 2\alpha$, ὅπερ δίδει,

$$O = \tfrac{4}{3}\,\Pi\beta^2\alpha.$$

ΣΗΜ. Τὸ στερεὸν ἀπογεννώμενον τῇ περιστροφῇ τῆς ἡμιελλείψεως περὶ τὸν ἐλάσσονα αὐτῆς ἄξονα, εὑρίσκομεν τρέποντες, εἰς τὸ ἀνωτέρω ἐξαγόμενον, β εἰς α καὶ α εἰς β, ὅπερ δίδει $\frac{4}{3}\Pi\alpha^2\beta$. Δῆλον δὲ ὅτι τὸ τελευταῖον τοῦτο στερεὸν μεῖζον ἐστὶ τοῦ πρώτου.

Ὅταν $\alpha = \beta$, οἱ ἀνωτέρω τύποι δίδουσι, $\frac{4}{3}\Pi\alpha^3$, στερεότητα τῆς σφαίρας ἀκτῖνα ἴσην α ἐχούσης, καὶ $\frac{1}{3}\Pi x^2(3\alpha - x)$, ὄγκον τμήματος αὐτῆς σφαιρικοῦ μετὰ μιᾶς βάσεως.

378. Παρατηρητέον ὅτι, τὸ διαφορικὸν δO, μὴ περιέχον ῥιζικόν, δὲν γίνεται φανταστικὸν πέραν τῶν ὁρίων O

καὶ $+ 2\alpha$· τὸ σημεῖον αὐτοῦ μόνον μεταβάλλεται· ἰσοῦται δὲ, πλὴν τοῦ σημείου, τῷ διαφορικῷ τοῦ ἀπογεννωμένου στερεοῦ ὑπὸ ὑπερβολῆς δηλουμένης τῇ ἐξισώσει

$$\psi^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(x^2 - 2\alpha x).$$

Ἐντεῦθεν συνάγομεν ὅτι, ἐὰν ἐν τῇ ἐκθέσει τοῦ O δώσωμεν τῷ δευτέρῳ ὁρίῳ x τιμὴν ἀρνητικὴν, ἕξομεν τὸν ὄγκον τοῦ ὑπερβολοειδοῦς, ἀπὸ τῆς τιμῆς ταύτης τῆς x μέχρι $x = 0$· ἐὰν δώσωμεν τῇ x τιμὴν θετικὴν ἐλάσσονα 2α, ἕξομεν τὸν ὄγκον τοῦ ἐλλειψοειδοῦς ἀπὸ $x = 0$ μέχρι τοῦ δευτέρου τούτου ὁρίου· τέλος, ἐὰν δώσωμεν τῇ x τιμὴν θετικὴν μείζονα 2α, ἕξομεν τὸν ὄγκον ὁλοκλήρου τοῦ ἐλλειψοειδοῦς, ἧττον τοῦ ὄγκου τοῦ ὑπερβολοειδοῦς περιεχομένου μεταξὺ $x = 2\alpha$ καὶ τοῦ δευτέρου ὁρίου.

379. *Παραβολοειδές.* Τὸ στερεὸν τοῦτο ἀπογεννᾶται τῇ περιαγωγῇ παραβολῆς περὶ τὸν ἄξονα αὐτῆς, δηλουμένης ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως (Σχ. 65)·

$$\psi^2 = 2\sigma x.$$

Ἡ ἔκθεσις τοῦ ὄγκου τούτου εἶναι

$$O = \Pi \int_0^x \psi^2 \delta x = 2\Pi\sigma \int_0^x x\delta x,$$

ἢ

$$O = \sigma \Pi x^2 = \tfrac{1}{2}\Pi \psi^2 x·$$

ἄρχεται δὲ ἀπὸ τῆς κορυφῆς μέχρι x οἱασδήποτε. Ἔστω $A\Pi = x$. Παρατηρητέον ὅτι, $\Pi\psi^2$ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν κύκλου γραφομένου ἀκτῖνι MΠ. Ἄρα, ὁ ὄγκος $O = \frac{1}{2}\Pi\psi^2 x$ ἰσοῦται τῷ ἡμίσει τοῦ κυλίνδρου ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου AΠMP γραφομένου. Ἐν ἄλλοις λόγοις, *ὁ ὄγκος τοῦ παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς, ἰσοῦται τῷ ἡμίσει τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου.*

380. Κατὰ τὰ προεκτεθέντα, εὐκόλως λογίζομεν τὸν ὄγκον παντὸς στερεοῦ ἀπογεννωμένου τῇ περιαγωγῇ σχήματος ἐπιπέδου περὶ ἄξονα κείμενον ἐν τῷ τοῦ σχήματος τούτου ἐπιπέδῳ. Ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ ἀπογεννωμένου τῇ περιαγωγῇ τοῦ ἐμβαδοῦ MM′NN′ (Σχ. 73) γεγραμμένου ἐν τῷ ἐπιπέδῳ XΨ, περὶ τὸν ἄξονα τῶν x, δηλοῦται ὑπὸ τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρωτικοῦ·

$$\Pi \int_{x_0}^{x_\omega} \delta x (\psi_1^2 - \psi_2^2).$$

δηλουσῶν, τῶν μὲν x_0 καὶ x_ω τὴν ἐλάσσονα τιμὴν AΠ καὶ τὴν μείζονα τιμὴν AK τῆς τετμημένης x, τῶν δὲ ψ_1 καὶ ψ_2 τὰς τιμὰς τῶν τεταγμένων M′π, N′π, τῶν δύο γραμμῶν MM′N, MN′N, συστοιχουσῶν τῇ τυχούσῃ τετμημένῃ x.

381. *Δακτύλιος.* Τὸ στερεὸν τοῦτο ἀπογεννᾶται τῇ περιαγωγῇ κύκλου περὶ εὐθεῖαν κειμένην ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτοῦ. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις τοῦ γεννήτορος κύκλου

$$(\psi - \beta)^2 + (x - a)^2 = \alpha^2, \quad ἢ \quad \psi = \beta \pm \sqrt{\alpha^2 - (x - a)^2}.$$

Τὸ τοῦ ὄγκου διαφορικὸν εἶναι (Σχ. 74)·

$$\Pi(\overline{M\Pi}^2 - \overline{M'\Pi}^2)\delta x, \quad ἢ \quad 4\Pi\beta\,\delta x\sqrt{\alpha^2 - (x - a)^2},$$

$$ἢ \text{ προσέτι } \quad 2\Pi\beta \,.\, MM'\delta x.$$

Ἀλλὰ, $MM'\delta x$ εἶναι τὸ διαφορικὸν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ γεννήτορος κύκλου. Ἄρα, ὁ ἀπογεννώμενος ὄγκος ἐκ τοῦ μέρους τοῦ κύκλου ὑπὸ δύο οἱωνδήποτε τεταγμένων ἀπολαμβανομένου, ἰσοῦται τῷ ἐμβαδῷ τούτῳ ἐπὶ $2\Pi\beta$ πολυπλασιαζομένῳ· ἤτοι, ἐπὶ τὴν γραφομένην περιφέρειαν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

Ἵνα λάβωμεν ὅλον τὸν ὄγκον τοῦ στερεοῦ, πολυπλασιαστέον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἐπὶ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου αὐτοῦ γραφομένην περιφέρειαν, ὅπερ δίδει $2\Pi^2\beta\alpha^2$.

Τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον εὑρίσκομεν ὁλοκληροῦντες τὸ διαφορικὸν

$$\delta x \sqrt{\alpha^2 - (x - a)^2}.$$

382. *Στερεὸν ὑπὸ κυκλοειδοῦς παραγόμενον* (Σχ. 70). Λάβωμεν ὡς ἀρχὴν μὲν τὴν κορυφήν, ὡς ἄξονας δὲ τὴν κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐφαπτομένην καὶ τὴν κάθετον. Ζητήσωμεν τὸ στερεὸν ἀπογεννώμενον ὑπὸ τοῦ τμήματος ΑΜΠ περὶ τὸν ἄξονα ΑΧ. Ἔχομεν τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν τῆς κυκλοειδοῦς·

$$\delta x = \delta\psi \sqrt{\frac{2\alpha - \psi}{\psi}} = \frac{\delta\psi}{\psi}\sqrt{2\alpha\psi - \psi^2}\,;$$

Ἄρα, $$O = \Pi\int_0^{\psi} \psi\delta\psi\sqrt{2\alpha\psi - \psi^2}.$$

Τὸ ὁλοκληρωτικὸν τοῦτο γράφεται ὡς ἑξῆς,

$$O = \Pi\alpha\int_0^{\psi}\delta\psi\sqrt{2\alpha\psi - \psi^2} - \Pi\int_0^{\psi}(\alpha - \psi)\delta\psi\sqrt{2\alpha\psi - \psi^2}$$

Τὸ μὲν πρῶτον ὁλοκληρωτικὸν ἐμφαίνει τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τμήματος ΑΚΝ, τὸ δὲ δεύτερον εὐκόλως ὁλοκληροῦται. Εὑρίσκομεν οὕτως·

$$O = \Pi\alpha\ \textit{τμῆμα}\ \mathrm{AKN} - \tfrac{1}{3}\Pi\,(2\alpha\psi - \psi^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Τὸ ὑπὸ ΑΚΜ περὶ ΑΧ καταγραφόμενον στερεὸν λαμβάνομεν λογίζοντες τὴν διαφορὰν τῶν στερεῶν ἀπογεννωμένων ὑπὸ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΚΜΠ καὶ τοῦ τμήματος ἐπιφανείας ΑΜΠ.

383. Προτείνομεν τοῖς μαθηταῖς κυβίσαι τὸ στερεὸν ἀπογεννώμενον ὑπὸ ὑπερβολῆς ἰσοσκελοῦς περιαγομένης περὶ τὴν ἑτέραν τῶν ἀσυμπτώτων αὐτῆς. Εὑρήσωσιν ὅτι, τὸ ἀπειρόμηκες στερεὸν ἀρχόμενον ἐκ τῆς τῇ κορυφῇ τῆς καμπύλης συστοιχούσης τεταγμένης, ἔχει τιμὴν πεπερασμένην, ἴσην τῷ κυλίνδρῳ ἀπογεννωμένῳ ἐκ τοῦ ὑπὸ τῶν ἰσαλλήλων συντεταγμένων τῆς κορυφῆς τῆς καμπύλης συγκροτουμένου ὀρθογωνίου.

ΙΑ'. ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ.

384. *Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας καμπύλης* ὀνομάζεται τὸ ὅριον τῆς ἐπιφανείας πολυέδρου περιγεγραμμένου ἢ ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν καμπύλην ἐπιφάνειαν, οὗτινος αἱ ἀπειροστημόριοι ἕδραι ἔχουσιν ὅρια τῶν διευθύνσεων αὐτῶν τὰ κατὰ τὰ διάφορα σημεῖα τῆς ἐπιφανείας ταύτης ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα. Ἐκ τούτου προκύπτει ὅτι, ἀντὶ τῶν ἐπιπέδων στοιχείων ἐξ ὧν συνίσταται ἡ τοῦ πολυέδρου ἐπιφάνεια, δυνάμεθα θεωρῆσαι ἐπιφανείας καμπύλας ὧν τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα ἔχουσιν ὅρια τὰ στοιχεῖα τῆς προτεθείσης ἐπιφανείας. Ἄρα δυνάμεθα θεωρῆσαι τὴν ἀπογεννωμένην ἐπιφάνειαν τῇ περιαγωγῇ τόξου τινος καμπύλης ἐπιπέδου, περὶ ἄξονα κείμενον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῆς, ὡς τὸ ὅριον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀπειροστημορίων τετμημένων κώνων, ἀπογεννωμένων ἐκ τῶν πλευρῶν πολυγώνου ἐγγεγραμμένου τῇ καμπύλῃ ταύτῃ.

385. Πρὸς σαφήνειαν, θεωρήσωμεν (Σχ. 72) τὴν ἀπογεννωμένην ἐπιφάνειαν ἐκ τῆς τυχούσης καμπύλης ἐπιπέδου ΜΣ, ἧς ἡ ἐξίσωσις ἔστω

$$\psi = \Sigma(x),$$

τῇ περιαγωγῇ αὐτῆς περὶ τὸν ἄξονα ΑΧ. Καλοῦμεν Ε τὸ χωρίον τῆς ἐπιφανείας ταύτης, τὸ ἐκ τοῦ μέρους ΜΣ τῆς καμπύλης περιγραφόμενον. Ἔστω ἡ τετμημένη $\mathrm{AP} = x$. Ὅταν x αὐξήσῃ κατὰ τὸ ἀπειροστημόριον ἀπόστημα δx ἢ ΡΚ, τὸ ἐμβαδὸν Ε αὐξήσει κατὰ τὸ καταγραφόμενον χωρίον τῇ περιαγωγῇ τοῦ στοιχείου ΣΝ ἢ $\delta\varsigma$. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ καμπύλη θεωρεῖται ὡς ταυτιζομένη τῇ ἐφαπτομένῃ αὐτῆς ἐν τῇ ἐκτάσει τοῦ στοιχείου τούτου, ἡ προκειμένη αὔξησις τῆς Ε δύναται θεωρηθῆναι ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ κώνου τετμημένου οὗτινος ΡΚ εἶναι τὸ ὕψος καὶ ΣΡ, ΝΚ, εἰσὶν αἱ τῶν βάσεων ἀκτῖνες. Ἄρα,

$$\delta E = \Pi(2\psi + \delta\psi)\,\delta\varsigma\cdot$$

ἢ, παραλειπομένου τοῦ δευτεροταγοῦς ἀπειροστοῦ,

$$\delta E = 2\Pi\psi\,\delta\varsigma = 2\Pi\psi\delta x\cdot\sqrt{1 + \left(\frac{\delta\psi}{\delta x}\right)^2}.$$

Ἑπομένως ἔχομεν διὰ τετραγωνισμὸν τοῦ χωρίου τῆς ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς, ἀπολαμβανομένου ὑπὸ δύο ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς τῷ ἄξονι ἀγομένων ἐν ταῖς ἀποστάσεσι x_0 καὶ x ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων·

$$E = 2\Pi \int_{x_0}^{x} \psi \delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\delta\psi}{\delta x}\right)}.$$

386. *Ἐλλειψοειδές.* Τῆς ἐξισώσεως τῆς γεννητρίας καμπύλης διδούσης

$$\psi = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2}, \qquad \frac{\delta\psi}{\delta x} = -\frac{\beta}{\alpha}\frac{x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}},$$

ἔχομεν δι' ἔκθεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ μέρους τῆς ἐπιφανείας ἀπολαμβανομένου ὑπὸ τοῦ πρὸς ὀρθὰς τῷ ἄξονι ἐκ τοῦ κέντρου ἀγομένου ἐπιπέδου, καὶ ἑτέρου ἐπιπέδου ἀγομένου ἐν ἀποστάσει x ἀπὸ τοῦ πρώτου·

$$E = 2\Pi \frac{\beta}{\alpha}\int_0^x \delta x \sqrt{\alpha^2 - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2}x^2}.$$

Ὑποθέσωμεν πρῶτον $\alpha > \beta$, ἤτοι τὴν ἔλλειψιν περιαχθεῖσαν περὶ τὸν μείζονα ἄξονα αὐτῆς. Θέτομεν $\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2} = \varepsilon^2$, ὅθεν ἡ ἀνωτέρω ἔκθεσις καθίσταται

$$E = 2\Pi \frac{\beta}{\alpha}\int_0^x \delta x \sqrt{\alpha^2 - \varepsilon^2 x^2}.$$

Γράφοντες αὐτὴν ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$E = 2\Pi \frac{\beta}{\alpha\varepsilon}\int_0^x \varepsilon\delta x \sqrt{\alpha^2 - \varepsilon^2 x^2},$$

εὑρίσκομεν, κατὰ § 357,

$$E = 2\Pi \frac{\beta}{\alpha\varepsilon}\left(\tfrac{1}{2}\varepsilon x \sqrt{\alpha^2 - \varepsilon^2 x^2} + \tfrac{1}{2}\alpha^2 \text{τόξ ἡμ} \frac{\varepsilon x}{\alpha}\right)$$

$$= \Pi\beta\left(x\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2 x^2}{\alpha^2}} + \frac{\alpha}{\varepsilon}\text{τόξ ἡμ}\frac{\varepsilon x}{\alpha}\right).$$

Καθιστῶντες $x = \alpha$ καὶ διπλασιάζοντες, λαμβάνομεν

$$2\Pi\alpha\beta\left(\sqrt{1 - \varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon}\text{τόξ ἡμε}\right), \quad \text{ἢ} \quad 2\Pi\left(\beta^2 + \frac{\alpha\beta}{\varepsilon}\text{τόξ ἡμε}\right)$$

διὰ τὸν τετραγωνισμὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐλλειψοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς.

Ὅταν $\varepsilon = 0$, ἢ $\alpha = \beta$, τὸ ἐλλειψοειδὲς ἀποκαθίσταται σφαῖρα. Τοῦ λόγου $\frac{\text{τόξ ἡμ ε}}{\varepsilon}$ τείνοντος πρὸς τὴν μονάδα καθ' ὅσον ε τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ἕξομεν $4\Pi\alpha^2$, ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας.

387. Ὑποθέσωμεν ἤδη $\alpha < \beta$, ἤτοι τὴν ἔλλειψιν περιαχθεῖσαν περὶ τὸν ἐλάσσονα αὐτῆς ἄξονα. Δηλοῦντες καὶ αὖθις τῷ ε τὴν ἐκκεντρότητα, θέτομεν $\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta^2} = \varepsilon^2$, καὶ ἔχομεν

$$E = 2\Pi \frac{\beta}{\alpha}\int_0^x \delta x \sqrt{\alpha^2 + \frac{\beta^2\varepsilon^2 x^2}{\alpha^2}}$$

$$= \frac{2\Pi}{\varepsilon}\int_0^x \frac{\beta\varepsilon\delta x}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 + \frac{\beta^2\varepsilon^2 x^2}{\alpha^2}}.$$

Μορφοῦμεν δὲ, ὡς ἐν § 358, τὴν τιμὴν τοῦ ἀορίστου ὁλοκληρωτικοῦ

$$\int \frac{\beta\varepsilon\delta x}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 + \frac{\beta^2\varepsilon^2 x^2}{\alpha^2}} = A$$

$$+ \frac{\beta\varepsilon x}{2\alpha}\sqrt{\alpha^2 + \frac{\beta^2\varepsilon^2 x^2}{\alpha^2}} + \frac{\alpha^2}{2}\lambda\left(\frac{\frac{\beta\varepsilon x}{\alpha} + \sqrt{\alpha^2 + \frac{\beta^2\varepsilon^2 x^2}{\alpha^2}}}{\alpha}\right)$$

Λαμβάνοντες τὸ ὁλοκληρωτικὸν ἀπὸ $x = 0$ μέχρι $x = x$, συνάγομεν·

$$\int_0^x \frac{\beta\varepsilon\delta x}{\alpha}\sqrt{\alpha^2+\frac{\beta^2\varepsilon^2x^2}{\alpha^2}}$$

$$=\frac{\beta\varepsilon x}{2\alpha}\sqrt{\alpha^2+\frac{\beta^2\varepsilon^2x^2}{\alpha^2}}+\frac{\alpha^3}{2}\lambda\,\frac{\dfrac{\beta\varepsilon x}{\alpha}+\sqrt{\alpha^2+\dfrac{\beta^2\varepsilon^2x^2}{\alpha^2}}}{\alpha}.$$

Ἄρα,

$$E=\Pi\left[\frac{\beta x}{\alpha}\sqrt{\alpha^2+\frac{\beta^2\varepsilon^2x^2}{\alpha^2}}+\frac{\alpha^2}{\varepsilon}\lambda\,\frac{\dfrac{\beta\varepsilon x}{\alpha}+\sqrt{\alpha^2+\dfrac{\beta^2\varepsilon^2x^2}{\alpha^2}}}{\alpha}\right]$$

$$=\Pi\beta\left[x\sqrt{1+\frac{\beta^2\varepsilon^2x^2}{\alpha^4}}+\frac{\alpha^2}{\beta\varepsilon}\lambda\left(\frac{\beta\varepsilon x}{\alpha^2}+\sqrt{1+\frac{\beta^2\varepsilon^2x^2}{\alpha^4}}\right)\right].$$

Καθιστῶντες $x=\alpha$ καὶ διπλασιάζοντες, λαμβάνομεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐλλειψοειδοῦς,

$$2\Pi\alpha\beta\left[\sqrt{1+\frac{\beta^2\varepsilon^2}{\alpha^2}}+\frac{\alpha}{\beta\varepsilon}\lambda\left(\frac{\beta\varepsilon}{\alpha}+\sqrt{1+\frac{\beta^2\varepsilon^2}{\alpha^2}}\right)\right],$$

ἢ
$$2\Pi\left[\beta^2+\frac{\alpha^2}{\varepsilon}\lambda(1+\varepsilon)\frac{\beta}{\alpha}\right].$$

Εὑρίσκομεν καὶ αὖθις τὴν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν ὑποθέτοντες $\varepsilon=0$, ἤτοι $\alpha=\beta$. Τῷ ὄντι, τὸ πρῶτον μέρος καθίσταται $2\Pi\alpha^2$. Ἵνα λάβωμεν τὸ δεύτερον, ἀναπτύσσομεν προηγουμένως αὐτὸ εἰς σειρὰν καὶ εὑρίσκομεν ἐπίσης $2\Pi\alpha^2$. Τὸ ἄθροισμα αὐτῶν συνιστᾷ ἐπιφάνειαν σφαιρικήν.

388. *Δακτύλιος*. Περιαχθείτω περὶ τὸν ἄξονα τῶν x κύκλος οὗτινος ἡ ἐξίσωσις ἔστω

$$(\psi-\beta)^2+(x-a)^2=\alpha^2,\quad \text{ἐξ ἧς}\quad \frac{\delta\psi}{\delta x}=-\frac{x-a}{\psi-\beta}.$$

Ἔχομεν

$$E=2\Pi\int\psi\delta x\sqrt{1+\left(\frac{x-a}{\psi-\beta}\right)^2}.$$

$$=2\Pi\alpha x+2\Pi\alpha\beta\ \text{τόξ ἡμ}\,\frac{x-a}{\alpha}+A.$$

Λογίζοντες τὸ ὁλοκληρωτικὸν τοῦτο μεταξὺ τῶν ὁρίων $a-\alpha$ καὶ $a+\alpha$ εὑρίσκομεν·

$$2\Pi^2\beta\alpha+4\Pi\alpha^2,$$

τὴν ἐπιφάνειαν (Σχ. 74) ἣν τὸ ἀνώτερον ἡμικύκλιον καταγράφει. Ὁ λογισμὸς τῆς ὑπὸ τοῦ κατωτέρου ἡμικυκλίου καταγραφομένης ἐπιφανείας δίδει·

$$2\Pi^2\beta\alpha-4\Pi\alpha^2.$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τούτων ἐξαγομένων ἰσοῦται

$$4\Pi^2\beta\alpha,\quad \text{ἢ}\quad 2\Pi\alpha\,.\,2\Pi\beta.$$

Ἄρα, ἡ τοῦ δακτυλίου ὁλοκλήρου ἐπιφάνεια ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς γεννητρίας περιφερείας πολυπλασιαζομένης ἐπὶ τὴν ὑπὸ τοῦ κέντρου ταύτης καταγραφομένην περιφέρειαν. Ἡ διαφορὰ τῶν δύο μερικῶν ἐπιφανειῶν ἰσοῦται $8\Pi\alpha^2$, ἤτοι τῷ διπλασίῳ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας ἧς ἡ ἀκτὶς εἶναι α. Ἀξιοπαρατήρητον εἶναι ὅτι, ἡ διαφορὰ αὕτη ἀνεξάρτητός ἐστι τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου ἀπὸ τοῦ ἄξονος τῆς περιστροφῆς.

389. Κατὰ τὰ προκτεθέντα, τετραγωνίζομεν τὴν ἐπιφάνειαν παντὸς στερεοῦ ἀπογεννωμένου τῇ περιαγωγῇ οἱασδήποτε καμπύλης ἐπιπέδου περὶ ἄξονα κείμενον ἐν τῷ αὐτῷ τῆς γεννητρίας καμπύλης ἐπιπέδῳ. Τηρουμένων καὶ ἐνταῦθα τῶν ἐν § 380 ὀνομασιῶν (Σχ. 73), τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἀπογεννωμένης ἐπιφανείας περιαγωγῇ τῆς καμπύλης ΜΜ′ΝΝ′ περὶ τὸν ἄξονα ΑΧ, ἐμφαίνεται προφανῶς ὑπὸ τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρωτικοῦ

$$2\Pi\int_{x_0}^{x_\omega}\delta x\left[\psi_1\sqrt{1+\left(\frac{\delta\psi_1}{\delta x}\right)^2}+\psi_2\sqrt{1+\left(\frac{\delta\psi_2}{\delta x}\right)^2}\right].$$

390. Ἐφαρμοστέον τὸν τύπον τοῦτον τῷ δακτυλίῳ. Τότε ἀνώτερον μέρος τῆς περιφερείας τοῦ γεννήτορος κύκλου καὶ τὸ κατώτερον καταγράφουσιν ἐπιφανείας ὧν τὰ διαφορικὰ εἰσὶν ἀμοιβαίως·

$$2\Pi[\beta+\sqrt{\alpha^2-(x-a)^2}]\delta\varsigma,\quad 2\Pi[\beta-\sqrt{\alpha^2-(x-a)^2}]\delta\varsigma.$$

Ὑποτιθεμένων τῶν ἐπιφανειῶν τούτων μεταξὺ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων καθέτων τῷ ἄξονι, x καὶ δς ἔσονται κοινά, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν δύο διαφορικῶν ἔσεται $4\Pi\beta\delta\varsigma$, οὗτινος τὸ ὁλοκληρωτικὸν εἶναι $4\Pi\beta\varsigma+A$. Τὴν ἐπιφάνειαν ὁλόκληρον τοῦ δακτυλίου λαμβάνομεν καθιστῶντες ς ἴσον τῇ ἡμιπεριφερείᾳ Πα, καὶ $A=0$, ὅθεν συνάγομεν καὶ αὖθις, ὡς ἐν § 388,

$$E=4\Pi^2\beta\alpha.$$

ΙΒʹ. ΚΥΒΙΣΜΟΣ ΣΤΕΡΕΩΝ ΠΑΝΤΟΙΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ.

391. Προκείσθω στερεὸν οὗτινος ἡ ἐπιφάνεια, ἐν ἄξοσιν ὀρθογωνίοις, δηλοῦται τῇ ἐξισώσει

$$\omega=\Sigma(x,\ \psi).$$

Τὸ πρόβλημα τῆς καταμετρήσεως τοῦ στερεοῦ τούτου παρουσιασθήσεται ὑπὸ τὴν γενικωτέραν ἔποψιν εἰ, γράψαντες ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου XΨ (Σχ. 73) περιοχὴν οἱανδήποτε MM′NN′, ζητήσωμεν τὸν ἀπολαμβανόμενον ὄγκον ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τῶν xψ, τῆς ἐπιφανείας τοῦ στερεοῦ, καὶ τοῦ κυλίνδρου οὗτινος βάσις μὲν εἶναι ἡ περιοχὴ MM′NN′, αἱ πλευραὶ δὲ εἰσὶ παράλληλοι τῷ ἄξονι τῶν ω. Δηλώσωμεν x_0 καὶ x_ω τὰς ἄκρας τετμημένας ΑΠ καὶ ΑΚ τῆς γραμμῆς MM′NN′· ψ_1 καὶ ψ_2 τὰς τεταγμένας M′π καὶ N′π ἀντιστοιχούσας ἐπὶ τὴν τετμημένην Απ παρισταμένην τῷ x, καὶ ἀνηκούσας ἀμοιβαίως εἰς τοὺς κλῶνας MM′N καὶ MN′N τῆς γραμμῆς ταύτης. Αἱ ποσότητες ψ_1 καὶ ψ_2 ἔσονται συνεχθέσεις δεδομέναι τῆς τετμημένης x.

Τούτων τεθέντων, θεωρήσωμεν τὸ μέρος τοῦ ζητουμένου ὄγκου οὗτινος ἡ βάσις ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν xψ εἶναι MM′N′.

Ἔστω O ἡ τιμὴ αὐτοῦ, συνέχθεσις οὖσα τῆς x. Ὅταν ἡ τετμημένη Απ, ἡ x, αὐξήσῃ κατὰ τὴν ἀπειροστημόριον ποσότητα δx, παρισταμένην ἐν τῷ σχήματι ὑπὸ πκ, ὁ ὄγκος O αὐξήσει ἐπίσης κατὰ ἀπειροστημόριον μέρος, οὗτινος ἡ βάσις ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν xψ εἶναι M′ν′ν″N′. Ἄρα, τὸ μέρος τοῦτο ἐμφαίνει τὸ διαφορικὸν δO. Ἐκ δὲ τῶν ἐν ἀρχῇ τοῦ Ζʹ ἄρθρου προαποδοθεισῶν γνώσεων, προκύπτει ὅτι ἔχομεν

$$O=\int_{x_0}^{x}\delta O,$$

καὶ ὅτι ὅλος ὁ ὄγκος, βάσιν ἔχων τὴν περιοχὴν MM′NN′, δηλοῦται ὑπὸ

$$\int_{x_0}^{x_\omega}\delta O.$$

Πρόκειται ἤδη ἐκθέσαι ἀναλυτικῶς τὸ διαφορικὸν τοῦτο δO· ἤτοι τὸ ἀπειροστημόριον μέρος τοῦ ζητουμένου στερεοῦ, οὗτινος ἡ βάσις εἶναι M′ν′ν″N′. Τὸ μέρος δὲ τοῦτο δὲν εἶναι ἡ τμῆμα τοῦ στερεοῦ τούτου ἀπολαμβανόμενον ὑπὸ δύο ἐπιπέδων ἀγομένων παραλλήλως τῷ ἐπιπέδῳ ΨΩ, ἐν ταῖς ἀποστάσεσι x καὶ x+δx ἀπὸ τούτου. Θεωρήσωμεν σημεῖον τὸ τυχόν, μ, τῆς γραμμῆς M′N′. Ἔστω ψ ἡ συντεταγμένη μπ τοῦ σημείου τούτου· $\omega=\Sigma(x,\psi)$ ἔσεται ἡ τεταγμένη τῆς ἐπιφανείας ὑφ᾽ ἧς τὸ στερεὸν περατοῦται, συστοιχοῦσα τῷ μ σημείῳ. Θεωρήσωμεν προσέτι τὸ μέρος M′ν′κ′μ τοῦ τμήματος ὃ πρόκειται διατμῆσαι, καὶ ὅπερ προδήλως εἶναι συνέχθεσίς τις τῆς τεταγμένης μπ, ἡ ψ. Φανερὸν ὅτι, αὐξανομένης ψ κατὰ τὴν ἀπειροστημόριον ποσότητα δψ, παρισταμένην ἐπὶ τοῦ σχήματος ὑπὸ μμ′, τὸ μέρος M′ν′κ′μ τοῦ περὶ οὗ πρόκειται τμήματος αὐξήσει κατὰ δευτέρας τάξεως ἀπειροστημόριον τμῆμα στερεοῦ, οὗτινος βάσις εἶναι τὸ ὀρθογώνιον μκ′νμ′. Ἀλλ᾽ ὁ ὄγκος περὶ οὗ πρόκειται περιέχεται, ὡς δῆλον, μεταξὺ δύο πρισμάτων ὀρθῶν, οἷς κοινὴ μὲν βάσις εἶναι μκ′νμ′, ὕψη δὲ ἀμοιβαίως εἰσὶν ἡ μείζων καὶ ἡ ἐλάσσων τῶν τεταγμένων συστοιχουσῶν εἰς τὰ τέσσαρα σημεῖα μ, κ′, ν, μ′.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ δύο ταῦτα ὕψη δὲν διαφέρουσι τῆς τεταγμένης ω τοῦ σημείου μ ἢ κατὰ ποσότητα ἀπειροστημόριον, εἰσὶ θεωρητέα ὡς ἴσα ω. Ἑπομένως λαμβάνομεν τὸ γινόμενον $\delta x.\delta\psi.\omega$ δι' ἔκθεσιν τῆς αὐξήσεως εἰς ἣν ὑποκύπτει τὸ μέρος τοῦ τμήματος οὗτινος ἡ βάσις εἶναι Μ'ν'κ'μ. Ἄρα, θεωρήσομεν τὸ τμῆμα τοῦτο ὡς τὸ ἄθροισμα ἀπείρου ἀριθμοῦ διαφορικῶν δηλουμένων ὑπὸ $\delta x.\delta\psi.\omega$, ἐν ᾗ ἐκθέσει δx εἶναι παράγων κοινὸς καὶ ἄτρεπτος. Ἐντεῦθεν προκύπτει ὅτι, ἐὰν λάβωμεν τὸ ὁλοκληρωτικὸν $\delta x\int\delta\psi.\omega$ μεταξὺ δύο ὁρίων συστοιχούντων τοῖς σημείοις Μ' καὶ Ν', ἤτοι ἀπὸ $\psi=\psi_1$ μέχρι $\psi=\psi_2$, ἕξομεν ἐξαγόμενον μὴ διαφέρον τοῦ ὄγκου τοῦ ζητουμένου τμήματος ἢ κατὰ ποσότητα ἀπειροστημόριον δευτέρας τάξεως, ἥτις παραληπτέα ἐστὶ σχετικῶς πρὸς τὸν ὄγκον τοῦτον, ἀπειροστημόριον ὄντα τῆς πρώτης τάξεως. Λοιπόν, γράφομεν

$$\delta O = \delta x\int_{\psi_1}^{\psi_2}\delta\psi.\omega.$$

Ἀντεισαγομένης τῆς τιμῆς ταύτης ἐν τῇ προηγουμένῃ ἐκθέσει τοῦ O, λαμβάνομεν

$$O = \int_{x_0}^{x}\delta x\int_{\psi_1}^{\psi_2}\delta\psi.\omega,$$

δι' ἔκθεσιν γενικὴν τοῦ μέρους τοῦ ζητουμένου ὄγκου ἀπολαμβανομένου ὑπὸ ἐπιπέδων ἀγομένων παραλλήλως τῷ τῶν ψω, ἐν ταῖς ἀποστάσεσι x_0 καὶ x ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων. Ἑπομένως ἡ ἔκθεσις ὁλοκλήρου τοῦ ὄγκου τούτου ἔσεται

$$\int_{x_0}^{x_\omega}\delta x\int_{\psi_1}^{\psi_2}\delta\psi.\omega.$$

Οἱ τύποι οὗτοι καλοῦνται *ὁλοκληρωτικὰ ὡρισμένα διπλᾶ*· διότι ἀναφέρονται πρὸς τὰς δύο μεταβλητὰς x, ψ. Τὴν τιμὴν αὐτῶν ὁρίζομεν ἀείποτε διὰ τῶν ἐν τοῖς προηγουμένοις ἄρθροις ἐκτεθεισῶν μεθόδων. Τῷ ὄντι, μετὰ τὴν ἀντεισαγωγὴν τῆς τιμῆς $\Sigma(x,\psi)$ τῆς ω, μορφοῦμεν πρὸς ψ τὸ ἀόριστον ὁλοκληρωτικὸν $\int\delta\psi.\Sigma(x,\psi)$, θεωροῦντες x ὡς ἄτρεπτον. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὁλοκληρωτικὸν τοῦτο ληφθήσεται μεταξὺ τῶν ὁρίων ψ_1 καὶ ψ_2, δηλούντων συνεκθέσεις δεδομένας τῆς x, τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἐργασίας ἔσεται συνέκθεσίς τις τῆς x μόνης. Ἔστω $\Phi(x)$ ἡ συνέκθεσις αὕτη· ὑπολειφθήσεται μόνον ἡ εὕρεσις τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ

$$\int_{x_0}^{x}\Phi(x)\delta x.$$

392. Παρατηρητέον ὅτι, οὐδόλως ἀλλοιοῦται ἡ τιμὴ ὁλοκληρωτικοῦ τινος ὡρισμένου διπλοῦ ἀνταλλασσομένης τῆς τάξεως τῶν διαδοχικῶν ὁλοκληρώσεων ἐκτελουμένων καθ' ἑκάστην τῶν μεταβλητῶν. Ἔχομεν ἀείποτε·

$$\int_{x_0}^{x_\omega}\delta x\int_{\psi_1}^{\psi_2}\delta\psi.\omega = \int_{\psi_0}^{\psi_\omega}\delta\psi\int_{x_1}^{x_2}\delta x.\omega\cdot$$

δηλοῦντες x_1 καὶ x_2 τὰς τιμὰς τῶν x εἰς ψ, ἐξαγομένας ἐκ τῆς ἐξισώσεως τῆς καμπύλης ΜΝ, ἀνηκούσας ἀμοιβαίως εἰς τὰ δύο μέρη τῆς καμπύλης ταύτης ὑφ' ὧν περιορίζεται τὸ ὁλοκληρωτικὸν κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῶν x· καὶ δηλοῦντες ψ_0 καὶ ψ_ω τὰς κατὰ τὰ πέρατα τιμὰς τῆς τεταγμένης ψ ἀνηκούσας τῇ αὐτῇ καμπύλῃ. Δῆλον, τῷ ὄντι, ὅτι ἑκατέρα τῶν ἐκθέσεων τούτων δίδει ἐξίσου τὴν τιμὴν τοῦ ζητουμένου στερεοῦ. Ἀναμνηστέον ὅμως ὅτι, ἡ χρῆσις τῶν ἐκθέσεων περὶ ὧν ὁ λόγος ὑποθέτει, ἐν γένει, ὅτι οὐδεμία τιμὴ τῆς τεταγμένης ω ὑπάρχει ἄπειρος οὖσα ἐντὸς τῶν ὁρίων τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ. Εἰ τοὐναντίον, δὲν δυνάμεθα εὑρεῖν τὴν τιμὴν αὐτοῦ ἢ ἀναλύοντες αὐτὸ εἰς μέρη διακεκριμένα, διαχωριζόμενα ὑπὸ τῶν περὶ ὧν πρόκειται τεταγμένων. Ἐὰν αἱ τιμαὶ τῶν μερῶν τούτων ἐκφράζωνται δι' ἀριθμῶν ἀπείρων μετὰ σημείων ἐναντίων, ἡ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν τιμή, κατὰ συνέπειαν δὲ ἡ τοῦ προτεθέντος ὁλοκληρωτικοῦ, ἔσεται ἀδιόριστος.

393. Ἐφαρμοστέον ταῦτα τῷ ἐλλειψοειδεῖ, ἐν τοῖς ἄξοσιν αὐτοῦ ἐμφαινομένῳ ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως.

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}+\frac{\omega^2}{\gamma^2}=1, \quad ἢ \quad \omega=\gamma\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{\psi^2}{\beta^2}};$$

Ἡ ἐξίσωσις τῆς τομῆς τῆς τοῦ στερεοῦ ἐπιφανείας τῷ ἐπιπέδῳ τῶν $x\psi$ εἶναι

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1, \quad ἢ \quad \psi=\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}},$$

ἡ τιμὴ δὲ αὕτη συνιστᾷ τὸ ὅριον τοῦ σώματος κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῶν ψ. Τὰ ὅρια αὐτοῦ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῶν x δίδονται ὑπὸ τῶν τετμημένων $x=-\alpha$, $x=\alpha$. Ἄρα, ὁ ὄγκος τοῦ ἡμιελλειψοειδοῦς, ἄνω τοῦ ἐπιπέδου τῶν $x\psi$ κειμένου, δηλοῦται τῷ διπλῷ ὁλοκληρωτικῷ

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\delta x\int_{-\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}}^{\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}}\delta\psi\cdot\gamma\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{\psi^2}{\beta^2}},$$

ἢ προσέτι,

$$\frac{\gamma}{\beta}\int_{-\alpha}^{\alpha}\delta x\int_{-\sqrt{\frac{\beta^2(\alpha^2-x^2)}{\alpha^2}}}^{\sqrt{\frac{\beta^2(\alpha^2-x^2)}{\alpha^2}}}\delta\psi\sqrt{\frac{\beta^2(\alpha^2-x^2)}{\alpha^2}-\psi^2},$$

Κατὰ πρῶτον ἔχομεν

$$\int_{-\sqrt{\frac{\beta^2(\alpha^2-x^2)}{\alpha^2}}}^{\sqrt{\frac{\beta^2(\alpha^2-x^2)}{\alpha^2}}}\delta\psi\sqrt{\frac{\beta^2(\alpha^2-x^2)}{\alpha^2}-\psi^2}=\frac{\Pi}{2}\,\frac{\beta^2(\alpha^2-x^2)}{\alpha^2}$$

διότι τὸ πρῶτον μέλος ἐμφαίνει προδήλως τὸ ἐμβαδὸν κύκλου οὗτινος ἡ ἀκτὶς εἶναι $\sqrt{\frac{\beta^2(\alpha^2-x^2)}{\alpha^2}}$. Ἄρα, ὑπολείπεται ἡ μόρφωσις τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ

$$\frac{\gamma}{\beta}\int_{-\alpha}^{\alpha}\delta x\cdot\frac{\Pi}{2}\,\frac{\beta^2(\alpha^2-x^2)}{\alpha^2}, \quad ἢ \quad \frac{\Pi\beta\gamma}{2\alpha^2}\int_{-\alpha}^{\alpha}\delta x(\alpha^2-x^2),$$

οὗτινος ἡ τιμὴ εἶναι $\frac{2}{3}\,\Pi\alpha\beta\gamma$. Ἄρα, ὁ ὄγκος ὁλόκληρος τοῦ ἐλλειψοειδοῦς εἶναι $\frac{4}{3}\,\Pi\alpha\beta\gamma$.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν $\alpha=\beta=\gamma$, ἔχομεν $\frac{4}{3}\,\Pi\alpha^3$, στερεότητα τῆς σφαίρας.

394. Ἐνίοτε ὁρίζομεν τὸν ὄγκον στερεοῦ δεδομένου, μὴ παραγομένου ἐκ περιστροφῆς, δι' ἁπλῆς ὁλοκληρώσεως, μὴ ποιοῦντες χρῆσιν τῶν ἀνωτέρω τύπων. Τοῦτο ἐκτελέσομεν ἐπὶ τῆς πυραμίδος ΑΒΓΔ (Σχ. 75). Πρὸς τοῦτο, θεωρήσωμεν τομήν τινα ΗΖΕ παράλληλον τῇ βάσει τῆς πυραμίδος· ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α ἄγομεν τὴν πρὸς ὀρθὰς ΑΘ τῇ βάσει. Καλοῦμεν x καὶ θ τὰ μέρη ΑΙ καὶ ΙΘ τῆς καθέτου ταύτης, ἀπολαμβανόμενα ὑπὸ τῆς κορυφῆς Α καὶ τῶν ἐπιπέδων ΔΓΒ, ΗΖΕ. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΗΖΕ εἶναι συνέκθεσις τῆς x καθ' ὅ,τι αὐξάνει ἢ μειοῦται κατὰ τὴν τιμὴν ταύτης· ἄρα ἔχομεν

$$\mathrm{HEZ}=\Sigma(x), \qquad \mathrm{\Delta B\Gamma}=\Sigma(x+\theta).$$

Τοῦ ὄγκου τῆς πυραμίδος ΑΗΖΕ ὄντος ἐπίσης συνεκθέσεως τῆς x, δυνάμεθα ὑποθέσαι

στερ. ΑΗΕΖ $=\Phi(x)$, *στερ.* ΑΔΒΓ $=\Phi(x+\theta)$.

Φανερὸν ὅτι, ἡ τετμημένη πυραμὶς ΗΒ, διαφορὰ οὖσα τῶν στερεῶν τούτων, εἶναι ἐλάσσων τοῦ ὄγκου τοῦ πρίσματος βάσιν ἔχοντος ΒΓΔ καὶ ὕψος θ, μείζων δὲ τοῦ ὄγκου τοῦ πρίσματος βάσιν ἔχοντος ΕΖΗ καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ θ. Ὁ λόγος τῶν πρισμάτων τούτων εἶναι

$$\frac{\Sigma(x+\theta)\theta}{\Sigma(x)\theta}=\frac{\Sigma(x+\theta)}{\Sigma(x)}.$$

Ἐν τῷ ὁρίῳ δέ, τοῦ λόγου τούτου ἰσουμένου μονάδι, ἔτι μᾶλλον ὁ ὑπάρχων λόγος μεταξὺ τῆς τετμημένης πυραμίδος ΗΒ καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν πρισμάτων τούτων ἔσεται τότε ἴσος μονάδι. Δηλουμένου τοῦ ὄγκου τῆς τετμημένης πυραμίδος ὑπὸ

$\Phi(x+\theta)-\Phi(x)$, ὁ λόγος αὐτοῦ πρὸς τὸν τοῦ πρίσματος, οὗτινος ΠΕΖ εἶναι βάσις καὶ θ ὕψος, ἔσεται

$$\frac{\Phi(x+\theta)-\Phi(x)}{\Sigma(x)\theta}=\frac{\frac{\delta\Phi(x)}{\delta x}+\frac{\delta^2\Phi(x)}{\delta x^2}\frac{\theta}{2}+\ldots\ldots;}{\Sigma(x)}.$$

Ἐν δὲ τῷ ὁρίῳ ἔξομεν

$$\frac{\delta\Phi(x)}{\Sigma(x)\delta x}=1, \quad \text{ἢ} \quad \delta\Phi(x)=\Sigma(x)\delta x. \qquad (1)$$

ΣΗΜ. Εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον καταντῶμεν, ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν πυραμίδα ὡς συγκειμένην ἐξ ἀπείρου ἀριθμοῦ τμημάτων παραλλήλων τῇ βάσει αὐτῆς. Ἕκαστον τμῆμα δύναται θεωρηθῆναι ὡς πρίσμα οὗτινος $\Sigma(x)$ εἶναι ἡ βάσις καὶ δx τὸ ὕψος. Ἄρα $\Sigma(x)\delta x$ ἐμφαίνει τὸ τῆς πυραμίδος στοιχεῖον.

Ὁρίσωμεν ἤδη τὸν ὄγκον τῆς προτεθείσης πυραμίδος. Ἔστωσαν, υ τὸ ὕψος αὐτῆς καὶ Β τὸ τῆς βάσεως ἐμβαδόν· ἔχομεν

$$B:\Sigma(x)::\upsilon^2:x^2, \qquad \text{ἢ} \qquad \Sigma(x)=\frac{Bx^2}{\upsilon^2}.$$

Ἀντεισάγοντες τὴν τιμὴν ταύτην ἐν τῇ ἐξισώσει (1), λαμβάνομεν

$$\delta\Phi(x)=\frac{Bx^2}{\upsilon^2}\delta x, \quad \text{καὶ} \quad \Phi(x)=\frac{B}{\upsilon^2}\int x^2\delta x=\frac{B}{3\upsilon^2}x^3+A.$$

Τοῦ στερεοῦ ΑΠΕΖ, τῇ $\Phi(x)$ δηλουμένου, μηδενιζομένου ὅταν $x=0$, ἔχομεν $A=0$. Καθιστῶντες δὲ $x=\upsilon$, εὑρίσκομεν τὸ ὡρισμένον ὁλοκληρωτικόν, τὸν ὄγκον τῆς πυραμίδος ΑΒΓΔ ἐμφαῖνον, ἤτοι $\frac{1}{3}B\upsilon$, ὡς γνωστὸν ἐκ τῆς Γεωμετρίας.

Ἐν γένει, ἐὰν ἡ τομὴ ΠΖΕ, ἀντὶ τριγώνου ἦναι ἐπιφάνεια οἱαδήποτε, ἀρκεῖ μόνον ἡ ἐπιφάνεια αὕτη νὰ ἦναι συνέκθεσις τῆς x, δεικνύεται, ὡς ἐν τῇ πυραμίδι, ὅτι τὸ στοιχεῖον τοῦ στερεοῦ δηλοῦται ὑπὸ $\Sigma(x)\delta x$, ὡς πληροφορούμεθα τοῦτο καὶ ἐκ τῶν ἑξῆς προβλημάτων.

395. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Εὑρεῖν τὴν στερεότητα τμήματος κυλινδρικοῦ, τοῦ ΑΔΒΕ, διδομένου τῇ τομῇ κυλίνδρου ὀρθοῦ ὑπὸ ἐπιπέδου ΔΒΑ πλαγίου πρὸς τὴν βάσιν αὐτοῦ, διὰ τοῦ κέντρου δὲ αὐτῆς Κ διερχομένου* (Σχ. 76).

Φαντασθῶμεν τὸ στερεὸν τοῦτο τμηθὲν ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων, ἔγγιστα ἀλλήλοις, καὶ καθέτων τῇ βάσει ΑΕΒ. Αἱ τομαὶ ἔσονται τρίγωνα ὅμοια, ὧν αἱ ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΒ καθέτου τῇ ΕΚ κείμεναι γωνίαι ἔσονται ἴσαι. Καλοῦμεν α τὴν ἀκτῖνα ΕΚ, υ τὸ ὕψος ΔΕ καὶ β τὴν βάσιν ΠΜ τοῦ τριγώνου ΠΜΝ. Ἔχομεν

$$K E \Delta : \Pi M N :: \alpha^2 : \beta^2.$$

Ἀλλὰ $$K E \Delta=\frac{\alpha\upsilon}{2}\cdot \quad \text{ἄρα} \quad \Pi M N=\frac{\upsilon\beta^2}{2\alpha}.$$

Κληθείσης ἤδη τῆς $A\Pi=x$, τὸ πάχος Ππ τοῦ ὑπὸ δύο προσεχῶν ἐπιπέδων ἀπολαμβανομένου τμήματος ἔσεται δx· τὸ τμῆμα δὲ αὐτὸ $=\frac{\upsilon\beta^2}{2\alpha}\delta x$. Ἀλλὰ β εἶναι ἡ τεταγμένη τοῦ κύκλου, βάσεως τοῦ κυλίνδρου, καὶ ἐν αὐτῷ ἔχομεν ἑπομένως $\beta^2=2\alpha x-x^2$. Ἄρα, τὸ στοιχειῶδες τμῆμα καθίσταται

$$\frac{\upsilon\delta x(2\alpha x-x^2)}{2\alpha}, \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{\upsilon}{2\alpha}(2\alpha x\delta x-x^2\delta x),$$

οὗτινος τὸ ὁλοκληρωτικόν, ἀρχομένου τοῦ στερεοῦ ἀπὸ τοῦ Α, εἶναι

$$\frac{\upsilon}{2\alpha}\int(2\alpha x\delta x-x^2\delta x)=\frac{\upsilon}{2\alpha}\left(\alpha x^2-\frac{x^3}{3}\right),$$

μὴ ὑπαρχούσης ἀτρέπτου.

Πρὸς εὕρεσιν δὲ τοῦ ὅλου στερεοῦ τεθείσθω $x=2\alpha$· ὅθεν συνάγομεν

$$\frac{\upsilon}{2\alpha}\left(4\alpha^3-\frac{8\alpha^3}{3}\right)=\frac{2}{3}\alpha^2\upsilon=\frac{1}{2}\upsilon\alpha\times\frac{4}{3}\alpha=K E \Delta\times\frac{2}{3}AB.$$

Τουτέστι, τὸ προκείμενον στερεὸν ἰσοῦται δυσὶ τριτημορίοις τοῦ πρίσματος, οὗ τινος βάσις μέν ἐστι τὸ τρίγωνον ΚΕΔ, ὕψος δὲ ἡ διάμετρος ΑΒ.

396. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Εὑρεῖν τὴν στερεότητα κώνου βάσιν ἔχοντος τὴν τυχοῦσαν.*

Λαμβάνομεν ὡς ἄξονα τῶν x τὴν πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν βάσιν τοῦ κώνου ἀπὸ τῆς κορυφῆς αὐτοῦ· ὡς ἐπίπεδον τῶν ΨΩ τὸ ἀπὸ τῆς αὐτῆς κορυφῆς παραλλήλως τῇ βάσει ἀγόμενον. Καλοῦμεν υ τὸ τοῦ κώνου ὕψος καὶ β τὴν βάσιν αὐτοῦ. Ἄγομεν ἐν ἀποστάσει ἀπὸ τῆς ἀρχῆς ἴση x ἐπίπεδον παράλληλον τῷ τῶν ψω. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς συνεκθέσεως οὔσης τῆς x, ἰσοῦται, κατὰ γνωστὸν θεώρημα,

$$\Sigma(x) = \frac{\beta x^2}{\upsilon^2}. \qquad \text{Ἄρα}$$

$$O = \int_0^x \frac{\beta x^2 \delta x}{\upsilon^2} = \frac{\beta x^3}{3\upsilon^2}.$$

$x = \upsilon$, δίδει $\frac{1}{3}\beta\upsilon$, στερεότητα τοῦ κώνου.

397. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Ἐλλειψοειδοῦς, ἐν τοῖς ἄξοσιν αὐτοῦ ἀναφερομένου, εὑρεῖν τὴν στερεότητα.*

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} + \frac{\omega^2}{\gamma^2} = 1.$$

Ἡ τομὴ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῷ ΨΩ, ἐν τῇ ἀποστάσει x ἀπὸ τῆς ἀρχῆς, δηλοῦται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{\psi^2}{\beta^2} + \frac{\omega^2}{\gamma^2} = 1 - \frac{x^2}{\alpha^2}.$$

Ἡ δ' ἔκθεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς τομῆς ταύτης εἶναι

$$\frac{\Pi\beta\gamma}{\alpha^2}(\alpha^2 - x^2).$$

Ἄρα, ὁ ὄγκος τοῦ περιεχομένου τμήματος ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ψω καὶ τοῦ τῆς τομῆς εἶναι

$$O = \frac{\Pi\beta\gamma}{\alpha^2}\int_0^x \delta x(\alpha^2 - x^2) = \frac{\Pi\beta\gamma}{\alpha^2}\left(\alpha^2 x - \frac{x^3}{3}\right),$$

ὅθεν ποριζόμεθα τῇ ὑποθέσει $x = \alpha$, τὴν στερεότητα τοῦ ἡμιελλειψοειδοῦς.

398. Ὑποθέσωμεν ἤδη τὸν ἄξονα τῶν x μὴ ὄντα κάθετον τῷ ἐπιπέδῳ τῶν τομῶν. Συγκρίνοντες τὸ ἀπολαμβανόμενον στερεὸν ὑπὸ δύο ἐπιπέδων παραλλήλων τῷ ΨΩ καὶ ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας, πρὸς κύλινδρον πλάγιον βάσιν ἔχοντα Σ(x) καὶ ὕψος τὸ μεταξὺ τῶν δύο ἐπιπέδων ἀπόστημα δηλούμενον ὑπὸ δx.ἡμ λ (λ οὔσης τῆς περιεχομένης γωνίας ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων τῆς τομῆς καὶ τοῦ ἄξονος τῶν x), ἔχομεν τότε

$$\delta O = \Sigma(x)\delta x.\text{ἡμ}\,\lambda, \qquad \text{ὅθεν} \qquad O = \text{ἡμ}\,\lambda\int\Sigma(x)\,\delta x.$$

399. Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον τοῦτον ἐπὶ τὸ ἐλλειψοειδὲς ἐν τοῖς διαμέτροις αὐτοῦ, δηλούμενον τῇ ἐξισώσει

$$\frac{x^2}{\alpha'^2} + \frac{\psi^2}{\beta'^2} + \frac{\omega^2}{\gamma'^2} = 1,$$

λαμβάνομεν δι' ἐπιφάνειαν τῆς παραλλήλου τομῆς

$$\frac{\Pi\beta'\gamma'}{\alpha'}(\alpha'^2 - x^2)\,\text{ἡμ}\,\theta\cdot$$

θ οὔσης τῆς ὑπὸ τῶν συζυγῶν ἡμιδιαμέτρων τῆς παραλλήλου τῷ ἐπιπέδῳ ΨΩ τομῆς περιεχομένης γωνίας. Ἐπομένως ἔχομεν τὴν στερεότητα τοῦ ἐλλειπτικοῦ τμήματος

$$O = \frac{\Pi\beta'\gamma'\text{ἡμ}\theta\text{ἡμ}\lambda}{\alpha'^2}\int_0^x(\alpha'^2 - x^2)\delta x = \frac{\Pi\beta'\gamma'\text{ἡμ}\theta\text{ἡμ}\lambda}{\alpha'^2}\left(\alpha'^2 x - \frac{x^3}{3}\right)$$

καὶ διὰ τὸ ἐλλειψοειδὲς ὁλόκληρον, $\frac{4}{3}\Pi\alpha'\beta'\gamma'$ ἡμθ ἡμ λ.

400. Συγκρίνοντες τὴν τελευταίαν ἔκθεσιν ταύτην τῆς στερεότητος τοῦ ἐλλειψοειδοῦς πρὸς τὴν ἐν § 393 εὑρεθεῖσαν, συνάγομεν·

$$\alpha'\beta'\gamma'\,\text{ἡμθ ἡμλ} = \alpha\beta\gamma, \qquad \Pi\alpha\beta\gamma = \Pi\alpha'\beta'\gamma'\,\text{ἡμθ ἡμλ}.$$

Ἡ μὲν πρώτη τῶν σχέσεων τούτων δείκνυσιν ὅτι, *ἅπαντα τὰ ἐπὶ τῶν συζυγῶν διαμέτρων τοῦ ἐλλειψοειδοῦς κατα-*

σκευαζόμενα παραλληλεπίπεδα, ἰσοδύναμά εἰσι τῷ ἐπὶ τῶν ἀξόνων αὐτοῦ κατασκευαζομένῳ παραλληλεπιπέδῳ ὀρθῷ.

Ἡ δὲ δευτέρα ὅτι, *ἅπαντες οἱ περιγεγραμμένοι εἰς τὸ ἐλλειψοειδὲς κύλινδροι, ὧν αἱ βάσεις παράλληλοι εἰσι τοῖς ἐπιπέδοις τῶν καμπυλῶν τῶν ἐπαφῶν, εἰσὶν ἰσοδύναμοι ἀλλήλοις.*

ΙΓ'. ΠΕΡΙ ΣΥΝΘΗΚΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΜΟΤΗΤΟΣ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΣΥΝΕΚΘΕΣΕΩΝ ΤΗΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ, ΠΕΡΙΕΚΤΙΚΩΝ ΠΛΕΙΟΝΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΩΝ. — ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΣ ΤΩΝ ΣΥΝΕΚΘΕΣΕΩΝ ΤΟΥΤΩΝ, ΕΚΠΛΗΡΟΥΣΩΝ ΤΑΣ ΣΥΝΘΗΚΑΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΜΟΤΗΤΟΣ.

401. Πᾶσα συνέκθεσις διαφορικὴ μιᾶς μεταβλητῆς, ὡς $\Sigma(x)\delta x$, ἀείποτε θεωρητέα ἐστὶν ὡς τὸ ἀκριβὲς διαφορικὸν συνεκθέσεώς τινος τῆς x. Τῷ ὄντι, ἡ $\Sigma(x)\delta x$ εἶναι τὸ διαφορικὸν γνωστῆς συνεκθέσεως τῆς x, ἐν τοιαύτῃ δὲ περιπτώσει ὁλοκληροῦται ἀμέσως, ἢ τοὐλάχιστον ἔσεται δυνατὸν ἐκτελέσαι τὴν ὁλοκλήρωσιν ταύτην κατὰ προσέγγισιν.

402. Θεωρήσωμεν ἤδη συνέκθεσίν τινα διαφορικὴν πρωτοταγῆ δύο μεταβλητῶν x, ψ, ὡς $\Pi\delta x + K\delta\psi$, ἐν ᾗ Π, Κ, δηλοῦσι συνεκθέσεις οἰασδήποτε τῶν x, ψ. Τοιαύτην τινὰ συνέκθεσιν ἀδύνατον θεωρῆσαι ἐν γένει ὡς οὖσαν ἀκριβῶς τὸ διαφορικὸν ἑτέρας συνεκθέσεως τῶν x, ψ. Ὅπως ἔχῃ χώραν τὸ τοιοῦτον, αἱ ποσότητες Π, Κ, πρέπει νὰ συνδέωνται ἀλλήλαις σχέσει τινὶ ἣν ἐφεξῆς ἐξιχνεύσομεν.

Ἔστω, Φ συνέκθεσίς τις τῶν x, ψ. Τὸ διαφορικὸν αὐτῆς πλῆρες, ἤτοι ἡ αὔξησις ἣν Φ λαμβάνει συνεπείᾳ τῶν ταυτοχρόνων αὐξήσεων δx καὶ δψ τῶν x καὶ ψ, ἔσεται [κατὰ ἄρθ. Ε'. Μέρ. Α'],

$$\delta\Phi = \frac{\delta\Phi}{\delta x}\delta x + \frac{\delta\Phi}{\delta\psi}\delta\psi.$$

$\frac{\delta\Phi}{\delta x}$ καὶ $\frac{\delta\Phi}{\delta\psi}$ δηλοῦντων ἀμοιβαίως τοὺς μερικοὺς διαφορικοὺς συντελεστὰς τῆς συνεκθέσεως Φ πρὸς x καὶ πρὸς ψ,

Ἄρα, ὅπως ἡ ἡ προτεθεῖσα συνέκθεσις $\Pi\delta x + K\delta\psi$, τὸ ἐξαγόμενον τῆς διαφορίσεως συνεκθέσεως οἱασδήποτε Φ, ἀπαιτεῖται

$$\Pi = \frac{\delta\Phi}{\delta x}, \qquad K = \frac{\delta\Phi}{\delta\psi}.$$

Ἀλλὰ, κατὰ § 86, $\frac{\delta^2\Phi}{\delta x\delta\psi} = \frac{\delta^2\Phi}{\delta\psi\delta x}$· ἄρα, πρέπει νὰ ἔχωμεν ἐπίσης

$$\frac{\delta\Pi}{\delta\psi} = \frac{\delta K}{\delta x}.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἐμφαίνει τὴν σχέσιν ἥτις πρέπει νὰ συνδέῃ πρὸς ἀλλήλας τὰς συνεκθέσεις Π, Κ, ὅπως $\Pi\delta x + K\delta\psi$ ᾖ τὸ διαφορικὸν συνεκθέσεώς τινος τῶν x, ψ.

403. Ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν συνέκθεσιν $\Pi\delta x + K\delta\psi + P\delta\omega$, ἐν ᾗ Π, Κ, Ρ, δηλοῦσι συνεκθέσεις οἰασδήποτε περιεκτικὰς x, ψ, ω, παρατηρητέον ὅτι, διὰ πᾶσαν συνέκθεσιν Φ τῶν x, ψ, ω, ἔχομεν·

$$\delta\Phi = \frac{\delta\Phi}{\delta x}\delta x + \frac{\delta\Phi}{\delta\psi}\delta\psi + \frac{\delta\Phi}{\delta\omega}\delta\omega.$$

Ἀλλὰ

$$\frac{\delta^2\Phi}{\delta x\delta\psi} = \frac{\delta^2\Phi}{\delta\psi\delta x}, \quad \frac{\delta^2\Phi}{\delta x\delta\omega} = \frac{\delta^2\Phi}{\delta\omega\delta x}, \quad \frac{\delta^2\Phi}{\delta\psi\delta\omega} = \frac{\delta^2\Phi}{\delta\omega\delta\psi}.$$

Ἄρα, ἡ προτεθεῖσα συνέκθεσις ἀδύνατον εἶναι τὸ διαφορικὸν συνεκθέσεως περιεχούσης x, ψ, ω, ἢ ὅταν Π, Κ, Ρ, ἐπαληθεύωσι τὰς σχέσεις

$$\frac{\delta\Pi}{\delta\psi} = \frac{\delta K}{\delta x}, \quad \frac{\delta\Pi}{\delta\omega} = \frac{\delta P}{\delta x}, \quad \frac{\delta K}{\delta\omega} = \frac{\delta P}{\delta\psi}.$$

Καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, προκειμένου λόγου περὶ συνεκθέσεων διαφορικῶν περιεκτικῶν πλειόνων μεταβλητῶν.

404. Ὅταν αἱ προτιθέμεναι συνεκθέσεις διαφορικαὶ ἐκπληρῶσι τὰς ἀνωτέρω δειχθείσας ἰδιότητας τῶν ἐντελῶν διαφορικῶν, τὸ ὁλοκληρωτικὸν αὐτῶν λαμβάνομεν ὡς ἑξῆς.

$$\Phi = \int \delta x \left(\frac{\psi}{x^2 + \psi^2} + \frac{1}{x}\right) + \Psi,$$

δίδει δὲ

$$\Phi = \text{τόξ ἐφ}\, \frac{x}{\psi} + \lambda x + \Psi.$$

Ἐξ αὐτοῦ πορίζόμεθα

$$\frac{\delta\Phi}{\delta\psi} = -\frac{x}{x^2 + \psi^2} + \frac{\delta\Psi}{\delta\psi}.$$

Συγκρίνοντες τῷ προτεθέντι διαφορικῷ, συνάγομεν·

$$-\frac{x^2 + x\psi + \psi^2}{(x^2 + \psi^2)\psi} = -\frac{x}{x^2 + \psi^2} + \frac{\delta\Psi}{\delta\psi},$$

ὅθεν

$$\frac{\delta\Psi}{\delta\psi} = -\frac{1}{\psi}. \qquad \text{Ἑπομένως} \qquad \Psi = \Lambda - \lambda\psi.$$

Ἄρα, τὸ ζητούμενον ὁλοκληρωτικὸν εἶναι

$$\Phi = \text{τόξ ἐφ}\, \frac{x}{\psi} + \lambda\frac{x}{\psi} + \Lambda.$$

408. Αἱ αὐταὶ θεωρίαι ἐφαρμόζονται καὶ ἐπὶ διαφορικῶν περιεχόντων τρεῖς ἢ πλείονας μεταβλητάς. Ἔστω τὸ

$$\delta\Phi = \Pi\delta x + K\delta\psi + P\delta\omega,$$

ἐκπληροῦν τὰς κατὰ § 403 ἀπαιτουμένας ἰδιότητας ὅπως ᾖ ὁλοκληρώσιμον. Τὸ ὁλοκληρωτικὸν Φ ἔσεται ἀναγκαίως ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\Phi = \int \Pi\delta x + \Psi,$$

Ψ δηλοῦντος ἐνταῦθα συνέκθεσιν περιεκτικὴν τῶν μόνων μεταβλητῶν ψ καὶ ω. Η ἐξίσωσις αὐτὴ δίδει ὡς ἀνωτέρω,

$$\frac{\delta\Phi}{\delta\psi} = \int \frac{\delta\Pi}{\delta\psi}\delta x + \frac{\delta\Psi}{\delta\psi},$$

ποσότητα ἥτις πρέπει νὰ ἰσοῦται K. Ἄρα,

$$\frac{\delta\Psi}{\delta\psi} = K - \int \frac{\delta\Pi}{\delta\psi}\delta x, \quad \text{καὶ} \quad \Psi = \int\delta\psi\left(K - \int\frac{\delta\Pi}{\delta\psi}\delta x\right) + \Omega$$

Ω δηλοῦντος συνέκθεσιν τῆς μεταβλητῆς ω μόνης. Οὕτως ἔχομεν

$$\Phi = \int \Pi\delta x + \int\delta\psi\left(K - \int\frac{\delta\Pi}{\delta\psi}\delta x\right) + \Omega,$$

καὶ ἑπομένως

$$\frac{\delta\Phi}{\delta\omega} = \int\frac{\delta\Pi}{\delta\omega}\delta x + \int\delta\psi\left(\frac{\delta K}{\delta\omega} - \int\frac{\delta^2\Pi}{\delta\psi\delta\omega}\delta x\right) + \frac{\delta\Omega}{\delta\omega}:$$

Ἐπειδὴ ἡ τελευταία αὐτὴ ποσότης πρέπει νὰ ἦναι ἴση P, ἡ συνέκθεσις Ω ὁρίζεται ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{\delta\Omega}{\delta\omega} = P - \int\frac{\delta\Pi}{\delta\omega}\delta x - \int\delta\psi\left(\frac{\delta K}{\delta\omega} - \int\frac{\delta^2\Pi}{\delta\psi\delta\omega}\delta x\right),$$

διδούσης

$$\Omega = \Lambda + \int\delta\omega\left[P - \int\frac{\delta\Pi}{\delta\omega}\delta x - \int\delta\psi\left(\frac{\delta K}{\delta\omega} - \int\frac{\delta^2\Pi}{\delta\psi\delta\omega}\delta x\right)\right].$$

Ἄρα, τὸ ζητούμενον ὁλοκληρωτικὸν εἶναι·

$$\Phi = \Lambda + \int\Pi\delta x + \int\delta\psi\left(K - \int\frac{\delta\Pi}{\delta\psi}\delta x\right)$$
$$+ \int\delta\omega\left[P - \int\frac{\delta\Pi}{\delta\omega}\delta x - \int\delta\psi\left(\frac{\delta K}{\delta\omega} - \int\frac{\delta^2\Pi}{\delta\psi\delta\omega}\delta x\right)\right].$$

409. Βεβαιούμεθα καὶ αὖθις, ὅτι ἡ μέθοδος αὐτὴ ὑποθέτει τὴν ὕπαρξιν τῶν ἐν § 403 δηλωθεισῶν σχέσεων. Τῷ ὄντι, ὅπως ᾖ συνέκθεσις τῆς ω μόνης ἡ ἔκθεσις

$$P - \int\frac{\delta\Pi}{\delta\omega}\delta x - \int\delta\psi\left(\frac{\delta K}{\delta\omega} - \int\frac{\delta^2\Pi}{\delta\psi\delta\omega}\delta x\right),$$

πρέπει τὰ διαφορικὰ αὐτῆς, κατὰ x καὶ κατὰ ψ μορφούμενα, νὰ ὦσιν ἴσα μηδενί· ἄρα

$$\frac{\delta P}{\delta x} - \frac{\delta \Pi}{\delta \omega} - \int \delta\psi \left(\frac{\delta^2 K}{\delta\omega\delta x} - \frac{\delta^2 \Pi}{\delta\psi\delta\omega} \right) = 0,$$

$$\frac{\delta P}{\delta \psi} - \int \frac{\delta^2 \Pi}{\delta\omega\delta\psi}\,\delta x - \frac{\delta K}{\delta \omega} + \int \frac{\delta^2 \Pi}{\delta\psi\delta\omega} = 0.$$

Αἱ ἐξισώσεις αὗται ὑπάρξωσιν εἰ, ὡς ἐν τῷ ῥηθέντι χωρίῳ, ἔχομεν·

$$\frac{\delta P}{\delta x} - \frac{\delta \Pi}{\delta \omega} = 0, \quad \frac{\delta K}{\delta x} - \frac{\delta \Pi}{\delta \psi} = 0, \quad \frac{\delta P}{\delta \psi} - \frac{\delta K}{\delta \omega} = 0.$$

410. Προκείσθω, π. χ., τὸ διαφορικὸν

$$\delta\Phi = -\frac{2x(\psi^2-\omega^2)}{(x^2+\psi^2)(x^2+\omega^2)}\delta x + \frac{2\psi}{x^2+\psi^2}\delta\psi - \frac{2\omega}{x^2+\omega^2}\delta\omega,$$

ἐκπληροῦν τὰς συνθήκας πρὸς ὁλοκλήρωσιν ἀπαιτουμένας· διότι

$$\frac{\delta\Pi}{\delta\psi} = \frac{\delta K}{\delta x} = -\frac{4x\psi}{(x^2+\psi^2)^2}, \quad \frac{\delta\Pi}{\delta\omega} = \frac{\delta P}{\delta x} = \frac{4x\omega}{(x^2+\omega^2)^2}, \quad \frac{\delta K}{\delta\omega} = \frac{\delta P}{\delta\psi} = 0.$$

Γράφομεν

$$\Phi = -\int \delta x\, \frac{2x(\psi^2-\omega^2)}{(x^2+\psi^2)(x^2+\omega^2)} + \Psi$$

$$= \int \delta x \left(\frac{2x}{x^2+\psi^2} - \frac{2x}{x^2+\omega^2} \right) + \Psi,$$

ἤτοι $\Phi = \lambda(x^2+\psi^2) - \lambda(x^2+\omega^2) + \Psi$.

Ἡ ἔκθεσις αὕτη δίδει

$$\frac{\delta\Phi}{\delta\psi} = \frac{2\psi}{x^2+\psi^2} + \frac{\delta\Psi}{\delta\psi}.$$

Συγκρίσει δὲ πρὸς τὴν προτεθεῖσαν συνέκθεσιν, βλέπομεν ὅτι $\frac{\delta\Psi}{\delta\psi}$ ἰσοῦται μηδενί. Ἄρα, Ψ μόνην τὴν μεταβλητὴν ω δυνατὸν νὰ περιέχῃ. Ἔχομεν οὕτω·

$$\frac{\delta\Phi}{\delta\omega} = -\frac{2\omega}{x^2+\omega^2} + \frac{\delta\Psi}{\delta\omega}.$$

Συγκρίνοντες καὶ αὖθις πρὸς τὴν προτεθεῖσαν συνέκθεσιν, συνάγομεν ὅτι $\frac{\delta\Psi}{\delta\omega}$ εἶναι μηδέν. Ἄρα, τὸ ζητούμενον ὁλοκληρωτικὸν εἶναι

$$\Phi = \lambda\,\frac{x^2+\psi^2}{x^2+\omega^2} + A.$$

411. Ἔστω προσέτι τὸ διαφορικὸν

$$\delta\Phi = -\frac{x^2-\psi^2-\omega^2}{x^2+\psi^2+\omega^2}\frac{\delta x}{x} + \frac{x^2+(\psi-\omega)^2}{x^2+\psi^2+\omega^2}\frac{\delta\psi}{\omega}$$

$$+ \frac{x^2+\psi^2-\omega^2}{x^2+\psi^2+\omega^2}\frac{\delta\omega}{\omega} - \frac{\psi\delta\omega}{\omega^2} + \frac{\delta\omega}{\omega^3},$$

ἐκπληροῦν τοὺς πρὸς ὁλοκλήρωσιν ἀπαιτουμένους ὅρους· διότι

$$\frac{\delta\Pi}{\delta\psi} = \frac{\delta K}{\delta x} = \frac{4x\psi}{(x^2+\psi^2+\omega^2)^2}, \quad \frac{\delta\Pi}{\delta\omega} = \frac{\delta P}{\delta x} = \frac{4x\omega}{(x^2+\psi^2+\omega^2)^2}$$

$$\frac{\delta K}{\delta\omega} = \frac{\delta P}{\delta\psi} = \frac{4\psi\omega}{(x^2+\psi^2+\omega^2)^2} - \frac{1}{\omega^2}.$$

Κατὰ τὴν προεκτεθεῖσαν μέθοδον, θέτομεν

$$\Phi = -\int \delta x\, \frac{x^2-\psi^2-\omega^2}{(x^2+\psi^2+\omega^2)x} + \Psi,$$

ἢ $$\Phi = \int \delta x \left(\frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+\psi^2+\omega^2} \right) + \Psi,$$

ἐπομένως λαμβάνομεν

$$\Phi = \lambda x - \lambda(x^2+\psi^2+\omega^2) + \Psi.$$

Ἐντεῦθεν συνάγομεν·

$$\frac{\delta\Phi}{\delta\psi} = -\frac{2\psi}{x^2+\psi^2+\omega^2} + \frac{\delta\Psi}{\delta\psi}.$$

ἐκ δὲ τῆς συγκρίσεως πρὸς τὸ προτεθὲν διαφορικόν,

$$\frac{x^2+(\psi-\omega)^2}{(x^2+\psi^2+\omega^2)\omega} = -\frac{2\psi}{x^2+\psi^2+\omega^2} + \frac{\delta\Psi}{\delta\psi},$$

ὅθεν $\frac{\delta\Psi}{\delta\psi} = \frac{1}{\omega}$, καὶ ἐπομένως $\Psi = \frac{\psi}{\omega} + \Omega$;

Ἄρα, ἔχομεν ἤδη

$$\Phi = \lambda x - \lambda(x^2+\psi^2+\omega^2) + \frac{\psi}{\omega} + \Omega.$$

Λοιπόν, $$\frac{\delta\Phi}{\delta\omega} = -\frac{2\omega}{x^2+\psi^2+\omega^2} - \frac{\psi}{\omega^2} + \frac{\delta\Omega}{\delta\omega}.$$

Συγκρίσει δὲ πρὸς τὸ προτεθὲν διαφορικόν·

$$\frac{x^2+\psi^2-\omega^2}{(x^2+\psi^2+\omega^2)\omega} - \frac{\psi}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^3} = -\frac{2\omega}{x^2+\psi^2+\omega^2} - \frac{\psi}{\omega^2} + \frac{\delta\Omega}{\delta\omega},$$

ὅθεν $\frac{\delta\Omega}{\delta\omega} = \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^3}$, καὶ ἐπομένως $\Omega = \lambda\omega - \frac{1}{2\omega^2} + A$.

Τέλος, τὸ ζητούμενον ὁλοκληρωτικὸν εἶναι

$$\Phi = \lambda\frac{x\omega}{x^2+\psi^2+\omega^2} + \frac{\psi}{\omega} - \frac{1}{2\omega^2} + A.$$

412. Παρατηρητέον ὅτι, εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον καταντῶμεν ἀφ' οἱασδήποτε μεταβλητῆς ἀρχίσωμεν τὴν ὁλοκλήρωσιν. Π. χ., ἐὰν ἀρχίσωμεν τὴν τοῦ προηγουμένου παραδείγματος ὁλοκλήρωσιν ἀπὸ τῆς μεταβλητῆς ω, γραπτέον·

$$\Phi = \int\delta\omega\left(\frac{x^2+\psi^2-\omega^2}{(x^2+\psi^2+\omega^2)\omega} - \frac{\psi}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^3}\right) + X,$$

X δηλοῦντος συνέκθεσιν περιεκτικὴν x καὶ ψ μόνων. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἄγεται εἰς

$$\Phi = \int\delta\omega\left(-\frac{2\omega}{x^2+\psi^2+\omega^2} + \frac{1}{\omega} - \frac{\psi}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^3}\right) + X,$$

$$= -\lambda(x^2+\psi^2+\omega^2) + \lambda\omega + \frac{\psi}{\omega} - \frac{1}{2\omega^2} + X,$$

ὅθεν $$\frac{\delta\Phi}{\delta x} = -\frac{2x}{x^2+\psi^2+\omega^2} + \frac{\delta X}{\delta x}.$$

Συγκρίνοντες πρὸς τὴν προτεθεῖσαν συνέκθεσιν, ἔχομεν

$$-\frac{x^2-\psi^2-\omega^2}{(x^2+\psi^2+\omega^2)x} = -\frac{2x}{x^2+\psi^2+\omega^2} + \frac{\delta X}{\delta x};$$

ἤτοι $\frac{\delta X}{\delta x} = \frac{1}{x}$, καὶ $X = \lambda x + \Psi$,

Ψ δηλοῦντος συνέκθεσιν τῆς ψ μόνης. Λοιπόν, ἔχομεν ἤδη

$$\Phi = -\lambda(x^2+\psi^2+\omega^2) + \lambda\omega + \frac{\psi}{\omega} - \frac{1}{2\omega^2} + \lambda x + \Psi,$$

ὅθεν $$\frac{\delta\Phi}{\delta\psi} = -\frac{2\psi}{x^2+\psi^2+\omega^2} + \frac{1}{\omega} + \frac{\delta\Psi}{\delta\psi};$$

Ἐκ τῆς συγκρίσεως τῇ προτεθείσῃ συνεκθέσει, συνάγομεν ὅτι $\frac{\delta\Psi}{\delta\psi}$ εἶναι μηδέν· ἤτοι ὅτι ἡ συνέκθεσις Ψ εἶναι ἄτρεπτος.

Ἄρα, ἡ τιμὴ πλήρης τοῦ ζητουμένου ὁλοκληρωτικοῦ εἶναι

$$\Phi = \lambda\frac{x\omega}{x^2+\psi^2+\omega^2} + \frac{\psi}{\omega} - \frac{1}{2\omega^2} + A.$$

413. Προσθέσομεν ὑποδείγματά τινα πρὸς ἄσκησιν.

1) $$\int\left[\frac{\delta x}{x} + \frac{\psi^2\delta x}{x^3} - \frac{\psi\delta\psi}{x^2} + \frac{(\psi\delta x - x\delta\psi)\sqrt{x^2+\psi^2}}{x^3} + \frac{\delta\psi}{2\psi}\right]$$

$$= \lambda x - \frac{\psi^2}{2x^2} - \frac{\psi\sqrt{x^2+\psi^2}}{2x^2} + \tfrac{1}{2}\lambda\left(\frac{-\psi^2+\psi\sqrt{x^2+\psi^2}}{x}\right) + A;$$

$$2)\quad \int[(6x\psi-\psi^3)\delta x+(3x^2-2x\psi)\delta\psi]=3x^2\psi-\psi^3x+A.$$

$$3)\quad \int[(2\psi^2x+3\psi^3)\delta x+(2x^2\psi+9x\psi^2+8\psi^3)\delta\psi]=\psi^2x^2+3\psi^3x+2\psi^4+A.$$

$$4)\quad \int\left[\frac{\delta x}{\sqrt{x^2+\psi^2}}+\frac{\delta\psi}{\psi}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+\psi^2}}\right)\right]$$
$$=\lambda(x+\sqrt{x^2+\psi^2})+A.$$

414. Ὅταν τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως

$$\delta\Phi=\Pi\delta x+K\delta\psi,$$

ἦναι διαφορικὸν ἀκριβές, Φ εἶναι συνέκθεσίς τις δύο μεταβλητῶν ἀνεξαρτήτων x, ψ. Ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ ἡ συνέκθεσις αὕτη θεωρεῖται ὡς ἡ τεταγμένη ἐπιφανείας λογιζομένη καθέτως τῷ ἐπιπέδῳ ἐφ' οὗ λογίζονται αἱ τετμημέναι x καὶ ψ. Ἀλλὰ δὲν συμβαίνει τὸ αὐτὸ ὅταν ἡ διαφορικὴ συνέκθεσις $\Pi\delta x+K\delta\psi$ δὲν ἐκπληροῖ τοὺς ὅρους τῆς ὁλοκληρωσιμότητος. Ἡ περὶ ἧς πρόκειται ἐξίσωσις οὐδεμίαν ἔχει τότε σημασίαν· διότι ἀδύνατον νὰ θεωρηθῇ ὡς παραχθεῖσα ἔκ τινος σχέσεως ἀναλυτικῆς ὑπαρχούσης μεταξὺ τῶν τριῶν ποσοτήτων Φ, x, ψ. Δὲν δυνάμεθα δοῦναι αὐτῇ σημασίαν, ἢ συνιστῶντες σχέσιν τινὰ τῶν μεταβλητῶν x, ψ, πρὸς ἀλλήλας, αἵτινες οὐκ ἔσονται πλέον τότε ἀμφότεραι ἀνεξάρτητοι. Ἄρα, καθιστῶντες $\psi=\Omega(x)$, Ω δηλοῦντος συνέκθεσιν ὅλως κατὰ βούλησιν, ἡ τεθεῖσα ἐξίσωσις ἕξει τὴν μορφὴν

$$\delta\Phi=M\delta x\cdot$$

M οὔσης συνεκθέσεως τῆς x μόνης, ἡ αὐτὴ ἔσεται περιεκτικὴ τῆς κατὰ βούλησιν συνεκθέσεως $\Omega(x)$ καὶ τοῦ διαφορικοῦ αὐτῆς συντελεστοῦ τῆς πρώτης τάξεως. Ἡ ἐξίσωσις $\delta\Phi=M\delta x$ ἀείποτε ὁλοκληροῦται. Ἡ συνέκθεσις Φ, τῇ ὁλοκληρώσει μορφουμένη, ἐμφαίνει τὴν τεταγμένην καμπύλης ἧς ἡ προβολὴ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν $x\psi$ δηλοῦται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\psi=\Omega(x)$· σαφὲς δὲ ὅτι, ἕνεκα τοῦ ἀορίστου τῆς συνεκθέσεως Ω, ἀπειρία καμπυλῶν διαφόρων ὑπάρξει αἷς ἡ τεταγμένη Φ δύναται ἀνήκειν.

ΙΔ΄. ΠΕΡΙ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΤΗΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ ΠΕΡΙΕΚΤΙΚΩΝ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ.

415. Ὀνομάζουσιν οὕτως ἐν γένει πᾶσαν ἐξίσωσιν μορφὴν ἔχουσαν τοιαύτην

$$\Sigma\left(x,\ \psi,\ \frac{\delta\psi}{\delta x}\right)=0,$$

ἐν ᾗ, x θεωρεῖται ὡς μεταβλητὴ ἀνεξάρτητος· ψ ὡς συνέκθεσις μεταβλητὴ ἧς ἡ τιμὴ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τῆς τιμῆς τῆς x· $\frac{\delta\psi}{\delta x}$ εἶναι ὁ διαφορικὸς συντελεστὴς τῆς πρώτης τάξεως τῆς ψ πρὸς x μορφωθείς, ἤτοι ὁ λόγος τῶν ταυτοχρόνων αὐξήσεων τῶν μεταβλητῶν x, ψ. Πρόκειται συλλαβεῖν ἰδέαν τῆς σχέσεως ἣν τοιαύτη ἐξίσωσις τίθησι μεταξὺ τῶν δύο μεταβλητῶν τούτων.

Πρὸς τοῦτο, παρατηρητέον ὅτι δυνατὸν ἀείποτε ὑποτιθέναι τὴν προτεθεῖσαν ἐξίσωσιν ἠγμένην ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{\delta\psi}{\delta x}=\Phi(x,\ \psi),$$

Φ δηλοῦντος συνέκθεσιν ἐπιδεκτικὴν ἐν γένει μιᾶς ἢ πλειόνων τιμῶν διακεκριμένων. Τεθείσθω ἡ πρώτη περίπτωσις. Πρὸς σαφήνειαν δὲ τῶν ἰδεῶν, θεωρήσωμεν x ὡς τετμημένην καὶ ψ ὡς τὴν σύστοιχον τεταγμένην· οὕτως ἡ τεθεῖσα ἐξίσωσις ἐμφαίνει τὸ σχῆμα καμπύλης ἐπιπέδου. Ἐὰν δώσωμεν ταῖς x, ψ, δύο τιμὰς x_0, ψ_0, τὰς τυχούσας, ἐκ τῆς προηγουμένης ἐξισώσεως ὁρισθήσεται μία τιμὴ τοῦ $\frac{\delta\psi}{\delta x}$, δι' ἧς δυνατὸν ἔσεται γνωσθῆναι ὁποία ἡ σμικροτάτη μεταβολὴ τῆς ψ, ἀπὸ τῆς τιμῆς ψ_0, ὅταν x αὐξήσῃ ἢ μειωθῇ κατὰ σμικροτάτην ποσότητα ἀπὸ τῆς τιμῆς x_0. Τῷ ὄντι, Δx δηλούσης ἐλαχίστην τινὰ αὔξησιν τῆς x, ἔχομεν ἐπαισθητῶς $\Delta\psi=\frac{\delta\psi}{\delta x}\Delta x$. Εἶτα, διδομένων ταῖς x, ψ, ἐν τῇ προηγουμένῃ ἐξισώσει τῶν τιμῶν $x_0 + \Delta x$ καὶ $\psi_0 + \frac{\delta\psi}{\delta x}\Delta x$,

ἐκ τῆς αὐτῆς ὁρισθήσεται νέα τιμὴ τῷ $\frac{\delta\psi}{\delta x}$, ἧς δυνάμεθα ποιῆσαι χρῆσιν ὡς ἀνωτέρω. Ἐν ἑκάστῃ ἐργασίᾳ ἐννοεῖται ὅτι ἀείποτε παραλείπομεν τὰ δευτέρας τάξεως ποσὰ σχετικῶς πρὸς Δx. Ἐργαζόμενοι τοιουτοτρόπως, δῆλον ὅτι κατασκευάσομεν καμπύλην προσεγγίζουσαν ἀπεριορίστως τῇ προτεθείσῃ καμπύλῃ καθ' ὅσον αἱ αὐξήσεις Δx λάβωσι τιμὰς μᾶλλον καὶ μᾶλλον σμικράς. Ἄρα, ἡ προτεθεῖσα ἐξίσωσις θεωρητέα ἐστὶν ὡς ὁρίζουσα τὴν μορφὴν καμπύλης, ἧς κατὰ βούλησιν λαμβάνομεν ἓν σημεῖον οἱονδήποτε. Ἡ γενικὴ ἔκθεσις τῆς ψ, ἐκ τῶν προηγουμένων λογισμῶν προκύπτουσα, εἶναι

$$\psi = \psi_0 + \Phi(x_0, \psi_0)\Delta x + \Phi[x_0 + \Delta x, \psi_0 + \Phi(x_0, \psi_0)\Delta x]\Delta x + \ldots,$$

τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ληπτέων ὅρων ἐξαρτωμένου ἀπὸ τῆς τιμῆς τῆς x ἣν θεωροῦμεν.

Κατὰ τὴν κατ' ἀρέσκειαν θέσιν ἣν ὁρίσομεν τῷ πρώτῳ σημείῳ τῶν διὰ τῆς προηγουμένης ἐξισώσεως κατασκευαζομένων καμπυλῶν, οὐχὶ μόνον ἡ θέσις, ἀλλ' ἐν γένει καὶ ἡ μορφὴ τῶν καμπυλῶν τούτων ἔσονται διάφοροι. Οὐχ ἧττον ὅμως ἅπασαι ἔξουσι χαρακτῆρα κοινὸν, οὗτινος ἡ φύσις ἐμφαίνεται ὑπὸ τῆς προτεθείσης διαφορικῆς ἐξισώσεως. Οὕτω, κυρίως εἰπεῖν, ἡ διαφορικὴ αὕτη ἐξίσωσις ἐμφαίνει ἰδίωμα κοινὸν ἀπείρῳ ἀριθμῷ καμπυλῶν, ἃς δυνάμεθα φαντασθῆναι γεγραμμένας ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου. Τὸ ἰδίωμα τοῦτο ὁρίζει τὴν κλίσιν τῆς ἐφαπτομένης κατὰ σημεῖον οἱονδήποτε, συνεκθέσει τῶν συντεταγμένων τοῦ σημείου τούτου· χορηγεῖ μέσον κατασκευῆς τῆς ὅλης καμπύλης, ὅταν ἓν οἱονδήποτε σημεῖον ταύτης ὁρισθῇ.

Παρατηρητέον δὲ ὅτι, ἡ ἐκλογὴ μιᾶς οἱασδήποτε τῶν εἰς ἄπειρον ἀριθμὸν καμπυλῶν αἷς ἀνήκει ἡ προτεθεῖσα διαφορικὴ ἐξίσωσις, ἐξαρτᾶται ἀπὸ μοναδικῆς κατὰ βούλησιν ποσότητος. Ἀρκεῖ, π. χ., ὁρίσαι τὴν τῇ $\psi = 0$ συστοιχοῦσαν τιμὴν τῆς x.

Τῷ ὄντι, εὑρήσομεν ἀείποτε τὴν αὐτὴν καμπύλην, οἱονδήποτε εἶναι τὸ ληφθὲν σημεῖον αὐτῆς.

416. Τεθείσθω ἤδη ὅτι ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{\delta\psi}{\delta x} = \Phi(x, \psi),$$

δίδει πλείονας τιμὰς διαφόρους διὰ τὸν διαφορικὸν συντελεστὴν $\frac{\delta\psi}{\delta x}$. Θεωρητέον ἰδίᾳ ἑκάστην τῶν τιμῶν τούτων, καὶ ἐφαρμοστέον αὐτῇ τὰ ἐν τῷ προηγουμένῳ χωρίῳ ἐκτεθέντα. Ἐξάξομεν ὅτι, ἐν τῇ περὶ ἧς λόγος περιπτώσει, ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις ἀνήκει εἰς πλείονα συστήματα καμπυλῶν γεγραμμένων ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου καὶ χιαζομένων κατὰ διευθύνσεις διαφόρους. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἐμφαίνει ἰδιώματα κοινὰ ἁπάσαις ταῖς καμπύλαις, εἰς ἀριθμὸν ἄπειρον, ἀνηκούσαις ἀμοιβαίως ἑκάστῳ τῶν συστημάτων τούτων· διὰ τῶν ἰδιωμάτων τούτων ὁρίζεται ἡ ἐφαπτομένη καθ' οἱονδήποτε σημεῖον τῶν καμπυλῶν, συνεκθέσει τῶν συντεταγμένων τοῦ σημείου τούτου. Ὥστε αἱ καμπύλαι αὗται εἰσὶ κατασκευαστέαι διὰ τῆς προτεθείσης ἐξισώσεως, ὅταν ἓν σημεῖον αὐτῶν δοθῇ.

417. Ἐκ τῶν προεκτεθέντων εὐκόλως λαμβάνομεν ἰδέαν τῆς *ἀρχικῆς ἐξισώσεως* ἢ τοῦ *ὁλοκληρωτικοῦ* τῆς προτεθείσης ἐξισώσεως διαφορικῆς. Ἡ ἀρχικὴ αὕτη ἐξίσωσις, ὅπως ἔχῃ τὴν αὐτὴν γενικότητα ἣν καὶ ἡ διαφορικὴ, πρέπει ν' ἁρμόζῃ οἱαδήποτε ἐκ τῶν καμπυλῶν τῶν διὰ ταύτης κατασκευαζομένων. Ἄρα· 1ον· πρέπει νὰ περιέχῃ μίαν *ἄτρεπτον κατὰ βούλησιν*· ἤτοι διάφορον τῶν ἀτρέπτων ποσοτήτων αἵτινες ὑπάρχουσιν ἐν τῇ προτεθείσῃ ἐξισώσει διαφορικῇ καὶ περιέχονται ἐν τῇ ἀναλυτικῇ ἐκθέσει τοῦ ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως ταύτης δηλουμένου ἰδιώματος. Τὸ ἀόριστον τῆς περὶ ἧς λόγος ἀτρέπτου χρησιμεύει ὅπως τὸ ἐξαγόμενον, ἔχον ἅπασαν τὴν ἀναγκαίαν γενικότητα, ἐμφαίνῃ ἅπαν τὸ σύστημα τῶν καμπυλῶν αἷς ἡ προτεθεῖσα ἐξίσωσις ἁρμόζει. 2ον· Ἡ αὐτὴ ἀρχικὴ ἐξίσωσις πρέπει νὰ *ἐκπληροῖ* τὴν προτεθεῖσαν διαφορικὴν

ἤτοι, αἱ τιμαὶ τῶν ψ, $\frac{\delta\psi}{\delta x}$, ἐκ τῆς ἀρχικῆς ἐξισώσεως καὶ ἐκ τῆς διαφορικῆς αὐτῆς ἐξαγόμεναι, φερόμεναι ἐν τῇ προτεθείσῃ νὰ καθιστῶσιν αὐτὴν ἰσομερῆ, ἢ τοὐλάχιστον, ἀπαλειφομένης τῆς κατ' ἀρέσκειαν ἀτρέπτου ἐκ τῆς ἀρχικῆς ἐξισώσεως συνδυαζομένης τῇ διαφορικῇ αὐτῆς, νὰ προκύπτῃ ἡ προτεθεῖσα.

418. Πᾶσα ἐξίσωσις ἐξ ὅρων πεπερασμένων συγκροτουμένη, ταυτοποιοῦσα ἐξίσωσίν τινα διαφορικήν, καὶ περιέχουσα μίαν ἄτρεπτον κατ'ἀρέσκειαν, εἶναι τὸ *γενικὸν ὁλοκληρωτικὸν* τῆς διαφορικῆς ταύτης ἐξισώσεως. Ἐκ τοῦ γενικοῦ ὁλοκληρωτικοῦ τούτου πορίζόμεθα τὰ *μερικὰ ὁλοκληρωτικά*, δίδοντες τῇ κατ' ἀρέσκειαν ἀτρέπτῳ τιμὰς διαφόρους.

Εἰς πλείονας περιπτώσεις ὑπάρχουσιν ἐξισώσεις ἀρχικαὶ ταυτοποιοῦσαι μὲν ἐξίσωσίν τινα διαφορικήν, μὴ περιέχουσαι δὲ ἄτρεπτον κατ' ἀρέσκειαν. Ἐνίοτε αἱ ἐξισώσεις αὗται εἰσὶν ὁλοκληρωτικὰ μερικὰ ἀφ' ὧν ἡ κατὰ βούλησιν ἄτρεπτος ἐξηλείφθη, ἕνεκα τιμῆς τινος δοθείσης αὐτῇ· ὡς, π. χ., συμβαίνει τὸ τοιοῦτον ὅταν αὕτη ὑποτεθῇ ἴση μηδενὶ ἢ ἄπειρος. Ἄλλοτε αἱ ἀρχικαὶ ἐξισώσεις περὶ ὧν λόγος κέκτηνται εἰδικόν τινα χαρακτῆρα, καὶ πρέπει νὰ θεωρηθῶσιν ἰδιαιτέρως· αὗται συνιστῶσι τότε τὰς καλουμένας *λύσεις μερικάς*. Ἐν τῷ δε τῷ ἄρθρῳ ἐνασχολούμεθα μόνον περὶ τὴν ἔρευναν τοῦ γενικοῦ ὁλοκληρωτικοῦ.

419. Προκείσθω ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις

$$x\frac{\delta\psi}{\delta x}-\psi+\beta=0, \quad \text{δίδουσα} \quad \frac{\delta\psi}{\delta x}=\frac{\psi-\beta}{x}.$$

Δῆλον ὅτι ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἀνήκει εἰς πᾶσαν γραμμὴν εὐθεῖαν διερχομένην τοῦ σημείου οὗτινος αἱ συντεταγμέναι εἰσὶ $x=0$, $\psi=\beta$. Τὸ γενικὸν ὁλοκληρωτικὸν εἶναι

$$\psi-\alpha x-\beta=0.$$

Τῷ ὄντι, ἡ ἀρχικὴ αὕτη ἐξίσωσις ἐτυμοποιεῖ τὴν διαφορικήν· διότι αἱ ἐξ αὐτῆς λαμβανόμεναι τιμαὶ $\psi=\alpha x+\beta$, $\frac{\delta\psi}{\delta x}=\alpha$,

ἀποκαθιστῶσιν ἰσομερῆ τὴν διαφορικὴν ταύτην ἐξίσωσιν· προσέτι δὲ, περιέχει τὴν κατὰ βούλησιν ἄτρεπτον α μὴ περιεχομένην ἐν τῇ προτεθείσῃ. Τὰ μερικὰ ὁλοκληρωτικὰ, ἅτινα μορφοῦμεν τῇ μεταβολῇ τῆς ἀτρέπτου ταύτης, ἐμφαίνουσιν ἁπάσας τὰς εὐθείας γραμμὰς διαφόρως κεκλιμένας, αἵτινες τέμνονται ὑπ' ἀλλήλων ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ψ, ἐν ἀποστάσει β ἀπὸ τῆς ἀρχῆς.

420. Ἔστω προσέτι ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις

$$\frac{\delta\psi}{\delta x}-\alpha-2x=0, \qquad \text{ἢ} \qquad \delta\psi-(\alpha+2x)\delta x=0,$$

ἧς ἡ ἀρχικὴ ἐξίσωσις εἶναι

$$\psi-\alpha x-x^2+\beta=0\cdot$$

β οὔσης τῆς κατὰ βούλησιν ἀτρέπτου. Ἡ ἀρχικὴ αὕτη ἐξίσωσις ἐμφαίνει παραβολὴν ἧς ὁ ἄξων εἶναι παράλληλος τῇ γραμμῇ τῶν ψ, ἐν τῇ ἀποστάσει $-\frac{1}{2}\alpha$ ἀπὸ ταύτης κείμενος. Ἡ καμπύλη συμπίπτει τῇ αὐτῇ γραμμῇ ἐν τῇ ἀποστάσει $-\beta$ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς. Ὅπως λάβωμεν ἁπάσας τὰς καμπύλας αἷς ἡ προτεθεῖσα ἐξίσωσις διαφορικὴ ἀνήκει, ἀρκεῖ νὰ μεταβάλλωμεν τὴν ἄτρεπτον β ἐν τῇ ἀρχικῇ ἐξισώσει, ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $+\infty$, ἢ νὰ μεταφέρωμεν τὴν παραβολὴν παραλλήλως ταῖς ψ, τῆς θέσεως τοῦ ἄξονος αὐτῆς μενούσης ἀναλλοιώτου.

Ἡ προτεθεῖσα διαφορικὴ ἐξίσωσις ἄγει εἰς τὴν ἀρχικὴν $\psi-\alpha x-x^2+\beta=0$, ἐν ᾗ β εἶναι ἡ κατὰ βούλησιν ἄτρεπτος. Δυνατὸν προταθεῖναι ἑτέραν ἐξίσωσιν διαφορικήν, εἰς τὴν αὐτὴν ἄγουσαν ἐξίσωσιν ἀρχικὴν ἐν ᾗ α εἴη ἡ κατὰ βούλησιν ἄτρεπτος. Ἡ διαφορικὴ αὕτη ἐξίσωσις μορφοῦται ἀμέσως, παρασκευαζομένης τῆς ἀρχικῆς ὅπως τῇ διαφορίσει ἀφανισθῇ ἡ ἄτρεπτος α· ἤτοι ἐπιλυομένης αὐτῆς κατὰ τὴν ἄτρεπτον ταύτην. Οὕτως ἔχομεν

$$\frac{\psi-x^2+\beta}{x}-\alpha=0.$$

Διαφορίζοντες καὶ ἐξαλείφοντες τὸν κοινὸν παράγοντα $\frac{1}{x^3}$, λαμϐάνομεν

$$\psi - x\frac{\delta\psi}{\delta x} + x^2 + \beta = 0.$$

Τὴν αὐτὴν ἐξίσωσιν διαφορικὴν εὑρίσκομεν μὴ ἐπιλύοντες τὴν ἀρχικὴν πρὸς α, ἀλλ' ἀπαλείφοντες τὴν ἄτρεπτον ταύτην τῷ συνδυασμῷ τῆς ἀρχικῆς ἐξισώσεως μετὰ τῆς ἐξ αὐτῆς παραγομένης τῇ διαφορίσει,

$$\frac{\delta\psi}{\delta x} - \alpha - 2x = 0.$$

Ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις ἣν τελευταῖον ἐλάϐομεν, καὶ ἀφ' ἧς ἡ ἄτρεπτος α ἠφανίσθη, ἀνήκει, ἐπίσης ὡς ἡ ἀρχικὴ ἐξίσωσις ἐν ᾗ α θεωρεῖται ὡς κατὰ βούλησιν ἄτρεπτος, εἰς ἁπάσας τὰς παραϐολὰς ὧν ὁ ἄξων παράλληλός ἐστι τῷ τῶν ψ, καὶ τεμνούσας τὸν τελευταῖον τοῦτον ἐν τῇ ἀποστάσει $-\beta$ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων.

Εἰ δὲ προύτείνετο ἡ ἐξίσωσις $\psi - x\frac{\delta\psi}{\delta x} + x^2 + \beta = 0$, ἀδύνατον ἤθελεν εἶσθαι μορφῶσαι ἐξ αὐτῆς ἀμέσως τὴν ἀρχικὴν ἐξίσωσιν ἐξ ἧς παρήχθη· διότι τὸ πρῶτον μέλος δὲν εἶναι διαφορικὸν ἀκριϐὲς συνεκθέσεώς τινος τῶν μεταϐλητῶν x, ψ. Τοιοῦτον ἀποκαθίσταται τῇ ἐν αὐτῷ ἐκ νέου εἰσαγωγῇ τοῦ παράγοντος $\frac{1}{x^2}$.

421. Προκείσθω ἤδη ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις

$$\left(\frac{\delta\psi}{\delta x}\right)^2 - \alpha^2 = 0, \qquad \text{ἐξ ἧς} \qquad \frac{\delta\psi}{\delta x} = \pm\alpha.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἀνήκει εἰς δύο συστήματα γραμμῶν εὐθειῶν σχηματιζουσῶν μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν x γωνίας ὧν αἱ τριγωνομετρικαὶ ἐφαπτόμεναι εἰσὶν ἀμοιϐαίως $+\alpha$ καὶ $-\alpha$. Τὸ γενικὸν ὁλοκληρωτικὸν αὐτῆς εἶναι

$$\psi^2 - \alpha^2x^2 - 2\beta\psi + \beta^2 = 0,$$

ἐξαγόμενον τοῦ ὑπ' ἀλλήλων πολυπλασιασμοῦ τῶν δύο ἐξισώσεων

$$\psi + \alpha x - \beta = 0, \qquad \psi - \alpha x - \beta = 0,$$

ἀνηκουσῶν ἀμοιϐαίως, ἕνεκα τῆς κατὰ βούλησιν ἀτρέπτου β, μιᾷ οἱαδήποτε τῶν εὐθειῶν τοῦ ἑτέρου τῶν συστημάτων. Τῷ ὄντι, διαφορίζοντες τὴν προηγουμένην ἐξίσωσιν, ἔχομεν

$$\psi\frac{\delta\psi}{\delta x} - \alpha^2 x - \beta\frac{\delta\psi}{\delta x} = 0\cdot$$

ἀπαλείφοντες δὲ β ἐκ τῶν δύο ἐξισώσεων τούτων, εὑρίσκομεν τὴν προτεθεῖσαν.

422. Ἐν γένει, δοθείσης ἐξισώσεώς τινος ἀρχικῆς, ὡς

$$\Sigma(x, \psi, \alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots\ldots) = 0,$$

περιεχούσης τὰς δύο μεταϐλητὰς x, ψ, καὶ πλείονας ἀτρέπτους α, β, γ, ..., ἡ ἐκ ταύτης ἀμέσως τῇ διαφορίσει παραγομένη

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta x} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\psi}\frac{\delta\psi}{\delta x} = 0, \quad \text{ἢ} \quad \frac{\delta\Sigma}{\delta x}\delta x + \frac{\delta\Sigma}{\delta\psi}\delta\psi = 0,$$

ὑπάρχει συγχρόνως πρὸς τὴν ἀρχικὴν ἐξίσωσιν. Ἄρα, δυνάμεθα συνδυάσαι ᾧτινι δήποτε τρόπῳ τὰς περὶ ὧν ὁ λόγος δύο ἐξισώσεις. Πολλάκις ἡ διαφόρισις ἀφανίζει μίαν τῶν ἀτρέπτων α, β, γ, ...; τοῦτο δὲ συμϐαίνει ὅταν ἡ ἄτρεπτος αὕτη εὑρίσκηται εἰς ὅρον μὴ περιέχοντα x ἢ ψ. Δυνάμεθα ἀπαλεῖψαι τὴν τυχοῦσαν ἄτρεπτον εὑρισκομένην εἰς ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσεις· ἢ προσέτι ἀπαλεῖψαι συνέκθεσίν τινα περιεκτικὴν x, ψ, εἴς τινας ὅρους εὑρισκομένην. Τέλος, δυνατὸν ἅπαντες οἱ ὅροι τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως νὰ πολυπλασιάζωνται ἐπὶ παράγοντά τινα εἰς x, ψ, ὅστις ἀφανισθήσεται ἰσουμένου μηδενὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὅρων τούτων. Οὕτω βλέπομεν ὅτι, ἐκ τῆς αὐτῆς ἐξισώσεως ἀρχικῆς παράγονται ἐν γένει διὰ διαφόρων ἐργασιῶν πλείονες ἐξισώσεις διαφορικαὶ διαφέρουσαι ἀλλήλων· ἑπομένως ἐννοοῦμεν τὸ δύσκολον τοῦ προϐλή-

ματος, εὑρεῖν τὸ ὁλοκληρωτικὸν ἐξισώσεως διαφορικῆς προτεθείσης.

423. Ὡς παράδειγμα προτείνομεν τὴν ἀρχικὴν ἐξίσωσιν

$$\psi^3 - \alpha x^5 + \beta x^3 - \gamma = 0,$$

ἐξ ἧς παράγονται διαφοροτρόπως αἱ ἑξῆς διαφορικαὶ τῆς πρώτης τάξεως, ἐν ἑκάστῃ τῶν ὁποίων ἠφανίσθη μία τῶν ἀτρέπτων α, β, γ.

$$\psi^3 - \tfrac{3}{5}\psi^2 x \frac{\delta\psi}{\delta x} + \tfrac{2}{5}\beta x^3 - \gamma = 0.$$

$$\psi^3 - \psi^2 x \frac{\delta\psi}{\delta x} + \tfrac{2}{3}\alpha x^5 - \gamma = 0.$$

$$3\psi^2 \frac{\delta\psi}{\delta x} - 5\alpha x^4 + 3\beta x^2 = 0.$$

424. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως, ἐμφαινούσης παραβολήν,

$$\psi^2 = 2\alpha x,$$

λαμβάνομεν, ἀπαλοιφῇ τῆς α,

$$\psi \frac{\delta x}{\delta \psi} = 2x.$$

Ἤτοι, *ἐν ἁπάσαις ταῖς παραβολαῖς, τὸν αὐτὸν ἄξονα καὶ τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἐχούσαις, ἡ ὑφαπτομένη διπλασία ἐστὶ τῆς τετμημένης τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς, οἱαδήποτε ἂν ᾖ ἡ παράμετρος* 2α.

Ἡ ἐξίσωσις $\psi^2 = 2\alpha x + 2\alpha^2$,

ἐμφαίνουσα σειρὰν παραβολῶν ἔχουσῶν τὸν αὐτὸν ἄξονα καὶ τὴν αὐτὴν ἑστίαν ἐν τῇ ἀρχῇ τῶν συντεταγμένων κειμένην, δίδει τῇ ἀπαλοιφῇ

$$\psi\left(\frac{\delta\psi}{\delta x}\right)^2 + 2x\frac{\delta\psi}{\delta x} - \psi = 0,$$

ὅθεν

$$\frac{\delta\psi}{\delta x} = \frac{-x + \sqrt{x^2 + \psi^2}}{\psi},$$

ἢ

$$x + \psi\frac{\delta\psi}{\delta x} = \sqrt{x^2 + \psi^2},$$

Ἄρα, εὐκόλως συνάγομεν ὅτι, *ἐν πάσῃ παραβολῇ, ἡ ἑστία ἐξίσου ἀπέχει τῶν σημείων καθ' ἃ ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ κάθετος συμπίπτουσι τῷ ἄξονι, ὡς καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς.*

ΙΕʹ. ΠΕΡΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΕΩΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΤΗΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ, ΕΝ ΑΙΣ Ο ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΥΠΑΡΧΕΙ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΟΣ.

425. Θεωρήσωμεν ἐξίσωσιν διαφορικὴν τῆς πρώτης τάξεως, ἐν ᾗ ὁ διαφορικὸς συντελεστὴς $\frac{\delta\psi}{\delta x}$ ὑπάρχει πρωτοβάθμιος μόνον, οὖσαν ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\Pi + K\frac{\delta\psi}{\delta x} = 0, \quad \text{ἢ} \quad \Pi\delta x + K\delta\psi = 0.$$

Π καὶ Κ δηλούντων συνεκθέσεις οἱασδήποτε τῶν x καὶ ψ.

Κατὰ πρῶτον δῆλον ὅτι, εἰ ἡ συνέκθεσις $\Pi\delta x + K\delta\psi$ εἶναι διαφορικὸν ἀκριβὲς συνεκθέσεώς τινος τῶν x, ψ, ἤτοι εἰ ἐκπληροῖ τοὺς ἐν § 402 δηλωθέντας ὅρους, τὸ ὁλοκληρωτικὸν αὐτῆς μορφοῦται κατὰ τοὺς προαποδοθέντας κανόνας· τὸ αὐτὸ δὲ συμπληρούμενον ἀτρέπτῳ κατὰ βούλησιν καὶ ἰσούμενον μηδενί, ἔσεται τὸ ζητούμενον ὁλοκληρωτικόν. Ἡ μερικὴ περίπτωσις αὕτη τότε μόνον παρουσιάζεται, ὅταν ἡ τεθεῖσα ἐξίσωσις διαφορικὴ ἦναι τὸ ἄμεσον ἐξαγόμενον τῆς διαφορίσεως τῆς ἀρχικῆς συνεκθέσεως, τεθείσης ὑπὸ μορφὴν τοιαύτην, ὥστε ἡ κατὰ βούλησιν ἄτρεπτος, εὑρεθεῖσα ἐν ὅρῳ τινὶ ἄνευ x ἢ ψ, ἠφανίσθη διὰ μόνης τῆς διαφορίσεως.

426. Ἡ προτεθεῖσα ἐξίσωσις ὁλοκληροῦται ἀείποτε, ἢ τοὐλάχιστον ἡ ἔρευνα τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ ἄγεται εἰς τοὺς τετραγωνισμούς, ὅταν αἱ μεταβληταὶ ὦσι *διακεκριμέναι*· ἤτοι ὅταν ἡ ἐξίσωσις αὕτη τίθηται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$X\delta x + \Psi\delta\psi = 0,$$

Χ καὶ Ψ δηλούντων ἀμοιβαίως συνεκθέσεις οἱασδήποτε, ἡ μὲν τῆς x μόνης, ἡ δὲ τῆς ψ μόνης. Τὸ γενικὸν ὁλοκληρωτικόν, ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, εἶναι

$$\int X\delta x + \int \Psi\delta\psi + A = 0.$$

Φανερὸν ὅτι αἱ μεταβληταὶ διακρίνονται ὅταν, ἐπιλυθείσης τῆς ἐξισώσεως πρὸς $\frac{\delta\psi}{\delta x}$, εὑρίσκωμεν

$$\frac{\delta\psi}{\delta x} = X.\Psi.$$

Ἐπομένως, ἡ διάκρισις αὕτη ἐκτελεῖται ἀμέσως ἐν πάσῃ ἐξισώσει συνισταμένῃ ἐκ δύο ὅρων μόνον. Ἕπονται ὑποδείγματά τινα.

1) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$(1 + x^2)\delta\psi - \sqrt{\psi}.\delta x = 0.$$

Διαιροῦντες αὐτὴν διὰ $(1 + x^2)\sqrt{\psi}$, συνάγομεν

$$\frac{\delta\psi}{\sqrt{\psi}} = \frac{\delta x}{1 + x^2}.$$

Ἐπομένως μορφοῦμεν τὸ ὁλοκληρωτικὸν αὐτῆς·

$$2\sqrt{\psi} - \text{τόξ εφ}\, x + A = 0.$$

2) Ὡσαύτως εὑρίσκομεν ὅτι, τὸ ὁλοκληρωτικὸν τῆς ἐξισώσεως

$$x^2\psi\delta x + (3\psi + 1)\delta\psi.\sqrt{x^3} = 0,$$

ἀγομένης, τῇ διὰ $\psi\sqrt{x^3}$ διαιρέσει, ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^3}}\delta x + \frac{3\psi + 1}{\psi}\delta\psi = 0,$$

εἶναι $$\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 3\psi + \lambda\psi + A = 0.$$

3) Τὸ ὁλοκληρωτικὸν τῆς ἐξισώσεως

$$x\delta\psi + \psi\delta x = 0,$$

εἶναι $$x\psi = A.$$

427. Ἡ διάκρισις τῶν μεταβλητῶν ἐκτελεῖται ἐνίοτε διά τινος μεταμορφώσεως ἐπὶ τῶν αὐτῶν. Τὸ μᾶλλον ἀξιοσημείωτον παράδειγμα εἶναι τὸ τῆς ἐξισώσεως,

$$\frac{\delta\psi}{\delta x} + \Pi\psi + K = 0, \quad \text{ἢ} \quad \delta\psi + \Pi\psi\delta x + K\delta x = 0,$$

ἐν ᾗ Π καὶ Κ δηλοῦσι συνεκθέσεις τῆς x μόνης. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ὀνομάζεται *ἐξίσωσις γραμμικὴ τῆς πρώτης τάξεως*, ἢ *ἐξίσωσις τοῦ πρώτου βαθμοῦ καὶ τῆς πρώτης τάξεως*, καθὸ περιέχουσα μόνον ἐν τῇ πρώτῃ δυνάμει τὴν συνέκθεσιν ψ καὶ τὸν διαφορικὸν αὐτῆς συντελεστὴν $\frac{\delta\psi}{\delta x}$. Καθιστῶμεν

$$\psi = X\tau, \qquad \text{ὅθεν} \qquad \delta\psi = \tau\delta X + X\delta\tau$$

δηλοῦντες τῷ Χ συνέκθεσίν τινα τῆς x, καὶ τῷ τ νέαν τινὰ μεταβλητήν. Ἀντεισάγοντες τὰς τιμὰς ταύτας ἐν τῇ προτεθείσῃ ἐξισώσει, λαμβάνομεν

$$\tau\delta X + X\delta\tau + \Pi X\tau\delta x + K\delta x = 0.$$

Τῆς συνεκθέσεως Χ οὔσης ἀορίστου, δυνατὸν ὁρίσαι αὐτὴν τῇ συνθήκῃ τοῦ ἀναλυθῆναι τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν εἰς τὰς ἑξῆς δύο·

$$\tau\delta X + K\delta x = 0, \qquad \delta\tau + \Pi\tau\delta x = 0.$$

Ἐν τῇ δευτέρᾳ αἱ μεταβληταὶ διακρίνονται· ὅθεν ἔχομεν·

$$\frac{\delta\tau}{\tau} = -\Pi\delta x, \quad \lambda\tau = -\int\Pi\delta x, \quad \tau = e^{-\int\Pi\delta x}.$$

Τῇ ἀντεισαγωγῇ τῆς τιμῆς ταύτης τῆς τ ἐν τῇ πρώτῃ, λαμβάνομεν·

$$\delta X = -\delta x.Ke^{\int\Pi\delta x}, \qquad X = -\int\delta x.Ke^{\int\Pi\delta x} + A.$$

Τὰς τιμὰς ταύτας τῶν Χ καὶ τ καθιστῶντες ἐν τῇ ἐξισώσει $\psi = X\tau$, λαμβάνομεν τέλος τὸ ὁλοκληρωτικὸν τῆς προτεθείσης ἐξισώσεως, ἐν ᾧ Α ἐμφαίνει τὴν κατὰ βούλησιν ἄτρεπτον.

$$\psi = e^{-\int\Pi\delta x}\left(-\int\delta x.Ke^{\int\Pi\delta x} + A\right).$$

428. Διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδου ὁλοκληροῦνται καὶ αἱ τὴν ἑξῆς μορφὴν ἔχουσαι ἐξισώσεις·

$$\psi^{\mu-1}\delta\psi + \Pi\psi^{\mu}\delta x + K\delta x = 0.$$

Π καὶ Κ δηλούντων πάντοτε συνεκθέσεις οἱασδήποτε τῆς x.

Τῷ ὄντι, ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἀποκαθίσταται ὁμοία τῇ προηγουμένῃ τῇ ὑποθέσει $\psi^{\mu} = \tau$.

429. Ἐπίσης τρέπεται εἰς γραμμικὴν ἐξίσωσιν, ἡ ἐφεξῆς τῷ Ι. ΒΕΡΝΟΥΛΗ ἀποδιδομένη·

$$\delta\psi + X\psi\delta x = X_1\psi^{\nu+1}\delta x.$$

Θέτομεν

$$\tau = \psi^{-\nu},\quad \text{ὅθεν}\quad \psi = \tau^{-\frac{1}{\nu}},\quad \text{καὶ}\quad \delta\psi = -\frac{1}{\nu}\tau^{-\frac{1}{\nu}-1}\delta\tau.$$

Λαμβάνομεν δέ, ἀντεισάγοντες ἐν τῇ προτεθείσῃ καὶ ἁπλοποιοῦντες

$$\delta\tau - \nu X\tau\delta x + \nu X_1\delta x = 0·$$

ἐξίσωσιν γραμμικήν, ἧς τὸ ὁλοκληρωτικόν, κατὰ τὸν προηγούμενον τύπον, εἶναι

$$\tau = e^{\nu\int X\delta x}\left(A - \nu\int X_1 e^{\nu\int X\delta x}\right) = \frac{1}{\psi^{\nu}}.$$

Ἐντεῦθεν πορίζόμεθα ἀμέσως τὴν τιμὴν τῆς ψ.

430. Ἔστω προσέτι ἐξίσωσις, ὡς

$$\frac{\delta\psi}{\delta x} + \Sigma\left(\frac{\psi}{x}\right) = 0.$$

Καθιστῶντες

$$\frac{\psi}{x} = \tau,\quad \text{ὅθεν}\quad \psi = x\tau,\quad \frac{\delta\psi}{\delta x} = \tau + x\frac{\delta\tau}{\delta x},$$

ἡ ἐξίσωσις αὕτη τρέπεται εἰς τὰς

$$\tau + x\frac{\delta\tau}{\delta x} + \Sigma(\tau) = 0,\quad \text{ἢ}\quad \frac{\delta\tau}{\tau + \Sigma(\tau)} + \frac{\delta x}{x} = 0,$$

ἐν αἷς αἱ μεταβληταί εἰσι διακεκριμέναι.

431. Χάριν ἐφαρμογῆς προσθέσομεν προβλήματά τινα.

1ον. *Καμπύλην εὑρεῖν ἧς ἡ ὑφαπτομένη εἴη πρὸς τὴν τεταγμένην ὡς γραμμὴ μόνιμος α εἶναι πρὸς τὴν τεταγμένην τῆς καμπύλης ταύτης ἐλαττουμένην κατὰ τὴν τεταγμένην εὐθείας κεκλιμένης κατὰ ἡμίσειαν γωνίαν ὀρθὴν ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν* x.

Λαμβανομένης τῆς ἀρχῆς ἐν τῷ σημείῳ καθ' ὃ ἡ εὐθεῖα αὕτη συμπίπτει τῷ τῶν x ἄξονι, ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς ἔσεται $x = \psi$· τὴν δοθεῖσαν δὲ συνθήκην ἐμφαίνει ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{\delta\psi}{\delta x} = \frac{\psi - x}{\alpha},\quad \text{ἢ}\quad \alpha\frac{\delta\psi}{\delta x} - \psi = -x.$$

Ἡ γραμμικὴ αὕτη ἐξίσωσις ὁλοκληρουμένη κατὰ τὴν προηγουμένην μέθοδον, δίδει

$$\psi = x + \alpha + Ae^{\frac{x}{\alpha}}.$$

Α οὔσης ἀτρέπτου κατὰ βούλησιν.

Ἐὰν ἤδη λάβωμεν ὡς ἄξονα τῶν x τὴν εὐθεῖαν δηλουμένην ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\psi = x + \alpha$, τοῦ ἄξονος τῶν ψ' διατηροῦντος τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, ἕξομεν

$$\psi' = Ae^{\frac{x}{\alpha}},\quad x = \frac{x'}{\sqrt{2}}.\quad \text{ἐπομένως}\quad \psi' = Ae^{\frac{x'}{\alpha\sqrt{2}}}.$$

Ἄρα, ἡ καμπύλη εἶναι λογαριθμικὴ ἧς αἱ τεταγμέναι σχηματίζουσι μετὰ τοῦ ἄξονος γωνίαν ἴσην ἡμισείᾳ ὀρθῇ.

2ον. *Καμπύλην εὑρεῖν ἐν παντὶ σημείῳ τῆς ὁποίας ἡ ὑποκάθετος ἰσοῦται τῷ δοθέντι μονίμῳ μήκει α.*

Ἀπ. $$\psi^2 = 2\alpha x + A.$$

3ον. *Καμπύλην εὑρεῖν ἧς ἡ ὑποκάθετος εἴη δύναμίς τις δοθεῖσα μ. τῆς τετμημένης.*

Ἀπ. $$\psi^2 = \frac{2}{\mu + 1}x^{\mu+1} + A.$$

4ον. *Καμπύλην εὑρεῖν ἧς ἡ ὑφαπτομένη εἴη ἐν ἀντιπεπονθότι λόγῳ πρὸς τὴν τεταγμένην.*

Ἀπ. $$x\psi - A\psi = -\mu^2.$$

5ον. *Καμπύλην εὑρεῖν ἧς ἡ κάθετος εἴη ἀμετάβλητος.*

Ἀπ. $$(x - A)^2 + \psi^2 = \alpha^2.$$

6ον. *Καμπύλην εὑρεῖν ἧς ἡ ὑφαπτομένη εἴη μονίμως ἴση α.*

Ἀπ. $$\psi = A e^{\frac{x}{\alpha}}.$$

7ον. *Καμπύλην εὑρεῖν ἧς ἡ ἐφαπτομένη εἴη ἀμετάβλητος καὶ ἴση α.*

Ἀπ. $$x + A = -\sqrt{\alpha^2 - \psi^2} + \alpha\lambda\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \psi^2}}{\psi}.$$

Τὴν καμπύλην ταύτην ὀνομάζουσιν *ἑλκομένην* (tractrice).

Περὶ τοῦ παράγοντος δι' οὗ ἐξίσωσίς τις ἀποκαθίσταται ὁλοκληρώσιμος.

432. Ἐξίσωσίς τις διαφορική, ὡς $\Pi\delta x + K\delta\psi = 0$, ἵνα παρουσιάζηται ὑπὸ τὴν ἀκριβῆ διαφορικὴν μορφὴν συνεχθέσεως τῶν δύο μεταβλητῶν x, ψ, ἀπαιτεῖται, ἐν γένει, νὰ ἦναι τὸ ἄμεσον ἐξαγόμενον τῆς διαφορίσεως τῆς ἀρχικῆς ἐξισώσεως. Ἀλλά, καὶ τούτου ὑπάρχοντος, ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις δὲν παρουσιάζεται ἀείποτε ὑπὸ μορφὴν διαφορικοῦ ἀκριβοῦς· διότι ἐνίοτε ἡ διαφόρισις εἰσάγει παράγοντας κοινοὺς τοῖς διαφόροις ὅροις, οἵτινες ἀφανίζονται ἰσουμένου τοῦ διαφορικοῦ τῷ μηδενί. Π. χ., τὸ διαφορικὸν τοῦ πρώτου μέλους τῆς ἀρχικῆς ἐξισώσεως

$$\frac{\psi}{x} = \alpha, \qquad \text{εἶναι} \qquad \frac{x\delta\psi - \psi\delta x}{x^2}.$$

Καθιστῶντες δὲ αὐτὸ ἴσον τῷ μηδενί, ἔχομεν ἁπλῶς τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν

$$x\delta\psi - \psi\delta x = 0,$$

ἧς τὸ πρῶτον μέλος δὲν εἶναι διαφορικὸν ἀκριβές.

433. Ἀλλ' οἱαδήποτε ᾖ ἡ καταγωγὴ ἐξισώσεώς τινος διαφορικῆς, δεικνύεται ὅτι, ὑπάρχει ἀείποτε εἷς παράγων μεταβλητὸς τοιοῦτος, ὥστε πολυπλασιαζομένης ἐπ' αὐτὸν τῆς ἐξισώσεως, αὕτη ἀποκαθίσταται ὁλοκληρώσιμος.

Τῷ ὄντι, τεθείσθω ὅτι ἡ προτεθεῖσα διαφορικὴ ἐξίσωσις ἤχθη ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{\delta\psi}{\delta x} + \frac{\Pi}{K} = 0.$$

Τὸ γενικὸν ὁλοκληρωτικόν, ὅπερ ἔστω $\Sigma(x, \psi, \alpha) = 0$, τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἔσεται περιεκτικὸν ἀτρέπτου τινὸς κατὰ βούλησιν α μὴ περιεχομένης ἐν τῇ διαφορικῇ ἐξισώσει. Ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ γενικὸν τοῦτο ὁλοκληρωτικὸν ἐπελύθη πρὸς α, καὶ ἤχθη ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\Phi(x, \psi) = \alpha, \qquad \text{ἢ ἁπλούστερον} \qquad \Phi = \alpha.$$

Διαφοριζομένης τῆς ἐξισώσεως ταύτης, λαμβάνομεν τὴν ἑξῆς

$$\frac{\delta\Phi}{\delta x}\delta x + \frac{\delta\Phi}{\delta\psi}\delta\psi = 0, \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{\delta\psi}{\delta x} + \frac{\frac{\delta\Phi}{\delta x}}{\frac{\delta\Phi}{\delta\psi}} = 0,$$

ἀφ' ἧς ἡ ἄτρεπτος α ἠφανίσθη, καὶ ἥτις πρέπει νὰ ἦναι ἰσομερὴς τῇ προτεθείσῃ διαφορικῇ. Ἄρα, οἱαιδήποτε ἂν ὦσι x, ψ, ἔχομεν

$$\frac{\delta\psi}{\delta x} + \frac{\Pi}{K} = \frac{\delta\psi}{\delta x} + \frac{\frac{\delta\Phi}{\delta x}}{\frac{\delta\Phi}{\delta\psi}}, \qquad \text{ἢ} \qquad \left(\frac{\delta\psi}{\delta x} + \frac{\Pi}{K}\right)\frac{\delta\Phi}{\delta\psi} = \frac{\delta\Phi}{\delta x} + \frac{\delta\Phi}{\delta\psi}\frac{\delta\psi}{\delta x}.$$

Τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἐξισώσεως ταύτης ὄντος τοῦ διαφορικοῦ πλήρους τῆς συνεκθέσεως Φ τῶν x, ψ, τοιοῦτον κατὰ συνέπειαν εἶναι καὶ τὸ πρῶτον. Ἄρα, πολυπλασιαζομένης τῆς προτεθείσης ἐπὶ $\frac{\delta\Phi}{\delta\psi}$, τὸ πρῶτον αὐτῆς μέλος ἀποκαταστα-θήσεται διαφορικὸν ἀκριβές.

Λοιπὸν, ἐκ τῶν προηγουμένων ἐβεβαιώθημεν περὶ τῆς ὑπάρξεως παράγοντος ἐφ' ὃν πολυπλασιαζομένη ἡ προτεθεῖσα ἐξίσωσις ἀποκαθίσταται ἀμέσως ὁλοκληρώσιμος. Προσέτι, εἴδομεν τίνι τρόπῳ ὁ παράγων οὗτος συνδέεται τῷ πρώτῳ μέλει τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ τιθεμένου ὑπὸ τὴν μορφὴν $\Phi = \alpha$, καὶ ὅτι ἤθελεν εἶσθαι γνωστὸς ἐὰν ἡ ἀρχικὴ ἐξίσωσις αὕτη ἦτο γνωστή.

434. Ἔστω, π. χ., ἡ ἀρχικὴ ἐξίσωσις

$$\psi^2 - 2\alpha(x + \psi) = 0,$$

ἥτις διαφοριζομένη δίδει

$$\psi\delta\psi - \alpha(\delta x + \delta\psi) = 0.$$

Ἀπαλειφομένης δὲ τῆς ἀτρέπτου α διὰ τῶν δύο τούτων ἐξισώσεων, προκύπτει ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις

$$(2x + \psi)\delta\psi - \psi\delta x = 0,$$

ἥτις δὲν ἐκπληροῖ τοὺς ὅρους τῆς ὁλοκληρωσιμότητος. Γράφομεν τὴν ἀρχικὴν ἐξίσωσιν ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{\psi^2}{2(x + \psi)} = \alpha,$$

καὶ μορφοῦμεν τὴν παραγομένην τοῦ πρώτου μέλους πρὸς ψ,

$$\frac{\psi^2 + 2x\psi}{2(x + \psi)^2}.$$

Θέτομεν ἐπίσης τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{\delta\psi}{\delta x} - \frac{\psi}{2x + \psi} = 0.$$

Πολυπλασιάζοντες δὲ ταύτην, συμφώνως τοῖς ἐν τῷ προηγουμένῳ χωρίῳ ἐκτεθεῖσι, ἐπὶ τὸν παράγοντα $\frac{(2x + \psi)\psi}{2(x + \psi)^2}$, εὑρίσκομεν·

$$\frac{\psi^2 + 2x\psi}{2(x + \psi)^2}\frac{\delta\psi}{\delta x} - \frac{\psi^2}{2(x + \psi)^2} = 0\cdot$$

ἤτοι,
$$\frac{(\psi^2 + 2x\psi)\delta\psi - \psi^2\delta x}{2(x + \psi)^2} = 0.$$

Δῆλον ὅτι ἡ ἔκθεσις αὕτη εἶναι τὸ διαφορικὸν πλῆρες τῆς συνεκθέσεως $\frac{\psi^2}{2(x + \psi)}$· ἑπομένως ἐκ τῆς αὐτῆς πορίζόμεθα ἀμέσως τὴν ἀρχικὴν ἐξίσωσιν.

435. Ἐκ τῆς ἐν § 433 ἐξισώσεως

$$\frac{\delta\psi}{\delta x} + \frac{\Pi}{K} = \frac{\frac{\delta\Phi}{\delta x} + \frac{\delta\Phi}{\delta\psi}\frac{\delta\psi}{\delta x}}{\frac{\delta\Phi}{\delta\psi}},$$

εἰκάζομεν ὅτι, πλὴν τοῦ παράγοντος $\frac{\delta\Phi}{\delta\psi}$, ὑπάρχουσιν ἄπειροι τὸν ἀριθμὸν ἕτεροι ἔχοντες τὸ ἰδίωμα τοῦ ἀποκαθιστᾶναι τὴν συνέκθεσιν $\frac{\delta\psi}{\delta x} + \frac{\Pi}{K}$ διαφορικὸν ἀκριβές. Τῷ ὄντι, παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ ποσότης

$$\sigma(\Phi)\left(\frac{\delta\Phi}{\delta x} + \frac{\delta\Phi}{\delta\psi}\frac{\delta\psi}{\delta x}\right),$$

εἶναι ἡ παραγομένη πλήρης συνεκθέσεώς τινος τῆς Φ, ἣν παραστήσωμεν τῇ Σ(Φ). Ἄρα, ἐὰν πολυπλασιάσωμεν τὸ πρῶτον μέλος τῆς προηγουμένης ἐξισώσεως ἐπὶ $\sigma(\Phi)\frac{\delta\Phi}{\delta\psi}$, αὐτὸ κατασταθήσεται παραγομένη ἀκριβὴς συνεκθέσεώς τινος τῶν x, ψ. Ἡ συνέκθεσις αὕτη ἔσεται ἡ αὐτὴ ἣν παρεστήσαμεν τῇ $\Sigma(\Phi)$· ὥστε τὸ ὁλοκληρωτικὸν θέλει εἶσθαι

$$\Sigma(\Phi) = A\cdot$$

ὅθεν συνάγομεν ἀμέσως $\quad \Phi = A\cdot$

ἤτοι, τὸ ὁλοκληρωτικὸν τῆς προτεθείσης ἐξισώσεως. Λοιπόν, ἅπαντες οἱ περιεχόμενοι πολυπλασιασταὶ ἐν τῇ ἐκθέσει $\sigma(\Phi)\dfrac{\delta\Phi}{\delta\psi}$, ἐν ᾗ σ ἐμφαίνει συνέκθεσίν τινα ὅλως κατὰ βούλησιν, ἄγουσιν ἀείποτε εἰς τὸ αὐτὸ τοῦτο ὁλοκληρωτικόν. Οἱ παράγοντες οὗτοι δὲν διαφέρουσιν ἀλλήλων ἢ κατὰ τὸν παράγοντα $\sigma(\Phi)$, ὄντα μὲν συνέκθεσιν τῶν x, ψ, ἀλλ' ἀγόμενον εἴς τινα ἄτρεπτον κατὰ βούλησιν δυνάμει τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ $\Phi = A$.

436. Ἐν § 427 εὕρομεν ὅτι τὸ ὁλοκληρωτικὸν τῆς γραμμικῆς ἐξισώσεως $\quad \delta\psi + \Pi\psi\delta x + K\delta x = 0,$

εἶναι
$$\psi = e^{-\int \Pi\delta x}\left(-\int \delta x . K e^{\int \Pi\delta x} + A\right).$$

Κατὰ τὰ προεκτεθέντα, θετέον τὸ ὁλοκληρωτικὸν τοῦτο ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$A = \int \delta x . K e^{\int \Pi\delta x} + \psi e^{\int \Pi\delta x} = \Phi.$$

Ὁ παράγων δὲ ἐφ' ὃν πρέπει νὰ πολυπλασιασθῇ ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις ὅπως ἀποκατασταθῇ ὁλοκληρώσιμος, ἔσεται [433],

$$\frac{\delta\Phi}{\delta\psi} = e^{\int \Pi\delta x}.$$

Ἄρα, πολυπλασιάζοντες καὶ ὁλοκληροῦντες κατὰ § 404, λαμβάνομεν τὸ αὐτὸ ὅπερ καὶ ἐν § 427 ἐξαγόμενον.

Περὶ τῆς ταυτότητος τοῦ ῥηθέντος παράγοντος βεβαιούμεθα καὶ ἀπ' εὐθείας. Τῷ ὄντι, ἔστω μ ὁ ζητούμενος παράγων, ὃν ὑποθέσομεν συνέκθεσιν τῆς x μόνης. Ἐπειδὴ ὁ ὅρος $\mu K\delta x$ εἶναι ὁλοκληρώσιμος, πρόκειται μόνον ὁρίσαι τὸν μ τῇ συνθήκῃ τοῦ ἀποκαθιστᾶναι ὁλοκληρώσιμον τὴν ἔκθεσιν $\quad \mu\delta\psi + \mu\Pi\psi\delta x.$

Ἤτοι, πρέπει νὰ ἔχωμεν

$$\frac{\delta\mu}{\delta x} = \mu\Pi, \quad \text{ἢ} \quad \frac{\delta\mu}{\mu} = \Pi\delta x, \quad \text{ὅθεν} \quad \mu = e^{\int \Pi\delta x}.$$

437. Ἀποδειχθείσης τῆς ὑπάρξεως ἐν γένει τοῦ παράγοντος, ζητήσωμεν εἰ δυνατὴ ἡ ἀνακάλυψις αὐτοῦ ἐν πάσῃ περιπτώσει. Ἔστω ἐν γένει ἡ ἐξίσωσις

$$\Pi\delta x + K\delta\psi = 0,$$

ἐν ᾗ Π καὶ Κ δηλοῦσι συνεκθέσεις οἱασδήποτε τῶν x καὶ ψ. Ἔστω μ ὁ παράγων δι' οὗ ἀποκαθίσταται ἡ τεθεῖσα ἐξίσωσις ὁλοκληρώσιμος. Ἡ συνέκθεσις μ πρέπει νὰ ἐκπληροῖ τὴν σχέσιν [402]

$$\frac{\delta . \mu\Pi}{\delta\psi} = \frac{\delta . \mu K}{\delta x},$$

ἤτοι

$$\text{(a)} \qquad \Pi\frac{\delta\mu}{\delta\psi} - K\frac{\delta\mu}{\delta x} + \mu\left(\frac{\delta\Pi}{\delta\psi} - \frac{\delta K}{\delta x}\right) = 0.$$

Ἐὰν μ περιέχῃ συγχρόνως x καὶ ψ, ἡ ἐξίσωσις αὕτη, ἀφ' ἧς ἐξαρτᾶται ὁ διορισμὸς αὐτοῦ, δυσκολώτερον ὁλοκληροῦται ἢ ἡ προτεθεῖσα. Τούτου ἕνεκα, ἐν γένει, ἀποφεύγομεν τὸν διορισμὸν τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος παράγοντος.

Ὅταν ὁ κοινὸς παράγων μ ἦναι ἄτρεπτος, τότε ἡ ἐξίσωσις αὕτη καθίσταται

$$\frac{\delta\Pi}{\delta\psi} - \frac{\delta K}{\delta x} = 0\cdot$$

ἐπομένως, συνάγομεν καὶ αὖθις τὴν σχέσιν ἥτις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ [402] ὅπως ᾖ διαφορικὸν ἀκριβὲς ἡ προτεθεῖσα ἐξίσωσις.

Ὅταν ὁ παράγων μ δὲν πρέπῃ νὰ περιέχῃ ἢ τὴν ἑτέραν τῶν μεταβλητῶν, π. χ. τὴν x, εὐκόλως τότε ὁρίζεται ἡ τιμὴ αὐτοῦ. Τῷ ὄντι, τότε ὄντος $\frac{\delta\mu}{\delta\psi}=0$, ἡ ἐξίσωσις (a) καθίσταται

$$K\frac{\delta\mu}{\delta x}=\mu\left(\frac{\delta\Pi}{\delta\psi}-\frac{\delta K}{\delta x}\right)=0,\quad \text{ἢ}\quad \frac{1}{\mu}\frac{\delta\mu}{\delta x}=\frac{1}{K}\left(\frac{\delta\Pi}{\delta\psi}-\frac{\delta K}{\delta x}\right).$$

Ἀπαιτεῖται δὲ οἱ δοθέντες συντελεσταὶ Π καὶ Κ νὰ ὦσι τοιοῦτοι, ὥστε ἡ ἔκθεσις $\frac{1}{K}\left(\frac{\delta\Pi}{\delta\psi}-\frac{\delta K}{\delta x}\right)$ νὰ ἦναι ἀνεξάρτητος τῆς ψ. Ἐκπληρουμένου τοῦ τοιούτου ὅρου, ἕξομεν·

$$\lambda\mu=\int\frac{1}{K}\left(\frac{\delta\Pi}{\delta\psi}-\frac{\delta K}{\delta x}\right)\delta x,\quad \text{ἢ}\quad \mu=e^{\int\frac{1}{K}\left(\frac{\delta\Pi}{\delta\psi}-\frac{\delta K}{\delta x}\right)\delta x}.$$

Ὅταν ὁ ζητούμενος παράγων μ ἦναι συνέκθεσις τῆς ψ μόνης, συλλογισμοὶ ὅμοιοι τοῖς προηγουμένοις ἄγουσιν εἰς τὸ ἐξαγόμενον

$$\mu=e^{\int\frac{1}{\Pi}\left(\frac{\delta K}{\delta x}-\frac{\delta\Pi}{\delta\psi}\right)\delta\psi}$$

Ἡ περίπτωσις δὲ αὐτὴ χαρακτηρίζεται ἐκ τοῦ ὅτι ἡ ἔκθεσις $\frac{1}{\Pi}\left(\frac{\delta K}{\delta x}-\frac{\delta\Pi}{\delta\psi}\right)$ εἶναι ὅλως ἀνεξάρτητος τῆς x.

438. Παρατηρητέον, πρὸς τοῖς ἐκτεθεῖσιν, ὅτι ὁσάκις κατορθώσομεν διακρῖναι τὰς μεταβλητὰς ἐν τῇ ἐξισώσει $\Pi\delta x+K\delta\psi=0$, δι' οἱασδήποτε μεταμορφώσεως, γίνεται ἀμέσως γνωστὸς ὁ παράγων ἐφ' ὃν πολυπλασιαζόμενον τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως ταύτης, ἀποκαθίσταται διαφορικὸν ἀκριβές.

Τῷ ὄντι, τεθείσθω ὅτι, ἀντικαταστάσει τῶν x, ψ, δι' ἑτέρων μεταβλητῶν σ, τ, ἡ προτεθεῖσα ἐξίσωσις λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$M\delta\sigma+N\delta\tau=0\cdot$$

Μ καὶ Ν ὄντων συνεκθέσεων τῶν σ καὶ τ. Τεθείσθω προσέτι ὅτι, διαιρέσει ἀμφοτέρων τῶν ὅρων διὰ τῆς συνεκθέσεως Φ

τῶν σ καὶ τ, αἱ μεταβληταὶ διακρίνονται· ὥστε $\frac{M}{\Phi}$ περιέχει σ μόνην, $\frac{N}{\Phi}$ περιέχει τ μόνην. Ἄρα, ἡ ποσότης $\frac{M}{\Phi}\delta\sigma+\frac{N}{\Phi}\delta\tau$ ἔσεται διαφορικὸν ἀκριβές. Θέτοντες ἤδη ἐν τῇ τελευταίᾳ ταύτῃ ἀντὶ σ καὶ τ τὰς εἰς x καὶ ψ τιμὰς αὐτῶν, αὕτη ἔσεται ὅλως ὁμοία τῇ $\frac{\Pi}{\Phi}\delta x+\frac{K}{\Phi}\delta\psi$, (ἐννοητέον ὅτι ἐν τῇ Φ ἔγινεν ὁμοία ἀντικατάστασις τῶν σ καὶ τ). Ἄρα, $\frac{\Pi}{\Phi}\delta x+\frac{K}{\Phi}\delta\psi$ ἔσεται ἀναγκαίως ὁλοκληρώσιμος.

439. Ἐν § 430 ἐλήφθη ὡς ὑπόδειγμα τῆς τῶν μεταβλητῶν διακρίσεως ἡ ἐξίσωσις

$$\Sigma\left(\frac{\psi}{x}\right)\delta x+\delta\psi=0,$$

ἥτις τῇ ὑποθέσει $\psi=x\tau$, ἐξ ἧς $\delta\psi=\tau\delta x+x\delta\tau$, ἀποκαθίσταται

$$[\Sigma(\tau)+\tau]\,\delta x+x\delta\tau=0.$$

Ἐν ταύτῃ δὲ αἱ μεταβληταὶ διακρίνονται τῇ διὰ $x[\Sigma(\tau)+\tau]$ διαιρέσει ἀμφοτέρων τῶν ὅρων. Ἄρα, κατὰ τὰ προεκτεθέντα, ἡ περὶ ἧς λόγος ἐξίσωσις ἀποκαθίσταται ὁλοκληρώσιμος ἐὰν πολυπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν παράγοντα

$$\frac{1}{x[\Sigma(\tau)+\tau]},$$

ἐν ᾧ θετέον ἀντὶ τ τὴν εἰς x καὶ ψ τιμὴν αὐτῆς· ἤτοι ἐπὶ τὸν παράγοντα

$$\frac{1}{x\left[\Sigma\left(\frac{\psi}{x}\right)+\frac{\psi}{x}\right]}.$$

Τῷ ὄντι, ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἀποκαθίσταται τότε

$$\frac{\Sigma\left(\frac{\psi}{x}\right)\delta x + \delta\psi}{x\left[\Sigma\left(\frac{\psi}{x}\right) + \frac{\psi}{x}\right]} = 0,$$

εὐκόλως ἀγομένη ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{\delta x}{x} + \frac{\frac{\delta\psi}{x} - \frac{\psi\delta x}{x^2}}{\Sigma\left(\frac{\psi}{x}\right) + \frac{\psi}{x}} = 0.$$

Αὕτη δὲ ἐστιν ὁλοκληρώσιμος· διότι $\frac{\delta\psi}{x} - \frac{\psi\delta x}{x^2}$, εἶναι τὸ διαφορικὸν τοῦ $\frac{\psi}{x}$.

Θεώρημα τῶν ὁμογενῶν συνεκθέσεων.
Περὶ ὁλοκληρώσεως τῶν ὁμογενῶν συνεκθέσεων.

440. *Θεώρημα τῶν ὁμογενῶν συνεκθέσεων* ὀνομάζονται σχέσεις τινὲς ὑπάρχουσαι μεταξὺ μιᾶς συνεκθέσεως ὁμογενοῦς (*) (ἤτοι συνεκθέσεως συγκροτουμένης ἐξ ὅρων

(*) Συνέκθεσίς τις εἶναι ὁ μ ο γ ε ν ὴ ς, ὅταν πολυπλασιαζομένων τῶν ἐν αὐτῇ περιεχομένων μεταβλητῶν ἐπὶ τὸν αὐτὸν παράγοντα, τὸ ἐξαγόμενον ἰσοῦται τῇ προτέρᾳ τιμῇ τῆς συνεκθέσεως πολυπλασιαζομένης ἐπὶ τὸν αὐτὸν παράγοντα ὑψούμενον εἰς δύναμιν ἴσην τῷ βαθμῷ τῆς ὁμογενείας.

Ἐὰν συνέκθεσίν τινα ὁμογενῆ βαθμοῦ $\mu^{οῦ}$ διαιρέσωμεν διὰ τῆς $\mu^{ῆς}$ δυνάμεως μιᾶς τῶν μεταβλητῶν, ἡ συνέκθεσις δὲν θέλει ἐξαρτᾶσθαι πλέον ἢ ἀπὸ τῶν λόγων τῶν λοιπῶν μεταβλητῶν πρὸς ταύτην. Ἀ ν τ ι σ τ ρ ό φ ω ς· ἐκπληρουμένου τοῦ ὅρου τούτου, ἡ συνέκθεσις εἶναι ὁμογενής.

Αἱ μερικαὶ παραγόμεναι τῆς πρώτης τάξεως πάσης συνεκθέσεως ὁμογενοῦς βαθμοῦ $\mu^{οῦ}$, εἰσὶ συνεκθέσεις ὁμογενεῖς βαθμοῦ $(\mu-1)^{οῦ}$.

Αἱ παρατηρήσεις αὗται εἰσὶ προτάσεις εὐκολώτατα δεικνυόμεναι.

ἰσοβαθμίων πρὸς x καὶ ψ) καὶ τῶν διαφόρων παραγομένων αὐτῆς. Ἔστω Φ συνέκθεσίς τις ὁμογενὴς περιέχουσα πλείονας μεταβλητὰς x, ψ, ... Τιθεμένου τx ἀντὶ x, τψ ἀντὶ ψ, κ.τ.ἑ., ἡ συνέκθεσις αὕτη κατασταθήσεται $\tau^\nu\Phi$, τοῦ ν δηλοῦντος τὸ ἄτρεπτον ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν μεταβλητῶν ἐν ἑκάστῳ ὅρῳ. Ἀλλὰ δυνάμεθα ὑποθέσαι $\tau = 1 + \eta$· ἤτοι θέσαι $x + \eta x$ ἀντὶ x, $\psi + \eta\psi$ ἀντὶ ψ, κ.τ.ἑ. Ἐφαρμόζοντες δὲ τὸ τοῦ Τάϋλορ θεώρημα, ἔχομεν·

$$(1+\eta)^\nu\Phi = \Phi + \eta\left(\frac{\delta\Phi}{\delta x}x + \frac{\delta\Phi}{\delta\psi}\psi + \ldots\ldots\right)$$
$$+ \frac{\eta^2}{2}\left(\frac{\delta^2\Phi}{\delta x^2}x^2 + 2\frac{\delta^2\Phi}{\delta x\delta\psi}x\psi + \frac{\delta^2\Phi}{\delta\psi^2}\psi^2 + \ldots\right)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ἀναπτύσσοντες τὸ πρῶτον μέλος καὶ ἰσοῦντες ἀλλήλοις τοὺς ὅρους τῶν ὁμοίων δυνάμεων τῆς ἀορίστου η, λαμβάνομεν

$$\nu\Phi = \frac{\delta\Phi}{\delta x}x + \frac{\delta\Phi}{\delta\psi}\psi + \ldots\ldots\ldots,$$

$$\nu(\nu-1)\Phi = \frac{\delta^2\Phi}{\delta x^2}x^2 + 2\frac{\delta^2\Phi}{\delta x\delta\psi}x\psi + \frac{\delta^2\Phi}{\delta\psi^2}\psi^2 + \ldots\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

441. Διὰ τῶν σχέσεων τούτων, ὧν ἡ πρώτη ἐστὶν ἡ μᾶλλον οὐσιώδης, εὐκολύνεται ἐνίοτε ἡ ὁλοκλήρωσις συνεκθέσεων πλείονας μεταβλητὰς περιεχουσῶν. Ὅταν συνέκθεσίς τις ἦναι ὁμογενής, μένει τοιαύτη καὶ μετὰ τὴν διαφόρισιν αὐτῆς. Ἐπομένως, ἐὰν ἡ διαφορικὴ συνέκθεσις

$$\Pi\delta x + K\delta\psi + \ldots\ldots\ldots$$

ἦναι ὁμογενὴς ἐκπληροῦσα τὰς συνθήκας τῆς ὁλοκληρωσιμότητος, δηλοῦντες Φ τὸ ὁλοκληρωτικὸν αὐτῆς καὶ ν τὸν τούτου βαθμὸν, ὑπερβαίνοντα ἀείποτε κατὰ μονάδα τὸν κοινὸν βαθμὸν τῶν συνεκθέσεων Π, Κ, κ.τ.ἑ., ἕξομεν ἀμέσως

$$\nu\Phi = \Pi x + K\psi + \ldots\ldots\ldots + \Lambda.$$

Ἔστω, π. χ., $(3x^2 + 2\alpha x\psi)\delta x + (\alpha x^2 + 3\psi^2)\delta\psi = 0.$

Ἡ ὁμογενὴς αὕτη ἐξίσωσις ἐκπληροῖ τοὺς ὅρους τῆς ὁλοκληρωσιμότητος, ὡς εὐκόλως πληροφορούμεθα. Κατὰ τὸν προηγούμενον κανόνα δὲ μορφοῦμεν ἀμέσως τὸ ὁλοκληρωτικὸν αὐτῆς

$$x^3 + \alpha x^2\psi + \psi^3 = A.$$

442. Ἡ μέθοδος αὕτη μιᾶς μόνης ἐξαιρέσεώς ἐστιν ἐπιδεκτική· ὅταν αἱ συνεκθέσεις Π καὶ Κ ὦσι τοῦ βαθμοῦ -1, διότι τότε $\nu = 0$. Τῷ ὄντι, ἐφαρμοζομένη ἐπὶ τὸ διαφορικὸν

$$\frac{x\delta\psi - \psi\delta x}{x^2 + \psi^2},$$

χρήσιμον ἐν τῇ Μηχανικῇ καὶ ὁλοκληρωθὲν ἤδη ἐν § 406, λαμβάνομεν

$$0.\Phi = \frac{-x\psi + x\psi}{x^2 + \psi^2},$$

ἐξαγόμενον ἀκριβὲς μεν, ἀλλ' οὐδόλως ὁδηγὸν πρὸς τὸ ζητούμενον ὁλοκληρωτικόν.

443. Ὅταν ἐν τῇ διαφορικῇ συνεκθέσει $\Pi\delta x + K\delta\psi = 0$ αἱ συνεκθέσεις Π, Κ, τῶν μεταβλητῶν x, ψ, ὦσιν ὁμογενεῖς, εὔκολον διακρῖναι ταύτας, καὶ ἐπομένως ἀποκαταστῆσαι τὴν ἐξίσωσιν ἀμέσως ὁλοκληρώσιμον, ἢ τοὐλάχιστον ἀγαγεῖν αὐτὴν εἰς τοὺς τετραγωνισμούς. Τῷ ὄντι, καθιστῶντες $\psi = x\tau$, αἱ συνεκθέσεις Π, Κ, λαμβάνουσι τὴν μορφὴν πx^ν, κx^ν, τῶν μὲν π, κ, ὄντων συνεκθέσεων τῆς τ μόνης, ν δὲ δηλοῦντος τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν x, ψ, ἐν τοῖς ὅροις τῆς προτεθείσης ἐξισώσεως. Ἄρα, ἡ ἐξίσωσις αὕτη καθίσταται

$$(\pi + \kappa\tau)\delta x + \kappa x\delta\tau = 0, \quad \text{ἢ} \quad \frac{\delta x}{x} + \frac{\kappa\delta\tau}{\pi + \kappa\tau} = 0,$$

ἧς τὸ ὁλοκληρωτικὸν εἶναι

$$\lambda x + \int \delta\tau.\frac{\kappa}{\pi + \kappa\tau} = A.$$

Ἐν τούτῳ δὲ, μετὰ τὴν ὁλοκλήρωσιν, εἰσακτέον ἀντὶ τ τὴν τιμὴν αὐτοῦ $\frac{\psi}{x}$.

444. Ἔστω, π. χ., ἡ ἐξίσωσις

$$(x - 2\psi)\delta x + \psi\delta\psi = 0,$$

Καθιστῶμεν $\psi = x\tau$, καὶ λαμβάνομεν

$$\frac{\delta x}{x} + \frac{\tau\delta\tau}{1 - 2\tau + \tau^2} = 0,$$

ἧς τὸ ὁλοκληρωτικὸν εἶναι

$$\lambda x + \lambda(1 - \tau) + \frac{1}{1 - \tau} = A.$$

Θέτοντες ἤδη ἀντὶ τ τὴν τιμὴν $\frac{\psi}{x}$, ἔχομεν·

$$\lambda(x - \psi) + \frac{x}{x - \psi} = A, \quad \text{ἢ} \quad x - \psi = \alpha e^{-\frac{x}{x - \psi}},$$

α οὔσης ἑτέρας ἀτρέπτου.

445. Προκείσθω προσέτι ἡ ἐξίσωσις

$$(x^2 + x\psi - 2\psi^2)\delta x + (\psi^2 - 3x^2)\delta\psi = 0,$$

ἥτις, τῇ ὑποθέσει $\psi = \tau x$, καθίσταται

$$\frac{\delta x}{x} + \frac{(\tau^2 - 3)\delta\tau}{\tau^3 - 2\tau^2 - 2\tau + 1} = 0,$$

Διὰ τῶν γνωστῶν μεθόδων εὑρίσκομεν

$$\frac{\tau^2 - 3}{\tau^3 - 2\tau^2 - 2\tau + 1} =$$

$$-\frac{2}{5(\tau + 1)} + \frac{7 - \sqrt{5}}{5(2\tau - 3 - \sqrt{5})} + \frac{7 + \sqrt{5}}{5(2\tau - 3 + \sqrt{5})};$$

Ἐπομένως, ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις μεταμορφοῦται εἰς τὴν ἑξῆς·

$$\frac{\delta x}{x}-\frac{2}{5}\frac{\delta\tau}{\tau+1}+\frac{7-\sqrt{5}}{5}\,\frac{\delta\tau}{2\tau-3-\sqrt{5}}+\frac{7+\sqrt{5}}{5}\,\frac{\delta\tau}{2\tau-3+\sqrt{5}}=0,$$

ἧς τὸ ὁλοκληρωτικὸν εἶναι

$$\lambda x-\tfrac{2}{5}\lambda(\tau+1)+\frac{7}{10}\lambda(\tau^2-3\tau+1)+\frac{1}{2\sqrt{5}}\lambda\frac{2\tau-3+\sqrt{5}}{2\tau-3-\sqrt{5}}=\lambda A.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἄγεται τέλος ὑπὸ τὴν ἑξῆς μορφήν·

$$\left(\frac{\psi+x}{x^2}\right)^{\frac{2}{5}}(\psi^2-3\psi x+x^2)^{\frac{7}{10}}\left(\frac{2\psi-3x+x\sqrt{5}}{2\psi-3x-x\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{5}}}=A.$$

446. Διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδου ὁλοκληροῦνται καὶ αἱ ἑξῆς ἐξισώσεις διαφορικαί.

1) $$(\alpha x+\beta\psi)\,\delta\psi+(\zeta x+\eta\psi)\,\delta x=0,$$

ἐξ ἧς λαμβάνομεν, τῇ ὑποθέσει $\dfrac{\psi}{x}=\tau$, τὴν ἑξῆς εὐκόλως ὁλοκληρουμένην

$$\frac{\delta x}{x}+\frac{(\alpha+\beta\tau)\delta\tau}{\beta\tau^2+(\alpha+\eta)\tau+\zeta}=0\cdot$$

2) $$\alpha\psi^{\mu}\delta\psi+(x^{\mu}+\beta\psi^{\mu})\,\delta x=0,$$

ἄγεται εἰς $$\frac{\delta x}{x}+\frac{\alpha\tau^{\mu}\delta\tau}{\alpha\tau^{\mu+1}+\beta\tau^{\mu}+1}=0.$$

3) *Εὑρεῖν καμπύλην ἧς τὸ ἐμβαδὸν* ΠΜΣΡ (Σχ. 72) *ἀπό τινος τεταγμένης* ΜΠ *μονίμου ἀρχόμενον, καὶ καθ' ἕκαστον τῶν τῆς καμπύλης σημείων, ἰσοῦται τῷ κύβῳ τῆς τεταγμένης* ΣΡ *ὑφ' ἧς περατοῦται, διαιρουμένῳ τῇ τετμημένῃ* ΑΡ.

Ἐκ τῆς ἐκθέσεως $$\int\psi\delta x=\frac{\psi^3}{x},$$

λαμβάνομεν διαφορίζοντες

$$(x^2\psi+\psi^3)\,\delta x=3x\psi^2\delta\psi.$$

Καθιστῶντες δὲ $\psi=\tau x$, εὑρίσκομεν

$$\frac{\delta x}{x}=\frac{3\tau\delta\tau}{1-2\tau^2},$$

ὅθεν συνάγομεν

$$x^4(1-2\tau^2)^3=A,\quad \text{καὶ τέλος}\quad (x^2-2\psi^2)^3=Ax^2.$$

4) $$x\delta\psi-\psi\delta x=\delta x\sqrt{x^2+\psi^2}.$$

Αὕτη δίδει $$\frac{\delta x}{x}=\frac{\delta\tau}{\sqrt{1+\tau^2}},$$

ὅθεν συνάγομεν διαδοχικῶς, δηλοῦντες A ἄτρεπτόν τινα κατὰ βούλησιν·

$$\lambda\frac{x}{A}=\lambda(\tau+\sqrt{1+\tau^2}),\quad x=A\left(\frac{\psi}{x}+\sqrt{1+\frac{\psi^2}{x^2}}\right),$$

$$x^2=A(\psi+\sqrt{x^2+\psi^2}),\qquad (x^2-A\psi)^2=A^2(x^2+\psi^2)\cdot$$

καὶ τέλος, $$x^2=2A\psi+A^2.$$

447. Ἐπειδή, μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν τῆς $\psi=x\tau$ ἐν τῇ ἐξισώσει

$$\Pi\delta x+K\delta\psi=0,$$

ὑποτιθεμένῃ ὁμογενῆ (ν δηλοῦντος τὸν κοινὸν βαθμὸν τῶν συνεκθέσεων Π, Κ), λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(\pi x^{\nu}+\varkappa x^{\nu}\tau)\delta x+\varkappa x^{\nu+1}\delta\tau=0,$$

ἐν ᾗ αἱ μεταβληταὶ διακρίνονται διαιρέσει διὰ $x(\pi x^{\nu}+\varkappa x^{\nu}\tau)$, ἐξ ὅσων εἴδομεν ἐν § 438, εἰκαστέον ὅτι ὁ παράγων ἐφ' ὃν πολυπλασιαζομένη ἡ προηγουμένη ἐξίσωσις ἀποκαθίσταται ὁλοκληρώσιμος εἶναι

$$\frac{1}{x(\pi x^{\nu}+\varkappa x^{\nu}\tau)},\qquad \text{ἤτοι}\qquad \frac{1}{\Pi x+K\psi},$$

τιθεμένης ἀντὶ τ τῆς τιμῆς αὐτοῦ. Οὕτως, ἡ συνέκθεσις

$$\frac{\Pi\delta x+K\delta\psi}{\Pi x+K\psi}$$

ἔσεται ἀναγκαίως διαφορικὸν ἀκριβές.

Τοῦτο γνωρίζομεν καὶ ἀπ' εὐθείας. Τῷ ὄντι, ἔστω μ παράγων τις ἐφ' ὃν δεῖ πολυπλασιάσαι τὴν ποσότητα $\Pi\delta x+K\delta\psi$ ὅπως αὕτη ἀποκατασταθῇ ὁλοκληρώσιμος· τὸν παράγοντα δὲ τοῦτον ὑποθέσομεν συνέκθεσίν τινα ὁμογενῆ τῶν x καὶ ψ. Γράφομεν

$$\mu\Pi\delta x+\mu K\delta\psi=\delta\Phi,$$

Φ οὔσης συνεκθέσεως τῶν x καὶ ψ. Κατὰ § 441 ἕπεται ὅτι

$$\mu\Pi x+\mu K\psi=\varkappa\Phi,$$

κ δηλοῦντος τὸν κοινὸν βαθμὸν τῶν συνεκθέσεων μΠ καὶ μΚ ηὐξημένον μονάδι. Διαιροῦντες ἀλλήλαις τὰς δύο ταύτας ἐξισώσεις, λαμβάνομεν

$$\frac{\Pi\delta x+K\delta\psi}{\Pi x+K\psi}=\frac{\delta\Phi}{\varkappa\Phi}.$$

Ἀλλὰ, $\frac{\delta\Phi}{\varkappa\Phi}$ εἶναι διαφορικὸν ἀκριβές. Τοιοῦτον ἄρα εἶναι καὶ τὸ πρῶτον μέλος.

448. Ἡ ἐν § 444 τεθεῖσα ἐξίσωσις

$$(x-2\psi)\delta x+\psi\delta\psi=0,$$

ἀποκατασταθήσεται ὁλοκληρώσιμος, κατὰ τὰ προηγούμενα, ἐὰν πολυπλασιασθῇ ἐπὶ

$$\frac{1}{(x-2\psi)x+\psi^2}, \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{(x-\psi)^2}.$$

Τῷ ὄντι, ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{(x-2\psi)\delta x+\psi\delta\psi}{(x-\psi)^2}=0,$

γράφεται καὶ οὕτω

$$\frac{\delta x-\delta\psi}{x-\psi}+\frac{\delta x}{x-\psi}-\frac{x(\delta x-\delta\psi)}{(x-\psi)^2}=0,$$

ὡς βεβαιούμεθα ἄγοντες ἅπαντας τοὺς ὅρους ἐπὶ τὸν αὐτὸν παρονομαστήν· ἢ ἀκόμη

$$\delta.\lambda(x-\psi)+\delta\left(\frac{x}{x-\psi}\right)=0\cdot$$

ὅθεν συνάγομεν ἀμέσως τὸ ἐν τῷ εἰρημένῳ χωρίῳ εὑρεθὲν ὁλοκληρωτικόν.

449. Ἐνίοτε δι' ἁπλῆς μεταμορφώσεως ἀποκαθίσταται ὁμογενὴς ἐξίσωσις μὴ οὖσα τοιαύτη. Π. χ., προκείσθω

$$(\alpha x+\beta\psi+\mu)\delta x=(\pi x+\varkappa\psi+\nu)\delta\psi.$$

Ὅπως ἀφανισθῶσιν οἱ μὴ περιεκτικοὶ x καὶ ψ ὅροι, καθιστῶμεν

$$x=x'+\sigma,\quad \psi=\psi'+\rho,\quad \text{ὅθεν}\quad \delta x=\delta x',\quad \delta\psi=\delta\psi';$$

διορίσομεν δὲ σ καὶ ρ ἐκ τῶν συνθηκῶν

$$\alpha\sigma+\beta\rho+\mu=0,\qquad \pi\sigma+\varkappa\rho+\nu=0,$$

διδουσῶν

$$\sigma=\frac{\nu\beta-\mu\varkappa}{\alpha\varkappa-\beta\pi},\qquad \rho=\frac{\mu\pi-\nu\alpha}{\alpha\varkappa-\beta\pi}.$$

Ὑποθέσωμεν ἐπὶ τοῦ παρόντος, ὅτι ὁ παρονομαστὴς $\alpha\varkappa-\beta\pi$ διαφέρει μηδενός. Ἡ προτεθεῖσα ἐξίσωσις μεταμορφοῦται εἰς τὴν ἑξῆς

$$(\alpha x'+\beta\psi')\delta x'=(\pi x'+\varkappa\psi')\delta\psi',$$

οὖσαν ὁμογενῆ, καὶ ὁλοκληρουμένην ὡς προηγουμένως· εἶτα ἀντεισακτέον x′ καὶ ψ′ διὰ $x-\sigma$ καὶ $\psi-\rho$.

Ὁ μετασχηματισμὸς οὗτος ἔσεται ἀδύνατος ἐὰν $\alpha\varkappa-\beta\pi=0$. Ἐν τῇ δε τῇ περιπτώσει ἡ προτεθεῖσα ἐξίσωσις, ἀντεισαγωγῇ τοῦ κ διὰ τῆς τιμῆς αὐτοῦ $\frac{\beta\pi}{\alpha}$, καθίσταται

$$(\alpha x+\beta\psi)(\alpha\delta x-\pi\delta\psi)=\alpha(\nu\delta\psi-\mu\delta x).$$

Τότε θετέον

$$\alpha x+\beta\psi=\tau,\qquad \text{ὅθεν}\qquad \delta\psi=\frac{\delta\tau-\alpha\delta x}{\beta};$$

Ἡ τῆς ψ ἀπαλοιφὴ δίδει

$$\alpha\delta x=\frac{(\alpha\nu+\pi\tau)\delta\tau}{\alpha\nu+\mu\beta+(\beta+\pi)\tau}.$$

Τῶν μεταβλητῶν οὐσῶν διακεκριμένων, τὸ πρόβλημα ἤχθη εἰς τὸ τῶν τετραγωνισμῶν. Τὸ ὁλοκληρωτικὸν τῆς ἐξισώσεως ταύτης περιέχει λογαρίθμους, πλὴν ἐν ᾗ περιπτώσει $\beta+\pi=0$, ὅτε εἶναι

$$\alpha x = \frac{2\alpha\nu\tau + \pi\tau^2}{2(\alpha\nu+\mu\beta)} + A.$$

Ἐν τῇ γενικῇ περιπτώσει, δυνατὸν προσέτι ἀποκαταστῆσαι τὴν ἐξίσωσιν ὁμογενῆ, ταῖς ὑποθέσεσι

$$\alpha x + \beta\psi + \mu = \upsilon, \qquad \pi x + \varkappa\psi + \nu = \omega,$$

ὅθεν ἐξάγομεν

$$\delta x = \frac{\varkappa\delta\upsilon - \beta\delta\omega}{\alpha\varkappa - \beta\pi}, \qquad \delta\psi = \frac{\alpha\delta\omega - \pi\delta\upsilon}{\alpha\varkappa - \beta\pi},$$

ἡ δὲ προτεθεῖσα ἐξίσωσις μεταμορφωθήσεται εἰς τὴν ἑξῆς, ὁμογενῆ οὖσαν,

$$(\pi\omega + \varkappa\upsilon)\delta\upsilon = (\alpha\omega + \beta\upsilon)\delta\omega.$$

450. Χάριν ἐφαρμογῆς γεωμετρικῆς, προκείσθω τὸ ἑξῆς ζήτημα, ὀνομαζόμενον *πρόβλημα τῶν τροχιῶν*, περὶ ὃ οὐκ ὀλίγον ἐνησχολήθησαν οἱ Γεωμετροῦντες.

Εὑρεῖν καμπύλην τέμνουσαν ὑπὸ γωνίαν δοθεῖσαν ἁπάσας τὰς περιλαμβανομένας καμπύλας ἐν ἐξισώσει δοθείσῃ

$$(1) \qquad \Sigma(x, \psi, \alpha) = 0,$$

ἐν ᾗ ἡ παράμετρος α λαμβάνει πᾶσαν τιμήν.

Καλοῦμεν, μ τὴν ἐφαπτομένην τῆς δοθείσης γωνίας· x', ψ', τὰς συντεταγμένας σημείου τοῦ τυχόντος τοῦ ζητουμένου τόπου· καὶ γ τὴν γωνίαν ἣν μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν x σχηματίζει ἡ ἐφαπτομένη τῆς δοθείσης καμπύλης. Ἔχομεν

$$(2) \qquad \mu = \frac{\dfrac{\delta\psi'}{\delta x'} - \text{ἐφ}\,\gamma}{1 + \dfrac{\delta\psi'}{\delta x'}\,\text{ἐφ}\,\gamma}.$$

Ἀλλ' ἡ ἐξίσωσις (1) δίδει

$$\text{ἐφ}\,\gamma = -\frac{\dfrac{\delta\Sigma}{\delta x'}}{\dfrac{\delta\Sigma}{\delta\psi'}},$$

ἄρα, ἡ ἐξίσωσις (2) καθίσταται

$$(3) \qquad \mu\left(\frac{\delta\Sigma}{\delta\psi'} - \frac{\delta\Sigma}{\delta x'}\frac{\delta\psi'}{\delta x'}\right) - \frac{\delta\Sigma}{\delta\psi'}\frac{\delta\psi'}{\delta x'} - \frac{\delta\Sigma}{\delta x'} = 0.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἔχομεν συγχρόνως

$$\Sigma(x', \psi', \alpha) = 0,$$

ἐὰν ἀπαλείψωμεν α ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης καὶ τῆς (3), ἕξομεν μίαν ἐξίσωσιν μεταξὺ τῶν συντεταγμένων ἑνὸς σημείου οἱουδήποτε τοῦ τόπου.

451. Ἐξεταστέον τὴν μερικὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$(4) \qquad \psi^\nu = \alpha x^\pi.$$

Ἔχομεν

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta x} = -\alpha\pi x^{\pi-1}, \qquad \frac{\delta\Sigma}{\delta\psi} = \nu\psi^{\nu-1}.$$

ἡ δ' ἐξίσωσις (3) καθίσταται

$$\mu\left(\nu\psi^{\nu-1} + \alpha\pi x^{\pi-1}\frac{\delta\psi}{\delta x}\right) - \nu\psi^{\nu-1}\frac{\delta\psi}{\delta x} + \alpha\pi x^{\pi-1} = 0.$$

Ἡ ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης καὶ τῆς πρώτης ἀπαλοιφὴ τῆς α, ἄγει εἰς

$$(5) \qquad \mu\left(\nu x + \pi\psi\frac{\delta\psi}{\delta x}\right) - \nu x\frac{\delta\psi}{\delta x} + \pi\psi = 0,$$

ἐξίσωσιν ὁμογενῆ ὁλοκληρουμένην εὐκόλως.

1ον. Ὑποθέσωμεν, π. χ., $\nu = \pi = 1$. Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις (4) καθίσταται

$$\psi = \alpha x\cdot$$

ἐμφαίνει δὲ ἁπάσας τὰς διὰ τῆς ἀρχῆς διερχομένας εὐθείας.
Ἡ ἐξίσωσις (5) ἄγεται εἰς

$$\mu(x\delta x + \psi\delta\psi) - x\delta\psi + \psi\delta x = 0.$$

Ταύτης δὲ τὸ πρῶτον μέλος ἀποκαθίσταται ὁλοκληρώσιμον διὰ $x^2 + \psi^2$ διαιρούμενον. Λοιπόν, ὁλοκληροῦντες λαμβάνομεν·

$$\mu\lambda\,(x^2 + \psi^2)^{\frac{1}{2}} - \text{τόξ ἐφ}\,\frac{\psi}{x} = A.$$

[Διότι

$$\int\frac{x\delta x+\psi\delta\psi}{x^2+\psi^2}=\lambda\sqrt{x^2+\psi^2},\qquad \int\frac{x\delta\psi-\psi\delta x}{x^2+\psi^2}=\text{τόξέφ}\frac{\psi}{x}\Bigg].$$

Ἐὰν μεταβῶμεν εἰς συντεταγμένας πολικάς, θέτοντες

$$x = \rho\ \text{συν}\ \omega, \qquad \psi = \rho\ \text{ἡμ}\ \omega,$$

εὑρήσομεν

$$\mu\lambda\rho = \omega + A, \qquad \text{ὅθεν} \qquad \rho = e^{\frac{\omega + A}{\mu}}.$$

Ἤ, καθιστῶντες $\qquad e^{\frac{A}{\mu}} = A',$

$$\rho = A' e^{\frac{\omega}{\mu}}.$$

Οὕτω, λαμβάνομεν ἀπειρίαν σπειρῶν λογαριθμικῶν ὁμοίων, ἐχουσῶν τὸ αὐτὸ σημεῖον ἀσύμπτωτον. Τῷ ὄντι, αἱ σπεῖραι αὗται κέκτηνται τοῦ ἰδιώματος τοῦ τέμνειν τὴν ἐπιβατικὴν ἀκτῖνα ὑπὸ γωνίαν μόνιμον [233], ἐν δὲ τῇ περιπτώσει περὶ ἧς λόγος, αἱ τεμνόμεναι καμπύλαι εἰσὶν ἀκριβῶς αἱ διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων ἀγόμεναι εὐθεῖαι.

2ον. Ὑποθέσωμεν ἤδη $\mu = \infty$, ὅπερ δίδει τὰς τροχιὰς *ὀρθογωνίους* καλουμένας. Ἡ ἐξίσωσις (5) ἄγεται εἰς ταύτην

$$\nu x + \pi\psi\,\frac{\delta\psi}{\delta x} = 0,$$

ἐξ ἧς συνάγομεν

$$\nu x^2 + \pi\psi^2 = A,$$

Καθ' ὅσον ν καὶ π ἔχουσι σημεῖα τὰ αὐτὰ ἢ ἐναντία, ἡ ἐξίσωσις αὕτη δίδει ἀπειρίαν ἐλλείψεων ἢ ὑπερβολῶν ὁμοίων, αἵτινες ἔσονται αἱ μόναι καμπύλαι ἐν αἷς ὑπάρχει ἡ ἰδιότης τοῦ τέμνειν πρὸς ὀρθὰς ἁπάσας τὰς ὑπερβολὰς ἢ τὰς παραβολὰς περιεχομένας ἐν τῇ ἐξισώσει

$$\psi^\nu = \alpha x^\pi.$$

Ἐὰν προσέτι $\nu = \pi = 1$, ἡ τῆς τροχιᾶς ἐξίσωσις ἔσεται

$$x^2 + \psi^2 = A,$$

ἐμφαίνουσα κύκλον οἱονδήποτε οὗτινος τὸ κέντρον εἶναι τὸ σημεῖον συνδρομῆς τῶν ὑπὸ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως $\psi = \alpha x$ δηλουμένων εὐθειῶν.

Ἐὰν $\nu = -\pi = 1$, αἱ δοθεῖσαι καμπύλαι ἔχουσιν ἐξίσωσιν τὴν $\psi = \dfrac{\alpha}{x}$· εἰσὶ δὲ ἅπασαι αἱ ἰσοσκελεῖς ὑπερβολαὶ ἔχουσαι ἀσυμπτώτους τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων.

Ἡ τῶν τροχιῶν γενικὴ ἐξίσωσις εἶναι τότε

$$x^2 - \psi^2 = A\cdot$$

ἐμφαίνει δὲ ἁπάσας τὰς ἰσοσκελεῖς ὑπερβολὰς ὧν ἀσύμπτωτοι εἰσὶν αἱ διχοτομοῦσαι εὐθεῖαι τὰς γωνίας τῶν ἀσυμπτώτων τῶν πρώτων ὑπερβολῶν.

ΙΣΤ΄. ΠΕΡΙ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΤΗΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ, ΕΝ ΑΙΣ Ο ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΥΠΑΡΧΕΙ ΕΙΣ ΒΑΘΜΟΝ ΑΝΩΤΕΡΟΝ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ.

452. Ὅταν ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις περιέχῃ τὸν πρωτοταγῆ διαφορικὸν συντελεστὴν εἰς δυνάμεις ἀνωτέρας τῆς πρώτης, δύναται δὲ ἐπιλυθῆναι ἀλγεβρικῶς κατὰ τὴν ποσότητα ταύτην θεωρουμένην ὡς ἄγνωστον, λαμβάνομεν, ἰσοῦντες τῷ μηδενὶ τοὺς ἀντιστοιχοῦντας παράγοντας ἑκάστῃ ῥίζῃ, πλείονας ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $\Pi\delta x + K\delta\psi$, ἐν αἷς $\dfrac{\delta\psi}{\delta x}$ ἔσεται τοῦ πρώτου βαθμοῦ μόνον καὶ ἃς ὁλοκληροῦμεν κατὰ τὸ δυνατόν.

Ἔστωσαν $\varphi(x, \psi, \alpha) = 0$, $\varphi_1(x, \psi, \alpha') = 0$, κ.τ.ξ., τὰ διάφορα ταῦτα ὁλοκληρωτικά, ἐν οἷς $\alpha, \alpha' \ldots$, δηλοῦσιν ἀτρέπτους κατὰ βούλησιν. Τὸ γινόμενον τῶν διαφόρων τούτων ὁλοκληρωτικῶν

$$\varphi(x, \psi, \alpha).\varphi_1(x, \psi, \alpha') \ldots\ldots\ldots = 0,$$

ἔσεται τὸ γενικὸν ὁλοκληρωτικὸν τῆς προτεθείσης ἐξισώσεως.

Παρατηρητέον, ὅτι ἡ γενικότης τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ τούτου οὐδόλως προσβάλλεται παραδεχόμενοι τὴν ἄτρεπτον α ὡς οὖσαν τὴν αὐτὴν ἐν τοῖς διαφόροις τούτοις παράγουσι· διότι, ἐπειδὴ ἰδίᾳ ἕκαστος ἰσωθήσεται τῷ μηδενί, οὐδόλως ἀλλοιοῦνται αἱ λύσεις τῆς προτεθείσης ἐὰν αἱ ἄτρεπτοι δηλωθῶσι τῷ αὐτῷ γράμματι.

Ἔστω π. χ., ὡς ἐν § 421,

$$\left(\frac{\delta\psi}{\delta x}\right)^2 - \alpha^2 = 0, \qquad \text{ὅθεν} \qquad \frac{\delta\psi}{\delta x} = \pm\alpha.$$

Ἔχομεν τὰ δύο ὁλοκληρωτικά,

$$\psi = \alpha x + \beta, \qquad \psi = -\alpha x + \beta',$$

τὸ δὲ ὁλοκληρωτικὸν πλῆρες ἔσεται

$$(\psi - \alpha x - \beta)(\psi + \alpha x - \beta') = 0,$$

ἢ, ὅπερ ἁπλούστερον, οὐχὶ δὲ ἧττον γενικόν,

$$(\psi - \alpha x - \beta)(\psi + \alpha x - \beta) = 0, \quad \text{ἢ} \quad (\psi - \beta)^2 - \alpha^2 x^2 = 0.$$

Τεθείσθω γενικώτερον, $\Sigma\left(\frac{\delta\psi}{\delta x}\right) = 0.$

Ἔστω α ῥίζα τις οἱαδήποτε τῆς ἐξισώσεως $\Sigma(z) = 0$. Ἡ προτεθεῖσα ἐτυμοποιεῖται καθισταμένου

$$\frac{\delta\psi}{\delta x} = \alpha, \quad \text{ἢ} \quad \psi = \alpha x + A, \quad \text{ἢ} \quad \frac{\psi - A}{x} = \alpha.$$

Ἄρα ἔχομεν, δι' ἓν ὁλοκληρωτικὸν οἱονδήποτε,

$$\Sigma\left(\frac{\psi - A}{x}\right) = 0\cdot$$

ἑπομένως, ἡ τελευταία ἐξίσωσις αὕτη εἶναι τὸ ὁλοκληρωτικὸν πλῆρες τῆς προτεθείσης.

453. Ὅταν ἡ τῆς προτεθείσης ἐξισώσεως ἀλγεβρικὴ ἐπίλυσις κατὰ $\frac{\delta\psi}{\delta x}$ ἦναι ἀδύνατος, ἑπόμενον ὅτι ἡ δοθεῖσα μέθοδος ἔσεται ἀνεφάρμοστος. Τότε, εἰ ἐπιλύεται κατὰ ψ ἢ κατὰ x, ἕξομεν πρὸς ἔρευναν ἐξίσωσιν ἔχουσαν τὴν ἑτέραν τῶν ἑξῆς γενικῶν μορφῶν

$$\psi = \Sigma(x, \psi'), \qquad x = \Sigma(\psi, \psi'),$$

ἐν αἷς, πρὸς συντομίαν, δηλοῦμεν τῷ ψ' τὸν διαφορικὸν λόγον $\frac{\delta\psi}{\delta x}$. Ἐν ἀμφοτέραις ταῖς περιπτώσεσιν, ἡ διαφόρισις ἄγει εἰς μίαν ἐξίσωσιν τῆς πρώτης τάξεως περιεκτικὴν δύο μεταβλητῶν ψ' καὶ x, ἢ ψ' καὶ ψ. Εἰ δυνατὸν εὑρεῖν τὸ ὁλοκληρωτικὸν ταύτης, ἀπαλείφομεν ἔπειτα ψ' μεταξὺ αὐτοῦ καὶ τῆς προτεθείσης, καὶ ἔχομεν οὕτω τὸ ζητούμενον γενικὸν ὁλοκληρωτικόν. Ἡ μέθοδος αὕτη ἄγει εἰς ἁπλοῦν τετραγωνισμὸν ὅταν τὸ δεύτερον μέλος δὲν περιέχῃ ἢ τὴν μεταβλητὴν ψ'.

454. Ἡ μέθοδος αὕτη ἐφαρμόζεται ἐπὶ τὴν ἐξίσωσιν

$$\psi = x\Sigma(\psi') + \sigma(\psi'), \quad \text{ἢ ἁπλούστερον} \quad \psi = Mx + N,$$

τῶν M, N, δηλούντων συνεκθέσεις οἱασδήποτε τοῦ $\frac{\delta\psi}{\delta x}$ ἢ ψ'. Τῷ ὄντι, ἡ ἐξίσωσις αὕτη δίδει,

$$\delta\psi = M\delta x + x\frac{\delta M}{\delta\psi'}\delta\psi' + \frac{\delta N}{\delta\psi'}\delta\psi',$$

ἢ, ἐπειδὴ $\delta\psi = \psi'\delta x$,

$$(M - \psi')\,\delta x + x\frac{\delta M}{\delta\psi'}\delta\psi' + \frac{\delta N}{\delta\psi'}\delta\psi' = 0,$$

ἐμπεριλαμβάνεται δὲ ἐν τῇ μορφῇ τῆς ἐν §§ 427, 436, θεωρηθείσης ἐξισώσεως. Ἄρα, τὸ πρῶτον μέλος ἀποκατασταθήσεται ὁλοκληρώσιμον πολυπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν παράγοντα

$e^{\int\frac{\delta M}{M-\psi'}}$, τὸ δὲ ὁλοκληρωτικὸν αὐτοῦ ἔσεται·

$$x + e^{-\int\frac{\delta M}{M-\psi'}}\left(\int\frac{\delta N}{M-\psi'}\cdot e^{\int\frac{\delta M}{M-\psi'}} + A\right) = 0,$$

A οὔσης τῆς κατὰ βούλησιν ἀτρέπτου. Ὑπολείπεται ἤδη ἀπαλεῖψαι ψ′ μεταξὺ τῆς ἐξισώσεως ταύτης καὶ τῆς προτεθείσης.

455. Ἐν περιπτώσει καθ' ἣν $\Sigma(\psi') = \psi'$, ἔχομεν

$$\psi = \psi' x + \sigma(\psi').$$

Διαφορίζοντες λαμβάνομεν

$$0 = [x + \sigma'(\psi')]\delta\psi',$$

ἐξίσωσιν διττῶς ἐτυμοποιουμένην· θέτοντες

$$x + \sigma'(\psi') = 0, \qquad \text{ἢ} \qquad \delta\psi' = 0.$$

Ἡ ἐξίσωσις $\delta\psi' = 0$ ὁλοκληρουμένη δίδει $\psi' = A$. Ἡ τιμὴ αὕτη τιθεμένη ἐν τῇ προτεθείσῃ ἀντὶ ψ′, δίδει τὸ ζητούμενον γενικὸν ὁλοκληρωτικὸν

$$\psi = Ax + \sigma(A).$$

Τὸ ὁλοκληρωτικὸν τοῦτο εἶναι ἡ ἐξίσωσις γραμμῆς εὐθείας, ἧς τὴν κλίσιν ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν x ὁρίζει ἡ τῇ κατὰ βούλησιν ἀτρέπτῳ A διδομένη τιμή.

Λαμβάνοντες τὴν ἐξίσωσιν $x + \sigma'(\psi') = 0$ καὶ ἀπαλείφοντες ψ′ μεταξὺ αὐτῆς καὶ τῆς προτεθείσης, μορφοῦμεν μὲν μίαν ἀρχικὴν ἐξίσωσιν, ἀλλ' ἡ ἐξίσωσις αὕτη, μὴ περιέχουσα ἄτρεπτον κατ' ἀρέσκειαν, ἔσεται μία λύσις μερική, ἢ ὁλοκληρωτικὸν μερικόν, κατὰ τὰ ἐν § 418 ῥηθέντα. Τῷ ὄντι, ἡ τιμὴ τοῦ ψ′ ἐξαγαγμένη ἐκ τῆς τελευταίας ἐξισώσεως ἔσεται

συνέχθεσίς τις τῆς x, ἡ ἀπαλοιφὴ δὲ ὁδηγήσει εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον ὡς ἀντεισαγομένης τῆς συνεχθέσεως ταύτης τῆς x ἀντὶ A ἐν τῷ γενικῷ ὁλοκληρωτικῷ· ἄρα, ἡ λύσις ἣν λαμβάνομεν δὲν προκύπτει ἐκ τιμῆς τινος μερικῆς διδομένης τῇ ἀτρέπτῳ.

Βλέπομεν ἄλλως ὅτι, ἀπαλεῖψαι ψ′ μεταξὺ

$$x + \sigma'(\psi') = 0, \qquad \text{καὶ} \qquad \psi = \psi' x + \sigma(\psi'),$$

εἶναι τὸ αὐτὸ ἀπαλεῖψαι A μεταξὺ

$$x + \sigma'(A) = 0, \qquad \text{καὶ} \qquad \psi = Ax + \sigma'(A).$$

Ἐπειδὴ δὲ $x + \sigma'(A)$ εἶναι ἡ παραγομένη τῆς $Ax + \sigma(A)$, πρὸς A, καταντήσομεν εἰς τὴν μερικὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως ἧς $\psi = Ax + \sigma(A)$ εἶναι τὸ γενικὸν ὁλοκληρωτικόν.

456. Ἐφαρμόσωμεν ἤδη τὴν προεκτεθεῖσαν μέθοδον ἐπὶ τὴν ἐπίλυσίν τινων προτάσεων γεωμετρικῶν.

457. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Καμπύλην εὑρεῖν ἐν ᾗ τὸ γινόμενον τῶν ἀγομένων καθέτων ἀπὸ δύο σημείων μονίμων ἐπὶ τὴν τυχοῦσαν αὐτῆς ἐφαπτομένην εἴη ἀμετάβλητον.*

Καλοῦμεν 2γ τὸ ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστημα τῶν δύο τούτων σημείων, καὶ β^2 τὸ γινόμενον τῶν καθέτων. Λαμβάνομεν ὡς ἀρχὴν μὲν τὸ μέσον τοῦ ἀπ' ἀλλήλων ἀποστήματος τῶν δύο δοθέντων σημείων, ὡς ἄξονα δὲ τῶν x τὴν ζευγνύουσαν ταῦτα εὐθεῖαν. Ἡ ἔννοια τοῦ προβλήματος ἄγει ἀμέσως εἰς τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{(\psi - \psi' x)^2 - \gamma^2\psi'^2}{1 + \psi'^2} = \pm\ \beta^2.$$

Τὸ μὲν ἀνώτερον σημεῖον συστοιχεῖ τῇ περιπτώσει καθ' ἣν τὰ δύο σημεῖα εἰσὶν ἐκ τοῦ αὐτοῦ μέρους τῆς ἐφαπτομένης, τὸ δὲ κατώτερον τῇ περιπτώσει καθ' ἣν κεῖνται ἐκ μερῶν διαφόρων.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης συνάγομεν

$$(1) \qquad \psi = \psi' x + \sqrt{(\gamma^2 \pm \beta^2)\psi'^2 \pm \beta^2}.$$

Φανερὸν ὅτι τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εἶναι μερικὴ περίπτωσις τῆς ἐξισώσεως [455],

$$\psi = \psi' x + \sigma(\psi').$$

Κατὰ τὴν γενικὴν μέθοδον λαμβάνομεν

$$(2) \qquad \delta\psi'\left[x + \frac{\psi'(\gamma^2 \pm \beta^2)}{\sqrt{(\gamma^2 \pm \beta^2)\psi'^2 \pm \beta^2}}\right] = 0.$$

Καθιστῶμεν $\delta\psi' = 0$, ὅθεν $\psi' = A$· εἶτα ἀπαλοίφομεν ψ' μεταξὺ τῆς τελευταίας ἐξισώσεως ταύτης καὶ τῆς (1), καὶ οὕτω μορφοῦμεν τὸ γενικὸν ὁλοκληρωτικὸν

$$\psi = Ax + \sqrt{(\gamma^2 \pm \beta^2)A^2 \pm \beta^2},$$

ἐμφαῖνον ἀπειρίαν εὐθειῶν ἐφαπτομένων τῆς καμπύλης ἐχούσης ἐξίσωσιν τὴν

$$(3) \qquad (\gamma^2 \pm \beta^2)\psi^2 \pm \beta^2 x^2 = \pm(\gamma^2 \pm \beta^2)\beta^2.$$

Ἐὰν λάβωμεν τ' ἀνώτερα σημεῖα, ἡ καμπύλη αὕτη ἔσεται ἔλλειψις ἧς αἱ μὲν ἑστίαι εἰσὶ τὰ δύο δοθέντα σημεῖα, ὁ δ' ἐλάσσων ἄξων ἴσος 2β. Ἐὰν λάβωμεν τὰ κατώτερα σημεῖα, τῶν δύο δοθέντων σημείων ὄντων ἐκ διαφόρων μερῶν τῆς ἐφαπτομένης, αἱ κάθετοι εἰσὶν ἀμοιβαίως ἐλάσσονες τῶν τμημάτων τῆς ἴσης 2γ εὐθείας, ὅθεν προκύπτει $\gamma > \beta$. Ἄρα, ἡ καμπύλη εἶναι τότε ὑπερβολὴ ἔχουσα ἑστίας τὰ δύο δοθέντα σημεῖα καὶ ἄξονα φανταστικὸν 2β.

Ὁ δεύτερος παράγων τῆς ἐξισώσεως (2) δίδει ἐπίσης τὴν μερικὴν λύσιν, ὡς ἀπεδείχθη τοῦτο γενικῶς. Ἰσοῦντες αὐτὸν τῷ μηδενί, ἔχομεν

$$(4) \qquad x + \frac{\psi'(\gamma^2 \pm \beta^2)}{\sqrt{(\gamma^2 \pm \beta^2)\psi'^2 \pm \beta^2}} = 0.$$

Ἡ τοῦ ψ' ἀπαλοιφὴ ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (4), δίδει καὶ αὖθις τὴν ἐξίσωσιν (3), ὡς ἦτον ἑπόμενον.

Ἐν τῷ δὲ τῷ προβλήματι, ἡ καμπύλη ἣν ἐπρόκειτο ὁρίσαι, ἐδόθη, οὐχὶ ὑπὸ τοῦ γενικοῦ ὁλοκληρωτικοῦ, ἀλλ' ὑπὸ τῆς

μερικῆς λύσεως· ἐξ οὗ δείκνυται, ὅτι τῆς τελευταίας ταύτης ἡ ἔρευνα ἐστὶν οὐχ ἧττον οὐσιώδης τῆς πρώτης.

458. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Δίδονται δύο παράλληλοι, ἐφ' ἑκατέρας δ' αὐτῶν σημεῖον μόνιμον· ζητεῖται ἡ ἐξίσωσις καμπύλης τοιαύτης, ὥστε ἀγομένης αὐτῇ ἐφαπτομένης οἱασδήποτε, τὰ ὁριζόμενα τμήματα ἐφ' ἑκάστης παραλλήλου μεταξὺ τοῦ μονίμου σημείου καὶ τοῦ σημείου συνδρομῆς αὐτῆς μετὰ τῆς ἐφαπτομένης νὰ δίδωσι γινόμενον ἄτρεπτον,* β^2.

Ἔστω 2α τὸ ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστημα τῶν δύο μονίμων σημείων, ἐν τῷ μέσῳ τοῦ ὁποίου λαμβάνομεν τὴν ἀρχήν, τὸν ἄξονα τῶν x κατὰ τὴν διεύθυνσιν αὐτοῦ, τὸν δὲ ἄξονα τῶν ψ παράλληλον τῶν δύο δοθεισῶν εὐθειῶν.

Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος μορφοῦμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(\psi - \psi' x)^2 - \alpha^2\psi'^2 = \pm \beta^2.$$

Τὸ μὲν σημεῖον + τοῦ δευτέρου μέλους ἀφορᾷ τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὰ δύο τμήματα κεῖνται ἐκ τοῦ αὐτοῦ μέρους τοῦ ἄξονος τῶν x, τὸ δὲ σημεῖον — τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ταῦτα κεῖνται ἐκ μερῶν διαφόρων.

Ἐκ μὲν τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως λαμβάνομεν

$$\psi = \psi' x + \sqrt{\alpha^2\psi'^2 \pm \beta^2}.$$

ἐκ ταύτης δὲ διαφορίζοντες,

$$\frac{\delta\psi'}{\delta x}\left(x + \frac{\alpha^2\psi'}{\sqrt{\alpha^2\psi'^2 \pm \beta^2}}\right) = 0.$$

Τὸ γενικὸν ὁλοκληρωτικὸν λαμβάνομεν καθιστῶντες

$$\frac{\delta\psi'}{\delta x} = 0, \qquad \text{ὅθεν} \qquad \psi' = A.$$

Ἀντεισάγοντες δὲ A ἀντὶ ψ' ἐν τῇ διαφορικῇ ἐξισώσει τῆς καμπύλης, συνάγομεν

$$\psi = Ax + \sqrt{\alpha^2 A^2 \pm \beta^2},$$

Τὴν μερικὴν λύσιν λαμβάνομεν ἀπαλοιφῇ τοῦ ψ' μεταξὺ τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως τῆς καμπύλης καὶ τῆς ἀκολούθου

$$x + \frac{\alpha^2\psi'}{\sqrt{\alpha^2\psi'^2 \pm \beta^2}} = 0.$$

Ὁ λογισμὸς οὗτος ἄγει εἰς τὴν ἐξίσωσιν

$$\alpha^2\psi^2 \pm \beta^2 x^2 = \pm \alpha^2\beta^2,$$

ἐμφαίνουσαν ἔλλειψιν ἢ ὑπερβολὴν ἔν τινι συστήματι διαμέτρων συζυγῶν ἀναφερομένην, ἐφ' ὅσον λάβωμεν τ' ἀνώτερα ἢ τὰ κατώτερα σημεῖα.

Τὸ γενικὸν ὁλοκληρωτικὸν ἐμφαίνει ἁπάσας τὰς ἐφαπτομένας τῆς ἑτέρας τῶν καμπυλῶν τούτων.

459. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Καμπύλην εὑρεῖν ἐν ᾗ ἅπασαι αἱ ἀπὸ σημείου μονίμου δοθέντος ἀγόμεναι κάθετοι ἐπὶ τῶν ἐφαπτομένων αὐτῆς νὰ ὦσιν ἴσαι τῷ δοθέντι μήκει α.*

Λαμβάνομεν ὡς ἀρχὴν τὸ μόνιμον σημεῖον. Εὑρίσκομεν ὅτι ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις τῆς ζητουμένης καμπύλης εἶναι

$$x\delta\psi - \psi\delta x = \alpha\sqrt{\delta x^2 + \delta\psi^2}, \quad \text{ἢ} \quad \psi = \psi' x + \alpha\sqrt{1 + \psi'^2}.$$

Ἐφαρμόζοντες τὴν μέθοδον εὑρήσομεν ὅτι τὸ μὲν γενικὸν ὁλοκληρωτικὸν εἶναι

$$\psi = Ax + \alpha\sqrt{1 + A^2},$$

ἡ δὲ μερικὴ λύσις εἶναι κύκλος γραφόμενος κέντρῳ τῷ δοθέντι σημείῳ καὶ ἀκτῖνι ἴσῃ α. Αἱ ὑπὸ τοῦ γενικοῦ ὁλοκληρωτικοῦ δηλούμεναι ἄπειροι εὐθεῖαι ἅπτονται ἅπασαι τοῦδε τοῦ κύκλου.

460. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Καμπύλην εὑρεῖν τοιαύτην, ὥστε τὸ ἐφ' ἑκάστην τῶν ἐφαπτομένων αὐτῆς μέρος, ἀπολαμβανόμενον ὑπὸ δύο εὐθειῶν δεδομένων καὶ πρὸς ὀρθὰς τεμνομένων, νὰ ἰσοῦται τῷ δοθέντι μήκει α.*

Λαμβάνοντες τὰς δύο πρὸς ὀρθὰς τεμνομένας εὐθείας ὡς ἄξονας τῶν συντεταγμένων, καταντῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν

$$\psi = \psi' x + \frac{\alpha\psi'}{\sqrt{1 + \psi'^2}},$$

ἐν ᾗ τὸ ῥιζικὸν ἐπιδέχεται τὸ διπλοῦν σημεῖον. Διαφορίζοντες αὐτὴν ἔχομεν

$$\delta\psi'\left[x + \frac{\alpha}{(1 + \psi'^2)^{\frac{3}{2}}}\right] = 0.$$

Τὸ γενικὸν ὁλοκληρωτικὸν ἔσεται

$$\psi = Ax + \frac{\alpha A}{\sqrt{1 + A^2}}.$$

Τὴν μερικὴν λύσιν εὑρίσκομεν ἀπαλοιφῇ τοῦ ψ' μεταξὺ τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως τῆς καμπύλης καὶ τῆς ἀκολούθου·

$$x + \frac{\alpha}{(1 + \psi'^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Κατὰ πρῶτον λαμβάνομεν

$$(1 + \psi'^2)^{\frac{1}{2}} = -\left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\frac{1}{3}},$$

ἀντεισάγοντες δ' ἐν τῇ πρώτῃ,

$$\psi = \psi' x^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{2}{3}} - \alpha^{\frac{2}{3}}).$$

Ἐξάγοντες ἐκ ταύτης τὴν τιμὴν τοῦ ψ' καὶ καθιστῶντες αὐτὴν ἐν τῇ προηγουμένῃ, καταντῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν

$$x^{\frac{2}{3}} + \psi^{\frac{2}{3}} = \alpha^{\frac{2}{3}},$$

ἧς ἡ διασκόπησις εἶναι εὔκολος.

461. Δείξομεν ἤδη ὅτι ἡ καμπύλη αὕτη, *ἐπικυκλοειδὴς* καλουμένη, εἶναι ἡ ἀπογεννωμένη ἔκ τινος σημείου κύκλου, ἔχοντος ἀκτῖνα ἴσην $\frac{1}{4}$ α, κυλιομένου ἐσωτερικῶς ἐφ' ἑτέρου κύκλου οὗτινος ἡ ἀκτὶς ἰσοῦται α.

(Σχ. 77). Ἔστω ἀκτὶς ἡ τυχοῦσα ΑΒ κύκλου γραφέντος ἀκτῖνι ἴση α. Ἐπὶ διαμέτρου $\mathrm{B\Gamma} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}$ γράφομεν κύκλον ἕτερον· λαμβάνομεν τὸ τόξον ΒΜ ἴσον τῷ τόξῳ ΒΟ· τοῦ Ο ὄντος σημείου τινος μονίμου τοῦ πρώτου κύκλου. Τὸ σημεῖον Μ ἔσεται ἐπὶ τῆς περὶ ἧς ὁ λόγος ἐπικυκλοειδοῦς, πρόκειται δὲ δεῖξαι ὅτι ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς κατὰ τὸ τυχὸν σημεῖον Μ, τὸ ἀπολαμβανόμενον μέρος ἐν τῇ ὀρθῇ γωνίᾳ ΨΑΧ ἰσοῦται α.

ΒΜ οὔσης τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν καμπύλην ταύτην, ἡ ἐφαπτομένη ἔσεται ΜΓ· πρόκειται δὲ δεῖξαι ὅτι $\mathrm{AN} = \alpha$.

Παρατηρητέον πρὸς τοῦτο ὅτι, κατὰ τὴν θεωρίαν τοῦ τῶν γωνιῶν μέτρου, συνεπείᾳ δὲ τῆς συνθήκης $\mathrm{OB} = \mathrm{BM}$, ἡ γωνία ΒΓΜ διπλασία ἐστὶ τῆς ΝΑΓ· ἑπομένως

$$\mathrm{NA\Gamma} = \mathrm{\Gamma NA}\cdot \qquad \text{ὅθεν} \qquad \mathrm{\Gamma N} = \mathrm{\Gamma A}.$$

Ὁμοίως δείκνυται ὅτι, ἡ γωνία ΑΓΒ διπλασία ἐστὶ τῆς ΛΑΓ ἑπομένως ὅτι $\mathrm{\Lambda A\Gamma} = \mathrm{\Lambda A\Gamma}$· ὅθεν $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{\Lambda\Gamma}$, καὶ $\mathrm{AN} = \alpha$· ὅπερ ἐπρόκειτο δεῖξαι.

462. Πρὸς ἄσκησιν προτείνομεν τελευταῖον.

Εὑρεῖν καὶ ὁλοκληρῶσαι τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν τῆς τοῦ κύκλου ἐξελιγμένης,

Ἀπ. $$(x\delta x + \psi\delta\psi)^2 = \alpha^2(\delta x^2 + \delta\psi^2). \qquad (1)$$

$$x\,\text{συν}\,\frac{1}{\alpha}\sqrt{x^2+\psi^2-\alpha^2} + \psi\,\text{ἡμ.}\,\frac{1}{\alpha}\sqrt{x^2+\psi^2-\alpha^2} = \alpha. \qquad (2)$$

Καὶ ἐν συντεταγμέναις πολικαῖς,

$$\omega = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\rho^2-\alpha^2} - \text{τόξ συν}\,\frac{\alpha}{\rho}. \qquad (3)$$

ΤΕΛΟΣ.

ΠΙΝΑΞ
ΤΩΝ ΕΜΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ.

Σελ.

Α΄. Περὶ τῶν συνεκθέσεων ἐν γένει. — Περὶ τῶν παραγομένων συνεκθέσεων καὶ περὶ τῶν διαφορικῶν. 3.
Β΄. Περὶ διαφορίσεως τῶν ἁπλῶν συνεκθέσεων ἐκ μιᾶς μεταβλητῆς συγκροτουμένων. 12.
Γ΄. Περὶ διαφορίσεως τῶν συνθέτων συνεκθέσεων· ἤτοι συνεκθέσεων ἑτέρων συνεκθέσεων μιᾶς μεταβλητῆς. 21.
Δ΄. Χρῆσις τῶν προεκτεθέντων κανόνων. 24.
Ε΄. Περὶ διαφορίσεως συνεκθέσεων συγκροτουμένων ἐκ πλειόνων μεταβλητῶν ἀνεξαρτήτων. 37.
ΣΤ΄. Περὶ διαφορίσεως συνεκθέσεων συνεπτυγμένων. 43.
Ζ΄. Περὶ διαφορικῶν διαφόρων τάξεων τῶν συνεκθέσεων μιᾶς μεταβλητῆς. 49.
Η΄. Περὶ διαφορικῶν τῶν διαφόρων τάξεων τῶν ἁπλῶν συνεκθέσεων. 58.
Θ΄. Περὶ διαφορικῶν τῶν διαφόρων τάξεων συνεκθέσεων ἐκ πλειόνων μεταβλητῶν συγκροτουμένων. 66.
Ι΄. Περὶ διαφορικῶν τῶν διαφόρων τάξεων συνεκθέσεων συνεπτυγμένων. 72.
ΙΑ΄. Περὶ μεταβολῆς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς. 76.
ΙΒ΄. Ἔκθεσις γενικὴ τοῦ ἐκτυλίγματος συνεκθέσεώς τινος κατὰ τὰς ἀκεραίας δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς. — Θεώρημα τοῦ Τάϋλορ. 86.

Σελ.

ΙΓ'. Περὶ τῶν περιπτώσεων καθ' ἃς, διά τινας ἰδιαιτέρας τιμὰς τῆς μεταβλητῆς, ἡ σειρὰ τοῦ Τάϋλορ δὲν δίδει τὸ ἐκτύλιγμα τῆς συνεκθέσεως. 92.

ΙΔ'. Περὶ διορισμοῦ τῶν μερικῶν τιμῶν συνεκθέσεων παρουσιαζομένων ὑπὸ τὰς μορφὰς $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty\times 0$, 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0}. 95.

ΙΕ'. Περὶ ἀναπτύξεως τῶν ἁπλῶν συνεκθέσεων μιᾶς μεταβλητῆς. 104.

ΙΣΤ'. Ἐπέκτασις τοῦ τύπου τοῦ Τάϋλορ ἐπὶ συνεκθέσεων ἐκ πλειόνων μεταβλητῶν συγκροτουμένων. 109.

ΙΖ'. Περὶ μεγίστων καὶ ἐλαχίστων τῶν συνεκθέσεων. 112.

Περιπτώσεις καθ' ἃς ὑπάρχουσι σχέσεις τῶν μεταβλητῶν πρὸς ἀλλήλας. 137.

ΙΗ'. Περὶ διαφορικῶν τοῦ ἐμβαδοῦ, τοῦ τόξου, καὶ τῆς κλίσεως καμπύλης ἐπιπέδου. 411.

ΙΘ'. Περὶ ἐπαφῆς τῶν ἐπιπέδων καμπυλῶν. 144.

Κ'. Περὶ ἐφαπτομένων καὶ καθέτων τῶν ἐπιπέδων καμπυλῶν. 149.

ΚΑ'. Θεωρία τῶν ἀσυμπτώτων. 159.

ΚΒ'. Περὶ τοῦ φιλήτορος κύκλου. — Περὶ ἐνειλιγμένων τῶν ἐπιπέδων καμπυλῶν. 166.

Θεωρία τῶν ἐνειλιγμένων. 172.

ΚΓ'. Περὶ πολικῶν συντεταγμένων. 180.

ΚΔ'. Περὶ σπειρῶν. 188.

ΚΕ'. Περὶ ἀσυμπτώτων τῶν καμπυλῶν ἐν συντεταγμέναις πολικαῖς. 194.

ΚΣΤ'. Περὶ σημείων εἰδικῶν τῶν ἐπιπέδων καμπυλῶν. 198.

Σημεῖα καμπῆς. 199.

Σημεῖα ἀνακάμψεως. 202.

Σημεῖα πολλαπλᾶ. 205.

Σημεῖα μεμονωμένα. 210.

Σημεῖα γωνιώδη ἢ ἐξέχοντα. 213.

Σημεῖα ἀπότομα. 213.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ.

Σελ.

Α'. Περὶ ὁλοκληρώσεως τῶν ἁπλουστάτων διαφορικῶν συνεκθέσεων μιᾶς μεταβλητῆς. 217.

Β'. Περὶ ὁλοκληρώσεως συνεκθέσεων λογικῶν, ὁλοσχερῶν καὶ κλασματικῶν. 230.

Γ'. Περὶ ὁλοκληρώσεως τῶν ἀλγεβρικῶν ἐκμέτρων συνεκθέσεων. 249.

Δ'. Περὶ ὁλοκληρώσεως τῶν διωνύμων διαφορικῶν. 258.

Ε'. Περὶ ὁλοκληρώσεως τῶν λογαριθμικῶν, τῶν δεικτικῶν, καὶ τῶν κυκλικῶν συνεκθέσεων. 269.

ΣΤ'. Περὶ τῆς διὰ σειρῶν ὁλοκληρώσεως. 288.

Ζ'. Περὶ ὁλοκληρωτικῶν ὡρισμένων. 292.

Η'. Τετραγωνισμὸς τῶν ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν. 301.

Θ'. Εὔθυνσις τῶν ἐπιπέδων καμπυλῶν. 314.

Ι'. Κυβισμὸς τῶν στερεῶν ἐκ περιστροφῆς. 324.

ΙΑ'. Τετραγωνισμὸς τῶν ἐπιφανειῶν ἐκ περιστροφῆς. 328.

ΙΒ'. Κυβισμὸς στερεῶν παντοίων σχημάτων. 334.

ΙΓ'. Περὶ συνθηκῶν ὁλοκληρωσιμότητος τῶν διαφορικῶν συνεκθέσεων τῆς πρώτης τάξεως, περιεκτικῶν πλειόνων μεταβλητῶν ἀνεξαρτήτων. — Ὁλοκλήρωσις τῶν συνεκθέσεων τούτων, ἐκπληρουσῶν τὰς συνθήκας ὁλοκληρωσιμότητος. 344.

ΙΔ'. Περὶ ἐξισώσεων διαφορικῶν τῆς πρώτης τάξεως περιεκτικῶν δύο μεταβλητῶν. 355.

ΙΕ'. Περὶ ὁλοκληρώσεως ἐξισώσεων διαφορικῶν τῆς πρώτης τάξεως, ἐν αἷς ὁ διαφορικὸς συντελεστὴς ὑπάρχει πρωτοβάθμιος. 363.

Περὶ τοῦ παράγοντος δι' οὗ ἐξίσωσίς τις ἀποκαθίσταται ὁλοκληρώσιμος. 368.

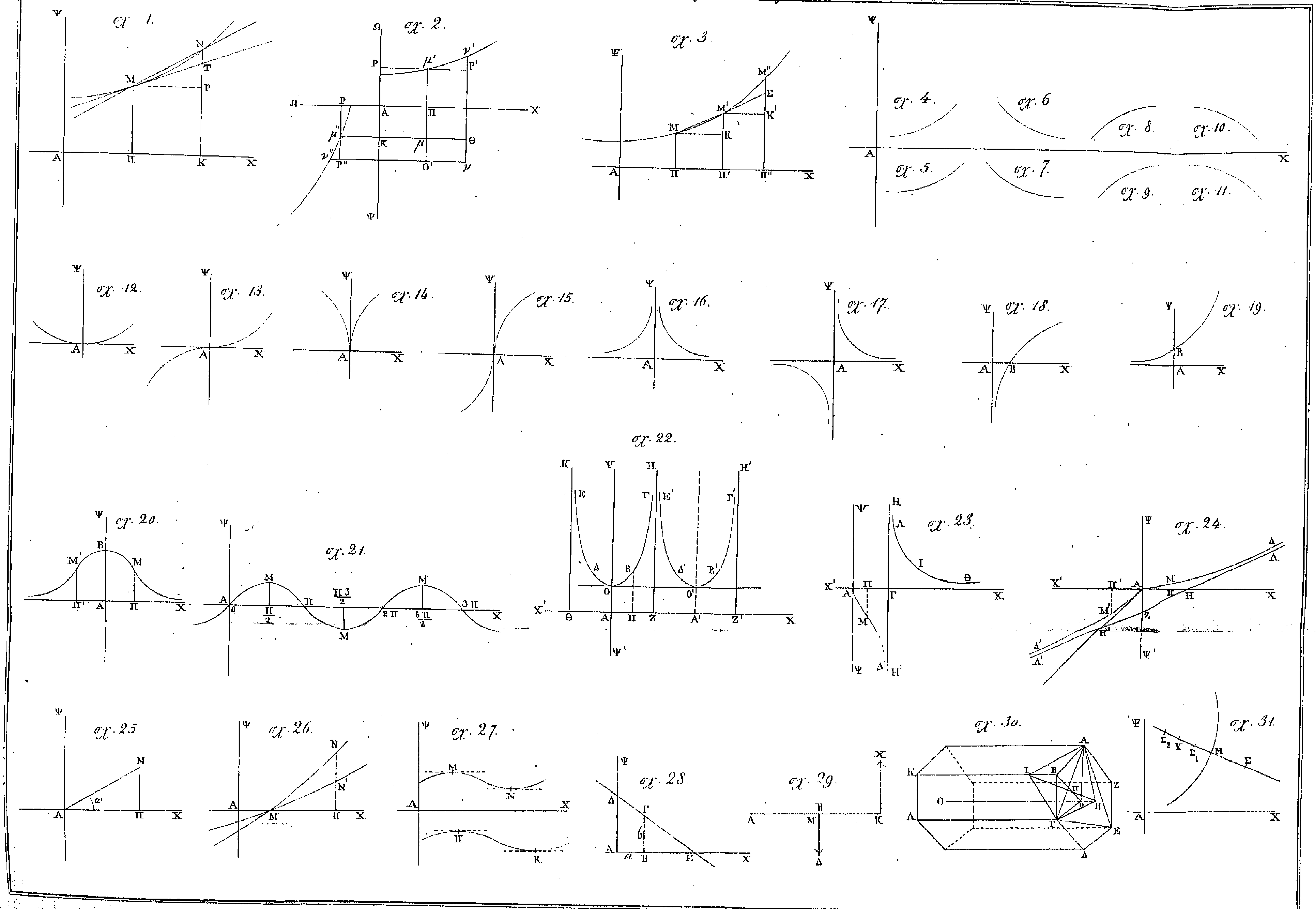
Σελ.

Θεώρημα τῶν ὁμογενῶν συνεκθέσεων. — Περὶ ὁλοκληρώσεως τῶν ὁμογενῶν συνεκθέσεων. 376.

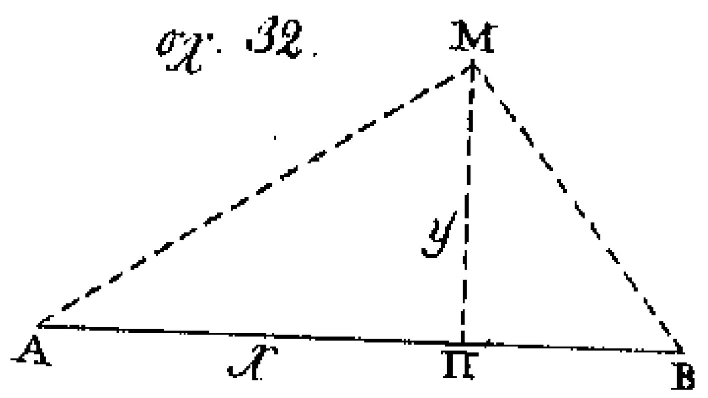
ΙΣΤ'. Περὶ ἐξισώσεων διαφορικῶν τῆς πρώτης τάξεως, ἐν αἷς ὁ διαφορικὸς συντελεστὴς ὑπάρχει εἰς βαθμὸν ἀνώτερον τοῦ πρώτου. 387.

Πίνακες τρεῖς.

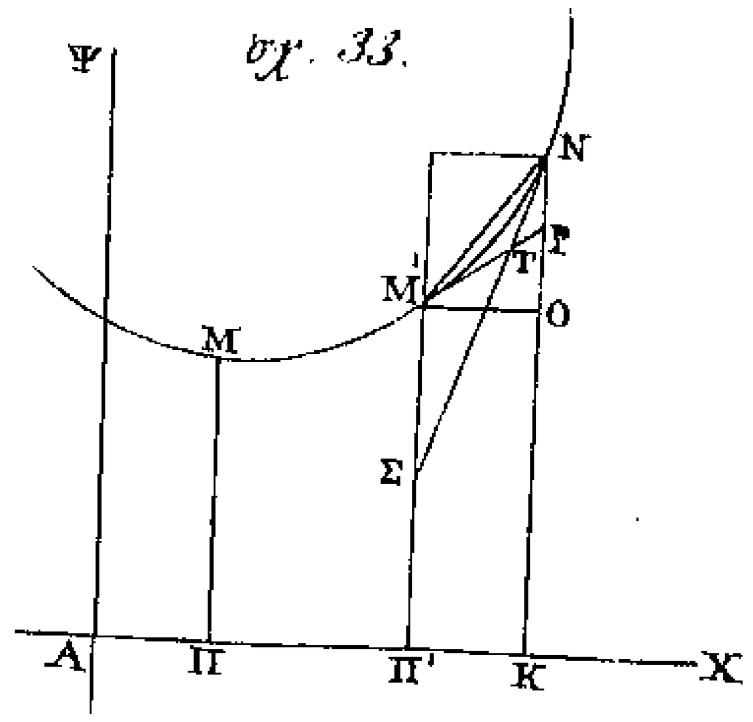
Πίναξ I.


σχ. 1.
σχ. 2.
σχ. 3.
σχ. 4.
σχ. 5.
σχ. 6
σχ. 7.
σχ. 8.
σχ. 9.
σχ. 10.
σχ. 11.
σχ. 12.
σχ. 13.
σχ. 14.
σχ. 15.
σχ. 16.
σχ. 17.
σχ. 18.
σχ. 19.
σχ. 20.
σχ. 21.
σχ. 22.
σχ. 23.
σχ. 24.
σχ. 25.
σχ. 26.
σχ. 27.
σχ. 28.
σχ. 29.
σχ. 30.
σχ. 31.

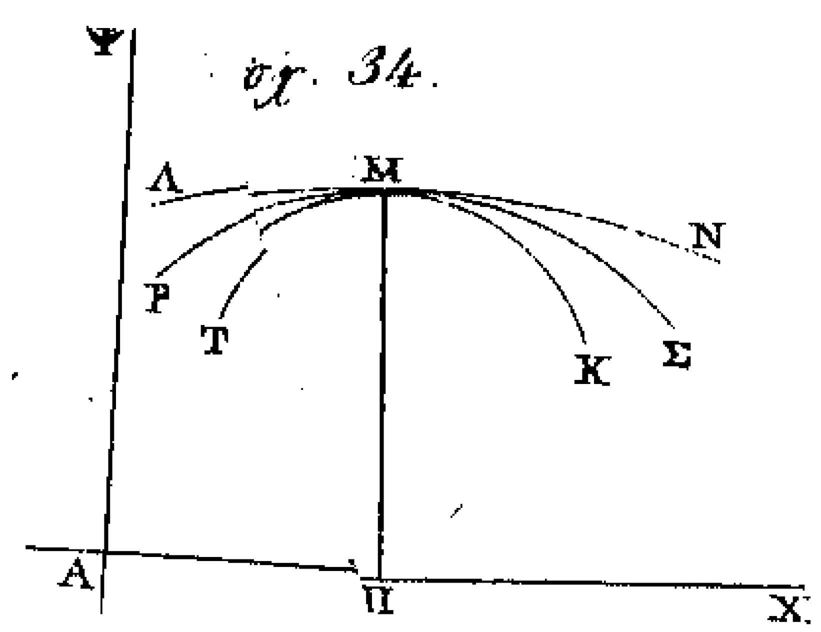
σχ. 32.



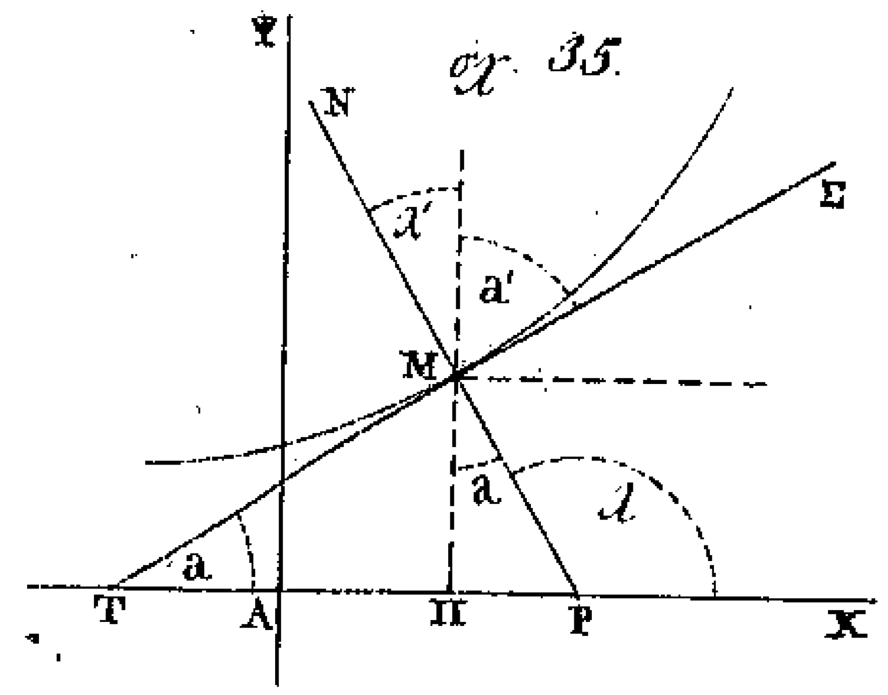
σχ. 33.



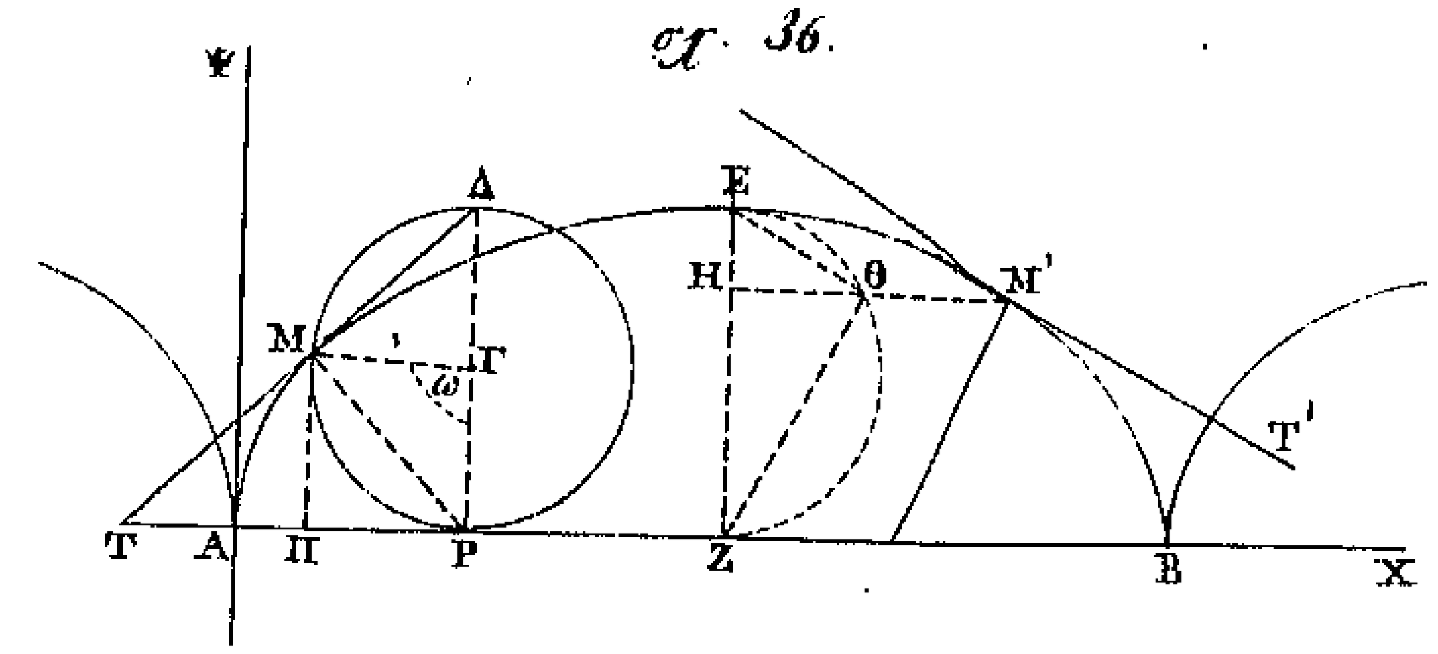
σχ. 34.



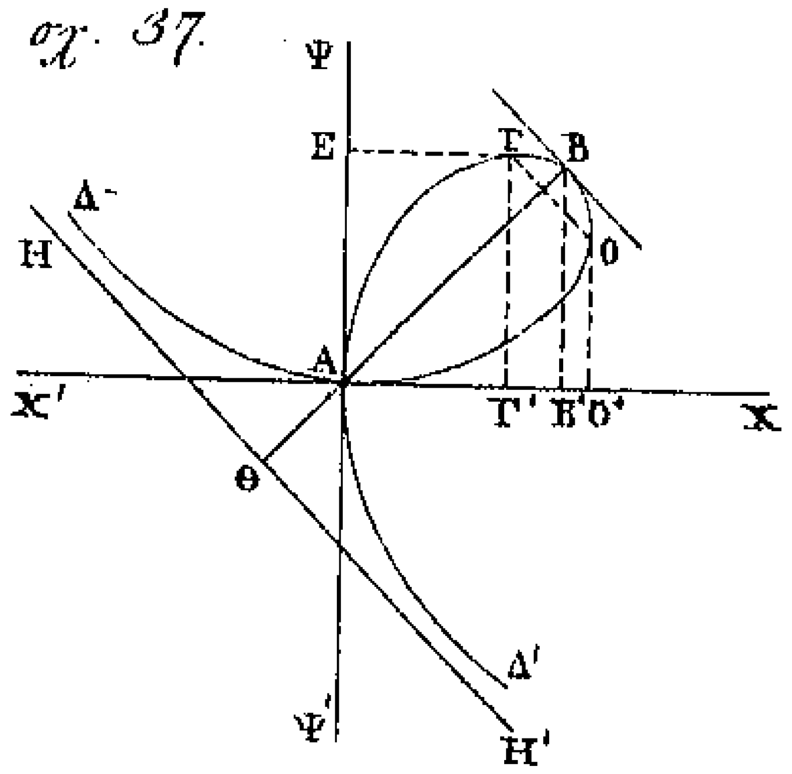
σχ. 35.



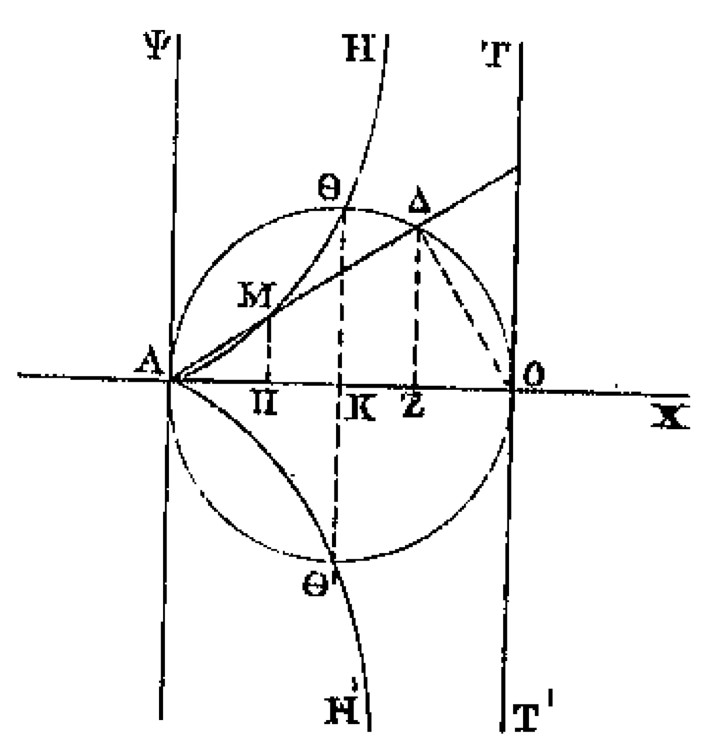
σχ. 36.



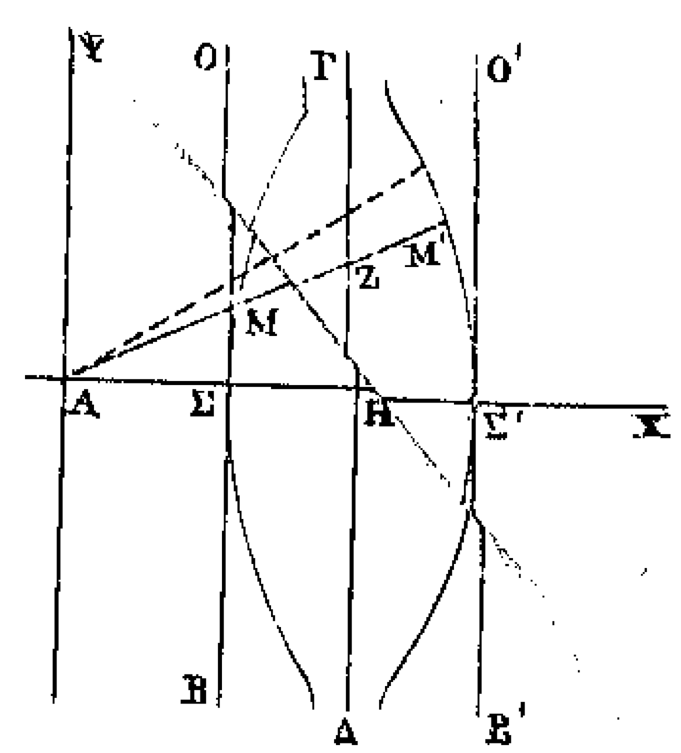
σχ. 37.



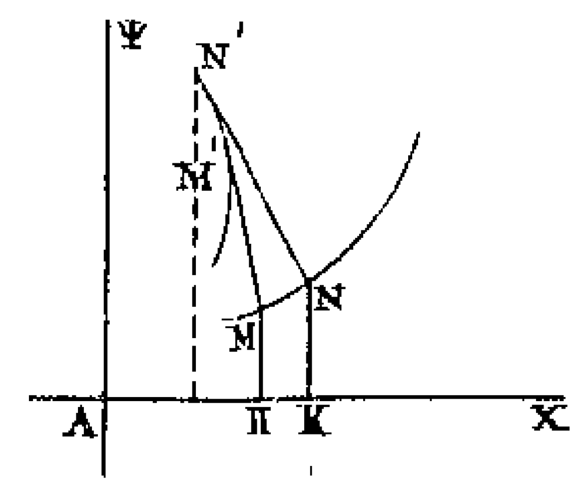
σχ. 38.



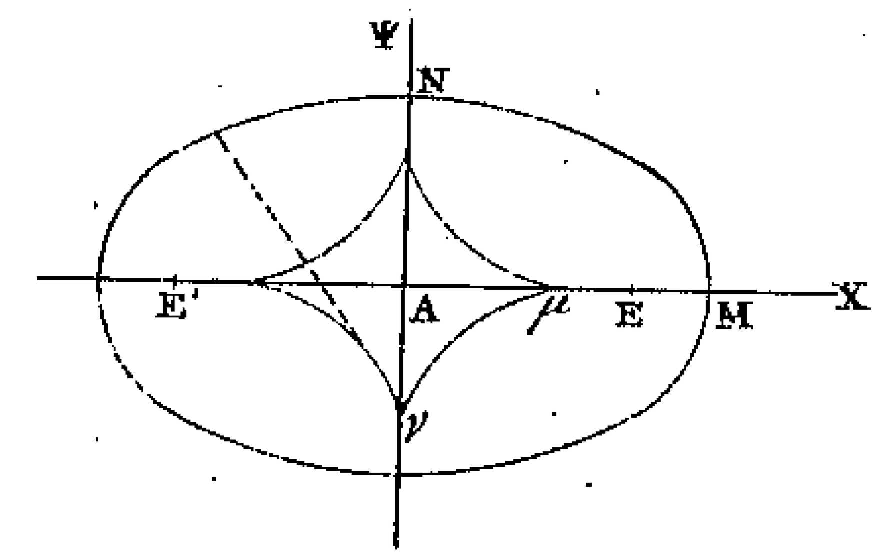
σχ. 39.



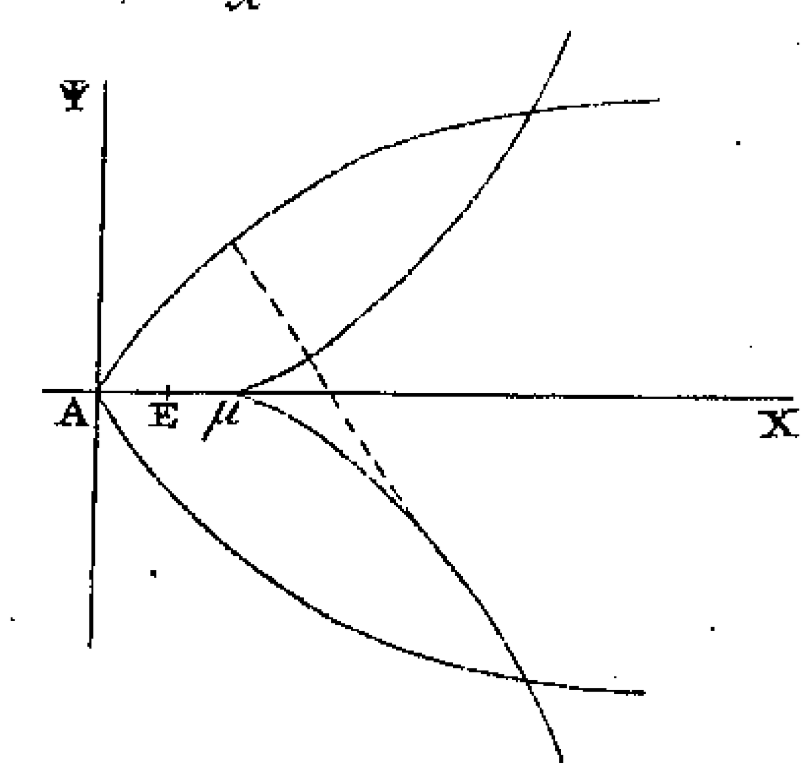
σχ. 40.



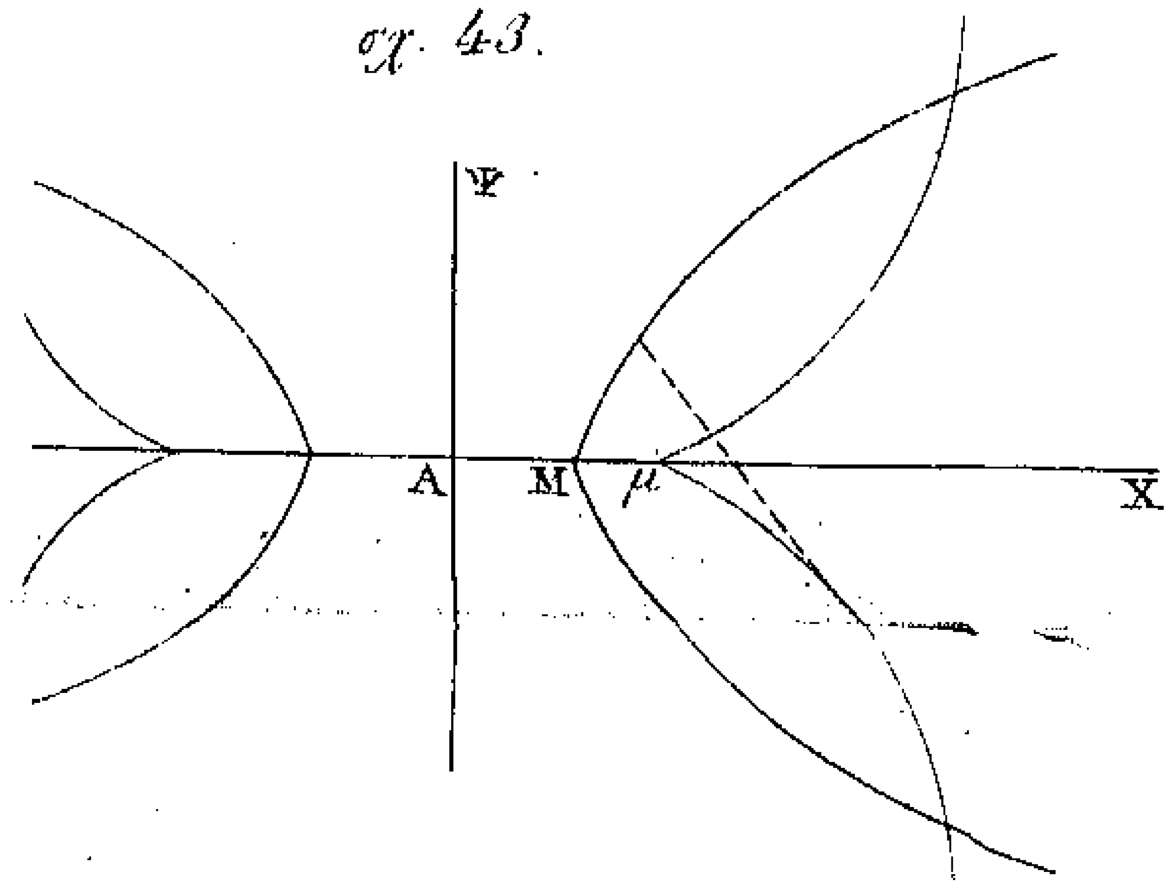
σχ. 41.



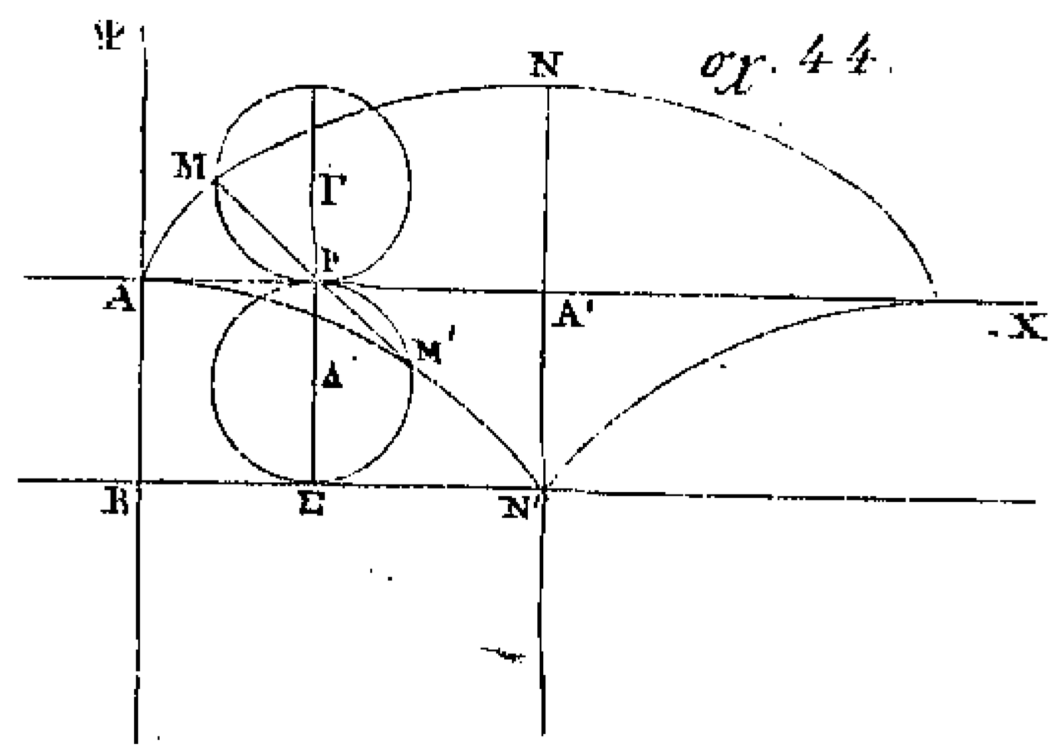
σχ. 42.



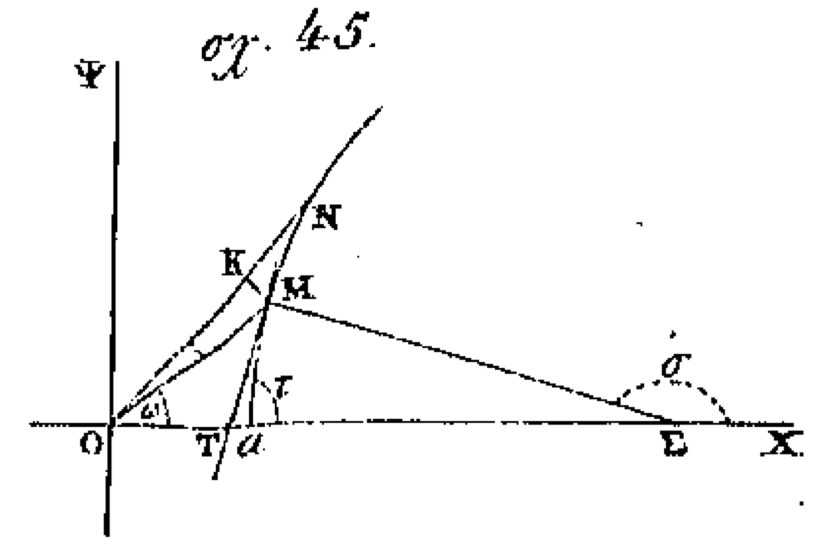
σχ. 43.



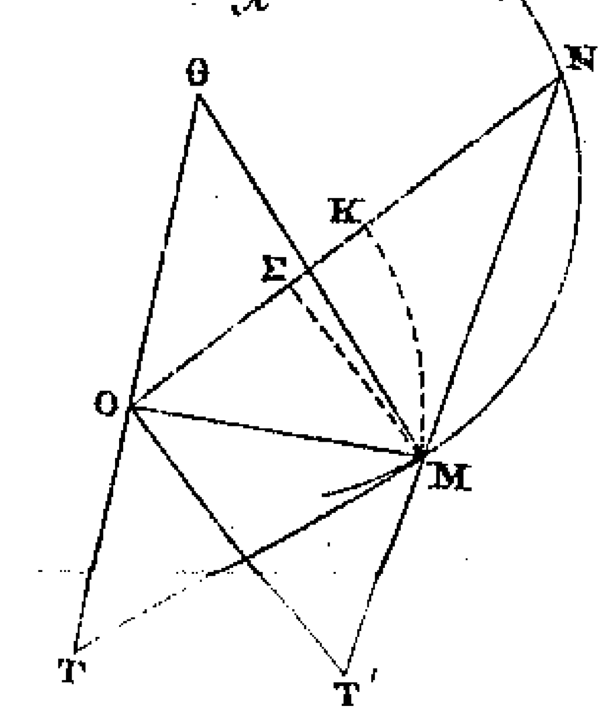
σχ. 44.



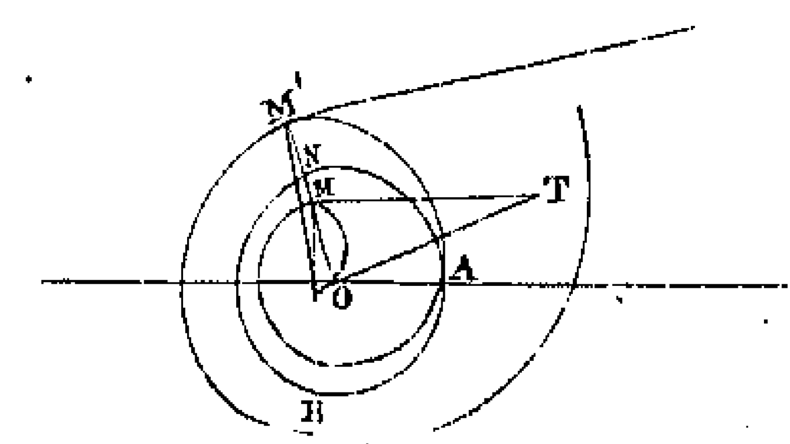
σχ. 45.



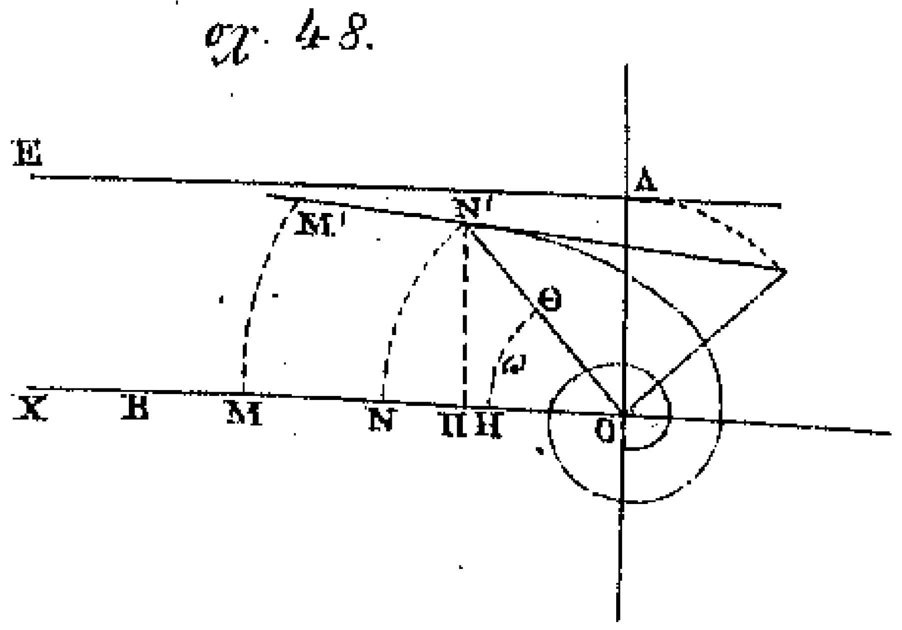
σχ. 46.



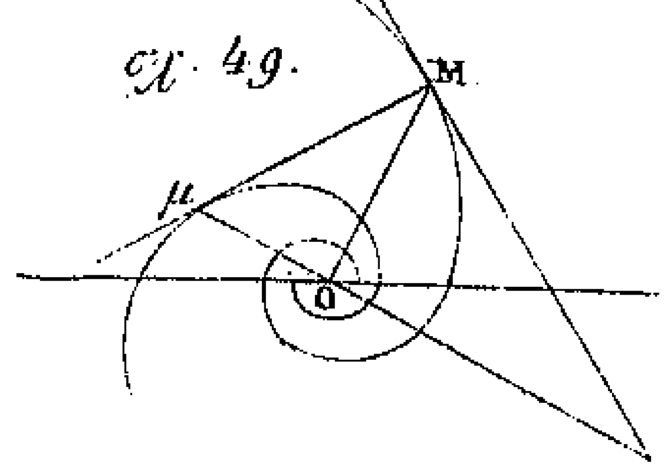
σχ. 47.



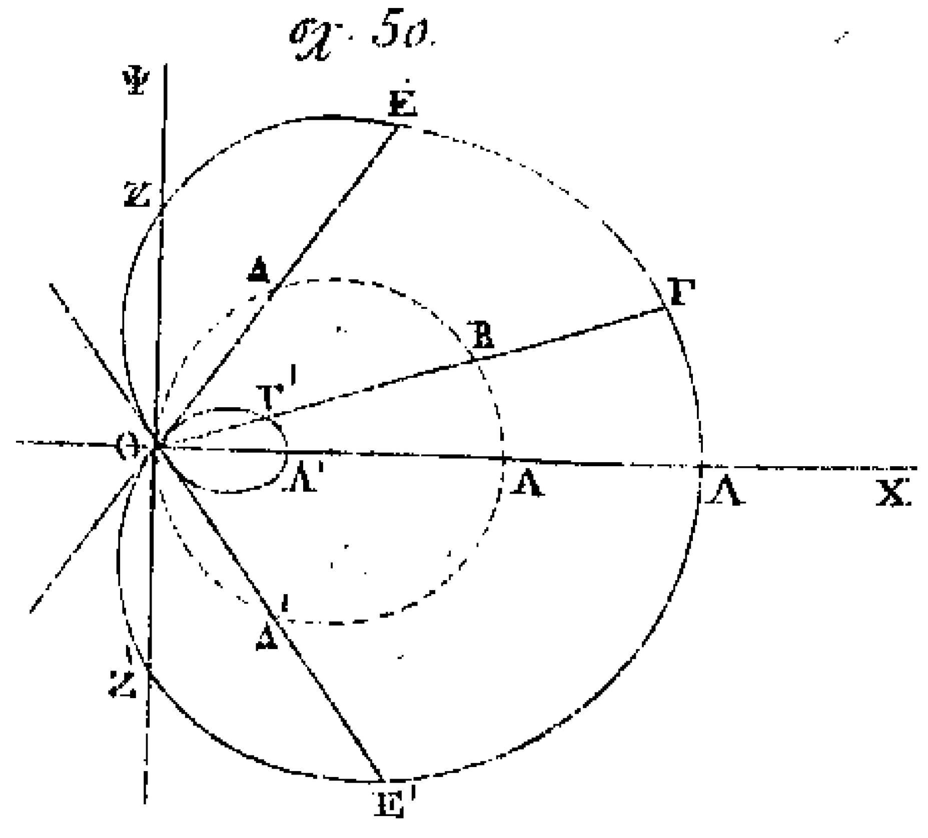
σχ. 48.



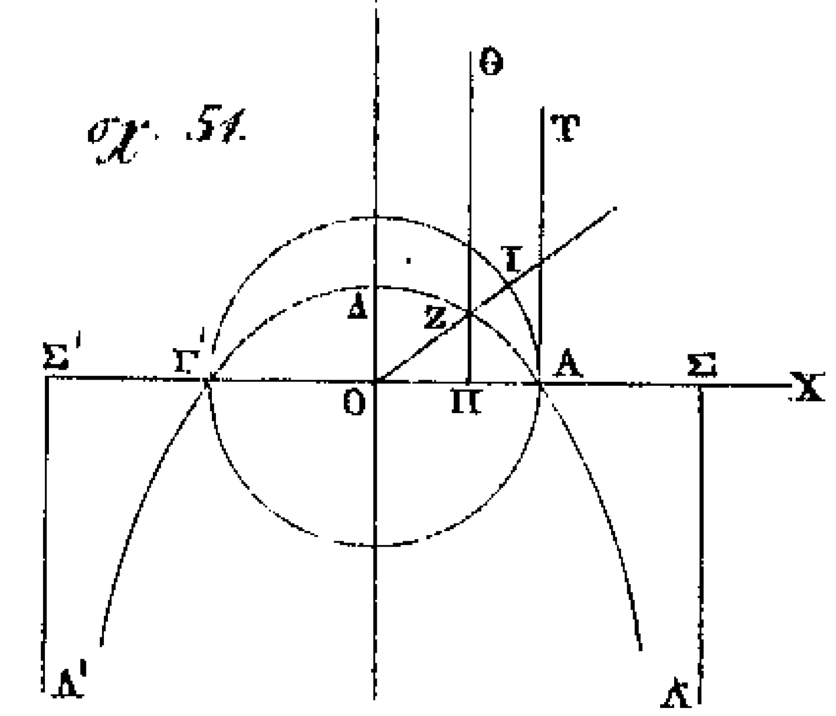
σχ. 49.



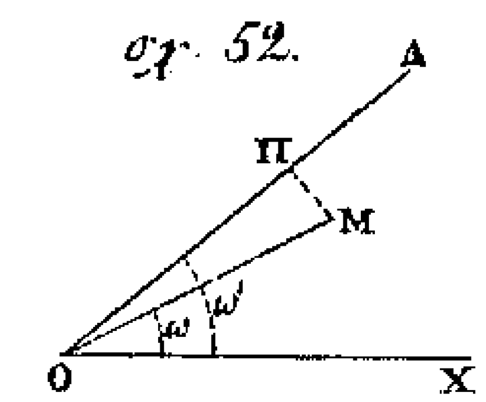
σχ. 50.



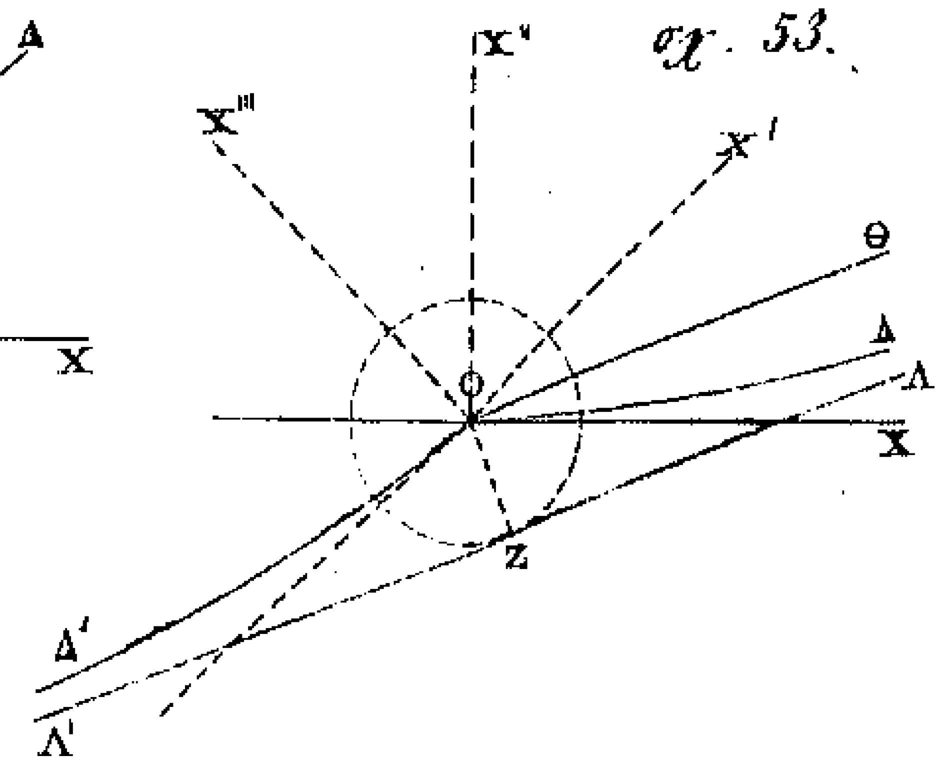
σχ. 51.

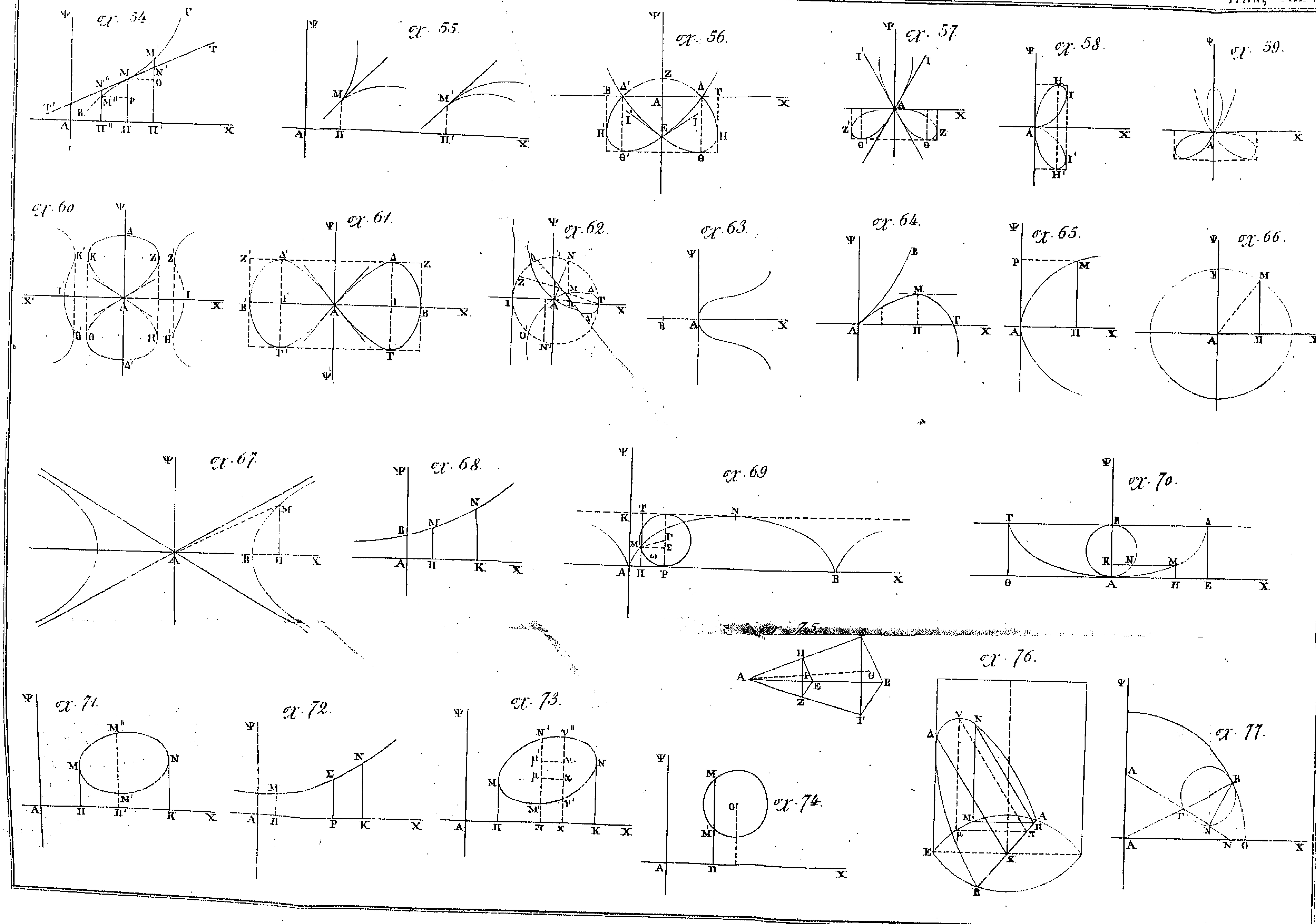


σχ. 52.



σχ. 53.




σχ. 54.
σχ. 55.
σχ. 56.
σχ. 57
σχ. 58.
σχ. 59.
σχ. 60.
σχ. 61.
σχ. 62.
σχ. 63.
σχ. 64.
σχ. 65.
σχ. 66.
σχ. 67
σχ. 68.
σχ. 69
σχ. 70.
σχ. 71.
σχ. 72.
σχ. 73.
σχ. 74.
σχ. 75.
σχ. 76.
σχ. 77.