Παραμετρικά Υποδείγματα Επενδυτικής Συμπεριφοράς για έναν Επενδυτή με Λογαριθμική Συνάρτηση Χρησιμότητας

Χριστοφόρου Λυγερή

Επιβλέπων: Συμεωνίδης Σπύρος

Department of Economics
University of Ioannina

Τμήμα Οικονομικό
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Ελλάδα

Μάρτιος, 2024

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κύριο Σπύρο Συμεωνίδη, για την εμπιστοσύνη, την υπομονή καθώς και για τις σημαντικές συμβουλές του. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου,και ειδικά τη μητέρα μου, Δόμνα, το θείο μου, Γιάννη,και το Σοφοκλή για την αγάπη, την υπομονή, τη στήριξη και για όσα μου έχουν προσφέρει.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται το χαρτοφυλάκιο του αντιπροσωπευτικού επενδυτή ο οποίος έχει ως συνάρτηση χρησιμότητας την προσεγγιστική λογαριθμική συνάρτηση που παρουσιάζει στο άρθρο του ο Markowitz (1979). Θεωρούμε ότι η χρησιμότητα που αποφέρει η επένδυση είναι κάποια συνάρτηση των αποδόσεων των επενδυτικών αγαθών. Το χαρτοφυλάκιο αυτό διερευνάται πριν τη φούσκα του χρηματιστηρίου αλλά και κατά τη διάρκεια της φούσκας. Στόχος είναι να εντοπιστεί και στις δύο περιπτώσεις το άριστο χαρτοφυλάκιο ισορροπίας χρησιμοποιώντας τη προσεγγιστική λογαριθμική συνάρτηση. Για αυτόν τον σκοπό ασχολούμαστε και μεγιστοποιούμε την ανεμενόμενη συνάρτηση χρησιμότητας σύμφωνα με αυτό που προτείνει ο Markowitz. Λύνοντας το πρόβλημα μεγιστοποίησης της αναμενόμενης χρησιμότητας βρίσκουμε τα βάρη των επενδυτικών αγαθών καθώς και το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο. Στο δεύτερο μέρος της εργασίας πραγματοποιείται η ίδια διερεύνυση υπό την επίδραση της φούσκας και εντοπίζεται το νέο βέλτιστο χαρτοφυλάκιο. Τέλος, παρουσιάζεται η σύγκριση των χαρτοφυλακίων που προκύπτουν από τις κινήσεις του αντιπροσωπευτικού επενδυτή πριν και κατά τη διάρκεια της φούσκας.

Κεφάλαιο 2

Ορισμοί

Ορίζουμε ως χαρτοφυλάκιο τη συλλογή περιουσιακών στοιχείων που βρίσκονται στην κυριότητα μιας οικονομικής μονάδας.

Ως επενδυτής ορίζεται ένα φυσικό ή νομικό πρόσωπο που αγοράζει περιουσιακά στοιχεία με την προσδοκία κέρδους.

Ως χρηματιστηριακή φούσκα μπορεί να περιγραφεί το φαινόμενο των οργανωμένων αγορών κατά το οποίο η τιμή ενός επενδυτικού προιόντος αυξάνεται σε υπερβολικά επίπεδα σε σχέση με τη θεμελιώδη αξία της.

Η Γραμμή κεφαλαιααγοράς αξιογράφων αποτελεί τη γραφική απεικόνιση του Υποδείγματος αποτίμησης περιουσιακών στοιχείων (Capital Asset Pricing Model — CAPM).

Η απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι ο σταθμικός μέσος όρος των αποδόσεων των επιμέρους περιουσιακών στοιχείων που το απαρτίζουν (π. χ. μετοχές, ομόλογα, αμοιβαία κεφάλαια, προθεσμιακές καταθέσεις, συνάλλαγμα)

Η χρησιμότητα ενός επενδυτικού αγαθού πηγάζει από τη δυνατότητα που έχει να ικανοποιήσει μια ανθρώπινη ανάγκη. Το κριτήριο με βάση το οποίο παίρνει τις αποφάσεις του ο επενδυτής είναι η μεγιστοποίηση της συνολικής αναμενόμενης χρησιμότητας του. Σε αυτή την εργασία η συνάρτηση χρησιμότητάς με την οποία θα ασχοληθούμε είναι η λογαριθμική συνάρτηση χρησιμότητας.

Κεφάλαιο 3

Τι είναι η Λογαριθμική Συνάρτηση Χρησιμότητας

Η λογαριθμική συνάρτηση χρησιμότητας είναι μια κοίλη συνάρτηση και αποδίδει την αποστροφή κινδύνου δηλαδή είναι η κατάσταση κατά την οποία ο επενδυτής δεν είναι πρόθυμος να δεχτεί ένα στοίχημα το οποίο δεν είναι αναλογικά δίκαιο προς αυτόν. Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με την αναμενόμενη λογαριθμική συνάρτηση χρησιμότητας την οποία θα προσεγγίσουμε σύμφωνα με τα όσα αναφέρει ο Markowitz (1979). Η λογαριθμική συνάρτηση χρησιμότητας είναι μια ειδική περίπτωση συνάρτησης χρησιμότητας σταθερής αποστροφής κινδύνου. Αυτή η οικογένεια συναρτήσεων χρησιμότητας θεωρεί τους κινδύνους ως ποσοστά του πλούτου σταθερούς για όλα τα επίπεδα πλούτου. Δηλαδή, πλούσιοι και φτωχοί ανησυχούν το ίδιο για ένα σοκ που μπορεί να συμβεί.

Κεφάλαιο 4

Χρηματιστηριακή Αγορά

4.1 Αντικειμενικές Συνθήκες της Αγοράς

Η απόδοση του περιουσιακού στοιχείου χωρίς κίνδυνο συμβολίζεται με r_f με αναμενόμενη τιμή $\mathrm{E}\left(r_f\right) = r_f$ και διακύμανση $\sigma_f^2 = \left(r_f\right) = 0$. Θεωρούμε δύο περιουσιακά στοιχεία με κίνδυνο των οποίων οι αποδόσεις συμβολίζονται ως r_1 και r_2 με $\mathrm{E}(r_i) = \mu_i$ και $(r_i) = \sigma_i^2$ όπου $i = 1, 2$. Η συνδυακύμανση του r_f και του r_i είναι $Cov\left(r_f, r_i\right) = 0$ ενώ $Cov\left(r_i, r_j\right) = \sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$ όπου ρ_{ij} είναι ο συντελεστής συσχέτισης των αποδόσεων r_i και r_j. Συμβολίζουμε με w_0, w_1, w_2 τα ποσοστά του κεφαλαίου που επενδύονται στα περιουσιακά στοιχεία με αποδόσεις r_f, r_1 και r_2 αντίστοιχα. Ισχύει ότι $w_0 + w_1 + w_2 = 1$ κάτι που δηλώνει ότι επενδύεται όλο το διαθέσιμο επενδυτικό κεφάλαιο. Ως r_p ορίζεται η απόδοση ενός χαρτοφυλακίου για την οποία ισχύει

$$r_p = w_0 r_f + w_1 r_1 + w_2 r_2 \tag{4.1}$$

με αναμενόμενη τιμή

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(r_p\right) &= E\left(w_0 r_f + w_1 r_1 + w_2 r_2\right) \\
&= w_0 E\left(r_f\right) + w_1 E\left(r_1\right) + w_2 E\left(r_2\right) \\
&= w_0 r_f + w_1 \mu_1 + w_2 \mu_2 \\
&= \left(1 - w_1 - w_2\right) r_f + w_1 \mu_1 + w_2 \mu_2 \\
&= r_f - w_1 r_f - w_2 r_f + w_1 \mu_1 + w_2 \mu_2 \\
&= r_f + w_1\left(\mu_1 - r_f\right) + w_2\left(\mu_2 - r_f\right) \\
\Longrightarrow \mathrm{E}\left(r_p\right) &= \mu_p \ . \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

και διακύμανση

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}\left(r_p\right) = \sigma_p^2 \Longrightarrow \operatorname{var}\left(w_0 r_f + w_1 r_1 + w_2 r_2\right) = \sigma_p^2 &\quad \Longrightarrow \\
w_0^2 r_f + w_1^2 \operatorname{var}\left(r_1\right) + w_2^2 \operatorname{var}\left(r_2\right) + 2 w_0 w_1 Cov\left(r_f, r_1\right) + 2 w_0 w_2 Cov\left(r_f, r_2\right) + 2 w_1 w_2 Cov\left(r_1, r_2\right) = \sigma_p^2 &\quad \Longrightarrow \\
w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2 w_1 w_2 \sigma_{12} = \sigma_p^2 \ . &\qquad (4.3)
\end{aligned}$$

Ορίζουμε το διάνυσμα των βαρών, δηλαδή το διάνυσμα των ποσοστών του κεφαλαίου του επενδυτή που επενδύεται στο περιουσιακά στοιχεία με κίνδυνο ως εξής:

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

και το διάνυσμα των αναμενόμενων τιμών των αποδόσεων ως εξής

$$\tilde{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \ . \tag{4.5}$$

Επιπλέον ορίζουμε τα διανύσματα

$$\tilde{r} = \begin{bmatrix} r_1 - r_f \\ r_2 - r_f \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

και

$$\tilde{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 - r_f \\ \mu_2 - r_f = \end{bmatrix} = \mu - i r_f \tag{4.7}$$

όπου $i = [1, 1]^\top$ είναι το διάνυσμα μονάδων.

Επίσης ορίζουμε τη μήτρα Σ η οποία είναι η μήτρα διακυμάνσεων-συνδυακυμάνσεων

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \ . \tag{4.8}$$

Η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(r_p\right) &= r_f + \left[\, w_1, w_2 \right] \begin{bmatrix} \mu_1 - r_f \\ \mu_2 - r_f \end{bmatrix} \\ \Longrightarrow \ \mu_p &= r_f + w^\top \tilde{\mu} \end{aligned} \tag{4.9}$$

και η διακύμανση του χαρτοφυλακίου γράφεται ως εξής:

$$\sigma^2 = \left[\, w_1, w_2 \right] \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \ = \ w^\top \Sigma w \ . \tag{4.10}$$

Ορίζουμε τα βαθμωτά

$$\begin{aligned} b_0 &= \mu^\top \Sigma^{-1} \mu, \\ b_1 &= \mu^\top \Sigma^{-1} i = i^\top \Sigma^{-1} \mu, \\ b_2 &= i^\top \Sigma^{-1} i, \\ b &= \tilde{\mu}^\top \Sigma^{-1} \tilde{\mu} \ . \end{aligned} \tag{4.11}$$

Εφόσον οι μήτρες Σ και Σ^{-1} είναι θετικά ορισμένες, δηλαδή

$$\Sigma, \Sigma^{-1} > 0 \tag{4.12}$$

και εφόσον το διάνυσμα $\mu = [\mu_1, \mu_2]^\top$ έχει θετικά στοιχεία, προκύπτει ότι b_0, b_2 και $b > 0$. Επιπλέον μπορεί να αποδειχθεί ότι $b_1 > 0$.

Το βαθμωτο b γράφεται ως εξής

$$\begin{aligned} b &= \tilde{\mu}^\top \Sigma^{-1} \tilde{\mu} \\ &= \left(\mu - i r_f\right)^\top \Sigma^{-1} \left(\mu - i r_f\right) \\ &= \left(\mu^\top - i^\top r_f\right) \Sigma^{-1} \left(\mu - i r_f\right) \\ &= \mu^\top \Sigma^{-1} \mu - \mu^\top \Sigma^{-1} r_f - r_f \Sigma^{-1} \mu + r_f \Sigma^{-1} r_f \\ &= b_0 - b_1 r_f - b_1 r_f + r_f^2 \left(i^\top \Sigma^{-1} i\right) \implies \\ b &= b_0 - 2 b_1 r_f + b_2 r_f^2 \ . \end{aligned} \tag{4.13}$$

Κάθε αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο επί της γραμμής κεφαλαιαγοράς έχει την ίδια αναμενόμενη απόδοση ανά μονάδα κινδύνου συγκρινόμενη με εκείνη του χαρτοφυλακίου της αγοράς, δηλαδή

$$\frac{r_p - r_f}{\sigma_p} = b^{1/2} \tag{4.14}$$

όπου $b^{1/2}$ ονομάζεται τιμή κινδύνου της αγοράς και είναι μοναδικά προσδιορισμένο σε συνθήκες ισορροπίας.

4.2 Συνάρτηση Χρησιμότητας

Η συνάρτηση χρησιμότητας του αντιπροσωπευτικού επενδυτή είναι η λογαριθμική συνάρτηση χρησιμότητας δηλαδή

$$U(r) = ln(1+r) \quad . \tag{4.15}$$

Σε αυτή την εργασία θα ασχοληθούμε με την αναμενόμενη συνάρτηση χρησιμότητας που ειναι η προσέγγιση που προτείνει ο Markowitz (1979) της οποίας τα αποτελέσματα ταυτίζονται με αυτά της αναμενόμενης χρησιμότητας. Η προσέγγιση του Markowitz ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(U) &= \mathrm{E}[ln(1+r)] \\ &\backsimeq \frac{1}{2}[ln(1+\mu+\sigma)+(1+\mu-\sigma)] \\ &= \frac{1}{2}[ln(1+\mu+\sigma)(1+\mu-\sigma)] \\ &= \frac{1}{2}ln\left[(1+\mu)^2-\sigma^2\right] \quad , \end{aligned} \tag{4.16}$$

από την οποία προκύπτει ότι είναι μια συνάρτηση που εξαρτάται από τον μέσο και τη διακύμανση με

$$(1+\mu)^2 > \sigma^2 \implies 1+\mu > \sigma \quad .$$

Η αναμενόμενη συνάρτηση χρησιμότητας συμβολίζεται ως εξής:

$$V\left(\mu,\sigma^2\right) = \frac{1}{2}ln\left[(1+\mu)^2-\sigma^2\right] \quad . \tag{4.17}$$

4.3 Υπολογισμός Βέλτιστης Συνάρτησης Χρησιμότητας

Σκοπός είναι να μεγιστοποιήσουμε την αναμενόμενη χρησιμότητα υπό τους περιρισμούς $\mu = r_f + w^T\mu$ και $\sigma^2 = w^T\Sigma w$. Από τον πρώτο περιορισμό έπεται ότι:

$$\begin{aligned} \mu &= r_f + w^\top\tilde{\mu} \\ \implies 1+\mu &= \left(1+r_f+w^\top\tilde{\mu}\right) \\ \implies (1+\mu)^2 &= \left[\left(1+r_f\right)+w^\top\tilde{\mu}\right]^2 \\ \implies (1+\mu)^2 &= \left(1+r_f\right)^2 + 2\left(1+r_f\right)w^\top\tilde{\mu} + w^\top\tilde{\mu}\tilde{\mu}^\top w \quad . \end{aligned}$$

Επειδή

$$
\begin{aligned}
(1+\mu)^2 &> \sigma^2 \\
\Longrightarrow \left(1+r_f\right)^2 + 2\left(1+r_f\right) w^\top \tilde{\mu} + w^\top \tilde{\mu}\tilde{\mu}^\top w &> w^\top \Sigma w \\
\Longrightarrow \left(1+r_f\right)^2 + 2\left(1+r_f\right) w^\top \tilde{\mu} &> w^\top \Sigma w - w^\top \tilde{\mu}\tilde{\mu}^\top w \\
\Longrightarrow \left(1+r_f\right)^2 + 2\left(1+r_f\right) w^\top \tilde{\mu} &> w^\top \left(\Sigma - \tilde{\mu}\tilde{\mu}^T\right) w \ .
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

Η μεγιστοποίηση της αναμενόμενης συνάρτησης χρησιμότητας ισοδυναμεί με τη λύση του παρακάτω προβλήματος

$$
max\frac{1}{2}ln\left[(1+\mu)^2 - \sigma^2\right] = max\frac{1}{2}ln\left[\left(1+r_f\right)^2 + 2\left(1+r_f\right) w^\top \tilde{\mu} + w^\top \tilde{\mu}\tilde{\mu}^\top w - w^\top \Sigma w\right]
$$

θέτουμε

$$
A = \left(1+r_f\right)^2 + 2\left(1+r_f\right) w^\top \tilde{\mu} + w^\top \tilde{\mu}\tilde{\mu}^\top w - w^\top \Sigma w \ .
$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης είναι:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial w} &= 0 \\
\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{2}lnA\right) &= \frac{1}{2}A^{-1}A' = 0 \\
\Longrightarrow \frac{1}{2}A^{-1}\left[2\left(1+r_f\right)\tilde{\mu} + 2\tilde{\mu}\tilde{\mu}^\top w - 2\Sigma w\right] &= 0 \\
\Longrightarrow A^{-1}\left[\left(1+r_f\right)\tilde{\mu} + \tilde{\mu}\tilde{\mu}^\top w - \Sigma w\right] &= 0 \ .
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

Επειδή η βαθμωτή ποσότητα Α είναι θετική,γιατί βρίσκεται στο εσωτερικό του λογαρίθμου και από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι ο λογάριθμος lnA ορίζεται για $A > 0$, δηλαδή

$$
A > 0 \implies A^{-1} > 0 \ , \tag{4.20}
$$

έπεται ότι

$$
\left(1+r_f\right)\tilde{\mu} + \tilde{\mu}\tilde{\mu}^\top w - \Sigma w = 0 \tag{4.21}
$$

Οι συνθήκες δεύτερης τάξης είναι:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial w^\top \partial w}\left(\frac{1}{2} lnA\right) &= \frac{\partial}{\partial w^\top}\left[\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{2} lnA\right)\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial w^\top}\left\{A^{-1}\left[\left(1+r_f\right)\tilde{\mu}+\tilde{\mu}\tilde{\mu}^\top w-\Sigma w\right]\right\} \\ &= -A^{-2}\left[\left(1+r_f\right)\tilde{\mu}+\tilde{\mu}\tilde{\mu}^\top w-\Sigma w\right]+A^{-1}\frac{\partial}{\partial w^\top}\left[\left(1+r_f\right)\tilde{\mu}+\tilde{\mu}\tilde{\mu}^\top w-\Sigma w\right]\end{aligned} \tag{4.22}$$

το οποίο μπορεί να απλοποιηθεί καθώς από τις συνθήκες πρώτης τάξης έχουμε:

$$\left(1+r_f\right)\tilde{\mu}+\tilde{\mu}\tilde{\mu}^\top-\Sigma w=0$$

και επίσης

$$A=\left(1+r_f\right)^2+2\left(1+r_f\right)w^\top\tilde{\mu}+w^\top\tilde{\mu}\tilde{\mu}^\top w-w^\top\Sigma w \tag{4.23}$$

Αντί να παραγωγίσω απευθείας την ποσότητα $\left[\left(1+r_f\right)\tilde{\mu}+\tilde{\mu}\tilde{\mu}^\top w-\Sigma w\right]$, κάνοντας πράξεις βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}\left(1+r_f\right)\tilde{\mu}+\tilde{\mu}\tilde{\mu}^\top w-\Sigma w &= \left(1+r_f\right)\tilde{\mu}+\tilde{\mu}^\top w\tilde{\mu}-\Sigma w \\ &= \left(1+r_f+\tilde{\mu}^\top w\right)\tilde{\mu}-\Sigma w \\ &= (1+\tilde{\mu})\,\tilde{\mu}-\Sigma w\end{aligned}$$
$$. \tag{4.24}$$

Επομένως η παράγωγος της τροποποιημένης-απλοποιημένης σχέσης βρίσκεται ως εξής:

$$\frac{\partial}{\partial w^\top}\left[(1+\mu)\,\tilde{\mu}-\Sigma w\right]=-\Sigma<0\ .$$

Από την εξίσωση (4.22) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}&\left[\left(1+r_f\right)^2+2\left(1+r_f\right)w^\top\tilde{\mu}+w^\top\tilde{\mu}\tilde{\mu}^\top-w^\top\Sigma w\right]^{-1}\frac{\partial}{\partial w^\top}\left[\left(1+r_f\right)\tilde{\mu}+\tilde{\mu}^\top w\tilde{\mu}-\Sigma w\right]= \\ &\qquad\left[\left(1+r_f\right)^2+2\left(1+r_f\right)w^\top\tilde{\mu}+w^\top\tilde{\mu}\tilde{\mu}^\top-w^\top\Sigma w\right]^{-1}(-\Sigma)<0\ .\end{aligned} \tag{4.25}$$

Εφόσον η μήτρα Σ είναι μία θετικά ορισμένη μήτρα και $A>0$, από την εξίσωση (4.25) έπεται ότι έχουμε μέγιστο.

Εξισώνοντας τις συνθήκες πρώτης τάξης με το μηδέν, βρίσκουμε το χαρτοφυλάκιο ισορροπίας ως εξής:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial w} = 0 \implies & \left(1 + r_f\right)\tilde{\mu} + \tilde{\mu}\tilde{\mu}^\top w - \Sigma w = 0 \\
\implies & \left(1 + r_f\right)\tilde{\mu} + \tilde{\mu}^\top w \tilde{\mu} - \Sigma w = 0 \\
\implies & \left[\left(1 + r_f\right) + \tilde{\mu}^\top w\right]\tilde{\mu} - \Sigma w = 0 \\
\implies & (1 + \tilde{\mu})\,\tilde{\mu} - \Sigma w = 0 \ .
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

Έστω μ_ϵ η αναμενόμενη απόδοση ισορροπίας του χαρτοφυλακίου του επενδυτή. Ισχύει ότι:

$$
\begin{aligned}
(1 + \mu_\epsilon)\,\tilde{\mu} - \Sigma w_\epsilon &= 0 \\
\implies w_\epsilon &= (1 + \mu_\epsilon)\,\Sigma^{-1}\tilde{\mu} \\
\implies w_\epsilon^\top &= (1 + \mu_\epsilon)\,\tilde{\mu}^\top\Sigma^{-1} \ .
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

Λύνοντας τη σχέση αυτή ως προς μ_ϵ έχουμε :

$$
\begin{aligned}
\implies \mu_\epsilon &= r_f + W_\epsilon^\top \mu \\
\implies \mu_\epsilon &= r_f + (1 + \mu_\epsilon)\,\mu^\top\Sigma^{-1}\mu \\
\implies \mu_\epsilon &= r_f + (1 + \mu_\epsilon)\,b \\
\implies \mu_\epsilon &= r_f + b + \mu_\epsilon b \\
\implies \mu_\epsilon &= \frac{r_f + b}{1 - b} \\
\implies 1 + \mu_\epsilon &= 1 + \frac{r_f + b}{1 - b} \\
\implies 1 + \mu_\epsilon &= \frac{1 + r_f}{1 - b}
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

και η αναμενόμενη απόδοση ισορροπίας είναι:

$$
\mu_\epsilon = \frac{r_f - b}{1 - b} \ .
$$

Η διακύμανση του χαρτοφυλακίου ισορροπίας του επενδυτή είναι:

$$\begin{aligned}
\sigma_\epsilon^2 &= w^\top \Sigma w \implies \\
\sigma_\epsilon^2 &= (1+\mu_\epsilon)\,\tilde{\mu}^\top \Sigma^{-1} \Sigma (1+\mu_\epsilon)\,\Sigma^{-1}\tilde{\mu} \implies \\
\sigma_\epsilon^2 &= (1+\mu_\epsilon)^2\,\tilde{\mu}^\top \Sigma^{-1}\tilde{\mu} \implies \\
\sigma_\epsilon^2 &= (1+\mu_\epsilon)^2\, b \implies \\
\sigma_\epsilon^2 &= \frac{\left(1+r_f\right)^2}{(1-b)^2} b \implies \\
\sigma_\epsilon &= \frac{1+r_f}{1-b} b^{1/2} \ .
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Το χαρτοφυλάκιο ισορροπίας εξαρτάται από τον μέσο και τη διακύμανση ισορροπίας και το διάνυσμα των βαρών ισορροπίας είναι:

$$w_\epsilon^\top = (1+\mu_\epsilon)\,\tilde{\mu}^\top \Sigma^{-1} \ . \tag{4.30}$$

Επομένως,

$$\mu_= r_f + w^\top \tilde{\mu} = r_f + (1+\mu_\epsilon)\,\tilde{\mu}^\top \Sigma^{-1}\tilde{\mu} \ . \tag{4.31}$$

Εφόσον

$$\tilde{\mu}^\top \Sigma^{-1}\tilde{\mu} = b \ , \tag{4.32}$$

βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mu_\epsilon &= r_f + (1+\mu_\epsilon)\, b \\
\implies \mu_\epsilon &= r_f + b + \mu_\epsilon b \\
\implies \mu_\epsilon (1-b) &= r_f + b \\
\implies \mu_\epsilon &= \frac{r_f + b}{1-b} \ .
\end{aligned} \tag{4.33}$$

(4.34)

Ως εκ τούτου το διάνυσμα των βαρών ισορροπίας από την εξίσωση (4.28) και (4.29) είναι:

$$w_\epsilon = \frac{1+r_f}{1-b} \Sigma^{-1}\tilde{\mu} \tag{4.35}$$

4.4 Αναμενόμενη Χρησιμότητα Ισορροπίας

Ως βέλτιστο χαρτοφυλάκιο ορίζουμε αυτό με τη μεγαλύτερη αναμενόμενη συνάρτηση χρησιμότητας όλων των χαρτοφυλακίων. Αυτό το χαρτοφυλάκιο ορίζεται από τις συντεταγμένες του σημείου ισορροπίας, οπότε η αναμενόμενη λογαριθμική συνάρτηση χρησιμότητας στην ισορροπία του επενδυτή προκύπτει από την αντικατάσταση των σημείων ισορροπίας δηλαδή των εξισώσεων (4.28) και (4.29) στην εξίσωση (4.17) και προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} ln \left[(1+\mu)^2 - \sigma^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} ln \left[\left(\frac{1+r_f}{1-b} \right)^2 - \left(\frac{1+r_f}{1-b} \right)^2 b \right] \\ &= \frac{1}{2} ln \left[\left(\frac{1+r_f}{1-b} \right)^2 (1-b) \right] \\ &= \frac{1}{2} ln \left[\left(\frac{\left(1+r_f\right)^2}{1-b} \right] \ . \end{aligned} \tag{4.36}$$

Κεφάλαιο 5

Χρηματιστηριακή Αγορά Με Φούσκα

5.1 Αντικειμενικές Συνθήκες της Αγοράς

Με την ύπαρξη της φούσκας, ενώ ο επενδυτής πιστεύει ότι οι αποδόσεις του είναι r_i στην πραγματικότητα αυτές είναι $k_i r_i$, όπου k_i ένας θετικος αριθμός . Οι καινούργιες αυτές αποδόσεις δημιουργούν την λανθασμένη πεποίθηση ότι με τα ίδια σ_i μπορεί ο επενδυτής να πάρει μεγαλύτερες αποδόσεις. Ωστόσο, με την ύπαρξη της φούσκας ο κίνδυνος είναι μεγαλύτερος και από τις καινούργιες αποδόσεις προκύπτει μια καινούργια γραμμή κεφαλαιαγοράς.

Ορίζουμε τον 2×2 πίνακα :

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} . \tag{5.1}$$

Επομένως, το διάνυσμα των αποδόσεων με φούσκα γράγεται ως εξής:

$$r_{i*} = Kr = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} . \tag{5.2}$$

Η αναμενόμενη απόδοση του i περιουσιακού στοιχείου γράφεται ως εξής:

$$\mu_{i*} = \mathrm{E}\left(r_{i*}\right) = \mathrm{E}\left(k_i r_i\right) = k_i \mu_i \tag{5.3}$$

Η αναμενόμενη διακύμανση του i περιουσιακού στοιχείου γράφεται ως εξής:

$$\sigma_{i*}^2 = \mathrm{var}\left(r_{i*}\right) = k_i^2 \,\mathrm{var}\left(r_i^2\right) = k_i^2 \sigma_i^2 \tag{5.4}$$

Ορίζουμε το διάνυσμα

$$\tilde{\mu}_* = \begin{bmatrix} \tilde{\mu}_{1*} - r_f \\ \tilde{\mu}_{2*} - r_f \end{bmatrix} = \mu_* - r_f = K\mu - r_f \ . \tag{5.5}$$

Η μήτρα διακυμάνσεων είναι ένας 2×2 πίνακας

$$\Sigma_* = K \Sigma K \implies \Sigma_*^{-1} = K^{-1} \Sigma^{-1} K^{-1} \tag{5.6}$$

Για να βρούμε το άριστο χαρτοφυλάκιο υπό την επίδραση της φούσκας, μεγιστοποιούμε την αναμενόμενη λογαριθμική συνάρτηση χρησιμότητας υπό τους περιορισμούς:

$$\mu_* = r_f + w_*^\top \tilde{\mu}_* \ , \tag{5.7}$$

$$\sigma_*^2 = w_*^\top \Sigma_* w_* \tag{5.8}$$

Ορίζουμε τα βαθμωτά

$$\begin{aligned} b_* &= \tilde{\mu}_*^\top \Sigma_*^{-1} \tilde{\mu}_* \implies \\ b_* &= \left(K\mu - ir_f\right)^\top K^{-1}\Sigma^{-1}K^{-1}\left(K\mu - ir_f\right) \implies \\ b_* &= \left(\mu^\top K - i^\top r_f\right) K^{-1}\Sigma^{-1}K^{-1}\left(K\mu - ir_f\right) \end{aligned} \tag{5.9}$$

Οι συντελεστές των αποδόσεων είναι

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \implies K^\top = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} = K$$

Η απόδοση του χαρτοφυλακίου υπό την επίδραση της φούσκας είναι

$$r_{p*} = w_0 r_f + w_1 r_{1*} + w_2 r_{2*} = w_0 r_f + w_1 k_1 r_1 + w_2 k_2 r_2 > w_0 r_f + w_1 r_1 + w_2 r_2 = r_p \tag{5.10}$$

Επίσης, το άθροισμα των βαρών κάτω από την επίδραση της φούσκας ειναι $w_{0*} + w_{1*} + w_{2*} = 1$ που δηλώνει πως όλο το διαθέσιμο κεφάλαιο επενδύεται.

Η απόδοση του χαρτοφυλακίου πριν και κατά τη διάρκεια της φούσκας προκύπτει ότι έχουν την εξής σχέση:

$$r_{p*} = w_0 r_f + w_1 r_{1*} + w_2 r_{2*} = w_0 r_f + w_1 k_1 r_1 + w_2 k_2 r_2 > w_0 r_f + w_1 r_1 + w_2 r_2 = r_p \ . \tag{5.11}$$

Αντίστοιχα προκύπτει ότι η αναμενόμενη απόδοση πριν και κατά τη διάρκεια της φούσκας σχετίζονται ως εξής:

$$\mu_{p*} = w_0 r_f + w_1 \mu_{*1} + w_2 \mu_{*2} = w_0 r_f + w_1 k_1 \mu_1 + w_2 k_2 \mu_2 > w_0 r_f + w_1 \mu_1 + w_2 \mu_2 = \mu_p \tag{5.12}$$

5.2 Συνάρτηση Χρησιμότητας υπό την Επίδραση της Φούσκας

Η συνάρτηση χρησιμότητας του αντιπροσωπευτικού επενδυτή υπό την επίδραση της φούσκας είναι η λογαριθμική συνάρτηση χρησιμότητας, δηλαδή:

$$U(r_*) = ln(1 + r_*) \quad . \tag{5.13}$$

Και σε αυτή την περίπτωση θα ασχοληθούμε με την προσέγγιση που προτείνει ο Markowitz (1979). Ως εκ τούτου,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(U_*) &= \mathrm{E}[ln(1 + r_*)] \\ &\backsimeq \frac{1}{2}[ln(1 + \mu_* + \sigma_*) + (1 + \mu_* - \sigma_*)] \\ &= \frac{1}{2}[ln(1 + \mu_* + \sigma_*)(1 + \mu_* - \sigma_*)] \\ &= \frac{1}{2}ln\left[(1 + \mu_*)^2 - \sigma_*^2\right] \quad , \end{aligned} \tag{5.14}$$

όπου

$$(1 + \mu_*)^2 > 0 \implies (1 + \mu_*)^2 > \sigma_*^2 \implies 1 + \mu_* > \sigma_*$$

είναι μια συνάρτηση που εξαρτάται από το μέσο και τη διακύμανση οπότε μπορώ να τη συμβολίσω ως εξής:

$$V_*\left(\mu_*, \sigma_*^2\right) = \frac{1}{2}ln\left[(1 + \mu_*)^2 - \sigma_*^2\right] \quad . \tag{5.15}$$

5.3 Υπολογισμός της Βέλτιστης Συνάρτησης Χρησιμότητας

Σκοπός είναι να μεγιστοποιήσω την αναμενόμενη χρησιμότητα υπό τους περιορισμούς $\mu_* = r_f + w_*^T \mu$ και $\sigma_*^2 = w_*^\top \Sigma_* w_*$ όπου,

$$\begin{aligned} \mu_* &= r_f + w_*^\top \tilde{\mu}_* \\ \Longrightarrow 1 + \mu_* &= \left(1 + r_f + w_*^\top \tilde{\mu}_*\right) \\ \Longrightarrow (1 + \mu_*)^2 &= \left[\left(1 + r_f\right) + w_*^\top \tilde{\mu}_*\right]^2 \\ \Longrightarrow (1 + \mu_*)^2 &= \left(1 + r_f\right)^2 + 2\left(1 + r_f\right) w_*^\top \tilde{\mu}_* + w_*^\top \tilde{\mu}_* \tilde{\mu}_*{}^\top w_* \ . \end{aligned}$$

Επιπλέον,

$$\begin{aligned} (1 + \mu_*)^2 &> \sigma_*^2 \\ \Longrightarrow \left(1 + r_f\right)^2 + 2\left(1 + r_f\right) w_*^\top \tilde{\mu}_* + w_*^\top \tilde{\mu}_* \tilde{\mu}_*{}^\top w_* &> w_*^\top \Sigma_* w_* \\ \Longrightarrow \left(1 + r_f\right)^2 + 2\left(1 + r_f\right) w_*^\top \tilde{\mu}_* &> w_*^\top \Sigma_* w_* - w_*^\top \tilde{\mu}_* \tilde{\mu}_*{}^\top \\ \Longrightarrow \left(1 + r_f\right)^2 + 2\left(1 + r_f\right) w_*^\top \tilde{\mu}_* &> w_*^\top \left(\Sigma_* - \tilde{\mu}_* \tilde{\mu}_*{}^T\right) w_* \ . \end{aligned} \tag{5.16}$$

Η μεγιστοποίηση της αναμενόμενης συνάρτησης χρησιμότητας ισοδυναμεί με τη λύση του παρακάτω προβλήματος

$$max \frac{1}{2} ln \left[(1 + \mu_*)^2 - \sigma_*^2\right] = max \frac{1}{2} ln \left[\left(1 + r_f\right)^2 + 2\left(1 + r_f\right) w_*^\top \tilde{\mu}_* + w_*^\top \tilde{\mu}_* \tilde{\mu}_*{}^\top w_* - w_*^\top \Sigma_* w_*\right] \tag{5.17}$$

θέτουμε

$$A_* = \left(1 + r_f\right)^2 + 2\left(1 + r_f\right) w_*^\top \tilde{\mu}_* + w_*^\top \tilde{\mu}_* \tilde{\mu}_*{}^\top w_* - w_*^\top \Sigma_* w_* \ .$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης είναι

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_*}{\partial w_*} &= 0 \\ \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial w_*} \left(\frac{1}{2} ln A_*\right) &= \frac{1}{2} A_*^{-1} A_*' = 0 \\ \Longrightarrow A_*^{-1} \left[2\left(1 + r_f\right) \tilde{\mu}_* + 2 \tilde{\mu}_* \tilde{\mu}_*{}^\top w_* - 2 \Sigma_* w_*\right] &= 0 \\ \Longrightarrow A_*^{-1} \left[\left(1 + r_f\right) \tilde{\mu}_* + \tilde{\mu}_* \tilde{\mu}_*{}^\top w_* - \Sigma_* w_*\right] &= 0 \ . \end{aligned} \tag{5.18}$$

Επειδή η βαθμωτή ποσότητα A_* είναι θετική, δηλαδή

$$A_* > 0 \Longrightarrow A_*^{-1} > 0 \ , \tag{5.19}$$

έπεται ότι

$$\left(1 + r_f\right)\tilde{\mu}_* + \tilde{\mu}_*\tilde{\mu}_*{}^\top w_* - \Sigma_* w_* \quad = \quad 0\ . \tag{5.20}$$

Οι συνθήκες δεύτερης τάξης είναι:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V_*}{\partial w_*^\top \partial w_*}\left(\frac{1}{2}lnA_*\right) &= \frac{\partial}{\partial w_*^\top}\left[\frac{\partial V_*}{\partial w_*}\left(\frac{1}{2}lnA_*\right)\right]\\ &= \frac{\partial}{\partial w_*^\top}\left\{A_*^{-1}\left[\left(1+r_f\right)\tilde{\mu}_* + \tilde{\mu}_*\tilde{\mu}_*{}^\top w_* - \Sigma_* w_*\right]\right\}\\ &= -A_*^{-2}\left[\left(1+r_f\right)\tilde{\mu}_* + \tilde{\mu}_*\tilde{\mu}_*{}^\top w_* - \Sigma_* w_*\right] + A_*^{-1}\frac{\partial}{\partial w_*^\top}\left[\left(1+r_f\right)\tilde{\mu}_* + \tilde{\mu}_*\tilde{\mu}_*{}^\top w_* - \Sigma_* w_*\right]\end{aligned} \tag{5.21}$$

το οποίο μπορεί να απλοποιηθεί καθώς από τις συνθήκες πρώτης τάξης έχουμε:

$$\left(1 + r_f\right)\tilde{\mu}_* + \tilde{\mu}_*\tilde{\mu}_*{}^\top w_* - \Sigma_* w_* = 0 \tag{5.22}$$

και επίσης

$$A_* = \left(1 + r_f\right)^2 + 2\left(1 + r_f\right) w_*^\top \tilde{\mu}_* + w_*^\top \tilde{\mu}_*\tilde{\mu}_*{}^\top w_* - w_*^\top \Sigma_* w_*\ .$$

αντί να παραγωγίσω απευθείας την ποσότητα $\left[\left(1 + r_f\right)\tilde{\mu}_* + \tilde{\mu}_*\tilde{\mu}_*^\top w_* - \Sigma_* w_*\right]$ κάνοντας πράξεις βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned}\left(1 + r_f\right)\tilde{\mu}_* + \tilde{\mu}_*\tilde{\mu}_*{}^\top w_* - \Sigma_* w_* &= \left(1 + r_f\right)\tilde{\mu}_* + \tilde{\mu}_*{}^\top w_*\tilde{\mu}_* - \Sigma_* w_*\\ &= \left(1 + r_f + \tilde{\mu}_*{}^\top w_*\right)\tilde{\mu}_* - \Sigma_* w_*\\ &= \left(1 + \tilde{\mu}_*\right)\tilde{\mu}_* - \Sigma_* w_*\ .\end{aligned}$$

Επομένως η παράγωγος της τροποποιημένης- απλοποιημένης σχέσης βρίσκεται ως εξής:

$$\frac{\partial}{\partial w_*^\top}\left[\left(1 + \mu_*\right)\tilde{\mu}_* - \Sigma_* w_*\right] = -\Sigma_* < 0\ . \tag{5.23}$$

Από την εξίσωση (5.21) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}&\left[\left(1 + r_f\right)^2 + 2\left(1 + r_f\right) w_*^\top \tilde{\mu}_* + w_*^\top \tilde{\mu}_*\tilde{\mu}_*{}^\top - w_*^\top \Sigma_* w_*\right]^{-1}\frac{\partial}{\partial w_*^\top}\left[\left(1 + r_f\right)\tilde{\mu}_* + \tilde{\mu}_*{}^\top w_*\tilde{\mu}_* - \Sigma_* w_*\right] =\\ &\qquad\left[\left(1 + r_f\right)^2 + 2\left(1 + r_f\right) w_*^\top \tilde{\mu}_* + w_*^\top \tilde{\mu}_*\tilde{\mu}_*{}^\top - w_*^\top \Sigma_* w_*\right]^{-1}\left(-\Sigma_*\right) < 0\ .\end{aligned} \tag{5.24}$$

Εφόσον η μήτρα Σ είναι μία θετικά ορισμένη μήτρα,από την εξίσωση (5.24) έπεται ότι έχουμε μέγιστο. Έπειτα εξισώνοντας τις συνθήκες πρώτης τάξης με το μηδέν, βρίσκουμε το χαρτοφυλάκιο ισορροπίας ως εξής:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V_*}{\partial w_*} = 0 \implies & \left(1 + r_f\right) \tilde{\mu}_* + \tilde{\mu}_* \tilde{\mu}_*{}^\top w_* - \Sigma_* w_* = 0 \\
\implies & \left(1 + r_f\right) \tilde{\mu}_* + \tilde{\mu}_*{}^\top w_* \tilde{\mu}_* - \Sigma_* w_* = 0 \\
\implies & \left[\left(1 + r_f\right) + \tilde{\mu}_*{}^\top w_*\right] \tilde{\mu}_* - \Sigma_* w_* = 0 \\
\implies & \left(1 + \tilde{\mu}_*\right) \tilde{\mu}_* - \Sigma_* w_* = 0 \qquad (5.25) \\
& . \qquad (5.26)
\end{aligned}
$$

Έστω $\mu_{\epsilon *}$ η αναμενόμενη απόδοση ισορροπίας χαρτοφυλακίου του επενδυτή. Ισχύει ότι

$$
\begin{aligned}
\left(1 + \mu_{\epsilon *}\right) \mu_* - \Sigma_* w_{\epsilon *} &= 0 \\
\implies w_{\epsilon *} &= \left(1 + \mu_{\epsilon *}\right) \Sigma_*^{-1} \tilde{\mu}_* \\
\implies w_{\epsilon *}^\top &= \left(1 + \mu_{\epsilon *}\right) \tilde{\mu}_*{}^\top \Sigma_*^{-1} \ .
\end{aligned}
\qquad (5.27)
$$

Λύνοντας αυτή τη σχέση ως προς $\mu_{\epsilon *}$ έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\mu_{\epsilon *} &= r_f + w_{\epsilon *}^\top \mu_* \\
\implies \mu_{\epsilon *} &= r_f + \left(1 + \mu_{\epsilon *}\right) \mu_*^\top \Sigma_*^{-1} \mu_* \\
\implies \mu_{\epsilon *} &= r_f + \left(1 + \mu_{\epsilon *}\right) b_* \\
\implies \mu_{\epsilon *} &= r_f + b_* + \mu_{\epsilon *} b_* \\
\implies \mu_{\epsilon *} &= \frac{r_f + b_*}{1 - b_*} \\
\implies 1 + \mu_{\epsilon *} &= 1 + \frac{r_f + b_*}{1 - b_*} \\
\implies 1 + \mu_{\epsilon *} &= \frac{1 + r_f}{1 - b_*} \qquad (5.28)
\end{aligned}
$$

και η αναμενόμενη απόδοση ισορροπίας είναι

$$
\mu_{\epsilon *} = \frac{r_f - b_*}{1 - b_*} \ . \qquad (5.29)
$$

Η διακύμανση του χαρτοφυλακίου ισορροπίας του επενδυτή είναι

$$\begin{aligned}
\sigma^2_{\epsilon*} &= w_*^\top \Sigma_* w_* \implies \\
\sigma^2_{\epsilon*} &= (1+\mu_{\epsilon*})\, \tilde{\mu}_*{}^\top \Sigma_*^{-1} \Sigma_* \,(1+\mu_{\epsilon*})\, \Sigma_*^{-1} \tilde{\mu}_* \implies \\
\sigma^2_{\epsilon*} &= (1+\mu_{\epsilon*})^2\, \tilde{\mu}_*{}^\top \Sigma_*^{-1} \tilde{\mu}_* \implies \\
\sigma^2_{\epsilon*} &= (1+\mu_{\epsilon*})^2\, b_* \implies \\
\sigma^2_{\epsilon*} &= \frac{\left(1+r_f\right)^2}{(1-b_*)^2} b_* \implies \\
\sigma_{\epsilon*} &= \frac{1+r_f}{1-b_*} b_*^{1/2} \ .
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Το χαρτοφυλάκιο ισορροπίας εξαρτάται από το μέσο και τη διακύμανση ισορροπίας και το διάνυσμα των βαρών ισορροπίας είναι το

$$w_{\epsilon*}^\top = (1+\mu_{\epsilon*})\, \tilde{\mu}_*{}^\top \Sigma_*^{-1} \tag{5.31}$$

Επομένως,

$$\mu_{\epsilon*} = r_f + w_*{}^\top \tilde{\mu}_* = r_f + (1+\mu_{\epsilon*})\, \tilde{\mu}_*{}^\top \Sigma_*^{-1} \tilde{\mu}_* \ . \tag{5.32}$$

Εφόσον

$$\tilde{\mu}_*{}^\top \Sigma_*^{-1} \tilde{\mu}_* = b_* \tag{5.33}$$

βρίσκουμε ότι

$$\mu_{\epsilon*} = r_f + (1+\mu_{\epsilon*})\, b_* \implies \mu_{\epsilon*} = r_f + b_* + \mu_{\epsilon*} b_* \implies \mu_{\epsilon*}\,(1-b_*) = r_f + b_* \ .$$

Ως εκ τούτου το διάνυσμα των βαρών ισορροπίας είναι από την εξίσωση (5.27) και (5.28) είναι

$$w_{\epsilon*} = \frac{1+r_f}{1-b_*} \Sigma_*^{-1} \tilde{\mu}_* \tag{5.34}$$

5.4 Αναμενόμενη Χρησιμότητα Ισορροπίας με Φούσκα

Ως βέλτιστο χαρτοφυλάκιο ορίζουμε αυτό με τη μεγαλύτερη αναμενόμενη συνάρτηση χρησιμότητας όλων των χαρτοφυλακίων. Αυτό το χαρτοφυλάκιο ορίζεται από τις συντεταγμένες του σημείου ισορροπίας, οπότε η αναμενόμενη λογαριθμική συνάρτηση χρησιμότητας υπό την επίδραση της φούσκας στην ισορροπία του επενδυτή προκύπτει από την αντικατάσταση των σημείων ισορροπίας δηλαδή των εξισώσεων (5.28) και (5.30) στην εξίσωση (5.15) και προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} V_* &= \frac{1}{2} ln\left[(1+\mu_*)^2 - \sigma_*^2\right] \\ &= \frac{1}{2} ln\left[\left(\frac{1+r_f}{1-b_*}\right)^2 - \left(\frac{1+r_f}{1-b_*}\right)^2 b_*\right] \\ &= \frac{1}{2} ln\left[\left(\frac{1+r_f}{1-b_*}\right)^2 (1-b_*)\right] \\ &= \frac{1}{2} ln\left[\left(\frac{\left(1+r_f\right)^2}{1-b_*}\right.\right] \;. \end{aligned} \tag{5.35}$$

Κεφάλαιο 6

Συγκρίσεις

Σε αυτή την ενότητα θα συγκρίνουμε τα χαρτοφυλάκια E, E', E_* και E'_* για τα οποία ισχύουν τα ακόλουθα:

- Χαρτοφυλακιο E: είναι το χαρτοφυλάκιο ισορροπίας πριν την ύπαρξη της φούσκας το οποίο έχει αναμενόμενη απόδοση:

  $$\mu_\epsilon = r_f + \sigma_\epsilon b^{1/2}$$

  και κίνδυνο

  $$\sigma_\epsilon \ .$$

- Χαρτοφυλακιο E': είναι το χαρτοφυλάκιο υπό την επίδραση της φούσκας το οποίο έχει αναμενόμενη απόδοση

  $$\mu'_\epsilon = r_f + \sigma_\epsilon b_*^{1/2}$$

  και κίνδυνο

  $$\sigma'_\epsilon = \sigma_\epsilon \ .$$

- Χαρτοφυλακιο E_*: είναι το χαρτοφυλάκιο ισορροπίας υπό την επίδραση της φούσκας το οποίο έχει αναμενόμενη απόδοση

  $$\mu_{\epsilon *} = r_f + \sigma_{\epsilon *} b_*^{1/2}$$

  και κίνδυνο

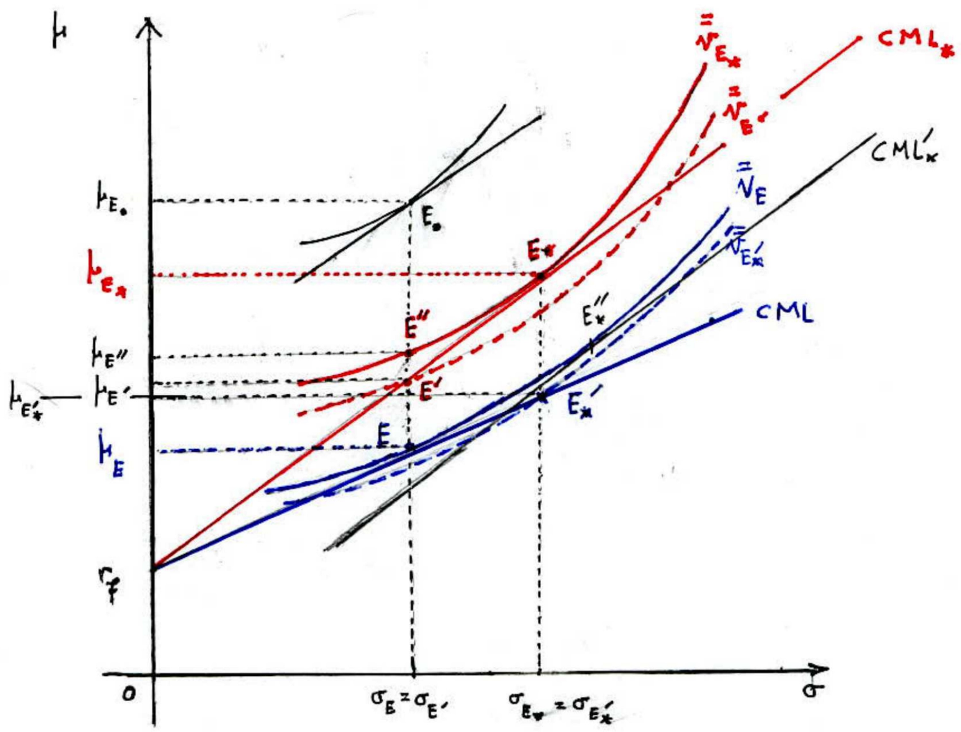
  $$\sigma_{\epsilon *} \ .$$

- Χαρτοφυλακιο E'_*: είναι το χαρτοφυλάκιο μετά την κατάρρευση της φούσκας το οποίο έχει αναμενόμενη απόδοση

  $$\mu'_{\epsilon *} = r_f + \sigma_{\epsilon *} b^{1/2}$$

  και κίνδυνο

  $$\sigma'_{\epsilon_*} = \sigma_{\epsilon *} \ .$$



Σχήμα 6.1: Διάγραμμα 1

6.1 Σύγκριση E και E'

Αρχικά θα συγκρίνουμε τις συντεταγμένες των σημείων E και E'. Υπό την επίδραση της φούσκας ο επενδυτής αναμένει να λάβει αποδόσεις r_f, r_{1*}, r_{2*} και σε αυτήν την περίπτωση παρερμηνεύει την κατάσταση και αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μπερδεύει το χαρτοφυλάκιο E με το E', στο οποίο ο κίνδυνος παραμένει σταθερός. Έτσι ο επενδυτής αναμένει να λάβει μεγαλύτερες αποδόσεις με τον ίδιο κίνδυνο. Όμως το σημείο αυτό δεν είναι το σημείο ισορροπίας υπό την επίδραση της φούσκας. Από το διάγραμμα φαίνεται πως $\mu'_\epsilon > \mu_\epsilon$ και $\sigma'_\epsilon = \sigma_\epsilon$. Επομένως θα ελέγξουμε αν ισχύει $V'_\epsilon > V_\epsilon$. Από τη σχέση (4.17) και επειδή ο λογάριθμος είναι μια μονότονη συνάρτηση έχουμε:

$$
\begin{aligned}
V'_\epsilon &> V_\epsilon \\
\Longrightarrow (1+\mu'_\epsilon)^2 - \sigma_\epsilon^{2\prime} &> (1+\mu_\epsilon)^2 - \sigma_\epsilon^2 \\
\Longrightarrow (1+\mu'_\epsilon)^2 - (1+\mu_\epsilon)^2 &> 0 \\
\Longrightarrow (\mu'_\epsilon - \mu_\epsilon)(\mu'_\epsilon + \mu_\epsilon + 2) &> 0\ ,
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

το οποίο ισχύει, άρα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι και η αρχική μου υπόθεση ήταν σωστή. Γίνεται φανερό ότι ο επενδυτής παρερμηνεύει την πραγματική κατάσταση καθώς θεωρεί ότι οι αποδόσεις που θα λάβει υπό την επίδραση της φούσκας είναι στο E', όμως αυτό δεν είναι το σημείο ισορροπίας αφού με μεγαλύτερη απόδοση θα λάβει μεγαλύτερο κίνδυνο και θα μετακινηθεί δεξιότερα στο E_* για να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη χρησιμότητα του.

6.2 Σύγκριση των σημείων E' και E_*

Το σημείο Ε΄ δεν είναι το σημείο ισορροπίας υπό την επίδραση της φούσκας, οπότε η ισορροπία θα βρίσκεται ακόμα πιο πάνω σε επίπεδο αναμενόμενης χρησιμότητας ίσο με την αναμενόμενη χρησιμότητα του E''. Στην γραμμή κεφαλαιαγοράς υπό την επίδραση της φούσκας το Ε′ δεν είναι το σημείο ισορροπίας, δηλαδή εκείνο που αποφέρει τη βέλτιστη χρησιμότητα, οπότε η ισορροπία μετακινείται ακόμα δεξιότερα στο σημείο E_*. Τα σημεία E_* και E'' προσκομίζουν την ίδια αναμενόμενη χρησιμότητα στον επενδυτή διότι βρίσκονται στην ίδια καμπύλη αδιαφορίας. Οπότε θα ελέγξουμε ότι $V''_\epsilon > V'_\epsilon$ και έχουμε, γνωρίζοντας ότι $\sigma''_\epsilon = \sigma'_\epsilon = \sigma_\epsilon$ από το διάγραμμα ότι ισχύει:

$$
\begin{aligned}
V''_\epsilon &> V'_\epsilon \\
(1+\mu''_\epsilon)^2 - \sigma^{2\prime\prime}_\epsilon &> (1+\mu'_\epsilon)^2 - \sigma^{2\prime}_\epsilon \\
\Longrightarrow (1+\mu''_\epsilon)^2 - (1+\mu'_\epsilon)^2 &> 0 \\
\Longrightarrow (\mu''_\epsilon - \mu'_\epsilon)(2+\mu''_\epsilon+\mu'_\epsilon) &> 0 \ ,
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

το οποίο ισχύει καθώς $\mu''_\epsilon > \mu_\epsilon$ άρα ισχύει και η αρχική μου υπόθεση. Και επειδή $V''_\epsilon = V_{\epsilon*}$ προκύπτει ότι $V_{\epsilon*} > V'_\epsilon$.

6.3 Σύγκριση των σημείων E_* και E'_*

Υπό την επίδραση της φούσκας ο επενδυτής αναλαμβάνει μεγαλύτερο κίνδυνο επενδύοντας στο E_* όμως η αγορά μακροχρόνια δεν μπορεί να αποζημειώσει κίνδυνο τέτοιου μεγέθους με αποτέλεσμα ο επενδυτής ενώ πιστεύει ότι επένδυσε στο E_* να έχει επενδύσει στην πραγματικότητα στο E'_*.Αυτό έχει σαν συνέπεια ότι ενώ αναμένει να λάβει αποδόσεις στην γραμμή κεφαλαιαγοράς CML_* με κλίση $b_*^{1/2}$, στην πραγματικότητα θα λάβει αποδόσεις στην γραμμή κεφαλαιαγοράς με κλίση $b^{1/2}$. Οπότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} V_{\epsilon *} &> V_{\epsilon *}' \\ \Longrightarrow (1+\mu_{\epsilon *})^2 - \sigma_{\epsilon *}^2 &> (1+\mu_{\epsilon *}')^2 - \sigma_{\epsilon *}^{2\prime} \\ \Longrightarrow (1+\mu_{\epsilon *})^2 - (1+\mu_{\epsilon *}')^2 &> 0 \\ \Longrightarrow (\mu_{\epsilon *} - \mu_{\epsilon *}')(2+\mu_{\epsilon *}+\mu_{\epsilon *}') &> 0 \quad , \end{aligned} \tag{6.3}$$

το οποίο ισχύει γιατί ισχύουν τα $\mu_{\epsilon *} > \mu_{\epsilon *}'$ και

$$\sigma_{\epsilon *}' = \sigma_{\epsilon *} \implies \mu_{\epsilon *}' b_*^{\frac{1}{2}} = \mu_{\epsilon *} b^{\frac{1}{2}} \implies b_*^{\frac{1}{2}} > b^{\frac{1}{2}} \ .$$

6.4 Σύγκριση των σημείων E'_* και E

Υπό την επίδραση της φούσκας ο επενδυτής αναλαμβάνει μεγαλύτερο κίνδυνο, όμως η αγορά μακροχρόνια δεν μπορεί να αποζημειώσει κίνδυνο τέτοιου μεγέθους με αποτέλεσμα ο επενδυτής ενώ πιστεύει πως επένδυσε στο E_*, έχει επενδύσει στην πραγματικότητα στο E'_*. ΄Ομως αυτό δεν είναι το σημείο ισορροπίας οπότε πηγαίνει στο E το οποίο είναι το αρχικό σημείο ισορροπίας. Αυτό έχει σαν συνέπεια ότι ενώ αναμένει να λάβει αποδόσεις στην γραμμή κεφαλαιαγοράς CML_* με κλίση $b_*^{1/2}$, στην πραγματικότητα θα λάβει αποδόσεις στην CML με κλίση $b^{1/2}$. Θα συγκρίνουμε αρχικά τις συντεταγμένες του E''_* και του E'_*, δηλαδή θα ελέγξουμε αν $V_{\epsilon *}'' > V_{\epsilon *}'$,για το οποίο ισχύει $\mu_{\epsilon *}'' > \mu_{\epsilon *}'$ και $\sigma_{\epsilon *}^{2\prime\prime} = \sigma_{\epsilon *}^{2\prime} = \sigma_{\epsilon *}^2$. Θα πρέπει να ισχύει

$$\begin{aligned} (1+\mu_{\epsilon *}'')^2 - \sigma_{\epsilon *}^2 &> (1+\mu_{\epsilon *}') - \sigma_{\epsilon *}^2 \\ \Longrightarrow (1+\mu_{\epsilon *}'')^2 - (1+\mu_{\epsilon *}')^2 &> 0 \\ \Longrightarrow (\mu_{\epsilon *}'' - \mu_{\epsilon *}')(2+\mu_{\epsilon *}''+\mu_{\epsilon *}') &> 0 \quad . \end{aligned} \tag{6.4}$$

΄Ομως $V''_{\epsilon *} = V_\epsilon$ γιατί βρίσκονται στην ίδια καμπύλη αδιαφορίας και επειδή αποδείξαμε ότι $V_{\epsilon *}'' > V_{\epsilon *}'$ προκύπτει ότι $V_\epsilon > V_{\epsilon *}'$.

Κεφάλαιο 7

Συμπεράσματα Συγκρίσεων

Από τον κύκλο κινήσεων του επενδυτή πριν και υπό την επίδραση της φούσκας, προκύπτει ότι πριν τη φούσκα ο επενδυτής βρίσκεται στο χαρτοφυλάκιο E. ΄Ομως υπό την επόδραση της φούσκας ο επενδυτής πιστεύει πως βρίσκεται στο E' χαρτοφυλάκιο στο οποίο οι αποδόσεις είναι υψηλότερες. ΄Ετσι ο επενδυτής κινείται κατά μήκος της CML_* και καταλήγει στο χαρτοφυλάκιο ισορροπίας υπό την επίδραση της φούσκας στο E_*. ΄Ομως το E_* περιγράφει τις αποδόσεις που θα εισπράξει βραχυχρόνια ο επενδυτής πριν την κατάρρευση της φούσκας. Αν ο επενδυτής διατηρήσει τις επενδύσεις του μακροχρόνια θα εισπράξει τις αποδόσεις που βρίσκονται στο σημείο ισορροπίας E'_*. Επομένως αυτό σημαίνει ότι μακροχρόνια ο επενδυτής ενώ πιστεύει ότι οι αποδόσεις που θα λάβει βρίσκονται στο E_*, στην πραγματικότητα αυτό που θα λάβει είναι στο E'_*. Επίσης υπό την επίδραση της φούσκας οι αποδόσεις είναι πολύ μεγαλύτερες και ο κίνδυνος που πρέπει να αναλάβει ο επενδυτής είναι μεγαλύτερος κάτι που σημαίνει ότι βρίσκεται δεξιότερα σε μια υψηλότερη γραμμή κεφαλαιαγοράς με υψηλότερη κλίση $b_*^{1/2} > b^{1/2}$.

Κεφάλαιο 8

Ειδική Περίπτωση Χαρτοφυλακίου

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις: Αν σε μία αγορά οι αποδόσεις πολλαπλασιαστουν επί k και αν υποθέσω ότι $k > 1$ τότε οι αποδόσεις και οι τιμές αυξάνονται οπότε έχω το φαινόμενο της φούσκας όπου κατά μέσο όρο η κλίση της γραμμής κεφαλαιαγοράς δηλαδή το $b^{1/2}$ θα αυξηθεί και έτσι η γραμμή κεφαλαιαγοράς θα περιστραφεί προς πάνω γύρω απο το σημείο r_f. Αν σε μία αγορά οι αποδόσεις του i περιουσιακού στοιχείου πολλαπλασιαστούν με k, αλλά αυτή τη φορά υποθέσω ότι $k < 1$ τότε οι αποδόσεις και οι τιμές μειώνονται οπότε έχω το φαινόμενο της 'αντι-φούσκας' όπου κατά μέσο όρο η κλίση της γραμμής κεφαλαιαγοράς δηλαδή το $b^{1/2}$ θα μειωθεί και έτσι η γραμμή κεφαλαιαγοράς θα περιστραφεί προς τα κάτω γύρω από το σημείο r_f. Στις δύο αυτές περιπτώσεις μας είναι γνωστό τι θα γίνει. ´Ομως δεν γνωρίζουμε ακριβώς τι θα συμβεί αν η απόδοση του i περιουσιακού στοιχείου αυξηθεί κατά $k >= 1$ και η απόδοση του j περιουσιακού στοιχείου μειωθεί κατά το αντίστροφο ποσοστό δηλαδη κατά $1/k <= 1$. Στην περίπτωση αυτή παίζουν ρόλο οι σχετικές τιμές και τα σχετικά βάρη w_i, w_j των επενδυτών στην αγορά. Η ερώτηση είναι αν αυξηθεί το ένα, πόσο θα μειωθεί το άλλο και τι θα συμβεί με τη γραμμή κεφαλαιαγοράς. Εδώ θα εξεταστεί πόσο πρέπει να είναι το k έτσι ώστε βραχυχρόνια η γραμμή κεφαλαιαγοράς να παραμείνει σταθερή και κατά μέσο όρο να δίνει την ίδια αμοιβή κινδύνου. Για να παραμείνει σταθερή η γραμμή κεφαλαιαγοράς η κλίση θα πρεπει να παραμείνει σταθερή. Οπότε θα ελέγξω πότε και για ποια k η κλίση της γραμμής κεφαλαιαγοράς παραμένει σταθερή.

$$
\begin{aligned}
\mu_\epsilon &= r_f + w_\epsilon^\top \tilde{\mu} \\
\implies \mu_\epsilon &= r_f + (1+\mu_\epsilon)\,\tilde{\mu}^\top \Sigma^{-1} \mu \\
\implies \mu_\epsilon &= r_f + 1 + \mu_\epsilon b \\
\implies \mu_\epsilon (1-b) &= r_f + b \\
\implies \mu_\epsilon &= \frac{r_f + b}{1-b} \\
\implies 1+\mu_\epsilon &= \frac{1+r_f}{1-b}\ ,
\end{aligned}
\tag{8.1}
$$

όπου τα βάρη του χαρτοφυλακίου ισορροπίας έχουν βρεθεί ότι είναι τα

$$w_\epsilon = (1+\mu_\epsilon)\,\Sigma^{-1}\tilde{\mu} \implies w_\epsilon = \frac{1+r_f}{1-b}\Sigma^{-1}\tilde{\mu} \tag{8.2}$$

ή αλλιώς τα

$$w_\epsilon^\top = (1+\mu_\epsilon)\,\tilde{\mu}^\top\Sigma^{-1} \tag{8.3}$$

Τα βάρη του σημείου ισορροπίας υπό την επίδραση της φούσκας είναι

$$\begin{aligned} w_{\epsilon*} &= (1+\mu_{\epsilon*})\,\Sigma_*^{-1}\tilde{\mu}_* \\ \implies w_{\epsilon*} &= \frac{1+r_f}{1-b_*}\Sigma_*^{-1}\tilde{\mu}_* \end{aligned} \tag{8.4}$$

Αυτό που ψάχνουμε να βρούμε είναι πόσο θα πρέπει να είναι το k για να παραμείνει σταθερή η κλίση της γραμμής κεφαλαιαγοράς, δηλαδή το b. Αυτό συνεπάγεται ότι για να παραμείνει σταθερή η γραμμή κεφαλαιαγοράς, το $w_\epsilon = w_{\epsilon*}$. Ο έλεγχος αυτός θα γίνει βραχυχρόνια όπου θα πρέπει το b, r_f, μ και τα βάρη ισορροπίας να παραμείνουν σταθερά. Ο πίνακας K στην περίπτωση αυτή θα είναι ο εξής:

$$K = \begin{bmatrix} 1/k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \tag{8.5}$$

Θα πρέπει $w_\epsilon = w_{\epsilon*}$ οπότε αντικαθιστώ τισ σχέσεις (4.35), (5.34) και έχω

$$\begin{aligned} \frac{1+r_f}{1-b}\Sigma^{-1}\tilde{\mu} &= \frac{1+r_f}{1-b_*}\Sigma_*^{-1}\tilde{\mu} \\ \implies \Sigma^{-1} &= \Sigma_*^{-1} \\ \implies \Sigma^{-1} &= K^{-1}\Sigma^{-1}K^{-1} \\ \implies \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2-\sigma_{12}^2}\begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_1^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2-\sigma_{12}^2}\begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_1^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \\ \implies \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_1^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sigma_2^2k^{-2} & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & k^2\sigma_1^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{8.6}$$

Για να ισχύει η ισότητα των δύο μητρών να είναι ίσα τα

$$\begin{aligned} \sigma_2^2 &= \frac{\sigma_2^2}{k^2} \\ \implies \sigma_2^2\left(1 - k^{-2}\right) &= 0 \\ \implies 1 - k^2 &= 0 \end{aligned} \tag{8.7}$$

άρα θα πρέπει $k = 1$ αφού το $\sigma > 0$. Επομένως καταλήγουμε ότι για να παραμείνει το ίδιο δεν θα πρέπει να υπάρχει η επίδραση της φούσκας.

Κεφάλαιο 9

Συμπεράσματα

Τελικά σε αυτή την εργασία έχει βρεθεί το άριστο χαρτοφυλάκιο που έχει ο επενδυτής όταν έχει τη λογαριθμική συνάρτηση χρησιμότητας αλλά και το άριστο χαρτοφυλάκιό του όταν βρίσκεται υπό την επίδραση της φούσκας, στο οποίο ο κίνδυνος είναι μεγαλύτερος. Είδαμε ότι ο επενδυτής κινείται κατά μήκος της CML για να καταλήξει στο άριστο σημείο. Έπειται έγινε ο κύκλος των κινήσεων που κάνει ο επενδυτής όταν βρίσκεται υπό την επιδράση της φούσκας ώστε να καταλάβουμε ότι υπό την επίδραση της φούσκας έχει τη λανθασμένη άποψη ότι με την ίδιο κίνδυνο θα λάβει μεγαλύτερες αποδόσεις και τελικά βρέθηκε τι θα συμβεί αν έχω μια ειδική περίπτωση αποδόσεων όπου όσο αυξάνεται η μία η άλλη μειώνεται.

Κεφάλαιο 10

Βιβλιογραφικές Αναφορές

1. https://euretirio.com/
2. H.Levy,H.M.Markowitz (1979), Approximating Expected Utility by a Function of Mean and Variance
3. Σωτήρη Κ. Ντούγια, Απειροστικός Λογισμός Ι