ΘΕΟΔΩΡΟΣ ΒΛΑΧΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΥΠΟΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΥ ΤΥΠΟΥ

Διδακτορική Διατριβή

ΤΟΜΕΑΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ, 1992

Τριμελής Συμβουλευτική Επιτροπή

1. Θωμάς Χασάνης, Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων (Επιβλέπων Καθηγητής)

2. Θεμιστοκλής Κουφογιώργος, Αναπληρωτής Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

3. Χριστάκης Μπαϊκούσης, Επίκουρος Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Πενταμελής Εξεταστική Επιτροπή

1. Θωμάς Χασάνης, Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

2. Θεμιστοκλής Κουφογιώργος, Αναπληρωτής Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

3. Χριστάκης Μπαϊκούσης, Επίκουρος Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

4. Γεώργιος Στάμου, Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης

5. Γρηγόριος Τσάγκας, Καθηγητής του Γενικού Τμήματος της Πολυτεχνικής Σχολής του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης

Επιθυμώ να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες προς τον Καθηγητή Θωμά Χασάνη για την επιλογή του Θέματος της διατριβής και τη συνεχή επιστημονική καθοδήγηση και επίβλεψη κατά τη διάρκεια της εκπόνησής της. Η τελική διαμόρφωση αυτής της εργασίας προέκυψε ύστερα από δικές του υποδείξεις και συζητήσεις που είχαμε γύρω από το θέμα της διατριβής.

Θεωρώ χρέος μου να ευχαριστήσω τον Καθηγητή Νικόλαο-Θεοδόσιο Μαρμαρίδη για την πολύτιμη και ουσιαστική βοήθεια του στην εκτέλεση εκτενών αλγεβρικών υπολογισμών με την βοήθεια του ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Οφείλω να ευχαριστήσω τον Αναπληρωτή Καθηγητή Θεμιστοκλή Κουφογιώργο και τον Επίκουρο Καθηγητή Χριστάκη Μπαϊκούση οι οποίοι μαζί με τον Καθηγητή Θωμά Χασάνη αποτέλεσαν την Τριμελή Συμβουλευτική Επιτροπή.

Ευχαριστώ ακόμη τα μέλη της Πενταμελούς Εξεταστικής Επιτροπής Καθηγητές Γεώργιο Στάμου και Γρηγόριο Τσάγκα.

Θα ήθελα ακόμη να ευχαριστήσω την κ. Αθηναϊδα Δούβλη καθώς και τον Υποψήφιο Διδάκτορα Ματοσιάν Ντιγκράν για την πολύτιμη βοήθεια τους στην δακτυλογράφιση συτής της εργασίας.

Τέλος επιθυμώ να ευχαριστήσω το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων για κάθε τεχνική βοήθεια που μου παρείχε.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 - ΥΠΟΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΥ ΤΥΠΟΥ

1.1. Υποπολλαπλότητες πεπερασμένου τύπου

Θεωρούμε μια n- διάστατη πολλαπλότητα Riemann M^n με μετρική Riemann $<,>$ και συνοχή Levi- Civita ∇ (βλ. π.χ. [31], Vol. I σελ. 158 ή [3], σελ. 2). Συμβολίζουμε με $C^\infty(M^n)$ το σύνολο των C^∞-διαφορίσιμων συναρτήσεων που ορίζονται στην M^n και έχουν πραγματικές τιμές. Ο Λαπλασιανός τελεστής Δ της πολλαπλότητας Riemann $(M^n,<,>)$ δρα στο $C^\infty(M^n)$ και σε τοπικές συντεταγμένες $x^1,\dots,x^n$ έχει τη μορφή (βλ. π.χ. [8], σελ. 100)

(1.1.1) $$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{ij=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}\right),$$

όπου $g_{ij} = <\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}>$, $g = \det(g_{ij})$ και $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$. Αν $f \in C^\infty(M^n)$, τότε με gradf παριστάνουμε την κλίση της f. Ο Εσσιανός τελεστής της f είναι ένα τανυστικό πεδίο τύπου (2, 0) που ορίζεται ως εξής:

$$\nabla^2 f\,(X,Y) = <\nabla_X \mathrm{grad}f, Y>,$$

όπου X, Y είναι εφαπτόμενα διανυσματικά πεδία της M^n. Ο Λαπλασιανός τελεστής εκφράζεται με τη βοήθεια του Εσσιανού τελεστή ως εξής :

(1.1.2) $$\Delta f = -\,\mathrm{trace}\,\nabla^2 f$$

ή ισοδύναμα

$$(1.1.3) \qquad \Delta f = \sum_{i=1}^{n} \big((\nabla_{E_i} E_i)f - E_iE_i(f)\big),$$

όπου $\{E_i\}$ $i=1,\ldots,n$ είναι τοπικό ορθοκανονικό πλαίσιο της M^n. Επιπλέον, αν divgradf είναι η απόκλιση του διανυσματικού πεδίου gradf, τότε έχουμε και την ακόλουθη έκφραση για τον Λαπλασιανό τελεστή

$$(1.1.4) \qquad \Delta f = - \operatorname{divgrad} f\,.$$

Ένας πραγματικός αριθμός λ, για τον οποίο υπάρχει μια μη μηδενική συνάρτηση $u \in C^\infty(M^n)$ τέτοια ώστε $\Delta u = \lambda u$, καλείται *ιδιοτιμή* (eigenvalue) του Λαπλασιανού τελεστή. Κάθε συνάρτηση u για την οποία ισχύει $\Delta u = \lambda u$ ονομάζεται *ιδιοσυνάρτηση* (eigenfunction) που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν σε μια ιδιοτιμή λ σχηματίζουν έναν υπόχωρο του $C^\infty(M^n)$, ο οποίος καλείται *ιδιοχώρος* (eigenspace) που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η πολλαπλότητα Riemann M^n είναι συμπαγής. Ορίζεται τότε στον χώρο $C^\infty(M^n)$ ένα εσωτερικό γινόμενο $(\ ,\ )$ από την ισότητα

$$(f\,, g) = \int_{M^n} fg \; dM^n\,,$$

όπου $f, g \in C^\infty(M^n)$. Είναι γνωστό, ότι (βλ. π.χ. [38]) ο Λαπλασιανός τελεστής είναι ελλειπτικός (elliptic) και αυτοπροσηρτημένος (self- adjoint) ως προς το εσωτερικό γινόμενο $(\ ,\ )$. Το σύνολο των ιδιοτιμών του Δ ονομάζεται *φάσμα* (spectrum) του Λαπλασιανού τελεστή και αποδεικνύεται ότι είναι διακριτό (βλ. π.χ. [38]). Με άλλα λόγια, το φάσμα του

Λαπλασιανού τελεστή μιας συμπαγούς πολλαπλότητας Riemann είναι μια ακολουθία

$$0=\lambda_o<\lambda_1<\ldots<\lambda_k<\ldots\uparrow\infty$$

που τείνει στο ∞. Ο ιδιοχώρος V_i που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i έχει πεπερασμένη διάσταση, η οποία μάλιστα καλείται και πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i. Επιπλέον αποδεικνύεται (βλ. π.χ. [38]) ότι το σύνολο $\bigoplus_{i=0}^{\infty} V_i$ είναι πυκνό στο $C^\infty(M^n)$ ως προς την L^2- στάθμη που επάγει το εσωτερικό γινόμενο (,) στο σύνολο $C^\infty(M^n)$. Αυτό σημαίνει, ότι κάθε συνάρτηση $f\in C^\infty(M^n)$ γράφεται ως

$$f=\sum_{i=0}^{\infty} f_i\,, \tag{1.1.5}$$

όπου f_i είναι η προβολή της συνάρτησης f στον ιδιοχώρο V_i.

Ας υποθέσουμε τώρα, ότι η M^n είναι υποπολλαπλότητα του Ευκλειδείου χώρου E^m, με διανυσματικό πεδίο θέσης x ως προς κάποια αρχή, εφοδιασμένη με την επαγόμενη μετρική της οποίας ο αντίστοιχος Λαπλασιανός τελεστής είναι ο Δ. Επεκτείνουμε τη δράση του Λαπλασιανού τελεστή από το σύνολο $C^\infty(M^n)$ στο σύνολο όλων των διαφορίσιμων απεικονίσεων $v: M^n\rightarrow E^m$ ως εξής:

$$\Delta v=\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{\nabla}_{\nabla_{E_i}E_i}v-\overline{\nabla}_{E_i}\overline{\nabla}_{E_i}v\right), \tag{1.1.6}$$

όπου $\overline{\nabla}$ είναι η κανονική συνοχή του E^m και $\{E_i\}$, $i=1,\ldots,n$ είναι ορθοκανονικό πλαίσιο στην M^n. Προφανώς, αν $v=(v_1,\ldots,v_m)$, τότε $\Delta v=(\Delta v_1,\ldots,\Delta v_m)$.

Μια σημαντική απόρροια του ανωτέρου ορισμού είναι η γνωστή ισότητα

$$\Delta x = - n\vec{H} ,$$

όπου $\vec{H}$ είναι το διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας της M^n στον E^m.

Υποθέτουμε τώρα ότι η M^n είναι συμπαγής υποπολλαπλότητα του E^m με διανυσματικό πεδίο θέσης x. Ως προς μια ορθοκανονική βάση $e_1,\ldots, e_m$ του E^m οι συναρτήσεις $X_i = \langle x, e_i\rangle$, $i=1,\ldots, m$, όπου $\langle\, ,\, \rangle$ είναι το κανονικό εσωτερικό γινόμενο του E^m , λέγονται *συναρτήσεις συντεταγμένων* του x ως προς την ορθοκανονική βάση $e_1,\ldots, e_m$. Κάθε μια από τις συναρτήσεις X_i , $i=1,\ldots, m$, λόγω της (1.1.5), γράφεται

$$X_i = c_i + \sum_{j=1}^{\infty} f_{ij} \ , \ i=1,\ldots, m \ ,$$

όπου $c_i \in R$ και $f_{ij} \in V_j$. Θέτοντας $x_o = (c_1,\ldots, c_m)$ και $x_j = (f_{1j},\ldots, f_{mj})$ έχουμε:

$$x = x_o + \sum_{i=1}^{\infty} x_i \ , \ \Delta x_i = \lambda_i x_i \ , i \in N \ , \ \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots \ .$$

Η παραπάνω ανάλυση ονομάζεται *φασματική ανάλυση* (spectral decomposition) του διανυσματικού πεδίου θέσης. Είναι ενδιαφέρον, ακόμη και χωρίς συμπαγότητα, το παρακάτω (βλ. [8], σελ. 249)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: " Ποιές υποπολλαπλότητες έχουν πεπερασμένη φασματική ανάλυση; "

Για την κατανόηση του παραπάνω προβλήματος ας δούμε πώς αυτό γίνεται στην περίπτωση κλειστής καμπύλης $\gamma : I \to E^m$ με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in I$. Στην περίπτωση αυτή από την (1.1.1) προκύπτει ότι

$$\Delta = -\frac{d^2}{ds^2}.$$

Υποθέτουμε, ότι η γ έχει πεπερασμένη φασματική ανάλυση, δηλαδή

$$\gamma = \gamma_o + \gamma_{i_1} + \cdots + \gamma_{i_k},$$

όπου γ_o είναι σταθερό διάνυσμα του E^m, γ_{i_j} διαφορίσιμες συναρτήσεις του s με τιμές στον E^m τέτοιες, ώστε $\Delta\gamma_{i_j} = \lambda_{i_j}\gamma_{i_j}$, $\lambda_{i_j} \in R$ και $\lambda_{i_1} < \ldots < \lambda_{i_k}$. Λόγω της μορφής του Δ έχουμε $\frac{d^2}{ds^2}(\gamma_{i_j}) + \lambda_{i_j}\gamma_{i_j} = 0$, οπότε $\gamma_{i_j} = \vec{\alpha}_{i_j}\cos\sqrt{\lambda_{i_j}}s + \vec{b}_{i_j}\sin\sqrt{\lambda_{i_j}}s$, όπου $\vec{\alpha}_{i_j}$, $\vec{b}_{i_j}$ είναι σταθερά διανύσματα του E^m. Έτσι προκύπτει

$$\gamma(s) = \gamma_o + \sum_{j=1}^{k}\left(\vec{\alpha}_{i_j}\cos\sqrt{\lambda_{i_j}}s + \vec{b}_{i_j}\sin\sqrt{\lambda_{i_j}}s\right).$$

Γράφοντας τα γ_o, $\vec{\alpha}_{i_j}$ και $\vec{b}_{i_j}$ στην κανονική βάση του E^m και θέτοντας $\gamma(s) = (\gamma_1(s),\ldots,\gamma_m(s))$ συμπεραίνουμε, ότι οι συναρτήσεις συντεταγμένων $\gamma_1(s),\ldots,\gamma_m(s)$ έχουν πεπερασμένα αναπτύγματα σειρών Fourier. Είναι επίσης φανερό πως αν οι συναρτήσεις συντεταγμένων της γ έχουν πεπερασμένα αναπτύγματα Fourier, τότε η γ έχει πεπερασμένη φασματική ανάλυση. Συνεπώς, προκειμένου για καμπύλες με παράμετρο το μήκος τόξου, το πρόβλημα παίρνει την ακόλουθη μορφή :

" Ποιές καμπύλες με παράμετρο το μήκος τόξου έχουν την ιδιότητα οι συναρτήσεις συντεταγμένων να έχουν πεπερασμένα αναπτύγματα σειρών Fourier; "

Απάντηση στο πρόβλημα, για την περίπτωση επίπεδων καμπυλών, δόθηκε από τον B.Y.Chen στη μονογραφία του [8]. Συγκεκριμένα ο B.Y.Chen απέδειξε, ότι οι μόνες κλειστές επίπεδες καμπύλες με παράμετρο το μήκος τόξου των οποίων οι συναρτήσεις συντεταγμένων έχουν πεπερασμένα αναπτύγματα Fourier είναι οι κύκλοι. Στα παρακάτω παραδείγματα φαίνεται πως το αποτέλεσμα αυτό δεν ισχύει για καμπύλες του E^m, $m \geq 3$.

Παράδειγμα 1.1.1. Έστω γ η καμπύλη του E^3 με παράμετρο το μήκος τόξου s και $\gamma(s) = (\sin s, -\frac{1}{2}\cos s + \frac{1}{6}\cos 3s, -\frac{1}{2}\sin s + \frac{1}{6}\sin 3s)$. Προφανώς οι συναρτήσεις συντεταγμένων έχουν πεπερασμένα αναπτύγματα Fourier. Η φασματική ανάλυση της γ είναι

$$\gamma(s) = \gamma_1(s) + \gamma_2(s)\,,\ \Delta\gamma_1 = \gamma_1\,,\ \Delta\gamma_2 = 9\gamma_2\,,$$

όπου $\gamma_1(s) = (\sin s, -\frac{1}{2}\cos s, -\frac{1}{2}\sin s)$, $\gamma_2(s) = (0, \frac{1}{6}\cos 3s, \frac{1}{6}\sin 3s)$.

Παράδειγμα 1.1.2. Θεωρούμε την καμπύλη γ του E^3, όπου

$$\gamma(s) = (-3\sin\frac{s}{6} + \cos\frac{s}{2}\,,\ -3\cos\frac{s}{6} + \sin\frac{s}{2}\,,\ \frac{3}{\sqrt{2}}(\cos\frac{s}{3} + \sin\frac{s}{3})).$$

Εύκολα ελέγχεται το γεγονός, ότι το s είναι παράμετρος μήκος τόξου και ότι η φασματική ανάλυση είναι

$$\gamma(s) = \gamma_1(s) + \gamma_2(s) + \gamma_3(s)\,,\ \Delta\gamma_1 = \frac{1}{36}\gamma_1\,,\ \Delta\gamma_2 = \frac{1}{4}\gamma_2\,,\ \Delta\gamma_3 = \frac{1}{9}\gamma_3\,,$$

όπου $\gamma_1(s) = (-\,3\sin\frac{s}{6}, -\,3\cos\frac{s}{6}, 0)$, $\gamma_2(s) = (\cos\frac{s}{2}, \sin\frac{s}{2}, 0)$ και $\gamma_3(s) = (0, 0, \frac{3}{\sqrt{2}}(\cos\frac{s}{3} + \sin\frac{s}{3}))$.

Σκοπός της παρούσας διατριβής είναι να συμβάλλει στην απάντηση του προβλήματος που προαναφέραμε.

Ορισμός 1.1.3. [12] . *Έστω* M^n *υποπολλαπλότητα (όχι αναγκαστικά συμπαγής) του Ευκλειδείου χώρου* E^m *με διανυσματικό πεδίο θέσης* x *ως προς κάποια αρχή. Η* M^n *καλείται πεπερασμένου k- τύπου (finite k- type), αν το διανυσματικό πεδίο θέσης δέχεται πεπερασμένη φασματική ανάλυση. Δηλαδή, αν*

$$x = x_o + x_{i_1} + \ldots + x_{i_k}\ ,$$

όπου x_o *είναι σταθερό διάνυσμα του* E^m *και* x_{i_j} *είναι μη σταθερές διαφορίσιμες απεικονίσεις ορισμένες στην* M^n *με τιμές στον* E^m *τέτοιες ,ώστε* $\Delta x_{i_j} = \lambda_{i_j} x_{i_j}$, $j=1,\ldots,k$, $\lambda_{i_j} \in R$ *και* $\lambda_{i_1} <\ldots< \lambda_{i_k}$. *Αν μια από τις ιδιοτιμές* $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_k}$ *είναι μηδέν τότε η* M^n *καλείται μηδενικού k- τύπου (null k- type).*

Παρατήρηση 1.1.4. Ο συμβολισμός x_{i_j} και λ_{i_j} γίνεται για αποφυγή σύγχισης, αφού με $\lambda_1,\ldots, \lambda_k$ συμβολίζονται συνήθως οι k πρώτες ιδιοτιμές του Λαπλασιανού τελεστή συμπαγών πολλαπλοτήτων

Riemann. Όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχισης θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$.

Η έννοια των υποπολλαπλοτήτων πεπερασμένου τύπου έχει εισαχθεί από τον B.Y.Chen ([8]) στη δεκαετία του 1980. Τα πρώτα αποτελέσματα, στην προσπάθεια ταξινόμησης αυτών των υποπολλαπλοτήτων, δόθηκαν από τον ίδιο ([7] , [8] , [9]).

Ένα από τα αποτελέσματα αυτά , που θα χρειαστούμε αργότερα, είναι η παρακάτω ([7])

Πρόταση 1.1.5. *Αν* M^n *είναι πεπερασμένου k- τύπου υποπολλαπλότητα του* E^m *με φασματική ανάλυση*

$$x = x_0 + x_1 + \ldots + x_k \ , \Delta x_i = \lambda_i x_i \ ,$$

$\lambda_1<\ldots<\lambda_k$ *και με διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας* $\vec{H}$, *τότε ισχύουν οι σχέσεις*

$$\Delta^k x - \sigma_1 \Delta^{k-1} x + \ldots + (-1)^k \sigma_k (x - x_0) = 0 \ ,$$

$$\Delta^k \vec{H} - \sigma_1 \Delta^{k-1} \vec{H} + \ldots + (-1)^k \sigma_k \vec{H} = 0 \ ,$$

όπου $\sigma_i = S_i(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$, $i=1,\ldots,k$ *και* S_i *είναι τα στοιχειώδη συμμετρικά πολυώνυμα.*

Θα αναφερθούμε στη συνέχεια σε ένα χρήσιμο αποτέλεσμα της Διαφορικής Γεωμετρίας.

Θεώρημα (Takahashi [37]). *Για την υποπολλαπλότητα* M^n *του* E^m *ισχύει* $\Delta(x - x_0) = \lambda(x - x_0)$, *όπου* x_0 *σταθερό διάνυσμα του* E^m *και* $\lambda \in R$, *αν και μόνο αν :*

(i) η M^n *είναι υποπολλαπλότητα ελάχιστης έκτασης στον* E^m $(\lambda = 0)$

ή

(ii) η M^n *είναι υποπολλαπλότητα ελάχιστης έκτασης σε μια υπερσφαίρα* $S^{m-1}(R)$ *του* E^m *κέντρου* x_o *και ακτίνας* $R=\sqrt{\frac{n}{\lambda}}$ $(\lambda \neq 0)$.

Στη συνέχεια ας δούμε ποιές είναι οι πεπερασμένου 1- τύπου υποπολλαπλότητες. Σύμφωνα με τον ορισμό 1.1.3. η φασματική ανάλυση μιας 1- τύπου υποπολλαπλότητας είναι

$$x = x_o + x_1 \ , \ \Delta x_1 = \lambda x_1 \ ,$$

όπου $\lambda \in R$. Επομένως ισχύει $\Delta(x - x_o) = \lambda(x - x_o)$, οπότε λόγω του θεωρήματος του Takahashi οι 1- τύπου υποπολλαπλότητες του E^m είναι οι υποπολλαπλότητες ελάχιστης έκτασης του Ευκλειδείου χώρου E^m ή κάποιας υπερσφαίρας του E^m. Είναι προφανές, ότι μια υπερεπιφάνεια του E^m είναι ελάχιστης έκτασης υποπολλαπλότητα του εαυτού της.

Παραθέτουμε στη συνέχεια μερικά παραδείγματα υποπολλαπλοτήτων πεπερασμένου τύπου οι οποίες δεν είναι υποπολλαπλότητες ελάχιστης έκτασης.

Παράδειγμα 1.1.6. Έστω ο γενικευμένος κύλινδρος $S^k(R)\times E^{n-k}$ $(1\leq k<n)$ με διανυσματικό πεδίο θέσης

$$x(\theta_1,\ldots,\theta_k,t_1,\ldots,t_{n-k}) = R\,\vec{\Theta}(\theta_1,\ldots,\theta_k) + \sum_{i=1}^{n-k}(0,\ldots,0,t_i,0,\ldots,0)\ ,$$

όπου $\vec{\Theta}$ είναι το διανυσματικό πεδίο θέσης της μοναδιαίας σφαίρας S^k και η παράμετρος t_i εμφανίζεται στην $(i+k+1)$- θέση. Από την (1.1.1) προκύπτει, ότι ο Λαπλασιανός τελεστής του κυλίνδρου είναι

$$\Delta = \frac{1}{R^2}\bar{\Delta} - \sum_{i=1}^{n-k} \frac{\partial^2}{\partial t_i^2},$$

όπου $\bar{\Delta}$ είναι ο Λαπλασιανός τελεστής της σφαίρας S^k. Εύκολα διαπιστώνεται ότι

$$x = x_1 + x_2, \quad \Delta x_1 = \frac{k}{R^2} x_1, \quad \Delta x_2 = 0,$$

όπου $x_1 = R\vec{\Theta}$ και $x_2 = \sum_{i=1}^{n-k} (0,\ldots,0,t_i,0,\ldots,0)$, δηλαδή ο γενικευμένος κύλινδρος $S^k(R)\times E^{n-k}$ είναι μηδενικού 2-τύπου.

Παράδειγμα 1.1.7. Έστω η επιφάνεια M^2 του E^4 που είναι το γινόμενο Riemann μιας κυλινδρικής έλικας του E^3 επί έναν Ευκλείδειο παράγοντα E. Συγκεκριμένα η M^2 είναι μια επιφάνεια του E^4 με διανυσματικό πεδίο θέσης

$$x(s,t) = \left(\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}, t\right),$$

όπου s είναι το μήκος τόξου της κυλινδρικής έλικας. Από την (1.1.1) βρίσκουμε, ότι ο Λαπλασιανός τελεστής είναι

$$\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Είναι φανερό ότι η φασματική ανάλυση της M^2 είναι:

$$x = x_1 + x_2, \quad \Delta x_1 = \frac{1}{2} x_1, \quad \Delta x_2 = 0,$$

όπου $x_1 = (\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \sin\frac{s}{\sqrt{2}}, 0, 0)$ και $x_2 = (0, 0, \frac{s}{\sqrt{2}}, t)$. Συνεπώς η M^2 είναι μηδενικού 2-τύπου.

Παράδειγμα 1.1.8. Έστω το γινόμενο Riemann $S^1(\alpha)\times S^1(b)$ δύο κύκλων ακτίνων α, b. Το διανυσματικό πεδίο θέσης αυτής της επιφάνειας στον E^4 είναι

$$x(u,v) = (\alpha\cos u, \alpha\sin u, b\cos v, b\sin v).$$

Υπολογίζοντας τον Λαπλασιανό τελεστή με τη βοήθεια της (1.1.1) βρίσκουμε

$$\Delta = -\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2}{\partial v^2}.$$

Είναι σχεδόν φανερό ότι, για $x_1 = (\alpha\cos u, \alpha\sin u, 0, 0)$ και $x_2 = (0, 0, b\cos v, b\sin v)$, ισχύουν οι σχέσεις

$$x = x_1 + x_2, \quad \Delta x_1 = \frac{1}{\alpha^2}x_1, \quad \Delta x_2 = \frac{1}{b^2}x_2.$$

Έτσι η επιφάνεια $S^1(\alpha)\times S^1(b)$ είναι 1-τύπου, αν $\alpha = b$ (βλ. π.χ. [33], σελ. 376) και 2-τύπου αν, $\alpha \neq b$. Επιπλέον αυτή η επιφάνεια κείται πάνω σε μια σφαίρα $S^3(R)$ του E^4 ακτίνας $R = \sqrt{\alpha^2 + b^2}$.

Παράδειγμα 1.1.9. Έστω M επιφάνεια της 5-διάστατης μοναδιαίας σφαίρας S^5 με διανυσματικό πεδίο θέσης

$$x(u, v)=(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\cos u, \sqrt{\tfrac{1}{3}}\cos u\cos v, \sqrt{\tfrac{1}{3}}\cos u\sin v, \sqrt{\tfrac{2}{3}}\sin u, \sqrt{\tfrac{1}{3}}\sin u\cos v, \sqrt{\tfrac{1}{3}}\sin u\sin v).$$

Κάνοντας χρήση της (1.1.1) παίρνουμε

$$\Delta = - \frac{\partial^2}{\partial u^2} - 3 \frac{\partial^2}{\partial v^2}.$$

Είναι φανερό ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$x = x_1 + x_2 , \quad \Delta x_1 = x_1 , \quad \Delta x_2 = 4x_2 ,$$

όπου $x_1 (u, v) = (\sqrt{\frac{2}{3}} \cos u, 0, 0, \sqrt{\frac{2}{3}} \sin u, 0, 0)$ και $x_2(u, v) = (0, \sqrt{\frac{1}{3}} \cos u \cos v , \sqrt{\frac{1}{3}} \cos u \sin v, 0, \sqrt{\frac{1}{3}} \sin u \cos v, \sqrt{\frac{1}{3}} \sin u \sin v)$. Προφανώς η επιφάνεια είναι 2-τύπου.

Οι υποπολλαπλότητες πεπερασμένου τύπου παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον , διότι συνδέονται και με άλλα προβλήματα της Διαφορικής Γεωμετρίας. Συχνά χρησιμεύουν ως παραδείγματα για τον έλεγχο κάποιων ισχυρισμών. Για να στηρίξουμε αυτή την άποψη αναφέρουμε το παρακάτω πρόβλημα: Έστω M συμπαγής επιφάνεια , $\overline{M}$ μια πολλαπλότητα Riemann και $f : M \rightarrow \overline{M}$ μια εμβάπτιση. Ορίζουμε το συναρτησοειδές

$$\tau(f) = \int_M (H^2 + \overline{K}) \, dM ,$$

όπου H είναι η μέση καμπυλότητα της f, δηλαδή το μέτρο του διανυσματικού πεδίου μέσης καμπυλότητας , και $\overline{K}$ η καμπυλότητα τομής της $\overline{M}$, περιορισμένη στα εφαπτόμενα επίπεδα της M. Οι T.J.Willmore ([40], [41]) και B.Y.Chen ([6]) ρωτούν κατά πόσο υπάρχει η ελάχιστη τιμή του τ υπεράνω όλων των εμβαπτίσεων της M στην $\overline{M}$ και πως χαρακτηρίζονται οι εμβαπτίσεις με την ελάχιστη τιμή. Τα κρίσιμα σημεία του συναρτησοειδούς τ λέγονται *στάσιμα σημεία* του τ (stationary surfaces) ή *επιφάνειες του Willmore.* Ο J.L.Weiner ([39]) απέδειξε, ότι οι συμπαγείς επιφάνειες ελάχιστης έκτασης της μοναδιαίας n-διάστατης σφαίρας S^n είναι στάσιμα σημεία του τ. Με αφορμή αυτό έθεσε το ερώτημα αν αυτές είναι οι μόνες. Ο N.Ejiri ([19]) απέδειξε, ότι η επιφάνεια του παραδείγματος 1.1.9 είναι στάσιμο σημείο του τ, αλλά δεν είναι ελάχιστης έκτασης στην S^5. Όπως παρατηρήσαμε η επιφάνεια αυτή του E^6 είναι πεπερασμένου 2-τύπου.

Επιπλέον αναφέρουμε ότι άλλο ένα πρόβλημα με το οποίο σχετίζονται οι υποπολλαπλότητες πεπερασμένου τύπου είναι η εύρεση φραγμάτων για την ολική μέση καμπυλότητα $\int_{M^n} |\vec{H}|^n dM^n$ μιας συμπαγούς υποπολλαπλότητας του Ευκλειδείου χώρου E^m. Ο R.C.Reilly ([35]) εκτίμησε το ολοκλήρωμα $\int_{M^n} |\vec{H}|^2 dM^n$ για συμπαγείς υπο-πολλαπλότητες του E^m με τη βοήθεια της πρώτης ιδιοτιμής του Λαπλασιανού τελεστή. Συγκεκριμένα απέδειξε ότι ισχύει

$$\lambda_1 \leq \frac{n}{vol(M^n)} \int_{M^n} |\vec{H}|^2 dM^n.$$

Ο B.Y.Chen ([7], [8]), γενικεύοντας την ανισότητα του R.C. Reilly, απέδειξε ότι για συμπαγείς πεπερασμένου τύπου υποπολλαπλότητες του E^m με φασματική ανάλυση

$$x = x_0 + x_p + \dots + x_q \ , \ \Delta x_i = \lambda_i x_i \ , \ i = p, \dots, q$$

ισχύουν οι σχέσεις

$$\int_{M^n} |\vec{H}|^k dM^n \geq \left(\frac{\lambda_p}{n}\right)^{\frac{k}{2}} vol(M^n) \ , \ k = 2, \dots, n$$

και

$$\int_{M^n} |\vec{H}|^k \, dM^n \le \left(\frac{\lambda_q}{n}\right)^{\frac{k}{2}} \mathrm{vol}(M^n) \ , \ k = 1, 2, 3, 4.$$

Οι ισότητες στις παραπάνω ανισότητες ισχύουν μόνο αν η M^n είναι πεπερασμένου 1- τύπου.

Στα επόμενα τρία κεφάλαια θα εστιάσουμε την προσοχή μας στο πρόβλημα που τέθηκε. Στο δεύτερο κεφάλαιο θα μελετήσουμε το πρόβλημα σε μια κλάση υποπολλαπλοτήτων που αποτελείται από ειδικής μορφής πεπερασμένου τύπου υποπολλαπλότητες. Στο τρίτο κεφάλαιο εξετάζεται το πρόβλημα για σφαιρικές υπερεπιφάνειες ενώ στο τέταρτο κεφάλαιο μελετούμε το ίδιο πρόβλημα για υπερεπιφάνειες του Ευκλειδείου χώρου. Τα κύρια αποτελέσματα αυτής της εργασίας αναλύονται στην εισαγωγική παράγραφο κάθε κεφαλαίου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 - ΥΠΟΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ ΕΙΔΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ

2.1. Εισαγωγικά - κύρια αποτελέσματα

Έστω M^n υποπολλαπλότητα του Ευκλείδειου χώρου E^m με διανυσματικό πεδίο θέσης x ως προς κάποια αρχή. Οι συναρτήσεις συντεταγμένων της M^n ορίζονται από τις σχέσεις

$$x_i = \langle x , e_i \rangle \quad , \; i = 1, \ldots, m$$

όπου $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ είναι η συνήθης ορθοκανονική βάση του E^m και $\langle \, , \rangle$ είναι το κανονικό εσωτερικό γινόμενο του E^m.

Ορισμός 2.1.1. *Η υποπολλαπλότητα* M^n *του* E^m *καλείται ειδικού τύπου (coordinate finite type), αν οι συναρτήσεις συντεταγμένων είναι ιδιοσυναρτήσεις του Λαπλασιανού τελεστή, δηλαδή αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί* λ_i, $i = 1, \ldots, m$ *τέτοιοι, ώστε να ισχύει*

$$\text{(I)} \qquad \Delta x_i = \lambda_i x_i \quad , i = 1, \ldots, m.$$

Η υποπολλαπλότητα ειδικού τύπου M^n με αντίστοιχες ιδιοτιμές των συναρτήσεων συντεταγμένων τις $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ θα συμβολίζεται απλά ως $M^n(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$. Είναι φανερό, (βλ. θεώρημα του Takahashi) , ότι η υπο-πολλαπλότητα M^n του Ευκλειδείου χώρου E^m είναι υποπολλαπλότητα ελάχιστης έκτασης του Ευκλειδείου χώρου E^m, αν είναι υποπολλαπλότητα ειδικού τύπου $M^n(0, \ldots, 0)$.

Επίσης είναι φανερό , ότι οι υποπολλαπλότητες ειδικού τύπου είναι υποπολλαπλότητες πεπερασμένου τύπου και μάλιστα το πολύ m- τύπου , αφού η M^n είναι υποπολλαπλότητα του E^m. Πραγματικά, αυτό είναι άμεση συνέπεια της σχέσης $x = \langle x, e_1 \rangle e_1 + \ldots + \langle x, e_m \rangle e_m$ και της (I).

Πρώτος στόχος σε αυτό το κεφάλαιο είναι η ταξινόμηση των υποπολλαπλοτήτων ειδικού τύπου μέσα στην κλάση των υποπολλαπλοτήτων πεπερασμένου τύπου.

Το πρώτο αποτέλεσμα προς αυτή την κατεύθυνση οφείλεται στον O.J.Garay ([20]), ο οποίος απέδειξε, ότι οι μόνες πλήρεις εκ περιστροφής επιφάνειες ειδικού τύπου του Ευκλειδείου χώρου E^3 είναι το αλυσοειδές (catenoid), οι ορθοί κυκλικοί κύλινδροι και οι σφαίρες. Αυτό αποτέλεσε μια μερική απάντηση στην εικασία του B.Y.Chen ([9]), ότι οι μόνες συμπαγείς επιφάνειες πεπερασμένου τύπου στον E^3 είναι οι σφαίρες. Στην εργασία [21] ο O.J.Garay απέδειξε, ότι οι μόνες υπερεπιφάνειες ειδικού τύπου του E^{n+1} είναι οι υπερεπιφάνειες ελάχιστης έκτασης, οι σφαίρες και οι γενικευμένοι κύλινδροι. Συνεπώς έχει ενδιαφέρον να δει κανείς τι συμβαίνει με τις υποπολλαπλότητες ειδικού τύπου του E^m. Σε αυτή την κατεύθυνση τα πρώτα αποτελέσματα δόθηκαν στην εργασία [23] και περιγράφονται στα παρακάτω δύο θεωρήματα:

Θεώρημα 2.1.2. *Έστω M^n συμπαγής συνεκτική υποπολλαπλότητα του E^{n+k} με διανυσματικό πεδίο θέσης x ως προς κάποια αρχή O. Η M^n είναι $M^n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+k})$, αν και μόνο αν είναι υποπολλαπλότητα ελάχιστης έκτασης της τετραγωνικής υπερεπιφάνειας με αναλυτική εξίσωση $\sum_{i=1}^{n+k} \lambda_i x_i^2 = n$ και επιπλέον κείται σε υπερσφαίρα του E^{n+k} με κέντρο O.*

Θεώρημα 2.1.3. *Έστω M^n συμπαγής υποπολλαπλότητα ειδικού τύπου του E^{n+2}. Τότε η M^n είναι:*

(i) υποπολλαπλότητα ελάχιστης έκτασης σε μια υπερσφαίρα S^{n+1},

(ii) συνήθης n-διάστατη σφαίρα

ή

(iii) γινόμενο Riemann $S^{p-1}(r_1) \times S^{n-p+1}(r_2)$ δύο υπερσφαιρών, όπου $2 \leq p \leq n$ και $\frac{r_1}{r_2} \neq \sqrt{\frac{p-1}{n-p+1}}$.

Το Θεώρημα 2.1.2 μπορεί να θεωρηθεί ως επέκταση του θεωρήματος Takahashi.

Σημειώνουμε ότι το γινόμενο Riemann $S^{p-1}(r_1) \times S^{n-p+1}(r_2)$ δύο σφαιρών με ακτίνες r_1, r_2 είναι υπερεπιφάνεια ελάχιστης έκτασης της (n+1)- διάστατης σφαίρας $S^{n+1}(R)$ με ακτίνα $R = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$, αν και μόνο αν $\frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\frac{p-1}{n-p+1}}$ (βλ. π.χ. [33] , σελ. 376).

Θεωρούμε μια υποπολλαπλότητα ειδικού τύπου $M^n(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι, αφού το διανυσματικό πεδίο θέσης x είναι $x = (x_1, \ldots, x_m)$, η συνθήκη (I) είναι ισοδύναμη προς την

$$\Delta x = Dx ,$$

όπου D είναι ο διαγώνιος (m×m)- πίνακας που στην κύρια διαγώνιο του εμφανίζονται οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Σε κάθε άλλο σύστημα συντεταγμένων η παραπάνω σχέση παίρνει τη μορφή

$$\text{(II)} \quad \Delta x = Ax+B ,$$

όπου A είναι ένας σταθερός (m×m)- πίνακας και B ένα σταθερό διάνυσμα του E^m. Αυτό σημαίνει πως η (I) δεν είναι αναλλοίωτη ως προς το σύστημα συντεταγμένων και επομένως έχει νόημα να μελετήσει κανείς τις υποπολλαπλότητες εκείνες που πληρούν την (II). Το πρώτο αποτέλεσμα σε αυτή την κατεύθυνση οφείλεται στους F.Dillen , J.Pas και L. Verstraelen ([16]), οι οποίοι αποδεικνύουν ότι οι μόνες επιφάνειες του E^3 που ικανοποιούν την (II) είναι οι επιφάνειες ελάχιστης έκτασης , οι ορθοί κυκλικοί κύλινδροι και οι σφαίρες.

Δεύτερος στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι να δούμε ποιές υπερεπιφάνειες ικανοποιούν την (II). Το αποτέλεσμα αυτής της προσπάθειας περιέχεται στην εργασία [26] και περιγράφεται από το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.1.4. *Οι μόνες συνεκτικές υπερεπιφάνειες του* E^{n+1}, *των οποίων το διανυσματικό πεδίο θέσης* x *ικανοποιεί την* $\Delta x = Ax + B$, *όπου* A *είναι ένας σταθερός* $(n+1)\times(n+1)$ - *πίνακας και* B *ένα σταθερό διάνυσμα του* E^{n+1} *είναι:*

(i) οι υπερεπιφάνειες ελάχιστης έκτασης,

(ii) τα ανοιχτά τμήματα υπερσφαιρών του E^{n+1},

και

(iii) τα ανοιχτά τμήματα γενικευμένων κυλίνδρων $S^k\times E^{n-k}$, $1\le k<n$, *όπου* S^k *είναι* k-*διάστατη σφαίρα κάποιας ακτίνας.*

2.2. Απόδειξη των Θεωρημάτων 2.1.2 και 2.1.3

Έστω M^n υποπολλαπλότητα του Ευκλειδείου χώρου E^{n+k}, με διανυσματικό πεδίο θέσης x και διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας $\vec{H}$. Οι παρακάτω ισότητες

(2.2.1)
$$\Delta x = -n\vec{H},$$

(2.2.2)
$$\frac{1}{2}\Delta|x|^2 = -n - n<\vec{H}, x>,$$

όπου < , > είναι το κανονικό εσωτερικό γινόμενο του E^{n+k}, είναι γνωστές (βλ. π.χ. [5], σελ. 68) και αποδεικνύονται εύκολα.

Αν $\{e_1, e_2,..., e_{n+k}\}$ είναι η κανονική βάση του E^{n+k}, τότε έχουμε

$$\Delta x_i = -n<\vec{H}, e_i>,$$

όπου $x_i = <x, e_i>$.

Όμως , επειδή $|x|^2 = \sum_{i=1}^{n+k} x_i^2$, βρίσκουμε

$$\frac{1}{2}\Delta|x|^2 = \sum_{i=1}^{n+k} x_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n+k} |\mathrm{grad}x_i|^2 ,$$

όπου $\mathrm{grad}x_i$ είναι η κλίση της συνάρτησης x_i στην M^n. Ισοδύναμα

$$\frac{1}{2}\Delta|x|^2 = \sum_{i=1}^{n+k} x_i \Delta x_i - n , \tag{2.2.3}$$

αφού $\sum_{i=1}^{n+k} |\mathrm{grad}x_i|^2 = n.$

Επιπλέον , αν η M^n είναι υποπολλαπλότητα μιας υποπολλαπλότητας N του E^{n+k}, τότε ισχύει (βλ. π.χ. [5] , σελ. 79)

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} B(X_i,X_i) , \tag{2.2.4}$$

όπου $\vec{H}$ είναι το διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας της M^n στον E^{n+k} , $\vec{H}_1$ το διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας της M^n στην N , B η δεύτερη θεμελιώδης μορφή της N στον E^{n+k} και $\{X_i\}$,i = 1,..., n ορθοκανονικό πλαίσιο της M^n. Προφανώς το διάνυσμα $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} B(X_i,X_i)$ είναι κάθετο στην N κατά μήκος της M^n, το $\vec{H}_1$ εφαπτόμενο στην N και κάθετο στην M^n.

Σε αυτό το σημείο θα αποδείξουμε το παρακάτω λήμμα :

Λήμμα 2.2.1. *Έστω* M^n *συνεκτική υποπολλαπλότητα του* E^{n+k}. *Αν η* M^n *είναι* $M^n(\lambda_1, ..., \lambda_{n+k})$ *και όχι ελάχιστης έκτασης στον* E^{n+k}, *τότε είναι υποπολλαπλότητα ελάχιστης έκτασης σε μια τετραγωνική υπερεπιφάνεια* N *του* E^{n+k} *με αναλυτική εξίσωση*

$$\sum_{i=1}^{n+k} \lambda_i x_i^2 = c\,,$$

όπου c *είναι κατάλληλη σταθερά.*

Απόδειξη. Έστω $x \in M^n$. Η προβολή του εφαπτόμενου χώρου $T_x M^n$ στον υπόχωρο του E^n, που παράγεται από τα $e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}$ για κατάλληλη επιλογή των $i_1, \ldots, i_n$, είναι αμφίεση. Συνεπώς, η συνάρτηση $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ είναι διαφορομορφισμός μιας περιοχής του x στην M^n στον E^n. Έτσι κάθε σημείο της M^n έχει περιοχή στην οποία n κατάλληλες συναρτήσεις συντεταγμένων απαρτίζουν σύστημα συντεταγμένων. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε, ότι οι συναρτήσεις $x_1, \ldots, x_n$ ορίζουν τοπικό σύστημα συντεταγμένων μιας περιοχής V του x. Άρα, υπάρχουν λείες συναρτήσεις $f^{n+1}, \ldots, f^{n+k}$ ορισμένες σε ανοιχτό υποσύνολο U του E^n τέτοιες, ώστε η περιοχή V να είναι το γράφημα της συνάρτησης $f : U \to E^k$, *όπου*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \left(f^{n+1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f^{n+k}(x_1, \ldots, x_n)\right).$$

Συνεπώς το V είναι το σύνολο των σημείων

$$\left(x_1, \ldots, x_n, f^{n+1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f^{n+k}(x_1, \ldots, x_n)\right),$$

όπου $(x_1, \ldots, x_n) \in U$. Η παραπάνω διαδικασία είναι ουσιαστικά εφαρμογή του θεωρήματος της αντίστροφης συνάρτησης. Τα διανυσματικά πεδία

$$\xi_\varrho = \left(-f^{n+\varrho}_{x_1}, \ldots, -f^{n+\varrho}_{x_n}, 0, \ldots, 1, \ldots, 0\right) \quad , 1 \le \varrho \le k,$$

(ο αριθμός 1 εμφανίζεται στην $(n+\varrho)$-θέση) είναι όλα κάθετα στο V και γραμμικώς ανεξάρτητα. Επομένως συνιστούν μια βάση του κάθετου χώρου του V στον E^{n+k} και το διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας $\vec{H}$ της M^n στον E^{n+k} δίνεται από τη σχέση

$$(2.2.5) \qquad n\vec{H} = \sum_{\varrho=1}^{k} S_\varrho \xi_\varrho ,$$

όπου S_ϱ, $\varrho = 1,\ldots, k$ είναι λείες συναρτήσεις ορισμένες στο V. Λαμβάνοντας υπόψη την (2.2.1) και το γεγονός ότι η M^n είναι $M^n(\lambda_1,\ldots, \lambda_{n+k})$, έχουμε

$$(2.2.6) \qquad n\vec{H} = -(\lambda_1 x_1,\ldots, \lambda_n x_n , \lambda_{n+1} f^{n+1},\ldots,\lambda_{n+k} f^{n+k}).$$

Από (2.2.5) και (2.2.6) βρίσκουμε τις σχέσεις

$$\sum_{\varrho=1}^{k} S_\varrho f_{x_i}^{n+\varrho} = \lambda_i x_i \ , i=1,\ldots, n$$

$$S_\varrho = -\lambda_{n+\varrho} f^{n+\varrho} \ , \ \varrho=1,\ldots, k,$$

από όπου έχουμε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$(2.2.7) \qquad \begin{aligned} \lambda_{n+1} f_{x_1}^{n+1} f^{n+1} + \ldots + \lambda_{n+k} f_{x_1}^{n+k} f^{n+k} &= -\lambda_1 x_1 , \\ &\vdots \\ \lambda_{n+1} f_{x_n}^{n+1} f^{n+1} + \ldots + \lambda_{n+k} f_{x_n}^{n+k} f^{n+k} &= -\lambda_n x_n . \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας το σύστημα παίρνουμε :

$$\lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2 + \lambda_{n+1}(f^{n+1})^2 + \ldots + \lambda_{n+k}(f^{n+k})^2 = c,$$

όπου c σταθερά. Άρα η M^n περιέχεται στην τετραγωνική υπερεπιφάνεια N με αναλυτική εξίσωση την

$$\sum_{i=1}^{n+k} \lambda_i x_i^2 = c\,.$$

Από την προηγούμενη εξίσωση και την (2.2.6) βλέπουμε πως το διανυσματικό πεδίο $\vec{H}$ είναι παράλληλο με το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο της N. Συνεπώς από τη σχέση (2.2.4) παίρνουμε $\vec{H}_1 = 0$, που σημαίνει ότι η M^n είναι ελάχιστης έκτασης στην N.

Παρατήρηση 2.2.2. Αν στο Λήμμα 2.2.1 η συνδιάσταση k είναι k=1, τότε λέγοντας ότι η M^n είναι υποπολλαπλότητα ελάχιστης έκτασης της N εννοούμε ότι είναι ανοιχτό τμήμα της N.

Παρατήρηση 2.2.3. Από το σύστημα (2.2.7) συμπεραίνουμε , ότι ένα τουλάχιστον από τα $\lambda_{n+\varrho}$ (ϱ=1,...,k) είναι μη μηδενικό. Πραγματικά, σε αντίθετη περίπτωση θα είχαμε $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \cdots = \lambda_{n+k} = 0$. Τούτο σημαίνει , ότι η M^n είναι $M^n(0,\ldots,0)$ δηλαδή ελάχιστης έκτασης στον E^{n+k} , που είναι αντίφαση.

Στην συνέχεια υπολογίζουμε τη δεύτερη θεμελιώδη μορφή και το διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας υπερεπιφανειών στάθμης στον Ευκλείδειο χώρο E^{n+1}.

Λήμμα 2.2.4. *Έστω* $g: E^{n+1} \to E$ *λεία συνάρτηση και* M *η υπερεπιφάνεια στάθμης* $M = g^{-1}(c)$ *, όπου* c *μια μη κρίσιμη τιμή της* g. *Η* *δεύτερη θεμελιώδης μορφή* B *της* M *και το διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας* $\vec{H}$ *δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις :*

(2.2.8) $$B(X,Y) = -\frac{1}{|\overline{\nabla} g|^2} < \overline{\nabla}_X\left(\overline{\nabla} g\right), Y > \overline{\nabla} g \ ,$$

(2.2.9) $$n\vec{H} = \frac{1}{|\overline{\nabla} g|^2}\left(\overline{\Delta} g + \frac{1}{2|\overline{\nabla} g|^2} < \overline{\nabla} g, \overline{\nabla}|\overline{\nabla} g|^2 > \right)\overline{\nabla} g \ ,$$

όπου X,Y *εφαπτόμενα διανυσματικά πεδία της* M , $\overline{\nabla} g$ *και* $\overline{\Delta} g$ *είναι αντίστοιχα η κλίση και η Λαπλασιανή της* g *στον* E^{n+1}.

Απόδειξη . Το διανυσματικό πεδίο $\xi = \dfrac{\overline{\nabla} g}{|\overline{\nabla} g|}$ είναι μοναδιαίο και κάθετο στη M. Συνεπώς για τη δεύτερη θεμελιώδη μορφή έχουμε

$$B(X,Y) = - < \overline{\nabla}_X\left(\frac{\overline{\nabla} g}{|\overline{\nabla} g|}\right), Y > \frac{\overline{\nabla} g}{|\overline{\nabla} g|}$$

ή ισοδύναμα

$$B(X,Y) = - \frac{1}{|\overline{\nabla} g|^2} < \overline{\nabla}_X(\overline{\nabla} g) \ , \ Y > \overline{\nabla} g \ .$$

Ακόμη ισχύει

$$n\vec{H} = \sum_{i=1}^{n} B(X_i,X_i) \ ,$$

όπου $\{X_i\}$, i=1,..., n είναι ορθοκανονικό πλαίσιο της M. Επομένως

$$n\vec{H} = -\frac{1}{|\overline{\nabla} g|^2}\sum_{i=1}^{n} < \overline{\nabla}_{X_i}(\overline{\nabla} g), X_i > \overline{\nabla} g$$

ή (σχέση (1.1.2))

$$n\vec{H} = \frac{1}{|\overline{\nabla} g|^2}\left[\overline{\Delta} g + <\overline{\nabla}_\xi(\overline{\nabla} g), \xi>\right]\overline{\nabla} g.$$

Άρα

$$n\vec{H} = \frac{1}{|\overline{\nabla} g|^2}\left[\overline{\Delta} g + \frac{1}{|\overline{\nabla} g|^2} <\overline{\nabla}_{\overline{\nabla} g}(\overline{\nabla} g), \overline{\nabla} g>)\right]\overline{\nabla} g\ ,$$

από προκύπτει η ζητούμενη σχέση (2.2.9).

Παρατήρηση 2.2.5. Αν η M είναι τετραγωνική υπερεπιφάνεια του E^{n+1}, δηλαδή υπερεπιφάνεια στάθμης της

$$g(x_1,\dots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i^2\ ,$$

τότε το διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας δίνεται από τη σχέση

$$\text{(2.2.10)} \qquad n\vec{H} = \left(- \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i}{\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^2 x_i^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^3 x_i^2}{(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^2 x_i^2)^2} \right)(\alpha_1 x_1,\dots, \alpha_{n+1} x_{n+1})\ .$$

Πράγματι, επειδή

$$\overline{\nabla} g = 2(\alpha_1 x_1,\dots,\alpha_{n+1} x_{n+1})\ ,$$

$$\overline{\Delta} g = -\,2 \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i\ ,$$

$$|\overline{\nabla} g|^2 = 4 \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^2 x_i^2\ .$$

και

$$\overline{\nabla}\left|\overline{\nabla} g\right|^2 = 8(\alpha_1^2 x_1,\dots,\alpha_{n+1}^2 x_{n+1}),$$

η (2.2.10) προκύπτει εύκολα από την (2.2.9).

Λήμμα 2.2.6. *Έστω* M^n *υποπολλαπλότητα του Ευκλειδείου χώρου* E^{n+k} *με διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας* $\vec{H}$. *Αν η* M^n *κείται σε τετραγωνική υπερεπιφάνεια* N *με αναλυτική εξίσωση*

$$\sum_{i=1}^{n+k} \lambda_i x_i^2 = c,$$

τότε

$$(2.2.11) \qquad n\vec{H} = n\vec{H}_1 - \frac{\sum_{i=1}^{n+k} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n} (X_j x_i)^2 \right)}{\sum_{i=1}^{n+k} \lambda_i^2 x_i^2} (\lambda_1 x_1,\dots,\lambda_{n+k} x_{n+k}),$$

όπου $\vec{H}_1$ *είναι το διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας της* M^n *στη* N *και* $\{X_i\}, i=1,\dots,n$ *ορθοκανονικό πλαίσιο εφαπτόμενο στη* M^n.

Απόδειξη. Θέτουμε $f(x_1,\dots, x_{n+k}) = \sum_{i=1}^{n+k} \lambda_i x_i^2 - c$, οπότε η δεύτερη θεμελιώδης μορφή B της N είναι (βλ. σχέση (2.2.8))

$$B(X,X) = -\frac{1}{\left|\overline{\nabla} f\right|^2} < \overline{\nabla}_X(\overline{\nabla} f), X > \overline{\nabla} f$$

για X,Y εφαπτόμενα διανύσματα στην N. Όμως $\overline{\nabla} f = 2(\lambda_1 x_1,\dots, \lambda_{n+k} x_{n+k})$, οπότε η προηγούμενη σχέση δίνει

$$B(X, X) = -\frac{1}{\sum_{i=1}^{n+k}\lambda_i^2 x_i^2} <(\lambda_1 Xx_1, \ldots, \lambda_{n+k}Xx_{n+k}), X> (\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_{n+k}x_{n+k}).$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $X = (Xx_1, \ldots, Xx_{n+k})$ παίρνουμε τελικά

$$B(X, X) = -\frac{\sum_{i=1}^{n+k}\lambda_i (Xx_i)^2}{\sum_{i=1}^{n+k}\lambda_i^2 x_i^2}(\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_{n+k}x_{n+k}).$$

Έτσι για τυχαίο ορθοκανονικό πλαίσιο $\{X_j\}, i=1, \ldots, n$ βλέπουμε πως

$$\sum_{i=1}^{n} B(X_i, X_i) = -\frac{\sum_{i=1}^{n+k}\lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n}(X_j x_i)^2\right)}{\sum_{i=1}^{n+k}\lambda_i^2 x_i^2}(\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_{n+k}x_{n+k}).$$

Η ζητούμενη σχέση προκύπτει τώρα από την προηγούμενη και την (2.2.4).

Η επόμενη πρόταση χαρακτηρίζει τις υποπολλαπλότητες ειδικού τύπου στον E^{n+k}.

Πρόταση 2.2.7. *Έστω* M^n *συνεκτική υποπολλαπλότητα του* E^{n+k} *και* $\vec{H}$ *το διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας. Η* M^n *είναι* $M^n(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+k})$, *αν και μόνο αν είναι :*

(i) υποπολλαπλότητα ελάχιστης έκτασης του E^{n+k},

ή

(ii) υποπολλαπλότητα ελάχιστης έκτασης της τετραγωνικής υπερεπιφάνειας N με αναλυτική εξίσωση $f(x_1, \ldots, x_{n+k}) = \sum_{i=1}^{n+k}\lambda_i x_i^2 - c = 0$ *και επιπλέον ισχύει* $2n\vec{H} = -\overline{\nabla}f$.

Απόδειξη. Έστω ότι η M^n είναι $M^n(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+k})$ με ένα τουλάχιστον λ_i διάφορο του μηδενός. Από το Λήμμα 2.2.1 γνωρίζουμε, ότι η M^n είναι υποπολλαπλότητα ελάχιστης έκτασης της τετραγωνικής υπερεπιφάνειας N με αναλυτική εξίσωση $f(x_1,\ldots,x_{n+k})=\sum_{i=1}^{n+k}\lambda_i x_i^2-c=0$. Επειδή η M^n είναι υποπολλαπλότητα ειδικού τύπου, ισχύει

$$\Delta x=(\lambda_1 x_1,\ldots,\lambda_{n+k}x_{n+k}).$$

Αυτή η ισότητα σε συνδυασμό με την (2.2.1) και το γεγονός ότι $\overline{\nabla} f = 2(\lambda_1 x_1,\ldots,\lambda_{n+k}x_{n+k})$ δίνει $2n\vec{H}=-\overline{\nabla} f$. Το αντίστροφο είναι τετριμμένο.

Παρατήρηση 2.2.8. Σημειώνουμε, για διευκρίνηση της περίπτωσης (ii) της Πρότασης 2.2.7, τα εξής: Οι συναρτήσεις συντεταγμένων x_1, x_2, x_3, x_4 της επιφάνειας M του Παραδείγματος 1.1.7 ικανοποιούν τις σχέσεις $\Delta x_1=\frac{1}{2}x_1$, $\Delta x_2=\frac{1}{2}x_2$ και $\Delta x_3=\Delta x_4=0$. Έτσι η M είναι μια επιφάνεια ειδικού τύπου στον E^4, δηλαδή $M(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0)$. Η επιφάνεια M είναι ελάχιστης έκτασης στον κύλινδρο με εξίσωση $\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2=\frac{1}{2}$. Όμοια παρατηρούμε, ότι στο Παράδειγμα 1.1.8 η M είναι συμπαγής $M(\frac{1}{\alpha^2},\frac{1}{\alpha^2},\frac{1}{b^2},\frac{1}{b^2})$ και ελάχιστης έκτασης στο ελλειψοειδές με εξίσωση $\frac{x_1^2}{\alpha^2}+\frac{x_2^2}{\alpha^2}+\frac{x_3^2}{b^2}+\frac{x_4^2}{b^2}=1$.

Παρατήρηση 2.2.9. Απλή συνέπεια της Πρότασης 2.2.7 είναι το θεώρημα του Takahashi: Οι μόνες υποπολλαπλότητες $M^n(\lambda,\ldots,\lambda)$ του E^m με $\lambda\neq 0$ είναι οι υποπολλαπλότητες ελάχιστης έκτασης υπερσφαιρών του E^m με ακτίνα $\sqrt{\frac{n}{\lambda}}$.

Το κύριο αποτέλεσμα του O.J.Garay στην εργασία [21] προκύπτει εύκολα από την Πρόταση 2.2.7 και περιγράφεται στο παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 2.2.10. *Μια συνεκτική υπερεπιφάνεια* M^n *του* E^{n+1} *είναι* $M^n(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})$ *, αν και μόνο αν είναι*

(i) υπερεπιφάνεια ελάχιστης έκτασης του E^{n+1},

(ii) ανοιχτό τμήμα υπερσφαίρας του E^{n+1},

ή

(iii) ανοιχτό τμήμα γενικευμένου κυλίνδρου $S^k \times E^{n-k}$ *με* $1 \leq k < n$, *όπου* S^k *είναι* k*-διάστατη σφαίρα κάποιας ακτίνας.*

Απόδειξη. Εξετάζουμε την περίπτωση, όπου η M^n δεν είναι ανοιχτό τμήμα υπερεπιφάνειας ελάχιστης έκτασης. Από την Πρόταση 2.2.7 συμπεραίνουμε, ότι η M^n είναι τμήμα της τετραγωνικής υπερεπιφάνειας με αναλυτική εξίσωση (Παρατήρηση 2.2.2)

$$f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i^2 - c = 0.$$

Επιπλέον ισχύει η σχέση $2n\vec{H} = -\nabla f$. Όμως (βλ. σχέση (2.2.10)) το διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας $\vec{H}$ της M^n δίνεται από τη σχέση

$$n\vec{H} = \left(- \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i}{\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^2 x_i^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^3 x_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^2 x_i^2\right)^2} \right) (\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_{n+1} x_{n+1}) .$$

Αυτή συνδυαζόμενη με την $2n\vec{H} = -\nabla f$ δίνει

$$(2.2.12)\qquad -\frac{\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i}{\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i^2 x_i^2}+\frac{\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i^3 x_i^2}{(\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i^2 x_i^2)^2}=-1.$$

Από την Παρατήρηση 2.2.3 μπορούμε να δεχτούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας , ότι το λ_{n+1} δεν είναι μηδέν. Άρα έχουμε

$$x_{n+1}^2=\frac{c}{\lambda_{n+1}}-\frac{1}{\lambda_{n+1}}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^2 .$$

Γράφουμε την (2.2.12) στη μορφή

$$(\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i)(\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i^2 x_i^2)-\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i^3 x_i^2=(\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i^2 x_i^2)^2$$

και αντικαθιστούμε το x_{n+1}^2 από την παραπάνω ισότητα. Έτσι έχουμε

$$(\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i)\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 x_i^2+c\lambda_{n+1}-\lambda_{n+1}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^2\right)-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^3 x_i^2-c\lambda_{n+1}^2+\lambda_{n+1}^2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^2=\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 x_i^2+c\lambda_{n+1}-\lambda_{n+1}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^2\right)^2$$

ή

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2(\lambda_i-\lambda_{n+1})^2 x_i^4+2\sum_{1\le i<j\le n}\lambda_i\lambda_j(\lambda_i-\lambda_{n+1})(\lambda_j-\lambda_{n+1})x_i^2 x_j^2$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left(2c\lambda_{n+1}\lambda_i(\lambda_i-\lambda_{n+1})-\lambda_i(\lambda_i-\lambda_{n+1})(\sum_{j\ne i}^{n}\lambda_j)\right)x_i^2+c^2\lambda_{n+1}^2-c\lambda_{n+1}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=0.$$

Έχουμε δηλαδή ένα πολυώνυμο των ανεξάρτητων μεταβλητών $x_1,\ldots,x_n$ που είναι εκ ταυτότητας μηδέν σε ανοιχτό υποσύνολο του E^n. Έτσι , οι συντελεστές του πολυωνύμου πρέπει να είναι μηδέν. Δηλαδή $\lambda_i(\lambda_i - \lambda_{n+1}) = 0, i = 1,\ldots, n$. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι ή όλα τα $\lambda_i, i = 1,\ldots, n$ είναι ίσα προς το λ_{n+1} ή μερικά από αυτά είναι μηδέν και τα υπόλοιπα ίσα προς το λ_{n+1}. Η περίπτωση όλα τα $\lambda_i , i = 1,\ldots, n$ να είναι μηδενικά αποκλείεται , διότι τότε η M^n θα ήταν υπερεπιφάνεια ελάχιστης έκτασης . Επομένως η M^n είναι τμήμα υπερσφαίρας στην περίπτωση που $\lambda_i = \lambda_{n+1}, i = 1,\ldots, n$ ή τμήμα γενικευμένου κυλίνδρου $S^k \times E^{n-k}$, όταν μερικά από τα $\lambda_i, i = 1,\ldots, n$ είναι μηδέν και τα υπόλοιπα ίσα προς το λ_{n+1}. Το αντίστροφο είναι τετριμμένο.

Είμαστε τώρα σε θέση να δείξουμε τα Θεωρήματα 2.1.2 και 2.1.3.

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.2. Έστω ότι η M^n είναι $M^n(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+k})$, δηλαδή $\Delta x_i = \lambda_i x_i$ για κάθε $i = 1,\ldots, n+k$. Τότε από τις (2.2.2) και (2.2.3) παίρνουμε

$$\sum_{i=1}^{n+k} \lambda_i x_i^2 = - n \langle \vec{H}, x \rangle.$$

Από το Λήμμα 2.2.1 γνωρίζουμε πως η M^n είναι υποπολλαπλότητα ελάχιστης έκτασης της τετραγωνικής υπερεπιφάνειας με αναλυτική εξίσωση

$$\sum_{i=1}^{n+k} \lambda_i x_i^2 = c.$$

Από τις δύο προηγούμενες σχέσεις βρίσκουμε ότι $\langle \vec{H}, x \rangle = - \frac{c}{n}$. 'Αρα η (2.2.2) γράφεται $\Delta|x|^2 = 2(c - n)$ και από το Λήμμα του Hopf συνάγεται ότι $|x|^2$ είναι σταθερό και $c = n$. Αντίστροφα , έστω ότι η M^n περιέχεται σε σφαίρα με κέντρο το O και είναι υποπολλαπλότητα ελάχιστης έκτασης της τετραγωνικής υπερεπιφάνειας με εξίσωση $\sum_{i=1}^{n+k} \lambda_i x_i^2 = n$. Επειδή $|x|^2$ είναι σταθερό, η (2.2.2) δίνει $<\vec{H}, x> = -1$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 2.2.6 για την παραπάνω τετραγωνική υπερεπιφάνεια βρίσκουμε τη σχέση:

$$n\vec{H} = -\frac{\sum_{i=1}^{n+k}\lambda_i\left(\sum_{j=1}^{n}(X_j x_i)^2\right)}{\sum_{i=1}^{n+k}\lambda_i^2 x_i^2}(\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_{n+k}x_{n+k}).$$

Πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά με x και λαμβάνοντας υπόψη ότι $<\vec{H}, x> = -1$, έχουμε

$$\frac{\sum_{i=1}^{n+k}\lambda_i\left(\sum_{j=1}^{n}(X_j x_i)^2\right)}{\sum_{i=1}^{n+k}\lambda_i^2 x_i^2} = 1 \;,$$

αφού $\sum_{i=1}^{n+k}\lambda_i x_i^2 = n$. Συνεπώς ισχύει $n\vec{H} = -(\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_{n+k}x_{n+k})$. Με τη βοήθεια της (2.2.1) βρίσκουμε $\Delta x_i = \lambda_i x_i$, για κάθε $i = 1, \ldots, n+k$, που δείχνει ότι η M^n είναι $M^n(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+k})$.

Παρατήρηση 2.2.11. Είναι φανερό ότι, αν η M^n είναι συμπαγής και $M^n(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+k})$, τότε οι ιδιοτιμές λ_i, $i = 1, \ldots, n+k$ είναι μη αρνητικές. Αν $\lambda_i = 0$, τότε η αντίστοιχη συνάρτηση συντεταγμένων x_i είναι σταθερή και επομένως η M^n βρίσκεται σε υπερεπίπεδο του E^{n+k} κάθετο στο διάνυσμα e_i της κανονικής βάσης του E^{n+k}.

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.3. Έστω ότι η M^n είναι συμπαγής και $M^n(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+2})$ υποπολλαπλότητα του E^{n+2}. Από το Θεώρημα 2.1.2 γνωρίζουμε, ότι περιέχεται σε υπερσφαίρα $S^{n+1}(R)$ με εξίσωση $\sum_{i=1}^{n+2} x_i^2 = R^2$ και είναι υποπολλαπλότητα ελάχιστης έκτασης της τετραγωνικής υπερεπιφάνειας N του E^{n+2}, με αναλυτική εξίσωση $\sum_{i=1}^{n+2}\lambda_i x_i^2=n$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f_1(x_1, \ldots, x_{n+2}) = \sum_{i=1}^{n+2} x_i^2 - R^2$ και $f_2(x_1,\ldots, x_{n+2}) = \sum_{i=1}^{n+2}\lambda_i x_i^2 - n$. Τα διανυσματικά πεδία $\overline{\nabla} f_1, \overline{\nabla} f_2$ ή θα είναι γραμμικώς εξαρτημένα παντού στην M^n ή θα υπάρχει ένα σημείο όπου θα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και λόγω συνέχειας γραμμικώς ανεξάρτητα σε ανοιχτή περιοχή U της M^n. Έστω ότι $\overline{\nabla} f_1$, $\overline{\nabla} f_2$ είναι παντού γραμμικώς εξαρτημένα. Από την Πρόταση 2.2.7 το διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας της M^n στον E^{n+2} είναι

$$\vec{H} = -\frac{1}{2n}\overline{\nabla} f_2 \ ,$$

από όπου φαίνεται ότι είναι παράλληλο προς το κάθετο της $S^{n+1}(R)$ δηλαδή το $\frac{\overline{\nabla} f_1}{|\overline{\nabla} f_1|}$. Επομένως από την (2.2.4) συμπεραίνουμε , ότι η M^n είναι υπο-πολλαπλότητα ελάχιστης έκτασης της $S^{n+1}(R)$.

Υποθέτουμε τώρα , ότι τα διανυσματικά πεδία $\overline{\nabla} f_1, \overline{\nabla} f_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα σε ένα ανοιχτό U της M^n. Ορίζουμε τότε τα διανυσματικά πεδία

$$\xi_1 = \frac{\overline{\nabla} f_1}{|\overline{\nabla} f_1|} \ , \quad \xi_2 = \frac{\overline{\nabla} f_1 - \frac{R^2}{n}\overline{\nabla} f_2}{\left|\overline{\nabla} f_1 - \frac{R^2}{n}\overline{\nabla} f_2\right|} \ , \tag{2.2.13}$$

τα οποία αποτελούν ορθοκανονική βάση του κάθετου χώρου της U στον E^{n+2}. Κατά συνέπεια το διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας $\vec{H}$ στο U δίνεται από τη σχέση

$$n\vec{H} = (trA_{\xi_1})\xi_1 + (trA_{\xi_2})\xi_2 \ ,$$

όπου A_{ξ_1} , A_{ξ_2} είναι οι απεικονίσεις Weingarten του U στον E^{n+2} ως προς τις διευθύνσεις ξ_1, ξ_2 αντίστοιχα. Με τη βοήθεια της (2.2.13) και των ιδιοτήτων των απεικονίσεων Weingarten εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$(2.2.14)\quad n\vec{H}=\Big(\frac{trA_{\overline{\nabla}f_1}}{|\overline{\nabla}f_1|^2}+\frac{trA_{\overline{\nabla}f_1}-\frac{R^2}{n}trA_{\overline{\nabla}f_2}}{\left|\overline{\nabla}f_1-\frac{R^2}{n}\overline{\nabla}f_2\right|^2}\Big)\overline{\nabla}f_1-\frac{R^2}{n}\,\frac{trA_{\overline{\nabla}f_1}-\frac{R^2}{n}trA_{\overline{\nabla}f_2}}{\left|\overline{\nabla}f_1-\frac{R^2}{n}\overline{\nabla}f_2\right|^2}\overline{\nabla}f_2.$$

Επειδή όμως η M^n είναι υποπολλαπλότητα ελάχιστης έκτασης της N , πρέπει λόγω της (2.2.4) το $\vec{H}$ να είναι παράλληλο με το κάθετο της N, δηλαδή το $\overline{\nabla}f_2$. Έτσι ο συντελεστής του $\overline{\nabla}f_1$ στην (2.2.14) είναι ταυτοτικά μηδέν στο U. Δηλαδή ισχύει

$$(2.2.15)\qquad \frac{trA_{\overline{\nabla}f_1}}{|\overline{\nabla}f_1|^2}+\frac{trA_{\overline{\nabla}f_1}-\frac{R^2}{n}trA_{\overline{\nabla}f_2}}{\left|\overline{\nabla}f_1-\frac{R^2}{n}\overline{\nabla}f_2\right|^2}=0.$$

Στην συνέχεια υπολογίζουμε τις ποσότητες $trA_{\overline{\nabla}f_1}$ και $trA_{\overline{\nabla}f_2}$. Αν $X_1,\dots, X_n$ είναι ορθοκανονικό πλαίσιο της M^n , τότε έχουμε

$$trA_{\overline{\nabla}f_i}=\sum_{j=1}^{n}<A_{\overline{\nabla}f_i}(X_j), X_j>$$

ή

$$trA_{\overline{\nabla}f_i}=-\sum_{j=1}^{n}<\overline{\nabla}_{X_j}(\overline{\nabla}f_i), X_j> \quad \text{για } i=1,2.$$

Έτσι έχουμε $trA_{\overline{\nabla}f_1}=-\sum_{j=1}^{n}<\overline{\nabla}_{X_j}(2x), X_j>$

ή

$$\mathrm{tr}A_{\overline{\nabla} f_1} = -\,2n.$$

Για το $\mathrm{tr}A_{\overline{\nabla} f_2}$, λόγω της (1.1.2), έχουμε ότι

$$\mathrm{tr}A_{\overline{\nabla} f_2} = -\sum_{j=1}^{n} <\overline{\nabla}_{X_j}(\overline{\nabla} f_2), X_j>$$

ή (σχέση (1.1.2))

$$\mathrm{tr}A_{\overline{\nabla} f_2} = \overline{\Delta} f_2 + <\overline{\nabla}_{\xi_1}(\overline{\nabla} f_2), \xi_1> + <\overline{\nabla}_{\xi_2}(\overline{\nabla} f_2), \xi_2>$$

ή

$$\mathrm{tr}A_{\overline{\nabla} f_2} = -\,2\sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i + \frac{1}{|\overline{\nabla} f_1|^2} <\overline{\nabla}_{\overline{\nabla} f_1}(\overline{\nabla} f_2), \overline{\nabla} f_1> +$$

$$+ \frac{1}{\left|\overline{\nabla} f_1 - \frac{R^2}{n}\overline{\nabla} f_2\right|^2} <\overline{\nabla}_{\overline{\nabla} f_1 - \frac{R^2}{n}\overline{\nabla} f_2}(\overline{\nabla} f_2), \overline{\nabla} f_1 - \frac{R^2}{n}\overline{\nabla} f_2> .$$

Άρα

(2.2.16)
$$\mathrm{tr}A_{\overline{\nabla} f_2} = -\,2\sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i + \frac{1}{|\overline{\nabla} f_1|^2} <\overline{\nabla}_{\overline{\nabla} f_1}(\overline{\nabla} f_2), \overline{\nabla} f_1> +$$

$$+ \frac{1}{\left|\overline{\nabla} f_1 - \frac{R^2}{n}\overline{\nabla} f_2\right|^2} \Big[<\overline{\nabla}_{\overline{\nabla} f_1}(\overline{\nabla} f_2), \overline{\nabla} f_1> - \frac{R^2}{n} <\overline{\nabla}_{\overline{\nabla} f_2}(\overline{\nabla} f_2), \overline{\nabla} f_1> -$$

$$- \frac{R^2}{n} <\overline{\nabla}_{\overline{\nabla} f_1}(\overline{\nabla} f_2), \overline{\nabla} f_2> + \frac{R^4}{n^2} <\overline{\nabla}_{\overline{\nabla} f_2}(\overline{\nabla} f_2), \overline{\nabla} f_2>\Big].$$

Όμως

$$\overline{\nabla} f_1 = 2x$$

και

$$\overline{\nabla} f_2 = 2(\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_{n+2} x_{n+2}).$$

Συνεπώς

$$\overline{\nabla}_{\overline{\nabla} f_1}(\overline{\nabla} f_2) = 4\,(\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_{n+2} x_{n+2})$$

και

$$\overline{\nabla}_{\overline{\nabla} f_2}(\overline{\nabla} f_2) = 4\,(\lambda_1^2 x_1, \ldots, \lambda_{n+2}^2 x_{n+2}).$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην (2.2.16) βρίσκουμε

$$\operatorname{tr}A_{\overline{\nabla} f_2} = -2\sum_{i=1}^{n+2}\lambda_i + \frac{2n}{R^2} + \frac{1}{\left|\overline{\nabla} f_1 - \frac{R^2}{n}\overline{\nabla} f_2\right|^2}\left(8n - \frac{16R^2}{n}\sum_{i=1}^{n+2}\lambda_i^2 x_i^2 + \frac{8R^4}{n^2}\sum_{i=1}^{n+2}\lambda_i^3 x_i^2\right).$$

Επίσης , μετά από υπολογισμό προκύπτει

$$\left|\overline{\nabla} f_1 - \frac{R^2}{n}\overline{\nabla} f_2\right|^2 = |\overline{\nabla} f_1|^2 - 2\frac{R^2}{n} < \overline{\nabla} f_1, \overline{\nabla} f_2 > + \frac{R^4}{n^2}|\overline{\nabla} f_2|^2$$

ή

$$\left|\overline{\nabla} f_1 - \frac{R^2}{n}\overline{\nabla} f_2\right|^2 = 4R^2 - 8\frac{R^2}{n}\sum_{i=1}^{n+2}\lambda_i x_i^2 + 4\frac{R^4}{n^2}\sum_{i=1}^{n+2}\lambda_i^2 x_i^2$$

και συνεπώς

$$\left|\overline{\nabla} f_1 - \frac{R^2}{n}\overline{\nabla} f_2\right|^2 = -4R^2 + 4\frac{R^4}{n^2}\sum_{i=1}^{n+2}\lambda_i^2 x_i^2.$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις στην (2.2.15) βρίσκουμε ότι στο U ισχύει ταυτοτικά η ισότητα

$$(2.2.17)\qquad \Big(\sum_{i=1}^{n+2}\lambda_i^2 x_i^2\Big)^2 + \sum_{i=1}^{n+2} c_i x_i^2 + d = 0 ,$$

όπου d, c_i , i = 1,..., n+2 είναι σταθερές που εξαρτώνται από τα n, R και λ_i , i = 1,..., n+2. Είναι φανερό , ότι δύο τουλάχιστον από τα λ_i , i = 1,..., n+2 είναι διαφορετικά μεταξύ τους , αφού τα $\bar{\nabla} f_1$ και $\bar{\nabla} f_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Έστω ότι είναι $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων $\sum_{i=1}^{n+2} x_i^2 - R^2 = 0$ και $\sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i x_i^2 = n$ ως προς x_1^2 και x_2^2 βρίσκουμε

$$x_1^2 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\sum_{i=3}^{n+2} (\lambda_i - \lambda_2)x_i^2 + \lambda_2 R^2 - n\right)$$

και

$$x_2^2 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\sum_{i=3}^{n+2} (\lambda_1 - \lambda_i)x_i^2 - \lambda_1 R^2 + n\right).$$

Αντικαθιστώντας τα x_1^2 και x_2^2 στην (2.2.17) προκύπτει ένα πολυώνυμο των ανεξάρτητων μεταβλητών $x_3, \ldots, x_{n+2}$, που είναι εκ ταυτότητας μηδέν σε ανοιχτό υποσύνολο του E^n. Ο συντελεστής του x_i^4 ($i \geq 3$) αυτού του πολυωνύμου είναι ο αριθμός $(\lambda_i - \lambda_2)^2(\lambda_i - \lambda_1)^2$. Συνεπώς πρέπει $(\lambda_i - \lambda_2)(\lambda_i - \lambda_1) = 0$, για i = 3,..., n+2. Τούτο σημαίνει πως καθένα από τα λ_i , i = 1,..., n+2 είναι ίσο προς το λ_1 ή το λ_2. Έστω ότι p από τα λ_i είναι ίσα προς το λ_1 και τα υπόλοιπα ίσα προς το λ_2 , όπου $1 \leq p \leq n+1$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε , ότι $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = \lambda$, και $\lambda_{p+1} = \ldots = \lambda_{n+2} = \mu$, όπου $\lambda \neq \mu$ (σε διαφορετική περίπτωση αλλάζουμε το σύστημα συντεταγμένων του E^{n+2}). Από τις εξισώσεις

$$\lambda \sum_{i=1}^{p} x_i^2 + \mu \sum_{i=p+1}^{n+2} x_i^2 = n$$

και

$$\sum_{i=1}^{p} x_i^2 + \sum_{i=p+1}^{n+2} x_i^2 = R^2$$

συνάγεται ότι $\sum_{i=1}^{p} x_i^2 = r_1^2 =$ σταθερό και $\sum_{i=p+1}^{n+2} x_i^2 = r_2^2 =$ σταθερό . Αν $p = 1$ ή $p = n+1$, τότε θα έχουμε $x_1 =$ σταθερό ή $x_{n+2} =$ σταθερό και η M^n είναι μια συνήθης υπερσφαίρα. Αν $1<p<n+1$, τότε η M^n είναι το γινόμενο Riemann $S^{p-1}(r_1)\times S^{n-p+1}(r_2)$, με $\frac{r_1}{r_2} \neq \sqrt{\frac{p-1}{n-p+1}}$, αφού η M^n δεν είναι υποπολλαπλότητα ελάχιστης έκτασης της $S^{n+1}(R)$. Το αντίστροφο του θεωρήματος είναι άμεσο.

Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 2.1.3 είναι το παρακάτω πόρισμα:

Πόρισμα 2.2.12. *Οι μόνες συμπαγείς επιφάνειες ειδικού τύπου του* E^4 *είναι οι συνήθεις σφαίρες, οι επιφάνειες ελάχιστης έκτασης υπερσφαιρών του* E^4 *και τα γινόμενα Riemann κύκλων διαφορετικών ακτίνων.*

Παρατήρηση 2.2.13. Είναι φανερό, από το Θεώρημα 2.1.3, ότι οι συμπαγείς και συνεκτικές υποπολλαπλότητες ειδικού τύπου του E^{n+2} είναι το πολύ 2- τύπου.

2.3. Απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.4

Έστω M^n υπερεπιφάνεια του E^{n+1} για την οποία ισχύει

(2.3.1) $$\Delta x = Ax+B,$$

όπου $A=(\alpha_{ij})$ είναι ένας $(n+1)\times(n+1)$ σταθερός πίνακας , $B=(\beta_i)$ ένα σταθερό διάνυσμα του E^{n+1} και x το διανυσματικό πεδίο θέσης. Σημαντικό ρόλο στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.4 παίζει το ακόλουθο

Λήμμα 2.3.1. *Αν για μια υπερεπιφάνεια* M^n $(n\geq 2)$ *του* E^{n+1} *ισχύει η σχέση* $\Delta x = Ax+B$, *τότε τα σταθερά διανύσματα του* E^{n+1}

$$\vec{c}_{ij} = (0,\ldots, 0, \alpha_{jn+1} - \alpha_{n+1j}, 0,\ldots, 0, \alpha_{n+1i} - \alpha_{in+1}, 0,\ldots, 0, \alpha_{ij} - \alpha_{ji}) \text{ , } 1\leq i<j \leq n$$

(όπου το $\alpha_{jn+1} - \alpha_{n+1j}$ *κατέχει την* i-*θέση και το* $\alpha_{n+1i} - \alpha_{in+1}$ *κατέχει την* j-*θέση) είναι εφαπτόμενα σε κάθε σημείο της* M^n.

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε , ότι η M^n τοπικά είναι γράφημα μιας λείας συνάρτησης $f:U\rightarrow E$, όπου U είναι ανοιχτό υποσύνολο του E^n. Αυτό σημαίνει , ότι η M^n τοπικά είναι το σύνολο των σημείων $(x_1,\ldots, x_n, f(x_1,\ldots, x_n))$ με $(x_1,\ldots, x_n)\in U$. Επειδή το διανυσματικό πεδίο $(- f_{x_1},\ldots, - f_{x_n}, 1)$ είναι κάθετο στην M^n , έχουμε

$$n\vec{H} = \varphi(- f_{x_1},\ldots, - f_{x_n}, 1) \text{ ,}$$

όπου $\vec{H}$ είναι το διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας της M^n και φ κατάλληλη λεία συνάρτηση, που ορίζεται στο U. Από την παραπάνω ισότητα και λόγω της (2.2.1) παίρνουμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων

$$\Delta x_i = \varphi f_{x_i}, \; i = 1,\ldots, n$$

και

$$\Delta f = - \varphi.$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (2.3.1), οι παραπάνω σχέσεις γράφονται αντίστοιχα

(2.3.2) $$\varphi f_{x_i} = \sum_{m=1}^{n} \alpha_{im} x_m + \alpha_{in+1} f + \beta_i, \ i = 1, \ldots, n$$

(2.3.3) $$-\varphi = \sum_{m=1}^{n} \alpha_{n+1m} x_m + \alpha_{n+1n+1} f + \beta_{n+1}.$$

Επίσης έχουμε

(2.3.4) $$\varphi f_{x_j} = \sum_{m=1}^{n} \alpha_{jm} x_m + \alpha_{jn+1} f + \beta_j.$$

Παραγωγίζοντας τα μέλη της (2.3.2) ως προς x_j και της (2.3.4) ως προς x_i, παίρνουμε αντίστοιχα

(2.3.5) $$\varphi_{x_j} f_{x_i} + \varphi f_{x_i x_j} = \alpha_{ij} + \alpha_{in+1} f_{x_j},$$

(2.3.6) $$\varphi_{x_i} f_{x_j} + \varphi f_{x_j x_i} = \alpha_{ji} + \alpha_{jn+1} f_{x_i}.$$

Από την (2.3.3) βρίσκουμε

(2.3.7) $$\varphi_{x_i} = -\alpha_{n+1i} - \alpha_{n+1n+1} f_{x_i}$$

και

(2.3.8) $$\varphi_{x_j} = -\alpha_{n+1j} - \alpha_{n+1n+1} f_{x_j}.$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (2.3.5), (2.3.6) και αντικαθιστώντας τα φ_{x_i}, φ_{x_j} από τις (2.3.7) και (2.3.8) αντίστοιχα, παίρνουμε

(2.3.9) $$(\alpha_{jn+1} - \alpha_{n+1j}) f_{x_i} + (\alpha_{n+1i} - \alpha_{in+1}) f_{x_j} = \alpha_{ij} - \alpha_{ji}, \ 1 \leq i < j \leq n.$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει αμέσως το ζητούμενο , αφού το διανυσματικό πεδίο $(-f_{x_1},\dots,-f_{x_n},1)$ είναι κάθετο στην M^n.

Στην συνέχεια , για λόγους συντομίας θέτουμε $\alpha_i = \alpha_{n+1i} - \alpha_{in+1}$ και $\gamma_{ij} = \alpha_{ij} - \alpha_{ji}$, $1 \le i < j \le n$, οπότε η (2.3.9) γίνεται

(2.3.10) $$-\alpha_j f_{x_i} + \alpha_i f_{x_j} = \gamma_{ij},\ 1 \le i < j \le n.$$

Κάνοντας χρήση της (2.3.10) , διαπιστώνουμε ότι

$$-\alpha_j \gamma_{ki} + \alpha_i \gamma_{kj} = \alpha_k \gamma_{ij},\ 1 \le k < i < j \le n.$$

Επειδή όμως $\vec{c}_{ij} = (0,\dots,0,-\alpha_j,0,\dots,0,\alpha_i,0,\dots,0,\gamma_{ij})$, $1 \le i < j \le n$, από την προηγούμενη ισότητα έχουμε

(2.3.11) $$-\alpha_j \vec{c}_{ki} + \alpha_i \vec{c}_{kj} = \alpha_k \vec{c}_{ij},\ 1 \le k < i < j \le n.$$

Τα διανύσματα $\vec{c}_{ij}$ $(1 \le i < j \le n)$ είναι σε πλήθος $\frac{n(n-1)}{2}$. Συμβολίζουμε με C το σύνολο τους και με rankC τη διάσταση του υποχώρου που παράγεται από το C. Προφανώς ισχύει $\mathrm{rank}C \le n$.

Λήμμα 2.3.2. *Για την βαθμίδα του συνόλου* C (rankC) *ισχύει* $\mathrm{rank}C \le n-1$. *Επιπλέον, αν* $\mathrm{rank}C < n-1$ *, τότε ο πίνακας* A *είναι συμμετρικός.*

Απόδειξη. Έστω ότι ισχύει $\alpha_i = 0$ για κάθε $i = 1,\dots,n$. Από την (2.3.10) έχουμε $\gamma_{ij} = 0$ για κάθε $i, j = 1,\dots,n$, δηλαδή ο A είναι συμμετρικός και επομένως το σύνολο C περιέχει μόνο το μηδενικό διάνυσμα ήτοι $\mathrm{rank}C = 0$. Ας υποθέσουμε τώρα πως υπάρχει k , με $1 \le k \le n$, τέτοιος ώστε $\alpha_k \ne 0$ και

$\alpha_1 = \ldots = \alpha_{k-1} = 0$. Από την (2.3.11) με κατάλληλες επιλογές των δεικτών παίρνουμε

$$-\alpha_j \vec{c}_{ki} + \alpha_i \vec{c}_{kj} = \alpha_k \vec{c}_{ij},\ 1 \le k < i < j \le n,$$

$$-\alpha_j \vec{c}_{ik} + \alpha_k \vec{c}_{ij} = \alpha_i \vec{c}_{kj},\ 1 \le i < k < j \le n$$

και

$$-\alpha_k \vec{c}_{ij} + \alpha_j \vec{c}_{ik} = \alpha_1 \vec{c}_{jk},\ 1 \le i < j < k \le n,$$

από όπου φαίνεται, ότι όλα τα $\vec{c}_{ij}$ ανήκουν στον υπόχωρο που παράγεται από τα διανύσματα $\vec{c}_{1k}, \ldots, \vec{c}_{k-1k}, \vec{c}_{kk+1}, \ldots, \vec{c}_{kn}$, τα οποία είναι σε πλήθος n-1. Έτσι έχουμε $\operatorname{rank} C \le n-1$.

Έστω $\operatorname{rank} C < n-1$. Αυτό σημαίνει, ότι οποιοδήποτε υποσύνολο του C, που περιέχει τουλάχιστον n-1 διανύσματα, είναι γραμμικώς εξαρτημένο. Έτσι τα διανύσματα $\vec{c}_{12}, \ldots, \vec{c}_{1n}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Από αυτό συνεπάγεται εύκολα ότι $\alpha_1 = 0$. Όμοια, επειδή $\vec{c}_{12}, \vec{c}_{23}, \ldots, \vec{c}_{2n}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\alpha_1 = 0$, συμπεραίνουμε ότι $\alpha_2 = 0$. Έστω ότι $\alpha_i = 0$ για κάθε $1 \le i < r$. Τότε τα διανύσματα $\vec{c}_{1r}, \ldots, \vec{c}_{r-1r}, \vec{c}_{rr+1}, \ldots, \vec{c}_{rn}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα και επομένως $\alpha_r = 0$. Τέλος τα διανύσματα $\vec{c}_{1n}, \ldots, \vec{c}_{n-1n}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα και έτσι $\alpha_n = 0$. Συνεπώς $\alpha_{in+1} = \alpha_{n+1i}$ για $i = 1, \ldots, n+1$. Από την (2.3.10) βλέπουμε ότι $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ για όλα τα $i, j = 1, \ldots, n$, που σημαίνει ότι ο A είναι συμμετρικός.

Στο παρακάτω παράδειγμα φαίνεται ότι ο πίνακας A δεν είναι πάντοτε συμμετρικός.

Παράδειγμα 2.3.3. Έστω M^n το υπερεπίπεδο του E^{n+1} με εξίσωση $x_{n+1} = 0$. Τότε $\Delta x = 0$ ή

$$\Delta x = A x\,,$$

όπου

$$A = \begin{pmatrix} 0 & . & . & . & 0 & 1 \\ . & & & & . & . \\ . & & 0 & & . & . \\ . & & & & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Στην περίπτωση αυτή είναι

$$\vec{c}_{ij} = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0,-1,0,\ldots,0) \quad 1 \le i < j \le n,$$

όπου οι αριθμοί 1 και -1 κατέχουν τις i και j θέσεις αντίστοιχα. Τα διανύσματα $\vec{c}_{12},\ldots,\vec{c}_{1n}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, δηλαδή $\mathrm{rank}C = n-1$.

Παράδειγμα 2.3.4. Έστω M^n ο κύλινδρος του E^{n+1} με εξίσωση $x_1^2 + x_{n+1}^2 = R^2$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$\Delta x = A x\,,$$

όπου

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{R^2} & & & \\ & 0 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & 0 & \\ & & & & \frac{1}{R^2} \end{pmatrix}.$$

Έστω y ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων με $x = By + d$ όπου B ένας ορθογώνιος $(n+1)\times(n+1)$ πίνακας και d ένα σταθερό διάνυσμα. Έχουμε τότε στο νέο σύστημα συντεταγμένων

$$\Delta(By + d) = A(By + d)$$

ή

$$\Delta y = A_1 y + d_1$$

με $A_1 = B^{-1}AB$ και $d_1 = B^{-1}Ad$. Παρατηρούμε, ότι και ο πίνακας A_1 είναι συμμετρικός, αφού ο B είναι ορθογώνιος. Επίσης στην περίπτωση αυτή ισχύει $\mathrm{rank}C = 0$.

Δίνουμε παρακάτω την απόδειξη μιας πρότασης των F.Dillen, J. Pas και L.Verstraelen [16] για λόγους πληρότητας :

Πρόταση 2.3.5. *Έστω $\gamma(s)$ επίπεδη καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου, που ικανοποιεί τη σχέση $\Delta\gamma = A\gamma + B$, όπου A ένας σταθερός 2×2 πίνακας και B ένα σταθερό διάνυσμα. Τότε η καμπύλη γ έχει σταθερή καμπυλότητα και επομένως είναι τμήμα ευθείας ή κύκλου.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το πλαίσιο Serret- Frenet T, N της καμπύλης. Ισχύουν οι εξισώσεις Serret- Frenet

$$T' = kN$$

$$N' = -kT,$$

όπου k είναι η προσημασμένη καμπυλότητα της καμπύλης. Στην περίπτωση μας είναι $\Delta = -\dfrac{d^2}{ds^2}$. Έτσι η $\Delta\gamma = A\gamma + B$ γίνεται

$$-T' = A\gamma + B$$

ή ισοδύναμα

(2.3.12) $$-kN = A\gamma + B.$$

Με παραγώγιση των μελών της (2.3.12) παίρνουμε

(2.3.13) $$AT = k^2T - k'N.$$

Παρόμοια από την (2.3.13) λαμβάνουμε

$$kAN = 3kk'\,T + (k^3 - k'')N. \tag{2.3.14}$$

Υποθέτουμε τώρα , ότι η γ δεν έχει καμπυλότητα μηδέν στην περιοχή ενός σημείου της. Δουλεύοντας στην περιοχή αυτού του σημείου βρίσκουμε από τις (2.3.13) και (2.3.14) ότι

$$\langle AT, T\rangle = k^2 \,,\ \langle AT, N\rangle = -\,k'$$

$$\langle AN, T\rangle = 3k' \,,\ \langle AN, N\rangle = \frac{1}{k}(k^3 - k'').$$

Επομένως $trA = \dfrac{2k^3 - k''}{k}$ και $detA = -\,kk'' + 3(k')^2 + k^4$. Επειδή ο A είναι σταθερός πίνακας ισχύουν οι σχέσεις

$$2k^3 - k'' = ck \tag{2.3.15}$$

και

$$-\,kk'' + 3(k')^2 + k^4 = d\,,$$

όπου $c = trA$ και $d = detA$ είναι σταθεροί αριθμοί. Αντικαθιστώντας το k'' από την πρώτη στην δεύτερη παίρνουμε τη σχέση

$$3(k')^2 + ck^2 - k^4 = d\ ,$$

από την οποία με παραγώγιση βρίσκουμε

$$6k'\,k'' + 2ckk' - 4k^3k' = 0\,.$$

Η τελευταία σχέση μαζί με την (2.3.15) συνεπάγεται

$$k' k (2k^2 - c) = 0.$$

Έτσι στην περιοχή του σημείου που εξετάζουμε η καμπυλότητα της καμπύλης είναι παντού σταθερή και συνεπώς η καμπύλη θα είναι τμήμα ευθείας ή κύκλου.

Μετά από τα παραπάνω αποδεικνύουμε το Θεώρημα 2.1.4.

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.4. Έστω M^n υπερεπιφάνεια του E^{n+1}, για την οποία ισχύει η (2.3.1). Σύμφωνα με το Λήμμα 2.3.1 τα διανύσματα του συνόλου C εφάπτονται της M^n και μάλιστα ισχύει $\operatorname{rank} C \leq n-1$ (Λήμμα 2.3.2). Για την απόδειξη διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :

Περίπτωση I. Έστω $\operatorname{rank} C = n-1$.Τότε, σύμφωνα με το Λήμμα 2.3.1, υπάρχουν n-1 σταθερά γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του E^{n+1} που εφάπτονται της M^n σε κάθε σημείο της. Αυτό σημαίνει πως η M^n είναι της μορφής $\gamma \times E^{n-1}$, όπου E^{n-1} είναι ένας Ευκλείδειος υπόχωρος του E^{n+1} και γ μια καμπύλη σε επίπεδο E^2 κάθετο προς το E^{n-1}. Έτσι το διανυσματικό πεδίο θέσης της M^n δίνεται από τη σχέση

$$x(s, t_1, \ldots, t_{n-1}) = \gamma(s) + \sum_{i=1}^{n-1} t_i \xi_i \ ,$$

όπου $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}\}$ είναι ορθοκανονική βάση του E^{n-1} και s είναι το μήκος τόξου της καμπύλης γ. Μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι

$$\xi_i = (0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0) \ ,$$

όπου ο αριθμός 1 εμφανίζεται στην (i+2)- θέση. Ο Λαπλασιανός τελεστής της M^n έχει την έκφραση

$$\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial s^2} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial t_i^2}.$$

Έτσι έχουμε $\Delta x = -\gamma''$ και λόγω της (2.3.1) ισχύουν οι

(2.3.16) $$-\gamma_1'' = \alpha_{11}\gamma_1 + \alpha_{12}\gamma_2 + \sum_{i=3}^{n+1} \alpha_{1i} t_{i-2} + \beta_1 ,$$

(2.3.17) $$-\gamma_2'' = \alpha_{21}\gamma_1 + \alpha_{22}\gamma_2 + \sum_{i=3}^{n+1} \alpha_{2i} t_{i-2} + \beta_2 ,$$

(2.3.18) $$0 = \alpha_{i1}\gamma_1 + \alpha_{i2}\gamma_2 + \sum_{j=3}^{n+1} \alpha_{ij} t_{j-2} + \beta_i \quad 2<i\leq n+1 .$$

Παραγωγίζουμε ως προς t_i , $i = 1,\ldots, n-1$, τα μέλη των ισοτήτων (2.3.16), (2.3.17), (2.3.18) και παίρνουμε

$$\alpha_{ij} = 0, \quad 1\leq i\leq n+1, \; 3\leq j \leq n+1 .$$

Παρατηρούμε τώρα ότι, αν $|\alpha_{i1}| + |\alpha_{i2}| \neq 0$ για κάποιο $2<i \leq n+1$, τότε από την (2.3.18) συνάγεται, ότι η γ είναι τμήμα ευθείας και επομένως η M^n είναι τμήμα υπερεπιφάνειας ελάχιστης έκτασης. Εξετάζουμε την περίπτωση $\alpha_{i1} = \alpha_{i2} = 0$ για κάθε $i = 3,\ldots, n+1$. Οι σχέσεις (2.3.16) και (2.3.17) γράφονται στη μορφή

$$\overline{\Delta}\gamma = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \gamma + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} ,$$

όπου $\overline{\Delta} = -\frac{d^2}{ds^2}$ είναι ο Λαπλασιανός τελεστής της καμπύλης γ. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.3.5 η γ είναι τμήμα κύκλου ή ευθείας και κατά συνέπεια η M^n είναι τμήμα υπερεπιπέδου του E^{n+1} ή τμήμα κυλίνδρου της μορφής $S^1 \times E^{n-1}$. Η δεύτερη περίπτωση αποκλείεται, λόγω του παραδείγματος 2.3.4, αφού τότε είναι $\mathrm{rank} C = 0$.

Περίπτωση II. Έστω $\mathrm{rank} C < n-1$. Ο πίνακας A είναι συμμετρικός, λόγω του Λήμματος 2.3.2. Υπάρχει τότε ένας ορθογώνιος πίνακας P τέτοιος, ώστε

$$P^{-1}AP = D, \tag{2.3.19}$$

όπου D είναι ο διαγώνιος πίνακας που στην κύρια διαγώνιο του εμφανίζονται οι ιδιοτιμές του πίνακα A. Θεωρούμε στη συνέχεια ένα νέο σύστημα συντεταγμένων y στον E^{n+1} που ορίζεται ως εξής :

$$y = P^{-1}x. \tag{2.3.20}$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων (2.3.19) και (2.3.20) η (2.3.1) στο νέο σύστημα συντεταγμένων παίρνει τη μορφή

$$\Delta y = Dy + d,$$

όπου $d = P^{-1}B$. Μεταβάλλοντας ίσως την αρίθμηση των συντεταγμένων μπορούμε να υποθέσουμε ότι (συμβολίζουμε ξανά με x το σύστημα συντεταγμένων χάριν ευκολίας)

$$\Delta x = \overline{A}x + d, \tag{2.3.21}$$

όπου

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & \lambda_r & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$d = \begin{pmatrix} d_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_r \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{n+1} \end{pmatrix}$$

και r είναι η βαθμίδα του πίνακα A. Αν $r=0$, τότε η (2.3.21) γίνεται $\Delta x = d$ και από την (2.2.1) βρίσκουμε ότι $-n\vec{H} = d$, το οποίο σημαίνει ότι η M^n έχει σταθερό κάθετο διανυσματικό πεδίο, είναι δηλαδή τμήμα υπερεπιπέδου, άρα $\vec{H} = 0$ και επομένως η M^n είναι υπερεπιφάνεια ελάχιστης έκτασης. Υποθέτουμε από εδώ και στο εξής ότι $0<r\leq n+1$. Θεωρούμε νέο σύστημα συντεταγμένων στον E^{n+1} που ορίζεται ως εξής:

$$y_i = x_i + \frac{d_i}{\lambda_i}, \; i = 1,\dots, r$$

και

$$y_i = x_i, \; i = r+1,\dots, n+1.$$

Ως προς αυτό το σύστημα η (2.3.21) μετασχηματίζεται στην

(2.3.22) $$\Delta y = \overline{A}y + \overline{\overline{B}} ,$$

όπου

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ d_{r+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Έστω $(y_1(u_1,\ldots, u_n),\ldots, y_{n+1}(u_1,\ldots, u_n))$ παραμέτρηση της M^n. Τότε από την (2.2.1) και την (2.3.22) βλέπουμε, ότι το διανυσματικό πεδίο $\overline{A}y + \overline{B} = (\lambda_1 y_1, \ldots, \lambda_r y_r, d_{r+1},\ldots, d_{n+1})$ είναι κάθετο στην M^n. Έχουμε επομένως

$$<(\lambda_1 y_1,\ldots, \lambda_r y_r, d_{r+1},\ldots, d_{n+1}), (\frac{\partial y_1}{\partial u_i},\ldots, \frac{\partial y_{n+1}}{\partial u_i})> = 0, \; i = 1,\ldots, n$$

ή ισοδύναμα

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i y_i^2 + 2\sum_{j=r+1}^{n+1} d_j y_j = c, \tag{2.3.23}$$

όπου c σταθερά. Από την τελευταία σχέση βλέπουμε, ότι η M^n είναι ανοιχτό τμήμα τετραγωνικής υπερεπιφάνειας με εξίσωση $g(y) = c$, όπου $g{:}E^{n+1} \to E$ με $g(y) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i y_i^2 + 2\sum_{j=r+1}^{n+1} d_j y_j$. Από το Λήμμα 2.2.4 έχουμε

$$n\vec{H} = \frac{1}{|\overline{\nabla} g|^2}\left(\overline{\Delta} g + \frac{1}{2|\overline{\nabla} g|^2}<\overline{\nabla} g, \overline{\nabla}|\overline{\nabla} g|^2>\right)\overline{\nabla} g$$

ή ισοδύναμα

$$n\vec{H}=\left(-\frac{\sum_{i=1}^{r}\lambda_i}{(\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^2y_i^2)+\sum_{i=r+1}^{n+1}d_i^2}+\frac{\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^3y_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^2y_i^2+\sum_{i=r+1}^{n+1}d_i^2\right)^2}\right)(\lambda_1y_1,\dots,\lambda_ry_r,d_{r+1},\dots,d_{n+1}).$$

Επιπλέον από την (2.2.1) και την (2.3.22) λαμβάνουμε

$$n\vec{H}=-(\lambda_1y_1,\dots,\lambda_ry_r,d_{r+1},\dots,d_{n+1}).$$

Συνεπώς

$$-\frac{\sum_{i=1}^{r}\lambda_i}{\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^2y_i^2+\sum_{i=r+1}^{n+1}d_i^2}+\frac{\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^3y_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^2y_i^2+\sum_{i=r+1}^{n+1}d_i^2\right)^2}=-1$$

ή ισοδύναμα

$$\left(\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^2y_i^2+\sum_{i=r+1}^{n+1}d_i^2\right)^2+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^3y_i^2-(\sum_{i=1}^{r}\lambda_i)\left(\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^2y_i^2+\sum_{i=r+1}^{n+1}d_i^2\right)=0. \tag{2.3.24}$$

Θα δείξουμε ότι $d_{r+1}=\dots=d_{n+1}=0$. Έστω αντίθετα ότι κάποιος από αυτούς τους αριθμούς είναι διαφορετικός του μηδενός. Τότε η (2.3.24) μετατρέπεται σε πολυώνυμο των ανεξάρτητων μεταβλητών $y_1,\dots,y_r$ που είναι εκ ταυτότητας μηδέν σε κάποιο ανοιχτό σύνολο. Έτσι ο συντελεστής λ_i^4 του y_i^4 $(i=1,\dots,r)$ είναι μηδέν, πράγμα άτοπο. Συνεπώς η εξίσωση (2.3.23) της υπερεπιφάνειας γίνεται

$$(2.3.25) \qquad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i y_i^2 = c\,,$$

ενώ η (2.3.24) παίρνει τη μορφή

$$(2.3.26) \qquad \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2 y_i^2\right)^2 + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^3 y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2 y_i^2\right) = 0\,.$$

Είναι προφανές από την (2.3.25) ότι , αν $r = 1$, τότε η M^n είναι ανοιχτό τμήμα υπερεπιπέδου. Ας υποθέσουμε επομένως ότι $2 \leq r \leq n+1$. Λύνοντας την (2.3.25) ως προς y_1^2 και αντικαθιστώντας το στην (2.3.26) βρίσκουμε

$$\sum_{i=2}^{r} \lambda_i^2 (\lambda_i - \lambda_1)^2 y_i^4 + 2 \sum_{2 \leq i < j \leq r} \lambda_i \lambda_j (\lambda_i - \lambda_1)(\lambda_j - \lambda_1) y_i^2 y_j^2$$

$$+ \sum_{i=2}^{r} \left(\lambda_i (\lambda_i - \lambda_1)(2c\lambda_1 + \lambda_1 + \lambda_i - \sum_{j=1}^{r} \lambda_j)\right) y_i^2 + c^2 \lambda_1^2 + c\lambda_1^2 - c\lambda_1 \sum_{j=1}^{r} \lambda_j = 0.$$

Το παραπάνω πολυώνυμο είναι εκ ταυτότητας μηδέν σε ανοιχτό υποσύνολο του E^{r-1}. Επομένως ο συντελεστής του y_i^4 είναι μηδέν, δηλαδή $\lambda_i = \lambda_1$, $i = 2,\ldots, r$. Επιπλέον $c = r - 1$. Έτσι , αν $r = n+1$, τότε η M^n είναι τμήμα υπερσφαίρας ακτίνας $\sqrt{\frac{n}{\lambda_1}}$. Αν $2 \leq r < n+1$, τότε η M^n είναι ανοιχτό τμήμα του γενικευμένου κυλίνδρου $S^{r-1}(R) \times E^{n-r+1}$, όπου $S^{r-1}(R)$ είναι η $(r-1)$- διάστατη σφαίρα ακτίνας $R = \sqrt{\frac{r-1}{\lambda_1}}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 - ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΥΠΕΡΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΥ ΤΥΠΟΥ

3.1 Εισαγωγικά - κύρια αποτελέσματα

Μια υποπολλαπλότητα M της m- διάστατης σφαίρας $S^m(R)$ ακτίνας R του χώρου E^{m+1} είναι πεπερασμένου 2- τύπου (ορισμός 1.1.3), αν το διανυσματικό πεδίο θέσης x ως προς κάποια αρχή δέχεται φασματική ανάλυση

$$x = x_o + x_p + x_q,$$

όπου x_o είναι σταθερό διάνυσμα του E^{m+1}, x_p, x_q είναι μη σταθερές λείες διανυσματικές απεικονίσεις επί της M με τιμές στον E^{m+1} τέτοιες, ώστε $\Delta x_p = \lambda_p x_p$, $\Delta x_q = \lambda_q x_q$ και λ_p, λ_q είναι διαφορετικοί μεταξύ τους πραγματικοί αριθμοί. Αν επιπλέον η M είναι συμπαγής, τότε το σταθερό διάνυσμα x_o συμπίπτει με το *κέντρο μάζας* (centroid) της M στον Ευκλείδιο χώρο E^{m+1} ([8], σελ. 253), δηλαδή με το σημείο $\int_M x\, dM / \int_M dM$.

Ορισμός 3.1.1. *Μια συμπαγής υποπολλαπλότητα της σφαίρας* $S^m(R)$ *του* E^{m+1} *καλείται συμμετρική ως προς τη μάζα (mass-symmetric) στην* $S^m(R)$, *αν το κέντρο μάζας της είναι το κέντρο της* $S^m(R)$.

Πρωταρχική επιδίωξη του παρόντος κεφαλαίου είναι η ταξινόμηση των 2- τύπου σφαιρικών υπερεπιφανειών. Τα μέχρι στιγμής αποτελέσματα προς αυτή την κατεύθυνση αναφέρονται κυρίως σε 2- τύπου επιφάνειες της 3- διάστατης σφαίρας S^3. Συγκεκριμένα ο B.Y.Chen στην μονογραφία [8, σελ. 279] απέδειξε ότι: οι μόνες συμπαγείς, συνεκτικές, 2- τύπου και συμμετρικές ως προς τη μάζα (mass- symmetric) επιφάνειες στην S^3 είναι τα γινόμενα Riemann κύκλων διαφορετικών ακτίνων. Ακολούθως οι M.Barros και O.J.Garay στην εργασία τους [1] απέδειξαν το ίδιο αποτέλεσμα χωρίς την υπόθεση ότι η επιφάνεια είναι συμμετρική ως προς τη μάζα στην S^3, με τη βοήθεια όμως της συμπαγότητας. Τα παραπάνω συμπεράσματα είναι ολικού χαρακτήρα. Είναι ενδιαφέρον το πρόβλημα της τοπικής ταξινόμησης των 2- τύπου επιφανειών της S^3 και γενικότερα των 2- τύπου σφαιρικών υπερεπιφανειών.

Η μελέτη του προβλήματος αυτού για την περίπτωση επιφανειών της S^3 είναι το αντικείμενο της εργασίας [24] και δίνεται από το παρακάτω θεώρημα :

Θεώρημα 3.1.2. *Οι μόνες συνεκτικές (όχι αναγκαστικά συμπαγείς) 2- τύπου επιφάνειες στην 3- διάστατη σφαίρα* $S^3(R)$ *είναι τα ανοιχτά τμήματα των γινομένων Riemann κύκλων διαφορετικών ακτίνων.*

Η τοπική ταξινόμηση των 2- τύπου σφαιρικών υπερεπιφανειών μελετάται στην εργασία [25] και περιγράφεται από το

Θεώρημα 3.1.3. *Μια συνεκτική (όχι αναγκαστικά συμπαγής) υπερεπιφάνεια της* $(n+1)$*- διάστατης σφαίρας* $S^{n+1}(R)$ $(n\geq 2)$ *είναι 2- τύπου, αν και μόνο αν έχει σταθερή αριθμητική καμπυλότητα, σταθερή μη μηδενική μέση καμπυλότητα και δεν περιέχεται σε μικρή υπερσφαίρα της* $S^{n+1}(R)$. *Επιπλέον κάθε συμπαγής 2- τύπου σφαιρική υπερεπιφάνεια είναι συμμετρική ως προς τη μάζα στην* $S^{n+1}(R)$.

Τέλος αποδεικνύουμε το παρακάτω συμπέρασμα, ως επακόλουθο της αναζήτησης 3- τύπου σφαιρικών υπερεπιφανειών :

Θεώρημα 3.1.4. *Δεν υπάρχουν 3- τύπου (όχι αναγκαστικά συμπαγείς) σφαιρικές υπερεπιφάνειες με σταθερή μέση καμπυλότητα.*

Από το Θεώρημα 3.1.2. προκύπτει , ότι η κλάση των 2- τύπου επιφανειών της S^3 δεν είναι ευρεία σε αντίθεση με αυτή των 1- τύπου, αφού υπάρχει πληθώρα επιφανειών ελάχιστης έκτασης στην S^3.

Το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 3.1.3. μπορεί να θεωρηθεί και ως κριτήριο για τη σταθερότητα της αριθμητικής και μέσης καμπυλότητας σφαιρικών υπερεπιφανειών. Επισημαίνουμε , δε ότι είναι το καλύτερο δυνατό, δοθέντος ότι για διάσταση μεγαλύτερη του 2 υπάρχουν άφθονες σφαιρικές υπερεπιφάνειες με σταθερή μέση καμπυλότητα και σταθερή αριθμητική καμπυλότητα, μεταξύ των οποίων είναι και οι ισοπαραμετρικές , αυτές δηλαδή των οποίων οι κύριες καμπυλότητες είναι σταθερές.

Τέλος να παρατηρήσουμε εδώ , ότι το Θεώρημα 3.1.2 μπορεί να προκύψει από το Θεώρημα 3.1.3. Θεωρούμε όμως , ότι η ξεχωριστή απόδειξη του είναι ενδιαφέρουσα εξαιτίας της απλότητας που εμφανίζει. Έτσι, μετά από κάποια προκαταρκτικά στη δεύτερη παράγραφο, στην τρίτη και τέταρτη παράγραφο παραθέτουμε τις αποδείξεις των Θεωρημάτων 3.1.2 και 3.1.3 αντιστοίχως και στην τελευταία παράγραφο αποδεικνύουμε το Θεώρημα 3.1.4.

3.2. Βασικές σχέσεις για πεπερασμένου 2- τύπου και 3- τύπου σφαιρικές υπερεπιφάνειες

Έστω M^n προσανατολισμένη υπερεπιφάνεια της σφαίρας $S^{n+1}(R)$, ακτίνας R του E^{n+2}, εφοδιασμένη με την επαγόμενη μετρική $<,>$ και με διανυσματικό πεδίο θέσης x ως προς κάποια αρχή. Με $\overline{\nabla}$, ∇ και B παριστάνουμε αντίστοιχα την κανονική συνοχή του E^{n+2}, την επαγόμενη συνοχή της M^n και τη δεύτερη μορφή της M^n στον Ευκλείδειο χώρο E^{n+2}. Θα συμβολίζουμε με y το διανυσματικό πεδίο θέσης της υπερεπιφάνειας M^n

ως προς το κέντρο της $S^{n+1}(R)$. Έτσι, το διανυσματικό πεδίο $e_{n+1} = \frac{y}{R}$ μαζί με το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο e_{n+2} της M^n στην $S^{n+1}(R)$ ορίζουν ορθοκανονικό πλαίσιο του κάθετου χώρου της M^n στον E^{n+2}. Η απεικόνιση Weingarten A της M^n ως προς e_{n+2} δίνεται από την εξίσωση του Weingarten

$$AX = -\overline{\nabla}_X e_{n+2} .$$

Ισχύει επίσης η εξίσωση του Gauss ([31], κεφάλαιο VII)

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X,Y) ,$$

όπου

$$B(X,Y) = -\frac{1}{R} < X,Y> e_{n+1} + <AX,Y> e_{n+2} \tag{3.2.1}$$

και X,Y εφαπτόμενα διανυσματικά πεδία της M^n. Θα παριστάνουμε με S το τετράγωνο του μήκους της απεικόνισης Weingarten A, δηλαδή $S = \mathrm{tr}A^2$. Από την (3.2.1) βρίσκουμε, ότι το διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας $\vec{H}$ της M^n στον Ευκλείδειο χώρο E^{n+2} είναι

$$\vec{H} = -\frac{1}{R} e_{n+1} + \frac{\mathrm{tr}A}{n} e_{n+2} . \tag{3.2.2}$$

Επιπλέον τα y, $\vec{H}$ συνδέονται μέσω της σχέσης (βλ. π.χ. [5], σελ. 68)

$$\Delta y = -n\vec{H} . \tag{3.2.3}$$

Για περαιτέρω χρήση θα υπολογίσουμε τις Λαπλασιανές των διανυσματικών πεδίων e_{n+1} και e_{n+2}.

Από τις (3.2.2) και (3.2.3) , επειδή $y = Re_{n+1}$, λαμβάνουμε

(3.2.4)
$$\Delta e_{n+1} = \frac{n}{R^2} e_{n+1} - \frac{trA}{R} e_{n+2} .$$

Από τον ορισμό του Λαπλασιανού τελεστή (σχέση (1.1.6)) έχουμε

$$\Delta e_{n+2} = \sum_{i=1}^{n} (\tilde{\nabla}_{\nabla_{X_i} X_i} e_{n+2} - \overline{\nabla}_{X_i} \overline{\nabla}_{X_i} e_{n+2}) ,$$

όπου $\{X_i\}, i = 1,\ldots, n$ είναι ορθοκανονικό πλαίσιο της M^n. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Gauss και Weingarten βρίσκουμε

$$\Delta e_{n+2} = -\sum_{i=1}^{n} A(\nabla_{X_i} X_i) + \sum_{i=1}^{n} \nabla_{X_i}(AX_i) + \sum_{i=1}^{n} B(X_i, AX_i).$$

Με τη βοήθεια της (3.2.1) παίρνουμε

$$\Delta e_{n+2} = \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{X_i} A)X_i - \frac{1}{R} \sum_{i=1}^{n} <AX_i , X_i> e_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} <A^2 X_i, X_i> e_{n+2} .$$

Επειδή $\sum_{i=1}^{n} (\nabla_{X_i} A)X_i = \text{gradtr}A$, $\sum_{i=1}^{n} <AX_i, X_i> = trA$ και $S = \sum_{i=1}^{n} <A^2X_i, X_i>$, συνάγουμε ότι

(3.2.5)
$$\Delta e_{n+2} = - \frac{trA}{R} e_{n+1} + Se_{n+2} + \text{gradtr}A .$$

Παρατήρηση 3.2.1. Έστω $f: M^n \rightarrow E$ μια λεία πραγματική συνάρτηση, ορισμένη στην M^n και v διαφορίσιμη απεικόνιση επί της M^n με τιμές στον E^{n+2} . Από τον ορισμό του Λαπλασιανού τελεστή έχουμε (σχέση (1.1.6))

$$\Delta(fv) = \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{\nabla}_{\nabla_{X_i} X_i} (fv) - \overline{\nabla}_{X_i} \overline{\nabla}_{X_i} (fv) \right)$$

και λόγω των ιδιοτήτων της κανονικής συνοχής του E^{n+2} βρίσκουμε

$$\Delta(fv) = (\Delta f)v + f\Delta v - 2\overline{\nabla}_{gradf} v. \tag{3.2.6}$$

Λήμμα 3.2.2. *Χρησιμοποιώντας τον προηγούμενο συμβολισμό ισχύει η σχέση*

$$\Delta\vec{H} = \frac{2}{n} A(gradtrA) + \frac{trA}{n} gradtrA + \left(-\frac{n}{R^3} - \frac{(trA)^2}{nR}\right)e_{n+1} + \tag{3.2.7}$$

$$+\left(\frac{1}{n}\Delta trA + \frac{trA}{R^2} + \frac{trA}{n} S\right)e_{n+2} .$$

Ειδικά, αν η M^n *έχει σταθερή μέση καμπυλότητα στην* $S^{n+1}(R)$, *τότε*

$$\Delta\vec{H} = \left(-\frac{n}{R^3} - \frac{(trA)^2}{nR}\right)e_{n+1} + \left(\frac{trA}{R^2} + \frac{trA}{n} S\right)e_{n+2}, \tag{3.2.8}$$

και

$$\Delta^2\vec{H} = \frac{2trA}{n} A(gradS) + \left(-\frac{n^2}{R^5} - 2\frac{(trA)^2}{R^3} - \frac{(trA)^2}{nR} S\right)e_{n+1} + \tag{3.2.9}$$

$$+\left(\frac{n}{R^4} trA + \frac{(trA)^3}{nR^2} + \frac{trA}{R^2} S + \frac{trA}{n} S^2 + \frac{trA}{n} \Delta S\right)e_{n+2}.$$

Απόδειξη. Από την (3.2.2) και λόγω της (3.2.6) έχουμε

$$\Delta\vec{H} = -\frac{1}{R}\Delta e_{n+1} + \frac{1}{n}(\Delta trA)e_{n+2} + \frac{trA}{n}\Delta e_{n+2} - 2\overline{\nabla}_{grad(\frac{trA}{n})}e_{n+2}.$$

Αντικαθιστώντας τα $\Delta e_{n+1}, \Delta e_{n+2}$ από τις (3.2.4), (3.2.5) στην προηγούμενη σχέση και λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση του Weingarten καταλήγουμε στην (3.2.7).

Αν υποθέσουμε τώρα, ότι η M^n έχει σταθερή μέση καμπυλότητα στην $S^{n+1}(R)$, τότε trA είναι σταθερό και η (3.2.8) προκύπτει από την (3.2.7). Επιπλέον από την (3.2.8) παίρνουμε, λόγω της (3.2.6), ότι

$$\Delta^2\vec{H} = \left(-\frac{n}{R^3} - \frac{(trA)^2}{nR}\right)\Delta e_{n+1} + \frac{1}{n}trA\,\Delta S\,e_{n+2} + \left(\frac{trA}{R^2} + \frac{trA}{n}S\right)\Delta e_{n+2} -$$

$$-2\overline{\nabla}_{grad(\frac{trA}{n}S)}e_{n+2}.$$

Με αντικατάσταση των $\Delta e_{n+1}, \Delta e_{n+2}$ από τις (3.2.4), (3.2.5) και με τη βοήθεια της εξίσωσης Weingarten, η παραπάνω σχέση δίνει την (3.2.9).

Η παρακάτω ανάλυση είναι χρήσιμη για την απόδειξη των κυρίων αποτελεσμάτων αυτού του κεφαλαίου.

Θεωρούμε ένα σταθερό διάνυσμα α του E^{n+2} και το συμβολισμό που προηγήθηκε. Αναλύοντας το α, σε κάθε σημείο της M^n, σε εφαπτόμενη συνιστώσα α_τ και σε κάθετη συνιστώσα παίρνουμε

$$\alpha = \alpha_\tau + \langle\alpha, e_{n+1}\rangle e_{n+1} + \langle\alpha, e_{n+2}\rangle e_{n+2}. \qquad (3.2.10)$$

Λήμμα 3.2.3. *Για κάθε σταθερό διάνυσμα* α *του* E^{n+2} *ισχύουν οι σχέσεις*

(3.2.11) $$\nabla_X \alpha_\tau = <\alpha, e_{n+2}>AX - \frac{1}{R}<\alpha, e_{n+1}>X ,$$

(3.2.12) $$\mathrm{grad}<\alpha, e_{n+1}> = \frac{\alpha_\tau}{R}$$

και

(3.2.13) $$\mathrm{grad}<\alpha, e_{n+2}> = - A\alpha_\tau ,$$

όπου X *εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο στην* M^n.

Απόδειξη. Έστω X τυχαίο εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο της M^n. Από την (3.2.10) με παραγώγιση βρίσκουμε

$$\overline{\nabla}_X \alpha_\tau + X<\alpha, e_{n+1}> e_{n+1} + <\alpha, e_{n+1}> \overline{\nabla}_X e_{n+1} + X<\alpha, e_{n+2}> e_{n+2} +$$

$$+ <\alpha, e_{n+2}>\overline{\nabla}_X e_{n+2} = 0$$

ή λόγω των εξισώσεων Gauss και Weingarten

$$\nabla_X \alpha_\tau + B(X, \alpha_\tau) + X<\alpha, e_{n+1}> e_{n+1} + \frac{1}{R}<\alpha, e_{n+1}> X + X<\alpha, e_{n+2}> e_{n+2} -$$

$$- <\alpha, e_{n+2}>AX = 0.$$

Η τελευταία σχέση με αντικατάσταση του $B(X, \alpha_\tau)$ από την (3.2.1) γίνεται

$$\nabla_X \alpha_\tau - \frac{1}{R} <X, \alpha_\tau> e_{n+1} + <A\alpha_\tau, X> e_{n+2} + X<\alpha, e_{n+1}> e_{n+1} + \frac{1}{R} <\alpha, e_{n+1}> X +$$

$$+ X<\alpha, e_{n+2}> e_{n+2} - <\alpha, e_{n+2}>AX = 0.$$

Παίρνοντας εφαπτομενικές συνιστώσες και συνιστώσες στις κατευθύνσεις των e_{n+1}, e_{n+2} αντίστοιχα , έχουμε

$$\nabla_X \alpha_\tau = - \frac{1}{R} <\alpha, e_{n+1}> X + <\alpha, e_{n+2}>AX ,$$

$$X<\alpha, e_{n+1}> = \frac{1}{R} <X, \alpha_\tau >,$$

και

$$X<\alpha, e_{n+2}> = - <A\alpha_\tau, X> ,$$

από τις οποίες προκύπτουν οι ζητούμενες σχέσεις.

Λήμμα 3.2.4. *Αν η* M^n *είναι 2- τύπου υπερεπιφάνεια της* $S^{n+1}(R)$ *με φασματική ανάλυση* $x = x_o + x_p + x_q$, $\Delta x_p = \lambda_p x_p$, $\Delta x_q = \lambda_q x_q$ $(\lambda_p \neq \lambda_q)$, *τότε ισχύουν οι σχέσεις*

(3.2.14) $$2A(\mathrm{gradtr}A) + \mathrm{tr}A\,\mathrm{gradtr}A = - \lambda_p \lambda_q \alpha_\tau ,$$

(3.2.15) $$\frac{n}{R^3} + \frac{(\mathrm{tr}A)^2}{nR} = \frac{\lambda_p + \lambda_q}{R} - \frac{\lambda_p \lambda_q}{n} R + \frac{\lambda_p \lambda_q}{n} <\alpha, e_{n+1}>,$$

και

(3.2.16) $$\frac{1}{n} \Delta \mathrm{tr}A + \frac{\mathrm{tr}A}{R^2} + \frac{\mathrm{tr}A}{n} S = \frac{\lambda_p + \lambda_q}{n} \mathrm{tr}A - \frac{\lambda_p \lambda_q}{n} <\alpha, e_{n+2}>,$$

όπου $\alpha = x_o - b$ *και* b *είναι το κέντρο της* $S^{n+1}(R)$.

Απόδειξη. Επειδή $x = b + y$, η φασματική ανάλυση γράφεται ως εξής :

$$y = \alpha + x_p + x_q\ ,\ \Delta x_p = \lambda_p x_p\, , \Delta x_q = \lambda_q x_q .$$

Από την παραπάνω σχέση και με τη βοήθεια της (3.2.3) βρίσκουμε

$$-n\vec{H} = \lambda_p x_p + \lambda_q x_q \quad \text{και} \quad -n\,\Delta\vec{H} = \lambda_p^2 x_p + \lambda_q^2 x_q .$$

Έτσι έχουμε

$$\Delta\vec{H} = (\lambda_p + \lambda_q)\vec{H} + \frac{\lambda_p\lambda_q}{n}(y - \alpha).$$

Αν αντικαταστήσουμε στη σχέση αυτή τα $\vec{H}$, α, από τις (3.2.2), (3.2.10), και λάβουμε υπόψη ότι $y = Re_{n+1}$, τότε παίρνουμε

$$\Delta\vec{H} = -\frac{\lambda_p\lambda_q}{n}\alpha_\tau + \Big(-\frac{\lambda_p + \lambda_q}{R} + \frac{\lambda_p\lambda_q}{n}R - \frac{\lambda_p\lambda_q}{n}<\alpha, e_{n+1}>\Big)e_{n+1} +$$

$$+ \Big(\frac{\lambda_p + \lambda_q}{n}\mathrm{tr}A - \frac{\lambda_p\lambda_q}{n}<\alpha, e_{n+2}>\Big)e_{n+2},$$

η οποία σε σύγκριση με την (3.2.7) δίνει τις ζητούμενες σχέσεις (3.2.14), (3.2.15) και (3.2.16).

Λήμμα 3.2.5. *Αν η* M^n *είναι 2- τύπου υπερεπιφάνεια της* $S^{n+1}(R)$, *τότε το διανυσματικό πεδίο* gradtrA, *εκεί που δεν μηδενίζεται, είναι κύριο διανυσματικό πεδίο (δηλαδή ιδιοδιάνυσμα του τελεστή* A *) με αντίστοιχη κύρια καμπυλότητα* $-\frac{3}{2}\mathrm{tr}A$. *Επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις*

$$(3.2.17) \qquad \lambda_p\lambda_q <\alpha, e_{n+1}> = \frac{1}{R}(\mathrm{tr}A)^2 + c_1$$

και

$$(3.2.18) \qquad \lambda_p\lambda_q <\alpha, e_{n+2}> = (\mathrm{tr}A)^3 + c_2 ,$$

όπου c_1, c_2 *είναι κατάλληλες σταθερές.*

Απόδειξη. Παίρνουμε την κλίση των δύο μελών της (3.2.15) και βρίσκουμε

$$\frac{2}{R}\,\mathrm{tr}A\ \mathrm{gradtr}A = \lambda_p\lambda_q\ \mathrm{grad} <\alpha, e_{n+1}>$$

ή ισοδύναμα, με τη βοήθεια της (3.2.12),

$$(3.2.19) \qquad 2\ \mathrm{tr}A\ \mathrm{gradtr}A = \lambda_p\lambda_q\ \alpha_\tau .$$

Από την προηγούμενη και την (3.2.14) βλέπουμε ότι

$$(3.2.20) \qquad A\mathrm{gradtr}A = -\frac{3}{2}\,\mathrm{tr}A\mathrm{gradtr}A.$$

Συνεπώς στα σημεία P της M^n όπου $(\mathrm{gradtr}A)(P) \neq 0$, το $(\mathrm{gradtr}A)(P)$ είναι κύριο διάνυσμα με αντίστοιχη κύρια καμπυλότητα $-\frac{3}{2}\mathrm{tr}A$.

Η (3.2.17) είναι άμεση απόρροια της (3.2.15) με $c_1 = \frac{n^2}{R^3} - \frac{n}{R}(\lambda_p + \lambda_q) + \lambda_p\lambda_q R$. Από την (3.2.19) είναι προφανές ότι $2\ \mathrm{tr}A\ A(\mathrm{gradtr}A) = \lambda_p\lambda_q A\alpha_\tau$ ή ισοδύναμα, λόγω της (3.2.20) , $-3(\mathrm{tr}A)^2\mathrm{gradtr}A = \lambda_p\lambda_q A\alpha_\tau$. Αυτή σε συνδυασμό με την (3.2.13) δίνει

$$3(\mathrm{tr}A)^2\mathrm{gradtr}A = \lambda_p\lambda_q\ \mathrm{grad} <\alpha, e_{n+2}> ,$$

από όπου προκύπτει άμεσα η (3.2.18) για κάποια σταθερά c_2.

Στο επόμενο λήμμα βρίσκουμε τις εξισώσεις που πληρεί μια πεπερασμένου 3- τύπου υπερεπιφάνεια με σταθερή μέση καμπυλότητα.

Λήμμα 3.2.6. *Αν η* M^n *είναι 3- τύπου υπερεπιφάνεια της* $S^{n+1}(R)$ *με σταθερή μέση καμπυλότητα και φασματική ανάλυση* $x = x_o + x_1 + x_2 + x_3$, $\Delta x_i = \lambda_i x_i$, $i = 1, 2, 3$, *τότε ισχύουν οι σχέσεις*

$$2\mathrm{tr}A\, A(\mathrm{grad}S) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\alpha_T, \tag{3.2.21}$$

$$\frac{n^2}{R^5} + 2\frac{(\mathrm{tr}A)^2}{R^3} + \frac{(\mathrm{tr}A)^2}{nR}S = (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\left(\frac{n}{R^3}+\frac{(\mathrm{tr}A)^2}{nR}\right) - \tag{3.2.22}$$

$$-\frac{1}{R}(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3) + \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{n}R - \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{n}\langle\alpha, e_{n+1}\rangle,$$

και

$$\frac{n}{R^4}\mathrm{tr}A + \frac{(\mathrm{tr}A)^3}{nR^2} + \frac{\mathrm{tr}A}{R^2}S + \frac{\mathrm{tr}A}{n}S^2 + \frac{\mathrm{tr}A}{n}\Delta S = (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\left(\frac{\mathrm{tr}A}{R^2}+\frac{\mathrm{tr}A}{n}S\right) \tag{3.2.23}$$

$$-(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3)\frac{\mathrm{tr}A}{n} + \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{n}\langle\alpha, e_{n+2}\rangle,$$

όπου $\alpha = x_o - b$ *και* b *είναι το κέντρο της* $S^{n+1}(R)$.

Απόδειξη. Επειδή $x = b + y$, η φασματική ανάλυση γράφεται

$$y = \alpha + x_1 + x_2 + x_3,\ \Delta x_i = \lambda_i x_i,\ i = 1,2,3.$$

Από αυτή, με τη βοήθεια της (3.2.3), βρίσκουμε

$$- n\, \vec{H} = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 ,$$

$$- n\, \Delta\vec{H} = \lambda_1^2 x_1 + \lambda_2^2 x_2 + \lambda_3^2 x_3 ,$$

$$- n\, \Delta^2\vec{H} = \lambda_1^3 x_1 + \lambda_2^3 x_2 + \lambda_3^3 x_3$$

και επομένως

$$\Delta^2\vec{H} = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\Delta\vec{H} - (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)\vec{H} - \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{n}(y - \alpha) .$$

Θέτοντας τα $\Delta\vec{H}$, $\vec{H}$ και α σε αυτή από τις (3.2.8) , (3.2.2) , (3.2.10) και επειδή $y = Re_{n+1}$, λαμβάνουμε

$$\Delta^2\vec{H} = \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{n}\alpha_\tau + \Big(- (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)(\frac{n}{R^3} + \frac{(trA)^2}{nR}) +$$

$$+ \frac{1}{R}(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) - \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{n}R + \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{n} <\alpha, e_{n+1}> \Big) e_{n+1} +$$

$$\Big((\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)(\frac{trA}{R^2} + \frac{trA}{n}S) - (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)\frac{trA}{n} + \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{n} <\alpha, e_{n+2}> \Big) e_{n+2} .$$

Οι ζητούμενες σχέσεις (3.2.21) , (3.2.22) και (3.2.23) προκύπτουν από τη σύγκριση της παραπάνω με την (3.2.9).

3.3. Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.2

Έστω M μια προσανατολισμένη και συνεκτική επιφάνεια της σφαίρας $S^3(R)$ του E^4. Διατηρώντας τον συμβολισμό της προηγουμένης παραγράφου μπορούμε να δείξουμε το ακόλουθο

Λήμμα 3.3.1. *Αν η* M *είναι 2- τύπου επιφάνεια της* $S^3(R)$, *τότε έχει σταθερή μέση καμπυλότητα στην* $S^3(R)$. *Επιπλέον το διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας* $\vec{H}$ *της* M *στον* E^4 *είναι παράλληλο στην κάθετη δέσμη.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι gradtrA είναι παντού μηδέν στην M. Υποθέτουμε , αντίθετα, πως το σύνολο $M_o = \{P \in M / (trAgradtrA)(P) \neq 0\}$ είναι μη κενό και θεωρούμε ένα σημείο $P_o \in M_o$. Υπάρχει ανοιχτή περιοχή V του P_o τέτοια ώστε $V \subsetneq M_o$. Από εδώ και στο εξής εργαζόμαστε στο V. Γνωρίζουμε από το Λήμμα 3.2.5 , ότι το διάνυσμα gradtrA είναι κύριο διάνυσμα του A με αντίστοιχη κύρια καμπυλότητα $-\frac{3}{2}$ trA . Συνεπώς οι κύριες καμπυλότητες της M στα σημεία της περιοχής V είναι $-\frac{3}{2}$ trA και $\frac{5}{2}$ trA. Στο V διαλέγουμε ορθοκανονικό πλαίσιο κυρίων διευθύνσεων e_1, e_2 με $e_1 = \frac{gradtrA}{|gradtrA|}$. Συμβολίζουμε το δυϊκό πλαίσιο με ω_1, ω_2 και τη μορφή συνοχής με ω_{12}, όπου $\omega_{12}(X) = \langle \nabla_X e_1, e_2 \rangle$, για X εφαπτόμενο διάνυσμα της M . Η απεικόνιση Weingarten A , ως προς τη βάση e_1, e_2, έχει ως αντίστοιχο πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}trA & 0 \\ 0 & \frac{5}{2}trA \end{pmatrix}.$$

Επομένως η καμπυλότητα Gauss της M στο V δίνεται από τη σχέση

(3.3.1) $$K = \frac{1}{R^2} - \frac{15}{4}(trA)^2 .$$

Από την εξίσωση Codazzi ([31] , Κεφ.VII) $(\nabla_{e_1} A)e_2 = (\nabla_{e_2} A)e_1$ προκύπτει, ότι

$$\frac{5}{2}\nabla_{e_1}(trAe_2) - \omega_{21}(e_1)Ae_1 = -\frac{3}{2}\nabla_{e_2}(trAe_1) - \omega_{12}(e_2)Ae_2$$

και αφού $e_2(\mathrm{tr}A) = \langle e_2, \mathrm{gradtr}A\rangle = 0$, έχουμε

$$\frac{5}{2}\, e_1(\mathrm{tr}A)e_2 + 4\mathrm{tr}A\ \omega_{21}(e_1)e_1 = -\ 4\mathrm{tr}A\ \omega_{12}(e_2)e_2.$$

Κατά συνέπεια ισχύουν

$$(3.3.2) \qquad \frac{5}{8}\, e_1(\mathrm{tr}A) = -\ (\mathrm{tr}A)\omega_{12}(e_2)\ ,\ \ \mathrm{tr}A\ \omega_{12}(e_1) = 0\,.$$

Επειδή $\mathrm{tr}A \neq 0$ στο V η δεύτερη από τις παραπάνω σχέσεις δίνει $\omega_{12}(e_1) = 0$ ή $\nabla_{e_1} e_1 = 0$, το οποίο σημαίνει, ότι οι ολοκληρωτικές καμπύλες του e_1 είναι γεωδαισιακές της M. Από την (3.3.2) λαμβάνουμε

$$(3.3.3) \qquad \omega_{12} = -\ \frac{5}{8}\,\frac{e_1(\mathrm{tr}A)}{\mathrm{tr}A}\,\omega_2\,.$$

Παίρνοντας την εξωτερική παράγωγο της (3.3.3) βρίσκουμε

$$d\omega_{12} = -\ \frac{5}{8}\, d\Big(\frac{e_1(\mathrm{tr}A)}{\mathrm{tr}A}\Big)\wedge\omega_2 - \frac{5}{8}\,\frac{e_1(\mathrm{tr}A)}{\mathrm{tr}A}\, d\omega_2\,.$$

Από τις εξισώσεις δομής της M έχουμε, $d\omega_2 = \omega_{21}\wedge\omega_1$, όπου $\wedge$ είναι το εξωτερικό γινόμενο (exterior product) διαφορικών μορφών. Με τη βοήθεια της σχέσης (3.3.3) έχουμε

$$d\omega_2 = -\ \frac{5}{8}\,\frac{e_1(\mathrm{tr}A)}{\mathrm{tr}A}\,\omega_1\wedge\omega_2\,.$$

Τελικώς βρίσκουμε

$$d\omega_{12} = \Big(-\frac{5}{8}\,\frac{e_1(e_1(\mathrm{tr}A))}{\mathrm{tr}A} + \frac{65}{64}\Big(\frac{e_1(\mathrm{tr}A)}{\mathrm{tr}A}\Big)^2\Big)\omega_1\wedge\omega_2.$$

Συνεπώς , με τη βοήθεια της εξίσωσης του Gauss

$$d\omega_{12} = - K\omega_1 \wedge \omega_2$$

παίρνουμε

$$\text{(3.3.4)} \qquad K = \frac{5}{8}\frac{e_1(e_1(trA))}{trA} - \frac{65}{64}\left(\frac{e_1(trA)}{trA}\right)^2.$$

Έστω $\gamma(s)$ η ολοκληρωτική καμπύλη του e_1 με $\gamma(0) = P_o$. Θέτοντας $h(s) = trA(\gamma(s))$ και συγκρίνοντας την (3.3.1) με την (3.3.4) έχουμε κατά μήκος της $\gamma(s)$ τη διαφορική εξίσωση

$$\text{(3.3.5)} \qquad hh'' - \frac{13}{8}(h')^2 = - 6h^4 + \frac{8}{5R^2}h^2,$$

όπου ο τόνος δηλώνει την παράγωγο ως προς s, δηλαδή $h'(s) = e_1(trA(\gamma(s)))$. Επιπλέον, επειδή $S = \frac{34}{4}(trA)^2$, η σχέση (3.2.16) του Λήμματος 3.2.4 γίνεται

$$\frac{1}{2}\Delta trA + \frac{trA}{R^2} + \frac{17}{4}(trA)^3 = \frac{\lambda_p + \lambda_q}{2} trA - \frac{\lambda_p\lambda_q}{2} <\alpha, e_4>$$

ή , λόγω της (3.2.18) ,

$$\text{(3.3.6)} \qquad \Delta trA = - \frac{19}{2}(trA)^3 + (\lambda_p + \lambda_q - \frac{2}{R^2})trA - c_2.$$

Από τον ορισμό του Λαπλασιανού τελεστή (σχέση (1.1.3))

$$\Delta trA = \sum_{i=1}^{2} \left((\nabla_{e_i} e_i)(trA) - e_i e_i(trA)\right)$$

και τις σχέσεις $\nabla_{e_1} e_1 = 0$, $e_2(trA) = 0$, έχουμε

$$\Delta trA = \omega_{21}(e_2)e_1(trA) - e_1e_1(trA).$$

Με τη βοήθεια της (3.3.3) η τελευταία σχέση γίνεται

$$\Delta trA = \frac{5}{8}\frac{(e_1(trA))^2}{trA} - e_1e_1(trA). \tag{3.3.7}$$

Περιορίζοντας την (3.3.6) κατά μήκος της καμπύλης $\gamma(s)$ και λαμβάνοντας υπόψη την (3.3.7), έχουμε

$$- hh'' + \frac{5}{8}(h')^2 = - \frac{19}{2}h^4 + (\lambda_p + \lambda_q - \frac{2}{R^2})h^2 - c_2h. \tag{3.3.8}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (3.3.5) και (3.3.8) βρίσκουμε

$$(h')^2 = \frac{31}{2}h^4 - (\lambda_p + \lambda_q - \frac{2}{5R^2})h^2 + c_2h.$$

Η (3.3.5) με ολοκλήρωση δίνει

$$(h')^2 = ch^{13/4} - 16h^4 - \frac{64}{25R^2}h^2,$$

όπου c κατάλληλη σταθερά . Τελικώς από τις δύο προηγούμενες σχέσεις βρίσκουμε , ότι

$$ch^{13/4} = \frac{63}{2}h^4 + (\frac{74}{25R^2} - \lambda_p - \lambda_q)h^2 + c_2h.$$

Τούτο οδηγεί στο συμπέρασμα, ότι η συνάρτηση $h(s)$ είναι σταθερή. Δηλαδή κατά μήκος της γ έχουμε $\operatorname{gradtr}A = 0$, πράγμα άτοπο. Άρα το M_o είναι το κενό σύνολο και κατά συνέπεια η συνάρτηση $\operatorname{tr}A$ είναι σταθερή στη M και μάλιστα μη μηδενική, αφού σε αντίθετη περίπτωση, σύμφωνα με το θεώρημα του Takahashi, η M θα ήταν 1- τύπου. Επιπρόσθετα τα e_3, e_4 είναι παράλληλα στην κάθετη δέσμη της M. Έτσι από την (3.2.2) καταλήγουμε στο συμπέρασμα, ότι η M έχει διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας $\vec{H}$ στον E^4 παράλληλο στην κάθετη δέσμη.

Αποδεικνύουμε τώρα το Θεώρημα 3.1.2.

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.2. Έστω ότι η M είναι 2- τύπου επιφάνεια στην $S^3(R)$. Σύμφωνα με το Λήμμα 3.3.1, το $\operatorname{tr}A$ είναι σταθερό και διάφορο του μηδενός. Από τις (3.2.18) και (3.2.16) συμπεραίνουμε, ότι το S είναι σταθερό και επειδή η καμπυλότητα Gauss K δίνεται από τη σχέση $2K = (\operatorname{tr}A)^2 - S + \frac{2}{R^2}$, ([5], σελ.55) η M έχει σταθερή καμπυλότητα Gauss και διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας στον E^4 παράλληλο στην κάθετη δέσμη. Σύμφωνα με ένα αποτέλεσμα των B.Y.Chen και G.D.Ludden ([4], σελ. 167) ή του D.A.Hoffman ([29], σελ. 168) η M είναι ανοιχτό τμήμα 2-διάστατης σφαίρας ή ανοιχτό τμήμα γινομένου Riemann δύο κύκλων. Επειδή όμως οι σφαίρες και τα γινόμενα Riemann κύκλων της ίδιας ακτίνας είναι υποπολλαπλότητες πεπερασμένου 1- τύπου, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα, ότι η M είναι τμήμα γινομένου Riemann κύκλων διαφορετικών ακτίνων.

Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 3.1.2 είναι τα εξής πορίσματα:

Πόρισμα 3.3.2. *Οι μόνες 2- τύπου πλήρεις σφαιρικές επιφάνειες του* E^4 *είναι τα γινόμενα Riemann κύκλων διαφορετικών ακτίνων.*

Πόρισμα 3.3.3. *Οι μόνες πεπερασμένου τύπου συνεκτικές σφαιρικές επιφάνειες του* E^4 *που είναι το πολύ 2-τύπου είναι:*

(i) τα ανοιχτά τμήματα συνήθων 2-διάστατων σφαιρών,

(ii) οι επιφάνειες ελάχιστης έκτασης 3-διάστατων σφαιρών,

και

(iii) τα ανοιχτά τμήματα των γινομένων Riemann κύκλων διαφορετικών ακτίνων.

Απόδειξη. Έστω ότι η επιφάνεια M της 3-διάστατης σφαίρας $S^3(R)$, κέντρου b, είναι πεπερασμένου τύπου και μάλιστα το πολύ 2-τύπου. Αν η M είναι πεπερασμένου 1-τύπου, τότε από τη φασματική ανάλυση $x = x_o + x_p$ έχουμε ότι $\Delta(x - x_o) = \lambda_p(x - x_o)$. Από το θεώρημα του Takahashi συνάγουμε, ότι η M είναι επιφάνεια ελάχιστης έκτασης σε μια σφαίρα κέντρου x_o. Επειδή όμως είναι και επιφάνεια της $S^3(R)$ συμπεραίνουμε, ότι θα είναι μια μικρή σφαίρα $(b \neq x_o)$ της $S^3(R)$ ή επιφάνεια ελάχιστης έκτασης $(b = x_o)$ της $S^3(R)$. Τέλος, αν η M είναι πεπερασμένου 2-τύπου, τότε το συμπέρασμα προκύπτει από το Θεώρημα 3.1.2.

3.4. Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.3

Έστω M^n 2-τύπου υπερεπιφάνεια της $S^{n+1}(R)$ με φασματική ανάλυση

$$x = x_o + x_p + x_q, \quad \Delta x_p = \lambda_p x_p, \quad \Delta x_q = \lambda_q x_q, \quad \lambda_p < \lambda_q .$$

Ισοδύναμα έχουμε

$$y = \alpha + x_p + x_q, \quad \Delta x_p = \lambda_p x_p, \quad \Delta x_q = \lambda_q x_q,$$

όπου $\alpha = x_o - b$ και b το κέντρο της $S^{n+1}(R)$. Θεωρούμε το σύνολο $M_o = \{P \in M^n \,/\, (trAgradtrA)(P) = 0\}$ και το συμπλήρωμα του στη M^n το $M_1 = M - M_o$. Στόχος είναι να δείξουμε, ότι η M^n έχει σταθερή μέση καμπυλότητα στην $S^{n+1}(R)$. Ισοδύναμα θα δείξουμε, ότι το σύνολο M_1 είναι το κενό σύνολο.

Υποθέτουμε, ότι το M_1 δεν είναι κενό και θεωρούμε μια ανοιχτή συνεκτική συνιστώσα του V. Στο V ορίζουμε το διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο $e_1 = gradtrA / |gradtrA|$, το οποίο βάσει του Λήμματος 3.2.5 είναι κύριο διανυσματικό πεδίο με αντίστοιχη κύρια καμπυλότητα $k_1 = -\frac{3}{2} trA$. Θεωρούμε ακολούθως διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία $e_2, \ldots, e_n$ στο V (ίσως σε ένα ανοιχτό υποσύνολο του V, βλ. [36]) τέτοια, ώστε το πλαίσιο $e_1, e_2, \ldots, e_n$ να είναι ορθοκανονικό πλαίσιο κυρίων διευθύνσεων της M^n, με αντίστοιχες κύριες καμπυλότητες $k_1, \ldots, k_n$, δηλαδή $Ae_i = k_i e_i$, $i = 1, \ldots, n$. Οι παρακάτω ισότητες είναι προφανείς

(3.4.1) $$\sum_{i=2}^{n} k_i = \frac{5}{2} trA,$$

(3.4.2) $$\sum_{i=2}^{n} k_i^2 = S - \frac{9}{4} (trA)^2.$$

Οι μορφές συνοχής του πλαισίου $e_1, \ldots, e_n$ είναι οι 1- μορφές που ορίζονται ως εξής:

$$\omega_{ij}(X) = \langle \nabla_X e_i, e_j \rangle \ , i, j = 1, \ldots, n,$$

όπου X είναι διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο εφαπτόμενο στην M^n.

Λήμμα 3.4.1. *Οι ολοκληρωτικές καμπύλες του* e_1 *στο* V *είναι γεωδαισιακές της* M^n, *δηλαδή ισχύει* $\nabla_{e_1} e_1 = 0$ *στο* V.

Απόδειξη. Παραγωγίζουμε την (3.2.19) ως προς τυχαίο διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο X εφαπτόμενο στην M^n και παίρνουμε

$$2X(trA)gradtrA + 2trA\ \nabla_X gradtrA = \lambda_p\lambda_q \nabla_X \alpha_\tau .$$

Αν λάβουμε υπόψη την (3.2.11) και την ισότητα $gradtrA = |gradtrA|e_1$ η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$(3.4.3) \qquad 2X(trA)|gradtrA|e_1 + 2(trA)X(|gradtrA|)e_1 + 2\ trA\ |gradtrA|\nabla_X e_1 =$$

$$\lambda_p\lambda_q(<\alpha, e_{n+2}>AX - \frac{1}{R}<\alpha, e_{n+1}>X).$$

Επειδή το διανυσματικό πεδίο $\nabla_{e_1} e_1$ είναι παντού κάθετο στο e_1 και $Ae_1 = k_1e_1$, η (3.4.3) για $X = e_1$ δίνει $2trA\ |gradtrA|\nabla_{e_1} e_1 = 0$. Συνεπώς $\nabla_{e_1} e_1 = 0$ στο V.

Λήμμα 3.4.2. *Χρησιμοποιώντας τον προηγούμενο συμβολισμό, ισχύουν στην περιοχή* V *οι ακόλουθες σχέσεις :*

$$(3.4.4) \qquad 2trA|gradtrA|\omega_{1i}(e_i) = k_i\lambda_p\lambda_q<\alpha, e_{n+2}> - \frac{1}{R}\lambda_p\lambda_q<\alpha, e_{n+1}>$$

$$(3.4.5) \qquad \lambda_p\lambda_q<\alpha, e_{n+2}>S = -5\ trA\ |gradtrA|^2 - \frac{3}{2}(trA)^2\lambda_p\lambda_q<\alpha, e_{n+2}> +$$

$$+ \frac{3n+2}{2R}\ trA\ \lambda_p\lambda_q<\alpha, e_{n+1}>.$$

Απόδειξη. Έστω X εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο της M^n κάθετο στο e_1. Προφανώς $X(trA) = 0$, οπότε η (3.4.3) γίνεται

$$2(trA)X(|gradtrA|)e_1 + 2\, trA\, |gradtrA|\nabla_X e_1 =$$

$$\lambda_p\lambda_q(<\alpha, e_{n+2}>AX - \frac{1}{R}<\alpha, e_{n+1}>X).$$

Επειδή το X είναι κάθετο στο e_1, το e_1 είναι ιδιοδιάνυσμα του A και ο A είναι αυτοπροσηρτημένος, συμπεραίνουμε ότι το $<\alpha, e_{n+2}>AX - \frac{1}{R}<\alpha, e_{n+1}>X$ είναι κάθετο στο e_1, οπότε από την παραπάνω σχέση παίρνουμε

$$X(|gradtrA|) = 0$$

και συνεπώς

$$2\, trA\, |gradtrA|\nabla_X e_1 = \lambda_p\lambda_q(<\alpha, e_{n+2}>AX - \frac{1}{R}<\alpha, e_{n+1}>X).$$

Ειδικά για $X = e_i$, $i>1$, έχουμε

$$2\, trA\, |gradtrA|\nabla_{e_i} e_1 = \lambda_p\lambda_q(<\alpha, e_{n+2}>k_i - \frac{1}{R}<\alpha, e_{n+1}>)e_i\, ,$$

από όπου προκύπτει η (3.4.4).

Από την εξίσωση του Codazzi ([31], Κεφάλαιο VII) $(\nabla_{e_i}A)e_j = (\nabla_{e_j}A)e_i$, και επειδή $Ae_i = k_ie_i$, παίρνουμε

$$e_i(k_j)e_j + k_j(\nabla_{e_i}e_j) - A(\nabla_{e_i}e_j) = e_j(k_i)e_i + k_i(\nabla_{e_j}e_i) - A(\nabla_{e_j}e_i)\, ,$$

από όπου προκύπτει $e_i(k_j) = (k_i - k_j)\omega_{ij}(e_j)$, για $i \neq j$. Ειδικά

$$e_1(k_i) = (k_1 - k_i)\omega_{1i}(e_i)\, ,\ i \neq 1\, .$$

Από την (3.4.4) και με τη βοήθεια της προηγούμενης σχέσης βρίσκουμε

$$2\,\mathrm{tr}A\,|\mathrm{grad}\,\mathrm{tr}A|e_1(k_j) = \lambda_p\lambda_q\langle\alpha, e_{n+2}\rangle\, k_j(k_1 - k_j) - \frac{1}{R}\lambda_p\lambda_q\langle\alpha, e_{n+1}\rangle\,(k_1 - k_j),\ i>1\,.$$

Άρα

$$2\,\mathrm{tr}A\,|\mathrm{grad}\,\mathrm{tr}A|\,e_1\Big(\sum_{i=2}^{n} k_i\Big) = -\lambda_p\lambda_q\langle\alpha, e_{n+2}\rangle\sum_{i=2}^{n} k_i^2 \ +$$

$$+\,\lambda_p\lambda_q\Big(-\frac{3}{2}\,\mathrm{tr}A\,\langle\alpha, e_{n+2}\rangle + \frac{1}{R}\langle\alpha, e_{n+1}\rangle\Big)\sum_{i=2}^{n} k_i \ +\ 3\,\frac{n-1}{2R}\,\mathrm{tr}A\,\lambda_p\lambda_q\,\langle\alpha, e_{n+1}\rangle\,.$$

Η (3.4.5) προκύπτει άμεσα από την προηγούμενη σχέση χρησιμοποιώντας τις (3.4.1) και (3.4.2).

Λήμμα 3.4.3. *Αν η* M^n *είναι 2- τύπου υπερεπιφάνεια της* $S^{n+1}(R)$ *με φασματική ανάλυση* $x = x_o + x_p + x_q$ *, τότε έχει σταθερή μη μηδενική μέση καμπυλότητα στην* $S^{n+1}(R)$ *και επιπλέον το* x_o *είναι το κέντρο της σφαίρας* $S^{n+1}(R)$.

Απόδειξη. Έστω b το κέντρο της σφαίρας $S^{n+1}(R)$. Θεωρούμε τη φασματική ανάλυση $y = \alpha + x_p + x_q$ ως προς το κέντρο της $S^{n+1}(R)$, όπου $\alpha = x_o - b$. Είναι προφανές από την (3.2.15) ότι, αν $\lambda_p\lambda_q|\alpha| = 0$, τότε $\mathrm{tr}A$ είναι σταθερό στην M^n. Στη συνέχεια υποθέτουμε , ότι το M_1 δεν είναι κενό και εργαζόμαστε σε ανοιχτή καί συνεκτική συνιστώσα V του M_1. Προφανώς, επειδή $e_i(\mathrm{tr}A) = 0$ για $i>1$ και $\nabla_{e_1} e_1 = 0$ (Λήμμα 3.4.1), ισχύει (σχέση (1.1.3))

$$\Delta\mathrm{tr}A = \sum_{i=2}^{n}(\nabla_{e_i} e_i)(\mathrm{tr}A) - e_1 e_1(\mathrm{tr}A)$$

ή

$$\Delta trA = - e_1(trA) \sum_{i=2}^{n} \omega_{1i}(e_i) - e_1e_1(trA).$$

Με τη βοήθεια των (3.4.4), (3.4.1) και επειδή $e_1(trA) = |gradtrA|$, η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\text{(3.4.6)} \qquad \Delta trA = - e_1e_1(trA) - \frac{5}{4}\lambda_p\lambda_q <\alpha, e_{n+2}> + \frac{n-1}{2RtrA}\lambda_p\lambda_q <\alpha, e_{n+1}>.$$

Θεωρούμε τώρα μια ολοκληρωτική καμπύλη $\gamma(s)$ του e_1 και τη συνάρτηση $h(s) = trA(\gamma(s))$. Με τη βοήθεια των (3.2.17), (3.2.18), (3.4.5) και (3.4.6) η εξίσωση (3.2.16) περιοριζόμενη κατά μήκος της καμπύλης $\gamma(s)$ γράφεται

$$- h'' + \frac{h}{h^3 + c_2}\left(- 5h(h')^2 - \frac{3}{2}h^2(h^3 + c_2) + \frac{3n+2}{2R}(\frac{h^2}{R} + c_1)h\right) = \frac{1}{4}(h^3 + c_2)$$

$$- \frac{n-1}{2Rh}(\frac{h^2}{R} + c_1) + (\lambda_p + \lambda_q - \frac{n}{R^2})h,$$

όπου ο τόνος δηλώνει τη παράγωγο ως προς s, δηλαδή $h'(s) = e_1(trA(\gamma(s)))$. Ισοδύναμα έχουμε

$$\text{(3.4.7)} \qquad - hh'' - \frac{5h^3}{h^3 + c_2}(h')^2 = \frac{7}{4}h^4 + (\lambda_p + \lambda_q - \frac{3n-1}{2R^2})h^2 +$$

$$+ \frac{c_2}{4}h - \frac{(n-1)c_1}{2R} - \frac{3n+2}{2R}\frac{h^3}{h^3 + c_2}(\frac{h^2}{R} + c_1).$$

Από την (3.2.10) είναι προφανές, ότι

$$|\alpha_\tau|^2 + \langle\alpha, e_{n+1}\rangle^2 + \langle\alpha, e_{n+2}\rangle^2 = |\alpha|^2$$

ή ισοδυνάμως, λόγω των (3.2.17), (3.2.18) και (3.2.19),

$$4(\mathrm{tr}A)^2|\mathrm{grad}\,\mathrm{tr}A|^2 + (\frac{1}{R}(\mathrm{tr}A)^2 + c_1)^2 + ((\mathrm{tr}A)^3 + c_2)^2 = \lambda_p^2\lambda_q^2|\alpha|^2.$$

Αν κι αυτή την περιορίσουμε κατά μήκος της καμπύλης $\gamma(s)$, τότε λαμβάνουμε

(3.4.8) $$(h')^2 = -\frac{1}{4}h^4 - \frac{1}{4R^2}h^2 - \frac{c_2}{2}h - \frac{c_1}{2R} + \frac{1}{4h^2}(\lambda_p^2\lambda_q^2|\alpha|^2 - c_1^2 - c_2^2).$$

Παραγωγίζοντας την (3.4.8) βρίσκουμε

(3.4.9) $$hh'' + (h')^2 = -\frac{3}{4}h^4 - \frac{1}{2R^2}h^2 - \frac{3c_2}{4}h - \frac{c_1}{2R}.$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (3.4.7) και (3.4.9) παίρνουμε

$$\frac{c_2 - 4h^3}{h^3 + c_2}(h')^2 = h^4 + (\lambda_p + \lambda_q - \frac{3n}{2R^2})h^2 - \frac{c_2}{2}h - \frac{nc_1}{2R} - \frac{3n+2}{2R}\frac{h^3}{h^3 + c_2}(\frac{h^2}{R} + c_1),$$

και με αντικατάσταση του $(h')^2$ από την (3.4.8) καταλήγουμε στην

$$(c_2 - 4h^3)\left(-\frac{1}{4}h^4 - \frac{1}{4R^2}h^2 - \frac{c_2}{2}h - \frac{c_1}{2R} + \frac{1}{4h^2}(\lambda_p^2\lambda_q^2|\alpha|^2 - c_1^2 - c_2^2)\right) =$$

$$(h^3 + c_2)\left(h^4 + (\lambda_p + \lambda_q - \frac{3n}{2R^2})h^2 - \frac{c_2}{2}h - \frac{nc_1}{2R}\right) - \frac{3n+2}{2R}h^3(\frac{h^2}{R} + c_1).$$

Μετά από πράξεις τελικά έχουμε κατά μήκος της $\gamma(s)$ τη σχέση

$$(\lambda_p + \lambda_q - \frac{3n+2}{R^2})h^7 - \frac{5c_2}{4}h^6 - \frac{(2n+3)c_1}{R}h^5 + (\lambda_p + \lambda_q - \frac{6n-1}{4R^2})c_2h^4 +$$

$$+(\lambda_p^2\lambda_q^2|\alpha|^2 - c_1^2 - c_2^2)h^3 - \frac{(n-1)c_1c_2}{2R}h^2 - \frac{c_2}{4}(\lambda_p^2\lambda_q^2|\alpha|^2 - c_1^2 - c_2^2) = 0.$$

Επειδή η $h(s)$ είναι μη σταθερή συνάρτηση του s, από τη τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι $c_1 = c_2 = 0$, $\lambda_p + \lambda_q = \frac{3n+2}{R^2}$ και $\lambda_p\lambda_q|\alpha| = 0$, το οποίο οδηγεί σε αντίφαση , όπως σημειώσαμε στην αρχή της απόδειξης. Άρα το M_1 είναι κενό και επομένως η συνάρτηση trA είναι σταθερή και μη μηδενική, αφού η M^n είναι 2- τύπου.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι το x_o είναι το κέντρο της σφαίρας. Αρκεί να δείξουμε , ότι $\alpha = x_o - b = 0$. Ας υποθέσουμε ότι $\lambda_p\lambda_q \neq 0$. Τότε από την (3.2.17), επειδή trA είναι σταθερό , βρίσκουμε $\langle y, \alpha\rangle$ = σταθερό. Αν $\alpha \neq 0$, αυτό σημαίνει ότι η M^n είναι τομή της $S^{n+1}(R)$ με υπερεπίπεδο του E^{n+2} κάθετο στο α, δηλαδή είναι τμήμα μικρής υπερσφαίρας της $S^{n+1}(R)$ και ως εκ τούτου είναι 1- τύπου. Αυτό είναι άτοπο, άρα $\alpha = 0$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι $\lambda_p = 0$ και $\lambda_q \neq 0$. Από τις (3.2.15) , (3.2.16) βρίσκουμε αντίστοιχα, αφού trA είναι σταθερό, $(trA)^2 = n\lambda_q - \frac{n^2}{R^2}$ και $S = \lambda_q - \frac{n}{R^2}$. Σε αυτή την περίπτωση ισχύει $(trA)^2 = nS$, που δηλώνει ότι η M^n είναι ολικά ομφαλική υπερεπιφάνεια της $S^{n+1}(R)$, δηλαδή είναι τμήμα μικρής υπερσφαίρας της $S^{n+1}(R)$ και έτσι η M^n είναι 1- τύπου, πράγμα άτοπο.

Μπορούμε τώρα να δείξουμε το κεντρικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου.

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.3. Έστω ότι η M^n είναι 2- τύπου υπερεπιφάνεια της $S^{n+1}(R)$. Από την εξίσωση (3.2.16) με τη βοήθεια της (3.2.18) οδηγούμαστε στο συμπέρασμα , ότι το S είναι επίσης σταθερό στην M^n. Όμως από την εξίσωση του Gauss η αριθμητική καμπυλότητα τ της M^n δίνεται από την ισότητα $\tau = (\mathrm{tr}A)^2 - S + \frac{n(n-1)}{R^2}$ ([5], σελ. 55), από όπου συμπεραίνουμε, ότι και η αριθμητική καμπυλότητα είναι σταθερή.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η M^n έχει σταθερή αριθμητική καμπυλότητα, σταθερή μη μηδενική μέση καμπυλότητα στην $S^{n+1}(R)$ και δεν είναι τμήμα μικρής υπερσφαίρας της $S^{n+1}(R)$, δηλαδή έχουμε $nS > (\mathrm{tr}A)^2$. Θεωρούμε τη λύση λ_p, λ_q του συστήματος

$$\lambda_p + \lambda_q = \frac{n}{R^2} + S ,$$

$$\lambda_p \lambda_q R^2 = nS - (\mathrm{tr}A)^2.$$

Προφανώς $\lambda_p \neq \lambda_q$, αφού trA είναι μη μηδενική σταθερά. Θεωρούμε τα διανυσματικά πεδία

$$x_p = \frac{1}{\lambda_q - \lambda_p}\left((\lambda_q R - \frac{n}{R})e_{n+1} + \mathrm{tr}A\, e_{n+2}\right),$$

$$x_q = \frac{1}{\lambda_q - \lambda_p}\left((-\lambda_p R + \frac{n}{R})e_{n+1} - \mathrm{tr}A\, e_{n+2}\right).$$

Είναι φανερό ότι $x_p + x_q = Re_{n+1} = y$. Ισχυριζόμαστε ότι κανένα από τα x_p, x_q δεν είναι σταθερό στην M^n. Πράγματι, χρησιμοποιώντας την εξίσωση Weingarten παίρνουμε

$$\overline{\nabla}_X x_p = \frac{1}{\lambda_q - \lambda_p}\left((\lambda_q R - \frac{n}{R})\frac{X}{R} - (\mathrm{tr}A)AX\right)$$

για X εφαπτόμενο διάνυσμα στην M^n. Έτσι, το x_p είναι σταθερό, αν και μόνο αν η M^n είναι ολικά ομφαλική στην $S^{n+1}(R)$. Αυτό είναι αντίφαση, αφού η M^n σε αυτή την περίπτωση είναι ανοιχτό τμήμα μικρής υπερσφαίρας. Επιπλέον

$$\Delta x_p = \frac{1}{\lambda_q - \lambda_p}\left((\lambda_q R - \frac{n}{R})\Delta e_{n+1} + (trA)\Delta e_{n+2}\right),$$

ή, ισοδυνάμως, με τη βοήθεια των (3.2.4.) και (3.2.5)

$$\Delta x_p = \frac{1}{\lambda_q - \lambda_p}\left(\left(\frac{n}{R}\lambda_q - \frac{n^2}{R^3} - \frac{(trA)^2}{R}\right)e_{n+1} + \left(-(trA)\lambda_q + \frac{n}{R^2}trA + (trA)S\right)e_{n+2}\right).$$

Όμως από την επιλογή των λ_p, λ_q έχουμε

$$\frac{n^2}{R^3} + \frac{(trA)^2}{R} = \frac{n}{R}(\lambda_p + \lambda_q) - R\lambda_p\lambda_q$$

και

$$\frac{n}{R^2}trA + (trA)S = (\lambda_p + \lambda_q)\,trA\,,$$

οπότε $\Delta x_p = \lambda_p x_p$. Όμοια $\Delta x_q = \lambda_q x_q$ και επομένως η M^n είναι 2- τύπου.

Τέλος ας υποθέσουμε ότι η M^n είναι συμπαγής 2- τύπου υπερεπιφάνεια της $S^{n+1}(R)$. Από το Λήμμα 3.4.3 έχουμε $\alpha = 0$, δηλαδή $x_o = b$, όπου b είναι το κέντρο της $S^{n+1}(R)$. Όμως το x_o είναι το κέντρο μάζας της M^n και επομένως η M^n είναι συμμετρική ως προς τη μάζα στην $S^{n+1}(R)$.

Τελειώνουμε αυτή τη παράγραφο με την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 3.4.4. *Αν η M^n είναι 2- τύπου υπερεπιφάνεια της $S^{n+1}(R)$ με φασματική ανάλυση $x = x_o + x_p + x_q$, $\Delta x_p = \lambda_p x_p$, $\Delta x_q = \lambda_q x_q$ και $\lambda_p < \lambda_q$, τότε τα x_p, x_q είναι σε κάθε σημείο της M^n κάθετα, του ίδιου σταθερού μήκους και επιπλέον $\lambda_p < \frac{n}{R^2}$ και $\lambda_q > \frac{n}{R^2}$.*

Απόδειξη. Λόγω του Λήμματος 3.4.3 η φασματική ανάλυση της M^n ως προς το κέντρο της $S^{n+1}(R)$ είναι

$$y = x_p + x_q\,,\ \Delta x_p = \lambda_p x_p\,,\ \Delta x_q = \lambda_q x_q \ \text{ με } \lambda_p < \lambda_q.$$

Είναι προφανές, λόγω της (3.2.3), ότι

$$\Delta x_p + \Delta x_q = -n\vec{H}$$

ή ισοδύναμα με τη βοήθεια της (3.2.2)

$$\lambda_p x_p + \lambda_q x_q = \frac{n}{R} e_{n+1} - \mathrm{tr}A\, e_{n+2}.$$

Από αυτή τη σχέση και την $x_p + x_q = Re_{n+1}$ βρίσκουμε

(3.4.10) $$x_p = \frac{1}{\lambda_q - \lambda_p}\left((\lambda_q R - \frac{n}{R})e_{n+1} + \mathrm{tr}A\, e_{n+2}\right),$$

και

(3.4.11) $$x_q = \frac{1}{\lambda_q - \lambda_p}\left((-\lambda_p R + \frac{n}{R})e_{n+1} - \mathrm{tr}A\, e_{n+2}\right).$$

Επιπλέον , αφού $\alpha = 0$, η (3.2.15) γράφεται

(3.4.12) $$(\mathrm{tr}A)^2 = n(\lambda_p + \lambda_q) - \lambda_p\lambda_q R^2 - \frac{n^2}{R^2} = (-\lambda_p R + \frac{n}{R})(\lambda_q R - \frac{n}{R}).$$

Κάνοντας χρήση της (3.4.12), από τις (3.4.10) και (3.4.11) βλέπουμε ότι $\langle x_p, x_q\rangle = 0$ και

$$|x_p|^2 = \frac{\lambda_q R^2 - n}{\lambda_q - \lambda_p},$$

$$|x_q|^2 = \frac{-\lambda_p R^2 + n}{\lambda_q - \lambda_p},$$

από όπου προκύπτει το συμπέρασμα.

Παρατήρηση 3.4.5. Αν η M^n είναι συμπαγής, η πρώτη ανισότητα της Πρότασης 3.4.4 αποδείχθηκε από τον B.Y.Chen στην εργασία [10] και η δεύτερη ανισότητα της Πρότασης 3.4.4 αποδείχθηκε στην μονογραφία [8, σελ. 307].

Παρατήρηση 3.4.6. Παράλληλα με τα αποτελέσματα της εργασίας [25] ο Y.Nagatomo στην εργασία του [32] απέδειξε πολύ ειδικές περιπτώσεις του Θεωρήματος 3.1.3.

3.5. Πεπερασμένου 3- τύπου σφαιρικές υπερεπιφάνειες

Σε αυτή την παράγραφο θα προβούμε αμέσως στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.4, αφού πρώτα αναφέρουμε ότι αυτό το αποτέλεσμα αποδείχθηκε παράλληλα από τους B.Y.Chen και S.J.Li στην εργασία [13]. Επίσης να σημειώσουμε , ότι η μέση καμπυλότητα είναι μη μηδενική , αφού σε αντίθετη περίπτωση , σύμφωνα με το Θεώρημα του Takahashi, η υπερεπιφάνεια θα ήταν 1- τύπου.

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.4. Έστω ότι η M^n είναι 3- τύπου υπερεπιφάνεια της $S^{n+1}(R)$ με σταθερή μη μηδενική μέση καμπυλότητα στην

$S^{n+1}(R)$ και φασματική ανάλυση αυτή του Λήμματος 3.2.6. Αν $\alpha = 0$, τότε από την (3.2.22) βλέπουμε, ότι και το S είναι σταθερό, άρα από την εξίσωση του Gauss ([5], σελ.55) η M^n θα είχε και σταθερή αριθμητική καμπυλότητα και επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.3 η M^n θα ήταν 2- τύπου ή τμήμα μικρής υπερσφαίρας, δηλαδή 1- τύπου, πράγμα άτοπο. Συνεπώς $\alpha \neq 0$. Παίρνοντας την κλίση των δύο μελών της (3.2.22), επειδή $\mathrm{tr}A$ είναι σταθερό, βρίσκουμε

$$-\frac{(\mathrm{tr}A)^2}{nR}\,\mathrm{grad}S = \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{n}\,\mathrm{grad}\langle\alpha, e_{n+1}\rangle$$

ή, ισοδύναμα, με τη βοήθεια της (3.2.12)

$$-(\mathrm{tr}A)^2\mathrm{grad}S = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\alpha_\tau . \tag{3.5.1}$$

Συνδυάζοντας την προηγούμενη με την (3.2.21) βρίσκουμε

$$A\,\mathrm{grad}S = -\frac{\mathrm{tr}A}{2}\,\mathrm{grad}S . \tag{3.5.2}$$

Ξανά από την (3.2.22), επειδή $\mathrm{tr}A$ είναι σταθερό, παίρνουμε

$$-\frac{(\mathrm{tr}A)^2}{nR}\Delta S = \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{n}\langle\alpha, \Delta e_{n+1}\rangle$$

ή, λόγω της (3.2.4),

$$-(\mathrm{tr}A)^2\Delta S = \frac{n}{R}\lambda_1\lambda_2\lambda_3\langle\alpha, e_{n+1}\rangle - \lambda_1\lambda_2\lambda_3\mathrm{tr}A\,\langle\alpha, e_{n+2}\rangle .$$

Από αυτή τη σχέση κάνοντας χρήση των (3.2.12) και (3.2.13) καταλήγουμε στην

$$- (\mathrm{tr}A)^2 \mathrm{grad}\Delta S = \frac{n}{R^2}\lambda_1\lambda_2\lambda_3\alpha_\tau + \lambda_1\lambda_2\lambda_3(\mathrm{tr}A)A\alpha_\tau$$

ή, ισοδύναμα, με χρήση των (3.5.1) και (3.5.2),

$$\mathrm{grad}\Delta S = \left(\frac{n}{R^2} - \frac{(\mathrm{tr}A)^2}{2}\right)\mathrm{grad}S . \tag{3.5.3}$$

Όμοια από την (3.2.23), λόγω της (3.2.13), παίρνουμε την

$$\frac{\mathrm{tr}A}{n}\mathrm{grad}\Delta S + \frac{\mathrm{tr}A}{R^2}\mathrm{grad}S + 2\frac{\mathrm{tr}A}{n}S\mathrm{grad}S = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\frac{\mathrm{tr}A}{n}\mathrm{grad}S - \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{n}A\alpha_\tau,$$

η οποία, αν λάβουμε υπόψη μας τις (3.5.1) και (3.5.2), γράφεται

$$\mathrm{grad}\Delta S = \left(- \frac{n}{R^2} - 2S + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \frac{(\mathrm{tr}A)^2}{2}\right)\mathrm{grad}S .$$

Συγκρίνοντας την παραπάνω με την (3.5.3) έχουμε

$$(- \frac{2n}{R^2} - 2S + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\mathrm{grad}S = 0$$

ή ακόμη $(- \frac{2n}{R^2} + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)S - S^2 =$ σταθερό το οποίο τελικώς σημαίνει, ότι το S είναι σταθερό. Έτσι από την εξίσωση του Gauss ([5], σελ. 55) και επειδή $\mathrm{tr}A$ είναι σταθερό, η M^n έχει και σταθερή αριθμητική καμπυλότητα, οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.3 θα είναι 2- τύπου ή τμήμα μικρής υπερσφαίρας, δηλαδή 1- τύπου, πράγμα άτοπο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 - ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΥ ΤΥΠΟΥ ΥΠΕΡΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΣΤΟΝ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟ ΧΩΡΟ

4.1. Εισαγωγικά - κύρια αποτελέσματα

Από ότι φαίνεται το πρόβλημα της ταξινόμησης των πεπερασμένου τύπου υπερεπιφανειών είναι δυσκολότερο στην περίπτωση του Ευκλειδείου χώρου παρά για υπερεπιφάνειες της σφαίρας. Έτσι ενώ για πεπερασμένου 2- τύπου υπερεπιφάνειες της σφαίρας γνωρίζουμε , ότι έχουν σταθερή μη μηδενική μέση καμπυλότητα και σταθερή αριθμητική καμπυλότητα , για υπερεπιφάνειες 2-τύπου του Ευκλειδείου χώρου δεν γνωρίζουμε τίποτα, εκτός αν θεωρήσουμε κάποιες συνθήκες. Επίσης για 3- τύπου υπερεπιφάνειες της σφαίρας γνωρίζουμε από το Θεώρημα 3.1.4 , ότι δεν έχουν σταθερή μέση καμπυλότητα.

Στην κατεύθυνση επίλυσης ανάλογων προβλημάτων για την περίπτωση υπερεπιφανειών του Ευκλειδείου χώρου θα εργαστούμε σε αυτό το κεφάλαιο.

Στον E^3 υπάρχει μια πληθώρα επιφανειών με σταθερή μέση καμπυλότητα ([30]) , μεταξύ των οποίων υπάρχει πληθώρα από επιφάνειες εκ περιστροφής , γνωστές ως επιφάνειες του Delaunay ([14],[18]).

Ο πρώτος στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι να απαντήσουμε στο ερώτημα :

"Ποιές επιφάνειες του E^3 με σταθερή μέση καμπυλότητα είναι πεπερασμένου τύπου;"

Τα πρώτα αποτελέσματα επίλυσης αυτού του προβλήματος και συνάμα ταξινόμησης πεπερασμένου τύπου επιφανειών στον E^3 περιέχονται στην εργασία [28] και περιγράφονται από τα παρακάτω θεωρήματα :

Θεώρημα 4.1.1. *Δεν υπάρχουν 3- τύπου (όχι αναγκαστικά συμπαγείς) επιφάνειες του Ευκλειδείου χώρου* E^3 *με σταθερή μέση καμπυλότητα.*

Θεώρημα 4.1.2. *Αν η* M *είναι πεπερασμένου τύπου εκ περιστροφής επιφάνεια στον* E^3 *με σταθερή μέση καμπυλότητα, τότε η* M *είναι ανοιχτό τμήμα επιπέδου, σφαίρας, αλυσοειδούς ή ορθού κυκλικού κυλίνδρου.*

Από την άλλη πλευρά, στην κατεύθυνση ταξινόμησης πεπερασμένου τύπου υπερεπιφανειών του Ευκλειδείου χώρου ένα σημαντικό αποτέλεσμα περιέχεται στην εργασία [11] του B.Y.Chen , όπου απέδειξε ότι: Οι μόνες μηδενικού 2- τύπου επιφάνειες (ορισμός 1.1.3) του E^3 είναι τα ανοιχτά τμήματα ορθών κυκλικών κυλίνδρων.

Προς αυτή την κατεύθυνση, δηλαδή της μελέτης των μηδενικού 2-τύπου υπερεπιφανειών του Ευκλειδείου χώρου θα δείξουμε τα παρακάτω δύο θεωρήματα, που περιέχονται στην εργασία [27] :

Θεώρημα 4.1.3. *Οι υπερεπιφάνειες του* E^{n+1} *με μη σταθερή μέση καμπυλότητα* H, *έτσι ώστε το διανυσματικό πεδίο* grad H *να είναι ιδιοδιάνυσμα της απεικόνισης Weingarten με ιδιοτιμή* $-\frac{nH}{2}$ *γράφονται τοπικά ως εξής :*

$$y(u_1,\ldots,u_{n-1},s) = x(u_1,\ldots,u_{n-1}) + A(s)e(u_1,\ldots,u_{n-1}) + B(s)w(u_1,\ldots,u_{n-1})$$

όπου $A(s)$, $B(s)$ *είναι κατάλληλες συναρτήσεις και* $x(u_1,\ldots, u_{n-1})$ *περιγράφει μια υποπολλαπλότητα συνδιάστασης 2 στον* E^{n+1} *με επίπεδη κάθετη δέσμη , η οποία παράγεται από τα ορθοκανονικά διανυσματικά πεδία* e *και* w.

Θεώρημα 4.1.4. *Μια μηδενικού 2- τύπου υπερεπιφάνεια του* E^4 *έχει σταθερή μη μηδενική μέση καμπυλότητα και σταθερή αριθμητική καμπυλότητα ή είναι ανοιχτό τμήμα μιας* $O(2)\times O(2)$*-αναλλοίωτης υπερεπιφάνειας με διανυσματικό πεδίο θέσης*

$$\vec{x}(u,v,s) = (x(s)\cos u, x(s)\sin u, y(s)\cos v, y(s)\sin v) ,$$

όπου η καμπύλη $(x(s), y(s))$ *είναι τμήμα της αλγεβρικής καμπύλης*

$$P_o(x, y) + \lambda P_1(x, y) + \lambda^2 P_2(x, y) + \lambda^3 P_3(x, y) + \lambda^4 P_4(x, y) + \lambda^5 P_5(x, y) = 0,$$

με $P_o, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ *κατάλληλα ομογενή πολυώνυμα και* λ *μη μηδενική σταθερά.*

Όπως είναι γνωστό , από τη σχέση $\Delta x = - n\vec{H}$ προκύπτει εύκολα ότι οι μόνες υποπολλαπλότητες του Ευκλειδείου χώρου που έχουν αρμονικό διανυσματικό πεδίο θέσης είναι οι υποπολλαπλότητες ελάχιστης έκτασης. Εύλογο είναι το ερώτημα που τέθηκε από τον B.Y.Chen στην εργασία [12]

"ποιές υποπολλαπλότητες του Ευκλειδείου χώρου έχουν αρμονικό διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας; "

Με άλλα λόγια, για ποιές υποπολλαπλότητες του E^m ισχύει $\Delta\vec{H} = 0$ ή $\Delta^2 x = 0$. Οι υποπολλαπλότητες με αρμονικό διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας , δηλαδή $\Delta\vec{H} = 0$ έχουν ονομαστεί από τον B.Y.Chen *διαρμονικές* (biharmonic) υποπολλαπλότητες. Εικάζεται πως η απάντηση στο παραπάνω ερώτημα είναι ότι: Μόνο οι ελάχισης έκτασης υποπολλαπλότητες είναι διαρμονικές υποπολλαπλότητες του Ευκλειδείου χώρου. Σε αυτό το ερώτημα έχουν δοθεί απαντήσεις σε ειδικές περιπτώσεις από τον I.Dimitric ([17]) στη διδακτορική του διατριβή. Η θεωρία που θα αναπτυχθεί για τη μελέτη των υπερεπιφανειών μηδενικού 2- τύπου μας βοηθάει να απαντήσουμε μερικά στο ερώτημα τούτο με το παρακάτω θεώρημα :

Θεώρημα 4.1.5. *Οι μόνες διαρμονικές επιφάνειες του* E^3 *και υπερεπιφάνειες του* E^4, *είναι οι ελάχιστης έκτασης.*

Παρατήρηση 4.1.6. Όπως αναφέρει ο B.Y.Chen στην εργασία του [12], έχει αποδείξει χωρίς να έχει δημοσιευτεί , ότι οι μόνες διαρμονικές επιφάνειες του E^3 είναι οι επιφάνειες ελάχιστης έκτασης.

4.2. Βασικές σχέσεις για μηδενικού 2- τύπου και 3- τύπου υπερεπιφάνειες του E^{n+1}

Έστω M^n υπερεπιφάνεια του E^{n+1} , εφοδιασμένη με την επαγόμενη μετρική $<\,,\,>$ και με διανυσματικό πεδίο θέσης x ως προς κάποια αρχή 0. Συμβολίζουμε με $\bar{\nabla}$ και ∇ αντίστοιχα την κανονική συνοχή του E^{n+1} και την επαγόμενη συνοχή της M^n . Αν N είναι ένα διαφορίσιμο μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο της M^n και A η αντίστοιχη απεικόνιση Weingarten , τότε από την εξίσωση του Weingarten ([31], κεφ. VII) έχουμε

$$\bar{\nabla}_X N = - AX ,$$

ενώ η εξίσωση του Gauss ([31], κεφ. VII) είναι

$$\dot{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle AX,Y\rangle N \ ,$$

όπου X,Y είναι διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία εφαπτόμενα της M^n. Συμβολίζουμε επίσης με H τη μέση καμπυλότητα και με S το τετράγωνο του μήκους της απεικόνισης Weingarten A, δηλαδή $H = \frac{1}{n}\,\mathrm{tr}A$ και $S = \mathrm{tr}A^2$.

Η συνάρτηση στήριξης p της M^n ως προς την αρχή 0 ορίζεται ως, $p=\langle x,N\rangle$. Αν αναλύσουμε το διανυσματικό πεδίο θέσης της M^n σε εφαπτόμενη συνιστώσα x_T και σε κάθετη συνιστώσα, τότε έχουμε

$$x = x_T + pN \ . \tag{4.2.1}$$

Θέτοντας $r = |x|$, είναι γνωστό ότι

$$x_T = \frac{1}{2}\,\mathrm{grad}r^2 \ . \tag{4.2.2}$$

Παραγωγίζοντας την (4.2.1) , ως προς X εφαπτόμενο της M^n , και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Gauss και Weingarten , καταλήγουμε στις εξής γνωστές σχέσεις (βλ. [22], σελ. 835)

$$\nabla_X x_T = X + pAX$$

και

$$Ax_T = -\,\mathrm{grad}p \ . \tag{4.2.3}$$

Οι παρακάτω σχέσεις

$$\Delta r^2 = -2n - 2npH \,, \tag{4.2.4}$$

$$\Delta p = n \langle x_T, \mathrm{grad} H \rangle + nH + pS \tag{4.2.5}$$

και

$$\Delta x = -n\vec{H} \,, \tag{4.2.6}$$

όπου $\vec{H}$ είναι το διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας, δηλαδή $\vec{H}=HN$, είναι επίσης γνωστές (βλ. π.χ. [5] και [22]). Θα υπολογίσουμε, επειδή μας είναι χρήσιμο για τα επόμενα, τη Λαπλασιανή του καθέτου διανυσματικού πεδίου N.

Από τον ορισμό του Λαπλασιανού τελεστή (σχέση (1.1.6)) έχουμε

$$\Delta N = \sum_{i=1}^{n} (\bar{\nabla}_{\nabla_{X_i} X_i} N - \bar{\nabla}_{X_i} \bar{\nabla}_{X_i} N) \,,$$

όπου $\{X_i\}$, $i=1,\ldots,n$ είναι ορθοκανονικό πλαίσιο εφαπτόμενο της M^n, ή ισοδύναμα λόγω των εξισώσεων Gauss και Weingarten,

$$\Delta N = \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{X_i} A) X_i + \sum_{i=1}^{n} \langle A^2 X_i, X_i \rangle N \,.$$

Όμως $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\nabla_{X_i} A) X_i = \mathrm{grad}\,\mathrm{tr} A$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle A^2 X_i, X_i \rangle = S$,

και έτσι

$$\Delta N = n\, \mathrm{grad} H + SN \,. \tag{4.2.7}$$

Παρατήρηση 4.2.1. Έστω f μια λεία πραγματική συνάρτηση, ορισμένη στην M^n. Σύμφωνα με την Παρατήρηση 3.2.1 ισχύει

$$\Delta(fN) = (\Delta f)N + f\Delta N - 2\bar{\nabla}_{\mathrm{grad} f} N. \tag{4.2.8}$$

Λήμμα 4.2.2. *Χρησιμοποιώντας τον προηγούμενο συμβολισμό ισχύει*

$$\Delta\vec{H} = 2A\,\mathrm{grad}H + nH\,\mathrm{grad}H + (\Delta H + SH)N\,. \tag{4.2.9}$$

Ειδικά, αν η M^n *έχει σταθερή μέση καμπυλότητα, τότε*

$$\Delta\vec{H} = HSN \tag{4.2.10}$$

και

$$\Delta^2\vec{H} = 2HA\,\mathrm{grad}S + H(\Delta S + S^2)N. \tag{4.2.11}$$

Απόδειξη. Από την $\vec{H} = HN$ και λόγω της σχέσης (4.2.8) βρίσκουμε

$$\Delta\vec{H} = (\Delta H)N + H\Delta N - 2\bar{\nabla}_{\mathrm{grad}H}N\,,$$

απ' όπου, με τη βοήθεια της (4.2.7) και της εξίσωσης Weingarten, καταλήγουμε στην (4.2.9).

Έστω τώρα ότι H είναι σταθερή. Η (4.2.10) είναι άμεση συνέπεια της (4.2.9). Επιπλέον από την (4.2.10) παίρνουμε, λόγω της (4.2.8),

$$\Delta^2\vec{H} = H(\Delta S)N + HS\Delta N - 2\bar{\nabla}_{\mathrm{grad}(HS)}N\,.$$

Η (4.2.11) προκύπτει από την παραπάνω σχέση λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση Weingarten και την (4.2.7).

Λήμμα 4.2.3. *Αν η* M^n *είναι μηδενικού 2- τύπου (ορισμός 1.1.3) υπερεπιφάνεια του* E^{n+1} *με φασματική ανάλυση* $x = x_1 + x_2$, $\Delta x_1=0$, $\Delta x_2= \lambda x_2$ $(\lambda \neq 0)$, *τότε ισχύει*

(4.2.12) $$A\,\mathrm{grad}H = -\frac{nH}{2}\,\mathrm{grad}H ,$$

(4.2.13) $$\Delta H + SH = \lambda H .$$

Απόδειξη. Από τη φασματική ανάλυση βρίσκουμε $\Delta x=\lambda x_2$ ή ακόμη $\Delta^2 x=\lambda\Delta x$ και με τη βοήθεια της (4.2.6) $\Delta \vec{H}=\lambda\vec{H}$. Αντικαθιστώντας στην τελευταία το $\Delta \vec{H}$ από την (4.2.9) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\vec{H}=HN$ καταλήγουμε στις (4.2.12) και (4.2.13).

Λήμμα 4.2.4. *Αν η* M^n *είναι 3- τύπου υπερεπιφάνεια του* E^{n+1} *με σταθερή μέση καμπυλότητα και φασματική ανάλυση* $x = x_1 + x_2 + x_3$, $\Delta x_i = \lambda_i x_i$, $i=1, 2, 3$, *τότε ισχύει*

(4.2.14) $$A\,\mathrm{grad}S = -\frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{2nH}\,x_T ,$$

(4.2.15) $$\Delta S + S^2 = (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)S - (\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3) - \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{nH}\,p .$$

Απόδειξη. Από τη φασματική ανάλυση με τη βοήθεια της (4.2.6) βρίσκουμε

$$-n\vec{H} = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 ,$$

$$-n\,\Delta\vec{H} = \lambda_1^2 x_1 + \lambda_2^2 x_2 + \lambda_3^2 x_3 ,$$

$$- n\,\Delta^2\vec{H} = \lambda_1^3 x_1 + \lambda_2^3 x_2 + \lambda_3^3 x_3 \,,$$

και επομένως

$$\Delta^2\vec{H} = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\Delta\vec{H} - (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3)\vec{H} - \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{n}x.$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση τα $\Delta\vec{H}$, x από τις (4.2.10), (4.2.1) αντίστοιχα και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\vec{H}=HN$, βρίσκουμε

$$\Delta^2\vec{H} = - \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{n}x_T + H(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)SN - H(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3)N - \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{n}pN.$$

Οι ζητούμενες σχέσεις (4.2.14) και (4.2.15) προκύπτουν από τη σύγκριση της προηγούμενης με την (4.2.11).

4.3. Απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.1

Χρειαζόμαστε το ακόλουθο γνωστό αποτέλεσμα (βλ. π.χ. [34], σελ.46) :

Λήμμα 4.3.1. *Αν* M *είναι επιφάνεια του* E^3 *με σταθερή μέση καμπυλότητα* H *και καμπυλότητα Gauss* K , *τότε σε περιοχή μη ομφαλικού σημείου ισχύει*

$$\Delta \log(H^2 - K) = - 4K\,.$$

Παρατήρηση 4.3.2. Σημειώνουμε , ότι ο Λαπλασιανός τελεστής Δ έχει εδώ αντίθετο πρόσημο από αυτό που έχει στην [34] .

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το Θεώρημα 4.1.1.

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.1. Υποθέτουμε, ότι η M είναι 3-τύπου επιφάνεια στον E^3 με σταθερή μέση καμπυλότητα. Μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι η φασματική ανάλυση είναι αυτή του Λήμματος 4.2.4. Πράγματι με κατάλληλη μεταφορά στον E^3 αυτό επιτυγχάνεται. Επίσης είναι $H \neq 0$, αφού για $H = 0$ η επιφάνεια θα ήταν ελάχιστης έκτασης και συνεπώς 1- τύπου, πράγμα άτοπο. Για ευκολία θέτουμε $\lambda = -\frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{4H}$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :

Περίπτωση i. $\lambda = 0$, δηλαδή η M είναι μηδενικού 3- τύπου. Σ' αυτή την περίπτωση η (4.2.14) γίνεται $A\mathrm{grad}S = 0$. Θα δείξουμε ότι το S είναι σταθερό στη M. Πράγματι, αν gradS είναι διάφορο του μηδενός σ' ένα ανοιχτό σύνολο $U \subset M$, τότε οι κύριες καμπυλότητες στο U είναι οι σταθερές 0 και $2H$· αυτό όμως θα σήμαινε ότι $S = 4H^2$ και κατά συνέπεια $\mathrm{grad}S=0$, πράγμα άτοπο. Συνεπώς το S είναι σταθερό στη M και επειδή $2K=4H^2- S$, η M έχει σταθερή καμπυλότητα Gauss και σταθερή μη μηδενική μέση καμπυλότητα. Έτσι η M είναι τμήμα σφαίρας (1- τύπου) ή τμήμα ορθού κυκλικού κυλίνδρου (μηδενικού 2- τύπου), πράγμα άτοπο.

Περίπτωση ii. $\lambda \neq 0$. Οι (4.2.14) και (4.2.15) γράφονται αντίστοιχα

$$A\mathrm{grad}S = \lambda x_T \tag{4.3.1}$$

και

$$\Delta S + S^2 = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)S - (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3) + 2\lambda p\,. \tag{4.3.2}$$

Από την (4.3.1) και επειδή $A^2\mathrm{grad}S = 2HA\mathrm{grad}S - K\mathrm{grad}S$, όπου K είναι η καμπυλότητα Gauss, παίρνουμε

$$K\mathrm{grad}S = 2\lambda Hx_T - \lambda Ax_T\,,$$

η οποία με κατάλληλη χρήση των (4.2.2) και (4.2.3) γράφεται

$$K\,\mathrm{grad}S = \mathrm{grad}(\lambda p + \lambda H r^2)\,.$$

Απ' αυτή, παίρνοντας την απόκλιση των δύο μελών και λαμβάνοντας υπόψη την (1.1.4) και την $2K=4H^2-S$, βρίσκουμε

$$(4H^2-S)\Delta S + |\mathrm{grad}S|^2 = 2\lambda\Delta p + 2\lambda H\Delta r^2\,.$$

Η τελευταία με τη βοήθεια των (4.2.4), (4.2.5) και επειδή H σταθερό, γράφεται

$$(4H^2-S)\Delta S + |\mathrm{grad}S|^2 = -4\lambda H + 2\lambda pS - 8\lambda H^2 p\,. \tag{4.3.3}$$

Από το Λήμμα 4.3.1, επειδή $2K = 4H^2-S$, παίρνουμε

$$(S-2H^2)\Delta S + |\mathrm{grad}S|^2 = 2(S-4H^2)(S-2H^2)^2\,. \tag{4.3.4}$$

Μετά από αφαίρεση κατά μέλη των (4.3.3) και (4.3.4) βρίσκουμε

$$(S-3H^2)\Delta S = (S-4H^2)(S-2H^2)^2 + 2\lambda H - \lambda pS + 4\lambda H^2 p\,,$$

η οποία με αντικατάσταση του ΔS από την (4.3.2) γίνεται

$$\begin{aligned} 2S^3 &- (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+11H^3)S^2 + \big((\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3) + 3H^2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) + 20H^4\big)S \\ &- 3\lambda pS + 10\lambda H^2 p - 3H^2(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3) + 2\lambda H - 16H^6 = 0\,. \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Επιπλέον απ' την (4.3.5) βρίσκουμε

$$\alpha\,\mathrm{grad}S + \beta\,\mathrm{grad}p = 0\,, \tag{4.3.6}$$

όπου

(4.3.7) $$\alpha = 6S^2 - 2S(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 11H^2) + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) + 3H^2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + 20H^4 - 3\lambda p$$

και

(4.3.8) $$\beta = 10\lambda H^2 - 3\lambda S .$$

Αν το β είναι μηδέν σε ανοιχτό σύνολο $U \subset M$, τότε το S είναι σταθερό στο U, το οποίο είναι άτοπο επιχειρηματολογώντας όπως ακριβώς στην περίπτωση i. Έτσι, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το β δεν είναι μηδέν παντού στη M. Από την (4.3.6) λαμβάνουμε

$$\alpha A \mathrm{grad} S + \beta A \mathrm{grad} p = 0$$

ή, ισοδύναμα, λόγω των (4.3.1), (4.2.3) και της $A^2 x_T = 2HAx_T - Kx_T$, έχουμε

$$Ax_T = \frac{\alpha\lambda + \beta K}{2\beta H} x_T .$$

Αν $x_T = 0$ σε ανοιχτό σύνολο $V \subset M$, τότε από την (4.2.2) το V είναι τμήμα σφαίρας και επομένως είναι 1-τύπου, πράγμα άτοπο. Συνεπώς οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι το x_T είναι κύρια διεύθυνση με αντίστοιχη κύρια καμπυλότητα $\frac{\alpha\lambda + \beta K}{2\beta H}$. Η άλλη κύρια καμπυλότητα είναι $2H - \frac{\alpha\lambda + \beta K}{2\beta H}$ αλλά τότε

$$K = \frac{\alpha\lambda + \beta K}{2\beta H} \left(2H - \frac{\alpha\lambda + \beta K}{2\beta H}\right)$$

ή ισοδύναμα

(4.3.9) $$\beta^2 K^2 + 2\alpha\beta\lambda K + \alpha^2\lambda^2 - 4\alpha\beta\lambda H^2 = 0 .$$

Βρίσκοντας το p από την (4.3.5) και αντικαθιστώντας το στην (4.3.7) βλέπουμε ότι το α είναι μια ρητή συνάρτηση του S. Λαμβάνοντας υπόψη αυτή την έκφραση του α, την (4.3.8) και την $2K = 4H^2 - S$ η (4.3.9) γράφεται στη μορφή

$$\sum_{i=0}^{6} \mu_i S^i = 0,$$

όπου μ_i, $i=0,\dots,6$ είναι σταθεροί αριθμοί με $\mu_6 = \frac{1089}{4}\lambda^4 \neq 0$. Αυτό σημαίνει ότι το S είναι σταθερό, άτοπο όπως στην περίπτωση i.

4.4. Απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.2

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.2 χρειαζόμαστε το ακόλουθο λήμμα :

Λήμμα 4.4.1. *Έστω* $x(s, \theta) = (f(s)\cos\theta, f(s)\sin\theta, g(s))$ *με* $s \in I$ *και* $f(s)>0$, *το διανυσματικό πεδίο θέσης μιας εκ περιστροφής επιφάνειας* M *του* E^3 *της οποίας η γενέτειρα καμπύλη* C *έχει καμπυλότητα* $k(s)$, *όπου* s *είναι το μήκος τόξου για την* C. *Αν η* M *έχει σταθερή μέση καμπυλότητα* c, *τότε*

(4.4.1)
$$k(s) = c + \frac{c_1}{f^2(s)},$$

όπου c_1 *είναι κατάλληλη σταθερά, και επιπλέον*

(4.4.2)
$$g'(s) = cf(s) - \frac{c_1}{f(s)}.$$

Απόδειξη. Είναι γνωστό , ότι η καμπυλότητα $k(s)$ της καμπύλης C και οι κύριες καμπυλότητες $k_1(s, \theta)$, $k_2(s, \theta)$ της M δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$k(s) = f'(s)g''(s) - f''(s)g'(s) \ , \ k_1(s, \theta) = k(s) \ \text{ και } \ k_2(s, \theta) = \frac{g'(s)}{f(s)} \ .$$

Έτσι για τη μέση καμπυλότητα $H(s, \theta)$ της M έχουμε

$$(4.4.3) \qquad 2H(s, \theta) = k(s) + \frac{g'(s)}{f(s)} \ .$$

Επίσης , επειδή η καμπύλη C έχει ως παράμετρο το μήκος τόξου από τους τύπους Serret- Frenet βρίσκουμε

$$(4.4.4) \qquad f''(s) = - k(s)g'(s) \quad \text{και} \quad g''(s) = k(s)f'(s) \ .$$

Αν υποθέσουμε τώρα ότι η M έχει σταθερή μέση καμπυλότητα c , τότε από την (4.4.3) έχουμε

$$(4.4.5) \qquad g'(s) = 2cf(s) - k(s)f(s) \ .$$

Παραγωγίζοντας τα μέλη της (4.4.5) και χρησιμοποιώντας τη δεύτερη σχέση από τις (4.4.4) παίρνουμε

$$\frac{d}{ds}((k(s)- c)f^2(s)) = 0 \ ,$$

απ' όπου προκύπτει η (4.4.1) . Τέλος η (4.4.2) προκύπτει από την (4.4.5) με τη βοήθεια της (4.4.1) .

Μπορούμε τώρα ν' αποδείξουμε το Θεώρημα 4.1.2 .

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.2. Έστω ότι η M είναι εκ περιστροφής επιφάνεια του E^3 με διανυσματικό πεδίο θέσης όπως στο Λήμμα 4.4.1 και με σταθερή μέση καμπυλότητα c. Αν υποθέσουμε τώρα, ότι η M είναι πεπερασμένου τύπου και μάλιστα k- τύπου $(k\geq 1)$, τότε είναι γνωστό (Πρόταση 1.1.5) ότι το διανυσματικό πεδίο θέσης x πληρεί την εξίσωση

$$\Delta^k x - \sigma_1 \Delta^{k-1} x + \ldots + (-1)^{k-1}\sigma_{k-1}\Delta x + (-1)^k \sigma_k (x - x_o) = 0 ,$$

όπου x_o είναι σταθερό διάνυσμα και σ_i, $i=1,\ldots,k$ σταθεροί αριθμοί. Απ' αυτή βλέπουμε, λόγω της μορφής του διανυσματικού πεδίου θέσης, ότι

$$\Delta^k g(s) - \sigma_1 \Delta^{k-1} g(s) + \ldots + (-1)^{k-1}\sigma_{k-1}\Delta g(s) + (-1)^k \sigma_k (g(s) - g_o) = 0 ,$$

όπου g_o είναι σταθερά, ή ακόμη

$$\Delta^{k+1} g(s) - \sigma_1 \Delta^k g(s) + \ldots + (-1)^{k-1}\sigma_{k-1}\Delta^2 g(s) + (-1)^k \sigma_k \Delta g(s) = 0 . \tag{4.4.6}$$

Επειδή η γενέτειρα καμπύλη C έχει παράμετρο το μήκος τόξου έχουμε $(f'(s))^2 + (g'(s))^2 = 1$, οπότε η μετρική της M είναι $ds^2+f^2(s)d\theta^2$ και έτσι (σχέση (1.1.1)) ο Λαπλασιανός τελεστής Δ έχει έκφραση:

$$\Delta = - \frac{f'(s)}{f(s)} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{1}{f^2(s)} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} . \tag{4.4.7}$$

Υπολογίζοντας το $\Delta g(s)$ με τη βοήθεια των (4.4.7), (4.4.2), (4.4.4) και (4.4.1) βρίσκουμε

$$\Delta g(s) = - 2cf'(s) . \tag{4.4.8}$$

Όμοια από την (4.4.8) , με τη βοήθεια των (4.4.7), (4.4.1), (4.4.4), (4.4.2) και της $(f'(s))^2+(g'(s))^2=1$, βρίσκουμε

$$\Delta^2 g(s) = -4cf'(s)\frac{P_2(f(s))}{f^4(s)} ,$$

όπου $P_2(t)$ είναι το πολυώνυμο $P_2(t) = c_1^2 + c^2 t^4$.

Έστω τώρα ότι

$$\Delta^m g(s) = -4cf'(s)\frac{P_m(f(s))}{(f(s))^{4m-4}} , \quad m\geq 1 ,$$

όπου P_m είναι πολυώνυμο με σταθερό όρο d_m , βαθμού το πολύ $4m-4$. Από την προηγούμενη σχέση με τη βοήθεια των (4.4.7), (4.4.1), (4.4.4), (4.4.2) και της $(f'(s))^2+(g'(s))^2=1$, καταλήγουμε στη σχέση

$$\Delta^{m+1} g(s) = -4cf'(s)\frac{P_{m+1}(f(s))}{f(s)^{4m}} , \quad m\geq 0 , \tag{4.4.9}$$

όπου P_{m+1} είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ $4m$, με $P_1(t)=\frac{1}{2}$ και σταθερό όρο $d_{m+1} = (4m-3)(4m-2)c_1^2\, d_m$. Επομένως δείξαμε επαγωγικά , ότι οι ανώτερες Λαπλασιανές της συνάρτησης g δίνονται από την (4.4.9) , όπου $P_1(t)=\frac{1}{2}$ και

$$d_{m+1} = 5.6.9.10\ldots(4m-3)(4m-2)c_1^{2m} , \quad m\geq 2 .$$

Αντικαθιστώντας τις (4.4.8) και (4.4.9) στην (4.4.6) βρίσκουμε

$$4cf'(s)Q(f(s)) = 0 , \tag{4.4.10}$$

όπου $Q(t)$ είναι το πολυώνυμο

$$Q(t) = P_{k+1}(t) - \sigma_1 P_k(t) t^4 + \dots + (-1)^{k-1} \sigma_{k-1} P_2(t)\, t^{4k-4} + (-1)^k \frac{\sigma_k}{2}\, t^{4k}\,.$$

Είναι προφανές , ότι ο σταθερός όρος του $Q(t)$ είναι ο d_{k+1}.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :

Περίπτωση i. Έστω $cf'(s)=0$, για κάθε $s \in I$. Τότε $c=0$ ή $f(s)$ είναι σταθερή συνάρτηση στο I. Αν $c=0$, τότε η M είναι εκ περιστροφής επιφάνεια ελάχιστης έκτασης στον E^3 και επομένως είναι τμήμα επιπέδου ή αλυσοειδούς. Αν η $f(s)$ είναι σταθερή στο I, τότε η M είναι τμήμα ορθού κυκλικού κυλίνδρου.

Περίπτωση ii. Υποθέτουμε ότι $cf'(s) \neq 0$ σε ανοιχτό διάστημα $J \subset I$. Σ' αυτή την περίπτωση η $f(s)$ δεν είναι σταθερή στο J και από την (4.4.10) παίρνουμε $Q(f(s))=0$ στο J, το οποίο σημαίνει ότι το $Q(t)$ έχει άπειρο πλήθος ριζών , είναι δηλαδή το μηδενικό πολυώνυμο . Έτσι ο σταθερός όρος του πολυωνύμου $Q(t)$ και κατά συνέπεια και ο σταθερός όρος του $P_{k+1}(t)$ είναι μηδέν , δηλαδή $c_1=0$. Από την (4.4.3) βρίσκουμε τότε $k_1(s, \theta) = k_2(s, \theta) = c$, δηλαδή όλα τα σημεία της M για $s \in J$ είναι ομφαλικά και επομένως , αφού $c \neq 0$, η M είναι ανοιχτό τμήμα σφαίρας .

4.5. Απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.3

Είδαμε στο Λήμμα 4.2.3 , ότι οι μηδενικού 2- τύπου υπερεπιφάνειες του E^{n+1} ικανοποιούν τη σχέση $A\,\mathrm{grad}H = -\frac{nH}{2}\,\mathrm{grad}H$. Κατ' αρχή θα μελετήσουμε υπερεπιφάνειες που ικανοποιούν την παραπάνω σχέση . Για τον σκοπό αυτό δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό , αφού τονίσουμε , ότι διατηρούμε τον συμβολισμό της παραγράφου 4.2 :

Ορισμός 4.5.1. *Μία υπερεπιφάνεια του* E^{n+1} *καλείται H-υπερεπιφάνεια , αν ισχύει η σχέση* $AgradH = -\frac{nH}{2}\, gradH$ *σε κάθε σημείο της.*

Προφανώς οι υπερεπιφάνειες του E^{n+1} με σταθερή μέση καμπυλότητα είναι H- υπερεπιφάνειες .

Λήμμα 4.5.2 . *Αν* X,Y *είναι εφαπτόμενα διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία μιας H- υπερεπιφάνειας* M^n *του* E^{n+1} *, τότε ισχύει :*

$$\langle AX , \nabla_Y gradH\rangle = \langle AY , \nabla_X gradH\rangle \quad . \tag{4.5.1}$$

Απόδειξη. Επειδή η M^n είναι H- υπερεπιφάνεια , έχουμε $AgradH= grad(-\frac{n}{4}H^2)$. Παραγωγίζουμε ως προς X τα μέλη της τελευταίας σχέσης , οπότε λαμβάνουμε

$$(\nabla_X A)gradH + A(\nabla_X gradH) = \nabla_X grad\,(-\frac{n}{4}H^2)$$

ή

$$\langle(\nabla_X A)\, gradH,Y\rangle + \langle A(\nabla_X gradH),Y\rangle = \nabla^2(-\frac{n}{4}H^2)(X,Y)\ .$$

Όμως οι τανυστές A και $\nabla_X A$ είναι αυτοπροσηρτημένοι και έτσι έχουμε

$$\langle(\nabla_X A)Y\ , gradH\rangle + \langle AY\ , \nabla_X gradH\rangle = \nabla^2(-\frac{n}{4}H^2)(X,Y)\ .$$

Ομοίως έχουμε

$$\langle(\nabla_Y A)X\ , gradH\rangle + \langle AX\ , \nabla_Y gradH\rangle = \nabla^2(-\frac{n}{4}H^2)(Y,X)\ .$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο παραπάνω σχέσεις και λαμβάνοντας υπ' όψη το γεγονός ότι ο Εσσιανός τελεστής ∇^2 είναι συμμετρικός , βρίσκουμε

$$<AY , \nabla_X \mathrm{grad}H> - <AX , \nabla_Y \mathrm{grad}H> + <(\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X , \mathrm{grad}H> = 0 .$$

Η ανωτέρω ισότητα δίνει τη ζητούμενη σχέση λόγω της εξίσωσης Codazzi $(\nabla_X A)Y = (\nabla_Y A)X$ (βλ. [31], κεφ. VII) .

Υποθέτουμε στη συνέχεια , ότι η M^n είναι Η- υπερεπιφάνεια του E^{n+1} με μη σταθερή μέση καμπυλότητα και θεωρούμε ανοιχτό υποσύνολο U της M^n όπου το gradH είναι διάφορο του μηδενός σε κάθε σημείο . Ορίζουμε στο U το διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο $e_n = \frac{\mathrm{grad}H}{|\mathrm{grad}H|}$.

Προφανώς το e_n είναι κύριο διανυσματικό πεδίο στο U με αντίστοιχη κύρια καμπυλότητα $-\frac{nH}{2}$.

Λήμμα 4.5.3 . *Οι ολοκληρωτικές καμπύλες του* e_n *στο* U *είναι γεωδαισιακές, γραμμές καμπυλότητας της* M^n *και συνεπώς επίπεδες καμπύλες με καμπυλότητα* $-\frac{nH}{2}$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε ότι $\nabla_{e_n} e_n = 0$. Έστω αντίθετα ότι για κάποιο σημείο $P_o \in U$ είναι $(\nabla_{e_n} e_n)(P_o) \neq 0$. Τότε υπάρχει , λόγω συνέχειας , ανοιχτή περιοχή $W \subset U$ του P_o όπου το $\nabla_{e_n} e_n$ είναι σε κάθε σημείο διάφορο του μηδενός . Στην περιοχή W θέτουμε $e_1 = \nabla_{e_n} e_n / |\nabla_{e_n} e_n|$. Προφανώς το e_1 είναι κάθετο στο e_n και μοναδιαίο. Θα αποδείξουμε ότι $Ae_1 = -\frac{nH}{2} e_1$. Πράγματι έχουμε

$$\mathrm{grad}(-\frac{nH}{2}) = \mathrm{grad} <Ae_n, e_n> = (\nabla_{e_n} A)e_n = -\frac{n}{2} e_n(H)e_n - \frac{n}{2} H\nabla_{e_n} e_n - A(\nabla_{e_n} e_n)$$

ή

$$-\frac{n}{2} e_n(H)e_n = -\frac{n}{2} e_n(H)e_n - \frac{n}{2} H \nabla_{e_n} e_n - A(\nabla_{e_n} e_n)$$

ή

$$A(\nabla_{e_n} e_n) = -\frac{nH}{2} \nabla_{e_n} e_n .$$

Αλλά τότε

$$Ae_1 = -\frac{nH}{2} e_1 \quad \text{στο} \quad W .$$

Με όμοιο τρόπο από τη τελευταία σχέση συνάγουμε ότι

$$-\frac{n}{2} e_n(H) = -\frac{nH}{2} <\nabla_{e_1} e_1 , e_n> - <Ae_n , \nabla_{e_1} e_1 >$$

και έτσι $e_n(H)=0$ στο W , πράγμα αδύνατο , αφού $e_n(H)=|\mathrm{grad}H|$ και το gradH είναι μη μηδενικό στο W . Συνεπώς $\nabla_{e_n} e_n=0$ στο U , το οποίο σημαίνει ότι οι ολοκληρωτικές καμπύλες του e_n είναι γεωδαισιακές της M^n. Όμως , επειδή $Ae_n= -\frac{nH}{2} e_n$, οι ολοκληρωτικές καμπύλες είναι και γραμμές καμπυλότητας . Έτσι, από τις εξισώσεις Gauss και Weingarten έχουμε αντίστοιχα

$$\bar{\nabla}_{e_n} e_n = -\frac{nH}{2} N ,$$

$$\bar{\nabla}_{e_n} N = \frac{nH}{2} e_n .$$

Ας θεωρήσουμε τώρα τη μοναδική γεωδαισιακή γ(s) της M^n που περνά από ένα σημείο $P \in U$ με αρχική ταχύτητα $e_n(P)$. Αν T(s) είναι το μοναδιαίο εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο της γ , τότε οι δύο τελευταίες σχέσεις κατά μήκος της γ γράφονται $\dot{T} = -\frac{nH}{2} N$ και $\dot{N} = \frac{nH}{2} T$, όπου η τελεία δηλώνει παραγώγιση ως προς s . Από αυτές συμπεραίνουμε , ότι το N είναι το πρώτο κάθετο διανυσματικό πεδίο της καμπύλης γ στον E^{n+1} , το επίπεδο π που παράγεται από τα διανύσματα T(s) και N(s) είναι ανεξάρτητο του s και επιπλέον η καμπύλη γ ανήκει στο π και έχει καμπυλότητα $-\frac{nH}{2}$.

Ορίζουμε τώρα μια (n-1)- διάστατη κατανομή D στο U ως εξής : Σε κάθε σημείο $P \in U$ αντιστοιχούμε το ορθοσυμπλήρωμα του gradH(P) στον εφαπτόμενο χώρο $T_P M^n$ στο P. Η κατανομή D είναι διαφορίσιμη , αφού gradH $\neq 0$ στο U.

Λήμμα 4.5.4. *Η κατανομή D είναι ολοκληρώσιμη και οι ολοκληρωτικές της πολλαπλότητες έχουν επίπεδη κάθετη δέσμη (flat normal bundle) ως υποπολλαπλότητες του* E^{n+1}.

Απόδειξη. Έστωσαν X,Y διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία της κατανομής D. Από τις σχέσεις <X, gradH>=0 και <Y, gradH>=0 με παραγώγιση παίρνουμε

$$<\nabla_Y X, \mathrm{grad}H> + <X, \nabla_Y \mathrm{grad}H> = 0$$

και

$$<\nabla_X Y, \mathrm{grad}H> + <Y, \nabla_X \mathrm{grad}H> = 0 .$$

Με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει

$$<[X,Y], \mathrm{grad}H> + \nabla^2 H(X,Y) - \nabla^2 H(Y,X) = 0$$

ή λόγω της συμμετρίας του Εσσιανού τελεστή

$$<[X,Y], \mathrm{grad}H> = 0 ,$$

που σημαίνει ότι το [X,Y] ανήκει στην κατανομή D και επομένως αυτή είναι ολοκληρώσιμη. Σύμφωνα με το Θεώρημα του Frobenius μπορούμε να κατασκευάσουμε τις ολοκληρωτικές πολλαπλότητες της κατανομής D. Έστω M_{H_0} η ολοκληρωτική πολλαπλότητα που διέρχεται από το σημείο $P_0 \in U$, όπου $H(P_0)=H_0$. Προφανώς η M_{H_0} είναι υποπολλαπλότητα του E^{n+1} συνδιάστασης 2 , της οποίας ο κάθετος χώρος παράγεται από τα διανυσματικά πεδία N και e_n περιορισμένα κατά μήκος της M_{H_o}. Θα δείξουμε ότι το N είναι παράλληλο στην κάθετη δέσμη της M_{H_o}. Πράγματι, για τυχαίο εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο X της M_{H_o} έχουμε $<AX, e_n> = <X, Ae_n> = 0$, δηλαδή το AX είναι επίσης εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο της M_{H_o} και από την εξίσωση Weingarten $\tilde{\nabla}_X N = - AX$ προκύπτει ότι $\nabla^{\perp}_X N = 0$, όπου $\nabla^{\perp}$ είναι η κάθετη συνοχή της M_{H_o}. Επομένως η M_{H_o} έχει επίπεδη κάθετη δέσμη ως υποπολλαπλότητα του E^{n+1}.

Παρατήρηση 4.5.5. Είναι φανερό ότι η μέση καμπυλότητα της M^n είναι σταθερή κατά μήκος των ολοκληρωτικών πολλαπλοτήτων της D. Ισχυριζόμαστε πως το αυτό ισχύει και για το $|\mathrm{grad}H|$. Πράγματι, αν X είναι διανυσματικό πεδίο της κατανομής D, τότε επειδή $\nabla_{e_n} e_n = 0$ (Λήμμα 4.5.3) και

$$\nabla_{\mathrm{grad}H}\mathrm{grad}H = |\mathrm{grad}H|^2 \nabla_{e_n} e_n + |\mathrm{grad}H| e_n(|\mathrm{grad}H|) e_n ,$$

έχουμε

$$\frac{1}{2} X(|\mathrm{grad}H|^2) = <\nabla_X \mathrm{grad}H, \mathrm{grad}H> = <\nabla_{\mathrm{grad}H}\mathrm{grad}H, X> = 0 .$$

Θυμίζουμε ότι με M_{H_o} συμβολίζουμε την ολοκληρωτική πολλαπλότητα της κατανομής D κατά μήκος της οποίας η μέση καμπυλότητα της M^n έχει σταθερή τιμή H_o. Θεωρούμε τώρα μία ολοκληρωτική καμπύλη $\gamma(s)$ του διανυσματικού πεδίου e_n, δηλαδή $\frac{d\gamma}{ds}(s) = e_n(\gamma(s))$. Προφανώς ισχύει

$$\frac{d}{ds}(H \circ \gamma)(s) = |\mathrm{grad}H|(\gamma(s)) . \tag{4.5.2}$$

Επιπλέον, κάθε ολοκληρωτική πολλαπλότητα της D τέμνει την καμπύλη γ το πολύ σε ένα σημείο. Πράγματι, αν η ολοκληρωτική πολλαπλότητα M_{H_o}

τέμνει την γ στα σημεία $\gamma(s_1)$ και $\gamma(s_2)$, τότε $H(\gamma(s_1)) = H(\gamma(s_2))$, οπότε $\frac{d}{ds}(H\circ\gamma)(s_o) = 0$ για κατάλληλο s_o μεταξύ s_1 και s_2. Αυτό όμως οδηγεί σε αντίφαση λόγω της (4.5.2), αφού το gradH δεν είναι πουθενά μηδέν στο U.

Θεωρούμε τώρα δύο ολοκληρωτικές καμπύλες του e_n τις $\gamma_1(s)$, $\gamma_2(\bar{s})$, τέτοιες ώστε $\gamma_1(0) = P_1 \in M_{H_o}$ και $\gamma_2(0) = P_2 \in M_{H_o}$, όπου $s, \bar{s}$ είναι οι παράμετροι μήκους τόξου για τις καμπύλες γ_1, γ_2 αντίστοιχα.

Λήμμα 4.5.6. *Οι ολοκληρωτικές καμπύλες του* e_n *κοντά στα σημεία* P_1 *και* P_2 *είναι ισομετρικές στον* E^{n+1}.

Απόδειξη. Επειδή οι ολοκληρωτικές πολλαπλότητες της κατανομής D τέμνουν τις καμπύλες γ_1, γ_2 το πολύ σε ένα σημείο, υπάρχει διαφορίσιμη συνάρτηση $\bar{s} = h(s)$ με $h(0) = 0$ και $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, για κατάλληλα μικρό θετικό αριθμό ε, έτσι ώστε για κάθε $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ τα σημεία $\gamma_1(s)$ και $\gamma_2(h(s))$ να ανήκουν στην ίδια ολοκληρωτική πολλαπλότητα. Έτσι έχουμε

$$H(\gamma_1(s)) = H(\gamma_2(h(s))) . \tag{4.5.3}$$

Παραγωγίζοντας τα μέλη της (4.5.3) και λαμβάνοντας υπόψη την (4.5.2) έχουμε

$$|\mathrm{grad}H|(\gamma_1(s)) = |\mathrm{grad}H|(\gamma_2(h(s)))h'(s) .$$

Επειδή τα σημεία $\gamma_1(s)$ και $\gamma_2(h(s))$ ανήκουν στην ίδια ολοκληρωτική πολλαπλότητα, λόγω της Παρατήρησης 4.5.5 είναι

$$|\mathrm{grad}H|(\gamma_1(s)) = |\mathrm{grad}H|(\gamma_2(h(s)))$$

και έτσι έχουμε $h'(s)=1$. Από το γεγονός ότι ισχύει $h(0)=0$, συμπεραίνουμε ότι $\bar{s} = h(s) = s$. Συνεπώς οι καμπύλες $\gamma_1(s)$ και $\gamma_2(\bar{s})$ κοντά στα σημεία P_1 και P_2

έχουν την ίδια παραμέτρηση. Επιπλέον οι καμπύλες αυτές είναι επίπεδες και έχουν στα αντίστοιχα τους σημεία την ίδια καμπυλότητα $-\frac{n}{2}H(\gamma_1(s))$ (Λήμμα 4.5.3). Συνεπώς είναι ισομετρικές στον E^{n+1}.

Στη συνέχεια θα κατασκευάσουμε μια χρήσιμη παραμέτρηση της περιοχής U της H- υπερεπιφάνειας M^n, εκεί δηλαδή όπου το gradH δεν είναι μηδέν. Έστω M_{H_o} ολοκληρωτική πολλαπλότητα της κατανομής D. Υποθέτουμε ότι e και w είναι τα διανυσματικά πεδία e_n και N αντίστοιχα περιορισμένα στην M_{H_o}. Υποθέτουμε επίσης, ότι P_o είναι ένα σημείο της M_{H_o} και $\gamma(s)$ είναι η ολοκληρωτική καμπύλη του e_n που διέρχεται από το P_o. Σύμφωνα με το Λήμμα 4.5.3 η καμπυλότητα $k(s)$ της καμπύλης $\gamma(s)$ δίνεται από τη σχέση $k(s) = -\frac{n}{2}H(\gamma(s))$ και η $\gamma(s)$ ανήκει στο επίπεδο που παράγεται από τα διανύσματα $e(P_o)$, $w(P_o)$. Κατά συνέπεια έχουμε

$$\gamma(s) = \gamma(0) + \left(\int_0^s \cos\left(\int_0^t k(u)du\right)dt\right)e(P_o) + \left(\int_0^s \sin\left(\int_0^t k(u)du\right)dt\right)w(P_o).$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.3. Έστωσαν $(u_1,\ldots,u_{n-1})$ τοπικές συντεταγμένες σε μια περιοχή του P_o της M_{H_o} και $x(u_1,\ldots,u_{n-1})$ το διανυσματικό πεδίο θέσης της M_{H_o} στην εν λόγω περιοχή. Επειδή οι ολοκληρωτικές καμπύλες του e_n είναι ισομετρικές στον E^{n+1} κοντά στα σημεία της M_{H_o}, έχουμε την ακόλουθη τοπική παραμέτρηση του U γύρω από το P_o

$$(4.5.4) \qquad y(u_1,\ldots,u_{n-1},s) = x(u_1,\ldots,u_{n-1}) + \left(\int_0^s \cos\left(\int_0^t k(u)du\right)dt\right)e(u_1,\ldots,u_{n-1}) + \left(\int_0^s \sin\left(\int_0^t k(u)du\right)dt\right)w(u_1,\ldots,u_{n-1}),$$

όπου $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ και $k(s)$ είναι η καμπυλότητα μιας ολοκληρωτικής καμπύλης του e_n που ξεκινά από ένα σημείο της M_{H_o} (σημειώνουμε εδώ ότι οι ολοκληρωτικές καμπύλες είναι ισομετρικές στον E^{n+1}).

Θα συνεχίσουμε με μερικούς ακόμη υπολογισμούς. Θέτουμε

$$A(s) = \int_0^s \cos\left(\int_0^t k(u)du\right)dt \quad \text{και} \quad B(s) = \int_0^s \sin\left(\int_0^t k(u)du\right)dt ,$$

οπότε η (4.5.4) γίνεται

$$(4.5.5) \qquad y(u_1,\dots,u_{n-1}, s) = x(u_1,\dots,u_{n-1}) + A(s)e(u_1,\dots,u_{n-1}) + \\ + B(s)w(u_1,\dots,u_{n-1}) .$$

Το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο της M^n στο U δίνεται από τη σχέση

$$(4.5.6) \qquad N(u_1,\dots,u_{n-1}, s) = -B'(s)e(u_1,\dots,u_{n-1}) + A'(s)w(u_1,\dots,u_{n-1}) ,$$

όπου ο τόνος δηλώνει παράγωγο ως προς s.

Συνεχίζουμε με τον υπολογισμό των κυρίων καμπυλοτήτων της y σε σχέση με τις κύριες καμπυλότητες της x. Επειδή η M_{H_o} έχει επίπεδη κάθετη δέσμη (Λήμμα 4.5.4), μπορούμε να διαλέξουμε παραμέτρηση της M_{H_o} γύρω από το P_o τέτοια, ώστε $x(u_1^o,\dots,u_{n-1}^o) = P_o \in M_{H_o}$ και $x_{u_i}(u_1^o,\dots,u_{n-1}^o)$, $i=1,\dots, n-1$ να είναι ιδιοβάση των απεικονίσεων Weingarten $A_{e(P_o)}$, $A_{w(P_o)}$ της M_{H_o}. Υποθέτουμε ότι

$$(4.5.7)\qquad \begin{cases} e_{u_i}(\overset{o}{u}_1,\ldots,\overset{o}{u}_{n-1}) = -\,\alpha_i\, x_{u_i}(\overset{o}{u}_1,\ldots,\overset{o}{u}_{n-1}) \\ w_{u_i}(\overset{o}{u}_1,\ldots,\overset{o}{u}_{n-1}) = -\,\beta_i\, x_{u_i}(\overset{o}{u}_1,\ldots,\overset{o}{u}_{n-1}) \end{cases} ,\quad i=1,\ldots,n-1.$$

Από την (4.5.5) παίρνουμε

$$(4.5.8)\qquad y_{u_i}(\overset{o}{u}_1,\ldots,\overset{o}{u}_{n-1}, s) = x_{u_i}(\overset{o}{u}_1,\ldots,\overset{o}{u}_{n-1}) + A(s)e_{u_i}(\overset{o}{u}_1,\ldots,\overset{o}{u}_{n-1}) +$$

$$+ B(s)w_{u_i}(\overset{o}{u}_1,\ldots,\overset{o}{u}_{n-1})\,.$$

Παραγωγίζοντας την (4.5.6) ως προς u_i στο $(\overset{o}{u}_1,\ldots,\overset{o}{u}_{n-1})$ και λαμβάνοντας υπόψη τις (4.5.7) και (4.5.8), φτάνουμε στη σχέση

$$N_{u_i}(\overset{o}{u}_1,\ldots,\overset{o}{u}_{n-i}, s) = \frac{B'(s)\alpha_i - A'(s)\beta_i}{1-A(s)\alpha_i - B(s)\beta_i}\, y_{u_i}(\overset{o}{u}_1,\ldots,\overset{o}{u}_{n-1}, s)\,.$$

Επίσης εύκολα βλέπουμε ότι

$$N_s(\overset{o}{u}_1,\ldots,\overset{o}{u}_{n-1}, s) = -\,k(s)\, y_s(\overset{o}{u}_1,\ldots,\overset{o}{u}_{n-1}, s)\ ,$$

όπου $k(s)$ είναι η καμπυλότητα της καμπύλης $\gamma(s)$. Από την εξίσωση του Rodrigues προκύπτει ότι τα διανύσματα $y_{u_i}(\overset{o}{u}_1,\ldots,\overset{o}{u}_{n-1}, s)$, $i=1, 2, \ldots, n-1$ είναι κύρια διανύσματα της y με αντίστοιχες κύριες καμπυλότητες

$$(4.5.9)\qquad k_i = \frac{A'\beta_i - B'\alpha_i}{1-A\alpha_i - B\beta_i}\ ,\quad i=1,\ldots,n-1$$

στο σημείο $y(u_1^o,\dots,u_{n-1}^o, s)$ και το $y_s(u_1^o,\dots,u_{n-1}^o, s)$ είναι επίσης κύριο διάνυσμα με αντίστοιχη κύρια καμπυλότητα

$$k_n = k(s)\,. \tag{4.5.10}$$

4.6. H- υπερεπιφάνειες στον E^3 και E^4

Σ' αυτή την παράγραφο θα συνεχίσουμε τη μελέτη των H- υπερεπιφανειών των Ευκλειδείων χώρων E^3 και E^4 προσπαθώντας να τις ταξινομήσουμε (Πρόταση 4.6.1 και Πρόταση 4.6.9).

Έστω M μια H- επιφάνεια του E^3. Θεωρούμε το σύνολο $M_o=\{P\in M/\,(H\,\mathrm{grad}H)(P)=0\}$ και το σύνολο $M_1=M - M_o$. Σημειώνουμε πως, αν το M_1 είναι κενό τότε, η M έχει σταθερή μέση καμπυλότητα. Ας υποθέσουμε ότι το M_1 δεν είναι κενό και ότι U είναι μια συνεκτική συνιστώσα του M_1 με μη κενό εσωτερικό.

Στην επόμενη πρόταση αποδεικνύουμε, ότι οι H- επιφάνειες του E^3 κατασκευάζονται από επιφάνειες με σταθερή μέση καμπυλότητα και κατάλληλες εκ περιστροφής επιφάνειες.

Πρόταση 4.6.1. *Η επιφάνεια* U *είναι εκ περιστροφής επιφάνεια που παράγεται από την επίπεδη καμπύλη* $(f(s), g(s))$, *όπου* s *είναι το μήκος τόξου και η* f *είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης* $3ff''=1-(f')^2$. *Επιπλέον η μέση καμπυλότητα* H *της επιφάνειας* U *πληρεί την διαφορική εξίσωση*

$$(H')^2 = cH^{7/2} - 16H^4\,, \tag{4.6.1}$$

όπου ο τόνος δηλώνει παραγώγιση ως προς το μήκος τόξου και c *είναι θετική σταθερά.*

Απόδειξη. θεωρούμε το ορθοκανονικό πλαίσιο e_1, e_2 κυρίων διευθύνσεων , όπου $e_2 = \frac{\text{grad}H}{|\text{grad}H|}$. Οι κύριες καμπυλότητες είναι 3H και -H με $Ae_1=3He_1$ και $Ae_2=-He_2$. Για τη μορφή συνοχής ω_{12} του πλαισίου αυτού έχουμε , λόγω της εξίσωσης Codazzi ,

$$\omega_{21}(e_1) = -\frac{3e_2(H)}{4H} \quad , \quad \omega_{21}(e_2) = 0 . \tag{4.6.2}$$

Από την εξίσωση του Gauss έχουμε

$$\bar{\nabla}_{e_2} e_1 = \nabla_{e_2} e_1 = \omega_{12}(e_2) e_2 = 0 \ ,$$

το οποίο σημαίνει ότι το e_1 είναι παράλληλο στον E^3 κατά μήκος των ολοκληρωτικών καμπυλών του e_2 .

Υπολογίζουμε στη συνέχεια την καμπυλότητα και τη στρέψη μιας ολοκληρωτικής καμπύλης γ του e_1 . Σημειώνουμε , ότι H και $\omega_{21}(e_1)$ είναι σταθερά κατά μήκος της γ σύμφωνα με την Παρατήρηση 4.5.5 και τη σχέση (4.6.2) . Από την εξίσωση του Gauss έχουμε

$$\bar{\nabla}_{e_1} e_1 = \omega_{12}(e_1) e_2 + 3HN \ .$$

Έτσι η καμπυλότητα της γ είναι

$$k = \sqrt{\omega_{12}^2(e_1) + 9H^2} \tag{4.6.3}$$

και το διάνυσμα της πρώτης καθέτου αυτής είναι

$$\vec{n} = \frac{1}{k}\left(\omega_{12}(e_1) e_2 + 3HN\right) . \tag{4.6.4}$$

Επιπλέον έχουμε

$$\bar{\nabla}_{e_1}\vec{n} + ke_1 = \bar{\nabla}_{e_1}\left(\frac{1}{k}\,(\omega_{12}(e_1)e_2+3HN)\right) + ke_1$$

ή

$$\bar{\nabla}_{e_1}\vec{n} + ke_1 = \frac{1}{k}\,(\omega_{12}(e_1)\bar{\nabla}_{e_1}e_2 + 3H\bar{\nabla}_{e_1}N) + ke_1 \ .$$

Επομένως

$$\bar{\nabla}_{e_1}\vec{n} + ke_1 = \frac{1}{k}(-\,\omega_{21}^2(e_1) - 9H^2))e_1 + ke_1 = 0\,.$$

Συνεπώς η γ έχει στρέψη μηδέν και σταθερή μη μηδενική καμπυλότητα. Αυτό σημαίνει, ότι οι ολοκληρωτικές καμπύλες του e_1 είναι τμήματα κύκλων.

Από την (4.6.3) έχουμε

(4.6.5) $$e_2(k) = \frac{1}{k}\,[\omega_{12}(e_1)e_2(\omega_{12}(e_1)) + 9He_2(H)]\,.$$

Από την εξίσωση του Gauss $d\omega_{12} = -\,K\omega_1\wedge\omega_2$, όπου K η καμπυλότητα Gauss και ω_1, ω_2 το δυϊκό πλαίσιο, παίρνουμε λόγω της (4.6.2)

$$e_2(\omega_{12}(e_1))\omega_2\wedge\omega_1 + \omega_{12}^2(e_1)\,\omega_1\wedge\omega_2 = -\,K\omega_1\wedge\omega_2\,,$$

οπότε

(4.6.6) $$e_2(\omega_{12}(e_1)) = \omega_{12}^2(e_1) - 3H^2\,.$$

Η (4.6.5) με τη βοήθεια των (4.6.2), (4.6.6) γίνεται

(4.6.7) $$e_2(k) = k\omega_{12}(e_1) .$$

Έτσι έχουμε

$$\bar{\nabla}_{e_2}\vec{n} = e_2\left(\frac{1}{k}\right)[\omega_{12}(e_1)e_2 + 3HN] + \frac{1}{k}\left[e_2(\omega_{12}(e_1))e_2 + \omega_{12}(e_1)\,\bar{\nabla}_{e_2}e_2 + 3e_2(H)N + 2H\,\bar{\nabla}_{e_2}N\right]$$

ή

$$\bar{\nabla}_{e_2}\vec{n} = -\frac{e_2(k)}{k^2}[\omega_{12}(e_1)e_2 + 3HN] + \frac{1}{k}\left[e_2(\omega_{12}(e_1))e_2 - H\omega_{12}(e_1)N + 3e_2(H)N + 3H^2e_2\right] .$$

Αντικαθιστώντας τις ποσότητες $e_2(\omega_{12}(e_1))$, $e_2(k)$ από τις σχέσεις (4.6.6), (4.6.7) και επειδή $e_2(H) = \frac{4H}{3}\omega_{12}(e_1)$, λόγω της (4.6.2), βρίσκουμε $\bar{\nabla}_{e_2}\vec{n} = 0$. Έτσι το $\vec{n}$ είναι παράλληλο στον E^3 κατά μήκος των ολοκληρωτικών καμπυλών του e_2. Επιπλέον, επειδή το e_1 είναι επίσης παράλληλο συμπεραίνουμε ότι οι κύκλοι είναι σε παράλληλα επίπεδα. Τα κέντρα αυτών των κύκλων διαγράφουν μια καμπύλη $\beta(s)=\gamma_2(s) + \frac{1}{k(s)}\vec{n}$, όπου γ_2 είναι ολοκληρωτική καμπύλη του e_2 με παράμετρο μήκος τόξου. Παραγωγίζοντας ως προς s έχουμε

$$\beta' = e_2 + e_2\left(\frac{1}{k}\right)\vec{n}$$

και με τη βοήθεια της (4.6.7)

$$\beta' = e_2 - \frac{\omega_{12}(e_1)}{k}\vec{n} .$$

Ακόμη έχουμε

$$\beta'' = \bar{\nabla}_{e_2}e_2 - e_2\left(\frac{\omega_{12}(e_1)}{k}\right)\vec{n}$$

ή

$$\beta'' = -HN - \frac{1}{k^2}\left(ke_2(\omega_{12}(e_1)) - \omega_{12}(e_1)e_2(k)\right)\vec{n}\ ,$$

και τελικά με τη βοήθεια των (4.6.6), (4.6.7) προκύπτει

$$\beta'' = H\left(\frac{3H}{k}\vec{n} - N\right).$$

Άρα

$$\beta' \times \beta'' = H\left(\frac{9H^2}{k^2} - 1 + \frac{\omega_{12}^2(e_1)}{k^2}\right)e_2 \times N = 0$$

και επομένως τα κέντρα των κύκλων είναι σε ευθεία γραμμή κάθετη στα επίπεδα των κύκλων. Αυτό σημαίνει πως το U είναι επιφάνεια εκ περιστροφής. Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι η επιφάνεια U παράγεται με περιστροφή της επίπεδης καμπύλης $(f(s), g(s))$, όπου s η παράμετρος μήκος τόξου. Έτσι έχουμε την ακόλουθη παραμέτρηση για την επιφάνεια U

$$x(s,\theta) = (f(s)\cos\theta\ , f(s)\sin\theta\ , g(s))\ ,$$

όπου $f(s)>0$ και $(f'(s))^2+(g'(s))^2 = 1$. Επειδή οι κύριες καμπυλότητες είναι $-\frac{f''}{g'}$ και $\frac{g'}{f}$ έχουμε

(4.6.8) $$\frac{g''}{f'} = -\frac{f''}{g'} = -H$$

και

(4.6.9) $$\frac{g'}{f} = 3H.$$

Από τις (4.6.8) και (4.6.9) βρίσκουμε

$$3ff'' = 3fHg' = (g')^2 = 1-(f')^2 \ .$$

Με παραγώγιση της (4.6.9) βρίσκουμε

$$g'' = 3H'f + 3Hf' \ .$$

Η παραπάνω σχέση μαζί με την (4.6.8) συνεπάγεται την

(4.6.10) $$\frac{f'}{f} = -\frac{3H'}{4H},$$

από την οποία με ολοκλήρωση βρίσκουμε

(4.6.11) $$f = c_1 H^{-3/4}$$

όπου c_1 σταθερά. Από τις (4.6.11),(4.6.9) προκύπτουν οι εξισώσεις

$$f' = -\frac{3c_1}{4} H^{-7/4} H' \quad , \quad g' = 3c_1 H^{1/4} \ .$$

Αυτές μαζί με την $(f')^2+(g')^2=1$ συνεπάγονται την (4.6.1).

Ως εφαρμογή της Πρότασης 4.6.1 θα αποδείξουμε το αποτέλεσμα του B.Y.Chen ([11]) αναφορικά με τις μηδενικού 2- τύπου επιφάνειες στον E^3.

Πρόταση 4.6.2. *Οι μόνες μηδενικού 2- τύπου επιφάνειες του* E^3 *είναι τα ανοιχτά τμήματα των ορθών κυκλικών κυλίνδρων.*

Απόδειξη. Έστω M μία μηδενικού 2- τύπου επιφάνεια στον E^3 και $M_1 = \{P \in M \ / \ (H \operatorname{grad} H)(P) \neq 0\}$. Αν $M_1 = \varnothing$, τότε η M έχει σταθερή μέση καμπυλότητα. Υποθέτουμε ότι $M_1 \neq \varnothing$ και ότι U είναι μία ανοιχτή συνεκτική συνιστώσα του M_1. Σύμφωνα με την Πρόταση 4.6.1 το U είναι επιφάνεια εκ περιστροφής η οποία επιπλέον ικανοποιεί την εξίσωση (Λήμμα 4.2.3)

(4.6.12) $$\Delta H + SH = \lambda H .$$

Ας υποθέσουμε ότι το διανυσματικό πεδίο θέσης του U είναι

$$x(s,\theta) = (f(s)\cos\theta, f(s)\sin\theta, g(s)) ,$$

όπου $f(s)>0$ και $(f'(s))^2+(g'(s))^2=1$. Τότε (σχέση (1.1.1))

$$\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{f'}{f}\frac{\partial}{\partial s} - \frac{1}{f^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

και έτσι $\Delta H = - H'' - \frac{f'}{f} H'$. Επειδή οι κύριες καμπυλότητες στο U είναι $- H$ και $3H$ η εξίσωση (4.6.12) γίνεται

$$- H'' - \frac{f'}{f} H' + 10H^3 = \lambda H ,$$

η οποία με τη βοήθεια της (4.6.10) γράφεται

$$- 4HH'' + 3(H')^2 + 40H^4 = 4\lambda H^2 .$$

Με ολοκλήρωση της τελευταίας εξίσωσης βρίσκουμε

$$(H')^2 = c_1 H^{3/2} + 8H^4 - 4\lambda H^2 .$$

Συγκρίνοντας την τελευταία με την εξίσωση (4.6.1) έχουμε

$$(c_1 - cH^2)H^{3/2} + 24H^4 - 4\lambda H^2 = 0 ,$$

απ' όπου φαίνεται ότι H είναι σταθερό στο U, πράγμα άτοπο. Επομένως η M έχει σταθερή μη μηδενική μέση καμπυλότητα και λόγω της (4.6.12) έχει και σταθερή Gauss καμπυλότητα, επομένως είναι τμήμα ορθού κυκλικού κυλίνδρου (βλ. [29], σελ. 168).

Στη συνέχεια υποθέτουμε, ότι η M^3 είναι H- υπερεπιφάνεια του E^4. Θεωρούμε τα σύνολα $M_0 = \{P \in M^3 \,/\, (H\,\mathrm{grad}H)(P) = 0\}$ και $M_1 = M^3 - M_0$. Αν $M_1 = \varnothing$, τότε η M^3 έχει σταθερή μέση καμπυλότητα. Από εδώ και στο εξής υποθέτουμε ότι $M_1 \neq \varnothing$. Υπάρχουν δύο ενδεχόμενα για τις κύριες καμπυλότητες στο M_1: Είτε υπάρχει ένα ανοιχτό υποσύνολο με δύο διαφορετικές κύριες καμπυλότητες, είτε υπάρχει ένα ανοιχτό υποσύνολο με τρεις διαφορετικές κύριες καμπυλότητες. Πραγματικά, αν όλες οι κύριες καμπυλότητες ήταν ίσες, θα είχαμε $H=0$, πράγμα αδύνατο στο M_1.

Ας υποθέσουμε τώρα, ότι U είναι μη κενή ανοιχτή συνεκτική περιοχή του M_1 με δύο διαφορετικές κύριες καμπυλότητες. Οι κύριες καμπυλότητες στο U θα είναι $-\frac{3H}{2}, \frac{9H}{4}, \frac{9H}{4}$ ή $-\frac{3H}{2}, -\frac{3H}{2}, 6H$. Η δεύτερη περίπτωση δεν συμβαίνει, επειδή η διπλή κύρια καμπυλότητα $-\frac{3H}{2}$ θα ήταν σταθερή στον αντίστοιχο ιδιοχώρο της ([15], σελ. 252), δηλαδή $e_3(H)=0$, πράγμα αδύνατο. Για το U αποδεικνύουμε την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 4.6.3. *Η υπερεπιφάνεια* U *είναι υπερεπιφάνεια εκ περιστροφής στον* E^4 *που παράγεται από την επίπεδη καμπύλη* $(f(s),g(s))$ *με παράμετρο το μήκος τόξου, όπου η* f *ικανοποιεί την*

$$3ff'' = 2(1-(f')^2).$$

Επιπλέον η μέση καμπυλότητα στο U *πληρεί τη διαφορική εξίσωση*

$$(H')^2 = cH^{16/5} - \frac{225}{16}H^4, \tag{4.6.13}$$

όπου c *είναι πραγματική θετική σταθερά* .

Απόδειξη . Επειδή οι κύριες καμπυλότητες στο U είναι $-\frac{3H}{2}$, $\frac{9H}{4}$, $\frac{9H}{4}$ συμπεραίνουμε , με τη βοήθεια ενός αποτελέσματος των M. Do Carmo και M.Dajczer ([2], σελ. 701, Θεώρημα 4.2), ότι το U περιέχεται σε μια εκ περιστροφής υπερεπιφάνεια του E^4 . Υποθέτουμε , χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι το διανυσματικό πεδίο θέσης στο U είναι

$$x(s, \vec{\theta}) = f(s)\vec{\theta} + g(s)\vec{\varepsilon} \ ,$$

όπου $f(s)>0$, $(f')^2+(g')^2=1$, $\vec{\theta}$ είναι το διανυσματικό πεδίο θέσης της διδιάστατης μοναδιαίας σφαίρας και $\vec{\varepsilon}$ σταθερό μοναδιαίο διάνυσμα στον άξονα περιστροφής . Επειδή οι κύριες καμπυλότητες στο U είναι $\frac{g''}{f'}$, $\frac{g'}{f}$, $\frac{g'}{f}$, έχουμε

(4.6.14) $$\frac{g''}{f'} = -\frac{3H}{2} \ ,$$

(4.6.15) $$\frac{g'}{f} = \frac{9H}{4} \ .$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει αμέσως η σχέση $3ff'' = 2(1-(f')^2)$. Παραγωγίζοντας τα μέλη της (4.6.15) και λαμβάνοντας υπόψη την (4.6.14), βρίσκουμε

(4.6.16) $$\frac{f'}{f} = -\frac{3H'}{5H} \ .$$

Ολοκληρώνοντας την (4.6.16) παίρνουμε

(4.6.17) $$f = c_1 H^{-3/5} ,$$

όπου c_1 σταθερά. Έτσι έχουμε $f' = -\frac{3c_1}{5} H^{-8/5} H'$ και από τις (4.6.15) και (4.6.17) συνάγουμε ότι $g' = \frac{9c_1}{4} H^{2/5}$. Από αυτές σε συνδυασμό με την $(f')^2+(g')^2=1$ προκύπτει η ζητούμενη σχέση (4.6.13).

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι V είναι μη κενό ανοιχτό συνεκτικό υποσύνολο του M_1 με τρεις διαφορετικές κύριες καμπυλότητες. Θεωρούμε στο V ορθοκανονικό πλαίσιο κυρίων διευθύνσεων e_1, e_2, e_3 ($e_3 = \mathrm{grad}H / |\mathrm{grad}H|$) με αντίστοιχες κύριες καμπυλότητες k_1, k_2, k_3 ($k_3 = -\frac{3H}{2}$). Αν $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ είναι το δυϊκό πλαίσιο και ω_{ij} οι μορφές συνοχής του ανωτέρω πλαισίου, τότε οι εξισώσεις δομής είναι:

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} \wedge \omega_j , \quad i=1, 2, 3$$

και

$$d\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \omega_{i4} \wedge \omega_{4j} ,$$

όπου $\omega_{i4} = \sum_{j=1}^{3} h_{ij}\, \omega_j$ και $h_{ij} = \langle Ae_i, e_j \rangle$. Επιπλέον για το παραπάνω πλαίσιο είναι $\omega_{i4} = k_i \omega_i$. Από το Λήμμα 4.5.3 έχουμε

$$\omega_{31}(e_3) = \omega_{32}(e_3) = 0 .$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση (4.5.1) για $X = e_1$ και $Y = e_2$ παίρνουμε

$$(k_1 - k_2) \langle \nabla_{e_2} \mathrm{grad}H , e_1 \rangle = 0$$

ή ισοδύναμα

$$\omega_{13}(e_2) = 0 .$$

Ακόμη είναι φανερό ότι

$$<\nabla_{e_1} \mathrm{grad}H , e_2> = 0$$

ή ισοδύναμα

$$\omega_{23}(e_1) = 0 .$$

Η εξίσωση του Codazzi δίνει

$$(k_1 - k_2)\omega_{12}(e_3) = (k_3 - k_2)\omega_{32}(e_1)$$

και με τη βοήθεια της παραπάνω σχέσης

$$\omega_{12}(e_3) = 0 .$$

Επιπλέον η εξίσωση του Gauss γίνεται

$$\bar{\nabla}_{e_3} e_1 = \omega_{12}(e_3)e_2 + \omega_{13}(e_3)e_3 = 0 .$$

Όμοια

$$\bar{\nabla}_{e_3} e_2 = 0 .$$

Συνοψίζοντας έχουμε αποδείξει το επόμενο λήμμα :

Λήμμα 4.6.4. *Οι μορφές συνοχής δίνονται από τις σχέσεις*

$$\omega_{13} = \omega_{13}(e_1)\omega_1 ,$$

$$\omega_{23} = \omega_{23}(e_2)\omega_2 ,$$

$$\omega_{12} = \omega_{12}(e_1)\omega_1 + \omega_{12}(e_2)\omega_2 .$$

Επιπλέον τα e_1, e_2 *είναι παράλληλα στον* E^4 *κατά μήκος των ολοκληρωτικών καμπύλων του* e_3.

Έστωσαν M_{H_o} μια ολοκληρωτική επιφάνεια της κατανομής D στο V και $(\alpha, \beta), (\gamma, \delta)$ οι ιδιοτιμές των απεικονίσεων Weingarten A_w και A_e αντίστοιχα, της επιφάνειας M_{H_o} στον E^4.

Χρειαζόμαστε το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 4.6.5. *Οι ιδιοτιμές των απεικονίσεων Weingarten* A_w *και* A_e *της ολοκληρωτικής επιφάνειας* M_{H_o} *είναι σταθερές στην* M_{H_o}.

Απόδειξη. Λόγω των σχέσεων (4.5.9) και (4.5.10) οι κύριες καμπυλότητες στο V δίνονται από τις σχέσεις

$$k_1 = \frac{-\gamma B' + \alpha A'}{1-\gamma A - \alpha B},$$

$$k_2 = \frac{-\delta B' + \beta A'}{1-\delta A - \beta B}$$

$$k_3 = k(s),$$

όπου k(s) είναι η καμπυλότητα της επίπεδης καμπύλης με την οποία οι ολοκληρωτικές καμπύλες του e_3 είναι ισομετρικές στον E^4. Επειδή η M^3 είναι H- υπερεπιφάνεια, έχουμε $k_1 + k_2 = -3k_3$, όπου $k_3 = -\frac{3H}{2}$ ή ισοδύναμα

$$\frac{-\gamma B' + \alpha A'}{1-\gamma A - \alpha B} + \frac{-\delta B' + \beta A'}{1-\delta A - \beta B} = -3k(s). \tag{4.6.18}$$

Υπενθυμίζουμε ότι $A(s)=\int_0^s \cos\left(\int_0^t k(u)du\right)dt$ και $B(s)=\int_0^s \sin\left(\int_0^t k(u)du\right)dt$.
Η (4.6.18) για s=0 δίνει

(4.6.19) $$\alpha+\beta=-3k(0)\,.$$

Παραγωγίζουμε τρεις φορές τα μέλη της (4.6.18) ως προς s , οπότε στη θέση s=0 βρίσκουμε :

(4.6.20) $$-\gamma k(0)+\alpha\gamma-\delta k(0)+\beta\delta=-3k'(0)\,,$$

(4.6.21) $$\begin{aligned}&-\gamma k'(0)-\alpha k^2(0)-2\gamma^2 k(0)+\alpha^2 k(0)+2\alpha\gamma^2-\delta k'(0)\\&-\beta k^2(0)-2\delta^2 k(0)+\beta^2 k(0)+2\beta\delta^2=-3k''(0)\,,\end{aligned}$$

(4.6.22) $$\begin{aligned}&-\gamma\,(k''(0)-k^3(0))-3\alpha k(0)k'(0)-3\gamma^2 k'(0)-7\alpha\gamma k^2(0)\\&-6\gamma^3 k(0)+\alpha^2 k'(0)+6\alpha^2\gamma k(0)+6\alpha\gamma^3\\&-\delta(k''(0)-k^3(0))-3\beta k(0)k'(0)-3\delta^2 k'(0)-7\beta\delta k^2(0)\\&-6\delta^3 k(0)+\beta^2 k'(0)+6\beta^2\delta k(0)+6\beta\delta^3=-3k'''(0)\,.\end{aligned}$$

Η εξίσωση (4.6.19) μπορεί να γραφεί ως

(4.6.23) $$\beta=-3k(0)-\alpha \quad ή \quad \beta-k(0)=-(4k(0)+\alpha)\ .$$

Η (4.6.20) με τη βοήθεια της (4.6.19) γίνεται

(4.6.24) $$\gamma(\alpha-k(0))=-3k'(0)+\delta(4k(0)+\alpha)$$

ή

(4.6.25) $$\gamma(\alpha-k(0))+\delta(\beta-k(0))=-3k'(0)\,.$$

Πολλαπλασιάζουμε την (4.6.21) με $\alpha - k(0)$ και αντικαθιστούμε τα β και γ από τις (4.6.23) και (4.6.24) αντίστοιχα, οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} &10k(0)(4k(0)+\alpha)\delta^2 - k'(0)(51k(0)+14\alpha)\delta + 3k''(0)\alpha + \\ &+ 6k^3(0)\alpha + 4k^2(0)\alpha^2 + 2k(0)\alpha^3 - 3k(0)k''(0) - 12k^4(0) \\ &+ 21(k'(0))^2 = 0 . \end{aligned} \tag{4.6.26}$$

Θέτουμε

$$p = 10k(0)(4k(0)+\alpha) ,$$

$$q = \frac{k'(0)}{2}(51k(0)+14\alpha) ,$$

$$\begin{aligned} r = {} & 3k''(0)\alpha + 6k^3(0)\alpha + 4k^2(0)\alpha^2 + 2k(0)\alpha^3 - \\ & - 3k(0)k''(0) - 12k^4(0) + 21(k'(0))^2 \end{aligned}$$

και

$$R = \sqrt{q^2 - pr} .$$

Αν $\alpha = k(0)$ σε ανοιχτό υποσύνολο της M_{H_o}, τότε από την (4.6.23) προκύπτει ότι το β είναι σταθερό. Ακόμη οι (4.6.26) και (4.6.22) δείχνουν ότι, δ και γ είναι επίσης σταθερά. Ας δεχτούμε ότι $\alpha \neq k(0)$ σε ανοιχτό υποσύνολο της M_{H_o}. Από την (4.6.26) βρίσκουμε

$$\delta = \frac{q}{p} \pm \frac{R}{p} .$$

Μελετούμε την περίπτωση που

$$\delta = \frac{q}{p} + \frac{R}{p} . \tag{4.6.27}$$

Η άλλη περίπτωση μελετάται όμοια. Θέτουμε

$$A_1 = q(4k(0)+\alpha) - 3k'(0)p \ ,$$

$$\Gamma = -k''(0) + k^3(0) - 7\alpha k^2(0) + 6k(0)\alpha^2 \ ,$$

$$\Delta = -k''(0) + 76k^3(0) + 43k^2(0)\alpha + 6k(0)\alpha^2 \ .$$

Από τις σχέσεις (4.6.24), (4.6.27) παίρνουμε

$$\gamma = \frac{A_1}{p(\alpha - k(0))} + \frac{4k(0)+\alpha}{p(\alpha - k(0))} R \ . \tag{4.6.28}$$

Η ισότητα (4.6.22) γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{aligned} &-3k(0)k'(0)(\alpha+\beta) + k'(0)(\alpha^2+\beta^2) + \gamma(-k''(0) + k^3(0) - 7\alpha k^2(0) + 6\alpha^2 k(0)) \\ &-3\gamma^2 k'(0) + 6\gamma^3(\alpha - k(0)) + \delta(-k''(0) + k^3(0) - 7\beta k^2(0) + 6\beta^2 k(0)) \\ &-3\delta^2 k'(0) + 6\delta^3(\beta - k(0)) = -3k'''(0) \ . \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε το β από την (4.6.23) στην παραπάνω σχέση και βρίσκουμε

$$\begin{aligned} &-3k'''(0) - 18k^2(0)k'(0) - 2k'(0)\alpha^2 - 6k(0)k'(0)\alpha = \\ &\gamma(-k''(0) + k^3(0) - 7\alpha k^2(0) + 6\alpha^2 k(0)) - 21k'(0)\gamma^2 + 6(4k(0)+\alpha)\gamma^2\delta \\ &+ \delta(-k''(0) + 76k^3(0) + 43k^2(0)\alpha + 6k(0)\alpha^2) - 3k'(0)\delta^2 - 6(4k(0)+\alpha)\delta^3 \end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned} &\Gamma\gamma - 21k'(0)\gamma^2 + 6(4k(0)+\alpha)\gamma^2\delta + \Delta\delta - 3k'(0)\delta^2 - \\ &- 6(4k(0)+\alpha)\delta^3 = -3k'''(0) - 18k^2(0)k'(0) - 2k'(0)\alpha^2 - 6k(0)k'(0)\alpha \ . \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας το γ από την (4.6.28) στην παραπάνω σχέση έχουμε

$$\frac{A_1+(4k(0)+\alpha)R}{p(\alpha-k(0))}\Gamma - 21k'(0)\frac{A_1^2+(4k(0)+\alpha)^2R^2+2(4k(0)+\alpha)A_1R}{p^2(\alpha-k(0))^2} +$$

$$+6(4k(0)+\alpha)\Big[\frac{qA_1^2+q(4k(0)+\alpha)^2R^2+2(4k(0)+\alpha)A_1R^2}{p^3(\alpha-k(0))^2} +$$

$$+\frac{A_1^2+2q(4k(0)+\alpha)A_1+(4k(0)+\alpha)^2R^2}{p^3(\alpha-k(0))^2}R\Big] + \Delta\frac{q+R}{p} -$$

$$-3k'(0)\frac{q^2+R^2+2qR}{p^2} - 6(4k(0)+\alpha)\Big(\frac{q^3+3qR^2}{p^3}+\frac{3q^2+R^2}{p^3}R\Big) =$$

$$= -3k'''(0) - 18k^2(0)k'(0) - 2k'(0)\alpha^2 - 6k(0)k'(0)\alpha \;.$$

Στην παραπάνω σχέση απομονώνουμε το R και υψώνουμε στο τετράγωνο. Μετά από πράξεις βλέπουμε, ότι το α είναι ρίζα ενός μη τετριμμένου πολυωνύμου 14ου βαθμού με σταθερούς συντελεστές, του οποίου ο συντελεστής του μεγιστοβαθμίου όρου είναι $2^4 7^2 10^4 k^6(0)(k'(0))^2$. Επομένως το α είναι σταθερό στο V. Εύκολα τώρα προκύπτει από τις (4.6.19), (4.6.26) και (4.6.28) ότι τα β, δ, γ είναι σταθερά στο V.

Λήμμα 4.6.6. *Οι ολοκληρωτικές επιφάνειες της κατανομής* D *στο* V *είναι ανοιχτά τμήματα γινομένων κύκλων ή ανοιχτά τμήματα ορθών κυκλικών κυλίνδρων.*

Απόδειξη. Έστω M_{H_0} μια ολοκληρωτική επιφάνεια της D στο V. Από την εξίσωση Codazzi έχουμε

$$e_1(k_2) = (k_1 - k_2)\omega_{12}(e_2)\,,$$

$$e_2(k_1) = (k_2 - k_1)\omega_{21}(e_1) .$$

Λόγω του Λήμματος 4.6.5 είναι $e_1(k_2) = 0$ και $e_2(k_1) = 0$, αφού k_1 και k_2 εξαρτώνται μόνο από το s. Έτσι έχουμε

(4.6.29) $$\omega_{12}(e_2) = \omega_{21}(e_1) = 0 .$$

Από τη δεύτερη εξίσωση δομής

$$d\omega_{12} = \omega_{13}\wedge \omega_{32} - k_1k_2\omega_1 \wedge \omega_2 ,$$

και με τη βοήθεια του Λήμματος 4.6.4, βρίσκουμε

(4.6.30) $$\omega_{13}(e_1)\omega_{23}(e_2) + k_1k_2 = e_2(\omega_{12}(e_1)) - \omega_{12}^2(e_1) - e_1(\omega_{12}(e_2)) - \omega_{12}^2(e_2) .$$

Από τις (4.6.29) και (4.6.30) συμπεραίνουμε, ότι η M_{H_0} έχει μηδενική καμπυλότητα Gauss. Επιπλέον η M_{H_0} έχει διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας παράλληλο στην κάθετη δέσμη, αφού e και w είναι παράλληλα και η M_{H_0} έχει σταθερές κύριες καμπυλότητες στις ανωτέρω διευθύνσεις. Επομένως, σύμφωνα με ένα αποτέλεσμα των B.Y.Chen και G.D.Ludden ([4], Πόρισμα 2) ή του D.A.Hoffman ([29], Θεώρημα 3.1) η επιφάνεια M_{H_0} είναι ανοιχτό τμήμα γινομένου κύκλων ή τμήμα ορθού κυκλικού κυλίνδρου.

Πρόταση 4.6.7. *Το διανυσματικό πεδίο θέσης της H- υπερεπιφάνειας* V *ως προς κατάλληλη αρχή είναι*

(i) $$\vec{y}(u,v,s) = (f(s)\cos u, f(s)\sin u, v, g(s)),$$

όπου $(f(s),g(s))$ *είναι καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου, με μη σταθερή μέση καμπυλότητα, τέτοια ώστε*

$$3ff'' = 1-(f')^2 .$$

Επιπλέον η μέση καμπυλότητα H *ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση*

(4.6.31) $$(H')^2 = cH^{7/2} - 36H^4 ,$$

όπου c *είναι θετική σταθερά.*

(ii) $$\vec{y}_1(u,v,s) = (x(s)\cos u, x(s)\sin u, y(s)\cos v, y(s)\sin v) ,$$

όπου $(x(s), y(s))$ *καμπύλη με παράμετρο μήκος τόξου με μη σταθερή καμπυλότητα, τέτοια ώστε*

(4.6.32) $$x'y'' - x''y' = \frac{1}{3}\left(\frac{x'}{y} - \frac{y'}{x}\right).$$

Απόδειξη. Έστω M_{H_0} ολοκληρωτική επιφάνεια της κατανομής D στο V. Στηριζόμενοι στο Λήμμα 4.6.6 μπορούμε να υποθέσουμε, ότι το διανυσματικό πεδίο θέσης της M_{H_0} είναι

(i) $$x(u,v) = (R\cos u, R\sin u, v, 0)$$

ή

(ii) $$x_1(u,v) = (x_0\cos u, x_0\sin u, y_0\cos v, y_0\sin v) ,$$

όπου R , x_o και y_o είναι μη μηδενικές σταθερές . Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :

Περίπτωση i. Έστω ότι $x(u,v)=(R\cos u, R\sin u, v, 0)$. Τα μοναδιαία διανυσματικά πεδία $\xi_1 = (\cos u, \sin u, 0, 0)$, $\xi_2 = (0, 0, 0,1)$ αποτελούν ορθοκανονικό πλαίσιο του καθέτου χώρου της M_{H_o} στον E^4 . Επιπλέον ξ_1 , ξ_2 είναι παράλληλα στην κάθετη δέσμη . Επειδή και τα διανυσματικά πεδία e , w είναι παράλληλα στην κάθετη δέσμη (Λήμμα 4.5.4), μπορούμε να γράψουμε

$$e(u,v) = \cos\theta\xi_1 + \sin\theta\xi_2 ,$$

$$w(u,v) = - \sin\theta\xi_1 + \cos\theta\xi_2 ,$$

όπου θ είναι κατάλληλη σταθερή γωνία . Από την (4.5.4) προκύπτει, ότι το διανυσματικό πεδίο θέσης του V είναι

$$\vec{y}(u,v,s) = x(u,v) + \int_0^s \cos\left(\int_0^t k(u)du\right)dt(\cos\theta\xi_1 + \sin\theta\xi_2) + \int_0^s \sin\left(\int_0^t k(u)du\right)dt(- \sin\theta\xi_1 + \cos\theta\xi_2) .$$

Έτσι έχουμε

$$\vec{y}(u,v,s) = (f(s)\cos u, f(s)\sin u, v, g(s))$$

ή

(4.6.33) $$\vec{y}(u,v,s) = (f(s)\cos u, f(s)\sin u, 0, g(s)) + v(0, 0,1, 0) ,$$

όπου

$$f(s) = R + A(s)\cos\theta - B(s)\sin\theta$$

$$g(s) = A(s)\sin\theta + B(s)\cos\theta$$

και

$$A(s) = \int_0^s \cos\left(\int_0^t k(u)du\right)dt \quad , \quad B(s) = \int_0^s \sin\left(\int_0^t k(u)du\right)dt .$$

Διαπιστώνεται εύκολα, ότι η καμπύλη $(f(s), g(s))$ έχει παράμετρο μήκος τόξου και ότι η καμπυλότητα της είναι $k(s)$, δηλαδή μη σταθερή. Ως προς την παραπάνω παραμέτρηση το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο στο V δίνεται από τη σχέση

$$N(u,v,s) = (-g'(s)\cos u, -g'(s)\sin u, 0, f'(s)) .$$

Από τον τύπο του Rodrigues συνάγουμε, ότι οι κύριες καμπυλότητες στο V είναι $\frac{g'}{f}$, 0 και $\frac{g''}{f'}$. 'Ετσι έχουμε

$$\frac{g'}{f} = \frac{9H}{2} , \tag{4.6.34}$$

$$\frac{g''}{f'} = -\frac{3H}{2} . \tag{4.6.35}$$

Οι (4.6.34) και (4.6.35) συνεπάγονται την $3ff''=1-(f')^2$. Παραγωγίζοντας τα μέλη της (4.6.34) και λαμβάνοντας υπόψη την (4.6.35) φτάνουμε στη σχέση

$$\frac{f'}{f} = -\frac{3H'}{4H} . \tag{4.6.36}$$

Ολοκληρώνοντας την προηγούμενη σχέση βρίσκουμε

$$f = cH^{-3/4} ,$$

όπου c είναι μη μηδενική σταθερά. Επομένως έχουμε

$$f' = -\frac{3c}{4} H^{-7/4}H' \quad \text{και} \quad g' = \frac{9c}{2} H^{1/4}H' .$$

Συνδυάζοντας τις τελευταίες σχέσεις με την εξίσωση $(f')^2+(g')^2=1$ καταλήγουμε στην ζητούμενη σχέση (4.6.31).

Περίπτωση ii. Υποθέτουμε ότι το διανυσματικό πεδίο θέσης της M_{H_o} είναι

$$x_1(u,v) = (x_o\cos u, x_o\sin u, y_o\cos v, y_o\sin v).$$

Τα διανυσματικά πεδία

$$\bar{\xi}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos u, \sin u, -\cos v, -\sin v),$$

$$\bar{\xi}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos u, -\sin u, -\cos v, -\sin v)$$

συνιστούν ορθοκανονικό πλαίσιο του καθέτου χώρου της M_{H_o} στον E^4. Επιπλέον τα $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2$ είναι παράλληλα στην κάθετη δέσμη. Επειδή και τα διανυσματικά πεδία e,w είναι παράλληλα στην κάθετη δέσμη (Λήμμα 4.5.4), μπορούμε να γράψουμε

$$e(u,v) = \cos\bar{\theta}\,\bar{\xi}_1 + \sin\bar{\theta}\,\bar{\xi}_2,$$

$$w(u,v) = -\sin\bar{\theta}\,\bar{\xi}_1 + \cos\bar{\theta}\,\bar{\xi}_2,$$

όπου $\bar{\theta}$ είναι κατάλληλη σταθερή γωνία. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως και στην περίπτωση i καταλήγουμε στο συμπέρασμα, ότι το διανυσματικό πεδίο θέσης στο V δίνεται από την ισότητα

$$\vec{y_1}(u,v,s) = (x(s)\cos u, x(s)\sin u, y(s)\cos v, y(s)\sin v), \tag{4.6.37}$$

όπου

$$x(s) = x_o + \frac{A(s)}{\sqrt{2}}(\cos\bar{\theta} - \sin\bar{\theta}) - \frac{B(s)}{\sqrt{2}}(\cos\bar{\theta} + \sin\bar{\theta}) \ ,$$

$$y(s) = y_o - \frac{A(s)}{\sqrt{2}}(\cos\bar{\theta} + \sin\bar{\theta}) + \frac{B(s)}{\sqrt{2}}(\sin\bar{\theta} - \cos\bar{\theta}) \, .$$

Το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο στο V είναι

$$N(u,v,s) = (- y'(s)\cos u, - y'(s)\sin u, x'(s)\cos v, x'(s)\sin v) \ .$$

Με τη βοήθεια του τύπου Rodrigues βλέπουμε ότι οι κύριες καμπυλότητες στο V είναι $x'y''- x''y'$, $\frac{y'}{x}$ και $-\frac{x'}{y}$. Η εξίσωση (4.6.32) προκύπτει από το γεγονός, ότι το V είναι H- υπερεπιφάνεια. Επιπλέον επειδή στο V οι κύριες καμπυλότητες είναι διαφορετικές, έχουμε $\frac{y'}{x} \neq -\frac{x'}{y}$, το οποίο σημαίνει ότι $x^2(s) + y^2(s)$ δεν είναι σταθερό. Επίσης επειδή το s είναι μήκος τόξου για την καμπύλη $(x(s),y(s))$, η καμπυλότητα της είναι $x'y'' - x''y'$ και είναι μη σταθερή, αφού το V έχει μη σταθερή μέση καμπυλότητα.

Παρατήρηση 4.6.8. Από την Πρόταση 4.6.7 προκύπτει ότι το V είναι γενικευμένος κύλινδρος υπεράνω επιφάνειας εκ περιστροφής του E^3 (σχέση (4.6.33)) ή $O(2)\times O(2)$- αναλλοίωτη υπερεπιφάνεια του E^4 (σχέση (4.6.37)). Συνοψίζοντας έχουμε αποδείξει την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 4.6.9. *Μια H- υπερεπιφάνεια του* E^4 *τοπικά είναι ανοιχτά τμήματα από:*

(i) υπερεπιφάνειες με σταθερή μέση καμπυλότητα,

(ii) εκ περιστροφής υπερεπιφάνειες με μη σταθερή μέση καμπυλότητα που περιγράφονται στην Πρόταση 4.6.3,

(iii) γενικευμένους κυλίνδρους υπεράνω επιφανειών εκ περιστροφής του E^3 *που περιγράφονται στην Πρόταση 4.6.7 (περίπτωση i) με μη σταθερή μέση καμπυλότητα,*

(iv) $O(2)\times O(2)$*- αναλλοίωτες υπερεπιφάνειες με μη σταθερή μέση καμπυλότητα που περιγράφονται στην Πρόταση 4.6.7 (περίπτωση ii).*

4.7. Απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.4

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.4 χρειαζόμαστε τα επόμενα λήμματα :

Λήμμα 4.7.1. *Οι εκ περιστροφής υπερεπιφάνειες του* E^4 *με μη σταθερή μέση καμπυλότητα που περιγράφονται στην Πρόταση 4.6.3 δεν είναι μηδενικού 2- τύπου.*

Απόδειξη. Έστω $x(s, \vec{\theta}) = f(s)\vec{\theta} + g(s)\vec{\varepsilon}$ παραμέτρηση μιας μηδενικού 2- τύπου εκ περιστροφής υπερεπιφάνειας του E^4 με μη σταθερή μέση καμπυλότητα, όπου $(f(s), g(s))$ είναι η γενέτειρα καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου $f(s) > 0$ και $\vec{\varepsilon}$ μοναδιαίο διάνυσμα παράλληλο στον άξονα περιστροφής. Επειδή οι κύριες καμπυλότητες είναι $\frac{9H}{4}, \frac{9H}{4}, -\frac{3H}{2}$, το τετράγωνο του μήκους της δεύτερης θεμελιώδους μορφής είναι

$$S = \frac{99}{8} H^2. \tag{4.7.1}$$

Επιπλέον έχουμε λόγω της (1.1.1)

$$\Delta H = -2\frac{f'}{f}H' - H''. \tag{4.7.2}$$

Η (4.2.13) με τη βοήθεια των (4.6.16), (4.7.1) και (4.7.2) γράφεται

(4.7.3) $$- HH'' + \frac{6}{5}(H')^2 + \frac{99}{8}H^4 = \lambda H^2.$$

Παραγωγίζοντας τα μέλη της (4.6.13) παίρνουμε

$$2H'H'' = \frac{16}{5}cH^{11/5}H' - \frac{225}{4}H^3H'$$

και από αυτή, με τη βοήθεια της (4.7.3), βρίσκουμε

$$(H')^2 = \frac{4}{3}cH^{11/5} + \frac{5\lambda}{6}H^2 - \frac{135}{4}H^4,$$

η οποία αντίκειται στην (4.6.13), αφού η μέση καμπυλότητα δεν είναι σταθερή.

Λήμμα 4.7.2. *Οι γενικευμένοι κύλινδροι, υπεράνω επιφανειών εκ περιστροφής του* E^3 *με μη σταθερή μέση καμπυλότητα, οι οποίοι περιγράφονται στην Πρόταση 4.6.7. (περίπτωση i) δεν είναι μηδενικού 2-τύπου.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι το διανυσματικό πεδίο θέσης ενός τέτοιου κυλίνδρου είναι

$$\vec{x}(u, v, s) = (f(s)\cos u, f(s)\sin u, v, g(s)),$$

όπου $(f(s), g(s))$ είναι καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου και $f(s) > 0$. Οι κύριες καμπυλότητες είναι $\frac{9H}{2}, 0, -\frac{3H}{2}$, οπότε έχουμε

(4.7.4) $$S = \frac{90}{4} H^2.$$

Ως προς την παραπάνω παραμέτρηση η έκφραση του Λαπλασιανού τελεστή είναι (σχέση (1.1.1))

$$\Delta = -\frac{1}{f^2}\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{\partial^2}{\partial v^2} - \frac{f'}{f}\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial^2}{\partial s^2} .$$

Έτσι έχουμε

$$\Delta H = -\frac{f'}{f} H' - H''$$

και με τη βοήθεια της (4.6.36)

(4.7.5) $$\Delta H = \frac{3}{4}\frac{(H')^2}{H} - H'' .$$

Η (4.2.13) λαμβάνοντας υπόψη τις (4.7.4) και (4.7.5) γράφεται

(4.7.6) $$- H'' + \frac{3(H')^2}{4H} + \frac{90}{4} H^3 = \lambda H.$$

Επιπλέον με παραγώγιση των μελών της (4.6.31) λαμβάνουμε

(4.7.7) $$H'' = \frac{7c}{4} H^{5/2} - 72H^3.$$

Με πρόσθεση των (4.7.6) και (4.7.7) κατά μέλη βρίσκουμε τη σχέση

$$(H')^2 = \frac{7c}{3} H^{7/2} + \frac{4\lambda}{3} H^2 - 126H^4 ,$$

η οποία αντίκειται στην (4.6.31) αφού η μέση καμπυλότητα δεν είναι σταθερή.

Λήμμα 4.7.3. *Έστω* M *μια* $O(2)\times O(2)$- *αναλλοίωτη υπερεπιφάνεια του* E^4 *με μη σταθερή μέση καμπυλότητα και με διανυσματικό πεδίο θέσης*

$$\vec{x}(u,v,s) = (x(s)\cos u,\, x(s)\sin u,\, y(s)\cos v,\, y(s)\sin v)\,,$$

όπου η καμπύλη $(x(s), y(s))$ *έχει το* s *ως παράμετρο το μήκος τόξου. Αν η* M *είναι μηδενικού 2- τύπου υπερεπιφάνεια του* E^4, *τότε η καμπύλη* $(x(s), y(s))$ *είναι τμήμα της αλγεβρικής καμπύλης*

$$P_o(x,y) + \lambda P_1(x,y) + \lambda^2 P_2(x,y) + \lambda^3 P_3(x,y) + \lambda^4 P_4(x,y) + \lambda^5 P_5(x,y) = 0,$$

όπου $P_o, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ *είναι κάποια ομογενή πολυώνυμα βαθμών* $16, 18, 20, 22, 24, 26$ *αντίστοιχα και* λ *μη μηδενική σταθερά.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε, ότι το διανυσματικό πεδίο θέσης μιας μηδενικού 2- τύπου $O(2)\times O(2)$- αναλλοίωτης υπερεπιφάνειας είναι

$$\vec{x}(u,v,s) = (x(s)\cos u,\, x(s)\sin u,\, y(s)\cos v,\, y(s)\sin v),$$

όπου $(x(s), y(s))$ είναι μια επίπεδη καμπύλη με παράμετρο μήκος τόξου. Οι συναρτήσεις $x(s), y(s)$ δεν είναι σταθερές, αφού η μέση καμπυλότητα δεν είναι σταθερή. Από την (4.6.32) και την εξίσωση $x'x'' + y'y'' = 0$ βρίσκουμε

$$x'' = \frac{y'}{3}\left(\frac{y'}{x} - \frac{x'}{y}\right) \tag{4.7.8}$$

και

(4.7.9) $$y'' = -\frac{x'}{3}\left(\frac{y'}{x} - \frac{x'}{y}\right).$$

Επειδή οι κύριες καμπυλότητες είναι $x'y'' - x''y'$, $\frac{y'}{x}$ και $-\frac{x'}{y}$, κάνοντας χρήση των (4.7.8) και (4.7.9), βρίσκουμε

(4.7.10) $$H = \frac{2}{9}\left(\frac{y'}{x} - \frac{x'}{y}\right).$$

Με παρόμοια διαδικασία βρίσκουμε

(4.7.11) $$S = \frac{10}{9}\frac{(x')^2}{y^2} + \frac{10}{9}\frac{(y')^2}{x^2} - \frac{2}{9}\frac{x'y'}{xy}.$$

Ο Λαπλασιανός τελεστής ως προς την παραπάνω παραμέτρηση έχει την ακόλουθη μορφή (σχέση (1.1.1)):

$$\Delta = -\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2}{\partial v^2} - \frac{(xy)'}{xy}\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial^2}{\partial s^2}.$$

Με τη βοήθεια της παραπάνω σχέσης και των (4.7.8), (4.7.9), (4.7.10) και (4.7.11) η (4.2.13) γίνεται

(4.7.12) $$(x')^2y'(12x^2y - 30y^3) + x'(y')^2(-12xy^2 + 30x^3) + x'(4xy^2 - 14x^3) +$$

$$+ y'(-4x^2y + 14y^3) = 9\lambda x^2y^3y' - 9\lambda x^3y^2x'.$$

Θεωρώντας το y ως συνάρτηση του x ($y = y(x)$, $x \in I$) έχουμε

(4.7.13) $$y' = \frac{dy}{dx}x'.$$

Επιπλέον ισχύει

(4.7.14) $$(x')^2 = \frac{1}{1+(\frac{dy}{dx})^2}$$

και

(4.7.15) $$y'' = \frac{1}{(1+(\frac{dy}{dx})^2)^2}\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Χρησιμοποιώντας κατάλληλα τις (4.7.13), (4.7.14) και (4.7.15) η (4.6.32) γράφεται

(4.7.16) $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{3}(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx})[1+(\frac{dy}{dx})^2].$$

Ανάλογα η (4.7.12) γίνεται

(4.7.17) $$A_3(x, y)(\frac{dy}{dx})^3 + A_2(x, y)(\frac{dy}{dx})^2 + A_1(x, y)(\frac{dy}{dx}) + A_o(x, y) = 0,$$

όπου

$$A_3(x, y) = -4x^2y + 14y^3 - 9\lambda x^2y^3,$$

$$A_2(x, y) = -8xy^2 + 16x^3 + 9\lambda x^3y^2,$$

$$A_1(x, y) = 8x^2y - 16y^3 - 9\lambda x^2y^3,$$

$$A_o(x, y) = 4xy^2 - 14x^3 + 9\lambda x^3y^2.$$

Παραγωγίζοντας τα μέλη της (4.7.17) και λαμβάνοντας υπόψη την (4.7.16), βρίσκουμε

$$B_5(x, y)(\frac{dy}{dx})^5 + B_4(x, y)(\frac{dy}{dx})^4 + B_3(x, y)(\frac{dy}{dx})^3 +$$

$$+ B_2(x, y)(\frac{dy}{dx})^2 + B_1(x, y)\frac{dy}{dx} + B_o(x, y) = 0,$$

όπου

$$B_5(x, y) = -12x^2y^2 + 42y^4 - 27\lambda x^2y^4,$$

$$B_4(x, y) = 56x^3y - 184xy^3 + 126\lambda x^3y^3,$$

$$B_3(x, y) = 84x^2y^2 - 32x^4 + 26y^4 + 18\lambda x^2y^4 - 72\lambda x^4y^2,$$

$$B_2(x, y) = -132x^3y + 126xy^3 + 54\lambda x^3y^3,$$

$$B_1(x, y) = -48x^2y^2 - 32x^4 - 16y^4 - 72\lambda x^4y^2 + 45\lambda x^2y^4,$$

$$B_o(x, y) = 118x^3y + 4xy^3 - 72\lambda x^3y^3.$$

Σημειώνουμε εδώ ότι ισχύει $B_5(x, y) = 3yA_3(x, y)$. Θεωρούμε τα πολυώνυμα

$$f(z) = A_3(x_1, y_1)z^3 + A_2(x_1, y_1)z^2 + A_1(x_1, y_1)z + A_o(x_1, y_1),$$

$$g(z) = B_5(x_1, y_1)z^5 + B_4(x_1, y_1)z^4 + B_3(x_1, y_1)z^3 +$$

$$+ B_2(x_1, y_1)z^2 + B_1(x_1, y_1)z + B_o(x_1, y_1),$$

όπου $x_1 \in I$ και $y_1 = y(x_1)$. Με τη βοήθεια υπολογιστή ελέγχουμε ότι η επιλύουσα των πολυωνύμων $f(z)$, $g(z)$, με προσέγγιση σταθεράς, είναι η

$$R(f, g) = x_1^3y_1^4(x_1^2 - y_1^2)(4x_1^2 - 14y_1^2 + 9\lambda x_1^2y_1^2)\big(P_o(x_1, y_1) + \lambda P_1(x_1, y_1) +$$

$$+\lambda^2P_2(x_1, y_1) + \lambda^3P_3(x_1, y_1) + \lambda^4P_4(x_1, y_1) + \lambda^5P_5(x_1, y_1)\big),$$

όπου $P_i(x, y)$, i=0,1, 2, 3, 4, 5 είναι τα παρακάτω ομογενή πολυώνυμα :

$$P_o(x, y) = 26880000x^{16} - 70294400x^{14}y^2 + 43869056x^{12}y^4 + 34700192x^{10}y^6 - 104814400x^8y^8 + 34700192x^6y^{10} + 43869056x^4y^{12} - 70294400x^2y^{14} + 26880000y^{16},$$

$$P_1(x, y) = - 14336000x^{18} + 142511360x^{16}y^2 - 203510080x^{14}y^4 + 299759904x^{12}y^6 - 63472352x^{10}y^8 - 63472352x^8y^{10} + 299759904x^6y^{12} - 203510080x^4y^{14} + 142511360x^2y^{16} - 14336000y^{18},$$

$$P_2(x, y) = - 58521600x^{18}y^2 + 163236096x^{16}y^4 - 250900056x^{14}y^6 + 180082080x^{12}y^8 - 158754744x^{10}y^{10} + 180082080x^8y^{12} - 250900056x^6y^{14} + 163236096x^4y^{16} - 58521600x^2y^{18},$$

$$P_3(x, y) = - 43545600x^{18}y^4 - 33988896x^{16}y^6 + 99268416x^{14}y^8 - 65010276x^{12}y^{10} - 65010276x^{10}y^{12} + 99268416x^8y^{14} - 33988896x^6y^{16} - 43545600x^4y^{18},$$

$$P_4(x, y) = 39657600x^{18}y^6 - 96782040x^{16}y^8 + 18669690x^{14}y^{10} - 71893980x^{12}y^{12} + 18669690x^{10}y^{14} - 96782040x^8y^{16} + 39657600x^6y^{18},$$

$$P_5(x, y) = 10497600x^{18}y^8 + 23783625x^{16}y^{10} + 18862875x^{14}y^{12} + 18862875x^{12}y^{14} + + 23783625x^{10}y^{16} + 10497600x^8y^{18}.$$

Επειδή τα πολυώνυμα f(z), g(z) έχουν το $\frac{dy}{dx}(x_1)$ ως κοινή ρίζα , συμπεραίνουμε ότι στο (x_1, y_1) ισχύει η σχέση

$$R(f, g) = 0 .$$

Επομένως οι κοινές λύσεις των διαφορικών εξισώσεων (4.7.16) και (4.7.17) είναι τμήματα της αλγεβρικής καμπύλης με εξίσωση

$$x^3y^4(x^2 - y^2)(4x^2 - 14y^2 + 9\lambda x^2y^2)\big(P_o(x, y) + \lambda P_1(x, y) +$$

$$+ \lambda^2P_2(x, y) + \lambda^3P_3(x, y) + \lambda^4P_4(x, y) + \lambda^5P_5(x, y)\big) = 0$$

ή ισοδύναμα οι κοινές λύσεις των (4.7.16) και (4.7.17) είναι τμήματα των παρακάτω καμπυλών:

(4.7.18) $$f_1(x, y) = x^2 - y^2 = 0,$$

(4.7.19) $$f_2(x, y) = 4x^2 - 14y^2 + 9\lambda x^2y^2 = 0,$$

(4.7.20) $$f_3(x, y) = P_o(x, y) + \lambda P_1(x, y) + \lambda^2P_2(x, y) + \lambda^3P_3(x, y) + \lambda^4P_4(x, y) + \lambda^5P_5(x, y) = 0.$$

Αν η κοινή λύση είναι τμήμα της (4.7.18) τότε, σύμφωνα με την (4.7.10), η υπερεπιφάνεια θα ήταν ελάχιστης έκτασης στον E^4, δηλαδή 1- τύπου, πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση. Ας υποθέσουμε τώρα ότι η κοινή λύση των (4.7.16) και (4.7.17) είναι τμήμα της καμπύλης (4.7.19). Παίρνοντας το $\frac{dy}{dx}$ από την (4.7.19) και αντικαθιστώντας το στην (4.7.17) βρίσκουμε

$$f_4(x, y) = (-8064\lambda x - 1944\lambda^2x^3 + 5832\lambda^3x^5)y^6 +$$

$$+(-448x + 5040\lambda x^3 - 1296\lambda^2x^5 + 2916\lambda^3x^7)y^4 +$$

$$+(-9696x^3 + 18144\lambda x^5 - 4536\lambda^2x^7)y^2 + 1024x^5 = 0.$$

Η επιλύουσα των πολυωνύμων $f_2(x, y)$ και $f_4(x, y)$ ως προς y δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} R_y(f_2, f_4) = {} & 23933229465600x^{10} - 188415006474240\lambda x^{12} + 592378902872064\lambda^2 x^{14} \\ & - 978912668418048\lambda^3 x^{16} + 951698911887360\lambda^4 x^{18} - 567199819726848\lambda^5 x^{20} \\ & + 204765560782848\lambda^6 x^{22} - 41258732396544\lambda^7 x^{24} + 3570467226624\lambda^8 x^{26} = E(x) , \end{aligned}$$

είναι δηλαδή ένα μη τετριμμένο πολυώνυμο ως προς x . Όμως τα πολυώνυμα $f_2(x, y)$ και $f_4(x, y)$ έχουν το $y(x)$ ως κοινή ρίζα για κάθε $x \in I$ και επομένως πρέπει το $E(x)$ να έχει άπειρο αριθμό ριζών , άτοπο άτοπο. Συνεπώς η κοινή λύση των (4.7.16) και (4.7.17) είναι τμήμα της αλγεβρικής καμπύλης (4.7.20).

Είμαστε πλέον σε θέση να αποδείξουμε το Θεώρημα 4.1.4.

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.4. Έστω M μια μηδενικού 2-τύπου υπερεπιφάνεια του E^4. Η M είναι H- υπερεπιφάνεια και επομένως σύνφωνα με την Πρόταση 4.6.9 κατασκευάζεται από υπερεπιφάνειες με σταθερή μέση καμπυλότητα , κάποιους γενικευμένους κυλίνδρους υπεράνω επιφανειών εκ περιστροφής με μη σταθερή μέση καμπυλότητα και $O(2)\times O(2)$ - αναλλοίωτες υπερεπιφάνειες του E^4 με μη σταθερή μέση καμπυλότητα. Αν η M έχει σταθερή μέση καμπυλότητα , τότε από την (4.2.13) βλέπουμε ότι S είναι σταθερό στη M και επομένως η αριθμητική καμπυλότητα τ της M είναι σταθερή , λόγω της εξίσωσης Gauss $\tau = 9H^2 - S$. Αν η M δεν έχει σταθερή μέση καμπυλότητα , τότε το συμπέρασμα προκύπτει από τα Λήμματα 4.7.1 , 4.7.2. και 4.7.3.

Παρατήρηση 4.7.4. Είναι πολύ πιθανό ότι τμήματα της αλγεβρικής καμπύλης (4.7.20) να μην είναι λύσεις των διαφορικών εξισώσεων (4.7.16) και (4.7.17). Μια παρόμοια αποδεικτική διαδικασία, όπως αυτή που εφαρμόστηκε για την αλγεβρική καμπύλη (4.7.19), δεν απέδωσε ως τώρα. Σε περίπτωση που αυτό είναι αλήθεια, τότε θα έχει αποδειχθεί το εξής συμπέρασμα: Οι μηδενικού 2-τύπου υπερεπιφάνειες του E^4 έχουν σταθερή μέση και αριθμητική καμπυλότητα.

4.8. Απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.5

Θα προβούμε κατ' ευθείαν στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.5, αφού το απαραίτητο υλικό έχει αναπτυχθεί στις προηγούμενες παραγράφους και κυρίως στις 4.6 και 4.7.

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.5. *Περίπτωση i.* Έστω M μια διαρμονική επιφάνεια του E^3, δηλαδή ισχύει $\Delta\vec{H} = 0$. Από την (4.2.9) συμπεραίνουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις

(4.8.1) $$A\,\mathrm{grad}H = -H\,\mathrm{grad}H,$$

(4.8.2) $$\Delta H + SH = 0.$$

Από την (4.8.1) προκύπτει, ότι η διαρμονική επιφάνεια M είναι H-επιφάνεια του E^3. Αν $H =$ σταθ., από την (4.8.2) προκύπτει $S = 0$ ή $H= 0$, δηλαδή η M είναι επιφάνεια ελάχιστης έκτασης. Αν υποθέσουμε, ότι η M δεν έχει σταθερή μέση καμπυλότητα, τότε με τη βοήθεια της Πρότασης 4.6.1 και ακολουθώντας τα βήματα της απόδειξης της Πρότασης 4.6.2 καταλήγουμε σε άτοπο.

Περίπτωση ii. Έστω M μια διαρμονική υπερεπιφάνεια του E^4. Από την (4.2.9) βλέπουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] **M. Barros** and **O.J.Garay**, *2- type surfaces in S^3*, Geom. Dedicata **24**(1987), 329- 336.

[2] **M. Do Carmo** and **M.Dajczer**, *Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. **277**(1983), 685- 709.

[3] **J. Cheeger** and **D.G.Ebin**, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North - Holland Publishing Company , 1975.

[4] **B.Y.Chen** and **G.D.Ludden** , *Surfaces with mean curvature vector parallel in the normal bundle*, Nagoya Math. J. **47**(1972), 161- 167.

[5] **B.Y.Chen**, *Geometry of Submanifolds*, Marcel Dekker, New York 1973.

[6] **B.Y.Chen**, *On a variational problem on hypersurfaces*, J. London Math. Soc. **6**(1973), 321- 325.

[7] **B.Y.Chen**, *On the total curvature of immersed manifolds, VI: Submanifolds of finite type and their applications*, Bull. Inst. Math. Sinica **11**(1983), 309- 328.

[8] **B.Y.Chen**, *Total Mean Curvature and Submanifolds of finite type*, World Scientific, Singapore and New Jersey, 1984.

[9] **B.Y.Chen**, *Surfaces of finite type in Euclidean 3- space*, Bull. Soc. Math. Belg. Ser. B **39**(1987), 243- 254.

[10] **B.Y.Chen**, *Mean curvature of 2- type spherical submanifolds*, Chinese J. Math. **16**(1988), 1- 9.

[11] **B.Y.Chen**, *Null 2- type surfaces in E^3 are circular cylinders*, Kodai Math. J. **11**(1988), 295- 299.

[12] **B.Y.Chen**, *Some open problems and conjectures on submanifolds of finite type*, Soochow J. Math. **17**(1991), 169- 188.

[13] **B.Y.Chen** and **S.J.Li**, *3- type hypersurfaces in a hypersphere*, Bull. Soc. Math. Belg. (για εκτύπωση).

[14] **C. Delaunay**, *Sur la surface de revolution dont la courbure moyenne est constante*, J. Math. pures et appl. Ser.1 (**6**)(1841), 309- 320.

[15] **A. Derdzinski**, *Some remarks on the local structure of Codazzi tensors*, Lecture Notes in Math., Vol. 838, Springer - Verlag p.p. 251 - 255.

[16] **F. Dillen**, **J. Pas** and **L. Verstraelen**, *On surfaces of finite type in Euclidean 3- space*, Kodai Math. J. **13**(1990), 10- 21.

[17] **I. Dimitric**, *Quadric representation and submanifolds of finite type*, Doctoral thesis, Michigan State University, 1989.

[18] **J. Eells**, *The surfaces of Delaunay*, The Math. Intellinger **9**(1987), 53- 57.

[19] **N. Ejiri**, *A counter example for Weiner's open question*, Indiana Univ. Math. J. **31**(1982), 209- 211.

[20] **O. J. Garay**, *On a certain class of finite type surfaces of revolution*, Kodai Math. J. **11**(1988), 25- 31.

[21] **O. J. Garay**, *An extension of Takahashi's theorem*, Geom. Dedicata **34**(1990), 105- 112.

[22] **Th. Hasanis** and **D. Koutroufiotis**, *A property of complete minimal surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **281**(1984), 833- 843.

[23] **Th. Hasanis** and **Th. Vlachos**, *Coordinate finite type submanifolds*, Geom. Dedicata **37**(1991), 155- 165.

[24] **Th. Hasanis** and **Th. Vlachos**, *A local classification of 2- type surfaces in* S^3, Proc. Amer. Math. Soc. **112**(1991), 533- 538.

[25] **Th. Hasanis** and **Th. Vlachos**, *Spherical 2- type hypersurfaces*, J. Geometry **40**(1991), 82- 94.

[26] **Th. Hasanis** and **Th. Vlachos**, *Hypersurfaces of* E^{n+1} *satisfying* $\Delta x = Ax+B$, J. Austral. Math. Soc. (Series A) (για εκτύπωση).

[27] **Th. Hasanis** and **Th. Vlachos**, *Hypersurfaces with constant scalar curvature and constant mean curvature*, Department of Mathematics, University of Ioannina, Technical Report No 189.

[28] **Th. Hasanis** and **Th. Vlachos**, *Surfaces of finite type with constant mean curvature* (για δημοσίευση).

[29] **D. A. Hoffman**, *Surfaces of constant mean curvature in manifolds of constant curvature*, J. Diff. Geom. **8**(1973), 161- 176.

[30] **N. Kapouleas**, *Compact constant mean curvature surfaces in Euclidean three- space*, J. Diff. Geom. **33**(1991), 683- 715.

[31] **S. Kobayashi** and **K. Nomizu**, *Foundations of Differential Geometry*, Vol. I (1963), Vol. II (1969) Interscience Publishers, New York 1969.

[32] **Y. Nagatomo**, *Finite type hypersurfaces of a sphere*, Tokyo J. Math. **14**(1991), 85- 92.

[33] **K. Nomizu** and **B. Smyth**, *A formula of Simons' type and hyper- surfaces of constant mean curvature*, J. Diff. Geom. **3**(1969), 367- 377.

[34] **R. S. Palais** and **C. L. Terng**, *Critical Point Theory and Submanifold Geometry*, Lecture Notes in Math. 1353, Springer- Verlag, 1988.

[35] **R. C. Reilly**, *On the first eigenvalue of the Laplacian for compact submanifolds of Euclidean space*, Comment. Math. Helvetici **52**(1977), 525-533.

[36] **D. H. Singley**, *Smoothness theorems for the principal curvatures and principal vectors of a hypersurface*, Rocky Mountain J. Math. **5**(1975), 135-144.

[37] **T. Takahashi**, *Minimal immersions of Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan 18(1966), 380- 385.

[38] **F. W. Warner**, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott and Foresman and Company, 1971.

[39] **J. L. Weiner**, *On a problem of Chen, Willmore, et al*, Indiana Univ. Math. J. **27**(1978), 19- 35.

[40] **T. J. Willmore**, *Mean curvature of immersed surfaces*, An. st. Univ. Iasi, s. I. a. Matematica **14**(1968), 99- 103.

[41] **T. J. Willmore**, *Total Curvature in Riemannian Geometry*, Ellis Horwood Limited, 1982.