



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ
Σωκράτης Ζήκας

ΑΜΦΙΡΗΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ, 2018

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα «Μαθηματικά (Ανάλυση-Άλγεβρα-Γεωμετρία)» που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την 10/7/2018 από την εξεταστική επιτροπή:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ ΣΤΑΥΡΟΣ	Επίκουρος Καθηγητής (Επιβλέπων Καθηγητής)
ΒΛΑΧΟΣ ΘΕΟΔΩΡΟΣ	Καθηγητής
ΘΩΜΑ ΑΠΟΣΤΟΛΟΣ	Καθηγητής

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

«Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή.»

Σωκράτης Ζήκας

Περίληψη

Το κεντρικό θέμα της συνθετικής αυτής διατριβής είναι η μελέτη της birational γεωμετρίας των αλγεβρικών επιφανειών, από τη σκοπιά του **Minimal Model Program** (MMP). Η κύρια αναφορά μας είναι από το βιβλίο του K. Matsuki [1].

Το πρώτο κεφάλαιο είναι εισαγωγικό με κεντρικό θέμα ιστορικά στοιχεία περί τη μελέτη των αλγεβρικών επιφανειών καθώς και την ανάπτυξη του MMP. Στο δεύτερο κεφάλαιο εισαγάγουμε τα βασικά εργαλεία που επιτρέπουν τη μετάβαση μεταξύ της αλγεβρικής και της complex analytic κατηγορίας. Εισαγάγουμε επίσης κάποια θεμελιώδη αποτελέσματα σχετικά με τη συνομολογία των μιγαδικών πολυπτυγμάτων και των sheaves σε αυτά. Το τρίτο κεφάλαιο αφιερώνεται στην αναλυτική ανάπτυξη το βασικών θεωρημάτων γύρω από τη λειτουργία του MMP στη διάσταση 2. Αρχικά, αφού παρουσιάζουμε εν συντομία τη βασική θεωρία του Intersection Theory καθώς και την έννοια του Blow up, αποδεικνύουμε τα κύρια θεωρήματα όπως το **Castelnuovo blow down** και την ύπαρξη των **Extremal Contractions**. Τέλος, μεταφράζουμε τα παραπάνω αποτελέσματα σε σχέση με τον κώνο **Kleiman-Mori** των effective 1-cycles, δίνοντας μία πιο μοντέρνα χροιά στο θέμα.

Στο τέταρτο κεφάλαιο μελετάμε τις εξόδους του MMP στη διάσταση 2, συγκεκριμένα τους **Mori fibre spaces** και τα **Minimal models**. Στην πρώτη περίπτωση αποδεικνύουμε ένα θεώρημα που χαρακτηρίζει πλήρως τη δομή αυτών. Το υπόλοιπο κεφάλαιο αφιερώνεται στην αναλυτική κατασκευή του **canonical model** για τα minimal models με $\kappa(S) = 2$ καθώς και σε μία σύντομη παρουσίαση των θεωρημάτων **Hard Dichotomy** και **Abundance**. Το πέμπτο κεφάλαιο περιέχει την **Enriques κατάταξη** των αλγεβρικών επιφανειών μέχρι birational ισοδυναμία καθώς και μία σκιαγράφηση της απόδειξης. Στο τελευταίο μέρος του κεφαλαίου μελετάμε τις βασικές ιδιότητες κάποιων παραδειγμάτων αντιπροσώπων από την κάθε κλάση της παραπάνω κατάταξης. Στο έκτο και τελευταίο κεφάλαιο διατυπώνουμε το **Sarkisov program** στη διάσταση 2, για την μελέτη των birational σχέσεων μεταξύ των Mori fibre spaces.

Abstract

The topic of this expository M.Sc. thesis is the study of the birational geometry of algebraic surfaces in view of the **Minimal Model Program** (MMP). The main reference used is [1].

The first chapter is introductory, mainly presenting historical aspects related to the study of surfaces and to the development of the MMP. In the second chapter we briefly discuss the main tools which enable the interplay between the algebraic and the complex analytic categories. We also introduce some fundamental results centered around complex manifolds and sheaf cohomology. The third chapter is dedicated to the detailed view of the main theorems and ideas behind the MMP in dimension 2. We briefly touch on some foundational material, such as Intersection Theory and Blow ups, and subsequently we present the main tools such as the **Castelnuovo blow down** theorem and the existence of **Extremal contractions**. Finally we translate the aforementioned results in terms of the **Kleiman-Mori cone** of effective 1-cycles, giving a more modern approach to the subject.

In chapter four we study the end results of the MMP in dimension 2, namely the **Mori fibre spaces** and the **Minimal models**. In the first case, we present a theorem detailing their structure. The rest of the chapter is devoted to the detailed construction of the **canonical model** for a minimal model with $\kappa(S) = 2$ as well as a brief discussion of the **Hard Dichotomy** and **Abundance theorems**. The fifth chapter contains the **Enriques classification** of algebraic surfaces up to birational equivalence as well as a sketch of the proof. In the last part of the chapter we introduce some examples for each birational class in the above classification and study some of their basic properties. In the sixth and final chapter we formulate the **Sarkisov program in dimension 2**, for the study of birational relations between Mori fibre spaces.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	9
2	GAGA και βασικές έννοιες από μιγαδική γεωμετρία	11
2.1	GAGA	11
2.2	Συνομολογία μιγαδικών πολυπτυγμάτων	12
2.3	Serre duality και vanishing theorems	13
3	Χτίζοντας το Minimal Model Program	15
3.1	Βασικές έννοιες Intersection Theory σε επιφάνειες	15
3.2	To blow up μίας επιφάνειας σε ένα σημείο	17
3.3	Castelnuovo's contraction theorem	18
3.4	Παραγοντοποίηση των Birational maps	24
3.5	Ο Kleiman-Mori cone και οι Ample και nef cones	27
3.6	Extremal contractions	29
3.7	Δομή του Kleiman-Mori cone	40
3.8	To Minimal Model Program στη διάσταση 2	46
4	Βασικές ιδιότητες των Mori Fibre Spaces και Minimal Models	49
4.1	Χαρακτηρισμός των Mori Fibre Spaces	49
4.2	To canonical model ενός minimal model με $\kappa(S) = 2$	56
4.3	Ιδιότητες των Minimal models	64
4.4	Λύση του συνδυαστικού προβλήματος	66
5	Η Enriques κατάταξη των αλγεβρικών επιφανειών	71
5.1	Παρουσίαση του κεντρικού θεωρήματος	71
5.2	Αντιπρόσωποι με $\kappa(S) = -\infty$	74
5.3	Αντιπρόσωποι με $\kappa(S) = 0$	78
5.3.1	Abelian επιφάνειες	78
5.3.2	Bielliptic επιφάνειες	79
5.3.3	K3 επιφάνειες	79
5.3.4	Enriques επιφάνειες	80
5.4	Αντιπρόσωποι με $\kappa(S) = 1, 2$	80
5.4.1	Ελλειπτικές επιφάνειες	80
5.4.2	Επιφάνειες γενικού τύπου	81

6 Το Sarkisov Program στη διάσταση 2	83
6.1 Ορισμός του Sarkisov degree	83
6.2 Ο αλγόριθμος του Sarkisov Program	86
6.3 Μία εφαρμογή του Sarkisov Program	96

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Ο κλάδος της Μιγαδικής Αλγεβρικής Γεωμετρίας ασχολείται με τη μελέτη των varieties που ορίζονται πάνω από τους μιγαδικούς αριθμούς. Θα μπορούσε κανείς να πει ότι ο τελικός σκοπός αυτής της θεωρίας είναι η πλήρης ταξινόμηση όλων των complex varieties ως προς ισομορφισμό. Μία τέτοιου είδους ταξινόμηση θεωρείται αδύνατη, τόσο θεωρητικά όσο και πρακτικά.

Η έννοια της birational ισοδυναμίας εμφανίστηκε ήδη από τα μέσα του 19ου αιώνα. Συγκεκριμένα, δύο varieties είναι birational αν αυτά περιέχουν ισόμορφα, ανοιχτά και πυκνά υποσύνολα, ή ισοδύναμα αν έχουν ισόμορφα function fields.

Μια πρώτη παρατήρηση σχετικά με την επιλογή της έννοιας του birationality ως την κατάλληλη έννοια ισοδυναμίας είναι ότι μας επιτρέπει, μόνο με την υπόθεση του completeness ενός variety, να χρησιμοποιήσουμε εργαλεία όπως τα Chow's lemma και Hironaka's resolution of singularities και έτσι να περιοριστούμε στη μελέτη projective και nonsingular varieties αντίστοιχα.

Ιστορικά, η μελέτη των αλγεβρικών varieties πάνω από τους μιγαδικούς, πολύ φυσιολογικά, ξεκίνησε με τη μελέτη των καμπυλών ή ισοδύναμα των επιφανειών Riemann. Η προσπάθεια ταξινόμησης αυτών ξεκίνησε περί τα τέλη του 19ου αιώνα με την κατάταξη αυτών ως προς το γένος τους, χοντρικά σε rational ($g = 0$), ελλειπτικές ($g = 1$) και καμπύλες γενικού τύπου ($g \geq 2$).

Το επόμενο βήμα ήταν η προσπάθεια ταξινόμησης των αλγεβρικών επιφανειών. Ήδη από τα μέσα του 19ου αιώνα υπήρχαν σημαντικά αποτελέσματα για επιφάνειες, κυρίως εμφυστημένες στον προβολικό χώρο $\mathbb{P}^3$, ενώ η κορύφωση ήρθε με μία ολοκληρωμένη birational ταξινόμηση του Enriques, το 1910, βασιζόμενη σε πολύ σημαντικά αποτελέσματα των Castelnuovo και Noether. Δεν ήταν μέχρι το 1960, που η παραπάνω ταξινόμηση τέθηκε σε σταθερά θεμέλια από τη Ρωσική σχολή αλγεβρογεωμετρών των Zariski και Shafarevich.

Υπάρχουν δύο πολύ βασικές διαφορές στη μελέτη των επιφανειών σε αντίθεση με τη μελέτη των καμπυλών, που καθιστούν την πλήρη και λεπτομερή ταξινόμησή τους δύσκολη. Η πρώτη είναι ότι μέχρι και σήμερα δεν γνωρίζουμε κάποιο ισχυρό birational invariant για τις επιφάνειες όπως για παράδειγμα το γένος στην περίπτωση των καμπυλών. Τον ρόλο του genus έπαιξαν τα λεγόμενα plurigena, δηλαδή στη σύγχρονη γλώσσα οι αριθμοί $h^0(S, nK_S)$ για $n \geq 0$. Το δεύτερο είναι ότι από τη διάσταση 2 και πάνω ξεκινά να έχει νόημα η διαδικασία του blow up, που δίνει παραδείγματα μη τετριμμένων birational maps. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίστηκε στρέφοντας την προσοχή στην ταξινόμηση των minimal (relatively minimal στη σύγχρονη γλώσσα) επιφανειών, χοντρικά δηλαδή

επιφανειών που δεν είναι το blow up μίας άλλης επιφάνειας.

Τέλος, η προσπάθεια γενίκευσης τεχνικών που χρησιμοποιήθηκαν στην κατάταξη των επιφανειών σε varieties διάστασης 3 (και πάνω), έφεραν στο προσκήνιο τη θεωρία που σήμερα είναι γνωστή με το όνομα Mori Minimal Model Program. Σύμφωνα με αυτή, η σύγχρονη στρατηγική επίλυσης του αρχικού προβλήματος ταξινόμησης, από μεριάς της birational γεωμετρίας, χωρίζεται σε τέσσερα βήματα και είναι η εξής

Βήμα 1 Εύρεση ενός καλού αντιπροσώπου σε κάθε κλάση birational ισοδυναμίας.

Βήμα 2 Μελέτη των ιδιοτήτων ενός καλού αντιπροσώπου.

Βήμα 3 Μελέτη των (birational) σχέσεων μεταξύ των καλών αντιπροσώπων.

Βήμα 4 Κατασκευή του moduli space κάθε birational κλάσης, σταθεροποιώντας ίσως κάποια invariants.

Σκοπός της εργασίας αυτής, είναι η birational μελέτη της γεωμετρίας των αλγεβρικών επιφανειών και η παρουσίαση της κλασσικής κατάταξης αυτών με γνώμονα όμως την πιο σύγχρονη προσέγγιση του θέματος, δηλαδή την πορεία του παραπάνω στρατηγικού σχήματος.

Αφού πρώτα εισαγάγουμε κάποιες βασικές έννοιες από τη Μιγαδική Γεωμετρία και την Αλγεβρική Γεωμετρία στο 2ο κεφάλαιο και στην αρχή του 3ου κεφαλαίου αντίστοιχα, αναπτύσσουμε το Minimal Model Program στη διάσταση 2, που θα μας δώσει την απάντηση στο **Βήμα 1**. Σημαντικό ρόλο θα παίξουν τα θεωρήματα των Castelnuovo blow down και Extremal contraction.

Στο 4ο κεφάλαιο αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα της μελέτης των καλών αντιπροσώπων, συγκεκριμένα των Mori fibre spaces και Minimal models, συμβάλλοντας λίγο στο **Βήμα 2** του παραπάνω σχεδίου. Επίσης δίνουμε και μία μερική απάντηση στο **Βήμα 3** σχετικά με τις birational σχέσεις μεταξύ των minimal models.

Στο κεφάλαιο 5 παρουσιάζουμε την κλασσική birational ταξινόμηση του Enriques χρησιμοποιώντας τα νέα εργαλεία που έχουμε αναπτύξει. Επίσης κάνουμε μία σύντομη ανασκόπηση κάποιων βασικών παραδειγμάτων αντιπροσώπων της παραπάνω κατάταξης.

Τέλος, στο 6ο και τελευταίο κεφάλαιο, διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε το Sarkisov program στη διάσταση 2 για την μελέτη των birational σχέσεων μεταξύ των Mori fibre spaces, ολοκληρώνοντας και το **Βήμα 3** του παραπάνω στρατηγικού σχήματος. Όσο για το **Βήμα 4**, η αντιμετώπιση του ξεφεύγει από τους σκοπούς της εργασίας.

Κεφάλαιο 2

GAGA και βασικές έννοιες από μιγαδική γεωμετρία

Σκοπός αυτής της ενότητας είναι η επιγραμματική αναφορά σε κάποια θεμελιώδη θεωρήματα που τελούν δυνατή και χρήσιμη την μετάβαση μεταξύ της αλγεβρικής και της μιγαδικής γεωμετρίας. Αναφέρουμε επίσης και κάποια βασικά αποτελέσματα σχετικά με τη συνομολογία των μιγαδικών πολυπτυγμάτων καθώς και με τη συνομολογία των sheaves πάνω σε αυτά.

2.1 GAGA

Θεώρημα 2.1.1 (Chow Theorem). *Κάθε κλειστό analytic subspace (δηλαδή ένας υποπολύπτυγμα που ορίζεται τοπικά, ως θέση μηδενισμού ολόμορφων συναρτήσεων) του μιγαδικού προβολικού χώρου $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ είναι και αλγεβρικό subvariety. Το αντίστροφο είναι προφανές.*

Έστω X ένα analytic variety. Τότε από το παραπάνω θεώρημα, αυτό έχει δύο δομές, μία αλγεβρική και μία αναλυτική. Όταν θα αναφερόμαστε στο X με την αναλυτική δομή του, θα συμβολίζουμε με X^h . Για κάθε coherent (algebraic) sheaf $\mathcal{F}$ στο X , αντιστοιχίζεται ένα coherent analytic sheaf $\mathcal{F}^h$ στο X^h με φυσιολογικό τρόπο. Για περισσότερες λεπτομέρειες ως προς αυτή την αντιστοίχιση, παραπέμπουμε στο πρωτότυπο [20].

Θεώρημα 2.1.2 (Serre's GAGA). *Για ένα projective variety X ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. Για κάθε coherent algebraic sheaf $\mathcal{F}$ στο X και κάθε $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, έχουμε

$$H^q(X, \mathcal{F}) \cong H^q(X^h, \mathcal{F}^h).$$

2. Για κάθε δύο coherent algebraic sheaves $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$, κάθε analytic μορφοισμός μεταξύ των $\mathcal{F}^h$ και $\mathcal{G}^h$, επάγεται από έναν algebraic μορφοισμό μεταξύ των $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$.
3. Για κάθε coherent analytic sheaf $\mathcal{M}$ στο X^h , υπάρχει μοναδικό (μέχρις ισομορφισμού) coherent algebraic sheaf $\mathcal{F}$, τέτοιο ώστε

$$\mathcal{M} \cong \mathcal{F}^h.$$

Στο υπόλοιπο της εργασίας θα δουλεύουμε με projective varieties πάνω από τους μιγαδικούς αριθμούς. Επίσης (συχνά χρησιμοποιώντας εργαλεία όπως το Hodge Decomposition) θα δουλεύουμε με coherent sheaves. Συνεπώς θα κινούμαστε ελεύθερα μεταξύ της αναλυτικής και της αλγεβρικής κατηγορίας.

2.2 Συνομολογία μιγαδικών πολυπτυγμάτων

Θεώρημα 2.2.1 (Poincaré Duality). Έστω M^n συμπαγές, προσανατολισμένο διαφορίσιμο πολύπτυγμα διάστασης n , τότε

$$H^k(M, \mathbb{Z}) \cong H_{n-k}(M, \mathbb{Z})$$

και μάλιστα με κανονικό τρόπο.

Απόδειξη. Βλέπε [10, σελ. 53]. □

Θεώρημα 2.2.2 (Hodge Decomposition). Αν M είναι ένα συμπαγές Kähler manifold, τότε οι ομάδες συνομολογίας αυτού με μιγαδικούς συντελεστές επιδέχονται την παρακάτω διάσπαση

$$H^r(X, \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{p+q=r} H^q(X, \Omega^p).$$

Χάριν συντομίας, συχνά συμβολίζουμε

$$H^q(X, \Omega^p) = H^{p,q}(X) \text{ και } h^{p,q}(X) = \dim H^{p,q}(X)$$

Απόδειξη. Βλέπε [10, σελ. 116]. □

Παρατήρηση 2.2.3. Κάθε nonsingular complex projective variety είναι και Kähler manifold, με τον περιορισμό της Fubini-Study metric του $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ (βλέπε [10, σελ. 109]).

Πριν δώσουμε το επόμενο θεώρημα, θα πρέπει να κάνουμε μερικές παρατηρήσεις. Στα παρακάτω θα θεωρούμε X συμπαγές complex manifold.

Σε κάθε τέτοιο manifold X έχουμε την exponential σύντομη ακριβή ακολουθία sheaves

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2\pi i} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0,$$

όπου τότε η επαγόμενη μακρά ακριβή ακολουθία στη συνομολογία μας δίνει

$$Pic(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{c_1} H^2(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X, \mathbb{C}).$$

Επίσης, πάντα υπάρχει η ένθεση

$$H^2(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X, \mathbb{C}).$$

Θεώρημα 2.2.4 (Lefschetz Theorem on (1,1)-classes). Ο ομομορφισμός c_1 είναι επί του

$$H^{1,1}(X) \cap H^2(X, \mathbb{Z}).$$

Απόδειξη. Βλέπε [10, σελ. 163]. □

Για ένα line bundle $\mathcal{L} \in Pic(X)$, η εικόνα του μέσω του ομομορφισμού c_1 καλείται το πρώτο chern class του $\mathcal{L}$.

2.3 Serre duality και vanishing theorems

Ένα χαρακτηριστικό της αλγεβρικής κατηγορίας, για complex projective varieties, είναι η πλήρης αντιστοιχία μεταξύ

- Invertible (δηλ. locally free of rank 1) sheaves
- Line bundles και
- (Cartier) Divisors ως προς linear equivalence.

Στην κατηγορία των compact complex manifolds ισχύει η ισοδυναμία των δύο πρώτων, ενώ η τρίτη κλάση είναι γενικά μικρότερη των άλλων. Για την ισοδυναμία των δύο τελευταίων στην αλγεβρική κατηγορία βλέπε [10, σελ. 161]. Έτσι για το υπόλοιπο τις εργασίας δεν θα γίνεται διαχωρισμός μεταξύ των τριών παραπάνω εννοιών.

Θεώρημα 2.3.1 (Serre Duality). *Έστω D divisor, σε ένα nonsingular projective variety διάστασης n . Τότε υπάρχει ένας κανονικός ισομορφισμός*

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(D)) \cong \text{Ext}^i(\mathcal{O}_X(K_X - D), \mathcal{O}_X(K_X)) \cong H^{n-i}(X, \mathcal{O}_X(K_X - D))^*,$$

πιο ειδικά

$$h^i(X, \mathcal{O}_X(D)) = h^{n-i}(X, \mathcal{O}_X(K_X - D)).$$

Απόδειξη. Βλέπε [11, σελ. 244, 7.7]. □

Θεώρημα 2.3.2 (Serre's Vanishing Theorem). *Ένας divisor A σε ένα projective variety είναι ample αν και μόνον αν*

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(L + nA)) = 0 \text{ για κάθε divisor } L, i > 0 \text{ και } n \gg 0.$$

Για μία πιο γενική διατύπωση και απόδειξη βλέπε [11, σελ. 228, 229].

Θεώρημα 2.3.3 (Kodaira Vanishing Theorem). *Έστω X nonsingular projective variety διάστασης n και A ample divisor, τότε*

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(A + K_X)) = 0 \text{ για } i > 0.$$

Κεφάλαιο 3

Χτίζοντας το Minimal Model Program

Το παρών κεφάλαιο αφιερώνεται στην ανάπτυξη των βασικών εργαλείων πίσω από τη λειτουργία του Minimal Model Program. Αρχικά εισαγάγουμε κάποιες βασικές έννοιες από Intersection theory καθώς και την πλέον βασική birational κατασκευή, αυτή του blow up. Στη συνέχεια διατυπώνουμε ένα κλασσικό θεώρημα του Castelnuovo, που μας δίνει ένα κριτήριο για το πότε είναι αναστρέψιμη η διαδικασία του blow up. Το ερώτημα σε αυτό το σημείο είναι: Έχει η επιφάνεια μας (-1) -καμπύλες; Στη συνέχεια, αποσκοπώντας στην εξαγωγή πιο ολικών συμπερασμάτων για την επιφάνειά μας, αναδιατυπώνουμε το παραπάνω ερώτημα στο εξής: Είναι ο canonical divisor K_S nef; Με βάση αυτό το ερώτημα, αποδεικνύουμε την ύπαρξη extremal contractions στην περίπτωση που η απάντηση είναι αρνητική.

3.1 Βασικές έννοιες Intersection Theory σε επιφάνειες

Θεώρημα 3.1.1. Έστω S nonsingular projective επιφάνεια. Υπάρχει μοναδικό pairing $\text{Div} S \times \text{Div} S \longrightarrow \mathbb{Z}, (C, D) \mapsto C \cdot D$ με τις εξής ιδιότητες:

- (i) αν C και D είναι nonsingular καμπύλες που τέμνονται transversally (δηλ. σε κάθε σημείο τομής τους P , ισχύει $T_P C \oplus T_P D = T_P S$), τότε

$$C \cdot D = \#(C \cap D)$$

- (ii) να είναι συμμετρικό, $C \cdot D = D \cdot C$

- (iii) να είναι προσθετικό, $(C_1 + C_2) \cdot D = C_1 \cdot D + C_2 \cdot D$

- (iv) να είναι συμβατό με τη σχέση του linear equivalence, δηλαδή αν $C_1 \sim C_2$ τότε $C_1 \cdot D = C_2 \cdot D$ για κάθε $D \in \text{Div} S$.

Απόδειξη. Βλέπε [11, σελ. 357, 1.1]. □

Το παραπάνω αποτέλεσμα, είναι μία πιο ειδική περίπτωση του γενικού intersection divisors με 1-cycles σε varieties μεγαλύτερης διάστασης. Σε απόλυτη αντιστοιχία με τους

divisors, ένα **1-cycle** είναι ένα στοιχείο της ελεύθερης αβελιανής ομάδας που παράγεται από τα subvarieties διάστασης 1. Στην περίπτωση των επιφανειών, είναι προφανές πως τα 1-cycles ταυτίζονται με τους divisors.

Παρακάτω παραθέτουμε τέσσερις ισοδύναμους ορισμούς για το intersection δύο divisors C και D

- Για κάθε $x \in \text{Supp}(C) \cap \text{Supp}(D) := C \cap D$ επιλέγουμε U περιοχή του x τέτοια ώστε

$$C \cap U = V(f) \cap U \text{ και } D \cap U = V(g) \cap U$$

και θέτουμε $(C \cdot D)_x = \text{length}(\mathcal{O}_{S,x}/(f,g))$, τότε

$$C \cdot D = \sum_{x \in C \cap D} (C \cdot D)_x$$

- Αν C είναι καμπύλη στην S , ορίζουμε $D \cdot C = \deg(\mu^* \mathcal{O}_{\tilde{C}}(D))$, όπου $\mu: \tilde{C} \rightarrow C$ το normalization της C . Αν η C δεν είναι καμπύλη, αλλά είναι 1-cycle επεκτείνουμε γραμμικά.
- Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι οι C και D είναι καμπύλες και τέμνονται εγκάρσια (transversally), τότε χρησιμοποιώντας τις σύντομες ακριβείς ακολουθίες

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \mathcal{O}_X(-C) \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow \mathcal{O}_C(-D) \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_{C \cap D} \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow \mathcal{O}_X(-D-C) \rightarrow \mathcal{O}_X(-D) \rightarrow \mathcal{O}_C(-D) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

και την προσθετικότητα της χαρακτηριστικής Euler στις σύντομες ακριβείς ακολουθίες παίρνουμε τη σχέση

$$\begin{aligned} C \cdot D &= \#(C \cap D) = h^0(C \cap D, \mathcal{O}_{C \cap D}) = \chi(\mathcal{O}_{C \cap D}) \\ &= \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{O}_X(-D)) - \chi(\mathcal{O}_X(-C)) + \chi(\mathcal{O}_X(-C-D)). \end{aligned}$$

- Αντίστοιχα, υποθέτουμε πάλι ότι οι C και D είναι καμπύλες. Τότε αυτές αντιστοιχούν σε κάποιες κλάσεις $[C], [D] \in H_2(S, \mathbb{Z})$. Χρησιμοποιώντας το Poincaré Duality και τη φυσική δράση

$$H^2(S, \mathbb{Z}) \times H_2(S, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

ορίζουμε ως intersection number των C και D , τη δράση της κλάσης του ενός στο άλλο.

Θεώρημα 3.1.2 (Riemann-Roch Theorem). *Για έναν divisor D σε μία nonsingular projective επιφάνεια S ισχύει*

$$\chi(\mathcal{O}_S(D)) = \frac{1}{2}(D - K_S) \cdot D + \chi(\mathcal{O}_S).$$

Απόδειξη. Βλέπε [11, σελ. 362, 1.6].

□

Θεώρημα 3.1.3 (Noether's Formula). Με τις ίδιες υποθέσεις με αυτές του παραπάνω θεωρήματος, ισχύει ότι

$$\chi(\mathcal{O}_S) = \frac{1}{12}(K_S^2 + e(S)),$$

όπου $e(S)$ είναι η τοπολογική Euler χαρακτηριστική της S .

Συνδυάζοντας κανείς τα δύο παραπάνω θεωρήματα, παίρνει την διατύπωση του θεωρήματος Hirzebruch-Riemann-Roch στην διάσταση 2.

3.2 Το blow up μίας επιφάνειας σε ένα σημείο

Ορισμός 3.2.1. Έστω T nonsingular projective επιφάνεια και $p \in T$. Επιλέγουμε U μία affine περιοχή του p με τοπικές συντεταγμένες (x, y) και $p = (0, 0)$ και θέτουμε

$$\tilde{U} = \{(s : t) \times (x, y) \in \mathbb{P}^1 \times U \mid xt - ys = 0\}.$$

Αν $\mu: \tilde{U} \rightarrow U$ είναι η προβολή στην δεύτερη συντεταγμένη, τότε εύκολα βλέπει κανείς ότι $\tilde{U} - \mu^{-1}(p) \cong U - p$. Τέλος θέτουμε S να είναι η επιφάνεια $\tilde{U} \cup_\mu (T - p)$ που παίρνουμε κολλώντας κατά μήκος του μ . Η S μαζί με τον προφανή μορφισμό

$$\mu: S \rightarrow T$$

καλείται το **blow up** της T στο p .

Η επόμενη πρόταση συσχετίζει το intersection theory στην S με αυτό της T .

Πρόταση 3.2.2. Έστω T nonsingular projective επιφάνεια και $p \in T$ και έστω $\mu: S \rightarrow T$ το blow up της T στο p , τότε ισχύουν τα εξής:

- (i) $\mu: S - \mu^{-1}(p) \xrightarrow{\sim} T - p$.
- (ii) $\mu^{-1}(p) = E \cong \mathbb{P}^1$.
- (iii) $\text{Pic}(S) = \mu^* \text{Pic}(T) + \mathbb{Z} \cdot E$ με το intersection theory στην S να χαρακτηρίζεται πλήρως από τα εξής
 - για $C, D \in \text{Pic}(T)$, $\mu^* C \cdot \mu^* D = C \cdot D$,
 - για $C \in \text{Pic}(T)$, $\mu^* C \cdot E = 0$,
 - $E \cdot E = E^2 = -1$,
 - για $C \in \text{Pic}(T)$ και $D \in \text{Pic}(S)$, $\mu^* C \cdot D = C \cdot \mu_* D$.
- (iv) $K_S = \mu^* K_T + E$.

Απόδειξη. Βλέπε [11, σελ. 386-387]. □

Ορισμός 3.2.3. Έστω $\mu: S \rightarrow T$ το blow up της T σε ένα σημείο p όπως παραπάνω. Για κάθε καμπύλη C στην T ορίζουμε το

- **proper transform** αυτής να είναι το $\mu^*(C)$ και το
- **strict transform** αυτής να είναι το $\tilde{C} := \overline{\mu^{-1}(C - \{p\})}$.

Η σχέση μεταξύ αυτών των δύο είναι η

$$\mu^*(C) = \tilde{C} + mE,$$

όπου m είναι η πολλαπλότητα της C στο $p \in T$.

Πρόταση 3.2.4. Αν T όπως παραπάνω και S το *blow up* της T στο $p \in T$, τότε

$$h^2(S, \mathbb{R}) = h^2(T, \mathbb{R}) + 1.$$

Απόδειξη. Δουλεύουμε στην αναλυτική κατηγορία. Θεωρούμε τα εξής σύνολα:

$$\begin{aligned} U &\subseteq T \text{ ανοιχτός δίσκος περί το } p \text{ και } \tilde{U} = \mu^{-1}(U), \\ U^* &= U - p \text{ και } \tilde{U}^* = \mu^{-1}(U^*) \cong U^*, \\ T^* &= T - p \text{ και } S^* = S - E \cong T^*. \end{aligned}$$

Για τα καλύμματα $T = T^* \cup U$ και $S = S^* \cap \tilde{U}$ θεωρούμε τις Mayer-Vietoris sequences

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_i(\tilde{U}^*) & \longrightarrow & H_i(\tilde{U}) \oplus H_i(\tilde{S}) & \longrightarrow & H_i(S) \longrightarrow H_{i+1}(\tilde{U}^*) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow \wr & & \downarrow \mu_*^1 \times \mu_*^2 & & \downarrow \mu_* \\ \dots & \longrightarrow & H_i(U^*) & \longrightarrow & H_i(U) \oplus H_i(T^*) & \longrightarrow & H_i(T) \longrightarrow H_{i+1}(U^*) \longrightarrow \dots \end{array}$$

Από την επιλογή του U ως ανοιχτό δίσκο, έχουμε το σύνηθες contraction του, $z \mapsto tz$ το οποίο μέσω της μ μας δίνει και ένα contraction του $\tilde{U}$ στην E .

Κάνοντας κανείς diagram chasing, χρησιμοποιώντας τη μεταθετικότητα του διαγράμματος, εύκολα βλέπει ότι $\text{Ker } \mu_* = H_i(\tilde{U}) \cong H_i(\mathbb{P}^1)$ και τότε (δεδομένου ότι κάθε σύντομη ακριβής ακολουθία διανυσματικών χώρων κάνει split), έχουμε

$$H_i(S) \cong H_i(T) \oplus H_i(\mathbb{P}^1).$$

Η συνολογία όμως του $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ είναι

$$H_i(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0, 2 \\ 0, & \text{άλλως,} \end{cases}$$

απ' όπου έχουμε το ζητούμενο. □

3.3 Castelnuovo's contraction theorem

Ορισμός 3.3.1. Μια *irreducible* και *reduced* καμπύλη E σε μία *nonsingular projective* επιφάνεια S , καλείται **(-1)-καμπύλη** αν

$$E \cong \mathbb{P}^1 \text{ και } E^2 = -1.$$

Λήμμα 3.3.2 (Arithmetic genus formula). Έστω C *irreducible* και *reduced* καμπύλη σε μία *nonsingular, projective* επιφάνεια S , τότε:

$$h^1(C, \mathcal{O}_C) = \frac{1}{2}(K_S + C) \cdot C + 1.$$

Απόδειξη. Από το Riemann-Roch Theorem έχουμε:

$$\chi(\mathcal{O}_S(-C)) = \frac{1}{2}(K_S + C) \cdot C + \chi(\mathcal{O}_S). \quad (3.1)$$

Θεωρούμε τη σύντομη ακριβή ακολουθία:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(-C) \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0. \quad (3.2)$$

Υπολογίζοντας παίρνουμε:

$$\begin{aligned} h^0(C, \mathcal{O}_C) - h^1(C, \mathcal{O}_C) &=: \chi(\mathcal{O}_C) \stackrel{(3.2)}{=} \\ &= \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(\mathcal{O}_S(-C)) \stackrel{(3.1)}{=} -\frac{1}{2}(K_S + C) \cdot C. \end{aligned}$$

Όμως εφόσον τα global sections μίας irreducible, reduced, projective καμπύλης είναι μόνο τα σταθερά, δηλαδή $h^0(C, \mathcal{O}_C) = 1$, έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω αποτέλεσμα, αποδεικνύουμε τον ακόλουθο χαρακτηρισμό των (-1) -καμπυλών.

Λήμμα 3.3.3. Έστω S nonsingular projective επιφάνεια και E irreducible και reduced καμπύλη στην S , τότε η E είναι (-1) -καμπύλη ανν:

$$K_S \cdot E < 0 \text{ και } E^2 < 0$$

Απόδειξη. Έστω ότι η E είναι (-1) -καμπύλη.

Έχουμε $E \cong \mathbb{P}^1 \Rightarrow h^1(E, \mathcal{O}_E) = 0$ και από την Arithmetic genus formula έχουμε:

$$K_S \cdot E = -1,$$

όπου μας δίνει το ζητούμενο.

Έστω ότι $K_S \cdot E < 0$ και $E^2 < 0$, τότε έχουμε:

$$h^1(E, \mathcal{O}_E) = \frac{1}{2}(K_S + E) \cdot E + 1 \Rightarrow h^1(E, \mathcal{O}_E) - 1 = \frac{K_S \cdot E + E^2}{2}.$$

Εφόσον η ποσότητα στα δεξιά είναι γνήσια αρνητική και δεδομένου ότι $h^1(E, \mathcal{O}_E) \geq 0$ έχουμε:

$$K_S \cdot E = E^2 = -1 \text{ και } H^1(E, \mathcal{O}_E) = 0.$$

Ισχυρισμός: Έστω E projective, irreducible και reduced καμπύλη (ίσως singular όμως), τότε:

$$H^1(E, \mathcal{O}_E) = 0 \Rightarrow E \cong \mathbb{P}^1.$$

Απόδειξη: Αρκεί ναδειχθεί ότι η E είναι nonsingular, διότι τότε το ζητούμενο είναι γνωστό αποτέλεσμα στη βιβλιογραφία, πχ βλέπε [11, σελ. 297, 1.3.5].

Έστω $\pi: \tilde{E} \rightarrow E$ το normalization της E . Τότε έχουμε τη σύντομη ακριβή ακολουθία:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_E \longrightarrow \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{E}} \longrightarrow \text{Coker} \longrightarrow 0.$$

Και την ακριβή ακολουθία στη συνομολογία:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(E, \mathcal{O}_E) &\longrightarrow H^0(E, \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{E}}) \longrightarrow \\ &\longrightarrow H^0(\text{Supp}(\text{Coker}), \text{Coker}) \longrightarrow H^1(E, \mathcal{O}_E) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Όμως $H^0(E, \mathcal{O}_E) \cong \mathbb{C}$ και εξ' ορισμού του direct image sheaf έχουμε $H^0(E, \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{E}}) = H^0(\tilde{E}, \mathcal{O}_{\tilde{E}}) \cong \mathbb{C}$. Άρα ο μονομορφισμός $H^0(E, \mathcal{O}_E) \longrightarrow H^0(E, \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{E}})$ της παραπάνω ακριβούς ακολουθίας είναι και επιμορφισμός (λόγω διαστάσεων), δηλαδή:

$$H^0(\text{Supp}(\text{Coker}), \text{Coker}) = 0.$$

Επίσης είναι γνωστό ότι:

$$\text{Supp}(\text{Coker}) = \text{Sing}(E) = \{\text{πεπερασμένα το πλήθος σημεία}\}$$

και ότι αν $X \subseteq \mathbb{P}^n$ k το πλήθος σημεία τότε $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \cong \mathbb{C}^k$.

Άρα από τα παραπάνω, $\text{Supp}(\text{Coker}) = \text{Sing}(E) = \emptyset$ και άρα E nonsingular. $\square$

Με τα παραπάνω εργαλεία, είμαστε πλέον σε θέση να αποδείξουμε το βασικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου.

Θεώρημα 3.3.4 (Castelnuovo's Contraction Theorem). Έστω S nonsingular projective επιφάνεια και $E \subset S$ (-1) -καμπύλη, τότε υπάρχει μορφισμός

$$\mu: S \longrightarrow T$$

με τις εξής ιδιότητες:

- (i) $\mu(E) = P \in T$ pt,
- (ii) ο $\mu: S \setminus E \xrightarrow{\sim} T \setminus P$ να είναι ισομορφισμός, και
- (iii) η T να είναι nonsingular projective επιφάνεια.

Πιο συγκεκριμένα, το $\mu: S \longrightarrow T$ είναι το blow up της T στο σημείο p .

Απόδειξη. Κάθε divisor $L \in \text{Div}(S)$ τέτοιο ώστε το αντίστοιχο complete linear system $|L|$ να είναι base point free αντιστοιχεί σε έναν μορφισμό $\Phi_{|L|}: S \longrightarrow \mathbb{P}^n$ και αντίστροφα, αν $\phi: S \longrightarrow \mathbb{P}^n$ είναι ένας μορφισμός, τότε $\phi = \Phi_{|L|}$ με $L = \Phi^*H$ για H τυχόν hyperplane section του $\text{Im}\phi \subseteq \mathbb{P}^n$.

Άρα για να βρούμε έναν μορφισμό μ που θα ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες, αρκεί να βρούμε έναν divisor $L \in \text{Div}(S)$ με τις ιδιότητες $L \cdot E = 0$ και $L \cdot C > 0$ για κάθε καμπύλη C με $C \neq E$.

Έστω A ample divisor στην S και θέτουμε

$$L := A + kE$$

με $k = A \cdot E$. Τότε, για κάθε καμπύλη $C \neq E$ ισχύει

$$A \cdot C > 0 \text{ και } E \cdot C \geq 0 \Rightarrow L \cdot C > 0$$

και

$$L \cdot E = A \cdot E + (A \cdot E)E^2 = 0.$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι το complete linear system $|L|$ δεν έχει base points. Εφόσον ο A είναι ample και ισχύει η σχέση

$$|L| \supseteq |A| + kE. \quad (3.3)$$

Τότε, αν το $|L|$ έχει base points αυτά θα βρίσκονται πάνω στην E . Θεωρούμε τη σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(L - E) \longrightarrow \mathcal{O}_S(L) \longrightarrow \mathcal{O}_E(L) \longrightarrow 0$$

και την επαγόμενη μακρά ακριβή ακολουθία στη συνομολογία

$$\dots \longrightarrow H^0(S, \mathcal{O}_S(L)) \xrightarrow{\eta} H^0(E, \mathcal{O}_E(L)) \longrightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S(L - E)) \longrightarrow \dots$$

Όμως

$$H^0(E, \mathcal{O}_E(L)) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(L \cdot E)) = H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) \cong \mathbb{C}.$$

Για να δείξουμε ότι το $|L|$ δεν έχει base points στην E αρκεί να βρεθεί ένα section $s \in H^0(S, \mathcal{O}_S(L))$ που δεν μηδενίζεται στην E . Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω ακριβείς ακολουθίες, αν ισχύει ότι $H^1(S, \mathcal{O}_S(L - E)) = 0$, τότε μπορούμε μέσω του επιμορφισμού η να κάνουμε pullback ένα σταθερό, μη μηδενικό section του $H^0(E, \mathcal{O}_E(L)) \cong \mathbb{C}$ που θα έχει την επιθυμητή ιδιότητα. Άρα το μόνο που μένει είναι να δειχθεί ότι $H^1(S, \mathcal{O}_S(L - E)) = 0$, το οποίο θα αποδειχθεί, σε λίγο μεγαλύτερη γενικότητα, στο τέλος της απόδειξης.

Όσο για τις ιδιότητες (i) και (ii), έχουμε:

$$0 = L \cdot E = H \cdot \mu_* E \Rightarrow \mu_* E = 0,$$

που σημαίνει

$$\dim \mu(E) < \dim E \Rightarrow \mu(E) = pt$$

όπου εδώ, χρησιμοποιούμε την έννοια του pushforward και το Projection formula όπως ορίζονται στο [7, σελ. 9 1.9].

Τέλος, από τη σχέση $|A| + kE \leq |L|$, μπορούμε να επιλέξουμε βάση s_i του $H^0(S, \mathcal{O}_S(A))$ και ένα section $t \in H^0(S, \mathcal{O}_S(E))$ που να μηδενίζεται στην E με πολλαπλότητα 1, και να συμπληρώσουμε τα γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία $s_i t^k \in H^0(S, \mathcal{O}_S(L))$ σε μία βάση.

Τότε παρατηρούμε ότι για τα σημεία $Q \in S \setminus E$, τα στοιχεία αυτά είναι αρκετά ώστε να διαχωρίζουν, τόσο τα σημεία, όσο και τα tangent directions.

Για μια πιο αναλυτική κατασκευή του παραπάνω μορφισμού παραπέμπουμε στο [4, σελ. 20, II.17].

Αποδεικνύουμε τώρα ότι το $\mu = \Phi|_L: S \longrightarrow T$ είναι, τοπικά ισόμορφο με το blow up του $\mathbb{A}^2$ στο $(0, 0)$ και τότε θα έχουμε και ότι η T είναι nonsingular στο P . Θεωρούμε τη σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(L - 2E) \longrightarrow \mathcal{O}_S(L - E) \longrightarrow \mathcal{O}_E(L - E) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \longrightarrow 0$$

και την επαγόμενη ακολουθία στη συνομολογία

$$\dots \longrightarrow H^0(S, \mathcal{O}_S(L - E)) \xrightarrow{\eta} H^0(E, \mathcal{O}_E(L - E)) \longrightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S(L - 2E)) = 0.$$

Το ότι ο τελευταίος όρος είναι μηδέν θα δειχθεί στο τέλος της απόδειξης. Επιλέγουμε μία βάση s, t του $H^0(S, \mathcal{O}_E(L - E))$ και την κάνουμε lift μέσω του επιμορφισμού η στα sections ξ_1, ξ_2 . Αυτά μπορούν να ειδωθούν σαν sections του $|L|$ που μηδενίζονται στην E με πολλαπλότητα 1.

Αντίστοιχα, θεωρώντας την σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(L - E) \longrightarrow \mathcal{O}_S(L) \longrightarrow \mathcal{O}_E(L) \cong \mathcal{O}_E \longrightarrow 0$$

και την επαγόμενη ακολουθία στη συνομολογία

$$\dots \longrightarrow H^0(S, \mathcal{O}_S(L)) \longrightarrow H^0(E, \mathcal{O}_E) \cong \mathbb{C} \longrightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S(L - E)) = 0$$

μπορούμε να βρούμε ένα section ξ_0 στο $H^0(S, \mathcal{O}_S(L))$ που δεν μηδενίζεται πουθενά στην E .

Καθώς τα τρία sections ξ_0, ξ_1, ξ_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, ο μορφισμός $\mu = \Phi_{|L|}$ παίρνει την μορφή $(\xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \dots)$ και τότε στην ανοιχτή περιοχή της E , $S_0 = \{\xi_0 \neq 0\}$ έχουμε το εξής διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} E \subset S_0 & \xrightarrow{\mu} & (1 : 0 : 0 : \dots) \in U_0 \subset \mathbb{P}^N \longrightarrow (0, 0, \dots) \in \mathbb{A}^N \\ & & \downarrow \\ & & (0, 0) \in \mathbb{A}^2. \end{array}$$

Ακριβώς επειδή η E γίνεται contract στο $(0, 0)$, μέσω της παραπάνω σύνθεσης παίρνουμε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} E \subset S_0 & \xrightarrow{\mu} & p \in T_0 \subset \mathbb{A}^N \\ \downarrow \tau & & \downarrow \eta \\ \mathbb{P}^1 \times (0, 0) \subset Bl_{p(0,0)} \mathbb{A}^2 & \xrightarrow{\nu} & (0, 0) \in \mathbb{A}^2 \end{array}$$

Από την αναλυτική περιγραφή του blow up του $\mathbb{A}^2$ στο $(0, 0)$, καθώς και από την μεταθετικότητα του παραπάνω διαγράμματος ο μορφισμός τ έχει την μορφή

$$q \in S_0 \mapsto (\xi_1(q) : \xi_2(q)) \times \left(\frac{\xi_1}{\xi_0}(q), \frac{\xi_2}{\xi_0}(q) \right)$$

(ο τ είναι καλά ορισμένος πάνω στην E με την έννοια του [21, σελ. 156, 3.2]).

Αρχικά θα δείξουμε ότι ο τ είναι ισομορφισμός σε μία περιοχή του E και στη συνέχεια ότι ο η είναι ισομορφισμός σε μία περιοχή του p και τότε θα έχουμε το ζητούμενο.

Βήμα 1 Υπάρχουν αναλυτικές περιοχές $E \subset V \subseteq S_0$ και $\mathbb{P}^1 \times (0, 0) \subset W \subseteq Bl_{p(0,0)} \mathbb{A}^2$ τέτοιες ώστε ο $\tau : V \longrightarrow W$ να είναι ισομορφισμός, με $\tau(E) = \mathbb{P}^1 \times (0, 0)$.

Πρώτα παρατηρούμε ότι τα ξ_1, ξ_2 μηδενίζονται στο E και άρα $\tau(E) \mapsto \mathbb{P}^1 \times (0, 0)$. Επίσης

$$\left(\frac{\xi_1}{\xi_0}, \frac{\xi_2}{\xi_1}\right) \mapsto \left(x, \frac{y}{x}\right) \text{ και } \left(\frac{\xi_2}{\xi_0}, \frac{\xi_1}{\xi_2}\right) \mapsto \left(y, \frac{x}{y}\right)$$

με τις αριστερά εκφράσεις κάθε σχέσης να είναι τοπικές συντεταγμένες στο E και τις δεξιά στο $\mathbb{P}^1$ ($\cong \mathbb{P}^1 \times (0, 0)$). Άρα ο τ είναι E -τοπικός ισομορφισμός.

Δεδομένου ότι δουλεύουμε στην αναλυτική κατηγορία με καλές υποθέσεις (όπως Hausdorff και $\mathbb{P}^1 \times (0, 0)$ locally compact) ο $\tau: E \rightarrow \mathbb{P}^1 \times (0, 0)$ είναι covering map (βλ [6, Lemma 2]) και τότε αφού το $\mathbb{P}^1$ είναι simply connected, ο $\tau|_E$ είναι ισομορφισμός.

Θέτουμε $V_0 = \bigcup_{e \in E} V_e$, με V_e ανοιχτή περιοχή του e όπου ο τ είναι ισομορφισμός. Χρησιμοποιώντας ότι το $\bar{V}_0$ είναι συμπαγές, εύκολα δείχνει κανείς ότι το υποσύνολο του $\bar{V}_0$

$$\mathcal{S} := \{z \in \bar{V}_0 \mid \exists z' \neq z \in \bar{V}_0 \text{ με } \tau(z) = \tau(z')\}$$

που ο τ δεν είναι 1-1, είναι κλειστό. Άρα θέτοντας $V = V_0 - \mathcal{S}$ και $W = \tau(V)$ έχουμε το ζητούμενο.

Βήμα 2 Υπάρχει analytic περιοχή $(0, 0) \in U \subseteq \mathbb{A}^2$ με τον $\eta: \eta^{-1}(U) \rightarrow U$ να είναι ισομορφισμός.

Επιλέγουμε U περιοχή του $(0, 0)$ τέτοια ώστε $U \subseteq \nu(W)$. Τότε από το προηγούμενο βήμα, ο η περιορισμένος στο U είναι 1-1 και επί ενός normal variety και συνεπώς ισομορφισμός (βλ. [7, σελ. 11, 1.13]).

Ισχυρισμός: $H^1(S, \mathcal{O}_S(A + iE)) = 0$, για $k - i > -2$. Πιο συγκεκριμένα, εφόσον ο A είναι ample, $k = A \cdot E \geq 1$ και τότε έχουμε

$$\begin{aligned} H^1(S, \mathcal{O}_S(A + (k-1)E)) &= H^1(S, \mathcal{O}_S(L - E)) = 0, \\ H^1(S, \mathcal{O}_S(A + (k-2)E)) &= H^1(S, \mathcal{O}_S(L - 2E)) = 0. \end{aligned}$$

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας, από Serre's Vanishing Theorem, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $H^1(S, \mathcal{O}_S(A)) = 0$ (άλλως τον αντικαθιστούμε με ένα επαρκώς μεγάλο πολλαπλάσιο του). Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο i .

Για $i = 0$, ισχύει προφανώς από την επιλογή του A .

Για $i > 0$, θεωρούμε τη σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S(A + (i-1)E) \rightarrow \mathcal{O}_S(A + iE) \rightarrow \mathcal{O}_E(A + iE) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k-i) \rightarrow 0.$$

και την επαγόμενη στη συνολογία

$$\dots \rightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S(A + (i-1)E)) \rightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S(A + iE)) \rightarrow H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k-i))$$

Από την επαγωγική υπόθεση, το αριστερά κομμάτι είναι 0. Επίσης από 2.3.1 έχουμε

$$H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k-i)) = H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2-k+i)) = 0 \text{ για } -2-k+i < 0$$

και άρα και ο ενδιάμεσος όρος είναι μηδέν. $\square$

3.4 Παραγοντοποίηση των Birational maps

Στην παρούσα παράγραφο, αποδεικνύουμε ότι οι παραπάνω κατασκευές των blow up και blow down, είναι ακριβώς τα δομικά συστατικά όλων των birational maps. Ξεκινάμε την παράγραφο με δύο λήμματα.

Λήμμα 3.4.1. *Ας είναι*

$$\psi: V \longrightarrow W \text{ και } \phi: V \longrightarrow S$$

δύο επιμορφισμοί μεταξύ normal projective varieties με την ιδιότητα

$$\psi_*\mathcal{O}_V = \mathcal{O}_W \text{ και } \phi_*\mathcal{O}_V = \mathcal{O}_S.$$

Υποθέτουμε επιπλέον ότι $\phi(\psi^{-1}(p)) = pt$ για κάθε $p \in W$. Τότε υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\tau: W \longrightarrow S$ τέτοιος ώστε

$$\phi = \tau \circ \psi.$$

Απόδειξη. Θα ορίσουμε τον τ σε τρία μέρη.

Συνολοθεωρητικά

Από την υπόθεση, η απεικόνιση

$$\tau: W \longrightarrow S \quad p \mapsto \phi(\psi^{-1}(p))$$

είναι καλά ορισμένη.

Τοπολογικά

Το properness των ϕ και ψ μας δίνει άμεσα ότι οι αντίστροφες εικόνες κλειστών υποσυνόλων του S μέσω της τ είναι κλειστές και άρα η τ είναι συνεχής απεικόνιση.

Ringed space theoretically

Αν για κάποιο ανοιχτό υποσύνολο $U_S \subset S$ θέσουμε $U_W = \tau^{-1}(U_S) \subset W$, τότε εξ' ορισμού της τ ισχύει

$$\phi^{-1}(U_S) = \psi^{-1}(U_W).$$

Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \Gamma(U_S, \mathcal{O}_S) &\xrightarrow{\phi_*} \Gamma(U_S, \phi_*\mathcal{O}_V) = \Gamma(\phi^{-1}(U_S), \mathcal{O}_V) = \\ &= \Gamma(\psi^{-1}(U_W), \mathcal{O}_V) = \Gamma(U_W, \psi_*\mathcal{O}_V) \xrightarrow{\psi_*^{-1}} \Gamma(U_W, \mathcal{O}_W) \end{aligned}$$

και άρα έναν ισομορφισμό

$$\phi_*\psi_*^{-1} = \tau_*: \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{O}_W$$

Η μοναδικότητα του τ είναι εξ' ορισμού αυτού. □

Παρατήρηση 3.4.2. Στην παραπάνω απόδειξη, στην πραγματικότητα χρησιμοποιήσαμε μόνο το properness των απεικονίσεων (και όχι το projectivity).

Λήμμα 3.4.3. Έστω $\phi: S \rightarrow T$ ένας birational μορφισμός μεταξύ nonsingular projective επιφανειών. Τότε

(i) ισχύει η παρακάτω σχέση μεταξύ των canonical classes των S και T

$$K_S = \phi^* K_T + R,$$

όπου R είναι **effective** divisor με support ίδιο με τον exceptional divisor του ϕ .

(ii) $R^2 < 0$.

Απόδειξη. Έστω $s \in S$ και $\phi(s) = t \in T$. Επιλέγουμε x_1, x_2 και y_1, y_2 τοπικές συντεταγμένες περί τα s και t αντίστοιχα. Τότε έχουμε

$$\phi^*(dy_1 \wedge dy_2) = \text{Jac}\left(\frac{y_1, y_2}{x_1, x_2}\right) \cdot dx_1 \wedge dx_2$$

και άρα

$$K_S = \phi^* K_T + \text{div}\left(\text{Jac}\left(\frac{y_1, y_2}{x_1, x_2}\right)\right),$$

όπου η Jacobian είναι αντιστρέψιμη μακριά από τον exceptional divisor του ϕ , και μηδέν (με κάποιες πολλαπλότητες) πάνω στο support του exceptional divisor, διότι άλλως, η ϕ θα ήταν τοπικά αντιστρέψιμη ενώ κάνει contract καμπύλες.

Όσο για το (ii) χρησιμοποιούμε το ότι ο intersection matrix $I = (E_i \cdot E_j)$ ενός exceptional divisor είναι negative definite (βλ [2]).

Τότε

$$R^2 = (r_i) \cdot I \cdot (r_i)^T < 0,$$

όπου (r_i) ο πίνακας γραμμή με τον συντελεστή του E_i στον R , στη θέση i . □

Θεώρημα 3.4.4 (Factorization of Birational Morphisms). Έστω $f: S \rightarrow T$ ένας birational μορφισμός μεταξύ nonsingular projective επιφανειών. Τότε ο f είναι σύνθεση blow-downs, πιο συγκεκριμένα, υπάρχει μία πεπερασμένη ακολουθία blow downs

$$\mu_i: S_i \rightarrow S_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

τέτοια ώστε $S_0 = S$ και $S_{n+1} = T$ και $f = \mu_n \circ \mu_{n-1} \circ \dots \circ \mu_0$.

Απόδειξη. Αρχικά υποθέτουμε ότι ο f δεν είναι ισομορφισμός, διότι άλλως δεν υπάρχει κάτι να αποδείξουμε. Τότε από το Λήμμα 3.4.3 έχουμε τη σχέση

$$K_S = f^* K_T + R,$$

με R effective divisor και $R^2 < 0$. Τότε για κάποιο irreducible component E του R , έχουμε

$$0 > E \cdot R = E(f^* K_T + R) = E \cdot K_S \text{ και } E^2 < 0,$$

και άρα από το λήμμα 3.3.3 η E είναι (-1) -καμπύλη. Έστω $\mu: S \rightarrow S_1$ το blow down αυτής.

Ισχυρισμός: Οι birational μορφισμοί f και μ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Λήμματος 3.4.1.

Απόδειξη: Αρχικά, το $f^*(\mathcal{O}_T)$ είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο $\mathcal{O}_S$ -module. Επίσης από το non-singularity της S , κάθε δακτύλιος $\Gamma(U, \mathcal{O}_S)$ είναι αθέραιο κλειστός. Τέλος το

birationality της f μας λέει ότι οι δακτύλιοι $\Gamma(U, \mathcal{O}_S)$ και $\Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{O}_T)$ έχουν το ίδιο σώμα πηλίκων. Όλα τα παραπάνω μας δίνουν $f_*\mathcal{O}_S = \mathcal{O}_T$ και αντίστοιχα για τον μ .

Οι υπόλοιπες υποθέσεις του λήμματος 3.4.1 είναι τετριμμένες, αρκεί να περιορίσουμε τον f στο $S \setminus \text{supp}(R - E) = f^{-1}(T \setminus \{\text{κάποια σημεία}\})$. ■

Εφαρμόζοντας τώρα το Λήμμα 3.4.1 για τους $f|_{S-(R-E)}$ και μ και δεδομένου ότι properness είναι ιδιότητα local on the target καθώς και την Παρατήρηση 3.4.2, παίρνουμε ότι υπάρχει κατάλληλος birational μορφισμός f_1 , έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & T \\ & \searrow \mu & \nearrow f_1 \\ & S_1 & \end{array} .$$

Αν ο f_1 είναι ισομορφισμός, τότε έχουμε τελειώσει. Αν όχι επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία με τον f_1 στη θέση του f . Τότε σε κάποιο σημείο, ο f_n θα είναι αναγκαστικά ισομορφισμός (και τότε θα έχουμε το ζητούμενο), διότι άλλως θα είχαμε μία άπειρη ακολουθία από blow downs ξεκινώντας με την S , που δεν μπορεί να συμβεί από την Πρόταση 3.2.4. □

Πριν προχωρήσουμε στο παρακάτω θεώρημα πρέπει να κάνουμε μία παρατήρηση.

Παρατήρηση 3.4.5. Έστω $\pi: S \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ ένας rational map. Τότε αυτός δίνεται από $n+1$ sections κάποιου line bundle και locally από $n+1$ regular functions. Τότε το locus που δεν ορίζεται ο π έχει συνδιάσταση τουλάχιστον 2, διότι αυτό ορίζεται από $n+1$ regular functions. Για μία πιο λεπτομερή απόδειξη βλέπε [21, σελ. 109, 2.12].

Θεώρημα 3.4.6 (Elimination of Indeterminacy). Έστω $\pi: S \dashrightarrow T$ ένας rational map μεταξύ nonsingular projective επιφανειών. Τότε υπάρχει μία ακολουθία από blow ups

$$\mu_i: S_{i+1} \longrightarrow S_i, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

με $S_0 = S$, και ένας μορφισμός π' τέτοιος ώστε

$$\pi \circ \mu_0 \circ \dots \circ \mu_n = \pi'.$$

Απόδειξη. Έστω ότι $\pi = \Phi|_L$ για κάποιον divisor L με κάποια, έστω n το πλήθος, base points. Τότε παρατηρούμε ότι $L^2 \geq n$, καθώς όλα τα στοιχεία του $|H|$ τέμνονται στα, n το πλήθος, basepoints. Επιλέγουμε ένα base point του $|L|$ και το blow up της S σε αυτό το σημείο

$$\mu_0: S_1 \longrightarrow S.$$

Ορίζουμε το rational map $\pi_1: S_1 \dashrightarrow T$ ως $\pi \circ \mu_0$, όπου αυτή η σύνθεση ορίζεται και επεκτείνουμε στο domain του. Τότε έχουμε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} & S_1 & \\ \mu_0 \swarrow & & \searrow \pi_1 \\ S & \dashrightarrow \pi & T. \end{array}$$

Για τον divisor L , ισχύει

$$L = \pi^* H, \quad \text{για κάποιο hyperplane divisor } H \subset T$$

και τότε από την μεταθετικότητα του διαγράμματος παίρνουμε

$$\pi_1^* H = \mu_0^* L = L' + kE,$$

όπου L' το strict transform της L .

Εύκολα βλέπει κανείς ότι το linear system $|L' + kE|$ έχει base component το kE και συνεπώς το rational map π_1 δίνεται από τον divisor

$$\tilde{L} = L' + kE - kE = \mu_0^* L - kE$$

με την ιδιότητα $\tilde{L}^2 = L^2 - k$.

Αν ο rational map π_1 είναι μορφισμός, τότε έχουμε τελειώσει. Αν δεν είναι τότε επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία με τον π_1 στη θέση του π . Η παραπάνω διαδικασία πρέπει να τερματίσει κάπου, καθώς αν σε κάποιο βήμα ο αντίστοιχος divisor έχει μη-θετική αυτοτομή τότε σίγουρα δεν έχει base points και τότε δίνει μορφισμό. $\square$

Με βάση τις δύο παραπάνω προτάσεις παίρνουμε το εξής συμπέρασμα.

Πόρισμα 3.4.7 (Factorization of Birational Maps). Έστω $\phi: S_1 \dashrightarrow S_2$ ένας birational map μεταξύ nonsingular projective επιφανειών. Τότε αυτός παραγοντοποιείται ως σύνθεση blow ups και blow downs **με αυτή τη σειρά**.

Πόρισμα 3.4.8. Έστω S_1, S_2 δύο nonsingular projective επιφάνειες και

$$\phi: S_1 \dashrightarrow S_2$$

ένας birational map. Τότε υπάρχουν ισομορφισμοί

$$\begin{aligned} H^i(S_1, \mathcal{O}_{S_1}) &\cong H^i(S_2, \mathcal{O}_{S_2}), \quad i \geq 0, \\ H^0(S_1, \mathcal{O}_{S_1}(mK_{S_1})) &\cong H^0(S_2, \mathcal{O}_{S_2}(mK_{S_2})), \quad m \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

οι οποίοι επάγονται από τον ϕ .

Απόδειξη. Σύμφωνα με το παραπάνω πόρισμα, αρκεί ναδειχθεί για blow ups. Για τον πρώτο ισομορφισμό παραπέμπουμε στο [11, σελ. 387, 3.4]. Όσο για το δεύτερο έχουμε

$$\begin{aligned} H^0(S_1, \mathcal{O}_{S_1}(mK_{S_1})) &= H^0(S_1, \mathcal{O}_{S_1}(m(\phi^* K_{S_2} + E))) \\ &\cong H^0(S_1, \mathcal{O}_{S_1}(\phi^*(mK_{S_2}))) = H^0(S_2, \mathcal{O}_{S_2}(mK_{S_2})). \end{aligned} \quad \square$$

3.5 Ο Kleiman-Mori cone και οι Ample και nef cones

Στο σύνολο των divisors σε μία projective επιφάνεια, θεωρούμε την εξής σχέση ισοδυναμίας

$$D_1 \equiv D_2 \Leftrightarrow D_1 \cdot C = D_2 \cdot C,$$

για κάθε καμπύλη C . Ορίζουμε

$$N^1(S)_{\mathbb{Z}} = \text{Div} S / \equiv .$$

Όμοια ορίζεται και η δυϊκή έννοια για $N_1(S)_{\mathbb{Z}}$ για 1-cycles, που στις επιφάνειες ταυτίζονται.

Εν συνεχεία ορίζουμε τους $\mathbb{R}$ -διανυσματικούς χώρους

$$N^1(S) = N^1(S)_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \text{ και } N_1(S) = N_1(S)_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$$

και επεκτείνουμε το intersection pairing με $\mathbb{R}$ -γραμμικότητα στους παραπάνω χώρους. Ορίζουμε το **Picard number** $\rho(S)$ μιας επιφάνειας να είναι η διάσταση $\dim_{\mathbb{R}} N_1(S)$.

Παρατήρηση 3.5.1. Από τον 4^ο κατά σειρά ισοδύναμο ορισμό των *intesection numbers* στην παράγραφο 3.1 βλέπουμε ότι η ομολογική ισοδυναμία συνεπάγεται και την αριθμητική ισοδυναμία, το οποίο μας οδηγεί στο ακόλουθο συμπέρασμα.

Πόρισμα 3.5.2. Το Picard number $\rho(S)$ είναι πεπερασμένο καθώς

$$\rho(S) = \dim_{\mathbb{R}} N_1(S) \leq \dim_{\mathbb{R}} H_2(S, \mathbb{R}) < \infty.$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει πάνω από κάθε σώμα και είναι γνωστό στη βιβλιογραφία ως Neron-Severi Theorem.

Ορισμός 3.5.3. Ορίζουμε τον *Kleiman-Mori cone* ως

$$NE(S) := \left\{ C \in N_1(S) \mid C = \sum r_i C_i, r_i \in \mathbb{R}_{\geq 0} \right\},$$

ο οποίος είναι κώνος με την έννοια της κυρτής γεωμετρίας στον πεπερασμένης διάστασης $\mathbb{R}$ -διανυσματικό χώρο $N_1(S)$.

Στη συνέχεια εισαγάγουμε την έννοια του nef divisor και χαρακτηρίζουμε τους ample divisors με βάση τις αριθμητικές τους ιδιότητες.

Ορισμός 3.5.4. Ένας divisor L σε μία nonsingular projective επιφάνεια S καλείτε *nef* αν

$$L \cdot C \geq 0, \text{ για κάθε καμπύλη } C \subset S.$$

Θεώρημα 3.5.5 (Kleiman's Criterion for Ampleness). Ένας divisor L στην S είναι *ample* αν και μόνον αν

$$L > 0 \text{ στον κλειστό κώνο } \overline{NE(S)} \setminus 0.$$

Απόδειξη. Βλέπε [14]. □

Θεώρημα 3.5.6 (Nakai-Moishezon Criterion for Ampleness). Ένας divisor L στην S είναι *ample* αν και μόνον αν

$$L^2 > 0 \text{ και } L \cdot C > 0,$$

για κάθε καμπύλη $C \subset S$.

Απόδειξη. Βλέπε [11, σελ. 365, 1.10]. □

Θεώρημα 3.5.7 (Hodge index theorem). *Αν ένας divisor E στην S έχει intersection $D \cdot E = 0$ με κάποιον divisor D για τον οποίο ισχύει $D^2 > 0$, τότε $E^2 < 0$.*

Απόδειξη. Βλέπε [11, σελ. 364 1.9]. $\square$

Στον $\mathbb{R}$ -διανυσματικό χώρο $N^1(S)$ θεωρούμε τον κώνο που παράγεται από τους θετικούς γραμμικούς συνδυασμούς ample divisors. Τότε από το Kleiman's Criterion for Ampleness, εύκολα βλέπει κανείς ότι όλα τα στοιχεία του παραπάνω κώνου είναι επίσης $(\mathbb{R})$ -ample divisors.

Πρόταση 3.5.8. *Για μια επιφάνεια S , ο ample cone είναι ανοιχτός κώνος και η κλειστότητα αυτού είναι ο κώνος που παράγεται από τους nef divisors.*

Απόδειξη. Εφοδιάζουμε τον $N^1(S)$ με οποιαδήποτε νόρμα $\|\cdot\|$. Θα δειχθεί ότι οι nef divisors είναι ακριβώς όρια ample divisors

Έστω $(A_n)_{\mathbb{N}}$ ακολουθία ample divisors με $A_n \rightarrow L$. Κάθε καμπύλη $C \in N_1(S)$ ορίζει ένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές επί του $N^1(S)$ μέσω του $K \mapsto K \cdot C$. Αυτό σημαίνει ότι

$$A_n \rightarrow L \Rightarrow A_n \cdot C \rightarrow L \cdot C,$$

με $A_n \cdot C > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και τότε

$$L \cdot C \geq 0,$$

για κάθε καμπύλη $C \subset S$. Δηλαδή ο L είναι nef.

Αν τώρα ο L είναι τυχόν nef divisor, σταθεροποιούμε έναν ample divisor A . Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ οι divisors

$$A_n = L + \frac{1}{n}A$$

είναι ample από το Nakai-Moishezon Criterion for Ampleness και προφανώς $A_n \rightarrow L$. $\square$

Παρατήρηση 3.5.9. *Στην περίπτωση των επιφανειών, οι κώνοι των ample divisors και των effective 1-cycles ταυτίζονται.*

3.6 Extremal contractions

Όπως είδαμε νωρίτερα, στην Παράγραφο 3.4, τα blow ups και blow downs είναι ακριβώς τα δομικά συστατικά για κάθε birational map. Επίσης το Castelnuovo's Contraction Theorem, λέει πως αν υπάρχει κάποια (-1) -καμπύλη τότε και μόνον τότε υπάρχει και το blow down αυτής.

Θα θέλαμε να αναδιατυπώσουμε το ερώτημα: “Υπάρχουν (-1) -καμπύλες;” σε κάτι που, η απάντηση, θα μας δίνει μια πιο global πληροφορία, πέρα από την ύπαρξη μίας κάποιας καμπύλης. Ιδανικά όμως, θα θέλαμε να κρατήσουμε μέρος αυτής της δομικής ιδιότητας των blow ups/downs.

Τη λύση σε αυτό το πρόβλημα δίνουν τα extremal contractions, αναδιατυπώνοντας την ερώτηση στην: “Είναι ο canonical divisor nef;” Αν όχι τότε υπάρχει ένα extremal contraction που κάνει contract κάποιες από τις “προβληματικές” ($K_S \cdot - < 0$) καμπύλες και μάλιστα όσο το δυνατόν λιγότερες, ώστε να είναι δομικό στοιχείο.

Τέλος παρατηρούμε ότι η αναδιατύπωση της ερώτησης, έρχεται αρκετά φυσιολογικά δεδομένου του Λήμματος 3.3.3, που μας λέει πως οι προβληματικές με την προηγούμενη έννοια καμπύλες, είναι προβληματικές και με αυτή την έννοια.

Θεώρημα 3.6.1 (Extremal Contraction). Έστω S nonsingular, projective επιφάνεια με K_S όχι nef. Τότε υπάρχει μορφισμός

$$\phi: S \longrightarrow W$$

που καλείτε *extremal contraction* με τις εξής ιδιότητες

- (i) ο ϕ δεν είναι ισομορφισμός,
- (ii) αν $C \subset S$ καμπύλη, τότε

$$\phi(C) = pt \Rightarrow K_S \cdot C < 0,$$

- (iii) όλες οι καμπύλες που γίνονται contract από τον ϕ είναι numerically proportional, δηλαδή

$$\phi(C) = pt \text{ και } \phi(D) = pt \Rightarrow D = qC \text{ στον } N_1(S), \text{ για κάποιο } q \in \mathbb{Q},$$

- (iv) ο ϕ έχει connected fibres και η W είναι normal projective.

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος, θα αποδείξουμε μια πολύ χρήσιμη πρόταση σχετικά με την Stein παραγοντοποίηση ενός μορφισμού.

Θεώρημα 3.6.2. Έστω S normal projective επιφάνεια και L divisor τέτοιος ώστε το complete linear system $|L|$ να είναι base point free για επαρκώς μεγάλο l . Ας είναι

$$\Phi_{|L|}: S \xrightarrow{\Phi} W \xrightarrow{\Psi} W'$$

το **Stein factorization** του $\Phi_{|L|}$ (βλ [11, σελ. 280, 11.5]).

Τότε ισχύουν τα εξής:

- (i) $\Phi_* \mathcal{O}_S = \mathcal{O}_W$
- (ii) $L \cdot C = 0$, όπου C καμπύλη στην $S \Leftrightarrow C$ είναι υποσύνολο κάποιου fibre του Φ .
- (iii) Ο Φ έχει connected fibres και η W είναι normal και projective
- (iv) $L = \Phi^* H$, όπου H ample divisor στην W
- (v) $\Phi = \Phi_{|lL|}$ για αρκετά μεγάλο l

Απόδειξη. (i) Εκ κατασκευής του Stein factorization ισχύει:

$$W = \underline{\text{Spec}} \Phi_{|L|*} \mathcal{O}_S \longrightarrow W'.$$

Για κατάλληλο ανοιχτό affine κάλυμμα $\{U_i\}_I$ του W , έχουμε

$$\begin{aligned} \Gamma(U, \mathcal{O}_W) &:= \Gamma(U, \Phi_{|L|*} \mathcal{O}_S) := \Gamma(\Phi_{|L|}^{-1}(U), \mathcal{O}_S) \\ &= \Gamma(\Phi^{-1}(U), \mathcal{O}_S) := \Gamma(U, \Phi_* \mathcal{O}_S), \end{aligned}$$

δηλαδή το ζητούμενο.

- (ii) Το ζητούμενο είναι προφανές δεδομένου ότι ο Ψ είναι finite morphism και άρα οι καμπύλες που γίνονται contract από τον $\Phi_{|L|}$ γίνονται στην πραγματικότητα από τον Φ .

- (iii) Το ότι ο Φ έχει connected fibres είναι άμεσο από τα (i) και Zariski's Main Theorem (βλ [11, σελ. 279, 11.3]).
 Όσο για το normality, τα [22, Tag 03GX, 36.45.4] και [22, Tag 0BAK, 28.50.13] δίνουν αντίστοιχα ότι το W είναι το normalization της W' μέσα στο S και ότι αν η S είναι normal τότε και κάθε normalization σε αυτή είναι επίσης normal.
- (iv) Επιλέγουμε $p, q \in \mathbb{N}$ επαρκώς μεγάλα με $(p, q) = 1$, καθώς και $r, s \in \mathbb{Z}$ τέτοια ώστε $rp + sq = 1$. Έστω ότι οι Stein παραγοντοποιήσεις των $\Phi_{|pL|}$ και $\Phi_{|qL|}$ είναι οι

$$\begin{aligned} S &\xrightarrow{\Phi} W \xrightarrow{\Psi_p} W_p \\ S &\xrightarrow{\Phi'} W' \xrightarrow{\Psi_q} W_q \end{aligned}$$

Θεωρούμε δεδομένο ότι το γεγονός ότι $\Phi = \Phi'$ και $W = W'$ (μέχρις ισομορφισμού), το οποίο και θα αποδείξουμε στην επόμενη παρατήρηση. Σταθεροποιούμε ample divisors H_p και H_q των W_p και W_q αντίστοιχα, με την ιδιότητα $pL = \Phi_{|pL|}^* H_p$ και $qL = \Phi_{|qL|}^* H_q$. Τότε

$$\begin{aligned} L &= (rp + sq)L \\ &= r\Phi_{|pL|}^* H_p + s\Phi_{|qL|}^* H_q \\ &= \Phi^* (r\Psi_p^* H_p + s\Psi_q^* H_q) = \Phi^* H \end{aligned}$$

Άρα μένει να δειχθεί ότι ο $H = r\Psi_p^* H_p + s\Psi_q^* H_q$ είναι ample divisor. Ξεχωρίζουμε τις περιπτώσεις

$$\dim W = 2$$

Τότε εύκολα βλέπει κανείς ότι για κάθε καμπύλη C της W , υπάρχει καμπύλη C' της S με $\Phi_*(C') = C$ και τότε

$$H \cdot C = H \cdot \Phi_*(C') = \Phi^* H \cdot C' = L \cdot C' > 0$$

που σημαίνει ότι ο H είναι ample.

$$\dim W = 1$$

Γνωρίζουμε ότι pullback ample divisor είναι πάντα nef.

Αν για τον βαθμό του H ισχύει $\deg H < 0$ τότε ο $-H$ είναι ample στην W και τότε ο $-L = \Phi^*(-H)$ είναι nef, που είναι αντίφαση.

Αν $\deg H = 0$ τότε

$$L = \Phi^* H = \sum_I F_i - \sum_J F_j, \quad \#I = \#J$$

Τότε, καθώς τα fibres είναι algebraically άρα και numerically equivalent, ο L είναι αριθμητικά τετριμμένος που αντιβαίνει στην υπόθεση $\dim W = 1$.

- (v) Για αρκετά μεγάλο l ώστε ο lH του (iv) να είναι very ample, έχουμε ότι $\Psi = \Psi_{|lL|}$ είναι ισομορφισμός. $\square$

Παρατήρηση 3.6.3. Οι ιδιότητες (i) και (ii) ή (ii) και (iii) είναι αρκετές ώστε να χαρακτηρίσουν πλήρως τη ringed space δομή του W , άρα και τον Φ ως προς ισομορφισμό.

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι και οι τρεις ιδιότητες μαζί, χαρακτηρίζουν πλήρως τον W ως εξής:

Συνολοθεωρητικά

$W = S/\sim$, όπου $P \sim Q \Leftrightarrow$ Υπάρχει ακολουθία καμπυλών C_n , $n = 1, 2, \dots, k$, του S για την οποία να ισχύουν: $P \in C_1$, $Q \in C_k$, $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$ και $L \cdot C_i = 0$.

Τοπολογικά

$U \subset W$ ανοιχτό $\Leftrightarrow \Phi^{-1}(U) \subset S$ ανοιχτό.

Ringed space theoretically

$\mathcal{O}_W = \Phi_*(\mathcal{O}_S)$.

Υποθέτουμε τις (i) και (ii) Τότε η (iii) προκύπτει από το Zariski's Main Theorem.

Υποθέτουμε τις (ii) και (iii) Θεωρούμε το Stein factorization της Φ

$$\Phi: S \xrightarrow{\Phi'} S' \xrightarrow{\Pi} W.$$

Όμως εφόσον ο Φ έχει connected fibres, ο Π είναι, ένα προς ένα μορφισμός, επί ενός normal variety και άρα ισομορφισμός (βλ. [7, σελ. 11, 1.13]). Αυτό σημαίνει:

$$\Phi_*\mathcal{O}_S = (\Pi \circ \Phi')_*\mathcal{O}_S := \Pi_*\mathcal{O}_{S'} = \mathcal{O}_W. \quad \square$$

Λήμμα 3.6.4. Έστω $\Phi: S \rightarrow V$ μορφισμός με connected fibres από μια nonsingular επιφάνεια σε μία nonsingular καμπύλη και έστω $D \in \text{Div}(S)$ με $\text{supp}(D) \subseteq \Phi^{-1}(p) = F$. Τότε:

- (i) $D^2 \leq 0$
- (ii) $D^2 = 0 \Leftrightarrow$ ο D είναι ρητός γραμμικός συνδυασμός ολόκληρων fibres.

Απόδειξη. (i) Έστω $H \in \text{Div}(V)$ very ample. Τότε:

$$\Phi^*H \cdot D = 0 \text{ και } (\Phi^*H)^2 > 0.$$

Από Hodge index theorem έχουμε το ζητούμενο.

- (ii) Έστω ότι $D = \sum_i q_i F_i$. Όλα τα fibres είναι algebraically άρα και numerically equivalent και ανά δύο έχουν μηδενική τομή, άρα

$$D^2 = \sum_{i,j} q_i q_j F_i \cdot F_j = \sum_i q_i^2 F_i^2 = \sum_i q_i^2 F_i \cdot F_j = 0$$

Έστω ότι $D^2 = 0$ και ας είναι $D = \sum_{i,j} m_{ij} G_{ij}$, όπου $F_i = \sum_j r_{ij} G_{ij}$ fibres. Θέλουμε να δείξουμε ότι $D = \sum d_i F_i$ με $d_i \in \mathbb{Q}$. Θέτουμε $a = \max\{\frac{r_{ij}}{m_{ij}}\}$. Έστω ότι ο D δεν είναι ρητός συνδυασμός των F_i . Θέτουμε $\sum a_i F_i = F$ και τότε ο $D + aF$ είναι μη μηδενικός effective divisor με $\text{supp} D + aF \subsetneq \text{supp} F$. Έστω G irreducible component του $F - (D + aF)$. Τότε έχουμε

$$(D + aF)^2 = D^2 + 2aD \cdot F + a^2 F^2 = D^2 = 0$$

διότι $\text{supp}D \subseteq \text{supp}F$ και $F^2 = 0$.

Από τη μία από το (i) έχουμε

$$(D + aF + bG)^2 \leq 0, \forall b \in \mathbb{R},$$

ενώ από την άλλη

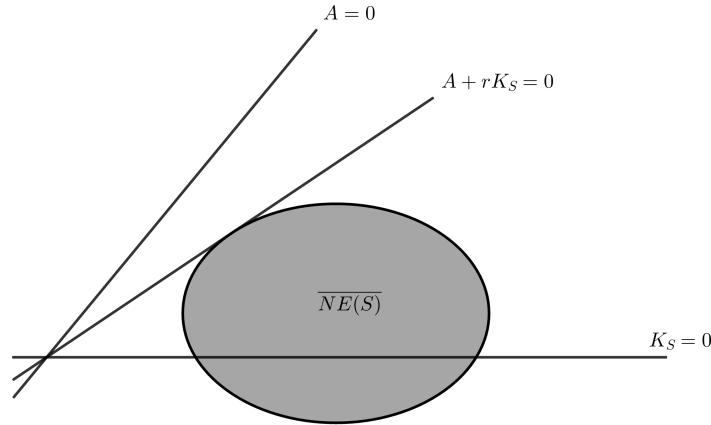
$$(D + aF + bG)^2 = (D + aF)^2 + 2b(D + aF)G + b^2G^2 > 0$$

για κατάλληλο $0 < b \ll 1$, το οποίο μας δίνει αντίφαση. $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.6.1. Έστω A ample divisor. Θέτουμε

$$r = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid A + tK_S \text{ nef}\} \text{ και } L = A + rK_S.$$

Σκοπός μας είναι να θεωρήσουμε έναν κατάλληλο γραμμικό συνδυασμό των υπερεπιπέδων $[K_S = 0]$ και $[A = 0]$, ώστε το νέο υπερεπίπεδο να εφάπτεται στον κώνο σε κάποιο σημείο z με $K_S \cdot z < 0$. Τότε όπως και στην απόδειξη του Castelnuovo's Contraction Theorem ο αντίστοιχος μορφισμός θα κάνει contract την καμπύλη που αντιστοιχεί στο z . Σχηματικά, τα παραπάνω, φαίνονται στη επόμενη εικόνα, που απεικονίζει μια κάτοψη ενός τρισδιάστατου κώνου.



Θεωρούμε δεδομένα τα εξής, τα οποία θα αποδειχθούν μετά την ολοκλήρωση αυτής της απόδειξης:

- $r \in \mathbb{Q}$, (Rationality theorem) και
- lL base point free $\mathbb{Z}$ -divisor για επαρκώς μεγάλο και διαίρεσιμο l (Base point freeness theorem).

Θεωρούμε τον $\Phi_{|lL|}$ και ας είναι $\Phi: S \rightarrow V$ το connected fibres κομμάτι του Stein factorization όπως στην Πρόταση 3.6.2.

Περίπτωση 1: $\dim V = 2$.

Έστω $E \subseteq S$ καμπύλη που γίνεται contract από τον Φ (αυτή υπάρχει διότι από [13, σελ. 80, 6.4.1] ο Φ είναι birational μορφισμός). Έστω ακόμη ότι $D = \Phi^*H$ για κάποιον H ample divisor στην V . Τότε

$$D^2 > 0 \text{ και } D \cdot E = \Phi^*H \cdot E = H \cdot \Phi_*E = 0$$

και από το Hodge index theorem έχουμε $E^2 < 0$. Επίσης είναι

$$0 = L \cdot E = A \cdot E + rK_S \cdot E \Rightarrow K_S \cdot E < 0$$

Άρα από το Λήμμα 3.3.3 η E είναι (-1) -καμπύλη και αρκεί για τον ζητούμενο ϕ να θεωρήσουμε το blow down αυτής που προφανώς ικανοποιεί τα (i) έως (iv).

Περίπτωση 2: $\dim V = 1$.

Αν υπάρχει κάποιο reducible fibre F , τότε επιλέγουμε E irreducible component του F . Από το Λήμμα 3.6.4, $E^2 < 0$ καθώς δεν είναι ρητό πολλαπλάσιο ολόκληρων fibres και

$$L \cdot E = 0 \Rightarrow K_S \cdot E < 0.$$

Άρα από το Λήμμα 3.3.3 η E είναι (-1) -καμπύλη και πάλι επιλέγουμε ως ϕ το blow down αυτής.

Αν όλα τα fibre της Φ είναι irreducible θέτουμε $\phi = \Phi$, τότε η ϕ ικανοποιεί προφανώς τα (i), (ii) και (vi), άρα αρκεί να δειχθεί ότι ικανοποιεί και το (iii). Εφόσον όλα τα fibres είναι irreducible, όλες οι καμπύλες που γίνονται contract είναι ακριβώς τα fibres και συνεπώς είναι algebraically equivalent, άρα και numerically equivalent.

Περίπτωση 3: $\dim V = 0$.

Παρατηρούμε ότι

$$A + rK_S \equiv 0 \Rightarrow A \equiv -rK_S.$$

Αν $\rho(S) = \dim N_1(S) = 1$, τότε όλες οι καμπύλες είναι numerically equivalent και πάλι θέτουμε $\phi = \Phi$.

Αν $\rho(S) > 1$, επιλέγουμε A' ample divisor όχι numerically equivalent με τον A και ακολουθούμε τα βήματα της απόδειξης από την αρχή με τον A' στη θέση του A . Τότε σίγουρα θα καταλήξουμε σε κάποια από τις προηγούμενες υποπεριπτώσεις καθώς άλλως θα είχαμε

$$A \equiv -rK_S \equiv A',$$

το οποίο δεν μπορεί να ισχύει από την υπόθεσή μας. □

Παρατήρηση 3.6.5. Από την παραπάνω απόδειξη, εύκολα βλέπει κανείς πως αν $\phi: S \rightarrow W$ είναι ένα extremal contraction, τότε

$$\dim W = 2 \Leftrightarrow \phi: S \rightarrow W \text{ είναι το blow down μίας } (-1)\text{-καμπύλης}.$$

Το μόνο που μένει για να ολοκληρωθεί η απόδειξη του Θεωρήματος 3.6.1 είναι να δοθούν οι αποδείξεις των Rationality και Base point freeness theorems.

Θεώρημα 3.6.6 (Rationality Theorem). Έστω S nonsingular projective επιφάνεια με K_S όχι nef και A ample divisor στην S . Τότε

$$r = \sup\{t \mid A + tK_S : \text{nef}\} \in \mathbb{Q}.$$

Απόδειξη. **Περίπτωση $|kK_S| \neq \emptyset$** για κάποιο $k \in \mathbb{N}$.

Έστω $\sum_{i \in I} d_i D_i \in |kK_S|$. Τότε είναι

$$\begin{aligned} A + tK_S : \text{nef} &\Leftrightarrow (A + tK_S) \cdot C \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \left(A + t \left(\frac{1}{k} \sum d_i D_i \right) \right) \cdot C \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \left(A + t \left(\frac{1}{k} \sum d_i D_i \right) \right) \cdot D_j \geq 0, \forall j \in I, \end{aligned}$$

όπου η τρίτη ισοδυναμία ισχύει διότι αν C, C' καμπύλες στην S , με $C \cdot C' < 0$. Τότε:

$$C = C' \text{ και } |C| = \{C\}.$$

Αρκεί να θέσουμε

$$r = \min \left\{ t_j \mid A + t_j \left(\frac{1}{k} \sum d_i D_i \right) \cdot D_j = 0 \right\}$$

όπου το minimum είναι ανάμεσα από ένα πεπερασμένο πλήθος ρητών αριθμών και άρα είναι ρητός.

Παρατήρηση 3.6.7. Η υπόθεση της παραπάνω πρότασης μπορεί να ελαφρυνθεί ως εξής. Αν υπάρχει $r_0 \geq r$ ρητός τω $|k(A + r_0 K_S)| \neq \emptyset$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, τότε $r \in \mathbb{Q}$. Αρκεί να παρατηρηθεί το εξής

$$(A + rK_S) \cdot C = 0 \Rightarrow (A + r_0 K_S) \cdot C < 0 \Leftrightarrow C = D_j, j \in I$$

όπου $\sum_{i \in I} d_i D_i \in |k(A + r_0 K_S)|$.

Γενική Περίπτωση

Υποθέτουμε ότι $r \notin \mathbb{Q}$ και θεωρούμε το πολυώνυμο

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \chi(\mathcal{O}_S(xA + yK_S)) = \\ &= \frac{1}{2}(xA + yK_S - K_S)(xA + yK_S) + \chi(\mathcal{O}_S) = \\ &= \frac{1}{2}(x^2 A^2 + 2xyA \cdot K_S + y^2 K_S^2) - \frac{1}{2}(xA \cdot K_S + yK_S^2) + \chi(\mathcal{O}_S). \end{aligned}$$

Αρχικά, εφόσον ο A είναι ample, για $n \gg 0$, $P(n, 1) > 0$, άρα το P δεν είναι ταυτοτικά 0.

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι υπάρχουν άπειρα ζεύγη ακεραίων (u, v) τέτοια ώστε $\frac{u}{v} - \frac{1}{3v} < r < \frac{u}{v}$ (ή ισοδύναμα $u - \frac{1}{3} < vr < u$, όπου τότε ο ισχυρισμός φαίνεται άμεσα

από το γεγονός ότι το σύνολο $\{\text{δεκαδικό μέρος του } vr \mid r \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό στο $[0, 1]$. Σταθεροποιούμε ένα τέτοιο ζεύγος (u_0, v_0) με την ιδιότητα $xv_0 - yv_0 \nmid P(x, y)$ ή αλλιώς το $\mathbf{P}(ku_0, kv_0)$ δεν είναι ταυτοτικά 0 σαν πολυώνυμο του k .

Για $k = 1, 2, 3$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{ku_0 - 1}{kv_0} &= \frac{u_0}{v_0} - \frac{1}{kv_0} < \frac{u_0}{v_0} - \frac{1}{3v_0} < r \Rightarrow \\ A + \left(\frac{ku_0 - 1}{kv_0}\right)K_S &: \text{ ample} \Rightarrow \\ kv_0[A + \left(\frac{ku_0 - 1}{kv_0}\right)K_S] &: \text{ ample.} \end{aligned}$$

Και συνεπώς από το Kodaira Vanishing Theorem παίρνουμε ότι

$$h^i(S, \mathcal{O}_S(K_S + kv_0[A + \left(\frac{ku_0 - 1}{kv_0}\right)K_S])) = h^i(S, \mathcal{O}_S(kv_0A + ku_0K_S)) = 0$$

για $i = 1, 2$.

Από τη μία τα ομογενή πολυώνυμα $xv_0 - yu_0$ και $P(x, y)$, όντας πρωτοβάθμιο και δευτεροβάθμιο αντίστοιχα, έχουν το πολύ δύο κοινές θέσεις μηδενισμού. Συνεπώς για κάποιο $k_0 = 1, 2, 3$, $P(k_0u_0, k_0v_0) \neq 0$.

Από την άλλη, για αυτό το k_0 έχουμε

$$\begin{aligned} P(k_0u_0, k_0v_0) &= h^0(S, \mathcal{O}_S(kv_0A + ku_0K_S)) \neq 0 \Rightarrow \\ |k_0u_0A + k_0v_0K_S| &= |k_0u_0(A + \frac{k_0v_0}{k_0u_0}K_S)| \neq \emptyset \end{aligned}$$

Τέλος $\frac{k_0v_0}{k_0u_0} > r$ και άρα από την Παρατήρηση 3.6.7 παίρνουμε το ζητούμενο. $\square$

Θεώρημα 3.6.8 (Base point freeness Theorem). Έστω L nef $\mathbb{Q}$ -divisor σε μία non-singular projective επιφάνεια, της μορφής

$$L = A + rK_S, \quad r \in \mathbb{Q}_+,$$

όπου A είναι ένας ample $\mathbb{Z}$ -divisor. Τότε για $l \gg 0$, ο lL είναι base point free.

Τα επιχειρήματα της παρακάτω απόδειξης έχουν ληφθεί από το [1].

Απόδειξη. Αρχικά, παρατηρούμε ότι εφόσον ο L είναι nef, τότε είναι όριο ample divisors, που ο καθένας έχει θετική αυτοτομή, λόγω του Nakai-Moishezon Criterion for Ampleness και συνεπώς $L^2 \geq 0$.

Περίπτωση 1: $L^2 > 0$.

Αν για κάθε καμπύλη C στην S , $L \cdot C > 0$, τότε ο L είναι ample και συνεπώς base point free.

Έστω λοιπόν E καμπύλη στην S , τέτοια ώστε $E \cdot L = 0$. Από το Hodge index theorem, έχουμε ότι $E^2 < 0$ και λόγω της μορφής του L , $K_S \cdot E < 0$. Τότε από το Λήμμα 3.3.3 η E είναι (-1) -καμπύλη.

Έστω $\mu: S \rightarrow S'$ το contraction αυτής.

Ισχυρισμός:

- (i) $L = \mu^* L'$ για κάποιον nef divisor L' στην S' .
(ii) Ο L' είναι της μορφής του θεωρήματος και πιο συγκεκριμένα

$$L' = \mu_* A + r K_{S'}$$

με $\mu_* A$ ample στην S' .

Απόδειξη:

- (i) $PicS = \mu^* PicS' \oplus \mathbb{Z}E \Rightarrow L = \mu^* L' + kE$, για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$. Όμως $\mu^* D' \cdot E = 0, \forall D' \in PicS'$ και $L \cdot E = 0$, άρα $k = 0$. Το ότι ο L' είναι nef είναι προφανές.
(ii) $L' = \mu_* L = \mu_*(A + rK_S) = \mu_* A + \mu_* rK_S = \mu_* A + rK_{S'}$.
Άρα αρκεί να δειχθεί ότι ο $A' = \mu_* A$ είναι ample ή αλλιώς ότι ο A' είναι θετικός στον $\overline{NE}(S')$. Έστω $C' \in \overline{NE}(S')$ και $\{C'_n\}_{\mathbb{N}} \subset \overline{NE}(S')$ τέτοια ώστε $C'_n \rightarrow C'$.
Τα σύνολα $\{\mu_*(C'_n)\}_{\mathbb{N}}$ και $\{A\}$ είναι συμπαγή με κενή τομή στον μετρικό χώρο $N^1(S)$ και άρα έχουν θετική απόσταση, έστω d . Τότε

$$\mu_* A \cdot C'_n = A \cdot \mu_*(C'_n) \geq d > 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu_* A \cdot C' > 0 \quad \blacksquare$$

Λόγω του ισχυρισμού τα L', A', S' ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος, άρα πάλι, είτε ο L' είναι ample, είτε υπάρχει μία (-1) -καμπύλη E' στην S' . Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία, σε κάθε βήμα είτε ο $L^{(n)}$ θα είναι ample, είτε θα μπορούμε να κάνουμε κάποια καμπύλη blow-down. Εφόσον όμως δεν μπορούμε να κάνουμε άπειρες καμπύλες blow-down (καθώς το 2^ο Betti number πέφτει κατά ένα κάθε φορά, από την Πρόταση 3.2.4), σε κάποιο βήμα ο $L^{(n)}$ θα είναι ample πόσο μάλλον base point free και τότε

$$L^{(n)} \text{ base point free} \Rightarrow L^{(n-1)} \text{ base point free} \Rightarrow \dots \Rightarrow L \text{ base point free}$$

Περίπτωση 2: $L^2 = 0$ και $L \neq 0$.

Ισχυρισμός: $L \cdot K_S < 0$.

Απόδειξη: Αρκεί να δειχθεί ότι $L \cdot A > 0$. Επιλέγουμε D καμπύλη τέτοια ώστε $L \cdot D > 0$ και $h \gg 0$ τέτοιο ώστε $|hA - D| \neq \emptyset$, τότε

$$hA \cdot L = L((hA - D) + D) = (\geq 0) + (> 0) > 0. \quad \blacksquare$$

Για $l \gg 0$, ο divisor

$$lL - K_S = lL + \frac{1}{r}A - \frac{1}{r}L = \frac{1}{r}A + \frac{lr-1}{r}L$$

είναι ample ως άθροισμα ample και nef και άρα από Kodaira Vanishing Theorem, $h^i(S, \mathcal{O}_S(lL - K_S + K_S)) = h^i(S, \mathcal{O}_S(lL)) = 0$ για $i = 1, 2$. Το Θεώρημα Riemann-Roch μας δίνει

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{O}_S(lL)) &= \frac{1}{2}(lL - K_S)lL + \chi(\mathcal{O}_S) \Rightarrow \\ h^0(S, \mathcal{O}_S(lL)) - h^1 + h^2 &= \frac{1}{2}l^2L^2 + \frac{1}{2}l(-K_S \cdot L) + \chi(\mathcal{O}_S) \Rightarrow \\ h^0(S, \mathcal{O}_S(lL)) &= \frac{1}{2}l(-K_S \cdot L) + \chi(\mathcal{O}_S),\end{aligned}$$

το οποίο σημαίνει ότι το $h^0(S, \mathcal{O}_S(lL))$ αυξάνεται γραμμικά συναρτήσει του l . Τότε για $l \gg 0$ το linear system $|lL|$ γράφεται ως

$$|lL| = |M| + F,$$

όπου το $|M|$ είναι το μη κενό, movable κομμάτι και το F το σταθερό κομμάτι. Παρατηρούμε ότι ο M είναι nef, αφού $|M| \neq \emptyset$, χωρίς σταθερά components και άρα

$$\begin{aligned}0 \leq M^2 \leq M(M + F) &= M \cdot lL \leq (M + F)lL = (lL)^2 = 0 \Rightarrow \\ M^2 &= M \cdot F = F^2 = 0.\end{aligned}$$

Αν το linear system $|M|$ είχε base points τότε σε αυτά τα (movable) components του $|M|$ θα τεμνόntonταν θετικά και τότε θα είχαμε $M^2 > 0$. Άρα το $|M|$ είναι base point free. Ας είναι

$$\Phi_{|M|}: S \xrightarrow{\Phi} V \xrightarrow{\Psi} V'$$

το Stein factorization του μορφισμού που επάγεται από το $|M|$, όπου V nonsingular καμπύλη, διότι $M^2 = 0$.

Εφόσον $M \cdot F = 0$ και ο Ψ είναι finite, ο F γίνεται contract από τον Φ ή αλλιώς ο F είναι υποσύνολο των fibres του Φ . Επίσης, $F^2 = 0$ και άρα από το Λήμμα 3.6.4 ο F είναι ρητός γραμμικός συνδυασμός κάποιων fibres του Φ , δηλαδή

$$F = \Phi^*\left(\sum a_i P_i\right).$$

Επίσης, εφόσον ο Ψ είναι finite, ο $\Psi^*(\mathcal{O}_{V'}(1))$ είναι ample και συνεπώς και ο $\Psi^*(\mathcal{O}_{V'}(1)) + \sum a_i P_i$

Ισχυρισμός: Το $|l'lL| = |l'\Phi^*(\Psi^*(\mathcal{O}_{V'}(1)) + \sum a_i P_i)|$ είναι base point free $\mathbb{Z}$ -divisor για κατάλληλα διαιρέσιμο l' .

Απόδειξη: Έστω ότι το $|l'\Phi^*(\Psi^*(\mathcal{O}_{V'}(1)) + \sum a_i P_i)|$ έχει κάποιο base point P , όπου l' κατάλληλο τω $la_i \in \mathbb{Z}$.

Τότε όλοι οι divisors στο $|l'\Phi^*(\Psi^*(\mathcal{O}_{V'}(1)) + \sum a_i P_i)|$ διέρχονται από το P . Αυτό με τη σειρά του σημαίνει ότι όλοι οι divisors στο $|l'\Psi^*(\mathcal{O}_{V'}(1)) + \sum a_i P_i|$ διέρχονται από το $\Phi(P)$, το οποίο όμως δε μπορεί να συμβεί καθώς ο $\Psi^*(\mathcal{O}_{V'}(1)) + \sum a_i P_i$ είναι ample και συνεπώς base point free. ■

Περίπτωση 3: $L^2 = 0$ και $L \equiv 0$. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε:

$$lL - K_S \equiv -K_S \equiv \frac{1}{r}A,$$

το οποίο σημαίνει ότι ο $lL - K_S$ είναι ample. Συνδυάζοντας τα θεωρήματα Kodaira Vanishing για τους divisors $lL - K_S$ και $-K_S$ και Riemman-Roch για τον lL παίρνουμε

$$h^0(S, \mathcal{O}_S(lL)) = \chi(\mathcal{O}_S) = h^0(S, \mathcal{O}_S) = 1 > 0.$$

Όπως και στη περίπτωση 2, η παραπάνω συνθήκη μαζί με τη συνθήκη $L^2 = 0$ μας δίνει το ζητούμενο. $\square$

Στο ακόλουθο θεώρημα, δίνουμε μία πιο καλή περιγραφή του ρητού αριθμού r που ορίστηκε στο Rationality Theorem.

Θεώρημα 3.6.9 (Boundedness of the Denominator Theorem). *Έστω S nonsingular projective επιφάνεια με K_S όχι nef και A ample divisor στην S . Ας είναι r ο ρητός αριθμός $\sup\{t \mid A + tK_S : \text{nef}\}$, τότε ο παρονομαστής του είναι φραγμένος από το 3 ή αλλιώς*

$$r = \frac{p}{q}, \quad p \in \mathbb{N} \text{ και } q = 1, 2, 3.$$

Απόδειξη. Οι υποθέσεις μας είναι ίδιες με αυτές του Base point freeness Theorem και άρα, οι δύο αποδείξεις θα έχουν κοινή δομή. Θέτουμε $L = A + rK_S$.

Περίπτωση 1: $L^2 > 0$.

Όπως και στην απόδειξη του Base point freeness Theorem, εφόσον ο L δεν μπορεί να είναι ample, υπάρχει μία (-1) -καμπύλη E με $L \cdot E = 0$. Επίσης από την Arithmetic genus formula, έχουμε $K_S \cdot E = -1$, και άρα

$$L \cdot E = 0 \Rightarrow (A + rK_S)E = 0 \Rightarrow r = \frac{A \cdot E}{-K_S \cdot E} = A \cdot E.$$

Περίπτωση 2: $L^2 = 0$ και $L \not\equiv 0$.

Και πάλι όπως στο Base point freeness Theorem, οι υποθέσεις μας δίνουν ότι η $\Phi|_{lL}: S \rightarrow V$ είναι μορφισμός επί καμπύλης για αρκετά μεγάλο και διαιρέσιμο l . Αν F είναι ένα fibre αυτής, τότε

$$F^2 = 0 \text{ και } F \cdot K_S < 0.$$

Και πάλι από την Arithmetic genus formula, $F \cdot K_S = -2$, το οποίο σημαίνει ότι το $r = \frac{A \cdot F}{-K_S \cdot F}$ έχει παρονομαστή 1 ή 2.

Περίπτωση 3: $L^2 = 0$ και $L \equiv 0$.

Ξεχωρίζουμε τις εξής δύο υποπεριπτώσεις: $\rho(S) > 1$ και $\rho(S) = 1$.

Αν $\rho(S) > 1$ τότε επιλέγουμε $A' \not\equiv A$ ample divisor και ακολουθούμε τα παραπάνω βήματα με τον A' στη θέση του A . Οι υποθέσεις $L \equiv 0$ και $A' \not\equiv A$ μας εγγυώνται ότι θα καταλήξουμε σε μία από τις δύο πρώτες περιπτώσεις και τότε ο παρονομαστής του r θα είναι 1 ή 2.

Έστω λοιπόν ότι $\rho(S) = 1$, τότε

$$L \equiv 0 \Rightarrow A + rK_S \equiv 0 \Rightarrow -K_S \equiv \frac{1}{r}A,$$

το οποίο σημαίνει ότι ο $-K_S$ είναι ample και από το Kodaira Vanishing Theorem $H^i(S, \mathcal{O}_S) = 0$ για $i > 0$. Θεωρούμε την εκθετική σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{O}_S^* \longrightarrow 0.$$

Τότε ένα κομμάτι της μακράς ακριβής ακολουθίας στη συνομολογία είναι το εξής:

$$0 = H^1(S, \mathcal{O}_S) \longrightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S^*) \longrightarrow H^2(S, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(S, \mathcal{O}_S) = 0,$$

δηλαδή

$$Pic(S) \cong H^1(S, \mathcal{O}_S^*) \cong H^2(S, \mathbb{Z}). \quad (3.4)$$

Συνδυάζοντας τα Universal Coefficient Theorem πάνω από σώματα (βλ. [19, σελ. 265, 9.12]), το ;; καθώς και το Hodge Decomposition της $H^2(S, \mathbb{C})$, έχουμε

$$\begin{aligned} rank H^2(S, \mathbb{Z}) &= dim_{\mathbb{C}} H^2(S, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C} \\ &= dim H^2(S, \mathbb{C}) = h^{2,0} + h^{1,1} + h^{0,2} = \cancel{2h^2(S, \mathcal{O}_S)} + \overset{0}{dim N_1(S)} = 1. \end{aligned}$$

Άρα από την (3.4)

$$Pic(S) \cong \mathbb{Z} \oplus \text{torsion}.$$

Δεδομένου ότι οι ample divisors δεν έχουν torsion, επιλέγουμε $H \in Pic(S)$ ample που αντιστοιχεί στο $1 \in \mathbb{Z}$. Τότε $-K_S \equiv kH$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$.

Αν το k είναι μεγαλύτερο του 3, για $x = 1, 2$ ή 3, είναι

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{O}_S(K_S + xH)) &= h^0(S, \mathcal{O}_S(K_S + xH)) \\ &= h^2(S, \mathcal{O}_S(K_S - K_S - xH)) = h^2(S, \mathcal{O}_S(K_S - (x - k)H)) = 0, \end{aligned}$$

όμως από το Θεώρημα Riemman-Roch το $\chi(\mathcal{O}_S(K_S + xH))$ είναι δευτεροβάθμιο πολυώνυμο στο x με τρεις ρίζες και άρα ταυτοτικά 0, το οποίο είναι άτοπο.

Άρα το k είναι μικρότερο ή ίσο του 3. Τότε για τυχούσα καμπύλη C με $L \cdot C = 0$, ισχύει

$$L \cdot C = 0 \Rightarrow r = \frac{A \cdot C}{-K_S \cdot C}$$

με $-K_S \cdot C \leq 3H \cdot C = 3$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να επιλέξουμε το C στην μοναδιαία σφαίρα του $N_1(S)$ και τότε $H \cdot C = 1$), δηλαδή ο παρονομαστής του r φράσσεται από το 3. $\square$

3.7 Δομή του Kleiman-Mori cone

Η παρούσα παράγραφος αποσκοπεί στην ερμηνεία των extremal contractions σε σχέση με τον κώνο Kleiman-Mori. Βασικός σκοπός, είναι να μελετήσουμε τη δομή του κώνου καθώς και να δούμε ποια είναι η δράση ενός extremal contraction σε αυτόν.

Θεώρημα 3.7.1 (Mori Cone Theorem). Έστω S nonsingular projective επιφάνεια. Τότε η κλειστή θήκη του κώνου των effective 1-cycles, έχει την μορφή

$$\overline{NE}(S) = \overline{NE}(S)_{K_S \geq 0} + \sum R_l,$$

όπου

$$\overline{NE}(S)_{K_S \geq 0} := \left\{ z \in \overline{NE}(S) \mid K_S \cdot z \geq 0 \right\}$$

και οι R_l είναι ημιευθείες στο $K_S < 0$ κομμάτι του κώνου της μορφής

$$R_l = \overline{NE}(S) \cap L^\perp$$

για κάποιο nef line bundle L . Επιπλέον, οι R_l είναι διακριτές στον ανοιχτό ημιχώρο $[K_S < 0]$. Οι ημιευθείες R_l καλούνται **extremal rays**.

Η δομή της παρακάτω απόδειξης ακολουθεί την αντίστοιχη του [1].

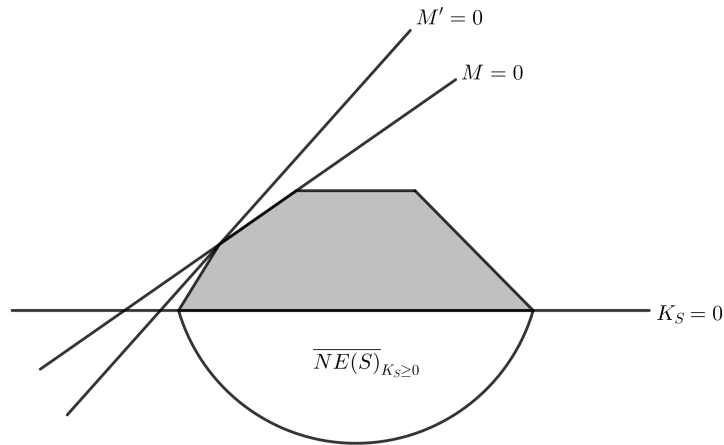
Απόδειξη. **Βήμα 1:** Για κάθε nef line bundle M με

$$\overline{NE}(S)_{K_S < 0} \cap M^\perp \neq \emptyset$$

υπάρχει κάποιο extremal ray R_l όπως πιο πάνω με

$$R_l \subseteq \overline{NE}(S) \cap M^\perp.$$

Αντίστοιχα με την απόδειξη του Extremal Contraction η ιδέα είναι να “περιστρέψουμε” τον M ελάχιστα μακριά από την κώνο έτσι ώστε το υπερεπίπεδο $M'^\perp$ να τέμνει τον κώνο σε όψη γνησίως χαμηλότερης διάστασης απ’ ότι το $M^\perp$. Τότε επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία επαγωγικά, θα πετύχουμε ένα extremal ray.



Έστω B ample divisor και ορίζουμε $r_M(n, B) := \sup\{t \mid nM + B + tK_S : nef\}$. Τότε

- η $r_M(n, B)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του n
και σταθεροποιώντας κάποιο $z \in \overline{NE(S)}_{K_S < 0} \cap M^\perp \neq \emptyset$, έχουμε

$$B \cdot z + r_M(n, B)K_S \cdot z \geq 0 \Rightarrow r_M(n, B) \leq \frac{B \cdot z}{-K_S \cdot z}, \forall n \in \mathbb{N},$$

ή αλλιώς

- η $r_M(n, B)$ είναι φραγμένη από επάνω.

Άρα η $r_M(n, B)$ συγκλίνει, έστω στο $r_M(B)$. Εφόσον όμως από Boundedness of the Denominator Theorem, η ακολουθία $6r_M(n, B)$ παίρνει τιμές στους φυσικούς, αυτό σημαίνει πως στην πραγματικότητα η ακολουθία σταθεροποιείται για κάθε $n > n_B$ στο $r_M(B)$.

Επίσης ισχύει ότι

$$\begin{aligned} [(n_B + 1)M + B + r_M(B)K_S]z = 0 &\Rightarrow M \cdot z + (n_B M + B + r_M(B)K_S)z = 0 \\ &\Rightarrow M \cdot z = 0 \text{ και } (n_B M + B + r_M(B)K_S)z = 0. \end{aligned}$$

Επιπλέον

$$(n_B + 1)M + B + r_M(B)K_S = (n_B + 1)M + B + r_M(n_B + 1, B)K_S \text{ nef, όχι ample.}$$

Άρα τελικά για κάθε B ample, έχουμε

$$0 \neq \overline{NE(S)} \cap [(n_B + 1)M + B + r_M(B)K_S]^\perp \subseteq \overline{NE(S)} \cap M^\perp. \quad (3.5)$$

Επιλέγουμε $B_1, B_2, \dots, B_{\rho-1}$, ample divisors τέτοιους ώστε το σύνολο $\{B_1, \dots, B_{\rho-1}, K_S\}$ να είναι βάση του $N^1(S)$ και θέτουμε

$$L_i = nM + B_i + r_M(B_i)K_S \text{ με } n > n_{B_i} + 1 \forall i = 1, 2, \dots, \rho - 1.$$

Ισχυρισμός: Τα L_i είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Απόδειξη: Έστω ότι $\sum l_i L_i = 0$ για κάποια l_i , τότε

$$\begin{aligned} \sum l_i L_i = 0 &\Rightarrow \sum l_i nM + \sum l_i B_i + \sum l_i r_M(B_i)K_S = 0 \\ &\Rightarrow \sum l_i B_i + \sum l_i r_M(B_i)K_S = -\sum l_i nM, \forall n > n_{B_i} + 1. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Παίρνοντας τις παραπάνω σχέσεις για κάποιο n και για $n + 1$ και αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\sum l_i M = 0 \Rightarrow \sum l_i = 0.$$

Αντικαθιστώντας στη (3.7) έχουμε

$$\sum l_i B_i + \sum l_i r_M(B_i)K_S = 0 \Rightarrow l_i = 0,$$

αφού τα B_i, K_S είναι βάση. ■

Αν $1 < \dim \overline{NE}(S) \cap M^\perp \leq \rho$ τότε, για κάποιο από τα B_i η σχέση (3.5) είναι γνήσια ανισότητα γιατί άλλως

$$\overline{NE}(S) \cap M^\perp = \overline{NE}(S) \cap \left(\bigcap L_i^\perp \right) \subseteq \bigcap L_i^\perp$$

και το αριστερό μέλος έχει διάσταση γνήσια μεγαλύτερη του 1, ενώ το δεξί έχει ακριβώς 1, αφού ορίζεται από $\rho - 1$ γραμμικώς ανεξάρτητες εξισώσεις.

Επίσης για κάθε i ισχύει

$$\overline{NE}(S) \cap L_i^\perp = \overline{NE}(S)_{K_S < 0} \cap L_i^\perp,$$

λόγω της μορφής των L_i .

Άρα για τυχόντα nef divisor M με $\dim \overline{NE}(S) \cap M^\perp > 1$, υπάρχει nef divisor M' με

$$0 \neq \overline{NE}(S) \cap M'^\perp \subsetneq \overline{NE}(S) \cap M^\perp$$

και

$$\overline{NE}(S) \cap L_i^\perp \subseteq \overline{NE}(S)_{K_S < 0}.$$

Τότε, συνεχίζοντας επαγωγικά, έχουμε το ζητούμενο.

Βήμα 2: $\overline{NE}(S) = \overline{NE}(S)_{K_S \geq 0} + \sum \overline{R_l}$.

Έστω ότι η παραπάνω ισότητα δεν ισχύει, δηλαδή

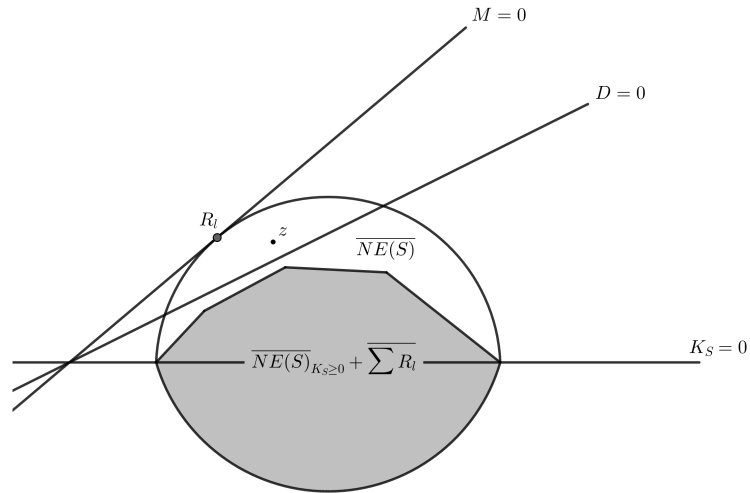
$$\overline{NE}(S)_{K_S \geq 0} + \sum \overline{R_l} \subsetneq \overline{NE}(S) \quad (3.7)$$

Εφαρμόζοντας τη 2η γεωμετρική μορφή του θεωρήματος Hahn-Banach στα

$$\overline{NE}(S)_{K_S \geq 0} + \sum \overline{R_l} \text{ και } \{z\},$$

για κάποιο $z \in \overline{NE}(S) \setminus \overline{NE}(S)_{K_S \geq 0} + \sum \overline{R_l}$ μπορούμε να επιλέξουμε κάποιον divisor D με τις εξής ιδιότητες

- $D > 0$ στο $\overline{NE}(S)_{K_S \geq 0} + \sum \overline{R_l}$,
- $D \cdot z < 0$ για κάποιο $z \in \overline{NE}(S)$.



Ισχυρισμός: Υπάρχει $a \in \mathbb{Q}_{>0}$, τέτοιο ώστε $D - aK_S$ ample.

Απόδειξη: Αρχικά παρατηρούμε ότι υπάρχει $\epsilon_D^+ > 0$ τέτοιο ώστε

$$D \cdot z > \epsilon_D^+ \text{ για } z \in [D > 0] \cap S^\rho,$$

όπου S^ρ η μοναδιαία σφαίρα του $N_1(S)$.

Αυτό γιατί η εικόνα της (συμπαγούς) μοναδιαίας σφαίρας μέσω του (συνεχούς) συναρτησοειδούς D είναι συμπαγές σύνολο, δηλαδή και κλειστό, που δεν περιέχει το 0 και άρα και μία περιοχή του.

Αντίστοιχα ορίζουμε και το ϵ_D^- ως κάτω φράγμα του $-D$ στον ημιχώρο $[D < 0]$ και θέτουμε

$$\epsilon_D = \min\{\epsilon_D^+, \epsilon_D^-\}.$$

Με τον ίδιο τρόπο ορίζουμε και το ϵ_{K_S} .

Επιλέγουμε $a \in \mathbb{Q}$ με

$$\frac{\epsilon_D}{\epsilon_{K_S}} > a > \frac{\epsilon_D}{\|K_S\|}$$

και διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $z \in [D > 0] \cap [K_S > 0]$, όπου τότε έχουμε

$$(D - aK_S)z > D \cdot z - \frac{\epsilon_D}{\epsilon_{K_S}} K_S \cdot z > D \cdot z - \epsilon_D > 0.$$

- $z \in [D < 0] \cap [K_S < 0]$, όπου και πάλι έχουμε

$$(D - aK_S)z > D \cdot z - \frac{\epsilon_D}{\|K_S\|} K_S \cdot z > D \cdot z - \epsilon_D > 0$$

και

- $z \in [D = 0] \cap [K_S < 0]$ ή $[D > 0] \cap [K_S = 0]$ ή $[D > 0] \cap [K_S < 0]$, που τότε, σχεδόν τετριμμένα ισχύει

$$(D - aK_S)z > 0$$

Τελικά σε όλες τις περιπτώσεις έχουμε $(D - aK_S)z > 0$ και από Kleiman's Criterion for Ampleness, $D - aK_S$ ample $\mathbb{Q}$ -divisor ■

Τότε, αν $a = \frac{p}{q}$, χρησιμοποιούμε το Rationality Theorem, για τον ample $\mathbb{Z}$ -divisor $A = qD - pK_S$ και τότε υπάρχουν $r \in \mathbb{Q}_{>0}$ και $l \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε ο divisor $M = l(A + rK_S)$ να είναι nef.

- $\overline{NE(S)}_{K_S \leq 0} \cap M^\perp \neq \emptyset$,
καθώς $\overline{NE(S)} \cap M^\perp \neq \emptyset$ και αν $K_S \cdot z \geq 0$ τότε και $M \cdot z = lA \cdot z + lrK_S \cdot z > 0$,
- $\overline{\sum R_l} \cap M^\perp = 0$,
διότι αν $z \in \overline{\sum R_l} \cap M^\perp$, τότε $K_S \cdot z < 0$ και $D \cdot z > 0$ που εξ' ορισμού του D σημαίνει $z = 0$.

Όμως αυτό αντιβαίνει στο **Βήμα 1** και άρα στην (3.7) έχουμε την ισότητα.

Βήμα 3 Οι ημιευθείες R_l είναι διακριτές στον ημιχώρο $[K_S < 0]$.

Επιλέγουμε $A_1, A_2, \dots, A_{\rho-1}$ ample divisors που μαζί με τον K_S σχηματίζουν βάση του $N^1(S)$.

Έστω $R_l = \overline{NE(S)} \cap L_l^\perp$ μία τέτοια ημιευθεία. Για n_{A_i} και $r_{L_l}(A_i)$ όπως στο **Βήμα 1**, έχουμε

$$0 \neq \overline{NE(S)} \cap [(n_B + 1)M + B + r_M(B)K_S]^\perp \subseteq \overline{NE(S)} \cap L_l^\perp,$$

με το δεξί κομμάτι της παραπάνω σχέσης να είναι μονοδιάστατο που σημαίνει ότι έχουμε ισότητα. Επίσης για το τυχόν $z_l \in R_l$ ισχύει

$$\begin{aligned} L_l \cdot z_l &= 0 \text{ και } [(n_B + 1)M + B + r_M(B)K_S] \cdot z_l = 0 \\ \Rightarrow r_{L_l}(A_i) &= \frac{A_i \cdot z_l}{-K_S \cdot z_l}, \text{ για κάθε } i = 1, \dots, \rho - 1. \end{aligned}$$

Θεωρούμε το υπερεπίπεδο $H = [-K_S = c]$ για τυχόν $c > 0$. Τότε για κάθε ημιευθεία R_l , το σημείο τομής της z_c με το υπερεπίπεδο H έχει συντεταγμένες

$$z_c = (A_1 \cdot z_c, A_2 \cdot z_c, \dots, A_{\rho-1} \cdot z_c, K_S \cdot z_c) = (r_{L_l}(A_1), r_{L_l}(A_2), \dots, r_{L_l}(A_{\rho-1}), c),$$

οι οποίες από το Boundedness of the Denominator Theorem είναι όλες της μορφής $\nu, \frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{3}$ με $\nu \in \mathbb{N}$. Αυτό σημαίνει ότι

1. οι ημιευθείες R_l είναι διακριτές στον ημιχώρο $[K_S < 0]$ και
2. $\sum \overline{R_l} = \sum R_l$,

δηλαδή τα δύο τελευταία ζητούμενα. □

Οι ημιευθείες R_l που εμφανίζονται στο παραπάνω θεώρημα είναι extremal rays με τη συνήθη έννοια της κυρτής γεωμετρίας, δηλαδή, αν $x, y \in \overline{NE(S)}$ με $x + y \in R_l$, τότε και $x, y \in R_l$.

Το επόμενο θεώρημα συσχετίζει τα extremal contractions που ορίστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο με τα extremal rays R_l που γεννούν το $K_S < 0$ κομμάτι του $\overline{NE(S)}$.

Θεώρημα 3.7.2 (Contraction Theorem). Για κάθε extremal ray $R_l \subset \overline{NE(S)}_{K_S < 0}$, υπάρχει κάποιο extremal contraction $\phi: S \rightarrow W$ τέτοιο ώστε

$$\phi(C) = pt \Leftrightarrow [C] \in R_l.$$

Αντίστροφα, κάθε extremal contraction είναι contraction κάποιου extremal ray.

Απόδειξη. Έστω $R_l = \overline{NE(S)} \cap L_l^\perp$ extremal ray.

Ο divisor $A' = nL - K_S$ είναι ample για $n \gg 0$, που σημαίνει ότι και ο $\mathbb{Q}$ -divisor $A = L - \frac{1}{n}K_S$ είναι ample. Επίσης, ο $L = A + \frac{1}{n}K_S$ είναι nef και της μορφής του Base point freeness Theorem, άρα

$|lL|$ base point free $\mathbb{Z}$ -divisor για επαρκώς μεγάλο και διαιρέσιμο l .

Επιλέγοντας κατάλληλα μεγάλο l όπως στην Πρόταση 3.6.2 εύκολα βλέπει κανείς ότι ο $\Phi_{|lL|}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες των extremal contractions και επίσης

$$\phi(C) = \text{pt} \Leftrightarrow C \cdot L = 0 \Leftrightarrow [C] \in L^\perp \cap \overline{NE(S)} = R_l.$$

Αντίστροφα, έστω $\phi: S \rightarrow W$ extremal contraction.

Θέτουμε $M = \phi^*H$, για κάποιο hyperplane divisor H . Τότε

- ο M είναι nef, αφού έχει μηδενική τομή με τις καμπύλες που κάνει contract ο ϕ και θετική τομή με τις υπόλοιπες,
- $\overline{NE(S)}_{K_S < 0} \cap M^\perp \neq \emptyset$ αφού $M \cdot C = 0 \Leftrightarrow \phi(C) = \text{pt} \Rightarrow K_S \cdot C < 0$.

Άρα από το **Βήμα 1** του Mori Cone Theorem, υπάρχει κάποιο extremal ray, $R_l \subseteq \overline{NE(S)} \cap M^\perp$. Θα δειχθεί ότι $\phi = \text{contr}_{R_l}$, όπου contr_{R_l} είναι το contraction του extremal ray R_l όπως στην προηγούμενο μισό της απόδειξης. Εκ κατασκευής του $\text{contr}_{R_l} = \Phi_{|lL|}: S \rightarrow W'$

- (i) ο contr_{R_l} έχει connected fibres με W' normal και projective,
- (ii) $L \cdot C = 0 \Leftrightarrow \text{contr}_{R_l}(C) = \text{pt} \Leftrightarrow C$ υποσύνολο κάποιου fibre του contr_{R_l}

και τότε από την Παρατήρηση 3.6.3 έχουμε ότι $\phi = \text{contr}_{R_l}$. □

3.8 Το Minimal Model Program στη διάσταση 2

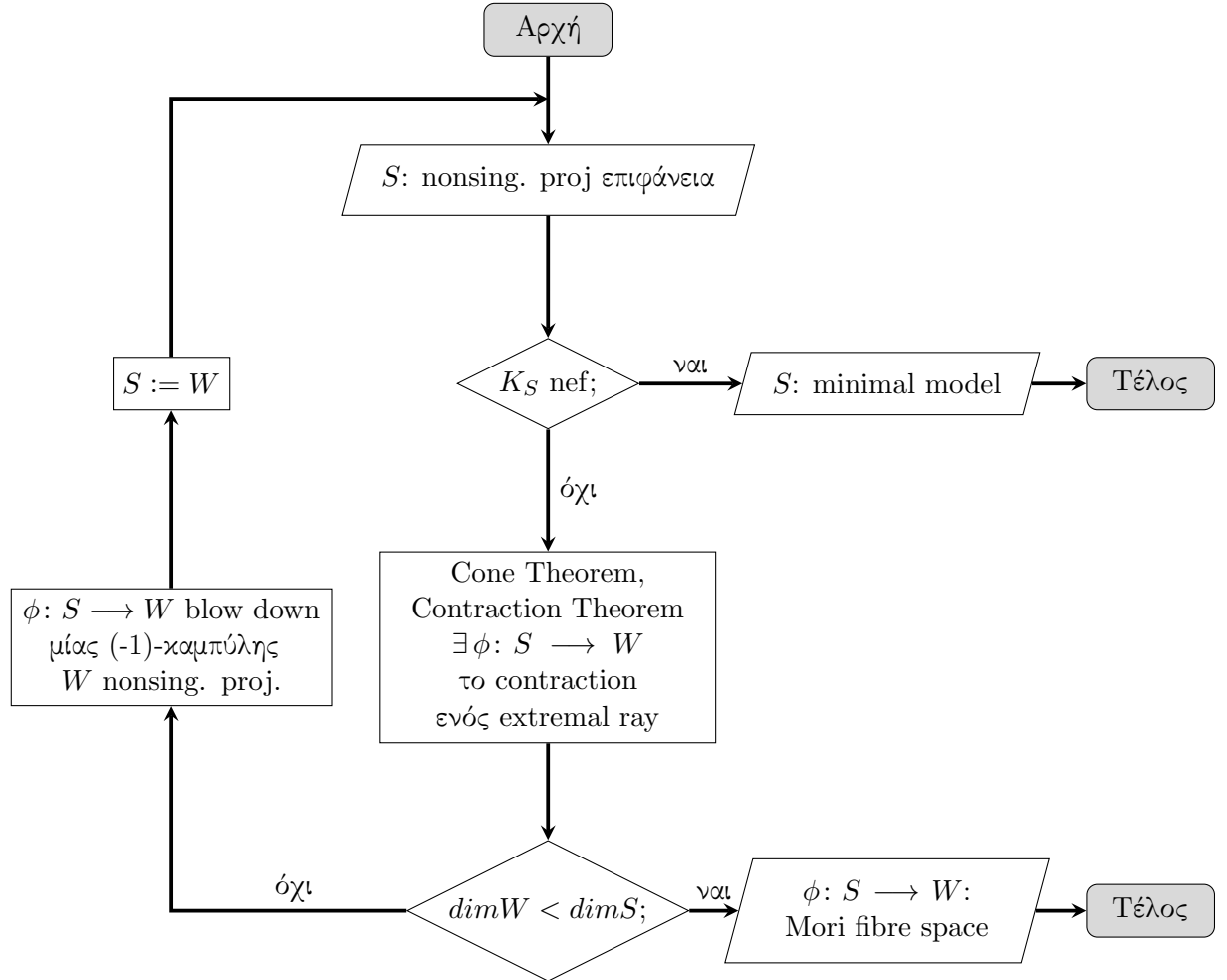
Έχοντας πλέον αποδείξει όλα τα βασικά θεωρήματα πίσω από το Minimal Model Program (MMP), είμαστε πλέον σε θέση να παρουσιάσουμε τον αλγόριθμο, αφού πρώτα δώσουμε κάποιους ορισμούς.

Ορισμός 3.8.1 (Minimal models). Έστω S nonsingular projective επιφάνεια. Τότε αυτή καλείται **minimal model** αν ο canonical divisor της, K_S είναι nef.

Ορισμός 3.8.2 (Mori fibre spaces). Μια nonsingular projective επιφάνεια S εφοδιασμένη με ένα μορφισμό $\phi: S \rightarrow W$ με $\dim W = 0$ ή 1 , καλείται **Mori fibre space (Mfs)** αν ο ϕ είναι contraction κάποιας extremal ray όπως αυτές ορίστηκαν στο Mori Cone Theorem.

Στην επόμενη σελίδα, παρουσιάζουμε τον θεωρητικό αλγόριθμο του MMP.

MMP στη διάσταση 2



Παρατήρηση 3.8.3. Πρέπει να σημειωθεί ότι η παραπάνω διαδικασία έρχεται σε πέρας τελικά, καθώς από την Πρόταση 3.2.4, η διάσταση $\dim H^2(S, \mathbb{R})$ μειώνεται κατά ένα μετά από κάθε blow down και πρέπει πάντα να είναι μη αρνητική.

Κεφάλαιο 4

Βασικές ιδιότητες των Mori Fibre Spaces και Minimal Models

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι η μελέτη των εξόδων του Minimal Model Program. Μετά από μια πρώτη μελέτη κάποιων ιδιοτήτων των Mori fibre spaces στη διάσταση 2, δίνεται μία πλήρης κατάταξη αυτών. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε το canonical model μίας επιφάνειας με $\kappa(S) = 2$ που είναι σημαντικότερο εργαλείο για τη μελέτη της επιφάνειας. Τέλος κάνουμε μία σύντομη ανασκόπηση κάποιων θεμελιωδών ιδιοτήτων των minimal models.

4.1 Χαρακτηρισμός των Mori Fibre Spaces

Θεώρημα 4.1.1 (Easy Dichotomy Theorem). Έστω S nonsingular projective επιφάνεια, τότε το τελικό αποτέλεσμα του MMP, με είσοδο την S , είναι Mori fibre space αν και μόνον αν υπάρχει $U \subseteq S$ ανοιχτό, τέτοιο ώστε για κάθε $p \in U$ να υπάρχει καμπύλη C που διέρχεται από το p με $K_S \cdot C < 0$.

Απόδειξη. ($\Leftarrow$) Έστω ότι το τελικό αποτέλεσμα του MMP είναι μία minimal επιφάνεια $S \xrightarrow{f} S_{min}$. Τότε ο f είναι σύνθεση πεπερασμένου το πλήθος blow-downs και επομένως

$$K_S = f^*K_{S_{min}} + R,$$

όπου R είναι ο ramification divisor του f .

Για κάθε καμπύλη C της S που δεν είναι στο support του R ισχύει:

$$K_S \cdot C = f^*K_{S_{min}} \cdot C + R \cdot C \geq 0.$$

Προφανώς, για κάθε ανοιχτό $U \subseteq S$ και $p \in U$, υπάρχει καμπύλη C η οποία διέρχεται από το p και δεν είναι στο support του ramification divisor R .

($\Rightarrow$) Έστω ότι το τελικό αποτέλεσμα του MMP είναι Mori fibre space $S \xrightarrow{f} S_{mori} \xrightarrow{\phi} W$. Διαχωρίζουμε δύο περιπτώσεις:

- $\dim W = 0$. Επιλέγουμε $U = S \setminus R \cong S_{mori} \setminus f(R)$. Εφόσον το $f(R)$ είναι πεπερασμένα το πλήθος σημεία, για κάθε $p \in U$ μπορούμε

να επιλέξουμε C ένα hyperplane section της S_{mori} που να διέρχεται από το p και όχι από τα σημεία του $f(R)$. Τότε εξ ορισμού του extremal contraction ϕ

$$\phi(C) = \text{pt} \Rightarrow K_{S_{mori}} \cdot C < 0$$

και επομένως

$$K_S \cdot f^*(C) = f_*(K_S) \cdot C = K_{S_{mori}} \cdot C + R \cdot C < 0$$

- $\dim W = 1$

Επιλέγουμε $U = (\phi \circ f)^{-1}(W \setminus \phi \circ f(R))$ και για κάθε $p \in U$ θεωρούμε την καμπύλη $C = (\phi \circ f)^{-1}((\phi \circ f)(p))$. Τότε είναι

$$\begin{aligned} K_S \cdot C &= K_S \cdot [f^*(\phi^{-1}(\phi \circ f)(p))] \\ &= [f_*(f^*K_{S_{mori}} + R)] \cdot [(\phi^{-1}(\phi \circ f)(p))] \\ &= K_{S_{mori}} \cdot (\phi^{-1}(\phi \circ f)(p)) + f(R) \cdot (\phi^{-1}(\phi \circ f)(p)) \end{aligned}$$

Με τον πρώτο όρο να είναι αρνητικό, αφού η καμπύλη $(\phi^{-1}(\phi \circ f)(p))$ γίνεται contract στο σημείο p και το δεύτερο μηδέν, αφού το $f(R)$ είναι πεπερασμένο το πλήθος σημεία. Άρα συνολικά $K_S \cdot C < 0$. $\square$

Λήμμα 4.1.2. Έστω $\phi: S \rightarrow W$ ένας Mori fibre space. Τότε

$$H^0(S, \mathcal{O}_S(mK_S)) = 0, \forall m \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Απόδειξη. Έστω ότι δεν ισχύει. Τότε υπάρχει effective divisor D , τέτοιος ώστε για κάποιο $m \in \mathbb{N}$

$$D \sim mK_S$$

Επιλέγουμε καμπύλη C , με $\phi(C) = \text{σημείο}$ και $C \not\subseteq D$. Τότε έχουμε

$$0 > mK_S \cdot C = D \cdot C \geq 0,$$

το οποίο είναι άτοπο. $\square$

Θεώρημα 4.1.3 (Noether-Enriques). Έστω $\phi: S \rightarrow W$ μορφισμός μεταξύ μίας non-singular projective επιφάνειας και μίας nonsingular projective καμπύλης και έστω ότι για κάποιο σημείο $p \in W$ ισχύει

$$\phi^{-1}(p) = F \cong \mathbb{P}^1.$$

Τότε υπάρχει Zariski ανοιχτή περιοχή U του p ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{array}{ccc} \phi^{-1}(U) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{P}^1 \times U \\ \phi \downarrow & & p_2 \downarrow \\ p \in U & \xrightarrow{\sim} & U \end{array}$$

Απόδειξη. Αρχικά, από Arithmetic genus formula παίρνουμε ότι $K_S \cdot F = -2$. Επίσης αυτό σημαίνει ότι $H^2(S, \mathcal{O}_S) = H^0(S, K_S) = 0$, γιατί άλλως θα ίσχυε $K_S \cdot F \geq 0$.

Ισχυρισμός: Υπάρχει $D \in \text{Pic}(S)$ με $D \cdot F = 1$.

Απόδειξη: Θεωρούμε την exponential sequence

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{O}_S^* \longrightarrow 0$$

και την επαγόμενη μακρά ακριβή ακολουθία στη συνομολογία

$$\dots \longrightarrow \text{Pic}(S) \cong H^1(S, \mathcal{O}_S^*) \xrightarrow{\eta} H^2(S, \mathbb{Z}) \longrightarrow \cancel{H^2(S, \mathcal{O}_S^*)} \xrightarrow{0}$$

Έστω ότι

$$\{z \cdot F \mid z \in \text{Pic}(S)\} = d\mathbb{Z}, \text{ για κάποιο } d \in \mathbb{N}.$$

Τότε το γραμμικό συναρτησοειδές $-\cdot \frac{1}{d}F: \text{Pic}S \longrightarrow \mathbb{Z}$ είναι καλά ορισμένο και χωρίς βλάβη της γενικότητας, λόγω του επιμορφισμού η , μπορούμε να θεωρήσουμε ότι δρα πάνω στο $H^2(S, \mathbb{Z})$. Από Poincaré Duality, το παραπάνω συναρτησοειδές αντιπροσωπεύεται από κάποια κλάση στον $H^2(S, \mathbb{Z})$. Ας είναι F' η προεικόνα αυτής της κλάσης μέσω του επιμορφισμού η . Τότε έχουμε

$$F \equiv dF' \Rightarrow F'^2 = 0 \text{ και } K_S \cdot F' = \frac{-2}{d} \quad (4.1)$$

Όμως

$$F'^2 + K_S \cdot F' = (F' + K_S) \cdot F' = \deg K_{F'} = 2g(F') + 2 \equiv 0 \pmod{2} \quad (4.2)$$

Από (4.1) και (4.2), λαμβάνουμε $d = 1$ και το ζητούμενο είναι προφανές. ■

Για $r \in \mathbb{N}$, θεωρούμε τη σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(D + (r-1)F) \longrightarrow \mathcal{O}_S(D + rF) \longrightarrow \mathcal{O}_F(D) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \longrightarrow 0$$

και την επαγόμενη ακολουθία στη συνομολογία

$$\dots \longrightarrow H^0(S, \mathcal{O}_S(D + rF)) \xrightarrow{\zeta_r} H^0(F, \mathcal{O}_F(D)) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) \longrightarrow \\ \longrightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S(D + (r-1)F)) \xrightarrow{\eta_r} H^1(S, \mathcal{O}_S(D + rF)) \longrightarrow \cancel{H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))} \xrightarrow{0}$$

Εφόσον για κάθε $r > 0$ ο η_r είναι επιμορφισμός, ή ακολουθία των διαστάσεων των διανυσματικών χώρων $H^1(S, \mathcal{O}_S(D + nF))$ είναι μία φθίνουσα ακολουθία με τιμές στο $\mathbb{N}$, και άρα τελικά σταθερή. Τότε, για $r \gg 0$, ο η_r είναι επιμορφισμός μεταξύ χώρων ίδιας διάστασης και συνεπώς είναι ισομορφισμός. Τέλος, εφόσον ο η_r είναι ισομορφισμός, ο ζ_r είναι επιμορφισμός για $r \gg 0$.

Σταθεροποιούμε ένα τέτοιο r και επιλέγουμε $V \leq H^0(S, \mathcal{O}_S(D + rF))$, ένα δισδιάστατο υπόχωρο με την ιδιότητα να απεικονίζεται επί του $H^0(F, \mathcal{O}_F(D))$ μέσω του ζ_r .

Αν το linear system $|V|$ έχει base components, τότε αυτά δεν μπορούν να τέμνονται με το F (διότι άλλως, το $|V|$ περιορισμένο στο F θα είχε base points) και άρα είναι υποσύνολα άλλων fibres $F_i = \phi^{-1}(w_i)$, για κάποια $w_i \in W$. Αντίστοιχα, έστω ότι τα base points του $|V|$ βρίσκονται στα fibres $F_j = \phi^{-1}(w_j)$, $w_j \in W$. Τέλος, έστω $w_k \in W$ τα σημεία

που των οποίων τα fibres δεν είναι reduced. Τότε επιλέγουμε $U = W \setminus \{w_i, w_j, w_k\}$ και θεωρούμε την απεικόνιση

$$\Phi_{|V|} \times \phi: \phi^{-1}(U) \longrightarrow \mathbb{P}^1 \times U.$$

Ισχυρισμός: Η απεικόνιση $\Phi_{|V|} \times \phi$ είναι 1-1 proper μορφισμός επί ενός normal variety και συνεπώς είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη: Εδώ ως ορισμό του properness χρησιμοποιούμε τον εξής:

Μία συνεχής απεικόνιση $f: X \longrightarrow Y$ καλείται proper αν για κάθε ακολουθία του X που **τείνει στο άπειρο** (δηλαδή, για κάθε συμπαγές υποσύνολο του X , μόνο πεπερασμένα το πλήθος σημεία της ακολουθίας ανήκουν σε αυτό), η εικόνα της τείνει επίσης στο άπειρο. Έστω ακολουθία $(s_n)_{\mathbb{N}}$ του $\phi^{-1}(U)$ που τείνει στο άπειρο τέτοια ώστε η εικόνα της να μην τείνει στο άπειρο. Άρα υπάρχει συμπαγές υποσύνολο K του $\mathbb{P}^1 \times U$ που, χωρίς βλάβη της γενικότητας, περιέχει όλη την εικόνα της $(s_n)_{\mathbb{N}}$. Τότε και η προβολή της στο U , περιέχεται στο συμπαγές $K_2 = p_2(K) \subseteq U$ το οποίο είναι αντίφαση, καθώς η ϕ είναι proper.

$$\begin{array}{ccc} \phi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Phi_{|V|} \times \phi} & \mathbb{P}^1 \times U \\ & \searrow \phi & \downarrow p_2 \\ & & U \end{array}$$

Σταθεροποιούμε μία βάση ξ_1, ξ_2 του $H^0(S, \mathcal{O}_S(V))$. Τότε ο $\Phi_{|V|}$ είναι της μορφής

$$\Phi_{|V|} = (\xi_1, \xi_2): \phi^{-1}(U) \longrightarrow \mathbb{P}^1.$$

Αν για κάποια $x, y \in S$ ισχύει $\Phi_{|V|} \times \phi(x) = \Phi_{|V|} \times \phi(y)$ τότε τα x και y , ανήκουν στο ίδιο fibre F' του ϕ και ισχύει

$$(\xi_1(x) : \xi_2(x)) = (\xi_1(y) : \xi_2(y)) \in \mathbb{P}^1.$$

Τότε όμως ο divisor H που ορίζεται τοπικά στο U από την $\xi_2(x)\xi_1 - \xi_1(x)\xi_2$ τέμνει το fibre F' στα σημεία x, y , που όμως δεν μπορεί να συμβεί γιατί $H \sim D$ και από την επιλογή των $D \in \text{Pic}(S)$ και $U \subseteq W$, $D \cdot F' = 1$. Τέλος, το ζητούμενο είναι αποτέλεσμα του [7, σελ. 11, 1.13]. $\square$

Το επόμενο θεώρημα χαρακτηρίζει πλήρως τη δομή των Mori fibre spaces στη διάσταση 2.

Θεώρημα 4.1.4 (Structure Theorem for Mori fibre spaces). Έστω $\phi: S \longrightarrow W$ ένας Mori fibre space. Τα ακόλουθα ισχύουν.

- Αν $\dim W = 1$, τότε το $\phi: S \longrightarrow W$ είναι ένα $\mathbb{P}^1$ -bundle στην αλγεβρική κατηγορία. Δηλαδή κάθε για κάθε $p \in W$, υπάρχει Zariski ανοιχτή περιοχή $U \subseteq W$ τέτοια ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{array}{ccc} \phi^{-1}(U) & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{P}^1 \times U \\ \downarrow \phi & & \downarrow p_2 \\ U & \xrightarrow{id_U} & U \end{array}$$

- Αν $\dim W = 0$, τότε $S \cong \mathbb{P}^2$

Απόδειξη. Περίπτωση 1: $\dim W = 1$.

Αρχικά, παρατηρούμε ότι τα fibres της ϕ είναι irreducible, διότι άλλως, έστω ότι κάποιο fibre F δεν είναι irreducible και G_1, G_2 είναι δύο irreducible components αυτού, που (εφόσον ο ϕ έχει connected fibres) μπορούν να επιλεγούν ώστε $G_1 \cdot G_2 > 0$. Επιλέγουμε ένα δεύτερο fibre $F' \neq F$. Τότε, εφόσον ο ϕ είναι extremal contraction, τα F' και G_1 είναι numerically proportional και άρα

$$F' \cdot G_2 = G_1 \cdot G_2 > 0,$$

το οποίο όμως είναι αντίφαση γιατί $F' \cap G_2 = \emptyset$

Έστω ένα τυχόν fibre $\phi^{-1}(p) = F = \mu_p F_p$. Τότε από το ότι ο ϕ είναι extremal contraction, καθώς και από το Λήμμα 3.6.4, έχουμε

$$F_p^2 = 0 \text{ και } F_p \cdot K_S < 0.$$

Επίσης, από Arithmetic genus formula παίρνουμε ότι

$$0 \leq h^1(F_p, \mathcal{O}_{F_p}) = \frac{1}{2}(F_p + K_S)F_p + 1,$$

το οποίο, σε συνδυασμό με τα προηγούμενα, σημαίνει ότι

$$F_p \cdot K_S = -2 \text{ και } h^1(F_p, \mathcal{O}_{F_p}) = 0$$

Γνωρίζουμε όμως, ότι όλα τα fibres F_q εκτός από πεπερασμένα έχουν πολλαπλότητα $\mu_q = 1$ και ότι όλα τα fibres είναι algebraically και συνεπώς numerically equivalent, άρα

$$-2 = F_q \cdot K_S = \mu_p F_p \cdot K_S = -2\mu_p$$

που σημαίνει ότι όλα τα fibres είναι reduced.

Συνοψίζοντας, το τυχόν fibre F_p είναι irreducible και reduced με $h^1(F_p, \mathcal{O}_{F_p}) = 0$ που από 3.3.3 μας δίνουν ότι

$$\phi^{-1}(p) \cong \mathbb{P}^1, \forall p \in W$$

και το ζητούμενο είναι άμεσο από την προηγούμενη Πρόταση 4.1.

Περίπτωση 2: $\dim W = 0$.

Θεωρούμε την εκθετική ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{O}_S^* \longrightarrow 0$$

και την επαγόμενη ακριβή ακολουθία στη συνομολογία

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S) &\longrightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S) \cong \text{Pic}(S) \\ &\longrightarrow H^2(S, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(S, \mathcal{O}_S) \longrightarrow \dots \end{aligned} \quad (4.3)$$

Και πάλι επειδή ο ϕ είναι extremal contraction και κάνει contract όλες τις καμπύλες της S , έχουμε ότι

$$K_S \cdot C < 0 \Rightarrow -K_S \text{ ample}$$

και ότι όλες οι καμπύλες είναι numerically proportional στον $H^2(S, \mathbb{Z})$.
Το πρώτο σε συνδυασμό με το Kodaira Vanishing Theorem δίνουν

$$H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0 = H^2(S, \mathcal{O}_S) \stackrel{(4.3)}{\Rightarrow} H^2(S, \mathbb{Z}) \cong \text{Pic}(S)$$

ενώ το δεύτερο

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}} H^2(S, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R} &= \dim_{\mathbb{R}} H^2(S, \mathbb{R}) = 1 \\ \Rightarrow \text{rank} H^2(S, \mathbb{Z}) &= 1 = \text{rank} \text{Pic}(S) \\ \Rightarrow \text{Pic}(S) &\cong \mathbb{Z} \oplus \text{torsion}. \end{aligned}$$

Έστω $H \in \text{Pic}(S)$ ο divisor που αντιστοιχεί στο $1 \in \mathbb{Z}$ και ας είναι

$$-K_S \sim rH, \text{ για κάποιο } r \in \mathbb{N}.$$

Ο divisor $(r+1)H$ είναι ample. Πάλι από Kodaira Vanishing Theorem παίρνουμε

$$H^i(S, H) = H^i(S, (r+1)H + K_S) = 0, \text{ για } i > 0.$$

Τότε από το Riemann-Roch Theorem για τον divisor H ισχύει

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{O}_S(H)) &= \frac{1}{2}(H - K_S)H + \chi(\mathcal{O}_S) \\ \Rightarrow h^0(S, \mathcal{O}_S(H)) &= \frac{1+r}{2}H^2 + h^0(S, \mathcal{O}_S) \\ \Rightarrow h^0(S, \mathcal{O}_S(H)) &= \frac{1+r}{2} + 1 \geq 2, \end{aligned} \tag{4.4}$$

με το $H^2 = 1$ από Poincaré Duality. Άρα μπορούμε να επιλέξουμε $D \in |H|$, που προφανώς είναι irreducible και reduced.

Ξεχωρίζουμε τις εξής δύο περιπτώσεις

- $r > 1$

Τότε το Λήμμα 3.3.2 δίνει

$$h^1(D, \mathcal{O}_D) = \frac{1}{2}(D + K_S)D + 1 = \frac{1-r}{2} + 1 < 1,$$

το οποίο συνεπάγεται ότι

$$h^1(D, \mathcal{O}_D) = 0 \Rightarrow D \cong \mathbb{P}^1 \text{ και } r = 3.$$

Επομένως η (4.4) μας δίνει $h^0(S, \mathcal{O}_S(H)) = 3$.

Ισχυριζόμαστε ότι το complete linear system $|H|$ είναι base point free. Αν είχε base points τότε αυτά θα βρισκόντουσαν πάνω στον D . Όμως από την ακριβή ακολουθία στη συνομολογία

$$H^0(S, \mathcal{O}_S(D)) \longrightarrow H^0(D, \mathcal{O}_D(D)) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) \longrightarrow \cancel{H^1(S, \mathcal{O}_S)} \xrightarrow{0}$$

για κάθε σημείο $p \in D$ μπορούμε να επιλέξουμε $f \in \mathcal{O}_D(D)$ (και συνεπώς στο $\mathcal{O}_S(D)$) που δεν μηδενίζεται στο p και άρα ο D δεν έχει base points.

Θεωρούμε τότε τον μορφισμό

$$\Phi_{|H|}: S \longrightarrow \mathbb{P}^2.$$

Εφόσον ο H επιλέχθηκε να είναι ample γεννήτορας, ο μορφισμός $\Phi_{|H|}$ είναι finite με $\deg \Phi_{|H|} = H^2 = 1$ και η εικόνα του είναι κλειστό subvariety του $\mathbb{P}^2$ διάστασης δύο. Δηλαδή είναι ένα προς ένα και επί του normal variety $\mathbb{P}^2$ και συνεπώς ισομορφισμός [7, σελ. 11, 1.13].

• $r = 1$

Αρχικά παρατηρούμε ότι $(-K_2)^2 = H^2 = 1$. Χρησιμοποιώντας το Hodge Decomposition καθώς και το Universal Coefficient Theorem, υπολογίζουμε τους αριθμούς Betti της S ως εξής:

$$b_0 := h^0(S, \mathbb{C}) = h^{0,0}(S) := h^0(S, \Omega_S^0) = h^0(S, \mathcal{O}_S) = 1,$$

$$b_1 := h^1(S, \mathbb{C}) = h^{1,0}(S) + h^{0,1}(S) = 2h^{1,0}(S) = 2h^1(S, \mathcal{O}_S) = 0,$$

$$b_2 := h^2(S, \mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{C}} H^2(S, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C} = \text{rank} H^2(S, \mathbb{Z}) = 1.$$

Επίσης από Poincaré Duality έχουμε $b_0 = b_4$ και $b_1 = b_3$. Συνολικά

$$e(S) = \sum (-1)^i b_i = 3.$$

Τέλος, από Noether's Formula παίρνουμε

$$\mathbb{Z} \ni \chi(\mathcal{O}_S) = \frac{1}{12}((-K_S)^2 + e(S)) = \frac{1}{3},$$

απ' όπου καταλήγουμε σε άτοπο. □

Ως μία εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος, δίνουμε μια πλήρη κατάταξη των $K_S < 0$ extremal rays του Kleiman-Mori cone.

Θεώρημα 4.1.5. Έστω S nonsingular projective επιφάνεια με K_S όχι nef και έστω R_l ένα extremal ray στο $K_S < 0$ κομμάτι του $\overline{NE}(S)$ και $\text{cont}_{R_l}: S \longrightarrow W$ το αντίστοιχο extremal contraction. Τότε το R_l είναι ο θετικός ημιχώρος $\mathbb{R}_+[l]$ που ορίζεται από μία καμπύλη l που έχει μία από τις εξής μορφές:

- (i) η l είναι (-1) -καμπύλη, με $K_S \cdot l = -1$ και cont_{R_l} να είναι το blow-down αυτής
- (ii) η l είναι ένα fibre του αλγεβρικού $\mathbb{P}^1$ -bundle $\text{cont}_{R_l}: S \longrightarrow W$, με $K_S \cdot l = -2$
- (iii) η l είναι ευθεία στην $S \cong \mathbb{P}^2$, με $K_S \cdot l = -3$ και $\text{cont}_{R_l}: S \longrightarrow W$ να είναι contraction της S σε σημείο.

Αντίστροφα, αν για μία καμπύλη l και ένα μορφισμό ϕ ισχύουν οι ιδιότητες (i), (ii) ή (iii). Τότε ο ημιχώρος $\mathbb{R}_+[l]$ ορίζει ένα extremal ray του κώνου με την έννοια του Mori Cone Theorem.

Απόδειξη. Αν $\dim W = 2$, τότε το extremal contraction της R_l είναι το blow-down της l , όπου τότε βρισκόμαστε προφανώς στην περίπτωση (i). Αν $\dim W = 1$ ή 0 τότε είναι άμεσο από το Θεώρημα 4.1.4 ότι βρισκόμαστε στις περιπτώσεις (ii) και (iii) αντίστοιχα.

Αντίστροφα, έστω l και ϕ που ικανοποιούν κάποια από τα (i),(ii) ή (iii). Θα δειχθεί ότι

$$\mathbb{R}_+[l] = \overline{NE(S)} \cap (\phi^*H)^\perp.$$

Έστω ότι δεν ισχύει. Τότε από το **Βήμα 1** του Mori Cone Theorem, υπάρχει R extremal ray με $R \subseteq \overline{NE(S)} \cap (\phi^*H)^\perp$ και $R \neq \mathbb{R}_+[l]$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\dim(\text{span}\{R, \mathbb{R}_+[l]\}) = 2 \Rightarrow \dim(\text{span}\{R, \mathbb{R}_+[l]\})^\perp = \dim N^1(S) - 2.$$

Ισχυρισμός: Σε κάθε μία από τις περιπτώσεις (i) έως (iii), ο επαγόμενος ομομορφισμός $\phi^*: N^1(W) \rightarrow N^1(S)$ είναι μονομορφισμός με $\dim N^1(W) = \dim N^1(S) - 1$.

Απόδειξη: Στην περίπτωση των (i) και (ii) ισχύει ότι $N^1(S) \cong \phi^*N^1(W) \oplus \mathbb{Z}$ (βλ. [11, σελ. 370, 2.3]) και το ζητούμενο είναι προφανές. Επίσης και στην περίπτωση (iii) το ζητούμενο είναι προφανές, αφού $\dim N^1(\mathbb{P}^2) = 1$. ■

Όμως για κάθε $L \in \phi^*(N^1(W))$ και $z \in \text{span}\{R, \mathbb{R}_+[l]\}$ ισχύει

$$L \cdot z = \phi^*L' \cdot z = L' \cdot \phi_*z = L' \cdot pt = 0,$$

ή αλλιώς η εικόνα του ϕ^* βρίσκεται στο $\text{span}\{R, \mathbb{R}_+[l]\}$, που είναι άτοπο, λόγω των διαστάσεων αυτών των χώρων. □

4.2 Το canonical model ενός minimal model με $\kappa(S) = 2$

Στην παρούσα παράγραφο, έχουμε ως σκοπό να κατασκευάσουμε το canonical model για ένα minimal model S . Ένα minimal model, εξ' ορισμού, έχει nef canonical class. Στις περιπτώσεις όπου το canonical class είναι nef αλλά όχι ample, θα θέλαμε έναν μορφοισμό $\phi: S \rightarrow W$, σε μία επιφάνεια W , που θα κάνει contract τις καμπύλες C για τις οποίες ισχύει $K_S \cdot C = 0$. Αυτό το ζεύγος (W, ϕ) , υπάρχει όταν η λεγόμενη Kodaira διάσταση $\kappa(S)$ είναι ίση με 2 και καλείται το canonical model της S .

Ξεκινάμε την παράγραφο δίνοντας κάποιους ισοδύναμους ορισμούς της Kodaira διάστασης για μία nonsingular projective variety.

Ορισμός 4.2.1 (Kodaira dimension). Έστω X μία nonsingular projective variety, η Kodaira διάσταση $\kappa(X)$ της X , ορίζεται να είναι

$$\kappa(X) := \begin{cases} -\infty, & \text{αν } H^0(S, \mathcal{O}_S(mK_X)) = 0 \ \forall m \in \mathbb{N}, \\ \text{transdeg}_{\mathbb{C}} \oplus_{m \geq 0} H^0(S, \mathcal{O}_S(mK_X)), & \text{άλλως} \end{cases}$$

ή ισοδύναμα

$$\bullet \kappa(X) := \begin{cases} -\infty, & \text{αν } H^0(X, \mathcal{O}_S(mK_X)) = 0 \ \forall m \in \mathbb{N}, \\ \max\{\dim \Phi_{|mK_X|}(X)\}, & \text{άλλως} \end{cases}$$

ή

- $\kappa(X) = 0$ ρυθμός αύξησης του $h^0(mK_X)$ ως συνάρτηση του m , (συμβολικά, $h^0(mK_X) = \Theta(m^{\kappa(X)})$) που πιο τυπικά μεταφράζεται ως εξής:
Υπάρχουν $m_0 \in \mathbb{N}$ και $a, b > 0$ τέτοια ώστε

$$am^{\kappa(X)} \leq h^0(S, \mathcal{O}_S(mm_0K_X)) \leq bm^{\kappa(X)}, \quad \forall m \gg 0.$$

Για αποδείξεις των παραπάνω ισοδυναμιών παραπέμπουμε στο [12, Κεφάλαιο 10]

Παρατήρηση 4.2.2. 1. Η Kodaira διάσταση ενός *singular variety* ορίζεται ως την Kodaira διάσταση ενός *desingularization* αυτής και είναι καλά ορισμένη.

2. Εύκολα βλέπει κανείς πως η Kodaira διάσταση μιας *projective επιφάνειας* είναι *birational invariant* από το Πρόρισμα 3.4.8. Το ίδιο ισχύει και σε μεγαλύτερες διαστάσεις.
3. Από τον 2^ο κατά σειρά ορισμό, εύκολα βλέπει κανείς ότι $\kappa(X) \leq \dim X$.

Πρόταση 4.2.3 (Kodaira Lemma). Έστω S *minimal model*, τότε

$$\kappa(S) = 2 \Leftrightarrow K_S^2 > 0.$$

Απόδειξη. Έστω ότι $\kappa(S) = 2$, τότε από έναν από τους ισοδύναμους ορισμούς της Kodaira dimension, υπάρχουν κατάλληλα a, b, m_0 τέτοια ώστε

$$am^2 \leq h^0(S, \mathcal{O}_S(mm_0K_S)) \leq bm^2.$$

Έστω A ample divisor, θεωρούμε τη σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(mm_0K_S - A) \longrightarrow \mathcal{O}_S(mm_0K_S) \longrightarrow \mathcal{O}_A(mm_0K_S) \longrightarrow 0$$

και την επαγόμενη ακολουθία στη συνολογία

$$0 \longrightarrow H^0(S, \mathcal{O}_S(mm_0K_S - A)) \xrightarrow{\zeta_m} H^0(S, \mathcal{O}_S(mm_0K_S)) \xrightarrow{\eta_m} H^0(A, \mathcal{O}_A(mm_0K_S)).$$

Όμως για $m \gg 0$ ισχύει

$$h^0(S, \mathcal{O}_S(mm_0K_S)) \geq am^2 > 1 - g + m \deg(m_0K_S|_A) = h^0(A, \mathcal{O}_A(mm_0K_S))$$

και άρα για επαρκώς μεγάλο m , $Im \zeta_m = Ker \eta_m \neq 0$. Συνεπώς

$$h^0(S, \mathcal{O}_S(mm_0K_S - A)) \neq 0.$$

Έστω $D \in |mm_0K_S - A|$, τότε

$$\begin{aligned} (mm_0)K_S^2 &= K_S(D + A) \geq K_S \cdot A = \frac{1}{mm_0}(D + A)A > 0 \\ &\Rightarrow K_S^2 > 0. \end{aligned}$$

Αντίστροφα, έστω ότι $K_S^2 > 0$.

Ισχυρισμός: Με τις παραπάνω υποθέσεις, ισχύει $h^2(S, \mathcal{O}_S(mK_S)) = 0$.

Απόδειξη: Έστω ότι δεν ισχύει. Από Serre Duality έχουμε

$$0 \neq h^2(S, \mathcal{O}_S(mK_S)) = h^0(S, \mathcal{O}_S(K_S - mK_S))$$

Τότε για κάποιον D effective divisor με $D \sim K_S - mK_S = (1 - m)K_S$ και $m \geq 2$, παίρνουμε

$$0 \geq (1 - m)A \cdot K_S = A \cdot D > 0$$

καθώς ο K_S είναι nef, το οποίο είναι αντίφαση. ■

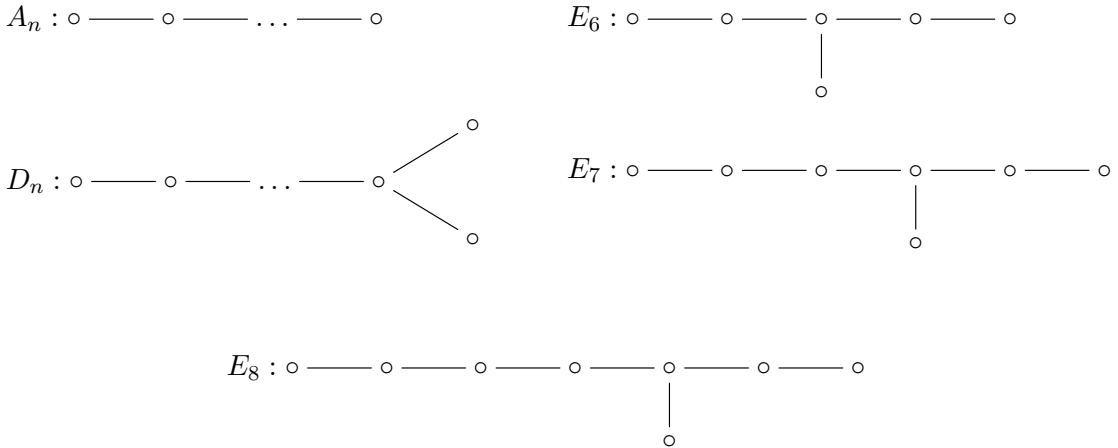
Από το Riemann-Roch Theorem παίρνουμε

$$\begin{aligned} h^0(S, \mathcal{O}_S(mK_S)) &\geq h^0(S, \mathcal{O}_S(mK_S)) - h^1(S, \mathcal{O}_S(mK_S)) + \overline{h^2(S, \mathcal{O}_S(mK_S))} = \\ &= \chi(\mathcal{O}_S(mK_S)) = \frac{1}{2}(mK_S - K_S)mK_S + \chi(\mathcal{O}_S) \\ \Rightarrow h^0(S, \mathcal{O}_S(mK_S)) &= \left(\frac{1}{2}K_S^2\right)m^2 - K_S^2m + \chi(\mathcal{O}_S) \in \Theta(m^2) \\ &\Rightarrow \kappa(S) = 2. \end{aligned} \quad \square$$

Πριν προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε το canonical model ενός minimal model S , θα πρέπει να μελετήσουμε τις καμπύλες C για τις οποίες ισχύει $K_S \cdot C = 0$.

Πρόταση 4.2.4. Έστω S minimal model με Kodaira διάσταση $\kappa(S) = 2$, τότε:

- (i) Υπάρχουν πεπερασμένες το πλήθος καμπύλες C για τις οποίες ισχύει $K_S \cdot C = 0$.
- (ii) Κάθε irreducible και reduced καμπύλη C με $K_S \cdot C = 0$ είναι μία (-2) -καμπύλη (δηλ. $C \cong \mathbb{P}^1$ και $C^2 = -2$).
- (iii) Αν για μία καμπύλη ορίσουμε το **δυϊκό γράφημά** της να είναι το γράφημα με κορυφές τα irreducible components E_i της καμπύλης και δύο κορυφές E_i και E_j να συνδέονται με $E_i \cdot E_j$ το πλήθος ακμές, τότε το δυϊκό γράφημα, ενός connected component, μίας καμπύλης όπως στο (i) έχει μία από τις παρακάτω μορφές:



Απόδειξη. (i) Επιλέγουμε $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\dim \text{Im} \Phi_{|mK_S|} = 2$ και έστω ότι

$$|mK_S| = |M| + F,$$

όπου $|M|$ και F είναι τα moveable και fixed κομμάτια του $|mK_S|$ αντίστοιχα. Ας είναι $Z \subset M$ το fixed locus του $|M|$. Τότε ο

$$\Phi_{|M|} : S \setminus Z \longrightarrow T$$

είναι μορφισμός και μάλιστα birational, εφόσον από το Θεώρημα 3.6.2 μπορούμε να υποθέσουμε ότι έχει connected fibres και τότε είναι generically 1-1 επί normal variety (βλ [13, σελ. 80, 6.4.1]). Επίσης, καθώς το linear system $|M|$ είναι μη κενό χωρίς fixed components, ο M είναι nef.

Έστω C καμπύλη στην S με $K_S \cdot C = 0$, τότε έχουμε δύο ενδεχόμενα:

- $M \cdot C > 0 \Rightarrow F \cdot C < 0 \Rightarrow C \subseteq F$ και
- $M \cdot C = 0 \Rightarrow C \cap Z = \emptyset \Rightarrow C \subset S \setminus Z$ και $\Phi_{|M|}(C) = pt$.

Τα σημεία που προέρχονται από contraction καμπυλών είναι σημεία που ο αντίστροφος του $\Phi_{|M|}$, rational map, δεν ορίζεται και άρα πεπερασμένα το πλήθος. Επίσης οι αντίστροφες εικόνες αυτών ορίζουν κλειστά subvarieties της S και άρα καμπύλες με πεπερασμένο support. Τελικά, οι καμπύλες που ικανοποιούν την περιγραφή των δύο παραπάνω ενδεχομένων είναι πεπερασμένες το πλήθος.

- (ii) Αρχικά παρατηρούμε ότι ο K_S είναι nef divisor με $K_S^2 > 0$ (από το Kodaira Lemma) και αν C είναι καμπύλη της S με $K_S \cdot C = 0$, από το Hodge index theorem παίρνουμε ότι $C^2 < 0$.

Αν επιπλέον η C είναι irreducible και reduced, από το Arithmetic genus formula παίρνουμε

$$0 \leq h^1(C, \mathcal{O}_C) = \frac{1}{2}(K_S + C)C + 1 = \frac{1}{2}C^2 + 1 < 1 \\ \Rightarrow h^1(C, \mathcal{O}_C) = 0 \text{ και } C^2 = -2,$$

το οποίο σημαίνει ότι η C είναι (-2)-καμπύλη.

- (iii) Έστω $E = \sum E_i$ connected component μίας καμπύλης C με $K_S \cdot C = 0$. Εφόσον η S είναι minimal model, ο K_S είναι nef και τότε $K_S \cdot C = 0$ συνεπάγεται ότι $K_S \cdot E_i = 0$ για κάθε i άρα από το (ii), οι E_i είναι (-2)-καμπύλες. Μία πρώτη παρατήρηση είναι ότι για κάθε $e_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $K_S \cdot \sum e_i E_i = 0$ και πάλι από Hodge index theorem $(\sum e_i E_i)^2 < 0$.

Ισχυρισμός: Ανά δύο τα components E_i του E έχουν πολλαπλότητα το πολύ 1.

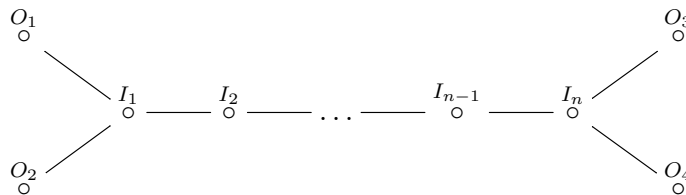
Απόδειξη: Για δύο components E_i, E_j , έχουμε

$$(E_i + E_j)^2 < 0 \Rightarrow E_i^2 + 2E_i \cdot E_j + E_j^2 < 0 \Rightarrow E_i \cdot E_j < 2 \Rightarrow E_i \cdot E_j = 1 \text{ ή } 0.$$

■

Ισχυρισμός: Στο δυϊκό γράφημα της E υπάρχει το πολύ ένας κόμβος με περισσότερες από δύο ακμές σε αυτόν.

Απόδειξη: Αν στο γράφημα υπάρχουν περισσότεροι από έναν τέτοιο κόμβο, τότε υπάρχει κάποιο υπογράφημα της μορφής



Έστω ότι τα components που αντιστοιχούν στους τέσσερις εξωτερικούς κόμβους είναι τα $E_{O_1}, E_{O_2}, E_{O_3}, E_{O_4}$, ενώ στους n εσωτερικούς τα $E_{I_1}, \dots, E_{I_n}$. Θεωρούμε το 1-cycle

$$D = E_{O_1} + E_{O_2} + 2E_{I_1} + 2E_{I_2} + \dots + 2E_{I_n} + E_{O_3} + E_{O_4}.$$

Τότε είναι

$$\begin{aligned} D^2 &= \sum_{i=1}^4 E_{O_i}^2 + \sum_{i=1}^n 4E_{I_i}^2 + 2(E_{O_1} \cdot 2E_{I_1}) + 2(E_{O_2} \cdot 2E_{I_2}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} 4E_{I_i} \cdot E_{I_{i+1}} + \\ &+ 2(E_{O_3} \cdot 2E_{I_n}) + 2(E_{O_4} \cdot 2E_{I_n}) = -8 - 8n + 4 + 4 + 8(n-1) + 4 + 4 = 0, \end{aligned}$$

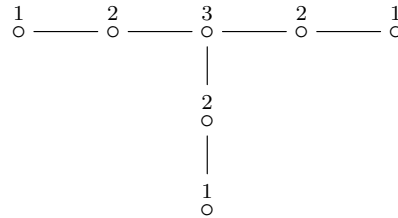
το οποίο όμως αντιβαίνει στην αρχική παρατήρηση καθώς θα έπρεπε να ήταν γνήσια μικρότερο του μηδενός. ■

Ο παραπάνω ισχυρισμός δείχνει επίσης ότι ένας κόμβος δεν μπορεί να έχει πάνω από τρεις ακμές καθώς τότε θα είχαμε ένα υπογράφημα της παραπάνω μορφής με $n = 1$ εσωτερικούς κόμβους.

Χάριν συντομίας, στις αποδείξεις των παρακάτω ισχυρισμών οι αριθμοί πάνω από τους κόμβους του εκάστοτε γραφήματος θα συμβολίζουν τους συντελεστές e_i των αντίστοιχων components E_i .

Ισχυρισμός: Σε κάθε κόμβο με τρεις ακμές, υπάρχει τουλάχιστον ένα κλαδί που ξεκινάει από αυτόν και έχει μήκος 1.

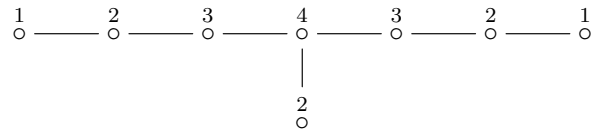
Απόδειξη: Άλλως θα είχαμε ένα υπογράφημα τις μορφής



που το αντίστοιχο 1-cycle θα είχε αυτοτομή 0. ■

Ισχυρισμός: Αν κάποιος κόμβος με τρεις ακμές έχει περισσότερα από δύο κλαδιά μήκους ≥ 2 τότε κάποιο από αυτά έχει μήκος ακριβώς 2.

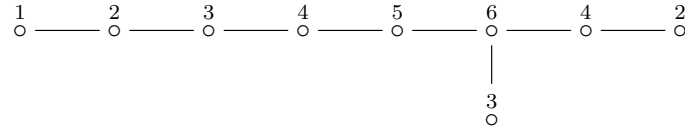
Απόδειξη: Άλλως θα είχαμε ένα υπογράφημα τις μορφής



με τον αντίστοιχο 1-cycle να έχει και πάλι αυτοτομή 0. ■

Ισχυρισμός: Για ένα κόμβο με τρεις ακμές, με τα δύο κλαδιά να έχουν μήκος 1 και 2, το τρίτο έχει μήκος το πολύ 4.

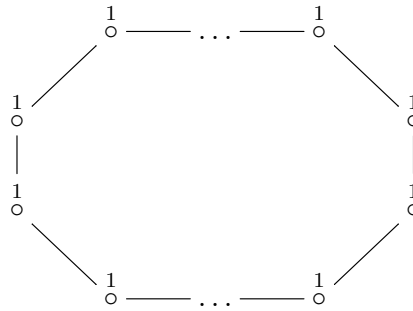
Απόδειξη: Άλλως θα είχαμε ένα υπογράφημα τις μορφής



που το αντίστοιχο 1-cycle θα είχε αυτοτομή 0. ■

Ισχυρισμός: Το γράφημα δεν περιέχει καθόλου κύκλους.

Απόδειξη: Άλλως θα είχαμε ένα υπογράφημα τις μορφής



με τον αντίστοιχο 1-cycle να έχει αυτοτομή 0. ■

Τέλος εύκολα μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι, λόγω των παραπάνω ισχυρισμών, τα μόνα επιτρεπόμενα γραφήματα είναι τα A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 . □

Θεώρημα 4.2.5. Έστω S ένα *minimal model* στη διάσταση 2 με Kodaira διάσταση $\kappa(S) = 2$. Τότε υπάρχει μορφισμός

$$\Phi: S \longrightarrow S_{can}$$

σε μία **normal projective** επιφάνεια τέτοιος ώστε

- (i) $\Phi(C) = pt \Leftrightarrow K_S \cdot C = 0$,
- (ii) $\mathcal{O}_S(K_S) = \Phi^* \mathcal{K}$ για κάποιο *line bundle* $\mathcal{K}$ στην S_{can} .

Η επιφάνεια S_{can} καλείται το **canonical model** της S .

Απόδειξη. Από την προηγούμενη πρόταση γνωρίζουμε τον σχηματισμό των καμπυλών C με $C \cdot K_S = 0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει μία μόνο τέτοια καμπύλη (αν όχι, θεωρούμε C' την ένωση αυτών).

Βήμα 1. Τοπικά

Για το υπόλοιπο του πρώτου βήματος σταθεροποιούμε $E = \sum e_i E_i$ ένα connected component της C . Όπως και στην απόδειξη του Castelnuovo's Contraction Theorem, θα επιλέξουμε έναν ample divisor A και $a_i \in \mathbb{N}_{>0}$ τω ο divisor $M := A + \sum a_i E_i$ να είναι nef και να έχει την ιδιότητα $M \cdot C = 0 \Leftrightarrow C = E_j$.

Θεωρούμε τον πίνακα $I = (E_i \cdot E_j)$, που έχει γνωστή μορφή από την προηγούμενη πρόταση. Πίνακες αυτής της μορφής καλούνται πίνακες Cartan. Θεωρούμε το ομογενές γραμμικό σύστημα με αγνώστους τα a_i

$$\begin{aligned} (A + \sum a_i E_i) E_j = 0 &\Leftrightarrow I^t \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A \cdot E_1 \\ \vdots \\ -A \cdot E_n \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (I^{-1})^t \begin{pmatrix} -A \cdot E_1 \\ \vdots \\ -A \cdot E_n \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Οι αντίστροφοι των πινάκων Cartan υπολογίζονται στο [16, σελ. 295] και έχουν μόνο αρνητικά στοιχεία. Επίσης, εφόσον ο A είναι ample οι τιμές $-A \cdot E_i$ είναι αρνητικές και συνεπώς τα a_i είναι θετικοί ρητοί αριθμοί.

Επιλέγοντας επαρκώς μεγάλο και διαιρέσιμο πολλαπλάσιο του A , μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a_i \in \mathbb{N}$ και $h^1(S, \mathcal{O}_S(A)) = 0$.

Αν το linear system $|M| \supseteq |A| + E$ έχει base points τότε αυτά θα βρίσκονται στην E . Για κάποιο component E_j της E , θεωρούμε τη σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(M - E_j) \longrightarrow \mathcal{O}_S(M) \longrightarrow \mathcal{O}_{E_j} \longrightarrow 0$$

και την επαγόμενη ακριβή ακολουθία στη συνομολογία

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow H^0(S, \mathcal{O}_S(M)) &\longrightarrow H^0(E_j, \mathcal{O}_{E_j}(M)) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) \cong \mathbb{C} \\ &\longrightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S(M - E_j)) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Εφόσον ψάχνουμε ένα section του M (στην S) που δεν μηδενίζεται στην E_j , αρκεί να δειχθεί ότι $H^1(S, \mathcal{O}_S(M - E_j)) = 0$.

Ισχυρισμός: Για κάθε E_j όπως αυτό που επιλέχθηκε παραπάνω, υπάρχει ακολουθία καμπυλών

$$E_{j_0} = E_j, E_{j_1}, \dots, E_{j_l} \text{ με } \sum_{i=1}^l E_{j_i} = \sum a_i E_i = E$$

τέτοια ώστε, αν θέσουμε

$$\begin{aligned} B_0 &= M - E_{j_0} \\ B_1 &= B_0 - E_{j_1} = M - E_{j_0} - E_{j_1} \\ &\vdots \\ B_l &= B_{l-1} - E_{j_l} = M - \sum a_i E_i = A, \end{aligned}$$

να ισχύει ότι $\mathcal{O}_S(B_{r-1})|_{E_{j_r}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k_r)$, με το $k_r \geq -1$ σε κάθε βήμα r .

Απόδειξη: Σε κάθε βήμα ισχύει

$$\mathcal{O}_{E_{j_r}}(B_{r-1}) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(B_{r-1} \cdot E_{j_r})$$

με τα multiplicities να είναι

$$B_{r-1} \cdot E_{j_r} = (M - \sum_{k < r} E_{j_k}) E_{j_r} = \cancel{M \cdot E_{j_r}} - \sum_{k < r} E_{j_k} \cdot E_{j_r}.$$

Από το προηγούμενο όμως λήμμα, γνωρίζουμε όλες τις τομές $E_i \cdot E_j$ και τον ακριβή σχηματισμό αυτών. Αν θέσουμε N και N_{adj} να είναι αντίστοιχα ο συντελεστής της E_r και το άθροισμα των συντελεστών των γειτονικών σε αυτή στην $\sum_{k \leq r} E_{j_k}$ τότε πρέπει να ισχύει η παρακάτω σχέση

$$2(N - 1) - N_{adj} \geq -1 \Leftrightarrow 2N - N_{adj} \geq 1,$$

καθώς $N - 1$ είναι ο συντελεστής της E_r στην $\sum_{k < r} E_{j_k}$.

Η ύπαρξη τέτοιας ακολουθίας αποδεικνύεται στο τέλος του παρόντος κεφαλαίου. ■

Για κάθε $0 \leq r \leq l$ θεωρούμε τη σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(B_r) \longrightarrow \mathcal{O}_S(B_{r-1}) \longrightarrow \mathcal{O}_{E_{j_r}}(B_{r-1}) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k_r) \longrightarrow 0$$

και τη επαγόμενη ακριβή ακολουθία στη συνομολογία

$$\dots \longrightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S(B_r)) \longrightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S(B_{r-1})) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k_r)) \longrightarrow \dots$$

Για $r = l$ η παραπάνω ακριβής ακολουθία δίνει

$$\begin{aligned} H^1(S, \mathcal{O}_S(B_l)) &= \cancel{H^1(S, \mathcal{O}_S(A))} \xrightarrow{0} H^1(S, \mathcal{O}_S(B_{l-1})) \longrightarrow \cancel{H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k_r))} \xrightarrow{0} \\ &\Rightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S(B_{l-1})) = 0 \end{aligned}$$

Αντίστοιχα για $r = l - 1$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} H^1(S, \mathcal{O}_S(B_{l-1})) &= \cancel{H^1(S, \mathcal{O}_S(B_{l-1}))} \xrightarrow{0} H^1(S, \mathcal{O}_S(B_{l-2})) \longrightarrow \cancel{H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k_r))} \xrightarrow{0} \\ &\Rightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S(B_{l-2})) = 0 \end{aligned}$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά, έχουμε ότι $H^1(S, \mathcal{O}_S(B_0)) = H^1(S, \mathcal{O}_S(M - E_j)) = 0$ που είναι το ζητούμενο.

Άρα, σύμφωνα με τα προηγούμενα το linear system $|M|$ είναι base point free και ο αντίστοιχος μορφισμός $\phi_{|M|}: S \longrightarrow W$ κάνει contract μόνο το connected component E της C .

Βήμα 2. Ολικά

Για κάθε connected component της C , επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία και παίρνουμε κατάλληλα $a_i \in \mathbb{N}_{>0}$, ώστε να ισχύουν τα παραπάνω και θέτουμε

$$M = A + \sum_{E_i \subseteq C} a_i E_i,$$

ο οποίος είναι base point free και nef $\mathbb{Z}$ -divisor με την ιδιότητα

$$M \cdot C = 0 \Leftrightarrow K_S \cdot C = 0.$$

Επιλέγουμε ένα κατάλληλα μεγάλο πολλαπλάσιο του M , έτσι ώστε ο μορφισμός $\phi_{|M|} = \Phi: S \rightarrow S_{can}$ να έχει connected fibres από την Πρόταση 3.6.2. Τότε η S_{can} είναι normal projective επιφάνεια και άρα το μόνο που μένει ναδειχθεί είναι ότι υπάρχει κάποιο line bundle $\mathcal{K}$ στην S_{can} με $\mathcal{O}_S(K_S) = \Phi^*\mathcal{K}$.

Πάλι από την Πρόταση 3.6.2 υπάρχει κάποιο, υπάρχει κάποιο line bundle $\mathcal{L}$ στην S_{can} τέτοιο ώστε $\Phi^*\mathcal{L} = M = A + \sum a_i E_i$.

Επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία, αντικαθιστώντας τον A με τον $A' = A + K_S$. Παρατηρούμε ότι εφόσον $K_S \cdot E_i = 0$ τότε

$$A \cdot E_i = A' \cdot E_i \quad \forall i,$$

και άρα στην σχέση (4.2), τα a_i παραμένουν σταθερά μετά την αλλαγή.

Όμοια με πριν, θεωρούμε τον $M' = A' + \sum_{E_i \subset C} a_i E_i$ και τον αντίστοιχο μορφισμό $\Phi: S \rightarrow S_{can}$ (τόσο ο $\phi_{|M'|}$ όσο και η εικόνα του είναι ίδια με τα αντίστοιχα του $\phi_{|M|}$ από την Παρατήρηση 3.6.3) και τότε και πάλι υπάρχει κάποιο line bundle $\mathcal{L}'$ στην S_{can} τέτοιο ώστε $\Phi^*\mathcal{L}' = M = A + K_S + \sum a_i E_i$. Τέλος έχουμε

$$\mathcal{O}_S(K_S) = \mathcal{O}_S(M' - M) = \Phi^*(\mathcal{K})$$

όπου $\mathcal{K} = \mathcal{L}' \otimes \mathcal{L}^*$. □

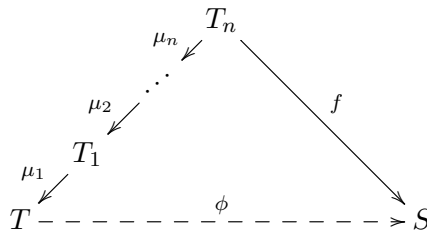
Σχόλιο. Τονίζουμε ότι το *canonical model*, όπως αυτό κατασκευάστηκε παραπάνω, είναι *singular variety* αν και μόνον αν υπάρχουν καμπύλες για τις οποίες ισχύει $K_S \cdot C = 0$. Τότε τα *singular* σημεία είναι αυτά ακριβώς στα οποία έγιναν *contract* οι $K_S \cdot C = 0$ καμπύλες. Τα *singularities* όμως αυτά, γνωστά στη βιβλιογραφία και ως **Du Val singularities** ή **rational double points** και είναι καλά μελετημένα (βλ. [9]).

4.3 Ιδιότητες των Minimal models

Σκοπός της παρούσας παραγράφου είναι η απόδειξη της μοναδικότητας των minimal models στη διάσταση 2 καθώς και μία σύντομη επισκόπηση, χωρίς απόδειξη, δύο θεμελιωδών αποτελεσμάτων, του Hard Dichotomy Theorem και του Abundance Theorem. Για αποδείξεις αυτών παραπέμπουμε στο [1, σελ. 53].

Θεώρημα 4.3.1 (Absolute Minimality of Minimal Models). *Έστω S minimal model και $\phi: T \dashrightarrow S$ ένας birational map, με T nonsingular projective επιφάνεια. Τότε ο ϕ είναι μορφισμός.*

Απόδειξη. Από το Πόρισμα 3.4.7 υπάρχει κάποιο resolution of indeterminacy για τον ϕ . Από όλα αυτά τα πιθανά resolutions επιλέγουμε ένα minimal.



Αν το n είναι 0, τότε έχουμε τελειώσει. Έστω ότι $n \neq 0$ και έστω E το exceptional curve του $\mu_n: T_n \rightarrow T_{n-1}$. Τότε η εικόνα $f(E) = C$, του E μέσω του f , είναι καμπύλη διότι άλλως θα μπορούσαμε να ορίσουμε έναν μορφισμό $f': T_{n-1} \rightarrow S$, όπου αντιβαίνει το minimality του resolution.

Πριν προχωρήσουμε κάνουμε την εξής παρατήρηση. Αν $g: X \rightarrow Y$ είναι blow up μιας επιφάνειας και $C \subset X$ καμπύλη με $g(C) = C'$ καμπύλη, τότε

$$K_X \cdot C = (g^* K_Y + E)(g^* C' - mE)$$

και επομένως

$$K_X \cdot C = K_Y \cdot C' + m \geq K_Y \cdot C'$$

όπου m η πολλαπλότητα της C' στο σημείο του blow up.

Γνωρίζουμε ότι ο f είναι σύνθεση από blow downs και άρα χρησιμοποιώντας την παραπάνω παρατήρηση και το γεγονός ότι ο K_S είναι nef, παίρνουμε

$$-1 = K_{T_n} \cdot E \geq K_S \cdot C \geq 0,$$

το οποίο είναι άτοπο. □

Πόρισμα 4.3.2 (Uniqueness of the Minimal Models). *Σε κάθε birational κλάση ισοδυναμίας, αν υπάρχει minimal model αντιπρόσωπος, τότε αυτός είναι μοναδικός. Στην πραγματικότητα ισχύει πιο γενικά, ότι αν $\phi: S_1 \dashrightarrow S_2$ είναι ένας birational map τότε αυτός είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το προηγούμενο θεώρημα στα rational maps ϕ και ϕ^{-1} . □

Θεώρημα 4.3.3 (Hard Dichotomy Theorem). *Έστω S μία nonsingular projective επιφάνεια. Το τελικό αποτέλεσμα του MMP με είσοδο την S είναι*

- *Minimal model, αν $\kappa(S) \geq 0$,*
- *Mori fibre space, αν $\kappa(S) = -\infty$.*

Όπως είδαμε νωρίτερα, για τους Mori fibre spaces έχουμε ένα πολύ ισχυρό θεώρημα ταξινόμησης που διευκολύνει πολύ τη μελέτη τους. Το παρακάτω θεώρημα μας δίνει ένα καλό εργαλείο για τη μελέτη των Minimal models.

Θεώρημα 4.3.4 (Abundance Theorem). *Για ένα minimal model S , το complete linear system $|mK_S|$ είναι base point free για κατάλληλα μεγάλο και διαιρέσιμο $m \in \mathbb{N}$.*

Δοθείσας τυχούσας nonsingular projective επιφάνειας, πολύ συχνά η μόνη πληροφορία που έχουμε για την επιφάνεια, που δεν εξαρτάται από την εμφύτευση αυτής σε κάποιο $\mathbb{P}^n$, είναι το canonical class K_S αυτής. Το παραπάνω θεώρημα μας δίνει έναν εσωτερικό τρόπο να πάρουμε πληροφορίες για την επιφάνειά μας σε σχέση με κάποιο $\mathbb{P}^n$. Υπενθυμίζουμε ότι η διάσταση της εικόνας του $\Phi_{|mK_S|}$ είναι εξ' ορισμού η Kodaira διάσταση της S . Όλα αυτά γίνονται πιο σαφή στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 4.3.5 (Iitaka fibration). *Έστω S minimal model τότε για $m \gg 0$ ο μορφισμός*

$$\Phi = \Phi_{|mK_S|}: S \rightarrow S_{can}$$

έχει τις εξής ιδιότητες:

- (i) Ο Φ είναι μορφισμός με *connected fibres* σε μία *normal projective variety*.
- (ii) Για κάθε καμπύλη $C \subset S$ ισχύει

$$\Phi(C) = pt \Leftrightarrow K_S \cdot C = 0.$$

- (iii) $\mathcal{O}_S(mK_S) = \Phi^*(H)$, για κάποιον *ample divisor* H στην S_{can} .
- (iv) $\kappa(S) = \dim S_{can}$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση από τα Abundance Theorem και την Πρόταση 3.6.2. $\square$

4.4 Λύση του συνδυαστικού προβλήματος

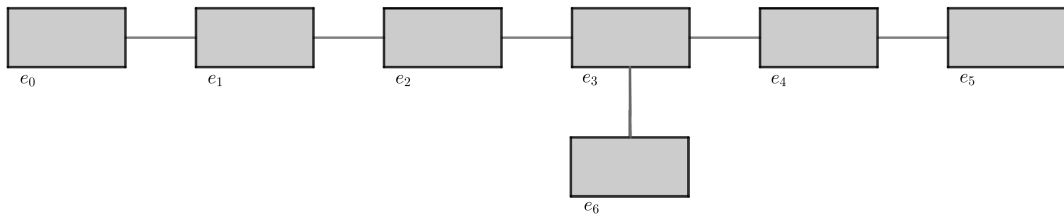
Θεωρούμε το εξής πρόβλημα. Έστω ότι έχουμε ένα από τα γραφήματα της Πρότασης 4.2.4, με κάποια βάρη (κύβους) w_i που πρέπει να ανατεθούν σε κάθε κόμβο e_i . Θέλουμε, ξεκινώντας από τον ίδιο σχηματισμό χωρίς καθόλου τοποθετημένους κύβους, να τοποθετήσουμε το ζητούμενο πλήθος κύβων έτσι ώστε να ισχύει το εξής. Στο τέλος του κάθε βήματος, αν θέσουμε M_i να είναι το ύψος των κύβων στον κόμβο e_i , που μόλις τοποθετήσαμε τον τελευταίο κύβο, και M_{adj_i} το άθροισμα των υψών των κύβων στους κόμβους που γειτονεύουν με τον e_i , τότε να ισχύει η σχέση

$$2M_i - M_{adj_i} \geq 1.$$

(Ισοδύναμα, αν κάνουμε τον έλεγχο πριν τοποθετήσουμε τον κύβο τότε θα πρέπει να ισχύει $2M_i - M_{adj_i} \geq -1$.)

Μία λύση του προβλήματος θα είναι μία πεπερασμένη ακολουθία $(s_i)_{i=0}^n$, έτσι ώστε αν στο βήμα i τοποθετούμε έναν κύβο στον κόμβο με δείκτη s_i , το στιγμιότυπο να ικανοποιεί την παραπάνω σχέση.

Για παράδειγμα, στον σχηματισμό E_7 και την ακολουθία $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ αντιστοιχεί το παρακάτω στιγμιότυπο.



Αν στο επόμενο στιγμιότυπο προσθέσουμε έναν κύβο στον κόμβο e_2 , όπως στην παρακάτω εικόνα, τότε δεν θα μπορέσουμε ποτέ ξανά να τοποθετήσουμε κύβο στον κόμβο e_3 , διότι πάντα θα αποτυγχάνει η παραπάνω ανισότητα.

Ισχυρισμός: Έστω $(s_i)_{i=0}^n$ μία λύση για βάρη όπως απεικονίζονται παραπάνω με $\kappa = 1$. Τότε η διαδοχική επανάληψη της ίδιας λύσης ν -φορές είναι λύση του αντίστοιχου προβλήματος, με βάρη, όπως παραπάνω, για $\kappa = \nu$

Απόδειξη: Για τυχόν στιγμιότυπο της λύσης, συμβολίζουμε με c_k το πλήθος των κύβων στον κόμβο e_k . Έστω τυχόν $i_0 \in \{0, \dots, n\}$ και $s_{i_0} = e_k$, τότε εφόσον η $(s_i)_{i=0}^n$ είναι λύση ισχύει

$$2c_k > \sum_J c_j, \quad \text{όπου } J = \{\text{δείκτες των γειτονικών στον } e_k \text{ κόμβων}\}.$$

Όμως στην ν -οστή επανάληψη της λύσης, στο στιγμιότυπο $i_0 + \nu\kappa$, τα βάρη θα είναι $c'_i = c_i + d_i\nu\kappa$, όπου d_i είναι ο ασυμπτωτικός συντελεστής του e_i .

Αρκεί να παρατηρηθεί ότι για τους ασυμπτωτικούς συντελεστές ισχύει η εξής σχέση

$$2d_k \geq \sum_J d_j.$$

Τότε συνδυάζοντας τις παραπάνω ανισότητες εύκολα βλέπει κανείς ότι ισχύει η επιθυμητή σχέση

$$2c'_k > \sum_J c'_j. \quad \blacksquare$$

Έστω ότι έχουμε μια λύση για $\kappa = 1$ στα παραπάνω γραφήματα και θέλουμε να λύσουμε ένα πρόβλημα με βάρη w_i . Τότε, σύμφωνα με τα παραπάνω, έχουμε μία λύση ως εξής. Επιλέγουμε $\kappa \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $d_i\kappa \geq w_i$ για κάθε i και επαναλαμβάνουμε την αρχική λύση κ -φορές, αγνοώντας πιθανόν κάποια βήματα, όπως περιγράφηκε νωρίτερα.

Το μόνο που μας λείπει λοιπόν είναι αρχικές λύσεις για κάθε ένα από τα παραπάνω γραφήματα, οι οποίες παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

A_n	$(0, 1, \dots, n)$
D_n	$(0, 1, \dots, n, 0, 1, \dots, n-2)$
E_6	$(0, 1, 2, 3, 4, 5, 2, 1, 3, 2, 5, 0, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 5, 2, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3)$
E_7	$(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 6, 3, 4, 5)$
E_8	$(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 4, 3, 2, 1, 5, 4, 3, 2, 7, 4, 3, 5, 4, 6, 5, 7, 4, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 4, 3, 2, 5, 4, 3, 7, 4, 5, 6, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 4, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 4, 3, 2, 5, 4, 3, 7, 4, 5, 6, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 4, 3, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 4, 5)$

Παρατήρηση 4.4.1. Και στις πέντε παραπάνω αρχικές λύσεις η ακολουθία ξεκινά με $(0, \dots, \nu)$, όπου ν είναι το πλήθος των κόμβων στο εκάστοτε γράφημα. Η επιλογή αυτή έγινε έτσι ώστε η λύση να μπορεί να ξεκινά από οποιονδήποτε κόμβο.

Τέλος, στη επόμενη σελίδα, παρατίθεται ο κώδικας Macaulay2 που χρησιμοποιήθηκε για την εύρεση αρχικής λύσης για το γράφημα E_8 . Ο παρακάτω κώδικας δίνει μία λύση από το ένατο βήμα και μετά, τα πρώτα οκτώ βήματα μπορεί να είναι οποιαδήποτε μετάθεση του συνόλου $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

```

-----Configuration E_8-----
k=0;
ZZ[o];
-----Building the graph-----
for i from 0 to 7 do (
    for j from 0 to 7 do (
        adj_(i,j) = 0;
    )
)
adj_(0,1) = 1; adj_(1,0) = 1; adj_(1,2) = 1;
adj_(2,1) = 1; adj_(2,3) = 1; adj_(3,2) = 1;
adj_(3,4) = 1; adj_(4,3) = 1; adj_(4,5) = 1;
adj_(4,7) = 1; adj_(5,4) = 1; adj_(5,6) = 1;
adj_(6,5) = 1; adj_(7,4) = 1;
-----Desired weights-----
s_0 = 4*(k+1); s_1 = 8*(k+1); s_2 = 12*(k+1);
s_3 = 16*(k+1); s_4 = 20*(k+1); s_5 = 14*(k+1);
s_6 = 7*(k+1); s_7 = 10*(k+1);
maxs = max {s_0,s_1,s_2,s_3,s_4,s_5,s_6,s_7};
-----Initial weights-----
mult_0 = 1; mult_1 = 1; mult_2 = 1;
mult_3 = 1; mult_4 = 1; mult_5 = 1;
mult_6 = 1; mult_7 = 1;
-----
for i from 0 to 7 do (
    madj_i = 0;
)
for i from 0 to 7 do (
    for j from 0 to 7 do (
        madj_i = madj_i + mult_j*adj_(i,j);
    )
)
seq = {};
while ((mult_0 != s_0) or (mult_1 != s_1) or (mult_2 != s_2) or (mult_3 != s_3) or
(mult_4 != s_4) or (mult_5 != s_5) or (mult_6 != s_6) or (mult_7 != s_7)) do (
    difflist = {};
    fixlist = {};
    for i from 0 to 7 do (
        difference_i = 2*mult_i - madj_i;
        difflist = difflist|{difference_i};
    );
    for i from 0 to 7 do (
        if mult_i == s_i then fixlist = fixlist|{2*maxs + madj_i}
        else fixlist = fixlist|{0}
    );
    difflist = difflist + fixlist;
    if min difflist < -1 then break print "No Solution";
    k = minPosition difflist;
    seq = seq|{k};
    mult_k = mult_k + 1;
    for i from 0 to 7 do (
        madj_i = madj_i + adj_(k,i)
    );
    M = matrix{{mult_0,mult_1,mult_2,mult_3,mult_4,mult_5,mult_6},
               {0,o,o,o,mult_7,o,o}};
    print M;
    print " ";

```

)
print seq

Κεφάλαιο 5

Η Enriques κατάταξη των αλγεβρικών επιφανειών

Στο πρώτο μέρος του κεφαλαίου αυτού, θα παρουσιάσουμε την Enriques κατάταξη των αλγεβρικών επιφανειών, δίνοντας μόνο μια σκιαγράφηση της απόδειξης. Το δεύτερο μέρος αφιερώνεται σε μια στοιχειώδη μελέτη επιλεγμένων birational αντιπροσώπων σε κάθε κλάση της παραπάνω κατάταξης. Όλα τα παραδείγματα και οι προτάσεις χωρίς απόδειξη, στις τρεις τελευταίες παραγράφους του κεφαλαίου, έχουν ληφθεί από τα [3] και [4].

5.1 Παρουσίαση του κεντρικού θεωρήματος

Θεώρημα 5.1.1 (Enriques κατάταξη). *Κάθε nonsingular projective επιφάνεια είναι birational με κάποιον από τους αντιπροσώπους που δίνονται στον παρακάτω πίνακα.*

<i>Birational αντιπρόσωπος</i>	$\kappa(S)$ <i>Kodaira διάσταση</i>	$p_g = h^0(S, \mathcal{O}_S(K_S))$ <i>Geometric genus</i>	$q = h^1(S, \mathcal{O}_S)$ <i>Irregularity</i>
$\mathbb{P}^2$	$-\infty$	0	0
$\mathbb{P}^1 \times C$ <i>C nonsingular καμπύλη γένους q</i>	$-\infty$	0	> 0
<i>Abelian επιφάνειες</i>	0	1	2
<i>Bielliptic επιφάνειες</i>	0	0	1
<i>K3 επιφάνειες</i>	0	1	0
<i>Enriques επιφάνειες</i>	0	0	0
<i>Ελλειπτικές επιφάνειες</i>	1	≥ 0	≥ 0
<i>Επιφάνειες γενικού τύπου</i>	2	≥ 0	≥ 0

Ο παραπάνω πίνακας, δίνει την κατάταξη των αλγεβρικών επιφανειών ως προς birational ισοδυναμία. Για την πλήρη κατάταξη των συμπαγών complex επιφανειών, γνωστή και ως Enriques-Kodaira classification, παραπέμπουμε στο [3, σελ. 244].

Αποδεικνύουμε τώρα, μία πρόταση που είναι στην καρδιά της απόδειξης του παραπάνω θεωρήματος.

Πρόταση 5.1.2. Έστω S minimal model με $\kappa(S) = 0$, τότε $\chi(\mathcal{O}_S) \geq 0$.

Απόδειξη. Αρχικά, από το Λήμμα 4.2.3, καθώς και από το ότι ο K_S είναι nef, έχουμε $K_S^2 = 0$.

Για την τοπολογική Euler χαρακτηριστική $e(S)$ της S ισχύει

$$e(S) = \sum (-1)^i b_i = 2b_0 - 2b_1 + b_2 = 2 - 2b_1 + b_2,$$

όπου εδώ χρησιμοποιήσαμε το Poincaré Duality.

Χρησιμοποιώντας τα Hodge Decomposition και Serre Duality παίρνουμε

$$b_1 = h^1(S, \mathbb{C}) = h^{1,0} + h^{0,1} = 2h^{1,0} = 2h^1(S, \mathcal{O}_S).$$

Βάζοντας όλα τα παραπάνω στην Noether's Formula, έχουμε

$$12\chi(\mathcal{O}_S) = 2 - 4h^1(S, \mathcal{O}_S) + b_2. \quad (5.1)$$

Επίσης για την χαρακτηριστική $\chi(\mathcal{O}_S)$, χρησιμοποιώντας ακόμη μία φορά Serre Duality παίρνουμε

$$\chi(\mathcal{O}_S) = 1 - h^1(S, \mathcal{O}_S) + h^0(S, \mathcal{O}_S(K_S)). \quad (5.2)$$

Κάνοντας την πράξη (5.1) - 4 · (5.2), βρίσκουμε

$$\begin{aligned} 8\chi(\mathcal{O}_S) &= -2 - 4h^0(S, \mathcal{O}_S(K_S)) + b_2 \\ &\Rightarrow 8\chi(\mathcal{O}_S) \geq -6 \Rightarrow \chi(\mathcal{O}_S) \geq 0, \end{aligned}$$

διότι εξ' ορισμού της Kodaira διάστασης $\kappa(S) \leq 0 \Rightarrow h^0(S, \mathcal{O}_S(K_S)) = 0$ ή 1. □

Ολοκληρώνουμε την παράγραφο με τη σκιαγράφηση της απόδειξης του Θεωρήματος 5.1.1.

Σκιαγράφηση της απόδειξης του Θεωρήματος 5.1.1. Ξεκινάμε με μία nonsingular projective επιφάνεια S . Εφόσον μας ενδιαφέρει η birational ταξινόμηση αυτής, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι η S είναι έξοδος του MMP.

Η περίπτωση $\kappa(S) = -\infty$ σημαίνει (λόγω του Hard Dichotomy Theorem) ότι η S έχει δομή Mori fibre space οπότε τότε από το Structure Theorem for Mori fibre spaces, έχουμε το ζητούμενο. Μένει μόνο να σημειωθεί ότι η περίπτωση $g(C) = 0$ στην δεύτερη κατά σειρά κλάση, δεν μπορεί να συμβεί καθώς τότε θα είχαμε $\mathbb{P}^1 \times C = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ η οποία είναι birational με το $\mathbb{P}^2$ ($\mathbb{A} \times \mathbb{A} \cong \mathbb{A}^2$) και άρα στην πρώτη κλάση, επίσης η σχέση $g(C) = q$ βγαίνει άμεσα από την Künneth formula (βλ. [13, σελ. 116, 9.2.4]).

Για την περίπτωση $\kappa(S) = 2$ δεν υπάρχουν και πολλά να πούμε καθώς υπάρχει μόνο μία κλάση, της οποίας οι αντιπρόσωποι είναι εξ' ορισμού οι επιφάνειες γενικού τύπου. Όσο για την περίπτωση $\kappa(S) = 1$, αν $\phi: S \rightarrow W$ είναι το Iitaka fibration της S , τότε για ένα general fibre F η Arithmetic genus formula δίνει

$$g(F) = \frac{1}{2}(K_S + F) \cdot F + 1 = 1.$$

Άρα κάθε fibre είναι ελλειπτική καμπύλη και εξ' ορισμού η S είναι ελλειπτική επιφάνεια.

Τέλος για την περίπτωση $\kappa(S) = 0$, η τελευταία πρόταση μας δίνει

$$\chi(\mathcal{O}_S) = 1 - h^1(S, \mathcal{O}_S) + h^0(S, \mathcal{O}_S(K_S)) \geq 0$$

όπου μας επιτρέπει μόνο τους συνδυασμούς του πίνακα για τα p_g και q καθώς και ακόμα μία περίπτωση, $p_g = q = 1$. Η μελέτη των πρώτων τεσσάρων αντικειμένων γίνεται με βάση ακριβώς αυτές τις αριθμητικές ιδιότητες καθώς και με κάποια ακόμη εργαλεία όπως το Albanese map και το Canonical bundle formula for elliptic fibrations, που όμως ξεφεύγουν από τους σκοπούς της εργασίας και γι' αυτό παραλείπονται. Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στο [1, σελ. 83-88].

Για την τελευταία περίπτωση $p_g = q = 1$ θα αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει S που να ικανοποιεί αυτή την σχέση.

Έστω S με αυτές τις ιδιότητες. Θεωρούμε την exponential σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_S^* \rightarrow 0$$

και την επαγόμενη ακολουθία στη συνομολογία

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^0(S, \mathcal{O}_S) &\xrightarrow{\sim} H^0(S, \mathcal{O}_S^*) \rightarrow H^1(S, \mathbb{Z}) \\ &\xrightarrow{i} H^1(S, \mathcal{O}_S) \xrightarrow{exp} H^1(S, \mathcal{O}_S^*) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Τονίζουμε ότι η παραπάνω ακριβής ακολουθίες είναι ακολουθίες **αβελιανών ομάδων**. Αρχικά κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις σχετικά με την παραπάνω ακριβή ακολουθία.

- $rank H^1(S, \mathbb{Z}) = dim H^1(S, \mathbb{C}) = 2h^{0,1}(S) = 2$, εξ' υποθέσεως. Πιο συγκεκριμένα $H^1(S, \mathbb{Z}) \neq 0$.
- $Pic S \cong H^1(S, \mathcal{O}_S^*) \supset Im(exp) \cong H^1(S, \mathcal{O}_S)/i(H^1(S, \mathbb{Z}))$ με $H^1(S, \mathcal{O}_S) \cong \mathbb{C}$ και $i(H^1(S, \mathbb{Z}))$ πεπερασμένα παραγόμενη (μη μηδενική) αβελιανή ομάδα.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, μπορούμε να επιλέξουμε ένα

$$M \in H^1(S, \mathcal{O}_S)/i(H^1(S, \mathbb{Z})) \cong \mathbb{C}/\mathbb{Z}^2 \subseteq Pic S$$

τέτοιο ώστε

$$M \not\sim 0 \text{ και } 2M \sim 0$$

Τότε χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα Riemann-Roch Theorem και Serre Duality παίρνουμε

$$\begin{aligned} h^0(S, \mathcal{O}_S(M)) + h^0(S, \mathcal{O}_S(K_S - M)) &= h^0(S, \mathcal{O}_S(M)) + h^2(S, \mathcal{O}_S(M)) \\ &\geq h^0(S, \mathcal{O}_S(M)) - h^1(S, \mathcal{O}_S(M)) + h^2(S, \mathcal{O}_S(M)) \\ &= \chi(\mathcal{O}_S(M)) = \frac{1}{2}(M - K_S) \cdot M + \chi(\mathcal{O}_S) \\ &= h^0(S, \mathcal{O}_S) - h^1(S, \mathcal{O}_S) + h^0(S, \mathcal{O}_S(K_S)) = 1. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι ένας divisor με τις ιδιότητες του M δεν μπορεί να είναι effective. Συνεπώς $h^0(S, \mathcal{O}_S(M)) = 0$ και συνδυάζοντας με την παραπάνω σχέση σημαίνει ότι $h^0(S, \mathcal{O}_S(K_S - M)) \neq 0$. Επίσης από υπόθεση $h^0(S, \mathcal{O}_S(2K_S)) \geq h^0(S, \mathcal{O}_S(K_S)) = 1$, που λόγω Kodaira διάστασης της S , δίνει $h^0(S, \mathcal{O}_S(2K_S)) = 1$. Επιλέγουμε

$$G \in |K_S - M| \text{ και } D \in |K_S|$$

Τότε $2G \in |2K_S - 2M| = |2K_S|$ και $2D \in |2K_S|$. Λόγω της διάστασης του $H^0(S, \mathcal{O}_S(2K_S))$, ισχύει $2D = 2G$ και άρα $D = G$. Τέλος έχουμε

$$\begin{aligned} K_S &\sim D = G \sim K_S - M \\ &\Rightarrow M \sim 0, \end{aligned}$$

το οποίο είναι αντίφαση.

□

Πριν προχωρήσουμε σε παραδείγματα αντιπροσώπων της παραπάνω ταξινόμησης, θα διατυπώσουμε μία πρόταση που θα μας επιτρέψει να δώσουμε πληθώρα παραδειγμάτων για κάποιες κλάσεις.

Πρόταση 5.1.3. Έστω $S = S_{d_1, \dots, d_r}$ να είναι ένα τυχόν nonsingular complete intersection, r το πλήθος υπερεπιφανειών H_i στο $\mathbb{P}^{r+2}$, βαθμών $d_1, \dots, d_r$. Τότε

$$\mathcal{O}_S(K_S) = \mathcal{O}_S\left(\left(\sum d_i\right) - r - 3\right).$$

Απόδειξη. Από adjunction formula παίρνουμε

$$K_{H_i} = (K_{\mathbb{P}^{r+2}} + H_i)|_{H_i} = (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r+2}}(-1 - (r+2)) + \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r+2}}(d_i))|_{H_i} = \mathcal{O}_{H_i}(-3 - r + d_i)$$

Εφαρμόζοντας το adjunction formula διαδοχικά στα $H_1, H_1 \cap H_2, \dots, \bigcap_i H_i = S$, παίρνουμε το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 5.1.4. Στα παραπάνω μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να θεωρήσουμε $d_i > 1$ και τότε μπορούμε να γράψουμε την παραπάνω σχέση ως

$$\mathcal{O}_S(K_S) = \mathcal{O}_S\left(\sum (d_i - 1) - 3\right),$$

με $d_i - 1 > 0$.

5.2 Αντιπρόσωποι με $\kappa(S) = -\infty$

Ορισμός 5.2.1. Μια επιφάνεια καλείται **rational** αν αυτή είναι birational με το $\mathbb{P}^2$.

Αρχικά θα ορίσουμε κάποια πολύ βασικά παραδείγματα rational επιφανειών, τις επιφάνειες Hirzebruch $\mathbb{F}_n$. Πριν από αυτό θα διατυπώσουμε κάποιες προτάσεις.

Πρόταση 5.2.2. Κάθε $\mathbb{P}^1$ -bundle πάνω από μια nonsingular projective καμπύλη C , είναι το projectivization ενός rank 2 vector bundle. Δύο $\mathbb{P}^1$ -bundles E, E' είναι ισόμορφα αν ισχύει $E \cong E' \otimes L$ για κάποιο line bundle L .

Σκιαγράφηση της απόδειξης. Αντίστοιχα με την σχέση $Pic(C) \cong H^1(C, \mathcal{O}_C^*)$ ισχύουν και οι σχέσεις

$$H^1(C, GL(2, \mathcal{O}_C)) \cong \{\text{rank 2 vector bundles on } C\} / \sim,$$

$$H^1(C, PGL(2, \mathcal{O}_C)) \cong \{\mathbb{P}^1\text{-bundles on } C\} / \sim.$$

Τότε από τη σύντομη ακριβή ακολουθία

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}_C^* \longrightarrow GL(2, \mathcal{O}_C) \longrightarrow PGL(2, \mathcal{O}_C) \longrightarrow 1$$

και την επαγόμενη στη συνομολογία

$$H^1(C, \mathcal{O}_C^*) \longrightarrow H^1(C, GL(2, \mathcal{O}_C)) \longrightarrow H^1(C, PGL(2, \mathcal{O}_C)) \longrightarrow \cancel{H^2(C, \mathcal{O}_C^*)} \xrightarrow{0}$$

έχουμε το ζητούμενο.

□

Θεώρημα 5.2.3. Κάθε rank n vector bundle πάνω από το $\mathbb{P}^1$ είναι ισόμορφο με το ευθύ άθροισμα, n το πλήθος, line bundles.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, μαζί με το Θεώρημα Noether-Enriques παίρνουμε ότι όλες οι geometrically ruled επιφάνειες πάνω από το $\mathbb{P}^1$ είναι της μορφής

$$\mathbb{F}_n = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)).$$

Οι παραπάνω επιφάνειες καλούνται **επιφάνειες Hirzebruch**. Κάποιες από τις βασικές ιδιότητές τους δίνονται στην παρακάτω πρόταση.

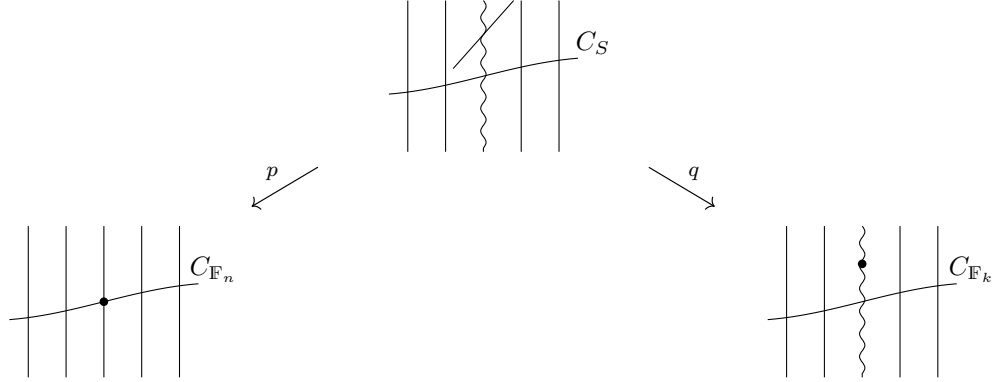
Πρόταση 5.2.4. Αν συμβολίζουμε με h την κλάση του line bundle $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(1)$ στο $Pic \mathbb{F}_n$ και αντίστοιχα με f την κλάση ενός fibre, τότε έχουμε:

1. $Pic \mathbb{F}_n = \mathbb{Z}h \oplus \mathbb{Z}f$.
2. Για $n > 0$ υπάρχει μοναδική irreducible καμπύλη b με $b = h - nf$ και $b^2 = -n$.
3. $\mathbb{F}_n \not\cong \mathbb{F}_m$ για $m \neq n$.
4. Κάθε $\mathbb{F}_n$ εκτός από την $\mathbb{F}_0 \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ έχει ένα ruling (μοναδική δομή $\mathbb{P}^1$ -bundle).

Ισχύει επίσης ότι η $\mathbb{F}_1$ είναι ισόμορφη με το $\mathbb{P}^2$ blown up σε ένα σημείο.

Υπάρχει μια φυσιολογική διαδικασία (ή οποία καλείται **elementary transformation**) να μεταβεί κανείς μεταξύ των $\mathbb{F}_n$ και $\mathbb{F}_{n\pm 1}$. Πιο συγκεκριμένα, ξεκινάμε κάνοντας blow up ένα σημείο στην $\mathbb{F}_n$ και τότε το strict transform του fibre που διέρχεται από το κέντρο του blow up είναι (-1)-καμπύλη την οποία και κάνουμε blow down. Η τελική επιφάνεια αποδεικνύεται ότι είναι ισόμορφη με το $\mathbb{F}_{n\pm 1}$. Ξεχωρίζουμε τις δύο παρακάτω περιπτώσεις.

- Το κέντρο του blow up βρίσκεται πάνω στην μοναδική $(-n)$ -καμπύλη $C_{\mathbb{F}_n}$ του $\mathbb{F}_n$. Τότε σχηματικά το elementary transformation είναι όπως στο παρακάτω διάγραμμα

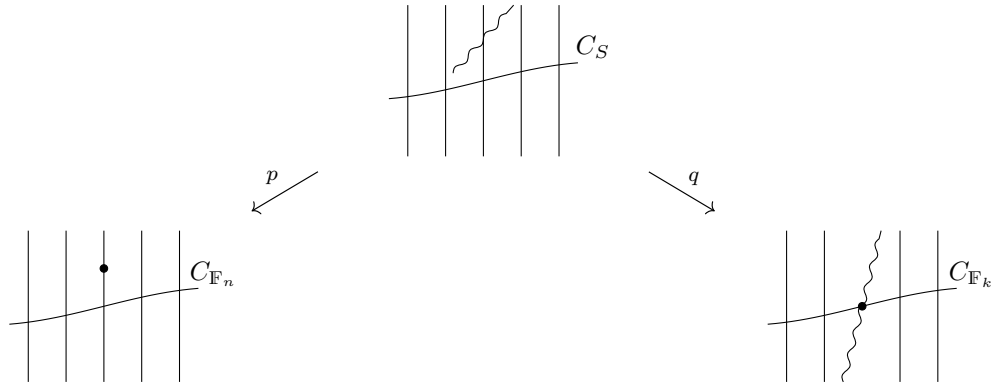


και υπολογίζοντας παίρνουμε

$$\begin{aligned} C_{\mathbb{F}_n}^2 &= (p^* C_{\mathbb{F}_n})^2 = (C_S + E)^2 = C_S^2 + 2C_S \cdot E + E^2 \\ &\Rightarrow C_S^2 = C_{\mathbb{F}_k}^2 = -(n+1) \end{aligned}$$

και άρα $k = n + 1$.

- Αν το κέντρο του blow up είναι εκτός της $C_{\mathbb{F}_n}$, τότε το αντίστοιχο σχηματικό διάγραμμα έχει ως εξής



και πάλι κάνοντας υπολογισμούς παίρνουμε

$$C_{\mathbb{F}_k}^2 = -(n-1)$$

και συνεπώς $k = n - 1$.

Το επόμενο θεώρημα δίνει ένα πολύ ισχυρό κριτήριο για το πότε μία επιφάνεια είναι rational, που τελικά θα μας δώσει μία κατάταξη για τις relatively minimal rational επιφάνειες.

Θεώρημα 5.2.5 (Castelnuovo's Rationality Criterion). Έστω S nonsingular projective επιφάνεια. Τότε

$$S \text{ birational } \mu\epsilon \text{ το } \mathbb{P}^2 \Leftrightarrow h^1(S, \mathcal{O}_S) = h^0(S, \mathcal{O}_S(2K_S)) = 0.$$

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Το ζητούμενο είναι προφανές, δεδομένου ότι τα $h^i(S, \mathcal{O}_S)$ και $h^0(S, \mathcal{O}_S(mK_S))$ είναι birational invariants για $i \geq 0$ και $m \in \mathbb{Z}$, από το πόρισμα 3.4.8.

($\Leftarrow$) Αρχικά, αποδεικνύουμε το εξής

Ισχυρισμός: Αν $h^1(S, \mathcal{O}_S) = h^0(S, \mathcal{O}_S(2K_S)) = 0$, τότε ο K_S δεν είναι nef.

Απόδειξη: $h^0(S, \mathcal{O}_S(2K_S)) = 0 \Rightarrow h^0(S, \mathcal{O}_S(K_S)) = 0$ και από Serre Duality, $h^2(S, \mathcal{O}_S) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\chi(\mathcal{O}_S) = h^0(S, \mathcal{O}_S) - h^1(S, \mathcal{O}_S) + h^2(S, \mathcal{O}_S) = 1.$$

Επίσης πάλι από Serre Duality, $h^2(S, \mathcal{O}_S(-K_S)) = h^0(S, \mathcal{O}_S(2K_S)) = 0$. Από το Θεώρημα Riemann-Roch Theorem για τον $-K_S$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{O}_S(-K_S)) &= \frac{1}{2}(-2K_S)(-K_S) + \chi(\mathcal{O}_S) \\ &\Rightarrow h^0(S, \mathcal{O}_S(-K_S)) - h^1(S, \mathcal{O}_S(-K_S)) + \overbrace{(h^2(S, \mathcal{O}_S(-K_S)))}^0 = K_S^2 + 1 \\ &\Rightarrow h^0(S, \mathcal{O}_S(-K_S)) \geq K_S^2 + 1. \end{aligned}$$

Αν ο K_S ήταν nef, τότε ως όριο ample divisors θα είχε μη αρνητική αυτοτομή και τότε $h^0(S, \mathcal{O}_S(-K_S)) > 0$. Έστω $D \in |-K_S|$ και A τυχόν very ample divisor. Τότε

$$0 \leq A \cdot D = A \cdot (-K_S) \leq 0 \Rightarrow A \cdot D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow -K_S \sim 0$$

και επομένως θα είχαμε

$$h^0(S, \mathcal{O}_S(2K_S)) = h^0(S, \mathcal{O}_S) = 1$$

το οποίο αντιβαίνει στην αρχική μας υπόθεση. Άρα ο K_S δεν είναι nef. ■

Έστω λοιπόν ότι $h^1(S, \mathcal{O}_S) = h^0(S, \mathcal{O}_S(2K_S)) = 0$. Τρέχοντας το MMP για την S και εφόσον, λόγω του ισχυρισμού, το τελικό αποτέλεσμά θα έχει canonical class όχι nef τότε αυτό θα είναι ένα Mori fibre space $\phi: S' \rightarrow W$ με S και S' birational.

Αν $\dim W = 0$, τότε $S' \cong \mathbb{P}^2$ και έχουμε τελειώσει.

Αν $\dim W = 1$, τότε η $\phi: S' \rightarrow W$ είναι ένα αλγεβρικό $\mathbb{P}^1$ -bundle και άρα τα S' και $\mathbb{P}^1 \times W$ είναι birational.

Από την Künneth formula (βλ. [13, σελ. 116, 9.2.4]) παίρνουμε

$$\begin{aligned} 0 &= h^1(S, \mathcal{O}_S) = h^1(\mathbb{P}^1 \times W, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times W}) \\ &= h^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) \cdot h^0(W, \mathcal{O}_W) + h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) \cdot h^1(W, \mathcal{O}_W) = h^1(W, \mathcal{O}_W). \end{aligned}$$

Τότε όμως $W \cong \mathbb{P}^1$ και τότε τα S' και $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ είναι birational. Δεδομένου ότι τα $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ και $\mathbb{P}^2$ είναι birational, έχουμε το ζητούμενο. □

Θεώρημα 5.2.6. Κάθε *relatively minimal* (χωρίς (-1) -καμπύλες) *rational* επιφάνεια είναι ισόμορφη με το $\mathbb{P}^2$ ή με κάποια $\mathbb{F}_n$, για $n \neq 1$.

Για τις επιφάνειες S με $\kappa(S) = -\infty$ που δεν είναι rational (δηλαδή βρίσκονται στη δεύτερη κατά σειρά κλάση του Enriques classification), ξέρουμε ότι αυτές είναι είτε projectivization rank 2 vector bundles πάνω από nonsingular καμπύλες είτε blow ups αυτών. Η μελέτη αυτών τότε ανάγεται στην μελέτη των rank 2 vector bundles πάνω από nonsingular καμπύλες. Για μία πρώτη προσέγγιση του θέματος παραπέμπουμε στο [17, σελ. 148, 5.1].

Συνδυάζοντας κανείς την Πρόταση 5.1.3 με την Παρατήρηση 5.1.4, εύκολα βλέπουμε ότι τα μόνα complete intersections S με $\kappa(S) = -\infty$ είναι τα S_2, S_3 και $S_{2,2}$. Αποδεικνύεται ότι και οι τρεις αυτές επιφάνειες είναι rational.

5.3 Αντιπρόσωποι με $\kappa(S) = 0$

5.3.1 Abelian επιφάνειες

Ορισμός 5.3.1. Ένα projective variety V καλείται **Abelian variety** αν αυτό, ως σύνολο, είναι εφοδιασμένο με μία δομή ομάδας ώστε οι απεικονίσεις

$$\begin{aligned} V \times V &\longrightarrow V, & (x, y) &\mapsto x + y \\ V &\longrightarrow V, & x &\mapsto x^{-1} \end{aligned}$$

να είναι μορφισμοί.

Γενικά μιλώντας, ο πιο τετριμμένος τρόπος για να κατασκευάσει κανείς επιφάνειες με οποιαδήποτε Kodaira διάσταση είναι να θεωρήσει γινόμενα καμπυλών με κατάλληλες διαστάσεις Kodaira, καθώς ισχύει $\kappa(X \times Y) = \kappa(X) + \kappa(Y)$ (για varieties X, Y οποιασδήποτε διάστασης). Επίσης, μία καμπύλη C έχει Kodaira διάσταση $-\infty$ (αντίστοιχα 0 και 1) να και μόνο αν το γένος της $g(C)$ είναι 0 (αντίστοιχα 1 και μεγαλύτερο του 1). Αυτό το είδαμε νωρίτερα στη περίπτωση $\mathbb{P}^1 \times C$. Η μόνη επιλογή για να πετύχει κανείς επιφάνεια με $\kappa(S) = 0$ με αυτόν τον τρόπο είναι να πάρει το γινόμενο δύο ελλειπτικών καμπυλών που τότε κατά τετριμμένο τρόπο είναι Abelian επιφάνεια.

Αποδεικνύεται ότι οι Abelian varieties είναι ακριβώς οι projective complex tori

$$\mathbb{C}^n / \Lambda, \quad \text{για κάποιο full rank lattice } \Lambda.$$

Σημειώνουμε ότι για την τυχούσα επιλογή lattice Λ , ο τόρος, $\mathbb{C}^n / \Lambda$, δεν είναι γενικά projective και άρα Abelian variety. Η παρακάτω πρόταση μας λέει ακριβώς τότε ένας complex torus είναι αλγεβρικός.

Πρόταση 5.3.2 (Riemann Bilinear Relations). Έστω $V \cong \mathbb{C}^n / \Lambda$ και $\{e_1, \dots, e_n\}, \{\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}\}$ σταθεροποιημένες βάσεις των $\mathbb{C}^2$ και Λ αντίστοιχα. Έστω P ο $(n \times 2n)$ πίνακας με στήλες τις συντεταγμένες των λ_i ως προς την βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$. Τότε ο τόρος V είναι projective αν υπάρχει ένας αντιστρέψιμος alternating πίνακας $E \in M_{2n}(\mathbb{Z})$, τέτοιος ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα

- (i) $PE^{-1}P^T = 0$,
- (ii) $iPE^{-1}\bar{P}^T > 0$.

Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με Abelian varieties βλέπε [5].

5.3.2 Bielliptic επιφάνειες

Ορισμός 5.3.3. Μία επιφάνεια S καλείται **bielliptic** αν $S \cong (E \times F)/G$ με E και F ελλειπτικές καμπύλες και G μιά πεπερασμένη ομάδα μεταθέσεων της E , που δρα στην F με τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύει $F/G \cong \mathbb{P}^1$.

Παρατήρηση 5.3.4. Εφόσον η G είναι πεπερασμένη ομάδα που δρα χωρίς *fixed points*, η απεικόνιση πηλίκο είναι τοπικός ομοιομορφισμός στην αναλυτική κατηγορία με πεπερασμένο *fibre*. Άρα ένας ισοδύναμος χαρακτηρισμός για τις *bielliptic* επιφάνειες είναι οι επιφάνειες που επιδέχονται ένα *finite étale cover* από γινόμενο δύο ελλειπτικών καμπυλών.

Θεώρημα 5.3.5. Κάθε *bielliptic* επιφάνεια $S \cong (E \times F)/G$ με $F = \mathbb{C}/\Lambda$, έχει μία από τις μορφές που εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα.

Τύπος	Λ	G	Δράση στην F	Τάξη του K_S
$\alpha 1)$	τυχόν	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$f \mapsto -f$	$2K_S \sim 0$
$\alpha 2)$	τυχόν	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$f \mapsto -f$ και $f \mapsto f + f_2$, με $2f_2 = 0$	$2K_S \sim 0$
$\beta 1)$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\rho$	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	$f \mapsto \rho f$	$3K_S \sim 0$
$\beta 2)$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\rho$	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	$f \mapsto \rho f$ και $f \mapsto f + \left(\frac{1-\rho}{3}\right)$	$3K_S \sim 0$
$\gamma 1)$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	$f \mapsto if$	$4K_S \sim 0$
$\gamma 2)$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$f \mapsto if$ και $f \mapsto f + \left(\frac{1+i}{2}\right)$	$4K_S \sim 0$
$\delta)$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\rho$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	$f \mapsto -\rho f$	$6K_S \sim 0$,

όπου ρ είναι μία κυβική πρωταρχική ρίζα της μονάδας.

5.3.3 K3 επιφάνειες

Ορισμός 5.3.6. Μια *nonsingular projective* επιφάνεια S καλείται **K3 επιφάνεια** αν για αυτή ισχύει $q = 0$ και $K_S \sim 0$.

Εύκολα βλέπει κανείς ότι τα complete intersections $S_4, S_{2,3}$ και $S_{2,2,2}$ (όπως αυτά ορίστηκαν στην Πρόταση 5.1.3), έχουν τετριμμένο canonical divisor. Χρησιμοποιώντας την παρακάτω πρόταση, έχουμε ότι και οι τρεις παραπάνω επιφάνειες είναι K3 επιφάνειες.

Πρόταση 5.3.7. Για ένα complete intersection V διάστασης d , ισχύει

$$H^i(V, \mathcal{O}_V(k)) = 0, \quad \text{για } i \neq 0 \text{ ή } d \text{ και } k \in \mathbb{Z}$$

Μία κλάση παραδειγμάτων K3 επιφανειών είναι οι επιφάνειες Kummer. Αυτές κατασκευάζονται ως εξής: Ξεκινάμε με μία Abelian επιφάνεια A και θεωρούμε τον αυτομορφισμό $x \mapsto -x$. Τότε το πηλίκο της A υπό τον παραπάνω αυτομορφισμό έχει 16 singular σημεία (ακριβώς τα 16 σταθερά σημεία του $x \mapsto -x$). Αποδεικνύεται ότι τα 16 αυτά σημεία είναι rational double points και τότε κάνοντας τα blow up παίρνουμε μία nonsingular επιφάνεια η οποία είναι K3 και καλείται η Kummer επιφάνεια της A .

5.3.4 Enriques επιφάνειες

Ορισμός 5.3.8. Μία *nonsingular projective* επιφάνεια S καλείται **επιφάνεια Enriques** αν για αυτή ισχύει $q = 0$, $2K_S \not\sim 0$ και $2K_S \sim 0$.

Αρχικά, κάθε invertible sheaf $L \in \text{Pic } X$ σε κάποιο variety X , με $L \otimes L \cong \mathcal{O}_X$, ορίζει με φυσιολογικό τρόπο ένα 2 προς 1 étale cover $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$, με την ιδιότητα $\pi^*L \cong \mathcal{O}_{\tilde{X}}$. Το $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ καλείται το **Global Canonical Cover** της X (βλ [1, σελ. 85]).

Στην συγκεκριμένη περίπτωση μίας Enriques επιφάνειας, αν θεωρήσουμε το étale cover που αντιστοιχεί στο invertible sheaf K_S τότε θα έχουμε

$$\mathcal{O}_{\tilde{S}} \cong \pi^*K_S \cong K_{\tilde{S}}$$

και επομένως η $\tilde{S}$ είναι μία K3 επιφάνεια. Πιο γενικά ισχύει η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 5.3.9. Αν S είναι μία Enriques επιφάνεια για το βαθμού 2 étale cover $\pi: \tilde{S} \rightarrow S$ που αντιστοιχεί στον *canonical divisors* K_S ισχύει ότι η $\tilde{S}$ είναι μία K3 επιφάνεια. Αντίστροφα, το πηλίκο κάθε K3 επιφάνειας, ως προς μία ομάδα τάξης 2 που δρα σε αυτήν χωρίς σταθερά σημεία, είναι μία Enriques επιφάνεια.

5.4 Αντιπρόσωποι με $\kappa(S) = 1, 2$

5.4.1 Ελλειπτικές επιφάνειες

Ορισμός 5.4.1. Μια επιφάνεια S καλείται **ελλειπτική** αν υπάρχει κάποια *nonsingular projective* καμπύλη B και έναν επιμορφισμό $p: S \rightarrow B$ τέτοια ώστε όλα εκτός από πεπερασμένα *fibres* να είναι ελλειπτικές καμπύλες.

Όπως είδαμε και στην απόδειξη της κατάταξης Enriques κάθε επιφάνεια με Kodaira διάσταση $\kappa(S) = 1$, είναι ελλειπτική επιφάνεια. Το αντίστροφο προφανώς δεν ισχύει, όπως είδαμε νωρίτερα. Χρησιμοποιώντας την προσθετικότητα της Kodaira διάστασης στα γινόμενα μπορούμε να κατασκευάσουμε τετριμμένα παραδείγματα παίρνοντας το γινόμενο μίας καμπύλης γενικού τύπου και μίας ελλειπτικής καμπύλης.

Περιγράφουμε τώρα έναν απλό τρόπο να κατασκευάζουμε πληθώρα μη τετριμμένων παραδειγμάτων ελλειπτικών επιφανειών με $\kappa(S) = 1$.

Έστω B μία *nonsingular* καμπύλη και p και q οι δύο προβολές

$$\begin{array}{ccc} & B \times \mathbb{P}^2 & \\ p \swarrow & & \searrow q \\ B & & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

Το general στοιχείο $S \in |p^*\mathcal{O}_B(D) \otimes q^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)|$, με $|D|$ base point free linear system, είναι *nonsingular* επιφάνεια και παίρνοντας τον περιορισμό $p: S \rightarrow B$, έχουμε ένα fibration από κυβικές καμπύλες στο $\mathbb{P}^2$, δηλαδή ελλειπτικές. Τότε $K_S = p^*(K_B + D)$ και για $\deg D > 2 - 2g(B)$ παίρνουμε $\kappa(S) \geq 1$. Επίσης από το Easy Addition Theorem (βλ [12, σελ. 303, 10.4]) παίρνουμε $\kappa(S) \leq \kappa(F) + \dim W = 1$, όπου F ένα generic fibre και άρα $\kappa(S) = 1$.

5.4.2 Επιφάνειες γενικού τύπου

Οι **επιφάνειες γενικού τύπου** ορίζονται να είναι επιφάνειες με $\kappa(S) = 2$ και όπως υποδηλώνει και το όνομα, η πλειοψηφία των επιφανειών είναι τέτοιες.

Για παράδειγμα, οποιαδήποτε complete intersection, εκτός από τις $S_2, S_3, S_4, S_{2,2}, S_{2,3}$ και $S_{2,2,2}$ οι οποίες συζητήθηκαν νωρίτερα, είναι γενικού τύπου. Αντίστοιχα με πριν, για δύο καμπύλες C και D γενικού τύπου το γινόμενό τους $S = C \times D$ έχει Kodaira διάσταση $\kappa(S) = \kappa(C) + \kappa(D) = 2$.

Ένα ιδιαίτερο παράδειγμα επιφάνειας γενικού τύπου με $p_g = q = 0$ είναι η **επιφάνεια Godeaux** που ορίζεται ως εξής:

Θεωρούμε την

$$S' = V(x^5 + y^5 + z^5 + w^5) \subset \mathbb{P}^3$$

και τον αυτομοφισμό $(x : y : z : w) \mapsto (x : \omega y : \omega^2 z : \omega^3 w)$, όπου ω είναι η πέμπτη πρωταρχική ρίζα της μονάδας. Τότε αυτός δρα στην S χωρίς σταθερά σημεία και άρα ο μορφισμός

$$\pi: S' \longrightarrow S = S'/G$$

είναι ένα βαθμού 5 étale cover. Κάνοντας υπολογισμούς παίρνουμε $p_g = q = 0$ και $K_S^2 = 1$ το οποίο, από το Kodaira Lemma σημαίνει ότι η S είναι γενικού τύπου.

Κεφάλαιο 6

Το Sarkisov Program στη διάσταση 2

Σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι η διατύπωση και απόδειξη του Θεωρήματος των Castelnuovo-Noether για την ανάλυση των birational maps μεταξύ Mori fibre spaces, που είναι ειδική περίπτωση του Sarkisov Program στη διάσταση 2.

6.1 Το Sarkisov degree ενός birational map μεταξύ Mori fibre spaces

Έστω ότι έχουμε έναν birational map $\Phi: S \dashrightarrow S'$, μεταξύ δύο Mori fibre spaces, που δεν είναι ισομορφισμός. Τότε από Factorization of Birational Maps γνωρίζουμε ότι αυτός αναλύεται ως σύνθεση blow ups και blow downs. Τότε έχουμε το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} & V & \\ \sigma \swarrow & & \searrow \sigma' \\ S & \xrightarrow{\quad \Phi \quad} & S' \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi' \\ W & & W' \end{array}$$

Σταθεροποιούμε έναν very ample divisor H' στην S' . Για κάθε $\mathcal{H} \in |H'|$ ορίζουμε το homaloidal transform $\mathcal{H}$ του $\mathcal{H}'$ ως

$$\mathcal{H} = \Phi^* \mathcal{H}' := \sigma_* \sigma'^* \mathcal{H}'.$$

Για τον rational map Φ θα ορίσουμε μία τριάδα αριθμών (μ, λ, e) , με τον εξής τρόπο.

- (i) Το quasi-effective threshold μ .

Αν $\phi: S \rightarrow W$ είναι ένα ruled surface, τότε ορίζουμε το μ να είναι ο αριθμός με την ιδιότητα

$$\mu K_S + \mathcal{H} \equiv_W 0,$$

το οποίο εξ' ορισμού σημαίνει ότι $(\mu K_S + \mathcal{H})F = 0$ για κάθε fibre F του ϕ . Όμως από το γεγονός ότι ο $\phi: S \rightarrow W$ είναι Mori fibre space, γνωρίζουμε ότι όλα τα

fibres είναι numerically proportional και συνεπώς, αρκεί να ελέγξουμε την παραπάνω σχέση για ένα μόνον fibre F . Δηλαδή

$$(\mu K_S + \mathcal{H})F = 0 \Rightarrow \mu = \frac{-\mathcal{H} \cdot F}{K_S \cdot F}$$

Από το Θεώρημα 4.1.5, γνωρίζουμε ότι αν επιλέξουμε $F = l$ τότε $K_S \cdot F = -2$. Επίσης μπορούμε να επιλέξουμε ένα fibre F' κατάλληλα ώστε να αποφεύγει το indeterminacy locus του Φ και να μην περιέχεται σε κανένα $\sigma(E')$ με E' να είναι σ' -exceptional divisor και τότε θα έχουμε

$$\mathcal{H} \cdot F = \sigma_* \sigma'^* \mathcal{H}' \cdot F = \mathcal{H}' \cdot \sigma'_* \sigma^* F = \mathcal{H}' \cdot \sigma'_* \tilde{F} > 0 \Rightarrow \mathcal{H} \cdot l > 0$$

Αν $S \cong \mathbb{P}^2 \rightarrow pt$, τότε επιλέγουμε μ με $\mu K_S + \mathcal{H} \equiv 0$. Γνωρίζουμε ότι $K_{\mathbb{P}^2} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3)$ και $\mathcal{H} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n)$ για κάποιο $n > 0$ και τότε θα έχουμε $\mu = \frac{n}{3}$. Τελικά και στις δύο περιπτώσεις θα είναι

$$\mu \in \frac{1}{6}\mathbb{N}$$

(ii) Το maximal multiplicity λ .

Στην S θεωρούμε το linear system $\Phi_{hom}^{-1}|H'|$ που ορίζεται ως

$$\Phi_{hom}^{-1}|H'| := \{\mathcal{H} \in Pic(S) \mid \mathcal{H}' \in |H'|\} \leq |\mathcal{H}|.$$

Αν το linear system $\Phi_{hom}^{-1}|H'|$ δεν έχει base points τότε θέτουμε $\lambda = 0$.

Αν το linear system $\Phi_{hom}^{-1}|H'|$ έχει base points, έστω τα $p_1, \dots, p_n$, τότε θέτουμε

$$\begin{aligned} \lambda &= \max_i \{ \min_{\Phi_{hom}^{-1}|H'|} \{ \text{mult}_{p_i} \mathcal{H} \} \} \\ &= \max_i \{ \text{mult}_{p_i} \mathcal{H} \}, \text{ για κάποιο general στοιχείο } \mathcal{H} \in \Phi_{hom}^{-1}|H'|. \end{aligned}$$

Προφανώς ισχύει

$$\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

(iii) Ο αριθμός των crepant exceptional divisors e .

Πριν προχωρήσουμε στον ορισμό, θα πρέπει να κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις.

Αρχικά είναι εύκολο να δει κανείς ότι, εφόσον ο H' είναι very ample, αν το linear system $\Phi_{hom}^{-1}|H'|$ έχει base points τότε αυτά είναι λόγω των contraction των σ -exceptional divisors και συνεπώς θα βρίσκονται ακριβώς στο indeterminacy locus του Φ . Κάνοντας μερικούς υπολογισμούς παίρνουμε

$$\mathcal{H} = \sigma_* \sigma'^* \mathcal{H}' \Rightarrow \sigma^* \mathcal{H} = (\sigma^* \sigma_*) \sigma'^* \mathcal{H}' = \sigma'^* \mathcal{H}' + \sum b_k E_k$$

όπου το άθροισμα είναι πάνω από τους σ -exceptional divisors. Θεωρούμε τις σχέσεις

$$\begin{aligned} K_V &= \sigma^* K_S + \sum a_k E_k, \\ \mathcal{H}_V &:= \sigma'^* \mathcal{H}' = \sigma^* \mathcal{H} - \sum b_k E_k. \end{aligned}$$

Πρόταση 6.1.1. Για τους αριθμούς λ, a_k, b_k όπως αυτοί ορίστηκαν παραπάνω, ισχύει

$$\lambda = \max \left\{ \frac{b_k}{a_k} \right\}.$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι για ένα base point p_{i_0} (που αντιστοιχεί στον exceptional divisor E_i) και ένα στοιχείο $\mathcal{H}$ του $\Phi_{hom}^{-1}|H'|$, ισχύει

$$\text{mult}_{p_{i_0}} \mathcal{H} = \lambda_{i_0} = \frac{b_{i_0}}{a_{i_0}}.$$

Σε αυτά που ακολουθούν, περιοριζόμαστε τοπικά, σε μία περιοχή του p_{i_0} που δεν περιέχει κανένα άλλο base point. Εφόσον δουλεύουμε τοπικά, τα μόνα blow ups του σ που μας επηρεάζουν είναι, αυτό που γίνεται στο p_{i_0} και αυτά που γίνονται στους exceptional divisors που τέμνουν τον E_i . Άρα χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η παραγοντοποίηση του σ είναι η ακόλουθη

$$\begin{array}{ccccccc} V & \xrightarrow{\mu_n} & S_{n-1} & \xrightarrow{\mu_{n-1}} & \dots & \xrightarrow{\mu_2} & S_1 \xrightarrow{\mu_1} S \\ & & & & \searrow \sigma_{n-1} & \searrow \sigma_2 & \searrow \sigma \\ & & & & & & \nearrow \sigma \end{array}$$

με $\mu_1: S_1 \rightarrow S$ να είναι το blow up της S στο p_{i_0} και $\mu_j: S_j \rightarrow S_{j-1}$ να είναι blow ups σε σημεία x_j . Έστω τέλος ότι E_j είναι ο exceptional divisor του μ_j (και τότε $E_{i_0} = E_1$) και $\text{mult}_{x_j} E_1 = q_j$.

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο πλήθος των blow ups n .

Για $n = 1$, έχουμε

$$\begin{aligned} K_{S_1} &= \mu_1^* K_S + E_1, \\ \mathcal{H}_{S_1} &= \tilde{\mathcal{H}} = \phi_1^* \mathcal{H} - \lambda_1 E_1, \end{aligned}$$

δηλαδή $b_{i_0} = \lambda_{i_0} = \lambda_1$ και $a_{i_0} = 1$ και προφανώς $\lambda_{i_0} = \frac{b_{i_0}}{a_{i_0}}$.

Έστω ότι ισχύει για $k < n$, δηλαδή

$$\begin{aligned} K_{S_{n-1}} &= \sigma_{n-1}^* K_S + \sum a_k E_k \\ \mathcal{H}_{S_{n-1}} &= \sigma_{n-1}^* \mathcal{H} - \sum b_k E_k \end{aligned}$$

και $\lambda_{i_0} = \frac{b_1}{a_1}$.

Κάνοντας υπολογισμούς, παίρνουμε

$$\begin{aligned} K_S &= \mu_n^*(K_{S_{n-1}}) = \sigma^* K_S + \sum_{k \neq 1} a'_k E_k + (a_1 + a_1 q_n) E_1, \\ \mathcal{H}_S &= \mu_n^*(\mathcal{H}_{S_{n-1}}) = \sigma^* \mathcal{H} - \sum_{k \neq 1} b'_k E_k - (b_1 + b_1 q_n) E_1. \end{aligned}$$

Τότε έχουμε

$$\frac{a'_1}{b'_1} = \frac{a_1 + a_1 q_n}{b_1 + b_1 q_n} = \frac{a_1(1 + q_n)}{b_1(1 + q_n)} = \frac{a_1}{b_1} = \lambda_{i_0}. \quad \square$$

Θα ορίσουμε τον τρίτο αριθμό e μόνον όταν το λ γνήσια μεγαλύτερο του μηδενός. Έχουμε

$$K_V + \frac{1}{\lambda} \mathcal{H}_V = \sigma^* \left(K_S + \frac{1}{\lambda} \mathcal{H} \right) + \sum \left(a_k - \frac{1}{\lambda} b_k \right) E_k, \quad (6.1)$$

με $a_k - \frac{1}{\lambda}b_k = 0$ για κάποια k και μεγαλύτερο από μηδέν για τα υπόλοιπα.
Ορίζουμε

$$e := \# \left\{ E_k \mid a_k - \frac{1}{\lambda}b_k = 0 \right\}$$

ή ισοδύναμα το πλήθος base points στα οποία το general στοιχείο του $\Phi_{hom}^{-1}|H'|$ πετυχαίνει το μέγιστο multiplicity λ . Προφανώς

$$e \in \mathbb{N}$$

όταν αυτό ορίζεται.

Ορισμός 6.1.2. Έστω ένας birational map $\Phi: S \dashrightarrow S'$ μεταξύ δύο Mori fibre spaces, που δεν είναι ισομορφισμός. Η τριάδα (μ, λ, e) όπως αυτή ορίστηκε παραπάνω καλείτε το **Sarkisov degree** του Φ και είναι είτε της μορφής $(\frac{1}{6}\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathbb{N})$ είτε της μορφής $(\frac{1}{6}\mathbb{N}, 0, *)$.

Τονίζουμε ότι η παραπάνω τριάδα εξαρτάται μόνο από το birational map Φ και από την επιλογή του very ample divisor H' στην S' .

6.2 Ο αλγόριθμος του Sarkisov Program

Έστω τώρα ένας birational map μεταξύ Mori fibre spaces

$$\begin{array}{ccc} S & \dashrightarrow & S' \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi' \\ W & & W' \end{array}$$

Επιλέγουμε έναν ample divisor A' στην W' . Παρατηρούμε ότι ο anticanonical divisor $-K_{S'}$ της S' είναι ϕ' -ample, αφού τέμνεται θετικά με κάθε fibre (βλ. [7, σελ. 207]). Τότε, από το [12, σελ. 240, 7.11] υπάρχει $\mu' \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε ο divisor

$$H' = -\mu' K_S + \phi'^* A' \tag{6.2}$$

να είναι very ample. Σταθεροποιούμε ένα τέτοιο μ' και H' .

Λήμμα 6.2.1 (Negativity Lemma). Έστω $f: S \rightarrow T$ ένας birational μορφισμός μεταξύ δύο nonsingular projective επιφανειών και έστω ένας divisor $\sum a_i E_i$, με support στον exceptional divisor του f , για τον οποίο ισχύει

$$\left(\sum a_i E_i \right) E_j \geq 0 \text{ για κάθε } f\text{-exceptional καμπύλη } E_j.$$

Τότε

$$a_i \leq 0, \quad \forall i.$$

Απόδειξη. Έστω ότι κάποια a_i είναι γνήσια θετικά. Γνωρίζουμε ότι ο intersection matrix $(E_i \cdot E_j)$ είναι negative definite (βλ [2]) και συνεπώς κάθε 1-cycle με support στον exceptional divisor έχει αρνητική αυτοτομή. Τότε από τη μία έχουμε

$$\left(\sum a_i E_i \right) \left(\sum_{a_i > 0} a_i E_i \right) = \left(\sum_{a_i \leq 0} a_i E_i \right) \left(\sum_{a_i > 0} a_i E_i \right) + \left(\sum_{a_i > 0} a_i E_i \right)^2 < 0$$

διότι στο τελευταίο άθροισμα, ο πρώτος όρος είναι γινόμενο ανά δύο ξένων καμπυλών με αρνητικό συντελεστή, ενώ στον δεύτερο εφαρμόζεται το παραπάνω κριτήριο.

Από την άλλη όμως, από υπόθεση έχουμε

$$\left(\sum a_i E_i \right) \left(\sum_{a_i > 0} a_i E_i \right) \geq 0,$$

απ' όπου παίρνουμε αντίφαση. □

Στα επόμενα θα συμβολίζουμε με $\mathcal{H}'$ ένα general στοιχείο του $|H'|$ και με $\mathcal{H}$ το homaloidal transform αυτού.

Πρόταση 6.2.2 (Noether-Fano-Iskovskikh Criterion). Έστω ότι για τον παραπάνω very ample divisor H' , το Sarkisov degree του Φ ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες

$$\lambda \leq \mu \text{ και } K_S + \frac{1}{\mu} \mathcal{H} \text{ nef.}$$

Τότε ο Φ είναι ισομορφισμός Mori fibre spaces, δηλαδή, υπάρχει ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow[\Phi]{\sim} & S' \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi' \\ W & \xrightarrow{\sim} & W' \end{array}$$

Απόδειξη. Τα επόμενα επιχειρήματα, έχουν παρθεί από το [1]. Όπως και νωρίτερα, έστω ότι ο birational map Φ παραγοντοποιείται ως εξής

$$\begin{array}{ccccc} & & V & & \\ & \swarrow \sigma & & \searrow \sigma' & \\ S & & & & S' \\ & \xleftarrow{\Phi} & & & \xrightarrow{\sim} \\ & \downarrow \phi & & & \downarrow \phi' \\ & W & & & W' \end{array}$$

Βήμα 1. Αποδεικνύουμε ότι $\mu = \mu'$.

Κάνοντας κάποιους υπολογισμούς παίρνουμε τη σχέση

$$\begin{aligned} \sigma_* \sigma'^* (\phi'^* A') &= \sigma_* \sigma'^* (\mu' K_{S'} - \mu' K_{S'} + \phi'^* A') \\ &= \sigma_* \sigma'^* (\mu' K_{S'} + \mathcal{H}') = \mu' K_S + \sum a_i E_i + \mathcal{H} \\ &\Rightarrow \mu' K_S + \mathcal{H} = \sigma_* \sigma'^* (\phi'^* A') - \sum a_i E_i. \end{aligned}$$

Επιλέγουμε καμπύλη F που περιέχεται σε ένα fibre τέτοια ώστε

- να μην διέρχεται από κανένα σημείο της μορφής $\sigma(E_i)$, και
- να μην περιέχεται σε καμία καμπύλη της μορφής $\sigma(E'_j)$,

όπου E_i, E'_j τα exceptional curves των σ και σ' αντίστοιχα. Υπολογίζοντας παίρνουμε

$$\begin{aligned} (\mu' K_S + \mathcal{H})F &= \sigma_* \sigma'^* (\phi'^* A') \cdot F - \left(\sum a_i E_i \right) F \\ &= \phi'^* A' \cdot (\sigma'_* \sigma^* F) - \left(\sum a_i E_i \right) \tilde{F} \\ &= \phi'^* A' \cdot \tilde{F} \geq 0 \end{aligned}$$

καθώς είναι και τα δύο καμπύλες.

Συνοψίζοντας, για κάθε καμπύλη F σε κάποιο fibre έχουμε

$$\begin{aligned} (\mu' K_S + \mathcal{H})F &\geq 0 \Rightarrow (\mu' K_S + \mathcal{H})F - (\mu K_S + \mathcal{H})F \geq 0 \\ &\Rightarrow (\mu' - \mu) K_S \cdot F \geq 0 \Rightarrow (\mu' - \mu) \leq 0 \\ &\Rightarrow \mu' \leq \mu. \end{aligned}$$

Από την άλλη μεριά, όπως είχαμε υπολογίσει νωρίτερα στη σχέση (6.1)

$$K_V + \frac{1}{\mu} \mathcal{H}_V = \sigma^* \left(K_S + \frac{1}{\mu} \mathcal{H} \right) + \sum \left(a_k - \frac{1}{\mu} b_k \right) E_k$$

με $\left(a_k - \frac{1}{\mu} b_k \right) \geq 0$, αφού από υπόθεση $\lambda \leq \mu$. Επίσης, από τη ramification formula για τον σ' παίρνουμε

$$K_V = \sigma'^* + \sum a'_i E'_i.$$

Επιλέγοντας F' καμπύλη σε fibre του ϕ' με τις “δυσικές” ιδιότητες της F που επιλέχθηκε παραπάνω, και υπολογίζοντας έχουμε

$$\begin{aligned} (K_{S'} + \frac{1}{\mu} \mathcal{H}_{S'}) F' &= (K_{S'} + \frac{1}{\mu} \mathcal{H}_{S'}) \sigma'^* \tilde{F}' = \sigma'^* (K_{S'} + \frac{1}{\mu} \mathcal{H}_{S'}) \tilde{F}' \\ &= (\sigma'^* K_{S'} + \frac{1}{\mu} \mathcal{H}_V) \tilde{F}' = (K_V + \frac{1}{\mu} \mathcal{H}_V) \tilde{F}' + \left(\sum a'_i E'_i \right) \tilde{F}' \\ &= \left[\sigma^* \left(K_S + \frac{1}{\mu} \mathcal{H} \right) + \sum \left(a_k - \frac{1}{\mu} b_k \right) E_k \right] \tilde{F}' = (\geq 0) + (\geq 0) \geq 0 \end{aligned}$$

Άρα ο $\mu K_{S'} + \mathcal{H}'$ είναι nef στα fibres συνεπώς

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\mu K_{S'} + \mathcal{H}') F' = (\mu - \mu') K_{S'} \cdot F' + \cancel{\phi'^* A' \cdot F'} \\ &\Rightarrow \mu \leq \mu'. \end{aligned}$$

Υπενθυμίζουμε ότι από την παραγοντοποίηση του Φ έχουμε τις παρακάτω ramification formulas

$$K_V = \sigma^* K_S + \sum e_i E_i + \sum f_i F_i, \quad (6.3)$$

$$K_V + \frac{1}{\mu} \mathcal{H}_V = \sigma^* \left(K_S + \frac{1}{\mu} \mathcal{H} \right) + \sum r_i E_i + \sum k_i F_i, \quad (6.4)$$

$$K_V = \sigma'^* K_{S'} + \sum e'_i E'_i + \sum g_i G_i, \quad (6.5)$$

$$K_V + \frac{1}{\mu} \mathcal{H}_V = \sigma'^* \left(K_{S'} + \frac{1}{\mu} \mathcal{H}' \right) + \sum r'_i E'_i + \sum l_i G_i, \quad (6.6)$$

όπου E_i είναι οι σ και σ' exceptional divisors και F_i (αντ. G_i) είναι οι σ (αντ. σ'), όχι σ' (αντ. σ) exceptional divisors.

Βήμα 2. Αποδεικνύουμε τη σχέση

$$\sum r_i E_i + \sum k_i F_i = \sum r'_i E_i + \sum l_i F_i \Leftrightarrow \sigma^* \left(K_S + \frac{1}{\mu} \mathcal{H} \right) = \sigma'^* \left(K_{S'} + \frac{1}{\mu} \mathcal{H}' \right)$$

Κάνοντας την πράξη (6.4) - (6.6) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \sigma^* \left(K_S + \frac{1}{\mu} \mathcal{H} \right) - \sigma'^* \left(K_{S'} + \frac{1}{\mu} \mathcal{H}' \right) + \sum (r_i - r'_i) E_i + \sum k_i F_i - \sum l_i G_i &= 0, \\ \Rightarrow \sigma^* \left(K_S + \frac{1}{\mu} \mathcal{H} \right) - \sigma'^* \left(K_{S'} + \frac{1}{\mu} \mathcal{H}' \right) + \sum k_i F_i &= \sum (r'_i - r_i) E_i + \sum l_i G_i. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η αριστερά έκφραση έχει θετική τομή με κάθε σ -exceptional divisor E_i, G_i (άρα και ή δεξιά) και τότε από Negativity Lemma έχουμε

$$r'_i - r_i \leq 0 \text{ και } l_i \leq 0.$$

Αντίστοιχα κάνοντας την πράξη (6.6) - (6.4) και χρησιμοποιώντας το Negativity Lemma για τον σ' παίρνουμε τις σχέσεις

$$r_i - r'_i \leq 0 \text{ και } k_i \leq 0.$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\lambda \leq \mu$ καθώς και ότι $\mathcal{H}_V = \sigma'^* \mathcal{H}'$ εξ' ορισμού, παίρνουμε ότι στις παραπάνω ramification formulas ισχύουν

$$\begin{aligned} e_i &\geq r_i \geq 0, f_i \geq k_i \geq 0, \\ e'_i &= r'_i \text{ και } g_i = l_i. \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας όλες τις παραπάνω σχέσεις μεταξύ των συντελεστών παίρνουμε

$$r_i = r'_i \text{ και } k_i = 0 = l_i,$$

δηλαδή το ζητούμενο.

Βήμα 3. Ολοκλήρωση της απόδειξης.

Αρχικά, συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις με τις (6.3) και (6.5) παίρνουμε ότι όλοι σ' -exceptional divisors είναι και σ -exceptional divisors και συνεπώς ο rational map $\Phi^{-1} = \sigma \circ \sigma'$ είναι μορφισμός.

Υπενθυμίζουμε ότι $(K_S + \frac{1}{\mu} \mathcal{H})F = 0$ για όλα τα fibres F . Τότε για κάθε $p \in W$, έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= (K_S + \frac{1}{\mu} \mathcal{H}) \cdot \sigma_*(\phi \circ \sigma)^{-1}(p) \\ &= \sigma^* (K_S + \frac{1}{\mu} \mathcal{H}) \cdot (\phi \circ \sigma)^{-1}(p) \\ &= \sigma'^* (K_{S'} + \frac{1}{\mu} \mathcal{H}') \cdot (\phi \circ \sigma)^{-1}(p) \\ &= \frac{1}{\mu} (\phi' \circ \sigma')^* A' \cdot (\phi \circ \sigma)^{-1}(p) \\ &= \frac{1}{\mu} A' \cdot (\phi' \circ \sigma')_*(\phi \circ \sigma)^{-1}(p) \end{aligned}$$

Εφόσον ο divisor A' είναι ample, η παραπάνω σχέση μας λέει ότι

$$\dim(\phi' \circ \sigma')_*(\phi \circ \sigma)^{-1}(p) = 0.$$

Επίσης, καθώς οι μορφισμοί σ και σ' είναι σύνθεση blow downs η $\sigma'((\phi \circ \sigma)^{-1}(p))$ είναι συνεκτική καμπύλη και τότε

$$(\phi' \circ \sigma')(\phi \circ \sigma)^{-1}(p) = pt, \quad \forall p \in W.$$

Από το Πόρισμα 3.4.8 καθώς και από τον ομομορφισμό $PicS \cong PicW \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{p_1} PicW$ παίρνουμε

$$(\phi \circ \sigma)_* \mathcal{O}_V = \mathcal{O}_W$$

και αντίστοιχα

$$(\phi' \circ \sigma')_* \mathcal{O}_V = \mathcal{O}'_W.$$

Άρα από το Λήμμα 3.4.1, έχουμε ότι υπάρχει $\tau: W \rightarrow W'$ που κάνει το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{array}{ccc} S & \xleftarrow{\Phi^{-1}} & S' \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi' \\ W & \xrightarrow{\tau} & W' \end{array}$$

Ο μορφισμός τ έχει connected fibres και συνεπώς είναι 1-1, επίσης λόγω διαστάσεων είναι επί του normal variety W' και τότε ισομορφισμός (βλ. [7, σελ. 11]).

Τέλος από το Θεώρημα 3.4.4, ο $\Phi^{-1} = \Psi$ είναι σύνθεση από blow downs. Έστω E ένα exceptional curve αυτού. Από τη μεταθετικότητα του διαγράμματος, εύκολα βλέπει κανείς ότι το pullback ενός fibre μέσω του Ψ είναι πάλι fibre. Επιλέγουμε ένα fibre F_p στην S που περιέχει το $\Psi(E) = p$, τότε

$$\begin{aligned} 0 &= F_p^2 = (\Psi^* F_p)^2 = \tilde{F}_p^2 - 1 \\ &\Rightarrow \tilde{F}_p^2 = 1 > 0. \end{aligned}$$

Το οποίο είναι αντίφαση, από το Λήμμα 3.6.4, καθώς ο $\tilde{F}_p$ έχει support στο fibre $\Psi^* F_p$. Αυτό σημαίνει ότι ο Ψ δεν έχει exceptional curves και άρα ο Φ είναι μορφισμός, που ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Παρατήρηση 6.2.3. Αν έχουμε δύο birational maps μεταξύ Mori fibre spaces με το ίδιο target, τότε σε αυτούς μπορούμε να αντιστοιχήσουμε από έναν Sarkisov degree με βάση τον ίδιο very ample divisor στο target. Στο εξής, θα συγκρίνουμε τους Sarkisov degrees δύο τέτοιων birational maps με την λεξικογραφική διάταξη. Τότε παρατηρούμε ότι αν για δύο birational maps Φ_1, Φ_2 οι αντίστοιχοι Sarkisov degrees ικανοποιούν τη σχέση

$$(\mu_1, \lambda_1, e_1) \leq (\mu_2, \lambda_2, e_2)$$

και επίσης ο Φ_2 ικανοποιεί το παραπάνω κριτήριο τότε το ικανοποιεί και ο Φ_1 .

Έστω λοιπόν ότι θέλουμε να αναλύσουμε περαιτέρω έναν birational map $S \xrightarrow{\Phi} S'$ μεταξύ δύο Mori fibre spaces. Αρχικά, σταθεροποιούμε έναν very ample divisor H' της μορφής 6.2 στον S' και τότε σε κάθε birational map με target τον S' μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τον Sarkisov degree αυτού. Η ιδέα πίσω από το Sarkisov program είναι να ελέγχουμε σε κάθε βήμα αν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Noether-Fano-Iskovskikh Criterion, αν όχι τότε θα εφαρμόζουμε ένα elementary transformation $\Psi_1: S \dashrightarrow S_1$ στην S έτσι ώστε να ισχύει $\Phi = \Psi_1 \circ \Phi_1$ (βλέπε τα παρακάτω διαγράμματα) και ο Sarkisov degree του Φ_1 να είναι γνήσια μικρότερος από αυτόν του Φ . Καθώς, λόγω της μορφής του Sarkisov degree, δεν μπορεί να υπάρχει κάποια άπειρη γνησίως φθίνουσα ακολουθία από Sarkisov degrees, η παραπάνω διαδικασία πρέπει να τερματίσει κάποια στιγμή.

Θεώρημα 6.2.4 (Castelnuovo-Noether theorem = Sarkisov Program στη διάσταση 2). Έστω Φ , ένας birational map μεταξύ δύο Mori fibre spaces

$$\begin{array}{ccc} S & \dashrightarrow^{\Phi} & S' \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi' \\ W & & W' \end{array}$$

Τότε υπάρχει ένας αλγόριθμος (το Sarkisov program) που παραγοντοποιεί τον Φ σε σύνθεση κάποιων από τους τέσσερις παρακάτω συνδέσμους (elementary links):

Type 1

$$\begin{array}{ccc} & S_n \cong \mathbb{F}_1 & \\ \swarrow \Psi_n & & \downarrow \phi_n \\ S_{n-1} \cong \mathbb{P}^2 & & \\ \downarrow \phi_{n-1} & & \\ W_{n-1} = pt. & \longleftarrow & W_n \cong \mathbb{P}^1 \end{array}$$

Type 2

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ \swarrow & & \searrow \\ S_{n-1} & & S_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ W_{n-1} & \xleftarrow{\sim} & W_n \end{array}$$

όπου το $Z \rightarrow S_{n-1}$ είναι το blow up σε ένα fibre F και $Z \rightarrow S_n$ το blow down του strict transform της F .

Type 3

$$\begin{array}{ccc}
S_{n-1} \cong \mathbb{F}_1 & & \\
\downarrow & \searrow & \\
W_{n-1} \cong \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & W_n = pt
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
& & S_n \cong \mathbb{P}^2 \\
& & \downarrow \\
& & pt
\end{array}$$

Type 4

$$\begin{array}{ccc}
S_{n-1} \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{id} & S_n \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \\
\downarrow p_1 & & \downarrow p_2 \\
W_1 \cong \mathbb{P}^1 & & W_2 \cong \mathbb{P}^1 \\
& \searrow & \swarrow \\
& pt. &
\end{array}$$

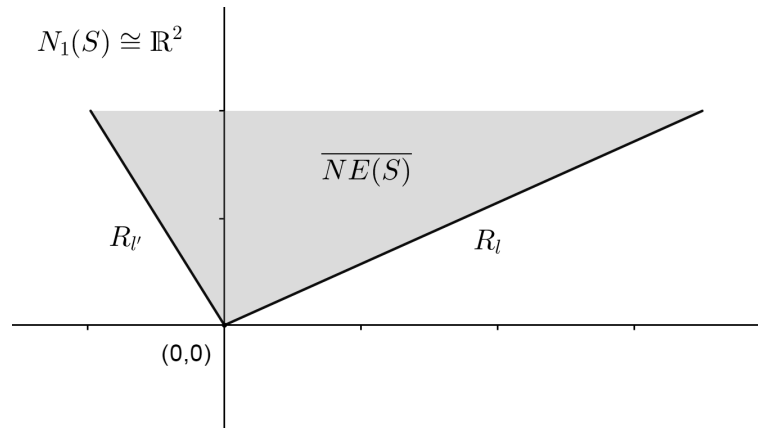
Απόδειξη. Έστω (μ, λ, e) το Sarkisov degree του Φ .

Περίπτωση: $\lambda \leq \mu$

- Αν ο $K_S + \frac{1}{\mu}\mathcal{H}$ είναι nef τότε από το Noether-Fano-Iskovskikh Criterion ο Φ είναι ισομορφισμός και έχουμε τελειώσει.
- Έστω ότι ο $K_S + \frac{1}{\mu}\mathcal{H}$ δεν είναι nef.

Αρχικά παρατηρούμε ότι η S δεν είναι ισόμορφη με το $\mathbb{P}^2$ γιατί στο $\mathbb{P}^2$, numerically trivial στα fibres του $\phi: \mathbb{P}^2 \rightarrow pt$, σημαίνει numerically trivial, το οποίο θα σήμαινε ότι ο $K_S + \frac{1}{\mu}\mathcal{H}$ είναι nef.

Επίσης, $PicS \cong \phi^*PicW \oplus \mathbb{Z}$ και επειδή όλα τα fibres είναι numerically proportional (βλ. 3.6.1), έχουμε ότι $dimN_1(S) = 2$. Άρα ο κώνος Kleiman-Mori της S , είναι αναγκαστικά της παρακάτω μορφής.



Ο παραπάνω κώνος έχει δύο extremal rays τα R_l και $R_{l'}$ και ξέρουμε ότι η Mori fibre space δομή $\phi: S \rightarrow W$ αντιστοιχεί στο ένα extremal ray, έστω $\phi = cont_{R_l}$.

Εφόσον $(K_S + \frac{1}{\mu}\mathcal{H}_S) \cdot \mathbb{R}_+[l] = 0$, αυτό σημαίνει ότι $(K_S + \frac{1}{\mu}\mathcal{H}_S) \cdot \mathbb{R}_+[l'] < 0$, διότι άλλως, ο $K_S + \frac{1}{\mu}\mathcal{H}_S$ θα ήταν μη αρνητικός και στο εσωτερικό του κώνου και άρα nef. Ακόμη, εφόσον ο $\mathcal{H}$ είναι effective divisor χωρίς base components, συμπεραίνουμε ότι $K_S \cdot \mathbb{R}_+[l'] < 0$, και συνεπώς το $R_{l'}$ είναι και αυτό ένα $K_S < 0$ extremal ray.

Θεωρούμε το contraction του $R_{l'}$, $cont_{R_{l'}}: S \longrightarrow S_1$. Ξεχωρίζουμε τις εξής δύο περιπτώσεις:

Το $cont_{R_{l'}}: S \longrightarrow S_1$ είναι το blow down μίας (-1)-καμπύλης.

Αν l είναι η καμπύλη στην S που παράγει το extremal ray R_l , έχουμε

$$K_S \cdot l < 0 \Rightarrow K_{S_1} \cdot cont_{R_{l'}} l < 0,$$

δηλαδή ο K_{S_1} δεν είναι nef που συναρτήσει του $dim N_1(S_1) = 1$, σημαίνει ότι $S_1 \cong \mathbb{P}^2$ (από το Structure Theorem for Mori fibre spaces) και συνεπώς $S \cong \mathbb{F}_1$ με τις προφανείς Mori fibre space δομές τους. Τότε, θέτοντας $cont_{R_{l'}} = \Psi_1$ έχουμε έναν **Type 3** σύνδεσμο.

Το $cont_{R_{l'}}: S \longrightarrow S_1$ είναι ένα $\mathbb{P}^1$ -bundle.

Τότε εφόσον η S έχει δύο διαφορετικές δομές $\mathbb{P}^1$ -bundle (ή πιο γεωμετρικά, δύο διαφορετικά rulings), έχουμε ότι $S \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ και $W \cong \mathbb{P}^1 \cong W_1$ με ϕ και $cont_{R_{l'}} = \phi_1$ τις προβολές στην πρώτη και δεύτερη συντεταγμένη αντίστοιχα. Τότε, έχουμε έναν **Type 4** σύνδεσμο.

Και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις, η συνθήκη $(K_S + \frac{1}{\mu}\mathcal{H}) \cdot \mathbb{R}_+[l'] < 0$ που δείξαμε νωρίτερα, μας λέει ότι

$$\left(K_{S_1} + \frac{1}{\mu}\mathcal{H}_{S_1}\right) \cdot F < 0$$

για κάθε fibre του ϕ_1 . Αυτό σημαίνει ότι $\mu_1 < \mu$ και άρα ο βαθμός του Φ_1 είναι γνήσια μικρότερος από τον βαθμό του Φ .

Τα παραπάνω ολοκληρώνουν την περίπτωση $\lambda \leq \mu$.

Περίπτωση: $\lambda > \mu$

Σε αυτήν την περίπτωση $\lambda \neq 0$ και τότε μπορούμε κάνουμε blow up στην S σε ένα από τα base points του $\Phi_{hom}^{-1}|H'|$ που ο $\mathcal{H}$ εμφανίζει maximum multiplicity λ . Έστω ότι το blow up είναι το $p: Z \longrightarrow S$. Ξεχωρίζουμε πάλι τις εξής δύο περιπτώσεις.

$S \cong \mathbb{P}^2$

Τότε και $Z \cong \mathbb{F}_1$ με την προφανή $\mathbb{P}^1$ -bundle δομή $\phi_1: \mathbb{F}_1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ και θέτοντας $p = \Psi_1$, έχουμε έναν **Type 1** σύνδεσμο.

Κάνοντας κάποιους υπολογισμούς, έχουμε

$$K_{S_1} + \frac{1}{\mu}\mathcal{H}_{S_1} = \Psi_1^* \left(K_S + \frac{1}{\mu}\mathcal{H}_S\right) + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) E.$$

τότε, γνωρίζοντας ότι για το τυχόν fibre F του ϕ_1 , ισχύει $E \cdot F = 1$ και χρησιμοποιώντας την υπόθεση $\lambda > \mu$ και τότε $(1 - \frac{\lambda}{\mu}) < 0$, παίρνουμε

$$\left(K_{S_1} + \frac{1}{\mu}\mathcal{H}_{S_1}\right)F = \Psi_1^*\left(K_S + \frac{1}{\mu}\mathcal{H}_S\right)F + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)E \cdot F = 0 + (< 0) < 0,$$

το οποίο σημαίνει και πάλι ότι $\mu_1 < \mu$. Συνεπώς ο βαθμός του Φ_1 είναι γνήσια μικρότερος από τον βαθμό του Φ .

Το $\phi: S \longrightarrow W$ είναι ένα $\mathbb{P}^1$ -bundle.

Υπολογίζοντας το self intersection του fibre που περιέχει το κέντρο του blow up p , παίρνουμε

$$\tilde{F}^2 = (p^*F - E)^2 = -1$$

και άρα αυτό είναι (-1) -καμπύλη. Έστω $q: Z \longrightarrow S_1$ το blow down αυτής.

Παρατηρούμε ότι η S_1 είναι $\mathbb{P}^1$ -bundle πάνω από μία καμπύλη W_1 . Εύκολα μπορεί κανείς να κατασκευάσει έναν birational map μεταξύ των W και W_1 , όπου καθώς αυτές είναι nonsingular καμπύλες, αυτός είναι biregular. Τότε έχουμε ένα σύνδεσμο **Type 2**.

Σε αυτή την περίπτωση, τα S και S_1 είναι birational **πάνω από την ίδια καμπύλη** και είναι εύκολο να δει κανείς ότι $\mu_1 = \mu$.

Παρατηρούμε ότι ισχύει $\mathcal{H} \cdot F < 2\lambda$ διότι

$$0 = \left(K_S + \frac{1}{\mu}\mathcal{H}\right)F \geq -2 + \frac{\mathcal{H} \cdot F}{\mu} \Rightarrow \mathcal{H} \cdot F \leq 2\mu < 2\lambda.$$

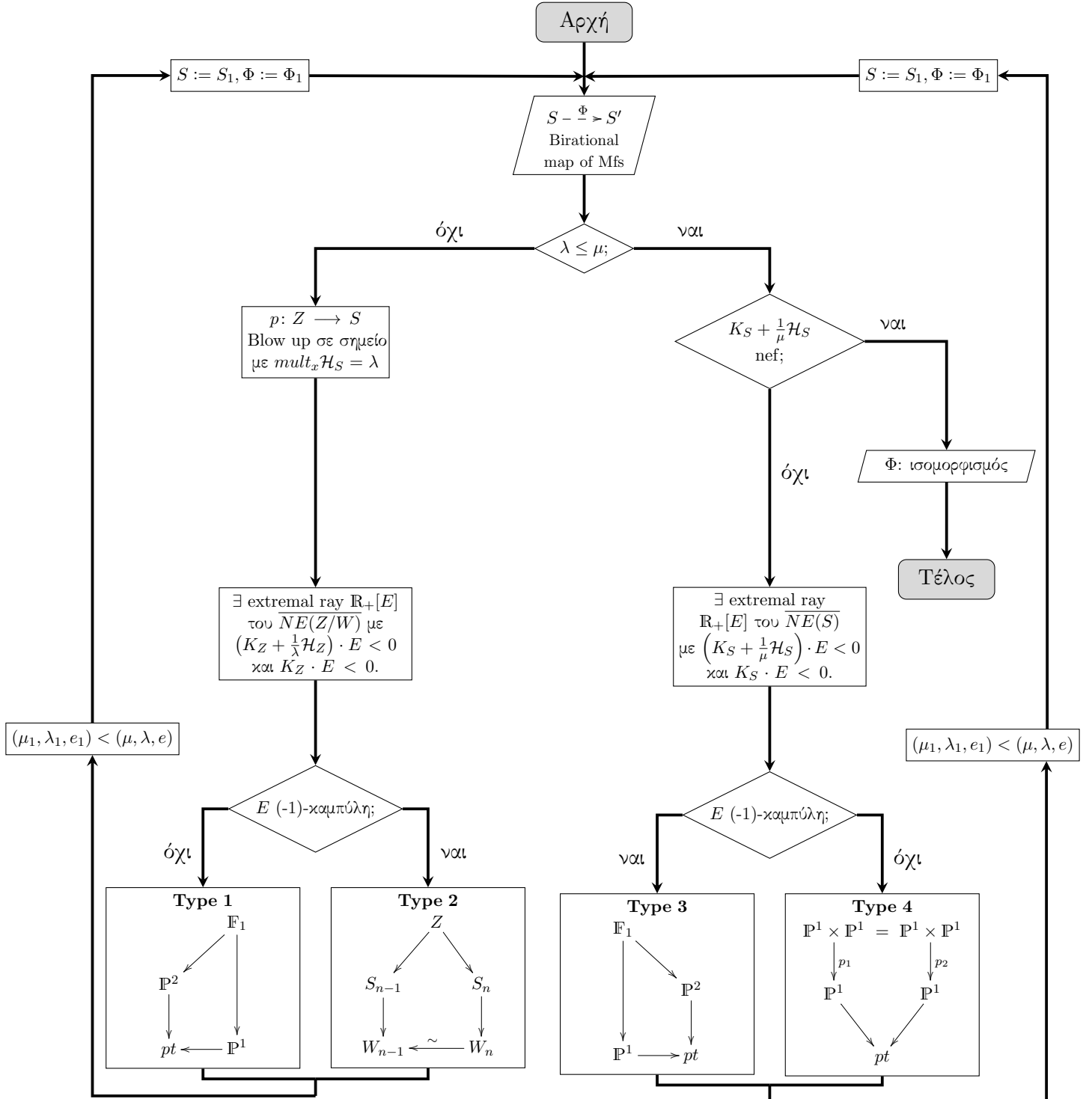
Το παραπάνω μεταφράζεται ως εξής. Αρχικά, πριν το blow up, πάνω στο fibre F είχαμε ένα base point με multiplicity λ και κάποια ακόμη σημεία τομής των $\mathcal{H}$ και F με συνολικά multiplicities μικρότερα του λ . Όταν κάναμε blow up το σημείο με multiplicity λ , αφαιρέσαμε αυτό το base point. Όταν αργότερα κάναμε blow down το strict transform του F δημιουργήσαμε ένα base point με multiplicity

$$0 \leq \lambda_k < 2\lambda - \lambda = \lambda.$$

Αυτό σημαίνει ότι $\lambda_1 < \lambda$ αν το κέντρο του blow up ήταν το μοναδικό base point με maximum multiplicity ή $\lambda_1 = \lambda$ αν υπήρχαν και άλλα τέτοια σημεία. Και στις δύο όμως περιπτώσεις, το πλήθος των base points με maximum multiplicity έπεσε κατά ένα, δηλαδή $e_1 = e - 1 < e$. Τελικά ο βαθμός του Φ_1 είναι γνήσια μικρότερος από τον βαθμό του Φ . $\square$

Στην επόμενη σελίδα, παραδίδουμε τον θεωρητικό αλγόριθμο του Sarkisov Program στη διάσταση 2.

Sarkisov Program στη διάσταση 2



Παρατήρηση 6.2.5. Το παραπάνω διάγραμμα ροής είναι φαινομενικά διαφορετικό από αυτό που περιγράψαμε παραπάνω ως τον αλγόριθμο του Sarkisov program. Εξηγούμε λοιπόν την ισοδυναμία των δύο.

Το δεξί μέρος του παραπάνω διαγράμματος (περίπτωση $\lambda \leq \mu$) δεν έχει διαφορές από την απόδειξη του Θεωρήματος 6.2.4.

Όσο για το αριστερό, πρώτα εισαγάγουμε κάποιον συμβολισμό. Έστω $\pi: S \rightarrow W$, ένας μορφισμός μεταξύ projective varieties, θέτουμε

$$\begin{aligned} Z_1(S/W) &:= \{z \in Z_1(X) \mid \dim \pi(\text{Supp } z) = 0\}, \\ N_1(S/W)_{\mathbb{Z}} &:= Z_1(S/W) / \equiv, \\ N^1(S/W)_{\mathbb{Z}} &:= \text{Pic}(S) / \equiv_W, \text{ με } L \equiv_W K \Leftrightarrow L \cdot z = K \cdot z, \forall z \in N_1(S/W), \\ N_1(S/W) &:= N_1(S/W)_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R} \text{ και } N^1(S/W) := N^1(S/W)_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R}, \\ NE(S/W) &:= \text{ο κυρτός κώνος που παράγουν τα effective στοιχεία του } Z_1(S/W). \end{aligned}$$

Εύκολα βλέπει κανείς ότι αν $\pi: S \rightarrow W = pt$, όλες οι παραπάνω π -relative έννοιες ταυτίζονται με τις συνήθεις.

Στην περίπτωση $\lambda > \mu$ της απόδειξης του Θεωρήματος 6.2.4 και στις δύο υποπεριπτώσεις, ο $\mathbb{R}$ -διανυσματικός χώρος $N_1(Z/W)$ παράγεται από τη numerical κλάση των p -pullbacks των ϕ -fibres και την exceptional καμπύλη E' . Ο αντίστοιχος κώνος λοιπόν, έχει δύο extremal rays, τα $\mathbb{R}_+[E']$ και $\mathbb{R}_+[E]$. Εύκολα υπολογίζει κανείς ότι ισχύει

$$\left(K_Z + \frac{1}{\lambda} \mathcal{H}_Z\right) \cdot E' = 0.$$

Επίσης, εξ ορισμού του μ και από το γεγονός ότι $\lambda > \mu$, παίρνουμε ότι divisor $K_Z + \frac{1}{\lambda} \mathcal{H}_Z$ δεν είναι nef και συνεπώς

$$\left(K_Z + \frac{1}{\lambda} \mathcal{H}_Z\right) \cdot E < 0.$$

Τότε το $\mathbb{R}_+[E]$ είναι K_Z αρνητικό extremal ray.

Αν το E είναι μία (-1) -καμπύλη, τότε το contraction αυτής είναι ακριβώς το blow down που περιγράψαμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 6.2.4. Αντίστοιχα αν η E δεν είναι (-1) -καμπύλη, τότε αυτή είναι αναγκαστικά 0-καμπύλη και το contraction αυτής αντιστοιχεί σε ένα $\mathbb{P}^1$ -bundle. Υπολογίζοντας παίρνουμε

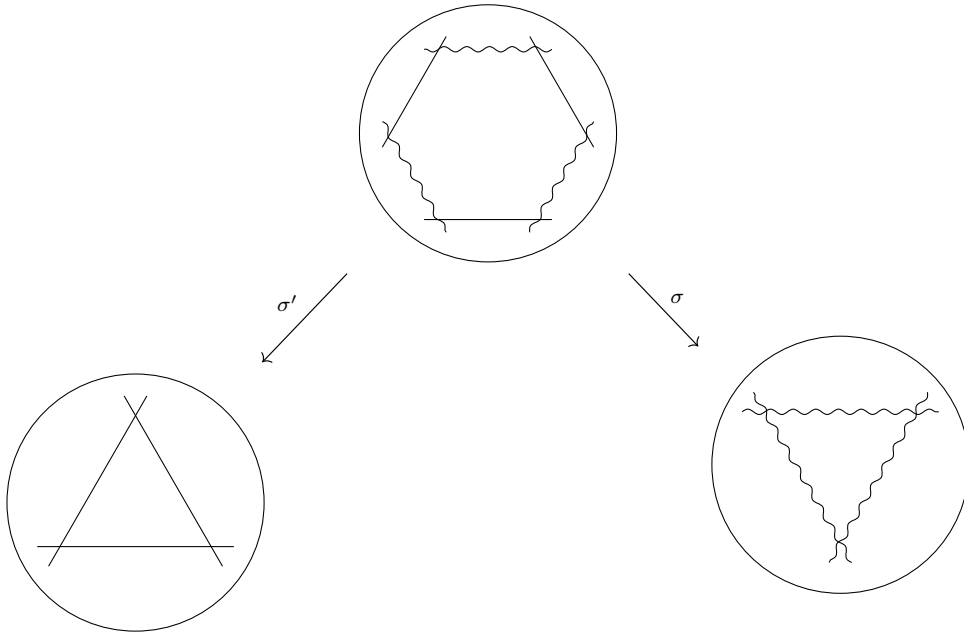
$$\begin{aligned} 0 &> K_Z \cdot E \Rightarrow p^* K_S \cdot E + E \cdot E' \\ &\Rightarrow K_S \cdot p_* E' < 0. \end{aligned}$$

Επίσης το E' είναι fibre και άρα τέμνει την p -exceptional καμπύλη E . Συνοψίζοντας, το pushforward $p_* E'$ είναι μία 1-καμπύλη με $K_S \cdot p_* E' < 0$. Τότε το Θεώρημα 4.1.5 μας δίνει $S \cong \mathbb{P}^2$ και δηλαδή την ισοδυναμία των δύο αλγορίθμων.

6.3 Μία εφαρμογή του Sarkisov Program

Στην παρούσα παράγραφο χρησιμοποιούμε το Sarkisov Program για να αποδείξουμε ένα κλασικό αποτέλεσμα σχετικά με την ομάδα των birational αυτομορφισμών του $\mathbb{P}^2$, $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$.

Θεωρούμε τον birational map $\mathbb{P}^2 - \Phi \rightarrow \mathbb{P}^{2'}$, $(x : y : z) \mapsto (yz : xz : xy)$. Παρατηρούμε ότι αυτός δεν ορίζεται στα τρία σημεία $e_1 = (1 : 0 : 0)$, $e_2 = (0 : 1 : 0)$, $e_3 = (0 : 0 : 1)$ και άρα ο Φ παραγοντοποιείται μέσω των blow ups σε αυτά τα τρία σημεία. Αν l_1 είναι η μοναδική ευθεία στο $\mathbb{P}^2$ που διέρχεται από τα e_2, e_3 , τότε το strict transform αυτής μέσω των τριών blow ups είναι μία (-1) -καμπύλη. Αντίστοιχα και για τις ευθείες l_2, l_3 . Κάνοντάς αυτές τις καμπύλες blow down παίρνουμε την ανάλυση του Φ σε blow ups και blow downs όπως στο Πρόσχημα 3.4.7. Σχηματικά, έχουμε το παρακάτω διάγραμμα.



Όπως και στον αλγόριθμο του Sarkisov program, σταθεροποιούμε τον very ample divisor $\mathcal{H}' = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2'}}(1)$ που αντιστοιχεί στις κλάσεις όλων των ευθειών στο $\mathbb{P}^{2'}$. Κάνοντας στοιχειώδεις υπολογισμούς, παίρνουμε ότι το homaloidal transform $\mathcal{H}$ του $\mathcal{H}'$ είναι το linear system των δευτεροβάθμιων καμπύλων στο $\mathbb{P}^2$ που διέρχονται από τα e_1, e_2, e_3 και τότε $\Phi_{hom}^{-1}|\mathcal{H}'| < \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$. Δηλαδή το linear system $\Phi_{hom}^{-1}|\mathcal{H}'|$ έχει τρία base points με general multiplicities 1 στο καθένα. Ο Sarkisov degree του Φ είναι λοιπόν

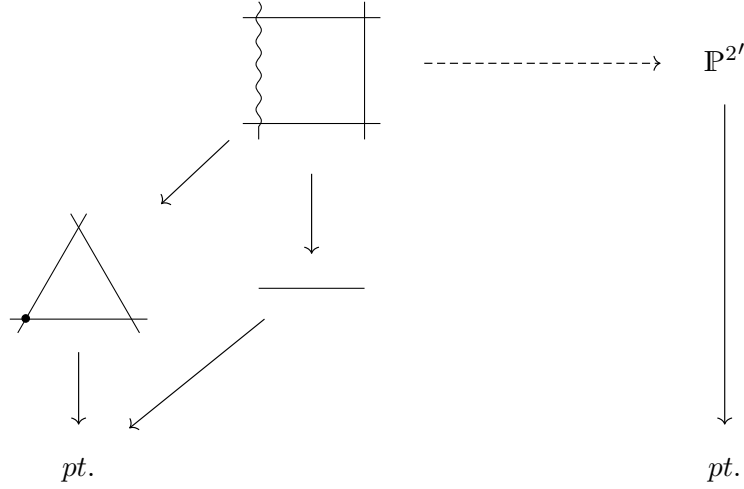
$$\left(\frac{2}{3}, 1, 3\right)$$

Τρέχουμε το Sarkisov program.

Βήμα 1. Βρισκόμαστε στην περίπτωση 2.1, δηλαδή την περίπτωση

$$\lambda > \mu \text{ και } S \cong \mathbb{P}^2$$

και τότε έχουμε έναν **Type 1** σύνδεσμο, έστω αυτόν που αντιστοιχεί στο blow up στο e_1 . Σχηματικά, μέχρι τώρα έχουμε την εξής διάσπαση του Φ



Πριν προχωρήσουμε στον υπολογισμό του Sarkisov degree του δεύτερου βήματος, πρέπει να κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις.

Το strict transform των ευθειών που διέρχονται από το κέντρο του blow up

$$Bl_{p_{e_1}} \mathbb{P}^2 = p: \mathbb{F}_1 \longrightarrow \mathbb{P}^2$$

είναι οι μόνες καμπύλες στο $\mathbb{F}_1$ που έχουν self intersection 0 και συνεπώς είναι τα fibres του $\mathbb{F}_1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$. Επιλέγουμε ως βάση του $N^1(\mathbb{F}_1)$ την $\{E, f\}$ με E την κλάση της exceptional καμπύλης του blow up και f την κλάση ενός fibre και intersection matrix $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Υπολογίζοντας παίρνουμε

$$K_{\mathbb{F}_1} \sim -2E - 3f \text{ και } \mathcal{H}_{\mathbb{F}_1} \sim E + 2f$$

και τότε ο Sarkisov degree είναι

$$\left(\frac{1}{2}, 1, 2\right).$$

Βήμα 2. Βρισκόμαστε στην περίπτωση 2.2 του αλγορίθμου, δηλαδή την περίπτωση

$$\lambda > \mu \text{ και } S \not\cong \mathbb{P}^2$$

και άρα προχωράμε με έναν **Type 2** σύνδεσμο. που στην περίπτωσή μας είναι ένα elementary transformation μεταξύ επιφανειών Hirzebruch. Τα base points του $\mathcal{H}_{\mathbb{F}_1}$ δεν μπορεί να είναι πάνω στην (-1) -καμπύλη E . Αυτό σημαίνει ότι το elementary transform είναι το $\mathbb{F}^1 \dashrightarrow \mathbb{F}^0$.

Κάνοντας υπολογισμούς όπως και παραπάνω, ο νέος Sarkisov degree είναι

$$\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right).$$

Συνεχίζοντας αντίστοιχα, τα επόμενα βήματα έχουν ως εξής

Βήμα 3. Περίπτωση 2.2 με **Type 2** σύνδεσμο που αντιστοιχεί στο elementary transformation $\mathbb{F}^0 \dashrightarrow \mathbb{F}^1$ και νέο Sarkisov degree

$$\left(\frac{1}{2}, 0, *\right).$$

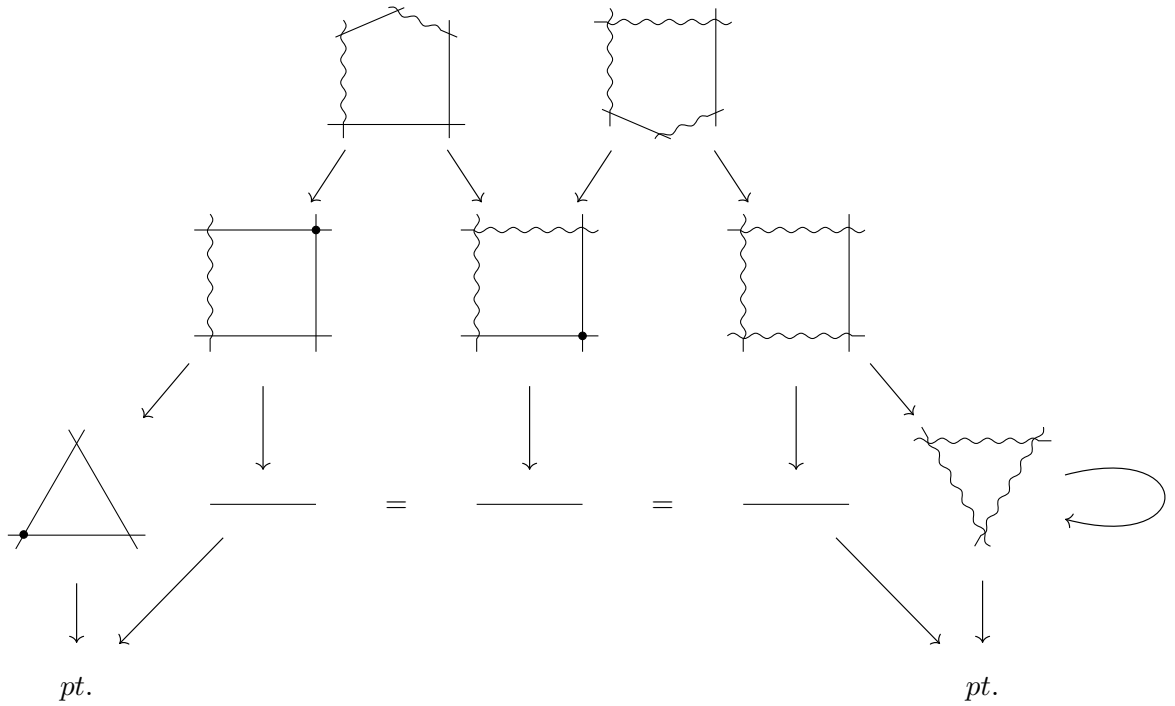
Βήμα 4. Περίπτωση 1.2.1 με **Type 3** σύνδεσμο και Sarkisov degree

$$\left(\frac{1}{3}, 0, *\right)$$

και τέλος,

Βήμα 5. Περίπτωση 1.1, όπου ο Φ_4 είναι ισομορφισμός.

Η παραπάνω παραγοντοποίηση του Φ φαίνεται σχηματικά στο παρακάτω διάγραμμα.



και σε σχέση με τις επιφάνειες που εμφανίζονται στο παραπάνω διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{F}_1 & \xrightarrow{\alpha_{e_2}} & \mathbb{F}_0 & \xrightarrow{\alpha_{e_3}} & \mathbb{F}_1 & & \\ & \swarrow \epsilon_{e_1} & & & & & & \searrow & \\ \mathbb{P}^2 & & & & & & & & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

όπου στο εξής με $\alpha_P: \mathbb{F}_n \dashrightarrow \mathbb{F}_{n+1}$, θα συμβολίζουμε το μοναδικό elementary transformation που ξεκινά με blow up στο σημείο P και με $\epsilon_Q: \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ το blow up του

$\mathbb{P}^2$ στο Q .

Είμαστε πλέον σε θέση να αποδείξουμε το παρακάτω, πολύ σημαντικό θεώρημα.

Θεώρημα 6.3.1. *Η ομάδα των birational αυτομορφισμών του $\mathbb{P}^2$ (γνωστή και ως **Cremona group**), παράγεται από τους ισομορφισμούς του $\mathbb{P}^2$ καθώς και από το standard quadratic transformation*

$$\mathbb{P}^2 \xrightarrow{\Phi} \mathbb{P}^2, \quad (x : y : z) \mapsto (yz : xz : xy)$$

Απόδειξη. Έστω $\chi: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, ένας birational αυτομορφισμός και έστω

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{F}_1 \xrightarrow{l_0} \dots \xrightarrow{l_k} \mathbb{F}_1 & \\ \swarrow & & \searrow \\ \mathbb{P}^2 & & \mathbb{P}^2 \end{array} \quad (6.7)$$

μία παραγοντοποίηση αυτού σε elementary links.

Αρχικά παρατηρούμε ότι αν σε κάποιο, εσωτερικό σημείο της παραπάνω παραγοντοποίησης εμφανίζεται κάποιο $\mathbb{F}_1$, τότε μπορούμε να την σπάσουμε ως εξής

$$\begin{array}{ccccccc} & \mathbb{F}_1 \dashrightarrow \dots \dashrightarrow \mathbb{F}_1 & \xrightarrow{id} & \mathbb{F}_1 \dashrightarrow \dots \dashrightarrow \mathbb{F}_1 & & & \\ \swarrow & & \searrow & \swarrow & & \searrow & \\ \mathbb{P}^2 & \dashrightarrow \dots \dashrightarrow \mathbb{P}^2 & & \mathbb{P}^2 & \dashrightarrow \dots \dashrightarrow \mathbb{P}^2 & & \end{array}$$

σε δύο διαφορετικούς birational αυτομορφισμούς χ_1 και χ_2 και να παραγοντοποιήσουμε ξεχωριστά τους δύο. Αποδεικνύουμε πρώτα το εξής.

Ισχυρισμός: Έστω χ ένας birational αυτομορφισμός του $\mathbb{P}^2$ και $\mathcal{F}$ μία παραγοντοποίησή του όπως η (6.7). Ορίζουμε τον φυσικό αριθμό

$$l(\chi, \mathcal{F}) := \max\{k \mid \text{κάποιο } \mathbb{F}_k \text{ εμφανίζεται στην παραγ. } \mathcal{F} \text{ του } \chi\}.$$

Τότε αν $l(\chi, \mathcal{F}) = 1$, ο χ παραγοντοποιείται ως σύνθεση ισομορφισμών και του standard quadratic transformation.

Απόδειξη: Από την προηγούμενη παρατήρηση μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι στην $\mathcal{F}$, δεν εμφανίζεται κάποιο εσωτερικό $\mathbb{F}_1$. Τότε, modulo κάποιων Type 4 συνδέσμων που αντιστοιχούν σε σύνθεση με τον ταυτοτικό μορφισμό του $\mathbb{F}_0$ και δεν επηρεάζουν την παραγοντοποίηση, η $\mathcal{F}$ έχει την παρακάτω μορφή

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{F}_1 \xrightarrow{\alpha_Q} \mathbb{F}_0 \xrightarrow{\alpha_R} \mathbb{F}_1 & \\ \swarrow \epsilon_P & & \searrow \\ \mathbb{P}^2 & \dashrightarrow \dots \dashrightarrow \mathbb{P}^2 & \end{array}$$

και εξαρτάται μόνο από την σχετική θέση των τριών σημείων P, Q, R . Εύκολα βλέπει κανείς ότι το Q δεν μπορεί να είναι πάνω στην ϵ_P -exceptional καμπύλη και τότε μας μένουν δύο περιπτώσεις.

- Αν το R δεν ανήκει στην exceptional καμπύλη του blow up που γίνεται στο elementary transformation α_Q , τότε τα P, Q, R “ζουν” με φυσιολογικό τρόπο στο $\mathbb{P}^2$ ως διαφορετικά σημεία και τότε ο χ είναι το standard quadratic transformation (μέχρις ισομορφισμού).
- Αν το R ανήκει στην exceptional καμπύλη του α_Q , τότε για κάποιο κατάλληλα general σημείο S του $\mathbb{P}^2$ θεωρούμε την παραγοντοποίηση

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \mathbb{F}_1 & \xrightarrow{\alpha_Q} & \mathbb{F}_0 & \xrightarrow{\alpha_S} & \mathbb{F}_1 \\
 \epsilon_P \swarrow & & & & & & \searrow \epsilon_P \\
 \mathbb{P}^2 & & & & & & \mathbb{P}^2 \\
 & & & & \text{id} & & \\
 & & & & \mathbb{F}_1 & \xrightarrow{\alpha_S^{-1}} & \mathbb{F}_0 & \xrightarrow{\alpha_R} & \mathbb{F}_1 \\
 & & \searrow \epsilon_P & & \swarrow \epsilon_P & & & & \searrow \epsilon_P \\
 & & \mathbb{P}^2 & & & & & & \mathbb{P}^2
 \end{array}$$

Τότε αν $\alpha_S^{-1} = \alpha_{S'}$, αναγώμαστε στην πρώτη περίπτωση με $P \neq Q \neq S$ και $P \neq S' \neq R$. ■

Θα δείξουμε τώρα ότι αν έχουμε μία παραγοντοποίηση $\mathcal{F}$ ενός birational map χ , με τον αντίστοιχο αριθμό $l(\chi, \mathcal{F}) = k$ τότε μπορούμε να βρούμε μία άλλη παραγοντοποίηση $\mathcal{F}'$ αυτού με $l(\chi, \mathcal{F}') < k$. Τότε επαγωγικά και χρησιμοποιώντας τον παραπάνω ισχυρισμό θα έχουμε το ζητούμενο.

Έστω ότι η $\mathcal{F}$ γύρω από ένα σημείο που εμφανίζεται κάποιο $\mathbb{F}_k$ έχει τη μορφή

$$\dots \xrightarrow{l_r} \mathbb{F}_{k-1} \xrightarrow{\alpha_P} \mathbb{F}_k \xrightarrow{\alpha_Q} \mathbb{F}_{k-1} \xrightarrow{l_{r+3}} \dots$$

Επιλέγοντας κατάλληλα γενικό $R \in \mathbb{F}_{k-1}$ (αρκεί να μην είναι στα fibres των P, Q και να μην διέρχεται από το negative section της $\mathbb{F}_{k-1}$), θεωρούμε την παραγοντοποίηση

$$\begin{array}{ccc}
 \dots \xrightarrow{l_r} \mathbb{F}_{k-1} & & \mathbb{F}_{k-1} \xrightarrow{l_{r+3}} \dots \\
 & \searrow \alpha_R & \nearrow \alpha_R^{-1} \\
 & \mathbb{F}_{k-2} \xrightarrow{\alpha_P} \mathbb{F}_{k-1} \xrightarrow{\alpha_Q} \mathbb{F}_{k-2} &
 \end{array}$$

Εύκολα δείχνει κανείς ότι είναι όντως παραγοντοποίηση του χ καθώς από την επιλογή του R έχουμε τη μεταθετικότητα του παρακάτω διαγράμματος

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{F}_{k-1} & \xrightarrow{\alpha_P} & \mathbb{F}_k & \xrightarrow{\alpha_Q} & \mathbb{F}_{k-1} \\
 | \alpha_R & & | \alpha_R & & | \alpha_R \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{F}_{k-2} & \xrightarrow{\alpha_P} & \mathbb{F}_{k-1} & \xrightarrow{\alpha_Q} & \mathbb{F}_{k-2}
 \end{array}$$

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία σε κάθε σημείο της $\mathcal{F}$ που εμφανίζεται κάποιο $\mathbb{F}_k$ παίρνουμε την ζητούμενη παραγοντοποίηση $\mathcal{F}'$. □

Βιβλιογραφία

- [1] Kenji Matsuki, *Introduction to the Mori Program*, Springer, 2002.
- [2] Michael Artin, *Some Numerical Criteria for Contractability of Curves on Algebraic Surfaces*, Amer. J. Math. **84** (1962), 485-496.
- [3] Wolf Barth, et al, *Compact Complex Surfaces*, Springer-Verlag, 1984.
- [4] Arnaud Beauville, *Complex Algebraic Surfaces*, Cambridge University Press, 2003.
- [5] Christina Birkenhake, Herbert Lange, *Complex Abelian Varieties*, Springer, 2010.
- [6] Chung-Wu Ho, *A Note on Proper Maps*, Proc. Amer. Math. Soc. **51** (1975), 237-241.
- [7] Olivier Debarre, *Higher-Dimensional Algebraic Geometry*, Springer New York, 2010.
- [8] Jean A. Dieudonné, *History of Algebraic Geometry: an Outline of the History and Development of Algebraic Geometry*, Wadsworth Advanced Books & Software, 1985.
- [9] Alan H. Durfee, *Fifteen characterizations of rational double points and simple critical points*, Enseign. Math. (2) **25** (1979), 131-163.
- [10] Phillip Griffiths and Joe Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley, 1994.
- [11] Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, 2010.
- [12] S. Iitaka, *Algebraic Geometry: an Introduction to Birational Geometry of Algebraic Varieties*, Springer, 2011.
- [13] George Kempf, *Algebraic Varieties*, Cambridge Univ. Press, 1999.
- [14] Steven Kleiman, *Toward a numerical theory of ampleness*, Annals of Math. (2) **84** (1966), 293-344.
- [15] R.K. Lazarsfeld, *Positivity in Algebraic Geometry I*, Springer-Verlag Berlin, 2004.
- [16] Arkadij L. Onishchik, and Ernest B. Vinberg, *Lie Groups and Algebraic Groups*, Springer, 2012.

- [17] Arvid Perego, *Introduction to algebraic surfaces*, Lecture notes, Available at <https://sites.google.com/site/arvidperego/teachingactivites>, 2009.
- [18] Miles Reid, *Chapters on Algebraic Surfaces*, University of Warwick. Mathematics Institute, 1996.
- [19] Joseph J Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, Springer, 2009.
- [20] Jean-Pierre Serre, *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **6** (1955-1956), 1-42.
- [21] Igor R. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry 1*, Translated by Miles Reid, Springer, 2013
- [22] Stacks Project, *Stacks.math.columbia.edu*, Accessed 11 May 2018.