Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΕΞΩΤΕΡΙΚΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΕ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΦΑΙΡΕΣΗΣ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ

υπό

ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ Ν. ΔΙΑΜΑΝΤΗ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Υποβληθείσα για την εκπλήρωση των προϋποθέσεων απονομής
διπλώματος μεταπτυχιακής ειδίκευσης στο
Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών «Επιστήμες της Αγωγής»
(Κατεύθυνση: Φυσικές Επιστήμες στην Εκπαίδευση)
του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης
του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

2017

ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ Ν. ΔΙΑΜΑΝΤΗΣ | VASSILIOS N. DIAMANTIS

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΕΞΩΤΕΡΙΚΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΕ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΦΑΙΡΕΣΗΣ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ

THE ROLE OF EXTERNAL REPRESENTATIONS IN MATHEMATICAL ABSTRACTION ACTIVITIES FOR PRIMARY SCHOOL STUDENTS

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ | POSTGRADUATE THESIS

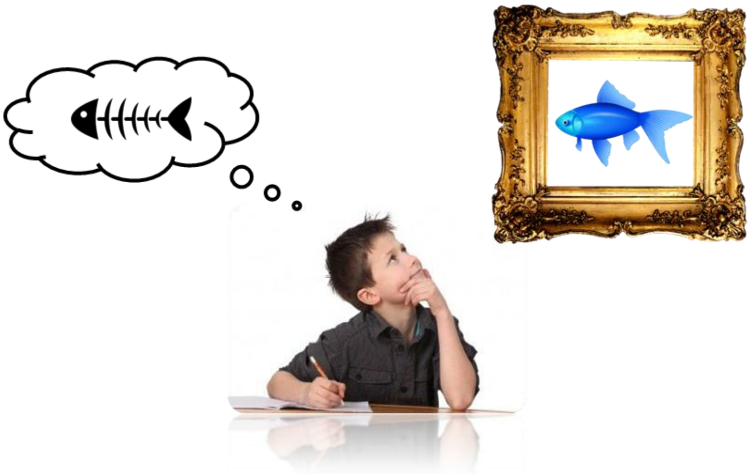
ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗ	ASSESSMENT COMMITTEE
ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΤΑΤΣΗΣ (ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ)	KONSTANTINOS TATSIS (SUPERVISOR)
ΜΑΡΙΑ ΚΑΛΔΡΥΜΙΔΟΥ	MARIA KALDRIMIDOU
ΞΕΝΙΑ ΒΑΜΒΑΚΟΥΣΗ	XENIA VAMVAKOUSI

This thesis is written in Greek.
Should you need translation in English, please do not hesitate to contact me at:
v.n.diamantis@gmail.com.

Στις γιαγιάδες μου Μαρία και Φρειδερίκη,
για τους αγώνες τους…

Περιεχόμενα

Παράρτημα



Περίληψη

Η μαθηματική αφαιρετική σκέψη αποτελεί μία από τις σημαντικότερες νοητικές λειτουργίες στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης ενώ αρκετές έρευνες έχουν αποδείξει ότι είναι προσβάσιμη ήδη από τη μικρή σχολική ηλικία. Παράλληλα, η κατανόηση των Μαθηματικών συνδέεται άρρηκτα με τις αναπαραστάσεις των μαθηματικών αντικειμένων και εννοιών, είτε τις με τη μορφή εσωτερικών νοητικών δομών (εσωτερικές αναπαραστάσεις) είτε με τη μορφή εξωτερικών αναπαραστάσεων (εικόνες, σύμβολα, χειραπτικά αντικείμενα, γλώσσα κ.α.). Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν η κατασκευή δραστηριοτήτων μαθηματικής αφαίρεσης με εξωτερικές αναπαραστάσεις που χαρακτηρίζονται από αντιληπτική μεταβλητότητα, ενσωμάτωση εννοιών σε πολλαπλές αναπαραστάσεις, δυναμική διασύνδεση, σταδιακή μετάβαση από τις εικονικές στις συμβολικές αναπαραστάσεις και δυνατότητα για ενεργό εμπλοκή των μαθητών στον χειρισμό των αναπαραστάσεων, ώστε να μελετηθεί ο ρόλος των χαρακτηριστικών αυτών στην οικοδόμηση μαθηματικών αφαιρέσεων από μαθητές Δημοτικού. Τρεις μαθητές της Δ’ τάξης ασχολήθηκαν με μία προ-αλγεβρική δραστηριότητα και ισάριθμοί μαθητές της ΣΤ’ τάξης με μία γεωμετρική, σχεδιασμένες στο λογισμικό “Geogebra”. Από την ποιοτική ανάλυση της βιντεοσκόπησης και των φύλλων εργασίας των μαθητών, προέκυψε ότι οι δραστηριότητες υποστήριξαν αποτελεσματικά μαθητές με μέτρια ή υψηλή επίδοση να οικοδομήσουν μαθηματικές αφαιρέσεις. Η αντιληπτική μεταβλητότητα ήταν σημαντική μόνο για τη γεωμετρική δραστηριότητα, η πολλαπλή ενσωμάτωση και στις δύο ενώ η διαδικασία οικοδόμησης της μαθηματικής αφαίρεσης ακολούθησε σε γενικές γραμμές τη θεωρία του Bruner (εμπράγματες → εικονικές → συμβολικές αναπαραστάσεις). Από την έρευνα δεν κατέστη δυνατή η εξαγωγή συμπερασμάτων για τον ρόλο της δυναμικής διασύνδεσης και της ενεργού εμπλοκής των μαθητών στον χειρισμό των αναπαραστάσεων. Περαιτέρω έρευνα απαιτείται για τη μελέτη κάθε χαρακτηριστικού ξεχωριστά αλλά και σε συνδυασμό με κοινωνικούς παράγοντες, όπως οι ρόλοι των μαθητών και του εκπαιδευτικού στις κοινωνικές αλληλεπιδράσεις στο πλαίσιο της ομάδας ή της τάξης. Επίσης, ερευνητικό ενδιαφέρον παρουσιάζει η υποστήριξη της μαθηματικής αφαιρετικής σκέψης μαθητών με χαμηλή επίδοση στα Μαθηματικά με τη βοήθεια κατάλληλα σχεδιασμένων εξωτερικών αναπαραστάσεων.

Abstract

Mathematical abstraction is one of the most significant mental procedures in mathematical education and research on the field proves its accessibility even by young children. At the same time, understanding of Mathematics is rigidly connected to representations of mathematical objects and concepts, either in the form of internal mental constructs (internal representations), or in the form of external representations (pictures, symbols, manipulatives, language, etc).The aim of this thesis was the construction of mathematical abstraction activities with external representations, characterized by perceptual variability, embodiment of concepts in multiple representations, dynamic linking, gradual movement from pictorial to symbolic representations and availability for active involvement of students in the usage of representations, so that we can study the role of these characteristics in the construction of mathematical abstractions by Primary Education students. Three 4th grade students were involved in a pre-algebraic activity and three 6th grade students in a geometrical one, both designed in the software "Geogebra". The qualitative analysis of the videotaped and the students' work sheets data, shows that the activities successfully supported medium and high performance students in the construction of mathematical abstractions. Perceptual variability was important only for the geometrical activity, multiple embodiment for both and the procedure of mathematical abstraction construction was persistent, in general terms, with Bruner's theory (concrete → pictorial → abstract representations). We were not able to reach final deductions about the role of dynamic linking and the availability for active involvement of students in the usage of representations. More research is required for the study of each characteristic separately and in combination with social factors, such as the roles of students and the teacher in social interactions in the group or class context. We are, also, interested in supporting the mathematical abstract thought of low achievers in Mathematics through especially designed external representations.

Πρόλογος

Μιλώντας για Μαθηματικά, ποικίλες λέξεις πλημμυρίζουν το μυαλό μας: αριθμοί, πράξεις, Αριθμητική, Άλγεβρα, Γεωμετρία, πρόβλημα, άβακας, αριθμογραμμή, μεταβλητές, γραφική παράσταση, σημείο κ.α. Ενώ αναφέρουμε τόσες και πολλές άλλες παρεμφερείς λέξεις από το πεδίο των Μαθηματικών, σπάνια γίνεται αναφορά στο μέσο με το οποίο ουσιαστικά «κάνουμε Μαθηματικά». Το μέσο αυτό δεν είναι ούτε το μολύβι ούτε το χαρτί αλλά η «αναπαράσταση».

Οι αναπαραστάσεις απασχολούν σημαντικό κομμάτι των ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών αλλά και τους εκπαιδευτικούς εδώ και πολλά χρόνια και σίγουρα όχι τυχαία. Στο ερώτημα αν θα μπορούσαμε να έχουμε Μαθηματικά χωρίς αναπαραστάσεις, ο Duval (2006) απαντά αρνητικά, επισημαίνοντας ότι τα Μαθηματικά σε αντίθεση με άλλες θετικές επιστήμες, όπως η Βιολογία ή η Αστρονομία, είναι προσβάσιμα μόνο μέσα από κάποιου είδους αναπαραστατικό σύστημα και όχι μέσω της παρατήρησης φαινομένων. Οι έμπειροι εκπαιδευτικοί γνωρίζουν αρκετά καλά ότι η αποτελεσματική διδασκαλία των Μαθηματικών εξαρτάται σημαντικά από την ορθή διδακτική αξιοποίηση των αναπαραστάσεων, κάτι που συνειδητοποίησα και εγώ από την ενασχόληση μου με μαθητές του Δημοτικού Σχολείου και του Γυμνασίου.

Ένα συνέδριο, ένα λογισμικό, κάποιες πανεπιστημιακές διαλέξεις αλλά κυρίως η εκπαιδευτική πραγματικότητα με ώθησαν να μελετήσω τον ρόλο των αναπαραστάσεων στη μάθηση και τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Με την υπόδειξη του επιβλέποντά μου, αποφασίσαμε ότι θα είχε ερευνητικό ενδιαφέρον η μελέτη του ρόλου των αναπαραστάσεων σε έναν τομέα που λαμβάνει αρκετή προσοχή τελευταία, στη μαθηματική γενίκευση στο πλαίσιο του Δημοτικού Σχολείου. Ωστόσο, η σχετική με το θέμα βιβλιογραφία με οδήγησε στη συνειδητοποίηση του γεγονότος ότι μία ευρύτερη[1] της γενίκευσης νοητική λειτουργία, την εσωκλείει και παράλληλα αποτελεί κομβικό μηχανισμό σκέψης στα Μαθηματικά. Είχα μόλις φθάσει στη «μαθηματική αφαίρεση[2]».

Κάπως έτσι γεννήθηκε ο τίτλος της παρούσας εργασίας: «ο ρόλος των εξωτερικών αναπαραστάσεων σε δραστηριότητες μαθηματικής αφαίρεσης για μαθητές του Δημοτικού Σχολείου». Η εργασία περιλαμβάνει τέσσερα κεφάλαια, στα οποία θεωρώ ότι αναλύεται επαρκώς το νόημα του τίτλου. Τα τρία πρώτα κεφάλαια αποτελούν το θεωρητικό υπόβαθρο της εργασίας αλλά και των ερευνητικών ερωτημάτων, καταλαμβάνοντας το 40% περίπου του πονήματος. Το υπόλοιπο 60%

[1] Να σημειώσουμε ότι οι απόψεις για το θέμα αυτό διίστανται καθώς υπάρχουν μελετητές που θεωρούν ότι η μαθηματική γενίκευση και η μαθηματική αφαίρεση είναι διακριτές νοητικές λειτουργίες.
[2] Με τη φράση «μαθηματική αφαίρεση», στην παρούσα εργασία νοείται η μαθηματική αφαιρετική σκέψη και όχι η πράξη της αφαίρεσης.

είναι αφιερωμένο στην έρευνα που διεξήχθη για την εμπειρική διερεύνηση των ερευνητικών ερωτημάτων.

Στο πρώτο κεφάλαιο επιχειρείται η οριοθέτηση του όρου «μαθηματική αφαίρεση». Αναπτύσσονται θέματα όπως οι μηχανισμοί επίτευξης της μαθηματικής αφαίρεσης και η σχέση της αφαίρεσης με τη γενίκευση αλλά και με την αλγεβρική σκέψη. Παράλληλα, παρατίθενται επιχειρήματα υπέρ της διδασκαλίας της μαθηματικής αφαίρεσης στις μικρές ηλικίες σύμφωνα με τη σχετική βιβλιογραφία. Στο τέλος του κεφαλαίου παρουσιάζονται πέντε ενδεικτικές δραστηριότητες μαθηματικής αφαίρεσης.

Οι αναπαραστάσεις αποτελούν το θεματικό κέντρο του δευτέρου κεφαλαίου. Αρχικά παρουσιάζονται ορισμοί για την έννοια της αναπαράστασης ενώ στη συνέχεια αναφερόμαστε σε ταξινομήσεις των αναπαραστάσεων βάσει διαφόρων κριτηρίων με έμφαση στη βασική διάκρισή τους σε εσωτερικές και εξωτερικές. Με αφετηρία τις τελευταίες, ερευνώνται βιβλιογραφικά διάφορα ζητήματα που αφορούν στον ρόλο των εξωτερικών αναπαραστάσεων στη μάθηση και τη διδασκαλία των Μαθηματικών, όπως οι λειτουργίες τους, οι προϋποθέσεις για την επιτυχή αξιοποίησή τους, η θεωρία του Bruner για τις αναπαραστάσεις, ο ρόλος των πολλαπλών αναπαραστάσεων, η οπτικοποίηση και άλλα σχετικά θέματα.

Το τρίτο κεφάλαιο περιλαμβάνει το θεωρητικό υπόβαθρο των ερευνητικών ερωτημάτων και συγκεκριμένα τα χαρακτηριστικά των εξωτερικών αναπαραστάσεων που, σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, υποβοηθούν τον μαθητή στην προσπάθειά του να σκεφτεί αφαιρετικά στα Μαθηματικά. Τα χαρακτηριστικά αυτά είναι η αντιληπτική μεταβλητότητα, η πολλαπλή ενσωμάτωση μίας έννοιας σε ποικίλες αναπαραστάσεις, η δυναμική διασύνδεση, η σταδιακή μετάβαση από τις εικονικές στις συμβολικές αναπαραστάσεις και η δυνατότητα για ενεργό εμπλοκή του μαθητή στον χειρισμό των αναπαραστάσεων. Επιπρόσθετα, γίνεται αναφορά στα ψηφιακά μαθησιακά αντικείμενα, τα οποία αποτελούν ένα πρόσφορο εργαλείο για την καλλιέργεια της μαθηματικής αφαιρετικής σκέψης στο Δημοτικό Σχολείο αλλά και ευρύτερα στην εκπαίδευση.

Στο τέταρτο και τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζεται η έρευνα που πραγματοποιήθηκε με σκοπό την εμπειρική διερεύνηση του ρόλου των εξωτερικών αναπαραστάσεων στη διαδικασία οικοδόμησης της μαθηματικής αφαίρεσης από μαθητές του Δημοτικού Σχολείου και την εξαγωγή συμπερασμάτων που εξάγονται σε συνάρτηση με τη σχετική βιβλιογραφία.

Η ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας ήταν αποτέλεσμα όχι μόνο προσωπικής προσπάθειας αλλά και συνεισφοράς προσώπων που με το δικό τους τρόπο κατηύθυναν, διευκόλυναν και ενθάρρυναν τη δουλειά μου. Αρχικά, ευχαριστώ τον επιβλέποντα μου κύριο Κωνσταντίνο Τάτση για τη συνολική εποπτεία της εργασίας, τις κυρίες Μαρία Καλδρυμίδου και Ξένια Βαμβακούση για τη συμμετοχή τους στην αξιολόγηση της, τον κύριο Χαράλαμπο Νταλάκα για τη σημαντικότατη διευκόλυνση της διεξαγωγής της έρευνας στο σχολείο του, τους μαθητές που συμμετείχαν με ενδιαφέρον στην έρευνα καθώς και τους γονείς τους που μου επέτρεψαν να εργαστώ με τα παιδιά τους. Επίσης, στον φίλο και συμφοιτητή Γιώργο Νταλάκα χρωστώ τη γνωριμία μου, με τον αδερφό του, Χαράλαμπο Νταλάκα. Οι

κύριοι Γιάννης Φύκαρης και Γιώργος Τσουμάνης με υποστήριξαν σημαντικά στην προσπάθεια εύρεσης σχολείου για τη διεξαγωγή της έρευνας και τους ευχαριστώ ιδιαίτερα. Φυσικά, δεν μπορώ να παραλείψω την οικογένεια, τους συγγενείς και τους φίλους μου, στους οποίους δεν αφιέρωσα όσο χρόνο θα ήθελα λόγω δουλειάς.

Η παρούσα εργασία εμπλούτισε σημαντικά τις γνώσεις μου για το θέμα και εύχομαι να συνεισφέρει εποικοδομητικά στη σχετική έρευνα αλλά και στη διδακτική πράξη.

Βασίλης Διαμάντης,
Ζωτικό Λάκκας Σουλίου, Σεπτέμβριος 2017

Κεφάλαιο 1

Η μαθηματική αφαίρεση στις μικρές ηλικίες

«Ο κόσμος μας είναι γεμάτος με παραδείγματα τάξης και προτύπου. […] Τα Μαθηματικά ανακαλύπτουν αυτή την τάξη. […] Ακόμη και οι μικρότεροι μαθητές και μαθήτριες μπορούν και πρέπει να εμπλέκονται στην επιστήμη των προτύπων και της τάξης».

(Van de Walle, 2007, σελ.47)

1.1 Οριοθετώντας τον όρο «μαθηματική αφαίρεση»

Από τις απαρχές της ανθρώπινης ιστορίας, τα Μαθηματικά αποτέλεσαν ορόσημο στη μελέτη της φυσικής και της κοινωνικής πραγματικότητας. Διεύρυναν σημαντικά τα όρια της ανθρώπινης αντίληψης για τον κόσμο και δημιούργησαν τις συνθήκες για την ανάπτυξη του σύγχρονου πολιτισμού μας. Τι είναι, όμως, τα Μαθηματικά;

Μία σύντομη αλλά και περιεκτική απάντηση θα μπορούσε να είναι: «Τα Μαθηματικά είναι η επιστήμη του προτύπου και της τάξης» (Mathematical Sciences Board, 1989, σελ. 31, όπ. αναφ. στο Van de Walle, 2007). Στον παραπάνω γενικό ορισμό, οι όροι «πρότυπο» και «τάξη» κατέχουν δεσπόζουσα θέση διότι περιγράφουν τον πυρήνα της μαθηματικής γνώσης. Η αναζήτηση προτύπων αποτελεί μία κομβικής σημασίας μαθηματική ενέργεια διότι παρέχει τη δυνατότητα εύρεσης στοιχειωδών δομών επί των οποίων οικοδομείται μία έννοια ή ένα μαθηματικό αντικείμενο. Η κατανόηση αυτής της δομής προσδίδει στα Μαθηματικά την έννοια της «τάξης».

Αν η εύρεση προτύπων βρίσκεται στον πυρήνα των Μαθηματικών, τότε ποιος είναι ο μηχανισμός με τον όποιο ανακαλύπτουμε πρότυπα στα Μαθηματικά; Σύμφωνα με τους Dreyfus (1991) και Dubinsky (1991) ο μηχανισμός αυτός είναι η μαθηματική αφαίρεση (abstracting/abstraction). Η μαθηματική αφαίρεση είναι μία «κατασκευαστική» νοητική διεργασία, χαρακτηριστική της μαθηματικής σκέψης υψηλού επιπέδου, που περιλαμβάνει τη μετατόπιση του ενδιαφέροντος «από τα [μαθηματικά] αντικείμενα αυτά καθ' αυτά στη δομή των ιδιοτήτων και των σχέσεων [που παρατηρούνται σε αυτά]» (Dreyfus, 1991, σελ. 37).

Στον παραπάνω ορισμό διακρίνονται τρία βασικά χαρακτηριστικά της μαθηματικής αφαίρεσης: α) ο «κατασκευαστικός» της χαρακτήρας, β) η συμπερίληψή της στις μαθηματικές νοητικές διεργασίες υψηλού επιπέδου και γ) η εστίαση στις ιδιότητες και τις σχέσεις μεταξύ των μαθηματικών αντικειμένων και όχι στα αντικείμενα αυτά καθαυτά. Το πρώτο χαρακτηριστικό έχει άμεσες εκπαιδευτικές προεκτάσεις, και αφήνει να εννοηθεί ότι η μαθηματική αφαίρεση δεν αποτελεί μία έμφυτη ικανότητα που το άτομο έχει ή δεν έχει, αλλά απεναντίας καλλιεργείται μέσα από την ενεργό εμπλοκή του με μαθηματικά ερεθίσματα που το υποβοηθούν να την κατασκευάσει. Η άποψη αυτή εντάσσεται στο ευρύτερο πλαίσιο της αντίληψης της επιστήμης των Μαθηματικών ως ανθρώπινης δραστηριότητας, στην οποία η παρατήρηση, ο πειραματισμός και η ανακάλυψη κατέχουν δεσπόζουσα θέση (Hoffman, 1989, όπ. αναφ. στο Dreyfus, 1991). Το δεύτερο χαρακτηριστικό της μαθηματικής αφαίρεσης την κατατάσσει στις μαθηματικές νοητικές διεργασίες «υψηλού επιπέδου» μαζί με την αναπαράσταση, τη μαθηματική επιχειρηματολογία, τον έλεγχο, τον ορισμό κ.α. (Dreyfus, 1991). Τέλος, το τρίτο χαρακτηριστικό οριοθετεί το αντικείμενο της, που είναι η έμφαση σε σχέσεις και ιδιότητες. Η επίλυση της εξίσωσης «177 + 234 = 175 + ___» με τη βοήθεια της αναλλοίωτης σχέσης ισότητας αριστερού και δεξιού μέλους και όχι με υπολογισμούς, αποτελεί παράδειγμα αφαιρετικής μαθηματικής σκέψης. Ο Van de Walle (2007) χαρακτηρίζει αυτόν τον τρόπο σκέψης ως «συσχετιστικό συλλογισμό» και τονίζει την ιδιαίτερη εκπαιδευτική του αξία στη διδασκαλία των Μαθηματικών στις μικρές ηλικίες.

Αναλύοντας περαιτέρω τη μαθηματική αφαιρετική σκέψη, ο Dreyfus (1991) αναφέρεται σε δύο νοητικές διεργασίες, επίσης υψηλού επιπέδου, που τη συνθέτουν. Αυτές είναι η γενίκευση (generalizing) και η σύνθεση (synthesizing) (ο. π.). Σύμφωνα με τον ίδιο «γενικεύω» σημαίνει «επαγάγω από το συγκεκριμένο, αναγνωρίζω ομοιότητες, διευρύνω το πεδίο εφαρμογής» (σελ. 37). Ένα παράδειγμα μαθηματικής γενίκευσης είναι η γενίκευση μίας παρατηρούμενης ιδιότητας ή σχέσης, όπως, για παράδειγμα, η αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης, από κάποια παραδείγματα σε κάθε δυνατή περίπτωση αριθμών. Ο Kaput (2000) αναφέρει πως «η γενίκευση και η τυποποίηση (φορμαλισμός) είναι ενδόμυχα στοιχεία της μαθηματικής δραστηριότητας και σκέψης» (σελ. 6) ενώ ο Radford (1996, όπ. αναφ. στο Carraher Marinez, & Schliemann, 2008) επισημαίνει πως με τον όρο γενίκευση νοείται τόσο η διαδικασία όσο και το αποτέλεσμα της γενίκευσης. Η σύνθεση μπορεί να ερμηνευθεί ως η νοητική διεργασία δημιουργίας νοητικών μοντέλων που είναι υπερσύνολα ήδη υπαρχόντων νοητικών μοντέλων (Dreyfus, 1991). Για παράδειγμα η αντιμετώπιση της διαίρεσης ως «πολλαπλασιασμού του αντιστρόφου» αποτελεί ένα διευρυμένο νοητικό μοντέλο του πολλαπλασιασμού, που έχει προκύψει από τη σύνθεση των προϋπαρχόντων νοητικών μοντέλων της διαίρεσης και του πολλαπλασιασμού. Η σύνθεση, όπως περιγράφηκε πιο πάνω, κάνει τα Μαθηματικά απίστευτα «συμπιέσιμα», γεγονός που μπορεί να αποτελέσει τροχοπέδη στη μάθηση τους (Thomson, 1990, οπ. αναφ. στο Dreyfus, 1991).

Ο Dubinsky (1991) προσεγγίζει τη μαθηματική αφαίρεση από τη σκοπιά της Γνωστικής Ψυχολογίας, υιοθετώντας τη θεώρηση του Piaget για την «αναστοχαστική αφαίρεση» (reflective abstraction). Η αναστοχαστική αφαίρεση είναι η αφαίρεση που πραγματοποιείται από το άτομο κατά τον αναστοχασμό του για τις ενέργειες που πραγματοποιεί πάνω σε αντικείμενα και έννοιες (και διαφέρει από την «εμπειρική αφαίρεση», που προέρχεται από την παρατήρηση εμφανών εξωτερικών ομοιοτήτων των αντικειμένων του φυσικού κόσμου) (Mitchelmore, 2002, σελ. 158-159). Η συνειδητοποίηση του «όταν προσθέτω ένα αντικείμενο σε ένα άλλο, θα έχω πάντα δύο αντικείμενα» αποτελεί παράδειγμα αναστοχαστικής αφαίρεσης ενώ η διαμόρφωση της έννοιας «ζώο» (σκύλος, γάτα, καναρίνι, ελέφαντας, φίδι, πελαργός, κτλ) βασίζεται στην εμπειρική αφαίρεση. Σύμφωνα με τον Piaget υπάρχουν τέσσερις μηχανισμοί με τους οποίους πραγματοποιείται η αναστοχαστική αφαίρεση (Dubinsky, 1991). Οι μηχανισμοί αυτοί είναι:

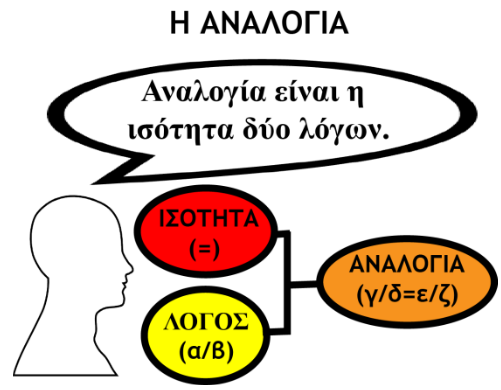
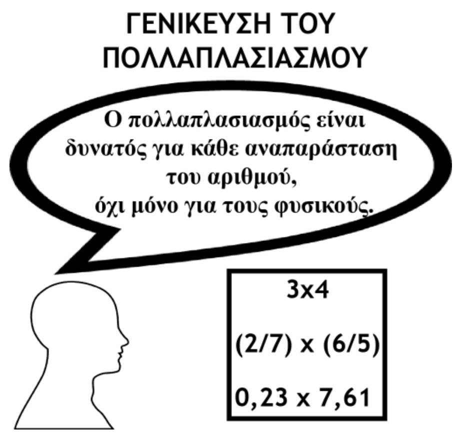
- η εσωτερίκευση (interiorisation)
- ο συντονισμός (coordination)
- η ενσωμάτωση (encaptulation) και
- η γενίκευση (generalization)

Η εσωτερίκευση μπορεί να οριστεί ως «η μετάφραση μία σειράς ενεργειών πάνω σε αντικείμενα σε ένα σύστημα εσωτερικευμένων λειτουργιών» (Beth & Piaget, 1966, σελ. 206, όπ. αναφ. στο Dubinsky, 1991, σελ. 101). Για παράδειγμα ένας μαθητής συνειδητοποιεί ότι το άθροισμα δύο αριθμών είναι ανεξάρτητο από τη σειρά τοποθέτησης των προσθετέων (αντιμεταθετική ιδιότητα) με εσωτερίκευση (Dubinsky, 1991). Ο συντονισμός, ο δεύτερος από τους μηχανισμούς της αναστοχαστικής αφαίρεσης, είναι ο συνδυασμός δύο ή περισσότερων διαδικασιών με σκοπό τη δημιουργία μίας νέας (ό.π.). Χαρακτηριστικό παράδειγμα αναστοχαστικής αφαίρεσης με συντονισμό αποτελεί η οικοδόμηση της έννοιας του αριθμού, διότι ο μαθητής καλείται να συνδυάσει (συντονίσει) το σχήμα της ταξινόμησης με το σχήμα της σειροθέτησης (Piaget, 1941, όπ. αναφ. στο Dubinsky, 1991). Τρίτος και πιο δύσκολος, για τους μαθητές, μηχανισμός είναι η ενσωμάτωση (Dubinsky, 1991). Η ενσωμάτωση αποτελεί τη νοητική διεργασία της δημιουργίας νοητικών μοντέλων που ενσωματώνουν προϋπάρχοντα μοντέλα (ο.π.) και ταυτίζεται με τη νοητική διεργασία της «σύνθεσης», όπως αυτή αναπτύχθηκε πιο πάνω (βλ. Dreyfus, 1991). Παράδειγμα αναστοχαστικής αφαίρεσης με ενσωμάτωση αποτελεί η οικοδόμηση της έννοιας του πολλαπλασιασμού ως «πρόσθεσης των προσθέσεων» (Dubinsky, 1991, σελ. 101). Ο τέταρτος μηχανισμός, η γενίκευση, περιλαμβάνει την εφαρμογή «ενός υπάρχοντος σχήματος σε μία ευρύτερη συλλογή φαινομένων» (Dubinsky, 1991, σελ. 101). Σε αντίθεση με την ενσωμάτωση, στη γενίκευση το σχήμα παραμένει το ίδιο, απλά αποκτά ευρύτερη εφαρμογή (ο.π.). Η επέκταση του Πυθαγορείου Θεωρήματος και στα μη ορθογώνια τρίγωνα, αποτελεί μία περίπτωση γενίκευσης του.

Ο Dubinsky (1991) προσθέτει και έναν πέμπτο μηχανισμό αναστοχαστικής αφαίρεσης, αυτόν της αντιστροφής (reversing). Σύμφωνα με τον μηχανισμό αυτό, είναι δυνατή η οικοδόμηση ενός νέου νοητικού μοντέλου εξετάζοντας ένα άλλο μέσα από την αντίστροφη σκέψη (ο.π.). Έτσι για παράδειγμα, η αφαίρεση μπορεί να νοηθεί ως η αντίστροφη πράξη της πρόσθεσης και η ολοκλήρωση ως αντίστροφη πράξη της παραγώγισης (Paschos & Farmaki, 2006).

Επιχειρώντας μία σύγκριση της προσέγγισης του Dreyfus και του Piaget (με την επισήμανση του Dubinsky) για τη μαθηματική αφαίρεση, θα λέγαμε πως ο Piaget περιγράφει αναλυτικότερα τους μηχανισμούς με τους οποίους αυτή οικοδομείται. Επίσης, η θεώρηση του Dreyfus συμπίπτει και θα μπορούσε ίσως να ενσωματωθεί στη θεώρηση του Piaget, δεδομένου ότι η «σύνθεση» του Dreyfus συμπίπτει με την «ενσωμάτωση» του Piaget και η «γενίκευση» περιγράφεται και από τους δύο.

Μηχανισμοί επίτευξης της μαθηματικής αφαίρεσης	
Μηχανισμός	***Παράδειγμα***
Εσωτερίκευση (Piaget)	

<table>
<tr><td>Συντονισμός (Piaget)</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Ενσωμάτωση (Piaget) ή
Σύνθεση (Dreyfus)</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Γενίκευση (Piaget, Dreyfus)</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Αντιστροφή (Dubinsky)</td><td>
</td></tr>
</table>

Πίνακας 1.1: Μηχανισμοί επίτευξης της μαθηματικής αφαίρεσης σύμφωνα με τους Piaget, Dreyfus & Dubinsky.

Ένα ζήτημα που αφορά την οριοθέτηση της μαθηματικής αφαίρεσης είναι η σχέση της με τη (μαθηματική) γενίκευση (generalization). Ο όγκος της βιβλιογραφίας σχετικά με τη γενίκευση είναι πιθανότατα μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο για τη μαθηματική αφαίρεση, γεγονός που υποδεικνύει τον σαφή προσανατολισμό της βιβλιογραφίας προς την κατεύθυνση της γενίκευσης. Ο Mitchelmore (2002) συνοψίζοντας τη σχετική βιβλιογραφία υποστηρίζει ότι η γενίκευση ταυτίζεται, σύμφωνα με κάποιους ερευνητές, με τη μαθηματική αφαίρεση ενώ, σύμφωνα με άλλους, διαφοροποιείται από αυτή. Κατά τη δεύτερη εκδοχή, η γενίκευση έχει την έννοια της «διεύρυνσης ενός πεδίου» (σελ. 160) και διαφοροποιείται από τη μαθηματική αφαίρεση, η οποία εμφανίζεται κυρίως κατά τη διαμόρφωση μίας νέας έννοιας. Αντίθετα, οι Piaget (Dubinsky, 1991), Dreyfus (1991) και Dubinsky (1991) αντιμετωπίζουν τη γενίκευση ως τμήμα του ευρύτερου οικοδομήματος της μαθηματικής αφαίρεσης, όπως αναπτύχθηκε πιο πάνω. Στην παρούσα εργασία υιοθετείται η άποψη ότι η μαθηματική αφαίρεση είναι έννοια ευρύτερη της γενίκευσης, δεδομένου ότι η γενίκευση νοούμενη ως διεύρυνση του πεδίου εφαρμογής μίας γνώσης εμπίπτει στον φάσμα του ορισμού της μαθηματικής αφαίρεσης (έμφαση σε ιδιότητες και σχέσεις μεταξύ μαθηματικών αντικειμένων ή μαθηματικών εννοιών).

Ένα ακόμη ερώτημα κατά την προσπάθεια ορισμού της μαθηματικής γενίκευσης είναι η σχέση της με την αλγεβρική σκέψη. Ο Kaput (1999, όπ. αναφ. στο Van de Walle, 2007) υποστηρίζει πως η αλγεβρική σκέψη μεταξύ άλλων περιέχει «γενικεύσεις από την Αριθμητική», «μελέτη της δομής στο αριθμητικό σύστημα» και «μελέτη των προτύπων και των συναρτήσεων» (σελ. 342). Από τα παραπάνω καθίσταται σαφής ο προσανατολισμός της Άλγεβρας στις ιδιότητες και τις σχέσεις μεταξύ μαθηματικών αντικειμένων και εννοιών και υπό αυτή την έννοια η αλγεβρική σκέψη στηρίζεται στη μαθηματική αφαιρετική σκέψη. Ωστόσο, η Άλγεβρα αποτελεί το μοναδικό πεδίο εφαρμογής της μαθηματικής αφαίρεσης; Αρνητική απάντηση δίνει ο ίδιος ο Piaget, ο οποίος αναφέρει ότι ακόμη και κατά την οικοδόμηση στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών, όπως η έννοια του αριθμού, ο μαθητής καλείται σκεφτεί αφαιρετικά (Dubinsky, 1991). Η μαθηματική αφαίρεση είναι παρούσα και στη Γεωμετρία. Τα στάδια της γεωμετρικής σκέψης που προτείνει ο Van Hiele δομούνται πάνω στην ολοένα και αυξανόμενη αφαιρετική σκέψη των παιδιών (Κολέζα, 2009). Ένα παράδειγμα αφαιρετικής αντιμετώπισης των σχημάτων αποτελεί η αντίληψη του τετραγώνου ως ειδικής περίπτωσης ρόμβου που έχει όλες τις γωνίες του ορθές ή του κύκλου ως ειδικής περίπτωσης κανονικού πολυγώνου με άπειρο αριθμό πλευρών. Στις παραπάνω περιπτώσεις, ο μαθητής καλείται να σκεφτεί αφαιρετικά μέσω του μηχανισμού της ενσωμάτωσης (Dubisky, 1991) ή της σύνθεσης (Dreyfus, 1991) προκειμένου να συνειδητοποιήσει τις σχέσεις εγκλεισμού μεταξύ των γεωμετρικών σχημάτων.

1.2 Η μαθηματική αφαίρεση στις μικρές ηλικίες: πραγματικότητα ή ουτοπία;

Πρωτοπόρος στη μελέτη της νοητικής ανάπτυξης των παιδιών υπήρξε ο Ελβετός βιολόγος και αναπτυξιακός ψυχολόγος Jean Piaget (1896-1980). Στη θεωρία του για τα στάδια της νοητικής ανάπτυξης, περιλαμβάνονται τέσσερα βασικά στάδια εξέλιξης (Elliott, Kratochwill, Littlefield Cook, & Travers, 2008):

- το αισθησιοκινητικό στάδιο (0-2 έτη)
- το προλογικό στάδιο (2-7 έτη)
- το στάδιο της συγκεκριμένης λογικής σκέψης (7-11/12 έτη)
- το στάδιο της τυπικής λογικής σκέψης (11/12+ έτη).

Κατά τον Piaget, η μαθηματική αφαίρεση εμφανίζεται στο τελευταίο στάδιο της νοητικής ανάπτυξης των παιδιών, όπου φαίνεται πως διαμορφώνονται οι λογικο-μαθηματικές δομές (ο.π.). Η υπόθεση αυτή δημιουργεί ερωτηματικά για το κατά πόσο οι μαθητές μικρής ηλικίας είναι σε θέση να σκεφτούν αφαιρετικά, δεδομένου ότι μετά τα 11/12 χρόνια διαμορφώνονται οι απαραίτητες βιολογικές προϋποθέσεις για νοητικές διεργασίες τέτοιου είδους.

Αντικρούοντας τον παραπάνω ισχυρισμό, θα αναφέραμε πως ο ίδιος ο Piaget επεσήμανε ότι η αναστοχαστική αφαίρεση στα Μαθηματικά, δηλαδή ο αναστοχασμός πάνω σε ενέργειες που πραγματοποιεί το άτομο σε μαθηματικά αντικείμενα, εμφανίζεται ακόμα και στις στοιχειώδεις έννοιες των Μαθηματικών (Dubinsky, 1991). Ο μαθητής καλείται ήδη από το Νηπιαγωγείο και τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού να δομήσει έννοιες όπως ο αριθμός, η πρόσθεση, ο πολλαπλασιασμός, κ.α., πραγματοποιώντας συνεχώς αφαιρέσεις μέσα από την ενασχόληση του με ερεθίσματα του πραγματικού κόσμου. Ενδεχομένως, η αφαιρετική φύση της μαθηματικής επιστήμης να την καθιστά δύσκολη στις μικρές ηλικίες, όπου η λογική σκέψη εστιάζεται περισσότερο στο συγκεκριμένο υλικό, παράδειγμα, εφαρμογή, κτλ. Ωστόσο, η μάθηση των Μαθηματικών περνά, ήδη από τα πρώτα στάδια, μέσα από τον φαινομενικό «σκόπελο» της μαθηματικής αφαίρεσης, έναν σκόπελο τον οποίο οι μαθητές χρειάζεται να μαθαίνουν να υπερβαίνουν.

Παράλληλα, η θεωρία του Piaget για τη νοητική ανάπτυξη έχει δεχθεί διάφορες κριτικές. Μία από αυτές αφορά στην άποψή του ότι η εξέλιξη στη νοητική ανάπτυξη πραγματοποιείται σε διακριτά στάδια και όχι σε ένα συνεχές φάσμα (Elliot et al., 2008). Οι Elliott et al. (2008) υπογραμμίζουν ότι ορισμένοι μαθητές ενδέχεται να μη βρίσκονται ξεκάθαρα σε κάποιο από τα προκαθορισμένα στάδια αλλά σε ένα μεταβατικό, π.χ. μεταξύ της συγκεκριμένης και των τυπικής λογικής σκέψης, συνδυάζοντας χαρακτηριστικά και των δύο σταδίων. Μία τέτοια άποψη εκτείνει το φάσμα επιρροής του σταδίου των τυπικών λογικών ενεργειών σε μικρότερες ηλικίες, κάτω από τα 11/12 έτη. Συνεπώς, η αναζήτηση στοιχείων της δομής των Μαθηματικών και επομένως η μαθηματική αφαίρεση, καθίσταται προσβάσιμη από το Δημοτικό ή ακόμα και από το Νηπιαγωγείο.

Μία ακόμη κριτική που έχει ασκηθεί στη θεωρία του Piaget, ίσως η βασικότερη, στρέφεται γύρω από την αιτίες που προκαλούν τις μεταβάσεις σε ανώτερα στάδια (Elliott et al.,2008). Ενώ ο Piaget έδινε έμφαση στις βιολογικές προϋποθέσεις που επιτρέπουν τη μετάβαση σε ανώτερο γνωστικό επίπεδο, διάφοροι ερευνητές παρατήρησαν. σε έρευνές τους, ότι με κατάλληλες εκπαιδευτικές παρεμβάσεις (δραστηριότητες, υλικά και διδακτικές στρατηγικές) καθίσταται δυνατή η επίτευξη υψηλότερου σταδίου γνωστικής ανάπτυξης σε μικρότερη ηλικία (ό.π.). Η επισήμανση αυτή αφορά άμεσα και τη μαθηματική αφαίρεση, καθώς η αποτελεσματική εμπλοκή του μαθητή με προσεκτικά επιλεγμένα μαθηματικά ερεθίσματα, του επιτρέπει να σκεφτεί αφαιρετικά ήδη από τη μικρή σχολική ηλικία (Schliemann, Carraher, Brizuela, & Earnest, 2003).

Ποικίλες έρευνες στο πεδίο της Διδακτικής των Μαθηματικών αποδεικνύουν ότι μαθητές μικρής ηλικίας καταφέρνουν να πραγματοποιούν σύνθετες μαθηματικές αφαιρέσεις υπό κατάλληλη διδασκαλία. Οι Carraher et al. (2008) έδειξαν ότι μαθητές ηλικίας 8 ετών κατάφεραν με στοχευμένη διδασκαλία να γενικεύσουν τη λύση ενός προβλήματος αριθμητικού μοτίβου χρησιμοποιώντας συνάρτηση με μεταβλητές. Οι Russell, Schifter, & Bastable (2011) περιγράφοντας εμπειρίες εκπαιδευτικών από την εφαρμογή αριθμητικών δραστηριοτήτων με αλγεβρικό τρόπο σκέψης, παρατήρησαν ότι επτάχρονοι/οκτάχρονοι μαθητές εξήγησαν γιατί η αντιμεταθετική ιδιότητα είναι δυνατή στην πρόσθεση αλλά όχι στην αφαίρεση. Στην ίδια έρευνα, μία μαθήτρια της Πέμπτης Δημοτικού απέδειξε με τη βοήθεια μίας εικονικής αναπαράστασης ότι ένα γινόμενο δύο παραγόντων παραμένει αναλλοίωτο όταν ο ένας παράγοντας διπλασιάζεται και ο άλλος υποδιπλασιάζεται.

Η ικανότητα των μαθητών για αφαιρετικό συλλογισμό στα Μαθηματικά, ήδη από τις μικρές ηλικίες, είναι έκδηλη σε ποικίλα αποτελέσματα ερευνών, όπως ήδη αναφέρθηκε. Ωστόσο, ένα βασικό ερώτημα που απασχολεί τους ερευνητές, τους δημιουργούς των αναλυτικών προγραμμάτων και τους εκπαιδευτικούς των Μαθηματικών, είναι αν και κατά πόσο η έμφαση στη μαθηματική αφαίρεση έχει ουσιαστική αξία στη διδασκαλία των Μαθηματικών στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση.

Ένα από τα ισχυρότερα επιχειρήματα υπέρ της έμφασης στη μαθηματική αφαίρεση στις μικρές ηλικίες είναι το γεγονός ότι οι μαθητές συνειδητοποιούν από την αρχή της ενασχόλησής τους με τα Μαθηματικά, τον πυρήνα και τη δομή της μαθηματικής επιστήμης. Ο Van de Walle (2007) αφιερώνει ένα ολόκληρο κεφάλαιο στο βιβλίο του «Διδάσκοντας Μαθηματικά» για να εξηγήσει τη σημασία του «κάνω Μαθηματικά». Μεταξύ άλλων αναφέρει ότι τα Μαθηματικά είναι «επιστήμη αφηρημένων αντικειμένων» (Mathematics Science Board, 1989, σελ. 31, όπ. αναφ. στο Van de Walle, 2007, σελ. 46) στα οποία το πρότυπο και η τάξη, δηλαδή η δομή, θα πρέπει να αποτελεί το βασικότερο αντικείμενο διδασκαλίας. «Ακόμη και οι μικρότεροι μαθητές και μαθήτριες μπορούν και πρέπει να εμπλέκονται στην επιστήμη των προτύπων και της τάξης», αναφέρει χαρακτηριστικά (σελ. 47). Σύμφωνα με τις Russell et al. (2011), η εμπλοκή μικρών μαθητών σε προαλγεβρικές δραστηριότητες, όπου η μαθηματική αφαίρεση βρίσκεται στο επίκεντρο του ενδιαφέροντος, οδηγεί στην ενδυνάμωση της κατανόησης της Αριθμητικής. Οι Schliemann et al. (2003) σε μία διαχρονική έρευνά τους για την καλλιέργεια της αλγεβρικής σκέψης στο Δημοτικό Σχολείο, παρατήρησαν ότι οι μαθητές που εξετέθησαν σε δραστηριότητες μαθηματικής αφαίρεσης, παρουσίασαν υψηλότερη επίδοση σε προβλήματα που αφορούσαν σχέσεις και αφηρημένες ποσότητες από συμμαθητές τους που παρακολούθησαν το τυπικό πρόγραμμα διδασκαλίας. Οι Romberg & Kaput (1999, όπ. αναφ. στο Blanton & Kaput, 2011) υπεραμύνονται της διδασκαλίας των μαθηματικών αφαιρέσεων στις μικρές ηλικίες αναφέροντας ότι τα ολοένα και πιο σύνθετα Μαθηματικά του 21^{ου} αιώνα διαμορφώνουν τις συνθήκες ώστε η πρωτοβάθμια εκπαίδευση να χρειάζεται να προσφέρει μαθηματικές εμπειρίες που θα υπερβαίνουν την αριθμητική και υπολογιστική επάρκεια και θα εκτείνονται στην κατανόηση της βαθύτερης δομής των Μαθηματικών.

Η άποψη ότι η μαθηματική αφαίρεση μπορεί και πρέπει να διδάσκεται στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, έχει επηρεάσει τα αναλυτικά προγράμματα Μαθηματικών και τα προτεινόμενα περιεχόμενα μάθησης. Στα περισσότερα από αυτά συναντούμε τη μαθηματική αφαίρεση υπό τη στέγη της αλγεβρικής (ή προ-αλγεβρικής) σκέψης αν και η μαθηματική αφαιρετική σκέψη, όπως έχει σημειωθεί, διατρέχει οριζόντια όλο το φάσμα των Μαθηματικών, από την Ευκλείδεια Γεωμετρία έως τον Διαφορικό και τον Ολοκληρωτικό Λογισμό (Dubinsky, 1991).

Στο επίπεδο της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης η αφαιρετική μαθηματική σκέψη εμφανίζεται αρκετά στο πλαίσιο της «Προ-άλγεβρας» (Linchevski,1995) ή της «Πρώιμης Άλγεβρας» (Carraher, Martinez, & Schliemann, 2008). Η «Προ-άλγεβρα» μπορεί να οριστεί ως το αντικείμενο ενασχόλησης μαθητών μικρής σχολικής ηλικίας που έχει σχέση με την εξέταση οικείων και ελκυστικών μαθηματικών θεμάτων υπό αλγεβρική, και κατ' επέκταση, αφαιρετική σκοπιά, χωρίς την πίεση για αναπαράστασή του με αυστηρό αλγεβρικό συμβολισμό (Carraher et al., 2008).

Στην Εγκυκλοπαίδεια της Μαθηματικής Εκπαίδευσης (Lerman, 2014) οι Carraher & Schliemann (2014) επιχειρούν μία οριοθέτηση του περιεχόμενου της «Πρώιμης Άλγεβρας». Σύμφωνα με αυτούς το περιεχόμενο της περιλαμβάνει:

- σκέψεις για φυσικές ποσότητες και μέτρα,
- γενικευμένη Αριθμητική (ιδιότητες των συστημάτων μέτρησης),
- εισαγωγή στις συναρτήσεις,
- κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής,
- κατασκευή πρωτοβάθμιων εξισώσεων με έναν άγνωστο και
- βασικούς αλγεβρικούς χειρισμούς.

Παρόμοιο περιεχόμενο παρουσιάζει και ο Kaput (1999, όπως αναφ. στο Van de Walle, 2007, σελ. 342), ο οποίος αναφέρει πως η αλγεβρική σκέψη για τις μικρές ηλικίες περιλαμβάνει θέματα όπως:

- «γενικεύσεις από την Αριθμητική και τα πρότυπα σε όλο το εύρος των Μαθηματικών,
- χρήση κατανοητού συμβολισμού,
- μελέτη της δομής στο αριθμητικού σύστημα,
- μελέτη των προτύπων και των συναρτήσεων,
- διαδικασία της δημιουργία μαθηματικών μοντέλων […]»..

Το Εθνικό Συμβούλιο Διδασκόντων Μαθηματικών στις ΗΠΑ (NCTM) συνέταξε και εξέδωσε το 2000 τις «Αρχές και τα Στάνταρ» περιεχομένου και διαδικασίας για τη μαθηματική εκπαίδευση, που αφορούν τις εκπαιδευτικές βαθμίδες:

Προνήπια – $2^{η}$ τάξη, $3^{η}$ – $5^{η}$ τάξη, $6^{η}$ – $8^{η}$ τάξη, $9^{η}$ – $12^{η}$ τάξη (Van de Walle, 2008). Το έργο αυτό είναι το αποτέλεσμα μίας μεταρρυθμιστικής προσπάθειας στον χώρο της Διδακτικής των Μαθηματικών, που ξεκίνησε τη δεκαετία του 1980 (ο.π.). Ένα από τα στάνταρ περιεχομένου αφορά στην Άλγεβρα, στο πλαίσιο της οποίας εμφανίζεται η μαθηματική αφαίρεση. Επειδή στην παρούσα εργασία η έμφαση δίδεται στη μαθηματική αφαίρεση στο πλαίσιο του Δημοτικού Σχολείου, το εύρος της μελέτης εντοπίζεται στα επίπεδα Προνήπια – $8^{η}$ τάξη. Βεβαία, οφείλουμε να διευκρινίσουμε πως το ελληνικό Δημοτικό Σχολείο αντιστοιχίζεται με τις τάξεις $1^{η}$ – $6^{η}$, αλλά, επειδή δεν είναι δυνατή η απομόνωση των στόχων μόνο για αυτές τις τάξεις αυτές, θα προβούμε στην αναφορά των στόχων έως και την $8^{η}$ τάξη. Στον πίνακα 1.3 παρατίθεται αναλυτικά το περιεχόμενο της Άλγεβρας για τις τάξεις Προνήπια – $8^{η}$ τάξη σύμφωνα με τις Αρχές και τα Στάνταρ του NCTM.

Στο Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματων Σπουδών – Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ) για τα Μαθηματικά του Δημοτικού Σχολείου (ΦΕΚ Β303/13-03-2003), υπάρχουν διάσπαρτες αναφορές για τη μαθηματική αφαίρεση, χωρίς, όμως, αυτοτελή αναφορά σε αυτή. Αρχικά, εντοπίζουμε τη γενική τοποθέτηση ότι: «[τα Μαθηματικά] ασκούν τον μαθητή […] στην αφαίρεση [και] στη γενίκευση […]» (σελ. 3983] καθώς και τη συνεχή αναφορά στον όρο «μεταβολή» ως θεμελιώδη μαθηματική έννοια. Στη συνέχεια υπάρχουν διάσπαρτες αναφορές για τους στόχους μαθηματικής αφαίρεσης σε κάθε τάξη, οι οποίοι συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

Στόχοι μαθηματικής αφαίρεσης για το Δημοτικό Σχολείο (ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ Μαθηματικών του ΦΕΚ Β303/13-03-2003)	
Τάξη	Στόχοι
Α	Να χρησιμοποιούν εναλλακτικούς τρόπους υπολογισμών, μέσα από τους οποίους να αναδεικνύεται η αντιμεταθετική ιδιότητα.
	Να ελέγχουν τα αποτελέσματα προσθέσεων ή αφαιρέσεων με την αντίστροφη πράξη τους.
Β	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να περιγράφουν και να επεκτείνουν αριθμητικά και γεωμετρικά μοτίβα.
	Μα μπορούν να διακρίνουν ότι η πρόσθεση και η αφαίρεση είναι αντίστροφες πράξεις. Να εξοικειωθούν με τις αντίστοιχες ιδιότητές τους.
	Να κατανοήσουν την πράξη του πολλαπλασιασμού ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση.
	Να γνωρίζουν την αντιμεταθετική και προσεταιριστική [πιθανότατα εννοείται η επιμεριστική] ιδιότητα του γινομένου ως προς την πρόσθεση και την αφαίρεση.
Γ	Να αναγνωρίζουν ένα μοτίβο επανάληψης αριθμών όπως στο σχήμα του τριγώνου του Pascal και να διαπιστώνουν ότι η διαδικασία αυτή συνεχίζεται επ' άπειρον.
	Να μπορούν να διπλασιάζουν φυσικούς αριθμούς και να προβλέπουν τους επόμενους όρους στη σειρά.
	Να εξοικειωθούν με την αντιμεταθετική και την

	προσεταιριστική [πιθανότατα εννοείται η επιμεριστική] ιδιότητα του πολλαπλασιασμού, ως προς την πρόσθεση και την αφαίρεση.
Δ	Να μπορούν να διαπιστώνουν την ύπαρξη απλών γεωμετρικών μοτίβων.
	Να μπορούν να τριπλασιάζουν (τετραπλασιάζουν, κτλ.) φυσικούς αριθμούς και να προβλέπουν τους επόμενους όρους μιας τέτοιας ακολουθίας.
	Να μπορούν να εφαρμόζουν τις ιδιότητες των πράξεων της πρόσθεσης, της αφαίρεσης και τους πολλαπλασιασμού.
	Να μπορούν να διακρίνουν ότι η πρόσθεση και η αφαίρεση είναι αντίστροφες πράξεις.
	Να γνωρίζουν τον αλγόριθμο της ευκλείδιας διαίρεσης δύο φυσικών με μονοψήφιο και διψήφιο διαιρέτη, τον τύπο $\Delta=\delta\cdot\pi+\upsilon$, $0\leq\upsilon\leq\delta$ και με τη βοήθεια του τύπου αυτού να κάνουν τη δοκιμή της διαίρεσης.
	Να γνωρίζουν ότι ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση είναι αντίστροφες πράξεις
Ε	Να γνωρίζουν τις ιδιότητες των πράξεων.
	Να μπορούν να χρησιμοποιούν τις ιδιότητες των πράξεων στην επίλυση σύνθετων προβλημάτων.
	Με τη βοήθεια του τύπου της ευκλείδειας διαίρεσης $\Delta=\delta\cdot\pi+\upsilon$, $0\leq\upsilon\leq\delta$ να κάνουν τη δοκιμή της.
	Να αναγνωρίζουν ένα μοτίβο επανάληψης αριθμών, π.χ. στο τρίγωνο Pascal, και να διαπιστώνουν ότι η διαδικασία αυτή συνεχίζεται επ’ άπειρον.
	Να μπορούν να τετραπλασιάζουν φυσικούς αριθμούς και να προβλέπουν τους επόμενους όρους στη σειρά.
ΣΤ	Να αναγνωρίζουν την έννοια του λόγου και της αναλογίας και να βρίσκουν τον άγνωστο όρο μιας αναλογίας με τη «χιαστί» μέθοδο.
	Να προσδιορίζουν τον αριθμό που πρέπει να προσθέσουν ή να αφαιρέσουν σε έναν άλλο για να βρουν έναν τρίτο αριθμό.
	Να προσδιορίζουν τον αριθμό με τον οποίο πρέπει να πολλαπλασιάσουν ή να διαιρέσουν έναν άλλο για να βρουν έναν τρίτο αριθμό.
	Να μπορούν να αναγνωρίζουν να περιγράφουν και να επεκτείνουν αριθμητικά και γεωμετρικά μοτίβα.
	Να μπορούν να διατυπώνουν έναν κανόνα για κάποιο απλό αριθμητικό ή γεωμετρικό μοτίβο.

Πίνακας 1.2: Οι στόχοι του ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ Μαθηματικών του 2003 που σχετίζονται με τη μαθηματική αφαίρεση στο Δημοτικό Σχολείο κατηγοριοποιημένοι ανά τάξη.

Στα νέα προγράμματα σπουδών για την υποχρεωτική εκπαίδευση, που παρουσιάστηκαν από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο το 2011 και αποτελούν συμπληρωματικά προγράμματα σπουδών προς αυτά του ΦΕΚ Β303/13-03-2003, η αναφορά στη μαθηματική αφαίρεση είναι περισσότερο εμφανής, ιδιαίτερα μέσω της καλλιέργειας της αλγεβρικής σκέψης (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011α˙ Παιδαγωγικό

Ινστιτούτο, 2011β). Στον οδηγό εκπαιδευτικού για το Δημοτικό Σχολείο, αναφέρεται ότι: «κεντρική επιδίωξη της διδασκαλίας των Μαθηματικών στην υποχρεωτική εκπαίδευση είναι η ανάδειξη των βασικών χαρακτηριστικών της μαθηματικής γνώσης: της γενίκευσης, της αφαίρεσης, της ακρίβειας και της συντομίας, καθώς και η ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης» (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011α, σελ. 4). Επίσης, παρατηρούμε έκδηλη την αναγνώριση της σημασίας της καλλιέργειας της αλγεβρικής σκέψης ήδη από τις μικρές ηλικίες με οριοθέτηση των θεματικών περιοχών που αυτή περιλαμβάνει:

> Είναι σημαντικό, πριν την εισαγωγή των μαθητών στην άλγεβρα, να προηγηθεί ένα στάδιο προετοιμασίας τους, κατά τη διάρκεια του οποίου θα διαμορφωθεί το κατάλληλο υπόβαθρο για τη συστηματική στη συνέχεια μελέτη των αλγεβρικών ιδεών. Το στάδιο αυτό μπορεί και προτείνεται να ξεκινήσει από τις μικρές κιόλας τάξεις του Δημοτικού Σχολείου και αναμένεται να περιλαμβάνει θέματα όπως:
>
> - Μελέτη (αναγνώριση, συμπλήρωση, περιγραφή, γενίκευση) κανονικοτήτων
> - Αναγνώριση των σχέσεων μεταξύ διαφόρων αναπαραστάσεων (γλωσσικών, υλικών, εικονικών, συμβολικών) και μετάβαση από τη μία στην άλλη
> - Επίλυση προβλημάτων του τύπου «βρες τον αριθμό που λείπει»
> - Κατανόηση ιδιοτήτων αριθμών, όπως η αντιμεταθετικότητα
> - Κατανόηση του συμβόλου σχέσης της ισότητας
> - Επινόηση αλγορίθμων για την πραγματοποίηση μιας εργασίας
> - Θέματα θεωρίας αριθμών, όπως πρώτοι αριθμοί, διαιρετότητα, κτλ
> - Κατανόηση των λόγων, όπως στις κλίμακες και στους ρυθμούς μεταβολής
> - Ερμηνεία και κατασκευή γραφικών παραστάσεων και τη χρήση τους για προβλέψεις
> - Επινόηση τύπων για τον σύντομο υπολογισμό εμβαδών και όγκων.
>
> (σελ. 20)

Από όσα αναφέρθηκαν πιο πάνω, φαίνεται ξεκάθαρα πως η διδασκαλία της μαθηματικής αφαίρεσης στις μικρές ηλικίες αποτελεί κάθε άλλο παρά ουτοπία. Η εισαγωγή των μαθητών σε αφαιρετικές διαδικασίες σκέψης συνιστά μία πρόκληση τόσο για τους μαθητές όσο και για τους εκπαιδευτικούς τους και η αποτελεσματική της διδασκαλία ενδέχεται να είναι επίπονη, κοπιαστική, αλλά σίγουρα καρποφόρα σε βάθος χρόνου (Van de Walle, 2007). Η μαθηματική αφαίρεση, όπως και άλλες γνώσεις, ικανότητες και δεξιότητες, αναπτύσσεται στο πλαίσιο κατάλληλα διαμορφωμένων δραστηριοτήτων και για το λόγο αυτό ενδιαφέρον παρουσιάζει η παρουσίαση δραστηριοτήτων μαθηματικής αφαίρεσης για μαθητές του Δημοτικού Σχολείου, στο υποκεφάλαιο που ακολουθεί.

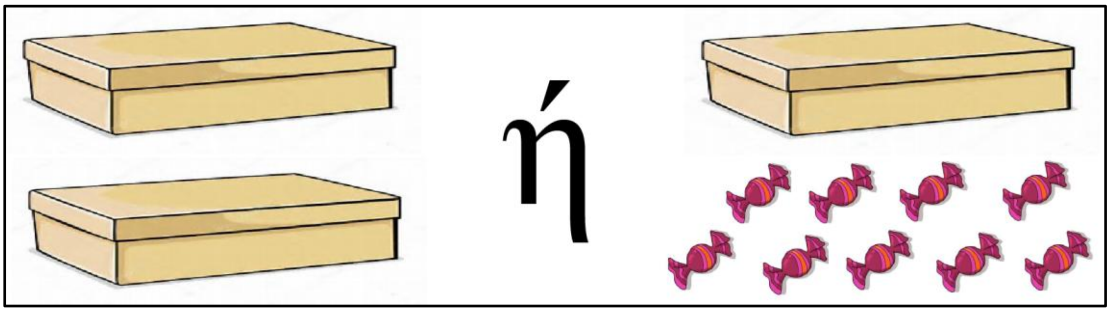
Γενικοί στόχοι: (Οι μαθητές αναμένεται…)	Ειδικοί στόχοι ανά εκπαιδευτική βαθμίδα:		
	Προνήπια – 2η τάξη (Οι μαθητές αναμένεται…)	**3η τάξη – 5η τάξη** (Οι μαθητές αναμένεται…)	**6η τάξη – 8η τάξη** (Οι μαθητές αναμένεται…)
Να κατανοούν τα πρότυπα, τις σχέσεις και τις συναρτήσεις.	Να κατηγοριοποιούν, να ταξινομούν και να διατάσσουν αντικείμενα κατά μέγεθος, αριθμό και άλλα χαρακτηριστικά.	Να περιγράφουν, να επεκτείνουν και να κάνουν γενικεύσεις για τα γεωμετρικά και τα αριθμητικά πρότυπα.	Να αναπαριστούν, να αναλύουν και να γενικεύουν ποικίλα πρότυπα με πίνακες, γραφήματα, λέξεις και, όταν είναι δυνατό, κανόνες.
	Να αναγνωρίζουν, να περιγράφουν και να επεκτείνουν πρότυπα όπως ακολουθίες ήχων, σχημάτων ή απλά αριθμητικά πρότυπα και να μεταφέρουν από τη μία αναπαράσταση στην άλλη.	Να αναπαριστούν και να αναλύουν πρότυπα και συναρτήσεις με τη χρήση λέξεων πινάκων και γραφημάτων.	Να συσχετίζουν και να συγκρίνουν διάφορες μορφές αναπαράστασης για μια σχέση.
	Να αναλύουν τον τρόπο παραγωγής των επαναλαμβανόμενων και των εξελισσόμενων προτύπων.		Να αναγνωρίζουν τις συναρτήσεις ως γραμμικές ή μη γραμμικές και να αντιπαραβάλλουν τις ιδιότητες τους χρησιμοποιώντας πίνακες, γραφήματα ή εξισώσεις.
Να αναπαριστούν και να αναλύουν τις μαθηματικές καταστάσεις και δομές χρησιμοποιώντας αλγεβρικά σύμβολα.	Να επεξηγούν τις γενικές αρχές και τις ιδιότητες των πράξεων όπως η αντιμεταθετικότητα χρησιμοποιώντας συγκεκριμένους αριθμούς.	Να αναγνωρίζουν ιδιότητες όπως την αντιμεταθετική, την προσεταιριστική και την επιμεριστική και να τις χρησιμοποιούν στους υπολογισμούς με φυσικούς αριθμούς	Να αποκτήσουν μία πρώτη εννοιολογική γνώση των διαφορετικών χρήσεων των μεταβλητών.
	Να χρησιμοποιούν χειραπτικές, εικονογραφικές και λεκτικές αναπαραστάσεις για να κατανοούν αυτοσχέδια και συμβατικά σύμβολα.	Να αναπαριστούν την ιδέα της μεταβλητής ως μίας άγνωστης ποσότητας με τη χρήση γράμματος ή συμβόλου.	Να διερευνήσουν τις σχέσεις ανάμεσα στις συμβολικές εκφράσεις και τα γραφήματα ευθειών με προσοχή στη σημασία της τομής με τους άξονες και της κλίσης.
		Να εκφράζουν μαθηματικές σχέσεις μέσω εξισώσεων.	Να χρησιμοποιούν τη συμβολική άλγεβρα για να αναπαριστούν καταστάσεις και να λύνουν προβλήματα και ειδικά όσα περιλαμβάνουν γραμμικές σχέσεις.
			Να αναγνωρίζουν και να παράγουν ισοδύναμες μορφές για απλές αλγεβρικές παραστάσεις και να επιλύουν γραμμικές εξισώσεις.
Να χρησιμοποιούν τα μαθηματικά μοντέλα για να αναπαριστούν και να κατανοούν ποσοτικές σχέσεις.	Να χρησιμοποιούν καταστάσεις οι οποίες περιλαμβάνουν την πρόσθεση και την αφαίρεση ακέραιων αριθμών με χρήση αντικειμένων, εικόνων και συμβόλων.	Να σχηματοποιούν προβληματικές καταστάσεις με αντικείμενα και να χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις όπως γραφήματα, πίνακες και εξισώσεις για να συμπεραίνουν.	Να σχηματοποιούν και να λύνουν ρεαλιστικά προβλήματα χρησιμοποιώντας ποικίλες αναπαραστάσεις όπως γραφήματα, πίνακες και εξισώσεις.
Να αναλύουν μεταβολές σε διάφορα συγκείμενα.	Να περιγράφουν τις ποιοτικές μεταβολές όπως όταν ένα παιδί ψηλώνει.	Να ερευνούν πώς η μεταβολή σε μία μεταβλητή σχετίζεται με τη μεταβολή μίας δεύτερης μεταβλητής.	Να χρησιμοποιούν τα γραφήματα για να αναλύουν τη φύση των αλλαγών στις ποσότητες των γραμμικών σχέσεων.
	Να περιγράφουν τις ποσοτικές μεταβολές όπως όταν ένα παιδί ψηλώνει κατά δύο ίντσες τον χρόνο.	Να αναγνωρίζουν και να περιγράφουν καταστάσεις με σταθερούς ή διαφορετικούς ρυθμούς μεταβολής και να τις συγκρίνουν.	

Πίνακας 1.3: Οι στόχοι του NCTM για το στάνταρ περιεχομένου «Άλγεβρα» τόσο για την πρωτοβάθμια όσο και για τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Η μαθηματική αφαίρεση είναι ενσωματωμένη στους στόχους αυτούς.

1.3 Παραδείγματα δραστηριοτήτων μαθηματικής αφαίρεσης για μαθητές μικρής ηλικίας

Α) Τα κουτιά με τις καραμέλες (Schliemann et al., 2003)

Στην παρακάτω εικόνα υπάρχουν κουτιά που περιέχουν καραμέλες ενώ 9 καραμέλες βρίσκονται εκτός κουτιού. Κάθε κουτί περιέχει τον ίδιο αριθμό καραμελών. Τι θα προτιμούσατε να είχατε; Δύο κουτιά με καραμέλες ή ένα κουτί και τις 9 καραμέλες; Γιατί;



Εικόνα 1.1: Τι θα προτιμούσατε να είχατε; Δύο κουτιά με καραμέλες ή ένα κουτί και τις 9 καραμέλες; Γιατί;

Στο παραπάνω πρόβλημα, που απευθύνεται ακόμα και σε μαθητές της Α' Δημοτικού, η ποσότητα των καραμελών σε κάθε κουτί είναι άγνωστη. Η μαθηματική αφαίρεση στην οποία καλείται ο μαθητής να φθάσει, είναι η θέαση του αριθμού των καραμελών ως άγνωστης αλλά παρόλα αυτά διαχειρίσιμης ποσότητας και η μελέτη των ποσοτικών σχέσεων μεταξύ των δύο επιλογών (Schliemann, et al., 2003). Η άγνωστη ποσότητα είναι μεταβαλλόμενη, συμπεριφέρεται δηλαδή ως μεταβλητή, και δεομένου ότι αυτή μπορεί να λάβει ένα πλήθος διαφορετικών τιμών, το πρόβλημα είναι «ανοικτό», δηλαδή έχει πολλές και διάφορες λύσεις. Ομαδοποιώντας τις λύσεις, θα μπορούσαμε να απαντήσουμε ότι αν ο αριθμός των καραμελών στο κάθε κουτί είναι μικρότερος από 8, τότε η δεύτερη επιλογή είναι προτιμητέα. Αν οι καραμέλες σε κάθε κουτί είναι 9, τότε και οι δύο επιλογές είναι ισάξιες. Για 10 ή περισσότερες καραμέλες σε κάθε κουτί, η πρώτη επιλογή καθίσταται η ορθότερη.

Β) Το άθροισμα των πρώτων 100 φυσικών αριθμών

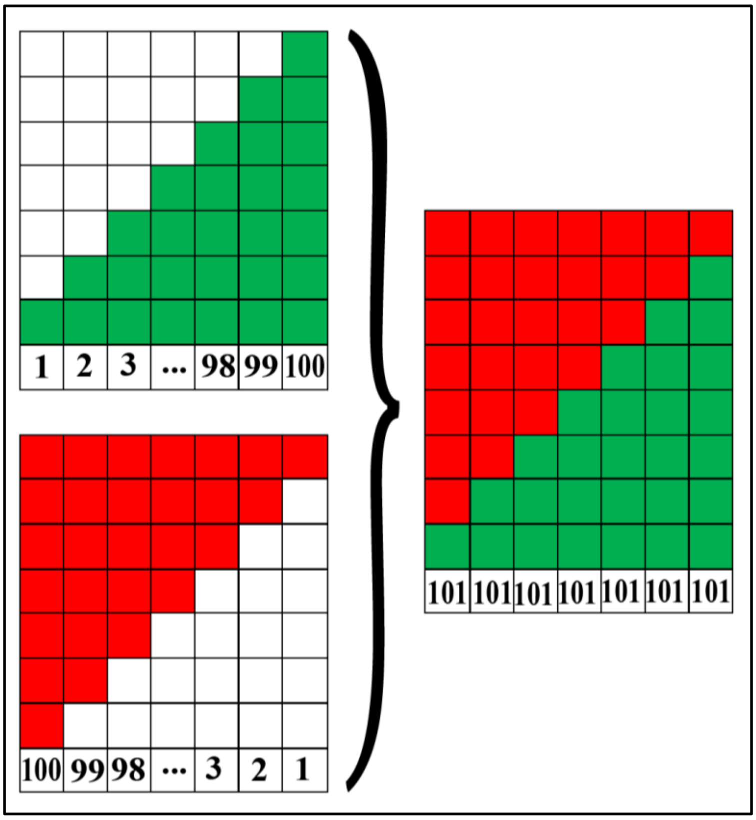
Ο Κωνσταντίνος προσπαθεί να υπολογίσει το άθροισμα 1+2+3+…+97+98+99+100 αλλά το μελάνι του στυλό του σύντομα θα τελειώσει. Μπορείς να του προτείνεις κάποιους γρήγορους τρόπους για να το υπολογίσει, ώστε να μη χρειαστεί να γράψει πολύ;

Η ικανότητα εκτέλεσης των αλγορίθμων των πράξεων αφενός μεν αποτελεί στόχο του μαθήματος των Μαθηματικών στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση, αφετέρου δε ωφελεί ελάχιστα ή καθόλου στην καλλιέργεια της αφαιρετικής και συνεπώς της μαθηματικής σκέψης (Van de Walle, 2007). Η προσεκτική παρατήρηση της ακολουθίας 1+2+3+…+98+99+100 προδίδει την ύπαρξη κανονικοτήτων, οι οποίες ελαχιστοποιούν τις χρονοβόρες πράξεις. Οι κανονικότητες, τα πρότυπα ή μοτίβα είναι ιδιαίτερα συχνά στα Μαθηματικά (ό.π.) και η αφαιρετική σκέψη συνίσταται στον εντοπισμό και την απομόνωσή τους. Οι λύσεις που μπορούν να δοθούν στο πρόβλημα είναι τόσο αριθμητικές/αλγεβρικές όσο και γεωμετρικές ανάλογα με την αναπαράσταση που θα χρησιμοποιηθεί για την εύρεση τους.

Αλγεβρική λύση

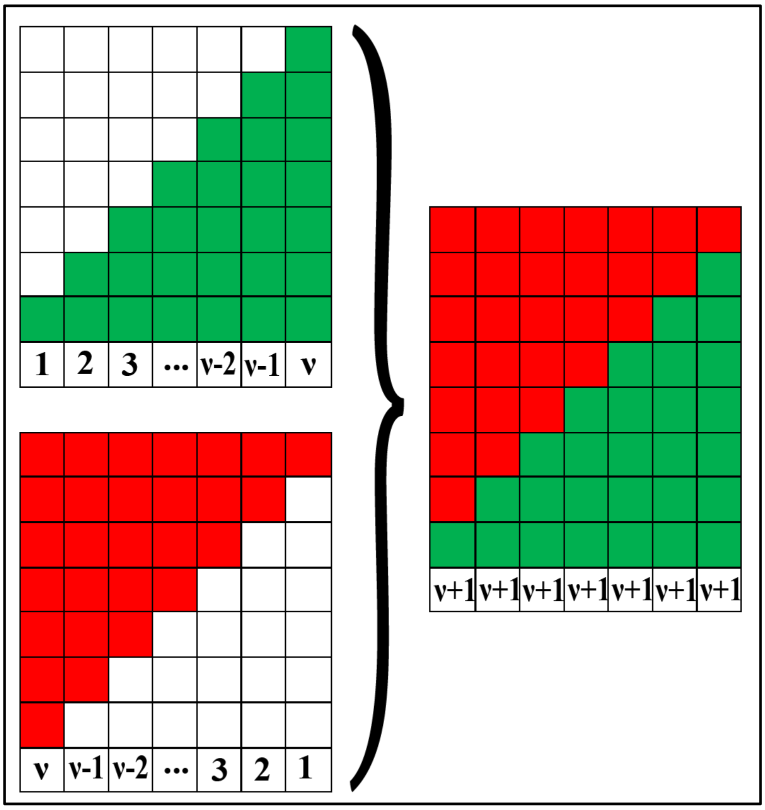
Οι 100 αριθμοί ομαδοποιούνται ανά δύο με σταθερό άθροισμα 101 κατά τον εξής τρόπο: 1+100=101, 2+99=101, 3+98=101, κ.ο.κ. Τα ζευγάρια που έχουν άθροισμα 101 είναι συνολικά 50, διότι οι 100 αριθμοί ομαδοποιήθηκαν ανά 2. Συνεπώς το συνολικό άθροισμα είναι: 50·101 = 5.050. Τη λύση αυτή φημολογείται ότι πραγματοποίησε στα τέλη του 18^{ου} αιώνα ο μεγάλος μαθηματικός Johann Carl Friedrich Gauss σε ηλικία μόλις 7 ετών, αφήνοντας φυσικά έκπληκτη τη δασκάλα του! (Johann Carl Friedrich Gauss, χ.η.)

Γεωμετρική λύση



Εικόνα 1.2: Εικονικές αναπαραστάσεις για τον υπολογισμό του αθροίσματος των 100 πρώτων φυσικών αριθμών. Η μεταφορά από τη συμβολική στην εικονική αναπαράσταση δημιουργεί μία ενδιαφέρουσα οπτική για το πρόβλημα.

Αναπαριστώντας τους αριθμούς με τετράγωνα, δημιουργείται μία άτυπη σκάλα με σκαλοπάτια ύψους 1 μονάδας. Δημιουργούμε μία ολόιδια σκάλα, την αναστρέφουμε και την ενώνουμε με την πρώτη, έτσι ώστε να σχηματίσουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο θα έχει μήκος 100 μονάδες (όσο και το πλήθος των αριθμών) και πλάτος/ύψος 101 μονάδες (βλ. εικόνα). Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου, δηλαδή το άθροισμα όλων των τετραγώνων και των δύο σκαλών, ισούται με 100·101=10.100. Επομένως, το άθροισμα των τετραγώνων της μίας σκάλας, δηλαδή το επιθυμητό αποτέλεσμα, είναι ίσο με: 10.100:2 = 5.050. Οι αποδείξεις/λύσεις που βασίζονται σε εικονικές αναπαραστάσεις (representation-based proofs) αποτελούν ένα προσιτό και αποτελεσματικό εργαλείο έκφρασης της μαθηματικής επιχειρηματολογίας μικρών μαθητών και ενδείκνυνται σε δραστηριότητες μαθηματικής αφαίρεσης (Russell et al., 2011). Η παραπάνω εικονική αναπαράσταση μπορεί να αποτελέσει εργαλείο για περαιτέρω αφαίρεση, καθώς το πρόβλημα μπορεί να γενικευθεί για τους πρώτους ν φυσικούς αριθμούς. Στη γενική αυτή περίπτωση το άθροισμα θα είναι: [ν · (ν+1)] : 2 (εικόνα 1.3).

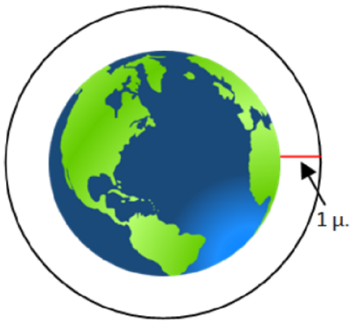


Εικόνα 1.3: Η γενίκευση της δραστηριότητας του αθροίσματος των 100 πρώτων φυσικών αριθμών για τους ν πρώτους φυσικούς αριθμούς.

Γ) Τα κοτόπουλα από το Μίνσκ (Chernyak & Rose, 2001, όπ. αναφ στο Κοπάδης, 2010)

Ένα καλώδιο με οπτικές ίνες , το οποίο περιλείει κυκλικά τη γη, διέρχεται τυχαία μέσα από ένα ορνιθοτροφείο στο Μινσκ. Τα κοτόπουλα αρνούνται πεισματικά να δρασκελίσουν το καλώδιο ή να πετάξουν πάνω από αυτό. Δέχονται μόνο να περάσουν κάτω από αυτό. Προφανώς το καλώδιο θα πρέπει να ανυψωθεί από το έδαφος κατά 1 μέτρο, διαφορετικά τα κοτόπουλα κινδυνεύουν. Για τεχνικούς λόγους, αν γίνει αυτό στην περιοχή του ορνιθοτροφείου, θα πρέπει να γίνει το ίδιο και σε όλες τις θέσεις από τις οποίες διέρχεται το καλώδιο (δηλαδή σε όλο τον κύκλο του καλωδίου γύρω από τη γη). Ο πτηνοτρόφος αρνείται να περάσει το καλώδιο μέσα από το αγρόκτημά του αν *αυτό δεν ανυψωθεί. Ο αρμόδιος υπάλληλος του απαντά ότι αυτό θα γίνει, αρκεί ο πτηνοτρόφος να πληρώσει 1 ευρώ για κάθε μέτρο του συμπληρωματικού καλωδίου που θα χρειαστεί. Ο πτηνοτρόφος δέχεται με τον όρο να επιβαρυνθεί το κράτος το κόστος για τα υποστηρίγματα της καλωδίωσης. Τελικά, τι επιβάρυνση θα έχει ο πτηνοτρόφος;*

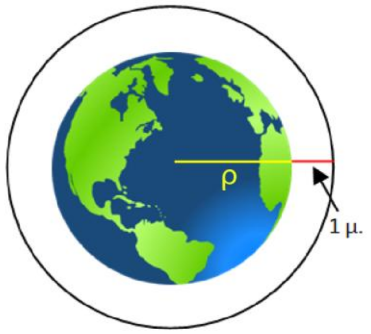
Το παραπάνω πρόβλημα προέρχεται από τη ρωσική μαθηματική παράδοση και διατυπώθηκε αρχικά στο βιβλίο των Chernyak και Rose “The chicken from Minsk” το 1995. Ενδιαφέρον προκαλεί η απουσία αναφοράς στην ακτίνα της γης, η οποία προφανώς δεν είναι απαραίτητη για τη λύση του προβλήματος. Το γεγονός αυτό καλεί τον μαθητή να σκεφτεί αφαιρετικά και να εστιάσει στο γεγονός ότι το επιπλέον μήκος του καλωδίου είναι ανεξάρτητο από την ακτίνα της γης. Η συνειδητοποίηση του γεγονότος αυτού από μαθητές του Δημοτικού Σχολείου αναμένεται να μην είναι άμεση αλλά σταδιακή. Αρχικά οι μαθητές μπορούν να ασχοληθούν με υποθετικούς κύκλους μικρής ακτίνας (εικόνα) για να συνειδητοποιήσουν την ανεξαρτησία του επιπλέον μήκους του καλωδίου από την ακτίνα του κύκλου.



Ακτίνα εσωτερικού κύκλου	Ακτίνα εξωτερικού κύκλου	Μήκος εσωτερικού κύκλου	Μήκος εξωτερικού κύκλου	Επιπλέον καλώδιο
1 μ.	2 μ.	6,28 μ.	12,56 μ.	6,28 μ.
2 μ.	3 μ.	12,56 μ.	18,84 μ.	6,28 μ.
3 μ.	4 μ.	18,84 μ.	25,12 μ.	6,28 μ.

Εικόνα 1.4: Η δοκιμές με μικρές τιμές για την ακτίνα της γης, αποκαλύπτουν ότι το μήκος του επιπλέον καλωδίου είναι σταθερό και ανεξάρτητο της ακτίνας της γης.

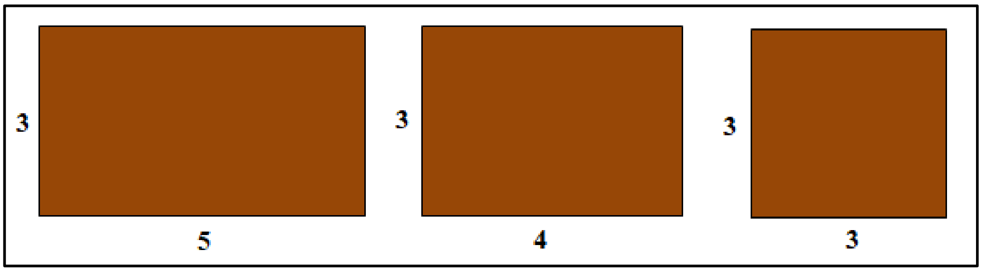
Ωστόσο, είναι σημαντικό οι μαθητές να συνειδητοποιήσουν την αξία της μελέτης του μήκους του επιπλέον καλωδίου για οποιαδήποτε ακτίνα. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ανάγκη «μεταβλητοποίησης» της ακτίνας προκειμένου να είναι δυνατή η απεμπλοκή από συγκεκριμένες τιμές και η έμφαση στις διάφορες σχέσεις που προκύπτουν. Με βάση αυτό τον συλλογισμό το επιπλέον μήκος του καλωδίου που απαιτείται είναι: $2 \cdot \pi \cdot (\rho+1) - 2 \cdot \pi \cdot \rho = 2 \cdot \pi \cdot \rho + 2 \cdot \pi \cdot 1 - 2 \cdot \pi \cdot \rho$. Όμως, η προσθαφαίρεση της ίδιας ποσότητας δίνει τελικό αποτέλεσμα μηδέν (μία ακόμη αφαίρεση την οποία χρειάζεται να πραγματοποιήσουν οι μαθητές). Συνεπώς, απαιτούνται επιπλέον $2 \cdot \pi = 6{,}28$ μέτρα καλωδίου για οποιαδήποτε ακτίνα, άρα και για ολόκληρη τη γη. Τελικά, ο πτηνοτρόφος θα επιβαρυνθεί με 6,28 ευρώ, απάντηση που πιθανότατα ξαφνιάζει τον κοινό νου αλλά ταυτόχρονα αναδεικνύει τη δύναμη της μαθηματικής αφαίρεσης!



Εικόνα 1.5: Η «μεταβλητοποίηση» του προβλήματος δίνει τη δυνατότητα ασφαλούς συμπεράσματος για την ανεξαρτησία του μήκους του επιπλέον καλωδίου από την ακτίνα της γης.

Δ) Ορθογώνια τραπέζια “Tablex”

Το εργοστάσιο “Tablex” διαθέτει αυτόματα μηχανήματα που κατασκευάζουν μόνο ορθογώνια τραπέζια σε οποιεσδήποτε διαστάσεις επιλέξει ο πελάτης. Στο διαφημιστικό φυλλάδιο της εταιρίας υπάρχει ο τίτλος «Ορθογώνια τραπέζια στις πιο προσιτές τιμές! Απλά δώστε μας τις διαστάσεις!». Η οικογένεια Στεργίου επιθυμεί να παραγγείλει ένα τετράγωνο τραπέζι. Μπορεί η εταιρία να ανταποκριθεί σε αυτή την παραγγελία; Ναι ή όχι και γιατί;

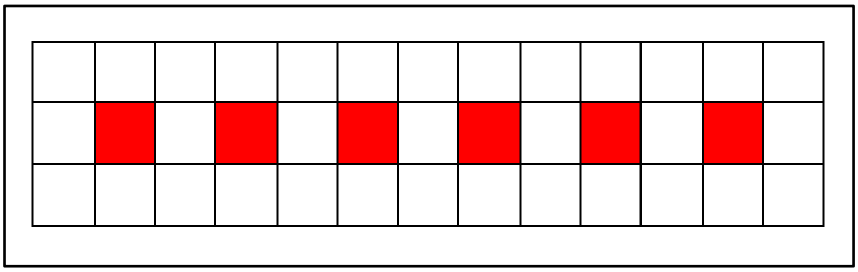


Εικόνα 1.6: Διατηρώντας σταθερό το πλάτος και μεταβάλλοντας μόνο το μήκος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, παρατηρούμε ότι όταν το μήκος γίνει ίσο με το πλάτος, το σχήμα μπορεί να χαρακτηριστεί και «τετράγωνο».

Στο γεωμετρικό αυτό πρόβλημα, οι μαθητές καλούνται να συσχετίσουν τις εννοιολογικές τους δομές για το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και το τετράγωνο. Συγκεκριμένα, από τη δραστηριότητα αναμένεται η εννοιολογική ενσωμάτωση της έννοιας του τετραγώνου σε αυτή του παραλληλογράμμου, ούτως ώστε το τετράγωνο να γίνει αντιληπτό ως ειδική περίπτωση ορθογωνίου παραλληλογράμμου με όλες τις πλευρές του ίσες (Dubinsky, 1991). Δραστηριότητες τέτοιου είδους επιτρέπουν τη σύνθεση υπαρχόντων εννοιολογικών δομών για τα σχήματα σε ένα κοινό, που κατ’ επέκταση οδηγεί στην αφαιρετική θέαση αυτών (Dreyfus, 1991). Με τον τρόπο αυτό το τετράγωνο είναι επίσης ρόμβος με όλες τις πλευρές ορθές αλλά και παραλληλόγραμμο με όλες τις πλευρές ίσες και όλες τις γωνίες ορθές.

Ε) Ο κήπος της Ασπασίας

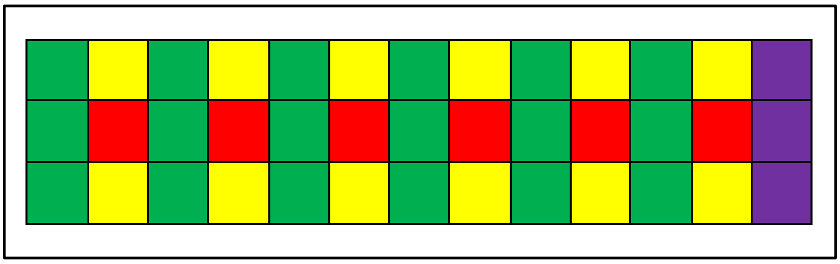
Η Ασπασία θέλει να φυτέψει τριανταφυλλιές στον κήπο της. Για να μπορεί να τις φροντίζει χωρίς να χρειάζεται να πατάει στο χώμα, θα τοποθετήσει πλακάκια ανάμεσα και γύρω-γύρω από τα φυτά, σύμφωνα με τον τρόπο που φαίνεται στην εικόνα. Πόσα πλακάκια θα χρειαστεί αν ο κήπος της είναι τόσο μεγάλος ώστε να χωράει 500 τριανταφυλλιές στη σειρά;



Εικόνα 1.7: Στο κήπο της Ασπασίας οι τριανταφυλλιές (κόκκινα τετράγωνα) περιβάλλονται από πλακάκια (λευκά τετράγωνα) σύμφωνα με το μοτίβο της εικόνας.

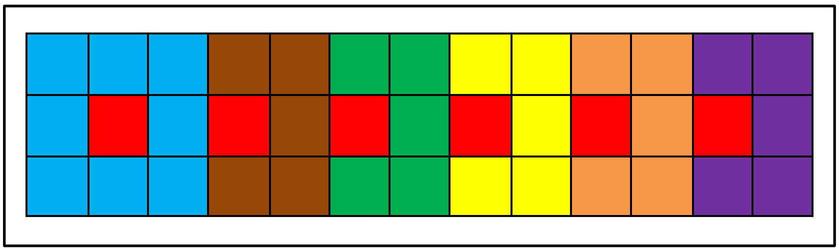
Στη δραστηριότητα αυτή, ένα γεωμετρικό μοτίβο και το αντίστοιχό του αριθμητικό επαναλαμβάνονται αρκετές φορές. Ο μεγάλος αριθμός επανάληψης του μοτίβου καθιστά δύσκολη την αναπαράστασή όλων των τριανταφυλλιών με εικόνα και οδηγεί τους μαθητές σε συντομότερες μεθόδους επίλυσης του προβλήματος. Η τεχνική της εξέτασης ενός μοτίβου για μεγάλο αριθμό επανάληψης, οδηγεί τους μαθητές στην αφαιρετική αντιμετώπιση του προβλήματος με εξεύρεση των επαναλαμβανόμενων μοτίβων και μεταβλητοποίηση των ποσοτήτων (Carraher et al., 2008).

Το πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί με διάφορες μεθόδους. Αρχικά, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι πάνω και κάτω από κάθε τριανταφυλλιά υπάρχει από ένα πλακάκι. Επίσης, αριστερά από κάθε τριανταφυλλιά υπάρχουν 3 πλακάκια, ενώ υπάρχουν και 3 επιπλέον πλακάκια στην τελευταία δεξιά τριανταφυλλιά. Επομένως, σύμφωνα με τον παραπάνω συλλογισμό, για οποιονδήποτε αριθμό τριανταφυλλιών, έστω ν, υπάρχουν $2 \cdot ν + 3 \cdot ν + 3$ πλακάκια, δηλαδή $5 \cdot ν + 3$ πλακάκια.



Εικόνα 1.8: Μία πιθανή μοντελοποίηση της δραστηριότητας του κήπου της Ασπασίας.

Μία άλλη λύση του προβλήματος θα ήταν η εξής: Στις ν τριανταφυλλιές παρατηρούμε ότι η πρώτη περιβάλλεται από 8 πλακάκια, ενώ οι υπόλοιπες ν-1 περιβάλλονται από 5 πλακάκια. Συνεπώς, τα πλακάκια είναι $8 + (ν-1) \cdot 5 = 5 \cdot ν + 3$.



Εικόνα 1.9: Μία ακόμη μοντελοποίηση της δραστηριότητας του κήπου της Ασπασίας.

Κεφάλαιο 2

Αναπαραστάσεις και μαθηματική εκπαίδευση

«Ο μόνος τρόπος για να έχεις πρόσβαση σε αυτά [στα Μαθηματικά] και να τα διαχειριστείς είναι η χρησιμοποίηση συμβόλων και σημειωτικών αναπαραστάσεων»

(Duval, 2006, σελ. 107)

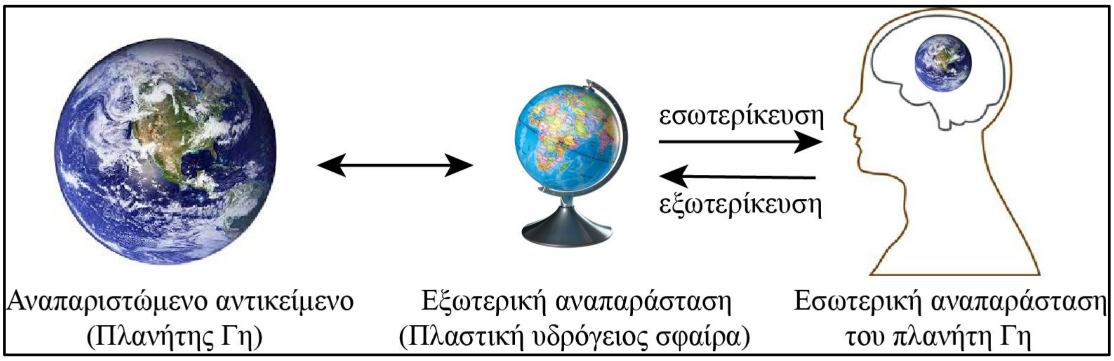
2.1 Οριοθετώντας τον όρο «αναπαράσταση»

Από τις απαρχές της ιστορίας του, ο άνθρωπος επιχειρούσε ποικιλοτρόπως να προσεγγίσει τομείς της κοινωνικής και φυσικής πραγματικότητας με τη βοήθεια αναπαραστατικών εργαλείων. Για παράδειγμα, προσπαθούσε να περιγράψει τις μορφές των ζώων στα σπήλαια, δημιουργώντας έτσι μνημειώδεις τοιχογραφίες, όπως αυτές του σπηλαίου Λασκό, στη νοτιοδυτική Γαλλία. Σε αρχαιοελληνικά αγγεία παρατηρούμε αναπαραστάσεις κοινωνικών εκδηλώσεων, τα οποία λειτουργούν ως σημαντικές ιστορικές πηγές γνώσης.

Στην προσπάθεια μας να μελετήσουμε τη λειτουργία των αναπαραστάσεων στη μάθηση και τη διδασκαλία των Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο, οδηγούμαστε στην ανάγκη διατύπωσης του ορισμού της έννοιας της αναπαράστασης. Κατά καιρούς, έχουν διατυπωθεί διάφοροι ορισμοί, μερικοί από τους οποίους ταυτίζονται και άλλοι διαφοροποιούνται ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά.

Ο Marr (1996, σελ. 20) υποστηρίζει ότι μία «αναπαράσταση είναι ένα επίσημο σύστημα που κάνει έκδηλες (explicit) οντότητες ή πληροφορίες, μαζί με μία περιγραφή σχετικά με πώς το σύστημα κάνει αυτή τη δουλειά». Ο Kaput (1987, όπ. αναφ. στο Πατσιομίτου & Εμβαλωτής, 2009) ορίζει την αναπαράσταση ως σύστημα που περιλαμβάνει μία οντότητα που αναπαρίσταται, μία οντότητα που αναπαριστά καθώς και «τον κανόνα αντιστοίχισης των δύο» (σελ. 250). Οι Pape & Tchoshanov, 2001) αντιμετωπίζουν την αναπαράσταση ως σύστημα τριών παραγόντων: των εσωτερικών αναπαραστάσεων, που αποτελούν «αφαιρέσεις […] ιδεών ή γνωστικών σχημάτων που αναπτύσσονται από έναν μαθητή μέσω της εμπειρίας», των εξωτερικών αναπαραστάσεων, που είναι «εξωτερικές εκδηλώσεις […] εννοιών» αλλά και της διαδικασίας «εξωτερίκευσης» των εννοιών αυτών (σελ. 119).

Από τους παραπάνω ορισμούς, γίνεται σαφές ότι η αναπαράσταση ορίζεται ως «σύστημα». Για τον λόγο αυτό, οι Goldin & Kaput (1996) χρησιμοποιούν τον όρο «συστήματα αναπαράστασης». Συνοψίζοντας τους ορισμούς που αναφέρθηκαν, παρατηρούμε τρία βασικά στοιχεία των συστημάτων αναπαράστασης. Αυτά είναι το αναπαριστώμενο αντικείμενο ή έννοια, το αναπαριστών αντικείμενο (εξωτερική αναπαράσταση) και οι αποτύπωση του αναπαριστώμενου αντικειμένου ή έννοιας στον νου (εσωτερική αναπαράσταση). Η λειτουργία των συστημάτων αναπαράστασης, όπως και κάθε άλλου συστήματος, έγκειται στις διασυνδέσεις των τριών αυτών στοιχείων. Στους ορισμούς που δόθηκαν περιλαμβάνεται μέρος αυτών των διασυνδέσεων: οι ορισμοί των Marr και του Kaput εστιάζουν περισσότερο στη σύνδεση του αναπαριστώμενου με το αναπαριστών ενώ ο ορισμός των Pape & Tchoshanov στη σύνδεση του αναπαριστώντος (εξωτερική αναπαράσταση) με την αποτύπωση στον νου (εσωτερική αναπαράσταση). Παράλληλα, ο όρος αναπαράσταση αναφέρεται τόσο στη διαδικασία (representing) όσο και στο αποτέλεσμα της αναπαράστασης (representation) (Dreyfus, 1991). Στην εικόνα της επόμενης σελίδας βλέπουμε μία εξωτερική αναπαράσταση του ορισμού του «συστήματος αναπαράστασης».



Εικόνα 2.1: Σχηματική αναπαράσταση ενός αναπαραστατικού συστήματος.

Ένα από τα πιο σημαντικά σύστημα αναπαράστασης, που έχει ελκύσει την προσοχή αρκετών μελετητών, είναι το σύστημα αναπαράστασης της γλώσσας (Μπαμπινιώτης, 1998). Το αναπαραστατικό σύστημα της γλώσσας περιγράφεται ικανοποιητικά από τη θεωρία του Saussure για το «γλωσσικά σημεία» (ό.π.). Ένα γλωσσικό σημείο μπορεί να είναι μία λέξη και αποτελείται από δύο υποσυστήματα: το εξωτερικό και το εσωτερικό (ό.π.). Στο εξωτερικό εντάσσονται το «αντικείμενο αναφοράς», δηλαδή το πραγματικό αντικείμενο στο οποίο αναφέρεται η λέξη, και η «παράσταση», δηλαδή οι φθόγγοι και τα γράμματα, με τα οποία εκφράζουμε τη λέξη όταν ομιλούμε ή γράφουμε (ό.π.). Στο εσωτερικό εντάσσονται το «σημαίνον» και το «σημαινόμενο». Το σημαίνον περιλαμβάνει την «ακουστική εικόνα», δηλαδή την εσωτερική ακουστική αναπαράσταση της λέξης, και το «οπτικό ίνδαλμα», δηλαδή την εσωτερική εικονική αναπαράσταση, ενώ το σημαινόμενο αναφέρεται στη σημασία (ό.π.). Κατά τον Saussure το αναπαραστατικό σύστημα της γλώσσας συνδέει ακουστικές εικόνες με σημασίες (σημαίνον-σημαινόμενο) και όχι παραστάσεις (φθόγγους και γράμματα) με σημασίες (ό.π.).

Είναι προφανής η ομοιότητα της θεωρίας του γλωσσικού σημείου με το γενικό μοντέλο των συστημάτων αναπαράστασης που εμφανίζεται στην παραπάνω εικόνα, καθώς και στα δύο συστήματα, εμφανίζονται εσωτερικές και εξωτερικές οντότητες. Το «αντικείμενο αναφοράς» φαίνεται πως ταυτίζεται με το «αναπαριστώμενο αντικείμενο» και η «παράσταση» με την «εξωτερική αναπαράσταση». Η εσωτερική αναπαράσταση φαίνεται πως εσωκλείει τόσο το «σημαίνον» όσο και το «σημαινόμενο».

Όπως ήδη αναφέρθηκε, οι εξωτερικές αναπαραστάσεις αποτελούν ένα από τα τρία βασικά μέρη των αναπαραστατικών συστημάτων. Οι Goldin & Kaput (1996, σελ. 400) ορίζουν τις εξωτερικές αναπαραστάσεις ως «παρατηρήσιμες προσαρμογές (των αναπαριστώμενων αντικειμένων ή εννοιών) […] όπως λέξεις, γραφήματα, εικόνες, εξισώσεις ή υπολογιστικά συστήματα» που είναι «εκφρασμένες σε φυσικά μέσα». Με άλλα λόγια, είναι υλικά και άμεσα παρατηρήσιμα ανάλογα ή αντιπροσωπεύσεις πραγματικών ή νοητικών αντικειμένων. Η πρόσβαση σε αυτές είναι δυνατή από κάθε άτομο με τη σχετική γνώση, ωστόσο η ερμηνεία τους εξαρτάται σημαντικά από τις εσωτερικές αναπαραστάσεις αυτού που τις ερμηνεύει (ο. π.).

Οι μορφές που μπορούν να λάβουν οι εξωτερικές αναπαραστάσεις είναι ποικίλες και στη μελέτη τους βοηθά σημαντικά η κατηγοριοποίησή τους με βάση ορισμένα κριτήρια. Οι Goldin και Kaput (1996) παρουσιάζουν μία ενδιαφέρουσα ταξινόμηση των εξωτερικών αναπαραστάσεων που στηρίζεται σε τέσσερις βασικούς άξονες: α) τις ιδιότητες του μέσου με το οποίο αυτές εκφράζονται, β) την ομοιότητά τους με αυτό που αναπαριστούν, γ) τον βαθμό τυποποίησής τους και δ) τις δυνατότητες δράσης που προσφέρουν.

α) Ταξινόμηση με βάση τις ιδιότητες του μέσου

Οι ιδιότητες του μέσου, κατά τους Goldin και Kaput (1996) διακρίνονται με βάση τρία κριτήρια. Το πρώτο είναι ο βαθμός μεταβολής της μορφής τους στον χρόνο. Σύμφωνα με αυτό το κριτήριο οι εξωτερικές αναπαραστάσεις διακρίνονται σε «στατικές» ή «δυναμικές». Παράδειγμα στατικής αναπαράστασης αποτελεί το πορτρέτο ενός ατόμου, ζωγραφισμένο σε καμβά, και δυναμικής αναπαράστασης, το βίντεο.

Ο βαθμός διάδρασης που προσφέρει το μέσο με το οποίο εκφράζεται η εξωτερική αναπαράσταση είναι το δεύτερο κριτήριο ταξινόμησης (ο.π.). Έχοντας υπ' όψιν αυτό το κριτήριο, οι εξωτερικές αναπαραστάσεις χαρακτηρίζονται ως «αδρανείς», αν η δυνατότητα επέμβασης του ατόμου στην αναπαράσταση περιορίζεται μόνο στην εμφάνιση ή την απόκρυψή της (ο.π.). Έτσι, για παράδειγμα, το πρόγραμμα της «παραδοσιακής» τηλεόρασης αποτελείται από αδρανείς αναπαραστάσεις, δεδομένου ότι ο χρήστης της συσκευής μπορεί να εκκινήσει ή να σταματήσει την προβολή ενός προγράμματος αλλά δεν δύναται να παρακολουθήσει ξανά ένα πρόγραμμα που προβλήθηκε σε παρελθόντα χρόνο, αν ο τηλεοπτικός σταθμός δεν το προβάλει σε επανάληψη. Αντίθετα, οι «διαδραστικές» αναπαραστάσεις παρέχουν διευρυμένες δυνατότητες παρέμβασης στην μορφή της αναπαράστασης με αποτέλεσμα το άτομο να δέχεται ανάλογη ανατροφοδότηση από τις επεμβάσεις του σε αυτή (ο.π). Χαρακτηριστικό διαδραστικό μέσο αναπαραστάσεων αποτελεί ο Η/Υ. Η διαδικτυακή τηλεόραση ασύγχρονης μετάδοσης παρέχει τη δυνατότητα στους χρήστες να επέμβουν στα βίντεο που παρακολουθούν, επιτρέποντας τους, για παράδειγμα, να τα αναπαράγουν πιο αργά ή πιο γρήγορα.

Τρίτο κριτήριο ταξινόμησης των αναπαραστάσεων κατά τους Goldin και Kaput (1996) είναι η δυνατότητά τους να διατηρούνται στο πέρασμα του χρόνου. Οι «πρόσκαιρες» αναπαραστάσεις έχουν σύντομη διάρκεια ζωής, όπως λόγου χάριν μία λέξη που λέγεται προφορικά. Αντίθετα, οι αναπαραστάσεις μένουν «ανεξίτηλες» (ή σχεδόν ανεξίτηλες) αν καταγραφούν σε ένα μέσο που τους επιτρέπει τη διατήρηση στο πέρασμα του χρόνου. Η ανακάλυψη της γραφής προσέφερε τη δυνατότητα ανεξίτηλης αναπαράστασης των σκέψεων στο πέρασμα των αιώνων.

β) Ταξινόμηση με βάση την ομοιότητας τους με αυτό που αναπαριστούν

Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις, ως ανάλογα ή αντιπροσωπεύσεις πραγματικών ή νοητικών αντικειμένων εμφανίζουν διαφορετικούς βαθμούς ομοιότητας ή αφαίρεσης με αυτό που αναπαριστούν. Όταν η εξωτερική αναπαράσταση εμφανίζει υψηλό βαθμό «αισθητηριακής ομοιότητας» με αυτό που αναπαριστά, χαρακτηρίζεται ως «εικονιστική» (“imagistic”) (Goldin & Kaput, 1996, σελ. 414) . Ο όρος «εικονιστική» δεν αναφέρεται μόνο σε εικονικές αναπαραστάσεις αλλά και σε αναπαραστάσεις που αξιοποιούν άλλες αισθήσεις, όπως η αφή ή η ακοή (ό.π.). Ένα παράδειγμα εικονιστικής αναπαράστασης είναι τα συλλεκτικά μοντέλα αυτοκινήτων που κατασκευάζονται υπό μία ορισμένη κλίμακα σμίκρυνσης.

Ωστόσο, υπάρχουν εξωτερικές αναπαραστάσεις που «μεταδίδουν το μήνυμά τους μέσω της αναλογίας ή της μεταφοράς» παρά μέσω τις «αισθητηριακής ομοιότητάς» τους με αυτό που αναπαριστούν (Goldin & Kaput, 1996, σελ. 414-415). Σε αυτή την περίπτωση οι εξωτερικές αναπαραστάσεις χαρακτηρίζονται ως «αναλογικές» (ό.π., σελ. 415). Η αναπαράσταση των κλασμάτων με τη βοήθεια κυκλικών ή άλλων σχημάτων αποτελεί παράδειγμα αναλογικής αναπαράστασης. Οι αναλογικές αναπαραστάσεις εμφανίζονται αρκετά συχνά στην περίπτωση αναπαράστασης νοητικών αντικειμένων (ιδεών) διότι αυτές δεν υφίστανται ως φυσικά αντικείμενα και η αναπαράστασή τους καθίσταται δυνατή μόνο μέσω κάποιας αναλογίας ή μεταφοράς (ο.π.). Οι Goldin & Kaput (1996) δεν διατυπώνουν ξεκάθαρα αν τα σύμβολα (συμβολικές αναπαραστάσεις) ανήκουν στις αναλογικές αναπαραστάσεις, ωστόσο, κρίνοντας από τον ορισμό που δίνουν στις αναλογικές αναπαραστάσεις, ο χαρακτήρας των συμβόλων είναι μάλλον αναλογικός στο μέγιστο βαθμό ή, ακριβέστερα, συμβολικός.

γ) Ταξινόμηση με βάση τον βαθμό τυποποίησής τους

Ο υψηλός βαθμός αφαίρεσης και η αναζήτηση εύκολων και γρήγορων μεθόδων εξωτερικής αναπαράστασης οδήγησε στη δημιουργία των «τυποποιημένων» αναπαραστάσεων (Goldin & Kaput, 1996). Οι τυποποιημένες αναπαραστάσεις περιλαμβάνουν σύμβολα, των οποίων η νοηματοδότηση διέπεται από πολύ συγκεκριμένους κανόνες (ο.π.). Παραδείγματα τυποποιημένων αναπαραστάσεων είναι τα αλφάβητα των γλωσσών, τα αριθμητικά συστήματα, τα αλγεβρικά και τα γεωμετρικά σύμβολα. Οι τυποποιημένες αναπαραστάσεις έχουν συνήθως ελάχιστη ή καμία ομοιότητα με αυτό που αναπαριστούν αλλά παρόλα αυτά η κατανόησή τους βασίζεται στο γεγονός ότι η ερμηνεία τους είναι προσυμφωνημένη (ο.π.).

Ωστόσο, η μαθηματική δραστηριότητα δεν περιορίζεται μόνο στις τυποποιημένες αναπαραστάσεις. Μία σειρά αυτοσχέδιων αναπαραστάσεων όπως σχήματα, εικόνες ακόμα και αυθαίρετα σύμβολα αποτελούν τις «άτυπες» αναπαραστάσεις (Goldin & Kaput, 1996). Η μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών ξεκινά από τις άτυπες αναπαραστάσεις και σταδιακά μέσω της εκπαίδευσης κλίνει όλο και περισσότερο στις πιο τυποποιημένες (ο.π.).

δ) Ταξινόμηση με βάση τον βαθμό δράσης ή χειρισμού που προσφέρουν

Σύμφωνα με τους Goldin και Kaput (1996), οι εξωτερικές αναπαραστάσεις διακρίνονται σε αναπαραστάσεις «απεικόνισης» και αναπαραστάσεις «δράσης», ανάλογα με τον βαθμό δράσης και χειρισμού που προσφέρουν. Μία γραφική παράσταση μίας συνάρτησης είναι μια αναπαράσταση απεικόνισης διότι προσφέρεται περισσότερο για παρατήρηση παρά για περαιτέρω επέμβαση σε αυτή (ο.π.). Αντίθετα, μία διαδραστική γραφική αναπαράσταση στην οποία είναι δυνατός ο έλεγχος κάποιων παραμέτρων της συνάρτησης (π.χ. η σταθερά α στη συνάρτηση $f(x)=\alpha \cdot x$) είναι μία αναπαράσταση δράσης.

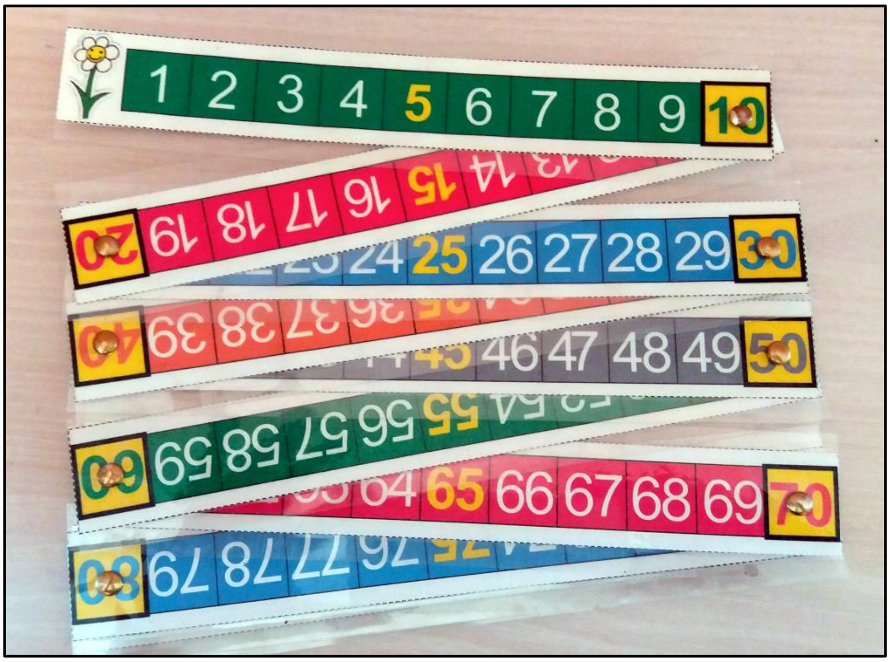
Αξίζει να επισημάνουμε ότι, οι αναπαραστάσεις δράσης δεν ταυτίζονται με τις διαδραστικές αναπαραστάσεις, που αναφέρθηκαν πιο πάνω (βλ. ταξινόμηση με βάση τις ιδιότητες του μέσου). Στην πραγματικότητα οι διαδραστικές αναπαραστάσεις είναι αναπαραστάσεις δράσης αλλά υπάρχουν και μη διαδραστικές αναπαραστάσεις (αδρανείς αναπαραστάσεις) που δρουν ως αναπαραστάσεις δράσης. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα αδρανούς αναπαράστασης που είναι ταυτόχρονα και αναπαράστασης δράσης, είναι η μεταβλητή. Παρόλο που εμφανίζεται με τη μορφή ενός γράμματος, δηλαδή η εξωτερική της μορφή δεν αλλάζει (αδρανής αναπαράσταση), εντούτοις είναι δυνατός ο αλγεβρικός χειρισμός της ως «αντικειμένου» (π.χ. πρόσθεση, αφαίρεση, ύψωση στο τετράγωνο). Οι Goldin και Kaput (1996) επισημαίνουν πως το σύστημα συμβόλων των Μαθηματικών είναι δομημένο ώστε να προσφέρει τη δυνατότητα χειρισμού του, αποτελείται δηλαδή από αναπαραστάσεις δράσης.

Τέλος, είναι δυνατή η μετατροπή μίας αναπαράστασης απεικόνισης σε αναπαράσταση δράσης, όταν το μέσο έκφρασης της αναπαράστασης προσφέρει διαδραστικές δυνατότητες (Goldin & Kaput, 1996). Τα Περιβάλλοντα Δυναμικής Γεωμετρίας (DGE) προσφέρουν τέτοιες εμπειρίες δράσης, π.χ. με τον χειρισμό παραμέτρων των γεωμετρικών σχημάτων (γωνίες, πλευρές, κ.α.) (Jones, 2000˙ Πατσιομίτου & Εμβαλωτής, 2009).

Από την ταξινόμηση των εξωτερικών αναπαραστάσεων που παρουσιάστηκε πιο πάνω συμπεραίνουμε ότι μία εξωτερική αναπαράσταση είναι δυνατόν να ανήκει ταυτόχρονα σε πολλές ταξινομήσεις, ανάλογα με το κριτήριο που ορίζουμε κάθε φορά. Έτσι, για παράδειγμα, μία αριθμογραμμή των φυσικών αριθμών, ως προς το μέσο με το οποίο εκφράζεται, μπορεί να θεωρηθεί μία στατική (δεν μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου), αδρανής (δεν προσφέρει δυνατότητες διάδρασης, δεν «απαντά» στις δράσεις του μαθητή) και ανεξίτηλη αναπαράσταση (συνήθως αποτυπώνεται σε χαρτί και έτσι μπορεί να διατηρηθεί σε βάθος χρόνου). Ως προς την ομοιότητά της με αυτό που αναπαριστά, είναι αναλογική διότι εκφράζει με αναλογία τη διάταξη των φυσικών αριθμών (δεν είναι άλλωστε δυνατή μία εικονιστική αναπαράσταση (βλ. πιο πάνω), δεδομένου ότι η διάταξη των αριθμών αποτελεί μία αφηρημένη έννοια). Με βάση το βαθμό τυποποίησής της, μπορούμε να τη χαρακτηρίσουμε τυποποιημένη, αν έχει εδραιωθεί στη σκέψη του παιδιού ως αποτέλεσμα της μαθηματικής εκπαίδευσης ή ως άτυπη αναπαράσταση, αν εμφανίζεται ως πηγαία ανάγκη του μαθητή να αναπαραστήσει τη διάταξη των φυσικών αριθμών. Τέλος, η αριθμογραμμή είναι μία αναπαράσταση δράσης, δεδομένου ότι παρέχει πρόσφορο έδαφος για πολλαπλή μαθηματική αξιοποίησή της. Με αυτή ο μαθητής μπορεί να εκτελέσει πράξεις πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού και διαίρεσης με διάφορες στρατηγικές, να συγκρίνει αριθμούς ή να την επεκτείνει.

Ταξινόμηση εξωτερικών αναπαραστάσεων βάσει πολλαπλών κριτηρίων Goldin & Kaput (1996)			
Κριτήριο	Χαρακτηρισμός	Περιγραφή	Παράδειγμα
Ιδιότητες του μέσου	***Στατικές***	Σταθερή μορφή στον χρόνο	Φωτογραφία
	Δυναμικές	Μεταβλητή μορφή στον χρόνο	Βίντεο
	Αδρανείς	Επιτρέπουν μόνο την εμφάνιση και την απόκρυψή τους	Γεωμετρικό σχήμα σε χαρτί
	Διαδραστικές	Επιτρέπουν τη διάδραση	Γεωμετρικό σχήμα σε Η/Υ με δυνατότητα τροποποίησης πλευρών/γωνιών
	Πρόσκαιρες	Σύντομη διάρκεια ζωής	Προφορικές λέξεις
	Ανεξίτηλες	Μεγάλη διάρκεια ζωής	Γραπτές λέξεις
Ομοιότητα με αυτό που αναπαριστούν	***Εικονιστικές***	Αισθητηριακή ομοιότητα με αυτό που αναπαριστούν	Μοντέλο αυτοκινήτου υπό κλίμακα
	Αναλογικές	Αναλογική ή μεταφορική ομοιότητα με αυτό που αναπαριστούν	Σχηματική αναπαράσταση της ισότητας με ζυγαριά
Βαθμός τυποποίησής τους	***Τυποποιημένες***	Παγιωμένες κλασικές αναπαραστάσεις	Η συμβολική αναπαράσταση f(x) για τη συνάρτηση
	Άτυπες	Αυτοσχέδιες αναπαραστάσεις	Το σύμβολο «✔» ως αναπαράσταση μίας μεταβλητής
Βαθμός δράσης ή χειρισμού	***Απεικόνισης***	Μειωμένες δυνατότητες δράσης πάνω στην αναπαράσταση	Γραφική παράσταση συνάρτησης σε χαρτί
	Δράσης	Αυξημένες δυνατότητες δράσης πάνω στην αναπαράσταση	Αριθμογραμμή

Πίνακας 2.1: Ταξινόμηση των εξωτερικών αναπαραστάσεων βάσει πολλαπλών κριτηρίων, σύμφωνα με τους Goldin & Kaput (1996). Με βάση αυτό το μοντέλο ταξινόμησης, μία εξωτερική αναπαράσταση μπορεί να ανήκει ταυτόχρονα σε περισσότερες από μία κατηγορίες.



Εικόνα 2.2: Μία αριθμογραμμή σε εμπράγματη αναπαράσταση (χειραπτικό αντικείμενο).

Οι Moreno-Armella, Hegedus, & Kaput (2008) παρουσιάζουν ένα μοντέλο πέντε σταδίων για να ερμηνεύσουν τη σταδιακή μετάβαση από τις στατικές εξωτερικές στις δυναμικές εξωτερικές αναπαραστάσεις. Το μοντέλο τους στηρίζεται στη διαχρονική πρόοδο των τεχνολογιών αναπαράστασης και το πρώτο στάδιο περιλαμβάνει τις «στατικές» και «αδρανείς» αναπαραστάσεις, οι οποίες αποτυπώνονταν σε υλικά όπως χαρτί, πάπυρος ή οστά και δεν μπορούσαν να μεταβληθούν διότι ενσωματώνονταν στο υλικό μέσο, όπως π.χ. το μελάνι στο χαρτί (ό.π.). Με την πρόοδο της τεχνολογίας, δόθηκε η δυνατότητα βελτίωσης των μεθόδων αναπαράστασης, καθώς κατέστη δυνατή η διαγραφή και η καλλιτεχνική επεξεργασία (π.χ. προσθήκη χρωμάτων) (ό.π.). Σε αυτό το στάδιο (δεύτερο στάδιο) τοποθετούνται, για παράδειγμα, οι αναπαραστάσεις σε πίνακα με μαρκαδόρο, στις οποίες προσφέρεται η δυνατότητα «κιναισθητικής/αισθητικής» επέμβασης (ό.π.). Στο τρίτο στάδιο, οι Moreno et al. (2008) τοποθετούν τις στατικές αναπαραστάσεις που παράγονται από υπολογιστικά μέσα. Οι αναπαραστάσεις αυτές, αποτελούν στατικές απαντήσεις υπολογιστών (π.χ. αριθμομηχανής) σε αιτήματα των χρηστών (π.χ. εκτέλεση της πράξης log9 + 7) (ό.π.). Η δυνατότητα που έχει κάποιος να αλληλεπιδρά με μία αναπαράσταση σε ένα υπολογιστικό σύστημα, αποτελεί το βασικό χαρακτηριστικό των «διακριτών δυναμικών» αναπαραστάσεων του τετάρτου σταδίου (ό.π.). Το υπολογιστικό σύστημα λαμβάνει ερεθίσματα από συγκεκριμένες (διακριτές) επεμβάσεις του χρήστη, π.χ. από την κίνηση μίας μπάρας που μεταβάλλει τον συντελεστή διεύθυνσης μίας ευθείας (ό.π.). Το πέμπτο και τελευταίο στάδιο, συγκροτούν οι «συνεχείς δυναμικές» αναπαραστάσεις. Σε αυτές, η αναπαράσταση επηρεάζεται από συνεχείς μεταβολές που προέρχονται από τον χρήστη, όπως, για παράδειγμα, η συνεχής μεταβολή του συντελεστή διεύθυνσης μίας ευθείας από την κίνηση των χεριών (ο.π.).

Ταξινόμηση εξωτερικών αναπαραστάσεων βάσει της ιστορικής εξέλιξης των τεχνολογικών μέσων Moreno-Armella et al. (2008)			
Στάδιο	Χαρακτηρισμός	Περιγραφή	Παράδειγμα
1ο	*Στατικές αδρανείς*	Στατικές αναπαραστάσεις χωρίς δυνατότητα τροποποίησης	Γραφή με μελάνη σε χαρτί/πάπυρο
2ο	*Στατικές κιναισθητικές/αισθητικές*	Στατικές αναπαρστάσεις με δυνατότητες τροποποίησης	Γραφή σε πίνακα με μαρκαδόρο
3ο	*Στατικές υπολογιστικές*	Στατικές αναπαραστάσεις που παράγονται από Η/Υ ύστερα από αίτημα του χρήστη	Γράφημα στο Microsoft Excel, SPSS, κτλ.
4ο	*Δυναμικές διακριτές*	Δυναμικές αναπαραστάσεις σε Η/Υ με ερεθίσματα από συγκεκριμένες (διακριτές) επεμβάσεις του χρήστη	Κατασκευή κανονικού ν-γώνου σε Η/Υ με δυνατότητα μεταβολής της μεταβλητής ν από δρομέα
5ο	*Δυναμικές συνεχείς*	Δυναμικές αναπαραστάσεις σε Η/Υ με ερεθίσματα από συνεχείς επεμβάσεις του χρήστη	Κατασκευή σχήματος σε Η/Υ από τις κινήσεις του χεριού του χρήστη

Πίνακας 2.2: Ταξινόμηση αναπαραστάσεων βάσει της ιστορικής εξέλιξης των τεχνολογικών μέσων κατά τους Moreno-Armella et al. (2008). Η πορεία εξέλιξης ακολουθεί ένα συνεχές που ξεκινά από τις στατικές και καταλήγει στις δυναμικές αναπαραστάσεις.

Τόσο στην ταξινόμηση των εξωτερικών αναπαραστάσεων των Moreno-Armella et al. (2008) όσο και στην ταξινόμηση των Goldin & Kaput (1996), εμφανίζεται ο όρος «δυναμική» αναπαράσταση. Για τους Goldin & Kaput δηλώνει περισσότερο τη δυνατότητα αλλαγής μορφής ως συνάρτηση του χρόνου (π.χ. βίντεο) ενώ για τους Moreno et al. φαίνεται πως δηλώνει τόσο τη δυνατότητα αλλαγής μορφής ως συνάρτηση του χρόνου όσο και την αίσθηση διάδρασης μεταξύ της αναπαράστασης και αυτού που τη χρησιμοποιεί. Στην παρούσα εργασία όταν θα γίνεται αναφορά στον όρο «δυναμική» αναπαράσταση, θα εννοείται η διττή ερμηνεία των Moreno-Armella et al.

Ο Van de Walle (2007, σελ. 70) χρησιμοποιεί τον όρο «μοντέλα» για να αναφερθεί στις εξωτερικές αναπαραστάσεις. Ορίζει το μοντέλο μίας έννοιας ως «οποιοδήποτε αντικείμενο, εικόνα ή σχέδιο [...] την αναπαριστά ή [...] στο οποίο μπορεί να επιβληθεί η σχέση για αυτή την έννοια». Επίσης, τονίζει ιδιαίτερα τις εκπαιδευτικές προεκτάσεις των μοντέλων και προτείνει κατάλληλες τεχνικές αξιοποίησης τους. Με το θέμα αυτό θα ασχοληθούμε εκτενώς στη συνέχεια.

Ολοκληρώνοντας την οριοθέτηση του όρου της αναπαράστασης, θα αναφερθούμε σύντομα στην άλλη μεγάλη κατηγορία αναπαραστάσεων, τις εσωτερικές. Οι εσωτερικές αναπαραστάσεις είναι αναπόσπαστο κομμάτι της Γνωστικής Ψυχολογίας και της Διδακτικής των Μαθηματικών και η μελέτη τους απαραίτητη για την κατανόηση του ρόλου των αναπαραστάσεων στον μηχανισμό της μάθησης (Πατσιομίτου & Εμβαλωτής, 2009). Ο Dreyfus (1991) τις ονομάζει «νοητικές αναπαραστάσεις» και υποστηρίζει πως είναι «εσωτερικά σχήματα ή πλαίσια αναφοράς τα οποία ένα άτομο χρησιμοποιεί για να αλληλεπιδράσει με τον εξωτερικό κόσμο» (σελ. 31). «Είναι αυτό που συμβαίνει στο μυαλό όταν σκεφτόμαστε για το συγκεκριμένο κομμάτι του εξωτερικού κόσμου», αναφέρει χαρακτηριστικά (ό.π.). Οι Goldin & Kaput(1996) τις περιγράφουν ως «πιθανές νοητικές προσαρμογές των ατόμων» (σελ. 399) που «κωδικοποιούνται στον ανθρώπινο εγκέφαλο και το νευρικό σύστημα» (σελ. 402). Οι Pape & Tchoshanov (2001) περιγράφουν τις εσωτερικές αναπαραστάσεις στα Μαθηματικά ως «αφαιρέσεις μαθηματικών ιδεών ή γνωστικών σχημάτων που αναπτύσσονται από τον μαθητή μέσω της εμπειρίας» (σελ. 119). Σε αντίθεση με τις εξωτερικές αναπαραστάσεις που βρίσκονται στα περιβάλλοντα των μαθητών, οι εσωτερικές αναπαραστάσεις αναπτύσσονται και εδράζονται στην σκέψη τους (Cobb et al., 1992, όπ. αναφ. στο Πατσιομίτου & Εμβαλωτής, 2008).

Από τους παραπάνω ορισμούς εξάγεται το συμπέρασμα ότι οι εσωτερικές αναπαραστάσεις είναι εσωτερικές νοητικές κατασκευές για το πώς πιθανόν είναι ο εξωτερικός κόσμος. Το στοιχείο αυτό τονίζει την υποκειμενικότητα των εσωτερικών αναπαραστάσεων, οι οποίες ενδέχεται να διαφέρουν λίγο έως σημαντικά μεταξύ τους για το ίδιο αντικείμενο ή έννοια του εξωτερικού κόσμου (Dreyfus, 1991). Ένα ακόμη ιδιαίτερο χαρακτηριστικό των εσωτερικών αναπαραστάσεων σε σχέση με τις εξωτερικές, είναι ότι η παρατήρησή τους είναι έμμεση (Goldin & Kaput, 1996). Όπως επισημαίνουν οι Goldin & Kaput (1996), οι ερευνητές και οι εκπαιδευτικοί εξάγουν συμπεράσματα για τις εσωτερικές αναπαραστάσεις των μαθητών από την εξωτερική συμπεριφορά τους (από τα λόγια και τις πράξεις τους) και η παρατήρηση αυτή είναι περισσότερο έμμεση παρά προφανής.

Οι εσωτερικές αναπαραστάσεις παρουσιάζουν σημαντική ομοιότητα με τις «νοητικές αναπαραστάσεις», όπως αυτές περιγράφηκαν από τον Johnson-Laird (Μικρόπουλος, 2009, σελ. 18 ˙ Πατσιομίτου & Εμβαλωτής, 2008, σελ. 256). Σύμφωνα με αυτόν οι νοητικές αναπαραστάσεις είναι τριών ειδών: α) «προτασιακές αναπαραστάσεις», β) «νοητικές εικόνες» και γ) «νοητικά μοντέλα» (Johnson-Laird, 2004, σελ. 187 ˙ Μικρόπουλος, 2009, σελ. 18). Οι προτασιακές αναπαραστάσεις είναι «αναπαραστάσεις που εκφράζονται λεκτικά» (Μικρόπουλος, 2009, σελ. 18), συνδέονται δηλαδή με τη γλώσσα. Αντίθετα, οι νοητικές εικόνες αποτελούν δυσδιάστατες εσωτερικές οπτικοποιήσεις ενός αντικειμένου από μία συγκεκριμένη οπτική γωνία (ό.π.). Τέλος, τα νοητικά μοντέλα είναι νοητικές κατασκευές, εικονικής κυρίως υφής, που περιλαμβάνουν και προτασιακές αναπαραστάσεις (ό.π.). Τα νοητικά μοντέλα είναι η πλουσιότερη από τις τρεις νοητικές αναπαραστάσεις, δεδομένου ότι συνδυάζουν εικονικά και προτασιακά χαρακτηριστικά.

Εκτός από τη συνάφεια με τις νοητικές αναπαραστάσεις του Johnson-Laird, οι εσωτερικές αναπαραστάσεις συνδέονται σημαντικά και με τα «σχήματα» του Ελβετού αναπτυξιακού ψυχολόγου Jean Piaget (Πατσιομίτου & Εμαβαλωτής, 2009). «Τα σχήματα είναι οργανωμένα πρότυπα σκέψης και πράξης, δηλαδή γνωστικές δομές και συμπεριφορά που συνιστούν μια οργανωμένη μονάδα […] και είναι ορθότερο να τα θεωρούμε ως εσωτερική αναπαράσταση των δραστηριοτήτων και των εμπειριών μας» (Elliott et al., 2008, σελ. 67).

2.2 Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις στη μάθηση και τη διδασκαλία των Μαθηματικών

Οι αναπαραστάσεις διαδραματίζουν ιδιαίτερα σημαίνοντα ρόλο στη μάθηση και τη διδασκαλία γενικά αλλά και των Μαθηματικών ειδικότερα, όπως φαίνεται από το εκτενές βιβλιογραφικό ενδιαφέρον (π.χ. Ainsworth, 1999 & 2006˙ Bruner, 1966 ˙ Dreyfus, 1991˙ Goldin & Kaput, 1996 ˙ Pape & Tchoshanov, 2001˙ Van de Walle, 2007 κ.α.). Οι επιρροή τους στην κατανόηση, την επικοινωνία, τη μαθηματική δικαιολόγηση και την επίλυση προβλημάτων κρίνεται θετική, όπως συμπεραίνουν οι Πατσιομίτου & Εμβαλωτής (2009).

Επιστημολογικά, η σύνδεση της μαθηματικής επιστήμης με τις αναπαραστάσεις είναι μείζονος σημασίας. Σε αντίθεση με άλλες επιστήμες όπως για παράδειγμα τη Βιολογία ή την Αστρονομία, στις οποίες η πρόσβαση στη γνώση είναι δυνατή τόσο μέσω αναπαραστάσεων όσο και μέσω άμεσης παρατήρησης των φυσικών φαινομένων, τα Μαθηματικά αντικείμενα είναι προσβάσιμα μόνο μέσω κατάλληλων αναπαραστατικών συστημάτων (Duval, 2006). Οι μαθητές καλούνται από τη μία να αξιοποιήσουν τις αναπαραστάσεις για να έχουν πρόσβαση στα μαθηματικά αντικείμενα αλλά από την άλλη χρειάζεται να ξεχωρίζουν τα μαθηματικά αντικείμενα από τις αναπαραστάσεις τους (ό.π.) Όμως, με τον τρόπο αυτό προκύπτει το παράδοξο της πρόσβασης στα μαθηματικά αντικείμενα, που διατυπώνει ο Duval

(2006): «πώς μπορούν να διακρίνουν [οι μαθητές] το αναπαριστώμενο [μαθηματικό] αντικείμενο από τη σημειωτική αναπαράσταση που χρησιμοποιείται αν δεν μπορούν να έχουν πρόσβαση στο μαθηματικό αντικείμενο πέρα από τη σημειωτικές αναπαραστάσεις;» (σελ. 107). Η ύπαρξη αυτού του παραδόξου, που πηγάζει από τη φύση της μαθηματικής επιστήμης, ενδεχομένως να ερμηνεύει την άποψη ότι «τα Μαθηματικά είναι δύσκολα προσβάσιμα». Επίσης, αναδεικνύει τον κομβικό ρόλο των αναπαραστάσεων ως θύρας εισόδου στην εννοιολογική κατανόηση των Μαθηματικών και συνεκδοχικά τον ουσιώδη ρόλο τους στη μαθηματική εκπαίδευση.

Το Εθνικό Συμβούλιο Διδασκόντων Μαθηματικών (NCTM) περιλαμβάνει τις αναπαραστάσεις στα πέντε βασικά «στάνταρ διαδικασίας» όλων των βαθμίδων της μαθηματικής εκπαίδευσης (Van de Walle, 2007). Σύμφωνα με αυτό, η μαθηματική εκπαίδευση είναι ορθό να προσφέρει στους μαθητές δυνατότητες (Van de Walle, 2007):

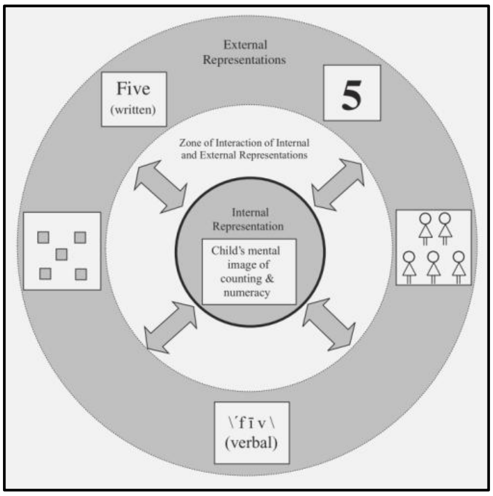
- να δημιουργούν και να χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις για να οργανώνουν, να καταγράφουν και να μεταδίδουν τις μαθηματικές ιδέες,
- να επιλέγουν, να εφαρμόζουν και να μεταφράζουν ανάμεσα σε μαθηματικές αναπαραστάσεις για να επιλύουν προβλήματα,
- να χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις για να μοντελοποιούν και να ερμηνεύουν φυσικά, κοινωνικά και μαθηματικά φαινόμενα. (σελ. 37)

Ενδεικτική της βαρύτητας που δίδεται στην αξιοποίηση των αναπαραστάσεων στη μαθηματική εκπαίδευση είναι και η αναφορά του Dreyfus (1991) στον συλλογικό τόμο «Μαθηματική Σκέψη Υψηλού Επιπέδου». Στο έργο αυτό, η αναπαράσταση συγκαταλέγεται, μαζί με τη μαθηματική αφαίρεση, στις νοητικές διεργασίες υψηλού επιπέδου που διατρέχει οριζόντια κάθε πτυχή της ενασχόλησης με τα Μαθηματικά.

Σύμφωνα με τους Zazkis & Liljedahl (2004), η λειτουργία των αναπαραστατικών συστημάτων στη μάθηση των Μαθηματικών είναι διττή. Από τη μία, αξιοποιούνται ως εργαλεία κατανόησης των μαθηματικών εννοιών και από την άλλη ως επικοινωνιακά εργαλεία (ο.π.). Ως εργαλεία εννοιολογικής κατανόησης οι αναπαραστάσεις συνδέονται με την «ικανότητα των μαθητών να εφαρμόζουν διάφορες αναπαραστάσεις και να επιλέγουν αυτή που ενδείκνυται για την προβληματική κατάσταση» (Zazkis & Liljedahl, 2004, σελ. 167). Επίσης, με τη χρήση διδακτικά αποτελεσματικών αναπαραστάσεων δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να υπερβούν διάφορα γνωστικά ή διδακτικά εμπόδια (Goldin & Shteingold, 2001, όπ. αναφ. στο Πατσιομίτου & Εμβαλωτής, 2009). Ως εργαλεία επικοινωνίας, οι αναπαραστάσεις αξιοποιούνται τόσο για την επικοινωνία ιδεών (π.χ. μέσω της οπτικοποίησης) όσο και για την επικοινωνία μεταξύ ατόμων (γλώσσα, μαθηματική δικαιολόγηση, κ.α.) (Zazkis & Liljedahl, 2004). Οι Scaife και Rogers (1996, όπ. αναφ. στο Ainsworth, 1999) περιγράφουν δύο ακόμη λειτουργίες των αναπαραστάσεων στη μάθηση των Μαθηματικών: α) τη μείωση του υπολογιστικού φόρτου του μαθητή (π.χ. εκτέλεση αλγορίθμων των πράξεων με συμβολικές αναπαραστάσεις) και β) τη δυνατότητα για εύληπτη παρουσίαση των πληροφοριών ενός προβλήματος (π.χ. γραφική παράσταση, γεωμετρικό σχήμα).

Τα οφέλη από την αξιοποίηση των αναπαραστάσεων στη μάθηση των Μαθηματικών δεν προκύπτουν αυτόματα (Ainsworth, 2006). Ο Van de Walle (2007) επισημαίνει πως αρκετές φορές οι εκπαιδευτικοί και οι μαθητές αδυνατούν «να δουν» το μαθηματικό υπόβαθρο μέσα στις αναπαραστάσεις, πολύ απλά γιατί οι εκπαιδευτικοί γνωρίζουν εκ των προτέρων τα «κρυμμένα Μαθηματικά» πίσω από τις αναπαραστάσεις ενώ οι μαθητές όχι. Η Ainsworth (2006) επισημαίνει τέσσερις απαραίτητες προϋποθέσεις για την επιτυχή αξιοποίηση των αναπαραστάσεων: οι μαθητές να κατανοούν α) τη μορφή της αναπαράστασης και β) τη σύνδεση της αναπαράστασης με το πλαίσιο του προβλήματος στο οποίο αξιοποιείται, καθώς και να μπορούν γ) να επιλέγουν τις κατάλληλες αναπαραστάσεις ανάλογα με το πρόβλημα που θέλουν να επιλύσουν και δ) να κατασκευάζουν σωστά την αναπαράσταση ή τις αναπαραστάσεις που έχουν επιλέξει.

Η μάθηση των Μαθηματικών στηρίζεται σημαντικά στην αλληλεπίδραση μεταξύ εξωτερικών και εσωτερικών αναπαραστάσεων (Goldin & Kaput, 1996˙ Goldin, 1998˙ Pape & Tchoshanov, 2008˙ Πατσιομίτου & Εμβαλωτής, 2009). Οι δύο τύποι αναπαραστάσεων αλληλεπιδρούν μέσω του μηχανισμού εσωτερίκευσης-εξωτερίκευσης (Πατσιομίτου & Εμβαλωτής, 2008). Από τη μία, με την εσωτερίκευση, οι μαθητές κωδικοποιούν πληροφορίες που προέρχονται από εξωτερικά ερεθίσματα και από την άλλη, με την εξωτερίκευση αποκωδικοποιούν τις εσωτερικές τους δομές σε εξωτερικά παρατηρήσιμες οντότητες (Pape & Tchoshanov, 2008). Η εσωτερίκευση και η εξωτερίκευση είναι δύο νοητικές διεργασίες που συχνά πραγματοποιούνται ταυτόχρονα (Goldin, 1996). Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις των μαθητών αποτελούν ενδείξεις της ποιότητας των μαθηματικών εσωτερικών τους δομών. Αυτό γιατί μία «[εξωτερική] αναπαράσταση, είναι εξωτερίκευση μιας εσωτερικής αναπαράστασης» (Πατσιομίτου & Εμβαλωτής, 2009, σελ. 254). Έτσι, για παράδειγμα, η κατασκευή ενός ορθού σχήματος στην προσπάθεια επίλυσης ενός προβλήματος αποτελεί ένδειξη της κατανόησης των εννοιών και των μαθηματικών σχέσεων που εμφανίζονται στο πρόβλημα (ό.π.). Επίσης, τα «εσωτερικά αναπαραστατικά συστήματα [που αναπτύσσει ο μαθητής] … επηρεάζονται από αλληλεπιδράσεις [του] με εξωτερικά συστήματα» (Goldin & Kaput, 1996, σελ. 425). Η στενή σχέση εσωτερικών και εξωτερικών αναπαραστάσεων στη μάθηση των Μαθηματικών φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Pape & Tchoshanov, 2008, σελ. 119).

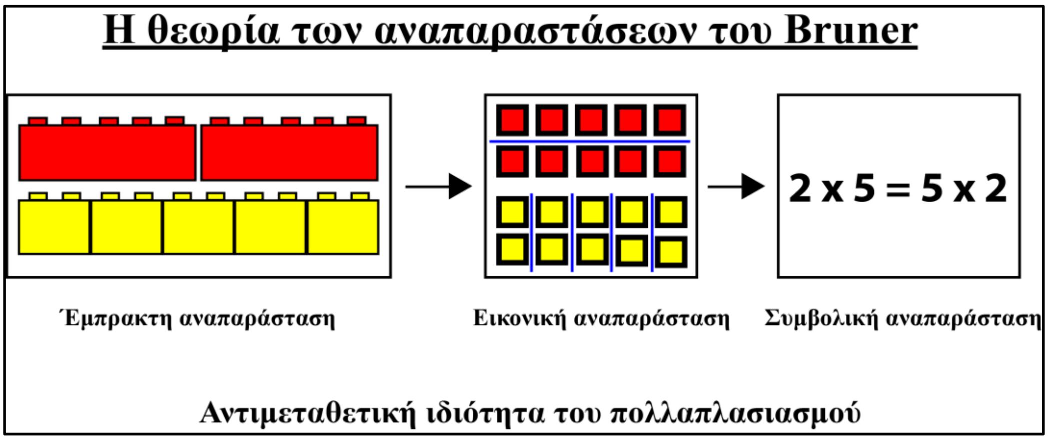


Εικόνα 2.3: Η αλληλεπίδραση εξωτερικών και εσωτερικών αναπαραστάσεων κατά τη μάθηση του αριθμού «5». Στον εξωτερικό δακτύλιο παρατηρούμε εξωτερικές αναπαραστάσεις της έννοιας «5» (πέντε τετράγωνα, πέντε γυναικείες φιγούρες, ο αριθμός πέντε εκφρασμένος γραπτά και προφορικά). Στον εσωτερικό κύκλο τοποθετούνται οι εσωτερικές αναπαραστάσεις του μαθητή για την έννοια «5» (νοητικές εικόνες, προτασιακές αναπαραστάσεις, κ.α.). Τα βέλη διπλής κατεύθυνσης δηλώνουν τον μηχανισμό της εσωτερίκευσης (προς το κέντρο) και εξωτερίκευσης (προς την περιφέρεια). Το σχήμα προέρχεται από τους Pape & Tchosanov (2008, σελ. 119).

Ο Bruner (1966) ανέπτυξε μία δημοφιλή θεωρία για τη μάθηση μέσω των αναπαραστάσεων, η οποία επεκτείνεται και στη μάθηση των Μαθηματικών. Υποστήριξε ότι σε κάθε φάση της ανάπτυξης του παιδιού, η γνώση αποκτάται από διαφορετικά είδη αναπαραστάσεων. Αρχικά, το παιδί μαθαίνει μέσω κιναισθητικών αναπαραστάσεων, δηλαδή μέσω φυσικών κινήσεων (ό.π.). Οι αναπαραστάσεις αυτές αποκαλούνται «έμπρακτες» (“enactive”) και χαρακτηρίζονται από φυσική δράση πάνω στα αντικείμενα του φυσικού κόσμου (ό.π.). Στη συνέχεια, το παιδί βασίζεται όλο και περισσότερο σε «εικονικές» (“iconic”) αναπαραστάσεις, που είναι «περιληπτικές εικόνες ή γραφικά που αντιπροσωπεύουν μία έννοια χωρίς να την ορίζουν πλήρως» (Bruner, 1966, σελ. 44). Τελικά, η μάθηση και η αναφορά σε ιδέες ή αντικείμενα του φυσικού κόσμου στηρίζονται κυρίως σε σύμβολα, δηλαδή στις «συμβολικές» (“symbolic”) αναπαραστάσεις (ό.π.). Στο συμβολικό στάδιο, περιλαμβάνονται η φυσική γλώσσα και τα διάφορα «προτασιακά» σύμβολα (ό.π.).

Ο Bruner (1966) διατυπώνει την άποψη ότι, αν η θεωρία του για τη μάθηση μέσω αναπαραστάσεων είναι ορθή, τότε τα διδακτικά μοντέλα (και των Μαθηματικών) είναι σωστό να ξεκινούν από τις έμπρακτες αναπαραστάσεις, να συνεχίζουν στις εικονικές και να καταλήγουν στις συμβολικές αναπαραστάσεις. Επίσης, υποστηρίζει πως όταν το συμβολικό σύστημα αναπαραστάσεων είναι καλά ανεπτυγμένο, τότε είναι δυνατή η παράκαμψη των δύο πρώτων σταδίων (ό.π). Βέβαια, αυτό γίνεται με το κίνδυνο ο μαθητής να μην κατέχει το απαραίτητο «οπλοστάσιο» νοητικών εικόνων για να «προστρέχει όταν οι συμβολικές αναπαραστάσεις αποτυγχάνουν να εκπληρώσουν τον στόχο τους στην επίλυση ενός προβλήματος» (Bruner, 1966, σελ. 49).

Η θεωρία του Bruner για τις αναπαραστάσεις έχει επηρεάσει διάφορα μοντέλα διδασκαλίας των Μαθηματικών, ένα από τα οποία είναι και το μοντέλο CPA (Hoong, Cheng, & Pien, 2015). Το όνομα “CPA” είναι ακρωνύμιο των λέξεων “Concrete, Pictorial, Abstract” (ό.π.). Το μοντέλο εφαρμόζεται με επιτυχία στη μαθηματική εκπαίδευση των μαθητών στη Σιγκαπούρη κυρίως στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση και το Γυμνάσιο (ό.π.). Στην παρακάτω εικόνα, βλέπουμε ένα παράδειγμα εφαρμογής της θεωρίας του Bruner για τις αναπαραστάσεις με σκοπό τη διδασκαλία/μάθηση της αντιμεταθετικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού.



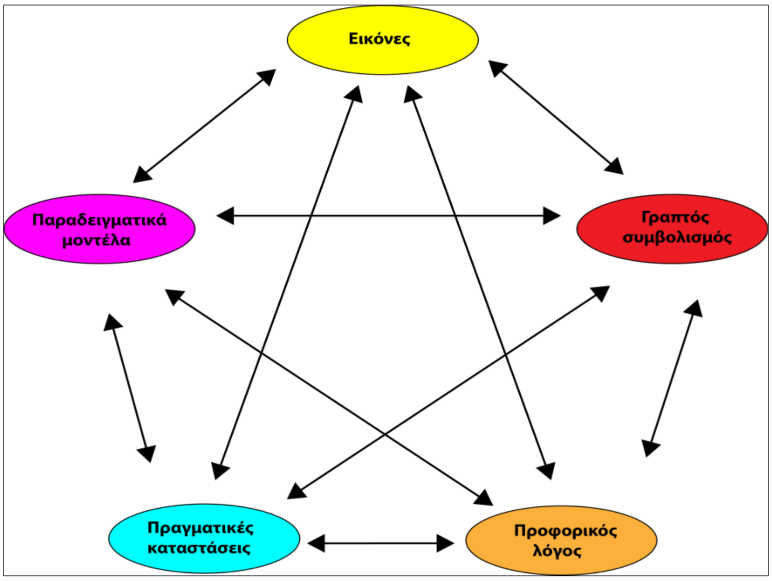
Εικόνα 2.4: Κατά τον Bruner, η μάθηση ξεκινά από τις έμπρακτες αναπαραστάσεις, συνεχίζεται με τις εικονικές και καταλήγει στις συμβολικές. Στην εικόνα παρατηρούμε την πορεία που μπορεί να ακολουθηθεί για τη διδασκαλία της αντιμεταθετικής ιδιότητας σε μικρούς μαθητές.

Αρκετοί είναι οι ερευνητές που επισημαίνουν τον ρόλο των πολλαπλών αναπαραστάσεων στη μάθηση των Μαθηματικών (Goldin, 1996 ˙ Πατσιομίτου & Εμβαλωτής, 2009 ˙ Ainsworth, 1999 ˙ Ainsworth, 2006 ˙ Van de Walle, 2007 ˙ Dreyfus, 1991 ˙ Lesh, Post, & Behr, 1987). Μιλώντας για πολλαπλές αναπαραστάσεις, εννοούμε την πολλαπλή εφαρμογή της έννοιας σε διάφορα είδη αναπαραστάσεων (π.χ. η έννοια του ρόμβου σε χειραπτικό αντικείμενο, σχήμα, κιναισθητική αναπαράσταση, γλωσσική αναπαράσταση, κ.α.). Σύμφωνα με τους Πατσιομίτου και Εμβαλωτή (2009) τα σχετικά αποτελέσματα ερευνών από την αξιοποίηση των πολλαπλών εξωτερικών αναπαραστάσεων (Multiple External Representations – MERs) δείχνουν ότι η χρήση τους κατά τη μάθηση των Μαθηματικών «ενδυναμώνει την κατανόηση των εννοιών, βελτιώνει την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων και ενισχύει τη μαθησιακή διαδικασία» (σελ. 258). Κατά τον Dreyfus (1991) οι πολλαπλές εσωτερικές αναπαραστάσεις για μία έννοια είναι δείγμα υψηλής μαθηματικής ικανότητας. Συνεπώς, ο εμπλουτισμός της διδασκαλίας των Μαθηματικών με πολλαπλές εξωτερικές αναπαραστάσεις συνδέεται στενά με τη δημιουργία πολλαπλών εσωτερικών αναπαραστάσεων. Η ικανότητα εναλλαγής εξωτερικών αναπαραστάσεων από τον μαθητή κατά τη μαθηματική του δραστηριότητα αποτελεί επίσης ένδειξη αποτελεσματικής κατανόησης των μαθηματικών εννοιών (Hoong et al., 2015).

Η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων, εκτός από μαθησιακή στρατηγική για την κατανόηση και επίλυση μαθηματικών θεμάτων, αποτελεί σημαντική διδακτική στρατηγική για τον ίδιο τον ίδιο τον εκπαιδευτικό. Κατά τον Brophy (1991), οι αποτελεσματικοί εκπαιδευτικοί διαθέτουν ένα «ρεπερτόριο» πολλαπλών αναπαραστάσεων από το οποίο αντλούν τις κατάλληλες, ώστε να ανταποκριθούν σε σχόλια ή ερωτήσεις των μαθητών και να παράσχουν εναλλακτικές εξηγήσεις σε μαθητές που χρειάζονται περισσότερη ενασχόληση για να κατανοήσουν θέματα της ύλης. Η επισήμανση αυτή εντάσσεται στο πλαίσιο της «διαφοροποιημένης διδασκαλίας», σύμφωνα με την οποία ο εκπαιδευτικός προσαρμόζει τις διδακτικές του στρατηγικές στο ιδιαίτερο μαθησιακό προφίλ του κάθε μαθητή.

Η ύπαρξη πολλαπλών αναπαραστάσεων από μόνη της δεν εξασφαλίζει ούτε την κατανόηση μαθηματικών εννοιών, ούτε την αξιοποίησή τους στην επίλυση προβλημάτων (Dreyfus, 1991). Αντίθετα, το όφελός τους καθίσταται αξιοποιήσιμο όταν συνδέονται «σωστά και ισχυρά» (Dreyfus, 1991, σελ 32). Σημαντικό ζητούμενο κατά την αξιοποίηση των πολλαπλών αναπαραστάσεων είναι η ικανότητα «μετάφρασης» μίας έννοιας από τη μία αναπαράσταση στην άλλη (Dreyfus, 1991, σελ. 33). Ο ρόλος των πολλαπλών αναπαραστάσεων αλλά και των μεταξύ τους μεταφράσεων, τονίζεται από τη σχετική αναφορά του NCTM (Εθνικό Συμβούλιο Διδασκόντων Μαθηματικών), σύμφωνα με την οποία στους μαθητές θα πρέπει να δίνεται η δυνατότητα να «επιλέγουν, να εφαρμόζουν και να *μεταφράζουν* ανάμεσα σε αναπαραστάσεις για να επιλύουν προβλήματα» (Van de Walle, σελ. 37). Η μετάφραση μεταξύ πολλαπλών αναπαραστάσεων αλλά και η ευέλικτη αξιοποίησή τους στη μάθηση και τη διδασκαλία των Μαθηματικών δεν είναι πάντοτε μία εύκολη διαδικασία για τους μαθητές (Even, 1998 ˙ Pape & Tchoshanov, 2001 ˙ Ainsworth, 2006).

Οι Lesh, Post και Behr (1987, όπ. αναφ. στο Van de Walle, 2007, σελ. 72) προτείνουν ένα μοντέλο μάθησης με πολλαπλές εξωτερικές αναπαραστάσεις στο οποίο κεντρικό ρόλο έχουν οι μεταξύ τους «μεταφράσεις». Το μοντέλο τους αποτελείται από τις εξής πέντε μορφές αναπαράστασης των εννοιών: α) πραγματικές καταστάσεις, β) παραδειγματικά μοντέλα (χειραπτικά αντικείμενα), γ) εικόνες, δ) γραπτός συμβολισμός και ε) προφορικός λόγος. Σε αντίθεση με τη θεωρία του Bruner, η σύνδεση μεταξύ των διαφόρων μορφών αναπαράστασης είναι αμφίδρομη παρά γραμμική (τα βέλη είναι διπλής κατεύθυνσης και συνδέουν με κάθε δυνατό τρόπο τις αναπαραστάσεις) (Behr, Post, & Lesh, 1981, όπ. αναφ στο Πατσιομίτου & Εμβαλωτής, 2009).



Εικόνα 2.5: Το μοντέλο των Lesh, Post, & Behr για τις πολλαπλές αναπαραστάσεις και τις διασυνδέσεις τους (προσαρμογή σχήματος από τον Van de Walle (2007, σελ. 72).

Η Ainsworth (1999 & 2006) συνοψίζει τις λειτουργίες των πολυαναπαραστατικών συστημάτων (Multiple External Representations, MERs) σε τρεις. Η πρώτη λειτουργία εμφανίζεται όταν κάποιες αναπαραστάσεις δρουν επικουρικά ως προς τις υπόλοιπες (ό.π.). Στην λειτουργία αυτή οι αναπαραστάσεις παρουσιάζουν στον μαθητή επιπλέον πληροφορίες ή περαιτέρω διαδικασίες, τις οποίες μπορεί να αξιοποιήσει για την επίλυση των προβλημάτων (ό.π.). Η δεύτερη λειτουργία των πολλαπλών εξωτερικών αναπαραστάσεων έγκειται στο γεγονός ότι ορισμένες από τις αναπαραστάσεις χρησιμοποιούνται για την κατανόηση άλλων (ό.π.). Η τρίτη, και πιο σημαντική για την παρούσα εργασία, λειτουργία είναι αυτή της υποστήριξης της βαθύτερης κατανόησης στα Μαθηματικά (ό.π.). Με τον τρόπο αυτό, οι MERs προσφέρονται για την κατασκευή αφαιρετικών νοητικών μοντέλων, τη μεταφορά της γνώσης σε άλλες μορφές αναπαραστάσεων αλλά και για την κατανόηση της σύνδεσης δύο μορφών αναπαράστασης (ό.π.). Η αξιοποίηση των πολλαπλών εξωτερικών αναπαραστάσεων στην υποστήριξη της μαθηματικής αφαίρεσης περιγράφεται εκτενέστερα στο υποκεφάλαιο 3.1.

Η αξιοποίηση των πολλαπλών εξωτερικών αναπαραστάσεων στη μάθηση και τη διδασκαλία των Μαθηματικών εξαρτάται από μία σειρά παραγόντων (Ainsworth, 1999). Αυτοί είναι:

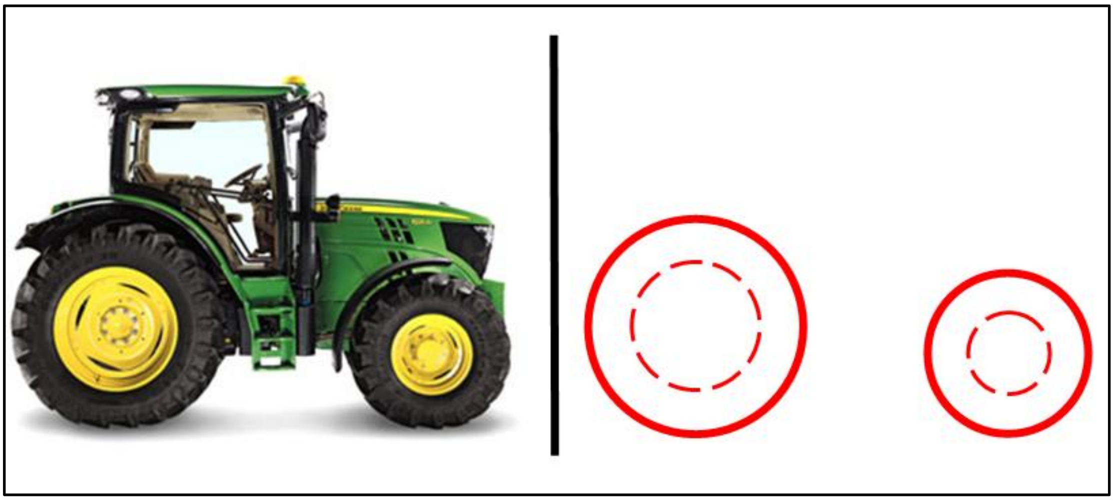
- ο αριθμός τους,
- το είδος τους (εμπράγματες, εικονικές, συμβολικές, κτλ.),
- ο τρόπος διανομής της πληροφορίας μεταξύ τους,
- η σειρά παρουσίασής τους και
- η δυνατότητα για τις μεταξύ τους μεταφράσεις.

Ως προς τον αριθμό των αναπαραστάσεων, η Ainsworth (2006) προτείνει την αξιοποίηση τόσων αναπαραστάσεων όσες χρειάζονται για την επίτευξη των παιδαγωγικών στόχων, έτσι ώστε ο μαθητής να έχει την ευκαιρία να ωφελείται γνωστικά χωρίς όμως να υπερφορτώνεται (π.χ. διάσπαση προσοχής).

Μία από τις σημαντικότερες λειτουργίες των αναπαραστατικών συστημάτων στη μάθηση και τη διδασκαλία των Μαθηματικών είναι η δυνατότητα οπτικοποίησης τους(visualisation). Γενικά, η οπτικοποίηση νοείται ως η διαδικασία οπτικής αναπαράστασης πληροφοριών με τη μορφή εσωτερικών (π.χ. νοητικές εικόνες) αλλά και εξωτερικών αναπαραστάσεων (Bishop, 1988). Νοούμενη ως εξωτερική εικονική αναπαράσταση, η οπτικοποίηση εμφανίζεται στα Μαθηματικά με τη μορφή εικόνων, σχημάτων, γραφημάτων, χειραπτικών αντικειμένων κτλ., που αισθητοποιούν μαθηματικά νοήματα, αξιοποιώντας την ισχυρή αναπαραστατική λειτουργία της εικόνας.

Τα οφέλη που προκύπτουν από την οπτικοποίηση των Μαθηματικών πιθανότατα συνηγορούν υπέρ τη αξιοποίησής της στη μάθηση και τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Σε μία μετριοπαθή αποτίμηση του ρόλου της οπτικοποίησης στη μαθηματική εκπαίδευση, η Presmeg (1986) υποστηρίζει ότι ωφελεί κυρίως τους μαθητές, των οποίων το μαθησιακό προφίλ βασίζεται στη μάθηση μέσω εικόνων. Οι Gersten, Chard, Jayanthi, Baker, Morphy, & Flojo (2009), συνοψίζοντας τα αποτελέσματα διαφόρων ερευνών στη μετα-ανάλυση τους, αποφαίνονται ότι οι εικονικές αναπαραστάσεις επιδρούν, υπό προϋποθέσεις, θετικά στη μάθηση και τη διδασκαλία των Μαθηματικών σε μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες. Σε μία νεότερη προσέγγιση από τους Boaler, Chen, Williams, & Cordero (2016) τα «Οπτικά Μαθηματικά» (Visual Math) διαδραματίζουν κομβικό ρόλο στη μαθηματική εκπαίδευση, διότι σύμφωνα με την ανατομία του ανθρώπινου εγκεφάλου, η αναπαράσταση της έννοιας της ποσότητας πραγματοποιείται κυρίως στην οπίσθια οπτική οδό, μία περιοχή στο άνω οπίσθιο τμήμα του εγκεφάλου που είναι υπεύθυνη για την επεξεργασία οπτικών και χωρικών ερεθισμάτων. Οι ίδιοι ερευνητές διατείνονται ότι η αξιοποίηση εικονικών αναπαραστάσεων στη μαθηματική εκπαίδευση δύναται να εξομαλύνει τις διαφορές στην επίδοση που παρατηρούνται μεταξύ των μαθητών στο μάθημα των Μαθηματικών.

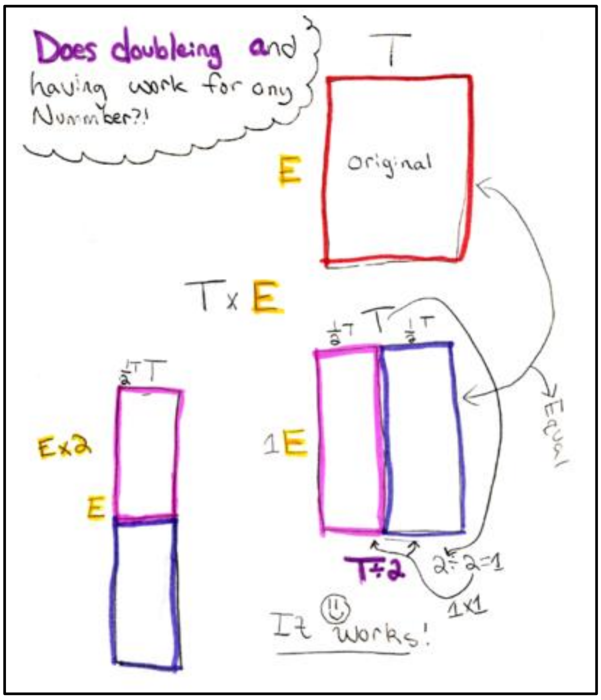
Η αποτελεσματική λειτουργία των εικονικών αναπαραστάσεων στη μαθηματική εκπαίδευση εξαρτάται από ορισμένους παράγοντες (Presmeg, 1986). Ο συνδυασμός εικονικών αναπαραστάσεων με άλλου είδους αναπαραστάσεις, στο πλαίσιο των πολλαπλών αναπαραστάσεων, μεγιστοποιεί τη θετική επίδραση των πρώτων στη μάθηση των Μαθηματικών από μαθητές με (Gersten et al., 2009) ή χωρίς (Presmeg, 1986) μαθησιακές δυσκολίες. Η Presmeg (1986) επισημαίνει τον κίνδυνο που ελλοχεύει από την εσφαλμένη ερμηνεία εικονικών αναπαραστάσεων που αναπαριστούν μόνο μία περίπτωση μίας έννοιας (π.χ. τα ισόπλευρα τρίγωνα ως αναπαράσταση όλων των τριγώνων) και προτείνει τον ευέλικτο συνδυασμό με άλλες αναπαραστάσεις για την αποφυγή παρανοήσεων. Οι Gersten et al. (2009) υποστηρίζουν την άποψη ότι η αξιοποίηση εικονικών αναπαραστάσεων που είναι εξειδικευμένες για την επίλυση συγκεκριμένων προβλημάτων παράγει καλύτερα μαθησιακά αποτελέσματα από λιγότερο εξειδικευμένες, για τα προβλήματα αυτά, εικονικές αναπαραστάσεις. Οι λιτές εικονικές αναπαραστάσεις που δεν περιέχουν μεγάλο όγκο πληροφοριών φαίνεται πως είναι περισσότερο αποτελεσματικές στη μαθηματική εκπαίδευση διότι παρέχουν τη δυνατότητα για εστίαση σε συγκεκριμένα χαρακτηριστικά και είναι περισσότερο διαχειρίσμες από τους μαθητές (Presmeg, 1986). Οι Hegarty & Kozhevnikov (1999) παρατήρησαν ότι τα σχήματα, στα οποία πρωτεύοντα ρόλο είχε η απεικόνιση χωρικών σχέσεων, υποβοηθούν πιο αποτελεσματικά τους μαθητές στην επίλυση προβλημάτων από τις εικόνες, στις οποίες η έμφαση δίνεται στην απεικόνιση της εμφάνισης αντικειμένων. Τέλος, οι εικονικές αναπαραστάσεις που παρέχουν τη δυνατότητα για κωδικοποίηση πληροφοριών υποστηρίζουν τη νοητική λειτουργία της μαθηματικής αφαίρεσης και η αξιοποίησή τους ενδείκνυται για τη μάθηση μάθηση και τη διδασκαλία των Μαθηματικών (Presmeg, 1987).



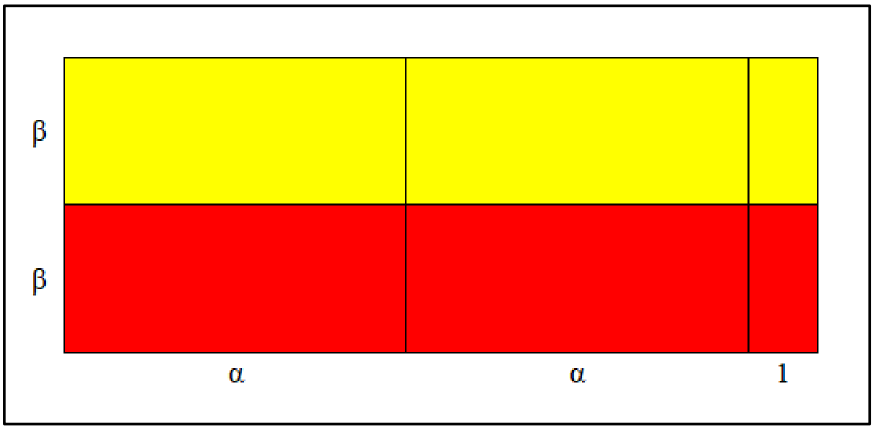
Εικόνα 2.6: Μία λιτή εικονική αναπαράσταση με τη μορφή σχήματος στο οποίο αποτυπώνονται οι χωρικές σχέσεις (δεξιά) είναι πιο αποτελεσματική στη διδασκαλία των Μαθηματικών από μία λεπτομερέστερη, στην οποία η έμφαση δίνεται στη ρεαλιστική απεικόνιση (αριστερά).

Η οπτικοποίηση των Μαθηματικών μπορεί να αξιοποιηθεί ως πρόσφορο μαθησιακό και διδακτικό εργαλείο για τη μαθηματική δικαιολόγηση στις μικρές ηλικίες. Οι Russell, Schifter, & Bastable (2011) χρησιμοποιούν τον όρο «απόδειξη βασισμένη σε αναπαράσταση» (“representation-based proof”) για να αναφερθούν στην προσπάθεια μικρών μαθητών για μαθηματική δικαιολόγηση με τη βοήθεια εικονικών ή εμπράγματων αναπαραστάσεων. Στην έρευνα τους, μαθητές ηλικίας 11 ετών κλήθηκαν να δικαιολογήσουν χρησιμοποιώντας σχήματα τον γενικό ισχυρισμό ότι σε ένα γινόμενο δύο παραγόντων ο πολλαπλασιασμός του ενός παράγοντα με το 2 και η διαίρεση του άλλου με τον ίδιο αριθμό, δεν μεταβάλλει συνολικά το γινόμενο (βλ. εικόνα 2.7).

Η συνειδητοποίηση της αξίας της δικαιολόγησης με γενικούς ισχυρισμούς αποτελεί βασικό χαρακτηριστικό της μαθηματικής δραστηριότητας. Ωστόσο, η σημαντικότητά της δεν γίνεται εύκολα αντιληπτή από τους μαθητές, οι οποίοι είτε δεν γνωρίζουν τι σημαίνει η διατύπωση ενός γενικού ισχυρισμού είτε, στην καλύτερη των περιπτώσεων, αρκούνται στην επιβεβαίωση της ισχύος μίας γενικής διατύπωσης χρησιμοποιώντας συγκεκριμένα παραδείγματα (Russell et al., 2011). Όμως, γιατί η μαθηματική δικαιολόγηση με εικονικές αναπαραστάσεις ενδείκνυται για τις μικρές ηλικίες; Οι Russell et al. (2011) υποστηρίζουν ότι οι μικροί μαθητές δεν κατέχουν ακόμα τη δυνατότητα αξιοποίησης αλγεβρικών χειρισμών με συμβολικές αναπαραστάσεις και καταφεύγουν στα οικεία για αυτούς συστήματα αναπαράστασης, δηλαδή σε εικόνες, χειραπτικά αντικείμενα ή πλαίσια ιστοριών. Αν επιπλέον συνυπολογίσουμε τα θετικά μαθησιακά αποτελέσματα που προκύπτουν από την αξιοποίηση της οπτικοποίησης στη μαθηματική εκπαίδευση, η απόδειξη βασισμένη σε οικείες αναπαραστάσεις, αναδεικνύεται ως ισχυρή μαθησιακή και διδακτική στρατηγική για τη μαθηματική δικαιολόγηση στις μικρές ηλικίες. Για να καταφέρνουν, όμως, οι μαθητές να αξιοποιούν ορθά την απόδειξη με οικεία σε αυτά αναπαραστατικά συστήματα, είναι απαραίτητο να κατανοούν τον μηχανισμό με τον οποίο οι εξωτερικές αναπαραστάσεις «ενσαρκώνουν» μαθηματικές έννοιες και αντικείμενα που εξ ορισμού είναι αφηρημένα (εμβαδόν, μήκος, λόγος, αναλογία, αντιμεταθετική ιδιότητα κ.α.) (Russell et al., 2011˙ Van de Walle, 2007).



Εικόνα 2.7: Αναπαράσταση μαθήτριας ηλικίας 11 ετών για την απόδειξη της μαθηματικής πρότασης ότι σε ένα γινόμενο δύο παραγόντων ο διπλασιασμός του ενός παράγοντα και ο υποδιπλασιασμός του άλλου δεν μεταβάλλουν το γινόμενό τους. Η μαθήτρια πραγματοποίησε την αντιστοίχιση των παραγόντων με τις πλευρές ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου και του γινομένου με το εμβαδόν του σχήματος. Η εικόνα προέρχεται από την έρευνα των Russell et al., (2011).



Εικόνα 2.8: Απόδειξη βασισμένη σε εικονική αναπαράσταση για την πρόταση «το γινόμενο ενός άρτιου και ενός περιττού αριθμού είναι πάντοτε άρτιος αριθμός». Ο περιττός αριθμός αντιστοιχεί στο μήκος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου (2α +1) και ο άρτιος στο πλάτος του (2β). Σύμφωνα με την παραπάνω εικόνα, το εμβαδόν της περιοχής (με κόκκινο και κίτρινο χρώμα), δηλαδή το γινόμενο του άρτιου και του περιττού αριθμού ισούται με 2 φορές την ίδια ποσότητα (κόκκινη ή κίτρινη περιοχή), δηλαδή είναι πολλαπλάσια του 2. Επομένως, το γινόμενο ενός άρτιου και ενός περιττού αριθμού είναι πάντοτε άρτιος αριθμός.

Η εξάντληση των ζητημάτων που σχετίζονται με τον ρόλο των αναπαραστάσεων στη μάθηση και τη διδασκαλία των Μαθηματικών δεν θα ήταν εφικτή μέσα στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας. Ωστόσο, επιχειρήθηκε μία συνοπτική παρουσίαση ορισμένων βασικών θεμάτων που απασχολούν τη σχετική βιβλιογραφία. Η παρούσα εργασία εστιάζει στον ρόλο των εξωτερικών αναπαραστάσεων στη μαθηματική αφαίρεση και ως εκ τούτου το επίκεντρο του ενδιαφέροντος για τα επόμενα δύο κεφάλαια, θα βρίσκεται γύρω από το θέμα αυτό.

Κεφάλαιο 3

Εξωτερικές αναπαραστάσεις και μαθηματική αφαίρεση

«[…]Ένα παραλληλόγραμμο ορίζεται ως ένα τετράπλευρο με τις απέναντι πλευρές του παράλληλες. Αν και το σχήμα μπορεί να μεταβληθεί με τη μεταβολή του μήκους των πλευρών ή του μέτρου των γωνιών, η παραλληλία των απέναντι πλευρών παραμένει το κοινό δομικό χαρακτηριστικό όλων των παραλληλογράμμων».

(Πατσιομίτου & Εμβαλωτής, 2009, σελ. 258)

3.1 Τα χαρακτηριστικά των εξωτερικών αναπαραστάσεων που υποβοηθούν τον μαθητή στη μαθηματική αφαίρεση

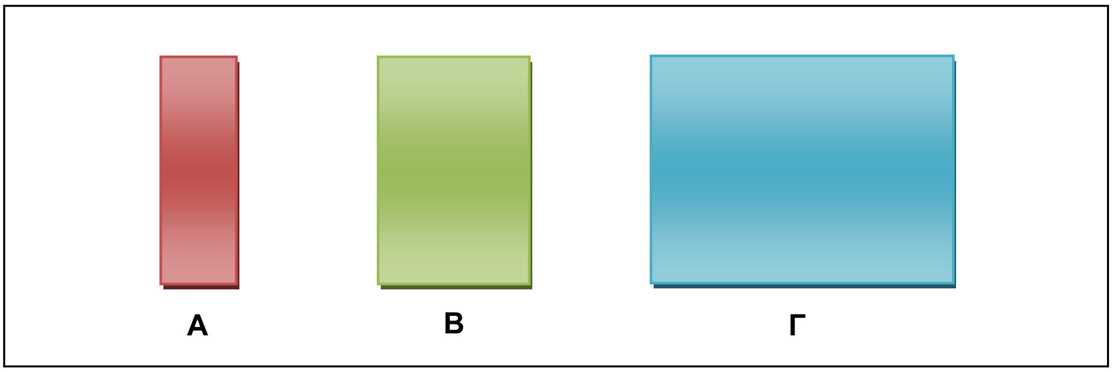
Η μαθηματική αφαίρεση αποτελεί σημαντική νοητική διεργασία στη μαθηματική δραστηριότητα και, όπως ήδη αναφέρθηκε στο πρώτο κεφάλαιο, η σχετική έρευνα δείχνει ότι είναι προσβάσιμη ήδη από τις μικρές ηλικίες. Παράλληλα, ο ρόλος των εξωτερικών αναπαραστάσεων στη μάθηση και τη διδασκαλία των Μαθηματικών έχει κατά καιρούς βρεθεί στο κέντρο του ενδιαφέροντος αρκετών ερευνητών, οι οποίοι με τις θεωρίες και τα συμπεράσματά τους προτείνουν κατάλληλες διδακτικές στρατηγικές για την αποτελεσματική αξιοποίηση των αναπαραστάσεων στα Μαθηματικά (βλ. 2^{ο} κεφάλαιο). Ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη και ο προσδιορισμός εκείνων των χαρακτηριστικών των αναπαραστάσεων που υποβοηθούν τον μαθητή στην προσπάθειά του να πραγματοποιήσει μαθηματικές αφαιρέσεις. Τα χαρακτηριστικά αυτά θα προσπαθήσουμε να σκιαγραφήσουμε στο παρόν υποκεφάλαιο.

Ένα πλήθος ερευνητών έχει ασχοληθεί με τον προσδιορισμό και την ανάλυση των χαρακτηριστικών των αναπαραστάσεων που υποβοηθούν τον μαθητή στην ανάπτυξη της μαθηματικής αφαιρετικής σκέψης (π.χ. Ainsworth, 2006˙ Lesh, Post, & Behr, 1987˙ Sriraman, 2005) ενώ καθοριστική είναι η συνεισφορά του Ούγγρου μαθηματικού και εκπαιδευτικού των Μαθηματικών Zoltán Pál Dienes (1916-2014), ο οποίος φαίνεται πως επηρέασε τους περισσότερους. Αν και ο Dienes είναι παιθανότατα πιο γνωστός για τους περίφημους κύβους του (χειραπτικό υλικό για την κατανόηση του δεκαδικού αριθμητικού συστήματος), η θεωρία που ανέπτυξε για τη μάθηση και τη διδασκαλία των Μαθηματικών είναι πιθανώς λιγότερο γνωστή. Στη θεωρία του, η οποία δομείται επί τεσσάρων βασικών αρχών, ο ρόλος των εξωτερικών αναπαραστάσεων κατέχει δεσπόζουσα θέση. Οι τέσσερις αρχές της θεωρίας του Dienes, που αφορούν άμεσα τη μάθηση μέσω αναπαραστάσεων, είναι οι εξής (Sriraman, 2005):

- η κατασκευαστική αρχή,
- η αρχή της αντιληπτικής μεταβλητότητας,
- η αρχή της πολλαπλής ενσωμάτωσης,
- η δυναμική αρχή.

Οι τρεις τελευταίες αρχές θα αναλυθούν εκτενώς στη συνέχεια, στο πλαίσιο των χαρακτηριστικών των αναπαραστάσεων που υποβοηθούν τον μαθητή στην καλλιέργεια της μαθηματικής αφαίρεσης. Αξίζει, όμως, να εστιάσουμε αρχικά στην πρώτη, η οποία φαίνεται πως διέπει όλες της υπόλοιπες. Σύμφωνα με την κατασκευαστική αρχή, οι μαθηματικές έννοιες κατασκευάζονται (οικοδομούνται) μέσα από την ενεργό εμπλοκή του ατόμου σε εμπράγματες αναπαραστάσεις της έννοιας (Sriraman, 2015). Με τον τρόπο αυτό ο μαθητής πραγματοποιεί αναστοχαστικές αφαιρέσεις μέσα από φυσικές και νοητικές ενέργειές του σε εμπράγματες αναπαραστάσεις, κάτι που τον οδηγεί στη δόμηση των εννοιών και στη συνειδητοποίηση των διαφόρων μαθηματικών σχέσεων (ό.π.). Ωστόσο, οι εμπράγματες αναπαραστάσεις αυτές καθαυτές δεν είναι φορείς μαθηματικών νοημάτων και η μαθηματική αφαίρεση δεν πραγματοποιείται απευθείας από αυτές (Lesh, Post, & Behr, 1987˙ Van de Walle, 2007). Αντίθετα, ο μαθητής ή ο εκπαιδευτικός είναι αυτοί που «επιβάλλουν» πάνω τους μαθηματικό νόημα (ο.π.). Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτής της αρχής δίνει ο Van de Walle (2007):

> […] Το σχήμα Α είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Αν, όμως ονομάσουμε το σχήμα Β «μονάδα» ή ένα ολόκληρο», τότε θα μπορούσαμε να αναφερθούμε στο σχήμα Β ως «ένα μισό». Η ιδέα του «μισού» είναι η σχέση ανάμεσα στα σχήματα Α και Β, μία σχέση που πρέπει να οικοδομήσουμε στο μυαλό μας. Δεν βρίσκεται σε κανένα από τα δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα. Στην ουσία, αν αποφασίσουμε να ονομάσουμε «ολόκληρο» το σχήμα Γ, τότε το σχήμα Α γίνεται «ένα τέταρτο». Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ως φυσικό αντικείμενο δεν υφίσταται καμία μεταβολή. Οι έννοιες του «μισού» και του «τετάρτου» δεν βρίσκονται μέσα στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο Α. Τις οικοδομούμε μέσα στο μυαλό μας. Τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα μάς βοηθούν να «δούμε» τις σχέσεις, αλλά αυτό που βλέπουμε είναι μόνο τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα και όχι τις έννοιες. (σελ. 69)



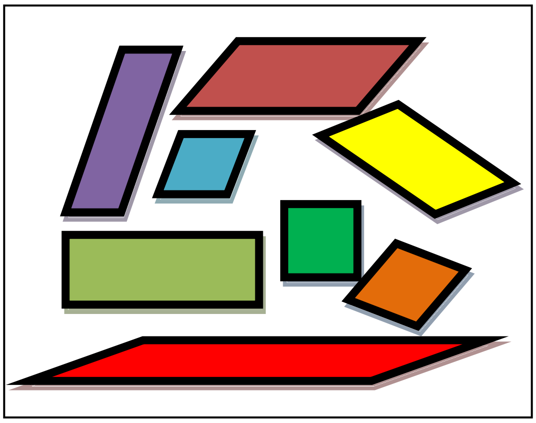
Εικόνα 3.1: Η κατασκευαστική αρχή του Dienes: τα αντικείμενα αυτά κάθε αυτά δεν είναι φορείς μαθηματικών νοημάτων. Οι μαθητές και οι εκπαιδευτικοί «επιβάλλουν» πάνω τους μαθηματικό νόημα και κατασκευάζουν μαθηματικές αφαιρέσεις με τη βοήθειά τους (προσαρμογή από τον Van de Walle (2007, σελ. 70).

Συνδυάζοντας τις τρεις τελευταίες αρχές που πρότεινε ο Dienes με τη θεωρία για τη μάθηση μέσω αναπαραστάσεων του Bruner (1966) (βλ. 2ο κεφάλαιο) αλλά και τον ρόλο της προσωπικής εμπλοκής στη μάθηση μέσω αναπαραστάσεων (Ainsworth, 1999˙ Lesh, Post, & Behr, 1987) καταλήγουμε στα εξής χαρακτηριστικά των αναπαραστάσεων που υποβοηθούν τον μαθητή στην οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης:

1. αντιληπτική μεταβλητότητα στις αναπαραστάσεις,
2. πολλαπλή ενσωμάτωση της έννοιας σε ποικίλες αναπαραστάσεις,
3. δυναμική διασύνδεση των αναπαραστάσεων,
4. σταδιακή μετάβαση από τις εμπράγματες, στις εικονικές και τελικά στις συμβολικές αναπαραστάσεις και
5. δυνατότητα για ενεργό συμμετοχή του μαθητή στη μάθηση μέσω αναπαραστάσεων.

Η αντιληπτική μεταβλητότητα στις αναπαραστάσεις αποτελεί τη δεύτερη από τις αρχές του Dienes, που αναφέρθηκαν προηγουμένως. Σύμφωνα με αυτή, ο εκπαιδευτικός κατά την προσέγγιση μίας έννοιας είναι σημαντικό να χρησιμοποιεί καταστάσεις (αναπαραστάσεις), οι οποίες από τη μία πλευρά διαθέτουν κοινά δομικά χαρακτηριστικά της υπό μελέτη έννοιας αλλά από την άλλη περιέχουν στοιχεία που τις διαφοροποιούν μεταξύ τους (Sriraman, 2005). Η αρχή αυτή τονίζει την απαραίτητη ύπαρξη μεταβλητών που διαφοροποιούν την αντίληψη των αντικειμένων αλλά όχι τις κοινές ιδιότητες που υπάρχουν μεταξύ τους και τελικά οδηγούν στην νοητική διεργασία της αφαίρεσης (ό.π.). Η Πατσιομίτου και Εμβαλωτής (2009) αναφέρουν χαρακτηριστικά:

> Για παράδειγμα ένα παραλληλόγραμμο ορίζεται ως ένα τετράπλευρο με τις απέναντι πλευρές του παράλληλες. Αν και το σχήμα μπορεί να μεταβληθεί με τη μεταβολή του μήκους των πλευρών ή του μέτρου των γωνιών, η παραλληλία των απέναντι πλευρών παραμένει το κοινό δομικό χαρακτηριστικό όλων των παραλληλογράμμων. Η αρχή της αντιληπτικής μεταβλητότητας προτείνει προκειμένου να μεγιστοποιηθεί η ικανότητα γενίκευσης της μαθηματικής έννοιας εκ μέρους των μαθητών, οι μαθητές να έχουν εμπειρία της μεταβολής των μαθηματικών μεταβλητών (π.χ. της γωνίας και της πλευράς στο παραλληλόγραμμο) καθώς θα τηρείται αμετάβλητη η βασική δομική του ιδιότητα. (σελ. 258)

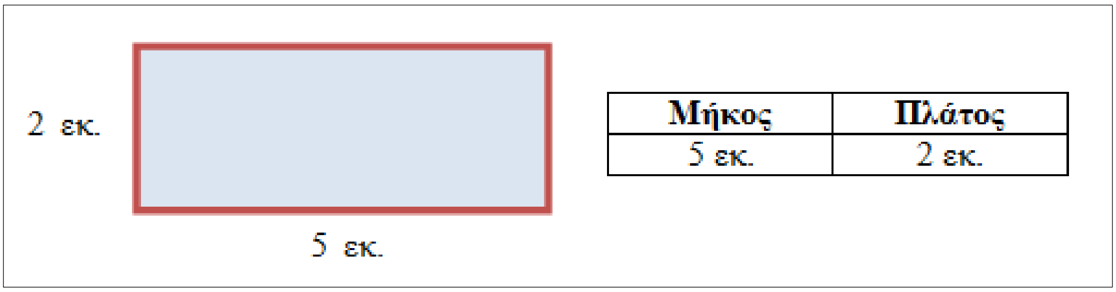


Εικόνα 3.2: Η αρχή της αντιληπτικής μεταβλητότητας: η απαραίτητη αφαίρεση για την κατασκευή της έννοιας «παραλληλόγραμμο» προκύπτει μέσα από αναγνώριση των ομοιοτήτων από τις διαφορετικές περιπτώσεις παραλληλογράμμων. Σε όλα τα σχήματα της εικόνας ισχύει η κοινή ιδιότητα «οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες».

Ενώ η αντιληπτική μεταβλητότητα των αναπαραστάσεων αφορά στη διαφοροποίηση της μορφής μίας αναπαράστασης εντός του είδους αναπαράστασης στο οποίο βρίσκεται (π.χ. διάφορες εικονικές αναπαραστάσεις του ορθογωνίου τριγώνου σε χαρτί), η πολλαπλή ενσωμάτωση της έννοιας σε ποικίλες αναπαραστάσεις σχετίζεται με τη διαφοροποίηση στο είδος της αναπαράστασης. Κατά τον Dienes, η εμπειρία του μαθητή με πολλαπλές εκφάνσεις της έννοιας σε αναπαραστάσεις διαφορετικού είδους (εικόνα, κείμενο, εμπράγματη αναπαράσταση, κτλ.), του παρέχει τη δυνατότητα για αναγνώριση των κοινών ιδιοτήτων και τον οδηγεί στην απαραίτητη αφαίρεση (Lesh, Post, Behr, 1987 · Sriraman, 2005 · Ainsworth 1999 & 2006). Η Ainsworth (2006) επισημαίνει ότι μία από τις λειτουργίες των πολλαπλών αναπαραστάσεων είναι η υποστήριξη του μαθητή στην οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης, ωστόσο σημαντική παράμετρος για την επιτυχή αξιοποίηση της δυνατότητας αυτής είναι η ικανότητα «μετάφρασης» από τη μία στην άλλη (Dreyfus, 1991˙ Ainsworth, 2006).

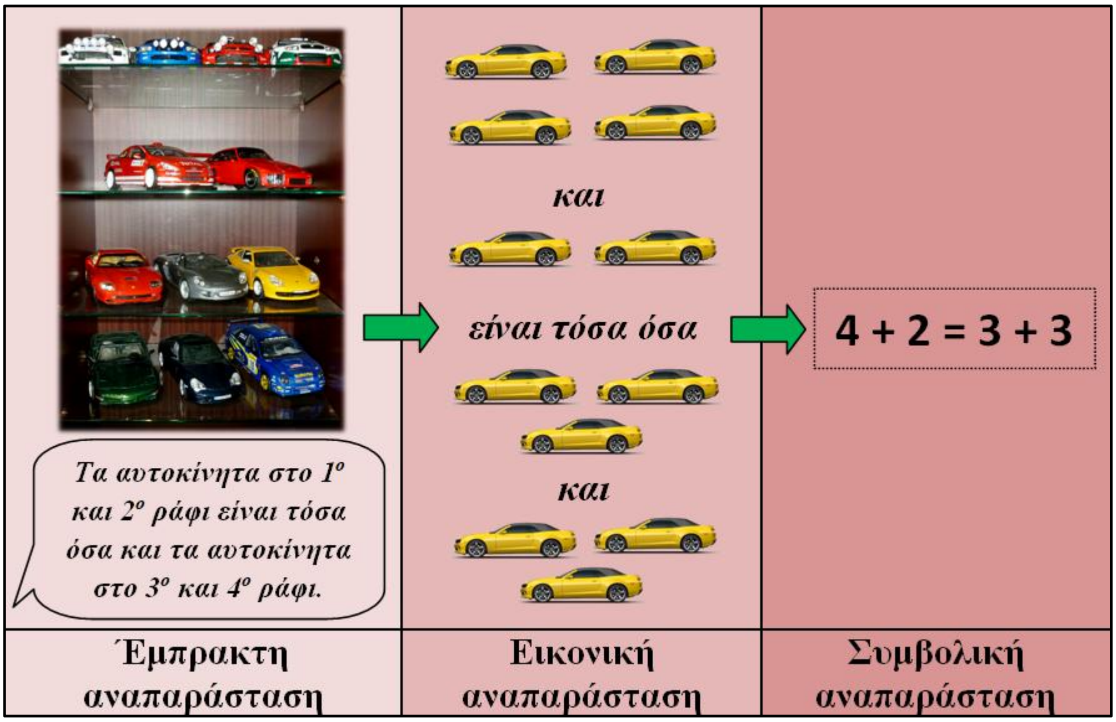
Εικόνα 3.3: Η αρχή της πολλαπλής ενσωμάτωσης. Ο μαθητής μπορεί να υποστηριχθεί στη μαθηματική αφαίρεση και την οικοδόμηση της έννοιας «μισό» μέσα από την επαφή του με αναπαραστάσεις διαφορετικού είδους (εικονική, συμβολική, εμπράγματη).

Σύμφωνα με τον Dienes, οι μαθηματικές δομές που προκύπτουν ως αποτέλεσμα της μαθηματικής αφαίρεσης δεν είναι στατικές αλλά, αντίθετα, δυναμικές (Lesh et al, 1987). Η κατανόηση της δυναμικότητας αυτής προκύπτει όταν οι διάφορες αναπαραστάσεις της έννοιας συνδέονται δυναμικά μεταξύ τους. Δυναμική διασύνδεση των αναπαραστάσεων έχουμε όταν «οι μεταβολές εντός ενός μοντέλου αντιστοιχούν σε μεταβολές σε ένα ισομορφικό μοντέλο παρά το γεγονός ότι οι αναπαραστάσεις των μοντέλων αυτών είναι διαφορετικές» (Sriraman, 2005, σελ. 258). Οι δυνατότητες που παρέχονται από κατάλληλα υπολογιστικά περιβάλλοντα για την παρακολούθηση των αλλαγών σε μία αναπαράσταση όταν πραγματοποιούνται αλλαγές σε μία άλλη (“dyna-linking”) αποτελεί μία σπουδαία δυνατότητα για την υποστήριξη της μαθηματικής αφαίρεσης (Ainsworth, 1999). Για παράδειγμα, όταν η αλλαγή στην κλίση μίας ευθείας σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στον Η/Υ επιφέρει αλλαγές στον συντελεστή διεύθυνσης της συμβολικής αναπαράστασης μίας συνάρτησης, τότε τα δύο είδη αναπαράστασης συνδέονται δυναμικά και ο μαθητής υποστηρίζεται στο να πραγματοποιήσει τη μαθηματική αφαίρεση για την έννοια της του ρυθμού μεταβολής. Αλλά και στο επίπεδο του Δημοτικού Σχολείου, η δυναμική διασύνδεση της εικονικής αναπαράστασης ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου στο οποίο το εμβαδόν παραμένει σταθερό με τις συμβολικές αναπαραστάσεις του μήκους και του πλάτους επιτρέπει στον μαθητή να παρακολουθήσει τη διατήρηση του σταθερού γινομένου του μήκους και του πλάτους και να πραγματοποιήσει την απαραίτητη αφαίρεση για την οικοδόμηση της έννοιας των αντιστρόφως ανάλογων ποσών.



Εικόνα 3.4: Σε ένα υπολογιστικό σύστημα με δυναμική διασύνδεση των αναπαραστάσεων, η όποια μεταβολή στην εικονική αναπαράσταση (σχήμα) προκαλεί τις κατάλληλες προσαρμογές στη συμβολική αναπαράσταση (πίνακας) και αντίστροφα. Με τον τρόπο αυτό, ικανοποιείται η αρχή της δυναμικότητας του Dienes. Με την προϋπόθεση ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου παραμένει σταθερό, το παραπάνω αναπαραστατικό σύστημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη διδασκαλία των αντιστρόφως ανάλογων ποσών.

Κατά τη θεωρία του Bruner (1966) για τον ρόλο των αναπαραστάσεων στη μάθηση, οι μαθητές μαθαίνουν με αναπαραστάσεις των οποίων ο βαθμός αφαίρεσης αυξάνεται σταδιακά. Η θεωρία του στηρίζεται σε τρία βασικά στάδια αναπαραστάσεων, αρχικά στις εμπράγματες, ύστερα στις εικονικές και τέλος στις συμβολικές (βλ. 2ο κεφάλαιο). Εφόσον η θεωρία του Bruner διέπει γενικώς τη μάθηση μέσω αναπαραστάσεων, υιοθετώντας την και στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών αφαιρέσεων, διαπιστώνουμε ότι η διδασκαλία των μαθηματικών αφαιρέσεων ακολουθεί και αυτή μία επαγωγική πορεία εξέλιξης, από το συγκεκριμένο στο γενικό. Βέβαια, οι Behr, Post, & Lesh (1981, όπ. αναφ στο Πατσιομίτου & Εμβαλωτής, 2009) υποστηρίζουν ότι η πορεία εξέλιξης των αναπαραστάσεων κατά τη μάθηση δεν είναι κατ' ανάγκη τόσο γραμμική αλλά αμφίδρομη. Αυτό σημαίνει ότι μπορούν να υπάρχουν και «πισωγυρίσματα», όπου και όταν απαιτείται. Παρόλα αυτά, η θεωρία του Bruner μπορεί να αποτελέσει έναν χρήσιμο οδηγό για την ανάπτυξη της αφαιρετικής σκέψης.



Εικόνα 3.5: Η θεωρία του Bruner για τη σταδιακή αφαίρεση από τις έμπρακτες (ή εμπράγματες) αναπαραστάσεις, στις εικονικές και τελικά στις συμβολικές αναπαραστάσεις, εφαρμοσμένη στη διδασκαλία της έννοιας της ισότητας.

Κοινή παραδοχή των περισσότερων μελετητών στον χώρο της εκπαίδευσης, ιδιαίτερα μετά την εμφάνιση των γνωστικών θεωριών μάθησης, είναι ότι η αποτελεσματική μάθηση προϋποθέτει την ενεργό εμπλοκή του ατόμου στην εκπαιδευτική διαδικασία (Elliott et al, 2008). Το στοιχείο αυτό επισημαίνει και ο Dienes για τον ρόλο των αναπαραστάσεων στη μαθηματική αφαίρεση, στην «κατασκευαστική αρχή» της θεωρίας του (Lesh, Post, & Behr, 1987). Αρκετά συχνά οι εφαρμογές των ΤΠΕ στη μάθηση των Μαθηματικών περιέχουν «έτοιμες» αναπαραστάσεις και η δυναμική διασύνδεση που υπάρχει μεταξύ τους πραγματοποιείται αυτόματα. Με τον τρόπο αυτό, ελλοχεύει ο κίνδυνος ο μαθητής να καταστεί παθητικός δέκτης παρά κυρίαρχος της μάθησής του (Ainsworth, 1999).

Σημαντικό ζητούμενο, επομένως, είναι η πρόβλεψη για δραστηριοποίηση του μαθητή σε τέτοια ή πιο «παραδοσιακά» περιβάλλοντα (π.χ. «χαρτί και μολύβι»).

Συνοψίζοντας, σύμφωνα με τη σχετική βιβλιογραφία, ο σχεδιασμός των αναπαραστάσεων λαμβάνοντας υπ' όψιν τα παραπάνω χαρακτηριστικά μεγιστοποιεί την αποτελεσματικότητά τους στην ανάπτυξη της μαθηματικών αφαιρετικών δομών. Αν ο σκοπός μίας διδακτικής παρέμβασης είναι η μαθηματική αφαίρεση, φαινόμενο αρκετά συχνό στη διδασκαλία των Μαθηματικών, τότε η ύπαρξη μία πληθώρας αναπαραστάσεων που συνδέονται δυναμικά μεταξύ τους και κάθε μία προσφέρει δυνατότητες για αντιληπτική μεταβλητότητα, ενδέχεται να οδηγήσει στην επίτευξη αυτού του σκοπού. Αν στα παραπάνω χαρακτηριστικά προστεθεί η θεωρία του Bruner για σταδιακή μετάβαση από τις εμπράγματες στις εικονικές και τελικά στις συμβολικές αναπαραστάσεις αλλά και η δυνατότητα για προσωπική εμπλοκή του μαθητή στον χειρισμό τους, τα αναμενόμενα μαθησιακά αποτελέσματα ενδέχεται να μεγιστοποιηθούν. Αξίζει, ωστόσο, να σημειωθεί πως η φύση κάθε μαθηματικού προβλήματος (αλγεβρικό ή γεωμετρικό) αλλά και το μέσο με το οποίο εκφράζονται οι εξωτερικές αναπαραστάσεις (ΤΠΕ, έντυπη μορφή, συνδυασμός, κτλ.) προδιαγράφουν ως ένα βαθμό τα χαρακτηριστικά των αναπαραστάσεων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση του (Ainsworth, 2006). Συνεπώς, διάφοροι επιστημολογικοί ή τεχνικοί παράγοντες ενδέχεται να θέσουν σημαντικούς περιορισμούς στην ικανοποίηση των παραπάνω χαρακτηριστικών.

3.2 Τα ψηφιακά μαθησιακά αντικείμενα ως πρόσφορο εργαλείο μάθησης και διδασκαλίας της μαθηματικής αφαίρεσης

Αδιαμφισβήτητα, οι Τεχνολογίες της Πληροφορίας και των Επικοινωνιών (ΤΠΕ) έχουν διαμορφώσει νέα δεδομένα στον χώρο της εκπαίδευσης, επηρεάζοντας δραστικά τον διδακτικό σχεδιασμό, τη διδακτική πράξη και ευρύτερα τη μαθησιακή διαδικασία. Το Εθνικό Συμβούλιο Διδασκόντων Μαθηματικών (NCTM) συγκαταλέγει την «Τεχνολογία» στις έξι αρχές των σχολικών Μαθηματικών (Van de Walle, 2007). Σύμφωνα με τον Van de Walle (2007), ορισμένα από τα οφέλη που προκύπτουν από την αξιοποίηση των ΤΠΕ στη μαθηματική εκπαίδευση είναι:

- η πρόσβαση σε μαθηματικές ιδέες και μαθηματικό συλλογισμό που επιτρέπουν την επίλυση προβλημάτων, τα οποία θα ήταν δύσκολο ή αδύνατο να επιλυθούν χωρίς αυτές,
- η υποστήριξη της διερευνητικής μάθησης,
- η πρόσβαση σε ισχυρές αναπαραστάσεις μαθηματικών ιδεών,
- η πρόσβαση σε μεγάλη ποικιλία μαθηματικών προβλημάτων,
- η υποστήριξη των ατόμων με μαθησιακές δυσκολίες ή/και αναπηρία και
- γενικότερα η επικέντρωση στα «σημαντικά Μαθηματικά» (π.χ. αποφυγή χρονοβόρων και μαθησιακά ανώφελων διαδικασιών εκτέλεσης πράξεων).

Κατά τον Μικρόπουλο (2009), οι ΤΠΕ επιτελούν πιο αποτελεσματικά τον ρόλο τους στη μαθησιακή και διδακτική διαδικασία όταν αξιοποιούνται ως γνωστικά εργαλεία, δηλαδή ως «τεχνολογίες που υποστηρίζουν γνωστικές διεργασίες, όπως η σκέψη, η επίλυση προβλημάτων, η μάθηση» (σελ. 29). Νοούμενα ως εργαλεία, και ειδικότερα «γνωστικά», οι ΤΠΕ δεν αποτελούν αυτοσκοπό ούτε πανάκεια στη μαθηματική εκπαίδευση (Van de Walle, 2007) αλλά μέσα επίτευξης γνωστικών και ευρύτερα παιδαγωγικών στόχων.

Μία κατηγορία ψηφιακών γνωστικών εργαλείων, ιδιαίτερα δημοφιλής τα τελευταία χρόνια, είναι τα ψηφιακά μαθησιακά αντικείμενα. Ένα ψηφιακό μαθησιακό αντικείμενο είναι: «μια μικρή, αυτοδύναμη, επαναχρησιμοποιήσιμη και παιδαγωγικά πλήρης [ψηφιακή] δομή μαθησιακού περιεχομένου» (Μικρόπουλος & Μπέλλου, 2016, χ.σ.). Κατά τον Gürer (2013), τα ψηφιακά μαθησιακά αντικείμενα διαφέρουν ως προς διάφορα χαρακτηριστικά, όπως:

- η δυνατότητα επαναχρησιμοποίησης τους σε ποικίλα διδακτικά και μαθησιακά πλαίσια,
- το μέγεθός τους,
- η συμβατότητα τους με διάφορα λειτουργικό σύστημα,
- η προσβασιμότητα, δηλαδή το κατά πόσο τα μαθησιακά αντικείμενα είναι προσβάσιμα από οπουδήποτε,
- η δυνατότητα προσαρμογής τους στις ιδιαίτερες ανάγκες και προτιμήσεις του χρήστη,
- η ανακαλυψιμότητα, δηλαδή ο βαθμός ευκολίας στην εύρεσή τους (π.χ. σε ψηφιακά αποθετήρια),
- η αντοχή τους στον χρόνο, δηλαδή η δυνατότητα τους να είναι λειτουργικά παρά τις διάφορες ενημερώσεις του υλικού ή του λογισμικού,
- η δυνατότητα αυτόματης προσαρμογής τους στις ιδιαίτερες ανάγκες και προτιμήσεις του χρήστη,
- η δυνατότητα διαχείρισής τους, δηλαδή το κατά πόσο «μπορούν να ενημερώνονται, να αναθεωρούνται και να συνδυάζονται για διάφορους σκοπούς.

Τα ψηφιακά μαθησιακά αντικείμενα ως εφαρμογές των ΤΠΕ με τα χαρακτηριστικά που αναφέρθηκαν, μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως μαθησιακό αλλά και διδακτικό εργαλείο για την οπτικοποίηση αφηρημένων εννοιών και την υποστήριξη της κατασκευής νοητικών μοντέλων, μέσω ισχυρών και αποτελεσματικών αναπαραστάσεων (Brandt, 1997, όπ. αναφ. στο Lopez-Morteo & López, 2005). Τα Μαθηματικά ως επιστήμη αφηρημένων οντοτήτων είναι προσβάσιμα μόνο μέσω αναπαραστάσεων (Duval, 2006) και ως εκ τούτου η αξιοποίηση των ψηφιακών μαθησιακών αντικειμένων στη μαθησιακή διαδικασία προβάλλει ως ελκυστική διδακτική στρατηγική.

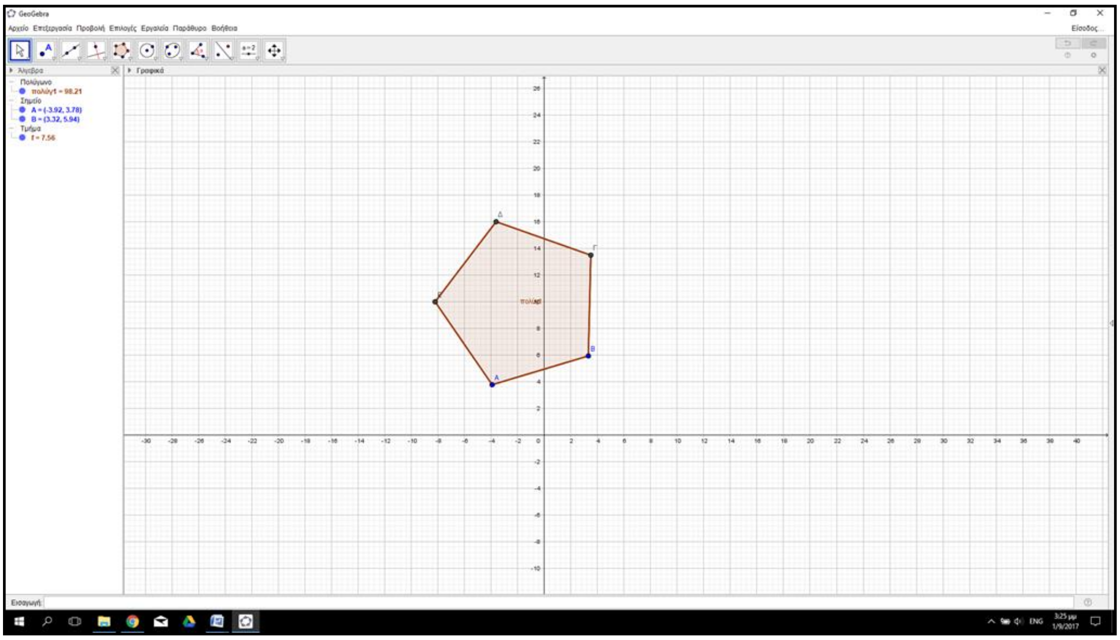
Δύο βασικά πλεονεκτήματα των ψηφιακών μαθησιακών αντικείμενων για τη μάθηση των Μαθηματικών είναι η δυνατότητα παροχής πολλαπλών αναπαραστάσεων και η διαδραστικότητα. Η τελευταία ορίζεται ως «η δυνατότητα απόκρισης [ενός συστήματος] στη δράση του μαθητή κατά τη διάρκεια της μάθησης» (Moreno & Mayer, 2007, σελ. 310). Οι Moreno & Mayer (2007) περιγράφουν τα μαθησιακά περιβάλλοντα που προσφέρουν πολλαπλές αναπαραστάσεις και διαδραστικότητα ως «διαδραστικά πολυαναπαραστατικά (πολυτροπικά) μαθησιακά περιβάλλοντα». Τέτοια περιβάλλοντα αποτελούν πρόσφορο εργαλείο για τη μάθηση της μαθηματικής αφαίρεσης, διότι μπορούν να ενσωματώσουν εξωτερικές αναπαραστάσεις που υποστηρίζουν την αντιληπτική μεταβλητότητα, την πολλαπλή ενσωμάτωση, τη δυναμική διασύνδεση και τη δυνατότητα για ενεργό εμπλοκή του μαθητή, χαρακτηριστικά που, όπως επισημάναμε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, προάγουν τη μαθηματική αφαιρετική σκέψη. Η διαδραστικότητα υποστηρίζει την αντιληπτική μεταβλητότητα διότι ο μαθητής μπορεί να ζητήσει και να λάβει πολλαπλές εκδοχές ενός μαθηματικού αντικειμένου (που διαφέρουν αντιληπτικά), τη δυναμική διασύνδεση διότι του δίνεται η δυνατότητα τροποποίησης και παρακολούθησης των αλλαγών σε μία ή περισσότερες δυναμικά διασυνδεμένες με αυτή αναπαραστάσεις και την ενεργό εμπλοκή, διότι ο μαθητής καθίσταται κυρίαρχος της μάθησης του, χειριζόμενος αλληλεπιδραστικά το ψηφιακό μαθησιακό περιβάλλον. Η δυνατότητα για παροχή πολλαπλών αναπαραστάσεων (γλωσσικές, π.χ. κείμενο, προφορικός λόγος και μη γλωσσικές αναπαραστάσεις, π.χ. εικόνα) εξυπηρετεί την πολλαπλή ενσωμάτωση, δηλαδή το δεύτερο από τα χαρακτηριστικά των εξωτερικών αναπαραστάσεων, που επισημάνθηκε στο υποκεφάλαιο 3.1.

Δύο ακόμη πλεονεκτήματα των ψηφιακών μαθησιακών αντικειμένων είναι η ελκυστικότητά που προσφέρουν στη μάθηση των Μαθηματικών και η σχετική ευκολία κατασκευής τους από τους εκπαιδευτικούς. Το πρώτο πλεονέκτημα συνδέεται με τους συναισθηματικούς στόχους της διδασκαλίας καθώς η ελκυστικότητα των ΤΠΕ επιδρά θετικά στη δημιουργία κινήτρου για μάθηση των Μαθηματικών (Lopez-Morteo & López, 2005). Το δεύτερο πλεονέκτημα προκύπτει από το μικρό μέγεθος των ψηφιακών μαθησιακών αντικειμένων αλλά και από την πληθώρα περιβαλλόντων ανοιχτού κώδικα που προσφέρουν δυνατότητες σχεδίασης ψηφιακών μαθησιακών αντικειμένων με στοιχειώδεις γνώσεις προγραμματισμού. Επίσης, αν συνυπολογιστεί το γεγονός ότι οι εικονικές αναπαραστάσεις που εξυπηρετούν αποτελεσματικά γνωστικούς στόχους στα Μαθηματικά είναι λιτές και σχηματικές (Presmeg, 1987˙ Hegarty & Kozhevnikov, 1999), η κατασκευή ψηφιακών μαθησιακών εκπαιδευτικούς καθίσταται προσιτή σε αρκετούς εκπαιδευτικούς.

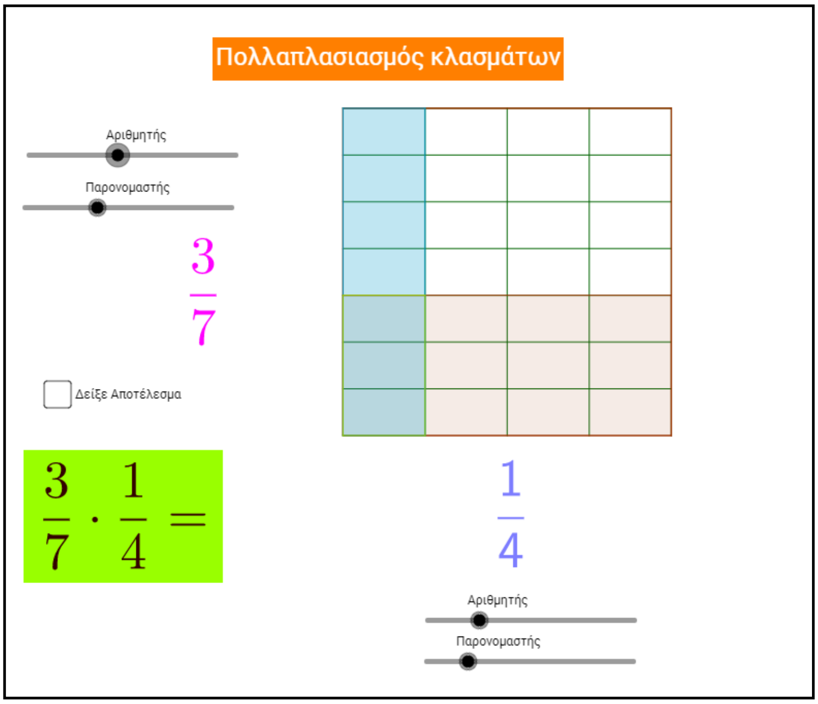
Ένα δημοφιλές περιβάλλον ανοιχτού κώδικα που μπορεί να αξιοποιηθεί για τη κατασκευή ψηφιακών μαθησιακών αντικειμένων στα Μαθηματικά είναι το "Geogebra". Στην επίσημη ιστοσελίδα του, αναφέρεται ότι «το GeoGebra είναι ένα λογισμικό δυναμικών Μαθηματκών για όλα τα επίπεδα της εκπαίδευσης, το οποίο συνδυάζει Γεωμετρία, Άλγεβρα, υπολογιστικά φύλλα, γραφικά, Στατιστική και Απειροστικό Λογισμό σε ένα εύχρηστο πακέτο» (https://www.geogebra.org/about). Το περιβάλλον αναπτύχθηκε το 2001 από τον Αυστριακό Markus Hohenwarter, στο πλαίσιο μεταπτυχιακής του εργασίας στη Διδακτική των Μαθηματικών και την Πληροφορική, στο Πανεπιστήμιο του Ζαλτσμπουργκ της Αυστρίας (Hohenwarter & Preiner, 2007). Από τότε έχει αποσπάσει αρκετά βραβεία και διεθνή αναγνώριση ενώ αξιοποιείται τόσο από σχολεία όσο και από πανεπιστημιακά ιδρύματα (ο.π.). Το Geogebra συνενώνει δυναμικά την Άλγεβρα με τη Γεωμετρία προσφέροντας διάδραση και πολλαπλές αναπαραστάσεις (ο.π.). Υπό την έννοια αυτή είναι ένα διαδραστικό πολυαναπαραστατικό μαθησιακό περιβάλλον (βλ. Moreno & Mayer, 2007), που προσφέρεται κυρίως για τη μάθηση και τη διδασκαλία των Μαθηματικών αλλά μπορεί να αξιοποιηθεί ευρύτερα και σε άλλες Θετικές Επιστήμες. Από την οπτική των ΤΠΕ, το λογισμικό εμπίπτει ταυτόχρονα στα Περιβάλλοντα Δυναμικής Γεωμετρίας (DGE) αλλά και στα Συστήματα Υπολογιστικής Άλγεβρας (CAS) (ο.π.).

Ο εκπαιδευτικός ή ο μαθητής μπορούν μεταξύ άλλων να αξιοποιήσουν τις διαθέσιμες επιλογές σχεδίασης δισδιάστατων ή τρισδιάστατων γεωμετρικών αντικειμένων ή να πληκτρολογήσουν αλγεβρικές/αριθμητικές παραστάσεις και σχέσεις. Για αποτελεσματικότερη εξατομίκευση των επιλογών, το λογισμικό δέχεται προγραμματιστικές εντολές στις γλώσσες “GeogebraScript”, “JavaScript” και “Global JavaScript” (https://wiki.geogebra.org/en/Scripting). Επίσης διαθέτει έκδοση για απευθείας εκτέλεση από το διαδίκτυο, εφαρμογή για κινητές συσκευές, εγχειρίδιο χρήσης, blog και κοινότητα βοήθειας. Μία από τις πιο σημαντικές λειτουργίες του είναι η διαδικτυακή συλλογή έργων, τα οποία ανεβάζουν οι χρήστες κατόπιν εγγραφής τους. Με τον τρόπο αυτό έχει δημιουργηθεί ένα αποθετήριο ψηφιακών μαθησιακών αντικειμένων, τα οποία, ωστόσο δεν διαθέτουν παιδαγωγική πιστοποίηση. Ο χρήστης μπορεί να αποθηκεύσει το έργο του με την επέκταση του λογισμικού (.ggb) ή να δημιουργήσει ένα γενικά συμβατό αρχείο, το οποίο θα εκτελείται μέσω φυλλομετρητή από το αποθετήριο έργων. Το λογισμικό είναι διαθέσιμο δωρεάν στην ηλεκτρονική διεύθυνση: https://www.geogebra.org/.

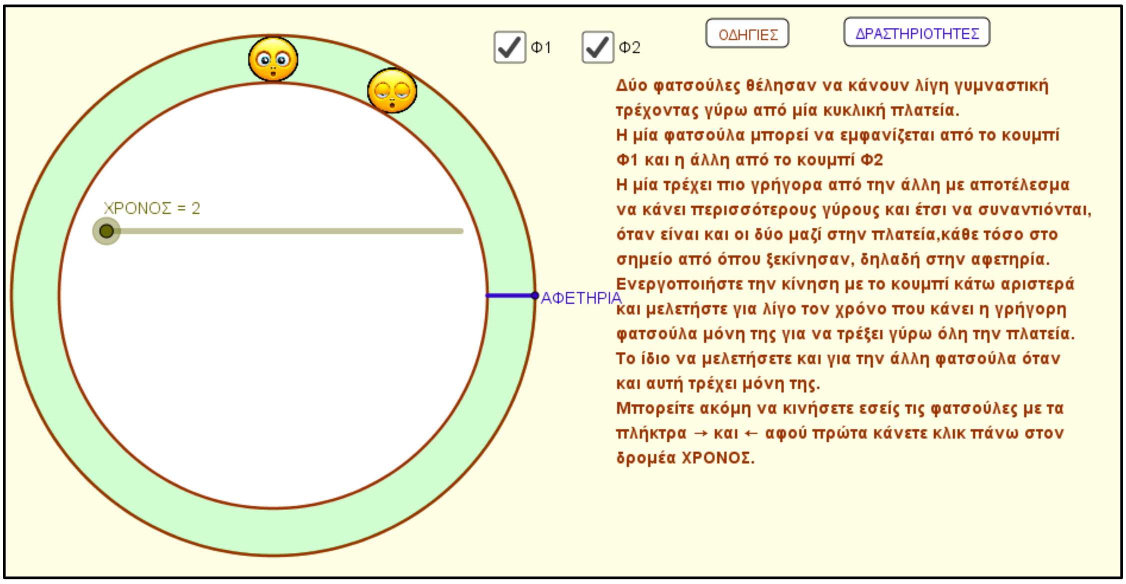
Εικόνα 3.6: Το λογότυπο του λογισμικού Geogebra.



Εικόνα 3.7: Το περιβάλλον σχεδίασης του λογισμικού Geogebra (πρόσφατη ελληνική έκδοση για Windows).



Εικόνα 3.8: Ψηφιακό μαθησιακό αντικείμενο για τη διερεύνηση του γινομένου κλασμάτων στο λογισμικό Geogebra. Οι μαθητές μπορούν να μεταβάλλουν, με τους διαθέσιμους δρομείς, τις περιπτώσεις των κλασμάτων (αντιληπτική μεταβλητότητα) και να λάβουν πληροφορία τόσο σε συμβολική όσο και σε εικονική μορφή (πολλαπλή ενσωμάτωση), ενώ οι αναπαραστάσεις συνδέονται δυναμικά μεταξύ τους (δυναμική διασύνδεση). Γενικότερα, οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα ενεργού εμπλοκής στον χειρισμό των αναπαραστάσεων. Το συγκεκριμένο ψηφιακό μαθησιακό αντικείμενο δημιουργήθηκε από τον Δημήτρη Ανδρεσάκη και προέρχεται από την ψηφιακή συλλογή έργων του Geogebra. Είναι διαθέσιμο στον ακόλουθο σύνδεσμο: https://www.geogebra.org/m/e7NxdSKm.



Εικόνα 3.9: Απόσπασμα από ψηφιακό μαθησιακό αντικείμενο στο λογισμικό Geogebra για τη διερεύνηση του Ελάχιστου Κοινού Πολλαπλάσιου (ΕΚΠ) δύο αριθμών. Οι δύο φατσούλες ξεκινούν να τρέχουν μαζί σε μία κυκλική πλατεία αλλά με διαφορετικές ταχύτητες και αναπόφευκτα κάποια στιγμή θα συναντηθούνε για πρώτη φορά. Σε αντίθεση με το προηγούμενο ψηφιακό μαθησιακό αντικείμενο, εδώ παρατηρείται μόνο η δυνατότητα χειρισμού της προόδου του φαινομένου. Ανακτήθηκε από τον εθνικό συσσωρευτή εκπαιδευτικού περιεχομένου «Φωτόδεντρο». Κάτοχος αντικειμένου: ΙΤΥΕ-ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ. Διαθέσιμο από τον σύνδεσμο: http://photodentro.edu.gr/aggregator/lo/photodentro-lor-8521-3732.

Κεφάλαιο 4

Έρευνα

Από τη θεωρία, στην πράξη.

4.1 Σκοπός και ερευνητικά ερωτήματα

Έχοντας αναλύσει τους όρους «μαθηματική αφαίρεση» (κεφάλαιο 1) και «αναπαράσταση» (κεφάλαιο 2) καθώς και το θεωρητικό πλαίσιο που διέπει τον ρόλο των εξωτερικών αναπαραστάσεων στη μαθηματική αφαίρεση (κεφάλαιο 3), στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα από την εμπειρική διερεύνηση του ρόλου των εξωτερικών αναπαραστάσεων σε δραστηριότητες μαθηματικής αφαίρεσης για μαθητές του Δημοτικού Σχολείου.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η κατασκευή δύο δραστηριοτήτων μαθηματικής αφαίρεσης, οι οποίες πληρούν τα χαρακτηριστικά που υποστηρίζουν μαθητές του Δημοτικού Σχολείου στη μαθηματική αφαίρεση (όπως επισημάνθηκαν στο κεφάλαιο 3) καθώς και η μελέτη τόσο της διαδικασίας οικοδόμησης της μαθηματικής αφαίρεσης (μέσα από την ενασχόληση των μαθητών με τις δραστηριότητες) όσο και του ρόλου των εξωτερικών αναπαραστάσεων στη διαδικασία οικοδόμησής της. Η πρώτη δραστηριότητα προέρχεται από τον χώρο της «Προ-άλεγβρας» (Carraher, Martinez, & Shliemann, 2008) και περιέχει αναπαραστατικά συστήματα που υποστηρίζουν τον μαθητή στη νοητική διεργασία της *γενίκευσης* (Dreyfus, 1991˙ Dubinsky, 1991). Η δεύτερη δραστηριότητα είναι γεωμετρική και περιέχει αναπαραστάσεις που υποβοηθούν τον μαθητή στην αφαιρετική νοητική διεργασία της *ενσωμάτωσης* (Dubinsky, 1991) ή της *σύνθεσης* (Dreyfus, 1991).

Τα ερευνητικά ερωτήματα συνοψίζονται σε δύο βασικούς άξονες:

- *ΑΞΟΝΑΣ Α: Οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης*

Σε τι επίπεδο μαθηματικής αφαίρεσης έφτασαν οι μαθητές και ποια πορεία ακολούθησαν στη διαδικασία οικοδόμησης της μαθηματικής αφαίρεσης; (ανάλυση σύμφωνα με το μοντέλο AiC);

- *ΑΞΟΝΑΣ Β: Τα χαρακτηριστικά των αναπαραστάσεων στην οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης*

Ποιος ο ρόλος της αντιληπτικής μεταβλητότητας, της πολλαπλής ενσωμάτωσης, της δυναμικής διασύνδεσης, της σταδιακής αφαίρεσης και της ενεργού συμμετοχής στον χειρισμό των εξωτερικών αναπαραστάσεων κατά τη διαδικασία οικοδόμησης της μαθηματικής αφαίρεσης;

4.2 Μεθοδολογία έρευνας

4.2.1 Μέθοδοι έρευνας

Η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε είναι ποιοτικής προσέγγισης, διότι παρέχει τη δυνατότητα εστίασης σε ποιοτικά χαρακτηριστικά και την απαραίτητη ευελιξία που απαιτείται σε περιβάλλοντα διδασκαλίας. Συγκεκριμένα, αξιοποιήθηκε η μελέτη περίπτωσης (Robson, 2010) σε συνδυασμό με τη μέθοδο του «διδακτικού πειράματος» ("teaching experiment") (Steffe & Thompson, 2000). Σύμφωνα με τη μέθοδο του «διδακτικού πειράματος», η έρευνα πραγματοποιείται σε περιβάλλον διδασκαλίας, όπου ο ερευνητής κατέχει τον ρόλο του εκπαιδευτικού με σκοπό τη μελέτη του τρόπου σκέψης των μαθητών (Steffe & Thompson, 2000). Η διδακτική διαδικασία καταγράφεται με κάποιο καταγραφικό μέσο (βιντεοκάμερα ή καταγραφέας ήχου), έτσι ώστε να είναι δυνατή η ενδελεχής ανάλυσή της και η εξαγωγή συμπερασμάτων (ό.π.). Για την πρώτη δραστηριότητα (προ-αλγεβρική) σχεδιάστηκε ένα διδακτικό πείραμα, διάρκειας μίας διδακτικής ώρας περίπου, στο οποίο οι μαθητές είχαν στη διάθεσή τους φύλλα εργασίας και ένα μαθησιακό αντικείμενο στο λογισμικό Geogebra (βλ. αναλυτικά υποκεφάλαιο 4.2.6.1). Για τη δεύτερη δραστηριότητα (γεωμετρική), σχεδιάστηκε ένα διδακτικό πείραμα διάρκειας περίπου 2 διδακτικών ωρών, στο οποίο οι μαθητές είχαν επίσης στη διάθεσή τους φύλλα εργασίας και ένα ψηφιακό μαθησιακό αντικείμενο στο λογισμικό Geogebra (βλ. αναλυτικά υποκεφάλαιο 4.2.6.2). Πριν το διδακτικό πείραμα της δεύτερης δραστηριότητας, κάθε μαθητής συμμετείχε σε ατομική συνέντευξη διάρκειας περίπου μισής ώρας (βλ. αναλυτικά υποκεφάλαιο 4.2.3).

4.2.2 Δείγμα

Για τις ανάγκες της παρούσας έρευνας, κάθε μία από τις δύο δραστηριότητες πραγματοποιήθηκε σε μία ομάδα τριών (3) μαθητών, δηλαδή συμμετείχαν συνολικά έξι (6) μαθητές. Τρεις (3) μαθητές της Δ΄ τάξης ασχολήθηκαν με τη δραστηριότητα μαθηματικής γενίκευσης και ισάριθμοι μαθητές της ΣΤ' τάξης με τη δραστηριότητα μαθηματικής ενσωμάτωσης/σύνθεσης. Το δείγμα προήλθε από τη Δ' και τη ΣΤ' τάξη Δημοτικού Σχολείου της πόλης των Ιωαννίνων. Από τα συνολικά έξι (6) υποκείμενα της έρευνας, τα τέσσερα (4) ήταν αγόρια και τα δύο (2) κορίτσια. Κάθε ομάδα αποτελείτο από έναν μαθητή υψηλής επίδοσης στα Μαθηματικά, έναν μαθητή μέτριας επίδοσης και έναν μαθητή χαμηλής επίδοσης. Η επιλογή αυτή έγινε τόσο για ερευνητικούς λόγους (μελέτη της αφαιρετικής σκέψης και των τριών τύπων μαθητών βάσει της επίδοσής τους) όσο και για παιδαγωγικούς, δεδομένου ότι οι μικρές ομάδες εργασίας που είναι εσωτερικά ανομοιογενείς εξυπηρετούν καλύτερα τους παιδαγωγικούς στόχους μιας διδακτικής παρέμβασης (Ματσαγγούρας, 1998).

4.2.3 Τεχνικές συλλογής δεδομένων

<u>Φύλλα εργασίας</u>: Στους μαθητές χορηγήθηκαν ειδικά κατασκευασμένα φύλλα εργασίας, τόσο κατά τις συνεντεύξεις (μόνο στη $2^η$ δραστηριότητα) όσο και κατά τα

διδακτικά πειράματα (1η και 2η δραστηριότητα). Τα φύλλα εργασίας παρουσιάζονται αναλυτικά στο υποκεφάλαιο 4.2.6.

Βιντεοσκόπηση: Οι συνεντεύξεις και τα διδακτικά πειράματα βιντεοσκοπήθηκαν με ψηφιακή βιντεοκάμερα. Το βίντεο που καταγράφηκε από την πρώτη δραστηριότητα είχε διάρκεια 36:02, τα αντίστοιχα των ατομικών συνεντεύξεων, στο πλαίσιο της δεύτερης δραστηριότητας είχαν διάρκειες 30:06, 33:53 και 29:42 για τους μαθητές με υψηλή, μέτρια και χαμηλή επίδοση αντίστοιχα ενώ το βίντεο του διδακτικού πειράματος της δεύτερης δραστηριότητας, 70:21. Η βιντεοσκόπηση επιλέχθηκε ως τεχνική συλλογής δεδομένων για τρεις λόγους: 1) καθίσταται δυνατή η παρατήρηση και η ανάλυση τόσο των λεγομένων όσο και των πράξεων των μαθητών, 2) δεν υπάρχει απόσπαση της προσοχής του εκπαιδευτικού-ερευνητή από το διδακτικό έργο (Steffe & Thompson, 2000) και 3) αυξάνεται σημαντικά το επίπεδο αντικειμενικότητας της παρατήρησης, διότι εξαλείφεται ο υποκειμενικός χαρακτήρας που ενέχει η παρατήρηση από ανθρώπινο παράγοντα.

Ατομικές Συνεντεύξεις (pre-test): Για τη δεύτερη δραστηριότητα (γεωμετρική), κρίθηκε σκόπιμη η διεξαγωγή προ-ελέγχου με τη μορφή βιντεοσκοπημένης ατομικής συνέντευξης, προκειμένου να ελεγχθεί το προϋπάρχον επίπεδο κατανόησης των μαθητών για τα παραλληλόγραμμα. Επίσης, η συνέντευξη λειτούργησε και ως σημείο αναφοράς για τη σύγκριση του επιπέδου αφαιρετικής αντίληψης των παραλληλογράμμων πριν και μετά το διδακτικό πείραμα.

4.2.4 Μέθοδοι ανάλυσης δεδομένων

Μοντέλο AiC: Το μοντέλο AiC (“Abstraction in Context”) επιλέχθηκε ως κατάλληλο για την ανάλυση της διαδικασίας οικοδόμησης των αναδυόμενων αφαιρέσεων των μαθητών μέσα από την επαφή τους με κατάλληλες δραστηριότητες (Dreyfus, Hershkowitz, & Schwarz, 2015). Σύμφωνα με το μοντέλο AiC η ανάλυση της δραστηριότητας οικοδόμησης της μαθηματικής αφαίρεσης των μαθητών στηρίζεται σε πέντε βασικές φάσεις (ο.π.). Οι φάσεις αυτές είναι:

- Φάση 1: Ανάγκη για μαθηματική αφαίρεση
- Φάση 2: Αναγνώριση προϋπαρχουσών γνώσεων και εργαλείων που θα βοηθήσουν στην οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης
- Φάση 3: Εργασία με τις προϋπάρχουσες γνώσεις και τα εργαλεία, με στόχο την οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης
- Φάση 4: Κατασκευή της μαθηματικής αφαίρεσης
- Φάση 5: Εμπέδωση της νέας γνώσης (της μαθηματικής αφαίρεσης).

Η ανάγκη για μαθηματική αφαίρεση προκύπτει σε αρκετές περιπτώσεις από την εσωτερική διάθεση του μαθητή για την άρση πιθανής γνωστικής ανισορροπίας που παρατηρεί στο μυαλό του (Dreyfus, et al., 2015). Αρκετά συχνά, ο κατάλληλος σχεδιασμός των δραστηριοτήτων μαθηματικής αφαίρεσης δημιουργεί αυτή την ανάγκη αφαιρετική σκέψη (Carraher et al., 2008˙ Dreyfus et al, 2015). Κατά τους Kidron & Monaghan (όπ. αναφ στο Dreyfus et al., 2015) ο μαθητής σε αυτό το στάδιο έχει ήδη μία αμυδρή εικόνα για τη μαθηματική αφαίρεση που επιδιώκει να κατασκευάσει. Στην επόμενη φάση ο μαθητής αναγνωρίζει τις υπάρχουσες γνωστικές δομές που δύνανται να τον οδηγήσουν στην μαθηματική αφαίρεση και συνεχίζει στη φάση της εργασίας με αυτές, ώστε με κατάλληλες αναδιοργανώσεις των γνωστικών του σχημάτων (κάθετη μαθηματικοποίηση) να καταφέρει τον τελικό του στόχο (ό.π.). Στο σημείο αυτό, στην παρούσα έρευνα, σημαντικό ρόλο διαδραματίζει η κατάλληλη διδακτική αξιοποίηση των αναπαραστάσεων που θα χορηγηθούν στους μαθητές. Στο τελευταίο στάδιο, αυτό της εμπέδωσης, η «εύθραυστη» νέα γνώση (μαθηματική αφαίρεση) ενισχύεται με κατάλληλες εφαρμογές της (ο.π.). Το μοντέλο AiC προβλέπει μία προκαταρκτική ανάλυση των αφαιρετικών γνωστικών δομών τις οποίες οι μαθητές καλούνται να κατασκευάσουν (ό.π.). Αυτή πραγματοποιείται από τον ερευνητή πριν την εφαρμογή του μοντέλου στην τάξη και στην παρούσα εργασία εμφανίζεται στο πλαίσιο της ανάλυσης των δραστηριοτήτων, δηλαδή στα υποκεφάλαια 4.2.6.1 (σελ. 82-83) και 4.2.6.2 (σελ. 101-102) για την πρώτη και τη δεύτερη δραστηριότητα αντίστοιχα. Γενικότερα, υπό το πρίσμα του Εποικοδομητισμού και του μοντέλου AiC, η μαθηματική αφαίρεση νοείται ως γνώση που προκύπτει από μία κατασκευαστική διαδικασία μέσα από αναδιοργανώσεις υπαρχουσών μαθηματικών γνώσεων (ό.π.).

Μοντέλο επιπέδων γεωμετρικής σκέψης του Van Hiele: Για τη γεωμετρική δραστηριότητα αξιοποιήθηκε επικουρικά και το μοντέλο των επιπέδων της γεωμετρικής σκέψης του Van Hiele. Ο Van Hiele προτείνει την οργάνωση της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών σε επίπεδα, κάθε ένα από τα οποία διέπεται από το δικό του δίκτυο σχέσεων και τη δική του γλώσσα (Κολέζα, 2009). Η μετάβαση από το ένα επίπεδο στο επόμενο είναι περισσότερο αποτέλεσμα της διδασκαλίας παρά της ωρίμανσης ενώ κάθε επίπεδο χαρακτηρίζεται από υψηλότερο επίπεδο αφαίρεσης σε σχέση με το προηγούμενο (ο.π.). Τα επίπεδα αυτά είναι:

- Επίπεδο 1: Ολιστικό επίπεδο
- Επίπεδο 2: Περιγραφικό επίπεδο
- Επίπεδο 3: Επίπεδο άτυπης αφαίρεσης
- Επίπεδο 4: Επίπεδο αφαίρεσης
- Επίπεδο 5: Επίπεδο αυστηρότητας. (ό.π.)

Στο πρώτο επίπεδο, οι μαθητές αντιμετωπίζουν τα σχήματα ως «όλο» χωρίς ικανότητα διάκρισης των μερών και των ιδιοτήτων τους, π.χ. «είναι ρόμβος γιατί μοιάζει με διαμάντι» (Κολέζα, 2009, σελ. 158). Στο δεύτερο επίπεδο, αναγνωρίζουν τα μέρη και τις ιδιότητες τους αλλά περιορίζονται στην περιγραφή τους (ό.π.). Επίσης, δεν παρατηρείται «λογική οργάνωση» και αφαιρετική αντιμετώπιση των σχημάτων (Κολέζα, 2009, σελ. 158). Η συνειδητοποίηση αφαιρετικών δομών αποτελεί χαρακτηριστικό του 3^{ου} επιπέδου, ενώ η εδραίωση τους ολοκληρώνεται στο 4^{ο} επίπεδο (Κολέζα, 2009). Στο τελευταίο επίπεδο, οι μαθητές αντιμετωπίζουν τη Γεωμετρία στον μέγιστο βαθμό αφαίρεσης, καθώς κατανοούν πια τα διάφορα αξιωματικά συστήματα (Ευκλείδεια Γεωμετρία, Ελλειπτική Γεωμετρία, Υπερβολική Γεωμετρία) (ό.π.).

Στην παρούσα έρευνα αξιοποιήθηκε το $2^{ο}$ και το $3^{ο}$ επίπεδο διότι η γεωμετρική δραστηριότητα σχεδιάστηκε έτσι ώστε να υποστηρίζει τους μαθητές στη μετάβαση από την περιγραφική στην αφαιρετική αντιμετώπιση των παραλληλογράμμων. Η Κολέζα (2009) αναφέρει ότι ενδείξεις ωρίμανσης κατά τη μετάβαση από το $2^{ο}$ στο $3^{ο}$ επίπεδο είναι:

- η δυνατότητα εξήγησης και όχι μόνο περιγραφής και συγκεκριμένα και
- η δυνατότητα διατύπωσης αιτιωδών, λογικών ή άλλων σχέσεων (π.χ. σχέσεις ενσωμάτωσης μεταξύ των σχημάτων).

Στο υποκεφάλαιο 4.2.6.2 παρουσιάζεται η προσαρμογή του $2^{ου}$ και $3^{ου}$ επίπεδου στην κατανόηση των παραλληλογράμμων.

4.2.5 Δεοντολογία έρευνας

Η συμμετοχή των μαθητών στην έρευνα ήταν εθελοντική με δυνατότητα αποχώρησης από αυτή ανά πάσα στιγμή. Η άδεια για τη συμμετοχή τους εξασφαλίστηκε κατόπιν συγκατάθεσης του διευθυντή του σχολείου, των εκπαιδευτικών των τάξεων και των γονέων των μαθητών. Τα δεδομένα αξιοποιήθηκαν αυστηρά για ερευνητικό σκοπό και στο φωτογραφικό υλικό που παρουσιάζεται στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας, τα πρόσωπα των παιδιών είναι επιμελώς καλυμμένα. Σε κανένα σημείο δεν γίνεται αναφορά στα ονόματα των μαθητών ενώ για την αποφυγή ακούσιας αναγνώρισής τους με βάση το φύλο τους, η αναφορά σε αυτούς γίνεται μόνο σε ένα γένος, το αρσενικό.

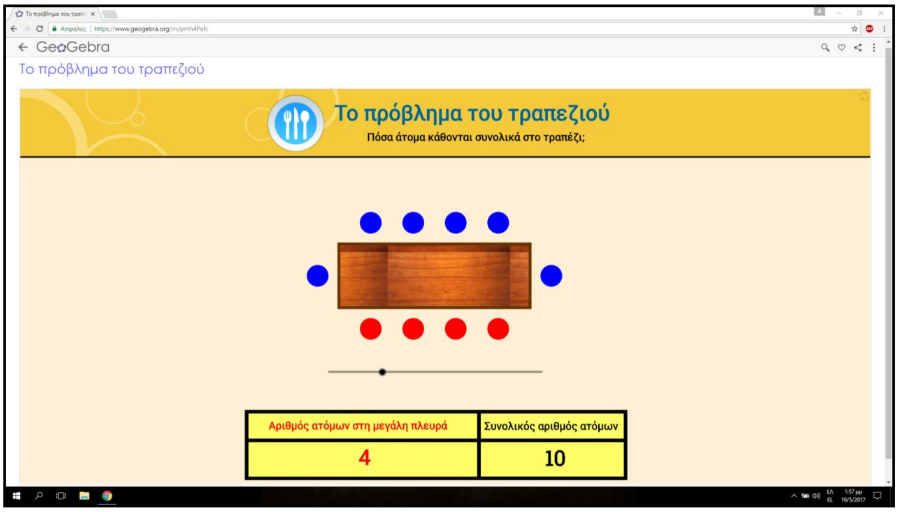
Εικόνα 4.1: Ο εξοπλισμός που χρησιμοποιήθηκε για τη βιντεοσκόπηση στο πλαίσιο της έρευνας (βιντεοκάμερα Panasonic HCX-810 σε τρίποδο Dörr King).

4.2.6 Οι δραστηριότητες

4.2.6.1 «Το πρόβλημα του τραπεζιού»

<u>Φύλλο εργασίας</u>

Είσαι ο ιδιοκτήτης του εστιατορίου «τρώμε όλοι μαζί!». Στο εστιατόριό σου έχεις μόνο ένα τραπέζι στο οποίο οι πελάτες κάθονται όλοι μαζί. Το τραπέζι έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου, όπως αυτό που βλέπεις στην οθόνη του υπολογιστή σου.



Εικόνα 4.2: Στιγιότυπο από το ψηφιακό μαθησιακό αντικείμενο με το οποίο ασχολήθηκαν οι μαθητές της Δ' τάξης στο πλαίσιο της δραστηριότητας «το πρόβλημα του τραπεζιού».

1) Πόσα άτομα κάθονται συνολικά στο τραπέζι (μπλε και κόκκινοι κύκλοι), όταν τα άτομα που κάθονται στη μεγάλη πλευρά (κόκκινοι κύκλοι) είναι 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10; Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα με τη βοήθεια του Η/Υ:

Αριθμός ατόμων στη μεγάλη πλευρά	**Συνολικός αριθμός ατόμων**
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Πίνακας 4.1: Πίνακας τιμών για τις μεταβλητές «αριθμός ατόμων στη μεγάλη πλευρά» και «συνολικός αριθμός ατόμων».

2) Να συνεχίσουμε λίγο ακόμα τον πίνακα;

Σχήμα	**Αριθμός ατόμων στη μεγάλη πλευρά**	**Συνολικός αριθμός ατόμων**
	11	

Πίνακας 4.2: Επέκταση του προηγούμενου πίνακα τιμών με την προσθήκη στήλης για εικονική αναπαράσταση του τραπεζιού ανά σειρά (στη στήλη «σχήμα).

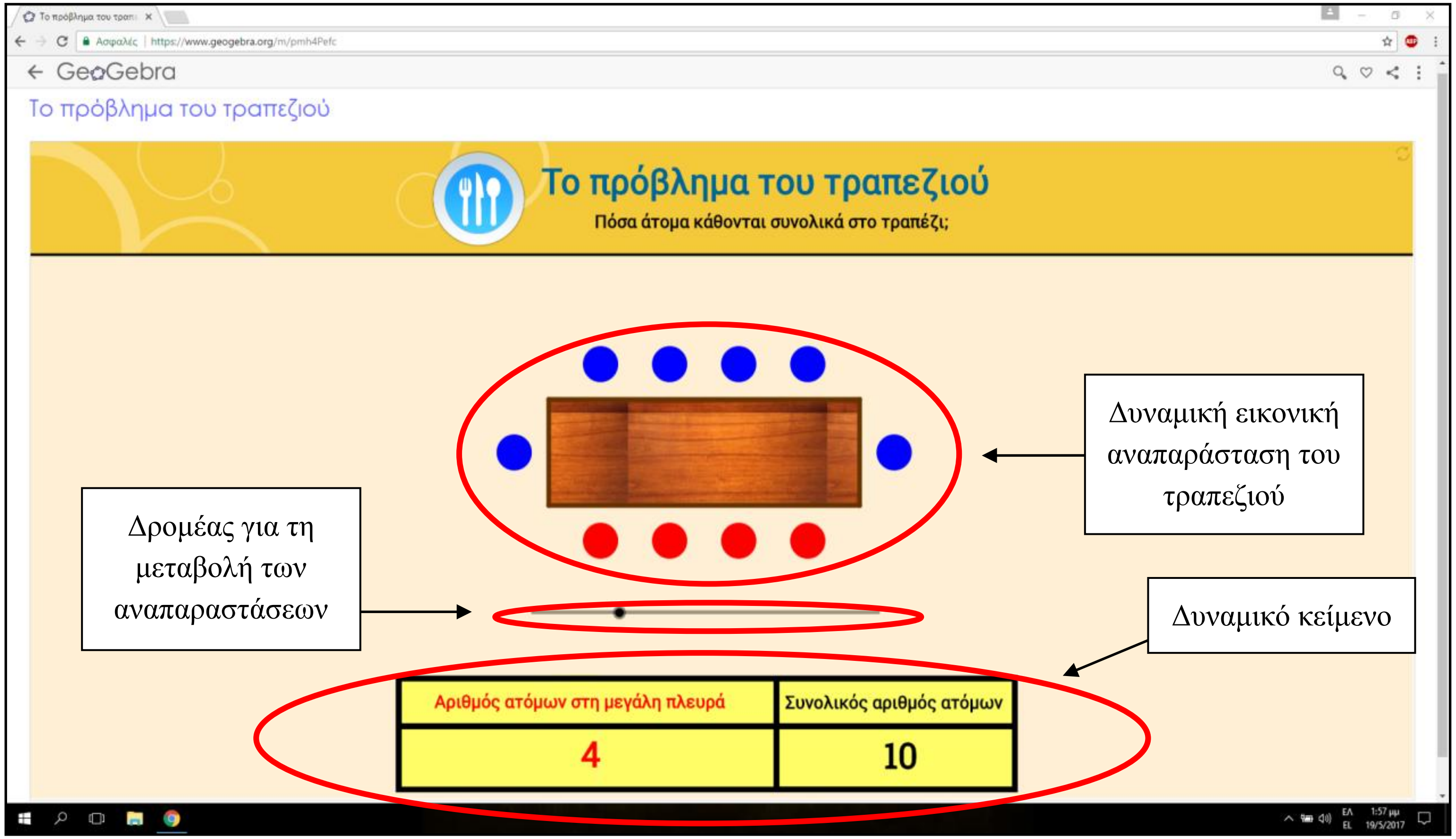
3) Πόσα άτομα κάθονται συνολικά στο τραπέζι, όταν τα άτομα που κάθονται στη μεγάλη πλευρά είναι 50; Όταν είναι 200;

4) Πάμε να βρούμε έναν **γενικό κανόνα** που θα μας λέει πόσα άτομα κάθονται συνολικά στο τραπέζι, αν γνωρίζουμε τα άτομα που κάθονται στη μεγάλη πλευρά.

   Ας ονομάσουμε γενικά τα άτομα που κάθονται στη μεγάλη πλευρά με το γράμμα « **α** ». Μπορείς να φτιάξεις τον γενικό κανόνα χρησιμοποιώντας την παρακάτω ισότητα;

συνολικός αριθμός ατόμων = ____

Ψηφιακό μαθησιακό αντικείμενο

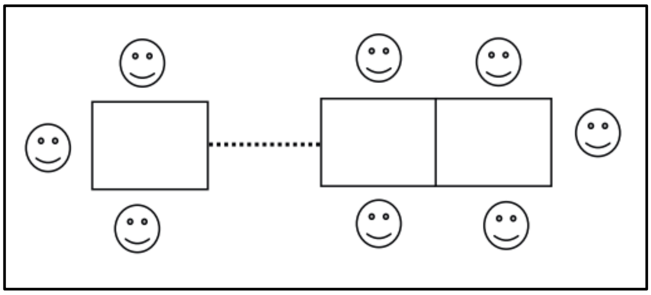


Εικόνα 4.3: Το περιβάλλον του ψηφιακού μαθησιακού αντικειμένου για τη δραστηριότητα «το πρόβλημα του τραπεζιού». Η δυναμική εικονική αναπαράσταση είναι δυναμικά διασυνδεμένη με το δυναμικό κείμενο και οι μεταβολές πραγματοποιούνται από τον χρήστη με τη βοήθεια του δρομέα που βρίσκεται στο κέντρο.

<u>Ανάλυση της δραστηριότητας</u>

Το «πρόβλημα του τραπεζιού» είναι ένα μαθηματικό πρόβλημα στο οποίο ο μαθητής καλείται να σκεφτεί αφαιρετικά και να γενικεύσει. Συγκεκριμένα, από τον μαθητή απαιτείται να εκφράσει μια γενική σχέση που παρατηρείται στα δεδομένα του προβλήματος, χρησιμοποιώντας μία εξίσωση με μεταβλητές. Με άλλα λόγια του ζητείται να κάνει «μεταβλητοποίηση» του προβλήματος, δηλαδή να δώσει τη λύση για κάθε δυνατή περίπτωση, χρησιμοποιώντας μεταβλητές.

Το παρόν μαθηματικό πρόβλημα αποτελεί μία προσαρμογή του προβλήματος που χρησιμοποίησαν οι Carraher et al. (2008) σε μαθητές ηλικίας εννέα (9) ετών. Στο πρόβλημα των ερευνητών αυτών, οι μαθητές κλήθηκαν να κατασκευάσουν μία συναρτησιακή σχέση που συνδέει τον συνολικό αριθμό των ατόμων (y) που μπορούν να καθίσουν σε x ενωμένα τραπέζια, όπως αυτά της παρακάτω εικόνας:



Εικόνα 4.4: Στιγμιότυπο από αντίστοιχο πρόβλημα των Carraher et al. (2008) στο οποίο απεικονίζεται ο τρόπος με τον οποίο τακτοποιούνται y άτομα σε x ενωμένα τραπέζια.

Το συγκεκριμένο πρόβλημα ήταν ενταγμένο σε ένα ευρύτερο πρόγραμμα καλλιέργειας της αλγεβρική σκέψης μικρών μαθητών, οι οποίοι, με κατάλληλες διδακτικές στρατηγικές, ανέπτυξαν την ικανότητα έκφρασης της μαθηματικής γενίκευσης με τη βοήθεια μεταβλητών (Carraher et al., 2008). Στο προσαρμοσμένο πρόβλημα της παρούσας έρευνας, οι μαθητές υποστηρίχθηκαν με κατάλληλες αναπαραστάσεις στη διατύπωση μίας εξίσωση με μεταβλητές, που συνδέει τον συνολικό αριθμό των ατόμων (y) που μπορούν να καθίσουν σε ενωμένα τραπέζια, όπως αυτά της παραπάνω εικόνας, συναρτήσει, όμως, των ατόμων που κάθονται στη μεγάλη πλευρά (x). Η συγκεκριμένη προσαρμογή έγινε προκειμένου η ανεξάρτητη και η εξαρτημένη μεταβλητή να είναι εκφρασμένες στην ίδια μονάδα μέτρησης (x: άτομα και y: άτομα), ώστε να μην απαιτείται «μετασχηματισμός αναφοράς» (Schwartz, 1996, όπ. αναφ. στο Carraher et al., 2008, σελ. 14), δηλαδή μετασχηματισμός στη μονάδα μέτρησης, που ενδεχομένως δυσκολεύει κάποιους μαθητές. Γενικότερα, επειδή το διδακτικό πείραμα είχε σύντομη διάρκεια, επιχειρήθηκε η αφαίρεση όλων εκείνων των πιθανών προσκομμάτων που ενδέχεται να αποπροσανατόλιζαν τους μαθητές από τη μαθηματική αφαίρεση.

Η σχέση την οποία οι μαθητές κλήθηκαν να κατασκευάσουν, ήταν μία γραμμική συνάρτηση της μορφής: y=αx + β και συγκεκριμένα η σχέση:

συνολικός αριθμός ατόμων = 2 · α + 2,
όπου α, ο αριθμός ατόμων στη μεγάλη πλευρά

Για τον σκοπό αυτό, οι μαθητές είχαν στη διάθεσή τους τις εξής αναπαραστάσεις:

1) δυναμική εικονική αναπαράσταση του τραπεζιού στο περιβάλλον Geogebra (ψηφιακό μαθησιακό αντικείμενο),
2) δυναμικές συμβολικές αναπαραστάσεις (δυναμικό κείμενο) στο περιβάλλον Geogebra (ψηφιακό μαθησιακό αντικείμενο)
3) πίνακα τιμών με συμβολικές αναπαραστάσεις (φύλλο εργασίας) και
4) πίνακα τιμών με εικονικές και συμβολικές αναπαραστάσεις (φύλλο εργασίας).

Οι παραπάνω αναπαραστάσεις επιλέχθηκαν και προσαρμόστηκαν έτσι ώστε να ικανοποιούν τα χαρακτηριστικά που επισημάνθηκαν στη βιβλιογραφική ανασκόπηση. Συγκεκριμένα:

1) Το πρώτο χαρακτηριστικό, αυτό της «αντιληπτικής μεταβλητότητας» ικανοποιήθηκε με τη δυναμική εικονική αναπαράσταση του τραπεζιού στον Η/Υ. Ο μαθητής είχε τη δυνατότητα να παρατηρήσει πολλαπλές εικονικές αναπαραστάσεις της μορφής του τραπεζιού, που διατηρούν την κοινή ιδιότητα: *συνολικός αριθμός ατόμων = 2·αριθμός ατόμων στη μεγάλη πλευρά + 2*. Επίσης το κριτήριο της αντιληπτικής μεταβλητότητας ικανοποιείται τόσο στις συμβολικές αναπαραστάσεις του δυναμικού κειμένου όσο και σε αυτές του πίνακα τιμών. Τέλος, ο μαθητής είχε τη δυνατότητα να σχεδιάσει ο ίδιος πολλαπλές εικονικές αναπαραστάσεις του τραπεζιού στον πίνακα τιμών του δεύτερου ερωτήματος στο φύλλο εργασίας του.
2) Το κριτήριο της πολλαπλής ενσωμάτωσης διέτρεχε οριζόντια όλη τη δραστηριότητα. Οι μαθητές είχαν στη διάθεσή τους εικονικές και συμβολικές αναπαραστάσεις των στοιχείων του προβλήματος. Όπως επισημάνθηκε από την Ainsworth (1999), σημαντικό στοιχείο της πολλαπλής ενσωμάτωσης είναι η «μετάφραση» από τη μία αναπαράσταση στην άλλη. Σε τρία σημεία υπήρχε η δυνατότητα για παρατήρηση ή ενεργό συμμετοχή στη μετάφραση από τη μία αναπαράσταση:
    - Η δυναμική εικονική αναπαράσταση στον Η/Υ ήταν δυναμικά διασυνδεμένη με το δυναμικό κείμενο στον Η/Υ. Κάθε μεταβολή στη μπάρα από τον μαθητή μετέβαλε δυναμικά τόσο την εικονική όσο και τη συμβολική αναπαράσταση (βλ. και επόμενο χαρακτηριστικό).
    - Οι μαθητές κλήθηκαν να μεταφράσουν από τη δυναμική εικονική αναπαράσταση ή/και το δυναμικό κείμενο στον πίνακα τιμών του ερωτήματος
    - Ο πίνακας τιμών τους δεύτερου ερωτήματος παρείχε τη δυνατότητα για ταυτόχρονη παρουσία της εικονικής και της συμβολικής αναπαράστασης των στοιχείων του προβλήματος στην ίδια γραμμή. Ένας τέτοιος πίνακας είχε χορηγηθεί στους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα των Carraher et al. (2008).

3) Η «δυναμική σύνδεση» ικανοποιήθηκε με δύο τρόπους στις αναπαραστάσεις της δραστηριότητας:
    - Οι δυναμική εικονική αναπαράσταση του τραπεζιού στον Η/Υ ήταν δυναμικά διασυνδεμένη με το δυναμικό κείμενο στον Η/Υ. Με τον τρόπο αυτό ο μαθητής ήταν σε θέση να παρατηρεί πώς η αλλαγή στη μία αναπαράσταση επηρεάζει την αλλαγή την άλλη (Lesh et al., 1987) μετακινώντας μία μπάρα που μεταβάλλει τον αριθμό των ατόμων που κάθονται στη μεγάλη πλευρά.
    - Στον πίνακα τιμών του δεύτερου ερωτήματος (με την προσθήκη της εικονικής αναπαράστασης του τραπεζιού), ο μαθητής είχε τη δυνατότητα να μελετήσει με μεγαλύτερη προσωπική εμπλοκή πώς η μεταβολή στην εικονική αναπαράσταση (πρώτη στήλη) επηρεάζει τη μεταβολή στις συμβολικές αναπαραστάσεις (δεύτερη και τρίτη στήλη)
4) Στη δραστηριότητα, δόθηκε σε πρώτη φάση στους μαθητές η εικονική αναπαράσταση και ύστερα αυξανόταν σταδιακά η παρουσία των συμβολικών αναπαραστάσεων (δυναμικό κείμενο και πινάκες τιμών). Η πορεία αυτή είναι σύμφωνη με τη θεωρία του Bruner (1966) για τη μετάβαση από τις εμπράγματες στις εικονικές και τέλος στις συμβολικές αναπαραστάσεις, με τη διαφορά ότι στη δραστηριότητα δεν υπήρξαν εμπράγματες αναπαραστάσεις και η πορεία μετάβασης δεν ήταν τόσο γραμμική. Οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα να κινηθούν ελεύθερα μεταξύ των αναπαραστάσεων, κάτι που επεσήμαναν οι Behr et al. (1981, όπ. αναφ στο Πατσιομίτου & Εμβαλωτής, 2009).
5) Η δραστηριότητα ενσωμάτωνε πολλές ευκαιρίες για ενεργό συμμετοχή των μαθητών. Συγκεκριμένα, μπορούσαν να επενεργήσουν πάνω στις δυναμικές εικονικές αναπαραστάσεις μεταβάλλοντας οι ίδιοι, κατά το δοκούν, τη μορφή του τραπεζιού (χειρισμός της μπάρας). Η δυνατότητα που δίνεται για αλληλεπίδραση του μαθητή με δυναμικές αναπαραστάσεις είναι ιδιαίτερα σημαντική για τη μάθηση των Μαθηματικών (Goldin & Kaput, 1996). Επιπλέον, οι πίνακες τιμών ήταν είτε μερικώς συμπληρωμένοι (ερώτημα 1) είτε κενοί (ερώτημα 2). Ένας από τους λόγους για τους οποίους οι μαθητές κλήθηκαν να συμπληρώσουν τον πρώτο πίνακα ήταν η εξάσκηση στη συμπλήρωση του πίνακα τιμών (άσχετος με τη μαθηματική αφαίρεση). Ο πίνακας τιμών του δεύτερου ερωτήματος απαιτούσε από τον μαθητή να μεταφράσει μεταξύ των εικονικών και των συμβολικών αναπαραστάσεων με πιο ενεργό τρόπο. Σε αντίθεση με την αυτόματη μετάφραση μεταξύ δυναμικής εικονικής αναπαράστασης και δυναμικού κειμένου στον Η/Υ, ο μαθητής κλήθηκε να μεταφράσει μόνος του μεταξύ των δύο αναπαραστάσεων στον σύνθετο πίνακα του δεύτερου ερωτήματος. Η συγκεκριμένη διδακτική στρατηγική ήταν σύμφωνη με την άποψη ότι ο μαθητής δεν θα πρέπει να είναι παθητικός δέκτης της αυτόματης μετάφρασης μεταξύ των αναπαραστάσεων που παράγονται σε Η/Υ (Ainsworth, 1999).

Επίσης, να αναφέρουμε ότι παρούσα στη δραστηριότητα ήταν και η φυσική γλώσσα. Το ιδιαίτερο αυτό αναπαραστατικό σύστημα εμφανίστηκε στο πρόβλημα με τη μορφή γραπτού κειμένου για την εισαγωγή των μαθητών στο πρόβλημα αλλά και με τον προφορικό λόγο του ερευνητή-εκπαιδευτικού και των μαθητών. Να σημειωθεί ότι η γλώσσα δεν αποτελεί αντικείμενο έρευνας στην παρούσα εργασία.

Η έκφραση μίας συναρτησιακής σχέσης μπορεί να γίνει με δύο τρόπους (Carraher et al, 2008). Από τη μία, υπάρχει «η αναδρομική έκφραση», που αποτελείται από δύο εξισώσεις, μία για την πρώτη περίπτωση και μία για όλες τις υπόλοιπες (Carraher et al, 2008, σελ. 7), δηλαδή για το πρόβλημά μας (y: συνολικός αριθμός ατόμων και x: τα άτομα που κάθονται στη μεγάλη πλευρά):

$$\left.\begin{array}{r} y(2) = 6 \\ y(x) = y(x-1) + 2,\ x \geq 3 \end{array}\right\} \quad x \in N\ U\ [3, +\infty)$$

Από την άλλη, μία «έκφραση κλειστής μορφής» απαιτεί μόνο μία εξίσωση (Carraher et al, 2008, σελ. 7):

$$y(x) = 2 \cdot x + 2,\ x \in N\ U\ [2, +\infty)$$

Το βασικό πλεονέκτημα της έκφρασης κλειστής μορφής είναι η ευελιξία υπολογισμού της τιμής της μεταβλητής y για οποιαδήποτε τιμή της μεταβλητής x (Carraher et al, 2008). Αντίθετα, με την αναδρομική έκφραση, για τον υπολογισμό μίας τιμής της μεταβλητής y, είναι απαραίτητος ο υπολογισμός όλων των ενδιάμεσων τιμών από την πρώτη περίπτωση μέχρι την περίπτωση που μας ενδιαφέρει. Στην παρούσα έρευνα το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στην έκφραση της μαθηματικής γενίκευσης με έναν τύπο κλειστής μορφής. Σύμφωνα με τους Carraher et al. (2008), ο πίνακας τιμών προσανατολίζει τους μαθητές στην αναδρομική έκφραση αλλά αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο ανακάλυψης προτύπων (αφαιρετικών δομών). Στις αναδρομικές εκφράσεις η έμφαση δίνεται όχι τόσο στη σύνδεση ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής αλλά στον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται μόνο η εξαρτημένη μεταβλητή. Οι ερευνητές (Carraher et al, 2008) κατάφεραν να προσανατολίσουν τους μαθητές στη διατύπωση μίας έκφρασης κλειστής μορφής, προτείνοντάς τους να υπολογίσουν την τιμή της μεταβλητής y για μία μεγάλη τιμή της μεταβλητής x. Στη δραστηριότητα της παρούσας έρευνας, αυτή η τεχνική είναι εμφανής στο τρίτο ερώτημα (όταν στη μεγάλη πλευρά κάθονται 50 ή 200 άτομα). Επίσης, επιχειρήσαμε τον προσανατολισμό των μαθητών σε μία έκφραση κλειστής μορφής, υποδεικνύοντας τους, στο τέταρτο ερώτημα, να εκφράσουν τη γενική σχέση με τις μεταβλητές «συνολικός αριθμός ατόμων» & «αριθμός ατόμων στη μεγάλη πλευρά».

Η χρήση των μεταβλητών συνδέεται με διάφορες δυσκολίες κατανόησης από την πλευρά των μαθητών (Ursini & Trigueros, 2001). Επιπλέον,. σύμφωνα με τον Van de Walle (2007, σελ. 342), «έρευνες από το 1975 μέχρι σήμερα δείχνουν ξεκάθαρα ότι το «=» είναι ένα ελάχιστα κατανοητό σύμβολο». Ο Λεμονίδης (1996) επισημαίνει πως ορισμένοι μαθητές κατανοούν το σύμβολο του ίσον με τη σημασία

«κάνε την πράξη» και όχι ως σύμβολο ποσοτικής ισότητας αριστερού και δεξιού μέλους. Το κατά πόσο μαθητές της Δ' τάξης του Δημοτικού Σχολείου θα κατάφερναν να χειριστούν σωστά τις αφαιρετικές
έννοιες της μεταβλητής και της ισότητας, αποτέλεσε πρόκληση για την παρούσα έρευνα.

Προκαταρκτική ανάλυση σύμφωνα με το μοντέλο AiC

Πριν τη διεξαγωγή μίας έρευνας με το μοντέλο "Abstraction in Context" (AiC), οι Dreyfus et al. (2015) προτείνουν την προκαταρκτική ανάλυση των εννοιολογικών δομών που αναμένεται να κατασκευαστούν μέσα από τη διαδικασία της μαθηματικής αφαίρεσης (σελ. 201-202). Στην περίπτωσή μας, η αφαιρετική δομή την οποία οι μαθητές καλούνται να κατασκευάσουν είναι μία συνάρτηση κλειστής μορφής με μεταβλητές, στο πλαίσιο της γενίκευσης της σχέσης που παρατηρείται μεταξύ των μεταβλητών «συνολικός αριθμός ατόμων» και «αριθμός ατόμων στη μεγάλη πλευρά». Διακρίνουμε την κατανόηση της μαθηματικής αφαίρεσης που απαιτείται από το πρόβλημα στα εξής πέντε (5) επίπεδα:

Επίπεδο	**Περιγραφή**
Α-1	Ο μαθητής πραγματοποίησε ορθά τη μαθηματική αφαίρεση-γενίκευση και την εξέφρασε με τη συνάρτηση κλειστής μορφής: **συνολικός αριθμός ατόμων = 2 · α + 2** ή **συνολικός αριθμός ατόμων = (2 · α) + 2** ή **συνολικός αριθμός ατόμων = α + α + 2**
Α-2	Ο μαθητής πραγματοποίησε ορθά τη μαθηματική αφαίρεση-γενίκευση αλλά δεν εξέφρασε τη συνάρτηση κλειστής μορφής με ισότητα και μεταβλητές. Αντίθετα χρησιμοποίησε άτυπες αναπαραστάσεις όπως: **«Ο συνολικός αριθμός των ατόμων που κάθονται στο τραπέζι βγαίνει αν πολλαπλασιάσουμε με το 2 τον αριθμό των ατόμων που κάθονται στη μεγάλη πλευρά και προσθέσουμε το 2»** ή **«Ο συνολικός αριθμός των ατόμων που κάθονται στο τραπέζι βγαίνει αν προσθέσουμε τα άτομα που κάθονται στη μία μεγάλη πλευρά (και) τα άτομα που κάθονται στην άλλη μεγάλη πλευρά και τα δύο άτομα που κάθονται στις άκρες»**
Β	Ο μαθητής πραγματοποίησε κάποιο είδος αφαίρεσης-γενίκευσης αλλά δεν κατάφερε να συνδέσει συναρτησιακά τις δύο μεταβλητές. Στάθηκε στο μοτίβο μεταβολής της μεταβλητής «συνολικός αριθμός ατόμων» και εξέφρασε μία φράση που θυμίζει αναδρομικό τύπο συνάρτησης όπως: **«Τα συνολικά άτομα αυξάνονται κατά δύο κάθε φορά»**
Γ	Ο μαθητής συνειδητοποίησε την ανάγκη για αφαίρεση-γενίκευση, προσπάθησε να παρατηρήσει μοτίβα αλλά δεν έφθασε σε κάποιο αποτέλεσμα.
Δ	Ο μαθητής δεν κατάφερε να σκεφτεί αφαιρετικά και έμεινε στο επίπεδο των μεμονωμένων περιπτώσεων (π.χ. όταν τα άτομα στη μεγάλη πλευρά είναι 5, όλα τα άτομα είναι 12»).

Πίνακας 4.3: Προσδιορισμός των διαφόρων επιπέδων μαθηματικής αφαίρεσης στα οποία αναμένεται να φθάσουν οι μαθητές εργαζόμενοι πάνω στη δραστηριότητα «το πρόβλημα του τραπεζιού».

Οι φάσεις του μοντέλου AiC προσαρμόζονται ως εξής για την παρούσα δραστηριότητα:

Φάση	**Ενέργειες μαθητή σύμφωνα με το μοντέλο AiC**	**Προσαρμογή για τη δραστηριότητα «Το πρόβλημα του τραπεζιού»**
1η	Αναγνώριση ανάγκης για μαθηματική αφαίρεση	Ο μαθητής καλείται να συνειδητοποιήσει την ανάγκη για πραγματοποίηση μαθηματικής αφαίρεσης-γενίκευσης στο 3ο & 4ο ερώτημα της παρούσας εργασίας. Βέβαια, δεν αποκλείεται να συνειδητοποιήσει αυτήν την ανάγκη ήδη στα ερωτήματα 1 & 2.
2η	Αναγνώριση προϋπαρχόντων γνώσεων που θα βοηθήσουν στην οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης	Ο μαθητής μπορεί να αξιοποιήσει τις γνώσεις του από τη δραστηριοποίησή του με τη δυναμική εικονική αναπαράσταση του τραπεζιού στο περιβάλλον Geogebra, τη δυναμική συμβολική αναπαράσταση (δυναμικό κείμενο) στο ίδιο περιβάλλον, καθώς και τους πίνακες τιμών με συμβολικές και εικονικές αναπαραστάσεις. Επίσης, καλείται να αξιοποιήσει τις γνώσεις του για τη προσθετική σύνθεση (π.χ. 10+10+5=25) ή την προσθετική ανάλυση (π.χ. 25=10+10+5). Σημαντική είναι η αξιοποίηση της γνώσης του συμβόλου του «ίσον» ως συμβόλου ποσοτικής ισότητας αριστερού και δεξιού μέλους.
3η	Εργασία με τις προϋπάρχουσες γνώσεις με στόχο την οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης	Σε αυτή τη φάση οι μαθητές αναμένεται να εργαστούν με τα ψηφιακά μαθησιακά αντικείμενα και τις δραστηριότητες των φύλλων εργασίας τους με τελικό στόχο την οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης-γενίκευσης. Οι μαθητές μπορούν να εστιάσουν ελεύθερα σε όποια αναπαράσταση επιθυμούν ή ακόμα και να κατασκευάσουν δικές τους εξωτερικές αναπαραστάσεις. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού-ερευνητή είναι διακριτικός.
4η	Κατασκευή της μαθηματικής αφαίρεσης	Το επίπεδο της αφαιρετικής κατασκευής των μαθητών προσδιορίζεται από τον προηγούμενο πίνακα (πίνακας 4.3).
5η	Εμπέδωση της νέας γνώσης (της μαθηματικής αφαίρεσης)	Η εμπέδωση της νέας γνώσης απαιτεί περισσότερη δραστηριοποίηση του μαθητή και ξεφεύγει από τον σκοπό της παρούσας έρευνας.

Πίνακας 4.4: Προκαταρκτική ανάλυση της διαδικασίας οικοδόμησης της μαθηματικής αφαίρεσης σύμφωνα με το μοντέλο AiC (Abstraction in Context) για «το πρόβλημα του τραπεζιού».

4.2.6.2 «Το λαστιχένιο παραλληλόγραμμο!»

Φύλλο εργασίας συνέντευξης (pre-test)

Ενότητα 1: Εισαγωγή στα σχήματα

1. Μπορείς να ορίσεις με δικά σου λόγια ένα παραλληλόγραμμο; Σχεδίασε κάποια παραλληλόγραμμα.

2. Μπορείς να ορίσεις με δικά σου λόγια έναν ρόμβο; Σχεδίασε κάποιους ρόμβους.

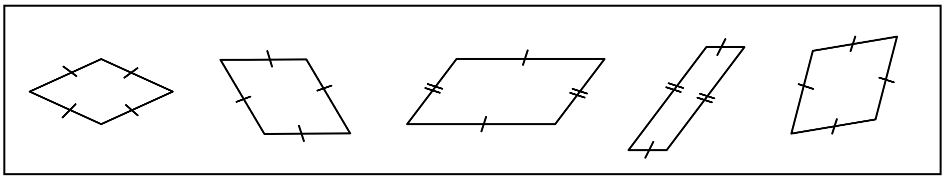
3. Μπορείς να ορίσεις με δικά σου λόγια ένα τετράγωνο; Σχεδίασε κάποια τετράγωνα.

4. Μπορείς να ορίσεις με δικά σου λόγια ένα ορθογώνιο; Σχεδίασε κάποια ορθογώνια.

Ενότητα 2: Παραλληλόγραμμα και ρόμβοι

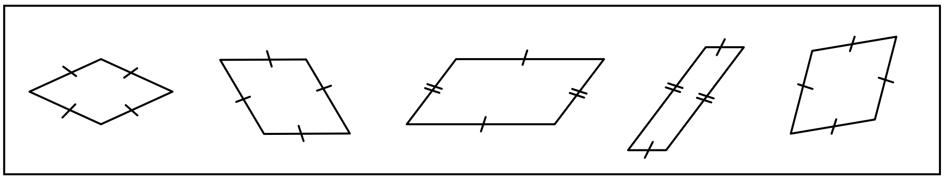
1. Μπορούμε να πούμε ότι ένας ρόμβος είναι μια ειδική περίπτωση παραλληλογράμμου; Ναι ή όχι και γιατί;

2. Κύκλωσε τα σχήματα που είναι ρόμβοι.



Εικόνα 4.5: Οι μαθητές κλήθηκαν να επιλέξουν τους ρόμβους σε ένα σύνολο σχημάτων που περιέχει ρόμβους και παραλληλόγραμμα.

3. Κύκλωσε τα σχήματα που είναι παραλληλόγραμμα.

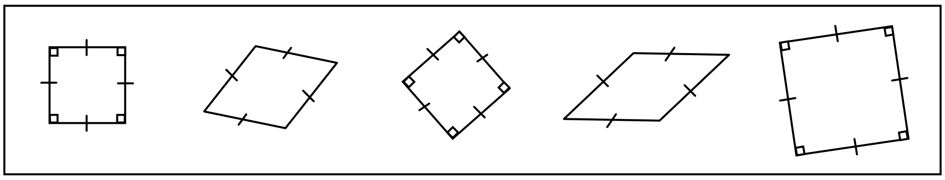


Εικόνα 4.6: Οι μαθητές κλήθηκαν να επιλέξουν τα παραλληλόγραμμα στο ίδιο σύνολο σχημάτων.

Ενότητα 3: Ρόμβοι και τετράγωνα

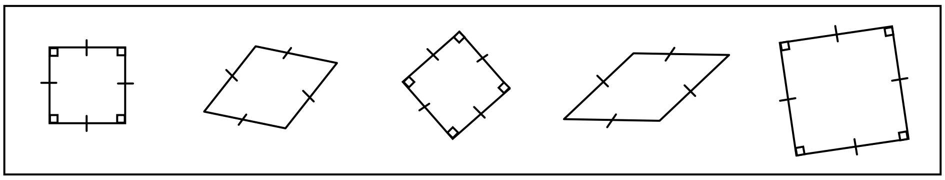
1. Μπορούμε να πούμε ότι ένα τετράγωνο είναι μια ειδική περίπτωση ρόμβου; Ναι ή όχι και γιατί;

2. Κύκλωσε τα σχήματα που είναι τετράγωνα.



Εικόνα 4.7: Οι μαθητές κλήθηκαν να επιλέξουν τα τετράγωνα σε ένα σύνολο σχημάτων που περιέχει τετράγωνα και ρόμβους.

3. Κύκλωσε τα σχήματα που είναι ρόμβοι.

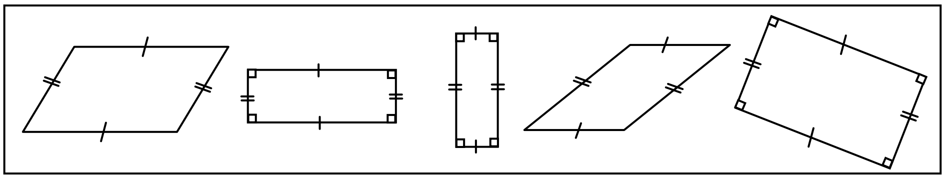


Εικόνα 4.8: Οι μαθητές κλήθηκαν να επιλέξουν τους ρόμβους στο ίδιο σύνολο σχημάτων.

Ενότητα 4: Παραλληλόγραμμα και ορθογώνια

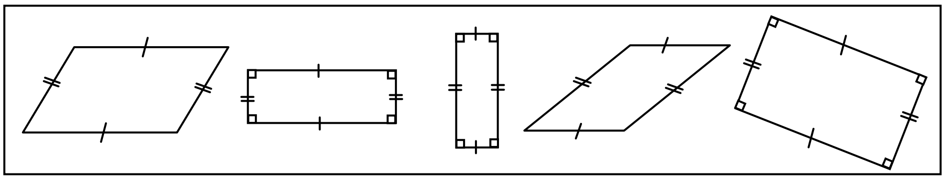
1. Μπορούμε να πούμε ότι ένα ορθογώνιο είναι μια ειδική περίπτωση παραλληλογράμμου; Ναι ή όχι και γιατί;

2. Κύκλωσε τα σχήματα που είναι ορθογώνια.



Εικόνα 4.9: Οι μαθητές κλήθηκαν να επιλέξουν τα ορθογώνια σε ένα σύνολο σχημάτων που περιέχει ορθογώνια και παραλληλόγραμμα.

3. Κύκλωσε τα σχήματα που είναι παραλληλόγραμμα.

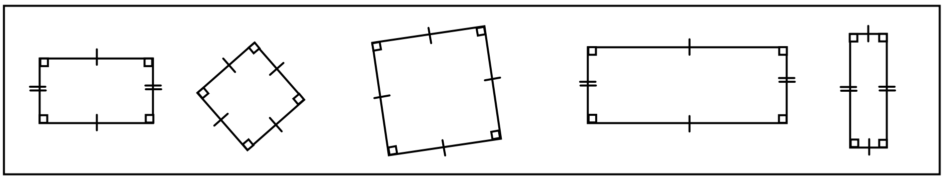


Εικόνα 4.10: Οι μαθητές κλήθηκαν να επιλέξουν τα παραλληλόγραμμα στο ίδιο σύνολο σχημάτων.

Ενότητα 5: Ορθογώνια και τετράγωνα

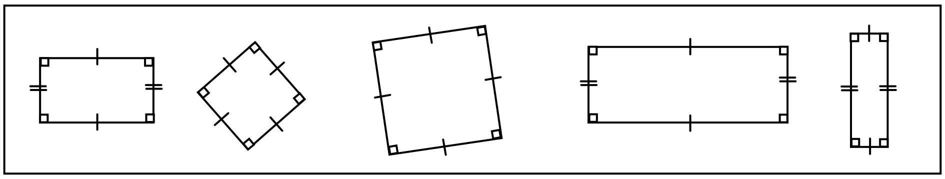
1. Μπορούμε να πούμε ότι ένα τετράγωνο είναι μια ειδική περίπτωση ορθογωνίου; Ναι ή όχι και γιατί;

2. Κύκλωσε τα σχήματα που είναι τετράγωνα.



Εικόνα 4.11: Οι μαθητές κλήθηκαν να επιλέξουν τα τετράγωνα σε ένα σύνολο σχημάτων που περιέχει τετράγωνα και ορθογώνια.

3. Κύκλωσε τα σχήματα που είναι ορθογώνια.

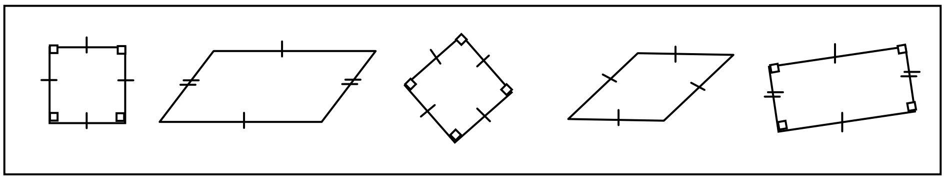


Εικόνα 4.12: Οι μαθητές κλήθηκαν να επιλέξουν τα ορθογώνια στο ίδιο σύνολο σχημάτων.

Ενότητα 6: Παραλληλόγραμμα και τετράγωνα

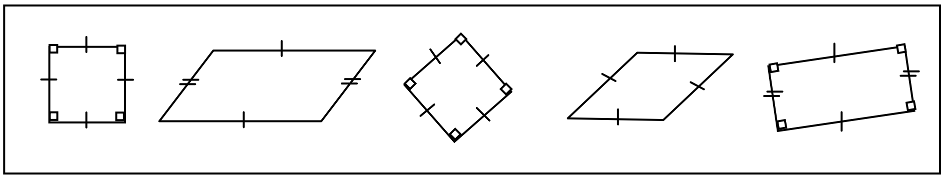
1. Μπορούμε να πούμε ότι ένα τετράγωνο είναι μια ειδική περίπτωση παραλληλογράμμου; Ναι ή όχι και γιατί;

2. Κύκλωσε τα σχήματα που είναι τετράγωνα.



Εικόνα 4.13: Οι μαθητές κλήθηκαν να επιλέξουν τα τετράγωνα σε ένα σύνολο σχημάτων που περιέχει τετράγωνα και παραλληλόγραμμα.

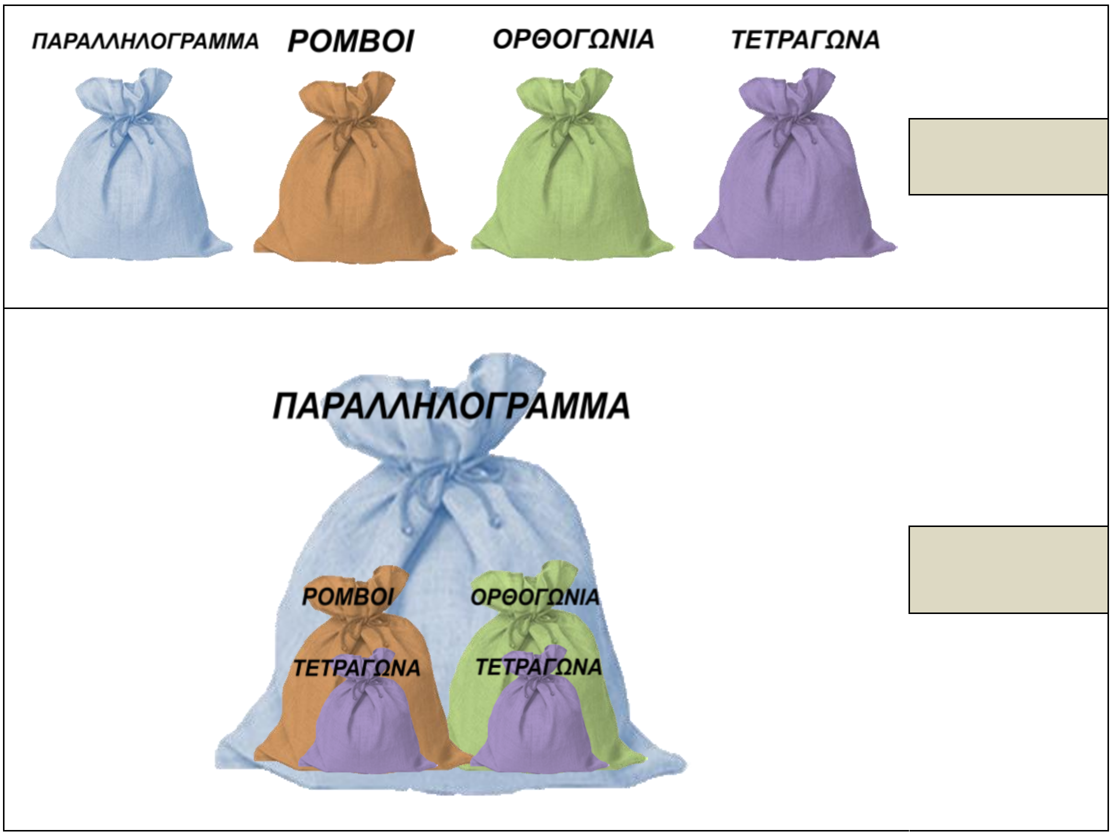
3. Κύκλωσε τα σχήματα που είναι παραλληλόγραμμα.



Εικόνα 4.14: Οι μαθητές κλήθηκαν να επιλέξουν τα παραλληλόγραμμα στο ίδιο σύνολο σχημάτων.

Τελική δραστηριότητα

1. Βάλε Χ δίπλα στην εικόνα που σου φαίνεται πιο σωστή. Μπορείς να βάλεις Χ και στις δύο, αν σου φαίνονται εξίσου σωστές, ή μπορείς να μη βάλεις κανένα Χ, αν δε σου φαίνεται καμία σωστή.

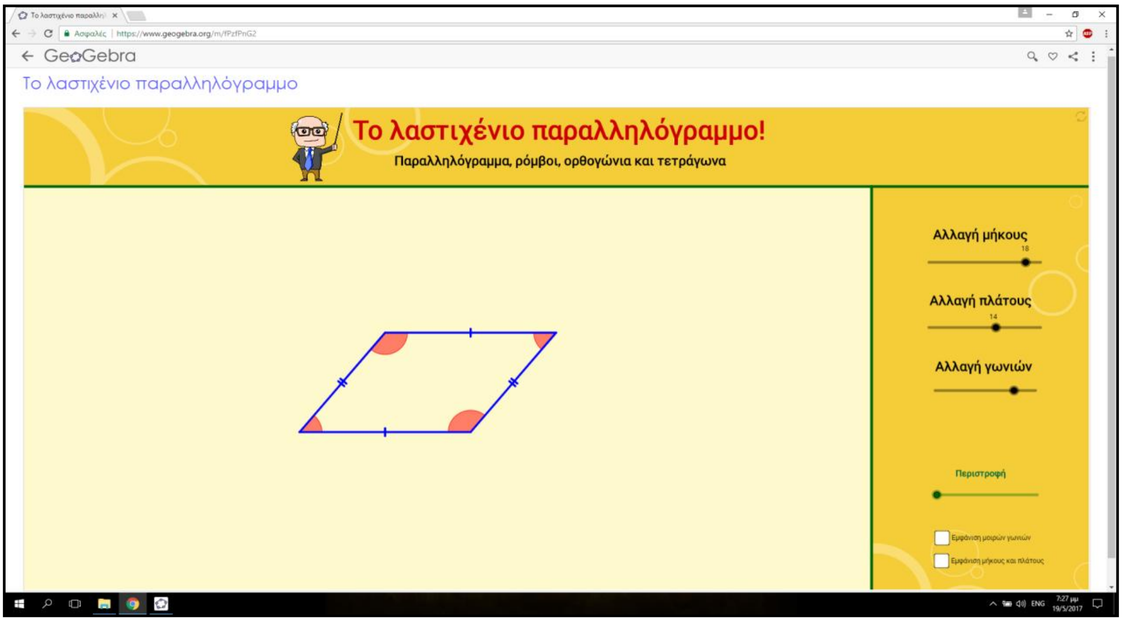


Εικόνα 4.15: Σκοπός της ερώτησης αυτής ήταν οι μαθητές να εξωτερικεύσουν τις εσωτερικές τους εννοιολογικές δομές για τα παραλληλόγραμμα. Αναμένεται ότι οι μαθητές που θεωρούν ότι η δεύτερη εικόνα περιγράφει ορθότερα τις σχέσεις των παραλληλογράμμων, παρουσιάζουν ενδείξεις αφαιρετικής αντίληψης για αυτά (νοητική διεργασία ενσωμάτωσης/σύνθεσης (βλ. 1ο κεφάλαιο)).

2. Μπορείς να δικαιολογήσεις την απάντησή σου;

Φύλλο εργασίας διδακτικού πειράματος

Στην οθόνη του υπολογιστή σου βλέπεις ένα παραλληλόγραμμο που συμπεριφέρεται σαν να ήταν λαστιχένιο. Αυτό γιατί μπορείς να αλλάζεις το μήκος, το πλάτος και τις γωνίες του και να φτιάχνεις διάφορα παραλληλόγραμμα.



Εικόνα 4.16: Στιγιότυπο από το ψηφιακό μαθησιακό αντικείμενο με το οποίο ασχολήθηκαν οι μαθητές της ΣΤ' τάξης στο πλαίσιο της δραστηριότητας «το λαστιχένιο παραλληλόγραμμο».

Ενότητα 1: Διατύπωση ορισμών για τα σχήματα

1) Κατασκεύασε στον Η/Υ σου 5 **παραλληλόγραμμα** αλλάζοντας το μήκος, το πλάτος και τις γωνίες από τους δρομείς που βλέπεις δεξιά στην οθόνη σου.

2) Ομαδική δουλειά: Μπορείς να γράψεις με τους συμμαθητές σου έναν ορισμό για το παραλληλόγραμμο;

Ένα σχήμα είναι ***παραλληλόγραμμο*** *όταν:*

- ____
  ____

3) Κατασκεύασε 5 **ρόμβους** αλλάζοντας το μήκος, το πλάτος και τις γωνίες από τους δρομείς που βλέπεις δεξιά στην οθόνη σου.

4) Ομαδική δουλειά: Μπορείς να γράψεις με τους συμμαθητές σου έναν ορισμό για τον ρόμβο;

*Ένα σχήμα είναι **ρόμβος** όταν:*

- ____
  ____
- ____
  ____

5) Κατασκεύασε 5 **τετράγωνα** αλλάζοντας το μήκος, το πλάτος και τις γωνίες από τους δρομείς που βλέπεις δεξιά στην οθόνη σου.

6) Ομαδική δουλειά: Μπορείς να γράψεις με τους συμμαθητές σου έναν ορισμό για το τετράγωνο;

*Ένα σχήμα είναι **τετράγωνο** όταν:*

- ____
  ____
- ____
  ____
- ____
  ____

7) Κατασκεύασε 5 **ορθογώνια** αλλάζοντας το μήκος, το πλάτος και τις γωνίες από τις μπάρες που βλέπεις δεξιά στην οθόνη σου.

8) Ομαδική δουλειά: Μπορείς να γράψεις με τους συμμαθητές σου έναν ορισμό για το ορθογώνιο;

*Ένα σχήμα είναι **ορθογώνιο** όταν:*

- ____
  ____
- ____
  ____

Ενότητα 2: Παραλληλόγραμμα και ρόμβοι

1) Τώρα, κατασκεύασε ένα παραλληλόγραμμο και προσπάθησε να το μετατρέψεις σε ρόμβο κρατώντας σταθερό το πλάτος και τις γωνίες του παραλληλογράμμου σου και κουνώντας μόνο τον δρομέα του μήκους.
   Πότε το σχήμα σου γίνεται ρόμβος;

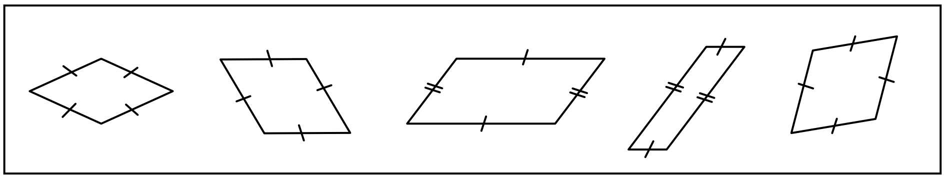
2) Κατασκεύασε 3 ακόμη ρόμβους με τον ίδιο τρόπο, δηλαδή αφού φτιάξεις πρώτα ένα παραλληλόγραμμο, μετάτρεψέ το σε ρόμβο.

3) Μπορούμε να πούμε ότι ένας ρόμβος είναι μία ειδική περίπτωση παραλληλογράμμου; Ναι ή όχι και γιατί;

   Για να βοηθηθείς, μπορείς:

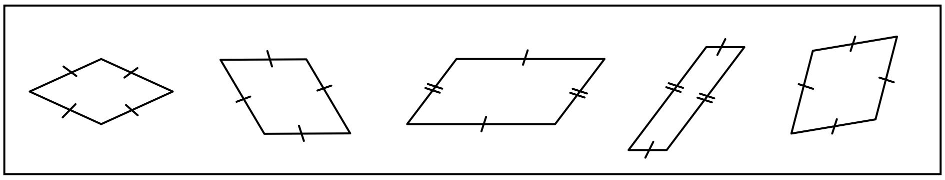
   - να κατασκευάσεις και άλλους ρόμβους με τον τρόπο που χρησιμοποίησες στο προηγούμενο ερώτημα,
   - να κοιτάξεις τους ορισμούς που έγραψες για το παραλληλόγραμμο και τον ρόμβο.

4) Κύκλωσε τα σχήματα που είναι ρόμβοι.



Εικόνα 4.17: Οι μαθητές κλήθηκαν να επιλέξουν τους ρόμβους σε ένα σύνολο σχημάτων που περιέχει ρόμβους και παραλληλόγραμμα.

5) Κύκλωσε τα σχήματα που είναι παραλληλόγραμμα.



Εικόνα 4.18: Οι μαθητές κλήθηκαν να επιλέξουν τα παραλληλόγραμμα στο ίδιο σύνολο σχημάτων.

Ενότητα 3: Ρόμβοι και τετράγωνα

1) Κατασκεύασε έναν ρόμβο και προσπάθησε να τον μετατρέψεις σε τετράγωνο διατηρώντας σταθερά το μήκος και το πλάτος του και μεταβάλλοντας μόνο τον δρομέα των γωνιών. Πότε το σχήμα σου γίνεται τετράγωνο;

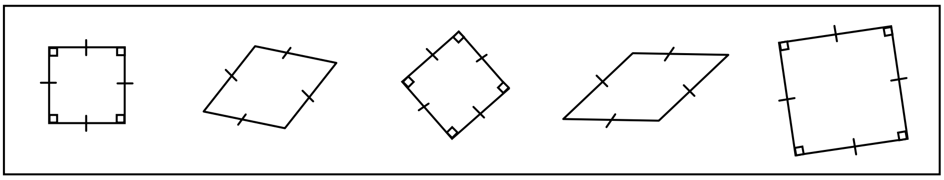
2) Κατασκεύασε 3 ακόμη τετράγωνα με τον ίδιο τρόπο, δηλαδή αφού φτιάξεις πρώτα έναν ρόμβο, μετάτρεψέ τον σε τετράγωνο.

3) Μπορούμε να πούμε ότι ένα τετράγωνο είναι μία ειδική περίπτωση ρόμβου; Ναι ή όχι και γιατί;

Για να βοηθηθείς, μπορείς:

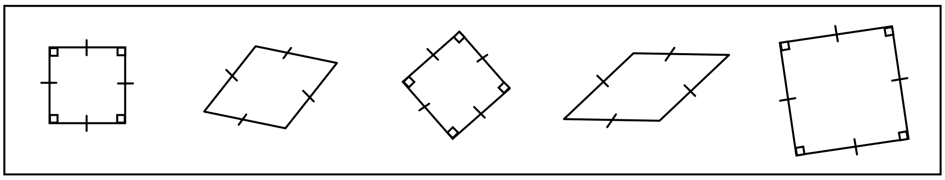
- να κατασκευάσεις και άλλα τετράγωνα με τον τρόπο που χρησιμοποίησες στο προηγούμενο ερώτημα,
- να κοιτάξεις τους ορισμούς που έγραψες για τον ρόμβο και το τετράγωνο.

4) Κύκλωσε τα σχήματα που είναι τετράγωνα.



Εικόνα 4.19: Οι μαθητές κλήθηκαν να επιλέξουν τα τετράγωνα σε ένα σύνολο σχημάτων που περιέχει τετράγωνα και ρόμβους.

5) Κύκλωσε τα σχήματα που είναι ρόμβοι.



Εικόνα 4.20: Οι μαθητές κλήθηκαν να επιλέξουν τους ρόμβους στο ίδιο σύνολο σχημάτων.

Ενότητα 4: Παραλληλόγραμμα και ορθογώνια

1) Κατασκεύασε ένα παραλληλόγραμμο και προσπάθησε να το μετατρέψεις σε ορθογώνιο διατηρώντας σταθερά το μήκος και το πλάτος του και αλλάζοντας μόνο τον δρομέα των γωνιών. Πότε το σχήμα σου γίνεται ορθογώνιο;

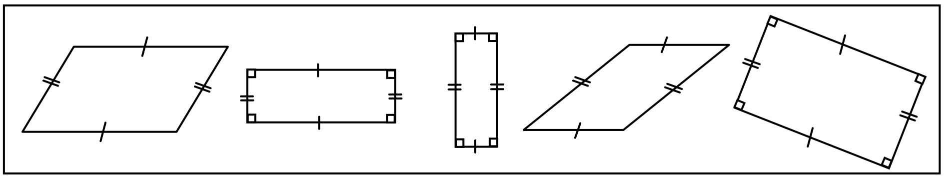
2) Κατασκεύασε 3 ακόμη ορθογώνια με τον ίδιο τρόπο, δηλαδή αφού φτιάξεις πρώτα ένα παραλληλόγραμμο, μετάτρεψέ το σε ορθογώνιο.

3) Μπορούμε να πούμε ότι ένα ορθογώνιο είναι μία ειδική περίπτωση παραλληλογράμμου; Ναι ή όχι και γιατί;

Για να βοηθηθείς, μπορείς:

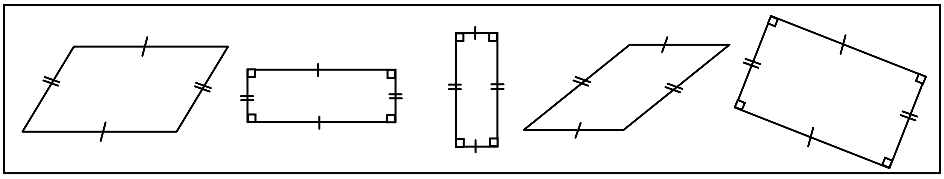
- να κατασκευάσεις και άλλα ορθογώνια με τον τρόπο που χρησιμοποίησες στο προηγούμενο ερώτημα,
- να κοιτάξεις τους ορισμούς που έγραψες για το παραλληλόγραμμο και το ορθογώνιο.

4) Κύκλωσε τα σχήματα που είναι ορθογώνια.



Εικόνα 4.21: Οι μαθητές κλήθηκαν να επιλέξουν τα ορθογώνια σε ένα σύνολο σχημάτων που περιέχει ορθογώνια και παραλληλόγραμμα.

5) Κύκλωσε τα σχήματα που είναι παραλληλόγραμμα.



Εικόνα 4.22: Οι μαθητές κλήθηκαν να επιλέξουν τα παραλληλόγραμμα στο ίδιο σύνολο σχημάτων.

Ενότητα 5: Ορθογώνια και τετράγωνα

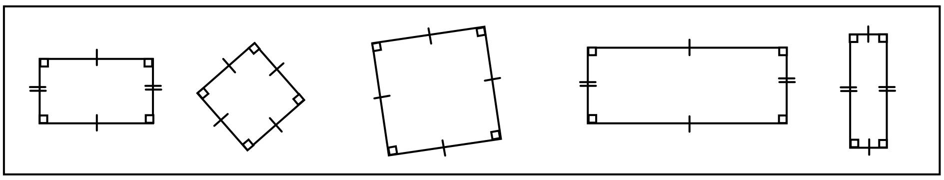
1) Κατασκεύασε ένα ορθογώνιο και προσπάθησε να το μετατρέψεις σε τετράγωνο διατηρώντας σταθερά το μήκος και τις γωνίες του και μεταβάλλοντας μόνο τον δρομέα του πλάτους. Πότε το σχήμα σου γίνεται τετράγωνο;

2) Κατασκεύασε 3 ακόμη τετράγωνα με τον ίδιο τρόπο, δηλαδή αφού φτιάξεις πρώτα ένα ορθογώνιο, μετάτρεψέ το σε τετράγωνο.

3) Μπορούμε να πούμε ότι ένα τετράγωνο είναι μία ειδική περίπτωση ορθογωνίου; Ναι ή όχι και γιατί;

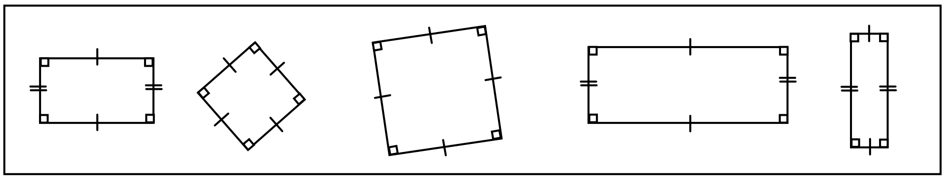
   Για να βοηθηθείς, μπορείς:
   - να κατασκευάσεις και άλλα τετράγωνα με τον τρόπο που χρησιμοποίησες στο προηγούμενο ερώτημα,
   - να κοιτάξεις τους ορισμούς που έγραψες για το ορθογώνιο και το τετράγωνο.

4) Κύκλωσε τα σχήματα που είναι τετράγωνα.



Εικόνα 4.23: Οι μαθητές κλήθηκαν να επιλέξουν τα τετράγωνα σε ένα σύνολο σχημάτων που περιέχει τετράγωνα και ορθογώνια.

5) Κύκλωσε τα σχήματα που είναι ορθογώνια.



Εικόνα 4.24: Οι μαθητές κλήθηκαν να επιλέξουν τα ορθογώνια στο ίδιο σύνολο σχημάτων.

Ενότητα 6: Παραλληλόγραμμα και τετράγωνα

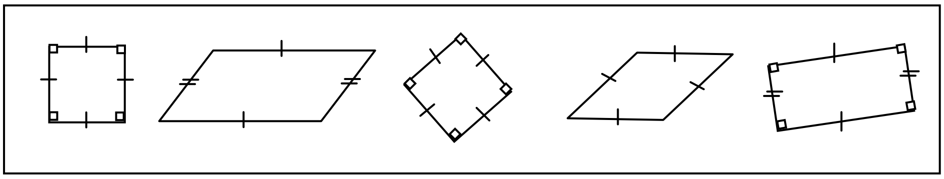
1) Κατασκεύασε ένα παραλληλόγραμμο και προσπάθησε να το μετατρέψεις σε τετράγωνο κάνοντας τις κατάλληλες αλλαγές. Πότε το σχήμα σου γίνεται τετράγωνο;

2) Κατασκεύασε 3 ακόμη τετράγωνα με τον ίδιο τρόπο, δηλαδή αφού φτιάξεις πρώτα ένα παραλληλόγραμμο, μετάτρεψέ το σε τετράγωνο.

3) Μπορούμε να πούμε ότι ένα τετράγωνο είναι μία ειδική περίπτωση παραλληλογράμμου; Ναι ή όχι και γιατί;

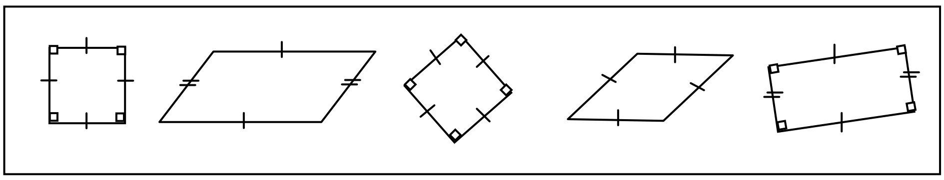
   Για να βοηθηθείς, μπορείς:
   - να κατασκευάσεις και άλλα τετράγωνα με τον τρόπο που χρησιμοποίησες στο προηγούμενο ερώτημα,
   - να κοιτάξεις τους ορισμούς που έγραψες για το παραλληλόγραμμο και το τετράγωνο.

4) Κύκλωσε τα σχήματα που είναι τετράγωνα.



Εικόνα 4.25: Οι μαθητές κλήθηκαν να επιλέξουν τα τετράγωνα σε ένα σύνολο σχημάτων που περιέχει τετράγωνα και παραλληλόγραμμα.

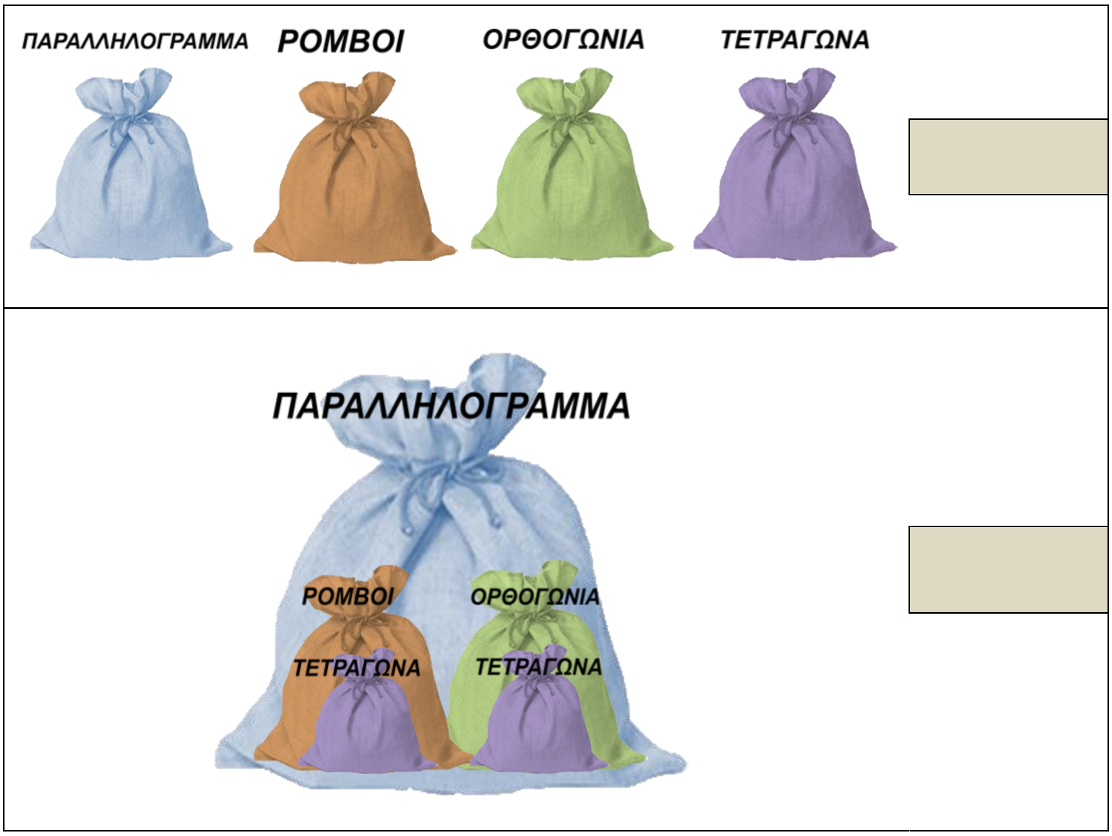
5) Κύκλωσε τα σχήματα που είναι παραλληλόγραμμα.



Εικόνα 4.26: Οι μαθητές κλήθηκαν να επιλέξουν τα παραλληλόγραμμα στο ίδιο σύνολο σχημάτων.

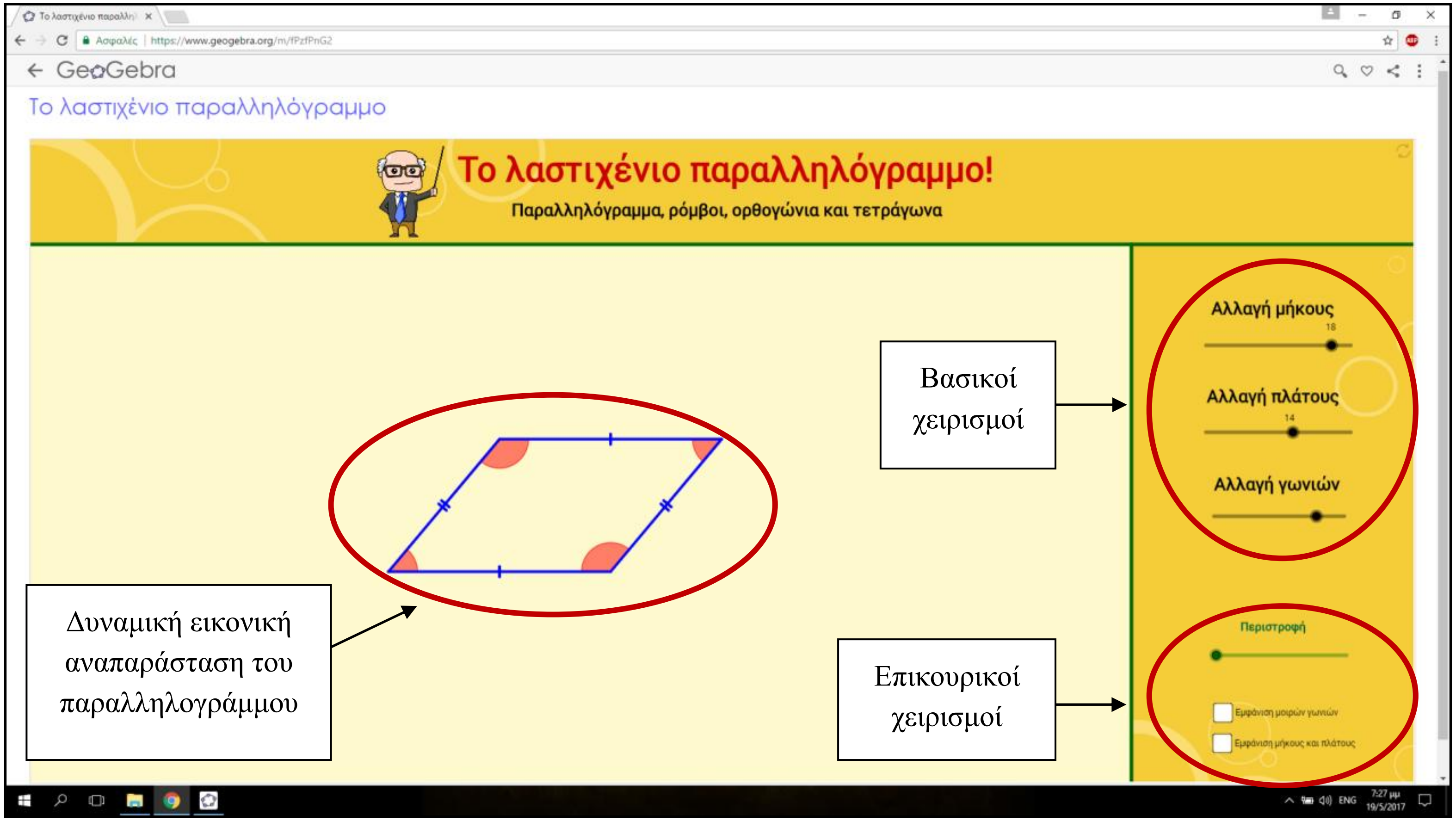
Τελική δραστηριότητα

1. Βάλε Χ δίπλα στην εικόνα που σου φαίνεται πιο σωστή. Μπορείς να βάλεις Χ και στις δύο, αν σου φαίνονται εξίσου σωστές, ή μπορείς να μη βάλεις κανένα Χ, αν δε σου φαίνεται καμία σωστή.



Εικόνα 4.27: Σκοπός της «τελικής δραστηριότητας» ήταν οι μαθητές να εξωτερικεύσουν τις εσωτερικές τους εννοιολογικές δομές για τα παραλληλόγραμμα. Αναμένεται ότι οι μαθητές που θεωρούν ότι η δεύτερη εικόνα περιγράφει ορθότερα τις σχέσεις των παραλληλογράμμων, παρουσιάζουν ενδείξεις αφαιρετικής αντίληψης για αυτά (νοητική διεργασία ενσωμάτωσης/σύνθεσης (βλ. 1^{ο} κεφάλαιο)).

2. Μπορείς να δικαιολογήσεις την απάντησή σου;



Εικόνα 4.28: Το περιβάλλον του ψηφιακού μαθησιακού αντικειμένου για τη δραστηριότητα «το λαστιχένιο παραλληλόγραμμο». Οι μαθητές μπορούσαν να μεταβάλλουν το μήκος, το πλάτος και τις γωνίες του παραλληλογράμμου (βασικοί χειρισμοί) να περιστρέψουν ή να επιλέξουν την εμφάνιση/απόκρυψη των πληροφοριών του μήκος, του πλάτους και των γωνιών του σχήματος (επικουρικοί χειρισμοί).

Ανάλυση της δραστηριότητας

Η πρότερη εμπειρία των μαθητών με τις έννοιες του παραλληλογράμμου, του ρόμβου, του ορθογωνίου και του τετραγώνου πιθανότατα προέρχεται από τη μελέτη κάθε σχήματος ως ξεχωριστής οντότητας, αποκομμένης από τα υπόλοιπα σχήματα της «οικογένειας» των παραλληλογράμμων. «Το λαστιχένιο παραλληλόγραμμο» είναι μία δραστηριότητα που καλεί τον μαθητή να σκεφτεί αφαιρετικά για τα παραλληλόγραμμα προκειμένου να δομήσει ένα ενιαίο εννοιολογικό μοντέλο για αυτά, σύμφωνα με τη νοητική διεργασία της ενσωμάτωσης (Dubinsky, 1991) ή της σύνθεσης (Dreyfus, 1991). Συγκεκριμένα ο μαθητής αναμένεται να οικοδομήσει ένα ενιαίο αφαιρετικό μοντέλο για τα παραλληλόγραμμο, τέτοιο ώστε να αντιλαμβάνεται:

- τον ρόμβο, ως ειδική περίπτωση παραλληλογράμμου με ίσες όλες τις πλευρές του,
- το τετράγωνο, ως ειδική περίπτωση ρόμβου με όλες τις γωνίες του ορθές, ορθογωνίου με όλες τις πλευρές ίσες και παραλληλογράμμου με τις όλες τις πλευρές του ίσες και τις γωνίες του ορθές.
- το ορθογώνιο ως ειδική περίπτωση παραλληλογράμμου με όλες τις γωνίες του ορθές.

Για τον σκοπό αυτό, οι μαθητές είχαν στη διάθεση τους ένα ψηφιακό μαθησιακό αντικείμενο που κατασκευάστηκε για τις ανάγκες της έρευνας στο Περιβάλλον Δυναμικής Γεωμετρίας (DGE) της Geogebra. Επίσης, τους δόθηκε συνοδευτικό φύλλο εργασίας με αναλυτικά βήματα για την υλοποίηση της δραστηριότητας. Στο ψηφιακό μαθησιακό αντικείμενο, οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα να χειριστούν μία δυναμική εικονική (σχηματική) αναπαράσταση ενός παραλληλογράμμου. Οι βασικοί παρεχόμενοι χειρισμοί ήταν η μεταβολή του μήκους, του πλάτους και των γωνιών του παραλληλογράμμου. Οι συμπληρωματικοί χειρισμοί ήταν η περιστροφή του παραλληλογράμμου και η δυνατότητα για εμφάνιση/απόκρυψη των πληροφοριών του μήκους, του πλάτους και των γωνιών του σχήματος. Η δυνατότητα για χειρισμό του μήκους, του πλάτους και των γωνιών του δυναμικού παραλληλογράμμου επιτρέπουν τον μετασχηματισμό του σχήματος σε τυχαίο παραλληλόγραμμο, ρόμβο, ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ή τετράγωνο. Η επιπρόσθετη δυνατότητα για περιστροφή του σχήματος δόθηκε αφενός για να μπορέσουν οι μαθητές να δημιουργήσουν ακόμη πιο πολλές (και πιο τυχαίες) περιπτώσεις παραλληλογράμμων, αφετέρου δε για να συνειδητοποιήσουν πως η περιστροφή του σχήματος δεν το καθιστά σχήμα άλλης κατηγορίας (π.χ. το ανεστραμμένο τετράγωνο «συνεχίζει» να είναι τετράγωνο και όχι μόνο ρόμβος).

Γενικότερα, οι μαθητές έρχονται σε επαφή με τις εξής αναπαραστάσεις:

- Δυναμική εικονική (σχηματική) αναπαράσταση του παραλληλογράμμου.
- Γλωσσικές αναπαραστάσεις με τη μορφή ορισμών των σχημάτων (στατικές συμβολικές αναπαραστάσεις)

- Συμβολικές δυναμικές αναπαραστάσεις (δυναμικό κείμενο) του μήκους, του πλάτους και των γωνιών ως επικουρικές αναπαραστάσεις.
- Συμβολικές δυναμικές αναπαραστάσεις της παραλληλίας και της ισότητας των πλευρών (σύμβολα «/» και «//» και επισήμανση με φαρδιά γραμμή για την ισότητα όλων των πλευρών) καθώς και αντίστοιχες αναπαραστάσεις για την υπόδειξη των γωνιών στο σχήμα.

Οι παραπάνω αναπαραστάσεις ικανοποιούν τα πέντε (5) χαρακτηριστικά των αναπαραστάσεων που προάγουν τη μαθηματική αφαίρεση, σύμφωνα με τη βιβλιογραφική ανασκόπηση. Συγκεκριμένα:

- Το κριτήριο της αντιληπτικής μεταβλητότητας του Dienes (Lesh, Post, & Behr, 1987˙ Sriraman, 2005) ικανοποιείται από τη δυναμική αναπαράσταση του παραλληλογράμμου. Ο μαθητής είχε τη δυνατότητα να δημιουργήσει και να παρατηρήσει πολλαπλές αναπαραστάσεις τυχαίου παραλληλογράμμου, ρόμβου, ορθογωνίου και τετραγώνου, με σκοπό τη διατύπωση ορισμών για τα σχήματα. Ωστόσο, η αντιληπτική μεταβλητότητα δεν αξιοποιήθηκε μόνο για τη διατύπωση των ορισμών αλλά κυρίως για την υποστήριξη στη δόμηση ενός ενιαίου αφαιρετικού μοντέλου για τα παραλληλόγραμμα. Για παράδειγμα, στη 2η δραστηριότητα (ενέργεια) της 2ης ενότητας ο μαθητής κλήθηκε να κατασκευάσει έναν ρόμβο, διατηρώντας σταθερό το πλάτος και τις γωνίες του παραλληλογράμμου και μεταβάλλοντας μόνο το μήκος του. Η μεταβολή του μήκους προκαλεί την κατασκευή μίας πληθώρας αναπαραστάσεων στο εφαρμογίδιο, μία από τις οποίες είναι και η επιθυμητή (όταν το μήκος γίνει ίσο με το πλάτος). Σε όλες τις αναπαραστάσεις που παρεμβάλλονται μέχρι ο μαθητής να φτάσει στην κατασκευή του ρόμβου, αλλά και στον ίδιο τον ρόμβο, ικανοποιείται η σταθερή ιδιότητα της παραλληλίας των απέναντι πλευρών. Στον ρόμβο, επιπλέον, παρατηρείται και ισότητα όλων των πλευρών. Με τον τρόπο αυτό επιδιώκεται η κατανόηση του ρόμβου ως ειδικής περίπτωσης παραλληλογράμμου, του τετραγώνου ως ειδικής περίπτωσης ρόμβου κτλ.
- Στη δραστηριότητα, η έννοια της οικογένειας των παραλληλογράμμων προσεγγίστηκε από δυο βασικά είδη αναπαραστάσεων: τη δυναμική εικονική (σχηματική) αναπαράσταση και τους ορισμούς των παραλληλογράμμων (γλωσσική-συμβολική αναπαράσταση). Με τον τρόπο αυτό επιχειρήθηκε η ενσωμάτωση της έννοιας σε πολλαπλές μορφές αναπαραστάσεων, όπως αυτή περιγράφηκε από τον Dienes (Ainsworth, 1999 & 2006˙ Lesh, Post, & Behr, 1987˙ Sriraman, 2005). Σε διάφορα σημεία της δραστηριότητας, οι μαθητές κλήθηκαν να αξιοποιήσουν και τις δύο μορφές αναπαραστάσεων και να μεταφράσουν από τη μία στην άλλη (στη διατύπωση των ορισμών της ενότητας 1 και στο ερώτημα 3 των ενοτήτων 2, 3, 4, 5 & 6). Παράλληλα, οι βοηθητικές αναπαραστάσεις (δυναμικές πληροφορίες για την παραλληλία, το

μήκος, το πλάτος και τις γωνίες) προσφέρουν επιπλέον πληροφορίες με τρόπο συμβολικό.

- Οι αναπαραστάσεις του ψηφιακού μαθησιακού αντικειμένου συνδέονται δυναμικά (Lesh, Post, Behr, & 1987˙ Ainsworth, 1999) υπό την έννοια ότι οποιασδήποτε αλλαγή στην εικονική (σχηματική) αναπαράσταση του παραλληλογράμμου μεταφράζεται σε ανάλογη προσαρμογή του δυναμικού κειμένου που τη συνοδεύει (μήκος, πλάτος, γωνίες) αλλά και των συμβολικών αναπαραστάσεων που επισημαίνουν τις γωνίες και την ισότητα/παραλληλία των πλευρών.
- Η θεωρία του Bruner (1966) για τη σταδιακή μετάβαση από τις εμπράγματες στις συμβολικές και κατόπιν στις συμβολικές αναπαραστάσεις ικανοποιείται στη συγκεκριμένη δραστηριότητα, αν εξαιρέσουμε τις εμπράγματες (ή έμπρακτες) αναπαραστάσεις, οι οποίες δεν υπάρχουν καθόλου. Στην αρχή της της δρατηριότητας, οι μαθητές κλήθηκαν να διατυπώσουν ορισμούς για τα σχήματα επαγωγικά, έχοντας περάσει πρώτα από το στάδιο του χειρισμού εικονικών αναπαραστάσεων. Βέβαια, τους δίνεται η δυνατότητα για αναδρομή στη δυναμική εικονική (σχηματική) αναπαράσταση ανά πάσα στιγμή στη δραστηριότητα.
- Το ψηφιακό μαθησιακό αντικείμενο παρείχε ευκαιρίες χειρισμού της εικονικής (σχηματικής) αναπαράστασης του παραλληλογράμμου. Ο μαθητής ήταν σε θέση να χειριστεί σχεδόν όλες τις απαραίτητες παραμέτρους που επηρεάζουν τη μορφή του παραλληλογράμμου (μήκος, πλάτος, γωνίες, περιστροφή). Με τρόπο αυτό δρούσε ενεργά και καθίστατο κυρίαρχος της μάθησής του. Συμπληρωματικά να αναφέρουμε ότι οι ορισμοί των σχημάτων δε δόθηκαν έτοιμοι, αλλά αντίθετα κατασκευάστηκαν από τους ίδιους τους μαθητές.

Χρειάζεται να τονίσουμε ότι η διατύπωση ορισμών δεν αποτελεί κύριο στόχο της παρούσας δραστηριότητας αλλά μία μορφή γλωσσικής αναπαράστασης την οποία μπορούν να αξιοποιήσουν οι μαθητές στην οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης (σύνθεσης). Οι ορισμοί δεν χορηγήθηκαν έτοιμοι αλλά κατασκευάστηκαν από τους μαθητές, διότι ήταν βασική μας επιδίωξη η ενεργός συμμετοχή του μαθητή. Σημαντικό στοιχείο, ωστόσο, ήταν η κατασκευή ορθών ορισμών προκειμένου να αποτελέσουν εφαλτήριο για την οικοδόμηση της αφαιρετικής μαθητικής σκέψης στις ενότητες 2-6. Για τον λόγο αυτό, όπου κρίθηκε απαραίτητο ο εκπαιδευτικός-ερευνητής παρενέβη αξιοποιώντας τις διατυπώσεις των μαθητών προκειμένου η τελική έκφραση των ορισμών στο φύλλο εργασίας του διδακτικού πειράματος να είναι:

- *Ένα σχήμα είναι παραλληλόγραμμο όταν:*
    - ***οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.***
- *Ένα σχήμα είναι ρόμβος όταν:*
    - ***οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες,***
    - ***όλες οι πλευρές του είναι ίσες.***
- *Ένα σχήμα είναι ορθογώνιο όταν:*

- ***οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες,***
- ***όλες οι γωνίες του είναι ορθές.***

➢ *Ένα σχήμα είναι τετράγωνο όταν:*

- ***οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες,***
- ***όλες οι πλευρές του είναι ίσες,***
- ***όλες οι γωνίες του είναι ορθές.***

Η διατύπωση των ορισμών ήταν τέτοια ώστε να διευκολύνει τους μαθητές να πραγματοποιήσουν λογικές συνεπαγωγές. Συγκεκριμένα, στους ορισμούς, όπως διατυπώθηκαν πιο πάνω, διακρίνουμε τρεις διαφορετικές λογικές προτάσεις:

1. *P: οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.*
2. *Q: όλες οι πλευρές του είναι ίσες.*
3. *R: όλες οι γωνίες του είναι ορθές.*

- Όταν ένα σχήμα είναι ρόμβος τότε ισχύει ότι: $P \wedge Q$ = Αληθές. Όμως, εφόσον $P \wedge Q$ = Αληθές, τότε P = Αληθές $\wedge$ Q = Αληθές. Συνεπώς, εφόσον ισχύει ότι P = Αληθές, το σχήμα είναι και παραλληλόγραμμο.
- Όταν ένα σχήμα είναι ορθογώνιο τότε ισχύει ότι: $P \wedge R$ = Αληθές. Όμως, εφόσον $P \wedge R$ = Αληθές, τότε P = Αληθές $\wedge$ R = Αληθές. Συνεπώς, εφόσον ισχύει ότι P = Αληθές, το σχήμα είναι και παραλληλόγραμμο.
- Όταν ένα σχήμα είναι τετράγωνο τότε ισχύει ότι: $P \wedge Q \wedge R$ = Αληθές. Όμως, εφόσον $P \wedge Q \wedge R$ = Αληθές, τότε P = Αληθές $\wedge$ Q = Αληθές $\wedge$ R = Αληθές. Συνεπώς, εφόσον και οι τρεις προτάσεις είναι αληθείς, τότε το τετράγωνο είναι και παραλληλόγραμμο, ρόμβος και ορθογώνιο.

Η αξιολόγηση του επιπέδου κατανόησης των παραλληλογράμμων από τους μαθητές πραγματοποιήθηκες με τη βοήθεια ενός προκαταρκτικού τέστ (pre-test) στο πλαίσιο ατομικής συνέντευξης. Το φύλλο εργασίας του προκαταρκτικού τεστ περιείχε τις ίδιες ερωτήσεις με το φύλλο εργασίας του διδακτικού πειράματος, με απώτερο σκοπό την εξέταση του κατά πόσο η δραστηριότητα βοήθησε τους μαθητές να αντιμετωπίσουν αφαιρετικά τα παραλληλόγραμμα. Το φύλλο εργασίας του pre-test παρουσιάστηκε στις σελίδες 84-88.

Προκαταρκτική ανάλυση σύμφωνα με το μοντέλο AiC

Πριν τη διεξαγωγή μίας έρευνας με το μοντέλο “Abstraction in Context” (AiC), οι Dreyfus et al. (2015) προτείνουν την προκαταρκτική ανάλυση των εννοιολογικών δομών που αναμένεται οι μαθητές να κατασκευάσουν μέσα από τη διαδικασία της μαθηματικής αφαίρεσης (σελ. 201-202). Στην περίπτωσή μας, η αφαιρετικές δομές τις οποίες οι μαθητές καλούνται να κατασκευάσουν είναι:

1) η κατανόηση του ρόμβου ως ειδικής περίπτωση παραλληλογράμμου με ίσες όλες τις πλευρές του,

2) η κατανόηση του τετραγώνου ως ειδικής περίπτωσης ρόμβου με όλες τις γωνίες του ορθές,
3) η κατανόηση του ορθογωνίου ως ειδικής περίπτωσης παραλληλογράμμου με όλες τις γωνίες του ορθές,
4) η κατανόηση του τετραγώνου ως ειδικής περίπτωσης ορθογωνίου με όλες τις πλευρές ίσες και
5) η κατανόηση του τετραγώνου ως ειδικής περίπτωσης παραλληλογράμμου με όλες τις πλευρές ίσες και όλες τις γωνίες ορθές.

Για κάθε μία από τις παραπάνω δομές, διακρίνουμε διάφορα επίπεδα κατανόησης:

Επίπεδο	Περιγραφή
Α-1	Ο μαθητής κατασκεύασε ορθά και τις πέντε αφαιρετικές δομές κάτι που φαίνεται από: • τη μαθηματική επιχειρηματολογία που χρησιμοποίησε. • τις σωστές απαντήσεις του τόσο στα ερωτήματα 4 & 5 των ενοτήτων 2 έως 6, όσο και στην τελική δραστηριότητα. Επίσης, θεωρούμε ως δείγμα ορθής αφαίρεσης την αναφορά σε σχήμα υψηλότερης ιεραρχικής οργάνωσης, π.χ.: «το τετράγωνο είναι ο ρόμβος που έχει όλες τις γωνίες του ορθές».
Α-2	Ο μαθητής απάντησε σωστά στα ερωτήματα 4 & 5 των ενοτήτων 2, 3, 4, 5 & 6, όσο και στην τελική δραστηριότητα, αλλά απέκτησε μία διαισθητική αντίληψη των αφαιρετικών δομών και δεν ήταν σε θέση να τις εκφράσει με μαθηματική επιχειρηματολογία.
Β	Ο μαθητής κατασκεύασε μόνο μερικές από τις αφαιρετικές δομές, σύμφωνα με όσα μαρτυρούν οι προφορικές και γραπτές εκφράσεις του.
Γ	Ο μαθητής δεν κατάφερε να σκεφτεί αφαιρετικά-συνθετικά για τα σχήματα και παρέμεινε σε εννοιολογικές δομές που παραπέμπουν στην αυτονομία κάθε σχήματος.

Πίνακας 4.5: Προσδιορισμός των διαφόρων επιπέδων μαθηματικής αφαίρεσης στα οποία αναμένεται να φθάσουν οι μαθητές εργαζόμενοι πάνω στη δραστηριότητα «το λαστιχένιο παραλληλόγραμμο».

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται ορισμένα χαρακτηριστικά του δεύτερου και του τρίτου επιπέδου γεωμετρικής σκέψης του Van Hiele, προσαρμοσμένα στις ανάγκες της δραστηριότητας:

Επίπεδο	Περιγραφή
2^o (Περιγραφικό)	Ο μαθητής: ▪ Θεωρεί ότι κάθε σχήμα είναι αυτόνομο και δεν αντιλαμβάνεται τις σχέσεις ενσωμάτωσης που παρατηρούνται μεταξύ τους, π.χ. το τετράγωνο δεν είναι δυνατόν να είναι ορθογώνιο. Οι απαντήσεις του στο 1^o ερώτημα των ενοτήτων 2 έως 6 είναι αρνητικές και στα ερωτήματα 4 & 5 των ίδιων ενοτήτων, λανθασμένες. ▪ Περιορίζεται στην αναφορά των χαρακτηριστικών των σχημάτων, π.χ. το τετράγωνο έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, όλες τις πλευρές του ίσες και τις γωνίες του ορθές.
3^o (Άτυπης αφαίρεσης)	. Ο μαθητής: ▪ Θεωρεί ότι υπάρχουν σχέσεις ενσωμάτωσης στα σχήματα, δηλαδή κάθε ένα από τα «ειδικά» σχήματα είναι ειδική περίπτωση του «γενικότερου» σχήματος. Για παράδειγμα, το τετράγωνο είμαι ειδική περίπτωση ορθογωνίου. Οι απαντήσεις του στο 1^o ερώτημα των ενοτήτων 2 έως 6 είναι

	καταφατικές και στα ερωτήματα 4 & 5 των ίδιων ενοτήτων ορθές. • Αξιοποιεί τα χαρακτηριστικά των σχημάτων για να εξηγήσει τις σχέσεις ενσωμάτωσης μεταξύ των παραλληλογράμμων, π.χ. ένα τετράγωνο είναι και αυτό ορθογώνιο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες και τις γωνίες του ορθές.

Πίνακας 4.6: Προσαρμογή των επιπέδων γεωμετρικής σκέψης του Van Hiele στις ανάγκες της δραστηριότητας.

Τέλος, οι φάσεις του μοντέλου AiC προσαρμόζονται ως εξής για την παρούσα δραστηριότητα:

Φάση	**Ενέργειες μαθητή σύμφωνα με το μοντέλο AiC**	**Προσαρμογή για τη δραστηριότητα «Το λαστιχένιο παραλληλόγραμμο»**
1η	Αναγνώριση ανάγκης για μαθηματική αφαίρεση	Η ανάγκη για μαθηματική αφαίρεση (ενσωμάτωση ή σύνθεση) δημιουργείται σε κάθε ενότητα της διδακτικής παρέμβασης, στο ερώτημα 3. Βέβαια, η ανάγκη ενδέχεται να δημιουργηθεί και από άλλες αιτίες π.χ. από ερώτηση του εκπαιδευτικού, διατύπωση μαθητή, κ.α.
2η	Αναγνώριση προϋπαρχόντων γνώσεων που θα βοηθήσουν στην οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης	Στους μαθητές υποδεικνύεται η αξιοποίηση του ψηφιακού μαθησιακού αντικειμένου αλλά και των ορισμών των σχημάτων. Η αναγνώριση της αναπαράστασης που τους βοηθά περισσότερο ανήκει στο πλαίσιο των δικών τους επιλογών.
3η	Εργασία με τις προϋπάρχουσες γνώσεις με στόχο την οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης	Σε αυτή τη φάση οι μαθητές αναμένεται να εργαστούν με το ψηφιακό μαθησιακό αντικείμενο ή/και τους ορισμούς των σχημάτων με τελικό στόχο την οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης-γενίκευσης. Μπορούν να εστιάσουν ελεύθερα σε όποια αναπαράσταση επιθυμούν ή ακόμα και να κατασκευάσουν δικές τους εξωτερικές αναπαραστάσεις. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού-ερευνητή είναι διακριτικός.
4η	Κατασκευή της μαθηματικής αφαίρεσης	Το επίπεδο της αφαιρετικής κατασκευής των μαθητών προσδιορίζεται στους δύο προηγούμενους πίνακες (πίνακες 4.5 και 4.6).
5η	Εμπέδωση της νέας γνώσης (της μαθηματικής αφαίρεσης)	Για εμπέδωση, χρησιμεύουν τα ερωτήματα 2 και 3 των ενοτήτων 2 έως 6 καθώς και η τελική δραστηριότητα. Γενικά, η εμπέδωση της νέας γνώσης απαιτεί περισσότερη δραστηριοποίηση του μαθητή και ξεφεύγει από τον σκοπό της παρούσας έρευνας.

Πίνακας 4.7: Προκαταρκτική ανάλυση της διαδικασίας οικοδόμησης της μαθηματικής αφαίρεσης σύμφωνα με το μοντέλο AiC (Abstraction in Context) για τη δραστηριότητα «το λαστιχένιο παραλληλόγραμμο».

4.3 Αποτελέσματα

Πίνακας επεξήγησης συντομογραφιών και συμβόλων	
[Α.Β]	Ο πρώτος αριθμός (Α) δηλώνει τη δραστηριότητα (1→ 1η δραστηριότητα, 2→ 2η δραστηριότητα). Ο δεύτερος αριθμός (Β) δηλώνει τον αύξοντα αριθμό διατύπωσης ή ενέργειας του μαθητή ή του εκπαιδευτικού-ερευνητή (δεν τηρείται απαραίτητα χρονική σειρά).
(ΛΛ:ΔΔ)	Ακριβής χρονική στιγμή έκφρασης μίας διατύπωσης ή ενέργειας, εκφρασμένη σε λεπτά και δευτερόλεπτα από την έναρξη του διδακτικού πειράματος ή της συνέντευξης.
ΥΕ	Μαθητής με υψηλή επίδοση
ΜΕ	Μαθητής με μέτρια επίδοση
ΧΕ	Μαθητής με χαμηλή επίδοση
Ε	Εκπαιδευτικός – ερευνητής
ΟΛΟΙ	Όλοι οι μαθητές μαζί

Πίνακας 4.8: Πίνακας επεξήγησης των συντομογραφιών και των συμβόλων που χρησιμοποιούνται στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων.

«Το πρόβλημα του τραπεζιού»

<u>ΑΞΟΝΑΣ Α: Οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης</u>

Α) Αναδρομικός τύπος: $y_ν=y_{ν-1}+2$ (00:00 – 09:22)

Με τη συμπλήρωση του πίνακα τιμών της πρώτης ερώτησης, οι μαθητές αναγνώρισαν την ανάγκη δημιουργίας ενός μοτίβου με βάση το οποίο θα συμπληρώσουν τον πίνακα, ώστε να απεξαρτηθούν από την καταμέτρηση των ατόμων στην εικονική αναπαράσταση. Οι ΜΕ και ΥΕ συνειδητοποίησαν πρώτοι αυτήν την ανάγκη και βασιζόμενοι στη δυναμική εικονική αναπαράσταση του τραπεζιού, τον πίνακα τιμών και το δυναμικό κείμενο, αναγνώρισαν το μοτίβο $y_ν = y_{ν-1} + 2$. Ο ΧΕ ακολούθησε με κάποια καθυστέρηση:

[1.1] (04:20) ΜΕ	***Αυτό πάει ανά δύο!***
[1.2] (04:21) ΜΕ	***[Συμπληρώνει μία-μία τις γραμμές του πίνακα επιβεβαιώνοντας τις απαντήσεις του από τις αναπαραστάσεις του Η/Υ (δυναμική εικονική αναπαράσταση και δυναμικό κείμενο)]***
[1.3] (04:31) Ε	***Ωραία! Εσείς να παρατηρείτε καθώς κάνετε την ασκησούλα!***
[1.4] (05:26) Ε	***Έχετε δουλέψει, παιδιά, με πίνακες στα Μαθηματικά;***
[1.5] (05:29) ΜΕ	***Ναι!***
[1.6] (05:29) ΥΕ	***Ναι!***
[1.7] (05:32) ΥΕ	***Ε! 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, … (γελάει μαζί με τον ΜΕ επειδή το μοτίβο τους φαίνεται πολύ απλό)***
[1.8] (05:36) ΧΕ	***Κύριε; Είναι ανάγκη να το μετράμε; [δείχνοντας με το χέρι του την εικονική αναπαράσταση του τραπεζιού]***
[1.9] (05:39) Ε	***Ό,τι θέλεις!***
[1.10] (05:40) ΧΕ	***[Ο μαθητής εγκαταλείπει την καταμέτρηση και αρχίζει να συμπληρώνει τη στήλη της εξαρτημένης μεταβλητής (συνολικός αριθμός ατόμων) με το μοτίβο $y_ν = y_{ν-1} + 2$, το οποίο είχε ακούσει από τους συμμαθητές του, επιβεβαιώνοντας, όμως, τις απαντήσεις του από τις***

αναπαραστάσεις του Η/Υ (δυναμική εικονική αναπαράσταση και δυναμικό κείμενο)]

Στο σημείο αυτό φαίνεται ότι οι μαθητές αφού αναγνώρισαν πρώτα την ανάγκη δημιουργίας ενός μοτίβου (1η φάση μοντέλου AiC), συνειδητοποίησαν ύστερα ότι οι διαθέσιμες αναπαραστάσεις (δυναμική εικονική αναπαράσταση, δυναμικό κείμενο και πίνακας τιμών) μπορούν να τους βοηθήσουν σε αυτή την κατεύθυνση (2η φάση). Αξιοποιώντας και τα τρία αυτά εργαλεία (3η φάση) οικοδόμησαν την αφαίρεση «ο συνολικός αριθμός ατόμων αυξάνεται κατά δύο κάθε φορά» (4η φάση), μία αφαίρεση, ωστόσο, που στηρίζεται μόνο στο μοτίβο εξέλιξης της εξαρτημένης μεταβλητής.

Στην επόμενη φάση, οι μαθητές κλήθηκαν να συνεχίσουν τη συμπλήρωση του πίνακα για τις τιμές 11 έως 15 στην ανεξάρτητη μεταβλητή (στον Η/Υ εμφανίζονταν οι περιπτώσεις μέχρι την τιμή 10). Ο ΥΕ συνέχισε την εφαρμογή του μοτίβου $y_v = y_{v-1} + 2$ και για τις νέες περιπτώσεις και του ζητήθηκε από τον Ε να εξηγήσει τι τον βοήθησε να φτάσει στο μοτίβο αυτό:

[1.11] (07:45) Ε	***Τι σε βοήθησε για να πεις ότι ανεβαίνει ανά δύο ο αριθμός; [ο συνολικός αριθμός ατόμων]***
[1.12] (07:53) ΥΕ	***Ε… γιατί κάθε φορά που… εδώ πέρα… [δείχνει τις κόκκινες θέσεις του τραπεζιού στην εικονική αναπαράσταση του Η/Υ] όταν ήταν δύο… είχε…***
[1.13] (08:09) ΥΕ	***Το κατάλαβα ότι… κάθε φορά που ανέβαινε άλλο ένα άτομο, από εδώ πάνω ανέβαιναν δύο! [εννοεί όταν κινούσε κατά μία θέση προς τα δεξιά τον δρομέα, δύο επιπλέον άτομα προστίθεντο στην εικονική αναπαράσταση του Η/Υ]***

Εδώ παρατηρούμε ότι ο ΥΕ επιχειρεί να ερμηνεύσει το μοτίβο $y_v = y_{v-1} + 2$ με βάση τη δυναμική εικονική αναπαράσταση. Αργότερα, αρχίζει να συνειδητοποιεί ότι η εξαρτημένη μεταβλητή προκύπτει από την ανεξάρτητη μεταβλητή:

[1.14] (09:19) ΥΕ	***Εντάξει, 11 και 11… μπορούσες να το πεις και έτσι, δηλαδή, για να… [δείχνει τον πίνακα τιμών]***

Β) Συναρτήσεις κλειστής μορφής: $y=x+x+2$ & $y=x+(x+2)$ (09:23 – 21:40)

Ο ΥΕ πιστεύει εσφαλμένα ότι όταν ο αριθμός των ατόμων στη μεγάλη πλευρά είναι 11, τότε ο συνολικός αριθμός ατόμων είναι 22. Το ίδιο θεωρεί και ο ΜΕ. Ο Ε καλεί τους μαθητές να επανεξετάσουν αυτόν τον ισχυρισμό:

[1.15] (09:23) Ε	***Έχετε, όμως, κάποιο λαθάκι σε αυτά που έχετε γράψει εδώ… Για προσέξτε λίγο… Όταν έχω 11 [άτομα στη μεγάλη πλευρά], θα έχω 22 [άτομα συνολικά]; Είστε σίγουροι; Για κάντε ένα σχήμα να δούμε!***
[1.16] (09:56) ΥΕ	***Πες εδώ είναι το τραπέζι… [σχεδιάζει ένα τραπέζι με 11 άτομα στη μεγάλη πλευρά]***
[1.17] (09:59) ΜΕ	***Ας κάνουμε… Αυτό εδώ είναι το τραπέζι… Ένα γομάρι! [εννοεί ότι είναι πολύ μακρύ και το σχεδιάζει***

	με 11 άτομα στη μεγάλη πλευρά]
[1.18] 10:00 ΥΕ	***[Συγκρίνει το σχήμα του με τη δυναμική εικονική αναπαράσταση στον Η/Υ και προσπαθεί να σκεφτεί σχέσεις μεταξύ των ατόμων με κόκκινο χρώμα και των ατόμων με μπλε χρώμα]***
[1.19] (10:03) ΧΕ	***[Ακολουθεί τους ΥΕ και ΜΕ στη σχεδίαση του τραπεζιού αλλά δεν τοποθετεί τους σωστούς αριθμούς ατόμων στα τραπέζια]***
[1.20] (10:35) ΥΕ	***[…] Οπότε, τα κόκκινα είναι δύο λιγότερα από τα μπλε! [απαριθμεί δείχνοντας στη δυναμική εικονική αναπαράσταση του Η/Υ]***
[1.21] (10:46) ΜΕ	***Α, ναι!***
[1.22] (10:47) ΥΕ	***Άρα, εδώ θα είναι 11 τα κόκκινα και 13 (;) τα μπλε… γιατί είναι 11 και 11 και 2 εδώ πέρα [στις άκρες του τραπεζιού]***
[1.23] (11:01) Ε	***Ωραία! Άρα συνολικά πόσα θα είναι; [τα άτομα]***
[1.24] (11:03) ΥΕ	***Ε… 24!***
[1.25] (11:08) Ε	***24!***
[1.26] (11:12) Ε	***Πολύ ωραία! Για συνέχισε το…***
[1.27] (11:14) Ε	***Εσύ (ΜΕ) το καταλαβαίνεις αυτό που έκανε ο (ΥΕ);***
[1.28] (11:18) ΜΕ	***Ναι.***
[1.29] (11:20) Ε	***(ΥΕ), θέλεις να εξηγήσεις λίγο και στον φίλο μου τον (ΧΕ) πώς το σκέφτηκες;***
[1.30] (11: 30) ΥΕ	***Είπα ότι αφού εδώ είναι 10 οι κόκκινες θέσεις, και από πάνω θα είναι 10 [εννοεί και από την άλλη μεριά]. Και υπάρχουν και άλλες δύο κενές θέσεις εδώ πέρα [στις άκρες του τραπεζιού], που είναι συν 2. Και είπα αφού μετράς 10 και 10, 20, 1, 2 [δείχνει στις άκρες του τραπεζιού], 22! Και είπα 10+10+2… Ξέρω γω… 11+11+2…***
[1.31] (12: 02) Ε	***Να ρωτήσω κάτι τώρα, παιδιά… Αυτό που λέει ο (ΥΕ) ισχύει για όλες τις περιπτώσεις ή μόνο στο 10; [Όταν δηλαδή στη μεγάλη πλευρά κάθονται 10 άτομα]***
[1.32] (12:09) ΜΕ	***Για όλες!;;; [Ο ΧΕ συμφωνεί και ο ΥΕ σκέφτεται]***
[1.33] (12:11) Ε	***Για παίξτε λίγο και με άλλες περιπτώσεις… Εκεί στον υπολογιστή… Να δούμε… Ισχύει αυτό που λέει ο [ΥΕ];***
[1.34] (12:20) ΟΛΟΙ	***[Οι μαθητές ελέγχουν με τη βοήθεια της δυναμικής εικονικής αναπαράστασης αν ισχύει ο ισχυρισμός του ΥΕ]***
[1.35] (12:38) Ε	***Δηλαδή, γενικά τι μπορούμε να πούμε; Ό,τι είναι από τη μία μεριά…***
[1.36] (12:46) ΥΕ	***Είναι και από την πάνω συν 2.***
[1.37] (13:30) ΟΛΟΙ	***[Οι μαθητές συμπληρώνουν τις υπόλοιπες γραμμές του πίνακα με τη συνάρτηση*** $y = x + x + 2$***]***
[1.38] (14:11) Ε	***(ΧΕ), το καταλαβαίνεις πώς το σκέφτηκε ο (ΥΕ) και ο (ΜΕ);***
[1.39] (14:13) ΧΕ	***Ναι.***
[1.40] (14:22) Ε	***Αν είχαμε 16 άτομα στη μεγάλη πλευρά; Δεν φτάνει ο υπολογιστής μέχρι εκεί. Μέχρι το 10 φτάνει. Πόσα θα ήταν όλα [τα άτομα], (ΥΕ); Αν ήταν 16…***

[1.41] (14:41) ΧΕ	***16; Άμα ήταν όλα [16];***
[1.42] (14:43) Ε	***Όχι. Αν ήταν 16 τα κόκκινα κυκλάκια, δηλαδή αυτοί που κάθονται στη μεγάλη πλευρά.***
[1.43] (14:44) ΧΕ	***[Κοιτάζει την εικονική αναπαράσταση στον Η/Υ χωρίς να τη χειρίζεται και προσπαθεί να κάνει υπολογισμούς]***
[1.44] (14:59) Ε	***Τι σκέφτεσαι; [καλεί τον ΥΕ να αποκαλύψει τη σκέψη του]***
[1.45] (15:00) ΥΕ	***Τι σκέφτεσαι; [με την έννοια «γιατί σκέφτεσαι»] Αυτό που είπαμε εμείς!***
[1.46] (15:03) Ε	***Ο τρόπος σκέψης. Ας τον να σκεφτεί λίγο μόνος του. Έλα (ΧΕ) μου! Πώς θα το βρεις αυτό;***
[1.47] (15:09) ΧΕ	***Ε… Θα προσθέσω τα κόκκινα και άλλα δύο.***
[1.48] (15:16) ΥΕ	***[Δυσανασχετεί με την απάντηση του ΧΕ πιάνοντας το κεφάλι του]***

Στις διατυπώσεις/ενέργειες 1.15 έως 1.48 παρατηρούμε ότι οι μαθητές οικοδομούν μία νέα μαθηματική αφαίρεση, που είναι η συνάρτηση y = x + x + 2. Η αφαίρεση αυτή είναι υψηλότερου επιπέδου από την προηγούμενη ($y_v = y_{v-1} + 2$) διότι αφορά στη σύνδεση της ανεξάρτητης μεταβλητής (αριθμός ατόμων στη μεγάλη πλευρά) και της εξαρτημένης (συνολικός αριθμός ατόμων). Αυτός που ξεκάθαρα οικοδομεί αυτή την αφαίρεση είναι ο ΥΕ. Ο ΜΕ φαίνεται να τον ακολουθεί κατανοώντας τα βήματά του, ενώ ο ΧΕ δεν έχει καταφέρει ακόμα να κατανοήσει τον τρόπο σκέψης του ΥΕ, όπως φάνηκε από την απάντηση που έδωσε στη διατύπωση 1.47. Η διαδικασία οικοδόμησης ξεκίνησε (1η φάση μοντέλου AiC) από την ανάγκη του ΥΕ να επανεξετάσει το προηγούμενο μοτίβο εντοπίζοντας πιθανά σφάλματα στον τρόπο υπολογισμού του συνολικού αριθμού ατόμων για 11 άτομα στη μεγάλη πλευρά (1.15). Ο ΥΕ αναγνώρισε ότι η εικονική αναπαράσταση στον Η/Υ μπορεί να τον βοηθήσει (2η φάση) και εργάστηκε πάνω σε αυτή για την εύρεση μίας σχέσης που συνδέει τους κόκκινους με τους μπλε κύκλους (3η φάση). Τελικά, με τις παρεμβάσεις 1.23, 1.29, 1.31 και 1.33 του Ε, ο ΥΕ άρχισε να οικοδομεί τη συνάρτηση που συνδέει τις δύο μεταβλητές (4η φάση), σύμφωνα με τις διατυπώσεις 1.30 και 1.36. Να σημειώσουμε ότι ο ΥΕ φαίνεται πως έχει οικοδομήσει δύο παρόμοιες συναρτήσεις κλειστής μορφής: 1) y=x+(x+2) (συνολικός αριθμός ατόμων = κόκκινοι + μπλε κύκλοι (οι μπλε είναι κατά 2 περισσότεροι από τους κόκκινους) και 2) y=x+x+2 (συνολικός αριθμός ατόμων = αριθμός ατόμων στη μία πλευρά + αριθμός ατόμων στην άλλη πλευρά + 2 στις άκρες).

Στη συνέχεια οι μαθητές κλήθηκαν να υπολογίσουν τον συνολικό αριθμό των ατόμων για μεγάλους αριθμούς ατόμων στη μεγάλη πλευρά (50, 200, και 1.547 – ο τελευταίος αριθμός δεν προβλεπόταν στο φύλλο εργασίας) εμπεδώνοντας τη μαθηματική αφαίρεση που είχαν οικοδομήσει προηγουμένως (5η φάση μοντέλου AiC). Στο σημείο αυτό, ο ΜΕ έδειξε σημάδια οικοδόμησης/εμπέδωσης της νέας γνώσης αλλά κάτι τέτοιο δεν μπορεί να διατυπωθεί με σιγουριά και για τον ΧΕ, λόγω των πολλών λαθών στις απαντήσεις που έδωσε.

Γ) Έκφραση με μεταβλητές: «*συνολικός αριθμός ατόμων=α+α+2*» (21:41 – 36:42)

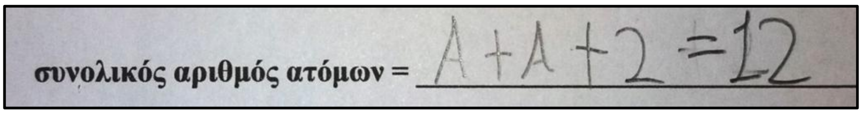
Στο τελευταίο ερώτημα της δραστηριότητας, οι μαθητές κλήθηκαν να διατυπώσουν γραπτώς έναν γενικό κανόνα που συνδέει τις μεταβλητές «συνολικός αριθμών» και «αριθμός ατόμων στη μεγάλη πλευρά», χρησιμοποιώντας τη συμβολική αναπαράσταση «α» για τη μεταβλητή του αριθμού των ατόμων στη μεγάλη πλευρά:

[1.49] (22:24) Ε	***Εδώ, τώρα, πάμε να βρούμε έναν κανόνα, παιδιά! Δηλαδή, αν θέλαμε να πούμε σε κάποιον με μία φράση τι γίνεται στο πρόβλημα, για να μην έχουμε μόνο συγκεκριμένες περιπτώσεις… Όταν είναι 50, είναι 102…Όταν είναι 200, είναι 402… Για να μην έχουμε όλες τις περιπτώσεις, θα πούμε μία φράση, που είναι κανόνας για όλα.***
[1.50] (23:34) ΥΕ	***Ε… Ξέρω τις κόκκινες [..]. Θα προσθέσω και τον ίδιο αριθμό των κόκκινων [..] κόκκινο, μπλε ίδιες εδώ που είναι [δείχνει τις απέναντι μεγάλες πλευρές του τραπεζιού στη δυναμική εικονική αναπαράσταση] και μετά μόλις βρεις το αποτέλεσμα σε έναν μεγάλο αριθμό θα [..] προσθέσεις συν 2.***
[1.51] (24:14) ΜΕ	***Εγώ είπα… Ξέρω τα κόκκινα. Θα προσθέσω συν 2, επειδή είναι παραπάνω τα μπλε και θα προσθέσω. […] Όσα είναι τα κόκκινα και όσα είναι και τα μπλε.***
[1.52] (24:34) ΧΕ	***Κι εγώ τον ίδιο τρόπο…***
[1.53] (25:16) Ε	***Στα Μαθηματικά μάς αρέσει να είμαστε σύντομοι. [..] Αυτή τη σκέψη που όλοι είπατε με λόγια, θα ήθελα λίγο να τη γράψετε, όχι όμως με λόγια αλλά με μαθηματικό τρόπο στο τέλος, εκεί που λέει: «συνολικός αριθμός ατόμων = ». […] Χρησιμοποιώντας όμως το γράμμα «α», που λέει. Τι είναι το «α»;***
[1.54] (25:58) ΧΕ	***Η πρώτη γραμμή!***
[1.55] (26:00) ΥΕ	***Όχι! Τα κόκκινα… Η μεγάλη πλευρά!***
[1.56] (26:03) Ε	***Γιατί δεν λέμε 5 και λέω α;***
[1.57] (26:10) ΥΕ	***Γιατί συνηθίζεται να λέμε [με τα γράμματα] τους αριθμούς. Δηλαδή, το πρώτο θα το χαρακτηρίσουμε με α, όχι με 1. […] Αλλά μερικές φορές μπορεί να… Ανάλογα με το πώς θα… [μπερδεμένος]***
[1.58] (26:23) Ε	***Εγώ πιστεύεις, δηλαδή, ότι έβαλα το «α» για να δείξω την πρώτη περίπτωση;***
[1.59] (26:29) ΥΕ	***Δεν ξέρω!***
[1.60] (26:30) Ε	***Όχι, δεν το έβαλα γι' αυτό!***
[1.61] (27:04) Ε	***Εδώ χρειαζόμαστε κανόνα! Άρα, το α είναι ένας γενικός τρόπος… Εντάξει; Για να πω αυτό που θέλω, δηλαδή, στο α μπορώ να βάλω και 5, και 10, και 100, και 200, και 500, και 1.500! Είναι γενικός τρόπος. Αντί να πω «Νίκος», λέω «ένα παιδί». […]***
[1.62] (28:40) ΟΛΟΙ	***[Όλοι οι μαθητές σκέφτονται και δείχνουν να δυσκολεύονται…]***
[1.63] (28:46) Ε	***Πάμε να κάνουμε ένα συγκεκριμένο. Όλοι μπροστά σας (στη δυναμική εικονική αναπαράσταση) έχετε το 10 και***

	το 22. Έτσι; Το 22, πώς βγαίνει με το 10;
[1.64] (29:01) ΧΕ	***Το διπλάσιο.***
[1.65] (29:02) Ε	***Δηλαδή; Το διπλάσιο του 10;***
[1.66] (29:03) ΧΕ	***Ναι.***
[1.67] (29:04) Ε	***Δηλαδή, σαν να λέμε 10 και 10;***
[1.68] (29:06) ΧΕ	***Ναι.***
[1.69] (29:07) Ε	***Κάνει 20!***
[1.70] (29:09) ΧΕ	***Και δύο αυτά! [δείχνει στις άκρες του τραπεζιού, στη δυναμική εικονική αναπαράσταση]***
[1.71] (29:28) Ε	***Πώς βγαίνει το 12, (ΜΕ);***
[1.72] (29:32) ΜΕ	***5 και 5 και 2 [κοιτώντας τη δυναμική εικονική αναπαράσταση]***
[1.73] (29:36) Ε	***Έτσι! Αν έχω α στο κόκκινο [ο αριθμός των ατόμων στη μεγάλη πλευρά], πώς θα βγει το άλλο; [ο συνολικός αριθμός ατόμων]***
[1.74] (29:56) ΧΕ	***α + α + 2α***
[1.75] (30:14) Ε	***Ας πάρουμε το 5. Είπες α+α+2α, δηλαδή 5 και 5, 10, συν 2 επί 5, 10, 10 και 10, 20! […] Δεν μου βγήκε 12!***
[1.76] (30:34) ΥΕ	***5 και 5, 10 και στο 10 προσθέτουμε 2.***
[1.77] (30:43) Ε	***Ο [ΧΕ] το πλησίασε πάρα πολύ, παιδιά…***
[1.78] (30:45) ΥΕ	***α και α… συν… συν 2!***
[1.79] (30:53) Ε	***α+α+2. Συμφωνείτε;***
[1.80] (30:57) ΟΛΟΙ	***Ναι!***
[1.81] (33:57) ΥΕ	***Το 5 μπορείς να το βάλεις και α και β, δηλαδή να βάλεις αντί για 5, ένα άσχετο πράγμα... Απλά να ξέρεις ότι αυτό το άσχετο πράγμα που θα βάλεις θα σημαίνει κάτι στα Μαθηματικά[…] Για το τραπέζι… Πώς θα κάτσουν, δηλαδή.***

Όπως φάνηκε από τις διατυπώσεις και τις ενέργειες τους, οι μαθητές δυσκολεύτηκαν να εκφράσουν με τη βοήθεια μίας μεταβλητής τον κανόνα (συνάρτηση κλειστής μορφής). Η ανάγκη έκφρασης του συλλογισμών της προηγούμενης περιόδου με τη χρήση μεταβλητών ($1^η$ φάση μοντέλου AiC) προέκυψε από τη διατύπωση του ερωτήματος 4. Με τις συνεχείς παρεμβάσεις του Ε (1.61, 1.63, 1.73, 175) οι μαθητές αξιοποίησαν την προσθετική ανάλυση της εξαρτημένης μεταβλητής με βάση την ανεξάρτητη (π.χ. 22=10+10+2, 24=11+11+2, κτλ) ($2^η$ φάση) και εργάστηκαν με αυτή ($3^η$ φάση) για να οικοδομήσουν την έκφραση: «συνολικός αριθμός ατόμων=α+α+2» ($4^η$ φάση). Μόνο ο ΥΕ κατάφερε να διατυπώσει ορθά τη συνάρτηση κλειστής μορφής που περιγράφει με αφαιρετικό τρόπο τη σχέση ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής. Αν και ο ΧΕ επιχείρησε αρχικά να διατυπώσει τη σχέση, φαίνεται από το λάθος του (α+α+2α) ότι δεν εκφράζει με ακρίβεια τη μαθηματική αφαίρεση, δεδομένου ότι σε όλες τις περιπτώσεις υπάρχουν σταθερά επιπλέον δύο θέσεις στα άκρα του τραπεζιού (το ορθό είναι α+α+2).

Συνοψίζοντας και αξιοποιώντας τα επίπεδα μαθηματικής αφαίρεσης που περιγράφηκαν στην προκαταρκτική ανάλυση της δραστηριότητας, ο ΥΕ φαίνεται πως κατάφερε να φθάσει στο επίπεδο Α-1, διότι εξέφρασε σωστά τη μαθηματική αφαίρεση χρησιμοποιώντας μία συνάρτηση με μεταβλητές (1.78) και ο ΜΕ, στο επίπεδο Α-2, δηλαδή διατύπωσε τη μαθηματική αφαίρεση με λόγια (1.51) αλλά δεν κατάφερε να την εκφράσει με μεταβλητές. Ο ΧΕ επαναλάμβανε σκέψεις των συνομηλίκων του χωρίς να τις κατανοεί (π.χ. 1.47) και δεν έδειξε σημάδια ορθής αφαιρετικής αντίληψης. Η απάντησή του στο φύλλο εργασίας ενισχύει αυτή την άποψη (εικόνα 4.29). Συνεπώς, θα υποστηρίζαμε πως έφθασε στα επίπεδο Γ ή Δ.



Εικόνα 4.29: Απάντηση του ΧΕ στο ερώτημα 4 του προβλήματος του τραπεζιού. Η προσθήκη του « =12 » μαρτυρά την εξάρτηση του μαθητή από συγκεκριμένες περιπτώσεις και τη μη αφαιρετική αντίληψη της σχέσης που συνδέει την ανεξάρτητη με την εξαρτημένη μεταβλητή.

<table>
<tr><th colspan="5">Οι μαθηματικές αφαιρέσεις και οι διαδικασίες οικοδόμησής τους στο «πρόβλημα του τραπεζιού»</th></tr>
<tr><th>Χρονικές περίοδοι</th><th>Μαθηματική αφαίρεση</th><th colspan="2">Διαδικασία οικοδόμησης σύμφωνα με το μοντέλο AiC</th><th>Μαθητές με ενεργό εμπλοκή</th></tr>
<tr><td rowspan="5">00:00 – 09:22</td><td rowspan="5">Αναδρομικός τύπος για την εξαρτημένη μεταβλητή ($y_\nu = y_{\nu-1}+2$) εκφρασμένος με λόγια</td><td>1η φάση</td><td>Ανάγκη δημιουργίας ενός μοντέλου για τη συμπλήρωση της στήλης «συνολικός αριθμός ατόμων» στον πίνακα τιμών του 1ου ερωτήματος</td><td rowspan="5">ΥΕ, ΜΕ, (ΧΕ)</td></tr>
<tr><td>2η φάση</td><td>Αναγνώριση του γεγονότος ότι η δυναμική εικονική αναπαράσταση και το δυναμικό κείμενο μπορούν να βοηθήσουν</td></tr>
<tr><td>3η φάση</td><td>Εργασία κυρίως με τη δυναμική εικονική αναπαράσταση και ελάχιστα με το δυναμικό κείμενο</td></tr>
<tr><td>4η φάση</td><td>Οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης $y_\nu = y_{\nu-1}+2$</td></tr>
<tr><td>5η φάση</td><td>(Δεν πραγματοποιήθηκε)</td></tr>
<tr><td rowspan="5">09:23 – 21:40</td><td rowspan="5">Συνάρτηση κλειστής μορφής (y=x+x+2 ή y=x+(x+2)) εκφρασμένη με λόγια</td><td>1η φάση</td><td>Ανάγκη επανεξέτασης της προηγούμενης αφαίρεσης για εντοπισμό πιθανών σφαλμάτων στον τρόπο υπολογισμού του συνολικού αριθμού ατόμων για 11 άτομα στη μεγάλη πλευρά</td><td rowspan="5">ΥΕ, ΜΕ</td></tr>
<tr><td>2η φάση</td><td>Αναγνώριση του γεγονότος ότι ένα στιγμιότυπο της δυναμικής εικονικής αναπαράσταση (στατική εικόνα) μπορεί να βοηθήσει.</td></tr>
<tr><td>3η φάση</td><td>Εργασία με τη στατική εικονική αναπαράσταση</td></tr>
<tr><td>4η φάση</td><td>Οικοδόμηση των αφαιρέσεων:
y=x+x+2 & y=x+(x+2) (μόνο με λόγια)</td></tr>
<tr><td>5η φάση</td><td>Επιβεβαίωση ισχύος της νέας αφαίρεσης με τη χρήση της δυναμικής εικονικής αναπαράστασης και την ενασχόληση με την 3η δραστηριότητα</td></tr>
<tr><td rowspan="5">21:41 – 36:42</td><td rowspan="5">Συνάρτηση κλειστής μορφής εκφρασμένη με μεταβλητές (συνολικός αριθμός = α+α+2)</td><td>1η φάση</td><td>Ανάγκη έκφρασης της αφαίρεσης y=x+x+2 με μεταβλητές (λόγω του ερωτήματος 4)</td><td rowspan="5">ΥΕ, (ΧΕ)</td></tr>
<tr><td>2η φάση</td><td>Αξιοποίηση της προσθετικής ανάλυσης των αριθμών (22=10+10+2, 24=11+11+2, κτλ)</td></tr>
<tr><td>3η φάση</td><td>Εργασία με την προσθετική ανάλυση</td></tr>
<tr><td>4η φάση</td><td>Έκφραση:
συνολικός αριθμός ατόμων = α+α+2</td></tr>
<tr><td>5η φάση</td><td>(Δεν πραγματοποιήθηκε)</td></tr>
</table>

Πίνακας 4.9: Συνοπτικός πίνακας των μαθηματικών αφαιρέσεων και των διαδικασιών οικοδόμησής τους στο πρόβλημα του τραπεζιού. Ο μαθητής με χαμηλή επίδοση (ΧΕ) εμφανίζεται εντός παρενθέσεων διότι η ενεργός συμμετοχή του, όπου παρατηρήθηκε, ήταν αμφίβολη.

ΑΞΟΝΑΣ Β: Τα χαρακτηριστικά των αναπαραστάσεων στην οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης

1. Αντιληπτική μεταβλητότητα

Για τον ρόλο της αντιληπτικής μεταβλητότητας των αναπαραστάσεων στην οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης τα αποτελέσματα είναι μάλλον αμφιλεγόμενα. Η δυναμική εικονική αναπαράσταση φαίνεται πως συνέβαλε στη γρήγορη οικοδόμηση του αναδρομικού τύπου $y_v = y_{v-1} + 2$ από τον ΜΕ, ο οποίος έκανε τη διατύπωση 1.1, χειριζόμενος την εικονική αναπαράσταση του τραπεζιού στον Η/Υ αλλά και από τον ΥΕ, στη διατύπωση 1.13. Επίσης, η αντιληπτική μεταβλητότητα της δυναμικής εικονικής αναπαράστασης του Η/Υ διαδραμάτισε επιβεβαιωτικό ρόλο όταν οι μαθητές χρειάστηκε να διαπιστώσουν αν ο γενικός κανόνας y=x+x+2 ίσχυε για όλες τις περιπτώσεις. Τα διάφορα «σενάρια» για το τραπέζι, όπως αποτυπώθηκαν με τις διαφορετικές περιπτώσεις στον πίνακα τιμών, φαίνεται πως επέδρασαν θετικά στην εμπέδωση της μαθηματικής αφαίρεσης. Στον αντίποδα, ωστόσο, ο ΥΕ δεν βασίστηκε στην αντιληπτική μεταβλητότητα της δυναμικής εικονικής αναπαράστασης για να οικοδομήσει τη μαθηματική αφαίρεση y=x+x+2, αλλά αρκέστηκε σε μία στατική εικόνα του τραπεζιού (1.30).

2. Πολλαπλή ενσωμάτωση

Ο ρόλος της πολλαπλής ενσωμάτωσης στο πρόβλημα του τραπεζιού ήταν περισσότερο ξεκάθαρος. Οι μαθητές σε διάφορα σημεία της δραστηριότητας αξιοποίησαν τις πολλαπλές διόδους αναπαράστασης της πληροφορίας. Για παράδειγμα, ο ΥΕ παρότρυνε τον ΧΕ να αξιοποιήσει την εικονική αναπαράσταση σε συνδυασμό με το δυναμικό κείμενο για να συμπληρώσει τα κενά του πρώτου ερωτήματος. Ο ΥΕ παραδέχτηκε σε δύο σημεία ότι ο συνδυασμός της εικονικής αναπαράστασης και των πινάκων τιμών τον βοήθησε στην οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης:

[1.13] (08:09) ΥΕ	***Το κατάλαβα ότι… κάθε φορά που ανέβαινε άλλο ένα άτομο, από εδώ πάνω ανέβαιναν δύο! [εννοεί όταν κινούσε κατά μία θέση προς τα δεξιά τη μπάρα, δύο επιπλέον άτομα προστίθεντο στην εικονική αναπαράσταση του Η/Υ]***
[1.82] (08:28) Ε	***Για να το καταλάβεις αυτό κοίταξες περισσότερο την εικόνα ή κοίταξες εδώ τους αριθμούς; [πίνακες τιμών] Ποιο σε βοήθησε περισσότερο;***
[1.83] (08:35) ΥΕ	***Και η εικόνα, η εικόνα περισσότερο, αλλά και οι αριθμοί [πίνακες τιμών], λίγο, όμως! […]***
[1.84] (35:17) ΥΕ	***Εμένα με βοήθησε λίγο ο πίνακας αλλά με βοήθησε και λίγο το…***
[1.85] (35:22) Ε	***Το σχήμα, ε;***
[1.86] (35:24) ΥΕ	***Ναι!***

Ο ΥΕ παραδέχτηκε με τη διατύπωση 1.14 «*Εντάξει, 11 και 11… μπορούσες να το πεις και έτσι, δηλαδή […]*» ότι οι συμβολικές αναπαραστάσεις μπορούν να εκφράσουν ό,τι και η εικονική αναπαράσταση, αν αναλυθούν προσθετικά (22=11+11). Να σημειώσουμε, όμως, ότι ο μαθητής, σε αυτό το σημείο, έκανε το σφάλμα της μη συμπερίληψης των δύο ακρινών θέσεων του τραπεζιού. Παρόλα αυτά, παρατηρούμε, μία διαδικασία «μετάφρασης» από τη μία αναπαράσταση στην άλλη.

Οι εικονικές αναπαραστάσεις φαίνεται πως διαδραμάτισαν σημαντικό ρόλο στην οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης από τους μαθητές. Ο ΥΕ, ο οποίος έφθασε πιο γρήγορα στη μαθηματική αφαίρεση αλλά παράλληλα και στο υψηλότερο επίπεδο, αξιοποίησε μία στατική εικονική αναπαράσταση προκειμένου να οικοδομήσει τη σχέση y=x+x+2 (1.22 και 1.50). Μάλιστα, έφθασε στο σημείο να ισχυριστεί προς το τέλος της δραστηριότητας ότι χωρίς την ύπαρξη εικονικής αναπαράστασης και με τη βοήθεια μόνο των πινάκων τιμών, θα ήταν αδύνατη η μελέτη του προβλήματος. Όμως, η δυσκολία που προέκυψε κατά την προσπάθεια έκφρασης του γενικού κανόνα με τη βοήθεια μεταβλητών φαίνεται πως δεν αντιμετωπίστηκε με τη βοήθεια των εικονικών αναπαραστάσεων αλλά με την προσθετική ανάλυση των συμβολικών αναπαραστάσεων (π.χ. 22=10+10+2, 24=11+11+2, κτλ.).

3. Δυναμική διασύνδεση

Δεν υπάρχουν ασφαλείς ενδείξεις για τον ρόλο που διαδραμάτισε η δυναμική διασύνδεση μεταξύ των αναπαραστάσεων. Φαίνεται πως το δυναμικό κείμενο, το οποίο ήταν συνδεδεμένο με τη δυναμική εικονική αναπαράσταση βοήθησε στη συμπλήρωση του πίνακα τιμών. Επίσης, οι μαθητές δεν αξιοποίησαν τη δυνατότητα σχεδίασης σχήματος στον σύνθετο πίνακα του 2^{ο} ερώτημα, στο οποίο επιδιωκόταν η δυναμική διασύνδεση εικονικών (σχήματα) και συμβολικών αναπαραστάσεων (δεδομένα πίνακα).

4. Σταδιακή αφαίρεση από τις εικονικές στις συμβολικές αναπαραστάσεις

Οι μαθητές είχαν στη διάθεσή τους εικονικές (δυναμικές και στατικές) αλλά και συμβολικές (δυναμικές και στατικές) αναπαραστάσεις προκειμένου να οικοδομήσουν τη μαθηματική αφαίρεση. Αρχικά και μέχρι τη διατύπωση 1.13, φαίνεται πως οι ΥΕ και ΜΕ οικοδομούν τη μαθηματική αφαίρεση $y_ν=y_{ν-1}+2$ βασιζόμενοι στις εικονικές αναπαραστάσεις. Στη διατύπωση 1.14 και 9 περίπου λεπτά μετά την έναρξη της διδακτικής παρέμβασης ο ΥΕ συνειδητοποιεί με (κάποιο σφάλμα) ότι η προσθετική ανάλυση της ανεξάρτητης μεταβλητής κρύβει την ανεξάρτητη. Στη συνέχεια, οι ΥΕ και ΜΕ επανέρχονται στην εικονική αναπαράσταση του Η/Υ, σε μία στατική της μορφή, προκειμένου να οικοδομήσουν την υψηλότερου επιπέδου αφαίρεση y=x+x+2 (1.50 και 1.51). Προς το τέλος της δραστηριότητας και επειδή οι εικονικές αναπαραστάσεις δεν βοηθούσαν τους μαθητές στην έκφραση της μαθηματικής αφαίρεσης με μεταβλητές, η προσθετική ανάλυση των συμβολικών αναπαραστάσεων και συγκεκριμένα της εξαρτημένης μεταβλητής (1.63 έως 1.80) φαίνεται πως υποστήριξε αποτελεσματικά τους μαθητές. Επομένως, παρατηρούμε μία γενικότερη πορεία από τις εικονικές προς τις συμβολικές αναπαραστάσεις με ενδιάμεσες αναδρομές όταν αυτό κρίθηκε απαραίτητο. Επίσης, οι εικονικές αναπαραστάσεις φαίνεται πως εξυπηρετούν περισσότερο γενικούς σκοπούς, όπως η κατανόηση των διαφόρων σχέσεων σε ένα πρόβλημα και οι συμβολικές πιο ειδικούς όπως η έκφραση με τη βοήθεια μεταβλητής.

5. Δυνατότητα για ενεργό εμπλοκή του μαθητή

Στους μαθητές δόθηκαν πολλαπλές ευκαιρίες αυτενέργειας στον χειρισμό των αναπαραστάσεων (δρομέας χειρισμού δυναμικής εικονικής αναπαράστασης και δυναμικού κειμένου και σχεδίαση εικονικών αναπαραστάσεων). Οι μαθητές αφιέρωσαν παρόμοιο χρόνο στον χειρισμό των αναπαραστάσεων του Η/Υ αλλά δεν αναλάμβαναν εύκολα πρωτοβουλίες χειρισμού. Προτίμησαν να μην αξιοποιήσουν τη δυνατότητα σχεδίασης εικονικής αναπαράστασης στον πίνακα του ερωτήματος 2, μιας και από ό,τι φαίνεται η δυναμική εικονική αναπαράσταση του Η/Υ είχε καταφέρει να δημιουργήσει μέσα τους ένα αποτελεσματικό νοητικό μοντέλο για το πρόβλημα. Ο ρόλος της δυνατότητας για ενεργό εμπλοκή των μαθητών στον χειρισμό των αναπαραστάσεων δεν ήταν ξεκάθαρος.

Εικόνα 4.30: Στιγμιότυπο από την ενασχόληση των μαθητών της Δ' τάξης με το «πρόβλημα του τραπεζιού», στο οποίο οι μαθητές επιχείρησαν να εντοπίσουν τη σχέση ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής με τη βοήθεια μίας δυναμικής εικονικής αναπαράστασης του τραπεζιού σε Η/Υ.

«Το λαστιχένιο παραλληλόγραμμο»

Pre-tests/συνεντεύξεις

Τα αποτελέσματα από τις ατομικές συνεντεύξεις (pre-tests) παρουσιάζουν ανομοιομορφία ως προς τις αντιλήψεις των μαθητών για τα παραλληλόγραμμα. Ο ΥΕ (για επεξήγηση συντομογραφιών και συμβόλων, βλ. σελ 103) έδειξε σημάδια αφαιρετικής αντίληψης των παραλληλογράμμων, όπως φαίνεται από τις ορθές απαντήσεις του στα ερωτήματα 2 και 3 των ενοτήτων 2 έως 6 αλλά και στην «τελική δραστηριότητα». Ωστόσο, δυσκολεύτηκε να επιχειρηματολογήσει για το αν ο ρόμβος είναι παραλληλόγραμμο και αν το τετράγωνο είναι ρόμβος, π.χ.:

[2.1] (07:37) Ε	***Μπορούμε να πούμε ότι ένας ρόμβος είναι μία ειδική περίπτωση παραλληλογράμμου; Ναι ή όχι και γιατί;***
[2.2] (08:05) ΥΕ	***[Σχεδιάζει έναν ρόμβο]***
[2.3] (08:21) ΥΕ	***Είναι.***
[2.4] (08:24) Ε	***Γιατί;***
[2.5] (08:26) ΥΕ	***[…] Δεν μπορώ να το εξηγήσω…***

Η ΥΕ επιχειρηματολόγησε για τις άλλες τρεις περιπτώσεις (ενότητες 4 έως 6), δηλαδή για το ορθογώνιο ως παραλληλόγραμμο, το τετράγωνο ως ορθογώνιο και το τετράγωνο ως παραλληλόγραμμο. Ενδεικτικά για την αντιμετώπιση του ορθογωνίου ως παραλληλογράμμου ανέφερε χαρακτηριστικά:

[2.6] (19:44) Ε	***Μπορούμε να πούμε ότι ένα ορθογώνιο είναι μία ειδική περίπτωση παραλληλογράμμου; Αν ναι, γιατί; Αν όχι, γιατί;***
[2.7] (19:54) ΥΕ	***[Σχεδιάζει ένα ορθογώνιο]***
[2.8] (19:59) ΥΕ	***Ναι.***
[2.9] (20:01) Ε	***Γιατί;***
[2.10] (20:02) ΥΕ	***Γιατί και οι δικές του πλευρές είναι παράλληλες, οι απέναντι, δηλαδή.***

Από τις διατυπώσεις και τις απαντήσεις του μαθητή, διαπιστώνουμε ότι, σύμφωνα με τα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης του Van Hiele, βρισκόταν σε μία μεταβατική φάση μεταξύ του 2ου επιπέδου (περιγραφικό) και του 3ου (άτυπης αφαίρεσης), διότι παρουσίασε διαισθητική αφαιρετική αντίληψη για τα παραλληλόγραμμα με ελλιπή, σε ορισμένες περιπτώσεις, επιχειρηματολογία.

Ο ΜΕ είχε συγκεχυμένες απόψεις σχετικά με το αν υπάρχουν σχέσεις ενσωμάτωσης (αφαιρετική αντίληψη) μεταξύ των παραλληλογράμμων. Από τη μία θεωρούσε ότι το τετράγωνο είναι ειδική περίπτωση ρόμβου και το ορθογώνιο ειδική περίπτωση παραλληλογράμμου, π.χ.:

[2.11] (13:55) Ε	***Μπορούμε να πούμε ότι το τετράγωνο είναι ειδική περίπτωση ρόμβου, δηλαδή ανήκει στην ίδια οικογένεια με τον ρόμβο; Ναι ή όχι και γιατί;***
[2.12] (14:05) ΜΕ	***Ναι, γιατί και τα δύο σχήματα έχουν τις ίδιες πλευρές… ίσες πλευρές…***

Από την άλλη, δεν θεωρούσε τον ρόμβο και το τετράγωνο ως ειδικές περιπτώσεις παραλληλογράμμου, ούτε το τετράγωνο ως ορθογώνιο, π.χ.:

[2.13] (23:46) Ε	***Μπορούμε να πούμε ότι ένα τετράγωνο είναι μια ειδική περίπτωση ορθογωνίου; Ναι, όχι και γιατί;***
[2.14] (23:56) ΜΕ	***Ε… Σ' αυτό θα πω «όχι» γιατί το τετράγωνο έχει όλες τις πλευρές ίσες… ε… το ορθογώνιο μόνο οι απέναντι.***

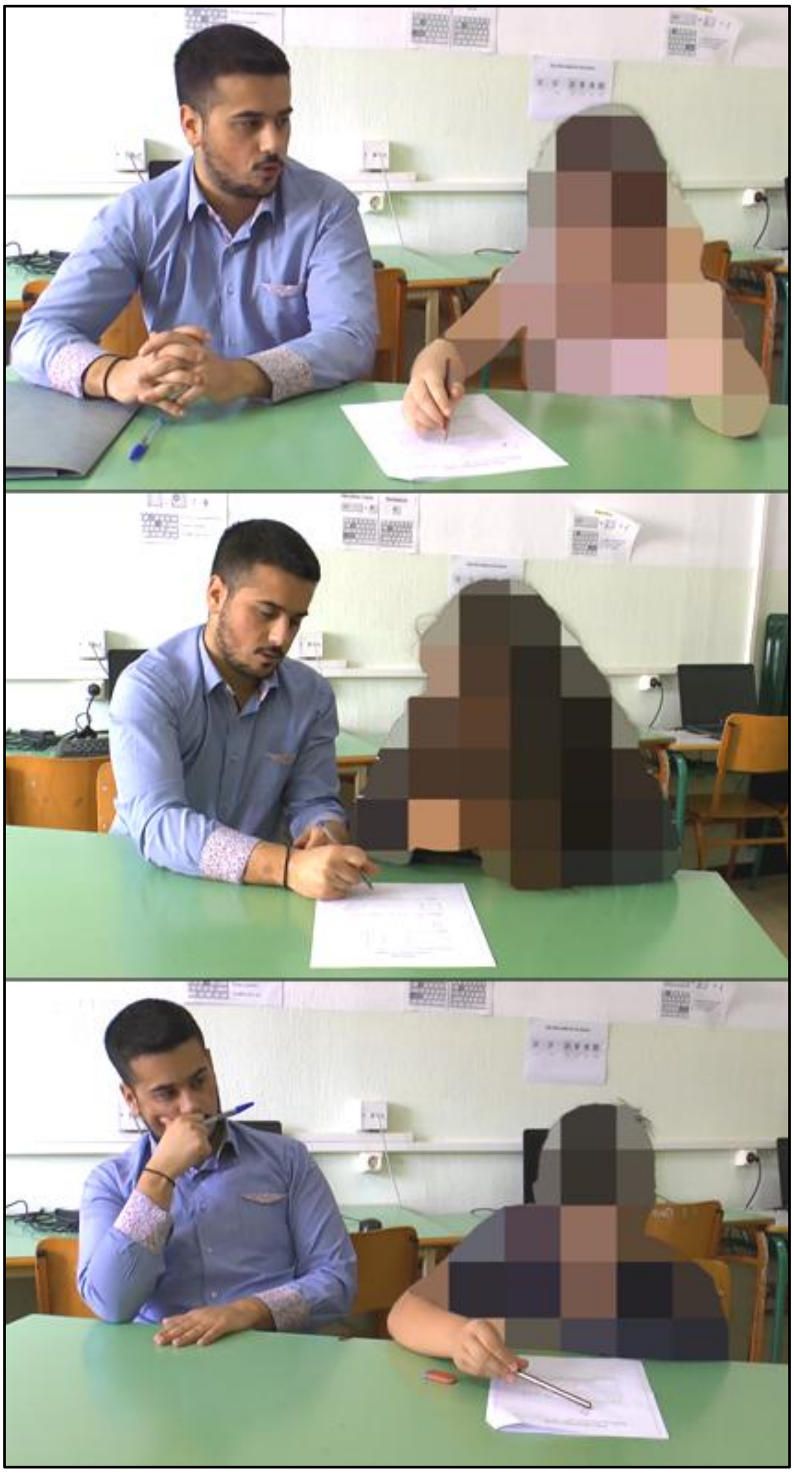
Όλες οι απαντήσεις της στα ερωτήματα 2 και 3 των ενοτήτων 2 έως 6 ήταν λανθασμένες, γεγονός που υποδεικνύει ότι ο ΜΕ πιθανώς δεν αντιμετώπιζε αφαιρετικά τα παραλληλόγραμμα. Στην «τελική δραστηριότητα», ο μαθητής ανασκεύασε μερικές από τις απόψεις που είχε εκφράσει προηγουμένως και προτίμησε να μην επιλέξει καμία από τις δύο εικόνες ως πιο σωστή. Γενικότερα, από τις διατυπώσεις και τις απαντήσεις του μαθητή, συγκλίνουμε προς την άποψη ότι βρισκόταν στο $2^{ο}$ επίπεδο γεωμετρικής σκέψης (περιγραφικό) με κάποια, ίσως, δείγματα προόδου προς το $3^{ο}$ (άτυπης αφαίρεσης).

Ο ΧΕ δεν αντιμετώπιζε αφαιρετικά τα παραλληλόγραμμα, όπως φαίνεται από τις διατυπώσεις και τις απαντήσεις του. Όλες οι απαντήσεις του μαθητή στα ερωτήματα 2 και 3 των ενοτήτων 2 έως 6 ήταν εσφαλμένες και οι διατυπώσεις του σχετικά με τον αν στα παραλληλόγραμμα παρατηρούνται σχέσεις ενσωμάτωσης μαρτυρούν ότι ο μαθητής αντιλαμβανόταν τα παραλληλόγραμμα ως ασύνδετα μεταξύ τους. Ενδεικτικά για τον ρόμβο και το παραλληλόγραμμο ανέφερε:

[2.15] (07:46) Ε	***Μπορούμε να πούμε ότι ένας ρόμβος είναι μια ειδική περίπτωση παραλληλογράμμου; Ναι, όχι και γιατί;***
[2.16] (09:20) ΧΕ	***[Σχεδιάζει έναν ορθό ρόμβο, αφού προηγουμένως είχε σχεδιάσει έναν λανθασμένο]***
[2.17] (09:52) ΧΕ	***Έχουν μία πολύ μικρή διαφορά, γιατί ο ρόμβος μοιάζει πιο πολύ με το τετράγωνο.***
[2.18] (10:45) ΧΕ	***[Ένα σχήμα είναι παραλληλόγραμμο] Όταν οι πλευρές δεν είναι ίσες μεταξύ τους.***

Συμπερασματικά, θα κατατάσσαμε τον ΧΕ στο $2^{ο}$ επίπεδο γεωμετρικής σκέψης του Van Hiele (περιγραφικό), διότι ο μαθητής αρκέστηκε στην περιγραφή των χαρακτηριστικών των σχημάτων χωρίς να εντοπίσει σχέσεις ενσωμάτωσης μεταξύ αυτών.

Μία γενική διαπίστωση, που αφορά σε όλους τους μαθητές, ήταν οι συχνές δυσκολίες ορισμού και οι παρανοήσεις για τα σχήματα. Ειδικότερα, οι μαθητές έδειξαν σημαντική δυσκολία στο να ορίσουν τον ρόμβο, αλλά και όταν κατάφερναν να διατυπώσουν έναν ορισμό αυτός περιείχε παρανοήσεις (π.χ. ότι ένας ρόμβος δεν έχει απαραίτητα όλες τις πλευρές του ίσες). Μία συχνή παρανόηση αφορούσε στην εξάρτηση του ονόματος ενός σχήματος από την περιστροφή του. Έτσι, οι μαθητές θεωρούσαν ότι ένα περιστραμμένο τετράγωνο λέγεται ρόμβος και όχι τετράγωνο. Τέτοιες παρανοήσεις ενδεχομένως επηρέασαν τις απόψεις των μαθητών για την ύπαρξη ή μη σχέσεων ενσωμάτωσης μεταξύ των σχημάτων, δηλαδή για την αφαιρετική αντιμετώπιση των παραλληλογράμμων. Για την αποφυγή αυτής της επιρροής, στη διδακτική παρέμβαση (διδακτικό πείραμα), οι μαθητές, με την υποστήριξη του εκπαιδευτικού-ερευνητή, αφιέρωσαν το πρώτο από τα επτά μέρη της στον ορθό ορισμό του παραλληλογράμμου, του ρόμβου, του ορθογωνίου και του τετραγώνου.



Εικόνα 4.31: Στιγμιότυπα από τις ατομικές συνεντεύξεις, που πραγματοποιήθηκαν πριν τη διεξαγωγή του διδακτικού πειράματος, για να μελετηθεί το προϋπάρχον επίπεδο κατανόησης των μαθητών για τα παραλληλόγραμμα.

ΑΞΟΝΑΣ Α: Οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης

Α] Ο ρόμβος ως παραλληλόγραμμο (17:16 – 25:29)

Οι μαθητές ακολουθώντας τα βήματα της ενότητας 2, οδηγήθηκαν σταδιακά στην οικοδόμηση της ιδέας ότι ένας ρόμβος είναι μία ειδική περίπτωση παραλληλογράμμου. Η ανάγκη για μαθηματική αφαίρεση (1^{η} φάση μοντέλου AiC) προέκυψε από το σχετικό ερώτημα του φύλλου εργασίας «Μπορούμε να πούμε ότι ένας ρόμβος είναι μία ειδική περίπτωση παραλληλογράμμου; Ναι ή όχι και γιατί;». Οι μαθητές αναγνώρισαν ότι τόσο η πρότερη εργασία τους με τη δυναμική εικονική αναπαράσταση (ερωτήματα 1 και 2 της ενότητας 2) όσο και οι ορισμοί του παραλληλογράμμου και του ρόμβου (ενότητα 1) μπορούν να τους βοηθήσουν προς αυτή την κατεύθυνση (2^{η} φάση). Οι ΜΕ και ΥΕ εργάστηκαν με τη δυναμική εικονική αναπαράσταση και τους ορισμούς (3^{η} φάση) (να σημειωθεί ότι σε αντίθεση με το «πρόβλημα του τραπεζιού» εδώ οι μαθητές κλήθηκαν να εργαστούν με τη δυναμική εικονική αναπαράσταση πριν τους τεθεί ερώτηση «Μπορούμε να πούμε…»). Οι ΜΕ και ΥΕ οικοδόμησαν ορθά τη μαθηματική αφαίρεση, αντιμετωπίζοντας τον ρόμβο ως ειδική περίπτωση παραλληλογράμμου (4^{η} φάση). Στην 5^{η} φάση (εμπέδωση) οι μαθητές ασχολήθηκαν με τις υπο-δραστηριότητες 4 και 5 της ενότητας 2 του φύλλου εργασίας τους. Οι απαντήσεις των ΥΕ και ΜΕ στα ερωτήματα 4 και 5 ήταν σωστές, γεγονός που ενισχύει την άποψη ότι οι μαθητές αυτοί πραγματοποίησαν μία σωστή μαθηματική αφαίρεση, τουλάχιστον σε πρώτη φάση. Ο ΧΕ ενώ φαίνεται πως απάντησε σωστά στα ίδια ερωτήματα, στην πραγματικότητα προσάρμοσε τις διατυπώσεις αλλά και τις απαντήσεις του στις απόψεις των συμμαθητών του, χωρίς εμφανή σημάδια οικοδόμησης της προβλεπόμενης μαθηματικής αφαίρεσης.

[2.19] (21:41) Ε	***Θέλω να σκεφτείτε, παιδιά, αν μπορούμε να πούμε ότι ένας ρόμβος είναι μία ειδική περίπτωση παραλληλογράμμου. Ναι, όχι και γιατί;***
[2.20] (21:52) ΜΕ	***Εγώ πιστεύω ναι, γιατί ε… Ωχ! Πάλι κόλλησα… [Κοιτάζει την εικονική αναπαράσταση στον Η/Υ]***
[2.21] (22:00) ΜΕ	***[Κοιτάζει τους ορισμούς]***
[2.22] (22:03) ΜΕ	***Ε… Γιατί έχουνε τις απέναντι… Όχι. [Κοιτάζει την εικονική αναπαράσταση στον Η/Υ και τους ορισμούς]***
[2.23] (22:07) Ε	***Για να βοηθηθείς, μπορείς να κάνεις και άλλα, αν θέλεις, σχήματα ή να κοιτάξεις και τους ορισμούς που γράφαμε.***
[2.24] (22:16) ΜΕ	***Επειδή οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες… [Κοιτάζει τους ορισμούς και μεταφράζει το νόημα τους κοιτώντας την εικονική αναπαράσταση]***
[2.25] (22:19) Ε	***Άρα είναι παραλληλόγραμμο [ο ρόμβος];***
[2.26] (22:21) ΜΕ	***Ναι…***
[2.27] (22:27) Ε	***Μπορούμε να τον πούμε [τον ρόμβο] ειδική περίπτωση [παραλληλογράμμου];***
[2.28] (22:29) ΥΕ	***Ναι.***
[2.29] (22:30) ΜΕ	***Ναι.***
[2.30] (22:31) ΧΕ	***Ναι.***
[2.31] (23:42) Ε	***Γιατί τον λέμε ειδική περίπτωση, πιστεύεις; [Ο Ε***

	απευθύνεται στον ΧΕ]
[2.32] (23:45) ΧΕ	***Επειδή…***
[2.33] (23:49) Ε	***Όλα τα παραλληλόγραμμα είναι έτσι; [σαν τον ρόμβο]***
[2.34) (23:51) ΧΕ	***Όχι! Υπάρχουν και διαφορετικά…***
[2.35] (23:54) Ε	***Είδαμε εμείς διάφορα παραλληλόγραμμα πιο πριν [οι μαθητές είχαν σχεδιάσει διάφορα παραλληλόγραμμα και τα είχαν μετατρέψει σε ρόμβους]***
[2.36] (24:00) Ε	***Τι τυχαίνει να έχει αυτό [ο ρόμβος] κιόλας;***
[2.37] (24:03) ΧΕ	***Παράλληλες γραμμές…***
[2.38] (24:05) Ε	***Κάτι ακόμα έχει…***
[2.39] (24:07) ΥΕ	***Όλες τις πλευρές ίσες.***

Β] Το τετράγωνο ως ρόμβος (25:30 –30:01)

Όλοι οι μαθητές κατάφεραν να οικοδομήσουν την αφαιρετική ιδέα ότι το τετράγωνο είναι μία ειδική περίπτωση ρόμβου, σύμφωνα με τις ορθές απαντήσεις τους στα φύλλα εργασίας αλλά και τις διατυπώσεις τους. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, η ανάγκη για αφαίρεση προέκυψε από το σχετικό ερώτημα της ενότητας (1η φάση) και οι μαθητές αναγνώρισαν ότι οι δύο βασικές αναπαραστάσεις (ορισμοί – τετραγώνου και ρόμβου – αλλά και η δυναμική εικονική αναπαράσταση στον Η/Υ) δύνανται να τους υποστηρίξουν στην προσπάθεια αυτή (2η φάση). Η εργασία των μαθητών και με τις δύο αυτές μορφές αναπαραστάσεων (3η φάση) φαίνεται πως τους οδήγησε στην επιθυμητή αντιμετώπιση του τετραγώνου ως ρόμβου με τη νοητική διεργασία της ενσωμάτωσης (4η φάση). Στις υπο-δραστηριότητες 4 και 5, οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα για εξάσκηση με στόχο την εμπέδωση της νέας μαθηματικής αφαίρεσης (5η φάση).

[2.40] (27:11) Ε	***Μπορούμε να πούμε ότι ένα τετράγωνο είναι μία ειδική περίπτωση ρόμβου; Ναι, όχι και γιατί;***
[2.41] (27:15) ΥΕ	***[Πριν καν ολοκληρωθεί η ερώτηση του Ε] Ναι.***
[2.42] (27:16) ΧΕ	***[Πριν καν ολοκληρωθεί η ερώτηση του Ε] Ναι.***
[2.43] (27:20) Ε	***(ΧΕ);***
[2.44] (27:21) ΧΕ	***Ε… Επειδή το τετράγωνο έχει όλες του τις πλευρές ίσες, όπως έχει και ο ρόμβος.***
[2.45] (27:31) Ε	***Πολύ ωραία! Και γιατί το λέμε ειδική περίπτωση, πιστεύεις;***
[2.46] (27:38) ΧΕ	***[…]***
[2.47] (27:47) Ε	***Τι παραπάνω έχει [το τετράγωνο] σε σχέση με τον ρόμβο;***
[2.48] (27:50) Ε	***(ΜΕ);***
[2.49] (27:51) ΜΕ	***Όλες οι πλευρές είναι ίσες […]***
[2.50] (27:53) ΧΕ	***Αυτό το είπα!***
[2.51] (27:54) ΧΕ	***Και οι απέναντι πλευρές παράλληλες;***
[2.52] (27:55) Ε	***Ναι… Και τι παραπάνω έχει σε σχέση με τον ρόμβο;***
[2.53] (23:56) ΜΕ & ΧΕ	***Όλες οι γωνίες είναι ορθές!***

Γ] Το ορθογώνιο ως παραλληλόγραμμο (30:02 – 38:00)

Κρίνοντας από τις απαντήσεις αλλά και τις διατυπώσεις τους, οι μαθητές δεν δυσκολεύτηκαν να θεωρήσουν και το ορθογώνιο ως μία από όλες τις δυνατές περιπτώσεις παραλληλογράμμου. Η εξοικείωση που είχε επέλθει με τα ερωτήματα της δραστηριότητας κατέστησε την ανάγκη για μαθηματική αφαιρετική σκέψη, που πήγαζε από το ερώτημα 3 της ενότητας 4, μάλλον προβλεπόμενη (1η φάση). Οι μαθητές γνώριζαν πια ότι οι δύο βασικές μορφές αναπαραστάσεων (ορισμοί και δυναμική εικονική αναπαράσταση) θα μπορούσαν να τους υποστηρίξουν στην οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης (2η φάση). Από την ανάλυση του βίντεο, δεν καταφέραμε να παρατηρήσουμε με σιγουριά, με ποια ή ποιες από τις αναπαραστάσεις εργάστηκαν για να οικοδομήσουν την ενσωμάτωση των ορθογωνίων στα παραλληλόγραμμα, αλλά κρίνοντας από τις ενέργειες των μαθητών στις ενότητες που προηγήθηκαν, μπορούμε να υποθέσουμε ότι αξιοποίησαν τόσο τους ορισμούς όσο και τη δυναμική εικονική αναπαράσταση (3η φάση). Τελικά, όλοι οι μαθητές οικοδόμησαν τη νέα μαθηματική αφαίρεση βασιζόμενοι στην παραλληλία των απέναντι πλευρών, η οποία αποτελεί κοινό χαρακτηρισμό και των δύο σχημάτων (4η φάση). Στην 5η φάση (εμπέδωση) οι μαθητές ασχολήθηκαν με τις υπο-δραστηριότητες 4 και 5 της ενότητας 4 του φύλλου εργασίας τους.

Δ] Το τετράγωνο ως ορθογώνιο (38:01 – 47:00 & 65:55 – 70:04)

Η αφαιρετική αντίληψη του τετραγώνου ως ειδικής περίπτωσης ορθογωνίου, με τη νοητική διεργασία της ενσωμάτωσης (ή σύνθεσης), φαίνεται πως δυσκόλεψε περισσότερο τους μαθητές συγκριτικά με τις υπόλοιπες περιπτώσεις. Αφορμώμενοι από το σχετικό ερώτημα της δραστηριότητας (1η φάση), οι μαθητές αναγνώρισαν ότι οι διαθέσιμες βασικές αναπαραστάσεις (ορισμοί και δυναμική εικονική αναπαράσταση στον Η/Υ) μπορούν να τους υποβοηθήσουν στην οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης (2η φάση). Οι μαθητές εργάστηκαν και με τις δύο μορφές αναπαράστασης (3η φάση) και φαίνεται πως οι ΥΕ και ΜΕ έφθασαν τελικά στην αφαιρετική αντιμετώπιση του τετραγώνου ως ειδικής περίπτωσης ρόμβου (4η φάση). Για τον ΧΕ δεν μπορούμε να ισχυριστούμε σίγουρα το ίδιο.

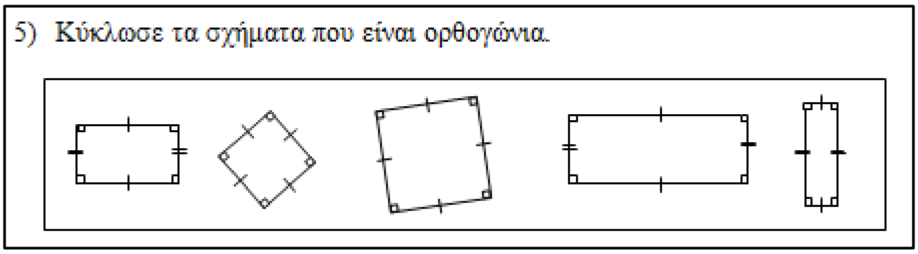
[2.54] (40:21) Ε	***Μπορούμε να πούμε ότι ένα τετράγωνο είναι μία ειδική περίπτωση ορθογωνίου; Ναι, όχι και γιατί;***
[2.55] (40:30) ΥΕ	***Ναι. [Με σιγουριά]***
[2.56] (40:37) Ε	***(ΧΕ);***
[2.57] (40:38) ΧΕ	***Έχει ορθές γωνίες…***
[2.58] (40:42) Ε	***Άρα αυτό σε κάνει να το πεις και ορθογώνιο;***
[2.59] (40:44) ΧΕ	***Ναι. [Συνεχίζει με την παράθεση των χαρακτηριστικών του τετραγώνου, όπως επισημάνθηκαν στους ορισμούς]***
[2.60] (41:22) Ε	***Και γιατί το λέμε [το τετράγωνο] ειδική περίπτωση [ορθογωνίου];***
[2.61] (41:24) ΧΕ	***Επειδή… Έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες; Δεν ξέρω!***
[2.62] (41:38) Ε	***Εσύ, (ΥΕ);***
[2.63] (41:40) ΥΕ	***Στο τετράγωνο όλες οι πλευρές είναι ίσες, ενώ στο***

ορθογώνιο είναι μόνο οι απέναντι.

Ωστόσο, καθώς οι μαθητές ασχολούνταν με την 5η υπο-δραστηριότητα (5η φάση), μία αμφιβολία του ΥΕ προκάλεσε γνωστική ανισορροπία στους μαθητές της ομάδας.

[2.64] (43:10) ΥΕ	***Είχαμε πει ότι θα ήταν… [το τετράγωνο μία ειδική περίπτωση ορθογωνίου]***
[2.65] (43:27) ΥΕ	***Αλλά είπαμε ότι είναι μια ειδική περίπτωση. Όχι ότι είναι ακριβώς ίδιο [το τετράγωνο με το ορθογώνιο].***
[2.66] (43:33) Ε	***Όταν λέμε ειδική περίπτωση, ανήκει [το τετράγωνο] στην οικογένεια [των ορθογωνίων];***
[2.67] (43:36) ΥΕ	***Ναι. […]***
[2.68] (43:41) ΜΕ	***Έχουμε μπερδευτεί λίγο με το δεύτερο και το τρίτο σχήμα… [της υπο-δραστηριότητας 5 της ενότητας 5]***
[2.69] (43:55) ΥΕ	***Αυτά είναι τετράγωνα!***
[2.70] (43:59) Ε	***Ένα τετράγωνο είναι και ορθογώνιο;***
[2.71] (44:00) ΥΕ	***Ναι!***
[2.72] (44:01) ΜΕ	***Αυτό! [με τη έννοια «αυτό εννοώ κι εγώ»]***
[2.73] (44:02) Ε	***Λέτε ναι… Άρα τι θα βάζατε [κυκλώνατε] εδώ; [στην υπο-δραστηριότητα 5 της ενότητας 5] Εδώ λέει «ορθογώνια».***
[2.74] (44:07) ΥΕ	***[Ελαφρώς οργισμένος] Είναι μια ειδική περίπτωση! [τα τετράγωνα] Δεν είναι ορθογώνια!***
[2.75] (45:56) ΜΕ	***Την προηγούμενη φορά είχα πει όχι σ' αυτό! [Εννοεί ότι στη συνέντευξη είχε εκφράσει την άποψη ότι ένα τετράγωνο δεν είναι ορθογώνιο, βλ. διατύπωση 2.14]***
[2.76] (45:58) ΥΕ	***Εγώ λέω ότι δεν είναι!***
[2.77] (46:03) ΜΕ	***Όχι δεν είχαμε πει την προηγούμενη φορά; [Απευθύνεται στον Ε] Αλλά δεν ξέρω γιατί είχαμε πει… [Χαμογελάει]***
[2.78] (46:10) Ε	***Τώρα, όμως, σκέψου ότι έχεις κι αυτό στον υπολογιστή, το σχήμα [τη δυναμική εικονική αναπαράσταση], που φτιάχτηκε για να σας βοηθήσει, και τους ορισμούς…***
[2.79] (46:28) ΜΕ	***Εγώ δεν τα κυκλώνω αυτά τα δύο (το 2ο και 3ο σχήμα της υπο-δραστηριότητας 5 της ενότητας 5) γιατί δεν μου πάει στον νου ότι είναι… [ορθογώνια] Δεν ξέρω γιατί…***
[2.80] (46:38) Ε	***Κι εσύ, (ΧΕ), τι πιστεύεις;***
[2.81] (46:40) ΧΕ	***Όχι, δεν είναι!***
[2.82] (46:41) Ε	***Θα τα βάλουμε [κυκλώσουμε] όλα τώρα; [Θα πούμε] Ότι είναι ορθογώνια ακόμη και τα τετράγωνα; Ή ξεχωριστά;***
[2.83] (46:47) ΧΕ	***Ξεχωριστά.***
[2.84] (46:48) ΜΕ	***Αυτό λέω κι εγώ… Ξεχωριστά.***

Η δυσκολία συμπερίληψης του δεύτερου και του τρίτου σχήματος της υπο-δραστηριότητας 5 της 5ης ενότητας οδηγεί στην επανεξέταση της «εύθραυστης» μαθηματικής αφαίρεση που κατασκευάστηκε προηγουμένως. Έτσι, αυτή τίθεται αρχικά εν αμφιβόλω και στη συνέχεια απορρίπτεται. Οι μαθητές αλλάζουν τις διατυπώσεις τους και της απαντήσεις στο φύλλο εργασίας θεωρώντας ότι το τετράγωνο δεν είναι δυνατόν να θεωρηθεί ειδική περίπτωση ορθογωνίου.



Εικόνα 4.32: Το δεύτερο και το τρίτο σχήμα της υπο-δραστηριότητα 5 της ενότητας 5 στο φύλλο εργασίας της δραστηριότητας «το λαστιχένιο παραλληλόγραμμο» προκάλεσε γνωστική ανισορροπία στους μαθητές. Είναι ορθό να θεωρηθεί το τετράγωνο, ορθογώνιο;

Αργότερα, στο πλαίσιο της «τελικής δραστηριότητας», οι μαθητές ασχολήθηκαν ξανά με το κατά πόσο ένα τετράγωνο μπορεί να θεωρηθεί ορθογώνιο και οδηγήθηκαν τελικά στο ορθό συμπέρασμα. Η ανάγκη για επανεξέταση προέκυψε από την «τελική δραστηριότητα» ($1^{η}$ φάση). Στη συνέχεια ο ΜΕ στράφηκε στη δυναμική εικονική αναπαράσταση αλλά και στους ορισμούς και ο ΥΕ στους ορισμούς ($2^{η}$ φάση), εργάστηκαν με τις αναπαραστάσεις αυτές ($3^{η}$ φάση) και οικοδόμησαν τελικά την ορθή μαθηματική αφαίρεση, ότι τα τετράγωνα είναι μία ειδική περίπτωση παραλληλογράμμων. Ο ΧΕ προσάρμοσε τις απαντήσεις αλλά και τις διατυπώσεις του σε αυτές των συμμαθητών του.

[2.85] (65:55) ΜΕ	***[Ο μαθητής εργάζεται με την δυναμική εικονική αναπαράσταση στον Η/Υ] Κοιτάξτε… Εδώ το έκανα το ορθογώνιο, τετράγωνο… Και γίνεται.***
[2.86] (66:04) Ε	***Δηλαδή, εδώ πιστεύεις ότι το σχήμα μάς δείχνει ότι το τετράγωνο είναι ορθογώνιο.***
[2.87] (66:08) ΜΕ	***[Προβληματισμένος] Ναι…***
[2.88] (66:12) Ε	***Εσύ, (ΥΕ);***
[2.89] (66:13) ΥΕ	***Να δω λίγο… [Ψάχνει τους ορισμούς των σχημάτων στο φύλλο εργασίας]***
[2.90] (66:26) ΜΕ	***[Κοιτάζει τους ορισμούς των σχημάτων]***
[2.91] (66:35) ΜΕ	***Ναι, γιατί εδώ λέει ότι οι απέναντι πλευρές και στα δύο, και στο τετράγωνο και στο ορθογώνιο, οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες και…***
[2.92] (66:46) ΥΕ	***Βασικά, έχουν σχέση!***
[2.93] (66:48) ΜΕ	***Κι εγώ αυτό νομίζω! Ότι έχουν σχέση!***
[2.94] (66:54) ΥΕ	***Γιατί είναι και στο τετράγωνο και στο ορθογώνιο… Οι απέναντι είναι παράλληλες και είναι οι γωνίες ορθές… Απλά στο τετράγωνο όλες [οι πλευρές] είναι ίσες. Στο ορθογώνιο μόνο οι απέναντι.***
[2.95] (67:06) ΧΕ	***[Ο ΧΕ σβήνει και προσαρμόζει τις απαντήσεις του στις διατυπώσεις και τις απαντήσεις των συμμαθητών του]***

Ε] Το τετράγωνο ως παραλληλόγραμμο (47:01 – 59:09)

Οι μαθητές αφορμώμενοι από το σχετικό ερώτημα της ενότητας (1η φάση) αναγνώρισαν ότι τόσο η δυναμική εικονική αναπαράσταση όσο και οι ορισμοί μπορούν να τους βοηθήσουν στην οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης (2η φάση). Αφού εργάστηκαν με τις αναπαραστάσεις αυτές (3η φάση), κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι το τετράγωνο μπορεί να θεωρηθεί μία ειδική περίπτωση παραλληλογράμμου (4η φάση). Οι ΥΕ και ΜΕ φαίνεται πως ηγήθηκαν της διαδικασίας οικοδόμησης και οδηγήθηκαν σε ενσυνείδητα και ορθά συμπεράσματα. Κάτι τέτοιο δεν μπορούμε να υποστηρίζουμε για τον ΧΕ, ο οποίος πιθανότατα ακολουθούσε τις σκέψεις των συμμαθητών του χωρίς να συνειδητοποιεί την όλη διαδικασία (βλ. παρακάτω απόσπασμα διατυπώσεων). Στην 5η φάση (εμπέδωση) οι μαθητές ασχολήθηκαν με τις υπο-δραστηριότητες 4 και 5 της ενότητας 6 του φύλλου εργασίας τους. Ακολουθεί ενδεικτικό απόσπασμα από την 4η φάση:

[2.96] (52:41) ΟΛΟΙ	***[Οι μαθητές συζητούν μεταξύ τους για να αποφασίσουν αν ένα τετράγωνο θεωρείται μία ειδική περίπτωση παραλληλογράμμου. Οι ΥΕ και ΜΕ πιστεύουν πως ο ισχυρισμός αυτός ισχύει διότι και στα δύο σχήματα οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες. Ο ΧΕ ακολουθεί τη σκέψη των συμμαθητών του χωρίς πιθανότατα να κατανοεί τον συλλογισμό τους]***
[2.97] (53:48) ΧΕ	***[Στον ΧΕ ανατίθεται από τον Ε η ανακοίνωση των αποτελεσμάτων της σύσκεψης της ομάδας] Ναι… […] [Γιατί] Έχει τις απέναντι πλευρές ίσες…***
[2.98] (54:09) ΜΕ	***Παράλληλες! [ψιθυριστά]***
[2.99] (54:11) ΧΕ	***Παράλληλες… Μπερδεύτηκα με το τετράγωνο! […]***
[2.100] (54:21) Ε	***Άρα, αυτό [η παραλληλία των απέναντι πλευρών] μας βοηθάει να το πούμε [το τετράγωνο] και παραλληλόγραμμο.***
[2.101] (54:24) ΟΛΟΙ	***[Οι μαθητές συμφωνούν]***

ΣΤ] Συνολική θεώρηση των παραλληλογράμμων στο πλαίσιο της «τελικής δραστηριότητας»

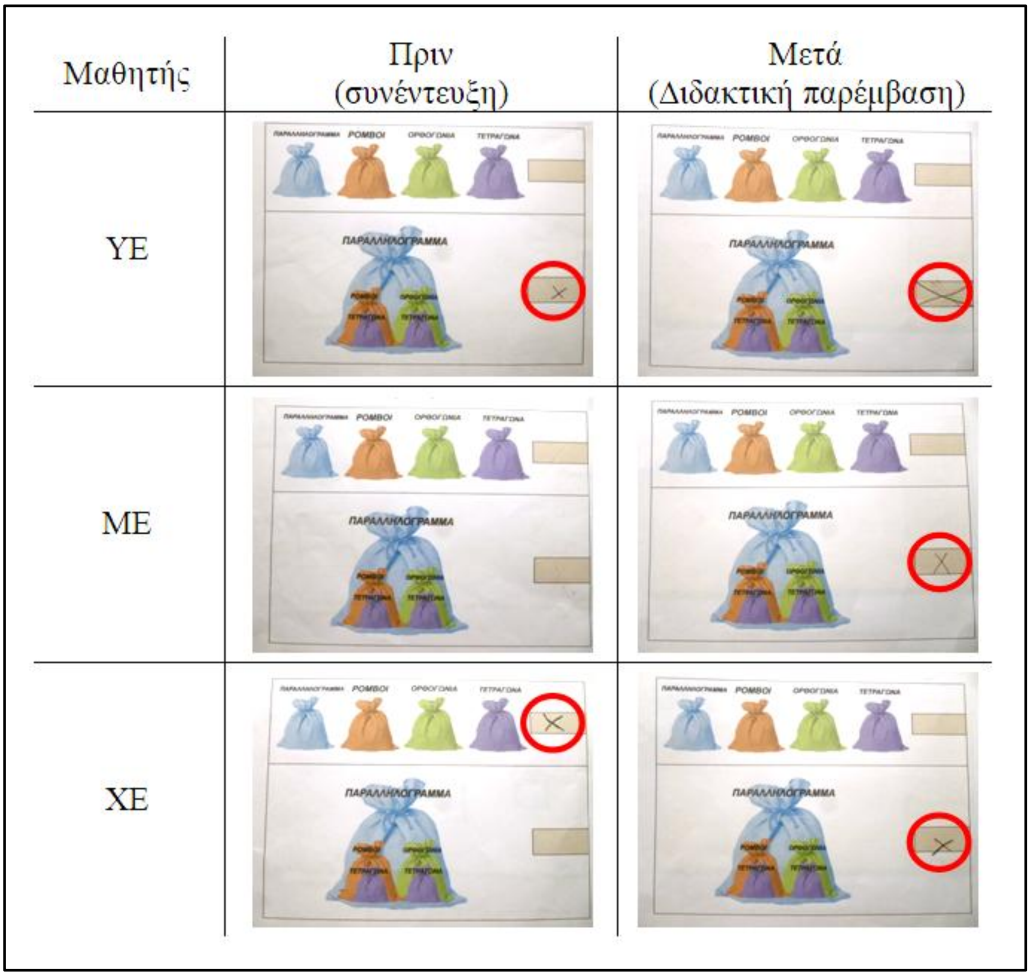
Στην τελική δραστηριότητα, η οποία είχε ρόλο εμπέδωσης (5η φάση μοντέλου AiC) αλλά και ρόλο διαγνωστικό (μελέτη των εσωτερικών νοητικών κατασκευών των μαθητών), οι μαθητές ήταν σχεδόν πεπεισμένοι ότι στα παραλληλόγραμμα παρατηρούνται σχέσεις ενσωμάτωσης και συνεπώς η δεύτερη επιλογή της «τελικής δραστηριότητας» είναι ορθότερη από την πρώτη. Ωστόσο, το γεγονός ότι οι μαθητές είχαν προηγουμένως φθάσει στο συμπέρασμα ότι το τετράγωνο δεν μπορεί να θεωρηθεί ορθογώνιο (2.64 έως 2.84), αποτελούσε λόγο αντίστασης στην ορθότητα της δεύτερης επιλογής στη δραστηριότητα:

[2.102] (60:54) ΜΕ	***[Οι μαθητές συσκέπτονται] Σε όλα τα παραλληλόγραμμα οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες.***

[2.103] (61:04) ΧΕ	***[…] Ναι.***
[2.104] (61:05) ΥΕ	***Όλα είναι ίδιες περιπτώσεις... του παραλληλογράμμου.***
[2.105] (61:09) ΜΕ & ΧΕ	***Ναι.***
[2.106] (61:54) ΜΕ	***Το τετράγωνο με τον ρόμβο είναι …; [δηλαδή, συνδέονται;] [Ρωτάει τον ΥΕ για επιβεβαίωση]***
[2.107] (62:00) ΥΕ	***Ναι είναι.***
[2.108] (62:01) ΜΕ	***Τετράγωνο και ορθογώνιο;***
[2.109] (62:04) ΥΕ	***[Προβληματισμένος]***
[2.110] (62:05) ΜΕ	***Ωχ! Εκεί κολλήσαμε και πριν… Δεν είναι!; [κοιτάζει τον ΥΕ για επιβεβαίωση]***
[2.111] (62:08) ΧΕ	***Όχι! [Εννοεί ότι το τετράγωνο δεν είναι μία ειδική περίπτωση ορθογωνίου]***
[2.112] (62:11) ΥΕ	***Όμως, δεν είναι διαφορετικά! [Δείχνει την πρώτη από τις δύο επιλογές της τελικής δραστηριότητες και εννοεί ότι τα παραλληλόγραμμα δεν γίνεται να μη συνδέονται]***
[2.113] (62:12) ΜΕ	***Ναι! Αυτό λέω κι εγώ… Οπότε καμία [από τις δύο επιλογές] δεν είναι σωστή; [εκνευρισμένος]***

Τελικά, οι μαθητές κατάφεραν να υπερπηδήσουν με τη βοήθεια των διαθέσιμων αναπαραστάσεων το εμπόδιο αυτό και να οδηγηθούν στην ορθή μαθηματική αφαίρεση σύμφωνα με την οποία το τετράγωνο μπορεί να θεωρηθεί μία ειδική περίπτωση ορθογωνίου, όπως περιγράψαμε ήδη στις διατυπώσεις 2.85 έως 2.95.

Συνολικά, και οι τρεις μαθητές σημείωσαν την δεύτερη επιλογή στην «τελική δραστηριότητα», ως περισσότερο σωστή. Προσπαθώντας να κατατάξουμε τις μαθηματικές αφαιρέσεις των μαθητών στα επίπεδα που αναφέρθηκαν στην προκαταρκτική ανάλυση της δραστηριότητας (βλ. σελ. 101-102) αλλά και στα επίπεδα της γεωμετρικής σκέψης του Van Hiele, θα υποστηρίζαμε ότι ο ΥΕ έφθασε στο επίπεδο Α-1 και στο 3^{ο} επίπεδο γεωμετρικής σκέψης του Van Hiele, κρίνοντας από τις ορθές γραπτές απαντήσεις του σε όλα τις γραπτές δραστηριότητες του φύλλου εργασίας (4 και 5 των ενοτήτων 2 έως 6 και «τελική δραστηριότητα») και τις προφορικές του διατυπώσεις (π.χ. 2.94, 2.104 & 2.112). Αν και ο μαθητής έδειξε σημάδια υποφώσκουσας αφαιρετικής αντίληψης των παραλληλογράμμων ήδη από το pre-test (συνέντευξη), με τη διδακτική παρέμβαση φαίνεται πως εξέλιξε τη μαθηματική του δικαιολόγηση, προχωρώντας με σιγουριά στο 3^{ο} επίπεδο γεωμετρικής σκέψης του Van Hiele. Ο ΜΕ φαίνεται πως κατέκτησε το επίπεδο Α-2 (ίσως και το Α-1) και βρέθηκε στην αρχή του 3^{ου} επιπέδου γεωμετρικής σκέψης του Van Hiele, σύμφωνα με τις ορθές γραπτές απαντήσεις του σε όλες τις γραπτές δραστηριότητες του φύλλου εργασίας (4 και 5 των ενοτήτων 2 έως 6 και «τελική δραστηριότητα») και τις προφορικές του διατυπώσεις (π.χ. 2.24, 2.98 & 2.102). Δεν έδειξε ανάλογη ποιότητα μαθηματικής δικαιολόγησης με τον ΥΕ, αλλά παρουσίασε μεγάλη βελτίωση σε σχέση με το pre-test, τόσο όσο ως προς τις γραπτές απαντήσεις όσο και ως προς τις προφορικές διατυπώσεις, προσχωρώντας από μία κατάσταση μεταξύ 2^{ου} και 3^{ου} επιπέδου του Van Hiele προς το 3^{ο} επίπεδο γεωμετρικής σκέψης. Σε αντίθεση με τους άλλους δύο μαθητές, ο ΧΕ δεν παρουσίασε ή παρουσίασε πολύ λίγα σημάδια αφαιρετικής αντίληψης των παραλληλογράμμων. Από την ανάλυση του βίντεο, προέκυψε ότι ο μαθητής στις δραστηριότητες 4 και 5 των ενοτήτων 2 έως 6, αν και κύκλωνε απαντήσεις που μαρτυρούσαν πως δεν θεωρούσε π.χ. το ορθογώνιο ως παραλληλόγραμμο, προσάρμοζε, τελικά, τις απαντήσεις του στις απαντήσεις του ΥΕ. Επίσης, από τις προφορικές διατυπώσεις του μαθητή, παρατηρούμε ότι προσπαθούσε να περιγράψει τα σχήματα αντί να εντοπίσει σχέσεις ενσωμάτωσης (π.χ. 2.51 & 2.59). Από το παραπάνω συμπεραίνουμε ότι ο μαθητής με τη επίδραση της διδακτικής παρέμβασης βρέθηκε στο επίπεδο Γ και στο 2^{ο} επίπεδο γεωμετρικής σκέψης του Van Hiele (περιγραφικό). Συγκριτικά, με το pre-test, δεν φαίνεται να βελτίωσε την αντίληψη του για τα παραλληλόγραμμα, συνεχίζοντας πιθανότατα να θεωρεί το παραλληλόγραμμο, τον ρόμβο, το ορθογώνιο και το τετράγωνο ως ασύνδετα σχήματα, στα οποία δεν παρατηρούνται σχέσεις ενσωμάτωσης.



Εικόνα 4.33: Σύγκριση των απαντήσεων που έδωσαν οι μαθητές στο πλαίσιο της «τελικής δραστηριότητας» στη συνέντευξη και στη διδακτική παρέμβαση. Ο μαθητής με υψηλή επίδοση (ΥΕ) διατήρησε την ήδη ορθή απάντησή του, ο μαθητής με μέτρια επίδοση (ΜΕ) από την άποψη ότι καμία από τις δύο απαντήσεις δεν είναι σωστή οδηγήθηκε τελικά στην ορθή απάντηση και ο μαθητής με χαμηλή επίδοση μετέβαλε φαινομενικά την απάντησή του προς το ορθό. Ο ΧΕ, από τις διατυπώσεις και τις ενέργειές του φαίνεται πως προσάρμοσε την απάντησή του στις απαντήσεις του ΥΕ, χωρίς να δείξει σημάδια αφαιρετικής αντιμετώπισης των σχημάτων.

<table>
<tr><th colspan="5">Διαδικασία οικοδόμησης της μαθηματικής αφαίρεσης:
Ο ρόμβος ως ειδική περίπτωση παραλληλογράμμου</th></tr>
<tr><td>Χρονικές περίοδοι</td><td>Μαθηματική αφαίρεση</td><td colspan="2">Διαδικασία οικοδόμησης σύμφωνα με το μοντέλο AiC</td><td>Μαθητές με ενεργό εμπλοκή</td></tr>
<tr><td rowspan="5">17:16
-
25:29</td><td rowspan="5">Ο ρόμβος ως ειδική περίπτωση παρ/μου</td><td>1η φάση</td><td>Ανάγκη μαθηματικής αφαίρεσης λόγω του ερωτήματος 3 της ενότητας 2</td><td rowspan="5">ΥΕ, ΜΕ</td></tr>
<tr><td>2η φάση</td><td>Αναγνώριση του γεγονότος ότι η δυναμική εικονική αναπαράσταση και οι ορισμοί μπορούν να βοηθήσουν</td></tr>
<tr><td>3η φάση</td><td>Εργασία με τη δυναμική εικονική αναπαράσταση και τους ορισμούς</td></tr>
<tr><td>4η φάση</td><td>Οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης</td></tr>
<tr><td>5η φάση</td><td>Εμπέδωση με τις υπο-δραστηριότητες 4 και 5 της ενότητας 2</td></tr>
</table>

Πίνακας 4.10: Συνοπτικός πίνακας της διαδικασίας οικοδόμησης της αφαίρεσης: «ο ρόμβος ως ειδική περίπτωση παραλληλογράμμου».

<table>
<tr><th colspan="5">Διαδικασία οικοδόμησης της μαθηματικής αφαίρεσης:
Το τετράγωνο ως ειδική περίπτωση ρόμβου</th></tr>
<tr><td>Χρονικές περίοδοι</td><td>Μαθηματική αφαίρεση</td><td colspan="2">Διαδικασία οικοδόμησης σύμφωνα με το μοντέλο AiC</td><td>Μαθητές με ενεργό εμπλοκή</td></tr>
<tr><td rowspan="5">25:30
–
30:01</td><td rowspan="5">Το τετράγωνο ως ειδική περίπτωση ρόμβου</td><td>1η φάση</td><td>Ανάγκη μαθηματικής αφαίρεσης λόγω του ερωτήματος 3 της ενότητας 3</td><td rowspan="5">ΥΕ, ΜΕ, ΧΕ</td></tr>
<tr><td>2η φάση</td><td>Αναγνώριση του γεγονότος ότι η δυναμική εικονική αναπαράσταση και οι ορισμοί μπορούν να βοηθήσουν</td></tr>
<tr><td>3η φάση</td><td>Εργασία με τη δυναμική εικονική αναπαράσταση και τους ορισμούς</td></tr>
<tr><td>4η φάση</td><td>Οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης</td></tr>
<tr><td>5η φάση</td><td>Εμπέδωση με τις υπο-δραστηριότητες 4 και 5 της ενότητας 3</td></tr>
</table>

Πίνακας 4.11: Συνοπτικός πίνακας της διαδικασίας οικοδόμησης της αφαίρεσης: «το τετράγωνο ως ειδική περίπτωση ρόμβου».

<table>
<tr><th colspan="5">Διαδικασία οικοδόμησης της μαθηματικής αφαίρεσης:
Το ορθογώνιο ως ειδική περίπτωση παραλληλογράμμου</th></tr>
<tr><td>Χρονικές περίοδοι</td><td>Μαθηματική αφαίρεση</td><td colspan="2">Διαδικασία οικοδόμησης σύμφωνα με το μοντέλο AiC</td><td>Μαθητές με ενεργό εμπλοκή</td></tr>
<tr><td rowspan="5">30:02
–
38:00</td><td rowspan="5">Το ορθογώνιο ως ειδική περίπτωση παρ/μου</td><td>1η φάση</td><td>Ανάγκη μαθηματικής αφαίρεσης λόγω του ερωτήματος 3 της ενότητας 4</td><td rowspan="5">ΥΕ, ΜΕ, ΧΕ</td></tr>
<tr><td>2η φάση</td><td>Αναγνώριση του γεγονότος ότι η δυναμική εικονική αναπαράσταση και οι ορισμοί μπορούν να βοηθήσουν</td></tr>
<tr><td>3η φάση</td><td>Εργασία με τη δυναμική εικονική αναπαράσταση και τους ορισμούς</td></tr>
<tr><td>4η φάση</td><td>Οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης</td></tr>
<tr><td>5η φάση</td><td>Εμπέδωση με τις υπο-δραστηριότητες 4 και 5 της ενότητας 4</td></tr>
</table>

Πίνακας 4.12: Συνοπτικός πίνακας της διαδικασίας οικοδόμησης της αφαίρεσης: «το ορθογώνιο ως ειδική περίπτωση παραλληλογράμμου». Η εργασία των μαθητών στο πλαίσιο της 3ης φάσης βασίζεται σε υποθέσεις.

<table>
<tr><th colspan="5">Διαδικασία οικοδόμησης της μαθηματικής αφαίρεσης:
Το τετράγωνο ως ειδική περίπτωση ορθογωνίου</th></tr>
<tr><th>Χρονικές περίοδοι</th><th>Μαθηματική αφαίρεση</th><th colspan="2">Διαδικασία οικοδόμησης σύμφωνα με το μοντέλο AiC</th><th>Μαθητές με ενεργό εμπλοκή</th></tr>
<tr><td rowspan="5">38:01
–
47:00</td><td rowspan="5">Το τετράγωνο ως ειδική περίπτωση ορθογωνίου (αρχικά οικοδόμηση και στη συνέχεια απόρριψη της νέας αφαίρεσης)</td><td>1η φάση</td><td>Ανάγκη μαθηματικής αφαίρεσης λόγω του ερωτήματος 3 της ενότητας 5</td><td rowspan="5">ΥΕ, ΜΕ, (ΧΕ)</td></tr>
<tr><td>2η φάση</td><td>Αναγνώριση του γεγονότος ότι η δυναμική εικονική αναπαράσταση και οι ορισμοί μπορούν να βοηθήσουν</td></tr>
<tr><td>3η φάση</td><td>Εργασία με τη δυναμική εικονική αναπαράσταση και τους ορισμούς</td></tr>
<tr><td>4η φάση</td><td>Οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης</td></tr>
<tr><td>5η φάση</td><td>Δημιουργία γνωστικής ανισορροπίας στο πλαίσιο της υπο-δραστηριότητας 5 της ενότητας 5 και απόρριψη της μαθηματικής αφαίρεσης</td></tr>
<tr><td rowspan="5">65:55
–
70:04</td><td rowspan="5">Το τετράγωνο ως ειδική περίπτωση ορθογωνίου (επανεξέταση και αποδοχή της αφαίρεσης)</td><td>1η φάση</td><td>Ανάγκη επανεξέτασης, στο πλαίσιο της «τελικής δραστηριότητας», του ενδεχομένου ισχύος της μαθηματικής αφαίρεσης που είχε απορριφθεί</td><td rowspan="5">ΥΕ, ΜΕ</td></tr>
<tr><td>2η φάση</td><td>Αναγνώριση του γεγονότος ότι η δυναμική εικονική αναπαράσταση και οι ορισμοί μπορούν να βοηθήσουν</td></tr>
<tr><td>3η φάση</td><td>Εργασία κυρίως με τους ορισμούς και δευτερευόντως με τη δυναμική εικονική αναπαράσταση</td></tr>
<tr><td>4η φάση</td><td>Οριστική οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης</td></tr>
<tr><td>5η φάση</td><td>(Δεν πραγματοποιήθηκε)</td></tr>
</table>

Πίνακας 4.13: Συνοπτικός πίνακας της διαδικασίας οικοδόμησης της αφαίρεσης: «το τετράγωνο ως ειδική περίπτωση ορθογωνίου». Οι μαθητές αρχικά απέρριψαν την αφαίρεση που κατασκεύασαν λόγω της γνωστικής ανισορροπίας που δημιουργήθηκε αλλά τελικά επανεξέτασαν το ενδεχόμενο ισχύος της αφαίρεσης και τελικά την αποδέχτηκαν στο πλαίσιο της τελικής δραστηριότητας. Ο μαθητής με χαμηλή επίδοση (ΧΕ) εμφανίζεται εντός παρενθέσεων διότι η ενεργός συμμετοχή του, όπου παρατηρήθηκε, ήταν αμφίβολη.

<table>
<tr><th colspan="5">Διαδικασία οικοδόμησης της μαθηματικής αφαίρεσης:
Το τετράγωνο ως ειδική περίπτωση παραλληλογράμμου</th></tr>
<tr><th>Χρονικές περίοδοι</th><th>Μαθηματική αφαίρεση</th><th colspan="2">Διαδικασία οικοδόμησης σύμφωνα με το μοντέλο AiC</th><th>Μαθητές με ενεργό εμπλοκή</th></tr>
<tr><td rowspan="5">47:01
–
59:09</td><td rowspan="5">Το τετράγωνο ως ειδική περίπτωση παρ/μου</td><td>1η φάση</td><td>Ανάγκη μαθηματικής αφαίρεσης λόγω του ερωτήματος 3 της ενότητας 6</td><td rowspan="5">ΥΕ, ΜΕ</td></tr>
<tr><td>2η φάση</td><td>Αναγνώριση του γεγονότος ότι η δυναμική εικονική αναπαράσταση και οι ορισμοί μπορούν να βοηθήσουν</td></tr>
<tr><td>3η φάση</td><td>Εργασία με τη δυναμική εικονική αναπαράσταση και τους ορισμούς</td></tr>
<tr><td>4η φάση</td><td>Οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης</td></tr>
<tr><td>5η φάση</td><td>Εμπέδωση με τις υπο-δραστηριότητες 4 και 5 της ενότητας 6</td></tr>
</table>

Πίνακας 4.14: Συνοπτικός πίνακας της διαδικασίας οικοδόμησης της αφαίρεσης: «το τετράγωνο ως ειδική περίπτωση παραλληλογράμμου».

ΑΞΟΝΑΣ Β: Τα χαρακτηριστικά των αναπαραστάσεων στην οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης

1. *Αντιληπτική μεταβλητότητα*

Τα αποτελέσματα από την ανάλυση του βίντεο δείχνουν ότι η αντιληπτική μεταβλητότητα, όπως αυτή εκφράστηκε με τη δυναμική εικονική αναπαράσταση στον Η/Υ, έπαιξε ουσιαστικό ρόλο στην οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης. Οι ΥΕ και ΜΕ χειριζόμενοι το «λαστιχένιο παραλληλόγραμμο» στο πλαίσιο των ερωτημάτων 1 και 2 των ενοτήτων 2 έως 6, έδειξαν πως αντιλήφθηκαν αρκετά γρήγορα τη σχέση ενσωμάτωσης ενός σχήματος (π.χ. του τετραγώνου) στο «ιεραρχικά υψηλότερο» σχήμα (π.χ. στον ρόμβο), κρίνοντας από τον χρόνο που χρειάστηκαν για να δώσουν απάντηση στο ερώτημα 3 όλων των ενοτήτων. Επίσης η αντιληπτική μεταβλητότητα υποστήριξε τον ΜΕ στην υπερπήδηση της γνωστικής ανισορροπίας που προέκυψε καθώς οι μαθητές προσπαθούσαν να ενσωματώσουν το τετράγωνο στην ευρύτερη οικογένεια των ορθογωνίων. Ο ΜΕ επιχείρησε να χειριστεί τη δυναμική εικονική αναπαράσταση και έκανε τις διατυπώσεις που φαίνονται στον παρακάτω διάλογο:

[2.85] (65:55) ΜΕ	***Κοιτάξτε… Εδώ το έκανα το ορθογώνιο, τετράγωνο… Και γίνεται.***
[2.86] (66:04) Ε	***Δηλαδή, εδώ πιστεύεις ότι το σχήμα μάς δείχνει ότι το τετράγωνο είναι ορθογώνιο.***
[2.87] (66:08) ΜΕ	***[Προβληματισμένος] Ναι…***

Με τον τρόπο αυτό, η μαθήτρια άρχισε να συνειδητοποιεί ότι το τετράγωνο μπορεί να αποτελέσει μία περίπτωση ορθογωνίου και σταδιακά, αξιοποιώντας και τους ορισμούς, οδηγήθηκε στην οικοδόμηση της ορθής μαθηματικής αφαίρεσης. Τέλος, από την ανάλυση του βίντεο, παρατηρούμε ότι η αντιληπτική μεταβλητότητα υποστήριξε τους μαθητές στη διατύπωση των ορισμών των σχημάτων, δίνοντας τους την ευκαιρία να εντοπίσουν τα αναλλοίωτα χαρακτηριστικά σε μία πληθώρα περιπτώσεων ενός σχήματος (π.χ. η παραλληλία των απέναντι πλευρών στους ρόμβους ή ισότητα όλων των πλευρών στο τετράγωνο). Ωστόσο, η συγκεκριμένη συνεισφορά ξεφεύγει από τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας εργασίας.

2. *Πολλαπλή ενσωμάτωση*

Σε διάφορα σημεία της διδακτικής παρέμβασης, οι μαθητές δεν περιορίστηκαν στην αξιοποίηση μίας μόνο μορφής αναπαράστασης (μόνο εικονική αναπαράσταση ή μόνο ορισμοί). Για παράδειγμα, κατά την οικοδόμηση της ενσωμάτωσης των τετραγώνων στους ρόμβους οι μαθητές αξιοποίησαν και τις δύο βασικές μορφές αναπαράστασης (δυναμική εικονική αναπαράσταση και ορισμούς):

[2.114] (28:12) Ε	***Σας βοήθησε περισσότερο για να πάρετε αυτή την απόφαση το σχήμα ή οι ορισμοί των σχημάτων που γράψαμε στην αρχή; Να μου πει ο καθένας ξεχωριστά.***
[2.115] (28:25) ΜΕ	***Και τα σχήματα και από τους ορισμούς. Και τα δύο.***

[2.116] (28:32) ΧΕ	***Κι εμένα… Περισσότερο, όμως, το σχήμα.***
[2.117] (28:37) ΥΕ	***Λίγο περισσότερο το σχήμα…***

Η ρόλος της πολλαπλής ενσωμάτωσης σε ποικίλες αναπαραστάσεις φαίνεται, επίσης, στη διατύπωση/ενέργεια 2.24 κατά την οποία ο ΜΕ επιχειρεί να μεταφράσει το νόημα των ορισμών στη εικονική αναπαράσταση του Η/Υ, στην προσπάθειά του να δικαιολογήσει την άποψη ότι ο ρόμβος είναι μία ειδική περίπτωση παραλληλογράμμου.

Γενικότερα, αν και οι μαθητές είχαν πρόσβαση και στις δύο βασικές μορφές αναπαράστασης (εικονική και ορισμοί), από την παρατήρηση του βίντεο αλλά και από τις διατυπώσεις/ενέργειες των μαθητών (π.χ. 2.116 και 2.117) παρατηρούμε ότι η δυναμική εικονική αναπαράσταση είχε τον κύριο λόγο. Παρόλα αυτά, οι μαθητές κατέφευγαν συχνά και στους ορισμούς όταν συνειδητοποιούσαν ότι η δυναμική εικονική αναπαράσταση δεν μπορούσε να τους υποστηρίξει ή για να επιβεβαιώσουν την άποψή τους από μία ακόμη πηγή (π.χ. οι διατυπώσεις και ενέργειες 2.85, 2.87). Προς το τέλος της διδακτικής παρέμβασης, οι μαθητές εξέφρασαν την άποψη ότι οι εικονικές αναπαραστάσεις τους βοήθησαν στη συνειδητοποίηση πιο «φανερών» χαρακτηριστικών ενώ οι ορισμοί (συμβολικές αναπαραστάσεις) σε πιο ειδικές και απαιτητικές περιπτώσεις:

[2.118] (69:25) Ε	***[Οι μαθητές έχουν μόλις ολοκληρώσει την «τελική δραστηριότητα» καταφέρνοντας να ξεπεράσουν τη δυσκολία ενσωμάτωσης του τετραγώνου στο ορθογώνιο] Στη λύση του προβλήματος σας βοήθησαν οι ορισμοί ή τα σχήματα;***
[2.119] (69:30) ΥΕ & ΧΕ	***Οι ορισμοί.***
[2.120] (69:31) ΜΕ	***Οι ορισμοί αυτή τη φορά.***
[2.121] (69:33) Ε	***[…] Άρα, λοιπόν, πότε θα χρησιμοποιούσατε τον ορισμό και πότε το σχήμα;***
[2.122] (69:44) ΥΕ	***Όταν είναι κάτι που είναι πιο φανερό…***
[2.123] (69:49) Ε	***Το φανερό στον ορισμό ή στο σχήμα;***
[2.124] (69:51) ΟΛΟΙ	***Στο σχήμα***
[2.125] (69:56) Ε	***Και το πιο «ειδικό»;***
[2.126] (69:59) ΟΛΟΙ	***Στους ορισμούς.***

Τέλος, οι μαθητές αξιοποίησαν τους επικουρικούς χειρισμούς του ψηφιακού μαθησιακού αντικειμένου όταν ήθελαν να επιβεβαιώσουν ένα χαρακτηριστικό που παρατηρούσαν, π.χ. ισότητα πλευρών.

3. *Δυναμική διασύνδεση*

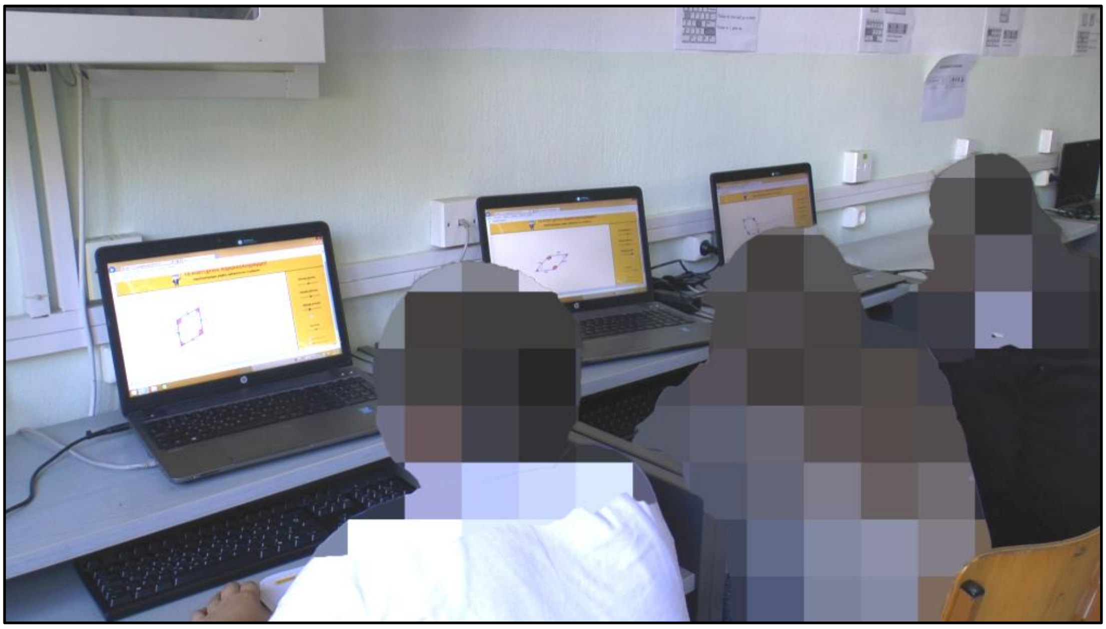
Δεν υπάρχουν ασφαλείς ενδείξεις για τον ρόλο που διαδραμάτισε η δυναμική διασύνδεση μεταξύ των αναπαραστάσεων στην οικοδόμηση των μαθηματικών αφαιρέσεων.

4. *Σταδιακή αφαίρεση από τις εικονικές στις συμβολικές αναπαραστάσεις*

Από την παρατήρηση του βίντεο, είναι δύσκολο να προσδιοριστεί αν οι μαθητές κινήθηκαν από τις εικονικές (δυναμικές εικονικές αναπαραστάσεις στον Η/Υ) στις συμβολικές αναπαραστάσεις (ορισμούς), το αντίστροφο ή αξιοποίησαν ταυτόχρονα και τις δύο μορφές αναπαράστασης. Από ορισμένα σημεία φαίνεται πως οι μαθητές αξιοποίησαν και τις δύο αναπαραστάσεις μαζί (π.χ. 2.19 έως 2.26 της ΜΕ), γεγονός που αναδείχθηκε προηγουμένως στο πλαίσιο της «πολλαπλής ενσωμάτωσης». Ωστόσο, η διατύπωση 2.120 της ΜΕ δείχνει ότι οι μαθητές βασίζονταν κυρίως στην εικονική αναπαράσταση για την οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης και σε δεύτερο χρόνο, όταν αυτές δεν επαρκούσαν (όταν οι μαθητές έψαχναν το πιο «ειδικό», βλ. 2.121 έως 2.126) κατέφευγαν στις συμβολικές.

5. *Δυνατότητα για ενεργό εμπλοκή του μαθητή*

Οι μαθητές είχαν πολλαπλές ευκαιρίες ενεργού εμπλοκής στη δραστηριότητα με τον χειρισμό της δυναμικής εικονικής αναπαράστασης (βασικοί και επικουρικοί χειρισμοί). Από την παρατήρηση του βίντεο φαίνεται πως οι μαθητές επιζητούσαν και αξιοποιούσαν αυτή τη δυνατότητα (π.χ. χειρισμός της δυναμικής εικονικής αναπαράστασης για την εξαγωγή συμπεράσματος σχετικά με αν το τετράγωνο μπορεί να θεωρηθεί ορθογώνιο). Δυστυχώς, η παρατήρηση του ρόλου που διαδραμάτισε στην οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης, η ενεργός συμμετοχή των μαθητών στον χειρισμό των αναπαραστάσεων δεν κατέστη δυνατή.



Εικόνα 3.34: Στιγμιότυπο από την ενασχόληση των μαθητών της ΣΤ' τάξης με τη δραστηριότητα «το λαστιχένιο παραλληλόγραμμο», στην οποία οι μαθητές κλήθηκαν να εντοπίσουν σχέσεις ενσωμάτωσης στα παραλληλόγραμμα (π.χ. το τετράγωνο ως ρόμβος), χειριζόμενοι μία δυναμική εικονική αναπαράσταση του παραλληλογράμμου σε Η/Υ.

4.4 Συμπεράσματα και συζήτηση των ευρημάτων

Σκοπός της παρούσας έρευνας ήταν η κατασκευή δύο δραστηριοτήτων μαθηματικής αφαίρεσης και η μελέτη του ρόλου των εξωτερικών αναπαραστάσεων στη διαδικασία οικοδόμησής της από μαθητές του Δημοτικού Σχολείου. Τα ερευνητικά ερωτήματα κατηγοριοποιήθηκαν σε δύο βασικούς άξονες: α) τη μελέτη της διαδικασίας οικοδόμησης της μαθηματικής αφαίρεσης και β) τη μελέτη του ρόλου που διαδραματίζουν ορισμένα χαρακτηριστικά των εξωτερικών αναπαραστάσεων και συγκεκριμένα η αντιληπτική μεταβλητότητα, η πολλαπλή ενσωμάτωση, η δυναμική διασύνδεση, η σταδιακή αφαίρεση από τις εικονικές στις συμβολικές αναπαραστάσεις και η δυνατότητα ενεργού εμπλοκής των μαθητών στον χειρισμό των αναπαραστάσεων. Η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε ανήκει στο φάσμα των ποιοτικών προσεγγίσεων έρευνας και συνδυάζει τη μέθοδο της μελέτης περίπτωσης με το διδακτικό πείραμα (teaching experiment). Οι μαθητές ασχολήθηκαν με δύο δραστηριότητες. Στην πρώτη, που ήταν προ-αλγεβρική, οι μαθητές κλήθηκαν να σκεφτούν αφαιρετικά με τη νοητική διεργασία της γενίκευσης ενώ στη δεύτερη, η οποία ήταν γεωμετρική, με τη νοητική διεργασία της ενσωμάτωσης (ή σύνθεσης). Ως εργαλεία συλλογής δεδομένων αξιοποιήθηκαν η βιντεοσκόπηση, τα φύλλα εργασίας των μαθητών και η συνέντευξη, με απώτερο σκοπό την ανάλυση των δεδομένων από την παρατήρηση των βίντεο και τη μελέτη των απαντήσεων των μαθητών στα φύλλα εργασίας. Στην έρευνα συμμετείχαν συνολικά 3 μαθητές της Δ’ Δημοτικού (πρώτο διδακτικό πείραμα) και 3 μαθητές της ΣΤ’ Δημοτικού (δεύτερο διδακτικό πείραμα). Από τους 6 μαθητές οι 4 ήταν αγόρια και οι 2 κορίτσια, ενώ σε κάθε διδακτικό πείραμα υπήρχε ένας μαθητής με υψηλή επίδοση στα Μαθηματικά, ένας με μέτρια και ένας με χαμηλή.

Από τα αποτελέσματα εξάγεται το συμπέρασμα ότι οι δραστηριότητες μαθηματικής αφαίρεσης με τον τρόπο που σχεδιάστηκαν και υλοποιήθηκαν, ωφέλησαν κυρίως τους μαθητές με μέτρια ή υψηλή επίδοση. Οι μαθητές αυτοί (4 από τους 6) από τις προφορικές διατυπώσεις, τις ενέργειες αλλά και τις γραπτές τους απαντήσεις κατάφεραν να φτάσουν στα υψηλότερα επίπεδα μαθηματικής αφαίρεσης, όπως αυτά σχεδιάστηκαν προκαταρκτικά στην έρευνα. Ιδιαίτερα ο μαθητής με μέτρια επίδοση που συμμετείχε στη γεωμετρική δραστηριότητα, φαίνεται ότι κατάφερε να μεταβεί από το 2^{o} επίπεδο γεωμετρικής σκέψης του Van Hiele (στη συνέντευξη), που χαρακτηρίζεται από την περιγραφική αντιμετώπιση των σχημάτων (Κολέζα, 2009), στο 3^{o} επίπεδο γεωμετρικής σκέψης, που διέπεται από την αφαιρετική αντιμετώπισή τους και συγκεκριμένα από την ικανότητα του μαθητή να εντοπίζει σχέσεις ενσωμάτωσης μεταξύ αυτών (π.χ. το τετράγωνο ως ορθογώνιο) (ο.π.). Θετικά αποτελέσματα για την οικοδόμηση των σχέσεων ενσωμάτωσης μεταξύ των παραλληλογράμμων από δωδεκάχρονους μαθητές με τη βοήθεια Περιβαλλόντων Δυναμικής Γεωμετρίας (DGEs) είχε διαπιστώσει και ο Jones (2000). Βεβαίως, μία διδακτική παρέμβαση δεν μπορεί να εγγυηθεί την εδραίωση των νέων αφαιρετικών γνωστικών δομών, καθώς απαιτείται περαιτέρω δραστηριοποίηση του μαθητή ώστε αυτές να εμπεδωθούν (Dreyfus et al., 2015). Το γεγονός ότι οι μαθητές με χαμηλή επίδοση δεν ωφελήθηκαν ιδιαίτερα από τις διδακτικές παρεμβάσεις προκαλεί ερωτήματα σχετικά με τον ερευνητικό/διδακτικό σχεδιασμό. Ενδεχομένως, οι στόχοι μαθηματικής αφαίρεσης, που αναμενόταν να επιτευχθούν μέσα από τις δραστηριότητες, υπερέβαιναν τις δυνατότητες των μαθητών με χαμηλή επίδοση ή οι διδακτικές στρατηγικές που αξιοποιήθηκαν (π.χ. ό,τι αφορά στις αναπαραστάσεις) να χρειάζονται αναπροσαρμογή. Παράλληλα, το εύρημα αυτό δείχνει ότι η υψηλή επίδοση στα Μαθηματικά ίσως να συνδέεται με την ικανότητα αφαιρετικής σκέψης.

Ο πρώτος άξονας των ερευνητικών ερωτημάτων αν και δεν αποτελεί το επίκεντρο της παρούσας έρευνας, κρίθηκε αναγκαίο να μελετηθεί, διότι η μελέτη του ρόλου των αναπαραστάσεων κατά τη διαδικασία οικοδόμησης της μαθηματικής αφαίρεσης προϋποθέτει τη μελέτη της ίδιας της διαδικασίας πρώτα. Από τα αποτελέσματα φαίνεται, πως το ερευνητικό μοντέλο AiC (Abstraction in Context), όπως αυτό περιγράφεται στο Dreyfus et al. (2015), αποτέλεσε ένα αποτελεσματικό μοντέλο ανάλυσης της διαδικασίας οικοδόμησης της μαθηματικής, καθώς προσιδίαζε σημαντικά στη διαδικασία οικοδόμησης της μαθηματικής αφαίρεσης των ίδιων των μαθητών. Κρίνοντας από τη δραστηριότητα τους, θα μπορούσαμε να διατυπώσουμε την άποψη ότι οι μαθητές δοκίμασαν τις μαθηματικές αφαιρέσεις για να διαπιστώσουν αν μπορούν με αυτές να ερμηνεύσουν νέα δεδομένα. Αν ναι, η μαθηματική αφαίρεση(εις) συνεχίζει να υφίσταται ως εννοιολογική δομή. Αλλιώς, προσαρμόζεται κατάλληλα ή απορρίπτεται τελείως. Οι μαθητές της γεωμετρικής δραστηριότητας αρχικά απέρριψαν τη μαθηματική αφαίρεση «ένα τετράγωνο είναι μία ειδική περίπτωση ορθογωνίου», την οποία είχαν προηγουμένως κατασκευάσει, διότι η πρότερη εμπειρία τους, που ήθελε τα σχήματα ασύνδετα, υπερίσχυσε καθώς οι μαθητές εργάζονταν στην υπο-δραστηριότητα 5 της ενότητας 5 του φύλου εργασίας τους (2.64 έως 2.84). Αργότερα, ωστόσο, εξετάζοντας με μεγαλύτερη λεπτομέρεια τις διαθέσιμες αναπαραστάσεις, επανακατασκεύασαν τη μαθηματική αφαίρεση και πείστηκαν για την ισχύ της (2.85-2.95). Η διαδικασία οικοδόμησης μίας μαθηματικής αφαίρεσης ενδέχεται να επαναλαμβάνεται αρκετές φορές μέχρι ο μαθητής να φτάσει σε γνωστική ισορροπία. Μία ερώτηση του εκπαιδευτικού, μία παρατήρηση του μαθητή ή ο ίδιος ο διδακτικός σχεδιασμός δύναται να προκαλέσει γνωστική ανισορροπία (πιαζετικός όρος, McLeod, 2015), η οποία θα αποτελέσει την ανάγκη για νέα, βελτιωμένη, αφαίρεση (επιστροφή στην $1^{η}$ φάση), αναγνώριση των εργαλείων (πιθανώς αλλαγή των εργαλείων, αυτή τη φορά) που θα βοηθήσουν στην οικοδόμηση της νέας αφαίρεσης ($2^{η}$ φάση), νέα εργασία με τα εργαλεία αυτά ($3^{η}$ φάση), οικοδόμηση νέας (ίσως βελτιωμένης) γνωστικής δομής (μαθηματικής αφαίρεσης) ($4^{η}$ φάση) και τελικά εμπέδωση της νέας γνωστικής δομής ($5^{η}$ φάση). Παράλληλα, ενδιαφέρον θα είχε ο μετασχηματισμός του μοντέλου AiC από ερευνητικό μοντέλο ανάλυσης της αναδυόμενης αφαιρετικής σκέψης των μαθητών σε μοντέλο διδασκαλίας της μαθηματικών αφαιρέσεων.

Ως προς τον δεύτερο άξονα των ερευνητικών ερωτημάτων, στον οποία δίνεται η μεγαλύτερη βαρύτητα στην παρούσα εργασία, μπορούμε να διατυπώσουμε συμπεράσματα μόνο για των ρόλο των τριών από τα πέντε υπό μελέτη χαρακτηριστικά των εξωτερικών αναπαραστάσεων: την αντιληπτική μεταβλητότητα την πολλαπλή ενσωμάτωση και τη σταδιακή αφαίρεση από τις εικονικές στις συμβολικές αναπαραστάσεις. Από την ανάλυση των δεδομένων δεν κατέστη δυνατή η παρατήρηση και η μελέτη του ρόλου των υπόλοιπων δύο χαρακτηριστικών, δηλαδή της δυναμικής διασύνδεσης και της δυνατότητας για ενεργό εμπλοκή των μαθητών στον χειρισμό των αναπαραστάσεων.

Η αντιληπτική μεταβλητότητα φαίνεται πως υποστήριξε τους μαθητές στη διαδικασία οικοδόμησης της μαθηματικής αφαίρεσης στη γεωμετρική δραστηριότητα αλλά δεν μπορούμε να ισχυριστούμε το ίδιο και για την προ-αλγεβρική δραστηριότητα. Στη γεωμετρική δραστηριότητα η αντιληπτική μεταβλητότητα της δυναμικής εικονικής αναπαράστασης στον Η/Υ φαίνεται ότι έδρασε αποτελεσματικά στη γρήγορη συνειδητοποίηση των σχέσεων ενσωμάτωσης που παρατηρούνται στα παραλληλόγραμμα (π.χ. το ορθογώνιο είναι μία από τις πολλές μορφές που μπορεί να λάβει το παραλληλόγραμμο), στην άρση γνωστικών εμποδίων των μαθητών δρώντας ως εργαλείο εννοιολογικής αλλαγής (Σπυροπούλου-Κατσάνη, 2005) (π.χ. 2.85) αλλά και στη διατύπωση ορισμών για τα σχήματα (1^{η} ενότητα της δραστηριότητας του λαστιχένιου παραλληλογράμμου). Στην αλγεβρική/αριθμητική δραστηριότητα, υποστήριξε τους μαθητές στην οικοδόμηση του αναδρομικού τύπου $y_n=y_{n-1}+2$ αλλά όχι και στην οικοδόμηση της υψηλότερου επιπέδου αφαιρετικής σχέσης $y=x+x+2$. Για την οικοδόμηση της τελευταίας σχέσης, φαίνεται πως οι μαθητές αρκέστηκαν σε μία στατική εικόνα του τραπεζιού, δηλαδή δεν αξιοποίησαν, τη δυνατότητα της αντιληπτικής μεταβλητότητας που προέκυπτε από τον χειρισμό του δρομέα του ψηφιακού μαθησιακού αντικειμένου.

Η μεγαλύτερη συνεισφορά της αντιληπτικής μεταβλητότητας στη γεωμετρική δραστηριότητα ενδέχεται να οφείλεται στο γεγονός ότι με την αντιληπτική μεταβλητότητα δίνεται η δυνατότητα μερικής άρσης ενός σημαντικού επιστημολογικού εμποδίου της Γεωμετρίας, αυτού της αναπαράστασης των «γενικών» σχημάτων (Mesquita, 1998). Όταν επιθυμούμε να αναφερθούμε π.χ. στο ορθογώνιο τρίγωνο, στην πραγματικότητα σχεδιάζουμε ένα συγκεκριμένο ορθογώνιο τρίγωνο (π.χ. με κάθετες πλευρές 3 εκ. και 4 εκ., υποτείνουσα 5 εκ., και γωνίες 90, 53, 37 μοιρών). Ενώ επιθυμούμε την αναφορά σε γενικό σχήμα (π.χ. όλα τα ορθογώνια τρίγωνα), εντούτοις σχεδιάζουμε την εικονική αναπαράστασή ενός συγκεκριμένου σχήματος (ό.π.). Με τη δυνατότητα της αντιληπτικής μεταβλητότητας στο πλαίσιο ενός Η/Υ, καθίσταται δυνατή η παραμετροποίηση των χαρακτηριστικών ενός σχήματος (π.χ. δυναμικές πλευρές και γωνίες, περιστροφή κατά επιθυμητή γωνία, κ.α.), έτσι ώστε να είναι εφικτή η παρατήρηση όσο γίνεται περισσότερων περιπτώσεων μίας έννοιας π.χ. διαφόρων περιπτώσεων ορθογωνίων τριγώνων (ισοσκελή, σκαληνά, ανεστραμμένα, κ.α.). Να σημειωθεί ότι στην Άλγεβρα, η επινόηση των μεταβλητών έδωσε τη δυνατότητα γενικής αναφοράς ακόμα και με απλές συμβολικές αναπαραστάσεις (α, β, x, y, ω, κτλ.) (Mesquita, 1998). Συνολικά, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η αντιληπτική μεταβλητότητα είναι ένα ισχυρό χαρακτηριστικό σχεδίασης, το οποίο ο εκπαιδευτικός μπορεί να λάβει σοβαρά υπόψη του κατά τη σχεδίαση εξωτερικών αναπαραστάσεων σε γεωμετρικές δραστηριότητες μαθηματικής αφαίρεσης.

Η πολλαπλή ενσωμάτωση ήταν ένα από τα χαρακτηριστικά των εξωτερικών αναπαραστάσεων που αξιοποιήθηκε αρκετά από τους μαθητές και θα υποστηρίζαμε ότι είχε θετική επίδραση στην οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης. Το εύρημα αυτό επιβεβαιώνει την άποψη της Ainsworth (2006) ότι μία από τις λειτουργίες των πολυαναπαραστατικών συστημάτων είναι η αφαίρεση. Και στις δύο δραστηριότητες παρατηρήθηκαν σημεία στα οποία οι μαθητές πραγματοποίησαν «μετάφραση» από τη μία αναπαράσταση στην άλλη (π.χ. 1.14 και 2.24), παρατηρώντας τις αναλλοίωτες μαθηματικές δομές που εκφράζονταν στις εικονικές και τις συμβολικές αναπαραστάσεις. Επίσης, αξίζει να τονίσουμε ότι οι μαθητές και των δύο διδακτικών πειραμάτων ισχυρίστηκαν ότι οι εικονικές αναπαραστάσεις είχαν βαρύνοντα ρόλο, σε σχέση με τις συμβολικές, στη διαδικασία οικοδόμησης της μαθηματικής αφαίρεσης (1.82-1.83 & 2.114-2.117), γεγονός που αναδεικνύει τη χρήση των εικονικών αναπαραστάσεων ως ελκυστική και αποτελεσματική διδακτική στρατηγική στη μαθηματική αφαίρεση και πιθανώς ευρύτερα στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Υπάρχουν ενδείξεις ότι η υπόθεση για σταδιακή αφαίρεση από τις εικονικές στις συμβολικές αναπαραστάσεις επαληθεύεται και στις δύο δραστηριότητες. Στην πρώτη δραστηριότητα οι μαθητές αξιοποίησαν αρχικά την εικονική αναπαράσταση προκειμένου να εξαγάγουν την αφαίρεση ότι ο συνολικός αριθμός των ατόμων προκύπτει από το άθροισμα των ατόμων που κάθονται στις δύο μεγάλες πλευρές και του αριθμού 2. Στη συνέχεια, ωστόσο, ωφελήθηκαν από την προσθετική ανάλυση των αριθμών (π.χ. 22=10+10+2, 24=11+11+2, κτλ), δηλαδή από τις συμβολικές αναπαραστάσεις προκειμένου να εκφράσουν την προηγούμενη αφαίρεση με μεταβλητές: συνολικός αριθμός ατόμων = α+α+2. Το ίδιο παρατηρήθηκε, αλλά όχι τόσο πρόδηλα, στη γεωμετρική δραστηριότητα. Οι μαθητές με υψηλή και μέτρια επίδοση ισχυρίστηκαν προς το τέλος της δραστηριότητας ότι οι εικονικές αναπαραστάσεις τούς υποστηρίζουν σε ό,τι είναι πιο «φανερό» ενώ οι συμβολικές αναπαραστάσεις σε πιο «ειδικές» περιπτώσεις, όπου δηλαδή απαιτείται περισσότερη ανάλυση. Έτσι, φαίνεται πως η εξειδίκευση κάθε αναπαράστασης προδιαγράφει τον ρόλο της στη μαθησιακή πορεία. Οι εικονικές αναπαραστάσεις είναι περισσότερο αποτελεσματικές όταν αξιοποιούνται για την παροχή συγκεκριμένων και εύκολα αντιληπτών πληροφοριών ενώ οι συμβολικές όταν οι πληροφορίες είναι περισσότερο αφηρημένες (Ainsworth, 2006). Η Ainsworth (2006) χρησιμοποιεί τον όρο “graphical constraining” («γραφικός περιορισμός») για να περιγράψει τα όρια των δυνατοτήτων κάθε είδους αναπαράστασης. Παράλληλα, σε διάφορα σημεία τόσο της πρώτης όσο και στη δεύτερης δραστηριότητας, οι μαθητές χειρίστηκαν ταυτόχρονα τις αναπαραστάσεις ή από τις συμβολικές επέστρεψαν στις εικονικές, γεγονός που ενισχύει την άποψη των Behr, Post, & Lesh (1981, όπ. αναφ στο Πατσιομίτου & Εμβαλωτής, 2009) ότι η μαθησιακή πορεία δεν ακολουθεί αυστηρά τη γραμμική πορεία από τις εικονικές στις συμβολικές αναπαραστάσεις αλλά είναι περισσότερο ελαστική. Συνεπώς, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η θεωρία του Bruner για σταδιακή μετάβαση από τις έμπρακτες ή εμπράγματες, στις εικονικές και τέλος στις συμβολικές αναπαραστάσεις, ενδεχομένως ισχύει ως γενικό πλαίσιο ερμηνείας της διαδικασίας οικοδόμησης της μαθηματικής αφαίρεσης με τη διαφορά, όμως, ότι η πορεία είναι πιθανότατα αμφίδρομης κατεύθυνσης, όταν οι μαθησιακές συνθήκες το απαιτούν. Να σημειώσουμε ότι άλλες έρευνες (π.χ. Lesser & Tchoshanov, 2005) έχουν δείξει ότι η αντίστροφή πορεία, δηλαδή η έναρξη με τις συμβολικές αναπαραστάσεις και η σταδιακή μετάβαση στις εικονικές και τέλος στις εμπράγματες είναι περισσότερο αποτελεσματική στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Επίσης, οι Lesser και Tchoshanov (2005) αναφέρουν ένα πλήθος παραγόντων που ενδέχεται να επηρεάζει την πορεία των εξωτερικών αναπαραστάσεων κατά τη διδασκαλία των Μαθηματικών, όπως: το μαθησιακό προφίλ των μαθητών, το διδακτικό προφίλ των εκπαιδευτικών, οι χρονικοί περιορισμοί, οι διδακτικοί στόχοι και η εξάρτηση της διδασκαλίας από τις εξετάσεις.

Αν και η μελέτη του ρόλου των δύο υπόλοιπων χαρακτηριστικών των αναπαραστάσεων δεν κατέστη δυνατή στην παρούσα έρευνα, θα επιχειρήσουμε να διατυπώσουμε κάποιες υποθέσεις και ερωτήματα σχετικά με τον ρόλο τους στη διαδικασία οικοδόμησης της μαθηματικής αφαίρεσης. Η δυναμική διασύνδεση των αναπαραστάσεων ενδέχεται να υποστηρίζει τους μαθητές στη διαδικασία «μετάφρασης» μεταξύ των αναπαραστάσεων. Επίσης, η ενεργός συμμετοχή των μαθητών στον χειρισμό αναπαραστάσεων εικάζεται πως δρα θετικά στη διαδικασία οικοδόμησης της μαθηματικής αφαίρεσης, αλλά τι θα συνέβαινε αν οι μαθητές εκτίθεντο σε αναπαραστάσεις στις οποίες δεν υπήρχε δυνατότητα χειρισμού (π.χ. στατικές εικόνες, βίντεο, σχέδια σε χαρτί);

Τα κοινωνικά φαινόμενα, άρα και η διδασκαλία των Μαθηματικών, χαρακτηρίζονται από σύνθετες αλληλεπιδράσεις των μελών και των μερών που δρουν σε αυτά. Η μελέτη όλων των δυνατών παραγόντων που επηρεάζουν ένα κοινωνικό φαινόμενο είναι προφανώς αδύνατη διότι αφενός δεν γνωρίζουμε όλους τους δυνατούς παράγοντες που επιδρούν σε αυτά (πιθανότατα άπειροι) αλλά ακόμη και αν τους γνωρίζουμε (εφόσον ήταν πεπερασμένοι) το πλήθος τους θα προκαλούσε σοβαρές δυσκολίες στον σχεδιασμό των ερευνών. Στην παρούσα έρευνα η μελέτη του ρόλου των εξωτερικών αναπαραστάσεων στη διαδικασία οικοδόμησης της μαθηματικής αφαίρεσης περιορίστηκε στη μελέτη πέντε χαρακτηριστικών, τα οποία η σχετική βιβλιογραφία προκρίνει ως σημαντικά. Ωστόσο, θα θέλαμε να επισημάνουμε δύο ακόμη παράγοντες-χαρακτηριστικά (ή μεταβλητές) που, ενώ δεν μελετήθηκαν, ενδεχομένως διαδραμάτισαν σημαντικό ρόλο στην έρευνα.

Ο πρώτος είναι ο κοινωνικός παράγοντας και ειδικότερα ο ρόλος του στη διαδικασία οικοδόμησης της μαθηματικής αφαίρεσης. Η Ellis (2011) διαπίστωσε, σε έρευνά της, πως η μαθηματική γενίκευση είναι μία διαδικασία στην οποία οι κοινωνικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των μαθητών παίζουν σημαντικό ρόλο. Κατά τη μαθησιακή και τη διδακτική διαδικασία, τα διάφορα εργαλεία που υποβοηθούν τους μαθητές στην προσπάθειά τους να γενικεύουν (αναπαραστάσεις, προβλήματα, φύλλα εργασίας), είναι άρρηκτα συνδεμένα με τη κοινωνικές αλληλεπιδράσεις των μαθητών, που εκφράζονται κυρίως μέσω της γλώσσας (ο.π.). Η Cobb (2005, οπ. αναφ. στο Ellis, 2011) χαρακτηρίζει τη μαθηματική αφαίρεση ως «συλλογική αφαίρεση» ("collective abstraction"), θέλοντας να τονίσει τον ρόλο του κοινωνικού παράγοντα στη διαδικασία οικοδόμησης της μαθηματικής αφαίρεσης. Με τον τρόπο αυτό η προσωπική οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης εντάσσεται στο πλαίσιο της συλλογικής οικοδόμησης μέσω της συμμετοχής του ατόμου στην κοινωνική αλληλεπίδραση στο πλαίσιο της ομάδας ή της τάξης (Brandt & Tatsis, 2009). Από την ανάλυση του βίντεο προέκυψε ότι οι μαθητές επιτελούσαν διαφορετικούς κοινωνικούς ρόλους στην προσπάθεια οικοδόμησης της μαθηματικής αφαίρεσης.

Τόσο στην προ-αλγεβρική όσο και στη γεωμετρική δραστηριότητα, οι μαθητές με υψηλή ή μέτρια επίδοση αποτέλεσαν τους κύριους «εμπνευστές» (“authors”) των μαθηματικών αφαιρέσεων και κατεύθυναν σημαντικά τη σκέψη των μαθητών με χαμηλή επίδοση, οι οποίοι λειτούργησαν περισσότερο ως «αναμεταδότες» (“relayers”). Οι όροι «εμπνευστής» και «αναμεταδότης» καθώς και άλλοι συναφείς διατυπώθηκαν από τον Levinson (1988, οπ. αναφ. Krummheuer, 2015) ως εργαλεία ανάλυσης της κυριότητας των ιδεών που εκφράζονται από μαθητές κατά την κοινωνική αλληλεπίδρασή τους στο πλαίσιο ομάδων εργασίας.

Ο δεύτερος παράγοντας σχετίζεται με τον βαθμό αφαίρεσης των ίδιων των εικονικών αναπαραστάσεων ως εικόνων, δηλαδή το αν απεικονίζουν ρεαλιστικά ή, αντίθετα, σχηματικά το αναπαριστώμενο αντικείμενο. Όπως επισημάναμε στο 2^{ο} κεφάλαιο, οι λιτές και κατά το δυνατόν σχηματικές αναπαραστάσεις είναι πιο αποτελεσματικές στη διδασκαλία των Μαθηματικών (Hegarty & Kozhevnikov, 1999˙ Presmeg, 1986). Επίσης, οι αναπαραστάσεις που παρέχουν τη δυνατότητα για αναγνώριση μοτίβων υποστηρίζουν πιο αποτελεσματικά τη νοητική λειτουργία της μαθηματικής αφαίρεσης (Presmeg, 1987). Στην πρώτη δραστηριότητα, η απεικόνιση του τραπεζιού και των ατόμων ήταν σχηματική (λιτή και δισδιάστατη). Επίσης, η διάταξη των κύκλων καθώς και χρωματικές επιλογές διευκόλυναν την εύρεση μοτίβων (π.χ. οι μπλε κύκλοι ήταν σταθερά δύο επιπλέον) και επομένως κατά την Presmeg (1987) την αφαίρεση. Συνεπώς, ο τρόπος με τον οποίο αναπαρίσταντο οι πληροφορίες στην εικονική αναπαράσταση και ανεξάρτητα από τα πέντε χαρακτηριστικά που μελετήθηκαν στην παρούσα έρευνα, ενδέχεται να επέδρασε θετικά στην οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης.

Στην παρούσα έρευνα, οι αναπαραστάσεις ενσωμάτωναν και τα πέντε υπό μελέτη χαρακτηριστικά που προάγουν τη μαθηματική αφαίρεση, στο πλαίσιο μίας ποιοτικής προσέγγισης έρευνας. Ως προέκταση της παρούσας έρευνας, θα προτείναμε τη μελέτη κάθε χαρακτηριστικού ξεχωριστά, με πειραματική μέθοδο έρευνας (με πειραματικές ομάδες και ομάδες ελέγχου) καθώς και τη συμπερίληψη άλλων πιθανών παραγόντων επιρροής, όπως του κοινωνικού παράγοντα, δηλαδή των ρόλων των μαθητών ή/και του εκπαιδευτικού στις κοινωνικές αλληλεπιδράσεις κατά τη διαδικασία οικοδόμησης μαθηματικών αφαιρέσεων.

Ο ισχυρισμός του Duval (2006) ότι τα Μαθηματικά είναι προσβάσιμα μόνο μέσω των αναπαραστάσεων είναι ενδεικτικός της σημασίας τους στη μαθηματική εκπαίδευση. Συνδυάζοντας αυτόν τον ισχυρισμό με την άποψη ότι τα Μαθηματικά είναι μία επιστήμη άρρηκτα συνδεδεμένη με την αφαίρεση, ήδη από τις μικρές ηλικίες, οδηγηθήκαμε στην ανάγκη μελέτης του ρόλου που διαδραματίζουν οι εξωτερικές αναπαραστάσεις στη διαδικασία οικοδόμησης μαθηματικών αφαιρέσεων από μαθητές του Δημοτικού Σχολείου. Ελπίζουμε ότι με την παρούσα εργασία συνδράμαμε προς αυτή την κατεύθυνση ή τουλάχιστον δώσαμε εναύσματα για περαιτέρω μελέτη και έρευνα.

Παράρτημα

Α. Συνοπτικός κατάλογος των θεμάτων που αναπτύσσονται στο θεωρητικό μέρος της εργασίας (κεφάλαια 1, 2 & 3)

❖ **<u>Κεφάλαιο 1: Η μαθηματική αφαίρεση στις μικρές ηλικίες</u>**

1.1 Οριοθετώντας τον όρο «μαθηματική αφαίρεση»
- Ορισμός της μαθηματικής αφαίρεσης
- Μηχανισμοί επίτευξης της μαθηματικής αφαίρεσης
- Μαθηματική αφαίρεση και γενίκευση
- Μαθηματική αφαίρεση και αλγεβρική σκέψη

1.2 Η μαθηματική αφαίρεση στις μικρές ηλικίες: πραγματικότητα ή ουτοπία;
- Επιχειρήματα υπέρ της ικανότητας μικρών μαθητών να σκεφτούν αφαιρετικά
- Η αξία της διδασκαλίας μαθηματικών αφαιρέσεων στις μικρές ηλικίες
- Η μαθηματική αφαίρεση σε διάφορα αναλυτικά προγράμματα (NCTM, ελληνικό ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ, κ.α.)

1.3 Παραδείγματα δραστηριοτήτων μαθηματικής αφαίρεσης για μαθητές μικρής ηλικίας
- «Τα κουτιά με τις καραμέλες»
- Το άθροισμα των πρώτων 100 φυσικών αριθμών
- «Τα κοτόπουλα από το Μινσκ»
- «Ορθογώνια τραπέζια “Tablex”»
- «Ο κήπος της Ασπασίας»

❖ **<u>Κεφάλαιο 2: Αναπαραστάσεις και μαθηματική εκπαίδευση</u>**

2.1 Οριοθετώντας τον όρο «αναπαράσταση»
- Ορισμοί για την έννοια της αναπαράστασης
- Η αναπαράσταση ως σύστημα
- Η γλώσσα ως σύστημα αναπαράστασης
- Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις
- Ταξινόμηση εξωτερικών αναπαραστάσεων βάσει πολλαπλών κριτηρίων (Goldin & Kaput, 1996)
- Ταξινόμηση εξωτερικών αναπαραστάσεων βάσει της ιστορικής εξέλιξης των τεχνολογικών μέσων (Moreno-Armella et al., 2008)
- Οι εσωτερικές αναπαραστάσεις
- Οι νοητικές αναπαραστάσεις του Johnson-Laird
- Τα σχήματα του Piaget

2.2 Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις στη μάθηση και τη διδασκαλία των Μαθηματικών

- Επιστημολογική προσέγγιση της σύνδεσης των Μαθηματικών με τις εξωτερικές αναπαραστάσεις
- Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις στα «Στάνταρ διαδικασίας» του NCTM
- Οι λειτουργίες των εξωτερικών αναπαραστάσεων στη μάθηση των Μαθηματικών
- Προϋποθέσεις για την επιτυχή αξιοποίηση των εξωτερικών αναπαραστάσεων στη μάθηση και τη διδασκαλία των Μαθηματικών
- Ο μηχανισμός εξωτερίκευσης-εσωτερίκευσης στη μάθηση των Μαθηματικών
- Η θεωρία του Bruner για τη μάθηση μέσω αναπαραστάσεων
- Πολλαπλές αναπαραστάσεις και μάθηση των Μαθηματικών
- Η οπτικοποίηση στη μάθηση και τη διδασκαλία των Μαθηματικών
- Η «απόδειξη βασισμένη σε αναπαράσταση» (“representation-based proof”) ως εργαλείο μαθηματικής δικαιολόγησης στις μικρές ηλικίες

❖ **Κεφάλαιο 3: Εξωτερικές αναπαραστάσεις και μαθηματική αφαίρεση**

3.1 Τα χαρακτηριστικά των εξωτερικών αναπαραστάσεων που υποβοηθούν τον μαθητή στη μαθηματική αφαίρεση

- Οι τέσσερις αρχές του Dienes για τη μάθηση των Μαθηματικών μέσω αναπαραστάσεων
- Αντιληπτική μεταβλητότητα – perceptual variability
- Πολλαπλή ενσωμάτωση – multiple embodiment
- Δυναμική διασύνδεση – dynamic linking
- Σταδιακή αφαίρεση από τις εμπράγματες στις εικονικές και τέλος στις συμβολικές αναπαραστάσεις (Bruner)
- Ενεργός εμπλοκή του μαθητή στον χειρισμό των αναπαραστάσεων

3.2 Τα ψηφιακά μαθησιακά αντικείμενα ως πρόσφορο εργαλείο μάθησης και διδασκαλίας της μαθηματικής αφαίρεσης

- Τα οφέλη από την αξιοποίηση των ΤΠΕ στη μαθηματική εκπαίδευση
- Τα ψηφιακά μαθησιακά αντικείμενα
- Τα ψηφιακά μαθησιακά αντικείμενα ως πρόσφορο εργαλείο μάθησης και διδασκαλίας της μαθηματικής αφαίρεσης
- Το λογισμικό “Geogebra”

Β. Η «ταυτότητα» της έρευνας

ΣΚΟΠΟΣ & ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

ΣΚΟΠΟΣ:
Κατασκευή δύο δραστηριοτήτων μαθηματικής αφαίρεσης (μία προ-αλγεβρική και μία γεωμετρική) και μελέτη του ρόλου των εξωτερικών αναπαραστάσεων στη διαδικασία οικοδόμησης της μαθηματικής αφαίρεσης.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ:
Άξονας Α: ***Σε τι επίπεδο μαθηματικής αφαίρεσης έφτασαν οι μαθητές και ποια πορεία ακολούθησαν στη διαδικασία οικοδόμησης της μαθηματικής αφαίρεσης; (Ανάλυση σύμφωνα με το μοντέλο AiC)***
Άξονας Β: ***Ποιος ο ρόλος της αντιληπτικής μεταβλητότητας, της πολλαπλής ενσωμάτωσης, της δυναμικής διασύνδεσης, της σταδιακής αφαίρεσης και της ενεργού συμμετοχής στον χειρισμό των εξωτερικών αναπαραστάσεων, κατά τη διαδικασία οικοδόμησης της μαθηματικής αφαίρεσης;***

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

- **Δείγμα 3 μαθητών Δ’ Δημοτικού και 3 μαθητών ΣΤ’ Δημοτικού**
- **Μελέτες περίπτωσης και διδακτικά πειράματα**
- **Βιντεοσκόπηση, συνεντεύξεις, φύλλα εργασίας**
- **Μοντέλο AiC και επίπεδα γεωμετρικής σκέψης Van Hiele για την ανάλυση των δεδομένων**

ΣΥΝΟΠΤΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

- **Οι μαθητές με μέτρια ή υψηλή επίδοση κατάφεραν να σκεφτούν αφαιρετικά.**
- **Προσδιορίστηκε ο ρόλος των 3 από τα 5 χαρακτηριστικά των εξωτερικών αναπαραστάσεων (αντιληπτική μεταβλητότητα, πολλαπλή ενσωμάτωση και σταδιακή αφαίρεση)**
- **Η αντιληπτική μεταβλητότητα ήταν σημαντική μόνο για τη γεωμετρική δραστηριότητα και η πολλαπλή ενσωμάτωση και για τις δύο.**
- **Η θεωρία του Bruner (πορεία από τις εικονικές στις συμβολικές αναπαραστάσεις) επιβεβαιώνεται σε γενικές γραμμές.**
- **Είναι σημαντική και η συμπερίληψη του ρόλου του κοινωνικού παράγοντα στη μελέτη του ρόλου των αναπαραστάσεων.**

Βιβλιογραφία

Ainsworth, S. (1999). The Functions of Multiple Representations. *Computers & Education*, 33, 131–152. Ανακτήθηκε από: http://www.compassproject.net/sadhana/teaching/readings/ainsworth.pdf

Ainsworth, S. (2006). DeFT : A Conceptual Framework for Considering Learning with Multiple Representations. *Learning & Instruction*, 16, 183–198. doi: 10.1016/ j.learninstruc.2006.03.001

Bishop, A. J. (1988, Ιούλιος). *A Review of Research on Visualisation in Mathematics Education.* Ανακοίνωση στο Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Veszprem, Hungary. Ανακτήθηκε από: http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED411128.pdf

Blanton, M. L., & Kaput J. J. (2011). Functional Thinking as a Route into Algebra in the Elementary Grades. Στο: J. Cai & E. Knuth (Επιμ.), *Early Algebraization, Advances in Mathematics Education* (σελ. 5-23). Verlag, Berlin, Heidelberg: Springer. doi: 10.1007/978-3-642-17735-4_2

Boaler, J., Chen, L, Williams, C., & Cordero, M. (2016) Seeing as Understanding: The Importance of Visual Mathematics for our Brain and Learning. *Journal of Applied & Computatioanal Mathematics 5* (5). doi: 10.4172/2168-9679.1000325

Brandt, B., & Tatsis, K. (2009). Using Goffman's Concepts to Explore Collaborative Interaction Processes in Elementary School Mathematics. *Research in Mathematics Education, 11* (1), 39-55. doi: 10.1080/14794800902732217

Brophy, J. (1991). Conclusion. Στο: J. Brophy (Επιμ.), *Advances in Research on Teaching* (σελ. 349-364). Greenwich, CT: JAI Press

Bruner, J. S. (1966). *Toward a Theory of Instruction*. Cambridge, Mass: Belk

Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann A. D. (2008). Early Algebra and Mathematical Generalization. *ZDM Mathematics Education*, 40, 3–22. doi: 10.1007/s11858-007-0067-7

Carraher, D.W., Schliemann, A.D., & Schwartz, J. (2008). Early Algebra in not the Same as Alebra Early. Στο: J. Kaput. D. Carraher, & M. Blanton (Επιμ.), *Algebra in the Early Grades* (σελ. 235-272). Mahwah, NJ: Erlbaum

Carraher, D. W., & Schliemann A. D. (2014). Early Algebra Teaching and Learning. Στο: S. Lerman (Επιμ.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (σελ. 193-196). Dordrecht: Springer. doi: 10.1007/978-94-007-4978-8

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. Στο: D.O. Tall (Επιμ.), *Advanced mathematical thinking* (σελ. 25–41). New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic publishers. doi: 10.1007/0-306-47203-1

Dreyfus, T., Hershkowitz, R., & Schwartz, B. (2015). The Nested Epistemic Actions Model for Abstraction in Context: Theory as Methodological Tool and Methodological Tool as Theory. Στο: A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, & N. Presmeg (Επιμ.), *Approaches to Qualitative Research*, Advances in Mathematical Education (σελ. 185-217). Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer. doi: 10.1007/978-94-017-9181-6

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. Στο: D.O. Tall (Επιμ.), *Advanced mathematical thinking* (σελ. 95–123). New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic publishers. doi: 10.1007/0-306-47203-1

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 61, 103-131. doi: 10.1007/s10649-006-0400-z

Elliott, S. N., Kratochwill, T. R., Littlefield Cook, J., & Travers J. F. (2008). *Εκπαιδευτική Ψυχολογία* (μτφ: Μ. Σόλμαν & Φ. Καλύβα). Αθήνα: Gutenberg. (έτος έκδοσης πρωτοτύπου 1996)

Ellis, A. B. (2011). Generalizing-Promoting Actions: How Classroom Collaborations Can Support Students’ Mathematical Generalizations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42* (4), 308-345. doi: 10.5951/jresematheduc.42.4.0308

Even, R. (1998). Factors involved in Linking Representations of Functions, *Journal of Mathematics Behavior*, *17* (1), 105-121. doi: 10.1016/S0732-3123(99)80063-7

Gersten, R., Chard, D. J., Jayanthi, M., Baker, S. K., Morphy, P., & Flojo, J. (2009). Mathematics Instruction for Students With Learning Disabilities: A Meta-Analysis of Instructional Components. *Review of Educational Research, 79* (3), 1202-1242. doi: 10.3102/0034654309334431

Goldin, G., & Kaput J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learnig and doing Mathematics. Στο: L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin, & B. Greer (Επιμ.), *Theories of Mathematical Learning* (σελ. 397-430). Mahwah, NJ: Erlbaum. Ανακτήθηκε από: https://www.researchgate.net/publication/269407907

Gürer, M. D. (2013). *Utilization of Learning Objects in Social Studies Lesson: Achievement, Attitude and Engagement* (Διδακτορική διατριβή). Middle East Technical University/Graduate School of Natural and Applied Sciences/ Department of Computer Education and Instructional Technology, Ankara, Turkey.

Hegarty, M., & Kozhevnikov, M. (1999). Types of Visual-Spatial Representations and Mathematical Problem Solving. *Journal of Educational Psychology*, *91* (4), 684-689. Ανακτήθηκε από: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.167.8485&rep=rep1&type=pdf

Hohenwarter, M., & Preiner, J. (2007). Dynamic Mathematics with GeoGebra, *The Journal of Online Mathematics and Its Applications, 7,* Article ID: 1448. Ανακτήθηκε από: https://www.maa.org/external_archive/joma/Volume7/Hohenwarter/index.html

Hoong, L. Y., King, H. W., Pien, C. L. (2015). Concrete-Pictorial-Abstract: Surveying its origins and charting its future. *The Mathematics Educator, 16* (1), 1-19. Ανακτήθηκε από: http://math.nie.edu.sg/wkho/Research/My%20publications/Math%20Education/Yew%20Hoong%20et%20al%20(Final).pdf

Johann Carl Friedrich Gauss. (χ.η.). Ανακτήθηκε 13 Σεπτεμβρίου, 2017 από: http://www.newworldencyclopedia.org/entry/Johann_Carl_Friedrich _Gauss

Johnson-Laird, P. N. (2004). The history of mental models. Στο: Manktelow, K. & Chung, M. C. (Επιμ.) *Psychology of Reasoning: Theoretical and Historical Perspectives* (σελ. 170-212). New York: Psychology Press. Ανακτήθηκε από: http://mentalmodels.princeton.edu/papers/2005HistoryMentalModels.pdf

Jones, K. (2000). Providing a Foundation for Deductive Reasoning: Students' Interpretations When Using Dynamic Geometry Software and Their Evolving Mathematical Explanations. *Educational Studies in mathematics,* 44, 55-85. doi: 10.1023/A:1012789201736

Κολέζα, Ε. (2009). *Θεωρία και Πράξη στη Διδασκαλία των Μαθηματικών* (4η έκδ.). Αθήνα: Τόπος.

Κοπάδης, Α. (2010, Δεκέμβριος 17). *Το Κοτόπουλο από το Μινσκ.* [άρθρο σε blog]. Ανακτήθηκε από: http://thanasiskopadis.blogspot.gr/2010/12/blog-post_17.html

Kaput, J. (2000). Teaching and Learning a new Algebra With Understanding. *National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, Dartmouth, MA.* Ανακτήθηκε από: http://files.eric.ed.gov/ fulltext/ED441662.pdf

Krummheur, G. (2015). Methods for Reconstructing Processes of Argumentation and Participation in Primary Mathematics Classroom Interaction. Στο: A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Επιμ.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (51-74). Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer. doi: 10.1007/978-94-017-9181-6

Λεμονίδης, Χ. (1996). Δυσκολίες και αντιλήψεις των μαθητών κατά το πέρασμα από την Αριθμητική στην Άλγεβρα. *Ευκλείδης Γ', 33* (45), 61-70. Ανακτήθηκε από: http://mathslife.eled.uowm.gr/wp-content/uploads/2016/09/Perasma-apo-tin-arithmitiki-stin-algebra.pdf

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Dienes revisited: Multiple embodiments in computer environments. Στο: I. Wirsup & R. Streit (Επιμ.), *Development in*

School Mathematics Education Around the World (σελ. 647-680). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. Ανακτήθηκε από: http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/87_4.html

Lerman, S. (Επιμ) (2014). *Encyclopedia of Mathematics Education*. Dordrecht: Springer

Lesser, L. M., & Tchoshanov, M. A. (2005, Οκτώβριος). The Effect of Representation and Representational Sequence on Students' Understanding. Ανακοίνωση στο 27th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Roanoke, Virginia. Ανακτήθηκε από: http://www.math.utep.edu/Faculty/lesser/pmena05.pdf

Linchevski, L. (1995). Algebra With Numbers and Arithmetic With Letters: A Definition of Pre-Algebra. *Journal of Mathematical behavior*, 14, 113-120. doi: 10.1016/0732-3123(95)90026-8

López-Morteo, G., & Lopez, G. (2007). Computer Support for Learning Mathematics: A Learning Environment based on Recreational Learning Objects. *Computers & Education*, 48, 618–641. doi: 10.1016/j.compedu.2005.04.014

Μικρόπουλος, Τ. Α. (2009). *Ο Υπολογιστής ως γνωστικό εργαλείο* (5η εκδ.). Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα

Μικρόπουλος, Τ. Α., & Μπέλλου, Ι. (2016, Μάρτιος). *Είναι Όλα Μαθησιακά Αντικείμενα;* Ανακοίνωση στο Πανελλήνιο Συνέδριο: Ψηφιακό Εκπαιδευτικό Υλικό και Ηλεκτρονική Μάθηση 2.0., Κόρινθος.

Ματσαγγούρας, Η. (1998). *Ομαδοκεντρική Διδασκαλία* (2η έκδ).. Αθήνα: Εκδόσεις Γρηγόρη.

Μπαμπινιώτης, Γ. (1998). *Θεωρητική Γλωσσολογία* (Β' εκδ). Αθήνα: αυτοέκδοση

Marr, D. (1996). *Vision* (13η έκδ). New York: W. H. Freeman and Company

McLeod, S. (2015). *Jean Piaget* [άρθρο σε ιστοσελίδα]. Ανακτήθηκε από: https://www.simplypsychology.org/piaget.html

Mesquita, A. L. (1998). On Conceptual Obstacles Linked with External Representation in Geometry. *Journal of mathematical Behavior, 17* (2), 183-195. doi: 10.1016/S0364-0213(99)80058-5

Mitchelmore, M. C. (2002, Μάιος). *The Role of Abstraction and Generalisation in the Development of Mathematical Knowledge.* Ανακοίνωση στο East Asia Regional Conference on Mathematics Education (EARCOME) (2nd) and the Southeast Asian Conference on Mathematics Education (SEACME) (9th), Singapore. Ανακτήθηκε από: http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED466962.pdf

Moreno, R., & Mayer R. (2007). Interactive Multimodal Learning Environments. *Educational Psychology Review, 19* (3), 309-326. doi: 10.1007/s10648-007-9047-2

Moreno-Armella, L., Hegedus, S. J., & Kaput, J. J. (2008). From Static to Dynamic Mathematics: Historical and Representational Perspectives. *Educational Studies in Mathematics, 68* (2), 99-111. doi; 10.1007/s10649-008-9116-6

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. (2011). *Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση (Δημοτικό). Οδηγός για τον εκπαιδευτικό «Εργαλεία Διδακτικών Προσεγγίσεων»*. Αθήνα: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. (2011). *Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά στην Υποχρεωτική Εκπαίδευση*. Αθήνα: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

Πατσιομίτου, Σ., & Εμβαλωτής Α. (2009). Οι αναπαραστάσεις μαθηματικών αντικειμένων ως μέσο οικοδόμησης της μαθηματικής γνώσης: Τα συστήματα δυναμικής γεωμετρίας ως αναπαραστατικά εργαλεία. *Θέματα Επιστημών και Τεχνολογίας στην Εκπαίδευση, 2* (3), 247-272. Ανακτήθηκε από: http://earthlab.uoi.gr/thete/index.php/thete/article/view/40/47

Pape, S. J., & Tchoshanov, M. A. (2001). The Role of Representation(s) in Developing Mathematical Understanding. *Theory Into Practice, 40* (2), 118-127. doi: 10.1207/s15430421tip4002_6

Paschos, T., & Farmaki, V. (2006, Ιούλιος). *The Reflective Abstraction in the Construction of the Definite Integral: A Case Study*. Ανακοίνωση στο 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Prague, Czech Republic. Ανακτήθηκε από: https://www.emis.de/proceedings/PME30/4/337.pdf

Presmeg, N. (1986). Visualisation in High School Mathematics. *For the Learning of Mathematics 6*, (3). 42-46. Ανακτήθηκε από: http://flm-journal.org/Articles/1917B083BE4534511A32616EED75A8.pdf

Robson, C. (2010). *Η Έρευνα του Πραγματικού Κόσμου* (2η έκδ.) (μτφ: Νταλάκου Β. & Βασιλικού Κ.). Αθήνα: Gutenberg. (έτος έκδοσης πρωτοτύπου 1993)

Russell, S. J., Schifter, D., & Bastable, V. (2011). Developing Algebraic Thinking in the Context of Arithmetic. Στο: J. Cai & E. Knuth (Επιμ.), *Early Algebraization, Advances in Mathematics Education* (σελ. 43-69). Springer, Berlin, Heidelberg: Springer. doi: 10.1007/978-3-642-17735-4

Σπυροπούλου-Κατσάνη Δ. (2005). *Διδακτικές και Παιδαγωγικές προσεγγίσεις στις Φυσικές Επιστήμες*. Αθήνα: Τυπωθήτω

Schliemann, A., Carraher, D., Brizuela, B., Earnest, D., Goodrow, A., Lara-Roth, S., Peled, I. (2003, Ιούλιος). *Algebra in Elementary School.* Ανακοίνωση στο 27th International Group for the Psychology of Mathematics Education Conference

Held Jointly with the 25th PME-NA Conference, Honolulu, Hawaii. Ανακτήθηκε από: http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED501145.pdf

Sriraman, B., & English, L. D. (2005). On the Teaching and Learning of Dienes' Principles. *ZDM, 37* (3), 258-262. doi: 10.1007/s11858-005-0018-0

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. Στο: R. Lesh & A. E. Kelly (Επιμ.), *Research design in mathematics and science education* (σελ. 267- 307). Hillsdale, NJ: Erlbaum. Ανακτήθηκε από: http://pat-thompson.net/PDFversions/2000TchExp.pdf

Ursini, S., & Trigueros, M. (2001, Ιούλιος). *A model for the uses of variable in Elementary Algebra*. Ανακοίνωση στο 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Utrecht, The Netherlands. Ανακτήθηκε από: http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED466950.pdf

Van de Walle, J. A. (2007). *Διδάσκοντας Μαθηματικά* (6η εκδ.) (μτφ.: *Σ. Σταφυλίδου*). Θεσσαλονίκη: Επίκεντρο.

ΦΕΚ Β303/13-03-2003. Ανακτήθηκε από: http://www.et.gr

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2004). Understanding Primes: The Role of Representation. *Journal for Research in Mathematics Education, 35* (3), 164-186. Ανακτήθηκε από: http://www.sfu.ca/~zazkis/publications/JRME2004-05-PRIMES.pdf

Λοιπές πηγές πληροφόρησης:

Μπαμπινιώτης, Γ. (2008). *Λεξικό για το σχολείο και το Γραφείο* (2η έκδ). Αθήνα: Κέντρο Λεξικολογίας

Πετρογιάννης, Κ. (2012). *Γενικές οδηγίες σύνταξης βιβλιογραφικών παραπομπών και αναφορών με βαση το βιβλιογραφικό σύστημα του American Psychological Association – APA (6th ed.)*. Πάτρα: ΕΑΠ, ΠΜΣ «Σπουδές στην Εκπαίδευση»

Φιλιππάκη-Warburton, Ε., Γεωργιαφέντης, Μ., Κοτζόγλου, Γ., & Λουκά, Μ. (χ.η.) *Γραμματική Ε' & ΣΤ' Δημοτικού*. Αθήνα: ΟΕΔΒ. Ανακτήθηκε από: http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSDIM-E104/579/3753,16484

Διαδικτυακός τόπος λογισμικού "Geogebra": https://www.geogebra.org/?lang=el