

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΛΙΚΩΝ



Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΓΙΑ ΤΗ
ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΛΑΚΩΝ MINDLIN ΚΑΙ ΜΕΜΒΡΑΝΩΝ

ΓΙΩΤΟΠΟΥΛΟΥ ΗΡΩ

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ

Δ.Π.Μ.Σ.: 'ΧΗΜΕΙΑ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ ΥΛΙΚΩΝ'

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2016

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΛΙΚΩΝ



**Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΓΙΑ ΤΗ
ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΛΑΚΩΝ MINDLIN ΚΑΙ ΜΕΜΒΡΑΝΩΝ**

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:

ΚΑΛΠΑΚΙΔΗΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΤΗΣ

ΓΙΩΤΟΠΟΥΛΟΥ ΗΡΟΥΣ

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ

Δ.Π.Μ.Σ.: 'ΧΗΜΕΙΑ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ ΥΛΙΚΩΝ'

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2016

Πρόλογος

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία εκπονήθηκε στο Εργαστήριο Μαθηματικής Μοντελοποίησης και Επιστημονικών Υπολογισμών του Τμήματος Μηχανικών Επιστήμης Υλικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων στα πλαίσια του Διατμηματικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών «Χημεία και Τεχνολογία Υλικών».

Βασικό στόχο κατά την εκπόνηση της διπλωματικής αποτέλεσε η κατανόηση των βασικών αρχών της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων μέσα από την εφαρμογή της στη δυναμική ανάλυση των μεμβρανών και των πλακών Mindlin. Παράλληλα με την ανάπτυξη των προγραμμάτων που επιλύουν τα δυο αυτά μοντέλα με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων στη γλώσσα προγραμματισμού Matlab, επιτεύχθηκε μια περαιτέρω εξοικείωση τόσο στον προγραμματισμό όσο και στην εφαρμογή των πεπερασμένων στοιχείων.

Ευχαριστίες

Η εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την επίβλεψη του Καθηγητή κ. Καλπακίδη Βασιλείου, τον οποίο θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά για την ευκαιρία που μου έδωσε με την ανάθεση της παρούσας διπλωματικής, καθώς επίσης και για τη συνεχή υποστήριξη και καθοδήγηση του, σε όλη τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας εργασίας

Τέλος ευχαριστώ τα μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής, τον Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Μηχανικών Επιστήμης Υλικών κ. Ευάγγελο Χατζηγεωργίου, και τον Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Μηχανικών Επιστήμης Υλικών κ. Λεωνίδα Ν. Γεργίδη, για την τιμή που μου έκαναν να αποτελέσουν μέλη στην τριμελή συμβουλευτική επιτροπή.

Περίληψη

Αντικείμενο της παρούσας εργασίας αποτελεί η δυναμική ανάλυση πλακών Mindlin και μεμβρανών στα πλαίσια της γραμμικότητας με τη χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Συγκεκριμένα αναπτύσσονται οι ασθενείς εξισώσεις κίνησης της μεμβράνης καθώς και των πλακών Mindlin και με τη βοήθεια των προγραμμάτων που αναπτύχθηκαν στη γλώσσα προγραμματισμού Matlab εφαρμόζονται σε κυκλική επιφάνεια νεοπρενίου διαμέτρου ίσης με 0.112 m. Τα προγράμματα για τα δύο αυτά μοντέλα επιλύουν το δυναμικό πρόβλημα της ελεύθερης ταλάντωσης της κυκλικής επιφάνειας με πακτωμένη την περιφέρεια της, καθώς και το δυναμικό πρόβλημα στο οποίο επιβάλλεται μια χρονικά εξαρτημένη δύναμη στο κέντρο της κυκλικής επιφάνειας και σε εμβαδόν ίσο με $6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$, ενώ η περιφέρεια εξακολουθεί να είναι πακτωμένη. Στην πρώτη περίπτωση προσδιορίζονται οι ιδιοσυχνότητες και οι ιδιομορφές του κυκλικού νεοπρενίου για τα δύο μοντέλα, ενώ στη δεύτερη περίπτωση με εφαρμογή της μεθόδου Newmark στα πεπερασμένα στοιχεία προσδιορίζονται οι μετατοπίσεις που προκαλεί η δύναμη στο κυκλικό νεοπρένιο τόσο για το μοντέλο της μεμβράνης όσο και για το μοντέλο της πλάκας Mindlin.

Ο βασικός στόχος της διπλωματικής είναι η κατανόηση των βασικών αρχών της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων και των δυνατοτήτων της καθώς και η εφαρμογή της στον προγραμματισμό και συγκεκριμένα στη γλώσσα προγραμματισμού Matlab. Συνεπώς στην πρώτη ενότητα αναλύεται η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων, αρχίζοντας από μια εισαγωγή στην οποία αναφέρονται κάποια χαρακτηριστικά της μεθόδου καθώς και τα βήματα που ακολουθούνται κατά την υλοποίηση της. Με γνώμονα αυτά τα βήματα η ενότητα ένα διαρθρώνεται σε υποενότητες. Στα παραρτήματα Α και Β παρατίθενται τα προγράμματα που αναπτύχθηκαν για την εξίσωση κίνησης της μεμβράνης και για τις εξισώσεις κίνησης των πλακών Mindlin.

Στην δεύτερη ενότητα αποδεικνύεται η εξίσωση κίνησης των μεμβρανών, αναπτύσσεται η ασθενής διατύπωση της και στην ενότητα 5.1 παρατίθενται τα αποτελέσματα της μελέτης της. Η εφαρμογή της μεθόδου στην δυναμική ανάλυση της μεμβράνης γίνεται με σκοπό την μελέτη της επίδρασης της αρχικής εφελκυστικής τάσης στις τιμές των ιδιοσυχνοτήτων της ελεύθερης ταλάντωσης του κυκλικού νεοπρενίου. Όπως φαίνεται στην ενότητα 5.1.1 αύξηση της αρχικής εφελκυστικής τάσης προκαλεί αύξηση στις τιμές των ιδιοσυχνοτήτων. Σε δεύτερο στάδιο η μεμβράνη υπόκειται σε χρονικά εξαρτημένη δύναμη στο κέντρο της σε εμβαδόν ίσο με $6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$ και εξετάζεται με τη μέθοδο Newmark στα πεπερασμένα στοιχεία η επίδραση της αρχικής εφελκυστικής τάσης στις μετατοπίσεις που προκαλούνται σε έναν από τους κεντρικούς κόμβους στους οποίους ασκείται και η δύναμη. Στην ενότητα 5.1.2 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα αυτής της μελέτης σύμφωνα με τα οποία μια αύξηση της αρχικής τάσης οδηγεί στην απαίτηση μεγαλύτερης δύναμης για να προκαλέσει την ίδια μετατόπιση στη μεμβράνη νεοπρενίου.

Οι εξισώσεις κίνησης των πλακών Mindlin καθώς και η ασθενής διατύπωση τους αποδεικνύονται στην ενότητα 3, ενώ στην ενότητα 5.2 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της μελέτης. Στο πρόβλημα της ελεύθερης ταλάντωσης της κυκλικής πλάκας νεοπρενίου, εξετάζεται η επίδραση του πάχους της πλάκας στις τιμές των ιδιοσυχνοτήτων. Σύμφωνα με την ενότητα 5.2.1 όσο μεγαλώνει το πάχος τόσο αυξάνονται οι τιμές των ιδιοσυχνοτήτων ιδιαίτερα για τις ιδιοσυχνότητες που είναι μεγαλύτερες από την πρώτη-θεμελιώδη. Η επίδραση του πάχους της κυκλικής πλάκας νεοπρενίου εξετάζεται και για την περίπτωση που μια χρονικά εξαρτώμενη δύναμη δρα στο κέντρο της και σε εμβαδόν ίσο με $6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$. Με την βοήθεια της μεθόδου Newmark στα πεπερασμένα στοιχεία υπολογίζεται η μέγιστη μετατόπιση που προκαλείται σε έναν από τους κεντρικούς κόμβους στους οποίους ασκείται και η δύναμη για διαφορετικό πάχος κάθε φορά. Τα αποτελέσματα αυτά φαίνονται στην ενότητα 5.2.2, σύμφωνα με την οποία για μεγαλύτερο πάχος πλάκας απαιτείται μεγαλύτερη δύναμη για να προκαλέσει την ίδια μετατόπιση.

Abstract

The object of this study is the dynamic analysis of Mindlin plates and membranes using the finite element method. Specifically weak forms of membrane equation of motion and Mindlin plates extracted and applied by means of two programs developed in Matlab programming language in neoprene circular surface with diameter equal to 0.112 m. The programs for these two models solve the dynamic problem of free vibration of the circular surface with its circumference anchored and the dynamic problem on which a time-dependent force is imposed to the center of the circular surface and within an area equal to $6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$ while the circumference is still anchored. Firstly the natural frequencies and mode shapes of the circular neoprene for both models are determined, while secondly by applying the Newmark's method in finite element the displacements caused by force in circular neoprene are identified for both the membrane and Mindlin plate model.

The main objective of the project is to understand the basic principles of the finite element method its capabilities and the programming implementation specifically to the Matlab programming language. Therefore first section deals with the finite element method, beginning with an introduction that states some features of the method and the steps followed during its implementation. In light of these steps the first section is divided into subsections. Appendices A and B list the two programs developed for the membrane equation of motion and for Mindlin plate equations of motion.

Membrane equation of motion and weak formulation is presented in the second section while Section 5.1 lists the results of the study. The membrane dynamic analysis is performed in order to study the initial tensile stress effect to the eigenvalues of the circular neoprene's free oscillation. As shown in section 5.1.1 increase of the initial tensile stress causes eigenvalues to increase. Then membrane is subjected to time-dependented force to its center within an area equal to $6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$ and by Newmark's method the effect of the initial tensile stress to the displacements caused in one of the central nodes is examined. According to Section 5.1.2 which presents the results of this study as initial tensile stress increase neoprene membrane requires larger forces in order to achieve the same displacements.

The Mindlin plates equations of motion and their weak formulation demonstrated in section 3, while in Section 5.2 the results of the study are presented. For this model the effect of plate thickness is examined in the eigenvalues while the circular neoprene freely oscillates. According to section 5.2.1 as the thickness increases the eigenvalues also increases, especially the natural frequencies that are larger than the first-fundamental. The effect of the neoprene circular plate thickness is examined in case that a time dependent force acts at its center within an area equal to $6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$. By means of Newmark's method in finite elements, the maximum displacement caused in one of the central nodes is calculated each time for a different plate thickness. These results are shown in section 5.2.2, according to which a thicker plate requires larger force in order to cause the same displacement.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ	I
ΠΕΡΙΛΗΨΗ	III
ABSTRACT	V
1 ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ	1
1.1 Εισαγωγή	1
1.2 Διακριτοποίηση του χώρου	5
1.3 Βασική αρχή	5
1.3.1 Η έννοια της δυνατής μεταβολής	5
1.3.2 Αρχή των δυνατών έργων	6
1.3.3 Ασθενής διατύπωση του προβλήματος	7
1.3.4 Θεώρημα του ελαχίστου της δυναμικής ενέργειας	7
1.3.5 Η μέθοδος Ritz	7
1.3.6 Η μέθοδος των σταθμικών υπολοίπων	8
1.3.7 Η μέθοδος Galerkin	9
1.4 Συναρτήσεις σχήματος	9
1.4.1 Συναρτήσεις σχήματος τριγωνικών στοιχείων	10
1.4.2 Συναρτήσεις σχήματος τετραγωνικών στοιχείων	12
1.5 Ισοπαραμετρικά στοιχεία	13
1.5.1 Τριγωνικά στοιχεία	15
1.5.2 Τετραγωνικά στοιχεία	17
1.6 Ολοκλήρωση Gauss-Legendre	18
1.7 Συνάθροιση	23
1.8 Εφαρμογή συνοριακών συνθηκών	25
1.9 Δυναμικά προβλήματα	26
1.9.1 Ορθογωνικότητα των ιδιομορφών	28
1.10 Χρονικά εξαρτημένα προβλήματα	30
1.10.1 Η μέθοδος Newmark	31
1.10.2 Η μέθοδος Wilson Θ	33
1.10.3 Σφάλματα στην αριθμητική ολοκλήρωση	34
1.11 Απαλοιφή Gauss	35

<u>2</u>	<u>MEMBRANES</u>	<u>39</u>
2.1	Εξίσωση κίνησης μεμβρανών	39
2.2	Ασθενής διατύπωση της εξίσωσης κίνησης των μεμβρανών	40
<u>3</u>	<u>ΘΕΩΡΙΑ ΠΛΑΚΩΝ</u>	<u>42</u>
3.1	Εξισώσεις πλακών	42
3.2	Καταστατικές Εξισώσεις	45
3.3	Η θεωρία πλακών Mindlin	46
3.4	Ασθενής διατύπωση των εξισώσεων κίνησης των πλακών	48
<u>4</u>	<u>ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ</u>	<u>52</u>
<u>5</u>	<u>ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ</u>	<u>54</u>
5.1	Εξίσωση κίνησης μεμβράνης	54
5.1.1	Επίδραση εφελκυστικής τάσης στις ιδιοσυχνότητες	54
5.1.2	Επίδραση εφελκυστικής τάσης στις μετατοπίσεις λόγω χρονικά εξαρτώμενων εγκάρσιων φορτίσεων	58
5.2	Εξισώσεις κίνησης πλακών Mindlin	60
5.2.1	Επίδραση του πάχους στις ιδιοσυχνότητες	60
5.2.2	Επίδραση του πάχους στις μετατοπίσεις λόγω χρονικά εξαρτώμενων εγκάρσιων φορτίσεων	63
<u>6</u>	<u>ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ</u>	<u>65</u>
	<u>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</u>	<u>67</u>
	<u>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: ΚΩΔΙΚΑΣ MATLAB ΓΙΑ ΤΙΣ MEMBRANES</u>	<u>69</u>
	<u>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: ΚΩΔΙΚΑΣ MATLAB ΓΙΑ ΤΙΣ ΠΛΑΚΕΣ MINDLIN</u>	<u>88</u>

Κατάλογος σχημάτων

Σχήμα 1.1: Στοιχεία και κόμβοι.	2
Σχήμα 1.2: Αλλαγή συστήματος συντεταγμένων τριγωνικών στοιχείων.	15
Σχήμα 1.3: Αλλαγή συστήματος συντεταγμένων τετραγωνικών στοιχείων.	17
Σχήμα 1.4: Ολοκλήρωση Gauss με ένα και δυο σημεία ολοκλήρωσης (Καρύδης, 2005).	20
Σχήμα 1.5: Διακριτοποίηση σε τριγωνικά στοιχεία.	23
Σχήμα 1.6: Τρόπος μεταβολής της επιτάχυνσης ανάλογα με τις τιμές των σταθερών β, γ	33
Σχήμα 1.7: Γραμμική μεταβολή της επιτάχυνσης για χρόνο από t ως $t+\theta\Delta t$	33
Σχήμα 2.1: Μembrάνη που υπόκειται σε εφελκυσμό και κάμψη (Szilard, 2004).	39
Σχήμα 3.1: Συνιστώσες των τάσεων που ασκούνται σε ένα τρισδιάστατο στερεό σώμα (Steele & Balch, 2009).	42
Σχήμα 3.2: Αναπαράσταση των M_{xx} , M_{xy} και της Q_{xz}	43
Σχήμα 3.3: Αναπαράσταση των N_{xx} , N_{yy} , N_{xy} και N_{yx}	43
Σχήμα 3.4: Αναπαράσταση κάθετων διατμητικών δυνάμεων που δρουν σε απειροστό στοιχείο της πλάκας.	44
Σχήμα 3.5: Στροφή της διατομής γύρω από τους άξονες x και y (Τσαμασφύρος & Θεοτόκογλου, 2005).	46
Σχήμα 5.1: Διακριτοποιημένο χωρίο κυκλικής μεμβράνης νεοπρενίου.	55
Σχήμα 5.2: Ιδιομορφές των πρώτων έξι ιδιοτιμών της μεμβράνης νεοπρενίου.	56
Σχήμα 5.3: Επίδραση της εφελκυστικής τάσης στις τιμές των πρώτων έξι ιδιοσυχνοτήτων της μεμβράνης νεοπρενίου.	57
Σχήμα 5.4: Μέγιστη μετατόπιση της μεμβράνης νεοπρενίου συναρτήσει της φόρτισης για διαφορετικές τιμές εφελκυστικής τάσης.	58
Σχήμα 5.5: Φόρτιση που απαιτείται για την επίτευξη μέγιστης μετατόπισης ίσης με 0.0012m συναρτήσει της εφελκυστικής τάσης.	59
Σχήμα 5.6: Διακριτοποιημένο χωρίο κυκλικής πλάκας νεοπρενίου.	60
Σχήμα 5.7: Ιδιομορφές των πρώτων έξι ιδιοτιμών της κυκλικής πλάκας Mindlin νεοπρενίου.	61
Σχήμα 5.8: Επίδραση του πάχους της πλάκας Mindlin του νεοπρενίου στις πρώτες έξι ιδιοσυχνότητες.	62
Σχήμα 5.9: Μέγιστη μετατόπιση της πλάκας νεοπρενίου συναρτήσει της φόρτισης για διαφορετικές τιμές του πάχους.	63
Σχήμα 5.10: Φόρτιση που απαιτείται για την επίτευξη μέγιστης μετατόπισης ίσης με 0.0010m συναρτήσει του πάχους της πλάκας.	64

1 Πεπερασμένα στοιχεία

Στο κεφάλαιο αυτό ακολουθεί μια σύντομη περιγραφή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Γίνεται μια αναφορά στις βασικές αρχές της μεθόδου και αναλύονται τα στάδια εφαρμογής της, ωστόσο μια λεπτομερέστερη ανάλυση μπορεί να βρεθεί στη παραπεμπόμενη βιβλιογραφία.

Τα τελευταία χρόνια η μέθοδος έχει γενικευτεί και χρησιμοποιείται σε κάθε πρόβλημα μηχανικού, και μάλιστα έχει απλοποιηθεί η χρήση της με εξελιγμένα προγράμματα υπολογιστών, τα οποία απλοποιούν τις διαδικασίες εισαγωγής του φυσικού προβλήματος, και το κυριότερο έχουν οπτική έξοδο που κάνει πιο κατανοητή και πιο την παρουσίαση των αποτελεσμάτων

1.1 Εισαγωγή

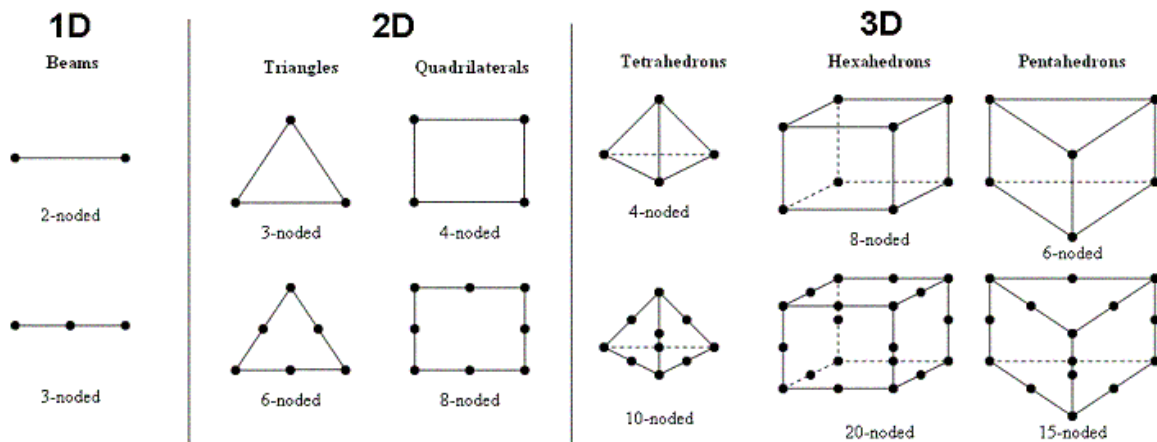
Τα περισσότερα φυσικά προβλήματα, μπορούν να περιγραφούν μαθηματικά με την χρήση διαφορικών εξισώσεων. Στην περίπτωση που στο πρόβλημα υπεισέρχονται πολλές παράμετροι έχουμε διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους. Τέτοιες εξισώσεις περιγράφουν τόσο τα προβλήματα μηχανικής του συνεχούς μέσου όσο και πολλά άλλα προβλήματα που αφορούν τους μηχανικούς όπως, προβλήματα μηχανικής ρευστών ή μετάδοσης θερμότητας.

Οι συνοριακές συνθήκες μπορούν να είναι τριών τύπων. Στην περίπτωση που είναι δεδομένες δυνάμεις σε κάποιο σημείο ή πιέσεις πάνω σε επιφάνεια καλούνται δευτερεύουσες ή “φυσικές” συνοριακές συνθήκες ή συνθήκες Neumann. Στην περίπτωση που είναι δεδομένες οι μεταβλητές, όπως ισχύει για γεωμετρικές δεσμεύσεις σε διάφορα σημεία όπως οι στηρίξεις καλούνται πρωτεύουσες ή “βασικές” συνοριακές συνθήκες ή συνθήκες Dirichlet. Ο τρίτος τύπος συνοριακών συνθηκών καλείται μεικτός και χαρακτηρίζεται από την παρουσία και των δύο συνοριακών συνθηκών που αναφέρθηκαν (Neumann και Dirichlet).

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων είναι μια αριθμητική τεχνική που χρησιμοποιείται για την προσεγγιστική επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων, σε προβλήματα που επιδέχονται μεταβολική διατύπωση. Η βάση της μεθόδου έγκειται στο ότι η λύση μίας διαφορικής εξίσωσης μπορεί να αναπαρασταθεί ως γραμμικός συνδυασμός κατάλληλα επιλεγμένων συναρτήσεων (προσεγγιστικές συναρτήσεις) και αγνώστων μεταβλητών στο χώρο του προβλήματος. Οι μεταβλητές αυτές προσδιορίζονται έτσι ώστε να ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση ενώ οι προσεγγιστικές συναρτήσεις επιλέγονται έτσι ώστε να ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος.

Η βασική έννοια της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων είναι η δυνατότητα προσέγγισης ενός πραγματικού χώρου με ένα πλήθος απλών γεωμετρικά συστατικών στοιχείων τα οποία συνδέονται σε ένα πεπερασμένο αριθμό κόμβων (Σχήμα 1.1) και ονομάζονται πεπερασμένα στοιχεία. Σε κάθε στοιχείο εφαρμόζεται μια προσέγγιση παραπλήσια με αυτές των Ritz και Galerkin

(Καλακίδης, 2009). Στην περίπτωση των πεπερασμένων στοιχείων οι προσεγγιστικές συναρτήσεις είναι πολυώνυμα παρεμβολής και για αυτό ονομάζονται και συναρτήσεις σχήματος.



Σχήμα 1.1: Στοιχεία και κόμβοι.

Πλεονεκτήματα της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων:

1. Η μέθοδος εφαρμόζεται αποτελεσματικά σε περιπτώσεις δυσεπίλυτων και πολύπλοκων προβλημάτων που επιδέχονται ασθενή διατύπωση.
2. Μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε γεωμετρία με κανονικό ή ακανόνιστο σχήμα.
3. Λαμβάνει υπόψη οποιοδήποτε είδους συνοριακές συνθήκες.
4. Μπορεί να εφαρμοστεί σε ανισότροπα ή μη-ομοιογενή υλικά χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία.
5. Μπορεί να λάβει υπόψη κάθε είδους συνθήκη φόρτισης.
6. Η μέθοδος αυτή είναι αποτελεσματικότερη από άλλες προσεγγιστικές μεθόδους όπως οι Galerkin και Rayleigh-Ritz ιδιαίτερα όταν η γεωμετρία του προβλήματος είναι πολύπλοκη.
7. Σε αυτή τη μέθοδο, οι προσεγγίσεις των άγνωστων μεταβλητών γίνονται σε μικρά επιμέρους στοιχεία.
8. Προκειται για μια μέθοδο που μπορεί να επιλυθεί με χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών είτε με σχετικά απλά προγράμματα είτε με αρκετά σύνθετα εμπορικά ή μη.

Μειονεκτήματα της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων

1. Σε ορισμένες περιπτώσεις ο υπολογιστικός χρόνος που απαιτείται για την επίλυση του προβλήματος είναι υψηλός. Για τα προβλήματα ρευστοδυναμικής κάποιες άλλες μέθοδοι ανάλυσης μπορεί να αποδειχθούν αποτελεσματικότερες.

Κάθε πρόβλημα διαμορφώνεται με την εισαγωγή ορισμένων απλοποιήσεων και υποθέσεων, έτσι η λύση του προβλήματος, κλασική ή αριθμητική, ανάγεται σε ένα πρόβλημα περιορισμών που επιβάλλονται από αυτές τις απλουστεύσεις. Για παράδειγμα το υλικό μπορεί να θεωρηθεί ως ομογενές και ισότροπο, ενώ η συμπεριφορά του μπορεί να θεωρηθεί ως γραμμική ελαστική. Ως εκ τούτου, για την προσομοίωση της πραγματικής συμπεριφοράς της δομής πρέπει να εξεταστούν οι εν λόγω απλουστεύσεις και τα προφανή σφάλματα που παρεισφρέουν στους υπολογισμούς. Έτσι, η εισαγωγή των δεδομένων θα πρέπει να γίνεται με μεγάλη προσοχή γιατί αν υπάρχει κάποιο σφάλμα στα δεδομένα εισόδου τα αποτελέσματα θα είναι λανθασμένα.

Όταν ένα συνεχές σώμα διακριτοποιείται, ένα σύστημα με άπειρους βαθμούς ελευθερίας μετατρέπεται σε ένα μοντέλο που έχει πεπερασμένους βαθμούς ελευθερίας. Η εντατική και η παραμορφωτική κατάσταση του σώματος, ενώ στην πραγματικότητα είναι συνεχείς συναρτήσεις, αντικαθίστανται από τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις εντός των επιμέρους στοιχείων. Έτσι, το πραγματικό συνεχές σώμα αντικαθίσταται από ένα σύνολο προσεγγίσεων.

Η ακρίβεια εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τις διαστάσεις της διακριτοποίησης του συνεχούς μέσου. Σε περιοχές της που η μεταβολή της παραμόρφωσης είναι μεγαλύτερη απαιτείται πυκνότερη διακριτοποίηση, ενώ σε περιοχές του που η μεταβολή της παραμόρφωσης είναι μικρότερη, μπορεί να επιλεγεί ένα αραιότερο πλέγμα. Γενικότερα με τη μείωση του μεγέθους του στοιχείου, το σφάλμα διακριτοποίησης μειώνεται.

Επιλογή στοιχείου ακατάλληλου σχήματος μπορεί να οδηγήσει σε σημαντικά σφάλματα. Για παράδειγμα μια διακριτοποίηση ενός τετραγωνικού χωρίου με ισόπλευρα ή ορθογώνια τριγωνικά στοιχεία οδηγεί σε καλύτερα αποτελέσματα από μια διακριτοποίηση με στοιχεία που έχουν πλευρές με άνισα μήκη. Επίσης παρατηρείται ότι για πολύ πυκνή διακριτοποίηση, η επίτευξη της σύγκλισης είναι εξαιρετικά αργή.

Στην ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων, οι συνοριακές συνθήκες επιβάλλονται στους κόμβους του στοιχείου, ενώ σε ένα πραγματικά συνεχές σώμα, ορίζονται σε ολόκληρο το σύνορο. Οι πραγματικές οριακές συνθήκες, μεταξύ των κόμβων, θα εξαρτώνται από τις συναρτήσεις σχήματος του στοιχείου που ορίζει το σύνορο.

Κατά τη διάρκεια των αριθμητικών πράξεων, οι αριθμοί θα στρογγυλοποιούνται συνεχώς. Τα σφάλματα που σχετίζονται με τη στρογγυλοποίηση μπορεί να συσσωρευτούν με αποτέλεσμα να επηρεάσουν την ακρίβεια της λύσης σε μεγάλο βαθμό.

Τα βήματα που ακολουθούνται για την επίλυση οποιουδήποτε προβλήματος με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων είναι τα εξής:

- I. Το χωρίο διακριτοποιείται σε ένα πλήθος πεπερασμένων στοιχείων,
- II. Διατυπώνεται η ασθενής μορφή των διαφορικών εξισώσεων,
- III. Ταυτοποίηση των μεταβλητών: Τα στοιχεία συνδέονται σε σημεία που αναφέρονται ως κομβικά σημεία. Σε κάθε ένα από αυτούς τους κόμβους, πρέπει να οριστούν οι άγνωστες μετατοπίσεις.
- IV. Επιλογή της προσεγγιστικής συνάρτησης: Η συνάρτηση μετατόπισης αντιπροσωπεύει τη μετατόπιση στο στοιχείο και είναι το σημείο εκκίνησης της μαθηματικής ανάλυσης. Μπορεί να είναι μια γραμμική συνάρτηση ή συνάρτηση υψηλότερης τάξης, ενώ ο βολικότερος τρόπος για να εκφράσουν είναι με πολώνυμα. Το σχήμα ή η γεωμετρία του στοιχείου καθορίζουν τις προσεγγιστικές συναρτήσεις των μετατοπίσεων.
- V. Σχηματισμός του μητρώου στιβαρότητας του στοιχείου: Μετά τη διακριτοποίηση του συνεχούς σώματος με τα επιθυμητά στοιχεία, σχηματίζεται το μητρώο στιβαρότητας του στοιχείου το οποίο πλέον εξαρτάται από τις συναρτήσεις σχήματος. Για ορισμένα στοιχεία, η μορφή του πίνακα είναι αρκετά πολύπλοκη. Στη συνέχεια, όπου αυτό είναι απαραίτητο ακολουθεί μετασχηματισμός συντεταγμένων από το φυσικό στο τοπικό σύστημα.
- VI. Σχηματισμός του συνολικού μητρώου στιβαρότητας: Μετά το σχηματισμό του μητρώου στιβαρότητας του στοιχείου στις τοπικές συντεταγμένες, ακολουθεί η διαδικασία της συνάθροισης στους κόμβους που είναι κοινοί σε γειτονικά στοιχεία. Λαμβάνεται έτσι το συνολικό μητρώο στιβαρότητας το οποίο είναι συμμετρικό
- VII. Σχηματισμός του διανύσματος δύναμης του στοιχείου: Η δύναμη αποτελεί ουσιαστική παράμετρο σε οποιοδήποτε κατασκευαστικό πρόβλημα. Η δύναμη μέσα σε ένα στοιχείο μεταφέρεται στα κομβικά σημεία και έτσι σχηματίζεται το μητρώο δύναμης του στοιχείου.
- VIII. Σχηματισμός του συνολικού διανύσματος δύναμης: Όπως και το μητρώο στιβαρότητας του στοιχείου, έτσι και τα διανύσματα των δυνάμεων των στοιχείων συναθροίζονται για το σχηματισμό του συνολικού διανύσματος δύναμης.
- IX. Ενσωμάτωση των συνοριακών συνθηκών: Οι συνοριακές συνθήκες πρέπει να επιβάλλονται στο μητρώο στιβαρότητας. Υπάρχουν διάφορες τεχνικές που είναι διαθέσιμες για την επιβολή των συνοριακών συνθηκών στη μια εκ' των οποίων το μέγεθος του μητρώου στιβαρότητας μπορεί να μειωθεί ή να συμπυκνωθεί σε την τελική του μορφή. Ωστόσο για την διευκόλυνση στον προγραμματισμό, το μέγεθος του συνολικού μητρώου μπορεί να διατηρείται σταθερό.
- X. Επίλυση των εξισώσεων: Οι άγνωστες μετατοπίσεις στους κόμβους υπολογίζονται είτε με πολλαπλασιασμό του διανύσματος δύναμης με τον αντίστροφο του μητρώου στιβαρότητας, είτε με χρήση αριθμητικών επαναληπτικών μεθόδων όπως η μέθοδος απαλοιφής Gauss.

1.2 Διακριτοποίηση του χώρου

Αρχικό στάδιο στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων είναι η διακριτοποίηση του χώρου σε απλά γεωμετρικά στοιχεία, μπορεί όμως να επαναληφθεί σε επόμενο στάδιο με στόχο τη βελτίωση του πλέγματος και της ποιότητας του. Οι γενικές οδηγίες για την κατασκευή ενός ικανοποιητικού πλέγματος είναι οι εξής:

- Η γεωμετρία του χώρου θα πρέπει να αναπαριστάται λεπτομερώς και οι συνοριακές συνθήκες θα πρέπει να μπορούν να εισαχθούν με ακρίβεια,
- Το πλέγμα πρέπει να είναι αρκετά πυκνό ώστε να μπορεί να περιγράψει ικανοποιητικά τις περιοχές με έντονες μεταβολές των φυσικών μεγεθών και
- Τα στοιχεία που αποτελούν το πλέγμα θα πρέπει να ικανοποιούν ένα σύνολο ποιοτικών χαρακτηριστικών όπως εμβαδόν του στοιχείου ή αναλογίες διαστάσεων, έτσι ώστε η ποιότητα του πλέγματος να θεωρείται καλή.

1.3 Βασική αρχή

1.3.1 Η έννοια της δυνατής μεταβολής

Για δεδομένη διαφορική εξίσωση αναζητείται μια συνάρτηση η οποία είναι τόσο ομαλή όσο επιβάλλει η διαφορική εξίσωση και θα πληροί τις συνοριακές συνθήκες Dirichlet. Έτσι προσδιορίζεται το σύνολο μέσα στο οποίο βρίσκεται η λύση. Αυτό το σύνολο που εμπεριέχει άπειρο αριθμό συναρτήσεων, καλείται σύνολο αποδεκτών συναρτήσεων και κάθε συνάρτηση που ανήκει σε αυτό καλείται αποδεκτή συνάρτηση. Αν u είναι η λύση της διαφορικής εξίσωσης και u^* μια αποδεκτή συνάρτηση τότε η δυνατή μεταβολή του u είναι:

$$\delta u = u^* - u. \quad (1.1)$$

Ισοδύναμα μπορεί να γραφεί ότι η δυνατή μεταβολή είναι η διαφορά μεταξύ της πραγματικής λύσης και μιας πιθανής λύσης. Επειδή τόσο η πραγματική λύση u , όσο και η αποδεκτή συνάρτηση u^* ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες συμπεραίνεται ότι και η δu θα τις πληροί τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet (Καλπακίδης, 2009).

1.3.2 Αρχή των δυνατών έργων

Η αρχή των δυνατών έργων χρησιμοποιείται στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων για να εκφράσει τις συνθήκες ισορροπίας και συμβιβαστότητας. Εκφράζει το έργο μιας δύναμης καθώς αυτή επιδρά σε δυνατές μετατοπίσεις του υλικού.

Το πρόβλημα της ισορροπίας των προβλημάτων της μηχανικής του συνεχούς μέσου, θεωρώντας ότι υφίστανται συνοριακές συνθήκες μεικτού τύπου στη γενική του μορφή δίνεται από τη σχέση:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f} = 0 \text{ στο } \Omega, \quad (1.2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ στο } \partial\Omega_D \text{ και } \boldsymbol{\tau}\mathbf{n} = \mathbf{P} \text{ στο } \partial\Omega_N. \quad (1.3)$$

Όπου $\boldsymbol{\tau}$ είναι ο τανυστής των τάσεων που ασκούνται στο σώμα, \mathbf{f} είναι οι μαζικές δυνάμεις ανά μονάδα όγκου, \mathbf{g} και \mathbf{P} δεδομένες συναρτήσεις που ορίζονται στα $\partial\Omega_D$ και $\partial\Omega_N$ αντίστοιχα.

Το δυνατό έργο των εξωτερικών δυνάμεων \mathbf{f} και \mathbf{P} ορίζεται:

$$w_{EE} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV + \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} dS. \quad (1.4)$$

Το έργο που παράγουν οι δυνατές μεταβολές ή δυνατές μετατοπίσεις $\delta\mathbf{u}$, καλείται δυνατό έργο των εξωτερικών δυνάμεων και δίνεται από τη σχέση:

$$\delta w_{EE} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{u} dV + \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{P} \cdot \delta\mathbf{u} dS. \quad (1.5)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (1.3), είναι εμφανές ότι η δυνατή μετατόπιση στο χωρίο $\partial\Omega_D$ γίνεται ίση με μηδέν, συνεπώς το ίδιο ισχύει και για το έργο των επιφανειακών δυνάμεων στο χωρίο αυτό. Έτσι το δυνατό έργο των εξωτερικών δυνάμεων γίνεται:

$$\begin{aligned} \delta w_{EE} &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{u} dV + \int_{\partial\Omega_N} \boldsymbol{\tau}\mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{u} dS + \int_{\partial\Omega_D} \boldsymbol{\tau}\mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{u} dS \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{u} dV + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\tau}\mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{u} dS. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Σύμφωνα με την αρχή των δυνατών έργων, οποιοδήποτε συνεχές σώμα σε κατάσταση ισορροπίας στο οποίο εφαρμόζονται μαζικές δυνάμεις \mathbf{f} και επιφανειακές δυνάμεις \mathbf{P} και ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες, για κάθε δυνατή μετατόπιση $\delta\mathbf{u}$ πρέπει να ισχύει:

$$\int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{u} dV + \int_{\partial\Omega_N} \boldsymbol{\tau}\mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{u} dS = \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \delta\boldsymbol{\epsilon} dV. \quad \forall \delta\mathbf{u} \quad (1.7)$$

Το δεξί μέλος της εξίσωσης αυτής ονομάζεται δυνατό έργο των τάσεων ή δυνατό έργο των εσωτερικών δυνάμεων. Συνεπώς η αρχή των δυνατών έργων διατυπώνεται ως ισότητα μεταξύ του δυνατού έργου των εξωτερικών με το δυνατό έργο των εσωτερικών δυνάμεων (Καλπακίδης, 2009).

$$\delta w_{EE} = \delta w_{ES}, \quad \forall \delta\mathbf{u}. \quad (1.8)$$

1.3.3 Ασθενής διατύπωση του προβλήματος

Η ασθενής ή μεταβολική διατύπωση είναι μια γενικευμένη μέθοδος που χρησιμοποιείται στη διαμόρφωση του μητρώου στιβαρότητας του στοιχείου και του διανύσματος του φορτίου.

Χάρη παραδείγματος ας θεωρηθεί η γενική μορφή μιας διαφορικής εξίσωσης της οποίας αναζητείται η λύση:

$$\nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{f} = 0 \text{ στο } \Omega. \quad (1.9)$$

Η μεταβολική διατύπωση λαμβάνεται αν πολλαπλασιαστεί η σχέση με μια δυνατή μεταβολή και ολοκληρωθεί στο χωρίο. Συνεπώς:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{f}) \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} - f_j \right) \cdot \delta u_j d\Omega = 0 \text{ για κάθε } \delta \mathbf{u}. \quad (1.10)$$

Στο στάδιο αυτό είναι χρήσιμη η ολοκλήρωση κατά μέλη με τη χρήση του θεωρήματος Gauss:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} - f_j \right) \cdot \delta u_j d\Omega = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \delta u_j n_i \right) dS - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) d\Omega - \int_{\Omega} f_j \delta u_j d\Omega = 0 \quad (1.11)$$

1.3.4 Θεώρημα του ελαχίστου της δυναμικής ενέργειας

Το θεώρημα αυτό όπως θα αναφερθεί στην επόμενη παράγραφο, αποτελεί τη βασική αρχή της μεθόδου Ritz για την προσεγγιστική επίλυση ενός προβλήματος.

Ως ολική δυναμική ενέργεια ελαστικού σώματος θεωρείται η συνολική ενέργεια παραμόρφωσης μείον το συνολικό έργο των εξωτερικών δυνάμεων.

$$\Pi(u_i) = W - W_{EE} = \int_{\Omega} w(e_{ij}) dV - \int_{\Omega} f_i u_i dV - \int_{\partial\Omega} P_i u_i dS. \quad (1.12)$$

Για κάθε επιλογή συνάρτησης u_i η σχέση (1.12) δίνει έναν πραγματικό αριθμό. Στην περίπτωση που η συνάρτηση u_i ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό της ολικής δυναμικής ενέργειας τότε η συνάρτηση αυτή αποτελεί λύση του προβλήματος ισορροπίας. Συνεπώς σε αυτή την περίπτωση η μεταβολή του συναρτησιακού στο u_i μηδενίζεται για οποιαδήποτε δυνατή μετατόπιση δu_i (Καλπακίδης, 2009).

$$\delta \Pi(u_i) = 0, \quad \forall \delta u_i. \quad (1.13)$$

1.3.5 Η μέθοδος Ritz

Στη μέθοδο του Ritz γίνεται χρήση του θεωρήματος του ελαχίστου της δυναμικής ενέργειας για την προσεγγιστική λύση του προβλήματος ισορροπίας. Η εύρεση της λύσης δεν γίνεται με την επίλυση των εξισώσεων ισορροπίας αλλά με την ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού της ολικής δυναμικής ενέργειας (Καλπακίδης, 2009). Συγκεκριμένα αναζητείται μια προσεγγιστική λύση της μορφής:

$$u_n(x_j) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x_j) + \varphi_0(x_j). \quad (1.14)$$

Οι $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ είναι γνωστές συναρτήσεις του x_j (στη περίπτωση του τρισδιάστατου προβλήματος x_1, x_2 και x_3) και ονομάζονται συντεταγμένες συναρτήσεις. Η επιλογή των συντεταγμένων συναρτήσεων δεν είναι μοναδική και πρέπει να γίνεται με σκοπό να:

- I. Μπορούν να παραγωγιστούν όσες φορές απαιτείται από το πρόβλημα,
- II. Ικανοποιούν τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet και
- III. Είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Αφού οι συντεταγμένες συναρτήσεις είναι γνωστές, αρκεί να προσδιοριστούν οι συντελεστές c_1, \dots, c_n για να βρεθεί η προσεγγιστική λύση (Καλπακίδης, 2009). Με την αντικατάσταση της (1.14) στο συναρτησιακό και αφού υπολογιστούν τα ολοκληρώματα οι μοναδικοί άγνωστοι στη συνάρτηση της ολικής δυναμικής ενέργειας είναι οι παράμετροι c_1, \dots, c_n .

$$\Pi(u_n) = \Pi(c_1, c_2, \dots, c_n). \quad (1.15)$$

Για την ύπαρξη ελάχιστης τιμής, πρέπει να ισχύει:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_1} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial c_2} = 0, \dots, \frac{\partial \Pi}{\partial c_n} = 0. \quad (1.16)$$

Συνεπώς προκύπτει ένα σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους, τις παραμέτρους c_1, \dots, c_n που μπορεί να επιλυθεί και να προσδιοριστεί η προσεγγιστική λύση.

1.3.6 Η μέθοδος των σταθμικών υπολοίπων

Η αρχή των δυνατών έργων όπως και η μεταβολική διατύπωση εφαρμόζονται στα περισσότερα από τα προβλήματα. Ωστόσο, σε ορισμένες περιπτώσεις, η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας δεν μπορεί να εφαρμοστεί, επειδή δεν έχει σαφή φυσική σημασία ή δεν υπάρχει. Για τέτοια προβλήματα εφαρμόζεται η μέθοδος σταθμικών υπολοίπων για τον προσδιορισμό της λύσης. Η μέθοδος στηρίζεται στο γεγονός ότι οι προσεγγιστικές λύσεις μιας διαφορικής εξίσωσης μπορούν να ικανοποιούν μόνο κάποιες από τις συνθήκες του προβλήματος, έτσι, μια διαφορική εξίσωση μπορεί να ικανοποιείται μόνο σε μερικά σημεία, και όχι στο καθένα. Σύμφωνα με τη μέθοδο των σταθμικών υπολοίπων θεωρείται αρχικά μια προσεγγιστική λύση της διαφορικής εξίσωσης και στη συνέχεια αξιολογείται η ισχύς της (Καλπακίδης, 2009).

Έστω η γενική μορφή μιας διαφορικής εξίσωσης της οποίας αναζητείται η λύση:

$$\nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{f} = 0 \text{ στο } \Omega. \quad (1.17)$$

Σύμφωνα με την μέθοδο των σταθμικών υπολοίπων θεωρείται, όπως και στη μέθοδο Ritz, προσεγγιστική λύση της μορφής:

$$u_n(x_j) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x_j) + \varphi_0(x_j). \quad (1.18)$$

Οι $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ είναι γνωστές συναρτήσεις του x_j όπως και στη μέθοδο Ritz, στη περίπτωση των πεπερασμένων στοιχείων ονομάζονται προσεγγιστικές συναρτήσεις ή συναρτήσεις σχήματος. Για να προσδιοριστεί η προσεγγιστική λύση πρέπει να υπολογιστούν οι άγνωστες παράμετροι c_1, \dots, c_n .

Με αντικατάσταση της προσεγγιστικής λύσης (1.18) στη διαφορική εξίσωση προκύπτει ένα υπόλοιπο R_n επειδή η προσεγγιστική λύση δεν είναι ακριβής:

$$\nabla^2 \mathbf{u}_n - \mathbf{f} = \mathbf{R}_n \neq 0 \text{ στο } \Omega. \quad (1.19)$$

Οι παράμετροι c_1, \dots, c_n υπολογίζονται από την ασθενή διατύπωση της διαφορικής εξίσωσης:

$$\int_{\Omega} \psi_i \mathbf{R}_n dV = \int_{\Omega} \psi_i (\nabla^2 \mathbf{u}_n - \mathbf{f}) dV = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.20)$$

οι ψ_i ονομάζονται σταθμικές συναρτήσεις, είναι γνωστές και κατάλληλα επιλεγμένες. Οι σχέσεις (1.20) υποδηλώνουν ότι απαιτείται το υπόλοιπο R_n να είναι ορθογώνιο προς όλες τις σταθμικές συναρτήσεις. Για κάθε σύνολο σταθμικών συναρτήσεων προκύπτει διαφορετική προσεγγιστική μέθοδος (Καλπακίδης, 2009).

Πρέπει να σημειωθεί ότι με την έκφραση της ασθενούς διατύπωσης της διαφορικής εξίσωσης οι προσεγγιστικές λύσεις πρέπει να ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση στο τμήμα του χωρίου του ολοκληρώματος και όχι σε κάθε σημείο (Καλπακίδης, 2009).

Με τη παρατήρηση ότι το υπόλοιπο R_n είναι συνάρτηση των c_i , φ_i και f η (1.20) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα:

$$\int_{\Omega} \psi_i \mathbf{R}_n(c_i, \varphi_i, f) dV = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.21)$$

Μετά τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων δεδομένου ότι οι παράμετροι ψ_i , φ_i και f είναι γνωστές προκύπτει σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους, τις παραμέτρους c_1, \dots, c_n που μπορεί να επιλυθεί και να προσδιοριστεί η προσεγγιστική λύση.

1.3.7 Η μέθοδος Galerkin

Μια ειδική περίπτωση της μεθόδου των σταθμικών υπολοίπων είναι η μέθοδος Galerkin. Προκύπτει με την θεώρηση ότι οι σταθμικές συναρτήσεις ψ_i ταυτίζονται με τις συναρτήσεις φ_i .

1.4 Συναρτήσεις σχήματος

Στην ενότητα αυτή θα αναφερθούν τα κριτήρια με τα οποία επιλέγονται οι συναρτήσεις που προσεγγίζουν τις μετατοπίσεις και πως από τις τελευταίες προκύπτουν οι συναρτήσεις σχήματος. Αναλυτικά, θα γίνει αναφορά στα τριγωνικά και τετραγωνικά δισδιάστατα στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία. Με ανάλογο τρόπο λαμβάνονται οι συναρτήσεις σχήματος και για άλλου τύπου στοιχεία.

Η επιλογή της προσεγγιστικής συνάρτησης μετατόπισης αποτελεί σημαντικό σημείο στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Αυτή η συνάρτηση αντιπροσωπεύει τη μετατόπιση μέσα στο στοιχείο. Ανάλογα με το πρόβλημα που πρέπει να επιλυθεί, η συνάρτηση μετατόπισης μπορεί να θεωρηθεί είτε γραμμική είτε πολυώνυμο υψηλότερης τάξης. Απαραίτητη προϋπόθεση για τις συναρτήσεις μετατόπισης, είναι να μην παρουσιάζουν καμία ασυνέχεια ή επικάλυψη, μεταξύ

γειτονικών στοιχείων καθώς το σώμα παραμορφώνεται. Η σύγκλιση μπορεί να επιτευχθεί εφόσον πληρούνται οι ακόλουθες τρεις προϋποθέσεις:

- Η συνάρτηση της μετατόπισης πρέπει να είναι συνεχής μέσα στα στοιχεία. Αυτό μπορεί να εξασφαλιστεί με την επιλογή ενός κατάλληλου βαθμού πολυωνύμου,
- Η συνάρτηση μετατόπισης πρέπει να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος. Στην πράξη αυτό επιτυγχάνεται με τους συνεχείς όρους από a_0 έως a_n που χρησιμοποιούνται στο πολώνυμο,
- Η συνάρτηση μετατόπισης πρέπει να περιλαμβάνει τις σταθερές παραμορφώσεις του στοιχείου. Καθώς το στοιχείο μικραίνει, η παραμόρφωση πρέπει να μένει σταθερή στο στοιχείο, συνεπώς, η συνάρτηση μετατόπισης πρέπει να περιλαμβάνει τους όρους που αντιστοιχούν στις σταθερές παραμορφώσεις.

Στην ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία, οι μετατοπίσεις μέσα σε ένα στοιχείο εκφράζονται με όρους κομβικών μετατοπίσεων χρησιμοποιώντας συναρτήσεις παρεμβολής ή σχήματος n βαθμού, αφού η πραγματική μετατόπιση στο εσωτερικό του στοιχείου είναι άγνωστη. Υπάρχουν δύο τύποι συναρτήσεων παρεμβολής οι συναρτήσεις Lagrange και οι Hermitian. Στην παρούσα εργασία εφαρμόστηκαν οι ευρέως χρησιμοποιούμενες συναρτήσεις παρεμβολής Lagrange. Η μετατόπιση σε ένα στοιχείο δίνεται από τη σχέση:

$$u = \sum_{j=1}^n u_j N_j, \quad (1.22)$$

όπου u η μετατόπιση του στοιχείου, u_j η μετατόπιση του j κόμβου, N_j η συνάρτηση σχήματος του j κόμβου και n ο συνολικός αριθμός κόμβων του στοιχείου.

1.4.1 Συναρτήσεις σχήματος τριγωνικών στοιχείων

Τα τριγωνικά στοιχεία είναι ιδιαίτερα χρήσιμα σε περιπτώσεις ακανόνιστων σχημάτων γεωμετρίας. Με βάση τα παραπάνω κριτήρια για την περίπτωση των τριγωνικών στοιχείων σε ένα δισδιάστατο πρόβλημα η συνάρτηση μετατόπισης πρέπει να είναι συνεχής, να ορίζονται οι παράγωγοι πρώτης τάξης ως προς τα x και y και να εμπεριέχει μια σταθερά. Επομένως μπορεί να θεωρηθεί η ακόλουθη μορφή για τη συνάρτηση των μετατοπίσεων:

$$u(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y, \quad (1.23)$$

όπου οι σταθερές a_0 , a_1 , a_2 είναι οι σταθερές που πρέπει να προσδιοριστούν και u , η μεταβολή της μετατόπισης.

Για τους τρεις κόμβους οι συντεταγμένες των οποίων είναι, (x_1, y_1) , (x_2, y_2) και (x_3, y_3) η (1.23) γράφεται:

$$\begin{aligned} u_1 &= u(x_1, y_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 y_1, \\ u_2 &= u(x_2, y_2) = a_0 + a_1 x_2 + a_2 y_2, \\ u_3 &= u(x_3, y_3) = a_0 + a_1 x_3 + a_2 y_3. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Ισοδύναμα στη μορφή πινάκων:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}, \quad (1.25)$$

Το σύστημα εξισώσεων μπορεί να εκφραστεί ως προς τις άγνωστες μεταβλητές a_0, a_1, a_2 :

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}. \quad (1.26)$$

Με αντικατάσταση των a_0, a_1, a_2 της σχέσης (1.26) στην συνάρτηση μετατόπισης (1.23).

$$\begin{aligned} u &= [1 \quad x \quad y] \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \\ &= [1 \quad x \quad y] \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (1.27)$$

Η πάνω σχέση ισοδυναμεί με την σχέση που δίνει τη μετατόπιση σε ένα στοιχείο. Έτσι η σχέση γράφεται ως:

$$u = [N_1(x, y) \quad N_2(x, y) \quad N_3(x, y)] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}. \quad (1.28)$$

Αναλυτικότερα οι εκφράσεις των συναρτήσεων σχήματος ενός τριγωνικού στοιχείου που προκύπτουν από τη διαδικασία αυτή είναι:

$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= \frac{1}{2A} [(y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y + (x_2 y_3 - x_3 y_2)], \\ N_2(x, y) &= \frac{1}{2A} [(y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y + (x_3 y_1 - x_1 y_3)], \\ N_3(x, y) &= \frac{1}{2A} [(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + (x_1 y_2 - x_2 y_1)], \end{aligned} \quad (1.29)$$

όπου A είναι το εμβαδόν του τριγώνου:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}. \quad (1.30)$$

1.4.2 Συναρτήσεις σχήματος τετραγωνικών στοιχείων

Τα τετραγωνικά στοιχεία είναι χρήσιμα σε περιπτώσεις απλών σχημάτων γεωμετρίας. Με βάση τα παραπάνω κριτήρια για την περίπτωση των τετραγωνικών στοιχείων σε ένα διδιάστατο πρόβλημα μπορεί να θεωρηθεί η ακόλουθη συνάρτηση για τις μετατοπίσεις:

$$u = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy, \quad (1.31)$$

όπου οι σταθερές a_0, a_1, a_2, a_3 είναι οι σταθερές που πρέπει να προσδιοριστούν και u , η μεταβολή της μετατόπισης.

Για τετραγωνικά στοιχεία με τέσσερις κόμβους οι συντεταγμένες των οποίων είναι, (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) και (x_4, y_4) , οι παραπάνω συναρτήσεις μετατόπισης γράφονται:

$$\begin{aligned} u_1 &= u(x_1, y_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2y_1 + a_3x_1y_1, \\ u_2 &= u(x_2, y_2) = a_0 + a_1x_2 + a_2y_2 + a_3x_2y_2, \\ u_3 &= u(x_3, y_3) = a_0 + a_1x_3 + a_2y_3 + a_3x_3y_3, \\ u_4 &= u(x_4, y_4) = a_0 + a_1x_4 + a_2y_4 + a_3x_4y_4. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Ισοδύναμα, στη μορφή πινάκων:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4y_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}. \quad (1.33)$$

Το σύστημα εξισώσεων μπορεί να εκφραστεί ως προς τις άγνωστες μεταβλητές a_0, a_1, a_2, a_3 :

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4y_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}. \quad (1.34)$$

Με αντικατάσταση των a_0, a_1, a_2 της σχέσης (1.34) στην συνάρτηση μετατόπισης (1.31):

$$\begin{aligned} u &= [1 \quad x \quad y \quad xy] \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4y_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \\ &= [N_1(x, y) \quad N_2(x, y) \quad N_3(x, y) \quad N_4(x, y)] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Αναλυτικότερα οι εκφράσεις των συναρτήσεων σχήματος ενός τετραγωνικού στοιχείου που προκύπτουν από τη διαδικασία αυτή είναι:

$$\begin{aligned}
 N_1(x, y) &= \frac{1}{4ab}(x - x_2)(y - y_4) \\
 N_2(x, y) &= \frac{1}{4ab}(x - x_1)(y - y_3) \\
 N_3(x, y) &= \frac{1}{4ab}(x - x_4)(y - y_2) \\
 N_4(x, y) &= -\frac{1}{4ab}(x - x_3)(y - y_1)
 \end{aligned}
 \tag{1.36}$$

Τα a, b είναι το ήμισυ του μήκους των δύο ακμών του τετραγωνικού στοιχείου. Οι συναρτήσεις σχήματος τόσο των τριγωνικών στοιχείων, όσο και των τετραγωνικών στοιχείων ικανοποιούν τη σχέση:

$$N_j(x_i, y_i) = \begin{cases} 0 & \text{όταν } j \neq i \\ 1 & \text{όταν } j = i \end{cases}
 \tag{1.37}$$

1.5 Ισοπαραμετρικά στοιχεία

Για εξαγωγή του μητρώου ακαμψίας, μάζας και των υπόλοιπων διανυσμάτων απαιτείται η ολοκλήρωση των συναρτήσεων σχήματος ή των παραγώγων τους στο στοιχείο. Αυτά τα ολοκληρώματα μπορούν να υπολογιστούν με ευκολία αν οι συναρτήσεις σχήματος εκφράζονται σε ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων ξεχωριστά για κάθε στοιχείο. Αυτό το σύστημα συντεταγμένων συχνά αποκαλείται φυσικό σύστημα επιλέγεται με βάση την γεωμετρία ενός στοιχείου και συνήθως λαμβάνει τιμές μεταξύ 0 και 1 ή μεταξύ -1 και +1. Με τη χρήση των φυσικών συντεταγμένων η ολοκλήρωση των συναρτήσεων σχήματος διευκολύνεται σημαντικά.

Η μετατροπή των συντεταγμένων από το ένα σύστημα στο άλλο γίνεται με την αρχική υπόθεση :

$$x = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta)x_i, \quad y = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta)y_i.
 \tag{1.38}$$

όπου x και y είναι οι συντεταγμένες τυχαίου σημείου του στοιχείου και x_i, y_i ($i=1, \dots, n$) είναι οι συντεταγμένες των n κόμβων του στοιχείου. Οι συναρτήσεις παρεμβολής N_i ορίζονται στο φυσικό σύστημα αναφοράς με μεταβλητές ξ, η που λαμβάνουν τιμές από -1 έως +1.

Για τις μετατοπίσεις του στοιχείου η παρεμβολή γίνεται με τον ίδιο τρόπο με τις παρεμβολές των συντεταγμένων των κόμβων:

$$u = \sum_{i=1}^n N_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^n N_i v_i,
 \tag{1.39}$$

όπου u και v είναι οι μετατοπίσεις οποιουδήποτε σημείου στο σύστημα αναφοράς του στοιχείου και u_i, v_i ($i=1, \dots, n$) είναι οι αντίστοιχες μετατοπίσεις στους κόμβους.

Οι σχέσεις (1.38) έχουν την γενική μορφή $x=x(\xi, \eta)$ όπου το διάνυσμα $\mathbf{x}^T=[x \ y \ z]$ και επομένως στο τοπικό σύστημα αναφοράς οι παράγωγοι $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, υπολογίζονται κάνοντας χρήση του κανόνα αλυσίδας

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (1.40)$$

Ανάλογες σχέσεις ισχύουν για τις παραγώγους ως προς y και z . Παρατηρείται ότι για να υπολογισθούν οι ζητούμενες παράγωγοι πρέπει να είναι γνωστές οι τιμές των $\partial \xi/\partial x$, $\partial \eta/\partial x$ οι οποίες υπολογίζονται από τις αντίστοιχες σχέσεις $\xi=\xi(x, y, z)$. Επειδή σε πολλές περιπτώσεις οι παραστάσεις αυτές δεν μπορούν να εκφρασθούν αναλυτικά, είναι προτιμότερο να διατυπωθεί το πρόβλημα στην παρακάτω μορφή:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (1.41)$$

Η ισοδύναμη:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = J \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, \quad (1.42)$$

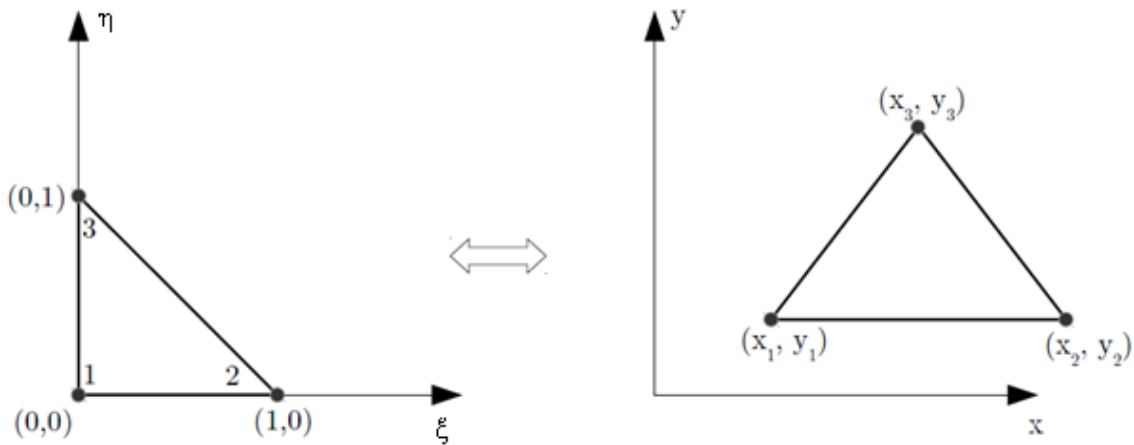
όπου J είναι ο Ιακωβιανός πίνακας μετατροπής ο οποίος συνδέει τις παραγώγους στο φυσικό σύστημα αναφοράς με τις παραγώγους στο γενικό σύστημα αναφοράς.

Για να έχει νόημα η παραπάνω εξίσωση ο πίνακας J πρέπει να μην είναι ιδιάζων (non-singular). Οι όροι του J υπολογίζονται με τη χρήση των σχέσεων (1.38):

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi}, & \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta}, & \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Για τον υπολογισμό του αντιστρόφου J αναγκαία και ικανή συνθήκη είναι η ορίζουσα του να μην είναι μηδενική σε οποιοδήποτε σημείο του χωρίου .

1.5.1 Τριγωνικά στοιχεία



Σχήμα 1.2: Αλλαγή συστήματος συντεταγμένων τριγωνικών στοιχείων.

Η μετατροπή γίνεται με βάση τα εξής κριτήρια:

- Κάθε σημείο του μητρικού στοιχείου αντιστοιχεί σε ένα και μόνο σημείο του στοιχείου αναφοράς και αντίστροφα,
- Οι κόμβοι του μητρικού στοιχείου αντιστοιχούν στους κόμβους του στοιχείου αναφοράς και αντίστροφα και
- Κάθε τμήμα του συνόρου του αρχικού στοιχείου που ορίζεται από τους κόμβους που συνδέονται με αυτό και αντιστοιχεί στο τμήμα του συνόρου του στοιχείου αναφοράς που καθορίζεται από τους αντίστοιχους κόμβους που επισυνάπτονται σε αυτό.

Για τον καθορισμό του γεωμετρικού μετασχηματισμού, υποθέτουμε ότι οι συντεταγμένες (x, y) ενός αυθαίρετου σημείου του μητρικού στοιχείου είναι οι άγνωστες συναρτήσεις που ορίζονται επί της περιοχής που αντιπροσωπεύεται από το στοιχείο αναφοράς στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων (ξ, η) . Οι συναρτήσεις x και y ανήκουν στην κατηγορία συναρτήσεων C^0 δεδομένου ότι είναι συνεχείς και οι πρώτες παράγωγοι τους είναι σταθερές ίσες με τη μονάδα. Ως εκ τούτου, θεωρείται η γενική προσέγγιση για το x σε όρους ξ και η :

$$x = a_1 + a_2\xi + a_3\eta. \quad (1.44)$$

Η έκφραση της προσέγγισης (1.44) ως προς τις κομβικές τιμές x_1, x_2, x_3 για τους κόμβους 1, 2 και 3 αντίστοιχα γίνεται παρατηρώντας ότι τα ξ, η λαμβάνουν τις τιμές $(0, 0)$, $(1, 0)$ και $(0, 1)$. Συνεπώς:

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_1 + a_2, \quad x_3 = a_1 + a_3. \quad (1.45)$$

Ισοδύναμα στη μορφή πινάκων:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}. \quad (1.46)$$

Λύνοντας το σύστημα με αντιστροφή πίνακα μπορούν να προσδιοριστούν οι σταθερές:

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}. \quad (1.47)$$

Αντικαθιστώντας τις σταθερές στην εξίσωση (1.44):

$$x(\xi, \eta) = [1 \quad \xi \quad \eta] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}. \quad (1.48)$$

Αναπτύσσοντας την (1.48) λαμβάνεται:

$$x(\xi, \eta) = (1 - \xi - \eta)x_1 + \xi x_2 + \eta x_3, \quad (1.49)$$

Ακολουθώντας την ίδια μέθοδο και για το y λαμβάνεται:

$$y(\xi, \eta) = (1 - \xi - \eta)y_1 + \xi y_2 + \eta y_3, \quad (1.50)$$

Ακολουθώντας την ίδια μέθοδο και για τη συνάρτηση δοκιμής W καθώς και στις μετατοπίσεις δεδομένου ότι είναι της ίδιας τάξης με τις συντεταγμένες x και y , θα χρησιμοποιηθεί ξανά η ίδια συνάρτηση. Έτσι λαμβάνεται αντίστοιχα:

$$W(\xi, \eta) = (1 - \xi - \eta)w_1 + \xi w_2 + \eta w_3. \quad (1.51)$$

Οι συναρτήσεις σχήματος είναι:

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= (1 - \xi - \eta), \\ N_2(\xi, \eta) &= \xi, \\ N_3(\xi, \eta) &= \eta. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Το στοιχείο ονομάζεται ισοπαραμετρικό επειδή χρησιμοποιείται η ίδιας μορφής συνάρτηση σχήματος, τόσο για την μετατροπή μεταξύ του μητρικού και του στοιχείου αναφοράς όσο και για την αναπαράσταση των μετατοπίσεων.

Ο Ιακωβιανός πίνακας της μετατροπής δίνεται:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix}. \quad (1.53)$$

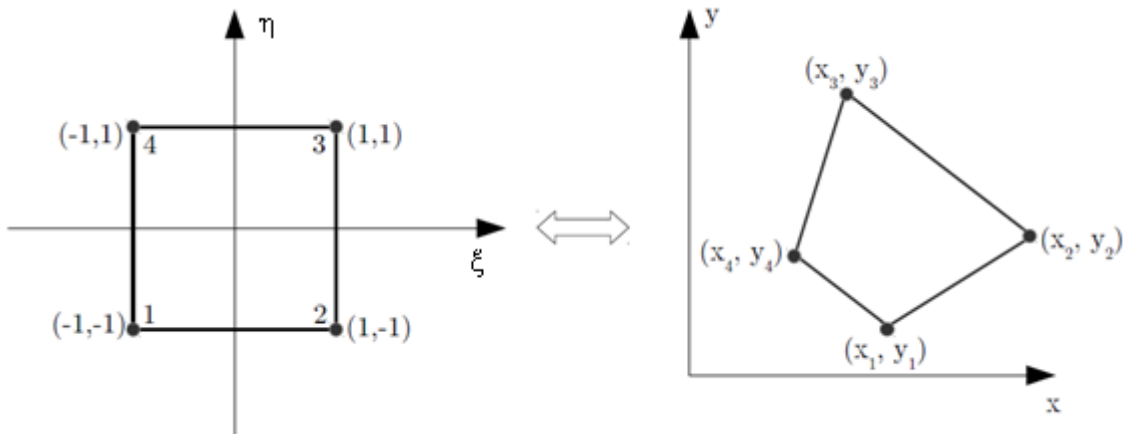
1.5.2 Τετραγωνικά στοιχεία

Για το τετραγωνικό στοιχείο η γενική προσέγγιση για το x σε όρους ξ και η δίνεται:

$$x = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta. \quad (1.54)$$

Η έκφραση της προσέγγισης (1.54) ως προς τις κομβικές τιμές x_1, x_2, x_3 και x_4 για τους κόμβους 1, 2, 3 και 4 αντίστοιχα γίνεται παρατηρώντας ότι τα ξ, η λαμβάνουν τις τιμές $(-1, -1), (1, -1), (1, 1)$ και $(-1, 1)$. Συνεπώς:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 - a_2 - a_3 + a_4, \\ x_2 &= a_1 + a_2 - a_3 + a_4, \\ x_3 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \\ x_4 &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4. \end{aligned} \quad (1.55)$$



Σχήμα 1.3: Αλλαγή συστήματος συντεταγμένων τετραγωνικών στοιχείων.

Ισοδύναμα οι σχέσεις (1.55) στη μορφή πίνακα:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}. \quad (1.56)$$

Λύνοντας το σύστημα με αντιστροφή πίνακα μπορούν να προσδιοριστούν οι σταθερές:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}. \quad (1.57)$$

Αντικαθιστώντας τις σταθερές στην εξίσωση (1.54):

$$x(\xi, \eta) = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta] \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}. \quad (1.58)$$

Ισοδύναμα:

$$x(\xi, \eta) = \tau_1(\xi, \eta)x_1 + \tau_2(\xi, \eta)x_2 + \tau_3(\xi, \eta)x_3 + \tau_4(\xi, \eta)x_4 \quad (1.59)$$

όπου τα τ_1, τ_2, τ_3 και τ_4 ισούνται με:

$$\begin{aligned} \tau_1(\xi, \eta) &= 0.25(1 - \xi - \eta - \xi\eta), \\ \tau_2(\xi, \eta) &= 0.25(1 + \xi - \eta - \xi\eta), \\ \tau_3(\xi, \eta) &= 0.25(1 + \xi + \eta + \xi\eta), \\ \tau_4(\xi, \eta) &= 0.25(1 + \xi - \eta - \xi\eta). \end{aligned} \quad (1.60)$$

Ακολουθώντας την ίδια μέθοδο και για τη συνάρτηση δοκιμής W δεδομένου ότι είναι της ίδιας τάξης με τις συντεταγμένες x και y , θα χρησιμοποιηθεί ξανά η ίδια συνάρτηση. Έτσι λαμβάνεται αντίστοιχα:

$$W = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta, \quad (1.61)$$

$$W(\xi, \eta) = N_1(\xi, \eta)w_1 + N_2(\xi, \eta)w_2 + N_3(\xi, \eta)w_3 + N_4(\xi, \eta)w_4, \quad (1.62)$$

όπου τα N_1, N_2, N_3 και N_4 ισούνται με:

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= 0.25(1 - \xi - \eta - \xi\eta), \\ N_2(\xi, \eta) &= 0.25(1 + \xi - \eta - \xi\eta), \\ N_3(\xi, \eta) &= 0.25(1 + \xi + \eta + \xi\eta), \\ N_4(\xi, \eta) &= 0.25(1 + \xi - \eta - \xi\eta). \end{aligned} \quad (1.63)$$

Το τετραγωνικό στοιχείο είναι επίσης ισοπαραμετρικό αφού οι συναρτήσεις σχήματος είναι ίδιες με τις συναρτήσεις για την αλλαγή των συντεταγμένων.

1.6 Ολοκλήρωση Gauss-Legendre

Ένα απλό πολυώνυμο είναι σχετικά εύκολο να ολοκληρωθεί. Σε πολλές περιπτώσεις, ωστόσο, οι συναρτήσεις προς ολοκλήρωση είναι λόγοι πολυωνύμων και είναι αρκετά δύσκολο να ολοκληρωθούν άμεσα. Σε κάθε περίπτωση, στο πλαίσιο των πεπερασμένων στοιχείων όπου υφίσταται μεγάλος αριθμός στοιχείων και ως εκ τούτου, τεράστιος αριθμός ολοκληρώσεων, οι αναλυτικές μέθοδοι δεν είναι αποτελεσματικές. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούνται αριθμητικές μέθοδοι ολοκλήρωσης όπως είναι ο κανόνας τραπεζίου, η μέθοδος ολοκλήρωσης Gauss (Fagan, 1992).

Στην παρούσα εργασία εφαρμόζεται η αριθμητική ολοκλήρωση κατά Gauss-Legendre. Πρόκειται για μια μέθοδο που για την εφαρμογή της απαιτείται η έκφραση του ολοκληρώματος σε μια τετραγωνική ή κυβική περιοχή τέτοια ώστε $-1 \leq (\xi, \eta, \zeta) \leq 1$ (Hoffman & Frankel, 2001). Η συνάρτηση προς ολοκλήρωση αντικαθίσταται με άλλα προσεγγιστικά πολυώνυμα, οπότε δημιουργούνται άλλοι τύποι αριθμητικής ολοκλήρωσης, τα δε σημεία παρεμβολής γενικά δεν ισαπέχουν.

Έστω το ολοκλήρωμα:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx. \quad (1.64)$$

Η συνάρτηση προς ολοκλήρωση μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$f(x) = w(x)g(x), \quad (1.65)$$

Όπου η $w(x)$ είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση που ονομάζεται συνάρτηση βάρους. Η συνάρτηση $g(x)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού m :

$$g(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m. \quad (1.66)$$

Το ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} w(x)g(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i g(x_i) + \sigma\phi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha. \quad (1.67)$$

Τα βάρη εξαρτώνται από τα σημεία x_i και τη συνάρτηση $w(x)$ αλλά όχι από την $g(x)$. Για κάθε i ζητείται να προσδιοριστούν τα w_i και τα σημεία x_i έτσι ώστε το σφάλμα της προσέγγισης να είναι ελάχιστο.

Αντικαθιστώντας την (1.66) στο ολοκλήρωμα (1.67):

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx &= a_0 \int_{x_1}^{x_2} w(x) dx + a_1 \int_{x_1}^{x_2} xw(x) dx + \dots + a_m \int_{x_1}^{x_2} x^m w(x) dx \\ &= w_1(a_0 + a_1x_1 + \dots + a_mx_1^m) + \dots + w_n(a_0 + a_1x_n + \dots + a_mx_n^m). \end{aligned} \quad (1.68)$$

Ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx &= \\ a_0(w_1 + w_2 + \dots + w_n) &+ a_1(w_1x_1 + \dots + w_nx_n) + \dots + a_m(w_1x_1^m + \dots + w_nx_n^m). \end{aligned} \quad (1.69)$$

Επειδή η τελευταία ισότητα πρέπει να ισχύει για κάθε πολυώνυμο της μορφής (1.66), από την (1.69) συνεπάγεται ότι πρέπει να ισχύει:

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 + \dots + w_n &= \int_{x_1}^{x_2} w(x) dx, \\ w_1x_1 + \dots + w_nx_n &= \int_{x_1}^{x_2} xw(x) dx, \\ &\vdots \\ w_1x_1^m + \dots + w_nx_n^m &= \int_{x_1}^{x_2} x^m w(x) dx. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Η (1.70) ορίζει ένα σύστημα εξισώσεων:

- Αριθμού $m+1$ με n αγνώστους, τα βάρη w_1, \dots, w_n ,
- n αγνώστους, τα σημεία x_1, \dots, x_n .

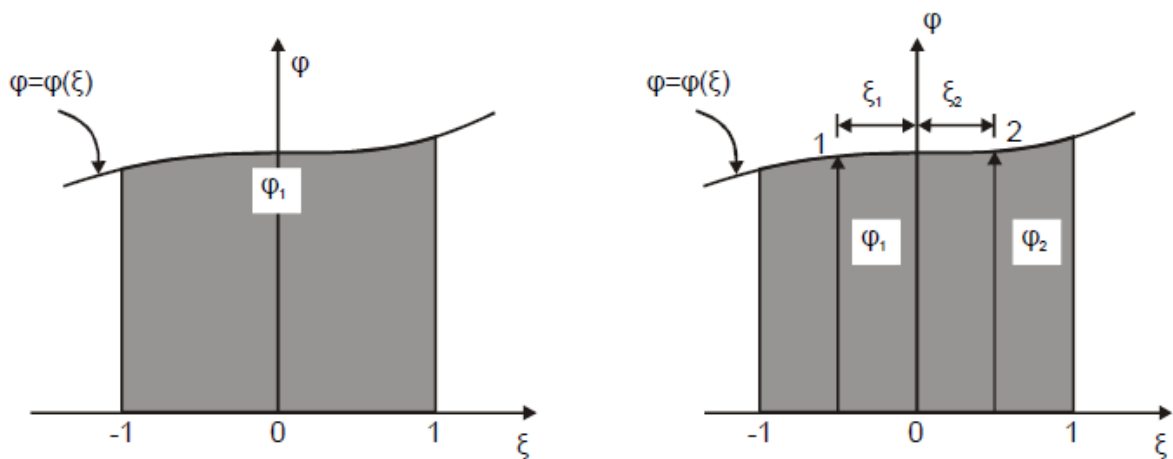
Επειδή το σύστημα πρέπει να έχει λύση για κάθε συνάρτηση $w(x)$ πρέπει να ισχύει:

$$m + 1 \leq 2n \quad (1.71)$$

Στην περίπτωση που το διάστημα ολοκλήρωσης είναι $[x_1, x_2]=[-1, 1]$, όπως συμβαίνει με την χρήση των ισοπαραμετρικών στοιχείων που αναπτύχθηκαν στην παράγραφο 1.5 και η συνάρτηση βάρους $w(x)=1$, το σύστημα εξισώσεων (1.70) παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 + \dots + w_n &= \int_{-1}^1 1 \, dx = 2, \\ w_1 x_1 + \dots + w_n x_n &= \int_{-1}^1 x \, dx = 0, \\ &\vdots \\ w_1 x_1^m + \dots + w_n x_n^m &= \int_{-1}^1 x^m \, dx = \begin{cases} 0 & \text{όταν } m = \text{περιττός} \\ \frac{1}{1+m} & \text{όταν } m = \text{άρτιος.} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.72)$$

Έχει αποδειχθεί ότι οι ρίζες των πολυωνύμων Legendre n βαθμού αποτελούν τα σημεία x_i που επαληθεύουν το σύστημα εξισώσεων (1.72).



(α) Ένα σημείο ολοκλήρωσης

(β) Δύο σημεία ολοκλήρωσης

Σχήμα 1.4: Ολοκλήρωση Gauss με ένα και δυο σημεία ολοκλήρωσης (Καρύδης, 2005).

Πολυώνυμα Legendre $P_n(x)$

Τα πολυώνυμα Legendre είναι ορθογώνια στο διάστημα $[-1,1]$ ως προς σταθερή συνάρτηση βάρους $w(x)=1$

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases} \quad (1.73)$$

Προκύπτουν με διαδοχική εφαρμογή της επαναληπτικής σχέσης:

$$P_n(x) = \frac{(2n-1)x}{n} P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x), \quad (1.74)$$

όπου $P_0(x)=1$ και $P_1(x)=x$

Τα αντίστοιχα βάρη w_i των ριζών x_i ($i=1,2,\dots,n$) υπολογίζονται ή δίνονται από πίνακες.

$$w_i = \frac{2}{(1-x_i^2)[P_n'(x_i)]^2}. \quad (1.75)$$

Ισχύει ότι:

- Τα βάρη w_i είναι πάντα μεγαλύτερα του μηδενός,
- Οι ρίζες x_i είναι πραγματικές και συμμετρικές ως προς το μηδέν,
- Τα βάρη w_i που αντιστοιχούν σε συμμετρικές ρίζες είναι ίσα μεταξύ τους.

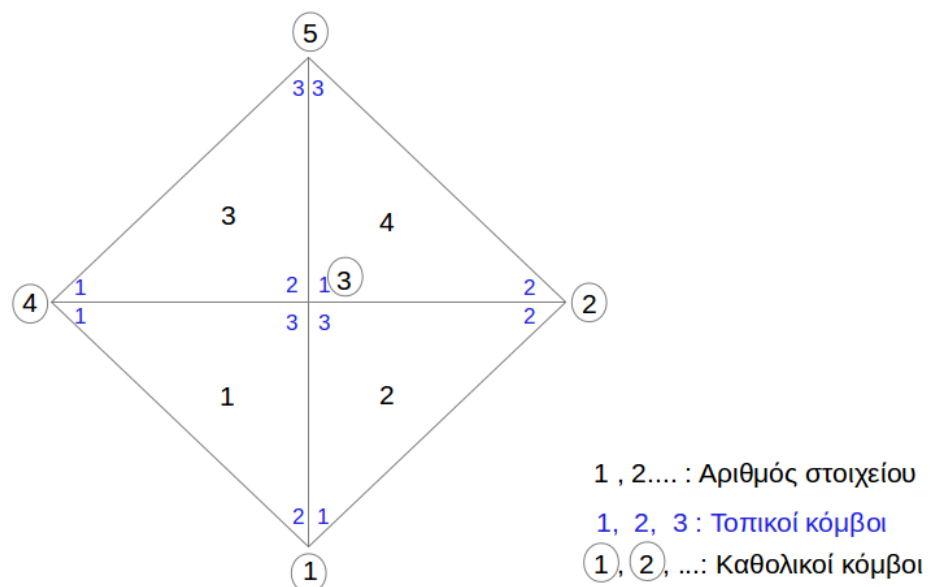
Η επιλογή της μεθόδου έγινε με κριτήριο ότι δίνει τη μεγαλύτερη ακρίβεια από κάθε άλλη μέθοδο που χρησιμοποιεί τον ίδιο αριθμό σημείων. Αξίζει να σημειωθεί ότι η μέθοδος δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τις περιπτώσεις που η συνάρτηση δίνεται με τις τιμές της σε ορισμένα σημεία x_i , τα οποία δεν συμπίπτουν με τις ρίζες των πολυωνύμων Legendre, είναι όμως η βέλτιστη για την περίπτωση που η $f(x)$ δίνεται με τον αναλυτικό της τύπο.

Πίνακας 1.1: Ολοκλήρωση κατά Gauss-Legendre, συντεταγμένες σημείων και βάρη.

Τάξη ολοκλήρωσης n	Σημεία ολοκλήρωσης x_i	Βάρη w_i
1	$x_1 = 0.00000000$	$w_1 = 2.00000000$
2	$-x_1 = x_2 = 0.57735027$	$w_1 = w_2 = 1.00000000$
3	$-x_1 = x_3 = 0.77459667$	$w_1 = w_3 = 0.55555556$
	$x_2 = 0.00000000$	$w_2 = 0.88888889$
4	$-x_1 = x_4 = 0.86113631$	$w_1 = w_4 = 0.34785485$
	$-x_2 = x_3 = 0.33998104$	$w_2 = w_3 = 0.65214515$
5	$-x_1 = x_5 = 0.90617985$	$w_1 = w_5 = 0.23692689$
	$-x_2 = x_4 = 0.53846931$	$w_2 = w_4 = 0.47862867$
	$x_3 = 0.00000000$	$w_0 = 0.56888889$
6	$-x_1 = x_6 = 0.93246951$	$w_1 = w_6 = 0.17132449$
	$-x_2 = x_5 = 0.66120939$	$w_2 = w_5 = 0.36076157$
	$-x_3 = x_4 = 0.23861919$	$w_3 = w_4 = 0.46791396$

1.7 Συνάθροιση

Σύμφωνα με τις προηγούμενες παραγράφους η εξαγωγή του μητρώου του μοντέλου των πεπερασμένων στοιχείων για ένα οποιοδήποτε τυχαίο στοιχείο είναι εύκολη υπόθεση. Στη ενότητα αυτή περιγράφεται η διαδικασία συνάθροισης των μητρώων των στοιχείων στους κόμβους που είναι κοινοί σε γειτονικά στοιχεία. Κάθε κόμβος αριθμείται με έναν καθολικό αριθμό που αφορά ολόκληρο το σύστημα και με έναν τοπικό αριθμό που αφορά κάθε στοιχείο. Έτσι ο καθολικός κόμβος 1 είναι ο τοπικός κόμβος 2 του στοιχείου 1 και ο τοπικός κόμβος 1 του στοιχείου 2. Σημειώνεται ότι η τοπική αρίθμηση ενός στοιχείου γίνεται πάντα με την ίδια κατεύθυνση, αντίστροφα της φοράς των δεικτών του ρολογιού και πρώτος κόμβος θεωρείται αυτός που λαμβάνει την μικρότερη τιμή της x συντεταγμένης. Στην περίπτωση που δύο κόμβοι ενός στοιχείου έχουν ίδια τιμή της x συντεταγμένης κριτήριο είναι η μικρότερη τιμή της συντεταγμένης y .



Σχήμα 1.5: Διακριτοποίηση σε τριγωνικά στοιχεία.

Πίνακας 1.2: Σύνδεση κόμβων τριγωνικών στοιχείων.

Αριθμός στοιχείου	Τοπική αρίθμηση κόμβων		
1	4	1	3
2	1	2	3
3	4	3	5
4	3	2	5

Έστω ότι αναζητείται το μητρώο στιβαρότητας του κόμβου με καθολική αρίθμηση 3, ενώ δεν ασκείται δύναμη στο χωρίο ($F=0$). Ο εν λόγω κόμβος παρουσιάζεται στα στοιχεία 1, 2 3 και 4. Τα μητρώα στιβαρότητας αυτών των στοιχείων έχουν υπολογιστεί με βάση την ασθενή μορφή της εξίσωσης κίνησης και τις συναρτήσεις σχήματος. Για έναν βαθμό ελευθερίας, u_i , ανά κόμβο τα μητρώα στιβαρότητας των στοιχείων αυτών δίνονται στη γενική τους μορφή:

$$\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_4 \\ u_1 \\ u_3 \end{Bmatrix} = 0 \quad \begin{bmatrix} k_{11}^2 & k_{12}^2 & k_{13}^2 \\ k_{21}^2 & k_{22}^2 & k_{23}^2 \\ k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = 0 \quad (1.76)$$

$$\begin{bmatrix} k_{11}^3 & k_{12}^3 & k_{13}^3 \\ k_{21}^3 & k_{22}^3 & k_{23}^3 \\ k_{31}^3 & k_{32}^3 & k_{33}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_4 \\ u_3 \\ u_5 \end{Bmatrix} = 0 \quad \begin{bmatrix} k_{11}^4 & k_{12}^4 & k_{13}^4 \\ k_{21}^4 & k_{22}^4 & k_{23}^4 \\ k_{31}^4 & k_{32}^4 & k_{33}^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_2 \\ u_5 \end{Bmatrix} = 0$$

Όπου ο άνω δείκτης συμβολίζει τον αριθμό του στοιχείου. Πρέπει να σημειωθεί ότι οι πρωτεύουσες μεταβλητές u στη παραπάνω εξίσωση έχουν αναγραφεί με την καθολική αρίθμηση. Γενικά για τη μετατόπιση στον πρώτο κόμβο ισχύει:

$$u_1 = u_2^1 = u_1^2. \quad (1.77)$$

Το συνολικό μητρώο στιβαρότητας είναι:

$$\begin{bmatrix} k_{22}^1 + k_{11}^2 & k_{12}^2 & k_{23}^1 + k_{13}^2 & k_{21}^1 & 0 \\ k_{21}^2 & k_{22}^2 + k_{22}^4 & k_{23}^2 + k_{21}^4 & 0 & k_{23}^4 \\ k_{32}^1 + k_{31}^2 & k_{32}^2 + k_{12}^4 & k_{33}^1 + k_{23}^2 + k_{22}^3 + k_{11}^4 & k_{31}^1 + k_{21}^3 & k_{23}^3 + k_{13}^4 \\ k_{12}^1 & 0 & k_{13}^1 + k_{12}^3 & k_{11}^1 + k_{11}^3 & k_{13}^3 \\ 0 & k_{32}^4 & k_{32}^3 + k_{31}^4 & k_{31}^3 & k_{33}^3 + k_{33}^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = 0 \quad (1.78)$$

Με την ίδια διαδικασία της αντιστοίχισης των κόμβων από τοπικούς σε γενικούς προκύπτουν τα μητρώα του ολικού συστήματος. Το αποτέλεσμα είναι ένα σύστημα ίδιου αριθμού εξισώσεων με τον καθολικό αριθμό των κόμβων του συστήματος. Το σύστημα στη γενική του μορφή είναι:

$$[K] \cdot \{u\} = \{F\}. \quad (1.79)$$

1.8 Εφαρμογή συνοριακών συνθηκών

Όπως αναφέρθηκε στις προηγούμενες ενότητες οι συνοριακές συνθήκες μπορούν να είναι “φυσικές” ή συνθήκες Neumann όταν είναι δεδομένες δυνάμεις σε κάποιο σημείο ή πάνω σε μια επιφάνεια είτε “βασικές” ή συνθήκες Dirichlet όταν είναι δεδομένες οι πρωτεύουσες μεταβλητές, δηλαδή οι μετατοπίσεις. Η εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων πραγματοποιείται συνήθως με την εφαρμογή τους στα μητρώα.

Στην περίπτωση των συνθηκών Dirichlet, αν οι μετατοπίσεις, m βαθμών ελευθερίας του συστήματος είναι δεδομένες, τότε το σύστημα n εξισώσεων μετασχηματίζεται σε ένα σύστημα $n-m$ εξισώσεων. Έτσι αφαιρούνται οι γραμμές και οι στήλες των μητρώων που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας των οποίων οι μετατοπίσεις είναι γνωστές και έπειτα λύνεται το σύστημα για τους άγνωστους βαθμούς ελευθερίας. Αφού ληφθούν οι λύσεις για τις άγνωστες μετατοπίσεις, με χρήση του συνολικού μητρώου που περιέχει και τους δεσμευμένους βαθμούς ελευθερίας μπορούν να προσδιοριστούν οι δυνάμεις στις στηρίξεις. Για παράδειγμα για τον κόμβο m ισχύει:

$$F_m = \sum_{i=1}^n K_{mi} u_i. \quad (1.80)$$

Ωστόσο συνήθως χρησιμοποιείται ένας διαφορετικός τρόπος για να μην τροποποιείται ο αριθμός των προς επίλυση εξισώσεων. Έστω ότι η μετατόπιση του m βαθμού ελευθερίας είναι γνωστή και ίση με d . Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο μεταβάλλεται το διάνυσμα φόρτισης έτσι ώστε στη θέση m του μητρώου η τιμή της δύναμης να λαμβάνει την γνωστή τιμή της μετατόπισης d , ενώ στις υπόλοιπες γραμμές λαμβάνονται σαν καινούργια στοιχεία τα εξής:

$$\bar{F}_i = F_i - K_{ij}d \text{ για } i \neq j \quad \text{και} \quad \bar{F}_m = d. \quad (1.81)$$

Τέλος, η γραμμή και η στήλη του μητρώου στιβαρότητας K που αντιστοιχεί στη γνωστή μετατόπιση μηδενίζεται, ενώ ο διαγώνιος όρος του λαμβάνει τιμή ίση με τη μονάδα. Ισοδύναμα η τροποποίηση του μητρώου στιβαρότητας γίνεται ως εξής:

$$K_{im} = K_{mi} = 0 \text{ για } i \neq m \text{ και } K_{mm} = 1. \quad (1.82)$$

Η εφαρμογή της συνθήκης Neumann είναι ευκολότερη και εφαρμόζεται με την απευθείας προσθήκη της τιμής της επιβαλλόμενης δύναμης στην αντίστοιχη θέση στο διάνυσμα F . Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δίνεται στο είδος των δυνάμεων που ενεργούν στο σύνορο. Αυτές μπορεί να είναι συγκεντρωμένα φορτία, επιφανειακά φορτία ή παραμένουσες τάσεις. Στην περίπτωση των συγκεντρωμένων δυνάμεων δεν απαιτείται κανένας περαιτέρω υπολογισμός και η δύναμη απλά τοποθετείται στη συγκεκριμένη θέση στο διάνυσμα. Αντίθετα στην περίπτωση των επιφανειακών φορτίων η ανάλυση είναι περισσότερο σύνθετη. Μια επιφανειακή φόρτιση P που ασκείται στην επιφάνεια ενός στοιχείου μοιράζεται σε μεμονωμένα φορτία που έχουν τη διεύθυνση της φόρτισης στους κόμβους του στοιχείου.

Η κατανομή μπορεί να υπολογιστεί με βάση τη σχέση:

$$\oint_{S^e} \mathbf{P} [N]^T dS, \quad (1.83)$$

όπου S είναι η επιφάνεια του στοιχείου και N οι συναρτήσεις σχήματος του στοιχείου. Το ολοκλήρωμα αυτό είναι επιφανειακό και μπορεί να υπολογιστεί με την αριθμητική ολοκλήρωση Gauss. Οι δυνάμεις που θα προκύψουν από την αριθμητική ολοκλήρωση θα αντιστοιχούν στους κόμβους του στοιχείου και μπορούν εύκολα να αντικατασταθούν στο διάνυσμα δύναμης.

1.9 Δυναμικά προβλήματα

Στην ενότητα αυτή θα αναπτυχθούν οι σχέσεις για τη δυναμική ανάλυση προβλημάτων μηχανικής και θα αποδειχθούν οι συνθήκες ορθογωνικότητας ως προς τα μητρώα μάζας και στιβαρότητας. Τέλος θα αποδειχθεί η άμεση απόρροια των συνθηκών ορθογωνικότητας, δηλαδή ότι τα μητρώα που προκύπτουν από το μετασχηματισμό ομοιότητας των μητρώων μάζας και στιβαρότητας με τη χρήση του ιδιομορφικού μητρώου είναι διαγώνια.

Ο στόχος της δυναμικής ανάλυσης στη μηχανική των κατασκευών είναι να προσδιοριστούν οι ιδιομορφές και οι συχνότητες ενός αντικειμένου ή ενός δομικού στοιχείου του κατά την ελεύθερη ταλάντωση. Η χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων για αυτήν την ανάλυση, γίνεται με σκοπό να παρακαμφθούν προβλήματα που ανακύπτουν από την πολυπλοκότητα του σχήματος του αντικειμένου που αναλύεται αλλά και λόγω της ευκολίας της μεθόδου. Οι τύποι των εξισώσεων που προκύπτουν στην δυναμική ανάλυση είναι εκείνες που παρατηρούνται σε προβλήματα ιδιοτιμών. Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα που προέρχονται από την επίλυση του συστήματος αντιπροσωπεύουν τις συχνότητες και τις αντίστοιχες μορφές παραμόρφωσης. Συχνότερα, το μόνο που χρειάζεται στη δυναμική ανάλυση είναι οι χαμηλότερες συχνότητες επειδή είναι οι πιο γνωστοί τρόποι με τους οποίους θα δονείται το αντικείμενο.

Η γενική μορφή της εξίσωσης κίνησης για οποιοδήποτε γραμμικό σύστημα σε μορφή πινάκων, μετά τη διακριτοποίηση του χωρίου και την έκφραση της στην ασθενή διατύπωση είναι:

$$[K]\{u\} + [M]\{\ddot{u}\} = \{F\}, \quad (1.84)$$

όπου $[K]$ το μητρώο στιβαρότητας του συστήματος, $[M]$ είναι το μητρώο μάζας του συστήματος, $\{F\}$ είναι το διάνυσμα μιας χρονικά μεταβαλλόμενης, εξωτερικά επιβαλλόμενης φόρτισης και τα $\{u\}$ και $\{\ddot{u}\}$ είναι τα διανύσματα της μετατόπισης και επιτάχυνσης αντίστοιχα. Η σχέση (1.84) είναι στην ουσία ένα σύστημα n γραμμικών εξισώσεων, με το n να συμβολίζει τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας του συστήματος.

Στην περίπτωση της μηδενικής εξωτερικά επιβαλλόμενης δύναμης, $\{F\}=0$, το πρόβλημα ανάγεται στην περίπτωση της ταλάντωσης του συστήματος-σώματος απουσία αιτίου διέγερσης.

Μαθηματικά το πρόβλημα περιγράφεται πλέον από σύστημα n ομογενών υπερβολικών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Σε κάθε εξίσωση οι προς προσδιορισμό άγνωστες είναι η μετατόπιση και η επιτάχυνση του εκάστοτε βαθμού ελευθερίας.

Η λύση πρέπει να είναι της μορφής:

$$u_j = de^{i\omega t} = d(\cos \omega t + i \sin \omega t). \quad (1.85)$$

Στην περίπτωση του συστήματος με πολλούς βαθμούς ελευθερίας, όπως το υπό μελέτη πρόβλημα, για κάθε βαθμό ελευθερίας, συνεπώς για κάθε εξίσωση αντιστοιχεί μια ιδιοσυχνότητα η οποία ονομάζεται χαρακτηριστική συχνότητα ελεύθερης ταλάντωσης ω_j . Σε κάθε ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης αντιστοιχεί ένα ιδιοδιάνυσμα $\{V\}$ το οποίο καλείται ιδιομορφή του συστήματος στην εκάστοτε ιδιοτιμή. Όταν ένα σύστημα με πολλούς βαθμούς ελευθερίας, ταλαντώνεται με συχνότητα ταλάντωσης ίση με κάποια από τις ιδιοσυχνότητες του, η απόκριση του σε κάθε χρονική στιγμή δίνεται ως γινόμενο μιας χωρικής συνάρτησης $g_i(t)$ η οποία είναι μοναδική για κάθε συγκεκριμένη ιδιομορφή ταλάντωσης, με μια χωρική συνάρτηση η οποία είναι η i ιδιομορφή του συστήματος.

$$\{u(t)\} = g_i(t)\{V_i\} \quad (1.86)$$

Με αντικατάσταση της γενικής μορφής της αναμενόμενης αρμονικής λύσης (Σχέση 1.85) στην εξίσωση κίνησης (1.84) για $F=0$, λαμβάνεται το πρόβλημα ιδιοτιμών του συστήματος:

$$[K]\{V_i\} = \omega_i^2[M]\{V_i\}. \quad (1.87)$$

Με επίλυση του προβλήματος ιδιοτιμών που προκύπτει μπορούν να προσδιοριστούν τόσο οι ιδιοσυχνότητες όσο και οι ιδιοτιμές.

$$([K] - \omega_i^2[M])\{V_i\} = 0. \quad (1.88)$$

Είναι γνωστό ότι για να προσδιοριστεί μια λύση θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$\det([K] - \omega_i^2[M]) = 0. \quad (1.89)$$

Η αλγεβρική εξίσωση (1.89) είναι πολυωνυμική, βαθμού n ως προς τις ιδιοσυχνότητες ω_i^2 και ονομάζεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος ή εξίσωση συχνοτήτων. Οι ρίζες του είναι πραγματικές και θετικές καθώς τόσο το μητρώο στιβαρότητας $[K]$, όσο και το μητρώο μάζας $[M]$ είναι θετικά ορισμένα (Larson & Bengzon, 2013). Στα προβλήματα που σχετίζονται με κατασκευές το μητρώο στιβαρότητας είναι εξ' ορισμού θετικά ορισμένο με την παραδοχή ότι η κατασκευή δεν κινείται ως άκαμπτο σώμα, ενώ το μητρώο μάζας δεδομένου ότι εξαρτάται από τις συγκεντρωμένες μάζες δεν μπορεί παρά να είναι θετικά ορισμένο.

Μετά την επίλυση της σχέσης (1.89) προσδιορίζονται τόσες ιδιοσυχνότητες όσοι και οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος, καθώς και οι αντίστοιχες ιδιομορφές $\{V_i\}$ όπου $i=1,2,\dots,n$ που αντιστοιχεί σε κάθε ιδιοτιμή. Οι ιδιοσυχνότητες σχετίζονται με τη δυσκαμψία και τη μάζα του υλικού, δηλαδή τη φύση του και είναι οι συχνότητες ελεύθερης ταλάντωσης. Τα ιδιοδιανύσματα είναι ουσιαστικά οι χαρακτηριστικές μορφές παραμόρφωσης του συστήματος, δεν αποδίδουν όμως με

απόλυτα μεγέθη τις παραμορφώσεις αυτές αλλά τις αναλογίες μεταξύ των παραμορφώσεων των βαθμών ελευθερίας. Κάθε ιδιοσυχνότητα είναι εν γένει διάφορη από μια άλλη. Υπάρχει όμως η περίπτωση ιδιοσυχνότητες που αντιστοιχούν σε διαφορετικές μορφές ταλάντωσης να έχουν πολύ κοντινές τιμές (Τσαμασφύρος & Θεοτόκογλου, 2005). Για διακεκριμένες ιδιοσυχνότητες του συστήματος τα ιδιοδιανύσματα είναι ανά γραμμικώς ανεξάρτητα μεταξύ τους. Ως εκ τούτου κάθε γραμμικός συνδυασμός τους, συνιστά ένα στοιχείο του διανυσματικού χώρου που εμπεριέχει το σύνολο των δυνατών μορφών παραμόρφωσης του συστήματος και κάθε στοιχείο αυτού του χώρου γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των n ιδιοδιανυσμάτων.

1.9.1 Ορθογωνικότητα των ιδιομορφών

Οι κύριοι τρόποι ταλάντωσης συστημάτων με πολλούς βαθμούς ελευθερίας χαρακτηρίζονται από μια βασική μαθηματική ιδιότητα γνωστή ως ορθογωνικότητα ως προς τα μητρώα μάζας και στιβαρότητας. Διατυπώνοντας την εξίσωση (1.87) για την ιδιομορφή i :

$$[K]\{V_i\} = \omega_i^2 [M]\{V_i\}, \quad (1.90)$$

αντίστοιχα αν η εξίσωση (1.87) αναγραφεί για την ιδιομορφή j :

$$[K]\{V_j\} = \omega_j^2 [M]\{V_j\}. \quad (1.91)$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (1.90) με $\{V_j\}^T$ και την εξίσωση (1.91) με $\{V_i\}^T$ αντίστοιχα λαμβάνονται οι σχέσεις:

$$\{V_j\}^T [K]\{V_i\} = \omega_i^2 \{V_j\}^T [M]\{V_i\}, \quad (1.92)$$

και

$$\{V_i\}^T [K]\{V_j\} = \omega_j^2 \{V_i\}^T [M]\{V_j\}. \quad (1.93)$$

Από τη Γραμμική Άλγεβρα είναι γνωστό ότι ισχύει $[A]^T [B] [C] = [C]^T [B] [A]$ όπου οι πίνακες $[A]$, $[B]$ και $[C]$ είναι όποιοι πίνακες των οποίων το γινόμενο είναι ορισμένο. Συνεπώς αφαιρώντας την ανεστραμμένη εξίσωση (1.92) από την (1.93), προκύπτει:

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \{V_i\}^T [M]\{V_j\} = 0, \quad i \neq j. \quad (1.94)$$

Σύμφωνα με την αρχική υπόθεση, $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$, το οποίο για σύστημα με θετικές ιδιοσυχνότητες σημαίνει $\omega_i \neq \omega_j$, προκύπτει η απόδειξη ισχύος της συνθήκης ορθογωνικότητας ως προς το μητρώο μάζας:

$$\{V_i\}^T [M]\{V_j\} = 0, \quad i \neq j. \quad (1.95)$$

Για ένα σύστημα n βαθμών ελευθερίας ορίζεται ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων $[V]$ με διαστάσεις $n \times n$ η κάθε στήλη του οποίου αντιστοιχεί σε μια συχνότητα, ενώ η κάθε γραμμή αντιστοιχεί σε κάθε βαθμό ελευθερίας.

$$[V] = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & \cdots & V_{1n} \\ V_{21} & V_{22} & \cdots & V_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{n1} & V_{n2} & \cdots & V_{nn} \end{bmatrix}. \quad (1.96)$$

Σύμφωνα με τη συνθήκη ορθογωνικότητας (Εξίσωση (1.95)), κάθε όρος του τριπλού γινομένου $\{V_i\}^T [M] \{V_j\}$ εκτός αυτών, των διαγωνίων όρων ισούται με μηδέν. Συμπερασματικά ο πίνακας που προκύπτει από το γινόμενο $\{V_j\}^T [M] \{V_i\}$ είναι διαγώνιος με τους μη μηδενικούς όρους να δίνονται από τη σχέση:

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & D_{nn} \end{bmatrix} \text{ όπου } D_{ii} = \{V_i\}^T [M] \{V_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.97)$$

Δεδομένου ότι οι ιδιομορφές δεν αποδίδουν με απόλυτα μεγέθη τις παραμορφώσεις, οι τιμές των ιδιοδιανυσμάτων μπορούν να επιλεγούν κατά τέτοιο τρόπο ώστε τα διαγώνια στοιχεία της σχέσης (1.97) να παίρνουν οποιαδήποτε επιθυμητή τιμή. Συγκεκριμένα αν επιλεγεί:

$$D_{ii} = \{V_i\}^T [M] \{V_i\} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.98)$$

Τότε τα ιδιοδιανύσματα καλούνται ορθοκανονικά και το γινόμενο των τριών πινάκων παίρνει τη μορφή:

$$[D] = \{V_i\}^T [M] \{V_i\} = [I] \text{ όπου } [I] = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.99)$$

Οι διαστάσεις του πίνακα $[I]$ είναι $n \times n$.

Για τον όρο $\{V\}^T [K] \{V\}$ δεδομένου ότι το μητρώο στιβαρότητας είναι συμμετρικό συνάγεται ότι και το γινόμενο θα είναι επίσης συμμετρικό. Ακλουθώντας την ίδια διαδικασία που αναπτύχθηκε για το γινόμενο $\{V_j\}^T [M] \{V_j\}$ είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι και ο πίνακας που προκύπτει από το γινόμενο $\{V_i\}^T [K] \{V_i\}$, είναι διαγώνιος. Πολλαπλασιάζοντας την σχέση (1.87) με $\{V_i\}^T$ λαμβάνεται:

$$\{V_i\}^T [K] \{V_i\} = \omega_i^2 \{V_i\}^T [M] \{V_i\}. \quad (1.100)$$

Στην περίπτωση που ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων έχει κανονικοποιηθεί με βάση το μητρώο μάζας ισχύει:

$$\{V_i\}^T [K] \{V_i\} = \omega_i^2. \quad (1.101)$$

Συνεπώς το γινόμενο $\{V_j\}^T [K] \{V_j\}$ παράγει έναν διαγώνιο πίνακα με τα διαγώνια στοιχεία ίσα με το τετράγωνο των φυσικών ιδιοσυχνοτήτων:

$$\{V\}^T [K] \{V\} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega_n^2 \end{bmatrix}. \quad (1.102)$$

Αφού οι ιδιομορφές δεν είναι παρά μια αναλογία των μετατοπίσεων και όχι οι πραγματικές απόλυτες τιμές τους, ακολουθείται συνήθως μια διαδικασία κανονικοποίησης των ιδιοτιμών με σκοπό να προκύψουν ομοιόμορφα αποτελέσματα. Οι βασικότερες διαδικασίες κανονικοποίησης είναι:

- Κανονικοποίηση σε σχέση με ένα καθορισμένο βαθμό ελευθερίας: Στην περίπτωση αυτή η μετατόπιση του επιλεγμένου βαθμού ελευθερίας λαμβάνει τιμή ίση με τη μονάδα, ενώ οι μετατοπίσεις των υπόλοιπων βαθμών ελευθερίας υπολογίζονται ως ποσοστά της μετατόπισης του επιλεγμένου βαθμού ελευθερίας.
- Κανονικοποίηση σε σχέση με τη μέγιστη τιμή του ιδιοδιανύσματος: Με τη διαδικασία αυτή ο βαθμός ελευθερίας με τη μεγαλύτερη τιμή ιδιοδιανύσματος λαμβάνει τιμή μετατόπισης ίση με τη μονάδα, ενώ οι μετατοπίσεις των υπόλοιπων βαθμών ελευθερίας υπολογίζονται ως ποσοστά της μετατόπισης του συγκεκριμένου βαθμού ελευθερίας.
- Κανονικοποίηση με βάση το μητρώο μάζας: Σε αυτή την περίπτωση όλα τα στοιχεία του πίνακα των ιδιοδιανυσμάτων διαιρούνται με την τετραγωνική ρίζα $\sqrt{\{V_i\}^T [M] \{V_i\}}$. Με τον τρόπο αυτό προκύπτουν ορθογωνικά κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα με βάση το μητρώο μάζας (Hutton, 2004). Αναλυτικότερα η σχέση της διαδικασίας δίνεται:

$$V_j^{(i)} = \frac{V_j^{(i)}}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n m_{jk} V_j^{(i)} V_k^{(i)}}} \quad (1.103)$$

Όπου ο δείκτης i αναφέρεται στην εκάστοτε ιδιοτιμή και λαμβάνει τις τιμές $i=1,2,\dots,n$.

1.10 Χρονικά εξαρτημένα προβλήματα

Όλα τα φορτία που θεωρήθηκαν στις προηγούμενες ενότητες ήταν στατικά. Στην πράξη, ωστόσο, τα μηχανικά προβλήματα ανάγονται σε προβλήματα που επιδέχονται δυναμικές διαταραχές προκαλούμενες από εξωτερικές δυνάμεις οι οποίες εξαρτώνται από το χρόνο. Συνεπώς και οι μετατοπίσεις είναι συναρτήσεις του χρόνου. Δυναμικά φορτία μπορούν να δημιουργηθούν, για παράδειγμα, σε μηχανές που βρίσκονται σε κατάσταση εκτός ισορροπίας, από κινούμενα οχήματα, ριπές ανέμου, σεισμικές διαταραχές, εκρήξεις ή ακόμα και από ήχο. Έτσι η δυναμική των κατασκευών εξετάζει τις χρονικά εξαρτημένες κινήσεις των κατασκευών και αναλύει τις εσωτερικές δυνάμεις. Στόχος της είναι να προσδιοριστεί η επίδραση των ταλαντώσεων στην απόδοση της κατασκευής. Οι ταλαντώσεις για παράδειγμα μιας γέφυρας μπορεί να είναι δυσάρεστες ή ακόμα και κρίσιμες για τη στατική της, ενώ οι δονήσεις μιας μεμβράνης μπορεί να είναι απαραίτητες για την εκπλήρωση της λειτουργίας της. Στην ενότητα αυτή γίνεται αναφορά στις μαθηματικές μεθόδους ολοκλήρωσης στο χρόνο για τον προσδιορισμό των μετατοπίσεων κατασκευών που βρίσκονται υπό την επίδραση χρονικά εξαρτώμενων δυνάμεων.

1.10.1 Η μέθοδος Newmark

Το 1959 ο Newmark παρουσίασε ένα σύνολο μεθόδων ολοκλήρωσης για την επίλυση των δυναμικών προβλημάτων των κατασκευών (Wriggers, 2008). Τα τελευταία χρόνια οι μέθοδοι αυτοί χρησιμοποιήθηκαν για την ανάλυση πολλών προβλημάτων της μηχανικής. Πολλοί ήταν οι ερευνητές που τροποποίησαν και βελτίωσαν τις μεθόδους. Βασική παραδοχή της μεθόδου είναι η προσέγγιση της τρίτης παραγώγου της μετατόπισης με τη σχέση:

$$\ddot{u} = \frac{\dot{u}_{t+\Delta t} - \dot{u}_t}{\Delta t}. \quad (1.104)$$

Θεωρούμε τις γραμμικές δυναμικές εξισώσεις γραμμένες στην ακόλουθη γενική μορφή :

$$[K]u_{t+\Delta t} + [M]\dot{u}_{t+\Delta t} = F_{t+\Delta t} \quad (1.105)$$

Όπου $[K]$ το μητρώο στιβαρότητας, $[M]$ το μητρώο μάζας, και F το διάνυσμα της εξωτερικής δύναμης. Οι συμβολισμοί u_t , \dot{u}_t και \ddot{u}_t δηλώνουν τη μετατόπιση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση, αντίστοιχα. Με χρήση του αναπτύγματος Taylor για τη μετατόπιση και την ταχύτητα λαμβάνονται οι ακόλουθες σχέσεις:

$$u_{t+\Delta t} = u_t + \Delta t \dot{u}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_t + \frac{\Delta t^3}{6} \ddot{\ddot{u}}_t + \dots, \quad (1.106)$$

$$\dot{u}_{t+\Delta t} = \dot{u}_t + \Delta t \ddot{u}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\ddot{u}}_t + \dots \quad (1.107)$$

Ο Newmark εξέφρασε τις εξισώσεις αυτές στην ακόλουθη μορφή, εισάγοντας τις σταθερές β και γ της μεθόδου:

$$u_{t+\Delta t} = u_t + \Delta t \dot{u}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_t + \beta \Delta t^3 \ddot{\ddot{u}}_t, \quad (1.108)$$

$$\dot{u}_{t+\Delta t} = \dot{u}_t + \Delta t \ddot{u}_t + \gamma \Delta t^2 \ddot{\ddot{u}}_t. \quad (1.109)$$

Με αντικατάσταση της εξίσωσης (1.104) στις σχέσεις (1.108) και (1.109) προκύπτουν οι σχέσεις του Newmark:

$$\dot{u}_{t+\Delta t} = \dot{u}_t + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{u}_t + \gamma \Delta t \ddot{u}_{t+\Delta t}, \quad (1.110)$$

$$u_{t+\Delta t} = u_t + \Delta t \dot{u}_t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{u}_t + \beta \Delta t^2 \ddot{u}_{t+\Delta t}. \quad (1.111)$$

Λύνοντας τη σχέση (1.111) ως προς $\ddot{u}_{t+\Delta t}$ λαμβάνεται εξίσωση:

$$\ddot{u}_{t+\Delta t} = \frac{u_{t+\Delta t}}{\beta \Delta t^2} - \frac{u_t}{\beta \Delta t^2} - \frac{\dot{u}_t}{\beta \Delta t} - \frac{1}{2\beta} \ddot{u}_t + \ddot{u}_t. \quad (1.112)$$

Το σύστημα εξισώσεων της σχέσης (1.105) με αντικατάσταση της (1.112) παίρνει τη μορφή:

$$\left([M] \frac{1}{\beta \Delta t^2} + [K]\right) u_{t+\Delta t} = [F_{t+\Delta t}] + [M] \frac{u_t}{\beta \Delta t^2} + [M] \frac{\dot{u}_t}{\beta \Delta t} + \left(1 + \frac{1}{2\beta}\right) [M] \ddot{u}_t. \quad (1.113)$$

Η σταθερότητα των μεθόδων ολοκλήρωσης είναι κρίσιμης σημασίας για την εφαρμογή τους. Οι παράμετροι β και γ επηρεάζουν τον τρόπο που μεταβάλλεται η επιτάχυνση σε ένα χρονικό διάστημα Δt και καθορίζουν τη σταθερότητα και την ακρίβεια της αριθμητικής ολοκλήρωσης. Η μέθοδος του Newmark για μηδενικό πίνακα απόσβεσης είναι οριακά ευσταθής όταν ισχύει:

$$\gamma \geq \frac{1}{2}, \beta \leq \frac{1}{2}, \Delta t \leq \frac{1}{\omega_{\max} \sqrt{(\gamma/2) - \beta}}, \quad (1.114)$$

όπου ω_{\max} συμβολίζει την μέγιστη συχνότητα του συστήματος.

Το κρίσιμο χρονικό βήμα καθορίζεται από τη φυσική συχνότητα του συστήματος. Όσο μεγαλύτερη είναι η φυσική συχνότητα τόσο μικρότερο χρονικό βήμα απαιτείται γιατί μεγάλη φυσική συχνότητα συνεπάγεται περισσότερο ταλαντωτική λύση τόσο στο χρόνο όσο και στο χώρο. Για να μπορέσει η μέθοδος να συλλάβει την ταλαντωτική κίνηση στο χρόνο απαιτείται το κατάλληλο χρονικό βήμα.

Έχει αποδειχθεί ότι για τιμές της σταθεράς γ μεγαλύτερες από $1/2$ επισέρχονται σφάλματα στη μέθοδο. Η μέθοδος είναι ευσταθής για κάθε συνθήκη όταν για τις σταθερές β και γ ισχύει:

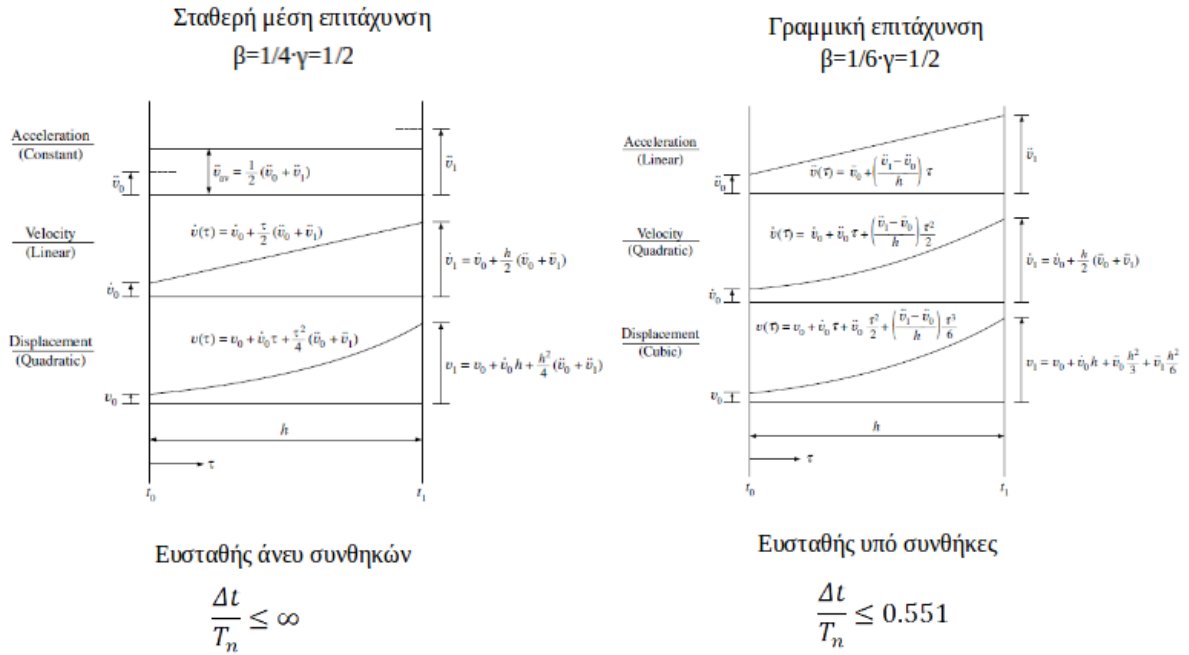
$$2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2}. \quad (1.115)$$

Για συστήματα με πολλούς βαθμούς ελευθερίας το όριο του χρονικού βήματος Δt που δίνεται στη σχέση (1.114) μπορεί να εκφραστεί με μια χρησιμότερη μορφή:

$$\frac{\Delta t}{T_{\min}} \leq \frac{1}{2\pi \sqrt{(\gamma/2) - \beta}}, \quad (1.116)$$

όπου T_{\min} είναι η ελάχιστη περίοδος της κατασκευής. Για μεγάλες κατασκευές το σύστημα εμπεριέχει ένα μεγάλο αριθμό περιόδων με αποτέλεσμα να είναι κρίσιμη η επιλογή παραμέτρων που θα καθιστούν τη μέθοδο ολοκλήρωσης ευσταθή ανεξάρτητα από τις συνθήκες.

Αρχικά ο Newmark είχε προτείνει τις τιμές των σταθερών $\gamma=1/2$ και $\beta=1/4$. Η μέθοδος που προκύπτει για αυτές τις τιμές των παραμέτρων ονομάζεται μέθοδος μέσης σταθερής επιταχύνσεως (Average acceleration method) και είναι ευσταθής για κάθε τιμή χρονικού βήματος. Στην περίπτωση που οι παράμετροι λαμβάνουν τις τιμές $\gamma=1/2$ και $\beta=1/6$ προκύπτει η μέθοδος της γραμμικής επιταχύνσεως (Linear acceleration method) (Huebner et al., 2001) η οποία είναι ευσταθής για $\Delta t/T_{\min} < 0.551$. Στο Σχήμα 1.6 παρουσιάζεται για κάθε μια από τις δύο μεθόδους ο τρόπος με τον οποίο μεταβάλλεται η επιτάχυνση κατά το διάστημα $\Delta t = \tau = h$, δηλαδή μεταξύ δυο διαδοχικών διακριτών τιμών του χρόνου t ως $t + \Delta t$. Στην πρώτη περίπτωση η επιτάχυνση παραμένει σταθερή και ίση με την μέση τιμή των \ddot{u}_t και $\ddot{u}_{t+\Delta t}$ στο χρονικό διάστημα Δt , ενώ στη δεύτερη περίπτωση η επιτάχυνση μεταβάλλεται γραμμικά ως προς το χρόνο από την τιμή \ddot{u}_t ως την τιμή $\ddot{u}_{t+\Delta t}$.

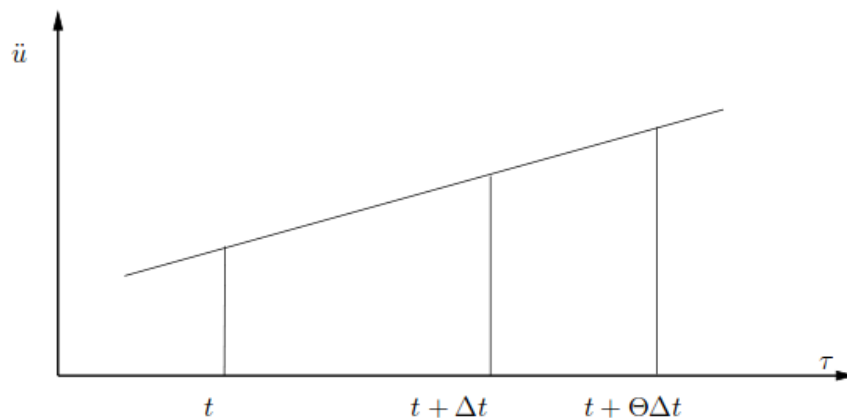


Σχήμα 1.6: Τρόπος μεταβολής της επιτάχυνσης ανάλογα με τις τιμές των σταθερών β, γ .

1.10.2 Η μέθοδος Wilson Θ

Η μέθοδος αυτή που αναπτύχθηκε από τον E. L. Wilson θεωρεί ότι η επιτάχυνση μεταβάλλεται γραμμικά για ένα εκτεταμένο χρονικό διάστημα από t έως $t+\theta\Delta t$, για $\theta \geq 1$. Αποτελεί ουσιαστικά μία επέκταση της μεθόδου της γραμμικής επιτάχυνση γιατί στην περίπτωση που το θ ισούται με τη μονάδα η μέθοδος ανάγεται στη μέθοδο γραμμικής επιτάχυνσης. Αν το τ συμβολίζει την αύξηση του χρόνου από t έως $t+\theta\Delta t$ τότε η επιτάχυνση για το χρονικό διάστημα αυτό σύμφωνα με την μέθοδο Wilson θ είναι:

$$\ddot{u}_{t+\tau} = \ddot{u}_t + \frac{\tau}{\theta \Delta t} (\ddot{u}_{t+\theta \Delta t} - \ddot{u}_t). \quad (1.117)$$



Σχήμα 1.7: Γραμμική μεταβολή της επιτάχυνσης για χρόνο από t ως $t+\theta\Delta t$.

Με δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις ως προς το χρόνο της εξίσωσης (1.117) μπορούν να υπολογιστούν οι σχέσεις για την ταχύτητα και την επιτάχυνση αντίστοιχα:

$$\dot{u}_{t+\tau} = \dot{u}_t + \ddot{u}_t \tau + \frac{\tau^2}{2\theta \cdot \Delta t} (\ddot{u}_{t+\theta \Delta t} - \ddot{u}_t), \quad (1.118)$$

και

$$u_{t+\tau} = u_t + \dot{u}_t \tau + \frac{\tau^2}{2} \ddot{u}_t + \frac{\tau^3}{6\theta \cdot \Delta t} (\ddot{u}_{t+\theta \Delta t} - \ddot{u}_t). \quad (1.119)$$

Θεωρώντας ότι $\tau = \theta \Delta t$ και αντικαθιστώντας στις σχέσεις για την μετατόπιση και την ταχύτητα λαμβάνονται οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\dot{u}_{t+\theta \Delta t} = \dot{u}_t + \frac{\theta \Delta t}{2} (\ddot{u}_{t+\theta \Delta t} + \ddot{u}_t), \quad (1.120)$$

$$u_{t+\theta \Delta t} = u_t + \theta \Delta t \dot{u}_t + \frac{\theta^2 \Delta t^2}{6} (\ddot{u}_{t+\theta \Delta t} + 2\ddot{u}_t). \quad (1.121)$$

Λύνοντας την (1.121) ως προς $\ddot{u}_{t+\theta \Delta t}$ και αντικαθιστώντας στην εξίσωση (1.120) αντίστοιχα λαμβάνονται οι βασικές σχέσεις της μεθόδου Wilson θ:

$$\ddot{u}_{t+\theta \Delta t} = \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} (u_{t+\theta \Delta t} - u_t) - \frac{6}{\theta \Delta t} \dot{u}_t - 2\ddot{u}_t, \quad (1.122)$$

$$\dot{u}_{t+\theta \Delta t} = \frac{3}{\theta \Delta t} (u_{t+\theta \Delta t} - u_t) - 2\dot{u}_t - \frac{\theta \Delta t}{2} \ddot{u}_t. \quad (1.123)$$

Με αντικατάσταση της βασικής σχέσης της μεθόδου Wilson θ (1.122) στην γενική μορφή του συστήματος εξισώσεων (1.105):

$$[K]u_{t+\theta \Delta t} + [M]\ddot{u}_{t+\theta \Delta t} = F_{t+\theta \Delta t},$$

$$\begin{aligned} & \left([K] + [M] \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} \right) u_{t+\theta \Delta t} \\ & = F_{t+\theta \Delta t} + \left([M] \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} u_t + [M] \frac{6}{\theta \Delta t} \dot{u}_t + 2[M]\ddot{u}_t \right). \end{aligned} \quad (1.124)$$

Η μέθοδος Wilson θ είναι ευσταθής ανεξαρτήτως συνθηκών όταν $\theta \geq 1.37$.

1.10.3 Σφάλματα στην αριθμητική ολοκλήρωση

Τα σφάλματα που εμφανίζονται κατά την αριθμητική ολοκλήρωση της εξίσωσης κίνησης μπορούν να καταταγούν σε τρεις κατηγορίες (Κατσιακαδέλης, 2012):

- (i) Σφάλμα σχετιζόμενα με στρογγυλοποιήσεις που οφείλονται σε επαναλαμβανόμενους υπολογισμούς. Θεωρούνται συνεπεία μικρού βήματος ολοκλήρωσης.
- (ii) Σφάλμα αποκοπής κατά την προσέγγιση των $u(t + \Delta t)$ και $\ddot{u}(t + \Delta t)$ με πεπερασμένο αριθμό όρων του αναπτύγματος τους σε σειρά Taylor.
- (iii) Σφάλμα που εισάγεται από την αντικατάσταση της διαφορικής εξίσωσης με εξίσωση διαφορών.

Η φύση του σφάλματος στρογγυλοποίησης είναι τυχαία και αντιμετωπίζεται με στατιστικές μεθόδους περιορίζεται χρησιμοποιώντας αριθμητική υψηλής ακριβείας κατά τους υπολογισμούς. Τα

σφάλματα αποκοπής συσσωρεύονται τοπικά σε κάθε βήμα ολοκλήρωσης. Το μέγεθος των σφαλμάτων αυτών αποτελεί μία καλή ένδειξη της ακρίβειας της μεθόδου, αρκεί η μέθοδος ολοκλήρωσης να είναι ευσταθής. Για να μελετηθεί η ευστάθεια της αριθμητικής μεθόδου πρέπει να είναι γνωστή η επιρροή του σφάλματος, που εισάγεται σ' ένα βήμα, στο αμέσως επόμενο του. Εάν το σφάλμα τείνει να αυξάνει, τότε η λύση σύντομα ξεπερνά κάθε άνω φράγμα και παύει να έχει νόημα. Στην περίπτωση αυτή θεωρείται ότι η μέθοδος είναι ασταθής (Κατσιακαδέλης, 2012).

1.11 Απαλοιφή Gauss

Για την επίλυση συστημάτων γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων υπάρχουν δυο γενικές μεθοδολογίες, οι άμεσες μέθοδοι και οι επαναληπτικές. Στις άμεσες μεθόδους επιδιώκεται ο μετασχηματισμός του αρχικού προβλήματος σε ένα ισοδύναμο με άνω ή κάτω τριγωνικούς πίνακες του οποίου η επίλυση απλοποιείται με τη χρήση της προς τα εμπρός ή προς τα πίσω αντικατάσταση. Αντίθετα οι επαναληπτικές μέθοδοι βασίζονται στη διαρκή βελτίωση μιας αρχικής προσεγγιστικής λύσης. Το πιθανό σφάλμα των άμεσων μεθόδων εισέρχεται μόνο από της στρογγυλοποίηση, ενώ στην περίπτωση των επαναληπτικών μεθόδων υπεισέρχεται και σφάλμα αποκοπής (Νταουτίδης et al., 2010).

Στην παρούσα εργασία για την επίλυση χρησιμοποιείται η απαλοιφή Gauss επειδή αποτελεί την κύρια άμεση μέθοδο αριθμητικής επίλυσης γραμμικών συστημάτων με πυκνούς πίνακες, δηλαδή πίνακες που δεν έχουν κάποια συγκεκριμένη δομή. Εφαρμόζεται υπό την προϋπόθεση ότι το γραμμικό σύστημα εξισώσεων έχει μοναδική λύση δηλαδή όταν ισχύει $\det(K) \neq 0$. Αποτελείται από δύο στάδια:

Το στάδιο της τριγωνοποίησης στο οποίο το αρχικό γραμμικό σύστημα $[A] \cdot \{x\} = \{b\}$ μετατρέπεται σε ένα ισοδύναμο σύστημα $[U] \cdot \{x\} = \{f\}$ όπου U είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας και το b είναι γνωστό διάνυσμα. Στην περίπτωση που τα δύο συστήματα έχουν την ίδια λύση καλούνται ισοδύναμα.

Το στάδιο της προς τα πίσω αντικατάστασης στο οποίο υπολογίζεται η λύση x του γραμμικού συστήματος $[U] \cdot \{x\} = \{f\}$ χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο της προς τα πίσω αντικατάστασης.

Ο αλγόριθμος του σταδίου της τριγωνοποίησης περιγράφεται έχει ως εξής:

(α) Ελέγχεται αν η τιμή του $k_{l,1}$ είναι διάφορη του μηδενός. Σε αντίθετη περίπτωση αναζητείται η επόμενη εξίσωση του συστήματος, έστω ότι εντοπίζεται στη m γραμμή του πίνακα, της οποίας ο πρώτος συντελεστής $k_{m,1}$ είναι διάφορος του μηδενός και ανταλλάσσουμε την πρώτη με την m εξίσωση του συστήματος. Ο νέος πίνακας που προκύπτει είναι ο πίνακας $K^{(l)}$ του συστήματος με στοιχεία $k_{i,j}^{(l)}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{bmatrix} k_{1,1}^{(1)} & k_{1,2}^{(1)} & \dots & k_{1,n}^{(1)} \\ k_{2,1}^{(1)} & k_{2,2}^{(1)} & \dots & k_{2,n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n,1}^{(1)} & k_{n,2}^{(1)} & \dots & k_{n,n}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \\ \vdots \\ f_n^{(1)} \end{Bmatrix}. \quad (1.125)$$

(β) Στην περίπτωση που η τιμή του $k_{i,1}$ είναι διάφορη του μηδενός θεωρούμε τις ποσότητες:

$$m_{i,1} = \frac{k_{i,1}^{(1)}}{k_{1,1}^{(1)}}. \quad (1.126)$$

(γ) Ακολουθώς η πρώτη εξίσωση πολλαπλασιάζεται με το $m_{i,1}$ και το αποτέλεσμα αφαιρείται από την i εξίσωση. Το νέο αποτέλεσμα τοποθετείται στην θέση της i εξίσωσης. Το στάδιο αυτό εφαρμόζεται για $i = 2, 3, \dots, n$. Έτσι το νέο σύστημα που προκύπτει θα είναι το εξής:

$$\begin{bmatrix} k_{1,1}^{(1)} & k_{1,2}^{(1)} & \dots & k_{1,n}^{(1)} \\ 0 & k_{2,2}^{(2)} & \dots & k_{2,n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & k_{n,2}^{(2)} & \dots & k_{n,n}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(2)} \\ \vdots \\ f_n^{(2)} \end{Bmatrix}. \quad (1.127)$$

Με το πέρας του σταδίου αυτού όλα τα στοιχεία της πρώτης στήλης κάτω από το στοιχείο $k_{1,1}$ έχουν πάρει την τιμή μηδέν, συνεπώς θεωρείται ότι το πρώτο βήμα της διαδικασίας της τριγωνοποίησης ολοκληρώθηκε. Ωστόσο η πρώτη εξίσωση του συστήματος δεν μεταβάλλεται. Τα νέα στοιχεία που θα προκύψουν δίνονται αναλυτικά από την σχέση:

$$k_{i,j}^{(2)} = k_{i,j}^{(1)} - m_{i,1}k_{1,j}^{(1)}, \quad (1.128)$$

και την:

$$f_i^{(2)} = k_{i,1}^{(1)} - m_{i,1}f_1^{(1)}. \quad (1.129)$$

(δ) Σε αυτό το βήμα η διαδικασία που περιγράφηκε στις παραγράφους (β) και (γ) επαναλαμβάνεται για τον προκύπτων πίνακα αν διαγραφεί η πρώτη στήλη και η πρώτη γραμμή του πίνακα $K^{(2)}$. Με αυτό τον τρόπο προκύπτουν οι τιμές:

$$m_{i,2} = \frac{k_{i,2}^{(2)}}{k_{2,2}^{(2)}}. \quad (1.130)$$

Σε περίπτωση που η τιμή του $k_{2,2}^{(2)}$ ισούται με μηδέν, εφαρμόζεται η διαδικασία του βήματος (α), αναζητούνται δηλαδή όλες τις εξισώσεις από την τρίτη μέχρι και την τελευταία έως ότου βρεθεί κάποια με τιμή διάφορη του μηδενός, $k_{m,2}^{(2)}$ $m = 3, 4, \dots, n$. Στην συνέχεια λαμβάνεται ο γραμμικός συνδυασμός των εξισώσεων όπως προηγουμένως οπότε προκύπτει ένα σύστημα στο οποίο η πρώτη και η δεύτερη γραμμή είναι η ίδια με του προηγούμενου πίνακα, τα στοιχεία της δεύτερης στήλης όμως κάτω από το $k_{2,2}$ έχουν γίνει μηδέν ενώ τα υπόλοιπα θα δίνονται από τον τύπο:

$$k_{i,j}^{(3)} = k_{i,j}^{(2)} - m_{i,2}k_{2,j}^{(2)}, \quad (1.131)$$

$$f_i^{(3)} = k_i^{(2)} - m_{i,2}f_2^{(2)}. \quad (1.132)$$

Η νέα μορφή του συστήματος είναι:

$$\begin{bmatrix} k_{1,1}^{(2)} & k_{1,2}^{(2)} & & k_{1,n}^{(2)} \\ 0 & k_{2,2}^{(2)} & \dots & k_{2,n}^{(2)} \\ 0 & 0 & & k_{3,n}^{(3)} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{n,n}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(2)} \\ f_3^{(3)} \\ \vdots \\ f_n^{(3)} \end{Bmatrix}. \quad (1.133)$$

(ε) Αν συνεχιστεί η διαδικασία στο τέλος του r -βήματος το σύστημα που προκύπτει είναι $K^{(r+1)} \cdot x = f^{(r+1)}$, $1 \leq r \leq n-1$. α στοιχεία του πίνακα $K^{(r+1)}$ και του $f^{(r+1)}$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} k_{i,j}^{(r+1)} &= 0, & j &= 1, 2, \dots, r, & i &= r+1, r+2, \dots, n, \\ k_{i,j}^{(r+1)} &= k_{i,j}^{(r)} - m_{i,r}k_{r,j}^{(r)}, & i, j &= r+1, r+2, \dots, n, \\ f_i^{(r+1)} &= f_i^{(r)} - m_{i,r}f_r^{(r)}, & i &= r+1, r+2, \dots, n, \end{aligned} \quad (1.134)$$

$$m_{i,r} = \frac{k_{i,r}^{(r)}}{k_{r,r}^{(r)}}, \quad i = r+1, r+2, \dots, n,$$

$$r = 1, 2, \dots, n-1.$$

Οι σχέσεις (1.134) συνοψίζουν τη διαδικασία απαλοιφής Gauss. Τα στοιχεία $k_{r,r}^{(r)}$ αποκαλούνται οδηγοί και οι ποσότητες $m_{i,r}$ καλούνται πολλαπλασιαστές. Τελικά, εφαρμόζοντας την διαδικασία μέχρι τις τελευταίες εξισώσεις λαμβάνεται:

$$\begin{bmatrix} k_{1,1}^{(1)} & k_{1,2}^{(1)} & k_{1,3}^{(1)} & & k_{1,n-1}^{(1)} & k_{1,n}^{(1)} \\ 0 & k_{2,2}^{(2)} & k_{2,3}^{(2)} & \dots & k_{2,n-1}^{(2)} & k_{2,n}^{(2)} \\ 0 & 0 & k_{3,3}^{(3)} & & k_{3,n-1}^{(3)} & k_{3,n}^{(3)} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & k_{n-1,n-1}^{(n-1)} & k_{n-1,n}^{(n-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & k_{n,n}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(2)} \\ f_3^{(3)} \\ \vdots \\ f_{n-1}^{(n-1)} \\ f_n^{(n)} \end{Bmatrix}. \quad (1.135)$$

Επομένως στο τέλος της τριγωνοποίησης έχει προκύψει ένα ισοδύναμο σύστημα, $K^{(n)} \cdot x = f^{(n)}$, με το αρχικό σύστημα του οποίου όμως ο πίνακας $K^{(n)}$ είναι άνω τριγωνικός. Έτσι μπορεί να γραφεί $[U] \cdot \{x\} = \{f\}$, $[U] \equiv [K^{(n)}]$, $\{f\} \equiv \{f^{(n)}\}$ και να επιλυθεί το τελευταίο αυτό σύστημα με τον αλγόριθμο της πίσω αντικατάστασης.

Ο αλγόριθμος της προς τα πίσω αντικατάστασης χρησιμοποιείται για την αποδοτική επίλυση γραμμικών συστημάτων της μορφής $U \cdot x = f$ όπου U είναι άνω τριγωνικός πίνακας, f είναι γνωστό διάνυσμα και x είναι το προς αναζήτηση διάνυσμα. Για να έχει το πρόβλημα αυτό μοναδική λύση θα πρέπει ο πίνακας U να μπορεί να αντιστραφεί, δηλαδή θα πρέπει η ορίζουσά του να είναι μη-μηδενική, $\det U \neq 0$. Δεδομένου ότι ο πίνακας είναι τριγωνικός η ορίζουσά του ισούται με το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων του, το οποίο συνεπάγεται ότι όλα τα διαγώνια στοιχεία του πρέπει να είναι μη-μηδενικά.

$$\det(U) = \prod_{i=1}^n u_{i,i}, \quad u_{i,i} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.136)$$

Η λύση του συστήματος αυτού υπολογίζεται πολύ εύκολα αν αρχικά λυθεί ως προς την μοναδική άγνωστη της η τελευταία εξίσωση του συστήματος, δηλαδή τον x_n , ως εξής:

$$x_n = \frac{f_n}{u_{n,n}}. \quad (1.137)$$

Η οποία φυσικά είναι καλά ορισμένη διότι όλα τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα είναι μη-μηδενικά. Στην συνέχεια παρατηρείτε ότι η δεύτερη από το τέλος εξίσωση έχει μοναδική άγνωστη την x_{n-1} η οποία μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$x_{n-1} = \frac{f_{n-1} - u_{n-1,n}x_n}{u_{n-1,n-1}}. \quad (1.138)$$

Ομοίως η τρίτη από το τέλος εξίσωση έχει μοναδική άγνωστη την x_{n-2} η οποία μπορεί να υπολογιστεί. Γενικεύοντας, η m εξίσωση από το τέλος εξίσωση έχει ως μοναδική άγνωστη την x_{n-m+1} , όπου $m=1, 2, 3, \dots, n$. Ο αλγόριθμος υπολογισμού προκύπτει με την παρατήρηση ότι σε κάθε βήμα της διαδικασίας ο μοναδικός άγνωστος είναι αυτός που βρίσκεται στην πιο αριστερή θέση της τρέχουσας εξίσωσης, ο οποίος μάλιστα είναι και διαγώνιος. Έτσι αν γραφούν οι εξισώσεις του συστήματος με μορφή αθροίσματος:

$$\sum_{m=i}^n u_{i,m}x_m = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.139)$$

Το παραπάνω άθροισμα μπορεί να εκφραστεί ισοδύναμα σε δύο μέρη ως εξής:

$$u_{i,i}x_i + \sum_{m=i+1}^n u_{i,m}x_m = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.140)$$

Και μπορεί να λυθεί ως προς τον άγνωστο x_i , αρκεί να ξεκινήσουμε από το τέλος προς την αρχή, δηλαδή:

$$x_n = \frac{f_n}{u_{n,n}}, \quad (1.141)$$

$$x_i = \frac{(f_i - \sum_{m=i+1}^n u_{i,m}x_m)}{u_{i,i}}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1. \quad (1.142)$$

2 Μεμβράνες

Οι μεμβράνες είναι πολύ λεπτές πλάκες χωρίς αντίσταση στην κάμψη. Η δομική συμπεριφορά των τεντωμένων μεμβρανών μοιάζει με εκείνη ενός δικτύου τεντωμένων χορδών. Κατά συνέπεια, τα πλευρικά φορτία των μεμβρανών είναι αποκλειστικά και μόνο εφελκυστικές δυνάμεις στο επίπεδο, που θεωρείται ότι είναι ομοιόμορφο κατά μήκος οποιουδήποτε τμήματος στο όριο. Η σχέση πάχους προς μήκος διέπεται από τη σχέση $h/L < 1/50$ (Szilard, 2004).

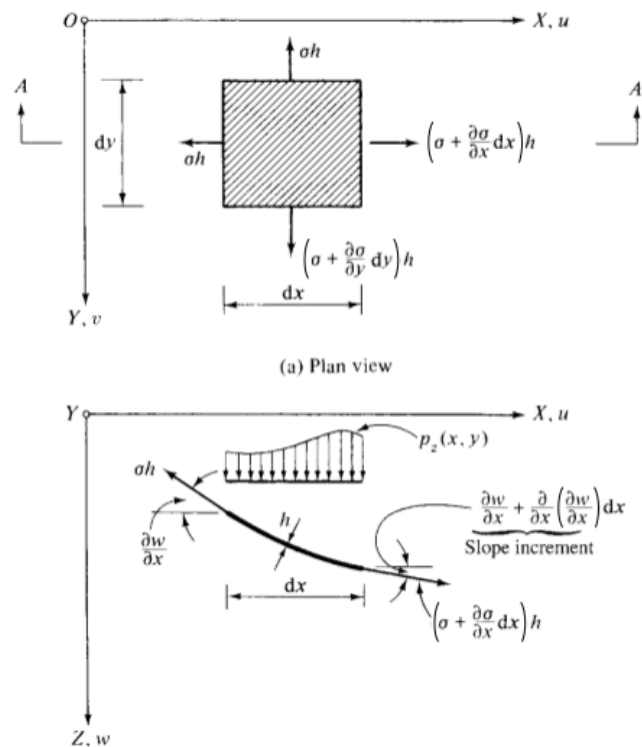
2.1 Εξίσωση κίνησης μεμβρανών

Βασικές παραδοχές

- Η κίνηση είναι εγκάρσια στην επιφάνεια της μεμβράνης,
- Η κλίση της μεμβράνης προς κάθε κατεύθυνση είναι μικρή,
- Η τάση είναι ισότροπη και δεν μεταβάλλεται με την παραμόρφωση και
- Το πάχος της μεμβράνης είναι σταθερό και δεν μεταβάλλεται.

Με βάση τις πάνω παραδοχές, θεωρείται μεμβράνη σταθερής πυκνότητας ρ και ομοιόμορφου πάχους h που υπόκειται σε εφελκυστική τάση σ . Συνεπώς η τάση ανά μονάδα μήκους δίνεται:

$$T = \sigma h. \quad (2.1)$$



Σχήμα 2.1: Μεμβράνη που υπόκειται σε εφελκυσμό και κάμψη (Szilard, 2004).

Για την εξαγωγή των διαφορικών εξισώσεων που διέπουν τις μεμβράνες, υποθέεται ότι οι πλευρικές παραμορφώσεις είναι μικρές, και έτσι η δύναμη εφελκυσμού ανά μονάδα μήκους η οποία ασκείται στη μεσαία επιφάνεια παραμένει σταθερή ($\sigma_x h = \sigma_y h = \sigma h$). Αυτός ο περιορισμός της θεωρίας των μεμβρανών απαιτεί ο όρος $(w_{max}/h)^2$ να είναι αμελητέος σε σχέση με τη μονάδα. Λόγω της αρχικής υπόθεσης των συμμετρικών εφελκυστικών δυνάμεων, οι διατμητικές τάσεις στο επίπεδο είναι ίσες με μηδέν. Κατά συνέπεια, εκφράζοντας την ισορροπία όλων των δυνάμεων που ενεργούν πάνω σε ένα στοιχείο $dx dy$ (Σχήμα 2.1), το άθροισμα των δυνάμεων στην κατεύθυνση Z δίνει:

$$\begin{aligned} & \left(\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) dyh - \sigma \frac{\partial w}{\partial x} dyh \\ & + \left(\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial y} dy \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy \right) dxh - \sigma \frac{\partial w}{\partial y} dxh + p_z(x, y) dxdy \\ & = (\rho h dxdy) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Αν αγνοηθούν οι αμελητέες ποσότητες λαμβάνεται η σχέση:

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sigma h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + p_z(x, y). \quad (2.3)$$

Η προκύπτουσα υπερβολική μερική διαφορική εξίσωση είναι η γνωστή εξίσωση Poisson ή αλλιώς κυματική εξίσωση σε δύο διαστάσεις με ταχύτητα κύματος το $\sqrt{T/\mu}$.

2.2 Ασθενής διατύπωση της εξίσωσης κίνησης των μεμβρανών

Στην ενότητα αυτή εξάγεται η ασθενής διατύπωση της εξίσωσης κίνησης των μεμβρανών, σύμφωνα με τη διαδικασία που αναπτύχθηκε σε προηγούμενη παράγραφο. Μπορούν να διακριθούν τρία στάδια για την ανάπτυξη της ασθενούς μορφής.

1° Στάδιο

Η εξίσωση κίνησης της μεμβράνης πολλαπλασιάζεται με τη συνάρτηση βάρους φ και ολοκληρώνεται στο χωρίο Ω^e .

$$\int_{\Omega^e} \varphi \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} d\Omega = \int_{\Omega^e} \varphi \sigma h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) d\Omega + \int_{\Omega^e} \varphi p_z(x, y) d\Omega. \quad (2.4)$$

2° Στάδιο

Με τη χρήση του θεωρήματος Gauss ή αλλιώς το θεώρημα της απόκλισης η εξίσωση ολοκληρώνεται κατά μέλη τον πρώτο όρο στο δεξί μέλος της εξίσωσης:

$$\int_{\Omega^e} \varphi \sigma h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) d\Omega = \sigma h \oint_{\partial\Omega} \varphi \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) d\partial\Omega - \sigma h \int_{\Omega^e} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} d\Omega. \quad (2.5)$$

Συνεπώς η εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega^e} \varphi \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} d\Omega \\
 &= \sigma h \oint_{\partial\Omega} \varphi \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) d\partial\Omega - \sigma h \int_{\Omega^e} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} d\Omega \\
 &+ \int_{\Omega^e} \varphi p_z(x, y) d\Omega.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

3^ο Στάδιο

Σύμφωνα με τη μέθοδο Galerkin η συνάρτηση βάρους θεωρείται ίση με τη συνάρτηση σχήματος. Έτσι στο στάδιο αυτό εισάγονται στην εξίσωση οι συναρτήσεις σχήματος με τη θεώρηση της προσέγγισης της μετατόπισης σύμφωνα με τη σχέση:

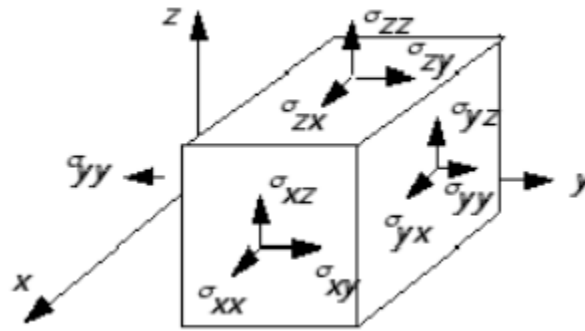
$$w^e = \sum_{j=1}^n w_j N_j, \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega^e} N_j N_i \rho h \frac{\partial^2 w_j}{\partial t^2} d\Omega \\
 &= \sigma h \oint_{\partial\Omega} w_j N_i \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\partial\Omega - \sigma h \int_{\Omega^e} w_j \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \\
 &+ w_j \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega + \int_{\Omega^e} N_i p_z(x, y) d\Omega.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

3 Θεωρία πλακών

3.1 Εξισώσεις πλακών

Οι συνιστώσες των τάσεων που ασκούνται σε ένα τρισδιάστατο στερεό σώμα φαίνονται στο Σχήμα 3.1. Ο πρώτος δείκτης δηλώνει τη διεύθυνση της κάθετης στην εκάστοτε έδρα και ο δεύτερος παριστά τη διεύθυνση στην οποία ασκείται η τάση (Αύφαντης, 2010). Οι συνιστώσες σ_{xx} , σ_{yy} και σ_{zz} δρουν κάθετα στην επιφάνεια του σώματος ενώ οι συνιστώσες σ_{xy} , σ_{xz} , σ_{yx} , σ_{yz} , σ_{zy} και σ_{zx} είναι οι διατμητικές συνιστώσες της τάσης. Οι συνιστώσες σ_{xx} , σ_{xy} και σ_{xz} οδηγούν στη δημιουργία καμπτικής ροπής M_{xx} , περιστροφικής ροπής M_{xy} και της κάθετης διατμητικής δύναμης ανά μονάδα μήκους Q_{xz} (Σχήμα 3.2). Αντίστοιχα ισχύει και για τις συνιστώσες σ_{yy} , σ_{yx} και σ_{yz} .



Σχήμα 3.1: Συνιστώσες των τάσεων που ασκούνται σε ένα τρισδιάστατο στερεό σώμα (Steele & Balch, 2009).

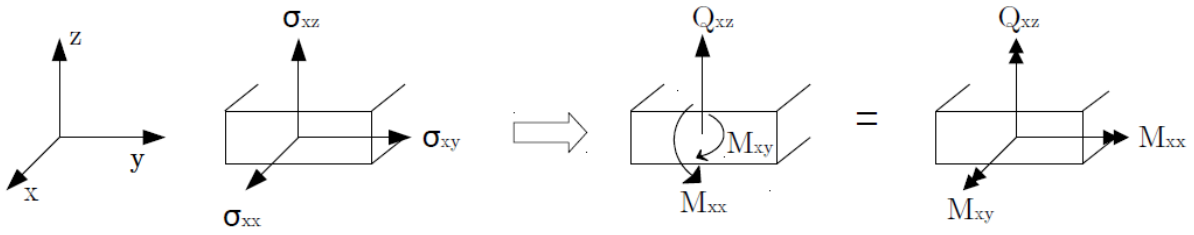
$$Q_{xz} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz, \quad (3.1)$$

$$Q_{yz} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dz, \quad (3.2)$$

$$M_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xx} dz, \quad (3.3)$$

$$M_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{yy} dz, \quad (3.4)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xy} dz. \quad (3.5)$$



Σχήμα 3.2: Αναπαράσταση των M_{xx} , M_{xy} και της Q_{xz} .

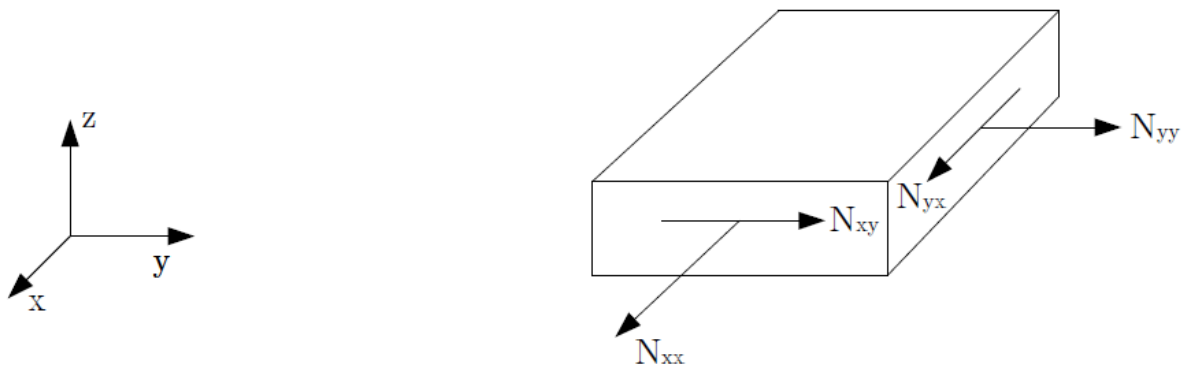
Οι συνιστώσες που δρουν κάθετα στις επιφάνειες του σώματος σ_{xx} , σ_{yy} και σ_{xy} οδηγούν στις εξής οριζόντιες δυνάμεις:

$$N_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz, \quad (3.6)$$

$$N_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} dz, \quad (3.7)$$

$$N_{xy} = N_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} dz. \quad (3.8)$$

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.3 αυτές οι δυνάμεις δρουν στο επίπεδο xy . Όπου N_{xx} είναι η δύναμη ανά μονάδα μήκους που δρα στην διεύθυνση x , N_{yy} η δύναμη ανά μονάδα μήκους που δρα στη διεύθυνση y και N_{xy} η διατμητική τάση ανά μονάδα μήκους.

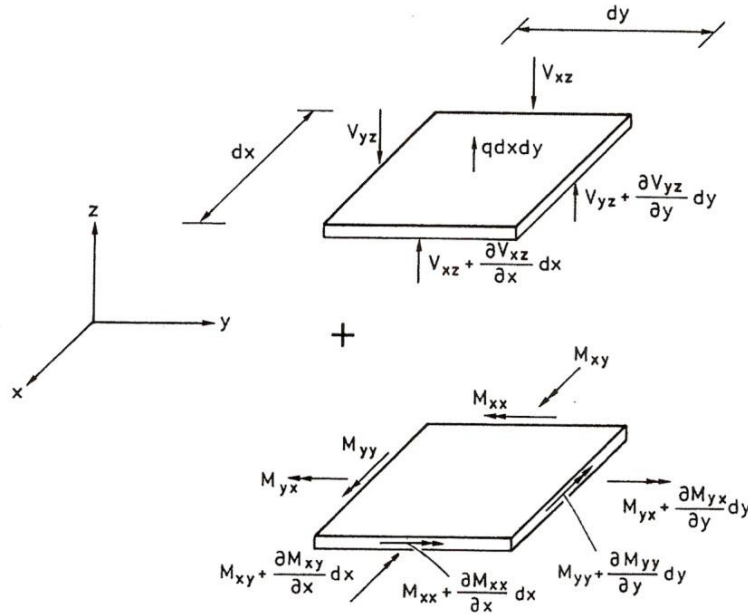


Σχήμα 3.3: Αναπαράσταση των N_{xx} , N_{yy} , N_{xy} και N_{yx} .

Για την εξαγωγή των εξισώσεων ισορροπίας η πλάκα θεωρείται ότι φορτίζεται μόνο από εγκάρσιες δυνάμεις. Συνεπώς αφού δεν υφίσταται δυνάμεις στο επίπεδο xy ισχύει:

$$N_{xx} = N_{yy} = N_{xy} = N_{yx} = 0 \quad (3.9)$$

Θεωρώντας το απειροστό στοιχείο της πλάκας που φαίνεται στο Σχήμα 3.4, και με δεδομένο ότι δεν δρουν δυνάμεις στο επίπεδο xy . Σημειώνεται ότι η διατμητική δύναμη Q στο Σχήμα 3.4 συμβολίζεται με V .



Σχήμα 3.4: Αναπαράσταση κάθετων διατμητικών δυνάμεων που δρουν σε απειροστό στοιχείο της πλάκας.

Η ισοροπία στο κάθετο επίπεδο απαιτεί να ισχύει:

$$q dx dy - Q_{yz} dx + \left[Q_{xz} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} dx \right] dy - Q_{xz} dy + \left[Q_{yz} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} dy \right] dx = 0. \quad (3.10)$$

Το οποίο ισοδυναμεί με τη σχέση:

$$\frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} + q = 0. \quad (3.11)$$

Η ισοροπία ροπών στο παράλληλο επίπεδο στον άξονα των x απαιτεί να ισχύει:

$$\begin{aligned} & -q dx dy \frac{1}{2} dy + Q_{yz} dx dy - \left[Q_{xz} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} dx \right] dy \frac{1}{2} dy + Q_{xz} dy \frac{1}{2} dy \\ & + M_{yy} dx - \left[M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx \right] dy - \left[M_{yy} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} dy \right] dx + M_{xy} dy = 0 \Rightarrow \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\Rightarrow -q \frac{1}{2} dy + Q_{yz} - \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} \frac{1}{2} dy - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (3.13)$$

Επειδή το dy στην (3.13) είναι απειροστό προκύπτει για την ισοροπία:

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - Q_{yz} = 0. \quad (3.14)$$

Για την ισορροπία των ροπών στο παράλληλο επίπεδο στον άξονα των y λαμβάνεται με ανάλογο τρόπο η σχέση:

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_{xz} = 0. \quad (3.15)$$

3.2 Καταστατικές Εξισώσεις

Επειδή η πλάκα είναι λεπτή, συνεπώς οι μεγαλύτερες τάσεις θα είναι οι σ_{xx} , σ_{yy} και σ_{xy} , εφαρμόζοντας το νόμο του Hooke μπορεί να θεωρηθεί ότι η θεωρία της επίπεδης έντασης μπορεί να εφαρμοστεί. Έτσι εφαρμόζοντας το Νόμο του Hooke, παίρνουμε:

$$\sigma = D\varepsilon, \quad (3.16)$$

όπου :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Στην περίπτωση αυτή για τις παραμορφώσεις ισχύει:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Στην περίπτωση που υπάρχει ενίσχυση στη κατεύθυνση z μπορεί να θεωρηθεί η περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης όπου το ε_{zz} λαμβάνει τις μικρότερες τιμές. Σε αυτή την περίπτωση ισχύει:

$$D = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Για τις παραμορφώσεις ισχύει:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Οι συνιστώσες της διατμητικής παραμόρφωσης:

$$\gamma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G}, \quad (3.21)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{G}, \quad (3.22)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\sigma_{zx}}{G}, \quad (3.23)$$

όπου G είναι το μέτρο διάτμησης και ορίζεται:

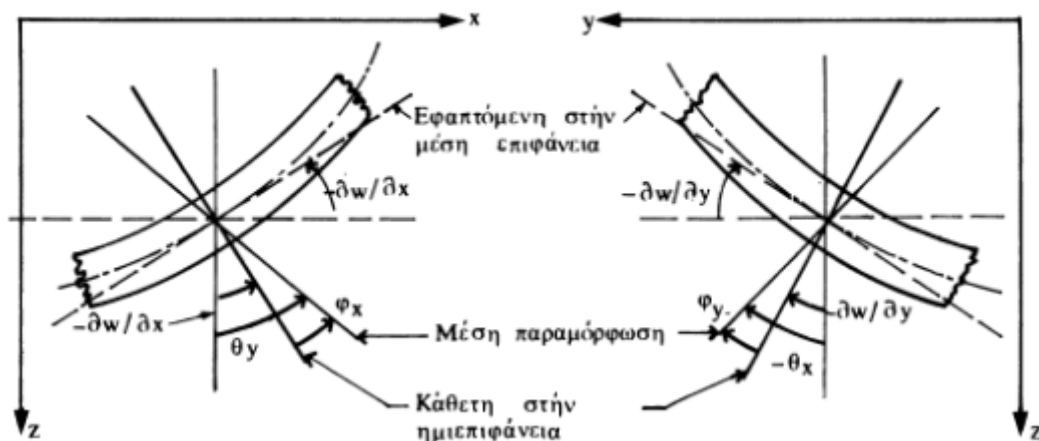
$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (3.24)$$

3.3 Η θεωρία πλακών Mindlin

Στη θεωρία Mindlin γίνεται η παραδοχή ότι οι επίπεδες διατομές παραμένουν επίπεδες αλλά όχι κάθετες στη μέση επιφάνεια. Συνεπώς η μέση στροφή μιας διατομής λαμβάνεται σαν το άθροισμα μιας στροφής στην οποία η διατομή θεωρείται κάθετη στη μέση επιφάνεια συν μια επιπλέον στροφή που οφείλεται στη διατμητική παραμόρφωση. Λόγο της σταθερής στροφής συνεπάγεται ότι η παραμόρφωση και συνεπώς και η διατμητική τάση είναι ομοιόμορφη.

Οι βασικές παραδοχές της θεωρίας του Mindlin συνοψίζονται στις εξής (Τσαμασφύρος & Θεοτόκογλου, 2005):

1. Οι μετατοπίσεις w της πλάκας είναι μικρές σε σχέση με το πάχος της,
2. Τα κάθετα επίπεδα στη μέση-επιφάνεια παραμένουν επίπεδα μετά την παραμόρφωση αλλά όχι κάθετα στη μέση επιφάνεια και
3. Οι κάθετες τάσεις στη μέση-επιφάνεια είναι αμελητέες.



Σχήμα 3.5: Στροφή της διατομής γύρω από τους άξονες x και y (Τσαμασφύρος & Θεοτόκογλου, 2005).

Σύμφωνα με την οποία οι διατμητικές παραμορφώσεις υπολογίζονται:

$$\gamma_{xz} = \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (3.25)$$

$$\gamma_{yz} = \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (3.26)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις βασίζονται στις παραδοχές ότι οι ολικές στροφές θ_x και θ_y είναι μικρές και ότι η εγκάρσια παραμόρφωση ϵ_{xx} είναι μηδενική.

Και η διατμητική δύναμη παίρνει τη μορφή:

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dz = \frac{5}{6} \int_{-h/2}^{h/2} G \gamma_{yz} dz = \frac{5Gh}{6} \left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad (3.27)$$

$$Q_x = \frac{5Gh}{6} \left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (3.28)$$

Όπου το κλάσμα $6/5$ είναι ένας διορθωτικός παράγοντας που προκύπτει από την θεώρηση της τρισδιάστατης κατανομής της διατμητικής τάσης.

Σύμφωνα με την κλασική θεωρία των πλακών:

$$u(x, y, z) = u^0(x, y) + z\theta_x(x, y), \quad (3.29)$$

$$v(x, y, z) = v^0(x, y) + z\theta_y(x, y), \quad (3.30)$$

$$w(x, y, z) = w^0(x, y). \quad (3.31)$$

Όπου το θ συμβολίζει τη μετατόπιση της μεσ-επιφάνειας όπου $z=0$, και τα θ τις περιστροφές της μεσ-επιφάνειας στη x και y κατεύθυνση.

Με αντικατάσταση στις παραμορφώσεις συνεπάγεται:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \quad (3.32)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = z \frac{\partial \theta_y}{\partial y}, \quad (3.33)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{z}{2} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right). \quad (3.34)$$

Συνεπώς λαμβάνονται:

$$\begin{aligned} M_{xx} &= \int_{-h/2}^{h/2} z \cdot \sigma_{xx} dz = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2} \cdot [\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}] \cdot z dz = \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left[\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right] \cdot z^2 dz \\ &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \nu \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{\partial \theta_y}{\partial y}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} M_{yy} &= \int_{-h/2}^{h/2} z \cdot \sigma_{yy} dz = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2} \cdot [\nu \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}] \cdot z dz \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left[\nu \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right] \cdot z^2 dz \\ &= \nu \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{\partial \theta_y}{\partial y}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned}
M_{xy} = M_{yx} &= \int_{-h/2}^{h/2} z \cdot \sigma_{xy} dz = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{2 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot (1 - \nu) \cdot \varepsilon_{xy} \cdot z dz = \\
&= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{2 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot (1 - \nu) \cdot \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \cdot \frac{z^2}{2} dz = \frac{h^3}{12} \quad (3.37) \\
&\cdot \frac{E}{2 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot (1 - \nu) \cdot \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right).
\end{aligned}$$

3.4 Ασθενής διατύπωση των εξισώσεων κίνησης των πλακών

Στην ενότητα αυτή εξάγεται η ασθενής διατύπωση των εξισώσεων κίνησης των πλακών, σύμφωνα με τη διαδικασία που αναπτύχθηκε σε προηγούμενη παράγραφο. Η ανάπτυξη της ασθενούς μορφής λαμβάνει χώρα σε ένα αυθαίρετο στοιχείο, δύο διαστάσεων. Το στοιχείο αυτό μπορεί να βρίσκεται οπουδήποτε στο συνολικό χωρίο και να έχει οποιαδήποτε μορφή, αρκεί να έχει δύο διαστάσεις. Στη συνέχεια παρατίθενται τα τρία στάδια για την ανάπτυξη της ασθενούς μορφής.

1^ο Στάδιο

Οι εξισώσεις κίνησης των πλακών πολλαπλασιάζονται με τη συνάρτηση βάρους φ και ολοκληρώνονται στο χωρίο Ω^e .

$$\int_{\Omega^e} \varphi \left(\frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega^e} \varphi q d\Omega = \int_{\Omega^e} \varphi p h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} d\Omega, \quad (3.38)$$

$$\int_{\Omega^e} \varphi \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega^e} \varphi Q_{yz} d\Omega = \int_{\Omega^e} \varphi p \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} d\Omega, \quad (3.39)$$

$$\int_{\Omega^e} \varphi \left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega^e} \varphi Q_{xz} d\Omega = \int_{\Omega^e} \varphi p \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} d\Omega. \quad (3.40)$$

2^ο Στάδιο

Με τη χρήση του θεωρήματος Gauss ή αλλιώς το θεώρημα της απόκλισης στους πρώτους όρους στα δεξιά των παραπάνω εξισώσεων:

$$\int_{\Omega^e} \varphi \left(\frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} \right) d\Omega = \oint_{\partial\Omega^e} (\varphi Q_{xz} + \varphi Q_{yz}) d\partial\Omega - \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} Q_{xz} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} Q_{yz} \right) d\Omega, \quad (3.41)$$

$$\int_{\Omega^e} \varphi \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} \right) d\Omega = \oint_{\partial\Omega^e} (\varphi M_{xy} + \varphi M_{yy}) d\partial\Omega - \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} M_{xy} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} M_{yy} \right) d\Omega, \quad (3.42)$$

$$\int_{\Omega^e} \varphi \left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) d\Omega = \oint_{\partial\Omega^e} (\varphi M_{xx} + \varphi M_{xy}) d\partial\Omega - \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} M_{xx} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} M_{xy} \right) d\Omega. \quad (3.43)$$

Οι εξισώσεις κίνησης μετά την εφαρμογή του θεωρήματος Gauss είναι:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega^e} (\varphi Q_{xz} + \varphi Q_{yz}) d\partial\Omega - \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} Q_{xz} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} Q_{yz} \right) d\Omega + \int_{\Omega^e} \varphi q d\Omega \\ = \int_{\Omega^e} \varphi p h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} d\Omega, \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega^e} (\varphi M_{xy} + \varphi M_{yy}) d\partial\Omega - \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} M_{xy} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} M_{yy} \right) d\Omega + \int_{\Omega^e} \varphi Q_{yz} d\Omega \\ = \int_{\Omega^e} \varphi p \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} d\Omega, \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega^e} (\varphi M_{xx} + \varphi M_{xy}) d\partial\Omega - \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} M_{xx} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} M_{xy} \right) d\Omega + \int_{\Omega^e} \varphi Q_{xz} d\Omega \\ = \int_{\Omega^e} \varphi p \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} d\Omega. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Για διευκόλυνση οι σχέσεις (3.27), (3.28), (3.35), (3.36), (3.37) μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\begin{aligned} Q_{xz} = G \left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad Q_{yz} = G \left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad M_{xx} = c_{11} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial \theta_y}{\partial y}, \\ M_{yy} = c_{12} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + c_{22} \frac{\partial \theta_y}{\partial y}, \quad M_{xy} = c_{66} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Με αντικατάσταση των (3.47) λαμβάνονται διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega^e} (\varphi Q_{xz} + \varphi Q_{yz}) d\partial\Omega - \int_{\Omega^e} G \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \theta_x + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \theta_y + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) d\Omega \\ + \int_{\Omega^e} \varphi q d\Omega = \int_{\Omega^e} \varphi p h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} d\Omega, \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega^e} (\varphi M_{xy} + \varphi M_{yy}) d\partial\Omega \\ - \int_{\Omega^e} \left(c_{66} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial\theta_x}{\partial y} + c_{66} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial\theta_y}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial\theta_x}{\partial x} + c_{22} \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial\theta_y}{\partial y} \right) d\Omega \\ + \int_{\Omega^e} \left(G\varphi\theta_y + G\varphi \frac{\partial w}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Omega^e} \varphi p \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} d\Omega, \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned}
& \oint_{\partial\Omega^e} (\varphi M_{xx} + \varphi M_{xy}) d\partial\Omega \\
& - \int_{\Omega^e} \left(c_{11} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial\theta_x}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial\theta_y}{\partial y} + c_{66} \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial\theta_x}{\partial y} + c_{66} \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial\theta_y}{\partial x} \right) d\Omega \quad (3.50) \\
& + \int_{\Omega^e} \left(G\varphi \theta_x + G\varphi \frac{\partial w}{\partial x} \right) d\Omega = \int_{\Omega^e} \varphi p \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} d\Omega.
\end{aligned}$$

3° Στάδιο

Σύμφωνα με τη μέθοδο Galerkin η συνάρτηση βάρους θεωρείται ίση με τη συνάρτηση σχήματος. Έτσι στο στάδιο αυτό εισάγονται στις εξισώσεις οι συναρτήσεις σχήματος με τη θεώρηση της προσέγγισης των βαθμών ελευθερίας σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$w = \sum_{j=1}^n w_j N_j, \quad \theta_y = \sum_{j=1}^n \theta_{y_j} N_j, \quad \theta_x = \sum_{j=1}^n \theta_{x_j} N_j. \quad (3.51)$$

Λαμβάνονται:

$$\begin{aligned}
& \oint_{\partial\Omega^e} N_i (Q_{xz} + Q_{yz}) d\partial\Omega \\
& - \int_{\Omega^e} G \left(\theta_{x_j} N_j \frac{\partial N_i}{\partial x} + w_j \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \theta_{y_j} N_j \frac{\partial N_i}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) d\Omega \quad (3.52) \\
& + \int_{\Omega^e} N_i q d\Omega = \int_{\Omega^e} N_j N_i p h \frac{\partial^2 w_j}{\partial t^2} d\Omega,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \oint_{\partial\Omega^e} N_i (M_{xy} + M_{yy}) d\partial\Omega \\
& - \int_{\Omega^e} \left(c_{66} \theta_{x_j} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} + c_{66} \theta_{y_j} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + c_{12} \theta_{x_j} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right. \\
& \left. + c_{22} \theta_{y_j} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega^e} \left(G \theta_{y_j} N_i N_j + G w_j N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega \quad (3.53) \\
& = \int_{\Omega^e} N_j N_i p \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_{y_j}}{\partial t^2} d\Omega,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \oint_{\partial\Omega^e} N_i (M_{xx} + M_{xy}) d\partial\Omega \\
& - \int_{\Omega^e} \left(c_{11}\theta_{xj} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + c_{12}\theta_{yj} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} + c_{66}\theta_{xj} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right. \\
& \left. + c_{66}\theta_{yj} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) d\Omega + \int_{\Omega^e} \left(G\theta_{xj} N_i N_j + Gw_j N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) d\Omega \\
& = \int_{\Omega^e} N_j N_i p \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_{xj}}{\partial t^2} d\Omega.
\end{aligned} \tag{3.54}$$

4 Διατύπωση του προβλήματος

Στην παρούσα εργασία εξετάζεται η εφαρμογή του νεοπρενίου στις εξισώσεις κίνησης μεμβράνης και πλακών Mindlin. Το Νεοπρένιο, είναι ένα συνθετικό ελαστομερές με μοριακό βάρος 100,000 - 300,000 daltons (Budavari, 1996). Ανήκει στην οικογένεια των συνθετικών καουτσούκ και παρουσιάζει μεγάλη ανθεκτικότητα στις καιρικές μεταβολές (McMurry, 2012). Όλα τα ελαστομερή είτε φυσικά είτε συνθετικά σε θερμοκρασίες περιβάλλοντος βρίσκονται πάνω από τη θερμοκρασία υαλώδους μετάπτωσης, είναι άμορφα, σχετικά μαλακά υλικά ($E \sim 3\text{MPa}$) και κολλώδη λόγω των πολύ ασθενών διαμοριακών δυνάμεων και γι αυτό μορφοποιούνται εύκολα. Δομικά χαρακτηρίζονται από χαμηλό μέτρο Young, και έλλειψη τάσης σε σχέση με άλλα υλικά. Ένα πολυμερές χαρακτηρίζεται ως ελαστομερές, όταν είναι ικανό να υποστεί πολύ μεγάλες και αντιστρεπτές παραμορφώσεις, χωρίς θραύση υπό την επίδραση πολύ μικρών τάσεων (Παναγιώτου, 2006). Η ελαστικότητα τους προέρχεται από την ικανότητα των μεγάλων αλυσίδων να αναδιαμορφώνονται για να κατανέμουν μια εφαρμοζόμενη τάση. Οι ομοιοπολικές διασταυρώσεις εξασφαλίζουν ότι το ελαστομερές θα επιστρέψει στην αρχική του διαμόρφωση όταν η τάση αφαιρεθεί. Ως αποτέλεσμα αυτής της ακραίας ελαστικότητας, τα ελαστομερή μπορούν να επεκταθούν αντιστρεπτά από 500-1000% (Παναγιώτου, 2006), ανάλογα με το είδος του υλικού. Στην περίπτωση που οι διασταυρώσεις δεν υπήρχαν ή ήταν λίγες, η εφαρμοζόμενη τάση θα κατέληγε σε μια μόνιμη παραμόρφωση του υλικού αφού δεν θα αναδιαμορφώνονταν οι αλυσίδες. Συνήθως είναι θερμοσκληραινόμενα, όποτε αν θερμανθούν πάνω από μια κρίσιμη θερμοκρασία καθίστανται μόνιμως σκληρά αλλά μπορεί να είναι και θερμοπλαστικά με αποτέλεσμα να γίνονται ευκατέργαστα αν θερμανθούν πάνω από μια κρίσιμη θερμοκρασία.

Το νεοπρένιο παράγεται με πολυμερισμό ελεύθερης ρίζας χλωροπρενίου Στην εμπορική παραγωγή, αυτό το πολυμερές παρασκευάζεται με πολυμερισμό ρίζας ανιοντικού γαλακτώματος. Ο Πολυμερισμός εκκινείται χρησιμοποιώντας έναν υδροδιαλυτό οξειδοαναγωγικό καταλύτη όπως το υπερθειικό κάλιο, το οποίο προσδίδει υψηλούς ρυθμούς παραγωγής σε χαμηλές θερμοκρασίες πολυμερισμού (Kirk-Othmer, 1993).

Για την παραγωγή ενός πολύ σκληρότερου καουτσούκ με αντίσταση στις φθορές χρησιμοποιείται βουλκανισμός. Ο βουλκανισμός επινοήθηκε το 1839 από τον Charles Goodyear και συνίσταται στη θέρμανση του ακατέργαστου πολυμερούς μαζί με μια πολύ μικρή ποσότητα θείου. Το θείο σχηματίζει γέφυρες μεταξύ των πολυμερών αλυσίδων, συγκρατώντας τις μέσα σε τεράστια μόρια που δεν μπορούν πλέον να ολισθαίνουν το ένα πάνω στο άλλο. Το νεοπρένιο για να γίνει ανθεκτικό σε ηλεκτρικό ρεύμα, σε έλαια, στο οξυγόνο, καθώς και στο όζον, συχνά υπόκειται σε βουλκανισμό με οξείδια μετάλλων αντί του θείου (Lewis, 1997).

Πίνακας 4.1: Ιδιότητες νεοπρενίου (Ashby, 2005).

Πυκνότητα	1.230-1.250	Kg/m ³
Μέτρο Young	0.0007-0.002	GPa
Λόγος poisson	0.5	

Η εξίσωση κίνησης της μεμβράνης καθώς και οι εξισώσεις των πλακών Mindlin στην παρούσα εργασία εφαρμόζονται σε κυκλική επιφάνεια με διάμετρο ίση με 0.112 m. Η μελέτη αφορά μόνο τη γραμμική συμπεριφορά. Η διακριτοποίηση του κυκλικού χωρίου γίνεται με τη βοήθεια του προγράμματος Gmsh στο ελεύθερο λογισμικό ubuntu. Στη συνέχεια οι πληροφορίες της διακριτοποίησης μεταφέρονται στα δύο προγράμματα που αναπτύχθηκαν στη γλώσσα Matlab για την επίλυση των δύο μοντέλων με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

Στο μοντέλο της μεμβράνης αρχικά με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων λύνεται το δυναμικό πρόβλημα των ελεύθερων ταλαντώσεων, προσδιορίζονται δηλαδή οι ιδιοσυχνότητες και οι ιδιομορφές καθώς το κυκλικό νεοπρένιο δεν υπόκειται σε φορτίσεις και η περιφέρειά του είναι πακτωμένη και συνεπώς οι βαθμοί ελευθερίας στους κόμβους της περιφέρειας είναι μηδέν. Με τη βοήθεια του προγράμματος στη Matlab υπολογίζονται οι ιδιοσυχνότητες για διαφορετικές τιμές της αρχικής εφελκυστικής τάσης. Στο ίδιο μοντέλο εξετάζεται η χρονική απόκριση σε επιβολή εξωτερικής χρονικά εξαρτώμενης δύναμης με τη μέθοδο Newmark. Η δύναμη ασκείται σε εμβαδό ίσο με $6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$ στο κέντρο του κυκλικού νεοπρενίου, ενώ η περιφέρειά του είναι πακτωμένη. Η επίδραση της αρχικής εφελκυστικής τάσης μελετάται υπολογίζοντας τη δύναμη που απαιτείται για να προκαλέσει δεδομένη μετατόπιση σε έναν δεδομένο κόμβο, για διαφορετικές τιμές κάθε φορά αρχικής εφελκυστικής τάσης.

Αντίστοιχα στο μοντέλο της κυκλικής πλάκας Mindlin νεοπρενίου, υπολογίζονται οι ιδιοσυχνότητες και οι ιδιομορφές καθώς το σώμα δεν υπόκειται σε φορτίσεις και η περιφέρειά του είναι πακτωμένη. Επειδή οι εξισώσεις κίνησης των πλακών εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από το πάχος της πλάκας, για διαφορετικές τιμές πάχους κάθε φορά υπολογίζονται οι ιδιοτιμές και εξετάζονται οι ιδιομορφές. Στο κέντρο της κυκλικής πλάκας και σε εμβαδό ίσο με $6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$ ασκείται χρονικά μεταβαλλόμενη εξωτερική δύναμη και με τη βοήθεια της μεθόδου Newmark προσδιορίζονται οι μετατοπίσεις, η περιφέρεια του κύκλου θεωρείται επίσης πακτωμένη. Με σκοπό τη μελέτη της εξάρτησης των προκληθέντων από την εξωτερική δύναμη μετατοπίσεων από το πάχος της πλάκας υπολογίζεται η δύναμη που απαιτείται για να προκαλέσει δεδομένη μετατόπιση σε έναν δεδομένο κόμβο, για διαφορετικές τιμές του πάχους της πλάκας.

5 Αποτελέσματα

Με τη βοήθεια της γλώσσας προγραμματισμού Matlab και σύμφωνα με τις ασθενείς διατυπώσεις για τις εξισώσεις κίνησης της μεμβράνης και των πλακών Mindlin όπως αυτές αναπτύχθηκαν στις προηγούμενες ενότητες παρασκευάστηκαν τα προγράμματα που επιλύουν με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων τα δύο μοντέλα. Το υλικό που χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία είναι το νεοπρένιο.

Στην εξίσωση κίνησης της μεμβράνης αφού προσδιοριστούν οι ιδιομορφές της κυκλικής επιφάνειας νεοπρενίου κατά την ελεύθερη ταλάντωση της και με την περιφέρεια της πακτωμένη, εξετάζεται η μεταβολή των ιδιοσυχνοτήτων για διάφορες τιμές της αρχικής εφελκυστική τάσης. Έπειτα με χρήση της μεθόδου Newmark μελετάται ο τρόπος με τον οποίο επιδρά η αρχική εφελκυστική τάση στις μετατοπίσεις που προκαλεί μια χρονικά εξαρτώμενη δύναμη που ασκείται στα κεντρικά στοιχεία και σε εμβαδόν ίσο με $6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$. Η περιφέρεια της κυκλικής μεμβράνης και σε αυτή την περίπτωση θεωρείται πακτωμένη.

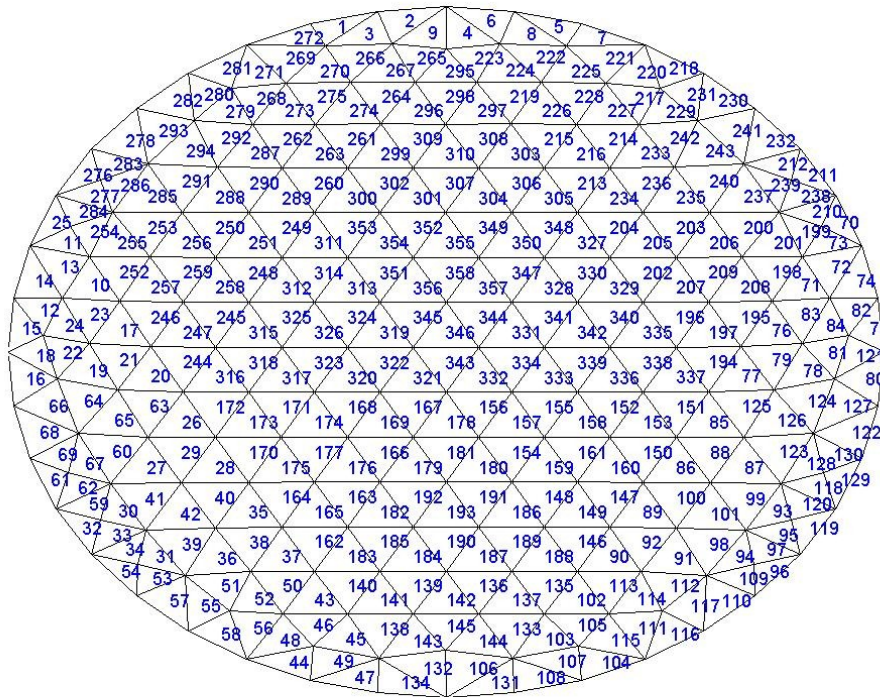
Στο μοντέλο των πλακών Mindlin σημαντική επίδραση έχει το πάχος της πλάκας νεοπρενίου. Έτσι προσδιορίζονται οι ιδιομορφές και εξετάζεται η επίδραση του πάχους της κυκλικής δομής στις τιμές των ιδιοσυχνοτήτων. Σε δεύτερο στάδιο θεωρείται χρονικά εξαρτώμενη δύναμη που ασκείται σε εμβαδόν ίσο με $6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$ στα κεντρικά στοιχεία της κυκλικής πλάκας νεοπρενίου ενώ τα άκρα της είναι πακτωμένα. Με την μέθοδο Newmark στα πεπερασμένα μελετάται ο τρόπος με τον οποίο επιδρά το πάχος της πλάκας στις μετατοπίσεις που προκαλεί η δύναμη.

5.1 Εξίσωση κίνησης μεμβράνης

5.1.1 Επίδραση εφελκυστικής τάσης στις ιδιοσυχνότητες

Αρχικά το κυκλικό χωρίο διακριτοποιείται σε 358 τριγωνικά στοιχεία με τη βοήθεια του προγράμματος Gmsh όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.1. Σύμφωνα με τις παραγράφους 1.9 και 2 για τα δυναμικά προβλήματα και την εξίσωση κίνησης των μεμβρανών αντίστοιχα, λύνοντας το δυναμικό σύστημα με τη βοήθεια του προγράμματος που αναπτύχθηκε στη Matlab προσδιορίζονται οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της πακτωμένης στην περιφέρεια κυκλικής μεμβράνης. Οι ιδιομορφές των πρώτων έξι ιδιοτιμών του κυκλικού νεοπρενίου με το μοντέλο της εξίσωσης κίνησης της μεμβράνης παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.2. Στον πίνακα 5.1 αναγράφονται αναλυτικά οι ιδιοσυχνότητες που αντιστοιχούν στις ιδιομορφές του Σχήματος 5.2.

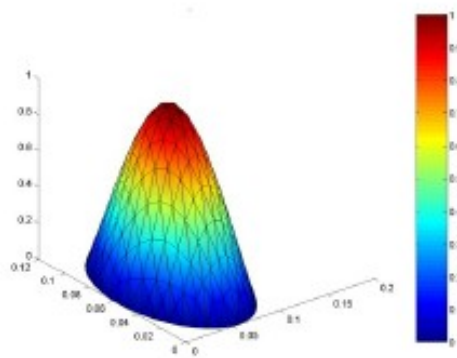
Finite Element Mesh



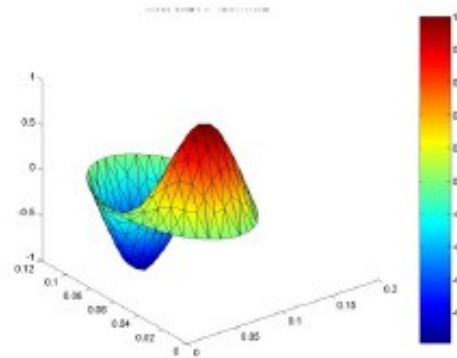
Σχήμα 5.1: Διακριτοποιημένο χωρίο κυκλικής μεμβράνης νεοπρενίου.

Πίνακας 5.1: Τιμές των έξι πρώτων ιδιοσυχνοτήτων

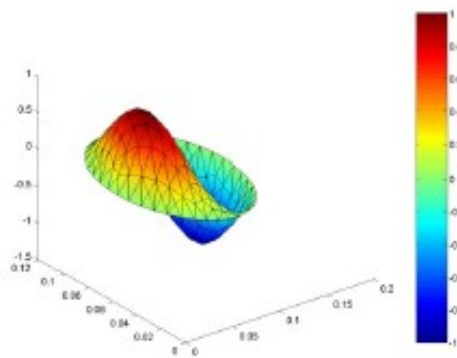
Ιδιομορφή	Ιδιοσυχνότητα (Hz)
1	7.889
2	12.647
3	12.648
4	17.080
5	17.088
6	18.418



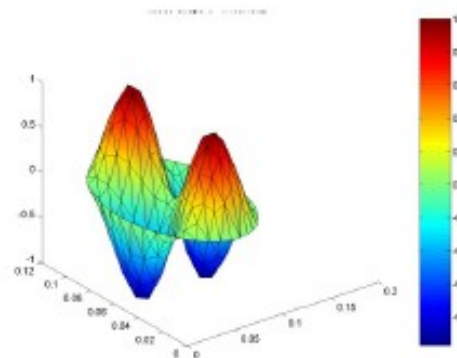
Ιδιομορφή 1



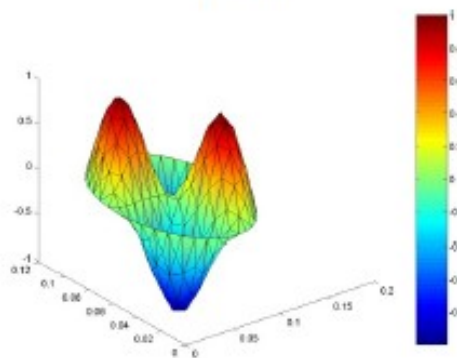
Ιδιομορφή 2



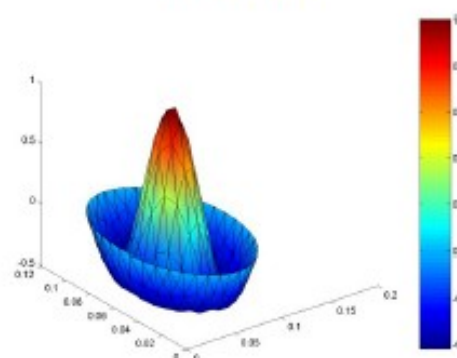
Ιδιομορφή 3



Ιδιομορφή 4



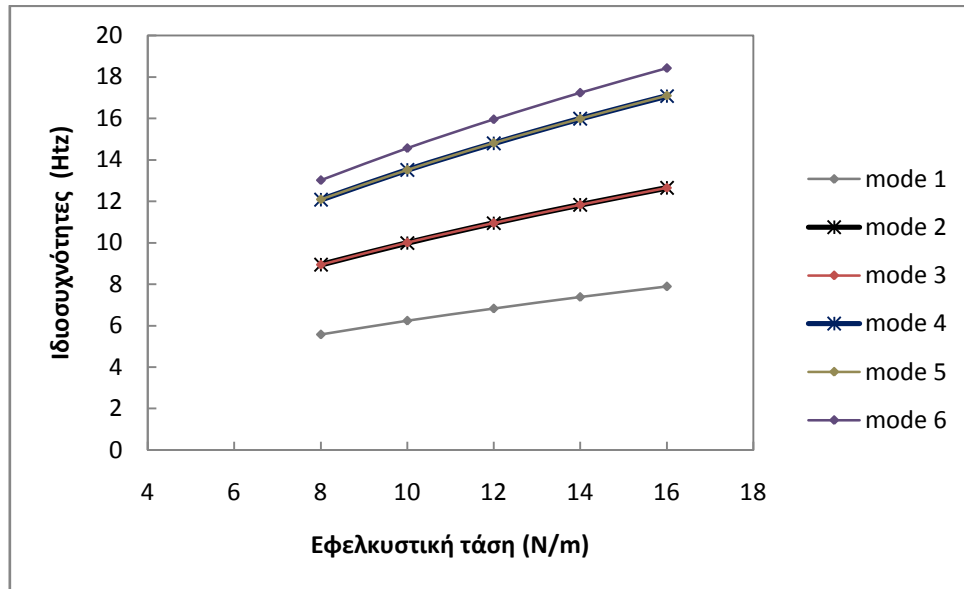
Ιδιομορφή 5



Ιδιομορφή 6

Σχήμα 5.2: Ιδιομορφές των πρώτων έξι ιδιοτιμών της μεμβράνης νεοπρενίου.

Στη συνέχεια ακολουθεί η μελέτη του τρόπου που επιδρά η μεταβολή της εφελκυστικής τάσης στις ιδιοσυχνότητες. Για διάφορες τιμές αρχικής εφελκυστικής τάσης υπολογίζονται οι έξι πρώτες ιδιοσυχνότητες του συστήματος και στο Σχήμα 5.3 φαίνεται η εξάρτησή τους από την εφελκυστική τάση.

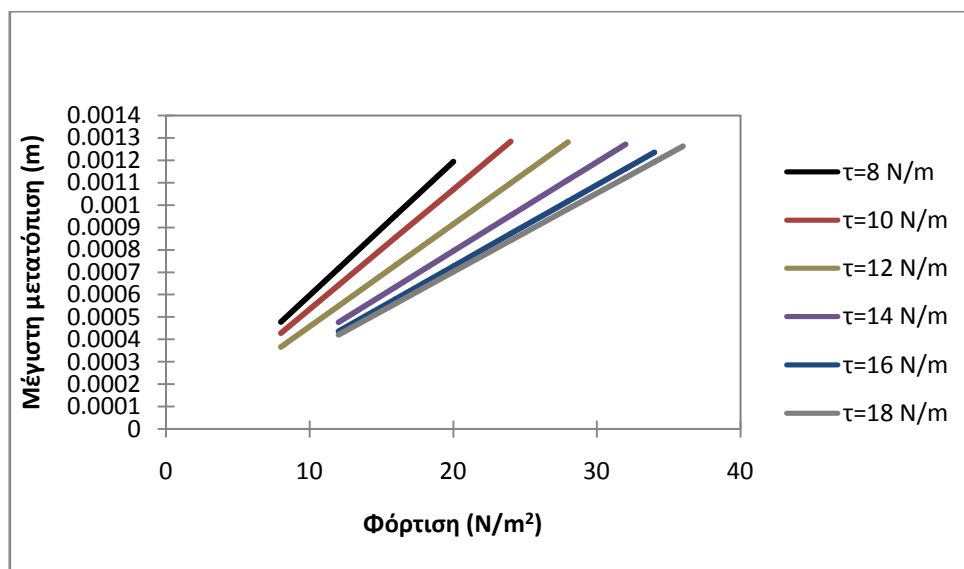


Σχήμα 5.3: Επίδραση της εφελκυστικής τάσης στις τιμές των πρώτων έξι ιδιοσυχνοτήτων της μεμβράνης νεοπρενίου.

Στο διάγραμμα φαίνεται ότι μια αύξηση της αρχικής εφελκυστικής τάσης προκαλεί μια αύξηση των τιμών των ιδιοσυχνοτήτων. Η μεταβολή αυτή φαίνεται να επηρεάζει με τον ίδιο τρόπο όλες τις ιδιοτιμές, αφού οι κλίσεις είναι παραπλήσιου μεγέθους. Το αποτέλεσμα αυτό είναι λογικό αφού όσο τεντώνεται μια μεμβράνη η ταλάντωση είναι δυσκολότερο να συμβεί σε χαμηλές συχνότητες και το σύστημα απαιτεί μεγαλύτερες συχνότητες. Αντίθετα όσο λιγότερο τεντωμένη είναι μια μεμβράνη τόσο ευκολότερα ταλαντώνεται, συνεπώς η ταλάντωση συμβαίνει σε χαμηλότερες συχνότητες. Για τις δεδομένες μεταβολές της αρχικής εφελκυστικής τάσης δεν παρατηρήθηκε καμία αλλαγή στις ιδιομορφές της μεμβράνης νεοπρενίου. Οι τρόποι ταλάντωσης της μεμβράνης παραμένουν ίδιες με αυτές που παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.2.

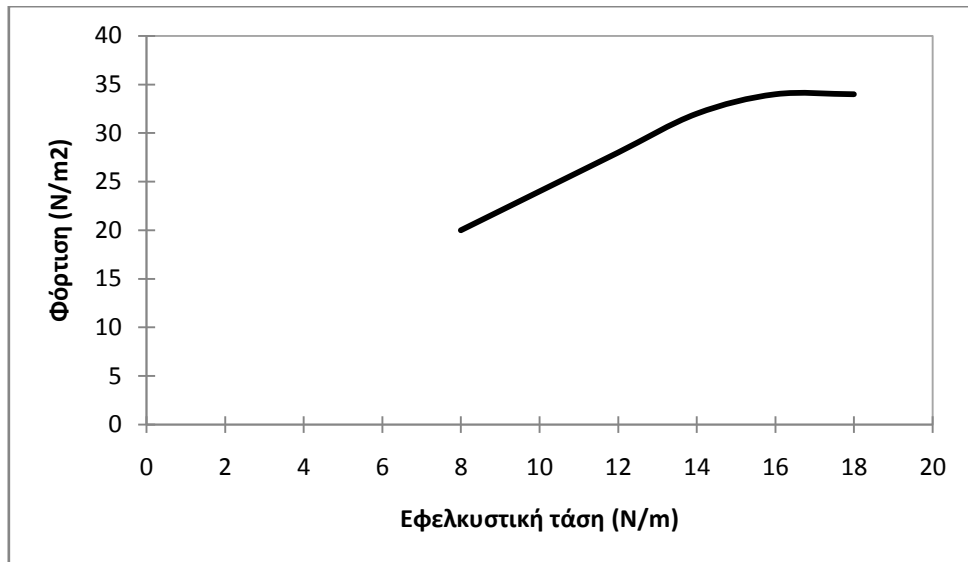
5.1.2 Επίδραση εφελκυστικής τάσης στις μετατοπίσεις λόγω χρονικά εξαρτώμενων εγκάρσιων φορτίσεων

Στο διακριτοποιημένο κυκλικό χωρίο ασκείται μια χρονικά εξαρτώμενη μαζική δύναμη στα κεντρικά στοιχεία 346 και 343 του Σχήματος 5.1 με εμβαδόν $3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$ και διάμετρο στοιχείων ίση με 0.00841. Στην περιφέρεια θεωρούνται συνθήκες Dirichlet με τις μετατοπίσεις να είναι ίσες με μηδέν. Με εφαρμογή της μεθόδου του Newmark υπολογίζονται κάθε στιγμή οι μετατοπίσεις και καταγράφεται η μεγαλύτερη μετατόπιση που προκαλεί η δύναμη σε έναν από τους κεντρικούς κόμβους. Στο Σχήμα 5.4 παρουσιάζεται η μεγαλύτερη μετατόπιση που προκαλείται στη μεμβράνη νεοπρενίου από την εκάστοτε εφαρμοζόμενη δύναμη για διάφορες τιμές της αρχικής εφελκυστικής τάσης, τ .



Σχήμα 5.4: Μέγιστη μετατόπιση της μεμβράνης νεοπρενίου συναρτήσει της φόρτισης για διαφορετικές τιμές εφελκυστικής τάσης.

Η επίδραση της αρχικής εφελκυστικής τάσης φαίνεται να είναι σημαντική. Παρατηρείται ότι με αύξηση της αρχικής εφελκυστικής τάσης απαιτείται μεγαλύτερη φόρτιση για παραμόρφωση της μεμβράνης. Κάτι τέτοιο είναι αναμενόμενο, δεδομένου ότι όσο περισσότερο τεντώνεται μια μεμβράνη τόσο μεγαλύτερη αντίσταση ασκεί κατά την επιβολή κάθετων φορτίσεων, συνεπώς χρειάζονται μεγαλύτερες δυνάμεις για την επίτευξη ίδιας μετατόπισης. Η επίδραση αυτή γίνεται ευκρινέστερη στο Σχήμα 5.5 στο οποίο φαίνεται η δύναμη που ασκείται σε διάφορες εφελκυστικής τάσης τιμές για την επίτευξη μετατόπισης ίσης με 0.0012 m σε έναν από τους κεντρικούς κόμβους.



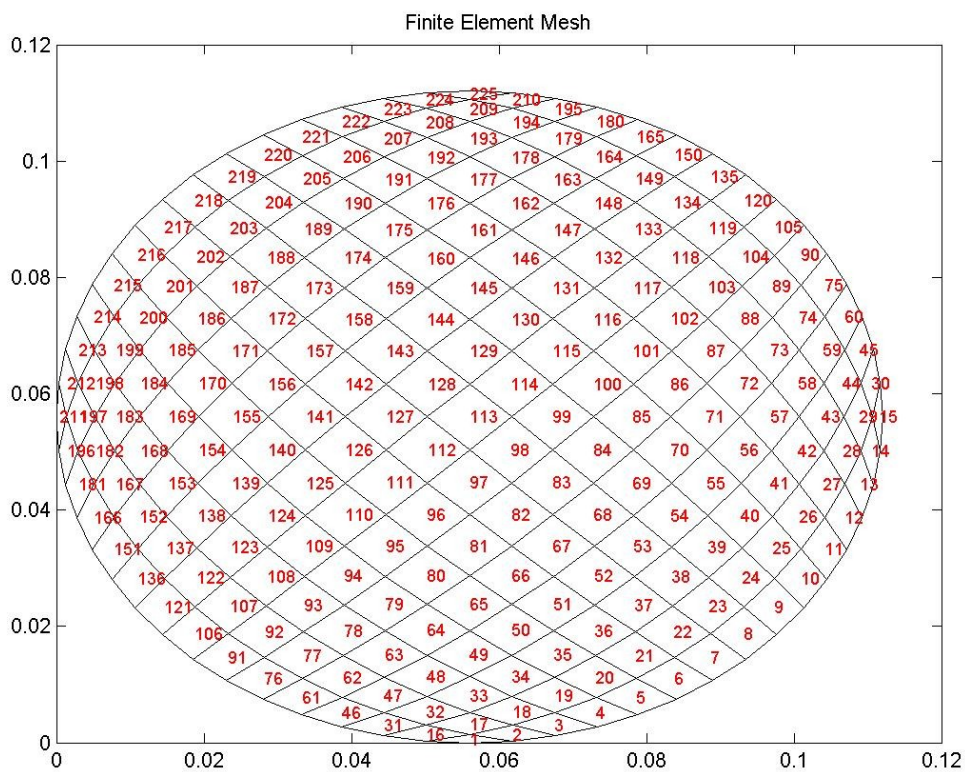
Σχήμα 5.5: Φόρτιση που απαιτείται για την επίτευξη μέγιστης μετατόπισης ίσης με 0.0012m συναρτήσει της εφελκυστικής τάσης.

Από το Σχήμα 5.5 εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι η δύναμη που πρέπει να ασκηθεί για την επίτευξη ίδιας μετατόπισης, αυξάνεται περισσότερο όταν η εφελκυστική τάση λαμβάνει μικρές τιμές από 8 έως 14 N/m ενώ για μεγαλύτερες τιμές της τάσης από 16 έως 18 N/m η δύναμη παρουσιάζει πολύ μικρές μεταβολές. Φαίνεται ότι σε αυτό το πλαίσιο τιμών, παρόλο που η εφελκυστική τάση αυξάνεται ίδιες μετατοπίσεις προκαλούνται από ίδια δύναμη.

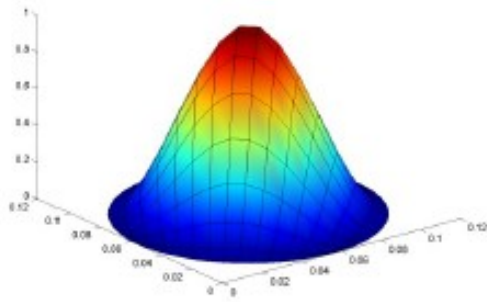
5.2 Εξισώσεις κίνησης πλακών Mindlin

5.2.1 Επίδραση του πάχους στις ιδιοσυχνότητες

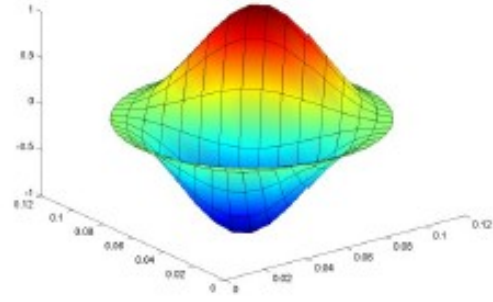
Αρχικά το κυκλικό χωρίο διακριτοποιείται σε 225 τετραγωνικά στοιχεία όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.6 με τη βοήθεια του προγράμματος Gmsh. Λύνοντας το δυναμικό σύστημα στη ελεύθερη ταλάντωση με τη βοήθεια του προγράμματος που αναπτύχθηκε στη Matlab, θεωρώντας ότι στην περιφέρεια οι μετατοπίσεις είναι γνωστές και ίσες με μηδέν, προσδιορίζονται οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα. Στο Σχήμα 5.7 παρουσιάζονται οι ιδιομορφές των πρώτων έξι ιδιοτιμών του κυκλικού νεοπρενίου με το μοντέλο των εξισώσεων κίνησης των πλακών Mindlin. Στον πίνακα 5.2 αναγράφονται αναλυτικά οι ιδιοσυχνότητες που αντιστοιχούν στις ιδιομορφές του Σχήματος 5.7.



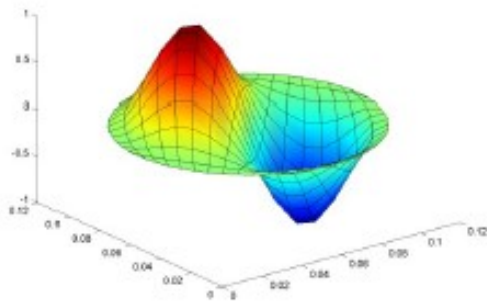
Σχήμα 5.6: Διακριτοποιημένο χωρίο κυκλικής πλάκας νεοπρενίου.



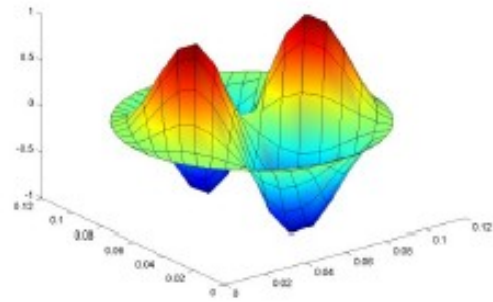
Ιδιομορφή 1



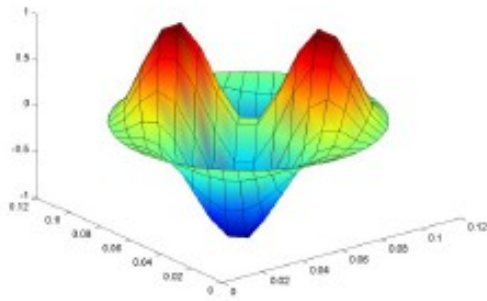
Ιδιομορφή 2



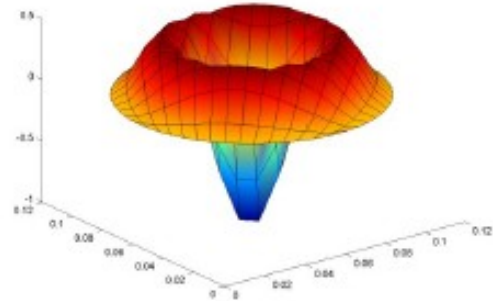
Ιδιομορφή 3



Ιδιομορφή 4



Ιδιομορφή 5



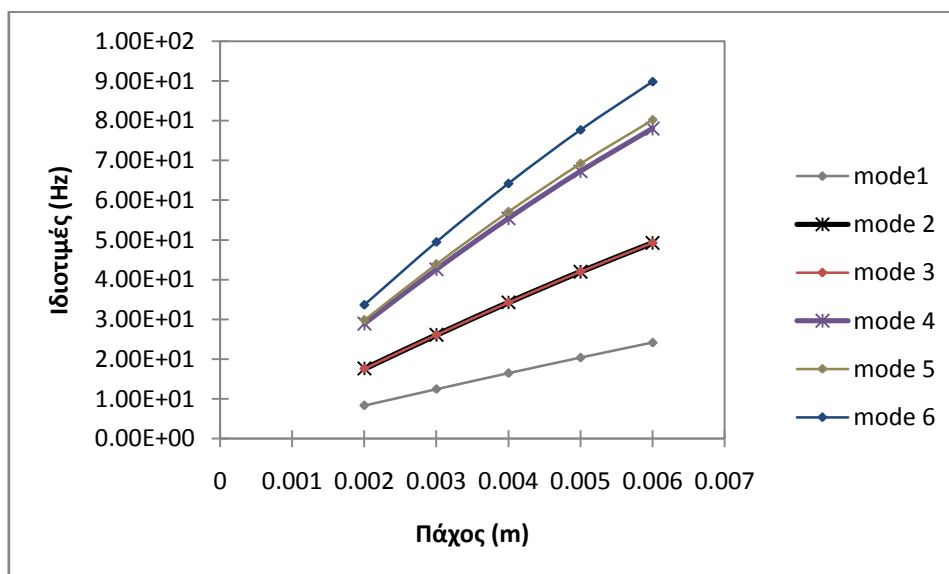
Ιδιομορφή 6

Σχήμα 5.7: Ιδιομορφές των πρώτων έξι ιδιοτιμών της κυκλικής πλάκας Mindlin νεοπρενίου.

Πίνακας 5.2: Τιμές των έξι πρώτων ιδιοσυχνοτήτων.

Ιδιομορφή	Ιδιοσυχνότητα (Hz)
1	8.359
2	17.625
3	17.625
4	28.931
5	29.842
6	33.684

Μια από τις σημαντικότερες παραμέτρους στα μοντέλα των πλακών αλλά και ειδικότερα στη θεωρία των πλακών Mindlin είναι το πάχος της κατασκευής. Για το λόγο αυτό εξετάστηκε η επίδραση του πάχους στις πρώτες έξι ιδιοσυχνότητες της κυκλικής πλάκας Mindlin του νεοπρενίου. Για κάθε πάχος υπολογίζονται από το πρόγραμμα οι ιδιοσυχνότητες, ενώ παράλληλα εξετάζεται αν οι ιδιομορφές παραμένουν ίδιες κατά την μεταβολή.

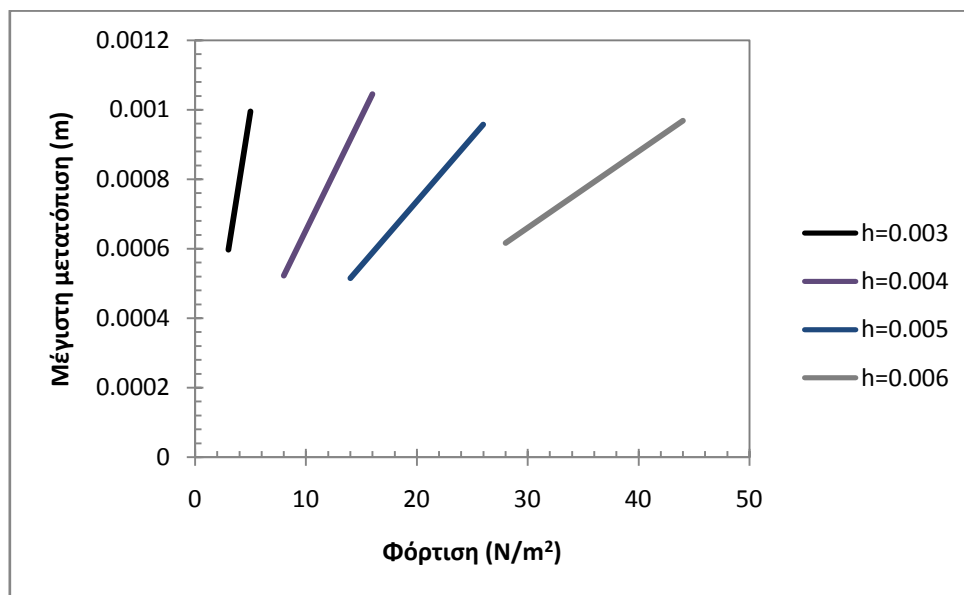


Σχήμα 5.8: Επίδραση του πάχους της πλάκας Mindlin του νεοπρενίου στις πρώτες έξι ιδιοσυχνότητες.

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.8 το πάχος της πλάκας επιδρά σημαντικά στις ιδιοτιμές του συστήματος. Η αύξηση του πάχους προκαλεί αύξηση των ιδιοτιμών του συστήματος. Η επίδραση αυτή είναι περισσότερο εμφανής για τις μεγαλύτερες ιδιοτιμές του συστήματος, αφού παρουσιάζουν μεγαλύτερη κλίση σε σχέση με την πρώτη ιδιοτιμή. Παράλληλα δεν παρατηρείται καμία αλλαγή στις ιδιομορφές, τους τρόπους δόνησης δηλαδή της πλάκας νεοπρενίου για τις δεδομένες μεταβολές του πάχους.

5.2.2 Επίδραση του πάχους στις μετατοπίσεις λόγω χρονικά εξαρτώμενων εγκάρσιων φορτίσεων

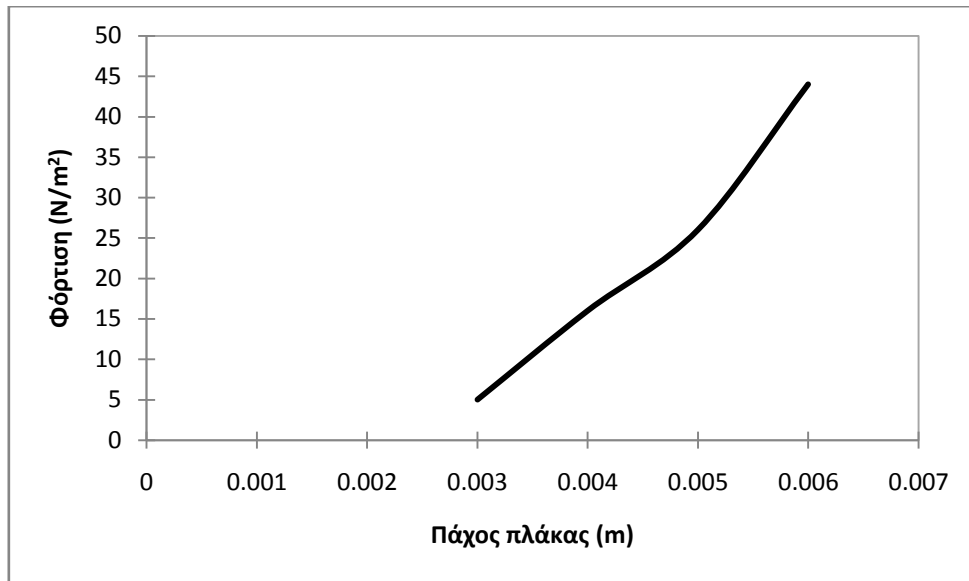
Στο διακριτοποιημένο κυκλικό χωρίο ασκείται μια χρονικά εξαρτώμενη μαζική δύναμη στο κεντρικό στοιχείο 113 του Σχήματος 5.6 με εμβαδόν $6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$ και διάμετρο ίση με 0.0114. Στην περιφέρεια θεωρούνται συνθήκες Dirichlet με τις μετατοπίσεις να είναι ίσες με μηδέν. Με εφαρμογή της μεθόδου του Newmark υπολογίζονται κάθε στιγμή οι μετατοπίσεις της πλάκας νεοπρενίου και καταγράφεται η μεγαλύτερη μετατόπιση που προκαλεί η δύναμη σε έναν από τους κεντρικούς κόμβους στους οποίους ασκείται η δύναμη. Στο Σχήμα.5.9 παρουσιάζεται η μεγαλύτερη μετατόπιση που προκαλείται στο χωρίο από την εφαρμοζόμενη φόρτιση για διαφορετικά πάχη της πλάκας h .



Σχήμα 5.9: Μέγιστη μετατόπιση της πλάκας νεοπρενίου συναρτήσει της φόρτισης για διαφορετικές τιμές του πάχους.

Η αύξηση της δύναμης προκαλεί μεγαλύτερες μετατοπίσεις για όλα τα πάχη της πλάκας, όπως φαίνεται στο διάγραμμα του Σχήματος 5.9. Καθώς το πάχος μεγαλώνει απαιτείται μεγαλύτερη φόρτιση για παραμόρφωση της πλάκας νεοπρενίου. Η αύξηση ή η μείωση του πάχους της πλάκας Mindlin μεταβάλλει σε μεγάλο βαθμό το μητρώο στιβαρότητας κάμψης το οποίο είναι ανάλογος του πάχους υψωμένο εις την τρίτη. Παχύτερες πλάκες απαιτούν μεγαλύτερη ενέργεια για να παραμορφωθούν ενώ λεπτότερες απαιτούν μικρότερη ενέργεια αλλά είναι επιρρεπείς σε αστοχία. Για το λόγο αυτό θα πρέπει ένας μηχανικός να συμβιβάσει τις απαιτήσεις για μικρότερη κατανάλωση ενέργειας και αντοχής του υλικού. Μεγαλύτερο μητρώο στιβαρότητας κάμψης συνεπάγεται μεγαλύτερη κατανάλωση ενέργειας για παραμόρφωση της πλάκας.

Το συμπέρασμα αυτό γίνεται ευκολότερα αντιληπτό από το διάγραμμα που παρουσιάζει τις φορτίσεις που απαιτούνται για την επίτευξη της ίδιας μέγιστης μετατόπισης ίσης με 0.0010 m ενός δεδομένου κόμβου συναρτήσει του πάχους της πλάκας (Σχήμα 5.10).



Σχήμα 5.10: Φόρτιση που απαιτείται για την επίτευξη μέγιστης μετατόπισης ίσης με 0.0010m συναρτήσει του πάχους της πλάκας.

Η δύναμη που πρέπει να ασκηθεί για την επίτευξη ίδιας μετατόπισης, αυξάνεται καθώς μεγαλώνει το πάχος της πλάκας. Συγκεκριμένα για μικρά πάχη με τιμές από 0.003 m έως 0.005 m η φόρτιση που απαιτείται αυξάνει σχεδόν γραμμικά. Για τιμές πάχους μεγαλύτερες του 0.005 m η φόρτιση που απαιτείται αυξάνει επίσης γραμμικά, με μεγαλύτερη όμως κλίση από πριν. Από φυσική άποψη το συμπέρασμα αυτό είναι δικαιολογήσιμο αφού καθώς ένα υλικό γίνεται παχύτερο τόσο μεγαλύτερη αντίσταση παρουσιάζει στην κάμψη.

6 Συμπεράσματα - προτάσεις

Για την κυκλική μεμβράνη νεοπρενίου, εξετάστηκε η αρχική εφελκυστική τάση ως ένας παράγοντας που επιδρά στη δυναμική απόκριση της δομής. Στο πρόβλημα της ελεύθερης ταλάντωσης της κυκλικής μεμβράνης νεοπρενίου αποδείχθηκε ότι μια ενδεχόμενη αύξηση της αρχικής εφελκυστικής τάσης προκαλεί μεγαλύτερες τιμές ιδιοσυχνοτήτων, ενώ και οι έξι πρώτες ιδιοσυχνότητες φαίνεται να επηρεάζονται με τον ίδιο τρόπο από αυτή την αύξηση της αρχικής εφελκυστικής τάσης, δηλαδή σχεδόν γραμμικά και μάλιστα με παραπλήσιες κλίσεις. Οι έξι πρώτοι τρόποι δόνησης της μεμβράνης παραμένουν ίδιοι κατά την μεταβολή της αρχικής εφελκυστικής τάσης. Τα αποτελέσματα αυτά είναι εύλογα δεδομένου ότι όσο αυξάνει η αρχική εφελκυστική τάση τόσο η μεμβράνη καθίσταται λιγότερο ελεύθερη να ταλαντωθεί με αποτέλεσμα να απαιτεί μεγαλύτερες συχνότητες.

Σε ότι αφορά την δυναμική απόκριση της μεμβράνης νεοπρενίου σε χρονικά επιβαλλόμενη δύναμη στο κέντρο της και σε εμβαδόν $6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$ φαίνεται ότι για τιμές αρχικής εφελκυστικής τάσης από 8 μέχρι 14 N/m η δύναμη που απαιτείται για να επιτευχθεί μετατόπιση ίση με 0.0012 m στους κεντρικούς κόμβους στους οποίους ασκείται η δύναμη αυξάνει και μάλιστα γραμμικά. Η συμπεριφορά αυτή αλλάζει για τιμές αρχικής εφελκυστικής τάσης από 16 μέχρι 18 N/m στις οποίες για να προκληθεί μετατόπιση ίση με 0.0012 m στους κεντρικούς κόμβους στους οποίους ασκείται η δύναμη απαιτείται σταθερό μέτρο δύναμης ίσο προς 35 N/m². Φαίνεται δηλαδή ότι η δύναμη που χρειάζεται για να προκληθεί μετατόπιση ίδιου μέτρου δεν εξαρτάται από την αρχική εφελκυστική τάση για αυτές τις τιμές. Φυσικό είναι όσο τεντώνεται μια μεμβράνη να αντιστέκεται σε κάθετες φορτίσεις με αποτέλεσμα να απαιτείται μεγαλύτερη δύναμη για την επίτευξη ίδιας μετατόπισης.

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων για την εξίσωση κίνησης της μεμβράνης φαίνεται ότι δίνει μια προσεγγιστική λύση που συνάδει με τα αποτελέσματα που θα αναμένονταν από φυσικής απόψεως. Ως περαιτέρω μελέτη προτείνεται η εξέταση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων για την περίπτωση της μη γραμμικής συμπεριφοράς της μεμβράνης, δηλαδή για μεγάλες παραμορφώσεις.

Στην περίπτωση της κυκλικής πλάκας Mindlin νεοπρενίου αναλύθηκε ο παράγοντας του πάχους της πλάκας. Στην περίπτωση της ελεύθερης ταλάντωσης της πλάκας καταδεικνύεται ότι το πάχος επηρεάζει σε σημαντικό βαθμό τις ιδιοσυχνότητες της δομής. Με αύξηση του πάχους αυξάνονται και οι ιδιοσυχνότητες και μάλιστα γραμμικά. Η μεταβολή του πάχους φαίνεται να έχει σημαντικότερη επίδραση σε μεγαλύτερες ιδιοσυχνότητες από την πρώτη-θεμελιώδη αφού παρουσιάζουν μεγαλύτερη κλίση σε σχέση με την πρώτη ιδιοσυχνότητα. Οι ιδιομορφές παραμένουν ανεπηρέαστες από αυτή την αλλαγή στο πάχος της πλάκας.

Στην τελευταία περίπτωση, εξετάστηκε ο τρόπος που το πάχος επηρεάζει τις μετατοπίσεις που προκαλεί μια χρονικά επιβαλλόμενη δύναμη στο κέντρο της κυκλικής πλάκας νεοπρενίου και συγκεκριμένα σε εμβαδόν ίσο προς $6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$. Η δύναμη που απαιτείται για να προκαλέσει μετατόπιση ίση προς 0.001 m σε έναν από τους κεντρικούς κόμβους στους οποίους ασκείται η δύναμη, φαίνεται να αυξάνεται καθώς η πλάκα γίνεται παχύτερη. Αναλυτικότερα για τιμές πάχους μεγαλύτερες από 0.005 m μέχρι 0.006 m η κλίση της ευθείας γίνεται μεγαλύτερη γεγονός που δείχνει ότι αυτή η αύξηση του πάχους έχει ως αποτέλεσμα μια μεγαλύτερη μεταβολή της δύναμης που απαιτείται για να επιφέρει μετατόπιση ίση με 0.001 m. Όσο μια δομή γίνεται παχύτερη είναι αναμενόμενο να παρουσιάζει μεγαλύτερη αντίσταση στην κάμψη και να απαιτείται μεγαλύτερη δύναμη για την επίτευξη ίδιας μετατόπισης.

Η εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων για τις εξισώσεις κίνησης των πλακών Mindlin φαίνεται ότι δίνει μια προσεγγιστική λύση που συνάδει με τα αποτελέσματα που θα αναμένονταν από φυσικής απόψεως. Και σε αυτή την περίπτωση θα ήταν ενδιαφέρουσα μια μελέτη με την θεώρηση της μη γραμμικής συμπεριφοράς της πλάκας.

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι μερικές από τις ιδιομορφές τόσο του μοντέλου των μεμβρανών όσο και αυτού των πλακών Mindlin θα μπορούσαν να αξιοποιηθούν σε εφαρμογές της μηχανικής. Η ιδιομορφή 2 της κυκλικής μεμβράνης νεοπρενίου του Σχήματος 5.2 και αντίστοιχα η ιδιομορφή 2 της κυκλικής πλάκας Mindlin του Σχήματος 5.7 θα μπορούσαν να φανούν χρήσιμες στον σχεδιασμό μιας αντλίας διαφράγματος βοηθώντας στην πρόωση ενός ρευστού μέσα στην αντλία καθώς το μισό διάφραγμα λαμβάνει μια διαμόρφωση κοίλη, ενώ σε δεύτερη φάση κατά την ταλάντωση αυτή, όπου η κοίλη επιφάνεια γίνεται πλέον κυρτή και η κυρτή επιφάνεια γίνεται πλέον κοίλη το ρευστό μπορεί να εξωθηθεί από την αντλία. Με την ίδια ακριβώς λογική θα μπορούσε να αξιοποιηθεί και η πρώτη ιδιομορφή των Σχημάτων 5.2 και 5.7 των δύο μοντέλων.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Ashby, M.F., 2005. *Materials Selection in Mechanical Design*. 3rd ed. Butterworth Heinemann.
- Budavari, S., 1996. *The Merck Index - An Encyclopedia of Chemicals, Drugs, and Biologicals*. Merck and Co.
- Fagan, M.J., 1992. *Finite Elements Analysis Theory and Practice*. Longman Scientific & Technical.
- Hoffman, J.D. & Frankel, S., 2001. *Numerical Methods for Engineers and Scientists*. 2nd ed. New York: Marcel Dekker.
- Huebner, K.H., Dewhurst, D.L., Smith, D.E. & Byrom, T.G., 2001. *The Finite Element Method for Engineers*. 4th ed. New York: John Wiley & Sons.
- Hutton, D.V., 2004. *Fundamentals of Finite Element Analysis*. 1st ed. The McGraw–Hill Higher Education.
- Kirk-Othmer, ed., 1993. *Kirk-Othmer Encyclopedia of Chemical Technology*. 4th ed. New York: John Wiley & Sons.
- Larson, M.G. & Bengzon, F., 2013. *The Finite Element Method: Theory, Implementation, and Applications*. Springer.
- Lewis, J.R., 1997. *Hawley's Condensed Chemical Dictionary*. 13th ed. New York: John Wiley & Sons.
- McMurry, J., 2012. *Οργανική Χημεία*. Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- Steele, C.R. & Balch, C.D., 2009. *Introduction to the Theory of Plates*. [Online] Stanford University Available at: <http://web.stanford.edu/~chasst/Course%20Notes/Introduction%20to%20the%20Theory%20of%20Plates.pdf> [Accessed 2016].
- Szilard, R., 2004. *Theories and Applications of Plate Analysis: Classical Numerical and Engineering Methods*. John Wiley & Sons.
- Wriggers, P., 2008. *Nonlinear Finite Element Methods*. Springer.
- Zienkiewicz, O.C. & Taylor, R.L., 2000. *The Finite Element Method: Volume 1 The Basis*. 5th ed. Butterworth Heinemann.
- Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. & Zhu, J.Z., 2005. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. 6th ed. ELSEVIER.
- Αύφαντης, Η.Χ., 2010. *Εισαγωγή στην αντοχή των υλικών και στη μηχανική του συνεχούς*. Θεσσαλονίκη: Grapholine.
- Καλπακίδης, Β.Κ., 2009. *Υπολογιστικές μέθοδοι του συνεχούς*. [Online] Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων Available at: <users.uoi.gr/vkalpak/files/fem.pdf> [Accessed 2016].
- Καρύδης, Π.Α., 2005. *Υπολογιστικές Μέθοδοι και Εφαρμογές σε Λεπτότοιχες Κατασκευές*. [Online] Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο Available at: <http://users.ntua.gr/caridis/methodoi/keimena/chap%2005/chapter%2005.pdf> [Accessed 2016].

Κατσικαδέλης, Ι.Θ., 2012. *Δυναμική Ανάλυση των Κατασκευών: Θεωρία και Εφαρμογές*. Αθήνα: Συμμετρία.

Νταουτίδης, Π., Μαστρογεωργόπουλος, Σ. & Σιδηροπούλου, Ε., 2010. *Αριθμητικές μέθοδοι για προβλήματα μηχανικής: Εφαρμογές με χρήση Matlab*. Θεσσαλονίκη: Ανικούλα.

Παναγιώτου, Κ., 2006. *Επιστήμη και Τεχνολογία Πολυμερών*. 3rd ed. Θεσσαλονίκη: Πήγασος.

Τσαμασφύρος, Γ.Ι. & Θεοτόκογλου, Ε.Ε., 2005. *Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων Ι*. Αθήνα: Συμμετρία.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: ΚΩΔΙΚΑΣ MATLAB ΓΙΑ ΤΙΣ ΜΕΜΒΡΑΝΕΣ

1) Δεδομένα

```
% File: MEMBRANE_DATA_1.m

%

global nnd nel nne nodof eldof n

global geom connec dee nf Nodal_loads

%

format short e

%

% Node coordinates x and y

load geometry.txt

geom =geometry(:,2:3);

%

% Element connectivity

load connection.txt

connec = connection(:,6:8)

%

nnd = size(geom,1) ; % Number of nodes:

nel = size(connec,1) ; % Number of elements:

nne = 3 ; % Number of nodes per element:

nodof =1; % Number of degrees of freedom per node

eldof = nne*nodof; % Number of degrees of freedom per element

sdof=nnd*nodof;

%
```

```

for iel=1:nel

    for i=1:mne

        numd(i)=convec(iel,i);    % extract connected node for (iel)-th element

        X(i,iel)=geom(numd(i),1); % extract x value of the node

        Y(i,iel)=geom(numd(i),2); % extract y value of the node

    end

end

%

%plot mesh with node and element indexes

figure

plot(X,Y,'k')

fill(X,Y,'w')

title('Finite Element Mesh') ;

axis off ;

nd = convec' ;

for i = 1:nel

    %text(X(:,i),Y(:,i),int2str(nd(:,i)),'fontsize',10,'color','k');

    text(sum(X(:,i))/3,sum(Y(:,i))/3,int2str(i),'fontsize',8,'color','b') ;

end

%

thick=0.004; % membrane thickness m

t = 16; % Tension/Length N/m

r = 12.11%2.45949; % Density/area kg/m2

v=(r/t);

```

```

%
% Boundary conditions
nf = ones(nnd, nodof); % Initialize the matrix nf to 1
nf(1:40,1) = 0; % Prescribed nodal freedom of nodes 1 to 40
%
% Counting of the free degrees of freedom
n=0;
for f=1:nnd
    for c=1:nodof
        if nf(f,c) ~= 0
            n=n+1;
            nf(f,c)=n;
        end
    end
end
end

```

2) Κυρίως πρόγραμμα

```

% THIS PROGRAM USES AN 3-NODE LINEAR TRIANGULAR ELEMENT FOR THE
% MEMBRANE ANALYSIS OF A TWO DIMENSIONAL PROBLEM

```

```

%

```

```

clear all

```

```

clc

```

```

%

```

```

global nnd nel nne nodof eldof n X Y

```

```

global geom connec dee nf Nodal_loads

```

```

global mm kk fg n

%

format short

%

disp('Δώστε τον αριθμό για την αντίστοιχη επιλογή');

disp('1: Modal analysis');

disp('2: Dynamic analysis');

b= input('Enter a number: ')

if b==1

    %

    %%%%%%%%%%% Data input %%%%%%%%%%%

    %

    MEMBRANE_DATA_1;

    %

    %%%%%%%%%%% End of input %%%%%%%%%%%

    %

    %%%%%%%%%%% Assembly of the global stiffness matrix and global mass matrix %%%%%%%%%%%

    %

    % initialize the global stiffness matrix to zero

    kk = zeros(n, n);

    %initialize the global mass matrix to zero

    mm= zeros(n, n);

    %

    for f=1:nel

```

```

[ke,g,A] = triang_elem(f); % Form strain matrix, and steering vector and Compute stiffness matrix

kk=form_KK(kk,ke, g); % assemble global stiffness matrix

me=((v*A)/12)*[2 1 1; 1 2 1; 1 1 2];

mm=form_MM(mm,me, g);% assemble global mass matrix

end

%

%%%%%%%%%%%%%% End of assembly %%%%%%%%%%%%%%%

%

%##### Modal analysis #####

%

[vecFreq,w] =eig(kk,mm);

freq=diag(w);

freq=sqrt(freq);

freqhertz=freq/(2*pi)

%

%Plot Mode Shapes

for mode=1:6

    if vecFreq(:,mode)<0

        veqfreq=vecFreq(:,mode)./min((vecFreq(:,mode)))

    else

        veqfreq=vecFreq(:,mode)./max((vecFreq(:,mode)))

    end

    vecfreqbc=zeros(nnd,1);

    k=1

```

```

for d=1:nnd
    if nf(d,1)~= 0
        vecfreqbc(d,1)=veqfreq(k,1)
        k=k+1;
    end
end

end

%

vfmn=min(vecfreqbc(:,1))

vfmax=max(vecfreqbc(:,1))

plot_deformed_shape2(nel,nne,connec,X,Y,vecfreqbc)

title(['Mode Shape w=' num2str(freqhertz(mode,1),5) 'Hertz']) ;

eval(['print -dtiff ModeShape_' num2str((mode),5) '.tiff']);

end

freqhertz(1:6)

end

%

if b==2

    %

    %##### End of modal analysis #####

    %

    %##### Dynamic Analysis #####

    %

clear all

clc

```

```

%
%%%%%%%%%% Data input %%%%%%%%%%
%
MEMBRANE_DATA_1;
%
%%%%%%%%%% End of input %%%%%%%%%%
%
%Initialize force vector
kf=zeros(n,1);
%
%%%%%%%%%% Assembly of the global stiffness matrix and global mass matrix %%%%%%%%%%
%
% initialize the global stiffness matrix to zero
kk = zeros(n, n);
% initialize the global mass matrix to zero
mm= zeros(n, n);
%
for f=1:nel
    [ke,g,A] = triang_elem(f); % Form strain matrix, and steering vector and Compute stiffness matrix
    kk=form_KK(kk,ke, g); % assemble global stiffness matrix
    me=((v*A)/12)*[2 1 1;
        1 2 1;
        1 1 2];
    mm=form_MM(mm,me, g);% assemble global mass matrix

```



```

x1 = geom(connec(f,1),1); y1 = geom(connec(f,1),2);
x2 = geom(connec(f,2),1); y2 = geom(connec(f,2),2);
x3 = geom(connec(f,3),1); y3 = geom(connec(f,3),2);
fv=(A/6)*[1;1;1];
for l=1:eldof
    if g(l) ~= 0
        if g(l)==nf(50) | g(l)==nf(192) | g(l)==nf(195) | g(l)==nf(198)
            kf(g(l))= kf(g(l)) + fv(l);
        end
    end
end
end
end
end
%
%%%%%%%%%%%%%% End of assembly %%%%%%%%%%%%%%%
%
disp('Δώστε τον αριθμό για την αντίστοιχη επιλογή');
disp('1: Dynamic analysis: Newmark Method');
disp('2: Dynamic analysis: Wilson Î, Method');
fprintf("");
%
x= input('Enter a number: ')
a=x
%
%##### Newmark Method #####

```

```

%
if a==1
    [w,dw,ddw,time_matrix,FG] = NewmarkMethod(mm,kk,kf,n);
    %
    %loop for inserting the clamped nodes (w=0) to the w matrix
    count=0
    addrow=1
    for k=1:size(nf)
        count=count+1;
        if nf(count)==0
            if count==1
                w0=w';
                w_zeros=cat(2,zeros(size(w0,1),1), w0);
                w=w_zeros';
            else
                wbc=zeros(size(w,1)+1,size(w,2));
                wbc(1:count-1,:)=w(1:count-1,:);
                wbc(count+1:end,:)=w(count:end,:);
                w=wbc;
            end
        end
    end
end
%
%from w matrix form Zdef(3xnel) (each column stores the w of an element nodes)

```

```

t=0;

Z=zeros(size(wbc),1)

for i=0:0

    t=time_matrix(i);

    Z(:)=wbc(:,i);

    component=Z;

    for iel=1:nel

        for ino=1:nne

            Zdef(ino,iel) = Z(connec(iel,ino)) ;

            profile(ino,iel) = component(connec(iel,ino)) ;

        end

    end

end

%Plotting deformed mesh for each time step

figure

Zdefmin=min(Z(:,1));

Zdefmax=max(Z(:,1));

plot3(X,Y,Zdef);

fill3(X,Y,Zdef,profile);

title(['Deformed Mesh according to Newmarks Method after time=' num2str((t),4) 'seconds']) ;

rotate3d on ;

axis on ;

colorbar

eval(['print -dtiff Newmark_' num2str((t),4) '.tiff']);

end

```

```

%
%##### Wilson Method #####
%
elseif a==2

[w,dw,ddw,time_matrix] = Wilson(mm,kk,fg,n);

%

%loop for inserting the clamped nodes (w=0) to the w matrix

count=0

addrow=1

for k=1:size(nf)

    count=count+1;

    if nf(count)==0

        if count==1

            w0=w';

            w_zeros=cat(2,zeros(size(w0,1),1), w0);

            w=w_zeros'

        else

            wbc=zeros(size(w,1)+1,size(w,2))

            wbc(1:count-1,:)=w(1:count-1,:)

            wbc(count+1:end,:)=w(count:end,:)

            w=wbc

        end

    end

end

end

```

```

%
%from w matrix form Zdef(3xnel) (each column stores the w of an element nodes)

t=0;

Z=zeros(size(wbc),1)

for i=1:3

    t=time_matrix(i)

    Z(:)=wbc(:,i)

    component=Z

    for iel=1:nel

        for ino=1:nne

            Zdef(ino,iel) = Z(connec(iel,ino)) ;

            profile(ino,iel) = component(connec(iel,ino)) ;

        end

    end

end

% Plotting deformed mesh for each time step

figure

Zdefmin=min(Z(:,1));

Zdefmax=max(Z(:,1));

plot3(X,Y,Zdef)

fill3(X,Y,Zdef,profile);

title(['Deformed Mesh according to Wilsons Method after time=' int2str(t) 'seconds']);

rotate3d on ;

axis on ;

colorbar

```

```

eval(['print -dtiff wilson_' num2str(t) '.tiff']);

end

%%##### End of Dynamic Analysis #####

end

end

3)   Συνάθροιση του πίνακα στιβαρότητας

function[kk]=form_KK(kk, ke, g)

%

% This function assembles the global stiffness matrix

%

global eldof

%

for l=1:eldof

    if g(l) ~= 0

        for c=1: eldof

            if g(c) ~= 0

                kk(g(l),g(c))= kk(g(l),g(c)) + ke(l,c);

            end

        end

    end

end

end

%

%% end function form_KK %%%


```

4) Συνάθροιση του πίνακα μάζας

```

function[MM]=form_MM(MM, mg, g)

%

% This function assembles the global mass matrix

%

global eldof

%

for f=1:eldof

    if g(f) ~= 0

        for c=1: eldof

            if g(c) ~= 0

                MM(g(f),g(c))= MM(g(f),g(c)) + mg(f,c);

            end

        end

    end

end

end

%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% end function form_MM %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

5) Συναρτήσεις σχήματος τριγωνικού στοιχείου

```

function[ke,g,A,m] = triang_elem(f)

%

% This function returns the coordinates of the nodes of element i and its steering vector

%

global nnd nel nne nodof eldof n

global geom connec dee nf load

```

```

%
x1 = geom(connec(f,1),1); y1 = geom(connec(f,1),2);
x2 = geom(connec(f,2),1); y2 = geom(connec(f,2),2);
x3 = geom(connec(f,3),1); y3 = geom(connec(f,3),2);
%
A = (0.5)*det([1 1 1; x1 x2 x3; y1 y2 y3]);
%
ke(1,1) = ((x3-x2)*(x3-x2)+(y2-y3)*(y2-y3))/(4*A);
ke(1,2) = ((x3-x2)*(x1-x3)+(y2-y3)*(y3-y1))/(4*A);
ke(1,3) = ((x3-x2)*(x2-x1)+(y2-y3)*(y1-y2))/(4*A);
ke(2,1) = ke(1,2);
ke(2,2) = ((x1-x3)*(x1-x3)+(y3-y1)*(y3-y1))/(4*A);
ke(2,3) = ((x1-x3)*(x2-x1)+(y3-y1)*(y1-y2))/(4*A);
ke(3,1) = ke(1,3);
ke(3,2) = ke(2,3);
ke(3,3) = ((x2-x1)*(x2-x1)+(y1-y2)*(y1-y2))/(4*A);
%
l=0;
for k=1:nne
    for c=1:nodof
        l=l+1;
        g(l)=nf(connec(f,k),c);
    end
end
end

```



```

% End function

6) Μέθοδος Newmark

function [w,dw,ddw,time_matrix,FG] = NewmarkMethod(mm,kk,kf,n)

%

% This function integrates in time using Newmark's Method

%

global w dw ddw time_matrix FG

%

format long g

%

dt=0.01;

start_time=0.0;

final_time=3.5;

time_steps=fix(final_time/dt)+1;

%

% Constants for Newmark's integration

gamma = 1/2 ;alfa = 1/4 ;

a0=1/(alfa*dt*dt) ;

a1 = gamma/(alfa*dt) ;

a2 = 1/(alfa*dt) ;

a3 = (1/(2*alfa))-1 ;

a4 = (gamma/alfa)-1 ;

a5 = (dt/2)*(gamma/alfa-2) ;

a6 = (1-gamma)*dt ; a7=gamma*dt;

```

```

n=length(mm);

w=zeros(n,time_steps);

dw=zeros(n,time_steps);

ddw=zeros(n,time_steps);

time_matrix=zeros(time_steps,1);

FG = zeros(n,time_steps);

%

% Initial Conditions of w,dw,ddw

w0=zeros(n,1);

%w(:,1) = w0(:,1)

dw0=zeros(n,1);

%dw(:,1) = dw0(:,1) ;

F0=zeros(n,1)

%FG(:,1)=F0(:,1);

ddw0=mm\F0(:,1)-kk*w(:,1));

for g=1:n

    w(g,1) = w0(g,1);

    dw(g,1) = dw0(g,1);

    FG(g,1)=F0(g,1);

    ddw(g,1) = ddw0(g,1);

end

%Time integration for loading

t0=0

a=length(kf);

```

```

for when=2:time_steps

    t0=t0+dt;

    for row=1:a

        if kf(row,1)~=0

            FG(row,when)=kf(row,1)*12*sin(3*t0);

        else FG(row,when)=0;

        end

    end

end

end

%

%F=zeros(n,n);

w11=zeros(n,1);

w1=zeros(n,1);

dw1=zeros(n,1);

ddw1=zeros(n,1);

%

% End of time integration for loading

kkef=kk+a0*mm;

[l, u]=lu(kkef);

column=2;

t1=dt

%

while t1<=final_time

    F=FG(:,column)+mm*(a0*w0(:,1)+a2*dw0(:,1)+a3*ddw0(:,1));

```

```
w11=inv(l)*F;
w1=inv(u)*w11;
ddw1=a0*(w1-w0)-a2*dw0-a3*ddw0;
dw1=dw0+a6*ddw0+a7*ddw1;
w(:,column)=w1(:,1);
dw(:,column)=dw1(:,1);
ddw(:,column)=ddw1(:,1);
time_matrix(column,1)=t1;
column=column+1;
t1=t1+dt;
w0=w1;
dw0=dw1;
ddw0=ddw1;
end
```

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: ΚΩΔΙΚΑΣ MATLAB ΓΙΑ ΤΙΣ ΠΛΑΚΕΣ

MINDLIN

1) Δεδομένα

```
% File: Plate_DATA.m
```

```
%
```

```
global nnd nel nne nodof eldof sdof n D G
```

```
global geom connec nf r I X Y
```

```
%
```

```
format short e
```

```
%
```

```
% Node coordinates x and y
```

```
load geometry.txt
```

```
geom = geometry(:,2:3);
```

```
%
```

```
% Element connectivity
```

```
load connection.txt
```

```
connec = connection(:,6:9)
```

```
%
```

```
% Nodes coordinates x and y
```

```
nnd = size(geom,1) ; % Number of nodes:
```

```
nel = size(connec,1) ; % Number of elements:
```

```
nne = 4 ; % Number of nodes per element:
```

```
nodof=3; % Number of degrees of freedom per node
```

```
eldof = nne*nodof; % Number of degrees of freedom per element
```

```
sdof=nnd*nodof;
```

```
%
```

```

for iel=1:nel

    for i=1:nne

        numd(i)=conne(iel,i);    % extract connected node for (iel)-th element

        X(i,iel)=geom(numd(i),1); % extract x value of the node

        Y(i,iel)=geom(numd(i),2); % extract y value of the node

    end

end

end

%

%%plot mesh with node and element indexes

figure

plot(X,Y,'k')

fill(X,Y,'w')

title('Finite Element Mesh') ;

axis on ;

nd = conne ;

for i = 1:nel

    % text(X(:,i),Y(:,i),int2str(nd(:,i)),'fontsize',10,'color','k');

    text(sum(X(:,i))/4,sum(Y(:,i))/4,int2str(i),'fontsize',8,'color','r') ;

end

%

% material properties

E=700000;%81545.6; % young modulus MPa

p= 0.499 % poisson

h=0.003; % plate thickness m

```

```

r = 1230;% 960; % Density/area kg/m2

Io=r*(h^3/12);

I=[Io 0 0;0 Io 0;0 0 r*h];

Dr=(E*(h^3/12))/(1-p^2);

D=Dr*[1 p 0; p 1 0; 0 0 (1-p)/2];

Gr=E/(2*(1+p));

G=Gr*[h 0;0 h];

%

% Boundary conditions

nf = ones(nnd, nodof); % Initialize the matrix nf to 1

nf(1:60,1) = 0; % Nodal freedom in Rx for nodes 1 to 60

nf(1:60,2) = 0; % Nodal freedom in Ry for nodes 1 to 60

nf(1:60,3) = 0; % Nodal freedom in w for nodes 1 to 60

%

n=0;

for c=1:nnd

    for f=1:nodof

        if nf(c,f) ~= 0

            n=n+1;

            nf(c,f)=n;

        end

    end

end

end

%nf

```

```

%

%%%%%%%%%%%%%% End of input %%%%%%%%%%%%%%%

2)    Κυρίως πρόγραμμα

% DYNAMIC ANALYSIS OF A THIN PLATE USING 4 NODE ELEMENT

%

clc

clear all;

%

global nnd nel nne nodof eldof n gb gs gm geom I

global geom connec B kb Bs ks mes B G nf g N der X Y

%

plate_DATA;

%

% Form the matrix containing points and weights of Gauss points

%

gb=4;

gs=1;

gm=4;

gpwb=gauss(gb);

gpws=gauss(gs);

gpwm=gauss(gm);

%

% initialize the global matrices to zero

kk = zeros(n, n);

```



```

kkb=zeros(n,n);

kks=zeros(n,n);

mm=zeros(n,n);

%mes=zeros(n,n);

%

%loop for every element

for f=1:nel

    [coord,g] = plate_Q4(f) ;

    kb=zeros(eldof,eldof) ;

    ks=zeros(eldof,eldof) ;

    %

    % Integrate element bending stiffness

    for k=1: gb

        wk = gpwb(k,2);

        for l=1: gb

            wl=gpwb(l,2);

            xk=double(gpwb(k,1));

            eta=double(gpwb(l,1));

            [derN,N] = shfunQ4(xk,eta);

            jacob=derN*coord;

            d=det(jacob);

            invjac=inv(jacob);

            deriv=invjac*derN;

            [B]=formbent(deriv,nne,eldof);

```

```

    kb=kb + B' *D*B*wk*wl*d;

end

end

%

% Integrate element Shear stiffness

for k=1: gs

    wk = gpws(k,2);

    for l=1: gs

        wl=gpws(l,2);

        xk=double(gpws(k,1));

        eta=double(gpws(l,1));

        [derN,N] = shfunQ4(xk,eta);

        jac=derN*coord;

        d=det(jac);

        jac1=inv(jac);

        deriv=jac1*derN;

        [Bs]=formshear(deriv,N,nne,eldof);

        ks=ks + (0.8601)*Bs' *G*Bs*wk*wl*d;

    end

end

%

kke=kb+ks;

kk=form_KK(kk, kke, eldof , g);

end

```

```

%
%loop for every element
for f=1:nel
    enodes=connec(f,:);
    [coord,g] = plate_Q4(f) ;
    mes=zeros(eldof,eldof) ;
    % Integrate element mass matrix
    for k=1: gm
        wk = gpwm(k,2);
        for l=1: gm
            wl=gpwm(l,2);
            xk=double(gpwm(k,1));
            eta=double(gpwm(l,1));
            [derN,N] = shfunQ4(xk,eta);
            jacob=derN*coord;
            d=det(jacob);
            %[Nm]=formmass(L,N);
            Nm=[N(1) 0 0 N(2) 0 0 N(3) 0 0 N(4) 0 0;
                0 N(1) 0 0 N(2) 0 0 N(3) 0 0 N(4) 0 ;
                0 0 N(1) 0 0 N(2) 0 0 N(3) 0 0 N(4)];
            mes=mes + Nm' *I*Nm*wk*wl*d;
        end
    end
end
mm=form_MM(mm, mes, eldof , g);

```

```

end

%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% End of assembly %%%%%%%%%

ans = input('Proceed to modal analysis (Y/N)?', 's');

if ans == 'y' || ans == 'Y'

    [V,w] = eig(kk,mm); %vecFreq

    freq=diag(w);

    freq=sqrt(freq);

    freqhertz=freq/(2*pi);

    Vw(:,1)=V(:,581);

    count1=1;

    k=1

    while count1<=length(V)

        count2(k,1)=count1;

        count2(k+1,1)=count1+1;

        count1=count1+3;

        k=k+2;

    end

    Vw(count2)=[];

    %

    %Plot Mode Shapes

    for mode=1:1

        veqfreq=Vw(:,1)/max(abs(Vw(:,1)));

        vecfreqbc=zeros(nnd,1);

```

```

k=1
for d=1:nnnd
    if nf(d,1)~= 0
        vecfreqbc(d,1)=veqfreq(k,mode);
        k=k+1;
    end
end

end

%
vfmin=min(vecfreqbc(:,1));
vfmax=max(vecfreqbc(:,1));

plot_deformed_shape2(nel,nne,connec,X,Y,vecfreqbc)

title(['Mode Shape w=' num2str(freqhertz(581,1),5) 'Hertz']) ;

eval(['print -dtiff ModeShape_' num2str((freqhertz(581,1)),5) '.tiff']);

end

end

%
%%%%%%%%%% End of modal analysis %%%%%%%%%%%

ans = input('Proceed to time analysis (Y/N)?', 's');

if ans == 'y' || ans == 'Y'

%Initialise force vector

kf=zeros(n,1);

%

% Form the matrix containing points and weights of Gauss points

gf=4;

```

```

gpwf=gauss(gf);

%

%Loop for every element

for f=1:nel

    [coord,g] = plate_Q4(f) ;

    fes=zeros(12,1) ;

    % Integrate element matrix

    for k=1: gf

        wk = gpwf(k,2);

        for l=1: gf

            wl=gpwf(l,2);

            xk=(gpwf(k,1));

            eta=(gpwf(l,1));

            [derN,N] = shfunQ4(xk,eta);

            jacob=derN*coord;

            d=det(jacob);

            Nf=[0;0;N(1); 0;0;N(2); 0;0;N(3);0;0; N(4)];

            fes=fes+Nf*wl*wk*d;

        end

    end

end

for e=1:eldof

    if g(e) ~= 0

        if g(e)==nf(151,3) | g(e)==nf(152,3) | g(e)==nf(165,3) | g(e)==nf(166,3)

            kf(g(e))= kf(g(e)) + fes(e);

        end

    end

end

```

```

        end

    end

end

end

[w,dw,ddw,time_matrix,FG] = NewmarkMethod(mm,kk,kf,n);

%

%loop for inserting the clamped nodes (w=0) to the w matrix

count=0;

addrow=1;

for k=1:size(nf,1)

    count=count+1;

    if nf(count)==0

        if count==1

            w0=zeros(size(w,1)+3,size(w,2));

            w0(4:end,:)=w(1:end,:);

            w=w0;

        else

            wbc=zeros(size(w,1)+3,size(w,2));

            wbc(1:count-1,:)=w(1:count-1,:);

            wbc(count+3:end,:)=w(count:end,:);

            w=wbc;

        end

    end

end

end

```

```

%%%%%%%%%%calculate strains%%%%%%%%%%

gst=1

gpwst=gauss(gst);

STRAIN2=zeros(2,nel);

for f=1:nel

    [coord,g] = plate_Q4(f) ;

    elemdisp=zeros(eldof,1) ;

    for m=1:eldof

        if g(m)==0

            elemdisp(m)=0;

        else

            elemdisp(m)=wbc(g(m),15);

        end

    end

end

% Integrate element matrix

for k=1: gst

    wk = gpwst(k,2);

    for l=1: gst

        wl=gpwst(l,2);

        xk=(gpwst(k,1));

        eta=(gpwst(l,1));

        [derN,N] = shfunQ4(xk,eta);

        jac=derN*coord;

        d=det(jac);

```



```

    jac1=inv(jac);

    deriv=jac1*derN;

    [Bs]=formshear(deriv,N,nne,eldof);

    strain2=Bs*elemdisp;

end

end

STRAIN2(:,f)=strain2;

end

%%%%%%%%%%end of strain calculation%%%%%%%%%%

count1=1

k=1

while count1<=length(wbc)

    count2(k,1)=count1;

    count2(k+1,1)=count1+1;

    count1=count1+3;

    k=k+2;

end

wbc(count2,:)=[];

%

%from w matrix form Zdef(3xnel) (each column stores the w of an element nodes)

t=0;

Z=zeros(size(wbc),1)

for i=1:1

    t=time_matrix(i);

```

```

Z(:,1)=wbc(:,i);

component=Z;

for iel=1:nel

    for ino=1:nne

        Zdef(ino,iel) = Z(connec(iel,ino)) ;

        profile(ino,iel) = component(connec(iel,ino)) ;

    end

end

end

% Plotting deformed mesh for each time step

figure

Zdefmin=min(Z(:,1));

Zdefmax=max(Z(:,1));

plot3(X,Y,Zdef);

fill3(X,Y,Zdef,profile);

title(['Deformed Mesh according to Newmarks Method after time=' num2str((t),4) 'seconds'])

rotate3d on ;

axis on ;

colorbar

eval(['print -dtiff Newmark_' num2str((t),4) '.tiff']);

end

end

3) Εξαγωγή των συντεταγμένων του τετραγωνικού στοιχείου

function[coord,g] = plate_Q4(f)

%

```

```

global nne nodof geom connec nf g

%

coord=zeros(nne,2);

for k=1: nne

    for m=1:2

        coord(k,m)=geom(connec(f,k),m);

    end

end

%

l=0;

for k=1: nne

    start=(connec(f,k)-1)*nodof;

    for m=1:nodof

        l=l+1;

        g(l)= nf(connec(f,k),m);

    end

end

end

%

4)    Συναρτήσεις σχήματος τετραγωνικού στοιχείου

function[derN,N] = shfunQ4(xk,eta)

%

%Shape functions

N(1) = 0.25*(1-xk-eta+xk*eta);

N(2) = 0.25*(1+xk-eta-xk*eta);

```

```

N(3) = 0.25*(1+xk+eta+xk*eta);
N(4) = 0.25*(1-xk+eta-xk*eta);

%

%Shape functions derivatives
derN(1,1)=0.25*(eta-1);
derN(1,2)=0.25*(1-eta);
derN(1,3)=0.25*(1+eta);
derN(1,4)=0.25*(-1-eta);

%

derN(2,1)=0.25*(-1+xk);
derN(2,2)=0.25*(-1-xk);
derN(2,3)=0.25*(1+xk);
derN(2,4)=0.25*(1-xk);

%

5) Σχηματισμός του πίνακα κάμψης
function[B] = formbent(deriv,nne,eldof)

%

%Form bending matrix
B=zeros(3,eldof);

for m=1:nne

    count1=1+3*(m-1);

    count2=1+count1;

    x=deriv(1,m);

    B(1,count1)=x;

```

```

B(3,count2)=x;

y=deriv(2,m);

B(3,count1)=y;

B(2,count2)=y;

End

%

6) Σχηματισμός του πίνακα που σχετίζεται με τις διατμήσεις

function[Bs] = formshear(deriv,N, nne,eldof)

%

%Form element shear matrix

Bs=zeros(2,eldof);

for m=1:nne

    count1=1+3*(m-1);

    count2=1+count1;

    count3=1+count2;

    x=deriv(1,m);

    y=deriv(2,m);

    Bs(1,count3)=x;

    Bs(2,count3)=y;

    Bs(1,count1) =-N(m);

    Bs(2,count2) =-N(m);

end

7) Ολοκλήρωση Gauss

function[gpw]=gauss(g)

```

```

%
% Gauss integration
gpw=zeros(g,2);
%
if g==1
    gpw=[0 2];
elseif g==2
    gpw=[-0.577350269189626 1;
         0.577350269189626 1];
elseif g==3
    gpw= [-7.745966692 0.5555555556;
         0      0.888888889;
         7.745966692 0.5555555556];
elseif g==4
    gpw= [-0.861136311594053 0.347854845137454;
         -0.339981043584856 0.652145154862546;
         0.339981043584856 0.652145154862546;
         0.861136311594053 0.347854845137454];
end

```