Κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων από μελλοντικούς εκπαιδευτικούς με τη χρήση εικόνων

υπό

Διονυσία Γεωργέλη

Μεταπτυχιακή Εργασία

υποβληθείσα για την εκπλήρωση των προϋποθέσεων απονομής Μεταπτυχιακού Διπλώματος Εξειδίκευσης «Θετικές επιστήμες στην εκπαίδευση» του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

2017

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Σελίδα

Περίληψη ……………………………………………..……………… 3

Εισαγωγή ……………………………………………..……………. 4

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

1.1. Ορισμοί ………………………………………………..………… 7

1.2. Στρατηγικές κατασκευής προβλημάτων ………………..……..… 9

1.3. Σύνδεση επίλυσης και κατασκευής προβλημάτων ………..….… 11

1.4. Παράγοντες που επηρεάζουν την κατασκευή προβλημάτων …..… 14

ΔΑΣΚΑΛΟΙ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

2.1. Γενικά ……………………………………………………….….. 16

2.2. Κατασκευή προβλημάτων στη διδασκαλία …………………….. 18

2.3. Κατασκευή προβλημάτων και εκπαίδευση εκπαιδευτικών ………. 20

2.4. Απόψεις εκπαιδευτικών για την κατασκευή προβλημάτων …….... 23

2.5. Γιατί είναι σημαντική η κατασκευή προβλημάτων για δασκάλους.. 25

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

3.1. Ανάλυση περιεχομένου …………………………………………… 27

3.1.1 Αξιοπιστία στην ανάλυση περιεχομένου ……………………..… 28

3.2. Εμπειρικά θεμελιωμένη θεωρία ……………………………...… 29

3.3. Ερευνητικά ερωτήματα ………………………………………..... 30

3.4. Πλαίσιο έρευνας ……………………………………………….… 30

3.5. Αξιοπιστία- Εγκυρότητα και Περιορισμοί ……………………... 33

3.6. Αναλυτικές οδηγίες διεξαγωγής έρευνας …………………….… 34

ΑΝΑΛΥΣΗ – ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

4.1. Μαθηματικές έννοιες ……………………………………..…… 39

4.2. Λάθη και παραλείψεις ……………………………………………. 48

4.3. Στρατηγικές βελτίωσης αρχικών προβλημάτων ………………..… 55

4.4. Παράγοντες που επηρεάζουν την κατασκευή προβλημάτων ……. 59

ΣΥΖΗΤΗΣΗ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ……………………………….… 62

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ………………………………………………….….. 65

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

5.1. Φύλλο εργασίας ……………………………………..…..…… 71

5.2. Αναλυτικοί πίνακες αποτελεσμάτων

5.2.1. Μαθηματικές έννοιες ……………………………......…… 75

5.2.2. Λάθη και παραλείψεις ……………………………..……...… 76

5.2.3. Στρατηγικές βελτίωσης αρχικών προβλημάτων …….……...… 77

5.2.4. Παράγοντες που επηρεάζουν την κατασκευή προβλημάτων …. 78

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η κατασκευή και η επίλυση προβλημάτων αποτελούν θεμελιώδεις διαδικασίες για τη μαθηματική εκπαίδευση. Με βάση αυτή την παραδοχή αναδεικνύεται και η σημασία της σχετικής προετοιμασίας των υποψηφίων εκπαιδευτικών. Η παρούσα έρευνα πραγματοποιήθηκε με φοιτητές παιδαγωγικού τμήματος, από τους οποίους ζητήθηκε να κατασκευάσουν, να επιλύσουν και να ανακατασκευάσουν μαθηματικά προβλήματα, με βάση μια εικόνα γεωμετρικού σχήματος. Οι φοιτητές μάλιστα κλήθηκαν να απαντήσουν και σε κάποιες ερωτήσεις κατά τη διάρκεια της διαδικασίας για την καλύτερη κατανόηση του τρόπου με τον οποίο εργάστηκαν. Τα αποτελέσματα της μελέτης αυτής καταδεικνύουν κυρίως τις ελλείψεις των φοιτητών σε ζητήματα κατανόησης βασικών μαθηματικών εννοιών και αναδεικνύουν ορισμένες στρατηγικές βελτίωσης κατασκευής προβλημάτων και παράγοντες που σύμφωνα με τους μελλοντικούς δασκάλους επηρεάζουν την κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων.

Λέξεις κλειδιά: κατασκευή προβλήματος, επίλυση προβλήματος, μαθηματικά προβλήματα, μελλοντικοί εκπαιδευτικοί.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Καθημερινά οι άνθρωποι επιλύουν προβλήματα για να ικανοποιήσουν ποικίλες ανάγκες τους. Η ικανότητα όμως να συνθέτουν μέσα στην περιπλοκότητα των καταστάσεων φαίνεται να είναι το ίδιο χρήσιμη μιας και μπορεί να προλαμβάνει πιθανά προβλήματα (Singer & Voica, 2013). Η κατασκευή προβλημάτων έχει λοιπόν αναγνωριστεί ως μια πολύ σημαντική διανοητική δραστηριότητα (Cai, Hwang, Jiang & Silber, 2015) για τους μαθητές στα πλαίσια του μαθήματος των Μαθηματικών. Μάλιστα, όπως αναφέρεται από τους Cai et al. (2015), σύμφωνα με τον Einstein η δημιουργία ενός ενδιαφέροντος προβλήματος είναι πολύ πιο σημαντική από την επίλυση αυτού.

Επιπλέον, η κατασκευή προβλημάτων συνδέεται άρρηκτα με την επίλυση προβλημάτων, η οποία θεωρείται από τις σημαντικότερες μαθηματικές δραστηριότητες. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, ο εκπαιδευτικός αναμένεται να έχει την ικανότητα σχεδιασμού και οργάνωσης κατάλληλων δραστηριοτήτων, οι οποίες θα επικεντρώνονται όχι μόνο στην επίλυση, αλλά και στην κατασκευή προβλημάτων. Αυτό με τη σειρά του απαιτεί την αντίστοιχη προετοιμασία από τη μεριά του εκπαιδευτικού, επομένως και την αντίστοιχη εκπαίδευσή του.

Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία οι εκπαιδευτικοί είναι ικανοί να κατασκευάζουν μαθηματικά προβλήματα, όμως υπάρχουν και περιπτώσεις εκπαιδευτικών που κατασκευάζουν μαθηματικά προβλήματα που δεν λύνονται ή είναι μη μαθηματικά. Στο πλαίσιο της διδασκαλίας τους οι δάσκαλοι θεωρούν την διαδικασία της κατασκευής προβλημάτων ακατάλληλη για τις τάξεις τους (Klinshtern, Koichu & Berman, 2015). Παρουσιάζεται αδυναμία στην ικανότητα των μελλοντικών δασκάλων να δημιουργούν κατάλληλα μαθηματικά προβλήματα (Cai et al., 2015· Leung & Silver, 1997). Για αυτό το λόγο γίνονται και προσπάθειες εκπαίδευσης των μελλοντικών εκπαιδευτικών στην κατασκευή προβλημάτων, που μάλιστα φαίνεται ότι έχουν θετικά αποτελέσματα στην επίδοση των μαθητευόμενων. Άλλες φορές τα αποτελέσματα αυτά είναι σημαντικά και άλλες φορές λιγότερο σημαντικά, πάντα όμως είναι υπαρκτά (Grundmeier, 2015).

Σίγουρα σε κάποιες περιπτώσεις υπάρχει άγχος από τη μεριά των δασκάλων για την κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων, όμως η διαδικασία αυτή είναι πολύ σημαντική και ωφέλιμη στη διδασκαλία και γενικότερα στη στάση τελικά και των μαθητών απέναντι σε αυτή. Συνεπώς, η κατασκευή προβλημάτων φαίνεται να είναι ένα αποτελεσματικό μέσο που ωφελεί τους δασκάλους και ταυτόχρονα αποτελεί την αρχή για περαιτέρω ανάπτυξη της περιέργειας και της συνεχής προθυμίας των εκπαιδευτικών να μαθαίνουν (Osana & Pelczer, 2016).

Σε αυτό το πλαίσιο οργανώθηκε η παρούσα έρευνα με μελλοντικούς εκπαιδευτικούς. Στόχος ήταν να αναδειχτεί κατά πόσο αυτοί είναι σε θέση να κατασκευάσουν μαθηματικά προβλήματα, πώς αντιμετωπίζουν τη διαδικασία αυτή γενικότερα, αν δηλαδή είναι θετικοί ή αρνητικοί στη διαδικασία κατασκευής προβλημάτων, καθώς και ποια είναι τα ενδεχόμενα λάθη ως προς τη διατύπωση και την επίλυση των προβλημάτων. Επιπλέον οι στρατηγικές που επιλέχθηκαν για την κατασκευή προβλημάτων, καθώς επίσης και οι παράγοντες που επηρεάζουν την κατασκευή ενός μαθηματικού προβλήματος ήταν κάποια στοιχεία της διαδικασίας που θεωρήθηκαν ενδιαφέροντα και άξια ανάλυσης.

Πιο συγκεκριμένα τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας εργασίας είναι:

A. Ποιες μαθηματικές έννοιες περιέχουν τα προβλήματα που κατασκευάστηκαν με βάση μια εικόνα που περιέχει γεωμετρικά σχήματα;

B. Ποια ήταν τα λάθη και οι παραλείψεις που εμφανίστηκαν σε αυτά τα προβλήματα;
Γ. Ποιες ήταν οι στρατηγικές που χρησιμοποίησαν οι φοιτητές για να βελτιώσουν τα αρχικά τους προβλήματα;
Δ. Ποιοι παράγοντες επηρεάζουν την κατασκευή προβλημάτων;

Ακολουθεί η περιγραφή του θεωρητικού πλαισίου, το οποίο βασίζεται κυρίως στην κατασκευή προβλημάτων στη μαθηματική εκπαίδευση.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

1.1. Ορισμοί

Η κατασκευή προβλημάτων περιγράφεται με διαφορετικούς όρους (Osana & Pelczer, 2015· Singer & Voica, 2015) και για αυτό διαφορετικοί συγγραφείς χρησιμοποιούν και διαφορετικό πλαίσιο για τη μελέτη των δραστηριοτήτων κατασκευής προβλημάτων. Οι διαφορετικοί ερευνητικοί στόχοι των συγγραφέων κάθε φορά είναι εκείνοι που καθορίζουν τον ορισμό που επιλέγεται στην εκάστοτε έρευνα (Osana & Pelczer, 2015· Stoyanova, 1997). Παρακάτω παρουσιάζονται κάποιοι ορισμοί που έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στην εκπόνηση της παρούσας εργασίας.

Σύμφωνα με τον Silver (1994) η κατασκευή προβλημάτων αναφέρεται ταυτόχρονα στην παραγωγή νέων προβλημάτων από ένα μαθηματικό πλαίσιο και στην αναδιαμόρφωση ενός δοσμένου αρχικού προβλήματος. Ο Grundmeier (2015) διαχώρισε την παραγωγή από τη αναδιαμόρφωση προβλημάτων και επέλεξε να ορίσει την κατασκευή προβλημάτων με τις εξής έννοιες: κατάσταση, πρόβλημα, αναδιαμόρφωση και παραγωγή προβλήματος. Εστιάζοντας στην εκπαίδευση των δασκάλων οι Osana and Pelczer (2015) όρισαν την κατασκευή προβλημάτων ως την πράξη της διαμόρφωσης μιας νέας εργασίας ή κατάστασης, ή την τροποποίηση ενός υπάρχοντος προβλήματος, έχοντας συγκεκριμένο μαθηματικό στόχο και παιδαγωγικό σκοπό.

Η Stoyanova (1997) όρισε την κατασκευή προβλημάτων ως τη διαδικασία μέσω της οποίας οι μαθητές κατασκευάζουν προσωπικές ερμηνείες από πραγματικές καταστάσεις και τις διαμορφώνουν σε μαθηματικά προβλήματα που έχουν νόημα. Η κατασκευή ενός προβλήματος που έχει νόημα συμβαίνει όταν αξιολογείται έτσι, δηλαδή ως ενδιαφέρον, ορθό και με νόημα πρόβλημα, από τον κατασκευαστή, τους λύτες ή αυτούς που το διαβάζουν (Crespo & Sinclair, 2008· Koichu & Kontorovich, 2013).

Όσον αφορά στα τρία διαφορετικά πλαίσια κατασκευής η Stoyanova (1997) ορίζει τα εξής πλαίσια: δομημένο, το οποίο πρέπει να βασίζεται σε συγκεκριμένες μαθηματικές προτάσεις, ημι-δομημένο, το οποίο περιλαμβάνει ένα πλαίσιο με αρκετές πληροφορίες και μη δομημένο ή ελεύθερο, το οποίο δεν έχει κανένα περιορισμό.

Αναλυτικότερα, ένα πλαίσιο κατασκευής προβλημάτων ονομάζεται δομημένο όταν οι δραστηριότητές του βασίζονται σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα ή σε μία συγκεκριμένη επίλυση. Σε αυτή την περίπτωση δηλαδή οι μαθητές καλούνται να δημιουργήσουν ένα πρόβλημα στηριζόμενοι σε ένα δοσμένο πρόβλημα ή μία συγκεκριμένη δοσμένη επίλυση. Για παράδειγμα μπορεί να παρουσιαστεί μία σειρά πράξεων την οποία καλούνται να χρησιμοποιήσουν ακριβώς έτσι όπως δόθηκε στο πρόβλημα που θα φτιάξουν. (Stoyanova, 1997). Συνεχίζοντας, ως ημι-δομημένο πλαίσιο ονομάζεται το πλαίσιο εκείνο κατά το οποίο δίνεται στους μαθητές μία κατάσταση, την οποία καλούνται να εξερευνήσουν και με βάση αυτή να κατασκευάσουν ένα πρόβλημα. Σε αυτή την περίπτωση οι γνώσεις των μαθητών, οι δεξιότητές τους, οι ιδέες και όσα έχουν κατακτήσει από προηγούμενες μαθηματικές εμπειρίες είναι τα στοιχεία που θα συμβάλουν στην ολοκλήρωση του τελικού τους προβλήματος. (Stoyanova, 1997).

Ως τρίτο πλαίσιο ορίζεται το ελεύθερο πλαίσιο στο οποίο οι μαθητές καλούνται να κατασκευάσουν ένα πρόβλημα από μια φυσική κατάσταση. Αυτό σημαίνει πως η κατασκευή του προβλήματος είναι ανοιχτή και οι μαθητές μπορούν να επιλέξουν τα στοιχεία που θα χρησιμοποιήσουν, να ορίσουν τις σχέσεις μεταξύ αυτών και να παρουσιάσουν αυτές τις πληροφορίες με τον καλύτερο δυνατό τρόπο. Ενδέχεται σε αυτή την περίπτωση να χρειαστεί να δοθούν κάποιες βοηθητικές κατευθύνσεις στους μαθητές. Ένα παράδειγμα του πλαισίου αυτού είναι η κατασκευή προβλημάτων για έναν μαθηματικό διαγωνισμό (Stoyanova, 1997).

Ολοκληρώνοντας, σύμφωνα με την Stoyanova (1997), τα όρια ανάμεσα σε αυτούς τους τρεις ορισμούς δεν είναι πάντα πολύ καλά καθορισμένα. Οι ορισμοί αυτοί κατασκευάστηκαν για να διευκολύνουν ερευνητικές διαδικασίες και για να βοηθήσουν τους ερευνητές να επιλέξουν τις κατάλληλες συνθήκες για τους σκοπούς της εκάστοτε έρευνας (Osana & Pelczer, 2015· Stoyanova, 1997).

Στην παρούσα εργασία οι ορισμοί που παρουσιάστηκαν παραπάνω έπαιξαν καθοριστικό ρόλο, με κυρίαρχους τους ορισμούς του Silver (1994) και της Stoyanova (1997). Η εικόνα που επιλέχθηκε ως αρχικό στοιχείο για την κατασκευή προβλημάτων αποτελεί ημι-δομημένο πλαίσιο.

1.2. Στρατηγικές κατασκευής προβλημάτων

Οι ερευνητές επιλέγουν διαφορετικό τρόπο κάθε φορά για να εξετάσουν ποιες είναι οι στρατηγικές κατασκευής προβλημάτων. Οι Cifarelli and Cai (2005) αξιοποίησαν μια δραστηριότητα με μπιλιάρδο για να εξετάσουν τις στρατηγικές κατασκευής που χρησιμοποιήσαν καθηγητές των μαθηματικών. Άλλοι (Crespo & Sinclair, 2008) αναπτύσσουν στρατηγικές που χρησιμοποίησαν οι μαθητές για να κατασκευάσουν ένα πρόβλημα με μια δεδομένη μαθηματική κατάσταση, για παράδειγμα χρησιμοποιώντας την "What- if – not" στρατηγική των Brown and Walter (2005). Σε τέτοιες περιπτώσεις όμως εξετάζεται το νέο πρόβλημα χωρίς να λαμβάνονται υπόψιν η προσωπική σχέση με αυτό, η αξιολόγησή του ή τα αισθήματα ως προς αυτό (Crespo & Sinclair, 2008).

Η Crespo (2003) εξέτασε τις αλλαγές στις στρατηγικές που χρησιμοποιήθηκαν από μία ομάδα δασκάλων δημοτικού όταν κατασκεύαζαν προβλήματα για μαθητές. Προέκυψε ότι οι δάσκαλοι αρχικά επέλεγαν να κατασκευάσουν προβλήματα που δεν είναι τόσο απαιτητικά, λύνονται εύκολα από τους μαθητές και μπορούν να κατασκευαστούν χωρίς να υπάρχει βαθιά κατανόηση των μαθηματικών. Ενώ στη συνέχεια επέλεξαν πιο ενδιαφέροντα προβλήματα, προβλήματα εξερεύνησης, με περισσότερα βήματα και ανοιχτού τύπου, που αποτελούν πρόκληση για τη σκέψη των μαθητών και μπορούν να καταδείξουν τον τρόπο με τον οποίο σκέφτονται τελικά οι μαθητές (Crespo, 2003). Οι βασικές στρατηγικές κατασκευής προβλημάτων σύμφωνα με τη Stoyanova (1997) είναι η αναδιαμόρφωση, η ανακατασκευή, η απομίμηση και η εφευρετικότητα με υποκατηγορίες αυτών σε κάθε δοσμένο πλαίσιο.

Οι Koichu and Kontorovich (2013) προσπάθησαν στην έρευνά τους να καταλάβουν τους τρόπους με τους οποίους οι συμμετέχοντες αναπτύσσουν τις αρχικές τους ιδέες σε προβλήματα που αυτοί θεωρούν ενδιαφέροντα. Συμφώνα λοιπόν με την συγκεκριμένη έρευνα (Koichu & Kontorovich, 2013) προέκυψαν τρία χαρακτηριστικά από τις δραστηριότητες κατασκευής προβλημάτων: α) Οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί βασίστηκαν σε συγκεκριμένες δομές των πρωτότυπων προβλημάτων, αλλά ταυτόχρονα προσπάθησαν να φτιάξουν καινούρια, όχι υπερβολικά όμοια με τα πρωταρχικά προβλήματα. β) Τα πιο ενδιαφέροντα προβλήματα δημιουργήθηκαν με την εμπλοκή της εξερεύνησης και της επίλυσης προβλημάτων. γ) Τα προβλήματα που κατασκευάστηκαν περιλάμβαναν παρόμοια στάδια: προθέρμανση, ψάξιμο για ένα ενδιαφέρον μαθηματικό φαινόμενο, κρύψιμο της διαδικασίας κατασκευής στη σύνθεση του προβλήματος και επανεξέταση/αναθεώρηση. Συμπέραναν λοιπόν κάποιες πιθανές συνέπειες των ευρημάτων για την έρευνα και την πρακτική.

Σύμφωνα με τους Koichu and Kontorovich (2013) και Kontorovich, Koichu, Leikin & Berman (2012) οι στρατηγικές για την κατασκευή προβλημάτων είναι οι εξής: 1) μεταβολή περιορισμών κατασκευάζοντας νέα προβλήματα αλλάζοντας τις συνθήκες ή τις υποθέσεις του προβλήματος (What- if – not strategy) 2) μεταβολή των ζητούμενων ή στόχων του δοθέντος προβλήματος, ενώ τα δεδομένα παραμένουν αμετάβλητα 3) κατασκευή προβλήματος με ανταλλαγή υπαρχόντων δεδομένων και ζητούμενων 4) επέκταση ενός προβλήματος έτσι ώστε η λύση του νέου προβλήματος να απαιτεί την επίλυση του δοθέντος 5) παραγωγή πολλών απτών παραδειγμάτων και καθορισμός νέων σχέσεων βασισμένων σε αυτά (data-driven reasoning) 6) διατύπωση υποθέσεων και προβολή ιδεών σε νέες καταστάσεις, ακόμα και όταν ο κατασκευαστής δεν είναι σίγουρος για το που θα οδηγήσουν τα αποτελέσματα (hypothesis-driven reasoning).

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι δύο τελευταίες στρατηγικές (Cifarelli & Cai, 2005· Koichu & Kontorovich, 2013) ισχύουν μόνο για την περίπτωση του συμμετέχοντα της συγκεκριμένης έρευνας (Koichu & Kontorovich, 2013) και μόνο εν μέρει σκιαγραφήθηκαν οι διαδικασίες που ακολουθήθηκαν από τους συμμετέχοντες. Ακόμη, στην έρευνα αυτή (Koichu & Kontorovich, 2013) ζητήθηκε μικρός αριθμός ενδιαφερόντων προβλημάτων σε συγκεκριμένο χρόνο κάτι που ίσως μπορεί πλέον να εφαρμόζεται και σε άλλες έρευνες.

1.3. Σύνδεση επίλυσης και κατασκευής προβλημάτων

Οι πρώτες έρευνες που αφορούσαν στην κατασκευή και στην επίλυση προβλημάτων φαίνεται να διαχωρίζουν τις δύο αυτές δραστηριότητες. Συγκεκριμένα όπως αναφέρεται από τη Stoyanova (1997), ο Polya θεωρούσε την κατασκευή προβλημάτων διαχωρίσιμο μέρος από την επίλυση προβλημάτων. Επίσης, οι Silver and Mamona (1989, όπ. αναφ. στο Rosli, Capraro M., Goldsby, Gonzalez, Onwuegbuzie & Capraro R.,2015), και οι

Silver, Mamona-Downs, Leung & Kenney (1996) δεν διαπίστωσαν κάποια σχέση ανάμεσα στις δύο αυτές δραστηριότητες.

Στη συνέχεια προκύπτει ότι η κατασκευή προβλημάτων είναι βαθιά ενσωματωμένη με την επίλυση προβλημάτων (Brown & Walter, 2005). Αναλυτικότερα, τα αποτελέσματα προηγούμενων ερευνών (Cai & Hwang, 2002· Cifarelli & Sevim, 2015· Silver, 1994· Silver & Cai, 1996) δείχνουν ότι υπάρχει μια σχέση ανάμεσα στην κατασκευή και την επίλυση προβλημάτων. Για παράδειγμα η έρευνα που πραγματοποιήθηκε από τον Cai (1996, όπ. αναφ. στο Rosli et al.,2015) σε Αμερικανούς και Κινέζους μαθητές αποκάλυψε μία θετική σύνδεση ανάμεσα στις δύο αυτές δραστηριότητες. Ο Silver (1994) αναφέρει ότι η κατασκευή προβλημάτων μπορεί να γίνει πριν, μετά ακόμα και κατά τη διάρκεια της επίλυση ενός προβλήματος ανάλογα με τους στόχους που θέτονται. Επιπρόσθετα, οι Cai and Hwang (2002) και οι Silver και Cai (1996) διαπίστωσαν μία στενή σύνδεση ανάμεσα σε αυτά τα δύο συστατικά. Ακόμη, η κατασκευή προβλημάτων μπορεί να παίξει ευεργετικό ρόλο στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, μιας και υπάρχουν σημαντικοί τρόποι με τους οποίους η κατασκευή προβλημάτων αλληλοεπιδρά με την επίλυση προβλημάτων (Cifarelli & Sevim, 2015). Οι Chen, Dooren & Verschaffel (2015) βρήκαν ότι οι εμπειρίες που αποκτώνται κατά την κατασκευή προβλημάτων έχουν θετικά αποτελέσματα και στην επίλυση προβλημάτων από τους μαθητές.

Πιο πρόσφατα στην έρευνα των Rosli et al. (2015) εξετάστηκε η κατασκευή προβλημάτων πριν και μετά την επίλυση. Παρατηρήθηκε ότι όταν οι επιδόσεις των συμμετεχόντων ήταν υψηλές κατά την επίλυση τότε ήταν υψηλές και κατά την κατασκευή προβλημάτων (και το αντίθετο). Παρόλα αυτά, ο συντελεστής συσχέτισης ήταν στατιστικά σημαντικός για την ομάδα που επίλυσε πρώτα το πρόβλημα. Για την ομάδα που κατασκεύασε πρώτα το πρόβλημα υπήρχε μια θετική σχέση, αλλά ο συντελεστής συσχέτισης δεν ήταν σημαντικός.

Συνεχίζοντας, οι Koichu and Kontorovich (2013) κατέδειξαν στην έρευνά τους ότι οι μελλοντικοί δάσκαλοι κατασκεύασαν με επιτυχία και μάλιστα πιο ενδιαφέροντα προβλήματα, όταν σύνδεαν την κατασκευή με την εξερεύνηση και την επίλυση των προβλημάτων. Επίσης, οι μαθητές φαίνεται να είχαν στο μυαλό τους τη διαδικασία της επίλυσης του προβλήματος όταν κατασκεύαζαν προβλήματα και μάλιστα αυτό γινόταν παράλληλα με τη διαδικασία της κατασκευής (Cai & Hwang, 2002· Cifarelli & Cai, 2005). Τα αποτελέσματα των ερευνών αυτών υποδεικνύουν ότι η επίλυση του προβλήματος πρέπει να προηγείται της κατασκευής (Rosli et al., 2015).

Οι Singer and Voica (2013) εστίασαν από μια διαφορετική πλευρά την επίλυση και την κατασκευή προβλημάτων. Συγκεκριμένα δημιούργησαν ένα πλαίσιο για τις διαδικασίες της επίλυσης προβλημάτων και το χρησιμοποίησαν ως μέσο για την κατασκευή προβλημάτων και συγκεκριμένα για την κατασκευή ερωτήσεων πολλαπλής επιλογής. Προέκυψε ότι η ικανότητα να θέτουν απαντήσεις που αποσπούν την προσοχή από τη σωστή απάντηση δεν φαίνεται να έρχεται ως συνέπεια της εμπειρίας στη διδασκαλία, αλλά από το πόσο αντιλαμβάνονται την διαδικασία επίλυσης και κατασκευής. Ακόμη, η διαδικασία που ακολούθησαν κατά την έρευνα τους δίνει τη δυνατότητα στους εκπαιδευτικούς να αντιληφθούν καλύτερα την ικανότητα των μαθητών κατά την επίλυση προβλημάτων.

Σημαντικά συστατικά για την εκμάθηση των μαθηματικών, σύμφωνα με το NCTM (2010, όπ. αναφ. στο Rosli et al., 2015) αποτελούν τόσο η κατασκευή προβλημάτων όσο και η επίλυση προβλημάτων . Επομένως, οι εκπαιδευτικοί έχουν σημαντικό ρόλο και πρέπει να είναι εξοικειωμένοι με αυτές τις δύο δραστηριότητες και ταυτόχρονα να είναι σε θέση να τις υλοποιούν οι ίδιοι.

Σύμφωνα με τους Chen et al. (2010) ελάχιστη έρευνα έχει γίνει σε δασκάλους που να αφορά στη σύνδεση μεταξύ της επίλυσης ενός προβλήματος και της κατασκευής του. Παρόλα αυτά όταν υπάρχει σύνδεση της επίλυσης και της κατασκευής προβλημάτων, τότε η κατασκευή ενός προβλήματος που έχει νόημα φαίνεται να είναι σημαντικός στόχος στην εκπαιδευτική δραστηριότητα (Cifarelli & Sevim, 2015). Σύμφωνα με την Kwek (2015) είναι πολύ σημαντικό για τους εκπαιδευτικούς στόχους οι δάσκαλοι να επιλέγουν να συμπεριλάβουν στη διδασκαλία τους την επίλυση και την κατασκευή προβλημάτων. Μάλιστα η κατασκευή προβλημάτων τελικά μπορεί να αποτελέσει ένα σημαντικό εργαλείο για την αξιολόγηση της μάθησης στα μαθηματικά.

Οι Lavy και Shriki (2010) θεωρούν ότι πρέπει να εφαρμοστεί μια προσέγγιση που να δίνει έμφαση τόσο στην αξία της κατασκευής όσο και της επίλυσης, καθώς και στη συμβολή τους στη μάθηση και στην ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης και των δεξιοτήτων. Οι μαθηματικοί και οι εκπαιδευτές των εκπαιδευτικών θα πρέπει λοιπόν να υποστηρίζουν ότι η κατασκευή και η επίλυση προβλημάτων είναι δύο άρρηκτα συνυφασμένες έννοιες. Δηλαδή κατά τη διαδικασία της επίλυσης οι αναδιατυπώσεις είναι απαραίτητες και την ίδια στιγμή η κατασκευή προβλημάτων εμπεριέχει και την επίλυση προβλημάτων (Crespo, 2015).

1.4. Παράγοντες που επηρεάζουν την κατασκευή προβλημάτων

Στην έρευνα των Rosli et al. (2015) εξετάστηκαν με δύο ερωτήσεις ανοιχτού τύπου οι παράγοντες που επηρεάζουν την κατασκευή προβλημάτων. Οι ερωτήσεις που χρησιμοποιήθηκαν ήταν: «Τι σκέφτεσαι όταν έχεις να κατασκευάσεις το δικό σου μαθηματικό πρόβλημα;» και «Τι σε προβληματίζει όταν έχεις να κατασκευάσεις τα δικά σου μαθηματικά προβλήματα;». Μάλιστα παρόμοιες ερωτήσεις χρησιμοποιήθηκαν και για τους σκοπούς της παρούσας έρευνας.

Από τη διαδικασία της κωδικοποίησης προέκυψαν 14 θέματα τα οποία χωρίστηκαν σε δύο ευρύτερες κατηγορίες: α) χαρακτηριστικά των κατασκευασμένων προβλημάτων και β) εμπειρίες από την κατασκευή προβλημάτων. Από την πρώτη κατηγορία το επίπεδο δυσκολίας, το να είναι ρεαλιστικά τα προβλήματα, να έχουν νόημα για τους λύτες και να είναι κατανοητά είναι οι πιο σημαντικοί παράγοντες για τους εκπαιδευτικούς κατά την κατασκευή των προβλημάτων. Όσον αφορά στις εμπειρίες τους, υπήρχαν καθηγητές που εξέφρασαν τη δυσκολία τους στο να κατασκευάσουν το πρόβλημα και κάποιοι άλλοι που πιστεύουν ότι το να κατασκευάσεις πρόβλημα είναι μία καλή ευκαιρία να σκεφτείς έξω από τα συνηθισμένα και να εξετάσεις κατά πόσο αντιλαμβάνονται οι μαθητές τα μαθηματικά (Rosli et al., 2015).

Οι Koichu and Kontorovich (2013) κάνουν λόγο για τον παράγοντα της καταλληλότητας που μπορεί να επηρεάζει την κατασκευή προβλημάτων. Αναλυτικότερα υπάρχουν τρεις τύποι αξιολόγησης που μπορούν να χρησιμοποιηθούν είτε μεμονωμένα είτε ακόμα και σε συνδυασμό: α) Ο βαθμός στον οποίο ο κατασκευαστής του προβλήματος θεωρεί ότι θα ικανοποιήσει προσωπικά του κριτήρια, σαν να είναι λύτης ενός προβλήματος που έχει νόημα β) ο βαθμός από τον οποίο ο κατασκευαστής επηρεάζεται ώστε να έχει μία θετική αξιολόγηση από αυτόν που του ανέθεσε την εργασία αυτή και γ) ο βαθμός που μπορεί ο κατασκευαστής του προβλήματος να δημιουργήσει ένα πρόβλημα κατάλληλο για πιθανούς λύτες (Koichu & Kontorovich, 2013· Kontorovich et al., 2012). Ολοκληρώνοντας, η αυτό-αξιολόγηση των αρχικών προβλημάτων που κατασκευάστηκαν μπορεί να αποτελέσει έναν ακόμη σημαντικό παράγοντα για την αναδιατύπωση του προβλήματος ή ακόμα και για επόμενη κατασκευή προβλημάτων.

ΔΑΣΚΑΛΟΙ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

2.1. Γενικά

Έρευνες που αφορούν στην κατασκευή προβλημάτων έχουν γίνει με μαθητές, υποψήφιους αλλά και εν ενεργεία εκπαιδευτικούς (Cai & Hwang, 2002· Cifarelli & Cai 2005· Crespo & Sinclair, 2008· Koichu & Kontorovich, 2013· Leung & Silver, 1997· Rosli et al., 2015· Silver & Cai, 1996· Singer & Voica, 2013). Μαθητές και εκπαιδευτικοί είναι ικανοί να κατασκευάσουν ενδιαφέροντα και σημαντικά μαθηματικά προβλήματα. Παρόλα αυτά, υπάρχουν κάποιοι μαθητές και δάσκαλοι που κατασκευάζουν μη μαθηματικά προβλήματα ή προβλήματα που δεν λύνονται.

Οι περισσότερες έρευνες που εντοπίστηκαν, αφορούσαν μελλοντικούς δασκάλους που είναι πιο ανοιχτοί προς συζήτηση σε αντίθεση με τους εν ενεργεία δασκάλους, οι οποίοι δύσκολα συζητούν για τις ελλείψεις τους (Hošpesová & Tichá, 2015). Οι δάσκαλοι σπάνια χρησιμοποιούν την κατασκευή προβλημάτων επειδή θεωρούν ότι είναι δύσκολο να την εφαρμόσουν στις αίθουσες και επειδή οι ίδιοι δεν διαθέτουν τα απαραίτητα προσόντα (Leung και Silver, 1997). Παρακάτω θα δούμε τι συμβαίνει με βάση τη βιβλιογραφική έρευνα όταν οι εκπαιδευτικοί καλούνται να κατασκευάζουν προβλήματα.

Σε παλιότερες έρευνες (Koichu, Harel & Manaster, 2013· Singer & Voica, 2013) προέκυψε ότι λίγοι είναι οι καθηγητές μαθηματικών που είναι κατασκευαστές προβλημάτων. Αντίθετα, στην έρευνα των Klinshtern et al. (2015) περισσότεροι από τους μισούς συμμετέχοντες δήλωσαν ότι τουλάχιστον κάποιες φορές κατασκευάζουν προβλήματα και μάλιστα μερικές φορές επιλέγουν και να τα χρησιμοποιήσουν.

Σύμφωνα με τους Leung and Silver (1997) υπήρχαν κάποιοι συμμετέχοντες οι οποίοι αντιμετώπιζαν δυσκολία στην κατασκευή αριθμητικών προβλημάτων που να λύνονται. Μάλιστα περίπου το 30% των μαθηματικών προβλημάτων που ήταν αληθοφανείς ήταν προβλήματα με ανεπαρκείς πληροφορίες. Κάποιοι δάσκαλοι κατασκεύασαν μη-μαθηματικά προβλήματα, προβλήματα που δεν λύνονται ή αποτελούσαν ασύνδετα προβλήματα (Cai et al., 2015). Για παράδειγμα το 30% των προβλημάτων που κατασκεύασαν μαθητές γυμνασίου ήταν μη-μαθηματικά προβλήματα ή απλά προβλήματα σε μη προβληματικές καταστάσεις (Silver & Cai, 1996). Σύμφωνα με τους Silver et al. (1996, όπ. αναφ. στο Rosli et al., 2015) οι δάσκαλοι κατασκεύασαν πολλά χαμηλής ποιότητας προβλήματα είτε προηγούταν η κατασκευή είτε η επίλυση προβλημάτων, γεγονός που καταδεικνύει και τη σύνδεσή τους.

Οι μελλοντικοί δάσκαλοι φαίνεται να έχουν ικανότητες να κατασκευάζουν μαθηματικά προβλήματα (Grundmeier, 2015). Σύμφωνα με τους Cai et al. (2015) τα αποτελέσματα ερευνών υποστηρίζουν ότι μαθητές και δάσκαλοι είναι ικανοί να κατασκευάσουν ενδιαφέροντα και σημαντικά μαθηματικά προβλήματα. Τα αποτελέσματα της έρευνας των Rosli et al. (2015) αποκάλυψαν ότι οι εκπαιδευτικοί είναι ικανοί να κατασκευάσουν κάποια βασικά προβλήματα και κάποια προβλήματα αιτιολόγησης. Οι Leung και Silver (1997) διαπίστωσαν ότι οι περισσότεροι μελλοντικοί δάσκαλοι ήταν ικανοί να κατασκευάσουν προβλήματα που είναι σχετικά περίπλοκα και επιλύονται.

Οι μελλοντικοί δάσκαλοι και οι καθηγητές γυμνασίου ήταν ικανοί να κατασκευάζουν περισσότερα και πιο περίπλοκα προβλήματα όταν το πλαίσιο που δόθηκε αρχικά περιλάμβανε συγκεκριμένες αριθμητικές πληροφορίες.

(Grundmeier, 2015· Leung & Silver, 1997). Σε διαφορετικό πλαίσιο-περίπτωση χρειαζόταν υποστήριξη για την κατασκευή προβλημάτων (Leung & Silver, 1997). Ο Gonzales (1994) διαπίστωσε ότι οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί θα μπορούσαν να καθοδηγούνται από την μετάβαση από την επίλυση στην κατασκευή προβλημάτων και να βασιστούνε σε αυτή τη διαδικασία για να αυξήσουν τη χρήση της κατασκευής προβλημάτων με το κοινό τους. Ολοκληρώνοντας, είναι σημαντικό οι μαθητές να δημιουργούν προβλήματα και μάλιστα η σπουδαιότητα αυτών στην εκπαιδευτική δράση είναι έκδηλη (Bonotto & Santo, 2015).

2.2. Κατασκευή προβλημάτων στη διδασκαλία

Συνεχίζοντας λοιπόν, θα παρουσιαστούν στοιχεία για το πως βλέπουν οι εκπαιδευτικοί την χρήση της κατασκευής προβλημάτων στη διδασκαλία τους. Σύμφωνα με τον Grundmeier (2015) οι μελλοντικοί δάσκαλοι και οι μελλοντικοί καθηγητές γυμνασίου είναι ικανοί να αντιληφθούν τη σχέση ανάμεσα στην κατασκευή προβλημάτων και στα μαθηματικά του σχολείου. Το γεγονός αυτό είναι βασικό ώστε να χρησιμοποιείται η κατασκευή προβλημάτων τελικά και στην διδασκαλία τους.

Οι Singer and Voica (2013) θεωρούν ότι οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να έχουν την ικανότητα να δημιουργούν ή να τροποποιούν τα προβλήματα. Έτσι θα καταφέρουν να διαπιστώσουν σημαντικά στοιχεία σχετικά με τη μάθηση των μαθητών τους. Συνεπώς, αν σκεφτεί κανείς ότι οι εκπαιδευτικοί είναι εκείνοι που οργανώνουν δραστηριότητες μάθησης και αναπόφευκτα δημιουργούν ασκήσεις για τους μαθητές τους, η ικανότητα αυτή φαίνεται να είναι φυσική για αυτούς.

Πιο αναλυτικά, τα αποτελέσματα της έρευνας των Klinshtern et al. (2015) που διεξήχθη με καθηγητές μαθηματικών λυκείου, απρόσμενα έδειξαν ότι πάνω από το 50% των δάσκαλών θεωρούν ότι είναι κατασκευαστές προβλημάτων κατά τη διδασκαλία. Εντυπωσιακό είναι το γεγονός ότι καθηγητές που κατασκευάζουν προβλήματα αμφιβάλλουν για την ικανότητα των μαθητών τους να κατασκευάζουν προβλήματα. Οι περισσότεροι συμμετέχοντες της συγκεκριμένης έρευνας σπάνια χρησιμοποιούν προβλήματα που κατασκεύασαν οι μαθητές τους, συνεπώς και σπάνια ζητούν από αυτούς να κατασκευάσουν προβλήματα. Μάλιστα θεωρούν τη διαδικασία κατασκευής προβλημάτων ακατάλληλη για τις τάξεις τους (Klinshtern et al., 2015).

Αν ισχύει ότι η ποιότητα της διδασκαλίας επηρεάζεται από την ποιότητα των μαθηματικών προβλημάτων, τότε οι μελλοντικοί δάσκαλοι χρειάζονται εμπειρίες με τη διαδικασία της κατασκευής προβλημάτων (Crespo, 2015· Klinshtern et al., 2015). Συνεπώς, αν θέλουν να είναι σωστοί επαγγελματίες και επιθυμούν να παρέχουν ένα νέο και διαφορετικό τρόπο διδασκαλίας στους μαθητές τους πρέπει πρώτα από όλα να εμπλακούν οι ίδιοι σε εμπειρίες κατασκευής προβλημάτων ως μαθητευόμενοι (Wilson & Berne, 1999).

Εντύπωση προκαλούν τα αποτελέσματα της έρευνας των Hošpesová and Ticha (2015) όπου οι εκπαιδευτικοί υπάγονται σε δύο κατηγορίες. Η μία περιλαμβάνει εκπαιδευτικούς που πιστεύουν ότι έχουν ένα επαρκέστατο σύνολο μεθοδολογικών προσεγγίσεων που έχουν ήδη χρησιμοποιήσει κατά τη διδασκαλία, επομένως δεν αντιλαμβάνονται ότι χρειάζονται βελτίωση. Από την άλλη πλευρά, υπάρχουν εκπαιδευτικοί οι οποίοι αντιλαμβάνονται τις αδυναμίες τους και θέλουν να εκπαιδευτούν σε αυτό. Κάποιοι από αυτούς θεωρούν ότι είναι εύκολο να πάρουν μια έτοιμη δοκιμασμένη συνταγή και να τη χρησιμοποιήσουν απλά θεωρώντας ότι αυτό θα τους βελτιώσει, ενώ υπάρχουν και άλλοι που γνωρίζουν ότι για να αποκτήσουν την πραγματική γνώση πρέπει να εργαστούν σκληρά. Έτσι λοιπόν θα ακολουθήσει αναφορά στην εκπαίδευση των δασκάλων, πιστεύοντας ότι υπάρχουν οι δάσκαλοι της τελευταίας κατηγορίας και ψάχνουν τρόπους για πραγματική προσωπική βελτίωση.

2.3. Κατασκευή προβλημάτων και εκπαίδευση εκπαιδευτικών

Οι μελλοντικοί δάσκαλοι συνήθως γνωρίζουν ότι θα χρειαστεί είτε να επιλέξουν και να εφαρμόσουν μαθηματικές εργασίες από τα σχολικά εγχειρίδια, που είναι και η πιο δημοφιλής πηγή προβλημάτων (Klinshtern et al., 2015), είτε από άλλες πηγές. Αυτές μπορεί να χρησιμοποιηθούν ως έχουν, μπορεί όμως να χρειαστεί να τις αλλάξουν και να τις διαμορφώσουν κατάλληλα ανάλογα με τους στόχους που έχουν θέσει ή με το επίπεδο και τις ανάγκες των μαθητών τους. Υπάρχουν όμως πολλοί μελλοντικοί δάσκαλοι (Osana & Pelczer, 2015) που δεν το γνωρίζουν αυτό ή έχουν περιορισμένη εμπειρία στην κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων (Crespo & Sinclair, 2008).

Οι μαθητευόμενοι, ακόμα και όταν αυτοί είναι φοιτητές, συνήθως λύνουν προβλήματα που τους θέτει ο δάσκαλος ή που υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια. Επομένως είναι απολύτως λογικό όταν τους δοθεί η δυνατότητα να κατασκευάσουν τα δικά τους προβλήματα να προσπαθούν να τα συνδέσουν και να φτιάξουν παρόμοια με αυτά που έχουν συνηθίσει να επιλύουν (Crespo & Sinclair, 2008). Το γεγονός ότι επιλέγουν την απλούστερη τακτική αποτελεί στοιχείο που καταδεικνύει την αδυναμία τους σε αυτό τον τομέα.

Γενικότερα φαίνεται να υπάρχει αδυναμία στην ικανότητα των μελλοντικών δασκάλων να δημιουργούν κατάλληλα μαθηματικά προβλήματα (Cai et al., 2015· Leung & Silver, 1997). Όταν ένα πρόβλημα πρόκειται να χρησιμοποιηθεί με επιτυχία σε μαθητές τότε οι δάσκαλοι που θα το κατασκευάσουν χρειάζονται αυξημένα επίπεδα αυτοεκτίμησης και δεξιότητα στην κατασκευή προβλημάτων (Leung & Silver, 1997.) Πολλοί εκπαιδευτικοί φοβούνται ότι η εκπαίδευση τους στην κατασκευή προβλημάτων είναι ανεπαρκής, γεγονός που τους αποθαρρύνει να εντάξουν τέτοιου είδους δραστηριότητες στη διδασκαλία τους (Hošpesová & Ticha , 2015). Άλλοι θεωρούν ότι είναι μια διανοητική διαδικασία που απαιτεί πολύ χρόνο (Hošpesová & Ticha, 2015). Πολλοί εκπαιδευτικοί εμποδίζονται από το γεγονός ότι δεν ξέρουν πως να αξιολογήσουν το πρόβλημα που κατασκεύασαν (Hošpesová & Ticha, 2015).

Ακόμη, σύμφωνα με τους Osana and Pelczer (2015) οι άσχημες προηγούμενες εμπειρίες από τη κατασκευή προβλημάτων που έχουν μελλοντικοί δάσκαλοι έχουν αντίκτυπο στη διάθεσή τους και στα προβλήματα που κατασκευάζουν. Χωρίς λοιπόν σημαντική δουλειά στην κατασκευή προβλημάτων κατά τη διάρκεια της εκπαίδευσης των δασκάλων, οι μελλοντικοί δάσκαλοι θα μπουν στο επάγγελμα αυτό με περιορισμένες στρατηγικές για τη διδασκαλία των μαθηματικών (Crespo, 2015). Οι Klinshtern et al. (2015) υποστηρίζουν ότι στην εκπαίδευσή τους οι μελλοντικοί δάσκαλοι είναι ωφέλιμο να χρησιμοποιούν τα προβλήματα που οι ίδιοι κατασκευάζουν. Η κατασκευή προβλημάτων χρειάζεται λοιπόν να παίξει κεντρικό ρόλο στην προετοιμασία των δασκάλων (Crespo, 2015).

Η έρευνα της Crespo (2003) δείχνει ότι η παροχή μιας αυθεντικής εμπειρίας κατασκευής προβλημάτων την οποία μελλοντικοί δάσκαλοι επιλέγουν ή η δημιουργία προβλημάτων που πρόκειται να δοκιμαστούν σε μαθητές μπορούν να είναι μία καταλυτικής σημασίας τακτική για να ενθαρρύνει τους μελλοντικούς εκπαιδευτικούς να ξανασκεφτούν τις τάσεις να κατασκευάζουν μη-μαθηματικά προβλήματα για τους μαθητές τους. Ακόμα και σε σύντομο χρονικό διάστημα η εμπλοκή των μελλοντικών δασκάλων σε εμπειρίες κατασκευής προβλημάτων μπορεί να φέρει σημαντικά αποτελέσματα τόσο στην ποιότητα των προβλημάτων που κατασκευάζουν όσο και στην αξιοποίησή τους κατά τη διδασκαλία (Crespo, 2015).

Ακολουθούν προτάσεις σχετικά με τις ενέργειες που χρειάζεται να κάνουν εκπαιδευτές των μελλοντικών δασκάλων σύμφωνα με τις έρευνες που μελετήθηκαν. Αρχικά, οι εκπαιδευτές των δασκάλων οφείλουν να ενημερώσουν τους μελλοντικούς δασκάλους σχετικά με τις διάφορες ευθύνες που θα έχουν κατά την κατασκευή προβλημάτων και να τους βοηθήσουν να αναπτύξουν τις απαιτούμενες στρατηγικές (Osana & Pelczer, 2015). Οι Rosli et al. (2015) εστιάζοντας στη σύνδεση επίλυσης και κατασκευής προβλημάτων θεωρούν ότι πρέπει να παρέχεται ουσιαστική εκπαίδευση ενσωματώνοντας στη διδασκαλία των υποψήφιων δασκάλων δραστηριότητες τόσο κατασκευής όσο και επίλυσης προβλημάτων. Από την άλλη πλευρά, ο Grundmeier (2015) προτείνει στους εκπαιδευτές να εξετάσουν την περίπτωση της ενσωμάτωσης της κατασκευής προβλημάτων στα μαθήματα τους ως παραγωγή και αναδιαμόρφωση προβλημάτων, βασιζόμενος δηλαδή και στον αντίστοιχο ορισμό (Grundmeier, 2015· Silver, 1994;).

Οι Hošpesová and Ticha (2015) τονίζουν τη χρήση της κατασκευής προβλημάτων ως εκπαιδευτικό εργαλείο. Οι εκπαιδευτές θα μπορούσαν να θέτουν προβλήματα και να επισημαίνουν αδυναμίες, λάθη και παρανοήσεις σε αυτά. Ακόμη οι συμμετέχοντες καλούνται να επιλέξουν κάποια προβλήματα που θέλουν να συζητήσουν, όντας σε θέση να δικαιολογήσουν την επιλογή τους. Με αυτή την προσέγγιση κατά τη διαδικασία της εκπαίδευσης των δασκάλων θα τονιστεί ιδιαίτερα η χρήση της κατασκευής προβλημάτων ως εκπαιδευτικό εργαλείο.

Σύμφωνα με τους Osana and Pelczer (2015) υπάρχουν κάποιοι παράγοντες στους οποίους πρέπει να κυμαίνονται οι προσπάθειες για την ενίσχυση των μελλοντικών δασκάλων. Οι παράγοντες αυτοί είναι: η εστίαση στο περιεχόμενο των γνώσεων των δασκάλων και στο πρόγραμμα σπουδών, ο βαθμός στον οποίο οι δάσκαλοι χρειάζεται να χρησιμοποιούν μια ποικιλία στρατηγικών για την κατασκευή προβλημάτων, ο βαθμός στον οποίο οι εκπαιδευτικοί καλούνται να αξιολογήσουν τα προβλήματα με μαθηματικά και παιδαγωγικά κριτήρια και η έμφαση στην ανάπτυξη μεταγνώσης, η οποία συνεπάγεται τις ανακλάσεις στις προσωπικές εμπειρίες και συμπεριφορές των μαθητευόμενων που σχετίζονται με τα μαθηματικά (Osana & Pelczer, 2015).

Η Crespo (2015) προσέγγισε τη διδασκαλία των μελλοντικών δασκάλων παρουσιάζοντας τρία βασικά σκέλη της διδασκαλίας: α) προσεκτική κατασκευή προβλημάτων για μαθητές β) εμπλοκή των μαθητευόμενων στην κατασκευή προβλημάτων γ) δημιουργία προσωπικών και κοινωνικών μαθηματικών προβλημάτων. Αυτά τα τρία είτε μεμονωμένα είτε σε συνδυασμό μπορούν να ενισχύσουν τους μελλοντικούς εκπαιδευτικούς, ώστε να θέσουν πλούσια και ενδιαφέροντα προβλήματα για - και με - τους μελλοντικούς μαθητές τους (Crespo, 2015).

Οι προσπάθειες που γίνονται για να εκπαιδευτούν οι μελλοντικοί δάσκαλοι στην κατασκευή προβλημάτων φαίνεται ότι έχουν θετικά αποτελέσματα στην επίδοση των μαθητευόμενων. Άλλες φορές τα αποτελέσματα αυτά είναι σημαντικά και άλλες φορές λιγότερο σημαντικά, πάντα όμως είναι υπαρκτά (Grundmeier, 2015). Συνεπώς, οι ευκαιρίες που θα δοθούν στους εκπαιδευτικούς για να εξερευνήσουν, να συζητήσουν και να αξιολογήσουν τα προβλήματα που κατασκεύασαν μπορούν να αποτελέσουν ένα θετικό βήμα για την προετοιμασία τους και τελικά για τις καλύτερες ευκαιρίες που θα δώσουν και οι ίδιοι έπειτα στους μαθητές τους (Crespo, 2015).

2.4. Απόψεις εκπαιδευτικών για την κατασκευή προβλημάτων

Σύμφωνα με τους Rosli et al. (2015) κάποιοι από τους μελλοντικούς εκπαιδευτικούς που συμμετείχαν στην έρευνα θεώρησαν ότι η κατασκευή προβλήματος είναι μια διαδικασία που τους «ανοίγει τα μάτια» και τους ωφέλησε για το μέλλον τους ως εκπαιδευτικοί. Οι Hošpesová and Tichá (2015) κατέδειξαν τη σπουδαιότητα της κατασκευής προβλημάτων για τους μελλοντικούς δασκάλους.

Αρχικά οι εκπαιδευτικοί πιστεύουν ότι απαιτείται περισσότερη πρακτική στην διαδικασία της κατασκευής ώστε να καταφέρουν να κατασκευάσουν κατάλληλα και αποτελεσματικά μαθηματικά προβλήματα (Rosli et al., 2015). Σύμφωνα με τους Hošpesová and Tichá (2015) τα προβλήματα που κατασκευάζονται από δασκάλους είναι πιο ελκυστικά στα παιδιά, πιο σύγχρονα και βοηθούν στην κατανόηση γνώσεων των παιδιών. Επιπρόσθετα, οι δάσκαλοι θεωρούν ότι είναι πιο εύκολο να δουλεύουν με δικά τους προβλήματα, αφού είναι και πιο εύκολο να τα επιλύσουν (Hošpesová & Tichá, 2015). Όμως υπήρχαν και αρνητικές απόψεις στην έρευνα των Hošpesová and Tichá (2015) που έδειξαν ότι η κατασκευή προβλημάτων για τους μελλοντικούς δασκάλους είναι εκπληκτικά δύσκολη. Επίσης, κάποιοι θεωρούν ότι η κατασκευή προβλημάτων δεν αποτελεί καν αρμοδιότητα των δασκάλων (Hošpesová & Tichá, 2015).

Η έρευνα των Klinshtern et al. (2015) παρουσιάζει τους λόγους για τους οποίους οι εκπαιδευτικοί κατασκευάζουν προβλήματα. Αρχικά, οι περισσότεροι συμμετέχοντες χρησιμοποίησαν την κατασκευή προβλημάτων για τους εξής λόγους: εξάσκηση, δημιουργία τεστ, σύνδεση με καθημερινή ζωή, αλλαγή στο επίπεδο δυσκολίας, διδασκαλία νέου θέματος. Το 5% των δασκάλων αυτών εξήγησαν ότι κατασκευάζουν προβλήματα κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας χωρίς να το πολυσκεφτούν. Το 27% των δασκάλων θεώρησαν τόσο εύκολα τα προβλήματα των σχολικών εγχειριδίων, που αποφάσισαν να αλλάξουν το επίπεδο δυσκολίας αυτών, ώστε να είναι κατάλληλα για το επίπεδο των μαθητών τους και να ταιριάζουν με τις εκπαιδευτικές ανάγκες που προκύπτουν κάθε φορά. Τέλος, μόνο το 12% των συμμετεχόντων δήλωσαν ότι μπαίνουν στη διαδικασία κατασκευής προβλημάτων για προσωπικό ενδιαφέρον (Klinshtern et al., 2015).

2.5. Γιατί είναι σημαντική η κατασκευή προβλημάτων για τους δασκάλους

Σημαντική είναι η συμβολή της κατασκευής προβλημάτων στη διδασκαλία και στην γενικότερη στάση των μαθητών απέναντι στη διαδικασία αυτή. Αναλυτικότερα, η δυνατότητα των εκπαιδευτικών να παρουσιάζουν το ίδιο πρόβλημα σε διαφορετικές μορφές μπορεί να τους κάνει ικανούς να επιλέγουν τα κατάλληλα στοιχεία ώστε να παρουσιάσουν το συγκεκριμένο μαθηματικό περιεχόμενο που επιθυμούν και ταυτόχρονα να μειώσουν ή να αυξήσουν το επίπεδο δυσκολίας ανάλογα με τις εκάστοτε συνθήκες (Stoyanova, 1997).

Η ικανότητα του εκπαιδευτικού να κατασκευάζει προβλήματα με διαφορετικά περιεχόμενα είναι πολύ πιθανό να βοηθήσει ακόμα και τους μαθητές να γίνουν έξυπνοι χρήστες των μαθηματικών στην καθημερινή τους ζωή. Οι ερωτήσεις των δασκάλων που περιλαμβάνουν, χωρίς να γίνεται εύκολα αντιληπτό, την κατασκευή προβλημάτων αποτελούν μια εκπαιδευτική γραμμή η οποία είναι πιθανό να βοηθήσει τους μαθητές να σκεφτούν κάποια προβλήματα από μια συγκεκριμένη προοπτική. Επομένως, χρήσιμες γραμμές οι οποίες έχουν ενσωματωθεί από τον δάσκαλο στο πλαίσιο της τάξης μπορεί να βοηθήσουν τους μαθητές να εστιάσουν σε συγκεκριμένα χαρακτηριστικά από τις μαθηματικές δραστηριότητες που υλοποιούνται (Stayonova, 1997). Ταυτόχρονα, όταν οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί αναγνωρίσουν την εμπειρία της κατασκευής προβλημάτων ως ουσιαστική και αποδοτική τότε θα μπορούν να γοητεύσουν μελλοντικά και τους μαθητές τους σε αυτή τη διαδικασία (Lavy & Shriki, 2010).

Επιπρόσθετα, η κατασκευή προβλημάτων μπορεί να αποτελέσει ένα εργαλείο αξιολόγησης. Το γεγονός αυτό είναι ουσιώδης σημασίας για τους δασκάλους. Στη μελέτη της Kwek (2015) τα προβλήματα που κατασκευάστηκαν από τους μαθητές χρησιμοποιήθηκαν για να εντοπιστούν οι δυνατότητες των μαθητών, πού χρειάζονται βελτίωση και άρα επιπλέον στήριξη και πρόσθετα στοιχεία που μπορούν να χαράξουν την μαθηματική ανάπτυξη των μαθητών. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το κίνητρο, η επιμονή και η ανάληψη κινδύνου αποτελούν θετικές διαθέσεις που οι μαθητές μπορούν να αναπτύξουν και θα βοηθήσουν αυτούς και τους δασκάλους τους να φέρουν τα επιθυμητά αποτελέσματα στον τομέα της κατασκευής προβλημάτων. Ο ρόλος του δασκάλου είναι καθοριστικός για την ανάπτυξη ενός ασφαλούς περιβάλλοντος για τους μαθητές (Kwek, 2015).

Τα οφέλη που προκύπτουν από την κατασκευή προβλημάτων, αν αυτά γίνουν κατανοητά, μπορούν να βοηθήσουν τους μελλοντικούς εκπαιδευτικούς να ενσωματώσουν τελικά την κατασκευή προβλημάτων στις μελλοντικές τους τάξεις. Ολοκληρώνοντας, είναι σημαντικό οι εκπαιδευτικοί να παραμένουν ανοιχτοί και να είναι δεκτικοί στη διεξαγωγή έρευνας με δειγματικό σύνολο τους μαθητές τους (Osana & Pelczer , 2016). Με αυτό τον τρόπο μπορούν να επωφεληθούν από τα γόνιμα σχόλια και τις ερωτήσεις που θα προκύψουν κατά τη διάρκεια των αλληλεπιδράσεων στην τάξη. Τελικά, προκύπτει ότι η κατασκευή προβλημάτων φαίνεται να είναι ένα αποτελεσματικό μέσο που ωφελεί τους δασκάλους και ταυτόχρονα αποτελεί την αρχή για περαιτέρω ανάπτυξη της περιέργειας και της συνεχής προθυμίας των εκπαιδευτικών να μαθαίνουν (Osana & Pelczer, 2016).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η παρούσα εργασία χρησιμοποιεί την ποιοτική ερευνητική προσέγγιση και συγκεκριμένα την ανάλυση περιεχομένου (context analysis) σε συνδυασμό με την εμπειρικά θεμελιωμένη θεωρία (grounded theory), οι οποίες αποτελούν και δύο βασικές μορφές της ποιοτικής ανάλυσης δεδομένων (Cohen, Manion & Morrison, 2007). Η ποιοτική ανάλυση παρέχει στον ερευνητή την ευκαιρία να μελετήσει ένα φαινόμενο με μεγαλύτερη λεπτομέρεια και με έναν πιο φυσικό τρόπο (Houser, 1998).

3.1. Ανάλυση περιεχομένου

Σύμφωνα με τον Weber (1990, όπ. αναφ. στο Cohen et al. 2007) πολλές λέξεις μπορούν να ταξινομηθούν σε πολύ λιγότερες κατηγορίες. Επίσης, κατά τον Krippendorp (2004, όπ. αναφ. στο Cohen et al., 2007) η ανάλυση περιεχομένου αποτελεί μία ερευνητική τεχνική για να γίνουν επαναλήψιμα και έγκυρα τα συμπεράσματα από τα δεδομένα (κείμενα ή άλλα) στο/στα περιεχόμενό/συμφραζόμενά τους.

Υπάρχουν πολλοί λόγοι που κάνουν τη συγκεκριμένη τεχνική ανάλυσης δεδομένων ελκυστική. Είναι μία διακριτική τεχνική, εστιάζει στη γλώσσα και σε γλωσσικές μορφές και γίνεται με ένα οποιοδήποτε υλικό το οποίο είναι σε γραπτή μορφή και άρα είναι μόνιμο και θα υπάρχει αν χρειαστεί να γίνει ξανά ανάλυση των δεδομένων. Επιπρόσθετα να σημειωθεί ότι υπάρχουν πολλοί ερευνητές οι οποίοι θεωρούν την ανάλυση περιεχομένου μια εναλλακτική μέθοδο για ποσοτικοποίηση των ποιοτικών δεδομένων (Cohen et al., 2007).

Τα στάδια της ανάλυσης περιεχομένου απαριθμούνται παρακάτω (Cohen et al., 2007):

1. Ορισμός ερευνητικών ερωτημάτων
2. Ορισμός πληθυσμού από τον οποίο πρόκειται να προκύψει το δείγμα

3. Ορισμός δείγματος το οποίο θα χρησιμοποιηθεί στην έρευνα
4. Ορισμός πλαισίου παραγωγής του κειμένου
5. Ορισμός ενοτήτων της ανάλυσης
6. Καθορισμός κωδικοποίησης που θα χρησιμοποιηθεί στην ανάλυση
7. Κατασκευή κατηγοριών ανάλυσης
8. Διεξαγωγή της κωδικοποίησης και κατηγοριοποίηση των δεδομένων
9. Διεξαγωγή της ανάλυσης δεδομένων
10. Συνόψιση αποτελεσμάτων
11. Κατάληξη σε υποθετικά συμπεράσματα

Το τελευταίο αυτό στάδιο και η επεξήγηση της κατάστασης που προκύπτει με σωστές λέξεις κλειδιά και με την κατάλληλη αιτιολόγηση αποτελούν τη διαδικασία της υποθετικής παραγωγής ή το περιβάλλον της υπόθεσης που δουλεύτηκε, η οποία δίνει τροφή για την παραγωγή τελικά μιας θεωρίας. Το στάδιο αυτό της παραγωγής θεωρίας είναι συνδεδεμένο με την εμπειρικά θεμελιωμένη θεωρία (grounded theory) (Cohen et al., 2007).

3.1.1. Αξιοπιστία στην ανάλυση περιεχομένου

Το κείμενο μπορεί να έχει γραφτεί για τελείως διαφορετικούς σκοπούς από αυτούς ο ερευνητής θέλει να το αξιοποιήσει και τα κείμενα μπορεί να μην είναι δυνατόν να επιβεβαιωθούν. Επίσης, η κωδικοποίηση και η κατηγοριοποίηση μπορεί να χάσει την μικρή πλούσια διαφοροποίηση κάποιων λέξεων και των συνειρμών αυτών και οι ορισμοί κάποιων κατηγοριών μπορεί να είναι διφορούμενοι. Επιπρόσθετα, μερικές λέξεις ενδέχεται να περιλαμβάνονται στην ίδια γενική κατηγορία αλλά αυτές ίσως έχουν περισσότερη ή λιγότερη σημασία για την κατηγορία αυτή. Τέλος, η συσσωμάτωση στοιχείων μπορεί να διακυβεύει την αξιοπιστία, για αυτό είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούνται προτάσεις φράσεις ή λέξεις για την ανάλυση (Cohen et al., 2007).

Η ανάλυση περιεχομένου είναι χρήσιμη για να ελέγξει ή να επιβεβαιώσει μία προ υπάρχουσα θεωρία και όχι για να δημιουργήσει μία άλλη. Ὁταν το ερευνητικό ερώτημα που χρησιμοποιείται είναι πολύ ανοιχτό τότε η εμπειρικά θεμελιώδη θεωρία είναι προτιμότερη (Cohen et al., 2007).

3.2. Εμπειρικά θεμελιωμένη θεωρία

Όταν δεν έχουν ξεκαθαριστεί από τους ερευνητές τόσο καλά οι λεπτομέρειες του σκοπού της παρατήρησης τότε υιοθετείται από αυτούς μία μη δομημένη προσέγγιση στην παρατήρηση. Οι ερευνητές σε αυτή τη περίπτωση είναι προετοιμασμένοι να αφιερώσουν αρκετό χρόνο για την έρευνα και τη συγκέντρωση δεδομένων, από τα οποία και αναμένουν να προκύψει το σημείο εστίασης και η δομή (Bell, 2005).

Με άλλα λόγια στην εμπειρικά θεμελιωμένη θεωρία ο ερευνητής θα «αναβάλλει τους ορισμούς και τις δομές μέχρι να παρατηρηθεί το μοντέλο .… ο ερευνητής αναπτύσσει τις εννοιολογικές κατηγορίες από δεδομένα, και μετά συνεχίζει την επιτόπια έρευνα προκειμένου να τις επεξεργαστεί λεπτομερώς ενόσω ακόμη έχει πρόσβαση στα δεδομένα» (Bowling, 2002:367 όπ. αναφ. στο Bell, 2005).

Πιο αναλυτικά στην εμπειρικά θεμελιωμένη θεωρία

- Η συλλογή δεδομένων και η ανάλυση είναι δύο διαδικασίες που συσχετίζονται
- Οι ιδέες που προκύπτουν από τα δεδομένα είναι οι βασικές ενότητες για την ανάλυση
- Οι κατηγορίες πρέπει να αναπτύσσονται και να σχετίζονται
- Κατά την ανάλυση ο ερευνητής κάνει συγκρίσεις ανάμεσα στα δεδομένα και τις κατηγορίες έτσι ώστε να έχει μεγαλύτερη ακρίβεια και συνέπεια στα αποτελέσματά του

- Οι υποθέσεις σχετικά με τις σχέσεις ανάμεσα στις κατηγορίες αναπτύσσονται και επιβεβαιώνονται όσο περισσότερο είναι αυτό πιθανό κατά τη διαδικασία της έρευνας (Corbin & Strauss, 1990).

Συνοψίζοντας, σύμφωνα με τους Corbin and Strauss (1994) η εμπειρικά θεμελιωμένη θεωρία είναι μία γενική μεθοδολογία για την ανάπτυξη μιας θεωρίας που είναι θεμελιωμένη σε συστηματικά συγκεντρωμένα και αναλυμένα δεδομένα. Η θεωρία αυτή προκύπτει από τα ίδια τα δεδομένα και καθώς η κωδικοποίηση είναι σε εξέλιξη και διάφορα θέματα αναδύονται στην επιφάνεια η ανάλυση γίνεται πιο οργανωμένη και δομημένη (Cohen et al., 2007).

3.3. Ερευνητικά ερωτήματα

Τα ερευνητικά ρωτήματα της παρούσας εργασίας είναι τα παρακάτω:

Α. Ποιες μαθηματικές έννοιες περιέχουν τα προβλήματα που κατασκευάστηκαν με βάση μια εικόνα που περιέχει γεωμετρικά σχήματα;

Β. Ποια ήταν τα λάθη και οι παραλείψεις που εμφανίστηκαν σε αυτά τα προβλήματα;

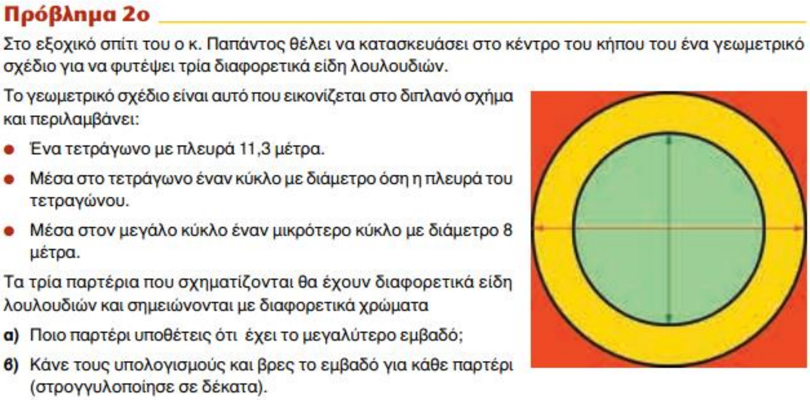
Γ. Ποιες ήταν οι στρατηγικές που χρησιμοποίησαν οι φοιτητές για να βελτιώσουν τα αρχικά τους προβλήματα;

Δ. Ποιοι παράγοντες επηρεάζουν την κατασκευή προβλημάτων;

3.4. Πλαίσιο έρευνας

Στην παρούσα έρευνα λοιπόν, λαμβάνοντας υπόψη και τη σχετική βιβλιογραφία, ασχοληθήκαμε με την ικανότητα κατασκευής μαθηματικών προβλημάτων από μελλοντικούς εκπαιδευτικούς, συγκεκριμένα από φοιτητές Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε 70 φοιτήτριες και φοιτητές του 3ου έτους του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης (ΠΤΔΕ) του

Πανεπιστημίου Ιωαννίνων. Σε αυτούς δόθηκε ένα φύλλο εργασίας, το οποίο περιείχε μια εικόνα από το Τετράδιο Εργασιών των Μαθηματικών ΣΤ’ Δημοτικού. Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται πώς ακριβώς αξιοποιήθηκε το συγκεκριμένο πλαίσιο στο σχολικό εγχειρίδιο:



Πρόβλημα 2ο

Στο εξοχικό σπίτι του ο κ. Παπάντος θέλει να κατασκευάσει στο κέντρο του κήπου του ένα γεωμετρικό σχέδιο για να φυτέψει τρία διαφορετικά είδη λουλουδιών.

Το γεωμετρικό σχέδιο είναι αυτό που εικονίζεται στο διπλανό σχήμα και περιλαμβάνει:

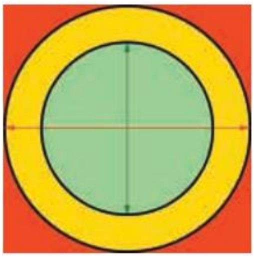
- Ένα τετράγωνο με πλευρά 11,3 μέτρα.
- Μέσα στο τετράγωνο έναν κύκλο με διάμετρο όση η πλευρά του τετραγώνου.
- Μέσα στον μεγάλο κύκλο έναν μικρότερο κύκλο με διάμετρο 8 μέτρα.

Τα τρία παρτέρια που σχηματίζονται θα έχουν διαφορετικά είδη λουλουδιών και σημειώνονται με διαφορετικά χρώματα

α) Ποιο παρτέρι υποθέτεις ότι έχει το μεγαλύτερο εμβαδό;

β) Κάνε τους υπολογισμούς και βρες το εμβαδό για κάθε παρτέρι (στρογγυλοποίησε σε δέκατα).

Εικόνα 1: Τετράδιο εργασιών, τεύχος δ, σελ. 27, Μαθηματικά ΣΤ’ Δημοτικού.



Εικόνα 2: Το ημι-δομημένο πλαίσιο κατασκευής προβλήματος.

Η εικόνα πρόσφερε δυνατότητες αξιοποίησης για την κατασκευή προβλημάτων από τους υποψήφιους δασκάλους και θεωρήθηκε ότι ανταποκρινόταν επαρκώς στους στόχους της έρευνας. Πιο αναλυτικά, η έρευνα των Koichu and Kontorovich (2013) υποδηλώνει ότι η προσοχή στην αυθεντικότητα των καταστάσεων και του πλαισίου στο οποίο δίνεται η εργασία για την κατασκευή προβλημάτων, μπορεί να ενθαρρύνει τους μαθητευόμενους να γίνουν καλύτεροι στην κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων. Επιπρόσθετα, από άλλη έρευνα (Crespo, 2003) προκύπτει ότι οι μαθητές είναι ικανοί να βελτιώσουν το εύρος και το επίπεδο πρόκλησης όταν κατασκευάζουν προβλήματα έχοντας την εμπειρία της επίλυσης τέτοιων προβλημάτων και ταυτόχρονα όταν αυτό προκαλείται από ανεπίσημο κείμενο και εικόνες. Για αυτούς τους λόγους λοιπόν επιλέχθηκε μία εικόνα η οποία μπορεί να αποτελέσει και εικόνα κάποιας αυθεντικής κατάστασης για τους συμμετέχοντες τις έρευνας.

Το Φύλλο Εργασίας (για συντομία στο εξής ΦΕ, Βλέπε Παράρτημα 5.1.) περιλάμβανε κάποιες δραστηριότητες και κάποιες ερωτήσεις ανοιχτού τύπου. Στις δραστηριότητες ζητήθηκε αρχικά κατασκευή προβλήματος, έπειτα επίλυσή του και στη συνέχεια εκ νέου κατασκευή. Οι ερωτήσεις επιλέχθηκαν με βάση τα ερωτήματα που έπρεπε να απαντηθούν στα πλαίσια της έρευνας και βασίστηκαν σε ερωτήσεις που χρησιμοποιήθηκαν είτε σε συνέντευξη προηγουμένης έρευνας (Singer & Voica, 2015), είτε σε φύλλο εργασίας προηγούμενης έρευνας (Rosli et al., 2015).

Σύμφωνα με τους Rosli et al. 2015 η συνεργατική δουλειά κατά τη διάρκεια της κατασκευής προβλημάτων δεν φαίνεται να έχει επιτυχία. Συνεπώς, για αυτό το λόγο επιλέχθηκε στην παρούσα έρευνα η κατασκευή προβλημάτων να γίνει ατομικά από κάθε φοιτητή.

Αρχικά τα ΦΕ δοκιμάστηκαν πιλοτικά σε μεταπτυχιακούς φοιτητές του ΠΤΔΕ του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων της κατεύθυνσης «Θετικές επιστήμες» για να εξεταστεί η σαφήνεια των ερωτήσεων και να διαπιστωθεί κατά πόσο οι απαντήσεις που δίνονται καλύπτουν τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν στην έρευνα. Μετά την πιλοτική έρευνα έγιναν διορθώσεις και δημιουργήθηκε ο οδηγός για τη διεξαγωγή της έρευνας (Βλέπε πιο αναλυτικά 3.6.), που περιλάμβανε τα στάδια έρευνας με παρατηρήσεις οι οποίες έπαιξαν σημαντικό ρόλο στη διεξαγωγή της. Με τη χρήση του οδηγού ήταν εξασφαλισμένο ότι σε κάθε πιθανή ερώτηση οι φοιτητές θα λάμβαναν την ίδια απάντηση. Ο μόνος περιορισμός κατά τη συμπλήρωση του ΦΕ ήταν το πρόβλημα να απευθύνεται σε μαθητές ΣΤ' Δημοτικού, καθώς επίσης και ότι το πρόβλημα θα έπρεπε να δοθεί στο τέλος της σχολικής χρονιάς (οπότε οι μαθητές θα έχουν διδαχτεί όλη την ύλη).

Οι Koichu and Kontorovich (2013) κατέδειξαν στην έρευνά τους ότι οι μελλοντικοί δάσκαλοι κατασκεύασαν με επιτυχία και κατασκεύασαν τα πιο ενδιαφέροντα προβλήματα, όταν σύνδεαν την κατασκευή με την εξερεύνηση και την επίλυση των προβλημάτων. Επίσης, οι μαθητές φαίνεται να είχαν στο μυαλό τους τη διαδικασία της επίλυσης όταν κατασκεύαζαν προβλήματα και μάλιστα αυτό γινόταν παράλληλα με τη διαδικασία της κατασκευής (Cai & Hwang, 2002· Cifarelli & Cai, 2005). Συνεπώς, η επίλυση του προβλήματος πρέπει να προηγείται της κατασκευής (Rosli et al., 2015). Για αυτό λοιπόν επιλέχθηκε στην παρούσα έρευνα να γίνει κατασκευή προβλήματος στη συνέχεια επίλυση αυτού και στη δεύτερη φάση ξανά κατασκευή προβλήματος και συγκεκριμένα τροποποίηση του αρχικού.

3.5. Αξιοπιστία – Εγκυρότητα και Περιορισμοί

Σύμφωνα με τον Bell (2005) «Αξιοπιστία είναι ο βαθμός στον οποίο ένα τεστ, ή μια διαδικασία, παράγει παρεμφερή αποτελέσματα υπό σταθερές συνθήκες σε όλες τις περιπτώσεις» (σελ. 159). Εργαλείο αξιοπιστίας είναι ο έλεγχος και επανέλεγχος (Bell, 2005). Στην παρούσα εργασία έγινε πιλοτική δοκιμή επομένως θεωρείται ότι ως ένα βαθμό καλύφθηκε η αξιοπιστία του Φύλλου Εργασίας που χορηγήθηκε.

Ως εγκυρότητα ορίζεται «ο σχεδιασμός της έρευνας με τέτοιο τρόπο ώστε να παρέχει αξιόπιστα συμπεράσματα, το αν δηλαδή τα στοιχεία που προσφέρει η έρευνα μπορούν να αντέξουν το βάρος της ερμηνείας που εξάγονται από αυτήν» (Sapsoford & Jupp, 1996 όπ. αναφ. στο Bell, 2005, σελ. 160). Πρέπει να είναι αρκετά μεγάλο το δείγμα ώστε να επιτρέπει έγκυρα συμπεράσματα.

Η συζήτηση με συναδέλφους ή με ερευνητές που ασχολούνται με το ίδιο θέμα για το εργαλείο που χρησιμοποιείται για τη διεξαγωγή της έρευνας, για τον τρόπο με τον οποίο αυτή θα πραγματοποιηθεί και τα ερωτήματα τα οποία καλούνται να απαντηθούν μέσω της όλης διαδικασίας αποτελεί τουλάχιστον μια στοιχειώδη μέθοδο η οποία θα υπενθυμίσει στον ερευνητή την ανάγκη για αξιοπιστία και εγκυρότητα (Bell, 2005). Μέσω μιας τέτοιας διαδικασίας συζήτησης και ανατροφοδότησης καταλήξαμε στις κατηγορίες που παρουσιάζονται.

Τέλος, η εμπιστευτικότητα αποτελεί σημαντικό μέρος της ερευνητικής διαδικασίας. Σύμφωνα με τους Frankfort-Nachmias και Nachmias (1992, όπ. αναφ. στο Cohen and Manion, 1994), «η υποχρέωση να προστατευτεί η ανωνυμία των συμμετεχόντων σε μία έρευνα και να κρατηθούν τα στοιχεία της έρευνας εμπιστευτικά είναι ουσιαστική». Κατά τη διάρκεια τις έρευνας λοιπόν ο σκοπός για τον οποίο θα χρησιμοποιηθούν οι πληροφορίες των φύλλων εργασίας ήταν σαφής (Βλέπε 3.6.).

3.6. Αναλυτικές οδηγίες διεξαγωγής έρευνας

Αρχικά έγινε η απαιτούμενη ενημέρωση των φοιτητών σχετικά με το ΦΕ που αφορά στην κατασκευή προβλημάτων. Εκείνο που επιχειρείται να εξεταστεί στην παρούσα έρευνα είναι ο τρόπος με τον οποίο δουλεύουν μελλοντικοί δάσκαλοι σε τέτοιου είδους καταστάσεις κατασκευής προβλημάτων και πώς τελικά διαμορφώνουν το αρχικό τους πρόβλημα έπειτα από την αυτό-αξιολόγηση που κάνουν. Ακόμη, οι φοιτητές ενημερώθηκαν εξ αρχής για την ύπαρξη κάποιων ερωτήσεων ανοιχτού τύπου που υπήρχαν στο ΦΕ. Οι απαντήσεις που θα προκύψουν από αυτές θα δώσουν στοιχεία σημαντικά για τον ακριβή τρόπο με τον οποίο δούλεψαν στην όλη διαδικασία, καθώς επίσης και μια εικόνα για το πώς αντιμετωπίζουν γενικότερα καταστάσεις κατασκευής μαθηματικών προβλημάτων.

Οι οδηγίες προς τους φοιτητές ήταν οι εξής:

1. Παίρνετε το ΦΕ και ξεκινάτε κατευθείαν να απαντάτε.
2. Έχετε στη διάθεσή σας τα σχολικά εγχειρίδια της ΣΤ' Δημοτικού.
3. Ρωτάτε αν υπάρχει οποιαδήποτε απορία.
4. Προσπαθήστε να είστε όσο το δυνατόν πιο συγκεντρωμένοι.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται επιπλέον πληροφορίες για κάποιες από τις δραστηριότητες και ερωτήσεις που υπάρχουν στο ΦΕ. Με τις συγκεκριμένες οδηγίες θέλαμε να διασφαλίσουμε ότι σε κάθε πιθανή ερώτηση οι φοιτητές θα λάμβαναν την ίδια απάντηση.

Δραστηριότητα1: Κατασκευή προβλήματος – Το πρόβλημα που θα κατασκευάσεις πρέπει να απευθύνεται σε μαθητές ΣΤ' Δημοτικού, και θα δοθεί στους μαθητές στο τέλος της σχολικής χρονιάς.

Στη συγκεκριμένη ερώτηση ζητείται από τους φοιτητές να χρησιμοποιήσουν όσα περισσότερα στοιχεία μπορούν από την εικόνα που του δόθηκε.

Ερώτηση 1: Τι σε ενέπνευσε για να κατασκευάσεις αυτό το πρόβλημα;

Παραδείγματα πιθανών απαντήσεων για τη συγκεκριμένη ερώτηση: Εικόνα , χρώμα, κτλ.

Ερώτηση 2: Γιατί επέλεξες το συγκεκριμένο κεφάλαιο των μαθηματικών;

Με τη συγκεκριμένη ερώτηση εκείνο που επιχειρείται να εξεταστεί είναι αν επιλέγουν να κατασκευάσουν πρόβλημα με βάση τις δικές τους προτιμήσεις στα μαθηματικά, όπως κάνουν και οι μαθητές σε άλλες έρευνες (Singer &

Voica, 2015). Παραδείγματα πιθανών απαντήσεων: Μου αρέσει αυτό το πεδίο/ Είμαι πιο εξοικειωμένος με αυτό/Για τους μαθητές κτλ.

Δραστηριότητα 2 : Επίλυση του προβλήματος

Ερώτηση 3: Βλέποντας τη λύση του προβλήματος είσαι ικανοποιημένος από το πρόβλημα που κατασκεύασες; Γιατί; (αυτό-αξιολόγηση)

Με αυτή την ερώτηση επιχειρείται μία αυτό-αξιολόγηση των φοιτητών στην πρώτη κατασκευή προβλήματος που έκαναν. Κάποια παραδείγματα απαντήσεων/κριτήρια αυτό-αξιολόγησης είναι: Συμβαδίζει η λύση με το πρόβλημα που έθεσες αρχικά; καταλληλόλητα για ΣΤ', σαφήνεια κτλ. Ακόμη, από τη συγκεκριμένη ερώτηση μπορούν να προκύψουν απαντήσεις οι οποίες θα δείχνουν πώς αυτή η αυτό-αξιολόγηση που έκαναν οι φοιτητές συμβάλει τελικά και στην επόμενη δραστηριότητα.

Δραστηριότητα 3: Τώρα μετά από την αυτό-αξιολόγηση που έκανες στην προηγούμενη ερώτηση καλείσαι να τροποποιήσεις το αρχικό σου πρόβλημα.

Εφόσον γίνει η αντίστοιχη ερώτηση από τους φοιτητές θα μπορεί να δοθεί θετική απάντηση για παρέμβαση, τροποποίηση ή συμπλήρωση σχήματος που δόθηκε αρχικά.

Ερώτηση 4: Τι αλλάξατε σε σχέση με το αρχικό σας πρόβλημα; (επιγραμματικά)

Παραδείγματα πιθανών απαντήσεων: Ζητούμενα, δεδομένα, σχήμα κτλ.

Ερώτηση 5: Τώρα που κατασκεύασες για 2^{η} φορά το πρόβλημα έκανες επίλυση του προβλήματος κατά την κατασκευή; Γιατί;

Στην ερώτηση αυτή είναι σημαντικό να διαπιστωθεί κατά πόσο τη δεύτερη φορά που κατασκεύασαν πρόβλημα οι φοιτητές επέλεξαν να κάνουν ξανά επίλυση προβλήματος. Με αυτή την ερώτηση μπορεί να προκύψει αν οι φοιτητές θεωρούν σημαντική την επίλυση κατά την κατασκευή ενός προβλήματος

<u>Ερώτηση 6</u>: Πώς εργάστηκες για να κατασκευάσεις το νέο αυτό πρόβλημα; Περιέγραψε αναλυτικά τις σκέψεις σου από την αρχή της κατασκευής του νέου προβλήματος, όπως επίσης και τις διαδικασίες που ακολούθησες στη συνέχεια.

Στην περίπτωση που θα υπήρχε δυσκολία στην συγκεκριμένη ερώτηση θα δινόταν οι παρακάτω ερωτήσεις/προτάσεις ως καθοδήγηση:

- Τι σκέφτεσαι όταν καλείσαι να κατασκευάσεις ξανά το νέο πρόβλημα;
- Όταν κοιτάς ξανά την επίλυση;
- Όταν κοιτάς ξανά την εικόνα;
- Περιέγραψε τον συλλογισμό σου κατά τη διάρκεια της όλης διαδικασίας.
- Περιέγραψε όλες τις διαδικασίες που ακολούθησες.
- Για ποιο λόγο πήρες τις αποφάσεις που πήρες κατά τη διάρκεια της κατασκευής του νέου προβλήματος;

Παραδείγματα πιθανών απαντήσεων για τη συγκεκριμένη ερώτηση ήταν: καλύτερη διατύπωση, αύξηση δυσκολίας, διόρθωση αρχικού γιατί δεν μπορούσε να λυθεί).

Ερευνητικό ενδιαφέρον αποτελούν οι στρατηγικές που ακολουθήθηκαν για την τροποποίηση του δεύτερου προβλήματος. Στον οδηγό διεξαγωγής έρευνας γινόταν αναφορά στις στρατηγικές, χωρίς όμως αυτές να δοθούν στους φοιτητές.

Παραδείγματα πιθανών στρατηγικών που ακολουθήθηκαν (Kontorovich et al., 2012):

- Ανταλλαγή μεταξύ δεδομένων & ζητούμενων
- Μετατροπή περιορισμών ή υποθέσεων
- Μεταβολή ζητουμένων (με αμετάβλητα δεδομένα)
- Νέα διατύπωση ώστε να επιδέχεται μία συγκεκριμένη μέθοδο επίλυσης.
- Επέκταση προβλήματος ώστε η επίλυση να προϋποθέτει την επίλυση του αρχικού προβλήματος.

Ερώτηση 7: Τι σκέφτεσαι/ τι σε προβληματίζει όταν έχεις να κατασκευάσεις ένα πρόβλημα;

Παραδείγματα πιθανών απαντήσεων:

- Αντιλήψεις γενικότερα για την κατασκευή προβλημάτων (ελεύθερα)
- Κοινωνικά κριτήρια:
    - Ποιον & τι σκεφτόσουν καθώς κατασκεύαζες το πρόβλημα;
    - πχ. μαθητές, επίπεδο μαθητών, λύτη, καθηγητή μου, ερευνητή κτλ.

Στο τέλος της όλης διαδικασίας ζητήθηκε από τους φοιτητές να γράψουν το email τους στην πρώτη σελίδα του ΦΕ, έτσι ώστε να υπάρχει τρόπος επικοινωνίας με τους συμμετέχοντες στην περίπτωση που κάτι τέτοιο θα ήταν αναγκαίο. Σαφώς η γνωστοποίηση του προσωπικού email δεν ήταν υποχρεωτική και ξεκαθαρίστηκε ότι θα χρησιμοποιηθεί εφόσον αυτό είναι απαραίτητο για τους σκοπούς της έρευνας και μόνο για διευκρινιστικές ερωτήσεις.

ΑΝΑΛΥΣΗ-ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Από τους 70 φοιτητές, 66 συμπλήρωσαν το φύλλο εργασίας, τρεις δεν συμμετείχαν στη διαδικασία λέγοντας ότι δεν μπορούν να κάνουν κατασκευή προβλημάτων και μία φοιτήτρια έδωσε λευκό φύλλο εργασίας. Σύμφωνα με τα ερευνητικά ερωτήματα, για τους σκοπούς της παρούσας μελέτης υπήρξε ενδιαφέρον στα προβλήματα που κατασκεύασαν οι φοιτήτριες και οι φοιτητές στις δύο φάσεις της έρευνας, δηλαδή πριν και μετά την επίλυση. Συγκεκριμένα, προέκυψαν οι εξής κατηγορίες:

α) μαθηματικές έννοιες: με βάση τις έννοιες που χρησιμοποιήθηκαν από τις φοιτήτριες και τους φοιτητές στα προβλήματά τους, καταγράφτηκαν και κατηγοριοποιήθηκαν οι σχετικές έννοιες,

β) λάθη και παραλείψεις: κατηγοριοποιήθηκαν οι ελλείψεις και τα λάθη που, κατά τη δική μας ανάλυση, επηρέασαν την καταλληλότητα των προβλημάτων που κατασκευάστηκαν,

γ) στρατηγικές βελτίωσης προβλημάτων: κατηγοριοποιήθηκαν οι στρατηγικές που εφάρμοσαν όσες και όσοι επέλεξαν να επαναδιατυπώσουν το αρχικό τους πρόβλημα, με σκοπό να το βελτιώσουν.

δ) παράγοντες που επηρεάζουν την κατασκευή προβλημάτων: κατηγοριοποιήθηκαν οι απαντήσεις που δόθηκαν στις ερωτήσεις ανοιχτού τύπου όσον αφορά στους παράγοντες που επηρεάζουν την διαδικασία κατασκευής προβλημάτων.

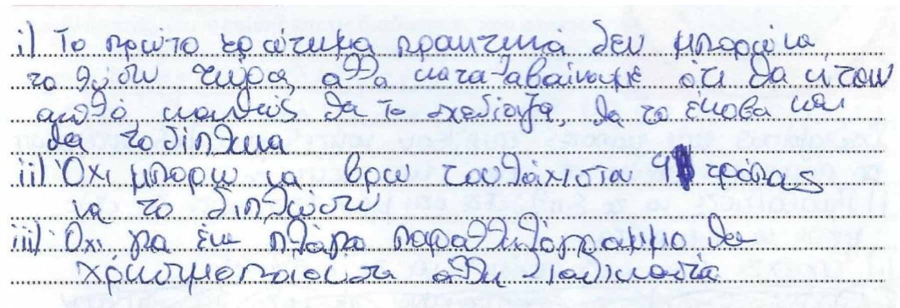
4.1. Μαθηματικές έννοιες

Ξεκινώντας την ανάλυση των αποτελεσμάτων της παρούσας ερευνητικής εργασίας θα παρουσιαστούν οι μαθηματικές έννοιες όπως εκείνες προέκυψαν από την ανάλυση των δεδομένων. Οι μαθηματικές έννοιες χωρίστηκαν σε δύο μεγάλες κατηγορίες: Γεωμετρία και Άλγεβρα. Η πρώτη όπως είναι ευκολά κατανοητό περιλαμβάνει έννοιες που εμπλέκονταν με τη Γεωμετρία. Παρατηρήθηκε ότι από τους 66 φοιτητές που συμπλήρωσαν τα ΦΕ τα περισσότερα ενέπλεκαν έννοιες της Γεωμετρίας. Το γεγονός αυτό δικαιολογείται από την αρχική εικόνα που τους δόθηκε, η οποία περιλάμβανε γεωμετρικά σχήματα. Παρόλα αυτά υπήρχαν επτά ΦΕ τα οποία αξιοποιούσαν έννοιες καθαρά αλγεβρικές. Πιο αναλυτικά, η κατηγορία της Άλγεβρας περιλάμβανε: πράξεις με κλάσματα, σύγκριση κλασμάτων, εξισώσεις, απλή μέθοδος των τριών και αξιοποίηση της έννοιας του κόστους για να στρωθεί με κάποιο υλικό μία επιφάνεια.

Στη συνέχεια αναλύονται οι υποκατηγορίες που δημιουργήθηκαν στην κατηγορία της Γεωμετρίας, οι οποίες επιγραμματικά είναι: κύκλος/κυκλικός δίσκος, τετράγωνο, ορθογώνιο, τρίγωνο, άλλα σχήματα/ επιφάνειες, κύβος και άλλες Γεωμετρικές έννοιες.

Η κατηγορία που εμφανίστηκε στα περισσότερα ΦΕ είναι η κατηγορία «κύκλος/ κυκλικός δίσκος». Οι περισσότεροι συμμετέχοντες επέλεξαν να ασχοληθούν με θέματα που σχετίζονται με τις έννοιες: ακτίνα , εμβαδό και διάμετρο. Από αυτούς, 50 συμμετέχοντες ζήτησαν, στα προβλήματα που κατασκεύασαν, το εμβαδό του πράσινου κυκλικού δίσκου και 51 ζήτησαν το εμβαδό του κίτρινου κυκλικού δίσκου. Ιδιαίτερη εντύπωση προκαλεί το γεγονός ότι ζητήθηκε από αρκετούς το εμβαδό του κίτρινου κυκλικού δίσκου καθώς, η επιφάνεια του συγκεκριμένου κυκλικού δίσκου δεν είναι πλήρως ορατή στο σχήμα. Για παράδειγμα, στο ΦΕ 8 ρωτάει στο πρόβλημα που κατασκεύασε ποιο σχήμα έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν και αναφέρεται σε ολόκληρα τα σχήματα και όχι στις περιοχές που είναι ορατές: «Στην διπλανή εικόνα φαίνονται 3 σχήματα όπου είναι το ένα μέσα στο άλλο. Ποιο σχήμα πιστεύεις ότι έχει μεγαλύτερο εμβαδόν;»

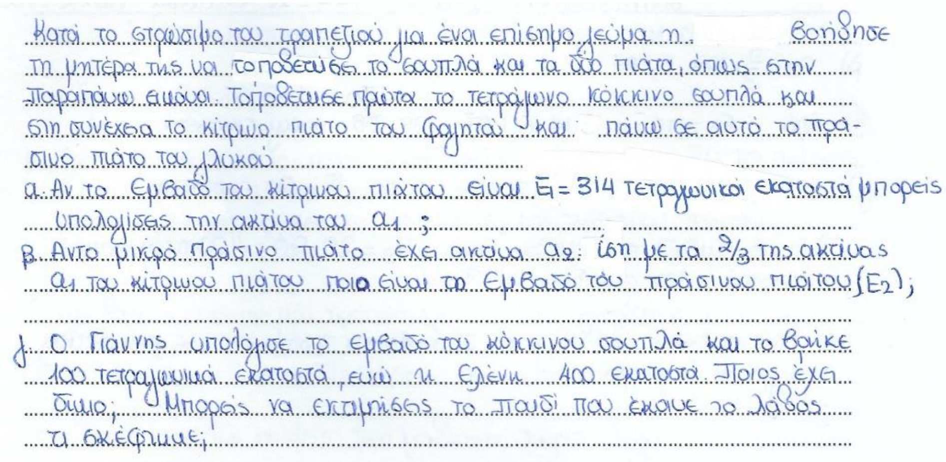
Επιπρόσθετα, στην πρώτη κατηγορία εντάσσεται και η περίμετρος-μήκος κύκλου με την οποία ασχολήθηκαν εννιά συμμετέχοντες, από τους οποίους μάλιστα κάποιοι χρησιμοποίησαν λανθασμένα τις έννοιες αυτές (βλ. επόμενη κατηγορία ανάλυσης). Τέσσερις συμμετέχοντες ασχολήθηκαν με ημικύκλιο ή αναφέρθηκαν σε αυτό. Μία άλλη φοιτήτρια ασχολήθηκε με τη συμμετρία (ΦΕ 21) και το ζητούμενό της ήταν με πόσους τρόπους μπορεί να διπλωθεί ο κύκλος ώστε να υπάρχει συμμετρία. Στην επίλυση του προβλήματος αναφέρει ότι μπορούμε να βρούμε τουλάχιστον τέσσερις τρόπους να διπλώσουμε τον κύκλο συνεπώς και 4 άξονες συμμετρίας. Η συγκεκριμένη φοιτήτρια λοιπόν δεν είναι ξεκάθαρη στην επίλυσή της και αφήνει ανοιχτή την απάντηση γεγονός που ίσως αναδεικνύει και την αδυναμία της σε θέματα συμμετρίας κύκλου.


i) Το πρώτο ερώτημα πρακτικά δεν μπορώ να το λύσω τώρα αλλά καταλαβαίνουμε ότι θα ήταν απλό, καθώς θα το σχεδίαζα, θα το έκοβα και θα το δίπλωνα
ii) Όχι μπορώ να βρω τουλάχιστον 4 τρόπους να το διπλώσω
iii) Όχι για έναν πλάγιο παραλληλόγραμμο δε χρησιμοποιούνται αλλά διαγώνια

Εικόνα 3: Επίλυση προβλήματος του ΦΕ 21

Ακόμη, ένας φοιτητής κατασκεύασε πρόβλημα με αναλογία (ΦΕ 27), στο οποίο αφού ζήτησε ακτίνα, εμβαδό και περίμετρο των δύο κύκλων, ζήτησε να οριστεί και η «αναλογία των δύο κύκλων». Στην επίλυση του προβλήματος απαντάται το ερώτημα αυτό ως εξής: «ο κίτρινος κύκλος είναι 1,77 φορές μεγαλύτερος σε εμβαδό από τον πράσινο». Τέλος, σε δύο ΦΕ αναφέρονται οι ομόκεντροι κύκλοι (ΦΕ 54, 65). Στο ΦΕ 54 γίνεται απλά αναφορά στο ότι οι κύκλοι του σχήματος είναι ομόκεντροι, ενώ στο ΦΕ 65 αναφέρει ότι οι δύο κύκλοι έχουν ίδιο κέντρο χωρίς όμως να χρησιμοποιείται η έννοια «ομόκεντροι κύκλοι».

Συνεχίζοντας με τη δεύτερη κατηγορία «τετράγωνο», αρκετοί συμμετέχοντες, συγκεκριμένα 23, ζήτησαν στα προβλήματα που κατασκεύασαν το εμβαδό του τετραγώνου, η επιφάνεια του οποίου είναι καλυμμένη και δεν φαίνεται ολόκληρη στην εικόνα. Ένα ενδεικτικό τέτοιο παράδειγμα υπάρχει στο ΦΕ 30, όπου το εμβαδό του τετραγώνου είναι και το ζητούμενο του προβλήματος που κατασκευάστηκε. Υπήρξε μία περίπτωση στην οποία χρησιμοποιήθηκε στα δεδομένα το εμβαδό του τετραγώνου. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, σε αντίθεση με τις προηγούμενες, το εμβαδόν του τετραγώνου αποκτά και νόημα, μιας και παρουσιάζεται ως σουπλά (βλ. Εικόνα 2). Μόνο εννιά από τους συμμετέχοντες που ασχολήθηκαν με το εμβαδό επέλεξαν να κάνουν σύγκριση εμβαδών (ενδεικτικά ΦΕ 8, 42).


Κατά το στρώσιμο του τραπεζιού για ένα επίσημο γεύμα η ... βοήθησε τη μητέρα της να τοποθετήσει το σουπλά και τα δύο πιάτα, όπως στην παραπάνω εικόνα. Τοποθέτησε πρώτα το τετράγωνο κόκκινο σουπλά και στη συνέχεια το κίτρινο πιάτο του φαγητού και πάνω σε αυτό το πράσινο πιάτο του γλυκού.

α. Αν το Εμβαδό του κίτρινου πιάτου είναι $E_1 = 314$ τετραγωνικά εκατοστά μπορείς υπολογίσεις την ακτίνα του a_1;

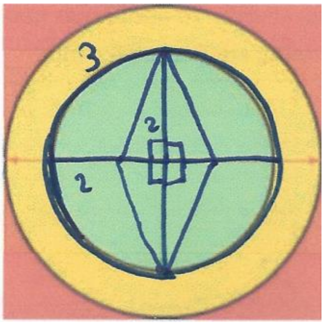
β. Αν το μικρό πράσινο πιάτο έχει ακτίνα a_2: ίση με τα $2/3$ της ακτίνας a_1 του κίτρινου πιάτου ποια είναι το Εμβαδό του πράσινου πιάτου (E_2);

γ. Ο Γιάννης υπολόγισε το εμβαδό του κόκκινου σουπλά και το βρήκε 100 τετραγωνικά εκατοστά, ενώ η Ελένη 400 εκατοστά. Ποιος έχει δίκιο; Μπορείς να εκτιμήσεις το παιδί που έκανε το λάθος τι σκέφτηκε;

Εικόνα 4: Το αρχικό πρόβλημα του ΦΕ 42

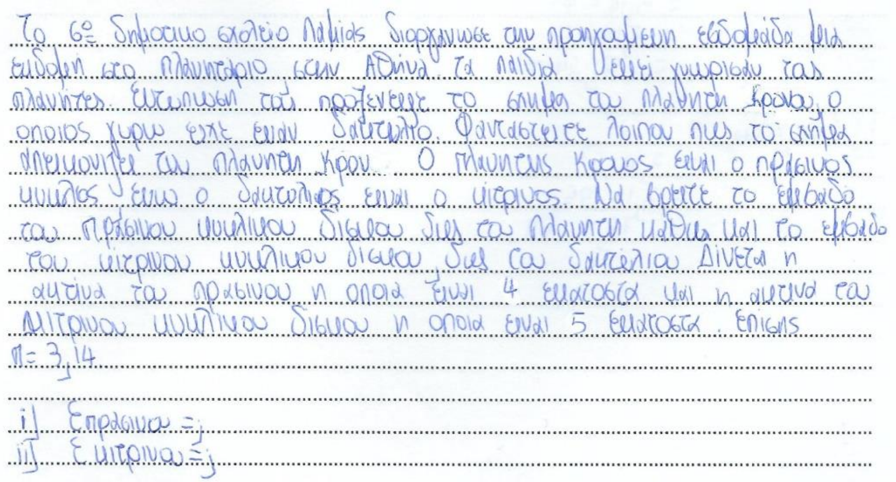
Στην κατηγορία «ορθογώνιο» υπήρξε μόνο μια περίπτωση στην οποία αξιοποιήθηκε το εμβαδό επιφάνειας ορθογωνίου και συγκεκριμένα στο ΦΕ

20. Η συγκεκριμένη φοιτήτρια έχει ως ζητούμενο το εμβαδό του ορθογωνίου παραλληλογράμμου που σχηματίζεται, που όμως δεν είναι ευκολά αντιληπτό. Θα μπορούσε να σκιαγραφήσει το συγκεκριμένο εμβαδό ή να ονομάσει το συγκεκριμένο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ώστε να είναι σίγουρη ότι το ζητούμενό της θα είναι απολύτως κατανοητό και θα μπορεί τελικά να επιλυθεί σωστά από όλους τους πιθανούς λύτες. Ακόμη, υπήρξαν δύο περιπτώσεις στις οποίες αξιοποιήθηκε η έννοια του τριγώνου και εντάχτηκαν στην κατηγορία «τρίγωνο». Στο ΦΕ 1 και στο ΦΕ 39 ζητούμενα ήταν το εμβαδό κάποιου τριγώνου. Στην δεύτερη περίπτωση όμως δεν είναι καλά καθορισμένο το σχήμα ώστε να μπορεί να βρεθεί το συγκεκριμένο εμβαδό.



Εικόνα 5: Τροποποίηση εικόνας του ΦΕ 39

Κάποιοι συμμετέχοντες επέλεξαν να ασχοληθούν και να αξιοποιήσουν εμβαδό επιφάνειας που δεν είναι απλοποιημένη. Συγκεκριμένα 13 συμμετέχοντες αξιοποίησαν την κίτρινη περιοχή του σχήματος ζητώντας το εμβαδό της περιοχής αυτής. Υπήρξε μία περίπτωση (ΦΕ 12) που ενώ αρχικά φάνηκε να ζητείται στο πρόβλημα το εμβαδό της κίτρινης περιοχής (δακτύλιος, όπως αναφέρεται), στην τελική ερώτηση του προβλήματος, όπως και στην επίλυση, ζητήθηκε και δόθηκε ως απάντηση το εμβαδό του κίτρινου κυκλικού δίσκου.



Το 6ο Δημοτικο σχολειο Λαμιας διοργανωσε την προηγουμενη εβδομαδα μια εκδρομη στο Πλανητεριο στην Αθηνα. Τα παιδια εκει γνωρισαν τους πλανητες. Εντυπωση τους προξενησε το σχημα του πλανητη Κρονου, ο οποιος γυρω γυρω εχει εναν δακτυλιο. Φανταστειτε λοιπον πως το σχημα απεικονιζει τον πλανητη Κρονο. Ο πλανητης Κρονος ειναι ο πρασινος κυκλος ενω ο δακτυλιος ειναι ο κιτρινος. Να βρειτε το εμβαδο του πρασινου κυκλικου δισκου δηλ. του πλανητη καθως και το εμβαδο του κιτρινου κυκλικου δισκου, δηλ. του δακτυλιου. Δινεται η ακτινα του πρασινου η οποια ειναι 4 εκατοστα και η ακτινα του κιτρινου κυκλικου δισκου η οποια ειναι 5 εκατοστα. Επισης π= 3,14

i) Επρασινου =

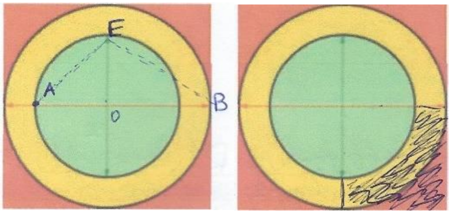
ii) Εκιτρινου =

Εικόνα 6: Κατασκευή πρώτου προβλήματος του ΦΕ 12

Το εμβαδό της πορτοκαλί επιφάνειας χρησιμοποιήθηκε από πέντε φοιτήτριες κατά την κατασκευή προβλημάτων. Σε αυτή την περίπτωση έπρεπε πρώτα να βρεθεί το εμβαδό του τετραγώνου για να επιλυθεί το πρόβλημα. Φαίνεται λοιπόν ότι ο υπολογισμός ενός εμβαδού του οποίου η επιφάνεια δεν είναι πλήρως ορατή στο σχήμα κάποιες φορές έχει νόημα, όταν για παράδειγμα χρησιμοποιείται για την εύρεση της πορτοκαλί περιοχής που υπάρχει στο δοσμένο σχήμα.

> «Η παραπάνω εικόνα αποτελεί κάτοψη της κεντρικής πλατείας του δήμου. Ο πράσινος κύκλος αντιπροσωπεύει την έκταση που θα καλυφθεί με χλοοτάπητα, ο κίτρινος κύκλος είναι το τμήμα που θα πλακοστρωθεί, ενώ στα τέσσερα πορτοκαλί κομμάτια που περισσεύουν, θα φυτευτούν δέντρα. Με δεδομένο ότι η διάμετρος του πράσινου κύκλου είναι 10 μ. και η διάμετρος του κίτρινου κύκλου είναι 14 μ., να υπολογίσετε το εμβαδόν της περιοχής που θα φυτευτεί με χορτάρι και το εμβαδόν της περιοχής που θα καλυφθεί με δέντρα». (ΦΕ 25)

Παρόλο που είχε δοθεί απόλυτη ελευθερία στον τρόπο που θα αξιοποιήσουν το σχήμα που τους δόθηκε στο ΦΕ, μόνο δύο συμμετέχοντες ζήτησαν στο πρόβλημά τους το εμβαδό συγκεκριμένης επιφάνειας που δημιούργησαν οι ίδιοι (βλ. Εικόνα 3).



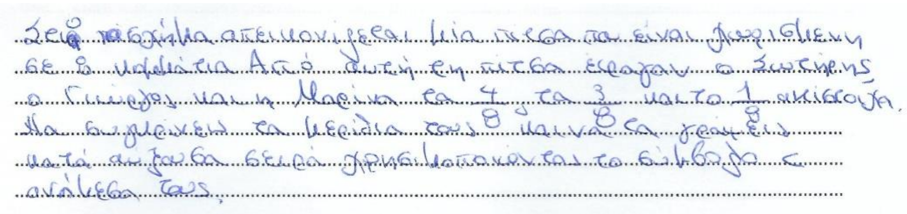
Εικόνα 7: Τα σχήματα των ΦΕ 1 και ΦΕ 35

> «Το εμβαδόν του μεγάλου κυκλικού δίσκου είναι 32 τ.μ. Η ακτίνα του μικρού δίσκου είναι 3 μ. Πόση είναι η απόσταση των σημείων Α και Β; Στη συνέχεια βρες το εμβαδόν του τριγώνου ΑΕΒ». (ΦΕ 1)

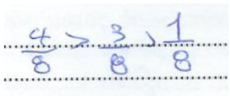
> «Δίνεται διάμετρος του μικρού κύκλου ίση με 4 εκατοστά, ενώ η ακτίνα του μεγάλου κύκλου είναι 3 εκατοστά. α) Πόσο είναι το εμβαδόν όλου του σχήματος (τετράγωνο); β) Πόση είναι η έκταση που έχει σκιαγραφηθεί; γ) Πόσο μεγαλύτερο είναι το εμβαδόν του μεγάλου κύκλου σε σχέση με το αντίστοιχο του μικρού;» (ΦΕ 35)

Η κατηγορία «κύβος» προέκυψε από ένα ΦΕ στο οποίο η φοιτήτρια ασχολήθηκε με τον κύβο (ΦΕ 6), συγκεκριμένα με τη θεωρία που αφορά στον κύβο και απλά τη χρησιμοποίησε στο ΦΕ χωρίς να γίνεται εμφανής κάποια σύνδεση του κύβου με το σχήμα και χωρίς να έχει νόημα το πρόβλημα που δημιούργησε. Τέλος, δημιουργήθηκε και η κατηγορία «άλλα Γεωμετρία», η οποία περιλαμβάνει τη σύγκριση εμβαδών από 9 συμμετέχοντες, τον ορισμό ενός ευθύγραμμου τμήματος από τον λύτη (ΦΕ 58) και την απόσταση δύο σημείων που αξιοποιήθηκε από 6 συμμετέχοντες.

Στην κατηγορία «Άλγεβρα» εντάσσονται περιπτώσεις όπου χρειαζόταν να γίνουν πράξεις με κλάσματα (ΦΕ 52), σύγκριση κλασμάτων, αξιοποίηση εξισώσεων, απλή μέθοδος των τριών και κόστος για να στρωθεί με κάποιο υλικό μια επιφάνεια. Πιο αναλυτικά, τρία ΦΕ περιείχαν προβλήματα με κλάσματα. Ειδικότερα, το ΦΕ 18 περιέχει ένα πολύ απλό πρόβλημα στο οποίο ζητάει σύγκριση τριών κλασμάτων δίνοντας μάλιστα και το σύμβολο «<» στην εκφώνηση. Η σύγκριση κλασμάτων και η συγκεκριμένη διευκρίνηση για την αύξουσα σειρά είναι περιττή σε μαθητές της ΣΤ’ τάξης. Επιπλέον, η επίλυση του προβλήματος γίνεται με τα κλάσματα σε φθίνουσα σειρά, παρόλο που στην εκφώνηση το ζητούμενο είναι η αύξουσα σειρά.

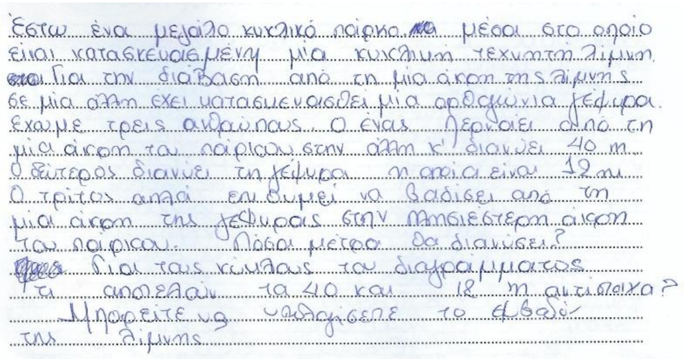


Εικόνα 8: Κατασκευή πρώτου προβλήματος του ΦΕ 18



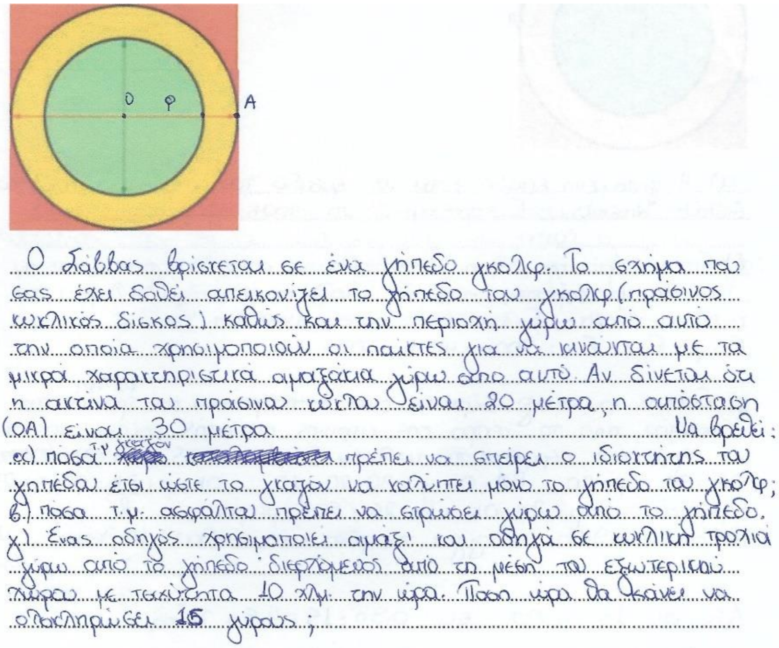
Εικόνα 9: Επίλυση του ΦΕ 18

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το ΦΕ 66 στο οποίο χρησιμοποιούνται εξισώσεις. Η συγκεκριμένη φοιτήτρια, παρόλο που είχε λιγότερο χρόνο να συμπληρώσει το ΦΕ, λόγω της καθυστέρησής της στο μάθημα, κατασκεύασε ενδιαφέροντα ρεαλιστικά προβλήματα, αξιοποιώντας τις γνώσεις των μαθητών στις εξισώσεις μιας και είναι σημαντική μαθηματική έννοια και για την Α’ Γυμνασίου. Επίσης, στο ΦΕ 26 ο φοιτητής επέλεξε να συνδέσει το πρόβλημά του με τη Φυσική. Στα πλαίσια της συγκεκριμένης σύνδεσης έγινε και η χρήση της απλής μεθόδου των τριών όταν ζητήθηκε ο χρόνος που χρειάζεται για να διανύσει κάποια απόσταση το κεντρικό πρόσωπο του προβλήματός. Στο ΦΕ 43 έγινε επίσης αξιοποίηση της απλής μεθόδου των τριών όταν ζητήθηκε το κόστος που απαιτείται για να στρωθεί με πέτρα μία συγκεκριμένη επιφάνεια.



Έστω ένα μεγάλο κυκλικό πάρκο ~~μα~~ μέσα στο οποίο είναι κατασκευασμένη μία κυκλική τεχνητή λίμνη. ~~και~~ Για την διάβαση από τη μία άκρη της λίμνης σε μία άλλη έχει κατασκευασθεί μία ορθογώνια γέφυρα. Έχουμε τρεις ανθρώπους. Ο ένας περπατάει από τη μία άκρη του πάρκου στην άλλη κ' διανύει 40 m. Ο δεύτερος διανύει τη γέφυρα η οποία είναι 12 m. Ο τρίτος όμως επιθυμεί να βαδίσει από τη μία άκρη της γέφυρας στην πλησιέστερη άκρη του πάρκου. Πόσα μέτρα θα διανύσει? ~~[illegible]~~ Για τους κύκλους του διαγράμματος τι αποτελούν τα 40 και 12 m αντίστοιχα? Μπορείτε να υπολογίσετε το εμβαδόν της λίμνης.

Εικόνα 10: Δεύτερη κατασκευή προβλήματος του ΦΕ 66



Ο Σάββας βρίσκεται σε ένα γήπεδο γκολφ. Το σχήμα που σας έχει δοθεί απεικονίζει το γήπεδο του γκολφ (πράσινος κυκλικός δίσκος) καθώς και την περιοχή γύρω από αυτό την οποία χρησιμοποιούν οι παίκτες για να κινούνται με τα μικρά χαρακτηριστικά αμαξάκια γύρω από αυτό. Αν δίνεται ότι η ακτίνα του πράσινου κύκλου είναι 20 μέτρα, η απόσταση (ΟΑ) είναι 30 μέτρα. Να βρεθεί:
α) πόσα τ.μ. γκαζόν ~~χώρο~~ ~~[illegible]~~ πρέπει να σπείρει ο ιδιοκτήτης του γηπέδου έτσι ώστε το γκαζόν να καλύπτει μόνο το γήπεδο του γκολφ;
β) πόσα τ.μ. ασφάλτου πρέπει να στρώσει γύρω από το γήπεδο.
γ) Ένας οδηγός χρησιμοποιεί αμάξι και οδηγά σε κυκλική τροχιά γύρω από το γήπεδο διερχόμενος από τη μέση του εξωτερικού κύκλου με ταχύτητα 10 χλμ. την ώρα. Πόση ώρα θα κάνει να ολοκληρώσει 15 γύρους;

Εικόνα 11: Κατασκευή προβλήματος του ΦΕ 26

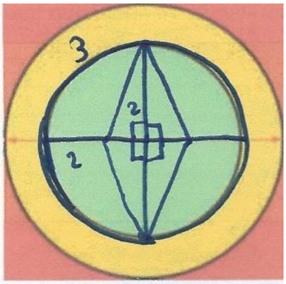
Ολοκληρώνοντας την ανάλυση των μαθηματικών εννοιών, οι έννοιες που συνδέονταν με τον κύκλο είχαν σαφέστατα τον πρώτο λόγο στην κατασκευή των προβλημάτων που επέλεξαν να κάνουν οι συμμετέχοντες. Φυσικά υπήρξαν και κάποιοι οι οποίοι προσπάθησαν να διαφοροποιηθούν κάποιες φορές πετυχημένα και κάποιες φορές όχι. Η ανάλυση αυτή αφορά στις μαθηματικές έννοιες που παρουσιάστηκαν σε οποιοδήποτε σημείο του ΦΕ είτε στην πρώτη κατασκευή είτε τη δεύτερη κατασκευή και αυτό για να υπάρξει μια γενικότερη εικόνα. Στη συνέχεια ακολουθεί περαιτέρω ανάλυση των λαθών ή των παραλείψεων που εμφανίστηκαν στα προβλήματα που κατασκευάστηκαν.

4.2. Λάθη και παραλείψεις

Από τα 66 ΦΕ που συμπληρώθηκαν μόνο τα 18 ΦΕ δεν είχαν λάθη. Όλα τα υπόλοιπα ΦΕ, δηλαδή τα περισσότερα, είχαν κάποια λάθη ή κάποιες παραλείψεις που ήταν αξιοπρόσεκτα και θεωρήθηκε αναγκαίο να αναφερθούν. Έτσι δημιουργήθηκαν για την ανάλυση αυτή οι εξής κατηγορίες: λάθος κατανόηση μαθηματικών εννοιών, λάθος μονάδες μέτρησης, κακή διατύπωση, προβλήματα στα δεδομένα και λάθος επίλυση. Να σημειωθεί σε αυτό το σημείο ότι οι κατηγορίες αυτές προέκυψαν με δεδομένα που συγκεντρώθηκαν τόσο κατά την κατασκευή όσο και κατά την επίλυση των προβλημάτων. Επίσης, οι συμμετέχοντες χρησιμοποίησαν στα ΦΕ τον όρο «κύκλος» είτε αναφερόταν σε κάποιο στοιχείο του κύκλου είτε στο εμβαδό. Στην παρούσα έρευνα όμως δεν λήφθηκε υπόψη η λάθος χρήση των εννοιών: «κύκλος» και «κυκλικός δίσκος».

Αρχικά θα γίνει αναφορά στις κατηγορίες «κακή διατύπωση» και «προβλήματα στα δεδομένα», οι οποίες αφορούν κατά κύριο λόγο στην κατασκευή των προβλημάτων. Όσον αφορά στα λάθη που υπάρχουν στα προβλήματα που κατασκεύασαν οι συμμετέχοντες λόγω κακής διατύπωσης μπορούμε να σημειώσουμε ότι, όσον αφορά στο σχήμα, υπήρξαν δύο περιπτώσεις (ΦΕ 3, 39) στις οποίες δεν εκφράστηκαν με σαφή τρόπο τα ζητούμενα που έθεσαν οι συμμετέχοντες που κατασκεύασαν το πρόβλημα. Ένα παράδειγμα:

> «Στο παρακάτω σχήμα, στο πράσινο κύκλο, βρείτε το εμβαδόν των τριγώνων.» (ΦΕ 39)

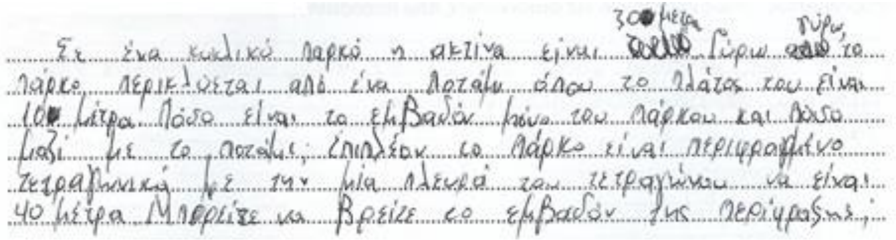


Εικόνα 12: Το σχήμα του ΦΕ 39

Όσον αφορά στα ζητούμενα των προβλημάτων και τις ερωτήσεις που τίθενται, υπήρξαν επτά περιπτώσεις ασάφειας στη διατύπωσή τους. Συγκεκριμένα, στο ΦΕ 23 το ερώτημα είναι για το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου χωρίς όμως να διευκρινίζει ποιου χρώματος κυκλικό δίσκο. Το αυτονόητο είναι να απαντήσει κάποιος για τον πράσινο που βλέπει στο σχήμα, όμως από την επίλυση φαίνεται ότι η φοιτήτρια ζητούσε το εμβαδόν του κίτρινου. Στο ΦΕ 28 ο φοιτητής θέλει να ασχοληθεί με τη περίφραξη της περιοχής που ορίζεται στο σχήμα, που είναι μια ενδιαφέρουσα ιδέα. Ζητούμενο του προβλήματος είναι το εμβαδό περίφραξης, κάτι που όμως δεν έχει νόημα. Μάλιστα, στο ίδιο ΦΕ ο φοιτητής αναφέρει ότι ο διαβήτης βοηθά στην μέτρηση του εμβαδού.

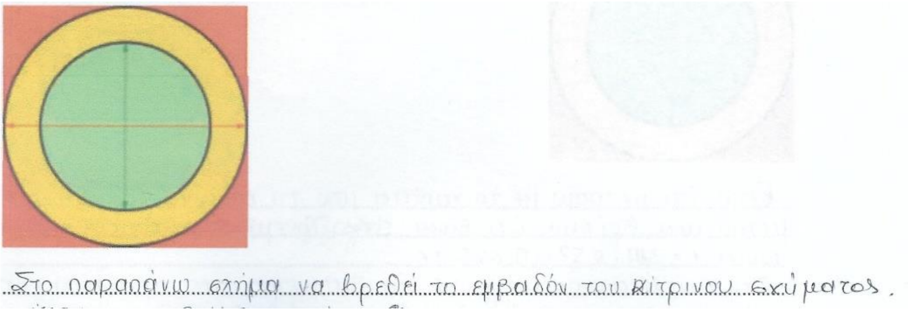
«Στην διπλανή εικόνα φαίνονται 3 σχήματα όπου είναι το ένα μέσα στο άλλο. Ποιο σχήμα πιστεύεις ότι έχει μεγαλύτερο εμβαδόν;» (ΦΕ 8)

«Η διάμετρος του πράσινου κύκλου είναι 8 τ.εκ. Να υπολογίσω πόσο είναι η διάμετρος του κίτρινου κύκλου αν το σημείο της κόκκινης διαμέτρου που καλύπτει την μία μεριά του κίτρινου κύκλου είναι 2cm. Στη συνέχεια να υπολογίσω τα εμβαδά των δύο κύκλων και να υπολογίσω τη διαφορά τους. Τέλος να υπολογίσω το εμβαδόν του κόκκινου τετραγώνου και του ορθογωνίου παραλληλογράμμου που σχηματίζεται.» (ΦΕ 20)



Εικόνα 13: Δεύτερη κατασκευή προβλήματος του ΦΕ 28

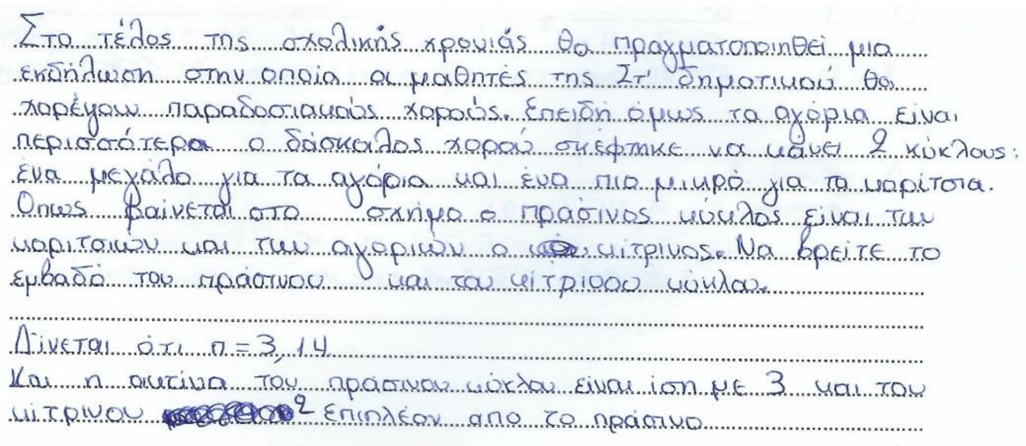
Στην κατηγορία «προβλήματα στα δεδομένα» περιλαμβάνονται οι περιπτώσεις «όχι σαφήνεια στα δεδομένα» σε τέσσερα ΦΕ, «ελλιπή δεδομένα» σε ένα ΦΕ, «εικόνα δεν συμβαδίζει με δεδομένα» σε δέκα ΦΕ και «δεδομένα χωρίς νόημα» σε 4 ΦΕ. Αναλυτικότερα, «όχι σαφήνεια στα δεδομένα» υπήρξε σε περιπτώσεις όπου είτε θα μπορούσε να γίνει καλύτερη διατύπωση του προβλήματος (ΦΕ 66) είτε σε περιπτώσεις όπου ο συμμετέχοντας έχει μπερδέψει την περίμετρο του κύκλου με το π=3,4 ή με την ακτίνα του κύκλου (ΦΕ 62,63), με αποτέλεσμα να μην υπάρχει τελικά σαφήνεια στα δεδομένα των προβλημάτων. Συνεχίζοντας, για τη φράση «ελλιπή δεδομένα» υπήρξε μόνο μία περίπτωση και συγκεκριμένα το ΦΕ 3 στο οποίο δεν ήταν επαρκή τα δεδομένα για την επίλυση του προβλήματος που κατασκευάστηκε. Στο ΦΕ 36 δεν δίνονται οι διαστάσεις στο πρόβλημα. Παρόλα αυτά δεν εντάχθηκε και το συγκεκριμένο ΦΕ στην κατηγορία αυτή μιας και θεωρήθηκε ότι μπορεί να έγινε εσκεμμένα από τον κατασκευαστή για να δει κατά πόσο ο λύτης είναι σε θέση να επιλέξει ρεαλιστικούς αριθμούς για το συγκεκριμένο πρόβλημα.



Εικόνα 14: Κατασκευή προβλήματος ΦΕ 36

Επιπρόσθετα, υπήρχαν δέκα περιπτώσεις όπου τα δεδομένα δεν συμβάδιζαν με την εικόνα που έχει δοθεί. Σε κάποια ΦΕ οι συμμετέχοντες θεωρούσαν ότι η διάμετρος του κίτρινου κύκλου ήταν διπλή από τη διάμετρο του πράσινου κύκλου (ΦΕ 5, 17). Στο ΦΕ 62 θεωρεί ότι ο κίτρινος και ο πράσινος κύκλος έχουν την ίδια ακτίνα. Από την άλλη, στο ΦΕ 39 ο κατασκευαστής του προβλήματος ζητάει να βρεθεί το εμβαδό τριγώνων που όμως δεν είναι καθορισμένα με τέτοιο τρόπο ώστε να καταφέρει τελικά ο λύτης να υπολογίσει το ζητούμενο εμβαδό. Ακόμη στο ΦΕ 53 δίνεται η ακτίνα του κίτρινου κύκλου 6 και στη συνέχεια η διάμετρος του 7, κάτι το οποίο ίσως δείχνει ότι ο συμμετέχοντας δεν γνωρίζει τη σχέση των δύο αυτών εννοιών.

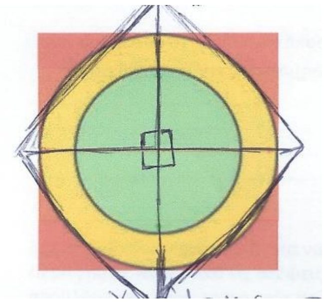
Ακόμη, υπήρξαν κάποια δεδομένα τα οποία δεν είχαν νόημα και δεν χρειαζόταν για την επίλυση. Στη συγκεκριμένη περίπτωση αναφερόμαστε σε επιπλέον πληροφορίες που θεωρήθηκαν περιττές για το πρόβλημα (πέντε ΦΕ). Στο ΦΕ 17 ενώ το σχήμα στο πρόβλημα που δημιουργήθηκε είναι οικόπεδο η μονάδα μέτρησης είναι cm. Στο ΦΕ 28 δίνεται η ακτίνα του κίτρινου 4 και η πλευρά του τετραγώνου 4. Τα δεδομένα αυτά δημιουργούν σύγχυση του λύτη και τελικά λάθος επίλυση του προβλήματος. Στο ΦΕ 10 αναφέρεται ο κύκλος χορευτών, ο οποίος παραπέμπει σε περίμετρο κύκλου, όμως τελικά το ζητούμενο του προβλήματος είναι το εμβαδό κυκλικού δίσκου. Στο ΦΕ 37 αναφέρεται ότι το θέατρο διαθέτει ημικυκλική ορχήστρα δίσκου και στη συνέχεια ζητάει το εμβαδό του πράσινου κυκλικού δίσκου. Επίσης, δίνει στα δεδομένα τη διάμετρο χωρίς να διευκρινίζει αρχικά ακριβώς ποια διάμετρο δίνει, ενώ στη δεύτερη κατασκευή αναφέρει ότι είναι η διάμετρος του κίτρινου κυκλικού δίσκου. Με αυτά τα δεδομένα δεν λύνεται το πρόβλημα και επιπλέον δεν έχει νόημα η συγκεκριμένη ερώτηση. Επομένως, σε αυτές τις περιπτώσεις που εντοπίστηκαν θεωρήθηκε ότι τα δεδομένα αυτά ήταν δεδομένα χωρίς νόημα και σε καμία περίπτωση δεδομένα τα οποία είναι επιπλέον στο πρόβλημα και στοχεύουν στην ανάπτυξη της κριτικής σκέψης των μαθητών.


Στο τέλος της σχολικής χρονιάς θα πραγματοποιηθεί μια
εκδήλωση στην οποία οι μαθητές της Στ' δημοτικού θα
χορέψουν παραδοσιακούς χορούς. Επειδή όμως τα αγόρια είναι
περισσότερα ο δάσκαλος χορού σκέφτηκε να κάνει 2 κύκλους:
ένα μεγάλο για τα αγόρια και ένα πιο μικρό για τα κορίτσια.
Όπως φαίνεται στο σχήμα ο πράσινος κύκλος είναι των
κοριτσιών και των αγοριών ο κίτρινος. Να βρείτε το
εμβαδό του πράσινου και του κίτρινου κύκλου.

Δίνεται ότι π=3,14
Και η ακτίνα του πράσινου κύκλου είναι ίση με 3 και του
κίτρινου 2 επιπλέον από το πράσινο

Εικόνα 15: Κατασκευή προβλήματος του ΦΕ 10

Αρκετές ήταν οι περιπτώσεις που εντάχθηκαν στη «λάθος κατανόηση μαθηματικών εννοιών». Ένας συμμετέχοντας θεώρησε το π=3,14 μήκος του κύκλου, ενώ τρεις το θεώρησαν περίμετρο του κύκλου. Ίσως στη δεύτερη περίπτωση να υπήρξε σύγχυση εξαιτίας του αρχικού γράμματος της περιμέτρου, το οποίο συμπίπτει με το π=3,14. Ακόμη, υπήρξαν δύο περιπτώσεις στις οποίες το π θεωρήθηκε ακτίνα του κύκλου. Η έννοια του μήκους κύκλου αξιοποιήθηκε από 9 συμμετέχοντες από τους οποίους υπήρξε μία περίπτωση (ΦΕ 60) λάθος τύπου του μήκους κύκλου (π × ρ). Στο ΦΕ 3 η φοιτήτρια επιλέγει να χωρίζει το σχήμα σε 4 ορθογώνια τρίγωνα για να βρει εμβαδό του κυκλικού δίσκου κάτι το οποίο δεν είναι εφικτό και θεωρείται άτοπο. Να σημειωθεί ότι στο συγκεκριμένο παράδειγμα τα τρίγωνα που σχημάτισε είναι τυχαία και όχι καθορισμένα έτσι ώστε να μπορέσουν να αξιοποιηθούν με κάποιο τρόπο. Υπάρχουν και περιπτώσεις στις οποίες υπάρχει λάθος κατανόηση της σύνδεσης διαμέσου - ακτίνας (ΦΕ 53), χρήση της έννοιας διάμεσος αντί για διάμετρος (σε τέσσερα ΦΕ) και μία περίπτωση (ΦΕ 32) στην οποία για τον υπολογισμό της διαμέτρου χρησιμοποιείται ο τύπος α × α.

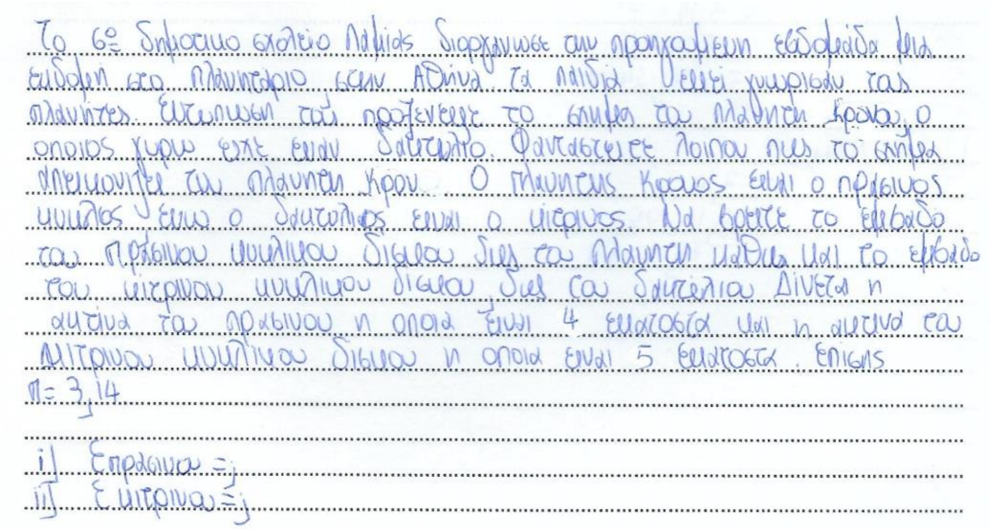


Εικόνα 16: Τροποποίηση στο σχήμα του ΦΕ 3

Επίσης, υπήρξαν περιπτώσεις στις οποίες είτε έγινε λάθος χρήση μονάδων μέτρησης είτε δεν χρησιμοποιήθηκαν καθόλου μονάδες μέτρησης. Πιο αναλυτικά στο ΦΕ 20 η διάμετρος συνοδεύτηκε με τετραγωνικά εκατοστά, δώδεκα συμμετέχοντες χρησιμοποίησαν ως μονάδα μέτρησης του εμβαδού εκατοστά ή μέτρα, μάλιστα υπήρξε και μία περίπτωση (ΦΕ 12) στο οποίο ως μονάδα μέτρησης του εμβαδού χρησιμοποιήθηκαν τα χιλιόμετρα. Επτά συμμετέχοντες, ενώ αρχικά είχαν χρησιμοποιήσει μονάδες μέτρησης, επέλεξαν να μην βάλουν μονάδα μέτρησης στο εμβαδό. Αυτό μάλλον έγινε από την αβεβαιότητα τους ως προς τη σωστή χρήση των μονάδων μέτρησης του εμβαδού. Τέλος, αξίζει να σημειωθεί για την κατηγορία αυτή ότι 14 από τους συμμετέχοντες δεν χρησιμοποίησαν καθόλου μονάδες μέτρησης και μάλιστα πέντε από τους 14 ήταν αγόρια. Το ποσοστό των αγοριών σε αυτή την κατηγορία είναι μεγάλο αν αναλογιστεί κανείς ότι συνολικά τα αγόρια ήταν επτά.

Τελευταία κατηγορία στην ενότητα αυτή είναι η «λάθος επίλυση». Παρόλο που αρκετοί από τους φοιτητές χρησιμοποιήσαν υπολογιστή τσέπης, υπήρξαν τέσσερα ΦΕ τα οποία είχαν λάθη σε αριθμητικές πράξεις. Πέντε συμμετέχοντες έκαναν λάθος αντικατάσταση αριθμών, από τους οποίος μόνο ένας ήταν αγόρι. Στο ΦΕ 37 ενώ κατάλαβε η φοιτήτρια ότι αντικατέστησε λάθος αριθμό δεν το διόρθωσε και στη συνέχεια των πράξεων παρά μόνο στην αρχή με αποτέλεσμα να βγει λάθος το τελικό αποτέλεσμα. Υπήρξαν τρεις περιπτώσεις όπου έγινε χρήση μόνο του τύπου και δεν επιλύθηκε κανονικά το πρόβλημα κάτι που ίσως έγινε για εξοικονόμηση χρόνου. Λάθος τύπος χρησιμοποιήθηκε σε δύο ΦΕ (59, 60) και συγκεκριμένα ο λάθος τύπος αφορούσε στο μήκος του κύκλου.

Ακόμη, υπήρξαν και εννιά περιπτώσεις στις οποίες έγινε με λάθος τρόπο η επίλυση. Στο ΦΕ 66 η φοιτήτρια έκανε λάθος στη δημιουργία της εξίσωσης, στο ΦΕ 52 δεν είναι σωστά γραμμένη η διαδικασία για τη δημιουργία ομώνυμων κλασμάτων και εκτός από αυτό τα κλάσματα στη συγκεκριμένη περίπτωση μπορούν να συγκριθούν χωρίς να γίνουν ομώνυμα, αφού έχουν ίδιο αριθμητή. Επίσης, στο ΦΕ 37 η φοιτήτρια δεν ολοκλήρωσε την επίλυση του προβλήματος. Στο ΦΕ 21 η φοιτήτρια αναφέρεται σε συμμετρία κύκλου και απαντά ότι υπάρχουν τουλάχιστον 4 τρόποι με τους οποίους μπορεί να διπλώσει τον κύκλο, συνεπώς και τέσσερις άξονες συμμετρίας. Η απάντηση αυτή δεν είναι ξεκάθαρη και δεν μπορεί να θεωρηθεί σωστή. Συνεχίζοντας, στο ΦΕ 18 ενώ το ζητούμενο είναι η διάταξη σε αύξουσα σειρά, στην επίλυση παρουσιάζεται φθίνουσα σειρά, γεγονός που καταδεικνύει την σύγχυση που επικρατεί στους δυο τρόπους διάταξης αριθμών. Τέλος, στο ΦΕ 12 ενώ ζητάει Εμβαδό του κίτρινου κυκλικού δακτυλίου στην επίλυση βρίσκει το εμβαδό του κίτρινου κυκλικού δίσκου.


Το 6ο δημοτικο σχολείο Λαμίας διοργανωσε την προερχομενη εβδομάδα μια
εκδρομη στο πλανητάριο στην Αθήνα. Τα παιδιά θελει γνωρισουν τους
πλανήτες. Ξαφνικα τους προβαλλε το σχημα του πλανητη κρονου, ο
οποιος γυρω εχει εναν δακτυλιο. Φανταστειτε λοιπον πως το σχημα
δημιουργει τον πλανητη κρονο. Ο πλανητης κρονος ειναι ο πρασινος
κυκλος ενω ο δακτυλιος ειναι ο κιτρινος. Να βρειτε το εμβαδο
του πρασινου κυκλικου δισκου δηλ του πλανητη καθως και το εμβαδο
του κιτρινου κυκλικου δισκου δηλ του δακτυλιου. Δινεται η
ακτινα του πρασινου η οποια ειναι 4 εκατοστα και η ακτινα του
κιτρινου κυκλικου δισκου η οποια ειναι 5 εκατοστα. Επισης
π=3,14
i) Επρασινου =;
ii) Εκιτρινου =;

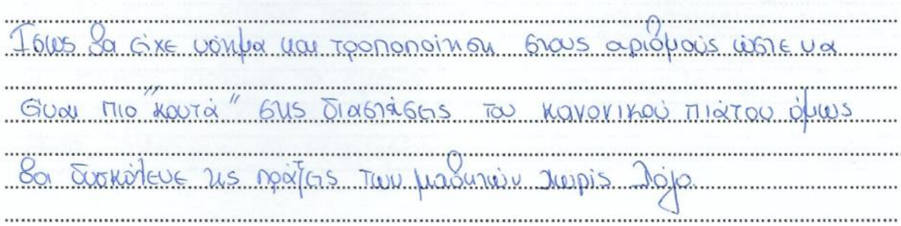
Εικόνα 17: Κατασκευή πρώτου προβλήματος του ΦΕ 12

4.3. Στρατηγικές βελτίωσης αρχικών προβλημάτων

Σε κατασκευή δεύτερου προβλήματος προχώρησαν μόνο 27 συμμετέχοντες, από τους οποίου τέσσερις ήταν αγόρια. Οι αλλαγές που επέλεξαν να κάνουν στο δεύτερο πρόβλημα μπορούν να συνοψιστούν σε: «προσθήκη ερωτήσεων», «αλλαγή σε αριθμούς», «αλλαγή σε δεδομένα», «ένταξη σε ρεαλιστικό πλαίσιο» και «καλύτερη διατύπωση».

Συγκεκριμένα 16 συμμετέχοντες προέβησαν σε «προσθήκη ερωτήσεων». Από αυτούς επτά επέλεξαν να προσθέσουν μία πιο δύσκολη ερώτηση. Για παράδειγμα, στο ΦΕ 38 η φοιτήτρια προσπάθησε να δυσκολέψει το πρόβλημα ζητώντας το εμβαδό της ημικυκλικής ορχήστρας, χωρίς όμως να καθορίζει σαφώς την περιοχή της οποίας ζητείται το εμβαδόν. Κάποιοι επέλεξαν να προσθέσουν μία πιο εύκολη ερώτηση (6 συμμετέχοντες) θέτοντας ως ζητούμενο εμβαδό τετραγώνου ή εμβαδό κυκλικού δίσκου, είτε για να διευκολύνουν τους μαθητές τους είτε για να είναι το πρόβλημα πιο κατάλληλο και για τους πιο αδύναμους μαθητές, όπως χαρακτηριστικά ανέφεραν στις ερωτήσεις ανοιχτού τύπου που υπήρχαν στο ΦΕ. Ακόμη, τρεις συμμετέχοντες επέλεξαν να προσθέσουν ερωτήσεις που θα οδηγούσαν σε βηματική επίλυση, για να διευκολύνουν τους μαθητές στην επίλυση των προβλημάτων. Μάλιστα υπήρξε και μια περίπτωση (ΦΕ 60) που εκτός από προσθήκη μιας πιο δύσκολης ερώτησης η φοιτήτρια επέλεξε να αφαιρέσει κάποια πολύ εύκολη ερώτηση που είχε χρησιμοποιήσει αρχικά για να κάνει λίγο πιο περίπλοκο το πρόβλημα όπως αναφέρει και η ίδια στην αντίστοιχη ερώτηση ανοιχτού τύπου.

Συνεχίζοντας, «αλλαγή σε αριθμούς» επέλεξαν να κάνουν εφτά συμμετέχοντες από τους οποίους δύο επέλεξαν πιο δύσκολους αριθμούς, τρεις επέλεξαν αριθμούς που ανταποκρινόταν περισσότερο στην πραγματικότητα και δύο πρόσθεσαν αριθμούς που δεν υπήρχαν στο αρχικό πρόβλημα. Στην τελευταία αυτή περίπτωση οι συμμετέχοντες ζητούσαν αρχικά να γίνει εκτίμηση του εμβαδού και έπειτα προστέθηκαν οι αριθμοί για να μπορεί να λυθεί το πρόβλημα. Ακόμη, το ΦΕ 42 εντάχθηκε στην κατηγορία των αριθμών που ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα, όμως μόνο σε ερώτηση ανοιχτού τύπου αναφέρει ο συμμετέχοντας ότι θα μπορούσε να τροποποιήσει τις διαστάσεις που έδωσε αρχικά ώστε αυτές να είναι πιο κοντά στην πραγματικότητα, αλλά μια τέτοια κίνηση θα δυσκόλευε τους μαθητές- λύτες και για αυτό το λόγο την απέφυγε.



Ίσως θα είχε νόημα και τροποποίηση στους αριθμούς ώστε να
είναι πιο "κοντά" στις διαστάσεις του κανονικού πλάτου όμως
θα δυσκόλευε τις πράξεις των μαθητών χωρίς λόγο

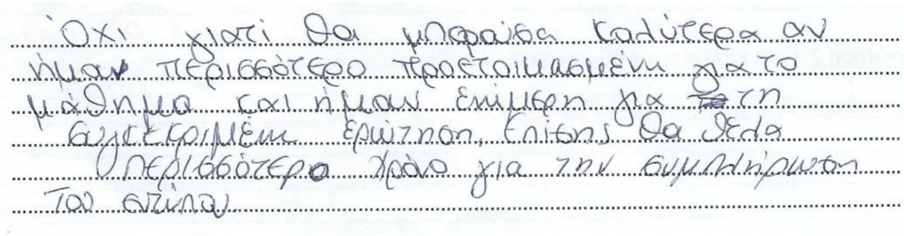
Εικόνα 18: Σχόλιο στη δεύτερη κατασκευή προβλήματος του ΦΕ 42

Κατά τη δεύτερη κατασκευή προβλήματος «αλλαγή στα δεδομένα» επέλεξαν να κάνουν τρεις συμμετέχοντες, από τους οποίους ένας (ΦΕ 13) επέλεξε να προσθέσει κάποια στοιχεία στο σχήμα, ένας (ΦΕ 26) επέλεξε να αλλάξει τον τρόπο με τον οποίο δίνονται τα δεδομένα και ένας (ΦΕ 35) άλλαξε τη σειρά των ερωτήσεων. Σε αυτό το σημείο να σημειωθεί ότι στο ΦΕ 26 δεν έγινε η αλλαγή στον τρόπο που δίνονται τα δεδομένα, αλλά η αλλαγή αυτή απλά προτάθηκε από τον συμμετέχοντα στην αντίστοιχη ερώτηση ανοιχτού τύπου. Επίσης, κάποιοι συμμετέχοντες επέλεξαν να εντάξουν το πρόβλημα που κατασκεύασαν αρχικά σε ένα ρεαλιστικό πλαίσιο. Ειδικότερα ένας φοιτητής (ΦΕ 28) θεώρησε ότι η εικόνα που του είχε δοθεί είναι ένα κυκλικό πάρκο, μία φοιτήτρια (ΦΕ 41) θεώρησε ότι είναι ένα γήπεδο μπέιζμπολ και μία άλλη φοιτήτρια (ΦΕ 7) θεώρησε ότι είναι κάτοψη ενός κτηρίου.

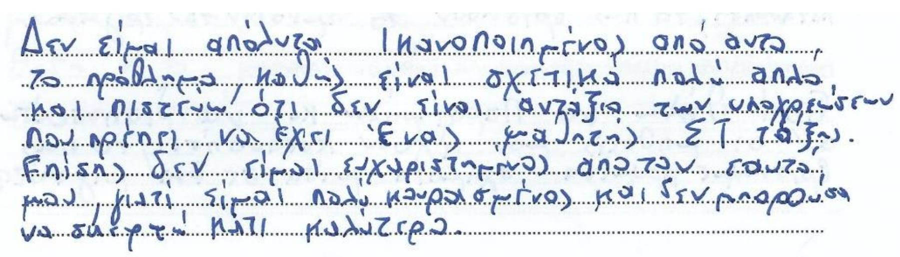
Ολοκληρώνοντας τις στρατηγικές βελτίωσης που χρησιμοποιήθηκαν κατά τη δεύτερη κατασκευή περνάμε στην κατηγορία «καλύτερη διατύπωση» η οποία επιλέχθηκε από 12 συμμετέχοντες. Αναλυτικότερα, τέσσερις συμμετέχοντες επέλεξαν να κάνουν μία καλύτερη και πιο διευκρινιστική διατύπωση. Για παράδειγμα στο ΦΕ 7 η φοιτήτρια διευκρινίζει καλύτερα τις περιοχές που περιγράφει στο αρχικό πρόβλημα έτσι ώστε να γίνει πιο κατανοητή στους πιθανούς λύτες. Πέντε συμμετέχοντες επέλεξαν να κάνουν καλύτερη διατύπωση έτσι ώστε να καταφέρουν να καθοδηγήσουν τους πιθανούς λύτες, και συνεπώς να καταφέρουν να επιλύσουν το πρόβλημα τους δόθηκε. Στο ΦΕ

13 ο φοιτητής διόρθωσε κάποια μη κατανοητά σημεία που υπήρχαν στο πρώτο πρόβλημα ώστε να μπορεί ο πιθανός λύτης να καταλάβει το πρόβλημα. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι υπήρξαν δύο συμμετέχοντες οι οποίοι προσπάθησαν να κάνουν καλύτερη διατύπωση του αρχικού προβλήματός τους όμως αυτή η αλλαγή οδήγησε τελικά σε χειρότερη διατύπωση. Στο ΦΕ 37 το πρόβλημα δεν επιλύεται μετά τη δεύτερη κατασκευή και στο ΦΕ 20 αρχικά ήταν κατανοητό σε ποιο ευθύγραμμο τμήμα αναφερόταν, όμως όχι και μετά την δεύτερη κατασκευή.

Από αυτούς που δεν κατασκεύασαν δεύτερο βελτιωμένο πρόβλημα μία (ΦΕ 3) ανέφερε ότι δεν είχε τον απαιτούμενο χρόνο, ένας (ΦΕ 39) ότι ήταν κουρασμένος και δεν μπορούσε να κατασκευάσει πρόβλημα και από ό,τι φάνηκε από τον τρόπο που απαντούσαν στα ΦΕ, έντεκα έδειξαν ότι δεν είχαν διάθεση να απαντήσουν.


Όχι γιατί θα μπορούσα καλύτερα αν ήμουν περισσότερο προετοιμασμένη για το μάθημα και ήμουν ενήμερη για τη συγκεκριμένη ερώτηση. Επίσης θα ήθελα περισσότερο χρόνο για την συμπλήρωση του εντύπου.

Εικόνα 19: Ερώτηση 3 του ΦΕ 3


Δεν είμαι απόλυτα ικανοποιημένος από αυτό, το πρόβλημα, καθώς είναι σχετικά πολύ απλό, και πιστεύω ότι δεν είναι αντάξιο των υποχρεώσεων που πρέπει να έχει ένας μαθητής ΣΤ τάξης. Επίσης δεν είμαι ευχαριστημένος από τον εαυτό μου, γιατί είμαι πολύ κουρασμένος και δεν μπορούσα να σκεφτώ κάτι καλύτερο.

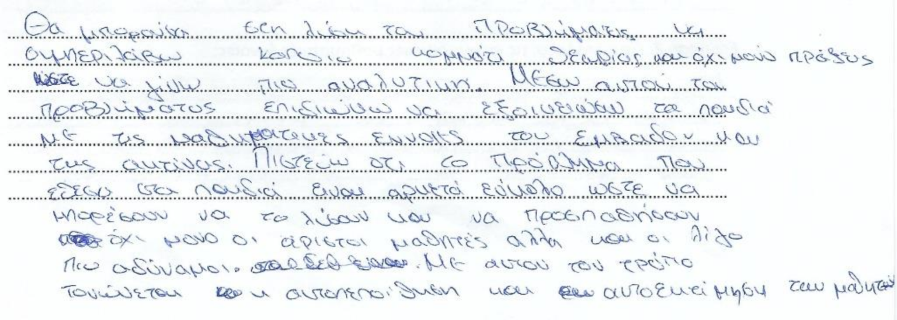
Εικόνα 20: Ερώτηση 3 του ΦΕ 39

4.4. Παράγοντες που επηρεάζουν την κατασκευή προβλημάτων

Όταν καλείται κάποιος να κατασκευάσει ένα μαθηματικό πρόβλημα έρχεται αντιμέτωπος με κάποιους παράγοντες οι οποίοι θα επηρεάσουν σε σημαντικό βαθμό το πρόβλημα που θα κατασκευάσει. Με βάση την παρούσα ερευνητική ανάλυση προέκυψαν οι εξής κατηγορίες που αφορούν στους παράγοντες που επηρεάζουν την κατασκευή προβλημάτων: «μαθητές & πιθανοί λύτες», «περιεχόμενο προβλήματος», «επίλυση προβλήματος» και «άλλα».

Αρχικά οι μαθητές και οι πιθανοί λύτες φαίνεται να είναι ο πιο σημαντικός παράγοντας για την κατασκευή προβλημάτων. Πιο αναλυτικά, δέκα συμμετέχοντας ήθελαν να κατασκευάσουν ένα πρόβλημα που θα είναι ενδιαφέρον για τα παιδιά, 39 ανέφεραν ότι τους ενδιέφερε να συμβαδίζει το πρόβλημα με το γνωστικό επίπεδο των μαθητών, 38 ανέφεραν ως βασικό παράγοντα την ηλικία των μαθητών και 37 ήθελαν το πρόβλημα να είναι σαφές και κατανοητό για τα παιδιά.

Σημαντικό ρόλο φαίνεται να κατέχει και το επίπεδο των μαθητών για τους οποίους προορίζεται το πρόβλημα. Δεκαεννέα συμμετέχοντες ανέφεραν ως σημαντικό παράγοντα το επίπεδο της τάξης που έχουν, 14 έδωσαν βαρύτητα στους δυνατούς μαθητές και ήθελαν το πρόβλημα τους να ανταποκρίνεται σε αυτούς. Δεκαπέντε συμμετέχοντες ήθελαν το πρόβλημα που κατασκεύαζαν να μπορεί να επιλυθεί και από αδύναμους μαθητές. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρεται στο ΦΕ 22 είναι σημαντικό να τονώνεται η αυτοεκτίμηση και η αυτοπεποίθηση μαθητών που είναι αδύναμοι και για αυτό το λόγο η συγκεκριμένη φοιτήτρια σκέφτηκε να κατασκευάσει ένα πρόβλημα έχοντας στο μυαλό της αδύναμους μαθητές.

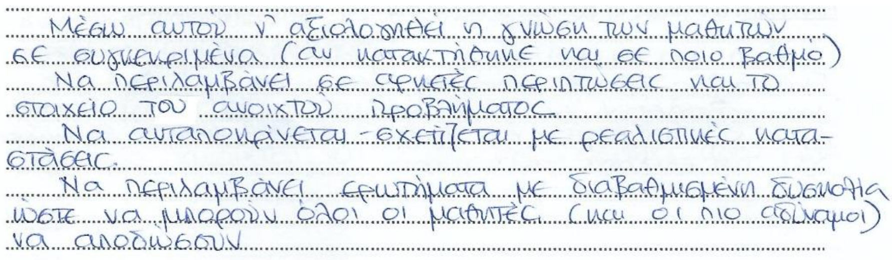


Θα μπορούσα στη λύση του προβλήματος να
συμπεριλάβω κάποιο κομμάτι θεωρίας και όχι μόνο πράξεις
να γίνει πιο αναλυτική. Μέσω αυτού του
προβλήματος επιδιώκω να εξοικειώσω τα παιδιά
με τις μαθηματικές έννοιες του εμβαδού και
της ακτίνας. Πιστεύω ότι το πρόβλημα που
έδωσα στα παιδιά είναι αρκετά εύκολο ώστε να
μπορέσουν να το λύσουν και να προσπαθήσουν
όχι μόνο οι άριστοι μαθητές αλλά και οι λίγο
πιο αδύναμοι. Με αυτό τον τρόπο
τονώνεται η αυτοπεποίθηση και αυτοεκτίμηση των μαθητών

Εικόνα 21: Ερώτηση 3 του ΦΕ 22

Επιπρόσθετα, η καθοδήγηση του λύτη (ΦΕ 9) και η ανάπτυξη της κριτικής σκέψης των μαθητών (5 ΦΕ) εμφανίστηκαν ως παράγοντες που επηρεάζουν την κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων. Ακόμη, δέκα συμμετέχοντες επέλεξαν να κατασκευάσουν ένα πρόβλημα το οποίο θα συμβάλλει στην «επανάληψη παλαιότερων εννοιών» και πέντε θεώρησαν ότι η «αξιολόγηση των μαθητών» μπορεί να αποτελέσει κριτήριο για την κατασκευή ενός προβλήματος. Εντύπωση προκάλεσε το ΦΕ 61, όπου η φοιτήτρια απαντώντας στην ερώτηση 3 αναφέρει ότι θέλει με το πρόβλημα που κατασκεύασε να ελέγξει κατά πόσο ξέρουν καλά οι μαθητές την προπαίδεια, παρόλο που οι μαθητές της ΣΤ’ αναμένεται να γνωρίζουν την προπαίδεια και σίγουρα δεν αντιμετωπίζουν πρόβλημα όταν πολλαπλασιάζουν έναν αριθμό με τον εαυτό του (r^2).

Ακολουθεί η κατηγορία «περιεχόμενο προβλήματος» η οποία εστιάζει σε παράγοντες που αναφέρονται και επηρεάζουν το περιεχόμενο του προβλήματος. Δεκαπέντε συμμετέχοντες αναφέρουν ότι «η σαφή και κατανοητή διατύπωση» στα προβλήματά τους αποτελεί βασικό παράγοντα για την κατασκευή ενός προβλήματος, τρεις αναφέρουν τη «χρήση όλων των δεδομένων», εφτά αναφέρουν ως παράγοντα να συμπεριλάβουν τις μαθηματικές έννοιες που έχουν διδαχθεί. Επιπρόσθετα, 13 αναφέρουν ως παράγοντα την ένταξη του προβλήματος σε ρεαλιστικό πλαίσιο και 12 το επίπεδο δυσκολίας που θα έχει το πρόβλημα. Μάλιστα στα ΦΕ 43 και 26 γίνεται λόγος για διαβαθμισμένη δυσκολία. Ακόμη, 11 αναφέρουν ως παράγοντα το γεγονός να έχει λύση το πρόβλημα ή να μπορεί να το λύσει ο ίδιος ο κατασκευαστής.



Μέσω αυτού ν' αξιολογηθεί η γνώση των μαθητών σε συγκεκριμένα (αν κατακτήθηκε και σε ποιο βαθμό)
Να περιλαμβάνει σε αφηνετές περιπτώσεις και το στοιχείο του ανοιχτού προβλήματος
Να ανταποκρίνεται - σχετίζεται με ρεαλιστικές καταστάσεις.
Να περιλαμβάνει ερωτήματα με διαβαθμισμένη δυσκολία ώστε να μπορούν όλοι οι μαθητές (και οι πιο αδύναμοι) να αποδώσουν

Εικόνα 22: Ερώτηση 7 του ΦΕ 43

Από τους 66 που συμπλήρωσαν το ΦΕ και συμμετείχαν στην έρευνα μόνο οι 21 δήλωσαν ότι έκαναν επίλυση του προβλήματος μετά τη δεύτερη κατασκευή. Ολοκληρώνοντας την ενότητα αυτή τρεις φράσεις που δεν μπόρεσαν να μπουν σε κάποια από τις προηγούμενες κατηγορίες αποτέλεσαν την τελευταία κατηγορία «άλλα». Σύμφωνα με αυτή λοιπόν, έξι συμμετέχοντες θεωρούν ως παράγοντα κατασκευής την επίτευξη των διδακτικών στόχων και 5 την κατάκτηση του μαθησιακού στόχου. Τέλος, πολλοί φοιτητές ενώ κατασκεύασαν πολύ εύκολα προβλήματα αρχικά, δεν προσπάθησαν κατά τη δεύτερη κατασκευή προβλήματος να τροποποιήσουν το αρχικό πρόβλημά τους, γεγονός που ίσως καταδεικνύει την κούραση ή τη δυσκολία τους στην κατασκευή προβλημάτων. Βέβαια, σύμφωνα με τα αποτελέσματα που προέκυψαν, από τους 66 μόνο τρεις συμμετέχοντες ανέφεραν γραπτώς στο ΦΕ ότι αντιμετωπίζουν δυσκολία στην κατασκευή προβλημάτων.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ- ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα αποτελέσματα της έρευνάς μας κατέδειξαν ότι οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί είναι γενικά σε θέση να κατασκευάσουν προβλήματα, τα οποία όμως περιορίζονται σε πολύ απλές δομές. Από τα συμπληρωμένα ΦΕ λίγα ήταν εκείνα που ξεχώρισαν και περιείχαν αξιόλογα προβλήματα, δηλαδή ορθά μαθηματικά και κάποιες φορές και περίπλοκα. Η διαδικασία φάνηκε να δυσκολεύει κάποιους φοιτητές, αφού τόσο κατά τη διάρκεια της έρευνας όσο και σε απαντήσεις στα ΦΕ εξέφρασαν τη δυσκολία τους στην κατασκευή προβλημάτων. Επομένως, είναι ξεκάθαρη η ανάγκη επιμόρφωσης των μελλοντικών εκπαιδευτικών σε καταστάσεις κατασκευής προβλημάτων (Leung & Silver 1997).

Τα λάθη των φοιτητών οφείλονταν κυρίως σε λανθασμένη κατανόηση μαθηματικών εννοιών και σε κακή διατύπωση σε ζητούμενα και δεδομένα. Υπήρξαν περιπτώσεις που το πρόβλημα λύθηκε λανθασμένα από τον ίδιο τον φοιτητή και μάλιστα δεν έγινε καμιά προσπάθεια για βελτίωση του αρχικού προβλήματος στη δεύτερη φάση της έρευνας. Λίγα λάθη υπήρξαν σε πράξεις μιας και πολλοί χρησιμοποίησαν και υπολογιστή τσέπης. Αρκετοί προσπάθησαν να χρησιμοποιήσουν μονάδες μέτρησης, των οποίων η χρήση τις περισσότερες φορές δεν ήταν σωστή.

Παρόλο που υπήρξε ελευθερία στον τρόπο αξιοποίησης του σχήματος που δόθηκε, ελάχιστες ήταν οι σημαντικές παρεμβάσεις που έγιναν. Μόνο περίπου το 1/3 των συμμετεχόντων κατασκεύασαν πρόβλημα στη δεύτερη φάση της έρευνας, γεγονός που δείχνει ίσως την αρνητική διάθεση των περισσότερων συμμετεχόντων σε διαδικασίες κατασκευής προβλημάτων. Παρόλα αυτά, από όσους το επιχείρησαν, μόνο δύο περιπτώσεις θεωρήθηκαν άστοχες. Συνεπώς, η επίλυση του προβλήματος πάνω στο ΦΕ και όχι η νοητή επίλυση των προβλημάτων συνέβαλε αρκετά στην δεύτερη κατασκευή (Cai & Hwang, 2002· Cifarelli & Cai, 2005· Rosli et al., 2015).

Όσον αφορά στις στρατηγικές για τη βελτίωση της κατασκευής των μαθηματικών προβλημάτων υπήρξαν κατηγορίες που συμβαδίζουν με την βιβλιογραφία όπως η αλλαγή στα δεδομένα, η προσθήκη ή επέκταση ερωτήσεων. Όμως υπήρξαν και άλλες στρατηγικές όπως καλυτέρευση διατύπωσης, ένταξη σε ρεαλιστικό πλαίσιο και αλλαγή αριθμών. Ακόμη πολύ μεγάλο ενδιαφέρον έχουν οι παράγοντες που όπως προέκυψε από την παρούσα έρευνα επηρεάζουν την κατασκευή προβλημάτων. Ο πιο σημαντικός παράγοντας είναι οι μαθητές ή οι υποψήφιοι λύτες τους οποίους και έχουν στο μυαλό τους οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί όταν καλούνται να κατασκευάσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα.

Συνεπώς, η παρούσα εργασία κατάφερε να απαντήσει στα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν αρχικά και ταυτόχρονα να δώσει μια καλή εικόνα της συμπεριφοράς των φοιτητών του Παιδαγωγικού Τμήματος Ιωαννίνων όσον αφορά στην κατασκευή προβλημάτων. Έτσι λοιπόν οι στόχοι της εργασίας επιτευχθήκαν σε ένα σημαντικό βαθμό.

Ως περιορισμούς της έρευνας οφείλουμε να αναφέρουμε το μικρό δείγμα το οποίο επιλέχθηκε για την υλοποίηση της ερευνητικής διαδικασίας καθώς επίσης και το γεγονός ότι προερχόταν μόνο από ένα Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης της χώρας. Το ΦΕ που χρησιμοποιήθηκε δοκιμάστηκε πιλοτικά σε μεταπτυχιακούς φοιτητές του Παιδαγωγικού Τμήματος Ιωαννίνων, βέβαια θα μπορούσε ίσως να δοκιμαστεί σε προπτυχιακούς φοιτητές. Τέλος, οι κατηγορίες που προέκυψαν από την ανάλυση των περιεχομένων προέκυψαν από έναν μόνο ερευνητή – σε συνεργασία με τον επιβλέποντα – κάτι το οποίο θα μπορούσε να αλλάξει σε μελλοντική έρευνα.

Περαιτέρω έρευνα μπορεί να πραγματοποιηθεί εστιάζοντας στον τρόπο που έγινε η επίλυση των προβλημάτων και με συνεντεύξεις να διαπιστωθεί αν συμβαδίζει με τις τέσσερις φάσεις που αναφέρουν οι Singer and Voica (2013): αποκωδικοποίηση, αναπαράσταση, διαχείριση, εφαρμογή. Επίσης, ενδιαφέρον έχει να αναλυθούν σε μεγαλύτερο βάθος οι στρατηγικές που ακολουθήθηκαν για την κατασκευή προβλημάτων στη δεύτερη φάση, έπειτα από την επίλυση και την ανάλυση του αρχικού προβλήματος με τις φάσεις που αναφέρουν οι Singer and Voica (2013). Μια τέτοια ανάλυση θα μπορούσε να βοηθήσει σημαντικά στην κατανόηση του τρόπου με τον οποίο η επίλυση μπορεί να επηρεάσει τις στρατηγικές που χρησιμοποιούνται στην εκ νέου κατασκευή προβλημάτων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bell, J. (2005). *Πώς να συντάξετε μια επιστημονική εργασία. Οδηγός ερευνητικής μεθοδολογίας* (μτφ.:. Ελεάννα Πανάγου). Αθήνα: ΜΕΤΑΙΧΜΙΟ. (έτος έκδοσης πρωτότυπου 2007).

Bonotto C., & Santo L. D. (2015). On the relationship between problem posing, problem solving, and creativity in primary school. In F. M. Singer, N. F. Ellerton & J. Cai (Eds.), *Mathematical Problem Posing: From research to effective practice* (pp. 103-123). New York: Springer.

Brown, S., & Walter, M. (2005). *The art of problem posing (3rd ed.)*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cai, J., & Hwang, S. (2002). Generalized and generative thinking in U.S. and Chinese students' mathematical problem solving and problem posing. *The Journal of Mathematical Behavior, Vol* 21, 401–421.

Cai, J., Hwang, S., Jiang, C., & Silber, S. (2015). Problem-posing research in mathematics education: Some answered and unanswered questions. In F. M. Singer, N. F. Ellerton & J. Cai (Eds.), *Mathematical Problem Posing: From research to effective practice* (pp. 3-34). New York: Springer.

Chen, L., Dooren, W. V., & Verschaffel L. (2015). Enhancing the Development of Chinese Fifth- Graders' Problem-Posing and Problem-Solving Abilities, Beliefs, and Attitudes: A Design Experiment. In F. M. Singer, N. F. Ellerton & J. Cai (Eds.), *Mathematical Problem Posing: From research to effective practice* (pp. 309-332). New York: Springer. Cifarelli, V. V., & Cai, J. (2005). The evolution of mathematical explorations in open-ended problem- solving situations. *The Journal of Mathematical Behavior*, Vol 24, 302–324.

Cifarelli. V. V., & Sevim V. (2015). Problem Posing as reformulation and sense-making within problem solving. In F. M. Singer, N. F. Ellerton & J. Cai (Eds.), *Mathematical Problem Posing: From research to effective practice* (pp. 177-194). New York: Springer.

Cohen, L. & Manion, L. (1994). *Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας* (μτφ.: Μητσοπούλου Χ., & Φιλοπούλου Μ.). Αθήνα: ΜΕΤΑΙΧΜΙΟ. (έτος έκδοσης πρωτότυπου 1994).

Cohen, L. & Manion, L. & Morrison, K. (2007). *Research methods in education* (Sixth edition). USA & CANADA: Routledge. Retrieved on 5/10/2016 from http://www.sfu.ca/media-lab/DCM/Backups/March%202015/Comps%20research/Methodology%20books/%5BLouis_Cohen.pdf

Corbin, J. & Strauss, A. (1990). Grounded Theory Research: Procedures, canons and evaluative criteria. *Zeitschrift fur Soziologie, Vol* 19 (No 6), 418-427.

Crespo, S. (2003). Learning to pose mathematical problems: Exploring changes in preservice teachers' practices. *Educational Studies in Mathematics*, Vol 52, 243–270.

Crespo, S. (2015). A Collection of Problem-Posing Experiences for Prospective Mathematics Teachers that Make a Difference. In F. M. Singer, N. F. Ellerton & J. Cai (Eds.), *Mathematical Problem Posing: From research to effective practice* (pp. 493-512). New York: Springer.

Crespo, S., & Sinclair, N. (2008). What makes a problem mathematically interesting? Inviting prospective teachers to pose better problems. *Journal of Mathematics Teacher Education,* Vol 11, 395–415.

Gonzales, N. A. (1994). Problem posing: A neglected component in mathematics courses for prospective elementary and middle school teachers. *School Science and Mathematics, Vol 94* (No 2), 78–84.

Grundmeier, T. A. (2015). Developing the Problem-Posing Abilities of Prospective Elementary and Middle School Teachers. In F. M. Singer, N. F. Ellerton & J. Cai (Eds.), *Mathematical Problem Posing: From research to effective practice* (pp. 411-432). New York: Springer.

Hošpesová A., & Tichá, M. (2015). Problem Posing in Primary School Teacher Training. In F. M. Singer, N. F. Ellerton & J. Cai (Eds.), *Mathematical Problem Posing: From research to effective practice* (pp. 433-448). New York: Springer.

Houser, R. (1998). *Counseling and Educational Research: Evaluation and Application*. USA: SAGE Publications.

Klinshtern, M., Koichu, B., & Berman, A. (2015). What Do High School Teachers Mean by Saying "I Pose My Own Problems**"?** In F. M. Singer, N. F. Ellerton & J. Cai (Eds.), *Mathematical Problem Posing: From research to effective practice* (pp. 449-468). New York: Springer.

Koichu, B., Harel, G., & Manaster, A. (2013). Ways of thinking associated with mathematics teachers' problem posing in the context of division of fractions. *Instructional Science*, Vol 41 (No 4), 681–698. Retrieved September 3, 2016, from http://link.springer.com/article/10.1007/s11251-012-9254-1#page-1

Koichu, B., & Kontorovich, I. (2013). Dissecting success stories on mathematical problem posing: A case of the Billiard Task. *Educational Studies in Mathematics*, Vol 83, 71–86.

Kontorovich, I., Koichu, B., Leikin, R., & Berman, A. (2012). An exploratory framework for handling the complexity of mathematical problem posing in small groups. *Journal of Mathematical Behavior*, Vol 31, 149-161.

Kwek, M. L. (2015). Using Problem Posing as a Formative Assessment Tool. In F. M. Singer, N. F. Ellerton & J. Cai (Eds.), *Mathematical Problem Posing: From research to effective practice* (pp. 273-292). New York: Springer.

Lavy, I., Shriki, A. (2010). Engaging in problem posing activities in a dynamic geometry setting and development of prospective teachers' mathematical knowledge. *The Journal of Mathematical Behavior*, Vol 29, 11-24.

Leung, S. S., & Silver, E. A. (1997). The role of task format, mathematics knowledge, and creative thinking on the arithmetic problem posing of prospective elementary school teachers. *Mathematics Education Research Journal*, Vol 9, 5–24.

Osana, H. P., & Pelczer, I. (2015). A Review on Problem Posing in Teacher Education. In F. M. Singer, N. F. Ellerton & J. Cai (Eds.), *Mathematical Problem Posing: From research to effective practice* (pp. 469-492). New York: Springer.

Rosli, R., Capraro, M. M., Goldsby, D., Gonzalez y Gonzalez, E., Onwuegbuzie, J., & Capraro, R. M. (2015). Middle-grade preservice teachers' and mathematical problem solving and problem posing. In F. M.

Singer, N. F. Ellerton & J. Cai (Eds.), *Mathematical Problem Posing: From research to effective practice* (pp. 333-353). New York: Springer.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics, Vol 14* (No 1), 19–28.

Silver, E. A., & Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education,* Vol 27, 521–539.

Silver, E. A, Mamona-Downs, J., Leung, S.S. & Kenney, P.A. (1996). Posing Mathematical Problems: An Exploratory Study. *Journal for Research in Mathematics Education, Vol* 27 (No 3), 293-309.

Singer, F., & Voica, C. (2013). A problem-solving conceptual framework and its implications in designing problem-posing tasks. *Educational Studies in Mathematics*, Vol 83, 9–26.

Singer, F. M., & Voica, C. (2015). Is problem posing a tool for identifying and developing mathematical creativity? In F. M. Singer, N. F. Ellerton & J. Cai (Eds.), *Mathematical Problem Posing: From research to effective practice* (pp. 141-167). New York: Springer.

Stoyanova, E. (1997). *Extending and exploring students' problem solving via problem posing: A study of years 8 and 9 students involved in mathematics challenge and enrichment stages of Euler enrichment program for young Australians*. Thesis, Edith Cowan University, Faculty of Education. For the Degree of Doctor of Philosophy in Education. Retrieved on 5 July by: http://ro.ecu.edu.au/cgi/viewcontent.cgi?article=1886&context=theses

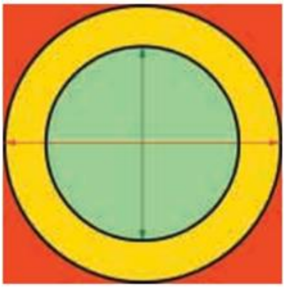
Wilson, S., & Berne, J. (1999). Teacher learning and acquisition of professional knowledge: An examination of contemporary professional development. In A. Iran-Nejad & D. Pearson, (Eds.), *Review of research in education* (pp. 173–209). Washington, DC: American Educational Research Association.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

5.1. Φύλλο εργασίας

Δραστηριότητα 1

Κατασκεύασε ένα πρόβλημα έχοντας ως δεδομένο την παρακάτω εικόνα. Το πρόβλημα που θα κατασκευάσεις πρέπει να απευθύνεται σε μαθητές ΣΤ' Δημοτικού, και θα δοθεί στους μαθητές στο τέλος της σχολικής χρονιάς.



…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

Ερώτηση 1: Τι σε ενέπνευσε για να κατασκευάσεις αυτό το πρόβλημα;

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

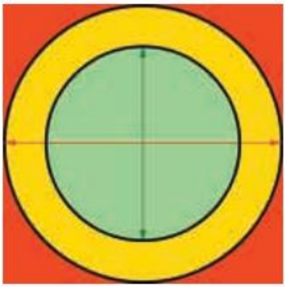
Ερώτηση 2: Γιατί επέλεξες τις συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες;

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

Δραστηριότητα 2

Επίλυσε το πρόβλημα που κατασκεύασες προηγουμένως.



………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Ερώτηση 3:

Βλέποντας τη λύση του προβλήματος είσαι ικανοποιημένος/η από το πρόβλημα που κατασκεύασες; Γιατί; (αυτο-αξιολόγηση)

………………………………………………………………………………

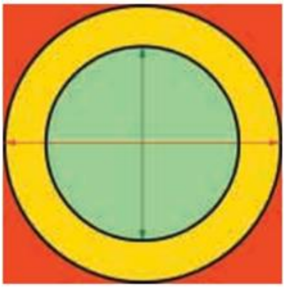
………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

<u>Δραστηριότητα 3</u>

Τώρα μετά από την αυτο-αξιολόγηση που έκανες στην προηγούμενη ερώτηση καλείσαι να τροποποιήσεις το αρχικό σου πρόβλημα.



………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

<u>Ερώτηση 4</u>: Τι άλλαξες σε σχέση με το αρχικό σου πρόβλημα; (επιγραμματικά)

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

Ερώτηση 5: Τώρα που κατασκεύασες για 2η φορά το πρόβλημα έκανες επίλυση του προβλήματος κατά την κατασκευή; Γιατί;

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

Ερώτηση 6: Πώς εργάστηκες για να κατασκευάσεις το νέο αυτό πρόβλημα; Περιέγραψε αναλυτικά τις σκέψεις σου από την αρχή της κατασκευής του νέου προβλήματος, όπως επίσης και τις διαδικασίες που ακολούθησες στη συνέχεια.

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

Ερώτηση 7: Τι σκέφτεσαι/ τι σε προβληματίζει όταν έχεις να κατασκευάσεις ένα πρόβλημα;

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

5.2. Αναλυτικοί πίνακες αποτελεσμάτων

5.2.1. Μαθηματικές έννοιες

Κατηγορίες	Φράσεις	Συχνότητα
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ		
Κύκλος/ κυκλικός δίσκος	Ακτίνα	56
	Διάμετρος	28
	Εμβαδό πράσινου	50
	Εμβαδό κίτρινου	51
	Εμβαδό ημικυκλίου	4
	Μήκος / περίμετρος κύκλου	9
	Εκτίμηση εμβαδού κύκλου	2
	Ομόκεντροι κύκλοι	2
	Συμμετρία κύκλου	1
	Αναλογία κύκλων	1
Τετράγωνο	Πλευρά τετραγώνου	3
	Περίμετρο τετραγώνου	1
	Εμβαδό τετραγώνου	23
Ορθογώνιο	Εμβαδό ορθογωνίου παραλ.	1
Τρίγωνο	Εμβαδό τριγώνου	2
Άλλα σχήματα/ Επιφάνειες	Εμβαδό κυκλικού δακτυλίου	13
	Εμβαδό πορτοκαλί	5
	Εμβαδό σχήματος που καθόρισαν οι ίδιοι	2
Κύβος	Κύβος	1
	Έδρες κύβου	1
	Διαφορά με έδρες ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου	1
Άλλα Γεωμετρία	Σύγκριση εμβαδών	9
	Ορισμός ευθύγραμμου τμήματος από τον λύτη	1
	Απόσταση δύο σημείων	6
ΑΛΓΕΒΡΑ		
Άλγεβρα	Πράξεις με κλάσματα	1
	Σύγκριση κλασμάτων	3
	Εξισώσεις	1
	Απλή μέθοδος των τριών	2
	Κόστος για να στρωθεί με κάποιο υλικό η επιφάνεια	1

5.2.2. Λάθη και παραλείψεις

Κατηγορίες	Φράσεις	Συχνότητα
Λάθος κατανόηση μαθηματικών εννοιών	π=3,14 μήκος κύκλου	1
	π=3,14 περίμετρος κύκλου	3
	π=ακτίνα	2
	Μήκος κύκλου = π × ρ	1
	Χωρίζει το σχήμα σε 4 ορθ. Τρίγωνα για να βρει εμβαδό	1
	Διάμετρος – ακτίνα	1
	Διάμεσος αντί για διάμετρος	4
	Διάμετρος α × α	1
	Κύκλος χορευτών και ζητάει εμβαδό κύκλου	1
Λάθος μονάδες Μέτρησης	Διάμετρος= ... τ.εκ.	1
	Ε=… εκ. ή μ.	12
	Ε=…. Χλμ.	1
	Ε χωρίς μονάδες μέτρησης	7
	Δεν έβαλε καθόλου μονάδες μέτρησης	14
Κακή διατύπωση	Στη παρέμβαση που έγινε στο σχήμα	2
	Στα ζητούμενα – ερωτήσεις	7
Προβλήματα στα Δεδομένα	Όχι σαφήνεια στα δεδομένα	4
	Ελλιπή δεδομένα	1
	Εικόνα δεν συμβαδίζει με δεδομένα	10
	Δεδομένα χωρίς νόημα	5
Λάθος επίλυση	Λάθη σε αριθμητικές πράξεις	4
	Λάθος αντικατάσταση αριθμών	5
	Χρήση μόνο τύπου	3
	Λάθος τύπος	2
	Λάθος τρόπος επίλυσης	9
ΦΕ ΧΩΡΙΣ ΛΑΘΗ	ΦΕ ΧΩΡΙΣ ΛΑΘΗ	18

5.2.3. Στρατηγικές βελτίωσης αρχικών προβλημάτων

Κατηγορίες	**Φράσεις**	**Συχνότητα**
2ο PP		27
Προσθήκη Ερωτήσεων	Πιο δύσκολη ερώτηση	7
	Πιο εύκολη	6
	Για βηματική επίλυση	3
Αλλαγή σε αριθμούς	Πιο δύσκολους	2
	Αριθμοί που ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα	3
	Προσθήκη αριθμών	2
Αλλαγή στα Δεδομένα	Προσθήκη στο σχήμα	1
	Αλλαγή τρόπου που δίνονται	1
	Αλλαγή σειρά ερωτήσεων	1
Ένταξη σε Ρεαλιστικό Πλαίσιο	Κυκλικό πάρκο	1
	Γήπεδο μπέιζμπολ	1
	Κάτοψη κτηρίου	1
Καλύτερη Διατύπωση	Διευκρινιστική	4
	Καθοδήγησης	5
	Διόρθωση μη κατανοητών σημείων	1
	Αλλαγή σε χειρότερη διατύπωση	2

5.2.4. Παράγοντες που επηρεάζουν την κατασκευή προβλημάτων

Κατηγορίες	Φράσεις	Συχνότητα
Μαθητές & Πιθανοί λύτες	Ενδιαφέρον για τα παιδιά	10
	Γνωστικό επίπεδο μαθητών	39
	Ηλικία μαθητών	38
	Σαφές & κατανοητό για τα παιδιά	37
	Επίπεδο τάξης που έχω	19
	Αδύναμοι μαθητές	15
	Δυνατοί μαθητές	14
	Καθοδήγηση του λύτη	1
	Κριτική σκέψη των μαθητών	5
	Επανάληψη παλαιότερων εννοιών	10
	Αξιολόγηση μαθητών	5
Περιεχόμενο Προβλήματος	Σαφή και κατανοητή διατύπωση	15
	Χρήση όλων των δεδομένων	3
	Μαθ. Έννοιες που έχουν διδαχθεί	7
	Ρεαλιστικό πλαίσιο	13
	Επίπεδο δυσκολίας	12
	Να έχει λύση/ μπορώ να το λύσω	11
Επίλυση	Επίλυση μετά τη 2η PP	21
Άλλα	Επίτευξη διδακτικών στόχων	6
	Κατάκτηση μαθησιακού στόχου	5
	Δυσκολία στο PP	3